

ROBERTO RAMOS JÚNIOR

O EFEITO DA DEFORMAÇÃO LENTA SOBRE O
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE MATERIAIS POLIMÉRICOS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
1994

ROBERTO RAMOS JÚNIOR

**O EFEITO DA DEFORMAÇÃO LENTA SOBRE O
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE MATERIAIS POLIMÉRICOS**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.**

**Área de Concentração:
Engenharia Mecânica**

**Orientador:
Ronaldo de Breyne Salvagni**

**São Paulo
1994**

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600009974

aos meus pais

à Célia

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ronaldo de Breyne Salvagni pela orientação e estímulo.

A Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo por todo o apoio concedido.

Ao professor Paulo M. Pimenta pela contribuição com artigos e comentários feitos.

A Edgar M. Heilmann pela colaboração na obtenção de artigos e pelo incentivo dado.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

S U M Á R I O

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

ABSTRACT

1- INTRODUÇÃO.	01
2- REVISÃO DA LITERATURA.	05
3- COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE POLÍMEROS:	
CONSIDERAÇÕES GERAIS.	21
3.1- Introdução	21
3.2- Conceito e classificação de polímeros	22
3.3- A natureza física dos polímeros sólidos	27
3.3.1- Forças de atração em materiais poliméricos	27
3.3.2- Peso molecular e distribuição de peso molecular	28
3.3.3- Orientação e cristalização em polímeros lineares	30
3.3.4- Pontos de fusão de polímeros cristalinos	33
3.3.5- Temperatura de transição vítrea	36
3.4- Os diferentes tipos de comportamento mecânico	39
3.4.1- Modos de deformação em polímeros.	39
3.4.2- Estados físicos de materiais poliméricos	42
3.5- Comportamento viscoelástico de polímeros	47
3.5.1- Fluência e função de flexibilidade	47
3.5.2- Recuperação	52
3.5.3- Relaxação de tensão e módulo de relaxação	52
3.5.4- Curvas isócronas e isométricas	55
3.6- Efeitos do ambiente sobre os polímeros	57
3.6.1- Ambientes corrosivos	57
3.6.2- Exposição à luz	58
3.6.3- O efeito da temperatura	59
3.6.4- O efeito da umidade	62
3.6.5- O efeito da pressão hidrostática	63
4- MODELOS REPRESENTATIVOS DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS -	
EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.	66
4.1- Introdução	66
4.2- Forma diferencial das equações constitutivas:	
modelos unidimensionais	67
4.2.1- Os modelos básicos	67
4.2.2- O modelo de Maxwell	69
4.2.3- O modelo de Kelvin-Voigt	71
4.2.4- O modelo de quatro parâmetros	72
4.2.5- Modelos generalizados	75
4.2.6- Método de obtenção dos parâmetros (E_i, η_i)	80
4.2.7- Exemplo de obtenção dos parâmetros (E_i, η_i)	83

4.3- Forma integral das equações constitutivas:	
modelos unidimensionais	86
4.3.1- Representações por integrais simples (SIR)	86
4.3.2- Representações por integrais simples mais complexas.	89
4.3.3- Representações por integrais múltiplas (MIR)	91
4.4- Viscoelasticidade a três dimensões	96
4.4.1- Hipóteses iniciais e requisitos	96
4.4.2- Forma diferencial a três dimensões	98
4.4.3- Outras formas de representação a três dimensões.	101
5- O USO DO MEF NA ANÁLISE DE FLUÊNCIA DE MATERIAIS	
POLIMÉRICOS	103
5.1- Introdução	103
5.2- Formas de solução do problema viscoelástico através do MEF.	105
5.3- Descrição do método de integração de tensões	109
5.4- Formulação básica para aplicação do método	111
5.5- Solução para elementos de treliça	115
5.6- Solução para elementos de viga	121
5.7- Solução para elementos de estado plano de tensões	126
6- CONCLUSÕES.	133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	136

APÊNDICE A: Informações adicionais sobre materiais termoplásticos

APÊNDICE B: Resultados do programa MEFVIS para elementos de treliça

APÊNDICE C: Resultados do programa MEFVIS para elementos de viga

APÊNDICE D: Resultados do programa MEFVIS para elementos de estado plano de tensões

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1:	Pontos de fusão de alguns polímeros cristalinos	35
Tabela 3.2:	Temperaturas de transição vítrea de alguns polímeros	38
Tabela 4.1:	Deformações do polietileno duro a 20 C em função da tensão aplicada e do tempo de carga	84
Tabela 4.2:	Valores obtidos para os módulos E_i	85
Tabela 5.1:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 250$ horas)	118
Tabela 5.2:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 100$ horas)	118
Tabela 5.3:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 50$ horas)	119
Tabela 5.4:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 25$ horas)	119
Tabela 5.5:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 10$ horas)	120
Tabela 5.6:	Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 1$ hora)	120
Tabela 5.7:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função do incremento de tempo Δt ($P = 18\text{kgf}$): modelagem com elementos de viga	123
Tabela 5.8:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função do incremento de tempo Δt ($P = 7,2\text{kgf}$): modelagem com elementos de viga	124
Tabela 5.9:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função do incremento de tempo Δt ($P = 1,8\text{kgf}$): modelagem com elementos de viga	124
Tabela 5.10:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função de Δt e da discretização feita ($P = 18\text{kgf}$): modelagem com elementos de estado plano de tensão.	129
Tabela 5.11:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função de Δt e da discretização feita ($P = 7,2\text{kgf}$): modelagem com elementos de estado plano de tensão.	130
Tabela 5.12:	Máximas deflexões calculadas pelo programa MEFVIS em função de Δt e da discretização feita ($P = 1,8\text{kgf}$): modelagem com elementos de estado plano de tensão.	130

LISTA DE FIGURAS

Fig. 3.1:	Principais tipos de estrutura polimérica	23
Fig. 3.2:	Tipo de ligação que resulta em termorigidez	25
Fig. 3.3:	Ramificação lateral no polietileno	26
Fig. 3.4:	Propriedades do polietileno x Peso molecular médio	30
Fig. 3.5:	Existência de cristalitos em um polímero sólido	31
Fig. 3.6:	Esferulitos no polietileno sob luz polarizada	31
Fig. 3.7:	Formas isotáticas, sindiotáticas e atáticas em compostos de vinila	33
Fig. 3.8:	Determinação do ponto de fusão de um polímero parcialmente cristalino	34
Fig. 3.9:	Temperaturas de transição vítrea (T_g) para dois tipos de polímero	36
Fig. 3.10:	Deformação elástica pura nas cadeias de moléculas	39
Fig. 3.11:	Conformações numa cadeia de carbono.	40
Fig. 3.12:	Deformação por elasticidade entrópica	40
Fig. 3.13:	Deformação por deslizamento nas cadeias de moléculas	42
Fig. 3.14:	Estados físicos de um polímero caracterizados pelo seu comportamento mecânico.	43
Fig. 3.15:	Ensaio de fluência	47
Fig. 3.16:	Curva típica de fluência	48
Fig. 3.17:	Flexibilidade de fluência $J(t)$ em função do tempo t	50
Fig. 3.18:	Curva típica de relaxação de tensão	53
Fig. 3.19:	Módulo de relaxação de tensão $G(t)$ em função do tempo de observação t	54
Fig. 3.20:	Construção de curvas isométricas e isócronas	55
Fig. 3.21:	Relação entre tensão, deformação e tempo, a temperatura constante, para um material viscoelástico	56
Fig. 3.22:	Curvas de flexibilidade de fluência para um adesivo estrutural (FM-73) a várias temperaturas	60
Fig. 3.23:	Curva de flexibilidade de fluência principal do FM-73 para uma temperatura de referência de 20,5 C.	60
Fig. 3.24:	Fator de translação para o FM-73, associado à curva de fluência principal	61
Fig. 3.25:	Compressibilidade x Pressão para o poliestireno	63
Fig. 3.26:	Estados de tensão nas várias condições de teste	64
Fig. 3.27:	Resultados experimentais obtidos para as várias condições de carregamento indicadas na fig. 3.26	65
Fig. 3.28:	Resultados experimentais obtidos para o descarregamento (após $\Delta t = 80\text{min}$) dos corpos de prova	65
Fig. 4.1:	Modelo para um sólido elástico linear	68
Fig. 4.2:	Modelo para um fluido viscoso newtoniano	68
Fig. 4.3:	Modelo de Maxwell	69
Fig. 4.4:	Modelo de Kelvin-Voigt	71
Fig. 4.5:	Modelo de quatro parâmetros.	73
Fig. 4.6:	Modelo de Maxwell generalizado	76
Fig. 4.7:	Modelo de Maxwell generalizado com unidades degeneradas.	76
Fig. 4.8:	Modelo de Kelvin-Voigt generalizado	78

Fig. 4.9:	Modelo de Kelvin-Voigt generalizado com unidades degeneradas.	78
Fig. 4.10:	Curvas de fluência para o polietileno duro a 20 C	83
Fig. 4.11:	Modelo generalizado de Maxwell usado para o cálculo dos parâmetros E_i e η_i	83
Fig. 4.12:	Aplicação do princípio da superposição	87
Fig. 4.13:	Obtenção da integral hereditária	88
Fig. 4.14:	Exemplo de comportamento viscoelástico não-linear	90
Fig. 4.15:	Fluência e recuperação para um filamento orientado de polipropileno submetido a diversas cargas	92
Fig. 4.16:	Flexibilidade de fluência e de recuperação em função da carga aplicada para um filamento orientado de polipropileno	93
Fig. 4.17:	Comparação das curvas de fluência e de recuperação com as curvas de fluência adicional	94
Fig. 4.18:	Curvas de fluência para o PMMA - deformação axial.	102
Fig. 5.1:	Comparação da curva de relaxação real do HDPE com curvas de relaxação obtidas pelo MEF utilizando diferentes modelos do material	107
Fig. 5.2:	Modelo generalizado de Maxwell	109
Fig. 5.3:	Subdivisão do contínuo em elementos finitos	111
Fig. 5.4:	Estrutura treliçada viscoelástica sob carregamento estático	116
Fig. 5.5:	Subdivisão do elemento de viga.	122
Fig. 5.6:	Viga viscoelástica submetida a carga concentrada	123
Fig. 5.7:	Discretização da estrutura em elementos de viga	123
Fig. 5.8:	Primeira discretização da viga de Gaube	128
Fig. 5.9:	Segunda discretização da viga de Gaube.	128
Fig. 5.10:	Terceira discretização da viga de Gaube	128

R E S U M O

O uso de polímeros em componentes estruturais tem se tornado cada vez mais freqüente, chegando a substituir os metais em alguns casos. Contudo, o efeito da deformação lenta (fluência) é muito mais pronunciado nos primeiros, sendo essencial sua determinação na análise de peças submetidas a carregamentos de longa duração. O objetivo deste trabalho é apresentar uma forma de prever tal efeito em estruturas feitas com polímeros sob carregamento estático.

Um programa de análise estrutural envolvendo o método dos elementos finitos foi desenvolvido para a determinação dos deslocamentos, tensões e deformações em tais estruturas, através de uma análise passo-a-passo. Um modelo generalizado de Maxwell foi utilizado para obter a equação constitutiva do material. A cada intervalo de tempo, as equações de equilíbrio eram resolvidas com o uso do método de integração das tensões. Três tipos de elementos foram implementados: treliça, viga e estado plano de tensão.

Além da hipótese de linearidade geométrica, admitiu-se que o comportamento do material à tração ou compressão eram iguais e, no caso do elemento de estado plano, foi feita ainda a hipótese de isotropia do material. Os resultados do programa foram comparados com resultados experimentais obtidos na literatura, mostrando um bom desempenho do método proposto.

A B S T R A C T

Polymers are being used more and more in structural components and have even replaced metals in some applications. Time-dependent deformation is, however, much more pronounced in the former materials, and its determination is essential in the analysis of components subjected to long-term loadings. The aim of this work is to present a way of predicting creep deformation in polymer-made structures under static loading.

A structural analysis program involving the finite element method was developed for determination of displacement, stress and strain fields in such structures, by means of a step-by-step analysis. A generalized Maxwell model was used to provide the material constitutive equation. At each step of the solution, the equilibrium equations were solved by using the stress integration method. Three element types were implemented: truss, beam and plane stress elements.

Beside the hypothesis of geometric linearity, it was assumed that material behaves in the same way in tension and compression. For the plane stress element formulation, material was also assumed to be isotropic. The numerical results were compared with experimental ones, obtained in the literature, showing a good performance of the proposed method.

1 - INTRODUÇÃO

A utilização de materiais não-metálicos em diversas aplicações vem assumindo um papel cada vez mais importante na Engenharia, tanto ao nível quantitativo quanto ao nível qualitativo. Ainda que os aços e metais em geral continuem a ser indispensáveis para a construção mecânica, é importante reconhecer que estamos vivendo em uma nova era de materiais, na qual engenheiros e projetistas devem seleccionar o material mais adequado para uma aplicação específica, seja este um metal, um plástico ou uma cerâmica.⁽⁵⁶⁾

Dentre os materiais que tem aparecido como opção para substituir metais, os polímeros têm apresentado uma grande e crescente participação em vários setores da indústria como: embalagens, construção civil, indústria automobilística, utilidades domésticas, etc⁽⁵⁷⁾. Na indústria automobilística, por exemplo, o emprego de plásticos em partes do automóvel chega a registrar marcas expressivas de até 200 kg por veículo (em alguns modelos europeus) com sensível redução do peso do carro e conseqüente baixa no consumo de combustível. No Brasil, embora também em marcha ascendente, esse valor situa-se na faixa dos 65 kg a 80 kg por carro e representa para a indústria automobilística um consumo de 32% a 40% do plástico de engenharia comercializado no país⁽¹⁷⁾.

Entre as vantagens do plástico no setor automobilístico, além do aspecto econômico ligado ao menor peso do veículo, os fabricantes destacam a melhor processabilidade das autopeças, em comparação à dispendiosa usinagem do aço, a possibilidade de desenvolver processos de pintura *on line* e a chama da pintura de corpo de automóvel (*body color*), além da maior liberdade para os projetistas inovarem em concepções de *design* e gerar ganhos significativos de produtividade para os transformadores e as montadoras⁽¹⁷⁾. A resistência dos

polímeros em geral à corrosão também é um fator importante que os coloca em vantagem em relação ao aço para diversos fins.

Este emprego crescente de materiais poliméricos para aplicações estruturais requer, contudo, uma melhor compreensão de suas propriedades e de seu comportamento mecânico, para que se possa desenvolver uma adequada metodologia de projeto e, assim, prever o desempenho de tais estruturas a médio e longo prazo.

Uma vez que grande parte dos materiais poliméricos pode apresentar características viscoelásticas, seu comportamento mecânico a cada instante não depende apenas do estado de tensões correspondente a este instante, mas também de toda a história do carregamento imposto à estrutura⁽³⁸⁾. A deformação dependente do tempo que se verifica nesses materiais quando sujeitos a um dado carregamento chamamos fluência (*creep*), sendo sua determinação essencial na análise de peças plásticas submetidas a carregamentos de longa duração.

Uma outra característica dos materiais poliméricos pode ser notada ao removermos as cargas que lhes foram aplicadas. Neste caso, observa-se uma significativa recuperação da deformação, ou seja, a deformação diminui com o decorrer do tempo na ausência de tensões aplicadas externamente (*creep recovery*) podendo, contudo, haver uma deformação permanente.

Além da fluência e da recuperação da deformação, os materiais poliméricos podem ser submetidos também à relaxação de tensões (*stress relaxation*): ao aplicarmos uma deformação constante ao material, a tensão diminui com o tempo até chegar a um valor estacionário (podendo inclusive ser diferente de zero). Um modelo mecânico de tais materiais deve, portanto, incorporar tanto os efeitos de fluência quanto os de recuperação e relaxação.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma forma eficiente de prever esses efeitos de deformação lenta em materiais poliméricos destinados à utilização estrutural, principalmente no tocante à análise de fluência em

estruturas sob carregamento quase-estático. Para que tal objetivo possa ser atingido de forma plena, vamos dividir nosso trabalho em três grandes partes, a saber: (1) estudo da natureza física dos polímeros; (2) estudo dos modelos matemáticos que representam o comportamento desses materiais quando carregados e (3) estudo de algumas formas de se resolver o problema através da utilização do método dos elementos finitos. Deseja-se, assim, que este trabalho possa ser de utilidade para a compreensão do comportamento dos polímeros nos diversos aspectos, além de possibilitar a análise estrutural de componentes mecânicos fabricados com tais materiais.

Inicialmente apresentaremos, no capítulo 2, uma retrospectiva histórica sobre os avanços no estudo da viscoelasticidade em polímeros. Através desta revisão da literatura, acompanharemos o desenvolvimento teórico e experimental ligado ao modelamento de materiais poliméricos ao longo do tempo, bem como a evolução das técnicas numéricas de resolução de problemas de fluência.

A seguir, no capítulo 3, serão apresentadas algumas considerações gerais a respeito do comportamento estrutural desses materiais, a fim de unificarmos o estudo dos diferentes tipos de polímeros. Trataremos, inicialmente, do conceito e da classificação dos polímeros de acordo com sua estrutura molecular, expondo, a seguir, vários fatores de natureza física que influenciam as propriedades mecânicas desses materiais. Mostraremos, então, os diversos tipos de comportamento mecânico que os polímeros podem apresentar, com ênfase ao seu comportamento viscoelástico, e abordaremos, por fim, a questão dos efeitos do meio sobre esses materiais. Verifica-se, assim, que esse capítulo trata, em suma, da primeira parte do estudo a que nos propomos.

No capítulo 4 serão apresentados alguns modelos representativos dos materiais viscoelásticos através do estudo de equações constitutivas (relações entre os campos de tensão e deformação de um dado material) propostas na

literatura. Serão mostradas tanto as formas diferenciais quanto as integrais dessas equações, mas daremos ênfase sobre as primeiras, por serem mais utilizadas em métodos numéricos. Mostraremos também neste capítulo como tratar o problema viscoelástico em três dimensões, abordando, primeiramente, alguns tópicos como: objetividade (independência do observador), a questão da isotropia do material, casos particulares (representação adequada do problema unidimensional correspondente), etc. O capítulo 4 trata, portanto, da segunda parte do estudo proposto.

Devido à grande importância que os métodos numéricos vêm desempenhando na análise estrutural de materiais viscoelásticos, dedicaremos o capítulo 5 à introdução de algumas técnicas, baseadas no método dos elementos finitos (MEF) e utilizadas na resolução de problemas estruturais complexos que envolvem tais materiais. Pretende-se, assim, apresentar a terceira e última parte necessária para a realização do nosso objetivo. Pode-se, inclusive, dizer que esta é a parte principal de todo o trabalho, pois é através dela que poderemos prever os níveis de deformação em estruturas sujeitas à fluência e, assim, verificar se elas atendem às condições exigidas.

Finalmente, no capítulo 6, serão relacionadas as conclusões do nosso trabalho, bem como algumas sugestões que poderão propiciar a continuidade do estudo através de alguns tópicos a serem desenvolvidos.

2 - REVISÃO DA LITERATURA

O comportamento mecânico de materiais poliméricos tem sido pesquisado com bastante intensidade desde que a indústria de plásticos iniciou-se de forma concreta em 1907, quando a baquelite foi patenteada por Backeland. A partir de então, várias contribuições foram feitas para se prever o comportamento dos vários polímeros recém-descobertos na época. Neste capítulo pretende-se mostrar um histórico destas contribuições, em particular no que se refere ao estudo da fluência em polímeros e à sua consideração em projetos estruturais.

Os primeiros estudos sobre o comportamento mecânico de polímeros envolveram uma grande quantidade de ensaios e resultados experimentais, a fim de se avaliar a dependência entre propriedades mecânicas (como o módulo de Young), grandezas estáticas ou cinemáticas (tensão, deformação, etc) e outros parâmetros (tempo, temperatura, etc). BISCHOFF et al.⁽⁶⁾, por exemplo, publicaram em 1952 os resultados obtidos em ensaios de relaxação de uma borracha vulcanizada GR-S para diversas temperaturas na região de transição do material. Com tais resultados, os autores desenvolveram uma expressão analítica, relacionando o módulo de relaxação de tensão em função do tempo de observação e da temperatura do ensaio. Porém, apesar de seu valor ilustrativo, mostrando a influência do tempo e da temperatura sobre as propriedades mecânicas do polímero, o trabalho apresenta pouco ou nenhum valor prático pois as expressões analíticas encontradas são válidas somente se o Princípio da Superposição de Boltzmann for aplicável, o que nem sempre se verifica, já que o módulo de relaxação de tensão pode depender também do nível de deformação imposto ao corpo, da tensão, etc. Para que tal princípio pudesse ser aplicado,

os autores limitaram o tempo de ensaio dos corpos-de-prova em uma hora. De fato, para tempos de observação curtos, pode-se muitas vezes admitir como válido o Princípio de Boltzmann; porém, o aspecto prático de um problema de análise estrutural fica totalmente destruído. Afinal, o que se pode dizer sobre o comportamento do material após grandes intervalos de tempo?

Em 1955, FINDLEY; KHOSLA⁽²⁰⁾ realizaram um interessante estudo comparando resultados experimentais, obtidos em ensaios de fluência, com resultados teóricos previstos pela aplicação de várias teorias, entre elas: o princípio da superposição, a teoria da equação de estado mecânica e as teorias de encruamento com o tempo (*time-hardening theory*) e com a deformação (*strain-hardening theory*). Através destas comparações pretendia-se determinar a precisão com que as diversas teorias descreviam o comportamento de polímeros sob condições de carga variável. Três pontos tornam o artigo particularmente interessante: (1) a preocupação dos autores em realizar ensaios para diversos polímeros (polietileno, monoclóro-trifluor-etileno, PVC e poliestireno); (2) a utilização de vários programas de carregamento (três) compostos por diferentes níveis de tensão, de modo a incluir dados de fluência e de recuperação; (3) o tempo total de observação de cada amostra - 2184 horas (91 dias) -, bem maior que o utilizado em outros artigos do gênero. Contudo, os resultados teóricos obtidos pelas diversas teorias apresentadas foram baseados numa única lei de fluência^(a), como se esta pudesse realmente descrever o comportamento à fluência de todos os polímeros nas diversas condições de carregamento. Provavelmente, a utilização de outras leis de fluência poderia fornecer resultados diferentes daqueles encontrados pelos autores.

Nota: (a) A lei de fluência proposta por Findley tinha a forma:

$$\epsilon = \epsilon'_0 \cdot \sinh(\sigma/\sigma_e) + m' \cdot t^n \cdot \sinh(\sigma/\sigma_m), \text{ onde } \epsilon'_0, m', n, \\ \sigma_e \text{ e } \sigma_m \text{ são constantes do material.}$$

Como a preocupação com o desempenho de materiais a longo prazo existe desde que engenheiros começaram a projetar elementos estruturais, é natural que muitos dos primeiros estudos sobre o comportamento de polímeros também envolvessem a obtenção de suas propriedades a longo prazo pois, sendo uma inovação, tais propriedades ainda não eram bem conhecidas e o emprego destes materiais em aplicações estruturais era muito reduzido.

Contudo, uma vez que a obtenção de tais dados através de ensaios demandaria muito tempo, a busca concentrou-se nas técnicas de previsão do comportamento dos materiais poliméricos através de ensaios de curta duração. Os primeiros estudos nesta área basearam-se no uso de princípios de superposição como o de tempo-temperatura e outros. Assim, em 1955, FERRY apud SEITZ; BALAZS⁽⁵⁵⁾ mostrou como se poderia prever as propriedades mecânicas de polímeros através da equivalência dos efeitos do tempo e da temperatura sobre as mesmas. A idéia que havia por trás disto era que, ao se relacionar tais efeitos, seria possível prever as propriedades do material a longo prazo através de ensaios de curta duração realizados a temperaturas maiores que as de operação.

Em 1967, SEITZ; BALAZS⁽⁵⁵⁾, continuando os estudos nesta área, realizaram experimentos com dois polímeros diferentes: o polietileno R-215 e um poliestireno modificado (o *Styron-492*). Os resultados obtidos no primeiro caso mostraram que dados de ensaios de relaxação de tensão, de apenas 30 horas de duração, permitiram a previsão de dados correspondentes a 10.000 horas com boa precisão através do princípio de superposição tempo-temperatura. O artigo não afirma, contudo, se este princípio de equivalência pode ser aplicado para todo tipo de material polimérico.

No mesmo ano, GAUBE⁽²⁴⁾ publicou um artigo onde analisava o comportamento sob fluência de dois polímeros: o polipropileno e o polietileno

duro. Foram apresentadas as curvas de fluência destes materiais - abrangendo períodos de até 10.000 horas - para diversos valores de tensão e diversas temperaturas, além de curvas isócronas e curvas de módulos de fluência em função da temperatura. O autor também mostrou como calcular os deslocamentos em elementos estruturais simples como vigas e discos, através do cálculo de um módulo "médio", obtido de curvas isócronas (módulos de fluência x tensão). Este artigo mostrou-se bastante útil na elaboração do presente trabalho, não só pelas várias curvas de fluência publicadas, mas também pela comparação de resultados teóricos com experimentais (com ensaios de até 500 horas de duração) e pela inclusão de todos os elementos necessários (dimensões, cargas, etc) para o cálculo dos deslocamentos através do método proposto ou outros métodos.

Em 1968, McLOUGHLIN⁽⁴¹⁾ propôs uma nova lei de fluência, muito parecida com a lei proposta por FINDLEY⁽²⁰⁾, para extrapolação de dados obtidos através de ensaios de fluência e de relaxação de tensão, ambos de curta duração, para períodos de tempo bem maiores. O autor comparou os valores dos módulos de relaxação de tensão do PMMA (polimetil metacrilato), obtidos pela aplicação das duas leis de fluência, com os valores dados por uma curva principal de relaxação. Contudo, os valores dos módulos de relaxação, obtidos pelas leis de McLoughlin e Findley, foram calculados para intervalos de tempo muito grandes (até 10^6 horas ou 114 anos). Assim, apesar de os resultados previstos pela lei de McLoughlin mostraram-se mais precisos que os previstos pela lei de Findley, a dúvida que surge é: a curva principal de relaxação do PMMA, que foi a base de comparação entre as duas leis de fluência analisadas, apresenta resultados confiáveis mesmo para períodos de observação de 114 anos? Ainda que a resposta seja afirmativa, achamos que erros de extrapolação da ordem de 57% (24% segundo o artigo) são bem significativos.

Um outro procedimento para prever o comportamento de polímeros a longo prazo, a partir de ensaios de curta duração, foi utilizado por BRODY⁽⁸⁾, em 1969. O autor aplicou o princípio de superposição tensão-tempo o qual, por analogia ao princípio de superposição tempo-temperatura, admitia que a tensão também poderia ser um parâmetro que pudesse "substituir" o tempo no cálculo da fluência de materiais viscoelásticos. Neste caso, supunha-se que um maior nível de tensões iria acelerar o movimento relativo entre as moléculas do material, de forma que a deformação resultante seria equivalente àquela obtida através da aplicação de tensões menores durante longos períodos de tempo. O método foi testado para diversos tipos de polímeros e os resultados obtidos foram satisfatórios. O artigo é bastante interessante e o autor enfatiza bem as condições em que o procedimento pode ser aplicado com confiabilidade.

Ainda em 1969, POWELL⁽⁵²⁾ publicou um artigo no qual descrevia um método aproximado para projetar componentes termoplásticos submetidos a carregamentos constantes no tempo e de grande duração. Em linhas gerais, tal método consistia em utilizar as fórmulas clássicas da elasticidade para a determinação da máxima carga que o componente poderia suportar, nas condições especificadas pelo projetista (temperatura de serviço, material, vida útil da peça e máxima deformação admissível). O autor tece vários comentários sobre a determinação das propriedades mecânicas - em particular o módulo de Young - a serem usadas nas fórmulas da elasticidade, e chega até a sugerir uma forma de calcular um módulo secante a partir das curvas isométricas do material. Apesar das recomendações feitas pelo autor no tocante ao uso "indevido" das citadas fórmulas, não há um único exemplo de ilustração do método proposto e que comprove sua validade. Neste aspecto, o artigo é extremamente pobre. É desnecessário dizer também que o procedimento só é aplicável para peças de geometria bastante simples.

Em 1971, BENHAM; McCAMMOND⁽⁵⁾ realizaram uma análise comparativa de métodos empregados na previsão de deformações de peças termoplásticas sob fluência. Foram realizados ensaios de fluência em vigas, submetidas à flexão pura e composta, e em barras submetidas à compressão (para investigar a flambagem sob fluência). Diversos materiais foram empregados nos ensaios (PVC, polimetil metacrilato e polipropileno) e o tempo de observação também foi razoável (12 dias). Os resultados experimentais serviram então como base de comparação para os resultados teóricos obtidos através dos diferentes métodos analíticos. Dentre estes, o mais preciso foi o que envolveu o uso de curvas isócronas do material em conjunto com as equações de equilíbrio de forças em cada seção e relações entre deslocamentos e deformações. Devido aos bons resultados obtidos, os autores justificaram o uso dos métodos propostos para a análise de fluência, minimizando a importância de abordagens que utilizam complicadas leis de fluência para descrever o comportamento do material. Os métodos propostos, contudo, só foram aplicados para a análise de peças com geometria muito simples, como vigas e barras.

Também em 1971, RABOTNOV et al.⁽⁵³⁾ estabeleceram uma relação entre a teoria de Volterra-Fréchet e a teoria da integral hereditária para a descrição do comportamento não-linear de materiais poliméricos. Mesmo tratando-se apenas do caso de tensão uniaxial, a complexidade matemática envolvida na aplicação desta teoria mostrou-se bastante grande. Desta forma, a equação constitutiva proposta pelos autores dificilmente poderia ser utilizada num caso prático de análise estrutural.

Com o advento dos computadores digitais e com o maior desenvolvimento de métodos numéricos para a solução de problemas de análise estrutural (particularmente o método dos elementos finitos), vários autores começaram a estudar a aplicação de tais métodos a problemas viscoelásticos,

especialmente a partir de 1970. Desta forma, em 1974, ZIENKIEWICZ; CORMEAU⁽⁶⁴⁾ introduziram um modelo elasto-visco-plástico capaz de reproduzir fenômenos de fluência entre outros. Porém, as leis de fluência utilizadas pelos autores eram mais adequadas à fluência de materiais metálicos.

Contudo, a busca de equações constitutivas que representassem de uma forma mais abrangente o comportamento não-linear dos vários tipos de polímeros ainda continuava e, neste mesmo ano, BRERETON et al.⁽⁷⁾ propuseram uma equação constitutiva, na forma implícita, entre as variáveis tensão $\sigma(t)$, deformação $\epsilon(t)$ e tempo t . Através de algumas simplificações com relação à forma das funções-respostas envolvidas, pôde-se prever com boa precisão o comportamento de três diferentes polímeros (polietileno tereftalato - PET; polipropileno - PP; e polimetilmetacrilato - PMMA) à fluência, à relaxação de tensões e à taxa de deformação constante. Observamos, porém, que a utilização de uma equação implícita envolvendo diversos parâmetros só pode ser tratada com certa facilidade em casos uniaxiais de tensão/deformação. Seu uso em casos de solicitações bi ou triaxiais é absolutamente impraticável.

No ano seguinte, BAUWENS-CROWET; BAUWENS⁽³⁾ apresentaram um modelo reológico de três parâmetros para representar os mecanismos de fluência de alguns polímeros como o policarbonato (PC) e o policloreto de vinila (PVC). O modelo proposto cobriu tanto a região de viscoelasticidade linear quanto a não-linear para um variado campo de temperaturas abaixo da temperatura de transição vítrea destes polímeros. Os dados obtidos por Mallon e Benham (1972), que realizaram ensaios de fluência à torção para o PVC, mostraram estar de acordo com aqueles fornecidos pelo modelo proposto.

Ainda em 1975, NAKAGUMA⁽⁴⁴⁾ descreveu um método para análise de corpos viscoelásticos sujeitos a cargas estáticas, baseando-se nos trabalhos de Adey e Brebbia (1973). Tal método consistia na aplicação da transformada de

Laplace ao problema viscoelástico para a obtenção do problema elástico associado, o qual era resolvido pelo método dos elementos finitos. A inversão das tensões, deformações e deslocamentos transformados para o plano real do tempo era, então, feita numericamente por um processo do tipo multidata, proposto por Cost (1970). Para a aplicação da transformada, contudo, era necessário que o problema envolvesse apenas viscoelasticidade linear e que as condições de contorno não fossem modificadas durante a análise, o que veio a limitar o emprego do método para casos mais gerais.

Alguns anos mais tarde, SANDERS; HAISLER⁽⁵⁴⁾ propuseram o uso de equações constitutivas, baseadas na teoria das integrais simples de Schapery, numa forma adequada para sua implementação num programa de elementos finitos, onde as equações de movimento foram integradas passo-a-passo. O método proposto foi aplicado para prever o comportamento de um aço inoxidável tipo 304 sob condições de fluência (a 593°C), fluência e recuperação (a 649°C), fluência sob carregamento monotonicamente crescente (a 649°C) e fluência sob carregamento cíclico (a 593°C). Apesar de o método ter sido aplicado para prever o comportamento de um aço a altas temperaturas, os autores garantiram que a teoria também serviria para a análise de materiais poliméricos. Os resultados obtidos pela aplicação dessa teoria foram confrontados com resultados obtidos pela aplicação da teoria de encruamento com a deformação (*strain-hardening theory*) e, algumas vezes, com resultados experimentais. Pôde-se observar daí que o método de análise proposto pelos autores não forneceu resultados melhores que os fornecidos pela teoria de encruamento, mesmo para os simples casos de solicitação uniaxial estudados.

KRAUS⁽³⁷⁾ também ressaltou a importância da utilização de técnicas numéricas (notadamente o método dos elementos finitos) para a solução de problemas de fluência de ordem geral. Em seu livro "*Creep Analysis*", KRAUS

descreve o método das deformações iniciais, originalmente proposto por MENDELSON et al. (1959), por ser o mais empregado nos programas de análise de fluência da época.

Uma importante discussão sobre os fatores relevantes numa análise computacional de problemas envolvendo plasticidade e fluência foi feita por LEVY; PIFKO⁽⁴⁰⁾ em 1981. Entre estes fatores, foram mencionados algoritmos de solução (baseados no método da matriz de rigidez tangente e no método das deformações iniciais), técnicas de modelagem e o uso de equações constitutivas que representem adequadamente o comportamento macroscópico do material. Para ilustrar os vários aspectos discutidos no artigo, um programa de análise estrutural (PLANS) incorporando tais aspectos foi utilizado na análise de um componente de um reator nuclear. Alguns pontos comuns entre o programa PLANS e o programa de análise viscoelástica que desenvolvemos neste trabalho podem ser encontrados, como: (1) a análise é feita passo-a-passo, pois as variáveis envolvidas dependem da história do carregamento e (2) a solução é obtida utilizando-se a elasticidade fictícia em cada incremento de tempo. Os pontos de divergência entre os dois programas são basicamente: (1) as equações constitutivas utilizadas e (2) a decomposição da deformação total em parcelas elástica, plástica, de fluência, etc (no nosso programa trabalha-se apenas com a deformação total).

No ano seguinte, BRUELLER et al⁽¹⁰⁾ apresentaram um método numérico para a determinação da variação da tensão no tempo em plásticos submetidos a deformações constantes (relaxação de tensões). Tal método consistia, em parte, na determinação de parâmetros E_i utilizados para aproximar o módulo de relaxação de tensão do material numa forma mais conveniente, através de uma série de Prony-Dirichlet finita. Baseando-nos neste método, com algumas modificações, pudemos calcular os parâmetros E_i de um modelo generalizado de

Maxwell, o qual foi utilizado para obter a equação constitutiva do material (utilizada mais tarde no nosso programa de análise estrutural).

Em 1984, NISHITANI; KOTANI⁽⁴⁷⁾ propuseram uma equação constitutiva para prever a fluência transiente^(b) de materiais viscoelásticos não-lineares, incluindo o efeito da pressão hidrostática. Os resultados teóricos foram confrontados com dados experimentais, obtidos para diversos valores de pressão hidrostática, comprovando a validade da equação proposta. Foram examinados o comportamento sob fluência de apenas dois polímeros (o nitrato e o acetato de celulose), mas os autores sugeriram que a equação poderia ser aplicada para outros polímeros. Em termos práticos pode-se questionar a utilidade do artigo, pois o tempo abrangido pela fluência transiente é geralmente curto (no artigo em questão foram estudados os primeiros 100 minutos de fluência).

Como se pode notar até o momento, a grande maioria dos artigos sobre viscoelasticidade tem tratado somente dos casos de solitação uniaxial, sendo raros os autores que se preocuparam com casos de solitação em mais de uma direção. Desta forma, BUCKLEY⁽¹²⁾ apresentou em 1985 um procedimento para a previsão de fluência em sólidos poliméricos submetidos a carregamentos multiaxiais. O autor aplicou o método a dados de fluência combinada (tração/torção) para o polipropileno, admitindo o material isotrópico. Os resultados obtidos são, porém, questionáveis para uma utilização prática, pois o tempo de observação dos ensaios realizados foi extremamente curto (120s).

Voltando para a linha dos métodos numéricos, OTTOSEN; GUNNESKOV⁽⁴⁹⁾ apresentaram em 1985 um método subincremental não-linear aplicável para problemas elasto-visco-plásticos de ordem geral. Tal como o método

Nota:

(b) Fluência transiente: primeiro estágio de fluência, onde a taxa de deformação de fluência, $\dot{\epsilon}^c$, diminui com o tempo.

subincremental (linear) apresentado por SNYDER e BATHE (1980), as equações de equilíbrio eram iteradas em intervalos principais, enquanto que as equações constitutivas em subintervalos de tempo. A diferença introduzida por OTTOSEN e GUNNESKOV é a hipótese de variação não-linear das deformações totais dentro de cada intervalo (para resolver as equações constitutivas). Com isto problemas que envolviam endurecimento com a fluência (*creep-hardening*) puderam ser resolvidos com maior precisão.

No ano seguinte, um novo procedimento para análise de problemas de fluência através do método dos elementos finitos foi sugerido por HEAPS; MANSFIELD⁽²⁹⁾. Neste caso, as deformações de fluência (ϵ^c) seriam eliminadas como variáveis do problema de forma que, a cada intervalo de tempo, o sistema de equações seria resolvido para as tensões e velocidades nodais apenas. A lei de fluência utilizada foi do tipo $\dot{\epsilon}_{ij}^c = \gamma \cdot S_{ij}$, onde $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ é uma das componentes do tensor taxa de deformação de fluência, S_{ij} é a respectiva componente do tensor antiesférico das tensões, e $\gamma = 3 \cdot \dot{\epsilon}^c / 2 \cdot \bar{\sigma}^c$. Os autores utilizaram ainda a lei de Bailey-Norton, relacionando as quantidades $\dot{\epsilon}^c$ e $\bar{\sigma}$: $\dot{\epsilon}^c = K \cdot (\bar{\sigma})^m$ onde K e m são constantes do material. Porém, tais leis se aplicam bem para metais, conforme cita KRAUS⁽³⁷⁾, mas não para polímeros, cujo comportamento mecânico é bem mais complexo que o de metais.

Ainda em 1986, NG; WILLIAMS⁽⁴⁵⁾ realizaram uma série de ensaios a taxas de deformação constante para vários poliésteres aromáticos. Através das curvas tensão-deformação obtidas, foram ajustados parâmetros de equações constitutivas uni e tridimensionais, as quais seriam utilizadas para prever as

Nota:

$$(c) \quad \dot{\epsilon}^c = \left(\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{1/2} \quad (\text{taxa efetiva de deformação de fluência})$$

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} \right)^{1/2} \quad (\text{tensão efetiva de Von Mises})$$

propriedades viscoelásticas não-lineares destes polímeros. Com os parâmetros obtidos, as curvas tensão-deformação puderam ser reconstituídas com boa precisão, tanto através das equações unidimensionais (melhores resultados) quanto através das equações tridimensionais. Contudo, no ano seguinte, as mesmas equações e os mesmos parâmetros foram utilizados para se tentar prever as curvas de fluência e de relaxação de tensão para aqueles materiais e, ao contrário do que se esperava, os resultados previstos pelas equações tridimensionais foram muito melhores do que os previstos pelas equações unidimensionais. O tempo de observação dos ensaios foi de 10^4 s (~ 3 horas) em média. ⁽⁴⁶⁾

Continuando seu trabalho sobre a previsão do comportamento a longo prazo de materiais poliméricos, BRUELLER ⁽¹¹⁾ publicou em 1987 um artigo no qual descrevia um procedimento completo para o ajuste de conjuntos de curvas de fluência ou de relaxação de tensão através do uso de séries de Prony-Dirichlet finitas. Tal procedimento permitia inclusive caracterizar o comportamento do material nas regiões de viscoelasticidade não-linear, através da determinação de fatores não-lineares que multiplicariam os coeficientes dos termos da série. A obtenção desses coeficientes, bem como dos fatores não-lineares mencionados, foi feita através do método dos mínimos quadrados. Novos ensaios realizados mostraram que o ajuste de curvas pelo método proposto foi muito bom.

Em 1988, LEE ⁽³⁹⁾ utilizou um modelo viscoelástico generalizado para análise de problemas de fluência através do método dos elementos finitos. O modelo reológico utilizado era uma combinação dos modelos de Kelvin e Maxwell, com três parâmetros não-lineares (dependentes da tensão efetiva e da temperatura), e a formulação era estendida para o caso multiaxial através da relação tensão-deformação de Prandtl-Reuss vista anteriormente ($\dot{\epsilon}_{ij}^c = \gamma.S_{ij}$).

Apesar de o modelo matemático adotado por LEE ser mais apropriado que o adotado por HEAPS; MANSFIELD⁽²⁹⁾ - pelo menos no tocante à sua utilização para descrever a fluência em polímeros - , nota-se que ambos utilizaram a mesma relação ($\dot{\epsilon}_{ij}^c = \gamma.S_{ij}$) para passar do caso uniaxial para o multiaxial. Conforme dissemos anteriormente, tal relação não é apropriada para polímeros, pois a taxa de deformação de fluência para estes materiais depende também da componente esférica do tensor das tensões.

Neste mesmo ano, CHEN; HSU⁽¹⁵⁾ também utilizaram o método dos elementos finitos para a análise de corpos sob fluência. A novidade introduzida pelos autores foi o uso de um algoritmo de integração numérica misto (implícito-explicito), que reunia as vantagens destes dois esquemas de integração. No método explícito, a matriz de rigidez de cada elemento era calculada uma única vez, mas o método era condicionalmente estável (o incremento de tempo crítico era inversamente proporcional à máxima tensão efetiva atuando na região). Assim, em casos de concentração de tensões, era necessário utilizar incrementos de tempo muito pequenos para assegurar a estabilidade da solução. Já no método implícito a estabilidade da solução independia do incremento de tempo utilizado na análise, sendo possível o uso de maiores incrementos de tempo. Porém, a matriz de rigidez de cada elemento tinha de ser recalculada a cada instante, o que tornava o método inconveniente para a análise de problemas envolvendo muitos elementos. De acordo com o método misto (EI) adotado pelos autores, uma parte da estrutura seria resolvida pelo método explícito (a que estivesse sujeita às menores tensões) e a outra, pelo método implícito (a que estivesse sujeita às maiores tensões). Foram resolvidos alguns exemplos simples para ilustrar os resultados obtidos através da utilização dos vários métodos descritos, mas, infelizmente, não foi feita nenhuma comparação entre os tempos de processamento de cada método.

Retornando para o estudo das equações constitutivas, KITAGAWA; MATSUTANI⁽³⁴⁾ executaram ensaios de compressão uniaxial em barras de polipropileno (PP), a fim de investigar suas propriedades viscoelásticas e plásticas e discutir a validade de equações constitutivas baseadas na teoria de sobre-tensão (*over-stress theory*) proposta por Krempl em 1979. Os ensaios, que foram feitos a diferentes temperaturas, envolveram diversas condições como: taxas de deformação constantes, mudanças bruscas de taxa de deformação, relaxação de tensões, fluência e suas combinações. De uma forma geral, os resultados previstos pela teoria estiveram de acordo com os resultados obtidos experimentalmente.

Continuando o estudo do modelo de sobre-tensão, KITAGAWA et al.⁽³⁵⁾ realizaram, em 1989, ensaios de torção em cilindros vazados de polipropileno (PP). Os ensaios foram feitos à mesma temperatura (25°C) em condições de taxa de deformação constante, mudança brusca de taxa de deformação, relaxação de tensão, fluência e carregamento cíclico. Os resultados obtidos reforçaram a idéia de que uma equação constitutiva baseada no conceito de sobre-tensão seria útil para materiais fortemente "dependentes do tempo", como os polímeros.

Outra equação constitutiva para descrever o comportamento mecânico de polímeros, reforçados com fibras unidirecionais, foi apresentada por DOUVEN et al.⁽¹⁸⁾ em 1989. A equação constitutiva proposta consistia numa relação entre o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor das deformações de Green-Lagrange, e tanto o material da matriz quanto o das fibras podia ter um comportamento viscoelástico. Um elemento de membrana bidimensional incorporando esta equação foi implementado num programa de elementos finitos, contudo não foram feitos experimentos para comprovar a validade do modelo estrutural e da equação constitutiva utilizados.

No ano seguinte, GLOCKNER; SZYSZKOWSKI⁽²⁷⁾ reaperentaram uma equação constitutiva multiaxial que permitia modelar várias características do comportamento viscoelástico de materiais, a saber: resposta elástica instantânea, fluência (primária, secundária e terciária), recuperação, etc. A equação, desenvolvida e discutida anteriormente pelos autores (1985, 1986, 1987), foi aplicada para simular o comportamento de vários materiais a fim de verificar sua capacidade e versatilidade. Foram realizados, também, vários experimentos que cobriram: (1) fluência primária e secundária do gelo, asbestos, cobre, asfalto, concreto e PVC; (2) recuperação do gelo e de asbestos; (3) todos os estágios de fluência para o gelo sob compressão. Contudo, apesar do grande número de materiais ensaiados, a comparação entre os resultados numéricos e experimentais só foi feita para o caso de solitação uniaxial, de forma que algumas das hipóteses admitidas pelos autores (como a de isotropia do material) não puderam ser verificadas.

