

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Marcelo Augusto Leal Alves

Engenheiro Mecânico (EPUSP – 1993)  
Mestre em Engenharia (EPUSP – 1997)

UM MODELO PARA ANÁLISE DA INSTABILIDADE DOS  
REFORÇADORES NO PROCESSO DE FABRICAÇÃO DE TUBOS  
ESTRUTURADOS

Tese apresentada a Escola  
Politécnica para concorrer ao  
título de Doutor, pelo curso de  
Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica.

Área de concentração:  
Engenharia Mecânica

CONSULTA  
FT-1737

São Paulo  
2002

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Marcelo Augusto Leal Alves

Engenheiro Mecânico (EPUSP – 1993)  
Mestre em Engenharia (EPUSP – 1997)

UM MODELO PARA ANÁLISE DA INSTABILIDADE DOS  
REFORÇADORES NO PROCESSO DE FABRICAÇÃO DE TUBOS  
ESTRUTURADOS

Tese apresentada a Escola  
Politécnica para concorrer ao  
título de Doutor, pelo curso de  
Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica.

Área de concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Paulo Carlos Kaminski

São Paulo  
2002

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar os agradecimentos vão para o meu orientador Prof. Paulo Carlos Kaminski, com quem venho colaborando desde 1991.

Meus agradecimentos ao Eng. Luiz Laterza por nos ter apresentado ao problema em estudo.

Agradeço também ao Prof. Dr. Henrique Lindenberg Neto e ao Prof. Dr. Ronaldo de Breyne Salvagni pelas críticas e sugestões feitas no exame de qualificação e que foram muito úteis na conclusão deste trabalho.

Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Vanderley M. John, do Departamento de Construção Civil pelo auxílio na determinação das propriedades do material usado na fabricação dos tubos estruturados.

Ao Prof. Marcelo Massarani e demais colegas do Departamento de Engenharia Mecânica (novo e antigo) agradeço pelo incentivo recebido ao longo dos anos.

Ao aluno (agora engenheiro) Rogério Santana pelo auxílio na preparação deste trabalho.

Finalmente, aos meus familiares por todo incentivo e carinho ao longo da minha vida.

A minha avó, Elisa.

## ERRATA

Página	Texto original	Texto corrigido
19	Na figura 3.4. está apresenta...	Na figura 3.3 apresenta-se
28	$v_i = v + (x_o - y) \cdot \phi$	$v_i = v + (x_o - x) \cdot \phi$
73	... a expressão 4.41...	... a expressão 4.46...

Na página 45, incluir, após a tabela 3.2, o seguinte parágrafo:

“As razões para as discrepâncias observadas entre os resultados analíticos e os obtidos a partir do MEF, quer em termos de modo de flambagem (modo local x flexão-torção) quer entre valores de carga crítica, podem ser: Inadequação da malha de elementos finitos – Foi adotada uma mesma malha para todos os modelos, sendo esta otimizada para o caso do perfil básico. Em alguns casos em que houve discrepância foram feitas algumas tentativas com outras malhas e os resultados não apresentaram diferenças significativas em relação ao obtido com a malha padrão. Outra razão pode ser o fato do modo encontrado ser o predominante, uma vez que trata-se de um modo local, com deformação da alma apenas, sendo que esta última teve a sua rigidez diminuída frente aos outros componentes do perfil. A modelagem da vinculação também pode ser apontada como uma causa para as discrepâncias observadas.

Na página 55, incluir, após a tabela 3.7, o seguinte parágrafo:

“As razões para as discrepâncias observadas, em termos de valores de carga crítica, entre os resultados analíticos e os obtidos a partir do MEF podem ser: Inadequação da malha de elementos finitos – Foi adotada uma mesma malha para todos os modelos, sendo esta otimizada para o caso do perfil básico. Em alguns casos em que houve discrepância foram feitas algumas tentativas com outras malhas e os resultados não apresentaram diferenças significativas em relação ao obtido com a malha padrão. Outra razão pode ser o fato do modo encontrado ser o predominante, uma vez que trata-se de um modo local, com deformação da alma apenas, sendo que esta última teve a sua rigidez diminuída frente aos outros componentes do perfil. A modelagem da vinculação também pode ser apontada como uma causa para as discrepâncias observadas. Deve ser notado, entretanto, que o modo de flambagem encontrado sempre foi o de flexão-torção, para os casos apresentados na tabela 3.7

# Índice

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de símbolos	vi
Lista de figuras	ix
Lista de tabelas	xi
1. Introdução	1
2. Revisão bibliográfica	6
3. Modelo de flambagem lateral de vigas	14
3.1 Torção de vigas com seção aberta e paredes finas	14
3.1.1 Torção pura	15
3.1.2 Torção não-uniforme	18
3.2 Flambagem torcional	22
3.3 Flambagem por flexão-torção	26
3.3.1 Carga concentrada	26
3.3.2 Forças e momentos concentrados	29
3.3.3 Viga bi-apoiada com momentos concentrados na extremidade	31
3.3.4 Cálculo das propriedades geométricas	33
3.3.4.1 Translação de eixos	34
3.3.4.2 Posição do centro de torção	36
3.3.4.3 Exemplo de cálculo de propriedades geométricas	38
3.3.5 Modelos de elementos finitos	42
4. Modelos de placa	58
4.1 Modelos de viga modificados	58
4.2 Modelos de Placa	62
4.3 Compressão da alma	66
5. Comparativo dos critérios de avaliação da flambagem	71
5.1 Determinação dos esforços de enrolamento	71
5.2 Comparação dos critérios	72
6. Introdução ao Projeto do Tubo Estruturado	78
6.1 Rigidez do tubo e rigidez do tubo	78
6.2 Exemplo de aplicação – Seleção de perfil	81
6.3 Exemplo de aplicação – Modificação de perfil	83
7. Conclusões e trabalhos futuros	86
Referências bibliográficas	88
Apêndice 1	91
Apêndice 2	99
Apêndice 3	104

## RESUMO

Tubos estruturados são obtidos pelo enrolamento de uma lâmina nervurada. O produto é um tubo de baixo peso, com rigidez e resistência adequadas a seu uso principal que é como conduto enterrado para líquidos escoando em regime de canal aberto.

Durante o processo de enrolamento do tubo é possível a ocorrência de instabilidade das nervuras de reforço do perfil. A instabilidade destas nervuras inutiliza o tubo formado, uma vez que o mesmo não terá a rigidez nem a resistência esperadas. O estudo deste fenômeno é o principal objetivo deste trabalho, bem como o desenvolvimento de uma ferramenta para que os engenheiros que usam e desenvolvem este tipo de tubo possam determinar se haverá risco ou não de flambagem na fabricação do tubo.

São estudados diferentes modelos e mecanismos para a explicação da instabilidade das nervuras. Os modelos são teóricos-analíticos, baseados em teorias clássicas de estabilidade de estruturas de paredes finas e modelos numéricos baseados no métodos dos elementos finitos.

## **ABSTRACT**

Reinforced pipes are obtained winding a ribbed plate. The final product is a low-weight pipe with stiffness and strength determined according to its main application that is as a underground duct for liquids flowing in open-channel conditions.

During the winding process it is possible that the ribs will buckle. This instability makes the resulting pipe useless since it will not have the prescribed stiffness and strength. To study this instability is the main objective of the present work as well as the development of a design tool that will allow the engineers that apply this kind of pipe to avoid the reinforcements instability during manufacturing.

Different models and mechanisms of instability are studied in order to explain what happens to the reinforcements. The models are theoretical-analytical, based on classic stability theories for thin-walled open-section structures and the numerical models are based on the finite elements models.



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras maiúsculas

A	(L <sup>-2</sup> )	Área da seção transversal
A <sub>p</sub>	(L <sup>-2</sup> )	Área da seção transversal do perfil
C		Centro geométrico
C <sub>φ</sub>	(FL <sup>2</sup> )	Constante da solução do momento crítico - Termo de torção
C <sub>y</sub>	(F)	Constante da solução do momento crítico - Termo de flexão
E	(FL <sup>-2</sup> )	Módulo de elasticidade
G	(FL <sup>-2</sup> )	Módulo de cisalhamento
I	(L <sup>4</sup> )	Momento de inércia
I <sub>x</sub>	(L <sup>4</sup> )	Momento de inércia em torno do eixo x
I <sub>y</sub>	(L <sup>4</sup> )	Momento de inércia em torno do eixo y
I <sub>w</sub>	(L <sup>6</sup> )	Constante de empenamento
J <sub>t</sub>	(L <sup>4</sup> )	Inércia a torção para seções abertas de paredes finas
J <sub>o</sub>	(L <sup>4</sup> )	Momento polar de inércia em relação ao ponto O
K <sub>1</sub>	(L)	Constante da solução de flambagem
K <sub>2</sub>	(L)	Constante da solução de flambagem
K <sub>a</sub>	(FL <sup>-1</sup> )	Rigidez de um anel
K <sub>e</sub>	(FL <sup>-1</sup> )	Rigidez de placa
K <sub>tm</sub>	(FL <sup>-1</sup> L <sup>-1</sup> )	Rigidez por unidade de comprimento
M	(FL)	Momento/Momento crítico
M <sub>en</sub>	(FL)	Momento de enrolamento
M <sub>h</sub>	(FL)	Momento de hélice
M <sub>t</sub>	(FL)	Momento torçor
M <sub>t1</sub>	(FL)	Parcela do momento torçor devido a torção pura
M <sub>t2</sub>	(FL)	Parcela do momento torçor devido a torção não-uniforme
M <sub>x</sub>	(FL)	Momento em torno do eixo x
M <sub>y</sub>	(FL)	Momento em torno do eixo y
M <sub>z</sub>	(FL)	Momento em torno do eixo z
N		Ponto qualquer na seção transversal
N	(FL <sup>-1</sup> )	Carga distribuída
N <sub>c</sub>	(FL <sup>-1</sup> )	Carga distribuída crítica
N <sub>x</sub>	(FL <sup>-1</sup> )	Carga distribuída na direção x
O		Centro geométrico da seção transversal
O'		Posição do centro geométrico após deslocamentos de translação
O''		Posição do centro geométrico após deslocamentos de translação e rotação
P	(F)	Força aplicada
R	(L)	Raio do tubo
S		Centro de cisalhamento

### Letras minúsculas

a	(L)	Constante da transformação de centro de torção;
a	(L)	Dimensão da aresta de uma placa
b	(L)	Constante da transformação de centro de torção;
b	(L)	Dimensão da aresta de uma placa
b <sub>1</sub>	(L)	Largura do flange superior - Perfil I mono-simétrico
b <sub>2</sub>	(L)	Largura do flange inferior - Perfil I mono-simétrico
c	(L)	Constante da transformação de centro de torção

d	(L)	Distância de ponto a um eixo/reta
$d_e$	(L)	Diâmetro de enrolamento do tubo
h	(L)	Altura - Perfil I mono-simétrico
$h_1$	(L)	Distância do flange superior medida deste o centro geométrico da seção - Perfil I mono-simétrico
$h_2$	(L)	Distância do flange inferior medida deste o centro geométrico da seção - Perfil I mono-simétrico
$h_s$	(L)	Cota do centro de cisalhamento
$h_x$	(L)	Coordenada de um ponto N – Eixo x
$h_y$	(L)	Coordenada de um ponto N – Eixo y
$k_x$	( $FL^{-1}L^{-1}$ )	Rigidez na direção x distribuída ao longo do comprimento
$k_y$	( $FL^{-1}L^{-1}$ )	Rigidez na direção y distribuída ao longo do comprimento
$k_\phi$	( $FLL^{-1}$ )	Rigidez torcional distribuída ao longo do comprimento
m	(L)	Perímetro da linha média da seção transversal;
m		Ordem do modo de flambagem
$m_a$	(M)	Massa de um anel
$m_l$	( $ML^{-1}$ )	Massa do tubo por unidade de comprimento
$m_z$	( $FLL^{-1}$ )	Momento elementar
n		Direção normal
p	( $FL^{-2}$ )	Carga de compressão na alma devida a tração no flange
q	( $FL^{-1}$ )	Carga lateral elementar
$q_n$	( $FL^{-1}$ )	Carga reativa elementar num ponto N
$q_x$	( $FL^{-1}$ )	Carga lateral elementar na direção x
$q_y$	( $FL^{-1}$ )	Carga lateral elementar na direção y
r	(L)	Módulo do raio vetor
$r_n$	(L)	Distância do centro de cisalhamento a normal à linha média da seção
$r_s$	(L)	Distância do centro de cisalhamento a tangente à linha média da seção
s		Direção tangencial/Coordenada curvilínea
t	(L)	Espessura da seção transversal
$t_1$	(L)	Espessura do flange superior - Seção I mono-simétrica
$t_2$	(L)	Espessura do flange inferior - Seção I mono-simétrica
$t_h$	(L)	Espessura da alma - Seção I mono-simétrica
u	(L)	Deslocamento na direção x
v	(L)	Deslocamento na direção y
w	(L)	Empenamento;
w	(L)	Deslocamento na direção Z (placas)
$w_o$	(L)	Empenamento no ponto O
$\bar{w}$	(L)	Empenamento médio
x		Eixo de coordenadas
$x_o$	(L)	Posição do centro de cisalhamento - Eixo x
$x_o'$	(L)	Posição do eixo de torção - Eixo x
y		Eixo de coordenadas
$y_o$	(L)	Posição do centro de cisalhamento - Eixo y
$y_o'$	(L)	Posição do eixo de torção - Eixo y
$y_s$	(L)	Coordenadas do centro de cisalhamento - Eixo y
z		Eixo de coordenadas

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta w$	(L)	Varição do empenamento
$\Delta w'$	(L)	Varição do empenamento para torção em torno de um centro qualquer
$\Delta \omega$	(L <sup>2</sup> )	Varição da função de empenamento
$\Delta \omega'$	(L <sup>2</sup> )	Varição da função de empenamento para torção em torno de um centro qualquer

### Letras gregas minúsculas

$\alpha$		Ângulo de hélice
$\epsilon$		Deformação
$\epsilon_z$		Deformação na direção z
$\phi$		Ângulo de torção
$\theta$	(L <sup>-1</sup> )	Ângulo de torção por unidade de comprimento
$\rho$	(L)	Distância de um ponto qualquer ao eixo de torção/Raio de curvatura
$\rho$	(ML <sup>-3</sup> )	Densidade do material
$\sigma$	(FL <sup>-2</sup> )	Tensão normal
$\sigma_z$	(FL <sup>-2</sup> )	Tensão normal na direção z
$\nu$		Coefficiente de Poisson
$\tau$	(FL <sup>-2</sup> )	Tensão de cisalhamento
$\varpi$	(L <sup>2</sup> )	Função de empenamento
$\varpi'$	(L <sup>2</sup> )	Função de empenamento para torção em torno de um eixo qualquer
$\bar{\varpi}$	(L <sup>2</sup> )	Função de empenamento médio
$\bar{\varpi}'$	(L <sup>2</sup> )	Função de empenamento médio para torção em torno de um eixo qualquer

## LISTA DE FIGURAS

### Capítulo 1

- Figura 1.1 Perfil a ser enrolado para a formação do tubo p.1
- Figura 1.2 Tubo estruturado montado em obra de drenagem de águas pluviais p.2
- Figura 1.3 Vista geral do anel de enrolamento do tubo p.3
- Figura 1.4 Etapa inicial de montagem do perfil no anel de enrolamento do tubo p.3

### Capítulo 2

- Figura 2.1 Definição de terminologia para as seções transversais p.7

### Capítulo 3

- Figura 3.1 (a) Torção uniforme (b) Torção não-uniforme p.15
- Figura 3.2 Empenamento na linha média da seção transversal (Bleich, 1952) p.16
- Figura 3.3 Torção não-uniforme (Timoshenko & Gere, 1961) p.19
- Figura 3.4 Elemento da superfície média de viga sujeita a torção não-uniforme p.21
- Figura 3.5 Flambagem torcional de viga cruciforme p.23
- Figura 3.6 Elemento da barra em torção p.25
- Figura 3.7 Deslocamentos de flexão e torção p.27
- Figura 3.8 Seção transversal mono-simétrico p.31
- Figura 3.9 Viga bi-apoiada p.31
- Figura 3.10 Seção mono-simétrica - Dimensões e sistema de coordenadas p.34
- Figura 3.11 Diferença entre empenamentos p.37
- Figura 3.12 Dimensões básicas do modelo adotado (em milímetros) p.44
- Figura 3.13 Momento crítico x Espessura da alma ( $t_h$ ) p.46
- Figura 3.14 Modo de flambagem por flexão-torção p.46
- Figura 3.15 Modo local de flambagem p.47
- Figura 3.16 Momento crítico x espessura do flange superior ( $t_1$ ) p.48
- Figura 3.17 Momento crítico x espessura do flange inferior ( $t_2$ ) p.50

Figura 3.18 Modo local de flambagem	p.50
Figura 3.19 Momento crítico x largura do flange menor ( $b_1$ )	p.52
Figura 3.20 Momento crítico x largura do flange maior ( $b_2$ )	p.54
Figura 3.21 Modo local de flambagem no flange maior	p.54
Figura 3.22 Momento crítico x altura da alma ( $h$ )	p.56
 <b>Capítulo 4</b>	
Figura 4.1 Possíveis deslocamentos na flambagem dos reforços	p.58
Figura 4.2 Modelo com rigidez distribuída	p.59
Figura 4.3 Placa retangular comprimida numa direção	p. 62
Figura 4.4 Placa com uma extremidade engastada	p.65
Figura 4.5 Viga em flexão - Equilíbrio do flange superior	p.66
Figura 4.6 Chapa sujeita a carga uniforme	p.69
 <b>Capítulo 5</b>	
Figura 5.1 Dimensões básicas dos reforçadores	p.73
Figura 5.2 Bobinas com os perfis a serem enrolados	p.74
Figura 5.3 Falha observada em tubo feito com o perfil 2 e diâmetro 400mm	p.75
Figura 5.4 Falha durante o enrolamento – Tubo feito com o perfil 1, diâmetro 300mm	p.76
 <b>Capítulo 6</b>	
Figura 6.1 Anel sujeito a compressão	p.78
Figura 6.2 Tubo enterrado	p.81

## LISTA DE TABELAS

### Capítulo 3

Tabela 3.1 Dimensões do modelo típico p.43

Tabela 3.2 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura da alma ( $t_h$ ) p.45

Tabela 3.3 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura do flange superior ( $t_1$ ) p.48

Tabela 3.4 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura do flange inferior ( $t_2$ ) p.49

Tabela 3.5 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da largura do flange superior ( $b_1$ ) p.51

Tabela 3.6 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da largura do flange inferior ( $b_2$ ) p.53

Tabela 3.7 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da altura da alma ( $h$ ) p.55

### Capítulo 5

Tabela 5.1 Dimensões dos reforçadores p.73

Tabela 5.2 Comparativo dos critérios p.74

### Capítulo 6

Tabela 6.1 Dimensões dos reforçadores p.82

Tabela 6.2 Rigidez de um anel ( $K_a$  - expressão 6.5) p.82

Tabela 6.3 Resultado dos critérios p.83

Tabela 6.4 Dimensões dos reforçadores p.83

Tabela 6.5 Resultados para os critérios de projeto p.84

## 1. Introdução

A principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho surgiu quando da introdução no Brasil do uso de tubos estruturados, feitos em PVC (Poli-cloreto de Vinila) obtidos a partir do enrolamento de lâminas nervuradas oriundas de perfis extrudados (ver figura 1.1). Na figura 1.1 vê-se que a parede do tubo, formada pela lâmina, é reforçada por nervuras. Toda estrutura é de paredes finas. Sendo assim, a rigidez do tubo fica aumentada pela inclusão das nervuras, sem que, haja aumento excessivo do peso do mesmo e, portanto, da quantidade de material usado na fabricação.

Durante a fabricação do tubo, para determinados perfis e diâmetros de enrolamento, foi observada a repentina e excessiva deformação lateral do conjunto de reforçadores, ou de apenas alguns destes, tornando inútil, devido a perda de rigidez, o tubo formado.

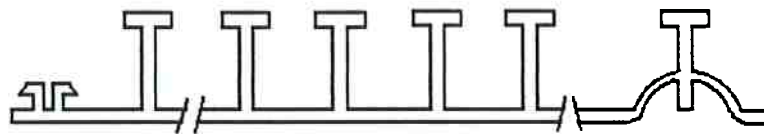


Figura 1.1 Perfil a ser enrolado para a formação do tubo

Na figura 1.2 é possível ver um tubo formado sendo instalado no seu local de uso.



Figura 1.2 Tubo estruturado montado em obra de drenagem de águas pluviais

Os modelos disponíveis para previsão do comportamento da lâmina durante o processo de enrolamento não forneciam resultados compatíveis com o observado. Em determinadas situações os modelos não previam, para um determinado diâmetro de tubo, a instabilidade quando o perfil era enrolado, e em outras situações a instabilidade prevista não ocorria. A partir da crítica a estes modelos iniciou-se a intervenção do autor no problema em estudo.

O enrolamento do perfil é executado numa máquina que é composta por um anel de aço, de rigidez muito maior que a do perfil. Neste anel são montados roletes que se encaixam, com folga, no espaço entre os reforçadores e servem para guiar o perfil conferindo não só a curvatura bem como o ângulo de hélice necessário para o fechamento do perfil. A figuras 1.3 e 1.4 apresentam um aspecto geral do aparato de enrolamento dos perfis e a etapa de ajustagem do perfil que começa a ser enrolado.

Ao completar uma volta no anel é feito o encaixe das laterais do perfil, agregada a colagem deste encaixe com fins de garantir a vedação.





Figura 1.3 Vista geral do anel de enrolamento do tubo



Figura 1.4 Etapa inicial de montagem do perfil no anel de enrolamento do tubo

O tubo formado presta-se essencialmente para as tubulações enterradas de escoamento de líquidos em regime de canal aberto, em que a seção transversal do tubo não é totalmente preenchida pelo escoamento. Outras aplicações envolvem a construção de galerias para passagem de cabos elétricos e de comunicações. Os reforços irão dotar

o tubo de rigidez necessária para que, sob efeito do peso do solo e de cargas impostas no mesmo, o tubo permaneça estanque e também apresente a necessária resistência a estas cargas.

Nota-se que o tubo é rígido e de baixo peso quando comparado com os tubulões de concreto usados normalmente. Há ainda a vantagem do tubo poder ser feito no canteiro de obras e no comprimento que se queira. É sabido que um dos limitantes para o comprimento dos tubulões de concreto ou de ferro fundido é, além do peso, o comprimento disponível nos caminhões usados no transporte. Por ter esta limitação no comprimento, estes tubulões são ligados uns aos outros por meio de emendas do tipo ponta e bolsa ou flangeadas que são de difícil execução no canteiro de obras.

O problema básico é justamente determinar se um determinado perfil, que dotará o tubo da rigidez e resistência requeridas no projeto da tubulação, poderá ser enrolado no diâmetro especificado para o tubo.

O objetivo deste trabalho é a obtenção de uma ferramenta de projeto deste tipo de tubo, que permita ao usuário determinar com a devida precisão se ocorrerá algum problema relativo à instabilidade dos reforçadores. Tal ferramenta até a publicação deste trabalho não é existente e a mesma viria a substituir procedimentos do tipo: "tentativa e erro" aplicados atualmente.

Para tanto foram desenvolvidos dois critérios distintos para a avaliação da flambagem dos reforçadores, além da determinação da deformação máxima decorrente do enrolamento do perfil.

No desenvolvimento deste trabalho foram empregados modelos analíticos e numéricos para previsão do comportamento dos reforçadores. Os modelos analíticos são baseados nas condições de equilíbrio da estrutura levando em conta as restrições

impostas pelo equipamento empregado na fabricação do tubo. Os modelos numéricos são baseados no método dos elementos finitos.

Dentre as premissas básicas adotadas nos modelos desenvolvidos, estão o fato de que o material foi considerado como tendo comportamento elástico linear (apêndice 3) e que não foram consideradas não-linearidades de caráter geométrico.

Este é um trabalho de caráter tecnológico/científico que trata de um problema real, feito a partir de uma colaboração Universidade/Empresa. Logo, não se trata de um trabalho de cunho puramente teórico. Não é também voltado exclusivamente para a análise de um problema, mas visa subsidiar o projeto de um determinado produto.

Cabe ainda um comentário a respeito da notação empregada. Durante a revisão bibliográfica foi percebido que a notação mais comumente adotada segue aquela proposta por Timoshenko & Gere (1961). Exceção feita aos trabalhos mais antigos tais como Wagner (1936), Goodier (1942) e Bleich (1952). Desta forma, foi feita a opção de seguir esta tendência, com algumas poucas alterações.

## 2. Revisão bibliográfica

Na pesquisa bibliográfica feita não foram encontrados trabalhos que tratassem especificamente com a estrutura em estudo, isto é, um perfil que ao ser enrolado apresenta comportamento instável de seus reforçadores. Obviamente a pesquisa foi direcionada para a busca de trabalhos que tratassem com a estabilidade de estruturas com seções abertas e de paredes finas, uma vez que estas eram as características encontradas no problema.

No início deste estudo foi feita uma pesquisa nos textos básicos relativos a estabilidade de estruturas em geral. Em Timoshenko & Gere (1961) encontram-se as soluções para diferentes problemas similares ao analisado. Esta é a referência básica para o estudo dos diferentes problemas de estabilidade de estruturas. Entretanto, no caso de flambagem lateral de vigas em flexão, não há solução para vigas com seção mono-simétrica ou não simétrica (ver figura 2.1 para ilustração desta terminologia). Algumas soluções para condições de contorno simples (p.ex. bi-apoiada) e seções simétricas, como a retangular de parede fina (lâmina), podem ser encontradas em textos mais elementares de resistência dos materiais tais como Den Hartog (1952).

Ainda como texto básico de estabilidade é possível citar a referência Bleich (1952). Nesta referência podem também ser encontradas diferentes soluções para a carga crítica de flambagem de estruturas de paredes finas. Entretanto, algumas das proposições desta referência foram contestadas posteriormente (Anderson & Trahair, 1971) no que se refere a possibilidade de se usar as soluções obtidas para o caso de seção simétrica na situação de seção mono-simétrica. Segundo Bleich as duas soluções são equivalentes se no caso de seção mono-simétrica se considere as posições dos pontos de aplicação dos esforços sobre o centro de cisalhamento.

A referência Young (1989) contém várias expressões, quer para cálculo de propriedades de seções quer soluções de carga crítica para vigas e chapas. Embora não seja completa nem apresente alternativas de cálculo para condições distintas aquelas disponíveis na referência.

