

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA**

**JOSÉ DE FRANÇA BUENO**

Bacharel em Matemática Aplicada, IME-USP, 1991  
Mestre em Matemática Aplicada, IME-USP, 1996

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA DE  
SISTEMAS FLUTUANTES DE PRODUÇÃO DE  
PETRÓLEO DO TIPO FPSO SUJEITOS À CORRENTEZA**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia

**SÃO PAULO  
2003**

**PARA CÓPIAS, CONSULTAR A EDIÇÃO REVISADA :**

FT-1801

Ed. rev.

## **Agradecimentos**

Estes agradecimentos não são uma mera formalidade.

Ao Prof. Celso Pesce pela paciência, compreensão e motivação nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. José Augusto Penteado Aranha, motivo de muita admiração.

Ao Prof. Clodoaldo Grotta Ragazzo, pelo apoio e paciência.

A minha esposa Ana pela compreensão das ausências.

Dedico este trabalho a minha mãe, Elcana.

Agradeço ao CNPq pelo financiamento concedido a este trabalho.

## Resumo

Neste trabalho utilizamo-nos de teoremas e resultados da área de Sistemas Dinâmicos para estabelecermos de forma matematicamente rigorosa, resultados relativos à Dinâmica não-linear de sistemas FPSO (*Floating Production Storage and Offloading Systems*). Tais sistemas são constituídos por petroleiros convertidos para sistemas de produção de petróleo.

A aplicação de tal abordagem matemática permite a explicitação de relações entre determinados parâmetros e seu efeito sobre a dinâmica do sistema que, quando estudados sob outras abordagens, não seriam identificáveis tão prontamente.

Neste trabalho apresentamos o estudo para bifurcações estáticas para sistemas FPSO com sistemas de amarração SPM-turret, SPM-hawser sob modelos hidrodinâmicos de Derivadas Hidrodinâmicas e modelo Asa Curta Heurístico e o estudo para Bifurcações Dinâmicas para FPSO-SPM-Hawser rígido sob modelo Asa Curta Heurístico. Neste último caso apresentamos uma justificativa matemática baseada na Teoria de Sistemas Dinâmicos para refinar o conhecimento próximo à curva de Bifurcação de Hopf.

## ABSTRACT

In this work we use theorems and results from the subject of Dynamical Systems, in a mathematical rigorous way, to study the non-linear dynamics of FPSO systems (*Floating Production Storage and Offloading Systems*). Such systems are tankers converted into petroleum production floating systems. A rigorous treatment may allow to turn explicit the relation between control parameters and their effect on the system dynamics, which, when studied through other approaches, may not be identified so promptly.

Firstly we focus on the static bifurcation for FPSO systems, moored in two different configurations: SPM-turret and SPM-hawser. Use is made of two distinct hydrodynamic models: of Hydrodynamic Derivatives type and of Heuristic Model (Short Wing) one. For the dynamic bifurcation analysis we took an FPSO-SPM with a rigid hawser, under the extended Heuristic Model. In the latter case a mathematical justification based on the Dynamical Systems Theory is presented to improve the analysis in the vicinity of the Hopf Bifurcation curve.

# SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Lista de Abreviaturas

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	CONTEXTUALIZAÇÃO, IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA E ABORDAGENS UTILIZADAS	3
2.1	Introdução	3
2.2	Genealogia de um conceito	3
2.3	Aspectos sócio-econômicos-ambientais e P&D	9
2.4	Identificação do Problema	15
2.5	Abordagens de estudo da dinâmica de FPSO	19
2.6	Uma situação prática como elemento motivador	22
3.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
3.1	INTRODUÇÃO	24
3.2	MODELOS MATEMÁTICOS DA DINÂMICA DE SISTEMA FPSO	24
3.3	ESTUDOS DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA SISTEMAS FPSO	28
3.3.1	ABORDAGEM EXPERIMENTAL	28
3.3.2	ABORDAGEM NUMÉRICA	31
3.3.3	ABORDAGEM ANALÍTICA	33
3.4	TÉCNICAS RECENTES EM SISTEMAS DINÂMICOS	40
4.	MODELAGEM MATEMÁTICA	42
4.1	INTRODUÇÃO	42
4.2	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO – CASO SPM	42
4.3	SISTEMAS DE AMARRAÇÃO	45
4.3.1	CASO FPSO-SPM-HAWSER	45
4.3.2	CASO FPSO-SPM TURRET	46
4.3.3	CASO FPSO SMS	47
4.3.4	CASO FPSO-DICAS.	48
4.4	MODELOS D E FORÇAS HIDRO DINÂMICAS.	49
4.4.1	MODELO DE DERIVADAS HIDRODINÂMICAS.	49
4.4.2	MODELO OBOKATA	52
4.4.3	MODELO TAKASHINA.	53
4.4.4	MODELO DE ASA CURTA HEURÍSTICO	54

5	INTERLÚDIO MATEMÁTICO	59
	5.1 INTRODUÇÃO	59
	5.2 TRÊS EXEMPLOS	59
	5.3 ANÁLISE LINEAR E ESPAÇOS ESTÁVEL, INSTÁVEL E CENTRAL	63
	5.4 A TÉCNICA DE REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL	72
6	A BIFURCAÇÃO ESTÁTICA PARA SISTEMAS FPSO-SPM	78
	6.1 INTRODUÇÃO	78
	6.2 O CASO FPSO-SPM-TURRET SOB MODELO DERIVADAS HIDRODINÂMICAS	78
	6.3 O CASO FPSO-SPM-TURRET SOB ASA CURTA HEURÍSTICO	89
7	A BIFURCAÇÃO DINÂMICA NO CASO HAWSER RÍGIDO	94
	7.1 INTRODUÇÃO	94
	7.2 ANÁLISE LINEAR	96
	7.3 REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL NO CASO FPSO-SPM-HAWESER RÍGIDO	100
	7.4 ESTUDO DA BIFURCAÇÃO DINÂMICA: O CASO DO CALADO A 100%	103
	7.5 ESTUDO DA BIFURCAÇÃO DINÂMICA: O CASO DO CALADO A 40%	110
8	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	115
	APÊNDICE 1. DA NECESSIDADE DE TÉCNICAS MAIS REFINADAS PARA ESTUDAR A DINÂMICA DE SISTEMAS FPSO	120
	APÊNDICE 2. O TEOREMA DE ANDRONOV-POINCARÉ-HOPF	123
	A2.1 INTRODUÇÃO	123
	A2.2 O TEOREMA DE ANDRONOV-POINCARÉ-HOPF	123
	APÊNDICE 3. A TÉCNICA DE REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL: MOTIVAÇÃO, TEOREMAS, ALGORITMO E EXEMPLO	132
	A3.1 INTRODUÇÃO	132
	A3.2 UM EXEMPLO, A NOÇÃO DE VARIEDADE INVARIANTE E A REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	132
	A3.3 A VARIEDADE CENTRAL	135
	A3.4 O ALGORITMO PARA OBTER A VARIEDADE CENTRAL	137
	A3.5 ESTUDO DE BIFURCAÇÕES E A TÉCNICA DE REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL	138
	A3.6 UM EXEMPLO DE REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL	138
	APÊNDICE 4. EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	143
	A4.1 INTRODUÇÃO	143
	A4.2 O CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	143
	A4.3 AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	145
	A4.4 VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS	146
	A4.5 EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR	147

APÊNDICE 5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	184
A5.1 INTRODUÇÃO	184
A5.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE LINEAR NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	184
APÊNDICE 6. REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO (BIFURCAÇÃO DINÂMICA)	189
A6.1 INTRODUÇÃO	189
A6.2 A REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	189
A6.3 O <i>INTEGRAL AVERAGING</i> NO CASO FPSO-SPM-HAWSER RÍGIDO	194
APÊNDICE 7. O COEFICIENTE DAS EQUAÇÕES REDUZIDAS À VARIEDADE CENTRAL	197
A7.1 INTRODUÇÃO	197
A7.2 O CASO FPSO-SPM-TURRET SOB MODELO DERIVADAS HIDRODINÂMICAS	197
A7.3 O CASO FPSO-SPM-TURRET SOB MODELO ASA CURTA HEURÍSTICO	200
APÊNDICE 8. REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM TERMOS DA FORMA $X X $	203
A8.1 INTRODUÇÃO	203
A8.2 UM EXEMPLO ILUSTRATIVO	203
APÊNDICE 9. DIMENSÕES PRINCIPAIS DOS NAVIOS ANALISADOS E DADOS CORRELATOS	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	207

## LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1: Os campos de Marlim, Marlim Sul e Voador (Fonte: Website Petrobrás)</i>	6
<i>Figura 2: Crescimento da Frota FPSO Mundial (Fonte: Website Bluewater, 24/03/2000)</i>	7
<i>Figura 3: Plano de Desenvolvimento de Marlim Sul (Conceitual)</i>	7
<i>Figura 4: Distribuição da Frota FPSO no Mundo (Fonte: Website Bluewater, 24/03/2000)8</i>	8
<i>Figura 5: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: an Analysis of Policy Options – Relatório API/março 1998)</i>	13
<i>Figura 6: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: an Analysis of Policy Options – Relatório API/março 1998)</i>	13
<i>Figura 7: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: an Analysis of Policy Options – Relatório API/março 1998)</i>	14
<i>Figura 8a,b,c: Configurações esquemáticas de SPM (single-point-mooring)</i>	17
<i>Figura 9: Configurações esquemáticas de SMS (spread-mooring-system)</i>	18
<i>Figura 10: Sistemas de Coordenadas e definições gerais no caso FPSO-SPM</i>	43
<i>Figura 11: Esquema para representar os vórtices induzidos próximo à proa e popa pelo movimento de rotação do navio</i>	58
<i>Figura 12: Flambagem de haste sob carga P</i>	60
<i>Figura 13: Cenários pós-críticos para as hastes da figura 12</i>	61
<i>Figura 14: Interação aero-elástica para uma viga</i>	61
<i>Figura 15: Bifurcação de Hopf Supercrítica</i>	62
<i>Figura 16: Vagão ferroviário</i>	62
<i>Figura 17: Bifurcação de Hopf Subcrítica</i>	63
<i>Figura 18: Espaços estável e central para (5.5)</i>	66
<i>Figura 19: Espaços estável e central para (5.6)</i>	67
<i>Figura 20: Variedades Estável e Instável</i>	68
<i>Figura 21: Variedades Estável e Instável para (5.10). Linearização para (5.10) próxima da origem</i>	70
<i>Figura 22: Variedades Estável, Instável e Central</i>	71
<i>Figura 23: Diagrama de Bifurcação Estática para FPSO-SPM-turret sob modelo Derivadas Hidrodinâmicas</i>	88
<i>Figura 24: Confrontação entre diagramas de Bifurcação Estática (Variedade Central/[Leite])</i>	92
<i>Figura 25: Ilustração esquemática dos ensaios realizados no IPT por [Simos2001]</i>	95
<i>Figura 26: Confronto entre [Simos2001]/Método polinômio característico. Curva definidora de regiões de Estabilidade/Instabilidade Dinâmica</i>	99
<i>Figura 27: Gráfico de <math>f(t) = t t </math> e a aproximação utilizada</i>	103
<i>Figura 28: Ilustração das Bifurcações Dinâmicas ao longo da curva de Instabilidade Dinâmica</i>	104
<i>Figura 29: Função <math>K_{\gamma}</math> em função de <math>Lh/L</math> para o casco Vidal de Negreiros a 100%</i>	106
<i>Figura 30: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 100%, <math>U = 0,4</math> m/s</i>	108
<i>Figura 31: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 100%, <math>U = 0,5</math> m/s</i>	109
<i>Figura 32: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 100%, <math>U = 0,6</math> m/s</i>	110
<i>Figura 33: Confronto entre [Simos2001]/Método polinômio característico. Curva definidora de regiões de Estabilidade/Instabilidade Dinâmica caso 40%</i>	111
<i>Figura 33: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 40%, <math>U = 0,4</math> m/s</i>	112
<i>Figura 34: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 40%, <math>U = 0,5</math> m/s</i>	113
<i>Figura 35: Gráfico de Amplitude de oscilação (ângulos <math>\gamma</math> e <math>\psi</math>) no cenário pós-crítico para o Casco Vidal de Negreiros a 40%, <math>U = 0,6</math> m/s</i>	114
<i>Figura A1.1: Ilustração de um centro</i>	122
<i>Figura A1.2: Nó atrator</i>	122
<i>Figura A1.3: Nó repulsor</i>	122
<i>Figura A2.1: Ilustração para Bifurcação de Hopf, caso 1</i>	129
<i>Figura A2.2: Ilustração para Bifurcação de Hopf, caso 2</i>	130
<i>Figura A2.3: Ilustração para Bifurcação de Hopf, caso 3</i>	130
<i>Figura A2.4: Ilustração para Bifurcação de Hopf, caso 4</i>	131
<i>Figura A3.1: Diagrama de Bifurcação para (III.22)</i>	141
<i>Figura A3.2: Comparação entre a convergência no domínio do tempo</i>	142
<i>Figura A3.3: Gráfico no Domínio do tempo para as expressões (III.15)/completa e (III.22)/reduzida</i>	142
<i>Figura A4.1: Comparação entre os gráficos das funções <math>\text{sigmoid}(t)</math> e <math>t^3/\gamma</math></i>	152
<i>Figura A5.1: Gráfico 3-D de Bifurcação Dinâmica, Casco Vidal de Negreiros</i>	186
<i>Figura A5.2: Curva de Criticalidade para Bifurcação Dinâmica</i>	187
<i>Figura A6.1: Gráfico da função <math>K_{\gamma}</math></i>	196

## LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1: Sinais definidores de Bifurcação de Hopf Subcrítica/Supercrítica	104
Tabela 7.2: Sinais de $\alpha'$ em função de $Lh/L$	105

## LISTA DE SÍMBOLOS

<p>a</p> <p><math>a_{ij}</math></p> <p><math>a_{cr}</math></p> <p>B</p> <p><math>C_B</math></p> <p><math>C_D(\xi)</math></p> <p><math>C_f</math></p> <p>CG</p> <p><math>C_{1c}, C_{2c}, C_{6c}</math></p> <p><math>C_Y</math></p> <p><math>E^s, E^u, E^c</math></p> <p><math>I_z</math></p> <p><math>I_0, I_1, I_2, I_3</math></p> <p>J</p> <p>L</p> <p><math>l_w</math></p> <p>l</p> <p>M</p> <p><math>M_y</math></p> <p>N</p> <p>p_real, p_imag</p> <p>p, q hawser;</p> <p><math>\dot{r} = \dot{\psi}</math></p> <p>Re</p> <p>s, c, u</p> <p>S</p> <p><math>S_b</math></p> <p>T</p> <p><math>T_s</math></p> <p>U</p> <p>u</p> <p><math>\vec{U}</math></p> <p>v</p> <p>(x, y)</p> <p><math>\dot{(x, y)}</math></p> <p><math>x_p</math></p>	<p>Distância do centro do turrel à meia-nau, em %L;</p> <p>Posições na linha i, coluna j da matriz Jacobiana J;</p> <p>Valor crítico de a para ocorrência da bifurcação estática;</p> <p>Boca;</p> <p>Coefficiente de Bloco;</p> <p>Coefficiente de arrasto transversal para cada seção;</p> <p>Coefficiente de arrasto friccional;</p> <p>Centro de gravidade;</p> <p>Coefficientes de força nas direções x e y e de momento em torno de z, respectivamente;</p> <p>Coefficiente de arrasto bidimensional;</p> <p>Subespaços lineares invariantes gerados pelos autovetores da matriz jacobiana J. Respectivamente: subespaço estável (associado aos autovalores com parte real negativa), subespaço instável (associado aos autovalores com parte real positiva) e subespaço central (associado aos autovalores com parte real nula);</p> <p>Momento de inércia em relação a z;</p> <p>Notação associada às Integrais devidas ao fenômeno de Cross-Flow;</p> <p>Matriz jacobiana;</p> <p>Comprimento do navio;</p> <p>Indica o comprimento original do cabo (sem carga) no sistema SPM-hawser;</p> <p>Indica o comprimento do cabo no sistema SPM-hawser;</p> <p>Massa total do corpo;</p> <p>Massa adicional na direção j devido ao movimento do navio na direção i;</p> <p>Momento em torno de z;</p> <p>Partes real e imaginária do polinômio característico da matriz Jacobiana. Utilizadas na determinação dos valores críticos para Bifurcação de Hopf;</p> <p>Constantes empíricas utilizadas na modelagem da Tensão T no cabo no sistema SPM-</p> <p>Velocidade angular do navio;</p> <p>Número de Reynolds;</p> <p>Dimensões, respectivamente, dos subespaços estável, instável e central;</p> <p>Superfície do casco;</p> <p>Limite de esforço para o cabo no sistema SPM-hawser;</p> <p>Tensão no cabo no sistema SPM-hawser;</p> <p>Calado;</p> <p>Módulo da velocidade da corrente;</p> <p>Velocidade relativa do navio em relação ao meio fluido, na direção longitudinal;</p> <p>Velocidade da corrente;</p> <p>Velocidade relativa do navio em relação ao meio fluido, na direção transversal; coordenadas do centro de gravidade do navio (referencial fixo);</p> <p>velocidade absoluta do centro de gravidade;</p> <p>Distância do centro do turrel à meia-nau, em %L;</p>
---	---

$x_{p_{critico}}$	Valor crítico de $x_p$ para ocorrência de bifurcação estática;
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$	Coordenadas generalizadas para as equações de estado do Sistema Dinâmico. Indicam $(u, v, r, x, y, \psi)$ no caso SPM-turret e $(u, v, r, l, \gamma, \omega)$ no caso SPM-hawser;
$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6)$	Derivadas com respeito ao tempo das coordenadas generalizadas para as equações de estado do Sistema Dinâmico tanto para o caso SPM-turret quanto para SPM-hawser;
$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$	Coordenadas generalizadas para as equações de estado do Sistema Dinâmico transladadas para a origem;
$(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4, \dot{y}_5, \dot{y}_6)$	Derivadas com respeito ao tempo das coordenadas generalizadas para as equações de estado do Sistema Dinâmico transladadas para a origem;
$Y_{CF}, N_{CF}$	Integrais devidas ao efeito de Cross-Flow, respectivamente força na direção transversal e momento de yaw.
$Y_\psi, N_\psi$	Derivadas hidrodinâmicas lineares em relação ao ângulo de ataque, $\psi$ ;
$Y_{\psi\psi\psi}, N_{\psi\psi\psi}$	Derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem;
$W_{loc}^s(\bar{x}), W_{loc}^u(\bar{x}),$ $W_{loc}^c(\bar{x})$	Respectivamente: as variedades estável local em $\bar{x}$ , variedade instável local em $\bar{x}$ e a variedade central local em $\bar{x}$ ;
$\alpha$	Ângulo de incidência da corrente em relação ao navio ( $>0$ anti-horário);
$\alpha'$	Parte real do par de autovalores complexos conjugados associados à Bifurcação de Hopf de ordem um em $\mathcal{E}$ = parâmetro - parâmetro crítico;
$\beta$	Ângulo de incidência aparente;
$\beta'$	Parte imaginária do par de autovalores complexos conjugados associados à Bifurcação de Hopf de ordem um em $\mathcal{E}$ = parâmetro - parâmetro crítico;
$\xi$	Coordenada longitudinal de cada seção considerada para cálculo das Integrais de Cross-Flow $Y_{CF}, N_{CF}$ , com respeito ao centro de massa do casco.
$\omega$	Ângulo definido por $\omega = \gamma + \psi$ , também utilizada para frequência (parte imaginária dos autovalores Hopf-bifurcantes);
$\omega_{critico}$	Frequência crítica associada à Bifurcação de Hopf. Corresponde à parte imaginária do par de autovalores Hopf-bifurcantes;

## LISTA DE ABREVIATURAS

ANP	Agência Nacional do Petróleo;
API	<i>American Petroleum Institute;</i>
DICAS	<i>Differential Compliance Anchoring System;</i>
FPSO	<i>Floating Production Storage and Offloading System;</i>
IMO	<i>International Maritime Organization;</i>
IPT	Instituto de Pesquisas Tecnológicas;
MARIN	<i>Maritime Research Institute Netherlands;</i>
MMS	<i>Minerals Management Service;</i>
MODU	<i>Mobile Offshore Drilling Unit;</i>
SPA	Sistemas de Produção Antecipada;
SPM	<i>Single Point Mooring;</i>
SMS	<i>Spread Mooring System;</i>
TLP	<i>Tension Leg Platform;</i>
TPM	<i>Two Point Mooring System;</i>
VLCC	<i>Very Large Crude Carrier</i>

## 1. Introdução

No início da década de 1970, com a crise do petróleo, as companhias petrolíferas foram pressionadas no sentido da redução dos custos de produção. A utilização de petroleiros convertidos para produção de petróleo em alto-mar foi uma resposta nesta direção. No entanto, em função da diversidade e complexidade de problemas envolvidos no uso destes petroleiros, grupos de pesquisas em Universidades e Centros de Pesquisa em diversos países foram chamados para estudá-los. Um destes problemas consiste em desenvolver técnicas para estudar a dinâmica não-linear aplicadas às diversas configurações de amarração destes navios. Ao longo dos últimos vinte anos podemos dividir em três principais as abordagens para este problema, as quais podem ser encontradas na literatura especializada: uma abordagem baseada em simulações numéricas, uma abordagem baseada em ensaios experimentais e uma abordagem analítica. Tais abordagens não se excluem. Ao contrário, são complementares.

Este trabalho se insere na abordagem analítica. Nele buscamos obter resultados de forma matematicamente rigorosa para a dinâmica dos petroleiros convertidos para sistemas de produção de petróleo. Para tal utilizamo-nos de teoremas e resultados da Teoria de Sistemas Dinâmicos, tais como o Teorema de Hartman-Grobman e o Teorema da Variedade Central. Veremos que tal abordagem permite obter, de forma rigorosa, mesmo quando nos restringimos aos termos lineares da expansão em Série de Taylor do sistema de equações diferenciais que modela a dinâmica do navio no plano horizontal, o desacoplamento entre a dinâmica em *surge* e a dinâmica em *sway* e *yaw*. Conhecimento inferido por argumentações baseadas na Física do sistema mas até então não exposto de forma rigorosa. Posteriormente serão apresentados os resultados relativos à Bifurcação Dinâmica de tais sistemas, resultados estes que não podem ser

obtidos se nos restringirmos apenas aos termos lineares da expansão em Série de Taylor do sistema de equações diferenciais que modela a dinâmica do navio.

O trabalho está assim dividido: no capítulo 2 são expostos um histórico e contextualização do problema com alguns dos aspectos sócio-ambientais envolvidos; no capítulo 3 é feita a Revisão Bibliográfica; no capítulo 4 apresentamos as equações do movimento do navio no plano horizontal, os sistemas de amarração (turret, hawser, DICAS, SMS) e modelos das forças hidrodinâmicas; no capítulo 5 apresentamos um resumo dos principais resultados da área de Sistemas Dinâmicos utilizados no presente trabalho; no capítulo 6 encontramos os resultados principais para o caso da Bifurcação Estática na situação FPSO-SPM, com a confrontação entre os resultados obtidos utilizando-se dos modelos matemáticos conhecidos na literatura (Derivadas Hidrodinâmicas e Asa Curta Heurístico); no capítulo 7 aplicamos a Técnica de Redução à Variedade Central e a Técnica de “Integral Averaging” no estudo de Bifurcação de Hopf para sistemas FPSO-SPM, na situação de Hawser rígido, confrontando os resultados com ensaios de escala reduzida realizados no IPT. Finalmente, no capítulo 8, apresentamos as Conclusões e Recomendações para trabalhos futuros.

## **2. Contextualização, Identificação do Problema e Abordagens utilizadas.**

### **2.1 Introdução**

Neste capítulo fazemos um histórico sucinto da evolução da tecnologia de exploração offshore do petróleo, justificando o interesse crescente desta indústria na tecnologia FPSO. Prosseguimos, apresentando dificuldades inerentes a esta tecnologia, no que tange ao estudo da dinâmica destes sistemas de amarração, ao mesmo tempo que observamos que esta mesma dificuldade de previsão do comportamento dinâmico de tais sistemas apresenta impactos sócio-ambientais de monta. *En passant* comentamos a intersecção do segmento industrial com iniciativas governamentais brasileiras de investimento em Pesquisa&Desenvolvimento e com a formação de recursos humanos voltados ao setor Petróleo. Relatamos ainda um fato real ocorrido numa operação de descarregamento de um navio-tanque da Petrobrás. Em seguida apresentamos as diversas abordagens de estudo do problema, seguida de uma revisão bibliográfica e dos objetivos do nosso trabalho.

### **2.2 Genealogia de Um Conceito**

Aproximadamente cinquenta anos atrás, em novembro de 1947, na região do Golfo do México, Brown & Root auxiliaram Kerr-McGee a construir a primeira plataforma petrolífera no mar ou “*offshore*” como é usualmente denominada. Aquela era uma plataforma de madeira, em lâmina d’água de cerca de 5 metros. Com o passar dos anos e o aumento na procura de petróleo, a exploração realizou-se cada vez a lâminas d’água

maiores, desenvolvendo-se as primeiras plataformas metálicas (fixas e auto-elevatórias).

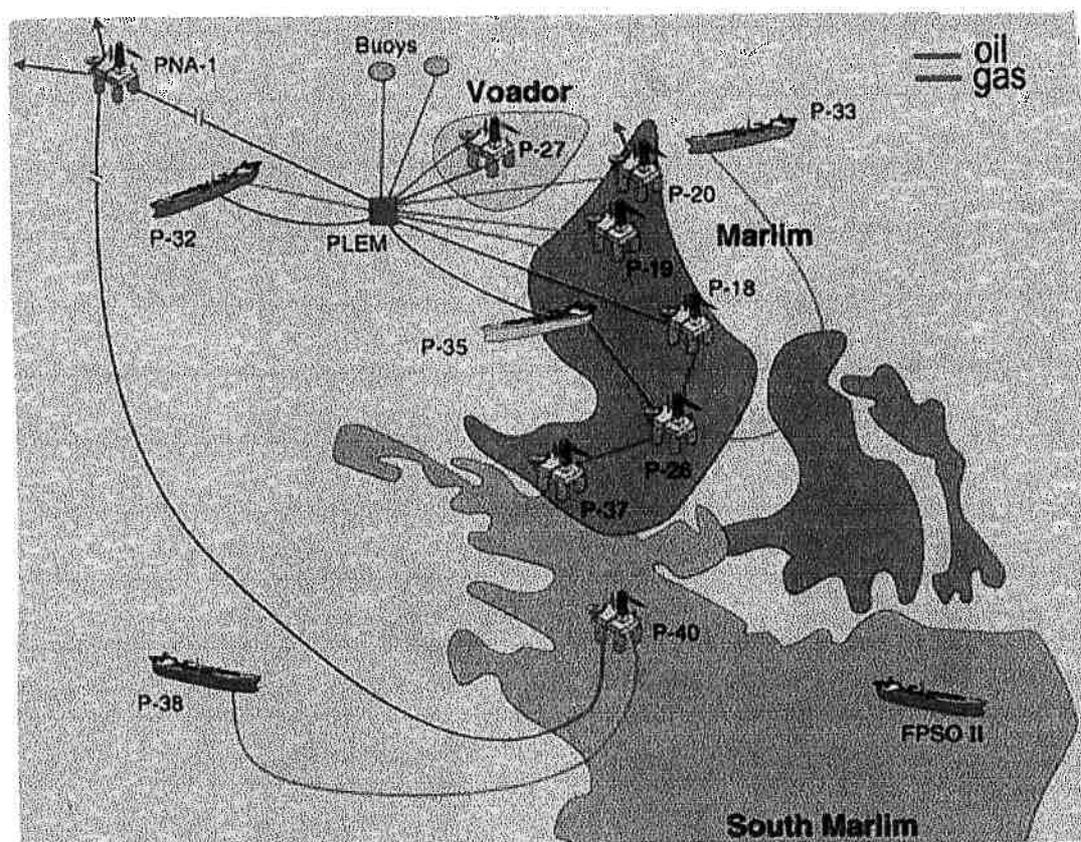
A partir dos anos 60, com o advento dos MODU's (*Mobile Offshore Drilling Unit*), que consistiam em plataformas móveis de perfuração, um novo conceito entrava em cena. Embora a perfuração ocorresse via plataformas móveis, a produção do petróleo no oceano era feita sobre jaquetas fixas e auto-elevatórias.

Com o impacto provocado pelo primeiro choque do petróleo (1973) e o fato destas plataformas fixas, até então utilizadas, representarem custos que cresciam em progressão geométrica com a profundidade, começaram a surgir as primeiras plataformas semi-submersíveis. A partir deste cenário aparecem em profusão os SPA (Sistemas de Produção Antecipada), constituídos de plataformas semi-submersíveis de perfuração associadas a pequenas plantas de produção. Tais SPA já prenunciavam os atuais SFP (Sistemas Flutuantes de Produção ou FPS - *Floating Production Systems*).

Dada a necessidade da presença de um navio-tanque aliviador próximo às plataformas semi-submersíveis (já que estas possuem baixa capacidade de armazenamento) as companhias de petróleo foram se convencendo da possibilidade de se usar os navios como Sistemas Flutuantes de Produção e Armazenagem (FPSO - *Floating Production Storage and Offloading System*). Esta grande capacidade de armazenagem dos navios tanques mostra-se bastante útil em campos de exploração com pouca infra-estrutura de escoamento do óleo para o continente. Diversas são as razões que levam a Petrobrás, e muitas outras companhias petrolíferas, a adotar a tecnologia FPSO, dentre elas:

- as últimas descobertas de campos de produção de petróleo possuem reservas muito maiores que as do início da exploração na Bacia de Campos (ver Tabela I, Reservas Brasileiras, ANP);
- estas descobertas estão situadas a grandes profundidades, demandando sistemas mais complexos, em números de poços, capacidade de processamento, equipamentos e facilidades de produção (ver Figura 1);
- a escassez de plataformas semi-submersíveis no mercado internacional para conversão em plataformas de produção (ver Figuras 2 e 4);
- a nova legislação que, atendendo à exigência da IMO (*International Maritime Organization*), prevê a conversão da frota mundial de petroleiros para o tipo casco duplo (*double hull*) a partir de 2000, concomitantemente à proibição da utilização de super-petroleiros de casco simples. Este fato tornou esta opção economicamente atraente, em função da nova regulamentação internacional. Além de ser correta do ponto de vista sócio-ambiental, esta legislação tem como uma de suas consequências um movimento de renovação da frota (ver Figuras 2 e 4);
- é característica do sistema FPSO uma maior mobilidade para distribuição do óleo para várias refinarias concomitantemente à eliminação da necessidade, ou, no mínimo, do adiamento, da instalação da malha de exportação do óleo via oleodutos para terminais no continente, com grande redução dos investimentos necessários;
- aumento na confiabilidade de mancais e rolamentos para turrete;
- cerca de 41% da atual produção brasileira de petróleo vem de poços com lâmina d'água acima de 400 metros. Segundo estimativas da Petrobrás, tais números devem alcançar a marca de 85% em 2005

Podemos também observar o crescimento do uso de FPSO's no âmbito internacional. Para tanto, basta observarmos o crescimento da frota internacional de FPSO's nos últimos anos (figura 2). Na tabela 1 são apresentados dados detalhados dos operadores, proprietários, campos de operação, profundidade, etc., destes 72 sistemas FPSO's ao redor do mundo. Pode-se observar que, no período dos últimos 5 anos (1995-2000), a quantidade de sistemas FPSO em operação no mundo triplicou.



**Figura 1: Os campos de Marlim, Marlim Sul e Voador (Fonte: Website Petrobras).**

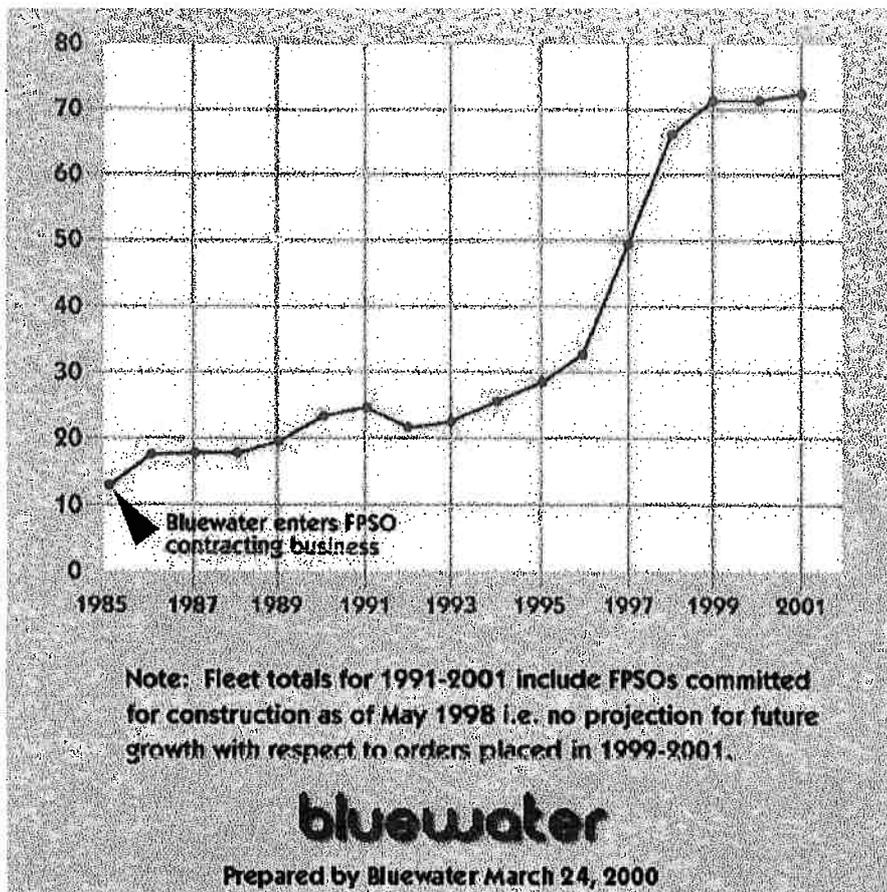


Figura 2: Crescimento da Frota FPSO Mundial (Fonte: Website BlueWater,24/03/2000)



Figura 3: Plano de Desenvolvimento de Marlim Sul (Conceitual)

(Fonte: Website Petrobrás)

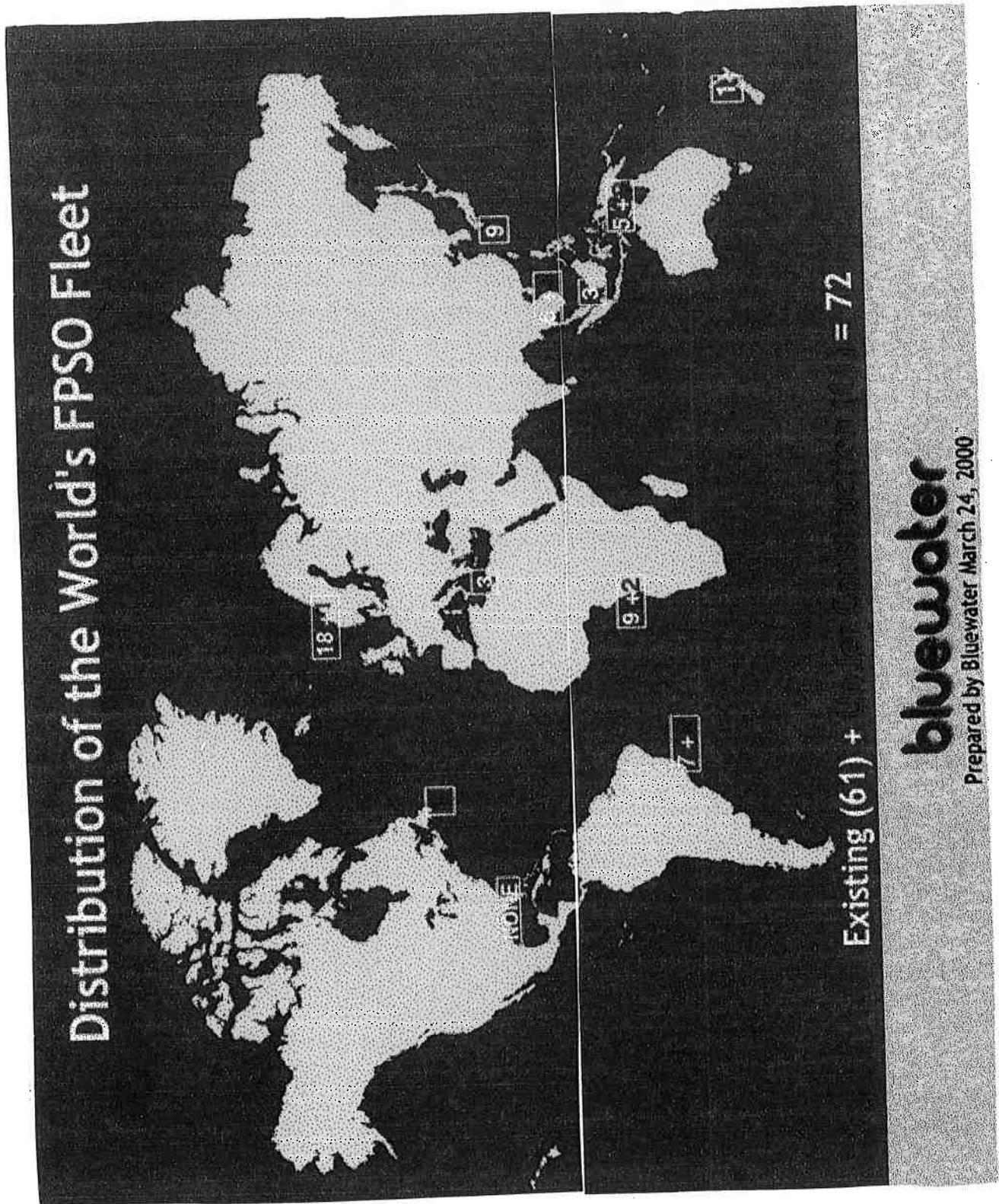


Figura 4: Distribuição da Frota FPSO no Mundo (Fonte: Website BlueWater, 24/03/2000)

### 2.3 Aspectos Sócio-econômico-ambientais e P&D

Observe-se a partir da Figura 4, a inexistência de sistemas FPSO no Golfo do México. Ao mesmo tempo a MMS (Minerals Management Service) que é uma Agência Federal do governo norte-americano que regula e administra os recursos minerais, óleo e gás na plataforma continental dos EUA vem apresentando sucessivos relatórios para melhor entender o risco (principalmente sócio-ambiental) associado a empreendimentos FPSO no Golfo do México. (ver por exemplo: OTC 10701, OTC 10705, OTC 8768 e especialmente o OCS Report MMS 2000-022 Deepwater Gulf of Mexico: America's Emerging Frontier). Vemos, então, reforçada a necessidade da compreensão, sob variados aspectos e abordagens, da dinâmica de sistemas FPSO. No entanto ressaltamos o fato de o Golfo do México apresentar furacões. O que torna a questão sócio-ambiental nesta região sobremaneira delicada.

Ainda, no que concerne a questões de natureza sócio-ambiental, mencionamos dois relatórios da API (*American Petroleum Institute*): *Achieving the Kyoto Protocol: an Analysis of Policy Options* (relatório de março de 1998 a respeito do Protocolo de Kyoto sobre redução da emissão de carbono e opções políticas associadas) e o *Economic State of the US Oil and Natural Gas Exploration and Production Industry: Long-Term trends and Recent Events*. Com respeito ao primeiro relatório, a conclusão do estudo da API foi que reduzir o uso de energia fóssil nos EUA em quantidades suficientes para alcançar as metas propostas em Kyoto seria enormemente custoso. Nem mesmo o desenvolvimento e adoção de novas tecnologias que reduzam as emissões de carbono será suficiente para os EUA atingirem as metas propostas em

Kyoto. O aumento no preço da energia concomitante a um menor crescimento econômico global seria necessário para reduzir a demanda de energia e emissões de carbono associadas. Ou seja, para que os EUA cumpram as metas propostas em Kyoto é necessário que consumidores, empresários, setores agrícola e industrial efetuem um grande esforço a um alto custo o que, de qualquer maneira, apresenta implicações na indústria do Petróleo. Já o segundo relatório, de abril de 1999, versa sobre o declínio dos preços do óleo cru a partir de 1981, a relação inflação/preços atualizados do óleo cru/taxas de lucro dos produtores de óleo, declínio da produção de óleo e gás e taxas de emprego/desemprego nos EUA - principalmente a partir da década de 1980 - e razões pelas quais pequenos produtores de óleo e gás podem ficar especialmente vulneráveis, financeiramente, durante um colapso do preço do óleo. A conclusão do relatório se dá afirmando que, caso os preços do óleo permaneçam baixos (com apenas aumentos transitórios) e outras tendências de longo prazo na indústria permaneçam válidas, é esperada redução das taxas de emprego, lucros e níveis de atividade na exploração e produção de longo prazo. Outros potencialmente afetados seriam os órgãos federais, estaduais e municipais que dependem fortemente de pagamentos de taxas/royalties provenientes da indústria do petróleo/gás. Ver as figuras 5, 6 e 7.

A relevância da questão sócio-ambiental no setor Petróleo pôde ser constatada recentemente, no Brasil, com o destaque dado pela grande imprensa - e em prejuízo da imagem da empresa - de acidentes relacionados com a Petrobrás. Podemos citar três que foram mais marcantes: um vazamento de óleo em rio do Paraná, um vazamento que atingiu a baía da Guanabara atingindo inclusive a população de pescadores e, finalmente, um muito mais impactante: o naufrágio da plataforma P36.

A experiência acumulada em águas cada vez mais profundas (de 120 metros em 1974 a 383 metros em 1985) levou a Petrobrás a direcionar maiores esforços no aumento de capacitação técnica nessa área. Com essa finalidade criou-se, em 1986, o primeiro PROCAP (Projeto de Capacitação Tecnológica da Petrobrás). Este projeto durou seis anos (de 1986 a 1991) e alcançou resultados relevantes, decorrentes da ação integrada entre Petrobrás e comunidades tecnológicas nacional e internacional.

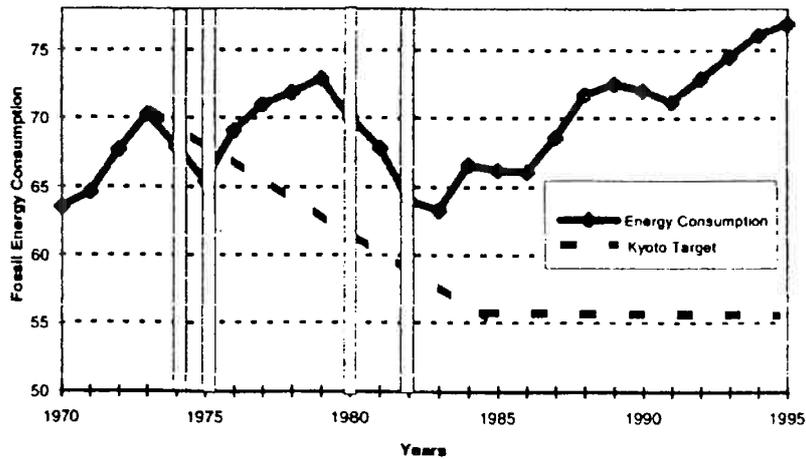
Os resultados obtidos com o primeiro PROCAP levaram a Petrobrás, em 1993, a conceber um programa mais ambicioso: o PROCAP-2000. Tal programa propõe-se a dar continuidade ao primeiro PROCAP e possui dois objetivos principais: incorporar reservas de petróleo e gás em águas ultraprofundas (de 1000 a 3000 metros de lâmina de água) e desenvolver projetos de inovação tecnológica objetivando a redução de custos na produção de óleo e gás, relativos aos atuais sistemas convencionais, em campos localizados em águas ultra-profundas.

Com a consolidação dos desenvolvimentos tecnológicos para produção de petróleo em lâminas d'água em faixas de menor profundidade e com a descoberta de campos em lâminas d'água de cerca de 3000 metros (ver figura 3) a indústria petrolífera atuante na Bacia de Campos desenvolverá um conjunto de novas tecnologias. De tal modo que, para que possa viabilizar a produção de novas descobertas em lâminas d'água de até 3000 metros, produzir e dar suporte às novas fases dos campos de Marlim Sul, Roncador, Marlim leste e Albacora Leste (todos situados em lâminas d'água superiores a 1000 metros) e também diminuir o custo de desenvolvimento da produção em lâminas d'água que ultrapassam 1000 metros, a Petrobrás lançou o PROCAP-3000 (Programa Tecnológico da Petrobrás em Sistemas de Exploração Em águas Ultraprofundas). Numa primeira etapa o PROCAP-3000 será executado por meio de 19

projetos sistêmicos, com foco nas principais tecnologias julgadas relevantes em águas ultraprofundas.

Estabelecido através da Lei no. 9478 de 06/08/1997, o CTPETRO (Plano Nacional de Ciência e Tecnologia para o Setor Petróleo e Gás Natural) prevê o ingresso de recursos no período 1999-2003 da ordem de R\$ 900.000.000,00 provenientes dos *royalties* da produção de petróleo e gás natural, para financiar programas de amparo à pesquisa científica, desenvolvimento tecnológico do setor petrolífero e à formação de recursos humanos. É importante observarmos que o surgimento do CTPETRO marcou uma mudança no padrão de financiamento de C&T no Brasil como um programa setorial continuado, inspirando o governo federal no projeto de fundos setoriais de C&T em outras áreas. Como um dos resultados destes investimentos surgiu o segundo Tanque Nacional de Ensaio Oceânicos (o primeiro sendo o Tanque de Provas do IPT). Este tanque, com previsão de entrada em operação em 2002, construído na UFRJ, destina-se à simulação de operações em águas profundas. Um dos indicadores da crescente demanda por recursos humanos na área Petróleo/Gás Natural é o programa de recursos humanos da ANP (Agência Nacional do Petróleo) com cerca de 1500 bolsas de estudos nos níveis técnicos, graduação, mestrado e doutorado. Na Escola Politécnica da USP foi inaugurado em março de 2002 o Tanque de Provas Numérico. Este Tanque Numérico consiste num "cluster" de 60 máquinas Pentium III. Esse equipamento permite simular o comportamento dos sistemas de exploração de Petróleo.

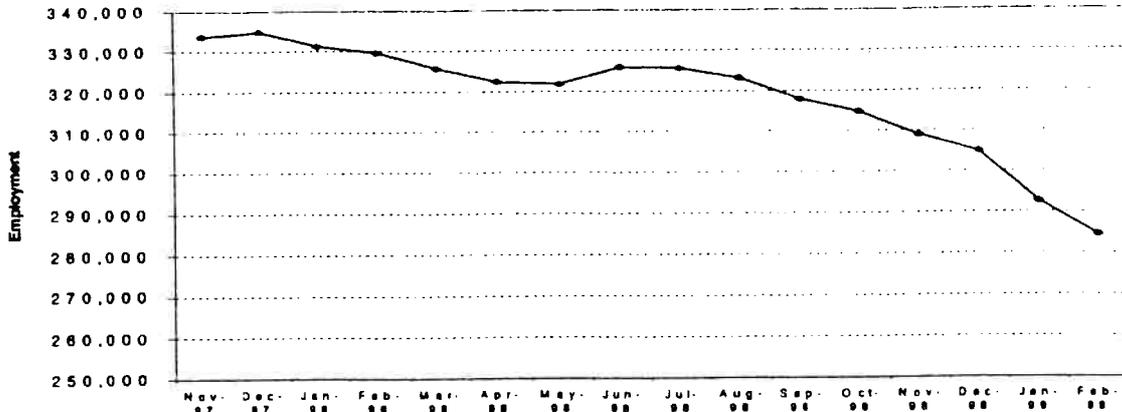
### Energy Consumption from Fossil Fuels (quads)



Note: The years 1974, 1975, 1980 and 1982 are shaded to reflect a decline in real GDP from the previous year.

**Figura 5: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: na Analysis of Policy Options - Relatório API/março de 1998)**

**Figure 10  
Oil and Gas Production Employment, November 1997 - February 1999**

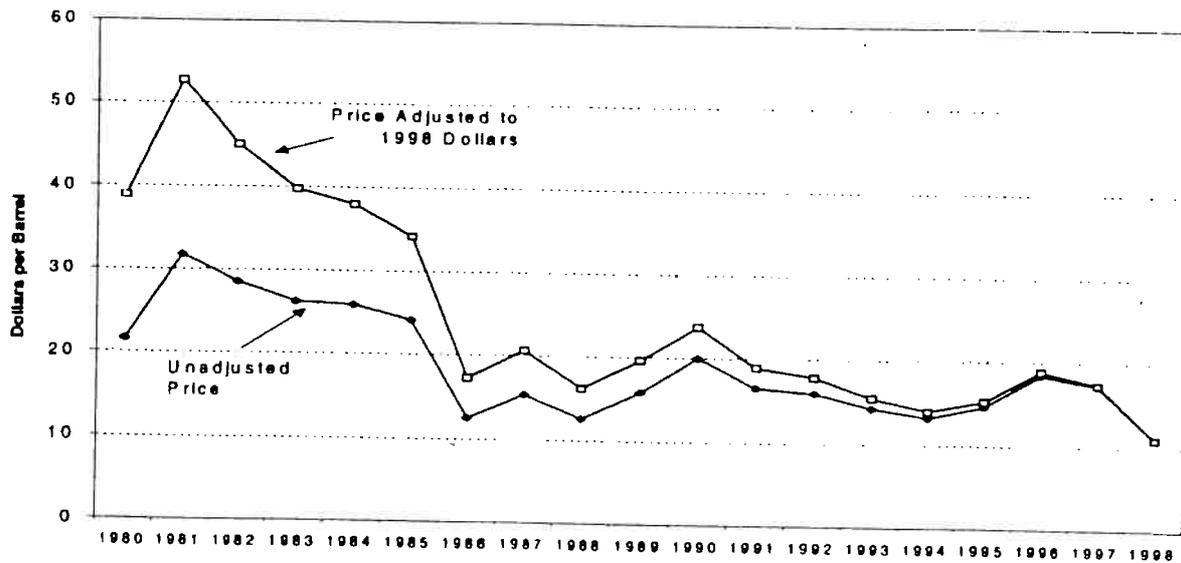


Source and notes: Bureau of Labor Statistics, US Department of Labor, National Employment, Hours, and Earnings series, available online via <http://stats.bls.gov/datahome.htm>, [April 2, 1999]. Value for February 1999 is preliminary. Total computed from data for the following industry sectors (with these Standard Industrial Classification codes): oil and gas production (131) and oil and gas field services (138).

**Figura 6: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: na analysis of Policy Options - Relatório API/março de 1998)**

Relatório API/março de 1998)

Figure 1  
Prices of Crude Oil, Unadjusted and Adjusted for Inflation, 1980-1998



Sources and notes:

Unadjusted crude oil price: Energy Information Administration, US Department of Energy, *Petroleum Marketing Monthly*, March 1999, Table 1. US average domestic first purchase prices.

Adjusted crude oil price: Crude oil prices are adjusted to 1998 dollars using the implicit GNP price deflator from Bureau of Economic Analysis, US Department of Commerce, *Survey of Current Business*, vol. 79 no. 3, March 1999, Table C.1. Deflator values for 1981-1997 are for fourth quarters; 1998 value is for the third quarter.

Figura 7: (Fonte: Achieving the Kyoto Protocol: an analysis of policy options - Relatório API/março de 1998)

## 2.4 Identificação do Problema

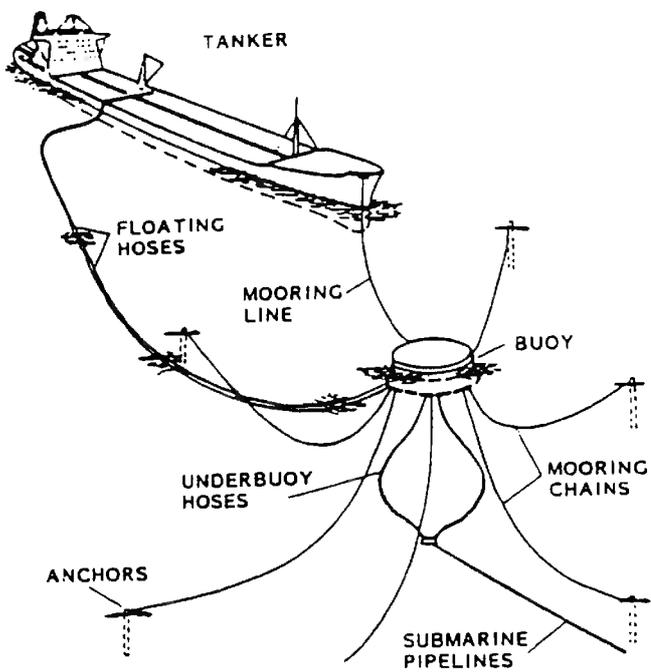
Apesar de todas as vantagens da tecnologia FPSO, expostas acima, temos dificuldades inerentes ao fato de estarem sendo utilizados navios ao invés de plataformas semi-submersíveis, as quais, por construção, são praticamente transparentes à ação das ondas de gravidade e não apresentam problemas de aproamento com relação ao vento.