Ainda em 1990, KRISHNASWAMY et al.⁽³⁸⁾ desenvolveram outro algoritmo, baseado no método dos elementos finitos, útil para a modelagem de materiais com comportamento viscoelástico linear ou não-linear. O algoritmo em questão foi verificado apenas para o caso de viscoelasticidade linear, através da comparação das soluções analítica e numérica dos seguintes problemas: (a) fluência e recuperação de um corpo-de-prova submetido à tensão uniaxial, e (b) determinação do campo de deformações numa chapa "infinita" com um furo circular em seu centro e submetida à tensão uniaxial. Algumas soluções numéricas para problemas de trincas em chapas tipo DEN (*double edge notch*) também foram obtidas e comparadas com resultados baseados no princípio da correspondência generalizado (*extended correspondence principle*). Cumpre ressaltar que a equação constitutiva utilizada para descrever o comportamento viscoelástico do material baseou-se num modelo reológico de três parâmetros e

que, apesar da simplicidade deste modelo, os resultados numéricos foram considerados bastante próximos dos previstos pela teoria.

Uma nova e interessante técnica de integração numérica também foi apresentada recentemente por ARGYRIS et al.⁽¹⁾ cujos trabalhos envolveram uma análise estrutural de materiais viscoelásticos não-lineares. Em particular, pretendia-se estudar estruturas de membrana feitas com PVC, com características anisotrópicas e comportamento não-linear. A precisão, convergência e estabilidade do novo método de integração (baseado numa aproximação indireta da componente inelástica de deformação) foram analisadas e comprovaram sua superioridade em relação à costumeira aproximação direta das deformações inelásticas. Uma continuação do trabalho, envolvendo algumas aplicações do método proposto e comparações com resultados experimentais, ainda está para ser apresentada.

3 - COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE POLÍMEROS: CONSIDERAÇÕES GERAIS

3.1- Introdução

O objetivo deste capítulo é, basicamente, fazer uma descrição de natureza física a respeito dos materiais poliméricos, sem qualquer tentativa de fornecer modelos matemáticos que representem essa natureza (isso será tratado em outros capítulos). Desta forma, apresentaremos, inicialmente, o conceito e a classificação dos polímeros de acordo com sua estrutura molecular para, em seguida, introduzirmos os diversos fatores que influenciam o comportamento mecânico desses materiais, proporcionando-lhes uma variedade e versatilidade incomparáveis.

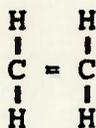
Mostraremos, então, os possíveis estados físicos que os polímeros podem assumir e, reportando-nos especificamente aos estados físicos que nos interessam, apresentaremos o comportamento viscoelástico desses materiais nos casos de fluência, recuperação e relaxação de tensões. Este capítulo servirá, portanto, como base de referência para que se possa julgar e discernir se um dado modelo possui, ou não, as características intrínsecas do comportamento mecânico dos polímeros.

Trataremos, por fim, dos efeitos do ambiente sobre os polímeros, levantando importantes pontos como: corrosão em polímeros, efeitos da luz, da umidade, da pressão hidrostática, etc.

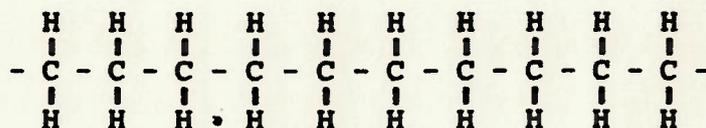
3.2- Conceito e classificação de polímeros

Polímeros são enormes moléculas formadas pela repetição de pequenos grupos atômicos (meros) que se unem por meio de ligações covalentes através de um processo denominado polimerização⁽⁶²⁾. Algumas vezes usa-se a expressão "polímeros de alto peso molecular" para diferenciar essa classe de materiais, com pesos moleculares da ordem de 10^5 a 10^7 , daqueles polímeros formados por apenas alguns monômeros. No que segue, usaremos a palavra "polímero" como sinônimo de "polímero de alto peso molecular" para facilitar o tratamento.

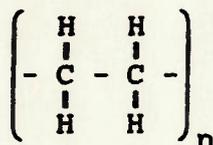
Como exemplo clássico de material polimérico podemos citar o polietileno (PE) cujo monômero, o etileno,



forma o mero ($-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$) que se repete milhares de vezes dentro da cadeia polimérica:



a qual pode ser representada simplesmente como:



Neste exemplo o monômero tem uma ligação dupla (=) que ao ser quebrada fornece novas ligações simples que possibilitam a união dos meros adjacentes. A cadeia começa e termina com outros grupos atômicos (grupos terminais) que podem diferir entre si e que têm pouca influência sobre as propriedades físicas do polímero, pelo fato de as cadeias serem muito longas.

Vários autores^(21,32,61,62) classificam os polímeros de acordo com a estrutura de suas macromoléculas. WYATT; DEW-HUGHES⁽⁶²⁾, por exemplo,

dividiram tais estruturas em quatro tipos (fig. 3.1), a saber: lineares, ramificadas (*branching*), cruzadas (*cross-linked*) e fechadas (*close network*). Esta divisão não é muito rígida na prática, no sentido de que não existe uma fronteira que separe claramente os possíveis tipos de estrutura dos polímeros. Desta forma, um polímero pode ser classificado como sendo de estrutura linear ou ramificada, como é o caso do polietileno de baixa densidade.^(61,62)

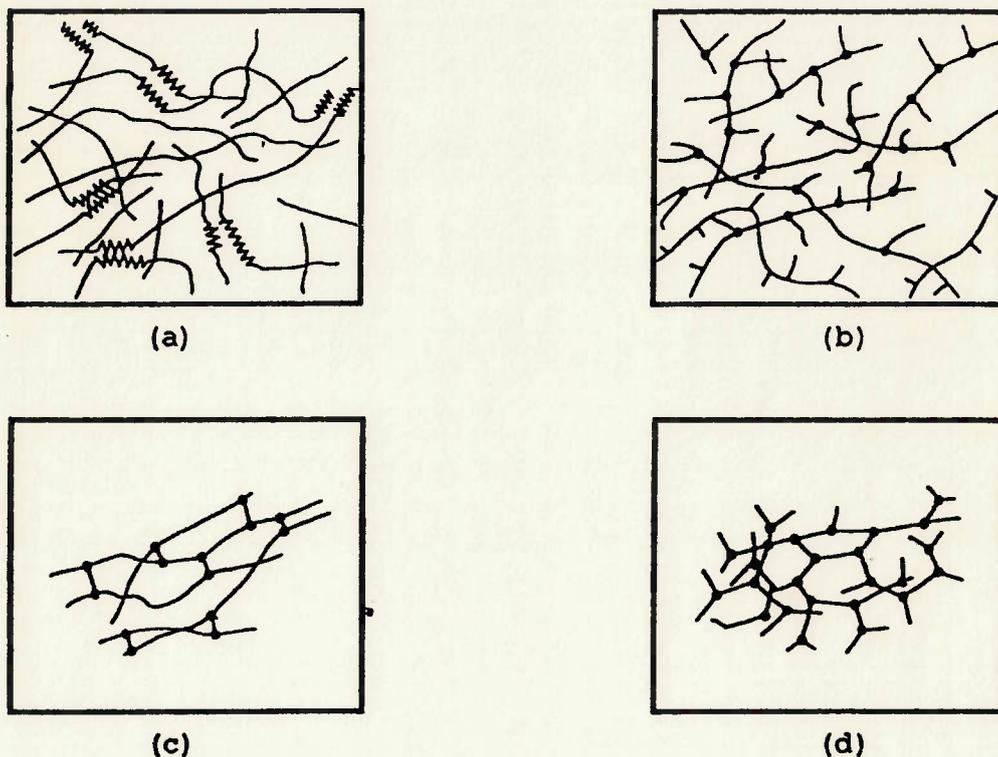
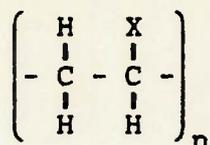


Fig. 3.1: Principais tipos de estrutura polimérica: (a) linear, com alguns cristais mostrados esquematicamente; (b) ramificada; (c) levemente cruzada; (d) fechada.

Os polímeros lineares, que constituem o maior e mais importante grupo, consistem em meros agrupados sucessivamente numa linha ou cadeia, formando grandes moléculas. Como veremos adiante, tais polímeros serão a base dos materiais termoplásticos, os quais podem ser reprocessados continuamente através da aplicação de calor.

Como exemplos de polímeros lineares temos o polietileno (PE) e os compostos de vinil, que são obtidos pela substituição de um dos átomos de hidrogênio por outro grupo atômico (X):



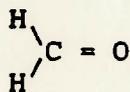
Muitos destes compostos de polivinil são bem conhecidos, como é o caso do PVC (com X = cloreto), do polipropileno (X = CH₃) e do poliestireno (X = C₆H₅).

Devido à sua estrutura, os polímeros lineares podem ser facilmente estirados para a fabricação de fibras de alta resistência: o *nylon* (poliamida) e o *terylene* (polietileno tereftalato - PET) são alguns exemplos. O apêndice A nos traz ainda algumas informações adicionais sobre estes e outros polímeros lineares de uso consagrado na indústria, obtidas através de *Modern Plastics Encyclopedia*⁽⁴³⁾ e outras fontes^(32,62).

Além dos polímeros lineares, temos os polímeros de estrutura fechada (*close network*), cujas macromoléculas são formadas por unidades de repetição que possuem duas ou mais ligações possíveis nos átomos de carbono, resultando numa molécula bi ou tridimensional. Tal tipo de estrutura forma a base dos materiais termofixos, os quais não possuem a mesma versatilidade de forma nem as propriedades dos outros tipos de polímeros.

Como importante exemplo de polímero termofixo destacamos o fenolformaldeído, que foi o primeiro polímero sintético com êxito em aplicações comerciais em 1916 (a baquelite original).

No caso de termofixos obtidos a partir do grupo formaldeído,



o átomo de oxigênio é removido, dando lugar a duas ligações simples

disponíveis. As ligações nos outros grupos reagentes são obtidas pela remoção de átomos de hidrogênio. Formam-se, assim, moléculas de água (H_2O) como um subproduto da reação (policondensação) e que devem ser retiradas do processo. Uma vez terminada toda a reação, os polímeros termofixos não podem mais ser aquecidos e reprocessados (daí o nome). A termorigidez deve-se à formação de ligações covalentes entre as cadeias de moléculas (fig. 3.2).

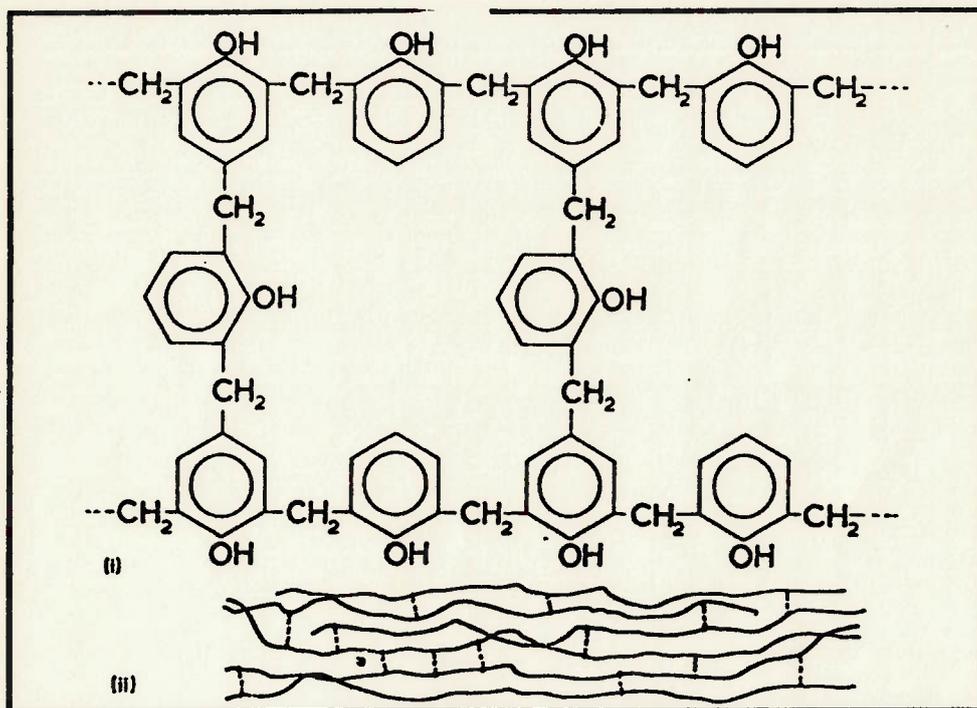


Fig. 3.2: Tipo de ligação que resulta em termorigidez. ⁽³²⁾
 (i) Ligações covalentes entre cadeias
 (ii) Representação esquemática

Quanto aos polímeros de estrutura ramificada (*branching*) e cruzada (*cross linked*), pode-se dizer que suas estruturas são "intermediárias" dos tipos discutidos acima. Desta forma, espera-se que as propriedades físicas e mecânicas destes polímeros também tenham valores intermediários entre aquelas encontradas nos polímeros de estrutura linear e os de estrutura fechada ⁽⁶²⁾.

Como exemplo de polímero de estrutura ramificada, WARD ⁽⁶¹⁾ cita o caso do polietileno de baixa densidade (fig. 3.3), que, diferentemente do

polietileno linear (de alta densidade), possui em média um longo ramo por molécula e um grande número de pequenos ramos, principalmente grupos etil $[-CH_2-CH_3]$ ou butil $[-(CH_2)_3-CH_3]$. Segundo HIGGINS⁽³²⁾ e WARD⁽⁶¹⁾, a presença destes ramos laterais na cadeia principal provoca consideráveis diferenças no comportamento mecânico dos vários tipos de polietileno.

Ainda, de acordo com Modern Plastics Encyclopedia⁽⁴³⁾, um aumento da densidade resulta em maior rigidez, dureza, resistência à abrasão e resistência química do polietileno, enquanto uma diminuição da mesma implica maior flexibilidade e alongamento, além de melhorar sua resistência à fluência. Como a densidade está geralmente ligada à existência de ramificações nas cadeias do polietileno, isto "comprova" a influência da estrutura sobre as propriedades mecânicas dos polímeros.

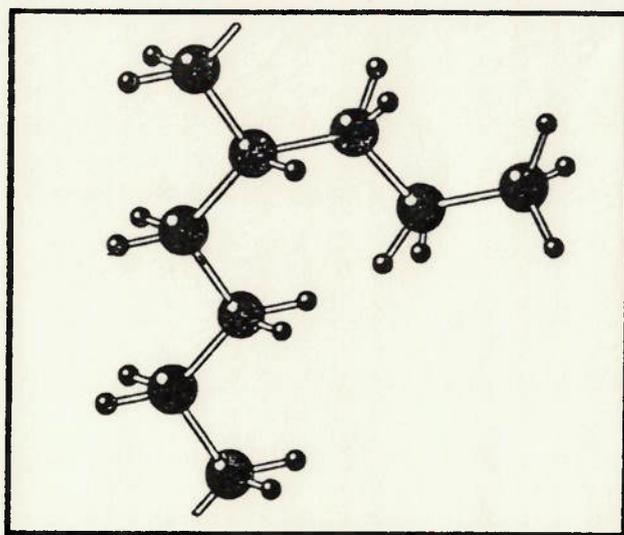


Fig. 3.3: Ramificação lateral no polietileno.⁽⁶¹⁾

3.3- A natureza física dos polímeros sólidos

3.3.1- Forças de atração em materiais poliméricos

De forma geral, podemos encontrar dois tipos diferentes de forças que agem no interior de um composto molecular no estado sólido: as forças interatômicas e as intermoleculares. As primeiras são forças que atuam entre átomos individuais no interior de uma molécula, sendo causadas pelas fortes ligações covalentes que existem entre eles, enquanto as últimas são forças que agem entre moléculas adjacentes, sendo de natureza secundária e conhecidas como forças de Van der Waals. A magnitude destas forças de ligação secundária (relativamente fracas) governa a facilidade com que as moléculas podem ser separadas, afetando propriedades como a solubilidade e a viscosidade.

As forças de ligação entre as cadeias dos polímeros lineares devem-se sobretudo a estas fracas forças intermoleculares. Assim, com o aumento da temperatura, teremos uma maior energia de vibração das moléculas, permitindo-lhes sobrepujar as forças de Van der Waals e fazendo com que o material logo amoleça e torne-se líquido. Os polímeros lineares formam, então, a base dos materiais termoplásticos, que podem ser moldados em diferentes formatos através da aplicação de calor.

Já nos polímeros de estrutura fechada (*close network*), encontramos várias ligações cruzadas (*cross-linkings*) entre as moléculas da cadeia, resultando numa grande molécula tridimensional. A formação destas ligações cruzadas significa que as moléculas da cadeia estão agora ligadas por ligações covalentes, as quais são muito mais fortes que as forças de Van der Waals que mantém unida a cadeia de moléculas num termoplástico.⁽³²⁾

Segundo VAN VLACK⁽⁶⁰⁾, a estrutura tridimensional desenvolvida pela polimerização não permite, neste caso, o escorregamento entre as moléculas. Além disto, se a polimerização não estiver completa, temperaturas mais altas

irão acelerar as reações, resultando numa deformação permanente. Os polímeros assim obtidos são denominados termofixos e suas propriedades diferem de forma significativa daquelas encontradas nos polímeros lineares.

Como veremos adiante, o fenômeno de deformação lenta (fluência) está associado à capacidade de as moléculas deslizarem umas sobre as outras. Pelo exposto conclui-se então que os termofixos praticamente não apresentam fluência, não sendo, portanto, considerados como objeto de estudo neste trabalho.

3.3.2- Peso molecular e distribuição de peso molecular

As propriedades dos materiais poliméricos, sejam eles naturais ou sintéticos, dependem do comprimento das moléculas do polímero, isto é, do número de meros existentes em cada molécula. A razão entre o peso molecular do polímero e o do mero que o originou, dá-se o nome de grau de polimerização, que usualmente está compreendido entre 10^3 a 10^5 (meros por molécula) para boa parte dos polímeros comerciais.⁽⁶²⁾

Sabe-se, contudo, que cada amostra de um polímero linear consiste em cadeias moleculares de comprimentos variáveis, ou seja, de pesos moleculares variáveis, de forma que nem todas as moléculas tem o mesmo grau de polimerização. É razoável, então, aceitar a idéia de que a distribuição do peso molecular é um importante fator na determinação das propriedades de polímeros.

Contudo, até o advento de técnicas mais avançadas (como a cromatografia), a determinação desta distribuição podia apenas ser feito através de técnicas de fracionamento extremamente trabalhosas^(58,61), determinando-se valores médios dos pesos moleculares. Desta forma, boa parte dos experimentos iniciais foi realizada através de diferentes formas de

medição a partir da análise de soluções diluídas de polímeros com solventes adequados. Cada uma dessas formas de medição estava associada à obtenção de um tipo particular de peso molecular médio, que por sua vez estava relacionado com uma específica propriedade do material.

Algumas dessas "antigas" formas de medição estavam baseadas na determinação da média aritmética dos pesos moleculares (\bar{M}_n) através da medição de qualquer uma das propriedades coligativas do material (diminuição da pressão de vapor, do ponto de congelamento ou da pressão osmótica, aumento do ponto de ebulição); outras baseavam-se na determinação da média ponderada dos pesos moleculares (\bar{M}_w) (por exemplo, com técnicas de difração de luz) ou ainda na média-z dos pesos moleculares (\bar{M}_z) (métodos de sedimentação). Essas médias são definidas pelas quantidades^(61,62):

$$\bar{M}_n = \frac{\sum_i X_i M_i}{\sum_i X_i} \quad \bar{M}_w = \frac{\sum_i X_i M_i^2}{\sum_i X_i M_i} \quad \bar{M}_z = \frac{\sum_i X_i M_i^3}{\sum_i X_i M_i^2}$$

(onde X_i representa o número de moléculas com peso molecular M_i)

A figura 3.4 ilustra a dependência de algumas propriedades do polietileno em função do peso molecular médio das amostras e de seus respectivos graus de polimerização.

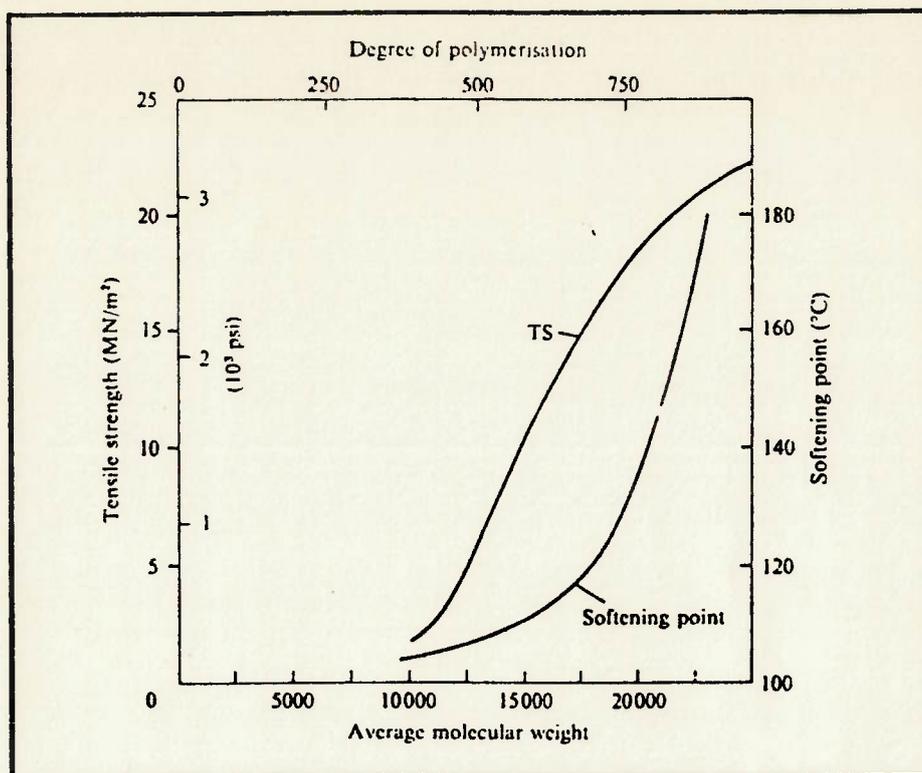


Fig. 3.4: Propriedades do polietileno
x
Peso molecular médio (62)

3.3.3- Orientação e cristalização em polímeros lineares

À temperatura ambiente, a estrutura dos polímeros lineares pode ser ou completamente amorfa, com as cadeias torcidas e posicionadas ao acaso, ou parcialmente cristalina, com algumas regiões do polímero em que as cadeias estão posicionadas ao acaso e outras em que as cadeias obedecem a um arranjo regular. Essas regiões ordenadas são conhecidas como cristalitos e estão mostradas esquematicamente na figura 3.5.

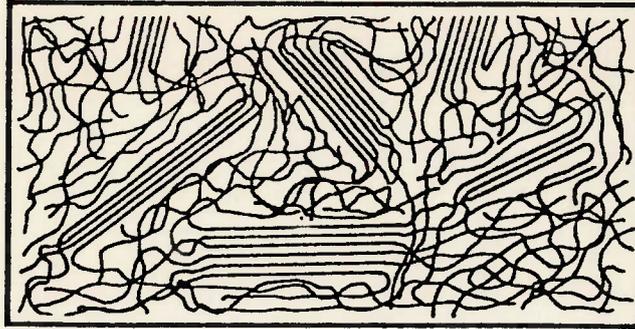


Fig. 3.5: Existência de cristallitos em um polímero sólido.⁽³²⁾

Verificou-se que os cristallitos estão organizados em grupos maiores, com formatos aproximadamente esféricos, chamados "esferulitos" (*spherulites*), os quais podem ser observados como "cruzes de Malta" sob um microscópio ótico com luz polarizada (fig. 3.6). O tamanho desses esferulitos depende das condições de cristalização, obtendo-se um tamanho máximo através de uma cristalização isotérmica, uns poucos graus abaixo da temperatura de fusão do polímero.⁽⁶²⁾



Fig. 3.6: Esferulitos no polietileno sob luz polarizada.⁽⁶²⁾

Verifica-se que uma mesma cadeia molecular atravessa várias regiões cristalinas e amorfas no interior de um polímero. O grau de cristalização (θ)

de um polímero é, então, definido como a fração em peso do polímero que se encontra nas regiões cristalinas do mesmo, com valores compreendidos na faixa de 0 a 80%.⁽⁶²⁾

Nas regiões amorfas, que normalmente formam uma "matriz" em torno dos cristalitos, as cadeias poliméricas estão intergeminadas e posicionadas ao acaso. Da mesma forma, quando resfriamos um polímero a partir do estado líquido na ausência de quaisquer forças externas, os cristalitos que se formam tem uma orientação aleatória. Porém, se aplicarmos uma tensão externa orientada em uma única direção, as cadeias moleculares orientam-se alinhando seus eixos na direção de aplicação da tensão. Conforme HIGGINS⁽³²⁾, durante o processo de estiramento a frio, o grau de cristalização de um polímero parcialmente cristalino não apresenta aumento considerável. Contudo, tratando-se de polímeros amorfos ou de muito baixa cristalização, pode-se observar um aumento da mesma. Conforme aumentam o grau de cristalização e o grau de orientação em um polímero, crescem também sua resistência à tração e sua rigidez.

Vários fatores favorecem o aumento do grau de cristalização de um polímero no estado sólido, dentre os quais podemos citar:

- a) Baixa viscosidade do polímero no estado líquido: uma baixa viscosidade permite o necessário rearranjo molecular, facilitando a cristalização⁽⁶²⁾;
- b) Grandes forças intermoleculares: grupos ou ligações fortemente polares aumentam a intensidade das forças de Van der Waals entre as moléculas e, por conseqüência, o grau de cristalização⁽⁶²⁾;
- c) Regularidade das moléculas do polímero: polímeros grandes e irregulares, além de aumentarem a viscosidade^(26,62), dificilmente produzem um arranjo cristalino regular. Por outro lado, polímeros que apresentam arranjos regulares como os isotáticos e sindiotáticos (fig. 3.7) mostram uma elevada

proporção de cristalitos⁽⁶¹⁾. O polietileno é um exemplo de polímero apolar que apresenta alto grau de cristalização devido à regularidade de suas cadeias⁽⁶²⁾;

d) Taxa de resfriamento a partir do estado líquido: uma alta velocidade de resfriamento limita o tempo disponível para a formação de arranjos cristalinos regulares, resultando numa estrutura mais amorfa^(60,61,62);

e) Processos de fabricação: como mencionamos anteriormente, certos processos (como estiramento, injeção, etc) podem aumentar a cristalização por promoverem um alinhamento (orientação) das cadeias moleculares numa certa direção^(61,62).

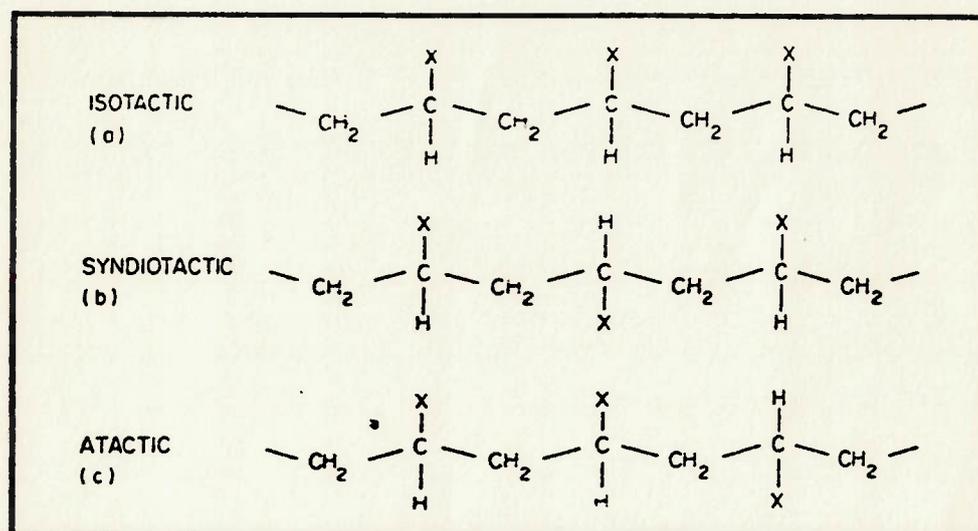


Fig. 3.7: Formas isotáticas, sindiotáticas e atáticas em compostos de vinila: as duas primeiras formas favorecem o aparecimento de regiões cristalinas⁽⁶¹⁾

3.3.4- Pontos de fusão de polímeros cristalinos

Sabemos que sólidos puros e completamente cristalinos (por exemplo, metais) fundem a uma temperatura definida denominada ponto de fusão. Por outro lado, verifica-se que para sólidos amorfos não existe uma temperatura determinada na qual se pode observar uma alteração significativa em vários

parâmetros físicos, tal como ocorre com os primeiros. Há, ao invés, uma alteração progressiva de suas propriedades, de forma que o material se torna cada vez menos rígido conforme o aquecemos; não havendo, portanto, uma transição brusca da forma sólida para a líquida. Isto se explica pela diminuição progressiva da viscosidade à medida que as forças de Van der Waals "caem" com o aumento da temperatura.

No caso de polímeros parcialmente cristalinos, contudo, pode-se observar uma "curva de fusão" semelhante à mostrada na fig. 3.8, onde a variação do volume específico é utilizada como uma indicação da variação da estrutura. (32,62)

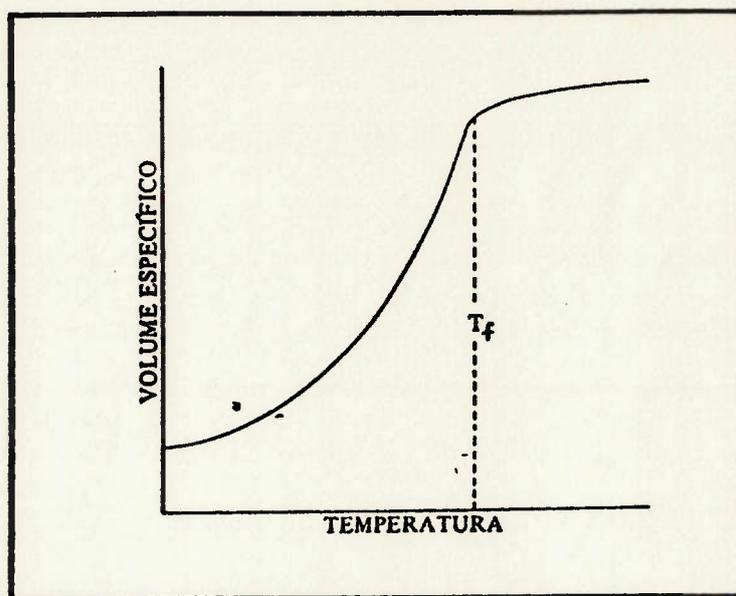


Fig. 3.8: Determinação do ponto de fusão de um polímero parcialmente cristalino. (32)

Conforme a temperatura aumenta, podemos notar uma mudança gradual no volume específico do material, correspondendo ao início do processo de fusão: os cristalitos menores e menos perfeitos vão progressivamente se transformando numa estrutura amorfa. A uma temperatura mais alta ocorre uma mudança brusca da taxa de variação do volume específico com a temperatura e podemos

considerar esse ponto como o ponto de fusão do material. HIGGINS⁽³²⁾ define o ponto de fusão (T_f) de um polímero parcialmente cristalino como sendo a temperatura na qual desaparecem todos os arranjos cristalinos e a estrutura torna-se completamente amorfa.

Observa-se que neste caso também não há uma descontinuidade nas propriedades físicas do material quando se atinge T_f , pois as moléculas do polímero encontram-se em parte nas regiões cristalinas e em parte nas regiões amorfas circundantes.

Na Tabela 3.1 fornecemos os pontos de fusão de alguns polímeros cristalinos. Nota-se que, no caso do polietileno, um aumento do grau de cristalização leva a um maior ponto de fusão do material. Isto pode ser explicado considerando que o ponto de fusão é, de certa forma, uma medida das forças de Van der Waals que atuam entre as moléculas, as quais são maiores nas regiões cristalinas (onde as cadeias estão alinhadas mais próximas umas das outras).

Polímero	Ponto de fusão, T_m ($^{\circ}\text{C}$)
Polietileno (50% cristalino)	120
Polietileno (80% cristalino)	135
Polipropileno	176
Borracha natural	28
Policloreto de vinila (PVC)	212
Policloreto de vinilideno	198
Politetrafluoretileno (Teflon)	327

Tabela 3.1: Pontos de fusão de alguns polímeros cristalinos⁽³²⁾

3.3.5- Temperatura de transição vítrea

Ao tomarmos novamente a curva do volume específico de um material polimérico (seja amorfo ou parcialmente cristalino) em função da temperatura, podemos observar que, conforme continuamos a diminuir a temperatura, há uma transição na qual ocorre uma mudança na declividade da curva (fig. 3.9). Essa transição é também observada com outros parâmetros físicos como o calor específico, a viscosidade, etc., e a temperatura na qual ocorre tal mudança de propriedades é conhecida como temperatura de transição vítrea (T_g).

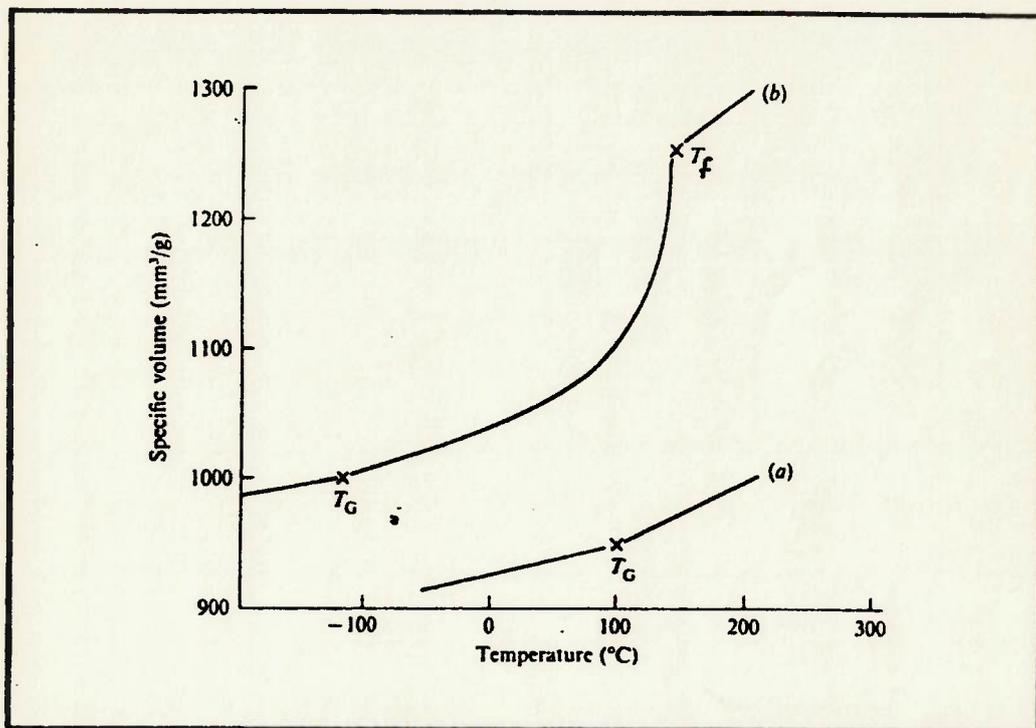


Fig. 3.9: Temperaturas de transição vítrea (T_g) para dois tipos de polímero: (a) poliestireno (amorfo) e (b) polietileno de alta densidade (cristalino) ⁽⁶²⁾.

Acima da temperatura de transição vítrea, os segmentos das cadeias poliméricas podem se mover livremente devido à sua energia térmica. Contudo, abaixo de T_g essa mesma energia é insuficiente para ativar o movimento dos segmentos, fazendo com que o material se torne duro e frágil ⁽⁶²⁾. Para alguns polímeros lineares (termoplásticos), a temperatura de transição vítrea está

acima da temperatura ambiente e, desse modo, esses materiais são normalmente duros, só tornando-se macios se aquecidos. O poliestireno e o PVC são exemplos de polímeros desse tipo (ver Tabela 3.2).⁽³²⁾

Deve-se notar que um polímero (linear) comporta-se efetivamente como um sólido mesmo a temperaturas acima de sua temperatura de transição vítrea. Segundo WYATT; DEW-HUGHES⁽⁶²⁾, a faixa de temperaturas "útil" de um polímero tende a ficar em torno de T_g , pois a temperaturas muito abaixo deste ponto o polímero se torna frágil, enquanto que a temperaturas muito altas a fluência do material é excessiva. Já os elastômeros devem ter sua T_g cerca de 100°C abaixo da temperatura de operação.

A temperatura de transição vítrea depende de muitos fatores e um dos mais importantes é a natureza dos grupos laterais das cadeias poliméricas: se forem rígidos e volumosos, dificultam as rotações das cadeias e aumentam T_g ; se flexíveis, ajudam o movimento das cadeias, diminuindo T_g . Outros fatores que influem no valor de T_g são⁽⁶²⁾:

- a) Presença de grupos polares : fará aumentar T_g , devido ao aumento das forças de atração intermoleculares;
- b) Peso molecular: polímeros com baixo peso molecular têm uma temperatura de transição mais baixa que polímeros similares de maior peso molecular (isso se deve ao maior número de extremidades das cadeias nos polímeros de baixo peso molecular, as quais produzem um maior volume livre);
- c) Ramificações nas cadeias: polímeros com cadeias mais ramificadas têm uma temperatura de transição mais baixa que polímeros lineares de mesmo peso molecular (a explicação é a mesma dada no item b);
- d) Adição de plastificantes: os plastificantes, que são substâncias de peso molecular relativamente baixo, provocam uma diminuição de T_g .

Polímero	Temperatura de transição vítrea, T _g (°C)
Polietileno	-120
Borracha	-73
Polipropileno	-27
Policloreto de vinilideno	-17
Polimetil metacrilato	0
Poliacetato de vinila	27
Nitrato de celulose	53
Polietileno tereftalato	69
Policloreto de vinila (PVC)	87
Poliestireno	100
Acetato de celulose	120
Politetrafluoretileno (Teflon)	126

Tabela 3.2: Temperaturas de transição vítrea de alguns polímeros⁽³²⁾

3.4- Os diferentes tipos de comportamento mecânico

3.4.1- Modos de deformação em polímeros

De uma forma geral, existem três modos distintos de deformação que podem ocorrer em polímeros⁽⁶²⁾. São eles: elasticidade pura, elasticidade entrópica e escoamento viscoso. Passemos, então, a estudar cada um deles:

O primeiro modo de deformação, correspondente à elasticidade pura, pode ser encontrado em vários outros materiais e ocorre quando aplicamos uma tensão externa ao material, provocando o deslocamento dos átomos das suas posições de mínima energia potencial, até que novas forças internas balanceiem as forças aplicadas externamente. Assim, quando dois átomos no interior de uma cadeia polimérica (mantidos em posições fixas por fortes ligações covalentes) são submetidos a uma tensão, ocorre instantaneamente um deslocamento relativo dos átomos entre si (aumento da energia interna). A remoção dessa tensão faz com que os átomos retornem imediatamente às suas posições originais. Esse tipo de deformação é, portanto, instantânea e elástica (fig. 3.10).

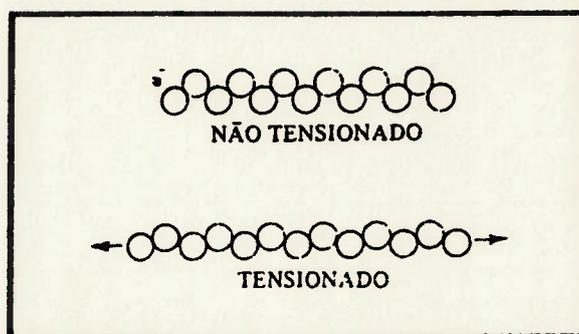


Fig. 3.10: Deformação elástica pura nas cadeias de moléculas⁽³²⁾

Em um polímero com grande número de ligações cruzadas (termorígidos, por exemplo) e em termoplásticos bem abaixo de suas temperaturas de transição vítrea (T_g), pode-se supor que este é o único modo de deformação possível, já que nesses casos os átomos estão praticamente fixos em suas posições. Para termoplásticos acima de suas temperaturas de transição, esse tipo de

deformação deve-se somente às ligações entre átomos individuais nas cadeias e, no caso de existirem cristalitos, também às forças intermoleculares⁽³²⁾.

O segundo modo de deformação, chamado de elasticidade entrópica ou alta elasticidade, refere-se à capacidade de segmentos das cadeias de polímeros sofrerem rotações em torno de suas ligações simples, produzindo vários arranjos torcidos, conhecidos por "conformações" (fig. 3.11), os quais mudam constantemente de formato devido às transições rotacionais que ocorrem de forma contínua nas cadeias.⁽⁶²⁾

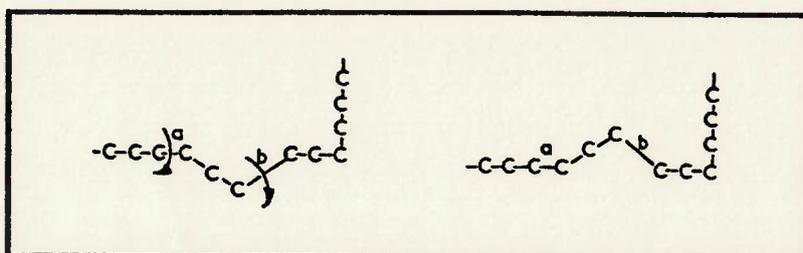


Fig. 3.11: Conformações numa cadeia de carbono⁽³²⁾

Segundo HIGGINS⁽³²⁾, a extensão média das cadeias em um polímero linear (descarregado) permanece constante, pois para cada molécula que tende a se "enrolar", haverá outra que tende a se "esticar". Contudo, com a aplicação de uma tensão de tração, a extensão das moléculas não será aleatória, dando-se na direção de aplicação da tensão (alinhamento molecular) e diminuindo a entropia das moléculas (fig. 3.12).



Fig. 3.12: Deformação por elasticidade entrópica (alinhamento molecular)⁽³²⁾

Quando a tensão é removida, continuam havendo mudanças na forma das moléculas; porém, são preponderantes aquelas mudanças que aumentam a entropia das cadeias moleculares (maior tendência ao curvamento) de modo a restabelecer sua extensão média original com o decorrer do tempo (o processo não é instantâneo). Conclui-se, então, que esse processo é elástico (portanto, reversível) e dependente do tempo, sendo então chamado viscoelástico.

As transições rotacionais podem não ocorrer imediatamente após a aplicação da tensão devido à interação entre átomos da mesma cadeia ou de cadeias adjacentes. Porém, com o decorrer do tempo, flutuações da energia térmica local possibilitarão as rotações das ligações e novas conformações de equilíbrio serão encontradas. Quando esse tempo é grande, comparado ao tempo de carregamento, pode-se observar a elasticidade entrópica em desenvolvimento, sendo o fenômeno denominado "elasticidade entrópica atrasada".

A temperaturas mais altas, a energia térmica é maior e, neste caso, a elasticidade entrópica desenvolve-se simultaneamente com o carregamento, sendo então chamada de "elasticidade entrópica instantânea". Verifica-se, assim, que esse modo de deformação é um fenômeno termicamente ativado.

O terceiro tipo de deformação também é bastante conhecido e deve-se ao lento processo de deslizamento das moléculas, em relação umas às outras, para novas posições, recebendo o nome de escoamento viscoso (*viscous flow*). Tal tipo de deformação ocorre nas regiões amorfas dos polímeros, onde as moléculas são mantidas em suas posições por fracas forças de Van der Waals.

Desta forma, as moléculas podem se mover sem dificuldade, desde que lhes seja fornecida uma energia térmica suficiente para aumentar suas vibrações e sobrepujar as forças de Van der Waals que atuam entre elas. Esse terceiro tipo de deformação é, portanto, fortemente dependente da temperatura, verificando-se ainda que não é um processo instantâneo, mas dependente do

tempo, pois está relacionado com a viscosidade do material. É também um processo irreversível, pois a deformação produzida não pode ser recuperada (fig. 3.13).⁽³²⁾

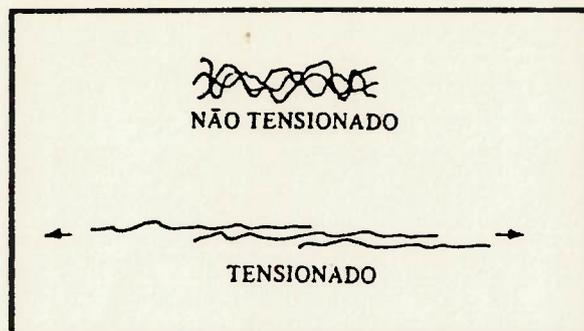


Fig. 3.13: Deformação por deslizamento nas cadeias de moléculas⁽³²⁾

Para concluir, observamos que o segundo modo de deformação é encontrado, até certo ponto, em todos materiais poliméricos, sendo, porém, particularmente acentuada numa classe especial de polímeros conhecidos como elastômeros⁽⁶²⁾. Ressaltamos, também, a importância do segundo e terceiro modos de deformação, aqui descritos, como uma explicação física para o fenômeno da fluência (e outros diretamente relacionados) em materiais poliméricos.