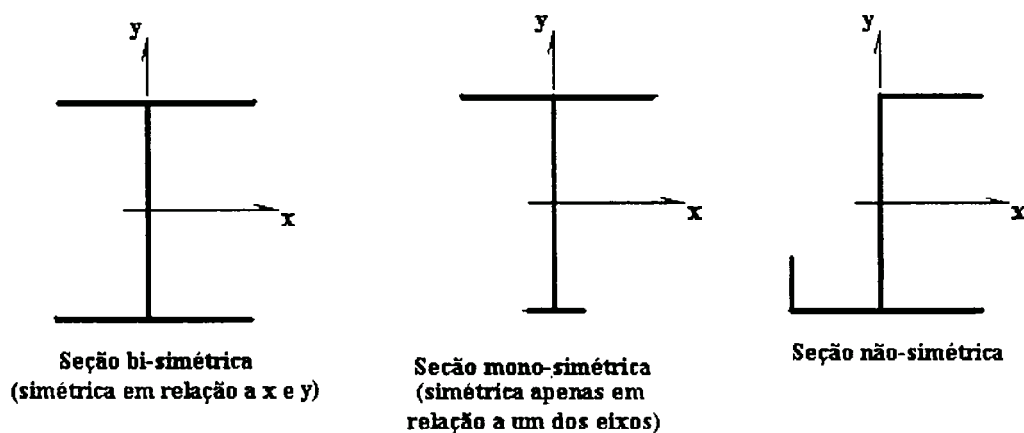


Figura 2.1 Definição de terminologia para as seções transversais

Vlasov (1962) também é referência básica para o estudo de estruturas de paredes finas em geral, não só nos aspectos de estabilidade.

Em Allen & Bulson (1980) há também uma série de soluções para as diferentes situações em que estruturas de paredes finas apresentam comportamento instável, com atenção aos casos de flambagem local. Nesta referência é também apresentada uma comparação entre os resultados teóricos e as recomendações de normas técnicas para construção com perfis de paredes finas.

A primeira solução de caráter geral para o problema de instabilidade de um elemento sujeito à compressão, em que o colapso ocorre por torção ou flexo-torção, sendo a carga crítica inferior àquela determinada pela teoria clássica de Euler, foi obtida por Wagner (1936). Sobre este trabalho, a data de publicação, 1936, corresponde a edição em inglês. O trabalho foi publicado, em alemão, em 1929. Bleich (1952) reporta que, no caso de flambagem lateral de vigas sujeitas a flexão, a primeira solução data de

1899, tendo sido obtida separadamente por Michell e Prandt. O ponto principal proposto por Wagner para a obtenção desta solução é a consideração da não coincidência dos centros geométricos e de cisalhamento, havendo, portanto, uma interação entre flexão e torção. Outro aspecto importante apresentado por Wagner é o fato de que a torção do elemento faz com que as tensões normais de compressão atuantes exerçam um torque no sentido de aumentar a torção inicial, numa situação de instabilidade.

Goodier (1942) apresenta uma extensão da formulação apresentada por Wagner (1936) ao problema de flambagem lateral de vigas sujeitas a flexão. Os resultados obtidos para a seção simétrica são concordantes com resultados anteriores (Timoshenko, 1930). Entretanto, para seções não simétricas os resultados são distintos, sendo demonstrado que a solução apresentada anteriormente (Timoshenko, 1930) não é geral. A formulação proposta por Goodier (1942) foi a primeira de caráter mais geral para o problema de instabilidade de vigas de seções abertas com paredes finas e carregamento concentrado nas extremidades.

Aplicações das formulações apresentadas por Goodier (1942) foram encontradas em Anderson & Trahair (1971). Na altura da publicação deste trabalho os autores apontam para uma escassez de informações a respeito do problema de flambagem lateral de vigas mono-simétricas, bem como contradições entre algumas das formulações para a solução deste problema. Nesta referência além de um estudo teórico a partir da formulação apresentada por Goodier (1942) é feita uma comparação entre as diferentes expressões de cálculo da carga crítica de flambagem a partir de resultados experimentais para distintas condições de contorno e carregamento. A posição de aplicação do carregamento em relação ao centro de cisalhamento também é estudada.

As dificuldades para cálculo das constantes de mono-simetria e de propriedades tais como posição do centro de cisalhamento e constante de empenamento levou ao

desenvolvimento de uma série de formulações aproximadas. Chajes & Winter (1965) apresentam um desenvolvimento mais simplificado para o problema de flambagem por torção ou flexo-torção de uma coluna comprimida, onde também é apresentada a modificação do modo de flambagem conforme são modificadas as dimensões da seção transversal. Uma das modificações propostas é a adoção do método proposto por Chilver (1955) para o cálculo da constante de empenamento.

Kitipornchai & Trahair (1980) também apresentam métodos alternativos para cálculo dos parâmetros de mono-simetria e das propriedades das seções transversais. Ainda são apresentadas expressões alternativas para a flambagem lateral de vigas mono-simétricas para verificação expedita deste tipo de elemento.

Outra vertente observada nos trabalhos pesquisados apresenta um aprofundamento nos estudos analíticos para a obtenção de soluções para a carga crítica de flambagem em diferentes casos. Kitipornchai & Wong-Chung (1987) apresentam uma solução para a flambagem lateral de vigas mono-simétricas na presença de tensões residuais devidas a soldagem. Nesta condição não são válidas as hipóteses do regime elástico.

No caso de vigas com curvatura do eixo maior, uma solução aproximada foi apresentada por Davidson (1955). Trahair & Woolcock (1973) apresentam uma solução para o caso de viga bissimétrica (seção I) na condição engastada e bi-apoiada.

Roberts & Azizian (1983) apresentam a influência dos deslocamentos pré-flambagem sobre a carga crítica. Neste caso a partir das expressões para a deformação na estrutura obtém-se uma expressão para a variação da energia potencial total. Ao ser feita a minimização desta função, retém-se os termos de ordem mais elevada, revelando-se a influência dos deslocamentos prévios. Roberts & Burt (1984), usando a mesma



formulação, obtém uma série de resultados para vigas mono-simétricas tanto em balanço quanto bi-apoiadas.

Pi & Trahair (1992a, 1992b) apresentam, respectivamente, uma formulação para flambagem lateral, considerando deslocamentos iniciais e as aplicações da mesma.

Kitipornchai et al. (1986) apresentam as soluções para o caso de vigas mono-simétricas sujeitas a momentos variáveis.

Wang & Kitipornchai (1986) tratam do caso de vigas mono-simétricas, bi-apoiadas, sujeitas a carregamento transversal. Há ainda uma análise de como deve ser otimizado o grau de mono-simetria da viga de maneira que seja maximizada a resistência a flambagem deste tipo de estrutura.

Ainda com o objetivo de otimizar a resistência de flambagem lateral de vigas, Wang et al. (1990) partem das soluções existentes e obtém as geometrias ótimas para diferentes condições de carregamento e vinculação.

Wang & Kitipornchai (1989) propõe um novo conjunto de parâmetros que simplificam as expressões para determinação das cargas críticas de flambagem, para vigas mono-simétricas sujeitas a momentos uniformes e cargas excêntricas aplicadas às extremidades.

A influência de ancoragem sobre o comportamento de vigas mono-simétricas em balanço foi estudada por Wang et al. (1987) no que se refere a flambagem lateral. É usada a abordagem de energia de deformação, proposta por Timoshenko & Gere (1961), sendo as cargas críticas determinadas a partir de direta minimização do coeficiente de Rayleigh generalizado.

Quanto ao uso de elementos finitos para a análise de flambagem neste tipo de estrutura, o trabalho mais antigo encontrado data de 1970. Barsoum & Gallagher (1970) propõe um elemento finito do tipo viga que incorpora em sua formulação os efeitos que



levam a falha por torção ou flexo-torção. A fundamentação teórica é baseada no que fora proposto por Bleich (1952) e Timoshenko & Gere (1961) aliado a teoria de elementos finitos.

Helwig et al. (1997) apresentam a análise de flambagem lateral de vigas mono-simétricas usando o método dos elementos finitos. Papangelis et al. (1997) apresentam um programa de computador para verificação de flambagem lateral de estruturas compostas por elementos com seção aberta de paredes finas, baseando nas formulações apresentadas por Anderson & Trahair (1971) e Barsoum & Gallagher (1970).

Chin et al. (1992) desenvolveram um elemento finito do tipo placa para análise de flambagem, de maneira a que seja possível verificar a possibilidade de distorção da seção transversal como, por exemplo, em situações em que a alma do perfil é relativamente esbelta.

Helwig et al. (1997) apresentam uma série de simulações em elementos finitos, usando elementos de placa de 8 nós, para verificação da faixa de aplicabilidade de formulações previstas em normas técnicas para construção com perfis metálicos de paredes finas. Os resultados também são comparados com as formulações mais completas propostas por Kitipornchai & Trahair (1980) e Wang & Kitipornchai (1986).

Outra possível abordagem para o estudo do problema em questão é considerar o perfil a ser enrolado como sendo um painel reforçado. As referências, Bleich (1952), Timoshenko & Gere (1961) e Allen & Bulson (1980) apresentam várias soluções para painéis carregados axialmente, segundo diferentes condições de contorno.

A literatura encontrada neste caso é voltada em sua grande parte para a indústria de construção naval, em que este tipo de estrutura é normalmente empregado.

Murray (1973) apresenta resultados experimentais e analíticos para a flambagem de painéis reforçados carregados axialmente e sob flexão. Dois modos de flambagem

são identificados. Também é estudado o comportamento pós-flambagem deste tipo de painel.

Um estudo mais recente por Grondin et al. (1998) apresenta resultados experimentais para a flambagem de painéis reforçados visando o estudo do efeito de vinculação das laterais não carregadas do painel. É feita também uma comparação dos resultados usando o método dos elementos finitos levando em conta grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Grondin et al. (1999) apresentam um estudo paramétrico da flambagem de painéis reforçados usando elementos finitos. A análise considerou imperfeições iniciais, tensões residuais no painel, razão de aspecto da placa e dos reforçadores. É feita uma comparação com diretrizes propostas por entidades normalizadoras da indústria naval, revelando que estas diretrizes são em geral conservadoras.

Dos textos encontrados pode-se concluir que os mesmos tratam de casos que guardam apenas pequena semelhança com o problema estudado. Considerando inicialmente o modelo da estrutura, a maioria dos trabalhos adota a viga como estrutura a ser estudada.

As condições de contorno são em geral ou bi-apoiada ou com extremidade engastada. Condições simples se comparadas com aquelas impostas na máquina de enrolamento de perfis. O mesmo pode ser dito a respeito do carregamento. Na maioria dos casos há aplicação de cargas nas extremidades, quer seja força concentrada de compressão ou momento fletor.

A fato apontado acima pode ser relacionado a uma predominância das formulações que buscam uma expressão analítica para determinação da carga crítica de flambagem. Quando se trata de trabalhos que lidam com o uso de elementos finitos, são duas as vertentes básicas: Desenvolvimento de elementos finitos capazes de modelar

eficazmente os comportamentos encontrados em estruturas com seções abertas e paredes finas ou quando problemas de flambagem que envolvem deformação de apenas parte da seção transversal são de interesse.

Outra tendência encontrada é o desenvolvimento de formulações analíticas, numéricas e experimentais para verificação da validade de recomendações de normas técnicas para a construção com estruturas metálicas, situação na qual são comumente empregados perfis de paredes finas.

Quando se trata de painéis reforçados, os trabalhos mais recentes tratam do desenvolvimento de modelos numéricos para verificação da validade de normas técnicas em distintos casos de carregamentos em vinculação, em situações específicas de um ramo de indústria de construção naval.

Não foram encontrados trabalhos em que fosse possível encontrar alguma informação a respeito da influência do ângulo de hélice, imposto no enrolamento do tubo, no problema da flambagem dos reforçadores.

Há ainda uma referência básica para o projeto de tubulações enterradas. Moser (1990) apresenta diferentes tipos de tubulação operando em distintos regimes. Contém informações importantes para determinação de cargas atuantes em tubos alternados bem como critérios de operação de tubulações enterradas. Entretanto, esta referência não lida com a fabricação dos tubos.

### **3. Modelo de flambagem lateral de vigas**

O modelo de flambagem lateral de vigas por flexão/torção é o primeiro a ser considerado no estudo dos reforçadores. A disponibilidade de algumas soluções analíticas leva a esta escolha (Wagner, 1936), (Goodier, 1942), (Bleich, 1952), (Timoshenko, 1961), (Anderson & Trahair, 1982). A idéia inicial é que cada reforçador teria comportamento semelhante a uma viga de seção transversal aberta e paredes finas. Outra possibilidade é considerar que todo o perfil tem este comportamento.

Segundo Bleich (1952) as primeiras soluções para o problema de flambagem lateral de vigas data de 1899. Em alguns livros-textos básicos (Den Hartog, 1952) encontram-se algumas soluções para condições de carregamento simples e seções bi-simétricas. Entretanto, a interação entre flexão e torção só passou a ser considerada corretamente a partir da década de 1930 (Wagner, 1936).

Dadas as características peculiares da torção de vigas com seção aberta e paredes finas, uma revisão da teoria referente a este tópico faz-se necessária antes que se prossiga com o equacionamento referente a flambagem. Esta revisão está baseada naquela apresentada por Timoshenko & Gere (1961).

#### **3.1 Torção de vigas com seção aberta e paredes finas**

O estudo da torção de vigas com seções abertas e paredes finas é dividido em dois casos. O primeiro trata da torção uniforme, ou torção pura, em que o empenamento das seções transversais não é restrito e o momento de torção é uniforme ao longo do comprimento da viga. O segundo caso de torção refere-se às situações nas quais ou o momento torçor não é uniforme ao longo do comprimento da viga ou há alguma restrição ao empenamento e, por conseguinte, tensões longitudinais passam a atuar. A figura 3.1 ilustra as duas situações.

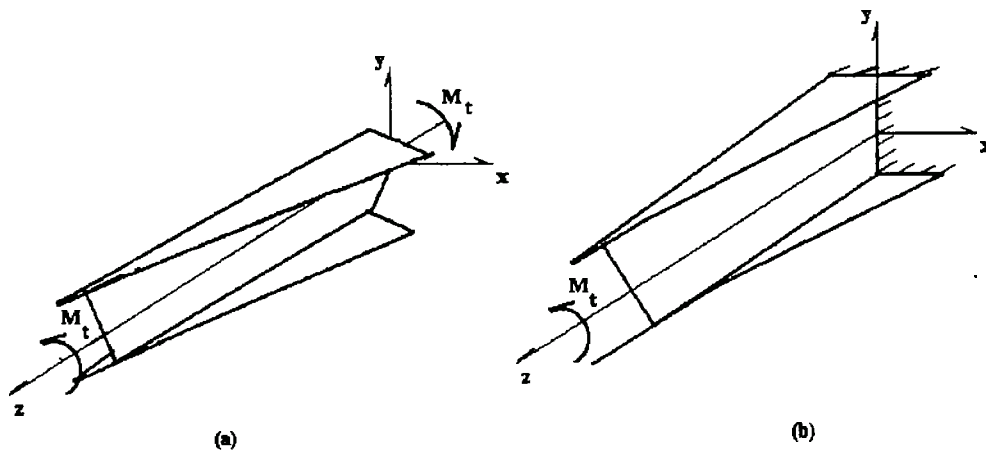


Figura 3.1. (a) Torção uniforme. (b) Torção não-uniforme

### 3.1.1 Torção pura

Neste caso apenas as tensões de cisalhamento devidas ao momento torçor atuam numa dada seção transversal da viga. Como se trata de uma situação de seção transversal aberta de paredes finas é possível considerar que estas tensões de cisalhamento, atuantes em determinado ponto, são paralelas a linha média da seção e variam linearmente com a distância deste ponto a linha média.

O ângulo de torção por unidade de comprimento é dado por:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} \quad (3.1)$$

Em 3.1  $M_t$  é o momento torçor,  $G$  o módulo de cisalhamento e  $J_t$  inércia à torção. Notar que apenas no caso de torção pura o valor de  $\theta$  é constante.

A configuração da viga em torção é tal que, se forem consideradas fibras no sentido longitudinal e sendo  $\rho$  a distância de uma destas ao eixo de torção, uma vez imposta a deformação estas fibras estão inclinadas em relação ao eixo de torção segundo um ângulo igual a  $\rho\theta$ .

Além do ângulo de torção há o empenamento da seção transversal. O empenamento é o deslocamento dos pontos da seção transversal na direção longitudinal.

Como não há tensão de cisalhamento ao longo da linha média da seção, esta linha permanece perpendicular às fibras longitudinais após a torção. Os valores dos deslocamentos referentes ao empenamento podem então ser deduzidos.

Inicialmente considera-se o caso de torção da viga em relação a um eixo fixo paralelo ao eixo longitudinal da viga. Na figura 3.2(a) está representado um trecho de uma determinada seção transversal da viga. No ponto A, pertencente a linha média da seção, está a origem de um sistema de coordenadas  $s$  e  $n$ , sendo que  $s$  é o eixo que contém a tangente a linha média do perfil no ponto A. O eixo  $n$  é normal a linha média. O plano formado por  $s$  e  $n$  é o mesmo que contém a seção transversal e portanto, é perpendicular a direção do eixo longitudinal  $z$ . Considera-se que a seção gira em torno de um eixo, paralelo ao longitudinal, passando pelo ponto S, correspondente ao centro de cisalhamento da seção transversal. O ponto B também pertence a linha média e está separado de uma distância  $ds$  do ponto A. Pode-se entender também os pontos A e B como sendo as interseções de duas fibras longitudinais da viga com o plano da seção transversal.

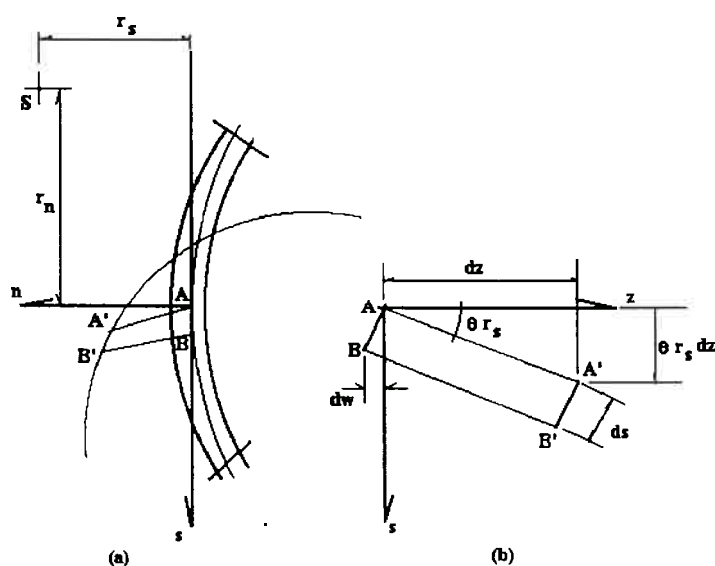


Figura 3.2 Empenamento na linha média da seção transversal (Bleich, 1952)

Na figura 3.2(a) também é representada a linha média de uma seção transversal subsequente separada da primeira por uma distância  $dz$ . Esta configuração da linha média para esta seção é obtida girando a linha média da seção anterior pelo ângulo  $\theta dz$  em torno do ponto S.

Um rebatimento da figura 3.2(a) é mostrado em 3.2(b). Nesta é possível observar os deslocamentos das fibras AA' e BB'. Antes da deformação A, A', B' e B formam um retângulo. Como na torção pura não há tensão de cisalhamento na linha média estes quatro pontos continuam formando um retângulo. Assim da geometria da figura 3.2 é possível concluir que:

$$\partial w = -\theta \cdot r_s \cdot \partial s \quad (3.2)$$

Em 3.2  $r_s$  é a distância do ponto S a reta tangente a linha média da seção. O sinal negativo deve-se a convenção que considera o momento torçor positivo segundo a direção de z. Assim:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -r_s \theta \quad (3.3)$$

Integrando 3.3 obtém-se:

$$w = w_0 - \theta \cdot \int_0^s r_s \cdot ds \quad (3.4)$$

Em 3.4  $w_0$  é o deslocamento, referente ao empenamento da seção, do ponto a partir do qual é medida a coordenada s.

Caso se considere um deslocamento do eixo de torção é possível comprovar (Timoshenko & Gere, 1961) que o empenamento num ponto da linha média permanece o mesmo a menos de uma parcela que depende apenas da posição final do centro de rotação e linearmente das coordenadas deste ponto, sem a influência de quaisquer outras deformações da viga. Assim, no caso de torção pura de uma viga com extremidades

livres, a escolha do eixo de cisalhamento é aleatória desde que o mesmo seja paralelo ao eixo longitudinal da viga.

O valor médio do empenamento é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{1}{m} \cdot \int_0^m w \cdot ds \\ \bar{w} &= w_0 - \frac{\theta}{m} \cdot \int_0^m \left[ \int_0^s r_s ds \right] \cdot ds\end{aligned}\quad (3.5)$$

Em 3.5,  $m$ , é o perímetro da linha média da seção transversal.

Com o intuito de eliminar a parcela  $w_0$ , é feita uma mudança na referência para determinação do empenamento. Subtraindo de 3.4 o valor médio do empenamento obtém-se o empenamento da seção em relação ao plano de empenamento médio. Apesar desta mudança, ainda será usado o mesmo símbolo para o empenamento,  $w$ .

$$w = \frac{\theta}{m} \cdot \int_0^m \left[ \int_0^s r_s ds \right] \cdot ds - \theta \cdot \int_0^s r_s ds \quad (3.6)$$

Definindo as funções de empenamento e empenamento médio, respectivamente:

$$\begin{aligned}\varpi_s &= \int_0^s r_s ds \\ \bar{\varpi}_s &= \frac{1}{m} \cdot \int_0^m \varpi_s ds\end{aligned}\quad (3.7)$$

Assim, o empenamento na torção pura pode ser escrito da seguinte forma:

$$w = \theta \cdot (\bar{\varpi}_s - \varpi_s) \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Torção não-uniforme

O caso de torção não-uniforme ocorre quando qualquer seção não for livre para empenar ou quando o momento torçor variar ao longo do comprimento da viga. Como o



empenamento será variável ao longo do comprimento da viga, tensões normais irão se desenvolver.

Para a torção não-uniforme a resistência a torção é dividida em duas parcelas. A primeira,  $M_{t1}$ , é devida a variação do ângulo de torção ao longo do comprimento da viga e é dada, em termos de momento torçor, por:

$$M_{t1} = GJ_t \cdot \frac{d\phi}{dz} \quad (3.9)$$

Notar que 3.9 é essencialmente a expressão 3.1 apenas substituindo a derivada do ângulo de torção por  $\theta$ , ângulo de torção por unidade de comprimento, naquele caso considerado constante.

A outra parcela,  $M_{t2}$ , é devida justamente ao cisalhamento resultante do aparecimento das tensões normais geradas pelo fato do empenamento não ser uniforme.

Na figura 3.4 está apresenta uma viga prismática, engastada numa das extremidades, de seção qualquer, sujeita a um momento torçor,  $M_t$ , aplicado na extremidade livre. O eixo  $OO'$  é corresponde aos centros de cisalhamento de cada uma das seções.

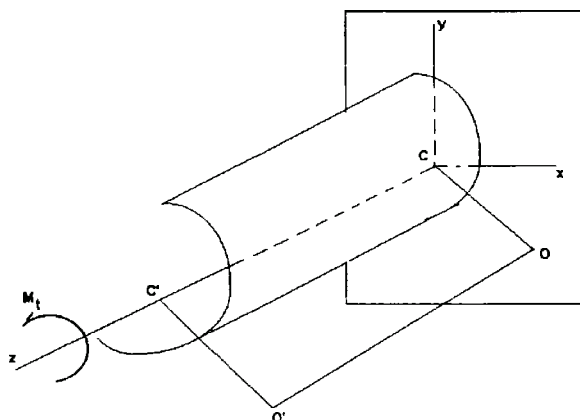


Figura 3.3 Torção não-uniforme (Timoshenko & Gere, 1961)

Como há apenas o momento torçor aplicado não há modificação na posição do eixo OO', que então permanece reto e as seções transversais irão girar em torno deste eixo.

Para uma determinada seção transversal obtém-se o empenamento da mesma de maneira semelhante ao que foi feito para a torção uniforme, apenas considerando que ao invés de um valor constante para o ângulo de torção por unidade de comprimento ( $\theta$ ), deve ser usado a derivada do ângulo de torção ao longo do comprimento da viga. Desta forma, o empenamento pode ser escrito como:

$$w = (\bar{\varpi}_s - \varpi_s) \cdot \frac{d\phi}{dz} \quad (3.10)$$

A deformação longitudinal é obtida de:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta w}{\partial z} = (\bar{\varpi}_s - \varpi_s) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (3.11)$$

Como não foram considerados carregamentos laterais e sendo válida a lei de Hooke, a tensão normal devida ao empenamento é dada por:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot (\bar{\varpi}_s - \varpi_s) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (3.12)$$

É possível demonstrar (Timoshenko & Gere, 1961) que  $\sigma_z$  não gera forças resultantes na direção z e nem momentos nas direções x e y. Fazendo o equilíbrio de um elemento localizado na superfície média da viga, é possível determinar as tensões de cisalhamento devidas a  $\sigma_z$ . A figura 3.4 mostra este elemento.