O mesmo já não pode ser dito dos navios. Dada a impossibilidade de se utilizar o mesmo sistema de amarração utilizado nas semi-submersíveis (pois, o caso de uma forte corrente incidindo de través no navio poderia até resultar no rompimento das linhas), novos conceitos de amarração tiveram que ser desenvolvidos.

Nos últimos anos diversas propostas de amarração foram apresentadas e estudadas: SPM (*Single Point Mooring/Sistema de Ponto Único de Amarração*) com turet, SPM com monobóia, TPM (*Two Point Mooring/Sistema com Dois Pontos de Amarração*), SMS (*Spread Mooring System/Sistema de Amarração Espalhada - ou com múltiplos cabos*). Uma variante do SMS, desenvolvida pela Petrobrás, é o DICAS (*Differentiated Compliance Anchoring System/Sistema de Ancoragem com Complacência Diferenciada*).

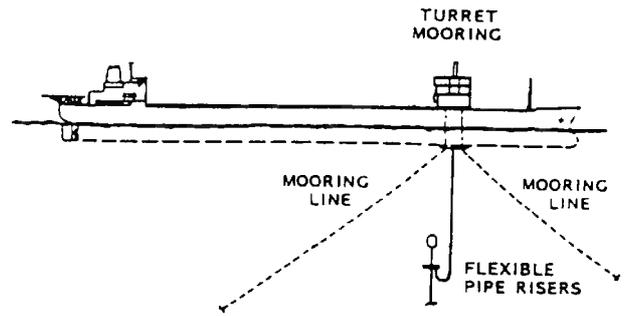
Um aspecto comum a estes vários sistemas de amarração é a noção de proporcionar algum tipo de liberdade de movimento ao sistema de modo a permitir - ao menos parcialmente - um alinhamento do navio com a resultante das condições ambientais. Condições ambientais tais como direção e intensidade da excitação (vento, ondas, corrente), lâmina d'água, condição de calado, particularidades do sistema de amarração escolhido, características geométricas do navio, pré-tensão das linhas, a grande

quantidade de parâmetros envolvidos no projeto de sistemas deste tipo e o caráter altamente não-linear da dinâmica (e que fica mais não-linear à medida que a lâmina d'água aumenta) fazem do estudo de tais sistemas problema de difícil resolução, em toda a sua generalidade.



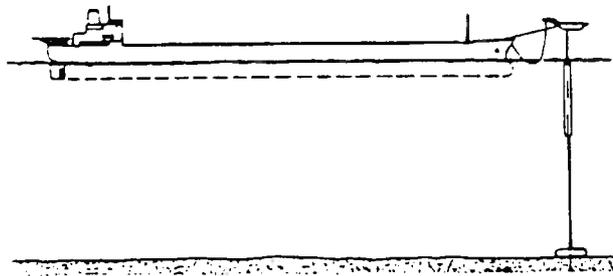
(a) Single-buoy mooring (SBM)

(a) *Single-buoy-mooring (SBM)*



(b) Internal turret mooring (ITM)

(b) *Internal-turret-mooring (ITM)*

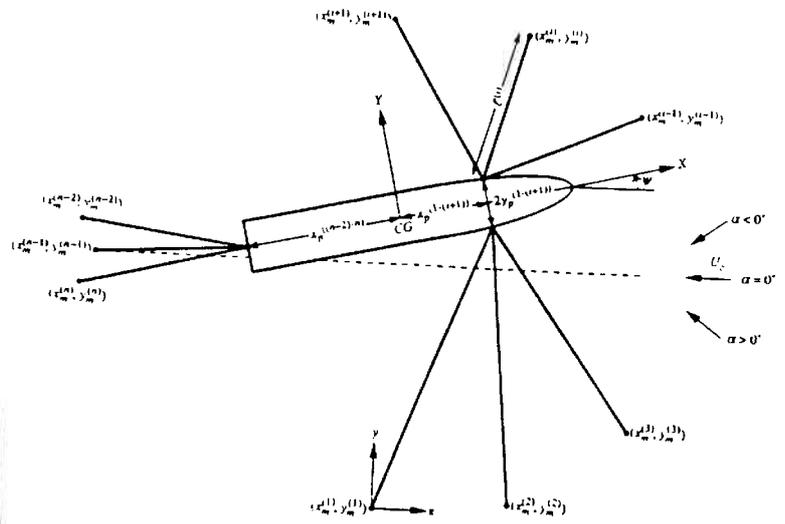
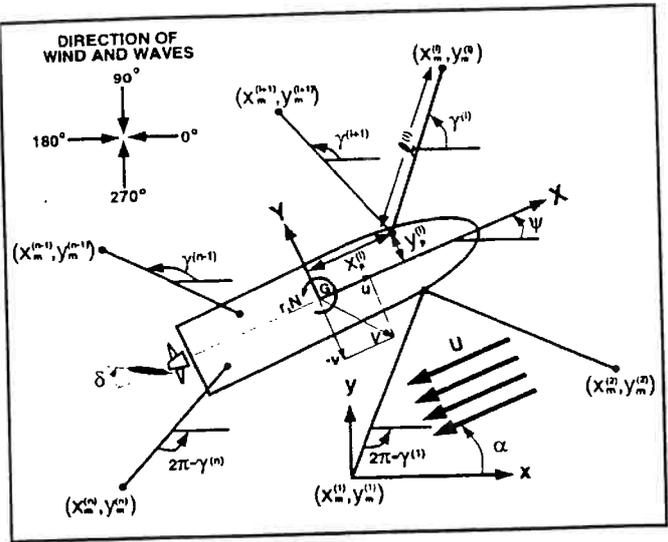


(c) Articulated tower mooring (ATM)

Schematic of single-point mooring (SPM) configurations

(c) *Articulet-tower-mooring (ATM)*

Figura 8a,b,c: Configurações esquemáticas de SPM (*single-point-mooring*)  
[Jiang/Schellin/Scharma1995]



(a) Spread-mooring-system (SMS)

(b) Differentiated Compliance Anchoring System (DICAS)

Figura 9: Configurações esquemáticas de SMS (Spread-mooring-system)

## 2.5 Abordagens de Estudo da Dinâmica de FPSO

Existem várias estratégias para se estudar a dinâmica de sistemas FPSO. A seguir dividimos estas abordagens em quatro grupos principais:

### a) *Ensaio de modelos reduzidos em Tanques de Provas.*

Os ensaios de modelos reduzidos têm-se demonstrado, ao longo dos anos, essenciais para o desenvolvimento da Engenharia Offshore e, mais particularmente, de sistemas FPSO. Tais ensaios tanto aumentam a confiança nas predições teóricas (por exemplo, a interação das ondas de gravidade com corpos flutuantes) quanto podem vir a antecipar novos fenômenos eventualmente críticos na escala real (por exemplo, o fenômeno da excitação do modo vertical de uma TLP). Apesar dos ensaios numéricos, os ensaios em tanques de provas ainda são insubstituíveis nas fases finais de projeto, fornecendo muitas informações relativas ao comportamento do navio amarrado. Como pontos negativos dos ensaios com modelos reduzidos apresentamos: a dificuldade de ajustar, simultaneamente, os números de Reynolds e de Froude do modelo reduzido com os valores da escala real (Newman, p. 5); o custo envolvido nos ensaios; as dificuldades na confecção do modelo, na realização do ensaio em si e no tratamento dos dados; dada a perspectiva de aumento da LDA, a profundidade exigida para os ensaios em tanques de provas, de modo a mantermos escala da ordem de 1:100, passa a ser proibitiva sem que as assim chamadas *técnicas híbridas* passem a ser utilizadas; há uma limitada

flexibilidade quanto ao ensaio de todas as condições possíveis no que diz respeito aos parâmetros que controlem o comportamento do sistema.

b) *Análise do Comportamento no Domínio da Frequência.*

Esta abordagem fornece dados importantes para o projeto de amarração tais como os coeficientes de deriva obtidos da solução de um problema linear no domínio da frequência. No entanto apresenta dificuldades de se incluir fenômenos não-lineares. Nesta abordagem devemos citar o projeto PROSAM.

c) *Simulação Dinâmica no Domínio do Tempo.*

Esta abordagem, muito utilizada dado seu baixo custo, versatilidade, flexibilidade na modificação de vários parâmetros do sistema (condição de calado, posição do *fairlead*, comprimento do *hawser*, etc) permite ainda a inclusão de fenômenos não-lineares e o estudo e comparação dos diversos modelos matemáticos de forças hidrodinâmicas. Por outro lado, os cálculos numéricos sofrem de imprecisões e incertezas de medidas dos coeficientes hidrodinâmicos ao mesmo tempo em que esta abordagem dificulta a obtenção de um *quadro* geral, *panorâmico*, de determinados aspectos qualitativos da dinâmica não-linear do sistema. Finalmente, uma metodologia de projeto que fosse estritamente baseada em ensaios numéricos (tanto no domínio do tempo quanto no da frequência) e/ou ensaios em tanques de provas, careceria de uma fundamentação de racionalidade e resultaria numa metodologia tipo ensaio-e-erro. Neste ponto encontramos uma distinção quase filosófica de abordagem. Dada a grande quantidade

de parâmetros envolvidos no projeto de sistemas FPSO, torna-se imprescindível uma abordagem menos empírica; ao mesmo tempo uma abordagem estritamente teórica não se basta, dada a dificuldade de modelagem matemática dos fenômenos hidrodinâmicos.

d) *Estudo da Estabilidade do Sistema através de Abordagens Analíticas*

Nas abordagens analíticas temos como características positivas as seguintes: permite um conhecimento sintético, algumas vezes geométrico da dinâmica do sistema. Disto provém um conhecimento que facilita muitas vezes a leitura de dados obtidos no ensaios em tanques oceânicos e/ou tanques numéricos; é intrínseca do ferramental matemático a capacidade de generalização uma vez respeitadas as premissas na qual se baseia. Determinadas técnicas matemáticas em si já são os próprios algoritmos para implementação de metodologia de projetos, fundada numa maior racionalidade. Por outro lado, dada a grande quantidade de parâmetros envolvidos em sistemas FPSO, a operacionalização algébrica de determinados algoritmos matemáticos fica bastante dificultada; algumas vezes até mesmo impossibilitada de levar a resultados relevantes e significantes, seja do ponto de vista de projeto de engenharia do sistema seja do ponto de vista de uma abordagem unificada ao problema e/ou da compreensão do mesmo. Este tipo de abordagem fornece regiões de estabilidade/instabilidade sob determinadas hipóteses, mas não fornece dados importantes como valores de pico da força e máxima excursão do navio, por exemplo.

Nesta abordagem devemos distinguir entre técnicas geométricas (Teorema de Hartman-Grobmann, Teorema da Variedade Central, codimensão de uma bifurcação, “unfolding”, etc) e técnicas que apresentam resultados de natureza aritmética como o

critério de Routh-Hurwitz. Técnicas baseadas no critério de Routh-Hurwitz utilizam apenas os coeficientes da matriz Jacobiana das equações de estado do modelo matemático da dinâmica do sistema FPSO e de um modo que **não** facilita a compreensão da dinâmica do sistema a partir da sua decomposição em auto-espços (não é uma técnica *geométrica*). Além disso, justamente por não incluir informações a respeito dos termos não-lineares do sistema, não conseguimos, com esta técnica, deduzir a estabilidade das bifurcações dinâmicas por exemplo. Em outras palavras, não conseguimos avaliar a robustez das bifurcações de Hopf. Por outro lado, abordagens analíticas com técnicas geométricas *acrescentam* informação a respeito de auto-espços estáveis, instáveis e aqueles auto-espços associados aos auto-valores com parte real nula.

## **2.6 Uma Situação Prática como Elemento Motivador**

Em [Fucatu] encontramos o relato a seguir. “Ao efetuar uma operação de descarregamento do navio tanque Provence na monobóia do terminal da Petrobrás de São Francisco do Sul (RS), em fins de 1993, o navio iniciou um movimento plano de grande amplitude e crescente solitação do *hawser*. Dado o ineditismo do fenômeno - já que o maior navio atracado ao terminal fora de 200kDWT, diferentemente do Provence de 280kDWT - havia dificuldades em se determinar exatamente o que poderia tê-lo causado”.

Para estudar este fenômeno o CENPES utilizou o simulador numérico TERMSIM II. No entanto, tal simulador não obteve êxito em reproduzir o fenômeno em foco. A partir de uma versão preliminar de um simulador (DYNASIM) desenvolvido pelo Depto. de

Eng. Naval e Oceânica (PNV) da USP conseguiu-se reproduzir tal fenômeno. Com isto o PNV-USP tem prosseguido em estudos conjuntos com a Petrobrás para desenvolvimento deste simulador numérico, além de desenvolver outros trabalhos.

No relatório [Procap2000/relatório no.2] temos ensaios experimentais desenvolvidos no tanque de provas do IPT que evidenciam a bifurcação de Hopf no caso de um navio-tanque com *hawser* rígido.

Tanto na primeira situação, com o navio-tanque Provence, quanto no ensaios realizados no IPT, encontramos bifurcações de Hopf de navios amarrados.

## **3.Revisão Bibliográfica**

### **3.1 Introdução**

Como neste trabalho estamos aplicando técnicas recentes em Sistemas Dinâmicos ao estudo de modelos matemáticos da dinâmica de sistemas FPSO e com o intuito de possibilitar um melhor recorte quanto a cada ponto tratado na revisão bibliográfica, preferimos dividi-la em três seções. A primeira parte refere-se ao desenvolvimento de modelos matemáticos da dinâmica de sistemas FPSO. Na segunda parte abordamos a literatura relacionada mais proximamente ao estudo da dinâmica não linear dos modelos matemáticos de sistemas FPSO. Na terceira parte deste capítulo tratamos dos principais textos utilizados como referência da área de Sistemas Dinâmicos.

### **3.2 Modelos Matemáticos da Dinâmica de sistemas FPSO**

Como o foco principal deste trabalho não é o desenvolvimento de modelos matemáticos para a dinâmica de sistemas FPSO mas sim o estudo desta dinâmica segundo técnicas recentes em sistemas dinâmicos, esta primeira seção da revisão bibliográfica será bastante sucinta.

Os problemas de (i) rebocar navios a velocidade constante, (ii) amarração e (iii) ancoragem estão relacionados, no sentido em que as forças atuantes são aplicadas por linhas a navios em movimentos lentos com relação à água. Seguindo o trabalho de [Strandhagen1950] sobre rebocagem de navios, diversos estudos utilizando abordagens experimental, numérica e analítica foram desenvolvidos, dentre os quais citamos: [Benford1955], [Brix1971], [Abkowitz1972], [Eda1972], [Bernitsas&Kekridis1985], [Chakrabarti1997].

No trabalho de [Abkowitz1964], o qual trata da questão da manobrabilidade de navios, é utilizada uma abordagem formal: a expansão em Série de Taylor, das expressões das forças atuantes no navio. Os coeficientes deste expansão em Série de Taylor são chamados de derivadas hidrodinâmicas. No trabalho de [Wichers1976] foi destacada a importância do amortecimento viscoso no comportamento dinâmico do sistema. Em sua tese, [Wichers1988], aborda o fenômeno do *Wave Drift Damping*, qual seja, a influência da interação das ondas com o movimento lento do navio no aumento do amortecimento do sistema. Lembremos que [Aranha1994] e [Aranha1996] formula analiticamente o fenômeno de Wave Drift Damping. Wichers é o autor do simulador TERMSIM II, desenvolvido no MARIN (Holanda). Em seu trabalho [Faltinsen1979], do MARINTEK (Noruega), propõe o princípio do “*local cross flow*” para cálculo das forças hidrodinâmicas em *sway* e *yaw*. [Fujino1983], aproveitava coeficientes de manobrabilidade para o cálculo das forças hidrodinâmicas sobre navios para estudar a dinâmica de sistemas SPM.

Em 1984 surge o trabalho de [Oltmann e Sharma1984] no qual são apresentadas simulações numéricas para manobras, utilizando um modelo matemático que considera interações casco-propulsor-leme. Tal modelo não é restrito apenas a pequenas mudanças na velocidade de avanço e pode ser aplicado mesmo em casos de reversão da velocidade. O modelo utiliza a Teoria de Aerofólio (Prandtl e Tietjens) para calcular a força de sustentação considerando o casco como um corpo esbelto. Além disso este modelo inclui efeitos de “*cross-flow*” no casco. [Obokata1986] utiliza o princípio local do “*cross flow*” para o cálculo das forças hidrodinâmicas em *surge*, *sway* e *yaw* num tratamento semelhante ao dado por [Faltinsen1979]. [Pesce et al 1984] apresentam um modelo de simulação de navios amarrados sujeitos a ondas, vento e correnteza.

Neste trabalho são utilizados os conceitos de “cross-flow” e “teoria das faixas” para modelar os efeitos de correnteza.

Também em [Takashina1986] vemos um modelo para estudar manobras de atracação de navios em baixa velocidade. No entanto, diferentemente de [Abkowitz1964] e [Norbinn1971], que trabalharam sob condições de manobras em velocidade de projeto com grande velocidade de avanço, baixa taxa de velocidade angular e pequeno ângulo de deriva, [Takashina1986] considerou um modelo para atracação de navios em portos (navio executa movimentos de sway e yaw de grande amplitude, baixa velocidade de surge, velocidade de yaw não desprezível, significando forte acoplamento entre os movimentos de *surge*, *sway* e *yaw*). Este modelo de Takashina foi utilizado por [Souza1990] na sua dissertação de mestrado no DENO-EPUSP. Em [Kat&Wichers1991] a parcela dinâmica das forças hidrodinâmicas é calculada através do princípio local de “cross flow”.

[Leite et al 1997] apresentam um modelo heurístico denominado Modelo de Asa Curta, o qual, para a parcela estática, faz uso de coeficientes hidrodinâmicos baseados na Teoria de Asa Curta e no “cross flow drag”, enquanto que, para a parcela dinâmica, é utilizado o princípio local do “cross flow”. O modelo também inclui o momento de “tip vortex” devido aos vórtices gerados nas extremidades do navio e a correção do coeficiente lateral  $C_{2c}$  ao longo do comprimento do navio. Acrescente-se ainda que, dentre os modelos acima, apenas os modelos Asa Curta e o modelo proposto por [Oltmann e Sharma1984] utilizam-se de uma correção no coeficiente de arraste na direção longitudinal em função do número de Reynolds. Tal informação é relevante para estudarmos os efeitos de escala quando desejamos comparar ensaios realizados com modelos reduzidos e provas de mar na escala real. No que diz respeito à

classificação dos modelos hidrodinâmicos devem ser citados os trabalhos [Bernitsas et al 1999] e [Matsuura et al 1999].

A validação e extensão do modelo Asa Curta Heurístico são tratadas em [Simos et al 2001] e [Tannuri et al 2001]. Ressaltamos a validação deste modelo pois, além de preditivo e quase-explicito, depende apenas de três parâmetros a serem determinados experimentalmente. Tais parâmetros são o coeficiente de surge a  $0^\circ$  de aproamento, o coeficiente de força  $C_y$  a  $90^\circ$  e o coeficiente de momento  $IC_y$  a  $90^\circ$ .

Podemos decompor a dinâmica de sistemas de amarração em três principais escalas de tempo: lenta, intermediária e rápida. Os movimentos na faixa de frequência de ondas de gravidade não são controláveis pois a potência necessária para controlá-los seria excessiva. Tais movimentos são responsáveis pela resposta do sistema FPSO nos outros três graus de liberdade: heave, roll, pitch nos quais existem forças de restauração hidrostática. Movimentos de frequência intermediária - devidos a interações entre movimentos rápidos e lentos (efeito de memória) e deriva de variação lenta são controláveis e devem ser incluídos na modelagem da dinâmica de sistemas de amarração. A dinâmica lenta é necessária para cálculo da dinâmica rápida necessária na predição de cargas e movimentos extremos. Em [Bernitsas, Kekridis, Papoulias 1986] foi abordada a questão das diferentes escalas de tempo presentes na dinâmica de sistemas de amarração: rápida, média (ou intermediária) e lenta.

### **3.3 Estudos da Dinâmica não-linear dos Modelos Matemáticos para Sistemas FPSO**

Na última seção fizemos uma revisão bibliográfica tomando como foco o problema da modelagem matemática dos sistemas FPSO. Nesta seção trataremos dos diversos artigos publicados tendo como foco o estudo da dinâmica não-linear destes modelos matemáticos.

Com a intenção de facilitar a organização do texto dividiremos este tópico nos diversos sub-tópicos, focados em artigos de periódicos e trabalhos apresentados em congressos. Em muitos momentos, devido à multiplicidade de abordagens (numérica, analítica, experimental) utilizadas por um mesmo conjunto de autores num artigo/trabalho específico, ou escolhemos o tópico que nos pareceu o mais relevante para as conclusões obtidas no artigo/trabalho em questão ou simplesmente inserimos este artigo/trabalho em mais de um sub-tópico de pesquisa.

#### **3.3.1 Abordagem experimental**

[Nishimoto et al1997] realizaram ensaios em escala real em condições ambientais que possibilitaram confrontar alguns modelos propostos para o amortecimento no casco e nas linhas de amarração. Dados de campo parecem confirmar que o amortecimento é de tipo viscoso sendo que os modelos teóricos são capazes de explicar cerca de três quartos do amortecimento observado. O amortecimento restante é, provavelmente, devido a efeitos não modelados tais como o atrito entre as linhas de amarração e o fundo do oceano.

Num trabalho de 1998, [Leite et al1998] propõem um modelo hidrodinâmico heurístico para descrever forças e momento no plano horizontal de um navio-tanque causados por corrente oceânica. Com a finalidade de efetuar estudos experimentais sobre a estabilidade do equilíbrio deste sistema foi desenvolvido um sistema baseado em modelo cativo. Sob tais condições, o único parâmetro de bifurcação é a posição do turret e o modelo proposto conseguiu prever, com razoável acurácia, este valor crítico. Pode-se verificar que o ângulo de yaw, o qual define o comportamento pós-crítico cresce (localmente) linearmente com o parâmetro de bifurcação, diferentemente do modelo de derivadas hidrodinâmicas o qual apresenta relação de raiz quadrada entre o ângulo de yaw e o parâmetro de bifurcação (ver [Simos et al2002]). Este resultado é provocado pelo termo  $C_Y \psi |\psi|$  sendo  $C_Y$  o coeficiente de força lateral, suposto invariante com  $\psi$ , onde  $\psi$  é o ângulo entre a corrente e o eixo longitudinal do navio. A discussão acima é válida para petroleiros mas não para navios de casco mais afilado. Na sub-seção 3.3.2 deste capítulo trataremos de uma abordagem numérica no contexto acima mas considerando-se  $C_Y$  função de  $\psi$ .

O principal resultado deste trabalho, porém, está relacionado com questões de *robustez* do modelo hidrodinâmico já que o modelo clássico de derivadas hidrodinâmicas depende da obtenção experimentalmente difícil das derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem. As dificuldades são tamanhas que ocorrem erros até mesmo de determinação de sinal em algumas destas derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem, dependendo do laboratório/Instituição que efetua a medida.

Também importantes são os ensaios que vêm sendo realizados no tanque de provas do IPT: [IPT1998], [IPT1999]. Estes ensaios incluem, além daqueles utilizados para

estimativa dos coeficientes hidrodinâmicos, experimentos para verificar a capacidade preditiva dos modelos matemáticos da dinâmica de sistemas FPSO. Dentre estes últimos inserem-se os ensaios de “yaw rotating” com velocidade de avanço e SPM, com *hawser* rígido.

Em 1999 [Thiagarajan, Finch1999] apresentaram um estudo sobre o efeito da localização do turret nos movimentos verticais de um navio em sistema FPSO-SPM, em escala reduzida no laboratório de 60 metros de comprimento e 3,5 metros de largura do Australian Maritime College’s Towing Tank. Este trabalho utiliza abordagem experimental para estudar os movimentos verticais do navio na presença de ondas enquanto a posição do turret é variada sistematicamente. Os resultados obtidos mostram que a posição do turret afeta de modo significativo os movimentos verticais do navio. Embora turret’s posicionados próximos ao centro longitudinal de gravidade do navio produzam os movimentos de “heave” e “pitch” de menor amplitude, é sugerido pelos autores que a posição do turret à frente da meia-nau é preferível dado que provê um balanço entre reduzir os movimentos verticais do navio e melhorar a acomodação à resultante das forças ambientais.

Num trabalho de forte motivação prática [Fernandes, Sphaier, Correa1999] utilizam-se de um conjunto de técnicas experimentais, numéricas e analíticas (em ordem de grandeza) para estudo da viabilidade de um turret central em sistemas FPSO. Através destas abordagens, múltiplas e independentes, os autores estudam a influência de estabilizadores passivos nas condições de estabilidade do sistema, considerando sua utilização naturalmente viável.

Em [Pinto et al, 1999], um estudo bastante completo, concernente ao posicionamento longitudinal do Turret e sua influência nas cargas dinâmicas aplicadas aos “risers” foi realizado.

### **3.3.2 Abordagem numérica**

Num trabalho de 1984 [Pesce et al 1984], efetuaram simulações numéricas do comportamento de navios amarrados sob ação de vento, ondas irregulares e correnteza para ângulos de incidência quaisquer. No modelo proposto são consideradas características não-lineares do sistema de amarração e efeitos de primeira e segunda ordem devidos à ação de ondas e utilizada a teoria das cordas em catenária para cálculo das forças restauradoras devidas à amarração. São considerados também efeitos de deriva lenta excitáveis por ação de corrente e vento e é utilizado o conceito de “cross-flow” para cálculo das forças de correnteza. Em estudos mais recentes [Leite et al 1996] e [Pinto et al 1999] abordam as questões de estabilidade frente ao posicionamento do turret, o efeito de estabilizadores passivos, o aproamento relativo às ondas e o carregamento das linhas de produção (risers).

Em outro trabalho de 1984, já indicado na sub-seção 3.3.1, [Oltmann e Sharma1984], realizaram simulações numéricas usando um modelo matemático desenvolvido a partir de considerações físicas (e neste sentido conceitualmente distinto das abordagens clássicas - e matematicamente mais formais - de teoria das manobras na linha de [Abkowitz1964] por exemplo). No modelo proposto por [Oltmann e Sharma1984] são levadas em conta as interações casco-propulsor-leme.

Num trabalho de dissertação de mestrado realizado no DENO-USP, de 1990, [Souza1990], desenvolveu um simulador de manobras de navios em baixa velocidade. Neste trabalho era utilizado o modelo de [Takashina1986], já citado na seção anterior.

[Nishimoto, Brinati, Fucatu1997] e [Fucatu1998] em sua dissertação de mestrado - também no DENO-USP - desenvolvem o simulador numérico DYNASIM. Este será o simulador que identificará o problema de oscilação de grande amplitude ocorrido no terminal da Petrobrás em São Francisco do Sul em 1993 (vide seção 2.6). No trabalho de [Nishimoto, Brinati, Fucatu1997] são efetuados estudos comparando-se os modelos [Obokata1987] e [Takashina1986].

Também numa abordagem numérica inclui-se o trabalho de [Papoulias, Bernitsas1988] MOORLINE. Num artigo publicado no JOMAE de novembro de 1995, [Jiang, Schellin, Sharma1995] efetuaram um estudo numérico dos movimentos horizontais de um navio-tanque em SPM sob quatro sistemas de amarração (amarração por bóia/SBM, amarração por torre articulada/ATM, amarração turet na proa/BTM, amarração por turet interno/ITM) levando em conta: respostas hidrodinâmicas não-lineares quase-estáticas e forças de controle, efeitos de memória lineares devidos a difração e radiação de ondas, forças de restauração de amarração não-lineares, vento, forças de onda de primeira ordem e forças de onda de deriva. Os autores relatam que comparações entre as simulações temporais entre modos autônimos e não-autônimos indicam que a tradição na análise espectral de se tratar respostas em alta e em baixa frequência como independentes pode não ser válida para casos localmente instáveis.

Em sua dissertação de Mestrado [Matsuura2000] utiliza análise de autovalores das equações de movimento do navio que possibilita obter informações qualitativas sobre o

comportamento para sistema tipo DICAS. Também são realizadas comparações entre diversos modelos para as forças hidrodinâmicas.

Também na linha de simulações numéricas no domínio do tempo podemos citar: [Chen&Chou1986] que efetuaram comparações entre sistemas de amarração para uma Semi-submersível em águas profundas, [Kato&Saito&Takaise1993] analisando a resposta não-linear a ondas aleatórias de estruturas flutuantes, [Leblanc&Isnard&Wilczynski1995] analisando metodologia para projeto de sistemas de amarração, [Oppenheim&Wilson1982] estudando a dinâmica de baixa frequência para navios amarrados, [Yilmaz&Incecik1991] efetuando simulações para sistemas flutuantes amarrados.

### **3.3.3 Abordagem analítica**

Ao longo dos últimos vinte anos, concomitantemente ao aumento da profundidade da lâmina d'água nos campos offshore de petróleo, desenvolveu-se grande esforço de pesquisa no sentido de se estudar a dinâmica de sistemas FPSO. Gradualmente aquelas que eram consideradas "águas profundas" duas décadas atrás deixaram de sê-lo e hoje já se trabalha na perspectiva de águas ultra-profundas - acima de 2000 metros de lâmina d'água.

Dada a relação que é possível estabelecer entre os problemas de rebocagem de navios à velocidade constante e de amarração e ancoragem, em trabalhos a partir de 1985 [Bernitsas, Kekridis1985], [Bernitsas, Kekridis1986], [Papoulias, Bernitsas1987] encontramos uma metodologia que posteriormente será aplicada em [Papoulias, Bernitsas1988]. Neste artigo os autores estudaram o comportamento dinâmico de

sistemas SPM sob excitação externa independente do tempo. Neste artigo, seminal, os autores estudam ainda sequências de bifurcações das equações de estado e valores de parâmetros para os quais a dinâmica do sistema apresenta mudanças qualitativas significativas. Os autores também apresentam uma crítica aos métodos tradicionais de estudo da dinâmica de sistemas flutuantes. Tais métodos consistiam em (i) calcular a posição de equilíbrio estático, (ii) efetuar análise dos movimentos rápidos em torno desta posição, (iii) estudar movimentos lentos via integração numérica no tempo [Wichers1979], (iv) efetuar análise de estabilidade em torno das posições de equilíbrio estático de um modo simplificado [Sorheim1980]. Observam os autores que um equilíbrio estático pode ser instável, donde sua análise local torna-se sem sentido. Por outro lado, muitas vezes instabilidades são frequentemente atribuídas à excitação externa, dependente do tempo. Além disso, utilizar unicamente integrações numéricas não permite obter uma compreensão completa da dinâmica do sistema inclusive podendo conduzir-nos a conclusões errôneas [Papoulias, Bernitsas1987].

Ao longo da década de 1980 foi mostrado que forças de deriva de variação lenta podem entrar em ressonância com as frequências naturais do sistema de amarração [Faltinsen1993]. Recentemente, [Bernitsas, Kim1998] mostraram que a interação entre forças de deriva lenta e a dinâmica do sistema de amarração é muito rica em fenômenos não-lineares: (a) forças de deriva com variação lenta podem estabilizar movimentos oscilatórios estimulados por forças de deriva média; (b) forças de deriva lenta produzem batimentos ressonantes em surge, (este comportamento é indicador de uma estreita banda de excitação próxima de uma frequência natural); (c) forças de deriva lenta podem desestabilizar um equilíbrio estável (conduzir a uma bifurcação de

forquilha “pitchfork”, levar oscilações transientes a oscilações não-ressonantes em torno do equilíbrio estável não-principal).

Em [Bernitsas&Papoulias1990], vemos que mesmo regras operacionais como reverter o propulsor ou aumentar a pretensão nas linhas de amarração podem ter efeitos anti-intuitivos, levando até mesmo, em algumas situações, a dinâmicas caóticas.

A partir de 1995/1996 surgem diversos artigos de grande importância neste contexto: foram os trabalhos de [Garza-Rios, Bernitsas1995], [Garza-Rios, Bernitsas1996], [Garza-Rios1996], [Garza-Rios, Bernitsas1996], [Garza-Rios, Bernitsas1997], [Bernitsas, Garza-Rios1998], [Garza-Rios, Bernitsas1998]. Tais trabalhos permitem introduzir muito mais racionalidade no projeto de sistemas de amarração de FPSO's, permitem reduzir o tempo de simulação numérica no domínio do tempo além de construir diagramas de bifurcação em relação a diversos parâmetros de projeto. Tais resultados se dão, em resumo, a partir da obtenção de expressões analíticas fechadas sobre as sequências de bifurcação baseadas na física do sistema.

Em 1996 aparece um trabalho que permite distinguir entre movimentos periódicos lentos instigados por bifurcações de Hopf e movimentos quase-periódicos resultantes de uma distribuição inadequada das linhas de amarração [Bernitsas, Garza-Rios1996], [Garza-Rios1996].

Em [Fernandes, Sphaier1997] foi feita uma análise linear de estabilidade do modelo de Derivadas Hidrodinâmicas utilizando os critérios de Hurwitz derivados por [Kuo1975] para se estudar a dinâmica de sistemas FPSO com respeito aos parâmetros  $T$  (tensão no hawser) e  $l$  (comprimento do hawser) no caso SPM - nos casos hawser e mono-bóia - e com respeito aos parâmetros  $K$  (constante de restauração do turret) e  $a$

(distância entre a posição do turrete e o centro de gravidade do navio) no caso SPM-turrete.

Em trabalho de 1998, [Bernitsas e Garza-Rios1998] estudaram a dinâmica lenta de um sistema tipo Turrete e sua aproximação como sistema SPM. Foi utilizada a metodologia de análise de sistemas SPM, de trabalhos anteriores dos mesmos autores. O momento exercido entre o turrete e o navio e o amortecimento nas linhas resultante da rotação do turrete são fontes da diferença entre os sistemas TMS e SPM. Neste trabalho é mostrado que a perda de estabilidade estática de um TMS pode ser localizada aproximadamente através da bifurcação estática de um SPM. A perda de estabilidade dinâmica do TMS e a morfogênese associada podem ser afetadas fortemente pelo momento entre o turrete e o navio e pelo amortecimento nas linhas.

Num artigo que resume dezesseis anos de trabalhos na Univ. of Michigan [Bernitsas, Garza-Rios, Kim1999] fazem uma síntese bastante abrangente da área de dinâmica não-linear de sistemas FPSO. Este trabalho traça um histórico da área de dinâmica de sistemas FPSO desde [Strandhagen, Schoenherr, Kobayashi1950] até resultados sobre deriva lenta em ondas [Bernitsas, Kim1999], passando pelos modelos de manobras, sistemas SPM, TPM, TMS, SMS, DICAS, modelos para as linhas de amarração, modelos para os "risers", excitação externa, fenômenos de deriva média de 2ª. ordem, deriva lenta e efeito de memória hidrodinâmica.

Em [Leite et al1998] e na dissertação de mestrado de [Leite1997] temos a apresentação de um modelo heurístico para descrever as forças e momento num petroleiro causadas por correntes oceânicas. O primeiro trabalho já foi referenciado na sub-seção 3.3.1 e consta desta sub-seção por nele encontramos uma discussão sobre ser

a morfologia da bifurcação “pitchfork” fortemente dependente do modelo matemático adotado para representar as forças hidrodinâmicas.

No trabalho de [Pesce, Tannuri1997] ressalta-se que a análise padrão linear sobre a estabilidade do sistema pode não ser suficiente para lidar com o problema de projeto de sistemas FPSO em toda sua generalidade. Teoria de Bifurcação e conceitos modernos em Sistemas Dinâmicos constituem uma base teórica apropriada para análise deste problema. Neste trabalho os autores abordam o problema de estabilidade e discutem diversos comportamentos dinâmicos sob corrente estacionária. A partir do modelo de derivadas hidrodinâmicas de [Bernitsas, Papoulias 1988], resultados clássicos de estabilidade são abordados, a discussão para previsão de bifurcação pitchfork tipo sub- ou supercrítica é feita, ilustrando como o sinal algébrico da terceira derivada do momento de yaw com respeito à componente lateral da velocidade relativa determina o tipo de bifurcação. Quando encontradas bifurcações “pitchfork” super-críticas, uma condição para perda da estabilidade estrutural é apresentada e discutida. Bifurcações de Hopf também são apresentadas e discutidas.

Em [Garza-Rios, Bernitsas, Nishimoto, Masetti1999] fazem um estudo preliminar sobre um sistema DICAS utilizando a metodologia de “Catastroph Sets” construídos em espaços de parâmetros bidimensionais.

A viabilidade de turret's centrais em sistemas FPSO foi estudada em [Fernandes, Sphaier, Correa1999]. Neste trabalho (também referenciado na sub-seção 3.3.1) os autores estudam o uso de estabilizadores em sistemas FPSO com turret via uma abordagem analítica, em ordem de magnitude, associada a testes em escala reduzida e ensaios numéricos. Os autores concluem que parece bastante adequado prosseguir

adiante nestas considerações sobre estabilizadores em sistemas FPSO, mas incluindo forças de vento e ondas para um estudo mais extenso.

[Ragazzo2000] fez um estudo utilizando variedades invariantes e técnicas assintóticas para reduzir a dinâmica do sistema turret (sem se prender às particularidades dos diversos modelos matemáticos para a Dinâmica de sistemas FPSO) a uma equação diferencial com um grau de liberdade. O autor mostra que um efeito de considerarmos forte amortecimento nas linhas com uma articulação do turret praticamente sem atrito consiste na variável *yaw* apresentar destacada influência na dinâmica do sistema.

Em artigo apresentado em OMAE 2001, [Simos et al 2001] efetuam uma revisão crítica dos modelos de Derivadas Hidrodinâmicas e modelos de Cross-Flow observando a discrepância no cenário pós-bifurcação de forquilha para sistemas SPM. Os autores observam que esta discrepância se faz notar imediatamente após o ponto de bifurcação do ângulo de *yaw* de equilíbrio, em função da posição longitudinal da linha de fixação no casco. Os modelos clássicos de Derivadas Hidrodinâmicas apresentam esta curva de bifurcação como um cenário pós-bifurcação do tipo raiz quadrada enquanto os modelos de "Cross-Flow" apresentam uma curva de forma diferente da raiz quadrada. Os autores discutem ainda que tais discrepâncias são geradas pelo tipo de modelagem dos termos viscosos se dar por termos cúbicos na velocidade *v* nos modelos de Derivadas Hidrodinâmicas e por termos quadráticos em *v* nos modelos tipo "Cross-Flow". discrepâncias. Contudo, ao considerar o coeficiente  $C_y$  de arrasto total para escoamento transversal do modelo de "Cross-Flow" como dependente do ângulo de aprofundamento  $\psi$  para  $\psi$  pequeno, o trabalho citado mostra que o cenário pós-bifurcação pitchfork observado em laboratório para cascos afilados é recuperado.

Em seu trabalho de Doutorado [Simos2001] propõe um novo modelo hidrodinâmico para avaliação de forças devidas à ação de correnteza marítima uniforme atuantes sobre o casco de navios petroleiros amarrados. Um aspecto relevante do modelo proposto está na natureza *quase-explicita* da modelagem. Em outras palavras, o modelo proposto depende essencialmente das dimensões principais do casco além de um pequeno conjunto de parâmetros a serem determinados experimentalmente. Tal modelo é denominado *modelo heurístico estendido* ou *modelo de Asa Curta Estendido*. É sobre este modelo que faremos a análise de Bifurcação de Hopf no capítulo 7 deste trabalho além de confrontarmos nossos resultados analíticos com os resultados experimentais e as simulações numéricas apresentados em [Simos2001].

Particularmente relevantes para o presente trabalho foram os artigos [Papoulias 1991], [Papoulias&Oral1991] e [Papoulias1994], [Papoulias, Papadimitriou1995], [Papoulias, Bateman, Ornek1995]. Em todos esses artigos os autores utilizam-se de técnicas recentes de Sistemas Dinâmicos em problemas de Engenharia, mais particularmente técnicas de “Integral Averaging” para redução à Variedade Central. Em [Papoulias&Oral1991] os autores estudam Bifurcações de Hopf e fenômenos não-lineares de margens de ganho para o controle da trajetória de veículos submarinos. Já no trabalho [Papoulias1994] o autor analisa a bifurcação da linha de visada de guia de veículos submarinos. Nos trabalhos [Papoulias&Papadimitriou1995], [Papoulias,Bateman,Ornek1995] além aplicação da Técnica de Redução à Variedade Central e do “Integral Averaging”, também é tratado o problema da expansão em Série de Taylor na origem de Integrais de Cross-Flow com integrandos da forma  $x|x|$ .

### 3.4 Técnicas recentes em Sistemas Dinâmicos

Como textos gerais dentro da área de Sistemas Dinâmicos podemos citar [Guckenheimer, Holmes1983], [Wiggins1990], [Seydel 1988], [Arrowsmith, Place1994], [Hale, Koçak1991], [Fiedler-Ferrara, Prado1994]

Muito interessantes quanto ao aspecto de compreensão de aspectos geométricos em sistemas de equações diferenciais e, além disso, permitindo uma visualização de vários fenômenos dinâmicos, são os textos da série "The Visual Mathematics Library" [Abraham&Shaw1984].

Um texto muito interessante do ponto de vista de aplicações em engenharia é [Thompson&Stewart1987]. Também bastante próximo das aplicações em Engenharia é o texto de [Troger1987].

De textos específicos sobre Teorema da Variedade Central citamos [Carr1981]. Podemos citar como referência no uso de manipuladores algébricos, na aplicação de métodos perturbativos em geral, o texto [Rand, Ambruster1987]. Neste texto, os autores comparam os métodos de redução de Lyapunov-Schmidt, Variedade Central, Formas Normais, Lindstedt e de Lie, tanto para bifurcações estáticas quanto dinâmicas.

Especificamente sobre a bifurcação de Andronov-Poincaré-Hopf uma referência obrigatória é [Marsden, McCracken1976]. Neste texto encontramos o artigo original de Hopf.

Um artigo de fundamental importância técnica nesta tese é o trabalho [Chow, Mallet-Paret1977].

Aqueles mais interessados nos aspectos históricos da teoria de Sistemas Dinâmicos podem consultar [Barrow-Green1997]. Este texto é uma tese de Doutorado sobre o trabalho de Poincaré no contexto da História da Matemática.

Diversos textos num nível intermediário, entre o especializado e a divulgação científica, podem ser úteis para o leitor obter uma visão panorâmica da área de sistemas dinâmicos. Citaremos [Acheson1997], [Bergé,Dubois-Gance1996], [Ekeland1987], [Stewart1996].

## 4. Modelagem Matemática

### 4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos, de forma sucinta, os modelos matemáticos para a dinâmica de FPSO's nos diversos sistemas de amarração que estarão sendo objeto de estudo nos capítulos seguintes deste trabalho. Tais modelos são: (i) modelo de Derivadas Hidrodinâmicas (Abkowitz); (ii) modelo de Obokata e modelo Takashina; (iii) modelo de Asa Curta Heurístico. Inicialmente apresentaremos a formulação geral das equações do movimento que descrevem a dinâmica de sistemas FPSO. Posteriormente o problema será particularizado tanto para sistemas de amarração FPSO-SPM-turret, FPSO-SPM-hawser como FPSO-SMS, segundo os modelos para as forças hidrodinâmicas acima citados.

### 4.2 Equações de Movimento – Caso SPM

Seja o sistema de referências fixo à Terra  $Oxyz$  orientado pela regra da mão direita,  $x$  sendo orientado no sentido oposto do vetor velocidade da corrente e apontando para cima. Seja  $GXYZ$  um sistema de coordenadas fixo ao navio, onde  $G$  é o centro de massa,  $X$  orientado para a proa. Lembramos que estamos nos restringindo ao movimento no plano horizontal. Consideremos, também,

$u, v$ : componentes da velocidade relativa de  $G$  com respeito a água, nas direções  $AX$  e  $AY$ , respectivamente;

$\psi$  : ângulo de yaw ( $xGX$ );

$\dot{x}, \dot{y}$ : componentes da velocidade relativa de  $G$  com respeito ao sistema  $Oxyz$ ;

P: ponto de amarração;

U : intensidade da velocidade da correnteza;

xp : distância GP;

l: distância OP, onde O é o ponto onde o hawser é fixado (caso SPM-hawser);

M: massa do navio;

$I_z$  : momento de Inércia com respeito a GZ;

T: tensão no cabo (caso SPM-hawser) ou força de restauração (caso SPM-turret);

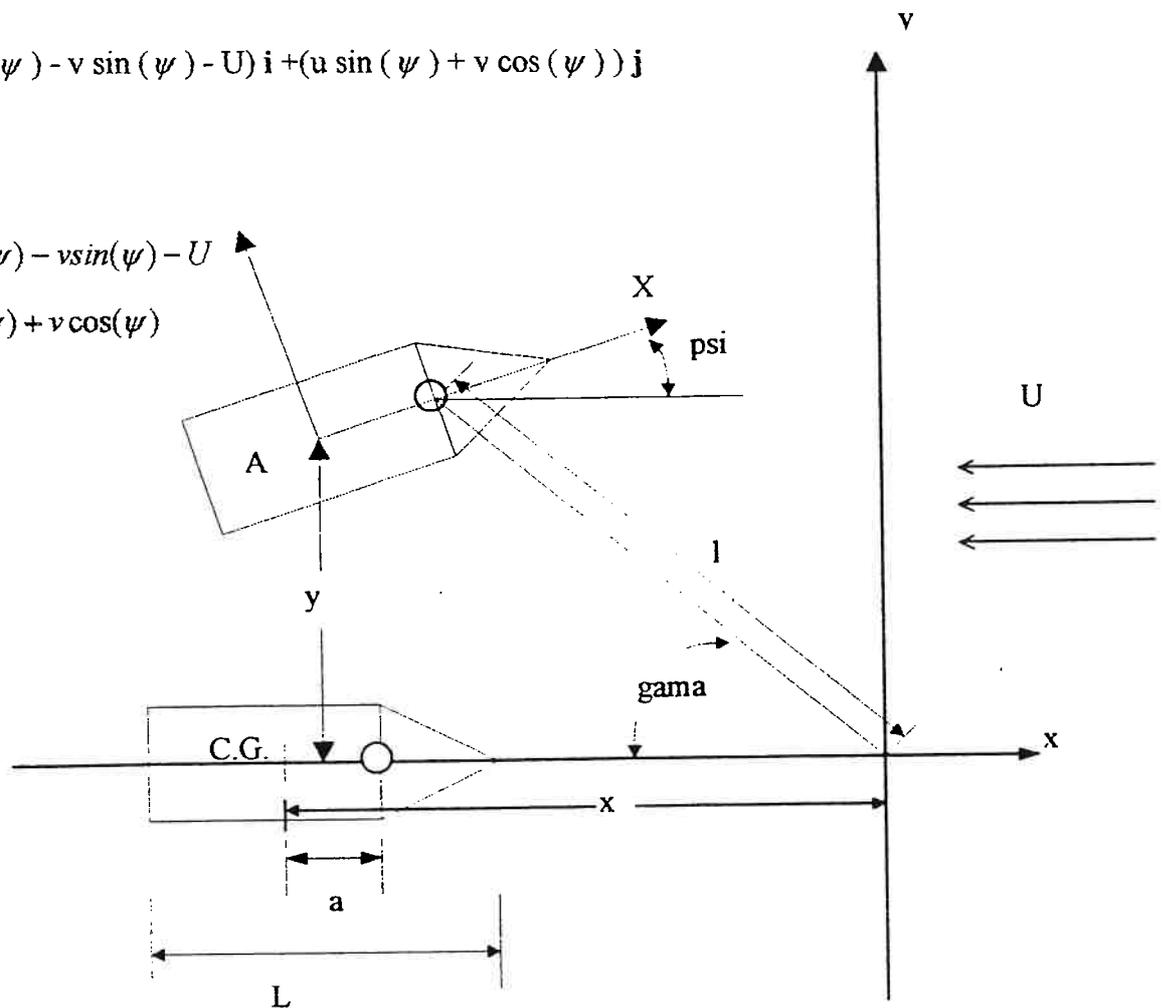
Sendo  $v$  o vetor velocidade de G, temos:

$$v = (u \cos(\psi) - v \sin(\psi) - U) i + (u \sin(\psi) + v \cos(\psi)) j$$

ou ainda,

$$\dot{x} = u \cos(\psi) - v \sin(\psi) - U$$

$$\dot{y} = u \sin(\psi) + v \cos(\psi)$$



**Figura 10: Sistemas de Coordenadas e definições gerais no caso FPSO-SPM**

Para posterior referência, também podemos escrever o inverso das equações acima (ver [Pesce, Tannuri1997]),

$$u = (\dot{x} + U) \cos(\psi) + \dot{y} \sin(\psi)$$

$$v = -(\dot{x} + U) \sin(\psi) + \dot{y} \cos(\psi)$$

Seja também, por definição,

$$r = \dot{\psi}$$

E as seguintes definições geométricas (figura 10) [Papoulias, Bernitsas1988]

$$\omega = \gamma + \psi \quad (4.1)$$

$$l^2 = (y + x_p \sin \psi)^2 + (x + x_p \cos \psi)^2 \quad (4.2)$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{l} (y + x_p \sin \psi) \quad (4.3)$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{l} (x + x_p \cos \psi) \quad (4.4)$$

Observamos que (4.1), (4.3) e (4.4) são válidas apenas para  $l \neq 0$ , sendo  $\gamma$  não definida para

$l = 0$  (ver [Pesce, Tannuri1997]).

A aceleração do centro de massa, com respeito ao sistema inercial de referências,

porém escrita nas coordenadas do navio, escreve-se  $\mathbf{a} = (\dot{u} - vr) \mathbf{I} + (\dot{v} + ur) \mathbf{J}$ .

As equações do movimento são então escritas,

$$\begin{aligned}
- M_{11} \dot{u} + M_{22} vr + T \cos \omega + X(u, v, r) &= M(\dot{u} - vr) \\
- M_{33} \dot{v} - M_{11} ur - M_{32} \dot{r} - T \sin \omega + Y(u, v, r) &= M(\dot{v} + ur) \\
- M_{33} \dot{r} - M_{32}(\dot{v} + ur) + N(u, v, r) - T x_p \sin \omega &= I_z \dot{r}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde  $X(u, v, r)$ ,  $Y(u, v, r)$  e  $N(u, v, r)$  são forças e momento hidrodinâmicos, dependentes da velocidade e atuando na estrutura da unidade flutuante,  $M$  é a massa do navio e  $M_{ij}$  é o tensor de massa adicional segundo os movimentos no plano horizontal, simétrico por construção (veja Newman, p. 140, 1974).

### 4.3 Sistemas de Amarração

Abaixo, os movimentos no plano horizontal de um navio amarrado são modelados matematicamente. Levamos em conta a dinâmica não-linear de frequências baixas e intermediárias. Apresentaremos os modelos FPSO-SPM-hawser, FPSO-SPM-turret, FPSO-SMS e FPSO-DICAS.

#### 4.3.1 Caso FPSO-SPM-hawser

No caso do sistema FPSO-SPM-hawser, a partir das equações do movimento (4.5) apresentadas no item anterior, definimos o vetor de estado

$$\mathbf{x} = (u, v, r, l, \gamma, \omega)^t \tag{4.6}$$

obtemos o sistema de seis equações diferenciais ordinárias (E.D.O's) não-lineares abaixo,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{M + M_{11}} \left( F_1(x_1, x_2, x_3) + T \cos x_6 + (M + M_{22})x_2x_3 - M_{23}x_3^2 \right) \\
\dot{x}_2 &= \frac{I_z + M_{33}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) - T \sin x_6 - (M + M_{11})x_1x_3 \right) \\
&\quad - \frac{M_{23}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - T x_p \sin x_6 \right) \\
\dot{x}_3 &= -\frac{M_{32}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) + (M + M_{11})x_1x_3 - T \sin x_6 \right) \\
&\quad + \frac{M + M_{22}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - T x_p \sin x_6 \right) \\
\dot{x}_4 &= x_2 \sin x_6 - x_1 \cos x_6 + U \cos x_5 + x_p x_3 \sin x_6 \\
\dot{x}_5 &= \frac{1}{x_4} \left( x_1 \sin x_6 + x_2 \cos x_6 - U \sin x_5 + x_p x_3 \cos x_6 \right) \\
\dot{x}_6 &= x_3 + \frac{1}{x_4} \left( x_1 \sin x_6 + x_2 \cos x_6 - U \sin x_5 + x_p x_3 \cos x_6 \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde  $D = (M + M_{22})(I_z + M_{33}) - (M_{23})^2$  e  $F_1, F_2$  e  $F_3$  são as forças hidrodinâmicas.