3.4.2- Estados físicos de materiais poliméricos

Ao avaliarmos as propriedades mecânicas de um polímero, verificamos que ele pode apresentar diversos estados físicos, os quais dependem da temperatura e do tempo de observação do ensaio, apresentando ainda discretas mudanças em certas temperaturas de transição⁽⁶¹⁾. Conforme explicam WYATT; DEW-HUGHES⁽⁶²⁾, a causa fundamental destas mudanças de estado é a energia térmica, que faz as cadeias moleculares vibrarem.

Os polímeros de estrutura fechada (termofixos) praticamente não se

alteram com mudanças de temperatura ou do tempo de observação, exibindo apenas uma variação gradual em suas propriedades até atingir a temperatura em que começa sua decomposição. Já para os termoplásticos, uma variação da temperatura provoca uma alteração da importância relativa dos três modos de deformação estudados, e é conveniente distinguir os diversos estados físicos que tais polímeros podem ter em função dessa variação. Pode-se dizer que existem quatro estados físicos possíveis para um polímero (apesar de não existir, na prática, uma clara divisão entre eles). Partindo das temperaturas mais baixas, teremos^(9,62):

- (1) estado vítreo (*glassy state*);
- (2) estado de couro ou elasticidade entrópica atrasada (*leathery state*);
- (3) estado de borracha ou elasticidade entrópica instantânea (*rubbery state*);
- (4) estado viscoso (*viscous state*).

As características mecânicas correspondentes a estes estados estão mostradas na figura 3.14 para um carregamento constante entre dois instantes de tempo (tensão nominal constante).

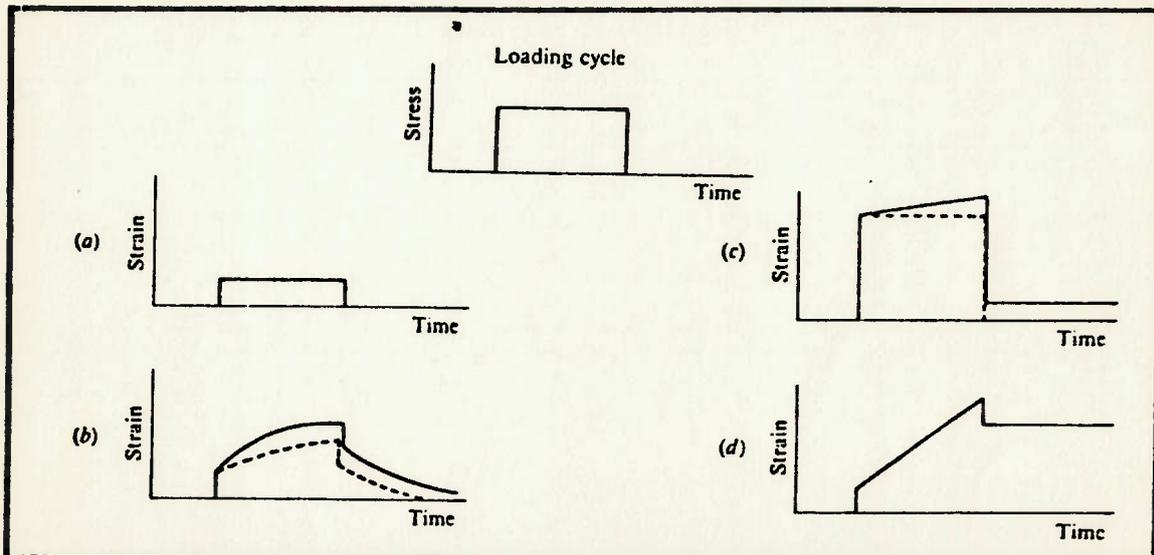


Fig. 3.14: Estados físicos de um polímero caracterizados pelo seu comportamento mecânico. (a) estado vítreo; (b) elasticidade entrópica atrasada; (c) elasticidade entrópica instantânea e (d) estado viscoso. — polímeros lineares, ---- polímeros de estrutura cruzada.⁽⁶²⁾

WARD⁽⁶¹⁾ mostra que tais estados físicos também podem ser observados ao variarmos o tempo de observação do ensaio, com a temperatura constante. Porém, para tornar o texto mais claro, vamos estudar por enquanto apenas as variações desses estados com as mudanças de temperatura.

Assim, à temperaturas bem abaixo de T_g , os polímeros se encontram no estado vítreo, apresentando de forma ideal apenas elasticidade pura, ou seja, após a aplicação da tensão, há uma deformação elástica imediata que permanece constante no tempo (predomina o primeiro modo de deformação). O módulo de elasticidade neste caso é de aproximadamente $10^9-10^{10} \text{ N/m}^2$ para todos os polímeros, que terão uma deformação máxima da ordem de 5% antes de sua fratura ou escoamento.

Na realidade, polímeros no estado vítreo não são idealmente elásticos, de forma que alguma deformação por fluência será encontrada com auxílio de medições mais precisas. Essas deformações são bem menores que aquelas encontradas nos estados físicos correspondentes a temperaturas mais altas, onde o fenômeno de fluência é facilmente observável, mas já são suficientes para serem consideradas em projetos de engenharia.⁽⁶²⁾

Para temperaturas um pouco acima da temperatura de transição vítrea, teremos uma rápida passagem do estado vítreo para o estado de couro. Neste caso, a agitação térmica das cadeias do polímero já é suficiente para possibilitar um "lento" alinhamento das moléculas (elasticidade entrópica atrasada) e ainda, no caso de polímeros com poucas ligações cruzadas (*non-cross-linked*), um certo escoamento viscoso.

Após a aplicação da tensão, a pequena deformação elástica instantânea é seguida por uma maior deformação elástica, dependente do tempo, (fluência primária) e por um pequeno escoamento viscoso (fluência secundária). Nota-se que, a partir desse estado, temos a participação dos três modos de

deformação na deformação total do material. A deformação causada pela fluência primária alcança um valor de equilíbrio num período de tempo que pode ir de alguns segundos até algumas horas, enquanto que aquela causada pela fluência secundária pode continuar "indefinidamente" a uma taxa constante.

Ao removermos a tensão aplicada, tanto a deformação instantânea inicial quanto a causada pela fluência primária são recuperadas: a primeira imediatamente, enquanto a última com o decorrer do tempo. Já a deformação causada pela fluência secundária é irreversível.

Se aumentarmos ainda mais a temperatura, o estado de couro começa a dar lugar ao estado de borracha. A energia de ativação para o movimento dos segmentos moleculares é agora pequena se comparada com a energia térmica e, assim, o primeiro e segundo modos de deformação desenvolvem-se ao mesmo tempo, possibilitando a ocorrência de grandes deformações no material sem deformação permanente. No caso de polímeros sem ligações cruzadas, verificaremos também a existência de escoamento viscoso a uma maior taxa. O módulo de elasticidade para os polímeros que se encontram neste estado varia na faixa de 10^6 a 10^7 N/m^2 de acordo com as fontes pesquisadas.^(61,62)

Finalmente, a temperaturas ainda maiores, a taxa de escoamento viscoso aumenta a ponto de "dominar" os outros modos de deformação: trata-se do estado viscoso. A temperatura em que se inicia tal estado aumenta com o número de cadeias ramificadas, com o grau de cristalização e com ligações cruzadas, entre os principais fatores, sendo que muitos polímeros com grande número de ligações cruzadas sofrem degradação térmica antes de chegarem a tal estado.

Verifica-se que as diferentes características referentes ao comportamento mecânico de polímeros (como fluência e recuperação, fratura frágil, estrição, etc.) são geralmente consideradas em separado, através de

estudos comparativos de diferentes polímeros. É comum, por exemplo, comparar entre si as fraturas frágeis do poliestireno, do polimetil metacrilato e outros polímeros que apresentam comportamento similar a temperatura ambiente. Da mesma forma, estudos comparativos têm sido feitos a respeito da fluência e recuperação do polietileno, polipropileno e outras poliolefinas. Entretanto, essas comparações freqüentemente ocultam um importante ponto que não deve passar despercebido: todos os fenômenos relacionados aos diferentes tipos de comportamento mecânico podem ser exibidos por um único tipo de polímero, bastando para isso que a temperatura seja alterada.⁽⁶¹⁾

Obviamente, é natural que as propriedades mecânicas de um dado polímero sejam estudadas separadamente nas diferentes faixas de temperatura, pois diferentes abordagens e formalismos matemáticos serão adotados para cada um dos diferentes aspectos do comportamento mecânico. Contudo, neste trabalho, estaremos interessados em trabalhar apenas naquela faixa de temperaturas (peculiar para cada tipo de polímero) em que as deformações do material sejam reduzidas; caso contrário, a utilização desse material como elemento estrutural seria questionável.

Em outras palavras, vamos nos preocupar em descrever o comportamento dos polímeros que se encontram entre o estado vítreo e o estado de couro. Em tais circunstâncias, como vimos, os polímeros já apresentam o fenômeno de fluência, mas as deformações totais são ainda pequenas se comparadas àquelas obtidas nos estados 3 (estado de borracha) e 4 (estado viscoso), justificando seu uso como elemento estrutural. Na verdade, como explicam WYATT; DEW-HUGHES⁽⁶²⁾, plásticos são mesmo normalmente utilizados em temperaturas tais que se encontrem nos estados 1 ou 2, enquanto que os elastômeros são usados no estado 3, sendo bastante utilizados na absorção de choques devido à grande dissipação de energia que apresentam.

3.5- Comportamento viscoelástico de polímeros

3.5.1- Fluência e função de flexibilidade

O conceito de fluência pode ser encontrado em várias referências que tratam sobre viscoelasticidade como, por exemplo, nas obras de WARD⁽⁶¹⁾, FINNIE⁽²¹⁾, GITTUS⁽²⁶⁾ e CALCOTE⁽¹³⁾, para citar algumas. De uma forma sucinta podemos definir fluência como sendo a deformação lenta (dependente do tempo) que se observa em certos materiais quando submetidos a um carregamento constante. Entre os materiais que apresentam esse comportamento podemos citar: metais a altas temperaturas, polímeros, concreto, madeira, gelo e até mesmo rochas (algumas teorias explicam a evolução do manto terrestre através de fenômenos de fluência nesses materiais).

Um dos ensaios mais simples para se descrever o comportamento viscoelástico de materiais é o ensaio de fluência, no qual um carregamento (constante durante o tempo de ensaio) é aplicado repentinamente num corpo de prova, medindo-se a deformação desse corpo em função do tempo (figura 3.15). Para eliminar a influência da temperatura sobre os valores medidos, os ensaios são geralmente feitos a temperatura constante⁽¹³⁾. Obtem-se, assim, uma curva de fluência como a mostrada esquematicamente na figura 3.16.

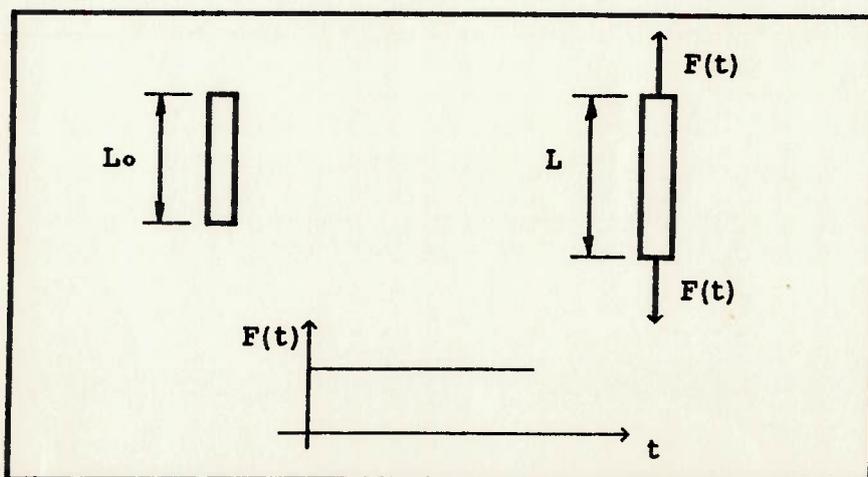


Fig. 3.15: Ensaio de fluência

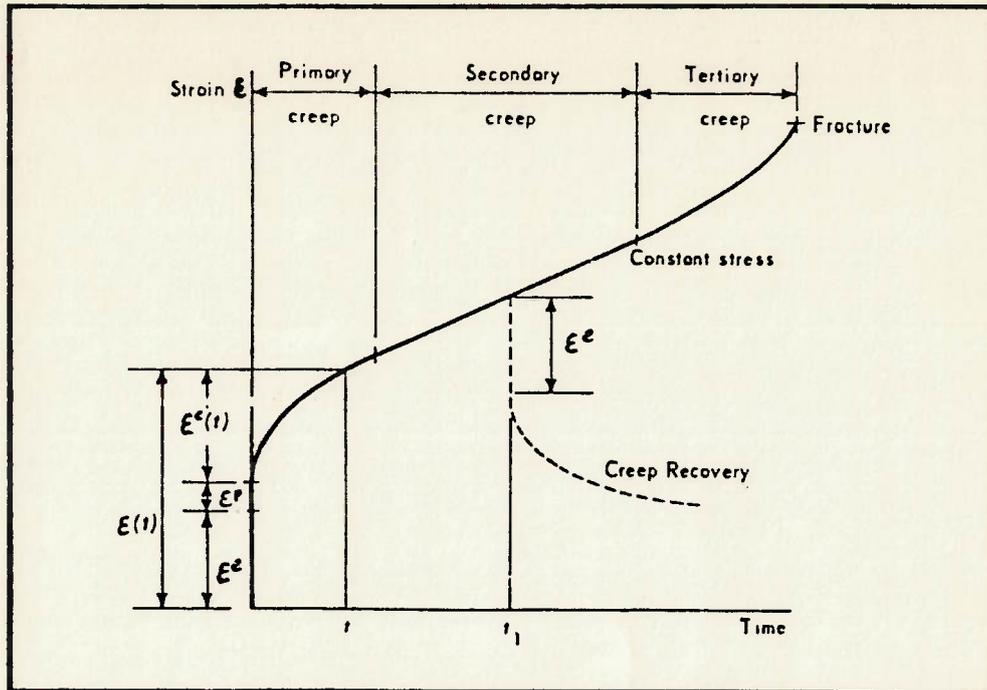


Fig. 3.16: Curva típica de fluência ⁽¹³⁾

Verifica-se que a deformação inicial (instantânea) consiste em uma componente elástica ϵ^e e, no caso de a tensão aplicada exceder a "tensão de escoamento" do material, uma componente plástica ϵ^p . Com o decorrer do tempo, pode-se observar um aumento na deformação total do corpo $\epsilon(t)$ devido à componente relacionada à fluência do material, $\epsilon^c(t)$. Desta forma podemos escrever:

$$\epsilon(t) = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^c(t) \quad (3.1)$$

Nota-se ainda que a curva de fluência pode ser dividida em três partes distintas, conforme mostra a fig. 3.16. Na primeira parte da curva, onde se observa uma taxa de deformação de fluência ($\dot{\epsilon}^c$) decrescente no tempo, temos a região de fluência primária, também chamada por alguns autores de fluência transiente. Essa componente da deformação deve-se à elasticidade entrópica dos polímeros, i.é., à capacidade de alinhamento das cadeias moleculares quando submetidas à uma tensão ⁽²⁶⁾.

A parte da curva onde a taxa de deformação tem um valor mínimo e constante é a chamada região de fluência secundária, ou ainda, fluência em regime estacionário (*steady-state creep*), a qual está associada à deformação viscosa do material, decorrente do deslizamento entre suas moléculas.

Finalmente, na região de fluência terciária, verifica-se um aumento na taxa de deformação com o decorrer do tempo (causado pela progressiva redução da área da seção transversal do corpo de prova), até provocar a fratura do material.

Retomando agora a equação (3.1) e desconsiderando a componente de deformação plástica ϵ^p , verificaremos que no caso mais geral a deformação total $\epsilon(t)$ será a soma de três parcelas (ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3), as quais estão associadas aos modos de deformação estudados no item 3.4.1. Temos:

ϵ_1 = deformação elástica instantânea (devido à elasticidade pura);

ϵ_2 = deformação elástica atrasada (devido à elasticidade entrópica);

ϵ_3 = deformação viscosa (devido ao deslizamento molecular).

Se o material exibir um comportamento viscoelástico linear, a magnitude das deformações ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 será exatamente proporcional à magnitude da tensão aplicada. Podemos então definir uma função flexibilidade de fluência $J(t)$, a qual será uma função apenas do tempo:

$$\frac{\epsilon(t)}{\sigma} = J(t) = J_1 + J_2 + J_3 \quad (3.2)$$

onde J_1 , J_2 e J_3 correspondem a ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , respectivamente.

Segundo WARD⁽⁶¹⁾, a parcela J_3 , que define o escoamento viscoso, pode ser desprezada nos seguintes casos:

- * Para polímeros rígidos a temperaturas normais (grandes viscosidades);
- * Para polímeros lineares amorfos a temperaturas abaixo de T_g ;
- * Polímeros que apresentam muitas ligações cruzadas;

* Polímeros altamente cristalinos.

Como mencionado no item 3.4.2, os diversos estados físicos dos polímeros também podem ser visualizados através da variação do tempo de observação do ensaio, mantendo-se a temperatura constante. Vamos então mostrar como ocorre essa alteração nos estados físicos dos polímeros através da fig. 3.17 que traz a variação da flexibilidade de fluência $J(t)$ com o tempo, a uma temperatura constante, para um polímero idealizado que possui um único tempo de transição (no caso, um único tempo de atraso, como explicado adiante).

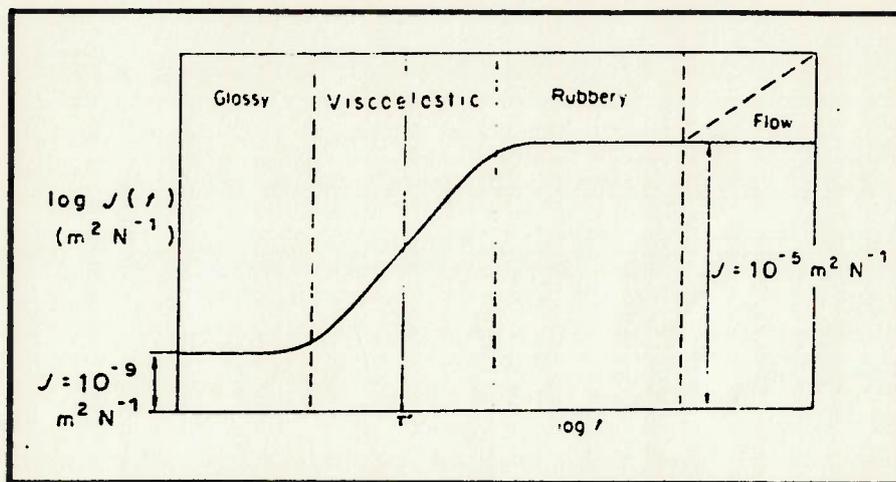


Fig. 3.17: Flexibilidade de fluência $J(t)$ em função do tempo t .⁽⁶¹⁾

O diagrama nos mostra que para tempos de observação bem pequenos a flexibilidade correspondente é de $10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$, ou seja, aquela observada em polímeros no estado vítreo, e é independente do tempo. Por outro lado, para tempos de observação muito longos, a flexibilidade é de $10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$ (a de um elastômero), sendo novamente independente do tempo. Finalmente, para tempos de observação intermediários, a flexibilidade situa-se entre esses valores e é dependente do tempo, caracterizando o comportamento viscoelástico do material.

Essas considerações sugerem que o comportamento observado irá depender da escala do tempo de observação com relação a algum parâmetro

temporal básico do polímero. No caso da fluência, esse parâmetro é o chamado tempo de atraso τ' (*retardation time*), e seu valor para um dado polímero está relacionado à sua estrutura molecular.⁽⁶¹⁾

A diferença entre um elastômero e um plástico "vítreo" pode, então, ser vista como algo artificial, pois depende apenas do valor de τ' à temperatura ambiente para cada polímero. Assim, para um elastômero, τ' assume um valor muito pequeno à temperatura ambiente, se comparado com os tempos "normais" de experimentos que são da ordem de 1s, digamos. Para um polímero no estado vítreo à temperatura ambiente, ocorre justamente o oposto: τ' é muito maior que os tempos "normais" de observação.

Isso nos leva a entender melhor a influência da temperatura e do tempo sobre as propriedades dos polímeros: conforme a temperatura aumenta, cresce também a frequência dos rearranjos moleculares, provocando uma redução no valor de τ' . O inverso ocorre quando diminuimos a temperatura. Com efeito, a temperaturas muito baixas, um elastômero terá um comportamento mecânico similar ao de um sólido vítreo (aumenta τ') e, da mesma forma, um plástico no estado vítreo irá amolecer a altas temperaturas, comportando-se como um elastômero (diminui τ').

Queremos, por fim, ressaltar que existe alguma controvérsia a respeito do termo a ser utilizado para definir o fenômeno da fluência. Os ingleses e alemães utilizam, respectivamente, os termos "creep" e "Kriechen" para designar a deformação total ocorrida ao longo do tempo (sem especificar se está incluída, ou não, a parcela de deformação elástica instantânea) e os termos "flow" e "Fließen" para a deformação irreversível. Os franceses utilizam "fluage" e "plasticité différée", respectivamente, e em português e espanhol o termo "fluência" é geral, sendo algumas vezes dividida em recuperável e não-recuperável. Lembramos ainda que os termos "fluência" e

"deformação lenta" se confundem na literatura nacional e portuguesa a respeito do assunto, sendo usados indistintamente neste trabalho para designar o fenômeno da deformação, permanente ou não, sofrida por certos materiais quando submetidos à ação de cargas de longa duração.⁽¹⁴⁾

3.5.2- Recuperação

Reportando-nos novamente à figura 3.16 (curva típica de fluência), notamos que, se a carga for removida num instante genérico $t = t_1$, o material irá recuperar parte da deformação sofrida até o momento, caracterizando o fenômeno da recuperação (*creep recovery*).

Através da curva de recuperação (ver linha tracejada na fig. 3.16) vemos que a parcela elástica da deformação, $\epsilon^e = \epsilon_1$, será recuperada instantaneamente, enquanto que apenas uma parte da deformação de fluência ϵ^c será recuperada com o decorrer do tempo. Essa última parcela corresponde à deformação ϵ_2 , a qual está associada à elasticidade entrópica dos materiais poliméricos.

Nota-se também que, dependendo da magnitude da tensão aplicada e do seu tempo de aplicação t_1 , uma certa parte da deformação não será recuperada (aquela correspondente ao escoamento viscoso, ϵ_3) e o material apresentará uma deformação permanente. Contudo, se o polímero não apresentar esse escoamento viscoso (ver 3.5.1), o comportamento à recuperação será então similar ao comportamento do material à fluência (tratando-se de material viscoelástico linear).

3.5.3- Relaxação de tensão e módulo de relaxação

Um outro fenômeno encontrado em materiais poliméricos é a relaxação de tensão, o qual pode ser observado submetendo-se um corpo de prova à uma

deformação constante ϵ (instantânea) e medindo-se a tensão $\sigma(t)$ necessária para manter essa deformação em função do tempo. Obtem-se, assim, uma curva como a mostrada na fig. 3.18.

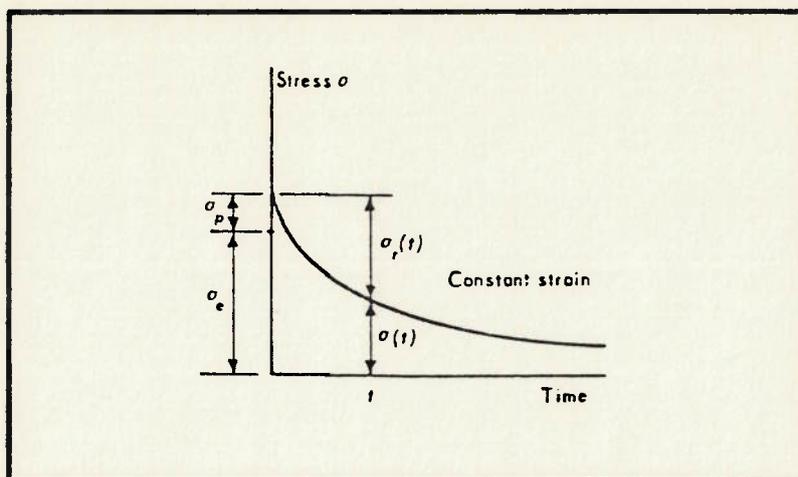


Fig. 3.18: Curva típica de relaxação de tensão⁽¹³⁾

De forma análoga ao que foi feito no estudo da fluência, podemos também nesse caso definir uma função denominada módulo de relaxação de tensão $G(t)$, dada por:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon} \quad (3.3)$$

No caso da relaxação de tensão, verifica-se que a presença ou ausência de deformação viscosa irá afetar o valor limite da tensão atuante no material. Quando ocorre esse tipo de deformação, a tensão pode chegar a zero decorrido um período de tempo suficientemente longo, mas quando tal modo de deformação não é possível no material, a tensão chegará a um valor finito, resultando num módulo de equilíbrio ou relaxado G_r num tempo "infinito".

Se fizermos um gráfico esquemático do módulo de relaxação de tensão em função do tempo (fig. 3.19), a temperatura constante, para o mesmo polímero idealizado mencionado em 3.5.1, iremos observar as mesmas regiões de possíveis

comportamentos do material já vistas na fig. 3.17. Neste caso, podemos também definir um parâmetro temporal τ (tempo de relaxação) que irá caracterizar a escala do tempo para o comportamento viscoelástico do material.

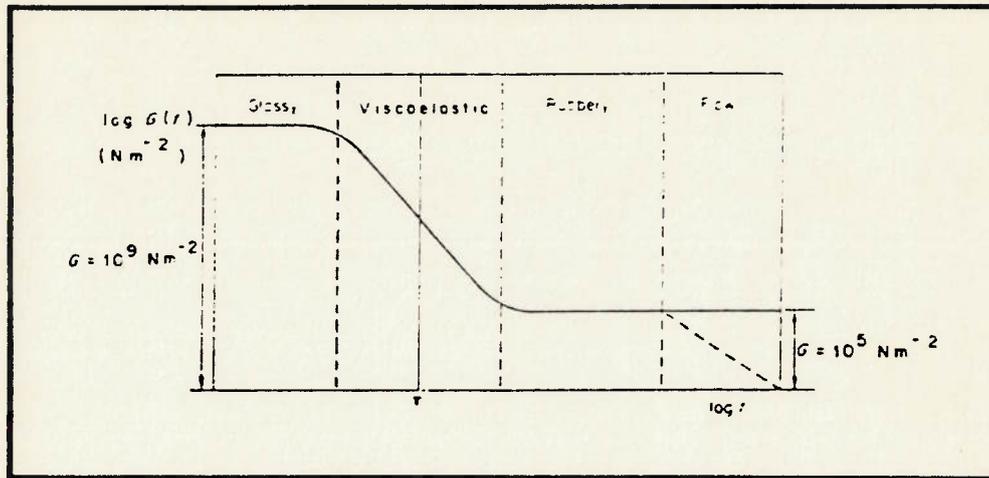


Fig. 3.19: Módulo de relaxação de tensão $G(t)$ em função do tempo de observação t .⁽⁶¹⁾

Deve-se observar que as mesmas considerações feitas para o estudo da fluência (a respeito dos efeitos da temperatura e da escala de tempo) também são válidas para a relaxação de tensão, isto é, temperaturas mais altas provocarão uma diminuição no valor de τ , enquanto temperaturas mais baixas farão τ aumentar.

Verifica-se que, no caso particular de um polímero idealizado com um único tempo de transição, os parâmetros temporais τ' e τ terão o mesmo valor (ver itens 4.2.2 e 4.2.3). Entretanto, tais parâmetros estão relacionados a diferentes fenômenos viscoelásticos do material (fluência e relaxação de tensões, respectivamente), não podendo, portanto, ser confundidos. Na verdade, os polímeros reais exibem espectros de tempos de atraso e de tempos de relaxação os quais podem ser calculados através dos módulos de relaxação $G(t)$ e de flexibilidade de fluência $J(t)$, respectivamente, utilizando transformadas de Fourier ou de Laplace.^(2B, 61)

3.5.4- Curvas isócronas e isométricas

O método mais comum de estabelecer a interdependência entre tensão, deformação e tempo em materiais viscoelásticos é através das curvas de fluência. Contudo, há outros métodos que também podem ser empregados para tal finalidade, como as curvas isométricas e as curvas isócronas.⁽¹⁶⁾

As curvas isométricas são curvas de deformação constante, obtidas a partir das curvas de fluência do material tomando-se um valor fixo de deformação ϵ' e transportando-se os pares (σ, t) interceptados pela reta $\epsilon = \epsilon'$ para um novo gráfico (fig.3.20a). As curvas isométricas podem, ainda, fornecer a variação do módulo viscoelástico do material em função do tempo para um valor fixo de deformação ϵ' . Para isto, basta dividirmos os valores das tensões da curva isométrica por ϵ' (fig. 3.20b). Verifica-se, também, que os dados fornecidos pelas curvas isométricas podem ser usados como uma boa aproximação das curvas de relaxação de tensões, quando não se dispõe destas últimas.

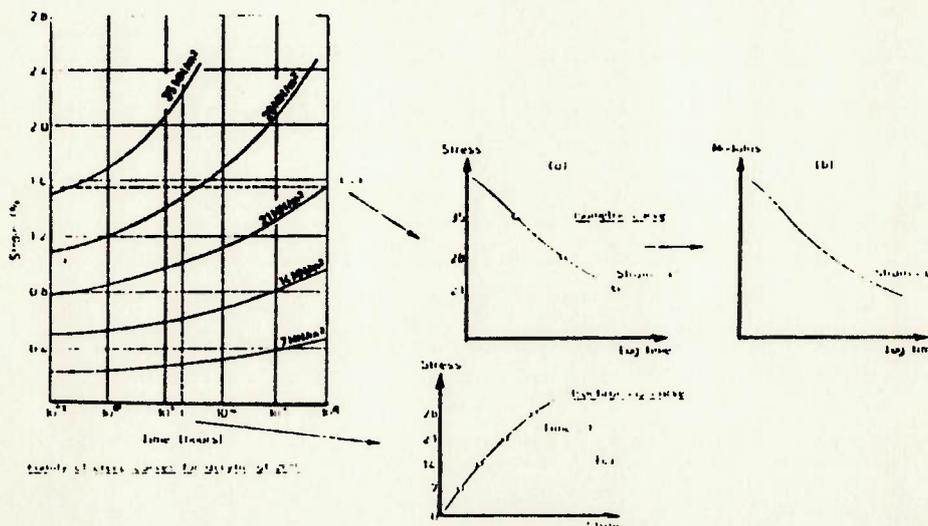


Fig. 3.20: Construção de curvas isométricas e isócronas⁽¹⁶⁾

As curvas isócronas também são obtidas através das curvas de fluência do material, mas tomando-se um valor de tempo constante $t = t'$ e transportando-se os pares (σ, ϵ) assim interceptados para um gráfico $\sigma \times \epsilon$ como mostra a fig. 3.20c. Observa-se que, se o material for viscoelástico linear, suas curvas isócronas resultarão em retas, como se pode notar imediatamente da relação $\epsilon(t) = J(t) \cdot \sigma$; caso contrário, isto não será verificado.

Finalmente, observamos que a citada interdependência entre tensão, deformação e tempo também pode ser apresentada na forma de uma superfície tridimensional (fig. 3.21), a qual reúne tanto as curvas isócronas e de fluência (esquematzadas na figura) quanto as curvas isométricas do material. Uma dependência análoga entre as grandezas σ , ϵ e t também pode ser obtida através de ensaios de relaxação de tensões, conforme assinala TURNER⁽⁵⁹⁾.

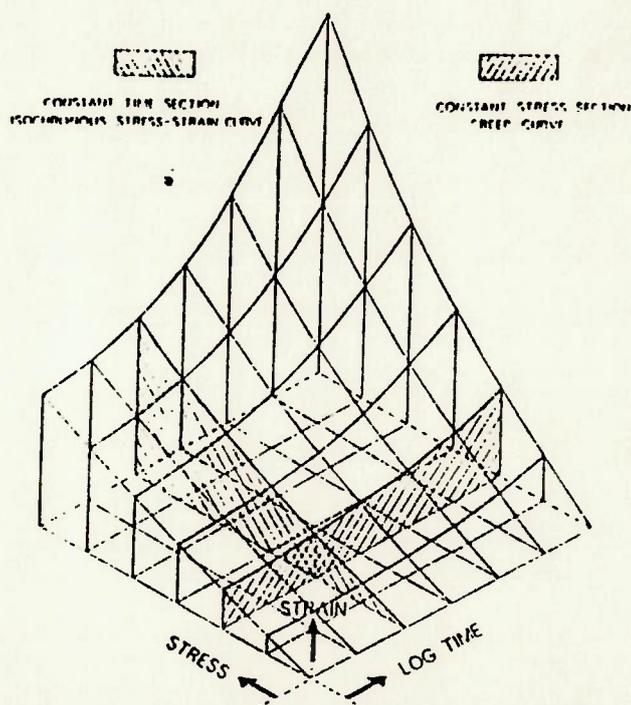


Fig. 3.21: Relação entre tensão, deformação e tempo, a temperatura constante, para um material viscoelástico.

3.6- Efeitos do ambiente sobre os polimeros

3.6.1- Ambientes corrosivos

Segundo GENTIL⁽²⁵⁾, os polimeros são muitas vezes indicados na utilização de equipamentos em meios altamente corrosivos, usados sob a forma de revestimentos ou como o próprio material de construção do equipamento. Entre os polimeros mais usados para essa finalidade (proteção), GENTIL cita o teflon (politetrafluoretileno), o policlorotrifluoretileno, o difluoreto de polivinilideno, o polietileno, o polipropileno e o policloreto de vinila (PVC), os quais possuem diversas aplicações (ver apêndice A).

Além da boa resistência a solos e agentes corrosivos, os polimeros apresentam outras vantagens em relação aos materiais metálicos como: menor peso específico, fácil transporte e instalação, flexibilidade, dispensam pintura e são atóxicos. Apresentam, contudo, algumas limitações que não permitem a sua utilização em certos casos. A pouca resistência dos polimeros aos solventes é uma dessas limitações: o PVC, por exemplo, que é muito usado no revestimento de tanques de decapagem ácida (grande resistência ao ácido clorídrico) e no transporte de água potável (sob a forma de tubos), é atacado, no entanto, por solventes orgânicos aromáticos, cetonas e solventes clorados.

O teflon apresenta, até temperaturas em torno de 300°C, grande inércia química aos mais variados produtos químicos altamente corrosivos, sendo resistente a água régia aquecida, ácido fluorídrico, ácido sulfúrico e nítrico fumantes, ácido clorossulfônico, soluções cáusticas como potassa e soda cáusticas, cloro úmido, peróxidos, solventes halogenados, cetonas, ésteres, álcoois, etc. Não resiste, contudo, a metais alcalinos fundidos, flúor e agentes fluoretantes como trifluoreto de cloro.

O poliestireno (PS), por sua vez, é atacado por vários tipos de meios (óleos sendo particularmente perniciosos). Verifica-se por exemplo que,

em ensaios de corpos de prova lisos com uma pequena quantidade de óleo vegetal aplicado à superfície, podem se desenvolver trincas de 3 a 4 cm de comprimento sob tensões de apenas $4,0 \text{ N/cm}^2$. Além desse, GITTUS⁽²⁶⁾ cita outros exemplos de corrosão sob tensão em polímeros, notadamente no polietileno, onde o estudo de curvas do tempo de falha em função da tensão aplicada, para diversos tipos de ambiente (incluindo ambientes inertes), parece indicar que a fratura em tais condições não é controlada pelo nível de tensão, mas pelo de deformação.

Da mesma forma, os nylons podem fraturar sob tensão em presença de fenóis ou ácido fórmico como citado por KAMBOUR apud GENTIL⁽²⁵⁾ em sua obra "Environmental stress cracking of thermoplastics".

3.6.2- Exposição à luz

De acordo com GITTUS⁽²⁶⁾, a componente ultravioleta (UV) da luz solar é a mais prejudicial aos polímeros. Na verdade, apesar de o espectro solar atingir comprimentos de onda de até 2000 \AA , os comprimentos menores que 3000 \AA são quase que completamente absorvidos pela atmosfera terrestre, de modo que a faixa que se estende de 3000 a 4000 \AA é que é a principal responsável pela deterioração desses materiais.

De forma geral, todos os termoplásticos comuns são formados por cadeias de átomos de carbono, sendo que a resistência das ligações químicas presentes nestes polímeros é comparável à energia das radiações ultravioletas. Com efeito, tem-se verificado que a deterioração aumenta consideravelmente conforme a energia do fóton se aproxima à energia da ligação carbono-carbono. Observa-se ainda que a deterioração é mais pronunciada na superfície do material que no interior, favorecendo o aparecimento de trincas nos materiais mais sensíveis.

Devido ao alto grau de polimerização encontrado na maioria dos

polímeros comerciais, verifica-se que apenas uma pequena fração das ligações químicas precisa ser rompida para causar uma apreciável queda no peso molecular médio das cadeias, o que afeta diretamente as propriedades mecânicas do material como explicamos no item 3.3.2.

Para concluir, lembramos que a deterioração de polímeros devido à exposição à luz ultravioleta pode ser atenuada com a adição de pigmentos ou estabilizantes durante o processo de polimerização.⁽¹⁶⁾

3.6.3- O efeito da temperatura

Além do que já foi discutido sobre a influência da temperatura nos materiais poliméricos, vamos agora tratar de um importante ponto que ainda não foi adequadamente abordado: o princípio de superposição tempo-temperatura.

Lembremos inicialmente que as funções viscoelásticas que descrevem o comportamento dos polímeros são muito mais "sensíveis" à temperatura que as correspondentes constantes elásticas da maioria dos metais. Desta forma, o efeito da temperatura é freqüentemente central na determinação do campo de deformações de uma estrutura feita com polímeros, devendo portanto ser sempre considerado. Para isso, realizam-se ensaios a várias temperaturas (na faixa de interesse para a estrutura), sendo os dados representados na forma de curvas principais como, por exemplo, através de uma curva de fluência principal (*master creep curve*), obtida pela translação das várias curvas de fluência (referentes às diferentes temperaturas) com o propósito de se construir uma única curva à uma temperatura de referência, T_0 .

Esse procedimento forma a base de um princípio básico no estudo da viscoelasticidade chamado princípio da superposição (ou da equivalência, ou da correspondência) tempo-temperatura, ou ainda, método das variáveis reduzidas, sendo representado matematicamente por:

$$J(T,t) = J(T_0, t/a_t) \quad (3.4)$$

O parâmetro a_t é chamado fator de translação da temperatura e é determinado empiricamente pelo tempo de translação necessário para o alinhamento das curvas de fluência. As figuras 3.22 e 3.23 ilustram esse método para o caso de curvas de flexibilidade de fluência levantadas para um adesivo estrutural (o FM-73).

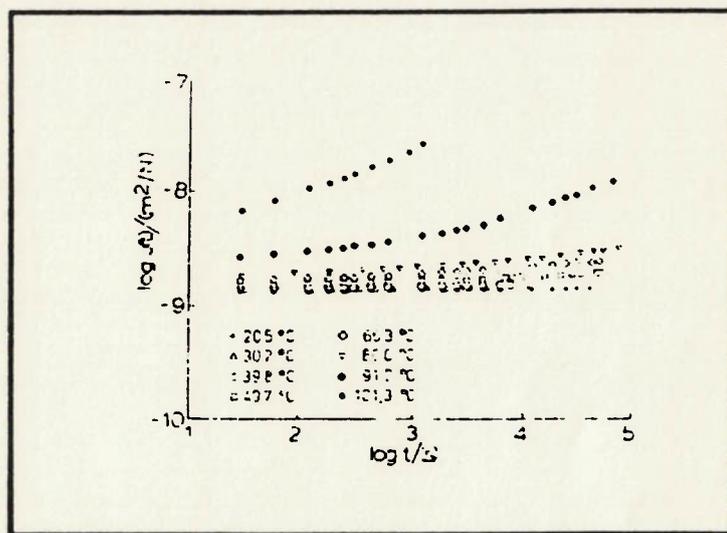


Fig. 3.22: Curvas de flexibilidade de fluência para um adesivo estrutural (FM-73) à várias temperaturas. ⁽⁹⁾

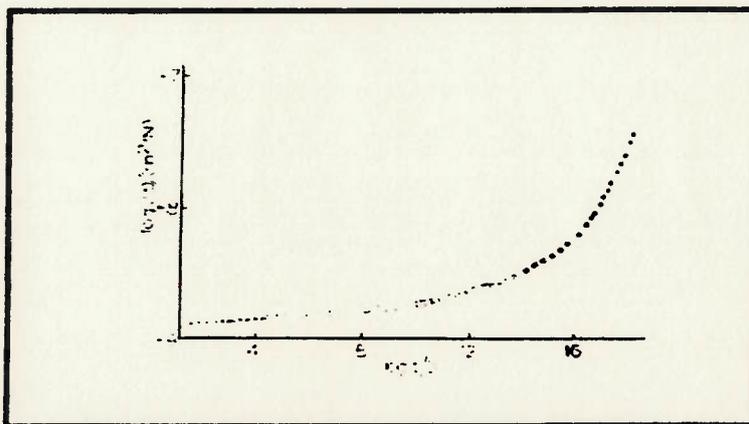


Fig. 3.23: Curva de flexibilidade de fluência principal do FM-73 para uma temperatura de referência de 20,5 °C. ⁽⁹⁾

A fim de obter a curva de fluência principal da figura 3.23, as curvas mostradas na figura 3.22 foram transladadas horizontalmente, com o fator de translação correspondente mostrado na figura 3.24. Neste exemplo específico, tanto o efeito da translação vertical das curvas para a temperatura quanto o da mudança de densidade do material foram insignificantes, sendo que nenhum deles foi incorporado na curva de fluência da fig. 3.23.

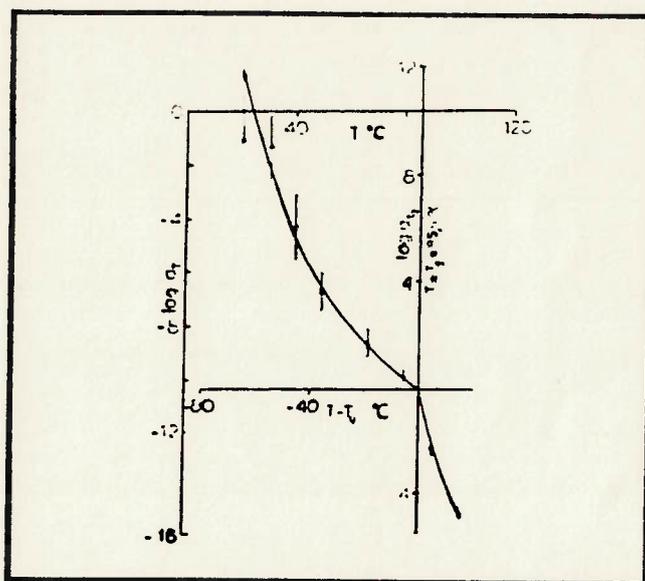


Fig. 3.24: Fator de translação para o FM-73, associado à curva de fluência principal.⁽⁹⁾

Um importante aspecto prático do princípio de superposição tempo-temperatura é que ele proporciona uma base para ensaios acelerados com materiais poliméricos. Assim, se um certo processo é muito lento (na temperatura de interesse), pode-se aumentar a temperatura e observar o processo se desenvolver sem esperar muito tempo. A uma maior temperatura, as moléculas do material ocuparão um maior volume, aumentando, conseqüentemente, o volume livre e permitindo às mesmas uma maior mobilidade. Analogamente, se o processo que estamos registrando ocorre muito rapidamente, podemos diminuir a temperatura de forma a diminuir o volume livre das moléculas: as mudanças nas

conformações do polímero e as mudanças resultantes em suas propriedades serão mais lentas, permitindo seu registro numa escala de tempo conveniente.

Observamos finalmente que a validade destas extrapolações deve sempre ser cuidadosamente verificada. Com respeito aos requisitos para a aplicação desse princípio, FERRY⁽¹⁹⁾ observa que: (i) o processo de translação deve resultar numa curva "suave", (ii) a dependência de a_t com a temperatura deve ter uma forma consistente com a experiência e (iii) os mesmos valores de a_t devem ser utilizados em todas as funções viscoelásticas. Os materiais que satisfazem esses critérios do princípio da superposição são denominados termoreologicamente simples.⁽⁹⁾

3.6.4- O efeito da umidade

Outros pontos a serem considerados na avaliação das características de materiais poliméricos são: a quantidade de umidade capaz de ser absorvida pelo material, as tensões e deformações induzidas por tal absorção e as mudanças resultantes nas propriedades mecânicas. Acredita-se, por exemplo, que a umidade absorvida acelera a fluência no material de uma maneira similar a um aumento da temperatura. Além disso, verificou-se que uma curva de fluência principal pode ser construída através dos resultados de diversos ensaios feitos com diferentes níveis de umidade absorvida⁽⁹⁾, à semelhança do que foi visto com o princípio de superposição tempo-temperatura.

Ainda no tocante às características viscoelásticas dos polímeros, GITTUS⁽²⁶⁾ observa que o nylon possui uma melhor recuperação em ambientes com altos valores de umidade relativa (não especifica o tipo de nylon), ao passo que o *terylene* (polietileno tereftalato - PET) praticamente não é afetado por mudanças na umidade relativa pelo fato de não absorver uma quantidade significativa de água.