Fazendo o equilíbrio de forças na direção z e considerando que a espessura t não varia na direção longitudinal, obtém-se:

$$\frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} \cdot ds \cdot dz + t \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot ds \cdot dz = 0 \quad (3.13)$$

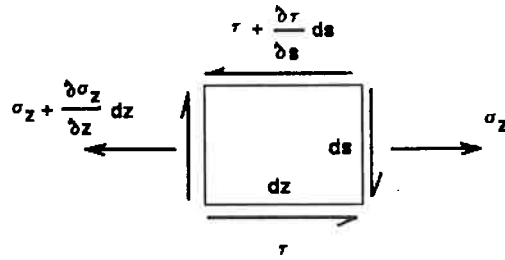


Figura 3.4 Elemento da superfície média de viga sujeita a torção não-uniforme

Substituindo 3.12 em 3.13 obtém-se:

$$\frac{\partial(\tau \cdot t)}{\partial s} = -E \cdot t \cdot (\overline{\omega}_s - \omega_s) \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (3.14)$$

Integrando 3.14, sabendo que a tensão de cisalhamento é nula para  $s = 0$  obtém-se:

$$\tau \cdot t = -E \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3} \cdot \int_0^s (\overline{\omega}_s - \omega_s) \cdot t \cdot ds \quad (3.15)$$

A parcela do torque devida ao empenamento,  $M_{12}$ , é então calculada a partir da soma das contribuições da força de cisalhamento, dada por 3.15, ao longo de todo contorno da linha média do perfil. Assim:

$$M_{12} = \int_0^m \tau \cdot t \cdot ds \quad (3.16)$$

$$M_{12} = -E \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3} \cdot \int_0^m \left[ \int_0^s (\overline{\omega}_s - \omega_s) \cdot t \cdot ds \right] \cdot r_s \cdot ds$$

Aplicando a definição de  $\omega_s$  (3.7) é possível simplificar a equação acima fazendo a seguinte transformação.

$$r_s \cdot ds = -\frac{d(\overline{\omega}_s - \omega_s)}{ds} \cdot ds \quad (3.17)$$

Substituindo 3.17 em 3.16 e fazendo a integração entre colchetes obtém-se:

$$M_{t2} = -E \cdot \frac{d^3\phi}{dz^3} \cdot \int_0^m (\overline{\varpi}_s - \varpi_s)^2 \cdot t \cdot ds \quad (3.18)$$

A integral em 3.18 é definida como sendo a constante de empenamento,  $I_w$ . Assim o momento torçor total numa seção é dado por:

$$M_t = GJ_t \cdot \frac{d\phi}{dz} - EI_w \cdot \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (3.19)$$

A expressão 3.19 é a equação diferencial para a torção não-uniforme. Esta expressão será empregada nos desenvolvimentos dos termos que envolvem torção na formulação da flambagem.

Uma dificuldade desta formulação é o cálculo da constante de empenamento,  $I_w$ , segundo a definição da mesma (3.20).

$$I_w = \int_0^m (\overline{\varpi}_s - \varpi_s)^2 \cdot t \cdot ds \quad (3.20)$$

Tanto nas referências Bleich (1952) quanto Timoshenko & Gere (1961) há alguns exemplos para a determinação da mesma. Esta dificuldade também foi percebida por outros autores como, por exemplo Chilvers (1955).

### 3.2 Flambagem Torcional

Um possível modo de flambagem para uma coluna sujeita a compressão uniforme (Fig. 3.5) é a flambagem torcional. Esta situação ocorre tipicamente em estruturas com rigidez torcional baixa em relação a rigidez por flexão.

Na figura 3.5 está representada uma viga de paredes finas, de espessura  $t$ , com seção transversal cruciforme, bi-simétrica, sujeita a carga de compressão  $P$  aplicada no centro da seção transversal. Antes que a carga de compressão aproxime-se do valor

crítico de flambagem considera-se que as flanges estão ligeiramente deformadas, em torção, segundo o ângulo  $\phi$ .

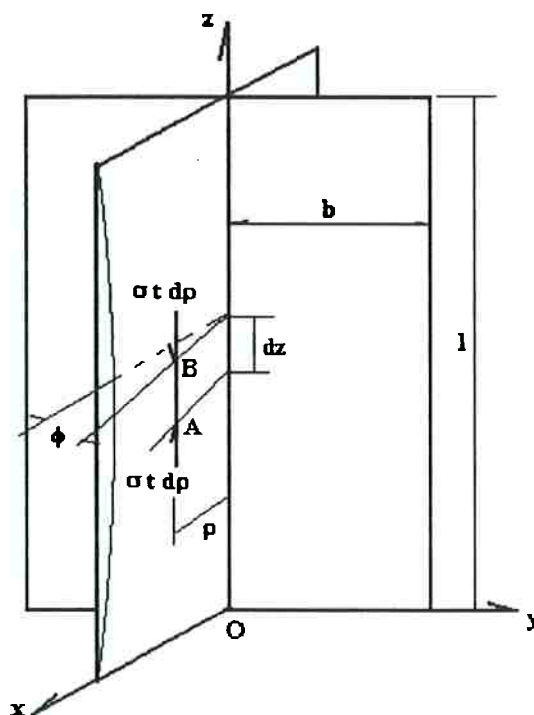


Figura 3.5. Flambagem torcional de viga cruciforme

No caso da figura 3.5 considera-se a tira  $AB$  de comprimento  $dz$ , separada do eixo longitudinal ( $z$ ) por uma distância  $\rho$  e cuja seção transversal vale  $t \cdot dp$ . Com o movimento de torção é possível calcular o deslocamento  $v$  do elemento  $AB$  na direção  $y$ .

$$v = \rho \cdot \phi \quad (3.21)$$

Em  $AB$  atuam forças de compressão,  $f_c$ , dadas por:

$$f_c = \sigma \cdot t \cdot dp \quad (3.22)$$

Onde  $\sigma$  é a tensão de compressão, neste caso suposta uniforme, atuante na seção transversal devido a força externa de compressão  $P$ .

Considerando que esta tira tem comportamento semelhante a uma viga bi-apoiada sujeita à carga de compressão concentrada na extremidade, é possível considerar que as forças de compressão são equivalentes a uma carga lateral  $q$ , dada por.

$$q = -\sigma \cdot t \cdot d\rho \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (3.23)$$

A expressão 3.23 é obtida fazendo o equilíbrio da tira AB na posição deformada adotando-se a hipótese já mencionada de que esta tira comporta-se como uma viga bi-apoiada.

Substituindo 3.21 em 3.23 obtém-se:

$$q = -\sigma \cdot t \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (3.24)$$

O momento de torção  $m$  devido a carga  $q$ , atuante ao longo do comprimento  $dz$ , é dado por

$$m = q \cdot \rho = -\sigma \cdot t \cdot \rho^2 \cdot d\rho \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \cdot dz \quad (3.25)$$

Somando as contribuições de  $m$  ao longo da seção transversal, obtém-se o torque  $M_z$  atuando entre duas seções consecutivas separadas por uma distância  $dz$ .

$$M_z = -\int_A \sigma \cdot t \cdot \rho^2 \cdot d\rho \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \cdot dz = -\sigma \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \cdot dz \cdot \int_A t \cdot \rho^2 \cdot d\rho \quad (3.26)$$

Lembrando que o momento polar de inércia,  $J_o$ , é dado por:

$$J_o = \int_A t \cdot \rho^2 \cdot d\rho \quad (3.27)$$

É possível simplificar a expressão 3.26, por substituição da expressão 3.27 e considerando ao momento distribuído, por unidade de comprimento  $m_z$ , tem-se:

$$m_z = -\sigma \cdot J_o \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (3.28)$$

A expressão acima é válida nos casos em que o centro de cisalhamento e o centro geométrico são coincidentes.

Na figura 3.6 está apresentado um trecho da viga com comprimento  $dz$  sujeito a torção.

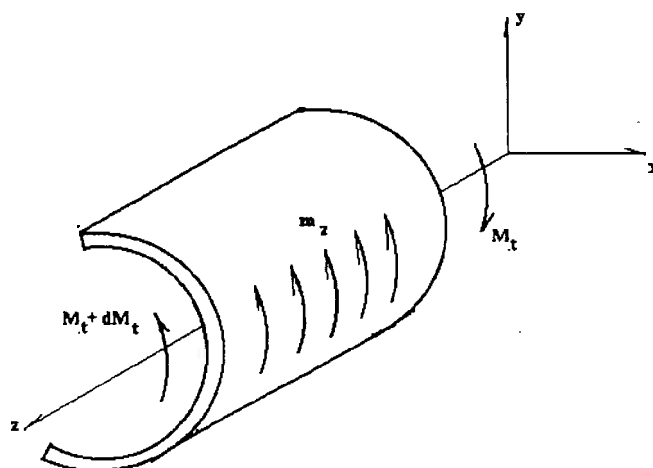


Figura 3.6 Elemento da barra em torção

Impondo a condição de equilíbrio para o momento torçor obtém-se:

$$m_z = -\frac{dM_t}{dz} \quad (3.29)$$

Diferenciando a equação 3.19:

$$\frac{dM_t}{dz} = GJ_t \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} - EI_w \cdot \frac{d^4\phi}{dz^4} \quad (3.30)$$

Substituindo 3.30 e 3.28 em 3.29 é obtida a equação de equilíbrio.

$$EI_w \cdot \frac{d^4\phi}{dz^4} - (GJ_t - \sigma \cdot J_o) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (3.31)$$

Para a estrutura da figura 3.5 a solução é simples (Timoshenko & Gere, 1961) uma vez que a constante de empenamento é nula. Entretanto, quando este não for o caso a solução pode ser obtida resolvendo a equação diferencial 3.31.

### 3.3 Flambagem por flexão-torção

Um outro possível modo de flambagem das estruturas com seção transversal e paredes finas é a flambagem por flexão-torção. O equacionamento deste modo é um tanto mais complexo do que o anterior uma vez que os efeitos da flexão e torção são acoplados.

Tal como no caso anterior este modo é importante sempre que a rigidez a torção for pequena em comparação com a rigidez a flexão.

#### 3.3.1 Carga concentrada

O primeiro caso a ser analisado será o de uma viga sujeita a compressão por uma carga  $P$ , aplicada no centro geométrico da seção. Na figura 3.7 está representada uma seção transversal qualquer, onde  $O$  é o centro geométrico,  $S$  o centro de cisalhamento,  $O'$  é a posição do centro geométrico considerando os deslocamentos relativos à flexão  $S'$  é a posição do centro de cisalhamento após a ação destes mesmos deslocamentos e  $O''$  é a posição do centro geométrico levando em conta também a rotação  $\phi$ , em torno de  $S'$ , devida à torção. Os eixos  $x$  e  $y$  são os principais da seção.  $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do centro de cisalhamento. Os deslocamentos  $u$  e  $v$  são referentes a flexão, tomados no eixo  $x$  e  $y$ , respectivamente.





As equações 3.34 e 3.35 são referentes a flexão. Caso não houvesse o efeito de torção as mesmas seriam iguais às equações que descrevem a flambagem elástica, cuja solução é bastante conhecida (Den Hartog, 1952).

A análise da torção fornecerá a terceira equação que relaciona os deslocamentos  $u$  e  $v$ , bem como a rotação  $\phi$ . Esta equação será obtida da mesma maneira que no item 3.2. Uma tira de seção transversal igual a  $t \cdot ds$  será tomada separadamente e considerando que esta tira está deformada pela ação de uma tensão de compressão  $\sigma$ , será calculada a carga lateral equivalente que provocaria esta deformação e o momento desta em relação ao eixo de torção. Entretanto, como há duas direções de deslocamentos laterais, a carga equivalente será calculada separadamente para cada uma destas direções.

Sendo  $x$  e  $y$  as coordenadas do centro da seção da tira, tem-se para os deslocamentos  $u_t$  e  $v_t$  deste ponto as seguintes expressões:

$$u_t = u + (y_o - y) \cdot \phi \quad (3.36)$$

$$v_t = v + (x_o - x) \cdot \phi \quad (3.37)$$

Impondo o equilíbrio da tira em  $x$  e  $y$  é possível encontrar as cargas  $q_x$  e  $q_y$ , tal como foi feito no item 3.2.

$$q_x = -\sigma \cdot t \cdot ds \cdot \frac{d^2 u_t}{dz^2} \quad (3.38)$$

$$q_y = -\sigma \cdot t \cdot ds \cdot \frac{d^2 v_t}{dz^2} \quad (3.39)$$

O momento das forças  $q_x$  e  $q_y$  em torno do eixo de torção é dado por:

$$m = q_x \cdot (y_o - y) - q_y \cdot (x_o - x) \quad (3.40)$$

Substituindo 3.38, 3.39, 3.37 e 3.36 obtém-se:

$$m = -\sigma \cdot t \cdot ds \cdot (y_0 - y) \cdot \left[ \frac{d^2 u}{dz^2} + (y_0 - y) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right] + \sigma \cdot t \cdot ds \cdot (x_0 - x) \cdot \left[ \frac{d^2 v}{dz^2} - (x_0 - x) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right] \quad (3.41)$$

Integrando para toda a área da seção transversal e considerando as igualdades abaixo, é obtida a expressão para o momento  $M_z$ , atuante ao longo de um elemento de comprimento  $dz$ .

$$\begin{aligned} dA &= t \cdot ds & P &= \int_A \sigma \cdot t \cdot ds = \int_A \sigma \cdot dA & \int_A x t \cdot ds &= \int_A y t \cdot ds = 0 \\ I_x &= \int_A t \cdot y^2 \cdot ds = \int_A y^2 \cdot dA & I_y &= \int_A t \cdot x^2 \cdot ds = \int_A x^2 \cdot dA \\ J_o &= I_x + I_y + A \cdot (x_o^2 + y_o^2) \end{aligned}$$

$$M_z = P \cdot \left[ x_o \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} - y_o \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right] - \frac{P \cdot I_o}{A} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (3.42)$$

Impondo o mesmo equilíbrio que fora imposto no item 3.2 (ver figura 3.6), e usando a expressão 3.30 é obtida a equação para a torção:

$$E \cdot I_w \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GJ_t - \frac{P \cdot J_o}{A}) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P \cdot (y_o \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - x_o \cdot \frac{d^2 v}{dz^2}) = 0 \quad (3.43)$$

### 3.3.2 Forças e momentos concentrados

Um caso mais geral que o anterior leva em conta a ação de momentos fletores aplicados nas extremidades da viga. Neste caso atuam os momentos  $M_x$  e  $M_y$ , nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Assim a tensão normal de compressão,  $\sigma$ , é dada por:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_x \cdot y}{I_x} - \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad (3.44)$$

O equacionamento é bastante similar ao do item 3.3.1 no que se refere as equações de equilíbrio. Assim, impondo o equilíbrio na posição deformada,

considerando os deslocamentos dados por 3.36 e 3.37, para um elemento de comprimento  $dz$  de uma fibra longitudinal da viga, tem-se as cargas laterais cujas expressões são idênticas a 3.38 e 3.39.

O momento torçor atuante neste elemento também será dado por 3.41.

Substituindo 3.44 em 3.41 e integrando para toda a área da seção transversal obtém-se:

$$M_z = -(Py_o - M_x) \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + (Px_o - M_y) - (M_x\beta_x + M_y\beta_y + P \cdot \frac{J_o}{A}) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (3.45)$$

Onde os parâmetros  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são dados por:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \cdot \left( \int_A y^3 \cdot dA + \int_A x^2 y \cdot dA \right) - 2 \cdot y_o \quad (3.46)$$

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \cdot \left( \int_A x^3 \cdot dA + \int_A y^2 x \cdot dA \right) - 2 \cdot x_o \quad (3.47)$$

O equilíbrio dos momentos de torção aplicados leva a equação diferencial para a torção:

$$EI_w \cdot \frac{d^4\phi}{dz^4} - (GJ_t - M_x\beta_x - M_y\beta_y - P \cdot \frac{J_o}{A}) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} + (Py_o - M_x) \cdot \frac{d^2u}{dz^2} - (Px_o - M_y) \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \quad (3.48)$$

Impondo o equilíbrio para as cargas laterais, obtém-se as seguintes expressões para a flexão:

$$EI_y \cdot \frac{d^4u}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + (Py_o - M_x) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (3.49)$$

$$EI_x \cdot \frac{d^4v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2v}{dz^2} - (Px_o - M_y) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (3.50)$$

### 3.3.3 Viga bi-apoiada com momentos concentrados nas extremidades

O caso de viga bi-apoiada com momentos concentrados nas extremidades é o caso mais simples em que é possível encontrar uma solução analítica para a carga crítica de flambagem.

Será encontrada a solução analítica para a seção mono-simétrica, apresentada na figura 3.8. As dimensões desta seção transversal também estão apresentadas na figura 3.8 e são típicas de perfis usados na fabricação de tubos estruturados.

Como a seção transversal em questão é simétrica em relação ao eixo  $y$ , é possível afirmar que o centro de cisalhamento está localizado neste eixo e o termo  $\beta_y$  (eq. 3.47) é nulo.

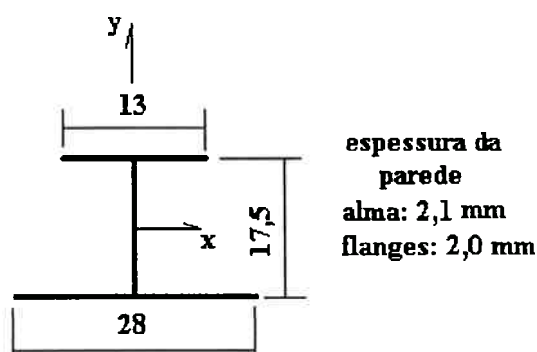


Figura 3.8 – Seção transversal mono-simétrica.

A figura 3.9 apresenta a viga estudada e suas condições de contorno. Deve ser notado que, além dos apoios nas extremidades, há restrição à torção, mas não há qualquer impedimento ao empenamento das seções nas extremidades.

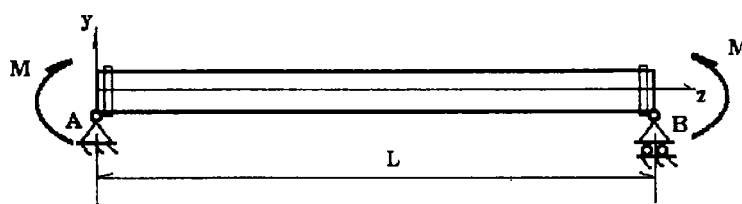


Figura 3.9 Viga bi-apoiada

Assim, as condições de contorno ficam sendo dadas por:

$$p/z = 0, \quad u = \phi = \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (3.51)$$

$$p/z = L/2, \quad \frac{du}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = 0$$

Substituindo as condições de simetria e o carregamento nas expressões 3.48, 3.49 e 3.50 obtém-se o sistema de equações diferenciais que descreve o problema.

$$EI_w \cdot \frac{d^4\phi}{dz^4} - (GJ_t - M\beta_x) \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} - M \cdot \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \quad (3.52)$$

$$EI_y \cdot \frac{d^4u}{dz^4} - M \cdot \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (3.53)$$

As soluções para as equações acima são da seguinte forma:

$$u = K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (3.54)$$

$$\phi = K_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (3.55)$$

Substituindo-se as soluções acima nas equações 3.52 e 3.53 e fazendo as devidas simplificações obtém-se a expressão para a determinação do momento crítico, M.

$$EI_w \frac{\pi^2}{L^2} + (GJ_t - M\beta_x) - M^2 \cdot \frac{L^2}{EI_y \pi^2} = 0 \quad (3.56)$$

Usando as definições abaixo é possível modificar a expressão 3.56, obtendo a expressão 3.58.

$$C_\phi = EI_w \frac{\pi^2}{L^2} \quad C_y = EI_y \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \quad (3.57)$$

$$M^2 + C_y \beta_x M - C_y \cdot (C_\phi + GJ_t) = 0 \quad (3.58)$$

As soluções para o momento crítico são:

$$M = \frac{-C_y \beta_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{C_y^2 \beta_x^2 + 4C_y(C_\phi + GJ_t)} \quad (3.59)$$

Ainda simplificando a expressão acima:

$$\frac{M}{C_y} = \frac{-\beta_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_x}{2}\right)^2 + \frac{(C_\phi + GJ_t)}{C_y}} \quad (3.60)$$

As expressões 3.59 e 3.60 são semelhantes às obtidas por Goodier (1942), Timoshenko (1961) e Anderson & Trahair (1971). Em relação ao obtido pelo primeiro autor e no trabalho de 1971, há uma diferença de sinal devida apenas a adoção de diferentes convenções para o sinal positivo do momento fletor. A solução acima também reduz-se àquela determinada (p. ex. Den Hartog, 1952) para a viga bi-simétrica, bastando apenas considerar  $\beta_x$  nulo.

Deve ser notado que há dois valores para a carga crítica justamente devido a mono-simetria. Sendo que o maior valor absoluto do momento é encontrado quando o flange de maior largura (segundo a figura 3.8) está sendo comprimida.

### 3.3.4 Cálculo das propriedades geométricas

O cálculo das propriedades geométricas para este tipo de seção transversal pode ser simplificado por alguns artifícios tais como a mudança de eixos, no que se refere a torção. De qualquer forma estes cálculos não são de simples execução e na bibliografia consultada não há exemplos detalhados deste tipo de cálculo. A dedução explícita dos procedimentos de cálculo das propriedades é fundamental para futuras aplicações, facilitando em grande maneira trabalhos futuros, sendo esta uma contribuição importante deste trabalho. A figura 3.10 apresenta as principais dimensões da seção.

Uma característica peculiar no cálculo destas propriedades é a dependência de algumas destas em relação às funções de empenamento.

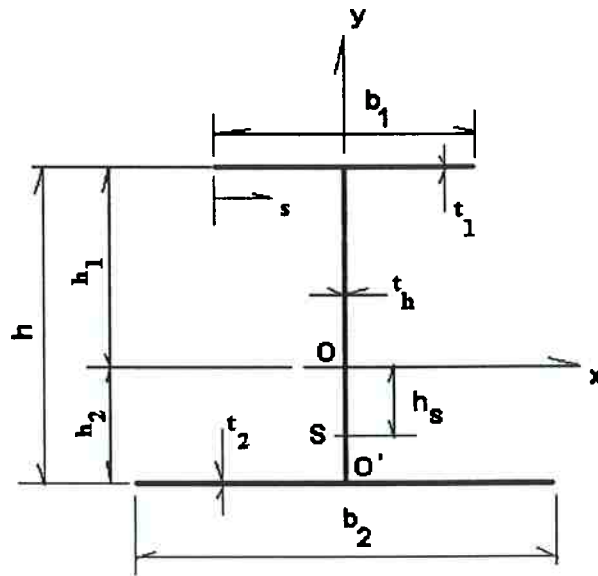


Figura 3.10 Seção mono-simétrica – Dimensões e sistema de coordenadas

#### 3.3.4.1 Translação de eixos.

Caso seja considerado um eixo distinto daquele definido pelos centros de cisalhamento das seções transversais, é possível obter as funções de empenamento para um eixo qualquer de rotação e relacioná-las com aquelas referentes ao eixo antes mencionado.

Uma vantagem do cálculo de propriedades considerando a torção em torno de outro eixo reside no fato de que nem sempre a posição do centro de cisalhamento é conhecida previamente.

Segundo Langendonck (1960) as funções de deslocamentos calculadas para eixos distintos relacionam-se da seguinte forma:

$$\Delta\varpi = \Delta\varpi' + ax + by + c \quad (3.61)$$

Sendo que

$$\Delta\varpi = (\bar{\varpi} - \varpi) \quad (3.62)$$

e



$$\Delta\varpi' = (\overline{\varpi}' - \varpi') \quad (3.63)$$

A expressão acima é obtida considerando os esforços necessários para manter reta uma barra que é torcida em torno de um eixo que não aquele composto pelos centros de cisalhamento. Sabe-se que no caso de um eixo qualquer a torção vem acompanhada de deformações laterais. A expressão é obtida fazendo o equilíbrio da viga considerando os esforços que eliminam estas deformações laterais.

Em 3.61  $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto qualquer da seção transversal. Para cada ponto é calculado o empenamento, tomando um eixo de torção qualquer, a partir de uma determinada função de empenamento.

As constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , segundo Langendonck (1960), correspondem a:

$$a = -\frac{1}{I_y} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot x \cdot dA \quad (3.64)$$

$$b = -\frac{1}{I_x} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot y \cdot dA \quad (3.65)$$

$$c = -\frac{1}{A} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot dA \quad (3.66)$$

Retomando a expressão 3.20 que define a constante de empenamento,  $I_w$ , e considerando a translação de eixos, é possível escrever esta grandeza em relação a um outro eixo de torção:

$$I_w' = I_w - a^2 I_y - b^2 I_x - c^2 A \quad (3.67)$$

### 3.3.4.2 Posição do centro de torção

A mudança de eixo também permite que se determine a posição do centro de cisalhamento de maneira distinta da que é feita tradicionalmente. A partir da diferença entre os valores do empenamento calculados para um determinado ponto da seção transversal é possível determinar a posição do centro de torção. Este método está detalhado na referência Langendonck (1960).

O empenamento,  $w'$ , num determinado ponto, para torção em torno de um eixo qualquer, é dado por (ver eq. 3.10):

$$w' = \frac{d\phi}{dz} \cdot \Delta\varpi' \quad (3.68)$$

A diferença entre o empenamento considerando um eixo de torção qualquer e o eixo que passa pelo centro de cisalhamento é dada por:

$$w - w' = \frac{d\phi}{dz} \cdot (ax + by + c) \quad (3.69)$$

Na figura 3.12 é possível verificar esta diferença. Segundo a expressão 3.69 para determinar a diferença entre  $w$  e  $w'$  basta considerar que a rotação ocorre em torno de um eixo dado por:

$$ax + by + c = 0 \quad (3.70)$$

Ainda segundo Langendonck (1960), quando a torção se dá em torno de um eixo que não aquele que contém o centro de cisalhamento são necessários esforços extras para manter a barra reta. Neste caso, o centro de cisalhamento desloca-se para a posição  $S'$ . Caso não, estes esforços extras deixem de atuar o centro de cisalhamento volta a sua posição original. O arco  $SS'$  é dado por:

$$SS' = r d\phi \quad (3.71)$$

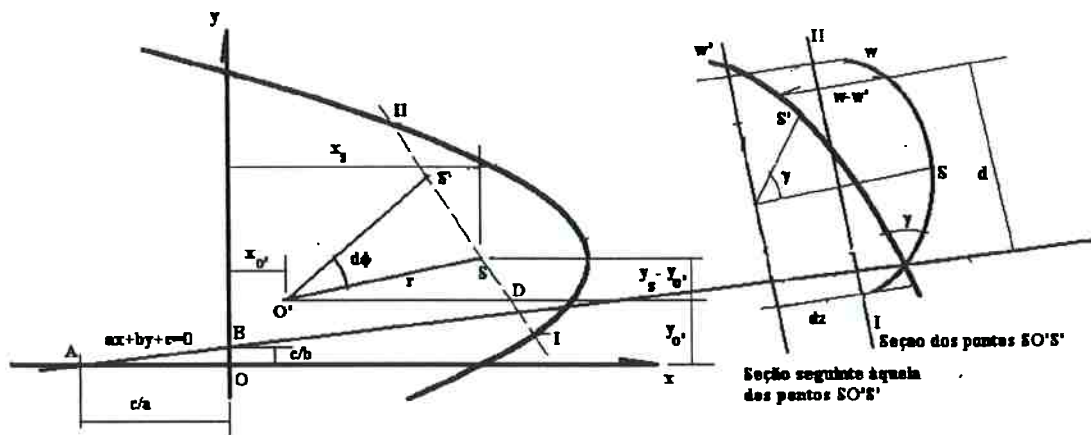


Figura 3.11 Diferença entre empenamentos

Da figura 3.11 é possível deduzir que o ângulo  $\gamma$  é dado por:

$$\gamma = \frac{SS'}{dz} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{w - w'}{d} \quad (3.72)$$

A grandeza  $d$  corresponde a distância de um ponto qualquer, de coordenadas  $x$ ,  $y$ , a reta dada por 3.70.

$$d = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.73)$$

Substituindo 3.73 em 3.72 e usando 3.71 e 3.69, obtém-se

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.74)$$

Da semelhança dos triângulos  $O'SD$  e  $OAB$ , obtém-se as relações abaixo:

$$\frac{x_s - x_{o'}}{r} = \frac{c/a}{\sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r} \quad (3.75)$$

$$\frac{y_s - y_{o'}}{r} = \frac{-c/b}{\sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a}{r} \quad (3.76)$$

Assim a posição do centro de cisalhamento fica definida, em relação a posição de  $O'$  por:

$$x_s = x_{o'} + b \quad (3.77)$$

$$y_s = y_{o'} - a \quad (3.78)$$

### 3.3.4.3 Exemplo de cálculo de propriedades geométricas.

Será feita determinação das propriedades para uma seção mono-simétrica tal como a da figura 3.10. Neste caso, O corresponde ao centro geométrico da seção e S ao centro de cisalhamento.