### 4.3.2 Caso FPSO-SPM-turret

Seguindo a notação e definições apresentadas em [Pesce, Tannuri1997], definimos um outro conjunto de variáveis de estado, apropriado para o caso turret:

$$\mathbf{x} = (u, v, r, x, y, \psi)' \tag{4.8}$$

obtendo o sistema de seis equações diferenciais ordinárias (E.D.O's) não-lineares abaixo,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{M + M_{11}} \left( F_1(x_1, x_2, x_3) + T \cos \omega + (M + M_{22})x_2x_3 - M_{23}x_3^2 \right) \\
\dot{x}_2 &= \frac{I_z + M_{33}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) - T \sin \omega - (M + M_{11})x_1x_3 \right) \\
&\quad - \frac{M_{23}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - Tx_p \sin \omega \right) \\
\dot{x}_3 &= -\frac{M_{32}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) + (M + M_{11})x_1x_3 - T \sin \omega \right) \\
&\quad + \frac{M + M_{22}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - Tx_p \sin \omega \right) \\
\dot{x}_4 &= -x_2 \sin x_6 + x_1 \cos x_6 - U \\
\dot{x}_5 &= x_1 \sin x_6 + x_2 \cos x_6 \\
\dot{x}_6 &= x_3
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sendo D definido como antes e  $\omega = \gamma + \psi$

### 4.3.3 Caso FPSO-SMS

Inicialmente apresentaremos as relações geométricas das linhas de amarração no sistema SMS. Estamos seguindo [Garza-Rios1996]. A figura 9a do capítulo 2 apresenta a geometria de um sistema SMS geral. São utilizados dois sistemas de coordenadas diferentes: i) um sistema fixado no navio (X,Y,Z) com origem no centro de gravidade do navio amarrado. Um sistema inercial (x,y,z) fixado na terra e com sua origem localizada no terminal de amarração 1, onde  $n$  é o número de linhas de amarração. As coordenadas do *fairlead* da  $i$ -ésima linha de amarração no sistema de coordenadas fixo no navio são dadas por  $(x_p^{(i)}, y_p^{(i)})$ . As posições do  $i$ -ésimo terminal de amarração são dadas por  $(x_m^{(i)}, y_m^{(i)})$  com respeito a (x,y). O comprimento horizontal da  $i$ -ésima linha, entre o ponto fixo ao navio e o ponto de amarração, é dado por  $l^{(i)}$ . Temos o sistema

de seis equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas dado pelas variáveis de

estado:  $\mathbf{x} = (u, v, r, x, y, \psi)'$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{M + M_{11}} \left( F_1(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^n (R_x^{(i)} \cos x_6 + R_y^{(i)} \sin x_6) + Mx_2x_3 + F_{surge}(x_6) \right) \\
 \dot{x}_2 &= \frac{I_z + M_{33}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^n (R_y^{(i)} \cos x_6 - R_x^{(i)} \sin x_6) - Mx_1x_3 + F_{sway}(x_6) \right) \\
 &+ \frac{M_{23}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^n ((x_p^{(i)} R_y^{(i)} - y_p^{(i)} R_x^{(i)}) \cos x_6 - (x_p^{(i)} R_x^{(i)} + y_p^{(i)} R_y^{(i)}) \sin x_6) + N_{yaw}(x_6) \right) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{M_{32}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^n (R_y^{(i)} \cos x_6 - R_x^{(i)} \sin x_6) - Mx_1x_3 + F_{sway}(x_6) \right) \\
 &+ \frac{M + M_{22}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^n ((x_p^{(i)} R_y^{(i)} - y_p^{(i)} R_x^{(i)}) \cos x_6 - (x_p^{(i)} R_x^{(i)} + y_p^{(i)} R_y^{(i)}) \sin x_6) + N_{yaw}(x_6) \right) \\
 \dot{x}_4 &= -x_2 \sin x_6 + x_1 \cos x_6 - U \\
 \dot{x}_5 &= x_1 \sin x_6 + x_2 \cos x_6 \\
 \dot{x}_6 &= x_3
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde

$F_{surge}, F_{sway}, N_{yaw}$  correspondem às forças ambientais

$F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), N_3(x_1, x_2, x_3)$  correspondem às forças hidrodinâmicas e momento.

$R_x^{(i)}, R_y^{(i)}$  são as componentes de tensão nas linhas de amarração.

#### 4.3.4 Caso FPSO-DICAS

Um sistema DICAS consiste num sistema SMS com pretensão diferenciada nas linhas de amarração. No sistema DICAS as pretensões nas linhas de amarração satisfazem uma compensação diferenciada de modo que a proa e a popa do navio acompanhem a resultante das forças atuantes no sistema. Em outras palavras, a rigidez diferenciada do sistema é utilizada para permitir ao navio se acomodar às condições ambientais,

“weather vaning”. As linhas avante do centro de gravidade do navio possuem maiores pretensões que as linhas de trás. Esta configuração acaba por restringir o movimento da proa do navio enquanto deixa a popa com uma razoável liberdade de movimentação. Um sistema DICAS, adequadamente implementado, proporciona uma opção aos *swivels* e *turrets*, reduzindo o custo de produção de sistemas baseados em navios-tanque.

#### **4.4 Modelos de Forças Hidrodinâmicas**

Com a utilização cada vez maior de navios em sistemas tipo FPSO, a indústria petrolífera mundial, em particular a Petrobrás, vem ao longo dos anos investindo no estudo da dinâmica de variadas propostas de amarração destes sistemas. Este investimento em tecnologia efetua-se por meio de intercâmbios entre empresas, convênios (“*Joint Industry Project*”/JIP), da indústria com centros internacionais de pesquisa na área de Engenharia Naval/Oceânica e também através de convênios da indústria com Universidades. A seguir veremos quatro modelos matemáticos para as forças e momento hidrodinâmicos atuando em sistemas FPSO.

##### **4.4.1 Modelo de Derivadas Hidrodinâmicas**

Uma das técnicas para o estudo da dinâmica de sistemas FPSO é a utilização de modelos matemáticos baseados no clássicos **modelos de manobra** de navios. A partir do final da década de 1960, modelos matemáticos foram propostos com a finalidade de

se estudar o comportamento de navios em manobras [Abkowitz,1964,1969], [Norbinn,1971]. Tais modelos pressupõem o movimento do navio restrito ao plano horizontal, consideram o navio desenvolvendo velocidade de projeto tendo como objetivo o estudo da estabilidade e controlabilidade da embarcação. Uma forte característica destes modelos clássicos de manobra é a utilização de expansões tipo Taylor para descrição dos esforços hidrodinâmicos atuantes sobre o sistema. Em tese, quanto maior a ordem da expansão de Taylor mais preciso seria o modelo. No entanto, em [Kijima, 1996], [Leite, 1998] e [Pesce, Tannuri1997] observamos as disparidades não só de valores mas inclusive de sinal na determinação experimental dos coeficientes associados à expansão em Série de Taylor, nesta classe de modelos. Tal como observado em [PROCAP 2000-Relatório no. 2,1999] descortinamos dois problemas em tal classe de modelos: um problema conceitual e um problema de aspecto operacional. Quanto ao problema conceitual: por não existir uma fundamentação teórica o caráter *extrapolador* e de *previsibilidade* do modelo fica prejudicado na medida em que não temos explicitada a relação de escala - através de número de Reynolds - entre a escala do modelo e a escala real. O problema operacional é facilmente realçado ao nos lembrarmos que é característica de expansões em Séries de Taylor ser sua aproximação tanto melhor quanto menores forem as variações em função dos quais se dá a expansão.

Abaixo seguem as equações do modelo de derivadas hidrodinâmicas [Abkowitz1964].

$$X_c = X_o + X_u u + X_v v + X_w w + X_\delta \delta + X_r r + X_{ru} v r u + X_{v\delta u} v \delta u + X_{r\delta u} r \delta u + \frac{1}{2}(X_{uu} u^2 + X_{vv} v^2 + X_{rr} r^2 + X_{vu} v^2 u) + \frac{1}{2}(X_{ru} r u + X_{\delta\delta} \delta^2 + X_{\delta\delta u} \delta^2 u) + \frac{1}{6} X_{uuu} u^3$$

$$\begin{aligned}
Y_c &= Y_o + Y_{ou}u + Y_{ov}v + Y_{or}r + Y_{vu}vu + Y_{ru}ru + Y_{\delta} \delta + Y_{\delta u} \delta u + Y_{v\delta}vr\delta \\
&\frac{1}{2}(Y_{ouu}u^2 + Y_{rvv}rv^2 + Y_{vrr}vr^2 + Y_{vu}u^2v) + \frac{1}{2}(Y_{ruu}ru^2 + Y_{r\delta\delta}r\delta^2 + Y_{v\delta\delta}v\delta^2) \\
&+ \frac{1}{2}(Y_{\delta v} \delta v + Y_{\delta r} \delta r^2 + Y_{\delta u} \delta u^2) \\
&+ \frac{1}{6}(Y_{uuu}u^3 + Y_{rrr}r^3 + Y_{\delta\delta\delta}\delta^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_c &= N_o + N_{ou}u + N_{ov}v + N_{v\delta}v r\delta + N_{or}r + N_{vu}v u + N_{ru}ru + N_{\delta} \delta + \\
&\frac{1}{2}(N_{ouu}u^2 + N_{rvv}rv^2 + N_{vrr}vr^2 + N_{vu}vu^2) + \frac{1}{2}(N_{\delta v} \delta v^2 + N_{\delta r} \delta r^2 + N_{\delta u} \delta u^2) \\
&\frac{1}{2}(N_{ruu}ru^2 + N_{\delta v} \delta^2v + N_{\delta r} \delta^2r) \\
&+ \frac{1}{6}(N_{vvv}v^3 + N_{rrr}r^3 + N_{\delta\delta\delta}\delta^3)
\end{aligned}$$

(4.11)

onde os subscritos "o" e "δ" representam efeitos do leme e do propulsor, respectivamente.

#### 4.4.2 Modelo Obokata

O modelo devido a [Obokata1987], baseado no *local cross flow principle* assemelha-se bastante a um modelo já desenvolvido por [Wichers1988]. Por se utilizar do *local cross flow principle* Obokata vale também para grandes valores de ângulo de incidência da corrente. Note-se que, anteriormente ao trabalho de Obokata, [Oltmann e Sharma1984] e [Pesce et al1984], em trabalhos já citados, fizeram uso do princípio local do *cross flow*. Uma das diferenças mais importantes com relação ao modelo de Wichers deve-se ao fato de Obokata calcular também a contribuição dinâmica para o cálculo da componente longitudinal das forças hidrodinâmicas.

Abaixo seguem as equações do modelo Obokata.

$$\begin{aligned}
 X_{1stat} + X_{1dyn} &= 0.5\rho T \int_{-L/2}^{L/2} [C_{1c}(\psi_{crx}) V_{crx}^2] dl \\
 X_{2stat} + X_{2dyn} &= 0.5\rho T \int_{-L/2}^{L/2} [C_{2c}(\psi_{crx}) V_{crx}^2] dl \\
 X_{6stat} + X_{6dyn} &= 0.5\rho T L^2 C_{6c}(\psi_{cr}) V_{cr}^2 + 0.5\rho T \int_{-L/2}^{L/2} [C_{2c}(\psi_{crx}) V_{crx}^2 - C_{2c}(\psi_{cr}) V_{cr}^2] dl
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Onde:

$$V_{crx} = \sqrt{u_{cr}^2 + (v_{cr} - \dot{x}_6/l)^2} \quad - \text{velocidade seccional relativa da corrente}$$

$$\psi_{crx} = \arctan\left(\frac{v_{cr} - \dot{x}_6/l}{u_{cr}}\right) \quad - \text{ângulo de incidência seccional relativa da corrente}$$

$u_{cr}$  e  $v_{cr}$  são componentes da velocidade da corrente em relação ao navio.

### 4.4.3 Modelo Takashina

Com o intuito de se estudar manobras de atracação de navios, [Takashina1986] desenvolve um modelo que, para levar em conta a situação em que o navio desenvolve movimentos de *sway* e *yaw* de grande amplitude, uma velocidade de *yaw* considerável é associada a um *surge* de baixo valor. Diferentemente dos convencionais modelos de manobras, baseados em expansões em Série de Taylor, o modelo de Takashina ajusta as curvas força x ângulo de incidência  $\theta$  (obtidas por ensaio experimental) por meio de Séries de Fourier em  $\theta$ . Dessa forma, consegue determinar os coeficientes de manobra de baixa velocidade. Dadas as semelhanças hidrodinâmicas entre a situação do navio amarrado com o navio em manobra de atracação (ângulos de deriva grandes, baixa velocidade de avanço, velocidade em *yaw* alta) seguiu-se uma idéia já proposta por [Fujino1983], pioneiro na utilização de coeficientes de manobras para cômputo das forças e momento hidrodinâmicos de sistemas SPM. O modelo de Takashina, dessa forma constitui-se num modelo para simulação de navios amarrados, sem alguns dos problemas apresentados pelo modelo de Fujino quanto ao ângulo de incidência da corrente (máxima de 45°).

Abaixo temos as equações para as forças hidrodinâmicas tal como proposto pelo modelo Takashina.

$$\begin{aligned}
F_{X,R} &= \frac{1}{2} \rho U^2 LTC_{lc}(\pi) \cos^2 \alpha_0 + \frac{1}{2} \rho L^2 TX_{vr} vr \\
F_{Y,R} &= \frac{1}{2} \rho U^2 LT[Y_v \sin \alpha + Y_{vv} \sin^3 \alpha_0 + Y_{vvvv} \sin^5 \alpha_0] + \frac{1}{2} \rho L^2 TY_{ur} ur + \\
&+ \frac{1}{2} \rho L^3 TY_{urr} \cos \alpha_0 |r| r + \frac{1}{2} \rho L^2 TY_{vr} v |r| \\
N_{Z,R} &= \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 T[N_v \sin \alpha_0 + N_{vv} \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \\
&+ N_{vvv} \sin^3 \alpha_0 + N_{vvvv} \cos \alpha_0 \sin^3 \alpha_0] + \\
&+ \frac{1}{2} \rho UL^3 TN_{r,r} + \frac{1}{2} \rho L^4 TN_{rr,r} |r| + \frac{1}{2} \rho L^4 TN_{urr} \cos \alpha_0 r |r| + \frac{1}{2} \rho L^3 TN_{vr} \sin \alpha_0 vr
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Onde:

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

Exemplos de valores das derivadas hidrodinâmicas empregados no modelo Takashina podem ser encontrados em [Fucatu&Nishimoto1998].

#### 4.4.4 Modelo de Asa Curta Heurístico

A versão de equilíbrio estático deste modelo foi proposta por [Leite1997], sob um modelo cativo para modelar as forças hidrodinâmicas estáticas atuando no casco.

Num trabalho de 1997, [Leite et al 1997], propõem um modelo hidrodinâmico heurístico para as forças e momento hidrodinâmicos atuantes no navio amarrado em SPM, no plano horizontal, devido à corrente. Este modelo também lança mão do “local cross flow principle” (nesse ponto lembrando o modelo Obokata) para calcular a parcela dinâmica das forças hidrodinâmicas. A parcela estática é calculada através de uma interpolação entre a Teoria de Asa Curta de pequena razão de aspecto (Teoria de Jones) e “cross flow drag” e introduz os coeficientes de manobra de [Clarke1983] na correção para a forma do navio do coeficiente  $C_{2c}(\alpha)$ , associado à força em *sway*. O

modelo também inclui um momento adicional devido ao efeito de *tip-vortex* (geração de vórtices nas extremidades do navio, ver figura 4.2). Além disso este é o único modelo que propõe uma correção no coeficiente de arrasto da direção longitudinal em função do número de Reynolds. Um ponto positivo do modelo Asa Curta frente aos modelos clássicos de derivadas hidrodinâmicas é o pequeno número relativo de ensaios necessários para determinar os coeficientes hidrodinâmicos. Posteriormente, [Simos2001] efetuou modificações dando maior consistência ao modelo Asa Curto Heurístico.

Abaixo temos as equações relativas às forças e momento, proposto pelo modelo Asa Curta Heurístico Estendido, tal como apresentado em [Simos2001].

### Forças Estáticas

As forças estáticas atuando no casco de um navio são escritas na forma padrão, [Leite1997], como

$$\begin{aligned}
 X_s(\alpha, V) &= \frac{1}{2} \rho \quad TLC_{1s}(\alpha) |V|^2 \\
 Y_s(\alpha, V) &= \frac{1}{2} \rho \quad TLC_{2s}(\alpha) |V|^2 \\
 N_s(\alpha, V) &= \frac{1}{2} \rho \quad TL^2 C_{6s}(\alpha) |V|^2
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

onde  $V$  é o vetor velocidade relativa e os coeficientes hidrodinâmicos são dados por:

$$\begin{aligned}
C_{1s}(\alpha) &= \left[ \frac{0.09375}{(\log(\text{Re}) - 2)^2} \frac{S}{TL} \right] \cos(\alpha) + \frac{1}{8} \frac{\pi T}{L} (\cos(3\alpha) - \cos(\alpha)) \\
C_{2s}(\alpha) &= \left[ C_r - \frac{\pi T}{2L} \right] \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| + \frac{\pi T}{2L} \sin^3(\beta) + \frac{\pi T}{L} \left[ 1 + 0.4 \frac{C_B B}{T} \right] \sin(\alpha) |\cos(\alpha)| \\
C_{6s}(\alpha) &= \frac{-l_g}{L} [C_r] \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| - \frac{\pi T}{L} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
&\quad - \left[ \frac{1 + |\cos(\beta)|}{2} \right]^2 \frac{\pi T}{L} \left[ \frac{1}{2} - 2.4 \frac{T}{L} \right] \sin(\alpha) |\cos(\alpha)|
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

As forças hidrodinâmicas, determinadas mediante o modelo heurístico de Asa Curta, dependem apenas de parâmetros geométricos do navio, do ângulo de incidência  $\alpha$  e da velocidade  $V(u,v)$ . A geometria do navio é descrita por:

- $L$  : comprimento do navio na linha d'água;
- $B$  : boca;
- $T_s$  : calado;
- $S$  : área da superfície molhada;
- $C_B$  : coeficiente de bloco.

O comprimento  $l_g$  mede a distância longitudinal entre o centro de massa do navio e a seção média. O modelo assume que o casco é simétrico com respeito à seção média.

No problema dinâmico, o valor instantâneo deste ângulo tem que ser tomado, sendo escrito em termos do ângulo de yaw  $\psi$  e as componentes da velocidade na forma,

$$\alpha = \pi + a \tan\left(\frac{v}{u}\right)$$

onde

$$U^2 = [u^2 + v^2]^{1/2}$$

## Forças Dinâmicas

As forças hidrodinâmicas serão consideradas separadas segundo dois tipos diferentes de fenômenos: aquelas forças associadas ao fenômeno de *cross flow* e aquelas relacionadas com a emissão de vórtices na proa e na popa.

Segundo [Simos2001] temos as seguintes expressões para as forças generalizadas

$$\begin{aligned}
 F_{x,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho L TC_{1s}(\alpha) U^2 + \Delta F_{x,R}(u, v, r) \\
 F_{y,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho L TC_{2s}(\alpha) U^2 + \Delta F_{y,R}(u, v, r) \\
 N_{z,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho L^2 TC_{6s}(\alpha) U^2 + \Delta N_{z,R}(u, v, r)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

com as expressões  $\Delta F_{x,R}(u, v, r)$ ,  $\Delta F_{y,R}(u, v, r)$ ,  $\Delta N_{z,R}(u, v, r)$  definidas por:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_{x,R}(u, v, r) &= -\frac{1}{4} \rho \pi T^2 L v r - \frac{1}{16} \rho \pi T^2 L^2 \cos(\alpha_a) r^2 \\
 \Delta F_{y,R}(u, v, r) &= -\frac{1}{4} \rho \pi T^2 L (1 - 4.4B/L + 0.160B/T) u r + M_{11} u r \\
 &\quad - \frac{1}{2} \rho T L [I_0(v, r) v^2 - C_y v |v|] - \rho T L^2 I_1(v, r) - \frac{1}{2} \rho T L^3 I_2(v, r) r^2 \\
 \Delta N_{z,R}(u, v, r) &= -\frac{1}{8} \rho \pi T^2 L^2 \left( 1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right) |u| r + M_{26} u r \\
 &\quad - \frac{1}{2} \rho T L^2 [I_1(v, r) v^2 + l_p C_y v |v|] - \rho T L^3 I_2(v, r) v r - \frac{1}{2} \rho T L^4 I_3(v, r) r^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \rho T L^4 \left[ \frac{C_y}{16} r |r| - I_3(0, r) r^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

com

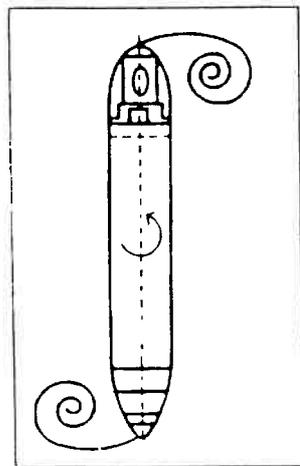
$$\alpha_a = a \tan\left(\frac{v}{u} + \frac{rL}{u}\right), \quad I_f(v, r) = \frac{1}{L^{j+1}} \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) (v + r\xi) \xi^j d\xi \quad (4.18)$$

onde

$C_D(\xi)$  : é o coeficiente de arrasto transversal para cada seção

$\xi$  : é a coordenada longitudinal da considerada seção, com respeito ao centro de massa do casco.

Por consistência, os valores de  $C_D(\xi)$  são normalizados pelo coeficiente  $C_y$  e pelo coeficiente  $I_p C_y$  num procedimento já descrito em [Simos2001].



**Figura 11: Esquema para representar os vórtices induzidos próximo à proa e popa pelo movimento de rotação do navio**

## 5 Interlúdio Matemático

### 5.1 Introdução

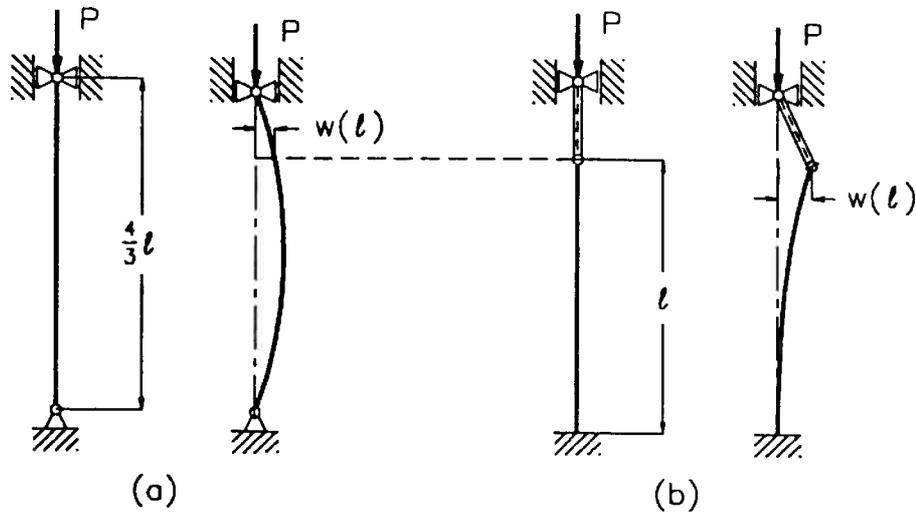
Neste Capítulo apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos e técnicas da área de Sistemas Dinâmicos os quais serão utilizados nos Capítulos 6 e 7 deste trabalho para estudar a dinâmica não-linear de Sistemas FPSO. Apresentamos três problemas de Engenharia para os quais técnicas (geométricas) mais recentes de Sistemas Dinâmicos possibilitam o estudo da estabilidade das bifurcações de equilíbrio. Na seqüência apresentamos, com exemplos, as definições de ponto de equilíbrio hiperbólico e não-hiperbólico, subespaços estável, instável e central, a noção de variedade estável, instável e central, o enunciado do Teorema de Hartman-Grobmann, a Técnica de Redução à Variedade Central de forma sucinta, a Técnica de *Integral Averaging* e a caracterização de Bifurcações de Hopf Subcríticas e Supercríticas, com exemplos.

### 5.1 Três exemplos

Consideraremos três exemplos de bifurcação de equilíbrio de sistemas dinâmicos para ilustrarmos a aplicação de técnicas de Sistemas Dinâmicos à Engenharia. O primeiro, a flexão de uma haste sob carga, para exemplificar a bifurcação estática. O segundo, o “galloping” de sistemas aero-elásticos, sistema modelado por uma equação do tipo Van der Pol, para exemplificar uma bifurcação de Hopf supercrítica. O terceiro, um vagão de trem, para exemplificar uma bifurcação de Hopf subcrítica.

a) Flambagem de uma haste

Consideremos uma haste sob compressão axial sob a carga  $P$  tal como vemos na figura 12 abaixo.

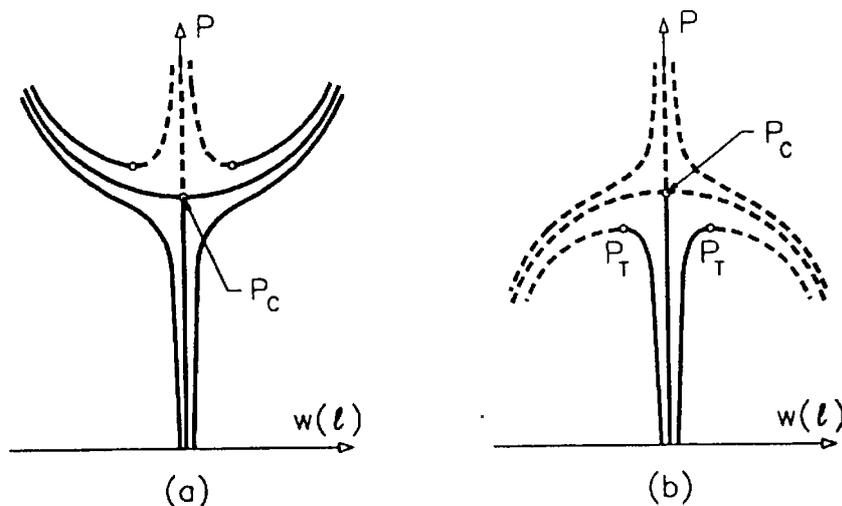


**Figura 12 Flambagem de haste sob carga  $P$ . Figura extraída de [Troger]**

O problema da flambagem de uma haste sob carga  $P$  é um problema clássico na Engenharia (ver, por exemplo, [Timoshenko, Gere]). Para as duas situações apresentadas na figura 12 existe um valor crítico  $P_c$  de carga acima do qual ocorre a perda de estabilidade da posição do equilíbrio resultando na flambagem da haste. Para a obtenção do ponto de equilíbrio em geral é suficiente o uso de técnicas restritas aos termos de primeira ordem da equação que representa o sistema sob foco. Em outras palavras, estudamos a matriz Jacobiana do sistema.

O Cenário pós-crítico, para as duas situações acima, é apresentado na figura 5.2 na forma de um gráfico  $P, w(s)$  onde  $w(s)$  representa a deflexão da haste para  $x = s$ . No primeiro caso, a haste ainda suporta cargas mesmo que para valores de carga  $P > P_c$ . Este caso é chamado *supercrítico*. Já, no segundo caso, não existe equilíbrio estável

para valores de carga  $P > P_c$ . Este caso é chamado de *subcrítico*. Assim, temos cenários pós-críticos significativamente distintos para as duas situações.

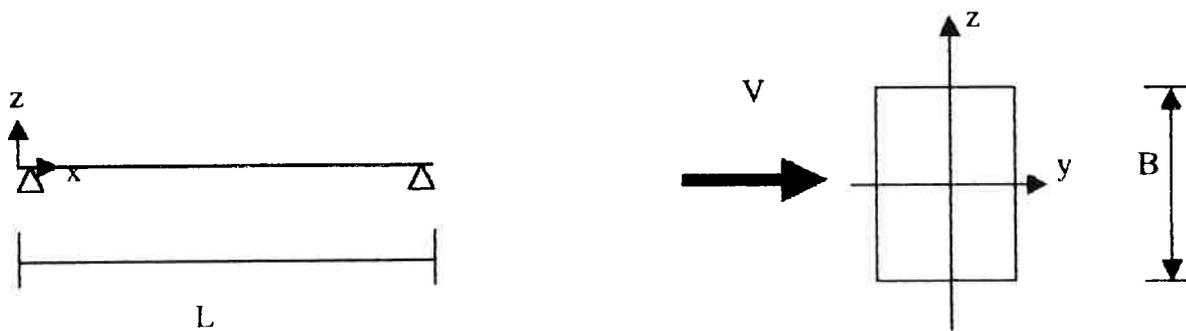


**Figura 13** Cenários pós-críticos para as hastes da figura 12

Figura extraída de [Troger]

b) Sistemas aero-elásticos com "galoping"

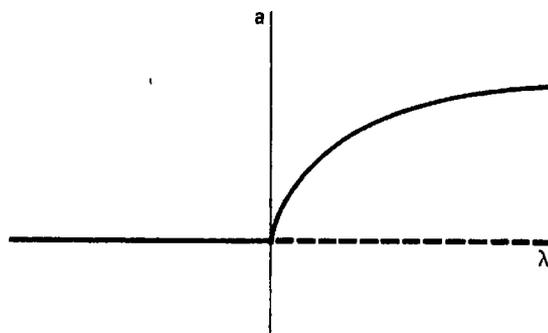
Consideremos um escoamento lateral sobre uma viga relativamente flexível tal como visto na figura 14.



**Figura 14** Interação aero-elástica para uma viga. Figura extraída de Curso Petrobrás

Supondo que a viga esteja sujeita a uma pequena perturbação, a partir de uma posição de equilíbrio e que apresente seções não delgadas e não circulares surgirão oscilações a partir de um valor crítico da velocidade do escoamento, cuja amplitude tende a

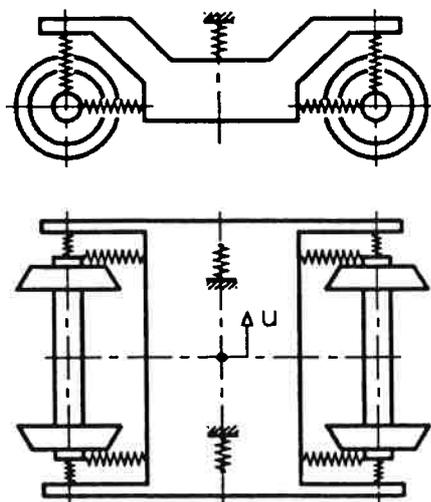
aumentar conforme aumenta sua intensidade. Esta situação de transição, de um estado estático para um ciclo-limite estável, é denominada *Bifurcação de Hopf Supercrítica* ou suave (pois a transição do estado de equilíbrio trivial para o ciclo-limite dá-se de forma contínua (figura 15).



**Figura 15 Bifurcação de Hopf Supercrítica**

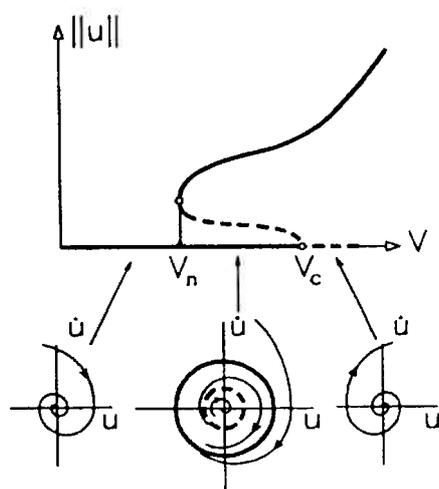
### c) 5.1.3 Vagão de Trem

Considere o movimento de um vagão ferroviário como representado na figura 16.



**Figura 16 Vagão ferroviário. Figura extraída de [Troger]**

O trabalho de [Xu, Steindl, Troger] mostra que tal sistema apresenta uma velocidade crítica  $V_C$  (determinada por considerações lineares) e uma velocidade  $V_n$  (determinada por considerações não-lineares) tais que, para  $V_n < V < V_C$ , temos um ciclo-limite instável a partir do qual o sistema tanto pode migrar para um novo ciclo-limite estável de amplitude superior, quanto para o estado de equilíbrio trivial. Na prática, a velocidade de bifurcação será  $V_n$  e não  $V_C$ . Esta situação é denominada *Bifurcação de Hopf Subcrítica* ou *catastrófica* (pois a transição do estado de equilíbrio trivial para os ciclos-limite dá-se de forma súbita).



**Figura 17: Bifurcação de Hopf Subcrítica. Figura extraída de [Troger]**

### 5.3 Análise Linear e Espaços Estável, Instável e Central

Qualquer dos sistemas apresentados na seção anterior pode ser escrito na forma de Cauchy:

$$\dot{x} = F(x), \quad F \in C^1, \quad F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (5.1)$$

com  $x \in \mathfrak{R}^n$ , onde  $n$  indica a dimensão do espaço de estado do sistema e  $C^1$  denota o conjunto das funções contínuas com primeira derivada contínua. Nestas condições, podemos garantir a existência e unicidade das soluções de (5.1).

Define-se  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  como ponto de equilíbrio de (5.1) se e somente se

$$F(\bar{x}) = 0 \quad (5.2)$$

Para analisarmos o comportamento local do sistema (5.1), próximo ao ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , estudaremos, num primeiro momento, o sistema linearizado aplicado ao ponto de equilíbrio:

$$\dot{y} = Jy, \quad y \in \mathfrak{R}^n, \quad J \in M^6 \quad (5.3)$$

com

$y(t) = x(t) - \bar{x}$ , um pequeno desvio do ponto de equilíbrio

$J = DF(\bar{x})$ , a matriz jacobiana do sistema (5.1)

$M^6$ , o espaço das matrizes 6x6 definidas em  $\mathfrak{R}$

A solução do sistema (5.3) passando pelo ponto  $\bar{x}$ , em  $t = 0$ , pode ser escrita na forma

$$y(t) = e^{DF(\bar{x})t} y_0 \quad (5.4)$$

Tal análise se dá em relação ao sinal da parte real dos autovalores da matriz  $J$  aplicada ao ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ . Dos teoremas de Lyapunov segue que:

- i)  $\bar{x}$  é assintoticamente estável se todos os autovalores de  $J$  possuírem parte real negativa;
- ii)  $\bar{x}$  é instável se ao menos um dos autovalores de  $J$  possuir parte real positiva;

O campo vetorial linear  $e^{DF(\bar{x})t} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  pode ser visto como o conjunto de todas as soluções de (5.1). Neste conjunto, desempenham papel particularmente importante as soluções definidas nos subespaços lineares gerados pelos autovetores  $v_j$  da matriz  $J = DF(\bar{x})$ . Tais subespaços são invariantes sob  $e^{DF(\bar{x})t}$  (ou seja, se  $v_1$  é um autovetor da matriz  $J$ , então uma solução que passa por  $cv_1 \in \mathfrak{R}^n$  permanecerá no espaço gerado por  $\{v_1\}$  para todo tempo). Podemos dividir os subespaços gerados pelos autovetores em três classes:

$$\text{Um subespaço estável } E^s = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$\text{Um subespaço instável } E^u = \{v_{s+1}, \dots, v_{s+u}\}$$

$$\text{Um subespaço central } E^c = \{v_{s+u+1}, \dots, v_{s+u+c}\}$$

onde:

$\{v_1, \dots, v_n\}$  são os autovetores correspondentes aos autovalores de  $J$  com parte real negativa,

$\{v_{s+1}, \dots, v_{s+u}\}$  são aqueles correspondentes aos autovalores de  $J$  com parte real positiva e  $\{v_{s+u+1}, \dots, v_{s+u+c}\}$  são os autovetores de  $J$  associados aos autovalores de  $J$  com parte real nula. A título de ilustração consideremos os exemplos abaixo.

a) Considere um sistema de equações diferenciais lineares cuja matriz jacobiana diagonalizada seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Observe as variedades estável e central na Figura 18 abaixo.

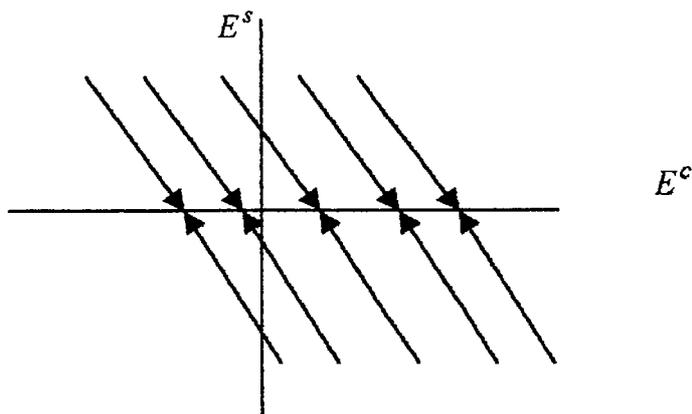
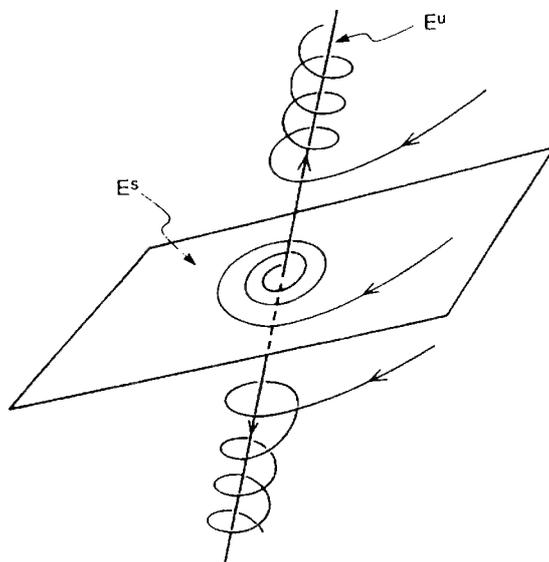


Figura 18: Espaços estável e central para (5.5)

b) Considere um sistema de equações diferenciais lineares cuja matriz jacobiana diagonalizada seja:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

com um par de autovalores complexos conjugados  $\alpha \pm i\beta$ , tais que  $\alpha < 0, \beta \neq 0$  e com um autovalor real  $\lambda > 0$ . Veja, na figura 19 abaixo, os espaço estável (no plano) e instável.



**Figura 19 Espaços estável e central para a jacobiana (5.6)**

**Figura extraída de [Wiggins]**

Para sistemas não-lineares temos resultados análogos. Considere o sistema (5.1) com o campo  $F$  de classe de diferenciabilidade  $C^r, r \geq 2$ . Após termos trasladado o sistema para a origem fazendo  $y = x - \bar{x}$ , podemos expandir em Série de Taylor a função  $F$  em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ :

$$\dot{y} = DF(\bar{x})y + R(y), \quad y \in \mathfrak{R}^n \quad (5.7)$$

onde  $R(y) = O(\|y\|^2)$ . Da álgebra linear, podemos encontrar uma transformação linear  $T$  que leva a parte linear de (5.7) numa matriz diagonal em blocos:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \\ \dot{v} \\ v \\ \dot{w} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde  $T^{-1}y = (u, v, w) \in \mathfrak{R}^s \times \mathfrak{R}^u \times \mathfrak{R}^c, s + u + c = n$ ,  $A_s$  é uma matriz com seus autovalores com parte real negativa,  $A_u$  é uma matriz com seus autovalores com parte

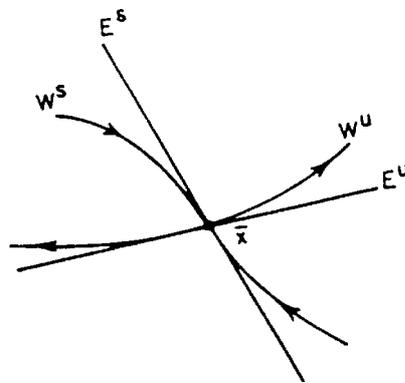
real positiva e  $A_c$  uma matriz com seus autovalores com parte real nula. Usando esta mesma transformação linear escrevemos (5.7) na forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w) \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde  $R_s(u, v, w)$ ,  $R_u(u, v, w)$  e  $R_c(u, v, w)$  são as primeiras s, u e c componentes do vetor  $T^{-1}R(T(u, v, w))$ .

Associadas a cada um dos subespaços lineares estável, instável e central teremos, respectivamente, as *Variedade Estável Local*, *Variedade Instável Local* e *Variedade Central Local*, respectivamente. Cada uma dessas variedades é tangente ao subespaço linear a ela associado e podem ser representadas localmente em torno do ponto de equilíbrio como gráficos.

Observe a figura abaixo



**Figura 20** As variedades estável e instável

Definimos o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  do sistema (5.1) como *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz  $J$  possuírem parte real não-nula. Definimos o ponto de equilíbrio

$\bar{x}$  do sistema (5.1) como não-hiperbólico se ao menos um dos autovalores possuir parte real nula.

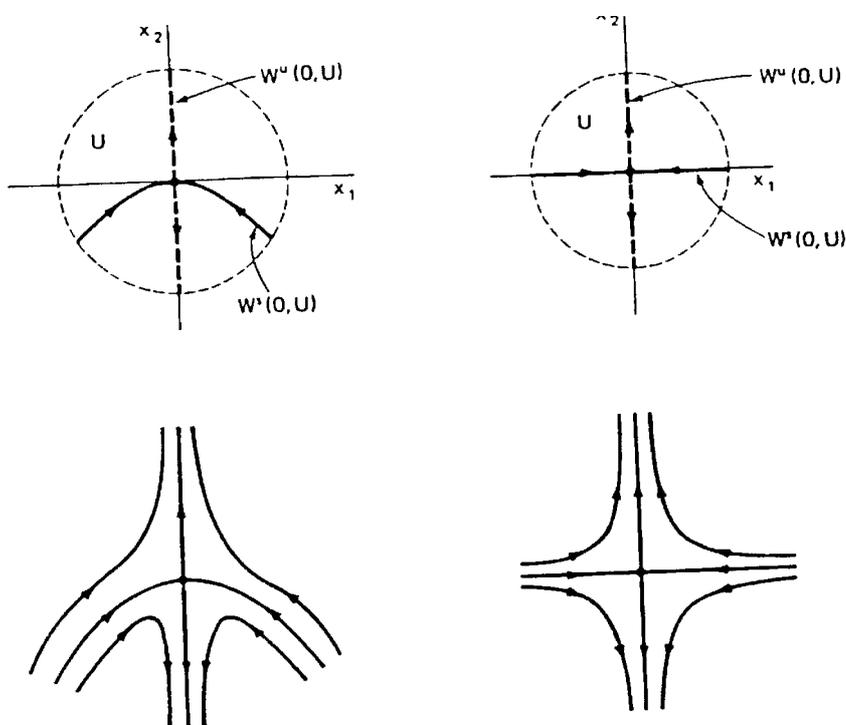
O Teorema de Hartman-Grobman [Guckenheimer&Holmes] garante-nos que sempre que o ponto de equilíbrio do sistema linearizado (5.3) for hiperbólico existe uma transformação contínua inversível (ou seja, um homeomorfismo) definida numa vizinhança  $U \in \mathbb{R}^n$  do ponto de equilíbrio, entre o sistema linearizado (5.3) e o sistema original não-linear (5.1). O resultado desse teorema diz-nos que, para estudarmos a estabilidade local dos pontos de equilíbrio hiperbólicos de um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares, é suficiente considerarmos os sinais da parte real dos autovalores do sistema linearizado a partir do sistema original.

Este teorema afirma que, para um ponto fixo hiperbólico  $\bar{x}$  de (5.1), existem variedades locais estável e instável, de dimensões  $n_s$  e  $n_u$ , as mesmas que as dos espaços  $E^s$  e  $E^u$ , tangentes aos auto-espacos  $E^s$  e  $E^u$  e com a mesma classe de diferenciabilidade que a da função  $F$ .

A título de ilustração para o Teorema de Hartman-Grobman consideremos o sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$\begin{cases} \bullet \\ x = -x \\ \bullet \\ y = y + x^2 \end{cases} \quad (5.10)$$

Na figura 21 podemos observar as variedades estável e instável de (5.10) e os correspondentes espaços lineares.



**Figura 21** Variedades estável e instável para (5.10). Linearização para (5.10) próxima da origem. Figura extraída de [Hale/Koçak].

Define-se o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de (5.1) como *não-hiperbólico* quando ao menos um dos auto-valores do sistema (5.3) possuir parte real nula. No caso de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, a técnica de estudar o sistema linearizado (5.3), com o fim de obter informações a respeito do sistema não-linear (5.1), falha e outras técnicas devem ser utilizadas (ver Apêndice I “Da necessidade de técnicas mais refinadas para estudar a dinâmica de sistemas FPSO em  $E^c$ ” para exemplo de quando a linearização não é suficiente para estudarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio).

Também temos o **Teorema das Variedades Estável, Instável e Central para um ponto fixo** [Wiggins]. Este teorema afirma que um ponto fixo na origem do sistema (5.7) possui uma variedade estável local  $W_{loc}^s(0)$  de dimensão  $s$  e classe de diferenciabilidade  $C^r, r \geq 2$ , uma variedade instável local  $W_{loc}^u(0)$  de dimensão  $u$  e classe de diferenciabilidade  $C^r, r \geq 2$  e uma variedade central  $W_{loc}^c(0)$  de dimensão  $c$  e

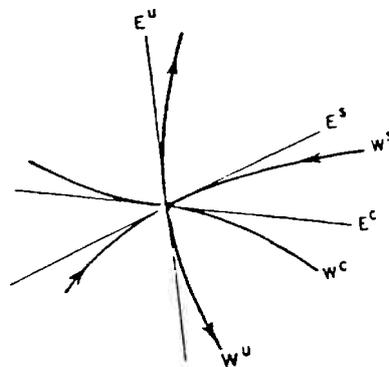
classe de diferenciabilidade  $C^{r-1}$ ,  $r \geq 2$ . Estas variedades são todas tangentes às respectivas variedades invariantes do campo linearizado associado e localmente representáveis como gráficos:

$$\begin{aligned}
 W_{loc}^s(\bar{x}) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathfrak{R}^s \times \mathfrak{R}^u \times \mathfrak{R}^c \mid v = h_v^s(u), w = h_w^s(u), Dh_v^s(\bar{x}) = 0, Dh_w^s(\bar{x}) = 0, |u| < \varepsilon \right\} \\
 W_{loc}^u(\bar{x}) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathfrak{R}^s \times \mathfrak{R}^u \times \mathfrak{R}^c \mid u = h_u^u(v), w = h_w^u(v), Dh_u^u(\bar{x}) = 0, Dh_w^u(\bar{x}) = 0, |v| < \varepsilon \right\} \\
 W_{loc}^c(\bar{x}) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathfrak{R}^s \times \mathfrak{R}^u \times \mathfrak{R}^c \mid u = h_u^c(w), v = h_v^c(w), Dh_u^c(\bar{x}) = 0, Dh_v^c(\bar{x}) = 0, |w| < \varepsilon \right\}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Acima,  $h_v^s(u), h_w^s(u), h_u^u(v), h_w^u(v)$  e  $h_u^c(w), h_v^c(w)$  são, respectivamente, funções de classe de diferenciabilidade  $C^r$  e  $C^{r-1}$ , cujos gráficos definem localmente as Variedades Estável, Instável e Central. Além disso, as variedades  $W_{loc}^s(\bar{x})$  e  $W_{loc}^u(\bar{x})$  possuem as propriedades assintóticas das variedades  $E^s$  e  $E^u$  respectivamente.

Na figura 22 exemplificamos os espaços estável, instável e central e as Variedades Estável, Instável e Central.



**Figura 22 Variedades Estável, Instável e Central. [Guckenheimer/Holmes]**

## 5.4 A Técnica de Redução à Variedade Central: uma Técnica para Simplificação de Sistemas Dinâmicos

Nesta seção apresentamos os principais resultados associados com a técnica da Variedade Central. O leitor interessado em maiores detalhes matemáticos pode consultar o Apêndice III “A Técnica de Redução à Variedade Central: Motivação, Teoremas, Algoritmo e Exemplos” ou os textos clássicos [Arrowsmith/Place], [Glendenning], [Hale/Koçak], [Guckenheimer/Holmes], [Rasband] ou [Wiggins] para uma abordagem do ponto de vista matemático ou [Troger], para uma abordagem um pouco mais próxima do ponto de vista da Engenharia.

Podemos compreender a importância da Técnica de Redução à Variedade Central no estudo qualitativo da Bifurcação de pontos de equilíbrio observando-a sob diferentes ângulos:

- é uma técnica de simplificação de Sistemas Dinâmicos: quando falamos na simplificação de um Sistema Dinâmico podemos compreender essa simplificação ao menos de dois modos: seja no sentido da redução da dimensionalidade do sistema de equações seja no sentido da eliminação do maior número possível de termos não lineares do sistema. Podemos expressar este último sentido de simplificação como um “desacoplamento” daquelas variáveis do sistema que a ele são passíveis de tal;
- a generalidade da técnica: a técnica de Redução à Variedade Central consiste numa das técnicas para estudo da estabilidade de bifurcação de pontos de equilíbrio de sistemas Dinâmicos com um campo de aplicações bastante amplo: aplica-se a equações diferenciais ordinárias, equações a derivadas parciais, equações funcionais e tanto a problemas de Bifurcação Estática

Estática quanto a problemas de Bifurcação Dinâmica. Neste último aspecto temos um forte contraponto com a Técnica de Lyapunov-Schimidt pois esta última pode ser utilizada apenas para o estudo qualitativo de problemas de Bifurcação Estática;

- o enfoque geométrico: a Técnica de Redução à Variedade Central também destaca-se pelo seu forte apelo geométrico:
  - (i) a simplificação no sentido de diminuir a dimensionalidade do sistema dinâmico por si só facilita a compreensão do comportamento do sistema, proporcionando o estudo analítico do cenário pós-crítico (localmente);
  - (ii) a Variedade Central é um espaço invariante tangente ao espaço que contém os autovetores correspondentes aos autovalores com parte real nula do campo de vetores linearizado; a formalização matemática desta invariância encontra-se no Teorema II do Apêndice 3 “O Teorema da Variedade Central, motivação, exemplos e aplicações.
- O aspecto da convergência das soluções do sistema reduzido: pelo Teorema do supracitado Apêndice 3 observamos que a convergência das soluções do sistema reduzido àquelas do sistema não-reduzido dá-se exponencialmente no tempo, para  $t$  tendendo ao infinito;
- Comparando com o Teorema de Hartmann-Grobmann: este último é utilizado para estudar o comportamento local de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Já a Técnica de Redução à Variedade Central aplica-se ao estudo de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos (parte real de algum dos autovalores nula);
- O aspecto local da Técnica: a Técnica de Redução à Variedade Central é uma técnica que resulta em informações de caráter local próximo ao ponto de

equilíbrio, através de uma mudança de coordenadas válida no entorno deste ponto de equilíbrio<sup>1</sup>;

- Por último, mas não menos importante, temos o caráter de método perturbativo da Técnica de Redução à Variedade Central. Ao fim e ao cabo, o Teorema III do Apêndice 3 fornece-nos um algoritmo (perturbativo) para construirmos a mudança de coordenadas que simplificará o sistema localmente próximo ao ponto de equilíbrio. Na construção deste algoritmo o leitor pode observar que utilizamos o caráter de invariância da Variedade Central, o aspecto geométrico (espaço tangente, autovetores associados aos autovalores com parte real nula, etc), a redução da dimensionalidade do sistema, o desacoplamento das variáveis, a natureza local do método e sua característica de utilizar a expansão em Série de Taylor das equações constitutivas do sistema;
- Em síntese existe todo um arcabouço teórico consubstanciado através de teoremas de grande abrangência que dá subsídios fundamentais à aplicação da técnica, permitindo um grau de compreensão físico-matemática do problema bastante acentuado.

A seguir apresentamos, de forma bastante sucinta, a técnica de Redução à Variedade Central. Considere, por simplicidade da notação, um sistema de equações diferenciais ordinárias para o qual não há a presença de autovalores com parte real positiva. Assim as equações deste sistema podem ser escritas na forma:

---

<sup>1</sup> Sob a hipótese de Bifurcação de Hopf, mesmo sistemas que apresentam termos quadráticos podem, através de transformações algébricas convenientes, serem transformados em sistemas com termos ímpares (ver Apêndice 2)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= -By + g(x, y)\end{aligned}\tag{5.11}$$

onde os autovalores de A possuem parte real nula, os autovalores de B possuem parte real positiva e as funções f e g são funções que denotam os termos não-lineares de (5.11). As funções f e g são tais que  $f(0,0)=0$ ,  $g(0,0)=0$  e suas primeiras derivadas com respeito a x e y também ficam nulas na origem.