3.6.5- O efeito da pressão hidrostática

Ao contrário do que se observa nos metais, a deformação por fluência e a deformação elasto-plástica de polímeros é influenciada significativamente pela pressão hidrostática⁽⁴⁷⁾. Vários autores, entre eles GITTUS⁽²⁶⁾ e FERRY⁽¹⁹⁾, atribuem esta influência à variação do volume livre ocupado pelas moléculas quando submetemos o material à uma pressão hidrostática. Em termos mais específicos, esse comportamento pode ser entendido qualitativamente em termos da dependência dos movimentos moleculares com relação ao volume livre fracional, uma vez que esse diminui com o aumento da pressão e vice-versa.⁽¹⁹⁾

Diferentemente da mudança do volume com a temperatura, a mudança do volume com a pressão é marcadamente um fenômeno não-linear, como ilustra a fig. 3.25 para o caso do poliestireno. À uma pressão da ordem de 1500 atm, a compressibilidade ($\beta = -(1/v)(\partial v/\partial P)_T$) do poliestireno, à uma temperatura $T = T_g + 100^\circ\text{C}$, cai para valores característicos do estado vítreo ($T < T_g = 100^\circ\text{C}$) a baixas pressões.⁽¹⁹⁾

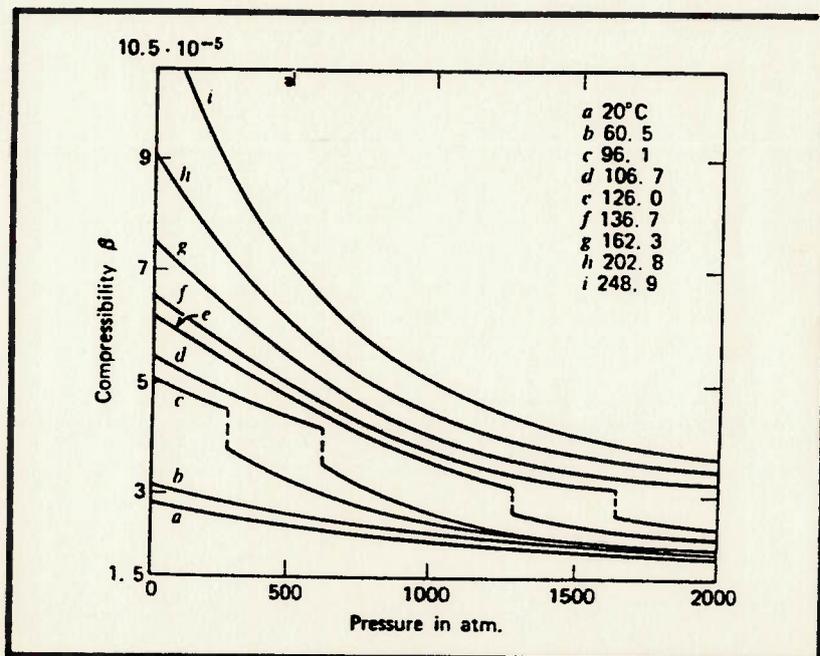


Fig. 3.25: Compressibilidade (atm^{-1}) x Pressão (atm) para o poliestireno ($T_g=100^\circ\text{C}$).⁽¹⁹⁾

NISHITANI; KOTANI⁽⁴⁷⁾ e NISHITANI⁽⁴⁸⁾ realizaram vários ensaios (ver fig. 3.26) para verificar os efeitos da pressão hidrostática sobre a fluência transiente de materiais poliméricos (particularmente o nitrato e o acetato de celulose). Os resultados experimentais obtidos comprovaram a influência da pressão na deformação por fluência desses materiais, tanto em condições de carregamento quanto de descarregamento, como mostram as figs. 3.27 e 3.28.

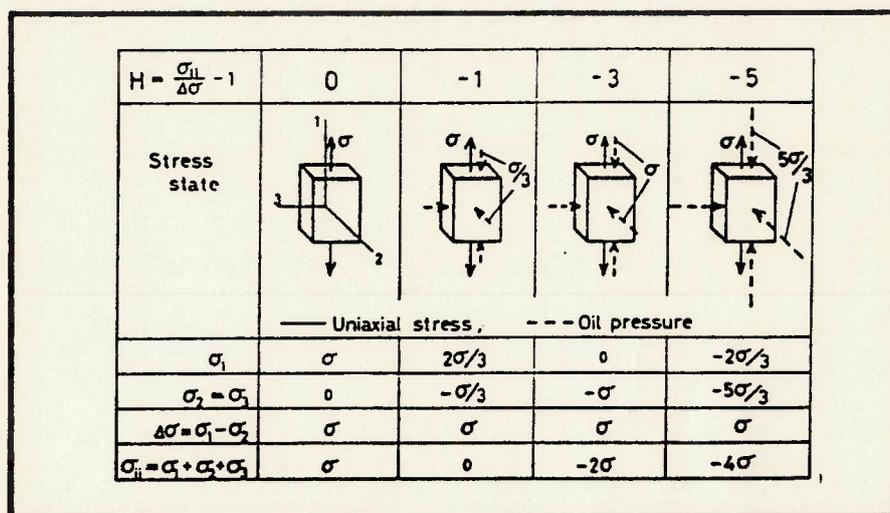


Fig. 3.26: Estados de tensão nas várias condições de teste.^(47, 48)

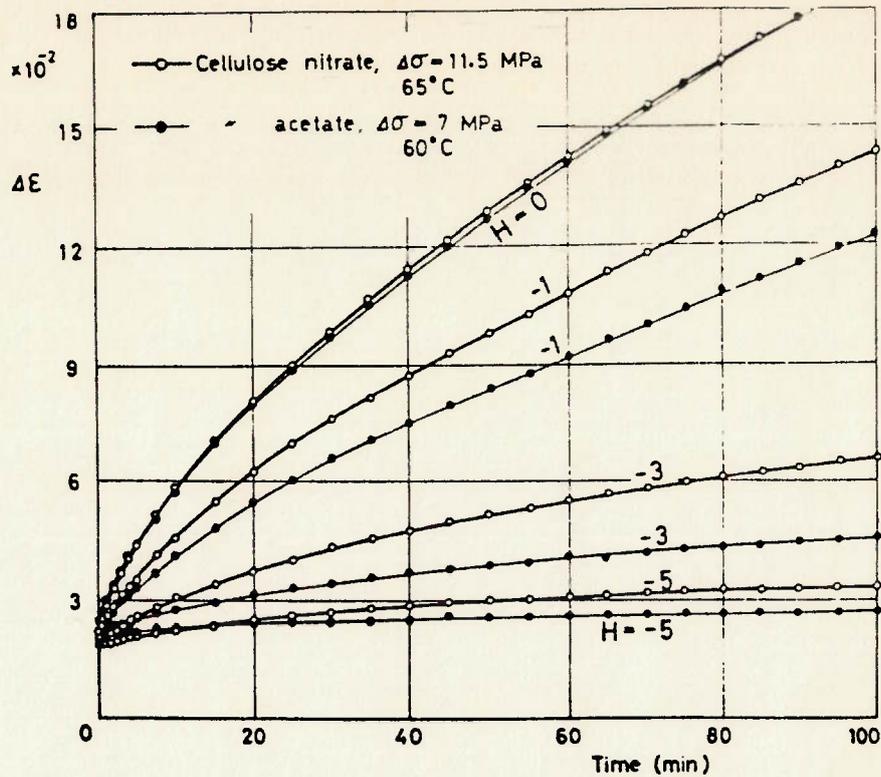


Fig. 3.27: Resultados experimentais obtidos para as várias condições de carregamento indicadas na fig. 3.26. (47)

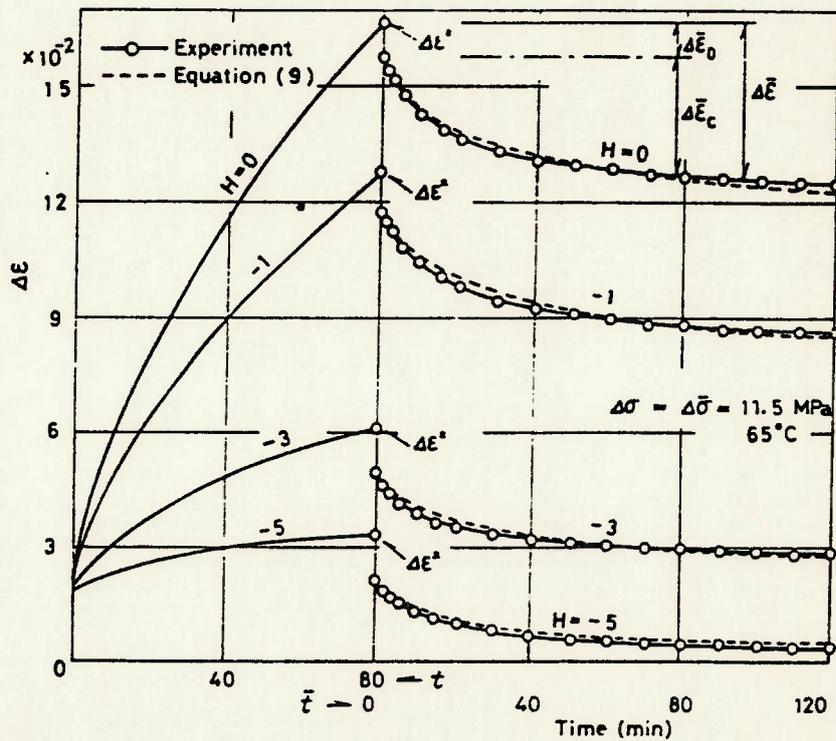


Fig. 3.28: Resultados experimentais obtidos para o descarregamento (após $\Delta t = 80$ min) dos corpos de prova (nitrate de celulose). (48)

4 - MODELOS REPRESENTATIVOS DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

4.1- Introdução

Qualquer relação entre quantidades envolvendo o estado de tensão (ou outra grandeza estática) e de deformação (ou outra grandeza cinemática) num corpo, incluindo ou não suas derivadas no tempo, é denominada uma equação constitutiva, sendo uma característica do material de que é feito o corpo.

Um dos principais problemas na análise ou projeto de estruturas e componentes de máquinas feitos a partir de materiais poliméricos é a escolha de um modelo que possa representar o comportamento mecânico desses materiais de forma adequada. Essa tarefa se torna ainda mais difícil devido à ausência de dados experimentais que possam dar informações eficientes e completas sobre o comportamento dependente do tempo da grande variedade de materiais poliméricos existente hoje em dia - e isto inclui tanto os já consagrados quanto aqueles que são continuamente criados em laboratórios para atender novas exigências.

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns desses modelos matemáticos utilizados na descrição do comportamento mecânico de materiais viscoelásticos, como os conhecidos modelos mecânicos de Kelvin-Voigt e de Maxwell. Limitando-nos à uma abordagem fenomenológica tradicional, iremos apresentar somente modelos que descrevam o comportamento macroscópico e as propriedades do material em estudo, sem nos atermos a explicações mais profundas sobre a específica natureza microscópica do fenômeno a ser modelado, no caso, a fluência.

4.2- Forma diferencial das equações constitutivas: modelos unidimensionais

Grande parte dos estudos experimentais sobre comportamento viscoelástico se restringe à análise de um único modo de deformação, correspondendo geralmente a medições do módulo de Young ou do módulo de cisalhamento com o decorrer do tempo. Desta forma, apresentaremos inicialmente as equações constitutivas de materiais viscoelásticos para o caso unidimensional, lembrando que uma maior complexidade será necessária para descrever o comportamento viscoelástico geral. Para o caso mais simples de um polímero isotrópico, por exemplo, devem ser examinados pelo menos dois modos de deformação a fim de determinarmos duas quantidades independentes (E e ν , ou G e K) e, assim, especificar por completo o comportamento do material.

4.2.1- Os modelos básicos

Existem basicamente dois tipos particulares de modelos que simulam o comportamento mecânico de materiais de uma forma bastante simples: o sólido elástico e o líquido viscoso. O primeiro tem um formato definido e se deforma, sob a ação de forças externas, até atingir uma nova configuração de equilíbrio. Após a remoção dessas forças externas, o corpo retoma seu formato original. O líquido viscoso, por sua vez, não tem formato definido e flui irreversivelmente sob a ação de forças externas.

No caso unidimensional, o comportamento mecânico de um sólido elástico linear pode ser representado por uma mola cuja rigidez exprime a relação entre a tensão atuante e a deformação correspondente (fig. 4.1).

Metais a baixas temperaturas e submetidos a pequenas deformações podem ser modelados como materiais elásticos lineares. No caso, a relação dada na fig. 4.1 ($\sigma = E \cdot \epsilon$) representa a lei de Hooke para o caso unidimensional.

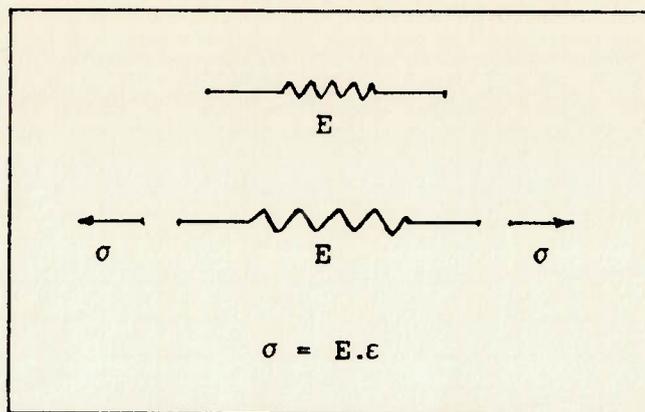


Fig. 4.1: Modelo para um sólido elástico linear

Já o comportamento mecânico de um fluido viscoso newtoniano pode ser representado, no caso unidimensional, por um amortecedor cuja viscosidade (η) estabelece a relação entre a tensão aplicada ao amortecedor e a correspondente taxa de deformação (fig. 4.2).

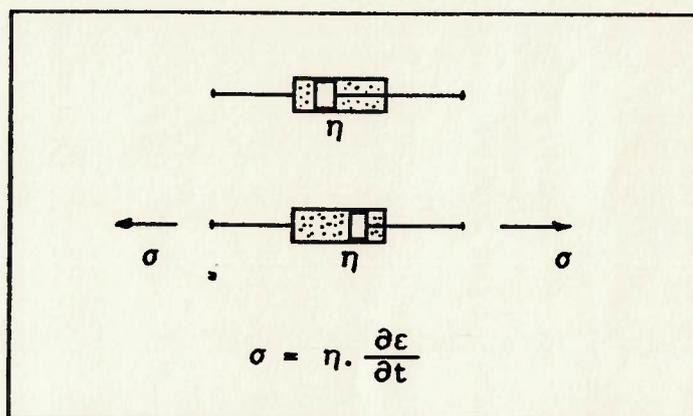


Fig. 4.2: Modelo para um fluido viscoso newtoniano

Sabemos, contudo, que os materiais reais possuem propriedades que são intermediárias entre aquelas dos sólidos elásticos e dos líquidos viscosos. Aliás, como vimos no capítulo 3, uma das características intrínsecas dos materiais poliméricos é que um dado polímero pode exibir toda uma gama de propriedades dependendo da temperatura em que se encontra e da escala de tempo escolhida para a observação experimental. Passaremos então a estudar modelos que representem de melhor forma o comportamento mecânico dos polímeros.

4.2.2- O modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell resulta da combinação de uma única mola e de um único amortecedor ligados em série, como mostra a figura (4.3).

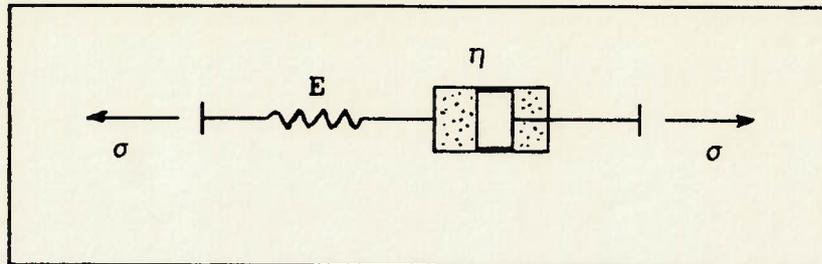


Fig. 4.3: Modelo de Maxwell

As equações que relacionam a tensão e a deformação em cada um dos elementos são expressas por:

$$\sigma^e = E \cdot \epsilon^e \quad (\text{tensão na mola}) \quad (4.1)$$

$$\sigma^v = \eta \cdot \frac{d\epsilon^v}{dt} \quad (\text{tensão no amortecedor}) \quad (4.2)$$

onde σ^e e ϵ^e representam a tensão e a deformação elásticas agindo na mola, enquanto σ^v e ϵ^v representam a tensão e a deformação viscosas agindo no amortecedor.

Para obtermos a equação constitutiva do modelo de Maxwell devemos relacionar a tensão aplicada σ à deformação total ϵ . Para isso, notamos que:

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (\text{a tensão na mola e no amortecedor é a mesma})$$

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^v \quad (\text{a deformação total é a soma de } \epsilon^e \text{ com } \epsilon^v)$$

Com as relações acima chegamos, então, a:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^v \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}^e}{E} + \frac{\sigma^v}{\eta} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}} \quad (4.3)$$

que é a equação constitutiva procurada (o ponto representa a derivada parcial da grandeza em questão em relação ao tempo).

O modelo de Maxwell é de interesse particular na consideração de ensaios de relaxação de tensões. Neste caso, temos:

$\dot{\epsilon} = 0$ (a deformação total não varia no tempo)

Assim, $\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0$ e resolvendo a equação diferencial obtida virá:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(-t/\tau) \quad (4.4)$$

onde $\sigma_0 = E \cdot \epsilon_0$ representa a tensão inicial no material (instante $t = 0$) e $\tau = \frac{\eta}{E}$ representa o tempo de relaxação do modelo.

O modelo de Maxwell nos mostra, então, que, sob condições de deformação constante, a tensão cai exponencialmente com o tempo, o que é realmente verificado na prática, apesar de não existir propriamente um único valor de tempo de relaxação, mas um espectro de tempos de relaxação, conforme discutido no item 3.5. Além disso, a tensão agindo no material não cairá, necessariamente, a zero para um tempo "infinito" como prevê a equação (4.4) - como mostramos na fig. 3.19, alguns polímeros podem exibir um módulo de equilíbrio ou relaxado G_r , num tempo "infinito".

Um outro inconveniente do modelo de Maxwell que o torna inapropriado para uma análise geral de materiais poliméricos pode ser visto ao impormos ao modelo uma condição de tensão constante, como num ensaio de fluência. Sob tal condição, teremos:

$\dot{\sigma} = 0$ (a tensão não varia no tempo)

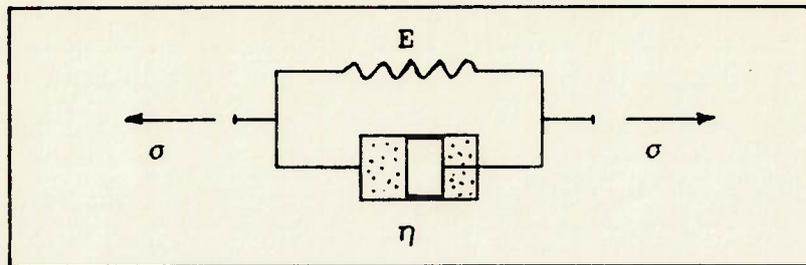
Assim, $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$ e resolvendo a nova equação diferencial:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (4.5)$$

O modelo indica, pois, que num ensaio de fluência a deformação crescerá linearmente com o tempo, a partir de uma deformação elástica inicial (σ_0/E), o que claramente não é verificado para materiais viscoelásticos como os polímeros, nos quais o comportamento à fluência é muito mais complexo.

4.2.3- O modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt consiste em uma única mola e um único amortecedor ligados em paralelo como mostra a figura (4.4):



4.2

Fig. 4.4: Modelo de Kelvin-Voigt

As relações entre tensão e deformação na mola e no amortecedor são as mesmas dadas pelas equações (4.1) e (4.2).

Novamente é preciso relacionar a tensão aplicada σ com a deformação total ϵ para obtermos a equação constitutiva do modelo em consideração.

Observamos, então, que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^e + \sigma^v && \text{(a tensão total é a soma de } \sigma^e \text{ com } \sigma^v) \\ \epsilon &= \epsilon^e = \epsilon^v && \text{(a deformação na mola e no amortecedor é a mesma)} \end{aligned}$$

Com as relações acima e as equações (4.1) e (4.2) chega-se a:

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \iff \sigma = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon} \iff \boxed{\sigma = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon}} \quad (4.6)$$

que é a equação constitutiva procurada para o modelo de Kelvin-Voigt.

Investigando o comportamento do modelo de Kelvin-Voigt para o caso de um ensaio de relaxação de tensões (ϵ constante), teremos:

$$\dot{\epsilon} = 0 \quad \text{(a deformação total não varia no tempo)}$$

e assim, $\sigma = E \cdot \epsilon$, indicando que a tensão também não varia no tempo, ou seja, o material se comporta como um sólido elástico, o que representa de forma inadequada o comportamento de um material viscoelástico.

Por outro lado, o modelo de Kelvin-Voigt representa bem, numa

primeira aproximação, o comportamento do material num ensaio de fluência, como podemos constatar tomando $\sigma = \sigma_0$ na equação (4.6). Nesse caso, teremos:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp(-t/\tau') \right) \quad (4.7)$$

onde $\tau' = \eta/E$ é uma constante de tempo característica do modelo chamada tempo de atraso, já comentada no item 3.5.

O modelo de Kelvin-Voigt também nos fornece uma boa aproximação para a recuperação de deformação - caso em que descarregamos o corpo ($\sigma = 0$) após um carregamento inicial constante ($\sigma = \sigma_0$). Nesse caso:

$$E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon} = 0$$

e a solução obtida será:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \exp(-t/\tau') \quad (4.8)$$

4.2.4- O modelo de quatro parâmetros

Conforme vimos nos itens anteriores, o modelo de Maxwell pode fornecer uma idéia aproximada do comportamento de um polímero num ensaio de relaxação, mas descreve de forma rudimentar o comportamento à fluência e à recuperação. Por outro lado, o modelo de Kelvin-Voigt leva em conta os efeitos da fluência e recuperação (numa primeira aproximação), mas não é um bom modelo para descrever a relaxação de tensões num polímero. Assim, para se obter modelos que representem de melhor forma o comportamento mecânico desses materiais, utilizam-se freqüentemente combinações dos modelos de Kelvin e Maxwell, como o modelo de quatro parâmetros (fig. 4.5) no qual um único modelo de Maxwell é colocado em série com um único modelo de Kelvin-Voigt.

O modelo de quatro parâmetros é o modelo mais simples que reúne todas as características básicas dos materiais viscoelásticos. De fato, a resposta deste modelo às condições de fluência, relaxação e recuperação nada

mais é que a soma dos efeitos dos dois modelos anteriormente vistos.

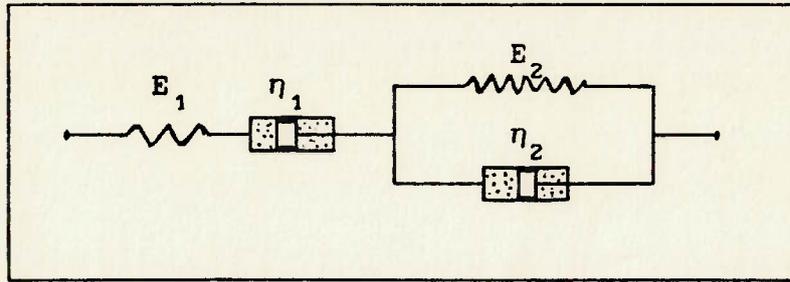


Fig. 4.5: Modelo de quatro parâmetros

Através das relações de compatibilidade de tensões e deformações, pode-se mostrar que a equação constitutiva do modelo de quatro parâmetros é dada por⁽¹³⁾:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \sigma = E_1 \cdot \frac{d^2\epsilon}{dt^2} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_2} \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \quad (4.9)$$

Para o caso particular em que a tensão aplicada ao material é constante ($\sigma = \sigma_0$), como num ensaio de fluência, a equação diferencial dada em (4.9) fica:

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + \frac{E_2}{\eta_2} \cdot \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \sigma_0 \quad (4.10)$$

cuja solução é:

$$\epsilon(t) = k_1 + k_2 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) + \frac{\sigma_0}{\eta_1} t$$

onde k_1 e k_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais:

$$a) t = 0 \longrightarrow \epsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1} = k_1 + k_2$$

$$b) t = 0 \longrightarrow \dot{\epsilon}(0) = \frac{\sigma_0}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_2} = -k_2 \cdot \frac{E_2}{\eta_2} + \frac{\sigma_0}{\eta_1}$$

Resultando, finalmente⁽¹⁶⁾:

$$\epsilon(t) = \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 \cdot E_2} - \frac{1}{E_2} \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) + \frac{t}{\eta_1} \right) \cdot \sigma_0 \quad (4.11)$$

Verificamos, assim, que a resposta do modelo em questão para o ensaio de fluência é a soma das deformações obtidas para o modelo de Maxwell (eq. 4.5) e para o modelo de Kelvin-Voigt (eq. 4.7) para o mesmo ensaio. Desta forma, a função flexibilidade de fluência $J(t)$ obtida para o modelo de quatro parâmetros - fator que multiplica σ_0 no segundo membro da eq. (4.11) - consegue representar o comportamento viscoelástico de polímeros de uma forma mais precisa que as funções $J(t)$ dos modelos de Maxwell ou de Kelvin, separadamente.

Analogamente, podemos calcular a resposta do modelo de quatro parâmetros num ensaio de relaxação de tensão, impondo que as derivadas de ϵ em relação ao tempo sejam nulas na eq. (4.9), obtendo:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \sigma = 0 \quad (4.12)$$

cuja solução será:

$$\sigma(t) = C_1 \cdot \exp(-t/\tau_1) + C_2 \cdot \exp(-t/\tau_2) \quad (4.13)$$

onde τ_1 e τ_2 são os tempos de relaxação do modelo em questão, dados por:

$$\tau_1 = \frac{2}{\left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) - (\Delta)^{0.5}} \quad (4.14a)$$

$$\tau_2 = \frac{2}{\left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) + (\Delta)^{0.5}} \quad (4.14b)$$

$$e \quad \Delta = \left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2} \right)^2 - 4 \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \quad (4.14c)$$

e onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais:

$$a) t = 0 \longrightarrow \sigma(0) = E_1 \cdot \epsilon_0$$

$$b) t = 0 \longrightarrow \dot{\sigma}(0) = -E_1^2 \cdot \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \cdot \epsilon_0$$

Efetuada os cálculos necessários pode-se chegar, então, ao módulo de relaxação de tensões $G(t)$ do modelo de quatro parâmetros:

$$G(t) = C'_1 \cdot \exp(-t/\tau_1) + C'_2 \cdot \exp(-t/\tau_2) \quad (4.15)$$

Evidentemente, o módulo de relaxação dado por (4.15) representará o comportamento viscoelástico do material, num ensaio de relaxação, de uma forma bem mais precisa que aquelas dadas pelos modelos de Maxwell ou Kelvin-Voigt isolados.

Conforme explica HERTZBERG⁽³¹⁾, o modelo de quatro parâmetros pode ser bastante útil na caracterização da resposta de diferentes tipos de polímeros, apesar de sua relativa simplicidade. Através da escolha apropriada dos parâmetros E_i e η_i pode-se, por exemplo, simular tanto o comportamento de um polímero rígido (como uma resina poliéster) quanto o de um polímero flexível (como o Polietileno de baixa densidade).

4.2.5- Modelos generalizados

Como pudemos perceber pelos itens anteriores, a previsão do comportamento viscoelástico de um dado material, através da combinação de modelos de Maxwell ou de Kelvin, será tanto mais próxima da realidade quanto maior for o número das unidades de Maxwell ou de Kelvin envolvidas no modelo. Isto se deve ao fato de que, ao aumentarmos o número de unidades do modelo do material, estamos conseqüentemente aumentando o número de termos na equação diferencial que representa o mesmo, podendo, assim, descrever o comportamento viscoelástico do material de maneira mais precisa.

As combinações encontradas com maior frequência na literatura são: o modelo generalizado de Maxwell e o modelo generalizado de Kelvin-Voigt. Entre os vários autores que trazem referências a esses modelos, temos: CALCOTE⁽¹³⁾, CRAWFORD⁽¹⁶⁾, FERRY⁽¹⁹⁾, GITTUS⁽²⁶⁾, GROSS⁽²⁸⁾ e WARD⁽⁶¹⁾.

O modelo generalizado de Maxwell consiste num sistema de m elementos de Maxwell dispostos em paralelo (fig. 4.6), podendo haver, ainda, alguns elementos "degenerados" nos quais atua apenas uma mola ou um amortecedor, conforme fig. 4.7.

Ao aplicarmos uma tensão σ ao modelo generalizado de Maxwell, verificaremos, considerando o equilíbrio, que a tensão total σ é igual a soma das tensões σ_i que agem em cada um dos ramos do modelo, isto é:

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i \quad (4.16)$$

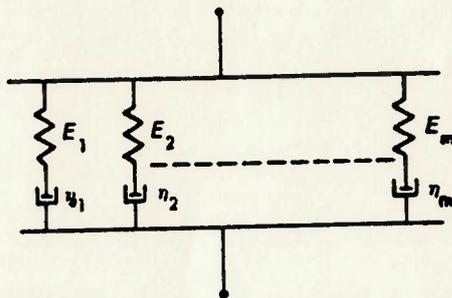


Fig. 4.6: Modelo de Maxwell generalizado⁽¹³⁾

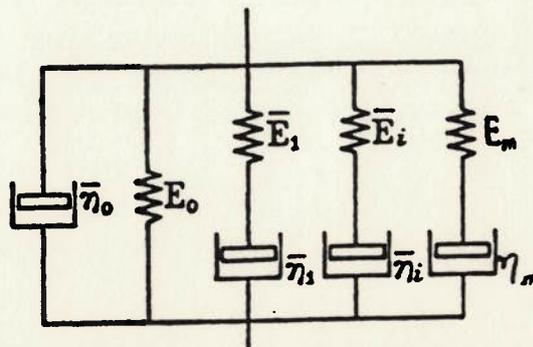


Fig. 4.7: Modelo de Maxwell generalizado com unidades degeneradas⁽²⁸⁾

Observando, ainda, que a deformação total ϵ deve ser a mesma em cada um dos ramos do modelo e recordando a equação (4.3), que relaciona a tensão e a deformação agentes no Modelo de Maxwell, temos:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad (4.17)$$

Através das equações (4.16) e (4.17) pode-se, então, chegar à equação constitutiva do modelo generalizado de Maxwell, que relaciona a tensão total aplicada (σ) à deformação total medida (ϵ). Considerando, por exemplo, um ensaio de relaxação de tensões e recordando as eqs. (4.4), (4.16) e (4.17), teremos, para um modelo generalizado de Maxwell sem unidades degeneradas:

$$\sigma(t) = \left(\sum_{i=1}^m E_i \cdot \exp(-t/\tau_i) \right) \cdot \epsilon(\theta) \quad (4.18)$$

ou, se considerarmos ainda uma unidade degenerada adicional, composta por uma única mola de constante E_0 :

$$\sigma(t) = \left(E_0 + \sum_{i=1}^m E_i \cdot \exp(-t/\tau_i) \right) \cdot \epsilon(\theta) \quad (4.19)$$

onde $\epsilon(\theta)$ é a deformação (constante) imposta ao modelo e $\tau_i = \eta_i / E_i$.

Já o modelo generalizado de Kelvin-Voigt é representado por vários elementos de Kelvin-Voigt dispostos em série como ilustra a fig. 4.8. De forma análoga ao que foi visto para o modelo generalizado de Maxwell, podemos incluir também algumas unidades degeneradas no modelo generalizado de Kelvin, de forma que o mesmo possa prever uma resposta elástica instantânea ou um fluxo viscoso (fig. 4.9).

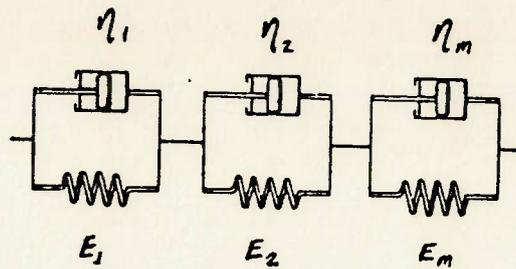


Fig. 4.8: Modelo de Kelvin-Voigt generalizado⁽⁶¹⁾

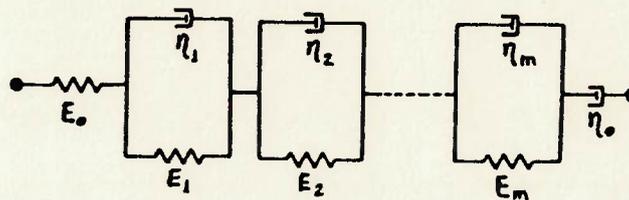


Fig. 4.9: Modelo de Kelvin-Voigt generalizado com unidades degeneradas⁽¹³⁾

Aplicando-se uma tensão σ ao modelo generalizado de Kelvin-Voigt, verificamos que, para o equilíbrio do modelo, cada uma das unidades deve estar submetida à mesma tensão σ . Recordando a equação (4.6), escrevemos:

$$\sigma = E_i \cdot \epsilon_i + \eta_i \cdot \dot{\epsilon}_i \quad (4.20)$$

Pela condição de compatibilidade dos deslocamentos, a deformação total ϵ é igual a soma das deformações ϵ_i de cada unidade, ou seja:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^m \epsilon_i \quad (4.21)$$

Assim, de posse das equações (4.20) e (4.21) podemos chegar à equação constitutiva do modelo generalizado de Kelvin-Voigt, relacionando a tensão total σ aplicada à deformação total ϵ medida. Se desejarmos, por

exemplo, conhecer a resposta do modelo generalizado de Kelvin-Voigt a um ensaio de fluência, teremos, pelas eqs. (4.7), (4.20) e (4.21):

$$\epsilon(t) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \cdot (1 - \exp(-t/\tau'_i)) \right) \cdot \sigma(0) \quad (4.22)$$

onde $\sigma(0)$ é a tensão (constante) imposta ao modelo e $\tau'_i = \eta_i / E_i$.

Para finalizar, lembramos que as equações diferenciais que governam o comportamento viscoelástico de materiais polimericos podem sempre ser postas sob a forma:

$$\mathfrak{P} \cdot \sigma = \mathfrak{Q} \cdot \epsilon \quad (4.23)$$

onde \mathfrak{P} e \mathfrak{Q} são operadores diferenciais dados por:

$$\mathfrak{P} = p_0 + p_1 \frac{d}{dt} + p_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + p_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots \quad (4.24a)$$

$$\mathfrak{Q} = q_0 + q_1 \frac{d}{dt} + q_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + q_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots \quad (4.24b)$$

Se o material for viscoelástico linear, os coeficientes p_i e q_i são constantes ou funções do tempo. Por outro lado, se estivermos interessados em viscoelasticidade não-linear, devemos considerar os coeficientes p_i e q_i como funções gerais do tempo, tensão, deformação e outras grandezas relacionadas.

Pode-se demonstrar^(1,61) que o comportamento reológico de materiais viscoelásticos, dado pela equação (4.23), pode ser descrito através de várias combinações de molas e amortecedores (diferentes modelos mecânicos), desde que os parâmetros E_j e η_j de cada modelo sejam escolhidos de forma que os coeficientes da equação diferencial resultante (4.23) sejam os mesmos. Assim, a escolha de um modelo para a caracterização de um material viscoelástico não é um problema de importância fundamental, mas apenas um problema de conveniência (facilidade no tratamento matemático)⁽¹³⁾.

4.2.6- Método de obtenção dos parâmetros (E_i, η_i)

No item 4.2.5 mostramos como os modelos generalizados podem ajudar a descrever o comportamento viscoelástico dos materiais poliméricos. Resta, porém, a tarefa não-trivial de descobrir os valores dos parâmetros E_i e η_i de um dado modelo, para que se possa conhecer a resposta do material a uma dada solicitação. Baseando-nos num artigo publicado por BRUELLER et al.⁽¹⁰⁾, mostraremos como isso pode ser feito para um modelo generalizado de Maxwell, o qual será utilizado adiante (cap. 5) para a análise estrutural de componentes plásticos.

Retomemos, então, o modelo generalizado de Maxwell, com uma unidade degenerada adicional, composta de uma única mola de constante E_0 . Vimos que a resposta de tal modelo quando submetido a um ensaio de relaxação de tensões era dada pela equação (4.19):

$$\sigma(t) = \left(E_0 + \sum_{i=1}^m E_i \cdot \exp(-t/\tau_i) \right) \cdot \epsilon(0)$$

Se selecionarmos valores para os tempos de relaxação τ_i em intervalos de uma década, dentro do período de tempo a ser coberto pelo ensaio, (por exemplo, $\tau_i = 10^i$ s, $i = 1, 2, 3, \dots$), então poderemos calcular os valores dos parâmetros E_j através da resolução do sistema linear de $(m+1)$ equações a $(m+1)$ incógnitas na forma:

$$[A]^T \cdot [A] \cdot [E] = [A]^T \cdot [B] \quad (4.25)$$

onde: $[E]$ é um vetor contendo as $(m+1)$ incógnitas E_j , definido por:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

[B] é um vetor de dimensão n dado por:

$$[B] = \frac{1}{\epsilon(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} \sigma(t_1) \\ \sigma(t_2) \\ \sigma(t_3) \\ \vdots \\ \sigma(t_n) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

e [A] é uma matriz de dimensões n × (m+1) dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \exp(-t_1/\tau_1) & \exp(-t_1/\tau_2) & \dots & \exp(-t_1/\tau_m) \\ 1 & \exp(-t_2/\tau_1) & \exp(-t_2/\tau_2) & \dots & \exp(-t_2/\tau_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \exp(-t_n/\tau_1) & \exp(-t_n/\tau_2) & \dots & \exp(-t_n/\tau_m) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Através do método proposto, podemos, então, obter os parâmetros E_i (e $\eta_i = \tau_i \cdot E_i$) do modelo generalizado de Maxwell, bastando que se conheça a curva de relaxação de tensões para uma dada deformação constante $\epsilon(\theta)$ imposta ao corpo de prova. A grande vantagem deste método é que podemos tomar qualquer número n de valores de tensões $\sigma(t_i)$ que desejarmos, medindo-as nos instantes t_1, t_2, \dots, t_n que quisermos. Obviamente, a aproximação da curva de relaxação do material pela função dada por (4.19) será tanto melhor quanto maior for o número de tempos de relaxação τ_i do modelo e o número de pontos $(\sigma(t), t)$ tomados da curva.

Além disso, lembramos que o método pode considerar, também, os efeitos de viscoelasticidade não-linear, uma vez que os parâmetros E_i e η_i podem ser diferentes para valores distintos de $\epsilon(\theta)$, resultando em várias funções de relaxação $G(t)$ (ao invés de uma única, como prevê a teoria da viscoelasticidade linear).

Ressaltamos, porém, que o ensaio em questão deve ser feito sob condições de temperatura constante pois, como vimos no cap. 3, a temperatura

tem uma forte influência sobre o comportamento viscoelástico de materiais poliméricos (bem como outros fatores, como a umidade para o nylon).

Uma última ressalva a ser feita é que o método descrito só é aplicável quando dispomos das curvas de relaxação do material, o que nem sempre é possível, pois a maioria dos ensaios feitos com materiais poliméricos são ensaios de fluência. Podemos, contudo, adaptá-lo de forma a utilizar as curvas de fluência do material, ao invés das de relaxação. Para isso, basta substituímos o vetor $[B]$, dado por (4.27), pelo vetor $[\bar{B}]$ dado por:

$$[\bar{B}] = \sigma(0) \cdot \begin{bmatrix} 1/\epsilon(t_1) \\ 1/\epsilon(t_2) \\ 1/\epsilon(t_3) \\ \vdots \\ 1/\epsilon(t_n) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

e o novo sistema a ser resolvido será:

$$[A]^T \cdot [A] \cdot [E] = [A]^T \cdot [\bar{B}] \quad (4.30)$$

A diferença entre o método original proposto por BRUELLER e o que estamos sugerindo é que no primeiro foi utilizada a função relaxação de tensão dada em (4.19) como aproximação das curvas de relaxação do material, enquanto no último utilizamos essa mesma função como aproximação das curvas de fluência (sendo portanto utilizada como função flexibilidade de fluência). Em outras palavras, estamos utilizando a mesma função matemática para descrever curvas distintas de uma mesma superfície $f = f(\sigma, \epsilon, t, T)$, como aquela mostrada na fig. (3.21). Obviamente, os parâmetros E e η calculados serão diferentes em um ou outro caso.

4.2.7- Exemplo de obtenção dos parâmetros (E_i, η_i)

A fim de exemplificar o procedimento descrito, vamos calcular os parâmetros E_i e η_i para aproximação das curvas de fluência do polietileno duro a 20°C obtidas por GAUBE⁽²⁴⁾ (fig. 4.10).

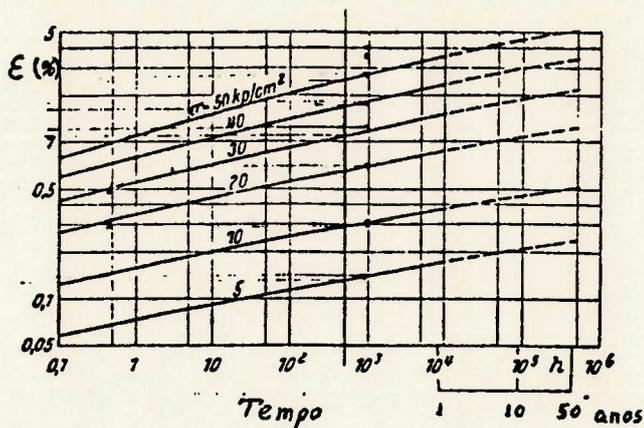


Fig. 4.10: Curvas de fluência para o Polietileno duro a 20°C ⁽²⁴⁾

Consideremos, então, o modelo generalizado de Maxwell de seis ramos, como esquematizado na fig. 4.11.

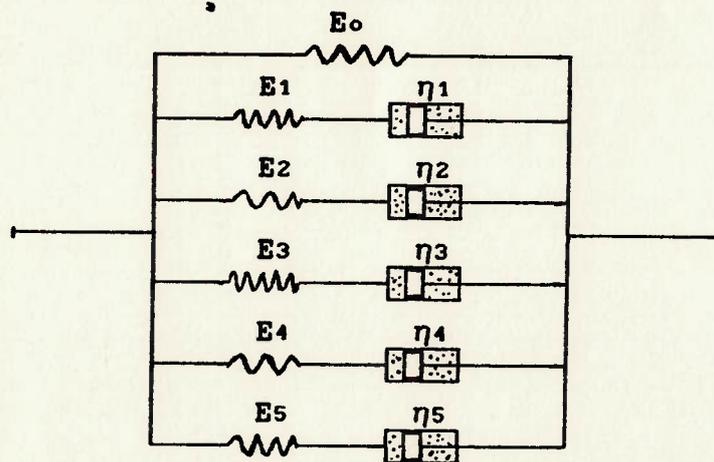


Fig. 4.11: Modelo Generalizado de Maxwell usado para o cálculo dos parâmetros E_i e η_i

A fim de proporcionar uma adequada distribuição dos tempos de relaxação sobre o período de tempo coberto pelo ensaio (10.000 horas), seleccionamos os cinco valores de τ_i ($i = 1, \dots, 5$) dados a seguir:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0,1 \text{ h}; & \tau_4 &= 100 \text{ h}; \\ \tau_2 &= 1,0 \text{ h}; & \tau_5 &= 1000 \text{ h} \\ \tau_3 &= 10 \text{ h}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

Através das curvas de fluência obtidas por GAUPE, podemos, então, determinar pontos $(\epsilon(t), t)$ para a determinação dos parâmetros E_i do modelo, conforme o procedimento visto. Os pontos escolhidos são os fornecidos na tabela 4.1.

$\sigma \left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right)$ $t(\text{h})$	5	10	20	30	40	50
0,1	5,675E-4	1,241E-3	2,624E-3	4,207E-3	5,943E-3	7,924E-3
0,5	6,667E-4	1,410E-3	3,155E-3	5,000E-3	7,063E-3	9,976E-3
1	7,144E-4	1,581E-3	3,342E-3	5,482E-3	7,924E-3	1,119E-2
5	8,689E-4	1,794E-3	3,971E-3	6,441E-3	9,749E-3	1,360E-2
10	8,891E-4	1,991E-3	4,405E-3	7,063E-3	1,057E-2	1,493E-2
50	1,057E-3	2,285E-3	5,058E-3	8,491E-3	1,270E-2	1,879E-2
100	1,119E-3	2,506E-3	5,546E-3	8,994E-3	1,393E-2	1,991E-2
500	1,285E-3	2,812E-3	6,367E-3	1,106E-2	1,675E-2	2,506E-2
1000	1,409E-3	2,978E-3	7,062E-3	1,186E-2	1,774E-2	2,716E-2
5000	1,581E-3	3,460E-3	8,016E-3	1,409E-2	2,182E-2	3,341E-2
10000	1,713E-3	3,622E-3	8,789E-3	1,492E-2	2,285E-2	3,540E-2

Tabela 4.1: Deformações do Polietileno duro a 20°C em função da tensão aplicada e do tempo de carga.

Verifica-se que os vetores $[\bar{B}]$ a serem utilizados na equação (4.30) são obtidos diretamente da tabela (4.1), bastando multiplicar o inverso das deformações de cada uma das colunas pela respectiva tensão de fluência. Os resultados finais obtidos pela aplicação de (4.30) estão na tabela (4.2), na qual os valores dos módulos E_i do modelo estão em função da tensão aplicada.

$\sigma \begin{matrix} (\text{kgf}) \\ \text{cm}^2 \end{matrix}$ E_i	5	10	20	30	40	50
E_0	3046,36	2849,22	2383,31	2075,40	1811,29	1461,23
E_1	1809,20	1451,00	2248,01	1926,58	1393,37	2398,25
E_2	1972,60	1663,94	1313,22	1425,79	1873,71	1449,16
E_3	1256,15	1422,10	1500,40	1281,40	1099,15	1164,67
E_4	751,90	629,89	522,99	691,03	657,92	594,86
E_5	1318,80	1134,32	1215,23	1098,60	966,66	908,79

Tabela 4.2: Valores obtidos para os módulos E_i (em kgf/cm^2).