O cálculo das funções de empenamento será feito considerando que a seção gira em torno de um eixo que passa pelo ponto O'. Esta escolha simplifica o cálculo destas funções e por sua vez irá simplificar o cálculo da constante de empenamento.

Inicialmente é considerada a função de empenamento definida por:

$$\varpi' = \int_s r ds \quad (3.79)$$

Se o eixo de rotação passa por O' esta função passa a ser dada por.

$$\varpi' = -1 \cdot \int_0^s h \cdot ds = -hs \quad 0 < s < b_1 \quad (3.80)$$

$$\varpi' = -\frac{hb_1}{2} - 1 \cdot \int_{b_1}^s 0 \cdot ds = -\frac{hb_1}{2} \quad b_1 < s < b_1 + h \quad (3.81)$$

$$\varpi' = -\frac{hb_1}{2} - 1 \cdot \int_{b_1+h}^s 0 \cdot ds = -\frac{hb_1}{2} \quad b_1 + h < s < b_1 + h + b_2 \quad (3.82)$$

Calculando agora o empenamento médio, ainda considerando a rotação em torno de O':

$$\bar{\varpi}' = \frac{1}{m} \cdot \int_s \varpi' ds \quad (3.83)$$

$$\bar{\varpi}' = -\frac{1}{m} \cdot \left[ \int_0^{b_1} hs \cdot ds + \int_{b_1}^{b_1+h} \frac{hb_1}{2} \cdot ds + \int_{b_1+h}^{b_1+h+b_2} \frac{hb_1}{2} \cdot ds \right] \quad (3.84)$$

$$\bar{\varpi}' = -\frac{1}{m} \cdot \left[ \frac{hb_1^2}{2} + \frac{hb_1}{2} \cdot h + \frac{hb_1}{2} \cdot b_2 \right] = -\frac{hb_1}{2m} \cdot (b_1 + h + b_2) \quad (3.85)$$

Sendo o perímetro,  $m$ , da linha média da seção dado por:

$$m = b_1 + h + b_2 \quad (3.86)$$

É possível calcular o empenamento médio

$$\overline{\varpi'} = -\frac{hb_1}{2} \quad (3.87)$$

Assim:

$$\Delta\varpi' = h \cdot \left( s - \frac{b}{2} \right) \quad 0 < s < b_1 \quad (3.88)$$

$$\Delta\varpi' = 0 \quad b_1 < s < b_1 + h \quad (3.89)$$

$$\Delta\varpi' = 0 \quad b_1 + h < s < b_1 + h + b_2 \quad (3.90)$$

Com estas funções de empenamento é possível calcular as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação

$$a = -\frac{1}{I_y} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot x \cdot dA = -\frac{1}{I_y} \cdot \int_0^{b_1} h \cdot \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot t_1 \cdot ds = -\frac{ht_1}{I_y} \cdot \int_0^{b_1} \left( s - \frac{b_1}{2} \right)^2 \cdot ds$$

$$a = -\frac{ht_1}{I_y} \cdot \left( \frac{s^3}{3} - \frac{b_1 s^2}{2} + \frac{b_1^2 s}{4} \right) \Bigg|_0^{b_1}$$

$$a = -\frac{ht_1}{I_y} \cdot \frac{b_1^3}{12} \quad (3.91)$$

$$b = -\frac{1}{I_x} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot y \cdot dA = -\frac{1}{I_x} \cdot \int_0^{b_1} h \cdot \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot h_1 \cdot t_1 \cdot ds = -\frac{ht_1 \cdot h_1}{I_x} \cdot \int_0^{b_1} \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot ds$$

$$b = -\frac{h \cdot h_1 \cdot t_1}{I_x} \cdot 0 = 0 \quad (3.92)$$

$$c = -\frac{1}{A} \cdot \int_A \Delta\varpi' \cdot dA = -\frac{1}{A} \cdot \int_0^{b_1} h \cdot \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot t_1 \cdot ds = -\frac{ht_1}{A} \cdot \int_0^{b_1} \left( s - \frac{b_1}{2} \right) \cdot ds$$

$$c = -\frac{ht_1}{A} \cdot 0 = 0 \quad (3.93)$$

Assim, a função de empenamento fica sendo:

$$\Delta w = hx - \frac{ht_1}{I_y} \cdot \frac{b_1^3}{12} \cdot x \quad \text{para o flange superior} \quad -\frac{b_1}{2} \leq x \leq \frac{b_1}{2}$$

$$\Delta w = -\frac{ht_1}{I_y} \cdot \frac{b_1^3}{12} \cdot x \quad \text{para o flange inferior} \quad -\frac{b_2}{2} \leq x \leq \frac{b_2}{2} \quad (3.94)$$

A constante de empenamento, calculada a partir das funções de empenamento obtidas para a rotação em torno de O', é dada por:

$$I'_w = \int_0^s (\Delta w')^2 \cdot t \cdot ds$$

$$I'_w = \int_0^{b_1} h^2 \cdot \left(s - \frac{b_1}{2}\right)^2 \cdot t_1 \cdot ds$$

$$I'_w = h^2 \cdot t_1 \cdot \frac{b_1^3}{12} \quad (3.95)$$

Empregando a expressão para translação de eixos é possível calcular a constante de empenamento para rotação em torno do centro de cisalhamento:

$$I_w = I'_w - a^2 \cdot I_y \quad (3.96)$$

$$I_w = h^2 \cdot t_1 \cdot \frac{b_1^2}{12} - \frac{b_1^6 \cdot t_1^2 \cdot h^2}{144 \cdot I_y^2} \cdot I_y$$

$$I_w = h^2 \cdot t_1 \cdot \frac{b_1^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{b_1^3 \cdot t_1}{12 \cdot I_y}\right)$$

Sendo:

$$I_y = I_1 + I_2 \quad (3.97)$$

$$I_1 = \frac{b_1^3 \cdot t_1}{12} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{b_2^3 \cdot t_2}{12} \quad (3.98)$$

Assim:

$$I_w = I_1 \cdot h^2 \cdot \left(1 - \frac{I_1}{I_1 + I_2}\right)$$

$$I_w = \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \cdot h^2 \quad (3.99)$$

A cota do centro geométrico ( $h_2$  ou  $h_1$ , ver figura 3.11) fica determinada pela regra de áreas. Assim:

$$h_2 = \frac{h \cdot (b_1 \cdot t_1 + t_h \cdot \frac{h}{2})}{b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2 + t_h \cdot h} \quad (3.100)$$

$$h_1 = h - h_2 \quad (3.101)$$

A posição do centro de cisalhamento,  $y_s$ , é obtida a partir da equação 3.78.

$$y_s = y_o - a = -h_2 - a$$

$$y_s = \frac{h \cdot t_1 \cdot b_1^3}{I_y \cdot 12} - h_2 \quad (3.102)$$

O parâmetro de mono simetria,  $\beta_x$ , é determinada a partir da equação 3.46.

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \cdot \left( \int_A y^3 \cdot dA + \int_A x^2 y \cdot dA \right) - 2 \cdot y_s$$

$$\int_A y^3 \cdot dA = h_1^3 \cdot \int_{-b_1/2}^{b_1/2} t_1 \cdot dx + \int_{-h_2}^{h_1} t_h \cdot y^3 \cdot dy - h_2^3 \cdot \int_{-b_2/2}^{b_2/2} t_2 \cdot dx$$

$$= h_1^3 \cdot b_1 \cdot t_1 + \frac{t_h}{4} \cdot (h_1^4 - h_2^4) - h_2^3 \cdot b_2 \cdot t_2$$

$$\int_A x^2 \cdot y \cdot dA = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} h_1 \cdot t_1 \cdot x^2 \cdot dx - \int_{-b_2/2}^{b_2/2} h_2 \cdot t_2 \cdot x^2 \cdot dx$$

$$= \frac{h_1 \cdot t_1 \cdot b_1^3}{12} - \frac{h_2 \cdot t_2 \cdot b_2^3}{12}$$

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \cdot \left[ h_1^3 \cdot b_1 \cdot t_1 + \frac{t_h}{4} \cdot (h_1^4 - h_2^4) - h_2^3 \cdot b_2 \cdot t_2 + \frac{h_1 \cdot t_1 \cdot b_1^3}{12} - \frac{h_2 \cdot t_2 \cdot b_2^3}{12} \right] - 2 \cdot y_s \quad (3.103)$$

A inércia a torção,  $J_t$ , é dada por:

$$J_t = \frac{b_1 \cdot t_1^3}{3} + \frac{h \cdot t_h^3}{3} + \frac{b_2 \cdot t_2^3}{3} \quad (3.104)$$

Os momentos de inércia em relação aos eixos x e y que passam pelo centro geométrico são dados respectivamente por:

$$I_x = b_1 \cdot t_1 \cdot h_1^2 + b_2 \cdot t_2 \cdot h_2^2 + t_h \cdot h \cdot \left( \frac{h^2}{12} + \left( \frac{h_1 - h_2}{2} \right)^2 \right) \quad (3.105)$$

$$I_y = \frac{t_1 \cdot b_1^3}{12} + \frac{t_2 \cdot b_2^3}{12} \quad (3.106)$$

A partir da formulação apresentada neste item foi montada uma rotina na linguagem PASCAL para determinação das propriedades da seção transversal e momento crítico para a condição de flambagem por flexão torção. A listagem desta rotina está no apêndice 1.

Deve ser ainda mencionado que esta formulação teórica embora desenvolvida há certo tempo (ver capítulo 2) não é obtida de forma explícita e detalhada nas referências, de maneira semelhante a desenvolvida neste item. Em alguns trabalhos (P.ex. Anderson & Trahair, 1971; Young, 1989) há formulações simplificadas ou somente listagem de expressões, sem as respectivas deduções ou métodos de obtenção.

### 3.3.5 Modelos de elementos finitos

Inicialmente os primeiros modelos elaborados usando o método dos elementos finitos (MEF) visavam a verificação da possibilidade de aplicação de um programa comercial de elementos finitos a um problema de flambagem tal como aquele em estudo. Foram encontradas algumas referências nas quais era proposto um novo tipo, ou uma modificação num elemento finito conhecido, para a aplicação do MEF (Barsoum & Gallagher, 1970), (Chin et. al., 1992).



Entretanto, as possibilidades de desenvolvimento de novos tipos ou de modificação de elementos finitos não foram contempladas nos objetivos deste trabalho, sendo tomada a decisão de usar os elementos disponíveis num código comercial (ANSYS UNIVERSITY ver. 5.3) baseado no MEF. Logo, era necessário inicialmente confrontar resultados de modelos simplificados com a teoria disponível. Assim, por meio de uma comparação entre resultados analíticos bem determinados e os resultados dos modelos baseados no MEF foi possível verificar se estes últimos eram adequados ou não.

Os modelos consideraram apenas parte do perfil de maneira que se tivesse apenas um único reforçador. As dimensões da seção são aquelas apresentadas na tabela 3.1 e as condições de contorno são aquelas da figura 3.9, isto é, apoios nas extremidades sendo que estas são livres para empenar, mas tem torção restrita. O comprimento foi considerado como sendo igual a 200mm (0,200m). Estas dimensões correspondem àquelas de um perfil real bem como as da máquina de enrolamento do perfil.

Tabela 3.1 Dimensões do modelo típico (Ver figura 3.10)

$b_1$ (mm)	$t_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$t_2$ (mm)	$h$ (mm)	$t_h$ (mm)
13	2,0	28	2,0	17,5	2,1

Um comentário à parte cabe a respeito da determinação do comprimento da estrutura. De acordo com os modelos teóricos desenvolvidos, o comprimento é fundamental para determinação da carga crítica, sendo conhecidas as demais dimensões. O valor adotado foi obtido de observações do processo de enrolamento e das características construtivas da máquina e do anel de enrolamento.

Quanto ao carregamento, foi considerado o momento fletor aplicado as extremidades de maneira que a aba de maior largura seja a comprimida.

Na figura 3.12 está apresentado o modelo inicial de elementos finitos. Este modelo é composto por 280 elementos do tipo placa com 8 nós. Foi adotada a mesma malha,

isto é, número de elementos e divisões nas arestas, para todos os modelos. Isto implica no fato de que para alguns casos o modelo não estará com a malha ideal, que poderia ser mais refinada do que a malha de elementos finitos empregada.

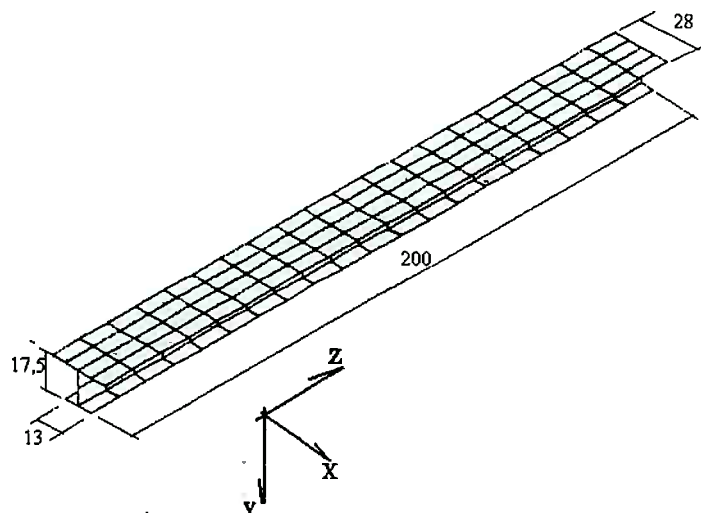


Figura 3.12. Dimensões básicas do modelo adotado. (em milímetros)

A propriedades consideradas são àquelas do PVC, listadas abaixo (ver apêndice 3):

$E = 1100 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de elasticidade)
$\nu = 0,3$	(Coeficiente de Poisson)
$G = 423 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de cisalhamento)

Inicialmente foi feita a variação da espessura da alma,  $t_h$ , em intervalos de 0.1mm. A espessura mínima foi adotada como sendo igual a 0,5mm uma vez que valores menores do que este para a espessura são de difícil obtenção prática para o processo de produção adotado. A espessura máxima foi limitada a 2,5mm, pois espessuras maiores do que esta tornam a estrutura muito rígida, limitando a faixa de diâmetros que podem ser enrolados com o perfil dado.

Esta é uma maneira de avaliar a até que ponto este tipo de modelo está de acordo com a teoria desenvolvida. Na tabela 3.2 estão os resultados obtidos

Tabela 3.2 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura da alma ( $t_h$ )

$t_1$ e $t_2$ (mm)	$t_h$ (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
2,0	0,5	2377	18296	local
2,0	0,6	3751	18276	local
2,0	0,7	5429	18265	local
2,0	0,8	7358	18265	local
2,0	0,9	9449	18275	local
2,0	1,0	11549	18297	local
2,0	1,1	13338	18331	local
2,0	1,2	14694	18379	local
2,0	1,3	15551	18441	local
2,0	1,4	16168	18518	local
2,0	1,5	16656	18610	local
2,0	1,6	17066	18718	flexão-torção
2,0	1,7	17427	18843	flexão-torção
2,0	1,8	17759	18984	flexão-torção
2,0	1,9	18069	19143	flexão-torção
2,0	2,0	18367	19320	flexão-torção
2,0	2,1	18659	19514	flexão-torção
2,0	2,2	18950	19726	flexão-torção
2,0	2,3	19243	19956	flexão-torção
2,0	2,4	19541	20204	flexão-torção
2,0	2,5	19844	20470	flexão-torção

(Os valores sublinhados correspondem aos seção do perfil básico, não modificado)

Os resultados da tabela 3.2 estão apresentados também na figura 3.13. Deve ser notado que, para espessuras menores que 1,6 mm na alma, o modelo de elementos finitos não apresenta mais o mesmo resultado que o modelo analítico de flexão-torção. Não só quanto ao valor da carga crítica, mas também quanto ao modo de flambagem encontrado.

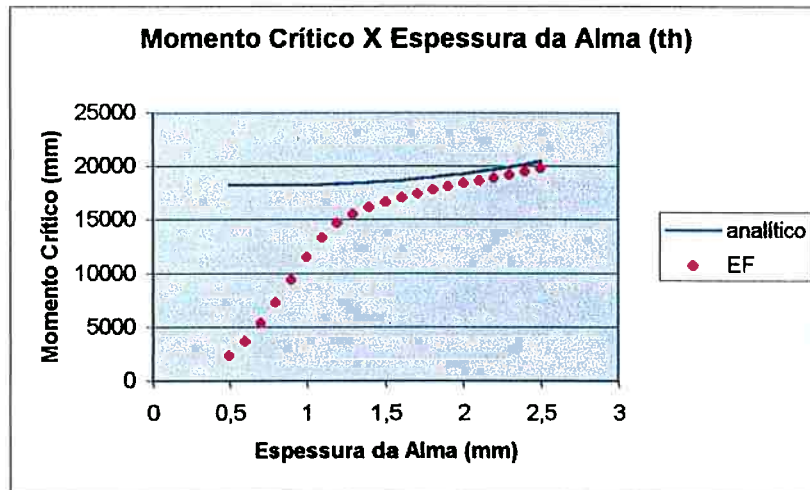


Figura 3.13 Comparativo de valores do momento crítico

Para os modelos que não apresentaram o comportamento previsto no modelo analítico, o que se observou foi apenas a deformação da alma. Deve ser notado que o modelo analítico não admite este tipo de deslocamento, sendo que os segmentos que compõem a linha média deste tipo de perfil devem ser retos.



Figura 3.14 Modo de flambagem por flexão-torção

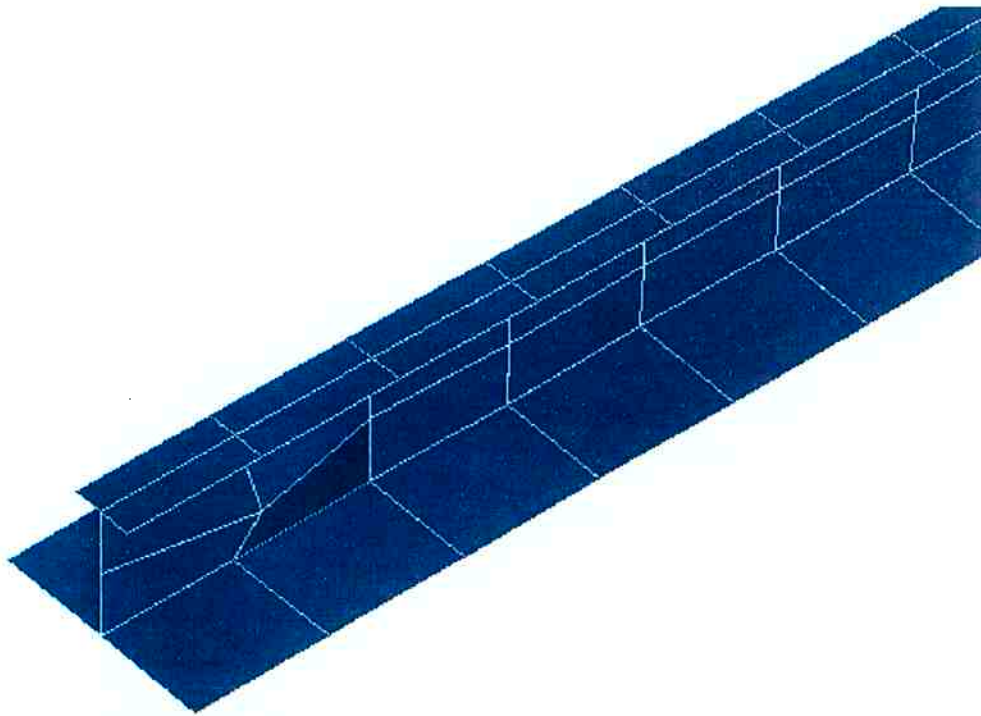


Figura 3.15 Modo local de flambagem

Ainda variando a espessuras dos componentes da seção, o grupo seguinte de modelos foi baseado na variação da espessura do flange superior ( $t_1$ ). Em relação a denominação “*flange superior*”, deve ser observada a figura 3.10. De acordo com esta figura, *flange superior* é aquele localizado a uma distância  $h_1$ , no sentido **positivo** do eixo y. Da mesma forma, *flange inferior* será aquele localizado a uma distância  $h_2$ , no sentido **negativo** do eixo y.

Quanto ao número e tipo de elementos, carregamento e condições de contorno, este novo grupo de modelos é idêntico ao apresentado anteriormente. As mesmas propriedades de material também foram usadas para este novo conjunto de modelos.

Os valores da espessura  $t_1$  foram de 1,4mm a 2,5mm. O valor menor deve-se a necessidade de em peças extrudadas as espessuras serem as mais próximas possíveis. Esta também é uma razão para a limitação para a espessura máxima, bem como a excessiva rigidez resultante do perfil, que na prática dificulta o enrolamento do mesmo.

A tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos para o modelo testado.

Tabela 3.3 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura do flange superior ( $t_1$ )

$t_1$ (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
1,4	17732	18416	flexão-torção
1,5	17888	18587	flexão-torção
1,6	18042	18760	flexão-torção
1,7	18195	18939	flexão-torção
1,8	18348	19123	flexão-torção
1,9	18502	19315	flexão-torção
2,0	18659	19514	flexão-torção
2,1	18817	19722	flexão-torção
2,2	18978	19939	flexão-torção
2,3	19142	20166	flexão-torção
2,4	19308	20404	flexão-torção
2,5	19476	20652	flexão-torção

(Os valores sublinhados correspondem a seção do perfil básico, não modificado)

Os resultados da tabela 3.3 estão apresentados na figura 3.14. Em todos os casos testados os modos observados foram de flexão torção, semelhante àquele apresentado na figura 3.14.

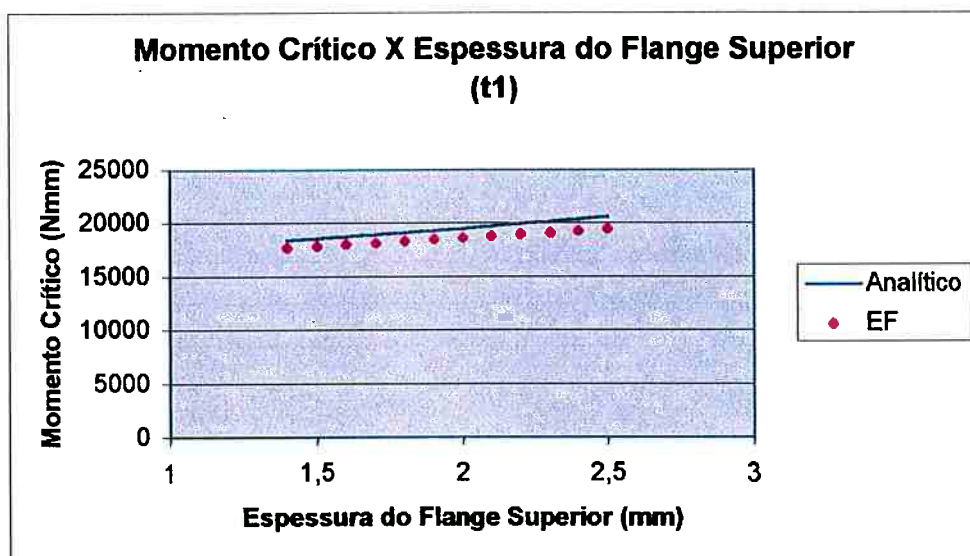


Figura 3.16 Momento crítico x espessura do flange superior ( $t_1$ )

O grupo seguinte de modelos foi composto ainda considerando variação de espessura, desta vez no flange inferior ( $t_2$ ).

A configuração do modelo, o carregamento e vinculação foram os mesmos adotados nos outros modelos. As propriedades de material também foram as mesmas.

Desta vez a espessura variou de 0,5mm a 2,5mm. O valor mínimo justifica-se pelo fato de espessura menores dificultarem o processo de extrusão do perfil, além de reduzirem a rigidez do mesmo. O valor máximo corresponde a um perfil de excessiva rigidez além de necessitar de uma quantidade maior de material na sua fabricação.

Na tabela 3.4 estão os resultados obtidos.

Tabela 3.4 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da espessura do flange inferior ( $t_2$ )

$t_2$ (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
0,5	818	6627	local
0,6	1299	7445	local
0,7	1906	8250	local
0,8	2645	9048	local
0,9	3526	9844	local
1,0	4550	10644	local
1,1	5719	11451	local
1,2	7034	12269	local
1,3	8493	13101	local
1,4	10097	13949	local
1,5	11850	14817	local
1,6	13755	15706	flexão-torção
1,7	15813	16618	flexão-torção
1,8	16837	17556	flexão-torção
1,9	17744	18521	flexão-torção
2,0	18659	19514	flexão-torção
2,1	19583	20536	flexão-torção
2,2	20516	21590	flexão-torção
2,3	21457	22675	flexão-torção
2,4	22406	23792	flexão-torção
2,5	23923	24943	flexão-torção

(Os valores sublinhados correspondem a seção do perfil básico, não modificado)

Os resultados da tabela 3.4 também estão apresentados na figura 3.17.



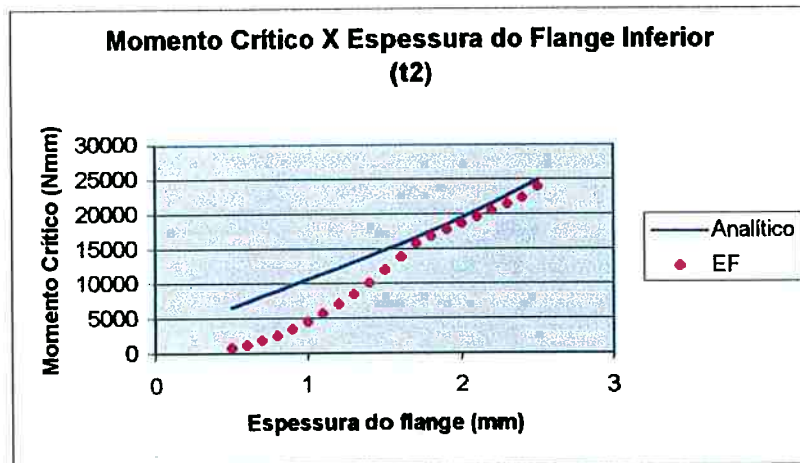


Figura 3.17 Momento crítico x espessura do flange inferior ( $t_2$ )

A partir dos valores obtidos é possível verificar que para espessuras menores que 1,5mm no flange inferior, o modo de flambagem deixa de ser o de flexão-torção e passa a ser um modo local correspondendo a apenas a flambagem (enrugamento) do flange inferior como um painel sujeito a compressão. As deformações observadas neste modo são apresentadas na figura 3.18.



Figura 3.18 Modo local de flambagem



Outra possibilidade explorada nestes modelos foi a variação das larguras de flanges e da altura do perfil de reforço.

Inicialmente foi explorada a variação da largura no flange superior. Os modelos são semelhantes aos testados anteriormente no que diz respeito ao número e tipo de elementos, carregamento e vinculação, bem como propriedades do material. Na tabela 3.5 estão apresentados os resultados destes modelos. O limite inferior para a largura deste flange é de ordem prática, uma vez que a estrutura resultante teria pequena rigidez, sendo os reforçadores pouco eficientes. O limite superior é dado pela dificuldade prática de fabricação de perfis reforçados com o flange superior muito largo, isto é, com largura cujo valor é próximo do valor da distância entre reforçadores.

Tabela 3.5 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da largura do flange superior ( $b_1$ )

$b_1$ (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
5	17361	17384	flexão-torção
6	17553	17705	flexão-torção
7	17736	17999	flexão-torção
8	17909	18273	flexão-torção
9	18074	18534	flexão-torção
10	18231	18785	flexão-torção
11	18380	19031	flexão-torção
12	18523	19273	flexão-torção
13	18659	19514	flexão-torção
14	18788	19756	flexão-torção
15	18913	20000	flexão-torção
16	19031	20250	flexão-torção
17	19145	20505	flexão-torção
18	19254	20768	flexão-torção
19	19359	21039	flexão-torção
20	19459	21320	flexão-torção
21	19555	21612	flexão-torção

(Os valores sublinhados correspondem a seção do perfil básico, não modificado)

Na figura 3.19 também estão apresentados os resultados da tabela 3.5.

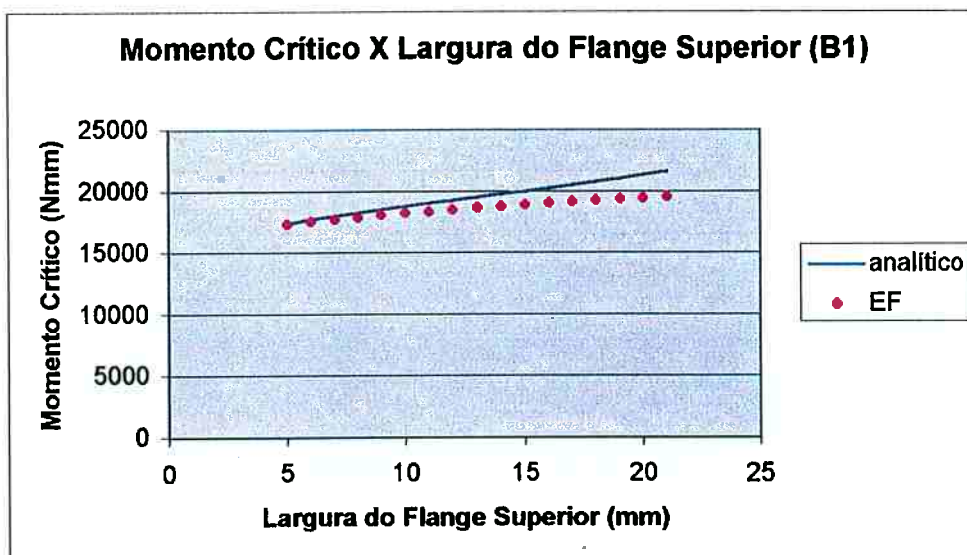


Figura 3.19 Momento crítico x largura do flange superior ( $b_1$ )

Neste caso todos os modelos apresentaram o modo de flambagem por flexão-torção, tal como o apresentado na figura 3.14.

Deve ser notado que a diferença entre os valores obtidos do modelo analítico e a partir dos modelos em elementos finitos vai aumentando a medida que a largura do flange é aumentada.

Outra possibilidade envolve a modificação da largura do flange inferior ( $b_2$ ). No caso prático do tubo reforçado esta modificação corresponderia a diferentes valores de espaçamento entre os reforçadores.

Os modelos neste caso também foram semelhantes aos empregados nos casos anteriores. Na tabela 3.6 estão apresentados os valores obtidos dos modelos.

Neste caso, o valor mínimo para a largura  $b_2$  (13mm) corresponde a uma situação possível apenas em teoria, posto que neste caso tem-se um reforçador bi-simétrico. O limite máximo corresponde a um perfil onde os reforçadores estão muito separados, o que torna a região entre reforços pouco rígida.

Tabela 3.6 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da largura do flange inferior ( $b_2$ )

$b_2$ (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
13	4177	4459	flexão-torção
14	4701	5009	flexão-torção
15	5287	5624	flexão-torção
16	5935	6304	flexão-torção
17	6648	7051	flexão-torção
18	7426	7864	flexão-torção
19	8270	8745	flexão-torção
20	9179	9692	flexão-torção
21	10155	10706	flexão-torção
22	11195	11785	flexão-torção
23	12300	12928	flexão-torção
24	13466	14133	flexão-torção
25	14691	15397	flexão-torção
26	15969	16718	flexão-torção
27	17295	18092	flexão-torção
28	18659	19514	flexão-torção
29	20204	20980	flexão-torção
30	21320	22484	flexão-torção
31	20767	24020	local
32	20140	25582	local
33	19546	27161	local
34	18983	28750	local
35	18455	30339	local
36	17959	31919	local
37	17494	33480	local
38	17057	35010	local
39	16646	36499	local
40	16259	37933	local

(Os valores sublinhados correspondem a seção do perfil básico, não modificado)

Os resultados da tabela 3.6 estão apresentados também na figura 3.20

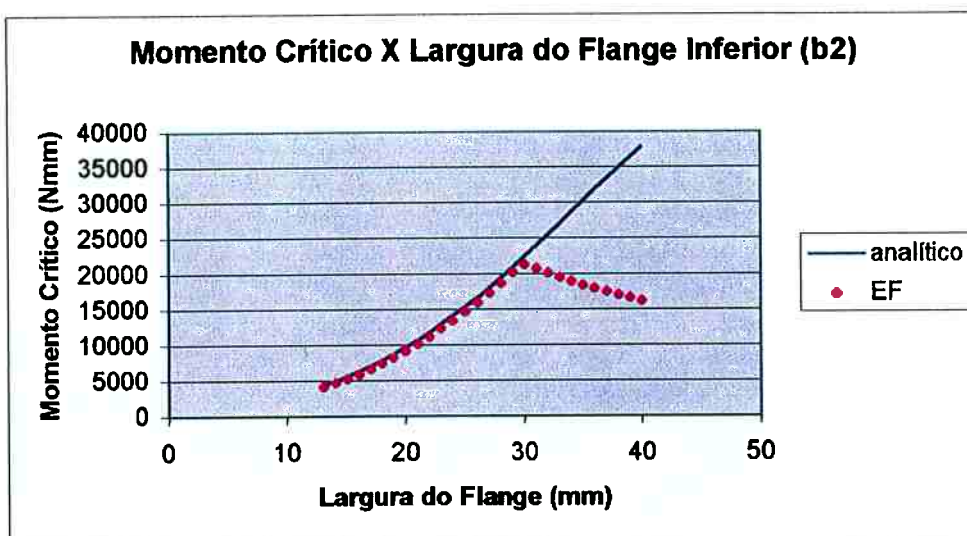


Figura 3.20 Momento crítico x largura do flange inferior ( $b_2$ )

Neste caso para larguras maiores que 31mm o modo mais crítico deixa de ser o de flexão-torção e passa a ser um modo local como o apresentado na figura 3.21, onde apenas o flange inferior apresenta-se deformado (enrugamento).



Figura 3.21 Modo local de flambagem no flange inferior

Outra possibilidade de mudança pode ser a variação da altura dos reforçadores. Este parâmetro está diretamente associado a rigidez do tubo resultante e é usado na obtenção de perfis distintos. Tal como nos outros casos vistos não houve modificação

substancial dos modelos em relação aos descritos no início deste item. A tabela 3.7 apresenta os resultados obtidos quando foi variada a altura do perfil.

Este parâmetro foi variado de 10mm a 25mm, em intervalos de 1mm. Perfis cujos reforçadores tem altura menor que 10mm, não são de interesse prático pois contribuem pouco para o aumento de rigidez. Perfis com altura maior que 25mm são muito rígidos e de difícil enrolamento, o que limita a gama de diâmetros nos quais este perfil pode ser enrolado.

Tabela 3.7 Resultados comparativos do método dos elementos finitos e analítico para variação da altura da alma (h)

h (mm)	$M_{crit.}$ (MEF) N.mm	$M_{crit.}$ (3.60) N.mm	Modo de Flambagem
10	12042	12042	flexão-torção
11	13006	13006	flexão-torção
12	13945	14250	flexão-torção
13	14858	15222	flexão-torção
14	15747	16185	flexão-torção
15	16610	17142	flexão-torção
16	17448	18094	flexão-torção
17	18261	19041	flexão-torção
18	19050	19985	flexão-torção
19	19815	20927	flexão-torção
20	20557	21866	flexão-torção
21	21276	22803	flexão-torção
22	21979	23739	flexão-torção
23	22646	24673	flexão-torção
24	23297	25606	flexão-torção
25	23928	26539	flexão-torção

(O perfil básico está entre os dois cujos resultados estão sublinhados na tabela)

Os resultados da tabela 3.7 estão também na figura 3.22.

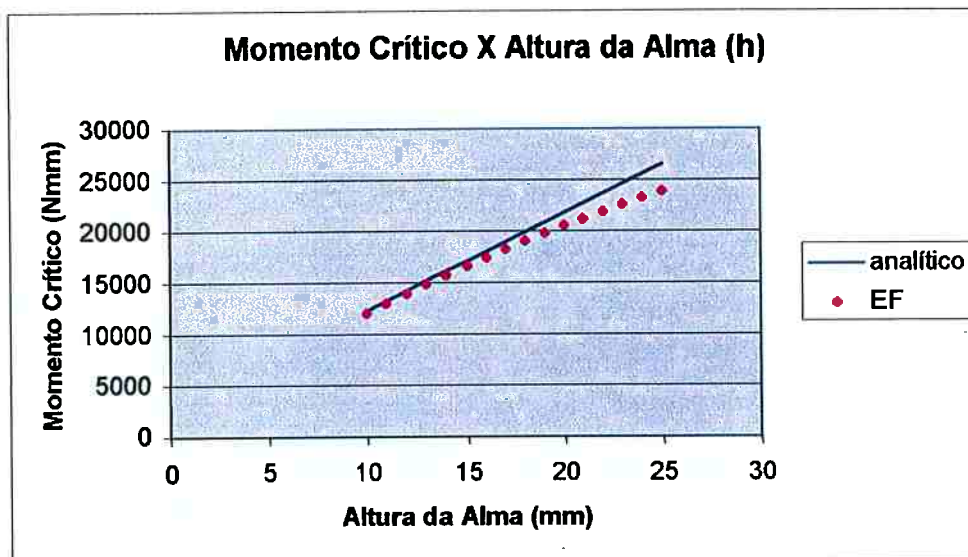


Figura 3.22 Momento crítico x altura da alma (h)

De forma geral, os modelos simulados em elementos finitos apresentaram o comportamento de flexão-torção para o modo de flambagem. Nestes casos o valor encontrado para o momento crítico também foi muito próximo daquele calculado pela expressão teórica, mesmo considerando que os modelos não são complexos e nenhuma modificação foi feita na formulação dos elementos, ou seja, há uma concordância entre os valores de momento crítico obtidos a partir da expressão 3.60 (analítica) e desde os modelos de elementos finitos, principalmente para as dimensões do perfil existente (linhas destacadas nas tabelas), validando assim a metodologia proposta ao menos para este caso.

Nos modelos onde houve discrepância entre o modo de flambagem calculado e o modo de flexão-torção, pode-se dizer que o comportamento apresentado seria o esperado. Nestes casos a rigidez de um componente (alma ou flange inferior) era substancialmente menor que do restante do perfil. No caso de maior largura do flange inferior se observa que este elemento passa a ter um comportamento de painel reforçado, onde o modo predominante é justamente a flambagem do painel (Grondin et al., 1998).

Em outras situações, onde o modo de flambagem permanece sendo o de flexão-torção mas a diferença entre os valores de momento crítico vai aumentando. Uma possível razão para este fato é o uso de uma mesma malha de elementos finitos (número e distribuição dos elementos) para todos os modelos, em oposição a malhas otimizadas para cada caso. Entretanto, há outras possibilidades para explicar as discrepâncias observadas, por exemplo, as aproximações feitas em termos de vinculação.

Com estes modelos foi possível encontrar algumas limitações para a aplicação do modelo teórico, o que é uma informação relevante do ponto de vista tecnológico quando se desenvolve uma ferramenta de projeto. Deve-se, entretanto, ressaltar que alguns dos modos encontrados nos modelos de elementos finitos não são observados em situações práticas de enrolamentos de tubos. De fato, há que considerar que as condições de contorno, aplicadas nos dois modelos, são bastante simplificadas frente ao que se observa na realidade quando do enrolamento dos perfis. E há o fato de, na prática, o perfil ser composto por vários reforçadores, o que não foi considerado nos dois modelos.

Cabe ainda ressaltar que os resultados obtidos são válidos para o perfil típico analisado. Para os perfis atualmente em uso no Brasil (dimensões na tabela 5.2) ocorrem fenômenos análogos. Entretanto, as conclusões aqui obtidas não podem ser generalizadas para qualquer faixa de dimensões e materiais utilizados na fabricação do perfil.



## 4 - Modelos de placa

Outra possibilidade de modelo para o perfil que comporá o tubo é o modelo de placa.

A adoção deste tipo de modelo vem no sentido de suplantar algumas das deficiências dos modelos de viga do capítulo 3. Entretanto, perde-se a relativa simplicidade destes modelos, sendo esta um fator importante no desenvolvimento de uma ferramenta de projeto onde certas qualidades, tais como robustez, podem vir a ser tão importantes quanto a precisão.

Na revisão bibliográfica (ver capítulo 2) foi constatado que boa parte da literatura disponível hoje é devida a desenvolvimentos de critérios de verificação de painéis reforçados para a construção naval, com o uso de modelos numéricos (MEF) e experimentais. Do ponto de vista teórico, sempre se parte do que foi apresentado em Timoshenko & Gere (1961) ou Bleich (1952).

### 4.1 Modelos de viga modificados

Antes de um desenvolvimento de modelos que usam a teoria de placas propriamente dita, cabe a apreciação de modelos que podem ser chamados de híbridos, uma vez que não são puramente de viga nem de placa.

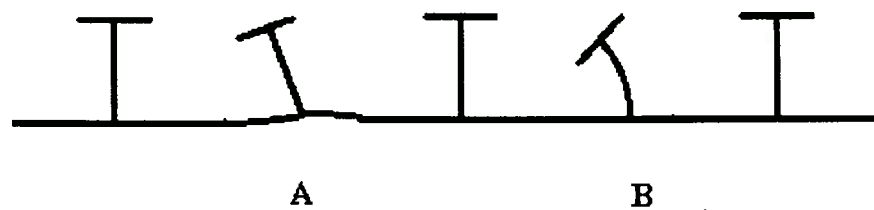


Figura 4.1 Possíveis deslocamentos na flambagem dos reforços

Na figura 4.1 estão dois exemplos de possíveis deslocamentos para os reforçadores que podem ser encontrados com o uso de modelos híbridos, onde a placa



pode ser substituída por uma rigidez equivalente. Assim, partindo do modelo de vigas desenvolvido no capítulo 3 é proposto um modelo onde há rigidez distribuída ao longo do comprimento, restringindo as translações nas direções x e y e a torção. Este tipo de modelo, baseado na formulação do capítulo 3, foi inicialmente proposto por Goodier (1942). Na figura 4.2 está apresentada uma seção transversal típica e sistema de coordenadas usado neste modelo.

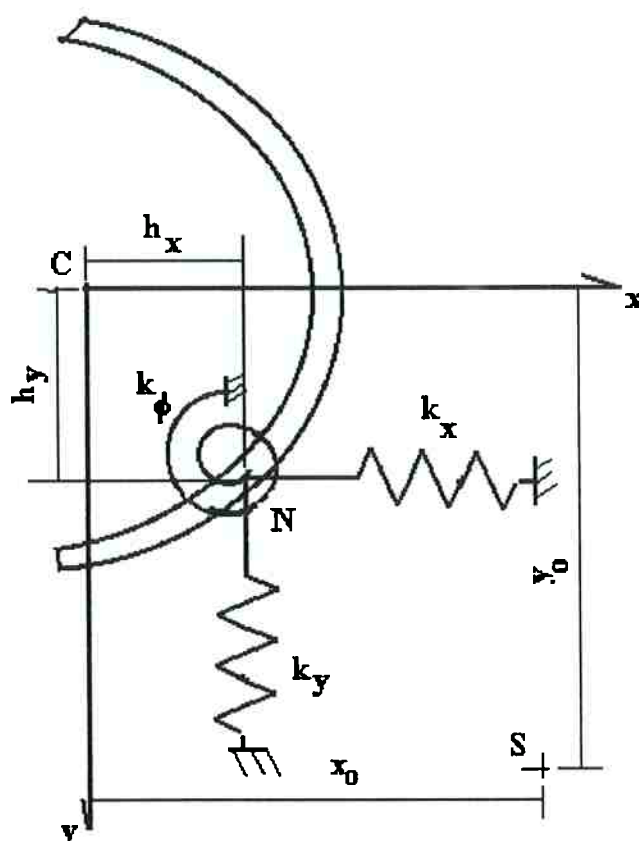


Figura 4.2 Modelo com rigidez distribuída

Considerando os mesmos deslocamentos  $u$  e  $v$ , nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, empregados nos modelos no capítulo 3 é possível obter as forças por unidade de comprimento  $q_x$  e  $q_y$ .

$$q_x = -k_x \cdot [u + (y_0 - h_y) \cdot \phi] \quad (4.1)$$

$$q_y = -k_y \cdot [v - (x_o - h_x) \cdot \phi] \quad (4.2)$$

Para uma viga sujeita a momentos  $M_x$  e  $M_y$  concentrados nas extremidades e carga de compressão  $P$  (ver item 3.3.2), estas forças são somadas as equações de equilíbrio 3.49 e 3.50, resultando nas novas equações de equilíbrio abaixo:

$$EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + (Py_o - M_x) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k_x \cdot [u + (y_o - h_y) \cdot \phi] = 0 \quad (4.3)$$

$$EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} - (Px_o - M_y) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k_y \cdot [v - (x_o - h_x) \cdot \phi] = 0 \quad (4.4)$$

No que diz respeito a torção há o momento devido a rigidez torcional  $k_\phi$  e os momentos devidos às forças  $q_x$  e  $q_y$  em torno de um eixo que passa por  $S$ . Assim, o momento torçor,  $m_z$ , fica dado por:

$$m_z = -k_\phi \cdot \phi - k_x \cdot [u + (y_o - h_y) \cdot \phi] \cdot (y_o - h_y) + k_y \cdot [v - (x_o - h_x) \cdot \phi] \cdot (x_o - h_x) \quad (4.5)$$

O momento torçor dado por 4.5 deve ser considerado no equilíbrio de torção, obtido inicialmente no capítulo 3, indicado pela expressão 3.48. Assim é obtida a equação de equilíbrio em torção:

$$EI_w \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GJ_t - M_x \beta_x - M_y \beta_y - P \cdot \frac{J_o}{A}) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (Py_o - M_x) \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - (Px_o - M_y) \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} + k_\phi \cdot \phi + k_x \cdot [u + (y_o - h_y) \cdot \phi] \cdot (y_o - h_y) - k_y \cdot [v - (x_o - h_x) \cdot \phi] \cdot (x_o - h_x) = 0 \quad (4.6)$$

Para uma situação idêntica a apresentada na figura 3.9, as equações de equilíbrio ficam na seguinte forma

$$EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} - M \frac{d^2 \phi}{dz^2} + k_x \cdot [u + (y_o - h_y) \cdot \phi] = 0 \quad (4.7)$$

$$EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + k_y \cdot (v + h_x \cdot \phi) = 0 \quad (4.8)$$

$$EI_w \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GJ_t - M\beta_x) \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} - M \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + k_\phi \cdot \phi + k_x \cdot [u + (y_o - h_y) \cdot \phi] \cdot (y_o - h_y) + k_y \cdot (v + h_x \cdot \phi) \cdot h_x = 0 \quad (4.9)$$

As possíveis soluções para  $u$ ,  $v$ , e  $\phi$ , considerando uma situação tal como a apresentada na figura 3.9, são dadas abaixo

$$u = K_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \quad (4.10)$$

$$v = K_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \quad (4.11)$$

$$\phi = K_3 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \quad (4.12)$$

Substituindo as soluções acima nas equações 4.7, 4.8 e 4.9 obtém-se:

$$EI_y \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^4 \cdot K_1 + \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot K_3 \cdot M + k_x \cdot [K_1 + (y_o - h_y) \cdot K_3] = 0 \quad (4.13)$$

$$EI_x \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^4 \cdot K_2 + k_y \cdot (K_2 + h_x \cdot K_3) = 0 \quad (4.14)$$

$$EI_w \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^4 K_3 + (GJ_t - M\beta_x) \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 K_3 + M \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 K_1 + k_\phi \cdot K_3 + k_x \cdot [K_1 + (y_o - h_y) \cdot K_3] \cdot (y_o - h_y) + k_y \cdot (K_2 + h_x \cdot K_3) \cdot h_x = 0 \quad (4.15)$$

O sistema de equações acima tem solução não trivial se a condição abaixo for satisfeita.

$$\begin{vmatrix} EI_y \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + k_x & 0 & M \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_x \cdot (y_o - h_y) \\ 0 & EI_x \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_y & k_y h_x \\ M \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_x \cdot (y_o - h_y) & k_y h_x & EI_w \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + (GJ_t - M\beta_x) \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_\phi + k_x (y_o - h_y)^2 + k_y h_x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.16)$$

A condição acima permite determinar o valor do momento crítico de flambagem. Caso  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_\phi$  sejam nulos, a condição 4.16 reduz-se a equação 3.56.

O uso deste tipo de modelo fica bastante dificultado pela necessidade de avaliação dos parâmetros de rigidez  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_\phi$ . A aplicação deste modelo fica restrita a análise de falhas por instabilidade dos reforçadores, desde que os parâmetros citados sejam determinados com precisão. Para projeto, as dificuldades citadas limitam o uso deste tipo de modelo.

Este item foi incluído por ser significativo para possíveis desdobramentos deste trabalho. Entretanto, devido as desvantagens citadas e dos limites impostos a este trabalho, este desenvolvimento não será adotado nos outros capítulos.

## **4.2 Modelos de Placa**

Estes modelos são baseados na teoria de flexão de placas (Timoshenko & Gere, 1961). Uma apresentação detalhada desta teoria não faz parte do escopo deste trabalho.

Inicialmente será analisado o caso de uma placa retangular, de espessura  $t$ , com todas as arestas apoiadas e sujeita a compressão uniforme em uma direção, tal como apresentado na figura 4.3.

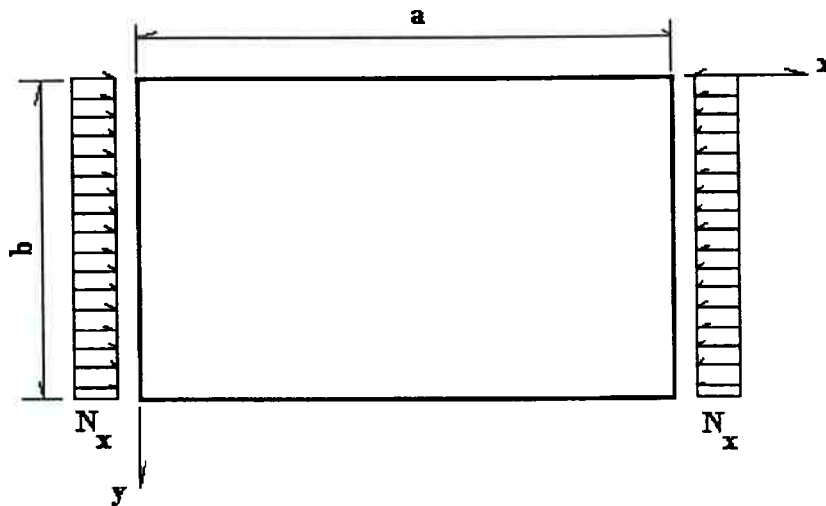


Fig. 4.3 Placa retangular comprimida numa direção

A equação de equilíbrio para esta placa é dada por (Timoshenko & Gere, 1961):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{E \cdot t^3} \cdot N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

Onde  $w$  é a deslocamento de um ponto da placa na direção perpendicular ao plano  $xy$  apresentado na figura 4.3. Não confundir este deslocamento com o empenamento definido no capítulo 3.

De maneira a simplificar a notação, o termo de rigidez da placa,  $K_e$ , é definido como sendo:

$$K_e = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.18)$$

Soluções para a deslocamento,  $w$ , são adotadas como sendo da forma:

$$w(x, y) = f(y) \cdot \text{sen} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \quad (4.19)$$

Substituindo em 4.27 obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{N_x}{K_e} \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \right) \cdot f = 0 \quad (4.20)$$

A equação 4.30 tem solução na seguinte forma:

$$f(y) = A_1 \cosh(\alpha \cdot y) + A_2 \sinh(\alpha \cdot y) + A_3 \cos(\beta \cdot y) + A_4 \sin(\beta \cdot y) \quad (4.21)$$

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são dadas por:

$$\alpha = \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \left( \frac{N_x}{K_e} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

$$\beta = \left( -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \left( \frac{N_x}{K_e} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

As constantes  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , são determinadas a partir das condições de contorno. Como todas as arestas são consideradas bi-apoiadas, as condições de contorno são dadas por:

$$w = 0 \quad p/y = 0 \text{ e } y = b$$

$$\frac{\partial^2 w}{dx^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad p/y = 0 \text{ e } y = b \quad (4.24)$$

A aplicação das quatro condições do contorno dadas por 4.24 leva à obtenção do seguinte sistema de equações simultâneas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha b) & \sinh(\alpha b) & \cos(\beta b) & \sin(\beta b) \\ \alpha^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} & 0 & -\beta^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} & 0 \\ (\alpha^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2}) \cosh(\alpha b) & (\alpha^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2}) \sinh(\alpha b) & (-\beta^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2}) \cos(\beta b) & (-\beta^2 - \nu \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2}) \sin(\beta b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.25)$$

Para que o sistema tenha solução não trivial é necessário que a matriz de coeficientes tenha determinante nulo. Logo:

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 \cdot \sinh(\alpha b) \cdot \sin(\beta b) = 0 \quad (4.26)$$

A expressão 4.36 permite investigar a instabilidade de uma placa retangular, apoiada, para diferentes razões de aspecto ( $a/b$ ) e distintos modos de flambagem ( $m=1, 2, 3, 4, \dots$ ).

Para  $m$  igual a 1 é possível encontrar uma expressão para a carga crítica  $N_c$ , de flambagem.

$$N_c = \frac{\pi^2 K_e}{a^2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right)^2 \quad (4.27)$$

A medida que a razão de aspecto ( $a/b$ ) aumenta, deve-se notar que este valor para a carga crítica também aumenta. É possível existir uma relação das dimensões  $a$  e  $b$  da placa para a qual não é mais o modo de flambagem dado por  $m = 1$  o mais crítico (Timoshenko & Gere, 1961).

Outras condições de contorno podem levar a distintos resultados. Por exemplo, para uma placa como a da figura 4.3, com as extremidades equivalentes a  $y = 0$  e  $y = b$  livres e as extremidades  $x = 0$  e  $x = a$  apoiadas, a solução da equação 4.17 fica na seguinte forma:

$$w(x) = A \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \quad (4.28)$$

Substituindo 4.28 em 4.17 obtém-se a seguinte equação algébrica:

$$\left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 - \frac{N_x}{K_e} = 0 \quad (4.29)$$

A solução para a carga crítica, para o primeiro modo de flambagem ( $m = 1$ ), neste caso é dada por:

$$N_c = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot K_e \quad (4.30)$$

Notar que esta solução corresponde àquela apresentada na equação 4.27 fazendo a dimensão  $b$  maior que  $a$ . Por exemplo, se o comprimento,  $b$ , for igual a 10 (dez) vezes

a dimensão,  $a$ , a diferença entre os valores obtidos em usar as expressões 4.27 e 4.30 fica na ordem de 2%, perfeitamente aceitável no projeto deste tipo de estrutura.

Outra possível condição de contorno é a da placa engastada, com a aresta onde a carga é aplicada sendo livre e as demais arestas também livres, tal como na figura 4.4.

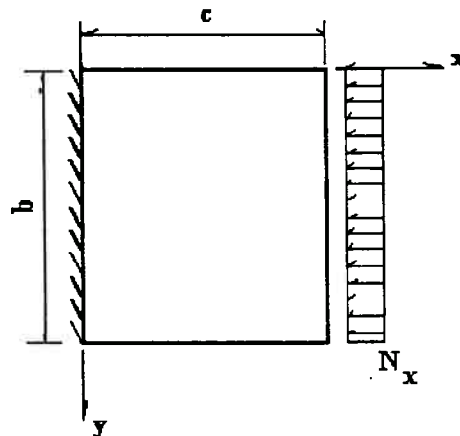


Figura 4.4 Placa com uma extremidade engastada

Para uma solução neste caso é possível usar a expressão 4.30, usando a simetria e considerando a igualdade abaixo [Allen & Boulson, 1980]:

$$a = 2 \cdot c \quad (4.31)$$

Assim a solução para o problema apresentado na figura 4.4 fica sendo:

$$N_c = \frac{\pi^2}{4 \cdot c^2} \cdot K_e \quad (4.32)$$

Notar que a mesma solução (4.32) poderia ser obtida usando a igualdade 4.31 e a substituindo na expressão 4.28.

### 4.3 - Compressão da alma

Um possível modo para levar a falha dos reforçadores por instabilidade é a compressão da alma por ação do flange superior conforme a figura 4.5.



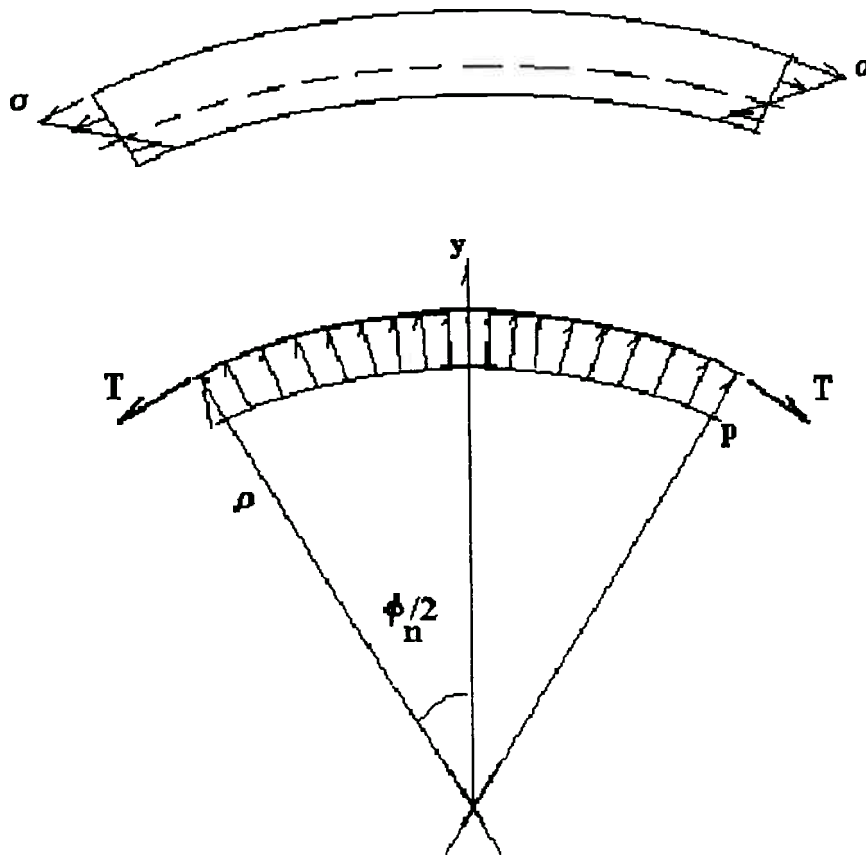


Figura 4.5 Viga em flexão - Equilíbrio do flange superior

As tensões de compressão da alma são calculadas a partir das tensões normais atuantes no flange superior. A figura 4.5 apresenta um elemento do flange superior sendo enrolado segundo um raio de curvatura  $\rho$ . Neste caso, as tensões atuantes no flange superior resultam em forças de tração  $T$ , que por sua vez são equilibradas pela carga por área,  $p$  atuante ao longo da junção do flange com a alma. Esta carga atua apenas na região compreendida pela espessura,  $t_h$ , da alma.

Impondo o equilíbrio na direção  $y$  obtém-se:

$$2 \cdot T \cdot \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\phi_n}{2}} p \cdot t_h \cdot \rho \cdot \cos\phi \cdot d\phi \quad (4.33)$$

$$p = \frac{T}{t_h \cdot \rho} \quad (4.34)$$

É interessante ressaltar que esta expressão (4.34) independe do comprimento que se considera para a viga.

Para uma seção como a apresentada na figura 3.10, a expressão 4.34 pode ser reescrita em função do diâmetro de enrolamento,  $d_e$  e da altura  $h$  do reforçador.

$$P = \frac{2T}{t_h \cdot (d_e + 2h)} \quad (4.35)$$

A carga  $p$  é transformada na carga distribuída  $N$ , atuante na alma, multiplicando-se a expressão 4.35 pela espessura,  $t_h$ , da alma.

$$N = \frac{2T}{(d_e + 2h)} \quad (4.36)$$

A força resultante no flange superior pode ser obtida a partir das tensões atuantes. Conhecido o momento de enrolamento,  $M_{en}$ , e as propriedades da seção transversal, é possível determinar as tensões atuantes no flange superior.

Considerando um modelo de flexão simples no enrolamento é possível escrever a tensão de tração máxima para uma seção tal como a da figura 3.10:

$$\sigma = \frac{M_{en}}{I_x} \cdot h_1 \quad (4.37)$$

A carga de tração  $T$  atuando nesta parte do perfil é definida por:

$$T = \sigma \cdot A_1 = \sigma \cdot b_1 \cdot t_1 \quad (4.38)$$

Substituindo 4.37 em 4.38, obtém-se:

$$T = b_1 \cdot t_1 \cdot \left( \frac{M_{en}}{I_x} \cdot h_1 \right) \quad (4.39)$$

O momento de enrolamento pode ser determinado em função do diâmetro de enrolamento  $d_e$ . Neste caso, também é aplicada a teoria de flexão pura. O raio de curvatura,  $\rho$ , na flexão é calculado por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{en}}{EI_x} \quad (4.40)$$

Este raio de curvatura é medido até a linha neutra. Como o diâmetro de enrolamento é considerado até a base do perfil, tem-se:

$$\rho = \frac{d_e}{2} + \frac{2 \cdot h_2}{2} \quad (4.41)$$

Substituindo-se 4.40 e 4.41 em 4.39 obtém-se a expressão da tração, T, em função do diâmetro de enrolamento:

$$T = \frac{2 \cdot E \cdot b_1 \cdot t_1 \cdot h_1}{(d_e + 2h_2)} \quad (4.42)$$

Substituindo 4.42 em 4.36 obtém-se a expressão da carga de compressão na alma em função das dimensões da seção transversal do perfil e do diâmetro de enrolamento.

$$N = \frac{4}{(d_e + 2h)} \cdot \frac{E \cdot b_1 \cdot t_1 \cdot h_1}{(d_e + 2h_2)} \quad (4.43)$$

A carga atuante, N, deve ser comparada com a carga crítica para uma chapa em compressão. Uma possibilidade é a chapa sujeita a carga N e engastada na outra extremidade, com a aresta AB livre, como na figura 4.6. (Allen & Boulson, 1980)

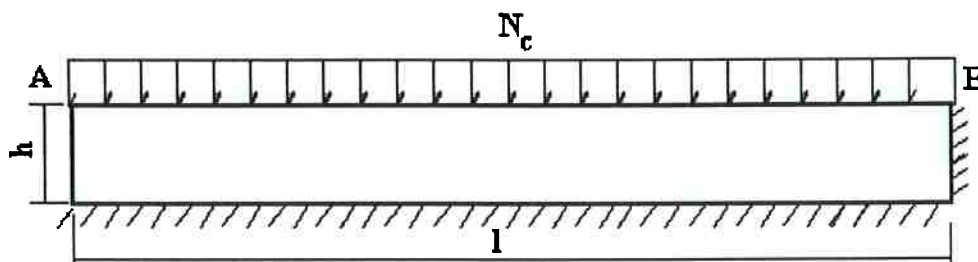


Figura 4.6 chapa sujeita a carga uniforme

A partir dos desenvolvimentos do item 4.2 é possível determinar a carga crítica, N<sub>c</sub>, para esta condição da figura 4.6:

$$N_c = \frac{\pi^2 \cdot K_e}{4 \cdot h^2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right)^2$$

$$K_e = \frac{E \cdot t_h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (4.44)$$

Recuperando a expressão 4.43 e fazendo o quociente entre N e  $N_c$ , obtém-se:

$$\frac{N_c}{N} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{t_h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{(d_e + 2h) \cdot (d_e + 2h_2)}{b_1 \cdot t_1 \cdot h_1 \cdot h^2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right)^2 \quad (4.45)$$

A menos do termo que envolve o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , é possível afirmar que este modo de falha é determinado basicamente pela geometria da seção e do diâmetro de enrolamento. Relações tais como a 4.45 podem ser obtidas para outras condições de contorno da chapa. Ainda assim a característica do problema ser condicionado pela geometria permanece.

Uma possível simplificação ocorre quando o comprimento  $l$  é muito maior que a altura,  $h$ , da alma. Neste caso a expressão 4.45 simplifica-se da seguinte forma:

$$\frac{N_c}{N} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{t_h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{(d_e + 2h) \cdot (d_e + 2h_2)}{b_1 \cdot t_1 \cdot h_1 \cdot h^2} \quad (4.46)$$

A partir das expressões 4.45 ou 4.46 é possível encontrar o diâmetro do tubo, conhecida a seção do reforçador, para o qual este mecanismo de falha passa a ser crítico. Neste caso basta impor a condição:

$$\frac{N_c}{N} > 1 \quad (4.47)$$

## 5. Comparativo entre os critérios de avaliação da flambagem

Nos capítulos 3 e 4 foram vistos critérios para determinação da carga que leva um reforçador a flambagem.

O primeiro critério considerado baseia-se na teoria de flambagem por flexão-torção apresentada no capítulo 3. Neste caso, a carga crítica de flambagem é o momento fletor aplicado no perfil. Assim, segundo este critério, caso o momento de enrolamento seja maior que o momento crítico de flambagem (ver expressão 3.60) haverá a falha do reforçador. Este critério será denominado **critério 1**.

O segundo critério baseia-se na compressão da alma tal como visto no item 4.3. Este critério tem por base a teoria de placas e o modelo de esforços de compressão na alma. Neste caso, haverá falha do reforçador se a condição dada pela expressão 4.47 não for satisfeita. Este critério será denominado **critério 2**.

Há ainda o critério de máxima deformação do perfil durante o enrolamento. Mesmo que não ocorra a flambagem, há um limite de resistência do material a deformação. Este critério será denominado **critério 3**.

Os três critérios estão implementados num programa feito na linguagem PASCAL, cuja listagem está no apêndice 1.

### 5.1 Determinação dos esforços de enrolamento

O principal esforço desenvolvido quando do enrolamento do tubo é o momento de enrolamento,  $M_{en}$ . Considerando que a seção do reforçador é semelhante à apresentada na figura 3.10 e usando a teoria elementar de flexão, é possível determinar que o raio de curvatura de enrolamento,  $\rho$ , do tubo é dado por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{en}}{E \cdot I_x} \quad (5.1)$$

Como o raio de curvatura é tomado sobre a linha neutra, a expressão deste parâmetro em função do diâmetro de enrolamento do tubo,  $d_e$ , fica dada por:

$$\rho = \frac{d_e + 2h_2}{2} \quad (5.2)$$

Combinando 5.1 e 5.2 é possível obter a expressão do momento de enrolamento.

$$M_{en} = \frac{2EI_x}{(d_e + 2h_2)} \quad (5.3)$$

A deformação,  $\varepsilon$ , também é obtida da teoria elementar de flexão. Neste caso a deformação considerada é a máxima deformação de tração. Assim:

$$\frac{M_{en}}{I_x} \cdot h_1 = E \cdot \varepsilon \quad (5.4)$$

Substituindo 5.3 em 5.4 obtém-se a seguinte expressão para a deformação.

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot h_1}{(d_e + 2h_2)} \quad (5.5)$$

É possível que o perfil venha previamente enrolado numa bobina de diâmetro  $d_b$ . Assim, a expressão da deformação,  $\varepsilon$ , fica na seguinte forma.

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot h_1}{(d_e + 2h_2)} - \frac{2 \cdot h_1}{(d_b + 2h_2)} \quad (5.6)$$

## 5.2 Comparação dos critérios

Os três critérios considerados serão comparados para diferentes seções de reforçadores e distintos diâmetros de enrolamento de tubos. As seções consideradas são as das lâminas comercialmente disponíveis no Brasil para a fabricação de tubos estruturados e os diâmetros também são aqueles feitos disponíveis pelos mesmos fabricantes de tubos.

Neste caso o objetivo é validar tecnologicamente os três critérios usando informações obtidas pelos fabricantes de tubos.

Na figura 5.1 estão apresentadas as principais dimensões dos perfis. Na tabela 5.1 estão apresentados os valores destas dimensões.

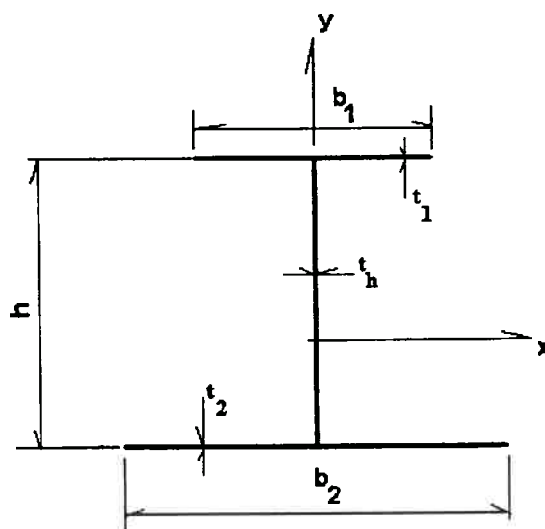


Figura 5.1 Dimensões básicas dos reforçadores

Tabela 5.1 Dimensões dos reforçadores

	$b_1$ (mm)	$t_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$t_2$ (mm)	$h$ (mm)	$t_h$ (mm)
Perfil 1	8	1,3	28	1,3	12,2	1,4
Perfil 2	9	1,5	28	1,5	15,5	1,6
Perfil 3	13	2,0	28	2,0	17,5	2,1
Perfil 4	13	3,0	28	3,0	20	2,8

A tabela 5.2 apresenta os resultados para os 3 critérios propostos. Para o critério 1, foi considerado a expressão 3.60 para determinação do momento crítico. Para o critério 2, foi considerada a expressão 4.41 e a deformação, critério 3, foi determinada usando a expressão 5.6. As propriedades do material são as determinadas no apêndice 3.

Ainda em termos de dimensões, foi considerado que o diâmetro de enrolamento das bobinas,  $d_b$  (eq. 5.6), em que são fornecidos os perfis (figura 5.2) vale 1,5 m. Há ainda o comprimento do perfil sendo enrolado, usado no critério 1. Neste caso foi empregado o comprimento igual a 0,2 m, sendo esta medida obtida na máquina de enrolamento dos tubos.



Figura 5.2 Bobinas com os perfis a serem enrolados

As figuras 5.3 e 5.4 apresentam falhas observadas no enrolamento de um tubo feito com o perfil 2 enrolado no diâmetro 400 (figura 5.3) e do tubo de perfil 1 sendo enrolado no diâmetro 300mm (figura 5.4).



Tabela 5.2 Comparativo dos critérios

		Critério 1	Critério 2	Critério 3
	$d_e$ (mm)	$M_c/M_{en}$	$N_c/N$	$\varepsilon$ (%)
Perfil 1	300	0,74	1,16	4,45
	400	1,07	2,02	3,08
Perfil 2	400	0,87	1,20	3,73
	500	1,19	1,84	2,73
	600	1,58	2,61	2,05
	700	2,06	3,53	1,57
Perfil 3	700	1,80	3,14	1,63
	800	2,35	4,07	1,25
	900	3,08	5,12	0,95
Perfil 4	900	3,11	5,46	1,08
	1000	4,14	6,71	0,81
	1100	5,69	8,07	0,59
	1200	8,27	9,57	0,41

O critério 1 apresenta a mesma tendência do critério 3, isto é, quanto maior for a deformação, mais crítica é a situação do momento de enrolamento frente ao momento de flambagem. O critério 1 aponta para falha por flambagem flexo-torcional para os perfis 1 e 2 enrolados nos diâmetros 300mm e 400mm respectivamente. De fato, conforme informações obtidas em contato com um fabricante deste tipo de tubo, na prática é muito difícil fabricar estes tubos. Desta forma o critério 1 é indicativo de falha dos reforçadores.

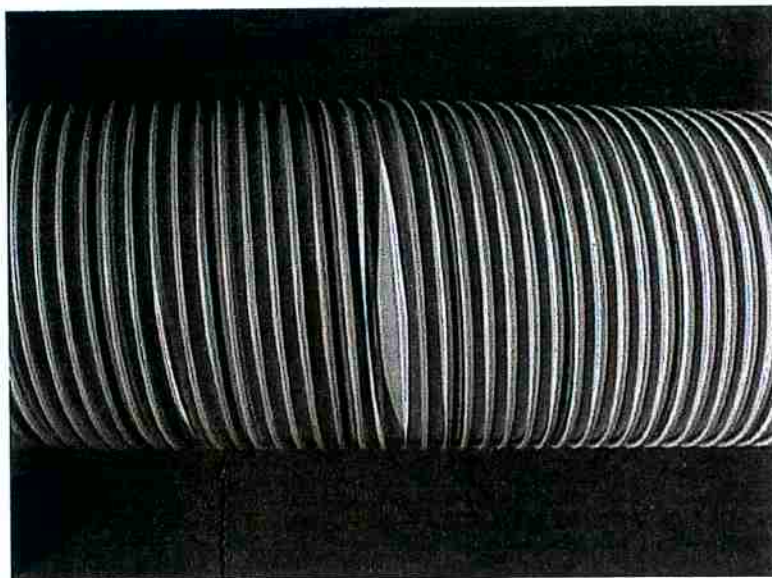


Figura 5.3 Falha observada em tubo feito com o perfil 2 e diâmetro 400mm.

Deve ser ressaltado, entretanto, que para o perfil 1, enrolado no diâmetro de 300mm, a deformação está muito próxima, da máxima deformação em que se pode admitir comportamento elástico linear para o material do tubo (ver apêndice 3). Valores maiores para a deformação devem ser indicativos de que os outros critérios estão com a hipótese básica violada.



Figura 5.4 Falha durante o enrolamento – Tubo feito com o perfil 1, diâmetro 300mm

O critério 2 também indica os mesmos 2 casos como sendo os mais críticos, embora em nenhum instante a carga ativa calculada tenha excedido a carga crítica. Entretanto, no projeto de qualquer estrutura sujeita a instabilidade sempre é necessário admitir uma *margem de segurança* entre a carga ativa e a carga crítica calculada quer por um modelo teórico quer por modelo numérico, sempre levando em conta que o valor e a natureza da carga ativa em geral são obtidos por estimativas e avaliações e que os modelos empregados no cálculo da carga crítica englobam uma série de hipóteses simplificadoras.

Os casos onde os critérios 1 e 2 não apontam para falha dos reforçadores, também são compatíveis com o que se observa na prática de fabricação deste tipo de tubo, isto é, na fabricação destes tubos não se observa qualquer ocorrência de flambagem.

Ainda a respeito do que foi observado junto a fabricantes de tubo, há uma série de situações onde os reforçadores sofrem deslocamento numa direção e em outras situações este deslocamento ocorre em direções alternadas. Este fato pode vir a ser um indicativo de que há, de fato, mais de um mecanismo que leva a falha dos reforçadores. Entretanto, não é possível garantir que em todas as situações de enrolamento do tubo as condições de vinculação do perfil à máquina sejam rigorosamente as mesmas. Este fato também pode ser uma possível explicação para os distintos comportamentos observados.

Deve ser mencionado que os critérios não apresentaram resultados que contrariassem o que se observa na fabricação dos tubos. Assim, é possível afirmar que os três critérios são de uso possível no projeto de tubos estruturados.

Uma verificação experimental completa da validade dos critérios desenvolvidos é de difícil realização. O primeiro motivo reside no fato de serem poucos os possíveis diâmetros de enrolamento, devido ao custo de produção do anel de enrolamento (figuras 1.3). O outro motivo é a limitada quantidade de perfis distintos disponíveis, também devido ao custo elevado do ferramental e equipamentos para a extrusão.

## 6. Introdução ao Projeto do Tubo Estruturado

No projeto de tubos estruturados deve-se levar em conta o fato do tubo ter que resistir os esforços atuantes sobre o mesmo, bem como ser rígido o bastante para que a estanqueidade seja garantida.

Outra razão para determinar a rigidez do tubo reside no fato do material (PVC – Poli-cloreto de vinila) deste ser sensível à fluência, isto é, as deformações aumentam sem que haja aumento na carga. Entretanto, uma das variáveis deste fenômeno é a deformação inicial. É sabido que este parâmetro pode ser determinante para desencadear problemas estruturais devido ao fenômeno de fluência. Assim, controlando a deformação inicial, por meio da rigidez, é possível evitar a fluência e a falha do tubo.

Desta forma, o projeto do tubo será guiado pela determinação da rigidez do mesmo. Para que este tenha a rigidez especificada um determinado perfil deve ser escolhido dentre os disponíveis.

### 6.1 Rigidez do tubo e condições de enrolamento

Inicialmente será determinada a rigidez de um anel sujeito a carga concentrada (ver figura 6.1). Esta solução é bastante conhecida (Den Hartog, 1952) e será usada para a obtenção da rigidez do tubo.

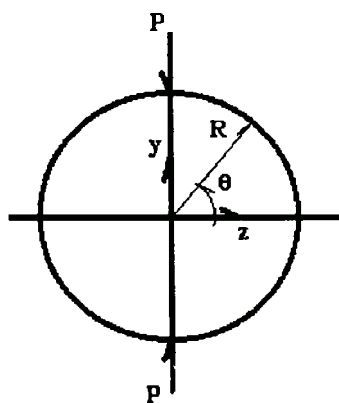


Figura 6.1 Anel sujeito a compressão

A redução no diâmetro,  $\Delta d_y$ , na direção y é dada por:

$$\Delta d_y = \frac{2PR^3}{EI} \cdot \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \quad (6.1)$$

O aumento do diâmetro,  $\Delta d_x$ , na direção x é dado por:

$$\Delta d_x = \frac{2PR^3}{EI} \cdot \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) \quad (6.2)$$

Isolando o valor da carga P na expressão 6.1 obtém-se:

$$P = \frac{EI}{(2R)^3} \cdot \frac{32\pi}{\pi^2 - 8} \cdot \Delta d_y \quad (6.3)$$

Assim, a rigidez,  $K_a$ , de um anel como o da figura 6.1, é dada por:

$$K_a = \frac{32\pi}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EI}{(2R)^3} \quad (6.4)$$

Caso o anel seja obtido pelo enrolamento de um perfil como o da figura 3.11, segundo um diâmetro de enrolamento,  $d_e$ , a expressão para a rigidez deste anel fica sendo dada por:

$$K_a = \frac{32\pi}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EI_x}{(d_e + 2h_2)^3} \quad (6.5)$$

Notar que na expressão 6.5 o enrolamento é considerado como sendo no diâmetro primitivo do tubo, isto é, aquele que passa pela linha neutra do perfil.

Caso se queira a rigidez do tubo; considerando que o mesmo está sujeito a uma situação similar a da figura 6.1, isto é, o tubo sujeito a carga uniforme ao longo do seu comprimento; é conveniente obter da expressão 6.5 uma relação que forneça a rigidez por unidade de comprimento. Sendo b, a distância entre reforçadores num perfil de tubo estruturado, a expressão para a rigidez do tubo por unidade de comprimento,  $K_m$ , fica dada por:

$$K_m = \frac{32\pi}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{EI_x}{(d_e + 2h_2)^3} \cdot \frac{1}{b} \quad (6.6)$$

Além da rigidez, no projeto há a necessidade de otimizar o uso do material empregado na fabricação do tubo. A massa,  $m_a$ , de um anel de diâmetro,  $d_e$ , feito com um determinado perfil é dada por.

$$m_a = \pi \cdot \rho \cdot A_p \cdot d_e \quad (6.7)$$

Sendo  $\rho$ , a densidade do material usado e  $A_p$  a área do perfil. A massa por unidade de comprimento,  $m_l$ , é obtida da divisão da expressão 6.7 pela largura do perfil,  $b$ .

$$m_l = \pi \cdot \rho \cdot A_p \cdot \frac{d_e}{b} \quad (6.8)$$

No projeto do tubo, usando as expressões 6.8 e 6.6 é possível, por exemplo, determinar qual perfil fornece a rigidez necessária com a menor massa.

Das expressões 6.5 ou 6.6 é possível obter o diâmetro de enrolamento do tubo,  $d_e$ , para uma rigidez especificada e conhecida do perfil a ser enrolado. Este é um parâmetro importante para a determinação do momento de enrolamento,  $M_{en}$ , do tubo. Este último deverá ser comparado ao momento crítico para determinação da possibilidade ou não de flambagem dos reforçadores.

Da teoria de flexão pura é sabido que o raio de curvatura,  $\rho$ , pode ser obtido de:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{en}}{E \cdot I_x} \quad (6.9)$$

O raio de curvatura é tomado sobre a linha neutra. Assim:

$$\rho = \frac{d_e + 2h_2}{2} \quad (6.10)$$

Combinando 6.10 e 6.9 é possível obter a expressão do momento de enrolamento.

$$M_{en} = \frac{2EI_x}{(d_e + 2h_2)} \quad (6.11)$$

Neste ponto cabe a retomada dos três critérios vistos no último capítulo. O **critério 1** compara o momento crítico de flambagem de uma seção mono-simétrica (3.60) com o momento de enrolamento (6.10). O **critério 2** compara a compressão na alma, devida a tração no perfil com a carga crítica de compressão numa placa (4.41) e há o **critério 3**, referente a máxima deformação no perfil. Caso esta deformação exceda a máxima deformação em que o comportamento do material pode ser considerado elástico linear, sabe-se que os dois outros critérios não podem ser usados, pois a hipótese de comportamento elástico linear é fundamental na obtenção dos mesmos. Este critério ainda pode ser usado para avaliar se o material que compõe o perfil não está trabalhando próximo aos valores de tensão máxima.

Se o perfil e o diâmetro de enrolamento são compatíveis, de acordo com os três critérios de projeto, é possível afirmar que o tubo pode ser fabricado conforme o desejado.

## 6.2 Exemplo de aplicação - Seleção de perfil

Como exemplo de aplicação da metodologia desenvolvida propõe-se uma situação típica de aplicação de um tubo estruturado. Trata-se de um tubo para escoamento de águas pluviais, com 450mm de diâmetro, sob uma camada de 1m de solo. O tubo tem 10m de comprimento. A figura 6.2 ilustra a situação proposta.



Figura 6.2 Tubo enterrado



Neste exemplo serão levados em conta os perfis disponíveis no Brasil, cujas dimensões relevantes para o problema estão na tabela 6.1. Neste caso será considerado um anel composto por um reforçador.

Tabela 6.1 Dimensões dos reforçadores

	$I_x$ ( $\text{mm}^4$ )	$h_1$ (mm)	$h_2$ (mm)	$m$ (kg/m)
Perfil 1	1560	8,6	3,6	0,09
Perfil 2	3222	10,5	5,0	0,11
Perfil 3	6636	11,0	6,5	0,17
Perfil 4	13035	12,5	7,5	0,25

É especificado que este tubo não pode ter uma variação de diâmetro maior que 9mm. A partir dos valores da tabela 6.1, levando em conta as propriedades de material listadas no apêndice 3, é possível obter a rigidez de um anel feito com os perfis listados, para o diâmetro especificado (450 mm), segundo a expressão 6.5. A tabela 6.2 apresenta os valores obtidos.

Tabela 6.2 Rigidez de um anel ( $K_a$  - expressão 6.5)

	$K_a$ (N/mm)
Perfil 1	0,965
Perfil 2	1,96
Perfil 3	3,95
Perfil 4	7,67

De acordo com a referência Moser (1990), calcula-se a carga atuante sobre este anel, como sendo igual a 10N. Usando a especificação de variação no diâmetro, é possível verificar que a rigidez requerida equivale a 1,11 N/mm. Assim, o perfil 1 fica imediatamente descartado uma vez que não é suficientemente rígido.

O próximo passo é aplicar os critérios desenvolvidos no capítulo 5, verificando se é possível enrolar os demais perfis no diâmetro especificado. A tabela 6.3 resume os resultados obtidos para os três perfis restantes.



Tabela 6.3 Resultado dos critérios

	Critério 1	Critério 2	Critério 3
Perfil 1	1,3	2,5	2,6%
Perfil 2	0,93	1,5	3,2%
Perfil 3	0,81	1,3	3,3%
Perfil 4	0,80	1,4	3,7%

Obs. Os valores destacados são dos perfis que atendem a rigidez especificada

Neste caso particular os critérios indicam ser muito difícil obter o tubo desejado com os perfis existentes atualmente, uma vez que nenhum dos mesmos atende o critério 1.

Caso fosse possível admitir uma variação maior no diâmetro, ou ainda uma diferente compactação do solo sobre o tubo, o requisito de rigidez poderia permitir que o perfil 1 atendesse ao projeto. Com o diâmetro maior seria possível utilizar o perfil 2, por exemplo.

### 6.3 Exemplo de aplicação - Modificação de perfil

Uma outra possibilidade de aplicação da metodologia permite a avaliação da faixa de diâmetros permissíveis de enrolamento de um determinado perfil. Neste exemplo serão criados três novos perfis, intermediários entre os quatro perfis existentes. As dimensões desta nova família de perfis estão na tabela 6.4 (os novos perfis estão nas linhas hachuradas)

Tabela 6.4 Dimensões dos reforçadores

	$b_1$ (mm)	$t_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$t_2$ (mm)	$h$ (mm)	$t_h$ (mm)
Perfil 1	8	1,3	28	1,3	12,2	1,4
Perfil 1-2	8	1,4	28	1,4	13,5	1,5
Perfil 2	9	1,5	28	1,5	15,0	1,6
Perfil 2-3	11	1,7	28	1,7	16,5	1,8
Perfil 3	13	2,0	28	2,0	17,5	2,1
Perfil 3-4	13	2,5	28	2,5	18,7	2,6
Perfil 4	13	3,0	28	3,0	20	2,8

Na tabela 6.5 estão os resultados para os três critérios considerando os novos perfis enrolados em diâmetros crescentes a partir de 400mm, que é o menor diâmetro possível para o perfil 1, já existente.

Tabela 6.5 Resultados para os critérios de projeto

Perfil	Diâmetro de enrolamento (mm)	Critério 1	Critério 2	Critério 3	Rigidez (N/mm)	Massa (kg)
Perfil 1-2	400	0,91	1,7	3,4%	2,3	0,130
	450	1,1	2,2	2,9%	1,6	0,146
	500	1,2	2,7	2,5%	1,2	0,162
	550	1,4	3,2	2,1%	0,89	0,178
	600	1,6	3,8	1,8%	0,69	0,194
	650	1,9	4,4	1,6%	0,54	0,211
	700	2,2	5,1	1,4%	0,44	0,227
Perfil 2-3	500	0,99	1,6	2,8%	1,5	0,220
	550	1,2	2,0	2,4%	1,1	0,242
	600	1,3	2,3	2,1%	0,85	0,264
	650	1,5	2,7	1,8%	0,67	0,286
	700	1,7	3,1	1,6%	0,54	0,308
	750	2,0	3,6	1,4%	0,44	0,330
	800	2,3	4,1	1,2%	0,37	0,352
Perfil 3-4	500	0,94	2,1	3,0%	2,2	0,347
	550	1,1	2,5	2,6%	1,7	0,381
	600	1,3	2,9	2,3%	1,3	0,416
	650	1,4	3,4	2,0%	1,0	0,451
	700	1,6	3,9	1,7%	0,82	0,485
	750	1,9	4,5	1,5%	0,67	0,520
	800	2,1	5,1	1,3%	0,55	0,555

Na montagem da tabela acima foi considerado que os perfis vêm enrolados em bobinas cujo diâmetro é igual a 1,5 m e propriedades de material conforme o determinado no apêndice 3. Para a determinação da rigidez foi empregada a expressão 6.5, para a rigidez de um anel. A massa foi calculada a partir da expressão 6.7.

Em todos os casos deste exemplo o critério 1 foi o determinante na obtenção do diâmetro mínimo de enrolamento. Este fato não invalida os demais critérios. É possível uma situação onde o critério 2 seja fundamental, por exemplo a otimização da espessura da alma do perfil. É ainda necessário lembrar que a opção até então existente era a

tentativa e erro, bastante inadequada quando se tem em mente os custos de fabricação de um anel de enrolamento ou de uma ferramenta de extrusão.

## 7. Conclusões, contribuições e trabalhos futuros

Como conclusões principais pode-se enumerar:

- Os critérios 1 e 2 desenvolvidos neste trabalho são indicadores da possibilidade da falha dos reforçadores durante o enrolamento dos perfis formadores de tubos estruturados.
- Os dois critérios podem ser usados para verificação das possibilidades de enrolamento dos perfis existentes como também, podem ser usados para o projeto de novos perfis.
- A deformação devida ao enrolamento é um indicador da validade dos dois critérios. Caso a deformação exceda aquela referente ao fim do regime elástico linear, os dois critérios deixam de valer. Cabe mencionar que a deformação também é indicador para o limite de enrolamento do tubo, quando se considera apenas a tensão normal de flexão atuante no perfil durante o enrolamento.

Como contribuições, além das apontadas pelas conclusões, pode-se ainda mencionar o desenvolvimento feito no item 3.3.4 das expressões de cálculo das propriedades geométricas de um perfil mono-simétrico. Este desenvolvimento detalhado não foi encontrado nos demais trabalhos pesquisados não obstante as expressões obtidas serem importantes para o projeto de estruturas com este tipo de perfil e sujeita a flambagem por flexão-torção.

Outra contribuição é o desenvolvimento do procedimento de cálculo deste tipo de tubo desenvolvido no capítulo 6.

A revisão bibliográfica feita será útil para os envolvidos na fabricação deste tipo de tubo, uma vez que engloba os trabalhos fundamentais para a compreensão de alguns dos fenômenos que ocorrem no enrolamento dos perfis. Cabe ressaltar, entretanto, que nenhum dos trabalhos pesquisados lida com problemas parecidos com o estudado no

presente trabalho. Foi feita a aplicação de conceitos desenvolvidos em outros contextos para a solução do problema que se apresentou ao autor.

Do ponto de vista dos trabalhos futuros, um primeiro caminho é a contínua verificação dos critérios obtidos frente ao que se observa na prática de fabricação deste tipo de tubo. Com o resultado desta verificação será possível nortear desenvolvimento de modelos mais sofisticados seguindo a linha iniciada no item 4.1.

Outra possibilidade de trabalho futuro é o desenvolvimento dos modelos que englobem as deformações plásticas, ou outros tipos de comportamento do material e não apenas o elástico linear.

Ainda no que se refere a não-linearidades há possibilidades de desenvolvimentos caso se considerem grandes deslocamentos. O mesmo se aplica a modelagem por elementos finitos. Estes modelos simulariam os deslocamentos existentes no processo de enrolamento do tubo, a medida que o perfil passa pelo anel de enrolamento. Além de englobar a possibilidade de grandes deslocamentos, os modelos levariam em conta a ação de mais de um reforçador, ao invés de considerar apenas um reforçador como feito no presente trabalho.

Outro parâmetro que mereceria atenção em trabalhos futuros é o ângulo de hélice existente quando o perfil é enrolado. O fato do tubo formado, ser um helicóide, implica que o perfil fica sujeito a deformações, que correspondem à torção dos reforçadores, que podem contribuir para a instabilidade destes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas técnicas; **NBR – 9622/86 Plásticos – Determinação das Propriedades Mecânicas à tração**, ABNT, São Paulo 1986

ALLEN, H. G.; BULSON, P. S. **Background to buckling**. 1. ed. Londres: McGraw-Hill (UK), 1980. 582p.

ANDERSON, J. M.; TRAHAIR, N. S. Stability of monosymmetric beams and cantilevers. **Journal of the Structural Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 98, n. ST1, p. 103-124, 1971.

ASTM – American Society for Testing Materials; **D 790 - 00 Standard Test Methods of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials**, ASTM, West Conshohocken, 2000.

ASTM – American Society for Testing Materials; **F 1697 - 96 Poly(Vinyl Chloride) (PVC) Profile Strip for Machine Spiral-Wound Liner Pipe Rehabilitation of Existing Sewers and Conduits**, ASTM, West Conshohocken, 1996.

BARSOUM, R. S.; GALLAGHER, R. H. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, n. 3, p. 335-352, 1970.

BLEICH, F. **Buckling strength of metal structures**. 1. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 508p., 1952.

BRADFORD, M. A.; CUK, P. E. Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 114, n. 5, p. 977-996, 1988.

CHAJES, A.; WINTER, G. Torsional-flexural buckling of thin-walled members. **Journal of the Structural Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 91, n. ST4, p. 103-124, 1965.

CHILVER, A. H. Average warping in the torsion of thin-walled open section beams. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Londres, v. 8, p. 267-274, 1955.

CHIN, C. K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Stability of thin-walled members having arbitrary flange shape and flexible web, **Engineering Structures**, Londres, v. 14, n. 2, p. 121-132, 1992.

DAVIDSON, J. F. The elastic stability of bent I-section beams, **Proceedings of the Royal Society of London**, V. 212A, p. 80-95, 1952

DEN HARTOG, J.P. **Advanced strength of materials**, 1. ed. Nova Iorque, McGraw-Hill, 378p., 1952.

ELLISON, M. S.; CORONA, E. Plastic collapse analysis of T-beams under bending. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 8, p. 818-825, 1998.

- GHOBARAH, A. A.; TSO, W. K. Overall and local buckling of channel columns. **Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 95, n. EM2, p. 447-462, 1969.
- GOODIER, J. N. Torsional and flexural buckling of bars of thin-walled open section under compressive and bending loads. **Journal of Applied Mechanics Transactions of the American Society of Mechanical Engineering**, v. 64, p. A103-A107, 1942.
- GRONDIN, G. Y. ELWI, A.E.; CHENG, J. J. Buckling of stiffened steel plates - a parametric study, **Journal of Constructional Steel Research**, Londres, v. 50, p. 151-175, 1999.
- GRONDIN, G. Y.; CHEN, Q.; ELWI, A.E.; CHENG, J. J. Stiffened Steel plates under compression and bending, **Journal of Constructional Steel Research**, Londres, v. 45, n. 2, p. 125-148, 1998.
- HELWIG, T. A; FRANK, K. H.; YURA, J. A. Lateral-torsional buckling of singly symmetric I-beams, **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 9, p. 1172-1179, 1997.
- KITIPORNCHAI, S.; TRAHAIR, N. Buckling properties of monosymmetric I-beams, **Journal of the Structural Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 106, n. ST5, p. 941-957, 1980.
- KITIPORNCHAI, S.; WONG-CHUNG, A. D. Inelastic buckling of welded monosymmetric I-beams, **Journal of Structural Engineering**, v. 113, n. 4, p. 740-756, 1987.
- KITIPORNCHAI, S.; WANG, C. M.; TRAHAIR, N. Buckling of monosymmetric I-beams under moment gradient, **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 4, p. 781-799, 1986.
- LANGENDONCK, T. H. de M. van. **Resistência dos Materiais - Deformações**, São Paulo, Edgard Blucher/EDUSP, 286p. , s.d.
- MOSER, A. P. **Buried pipe design**, 1.ed., New York, McGraw-Hill, 218p, 1990.
- MURRAY, N. W. Buckling of stiffened panels loaded axially and in bending, **Structural Engineer**, v. 51, n. 8, p. 285-301, 1973.
- PAPANGELIS, J. P.; TRAHAIR, N. S.; HANCOCK, G. J. Elastic flexural-torsional buckling of structures by computer, **Computers and Structures**, n. 68, p. 125-137, 1998.
- PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S. Prebuckling deflections and lateral buckling. I: Theory, **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 11, p. 2949-2966, 1992.
- PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S. Prebuckling deflections and lateral buckling. II: Applications, **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 11, p. 2967-2985, 1992.

- RENTON, J. D. A direct solution of the torsional-flexural buckling of axially loaded thin-walled bars, **Structural Engineer**, September, p. 273-276, 1960.
- ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. Influence of pre-buckling displacements on the elastic critical loads of thin walled bars of open cross section, **International Journal of Mechanical Sciences**, Londres, v. 25, n. 2, p. 93-104, 1983.
- ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. Instability of monosymmetrical I-beams, **Journal of Structural Engineering**, v. 110, n. 6, p. 1415-1419, 1984.
- ROBERTS, T. M.; BURT, C. A. Instability of monosymmetrical I-beams and cantilevers, **International Journal of Mechanical Sciences**, Londres, v. 27, n. 5, p. 313-324, 1985.
- TIMOSHENKO, S. **Strength of materials – Part II Advanced theory and problems**. 1.ed. Nova Iorque, D. van Nostrand, 334p, 1930.
- TIMOSHENKO, S.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 541p., 1961.
- TRAHAIR, N. S.; WOOLCOCK, S.T. Effect of major axis curvature on I-beam stability, **Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 99, n. EM1, p. 85-98, 1973.
- VLASOV, B. Z. **Pièces longues en voiles minces**. 2. ed. Paris, Éditions Eyrolles, 655p, 1962.
- WAGNER, H. **Torsion and buckling of open sections**, Washington: NACA, 1936. (Technical memorandum NACA - 807).
- WANG, C. M.; KITIPORNCHAI, S. Buckling capacities of monosymmetrical I-beams, **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 11, p. 2373-2391, 1986.
- WANG, C. M.; KITIPORNCHAI, S. New set of buckling parameters for monosymmetric beam-columns/tie-beams, **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 6, p. 1497-1513, 1989.
- WANG, C. M.; KITIPORNCHAI, S.; THEVEDRAN, V. Buckling of braced monosymmetric cantilevers, **International Journal of Mechanical Sciences**, Londres, v. 29, n. 5, p. 321-337, 1987.
- WANG, C. M.; KITIPORNCHAI, S.; THEVEDRAN, V. Optimal design of I-beams against lateral buckling, **Journal of Engineering Mechanics**, v. 116, n. 9, p. 1902-1923, 1990.
- YOUNG, W. C.; **Roark's formulas for Stress & Strain**, 6. ed. New York, McGraw-Hill, 763p, 1989



## APÊNDICE 1

```

{Programa para calculo de propriedades geometricas e}
{momentos criticos segundo a formulacao apresentada }
{no capitulo 3 - Modelo de flambagem lateral de     }
{vigas. As dimensoes do perfil sao tomadas como na }
{figura 3.10                                         }
program momento_critico;
uses crt;
var
  E,G,poisson,          {propriedades do material}
  b1,b2,h,
  t1,t2,th,L,          {dimensoes da secao transversal}
  h1,h2,
  Iw,Iy,Ix,Jt,
  ys,
  betax,                {grandezas calculadas}
  M1, M2                :real;

  arq_prop,
  arq_sai                :text;
  nome_arq,
  nome_arq_sai           :string[12];
  resposta               : char;
  continua               : boolean;

procedure cota_do_CG (var h1 : real; var h2 : real; b1, b2, h, t1, t2,
th : real);
{procedimento para calculo das cotas do centro geometrico conforme}
{a formulacao apresentada no capitulo 3                             }
var
  termo1, termo2 : real;
begin
  termo1 := b1*t1 + 0.5*h*th;
  termo1 := h * termo1;
  termo2 := b1*t1 + b2*t2 + h*th;
  h2 := termo1/termo2;
  h1 := h - h2;
end;

procedure calc_mom_inercia (var Jt : real; var Ix :real; var Iy :
real; h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th : real);
{calculo dos momentos de inercia                                     }
var
  termo1, termo2, termo3 : real;

begin
  termo1 := b1 * t1 * sqr (h1);
  termo2 := b2 * t2 * sqr (h2);
  termo3 := (1/12)*sqr(h) + sqr (0.5*(h1-h2));
  termo3 := th * h * termo3;
  Ix := termo1+termo2+termo3;
  termo1 := (1/12) * t1 * (b1*b1*b1);
  termo2 := (1/12) * t2 * (b2*b2*b2);
  Iy := termo1 + termo2;
  termo1 := (1/3) * b1 * (t1*t1*t1);
  termo2 := (1/3) * b2 * (t2*t2*t2);
  termo3 := (1/3) * h * (th*th*th);
  Jt := termo1 + termo2 + termo3;
end;

Procedure posic_centro_cis (var ys : real; Iy, h, h2, t1, b1 : real);

```

```

{Determinacao da posicao ys do centro de cisalhamento      }
var termol : real;

begin
  termol := (1/12)*(b1*b1*b1);
  termol := ((h*t1)/Iy)*termol;
  ys := termol - h2;
end;

Procedure calc_betax (var betax: real; Ix, b1, h1, b2, h2, th, ys :
real);
{Determinacao do parametro betax                          }
var termol, termo2, termo3 : real;

begin
  termol := 0.25 * th * (h1*h1*h1*h1 - h2*h2*h2*h2);
  termol := termol + (b1 * t1 * h1 * h1 * h1);
  termol := termol - (b2 * t2 * h2 * h2 * h2);
  termo2 := (1/12) * (h1 * t1 * b1 * b1 * b1);
  termo2 := termo2 - (1/12) * (h2 * t2 * b2 * b2 * b2);
  termo3 := termol + termo2;
  betax := (1/Ix)*termo3 - 2*ys;
end;

Procedure calc_Iw (var Iw : real; b1, t1, b2, t2, h : real);
{Determinacao da inercia ao empenamento                  }
var termol, termo2 : real;
begin
  termol := (1/12) * (b1*b1*b1*t1);
  termo2 := (1/12) * (b2*b2*b2*t2);
  Iw := ((termol*termo2)/(termol+termo2))*sqr(h);
end;

Procedure calc_momentos (var M1:real; var M2: real ; betax, Iw, Iy,
Jt, L, E, G : real);
{Determinacao dos momentos criticos de flambagem eq. 3.60  }
var cfi, cy,
  termol, termo2 : real;
begin
  cfi := E * Iw * sqr (pi/L);
  cy := E * Iy * sqr (pi/L);
  termol := 0.5 * betax;
  termo2 := (cfi + G * Jt)/cy;
  M1 := cy * (-termol + sqrt (sqr(termol) + termo2));
  M2 := cy * (-termol - sqrt (sqr(termol) + termo2));
end;

{Programa principal                                      }
Begin
  continua := true;
  repeat
    clrscr;
    writeln ('Entre o nome do arquivo de propriedades');
    readln (nome_arq);
    nome_arq:=nome_arq + '.txt';
    assign (arq_prop,nome_arq);
    reset (arq_prop);
    readln (arq_prop, E);
    readln (arq_prop, G);
    readln (arq_prop, poisson);
    readln (arq_prop, L);
  until continua = false;
end;

```

```

readln (arq_prop, b1);
readln (arq_prop, t1);
readln (arq_prop, b2);
readln (arq_prop, t2);
readln (arq_prop, h);
readln (arq_prop, th);
close (arq_prop);
cota_do_CG (h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th);
calc_mom_inercia (Jt, Ix, Iy, h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th);
posic_centro_cis (ys, Iy, h, h2, t1, b1);
calc_betax (betax, Ix, b1, h1, b2, h2, th, ys);
calc_Iw (Iw, b1, t1, b2, t2, h);
calc_momentos (M1, M2, betax, Iw, Iy, Jt, L, E, G);
writeln ('entre o nome do arquivo de saida');
readln (nome_arq_sai);
nome_arq_sai := nome_arq_sai + '.txt';
assign (arq_sai, nome_arq_sai);
rewrite (arq_sai);
writeln (arq_sai, 'Dados da secao');
writeln (arq_sai, 'b1 = ', b1, ' t1 = ', t1);
writeln (arq_sai, 'b2 = ', b2, ' t2 = ', t2);
writeln (arq_sai, 'h = ', h, ' th = ', th);
writeln (arq_sai);
writeln (arq_sai, 'Resultados calculados');
writeln (arq_sai, 'h1 = ', h1, ' h2 = ', h2);
writeln (arq_sai, 'ys = ', ys);
writeln (arq_sai, 'Ix = ', Ix);
writeln (arq_sai, 'Iy = ', Iy);
writeln (arq_sai, 'Jt = ', Jt);
writeln (arq_sai, 'Iw = ', Iw);
writeln (arq_sai, 'betax = ', betax);
writeln (arq_sai, 'M1 = ', M1);
writeln (arq_sai, 'M2 = ', M2);
close (arq_sai);
writeln ('continua? S/N');
readln (resposta);
if (resposta = 'n') or (resposta = 'N')
    then continua := false
    else continua := true;
until continua = false;
end.

```

```

{Programa para cálculos dos 3 critérios propostos no capítulo 5 }
{a partir das formulações dos capítulos 3 e 4. }
{Os dados de entrada seguem o padrão apresentado na figura 3.10 }

```

```

program critérios;

```

```

uses crt;

```

```

var

```

```

    E,G,poisson,           {propriedades do material}
    b1,b2,h,
    t1,t2,th,L,           {dimensoes da secao transversal}
    h1,h2,
    Iw,Iy,Ix,Jt,IM,
    area,areal,area2,
    ys,
    betax,
    M1, M2,Men,
    Den,Nc,
    epsilon                :real;
    n_rolos                :integer;

    arq_prop,
    arq_sai                 :text;
    nome_arq,
    nome_arq_sai           :string[12];
    resposta               : char;
    continua               : boolean;

```

```

procedure cota_do_CG (var h1 : real; var h2 : real; b1, b2, h, t1, t2,
th : real);

```

```

{procedimento para calculo das cotas do centro geometrico conforme a
formulação }

```

```

{apresentada no capítulo 3
}

```

```

}

```

```

var

```

```

    termo1, termo2 : real;

```

```

begin

```

```

    termo1 := b1*t1 + 0.5*h*th;
    termo1 := h * termo1;
    termo2 := b1*t1 + b2*t2 + h*th;
    h2 := termo1/termo2;
    h1 := h - h2;

```

```

end;

```

```

procedure calc_area (var area:real; var areal : real; var area2 :
real; b1,b2,h,t1,t2,th :real);

```

```

begin

```

```

    areal:=b1 * t1;
    area2:=b2 * t2;
    area := areal + area2 + th * h;

```

```

end;

```

```

procedure calc_mom_inercia (var Jt : real; var Ix :real; var Iy :
real; h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th : real);

```

```

{calculo dos momentos de inercia
}

```

```

var

```

```

    termo1, termo2, termo3 : real;

```

```

begin

```

```

    termo1 := b1 * t1 * sqr (h1);

```

```

termo2 := b2 * t2 * sqr (h2);
termo3 := (1/12)*sqr(h) + sqr (0.5*(h1-h2));
termo3 := th * h * termo3;
Ix := termol+termo2+termo3;
termol := (1/12) * t1 * (b1*b1*b1);
termo2 := (1/12) * t2 * (b2*b2*b2);
Iy := termol + termo2;
termol := (1/3) * b1 * (t1*t1*t1);
termo2 := (1/3) * b2 * (t2*t2*t2);
termo3 := (1/3) * h * (th*th*th);
Jt := termol + termo2 + termo3;
end;

Procedure posic_centro_cis (var ys : real; Iy, h, h2, t1, b1 : real);

var termol : real;

begin
  termol := (1/12)*(b1*b1*b1);
  termol := ((h*t1)/Iy)*termol;
  ys := termol - h2;
end;

Procedure calc_betax (var betax: real; Ix, b1, h1, b2, h2, th, ys :
real);
var termol, termo2, termo3 : real;

begin
  termol := 0.25 * th * (h1*h1*h1*h1 - h2*h2*h2*h2);
  termol := termol + (b1 * t1 * h1 * h1 * h1);
  termol := termol - (b2 * t2 * h2 * h2 * h2);
  termo2 := (1/12) * (h1 * t1 * b1 * b1 * b1);
  termo2 := termo2 - (1/12) * (h2 * t2 * b2 * b2 * b2);
  termo3 := termol + termo2;
  betax := (1/Ix)*termo3 - 2*ys;
end;

Procedure calc_Iw (var Iw : real; b1, t1, b2, t2, h : real);
var termol, termo2 : real;
begin
  termol := (1/12) * (b1*b1*b1*t1);
  termo2 := (1/12) * (b2*b2*b2*t2);
  Iw := ((termol*termo2)/(termol+termo2))*sqr(h);
end;

procedure momen_enrol (var me : real; E, Den, h2, Ix: real);
begin
  me := 2 * E * Ix * (1/(Den+2*h2) - 1/(1500+2*h2));
end;

Procedure calc_IM (var IM : real; b1, t1, b2, t2 :real);
var termol, termo2 : real;
begin
  termol:= t2*b2*b2*b2;
  termo2:= t1*b1*b1*b1;
  IM := termol/(termol+termo2);
end;

Procedure calc_momentos (var M1:real; var M2: real ; betax, Iw, Iy,
Jt, L, E, G : real);
var cfi, cy,

```

```

    termo1, termo2 : real;
begin
    cfi := E * Iw * sqr (pi/L);
    cy := E * Iy * sqr (pi/L);
    termo1 := 0.5 * betax;
    termo2 := (cfi + G * Jt)/cy;
    M1 := cy * (-termo1 + sqrt (sqr(termo1) + termo2));
    M2 := cy * (-termo1 - sqrt (sqr(termo1) + termo2));
end;
Procedure Calc_Ncritico (Var Nc : real; Den, E, h, b1,t1,h1, h2,th,
poisson : real);

var
    termo1, termo2, termo3 :real;
begin
    termo1 := sqr(pi)/16;
    termo2 := th*th*th/(12*(1-sqr(poisson)));
    termo3 := (Den + 2*h) * (Den + 2*h2)/ (b1*t1*h1*sqr(h));
    Nc := termo1*termo2*termo3;
end;

Begin
continua := true;
repeat
    clrscr;
    writeln ('Entre o nome do arquivo de propriedades');
    readln (nome_arq);
    nome_arq:=nome_arq + '.txt';
    assign (arq_prop,nome_arq);
    reset (arq_prop);
    readln (arq_prop, E);
    readln (arq_prop, G);
    readln (arq_prop, poisson);
    readln (arq_prop, Den);
    readln (arq_prop, b1);
    readln (arq_prop, t1);
    readln (arq_prop, b2);
    readln (arq_prop, t2);
    readln (arq_prop, h);
    readln (arq_prop, th);
    close (arq_prop);
    clrscr;
    writeln ('Entre o difmetro de enrolamento do tubo');
    readln (Den);
    cota_do_CG (h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th);
    calc_mom_inercia (Jt,Ix,Iy, h1, h2, b1, b2, h, t1, t2, th);
    posic_centro_cis (ys,Iy,h,h2,t1,b1);
    calc_betax (betax,Ix, b1, h1, b2, h2, th, ys);
    calc_Iw (Iw, b1, t1, b2, t2, h);
    { calc_momentos (M1, M2, betax, Iw, Iy, Jt, L, E, G);}
    calc_area (area, area1, area2, b1,b2,h,t1,t2,th);
    calc_IM (IM , b1, t1, b2, t2);
    momen_enrol ( Men, E, Den, h2, Ix);
    writeln ('entre o nome do arquivo de saida');
    readln (nome_arq_sai);
    nome_arq_sai := nome_arq_sai + '.txt';
    assign (arq_sai,nome_arq_sai);
    rewrite (arq_sai);
    writeln (arq_sai,'Dados da secao');
    writeln (arq_sai,'b1 = ',b1,' t1 = ',t1);
    writeln (arq_sai,'b2 = ',b2,' t2 = ',t2);

```

```

writeln (arq_sai,'h = ',h,' th = ',th);
writeln (arq_sai,'Den = ', Den);
writeln (arq_sai);
writeln (arq_sai,'Resultados calculados');
writeln (arq_sai,'h1 = ',h1,' h2 = ',h2);
writeln (arq_sai,'Area = ',area);
writeln (arq_sai,'areal = ',areal,' area2 = ',area2);
writeln (arq_sai,'ys = ', ys);
writeln (arq_sai,'Ix = ', Ix);
writeln (arq_sai,'Iy = ', Iy);
writeln (arq_sai,'Jt = ', Jt);
writeln (arq_sai,'Iw = ',Iw);
writeln (arq_sai,'betax = ',betax);
writeln (arq_sai,'IM = ',IM);
writeln (arq_sai,'Men = ',Men);
calc_momentos (M1, M2, betax, Iw, Iy, Jt, L, E, G);
writeln (arq_sai,'Mc = ', -1*M2,' Critério 1 Mc/Men = ', -
1*M2/Men,);
Calc_Ncritico (Nc, Den, E, h, b1,t1,h1, h2,th, poisson);
writeln (arq_sai,'Critério 2 Nc/N = ', Nc);
epsilon := 2*h1* (1/(Den+2*h2) - 1/(1500+2*h2));
writeln (arq_sai,'Critério 3 eps = ',epsilon*100);
close (arq_sai);
writeln ('continua? S/N');
readln (resposta);
if (resposta = 'n') or (resposta = 'N')
  then continua := false
  else continua := true;
until continua = false;
end.

```

□



## **APÊNDICE 2**

```

{Programa para geracao de arquivos de entrada para o programa de}
{elementos finitos ANSYS 5.3 usando as informacoes de geometria }
{de uma secao mono-simetrica como a apresentada na figura 3.10 }
{Este prgrama gera um arquivo com comandos do ANSYS5.3 para a }
{geracao do modelo e execucao da solucao. Ha um comando para }
{direcionamento da saida do ANSYS para um arquivo especificado }
{cujo conteudo sao as cargas critica dos cinco primeiros modos }
{de flambagem }

```

```

program gerador_de_modelos;

```

```

uses crt;

```

```

var

```

```

    E,G,poisson,           {propriedades do material}
    b1,b2,h,
    t1,t2,th,L,           {dimensoes da secao transversal}
    h1,h2,
    Iw,Iy,Ix,Jt,
    ys,
    betax,
    M1, M2                 :real;
    ndiv                   :integer;
    arq_prop,
    arq_sai                 :text;
    nome_arq,
    nome_arq_sai,
    nome_saida_ansys       :string[12];
    resposta               : char;
    continua               : boolean;

```

```

procedure trata_divisao (var ndiv: integer);

```

```

begin

```

```

    if ndiv = 0
    then ndiv:= 1
    else ndiv:=ndiv div 2;

```

```

end;

```

```

Begin

```

```

    continua := true;
    repeat
        clrscr;

```

```

{Leitura do arquivo com os dados de entrada }

```

```

    writeln ('Entre o nome do arquivo de propriedades');
    readln (nome_arq);
    nome_arq:=nome_arq + '.txt';
    assign (arq_prop,nome_arq);
    reset (arq_prop);
    readln (arq_prop, E);
    readln (arq_prop, G);
    readln (arq_prop, poisson);
    readln (arq_prop, L);
    readln (arq_prop, b1);
    readln (arq_prop, t1);
    readln (arq_prop, b2);
    readln (arq_prop, t2);
    readln (arq_prop, h);
    readln (arq_prop, th);
    close (arq_prop);

```

```
{Preparacao do arquivo de comandos para      }
{ANSYS 5.3                                   }
```

```
writeln ('entre o nome do arquivo de saida');
readln (nome_arq_sai);
nome_arq_sai := nome_arq_sai + '.txt';
assign (arq_sai,nome_arq_sai);
rewrite (arq_sai);
writeln (arq_sai,'/BATCH');
writeln (arq_sai,'/PREP7');
writeln (arq_sai,'MP,EX,1,',E);
writeln (arq_sai,'MP,NUXY,1,',poisson);
writeln (arq_sai,'MP,GXY,1,',G);
clrscr;
writeln ('Escolha o tipo de elemento');
writeln ('1 - Shell 63 (4 nos)');
writeln ('2 - Shell 93 (8 nos)');
readln (resposta);
if resposta = '1'
  then writeln (arq_sai, 'ET,1,Shell63')
  else if resposta = '2'
    then writeln (arq_sai, 'ET,1,shell93')
    else writeln ('opcao inv lida');
writeln(arq_sai,'R,1,',t1);
writeln (arq_sai,'R,2,',t2);
writeln (arq_sai,'R,3,',th);
writeln (arq_sai,'K,1,',-1*b2/2,',0,0');
writeln (arq_sai,'K,2,0,0,0');
writeln (arq_sai,'K,3,',b2/2,',0,0');
writeln (arq_sai,'K,4,0,',h/2,',0');
writeln (arq_sai,'K,5,',-1*b1/2,',',h,',0');
writeln (arq_sai,'K,6,0,',h,',0');
writeln (arq_sai,'K,7,',b1/2,',',h,',0');
writeln (arq_sai,'K,8,',-1*b2/2,',',0,',',L);
writeln (arq_sai,'K,9,0,0,',L);
writeln (arq_sai,'K,10,',b2/2,',',0,',',L);
writeln (arq_sai,'K,11,0,',h/2,',',L);
writeln (arq_sai,'K,12,',-1*b1/2,',',h,',',L);
writeln (arq_sai,'K,13,0,',h,',',L);
writeln (arq_sai,'K,14,',b1/2,',',h,',',L);
writeln (arq_sai,'L,1,8');
writeln (arq_sai,'L,2,9');
writeln (arq_sai,'L,3,10');
writeln (arq_sai,'L,4,11');
writeln (arq_sai,'L,5,12');
writeln (arq_sai,'L,6,13');
writeln (arq_sai,'L,7,14');
writeln (arq_sai,'L,1,2');
writeln (arq_sai,'L,2,3');
writeln (arq_sai,'L,2,4');
writeln (arq_sai,'L,4,6');
writeln (arq_sai,'L,5,6');
writeln (arq_sai,'L,6,7');
writeln (arq_sai,'L,8,9');
writeln (arq_sai,'L,9,10');
writeln (arq_sai,'L,9,11');
writeln (arq_sai,'L,11,13');
writeln (arq_sai,'L,12,13');
writeln (arq_sai,'L,13,14');
clrscr;
Writeln ('Entre o nmero de divisões no comprimento');
```

```

readln (ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,1,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,2,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,3,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,4,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,5,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,6,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,7,,, ', ndiv);
Writeln ('Entre o número de divisões na altura');
readln (ndiv);
trata_divisao (ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,10,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,11,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,16,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,17,,, ', ndiv);
Writeln ('Entre o número de divisões no flange superior (b1)');
readln (ndiv);
trata_divisao (ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,12,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,13,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,18,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,19,,, ', ndiv);
Writeln ('Entre o número de divisões no flange inferior (b2)');
readln (ndiv);
trata_divisao (ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,8,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,9,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,14,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'LESIZE,15,,, ', ndiv);
writeln (arq_sai, 'AL,1,14,2,8');
writeln (arq_sai, 'AL,2,15,3,9');
writeln (arq_sai, 'AL,4,16,2,10');
writeln (arq_sai, 'AL,6,17,4,11');
writeln (arq_sai, 'AL,5,18,6,12');
writeln (arq_sai, 'AL,6,19,7,13');
writeln (arq_sai, 'ESHAPE,2');
writeln (arq_sai, 'ESIZE,5');
writeln (arq_sai, 'REAL,2');
writeln (arq_sai, 'AMESH,1,2');
writeln (arq_sai, 'REAL,3');
writeln (arq_sai, 'AMESH,3,4');
writeln (arq_sai, 'REAL,1');
writeln (arq_sai, 'AMESH,5,6');
writeln (arq_sai, 'NSEL,S,LOC,Z,0');
writeln (arq_sai, 'D,ALL,UX');
writeln (arq_sai, 'NSEL,S,LOC,Z, ', L);
writeln (arq_sai, 'D,ALL,UX');
writeln (arq_sai, 'NSEL,All');
writeln (arq_sai, 'DK,4,UX,,,0,UY,UZ');
writeln (arq_sai, 'DK,11,UX,,,0,UY');
writeln (arq_sai, 'FK,4,MX,-1');
writeln (arq_sai, 'FK,11,MX,1');
writeln (arq_sai, 'SAVE');
writeln (arq_sai, 'FINI');
writeln (arq_sai, '/SOLU');
writeln (arq_sai, 'ANTYPE,STATIC');
writeln (arq_sai, 'PSTRES,ON');
writeln (arq_sai, 'SOLVE');
writeln (arq_sai, 'FINI');
writeln (arq_sai, '/SOLU');
writeln (arq_sai, 'ANTYPE,BUCKLE');

```

```

writeln (arq_sai, 'BUCOPT, SUBSP, 10');
writeln (arq_sai, 'MXPAND, 5');
writeln (arq_sai, 'SAVE');
writeln (arq_sai, 'SOLVE');
writeln (arq_sai, 'FINI');
writeln (arq_sai, '/POST1');
clrscr;
writeln ('Entre o nome do arquivo de saida dos resultados do
ANSYS');
readln (nome_saida_ansys);
writeln (arq_sai, '/OUTPUT, ', nome_saida_ansys, ', TXT');
writeln (arq_sai, 'SET, LIST');
writeln (arq_sai, '/OUTPUT');
writeln (arq_sai, 'FINI');
writeln (arq_sai, '/EXIT, NOSA');
close (arq_sai);
writeln ('continua? S/N');
readln (resposta);
if (resposta = 'n') or (resposta = 'N')
  then continua := false
  else continua := true;
until continua = false;
end.

```

=

### **APÊNDICE 3**

### A.3 - Determinação de propriedades do material

O material dos perfis nervurados é o PVC (Poli-cloreto de vinila). Este polímero pode ser encontrado em várias formas, desde as flexíveis, empregadas na fabricação de mangueiras, até o PVC rígido usado em tubos para condução de água em tubulações prediais. Estas diferentes classes apresentam propriedades mecânicas distintas, que são função da quantidade dos compostos agregados a fabricação do PVC, ao método de obtenção do produto final (extrusão, injeção), condições de polimerização, entre outros fatores. Desta forma, as propriedades mecânicas foram obtidas de maneira experimental, bem como foi feita uma avaliação do comportamento mecânico deste material.

Conforme verificado nos estudos teóricos, o conhecimento do módulo de elasticidade,  $E$ , é fundamental na modelagem do tubo estruturado. O mesmo pode ser considerado para a máxima deformação.

A determinação do módulo foi feita segundo procedimento baseado na norma ASTM D790. Neste caso, foram medidas as propriedades do material em flexão, que podem diferir das medidas no ensaio de tração.

Assim, foi montado um experimento, onde o perfil é ensaiado na condição bi-apoiada, com carga central, tal como apresentado na figura A.3.1. A tabela A.3.1 apresenta as dimensões do perfil testado. A figura A.3.2 apresenta a seção transversal de um reforçador.

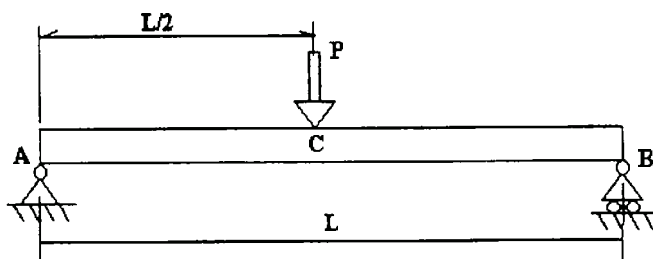


Figura A.3.1 Modelo da estrutura ensaiada

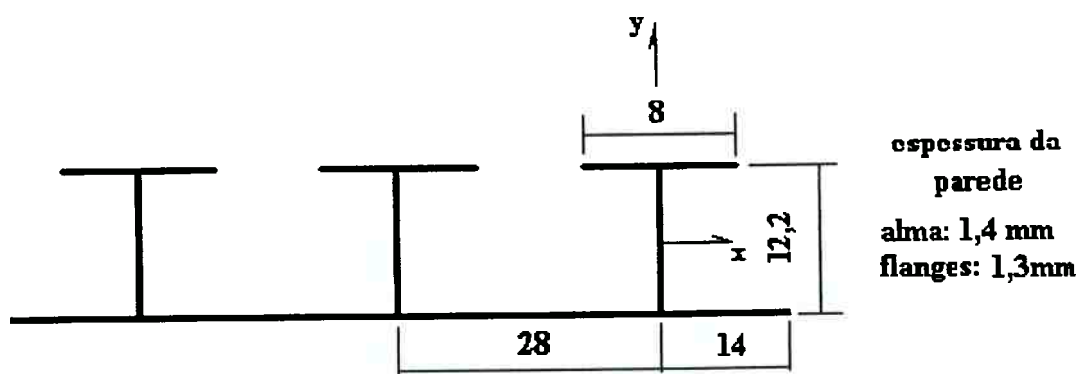


Figura A.3.2 Seção transversal do perfil

A tabela A.3.1 apresenta as propriedades geométricas do perfil apresentado na figura A.3.2.

Tabela A.3.1 Propriedades geométricas do reforçador e perfil

Propriedade	Valor
$I_x$ (mm <sup>4</sup> ) - Reforçador	1560
$I_y$ (mm <sup>4</sup> ) - Reforçador	2434
$h_1$ (mm) - Reforçador	8,58
$I_x$ (mm <sup>4</sup> ) - Perfil	4680

O ensaio consiste em medir o deslocamento vertical do ponto de "C" de aplicação da carga e o valor desta. Adotando um modelo de viga bi-apoiada é possível escrever o deslocamento vertical em função da carga:

$$y = \frac{P \cdot L^3}{48EI_x} \quad \text{A.3.1}$$

O corpo de prova foi composto por um perfil com três reforçadores como o da figura A.3.2. O comprimento L, entre apoios, foi tomado como sendo igual a 240mm. A tabela A.3.1 apresenta os resultados medidos em três situações diferentes. Na primeira condição o material é carregado lentamente (1mm/min.). Na segunda condição há um aumento significativo na velocidade de carregamento. A terceira condição retorna ao carregamento lento, entretanto a posição das nervuras é a oposta daquela apresentada na



figura A.3.2. O objetivo neste caso é submeter partes da estrutura a deformações maiores para o mesmos deslocamentos e cargas.

Os testes foram realizados até que uma flecha equivalente a 10mm fosse medida no meio do vão. Na figura A.3.3 estão apresentados os dados da tabela A.3.2.

Tabela A.3.2 Resultados do ensaio de flexão

	Deslocamento (mm)	0	2	4	6	8	10
Condição 1	Força (N)	0,0	33,2	70,5	107	144	178
Condição 2	Força (N)	0,0	30,8	67,8	108	149	189
Condição 3	Força (N)	0,0	30,4	68,0	105	143	179

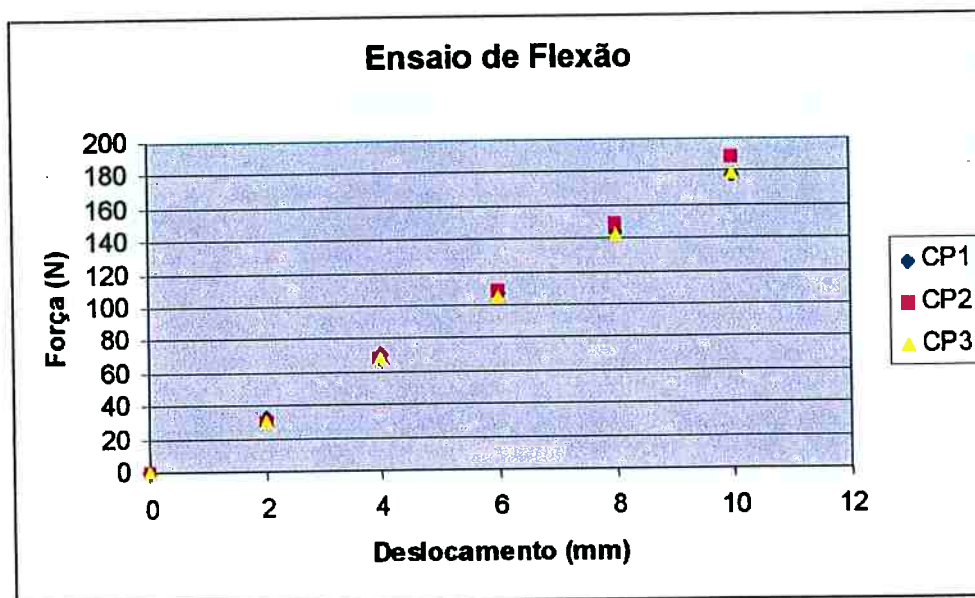


Figura A.3.3 Resultados do ensaio de flexão

A partir dos resultados da tabela A.3.2 e da expressão A.3.1 é possível determinar o valor médio do módulo de elasticidade,  $E$ , do PVC empregado na fabricação dos perfis nervurados. Assim, determinou-se  $E = 1134$  MPa.

Ainda no âmbito da determinação das propriedades do material foi realizado ensaio de tração visando determinar não só o módulo de elasticidade como também a máxima deformação até o término do regime elástico. Este ensaio foi realizado nos

laboratórios do Departamento de Construção Civil da Escola Politécnica da USP. Na realização do ensaio foi adotada a norma NBR 9622.

O resultado deste ensaio é apresentado na figura A.3.4.

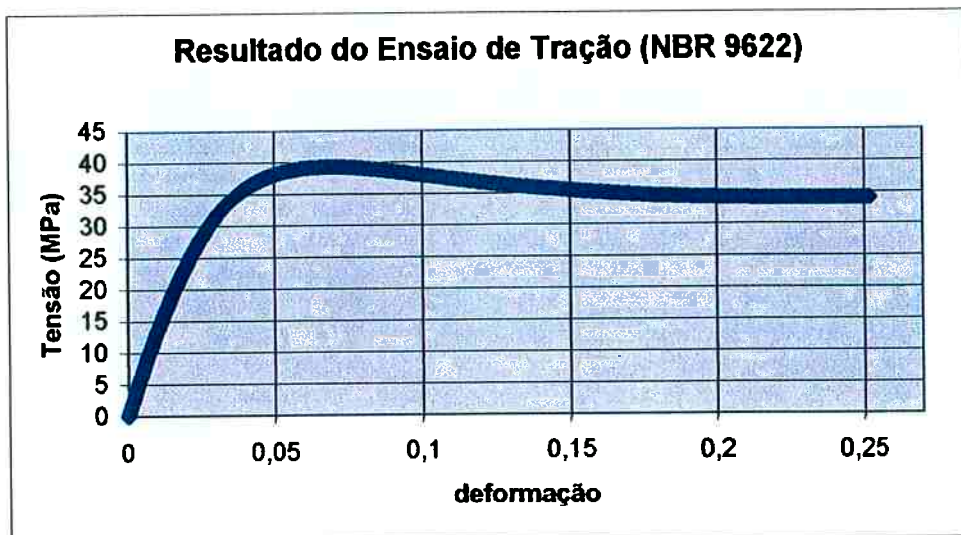


Figura A.3.4. – Resultado do ensaio de tração

De acordo com o ensaio de tração, a máxima deformação em que se pode admitir um comportamento elástico linear para o material equivale a 4,5%.

Outras propriedades tais como o módulo de cisalhamento,  $G$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , não foram obtidos a partir dos ensaios experimentais. O valor do coeficiente de Poisson foi obtido de literatura.

Para o módulo de cisalhamento foi adotada a hipótese da teoria da elasticidade:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \text{A.3.2}$$

Assim, os valores das propriedades dos materiais são considerados como sendo:

$E = 1100 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de elasticidade)
$\nu = 0,3$	(Coeficiente de Poisson)
$G = 423 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de cisalhamento)