Como a Variedade Central  $W^c$  é tangente ao espaço linear  $E^c$ , associado aos autovalores cuja parte real é nula, pode ser representada como um gráfico nas coordenadas na Variedade Central:

$$W^c = \{(x, y) \mid y = h(x), h(0) = 0, Dh(0) = 0\}\tag{5.12}$$

Na expressão acima a condição  $h(0) = 0$  significa que a variedade central passa pelo ponto de equilíbrio. Já a segunda condição  $Dh(0) = 0$  (onde Dh é a matriz jacobiana de h) significa que a variedade central  $W^c$  é tangente a  $E^c$ .

De (5.12) podemos escrever

$$\dot{x} = Ax + f(x, g(x))\tag{5.13}$$

Como, na Variedade Central vale que  $y = h(x)$ , próximo ao ponto de equilíbrio, teremos que:

$$\dot{y} = Dh(x) \dot{x}\tag{5.14}$$

Substituído (5.13) em (5.14), teremos a equação:

$$\dot{y} = Dh(x)[Ax + f(x, h(x))]\tag{5.15}$$

Por outro lado, (5.11) implica que:

$$\dot{y} = -Bh(x) + g(x, h(x))\tag{5.16}$$

De (5.15) e (5.16) obtemos a equação

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] = -Bh(x) + g(x, h(x)) \quad (5.17)$$

com  $h(0) = 0$  e  $Dh(0) = 0$ .

No entanto, resolver (5.17) é tanto ou até mesmo mais difícil do que resolver o sistema original (5.11). Em nosso auxílio vem o terceiro de três teoremas demonstrados por [Carr], em 1981, sobre Variedade Central. Os dois primeiros teoremas garantem a existência da Variedade Central e que o sistema (5.11) e o sistema reduzido (5.13) possuem, essencialmente, a mesma dinâmica próximo ao ponto de equilíbrio não-hiperbólico. Por sua vez, o terceiro teorema afirma que  $h(x)$  pode ser aproximada por um função polinomial  $\phi(x)$  de tal forma que, a graus maiores do polinômio  $\phi(x)$  corresponderão valores menores de  $|h(x) - \phi(x)|$ . Dessa forma, podemos determinar os coeficientes de  $h(x)$  efetuando a expansão em Série de Taylor de ambos os lados de (5.17), igualando os termos de mesma potência. Nisto consiste a operacionalização algébrica relativa à Técnica de Redução à Variedade Central.

Neste ponto acreditamos ser relevante efetuarmos uma breve comparação entre algumas técnicas de perturbação para o estudo de sistemas dinâmicos quando confrontadas com a técnica de Redução à Variedade Central. A principal referência sugerida neste ponto é [Rand/Ambruster].

(a) Comparando com a Técnica de Lyapunov-Schmidt

De modo análogo ao da Técnica de Redução à Variedade Central, a Técnica de Perturbação de Lyapunov-Schmidt permite a redução da dimensionalidade de um sistema de equações diferenciais ordinárias, equações a derivadas parciais ou equações íntegro-diferenciais, reescrevendo o sistema original de forma mais simples. A grande distinção aqui se faz no sentido que a Técnica de Lyapunov-Schmidt não se aplica a

problemas de Bifurcação Dinâmica, restringido-se apenas aos casos de Bifurcação Estática.

(b) Comparando com a Técnica de Escalas Múltiplas (*multiple scales*)

A técnica conhecida como *multiple scales* permite tanto obter-se uma aproximação da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, quanto estudar a estabilidade dessa solução aproximada. Segundo esta técnica observa-se que a aproximação ao ciclo-limite ocorre numa escala de tempo diferente daquela do próprio ciclo-limite. Dois aspectos que distinguem a técnica de *multiple scales* da técnica de Redução à Variedade Central são: (a) *multiple scales* não lança mão dos aspectos geométricos do sistema de equações diferenciais; (b) *multiple scales* não efetua a redução da dimensionalidade do sistema de equações diferenciais. Por sua vez, a Técnica de Escalas Múltiplas possui um apelo físico bastante acentuado, pois se utiliza de observações fenomenológicas para identificar, *a priori*, as diversas escalas presentes.

## 6. A Bifurcação Estática para Sistemas FPSO-SPM

### 6.1 Introdução

Neste capítulo aplicamos a Técnica de Redução à Variedade Central ao estudo de Bifurcações Estáticas em Sistemas FPSO-SPM *turret* e *hawser*. No primeiro caso será utilizado o modelo de derivadas hidrodinâmicas para as forças hidrodinâmicas. Já no caso SPM-hawser utilizamos o modelo Asa Curta Heurístico. Em cada uma dessas situações obtemos, via Redução à Variedade Central, os diagramas de Bifurcação Estática.

### 6.2 O Caso FPSO-SPM-turret

Nesta seção aplicamos a Técnica de Redução à Variedade Central a sistemas FPSO-SPM-*turret*, sob o modelo de Derivadas Hidrodinâmicas. Consideremos o sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias (4.9), definido no Capítulo 4:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{M + M_{11}} \left( F_1(x_1, x_2, x_3) + T \cos \omega + (M + M_{22})x_2x_3 - M_{23}x_3^2 \right) \\
 \dot{x}_2 &= \frac{I_z + M_{33}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) - T \sin \omega - (M + M_{11})x_1x_3 \right) \\
 &\quad - \frac{M_{23}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - Tx_p \sin \omega \right) \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{M_{32}}{D} \left( F_2(x_1, x_2, x_3) + (M + M_{11})x_1x_3 - Tx_p \sin \omega \right) \\
 &\quad + \frac{M + M_{22}}{D} \left( F_3(x_1, x_2, x_3) - M_{23}x_1x_3 - Tx_p \sin \omega \right) \\
 \dot{x}_4 &= -x_2 \sin x_6 + x_1 \cos x_6 - U \\
 \dot{x}_5 &= x_1 \sin x_6 + x_2 \cos x_6 \\
 \dot{x}_6 &= x_3
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde,  $D$  é dado por  $D = (M + M_{22})(I_z + M_{33}) - (M_{23})^2$ ,  $\omega = \gamma + \psi$

e as forças hidrodinâmicas,  $F_1(u, v, r)$ ,  $F_2(u, v, r)$ ,  $F_3(u, v, r)$ , são dadas por

$$\begin{aligned}
F_1(u, v, r) &= X_o + X_u u + X_{vr} vr + X_{vru} vru + \\
&+ \frac{1}{2} (X_{uu} u^2 + X_{vv} v^2 + X_{rr} r^2 + X_{vvu} v^2 u) + \\
&+ \frac{1}{2} (X_{rru} r^2 u) + \frac{1}{6} X_{uuu} u^3
\end{aligned} \tag{6.2a}$$

$$\begin{aligned}
F_2(u, v, r) &= Y_o + Y_{ou} u + Y_v v + Y_r r + Y_{vu} vu + Y_{ru} ru + \\
&+ \frac{1}{2} (Y_{uu} u^2 + Y_{vv} v^2 + Y_{rr} r^2 + Y_{uvv} u^2 v) + \frac{1}{2} (Y_{ruu} ru^2) + \\
&+ \frac{1}{6} (Y_{uuu} u^3 + Y_{rrr} r^3)
\end{aligned} \tag{6.2b}$$

$$\begin{aligned}
F_3(u, v, r) &= N_o + N_{ou} u + N_v v + N_r r + N_{vu} vu + N_{ru} ru + \\
&+ \frac{1}{2} (N_{ouu} u^2 + N_{vv} v^2 + N_{rr} r^2 + N_{vu} vu^2) + \frac{1}{2} (N_{ruu} ru^2) + \\
&+ \frac{1}{6} (N_{vvv} v^3 + N_{rrr} r^3)
\end{aligned} \tag{6.2c}$$

Esse sistema pode ser denotado na forma

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1, \quad f: \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^6 \tag{6.3}$$

onde  $\mathfrak{R}^6$  denota o espaço euclidiano de seis dimensões e  $C^1$  o conjunto das funções contínuas com primeira derivada contínua, definidas na reta. Nestas condições podemos garantir a existência e unicidade das soluções de (6.1).

Desenvolveremos a análise de estabilidade e o estudo de bifurcações do sistema acima em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (U, 0, 0, x_e, 0, 0) = A$ . Onde

$$x_e = - \frac{(X_u U + K x_{pc})}{K} \tag{6.4}$$

lembrando que  $K$  designa a constante de restauração do sistema de amarração do *Turret*.

O ponto de equilíbrio  $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}) = (U, 0, 0, x_e, 0, 0) \in \mathfrak{R}^6$  será doravante denotado por  $A$ . É possível encontrarmos outras soluções como pontos de equilíbrio de

(6.1). Tais soluções serão denotadas por B e B' e serão simétricas em relação ao eixo Ox.

Escolhemos como "parâmetro de suspensão" a posição do *turret* com relação a meia-nau, denotado por  $x_p$ . A técnica de "suspensão" consiste em se acrescentar um parâmetro sendo uma variável de estado adicional ao sistema original de equações diferenciais sob estudo, de modo que esta nova variável seja, na verdade, constante no tempo. Ou seja, o sistema ficará na forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} &= F(x, x_7) \\ \dot{x}_7 &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde denotamos  $x_p = x_7$  e a expressão superior na fórmula (6.5) representa a fórmula original do sistema (6.1).

A seguir efetuamos a translação para a origem fazendo uso das transformações:

$$y_1 = x_1 - U, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - x_e, y_5 = x_5, y_6 = x_6, y_7 = x_7 - x_{pc} \quad (6.6)$$

Efetuamos então a expansão em Série de Taylor do sistema (6.1), munido das expressões (6.2), para as forças hidrodinâmicas, obtendo a matriz jacobiana na forma:

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_7 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & 0 & c_5 & c_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Onde as expressões para os coeficientes são dadas abaixo:

$$a_1 = \frac{1}{M + M_{11}}(X_u), \quad a_4 = \frac{1}{M + M_{11}} \left( \frac{K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2}}{x_e + x_{pc}} \right), \quad a_7 = \frac{1}{M + M_{11}} \left( \frac{K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2}}{x_e + x_{pc}} \right)$$

$$b_2 = \frac{(I_z + M_{22})Y_v - M_{26}N_v}{D}, \quad b_3 = \frac{(I_z + M_{22})Y_r - (M + M_{11})U - M_{26}(N_r - M_{26}U)}{D},$$

$$b_5 = \frac{-(I_z + M_{22})K + M_{26}Kx_{pc}}{D}$$

$$b_6 = \frac{-(I_z + M_{22})K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2} \left( 1 + \frac{x_{pc}}{\sqrt{(x_e + x_{pc})^2}} \right) + M_{26}Kx_{pc} \left( 1 + \frac{x_{pc}}{\sqrt{(x_e + x_{pc})^2}} \right)}{D}$$

$$c_2 = \frac{(M + M_{22})N_v - M_{26}Y_v}{D}, \quad c_3 = \frac{(M + M_{22})(N_r - M_{26}U) - M_{26}(Y_r - (M + M_{11})U)}{D},$$

$$c_5 = \frac{-(M + M_{22})K + M_{26}Kx_{pc}}{D}$$

$$c_6 = \frac{-(M + M_{22})K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2} \left( 1 + \frac{x_{pc}}{\sqrt{(x_e + x_{pc})^2}} \right) + M_{26} \sqrt{(x_e + x_{pc})^2} Kx_{pc} \left( 1 + \frac{x_{pc}}{\sqrt{(x_e + x_{pc})^2}} \right)}{D}$$

Uma vez que  $\frac{K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2}}{x_e + x_{pc}} = \pm K$  por simplicidade de notação denotaremos o

termo  $\frac{K \sqrt{(x_e + x_{pc})^2}}{x_e + x_{pc}}$  por  $\pm K$ .

Ressaltamos ainda que os coeficientes  $a_1 = \frac{1}{M + M_{11}}(X_u)$  e  $a_4 = \frac{1}{M + M_{11}} \pm K$ , que representam a dinâmica em *surge*, indicam respectivamente, a derivada da força hidrodinâmica em *surge* com respeito a  $u$  e a respectiva restauração em *surge*.

Algumas informações podem ser obtidas da matriz Jacobiana acima.

O fato de determinada posição da matriz ser não-nula indica um acoplamento entre as variáveis associadas pelos índices de linha e coluna desta posição da matriz. Assim, podemos concluir que há um "desacoplamento" entre três conjuntos de variáveis: o primeiro conjunto, dado pelas variáveis  $y_1$  e  $y_4$ , o segundo pelas variáveis  $y_2, y_3, y_5$  e

$y_6$  e o terceiro dado apenas pela variável  $y_7$ . Para tanto, observemos que a linha 1 possui como posições não-nulas as posições  $j_{11}, j_{14}$  e  $j_{17}$ . A linha 4 possui como posição não-nula apenas a posição  $j_{14} = 1$ . Já a linha 7 (correspondente à variável  $y_7 = x_7 - x_{pc} = x_p - x_{pc}$ ) apresenta todas as suas posições nulas, ou seja, esta variável está desacoplada do restante do sistema. O fato da linha 7 apresentar todas as suas posições nulas indica que a variável apresenta valor constante ao longo do tempo. Ou, em outros termos, (e consistentemente) a posição do *turret* no navio é um parâmetro que não varia no tempo. Ao observarmos, de modo análogo, as colunas 1, 4 e 7, veremos que apenas a posição  $j_{41}$  é não-nula (além daquelas mencionadas acima). Podemos, então, concluir que as variáveis  $y_1$  e  $y_4$  estão acopladas entre si e desacopladas do restante do sistema. Lembremos ainda o significado físico das variáveis  $y_1$  e  $y_4$ . A variável  $y_1$  está associada à posição em *surge* e a variável  $y_4$  está associada à velocidade em *surge*. Ou seja, temos, como esperado, em virtude da simetria do problema, o desacoplamento entre a dinâmica em *surge* (variáveis  $y_1$  e  $y_4$ ) e a dinâmica em *sway* e *yaw* (variáveis  $y_2, y_3, y_5$  e  $y_6$ ).

O polinômio característico da matriz Jacobiana  $J$  é dado por:

$$p(x) = x(a_4 - x^2 + xa_1)(-x^4 + (c_3 + b_2)x^3 + (b_5 + c_6 + c_2b_3 - b_2c_3)x^2 + (c_5U + c_5b_3 + c_2b_6 - b_5c_3 - b_2c_6)x + b_5Uc_2 - c_5Ub_2 + c_5b_6 - b_5c_6) \quad (6.8)$$

Neste ponto chamamos atenção para o significado físico da fatoração do polinômio característico de  $J$ . Esta fatoração está diretamente associada ao desacoplamento da dinâmica do sistema nas direções *surge* (variáveis  $y_1$  e  $y_4$ ) e *sway* e *yaw* (variáveis  $y_2, y_3, y_5$  e  $y_6$ ).

O zero do polinômio característico leva ao auto-valor nulo:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(a_4 - x^2 + xa_1)(-x^4 + (c_3 + b_2)x^3 + (b_5 + c_6 + c_2b_3 - b_2c_3)x^2 + (c_5U + c_5b_3 + c_2b_6 - b_5c_3 - b_2c_6)x + b_5Uc_2 - c_5Ub_2 + c_5b_6 - b_5c_6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0, \quad \text{ou}$$

$$(a_4 - x^2 + xa_1) = 0, \quad \text{ou}$$

$$-x^4 + x^3(c_3 + b_2) + x^2(c_2b_6 + b_5 + c_6 - b_2c_3) + x(c_5U + c_5b_3 - b_5c_3 + c_2b_6 - b_2c_6) - b_5c_6 + b_5Uc_2 + c_5b_6 - c_5Ub_2 = 0$$

A primeira condição acima está associada à direção  $x_7$  do vetor  $\mathbf{x}$  do sistema de equações diferenciais, após a suspensão em relação ao parâmetro  $x_p$ . Esta condição sempre apresentará um autovalor nulo. A segunda condição fornece como autovalores

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2} \quad (6.9)$$

$$\lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2}$$

Para que estes autovalores sejam nulos temos como condições:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2} = 0 &\Leftrightarrow a_1 = -\sqrt{a_1^2 + 4a_4} \Leftrightarrow a_4 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2} = 0 &\Leftrightarrow a_1 = +\sqrt{a_1^2 + 4a_4} \Leftrightarrow a_4 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{M + M_{11}} (\pm K) = 0$$

condição esta que nunca é satisfeita (a não ser para  $K = 0$  ou  $l = 0$ ).

A terceira condição para que J apresente autovalor nulo é dada por:

$$-b_5c_6 + b_5Uc_2 - c_5b_6 - c_5Ub_2 = 0 \quad (6.10)$$

Retomando as definições dadas para  $b_2, b_5, b_6, c_2, c_3, c_5, c_6$  e resolvendo (6.10),

obtemos:

$$x_{pc} = \frac{N_v}{Y_v} \quad (6.11)$$

A expressão acima fornece-nos, no caso do modelo de Derivadas Hidrodinâmicas, o valor crítico do parâmetro  $x_{pc}$  para o qual teremos a bifurcação estática no sistema FPSO-SPM-*turret*. Este resultado já fora obtido, por exemplo, em [Bernitsas, Kekridis1985] no contexto de rebocagem de navios, em [Bernitsas, Garza-Rios1995], [Pesce, Tannuri1997] e em [Sphaier,Fernandes 1997/ISOPE]. Diferentemente destes autores, na abordagem aqui utilizada é necessário, em primeiro lugar, determinarmos o valor crítico para o qual o parâmetro sob estudo implica na bifurcação do sistema, para, posteriormente, escrevermos a equação reduzida. Nos trabalhos acima mencionados, a partir de simples argumentos de equilíbrio de momento, encontra-se uma equação que envolve a dinâmica em *sway* e *yaw* para, em seguida, resolver esta equação para o valor crítico de bifurcação. A motivação, neste trabalho, de se recuperar este resultado está no *processo* para sua obtenção, na medida em que este processo constitui um algoritmo matemático rigoroso baseado em técnicas modernas de Sistemas Dinâmicos. Permite, ainda, generalizações para o estudo de outros casos de bifurcação em sistemas FPSO. Particularmente relevante é a Bifurcação de Hopf como veremos no próximo capítulo.

Para efetuar o processo de Redução à Variedade Central aplicamos o procedimento apresentado na seção 5.3. Para tanto, devemos identificar o auto-espaço associado ao autovalor nulo para o parâmetro  $x_p$  quando este toma o valor crítico dado por (6.11). Essa identificação é realizada via construção da matriz jacobiana diagonalizada, como vemos a seguir:

$$A = M^{-1}JM, \text{ onde}$$

$M$  é a matriz cujas colunas são os autovalores de  $J$ ,

$M^{-1}$  é a matriz inversa de  $M$

$J$  é a matriz jacobiana

$A$  é a matriz diagonal semelhante à matriz  $J$ .

A matriz  $M$  será denotada na forma abaixo:

$M = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7]$  onde os  $v_i$ 's representam os autovetores de  $J$ .

Faremos a seguinte associação entre autovetores e autovalores:

$$a_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{array} \right\} = \text{raízes do polinômio: } \begin{array}{l} p(Z) = -Z^4 + Z^3(c_3 + b_2) + Z^2(c_2b_6 + b_5 + c_6 - b_2c_3) + \\ + Z(c_5U + c_5b_3 - b_5c_3 + c_2b_6 - b_2c_6) - \\ - b_5c_6 + b_5Uc_2 + c_5b_6 - c_5Ub_2 \end{array}$$

$$\beta = 0$$

Observamos ainda que o autovalor  $\beta$  nulo está associado à direção  $y_7$ .

$$\alpha_1 \leftrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 \leftrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_4}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{array} \right\} = \leftrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & p_1(\lambda_i) & \lambda_i & 0 & p_2(\lambda_i) & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$p_1(\lambda_i) = -\frac{-c_5\lambda_i^3 + (b_5c_2 + c_5c_3)\lambda_i^2 + (c_6c_5 - b_5c_2c_3 + c_2c_5b_3)\lambda_i + b_5c_6c_2 + c_5b_6c_2 + c_5^2U}{c_2b_2c_5 + c_5^2 - c_2^2b_5}$$

$$p_2(\lambda_i) = -\frac{c_2\lambda_i^3 - (b_2c_2 + c_2c_3)\lambda_i^2 - (b_2c_2c_3 + b_3c_2^2 + c_2c_2 + c_5 - c_5c_3)\lambda_i - \frac{b_2c_6c_2 + c_5c_6 - c_5Uc_2 - b_6c_2^2}{c_2b_2c_5 + c_5^2 - c_2^2b_5}}{c_2b_2c_5 + c_5^2 - c_2^2b_5}$$

com  $\lambda_i$  raízes do polinômio característico.

Em função do processo de diagonalização da matriz Jacobiana o auto-espaço associado ao auto-valor nulo dependerá da ordem escolhida para a construção da matriz M. Estamos considerando aqui o autovalor denotado por  $\lambda_1$  (associado por sua vez com o autovetor  $v_1$ ) como o autovalor que se anula quando o parâmetro  $x_p$  assume o valor crítico  $x_{pc}$ . Logo, o auto-espaço associado com  $y_3$  está associado à Variedade Central e, portanto, reduziremos a dinâmica do sistema a este auto-espaço. Lembremos que este auto-espaço é o ângulo de yaw. Ou seja, a Variedade Central estará escrita em termos do ângulo  $\psi$  (como já era de se esperar).

Para sistemas de equações diferenciais ordinárias, nas condições dadas pelo sistema (6.1), o Teorema de Existência de Variedade Central garante a existência (mas não a unicidade) de uma Variedade Central. Esta Variedade Central será representada localmente por gráficos na forma

$$h(y_3, \varepsilon) = (h_1(y_3, \varepsilon), h_2(y_3, \varepsilon), h_3(y_3, \varepsilon), h_4(y_3, \varepsilon), h_5(y_3, \varepsilon)) \quad (6.12)$$

para  $y_3, \varepsilon$  suficientemente pequenos sob as condições

$$h(0,0) = (h_1(0,0), h_2(0,0), h_3(0,0), h_4(0,0), h_5(0,0)) = (0,0,0,0,0) \quad (6.13a)$$

$$Dh(0,0) = D_{y_3, \varepsilon} (h_1(y_3, \varepsilon), h_2(y_3, \varepsilon), h_3(y_3, \varepsilon), h_4(y_3, \varepsilon), h_5(y_3, \varepsilon)) \Big|_{y_3=0, \varepsilon=0} = (0,0,0,0,0) \quad (6.13b)$$

onde as funções são de classe de diferenciabilidade  $C^r$ , pelo menos.

As condições (6.13a,b) impõem a condição de tangência da Variedade Central ao auto-espço central  $E^c$  do problema linear.

O Teorema da Variedade Central diz-nos que, para  $y_3, \varepsilon$  suficientemente pequenos, o campo vetorial dado pelas equações (6.1), reduzido à Variedade Central, será dado por:

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= Ay_3 + f(y_3, h(y_3, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \\ (y_3, \varepsilon) &\in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (6.14)$$

O Teorema 2 do Apêndice III “A Técnica da Variedade Central” garante que a dinâmica próxima à origem  $(y_3, \varepsilon) = (0,0)$ , para o sistema definido em (6.14) determina próximo à origem a dinâmica do sistema definido em (6.1). Em outras palavras, a informação essencial sobre a dinâmica de um sistema de equações diferenciais já está contida (para pontos próximos à origem) na Variedade Central. Podemos dizer que o Teorema da Variedade Central efetua um “desacoplamento” entre as variáveis de estado (válida até ordem  $k$  na expansão em Série de Taylor).

Para determinar uma expressão algébrica explícita para as funções  $h(y_3, \varepsilon) = (h_1(y_3, \varepsilon), h_2(y_3, \varepsilon), h_3(y_3, \varepsilon), h_4(y_3, \varepsilon), h_5(y_3, \varepsilon))$  que mapeiam a Variedade Central, devemos resolver a equação análoga àquela dada por (5.17). O que equivale a utilizar o Teorema 3 do Apêndice III “A técnica de Redução à Variedade Central”

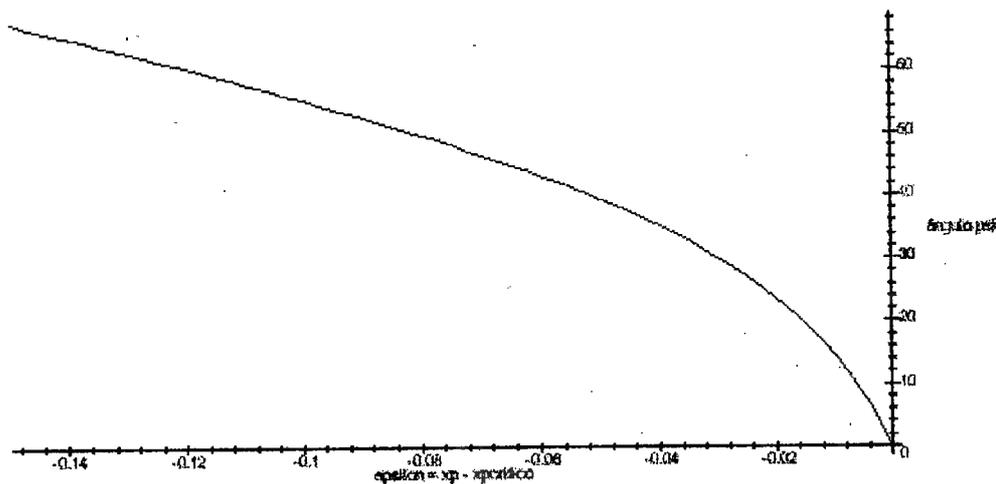
Este procedimento algébrico foi implementado em rotina MAPLE. Com isto chegamos à expressão

$$\dot{y}_3 = \alpha_0 y_3^2 + \alpha_1 y_3 \varepsilon + \alpha_2 y_3 \varepsilon^2 + \alpha_3 y_3^2 \varepsilon \quad (6.15)$$

como uma expressão da dinâmica do sistema reduzida à Variedade Central. Os coeficientes da equação (6.15) são apresentados no Apêndice VII "Coeficientes da Variedade Central no caso FPSO-SPM-turret sob Derivadas Hidrodinâmicas.

O diagrama de Bifurcação estática para o sistema FPSO-SPM-turret sob modelo Derivadas Hidrodinâmicas é, então, apresentado abaixo

Diagrama de Bifurcação Caso FPSO-SPM sob Derivadas Hidrodinâmicas



**Figura 23: Diagrama de Bifurcação Estática para FPSO-SPM-turret sob modelo Derivadas Hidrodinâmicas**

### 6.3 O Caso FPSO-SPM-turret sob Asa Curta Heurístico

De modo inteiramente análogo, aplicamos, nesta seção, a Técnica de Redução à Variedade Central ao caso FPSO-SPM-*turret*, sob Modelo Asa Curta Heurístico (ver equações 4.15).

Observemos, no entanto, que devido à presença de funções do tipo  $|x|x$  nas forças estáticas do Modelo Heurístico proposto por [Leite1997] as expressões das forças contidas em (4.15) não possuem segunda derivada contínua na origem. Tal fato impede a aplicação imediata do Teorema de Redução à Variedade Central.

Mas há duas estratégias para contornarmos este problema.

A primeira estratégia é apresentada em com maiores detalhes no Apêndice VIII “Redução à Variedade Central para Sistemas de Equações Diferenciais com termos da forma  $x|x|$ ”. Nesta abordagem efetuamos a operação conduzindo os termos da forma  $x|x|$  de modo idêntico àquele que é feito para os termos restantes do campo vetorial definido pelas equações (4.15). Exceção feita àquelas passagens nas quais a derivação dos termos da forma  $x|x|$  seja necessária. Nessas passagens atentamos que  $\frac{d}{dt}(x|x|) = 2x|x|$ . Na sequência efetuamos a redução aos termos semelhantes e o procedimento de Redução à Variedade Central segue como usual.

Na segunda estratégia escolhemos, alternativamente, o ramo da bifurcação estática correspondente ao sinal dos termos das forma  $\sin(\alpha)|\sin(\alpha)|$ , presentes em  $C_{2c}(\alpha)$  e em  $C_{6c}(\alpha)$ .

No que segue consideraremos os valores numéricos para o casco Henrique Dias (cujos dados constam do Apêndice VIII “Dados referentes aos cascos analisados”).

A matriz Jacobiana do sistema, no ponto de bifurcação está é abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & U \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{M+M_{11}} \rho T_s L C_f (\text{Re } y) U & a_2 &= -\frac{K}{M+M_{11}} \frac{\sqrt{(x_e + x_{p0}L)^2}}{x_e + x_{p0}L} \\ b_3 &= \frac{(I_z + M_{22})(I_z + M_{66})}{M + M_{22}} (M + M_{11}) U \\ b_5 &= -\frac{(I_z + M_{22})(I_z + M_{66})}{(M + M_{22})} (M + M_{11}) K \\ b_6 &= -\frac{(I_z + M_{22})(I_z + M_{66})}{(M + M_{22})} (M + M_{11}) \left[ \frac{1}{2} \rho T_s L \frac{T_s}{L} \left( 1 + 4 \frac{C_b B}{T_s} \right) U^2 - K \sqrt{(x_e + x_{p0}L)^2} \left( 1 + \frac{x_{p0}L}{\sqrt{(x_e + x_{p0}L)^2}} \right) \right] \\ c_5 &= -\frac{1}{I_z + M_{66}} K x_{p0} L \\ c_6 &= -\frac{1}{I_z + M_{66}} \left[ \frac{1}{2} \rho T_s L \frac{\pi T_s}{L} \left( \frac{T_s}{L} - \frac{T_s}{L} \left( \frac{1}{2} - 2.4 \frac{T_s}{L} \right) \right) U^2 - K \sqrt{(x_e + x_{p0}L)^2} x_{p0} L \left( 1 + \frac{x_{p0}L}{\sqrt{(x_e + x_{p0}L)^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

O polinômio característico fica definido por:

$$p(x) = -(-x^2 + a_1x + a_4) \left( -x^4 + (b_5 + c_6)x^2 + (c_5U + c_5b_3)x + c_5b_6 - b_5c_6 \right) \quad (6.17)$$

Aqui, também observamos (tal como no modelo de Derivadas Hidrodinâmicas) o desacoplamento entre as variáveis de estado  $\{y_1, y_4\}$  e  $\{y_2, y_3, y_5, y_6\}$ . Ou seja, confirmamos, matematicamente, o desacoplamento entre as direções *surge* de um lado e *sway* e *yaw* de outro.

O valor crítico para bifurcação estática é obtido fazendo-se

$$c_5b_6 - b_5c_6 = 0 \quad (6.18)$$

Donde

$$x_{p_{critico}} = \frac{\frac{1}{2} + 2.4 \frac{Ts}{L}}{1 + 4 \frac{C_b B}{Ts}} \quad (6.19)$$

Observamos que (6.19) recupera a expressão deduzida em [Leite1997].

A matriz Jacobiana diagonalizada do sistema fica, então, dada por:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

onde  $\mu_{1,2}$  são raízes de

$$p_1(x) = -x^2 + a_1x + a_4$$

e

$$\lambda_{1,2,3,4}$$

são raízes de

$$p_2(x) = (-x^4 + (b_5 + c_6)x^2 + (c_5U + c_5b_3)x + c_5b_6 - b_5c_6)$$

Construiremos a matriz de autovalor de tal forma que o espaço associado ao vetor nulo seja aquele correspondente ao autovalor  $\lambda_3$ .

Repetindo o procedimento de Redução à Variedade Central, de modo inteiramente análogo ao realizado na seção precedente teremos:

$$\dot{w}_3 = w_3 (\alpha_0 w_3 + \alpha_1 w_3 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon + \alpha_4 w_3^2) \quad (6.21)$$

onde os coeficientes são definidos no Apêndice VII "Coeficientes das Equações Reduzidas à Variedade Central".

A título de observação das ordens de grandeza apresentamos, a seguir, a equação acima para os valores numéricos<sup>1</sup> do casco Henrique Dias (calado 100%):

$$\dot{w}_3 \cong w_3 (0.0201w_3 - 0.0506w_3\varepsilon + 0.0266\varepsilon^2 - 0.0123\varepsilon - 0.0404w_3^2) \quad (6.22)$$

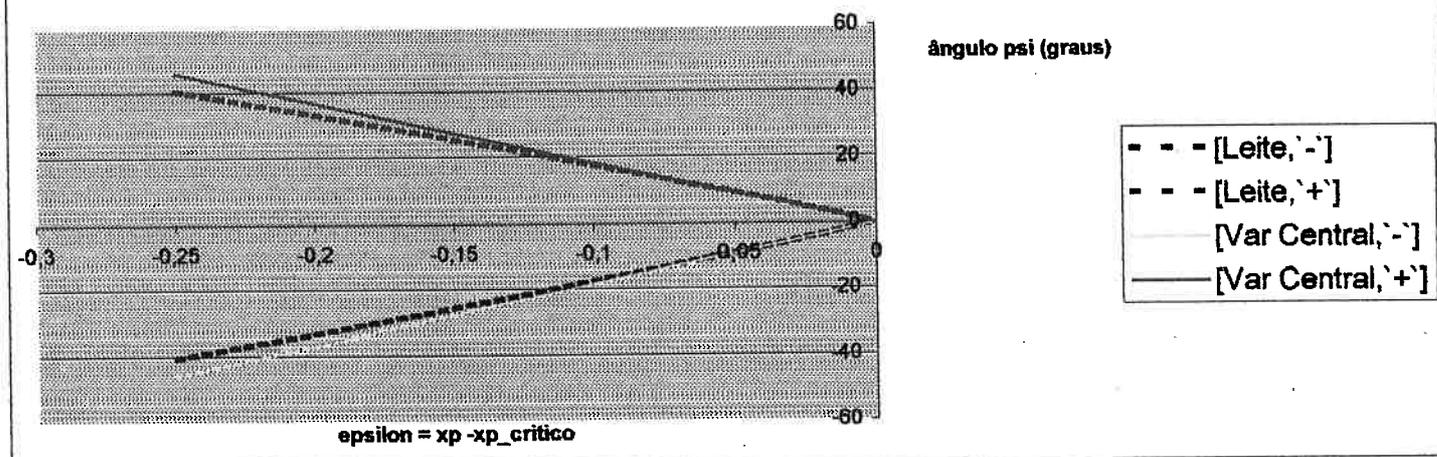
Eliminando os termos de ordem três na equação acima:

$$\dot{w}_3 \cong w_3 (0.0201w_3 - 0.0123\varepsilon) \quad (6.23)$$

chegamos à forma normal para uma bifurcação, do tipo *transcrítica* ( $\dot{x} = \mu x - x^2$ )

Da equação diferencial (6.23) extraímos o diagrama de bifurcação abaixo (confrontado com os resultados de [Leite1997]). Os gráficos denotados por [Leite, '-'] e [Leite, '+'] na legenda (tracejados) correspondem a [Leite1997]. Já os gráficos indicados por [Var Central, '-'] e [Var Central, '+'] (linhas contínuas) correspondem aos gráficos traçados utilizando-se (6.23).

**Comparação Diagramas de Bifurcação Estática Variedade Central e [Leite et al] (Henrique Dias)**



**Figura 24: Confrontação entre diagramas de bifurcação Estática (Variedade Central/[Leite]). Para FPSO-SPM-turret com Asa Curta Heurístico. Casco Henrique Dias a 100%**

<sup>1</sup> As dimensões físicas dos coeficientes são explicitadas no Apêndice VII.

Verificamos, assim, que podemos aplicar a Técnica de Redução à Variedade Central mesmo a equações que apresentem termos da forma  $x|x|$  bastando utilizarmos qualquer uma das duas estratégias apresentadas na presente seção. Um ponto a ser ressaltado é que a abordagem aqui utilizada para contornar o problema da diferenciabilidade na origem de funções da forma  $x|x|$  não se restringe a sistemas tipo FPSO. Esta é uma abordagem perfeitamente válida no estudo de bifurcações estáticas quaisquer, com perda de diferenciabilidade na origem da forma acima.

Um ganho adicional obtido é a constatação do desacoplamento da matriz Jacobiana. Já havia evidências físicas deste desacoplamento mas, ao estudarmos a matriz jacobiana explicitamente, obtivemos sua validação matemática.

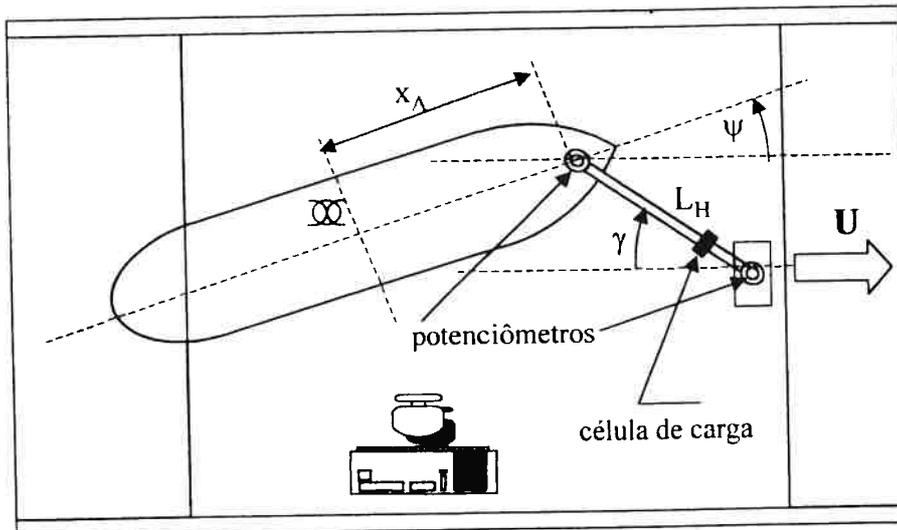
Um outro aspecto a ser ressaltado quanto à da Técnica de Redução à Variedade Central é sua capacidade de generalização para espaços de estado (e de parâmetros) de dimensões superiores. Como sistemas FPSO possuem um número bastante grande de parâmetros, é importante apossar-nos de ferramentas que permitam uma busca rigorosa e sistemática dos cenários pós-críticos das bifurcações presentes no sistema.

## 7 A Bifurcação Dinâmica no Caso Hawser Rígido

### 7.1 Introdução

O fenômeno denominado *fishtailing* consiste em objeto de estudo de grande interesse na área de Engenharia Naval e Oceânica. Tal fenômeno, presente na dinâmica de navios amarrados sob a ação de correnteza uniforme, caracteriza-se por oscilações auto-sustentadas que ocorrem no plano horizontal. Muitas vezes essas oscilações alcançam grandes amplitudes, apresentando períodos elevados. Em sistemas FPSO-SPM a situação de *fishtailing* é, em geral, muito pouco desejável pois pode submeter os cabos de amarração a grandes esforços, pondo em risco a segurança do sistema. Por outro lado, pode ser aceitável a utilização de sistemas FPSO-SPM sob situação de *fishtailing* com amplitudes de oscilação suficientemente pequenas. Daí vem o interesse em desenvolvermos técnicas de estimar, quantitativamente, a amplitude destas oscilações.

Com o intuito de efetuar o estudo da adequação do Modelo Asa Curta Heurístico ao estudo do problema de *fishtailing*, [Simos2001] apresenta ensaios realizados no IPT com um modelo do navio Vidal de Negreiros em configuração de amarração do tipo SPM. Esses ensaios consistiram em rebocar o modelo do navio Vidal de Negreiros, para duas situações de calado (100% e 40%), por meio de barras rígidas bi-articuladas com diversos comprimentos  $L_n$ . Buscava-se representar a situação de um *hawser* com rigidez elevada (veja a figura 25). Bastam apenas dois graus de liberdade para representar a dinâmica do sistema: o ângulo  $\psi$  de aproamento do navio e o ângulo  $\gamma$  formado pelo *hawser* com respeito à direção de avanço do modelo reduzido. É neste contexto que a situação de *fishtailing* será associada com a ocorrência de Bifurcações de Hopf.



**Figura 25 Ilustração esquemática do ensaio realizado no IPT por [Simos2001]**

Mais ainda, a transição do regime estacionário para um regime oscilatório, na situação de uma Bifurcação de Hopf, pode se dar genericamente de duas formas: uma Bifurcação de Hopf do tipo subcrítica ou uma Bifurcação de Hopf do tipo supercrítica. Uma Bifurcação de Hopf do tipo subcrítica (ou Catastrófica) caracteriza-se pela existência de órbitas periódicas instáveis em torno do ponto de equilíbrio. Do ponto de vista de Sistemas FPSO uma Bifurcação de Hopf do tipo subcrítica é muito pouco desejável. Já uma Bifurcação de Hopf do tipo supercrítica caracteriza-se pela existência de uma órbita periódica estável em torno do ponto de equilíbrio instável. Caso a amplitude desta órbita periódica estável seja suficientemente pequena ela poderá ser aceitável do ponto de vista prático. Ou seja, é relevante para o problema de *fishtailing*, além da determinação da amplitude de oscilação, também o estudo da estabilidade/instabilidade dos ciclos-limite (se subcrítica ou supercrítica).

Neste Capítulo apresentamos o estudo da Bifurcação Dinâmica e do cenário pós-crítico na Bifurcação de Hopf para o Caso de um Sistema FPSO com Hawser Rígido

sob Modelo Asa Curta Heurístico. Para efetuarmos a análise da Estabilidade da Bifurcação Dinâmica utilizamos a técnica de Redução à Variedade Central seguida da Técnica de *Integral Averaging*<sup>1</sup> para efetuarmos a análise da Estabilidade da Bifurcação Dinâmica. Determinamos (*a priori*) a amplitude dos ciclos-limites no entorno do ponto de bifurcação. São efetuadas comparações com simulações numéricas no domínio do tempo e com resultados experimentais obtidos a partir de ensaios em escala reduzida. Mostraremos que, no presente problema, a Bifurcação de Hopf pode ser qualificada como supercrítica. A técnica utilizada permite também quantificarmos, *a priori*, a amplitude do ciclo-limite resultante para valores do parâmetro de bifurcação próximos ao ponto crítico.

## 7.1 Análise Linear

Os detalhes da discussão apresentada a seguir constam do Apêndice V “Análise da Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM *hawser* rígido”

Conforme já apresentado no Capítulo 4 em (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) as equações dinâmicas que modelam a dinâmica do sistema FPSO-SPM sob *hawser* rígido podem ser representadas na forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{7.1}$$

onde

---

<sup>1</sup> *Integral Averaging* pode ser traduzido como Média nas Integrais.

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \psi(t) \\ \gamma_1(t) \\ \psi_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Efetuada a expansão em Série de Taylor do sistema (7.1) em torno do ponto  $\{\gamma = \psi = \gamma_1 = \psi_1 = 0\}$  e tomando apenas os termos de primeira ordem temos:

$$\dot{x} = Ax \quad (7.3)$$

com A matriz Jacobiana de (7.1).

A curva de criticalidade para Bifurcação de Hopf é construída da forma descrita a seguir. Da discussão efetuada no Apêndice V, "Análise da Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM hawser rígido", sabemos que a dinâmica do sistema acima é definida pelos parâmetros  $L_h/L$  (comprimento do *hawser* em relação ao comprimento do navio),  $x_a/L$  (posição de acoplamento do *hawser* sobre o casco em relação ao comprimento do navio) e  $C_f(\text{Rey})$  (coeficiente de resistência friccional de arrasto longitudinal em função do número de Reynolds). No que segue consideramos sempre  $x_a/L < a_{cr}$ , onde  $a_{cr}$  é o valor crítico para bifurcação estática, estudado no Capítulo 5 deste trabalho e primeiramente determinado por [Leite1997].

Lembremos que uma condição para que ocorra bifurcação de Hopf é que exista um par de autovalores tal que sua parte real seja nula, para um valor crítico de um certo parâmetro do sistema. Assim, seja o polinômio característico da matriz jacobiana A de (7.1)

$$p(x) = x^4 + a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (7.4)$$

Façamos no polinômio acima  $x = i\omega$ , onde  $i$  representa a unidade imaginária e separemo-lo nas respectivas partes real e imaginária:

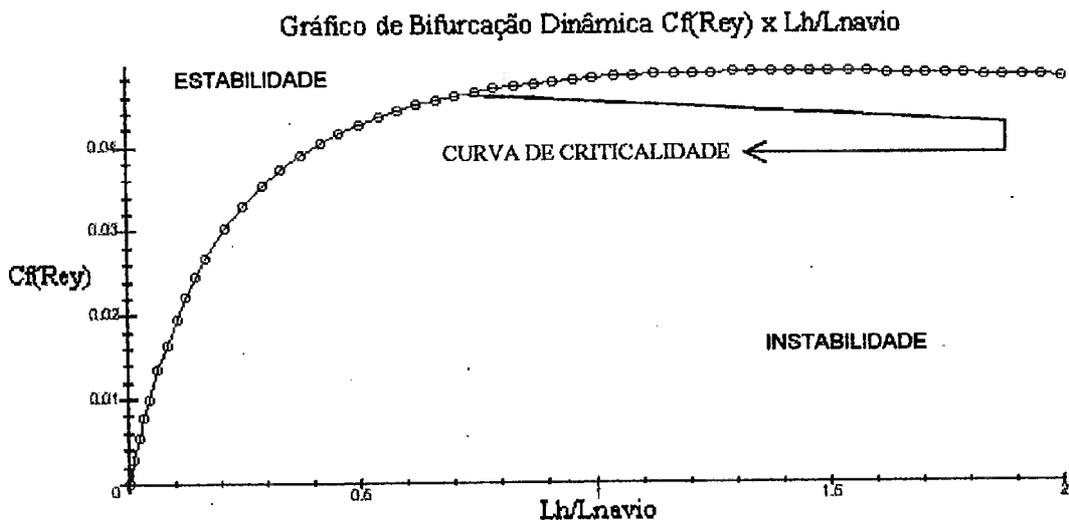
$$\Re(p(i\omega)) = \omega^4 - a_1\omega^2 + a_3 \quad (7.5)$$

e

$$\Im(p(i\omega)) = -a_0\omega^3 + a_2\omega \quad (7.6)$$

Resolvendo  $\Im(p(i\omega)) = 0$  (excluindo-se o caso  $\omega = 0$ ) em  $\omega$ , substituindo a expressão resultante para  $\omega$  em  $\Re(p(i\omega))$  e impondo a condição para Bifurcação de Hopf,  $\Re(p(i\omega)) = 0$ , resulta uma relação entre Cf(Rey) e Lh/L que caracteriza a ocorrência de uma Bifurcação de Hopf.

No gráfico abaixo apresentamos, para o caso do casco Vidal de Negreiros com calado a 100%, a comparação entre as curvas definidoras de região de instabilidade Dinâmica obtidas tanto pelo Critério de Routh-Hurwicz (representado pelos círculos) quanto pelo método aqui exposto (representado pela linha contínua). A concordância é total. Com a presente técnica, evita-se, no entanto, a possível situação em que existam raízes reais de sinais opostos com soma obviamente nula. Situação que pode vir a ocorrer quando do uso do Critério de Routh-Hurwicz.



**Figura 26: Confronto entre [Simos 2001] /método polinômio característico. Curva definidora das Regiões de Estabilidade/Instabilidade Dinâmica. Casco Vidal de Negreiros calado 100%**

Na figura acima consideremos um valor  $C_f(\text{Re}_y)$  fixado ou, em outras palavras, um valor de intensidade de velocidade de correnteza fixado. Acima da curva de criticalidade temos uma região de estabilidade dinâmica (a parte real dos autovalores é sempre negativa). Abaixo da curva de criticalidade temos um par de autovalores com parte real positiva. Obviamente o parte de autovalores imaginários puros é obtido ao cruzar-se a curva de criticalidade. No entanto, faltam-nos elementos para decidir, baseados apenas no modelo físico-matemático, ou seja, sem lançar mão do conhecimento dos ensaios em escala reduzida

ou das simulações numéricas, se os ciclos-limite surgem *antes* ou *após* cruzarmos a curva de criticalidade. Além disso cabe-nos determinar se tais ciclos-limite são estáveis ou instáveis. Esta qualificação, *de per si*, é de grande interesse no estudo de sistemas FPSO.

### 7.3 Redução à Variedade Central no Caso FPSO-SPM hawser rígido

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados com maior detalhamento no Apêndice VI “Redução à Variedade Central no Caso FPSO-SPM hawser rígido”.

Do exposto no Apêndice VI, “Redução à Variedade Central Para o Caso FPSO-SPM hawser Rígido”, partimos das expressões para as equações do movimento escritas sob o vínculo do hawser rígido (o que permite que escrevamos as equações como funções dos ângulos  $\{\gamma(t), \psi(t)\}$ , aplicamos a técnica de Redução à Variedade Central e, em seguida, efetuamos o *Integral Averaging*, finalmente chegando à equação reduzida à Variedade Central:

$$\dot{R} = \alpha' \varepsilon R + KR^3, \quad \varepsilon > 0 \quad (7.7)$$

onde

$$\alpha' = \frac{d\left(\operatorname{Re}\left(\lambda_{1,2}\left(\frac{L_h}{L}\right)\right)\right)}{d\left(\frac{L_h}{L}\right)} \Bigg|_{\frac{L_h}{L}} \quad \text{para } \frac{L_h}{L} = \left(\frac{L_h}{L}\right)_{\text{critico}} \quad (7.8)$$

e

$K\left(C_f, \frac{L_h}{L}\right) = \frac{1}{8}(3q_{11} + q_{13} + q_{22} + 3q_{24})$  é a função determinada no Apêndice VI

“Redução à Variedade Central no Caso FPSO-SPM hawser rígido”.

e

com  $\lambda_{1,2}$  os autovalores críticos para bifurcação de Hopf. Em palavras,  $\alpha'$  corresponde à “velocidade” com que os autovalores críticos para Bifurcação de Hopf cruzam o eixo imaginário conforme variamos o parâmetro  $L_h/L$  no sentido crescente (consulte a figura 26 deste capítulo). Logo, a magnitude de  $\alpha'$  está associada à inclinação da curva de instabilidade dinâmica. Assim, tem-se  $\alpha'=0$  nos pontos críticos da curva de instabilidade dinâmica. Ressaltemos que nos pontos para os quais  $\alpha'=0$  o Teorema de Hopf não se aplica. Em tais pontos teremos bifurcações de codimensão superior (no caso presente, de codimensão 2) para as quais técnicas mais avançadas deverão ser utilizadas.

Observamos que enquanto  $\alpha'$  está associado aos termos de 1ª ordem no sistema de equações diferenciais que modela a dinâmica do sistema FPSO, a função  $K\left(C_f, L_h/L\right)$  está associada aos termos de ordem superior (não-lineares). Entre outros termos, na função  $K\left(C_f, L_h/L\right)$  estão presentes aqueles correspondentes ao amortecimento viscoso definidos pela pelo Coeficiente de arrasto  $C_d$ , termos correspondentes às massas adicionais adimensionalizadas, termos correspondentes ao Coeficiente de atrito  $C_f(\text{Re}_y)$ , termos associados com o casco do navio ( $L, T, B, C_b, C_y, I_{Cy}$ ) e com o ponto de amarração do navio ( $a, a_{cr}$ ). Em outras palavras, o coeficiente  $K$  consiste num balanço entre componentes de atrito viscoso, inércia e restauração. O sinal de  $K$  resulta deste balanço. Devemos enfatizar que este coeficiente  $K$  não deve ser confundido, por exemplo, com o coeficiente associado ao amortecimento ora negativo ora positivo na equação de Van der Pol (troca de sinal esta que garante a existência de um ciclo-limite na equação de Van der Pol por argumentos de balanço de energia):

Um ponto a ser aqui ressaltado é que a função  $K$  é de difícil obtenção. Para obtê-la, a Técnica de Redução à Variedade Central nos ensina que devemos efetuar a expansão em Série de Taylor dos termos do campo de vetores que define a equação diferencial (7.1). Mas, como podemos observar das expressões (4.17) e (4.18), as forças hidrodinâmicas sob modelo Asa Curta possuem termos da forma  $v|v|$  e  $r|r|$ . Logo, temos uma dificuldade técnica relevante a ser superada para que a Técnica de Redução à Variedade Central possa ser aplicada.

A abordagem para superar a dificuldade acima exposta com respeito aos termos da forma  $v|v|$  e  $r|r|$  foi inicialmente apontada por [Papoulias, Papadimitriou], [Papoulias, Bateman, Ornek], [Papoulias, Papanikolaou]. Tal técnica consiste na aproximação das funções  $v|v|$  por  $\frac{v^3}{\gamma}$  e  $r|r|$  por  $\frac{r^3}{\gamma}$  onde  $\gamma$  é um parâmetro de “regularização”. Na

figura abaixo visualizamos o confronto entre os gráficos de  $|t|$  e  $\frac{t^3}{\gamma}$  (sinais “+”).