Uma vez calculados os módulos E_i , basta utilizarmos a relação $\eta_i = E_i \cdot \tau_i$ para o cálculo dos parâmetros η_i , lembrando que os valores de τ_i foram seleccionados previamente conforme (4.31).

4.3- Forma integral das equações constitutivas: modelos unidimensionais

A fim de completar o estudo sobre equações constitutivas utilizadas para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos, apresentaremos agora a forma integral dessas equações, considerando as representações por integrais simples (SIR) e por integrais múltiplas (MIR). Em ambos os casos, as equações envolvidas tratarão apenas do caso unidimensional.

4.3.1- Representações por integrais simples (SIR)

Ao introduzirmos o comportamento viscoelástico de polímeros (item 3.5), tratamos da resposta destes materiais nos ensaios de fluência e de relaxação. No primeiro caso, vimos que a deformação $\epsilon(t)$ seria sempre proporcional à tensão aplicada σ_0 , se o material exibisse um comportamento linear, ou seja:

$$\epsilon(t) = J(t) \cdot \sigma_0 \quad (4.32)$$

onde $J(t)$ é a função flexibilidade de fluência e expressa a deformação por unidade de tensão aplicada ao material.

No caso do ensaio de relaxação, também vimos que para materiais viscoelásticos lineares podemos relacionar a tensão $\sigma(t)$ e a deformação imposta ϵ_0 através de uma expressão do tipo:

$$\sigma(t) = G(t) \cdot \epsilon_0 \quad (4.33)$$

onde $G(t)$ é o módulo de relaxação de tensão e expressa a tensão que deve ser aplicada ao material de forma a manter a deformação constante.

Como estamos admitindo a hipótese de viscoelasticidade linear em ambos os casos, é válido o Princípio da Superposição de Boltzmann, que diz:

- i) a fluência é uma função de toda a história do carregamento;
- ii) cada incremento de carga é responsável por uma contribuição independente à

deformação final, sendo essa obtida pela simples soma de cada contribuição.

Podemos, então, usar tal princípio para calcularmos a deformação produzida pela ação de diversas cargas. Consideremos, por exemplo, um programa de carregamento no qual tensões incrementais $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$,... são aplicadas respectivamente nos instantes τ_1 , τ_2 , τ_3 ,..., como mostra a figura 4.12.

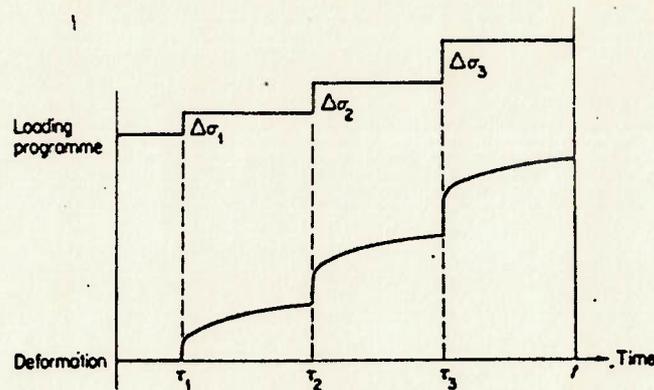


Fig. 4.12: Aplicação do princípio da superposição⁽⁶¹⁾

A parcela da deformação devido à fluência (ϵ^c) será dada por:

$$\epsilon^c(t) = J(t-\tau_1).\Delta\sigma_1 + J(t-\tau_2).\Delta\sigma_2 + J(t-\tau_3).\Delta\sigma_3 + \dots \quad (4.34)$$

Para obtermos a expressão que relaciona a tensão e a deformação na barra para o caso mais geral, vamos admitir que a tensão σ varie agora de acordo com uma função arbitrária $\sigma(t)$. Como mostra a figura 4.13, o diagrama de tensões pode ser "dividido" em vários degraus, sendo o primeiro degrau dado pela tensão σ_0 (aplicada no instante inicial) e os demais por $d\sigma'$, onde $d\sigma' = d\tau \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{t=\tau}$.

A deformação devida à fluência, calculada no instante genérico t , será então a soma das deformações causadas por todos os incrementos de tensão que tenham ocorrido nos instantes τ anteriores a t , ou seja:

$$\epsilon^c(t) = \int_0^t J(t-\tau).d\sigma' \quad (4.35)$$

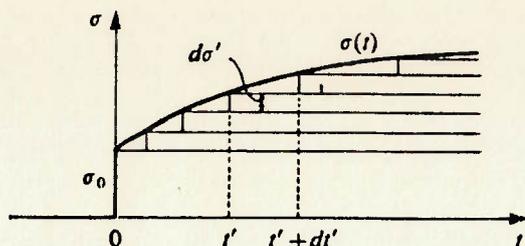


Fig. 4.13: Obtenção da integral hereditária⁽²²⁾

A integral obtida em 4.35, chamamos integral hereditária, que nos mostra como a deformação, em qualquer instante de tempo, depende de toda a história do carregamento, e não apenas do particular instante em que a calculamos. A deformação total $\epsilon(t)$ é obtida adicionando-se à integral hereditária o termo correspondente à deformação elástica instantânea, resultando:

$$\epsilon(t) = \left(\frac{\sigma}{G_u} \right) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.36)$$

onde G_u é o módulo elástico (não relaxado) responsável pela parcela elástica instantânea da deformação.

Analogamente, pode-se obter, através do Princípio da Superposição, uma equação constitutiva integral que represente o comportamento do material à relaxação de tensões. Para ilustrar, consideremos um programa de relaxação de tensões no qual incrementos de deformação $\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3, \dots$ são adicionados nos instantes $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, respectivamente. A tensão total no instante genérico t será dada por:

$$\sigma(t) = G(t-\tau_1) \cdot \Delta\epsilon_1 + G(t-\tau_2) \cdot \Delta\epsilon_2 + G(t-\tau_3) \cdot \Delta\epsilon_3 + \dots \quad (4.37)$$

onde $G(t)$ é o módulo de relaxação de tensões.

Ao generalizarmos a equação (4.37) para o caso de uma função arbitrária de deformações $\epsilon(t)$ imposta ao material, teremos:

$$\sigma(t) = [G_r \cdot \epsilon] + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.38)$$

onde G_r é o módulo relaxado (ou de equilíbrio) do material.

As equações (4.36) e (4.38) sintetizam, assim, o comportamento do material através de suas respostas a programas de carregamento quaisquer. Lembramos, contudo, que tais equações se aplicam somente no caso de materiais viscoelásticos lineares, o que nem sempre é verificado na prática. Para tentar descrever o comportamento não-linear de materiais poliméricos, outros tipos de representações foram propostos, os quais apresentaremos a seguir.

4.3.2- Representações por integrais simples mais complexas

Em muitas aplicações práticas de polímeros, seu comportamento viscoelástico não satisfaz as condições de linearidade requeridas pelo Princípio da Superposição de Boltzmann. Isto pode ocorrer, por exemplo, nos casos de não-linearidade geométrica que envolvem grandes deformações e, conseqüentemente, a não superposição das mesmas. Tal limitação se verifica sobretudo em fibras têxteis sintéticas, onde as deformações podem alcançar valores de até 10%, ou em elastômeros, onde as deformações podem superar 100%.

Além disso, pode ser que o comportamento viscoelástico linear não seja alcançado, mesmo para pequenas deformações. Segundo WARD⁽⁶¹⁾, é comum observarmos comportamento viscoelástico linear para certos níveis de tensão e curtos intervalos de tempo; porém, para longos intervalos de tempo, nos mesmos níveis de tensão, o comportamento já passa a ser notadamente não linear.

Há várias representações que tentam fornecer uma descrição adequada do comportamento viscoelástico não-linear. Apresentaremos, a seguir, algumas dessas formas de representação, envolvendo o uso de integrais simples.

LEADERMAN apud WARD⁽⁶¹⁾ estudou o comportamento à fluência e à recuperação de fibras têxteis, sendo um dos primeiros a considerar que tal comportamento pode ser não-linear mesmo para pequenas deformações. Em seus estudos Leaderman descobriu que, para o nylon e para as fibras celulósicas, as curvas de flexibilidade de fluência não eram as mesmas para diferentes níveis de tensão; porém, para um mesmo nível de tensão, as curvas de fluência e de recuperação coincidiam. Verificou ainda que as flexibilidades iniciais eram idênticas para todos os níveis de tensão aplicados. A figura 4.14 ilustra o fato através de uma comparação esquemática entre as curvas de flexibilidade de fluência (a) e de recuperação (b) para um material viscoelástico não-linear submetido a três níveis de tensões diferentes.

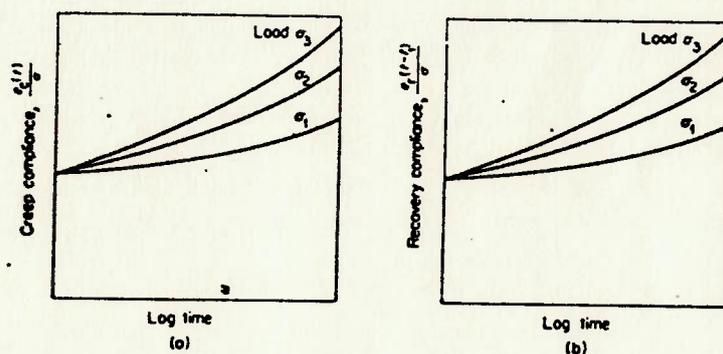


Fig. 4.14: Exemplo de comportamento viscoelástico não-linear⁽⁶¹⁾

De acordo com os resultados obtidos, Leaderman propôs que:

- (1) Há uma deformação elástica instantânea que é sempre proporcional à tensão;
- (2) Para um dado nível de tensão, tanto a fluência quanto a recuperação são funções únicas da tensão.

Tais conclusões levaram-no a formular uma extensão do princípio da superposição de Boltzmann. De acordo com este novo princípio, a deformação total obtida num ensaio de fluência seria dada por:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \frac{df(\sigma)}{d\tau} J(t-\tau) d\tau \quad (4.39)$$

onde $f(\sigma)$ é uma função empírica da tensão.

Apesar de o princípio postulado por Leaderman representar de forma satisfatória o comportamento à fluência e à recuperação das fibras por ele estudadas, verificou-se mais tarde que o mesmo não se aplicava bem para outras fibras têxteis, além de não descrever o comportamento do material para carregamentos mais complexos que os ensaios de fluência e recuperação.

Outras formas de representação envolvendo integrais simples foram então propostas para descrever o comportamento viscoelástico não-linear. Entre estas, destacam-se as representações desenvolvidas por Bernstein, Kearsley e Zapas (conhecida como teoria BKZ) para prever o comportamento de elastômeros, e a representação de Schapery que considerava o efeito da temperatura sobre o comportamento viscoelástico não-linear, proporcionando uma boa descrição dos dados de fluência e recuperação da nitrocelulose e de resinas fenólicas reforçadas com fibras.⁽⁶¹⁾

4.3.3- Representações por integrais múltiplas (MIR)

As representações envolvendo o uso de integrais simples na previsão do comportamento viscoelástico não-linear de polímeros em estados físicos que não o de elasticidade instantânea (*rubbery-state*) mostraram-se inadequadas para estudos realizados com fibras orientadas de polipropileno. As curvas obtidas através de ensaios de fluência e de recuperação para tais fibras, submetidas a diferentes níveis de tensões, estão mostradas na fig. 4.15 e permitem concluir que:

(1) as curvas de fluência e de recuperação coincidem apenas no nível mais baixo de tensão, o que sugere a existência de viscoelasticidade linear para

baixas tensões. Porém, para tensões mais altas, o comportamento passa a ser visivelmente não-linear;

(2) a recuperação "instantânea" obtida em cada nível de tensão resultou sempre maior que a fluência "instantânea".

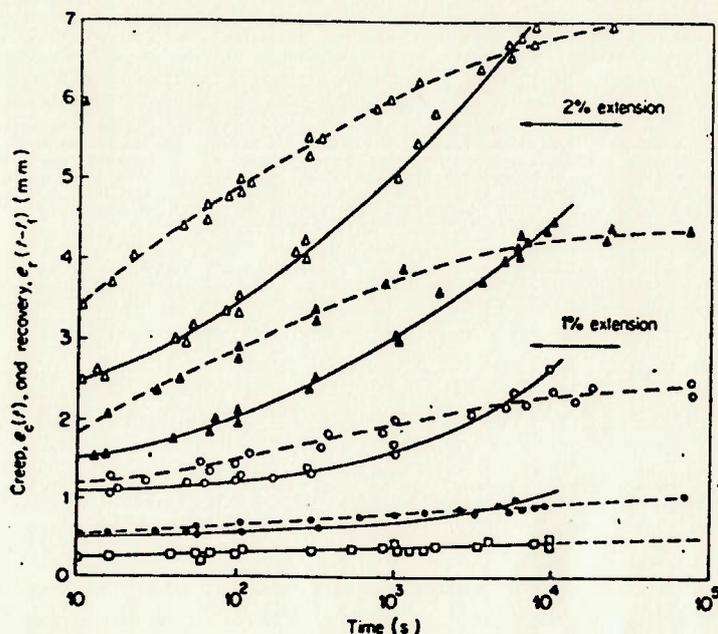


Fig. 4.15: Fluência (—) e recuperação (-----) para um filamento orientado de polipropileno submetido a diversas cargas. Legenda: Δ , 587g; \blacktriangle , 402g; \bullet , 281g; \square : 67,6g. ⁽⁶¹⁾

A segunda característica apontada já elimina a possibilidade de utilizar a formulação de Leaderman (eq. 4.39), segundo a qual tanto a resposta à fluência quanto à recuperação podia ser separada em duas parcelas: uma elástica e outra dependente do tempo. Como se pode ver, para as fibras de polipropileno ensaiadas, não existe uma resposta elástica definida.

Através das curvas de fluência e de recuperação obtidas, montaram-se gráficos mostrando a variação das respectivas flexibilidades em função da carga aplicada para intervalos de tempo fixos (fig. 4.16). Nota-se que nos

níveis mais baixos de tensão as curvas de flexibilidade de fluência são aproximadamente independentes da tensão (comportamento viscoelástico linear); porém tal não ocorre para níveis mais altos de tensão, onde o comportamento é notadamente não-linear.

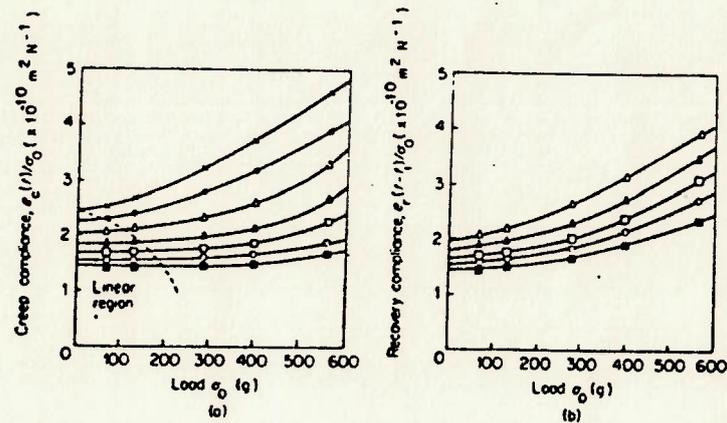


Fig. 4.16: Flexibilidade de fluência (a) e de recuperação (b) em função da carga aplicada para um filamento orientado de polipropileno.⁽⁶¹⁾ (Legenda: x, 9300s; •, 3000s; Δ, 1000s; ▲, 300s; □, 100s; ○, 40s; ■, 15s)

Num último ensaio, obtiveram-se os gráficos mostrados na fig. 4.17 onde as curvas de fluência e as de recuperação são comparadas com curvas de fluência adicional para as mesmas fibras de polipropileno estudadas. Verifica-se que a curva de fluência adicional se mantém sempre acima da curva de fluência inicial, além de proporcionar uma maior deformação "instantânea", como na curva de recuperação.

Vemos, portanto, que tanto o Princípio da Superposição de Boltzmann quanto o princípio modificado de Leaderman não podem ser aplicados para a descrição do comportamento viscoelástico não-linear discutido.

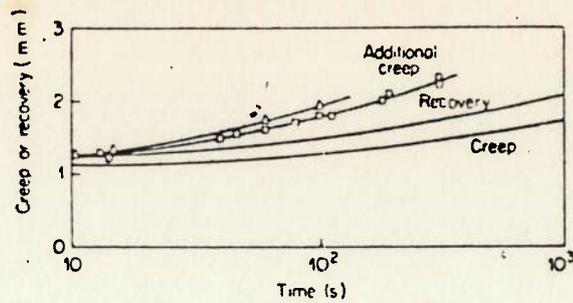


Fig. 4.17: Comparação das curvas de fluência e de recuperação (carga de 281g) com as curvas de fluência adicional devido à adição de mais 281g após 3000s (□) e 1000s (Δ).⁽⁶¹⁾

Tais resultados levaram Ward e Onat a examinar a aplicabilidade das representações por integrais múltiplas no estudo da viscoelasticidade. Segundo tal representação, a resposta de um corpo-de-prova ao carregamento indicado na fig. 4.12, no qual tensões incrementais $\Delta\sigma_1(\tau_1)$, $\Delta\sigma_2(\tau_2)$, $\Delta\sigma_3(\tau_3)$, ... são adicionadas nos instantes τ_1 , τ_2 , τ_3 , ..., seria dada por:

$$\epsilon(t) = \epsilon^1(t) + \epsilon^n(t)$$

onde $\epsilon^1(t)$ é a resposta do sistema se o material fosse viscoelástico linear, ou seja:

$$\epsilon^1(t) = J_1(t-\tau_1).\Delta\sigma_1 + J_1(t-\tau_2).\Delta\sigma_2 + J_1(t-\tau_3).\Delta\sigma_3 + \dots$$

sendo $J_1(t)$ a função flexibilidade de fluência, e $\epsilon^n(t)$ é a parcela da resposta que inclui termos devido às contribuições "conjuntas" dos carregamentos $\Delta\sigma_1(\tau_1)$, $\Delta\sigma_2(\tau_2)$, $\Delta\sigma_3(\tau_3)$, ... , ou seja:

$$\epsilon^n(t) = J_2(t-\tau_1, t-\tau_2).\Delta\sigma_1\Delta\sigma_2 + J_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3).\Delta\sigma_1\Delta\sigma_2\Delta\sigma_3 + \dots$$

onde as funções J_2 , J_3 , etc, são funções das diferenças dos intervalos de tempo $t-\tau_1$, $t-\tau_2$, etc.

Se considerarmos agora um carregamento contínuo, como o indicado na figura 4.13, a resposta do sistema será então dada pela soma das integrais múltiplas:

$$\epsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_0^t \int_0^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1} \cdot \frac{d\sigma(\tau_2)}{d\tau_2} \cdot d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t J_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \frac{d\sigma(\tau_1)}{d\tau_1} \dots \frac{d\sigma(\tau_n)}{d\tau_n} \cdot d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (4.40)$$

sendo fácil observar que a primeira parcela de (4.40) representa a integral hereditária do Princípio da Superposição de Boltzmann (termo linear)

WARD⁽⁶¹⁾ mostra que, para um ensaio de fluência sob tensão constante σ_0 , a representação por integrais múltiplas fornece:

$$\epsilon^c(t) = J_1(t) \cdot \sigma_0 + J_2(t,t) \cdot \sigma_0^2 + \dots + J_n(t, \dots, t) \cdot \sigma_0^n$$

Lembrando agora que as curvas de flexibilidade de fluência isócronas em função da tensão aplicada (fig. 4.16a) eram aproximadamente parabólicas, pode-se, então, tomar:

$$\frac{\epsilon^c(t)}{\sigma_0} = A + B \cdot \sigma_0^2$$

onde $A = J_1(t)$ e $B = J_3(t,t,t)$ são funções apenas do tempo.

Assim, representando-se o comportamento não-linear das fibras de polipropileno através das integrais múltiplas (tomando-se somente o primeiro e terceiro termos da série), é possível prever o comportamento das mesmas com melhor precisão, inclusive para carregamentos mais complexos, envolvendo fluência, recuperação e superposição de tensões.

Como observação final, queremos ressaltar que a representação por integrais múltiplas é, a princípio, tão genérica que os dados experimentais devem se ajustar sempre, já que há um número infinito de termos que proporcionam tal ajuste. Lembramos, porém, que tal representação só será útil, na prática, se os dados experimentais puderem ser ajustados com um número pequeno de termos integrais, caso contrário, a complexidade matemática envolvida aumentará significativamente.

4.4- Viscoelasticidade a três dimensões

Como pudemos ver, o comportamento de materiais viscoelásticos é bastante complexo, mesmo limitando nosso estudo a um único tipo de polímero sob condição de temperatura constante e restringindo-nos ao caso de tensões e deformações agindo em uma "única" direção (caso uniaxial). É natural, portanto, esperarmos uma complexidade ainda maior ao considerarmos o efeito de tensões ou deformações agindo em mais de uma direção (caso multiaxial). Porém, como veremos a seguir, as equações viscoelásticas a três dimensões podem ser obtidas das correspondentes equações unidimensionais, desde que certas hipóteses sejam feitas.

4.4.1- Hipóteses iniciais e requisitos

Ao tratarmos da viscoelasticidade (linear ou não-linear) no caso multiaxial, devemos inicialmente fazer algumas hipóteses sobre o comportamento do material. A questão da isotropia constitui um dos pontos mais importantes da discussão, pois a formulação envolvida fica consideravelmente mais simples se pudermos considerar o material como isotrópico.

KITAGAWA; MATSUTANI⁽³⁴⁾, estudando o comportamento viscoelástico não-linear de barras de polipropileno, observaram o material com o uso de um microscópio de luz polarizada, concluindo que suas características não eram anisotrópicas. Numa continuidade do estudo, KITAGAWA et al.⁽³⁵⁾ levantaram as curvas tensão-deformação para corpos de prova de polipropileno, com diferentes orientações, ensaiados à compressão sob taxas de deformação constante, mostrando que a anisotropia das barras era muito pequena.

FINNIE; HELLER⁽²¹⁾ também fizeram considerações sobre a isotropia de materiais poliméricos em sua obra, afirmando que materiais não-cristalinos freqüentemente possuem uma estrutura quase isotrópica, o que significa que

deformações relativamente grandes são necessárias para tornar sua resposta anisotrópica.

Não queremos afirmar, contudo, que todos os materiais poliméricos podem ser considerados isotrópicos, pois isto dependerá obviamente da estrutura molecular que cada um possui. Porém, para aqueles polímeros que possuem um arranjo molecular "adequado", pode-se tomar a hipótese de isotropia do material como aceitável, desde que o nível de deformações em uma dada direção não provoque uma orientação excessiva das moléculas nesta mesma direção provocando, assim, uma certa anisotropia.

Além da hipótese da isotropia, outros aspectos que devem ser considerados por constituírem requisitos para uma formulação consistente são: a objetividade (independência do observador) e a representação adequada de casos particulares.

O princípio da independência do observador é a exigência que impomos às equações constitutivas para que elas traduzam propriedades intrínsecas dos materiais, ou seja, propriedades que independem do referencial adotado para observá-los. Este princípio está subjacente na interpretação do que ocorre com uma mola que sofre um alongamento δ : qualquer observador afirma que a mola reage com uma força de intensidade $F = k.\delta$, onde k é a mesma constante para todos os observadores.

A representação adequada de casos particulares também é um requisito fundamental para a formulação de equações constitutivas multiaxiais. Com efeito, para que uma equação constitutiva multiaxial seja consistente, ela deve representar o comportamento uniaxial do sólido quando tal for o caso. Da mesma forma, as equações constitutivas viscoelásticas devem representar o comportamento de sólidos elásticos como um caso particular.

4.4.2- Forma diferencial a três dimensões

Na forma diferencial, existem duas formulações para a obtenção de equações constitutivas viscoelásticas multiaxiais. A primeira admite que o material seja isotrópico e que o coeficiente de Poisson do material (ν) seja constante. Desta forma, pode-se estabelecer a seguinte relação entre o estado de tensões e o estado de deformações em um certo ponto do contínuo:

$$\{\sigma(t)\} = D(t) \cdot \left(\frac{1}{3(1-2\nu)} \cdot \epsilon_v \cdot \{\delta\} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \{e\} \right) \quad (4.41)$$

onde:

$\{\sigma(t)\}$ é o vetor que contém as componentes de tensão no ponto considerado:

$$\{\sigma(t)\} = \left(\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right)^T ;$$

$D(t)$ é o módulo viscoelástico do material no instante t ;

ϵ_v é a deformação volumétrica no ponto considerado:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z ;$$

$\{\delta\}$ é o vetor que contém as componentes da matriz identidade de ordem 3:

$$\{\delta\} = \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T ;$$

$\{e\}$ é o vetor que contém as componentes do tensor anti-esférico de deformações no ponto considerado:

$$\{e\} = \{\epsilon\} - \frac{1}{3} \epsilon_v \cdot \{\delta\}$$

sendo as componentes do vetor $\{\epsilon\}$ dadas por:

$$\{\epsilon\} = 0,5 \cdot \left(2\epsilon_x \quad 2\epsilon_y \quad 2\epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right)^T$$

Uma forma equivalente de expressar a relação (4.41) é:

$$\{\sigma(t)\} = D(t) \cdot \left(\frac{1}{3(1-2\nu)} \cdot \{\delta\} \cdot \{\delta\}^T + \frac{1}{1+\nu} \cdot [M] \right) \cdot \{\epsilon\} \quad (4.42)$$

onde $[M]$ é a matriz dada por: $[M] = [I]^6 - \frac{1}{3} \{\delta\} \cdot \{\delta\}^T$, sendo $[I]^6$ a matriz identidade de ordem 6.

Verifica-se facilmente que a eq. (4.41) e sua equivalente (4.42) podem também representar o comportamento de um material elástico linear se fizermos com que o módulo $D(t)$ fique constante no tempo. Logo, para provarmos a consistência da formulação, resta apenas mostrar que as referidas equações recaem no caso unidimensional no caso particular em que o estado de tensões é dado por:

$$\{\sigma\} = \left(\sigma_x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^T$$

Tal estado de tensões pode ser obtido aplicando-se uma tensão constante σ_x numa barra fina, na direção de seu eixo. Neste caso, as distorções γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{zx} serão todas nulas e, lembrando que o material é suposto isotrópico, podemos escrever ainda:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x \quad \text{e} \quad \epsilon_v = \epsilon_x \cdot (1-2\nu)$$

Neste caso, teremos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{D(t) \cdot (1-2\nu)}{3(1-2\nu)} \epsilon_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{D(t)}{3(1+\nu)} \cdot \epsilon_x \cdot \begin{bmatrix} 2(1+\nu) \\ -(1+\nu) \\ -(1+\nu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja: $\sigma_x = D(t) \cdot \epsilon_x$, o que prova a consistência da formulação descrita.

Passemos agora à segunda formulação utilizada para a obtenção de equações constitutivas viscoelásticas multiaxiais. Nesta formulação a única hipótese feita é a de isotropia do material, o que permite afirmar que:

- a) um estado hidrostático de tensão, devido à sua simetria, corresponde unicamente à um estado de deformações capaz de alterar as dimensões de um elemento de volume, sem contudo alterar sua forma;
- b) um estado de cisalhamento puro produz, num elemento de volume, apenas uma deformação cisalhante, sem alterar seu volume.

Assim, admite-se que a parte esférica do tensor das tensões está relacionada exclusivamente com a correspondente parte esférica do tensor das deformações, através de:

$$\sigma_m = K(t) \cdot \epsilon_v \quad (4.43)$$

onde $K(t)$ é o módulo viscoelástico volumétrico do material e

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$$

Da mesma forma, a parte anti-esférica do tensor das tensões irá se relacionar unicamente com a correspondente parte anti-esférica do tensor das deformações, através de:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) \\ (\sigma_y - \sigma_m) \\ (\sigma_z - \sigma_m) \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \mu(t) \cdot \begin{bmatrix} 2(\epsilon_x - \frac{1}{3}\epsilon_v) \\ 2(\epsilon_y - \frac{1}{3}\epsilon_v) \\ 2(\epsilon_z - \frac{1}{3}\epsilon_v) \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

ou, simplificadamente:

$$\{s\} = 2\mu(t) \cdot \{e\} \quad (4.45)$$

onde $\{s\}$ representa o vetor contendo as componentes do tensor anti-esférico das tensões e $\mu(t)$ é o módulo de cisalhamento viscoelástico do material.

Observamos que nas formulações aqui apresentadas pode-se lançar mão dos modelos reológicos vistos no item 4.2 para determinarmos uma aproximação das funções viscoelásticas $D(t)$, $K(t)$, $\mu(t)$, etc. Neste caso, a obtenção dos parâmetros (E_i, η_i) de cada modelo seria feita de forma análoga à vista nos itens 4.2.6 e 4.2.7. Lembramos ainda que, no caso da segunda formulação, pode-se utilizar modelos reológicos distintos para as componentes esférica e anti-esférica dos tensores.

4.4.3- Outras formas de representação a três dimensões

Outras formas de representar o comportamento à fluência de materiais viscoelásticos a três dimensões resultam da extensão de leis empíricas de fluência para o caso tridimensional. Um exemplo disto é a formulação de Pao e Marin, a qual considera que a deformação total consiste na soma de três parcelas independentes, a saber: uma parcela elástica ϵ_1 , uma parcela viscoelástica recuperável ϵ_2 , e uma parcela viscoelástica não-recuperável ϵ_3 (deformação permanente), como visto no item 3.5.1. No caso de carregamento sob tensão constante, a deformação total seria, então, dada por⁽⁶¹⁾:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + K\sigma^n \cdot (1 - \exp(-qt)) + B \cdot \sigma^n \cdot t \quad (4.46)$$

onde K, n, q e B são constantes do material e E é o módulo de Young.

Generalizando a relação (4.46) para o caso tridimensional, obtêm-se as deformações principais ϵ_a , ϵ_b e ϵ_c em função das tensões principais σ_a , σ_b e σ_c através de expressões como:

$$\epsilon_a = \frac{1}{E} \left(\sigma_a - \nu(\sigma_b + \sigma_c) \right) + \frac{1}{2} \left(2\sigma_a - \sigma_b - \sigma_c \right) (J_2)^{\frac{(n-1)}{2}} \cdot \left(K(1 - \exp(-qt)) + Bt \right) \quad (4.47)$$

onde J_2 é dado por:

$$J_2 = \frac{1}{2} \left((\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 \right)$$

As hipóteses implícitas nesta formulação são:

- 1) a parcela da deformação dependente do tempo é função apenas das tensões de cisalhamento (note que J_2 é proporcional ao quadrado da tensão de cisalhamento octaédrica);
- 2) a parcela da deformação dependente do tempo independe de alterações no volume do corpo (observe que o coeficiente de Poisson do material só é considerado na parcela de deformação elástica instantânea);
- 3) a resposta à tração ou à compressão é a mesma.

Vários estudos experimentais foram realizados por BENHAM apud WARD⁽⁶¹⁾ para comprovar a validade das relações (4.47). Alguns resultados obtidos para a fluência do polimetil metacrilato (PMMA) estão mostrados na figura 4.18, onde se pode ver que o comportamento do material à tração e a compressão não são os mesmos, indicando que a terceira hipótese da formulação não se justifica.

Outros ensaios realizados por BENHAM e McCAMMOND mostraram, contudo, que as hipóteses (1) e (2) são razoáveis, pelo menos para o PMMA.

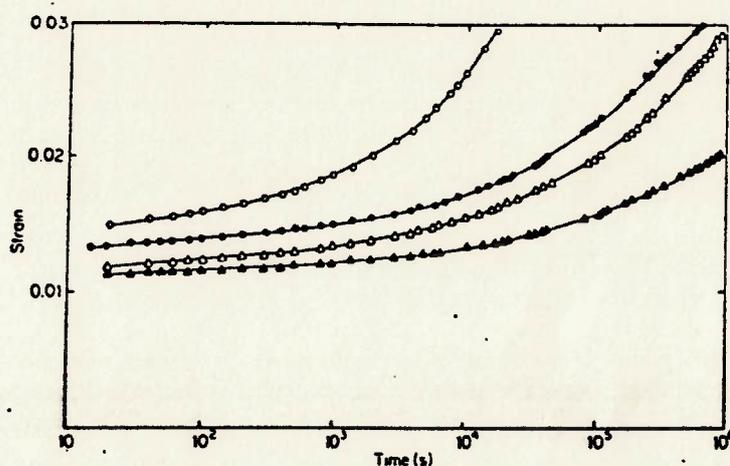


Fig. 4.18: Curvas de fluência para PMMA - deformação axial.

Legenda: $\sigma = 4,2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$: \circ , tração; \bullet , compressão.

$\sigma = 3,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$: Δ , tração; \blacktriangle , compressão.⁽⁶¹⁾

Outras formas de representação do comportamento viscoelástico a três dimensões foram apresentadas^(12,27). Tais representações não serão, porém, aqui discutidas pois além de envolverem uma maior complexidade matemática pouco acrescentam ao que já foi discutido.

5 - O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE FLUÊNCIA DE MATERIAIS POLIMÉRICOS

5.1- Introdução

Na solução de problemas estruturais complexos - os quais envolvem muitas vezes complicadas geometrias, condições de contorno variáveis no tempo e materiais cujo comportamento mecânico pode ser função de diversos parâmetros (como tempo, temperatura, taxas de tensão ou deformação, etc) -, os métodos numéricos são, geralmente, considerados como a única maneira possível para sua abordagem, uma vez que soluções analíticas fechadas existem apenas para uma classe restrita de problemas envolvendo várias simplificações (de geometria, de material e outras).

No tocante à análise de fluência, o método numérico que tem sido utilizado com predominância é o método dos elementos finitos (MEF), conforme atestam vários autores que trataram sobre o tema, como KRAUS⁽³⁷⁾, CHEN & HSU⁽¹⁵⁾, MICHAELI & MOHR-MATJUSCHEK⁽⁴²⁾, BENALLAL et al.⁽⁴⁾, e KLEIN⁽³⁶⁾, entre outros. Segundo KRAUS⁽³⁷⁾, isto se deve ao fato de que, na época em que os analistas se voltaram para os problemas de fluência (início dos anos 70), o método dos elementos finitos já havia aparecido como uma potente e bem desenvolvida ferramenta para a análise de tensões, sendo, portanto, imediatamente utilizado para a resolução de problemas dessa natureza.

Existem, porém, vários algoritmos que podem ser utilizados com o MEF para a resolução de problemas viscoelásticos. Tais algoritmos diferem, sobretudo, quanto ao tipo de equação constitutiva a ser utilizada na descrição do material, quanto ao tipo de análise a ser efetuada (domínio do tempo ou da frequência) e quanto aos esquemas de integração utilizados na resolução das equações diferenciais viscoelásticas.

O objetivo principal deste capítulo (bem como de todo o trabalho) é apresentar uma forma eficiente de se resolver problemas de viscoelasticidade, através do MEF. Para tanto, vamos inicialmente apresentar e comparar algumas formas de solução, encontradas na literatura, envolvendo o uso do método dos elementos finitos.

Uma vez definidos o modelo do material, o tipo de análise a ser efetuada e o esquema de integração utilizado, passaremos, então, a analisar alguns problemas estruturais envolvendo materiais poliméricos, a fim de confrontar os resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos. Lembramos que, apesar de os problemas estruturais resolvidos serem de geometria bastante simples (basicamente treliças e vigas), os resultados obtidos irão trazer importantes informações que permitirão a continuidade do trabalho para outros tipos de elementos.

5.2- Formas de solução do problema viscoelástico através do MEF

Como foi explicado anteriormente, existem várias abordagens para se efetuar uma análise estrutural de materiais viscoelásticos usando o MEF. Uma primeira forma de classificar essas diferentes abordagens seria, por exemplo, com relação ao domínio em que a análise é efetuada: frequência ou tempo.

As análises feitas no domínio da frequência consistem, basicamente, em remover a variável tempo das equações viscoelásticas pela aplicação de transformadas integrais, como a de Laplace. Obtém-se, assim, um "problema elástico associado" que pode ser resolvido no domínio da frequência pelo método dos elementos finitos, para valores discretos do parâmetro transformado. Finalmente, faz-se a inversão das tensões, deformações e deslocamentos transformados para o plano real do tempo, empregando-se um processo numérico adequado⁽⁴⁴⁾. A principal vantagem dessa abordagem é que podemos determinar os deslocamentos e os níveis de tensão e de deformação do corpo em qualquer instante desejado, sem a necessidade de calculá-los nos instantes anteriores (como numa análise incremental).

Contudo, tal análise só pode ser feita para o caso de corpos viscoelásticos lineares (o que nem sempre se verifica na prática). Além disso, para a aplicação da transformada de Laplace, é preciso que a forma e o volume do corpo não sejam alterados (a menos de deslocamentos infinitesimais) e que as regiões sobre as quais se prescrevem as condições de contorno mecânicas e geométricas sejam mantidas fixas durante o período em que a análise é feita. Um outro aspecto que vem limitar o campo de aplicação desse método é a hipótese de condições iniciais nulas (para $t \rightarrow 0^+$, as tensões, deformações e todas suas derivadas devem ser iguais a zero), feita para simplificar a transformada de Laplace. Finalmente, uma última desvantagem a ser considerada seriam as dificuldades e os erros numéricos decorrentes da inversão para o domínio do tempo.

Partindo agora para as análises feitas no domínio do tempo, verificamos que essas constituem a maior parte das abordagens que usam o MEF como ferramenta na determinação do campo de tensões e deformações em corpos viscoelásticos. Neste caso, o problema é geralmente resolvido através de uma análise passo-a-passo na qual procura-se o estado de equilíbrio da estrutura no instante t^{j+1} a partir do seu estado de equilíbrio no instante anterior t^j , para cada incremento de tempo.

Verifica-se que a resolução do problema no domínio do tempo não traz os mesmos inconvenientes apontados anteriormente devidos à aplicação da transformada de Laplace. Desta forma é possível analisar problemas de viscoelasticidade não-linear, envolvendo ainda grandes deformações e grandes deslocamentos (não-linearidade geométrica), com condições de contorno variáveis no tempo e condições iniciais não necessariamente nulas. A única desvantagem da análise no domínio do tempo é seu custo, pois essa precisa ser efetuada passo-a-passo até atingirmos o instante de tempo em que queremos calcular as tensões, as deformações e os deslocamentos da estrutura.

Considerando as vantagens e desvantagens dos dois tipos de abordagem existentes na literatura para a resolução de problemas de viscoelasticidade, concluímos que a análise no domínio do tempo é a mais adequada, pois permite a resolução de problemas gerais sem a necessidade de simplificações muitas vezes não condizentes com a prática.

Limitando-nos então às abordagens feitas no domínio do tempo, vemos que há, ainda, o problema de se escolher um modelo que descreva adequadamente o comportamento do material (equação constitutiva) para que se possa obter resultados confiáveis através do MEF. MICHAELI; MOHR-MATUSCHEK⁽⁴²⁾ fizeram recentemente um estudo comparativo de vários modelos materiais utilizados em análise estrutural com o MEF para verificar qual deles representava de melhor forma o comportamento de uma barra de polietileno de alta densidade (HDPE)

submetida a um ensaio de relaxação de tensões ($\epsilon = 4\%$) a temperatura constante ($T = 23^\circ\text{C}$).

Os modelos estudados pelos autores foram quatro: dois modelos de plasticidade (um independente, e o outro dependente da taxa de deformação), o modelo de fluência proposto por FINDLEY⁽²⁰⁾ - pelo qual a taxa de deformação de fluência era calculada por $\dot{\epsilon}_c = m.t^n$, com $m = m(\sigma)$ e $n = n(\sigma)$ - e o modelo generalizado de Maxwell, já discutido no cap. 4.

Os autores confrontaram o resultado experimental com os resultados obtidos pela utilização dos vários modelos em programas de análise estrutural (veja fig. 5.1), concluindo que o modelo mais apropriado para descrever o comportamento do material é o modelo generalizado de Maxwell. Segundo os autores, tal modelo pode ainda simular com grande precisão o comportamento de materiais viscoelásticos para casos mais complexos de carregamento.

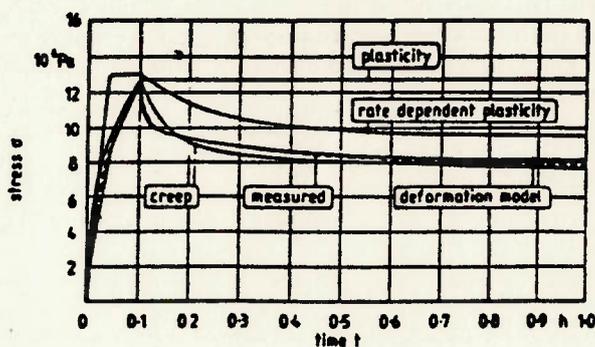


Fig. 5.1: Comparação da curva de relaxação real do HDPE com curvas de relaxação obtidas pelo MEF utilizando diferentes modelos do material ($\epsilon = 4\%$, $T = 23^\circ\text{C}$)⁽⁴²⁾

Além de representar o comportamento do material com suficiente precisão (o que, aliás, deve ser o requisito mínimo necessário para a utilização de um modelo), lembramos que o modelo generalizado de Maxwell pode ser usado para qualquer material polimérico, ao contrário da lei de fluência proposta por FINDLEY, que se aplica bem apenas para alguns polímeros⁽⁴¹⁾. Verifica-se, também, que os parâmetros que descrevem tal modelo podem ser facilmente obtidos através das curvas de fluência do material (conforme visto no cap.4), obtidas na literatura ou através de ensaios.

Acreditamos que os motivos apontados são suficientes para adotarmos o modelo generalizado de Maxwell como modelo representativo do material numa análise estrutural utilizando o método dos elementos finitos. Resta-nos apenas descrever um método adequado para a integração das equações diferenciais viscoelásticas dadas pelo modelo. A palavra "adequado" significa que o esquema de integração deve ser consistente com o tipo de análise e o modelo empregados na formulação. Para uma análise incremental no domínio do tempo utilizando o modelo generalizado de Maxwell, verifica-se que o método de integração de tensões é o mais indicado para os nossos propósitos, sendo, portanto, usado em nossa formulação com elementos finitos.

5.3- Descrição do método de integração de tensões

O método de integração de tensões trata-se de um algoritmo numérico de integração que nos permite resolver um problema viscoelástico (ou qualquer outro cujo modelo do material seja inelástico) através de uma análise incremental realizada ao longo do tempo. ^(50,51)

O método consiste em procurar, em cada incremento de tempo, o estado de equilíbrio da estrutura no instante t^{j+1} , a partir do seu estado de equilíbrio no instante genérico t^j . Assim, se dentro de um incremento for definido um algoritmo numérico de integração para as equações diferenciais, a tensão σ^{j+1} no final do incremento torna-se uma função da deformação ϵ^{j+1} no mesmo instante. Diz-se, então, que o material tornou-se algoritmicamente elástico ou holônomo.

Para ilustrar o procedimento, consideremos o modelo generalizado de Maxwell e vejamos como podemos torná-lo algoritmicamente elástico:

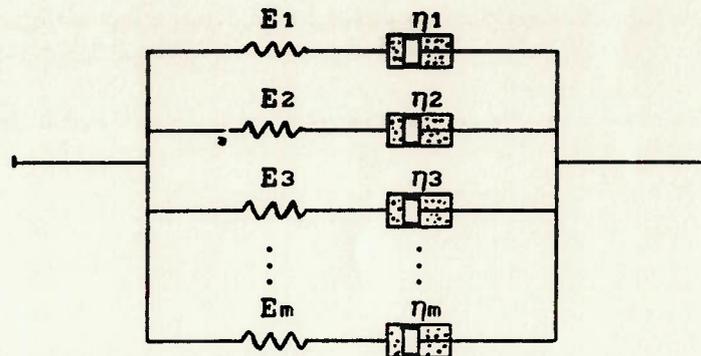


Fig. 5.2: Modelo Generalizado de Maxwell

Como vimos no item 4.2.5, a deformação total ϵ deve ser a mesma em cada um dos ramos do modelo e pela equação (4.17):

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i}$$

Seja, então, o algoritmo definido pela aproximação:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} = \frac{\epsilon^{j+1} - \epsilon^j}{t^{j+1} - t^j} \quad (5.1)$$

onde $\Delta t = t^{j+1} - t^j$ e os índices superiores j e $j+1$ indicam as grandezas no início e no fim do incremento de tempo. Agora é possível integrar as equações diferenciais para a tensão em cada uma das unidades de Maxwell e somá-las para se obter σ^{j+1} . O resultado é dado por^(50,51):

$$\sigma^{j+1} = \sum_{i=1}^m \left[\sigma_i^j + \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} \int_{t^j}^{t^{j+1}} E_i \cdot \exp\left(\int_{t^j}^t E_i \mu_i dt\right) dt \right] \exp\left(-\int_{t^j}^{t^{j+1}} E_i \mu_i dt\right) \quad (5.2)$$

onde os parâmetros μ_i representam os módulos de fluidez do modelo de Maxwell ($\mu_i = 1/\eta_i$).