Observamos que o parâmetro  $\gamma$  deve ser tomado da ordem da amplitude do intervalo no qual estamos aproximando a função  $|t|$  (linha contínua).

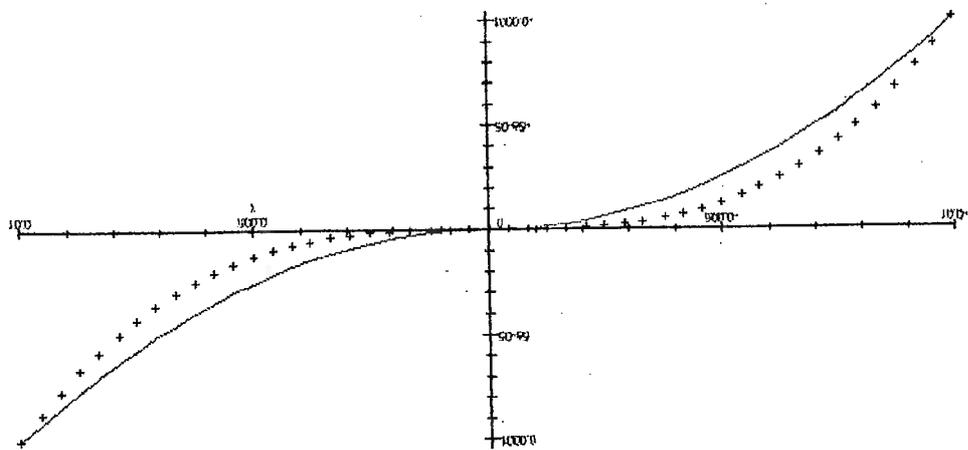


Figura 27: Gráfico de  $f(t) = t|t|$  e  $g(t) = t^3/\gamma$

Observamos ainda que a estratégia aqui utilizada, para superar o problema da expansão em Série de Taylor dos termos da forma  $t|t|$ , aplica-se de forma inteiramente análoga àquelas equações diferenciais que apresentem termos desta natureza. Tal aplicabilidade, por si só, constitui um sub-produto de alguma significância do ponto de vista da Engenharia, particularmente Engenharia Mecânica (problemas que envolvam atrito seco) e Engenharia Naval e Oceânica (por exemplo, lembremos o problema de se estudar o *roll* em navios). Assim, essa estratégia permite uma avaliação qualitativa e quantitativa (via aplicação da Técnica de Redução à Variedade Central) de bifurcações dinâmicas de Codimensão um.

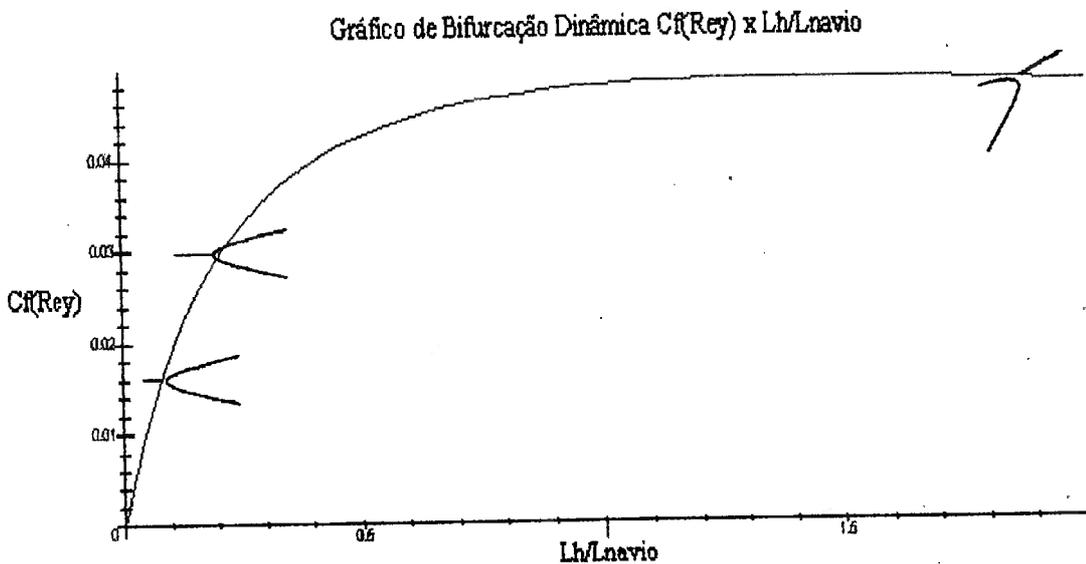
#### 7.4 Estudo da Bifurcação Dinâmica: o caso 100%

Nesta seção utilizamos a equação (7.7), que representa a dinâmica reduzida na Variedade Central, para qualificarmos a Bifurcação de Hopf e quantificarmos a amplitude das oscilações no cenário pós-crítico. A qualificação das Bifurcações de Hopf dar-se-á pelo estudo do sinal de  $\alpha'$  e  $K$ . Após considerações qualitativas (veja o Apêndice II, "O Teorema de Andronov-Poincaré-Hopf", para maiores detalhes matemáticos) sobre a equação (7.7) obtemos a tabela:

$\alpha'$ \ K	K < 0	K > 0
$\alpha' > 0$	Bif. de Hopf Supercrítica/ Ciclos-limite estáveis à direita da curva de criticalidade	Bif. de Hopf Subcrítica/ Ciclos-limite instáveis à esquerda da curva de criticalidade
$\alpha' < 0$	Bif. de Hopf Supercrítica/ Ciclos-limite estáveis à esquerda da curva de criticalidade	Bif. de Hopf Subcrítica/ Ciclos-limite instáveis à direita da curva de criticalidade

**Tabela 7.1: Sinais definidores de Bifurcação de Hopf Subcrítica/Supercrítica**

O sinal de K define se a bifurcação de Hopf é supercrítica ( $K > 0$ ) ou subcrítica ( $K < 0$ ). Já o sinal de  $\alpha'$  indica se os ciclos-limite “nascem” antes ou após a curva definidora de instabilidade dinâmica (curva de “criticalidade”), ou seja, ao se cruzar esta curva para valores crescentes de  $L_h/L$  quando  $\alpha' > 0$  os ciclos-limite ocorrem à direita da curva de instabilidade dinâmica. Já para  $\alpha' < 0$  os ciclos-limite ocorrem à esquerda da curva de instabilidade dinâmica. Considere, por exemplo, a figura abaixo:



**Figura 28: Ilustração das bifurcações dinâmicas ao longo da curva instabilidade**

**Dinâmica calculada para o casco Vidal de Negreiros, calado 100%**

Da expressão (7.8) podemos obter os sinais de  $\alpha'$ . Na tabela abaixo apresentamos alguns destes valores de  $\alpha'$ :

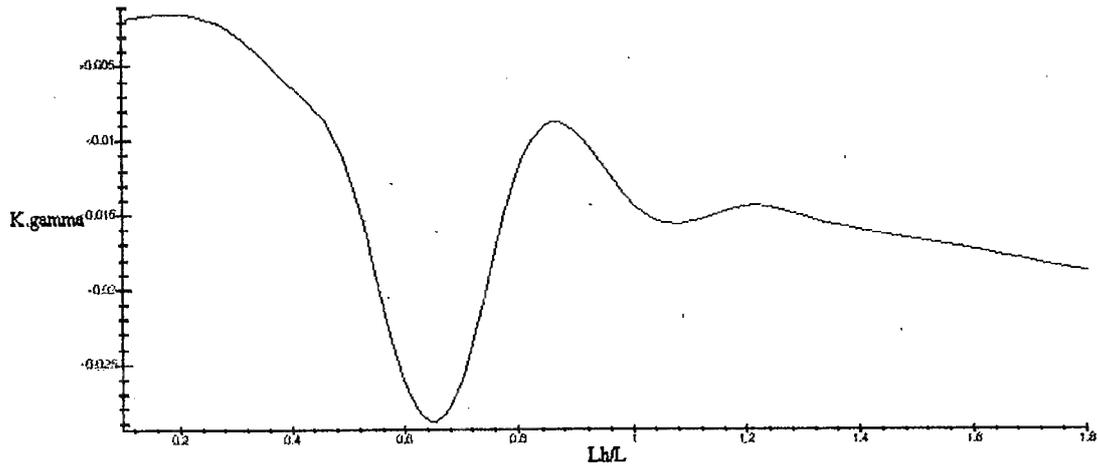
Lh/L	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5
$\alpha'$	1,21	1,32	0,26	0,15	0,09	0,04	0,03	0,01	0,005	0,002	0,0004	-0,001

**Tabela 7.2: Sinais de  $\alpha'$  em função de Lh/L.(Vidal de Negreiros, 100%)**

Assim, ocorre uma troca de sinal de  $\alpha'$  para  $L_h/L \cong 1,42$ , com  $\alpha' > 0$  para  $L_h/L < 1,42$  e  $\alpha' < 0$  para  $L_h/L > 1,42$ . Fisicamente isto significa que para valores de  $L_h/L < 1,42$  teremos órbitas periódicas à direita da curva de instabilidade dinâmica e para  $L_h/L > 1,42$  teremos órbitas periódicas à esquerda da curva de instabilidade dinâmica.

Por outro lado, é necessário estudarmos os sinais da função  $K.\gamma$  para qualificarmos a bifurcação de Hopf, se super ou subcrítica. No presente caso de análise os valores de  $K.\gamma$  são dados pelo gráfico abaixo:

Função K.gamma versus Lh/L



**Figura 29: Função K.gamma em função de Lh/L para o Casco Vidal de Negreiros a 100%**

Das tabelas 7.1, 7.2 e do gráfico 29 acima concluímos que no caso Vidal de Negreiros a 100% de carregamento teremos Bifurcações de Hopf sempre Supercríticas para toda a faixa de operação de  $L_h/L$ .

Para obter a amplitude de oscilação próxima à região de bifurcação, para cada valor de  $L_h/L$ , usamos a equação (7.7):

$$R_0 = \sqrt{-\frac{\alpha' \varepsilon}{K}} \quad (7.9)$$

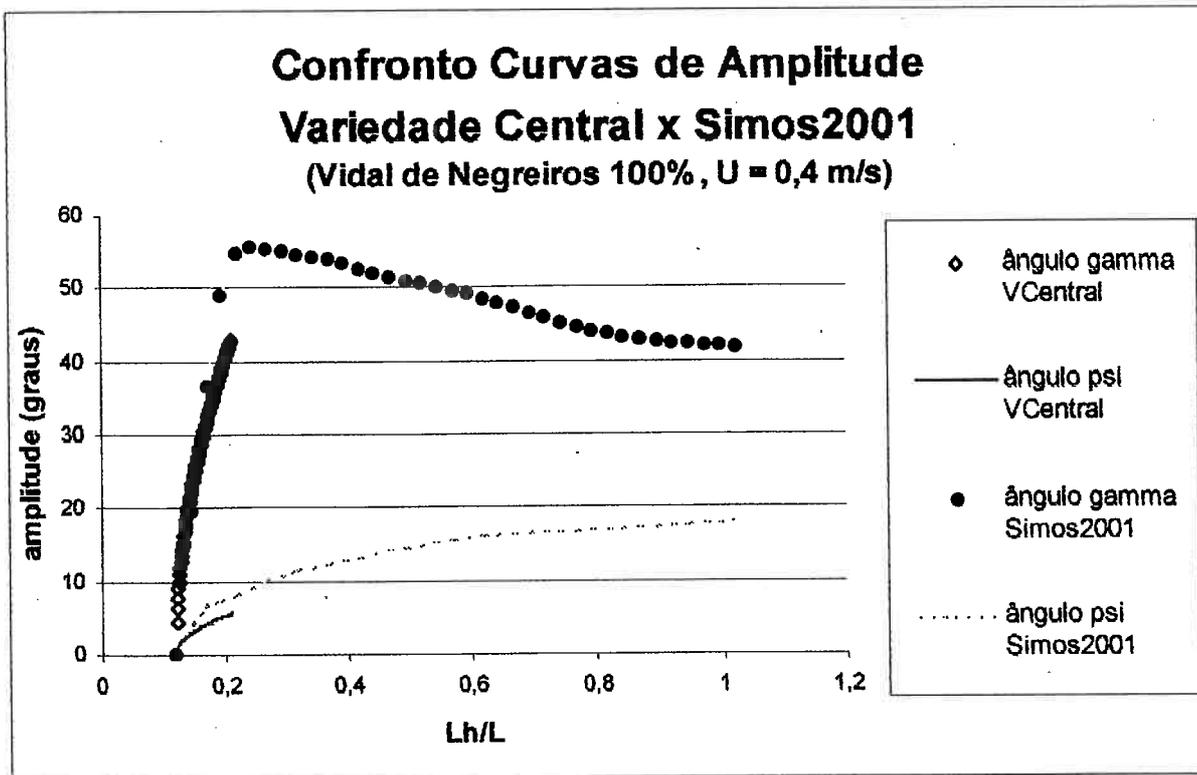
Obviamente a amplitude de oscilação existirá se e só se  $R_0$  for número real.  $K = 0$  em (7.9) denota a ocorrência de uma transição entre uma Bifurcação de Hopf Supercrítica e uma Bifurcação de Hopf Subcrítica. Para qualificarmos tal transição seria necessário o estudo dos termos de 5ª ordem na expansão em Série de Taylor para (4.14), (4.15), (4.16), (4.17).

Os gráficos das figura 30, 31 e 32 apresentam a amplitude do ciclo limite para os ângulos  $\gamma$  e  $\psi$  (graus) obtida através da técnica aqui proposta, para o casco Vidal de

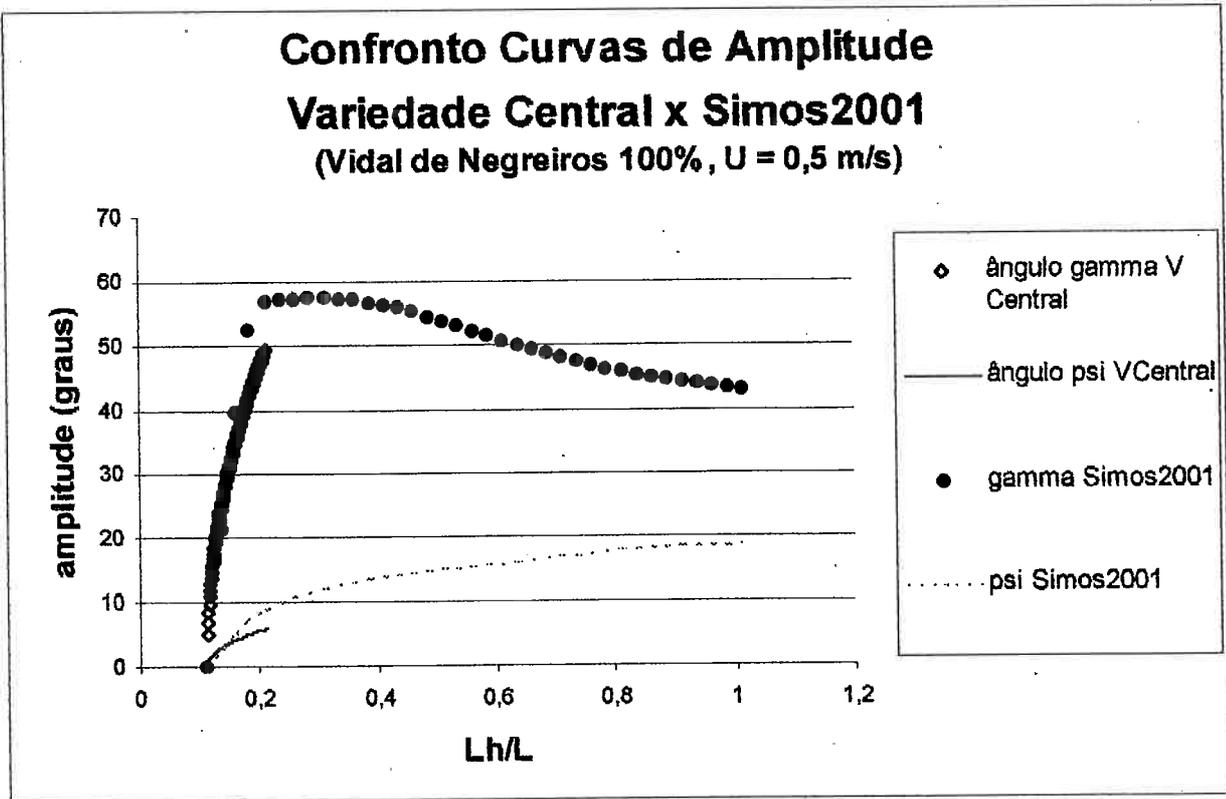
Negreiros (sob calado a 100%) confrontados com os resultados obtidos por [Simos2001] por simulação numérica no domínio do tempo. A aderência das duas técnicas no entorno do ponto de bifurcação é evidente. Ressalte-se ainda que [Simos2001] já apresenta a aderência de suas simulações numéricas aos ensaios realizados no IPT com modelos em escala reduzida.

Neste ponto, o leitor pode retornar à Seção 5.4 “A Técnica de Redução à Variedade Central: uma Técnica para simplificação de Sistemas Dinâmicos” para apreciar os diversos aspectos matemáticos envolvidos à luz dos gráficos presentemente apresentados. Uma observação de cunho matemático que podemos efetuar consiste em que, como reduzimos o sistema próximo ao ponto de bifurcação a uma variedade de dimensão dois, resulta a inexistência de cenários caóticos nesta região.

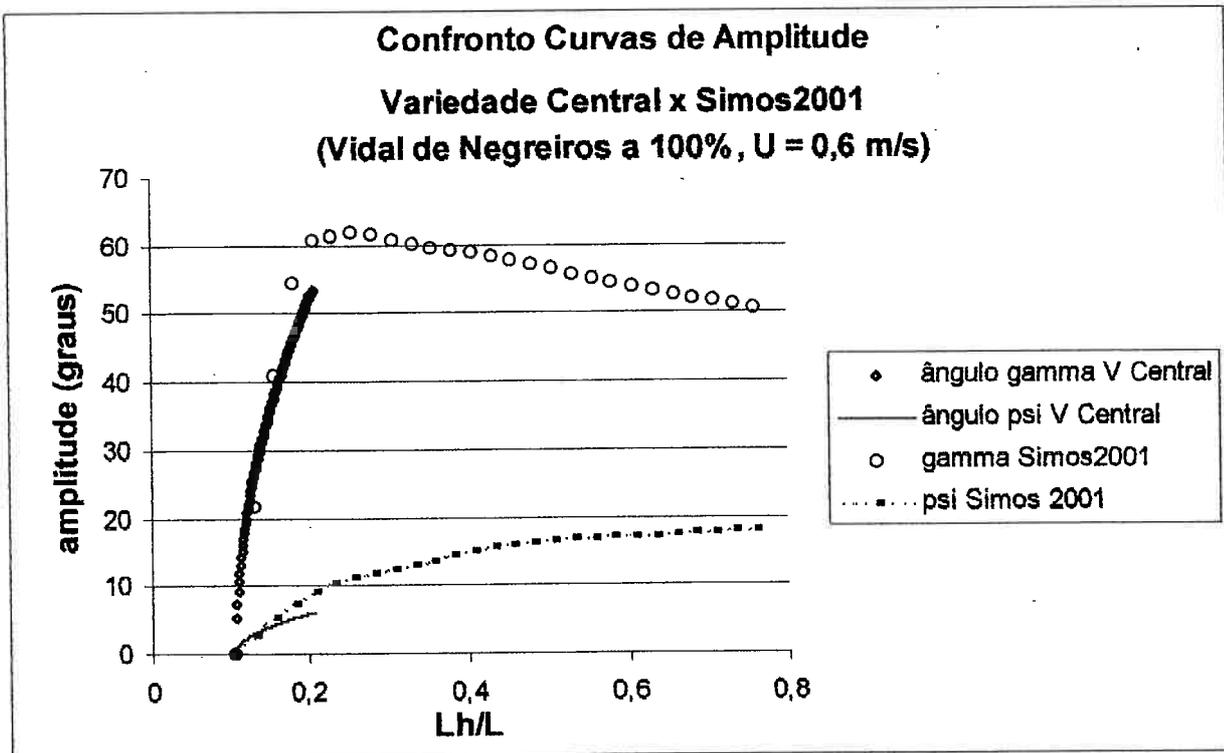
Um aspecto a ser ressaltado consiste na obtenção analítica da expressão que fornece a amplitude de oscilação do FPSO em contraponto à abordagem de obtenção da curva de amplitude via simulações numéricas no domínio do tempo. Para obtermos tais curvas de amplitude via simulação numérica no domínio do tempo, inúmeras simulações são necessárias. Outro aspecto a ser destacado reside no fato de possuímos uma expressão analítica (válida no entorno do ponto de bifurcação de Hopf) a qual apresenta os parâmetros do sistema de forma explícita, o que, por sua vez, facilitará futuras análises de sensibilidade do sistema com respeito a tais parâmetros.



**Figura 30: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 100%, U = 0,4 m/s**



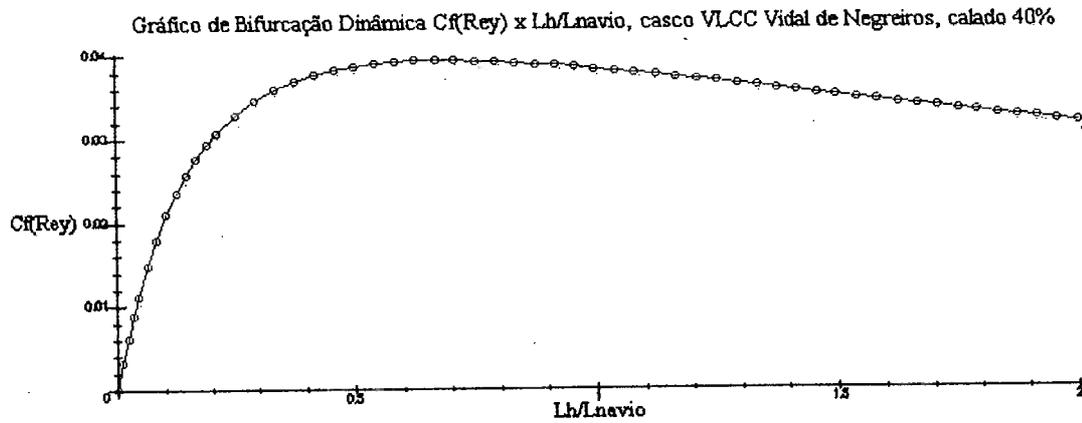
**Figura 31: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 100%, U = 0,5 m/s**



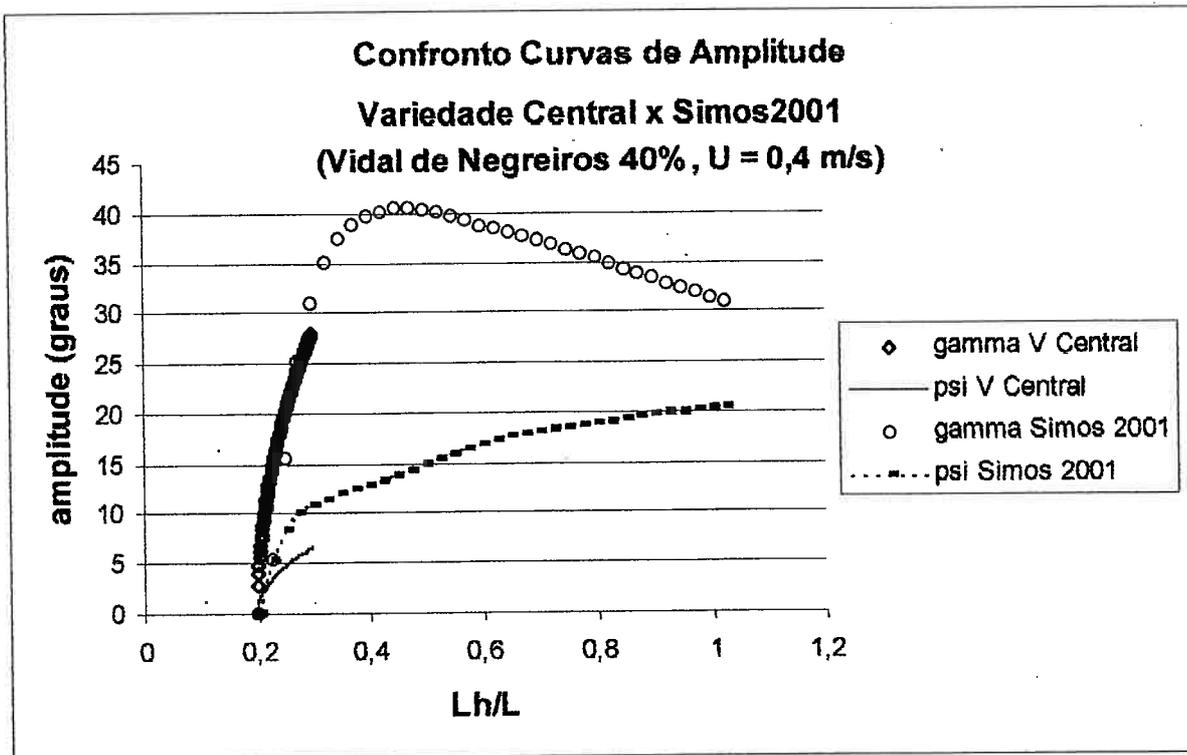
**Figura 32: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 100%, U = 0,6 m/s**

### 7.5 Estudo da Bifurcação Dinâmica: o caso 40%

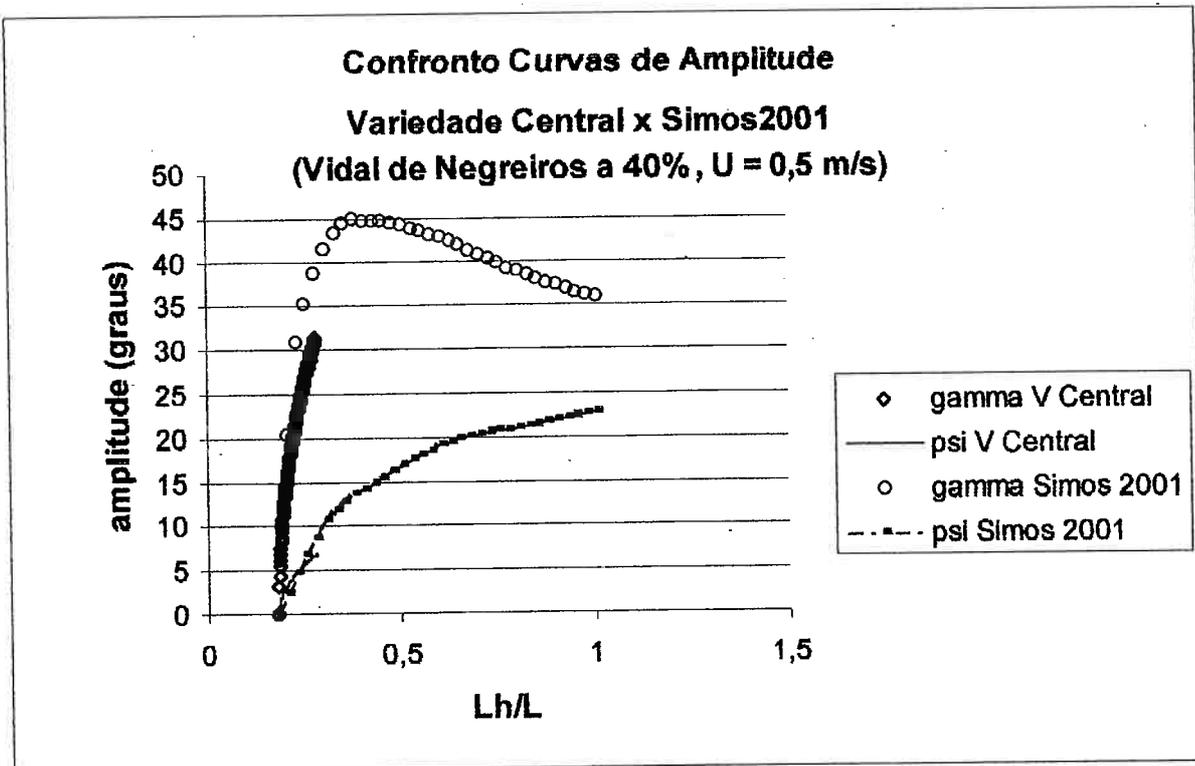
Efetando de modo inteiramente análogo ao caso 100%, mas agora com os dados do casco Vidal de Negreiros sob calado a 40% teremos a figura 33 (correspondente a figura 26 no caso 100%). Além disso temos também as figuras 34, 35 e 36 abaixo apresentando o confronto entre as amplitudes de oscilação obtidas via Técnica de Redução à Variedade Central e via Simulações Numéricas no domínio do tempo.



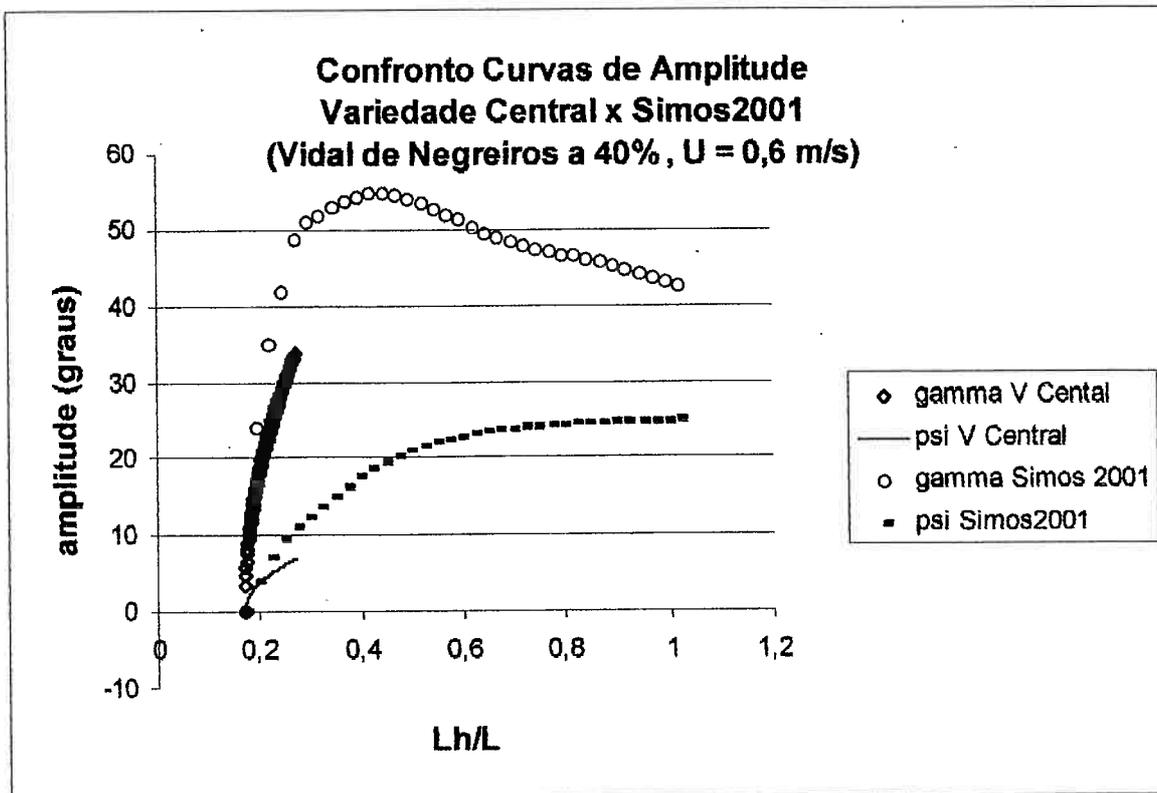
**Figura 33: Confronto entre [Simos 2001] /método polinômio característico. Curva definidora das Regiões de Estabilidade/Instabilidade Dinâmica. Casco Vidal de Negreiros calado 40%**



**Figura 34: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 40%, U = 0,4 m/s**



**Figura 35: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 40%, U = 0,5 m/s**



**Figura 36: Gráficos da amplitude de oscilação (ângulos  $\gamma$  e  $\psi$ ) no cenário pós-crítico para Casco Vidal de Negreiros a 40%, U = 0,6 m/s**

Novamente observamos a aderência entre os resultados via Técnica de Redução à Variedade Central e via simulações numéricas no domínio do tempo.

## 8 Conclusões e Recomendações

O presente trabalho utilizou algumas técnicas recentes de Sistemas Dinâmicos para estudar a dinâmica de sistemas FPSO. Aplicamos estas técnicas para o estudo de Bifurcações Estáticas e Dinâmicas de sistemas FPSO em diferentes condições de amarração. No caso de bifurcações estáticas foram estudados sistemas FPSO amarrados na modalidade SPM-turret sob os modelos de forças hidrodinâmicas conhecido como de “Derivadas Hidrodinâmicas” e “Asa Curta”. Em tais situações recuperamos os resultados obtidos por outras técnicas (simulações numéricas, balanço de momentos) para a Bifurcação Estática com alto grau de precisão. Três aspectos devem ser ressaltados a respeito da técnica presentemente utilizada (Redução à Variedade Central):

- i) seu caráter geométrico, que permite a redução da dimensão do espaço de estado (próximo ao ponto de equilíbrio) trazendo-nos informações relevantes quanto a possibilidade – ou não - de cenários caóticos. Lembremos que, quando o espaço reduzido possui dimensão um ou dois, cenários caóticos não são possíveis;
- ii) o aspecto de permitir uma pesquisa, *a priori*, do ponto de bifurcação estática;
- iii) o aspecto de obtermos expressões analíticas para o cenário pós-crítico da bifurcação estática.

Além de recuperarmos os resultados obtidos por outras técnicas obtivemos uma validação matemática para o desacoplamento entre as dinâmicas em *surge* e as dinâmicas em *sway* e *yaw* para o caso de sistema FPSO-SPM-turret tanto sob modelo Derivadas Hidrodinâmicas quanto modelo Asa Curta.

Para que a técnica de redução à Variedade Central pudesse ser aplicada no caso do modelo Asa Curta foi necessário que contornássemos o problema de diferenciabilidade

das componentes na forma  $x|x|$  presentes nas forças hidrodinâmicas. Temos agora duas abordagens para contornar este problema: numa delas escolhemos um dos ramos da bifurcação: os termos acima ora negativos (para um dos ramos da bifurcação) ora positivos (para o outro ramo da bifurcação); na outra abordagem efetuamos o trabalho de Redução à Variedade Central da forma convencional (mas observando que  $\frac{d}{dx}(x|x|) = 2x|x|$ ) tal como apresentado no Apêndice VIII “Redução à Variedade Central com termos da forma  $x|x|$ ”.

O subproduto acima possui significância própria no contexto de aplicações à Engenharia. Temos um número suficientemente grande de situações na Engenharia modeladas por sistemas de equações diferenciais (ou íntegro-diferenciais, ou a derivadas parciais) que possuam termos da forma  $x|x|$  para que tal resultado demonstre seu significado. Um outro exemplo no contexto da Engenharia Naval é o estudo da dinâmica em *roll* para navios. Problemas com atrito seco podem se constituir em outro exemplo de aplicação.

No que diz respeito ao cenário de Bifurcação Dinâmica desenvolvemos uma abordagem que, embora conduza a resultados equivalentes àqueles obtidos pelo critério de Routh-Hurwitz, devido à sua metodologia não apresenta a problemática questão de, eventualmente, o sistema apresentar pares de raízes do polinômio característico que não são pares de complexos conjugados. Recuperamos assim a curva de estabilidade/instabilidade apresentada na figura 26 do Capítulo 7.

Neste capítulo o resultado principal consiste na obtenção analítica e *a priori* da amplitude de oscilação no cenário pós-crítico (próximo ao ponto de bifurcação) e a qualificação da Bifurcação de Hopf (se supercrítica ou subcrítica). Estes resultados são confirmados tanto pelos ensaios no tanque de Provas do IPT quanto pelas simulações

numéricas apresentadas em [Simos2001]. No caso estudado a Bifurcação de Hopf resultou sempre supercrítica. É importante ressaltar a relevância deste resultado, sob o ponto de vista da Engenharia, posto que bifurcações supercríticas podem ser ditas suaves, ao contrário das bifurcações subcríticas, estas, catastróficas.

Enfatizamos que, mais uma vez, a baixa diferenciabilidade dos termos da forma  $x|x|$ , presentes no modelo Asa Curta, significou dificuldades na aplicação da Técnica de Variedade Central. Tais dificuldades foram contornadas utilizando-se uma aproximação da forma  $\frac{x^3}{\gamma_0}$  aos termos  $x|x|$ , para  $x \ll 1$ , onde  $\gamma_0$  é um parâmetro regularizador da ordem de  $x$ . A componente cúbica é responsável por recuperar o 'sinal' de  $x|x|$  e a divisão pelo termo  $\gamma_0$ , da ordem de  $x$ , recupera a ordem de grandeza de  $x|x|$ . Reforçamos que esta aproximação não altera de modo algum o cenário global dado pelo modelo Asa Curta Estendido. Nesta aproximação poderíamos ser induzidos a pensar que estamos 'retornando' aos modelos de Derivadas Hidrodinâmicas após um 'tour' por um modelo "não-Derivadas Hidrodinâmicas" (e quase-explícito - um dos pontos fortes do modelo Asa Curta Estendido). No entanto, a aproximação aqui utilizada, para contornar o problema de baixa diferenciabilidade dos termos  $x|x|$  é válida apenas *localmente* (no entorno do ponto de bifurcação) conforme permite o Teorema da Variedade Central. Portanto, ao conduzirmos uma aproximação cúbica no Modelo Heurístico, junto ao ponto de bifurcação, não há um retorno do ponto de vista conceitual. Ao contrário, a técnica proposta permite abordar adequadamente o problema de não-diferenciabilidade, ampliando o poder do modelo de Asa Curta.

Realizamos estudos de análise de sensibilidade (influência do Coeficiente  $C_d$  sobre a qualificação da Bifurcação Dinâmica) que mostram que este coeficiente não influencia na qualificação da Bifurcação Dinâmica.

Apresentamos, por fim, recomendações para trabalhos futuros.

- i) Relevante do ponto de vista da Engenharia é o estudo de um sistema FPSO-*hawser* rígido em Tandem<sup>1</sup>. Para aborda-lo necessitamos escrever as equações do movimento para o sistema Tandem com *hawser* rígido na forma de Cauchy. Determinaríamos os pontos de equilíbrio. Em seguida linearizaríamos o sistema, determinaríamos os autovalores e montamos a matriz de autovetores. Na sequência efetuaríamos a expansão em Série de Taylor do sistema transladado para a origem. De posse da matriz Jacobiana diagonalizada poderíamos efetuar a redução do sistema à Variedade Central, aplicaríamos a técnica de Averaging para reescrever o sistema reduzido em coordenadas polares (caso estejamos estudando uma Bifurcação Dinâmica) e então escreveríamos as expressões para a amplitude de oscilação em função do parâmetro de bifurcação. Por fim, qualificaríamos a natureza da Bifurcação. Com a descrição acima pretendemos demonstrar a viabilidade técnica de tal estudo;
- ii) Estudar as bifurcações estáticas/dinâmicas considerando os termos de *Wave Drift Damping*. Com a inclusão de tais termos poderíamos quantificar e qualificar a priori a influência dos termos associados ao amortecimento devido às ondas para Bifurcações Estáticas/Dinâmicas;
- iii) Quando do estudo de *risers* encontramos fenômenos de *lock-in* em vibrações induzidas por vórtices dentre outros. Técnicas tais como a Redução à Variedade Central poderiam ser aplicadas a tais sistemas para pesquisar (com técnicas analíticas – complementares às técnicas numéricas e experimentais) a influência dos termos de ordem superior sobre a dinâmica do sistema.

Técnicas recentes de sistemas dinâmicas são bastante apropriadas para a produção de um mapa conceitual da dinâmica desses sistemas;

- iv) Sistemas com número razoavelmente grande de graus de liberdade, tais como o DICAS<sup>2</sup> demonstram o alcance da técnica de Redução à Variedade Central por possibilitar uma simplificação de grande monta no espaço de estados do sistema;
- v) A técnica aqui utilizada para contornar o problema da baixa diferenciabilidade nos termos da forma  $x|x|$  pode ser encontrada com maior formalismo matemático em [Clarke]. Tal formalismo matemático pode ser utilizado com sucesso no estudo de Bifurcações de Sistemas Dinâmicos que apresentem baixo grau de diferenciabilidade ou ainda em problemas de Controle.

---

<sup>1</sup> Tandem: sistema composto por navio aliviador conectado ao FPSO por um cabo.

<sup>2</sup> *Diffentiated Compliance Anchor System* (em português, Sistema de Amarração com Complacências Diferenciadas) constitui uma proposta de amarração desenvolvida pela PETROBRÁS.

## Apêndice I. Da necessidade de técnicas mais refinadas para estudar a dinâmica de sistemas FPSO em $E^c$

Neste apêndice vamos apresentar um contra-exemplo para observarmos que, no caso de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos (ou seja, aqueles para os quais a matriz jacobiana  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  apresenta ao menos um auto-valor com parte real nula), o comportamento das soluções do sistema linearizado **não** nos permite tirar conclusões sobre o comportamento dinâmico do sistema não-linear. Em outras palavras: *é uma situação na qual a linearização não basta!* Em termos mais técnicos dizemos que o comportamento das soluções na Variedade Central  $W_{loc}^c(y_0, \lambda_0)$  definida localmente no ponto de equilíbrio  $(y_0, \lambda_0)$ , **não** pode ser inferido a partir do comportamento das soluções do auto-espço  $E^c$  gerado pelos autovalores com parte real nula do sistema linearizado a partir do sistema de equações diferenciais

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathfrak{R}^n, \quad \lambda \in \mathfrak{R}^p \quad (\text{I.1})$$

próximo ao ponto de equilíbrio  $(y_0, \lambda_0)$ .

Para tal fim observemos o exemplo a seguir.

Consideremos o sistema definido abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \lambda x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro escalar. As equações (I.2) são uma perturbação não-linear do oscilador harmônico linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned} \tag{I.3}$$

O sistema (3) é um centro. Veja a figura AII.1 para observar o retrato de fase de (I.3). Veremos que centros são estruturalmente instáveis sob perturbações não-lineares.

Consideremos o sistema (I.2) como uma perturbação não-linear de (I.2). Esta perturbação não afeta os termos lineares do sistema. Para todos os valores de  $\lambda$ , a origem é um ponto de equilíbrio e o sistema linearizado na origem, é, claro, o oscilador harmônico linear (I.3). Os autovalores deste sistema linear são  $\pm i$ , os quais possuem parte real nula.

Com o intuito de analisarmos o sistema não linear (I.2), efetuamos a derivada do quadrado da distância de uma solução a origem:

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2\lambda (x_1^2 + x_2^2) \tag{I.4}$$

Se  $\lambda < 0$ , então  $\|x(t)\|^2$  aproxima-se monotonicamente de zero para  $t \rightarrow \infty$ . Assim, o equilíbrio na origem é assintoticamente estável. Veja a figura AI.2. Porém, caso  $\lambda > 0$ , todas as soluções do sistema (I.2) com condição inicial não-nula tendem ao infinito. Neste caso, a origem é instável. Veja a figura AI.3. Fim do exemplo.

O significado deste exemplo: para estudarmos a estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias em situações nas quais compareçam autovalores com parte real nula (e este é sempre o caso quando estamos estudando bifurcações) dependemos de forma crucial da parte não-linear do sistema. Donde a necessidade de técnicas mais

refinadas (como Variedade Central por exemplo) para estudar a dinâmica de sistemas de equações diferenciais ordinárias em pontos de equilíbrio não-hiperbólicos.

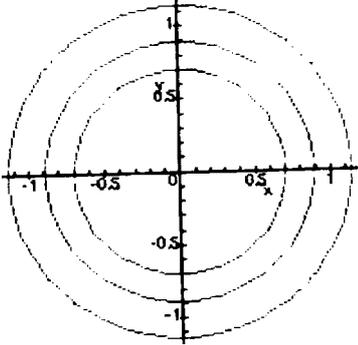


Figura A. 1

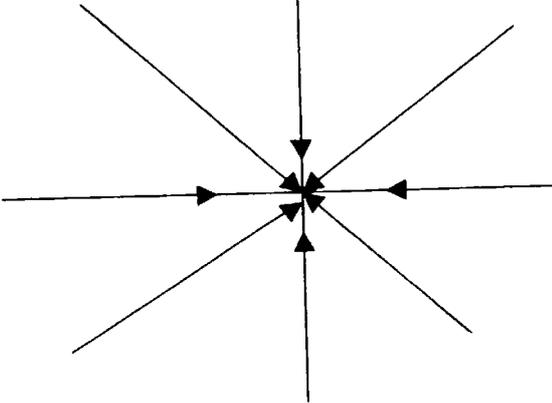


Figura A. 2

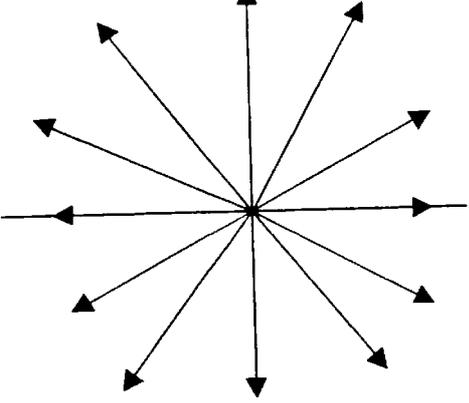


Figura A. 3

## Apêndice II. O Teorema de Andronov-Poincaré-Hopf

### A.II.1 Introdução

Neste apêndice apresentamos o enunciado do Teorema de Hopf para ocorrência da Bifurcação de Hopf. A referência usada neste Apêndice foi [Wiggins]

### A.II.2 O Teorema de Poincaré-Andronov-Hopf

Para estudarmos a ocorrência da Bifurcação Dinâmica em sistemas FPSO precisamos conhecer o enunciado do Teorema de Poincaré-Andronov-Hopf (como é denominado por [Wiggins]) ou simplesmente Teorema de Hopf (como é denominado por [Guckenheimer&Holmes]).

Consideremos um sistema de equações diferenciais ordinárias escrito na forma:

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathfrak{R}^n, \quad \lambda \in \mathfrak{R}^p \quad (\text{II.1})$$

Onde  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathfrak{R}^p$  é uma família de p-parâmetros e o ponto de equilíbrio é denotado por  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$ . Assim,  $g(y_0, \lambda_0) = 0$ . No caso da Bifurcação Dinâmica em sistemas FPSO estudada neste trabalho nossos principais parâmetros são Cf (Rey) é  $\mu = \frac{Lh}{L}$  comprimento do Hawser em relação ao comprimento do navio.

Estamos interessados no comportamento das soluções de (1) próximas de  $y_0$  quando variamos o parâmetro  $\lambda$ . A linearização do campo de vetores definido por (II.1) próximo ao ponto de equilíbrio  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$  será denotada por

$$\dot{\xi} = D_y g(y_0, \lambda_0) \xi, \quad \xi \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{II.2})$$

Consideremos as hipóteses a seguir.

Hipótese 1: suponha que  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  possua dois autovalores complexos com parte real nula com os restantes  $n-2$  autovalores possuindo parte real não-nula. Denotaremos estes auto-valores como

$$\lambda(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) \quad (\text{II.3})$$

com  $\alpha(0) = 0$ ,  $\omega(0) \neq 0$ .

Esta primeira hipótese implica que há uma curva suave de equilíbrios  $(y(\lambda), \lambda)$  com  $y(\lambda_0) = y_0$ . Os auto-valores  $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon)$  de  $D_y g(y(\lambda))$  calculados em  $\lambda = \lambda_0$  os quais são imaginários em  $\lambda = \lambda_0$  variam muito suavemente com  $\lambda$ . Se, além disso,

Hipótese 2:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\text{Re } \lambda(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \alpha' \neq 0 \quad (\text{II.4})$$

então há uma variedade central única passando por  $(y_0, \lambda_0) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$  e um sistema suave de coordenadas para o qual a expansão em série de Taylor de ordem 3 na variedade central é dada por (via Formas Normais)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha(\lambda) + a(\lambda)(x^2 + y^2))x - (\omega(\lambda) + b(\lambda)(x^2 + y^2))y + O(|x|^5, |y|^5) \\ \dot{y} &= (\omega(\lambda) + b(\lambda)(x^2 + y^2))x + (\alpha(\lambda) + a(\lambda)(x^2 + y^2))y + O(|x|^5, |y|^5) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

que, em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (\alpha(\lambda) + a(\lambda)r^2)r + O(r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(\lambda) + b(\lambda)r^2 + O(r^5) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Neste ponto é relevante destacarmos (tendo em mente o Modelo de Asa Curta Heurístico com os termos da forma  $(v+r.x)\{v+r.x\}$ ) que, ao aplicarmos a Técnica de Formas Normais a um sistema com termos de ordem par (desde que satisfeitas as hipóteses apresentadas acima) restarão apenas os termos de ordem ímpar. O leitor interessado pode consultar [Wiggins] ou [Arrowsmith&Place] acerca da Técnica de Formas Normais.

Para estudarmos a dinâmica próxima de  $\lambda = \lambda_0$ , efetuamos uma expansão em Série de Taylor dos coeficientes de (II.6) em torno de  $\lambda = \lambda_0$ . Assim ficamos com,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\alpha'(0)\varepsilon + a(0)r^2)r + O(\varepsilon^2 r, \varepsilon r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(0) + \omega'(0)\varepsilon + b(0)r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4)\end{aligned}\tag{II.7}$$

Desprezando os termos de ordem superior

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\alpha'\varepsilon + Kr^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega + c\varepsilon + br^2\end{aligned}\tag{II.8}$$

onde, para facilitar a notação definimos

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &\equiv \alpha', \\ \alpha(0) &\equiv K, \\ \omega(0) &\equiv \omega, \\ \omega'(0) &\equiv c, \\ b(0) &\equiv b\end{aligned}\tag{II.9}$$

Valores de  $r > 0$  e  $\varepsilon$  para os quais  $\dot{r} = 0$ , mas  $\dot{\theta} \neq 0$ , correspondem a órbitas periódicas de (II.8).

Em resumo, para estudar a estabilidade dos ciclos-limite e a existência dos ciclos-limite com respeito a  $\lambda$  o que fazemos é essencialmente considerar os sinais de  $K$  e  $\alpha'$  na expressão

$$r^2 = -\frac{\alpha' \varepsilon}{K} \quad (\text{II.10})$$

Vamos explorar com maior detalhamento através do lema seguinte.

**Lema 1** [Wiggins] Para  $-\infty < \frac{\varepsilon \alpha'}{K} < 0$  e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno

$$(r(t), \theta(t)) = \left( \sqrt{\frac{-\varepsilon \alpha'}{K}}, \left[ \omega + \left( c - \frac{b\alpha'}{K} \right) \varepsilon \right] t + \theta_0 \right) \quad (\text{II.11})$$

é uma órbita periódica de (II.8)

**Lema 2** [Wiggins] A órbita periódica é assintoticamente

estável para  $K < 0$ ;

instável para  $K > 0$ .

Como devemos ter  $r$  positivo, da expressão (II.11) a única órbita periódica possível para (II.8) possui uma única órbita periódica de amplitude  $O(\sqrt{\varepsilon})$ . Com respeito aos detalhes da estabilidade da órbita periódica e mesmo se ela existe para

$\varepsilon > 0$  ou  $\varepsilon < 0$ , de (II.11) temos quatro possibilidades:

1.  $\alpha' > 0, K > 0$
2.  $\alpha' > 0, K < 0$
3.  $\alpha' < 0, K > 0$
4.  $\alpha' < 0, K < 0$

Caso 1:  $\alpha' > 0, K > 0$ . Neste caso a origem é um ponto de equilíbrio instável para  $\varepsilon > 0$  e um ponto fixo assintoticamente estável para  $\varepsilon < 0$ , com uma órbita periódica instável para  $\varepsilon < 0$ . Veja a figura A.II.1.

Caso 2:  $\alpha' > 0, K < 0$ . Neste caso a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para  $\varepsilon < 0$  e um ponto de equilíbrio instável para  $\varepsilon > 0$ , com uma órbita periódica assintoticamente estável para  $\varepsilon > 0$ . Veja a figura A.II.2.

Caso 3:  $\alpha' < 0, K > 0$ . Neste caso a origem é um ponto de equilíbrio instável para  $\varepsilon < 0$  e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para  $\varepsilon > 0$ , com uma órbita periódica instável para  $\varepsilon > 0$ . Veja a figura A.II.3.

Caso 4:  $\alpha' < 0, K < 0$ . Neste caso a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para  $\varepsilon < 0$  e um ponto de equilíbrio instável para  $\varepsilon > 0$ , com uma órbita periódica assintoticamente estável para  $\varepsilon < 0$ . Veja a figura A.II.4.