Diferenciando-se (5.2) em relação a ϵ^{j+1} , obtém-se o módulo algorítmico de rigidez tangente, dado por:

$$D = \frac{\partial \sigma^{j+1}}{\partial \epsilon^{j+1}} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^j}^{t^{j+1}} E_i \cdot \exp\left(\int_{t^j}^t E_i \mu_i dt\right) dt \right] \cdot \exp\left(-\int_{t^j}^{t^{j+1}} E_i \mu_i dt\right) \quad (5.3)$$

Admitindo-se que os parâmetros E_i e μ_i (ou E_i e η_i) permaneçam constantes durante o incremento de tempo Δt em que é feita a integração, (5.2) e (5.3) simplificam-se para:

$$\sigma^{j+1} = \sum_{i=1}^m \left[\sigma_i^j + \frac{\Delta \epsilon}{\mu_i \Delta t} \cdot \left(\exp(E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) - 1 \right) \right] \cdot \exp(-E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) \quad (5.4)$$

$$D = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{\mu_i \Delta t} \cdot \left(\exp(E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) - 1 \right) \right] \cdot \exp(-E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) \quad (5.5)$$

Observe que, de acordo com (5.5), se fizermos com que a fluidez de uma das unidades do modelo generalizado de Maxwell tenda a zero ($\mu_i \rightarrow 0$), o módulo algorítmico de rigidez tangente desta unidade será E_i .

Vemos então que, através do método de integração de tensões, o problema quase-estático da viscoelasticidade pode ser resolvido facilmente utilizando a "elasticidade fictícia".

5.4- Formulação básica para aplicação do método

O objetivo deste item não é fazer uma apresentação completa do Método dos Elementos Finitos ou da formulação aqui utilizada para a resolução dos problemas (formulação por deslocamentos). Isto pode ser encontrado em ótimas referências que tratam do assunto como ZIENKIEWICZ⁽⁶³⁾, BATHE⁽²⁾, GALLAGHER⁽²³⁾ e HUEBNER⁽³³⁾, entre outros. O que pretendemos aqui é apenas mostrar, de uma maneira simples, como obter as equações de equilíbrio para a resolução de uma estrutura viscoelástica, sob carregamento estático, através de uma análise incremental usando a formulação por deslocamentos do MEF e o método de integração de tensões descrito em 5.3.

Consideremos, então, o sólido contínuo esquematizado na fig. 5.3 e sua subdivisão em "elementos finitos" arbitrários.

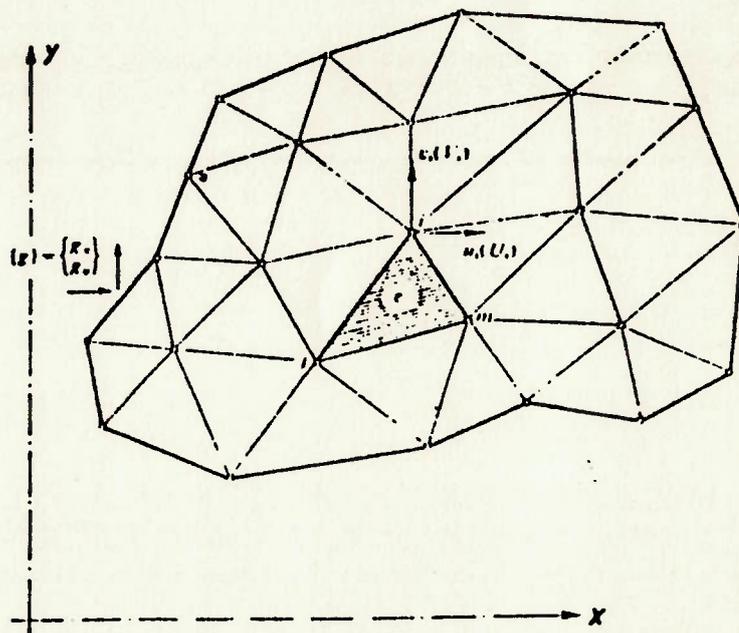


Fig. 5.3: Subdivisão do contínuo em elementos finitos⁽⁶³⁾

Um elemento típico, e , é definido pelos seus nós i, j, m , etc e suas linhas de contorno. Podemos, então, indicar os deslocamentos de qualquer

ponto do elemento (em seu interior ou na fronteira) pelo vetor $\{f\}$, dado por:

$$\{f\} = [N] \cdot \{Q\}^e = \begin{bmatrix} [N_i] & [N_j] & [N_m] & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{Q_i\} \\ \{Q_j\} \\ \{Q_m\} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde $\{Q\}^e$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, e as componentes de $[N] = [N_i], [N_j], [N_m], \dots$ são, geralmente, funções da posição (isto é, das coordenadas do ponto considerado) devendo ser escolhidas de forma a darem os deslocamentos apropriados quando as coordenadas dos nós apropriados são inseridas em (5.6). Tais funções são chamadas "funções de interpolação" e representam um importante papel na formulação de elementos finitos.

Conhecendo-se os deslocamentos em todos os pontos do elemento, as deformações em qualquer ponto também podem ser determinadas. Tais deformações sempre poderão ser expressas através de uma relação matricial do tipo:

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{Q\}^e \quad (5.7)$$

Utilizando o método de integração de tensões descrito no item 5.3, podemos admitir que o comportamento do material seja elástico linear durante cada incremento de tempo $\Delta t = t^{j+1} - t^j$. É possível, então, estabelecer uma relação, entre os campos de tensão e de deformação no interior do elemento, da forma:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} + \{\sigma_r\} \quad (5.8)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade (fictícia) contendo as propriedades do material no intervalo de tempo considerado, e $\{\sigma_r\}$ é um vetor de "tensões residuais" que considera toda a história do carregamento.

Para obtermos as equações de equilíbrio do elemento em cada incremento de tempo, consideremos finalmente o vetor $\{F\}^e$ das forças nodais que são estaticamente equivalentes às tensões de fronteira e cargas

distribuídas no elemento.

$$\{F\}^e = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_j\} \\ \{F_m\} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Para se obter o vetor $\{F\}^e$ de forças nodais equivalentes, vamos impor um conjunto de deslocamentos nodais arbitrários (virtuais) ao elemento e igualar os trabalhos externos e internos realizados pelos vários esforços e tensões durante tais deslocamentos.

Se indicarmos por $d\{Q\}^e$ esse deslocamento nodal virtual, os deslocamentos e deformações correspondentes no interior do elemento serão:

$$d\{f\} = [N].d\{Q\}^e \quad (5.10a)$$

$$d\{\epsilon\} = [B].d\{Q\}^e \quad (5.10b)$$

O trabalho efetuado pelas forças nodais é dado pela soma dos produtos de cada componente de força pelo seu correspondente deslocamento. Designando esse trabalho por T^e teremos:

$$T^e = \left(d\{Q\}^e \right)^T \cdot \{F\}^e \quad (5.11)$$

Da mesma forma, o trabalho interno efetuado pelas tensões e cargas distribuídas será:

$$T^i = \int_V \left(d\{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} - d\{f\}^T \cdot \{p\} \right) dV \quad (5.12)$$

onde $\{p\}$ é o vetor das forças de campo que agem no corpo, e a integral é estendida por todo o volume do elemento.

Utilizando as relações (5.10a) e (5.10b) em (5.12), teremos:

$$T^i = \left(d\{Q\}^e \right)^T \cdot \int_V \left([B]^T \cdot \{\sigma\} - [N]^T \cdot \{p\} \right) dV \quad (5.13)$$

Igualando o trabalho externo T^e ao trabalho interno T^i (equações 5.11 e 5.13) e lembrando que a relação é válida para qualquer deslocamento

virtual, teremos:

$$\{F\}^e = \int_V \left([B]^T \cdot \{\sigma\} - [N]^T \cdot \{p\} \right) dV \quad (5.14)$$

Substituindo, agora, as equações (5.7) e (5.8) em (5.14) virá:

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \right) \cdot \{Q\}^e + \int_V [B]^T \cdot \{\sigma_r\} dV - \int_V [N]^T \cdot \{p\} dV \quad (5.15)$$

Observamos que a expressão que multiplica o vetor de deslocamentos nodais do elemento nada mais é que a matriz de rigidez do mesmo:

$$[k]^e = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \quad (5.16)$$

enquanto as outras duas integrais representam, respectivamente, os vetores de esforços nodais correspondentes às tensões residuais e às cargas distribuídas.

Estabelecendo as equações de equilíbrio (5.15) para todos os elementos finitos que compõem a estrutura, chegaremos finalmente a:

$$\{F\} = [K] \cdot \{Q\} + \{F_r\} \quad (5.17)$$

onde $\{F\}$ representa o vetor de esforços nodais equivalentes aplicados aos nós da estrutura, devidos a todos os carregamentos externos e às cargas distribuídas pelo corpo; $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura; $\{Q\}$ é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura e $\{F_r\}$ é o vetor de cargas residuais que considera a história do carregamento, ou seja, o comportamento viscoelástico do material.

Com base na formulação por elementos finitos aqui descrita e no algoritmo de integração de tensões apresentado no item anterior, foi possível escrever um programa de análise estrutural para a resolução de problemas viscoelásticos, o qual denominamos MEFVIS. Nos itens seguintes vamos apresentar os resultados obtidos pelo programa para alguns tipos de elementos.

5.5- Solução para elementos de treliça

O programa MEFVIS permite a resolução de treliças viscoelásticas bidimensionais ou tridimensionais, através da formulação descrita nos itens anteriores. As únicas hipóteses feitas neste caso são:

- (1) há linearidade geométrica, isto é, as deformações e os deslocamentos da estrutura são pequenos;
- (2) o material se comporta da mesma forma à tração e à compressão, de modo que as curvas de fluência (à tração) serão utilizadas em ambos os casos.

Conforme visto no item 4.4.3, a hipótese (2) pode não estar correta. Contudo, as únicas curvas que dispúnhamos para nossa análise eram as curvas de fluência do polietileno (à tração), sendo necessário admitir tal hipótese.

O elemento de treliça viscoelástico pode ser facilmente implementado num programa de elementos finitos, já que os campos de tensão e deformação são constantes ao longo de todo o volume do elemento. Lembrando que a equação de equilíbrio (5.15), para um único elemento, é dada por (desprezando as forças de campo que agem no elemento):

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \right) \cdot \{Q\}^e + \int_V [B]^T \cdot \{\sigma_r\} dV$$

e sabendo que, para um elemento de treliça no sistema local de coordenadas, a matriz [B] tem a forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

resulta então a seguinte equação de equilíbrio (no sistema local):

$$\{F\}^e = [k]^e \cdot \{Q\}^e + \{F_r\}^e \quad (5.19)$$

onde:

$$[k]^e = \frac{D \cdot A}{\ell} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \{F_r\}^e = \sigma_r \cdot A \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad ;$$

A = área da seção transversal do elemento de treliça;

ℓ = comprimento do elemento de treliça;

D = módulo viscoelástico do elemento de treliça (dado pela eq. 5.5);

σ_r = tensão residual no elemento de treliça.

O cálculo da tensão residual σ_r é feito com a ajuda das equações 5.4 e 5.8, resultando:

$$\sigma_r = -D \cdot \epsilon^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i^j \cdot \exp(-E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) \quad (5.20)$$

Verifica-se que para o cálculo de σ_r basta conhecermos os estados de tensão e deformação do elemento no instante de tempo anterior (t^j). Obviamente tais estados podem ser admitidos como nulos no instante inicial de forma que, no primeiro passo da solução, $\sigma_r = 0$. Lembramos, por fim, que o modelo usado para o material é o mesmo da figura 4.11, cujos parâmetros foram calculados no item 4.2.7 (tabela 4.2).

Podemos agora resolver um exemplo simples de estrutura treliçada e comparar os resultados obtidos pelo programa com os resultados experimentais. Consideremos, então, a treliça esquematizada na figura 5.4 e vamos admitir que o material é o polietileno de alta densidade e que a temperatura de trabalho seja de 20°C , constante durante o carregamento. A treliça deve suportar uma carga horizontal de 48 kgf e uma carga vertical de 56 kgf durante um período de 1000 horas (aproximadamente 42 dias) sem que haja deformação excessiva. A área da seção transversal das barras é de $2,0\text{cm}^2$.

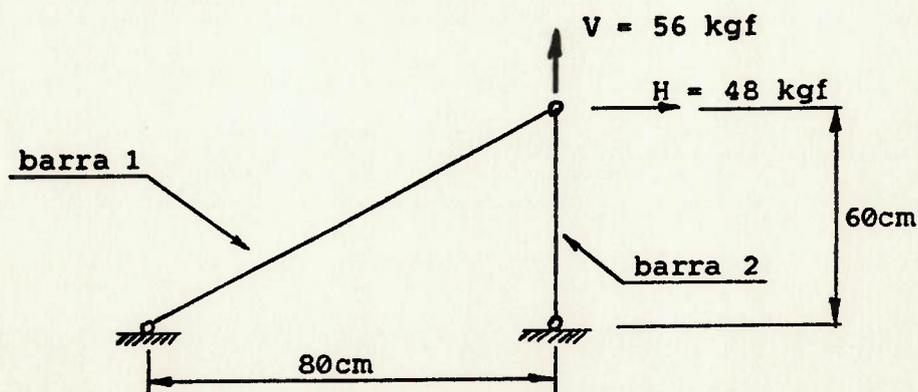


Fig. 5.4: Estrutura treliçada viscoelástica sob carregamento estático.

Uma vez que as deformações e os deslocamentos não são excessivos, há linearidade geométrica e, portanto, as tensões nas barras podem ser calculadas diretamente fazendo-se o equilíbrio de forças nos nós. Considerando o nó superior, onde as forças H e V são aplicadas, teremos:

$$\left| \begin{array}{l} H = 0,8.F_1 \\ V = 0,6.F_1 + F_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} F_1 = 60\text{kgf} \\ F_2 = 20\text{kgf} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 30 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_2 = 10 \text{ kgf/cm}^2 \end{array} \right.$$

onde F_1 e F_2 são as forças de tração agindo nas barras 1 e 2 durante todo o carregamento, e σ_1 e σ_2 são as respectivas tensões.

Uma vez conhecidas as tensões em cada barra, podemos determinar o nível de deformação das barras 1 e 2 para qualquer instante desejado através das curvas de fluência do material (fig.4.10). Assim procedemos para comparar os resultados experimentais com os resultados obtidos pelo programa MEFVIS para cada uma das barras (ver tabelas 5.1 a 5.6).

Verificamos, inicialmente, que o programa calculou as tensões em cada uma das barras com 0% (zero por cento) de erro, tendo isto ocorrido em todos os instantes de tempo considerados e para diversos valores do incremento de tempo tomado na análise.

Quanto aos níveis de deformação em cada barra, pudemos constatar pela análise das tabelas 5.1 a 5.6 que o erro percentual (em módulo) entre as deformações medidas experimentalmente (ϵ_{exp}) e as calculadas (ϵ_{cal}) diminui bastante conforme diminuimos o incremento de tempo na análise passo-a-passo. Verifica-se, também, a ocorrência de maiores erros para a barra 1, submetida à maior tensão, quando comparados com os da barra 2 para um mesmo instante de tempo e um mesmo incremento Δt . Finalmente, nota-se ainda uma tendência de diminuição do erro com o decorrer do tempo, para uma mesma barra e um mesmo incremento Δt .

Lembramos, porém, que tais observações não devem servir como regra

geral, pois seria necessário verificar se o mesmo ocorre para outros valores de tempos de relaxação usados no cálculo dos parâmetros do modelo generalizado de Maxwell. Provavelmente, um modelo com um maior "espectro" de tempos de relaxação permitirá a obtenção de melhores resultados.

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	—	—	0,772	1,098
	erro(%)	—	—	-30,2	-7,4
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	—	—	0,250	0,289
	erro(%)	—	—	-11,0	-3,0

Tabela 5.1 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 250$ horas)

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	—	0,609	1,007	1,134
	erro(%)	—	-32,3	-9,0	-4,4
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	—	0,203	0,268	0,293
	erro(%)	—	-19,1	-4,6	-1,7

Tabela 5.2 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 100$ horas)

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,575	0,660	1,025	1,145
	erro(%)	-32,3	-26,6	-7,3	-3,5
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,192	0,215	0,270	0,295
	erro(%)	-15,8	-14,3	-3,9	-1,0

Tabela 5.3 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 50$ horas)

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,626	0,826	1,034	1,150
	erro(%)	-26,3	-8,1	-6,5	-3,0
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,204	0,228	0,271	0,296
	erro(%)	-10,5	-9,1	-3,6	-0,7

Tabela 5.4 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 25$ horas)

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,779	0,846	1,040	1,154
	erro(%)	-8,2	-5,9	-6,0	-2,7
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,217	0,231	0,273	0,296
	erro(%)	-4,8	-8,0	-2,8	-0,7

Tabela 5.5 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 10$ horas)

	t(horas)	50	100	500	1000
Barras 1	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,849	0,899	1,106	1,186
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,802	0,861	1,048	1,160
	erro(%)	-5,5	-4,2	-5,2	-2,2
Barras 2	$\epsilon_{exp}(\%)$	0,228	0,251	0,281	0,298
	$\epsilon_{cal}(\%)$	0,221	0,234	0,274	0,297
	erro(%)	-3,1	-6,8	-2,5	-0,3

Tabela 5.6 - Comparação entre as deformações obtidas experimentalmente e as calculadas para as barras 1 e 2 ($\Delta t = 1$ hora)

O apêndice B traz os resultados do programa MEFVIS para o caso da estrutura em questão, para $\Delta t = 1$ hora. O intervalo de tempo para impressão dos resultados foi de 50 horas.

5.6- Solução para elementos de viga

O programa MEFVIS permite também a resolução de pórticos planos viscoelásticos através da formulação apresentada, desde que as seções transversais sejam constantes e retangulares. As hipóteses admitidas foram:

- (1) existência de linearidade geométrica;
- (2) o material se comporta da mesma forma à tração e à compressão;
- (3) a influência das tensões de cisalhamento é desprezível no cálculo das deflexões das vigas;
- (4) admite-se uma distribuição linear de deformações ao longo das seções transversais das vigas.

Como antes, a equação de equilíbrio para um único elemento de viga é dada por:

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \right) \cdot \{Q\}^e + \int_V [B]^T \cdot \{\sigma_r\} dV$$

Contudo, diferentemente do elemento de treliça viscoelástico, o elemento de viga já apresenta certas peculiaridades que dificultam sua implementação num programa de elementos finitos. Como as tensões variam ao longo do comprimento e da altura do elemento, o módulo viscoelástico $D(t)$ também varia ao longo de seu volume. Desta forma, o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento deve ser feita subdividindo-o e integrando o produto $[B]^T \cdot [D] \cdot [B]$ de forma explícita. No programa MEFVIS, cada elemento de viga foi subdividido em 40 sub-elementos, como mostra a figura 5.5.

Em cada um dos sub-elementos (m,n) do elemento de viga, o módulo D foi suposto constante, sendo calculado de acordo com a equação (5.5). Neste caso, os parâmetros (E_i, μ_i) que aparecem na fórmula eram interpolados linearmente da tabela 4.2, em função da tensão calculada no centro de cada sub-elemento no instante anterior (t^j) .

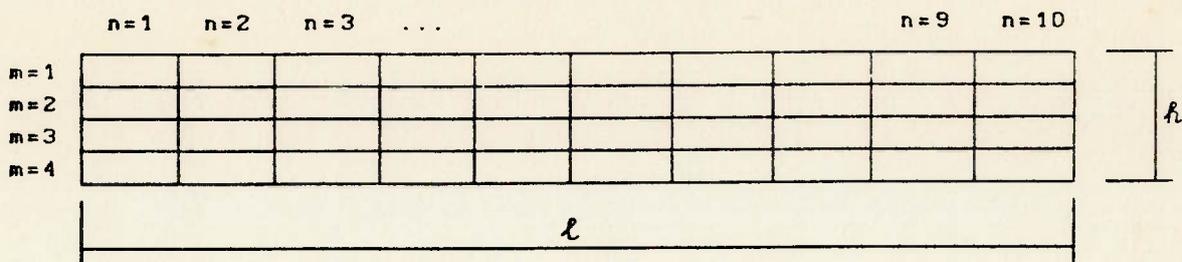


Fig. 5.5: Subdivisão do elemento de viga

Analogamente ao cálculo da matriz de rigidez, o vetor de cargas residuais $\{F_r\}^e$ deve ser calculado de forma explícita, ou seja, somando-se os valores de $\int [B]^T \cdot \{\sigma_r\} dV$, integrados em cada sub-elemento (m,n) da viga.

O valor da tensão residual, em cada sub-elemento, também foi suposto constante (no volume), e calculado através da equação 5.20 repetida abaixo:

$$\sigma_r(m,n) = -D \cdot \epsilon^j + \sum_{i=1}^m \sigma_i^j \cdot \exp(-E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) \quad (5.20)$$

Os valores de ϵ^j e σ_i^j que aparecem acima também foram avaliados no centro de cada sub-elemento (m,n) e, naturalmente, as tensões e deformações calculadas se referem ao centro do sub-elemento (ver apêndice C).

A fim de analisar os resultados fornecidos pelo programa, vamos resolver um exemplo cujo resultado experimental é conhecido⁽²⁴⁾. Consideremos a viga biapoiada esquematizada na figura 5.6 e vamos admitir que o material é o polietileno de alta densidade e que a temperatura de trabalho seja de 20°C, constante durante o carregamento. A viga deve suportar uma carga vertical concentrada P , aplicada no meio do vão, durante um período de 500 horas sem que haja deformação excessiva. O comprimento da viga entre apoios é de 500mm e a seção transversal da mesma é quadrada (30mm X 30mm).

Vamos confrontar os resultados experimentais com os resultados obtidos pelo programa para os três valores de carregamento estudados por GAUBE⁽²⁴⁾: $P = 18 \text{ kgf}$, $P = 7,2 \text{ kgf}$ e $P = 1,8 \text{ kgf}$.

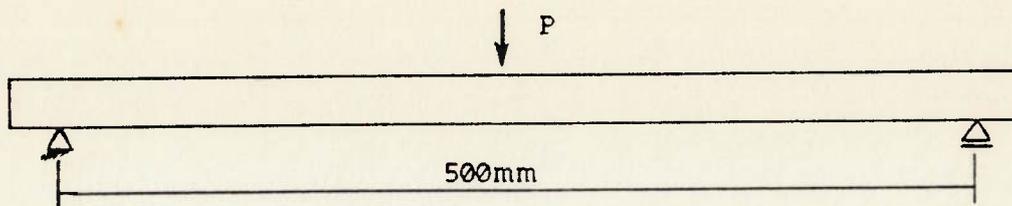


Fig. 5.6: Viga viscoelástica submetida a carga concentrada.

Para cada um desses casos, vamos calcular a máxima deflexão da viga para diversos valores de incrementos de tempo (Δt). Serão utilizados quatro elementos de viga (iguais) para modelar a estrutura, conforme fig. 5.7.

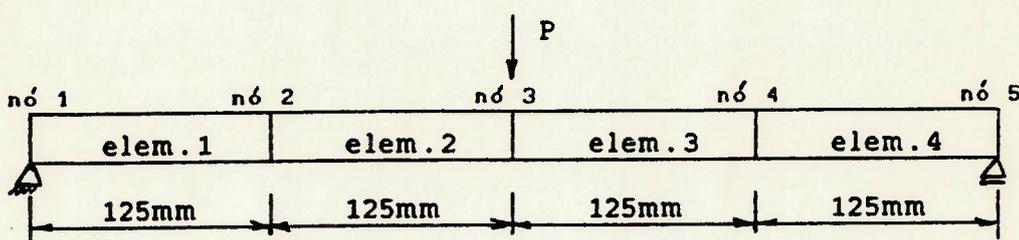


Fig. 5.7: Discretização da estrutura em elementos de viga.

■ Resultados para $P = 18 \text{ kgf}$:

Para $P = 18 \text{ kgf}$, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 20mm (resultado experimental). Na tabela 5.7 apresentamos a deflexão máxima (δ_{max}) obtida pelo programa, para diversos valores de Δt .

$\Delta t(\text{horas})$	$\delta_{\text{max}} (\text{mm})$	erro(%)
50	21,931	9,7
20	21,838	9,2
10	21,688	8,4
5	21,517	7,6
2	21,254	6,3

Tabela 5.7

■ Resultados para P = 7,2 kgf:

Para P = 7,2 kgf, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 7mm (resultado experimental). Na tabela 5.8 apresentamos a deflexão máxima (δ_{max}) obtida pelo programa, para diversos valores de Δt .

Δt (horas)	δ_{max} (mm)	erro(%)
50	7,381	5,4
20	7,352	5,0
10	7,312	4,5
5	7,265	3,8
2	7,190	2,7

Tabela 5.8

■ Resultados para P = 1,8 kgf:

Para P = 1,8 kgf, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 1,6mm (experimental). A tabela 5.9 traz a deflexão máxima (δ_{max}) obtida pelo programa MEFVIS, para diversos valores de Δt .

Δt (horas)	δ_{max} (mm)	erro(%)
50	1,731	8,2
20	1,724	7,8
10	1,715	7,2
5	1,705	6,6
2	1,688	5,5

Tabela 5.9

Como já constatado no item anterior para os elementos de treliça, verifica-se que o erro diminui conforme diminuimos o incremento de tempo usado no algoritmo de integração de tensões, tendo isto ocorrido para os três casos de carregamento estudados.

Vale ressaltar que HEILMANN⁽³⁰⁾ estudou algumas metodologias para a previsão de deflexões em vigas viscoelásticas simplesmente apoiadas, tendo calculado a deflexão máxima da estrutura mostrada na Fig. 5.6 através de quatro diferentes métodos. Contudo, mesmo o melhor método proposto, envolvendo o uso de curvas isócronas não-lineares e as equações de equilíbrio de forças na viga, apresentou erros em geral maiores que os obtidos através do método aqui apresentado. Para a carga de 18,0 kgf, o melhor método proposto por HEILMANN apresentou um erro de 17%; para 7,2 kgf, o erro foi de 5% e, para 1,8 kgf, o erro foi de -1%. Verifica-se, assim, a superioridade do método dos elementos finitos na análise de fluência de estruturas viscoelásticas.

A fim de fornecer dados mais completos sobre os resultados obtidos pelo programa MEFVIS, o apêndice C traz os resultados para o caso de carregamento com $P = 18$ kgf e $\Delta t = 10$ horas. As tensões e deformações foram calculadas no centro de cada sub-elemento, como dito anteriormente. As tensões estão expressas em kgf/cm^2 ; os deslocamentos, em cm; e as rotações, em rad. O intervalo de tempo para impressão dos resultados foi de 100 horas, ou seja, os resultados foram impressos para os instantes $t = 10$ (início), 100, 200, 300, 400 e 500 horas. Lembremos, ainda que, devido à simetria geométrica e de carregamento da estrutura, as tensões e deformações nos elementos de viga 3 e 4 são idênticas às calculadas nos elementos 2 e 1 respectivamente, e portanto não foram impressas.

5.7- Solução para elementos de estado plano de tensões

O programa MEFVIS permite ainda a resolução de estruturas viscoelásticas modeladas com elementos de estado plano de tensões. As hipóteses admitidas foram:

- (1) existência de linearidade geométrica;
- (2) o material se comporta da mesma forma à tração e à compressão;
- (3) isotropia do material;
- (4) coeficiente de Poisson (ν) não varia com o tempo.

As hipóteses (3) e (4) foram feitas para que pudéssemos utilizar a primeira formulação apresentada no item 4.4.2. Porém, verifica-se na verdade que o coeficiente de Poisson não é constante em materiais termoplásticos⁽⁵²⁾, podendo variar com os estados de tensão e deformação, com a temperatura, etc, como as funções de flexibilidade de fluência e de relaxação de tensões. Neste caso, a segunda formulação apresentada em 4.4.2 é que representaria de melhor forma o comportamento real do material. Contudo, para que tal formulação possa ser utilizada, são necessários ensaios de compressibilidade de fluência (além dos ensaios de fluência propriamente ditos), a fim de separar os efeitos viscoelásticos devidos às parcelas esférica e anti-esférica do tensor das tensões. Como dispúnhamos apenas de curvas de fluência do material, tivemos de admitir a hipótese (4) e utilizar a primeira formulação.

Para o caso de estado plano de tensões, pode-se chegar facilmente à seguinte relação entre o estado de tensões e de deformações num ponto do contínuo (veja eqs. 4.42, 5.4 e 5.8):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{j+1} = \frac{D(t)}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{j+1} + \{\sigma_r\} \quad (5.21)$$

Em (5.21), o índice representa o instante (t^{j+1}) em que as tensões e deformações estão sendo calculadas. O módulo viscoelástico $D(t)$ é avaliado, a cada passo da solução, pela equação 5.5, sendo que os parâmetros (E_i, μ_i) são interpolados linearmente da tabela 4.2, em função da tensão σ_x calculada no instante anterior (t^j), em cada elemento. Admite-se que o módulo $D(t)$ seja constante no interior de cada elemento de estado plano. O vetor de tensões residuais $\{\sigma_r\}$ é calculado através de (veja eqs. 5.4 e 5.8):

$$\{\sigma_r\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_r = \frac{-D(t)}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^j + \sum_{i=1}^m \exp(-E_i \cdot \mu_i \cdot \Delta t) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i^j \quad (5.22)$$

onde o vetor $\{\sigma\}_i^j$ corresponde às componentes (σ_x, σ_y e τ_{xy}) calculadas no i -ésimo ramo do modelo generalizado de Maxwell (ver fig. 5.2), no instante t^j .

Para facilitar o cálculo numérico da matriz de rigidez e do vetor de cargas residuais, foram utilizados somente elementos de deformação constante. A equação de equilíbrio para um único elemento é dada por:

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \right) \cdot \{Q\}^e + \int_V [B]^T \cdot \{\sigma_r\} dV$$

A fim de analisar os resultados fornecidos pelo programa, vamos resolver novamente o caso da viga biapoiada esquematizada na figura 5.6, agora modelada com elementos de estado plano de tensão. Como antes, serão analisados os resultados do programa para os três carregamentos estudados por GAUBE⁽²⁴⁾: $P = 18$ kgf, $P = 7,2$ kgf e $P = 1,8$ kgf. Para cada valor de P , serão calculados os deslocamentos nodais, as tensões e deformações nos elementos para diversos valores de incrementos de tempo (Δt).

A fim de verificar a influência da malha nos resultados obtidos, foram feitas três discretizações da estrutura, sendo que, devido à simetria estrutural e de carregamento, apenas metade da viga foi discretizada, conforme mostram as figuras 5.8, 5.9 e 5.10. O coeficiente de Poisson do polietileno foi considerado igual a 0,45 conforme MODERN PLASTICS ENCYCLOPEDIA.⁽⁴³⁾

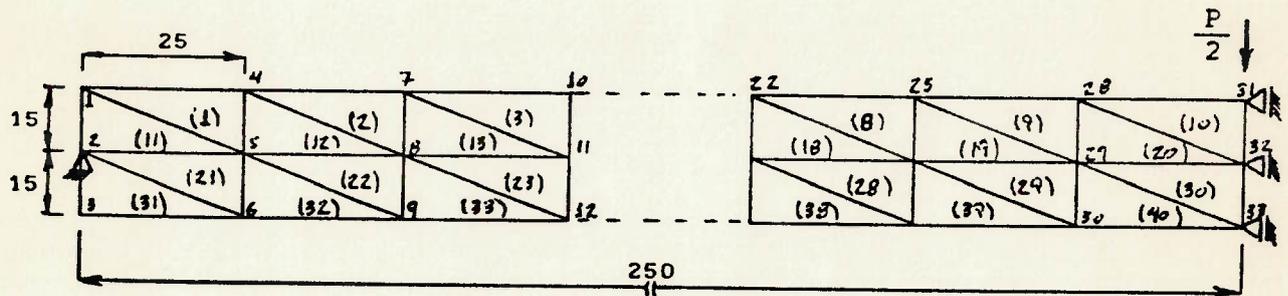


Fig. 5.8: Primeira discretização da viga de Gaube - 33 nós e 40 elementos (medidas em mm).

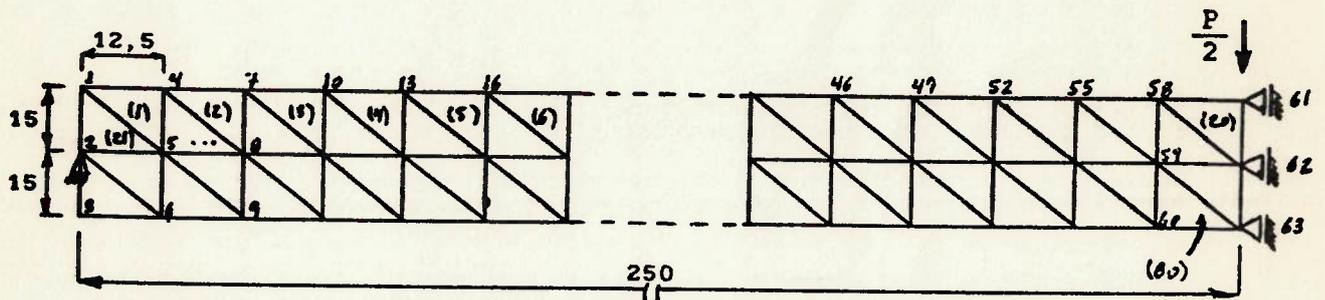


Fig. 5.9: Segunda discretização da viga de Gaube - 63 nós e 80 elementos (medidas em mm).

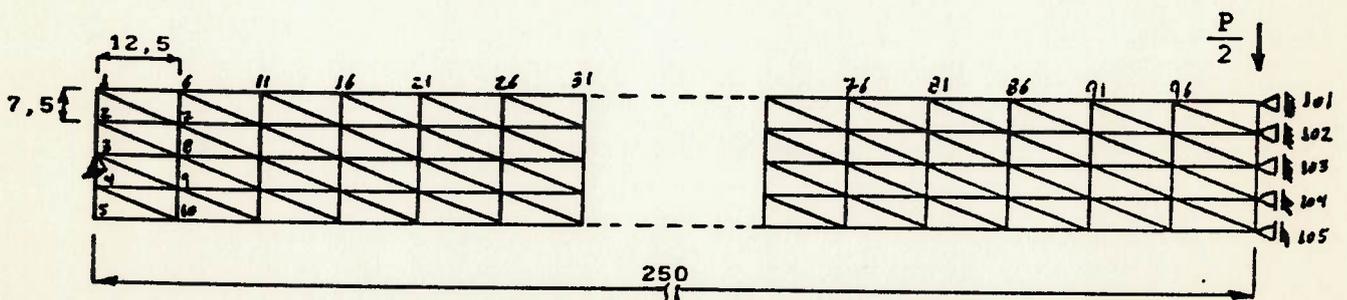


Fig. 5.10: Terceira discretização da viga de Gaube - 105 nós e 160 elementos (medidas em mm).

A seguir apresentamos os resultados obtidos pelo programa MEFVIS para cada caso de carregamento. Os deslocamentos tabelados (δ_{\max}) correspondem ao deslocamento vertical do nó definido pela intersecção do plano inferior da viga (base da viga) com o plano que passa pela seção média.

■ Resultados para P = 18 kgf:

Para P = 18 kgf, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 20mm (resultado experimental). A tabela 5.10 traz os valores de δ_{\max} (e os respectivos erros), em função da discretização feita e do incremento de tempo (Δt) utilizado na análise.

Δt (horas)	1° Discretiz.		2° Discretiz.		3° Discretiz.	
	δ_{\max} (mm)	erro(%)	δ_{\max} (mm)	erro(%)	δ_{\max} (mm)	erro(%)
100	8,627	-56,87	11,665	-41,68	16,072	-19,64
50	8,715	-56,43	11,818	-40,91	16,292	-18,54
25	8,759	-56,21	11,893	-40,54	16,400	-18,00
10	8,789	-56,06	11,946	-40,27	16,476	-17,62
5	8,802	-55,99	11,969	-40,16	16,512	-17,44
1	8,822	-55,89	12,006	-39,97	16,569	-17,16

Tabela 5.10

■ Resultados para P = 7,2 kgf:

Para P = 7,2 kgf, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 7mm (resultado experimental). Na tabela 5.11 apresentamos os valores de δ_{\max} (e os respectivos erros), em função da discretização feita e do incremento de tempo (Δt) utilizado na análise.

Δt (horas)	1° Discretiz.		2° Discretiz.		3° Discretiz.	
	δ_{max} (mm)	erro(%)	δ_{max} (mm)	erro(%)	δ_{max} (mm)	erro(%)
100	3,129	-55,30	4,052	-42,11	5,547	-20,76
50	3,150	-55,00	4,084	-41,66	5,592	-20,11
25	3,161	-54,84	4,102	-41,40	5,615	-19,79
10	3,169	-54,73	4,114	-41,23	5,632	-19,54
5	3,172	-54,69	4,120	-41,14	5,639	-19,44
1	3,177	-54,61	4,130	-41,00	5,651	-19,27

Tabela 5.11

■ Resultados para P = 1,8 kgf:

Para P = 1,8 kgf, a máxima deflexão da viga, após 500 horas de carregamento, foi de 1,6mm (experimental). A tabela 5.12 traz os valores de δ_{max} obtidos pelo programa MEFVIS (e os respectivos erros), em função de Δt e da discretização feita.

Δt (horas)	1° Discretiz.		2° Discretiz.		3° Discretiz.	
	δ_{max} (mm)	erro(%)	δ_{max} (mm)	erro(%)	δ_{max} (mm)	erro(%)
100	0,766	-52,13	0,970	-39,38	1,320	-17,50
50	0,771	-51,81	0,975	-39,06	1,328	-17,00
25	0,773	-51,69	0,978	-38,88	1,331	-16,81
10	0,774	-51,63	0,980	-38,75	1,333	-16,69
5	0,775	-51,56	0,980	-38,75	1,334	-16,63
1	0,775	-51,56	0,981	-38,69	1,335	-16,56

Tabela 5.12

Através dos resultados obtidos, pode-se constatar que o erro diminui conforme diminuimos o incremento de tempo usado no algoritmo de integração de tensões, tendo isto ocorrido em todas as análises efetuadas. Contudo, nota-se que a influência da malha sobre o erro é muito mais marcante que a influência do incremento de tempo. Tomando os resultados da tabela 5.12, por exemplo, vemos que o erro (em módulo) passa de 52,13% para 51,56% conforme alteramos o incremento de tempo (de 100 horas para 1 hora), mantendo a mesma malha. Porém, ele passa de 52,13% para apenas 17,50% conforme melhoramos a malha, mantendo o mesmo incremento de tempo (100 horas). Esta é uma observação importante, pois o uso de incrementos de tempo muito pequenos pode aumentar consideravelmente o tempo de processamento (e conseqüentemente o custo da análise), sem contudo trazer maiores benefícios.

Verificamos ainda que os erros obtidos no cálculo da deflexão máxima da viga, δ_{max} , foram maiores ao modelarmos a estrutura com elementos de estado plano de tensão do que com elementos de viga. Isto se deve provavelmente ao uso de elementos de deformação constante, que em geral não permitem uma boa aproximação dos campos de tensão e deformação do meio estudado. Contudo, se utilizarmos um número maior de elementos, o erro deverá diminuir ainda mais, como podemos depreender da análise das tabelas 5.9 a 5.12.

Outros fatores que podem ter influenciado negativamente nos resultados obtidos para o elemento de estado plano são a hipótese de isotropia do material e a de que o coeficiente de Poisson não varia com o tempo. Para que tais hipóteses sejam mantidas ou refutadas é imprescindível a realização de mais ensaios, envolvendo inclusive casos mais complexos de carregamento. Somente assim, comparando os resultados experimentais com os resultados numéricos, é que poderemos comprovar a veracidade das hipóteses admitidas e a capacidade do modelo em representar o comportamento do material.

A fim de fornecer dados mais completos sobre os resultados obtidos pelo programa MEFVIS, o apêndice D traz os resultados para o caso da viga de Gaube modelada com 80 elementos (segunda discretização), $P = 7,2$ kgf e $\Delta t = 10$ horas. As tensões estão expressas em kgf/cm^2 , e os deslocamentos, em cm. Os resultados foram impressos para os instantes $t = 10$ (início), 100, 200, 300, 400 e 500 horas.

6 - CONCLUSÕES

Neste trabalho procuramos abordar um dos aspectos mais importantes no projeto estrutural de componentes feitos de material polimérico: a determinação das deformações dependentes do tempo, ou seja, a fluência. Mostramos que este fenômeno não ocorre em todos os polímeros, sendo típico de uma classe especial destes materiais: os termoplásticos.

Como pudemos ver, o comportamento dos termoplásticos é bastante complexo, pois vários fatores tem uma forte influência sobre a resposta destes materiais quando solicitados, como: os estados de tensão e de deformação, a história do carregamento, o tempo, a temperatura, etc. Mesmo limitando o estudo para o caso de solicitações uniaxiais, verifica-se que o problema continua sendo de difícil resolução: há vários modelos na literatura que tentam prever o comportamento sob fluência, porém nenhum deles parece capaz de abranger todas as peculiaridades do comportamento viscoelástico destes materiais.

Um programa de análise estrutural envolvendo o método dos elementos finitos foi desenvolvido para a determinação dos deslocamentos, tensões e deformações em componentes feitos com termoplásticos, através de uma análise passo-a-passo. Um modelo generalizado de Maxwell foi utilizado para obter a equação constitutiva do material. Os parâmetros do modelo foram calculados através do método dos mínimos quadrados, de modo a permitir o melhor ajuste com as curvas de fluência do material.

A cada intervalo de tempo, as equações de equilíbrio eram resolvidas com o uso do método de integração das tensões. Três tipos de elementos foram implementados no programa: treliça, viga e estado plano de tensão.

As deformações obtidas para os elementos de treliça foram comparadas com as próprias curvas de fluência do material, mostrando ótimos resultados nas análises envolvendo pequenos incrementos de tempo.

Os resultados obtidos no caso dos elementos de viga foram comparados com resultados experimentais obtidos na literatura (viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão), mostrando também um bom desempenho do método proposto. Devido à falta de dados (curvas de fluência à compressão), tivemos de admitir que o comportamento do material à compressão era similar ao seu comportamento à tração.

A viga biapoiada também foi modelada com elementos de estado plano de tensão. Porém, os erros foram bem maiores que os obtidos com o uso de elementos de viga, o que foi atribuído ao uso de elementos de deformação constante, que em geral não permitem uma boa aproximação dos campos de tensão e deformação do contínuo. Notamos que é preferível uma melhor discretização da malha à utilização de menores incrementos de tempo na análise passo-a-passo. Admitiu-se que o material fosse isotrópico e que o coeficiente de Poisson (ν) fosse constante no tempo. Em todos os casos pressupomos também a existência de linearidade geométrica.

Sugestões de trabalhos futuros:

O estudo do comportamento estrutural de materiais poliméricos é um assunto amplo e, em muitos casos, ainda inexplorado. Há diversas linhas de pesquisa que podem ser seguidas para dar continuidade a este trabalho. Dentro da análise de componentes sob carregamento quase-estático, salientamos as seguintes:

a) realização de ensaios para se conhecer a fundo o comportamento de um dado tipo de material, como: ensaios de fluência à tração e à compressão, ensaios

de compressibilidade, de relaxação de tensão, de recuperação, etc;

b) verificação da adequação de um dado modelo, como o modelo generalizado de Maxwell, à descrição do comportamento do material como um todo (neste trabalho estudamos apenas a fluência do material sob carregamento constante);

c) como considerar o efeito da anisotropia na análise de componentes sujeitos a tensões tri-axiais de longa duração;

d) implementação de outros tipos de elementos, como o elemento de placa, na análise de fluência por elementos finitos, bem como sua verificação através de resultados experimentais;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) ARGYRIS, J.; DOLTISINIS, I.St.; SILVA, V.D. Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part I: rheological models and numerical integration techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p.135-63, 1991.
- (2) BATHE, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, 1982.
- (3) BAUWENS-CROWET, C.; BAUWENS, J.C. The mechanism of creep behaviour in glassy polymers. *Journal of Materials Science*, v.10, n.10, p.1779-87, Oct. 1975.
- (4) BENALLAL, A. et al. Validation of structural computation codes in elastoviscoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.29, n.5, p.1109-30, Apr. 1990.
- (5) BENHAM, P.P.; McCAMMOND, D. Approximate creep analysis for thermo-plastics beams and struts. *Journal of Strain Analysis*, v.6, n.1, p.53-61, Jan. 1971.
- (6) BISCHOFF, J.; CATSIFF, E.; TOBOLSKY, A.V. Elastoviscous properties of amorphous polymers in the transition region - I. *Journal of American Chemical Society*, v.74, p.3378-81, 1952.
- (7) BRERETON, M.G. et al. Non-linear viscoelastic behaviour of polymers: an implicit equation approach. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v.22, p.97-125, 1974.
- (8) BRODY, H. Stress-time superposition as an aid to creep evaluation. *Plastics & Polymers*, v.37, n.127, p.21-25, Feb. 1969.
- (9) BROSTOW, W.; CORNELIUSSEN, R.D., ED. *Failure of Plastics*. New York, Hanser Publishers, 1986.
- (10) BRUELLER, O.S.; REICHEL, B.; MOSLE, H.G. Description of the nonlinear behaviour of plastics under stress relaxation. *Kunststoffe - German Plastics*, v.72, n.12, p.23-4, Dec. 1982.
- (11) BRUELLER, O.S. On the nonlinear characterization of the long term behaviour of polymeric materials. *Polymer Engineering and Science*, v.27, n.2, p.144-8, Jan. 1987.
- (12) BUCKLEY, C.P. Multiaxial non-linear viscoelasticity of solid polymers. *Polymer Preprints*, 26, p.88-89, 1985.
- (13) CALCOTE, L.R. *Introduction to continuum mechanics*. Princeton, D. Van Nostrand Company, Inc., s.d..
- (14) CÉLIA-SILVA, A.H.; CALIL JR., C. Fluência da madeira. In: *Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira*, 4, São Carlos, jul. 1992. *Anais. São Carlos, LaMEM/EESC/USP*, 1992. p.41-51.