Para  $K < 0$  a órbita periódica existe é assintoticamente estável tanto para valores positivos do parâmetro  $\varepsilon$  (caso 2) quanto para valores negativos de  $\varepsilon$  (caso 4). Para  $K > 0$ , a órbita periódica também existe tanto para valores positivos de  $\varepsilon$  quanto para valores negativos de  $\varepsilon$  mas agora ela é instável. O sinal de  $K$  nos informa se a órbita

periódica é estável ( $K < 0$ ) ou instável ( $K > 0$ ). O primeiro caso chamamos de bifurcação supercrítica. O segundo caso ( $K > 0$ ) é dito subcrítico.

Da hipótese  $\frac{d}{d\varepsilon}(\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} = \alpha' \neq 0$ , se  $\alpha' > 0$ , os autovalores cruzam o semi-plano da esquerda para a direita conforme o parâmetro aumenta e para  $\alpha' < 0$  os autovalores cruzam o semi-plano da direita para a esquerda para valores crescentes do parâmetro. Ou seja, para valores positivos de  $\alpha'$ , a origem é assintoticamente estável para  $\varepsilon < 0$  e instável para  $\varepsilon > 0$  e, para valores negativos de  $\alpha'$ , a origem é instável para  $\varepsilon < 0$  e assintoticamente estável para  $\varepsilon > 0$ .

**Teorema** [Wiggins] (Poincaré[1892]-Andronov[1929]-Hopf[1942]):

Consideremos o sistema de equações diferenciais apresentado em (II.7). Então, sob as hipóteses H1 e H2 vistas acima e para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, valem os Casos 1,2,3 e 4 vistos no Lema 1. Também valem as conclusões vista no Lema 2.

Se  $K \neq 0$  existe uma superfície de soluções periódicas na variedade central a qual possui tangência quadrática com o auto-espaço de  $(\lambda(0), \bar{\lambda}(0))$  concordando até segunda ordem com a parabolóide  $\varepsilon = -(K/\alpha')(x^2 + y^2)$ .

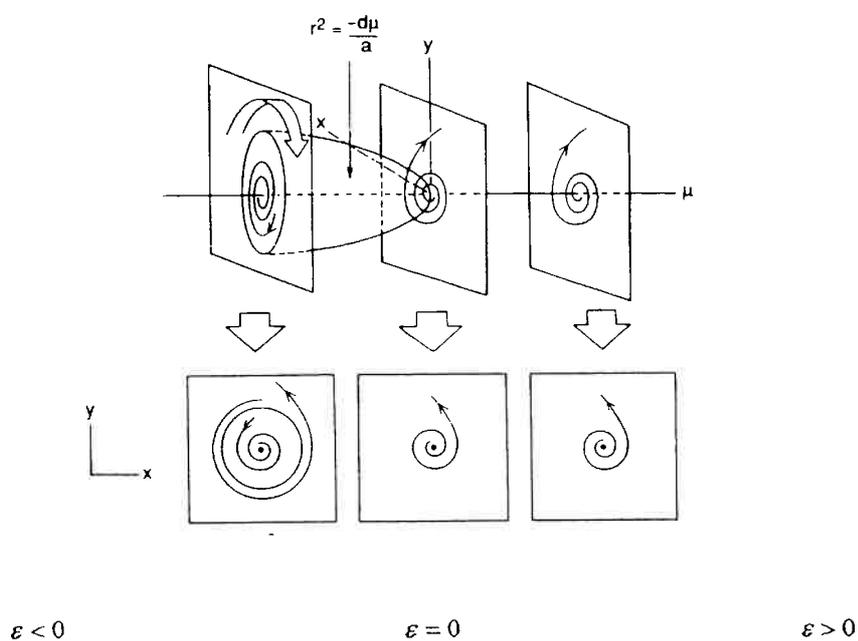
Para a demonstração deste teorema utilizam-se os teoremas da Variedade Central e das Formas Normais. O leitor interessado pode consultar [Guckenheimer&Holmes], [Marsden&McCracken] ou [Wiggins].

A seguir faremos algumas observações a respeito do Teorema de Hopf. Do Teorema da Variedade Central sabemos que a órbita próxima ao ponto de equilíbrio é determinada pelo campo de vetores definido em (II.1) restrita à variedade central. Esta restrição fornece uma família de campos vetoriais p-paramétrica numa variedade

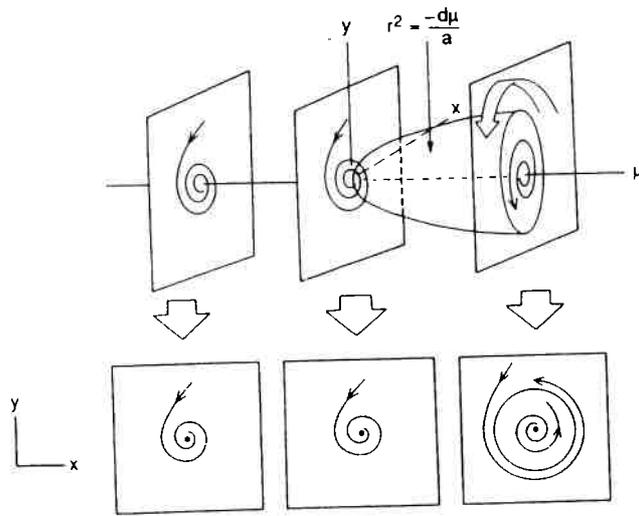
central bidimensional. Caso  $p > 1$  consideramos apenas um parâmetro como variável e os restantes como fixos.

Para sistemas de equações diferenciais com  $n > 2$ , o cálculo da forma normal dada em (II.4) e o coeficiente cúbico  $K$ , o qual determina a estabilidade, pode ser um exercício razoavelmente trabalhoso.

Para ressaltar a relevância da Hipótese 2, sugerimos ao leitor retornar ao Apêndice I e observar a ausência de órbitas periódicas tanto para valores positivos quanto para valores negativos do parâmetro  $\varepsilon$  utilizado naquele contexto.



**Figura A.II.1  $\alpha' > 0, K > 0$**

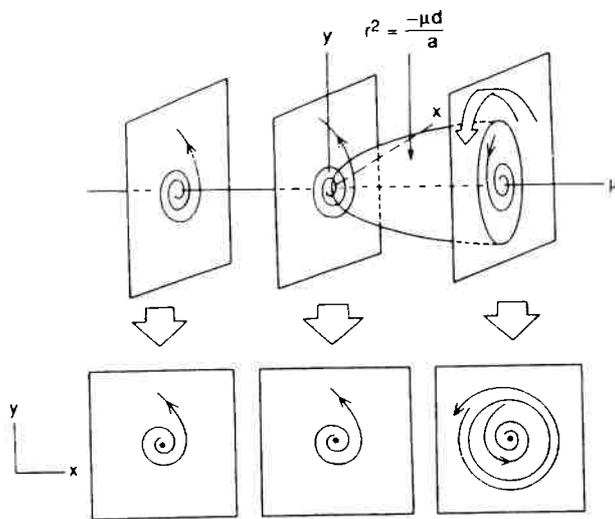


$\varepsilon < 0$

$\varepsilon = 0$

$\varepsilon > 0$

**Figura A.II.2  $\alpha' > 0, K < 0$**

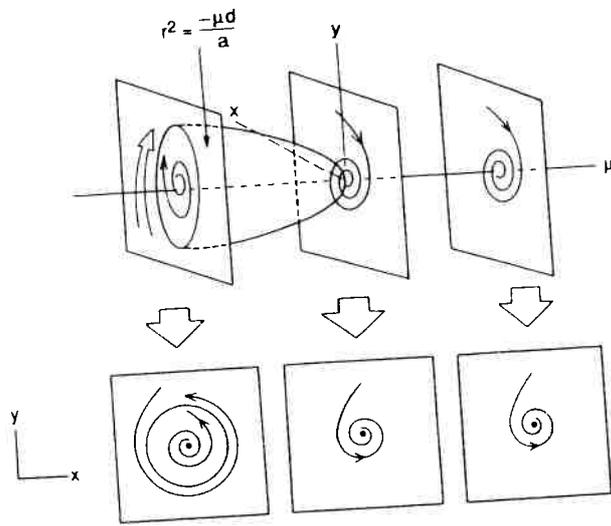


$\varepsilon < 0$

$\varepsilon = 0$

$\varepsilon > 0$

**Figura A.II.3  $\alpha' < 0, K > 0$**



$$r^2 = \frac{-\mu d}{a}$$

$\varepsilon < 0$

$\varepsilon = 0$

$\varepsilon > 0$

**Figura A.II.4**  $\alpha' < 0, K < 0$

## Apêndice 3 A Técnica de Redução à Variedade Central: motivação,

### Teoremas e Algoritmo e exemplo

#### A.III.1 Introdução

Neste apêndice apresentamos a Técnica de Redução à Variedade Central a partir de alguns exemplos simples. No primeiro exemplo pretendemos motivar para a noção de Variedade Invariante. Com o segundo exemplo apresentamos a definição de Variedade Central. Nos Teorema 1 e 2 apresentamos a formalização destas idéias. Finalmente, no Teorema 3 apresentamos o algoritmo para obter a expressão da Variedade Central. Em seguida apresentamos um exemplo no contexto da Teoria da Bifurcação e por fim apresentamos o algoritmo de Redução à Variedade Central aplicado ao caso de uma equação de Van der Pol. Neste Apêndice utilizamos alguns exemplos e o enunciado dos Teoremas contidos em [Carr].

#### A.III.2 Um exemplo, a noção de Variedade Invariante e a Redução de um Sistema de Equações Diferenciais

Consideremos o Sistema de Equações Diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - p(x) \\ \dot{y} &= -y + q(y)\end{aligned}\tag{III.1}$$

onde  $\alpha$  é uma constante,  $p$  é um polinômio na variável  $x$  de grau maior ou igual a três e  $q$  é um polinômio em  $y$  de grau maior ou igual a dois. Observamos que as equações acima estão desacopladas. Nas condições acima podemos com facilidade concluir que este sistema é assintoticamente estável se e somente se  $\alpha < 0$ .

Consideremos agora este outro Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (cujas equações estão acopladas):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha p(x) + r(x, y) \\ \dot{y} &= -y + q(y) + s(x, y)\end{aligned}\tag{III.2}$$

onde  $p$  e  $q$  são polinômios como definido acima,  $r$  é polinômio em  $x$  e em  $y$  de grau maior ou igual a três e  $s$  é polinômio em  $x$  e  $y$  de grau maior ou igual a dois.

Neste segundo Sistema de Equações Diferenciais não podemos afirmar com a mesma facilidade que afirmamos no primeiro Sistema sobre a estabilidade do sistema com respeito ao sinal de  $\alpha$ .

No entanto vemos que (1) a dinâmica restrita à segunda equação neste segundo sistema é estável quando consideramos apenas a variável  $y$  (quando restringimo-nos aos termos de primeira ordem do sistema a segunda equação está associada a um subespaço estável devido ao autovalor negativo).

Lembremos ainda que (2) nas condições de sistemas de equações diferenciais como os apresentados anteriormente, a matriz Jacobiana apresenta coeficientes nulos para os termos em  $x$ . Ou seja, considerando apenas os termos lineares do sistema, há mais equações que incógnitas. Considerando apenas a parte linear do sistema, poderíamos integrar a equação em  $x$  e em seguida substituir esta função na equação diferencial em  $y$ , “resolvendo” o sistema para termos na expansão em Série de Taylor até ordem 2.

A discussão do parágrafo acima sugere que, caso conseguíssemos efetuar um mudança de coordenadas da forma  $y = h(x)$ , ao menos para  $|x|$  suficientemente pequeno poderíamos estudar a estabilidade do sistema acima considerando a dinâmica restrita à primeira equação escrevendo-a na forma

$$\dot{x} = \alpha p(x) + r(x, y) = \alpha p(x) + r(x, h(x))$$

Dessa forma, reduzimos o problema de estudar a estabilidade do sistema ao estudo da estabilidade restrita a uma equação diferencial, para  $|x|$  suficientemente pequeno. O que por si só já resulta num ganho de eficiência na discussão da estabilidade de sistemas de equações diferenciais.

A discussão acima conduz-nos à definição seguinte:

**Definição:** dizemos que uma curva  $y = h(x)$ , para  $|x|$  pequeno é chamada de Variedade Invariante para o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{III.3}$$

se a solução  $(x(t), y(t))$  do sistema acima que passa pelo ponto  $(a, h(a))$  permanece na curva  $y=h(x)$  para  $t$  suficientemente pequeno com  $f$  e  $g$  funções suficientemente diferenciáveis em  $x$  e  $y$ .

Esta mudança de coordenadas proporcionada pela Variedade Invariante  $y=h(x)$  permitirá o desacoplamento entre as equações diferenciais constituintes do sistema acima até uma determinada ordem na expansão em Série de Taylor ( $|x|$  suficientemente pequeno).

Expressemos no formalismo matemático o que foi dito no parágrafo acima.

A coordenada  $y$  será escrita na forma  $y = h(x)$  com  $|x|$  suficientemente pequeno e  $h(x) = O(x^2)$ . Substituindo esta mudança de coordenadas na primeira equação:

$$\dot{x} = f(x, y) = f(x, h(x)) \tag{III.4}$$

Com esta mudança de coordenadas podemos estudar a dinâmica do sistema (III.3) para  $|x|$  suficientemente pequeno restringindo-nos apenas à equação acima.

### A.III.3 A Variedade Central

Consideremos um sistema de equações diferenciais na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y)\end{aligned}\tag{III.5}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}^m$  e  $A$  e  $B$  são matrizes constantes tais que os autovalores de  $A$  possuem parte real nula e os autovalores de  $B$  possuem parte real negativa. As funções  $f$  e  $g$  são funções deriváveis com segunda derivada contínua tais que  $f(0,0) = 0$ ,  $g(0,0) = 0$ ,

$f'(0,0) = 0$ ,  $g'(0,0) = 0$ . Por  $f'$  e  $g'$  denotamos as matrizes Jacobianas de  $f$  e  $g$ . No caso em que  $f$  e  $g$  são identicamente nulas, duas variedades invariantes de fácil identificação são

$x = 0$  e  $y = 0$ .

A variedade invariante associada aos autovalores com parte real negativa é denominada *Variedade Estável*. A variedade invariante associada aos autovalores com parte real nula é denominada *Variedade Central*. Dizemos que a variedade  $y = h(x)$  é uma *Variedade Central* para o sistema (III.5) quando  $h$  é derivável,  $h(0) = 0$  e  $h'(0) = 0$ .

Quando  $f$  e  $g$  são identicamente nulas podemos estabelecer uma relação bastante importante entre a dinâmica do sistema completo (III.5) e a dinâmica do sistema

$$\dot{x} = Ax\tag{III.6}$$

No caso em que  $f$  e  $g$  são identicamente nulas, as soluções do sistema (III.5) tendem exponencialmente rápido (para  $t$  tendendo ao infinito) para as soluções de (III.6) e a dinâmica na Variedade Central no sistema reduzido (III.6) contém a informação relevante da dinâmica do sistema não-reduzido (III.5).

Neste ponto apresentaremos o enunciado de três teoremas que trazem os resultados análogos àquelas da discussão acima mas para  $f$  e  $g$  não-nulas e apresentam o algoritmo para determinar a expressão da Variedade Central.

**Teorema 1.** [Carr] Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \tag{III.7}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^m$  e  $A$  e  $B$  são matrizes constantes tais que os autovalores de  $A$  possuem parte real nula e os autovalores de  $B$  possuem parte real negativa. As funções  $f$  e  $g$  são funções deriváveis com segunda derivada contínua tais que  $f(0,0) = 0, g(0,0) = 0,$

$f'(0,0) = 0, g'(0,0) = 0.$  Por  $f'$  e  $g'$  denotamos as matrizes Jacobianas de  $f$  e  $g.$

Então existe uma variedade central para o sistema acima  $y = h(x), |x| < \delta,$  onde  $h$  é de classe  $C^2.$  A dinâmica na Variedade Central é representada pelo sistema com dimensão  $n$

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)) \tag{III.8}$$

O Teorema seguinte afirma que na Variedade Central encontram-se as informações essenciais sobre a dinâmica do sistema para  $|x|$  suficientemente pequeno.

**Teorema 2.** [Carr]

(a) Suponha que a solução nula de (III.8) seja estável/assintoticamente estável/instável. Então a solução nula de (III.7) é estável/assintoticamente estável/instável.

(b) Suponha que a solução nula de (III.8) seja estável. Seja  $(x(t), y(t))$  a solução de (III.7) com  $(x(0), y(0))$  suficientemente pequeno. Então existe uma solução  $u(t)$  de (III.8) tal que, para  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t})\end{aligned}\tag{III.9}$$

onde  $\gamma > 0$  é uma constante.

### A.III.4 O Algoritmo para obter a Variedade Central

Neste ponto devemos observar que ainda não temos um método para obter as expressões da Variedade Central. Conseguimos garantir sua existência sob certas hipóteses, a velocidade de convergência mas ainda não sabemos como determiná-la.

Seja o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y)\end{aligned}\tag{III.10}$$

Consideremos a segunda equação no sistema acima, na Variedade Central ( $y = h(x)$ ):

$$h'(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x))\tag{III.11}$$

Resolver esta equação é, na verdade, equivalente a resolver o sistema original. Mas este problema pode ser tratado pelo seguinte

**Teorema 3:** [Carr] Defina

$$(M\phi)(x) = \phi'(x)[Ax + f(x, h(x))] - B\phi(x) - g(x, h(x))\tag{III.12}$$

onde  $\phi$  é uma função de classe  $C^1$  que leva a origem no  $\mathbb{R}^n$  na origem no  $\mathbb{R}^m$  com

$\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 0$ . Suponha que para  $x \rightarrow 0$ ,  $(M\phi)(x) = O(|x|^q)$  onde  $q > 1$ . Então,

para  $x \rightarrow 0$ ,  $|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q)$ .

Em outras palavras, com o Teorema 3 o que fazemos na prática é resolver a equação (III.12) respectivamente para cada ordem na expansão da Série de Taylor que anula (III.12).

### A.III.5 Estudo de Bifurcações e a Técnica de Redução à Variedade Central

Podemos aplicar a Técnica de Redução à Variedade Central ao estudo qualitativo de Bifurcações. Considere um sistema na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \\ \dot{\varepsilon} &= 0\end{aligned}\tag{III.13}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ , com  $\varepsilon$  parâmetro  $p$ -dimensional,  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  cujos autovalores possuem parte real nula,  $B$  uma matriz quadrada de ordem  $m$  cujos autovalores possuem parte real negativa,  $f$  e  $g$  tais que  $f(0,0,0) = (0,0,0)$ ,  $g(0,0,0) = (0,0,0)$ ,  $f'(0,0,0) = (0,0,0)$  e  $g'(0,0,0) = (0,0,0)$ . Caso estas matrizes não estejam neste formato, devemos diagonalizar a matriz Jacobiana.

Ao aplicarmos os Teoremas acima em um sistema nas condições acima conseguimos reduzir o problema *localmente* próximo ao ponto de bifurcação no estudo da equação

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0\end{aligned}\tag{III.14}$$

Usualmente, nas aplicações  $n=1$  ou  $2$  e dessa forma obtemos um ganho de eficiência no estudo qualitativo do sistema substancial. O que do ponto de vista do Engenheiro Projetista é significativo.

### A.III.6 Um Exemplo de Redução à Variedade Central

Nesta seção vamos aplicar a Técnica de Redução à Variedade Central a uma equação de Duffing quadrática. Este exemplo foi extraído de [Guckenheimer, Holmes].

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \beta x - \delta y - x^2 \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

para  $\delta > 0$  e  $\beta \cong 0$ . A matriz Jacobiana deste sistema será denotada por

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & -\delta \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

A linearização do sistema acima na origem, com  $\beta = 0$ , resulta na matriz Jacobiana denotada abaixo por  $A$ , os autovalores do sistema ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\delta$ ), bem como a matriz de autovetores do sistema (aquí denotada por  $T$ ) e sua inversa (denotada por  $T^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \\ T^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\delta} \\ 0 & -\frac{1}{\delta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Com o intuito de diagonalizarmos a matriz Jacobiana efetuamos a mudança de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Com a mudança de coordenadas acima reescrevemos o sistema original nas novas coordenadas  $(u, v, \beta)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = T^{-1} A_{\beta} T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -(u+v)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\delta} & \frac{\beta}{\delta} \\ -\frac{\beta}{\delta} & -\frac{\beta}{\delta} - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} -(u+v)^2 \\ (u+v)^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\beta} = 0$$

Da expressão acima associamos à direção  $u$  com a Variedade Central (pois temos um autovalor nulo nesta direção). A direção  $v$  fica associada com a Variedade Estável (pois o autovalor  $\lambda_2$  associado a esta direção é negativo).

Do Teorema 1 podemos escrever então a Variedade Central como:

$$v = h(u, \beta) = a_0 u^2 + a_1 u\beta + a_2 \beta^2 + O(u^3, u^2 \beta, u\beta^2, \beta^3) \quad (\text{III.19})$$

Da equação  $h'(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x))$  obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2a_0 u + a_1 \beta & a_1 \beta + 2a_2 \beta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\delta} (u+h) - \frac{1}{\delta} (u+h)^2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\delta h - \frac{\beta}{\delta} (x+h) + \frac{1}{\delta} (x+h)^2 \quad (\text{III.20})$$

Após substituirmos a expressão (III.19) para a Variedade Central em (III.20) e igualarmos as potências de  $u^2, u\beta, \beta^2$  obtemos

$$a_0 = \frac{1}{\delta^2}, a_1 = -\frac{1}{\delta^2}, a_2 = 0 \quad (\text{III.21})$$

Donde

$$v = h(u, \beta) = \frac{1}{\delta^2} u^2 - \frac{1}{\delta^2} u\beta + O(u^3, u^2 \beta, u\beta^2, \beta^3) = \frac{1}{\delta^2} u(u - \beta) + O(u^3, u^2 \beta, u\beta^2, \beta^3)$$

Portanto a expressão para o sistema reduzido será:

$$\dot{u} = \frac{\beta}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2}\right) u - \frac{1}{\delta^2} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2}\right) u^2 + O(u^3, u^2 \beta, u\beta^2, \beta^3) \quad (\text{III.22})$$

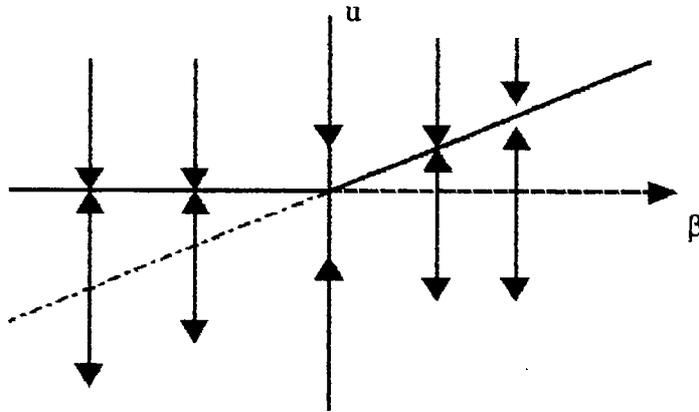
$$\dot{\beta} = 0$$

Da equação acima concluímos que, nas condições dadas, temos a ocorrência de uma Bifurcação do tipo Transcrítica. Compare-se a equação reduzida com a forma normal

de Bifurcações Transcríticas com  $x$  escalar e o parâmetro de bifurcação também

escalar:  $\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, \quad x \in \mathfrak{R}, \mu \in \mathfrak{R}.$

Da equação reduzida obtemos o diagrama de bifurcação:



**Figura A.III.1 Diagrama de Bifurcação para (III.22)**

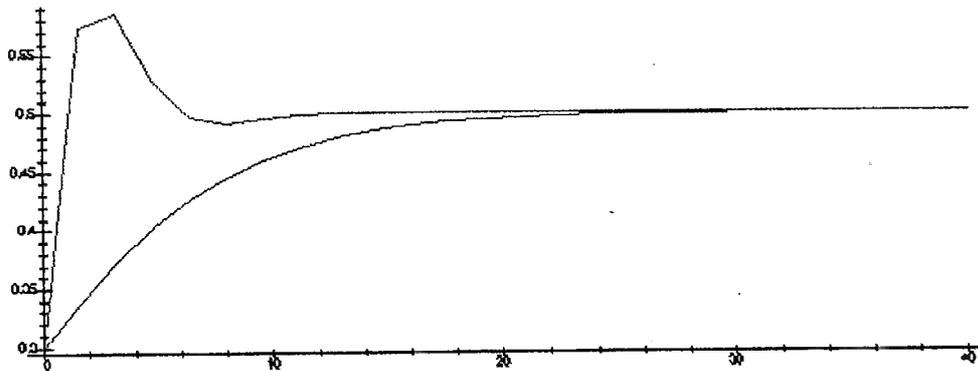
Pelo diagrama de bifurcação observamos que, para  $\beta < 0$  há dois pontos fixos:  $u = 0$  estável e  $u = \beta$  instável. Já para  $\beta > 0$ ,  $u = 0$  é instável e  $u = \beta$  é estável.

Um aspecto que não deve ser esquecido é que a redução à Variedade Central obtida é um resultado que vale apenas *localmente para  $\beta$  suficientemente pequeno*. Para verificarmos essa última afirmação observemos os próximos gráficos no domínio do tempo para a equação de Duffing apresentada no início desta seção.

Na figura da página seguinte, o gráfico em verde corresponde à solução integrada no domínio do tempo  $x_1(t)$  do sistema (III.15). com as condições

iniciais  $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0$ . Utilizamos ainda os valores  $\beta = 0.5, \delta = 0.9$

O gráfico em vermelho corresponde à integração no domínio do tempo de  $x(t)$  da equação reduzida (III.22).



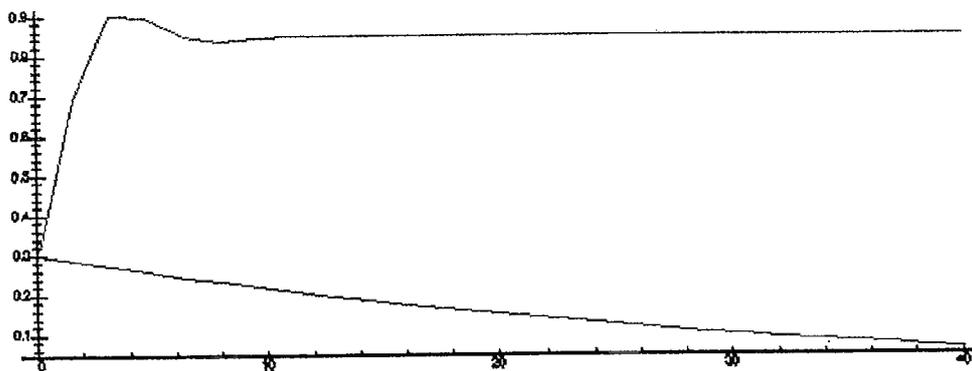
**Figura A.III.2: Comparação entre a convergência no domínio do tempo para as equações**

**(A.III.15)/ Completa e (A.III.22)/Reduzida.**

Observe ainda a velocidade de convergência das duas soluções para  $t \rightarrow \infty$ . Esta velocidade de convergência das duas soluções (da equação original e da reduzida) consta das teses do Teorema 2 apresentado na seção 3 deste apêndice.

Efetuem os agora a integração das mesmas equações diferenciais, mesmas condições iniciais,  $\delta = 0.9$  mas com  $\beta = 0.85$ :

No gráfico acima, a função em verde corresponde à solução da equação original e a função em vermelho corresponde à solução do sistema reduzido. Observe que a função do sistema original continua apresentando convergência para  $\beta = 0.85$ .



**Figura A.III.3: Gráfico no domínio do tempo para as expressões (III.15)/completa e (III.22)/reduzida**

## **Apêndice IV Expansão em Série de Taylor no caso FPSO-SPM-**

### **Hawser rígido**

#### **A.IV.1 Introdução**

Neste apêndice apresentamos a dedução da expansão em Série de Taylor para o Caso FPSO-SPM-Hawser rígido sob o modelo Asa Curta Heurístico Estendido. Um aspecto técnico de relevância neste ponto é a impossibilidade de efetuarmos a expansão em Série de Taylor das integrais de Cross-Flow. A proposta de solução apresentada consiste na aproximação da função  $(v+rx)|v+rx|$  que consta das integrais de Cross-Flow por funções cúbicas normalizadas. Dada a importância das integrais de Cross-Flow em aplicações da Engenharia Naval, a abordagem aqui proposta para este problema técnico possui interesse que ultrapassa a especificidade do modelo hidrodinâmico que estamos estudando.

#### **A.IV.2 O Caso FPSO-SPM-Hawser rígido**

Apresentamos abaixo a formulação do Modelo Asa Curta Heurístico Estendido apresentada em [SimosTese] . Esta formulação incorporou algumas correções do modelo previamente apresentado em [Relatório PROCAP2000,No. 2]:

**Forças Hidrodinâmicas Rotacionais**  $F_{X,R}(u, v, r); F_{Y,R}(u, v, r); N_{Z,R}(u, v, r)$

$$\begin{aligned}
 F_{X,R}(u, v, r) &= F_{X,R}(u, v, 0) - \frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \cdot vr - \frac{1}{16} \rho \pi T^2 L^2 \cos(\alpha') r^2 \\
 F_{Y,R}(u, v, r) &= F_{Y,R}(u, v, 0) + \frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + 0.160 \frac{B}{T} \right) ur + M_{11} ur \\
 &\quad - \frac{1}{2} \rho TL \left[ I_0(v, r) v^2 - C_y v |v| \right] - \frac{1}{2} \rho TL^2 I_1(v, r) vr - \frac{1}{2} \rho TL^3 I_2(v, r) r^2 \\
 N_{Z,R}(u, v, r) &= N_{Z,R}(u, v, 0) - \frac{1}{8} \rho \pi T^2 L^2 \left( 1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right) |u|r + M_{26} ur \\
 &\quad - \frac{1}{2} \rho TL^2 \left[ I_1(v, r) v^2 + I_C v |v| \right] - \frac{1}{2} \rho TL^3 I_2(v, r) vr - \frac{1}{2} \rho TL^4 I_1(v, r) r^2 - \frac{1}{2} \rho TL^4 \left[ \frac{C_Y}{16} - I_3(0, r) \right] r^2
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

onde:

$$\alpha' = a \tan(-v / u + rL / 2) \quad : \text{ ângulo de ataque instantâneo}$$

e:

$$\begin{aligned}
 F_{X,R}(u, v, 0) &= \frac{1}{2} \rho U^2 LTC_{1c}(\alpha) \\
 F_{Y,R}(u, v, 0) &= \frac{1}{2} \rho U^2 LTC_{2c}(\alpha) \\
 N_{Z,R}(u, v, 0) &= \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 TC_{6c}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

com:

$$\begin{aligned}
 C_{1c}(\alpha) &= C_f(\text{Re}) \cos(\alpha) + \frac{\pi T}{8L} (\cos(3\alpha) - \cos(\alpha)) \\
 C_{2c}(\alpha) &= \left( C_Y - \frac{\pi T}{2L} \right) \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| + \frac{\pi T}{2L} \sin^3(\alpha) + \frac{\pi T}{L} \left( 1 + 0.4 \frac{C_b B}{T} \right) \sin(\alpha) |\cos(\alpha)| \\
 C_{6c}(\alpha) &= -I_C \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| - \frac{\pi T}{L} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
 &\quad - \frac{\pi T}{2L} \left( \frac{1 + |\cos(\alpha)|}{2} \right)^2 \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right) \sin(\alpha) |\cos(\alpha)|
 \end{aligned} \tag{IV.3}$$

e ainda:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) \text{sign}(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi d\xi \\
 I_2 &= \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) \text{sign}(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi^2 d\xi \\
 I_3 &= \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) \text{sign}(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi^3 d\xi
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

### A.IV.3 As Equações de Movimento

As equações de movimento são escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 (M + M_{11})\dot{u} - (M + M_{22})vr - (Mx_{CG} + M_{26})r^2 &= F_{X,R}(u, v, r) + F_X(u, v, r) \\
 (M + M_{22})\dot{v} + (M + M_{11})ur + (Mx_{CG} + M_{26})\dot{r} &= F_{Y,R}(u, v, r) + F_Y(u, v, r) \\
 (I_Z + M_{66})\dot{r} + (Mx_{CG} + M_{26})(\dot{v} + ur) &= N_{Z,R}(u, v, r) + N_Z(u, v, r)
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

onde:

$F_X(u, v, r)$ ,  $F_Y(u, v, r)$ ,  $N_Z(u, v, r)$  são as forças impostas pelo Hawser

Além das equações dinâmicas acima, a condição de *hawser* rígido fornece as seguintes restrições cinemáticas:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U \cos(\psi(t)) + L_h \frac{d\gamma}{dt} \text{sen}(\gamma(t) + \psi(t)) \\
 v(t) &= -U \text{sen}(\psi(t)) + L_h \frac{d\gamma}{dt} \cos(\gamma(t) + \psi(t)) - x_a \frac{d\psi}{dt} \\
 r(t) &= \frac{d\psi}{dt}
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

onde  $L_h$  é o comprimento do *hawser* e  $x_a$  coordenada longitudinal do ponto de acoplamento do *hawser* sobre o navio.

As forças e momento impostas pelo *hawser* ao navio em função da força de tração/compressão ( $F_H$ ) que atua sobre o *hawser* serão representadas como abaixo:

$$\begin{aligned} F_X &= F_H \cos(\gamma + \psi) \\ F_Y &= -F_H \sin(\gamma + \psi) \\ N_Z &= -x_a F_H \sin(\gamma + \psi) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

#### A.IV.4 Variáveis Adimensionais

Seja  $U_C$  a velocidade da correnteza marítima. Consideraremos as seguintes variáveis adimensionais:

$$\bar{t} = \frac{U_C t}{L}, \quad (\bar{u}; \bar{v}; \bar{r}) = \left( \frac{u}{U_C}; \frac{v}{U_C}; \frac{rL}{U_C} \right), \quad \bar{U}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 \quad (\text{IV.8})$$

Adimensionalizando as massas adicionais teremos:

$$A_{11} = \frac{M + M_{11}}{M}, \quad A_{22} = \frac{M + M_{22}}{M}, \quad A_{26} = \frac{Mx_{CG} + M_{26}}{ML}, \quad A_{66} = \frac{I_Z + M_{66}}{ML^2} \quad (\text{IV.9})$$

As forças de vínculo adimensionalizadas ficam:

$$\left( \bar{F}_X \right) = \frac{L}{MU_C^2} (F_X), \quad \left( \bar{F}_Y \right) = \frac{L}{MU_C^2} (F_Y), \quad \left( \bar{N}_Z \right) = \frac{L}{MU_C^2} (N_Z / L) \quad (\text{IV.10})$$

As restrições cinemáticas advindas da condição do *hawser* rígido são re-apresentadas como:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{t}) &= \cos\left(\bar{\psi}(\bar{t})\right) + \mu \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \operatorname{sen}\left(\gamma(\bar{t}) + \bar{\psi}(\bar{t})\right) \\
\bar{v}(\bar{t}) &= -\operatorname{sen}\left(\bar{\psi}(\bar{t})\right) + \mu \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \cos\left(\gamma(\bar{t}) + \bar{\psi}(\bar{t})\right) - a \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{t}} \\
\bar{r}(\bar{t}) &= \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{t}}
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

onde:  $\mu = \frac{Lh}{L}$ ,  $a = \frac{x_a}{L}$

Donde, as equações dinâmicas adimensionalizadas ficam

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{11} \bar{u} - A_{22} \bar{v} - A_{26} \bar{r} &= F_{X,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_X(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \\
A_{22} \bar{v} + A_{26} \bar{r} + A_{11} \dot{\bar{u}} &= F_{Y,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_Y(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \\
A_{66} \bar{r} + A_{26} \bar{v} + A_{26} \dot{\bar{u}} &= F_{Z,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_Z(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

Com as forças generalizadas  $F_{X,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$ ,  $F_{Y,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$ ,  $F_{Z,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$  definidas em função das

variáveis adimensionais  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$ ,  $\bar{U} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$ ,  $\bar{t} = \frac{Ut}{L}$

## A.IV.5 Expansão em Série de Taylor

### I. A Expansão em Série de Taylor para as Integrais de Cross-Flow

A expansão em Série de Taylor do sistema dinâmico definido pelas equações (IV.12)

será efetuada em torno da posição de equilíbrio trivial definida por  $\bar{u} = 1, \bar{v} = 0, \bar{r} = 0$ .

No entanto, para podermos aplicar o algoritmo de Redução à Variedade Central devemos efetuar a expansão em Série de Taylor das equações que modelam a dinâmica do sistema FPSO-SPM-Hawser incluindo as expressões para as forças hidrodinâmicas rotacionais adimensionalizadas. No entanto temos uma dificuldade técnica neste ponto

já que as expressões algébricas para as forças hidrodinâmicas rotacionais incluem

termos da forma  $sign(\bar{v} + \bar{r} \xi)$  nas Integrais de Cross-Flow:  $I_1 = \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) sign(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi d\xi$ ,

$$I_2 = \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) sign(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi^2 d\xi, I_3 = \int_{APP}^{FPP} C_D(\xi) sign(\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi^3 d\xi$$

Com o intuito de evitarmos as funções sinal nas Integrais de Cross-Flow consideremos as expressões para as forças que levam em conta os efeitos de Cross-Flow apresentadas em [SimosTese]:

$$\begin{aligned} F_{Y,R}^{CF}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| (\bar{v} + \bar{r} \xi) d\xi \\ N_{Z,R}^{CF}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| (\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Ao invés de procedermos como [SimosTese] e re-escrevermos as expressões acima em termos de funções sinal nós as manteremos neste formato com vistas à expansão em Série de Taylor. Observamos que, nos estudos anteriormente realizados nos quais utilizavam-se das expressões das forças relativas aos efeitos de Cross-Flow, como a expansão em Série de Taylor focava nos termos lineares e, sendo as componentes de Cross-Flow não-lineares, a não diferenciabilidade na origem destes termos não caracterizava um problema a ser trabalhado. Diferentemente, no nosso caso, estamos interessados nos termos não-lineares tanto quanto nos lineares.

Ao mantermos as expressões das forças  $F_{Y,R}^{CF}(u, v, r)$ ,  $N_{Z,R}^{CF}(u, v, r)$  devemos lembrar que o Modelo Heurístico Estático já incorporava os efeitos de Cross-Flow na força lateral e momento para o caso  $r = 0$ . Logo, devemos subtrair as componentes estáticas de cross-flow ( $r = 0$ ) das expressões para  $F_{Y,R}^{CF}(u, v, r)$  e  $N_{Z,R}^{CF}(u, v, r)$ .

Portanto teremos as expressões:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{F}_{Y,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| (\bar{v} + \bar{r} \xi) d\xi + \frac{1}{2} \rho T L I_0(v, 0) v^2 \\ \Delta \tilde{N}_{Z,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| (\bar{v} + \bar{r} \xi) \xi d\xi + \frac{1}{2} \rho T L^2 I_1(v, 0) v^2\end{aligned}\quad (\text{IV.14})$$

onde

$$\begin{aligned}I_0(v, 0) &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \text{sign}(\bar{v}) d\xi = \frac{\text{sign}(\bar{v})}{L} \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) d\xi = I_0 \\ I_1(v, 0) &= \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \text{sign}(\bar{v}) \xi d\xi = \frac{\text{sign}(\bar{v})}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \xi d\xi = I_1\end{aligned}\quad (\text{IV.15})$$

Retomando da Síntese do Modelo Heurístico Estendido apresentada em [SimosTese],

as expressões para as forças generalizadas:

$$\begin{aligned}F_{X,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho LTC_{1c}(\alpha) U^2 + \Delta F_{X,R}(u, v, r) \\ F_{Y,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho LTC_{2c}(\alpha) U^2 + \Delta F_{Y,R}(u, v, r) \\ N_{Z,R}(u, v, r) &= \frac{1}{2} \rho L^2 TC_{6c}(\alpha) U^2 + \Delta N_{Z,R}(u, v, r)\end{aligned}\quad (\text{IV.16})$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta F_{X,R}(u, v, r) &= \Delta F_{X,R}^{AC}(u, v, 0) \\ \Delta F_{Y,R}(u, v, r) &= \Delta F_{Y,R}^{AC}(u, v, 0) + \Delta \tilde{F}_{Y,R}^{CF}(0, v, r) \\ \Delta N_{Z,R}(u, v, r) &= \Delta N_{Z,R}^{AC}(u, v, 0) + \Delta \tilde{N}_{Z,R}^{CF}(0, v, r) + \Delta N_{Z,R}^{GV}(0, 0, r)\end{aligned}$$

com o superíndice AC denotando efeitos Asa, o superíndice CF denotando os efeitos devidos ao fenômeno de cross-flow e o superíndice GV o momento procedente da geração de vórtices no escoamento próximo às regiões de popa e proa do navio.

Sendo:

$$\Delta F_{X,R}^{AC}(u, v, r) = -\frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \cdot vr - \frac{1}{16} \rho \pi T^2 L^2 \cos(\alpha') r^2 \quad (\text{IV.17a})$$

$$\Delta F_{Y,R}^{AC}(u, v, r) = \frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + 0.160 \frac{B}{T} \right) ur + M_{11} ur \quad (\text{IV.17b})$$

$$\Delta \tilde{F}_{Y,R}^{CF}(u, v, r) = \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| \left( \bar{v} + \bar{r} \xi \right) d\xi + \frac{1}{2} \rho T L I_0(v, 0) v^2$$

$$\Delta N_{Z,R}^{AC}(u, v, r) = -\frac{1}{8} \rho \pi T^2 L^2 \left( 1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right) |u| r + M_{26} ur \quad (\text{IV.17.c})$$

$$\Delta \tilde{N}_{Z,R}^{CF}(u, v, r) = \frac{1}{2} \rho T \int_{-L/2}^{L/2} C_D(\xi) \left| \bar{v} + \bar{r} \xi \right| \left( \bar{v} + \bar{r} \xi \right) \xi d\xi + \frac{1}{2} \rho T L^2 I_1(v, 0) v^2$$

$$\Delta N_{Z,R}^{GV}(u, v, r) = -\frac{1}{2} \rho T L^4 \left[ \frac{C_Y}{16} - I_3(0, r) r^2 \right]$$

Em síntese, as forças hidrodinâmicas ficam então re-escritas:

$$F_{X,R}(u, v, r) = \frac{1}{2} \rho L T C_{Lc}(\alpha) U^2 - \frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \cdot vr - \frac{1}{16} \rho \pi T^2 L^2 \cos(\alpha') r^2 \quad (\text{IV.18.a})$$

$$F_{Y,R}(u, v, r) = \frac{1}{2} \rho L T C_{2c}(\alpha) U^2 + \frac{1}{4} \rho \pi T^2 L \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + 0.160 \frac{B}{T} \right) ur + M_{11} ur \quad (\text{IV.18.b})$$

$$+ \frac{1}{2} \rho T L \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) (v + r\xi) |v + r\xi| d\xi - \frac{1}{2} \rho T \left[ \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) d\xi \right] \text{signum}(v) v^2$$

$$N_{Z,R}(u, v, r) = \frac{1}{2} \rho L^2 T C_{6c}(\alpha) U^2 - \frac{1}{8} \rho \pi T^2 L^2 \left( 1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right) |u| r + M_{26} ur \quad (\text{IV.18.c})$$

$$+ \frac{1}{2} \rho T^2 L \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) (v + r\xi) |v + r\xi| \xi d\xi - \frac{1}{2} \rho T \left[ \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) \xi d\xi \right] \text{signum}(v) v^2$$

$$- \frac{1}{32} \rho T L^4 \frac{C_Y}{16} r |r| + \frac{1}{2} \rho T L^2 \left[ \int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) \text{signum}(\xi) \xi d\xi \right] \text{signum}(r) r^2$$

Lembremos que efetuar a expansão em Série de Taylor das Integrais da

forma  $\int_{-L/2}^{L/2} C_d(\xi) (v + r\xi) |v + r\xi| d\xi$  corresponde a efetuar a expansão em Série de Taylor de

uma função  $f(\xi) = \xi |\xi|$ . Seguindo a proposta de [Papoulias], usamos o conceito de gradiente generalizado (ver [Clarke]). Tal conceito é aplicado no controle de sistemas apresentando funções descontínuas ou não deriváveis. Nesta perspectiva, aproximamos

o gradiente de uma função não derivável no ponto de descontinuidade por uma aplicação igual ao casco convexo do gradiente no limite próximo ao ponto de descontinuidade.

Para a função com a qual estamos trabalhando a expansão em Série de Taylor de  $f$  próxima de  $\xi_0$  será:

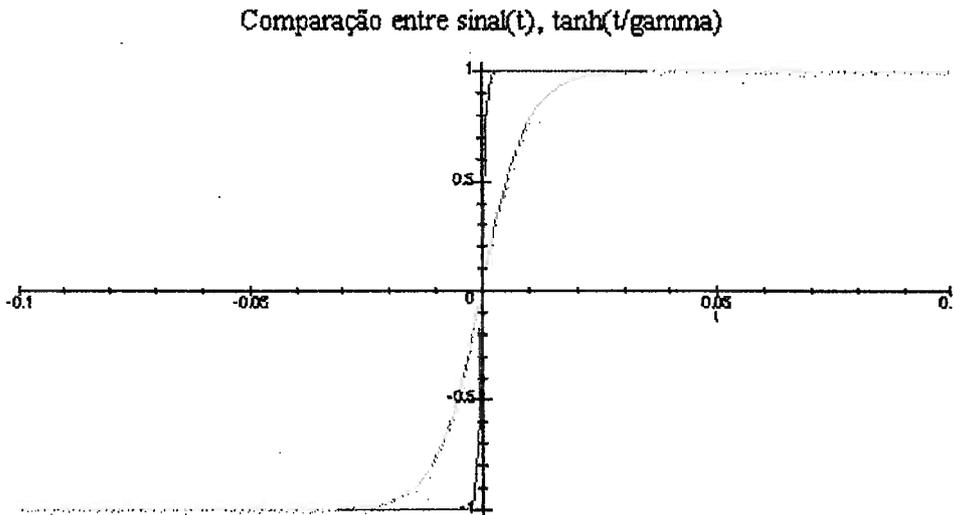
$$f(\xi) = \xi_0 |\xi_0| - 2|\xi_0|(\xi - \xi_0) - \text{sign}(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 + f^{(3)}(\xi) \quad \text{(IV.19)}$$

A função sinal na expressão acima pode ser aproximada por:

$$-sign(\xi_0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tanh\left(\frac{\xi_0}{\gamma}\right) \quad (\text{IV.20})$$

Abaixo temos um gráfico desta aproximação para dois valores de  $\gamma$ .

Neste gráfico plotamos  $\tanh\left(\frac{t}{\gamma}\right)$  para  $\gamma = 0.01$  e  $\gamma = 0.001$ . A curva em amarelo corresponde a  $\gamma = 0.01$  e a curva verde a  $\gamma = 0.001$ .



**Figura A.IV.1** Comparação entre os gráficos das funções  $signum(t)$  e  $\tanh\left(\frac{t}{\gamma}\right)$

Da aproximação da função sinal pela função tangente hiperbólica, podemos aproximar a função  $f(\xi)$  em torno da origem por  $\xi|\xi| = \frac{\xi^3}{\gamma}$

Donde, para efetuar a expansão em Série de Talyor das

integrais  $\int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)|v+r\xi|d\xi$ ,  $\int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)|v+r\xi|\xi d\xi$  em torno de  $[v = 0, r = 0]$

fazemos:

$$\int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)|v+r\xi|d\xi = \int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)^3 d\xi = \frac{1}{\gamma} (E_0 v^3 + 3E_1 v^2 r + 3E_2 v r^2 + E_3 r^3) \quad (\text{IV.21a})$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)|v+r\xi|\xi d\xi = \int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi)(v+r\xi)^3 \xi d\xi = \frac{1}{\gamma} (E_1 v^3 + 3E_2 v^2 r + 3E_3 v r^2 + E_4 r^3) \quad (\text{IV.21b})$$

onde

$$E_j = \int_{-L/2}^{L/2} Cd(\xi) \xi^j d\xi \quad (\text{IV.22})$$

## II. A Expansão em Série de Taylor para o Sistema FPSO-SPM Hawser Rígido

Após superarmos a dificuldade técnica de expandir em Série de Taylor as Integrais de Cross-Flow, obter a expansão do Sistema de equações diferenciais que modelam a dinâmica do Sistema FPSO-SPM com Hawser rígido reduz-se a uma tarefa rotineira.