- (15) CHEN, G.G.; HSU, T.R. A mixed explicit-implicit (ei) algorithm for creep stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, n.2, p.511-24, Feb. 1988.
- (16) CRAWFORD, R.J. *Plastics Engineering*. Oxford, Pergamon Press, 1987.
- (17) DAMASCENO, V. Automóveis inovam em beleza e durabilidade. *Plástico Moderno*, p.10-19, dez. 1990.
- (18) DOUVEN, L.F.A.; SCHREURS, P.J.G.; JANSSEN, J.D. Analysis of viscoelastic behaviour of transversely isotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.28, n.4, p.845-60, Apr. 1989.
- (19) FERRY, J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1970.
- (20) FINDLEY, W.N.; KHOSLA, G. Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain, and time hardening to creep of plastics under changing loads. *Journal of Applied Physics*, v.26, n.7, p.821-32, July 1955.
- (21) FINNIE, I.; HELLER, W.R. *Creep of engineering materials*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- (22) FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. Berlin/Heidelb., Springer-Verlag, 1975.
- (23) GALLAGHER, R.H. *Finite Element Analysis - Fundamentals*. New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
- (24) GAUBE, E. Kriechverhalten von Hartpolyäthylen und Polypropylen. *Kunststoffe*, v.57, n.4, p.270-5, Apr. 1967.
- (25) GENTIL, V. *Corrosão*. 2. ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois S.A., 1983.
- (26) GITTUS, J. *Creep, viscoelasticity and creep fracture in solids*. London, Applied Science Publishers Ltd, 1975.
- (27) GLOCKNER, P.G.; SZYSZKOWSKI, W. An engineering multiaxial constitutive model for nonlinear time-dependent materials. *International Journal for Solids and Structures*, v.26, n.1, p.73-82, 1990.
- (28) GROSS, B. *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Paris, Hermann & Cie, Editeurs, 1953.
- (29) HEAPS, C.W.; MANSFIELD, L. An improved solution procedure for creep problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, n.4, p.525-32, April 1986.
- (30) HEILMANN, E.M. Projeto de componentes em material termoplastico - dimensionamento e analise sob carregamento estatico. São Paulo, 1992. 152p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- (31) HERTZBERG, R.W. *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. 3.ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

- (32) HIGGINS, R.A. **Propriedades e estruturas dos materiais em engenharia.** Trad. de Joel R. Teodósio. São Paulo, DIFEL, 1982.
- (33) HUEBNER, K.H. **The Finite Element Method for Engineers.** New York, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- (34) KITAGAWA, M.; MATSUTANI, T. Effect of time and temperature on nonlinear constitutive equation in polypropylene. **Journal of Materials Science**, v.23, p.4085-90, 1988.
- (35) KITAGAWA, M.; MORI, T.; MATSUTANI, T. Rate-dependent nonlinear constitutive equation of polypropylene. **Journal of Polymer Science**, v.27, p.85-95, 1989.
- (36) KLEIN, A.J. How to design with finite element analysis. **Plastics Design Forum**, p.29-35, Sept./Oct. 1987.
- (37) KRAUS, H. **Creep analysis.** John Wiley & sons, Inc., 1980.
- (38) KRISHNASWAMY, P.; TUTTLE, M.E.; EMERY, A.F. Finite element modelling of crack tip behaviour in viscoelastic materials. Part I: linear behaviour. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.30, n.2, p.371-87, Aug. 1990.
- (39) LEE, S.H. Generalized viscoelastic model for creep analysis coupled with plastic deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.26, n.1, p.153-65, Jan. 1988.
- (40) LEVY, A.; PIFKO, A.B. On computational strategies for problems involving plasticity and creep. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, n.5, p.747-71, May 1981.
- (41) McLOUGHLIN, J.R. A new creep law for plastics. **Modern Plastics**, v.45, n.6, p.97-100, 103, Feb. 1968.
- (42) MICHAELI, W.; MOHR-MATUSCHEK, U. Material models and database interface for finite element analysis. **Plastics and Rubber Processing and Applications**, v.14, n.3, p.175-182, 1990.
- (43) **MODERN PLASTICS ENCYCLOPEDIA.** New York, McGraw-Hill, 1985-1986.
- (44) NAKAGUMA, R.K. **Análise viscoelástica linear utilizando a transformada de Laplace e o método dos elementos finitos.** São Paulo, 1975. 77p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- (45) NG, T.H.; WILLIAMS, H.L. Stress-strain properties of linear aromatic polyesters in the nonlinear viscoelastic range. **Journal of Applied Polymer Science**, v.32, p.4883-96, 1986.
- (46) NG, T.H.; WILLIAMS, H.L. Prediction of stress-relaxation and creep of linear aromatic polyesters related to poly(ethylene terephthalate) in the nonlinear range. **Journal of Applied Polymer Science**, v.33, p.739-57, 1987.

- (47) NISHITANI, T.; KOTANI, Y. Nonlinear constitutive equations for transient creep of viscoelastic polymers including the effect of hydrostatic pressure. *Mechanics of Materials*, v.3, n.3, p.11-18, 1984.
- (48) NISHITANI, T. Constitutive equation for transient creep of cellulose nitrate under hydrostatic pressure. *Mechanics of Materials*, v.7, part 2, p.121-26, 1988.
- (49) OTTOSEN, N.S.; GUNNESKOV, O. Nonlinear subincremental method for determination of elastic-plastic-creep behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.21, n.12, p.2237-56, Dec. 1985.
- (50) PIMENTA, P.M. On the analysis of viscoelastic plane frames. In: *Proceedings of the sessions related to design, analysis and testing at Structures Congress '89, San Francisco, 1989. Proceedings. ASCE, May 1989, p.922-31.*
- (51) PIMENTA, P.M.; YOJO, T. Análise não-linear de pórticos espaciais aplicada a estruturas de madeira. In: *Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira, 4, São Carlos, jul. 1992. Anais. São Carlos, LaMEM/EESC/USP, 1992. p.153-63.*
- (52) POWELL, P.C. Prediction of long-term deformation in thermoplastics. *Progress in Plastics*, v.11, n.9, p.73-95, Sept. 1969.
- (53) RABOTNOV, YU. N.; PAPERNIK, L. KH.; STEPANYCHEV, E.I. Application of the non-linear theory of heredity to the description of time effects in polymeric materials. *Polymer Mechanics*, v.7, n.1, p.63-73, Jan./Feb. 1971.
- (54) SANDERS, D.R.; HAISLER, W.E. An incremental form of the single-integral nonlinear viscoelastic theory for elastic-plastic-creep finite element analysis. *American Society of Mechanical Engineers*, n.79-PVP-114, 12 p. 1979.
- (55) SEITZ, J.T.; BALAZS, C.F. Application of time-temperature superposition principle to long term engineering properties of plastic materials. *SPE - 25th Annual Technical Conference May 15-18, v.13, p.963-968, 1967.*
- (56) SEYMOUR, R.B. *Polymers for Engineering Applications. ASM International, 1987.*
- (57) SPIETH, E.H. Mercado Brasileiro de Plásticos. In: *Anais do I CONGRESSO BRASILEIRO DE POLÍMEROS, São Paulo, 1991. Anais. São Paulo, Associação Brasileira de Polímeros, 1991. p.30-4.*
- (58) SWANSON, D.L.; WILLIAMS, J.W. Effect of molecular weight distribution on the creep behavior of cellulose acetate. *Journal of Applied Physics*, v.26, n.7, p.810-5, July 1955.
- (59) TURNER, S. The strain response of plastics to complex stress histories. *Polymer Engineering and Science*, v.6, n.4, p.306-16, Oct. 1966.

- (60) VAN VLACK, L.H. Princípios de ciência dos materiais. Trad. de Luiz P.C. Ferrão. São Paulo, Edgard Blücher, 1973.
- (61) WARD, I.M. Mechanical properties of solid polymers. 2. ed. Chichester, John Wiley & Sons, Inc (Wiley-Interscience), 1983.
- (62) WYATT, O.H.; DEW-HUGHES, D. Metals, ceramics and polymers. London, Cambridge University Press, 1974.
- (63) ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method. 3.ed. London, McGraw-Hill, 1977.
- (64) ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. Viscoplasticity-plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.8, n.4, p.821-845, 1974.

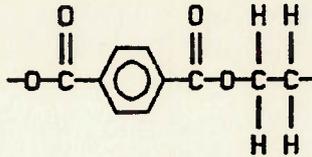
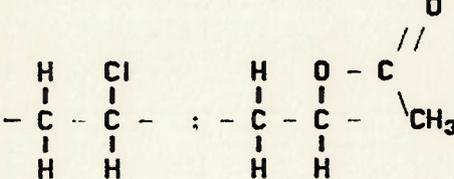
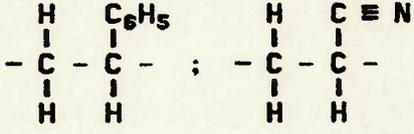
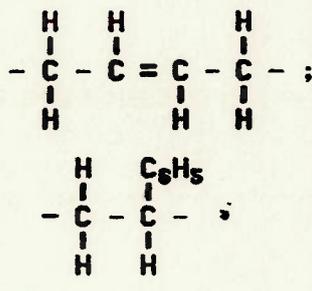
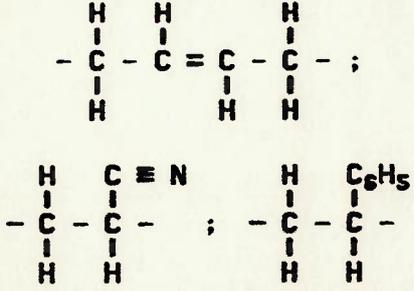
APÊNDICE A

Informações adicionais sobre materiais poliméricos

APÊNDICE A

Nome Químico	Estrutura de Repetição	Notas
<p>polietileno (PE)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	<p>Tenaz e flexível em uma ampla faixa de temperaturas. Boa estabilidade dimensional. Facilmente moldável: grande utilização em embalagens.</p>
<p>policloreto de vinila (PVC)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{Cl} \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	<p>O polímero puro é rígido, sendo porém freqüentemente plasticizado para produzir um material mais flexível. Possui diversas aplicações.</p>
<p>polipropileno (PP)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{CH}_3 \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	<p>Tem propriedades semelhantes às do PE, mas possui melhor resistência ao calor. Usado na forma de peças moldadas para vários equipamentos.</p>
<p>poliestireno (PS)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{C}_6\text{H}_5 \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$	<p>Possui boa estabilidade dimensional e resistência, mas tem tendência a ser frágil devido à sua elevada Tg. Conserva suas propriedades a baixas temperaturas.</p>
<p>poliacetato de vinila (PVAC)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{O} \quad \text{C} \\ \quad \quad / \\ -\text{C} - \text{C} - \text{C} \\ \quad \quad \backslash \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{CH}_3 \end{array}$	<p>Macio, com baixa estabilidade dimensional. Boas propriedades adesivas. Como é solúvel em muitos solventes orgânicos, é usado em laqueações, pinturas, revestimentos e adesivos. (Tg = 29 °C)</p>
<p>policloreto de vinilideno (PVDC)</p>	$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{Cl} \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{Cl} \end{array}$	<p>Possui baixa permeabilidade para gases e vapores d'água. Copolimerizado com PVC, é usado como invólucro para alimentos.</p>
<p>politetrafluoretileno (PTFE ou "Teflon")</p>	$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \quad \\ -\text{C} - \text{C}- \\ \quad \\ \text{F} \quad \text{F} \end{array}$	<p>Tenaz e flexível. Baixo coeficiente de atrito. Possui excelente resistência ao calor e não é atacado por qualquer solvente ou reagente conhecido.</p>

Nome Químico	Estrutura de Repetição	Notas
polimetacrilato de metila (PMMA)	$ \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{H} \quad \text{C} - \text{O} - \text{CH}_3 \\ \quad \\ - \text{C} - \text{C} - \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{CH}_3 \end{array} $	<p>Excelente transmissão de luz. Resistente e rígido. Usado em lentes, telefones, janelas de aviões, revestimentos protetores, painéis de construção, adesivos, etc.</p>
nylon-6	$ \begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ - \text{N} - [\text{C}]_5 - \text{C} - \\ \quad \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{O} \end{array} $	<p>Todos os nylons contêm grupos amida (-NH.CO-), mas suas propriedades variam bastante com o número de grupos -CH₂- na unidade monômérica. O nylon-6 tem média resistência e fácil processamento.</p>
nylon-6,6	$ \begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{O} \\ \quad \quad \quad \quad \\ - \text{N} - [\text{C}]_6 - \text{N} - \text{C} - [\text{C}]_4 - \text{C} - \\ \quad \quad \quad \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{O} \end{array} $	<p>Possui o maior ponto de fusão entre as poliamidas. É o mais resistente e o mais rígido dos nylons.</p>
nylon-6,10	$ \begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{O} \\ \quad \quad \quad \quad \\ - \text{N} - [\text{C}]_6 - \text{N} - \text{C} - [\text{C}]_8 - \text{C} - \\ \quad \quad \quad \quad \\ \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{H} \quad \text{O} \end{array} $	<p>Possui a melhor resistência química e a menor capacidade de absorção de umidade entre os nylons.</p>
poliacetal (poliformaldeído)	$ \begin{array}{c} \text{H} \\ \\ - \text{C} - \text{O} - \\ \\ \text{H} \end{array} $	<p>Bastante resistente e rígido. Resistente à fluência. Boa vida em fadiga. Elevada cristalinidade e alto ponto de fusão, o que permite seu uso no lugar de alguns metais.</p>
poliuretano (tipo termoplástico)	$ \begin{array}{c} \text{H} \quad \text{O} \\ \quad \\ - \text{O} - \text{R} - \text{O} - \text{C} - \text{N} - \text{R}' - \text{N} - \text{C} - \\ \quad \quad \\ \text{O} \quad \text{H} \quad \text{O} \end{array} $	<p>Diversos grupos em R e R' fornecem uma grande variedade de uretanos, contendo o grupo -NH.CO.O-. As propriedades físicas das variedades termoplásticas são semelhantes as do nylon.</p>
policarbonato	$ \begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ - \text{O} - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{C} - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{O} - \text{C} = \text{O} - \\ \\ \text{CH}_3 \end{array} $	<p>Possui boa resistência ao impacto e ao calor, além de boa estabilidade dimensional. Utilizado em peças para aviação e automóveis e equipamentos eletrônicos.</p>

Nome Químico	Estrutura de Repetição	Notas
polietileno tereftalato (PET)		Trata-se de um poliéster amplamente utilizado na fabricação de fibras, filmes, garrafas e outras peças moldadas por injeção. (Tg = 70 °C)
poli(acetato/cloreto de vinila)		Tenaz, mais flexível que o PVC. Boa estabilidade dimensional. Usado em revestimento para fios e cabos, discos, equipamentos químicos e embalagens.
estireno-acrilonitrila (SAN)		São termoplásticos rígidos, duros e transparentes; de fácil processamento e boa estabilidade dimensional. Usado em equipamentos médicos, aparelhos domésticos e eletrônicos, embalagens, etc.
estireno-butadieno (HIPS)		São polímeros reconhecidos pela sua transparência, baixo custo e resistência a impactos. Podem ser misturados com outros polímeros para melhorar as propriedades físicas ou diminuir o custo. São especialmente recomendados p/ embalagens, além de outras aplicações.
acrilonitrila-butadieno-estireno (ABS)		ABS é um nome genérico dado para uma família versátil de termoplásticos de engenharia. São empregados em diversas aplicações como aparelhos eletrodomésticos, telefones, tubos, peças de automóveis, e artigos esportivos, entre outros.

APÊNDICE B

Resultados do programa MEFVIS para elementos de treliça

TITULO: ESTRUTURA TRELICADA / INCREMENTO DE TEMPO = 1 HORA

SOLUCAO PARA O CASO DE CARREGAMENTO: 1

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+00 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.4266	0.0776	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00388
2	20.00	10.00	0.00129

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 5.0000000000E+01 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9037	0.1325	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00802
2	20.00	10.00	0.00221

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9707	0.1403	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00861
2	20.00	10.00	0.00234

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.0178	0.1457	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00902
2	20.00	10.00	0.00243

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 2.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.0547	0.1499	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
----------	-------	--------	------------

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 2.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.0848	0.1532	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00960
2	20.00	10.00	0.00255

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 3.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.1101	0.1560	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.00982
2	20.00	10.00	0.00260

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 3.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.1322	0.1585	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01001
2	20.00	10.00	0.00264

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 4.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.1518	0.1606	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01018
2	20.00	10.00	0.00268

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 4.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.1697	0.1626	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01033
2	20.00	10.00	0.00271

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 5.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
----	--------	--------	--------	-------	-------	-------

2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.1863	0.1644	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01048
2	20.00	10.00	0.00274

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 5.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2019	0.1661	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01061
2	20.00	10.00	0.00277

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 6.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2167	0.1677	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01074
2	20.00	10.00	0.00280

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 6.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2308	0.1692	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01086
2	20.00	10.00	0.00282

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 7.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2443	0.1707	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01098
2	20.00	10.00	0.00285

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 7.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2573	0.1721	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
----------	-------	--------	------------

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 8.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2698	0.1735	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01120
2	20.00	10.00	0.00289

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 8.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2819	0.1748	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01130
2	20.00	10.00	0.00291

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 9.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.2936	0.1760	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01140
2	20.00	10.00	0.00293

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 9.5000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.3048	0.1772	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01150
2	20.00	10.00	0.00295

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+03 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.3157	0.1784	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TENSOES NOS ELEMENTOS DE TRELICA:

ELEMENTO	FORCA	TENSAO	DEFORMACAO
1	60.00	30.00	0.01160
2	20.00	10.00	0.00297

APÊNDICE C

Resultados do programa MEFVIS para elementos de viga

TITULO: VIGA DE GAUBE

SOLUCAO PARA O CASO DE CARREGAMENTO: 1

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+01 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0685
2	0.0000	-0.7848	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0514
3	0.0000	-1.1415	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	0.0000	-0.7848	0.0000	0.0000	0.0000	0.0514
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0685

TENSÕES E DEFORMAÇÕES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.94	-0.000154
1	(1,2)	-2.81	-0.000462
1	(1,3)	-4.69	-0.000771
1	(1,4)	-6.56	-0.001079
1	(1,5)	-8.44	-0.001387
1	(1,6)	-10.31	-0.001695
1	(1,7)	-12.19	-0.002003
1	(1,8)	-14.06	-0.002312
1	(1,9)	-15.94	-0.002620
1	(1,10)	-17.81	-0.002928
1	(2,1)	-0.31	-0.000051
1	(2,2)	-0.94	-0.000154
1	(2,3)	-1.56	-0.000257
1	(2,4)	-2.19	-0.000360
1	(2,5)	-2.81	-0.000462
1	(2,6)	-3.44	-0.000565
1	(2,7)	-4.06	-0.000668
1	(2,8)	-4.69	-0.000771
1	(2,9)	-5.31	-0.000873
1	(2,10)	-5.94	-0.000976
1	(3,1)	0.31	0.000051
1	(3,2)	0.94	0.000154
1	(3,3)	1.56	0.000257
1	(3,4)	2.19	0.000360
1	(3,5)	2.81	0.000462
1	(3,6)	3.44	0.000565
1	(3,7)	4.06	0.000668
1	(3,8)	4.69	0.000771
1	(3,9)	5.31	0.000873
1	(3,10)	5.94	0.000976
1	(4,1)	0.94	0.000154
1	(4,2)	2.81	0.000462
1	(4,3)	4.69	0.000771
1	(4,4)	6.56	0.001079
1	(4,5)	8.44	0.001387
1	(4,6)	10.31	0.001695
1	(4,7)	12.19	0.002003
1	(4,8)	14.06	0.002312
1	(4,9)	15.94	0.002620
1	(4,10)	17.81	0.002928

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-19.69	-0.003236
2	(1,2)	-21.56	-0.003544
2	(1,3)	-23.44	-0.003853
2	(1,4)	-25.31	-0.004161
2	(1,5)	-27.19	-0.004469
2	(1,6)	-29.06	-0.004777
2	(1,7)	-30.94	-0.005085
2	(1,8)	-32.81	-0.005394
2	(1,9)	-34.69	-0.005702
2	(1,10)	-36.56	-0.006010
2	(2,1)	-6.56	-0.001079
2	(2,2)	-7.19	-0.001181
2	(2,3)	-7.81	-0.001284
2	(2,4)	-8.44	-0.001387
2	(2,5)	-9.06	-0.001490
2	(2,6)	-9.69	-0.001592
2	(2,7)	-10.31	-0.001695
2	(2,8)	-10.94	-0.001798
2	(2,9)	-11.56	-0.001901
2	(2,10)	-12.19	-0.002003
2	(3,1)	6.56	0.001079
2	(3,2)	7.19	0.001181
2	(3,3)	7.81	0.001284
2	(3,4)	8.44	0.001387
2	(3,5)	9.06	0.001490
2	(3,6)	9.69	0.001592
2	(3,7)	10.31	0.001695
2	(3,8)	10.94	0.001798
2	(3,9)	11.56	0.001901
2	(3,10)	12.19	0.002003
2	(4,1)	19.69	0.003236
2	(4,2)	21.56	0.003544
2	(4,3)	23.44	0.003853
2	(4,4)	25.31	0.004161
2	(4,5)	27.19	0.004469
2	(4,6)	29.06	0.004777
2	(4,7)	30.94	0.005085
2	(4,8)	32.81	0.005394
2	(4,9)	34.69	0.005702
2	(4,10)	36.56	0.006010

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1069
2	-0.0000	-1.2388	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0830
3	0.0000	-1.8269	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	0.0000	-1.2388	0.0000	0.0000	0.0000	0.0830
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1069

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.56	-0.000124
1	(1,2)	-2.63	-0.000575
1	(1,3)	-4.70	-0.001025
1	(1,4)	-6.65	-0.001476
1	(1,5)	-8.49	-0.001927
1	(1,6)	-10.26	-0.002377
1	(1,7)	-11.98	-0.002828
1	(1,8)	-13.63	-0.003279
1	(1,9)	-15.23	-0.003729
1	(1,10)	-16.78	-0.004180
1	(2,1)	-0.19	-0.000041
1	(2,2)	-0.88	-0.000192
1	(2,3)	-1.57	-0.000342
1	(2,4)	-2.26	-0.000492
1	(2,5)	-2.95	-0.000642
1	(2,6)	-3.64	-0.000792
1	(2,7)	-4.33	-0.000943
1	(2,8)	-5.02	-0.001093
1	(2,9)	-5.67	-0.001243
1	(2,10)	-6.31	-0.001393
1	(3,1)	0.19	0.000041
1	(3,2)	0.88	0.000192
1	(3,3)	1.57	0.000342
1	(3,4)	2.26	0.000492
1	(3,5)	2.95	0.000642
1	(3,6)	3.64	0.000792
1	(3,7)	4.33	0.000943
1	(3,8)	5.02	0.001093
1	(3,9)	5.67	0.001243
1	(3,10)	6.31	0.001393
1	(4,1)	0.56	0.000124
1	(4,2)	2.63	0.000575
1	(4,3)	4.70	0.001025
1	(4,4)	6.65	0.001476
1	(4,5)	8.49	0.001927
1	(4,6)	10.26	0.002377
1	(4,7)	11.98	0.002828
1	(4,8)	13.63	0.003279
1	(4,9)	15.23	0.003729
1	(4,10)	16.78	0.004180

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:			
ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-18.70	-0.004765
2	(1,2)	-20.62	-0.005365
2	(1,3)	-22.55	-0.005966
2	(1,4)	-24.42	-0.006567
2	(1,5)	-26.24	-0.007167
2	(1,6)	-27.99	-0.007768
2	(1,7)	-29.68	-0.008369
2	(1,8)	-31.32	-0.008970
2	(1,9)	-32.91	-0.009570
2	(1,10)	-34.44	-0.010171
2	(2,1)	-7.12	-0.001588
2	(2,2)	-7.95	-0.001788
2	(2,3)	-8.75	-0.001989
2	(2,4)	-9.54	-0.002189
2	(2,5)	-10.31	-0.002389
2	(2,6)	-11.06	-0.002589
2	(2,7)	-11.81	-0.002790
2	(2,8)	-12.56	-0.002990
2	(2,9)	-13.29	-0.003190
2	(2,10)	-14.01	-0.003390
2	(3,1)	7.12	0.001588
2	(3,2)	7.95	0.001788
2	(3,3)	8.75	0.001989
2	(3,4)	9.54	0.002189
2	(3,5)	10.31	0.002389
2	(3,6)	11.06	0.002589
2	(3,7)	11.81	0.002790
2	(3,8)	12.56	0.002990
2	(3,9)	13.29	0.003190
2	(3,10)	14.01	0.003390
2	(4,1)	18.70	0.004765
2	(4,2)	20.62	0.005365
2	(4,3)	22.55	0.005966
2	(4,4)	24.42	0.006567
2	(4,5)	26.24	0.007167
2	(4,6)	27.99	0.007768
2	(4,7)	29.68	0.008369
2	(4,8)	31.32	0.008970
2	(4,9)	32.91	0.009570
2	(4,10)	34.44	0.010171

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 2.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	RGT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1147
2	-0.0000	-1.3306	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0893
3	-0.0000	-1.9642	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	-0.0000	-1.3306	0.0000	0.0000	0.0000	0.0893
5	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1147

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.55	-0.000130
1	(1,2)	-2.62	-0.000610
1	(1,3)	-4.68	-0.001091
1	(1,4)	-6.62	-0.001572
1	(1,5)	-8.45	-0.002052
1	(1,6)	-10.20	-0.002533
1	(1,7)	-11.90	-0.003014
1	(1,8)	-13.54	-0.003494
1	(1,9)	-15.12	-0.003975
1	(1,10)	-16.64	-0.004456
1	(2,1)	-0.18	-0.000043
1	(2,2)	-0.87	-0.000203
1	(2,3)	-1.56	-0.000364
1	(2,4)	-2.25	-0.000524
1	(2,5)	-2.94	-0.000684
1	(2,6)	-3.63	-0.000844
1	(2,7)	-4.32	-0.001005
1	(2,8)	-5.00	-0.001165
1	(2,9)	-5.65	-0.001325
1	(2,10)	-6.28	-0.001485
1	(3,1)	0.18	0.000043
1	(3,2)	0.87	0.000203
1	(3,3)	1.56	0.000364
1	(3,4)	2.25	0.000524
1	(3,5)	2.94	0.000684
1	(3,6)	3.63	0.000844
1	(3,7)	4.32	0.001005
1	(3,8)	5.00	0.001165
1	(3,9)	5.65	0.001325
1	(3,10)	6.28	0.001485
1	(4,1)	0.55	0.000130
1	(4,2)	2.62	0.000610
1	(4,3)	4.68	0.001091
1	(4,4)	6.62	0.001572
1	(4,5)	8.45	0.002052
1	(4,6)	10.20	0.002533
1	(4,7)	11.90	0.003014
1	(4,8)	13.54	0.003494
1	(4,9)	15.12	0.003975
1	(4,10)	16.64	0.004456

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:			
ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-18.56	-0.005088
2	(1,2)	-20.47	-0.005743
2	(1,3)	-22.39	-0.006397
2	(1,4)	-24.25	-0.007052
2	(1,5)	-26.03	-0.007706
2	(1,6)	-27.75	-0.008360
2	(1,7)	-29.41	-0.009015
2	(1,8)	-31.02	-0.009669
2	(1,9)	-32.58	-0.010324
2	(1,10)	-34.10	-0.010978
2	(2,1)	-7.11	-0.001696
2	(2,2)	-7.94	-0.001914
2	(2,3)	-8.75	-0.002132
2	(2,4)	-9.55	-0.002351
2	(2,5)	-10.33	-0.002569
2	(2,6)	-11.09	-0.002787
2	(2,7)	-11.85	-0.003005
2	(2,8)	-12.61	-0.003223
2	(2,9)	-13.34	-0.003441
2	(2,10)	-14.07	-0.003659
2	(3,1)	7.11	0.001696
2	(3,2)	7.94	0.001914
2	(3,3)	8.75	0.002132
2	(3,4)	9.55	0.002351
2	(3,5)	10.33	0.002569
2	(3,6)	11.09	0.002787
2	(3,7)	11.85	0.003005
2	(3,8)	12.61	0.003223
2	(3,9)	13.34	0.003441
2	(3,10)	14.07	0.003659
2	(4,1)	18.56	0.005088
2	(4,2)	20.47	0.005743
2	(4,3)	22.39	0.006397
2	(4,4)	24.25	0.007052
2	(4,5)	26.03	0.007706
2	(4,6)	27.75	0.008360
2	(4,7)	29.41	0.009015
2	(4,8)	31.02	0.009669
2	(4,9)	32.58	0.010324
2	(4,10)	34.10	0.010978

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 3.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1197
2	0.0000	-1.3890	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0933
3	0.0000	-2.0516	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	0.0000	-1.3890	0.0000	0.0000	0.0000	0.0933
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1197

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.55	-0.000134
1	(1,2)	-2.61	-0.000633
1	(1,3)	-4.67	-0.001133
1	(1,4)	-6.60	-0.001633
1	(1,5)	-8.42	-0.002132
1	(1,6)	-10.17	-0.002632
1	(1,7)	-11.86	-0.003132
1	(1,8)	-13.48	-0.003631
1	(1,9)	-15.05	-0.004131
1	(1,10)	-16.56	-0.004631
1	(2,1)	-0.18	-0.000045
1	(2,2)	-0.87	-0.000211
1	(2,3)	-1.56	-0.000378
1	(2,4)	-2.24	-0.000544
1	(2,5)	-2.93	-0.000711
1	(2,6)	-3.62	-0.000877
1	(2,7)	-4.31	-0.001044
1	(2,8)	-4.99	-0.001210
1	(2,9)	-5.64	-0.001377
1	(2,10)	-6.27	-0.001544
1	(3,1)	0.18	0.000045
1	(3,2)	0.87	0.000211
1	(3,3)	1.56	0.000378
1	(3,4)	2.24	0.000544
1	(3,5)	2.93	0.000711
1	(3,6)	3.62	0.000877
1	(3,7)	4.31	0.001044
1	(3,8)	4.99	0.001210
1	(3,9)	5.64	0.001377
1	(3,10)	6.27	0.001544
1	(4,1)	0.55	0.000134
1	(4,2)	2.61	0.000633
1	(4,3)	4.67	0.001133
1	(4,4)	6.60	0.001633
1	(4,5)	8.42	0.002132
1	(4,6)	10.17	0.002632
1	(4,7)	11.86	0.003132
1	(4,8)	13.48	0.003631
1	(4,9)	15.05	0.004131
1	(4,10)	16.56	0.004631

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-18.48	-0.005295
2	(1,2)	-20.38	-0.005983
2	(1,3)	-22.29	-0.006672
2	(1,4)	-24.13	-0.007361
2	(1,5)	-25.90	-0.008049
2	(1,6)	-27.60	-0.008738
2	(1,7)	-29.24	-0.009426
2	(1,8)	-30.83	-0.010115
2	(1,9)	-32.38	-0.010804
2	(1,10)	-33.88	-0.011492
2	(2,1)	-7.10	-0.001765
2	(2,2)	-7.94	-0.001994
2	(2,3)	-8.76	-0.002224
2	(2,4)	-9.56	-0.002454
2	(2,5)	-10.34	-0.002683
2	(2,6)	-11.11	-0.002913
2	(2,7)	-11.88	-0.003142
2	(2,8)	-12.63	-0.003372
2	(2,9)	-13.37	-0.003601
2	(2,10)	-14.10	-0.003831
2	(3,1)	7.10	0.001765
2	(3,2)	7.94	0.001994
2	(3,3)	8.76	0.002224
2	(3,4)	9.56	0.002454
2	(3,5)	10.34	0.002683
2	(3,6)	11.11	0.002913
2	(3,7)	11.88	0.003142
2	(3,8)	12.63	0.003372
2	(3,9)	13.37	0.003601
2	(3,10)	14.10	0.003831
2	(4,1)	18.48	0.005295
2	(4,2)	20.38	0.005983
2	(4,3)	22.29	0.006672
2	(4,4)	24.13	0.007361
2	(4,5)	25.90	0.008049
2	(4,6)	27.60	0.008738
2	(4,7)	29.24	0.009426
2	(4,8)	30.83	0.010115
2	(4,9)	32.38	0.010804
2	(4,10)	33.88	0.011492

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 4.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1234
2	0.0000	-1.4321	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0962
3	0.0000	-2.1160	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	0.0000	-1.4321	0.0000	0.0000	0.0000	0.0962
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1234

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.54	-0.000137
1	(1,2)	-2.60	-0.000650
1	(1,3)	-4.66	-0.001164
1	(1,4)	-6.59	-0.001678
1	(1,5)	-8.40	-0.002191
1	(1,6)	-10.14	-0.002705
1	(1,7)	-11.82	-0.003219
1	(1,8)	-13.44	-0.003732
1	(1,9)	-15.00	-0.004246
1	(1,10)	-16.49	-0.004760
1	(2,1)	-0.18	-0.000046
1	(2,2)	-0.87	-0.000217
1	(2,3)	-1.55	-0.000388
1	(2,4)	-2.24	-0.000559
1	(2,5)	-2.93	-0.000730
1	(2,6)	-3.61	-0.000902
1	(2,7)	-4.30	-0.001073
1	(2,8)	-4.99	-0.001244
1	(2,9)	-5.63	-0.001415
1	(2,10)	-6.26	-0.001587
1	(3,1)	0.18	0.000046
1	(3,2)	0.87	0.000217
1	(3,3)	1.55	0.000388
1	(3,4)	2.24	0.000559
1	(3,5)	2.93	0.000730
1	(3,6)	3.61	0.000902
1	(3,7)	4.30	0.001073
1	(3,8)	4.99	0.001244
1	(3,9)	5.63	0.001415
1	(3,10)	6.26	0.001587
1	(4,1)	0.54	0.000137
1	(4,2)	2.60	0.000650
1	(4,3)	4.66	0.001164
1	(4,4)	6.59	0.001678
1	(4,5)	8.40	0.002191
1	(4,6)	10.14	0.002705
1	(4,7)	11.82	0.003219
1	(4,8)	13.44	0.003732
1	(4,9)	15.00	0.004246
1	(4,10)	16.49	0.004760

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:			
ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-18.42	-0.005449
2	(1,2)	-20.31	-0.006162
2	(1,3)	-22.21	-0.006876
2	(1,4)	-24.04	-0.007589
2	(1,5)	-25.80	-0.008302
2	(1,6)	-27.49	-0.009016
2	(1,7)	-29.11	-0.009729
2	(1,8)	-30.69	-0.010443
2	(1,9)	-32.23	-0.011156
2	(1,10)	-33.72	-0.011870
2	(2,1)	-7.09	-0.001816
2	(2,2)	-7.94	-0.002054
2	(2,3)	-8.76	-0.002292
2	(2,4)	-9.56	-0.002530
2	(2,5)	-10.35	-0.002767
2	(2,6)	-11.12	-0.003005
2	(2,7)	-11.89	-0.003243
2	(2,8)	-12.64	-0.003481
2	(2,9)	-13.39	-0.003719
2	(2,10)	-14.11	-0.003957
2	(3,1)	7.09	0.001816
2	(3,2)	7.94	0.002054
2	(3,3)	8.76	0.002292
2	(3,4)	9.56	0.002530
2	(3,5)	10.35	0.002767
2	(3,6)	11.12	0.003005
2	(3,7)	11.89	0.003243
2	(3,8)	12.64	0.003481
2	(3,9)	13.39	0.003719
2	(3,10)	14.11	0.003957
2	(4,1)	18.42	0.005449
2	(4,2)	20.31	0.006162
2	(4,3)	22.21	0.006876
2	(4,4)	24.04	0.007589
2	(4,5)	25.80	0.008302
2	(4,6)	27.49	0.009016
2	(4,7)	29.11	0.009729
2	(4,8)	30.69	0.010443
2	(4,9)	32.23	0.011156
2	(4,10)	33.72	0.011870

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 5.0000000000E+02 HORAS:

DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y	DESL.Z	ROT.X	ROT.Y	ROT.Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1264
2	-0.0000	-1.4675	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0986
3	0.0000	-2.1688	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	0.0000	-1.4675	0.0000	0.0000	0.0000	0.0986
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1264

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
1	(1,1)	-0.54	-0.000139
1	(1,2)	-2.60	-0.000664
1	(1,3)	-4.65	-0.001189
1	(1,4)	-6.58	-0.001714
1	(1,5)	-8.39	-0.002240
1	(1,6)	-10.12	-0.002765
1	(1,7)	-11.80	-0.003290
1	(1,8)	-13.41	-0.003815
1	(1,9)	-14.95	-0.004341
1	(1,10)	-16.44	-0.004866
1	(2,1)	-0.18	-0.000046
1	(2,2)	-0.87	-0.000221
1	(2,3)	-1.55	-0.000396
1	(2,4)	-2.24	-0.000571
1	(2,5)	-2.92	-0.000747
1	(2,6)	-3.61	-0.000922
1	(2,7)	-4.29	-0.001097
1	(2,8)	-4.98	-0.001272
1	(2,9)	-5.62	-0.001447
1	(2,10)	-6.25	-0.001622
1	(3,1)	0.18	0.000046
1	(3,2)	0.87	0.000221
1	(3,3)	1.55	0.000396
1	(3,4)	2.24	0.000571
1	(3,5)	2.92	0.000747
1	(3,6)	3.61	0.000922
1	(3,7)	4.29	0.001097
1	(3,8)	4.98	0.001272
1	(3,9)	5.62	0.001447
1	(3,10)	6.25	0.001622
1	(4,1)	0.54	0.000139
1	(4,2)	2.60	0.000664
1	(4,3)	4.65	0.001189
1	(4,4)	6.58	0.001714
1	(4,5)	8.39	0.002240
1	(4,6)	10.12	0.002765
1	(4,7)	11.80	0.003290
1	(4,8)	13.41	0.003815
1	(4,9)	14.95	0.004341
1	(4,10)	16.44	0.004866

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE VIGA:

ELEMENTO	SUB-ELEMENTO	TENSAO	DEFORMACAO
2	(1,1)	-18.37	-0.005576
2	(1,2)	-20.25	-0.006310
2	(1,3)	-22.15	-0.007043
2	(1,4)	-23.97	-0.007777
2	(1,5)	-25.72	-0.008510
2	(1,6)	-27.40	-0.009244
2	(1,7)	-29.01	-0.009977
2	(1,8)	-30.58	-0.010711
2	(1,9)	-32.11	-0.011444
2	(1,10)	-33.59	-0.012178
2	(2,1)	-7.09	-0.001859
2	(2,2)	-7.94	-0.002103
2	(2,3)	-8.76	-0.002348
2	(2,4)	-9.57	-0.002592
2	(2,5)	-10.36	-0.002837
2	(2,6)	-11.13	-0.003081
2	(2,7)	-11.90	-0.003326
2	(2,8)	-12.65	-0.003570
2	(2,9)	-13.39	-0.003815
2	(2,10)	-14.12	-0.004059
2	(3,1)	7.09	0.001859
2	(3,2)	7.94	0.002103
2	(3,3)	8.76	0.002348
2	(3,4)	9.57	0.002592
2	(3,5)	10.36	0.002837
2	(3,6)	11.13	0.003081
2	(3,7)	11.90	0.003326
2	(3,8)	12.65	0.003570
2	(3,9)	13.39	0.003815
2	(3,10)	14.12	0.004059
2	(4,1)	18.37	0.005576
2	(4,2)	20.25	0.006310
2	(4,3)	22.15	0.007043
2	(4,4)	23.97	0.007777
2	(4,5)	25.72	0.008510
2	(4,6)	27.40	0.009244
2	(4,7)	29.01	0.009977
2	(4,8)	30.58	0.010711
2	(4,9)	32.11	0.011444
2	(4,10)	33.59	0.012178

APÊNDICE D

**Resultados do programa MEFVIS para elementos
de estado plano de tensões**

TITULO: VIGA DE GAUBE / 80 ELEMENTOS / DT = 10 HORAS / P = 7,2 kgf
SOLUCAO PARA O CASO DE CARREGAMENTO: 2

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+01 HORAS:
DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0221	-0.0001
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0222	-0.0001
4	0.0221	-0.0187
5	-0.0000	-0.0187
6	-0.0221	-0.0187
7	0.0219	-0.0373
8	-0.0000	-0.0374
9	-0.0220	-0.0373
10	0.0217	-0.0557
11	-0.0000	-0.0558
12	-0.0217	-0.0557
13	0.0213	-0.0738
14	0.0000	-0.0739
15	-0.0213	-0.0738
16	0.0208	-0.0916
17	0.0000	-0.0917
18	-0.0208	-0.0915
19	0.0202	-0.1089
20	0.0000	-0.1091
21	-0.0202	-0.1088
22	0.0195	-0.1257
23	0.0000	-0.1258
24	-0.0194	-0.1256
25	0.0187	-0.1418
26	0.0000	-0.1420
27	-0.0186	-0.1417
28	0.0178	-0.1571
29	0.0001	-0.1574
30	-0.0177	-0.1571
31	0.0167	-0.1717
32	0.0001	-0.1720
33	-0.0166	-0.1716
34	0.0156	-0.1853
35	0.0001	-0.1856
36	-0.0154	-0.1853
37	0.0143	-0.1980
38	0.0001	-0.1983
39	-0.0142	-0.1979
40	0.0130	-0.2095
41	0.0001	-0.2099
42	-0.0128	-0.2094
43	0.0115	-0.2198
44	0.0001	-0.2202
45	-0.0113	-0.2198
46	0.0099	-0.2289
47	0.0001	-0.2293
48	-0.0097	-0.2288
49	0.0082	-0.2366
50	0.0001	-0.2370
51	-0.0080	-0.2365
52	0.0064	-0.2428
53	0.0002	-0.2433
54	-0.0062	-0.2428
55	0.0045	-0.2475

57	-0.0042	-0.2474
58	-0.0024	-0.2503
59	0.0002	-0.2510
60	-0.0022	-0.2505
61	0.0000	-0.2510
62	0.0000	-0.2522
63	0.0000	-0.2523

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:

ELEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32879	-0.16806	-0.35338	-0.000042	-0.000003	-0.000168
2	-0.87798	-0.27774	-0.48384	-0.000124	0.000019	-0.000231
3	-1.47423	-0.42419	-0.56619	-0.000211	0.000039	-0.000270
4	-2.07575	-0.57437	-0.64381	-0.000299	0.000059	-0.000307
5	-2.67810	-0.72509	-0.72079	-0.000387	0.000079	-0.000344
6	-3.28065	-0.87592	-0.79766	-0.000474	0.000099	-0.000380
7	-3.88325	-1.02678	-0.87451	-0.000562	0.000118	-0.000417
8	-4.48589	-1.17765	-0.95136	-0.000650	0.000138	-0.000454
9	-5.08855	-1.32856	-1.02822	-0.000738	0.000158	-0.000490
10	-5.69125	-1.47951	-1.10510	-0.000826	0.000178	-0.000527
11	-6.29403	-1.63058	-1.18206	-0.000914	0.000198	-0.000563
12	-6.89700	-1.78192	-1.25919	-0.001002	0.000217	-0.000600
13	-7.50042	-1.93388	-1.33672	-0.001090	0.000237	-0.000637
14	-8.10488	-2.08725	-1.41516	-0.001178	0.000256	-0.000675
15	-8.71174	-2.24372	-1.49567	-0.001266	0.000276	-0.000713
16	-9.32420	-2.40597	-1.58070	-0.001355	0.000294	-0.000754
17	-9.94969	-2.57157	-1.67386	-0.001445	0.000313	-0.000798
18	-10.60516	-2.67569	-1.76942	-0.001545	0.000345	-0.000843
19	-11.31862	-2.24404	-1.76440	-0.001695	0.000468	-0.000841
20	-11.84231	-0.57486	-1.12095	-0.001904	0.000781	-0.000534
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000029	-0.000069	-0.000188
22	0.07024	0.01151	-0.30565	0.000011	-0.000003	-0.000146
23	0.13683	0.17892	-0.23166	0.000009	0.000019	-0.000110
24	0.20408	0.33105	-0.15562	0.000009	0.000039	-0.000074
25	0.27173	0.48199	-0.07902	0.000009	0.000059	-0.000038
26	0.33953	0.63284	-0.00227	0.000009	0.000079	-0.000001
27	0.40739	0.78370	0.07453	0.000009	0.000099	0.000036
28	0.47527	0.93456	0.15135	0.000009	0.000118	0.000072
29	0.54318	1.08543	0.22817	0.000009	0.000138	0.000109
30	0.61112	1.23629	0.30498	0.000009	0.000158	0.000145
31	0.67914	1.38716	0.38176	0.000009	0.000178	0.000182
32	0.74733	1.53803	0.45849	0.000009	0.000198	0.000219
33	0.81592	1.68889	0.53509	0.000009	0.000217	0.000255
34	0.88544	1.83976	0.61138	0.000009	0.000237	0.000291
35	0.95710	1.99064	0.68693	0.000010	0.000256	0.000327
36	1.03362	2.14169	0.76072	0.000011	0.000276	0.000363
37	1.12057	2.29417	0.83011	0.000014	0.000294	0.000396
38	1.22468	2.45690	0.88730	0.000020	0.000313	0.000423
39	1.30017	2.68171	0.91327	0.000015	0.000345	0.000435
40	0.37075	3.01618	1.13598	-0.000162	0.000468	0.000542
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000029	-0.000043	-0.000250
42	-0.12617	-0.42496	-0.54189	0.000011	-0.000061	-0.000258
43	-0.20229	-0.57467	-0.61710	0.000009	-0.000080	-0.000294
44	-0.27118	-0.72510	-0.69388	0.000009	-0.000099	-0.000331
45	-0.33931	-0.87589	-0.77067	0.000009	-0.000119	-0.000367
46	-0.40729	-1.02675	-0.84748	0.000009	-0.000139	-0.000404
47	-0.47521	-1.17762	-0.92430	0.000009	-0.000158	-0.000441
48	-0.54310	-1.32848	-1.00112	0.000009	-0.000178	-0.000477
49	-0.61096	-1.47934	-1.07793	0.000009	-0.000198	-0.000514
50	-0.67879	-1.63017	-1.15470	0.000009	-0.000218	-0.000550
51	-0.74652	-1.78097	-1.23141	0.000009	-0.000238	-0.000587
52	-0.81403	-1.93166	-1.30796	0.000009	-0.000257	-0.000624
53	-0.88103	-2.08212	-1.38413	0.000009	-0.000277	-0.000660
54	-0.94886	-2.23203	-1.45944	0.000009	-0.000297	-0.000696
55	-1.00996	-2.38062	-1.53273	0.000010	-0.000317	-0.000731

57	-1.10923	-2.66094	-1.66049	0.000014	-0.000355	-0.000792
58	-1.12052	-2.75467	-1.70318	0.000020	-0.000370	-0.000812
59	-1.07022	-2.58582	-1.74684	0.000015	-0.000346	-0.000833
60	-0.82771	0.35295	-1.90916	-0.000162	0.000119	-0.000910
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000016	0.000044	-0.000156
62	0.93391	0.15871	-0.26862	0.000142	-0.000043	-0.000128
63	1.53969	0.32468	-0.18505	0.000229	-0.000061	-0.000288
64	2.14285	0.48064	-0.10669	0.000317	-0.000080	-0.000251
65	2.74568	0.63249	-0.02952	0.000405	-0.000099	-0.000214
66	3.34840	0.78358	0.04741	0.000492	-0.000119	0.000023
67	3.95107	0.93451	0.12428	0.000580	-0.000139	0.000059
68	4.55372	1.08540	0.20113	0.000668	-0.000158	0.000096
69	5.15633	1.23626	0.27797	0.000756	-0.000178	0.000133
70	5.75891	1.38711	0.35483	0.000844	-0.000198	0.000169
71	6.36141	1.53791	0.43171	0.000932	-0.000218	0.000206
72	6.96370	1.68863	0.50866	0.001020	-0.000238	0.000242
73	7.56553	1.83914	0.58576	0.001108	-0.000257	0.000279
74	8.16630	1.98918	0.66322	0.001195	-0.000277	0.000316
75	8.76460	2.13813	0.74147	0.001283	-0.000297	0.000353
76	9.35734	2.28466	0.82144	0.001369	-0.000317	0.000392
77	9.93835	2.42647	0.90425	0.001454	-0.000336	0.000431
78	10.50100	2.56367	0.98531	0.001537	-0.000355	0.000470
79	11.08867	2.73947	0.99798	0.001620	-0.000370	0.000476
80	12.29927	3.43045	0.29412	0.001768	-0.000346	0.000140

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 1.0000000000E+02 HORAS:
DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0304	-0.0001
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0304	-0.0001
4	0.0303	-0.0257
5	-0.0000	-0.0257
6	-0.0304	-0.0256
7	0.0301	-0.0512
8	-0.0000	-0.0513
9	-0.0302	-0.0512
10	0.0298	-0.0765
11	-0.0000	-0.0766
12	-0.0298	-0.0764
13	0.0293	-0.1014
14	0.0000	-0.1015
15	-0.0293	-0.1013
16	0.0286	-0.1258
17	0.0000	-0.1260
18	-0.0286	-0.1258
19	0.0279	-0.1497
20	0.0000	-0.1499
21	-0.0278	-0.1496
22	0.0269	-0.1728
23	0.0000	-0.1730
24	-0.0268	-0.1727
25	0.0258	-0.1950
26	0.0001	-0.1953
27	-0.0257	-0.1949
28	0.0246	-0.2163
29	0.0001	-0.2166
30	-0.0245	-0.2162
31	0.0232	-0.2364
32	0.0001	-0.2368
33	-0.0231	-0.2363
34	0.0217	-0.2554
35	0.0001	-0.2558
36	-0.0215	-0.2553
37	0.0200	-0.2730
38	0.0001	-0.2734
39	-0.0198	-0.2729
40	0.0182	-0.2891
41	0.0001	-0.2895
42	-0.0179	-0.2890
43	0.0161	-0.3035
44	0.0002	-0.3040
45	-0.0158	-0.3034
46	0.0140	-0.3162
47	0.0002	-0.3168
48	-0.0136	-0.3162
49	0.0116	-0.3271
50	0.0002	-0.3277
51	-0.0113	-0.3270
52	0.0091	-0.3358
53	0.0002	-0.3365
54	-0.0087	-0.3358
55	0.0064	-0.3424
56	0.0003	-0.3431
57	-0.0060	-0.3424
58	0.0034	-0.3465

60	-0.0032	-0.3467
61	0.0000	-0.3474
62	0.0000	-0.3491
63	0.0000	-0.3493

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:

ELEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32880	-0.16806	-0.35338	-0.000055	-0.000004	-0.000223
2	-0.87799	-0.27775	-0.48385	-0.000164	0.000026	-0.000306
3	-1.47425	-0.42421	-0.56620	-0.000280	0.000052	-0.000358
4	-2.07578	-0.57441	-0.64383	-0.000396	0.000078	-0.000407
5	-2.67817	-0.72519	-0.72085	-0.000513	0.000105	-0.000456
6	-3.28080	-0.87618	-0.79781	-0.000629	0.000131	-0.000504
7	-3.88362	-1.02756	-0.87490	-0.000746	0.000157	-0.000553
8	-4.48688	-1.17944	-0.95244	-0.000862	0.000183	-0.000602
9	-5.09099	-1.33155	-1.03038	-0.000980	0.000209	-0.000652
10	-5.69459	-1.48782	-1.10749	-0.001104	0.000236	-0.000705
11	-6.29706	-1.64455	-1.18559	-0.001229	0.000263	-0.000760
12	-6.89908	-1.80221	-1.26436	-0.001355	0.000290	-0.000816
13	-7.50098	-1.96117	-1.34390	-0.001484	0.000317	-0.000874
14	-8.10328	-2.12207	-1.42458	-0.001614	0.000344	-0.000933
15	-8.70706	-2.28621	-1.50728	-0.001746	0.000371	-0.000994
16	-9.31484	-2.45554	-1.59388	-0.001880	0.000398	-0.001059
17	-9.93261	-2.62714	-1.68696	-0.002019	0.000425	-0.001129
18	-10.57537	-2.73580	-1.77976	-0.002171	0.000470	-0.001200
19	-11.26716	-2.30884	-1.76621	-0.002395	0.000646	-0.001199
20	-11.73639	-0.60441	-1.09633	-0.002698	0.001101	-0.000748
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000038	-0.000091	-0.000249
22	0.07025	0.01151	-0.30565	0.000014	-0.000004	-0.000193
23	0.13684	0.17892	-0.23166	0.000012	0.000026	-0.000146
24	0.20411	0.33105	-0.15563	0.000012	0.000052	-0.000098
25	0.27179	0.48199	-0.07904	0.000012	0.000078	-0.000050
26	0.33967	0.63284	-0.00231	0.000012	0.000105	-0.000001
27	0.40775	0.78367	0.07443	0.000012	0.000131	0.000047
28	0.47654	0.93451	0.15098	0.000012	0.000157	0.000095
29	0.54726	1.08592	0.22752	0.000013	0.000183	0.000144
30	0.61923	1.23901	0.30605	0.000013	0.000209	0.000193
31	0.69113	1.39410	0.38452	0.000014	0.000236	0.000243
32	0.76331	1.55002	0.46317	0.000014	0.000263	0.000293
33	0.83611	1.70677	0.54208	0.000015	0.000290	0.000343
34	0.90997	1.86436	0.62114	0.000015	0.000317	0.000393
35	0.98583	2.02283	0.70005	0.000016	0.000344	0.000442
36	1.06579	2.18230	0.77794	0.000018	0.000371	0.000492
37	1.15392	2.34384	0.85255	0.000022	0.000398	0.000539
38	1.25517	2.51578	0.91565	0.000027	0.000425	0.000578
39	1.32142	2.75206	0.94961	0.000018	0.000470	0.000600
40	0.32159	3.11270	1.20314	-0.000235	0.000646	0.000760
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000038	-0.000057	-0.000332
42	-0.12616	-0.42496	-0.54189	0.000014	-0.000080	-0.000343
43	-0.20227	-0.57467	-0.61709	0.000012	-0.000105	-0.000390
44	-0.27115	-0.72508	-0.69386	0.000012	-0.000131	-0.000439
45	-0.33924	-0.87586	-0.77062	0.000012	-0.000158	-0.000487
46	-0.40711	-1.02668	-0.84735	0.000012	-0.000184	-0.000536
47	-0.47479	-1.17753	-0.92397	0.000012	-0.000210	-0.000584
48	-0.54215	-1.32924	-1.00030	0.000012	-0.000237	-0.000632
49	-0.60897	-1.48347	-1.07719	0.000013	-0.000264	-0.000681
50	-0.67582	-1.63887	-1.15758	0.000013	-0.000291	-0.000732
51	-0.74405	-1.79518	-1.23795	0.000014	-0.000318	-0.000783
52	-0.81271	-1.95225	-1.31858	0.000014	-0.000346	-0.000833
53	-0.88144	-2.11000	-1.39935	0.000015	-0.000373	-0.000884
54	-0.94969	-2.26820	-1.47988	0.000015	-0.000401	-0.000935
55	-1.01624	-2.42623	-1.55929	0.000016	-0.000429	-0.000985
56	-1.07829	-2.58232	-1.63551	0.000018	-0.000457	-0.001033
57	-1.12931	-2.73000	-1.70430	0.000022	-0.000484	-0.001077
58	-1.18498	-2.84011	-1.75959	0.000027	-0.000505	-0.001111

60	-0.89430	0.41072	-2.04908	-0.000235	0.000177	-0.001293
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000021	0.000059	-0.000207
62	0.93390	0.15871	-0.26862	0.000188	-0.000057	-0.000170
63	1.53968	0.32467	-0.18505	0.000304	-0.000080	-0.000117
64	2.14282	0.48063	-0.10668	0.000420	-0.000105	-0.000067
65	2.74561	0.63246	-0.02950	0.000536	-0.000131	-0.000019
66	3.34824	0.78350	0.04747	0.000653	-0.000158	0.000030
67	3.95066	0.93431	0.12444	0.000770	-0.000184	0.000079
68	4.55250	1.08475	0.20176	0.000886	-0.000210	0.000128
69	5.15271	1.23529	0.28005	0.001004	-0.000237	0.000177
70	5.75119	1.38872	0.35901	0.001127	-0.000264	0.000229
71	6.34998	1.54286	0.43902	0.001251	-0.000291	0.000282
72	6.94847	1.69827	0.51977	0.001378	-0.000318	0.000336
73	7.54631	1.85456	0.60117	0.001505	-0.000346	0.000391
74	8.14300	2.01143	0.68332	0.001635	-0.000373	0.000448
75	8.73747	2.16836	0.76653	0.001765	-0.000401	0.000506
76	9.32734	2.32433	0.85145	0.001897	-0.000429	0.000566
77	9.90801	2.47761	0.93871	0.002029	-0.000457	0.000628
78	10.47518	2.62801	1.02369	0.002157	-0.000484	0.000689
79	11.07380	2.81905	1.04124	0.002291	-0.000505	0.000706
80	12.30910	3.53001	0.34227	0.002539	-0.000476	0.000235

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 2.0000000000E+02 HORAS:
DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0325	-0.0001
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0326	-0.0001
4	0.0325	-0.0275
5	-0.0000	-0.0275
6	-0.0326	-0.0274
7	0.0322	-0.0548
8	-0.0000	-0.0549
9	-0.0323	-0.0548
10	0.0319	-0.0819
11	-0.0000	-0.0820
12	-0.0319	-0.0818
13	0.0313	-0.1086
14	0.0000	-0.1087
15	-0.0313	-0.1085
16	0.0307	-0.1347
17	0.0000	-0.1349
18	-0.0306	-0.1346
19	0.0298	-0.1602
20	0.0000	-0.1604
21	-0.0298	-0.1601
22	0.0288	-0.1849
23	0.0000	-0.1852
24	-0.0287	-0.1848
25	0.0277	-0.2087
26	0.0001	-0.2090
27	-0.0275	-0.2086
28	0.0264	-0.2315
29	0.0001	-0.2318
30	-0.0262	-0.2314
31	0.0249	-0.2531
32	0.0001	-0.2535
33	-0.0247	-0.2530
34	0.0232	-0.2734
35	0.0001	-0.2738
36	-0.0230	-0.2733
37	0.0214	-0.2922
38	0.0001	-0.2927
39	-0.0212	-0.2921
40	0.0195	-0.3095
41	0.0002	-0.3100
42	-0.0192	-0.3094
43	0.0173	-0.3250
44	0.0002	-0.3255
45	-0.0170	-0.3249
46	0.0150	-0.3386
47	0.0002	-0.3392
48	-0.0146	-0.3385
49	0.0124	-0.3502
50	0.0002	-0.3509
51	-0.0121	-0.3501
52	0.0097	-0.3596
53	0.0003	-0.3603
54	-0.0094	-0.3595
55	0.0068	-0.3667
56	0.0003	-0.3674
57	-0.0065	-0.3666
58	0.0036	-0.3710

60	-0.0034	-0.3713
61	0.0000	-0.3720
62	0.0000	-0.3738
63	0.0000	-0.3741

TENGOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:						
LLEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32880	-0.16806	-0.35338	-0.000059	-0.000005	-0.000239
2	-0.87799	-0.27775	-0.48385	-0.000175	0.000027	-0.000327
3	-1.47425	-0.42421	-0.56620	-0.000299	0.000056	-0.000382
4	-2.07578	-0.57442	-0.64383	-0.000423	0.000084	-0.000435
5	-2.67817	-0.72520	-0.72085	-0.000547	0.000112	-0.000487
6	-3.28081	-0.87620	-0.79782	-0.000672	0.000140	-0.000539
7	-3.88364	-1.02761	-0.87493	-0.000796	0.000168	-0.000591
8	-4.48694	-1.17955	-0.95251	-0.000921	0.000195	-0.000643
9	-5.09113	-1.33173	-1.03051	-0.001047	0.000224	-0.000696
10	-5.69478	-1.48835	-1.10762	-0.001179	0.000252	-0.000754
11	-6.29722	-1.64543	-1.18580	-0.001313	0.000281	-0.000813
12	-6.89915	-1.80349	-1.26467	-0.001449	0.000310	-0.000873
13	-7.50094	-1.96289	-1.34433	-0.001587	0.000339	-0.000935
14	-8.10309	-2.12426	-1.42515	-0.001727	0.000368	-0.000999
15	-8.70666	-2.28889	-1.50800	-0.001869	0.000397	-0.001065
16	-9.31416	-2.45866	-1.59470	-0.002014	0.000425	-0.001135
17	-9.93148	-2.63064	-1.68780	-0.002164	0.000455	-0.001211
18	-10.57353	-2.73953	-1.78045	-0.002328	0.000503	-0.001287
19	-11.26415	-2.31278	-1.76640	-0.002568	0.000692	-0.001287
20	-11.73036	-0.60608	-1.09493	-0.002893	0.001180	-0.000802
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000041	-0.000097	-0.000266
22	0.07025	0.01151	-0.30565	0.000015	-0.000005	-0.000206
23	0.13684	0.17892	-0.23166	0.000013	0.000027	-0.000156
24	0.20411	0.33105	-0.15563	0.000013	0.000056	-0.000105
25	0.27180	0.48199	-0.07904	0.000013	0.000084	-0.000053
26	0.33968	0.63284	-0.00231	0.000013	0.000112	-0.000002
27	0.40777	0.78367	0.07442	0.000013	0.000140	0.000050
28	0.47661	0.93451	0.15096	0.000013	0.000168	0.000102
29	0.54751	1.08595	0.22748	0.000014	0.000195	0.000154
30	0.61972	1.23919	0.30612	0.000014	0.000224	0.000207
31	0.69186	1.39454	0.38470	0.000015	0.000252	0.000260
32	0.76428	1.55078	0.46348	0.000015	0.000281	0.000313
33	0.83732	1.70789	0.54252	0.000016	0.000310	0.000366
34	0.91144	1.86591	0.62176	0.000017	0.000339	0.000420
35	0.98756	2.02485	0.70087	0.000018	0.000368	0.000473
36	1.06773	2.18484	0.77900	0.000020	0.000397	0.000526
37	1.15593	2.34695	0.85392	0.000023	0.000425	0.000576
38	1.25704	2.51946	0.91733	0.000029	0.000455	0.000619
39	1.32277	2.75640	0.95171	0.000019	0.000503	0.000642
40	0.31887	3.11854	1.20694	-0.000252	0.000692	0.000814
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000041	-0.000061	-0.000354
42	-0.12616	-0.42496	-0.54189	0.000015	-0.000086	-0.000366
43	-0.20227	-0.57467	-0.61709	0.000013	-0.000113	-0.000417
44	-0.27115	-0.72508	-0.69385	0.000013	-0.000140	-0.000468
45	-0.33924	-0.87586	-0.77061	0.000013	-0.000168	-0.000520
46	-0.40710	-1.02668	-0.84734	0.000013	-0.000196	-0.000572
47	-0.47476	-1.17752	-0.92395	0.000013	-0.000224	-0.000624
48	-0.54210	-1.32929	-1.00025	0.000013	-0.000253	-0.000675
49	-0.60886	-1.48375	-1.07715	0.000014	-0.000282	-0.000727
50	-0.67566	-1.63944	-1.15777	0.000014	-0.000311	-0.000782
51	-0.74393	-1.79610	-1.23839	0.000015	-0.000340	-0.000836
52	-0.81268	-1.95358	-1.31929	0.000015	-0.000370	-0.000890
53	-0.88154	-2.11181	-1.40035	0.000016	-0.000399	-0.000945
54	-0.94996	-2.27053	-1.48121	0.000017	-0.000429	-0.001000
55	-1.01674	-2.42915	-1.56100	0.000018	-0.000459	-0.001053
56	-1.07911	-2.58591	-1.63766	0.000020	-0.000489	-0.001105
57	-1.13002	-2.73429	-1.70702	0.000023	-0.000518	-0.001157
58	-1.15710	-2.84529	-1.76300	0.000029	-0.000541	-0.001189

60	-0.89810	0.41415	-2.05714	-0.000252	0.000190	-0.001387
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000022	0.000063	-0.000221
62	0.93390	0.15871	-0.26862	0.000201	-0.000061	-0.000181
63	1.53968	0.32467	-0.18505	0.000324	-0.000086	-0.000125
64	2.14282	0.48063	-0.10668	0.000448	-0.000113	-0.000072
65	2.74561	0.63246	-0.02949	0.000573	-0.000140	-0.000020
66	3.34823	0.78350	0.04747	0.000697	-0.000168	0.000032
67	3.95063	0.93430	0.12445	0.000822	-0.000196	0.000084
68	4.55243	1.08471	0.20180	0.000946	-0.000224	0.000136
69	5.15249	1.23523	0.28018	0.001072	-0.000253	0.000189
70	5.75072	1.38883	0.35928	0.001204	-0.000282	0.000245
71	6.34929	1.54319	0.43948	0.001338	-0.000311	0.000301
72	6.94755	1.69891	0.52048	0.001473	-0.000340	0.000360
73	7.54516	1.85557	0.60216	0.001610	-0.000370	0.000419
74	8.14161	2.01287	0.68461	0.001749	-0.000399	0.000480
75	8.73584	2.17031	0.76813	0.001890	-0.000429	0.000543
76	9.32554	2.32687	0.85336	0.002032	-0.000459	0.000608
77	9.90617	2.48086	0.94090	0.002174	-0.000489	0.000675
78	10.47359	2.63204	1.02611	0.002312	-0.000518	0.000741
79	11.07283	2.82393	1.04391	0.002457	-0.000541	0.000759
80	12.30959	3.53597	0.34512	0.002725	-0.000509	0.000255

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 3.0000000000E+02 HORAS:
 DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0339	-0.0002
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0340	-0.0001
4	0.0338	-0.0287
5	-0.0001	-0.0287
6	-0.0339	-0.0286
7	0.0336	-0.0572
8	-0.0000	-0.0572
9	-0.0337	-0.0571
10	0.0332	-0.0853
11	-0.0000	-0.0854
12	-0.0332	-0.0853
13	0.0327	-0.1131
14	0.0000	-0.1133
15	-0.0327	-0.1130
16	0.0320	-0.1404
17	0.0000	-0.1406
18	-0.0319	-0.1403
19	0.0311	-0.1670
20	0.0000	-0.1672
21	-0.0310	-0.1669
22	0.0300	-0.1927
23	0.0001	-0.1930
24	-0.0299	-0.1926
25	0.0288	-0.2175
26	0.0001	-0.2178
27	-0.0287	-0.2174
28	0.0275	-0.2413
29	0.0001	-0.2416
30	-0.0273	-0.2412
31	0.0259	-0.2638
32	0.0001	-0.2642
33	-0.0257	-0.2637
34	0.0242	-0.2849
35	0.0001	-0.2854
36	-0.0240	-0.2849
37	0.0224	-0.3046
38	0.0001	-0.3051
39	-0.0221	-0.3045
40	0.0203	-0.3226
41	0.0002	-0.3231
42	-0.0200	-0.3225
43	0.0180	-0.3387
44	0.0002	-0.3393
45	-0.0177	-0.3387
46	0.0156	-0.3530
47	0.0002	-0.3536
48	-0.0153	-0.3529
49	0.0130	-0.3651
50	0.0002	-0.3657
51	-0.0126	-0.3650
52	0.0102	-0.3749
53	0.0003	-0.3756
54	-0.0098	-0.3748
55	0.0071	-0.3822
56	0.0003	-0.3830
57	-0.0068	-0.3822
58	0.0038	-0.3868

60	-0.0036	-0.3871
61	0.0000	-0.3878
62	0.0000	-0.3897
63	0.0000	-0.3900

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:

ELEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32880	-0.16806	-0.35338	-0.000061	-0.000005	-0.000248
2	-0.87799	-0.27775	-0.48385	-0.000182	0.000028	-0.000340
3	-1.47425	-0.42421	-0.56620	-0.000311	0.000058	-0.000395
4	-2.07578	-0.57442	-0.64383	-0.000440	0.000087	-0.000452
5	-2.67817	-0.72520	-0.72085	-0.000570	0.000116	-0.000507
6	-3.28081	-0.87620	-0.79782	-0.000699	0.000145	-0.000561
7	-3.88365	-1.02763	-0.87494	-0.000829	0.000174	-0.000615
8	-4.48697	-1.17960	-0.95254	-0.000959	0.000203	-0.000669
9	-5.09120	-1.33182	-1.03057	-0.001090	0.000233	-0.000725
10	-5.69487	-1.48860	-1.10769	-0.001228	0.000262	-0.000785
11	-6.29729	-1.64585	-1.18589	-0.001368	0.000292	-0.000847
12	-6.89918	-1.80411	-1.26482	-0.001510	0.000323	-0.000910
13	-7.50091	-1.96372	-1.34454	-0.001654	0.000353	-0.000974
14	-8.10298	-2.12532	-1.42543	-0.001800	0.000383	-0.001041
15	-8.70646	-2.29018	-1.50834	-0.001948	0.000413	-0.001110
16	-9.31382	-2.46018	-1.59510	-0.002100	0.000443	-0.001184
17	-9.93094	-2.63234	-1.68822	-0.002256	0.000474	-0.001263
18	-10.57266	-2.74142	-1.78080	-0.002427	0.000524	-0.001343
19	-11.26269	-2.31482	-1.76651	-0.002678	0.000721	-0.001343
20	-11.72733	-0.60695	-1.09421	-0.003018	0.001231	-0.000836
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000042	-0.000101	-0.000277
22	0.07025	0.01151	-0.30565	0.000016	-0.000005	-0.000215
23	0.13684	0.17892	-0.23166	0.000014	0.000028	-0.000163
24	0.20411	0.33105	-0.15563	0.000013	0.000058	-0.000109
25	0.27180	0.48199	-0.07904	0.000013	0.000087	-0.000056
26	0.33969	0.63284	-0.00232	0.000013	0.000116	-0.000002
27	0.40778	0.78366	0.07442	0.000013	0.000145	0.000052
28	0.47665	0.93450	0.15095	0.000014	0.000174	0.000106
29	0.54763	1.08597	0.22746	0.000014	0.000203	0.000160
30	0.61996	1.23927	0.30616	0.000015	0.000233	0.000215
31	0.69221	1.39475	0.38479	0.000016	0.000262	0.000270
32	0.76474	1.55115	0.46362	0.000016	0.000292	0.000326
33	0.83790	1.70844	0.54274	0.000017	0.000323	0.000381
34	0.91214	1.86666	0.62205	0.000017	0.000353	0.000437
35	0.98838	2.02582	0.70126	0.000019	0.000383	0.000493
36	1.06865	2.18606	0.77951	0.000021	0.000413	0.000548
37	1.15692	2.34844	0.85455	0.000024	0.000443	0.000600
38	1.25800	2.52124	0.91816	0.000030	0.000474	0.000645
39	1.32354	2.75858	0.95277	0.000020	0.000524	0.000669
40	0.31758	3.12158	1.20894	-0.000263	0.000721	0.000849
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000042	-0.000063	-0.000369
42	-0.12616	-0.42496	-0.54189	0.000016	-0.000089	-0.000381
43	-0.20227	-0.57467	-0.61709	0.000014	-0.000117	-0.000434
44	-0.27115	-0.72508	-0.69385	0.000013	-0.000146	-0.000488
45	-0.33923	-0.87586	-0.77061	0.000013	-0.000175	-0.000542
46	-0.40709	-1.02668	-0.84734	0.000013	-0.000204	-0.000595
47	-0.47475	-1.17752	-0.92394	0.000013	-0.000234	-0.000649
48	-0.54207	-1.32931	-1.00023	0.000014	-0.000263	-0.000703
49	-0.60881	-1.48388	-1.07714	0.000014	-0.000293	-0.000757
50	-0.67558	-1.63971	-1.15787	0.000015	-0.000324	-0.000814
51	-0.74388	-1.79655	-1.23861	0.000016	-0.000354	-0.000870
52	-0.81268	-1.95424	-1.31963	0.000016	-0.000385	-0.000927
53	-0.88160	-2.11268	-1.40083	0.000017	-0.000416	-0.000984
54	-0.95010	-2.27166	-1.48186	0.000017	-0.000447	-0.001041
55	-1.01699	-2.43056	-1.56182	0.000019	-0.000478	-0.001097
56	-1.07951	-2.58704	-1.63870	0.000021	-0.000509	-0.001151
57	-1.13126	-2.73640	-1.70831	0.000024	-0.000559	-0.001200
58	-1.15812	-2.84791	-1.76467	0.000030	-0.000564	-0.001239

60	-0.89996	0.41595	-2.06135	-0.000263	0.000199	-0.001447
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000023	0.000065	-0.000230
62	0.93390	0.15871	-0.26862	0.000209	-0.000063	-0.000185
63	1.53968	0.32467	-0.18505	0.000338	-0.000089	-0.000130
64	2.14282	0.48062	-0.10668	0.000467	-0.000117	-0.000075
65	2.74561	0.63246	-0.02949	0.000596	-0.000146	-0.000021
66	3.34822	0.78350	0.04747	0.000726	-0.000175	0.000033
67	3.95062	0.93430	0.12446	0.000855	-0.000204	0.000087
68	4.55239	1.08469	0.20182	0.000985	-0.000234	0.000142
69	5.15238	1.23521	0.28024	0.001116	-0.000263	0.000197
70	5.75049	1.38888	0.35940	0.001253	-0.000293	0.000255
71	6.34896	1.54335	0.43971	0.001393	-0.000324	0.000314
72	6.94711	1.69922	0.52082	0.001534	-0.000354	0.000375
73	7.54461	1.85606	0.60264	0.001678	-0.000385	0.000437
74	8.14095	2.01357	0.68523	0.001823	-0.000416	0.000501
75	8.73507	2.17125	0.76890	0.001970	-0.000447	0.000566
76	9.32468	2.32809	0.85429	0.002118	-0.000478	0.000634
77	9.90528	2.48242	0.94198	0.002266	-0.000509	0.000705
78	10.47278	2.63400	1.02731	0.002411	-0.000539	0.000774
79	11.07228	2.82636	1.04527	0.002562	-0.000564	0.000793
80	12.30971	3.53906	0.34662	0.002844	-0.000531	0.000267

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 4.0000000000E+02 HORAS:
DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0349	-0.0002
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0350	-0.0001
4	0.0349	-0.0296
5	-0.0001	-0.0296
6	-0.0349	-0.0295
7	0.0346	-0.0589
8	-0.0000	-0.0589
9	-0.0347	-0.0588
10	0.0342	-0.0879
11	-0.0000	-0.0880
12	-0.0342	-0.0878
13	0.0336	-0.1165
14	0.0000	-0.1167
15	-0.0336	-0.1164
16	0.0329	-0.1446
17	0.0000	-0.1448
18	-0.0329	-0.1445
19	0.0320	-0.1720
20	0.0000	-0.1722
21	-0.0319	-0.1719
22	0.0309	-0.1985
23	0.0001	-0.1988
24	-0.0300	-0.1984
25	0.0297	-0.2241
26	0.0001	-0.2244
27	-0.0296	-0.2240
28	0.0283	-0.2485
29	0.0001	-0.2489
30	-0.0281	-0.2484
31	0.0267	-0.2717
32	0.0001	-0.2721
33	-0.0265	-0.2716
34	0.0250	-0.2935
35	0.0001	-0.2940
36	-0.0247	-0.2934
37	0.0230	-0.3138
38	0.0001	-0.3143
39	-0.0228	-0.3137
40	0.0209	-0.3323
41	0.0002	-0.3328
42	-0.0206	-0.3322
43	0.0186	-0.3490
44	0.0002	-0.3495
45	-0.0183	-0.3489
46	0.0161	-0.3636
47	0.0002	-0.3642
48	-0.0157	-0.3635
49	0.0134	-0.3761
50	0.0002	-0.3767
51	-0.0130	-0.3760
52	0.0105	-0.3862
53	0.0003	-0.3869
54	-0.0101	-0.3861
55	0.0073	-0.3938
56	0.0003	-0.3946
57	-0.0070	-0.3937
58	0.0003	-0.3985

60	-0.0037	-0.3987
61	0.0000	-0.3995
62	0.0000	-0.4014
63	0.0000	-0.4017

TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:						
ELEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32880	-0.16806	-0.35338	-0.000063	-0.000005	-0.000256
2	-0.87799	-0.27775	-0.48385	-0.000188	0.000029	-0.000350
3	-1.47425	-0.42421	-0.56620	-0.000320	0.000060	-0.000410
4	-2.07578	-0.57442	-0.64383	-0.000453	0.000090	-0.000466
5	-2.67817	-0.72520	-0.72085	-0.000587	0.000120	-0.000521
6	-3.28082	-0.87621	-0.79782	-0.000720	0.000150	-0.000577
7	-3.88365	-1.02764	-0.87494	-0.000853	0.000180	-0.000633
8	-4.48699	-1.17963	-0.95256	-0.000987	0.000209	-0.000689
9	-5.09124	-1.33187	-1.03060	-0.001122	0.000240	-0.000746
10	-5.69493	-1.48875	-1.10773	-0.001264	0.000270	-0.000808
11	-6.29733	-1.64612	-1.18595	-0.001408	0.000301	-0.000872
12	-6.89920	-1.80449	-1.26491	-0.001555	0.000332	-0.000937
13	-7.50089	-1.96423	-1.34467	-0.001703	0.000363	-0.001004
14	-8.10292	-2.12597	-1.42559	-0.001854	0.000394	-0.001072
15	-8.70633	-2.29097	-1.50855	-0.002007	0.000425	-0.001144
16	-9.31361	-2.46112	-1.59536	-0.002163	0.000456	-0.001220
17	-9.93063	-2.63340	-1.68849	-0.002325	0.000488	-0.001302
18	-10.57213	-2.74265	-1.78103	-0.002501	0.000540	-0.001384
19	-11.26177	-2.31616	-1.76659	-0.002760	0.000743	-0.001384
20	-11.72536	-0.60754	-1.09372	-0.003111	0.001268	-0.000861
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000044	-0.000104	-0.000285
22	0.07025	0.01151	-0.30565	0.000016	-0.000005	-0.000221
23	0.13684	0.17892	-0.23166	0.000014	0.000029	-0.000168
24	0.20411	0.33105	-0.15563	0.000014	0.000060	-0.000113
25	0.27180	0.48199	-0.07904	0.000014	0.000090	-0.000057
26	0.33969	0.63284	-0.00232	0.000014	0.000120	-0.000002
27	0.40779	0.78366	0.07442	0.000014	0.000150	0.000054
28	0.47667	0.93450	0.15095	0.000014	0.000180	0.000109
29	0.54770	1.08598	0.22745	0.000015	0.000209	0.000165
30	0.62011	1.23932	0.30618	0.000016	0.000240	0.000221
31	0.69242	1.39488	0.38485	0.000016	0.000270	0.000278
32	0.76503	1.55137	0.46371	0.000017	0.000301	0.000335
33	0.83826	1.70877	0.54287	0.000017	0.000332	0.000393
34	0.91257	1.86712	0.62224	0.000018	0.000363	0.000450
35	0.98888	2.02642	0.70150	0.000019	0.000394	0.000507
36	1.06922	2.18681	0.77982	0.000021	0.000425	0.000564
37	1.15755	2.34935	0.85494	0.000025	0.000456	0.000618
38	1.25864	2.52235	0.91869	0.000031	0.000488	0.000664
39	1.32409	2.75998	0.95346	0.000021	0.000540	0.000689
40	0.31678	3.12361	1.21029	-0.000271	0.000743	0.000875
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000044	-0.000065	-0.000380
42	-0.12616	-0.42496	-0.54189	0.000016	-0.000092	-0.000392
43	-0.20227	-0.57467	-0.61709	0.000014	-0.000121	-0.000446
44	-0.27115	-0.72508	-0.69385	0.000014	-0.000150	-0.000502
45	-0.33923	-0.87586	-0.77061	0.000014	-0.000180	-0.000557
46	-0.40709	-1.02668	-0.84733	0.000014	-0.000210	-0.000613
47	-0.47475	-1.17752	-0.92394	0.000014	-0.000240	-0.000668
48	-0.54205	-1.32933	-1.00021	0.000014	-0.000271	-0.000723
49	-0.60877	-1.48396	-1.07713	0.000015	-0.000302	-0.000779
50	-0.67553	-1.63989	-1.15794	0.000016	-0.000333	-0.000838
51	-0.74385	-1.79683	-1.23874	0.000016	-0.000365	-0.000896
52	-0.81268	-1.95464	-1.31984	0.000017	-0.000396	-0.000955
53	-0.88164	-2.11322	-1.40113	0.000017	-0.000428	-0.001013
54	-0.95019	-2.27236	-1.48225	0.000018	-0.000460	-0.001072
55	-1.01715	-2.43143	-1.56283	0.000019	-0.000492	-0.001130
56	-1.07976	-2.58870	-1.63983	0.000021	-0.000524	-0.001185
57	-1.13164	-2.73774	-1.70909	0.000025	-0.000556	-0.001230
58	-1.19375	-2.84962	-1.76578	0.000031	-0.000588	-0.001277

60	-0.90112	0.41717	-2.06421	-0.000271	0.000205	-0.001492
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000024	0.000067	-0.000237
62	0.93390	0.15871	-0.26862	0.000219	-0.000065	-0.000194
63	1.53968	0.32467	-0.18505	0.000348	-0.000092	-0.000134
64	2.14282	0.48062	-0.10668	0.000481	-0.000121	-0.000077
65	2.74560	0.63240	-0.02949	0.000614	-0.000150	-0.000021
66	3.34822	0.78350	0.04748	0.000747	-0.000180	0.000034
67	3.95061	0.93429	0.12446	0.000880	-0.000210	0.000090
68	4.55237	1.08468	0.20183	0.001014	-0.000240	0.000146
69	5.15232	1.23519	0.28028	0.001149	-0.000271	0.000203
70	5.75035	1.38892	0.35948	0.001290	-0.000302	0.000262
71	6.34876	1.54345	0.43985	0.001434	-0.000333	0.000323
72	6.94685	1.69941	0.52104	0.001580	-0.000365	0.000386
73	7.54427	1.85637	0.60293	0.001728	-0.000396	0.000450
74	8.14054	2.01400	0.68561	0.001877	-0.000428	0.000516
75	8.73460	2.17183	0.76938	0.002029	-0.000460	0.000584
76	9.32415	2.32884	0.85487	0.002182	-0.000492	0.000654
77	9.90472	2.48336	0.94265	0.002335	-0.000524	0.000727
78	10.47223	2.63523	1.02807	0.002485	-0.000556	0.000798
79	11.07187	2.82791	1.04617	0.002641	-0.000580	0.000818
80	12.30970	3.54111	0.34764	0.002932	-0.000547	0.000276

RESULTADOS PARA O INSTANTE T = 5.0000000000E+02 HORAS:
DESLOCAMENTOS NODAIS:

NO	DESL.X	DESL.Y
1	0.0358	-0.0002
2	-0.0001	0.0000
3	-0.0358	-0.0001
4	0.0357	-0.0303
5	-0.0001	-0.0303
6	-0.0358	-0.0302
7	0.0354	-0.0603
8	-0.0000	-0.0603
9	-0.0355	-0.0602
10	0.0350	-0.0900
11	-0.0000	-0.0901
12	-0.0351	-0.0899
13	0.0345	-0.1193
14	0.0000	-0.1195
15	-0.0345	-0.1192
16	0.0337	-0.1481
17	0.0000	-0.1483
18	-0.0337	-0.1480
19	0.0328	-0.1761
20	0.0000	-0.1763
21	-0.0327	-0.1760
22	0.0317	-0.2033
23	0.0001	-0.2035
24	-0.0316	-0.2032
25	0.0304	-0.2295
26	0.0001	-0.2298
27	-0.0303	-0.2294
28	0.0290	-0.2545
29	0.0001	-0.2549
30	-0.0288	-0.2544
31	0.0274	-0.2783
32	0.0001	-0.2787
33	-0.0272	-0.2782
34	0.0256	-0.3006
35	0.0001	-0.3010
36	-0.0253	-0.3005
37	0.0236	-0.3213
38	0.0002	-0.3218
39	-0.0233	-0.3212
40	0.0214	-0.3403
41	0.0002	-0.3408
42	-0.0211	-0.3402
43	0.0190	-0.3574
44	0.0002	-0.3580
45	-0.0187	-0.3573
46	0.0165	-0.3724
47	0.0002	-0.3730
48	-0.0161	-0.3723
49	0.0137	-0.3851
50	0.0002	-0.3858
51	-0.0133	-0.3850
52	0.0107	-0.3955
53	0.0003	-0.3962
54	-0.0103	-0.3954
55	0.0075	-0.4033
56	0.0003	-0.4041
57	-0.0071	-0.4032
58	0.0040	-0.4081

60	-0.0038	-0.4084
61	0.0000	-0.4092
62	0.0000	-0.4111
63	0.0000	-0.4114

TENSORES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS DE ESTADO PLANO:

ELEM.	SIGMA-X	SIGMA-Y	TAL-XY	EPS-X	EPS-Y	GAMA-XY
1	-0.32880	-0.16806	-0.35338	-0.000065	-0.000005	-0.000262
2	-0.87799	-0.27775	-0.48385	-0.000192	0.000030	-0.000358
3	-1.47425	-0.42421	-0.56620	-0.000328	0.000061	-0.000419
4	-2.07578	-0.57442	-0.64383	-0.000464	0.000092	-0.000477
5	-2.67817	-0.72520	-0.72086	-0.000600	0.000123	-0.000534
6	-3.28082	-0.87621	-0.79783	-0.000737	0.000153	-0.000591
7	-3.88366	-1.02765	-0.87495	-0.000873	0.000184	-0.000648
8	-4.48700	-1.17965	-0.95257	-0.001010	0.000214	-0.000705
9	-5.09127	-1.33191	-1.03063	-0.001148	0.000245	-0.000764
10	-5.69497	-1.48887	-1.10776	-0.001294	0.000277	-0.000827
11	-6.29736	-1.64631	-1.18600	-0.001442	0.000308	-0.000892
12	-6.89921	-1.80477	-1.26497	-0.001592	0.000340	-0.000959
13	-7.50088	-1.96461	-1.34476	-0.001744	0.000372	-0.001028
14	-8.10286	-2.12645	-1.42572	-0.001898	0.000404	-0.001098
15	-8.70623	-2.29156	-1.50871	-0.002055	0.000435	-0.001172
16	-9.31345	-2.46182	-1.59554	-0.002215	0.000467	-0.001249
17	-9.93040	-2.63419	-1.68871	-0.002381	0.000499	-0.001333
18	-10.57174	-2.74360	-1.78121	-0.002562	0.000552	-0.001418
19	-11.26109	-2.831722	-1.76667	-0.002828	0.000761	-0.001418
20	-11.72383	-0.60800	-1.09333	-0.003187	0.001299	-0.000882
21	-0.01585	-0.42406	-0.39455	0.000045	-0.000106	-0.000292
22	0.07025	0.01151	-0.30565	0.000017	-0.000005	-0.000226
23	0.13684	0.17892	-0.23166	0.000014	0.000030	-0.000171
24	0.20411	0.33105	-0.15563	0.000014	0.000061	-0.000115
25	0.27180	0.48199	-0.07904	0.000014	0.000092	-0.000059
26	0.33969	0.63284	-0.00232	0.000014	0.000123	-0.000002
27	0.40779	0.78366	0.07442	0.000014	0.000153	0.000055
28	0.47669	0.93450	0.15094	0.000014	0.000184	0.000112
29	0.54775	1.08598	0.22744	0.000015	0.000214	0.000168
30	0.62022	1.23936	0.30620	0.000016	0.000245	0.000227
31	0.69258	1.39408	0.38489	0.000017	0.000277	0.000285
32	0.76524	1.55154	0.46378	0.000017	0.000308	0.000343
33	0.83852	1.70902	0.54297	0.000018	0.000340	0.000402
34	0.91288	1.86745	0.62237	0.000018	0.000372	0.000461
35	0.98925	2.02686	0.70168	0.000020	0.000404	0.000519
36	1.06964	2.18736	0.78004	0.000022	0.000435	0.000577
37	1.15802	2.35003	0.85521	0.000026	0.000467	0.000633
38	1.25915	2.52318	0.91909	0.000032	0.000499	0.000680
39	1.32456	2.76105	0.95400	0.000021	0.000552	0.000706
40	0.31619	3.12522	1.21137	-0.000278	0.000761	0.000896
41	0.07183	-0.22922	-0.52468	0.000045	-0.000067	-0.000388
42	-0.12616	-0.42496	-0.54189	0.000017	-0.000094	-0.000401
43	-0.20227	-0.57466	-0.61709	0.000014	-0.000123	-0.000457
44	-0.27115	-0.72508	-0.69385	0.000014	-0.000154	-0.000514
45	-0.33923	-0.87586	-0.77061	0.000014	-0.000185	-0.000570
46	-0.40709	-1.02667	-0.84733	0.000014	-0.000215	-0.000627
47	-0.47474	-1.17752	-0.92393	0.000014	-0.000246	-0.000684
48	-0.54204	-1.32934	-1.00020	0.000014	-0.000277	-0.000740
49	-0.60875	-1.48403	-1.07712	0.000015	-0.000309	-0.000797
50	-0.67550	-1.64001	-1.15798	0.000016	-0.000341	-0.000857
51	-0.74383	-1.79704	-1.23884	0.000017	-0.000373	-0.000917
52	-0.81268	-1.95494	-1.32000	0.000017	-0.000406	-0.000977
53	-0.88167	-2.11362	-1.40136	0.000018	-0.000438	-0.001037
54	-0.95026	-2.27287	-1.48255	0.000018	-0.000471	-0.001097
55	-1.01727	-2.43207	-1.56270	0.000020	-0.000504	-0.001157
56	-1.07995	-2.58949	-1.63979	0.000022	-0.000537	-0.001214
57	-1.13192	-2.73874	-1.70967	0.000026	-0.000569	-0.001269
58	-1.18521	-2.88094	-1.76653	0.000032	-0.000594	-0.001307

59	1.13500	-2.70463	-1.83420	0.000021	-0.000000	0.000000	-0.001528
60	0.40200	0.41815	-2.06650	-0.000278	0.000210	-0.001528	-0.002242
61	0.27282	0.39286	-0.32738	0.000025	0.000069	-0.000199	-0.000199
62	0.93390	0.15871	-0.26852	0.000220	-0.000067	-0.000137	-0.000137
63	1.53968	0.32467	-0.18505	0.000356	-0.000094	-0.000079	-0.000079
64	2.14282	0.48062	-0.10668	0.000492	-0.000123	-0.000022	-0.000022
65	2.74560	0.03240	-0.02949	0.000628	-0.000154	0.000035	0.000035
66	3.34822	0.78349	0.04748	0.000765	-0.000185	0.000092	0.000092
67	3.95061	0.93429	0.12446	0.000901	-0.000215	0.000149	0.000149
68	4.55235	1.08467	0.20184	0.001037	-0.000246	0.000208	0.000208
69	5.15227	1.23518	0.28031	0.001176	-0.000277	0.000269	0.000269
70	5.75025	1.38894	0.35954	0.001321	-0.000309	0.000331	0.000331
71	6.34861	1.54352	0.43995	0.001468	-0.000341	0.000395	0.000395
72	6.94665	1.69955	0.52119	0.001617	-0.000373	0.000461	0.000461
73	7.54403	1.85659	0.60315	0.001769	-0.000406	0.000529	0.000529
74	8.14025	2.01433	0.68590	0.001922	-0.000438	0.000598	0.000598
75	8.73426	2.17226	0.76973	0.002078	-0.000471	0.000670	0.000670
76	9.32376	2.32940	0.85530	0.002234	-0.000504	0.000745	0.000745
77	9.90429	2.48405	0.94316	0.002391	-0.000537	0.000818	0.000818
78	10.47180	2.63615	1.02865	0.002545	-0.000569	0.000839	0.000839
79	11.07153	2.82909	1.04687	0.002705	-0.000594	0.000284	0.000284
80	12.30964	3.54272	0.34846	0.003005	-0.000560		