Retomemos as equações:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{11} \bar{u} - A_{22} \bar{v} - A_{26} \bar{r} &= F_{X,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_X(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \\ \dot{A}_{22} \bar{v} + A_{26} \bar{r} + A_{11} \bar{u} &= F_{Y,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_Y(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \\ \dot{A}_{66} \bar{r} + A_{26} \bar{v} + A_{26} \bar{u} &= F_{Z,R}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) + \bar{F}_Z(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

com as restrições cinemáticas impostas pelo Hawser rígido

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}(\bar{t}) &= \cos(\psi(\bar{t})) + \mu \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \text{sen}(\gamma(\bar{t}) + \psi(\bar{t})) \\ \dot{\bar{v}}(\bar{t}) &= -\text{sen}(\psi(\bar{t})) + \mu \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \cos(\gamma(\bar{t}) + \psi(\bar{t})) - a \frac{d\psi}{d\bar{t}} \\ \dot{\bar{r}}(\bar{t}) &= \frac{d\psi}{d\bar{t}} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

e as reações impostas pelo Hawser dadas por:

$$\begin{aligned} F_X &= F_X \cos(\gamma + \psi) \\ F_Y &= -F_Y \text{sen}(\gamma + \psi) \\ N_Z &= -x_a N_Z \text{sen}(\gamma + \psi) \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Dos três conjuntos de equações acima podemos escrever

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma(\bar{t}) = - \frac{-a_{12}a_{32} \sin(\gamma + \psi) + a_{12}a \sin(\gamma + \psi)a_{22} - \cos(\gamma + \psi)a_{32}a_{23} + \cos(\gamma + \psi)a_{33}a_{22}}{(-a_{32}a_{21} \cos(\gamma + \psi) - a_{32} \sin(\gamma + \psi)a_{11} + a_{31} \cos(\gamma + \psi)a_{22} + a \sin(\gamma + \psi)a_{11}a_{22})}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi(\bar{t}) = - \frac{\left( -a_{21}a_{12}a \sin(\gamma + \psi) - a_{21} \cos(\gamma + \psi)a_{33} + a_{23}a_{31} \cos(\gamma + \psi) \right) + a_{23}a_{11}a \sin(\gamma + \psi) + \sin(\gamma + \psi)a_{31}a_{12} - \sin(\gamma + \psi)a_{11}a_{33}}{(-a_{32}a_{21} \cos(\gamma + \psi) - a_{32} \sin(\gamma + \psi)a_{11} + a_{31} \cos(\gamma + \psi)a_{22} + a \sin(\gamma + \psi)a_{11}a_{22})}$$

$$F_h = \frac{-a_{32}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{12}a_{22} - a_{33}a_{11}a_{22}}{(-a_{32}a_{21} \cos(\gamma + \psi) - a_{32} \sin(\gamma + \psi)a_{11} + a_{31} \cos(\gamma + \psi)a_{22} + a \sin(\gamma + \psi)a_{11}a_{22})} \quad (\text{IV.26})$$

onde

$$a_{11} = A_{11} \mu \sin(\gamma + \psi)$$

$$a_{12} = A_{11} \left( -\sin(\psi) \dot{\psi}(t) + \mu \dot{\gamma}(t) \cos(\gamma + \psi) \left( \dot{\gamma}(t) + \dot{\psi}(t) \right) \right) \quad (\text{IV.27a})$$

$$a_{21} = A_{22} \mu \cos(\gamma + \psi)$$

$$a_{22} = A_{26} - A_{22}a$$

$$a_{23} = A_{22} \left( -\cos(\psi) \dot{\psi}(t) - \mu \dot{\gamma}(t) \sin(\gamma + \psi) \left( \dot{\gamma}(t) + \dot{\psi}(t) \right) \right) \quad (\text{IV.27b})$$

$$a_{31} = A_{26} \mu \cos(\gamma + \psi)$$

$$a_{32} = -A_{26}a + A_{66} \quad (\text{IV.27c})$$

$$a_{33} = -N_{\sigma} + A_{26} \left( -\cos(\psi) \dot{\psi}(t) - \mu \dot{\gamma}(t) \sin(\gamma + \psi) \left( \dot{\gamma}(t) + \dot{\psi}(t) \right) \right) + A_{26} \dot{\psi}(t)$$

Para facilitar a notação definimos:

$$\frac{d\gamma(\bar{t})}{d\bar{t}} = \gamma_1(\bar{t}) \quad e \quad \frac{d\psi(\bar{t})}{d\bar{t}} = \psi_1(\bar{t})$$

Efetuada a expansão em Série de Taylor de  $\frac{d^2\gamma(\bar{t})}{d\bar{t}^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma \left( \frac{-}{t} \right)}{d \bar{t}} &= m_{31} \gamma + m_{32} \psi + m_{33} \gamma_1 + m_{34} \psi_1 + A_{31} \psi_1^3 + A_{32} \gamma_1^3 + A_{33} \psi^3 + A_{34} \gamma^3 + B_{31} \gamma^2 \psi \\ &+ B_{32} \gamma^2 \psi_1 + B_{33} \gamma^2 \gamma_1 + B_{34} \psi \gamma_1^2 + C_{31} \gamma_1^2 \psi_1 + C_{32} \gamma \gamma_1^2 + C_{33} \gamma \psi^2 + C_{34} \psi^2 \psi_1 \\ &+ D_{31} \gamma_1 \psi^2 + D_{32} \gamma \psi_1^2 + D_{33} \gamma_1 \psi_1^2 + D_{34} \psi \psi_1^2 + E_{31} \psi \gamma \psi_1 + E_{32} \gamma \psi \gamma_1 + E_{33} \psi_1 \gamma \gamma_1 + E_{34} \psi_1 \psi \gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

E efetuando a expansão em Série de Taylor de  $\frac{d^2 \psi \left( \frac{-}{t} \right)}{d \bar{t}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi \left( \frac{-}{t} \right)}{d \bar{t}} &= m_{41} \gamma + m_{42} \psi + m_{43} \gamma_1 + m_{44} \psi_1 + A_{41} \psi_1^3 + A_{42} \gamma_1^3 + A_{43} \psi^3 + A_{44} \gamma^3 + B_{41} \gamma^2 \psi \\ &+ B_{42} \gamma^2 \psi_1 + B_{43} \gamma^2 \gamma_1 + B_{44} \psi \gamma_1^2 + C_{41} \gamma_1^2 \psi_1 + C_{42} \gamma \gamma_1^2 + C_{43} \gamma \psi^2 + C_{44} \psi^2 \psi_1 \\ &+ D_{41} \gamma_1 \psi^2 + D_{42} \gamma \psi_1^2 + D_{43} \gamma_1 \psi_1^2 + D_{44} \psi \psi_1^2 + E_{41} \psi \gamma \psi_1 + E_{42} \gamma \psi \gamma_1 + E_{43} \psi_1 \gamma \gamma_1 + E_{44} \psi_1 \psi \gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Re-escrevemos o sistema acima na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \bar{t}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^3 \\ \gamma_1^3 \\ \psi^3 \\ \gamma^3 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 \psi \\ \gamma^2 \psi_1 \\ \gamma^2 \gamma_1 \\ \gamma_1^2 \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1^2 \psi_1 \\ \gamma_1^2 \gamma \\ \gamma \psi^2 \\ \psi_1 \psi^2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \psi^2 \\ \psi_1^2 \gamma \\ \gamma_1 \psi_1^2 \\ \psi_1^2 \psi \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \psi \psi_1 \\ \psi \gamma \gamma_1 \\ \gamma_1 \gamma \psi_1 \\ \psi_1 \psi \gamma_1 \end{bmatrix} + O(|\gamma|^4, |\psi|^4, |\gamma_1|^4, |\psi_1|^4) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

onde

$$m_{31} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) Cfx (2A_{26}a - A_{22}a^2 - A_{66})}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)\mu}$$

$$m_{32} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) (acr(A_{22}a - A_{26}) + Cfx(2A_{26}a - A_{22}a^2 - A_{66})A_{66} - aA_{26})}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)\mu}$$

$$m_{33} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) (A_{26}a - A_{66} + acr(A_{26} - aA_{22}))}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)}$$

$$m_{34} = \frac{\left( \begin{aligned} & -(-aA_{26} + A_{66}) \left( -A_{22} + A_{11} - \Lambda \left[ \frac{1}{2} \frac{\pi T \left(1 - 4.4 \frac{B}{L} + 0.160 \frac{B}{T}\right)}{L} + 2 \frac{M_{11}}{L^2 \rho T} \right] - \frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) a}{L} \right) \\ & + \left( -\Lambda \left[ \frac{1}{4} \frac{\pi T \left(1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L}\right)}{L} + 2 \frac{M_{26}}{L^3 \rho T} \right] - \frac{\Lambda \pi T \left(\frac{1}{2} + 2.4 \frac{T}{L}\right) a}{L} \right) (A_{26} - aA_{22}) \end{aligned} \right)}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)}$$

$$m_{41} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) Cfx (A_{26} - A_{22}a)}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)} \quad m_{42} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) (acrA_{22} - A_{26} + Cfx(A_{26} - A_{22}a))}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)}$$

$$m_{43} = -\frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) \mu (A_{26} - acrA_{22})}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)}$$

$$m_{44} = \frac{\left( \begin{aligned} & \left( -A_{22} + A_{11} - \Lambda \left[ \frac{1}{2} \frac{\pi T \left(1 - 4.4 \frac{B}{L} + 0.160 \frac{B}{T}\right)}{L} + 2 \frac{M_{11}}{L^2 \rho T} \right] - \frac{\Lambda \pi T \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right) a}{L} \right) A_{26} \mu \\ & - \left( -\Lambda \left[ \frac{1}{4} \frac{\pi T \left(1 + 0.16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L}\right)}{L} + 2 \frac{M_{26}}{L^3 \rho T} \right] - \frac{\Lambda \pi T \left(\frac{1}{2} + 2.4 \frac{T}{L}\right) a}{L} \right) A_{22} \mu \end{aligned} \right)}{L(-A_{22}A_{66} + A_{26}^2)\mu}$$

$$\text{com } \mu = \frac{Lh}{L}, Cfx = \frac{Cf}{\Lambda \frac{\pi T}{L} \left(1 + 4 \frac{CbB}{T}\right)}$$

$$\begin{aligned}
A31 := & - \left( \left( -\Lambda \left( 3 \frac{T \gamma_{00} E2 U a^2}{L^3} - 3 \frac{T \gamma_{00} E3 U a}{L^4} \right) - \Lambda \left( -0.06250 \frac{C_y \gamma_{00} U}{L} + \frac{II \text{ abs } \gamma_{00} U}{L^3} + \frac{T \gamma_{00} E4 U}{L^5} \right) \right. \\
& + \Lambda \left( I C_y \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{II \gamma_{00} U}{L^2} \right) a^3 \left. \right) (A26 - A22 a) - \\
& (-A26 a + A66) \left( \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C_y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{I0 \gamma_{00} U}{L} \right) a^3 \right. \\
& \left. - \Lambda \left( 3 \frac{\gamma_{00} E1 U a^2}{L^2} - 3 \frac{\gamma_{00} E2 U a}{L^3} - \frac{\Lambda \gamma_{00} \left( E0 U + \frac{E3 U}{L^3} \right)}{L} \right) \right) / (-(A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a)) \\
A32 := & - \left( -\Lambda \left( I C_y \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{II \gamma_{00} U}{L^2} \right) \mu^3 (A26 - A22 a) \right. \\
& + (-A26 a + A66) \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C_y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{I0 \gamma_{00} U}{L} \right) \mu^3 \left. \right) / ( \\
& -(A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A33 := & - \left( \left( - .5235987758 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx a}{L} - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a}{L fator} \right) (A26 - A22 a) - \right. \\
& (-A26 a + A66) \left( - \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda (T + .4 Cb B)}{L} + .5235987758 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} \right. \\
& \left. \left. + \Lambda \left( - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma 00 U}{L} \right) \right) \right) \\
& + .5235987758 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx (-A26 a + A66)}{L} - \frac{1}{2} \frac{\pi (-A26 a + A66) \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + \left( \right. \\
& 2.094395103 \frac{\Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + \Lambda \left( Cy \gamma 00 + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 EI U}{L^2} - \frac{11 \gamma 00 U}{L^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L^2} \right) (A26 - A22 a) + (-2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A26 a + 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& + \pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A22 - \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho - 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& - 2.513274124 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb BA26 a + 1.256637062 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb BA66 + 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb BA26 \\
& + 1.256637062 \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb BA22 + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A66 - \pi \Lambda T^2 acr L^2 \rho A22 a + \pi A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho \\
& - 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb BA22 a + \pi \Lambda T^2 acr L^2 \rho A26) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) (-A26 a + A66)}{L fator} \Big) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{34} := & - \left( -\frac{1}{6} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx a (A26 - A22 a)}{L} + \frac{1}{6} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx (-A26 a + A66)}{L} + \left( \right. \\
& \pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A22 - 2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A26 a + \frac{2}{5} \pi \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A66 + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A66 \\
& \left. + \frac{2}{5} \pi \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb B A22 - \frac{4}{5} \pi \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A26 a \right) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} := & - \left( \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \operatorname{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) (A_{26} - A_{22} a)}{L} - \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx a (A_{26} - A_{22} a)}{L} \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{\pi (-A_{26} a + A_{66}) \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx (-A_{26} a + A_{66})}{L} + (-2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A_{26} a \\
& + 1.256637062 A_{26} a \Lambda T L^2 \rho Cb B + \pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A_{22} - \pi A_{66} \Lambda T^2 L^2 \rho - 1.256637062 A_{66} \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& - 2.513274124 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A_{26} a + 1.256637062 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A_{66} + 1.256637062 \Lambda T \operatorname{acr} L^2 \rho Cb B A_{26} \\
& + 1.256637062 \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb B A_{22} + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A_{66} - \pi \Lambda T^2 \operatorname{acr} L^2 \rho A_{22} a + \pi A_{26} a \Lambda T^2 L^2 \rho \\
& - 1.256637062 \Lambda T \operatorname{acr} L^2 \rho Cb B A_{22} a + 3.141592654 \Lambda T^2 \operatorname{acr} L^2 \rho A_{26}) \\
& (a A_{11} \mu (A_{26} - A_{22} a) - (-A_{26} a + A_{66}) A_{11} \mu - A_{26} \mu (A_{26} - A_{22} a) + (-A_{26} a + A_{66}) A_{22} \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A_{22} A_{66} + A_{26}^2)) + (\pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A_{22} - 2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A_{26} a + 1.256637062 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A_{66} \\
& + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A_{66} + 1.256637062 \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb B A_{22} - 2.513274124 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A_{26} a) \\
& (-2 (-A_{26} a + A_{66}) A_{11} \mu - 2 A_{26} \mu (A_{26} - A_{22} a) + 2 (-A_{26} a + A_{66}) A_{22} \mu + 2 a A_{11} \mu (A_{26} - A_{22} a)) / (L^3 \rho T \\
& \mu (-A_{22} A_{66} + A_{26}^2)) \Big) / (-(-A_{26} a + A_{66}) A_{22} \mu + A_{26} \mu (A_{26} - A_{22} a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B32 := & - \left( \frac{1}{2} \Lambda \left( -.7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2. \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) + 1.570796327 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) (A26 - 1. A22 a) \\
& + (.7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A22 a + 6.911503839 L A66 \Lambda T^2 \rho B + 1.256637062 A26 a^2 \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& + .2513274123 A26 a \Lambda T \rho B L^2 + 3.141592654 A26 a^2 \Lambda T^2 L^2 \rho - 2. L A66 \Lambda M11lab \\
& + 3.141592654 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a A26 - 2 \Lambda M26lab A22 a - 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B a + 2 L A26 a \Lambda M11lab \\
& - 3.141592654 A66 \Lambda T^2 L^2 \rho a - .2513274123 A66 \Lambda T \rho B L^2 - 6.911503839 L A26 a \Lambda T^2 \rho B \\
& + 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B a A26 - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B a^2 A22 \\
& - 3.141592654 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a^2 A22 - .7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 + .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A22 a \\
& + 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A22 a - .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A26 \\
& - 1.570796327 A66 \Lambda T^2 L^2 \rho + 1.570796327 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho + A66 A11 L^3 \rho T + 2. \Lambda M26lab A26 \\
& - A26 a A11 L^3 \rho T - A66 A22 L^3 \rho T + A26 a A22 L^3 \rho T) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + .5 (-A26 a + A66) \\
& \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2. \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B33 := & - \left( \frac{\pi (-A26 a + A66) \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} - \frac{\pi \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu (A26 - A22 a)}{L} + ( \right. \\
& - \pi A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho \mu + \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho \mu + 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B \mu + \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu A22 a \\
& - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \mu A26 - 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B \mu - \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu A26 \\
& \left. + 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \mu A22 a) \right. \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& \left. (-A22 A66 + A26^2)) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B34 := & - \left( -(-A26 a + A66) \right. \\
& \left. \left( -\frac{\pi \Lambda (T + .4 Cb B) \mu^2}{L} + 3 \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) \mu^2 - A22 \mu \right) \right. \\
& \left. + \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu^2}{L fator} \right) a (A26 - A22 a) + \left( \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \Lambda \left( iCy \gamma_{00} + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} EI U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) \mu^2 - \frac{\pi \Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu^2}{L^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - A26 \mu \right) (A26 - A22 a) - \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu^2}{L fator} \right) (-A26 a + A66) \right) / ( \\
& -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C31 := & - \left( \left( -3 \frac{\Lambda T \gamma_{00} EI U \mu^2}{L^3} + 3 \Lambda \left( iCy \gamma_{00} + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} EI U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) a \mu^2 \right) \right. \\
& (A26 - A22 a) \\
& \left. - (-A26 a + A66) \left( -3 \frac{\Lambda \gamma_{00} EI U \mu^2}{L^2} + 3 \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) a \mu^2 \right) \right) / \\
& (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C32 := & - \left( \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu^2}{L fator} \right) a (A26 - A22 a) \right. \\
& - (-A26 a + A66) \left( -A22 \mu - \frac{\pi \Lambda (T + .4 Cb B) \mu^2}{L} \right) + \left( -\frac{\pi \Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu^2}{L^2} - A26 \mu \right) (A26 - A22 a) \\
& \left. - \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu^2}{L fator} \right) (-A26 a + A66) \right) / ( \\
& -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C33 := & - \left( \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx (-A26 a + A66)}{L} + \frac{\pi \Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) (A26 - A22 a)}{L} \right) + ( \\
& -2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A26 a + 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B + \pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A22 - \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho \\
& - 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B - 2.513274124 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A26 a + 1.256637062 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A66 \\
& + 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B A26 a + 1.256637062 \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb B A22 + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A66 \\
& - \pi \Lambda T^2 acr L^2 \rho A22 a + \pi A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho - 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B A22 a + \pi \Lambda T^2 acr L^2 \rho A26) \\
& (-2 (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2. a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \rho T \\
& \mu (-A22 A66 + A26^2)) + (\pi \Lambda T^2 Cfx a^2 L^2 \rho A22 - 2 \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A26 a + 1.256637062 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A66 \\
& + \pi \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho A66 + 1.256637062 \Lambda T Cfx a^2 L^2 \rho Cb B A22 - 2.513274124 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B A26 a) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) (-A26 a + A66)}{L fator} \\
& + \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx a}{L} - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a}{L fator} \right) (A26 - A22 a) \\
& - \frac{\pi (-A26 a + A66) \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C34 := & - \left( \left( -3 \frac{\Lambda T \gamma_{00} E_2 U}{L^3} + \Lambda \left( -7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) + \frac{1}{2} A26 \right. \right. \\
& - 1.570796327 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \\
& \left. \left. + 3. \Lambda \left( I C y \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E_1 U}{L^2} - \frac{I I \gamma_{00} U}{L^2} \right) a \right) (A26 - A22 a) \right) \\
& + \left( -A11 - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 2 \frac{\left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a}{\text{fator}} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L \text{fator}} \right)}{L} \right) a (A26 - A22 a) + \left( \right. \\
& .7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A22 a + 6.911503839 L A66 \Lambda T^2 \rho B + 1.256637062 A26 a^2 \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& + .2513274123 A26 a \Lambda T \rho B L^2 - 2 L A66 \Lambda M11lab - 2 \Lambda M26lab A22 a - 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B a \\
& + 2. L A26 a \Lambda M11lab - .2513274123 A66 \Lambda T \rho B L^2 - 6.911503839 L A26 a \Lambda T^2 \rho B \\
& + 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B a A26 - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B a^2 A22 - .7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 \\
& + .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A22 a + 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A22 a \\
& - .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A26 - \frac{1}{2} \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho + 1.570796327 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho + A66 A11 L^3 \rho T \\
& + 2 \Lambda M26lab A26 - A26 a A11 L^3 \rho T - 1. A66 A22 L^3 \rho T + A26 a A22 L^3 \rho T + \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a A26 \\
& \left. - \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho a + \pi A26 a^2 \Lambda T^2 L^2 \rho - \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a^2 A22 \right) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) - (-A26 a + A66) \left( \frac{1}{2} A22 - 1.570796327 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) a}{L} - 3 \frac{\Lambda \gamma_{00} E_1 U}{L^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \right) \\
& + 3. \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{I O \gamma_{00} U}{L} \right) a \\
& + \frac{1}{2} (-A26 a + A66) \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \\
& - \left( -A11 - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 2 \frac{\left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a}{\text{fator}} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L \text{fator}} \right)}{L} \right) (-A26 a + A66) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D31 := & - \left( \left( - \frac{\pi \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} \right. \right. \\
& - 3 \Lambda \left( I C y \gamma 00 + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E I U}{L^2} - \frac{I I \gamma 00 U}{L^2} \right) \mu \\
& + 4.712388981 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L^2} \left. \right) (A26 - A22 a) \\
& + 2 \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu a (A26 - 1. A22 a)}{L \text{fator}} + (-\pi A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho \mu + \pi A66 \Lambda T^2 L^2 \rho \mu \\
& + 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho C b B \mu + \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu A22 a - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho C b B \mu A26 \\
& - 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho C b B \mu - \pi \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu A26 + 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho C b B \mu A22 a) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \mu \\
& (-A22 A66 + A26^2)) - (-A26 a + A66) \left( 4.712388981 \frac{\Lambda (T + .4 C b B) \mu}{L} \right. \\
& - 3 \Lambda \left( - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{I O \gamma 00 U}{L} \right) \mu - \frac{1}{2} \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\pi (-A26 a + A66) \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} - 2 \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \mu (-A26 a + A66)}{L \text{fator}} \right) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D32 := & - \left( - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) a (A26 - A22 a)}{L} \right. \\
& \left. + \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( \frac{1}{2} C f x \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) (-A26 a + A66)}{L} \right) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D33 := & - \left( \left( -\Lambda \left( -6 \frac{T \gamma_{00} E2 U a \mu}{L^3} + 3 \frac{T \gamma_{00} E3 U \mu}{L^4} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \Lambda \left( I C_y \gamma_{00} + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) a^2 \mu \right) (A26 - A22 a) - \right. \\
& \left. (-A26 a + A66) \right. \\
& \left. \left( -\Lambda \left( -6 \frac{\gamma_{00} E1 U a \mu}{L^2} + 3 \frac{\gamma_{00} E2 U \mu}{L^3} \right) - 3 \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C_y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + 4 \frac{C_b B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) a^2 \mu \right) \right) \\
& / \left( -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D34 := & - \left( \left( -\Lambda \left( 6 \frac{T \gamma_{00} E2 U a}{L^3} - 3 \frac{T \gamma_{00} E3 U}{L^4} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \Lambda \left( I C_y \gamma_{00} + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) a^2 \right) (A26 - A22 a) \right. \\
& \left. + \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + 4 \frac{C_b B}{T} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( \frac{1}{2} C_f \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) (-A26 a + A66)}{L} - \right. \\
& \left. (-A26 a + A66) \right. \\
& \left. \left( -\Lambda \left( 6 \frac{\gamma_{00} E1 U a}{L^2} - 3 \frac{\gamma_{00} E2 U}{L^3} \right) + 3 \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( C_y - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + 4 \frac{C_b B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) a^2 \right) \right. \\
& \left. - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + 4 \frac{C_b B}{T} \right) \left( 1.570796327 \frac{T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( \frac{1}{2} C_f \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) a (A26 - A22 a)}{L} \right) / \left( \right. \\
& \left. -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E31 := & - \left( (-A26 a + A66) \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \right. \\
& - \left( -A11 - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 2 \frac{\left( \frac{1}{2} Cfx fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a}{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L fator} \right)}{L} \right) (-A26 a + A66) \\
& + \left( -A11 - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 2 \frac{\left( \frac{1}{2} Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L fator} \right)}{L} \right) a (A26 - A22 a) \\
& + \left( \Lambda \left( \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) + \frac{\pi \Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) (A26 - 1. A22 a) + \\
& .7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A22 a + 6.911503839 L A66 \Lambda T^2 \rho B + 1.256637062 A26 a^2 \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& + .2513274123 A26 a \Lambda T \rho B L^2 + 3.141592654 A26 a^2 \Lambda T^2 L^2 \rho - 2 L A66 \Lambda M11lab \\
& + 3.141592654 \Lambda T^2 acr L^2 \rho a A26 - 2. \Lambda M26lab A22 a - 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B a + 2. L A26 a \Lambda M11lab \\
& - 3.141592654 A66 \Lambda T^2 L^2 \rho a - .2513274123 A66 \Lambda T \rho B L^2 - 6.911503839 L A26 a \Lambda T^2 \rho B \\
& + 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B a A26 - 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B a^2 A22 - .7853981635 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 \\
& + .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A22 a + 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.727875960 \Lambda T^2 L \rho B A22 a \\
& - .1256637062 \Lambda T L^2 \rho B A26 - 1.570796327 A66 \Lambda T^2 L^2 \rho + 1.570796327 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho + A66 A11 L^3 \rho T \\
& + 2. \Lambda M26lab A26 - A26 a A11 L^3 \rho T - A66 A22 L^3 \rho T + A26 a A22 L^3 \rho T - \pi \Lambda T^2 acr L^2 \rho a^2 A22) \\
& (-2 (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2 a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \rho T \\
& \left. \mu (-A22 A66 + A26^2)) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E32 := & - \left( \frac{6.283185308 \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx\ fator + 1.570796327 \frac{T}{L}\right) \mu a (A26 - A22 a)}{L\ fator} \right. \\
& + 3.141592654 \frac{(-A26 a + A66) \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L} + (-3.141592654 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho \mu \\
& + 3.141592654 A66 \Lambda T^2 L^2 \rho \mu + 1.256637062 A66 \Lambda T L^2 \rho Cb B \mu + 3.141592654 \Lambda T^2\ acr L^2 \rho \mu A22 a \\
& - 1.256637062 \Lambda T\ acr L^2 \rho Cb B \mu A26 - 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B \mu - 3.141592654 \Lambda T^2\ acr L^2 \rho \mu A26 \\
& + 1.256637062 \Lambda T\ acr L^2 \rho Cb B \mu A22 a) \\
& (-2 (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2 a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \rho \\
& T \mu (-A22 A66 + A26^2)) - (-A26 a + A66) \left( 3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) \mu}{L} - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L} \right) \\
& + \left( 3.141592654 \frac{\Lambda T\ acr \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L^2} - 6.283185308 \frac{\Lambda T\ acr \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L} \right) (A26 - A22 a) \\
& - 6.283185308 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx\ fator + 1.570796327 \frac{T}{L}\right) \mu (-A26 a + A66)}{L\ fator} \Big) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E33 := & - \left( \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\pi T \mu}{L\ fator} - 2 \frac{\left(\frac{1}{2} Cfx\ fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L}\right) a \mu}{fator}\right)}{L} \right) a (A26 - A22 a) \right. \\
& - \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\pi T \mu}{L\ fator} - 2 \frac{\left(\frac{1}{2} Cfx\ fator + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L}\right) a \mu}{fator}\right)}{L} \right) (-A26 a + A66) \\
& - (-A26 a + A66) \left( -A22 \mu + \frac{\pi \Lambda (T + .4 Cb B) a \mu}{L} - \Lambda \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T \left(1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T}\right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \mu \right) \\
& + \left( -\Lambda \left( -\frac{.7853981635 T \left(1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L}\right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) \mu + \frac{\pi \Lambda T\ acr \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) a \mu}{L^2} - A26 \mu \right) (A26 - A22 a) \\
& \Big) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E34 := & - \left( \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T \mu}{L} \text{fator} - 2 \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a \mu}{\text{fator}} \right)}{L} \right) a (A26 - 1. A22 a) + \right. \\
& - 6 \Lambda \left( ICy \gamma_{00} + \frac{\pi T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{II \gamma_{00} U}{L^2} \right) a \mu \\
& - \Lambda \left( - .7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) \mu + 6 \frac{\Lambda T \gamma_{00} E2 U \mu}{L^3} + \frac{\pi \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a \mu}{L^2} \\
& \left. - A26 \mu \right) (A26 - A22 a) \\
& - \left( \left( A11 \mu - \frac{\pi \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T \mu}{L} \text{fator} - 2 \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) a \mu}{\text{fator}} \right)}{L} \right) (-A26 a + A66) - (-A26 a + A66) \left( \right. \\
& \frac{\pi \Lambda (T + .4 Cb B) a \mu}{L} - \Lambda \left( \frac{1}{2} \frac{\pi T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \mu + 6 \frac{\Lambda \gamma_{00} E1 U \mu}{L^2} \\
& \left. - 6 \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{IO \gamma_{00} U}{L} \right) a \mu - A22 \mu \right) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A41 := & - \left( \left( \left( \Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{IO \gamma_{00} U}{L} \right) a^3 - \Lambda \left( 3 \frac{\gamma_{00} E1 U a^2}{L^2} - 3 \frac{\gamma_{00} E2 U a}{L^3} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\Lambda \gamma_{00} \left( E0 U + \frac{E3 U}{L^3} \right)}{L} \right) A26 \mu - A22 \mu \left( -\Lambda \left( 3 \frac{T \gamma_{00} E2 U a^2}{L^3} - 3 \frac{T \gamma_{00} E3 U a}{L^4} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \Lambda \left( -.06250 \frac{Cy \gamma_{00} U}{L} + \frac{II \text{abs} \gamma_{00} U}{L^3} + \frac{T \gamma_{00} E4 U}{L^5} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \Lambda \left( ICy \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} E1 U}{L^2} - \frac{II \gamma_{00} U}{L^2} \right) a^3 \right) \right) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A42 := & - \left( -\Lambda \left( -\frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} - \left( Cy - \frac{1}{2} \frac{\pi T}{L} \right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) \mu^4 A26 \right. \\
& + A22 \mu^4 \Lambda \left( ICy \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} EI U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) \Bigg) / ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A43 := & - \left( \frac{.5235987758 \cdot A22 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx a}{L} \right. \\
& - 3.141592654 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L}\right)}{L \cdot fator} + \left( -1.570796327 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B)}{L} \right. \\
& + .5235987758 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} + \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left(Cy - \frac{1 \pi T}{2 L}\right) \gamma_{00} + \frac{\pi T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - \frac{10 \gamma_{00} U}{L} \right) \left. \right) A26 \mu + ( \\
& -1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B + 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B + 3.141592654 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 \\
& + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho - 1.256637062 A22 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \\
& - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) - A22 \mu \left( \frac{\Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} \right. \\
& + \Lambda \left( ICy \gamma_{00} + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left(1 - 4.8 \frac{T}{L}\right)}{L} + \frac{T \gamma_{00} EI U}{L^2} - \frac{11 \gamma_{00} U}{L^2} \right) \\
& - 1.570796327 \frac{\Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L^2} \left. \right) - 2.094395103 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx}{L} \\
& + 3.141592654 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) A11 \mu a}{L} \\
& - 3.141592654 \frac{A22 \mu \Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - \left( \right. \\
& - 3.141592654 \frac{A22 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L}\right)}{L \cdot fator} - 1.570796327 \frac{A22 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx}{L} \\
& \left. \right) a + 3.141592654 \frac{A11 \mu \Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A44 := & - \left( -2.094395103 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx}{L} + 2.094395103 \frac{A22 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx a}{L} + \right. \\
& -1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho \\
& + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - 1. A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& \left. (-A22 A66 + A26^2)) \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B41 := & - \left( -3.141592654 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) A11 \mu a}{L} - 6.283185309 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx}{L} \right. \\
& + 6.283185308 \frac{A22 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) Cfx a}{L} + 3.141592654 \frac{A26 \mu \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} \\
& + 3.141592654 \frac{A11 \mu \Lambda T acr \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - 3.141592654 \frac{A22 \mu \Lambda T acr \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} + \left. \right. \\
& -1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B + 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B + 3.141592654 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 \\
& + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho - 1.256637062 A22 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B \\
& - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 acr L^2 \rho - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho) \\
& (a A11 \mu (A26 - 1. A22 a) - 1. (-1. A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - 1. A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho \\
& T (-1. A22 A66 + A26^2)) + (-1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B \\
& - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho) \\
& (-2. (-1. A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - 1. A22 a) + 2 (-1. A26 a + A66) A22 \mu + 2. a A11 \mu (A26 - 1. A22 a)) \\
& \left. / (L^3 \rho T (-1. A22 A66 + A26^2)) \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - 1. A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B42 := & - \left( \begin{aligned} & \left( -A22 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} + A11 - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \right) A11 \mu a \\ & - A11 \mu \left( -\Lambda \left( -7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \\ & + A22 \mu \left( -\Lambda \left( -7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \end{aligned} \right) + ( \\
& .7853981635 A22 \Lambda T^2 L^2 \rho - 6.911503839 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B A22 a \\
& + .1256637062 A22 \Lambda T L^2 \rho B - 2 A22 \Lambda M26lab + A26 L^3 A22 \rho T + 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B \\
& - A26 L^3 A11 \rho T + .2513274123 \Lambda T L^2 \rho B A26 + 1.570796327 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 + 2. A26 L \Lambda M11lab \\
& + 3.141592654 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a - 1.727875960 A22 \Lambda T^2 L \rho B) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) \\
& - \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) A26 \mu \\
& \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B43 := & - \left( \begin{aligned} & 4.712388981 \frac{A22 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) A11 \mu^2 a}{L} \\ & - 3.141592654 \frac{A11 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + (1.256637062 A22 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \mu \\ & + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu - 3.141592654 A26 L^2 \Lambda T^2 \rho \mu - 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B \mu) \\ & (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\ & (-A22 A66 + A26^2)) - 4.712388981 \frac{A26 \mu^2 \Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} \end{aligned} \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B44 := & - \left( -A22 \mu \left( 3 \Lambda \left( ICy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E I U}{L^2} - \frac{11 \gamma 00 U}{L^2} \right) \mu^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 3.141592654 \frac{\Lambda T a c r \left( 1 + .4 \frac{C b B}{T} \right) \mu^2}{L^2} - A26 \mu \right) + \right. \\
& \left( -3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 C b B) \mu^2}{L} + 3. \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( C y - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{C b B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma 00 U}{L} \right) \mu^2 - A22 \mu \right) \\
& A26 \mu + A26 \mu \left( A11 \mu - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{C b B}{T} \right) \left( .5 C f x f a t o r + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) \mu^2}{L f a t o r} \right) \\
& \left. - A22 \mu \left( A11 \mu - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{C b B}{T} \right) \left( .5 C f x f a t o r + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) \mu^2}{L f a t o r} \right) a \right) / ( \\
& -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C41 := & - \left( \left( -3 \frac{\Lambda \gamma 00 E I U \mu^2}{L^2} + 3. \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( C y - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{C b B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma 00 U}{L} \right) a \mu^2 \right) A26 \mu - \right. \\
& A22 \mu \left( \right. \\
& \left. -3 \frac{\Lambda T \gamma 00 E 2 U \mu^2}{L^3} + 3. \Lambda \left( ICy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E I U}{L^2} - \frac{11 \gamma 00 U}{L^2} \right) a \mu^2 \right) \\
& \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C42 := & - \left( \left( -A22 \mu - 3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) \mu^2}{L} \right) A26 \mu \right. \\
& + A26 \mu \left( \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) \mu^2}{L \text{ fator}} \right. \\
& - 1. A22 \mu \left( -3.141592654 \frac{\Lambda T \text{ acr} \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu^2}{L^2} - 1. A26 \mu \right) \\
& \left. - 1. A22 \mu \left( \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) \mu^2}{L \text{ fator}} \right) a \right) / ( \\
& - 1. (-1. A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - 1. A22 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C43 := & - \left( -6.283185309 \frac{A26 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx}{L} + (-1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B \right. \\
& + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + 4.712388981 \frac{A22 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx a}{L} - 6.283185308 \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) A11 \mu a}{L} - \left( \right. \\
& - 3.141592654 \frac{A22 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right)}{L \text{ fator}} - 1.570796327 \frac{A22 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) Cfx}{L} \\
& \left. \right) a - 3.141592654 \frac{A26 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right)}{L \text{ fator}} \\
& + 6.283185308 \frac{A11 \mu \Lambda T \text{ acr} \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + 6.283185308 \frac{A26 \mu \Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} \\
& - 6.283185308 \frac{A22 \mu \Lambda T \text{ acr} \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} + (-1.256637062 A26 \Lambda T Cfx L^2 \rho Cb B \\
& + 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B + 3.141592654 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 + 1.256637062 A22 \Lambda T Cfx a L^2 \rho Cb B \\
& + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 Cfx a L^2 \rho - 1.256637062 A22 \Lambda T \text{ acr} L^2 \rho Cb B - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{ acr} L^2 \rho \\
& - 3.141592654 A26 \Lambda T^2 Cfx L^2 \rho) \\
& (-2. (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - 1. A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2. a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \\
& \rho T (-A22 A66 + A26^2)) \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C44 := & - \left( \begin{aligned}
& -A22 \mu \left( -A11 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \left( 2 \frac{\left( .5 Cfxfaktor + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L fator} \right) \right) a - \\
& 1. A22 \mu \left( -3 \frac{\Lambda T \gamma 00 E2 U}{L^3} + .5 \% 1 + .5 A26 - 1.570796327 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L^2} \right. \\
& + 3 \cdot \Lambda \left( \left( Cy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E1 U}{L^2} - \frac{11 \gamma 00 U}{L^2} \right) a \right) + \left( .5 A22 \right. \\
& - 1.570796327 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) a}{L} - 3 \frac{\Lambda \gamma 00 E1 U}{L^2} + .5 \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \\
& + 3 \cdot \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( Cy - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma 00 U}{L} \right) a \left. \right) A26 \mu \\
& + A22 \mu \left( -\% 1 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) + (.7853981635 A22 \Lambda T^2 L^2 \rho \\
& - 6.911503839 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.256637062 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B A22 a + .1256637062 A22 \Lambda T L^2 \rho B \\
& - 2 \cdot A22 \Lambda M26lab + A26 L^3 A22 \rho T + 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B - 1 \cdot A26 L^3 A11 \rho T \\
& + .2513274123 \Lambda T L^2 \rho B A26 + 1.570796327 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 + 2 A26 L \Lambda M11lab + 3.141592654 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho \\
& - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho a - 1.727875960 A22 \Lambda T^2 L \rho B) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + \\
& \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) A11 \mu a \\
& + A26 \mu \left( -A11 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \left( 2 \frac{\left( .5 Cfxfaktor + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L fator} \right) \right) \\
& - A11 \mu \left( -\% 1 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \\
& - \left( -A22 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} + A11 - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \right) A26 \mu \\
& \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - 1. A22 a)) \\
\% 1 := & \Lambda \left( -7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right)
\end{aligned}
\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D41 := & - \left( (1.256637062 A22 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \mu + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu \right. \\
& - 3.141592654 A26 L^2 \Lambda T^2 \rho \mu - 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B \mu) \\
& (a A11 \mu (A26 - A22 a) - (-A26 a + A66) A11 \mu - A26 \mu (A26 - 1. A22 a) + (-A26 a + A66) A22 \mu) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) + 3.141592654 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) A11 \mu^2 a}{L} \\
& + 6.283185308 \frac{A26 \mu^2 \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L}\right)}{L \text{fator}} \\
& - 3.141592654 \frac{A11 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - 3.141592654 \frac{A26 \mu^2 \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} \\
& - 6.283185308 \frac{A22 \mu^2 \Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \left(.5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L}\right) a}{L \text{fator}} - A22 \mu \left( \right. \\
& - 1.570796327 \frac{\Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L} + 4.712388981 \frac{\Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L^2} \\
& \left. - 3 \Lambda \left( ICy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left(1 - 4.8 \frac{T}{L}\right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E I U}{L^2} - \frac{I I \gamma 00 U}{L^2} \right) \mu \right) + \left( \right. \\
& 4.712388981 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) \mu}{L} - 3. \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left(Cy - \frac{1 \pi T}{2 L}\right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} - \frac{I O \gamma 00 U}{L} \right) \mu \\
& \left. - 1.570796327 \frac{\Lambda T \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right) \mu}{L} \right) A26 \mu + 3.141592654 \frac{A22 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left(1 + .4 \frac{Cb B}{T}\right)}{L} \Big/ ( \\
& - (-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$D42 := - \left( -3.141592654 \right. \\
\left. \frac{A26 \mu \Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 1.570796327 \frac{T a}{L \text{ fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{ fator}} + \frac{\left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right)}{L} + 3.141592654 \right. \\
\left. \frac{A22 \mu \Lambda T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 1.570796327 \frac{T a}{L \text{ fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{ fator}} + \frac{\left( .5 Cfx \text{ fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) a}{L} \right) / ( \\
-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))$$

$$D43 := - \left( \left( -\Lambda \left( -6. \frac{\gamma00 E1 U a \mu}{L^2} + 3. \frac{\gamma00 E2 U \mu}{L^3} \right) - 3 \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( Cy - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma00 + \frac{\pi T \left( 1 + 4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma00 U}{L} \right) a^2 \mu \right) \right. \\
A26 \mu - A22 \mu \left( -\Lambda \left( -6. \frac{T \gamma00 E2 U a \mu}{L^3} + 3. \frac{T \gamma00 E3 U \mu}{L^4} \right) \right. \\
\left. \left. - 3. \Lambda \left( Cy \gamma00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma00 E1 U}{L^2} - \frac{11 \gamma00 U}{L^2} \right) a^2 \mu \right) \right) / ( \\
-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))$$

$$\begin{aligned}
D44 := & - \left( -3.141592654 \right. \\
& \frac{A26 \mu \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 1.570796327 \frac{T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right)}{L} + \\
& 3.141592654 \\
& \frac{A22 \mu \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( 1.570796327 \frac{T a}{L \text{fator}} - .3926990818 \frac{T}{L \text{fator}} + \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a^2}{\text{fator}} \right) a}{L} - \\
& A22 \mu \left( -\Lambda \left( 6. \frac{T \gamma 00 E2 U a}{L^3} - 3. \frac{T \gamma 00 E3 U}{L^4} \right) \right. \\
& \left. + 3. \Lambda \left( ICy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E1 U}{L^2} - \frac{11 \gamma 00 U}{L^2} \right) a^2 \right) + \\
& \left( -\Lambda \left( 6. \frac{\gamma 00 E1 U a}{L^2} - 3. \frac{\gamma 00 E2 U}{L^3} \right) + 3. \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( Cy - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{10 \gamma 00 U}{L} \right) a^2 \right) A26 \mu \\
& / \left( -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E41 := & - \left( \begin{aligned} & -2 A11 \mu \left( -\Lambda \left( -\frac{.7853981635 T \left( 1. + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2. \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T acr \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) \\ & + 2 A22 \mu \left( -\Lambda \left( -\frac{.7853981635 T \left( 1. + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2. \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T acr \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) + 2. \\ & \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( \frac{1.570796327 T \left( 1. - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2. \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) A11 \mu a \\ & + (.7853981635 A22 \Lambda T^2 L^2 \rho - 6.911503839 \Lambda T^2 L \rho B A26 - 1.256637062 \Lambda T acr L^2 \rho Cb B A22 a \\ & + .1256637062 A22 \Lambda T L^2 \rho B - 2. A22 \Lambda M26lab + A26 L^3 A22 \rho T + 1.256637062 A26 a \Lambda T L^2 \rho Cb B \\ & - A26 L^3 A11 \rho T + .2513274123 \Lambda T L^2 \rho B A26 + 1.570796327 \Lambda T^2 L^2 \rho A26 + 2. A26 L \Lambda M11lab \\ & + 3.141592654 A26 a \Lambda T^2 L^2 \rho - 3.141592654 A22 \Lambda T^2 acr L^2 \rho a - 1.727875960 A22 \Lambda T^2 L \rho B) \\ & (-2. (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2. a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \rho \\ & T (-A22 A66 + A26^2)) - 2 \\ & \left( -A22 + A11 - \Lambda \left( \frac{1.570796327 T \left( 1. - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2. \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \right) A26 \mu \\ & + A26 \mu \left( -A11 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \left( 2. \frac{\left( .5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L fator} \right) \right) \\ & - A22 \mu \left( -A11 - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1. + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a}{L} \left( 2. \frac{\left( .5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L fator} \right) \right) a \\ & / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a)) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E42 := & - \left( 6.283185308 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) A11 \mu^2 a}{L} \right. \\
& + \left( 3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) \mu}{L} - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} \right) A26 \mu \\
& - A22 \mu \left( 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L^2} - 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \mu}{L} \right) \\
& + 6.283185308 \frac{A26 \mu^2 \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 \text{Cfx fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right)}{L \text{fator}} \\
& - 6.283185308 \frac{A22 \mu^2 \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( .5 \text{Cfx fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a}{L \text{fator}} + (1.256637062 A22 \Lambda T \text{acr} L^2 \rho Cb B \mu \\
& + 3.141592654 A22 \Lambda T^2 \text{acr} L^2 \rho \mu - 3.141592654 A26 L^2 \Lambda T^2 \rho \mu - 1.256637062 A26 L^2 \Lambda T \rho Cb B \mu) \\
& (-2 (-A26 a + A66) A11 \mu - 2 A26 \mu (A26 - A22 a) + 2 (-A26 a + A66) A22 \mu + 2. a A11 \mu (A26 - A22 a)) / (L^3 \rho T \\
& (-A22 A66 + A26^2)) - 6.283185308 \frac{A26 \mu^2 \Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - 6.283185308 \frac{A11 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} \\
& + 6.283185308 \frac{A22 \mu^2 \Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} \Bigg) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E43 := & - \left( \right. \\
& A26 \mu \left( A11 \mu - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -1.570796327 \frac{T \mu}{L fator} - 2 \frac{\left( .5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a \mu}{fator} \right)}{L} \right) - \\
& A22 \mu \left( -\Lambda \left( - .7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2 \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) \mu + 3.141592654 \frac{\Lambda T acr \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a \mu}{L^2} - A26 \mu \right) \\
& + \left( -A22 \mu + 3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) a \mu}{L} - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2 \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \mu \right) A26 \mu - \\
& A22 \mu \left( A11 \mu - 3.141592654 \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -1.570796327 \frac{T \mu}{L fator} - 2 \frac{\left( .5 Cfx fator + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a \mu}{fator} \right)}{L} \right) a \\
& \left. \right) / (-(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E44 := & - \left( \left( 3.141592654 \frac{\Lambda (T + .4 Cb B) a \mu}{L} - \Lambda \left( 1.570796327 \frac{T \left( 1 - 4.4 \frac{B}{L} + .160 \frac{B}{T} \right)}{L} + 2. \frac{M11lab}{L^2 \rho T} \right) \mu \right. \right. \\
& + 6. \frac{\Lambda \gamma 00 E1 U \mu}{L^2} - 6. \Lambda \left( -\frac{1 \pi T}{2 L} - \left( Cy - \frac{1 \pi T}{2 L} \right) \gamma 00 + \frac{\pi T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right)}{L} - \frac{I0 \gamma 00 U}{L} \right) a \mu - A22 \mu \left. \right) A26 \mu + \\
& A26 \mu \left( \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -1.570796327 \frac{T \mu}{L \text{fator}} - 2. \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a \mu}{\text{fator}} \right)}{A11 \mu - 3.141592654} \right) \\
& - \\
& A22 \mu \left( \frac{\Lambda T \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) \left( -1.570796327 \frac{T \mu}{L \text{fator}} - 2. \frac{\left( .5 Cfx \text{fator} + 1.570796327 \frac{T}{L} \right) a \mu}{\text{fator}} \right)}{A11 \mu - 3.141592654} \right) a \\
& - A22 \mu \left( -6. \Lambda \left( ICy \gamma 00 + 3.141592654 \frac{T}{L} - 2.356194491 \frac{T \left( 1 - 4.8 \frac{T}{L} \right)}{L} + \frac{T \gamma 00 E1 U}{L^2} - \frac{I1 \gamma 00 U}{L^2} \right) a \mu \right. \\
& - \Lambda \left( -7853981635 \frac{T \left( 1 + .16 \frac{B}{T} - 2.2 \frac{B}{L} \right)}{L} + 2. \frac{M26lab}{L^3 \rho T} \right) \mu + 6. \frac{\Lambda T \gamma 00 E2 U \mu}{L^3} \\
& \left. \left. + 3.141592654 \frac{\Lambda T \text{acr} \left( 1 + .4 \frac{Cb B}{T} \right) a \mu}{L^2} - A26 \mu \right) / \left( -(-A26 a + A66) A22 \mu + A26 \mu (A26 - A22 a) \right)
\end{aligned}$$

As equações acima serão utilizadas, na sua parte linear, para estudar a curva de bifurcação. E na sua parte não-linear para estudar qualitativamente a estabilidade do ciclo-limite no cenário pós-crítico. Tal estudo será realizado no Apêndice sobre Estabilidade da Bifurcação Dinâmica e no Capítulo 6 sobre Bifurcação de Hopf.

## **Apêndice 5 Análise de Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM-**

### **Hawser rígido**

#### **A.V.1 Introdução**

Neste apêndice, a partir da formalização matemática desenvolvida no Apêndice IV onde obtivemos a expansão em Série de Taylor para o caso FPSO-SPM-Hawser Rígido apresentamos a análise de estabilidade linear para o caso FPSO-SPM-Hawser rígido. A abordagem aqui utilizada é, no que diz respeito à curva de Hopf-criticalidade, equivalente ao Método Routh-Hurwitz. No entanto, é importante ressaltar que, em sua generalidade, o Método de Routh-Hurwitz pode eventualmente apresentar casos aparentemente de Bifurcação de Hopf (onde teríamos pares de auto-valores complexos conjugados) quando na verdade temos pares de raízes reais com sinais opostos. Daí a limitação do ponto de vista formal do Método de Routh-Hurwitz e a relevância do critério para Bifurcações Dinâmicas aqui exposto.

#### **A.V.2 Análise da Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM-Hawser-rígido**

Considere a matriz Jacobiana da expansão em Série de Taylor no caso FPSO-SPM-Hawser-rígido já apresentada no Apêndice Expansão em Série de Taylor, caso FPSO-SPM-Hawser-rígido:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{24} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.V.1})$$

onde as expressões para os coeficientes  $m_y$  estão dadas no referido apêndice.

Da matriz Jacobiana acima calculamos o seguinte polinômio característico:

$$p(x) = x^4 + (-m_{33} - m_{44})x^3 + (-m_{34}m_{43} - m_{42} - m_{31} + m_{33}m_{44})x^2 + (-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})x + (-m_{41}m_{32} + m_{31}m_{42}) \quad (\text{A.V.2})$$

Façamos no polinômio acima  $x = I\omega$  onde  $I$  representa a unidade imaginária ( $I = \sqrt{-1}$ )

e separemo-lo nas respectivas partes real e imaginária:

$$p\_real(\omega) = \omega^4 - (-m_{34}m_{43} - m_{42} - m_{31} + m_{33}m_{44})\omega^2 + (-m_{41}m_{32} + m_{31}m_{42}) \quad (\text{A.V.3})$$

$$p\_imag(\omega) = -(-m_{33} - m_{44})\omega^3 + (-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})\omega \quad (\text{A.V.4})$$

A parte imaginária pode ser re-escrita na forma:

$$p\_imag(\omega) = \left[ -(-m_{33} - m_{44})\omega^2 + (-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34}) \right] \omega \quad (\text{A.V.5})$$

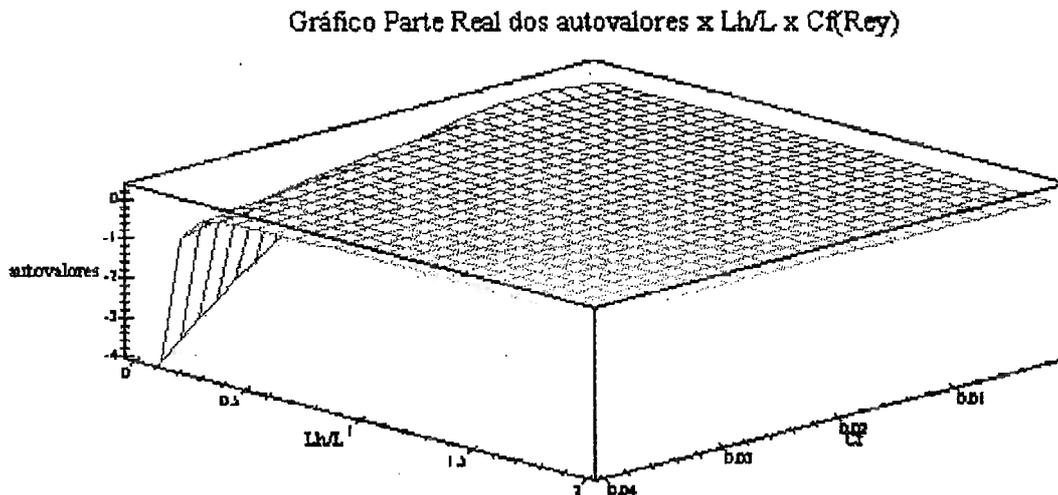
Resolvendo  $p\_imag(\omega) = 0$  (excluindo o caso  $\omega = 0$ ) em  $\omega$  obtemos:

$$\omega^2 = -\frac{(-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})}{(-m_{33} - m_{44})} \quad (\text{A.V.6})$$

Substituindo a expressão acima em  $p\_real(\omega)$  e considerando os valores referentes ao casco Vidal de Negreiros teremos o seguinte polinômio:

$$p\_real(Cf, \mu) = -2186089363 \left( \frac{Cf}{\mu} \right)^2 - 90.95382426 \frac{Cf^2}{\mu} - 2187681150 Cf + 5.929822734 \frac{Cf}{\mu} + 0.5403250693 Cf \quad (\text{A.V.7})$$

Onde  $\mu = \frac{Lh}{L}$ . Plotando num gráfico 3-D o polinômio acima:



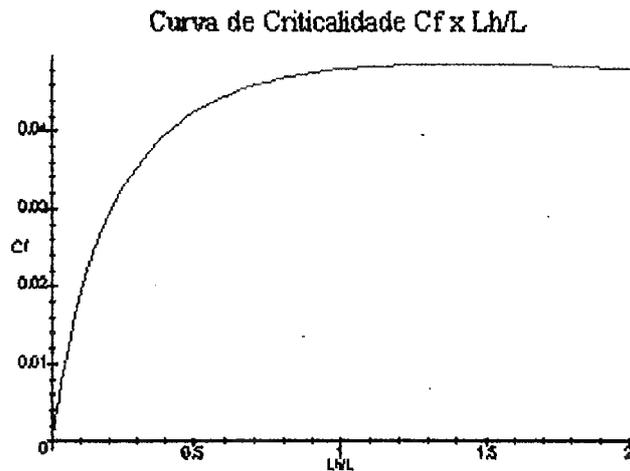
**Figura A.V.1 Gráfico 3-D de Bifurcação Dinâmica Casco Vidal de Negreiros (FPSO-SPM-Hawser Rígido/Asa Curta Heurístico)**

Lembramos que uma condição para que ocorra bifurcação de Hopf é que a parte real dos autovalores seja nula para um valor crítico de um parâmetro do sistema. Assim, podemos igualar o polinômio  $p\_real(Cf, \mu) = 0$  e resolver a relação resultante em Cf. Esta nova função estabelece uma relação entre os parâmetros Lh/L e Cf para que ocorra bifurcação de Hopf.

Ao efetuarmos as operações descritas acima com o polinômio  $p\_real(Cf, \mu)$  obtemos a função

$$Cf = Cf(\mu) = 2.666666666 \frac{\mu(0.1482455684 \times 10^{27} + 0.1350812673 \times 10^{26} \mu)}{0.1457392908 \times 10^{28} + 0.6063588284 \times 10^{28} \mu + 0.14584100 \times 10^{28} \mu^2} \quad (\text{A.V.8})$$

Cujo gráfico fica



**Figura A.V.2 Gráfico de Bifurcação Dinâmica**

**(FPSO-SPM-Hawser Rígido Asa Curta Heurístico)**

Os pontos do plano  $(L_h/L, C_f)$  abaixo da curva correspondem aos pontos existência de ciclos-limite e os pontos acima da curva de não-existência de ciclos-limite. O que está associado no gráfico 3-D aos pontos  $(L_h/L, C_f, \text{parte real dos autovalores})$  para os quais a parte real dos autovalores não é nula.

É relevante observarmos ainda que esta condição para Bifurcação Dinâmica coincide analiticamente com aquela obtida via Condição de Routh-Hurwitz. O que acresce de significância nesta abordagem é a explicitação da condição sobre a parte real dos autovalores associados à Bifurcação Dinâmica. Diferentemente da condição de Routh-Hurwitz, na qual não identificamos de modo *explicito* aquela condição. Na abordagem aqui apresentada a bifurcação dinâmica ocorre de fato pois estamos sobre uma curva de criticalidade *construída* sob a restrição de que a *parte real dos autovalores* seja nula.

Há outro ponto a ser destacado com relação à coincidência analítica entre as curvas obtidas pelo critério para Bifurcação Dinâmica aqui exposto e o critério dado via Routh-Hurwitz. Muito embora possamos encontrar sem maiores dificuldades uma

equação polinomial qualquer de 4<sup>o</sup> grau que satisfaça o critério Routh-Hurwitz para Bifurcação Dinâmica mas que não possua raízes complexas conjugadas com parte real nula ao menos na situação descrita pelo sistema FPSO-SPM com Hawser Rígido ora em estudo verificamos uma coincidência analítica entre os dois critérios. Assim, mesmo que não seja inteiramente segura a utilização em geral critério dado por Routh-Hurwitz para Bifurcação Dinâmica para sistemas quaisquer, *ao menos* no caso FPSO-SPM sob Asa Curta os dois critérios para Bifurcação Dinâmica coincidem. Possivelmente por alguma simetria nas equações que modelam a dinâmica do sistema FPSO-SPM sob Asa Curta.

Da expressão para a parte imaginária do polinômio característico temos:

$$p_{\text{imag}}(I\omega) = -(-m_{33} - m_{44})\omega^3 + (-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})\omega$$

onde  $\omega$  é a frequência de oscilação e supondo que  $\lambda_{3,4} = 0 \pm I\omega$  são autovalores do sistema (ou seja, são raízes do polinômio característico).

$$\text{Logo, } p_{\text{imag}}(I\omega) = -(-m_{33} - m_{44})\omega^3 + (-m_{32}m_{43} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})\omega = 0$$

Donde

$$\omega^2 = -\frac{(-m_{33}m_{44} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})}{-m_{33} - m_{44}}$$

Assim,

$$\omega = \sqrt{-\frac{(-m_{33}m_{44} + m_{42}m_{33} + m_{31}m_{44} - m_{41}m_{34})}{-m_{33} - m_{44}}} \quad (\text{A.V.9})$$

Para fins de exemplificação numérica consideremos o caso Vidal de Negreiros:

$$\omega = 0.00006279 \sqrt{\frac{Cf(0.1491 \times 10^{10} + 0.3821 \times 10^9 \mu)}{\mu}} \quad (\text{A.V.10})$$

## **Apêndice 6 Redução à Variedade Central no Caso FPSO-SPM-**

### **Hawser rígido (Bifurcação Dinâmica)**

#### **A.VI.1 Introdução**

Neste apêndice apresentamos o procedimento para Redução à Variedade Central no caso FPSO-SPM-Hawser rígido para a situação de Bifurcação Dinâmica (bifurcação de Hopf). Aplicamos esta técnica para sistemas de equações diferenciais ordinárias mais simples que um Sistema FPSO-SPM-hawser rígido no Apêndice "A Técnica de Redução à Variedade Central: Motivação, Teoremas e exemplos". Naquele Apêndice a técnica está descrita de forma mais explícita em seus aspectos essenciais de modo que o leitor identifique tanto aspectos geométricos quanto algorítmicos da técnica sem se perder nas questões técnicas de manipulação algébrica do problema FPSO-SPM-hawser rígido. Iniciamos o presente Apêndice com as expressões correspondentes à expansão em Série de Taylor efetuada no Apêndice Expansão em Série de Taylor no caso FPSO-SPM-hawser rígido. Na sequência efetuamos a Redução à Variedade Central propriamente dita. Posteriormente apresentamos o *Integral Averaging* para finalmente estudarmos os aspectos qualitativos do cenário pós-crítico da Bifurcação de Hopf no caso FPSO-SPM-hawser rígido.

#### **A.VI.2 A Redução à Variedade Central no Caso FPSO-SPM-hawser rígido**

No Apêndice Expansão em Série de Taylor para o Caso FPSO-SPM-hawser rígido obtivemos as expressões abaixo para a expansão em Série de Taylor em torno do ponto trivial de equilíbrio

$$\{\gamma = 0, \psi = 0, \gamma_1 = 0, \psi_1 = 0\}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^3 \\ \gamma_1^3 \\ \psi^3 \\ \gamma^3 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 \psi \\ \gamma^2 \psi_1 \\ \gamma^2 \gamma_1 \\ \gamma_1^2 \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1^2 \psi_1 \\ \gamma_1^2 \gamma \\ \gamma \psi^2 \\ \psi_1 \psi^2 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \psi^2 \\ \psi_1^2 \gamma \\ \gamma_1 \psi_1^2 \\ \psi_1^2 \psi \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \psi \psi_1 \\ \psi \gamma \gamma_1 \\ \gamma_1 \gamma \psi_1 \\ \psi_1 \psi \gamma_1 \end{bmatrix} + O(|\gamma|^4, |\psi|^4, |\gamma_1|^4, |\psi_1|^4) \tag{A.VI1}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
&m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{41}, m_{42}, m_{43}, m_{44}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, \\
&B_{31}, B_{32}, B_{33}, B_{34}, B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34}, C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{44}, \\
&D_{31}, D_{32}, D_{33}, D_{34}, D_{41}, D_{42}, D_{43}, D_{44}, E_{31}, E_{32}, E_{33}, E_{34}, E_{41}, E_{42}, E_{43}, E_{44}
\end{aligned}$$

estão definidos no Apêndice Expansão em Série de Taylor no Caso FPSO-SPM-Hawser Rígido.

Já do Apêndice Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM-hawser rígido, obtivemos a curva de bifurcação dinâmica para os parâmetros Cf(Rey) "versus"  $L_H/L$  com Cf(Rey) coeficiente de atrito em função do número de Reynolds,  $L_H$  comprimento do hawser e L comprimento do navio. Como esta curva caracteriza a bifurcação dinâmica no sistema FPSO-SPM-hawser rígido, os pontos que constam da mesma estão associados ao par de

autovalores da matriz Jacobiana do sistema de equações diferenciais que possuem parte real nula na curva de bifurcação.

As equações acima podem ser re-escritas na forma

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (\text{A.VI.2})$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.VI.3})$$

Seja T a matriz de autovetores de A calculada sobre a curva de Bifurcação Dinâmica (curva esta apresentada no Apêndice Estabilidade Linear no Caso FPSO-SPM-Hawser Rígido). Com a mudança de coordenadas

$$x = Tw \quad (\text{A.VI.4})$$

o sistema original fica

$$\dot{w} = (T^{-1}AT)w + T^{-1}g(Tw) \quad (\text{A.VI.5})$$

No ponto de bifurcação a matriz Jacobiana diagonalizada fica:

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{critico} \\ 0 & 0 & \omega_{critico} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.VI.6})$$

com  $\omega_{critico} > 0$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Da matriz jacobiana diagonalizada acima identificamos as direções  $w_1, w_2$  aos auto-espacos estáveis e as direções  $w_3, w_4$  associadas ao auto-espaco Central (autovalores com parte real nula). Do Teorema da Variedade Central podemos expressar as coordenadas  $w_1, w_2$  como um polinômio nas variáveis  $w_3, w_4$ . Mais que isso, o Teorema afirma que este polinômio é pelo menos de ordem dois em  $w_3, w_4$ .

Assim,

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 w_3^2 + a_2 w_3 w_4 + a_3 w_4^2 \\ w_2 &= b_1 w_3^2 + b_2 w_3 w_4 + b_3 w_4^2 \end{aligned} \quad (\text{A.VI.7})$$

Os coeficientes  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  podem ser determinados como segue. Inicialmente derivamos as duas relações acima com respeito a  $w$ :

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 2a_1 w_3 \dot{w}_3 + a_2 (w_3 \dot{w}_4 + w_4 \dot{w}_3) + 2a_3 w_4 \dot{w}_4 \\ \dot{w}_2 &= 2b_1 w_3 \dot{w}_3 + b_2 (w_3 \dot{w}_4 + w_4 \dot{w}_3) + 2b_3 w_4 \dot{w}_4 \end{aligned} \quad (\text{A.VI.8})$$

Como  $\dot{w}_3 = -\omega_{\text{critico}} w_4$ ,  $\dot{w}_4 = \omega_{\text{critico}} w_3$  ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= a_2 \omega_{\text{critico}} w_3^2 + 2(a_3 - a_1) \omega_{\text{critico}} w_3 w_4 - a_2 \omega_{\text{critico}} w_4^2 \\ \dot{w}_2 &= b_2 \omega_{\text{critico}} w_3^2 + 2(b_3 - b_1) \omega_{\text{critico}} w_3 w_4 - b_2 \omega_{\text{critico}} w_4^2 \end{aligned} \quad (\text{A.VI.9})$$

Substituindo as relações acima em

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + T^{-1} g_2(Tz) \quad (\text{A.VI.10})$$

onde  $g_2(Tz)$  corresponde aos termos de 2ª. ordem do sistema (AVL5) obtemos um sistema de equações algébricas em  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ . Resolvendo esse sistema podemos escrever as expressões de ordem 2 restritas à Variedade Central.

Como no nosso caso substituímos os termos de 2ª. ordem tanto nas Integrais de Cross-Flow quanto nas expressões para as Forças Hidrodinâmicas generalizadas por termos de 3ª. ordem. O que implica que  $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$ .

Logo, nas expressões na Variedade Central, teremos as coordenadas  $w_1, w_2$  escritas como polinômios ao menos de 3ª. ordem das coordenadas críticas  $w_3, w_4$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 w_3^3 + a_2 w_3^2 w_4 + a_3 w_3 w_4^2 + a_4 w_4^3 \\ w_2 &= b_1 w_3^3 + b_2 w_3^2 w_4 + b_3 w_3 w_4^2 + b_4 w_4^3 \end{aligned} \quad (\text{A.VI.11})$$

No entanto, lembrando que as expressões da expansão em Série de Taylor para o caso FPSO-SPM-Hawser Rígido possuem termos de 3ª. ordem em  $w_1, w_2, w_3, w_4$  (já que são combinações das coordenadas originais do sistema  $(\gamma, \psi, \gamma_1, \psi_1)$ ), eliminamos os termos  $w_1, w_2$  da mudança de coordenadas

$$x = T^{-1}w \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \gamma_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.VL12})$$

Em outras palavras, as coordenadas  $w_1, w_2$  não influenciam a dinâmica do sistema na Variedade Central para termos até a 3ª. ordem.

Escrevemos então, as equações na Variedade Central:

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 &= -\omega_{\text{critico}} w_4 + q_{11} w_3^3 + q_{12} w_3^2 w_4 + q_{13} w_3 w_4^2 + q_{14} w_4^3 \\ \dot{w}_4 &= \omega_{\text{critico}} w_3 + q_{21} w_3^3 + q_{22} w_3^2 w_4 + q_{23} w_3 w_4^2 + q_{24} w_4^3 \end{aligned} \quad (\text{A.VL13})$$

onde  $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}$  correspondem à expansão algébrica e coleta de termos semelhantes da forma  $w_3^3, w_3^2 w_4, w_3 w_4^2, w_4^3$  nas equações  $\dot{w} = (T^{-1}AT)w + T^{-1}g(Tw)$ .

Contudo, as equações acima escritas na Variedade Central são *apenas* precisamente sobre o ponto crítico de bifurcação. Para escrevermos equações na Variedade Central *próximas* ao ponto crítico devemos obter os elementos correspondentes à forma abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{w}_3 &= \alpha' \varepsilon w_3 - (\omega' \varepsilon + \omega_{\text{crítico}}) w_4 + q_{11} w_3^3 + q_{12} w_3^2 w_4 + q_{13} w_3 w_4^2 + q_{14} w_4^3 \\ \dot{w}_4 &= (\omega_{\text{crítico}} + \omega' \varepsilon) w_3 + \alpha' \varepsilon w_4 + q_{21} w_3^3 + q_{22} w_3^2 w_4 + q_{23} w_3 w_4^2 + q_{24} w_4^3\end{aligned}\quad (\text{A.VL14})$$

com  $\varepsilon > 0$ . Onde  $\alpha'$  e  $\omega'$  denotam as derivadas das partes real e imaginária do par de autovalores Hopf-Bifurcantes.

Para a obtenção de  $\alpha'$ ,  $\omega'$  utilizamo-nos de um método perturbativo clássico.

Consideremos o polinômio característico da matriz Jacobiana para os parâmetros

$\mu = \mu_{\text{crítico}} + \varepsilon$  tomados próximos aos valores críticos:

$$p(x) = x^4 + a_0(\varepsilon)x^3 + a_1(\varepsilon)x^2 + a_2(\varepsilon)x + a_3(\varepsilon) \quad (\text{A.VL15})$$

Fazemos  $x = \alpha' \varepsilon + I(\omega_{\text{crítico}} + \omega' \varepsilon)$ . Substituímos a expressão para  $x$  no polinômio característico, separamos as partes real e imaginária e resolvemos as duas equações resultantes para  $\alpha'$ ,  $\omega'$

### A.VI.3. O *Integral Averaging* no Caso FPSO-SPM-hawser rígido

#### I. A justificativa para uso do *Integral Averaging*

Dado o acoplamento entre as coordenadas  $w_3, w_4$  apresentado nas equações

$$\begin{aligned}\dot{w}_3 &= \alpha' \varepsilon w_3 - (\omega' \varepsilon + \omega_{\text{crítico}}) w_4 + q_{11} w_3^3 + q_{12} w_3^2 w_4 + q_{13} w_3 w_4^2 + q_{14} w_4^3 \\ \dot{w}_4 &= (\omega_{\text{crítico}} + \omega' \varepsilon) w_3 + \alpha' \varepsilon w_4 + q_{21} w_3^3 + q_{22} w_3^2 w_4 + q_{23} w_3 w_4^2 + q_{24} w_4^3\end{aligned}\quad (\text{A.VL16})$$

não é possível a realização do estudo da estabilidade da Bifurcação Dinâmica apresentada pelo sistema FPSO. Uma técnica que permite esse desacoplamento é a de *Integral Averaging* (ver [MalletParet]) que consiste em, após uma mudança de coordenadas para coordenadas polares no sistema de equações diferenciais reduzidas à Variedade Central, em efetuarmos médias por integrais nas expressões do sistema de equações diferenciais reduzido resultante. Com isso conseguimos *descoplar* as equações

diferencias e efetivar o estudo qualitativo da estabilidade da Bifurcação de Hopf para o caso FPSO-SPM-Hawser rígido.

## II. Aplicação do Integral Averaging

Seja a mudança de coordenadas:

$$w_3 = R \cos(\theta), \quad w_4 = R \sin(\theta) \quad (\text{A.VL17})$$

Com tal mudança obtemos a equação diferencial em R:

$$\dot{R} = \alpha' \varepsilon R + P(\theta)R^3 + Q(\theta)R^2 \quad (\text{A.VL18})$$

Integrando a equação acima num ciclo em  $\theta$  (integrando de  $[0, 2\pi]$ ) temos:

$$\dot{R} = \alpha' \varepsilon R + KR^3 \quad (\text{A.VL19})$$

onde

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta = \frac{1}{8} (3q_{11} + q_{13} + q_{22} + 3q_{24}) \quad (\text{A.VL20})$$

Tal função é de extrema relevância na decisão sobre a estabilidade/instabilidade dos ciclos-limite da Bifurcação de Hopf.

O cálculo da função  $K$  é realizado substituindo-se os valores referentes ao casco Vidal de Negreiros nas expressões para

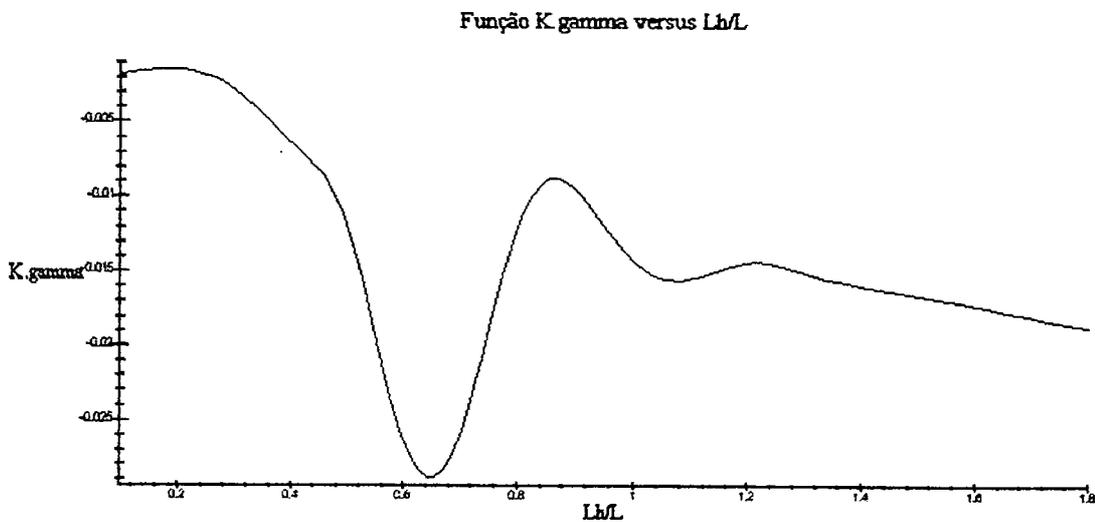
$$A_{33}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, B_{34}, B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34}, \\ C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{44}, D_{31}, D_{32}, D_{33}, D_{34}, D_{41}, D_{42}, D_{43}, D_{44}, E_{31}, E_{32}, E_{33}, E_{34}, E_{41}, E_{42}, E_{43}, E_{44}.$$

Esta função  $K(Cf, \mu)$  irá nos informar sobre a estabilidade dos ciclos-limite quando variamos os parâmetros  $Cf, \mu$ .

Lembramos ainda neste ponto, que dado o problema da diferenciabilidade na origem das Integrais de Cross-Flow foi utilizado um parâmetro normalizador  $\gamma_0$  para tornar

possível uma aproximação à expansão em Série de Taylor destas integrais. No nosso exemplo estamos utilizando como valor numérico  $\gamma_0 = 0.001$ .

Abaixo plotamos o gráfico da função  $K(Cf, \mu) \cdot \gamma_0$ :



**Figura A.VI.1: Gráfico da Função  $K(Cf, Lh/L) \cdot \gamma_0$**

Da Teoria de Sistemas Dinâmicos sabemos que a Bifurcação de Hopf é assintoticamente estável para  $K < 0$  e instável para  $K > 0$  (ver [Wiggins] ou o Apêndice Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf nesta Tese). No Capítulo 7 estudamos com detalhe a estabilidade das Bifurcações de Hopf no caso FPSO-SPM-Hawser rígido.

## Apêndice 7 Coeficientes das Equações Reduzidas à Variedade Central

### A.VII.1. Introdução

Neste apêndice apresentamos os coeficientes das equações Reduzidas às respectivas Variedades Centrais nos casos FPSO-SPM-turret sob modelo de Derivadas Hidrodinâmicas e sob Modelo Asa Curta Heurístico.

Estes coeficientes foram determinados utilizando-se o Manipulador Algébrico MAPLE sendo que as rotinas desenvolvidas com tal fim encontram-se disponibilizadas em anexo a este trabalho. Os valores numéricos que aparecem correspondem aos elementos da matriz de autovetores e da matriz de autovetores inversa.

### A.VII.2. O caso FPSO-SPM-turret sob Modelo de Derivadas Hidrodinâmicas

i) Coeficiente  $\alpha_0$  (coeficiente de  $y_3^2$ ):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{\%1^2}} + \frac{1}{2} \frac{K\sqrt{\%1^2}}{\%1^2} & -K \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right) + \frac{K\sqrt{\%1^2} xp0}{\%1^2} \\
 -0.1759991542 & \frac{\text{denmndor1}}{\text{denmndor1}} + 0.6214073865 \frac{\text{denmndor1}}{\text{denmndor1}} \\
 & -\frac{1}{2} K \sqrt{\%1^2} \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{K\sqrt{\%1^2} (-\%1 xp0 + xp0^2)}{\%1^2} \\
 -2.194028386 & \frac{\text{denmndor1}}{\text{denmndor1}} \\
 \%1 := & -\frac{Xu U + K xp0}{K} + xp0 \\
 \text{Dimensões físicas: } & \frac{1}{s.grau}
 \end{aligned}$$

ii) Coeficiente  $\alpha_1$  (coeficiente de  $y_3 \varepsilon$ ):

$$\begin{aligned}
 & \frac{(M + M22) \left( \frac{K xp0}{\%1} - \frac{K \sqrt{\%1^2} + \frac{K \sqrt{\%1^2} xp0}{\%1}}{\sqrt{\%1^2}} \right)}{-04786613948 \text{ denmndor2}} + .1690029295 \\
 & \frac{(M + M22) \left( -K \sqrt{\%1^2} xp0 \left( -\frac{xp0}{\sqrt{\%1^2} \%1} + \frac{1}{\sqrt{\%1^2}} \right) - \left( K \sqrt{\%1^2} + \frac{K \sqrt{\%1^2} xp0}{\%1} \right) \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right) \right)}{\text{denmndor2}} \\
 \%1 := & -\frac{Xu U + K xp0}{K} + xp0
 \end{aligned}$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s}$

iii) Coeficiente  $\alpha_2$  (coeficiente de  $y_3 \varepsilon^2$ ):

$$\begin{aligned}
 & -4993587464 \cdot 10^{-8} \frac{2M + M22}{\text{denmndor1}} + .1050226916 \cdot 10^{-7} \frac{-\frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{\%1^2}} + \frac{1}{2} \frac{K \sqrt{\%1^2}}{\%1^2}}{\text{denmndor1}} \\
 & - .3581015135 \cdot 10^{-7} \frac{-K \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right) + \frac{K \sqrt{\%1^2} xp0}{\%1^2}}{\text{denmndor1}} \\
 & + .1219500660 \cdot 10^{-6} \frac{-\frac{1}{2} K \sqrt{\%1^2} \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{K \sqrt{\%1^2} (-\%1 xp0 + xp0^2)}{\%1^2}}{\text{denmndor1}} \\
 & - .2706228062 \frac{(M + M22) \left( \frac{K xp0}{\%1} - \frac{K \sqrt{\%1^2} + \frac{K \sqrt{\%1^2} xp0}{\%1}}{\sqrt{\%1^2}} \right)}{\text{denmndor2}} + .7062454620 \\
 & \frac{(M + M22) \left( -K \sqrt{\%1^2} xp0 \left( -\frac{xp0}{\sqrt{\%1^2} \%1} + \frac{1}{\sqrt{\%1^2}} \right) - \left( K \sqrt{\%1^2} + \frac{K \sqrt{\%1^2} xp0}{\%1} \right) \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right) \right)}{\text{denmndor2}} \\
 \%1 := & -\frac{Xu U + K xp0}{K} + xp0
 \end{aligned}$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s}$

iv) Coeficiente  $\alpha_3$  (coeficiente de  $y_3^2 \varepsilon$ ):

$$\begin{aligned}
 & -136.4934276 \frac{2M + M22}{denmndor1} - 1.990107642 \frac{-\frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{\%1^2}} + \frac{1}{2} \frac{K\sqrt{\%1^2}}{\%1^2}}{denmndor1} \\
 & + 6.110073170 \frac{-K \left(1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}}\right) + \frac{K\sqrt{\%1^2} xp0}{\%1^2}}{denmndor1} \\
 & - 18.33722761 \frac{-\frac{1}{2} K\sqrt{\%1^2} \left(1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{K\sqrt{\%1^2} (-\%1 xp0 + xp0^2)}{\%1^2}}{denmndor1} \\
 & + .1984417042 \frac{(M + M22) \left( \frac{K xp0}{\%1} - \frac{K\sqrt{\%1^2} + \frac{K\sqrt{\%1^2} xp0}{\%1}}{\sqrt{\%1^2}} \right)}{denmndor2} - .6526284045 \\
 & \frac{(M + M22) \left( -K\sqrt{\%1^2} xp0 \left( -\frac{xp0}{\sqrt{\%1^2} \%1} + \frac{1}{\sqrt{\%1^2}} \right) - \left( K\sqrt{\%1^2} + \frac{K\sqrt{\%1^2} xp0}{\%1} \right) \left( 1 + \frac{xp0}{\sqrt{\%1^2}} \right) \right)}{denmndor2} \\
 \%1 := & -\frac{Xu U + K xp0}{K} + xp0
 \end{aligned}$$

onde

$$denmndor1 = M - X_u$$

$$denmndor2 = \left( I_{zz} - N_r \right) \left( M - Y_r \right) - N_v Y_r$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s \cdot grau}$

### A.VII.3. O caso FPSO-SPM-turret sob Modelo Asa Curta Heurístico

i) Coeficiente  $\alpha_0$  (coeficiente de  $w_3^2$ ):

$$4121.803161 \frac{Q_3 Q_2 \rho Ts}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} - 52812.50000 \left( \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 \right. \\ \left. + Q_3 \left( 52812.500 \rho Ts \left( -\frac{1}{325} \pi Ts \left( \frac{1}{2} - .007384615385 Ts \right) + .003076923077 \pi Ts \right) - 6622.974647 \right) \right) Q_3 \rho Ts / (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3)$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s.grau}$

ii) Coeficiente  $\alpha_1$  (coeficiente de  $w_3^2 \varepsilon$ ):

$$12.68247127 Q_3 \left( 2.0 Q_2 \rho Ts^2 \pi \left( 1 + 21.16 \frac{Cb}{Ts} \right) \%2 - .3879999998 Q_2 (a11 + b11) \right. \\ \left. + 650.000 Q_2 \rho Ts (c11 + d11 + e11) - 126.1000000 Q_2 (2 c20 + 2 d20 + 2 e20) \right) / (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) - \frac{1}{2} \\ (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 + \%4) \left( 211250.0 Q_3 \rho Ts \left( -\frac{1}{325} \%3 + \frac{1}{325} \pi Ts \right) \%2 - 50.72988504 Q_3 (a11 + b11) - \right. \\ \left. 63.04999998 Q_3 \left( .07884898604 \frac{(\%4 - \lambda_2^2) c20}{Q_3} + .07884898604 \frac{(\%4 - \lambda_3^2) d20}{Q_3} + .07884898604 \frac{(\%4 - \lambda_4^2) e20}{Q_3} \right) \right) \\ \left. + 211250.000 Q_3 \rho Ts (c11 + d11 + e11) - 32950.03534 Q_3 (2 c20 + 2 d20 + 2 e20) \right) / (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3) \\ - 25.36494253 \frac{Q_3 (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \%2}{\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3} \\ \%1 := \sqrt{105625.0000 Q_1^2 \rho^2 Ts^2 A_1^2 + .7760000000 Q_1} \\ \%2 := \left( -162.5000000 Q_1 \rho Ts A_1 + \frac{1}{2} \%1 \right) a11 + \left( -162.5000000 Q_1 \rho Ts A_1 - \frac{1}{2} \%1 \right) b11 \\ \%3 := \pi Ts \left( \frac{1}{2} - .007384615385 Ts \right) \\ \%4 := Q_3 \left( 52812.500 \rho Ts \left( -\frac{1}{325} \%3 + .003076923077 \pi Ts \right) - 6622.974647 \right)$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s.grau}$

iii) Coeficiente  $\alpha_2$  (coeficiente de  $w_3 \varepsilon^2$ ):

$$\begin{aligned}
 & 12.68247127 Q_3 \left( 1.0 Q_2 \rho T_s^2 \pi \left( 1 + 21.16 \frac{Cb}{T_s} \right) \%2 - .1939999999 Q_2 (2 a02 + 2 b02) \right. \\
 & \left. + 325.000 Q_2 \rho T_s (2 c02 + 2 d02 + 2 e02) - 252.2000000 Q_2 (c11 + d11 + e11) \right) / (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) - \frac{1}{2} \\
 & (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 + \%4) \left( 105625.0 Q_3 \rho T_s \left( -\frac{1}{325} \%3 + \frac{1}{325} \pi T_s \right) \%2 - 25.36494252 Q_3 (2 a02 + 2 b02) - \right. \\
 & \left. 126.1000000 Q_3 \left( .03942449302 \frac{(\%4 - \lambda_2^2) c11}{Q_3} + .03942449302 \frac{(\%4 - \lambda_3^2) d11}{Q_3} + .03942449302 \frac{(\%4 - \lambda_4^2) e11}{Q_3} \right) \right. \\
 & \left. + 105625.000 Q_3 \rho T_s (2 c02 + 2 d02 + 2 e02) - 65900.07068 Q_3 (c11 + d11 + e11) \right) / (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3) \\
 & - 12.68247127 \frac{Q_3 (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \%2}{\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3} \\
 \%1 & := \sqrt{105625.0000 Q_1^2 \rho^2 T_s^2 A_1^2 + .7760000000 Q_1} \\
 \%2 & := 2 \left( -162.5000000 Q_1 \rho T_s A_1 + \frac{1}{2} \%1 \right) a02 + 2 \left( -162.5000000 Q_1 \rho T_s A_1 - \frac{1}{2} \%1 \right) b02 \\
 \%3 & := \pi T_s \left( \frac{1}{2} - .007384615385 T_s \right) \\
 \%4 & := Q_3 \left( 52812.500 \rho T_s \left( -\frac{1}{325} \%3 + .003076923077 \pi T_s \right) - 6622.974647 \right)
 \end{aligned}$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s}$

iv) Coeficiente  $\alpha_3$  (coeficiente de  $w_3 \varepsilon$ ):

$$\begin{aligned}
 & -3198.519253 \frac{Q_3 Q_2}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} - \left( \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 \right. \\
 & \left. + Q_3 \left( 52812.500 \rho T_s \left( -\frac{1}{325} \pi T_s \left( \frac{1}{2} - .007384615385 T_s \right) + .003076923077 \pi T_s \right) - 6622.974647 \right) \right) \left( \right. \\
 & \left. -63.04999998 Q_3 \left( 2082.106038 \rho T_s \left( -\frac{1}{325} \pi T_s \left( \frac{1}{2} - .007384615385 T_s \right) + .003076923077 \pi T_s \right) - 261.1074177 \right) \right. \\
 & \left. - 32950.03534 Q_3 \right) / (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3)
 \end{aligned}$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s}$

v) Coeficiente  $\alpha_4$  (coeficiente de  $w_3^3$ ):

$$\begin{aligned}
 & -1599.259627 \frac{Q_3 Q_2 (2 c02 + 2 d02 + 2 e02)}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} - \frac{1}{6} (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 + \%1) \left( -189.1500000 \right. \\
 & \left. Q_3 \left( .07884898604 \frac{(\%1 - \lambda_2^2) c02}{Q_3} + .07884898604 \frac{(\%1 - \lambda_3^2) d02}{Q_3} + .07884898604 \frac{(\%1 - \lambda_4^2) e02}{Q_3} \right) \right. \\
 & \left. - 98850.10602 Q_3 (2 c02 + 2 d02 + 2 e02) \right) / (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3) \\
 \%1 := & Q_3 \left( 52812.500 \rho Ts \left( -\frac{1}{325} \pi Ts \left( \frac{1}{2} - .007384615385 Ts \right) + .003076923077 \pi Ts \right) - 6622.974647 \right)
 \end{aligned}$$

Dimensões físicas:  $\frac{1}{s.grau^3}$

## Apêndice 8 Redução à Variedade Central para Sistemas de Equações

### Diferenciais com termos da forma $x|x|$

#### A. VIII.1 Introdução

Neste apêndice apresentamos, através de um exemplo simples, o procedimento de Redução à Variedade Central para Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias que apresentem termos da forma  $x|x|$  na situação de Bifurcação Estática.

#### VIII.1 Um Exemplo ilustrativo

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - x|x| + x|y| \\ \dot{y} &= -y + y^3 - 2x|x| + 3y|y|\end{aligned}\tag{VIII.1}$$

onde  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$  é um parâmetro. É fácil ver que para  $\varepsilon = 0$  teremos um autovalor nulo no sistema acima.

Aplicando a técnica de Redução à Variedade Central teremos que determinar os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  para determinar o gráfico

$$y = h(x, \varepsilon) = a_1 x + a_2 x|x| + a_3 \varepsilon x\tag{VIII.2}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dx}(x|x|) = 2|x|\tag{VIII.3}$$

Posto isto usamos a expressão apresentada em (5.17)

$$Dh(x, \varepsilon)[Ax + f(x, h(x, \varepsilon))] = -Bh(x, \varepsilon) + g(x, h(x, \varepsilon))$$

com

$$Dh(x, \varepsilon) = a_1 + 2a_2|x| + a_3\varepsilon$$

$$A = \varepsilon$$

$$f(x, h(x, \varepsilon)) = -x|x| + x|h(x, \varepsilon)|$$

$$B = -1$$

$$g(x, h(x, \varepsilon)) = h(x, \varepsilon)^3 - 2x|x| + 3h(x, \varepsilon)|h(x, \varepsilon)|$$

Teremos, então,

$$(a_1 + 2a_2|x| + o(x))(\varepsilon x - x|x| + x|a_1x + O(x^2)|) = -a_1x - a_2x|x| - 2x|x| + 3h(x, \varepsilon)|h(x, \varepsilon)|$$

Donde, após a redução aos termos semelhantes:

$$a_1 = a_3 = 0 \text{ e } a_2 = 2$$

$$\text{Logo, } y = h(x, \varepsilon) = 2x|x|$$

Substituindo em (VIII.1) teremos a equação reduzida:

$$\dot{x} = \varepsilon x - x|x| + x|2x|x| \tag{VIII.4}$$

## Apêndice IX

### Dimensões principais dos Navios analisados e dados correlatos

Parâmetros do Navio Vidal de Negreiros

Condição Carregada (100%)

PARÂMETRO	VALOR
Massa (M)	$3.219.10^8 \text{ kg}$
Momento de Inércia ( $I_z$ )	$2.06.10^{12} \text{ kg.m}^2$
Massa Adicional ( $M_{11}$ )	$1.848.10^7 \text{ kg}$
Massa Adicional ( $M_{22}$ )	$2.725.10^8 \text{ kg}$
Massa Adicional ( $M_{66}$ )	$1.579.10^{12} \text{ kg.m}^2$
Massa Adicional ( $M_{26}$ )	$2.209.10^9 \text{ kg.m}$
Comprimento (L)	320m
Calado (T)	21.47m
Boca (B)	54.5m
Posição do Centro de massa ( $x_{CG}$ )	9.81
Área Molhada (S)	$2.734.10^4 \text{ .m}^2$
Coefficiente de Bloco ( $C_B$ )	0.83
Fator de escala ( $\lambda$ )	90

Parâmetros do Navio Vidal de Negreiros

Condição de Lastro (40%)

PARÂMETRO	VALOR
Massa (M)	$1.117.10^8 \text{ kg}$
Momento de Inércia ( $I_z$ )	$0.72.10^{12} \text{ kg.m}^2$
Massa Adicional ( $M_{11}$ )	$0.254.10^7 \text{ kg}$
Massa Adicional ( $M_{22}$ )	$0.353.10^8 \text{ kg}$
Massa Adicional ( $M_{66}$ )	$0.222.10^{12} \text{ kg.m}^2$
Massa Adicional ( $M_{26}$ )	$0.353.10^9 \text{ kg.m}$
Comprimento (L)	320m
Calado (T)	8.63m
Boca (B)	54.5m
Posição do Centro de massa ( $x_{CG}$ )	4.44m
Área Molhada (S)	$1.791.10^4 \text{ m}^2$
Coefficiente de Bloco ( $C_B$ )	0.76
Fator de escala ( $\lambda$ )	90

## Referências Bibliográficas

- [1] Abkowitz, M.A., *Stability and Motion Control Of Ocean Vehicles*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- [2] Abkowitz, M. A., *Lectures on Ship Hydrodynamics, Steering and Manoeuvrability*. Hydro-Og, Aerodynamisk Laboratorium, Report Hy-5, Lyngby, Denmark, pp 113.
- [3] Abraham, Ralph; Shaw, Cristopher. *The Visual Mathematics Library*. Aerial Press. Santa Cruz, California.
- [4] Acheson, David. *From Calculus to Chaos*. Oxford Univ. Press. 1997
- [5] API (American Petroleum Institute). *Economic State Of the US Oil and Natural Gas Exploration and Production Industry: Long-Term Trends and Recent Events*. April 30, 1999. Policy Analysis and Planning Department.
- [6] API (American Petroleum Institute). *Achieving the Kyoto Protocol: an Analysis of Policy Options*. Issue Analysis 103R, March 1998. Policy Analysis and Planning Department.
- [7] Aranha, J. A P. (1994), *A formula for wave damping in the drift of a floating body''*. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 272, pp 147-155.
- [8] Ambruster, Dieter e Rand, Richard H. 1987. *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*. Springer-Verlag.
- [9] Barrow-Greene, June. *Poincaré and the Three Body Problem*. American Mathematical Society. 1991.
- [10] Benford, H., *The Control of Yaw in Towed Barges*, *International Shipbuilding Progress*, vol. 2, no. 11, 1955, pp.269-318.
- [11] Bergé, Pierre; Pomeau, Yves; Dubois-Gance, Monique. *Dos Ritmos ao Caos*. Ed. Unesp. 1995.
- [12] Bernitsas, M.M., Garza-Rios, L.O., *Effect of Mooring Line Arrangement on the Dynamics of Spread Mooring Systems*, *Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering*, vol.118, pp.7-20. Fev. 1996.

- [13] Bernitsas, M.M., Garza-Rios, L.O., *Mooring System Design Based on Analytical Expressions of Catastrophes of Slow-Motion Dynamics*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, vol. 119, pp. 86-95. May 1997.
- [14] Bernitsas, M.M., Garza-Rios, L.O., *Turret Mooring Design Based on Analytical Expressions of Catastrophes of Slow-Motion Dynamics*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, vol. 120, pp. 154-164. Ago. 1998.
- [15] Bernitsas, M.M., Garza-Rios, L.O., Kim, B.K. 1999. *Mooring Design Based on Catastrophes of Slow Dynamics*.
- [16] Bernitsas, M.M. e Kekridis, N.S., *Simulation and Stability of Ship Towing*, International Shipbuilding Progress, vol. 32, no. 369, May 1985, pp. 112-123.
- [17] Bernitsas, M.M., Kekridis, N.S., Papoulias, F.A., *Solution of the Problem of Ship Towing by Elastic Rope using Perturbation*. Journal of Ship Research, vol. 30, no. 1, pp. 51-68. March 1986.
- [18] Bernitsas, M.M., Kim, B.-K., *Effect of Slow-Drift Loads on Nonlinear Dynamics of Spread Mooring Systems*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, vol. 120, pp. 201-211. 1998.
- [19] Bernitsas, M.M.; Papoulias, F.A *Nonlinear Stability and Maneuvering Simulations of Single-Point Mooring Systems*. Proceedings of Offshore Station Keeping Symposium, SNAME, Houston, Texas, Feb. 1990. pp1-19.
- [20] Brix, J.E., *Lighters and Seagoing Barges and the design of Yaw controlling Units*, 2nd. International Tug Conference, London, October 1971.
- [21] Carr, J. 1981. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag.
- [22] Chakrabarti, S., *Deep Water Floating Moored Systems and Their Numerical and Physical Simulation*, Proceedings of the JNOC Workshop, OMAE'97, Yokohama, Japan, pp.147-187.
- [23] Chow, S.-N., Mallet-Paret, J., *Integral Averaging and bifurcation*. Journal of Differential Equations, 26 (1977) 112-59.
- [24] Chung, J.-S., *Stability-Based Design of Two-Point Mooring Systems With Hydrodynamic Memory*. Journal Of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. Vol. 119, pp. 61-69. Fev. 1997.
- [25] Chung, J.-S., Bernitsas, M.M. *Hydrodynamic Memory Effect on Stability, Bifurcation, and Chaos of Two-Point Mooring Systems*. Journal of Ship Research, vol. 41, no. 1, pp. 26-44. March 1997.

- [26] Eda, H. *Course Stability, Turning Performance, and Connection Force of Barge Systems in Coastal Seaways*. SNAME Transactions, Vol 80, 1972, pp 299-328.
- [27] Ekeland, Ivar. *A Matemática e o Imprevisto*. Editora Gradiva.
- [28] Faltinsen, O. M.; Kjaerland, O.; Liapis, N. And Nalderhaug, H. *Hydrodynamic analysis of tanker at single point mooring systems*. Proceedings of Second International Conference on Behaviour of Offshore Structures. London. 1979.
- [29] Faltinsen, O M. 1993. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*. Cambridge University Press.
- [30] Fernandes, A.C., Sphaier, S., *Dynamic Analysis of a FPSO System*, ISOPE 1997-Honolulu.
- [31] Fernandes, A. C., Sphaier, S.H., Correa, S.H. *The Feasibility of a Centrol Turret in FPSO Systems*. Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering, ASME, May, 1999, vol 121, 77-82.
- [32] Fiedler-Ferrara, N., Prado, Carmen, *Caos, uma introdução*. Editora Edgard Blucher 1994.
- [33] Fucatu, C. H. 1998. *Desenvolvimento de um Simulador Dinâmico Para Análise de Navios Amarrados*. Dissertação de Mestrado. Depto. Eng. Naval e Oceânica/EP-USP. São Paulo.
- [34] Fujino, M., Ishiguro, T. *A Pratical Method to Predict the Slewing Motion of a Ship under the Single Point Mooring*. Journal of The Society of Naval Architects of Japan, vol. 156, nov. 1984.
- [35] Garza-Rios, L.O . Phd Thesis *Development of a Design Methodology for Mooring Systems Based on Catastrophe Theory*. Department of Naval Architecture and Marine Engineering. Ann Arbor. 1996.
- [36] Garza-Rios, L. O, Bernitsas, M.M. *Analytical Expressions of the Stability and Bifurcation Boundaries for General Mooring Systems*. Journal of Ship Research, vol. 40 (4), pp.337-350. 1996.
- [37] Garza-Rios, L.O., Bernitsas, M.M., *Analytical Expressions of the Bifurcation Boundaries for Symmetric Spread Mooring Systems*. Applied Ocean Research, vol. 17, pp. 325-341, 1996.

- [38] Garza-Rios, L.O., Bernitsas, M.M., *Analytical Expressions for Stability and Bifurcations of Turret Mooring Systems*. Journal of Ship Research, vol. 42, no. 3, pp. 216-232. Sept. 1998.
- [39] Garza-Rios, L. O., Bernitsas, M.M., *Slow Motion Dynamics of Turret Mooring and its Approximation as Single Point Mooring*. Applied Ocean Research, 21, pp.27-39, 1999.
- [40] Gilmore, Robert, *Catastroph Theory for Scientist and Engineers* 1981. Dover Publications.
- [41] Gleick, J. *Caos: a Criação de uma Nova Ciência*. Editora Campus. 1990
- [42] Glendinning, Paul. *Stability, Instability and Chaos*. Cambridge University Press. 1994.
- [43] Guckenheimer, J. e Holmes, P. 1990. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.
- [44] Hale, J., Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag. 1991.
- [45] Hassard, B., Wan, Y.H. *Bifurcation formulae derived from center manifold theory*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 63 (1978) 297-312.
- [46] Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) *Ensaio de yaw-rotating nos modelos dos navios Juruá e VLCC*. São Paulo, DITT/IPT, 1998 (Relatório Técnico no. 36879 – Petrobrás)
- [47] Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) *Ensaio de Estabilidade Direcional com modelo VLCC ancorado em um hawser rígido*. São Paulo DITT/IPT, 1999. (Relatório Técnico no. 39659 – Petrobrás)
- [48] Kat, J.O., Wichers, J.E.W., *Behavior of a Moored Ship in Unsteady Current, Wind and Waves*. Marine Technology, pp. 251-264, 1991.
- [49] Kim, B.-K., Bernitsas, M.M., *Effect of Memory on the Stability of Spread Mooring Systems*. Journal of Ship Research, vol. 43, no. 3, pp. 157-169. Sept. 1999.
- [50] Jiang, T., Schellin, T.E., Sharma, S.D., *Horizontal Motions of an SPM Tanker Under Alternative Mooring Configurations*, Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, nov. 1995, vol.117, pp.223-231.
- [51] Leite, A J.P., Aranha, J.A P., Umeda, C., de Conti, M.B. 1996. *Current Forces in tankers and Bifurcation of Equilibrium of Turret Systems: Hydrodynamics Model and Experiments*. Applied Ocean Research.

- [52] Leite, A. J. de P. 1997. *Forças de Corrente em Petroleiros e Bifurcação do Equilíbrio em Sistemas Tipo Turret*. Dissertação de Mestrado, EP-USP/Depto. Eng. Naval e Oceânica. São Paulo.
- [53] Lorentz, Edwar. *A Essência do Caos*. Editora da Unb. 1996
- [54] Marsden, J.E., McCracken, M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Applied Mathematical Sciences, vol.19, Springer-Verlag. 1976.
- [55] Matsuura, J.P.L, Nishimoto, K. Bernitsas, M.M, Garza-Rios, L.O *Comparative Assessment of Hydrodynamic Models of Slow Motion Mooring Dynamics* Proceedings of 18<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 99) St. John. July 1999.
- [56] Matsuura, J.P.L *Análise Dinâmica do Sistema DICAS em águas ultra-profundas e comparação de modelos hidrodinâmicos*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [57] Newman, J.N. 1980. *Marine Hydrodynamics*. Cambridge, Mass. MIT/Press.
- [58] Nishimoto, K., Brinati, H.L., Fucatu, C.H., *Analysis of Single Point Moored Tanker Using Manoeuvring Hydrodynamic Model*, OMAE 1995, vol. I-B, Offshore Technology.
- [59] Nishimoto, K., Aranha, J.A.P., Matsuura, J.P.J., Kaster, F., Namba, H., e Masetti, I.Q. *Full Scale Decay Test of a Moored Tanker: Measurements Procedure of Surge Damping*, Proceedings of the ASME 16th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'97), Vol I-A, Yokohama, Japan, April 1997, pp. 81-90.
- [60] Nishimoto, K., Brinati, H.L., Fucatu, C.H. *Dynamics of Moored Tankers SPM and Turret*, Proceedings of the 17th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE), vol.1, Honolulu, pp. 370-378, 1997.
- [61] Nishimoto, K., Garza-Rios, L.O., Bernitsas, M.M., Masetti, I.Q., *Preliminary Design of Differentiated Compliance Anchoring Systems*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Fev. 1999, vol.121, pp. 9-15.
- [62] Norbinn, N.A., *Theory and Observations no the use of a Mathematical Model for Ship Manoeuvring in Deep and Confined Waters*. Goterborg. 1971.
- [63] Obokata, J. *On the Basic design of Single Point Mooring Systems* (1st report), Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol 161, June 1987.

- [64] Oltman, P. e Sharma, S. 1984. *Simulation of Combined Engine and Rudder Maneuvers Using an Improved Model of Hull-Propeller-Rudder Interaction*. Proceedings of 15th. Symposium On Naval Hydrodynamics, Hamburg.
- [65] Papoulias, F.A., *Dynamic Analysis of Mooring Systems*. Tese de Doutorado, Univ. of Michigan, 1987.
- [66] Papoulias, F.A. e Bernitsas, M.M. *Autonomous Oscillations, Bifurcations and Chaotic Response of Moored Vessels*, Journal of Ship Research, vol. 32 (3), pp. 220-228, 1988.
- [67] Papoulias, F. A., *Analysis of Straight-Line Motion of Towed Ships*. Journal of Ship Research, dec. 1991, pp. 304-313.
- [68] Papoulias, F. A., Papadimitriou, H. *Nonlinear Studies of Dynamic Stability of submarines in the dive plane*. Journal of Ship Research, vol 39, no4. dec 1995. pp347-356.
- [69] Papoulias, F.A, Bateman, C.A, Ornek, S. *Dynamic Loss of stability in depth control of submersible vehicles*. Applied Ocean Research, 17, (1995), pp205-216.
- [70] Papoulias, F.A, Papanikolaou, S. *Parametrics of Submarine Dynamic Stability in the Vertical Plane*. Fonte: Site do primeiro autor. <http://www.web/nps/navy/mil/~me/papoulias/resume.html>
- [71] Papoulias, F.A. e Oral, Z.O. *Hopf Bifurcations and nonlinear studies of gain margins in path control of marine vehicles*. Applied Ocean Research. 17 (1995) 21-32.
- [72] Pesce, C. P. e Tannuri, E. A. 1997 *Stability and Dynamics of Offshore Single Point Mooring Systems*. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas vol. XIX (4), Sept. 1997, pp. 531-552.
- [73] Pesce, C. P., Nunes, D., Gueler, G.F., Carvalho, J.T. 1984. *Numerical Simulations of the Flow Frequency Motions and Mooring Line Tensions of a Offshore Moored Vessel*. Revista Brasileira de Engenharia Naval.
- [74] Pinto, M.O ; Simos, A.N.;Fujara, A L.C.; Aranha, J.AP.&Pesce, C.P.*Turret Positioning, Dicas Heading and Loading on Catenary Risers*. 18<sup>th</sup>. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, St.. Johns, Canada, July 11-16, 1999,CD-ROM paper OMAE99-OFT-4083, p8.
- [75] PROCAP2000. Junho de 1999. *Metodologia e Ferramentas de Projeto de Sistemas de Ancoragem (Parte 2)*.
- [76] Rasband, S.N. 1990. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. John Wiley and Sons.

- [77] Ragazzo, C.G. 2000. *On the Dynamics of Turret Systems Moored in Deep Water*.
- [78] Seydel, R. *From equilibrium to chaos – practical bifurcation and stability analysis*. Elsevier. 1988.
- [79] Sharma, S.D., Jiang, T., Schellin, T.E., *Dynamic Instability and Chaotic Motions of a Single Point Moored Tanker*. Proceedings of the 17th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, The Hague, Holland, August, 1988, pp. 543-562.
- [80] Simos, A.N., Tannuri, E.A., Pesce, C.P., *Dynamics of a Turret FPSO System and Hydrodynamics Models*. Proceedings of the 17th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), Paper OMAE98-410, Lisbon, Portugal, July, 1998.
- [81] Simos, A.N., Pesce, C.P., Bernitsas, M.M., Cohen, Stuart, B. *Amic Model Induced Differences in SPM post Pitchfork Bifurcation Paths*. Proceeding of OMAE2001 Conference, June, 2001.
- [82] Simos, A.N.; Tannuri, E.A.; Pesce, C.P. & Aranha, J.A.P. *A quase-explicit hydrodynamic model for the analysis of a Moored FPSO under Current Action* Journal of Ship Research, vol 45, no. 4, Dec. 2001. pp 289-301.
- [83] Souza, Jr. *Developmen and Application of a Slow Speed Maneuvering Simulator*. Dissertação de Mestrado. EPUSP-DENO.1990.
- [84] Sorheim, H.R. *Analysis of Motion in Single Point Mooring Systems Modelling Identification and Control*, vol 1, no. 3. 1980.
- [85] Stewart, Ian. *Será que Deus joga Dados?* Editora Jorge Zahar. 1996.
- [86] Strandhagen, A G.; Schoenherr, K. E., and Kobayashi, F.M. *The stability on Course of Towed Ships*. SNAME Transactions Vol. 58, 1950. pp 32-66
- [87] Takashina, J. *Ship Maneuvering Motion due to Tugboats and its Mathematical Model*. Journal of the Society of Naval Architects of Japan 160, 1986, pp.93-104.
- [88] Tannuri, E. A ; Simos, A. N.; Leite, A.J.P. & Aranha, J.A. P. *Experimental Validation of a Quase-explicit Hydrodynamic Model: Fishtailing Instability of a Single-Point Moored Tanker in Rigid-Hawser Configuration* Journal of Ship Research, vol 45, no. 4, dec. 2001, pp302-314.
- [89] Thiagarajan, K.P., Finch, S., *An Investigation into the Effect of turret Mooring Location on the Vertical Motions of na FPSO Vessel*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. May 1999, vol. 121, pp. 71-76.

[90] Thompson, J.M.T e Stewart, H.B. 1988. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons.

[91] Troger, Hans, e Steindl, Alois.1991. *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory:an introduction for engineers and applied scientists*. Springer Verlag Wien and New York.

[92] Wichers, J.E.W., *A Simulation Model for a Single Point Moored Tanker*, Publ. 797, MARIN, Wageningen, The Netherlands.

[93] Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag.