

MARCELO MASSARANI

**USO DE REDES NEURAS ARTIFICIAIS PARA REPRESENTAR  
O COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE MATERIAIS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para a  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia.

São Paulo  
1997

MARCELO MASSARANI

**USO DE REDES NEURAIAS ARTIFICIAIS PARA REPRESENTAR  
O COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE MATERIAIS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para a  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica.

Orientador:  
Ronaldo de Breyne Salvagni.

São Paulo  
1997

Ao meu pai  
(em memória)

À Lucélia

## *Agradecimentos*

Ao Prof. Dr. Ronaldo de Breyne Salvani pela orientação e estímulo.

Aos docentes e estagiários do CAETEC - Centro de Automação e Tecnologia de Projeto pela colaboração na realização deste trabalho.

## *Sumário*

1. Introdução .....	1
1.1 A necessidade de modelos de materiais.....	1
1.2 Materiais com comportamento viscoelástico .....	2
1.3 A proposta .....	5
1.4 O desenvolvimento do trabalho.....	7
2. Viscoelasticidade .....	9
2.1 Introdução.....	9
2.2 Equações constitutivas .....	10
2.3 Comportamento viscoelástico linear.....	11
2.3.1 Fluência.....	11
2.3.2 Relaxação .....	13
2.3.3 Representação integral.....	14
2.3.4 Representação diferencial.....	16
2.4 Comportamento viscoelástico não linear.....	23
2.4.1 Generalidades.....	23
2.4.2 Abordagem do engenheiro .....	23
3. Redes Neurais Artificiais - RNA's.....	26
3.1 Introdução.....	26
3.2 Conceitos Básicos .....	29
3.2.1 Imitação de sistemas biológicos .....	29
3.2.2 O neurônio artificial.....	31
3.2.3 Redes neurais artificiais.....	33
3.2.4 Treinamento.....	35
3.3 Tipos de RNA's.....	36
3.4 História das RNA's .....	39
3.5 Retro-propagação de erros ("backpropagation").....	40
4. Revisão Bibliográfica .....	46
4.1 Introdução.....	46
4.2 Viscoelasticidade não linear - equações constitutivas.....	46
4.3 Textos introdutórios às RNA's.....	49
4.4 RNA's para modelar o comportamento de materiais .....	49
4.5 RNA's como aproximadores .....	54
4.6 Síntese de RNA's .....	56
4.7 Aplicações de RNA's.....	58
4.8 Conclusões da pesquisa bibliográfica .....	61
4.8.1 Modelos constitutivos de materiais com comportamento viscoelástico .....	61
4.8.2 Uso de RNA's como modelos constitutivos de materiais .....	61
4.8.3 Dificuldades no uso de RNA's.....	61
5. RNA's como Modelos de Materiais Viscoelásticos.....	63
5.1 Uma alternativa para desenvolver modelos de materiais .....	63
5.2 A adequação do uso de RNA's .....	65
5.2.1 Forma de tratar o conhecimento.....	66
5.2.2 Definição da arquitetura das RNA's.....	66
5.2.3 O conjunto de dados necessários para treinar RNA's.....	66
5.2.4 O funcionamento das RNA's deve ser esclarecido.....	67
5.3 O comportamento viscoelástico.....	68
6. Exemplo 1- Curvas isócronas tensão-deformação.....	69
6.1 Introdução.....	69

6.2 O paradigma Cascor: “cascade-correlation learning architecture” .....	69
6.3 O material: polietileno.....	74
6.4 Treinamento da RNA .....	77
6.5 Exemplo: deformação de uma treliça.....	79
6.6 Implantação em um programa de elementos finitos.....	80
6.6.1 Análise de fluência.....	80
6.6.2 O método de integração de tensões.....	81
6.6.3 Algoritmo para elementos de treliça .....	82
6.6.4 Exemplo: deformação de uma treliça .....	83
7. Exemplo 2 - Curvas isócronas tensão-deformação a partir de dados com ruídos.....	84
7.1 Introdução.....	84
7.2 Dados do material.....	84
7.3 Resultados da RNA .....	86
8. Exemplo 3 - Fluência e recuperação .....	94
8.1 Introdução.....	94
8.2 RNA's recorrentes .....	94
8.3 O material.....	96
8.4 Carregamentos.....	98
8.5 Resultados da RNA .....	100
9. Exemplo 4 - História de carregamentos complexa.....	113
9.1 Introdução.....	113
9.2 O material e o carregamento.....	113
9.3 Resultados da RNA .....	115
10. Conclusões e trabalhos futuros .....	128
10.1 Dificuldades observadas.....	128
10.2 Vantagens observadas em relação aos modelos constitutivos analíticos.....	129
10.3 Balanço: vantagens x dificuldades .....	130
10.4 Passos seguintes .....	131
10.5 Sugestões para trabalhos futuros.....	131
11. Bibliografia.....	134

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Fluência sob tensão constante.....	4
Figura 1.2 - Fluência e recuperação.....	4
Figura 1.3 - Padrão complexo de carregamentos.....	5
Figura 2.1 - Curva de fluência.....	12
Figura 2.2 - Componentes da deformação.....	12
Figura 2.3 - Curva de relaxação.....	13
Figura 2.4 - Fluência de um sólido viscoelástico linear.....	14
Figura 2.5 - Carregamento em duas etapas.....	15
Figura 2.6 - Carregamento e descarregamento.....	16
Figura 2.7 - Mola.....	17
Figura 2.8 - Amortecedor.....	18
Figura 2.9 - Modelo de Maxwell.....	18
Figura 2.10 - Modelo de Kelvin.....	20
Figura 2.11 - Modelo de material viscoelástico.....	22
Figura 2.12 - Elementos de Maxwell em paralelo.....	22
Figura 2.13 - Elementos de Kelvin em série.....	22
Figura 2.14 - Curvas isócronas tensão-deformação.....	24
Figura 3.1 - Mapeamento de vetores.....	28
Figura 3.2 - O neurônio.....	30
Figura 3.3 - Neurônio artificial.....	32
Figura 3.4 - Função limite lógico.....	32
Figura 3.5 - Função <i>hard limit</i> .....	32
Figura 3.6 - Função contínua Sigmoid.....	32
Figura 3.7 - Função <i>base radial</i> .....	33
Figura 3.8 - Função <i>linear</i> .....	33
Figura 3.9 - Rede multi-camadas para frente.....	34
Figura 3.10 - Rede camada-única lateralmente conectada.....	34
Figura 3.11 - Rede duas camadas para trás e para frente.....	35
Figura 3.12 - Rede multi-camadas cooperativa/competitiva.....	35
Figura 3.13 - RNA do tipo retro-propagação de erros com uma camada oculta.....	41
Figura 3.14 - RNA do tipo retro-propagação de erros com duas camadas ocultas.....	45
Figura 6.1 - Cascor sem camada oculta.....	71
Figura 6.2 - Cascor com neurônio candidato Z1.....	72
Figura 6.3 - Cascor com um neurônio na camada oculta.....	72
Figura 6.4 - Cascor com novo neurônio candidato Z2.....	72
Figura 6.5 - Cascor com neurônio candidato Z2 conectado à camada de saída.....	73
Figura 6.6 - Cascor resultante.....	73
Figura 6.7 - Curvas de fluência do polietileno duro a 20°C.....	75
Figura 6.8 - Curvas de fluência do polietileno duro a 20°C em escala logarítmica.....	76
Figura 6.9 - Erro x número de neurônios.....	78
Figura 6.10 - Treliça viscoelástica sob carregamento estático.....	79
Figura 7.1 - Dados de ensaio de fluência do polietileno.....	85
Figura 7.2 - Erro x número de neurônios ocultos.....	87

Figura 7.3 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 75 psi.....	88
Figura 7.4 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 150 psi.....	89
Figura 7.5 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 225 psi.....	90
Figura 7.6 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 300 psi.....	91
Figura 7.7 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 10 %.....	92
Figura 7.8 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 5 %.....	93
Figura 7.9 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 2 %.....	93
Figura 8.1 - RNA recorrente simples.....	95
Figura 8.2 - Caso 18: tensão x tempo. ....	99
Figura 8.3 - Caso 18: deformação x tempo.....	99
Figura 8.4 - Caso 21: tensão x tempo. ....	99
Figura 8.5 - Caso 21: deformação x tempo.....	100
Figura 8.6 - Erro x número de épocas.....	101
Figura 8.7 - Caso de teste 1: tensão de 13 MPa.....	102
Figura 8.8 - Caso de teste 2: tensão de 11 MPa descarregado a 6800 horas.....	103
Figura 8.9 - Caso de teste 3: tensão de 18 MPa descarregado a 3700 horas.....	104
Figura 8.10 - Caso de teste 4: tensão de 20 MPa descarregado a 3000 horas.....	105
Figura 8.11 - Caso de teste 5: tensão de 27 MPa descarregado a 4500 horas.....	106
Figura 8.12 - Caso de teste 6: tensão de 23 MPa. ....	107
Figura 8.13 - Caso de teste 7: tensão de 7 MPa descarregado a 2300 horas.....	108
Figura 8.14 - Caso de teste 8: tensão de 18 MPa descarregado a 8400 horas.....	109
Figura 8.15 - Caso de teste 9: tensão de 22 MPa descarregado a 3600 horas.....	110
Figura 8.16 - Caso de teste 10: tensão de 20 MPa descarregado a 7000 horas.....	111
Figura 9.1 - Exemplo de história de carregamento - tensão x tempo. ....	115
Figura 9.2 - Exemplo de história de carregamento - deformação x tempo.....	115
Figura 9.3 - Erro x número de épocas.....	116
Figura 9.4 - Caso de teste 1: 29 MPa - 4 MPa - 30 MPa.....	117
Figura 9.5 - Caso de teste 2: 18 MPa - 30 MPa. ....	118
Figura 9.6 - Caso de teste 3: 12 MPa - 0 MPa - 27 MPa.....	119
Figura 9.7 - Caso de teste 4: 22 MPa - 0 MPa - 18 MPa - 25 MPa.....	120
Figura 9.8 - Caso de teste 5: 18 MPa - 3 MPa - 0 MPa - 28 MPa.....	121
Figura 9.9 - Caso de teste 6: 10 MPa - 0 MPa. ....	122
Figura 9.10 - Caso de teste 7: 19 MPa - 18 MPa - 26 MPa - 9 MPa. ....	123
Figura 9.11 - Caso de teste 8: 9 MPa - 30 MPa - 8 MPa - 10 MPa.....	124
Figura 9.12 - Caso de teste 9: 28 MPa - 30 MPa. ....	125
Figura 9.13 - Caso de teste 10: 24 MPa - 30 MPa - 5 MPa - 16 MPa. ....	126



*Lista de Tabelas*

Tabela 3.1 - Comparativo entre computadores e neurocomputadores (68) .....	27
Tabela 3.2 - Classificação de paradigmas de RNA's por tipo de treinamento. ....	38
Tabela 6.1 - Comparação entre as deformações para 1000 horas de carregamento calculadas e as obtidas experimentalmente. ....	83
Tabela 8.1 - Casos usados para treinamento. ....	98
Tabela 9.1 - Histórias de carregamentos para treinamento - tempo em horas e tensão em MPa. ....	114

## *R e s u m o*

O comportamento viscoelástico não linear de materiais ainda é representado de forma rudimentar por modelos constitutivos analíticos. É proposto o uso de redes neurais artificiais para representar o comportamento viscoelástico de materiais sob carregamentos uniaxiais.

Alguns exemplos são desenvolvidos usando redes neurais que geram sua própria arquitetura e também redes neurais recorrentes para representar o comportamento viscoelástico de materiais. Os resultados obtidos podem ser considerados animadores.

As vantagens observadas no uso de redes neurais artificiais para representar o comportamento de materiais são as seguintes: nenhuma hipótese a respeito do comportamento do material é necessária; o comportamento do material é apreendido diretamente dos dados de ensaios; e não é necessário nenhuma aproximação numérica para usar uma rede neural artificial já treinada.

## *Abstract*

The non linear viscoelastic material behavior is poorly represented by constitutive equations. The present study proposes a neural network approach for non linear viscoelastic behavior under uniaxial loading.

Some examples were done using self-growing neural networks and recurrent neural networks modeling non linear viscoelastic behavior. The results were encouraging.

The main benefits of neural network approach are: no assumptions about the material behavior are required; the material behavior can be represented directly from experimental data; once trained no numerical approximations are required when using the neural network.

## 1. Introdução

### 1.1 A necessidade de modelos de materiais

Para projetar um produto qualquer, são necessários os requisitos de projeto e informações quanto ao comportamento do material sob condições de uso. A atividade de projeto consiste em selecionar o material e determinar a geometria para que o produto realize a função desejada.

Durante muitos anos, os engenheiros de projeto se guiaram pelas expressões baseadas na Lei de Hooke para explicar o comportamento do material com relação às tensões. Essa lei diz que as deformações são proporcionais às tensões para um material elástico. Timoshenko e outros desenvolveram uma extensa literatura baseada no comportamento elástico que tem servido de base para o projeto de estruturas e componentes feitos de metais e outros materiais que exibem um comportamento considerado linear nas condições de uso (46).

Infelizmente, a Lei de Hooke não representa adequadamente a relação tensão/deformação para materiais que apresentam comportamentos complexos, tais como: fluência, fratura frágil, microfissuras e outros. Observa-se que as aplicações desses materiais são limitadas pela falta de conhecimento de seus comportamentos, e portanto, uma forma de se aumentar o uso destes materiais é o desenvolvimento de modelos mais completos.

Os modelos de materiais são desenvolvidos da seguinte forma (33):

- o material é testado e o seu comportamento é observado;
- são feitas hipóteses para explicar o comportamento do material;
- um modelo matemático é desenvolvido a partir do conjunto de hipóteses;
- o modelo matemático é usado para prever o comportamento de casos ainda não testados e é confrontado com resultados de novos testes;

- as hipóteses e o correspondente modelo matemático são então modificados para incluir comportamentos observados mas não explicados pelo modelo original.

Este trabalho de definição de regras formais ou fórmulas é trabalhoso e demorado. A dificuldade cresce com a complexidade do comportamento do material que se deseja representar.

Nas atividades de projeto, o modelo do material tem como função principal simular o comportamento do material. Não é necessário que o modelo explique o comportamento do material.

## 1.2 Materiais com comportamento viscoelástico

Os materiais com comportamento viscoelástico são um exemplo de materiais que necessitam de modelos mais completos. O comportamento viscoelástico é intermediário entre os exibidos pelos sólidos elásticos e pelos líquidos viscosos. Quando submetido a uma tensão constante, um corpo feito de material com comportamento viscoelástico não mantém uma deformação constante como um sólido elástico, mas deforma-se contínua e lentamente com o tempo, e quando está restringido a uma deformação constante, a tensão necessária para mantê-lo nesta condição diminui com o tempo. O mesmo corpo escoando sob tensão constante, armazena parte da energia proveniente do trabalho das forças externas durante a deformação ao invés de dissipá-la totalmente como um líquido viscoso, e esta energia é usada na recuperação de parte da deformação quando cessa a ação das forças externas.

A principal característica do comportamento viscoelástico dos materiais é o fato de ser essencialmente determinado pelo tempo e depender de toda a história de deformações:

- Materiais com comportamento viscoelástico sob tensão constante têm sua deformação aumentada com o tempo, fenômeno que é chamado de *fluência*.

Quando cessa a ação do carregamento, parte da deformação é recuperada com o tempo, o que é conhecido como *recuperação*.

- Materiais com comportamento viscoelástico sob deformação constante têm a tensão diminuída com o tempo, fenômeno chamado de *relaxação*. É observada submetendo-se um corpo de prova a uma deformação constante e medindo-se a tensão necessária para manter essa deformação em função do tempo.

O comportamento viscoelástico de um material pode ser linear ou não linear. A viscoelasticidade linear ocorre quando a razão entre deformação e tensão é uma função somente do tempo e independe da magnitude da tensão. A maioria dos materiais exibe comportamento viscoelástico linear para determinadas faixas de valores de tensão considerados baixos e comportamento não linear para altos valores de tensão.

Existem muitas aplicações de materiais com comportamento viscoelástico e os modelos constitutivos (relacionam tensões e deformações) representam bem o comportamento viscoelástico somente na região de comportamento linear. Para tensões maiores que caracterizam o comportamento não linear, faltam modelos constitutivos capazes de descrevê-lo. Mesmo para o caso de tensão uniaxial, os comportamentos de fluência são representados de forma rudimentar pelos modelos constitutivos existentes.

Os modelos que representam o comportamento viscoelástico para o caso uniaxial de tensão são usados no projeto de estruturas submetidas a este tipo de solicitação. Os fenômenos representados dizem respeito ao comportamento de fluência. Os casos cobertos por esses modelos se resumem às curvas de fluência (Figura 1.1). Condições de carregamento e descarregamento (Figura 1.2) ou padrões de carregamentos e descarregamentos parciais mais complexos (Figura 1.3) não são convenientemente representados (72). Além disso, poucos dados e modelos que representam condições de carregamentos que geram tensões de compressão ou cisalhamento estão disponíveis.

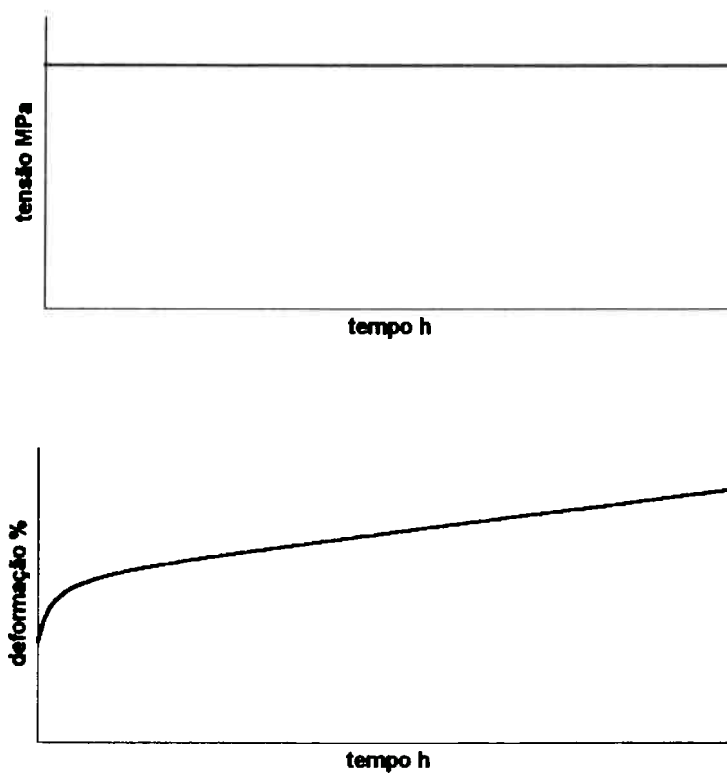


Figura 1.1 - Fluência sob tensão constante.

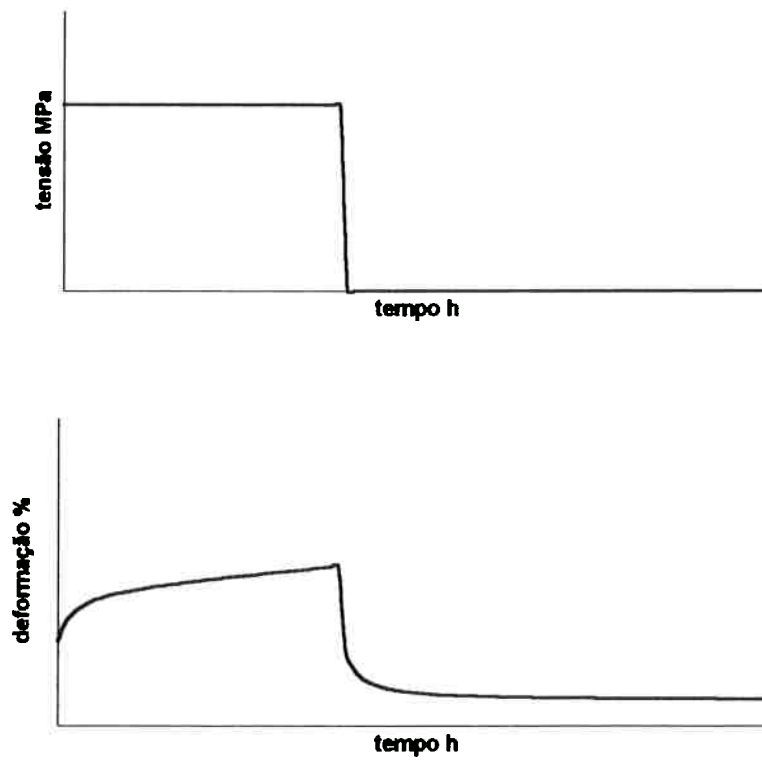


Figura 1.2 - Fluência e recuperação.

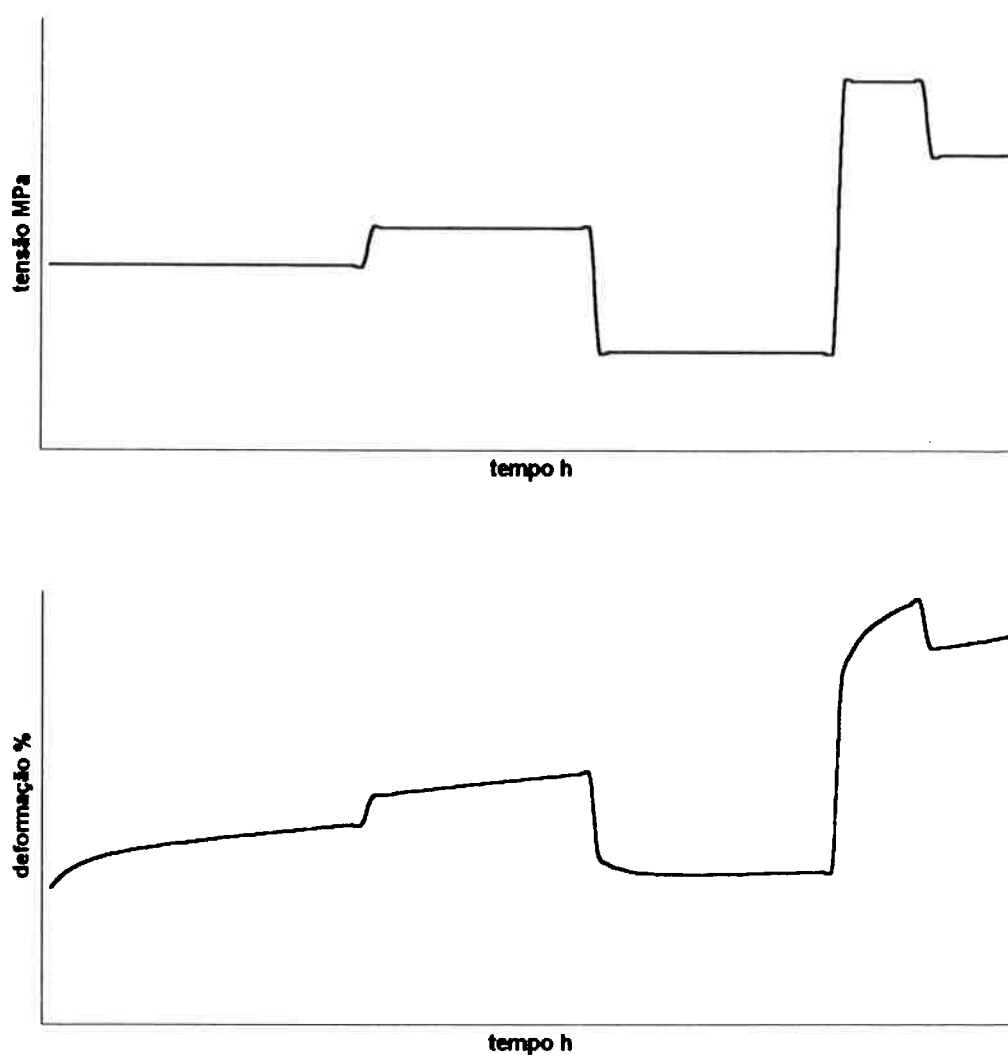


Figura 1.3 - Padrão complexo de carregamentos.

### 1.3 A proposta

As redes neurais artificiais (RNA's) constituem um conceito computacional inspirado no que atualmente se acredita ser a forma de funcionamento do cérebro humano. São constituídas por várias unidades de processamento, denominados *neurônios*, conectados entre si. Cada neurônio recebe valores de outros neurônios com os quais está conectado, calcula um valor e o transmite adiante para outros neurônios da RNA. As RNA's mais comuns são formadas por camadas de neurônios (de entrada, ocultas e de



saída) e o fluxo de informações percorre o sentido da camada de entrada para a camada de saída.

As conexões entre neurônios são caracterizados por *pesos* que multiplicam os valores transferidos de um neurônio para outro. Os pesos das ligações entre neurônios são ajustados para se obter valores de saída compatíveis com os de entrada. Os algoritmos que realizam esta função são chamados de *algoritmos de treinamento*. Nas aplicações mais comuns, as RNA's são treinadas apresentando-se os valores de entrada e de saída esperada para a RNA.

As RNA's, ao menos teoricamente, podem representar funções arbitrárias a partir de dados utilizados no treinamento (41) e possuem comprovada capacidade de generalização (49).

**A proposta é utilizar redes neurais artificiais (RNA's) para representar o comportamento viscoelástico de um material para o caso uniaxial de tensão.**

O uso de RNA's para representar o comportamento de um material é uma forma alternativa de aquisição de conhecimento. A RNA funciona como "caixa-preta". O conhecimento a respeito do comportamento do material é absorvido dos dados provenientes de ensaios, ficando armazenado nos pesos das ligações entre os neurônios. As informações para explicar o comportamento do material não estão disponíveis nas RNA's, mas pode-se simular o seu comportamento, o que satisfaz as necessidades das atividades de projeto.

A operação de uma RNA já treinada é extremamente simples e pode facilmente ser incorporada em sistemas CAE. É possível adicionar dados de novos ensaios ao conjunto de casos de treinamento de uma RNA e refazer o treinamento de forma a aumentar o seu "conhecimento" a respeito do material.

A contribuição deste trabalho consiste em verificar a viabilidade de uma forma alternativa de se representar o comportamento viscoelástico de materiais no caso uniaxial de tensão usando RNA's. As vantagens com relação aos modelos analíticos são as seguintes:

- hipóteses “a priori” sobre o comportamento do material são desnecessárias;
- a representação do comportamento do material pode ser obtida diretamente dos dados experimentais;
- o modelo do material baseado em RNA pode ser atualizado a medida que surgem novos dados experimentais através de seções de treinamento;
- a natureza numérica das RNA's artificiais facilita sua incorporação em sistemas CAE.

E as principais dificuldades são:

- a definição de arquitetura da RNA é feita empiricamente (número de neurônios, forma de conexão entre os neurônios, parâmetros dos algoritmos de treinamento);
- a definição e a obtenção do conjunto de dados para treinamento representativo para o problema;
- o funcionamento das RNA's não está completamente esclarecido.

#### **1.4 O desenvolvimento do trabalho**

Este trabalho é uma pesquisa tecnológica e sua originalidade está na integração de diferentes áreas do conhecimento para obter a solução. A percepção do estado atual do desenvolvimento das RNA's permitiu apresentar uma solução alternativa para a obtenção de modelos constitutivos de materiais com comportamento viscoelástico no caso uniaxial de tensão.

O texto possui capítulos introdutórios: o capítulo 2 trata dos conceitos de viscoelasticidade utilizados no decorrer do trabalho e o capítulo 3 é uma breve apresentação das redes neurais artificiais (RNA's).

Uma revisão da bibliografia a respeito de modelos constitutivos para a viscoelasticidade não linear e de desenvolvimentos e aplicações de RNA's constitui o capítulo 4.

A utilização de RNA's para representar o comportamento viscoelástico é discutida no capítulo 5.

Os capítulos 6, 7, 8 e 9 são aplicações de RNA's para representar comportamentos viscoelásticos:

- No capítulo 6 uma RNA do tipo “Cascor”, que é capaz de gerar sua própria arquitetura (número de neurônios), é desenvolvida como modelo constitutivo do polietileno representando as *curvas isócronas tensão-deformação* (ver item 2.4.2) a partir dos dados de ensaios, e posteriormente é incorporada em um programa de elementos finitos.
- No capítulo 7 um modelo constitutivo do polietileno representando as *curvas isócronas tensão-deformação* é desenvolvido a partir de dados de ensaios de fluência que apresentam ruídos usando uma RNA do tipo “Cascor”.
- No capítulo 8 uma RNA do tipo recorrente é usada para representar o comportamento fluência/recuperação do asbesto. Os dados usados no treinamento da rede foram obtidos de um “pseudo-material” representado por um modelo constitutivo analítico que teve que ser desenvolvido e adotado devido à falta de informações de ensaios.
- No capítulo 9 uma RNA do tipo recorrente é treinada para representar o comportamento do asbesto, conforme o modelo analítico constitutivo desenvolvido no capítulo 8, sob padrões complexos de carregamentos.

As conclusões e indicações para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 10 e, finalmente, o capítulo 11 contém toda a bibliografia usada neste trabalho.

## 2. *Viscoelasticidade*

### 2.1 Introdução

De acordo com a Teoria da Elasticidade, os sólidos elásticos obedecem à Lei de Hooke. Sua tensão é proporcional à deformação (para pequenas deformações) e independente da taxa de deformação. Os sólidos elásticos possuem forma definida e quando estão sobre a ação de forças externas se deformam atingindo uma nova condição de equilíbrio. A energia resultante do trabalho das forças externas durante a deformação do corpo é integralmente armazenada na forma de energia elástica. Quando as forças externas são removidas, a energia armazenada é capaz de restabelecer a forma original.

Segundo a Teoria da Hidrodinâmica os líquidos viscosos obedecem à Lei de Newton. Sua tensão é proporcional à taxa da deformação e independente da deformação. Os líquidos viscosos não têm forma definida e escoam de forma irreversível sobre a ação de forças externas.

Os materiais reais possuem propriedades intermediárias entre um sólido elástico e um líquido viscoso (72). Um mesmo sistema pode exibir características de um sólido e de um líquido. Por um lado, um corpo não “perfeitamente sólido” quando submetido a uma tensão constante não mantém uma deformação constante. Deforma-se contínua e lentamente com o tempo, ou seja, flui. Quando o mesmo corpo está restringido a uma deformação constante, a tensão necessária para mantê-lo nesta condição diminui com o tempo. Por outro lado, um corpo não “perfeitamente líquido” escoando sob tensão constante, armazena parte da energia proveniente do trabalho das forças externas durante a deformação ao invés de dissipá-la totalmente. Esta energia é usada na recuperação de parte da deformação quando a ação das forças externas cessa. Os materiais reais exibem tal comportamento chamado de *comportamento viscoelástico*.

A principal característica do comportamento viscoelástico dos materiais é o fato de ser essencialmente determinado pelo tempo. Materiais com comportamento viscoelástico sob tensão constante têm sua deformação aumentada com o tempo. Materiais

com comportamento viscoelástico sob deformação constante têm a tensão diminuída com o tempo.

O comportamento viscoelástico de um material pode ser linear ou não linear. A viscoelasticidade linear ocorre quando a razão entre deformação e tensão é uma função somente do tempo e independe da magnitude da tensão. A maioria dos materiais exibe comportamento linear para valores de tensão considerados baixos e comportamento não linear para altos valores de tensão.

## 2.2 Equações constitutivas

Uma equação constitutiva é a relação entre forças e deformações. Forças aplicadas num corpo provocam deformações no mesmo, cuja forma e quantidade variam de acordo com sua natureza do material.

O material pode ser considerado como uma caixa preta, cuja entrada é  $\sigma(t)$  e a saída é  $\epsilon(t)$ . A conversão do valor de entrada para o valor de saída é definida por uma relação matemática:

$$\epsilon(t) = \Gamma_{\tau=\tau_0}^{\tau=t} \{\sigma(\tau)\}$$

**Equação 2.1**

onde  $\Gamma$  é um funcional. Cada classe de material corresponde a um diferente funcional  $\Gamma$ . Para materiais elásticos cuja deformação  $\epsilon(t)$  no instante  $t$  depende somente do valor da tensão  $\sigma(t)$  no instante  $t$ , neste caso escreve-se a Equação 2.1 da seguinte forma:

$$\epsilon(t) = D^e \{\sigma(t)\}$$

**Equação 2.2**

onde  $D^e$  é uma função:

$$D^e: \mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{R}$$

**Equação 2.3**

Se o material é linearmente elástico então a Equação 2.2 é simplificada:

$$\epsilon(t) = D \{\sigma(t)\}$$

**Equação 2.4**

onde  $D$  é o módulo de rigidez do material.

As propriedades dos materiais viscoelásticos são caracterizadas pela dependência de todo o histórico de deformações, e suas equações constitutivas devem ter forma funcional como na Equação 2.1.

### 2.3 Comportamento viscoelástico linear

Um material tem um comportamento elástico linear se para uma história de carregamentos:

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= \sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau) \\ \tau &\in (\tau_0, t)\end{aligned}$$

Equação 2.5

obtém-se uma história de deformações:

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_1(\tau) + \varepsilon_2(\tau)$$

Equação 2.6

onde  $\varepsilon_1(\tau)$  e  $\varepsilon_2(\tau)$  são histórias de deformações relacionadas às histórias de carregamentos arbitrárias  $\sigma_1(\tau)$  e  $\sigma_2(\tau)$  respectivamente. Isto é conhecido como o *Princípio da Superposição de Boltzmann*. Este princípio estabelece que na viscoelasticidade linear os efeitos são simplesmente aditivos. A aplicação de um carregamento gera uma tensão que causa uma deformação dependente do tempo e cada incremento de tensão causa uma contribuição independente na deformação.

#### 2.3.1 Fluência

Fluência pode ser definida como a deformação lenta observada em materiais viscoelásticos quando submetidos a um carregamento constante. Este comportamento pode ser descrito através do ensaio de fluência: um carregamento constante no tempo é aplicado a um corpo de prova e sua deformação é medida ao longo do tempo. Os ensaios são realizados a uma temperatura constante, pois para muitos materiais as propriedades mecânicas variam com a temperatura. A curva obtida no ensaio chama-se *curva de fluência* (Figura 2.1).

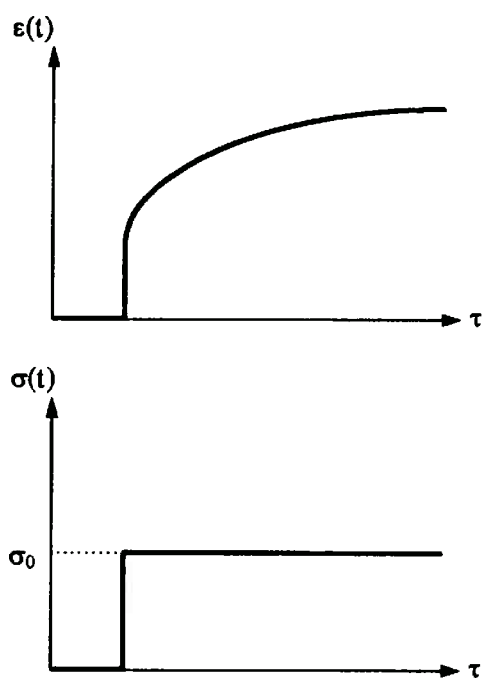


Figura 2.1 - Curva de fluência.

A deformação total  $\varepsilon$  é a soma de três partes  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  (Figura 2.2). As parcelas  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são chamadas de deformação elástica imediata e de deformação elástica retardada. A parcela  $\varepsilon_3$  é idêntica à deformação de um líquido viscoso que obedece à Lei de Newton.

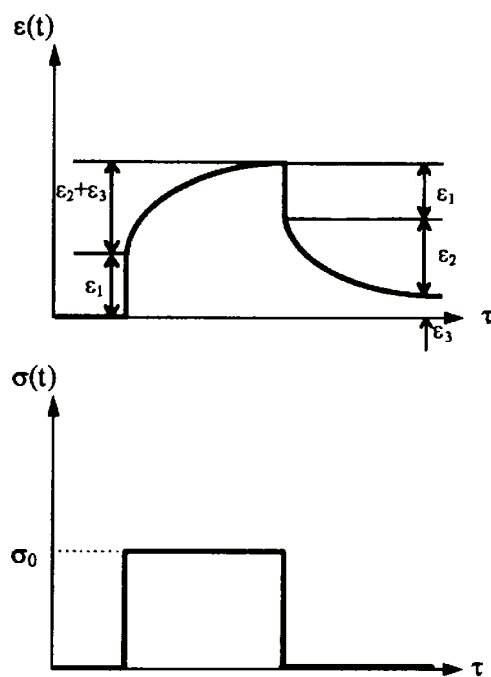


Figura 2.2 - Componentes da deformação

As parcelas  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  da deformação total são diretamente proporcionais ao valor da tensão aplicada para um material com comportamento viscoelástico linear. Pode-se então definir uma função de flexibilidade de fluência  $J(t)$  como função apenas do tempo:

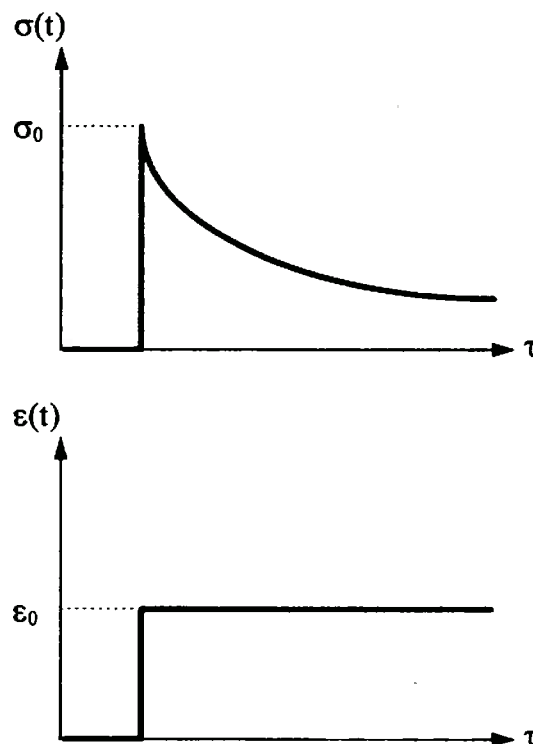
$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = J(t) = J_1 + J_2 + J_3$$

**Equação 2.7**

onde  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  correspondem a  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  respectivamente (17).

### 2.3.2 Relaxação

A relaxação em materiais viscoelásticos é observada submetendo-se um corpo de prova a uma deformação constante  $\varepsilon$  e medindo-se a tensão necessária para manter essa deformação em função do tempo. A curva obtida chama-se *curva de relaxação* (Figura 2.3).



**Figura 2.3 - Curva de relaxação.**

De forma análoga ao caso da fluência, pode-se definir uma função denominada módulo de relaxação à tensão  $G(t)$  definida por:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon}$$

**Equação 2.8**



### 2.3.3 Representação integral

O Princípio da Superposição de Boltzmann é um ponto de partida para a teoria da viscoelasticidade linear. Essa abordagem é chamada de *representação integral da viscoelasticidade linear* por definir uma equação integral para representar o comportamento viscoelástico.

Boltzmann propôs que:

1. a fluência de um corpo de prova é função de toda a história de carregamentos;
2. cada variação de carregamento traz uma contribuição independente para a deformação final;
3. e que a deformação final é obtida pela soma das diversas contribuições independentes.

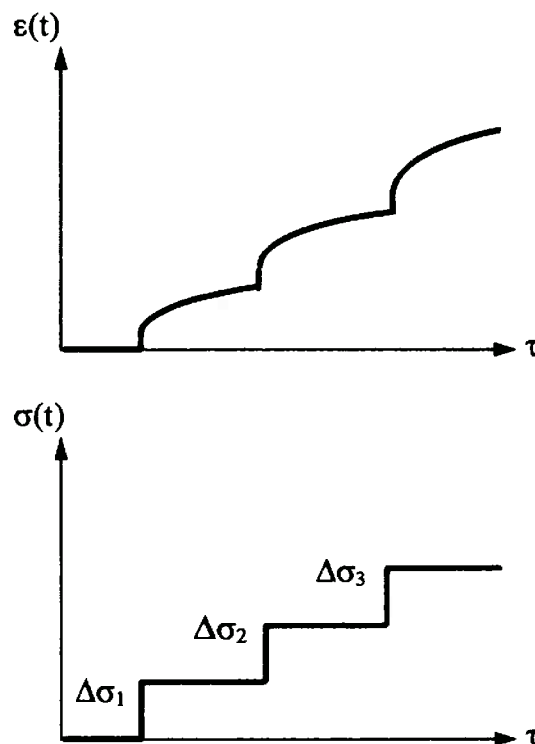


Figura 2.4 - Fluência de um sólido viscoelástico linear.

Considerando uma história de carregamentos com diversos incrementos de tensão  $\Delta\sigma_1$ ,  $\Delta\sigma_2$ ,  $\Delta\sigma_3$ , etc., (Figura 2.4) adicionados nos instantes  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ , etc., respectivamente, o valor total da deformação num instante  $t$  é dado por:

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t - \tau_1) + \Delta\sigma_2 J(t - \tau_2) + \Delta\sigma_3 J(t - \tau_3) + \dots$$

Equação 2.9

onde  $J(t-\tau)$  é a função de flexibilidade de fluência

A Equação 2.9 pode ser generalizada pela integral:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau)$$

Equação 2.10

ou ainda:

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{\sigma}{G_e} \right] + \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Equação 2.11

que inclui a deformação elástica imediata dada por um módulo de elasticidade  $G_e$ .

O Princípio da Superposição de Boltzmann tem duas conseqüências principais:

- A deformação adicional de fluência causada por um acréscimo de tensão  $\sigma_0$  no instante  $\tau=t_1$ , é idêntico à que ocorreria se esta tensão  $\sigma_0$  tivesse sido aplicada sem nenhum carregamento prévio no mesmo instante  $t$  (Figura 2.5):

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sigma_0 J(t - t_1)$$

Equação 2.12

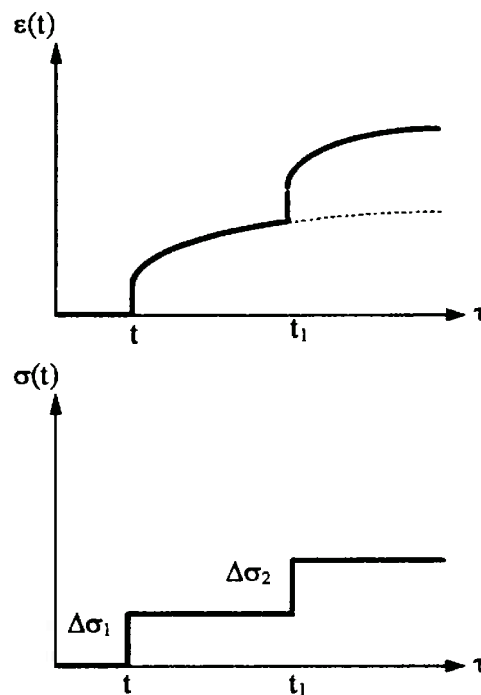


Figura 2.5 - Carregamento em duas etapas.

- As deformações de fluência e de recuperação são idênticas (Figura 2.6). Um carregamento que gera uma tensão  $\sigma_0$  é aplicada no instante  $\tau=0$  e retirada no instante  $\tau=t_1$ . A deformação  $\varepsilon(t)$  num instante  $t>t_1$ , é dada por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) - \sigma_0 J(t - t_1)$$

Equação 2.13

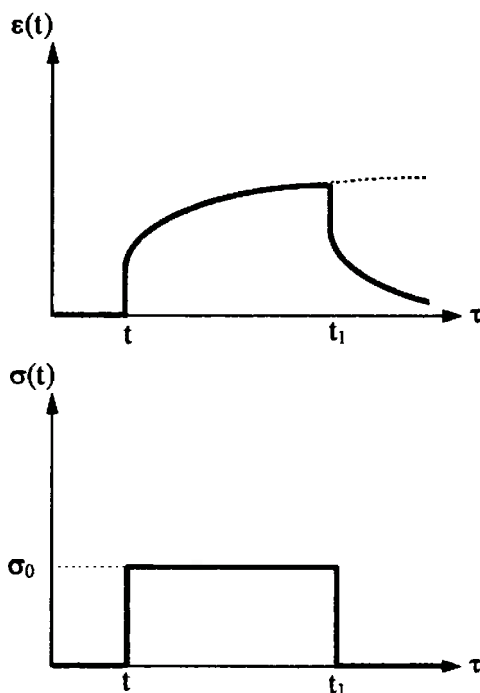


Figura 2.6 - Carregamento e descarregamento

### 2.3.4 Representação diferencial

Outra forma de se estudar a viscoelasticidade linear é relacionando tensões e deformações através de uma equação diferencial linear. Esta abordagem é conhecida como *representação diferencial da viscoelasticidade linear*.

De uma forma geral, esta equação diferencial pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P\sigma = Q\varepsilon$$

Equação 2.14

com  $P$  e  $Q$  sendo operadores diferenciais lineares. Mais genericamente a equação diferencial é:

$$a_0\sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots = b_0\varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + b_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots$$

Equação 2.15

Normalmente se descreve os resultados experimentais com um ou dois termos de cada lado da equação. Isso é equivalente a representar o comportamento viscoelástico através de modelos mecânicos formados por molas que obedecem à Lei de Hooke e por amortecedores que obedecem à Lei de Newton da viscosidade.

#### 2.3.4.1 Elementos

Os elementos básicos usados nos modelos do comportamento viscoelástico são a mola e o amortecedor:

- Mola helicoidal ideal, linear e sem massa (Figura 2.7). Obedece à lei de Hooke:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t)$$

Equação 2.16

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

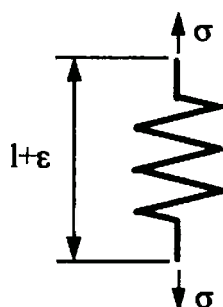


Figura 2.7 - Mola

- Amortecedor viscoso ideal que se alonga com uma velocidade proporcional à força aplicada (Figura 2.8). Obedece à lei de Newton:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Equação 2.17

onde  $\eta$  é o coeficiente de viscoelasticidade.

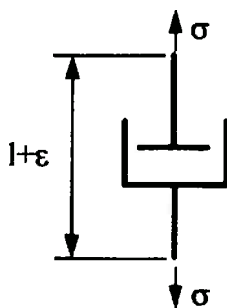


Figura 2.8 - Amortecedor.

#### 2.3.4.2 O modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell consiste de uma mola e um amortecedor em série (Figura 2.9):

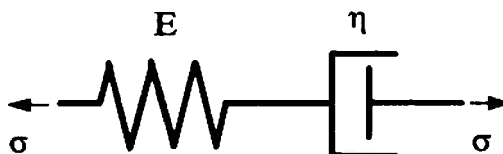


Figura 2.9 - Modelo de Maxwell.

Para esse sistema, pode-se escrever as equações:

$$\sigma_E(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma(t)$$

**Equação 2.18**

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t)$$

**Equação 2.19**

$$\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$$

**Equação 2.20**

$$\sigma_\eta(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$$

**Equação 2.21**

onde os índices  $E$  e  $\eta$  indicam mola e amortecedor respectivamente. Derivando a Equação 2.19 e a Equação 2.20 com relação ao tempo e usando a Equação 2.18 e a Equação 2.21 obtém-se a equação diferencial do modelo de Maxwell:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Equação 2.22

O modelo de Maxwell é de particular interesse no experimento de relaxação de tensão. No caso  $\dot{\epsilon}(t) = 0$  e:

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{E}{\eta}\sigma(t)$$

Equação 2.23

e:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt$$

Equação 2.24

Considerando  $\sigma = \sigma_0$  para  $t = 0$  e integrando a Equação 2.24 obtém-se:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Equação 2.25

Observa-se que a tensão decai exponencialmente com uma constante de tempo  $\tau_R = \eta/E$  denominada tempo de relaxação.

Existem duas falhas no modelo de Maxwell:

1. Sob tensão constante um escoamento newtoniano é observado. Isso não ocorre para materiais viscoelásticos cujo comportamento de fluência é mais complexo.
2. O comportamento de relaxação não pode usualmente ser representado por um decaimento exponencial, nem necessariamente decai para zero num tempo infinito.

#### 2.3.4.3 O modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin consiste de uma mola e um amortecedor em paralelo (Figura 2.10).

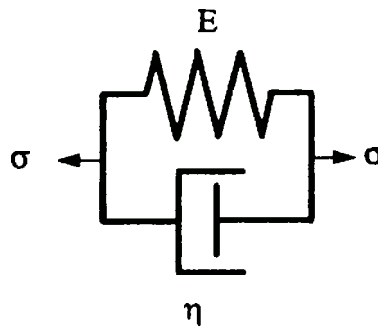


Figura 2.10 - Modelo de Kelvin.

As equações correspondentes são:

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t)$$

Equação 2.26

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t)$$

Equação 2.27

$$\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$$

Equação 2.28

$$\sigma_\eta(t) = \eta\dot{\varepsilon}_\eta(t)$$

Equação 2.29

A equação diferencial resultante é:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$$

Equação 2.30

O modelo de Kelvin representa o comportamento a fluência de forma adequada para uma primeira aproximação. Para a fluência sob carregamento constante  $\sigma = \sigma_0$  mostra-se que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right)$$

Equação 2.31

Para a recuperação, ou seja,  $\sigma = 0$ :

$$E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = 0$$

Equação 2.32

resulta

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Equação 2.33

onde  $\tau = \eta/E$  é o tempo característico chamado de “tempo de retardação”.

Para a relaxação de tensão, onde  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ , o modelo de Kelvin resulta em  $\sigma = E\varepsilon$ . Isto significa que sob tensão constante o material se torna um sólido elástico, o que é inadequado para representar o comportamento viscoelástico.

#### 2.3.4.4 O modelo Generalizado

O modelo de Maxwell descreve a relaxação de tensão de um material com comportamento viscoelástico e o modelo de Kelvin descreve a fluência. Porém, nenhum dos modelos é adequado para representar ambos os comportamentos de relaxação de tensões e de fluência.

Para se obter uma descrição, mesmo que aproximada, dos comportamentos de fluência e relaxação, deve-se ter pelo menos os dois primeiros termos de cada lado da igualdade da equação diferencial resultante do modelo que representa o comportamento viscoelástico:

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Equação 2.34

o que fornece uma resposta exponencial tanto para fluência como para a relaxação. Por exemplo, para o modelo da Figura 2.11 a relação tensão-deformação fica:

$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E_s \varepsilon + (E_m + E_s) \tau \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{onde } \tau = \frac{\eta_m}{E_m}$$

Equação 2.35



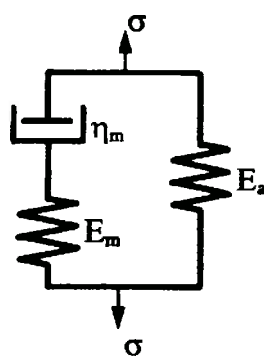


Figura 2.11 - Modelo de material viscoelástico.

Para descrever o comportamento viscoelástico pode ser necessário incluir mais termos na equação diferencial linear. Essa equação diferencial mais complexa é equivalente a um número maior de elementos de Maxwell em paralelo ou a um maior número de elementos de Kelvin em série (Figura 2.12 e Figura 2.13).

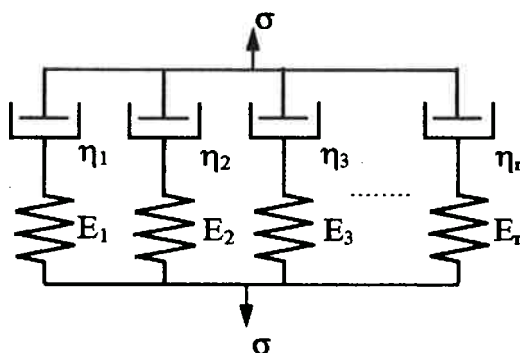


Figura 2.12 - Elementos de Maxwell em paralelo.

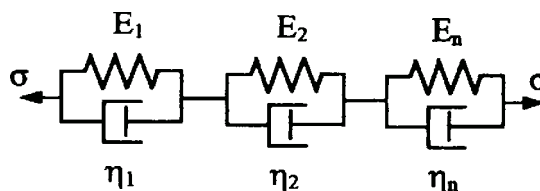


Figura 2.13 - Elementos de Kelvin em série.

## 2.4 Comportamento viscoelástico não linear

### 2.4.1 Generalidades

Na maior parte das aplicações práticas, os materiais com comportamento viscoelástico não satisfazem as condições de linearidade e o Princípio da Superposição de Boltzmann não é aplicável. Não existe até o presente uma representação da viscoelasticidade não linear que descreva adequadamente o comportamento e explique fisicamente as origens desse comportamento (72).

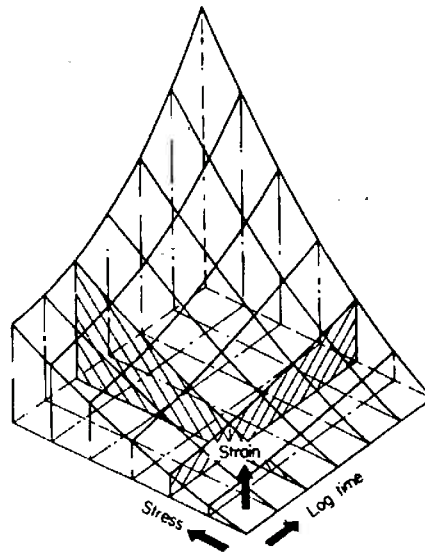
Existem duas abordagens principais da viscoelasticidade não linear:

- A **abordagem de engenharia** busca a solução de problemas práticos. O engenheiro de projeto está interessado em prever o comportamento do material para uma situação específica a partir do menor número de ensaios do material. Expressões empíricas que descrevam o desempenho do material são suficientes para o engenheiro. A desvantagem da abordagem de engenharia é que nenhum entendimento da natureza do comportamento viscoelástico não linear é obtido.
- Na **abordagem reológica** buscam-se relações constitutivas do material de uma forma mais geral. As influências dos fenômenos físicos no comportamento viscoelástico não linear são estudadas. A desvantagem dessa abordagem é tratar de casos muito gerais e de pouco interesse prático. Em muitos casos as relações reológicas não representam uma condição específica de interesse do engenheiro de projeto.

### 2.4.2 Abordagem do engenheiro

Na viscoelasticidade linear o comportamento de fluência de um material a uma dada temperatura é determinado pela medida da deformação ao longo do período de tempo requerido para uma tensão. Para a viscoelasticidade não linear o comportamento de fluência do material deve ser descrito em detalhes ao longo da faixa de tensões de interesse durante o tempo requerido, já que o Princípio da Superposição de Boltzmann não é obedecido. É interessante notar alguns modelos constitutivos obtidos através da abordagem do engenheiro.

Uma necessidade de projeto é conhecer a relação deformação-tensão-tempo para a fluência à tensão constante. Foi proposta por Turner uma superfície tridimensional (Figura 2.14) denominada *curvas isócronas tensão-deformação*, que pode ser definida com suficiente grau de precisão a partir de poucas medidas experimentais (72).



**Figura 2.14 - Curvas isócronas tensão-deformação.**

Algumas relações empíricas foram desenvolvidas para representar o comportamento de fluência de materiais com comportamento viscoelástico não linear (72):

Pao e Marin desenvolveram uma relação para metais onde consideravam a deformação à fluência composta por três parcelas independentes: deformação elástica, deformação viscoelástica recuperável e uma deformação plástica permanente. A deformação total à fluência é então dada por:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + K\sigma^n(1 - e^{-qt}) + B\sigma^n t$$

**Equação 2.36**

onde  $K$ ,  $n$ ,  $q$  e  $B$  são constantes do material.

Findley desenvolveu a seguinte relação para plásticos e laminados:

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_0 + mt^n$$

**Equação 2.37**

onde  $\epsilon_0$  e  $m$  são funções da tensão para um dado material e  $n$  é uma constante do material.

Em trabalhos posteriores Findley sugeriu a expressão:

$$\varepsilon_c(\sigma, t) = \varepsilon_0 \sinh \frac{\sigma}{\sigma_c} + m' t^n \sinh \frac{\sigma}{\sigma_m}$$

Equação 2.38

onde  $m'$ ,  $\sigma_c$  e  $\sigma_m$  são constantes do material. Os resultados obtidos por esta expressão se ajustam muito bem às curvas isócronas de tensão.

Uma relação semelhante foi desenvolvida por Van Holde para a fluência de nitrocelulose:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + m' t^{1/3} \sinh \alpha \sigma$$

Equação 2.39

com  $\alpha$  sendo uma constante. A Equação 2.39 é equivalente à equação de Andrade para a fluência de metais, já que  $m'$  e  $\sinh \alpha \sigma$  são constantes:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + \beta' t^{1/3}$$

Equação 2.40

A abordagem empírica não fornece uma representação geral para o comportamento viscoelástico, ou seja, as relações desenvolvidas funcionam para grupos específicos de materiais. Além disso, não conseguem representar o comportamento viscoelástico para padrões complexos de carregamentos, fluência seguida de recuperação ou variação no valor da tensão.

### 3. Redes Neurais Artificiais - RNA's

#### 3.1 Introdução

MAREN (49) define: “As redes neurais artificiais são sistemas computacionais, tanto ‘hardware’ como ‘software’, que imitam a capacidade de processamento de sistemas biológicos através do uso de um grande número de neurônios artificiais conectados entre si”.

As redes neurais artificiais (RNA'S) processam informações de forma semelhante aos sistemas biológicos (68). As palavras treinamento, conhecimento e aprendizagem são comuns no trabalho com RNA's. A inspiração para o desenvolvimento das RNA's vem da observação do funcionamento e organização das células nervosas do nosso cérebro.

Os conceitos usados nas RNA's são diferentes daqueles adotados para o processamento convencional de informações. O computador que utiliza o modelo neurológico para processar informações é denominado *neurocomputador*. A característica principal de um neurocomputador é que ele aprende a executar determinada tarefa.

O idêa de um neurocomputador causa estranheza aos usuários de computadores convencionais baseados nas idéias de Turing e Von Neumann. A máquina de Von Neumann, fundamento dos computadores atuais, pode realizar qualquer tarefa que seja um procedimento, isto é, que se traduz em um conjunto de regras. As regras dão origem a um programa de computador. O neurocomputador, por sua vez, é treinado para realizar uma tarefa que não precisa ser necessariamente um procedimento.

Se um programa de computador for escrito para determinar uma reação diante uma situação, então todas as situações possíveis devem ser consideradas. Caso uma situação não prevista ocorrer, o programa não terá como determinar a reação correspondente. O neurocomputador tem a capacidade de aprender com a experiência, reter conhecimento e generalizá-lo para situações não apresentadas durante o treinamento.

O computador criado por Von Neumann utiliza endereçamento de memórias para armazenar o conhecimento (Tabela 3.1). No neurocomputador o conhecimento retido está distribuído por toda a rede de neurônios que o compõem e não é acessível de

forma organizada. O aprendizado se dá pelo ajuste de parâmetros das ligações entre os neurônios segundo algum procedimento de treinamento e pelo arranjo dessas ligações.

**Tabela 3.1 - Comparativo entre computadores e neurocomputadores (68)**

<b>Máquina de Von Neumann</b>	<b>Neurocomputadores</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Executa programas</li> <li>• Executa operações lógicas</li> <li>• Depende do modelo ou do programador</li> <li>• Testa uma hipótese por vez</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprende</li> <li>• Executa operações não lógicas, transformações e comparações</li> <li>• Descobre relações ou regras de dados e exemplos</li> <li>• Testa todas as possibilidades em paralelo</li> </ul>

A implementação de um neurocomputador tem grandes dificuldades. Em primeiro lugar está a forma de apresentar as informações e o método de alterar os parâmetros das ligações entre os neurônios para fazer o neurocomputador aprender. Em segundo lugar, construir fisicamente um neurocomputador é tecnologicamente uma tarefa difícil. Já existem implementações de “hardware” de neurocomputadores com dezenas de neurônios para aprender a controlar parte de processos (49). Com a capacidade atual de encapsulamento de componentes, a quantidade de neurônios presentes no cérebro humano com o número de conexões existentes não caberia em um “chip” de superfície menor que 5000 m<sup>2</sup> (68). O que é feito atualmente é simular o modelo neurológico em computadores convencionais através de paradigmas de RNA's.

As RNA's têm despertado grande interesse em pesquisadores de diversas áreas do conhecimento pela sua capacidade de imitar a inteligência natural mesmo que de forma limitada. Existem diversos paradigmas para RNA's desenvolvidos empiricamente e com pouco tratamento formal. O resultado é uma massa de informações desorganizada, fragmentada, com métodos e objetivos diversos.

Apesar da grande variedade de tipos de RNA's pode-se dizer que todas realizam basicamente a mesma tarefa: aceitam um conjunto de valores de entrada (vetor de entrada) e produzem um conjunto de valores de saída (vetor de saída). As RNA's realizam uma operação que pode ser chamada de "mapeamento de vetores" (Figura 3.1) (73).

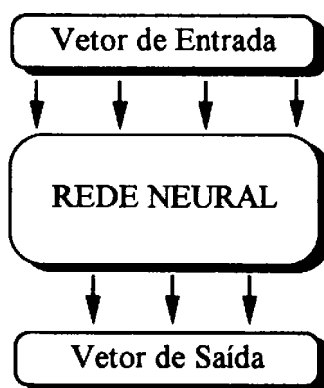


Figura 3.1 - Mapeamento de vetores.

As características das RNA's que motivam a escolha desta tecnologia para aplicações em várias áreas são (49):

- **aprendizado adaptativo** - habilidade de aprender a executar determinada tarefa através de exemplos;
- **auto-organização** - uma RNA cria sua própria representação ou organização da informação recebida durante o aprendizado ou operação;
- **tolerância a erros** - RNA's são intrinsecamente tolerantes a erros, pois aprendem a reconhecer padrões ruidosos, distorcidos ou até mesmo incompletos;
- **operação em tempo real** - as operações de RNA's podem ser executadas paralelamente, e dispositivos de "hardware" que aproveitam esta vantagem estão sendo projetados e manufaturados;
- **facilidade de inserção em novas tecnologias** - as RNA's podem ser desenvolvidas, treinadas, testadas, verificadas e traduzidas para uma implementação de "hardware" de baixo custo.

As RNA's são uma tecnologia recente. Os maiores desenvolvimentos são da segunda metade dos anos 80. As aplicações que usam RNA's estão aumentando e alguns dos resultados são animadores e outros considerados desapontadores. Já existem produtos comerciais que usam RNA's: supressão de eco em telefones e de ruído em modems, análise de risco para contratos de seguros, reconhecimento de voz, controle de processos industriais, processamento de sinais de radar entre outros (73). Essas aplicações podem ser agrupadas nas seguintes atividades principais:

- **Reconhecer padrões.** RNA's são usadas para descobrir relações de semelhança entre elementos de uma massa de dados, desenvolvendo medidas de distância.
- **Classificar padrões.** A maior parte das aplicações de RNA's estão na classificação de dados segundo padrões complexos: identificação de imagens de objetos, identificação de caracteres manuscritos, identificação de voz, identificação automática de alvos e outros. Inúmeras aplicações de sucesso nesta área são divulgadas (49).
- **Aproximar funções.** Uma das capacidades mais exploradas das RNA's é a de aproximar funções arbitrárias a partir de dados de treinamento. Esta capacidade engloba muitos campos de aplicações. De fato, pode-se dizer que toda RNA ao transformar um vetor de dimensão  $n$  em um vetor de dimensão  $m$  aproxima uma função.

## 3.2 Conceitos Básicos

### 3.2.1 Imitação de sistemas biológicos

O cérebro humano possui cerca de 10 bilhões de células (73) nervosas denominadas neurônios (Figura 3.2). Estas células são formadas por divisões que ocorrem na vida embrionária. Hoje, alguns pesquisadores acreditam que os neurônios possam se reproduzir no ser humano adulto.



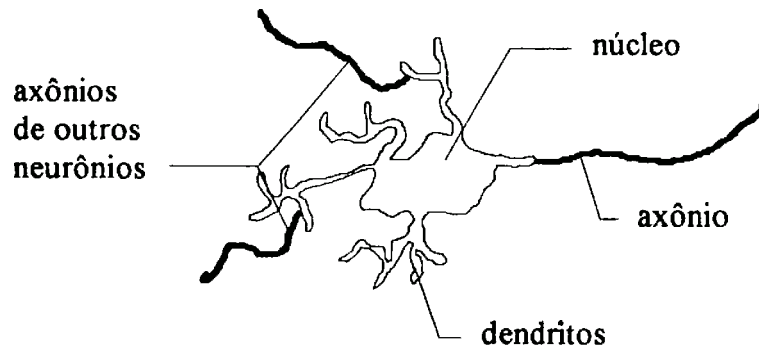


Figura 3.2 - O neurônio.

O número de neurônios pouco se altera durante o crescimento da pessoa, o que muda é sua forma de conexão. Essas células formam redes intensamente conectadas. Um neurônio se conecta a outro através de ligações entre seus dendritos e os axônios de outros neurônios. Essas ligações são chamadas de *sinapses*.

A rede de neurônios do cérebro é percorrida por impulsos elétricos da ordem de 70 mV (68). O impulso elétrico, ou impulso nervoso, é transmitido de um neurônio a outro através das sinapses. As sinapses são ligações polarizadas, isto é, somente um lado da sinapse possui os elementos neurotransmissores. Quando um impulso nervoso atinge a membrana pré-sináptica os neurotransmissores são liberados atingindo a membrana pós-sináptica. Ocorre troca iônica com o meio e despolarização gerando um potencial elétrico. Se o potencial elétrico é maior que um determinado limiar de excitabilidade ocorre a continuidade da condução do impulso nervoso.

O processamento no cérebro é paralelo e distribuído, com regiões responsáveis por funções específicas. Acredita-se que o conhecimento está armazenado também de forma distribuída no cérebro. A configuração das ligações entre os neurônios seria a forma de se armazenar o conhecimento. Considerando-se 10 bilhões de neurônios, o máximo de 10000 ligações para cada um deles e que cada ligação possui dois estados (binário) tem-se  $10^{10} \times 10^4 = 10^{14}$  bits de informação que poderiam ser armazenadas (68).

Com a variação dos pesos das sinapses ocorre o mecanismo de retenção de conhecimento. As sinapses podem excitar ou inibir um impulso nervoso que passa pela conexão. Quanto mais freqüente é a passagem de impulsos pela sinapse, maior é a amplificação deste impulso, maior é o peso da sinapse. A ligação é reforçada com o uso. Com a exposição da pessoa a informações ocorrem mudanças na forma e no peso das ligações entre os neurônios. Os hábitos são formados pela repetição de estados e comportamentos que reforçam as sinapses das regiões responsáveis pelos mesmos. Muda-se um hábito evitando repeti-lo. À medida que o tempo passa, diminui o esforço necessário para evitar o procedimento que caracteriza o hábito, pois as sinapses correspondentes também enfraquecem.

### 3.2.2 O neurônio artificial

O neurônio artificial apresenta as características básicas do neurônio biológico: recebe informações de outros neurônios através de ligações de importâncias diferentes, realiza um processamento simples e transmite a informação resultante para outros neurônios.

Na forma mais simples de neurônio artificial, as ligações sinápticas com outros neurônios são representadas por valores denominados *pesos*, e o processamento dos sinais recebidos pelo neurônio artificial é feito por uma *função de transferência*. A operação típica de um neurônio artificial (Figura 3.3) ocorre da seguinte forma:

- o neurônio recebe os valores de ativação de outros neurônios da RNA a ele conectados, multiplicados pelos pesos de cada ligação ( $W_{ij}$ );
- a operação executada é o cálculo do valor de ativação do neurônio ( $A_j$ ) através de uma função de transferência ( $f$ ) (Figura 3.3);
- o valor de ativação é então transmitido para os neurônios seguintes que repetem a operação.

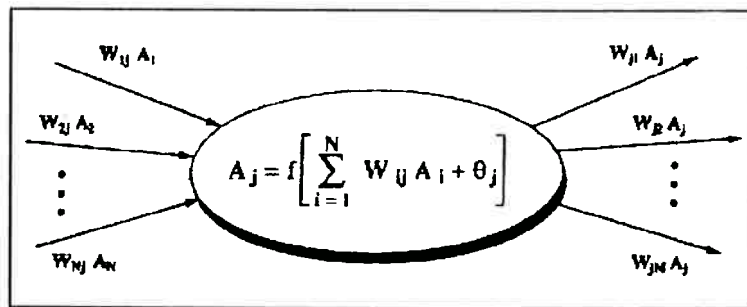


Figura 3.3 - Neurônio artificial

Neurônios podem diferir segundo suas funções de transferência. As funções de transferência mais comuns são as seguintes:

- função limite lógico (Figura 3.4);

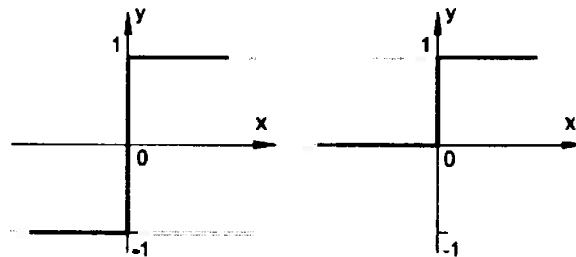


Figura 3.4 - Função limite lógico.

- função "hard limit" (Figura 3.5);

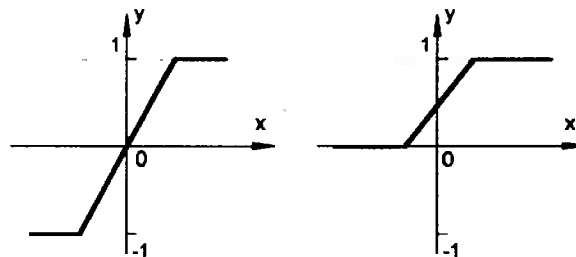


Figura 3.5 - Função *hard limit*.

- função "sigmoid" (contínua) (Figura 3.6);

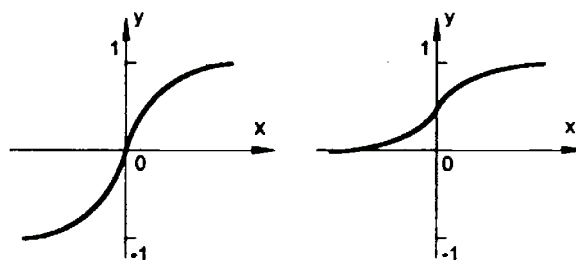


Figura 3.6 - Função contínua Sigmoid.

- função base radial (Figura 3.7);

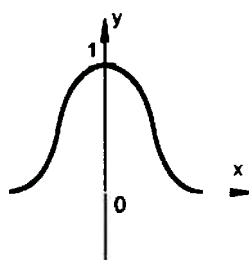


Figura 3.7 - Função base radial.

- função linear (Figura 3.8).

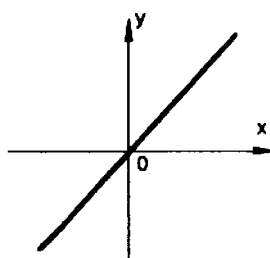


Figura 3.8 - Função linear.

### 3.2.3 Redes neurais artificiais

As redes neurais artificiais (RNA's) são formadas por neurônios conectados entre si. A forma de conexão, a quantidade de neurônios, as funções de transferência e o processo de treinamento definem uma RNA.

Uma RNA possui pontos de entrada e de saída de informações que constituem as camadas de entrada e de saída respectivamente. A camada de entrada não é formada propriamente por neurônios. São pontos para o armazenamento de informações que serão passadas para os neurônios da rede. Às vezes são apresentados com outro nome, por exemplo pontos de entrada (68), para evitar confusão com os neurônios de processamento. A camada de saída é formada por neurônios que realizam processamento de sinais recebidos de outros neurônios da RNA. As saídas dessa camada, uma por neurônio, são as informações passadas pela RNA ao exterior.

Os neurônios colocados entre as camadas de entrada e saída formam o que é conhecido como camada oculta. O número de camadas ocultas e a forma de conexão entre os neurônios depende das necessidades e é especificado pelo projetista da RNA.

A arquitetura de uma RNA é definida pela quantidade de camadas ocultas, pelo número de neurônios em cada camada e pela forma de conexão entre os neurônios.

Existem diversos tipos de arquiteturas e ainda nenhuma regra que estabeleça o melhor arranjo de seus parâmetros para uma determinada aplicação. Alguns exemplos de arquiteturas:

- **redes multi-camadas para frente** (Figura 3.9) - os sinais recebidos pela rede se propagam para a frente, ou seja, o sentido do fluxo de informações é da entrada para a saída;

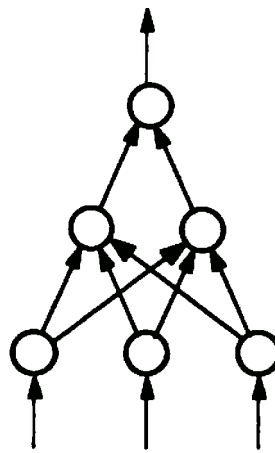


Figura 3.9 - Rede multi-camadas para frente.

- **rede camada-única lateralmente conectada** (Figura 3.10) - possui somente uma camada de neurônios e a informação é transmitida lateralmente;

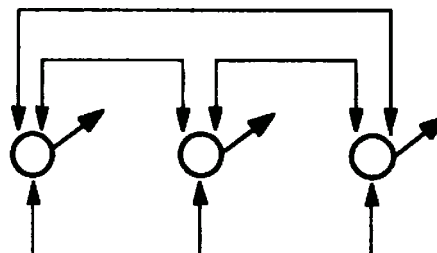


Figura 3.10 - Rede camada-única lateralmente conectada.

- **rede com duas camadas para trás e para frente** (Figura 3.11) - o fluxo de informações entre as camadas da rede se dá nos dois sentidos (da entrada para

a saída e da saída para a entrada), sendo que as conexões possuem pesos específicos para cada sentido;

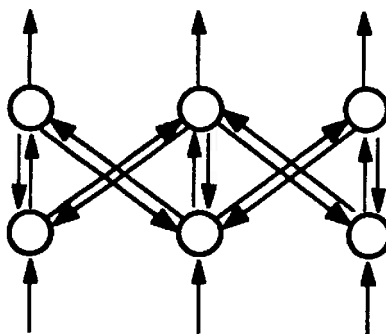


Figura 3.11 - Rede duas camadas para trás e para frente.

- **rede multi-camadas cooperativa/competitiva** (Figura 3.12) - possuem conexões laterais que inibem ou excitam os sinais.

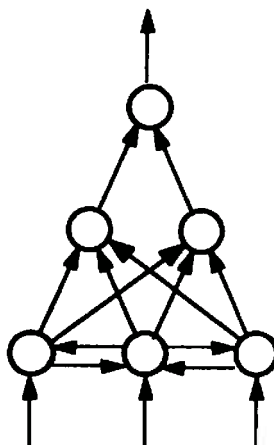


Figura 3.12 - Rede multi-camadas cooperativa/competitiva.

### 3.2.4 Treinamento

O conhecimento “aprendido” está distribuído por toda a RNA e armazenado nos valores dos pesos das ligações. O treinamento consiste em ajustar os pesos das ligações para que a RNA execute sua finalidade. Existem duas formas de treinamento:

- **Treinamento supervisionado.** É realizado com o uso de um conjunto de pares de treinamento. Cada par de treinamento consiste no vetor de entrada e no vetor de saída esperado. Os pares de treinamento são apresentados à RNA

e um erro é medido com relação aos vetores de saída esperados e os fornecidos pela RNA. Um algoritmo iterativo é utilizado para ajustar os pesos das ligações entre os neurônios até que o erro seja considerado aceitável. O algoritmo mais utilizado para treinamento supervisionado é a retro-propagação de erros (“backpropagation”).

- **Treinamento não supervisionado.** Este tipo de treinamento dispensa os valores de saída e usa somente os valores de entrada. A RNA aprende a classificar os valores de entrada segundo um critério próprio. A aplicação mais comum deste tipo de RNA é o de identificar categorias para agrupar os dados de entrada desenvolvendo uma medida de distância.

### 3.3 Tipos de RNA's

Artigos e livros são encontrados apresentando os mais diversos paradigmas de RNA's mostrando as virtudes e (algumas vezes omitindo) os defeitos de cada um. Uma RNA realiza basicamente a mesma atividade qualquer que seja o paradigma utilizado: a partir de um vetor de entrada obtém um vetor de saída correspondente.

Para escolher o paradigma adequado para uma aplicação específica, deve-se levar em conta três aspectos (73):

- 1) **Paradigmas adequados para aproximar funções ou classificadores.** Uma distinção é feita entre paradigmas que realizam o mapeamento dos vetores de forma contínua daqueles que classificam os vetores de entrada em grupos de semelhantes.
- 2) **Paradigmas que requerem treinamento supervisionado ou não supervisionado.** O treinamento supervisionado exige um conjunto de dados para treinamento composto por pares de vetores de entrada e de saída que são apresentados à rede. O treinamento se processa através do ajuste dos pesos na rede de forma a minimizar uma medida de erro. O treinamento não supervisionado necessita apenas de vetores de entrada. Baseado em uma

medida de distância os vetores de entrada são agrupados de forma que vetores similares produzam o mesmo vetor de saída.

- 3) **Paradigmas recorrentes ou não recorrentes.** Nos paradigmas recursivos o vetor de saída depende do vetor de entrada e do estado atual da rede resultante, por exemplo, de vetores de entrada anteriores. São indicados para simularem sistemas dinâmicos. Os paradigmas não recursivos realizam um mapeamento estático dos vetores. O estado da rede não se altera com seu uso, ou seja, para um mesmo vetor de entrada obtém-se o mesmo vetor de saída.

Os diversos paradigmas de RNA's diferem entre si pela arquitetura, pelos algoritmos de treinamento e pelo desempenho em determinadas aplicações (55). Os principais paradigmas são:

- ADALINE (Adaptive Linear Neural Element);
- ART (Adaptive Resonant Theory);
- BAM (Bidirectional Associative Memory);
- Boltzmann Machine;
- BSB (Brain-State-in-a-Box);
- Cascor (CascadeCorrelation);
- Cauchy Machine;
- CPN (Counter Propagation);
- GRNN (Generalized Regression Neural Network);
- Hamming;
- Hopfield;
- LVQ (Learning Vector Quantization);
- MADALINE;
- MLFF-BP (Multilayer Feedforward Backpropagation);
- Neocognitron;
- NLN (Neurologic Network);
- Perceptron;



- PNN (Probabilistic Neural Network);
- RBF (Radial Basis Function);
- RNN (Recurrent Neural Network);
- RCE (Reduced Coulomb Energy);
- SOFM (Self-Organizing Feature Map).

Os paradigmas principais podem ser classificados quanto ao tipo de treinamento (Tabela 3.2).

**Tabela 3.2 - Classificação de paradigmas de RNA's por tipo de treinamento.**

<b>Treinamento</b>	
<b>Supervisionado</b>	<b>Não Supervisionado</b>
ADALINE	ART
Boltzmann	Hopfield
Cascor	LVQ
GRNN	Neocognitron
Hopfield	SOFM
LVQ	
MLFF-BP	
PNN	
RBF	
RNN	
RCE	

A maioria das aplicações práticas de RNA's utilizam um número pequeno de paradigmas. O motivo é que os paradigmas são escolhidos para uma aplicação devido a relatos de sucessos em outras aplicações semelhantes. Isto faz com que alguns paradigmas se tornem muitos populares e extensamente utilizados, mesmo em casos em que suas características não são as mais adequadas.

### 3.4 História das RNA's

O trabalho que deu início às RNA's foi publicado em 1943 por Warren McCulloch e Walter Pitts. No artigo "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity" apresentaram uma teoria geral sobre processamento paralelo de informações baseados em redes binárias, onde descreveram as propriedades de um neurônio.

Em 1949, Hebb descreveu um mecanismo de aprendizado baseado no reforço das ligações sinápticas pela repetição do uso. Assim, se uma determinada ligação entre neurônios é usada com maior frequência, então ela cresce em importância aumentando a seu peso. Segundo Hebb o conhecimento estaria armazenado na configuração das ligações sinápticas. Este processo de aprendizado constituiu a base para o desenvolvimento das RNA's.

Em 1958, Frank Rosenblatt e seus colaboradores desenvolveram o "perceptron." Sua forma mais simples consiste em uma rede formada por duas camadas: a camada de entrada e a camada de saída. Cada elemento da camada de entrada se conecta com todos os neurônios da camada de saída e os neurônios de uma mesma camada não se conectam entre si. Os sinais vão da entrada para a saída, não percorrendo o sentido inverso. Portanto, o fluxo de informações é direcional e para frente ("feed-forward").

Rosenblatt desenvolveu um algoritmo para treinar o perceptron. Provou a convergência de um método para mudar os pesos iterativamente até que um cálculo desejado fosse executado. Os resultados obtidos com o perceptron geraram grandes expectativas.

Alguns anos depois, o perceptron foi duramente criticado por Minsky e Papert. No livro "Perceptrons" publicado em 1969, Minsky e Papert mostraram a incapacidade do perceptron em resolver o problema trivial da função lógica XOR. As pesquisas no campo das redes neurais estagnaram devido a este trabalho. Alguns poucos pesquisadores continuaram a trabalhar no assunto. Este panorama durou quase duas décadas.

Minsky e Papert eram cientistas do MIT envolvidos com pesquisas relacionadas com sistemas especialistas, que na época concorriam com as RNA's na busca de recursos junto ao governo norte-americano. Erraram ao generalizar as limitações observadas no perceptron sem camadas intermediárias para o perceptron com muitas camadas.

Durante os anos 70 as pesquisas com RNA's foram discretas, porém consistentes. Widrow desenvolveu a rede MADALINE utilizada atualmente como supressor de ecos em chamadas telefônicas de longa distância e como supressor de ruído em modems com altas taxas de transmissão.

Hopfield publicou em 1982, um trabalho com RNA's aplicadas na solução de problemas de restrição: "N Queens" e "Traveling Salesman Problem". Desenvolveu RNA's que hoje levam seu nome. O fato de ser prêmio Nobel em física, originou uma grande interesse pelos resultados e chamou a atenção para o assunto.

Em 1986, Rumelhart provou a capacidade do perceptron de resolver o problema da função XOR, desde que ele possuísse ao menos uma única camada oculta.

Rumelhart desenvolveu um algoritmo para ajustar os pesos de RNA's multi-camadas. Este algoritmo é conhecido como retro-propagação de erros ("backpropagation") e se tornou muito popular. Nos anos seguintes, as pesquisas relacionadas ao campo das redes neurais se intensificaram. Atualmente existem dezenas de tipos de redes utilizadas nas mais diversas aplicações.

### **3.5 Retro-propagação de erros ("backpropagation")**

A natureza geral do método de treinamento por retro-propagação de erros torna a rede multi-camadas para frente a RNA com maior número de utilizações relatadas. Aplicações com este tipo de RNA são encontrados em todas áreas que utilizam RNA's para resolver problemas que necessitam de treinamento supervisionado.

Uma rede multi-camada com uma camada oculta é mostrada na Figura 3.13. As unidades de saída e as unidades da camada oculta podem também receber valores de "bias" (como mostrado). A informação flui durante a utilização da rede na direção indicada na

figura. Durante a fase de retro-propagação de erros do treinamento (comentado a seguir) os sinais são enviados no sentido contrário ao indicado.

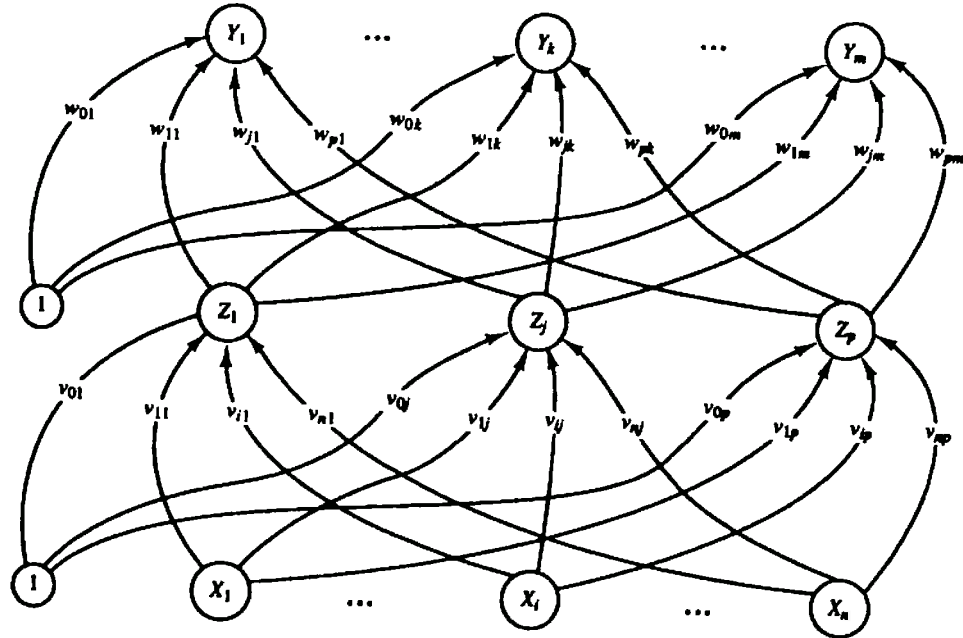


Figura 3.13 - RNA do tipo retro-propagação de erros com uma camada oculta.

O treinamento de uma RNA por retro-propagação de erros tem três etapas:

- a propagação para frente (da entrada para a saída) dos valores de entrada do par de treinamento;
- a retro-propagação do erro associado; e
- o ajuste dos pesos das ligações.

Durante a propagação para frente cada unidade de entrada  $X_i$  recebe um sinal e o transmite para cada unidade na camada oculta  $Z_1, \dots, Z_p$ . Cada unidade da camada oculta calcula seu sinal de ativação ( $z_j$ ) e o transmite para cada unidade da camada de saída  $Y_k$ . Finalmente cada unidade de saída calcula seu sinal de ativação ( $y_k$ ) gerando a resposta da RNA para o dado vetor de entrada.

Durante o treinamento, cada unidade de saída compara seu sinal de ativação computado com o valor esperado ( $t_k$ ) determinando o erro associado para aquele vetor de treinamento para aquela unidade de saída  $\delta_k$  ( $k=1, \dots, m$ ).  $\delta_k$  é usado para distribuir o erro na unidade de saída  $Y_k$  de volta para todas as unidades na camada anterior (as unidades da

camada oculta conectados a  $Y_k$ ). Da mesma forma, o fator  $\delta_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) é calculado para cada unidade da camada oculta  $Z_j$ .

Depois que todos os fatores  $\delta$  são determinados, todos os pesos de todas as camadas são ajustados simultaneamente. O ajuste do peso  $w_{jk}$  (da unidade da camada oculta  $Z_j$  para a unidade de saída  $Y_k$ ) é baseado no fator  $\delta_k$  e no valor de ativação  $z_j$  da unidade da camada oculta  $Z_j$ . O ajuste do peso  $v_{ij}$  (da unidade de entrada  $X_i$  para a unidade da camada oculta  $Z_j$ ) é baseada no fator  $\delta_j$  e no valor de ativação  $x_i$  da unidade de entrada.

Após o treinamento o uso da rede se resume à fase de propagação para a frente dos valores de entrada. São necessários cálculos simples para se obter um vetor de saída para um dado vetor de entrada.

O algoritmo de treinamento por retro-propagação de erros é o seguinte (26):

Passo 0

Inicializar os pesos (valores pequenos aleatórios).

Passo 1

Enquanto a condição de parada for falsa repetir os passos 2 a 9.

Passo 2

Para cada par de treinamento executar os passos 3 a 8.

*(Propagação dos valores de entrada)*

Passo 3

Cada unidade de entrada ( $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ) recebe um sinal  $x_i$  e o transmite para todas as unidades da camada seguinte (camada oculta).

Passo 4

Cada unidade da camada oculta soma os sinais que recebe multiplicados pelos pesos das respectivas ligações

$$z_{in_j} = v_{0j} + \sum_{i=1}^n x_i v_{ij}$$

**Equação 3.1**

aplica a função de transferência para calcular o seu sinal de ativação

$$z_j = f(z_{in_j})$$

Equação 3.2

e o transmite para todas as unidades na camada seguinte (camada de saída).

Passo 5

Cada unidade de saída ( $Y_k$ ,  $k=1, \dots, m$ ) soma os sinais que recebe multiplicados pelos pesos das respectivas ligações

$$y_{in_k} = w_{ok} + \sum_{j=1}^p z_j w_{jk}$$

Equação 3.3

e aplica sua função de ativação para calcular o sinal de saída

$$y_k = f(y_{in_k}).$$

Equação 3.4

*(Retro-propagação de erros)*

Passo 6

Os valores obtidos nas unidades de saída ( $Y_k$ ,  $K=1, \dots, m$ ) são comparados com os valores esperados correspondentes aos valores de entrada para aquele par de treinamento e calculam um valor de erro:

$$\delta_k = (t_k - y_k) f'(y_{in_k}).$$

Equação 3.5

O termo para correção dos pesos é calculado

$$\Delta w_{jk} = \alpha \delta_k z_j$$

Equação 3.6

e também o termo para correção do peso do bias

$$\Delta w_{ok} = \alpha \delta_k.$$

Equação 3.7

$\delta_k$  é enviado para a camada anterior.

Passo 7

Cada unidade da camada oculta ( $Z_j$ ,  $j=1, \dots, p$ ) soma os valores recebidos

$$\delta_{in_j} = \sum_{k=1}^m \delta_k w_{jk}$$

Equação 3.8

e multiplica o resultado pela derivada da função de transferência para calcular o valor do erro

$$\delta_j = \delta_{in_j} f'(z_{in_j}).$$

Equação 3.9

O termo para correção dos pesos é calculado

$$\Delta v_{ij} = \alpha \delta_j x_i$$

Equação 3.10

e também o termo para correção do peso do bias

$$\Delta v_{0j} = \alpha \delta_j$$

Equação 3.11

(Ajuste dos pesos)

### Passo 8

Cada unidade de saída ( $Y_k, k=1, \dots, m$ ) ajusta seus pesos ( $j=0, \dots, p$ )

$$w_{jk}(\text{new}) = w_{jk}(\text{old}) + \Delta w_{jk}.$$

Equação 3.12

Cada unidade da camada oculta ( $Z_p, j=1, \dots, p$ ) ajusta seus pesos ( $j=0, \dots, p$ )

$$v_{ij}(\text{new}) = v_{ij}(\text{old}) + \Delta v_{ij}$$

Equação 3.13

### Passo 9

Teste da condição de parada.

Mesmo que uma camada oculta seja suficiente para resolver qualquer problema de aproximação de função, existem casos que são resolvidos de forma mais simples usando uma rede com duas (Figura 3.14) ou mais camadas.

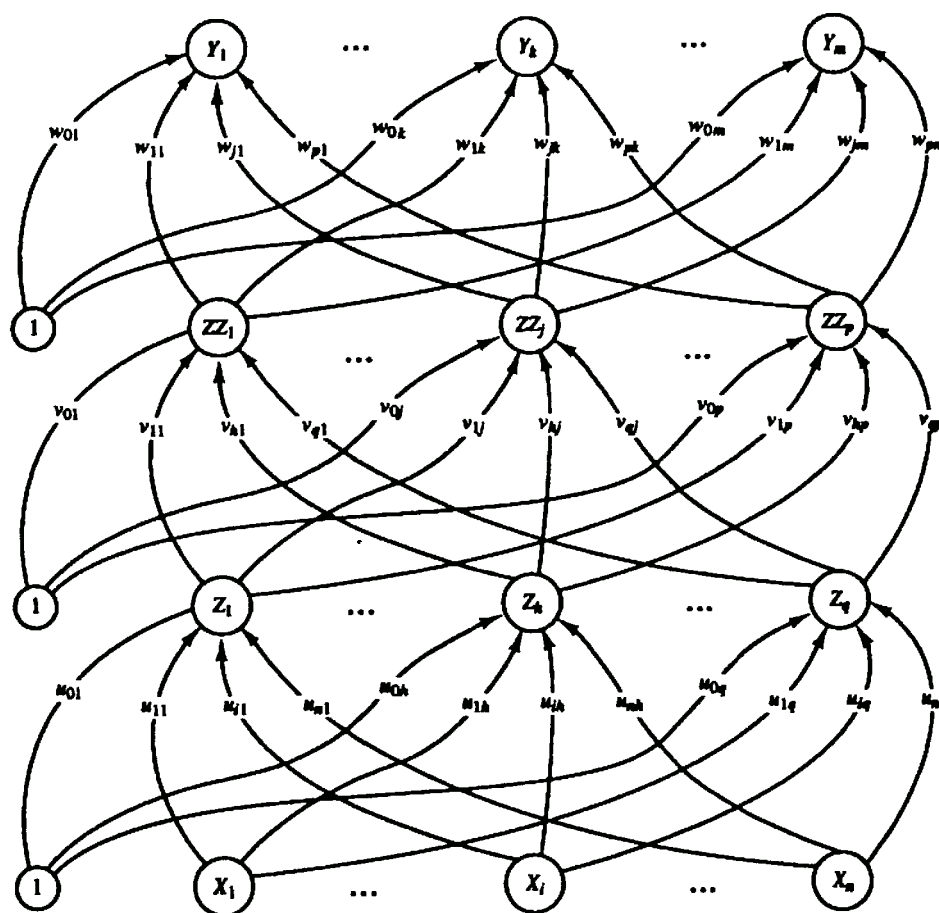


Figura 3.14 - RNA do tipo retro-propagação de erros com duas camadas ocultas.

Algumas decisões precisam ser tomadas para se usar uma RNA do tipo retro-propagação de erros. As principais são: quantidade de camadas ocultas, número de neurônios por camadas e número de pares de treinamento. Não existe até o momento uma forma objetiva de se definir os parâmetros acima para uma dada aplicação. Os critérios usados são baseados na experiência do usuário. A definição destes parâmetros é a grande dificuldade presente no uso deste tipo de RNA.



## 4. Revisão Bibliográfica

### 4.1 Introdução

Os objetivos desta pesquisa bibliográfica foram:

- verificar o estágio de desenvolvimento dos modelos constitutivos de materiais com comportamento viscoelástico;
- relacionar as aplicações de RNA's como modelos constitutivos de materiais, com atenção especial para materiais viscoelásticos;
- buscar respostas para as dificuldades existentes no uso de RNA's, sendo as principais delas: síntese da RNA (estabelecimento da arquitetura) e a formação do conjunto de dados para treinamento.

A bibliografia selecionada foi classificada nos seguintes tópicos para facilitar o entendimento:

- viscoelasticidade não linear - equações constitutivas;
- textos introdutórios às RNA's;
- RNA's no comportamento de materiais;
- RNA's como aproximadores;
- síntese de RNA's;
- aplicações de RNA's.

### 4.2 Viscoelasticidade não linear - equações constitutivas.

Em 1971, RABOTNOV et al. (62) buscaram descrever o comportamento não linear de materiais poliméricos através de uma relação entre a teoria de Volterra-Fréchet e a teoria da integral hereditária. O caso analisado foi o de tensão uniaxial. A complexidade matemática do modelo resultante é grande, o que dificulta sua utilização.

Em 1974, BRERETON et al. (8) desenvolveram uma equação constitutiva na forma implícita entre as variáveis tempo, deformação e tensão. Para sua utilização foram

realizadas simplificações na forma das funções-resposta envolvidas. Foram previstos o comportamento de alguns materiais (PET - polietileno tereftalado, PP - polipropileno e PMMA polimetilmetacrilato) à fluência, à relaxação de tensões e à taxa de deformação constante. Os resultados obtidos apresentam “boa precisão” segundo os autores. A equação constitutiva na forma implícita, como apresentada, pode ser usada com certa facilidade no caso uniaxial. Para os casos com solicitações biaxiais ou triaxiais a equação constitutiva na forma implícita é impraticável por sua complexidade matemática.

Em 1984, NISHITANI; KOTANI (54) propuseram uma equação constitutiva para prever a fluência transiente de materiais com comportamento viscoelástico não lineares incluindo o efeito da pressão hidrostática. A fluência transiente é o estágio inicial da fluência caracterizado pela diminuição da taxa de deformação com o tempo. Foram examinados o comportamento sob fluência de dois polímeros: o nitrato de celulose e o acetato de celulose. Os resultados teóricos foram confrontados com dados experimentais para validar a equação constitutiva proposta. Os autores sugerem o uso desta equação constitutiva para outros polímeros. Porém, pode-se questionar a utilidade prática do modelo já que refere-se somente à fluência transiente. Apenas os primeiros 100 minutos da fluência foram considerados nos exemplos do artigo.

BUCKLEY (10) apresentou em 1985 um procedimento para a previsão de fluência em objetos feitos de polímeros submetidos a carregamentos multiaxiais. O autor fez a hipótese de isotropia do material e utilizou o método para dados de fluência combinada (tração e torção). O tempo de observação dos ensaios utilizados foi extremamente curto: 120 segundos, comprometendo a utilidade prática dos resultados.

No ano seguinte, NG;WILLIAMS (52) realizaram ensaios em poliésteres aromáticos submetidos a taxas de deformação constante. As curvas tensão-deformação obtidas foram usadas para ajustar parâmetros de equações constitutivas unidimensionais e tridimensionais com o objetivo de prever as propriedades viscoelásticas não lineares destes polímeros. As curvas tensão-deformação puderam ser reconstituídas através das equações constitutivas. Os melhores resultados foram conseguidos através das equações

unidimensionais. Em 1987 (53), as mesmas equações e os mesmos parâmetros foram utilizados para tentar prever as curvas de fluência e relaxação de tensão para os poliésteres aromáticos ensaiados. Surpreendentemente o comportamento previsto pelas equações tridimensionais foram mais precisos que os previstos pelas equações unidimensionais.

Em 1987, BRUELLER (9) descreveu um procedimento de ajuste de curvas de fluência ou de relaxação de tensão usando séries de Prony-Dirichlet. Fatores não lineares obtidos com o método dos mínimos quadrados multiplicam os coeficientes dos termos da série. Desta forma, o procedimento permite caracterizar o comportamento viscoelástico não linear do material. Resultados de ensaios permitiram avaliar a precisão do procedimento de ajuste de curvas descrito, considerada “boa” pelo autor.

Em 1989, KITAGAWA; MATSUTANI (44) realizaram ensaios de compressão uniaxial em barras de polipropileno em várias temperaturas e diferentes condições: taxas de deformação constante, mudanças bruscas da taxa de deformação, relaxação de tensão, fluência e suas combinações. O objetivo era investigar as propriedades viscoelásticas e plásticas e verificar a validade das equações constitutivas baseadas na teoria de sobre-tensão (“over-stress theory”) proposta por Krempl em 1979. Os comportamentos previstos pelas equações constitutivas estiveram de acordo com os comportamentos observados experimentalmente.

No ano seguinte, GLOCKNER; SZYSZKOWSKI (36) retomaram as discussões sobre uma equação constitutiva multiaxial (35) que permite modelar várias características do material: resposta elástica, fluência, recuperação, etc. A equação foi usada para prever o comportamento de alguns materiais com o objetivo de verificar sua capacidade e versatilidade. Os casos estudados foram: fluência do gelo, asbesto, cobre, asfalto, concreto e PVC; recuperação do gelo e de asbesto; e fluência do gelo sob compressão. Somente o caso de carregamento uniaxial foi abordado e o efeito de algumas das hipóteses simplificadoras adotadas pelos autores não puderam ser analisadas. Por exemplo, a isotropia dos materiais.

### 4.3 Textos introdutórios às RNA's

Os livros de MAREN (49) e HERTZ (40) são leituras indicadas para o primeiro contato com o assunto RNA's. MAREN (49) discute o aparecimento das RNA's, os tipos básicos, os principais algoritmos de treinamento e aplicações em diversas áreas. HERTZ (40) escreveu uma obra introdutória ao assunto, com fatos históricos sobre as RNA's. Ambos mostram em ordem cronológica os desenvolvimentos teóricos das RNA's e extensa bibliografia.

Em 1990, WIDROW (75) publicou um artigo com um resumo dos desenvolvimentos das RNA's ocorridos nos últimos trinta anos. Indica as principais referências bibliográficas sobre RNA's.

Livros introdutórios sobre RNA's foram publicados nos últimos quatro anos. Todos apresentam os conceitos principais sobre RNA's e variam conforme a atenção dispensada a tópicos específicos: WASSERMAN (73) discute as dificuldades do uso de RNA's; FAUSETT (26) mostra muitos dos paradigmas de RNA's conhecidos; TAFNER et al.(68) tenta ser acessível tratando os conceitos sem entrar em detalhes e usando exemplos; KOVÁCS (45) é rigoroso no tratamento matemático; PATTERSON (57) é atual e completo no conjunto de paradigmas apresentados.

### 4.4 RNA's para modelar o comportamento de materiais

Em 1991 GHABOUSSI (33) iniciou o uso de RNA's para modelar o comportamento de materiais. Desenvolveu um trabalho utilizando RNA's para simular o comportamento do concreto em estado plano de tensões para duas condições de carregamento: biaxial e cíclico uniaxial. Os resultados preliminares foram "promissores".

Segundo GHABOUSSI, a principal dificuldade nas pesquisas sobre como modelar materiais com comportamentos complexos é a construção de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos são constituídos por regras e expressões capazes de descrever as relações entre tensões e deformações e têm sido desenvolvidos sempre da mesma maneira:

- 1) o material é testado e seu comportamento observado;
- 2) um modelo matemático é postulado para explicar o comportamento observado e parâmetros do material são determinados;
- 3) o modelo matemático é usado para prever comportamentos não testados e é confrontado com resultados de novos experimentos;
- 4) o modelo matemático é então modificado para levar em conta comportamentos observados mas não previstos pelo modelo.

GHABOUSSI aponta as RNA's como uma nova abordagem para a representação do comportamento de materiais. As RNA's constituem uma ferramenta computacional capaz de capturar e armazenar o conhecimento a respeito do comportamento do material diretamente dos dados experimentais. A capacidade de organização de conhecimento das RNA's faz com que o comportamento do material seja apreendido nas conexões (pesos) entre neurônios. A capacidade de generalização das RNA's permite o uso dessas informações. Nenhuma regra matemática formal ou fórmulas são utilizadas.

GHABOUSSI diz que a limitação apresentada pelos modelos de RNA's é a sua incapacidade de explicar o comportamento do material, e que esta limitação pode ser superada pela capacidade de representar a informação contida nos dados de treinamento de forma mais genérica do que os modelos baseados em equações matemáticas. Esta afirmação revela uma confusão por parte do autor a respeito dos contextos nos quais é necessário para modelar materiais. Certamente uma abordagem baseada em regras formais é mais adequada que uma abordagem tipo "caixa-preta" quando o objetivo é explicar o comportamento de um material. Por outro lado, não é necessário explicar o comportamento do material quando o objetivo é simular seu comportamento em um projeto mecânico e, portanto, uma abordagem tipo caixa-preta pode ser utilizada.

GHABOUSSI cita as possibilidades do uso de RNA's para modelar materiais, mas é genérico nas suas limitações. Mostra alguns pontos a serem esclarecidos antes de se tornar viável o uso de RNA's para representar o comportamento de materiais:

- **Especificação da quantidade de dados para treinar a RNA.** O volume de casos para treinamento de uma RNA e sua distribuição no domínio que se deseja representar são determinados por tentativa e erro.
- **Determinação da arquitetura da RNA.** A arquitetura de uma RNA, normalmente é obtida empiricamente e por processos subjetivos ("experiência do analista", "feeling", e outros do mesmo gênero).
- **Entendimento do funcionamento das RNA's.** As capacidades de generalização e de auto-organização das RNA's ainda são pouco conhecidas.

Segundo GHABOUSSI modelos confiáveis de comportamento de materiais baseados em RNA's podem ser incorporados em programas de elementos finitos como alternativa para a representação de materiais complexos que estão atualmente em uso.

Em 1993, PIDAPARTI (58) usou RNA's tipo "back-propagation" para desenvolver um modelo do comportamento tensão-deformação do laminado grafite-epoxi sobre carregamento cíclico. Concluiu dos resultados obtidos que RNA's podem ser usadas para modelar materiais compostos.

PIDAPARTI afirma que modelos baseados em RNA's fornecem melhores soluções que os métodos convencionais, como por exemplo a regressão não-linear, para tratar de grandes conjuntos de dados e com ruídos. Porém, não diz o que o levou a esta conclusão.

Para avaliar a adequação do uso de RNA's para modelar o comportamento de materiais, PIDAPARTI sugere usar modelos matemáticos como fonte de dados para treinamento quando dados experimentais não são disponíveis. Pode-se desta forma determinar a quantidade de dados de treinamento necessário a uma determinada arquitetura de RNA para representar o comportamento de um material, e ainda melhorar o entendimento do funcionamento de RNA's para este tipo de aplicação.

Em 1994, OKUDA et al. (56) usaram RNA's para modelar materiais viscoplásticos ao invés de equações constitutivas. O objetivo era estimar a deformação de materiais expostos a condições de carregamento cíclico. O conceito de tensões internas foi

utilizado: a tensão total é a soma das tensões internas (“back stress” e “yield stress”). O comportamento de *tensão interna*  $\times$  *deformação plástica* foi representada por uma RNA diferente para cada tensão interna. As RNA's usadas foram do tipo “back-propagation” com 3 camadas de neurônios. A tensão total foi obtida da soma dos valores apresentados pelas RNA's para as tensões internas.

Os autores usaram dados “pseudo-experimentais” para o treinamento das RNA's. Os pares de treinamento vieram de expressões analíticas que representam as tensões internas e não de ensaios.

OKUDA et al. apontam como pontos favoráveis no uso de RNA's para modelar materiais:

- condições não usadas no treinamento são estimadas pelas RNA's;
- uma vez terminado o processo de treinamento, pouco esforço computacional é necessário para obter valores de saída da RNA.

Em 1996, QINGBIN et al. (61) desenvolveram um modelo constitutivo com RNA's para um material com comportamento viscoelástico: o 12Cr2Ni4A. Usaram uma RNA do tipo “back-propagation” com 4 camadas. O problema consiste em determinar o valor da tensão de compressão que causa no material uma determinada taxa de deformação para dada deformação e dada temperatura. Desta forma, as entradas da RNA são a taxa de deformação, a deformação e a temperatura e a saída é o valor de tensão. Dados experimentais foram usados no treinamento da RNA. O número de neurônios nas camadas ocultas foi determinado por tentativa e erro. A RNA final apresenta erro máximo de 9% para os valores de tensão em casos não utilizados no treinamento, o que é encarado como resultado encorajador pelos autores.

No mesmo ano, GHABOUSSI et al. (33) apresentaram um engenhoso procedimento para gerar modelos constitutivos a partir de ensaios de materiais. Segundo os autores, um único ensaio de material pode conter informações em quantidade semelhante ao de uma bateria de testes. O uso de RNA's para modelar o comportamento do material torna possível a extração de muitas informações de um simples ensaio. O

procedimento consiste basicamente em combinar análises não lineares utilizando o método dos elementos finitos e RNA's. O ensaio é representado através de modelos de elementos finitos e serve como fonte de dados de treinamento para a RNA. Como exemplo foi desenvolvido um modelo constitutivo do grafite-epoxi laminado. O corpo de prova no formato de uma placa com furo foi submetido a um ensaio destrutivo de compressão e a história de carregamento x deflexão foi armazenada. A inclinação da direção característica da lâmina de grafite-epoxi era de 45° no corpo de prova. Valores de deformação e tensão para cada acréscimo de carregamento no corpo de prova foram obtidos do modelo de elementos finitos do ensaio e usados no treinamento da RNA. Para validar o procedimento a RNA foi usada para prever o comportamento de um corpo de prova cuja lâmina de grafite-epoxi tinha inclinação da direção característica de 30° . Os resultados podem ser considerados bons segundo os autores.

ARSLAN;INCE (2) modelaram o efeito do tamanho de trinca na fratura do cimento. Os corpos de prova continham entalhes que simulavam a presença de trincas. Vários corpos de prova foram ensaiados sob diversas condições de carregamento e RNA's do tipo "back propagation" foram treinadas com os dados experimentais. Parâmetros indicadores da influência do tamanho da trinca na fratura obtidos em ensaios e não usados no treinamento das RNA's são comparados com resultados obtidos pelas RNA's. Segundo os autores a precisão dos valores apresentados pelas RNA's são adequados para a maioria das aplicações.

ARSLAN;INCE apresentam as seguintes vantagens no uso de RNA's:

- não necessita informações a priori a respeito do material;
- são treinadas a partir de dados de ensaios.

ARSLAN;INCE apontam as RNA's como adequadas para problemas cuja solução consome muito tempo e/ou quando o procedimento de solução é baseado em aproximações empíricas.

Ainda em 1996, SUMPTER;NOID (66) fizeram um apanhado de aplicações de RNA's no estudo de materiais. Diversos trabalhos estão relacionados nas seguintes áreas:



auxílio à espectrografia, processamento de sinais de sensores, previsão de propriedades a partir da estrutura do material, previsão de reações químicas específicas, otimização e controle de processos de produção de materiais e modelamento de materiais. No caso de modelamento de materiais são citadas somente 7 referências num total de 364 trabalhos relacionados.

Em 1997, DOVSTAM;DALENBRING (19) propuseram um método misto para estimar o amortecimento de materiais isotrópicos e homogêneos. Os parâmetros das forças de amortecimento são estimados por RNA's do tipo "back propagation" combinadas com modelos analíticos. O método exige medidas estáticas de módulo de elasticidade e de coeficiente de Poisson a determinação de modos de vibração livre e outros parâmetros modais com o uso de modelos de elementos finitos. Comparações com medidas feitas em ensaios dinâmicos mostraram boa precisão dos resultados obtidos pelo método proposto.

#### **4.5 RNA's como aproximadores**

Em 1989, HORNIK (41) provou que as RNA's multi-camadas para frente ("standart multilayer feedforward networks") com pelo menos uma camada oculta são capazes de aproximar qualquer função mensurável com qualquer grau de precisão desejado. Este resultado estabelece que RNA's multi-camadas para frente constituem uma classe de aproximadores universais. Portanto, uma falta de sucesso em aplicações deste tipo de RNA deve-se ao aprendizado inadequado, número insuficiente de unidades (neurônios) na camada oculta ou a falta de relação entre os valores de entrada e saída da RNA.

Em 1992, JOSEPH (42) realizou uma comparação entre métodos de regressão e RNA's multi-camadas para frente na aquisição de conhecimento. As conclusões foram obtidas de uma aplicação de ambos os métodos para especificar a pressão e temperatura no processo de cura de materiais compósitos em autoclave. O processo em autoclave não é completamente compreendido e o conhecimento a seu respeito é obtido de dados históricos. As maiores dificuldades para a aquisição deste tipo de conhecimento, segundo

JOSEPH, são as impostas pelos operadores humanos e o fato de que o conhecimento muda com o tempo.

A regressão é uma técnica clássica para encontrar relações entre variáveis. Um requisito necessário para o uso de regressão é que os dados sejam bem distribuídos, além disso os métodos de regressão apresentam dificuldades com dados de fenômenos não lineares.

No caso de RNA's, JOSEPH comenta que a seleção da arquitetura depende da natureza das entradas, da disponibilidade de dados e das dificuldades com não linearidades, porém não cita como isto pode ser feito. Outro aspecto apontado é que conhecimento numa RNA é não explícito. As RNA's apresentam maior adaptabilidade e são de modificação fácil, mas dificultam a explicação e a integração do conhecimento.

Como conclusão dos testes que realizou, JOSEPH aponta como vantajosa a utilização de RNA's em casos em que os dados disponíveis apresentam ruídos, e quando os fenômenos são não lineares.

Ainda em 1992, DONNE (18) apresentou uma comparação entre RNA's multicamadas para frente e métodos convencionais para modelar sistemas e previsão. Usou dois exemplos: acompanhamento da trajetória de um corpo em queda livre e uma estrutura espacial flexível. Os exemplos são apresentados como "caixa-preta".

O procedimento convencional geral para a identificação de sistemas é o seguinte:

- 1) decide-se a estrutura do modelo;
- 2) com os dados de entrada/saída disponíveis gravados em um determinado intervalo de tempo, estima-se os parâmetros do modelo, utilizando-se técnicas da "teoria da estimação";
- 3) valida-se o modelo comparando-se diversas respostas.

Nos exemplos analisados, as RNA's apresentaram resultados com precisão pelo menos tão boa quanto os métodos convencionais. Segundo DONNE, a RNA necessita de poucas descrições "a priori" da estrutura do modelo e trabalha mais facilmente com o problema de parâmetros insuficientes ("underparametrization"). A principal vantagem no

uso das RNA's é que nenhuma técnica de aproximação numérica é necessária, pois a dinâmica não-linear do sistema está impregnada nos pesos das conexões da RNA.

Em 1994, CARPENTER (11) apresentou casos que mostram "mal-entendidos" sobre o uso de RNA's como aproximadores quando comparados com aproximadores polinomiais:

- 1) Mal-entendido: *Aproximações por RNA's são superiores a outros tipos de aproximadores matemáticos, como por exemplo aproximação polinomial.*
- 2) Mal-entendido: *RNA's podem ser treinadas com menos pares de treinamento do que outros tipos de aproximadores.*
- 3) Mal-entendido: *RNA's são menos sensíveis aos dados de treinamento que outros tipos de aproximações.*
- 4) Mal-entendido: *Aproximações por RNA's são tão fáceis de se obter quanto outros tipos de aproximações, como por exemplo aproximações polinomiais.*

Os argumentos utilizados por CARPENTER são no sentido de não generalizar as frases acima, sendo necessário critério e cuidado em cada aplicação. Para os "mal-entendidos" 1, 2 e 3 os contra-exemplos são baseados em RNA's "indeterminadas", ou seja, aquelas em que o número de pares de treinamento usados é menor que o número de pesos associados à RNA. Para o "mal-entendido" 4 o contra-exemplo é o fato de que o treinamento das RNA's pode ser muito demorado nos computadores atuais.

#### 4.6 Síntese de RNA's

Em 1990, HARP (38) propôs a utilização do algoritmo genético ("genetic algorithm") na síntese de RNA's para aplicações específicas. É um procedimento iterativo de otimização que produz "gerações" de RNA's cada vez melhores para uma dada aplicação:

- 1) inicialmente um conjunto de RNA's iniciais têm suas características armazenadas em "strings";
- 2) as RNA's são geradas, treinadas e testadas para a aplicação específica;

- 3) as RNA's são classificadas segundo critérios para definir sua "saúde" para uma dada aplicação;
- 4) são utilizados "operadores genéticos" como por exemplo o "cruzamento" de duas RNA's gerando uma RNA "filha";
- 5) quanto mais "saudável" for uma RNA, maior a possibilidade de ser escolhida como um dos pais de uma RNA;
- 6) novas gerações de RNA's são obtidas procurando-se um aprimoramento da espécie para uma aplicação específica.

Segundo HARP, a desvantagem do algoritmo genético é o grande esforço computacional necessário para se obter uma RNA com as características desejadas.

Em 1990, FAHLMANN (22) definiu o "cascade-correlation learning architecture" (Cascor): *"é uma nova arquitetura e algoritmo supervisionado de aprendizado para RNA's artificiais. Ao invés de apenas ajustar os pesos em uma RNA de topologia fixa, o "cascade-correlation" inicia com uma estrutura mínima, então automaticamente treina e adiciona novas unidades ocultas, uma a uma, criando uma estrutura de várias camadas"*.

FAHLMANN aponta como vantagens do Cascor com relação a outros algoritmos em uso:

- não é necessário "adivinhar" o tamanho e o padrão de conectividade da RNA de início, pois uma RNA razoavelmente pequena é automaticamente construída e a RNA determina seu próprio tamanho e topologia;
- é treinado mais rapidamente que uma RNA que utiliza o algoritmo de retro-propagação;
- é capaz de reter a estrutura que construiu mesmo se o conjunto de treinamento mudar (aumentar);
- não requer a propagação de sinais de erros (retro-propagação) através das conexões da RNA.

BOSE (7), em 1992, apresentou um procedimento que utiliza diagramas de Voronoi para determinar o número de camadas de neurônios, o número de neurônios em

cada camada e os pesos das conexões para uma RNA com topologia multi-camadas para frente. Um diagrama de Voronoi é a partição de um espaço d-dimensional em regiões convexas denominadas células de Voronoi. Construindo-se um diagrama de Voronoi para o domínio que contém os diversos padrões a serem identificados, o autor estabelece regras baseadas em teoremas para a definição de uma RNA capaz de identificar esses padrões.

RUZICKA (65) propôs o desenvolvimento de RNA's através da verificação de suas reações à mudanças estruturais aplicando a teoria da sensibilidade.

No mesmo ano, TAN (70) sugeriu um procedimento para a síntese de RNA's multi-camadas para frente baseado na associação de RNA's simples para executar tarefas elementares. O objetivo de TAN consiste em definir uma RNA capaz de realizar a seguinte operação :  $A \rightarrow B$ , com A e B matrizes. A operação  $A \rightarrow B$  é dividida em operações elementares:  $A \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \dots \rightarrow B$ , sendo que cada operação elementar pode ser efetuada por uma RNA simples (camada única). Estas RNA's simples seriam então combinadas formando a RNA capaz de executar a tarefa mais complexa.

Ainda em 1992, LITTMANN (47) apresentou o algoritmo original do Cascor e uma versão modificada, além de diversos exemplos usando os algoritmos descritos com resultados e comparações.

#### **4.7 Aplicações de RNA's**

Diversos artigos com aplicações de RNA's em engenharia foram encontrados. A maioria deles, além da aplicação específica, discute melhorias em algoritmos ou tópicos de RNA's que foram necessários para o trabalho.

Em 1991, HAJELA (37) publicou um artigo onde descreveu o funcionamento das RNA's multi-camadas para frente e o algoritmo de treinamento (retro-propagação ou "back-propagation"). Desenvolveu RNA's para modelar o comportamento de estruturas de vigas e barras sob carregamento estático.

Em 1993, CHEN (14) utilizou RNA's com o algoritmo retro-propagação para treinamento no controle de estruturas civis sob carregamento dinâmico. Desenvolveu duas

RNA's: uma para simular o comportamento da estrutura sob carregamentos dinâmicos e outra para determinar a ação de controle. Os resultados obtidos em simulações numéricas foram promissores.

No mesmo ano, CHOW (15,16) discutiu as possibilidades do uso de RNA's multi-camadas para frente na tarefa de detectar falhas em motores de combustão interna. Teceu comentários a respeito do funcionamento e projeto de RNA's e desenvolveu um diagrama baseado em lógica "fuzzy" da configuração da RNA. Não realizou aplicações para comprovar o funcionamento do método (diagrama) apresentado.

Ainda em 1993, BERKE (6) procurou desenvolver uma aplicação de RNA's na absorção de conhecimento de projeto. RNA's multi-camadas para frente foram treinadas e utilizadas na geração de projetos otimizados de duas asas de aviões e um anel segundo critérios específicos para cada componente. Os resultados foram "satisfatórios". Segundo BERKE, a vantagem do uso de RNA's é o pequeno esforço computacional quando comparado com sistemas especialistas convencionais.

Em 1994, ROGERS (64) utilizou RNA's para a otimização de estruturas sob carregamento estático. O exemplo desenvolvido foi a otimização da forma de uma viga minimizando o peso e satisfazendo restrições de valores de tensões. Comentou aspectos sobre o projeto e treinamento de RNA's. O principal deles foi a respeito da seleção dos pares de treinamento onde citou alguns dos métodos para esta tarefa:

- "hypercube method";
- "PROSSS method";
- método aleatório;
- método linear.

GAGARIN (30) utilizou RNA's para determinar atributos de caminhões trafegando numa ponte (velocidade, distância entre eixos e pesos em cada eixo) somente através das deformações obtidas na estrutura da ponte. Os resultados obtidos foram aceitáveis para a aplicação.

As RNA's utilizadas por GAGARIN foram do tipo "Radial-Gaussian Incremental-Learning Network". Segundo o autor, estas RNA's são capazes de superar as limitações apresentadas pelas RNA's que utilizam o algoritmo de retro-propagação, citadas a seguir:

- não permitem saber quantos neurônios são necessários;
- a convergência geralmente é muito lenta mesmo para RNA's simples;
- as RNA's muitas vezes "encalham" em mínimos locais durante o treinamento.

ARAI et al. (1) aplicaram RNA's do tipo "recurrent cascade-correlation" para simular o comportamento dinâmico de uma chapa flexível quando movimentada por um manipulador de um robô. As saídas da RNA foram usadas para desenvolver e testar um processo de controle do manipulador em substituição a testes para reduzir o tempo total do projeto.

No mesmo ano, FLOOD (28,29) publicou trabalhos que apresentam uma visão geral de RNA's dando ênfase às possíveis aplicações em engenharia civil.

Ainda em 1994, KARUNANITHI (43) interessado na previsão do fluxo de rios, utilizou RNA's em substituição dos métodos analíticos convencionais e obteve melhores resultados. Usou o "cascade-correlation algorithm", que pode sintetizar uma arquitetura apropriada e simultaneamente treinar a RNA.

Em 1995, MUKHERJEE (51) comenta o uso de RNA's em sistemas especialistas para projeto estrutural. Aponta os seguintes tópicos como sendo fundamentais no desenvolvimento de uma RNA:

- seleção dos nós de entrada;
- seleção da função de transferência;
- configuração das camadas ocultas;
- seleção dos nós de saída;
- normalização dos parâmetros de entrada e saída;
- apresentação dos pares de treinamento;
- exame do desempenho da RNA;

- organização dos dados de treinamento.

## 4.8 Conclusões da pesquisa bibliográfica

### 4.8.1 Modelos constitutivos de materiais com comportamento viscoelástico

Os modelos relacionados na maioria dos casos tratam de condições uniaxiais de tensão. Os casos multiaxiais encontrados apresentam grande complexidade matemática ou hipóteses simplificadoras que restringem o número de casos em que podem ser utilizados. Os modelos multiaxiais dificilmente são confrontados com resultados experimentais devido à dificuldade para realizar ensaios e à escassez de dados disponíveis.

Todos os modelos constitutivos encontrados necessitam de aproximações numéricas em sua utilização.

### 4.8.2 Uso de RNA's como modelos constitutivos de materiais

Todos os casos de aplicação de RNA's como modelos constitutivos utilizam as RNA's multi-camadas para frente treinadas com a retro-propagação de erros. Parece que os autores se fixam num paradigma de RNA como se fosse a única possibilidade existente. Esse fato talvez se deva ao grande sucesso de RNA's desse paradigma em outras áreas de aplicação.

No caso do uso específico em materiais com comportamento viscoelástico, das duas aplicações encontradas somente QINGBIN (61) não faz hipóteses sobre o comportamento do material para definir a RNA. SUMPTER (66) usa RNA's para estimar valores de tensões internas usadas em um modelo do comportamento viscoelástico com hipóteses previamente estabelecidas.

### 4.8.3 Dificuldades no uso de RNA's

Quanto à definição do conjunto de dados para treinamento, os processos sugeridos por ROGERS (64) não são conclusivos e necessitariam uma investigação.



Quanto à definição da arquitetura, os principais caminhos apontados foram: os algoritmos genéticos (38) e os paradigmas que definem sua própria arquitetura como o Cascor (22).

## 5. RNA's como Modelos de Materiais Viscoelásticos

### 5.1 Uma alternativa para desenvolver modelos de materiais

Os modelos de materiais são desenvolvidos normalmente da seguinte forma (33):

- o material é testado e o seu comportamento é observado;
- são feitas hipóteses para explicar o comportamento do material;
- um modelo matemático é desenvolvido a partir do conjunto de hipóteses;
- o modelo matemático é usado para prever o comportamento de casos ainda não testados e é confrontado com resultados de novos testes;
- as hipóteses e o correspondente modelo matemático são então modificados para incluir comportamentos observados mas não explicados pelo modelo original.

O processo convencional para o desenvolvimento de modelos que representem o comportamento de materiais é uma tarefa difícil, podendo resultar em regras e equações de difícil implementação computacional.

O uso de RNA's é uma forma alternativa de representar o comportamento de materiais. Consiste em treinar uma RNA com os dados obtidos no ensaio do material que se deseja representar. Espera-se que, devido à sua capacidade de aprendizado e generalização, a RNA possa representar o comportamento do material. O conhecimento a respeito do material ficaria armazenado nos valores dos pesos das ligações entre os neurônios, e de forma distribuída na RNA.

As desvantagens e dificuldades dessa alternativa são:

- **Forma de tratar o conhecimento.** O resultado do processo convencional é um modelo matemático constituído por regras e expressões matemáticas. O conhecimento que se tem a respeito do comportamento do material fica explícito nas expressões matemáticas. Já as RNA's armazenam e organizam as informações durante o treinamento ao ajustar os pesos das ligações entre os neurônios. O conhecimento fica distribuído pela RNA e não é acessível.

- **Definição da arquitetura das RNA's.** O paradigma adequado e, se for o caso, o número de camadas, o número de neurônios por camada e a forma da conexão entre os neurônios são normalmente obtidos por tentativas. As decisões são baseadas em critérios subjetivos e na experiência do projetista. RNA's com poucos neurônios possuem capacidade de aprendizado limitada e RNA's com muitos neurônios exigem mais pares de treinamento e mais tempo para o processo de treinamento.
- **O conjunto de dados necessários para treinar RNA's.** Os dados de treinamento são determinantes para o desempenho de uma RNA. É a partir destes dados que a RNA extrai o seu conhecimento. Não existe ainda uma teoria completa sobre RNA's e regras definidas para a escolha do conjunto de dados de treinamento. Algumas recomendações gerais foram feitas com base no bom senso e em resultados obtidos. Existem estimativas da quantidade de pares de treinamento necessários dado o tamanho da RNA (73). Todas se mostraram pessimistas quando confrontadas com aplicações práticas que obtiveram RNA's com a capacidade de generalização requerida (aproximar o resultado correto de um vetor de saída para um vetor de entrada que não faz parte do conjunto de treinamento) utilizando um número muito menor de pares de treinamento que o indicado por essas estimativas. O tamanho da rede está diretamente ligado à quantidade de pares de treinamento necessários para que ela adquira a capacidade de generalizar. Uma RNA treinada com uma quantidade insuficiente de pares de treinamento terá pouca capacidade de generalização. Por exemplo, uma RNA multi-camada para frente com 3 camadas com N, M e P neurônios respectivamente, possui  $NM+MP$  pesos. Os pesos podem ser considerados como incógnitas a serem determinadas. Portanto, são necessários pares de treinamento em quantidade maior que o número de pesos.

- **O funcionamento das RNA's deve ser esclarecido.** É necessário um melhor entendimento do que as RNA's fazem internamente. Não é possível saber se os relatos de sucesso em determinada aplicação de RNA's são demonstrações de reais capacidades ou casos fortuitos.

As vantagens principais do uso de RNA's como modelos de materiais são:

- **Dispensa regras formais e equações matemáticas.** O conhecimento "aprendido" pela RNA a respeito do comportamento do material vem diretamente dos dados obtidos no ensaio. Comportamentos não lineares ficam impregnados na RNA na forma de pesos de ligações. Poucas hipóteses a respeito do material são necessárias.
- **RNA's são rapidamente desenvolvidas.** A definição da arquitetura, o treinamento e teste de uma RNA é um processo rápido se o conjunto de dados de treinamento é conhecido.
- **RNA's são de origem numérica.** Uma vez treinada e testada, nenhuma técnica de aproximação numérica para integração ou derivação é necessária no uso de uma RNA e sua implementação computacional é imediata. A operação resume-se em multiplicar o vetor de entrada por matrizes contendo os pesos das ligações entre os neurônios e aplicar as funções de transferência até obter o vetor de saída.

## 5.2 A adequação do uso de RNA's

A relação de vantagens do uso de RNA's para representar o comportamento de materiais é animadora. Mas antes de se considerar as RNA's como alternativa viável para substituir os modelos matemáticos convencionais, deve-se superar as dificuldades principais que surgem em qualquer aplicação de RNA's. Os requisitos para o uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico de materiais e o estado atual do

desenvolvimento das RNA's permitem superar, ao menos parcialmente, as dificuldades descritas anteriormente:

#### *5.2.1 Forma de tratar o conhecimento.*

O fato de o conhecimento a respeito do material estar inacessível tem pouca importância nas atividades de projeto, onde o objetivo do modelo de um material é apenas representar o seu comportamento. É dispensável explicar o comportamento do material. Neste contexto uma abordagem do tipo “caixa-preta” pode ser usada.

#### *5.2.2 Definição da arquitetura das RNA's.*

Alguns paradigmas de RNA's geram a sua própria arquitetura (57). Normalmente iniciam a RNA com uma configuração mínima que vai sendo aumentada até se obter a precisão desejada. Essa capacidade elimina as decisões subjetivas quanto ao número de camadas ocultas e neurônios. Esses paradigmas podem ser usados para gerar RNA's que representem o comportamento de um material. Porém, nada garante que esses paradigmas sejam os mais adequados e forneçam os melhores resultados.

#### *5.2.3 O conjunto de dados necessários para treinar RNA's*

##### *5.2.3.1 Quantidade de dados para treinamento*

O raciocínio utilizado no procedimento para obter modelos matemáticos de um material é a lógica indutiva. Foi introduzida na pesquisa de ciências naturais na primeira metade do século XVII por Francis Bacon. Consiste em observar o fenômeno relacionando as situações em que está presente, ausente e sua intensidade. A seguir identificam-se os parâmetros que modificam o fenômeno e as relações de dependência entre eles. E finalmente uma lei geral a respeito do fenômeno é induzida.

As RNA's usam a mesma lógica indutiva. Se uma RNA for treinada com dados de ensaios de um determinado material, a RNA poderá encontrar uma relação de dependência dos parâmetros utilizados nos ensaios. A RNA será induzida pelas informações presentes

nos dados de ensaios a encontrar uma regra da mesma forma que um pesquisador agindo conforme o processo convencional.

Com dados incompletos tanto o processo convencional como a RNA são induzidos a modelos pouco confiáveis e ambos os processos podem melhorar seus modelos com informações complementares. O número de dados para treinamento será o maior conjunto de dados disponível a respeito do material. Novas informações devem sempre ser incluídas como dados de treinamento para gerar modelos mais completos.

#### *5.2.3.2 Distribuição dos dados de treinamento*

O problema do treinamento é garantir a capacidade de generalização de uma RNA. O treinamento supervisionado é baseado numa medida de erro obtida da diferença entre o vetor de saída apresentado pela RNA e o vetor de saída do par de treinamento. Os pesos são ajustados até que o erro atinja um valor aceitável definido pelo projetista. O que se deve evitar é que a RNA aproxime o resultado correto de um vetor de saída somente para um vetor de entrada que fez parte do conjunto de treinamento. A solução é utilizar um conjunto de dados de teste para verificar a precisão e a capacidade de generalização da RNA.

É consenso que o conjunto de dados de treinamento deve representar estatisticamente o domínio do problema. Considerando-se o conjunto de dados de treinamento como sendo um espaço N-dimensional, com N o número de vetores de treinamento, a probabilidade de se escolher aleatoriamente um vetor do conjunto de treinamento de um determinado volume deverá ser a mesma de se escolher um vetor de todo o domínio do problema neste mesmo volume. Os conjuntos de dados de treinamento e de testes devem ser obtidos aleatoriamente.

#### *5.2.4 O funcionamento das RNA's deve ser esclarecido*

O comportamento de um material pode ser representado como uma função, ou seja, uma regra de variação de um parâmetro com a variação de outros. Assim, para o aço uma função que mostra a variação da deformação com a variação da tensão descreve o

comportamento do material e constitui um modelo do material. O modelo para o concreto pode ser, por exemplo, uma relação que estabelece a deformação em função do tempo, tensão, temperatura e umidade. Todos os modelos de materiais são traduzidos em funções mais ou menos complexas. A dificuldade no desenvolvimento de modelos de materiais está na definição destas funções.

Todos os paradigmas de RNA's desempenham a mesma tarefa: recebem um vetor de entrada e executam uma transformação neste vetor gerando um vetor de saída. Em outras palavras, as RNA's estabelecem a relação entre os parâmetros de entrada e de saída.

As RNA's adequadas para representar materiais devem ter a capacidade de representar funções. O conhecimento necessário sobre o funcionamento das RNA's para a aplicação diz respeito à essa capacidade. HORNIK (41) demonstrou que RNA's multicamadas para frente são aproximadores universais. Este tipo de RNA's pode aproximar qualquer função com o grau de precisão desejado. Falta, segundo HORNIK, desenvolver uma forma de se determinar a quantidade de neurônios em função do número de camadas ocultas necessários para que uma RNA aproxime determinada função.

### **5.3 O comportamento viscoelástico**

Para o caso do uso RNA's para representar o comportamento viscoelástico dos materiais, as preocupações são as mesmas tratadas anteriormente. Especificamente, a necessidade é a de representar o comportamento de um material caracterizado pela sua dependência do tempo e de um histórico de carregamentos passados. As dificuldades e vantagens da abordagem com RNA's são mantidas.

Vários paradigmas de RNA's podem ser testados para modelar o comportamento viscoelástico de materiais. Alguns exemplos são desenvolvidos nos capítulos seguintes para verificar a viabilidade desta abordagem.

## 6. Exemplo 1- Curvas isócronas tensão-deformação

### 6.1 Introdução

O objetivo é verificar as dificuldades de se gerar um modelo constitutivo de um material com comportamento viscoelástico utilizando RNA's e incorporá-lo a um programa de elementos finitos.

O material considerado foi o polietileno a 20°C, cujas curvas de fluência obtidas experimentalmente estão disponíveis (32). A faixa de deformações considerada é alta o suficiente para se observar um comportamento não linear.

O modelo constitutivo do material com comportamento viscoelástico é composto pelas curvas isócronas tensão-deformação. A partir dos dados de ensaio, a RNA representa a superfície tridimensional que relaciona tensão, deformação e tempo.

A RNA que representa as curvas isócronas tensão-deformação é então incorporada a um programa de elementos finitos em substituição do modelo constitutivo original do material para resolver problemas de fluência em estruturas.

Um exemplo de cálculo de deformação em uma estrutura simples de treliça é realizado para verificar a precisão dos resultados.

Para evitar as dificuldades para a determinação da arquitetura da RNA, foi usado o paradigma Cascor (22). Esse paradigma gera automaticamente sua arquitetura a partir dos dados de treinamento e da precisão desejada.

### 6.2 O paradigma Cascor: "cascade-correlation learning architecture"

Em 1990, FAHLMAN (22) apresentou o paradigma Cascor ("cascade-correlation learning architecture"). O Cascor gera sua própria arquitetura durante o processo de treinamento. Resulta na menor rede com uma camada oculta que obtém a precisão desejada para os pares de treinamento.

O Cascor inicia com a camada de saída e a camada de entrada e mais um "bias" fixado em 1 como entrada. Cada unidade da camada de entrada está conectada a todos o



neurônios da camada de saída. Os neurônios podem possuir qualquer função de transferência.

A camada de pesos da rede inicial é treinada para os pares de treinamento. Qualquer algoritmo de treinamento para uma camada simples pode ser usado: “delta rule”, “Widrow-Hoff”, retro-propagação de erros (“backpropagation”), “quickprop” ou “perceptron” (49).

Se a precisão desejada não for alcançada adiciona-se um neurônio à camada oculta em duas fases:

- Na primeira fase o neurônio candidato é conectado a todas as entradas da rede mas não aos neurônios da saída. Os pesos das ligações são ajustados de forma a maximizar a correlação do valor de seu sinal de saída com o erro residual das unidades de saída, dado por (Equação 6.1):

$$S = \sum_o \sum_p (V_p - V)(E_{p,o} - E_o)$$

Equação 6.1

onde:

o - são as unidades de saída

p - o padrão de treinamento

$V_p$  - o valor de saída da unidade candidata

$V$  - o valor médio de saída da unidade candidata

$E_{p,o}$  - o valor do erro residual na unidade o

$E_o$  - o valor médio do erro residual na unidade o

- Na segunda fase o neurônio é conectado à camada de saída e os pesos de todas as ligações que chegam à camada de saída são ajustados. As ligações às unidades de entrada são treinadas novamente e a ligação originária do novo neurônio da camada oculta é treinada pela primeira vez.

Caso o erro apresentado seja maior que o tolerado, um segundo neurônio é acrescentado à camada oculta da mesma forma que o primeiro neurônio, e assim sucessivamente. Na primeira fase o neurônio é conectado às unidades de entrada e também recebe ligações de todos os neurônios existentes até então na camada oculta. A camada única de pesos resultante é então treinada conforme o critério apresentado anteriormente. Na segunda etapa o novo neurônio é conectado à rede através de ligações com a camada de saída e os pesos de todas as ligações que chegam à camada de saída são treinados (originários das unidades de entrada e dos neurônios da camada oculta).

As figuras a seguir mostram um Cascor com três unidades na camada de entrada e dois neurônios na camada de saída durante os primeiros estágios de construção e treinamento.

A Figura 6.1 apresenta o estado inicial da rede sem camada oculta. Os pesos  $w$  são treinados para os pares de treinamento existentes.

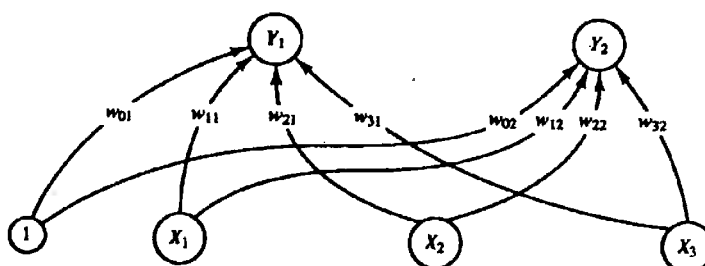


Figura 6.1 - Cascor sem camada oculta.

Um neurônio oculto é adicionado à rede em duas fases: na fase 1 (Figura 6.2) o neurônio candidato é conectado à camada de entrada e os pesos  $w$  são ajustados de forma a maximizar  $J$  (Equação 6.1); na fase 2 (Figura 6.3) o neurônio é ligado aos neurônios da camada de saída e os pesos  $w$  de todas as ligações com a camada de saída são treinados.

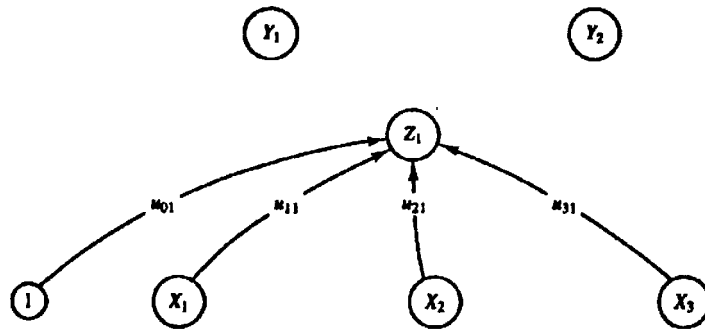


Figura 6.2 - Cascor com neurônio candidato Z1.

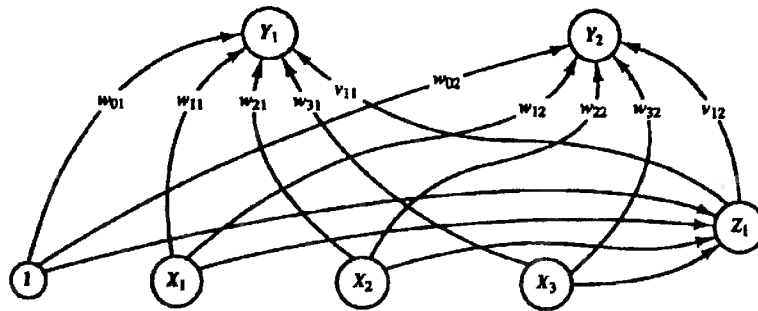


Figura 6.3 - Cascor com um neurônio na camada oculta.

A adição de um novo neurônio se inicia pela sua conexão às unidades de entrada e ao neurônio existente na camada oculta (Figura 6.4). Os pesos destas ligações são então ajustados de forma a maximizar  $J$ . O novo neurônio é incluído na rede e os pesos indicados na Figura 6.5 são treinados para os pares de treinamento.

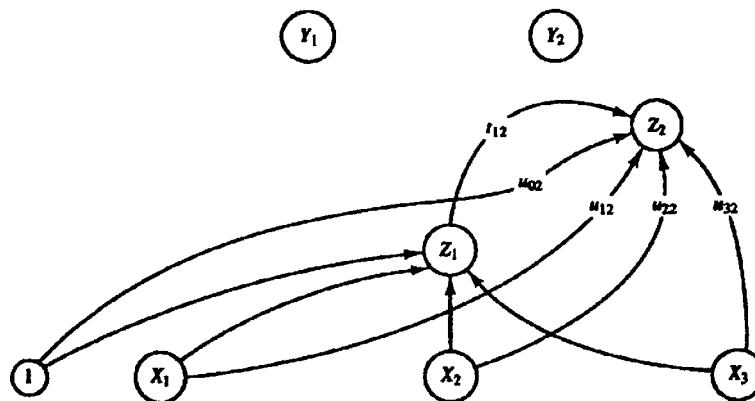


Figura 6.4 - Cascor com novo neurônio candidato Z2.

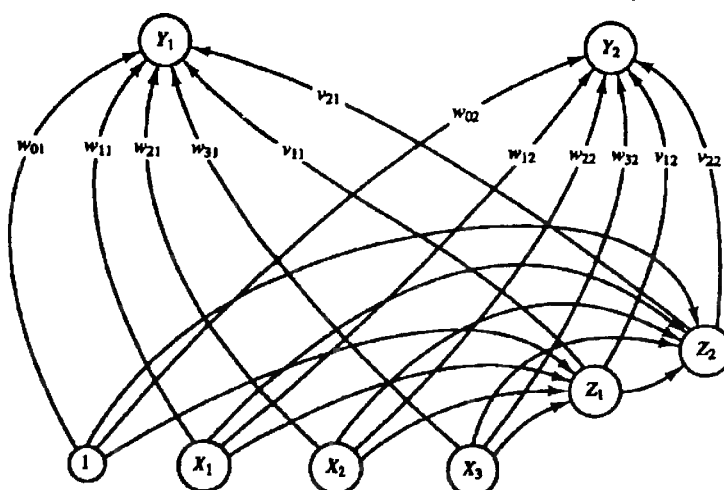


Figura 6.5 - Cascor com neurônio candidato Z2 conectado à camada de saída.

A arquitetura resultante até então é mostrada na Figura 6.6. Os pesos  $u$  e  $t$  não se alteram enquanto os pesos  $w$  e  $v$  são treinados a cada adição de neurônio na camada oculta.

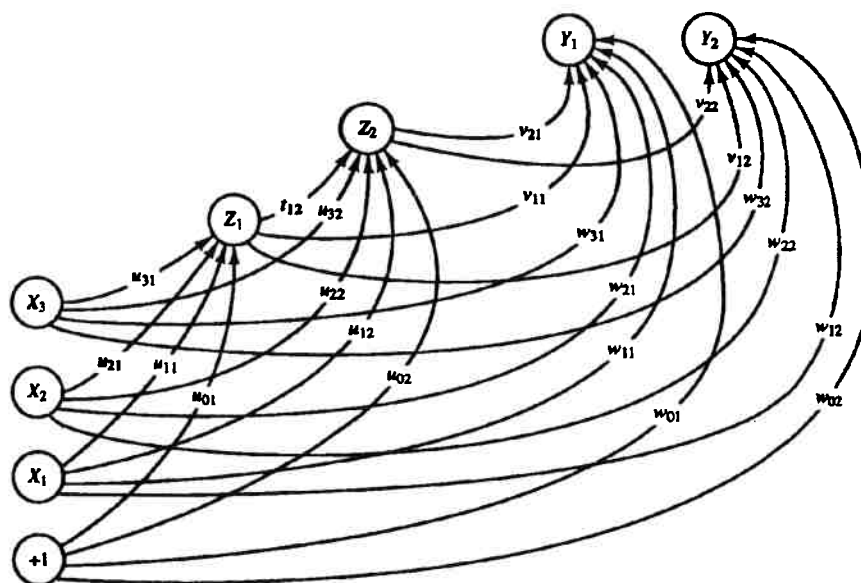


Figura 6.6 - Cascor resultante.

A arquitetura Cascor apresenta algumas vantagens com relação aos demais paradigmas de redes para frente (“feedforward”):

- **aprende muito rápido em comparação com o algoritmo de retropropagação de erros (“backpropagation”):** o ajuste é realizado sempre em uma camada única de pesos o que possibilita o uso de métodos simplificados de treinamento;

- **a própria rede determina seu tamanho e arquitetura:** o Cascor monta a sua própria arquitetura automaticamente, resultando numa rede com o menor número de neurônios que consegue obter determinada precisão para os pares de treinamento;
- **dispensa a retro-propagação de erros através das conexões da rede :** os problemas típicos da retro-propagação de erros causados por mínimos locais são evitados, pois a retro-propagação de erros pela rede é desnecessária já que uma única camada de pesos é treinada por vez.

Assim como as redes para frente treinadas com a retro-propagação de erros, o Cascor pode também aproximar qualquer função com qualquer grau de precisão desejável conforme DRAGO e RIDELLA apud PATTERSON (57).

### 6.3 O material: polietileno

O material utilizado é o polietileno duro a 20°C.

Os dados do material foram obtidos por GAUBE (32) em ensaios de fluência, onde corpos de provas são mantidos sob tensão constante e sua deformação ao longo do tempo é medida. As curvas de fluência obtidas correspondem às tensões de 5 kgf/cm<sup>2</sup>, 10 kgf/cm<sup>2</sup>, 20 kgf/cm<sup>2</sup>, 30 kgf/cm<sup>2</sup>, 40 kgf/cm<sup>2</sup>, e 50 kgf/cm<sup>2</sup> (Figura 6.7).

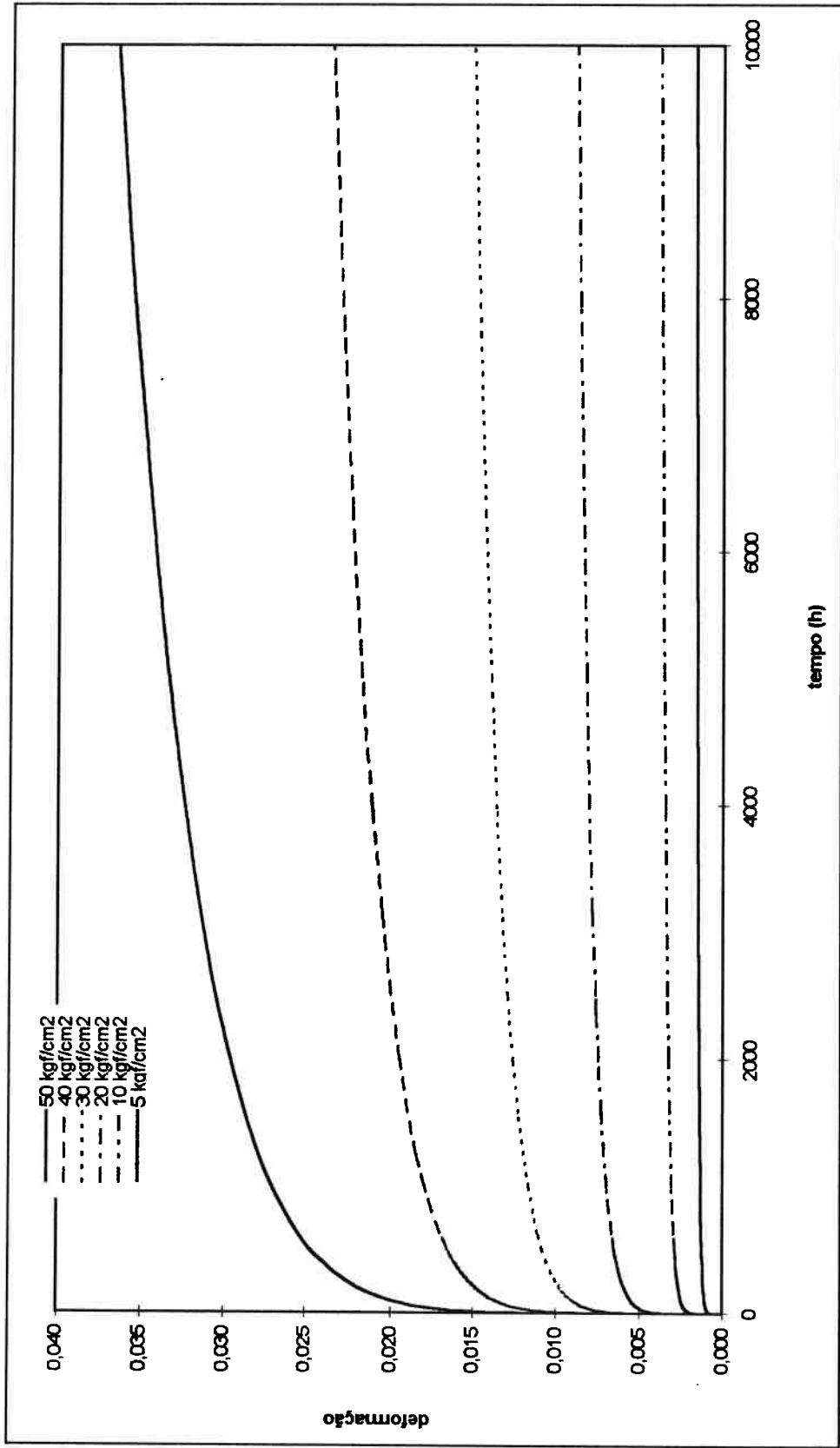


Figura 6.7 - Curvas de fluência do polietileno duro a 20 °C.

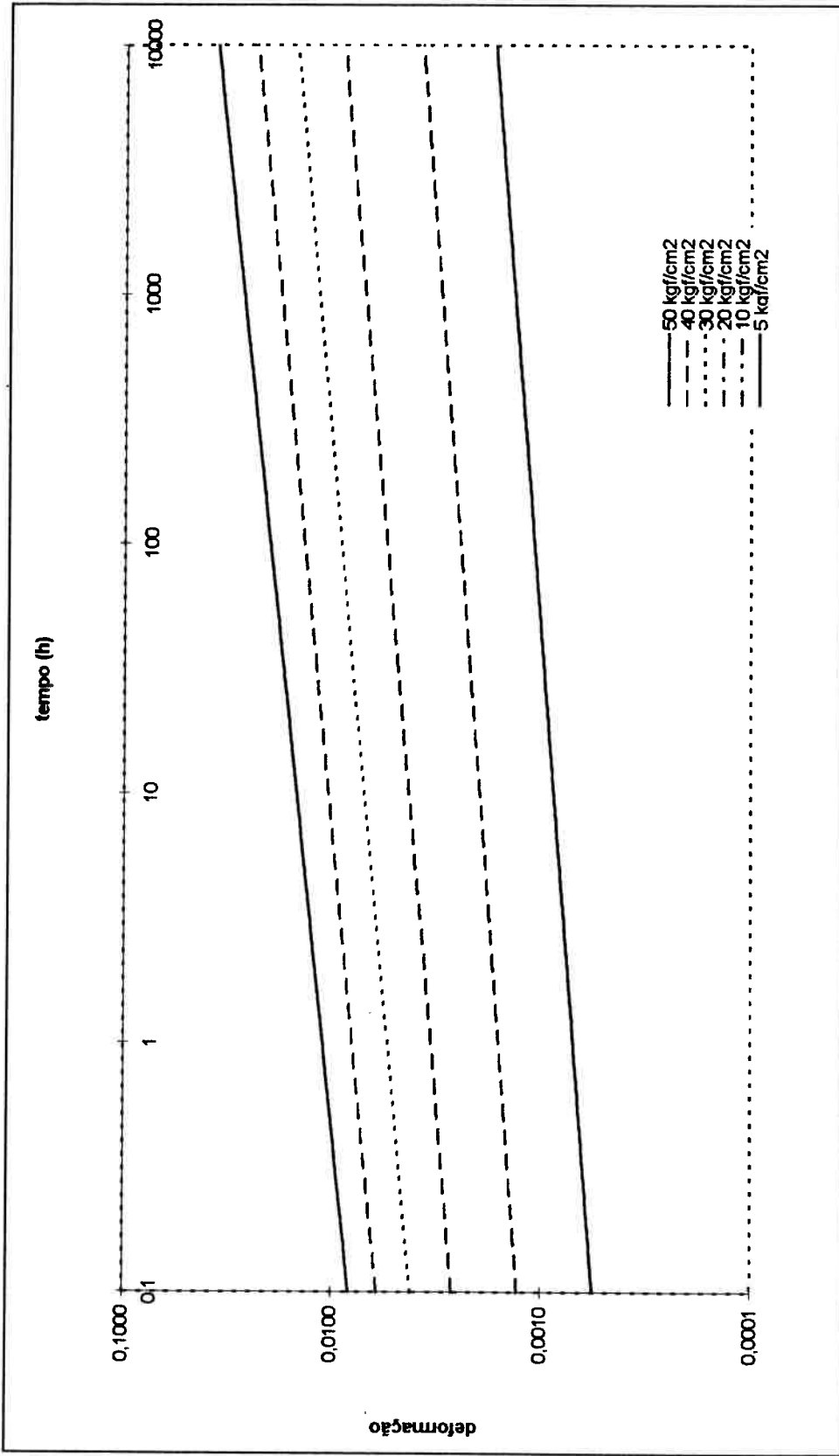


Figura 6.8 - Curvas de fluência do polietileno duro a 20°C em escala logarítmica.

## 6.4 Treinamento da RNA

Uma RNA foi desenvolvida para representar a função que relaciona deformação com tempo e tensão. A RNA tem a tensão e o tempo como entradas e a deformação como saída.

Os neurônios ocultos usam a função de transferência “sigmoid” e o neurônio de saída usa a função de transferência linear. O algoritmo para treinamento das camadas de pesos foi o “quickprop” (57).

Os conjunto de treinamento é composto de 51 pontos de cada curva mostrada no gráfico da Figura 6.8 separados entre si um intervalo constante na escala logarítmica (eixo das ordenadas) totalizado 306 pares. O conjunto de teste é formado por 66 pares tomados aleatoriamente sobre as curvas da Figura 6.8.

Os logaritmos dos valores de tempo, os valores de tensão e os valores de deformação (Figura 6.8) foram apresentados ao paradigma Cascor para a formação da RNA. Foi usado o programa FAST v.2.2 (3) para treinar a RNA. A configuração final obtida para um erro máximo de 0,02 % para o conjunto de treinamento é composta por 33 neurônios ocultos.

A medida de erro usada é obtida normalizando a soma dos quadrados das diferenças pelo desvio padrão (Equação 6.2). O erro fica invariante com relação translações (“offsets”) e transformações (“scaling”) dos vetores de saída.

$$erro = \frac{\sqrt{\frac{\sum_p \sum_o dif_{p,o}^2}{p \cdot o}}}{\sqrt{\frac{p \cdot o \cdot \sum_p \sum_o alvo_{p,o}^2 - \left( \sum_p \sum_o alvo_{p,o} \right)^2}{p \cdot o \cdot (p \cdot o - 1)}}$$

Equação 6.2

com:



$p$  número de pares;

$o$  número de unidades de saída da RNA;

$$diff_p = alvo_p - saída_p;$$

$saída_p$  é o valor de saída da rede para o par de treinamento  $p$ ;

$alvo_p$  é o valor esperado como saída da rede.

A evolução dos valores de erros para os conjuntos de teste e de treinamento são mostrados na Figura 6.9. Observa-se que os erros de ambos os conjuntos são equivalentes indicando que não ocorre perda de generalidade, ou seja, a RNA não “decorou” o conjunto de treinamento.

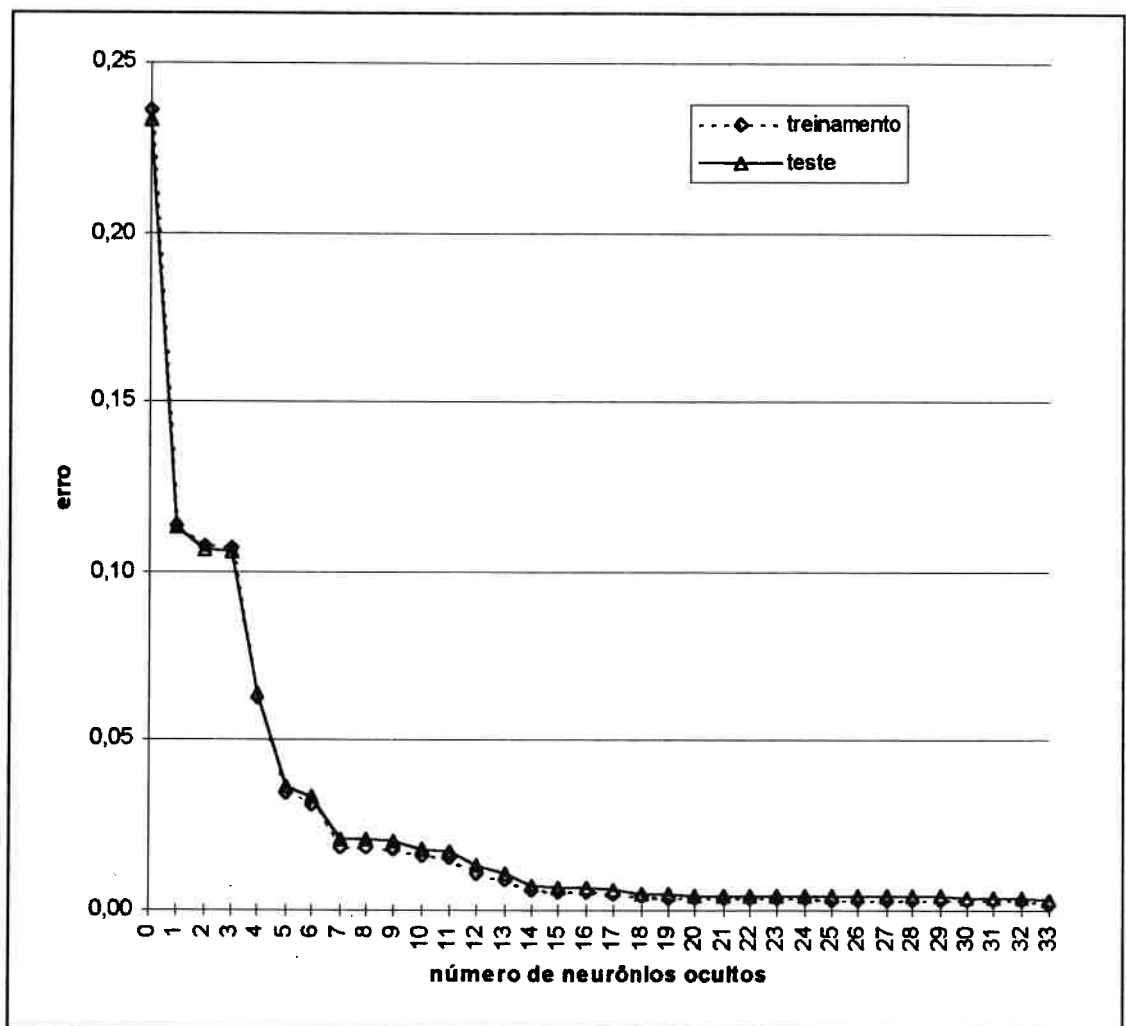


Figura 6.9 - Erro x número de neurónios.

### 6.5 Exemplo: deformação de uma treliça

Deseja-se calcular a deformação das barras da estrutura de treliça submetida a uma carga horizontal de 48 kgf e uma carga vertical de 56 kgf (44). O carregamento constante deve ser suportado durante 1000 horas (aproximadamente 42 dias) sem que ocorra deformação excessiva. A área da seção transversal das barras é de  $2,0 \text{ cm}^2$  e o material é o polietileno de alta densidade. A temperatura se mantém em  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  e admite-se que as deformações são pequenas.

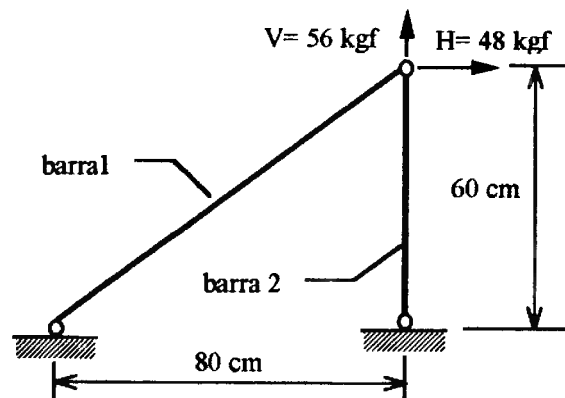


Figura 6.10 - Treliça viscoelástica sob carregamento estático.

Há linearidade geométrica e, portanto, as tensões nas barras podem ser calculadas diretamente através do equilíbrio da estrutura obtendo-se:

- tensão na barra 1  $\sigma_1 = 30 \text{ kgf/cm}^2$ ;
- tensão na barra 2  $\sigma_2 = 10 \text{ kgf/cm}^2$

Os valores obtidos da curva de fluência do material são:

- para  $t = 1000$  horas e  $\sigma_1 = 30 \text{ kgf/cm}^2 \Rightarrow \epsilon_1 = 1,167\%$ ;
- para  $t = 1000$  horas e  $\sigma_2 = 10 \text{ kgf/cm}^2 \Rightarrow \epsilon_2 = 0,307\%$ .

Uma vez conhecidas as tensões em cada barra, pode-se determinar a deformação das barras 1 e 2 para qualquer instante desejado através das curvas de fluência do material incorporadas pela RNA. Consultando a RNA obtém-se:

- para  $t = 1000$  horas e  $\sigma_1 = 30 \text{ kgf/cm}^2 \Rightarrow \epsilon_1 = 1,169\%$  (erro de 0,17%);
- para  $t = 1000$  horas e  $\sigma_2 = 10 \text{ kgf/cm}^2 \Rightarrow \epsilon_2 = 0,308\%$  (erro de 0,33%).

## 6.6 Implantação em um programa de elementos finitos

### 6.6.1 Análise de fluência

A fluência é a deformação dependente do tempo de materiais sujeitos a um dado carregamento. O comportamento mecânico a cada instante depende do estado de tensões neste instante e ainda da história do carregamento aplicado à estrutura.

Os polímeros possuem este comportamento viscoelástico. O emprego cada vez maior de polímeros em aplicações estruturais exige uma maior capacidade de prever o comportamento destas estruturas. É necessário desenvolver critérios de projeto adequados ao uso de polímeros

Materiais com comportamentos que são funções de diversos parâmetros, grandes deformações e condições de contorno variáveis no tempo são os chamados problemas estruturais complexos. Soluções analíticas existem para uma pequena parcela destes problemas e envolvem várias hipóteses e simplificações. Os métodos numéricos são a única possibilidade de solução para a maior parte dos problemas estruturais complexos. A análise de fluência é um caso típico e o método numérico mais utilizado é o método dos elementos finitos.

Vários algoritmos são utilizados em conjunto com o método dos elementos finitos para a solução de problemas viscoelásticos. Os algoritmos diferem basicamente por três aspectos: a equação constitutiva a que descreve o comportamento do material; análise no domínio do tempo ou da frequência; processos de integração na resolução das equações diferenciais viscoelásticas.

Uma combinação do método dos elementos finitos e do método de integração de tensões será utilizado num caso exemplo. A equação constitutiva do material será substituída pela RNA treinada a partir dos dados obtidos diretamente de ensaio.

O caso exemplo será a análise de fluência de uma treliça simples construída de polietileno (Figura 6.10). O objetivo é verificar a facilidade de implementação de uma RNA como substituta da equação constitutiva do material. É feita a hipótese de linearidade geométrica.

### 6.6.2 O método de integração de tensões

O método de integração de tensões é um algoritmo numérico de integração. Soluciona problemas com materiais não elásticos através de uma análise incremental ao longo do tempo. Consiste em obter o estado de equilíbrio da estrutura no instante  $t_{j+1}$  a partir do estado de equilíbrio do instante  $t_j$ . Dentro de um incremento de tempo o problema é tratado como linear, ou seja, o material é considerado como elástico e a tensão  $\sigma^{j+1}$  no final do incremento é função da deformação  $\epsilon^{j+1}$  no mesmo instante.

Para um elemento de treliça construído de material viscoelástico, a tensão  $\sigma^{j+1}$  no instante  $t_{j+1}$  depende da deformação do elemento de treliça neste instante  $\epsilon^{j+1}$  e do módulo viscoelástico do material neste instante  $D^{j+1}$  e de uma tensão residual  $\sigma_r$  que considera toda a história do carregamento (Equação 6.3).

$$\sigma^{j+1} = D^{j+1} \epsilon^{j+1} + \sigma_r$$

**Equação 6.3**

A tensão residual  $\sigma_r$  representa o relaxamento do material com o tempo. Um elemento feito de polímero submetido a uma deformação constante apresenta uma diminuição de tensões ao longo do tempo até chegar a um valor estacionário. Fenômeno chamado de relaxação de tensão. A tensão residual  $\sigma_r$  é uma diferença de tensões (Equação 6.4) onde  $\sigma_{\text{relaxamento}}^{j \rightarrow j+1}$  é tensão no elemento de treliça correspondente à deformação  $\epsilon^j$  no instante  $t_{j+1}$ .

$$\sigma_r = -D^j \epsilon^j + \sigma_{\text{relaxamento}}^{j \rightarrow j+1}$$

**Equação 6.4**

O módulo viscoelástico  $D^{j+1}$  é obtido diretamente da RNA. A RNA foi treinada tendo como entradas a tensão e o tempo como saída a deformação do material. A RNA representa uma superfície no espaço tridimensional que relaciona tensão, tempo e deformação (curvas isócronas de tensão-deformação). A interseção desta superfície e de um plano perpendicular ao eixo tempo e que o intercepta no valor  $t_{j+1}$  é uma curva que indica a relação tensão deformação do material para o instante  $t_{j+1}$ .  $D^{j+1}$  é o valor da tangente à curva no valor da tensão do elemento.

O valor de  $\sigma_{\text{relaxamento}}^{j \rightarrow j+1}$  é obtida buscando-se a tensão que junto com o tempo  $t_{j+1}$  como entradas da RNA, fornece a deformação  $\epsilon^j$  como saída.

### 6.6.3 Algoritmo para elementos de treliça

O elemento de treliça possui campos de tensão e deformação constantes, o que facilita sua implementação num programa de elementos finitos. A equação de equilíbrio para um elemento de treliça no sistema de coordenadas global é (Equação 6.5):

$$\{F\}^e = [k]^e \cdot \{Q\}^e + \{F_r\}^e$$

Equação 6.5

onde:

- $\{F\}^e$  = vetor de forças nodais equivalentes;
- $\{Q\}^e$  = vetor de deslocamentos nodais;
- $\{F_r\}^e$  = vetor de cargas residuais:  $\{F_r\}^e = \sigma_r A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
- $[k]^e$  = matriz de rigidez do elemento de treliça:  $[k]^e = \frac{DA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ;
- $A$  = área da seção transversal do elemento de treliça;
- $l$  = comprimento do elemento de treliça;
- $D$  = módulo viscoelástico do elemento de treliça.

O processo iterativo é realizado da seguinte forma:

- 1) Os valores do módulo viscoelástico  $D^{j+1}$  e da tensão residual  $\sigma_r$  são calculados usando a RNA para um instante  $t_{j+1}$ ;
- 2) O valor da deformação  $\epsilon^{j+1}$  é obtido do processamento de elementos finitos (Equação 6.5);
- 3) O valor da tensão  $\sigma^{j+1}$  é obtido (Equação 6.3 e Equação 6.4);
- 4) Os valores do módulo viscoelástico  $D^{j+1}$ , deformação  $\epsilon^{j+1}$  e tensão  $\sigma^{j+1}$  são armazenados para o passo seguinte e o tempo é incrementado;
- 5) Repete-se o processo se alcançar o instante final da análise.

#### 6.6.4 Exemplo: deformação de uma treliça

O algoritmo para elementos de treliça foi implementado no programa MEFVIS desenvolvido por RAMOS (61).

A estrutura usada é a mesma do item anterior (Figura 6.10) e nas mesmas condições de carregamento.

As deformações após 1000 horas de carregamento obtidas pelo programa para os elementos da treliça foram comparadas com as obtidas da própria curva de fluência do material. Os resultados para os incrementos de tempo 1 hora e 10 horas podem ser considerados muito bons (Tabela 6.1).

**Tabela 6.1 - Comparação entre as deformações para 1000 horas de carregamento calculadas e as obtidas experimentalmente.**

$\Delta t = 10$ horas		
	barra 1	barra 2
$\epsilon_{\text{experimental}} (\%)$	1,167	0,307
$\epsilon_{\text{calculado}} (\%)$	1,170	0,308
erro (%)	0,26	0,32
$\Delta t = 1$ hora		
	barra 1	barra 2
$\epsilon_{\text{experimental}} (\%)$	1,167	0,307
$\epsilon_{\text{calculado}} (\%)$	1,169	0,308
erro (%)	0,17	0,32

## *7. Exemplo 2 - Curvas isócronas tensão-deformação a partir de dados com ruídos.*

### **7.1 Introdução**

No caso do exemplo anterior (Capítulo 6) as curvas de fluência do polietileno foram obtidas de um tratamento e da interpolação dos dados de laboratório, eliminado os ruídos e erros de leituras. Além disso, os dados para treinamento e teste da RNA estão disponíveis em qualquer quantidade nas curvas contínuas de deformação ao longo do tempo (Figura 6.7).

É interessante verificar o que acontece quando são usados dados provenientes diretamente dos ensaios de fluência no treinamento de RNA's. Para isso são utilizados dados publicados por FINDLEY (27), de ensaios de fluência de corpos de prova de polietileno. A quantidade de dados é reduzida e apresentam ruídos.

Foi desenvolvida uma RNA do tipo Cascor para servir como modelo constitutivo do material representando as curvas isócronas tensão e deformação a partir dos dados disponíveis.

### **7.2 Dados do material**

Findley ensaiou corpos de prova de polietileno a uma temperatura constante de 25 °C submetidos cargas uniaxiais constantes de 75 psi, 150 psi, 225 psi e 300 psi. Os dados disponíveis são valores de deformação em um dado instante para a tensão correspondente. No total 83 valores estão disponíveis (Figura 7.1).

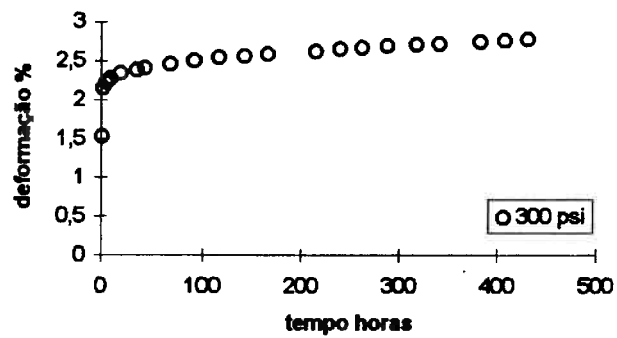
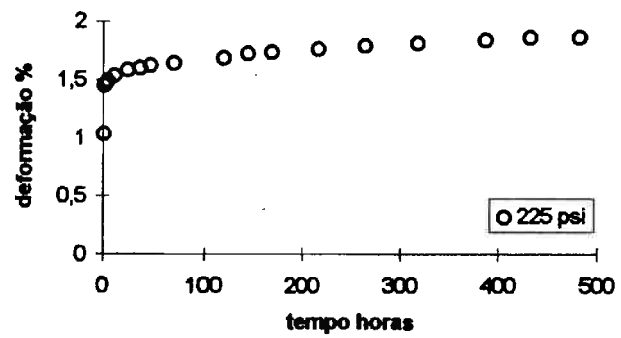
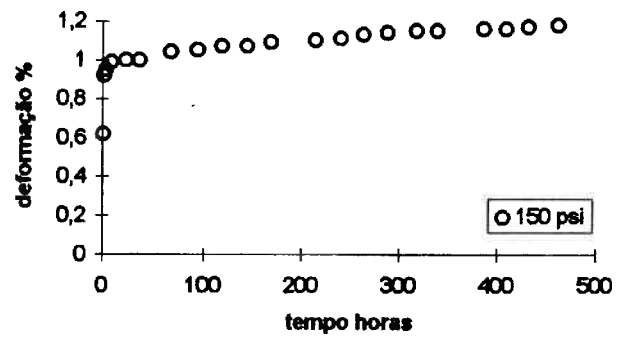
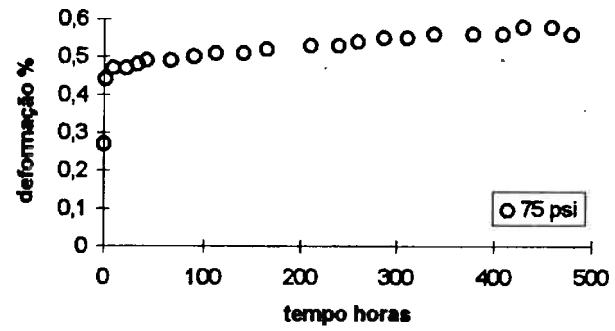


Figura 7.1 - Dados de ensaio de fluência do polietileno.



### 7.3 Resultados da RNA

Uma RNA foi desenvolvida para representar a função que relaciona deformação com tempo e tensão. A RNA tem a tensão e o tempo como entradas e a deformação como saída.

Os neurônios ocultos usam a função de transferência “sigmoid” e o neurônio de saída usa a função de transferência linear. O algoritmo para treinamento das camadas de pesos foi o “quickprop” (57).

Dos 83 valores disponíveis, 10 foram separados para constituir o conjunto de dados teste e os 73 restantes formam o conjunto de treinamento.

RNA's do tipo Cascor (ver item 6.2) foram obtidas com o programa FAST v.2.2 para diferentes valores de erros máximos (Equação 6.2) para o conjunto de treinamento:

- 10 % resultando em uma RNA com 2 neurônios ocultos;
- 5 % resultando em uma RNA com 4 neurônios ocultos;
- 2% resultando em uma RNA com 11 neurônios ocultos.

A evolução do erro com o número de neurônios ocultos é mostrada no gráfico da Figura 7.2.

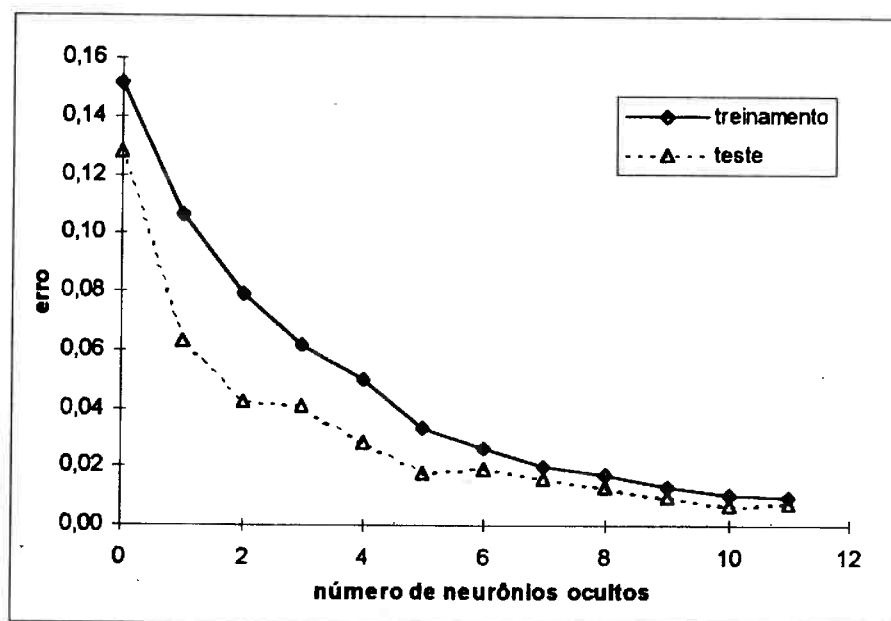


Figura 7.2 - Erro x número de neurônios ocultos.

Os gráficos a seguir (Figura 7.3 a Figura 7.6) mostram os valores de deformação fornecidos pela RNA obtida para um erro máximo de 10%.

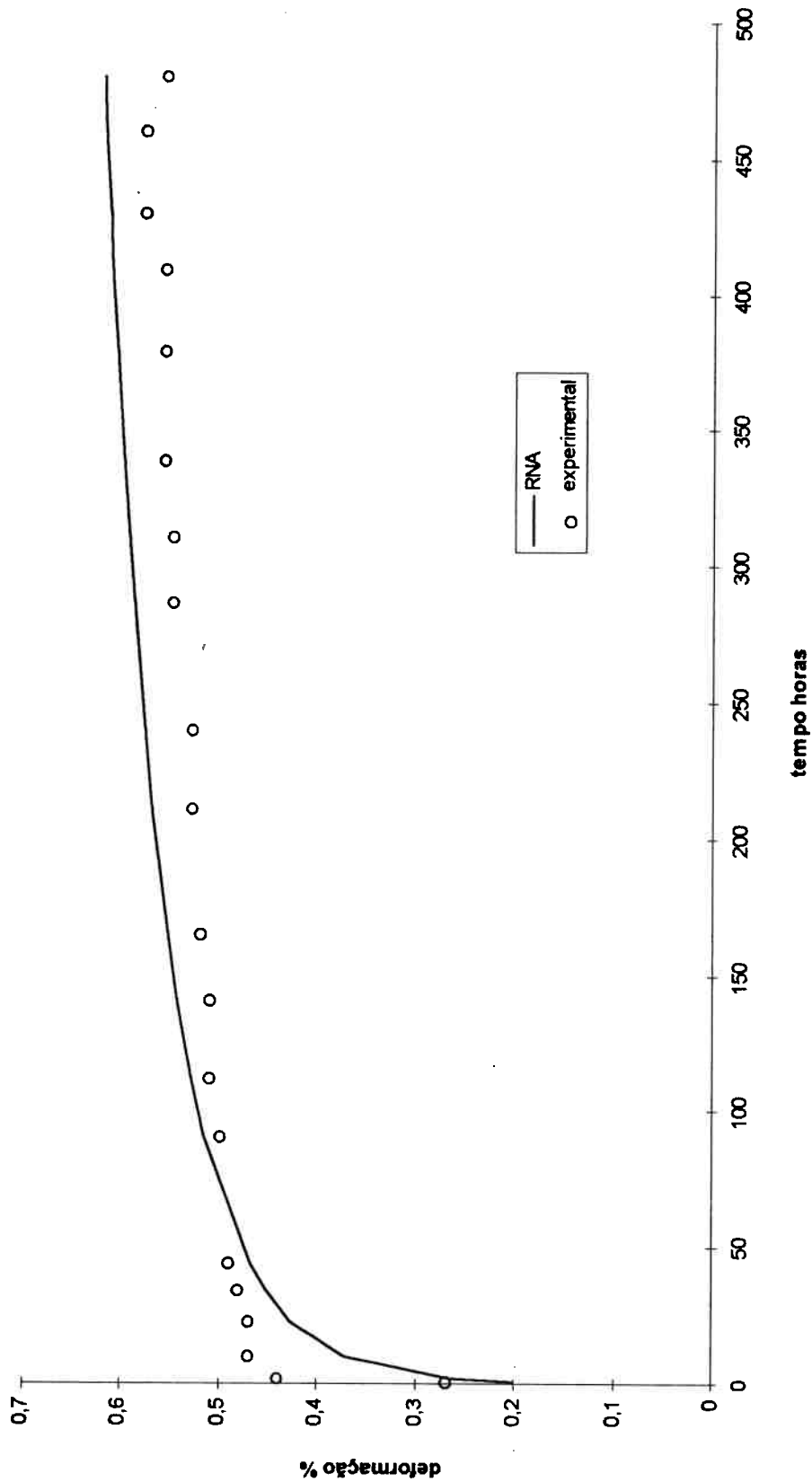


Figura 7.3 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 75 psi.

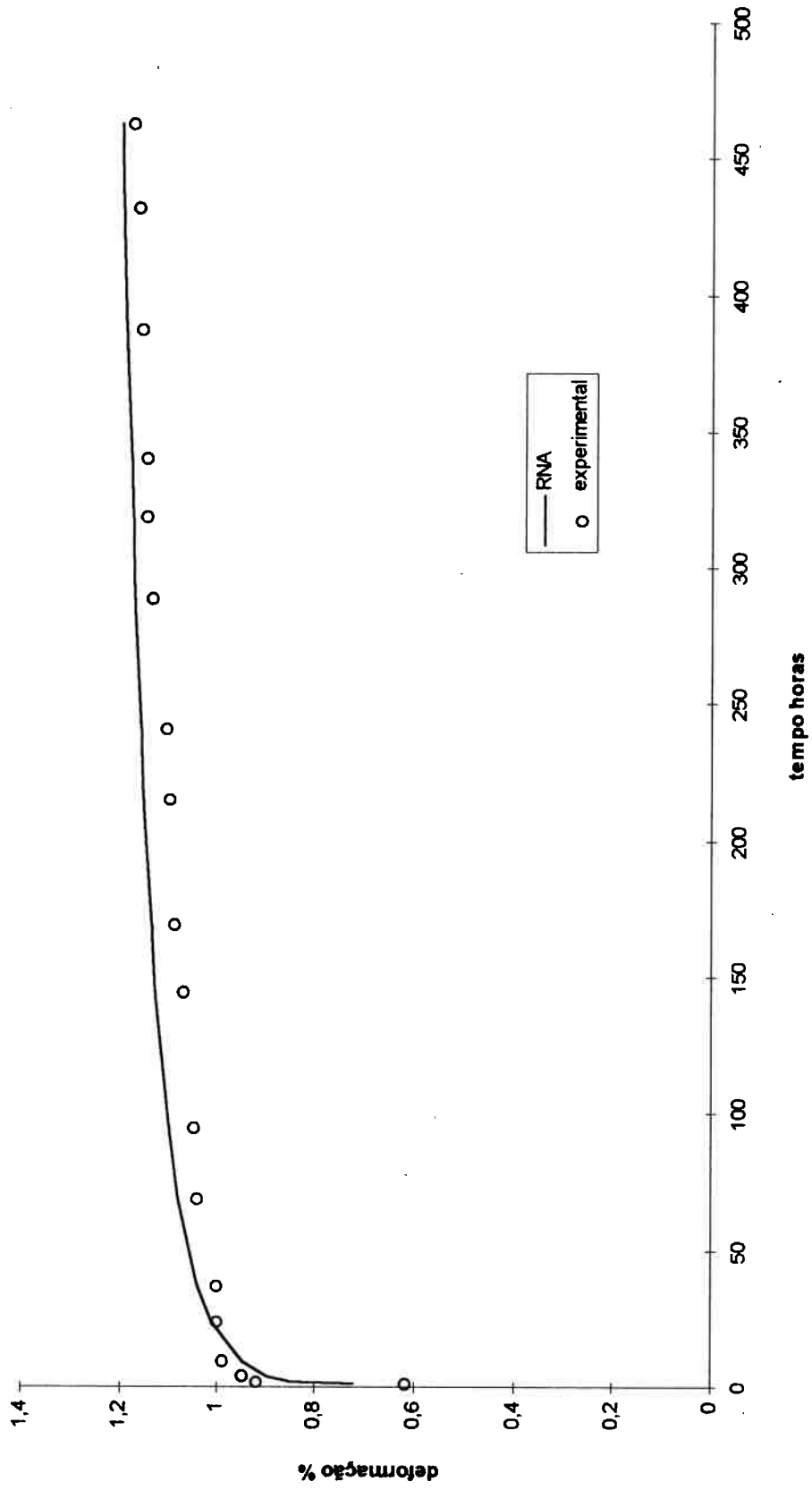


Figura 7.4 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 150 psi.

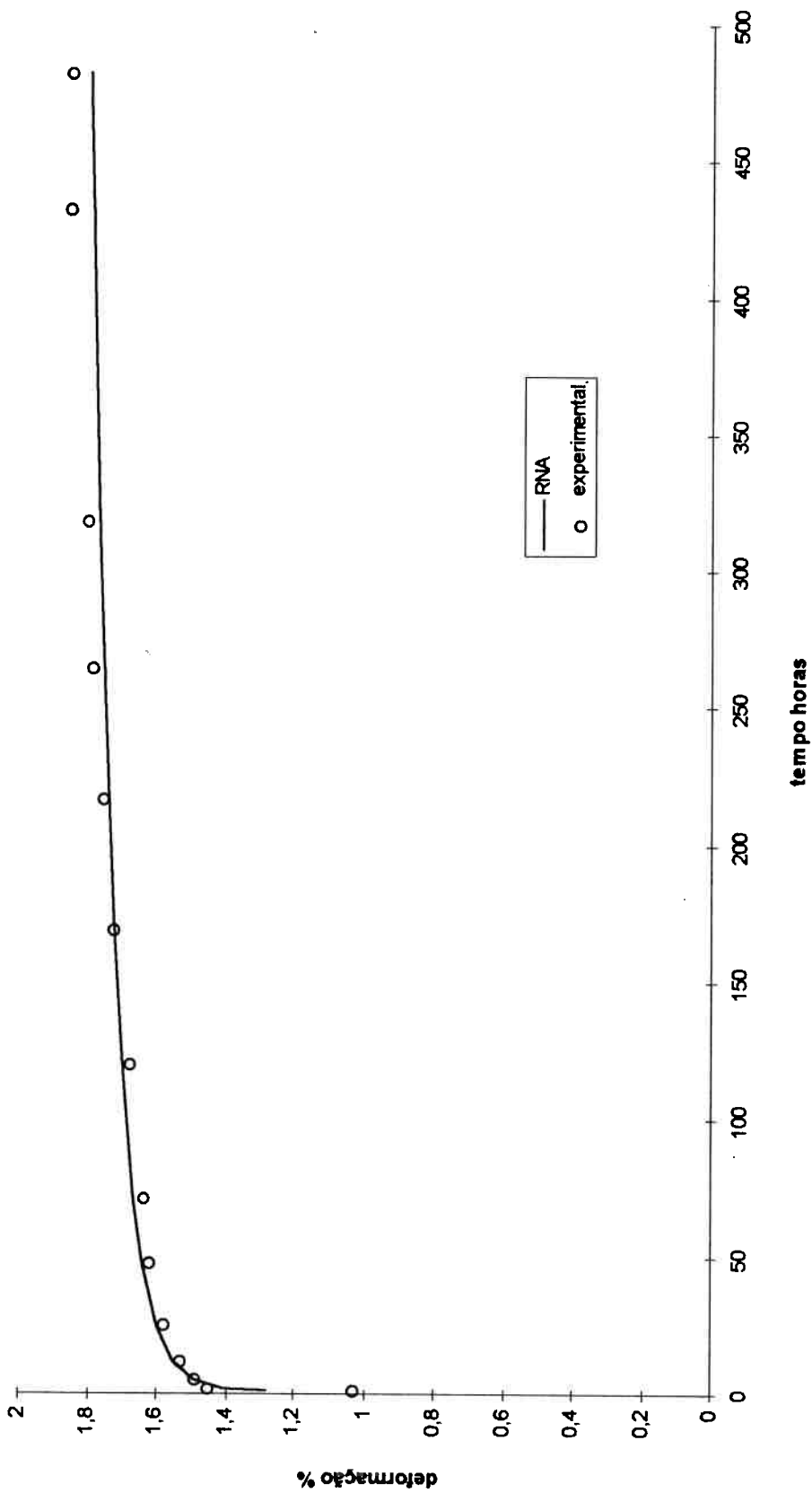


Figura 7.5 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 225 psi.

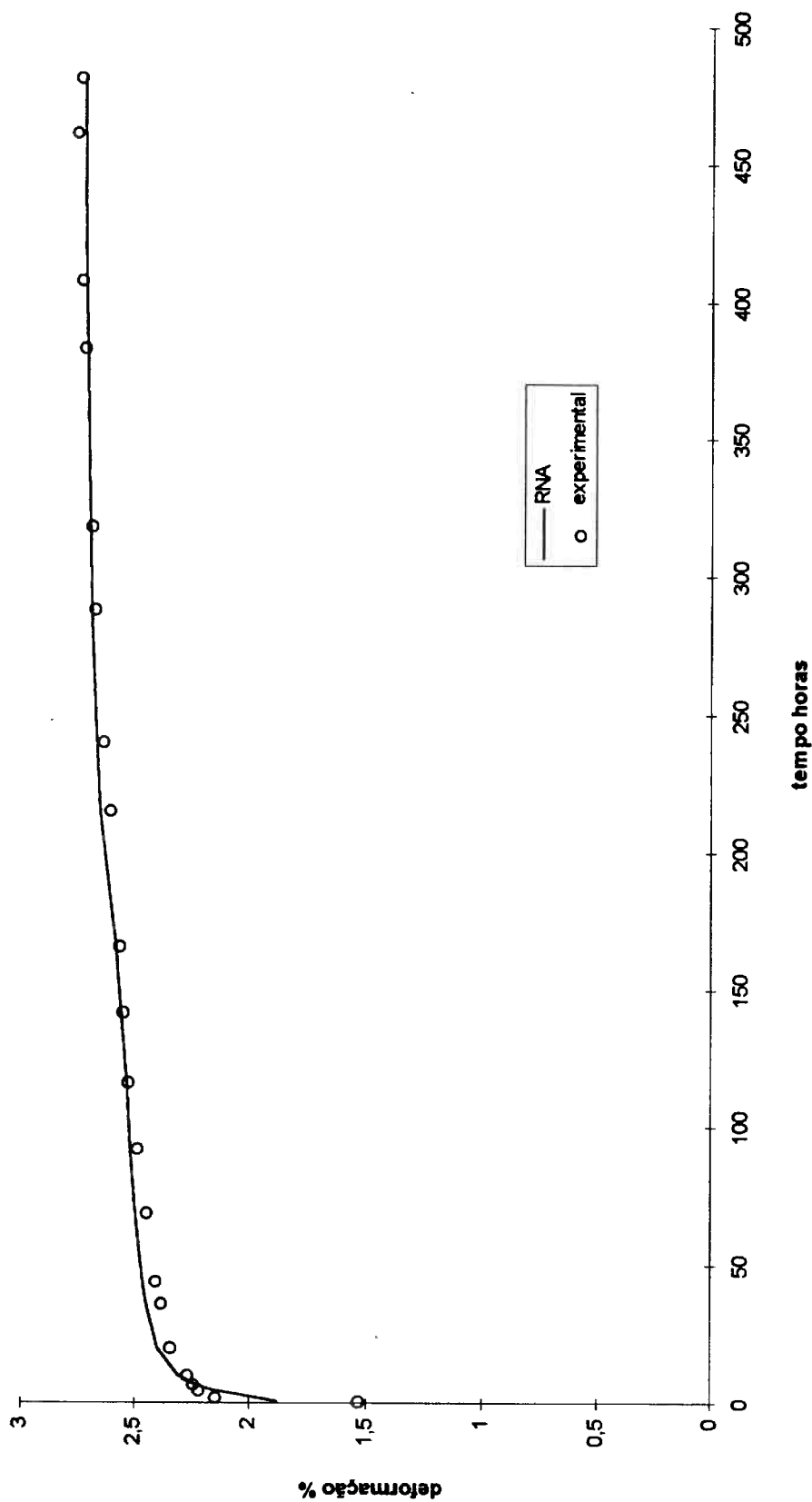


Figura 7.6 - Valores de deformações experimentais e obtidos pela RNA para a tensão de 300 psi.

A seguir estão indicados curvas de fluência (cortes por planos perpendiculares ao eixo das tensões nas curvas isócronas tensão-deformação) fornecidas pelas 3 RNA's desenvolvidas (Figura 7.7 a Figura 7.9). Observa-se que os melhores resultados são apresentados pela RNA obtida para um erro máximo de 10 %. As outras duas apesar de obtidas para um erro máximo menor (5% e 2%) mostraram menor capacidade de generalizar para valores que não os utilizados no conjunto de treinamento.

Aparentemente existe um compromisso entre o erro máximo permitido e a capacidade de generalização da RNA, quando os dados para treinamento apresentam ruídos.

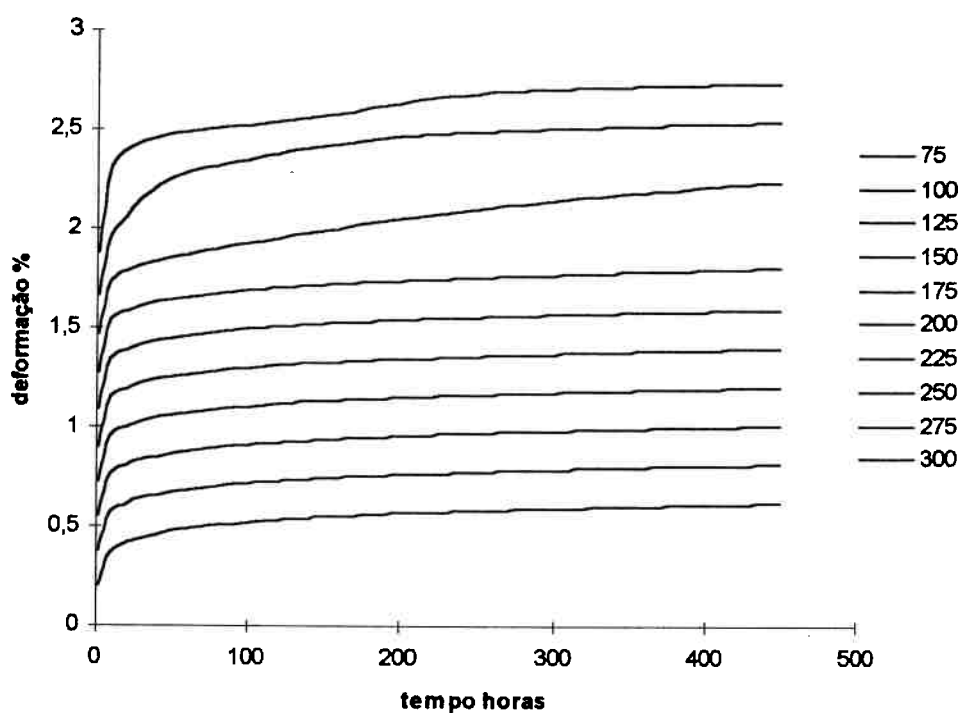


Figura 7.7 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 10 %.

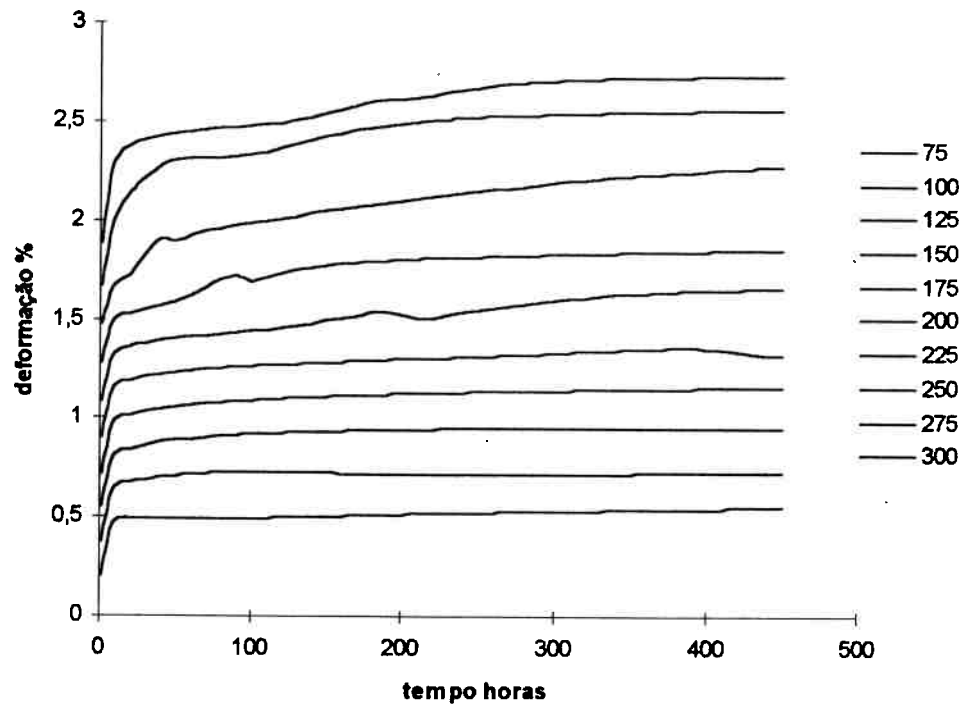


Figura 7.8 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 5 %.

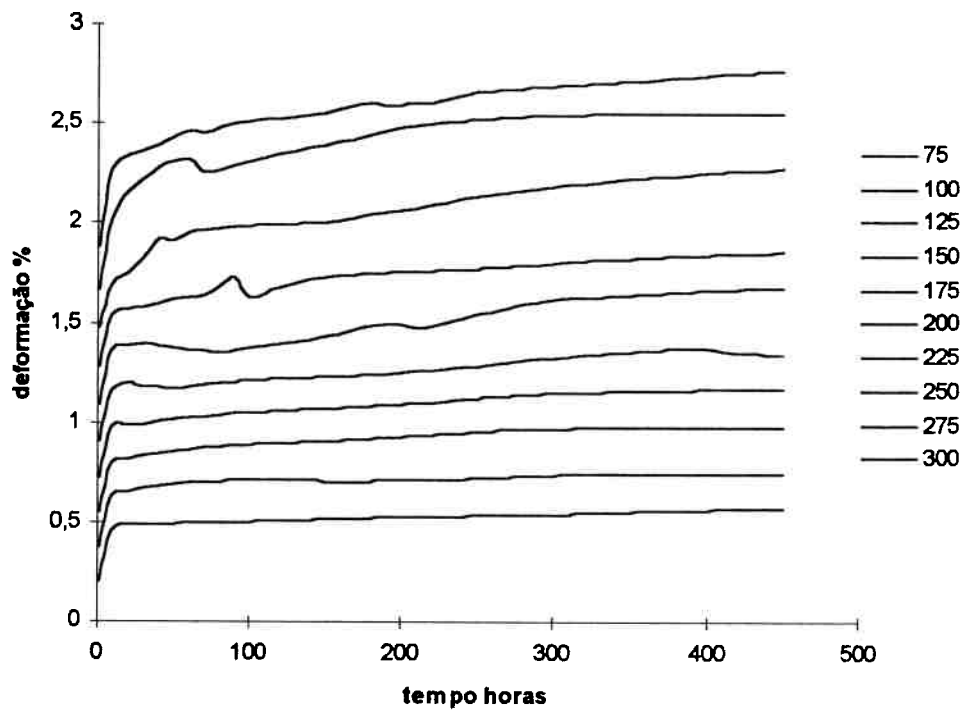


Figura 7.9 - Curvas de fluência fornecida por RNA obtida para um erro máximo de 2 %.



## *8. Exemplo 3 - Fluência e recuperação*

### **8.1 Introdução**

Os modelos constitutivos conhecidos ainda têm grande dificuldade para representar alguns comportamentos viscoelásticos. Por exemplo as deformações causadas por carga e posterior descarga de um material (fluência e recuperação). Nesse caso específico não foi encontrado nenhum modelo analítico que represente para um dado material a fluência e a recuperação de uma forma geral.

Para representar o comportamento de fluência e recuperação foi selecionado um paradigma de RNA recorrente. Esse paradigma de RNA possui um comportamento dinâmico e o estado da RNA é alterado de acordo com os valores previamente apresentados. As RNA's recorrentes foram elaboradas por pesquisadores na área de lingüística, interessados nas seqüências de palavras empregadas numa língua. Atualmente existem aplicações de RNA's recorrentes em previsões de seqüências temporais, sobretudo na área financeira, como por exemplo: previsão cambial e previsão do valor de ações em bolsas de valores.

A falta de dados de ensaios de materiais nas condições de fluência e relaxação para serem usados no treinamento da RNA levou à adoção hipóteses para gerar um modelo constitutivo como fonte de dados. O modelo resultante exhibe características não lineares o que colabora para as eventuais conclusões a respeito das capacidades das RNA's utilizadas neste exemplo.

### **8.2 RNA's recorrentes**

As RNA's multi-camadas para frente podem ser modificadas para operar de forma recorrente através da conexão da saída de um ou mais neurônios na entrada de um ou mais neurônios na mesma camada ou em camadas anteriores. Estas modificações podem incluir ligações de realimentação para o próprio neurônio e conexões laterais entre neurônios de uma mesma camada. As ligações de realimentação

na RNA resultam em mudanças significativas na forma de operação. RNA's recorrentes exibem um comportamento dinâmico. Podem mapear funções do tempo e/ou espaço o que as torna capazes de realizar tarefas mais complexas do que as RNA's não recorrentes. Por exemplo, podem aprender seqüências temporais, ou seja, padrões dependentes do tempo ou do contexto.

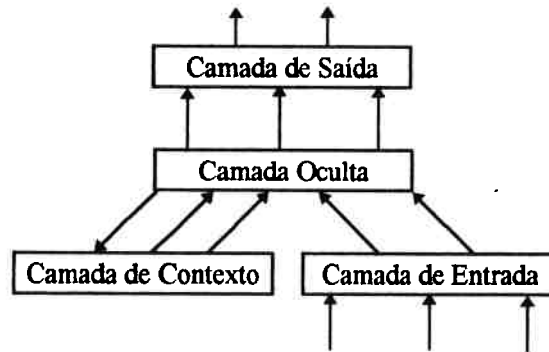


Figura 8.1 - RNA recorrente simples.

As RNA's usadas nesta aplicação foram propostas por ELMAN (20,21). Possuem realimentação parcial e por isso são chamadas *RNA's recorrentes simples*. As saídas dos neurônios da camada oculta realimentam o próprio neurônio através de unidades de armazenamento que formam a chamada de *camada de contexto* (Figura 8.1). Os pesos das ligações a partir da camada oculta para a camada de contexto são constantes. Todos os outros pesos são ajustado por retro-propagação de erros.

O processamento dos sinais é feito em duas etapas. Na primeira etapa, no instante  $t-1$ , os sinais das camadas de entrada e de contexto são distribuídos para os neurônios da camada oculta. Na segunda etapa os sinais da camada oculta são enviados para a camada de saída no instante  $t$ . Ao mesmo tempo, os valores de saída dos neurônios da camada oculta são armazenados nas unidades de contexto. Novos valores de entrada e os valores armazenados nas unidades de contexto são enviados para a camada oculta dando início a um novo ciclo nos instante  $t+1$ .

### 8.3 O material

A falta de dados de ensaios de fluência de materiais viscoelásticos nas condições de carga e descarga e também a falta de um modelo constitutivo capaz de representar o comportamento do material, foram os motivos da adoção de um “pseudo-material” como fonte de dados para treinamento. Como hipóteses básicas temos as seguintes: material obedece o modelo constitutivo proposto por GLOCKNER (35,36) e para condições de carregamentos complexos (carga/descarga, variações de tensão) vale o Princípio da Superposição de Boltzmann. Estas hipóteses podem aproximar o comportamento a fluência de um material (72).

GLOCKNER propôs um modelo constitutivo que considera que a taxa de deformação total de um material é a soma de três parcelas: uma taxa de deformação elástica, uma taxa de deformação recuperável (reversível) e uma taxa de deformação permanente (irreversível) (Equação 8.1).

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{v_1} \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma^n(\tau) j(t-\tau) d\tau + \frac{1}{v_2} \sigma^n(t)$$

Equação 8.1

onde  $E$ ,  $n$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são parâmetros do material.

Para as condições de um teste de fluência à tensão constante  $\sigma_0$ , a Equação 8.1 fica

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0^n}{v_1} j(t) + \frac{\sigma_0^n}{v_2},$$

Equação 8.2

e após a integração

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0^n}{v_1} J(t) + \frac{\sigma_0^n}{v_2} t$$

Equação 8.3

onde

$$J(t) = \int_0^t j(\tau) d\tau.$$

Equação 8.4

A função  $j(t)$  é normalizada de forma que  $j(0)=1$  e ainda adota-se  $j(t)$  tal que  $j(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ . Para uso na aplicação presente a função  $j(t)$  pode ser aproximada por

$$j(\bar{t}) = \frac{1}{(1+0.5\bar{t})^2} \quad \text{com} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_1}$$

**Equação 8.5**

onde  $t_1$  é um parâmetro obtido do ensaio do material.

O Princípio da Superposição de Boltzmann considera que cada variação no valor da tensão gera uma contribuição independente na deformação total durante a fluência. Para acréscimos de carregamentos  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$ , etc. nos instantes  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , etc. a deformação será:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & \left[ \frac{\Delta\sigma_1}{E} + \frac{\Delta\sigma_1^n}{v_1} J(t - \tau_1) + \frac{\Delta\sigma_1^n}{v_2} (t - \tau_1) \right] + \\ & + \left[ \frac{\Delta\sigma_2}{E} + \frac{\Delta\sigma_2^n}{v_1} J(t - \tau_2) + \frac{\Delta\sigma_2^n}{v_2} (t - \tau_2) \right] + \\ & + \left[ \frac{\Delta\sigma_3}{E} + \frac{\Delta\sigma_3^n}{v_1} J(t - \tau_3) + \frac{\Delta\sigma_3^n}{v_2} (t - \tau_3) \right] + \dots \end{aligned}$$

**Equação 8.6**

O modelo constitutivo resultante das hipóteses discutidas representa a viscoelasticidade não linear, já que o Princípio da Superposição de Boltzmann é atendido somente em parte.

O material escolhido foi o asbesto, cujos parâmetros foram determinados por GLOCKNER (35):

- $E = 8,1 \text{ GPa}$
- $n = 1,4$
- $v_1 = 8,67 \cdot 10^6 \text{ MPa}^n \cdot \text{h}$
- $v_2 = 354 \cdot 10^8 \text{ MPa}^n \cdot \text{h}$
- $t_1 = 100 \text{ h}$

Com a Equação 8.3, a Equação 8.6, e os parâmetros do material pode-se determinar as deformações do material ao longo do tempo sob condições de carregamento uniaxial.

## 8.4 Carregamentos

Foram considerados 30 casos de carregamentos. Uma parte composta por tensão constante de 0 a 10000 horas. Outra parte composta por tensão constante seguida de descarregamento antes de 10000 horas (Tabela 8.1).

**Tabela 8.1 - Casos usados para treinamento.**

história	tensão (MPa)	descarregamento (h)
1	5	-
2	5	2000
3	5	4000
4	5	6000
5	5	8000
6	10	-
7	10	2000
8	10	4000
9	10	6000
10	10	8000
11	15	-
12	15	2000
13	15	4000
14	15	6000
15	15	8000
16	20	-
17	20	2000
18	20	4000
19	20	6000
20	20	8000
21	25	-
22	25	2000
23	25	4000
24	25	6000
25	25	8000
26	30	-
27	30	2000
28	30	4000
29	30	6000
30	30	8000

As deformações ao longo do tempo foram obtidas para cada caso conforme a formulação apresentada no item anterior. Foram gerados valores para cada intervalo de 100 horas. Como exemplo, os casos 18 e 21 estão apresentados nas figuras a seguir (Figura 8.2. a Figura 8.5).

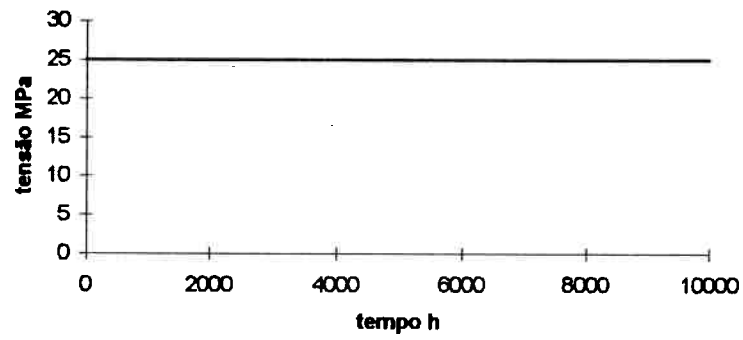


Figura 8.2 - Caso 18: tensão x tempo.

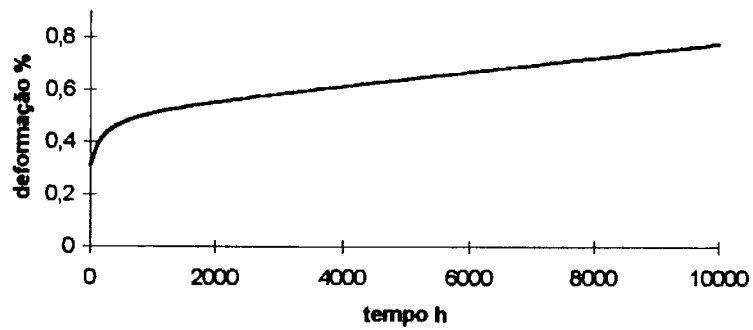


Figura 8.3 - Caso 18: deformação x tempo.

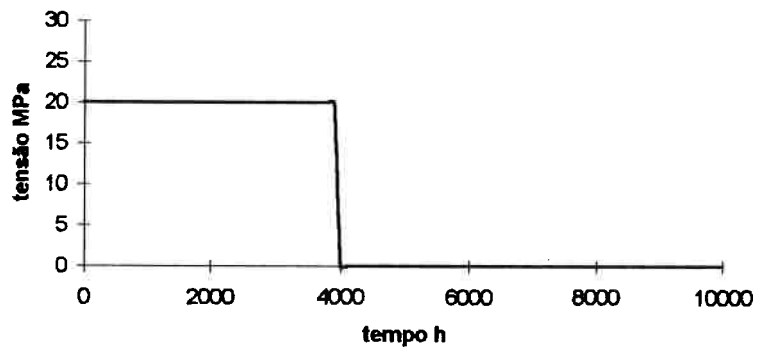


Figura 8.4 - Caso 21: tensão x tempo.

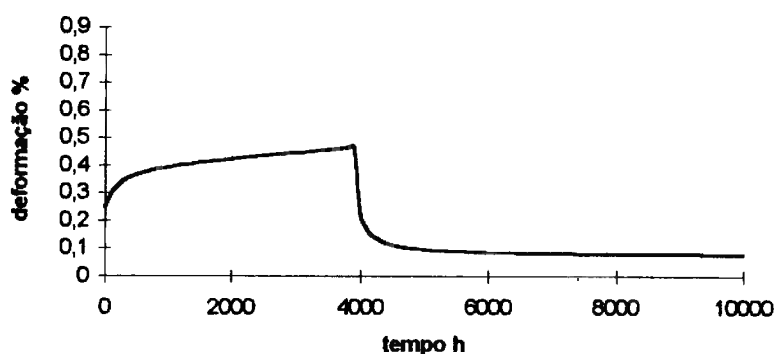


Figura 8.5 - Caso 21: deformação x tempo.

## 8.5 Resultados da RNA

Uma RNA recorrente simples foi treinada com os dados gerados a partir das condições de carregamento (Tabela 8.1). A RNA tem como entradas o tempo e tensão (duas unidades de entrada) e como saída a deformação (uma unidade de saída).

A configuração da RNA que apresentou o melhor resultado contém 35 neurônios na camada oculta, sendo que todos os neurônios da camada de saída e da camada oculta possuem função de transferência do tipo “sigmoid”.

O erro mínimo alcançado para os casos de treinamento foi de 7,9% (Equação 6.2) e de 7,8% para os casos de teste após 12000 épocas<sup>1</sup> de treinamento (Figura 9.3). Os valores obtidos para os casos de teste estão mostrados nas figuras a seguir (Figura 8.7 a Figura 8.16). Foi usado o programa FAST v.2.2 (3) para treinar a RNA.

<sup>1</sup> Uma época de treinamento é a denominação dada para o ciclo de apresentação de todos os pares à RNA durante a fase de treinamento.

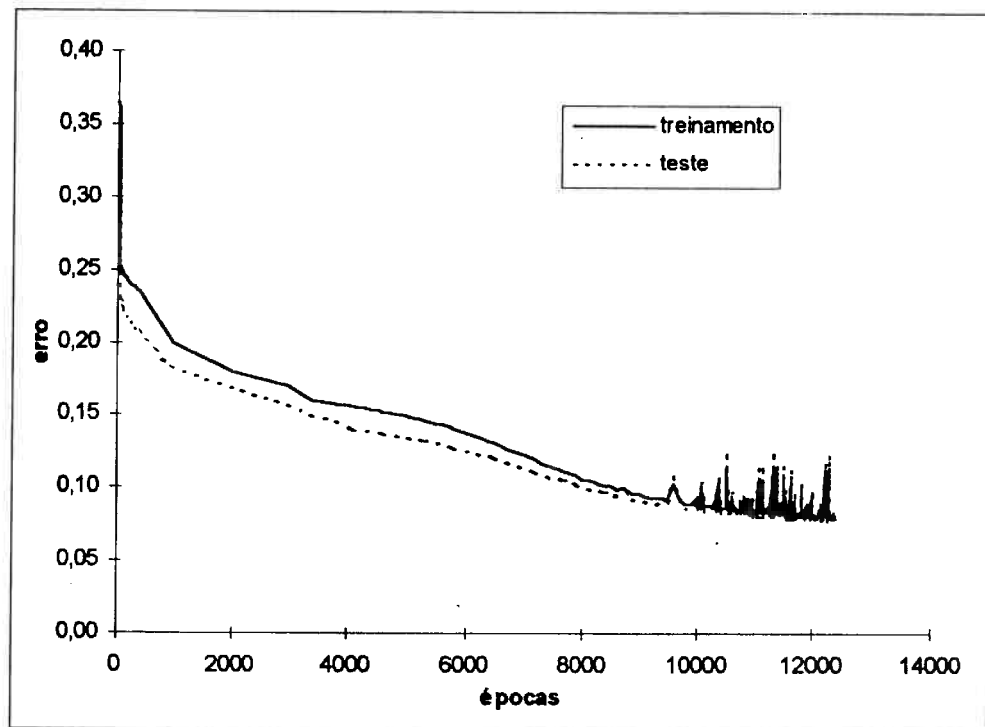


Figura 8.6 - Erro x número de épocas.

Um fenômeno típico no treinamento de RNA's recorrentes é o seguinte: o erro decresce até atingir um determinado valor a partir do qual o processo de convergência do treinamento se torna instável como pode ser observado na Figura 8.6.



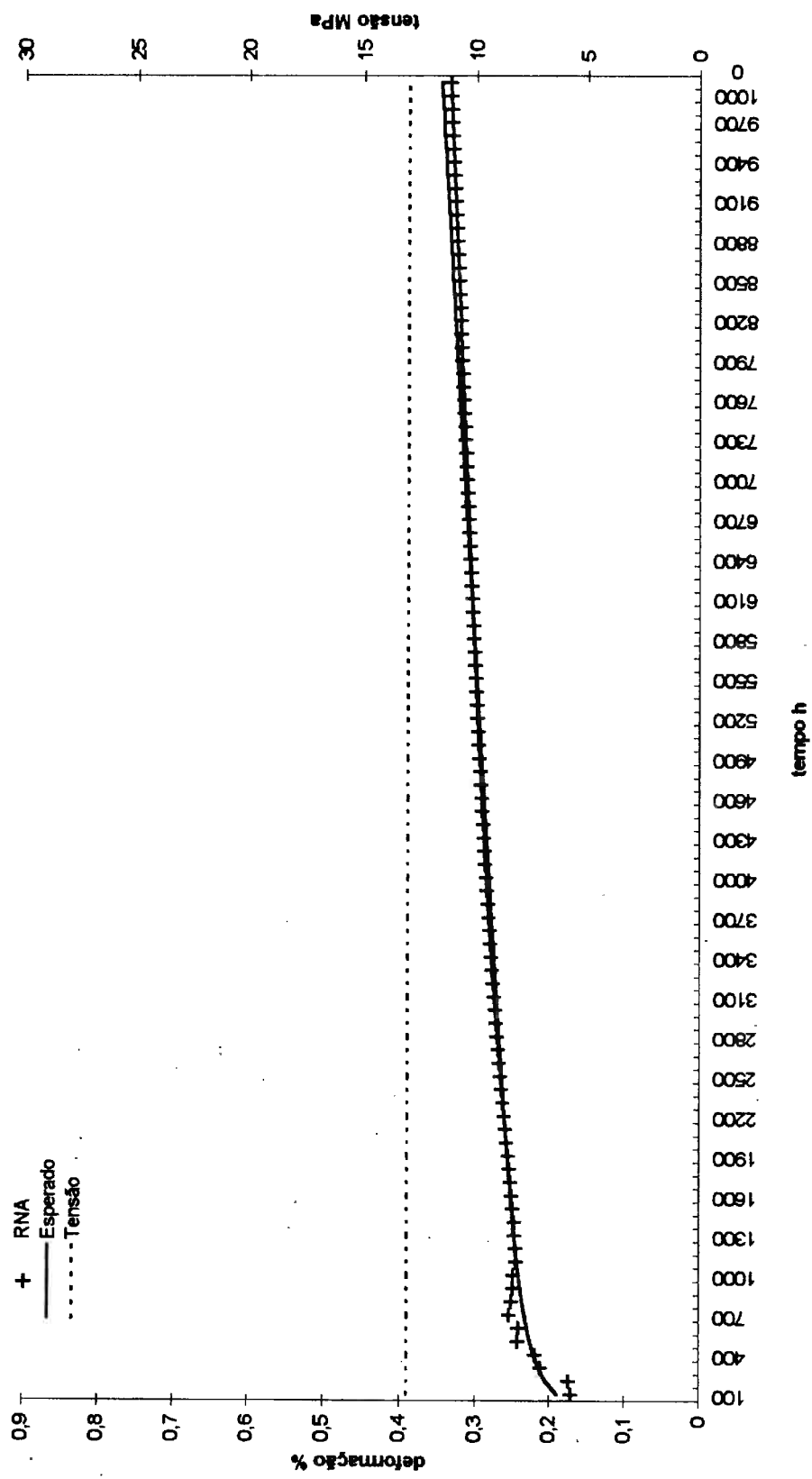


Figura 8.7 - Caso de teste 1: tensão de 13 MPa.

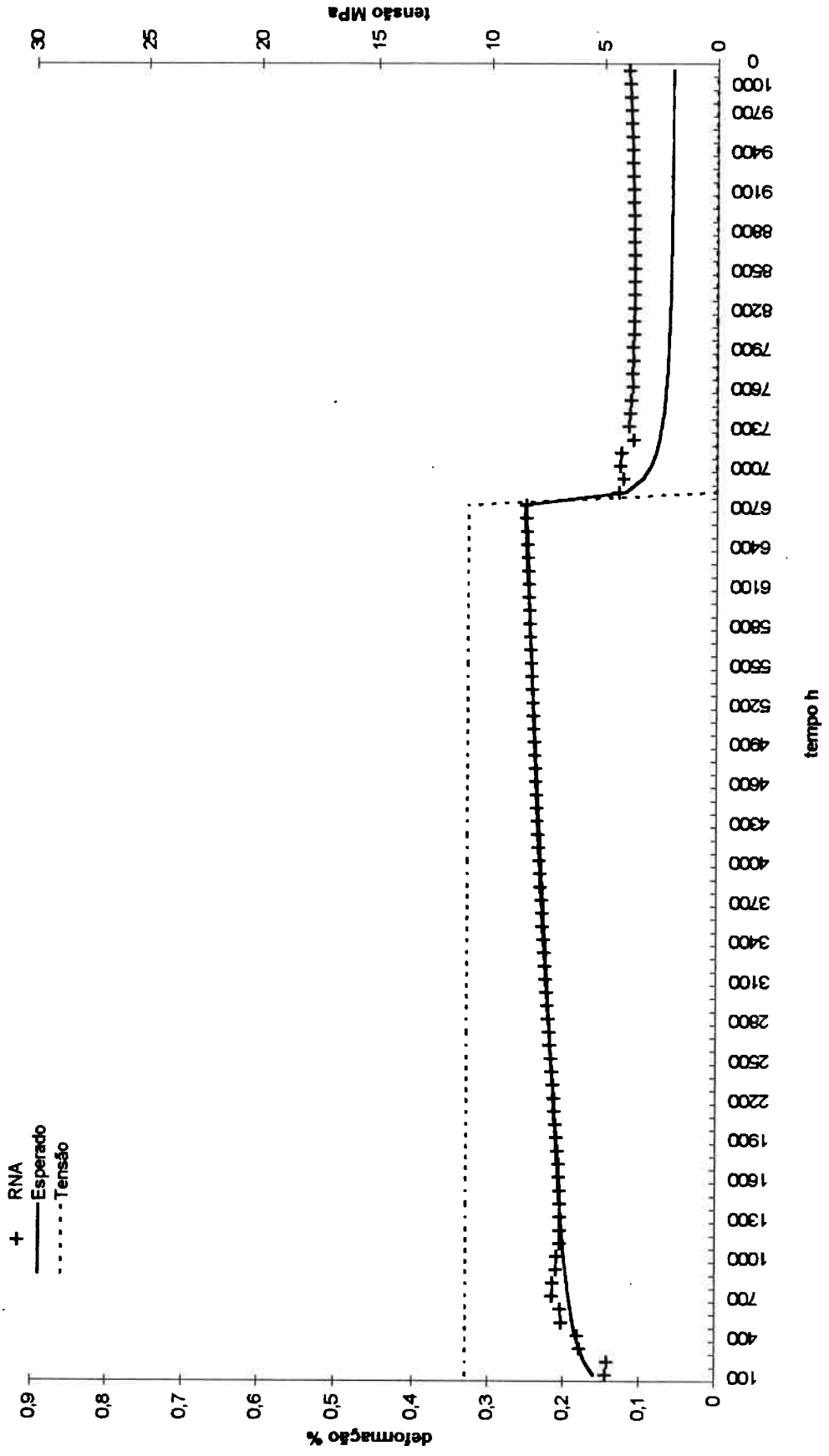


Figura 8.8 - Caso de teste 2: tensão de 11 MPa descarregado a 6800 horas.

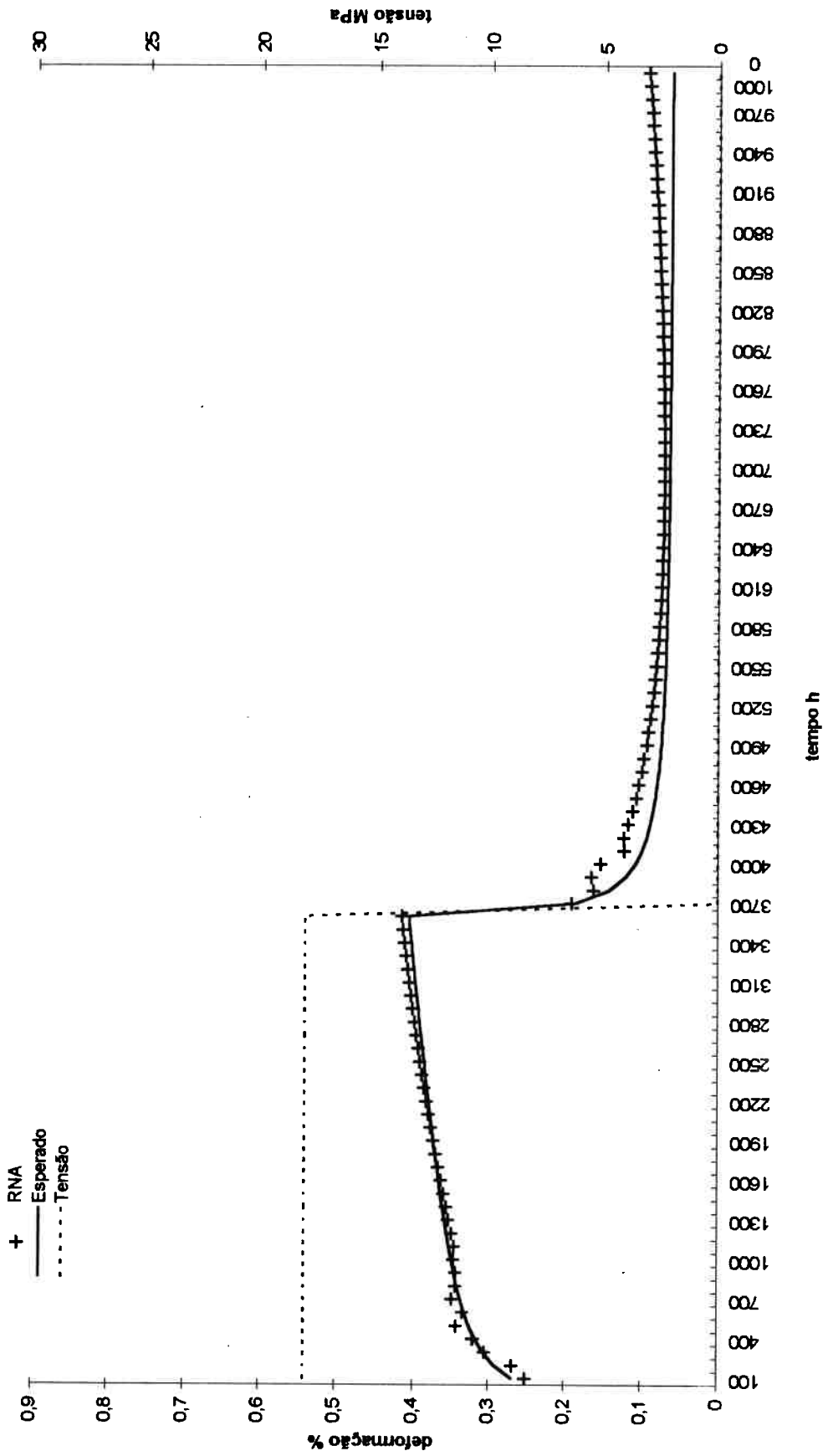


Figura 8.9 - Caso de teste 3: tensão de 18 MPa descarregado a 3700 horas.

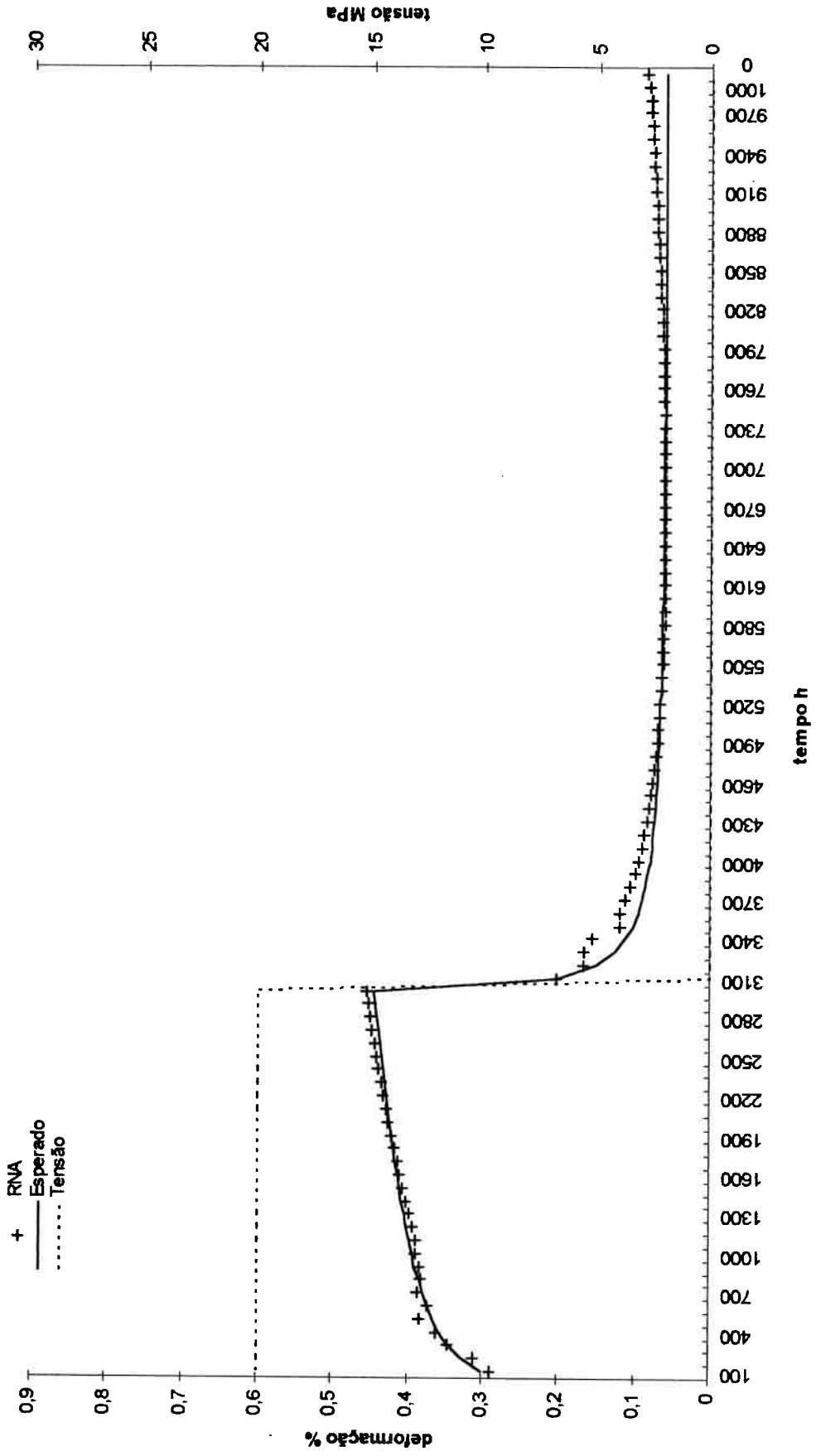


Figura 8.10 - Caso de teste 4: tensão de 20 MPa descarregado a 3000 horas.

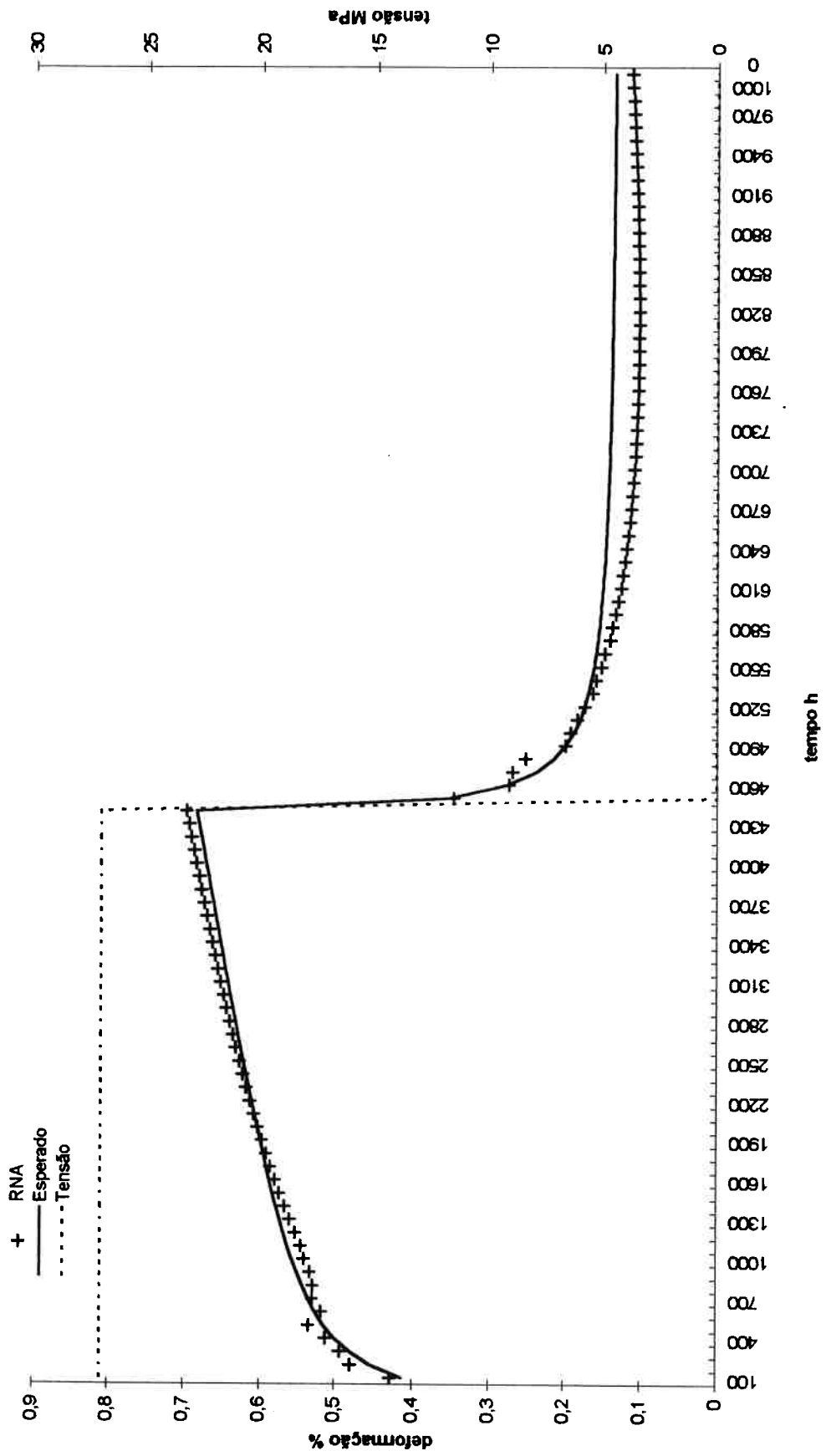


Figura 8.11 - Caso de teste 5: tensão de 27 MPa descarregado a 4600 horas.

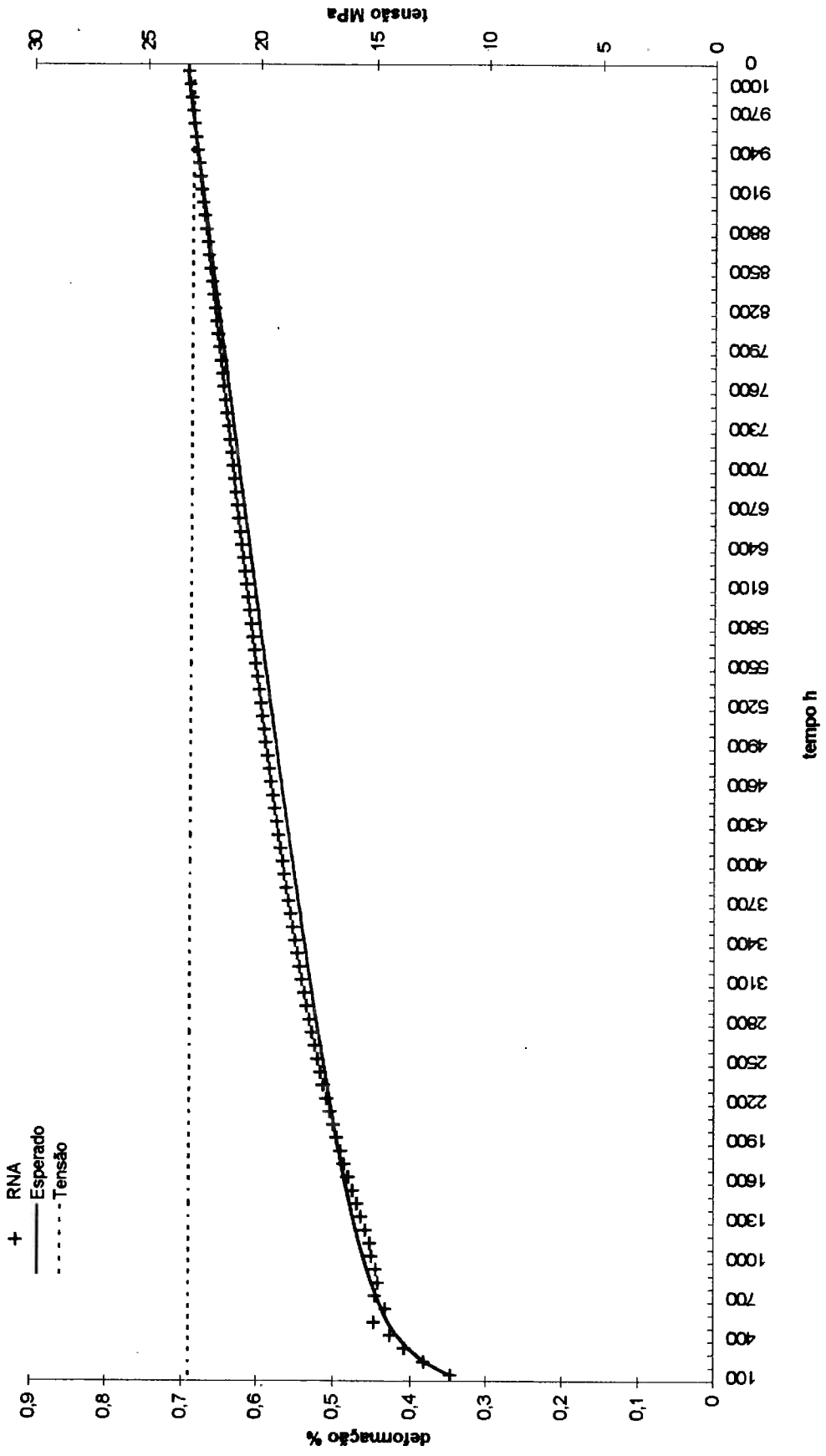


Figura 8.12 - Caso de teste 6: tensão de 23 MPa.

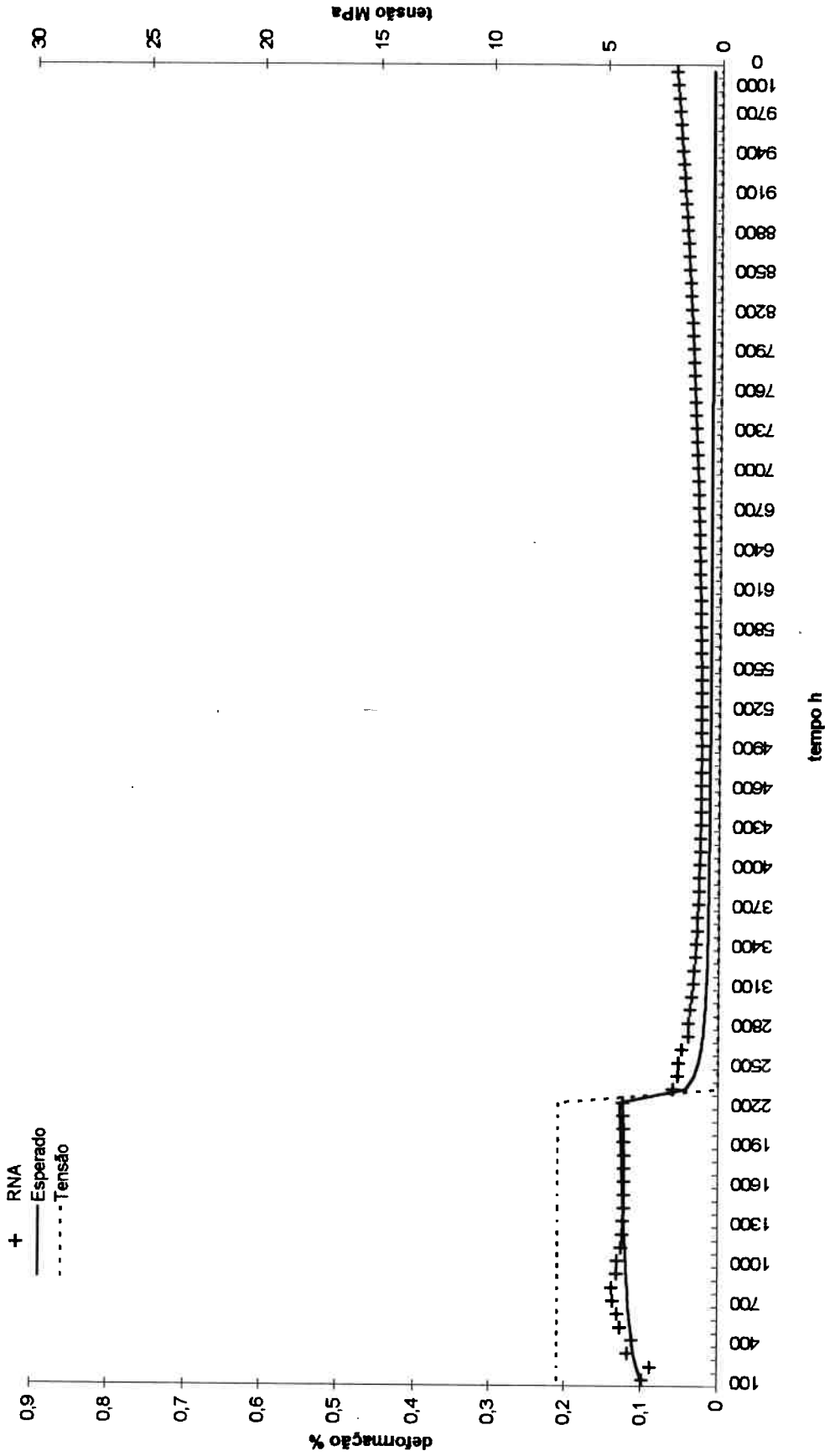


Figura 8.13 - Caso de teste 7: tensão de 7 MPa descarregado a 2300 horas.

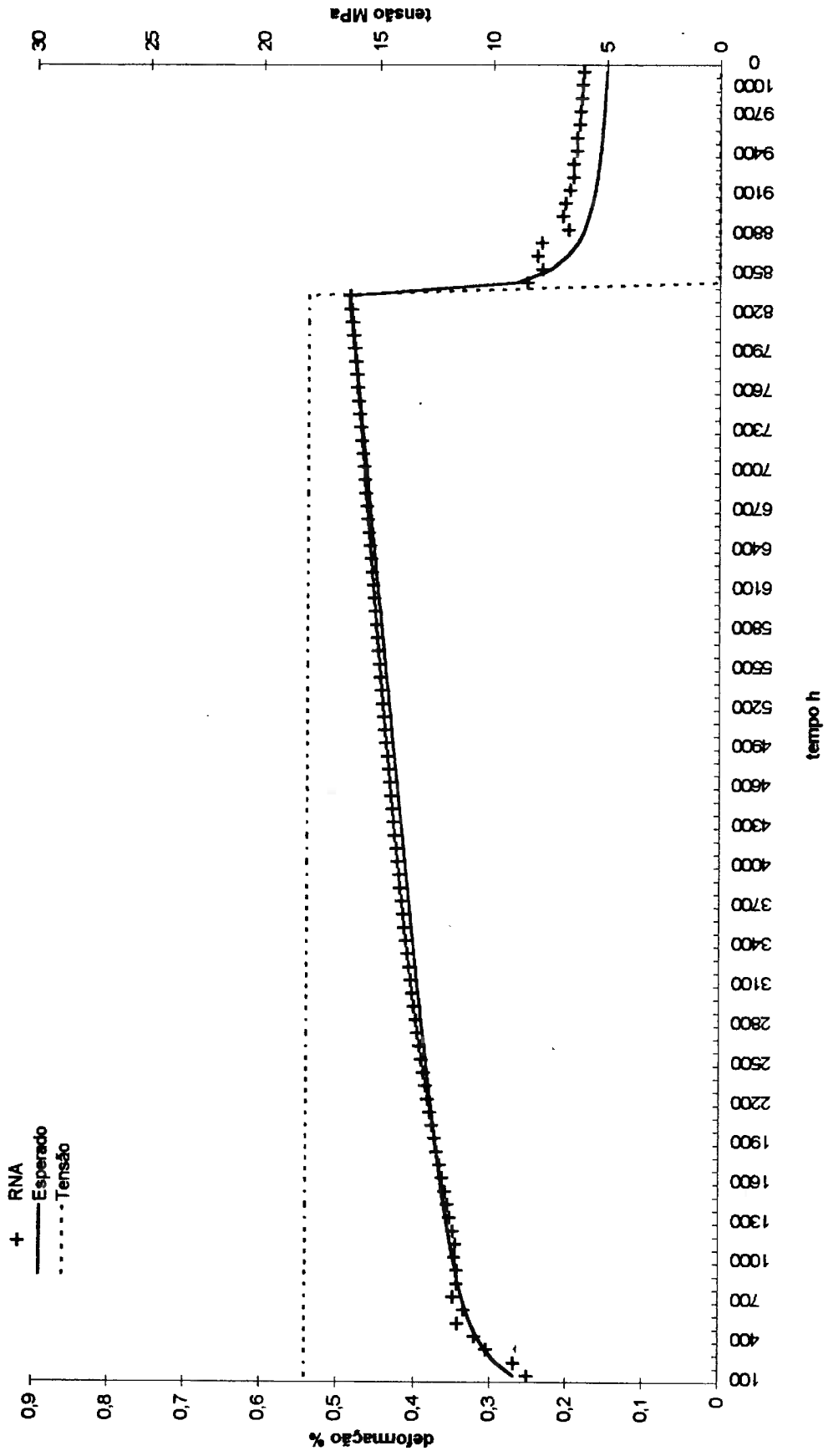


Figura 8.14 - Caso de teste 8: tensão de 18 MPa descarregado a 8400 horas.



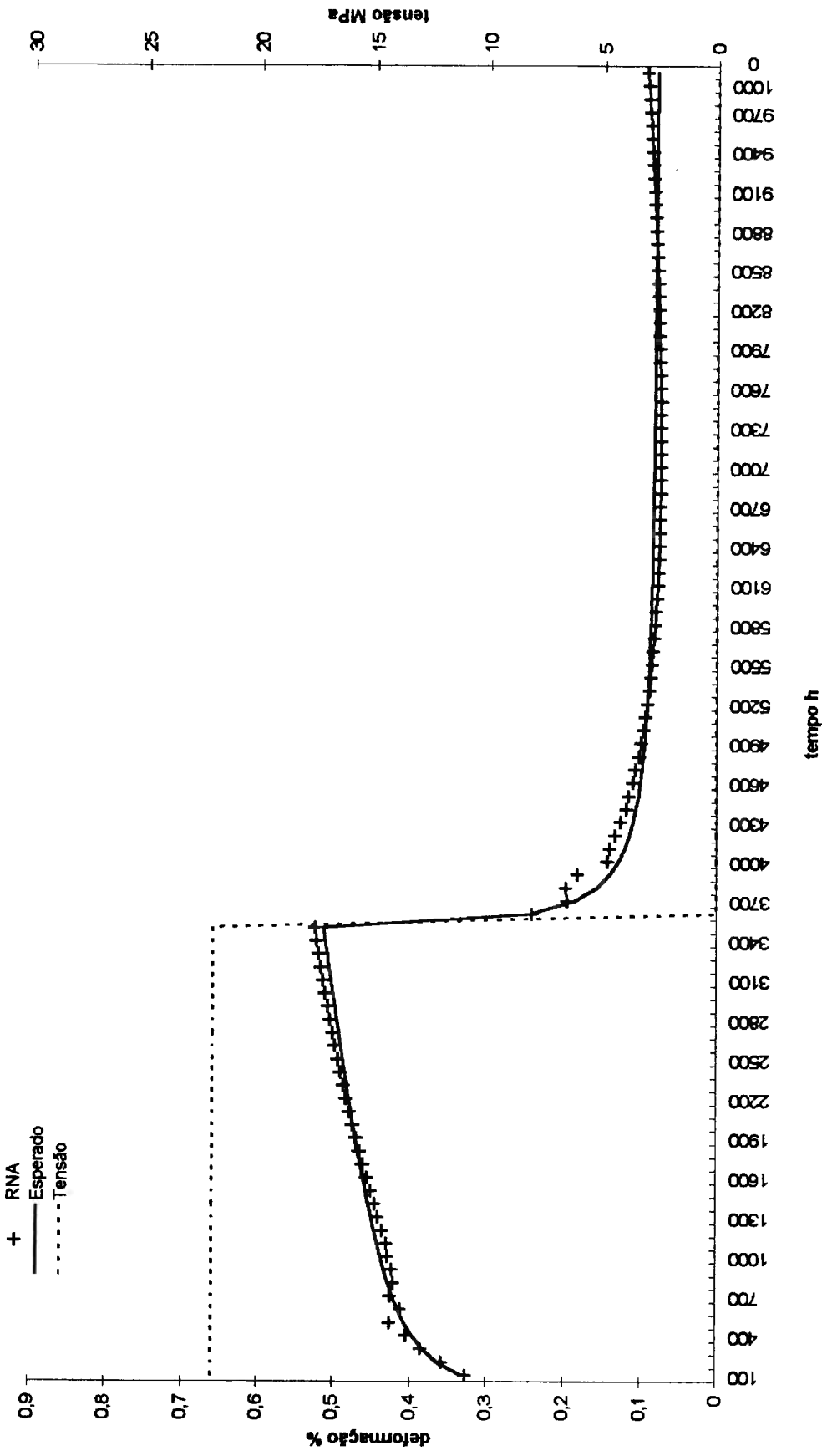


Figura 8.15 - Caso de teste 9: tensão de 22 MPa descarregado a 3600 horas.

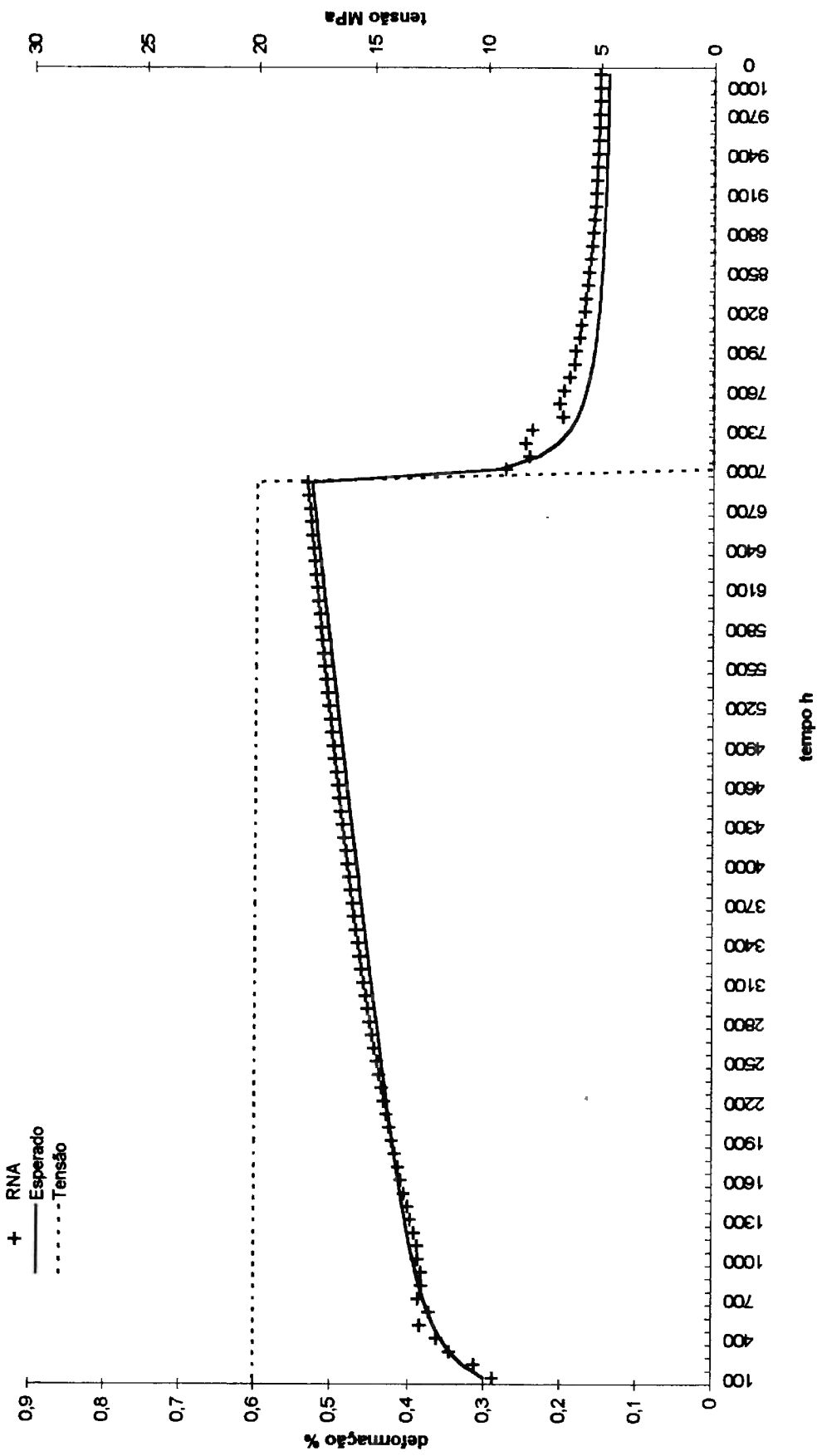


Figura 8.16 - Caso de teste 10: tensão de 20 MPa descarregado a 7000 horas.

Dos resultados indicados nos gráficos observa-se:

- a forma geral das curvas é representada pela RNA;
- para os casos com tensão mais baixa o erro percentual é maior;
- para os casos de fluência sem descarregamento, o erro maior está na região onde a variação da deformação é maior;
- na região de recuperação a deformação diminui e depois volta a subir.

É interessante notar que para se obter os resultados apresentados nas figuras, nenhuma hipótese a respeito do comportamento do material foi necessária. A RNA foi treinada a partir de exemplos do comportamento viscoelástico não linear obtidos do modelo analítico.

## *9. Exemplo 4 - História de carregamentos complexa*

### **9.1 Introdução**

Uma RNA recorrente foi treinada para determinar a deformação de um material viscoelástico submetido a uma história de carregamentos uniaxiais. As tensões podem ser tanto constantes com variações discretas.

O objetivo deste exemplo é experimentar a capacidade de uma RNA em representar condições mais gerais de carregamentos que os analisados nos exemplos anteriores.

O paradigma usado foi o mesmo empregado no exemplo anterior: RNA recorrente simples proposto por ELMAN (20,21).

### **9.2 O material e o carregamento**

O material utilizado é o mesmo do exemplo anterior com o modelo constitutivo descrito no item 8.3. Um total de 60 histórias de carregamentos foram geradas aleatoriamente por um programa de computador. Destas 50 fazem parte do conjunto de dados de treinamento (Tabela 9.1) e 10 do conjunto de dados de teste (Figura 9.4 a Figura 9.13). Cada história pode ter de nenhuma até 4 variações no valor da tensão e possuem 100 pontos no intervalo de 0 a 10000 horas (Figura 9.1 e Figura 9.2).

Tabela 9.1 - Histórias de carregamentos para treinamento - tempo em horas e tensão em MPa.

história	tempo 1	tensão 1	tempo 2	tensão 2	tempo 3	tensão 3	tempo 4	tensão 4	tempo 5	tensão 5
1	0	30	4900	20						
2	0	12	7800	19	8200	30				
3	0	27	7400	11						
4	0	21	500	30	2200	2	2800			
5	0	23	1200	28	4900	11				
6	0	30	2600	6	3300	15				
7	0	13	700	18	1900	4	7700	30	9200	28
8	0	17	2500	30	7000	28	8800	9		
9	0	11	9200	30						
10	0	30								
11	0	5	7400	11						
12	0	13	3200	0	3600	28	4400	15	7300	20
13	0	27	2600	30	6700	28				
14	0	30	1800	3						
15	0	20	1200	9	2900	28	5000	30		
16	0	23	700	30						
17	0	28								
18	0	19	2600	0						
19	0	27	300	30						
20	0	11	3100	30	6900	14	9300	26		
21	0	17	1300	10	2700					
22	0	5								
23	0	16								
24	0	7	3200	22	9500	30				
25	0	24	5000	20						
26	0	12								
27	0	16	1700	0	7000	1	7600	0		
28	0	22	4700	29	7900	30				
29	0	17	3500	22	3700	30				
30	0	15	4800	30	5600	18	6100	3	9600	
31	0	0								
32	0	14	9800	30						
33	0	23	4100	27	4400	30	8400	27	8500	14
34	0	13	2700	0						
35	0	19	300	5	2600	21	3000			
36	0	28								
37	0	24	3100	0						
38	0	15	2000	0	10000	18				
39	0	27	2100	30						
40	0	4	3500	0	5900	30	7100	14	8000	30
41	0	9	2100	6						
42	0	27	6400	30						
43	0	27	2400	30	4100	28	7400		7600	13
44	0	20	1100	30						
45	0	19	9700	0						
46	0	14								
47	0	10	4100	8						
48	0	17								
49	0	29	900	17	2200	30				
50	0	13	200	30						

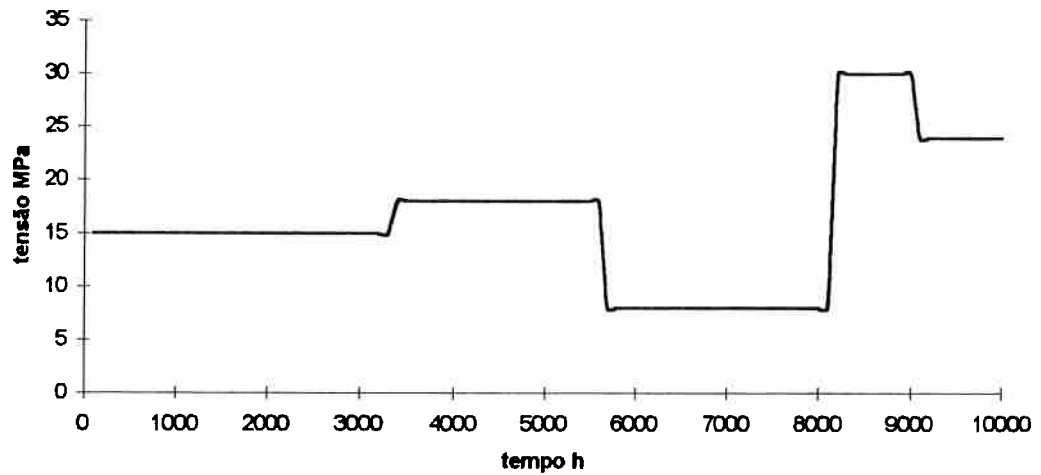


Figura 9.1 - Exemplo de história de carregamento - tensão x tempo.

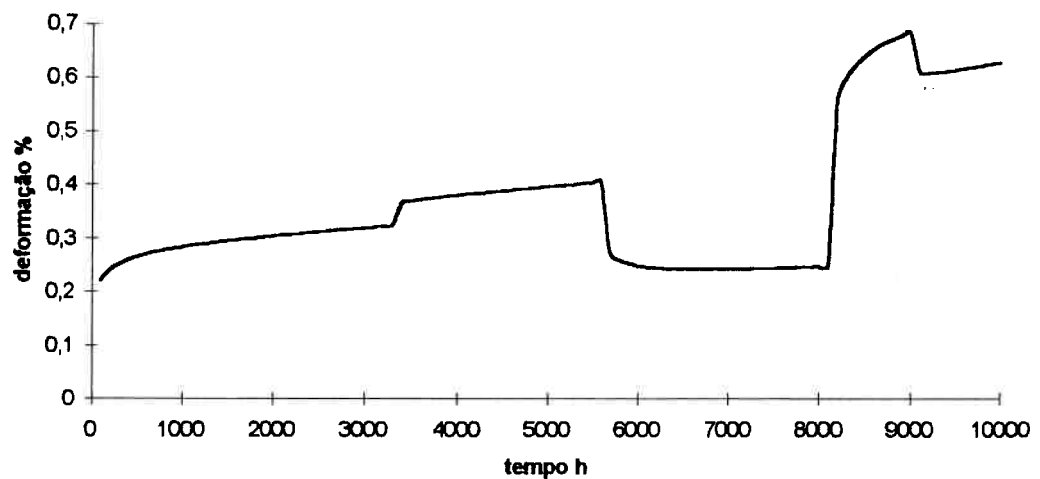


Figura 9.2 - Exemplo de história de carregamento - deformação x tempo.

### 9.3 Resultados da RNA

Uma RNA recorrente simples foi treinada com as histórias de carregamentos geradas Tabela 9.1. A RNA tem como entradas o tempo e tensão (duas unidades de entrada) e como saída a deformação (uma unidade de saída).

A configuração da RNA que apresentou o melhor resultado contém 35 neurônios na camada oculta, sendo que todos os neurônios da camada de saída e da camada oculta possuem função de transferência do tipo "sigmoid".

O erro mínimo alcançado para os casos de treinamento foi de 21% (Equação 6.2) e de 16,5% para os casos de teste após 4700 épocas de treinamento. Os valores obtidos para os casos de teste estão mostrados nas figuras a seguir (Figura 9.4 a Figura 9.13). Foi usado o programa FAST v.2.2 (3) para treinar a RNA.

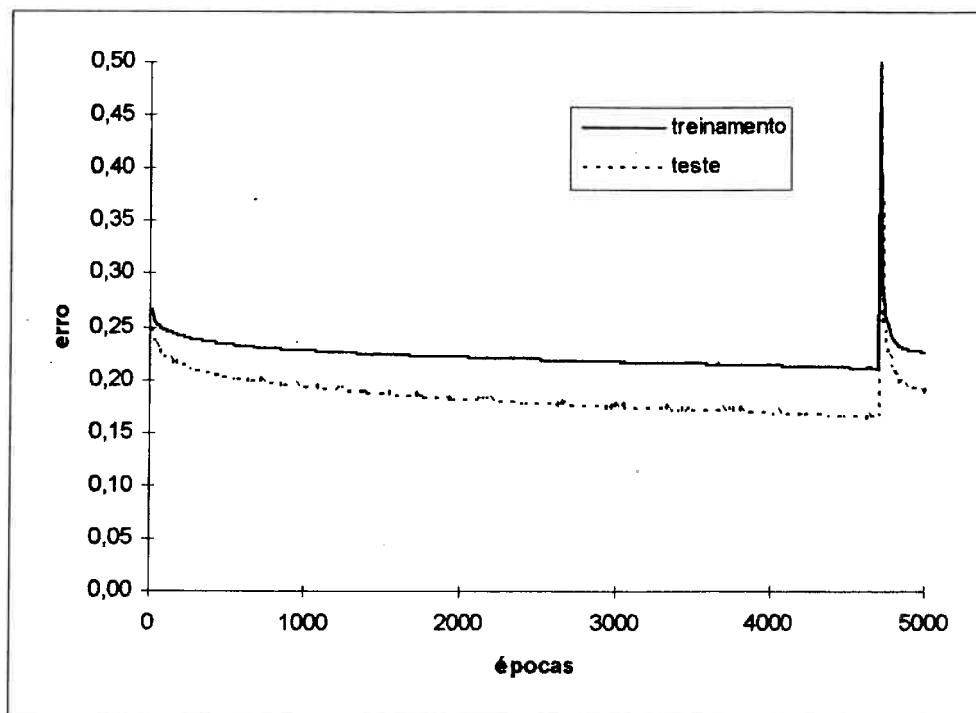


Figura 9.3 - Erro x número de épocas.

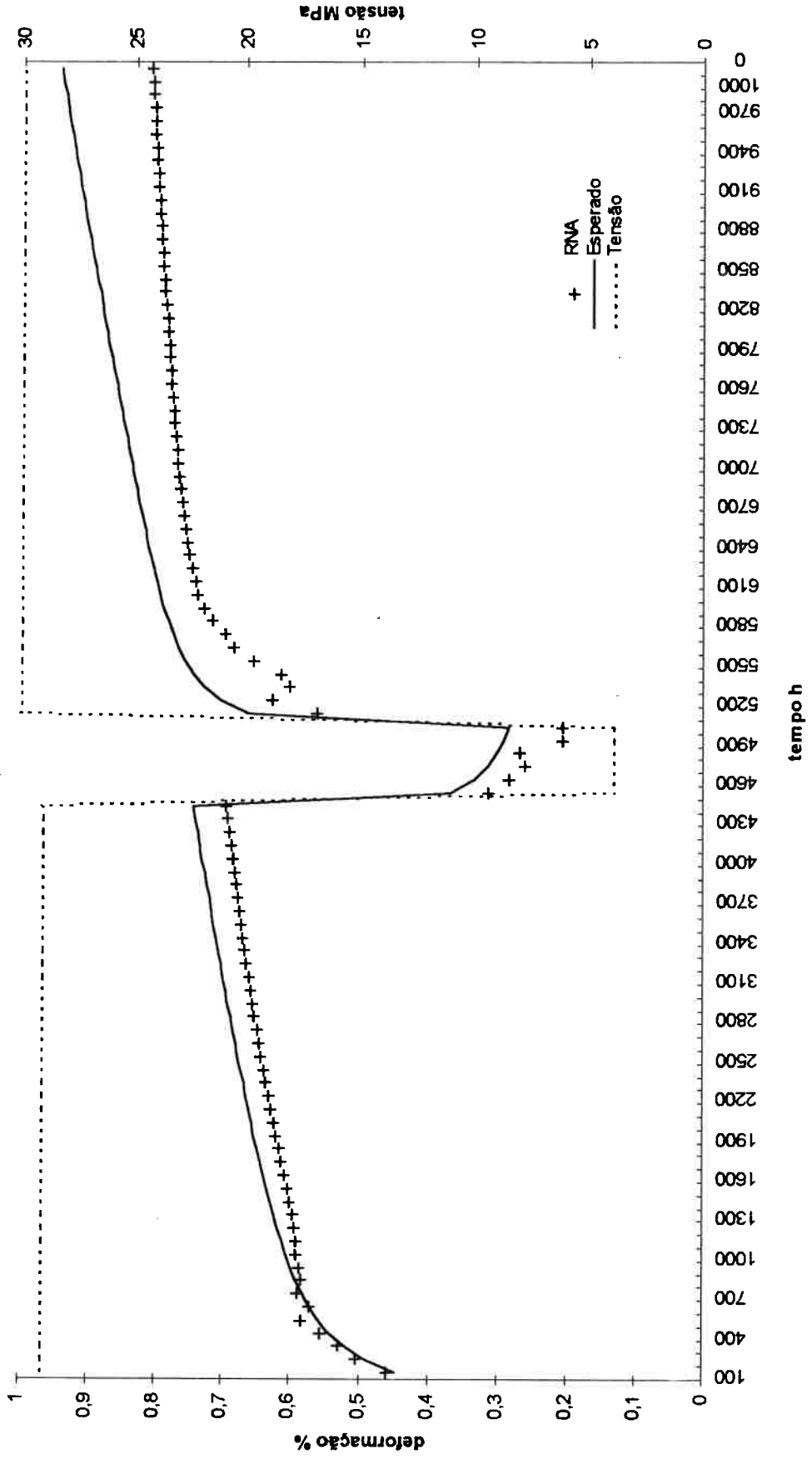


Figura 9.4 - Caso de teste 1: 29 MPa - 4 MPa - 30 MPa.



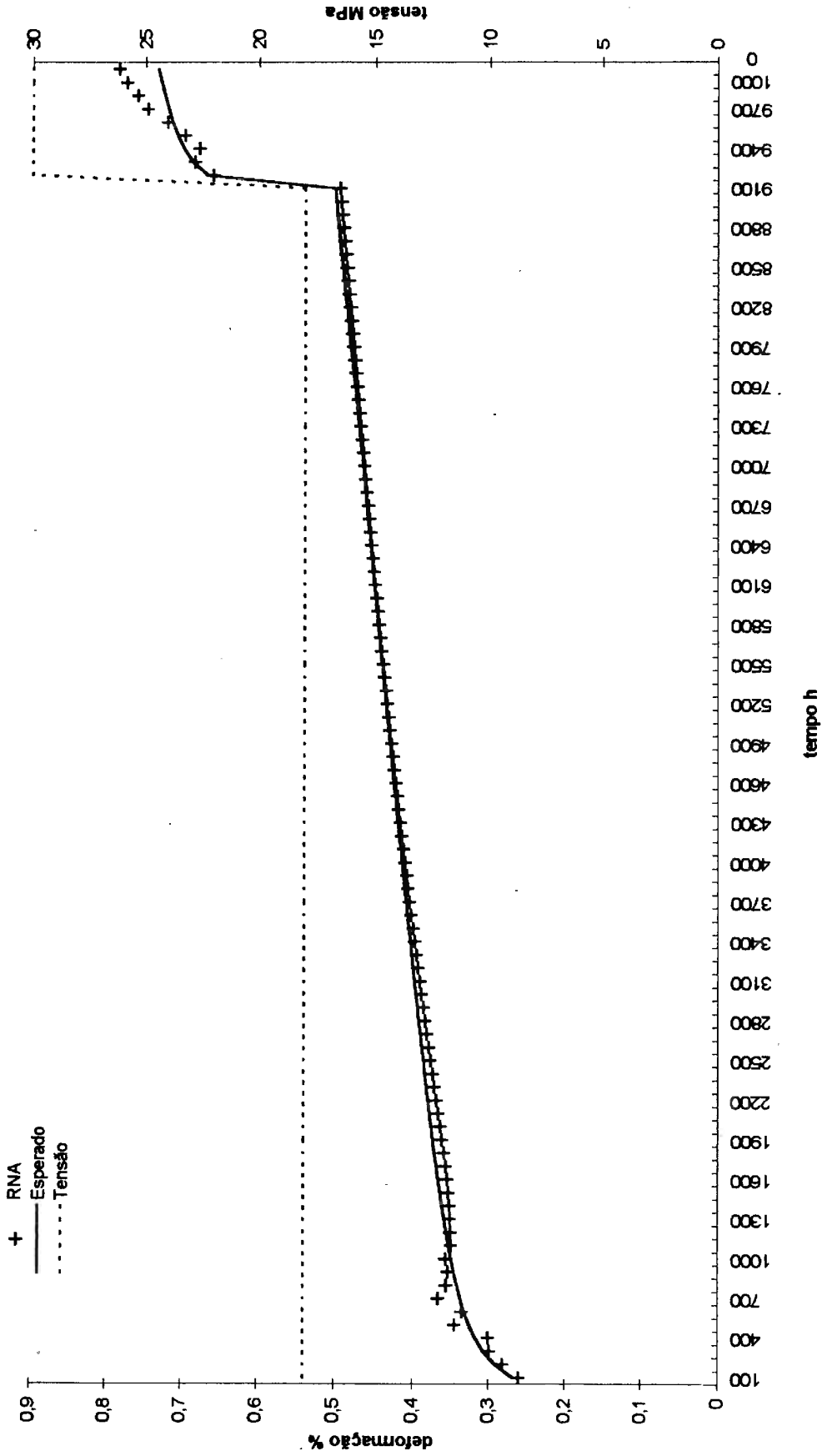


Figura 9.5 - Caso de teste 2: 18 MPa - 30 MPa.

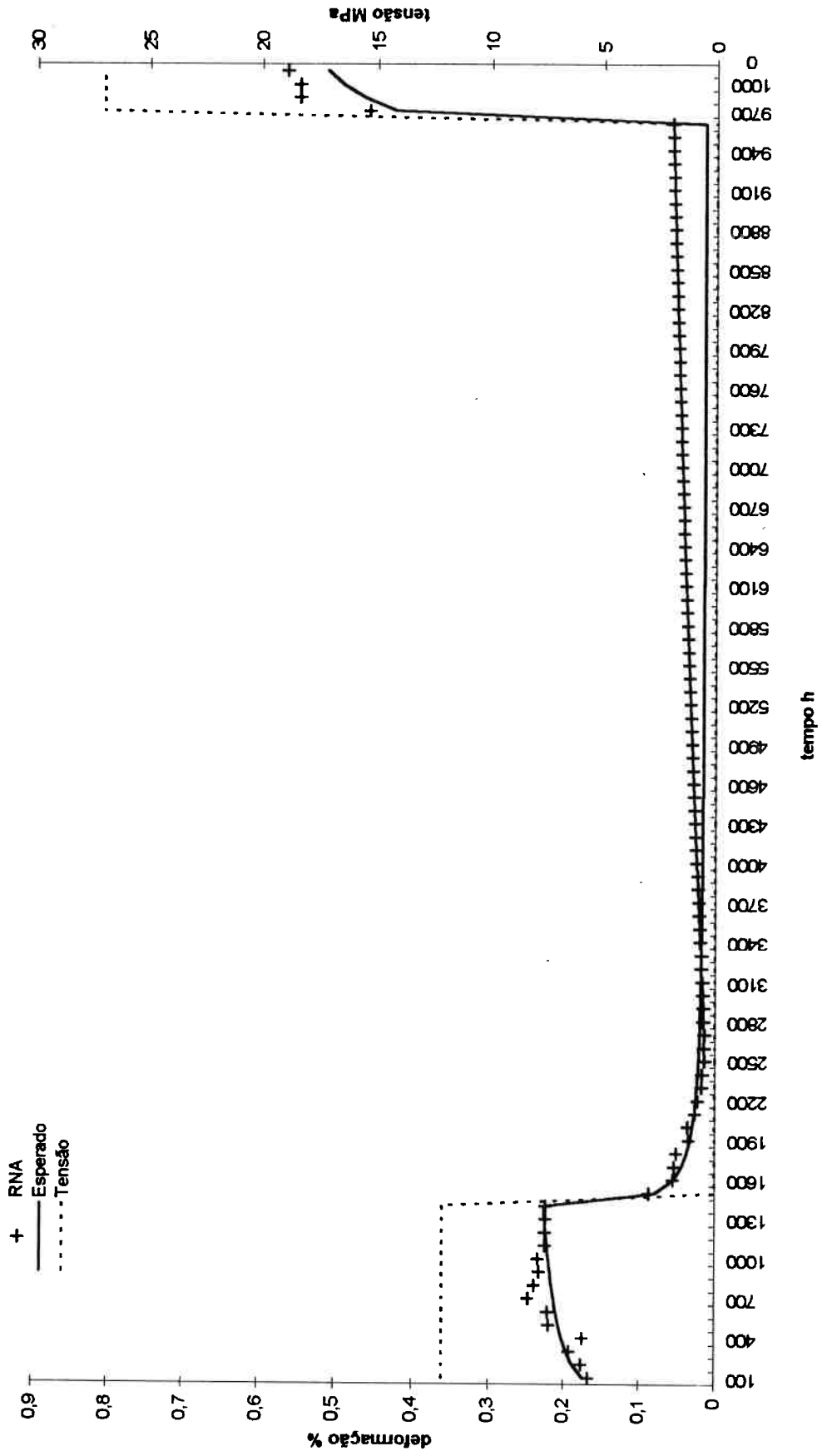


Figura 9.6 - Caso de teste 3: 12 MPa - 0 MPa - 27 MPa.

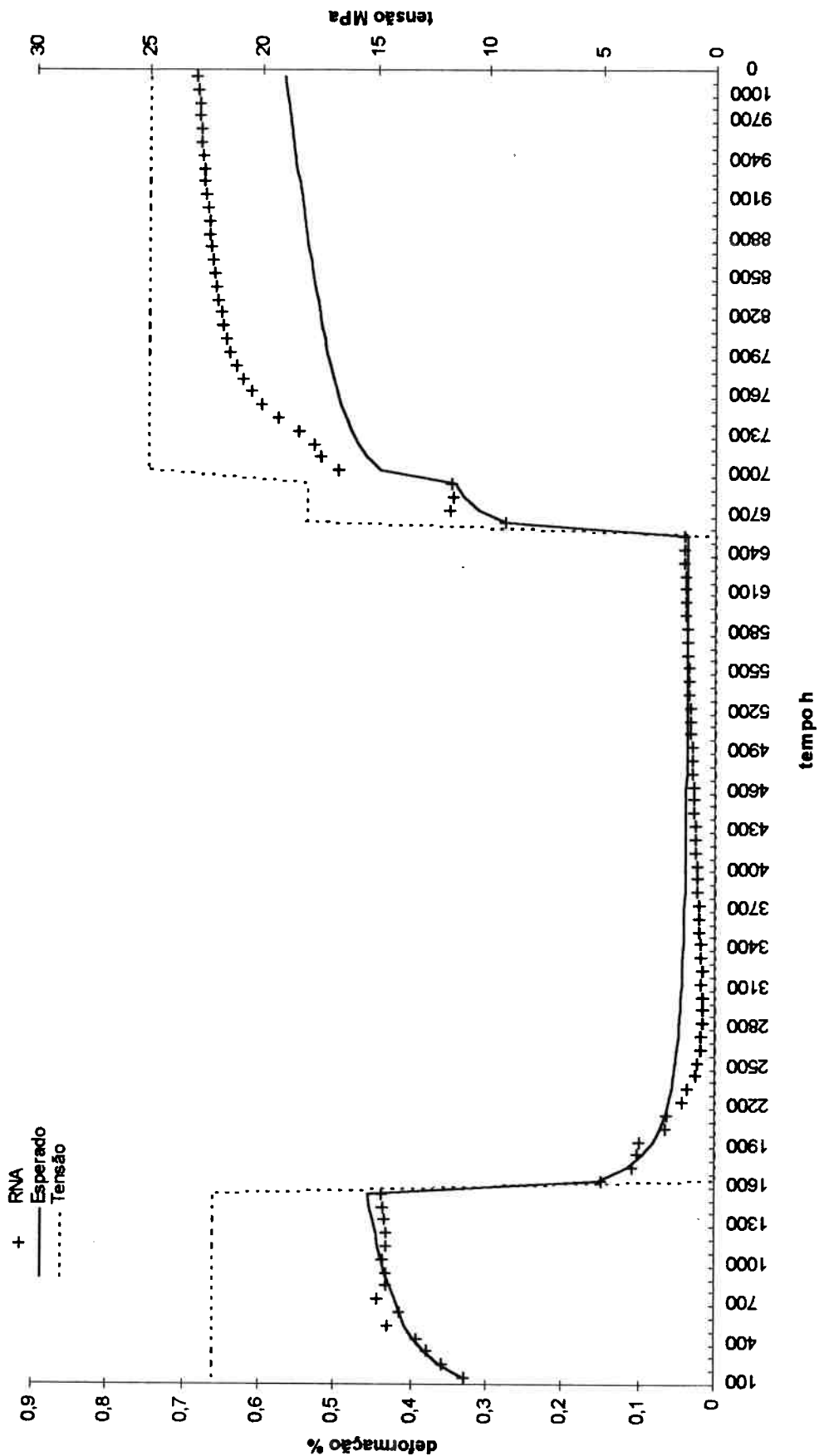


Figura 9.7 - Caso de teste 4: 22 MPa - 0 MPa - 18 MPa - 25 MPa.

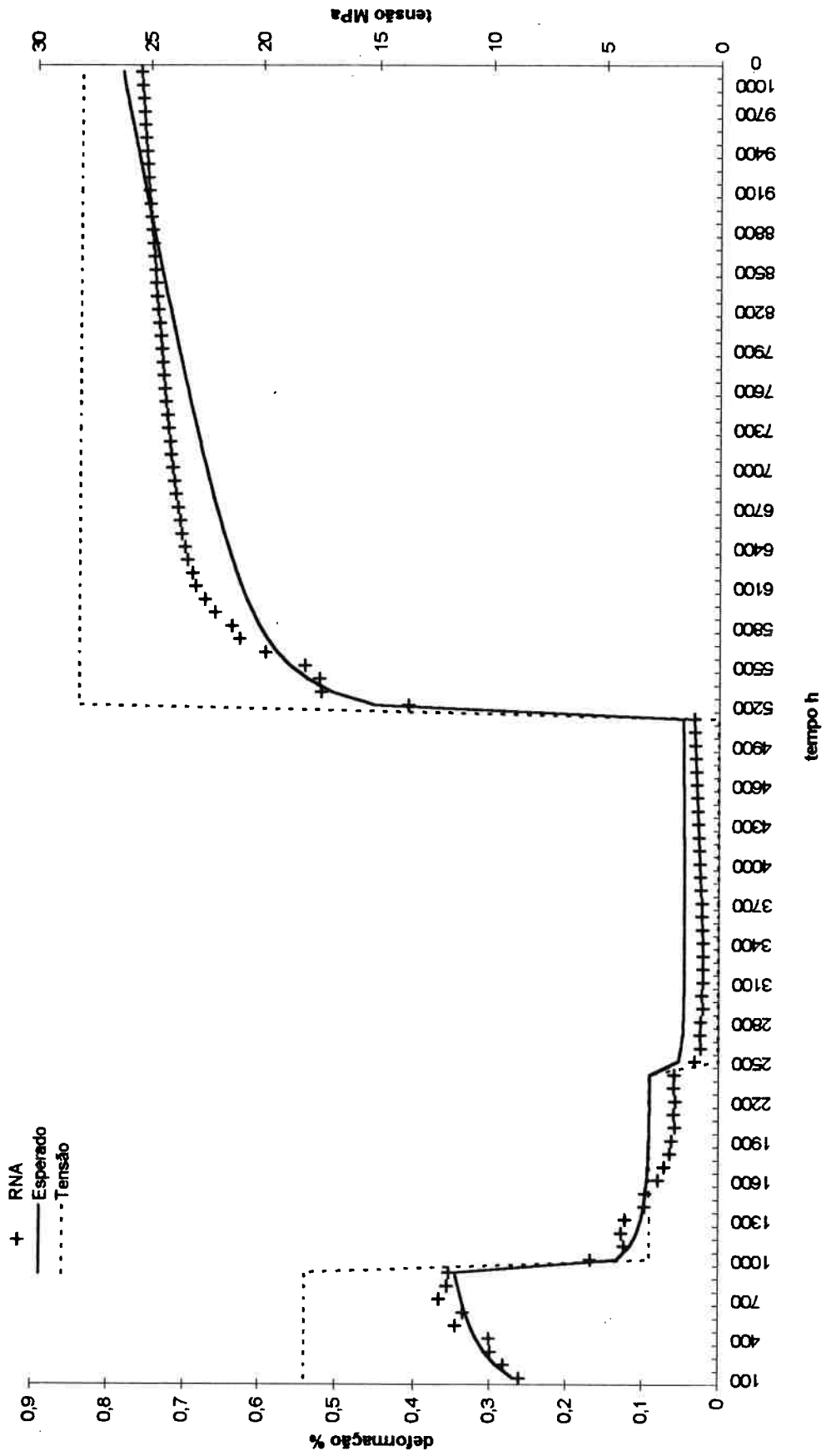


Figura 9.8 - Caso de teste 5: 18 MPa - 3 MPa - 0 MPa - 28 MPa.

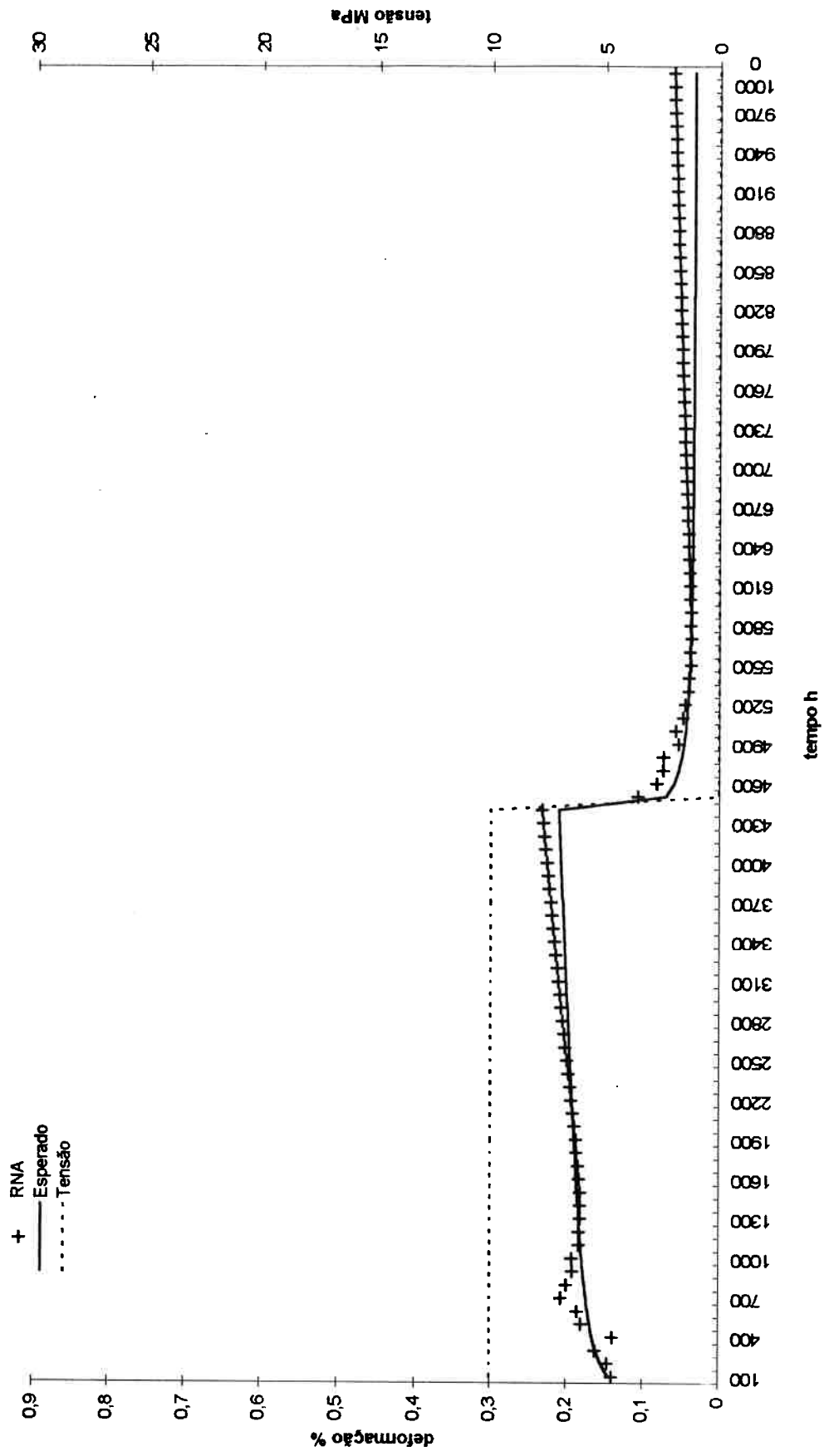


Figura 9.9 - Caso de teste 6: 10 MPa - 0 MPa.

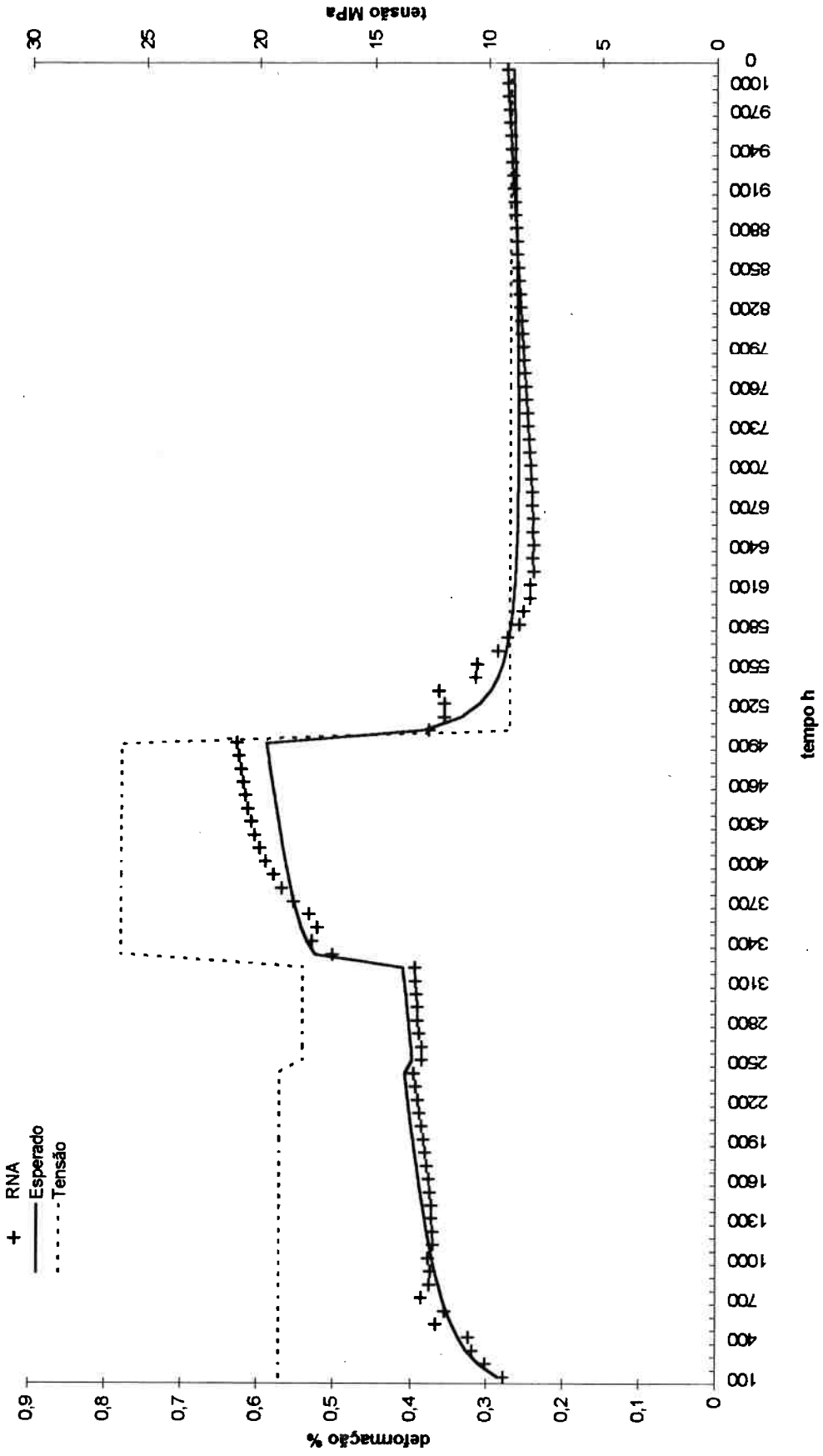


Figura 9.10 - Caso de teste 7: 19 MPa - 18 MPa - 26 MPa - 9 MPa.

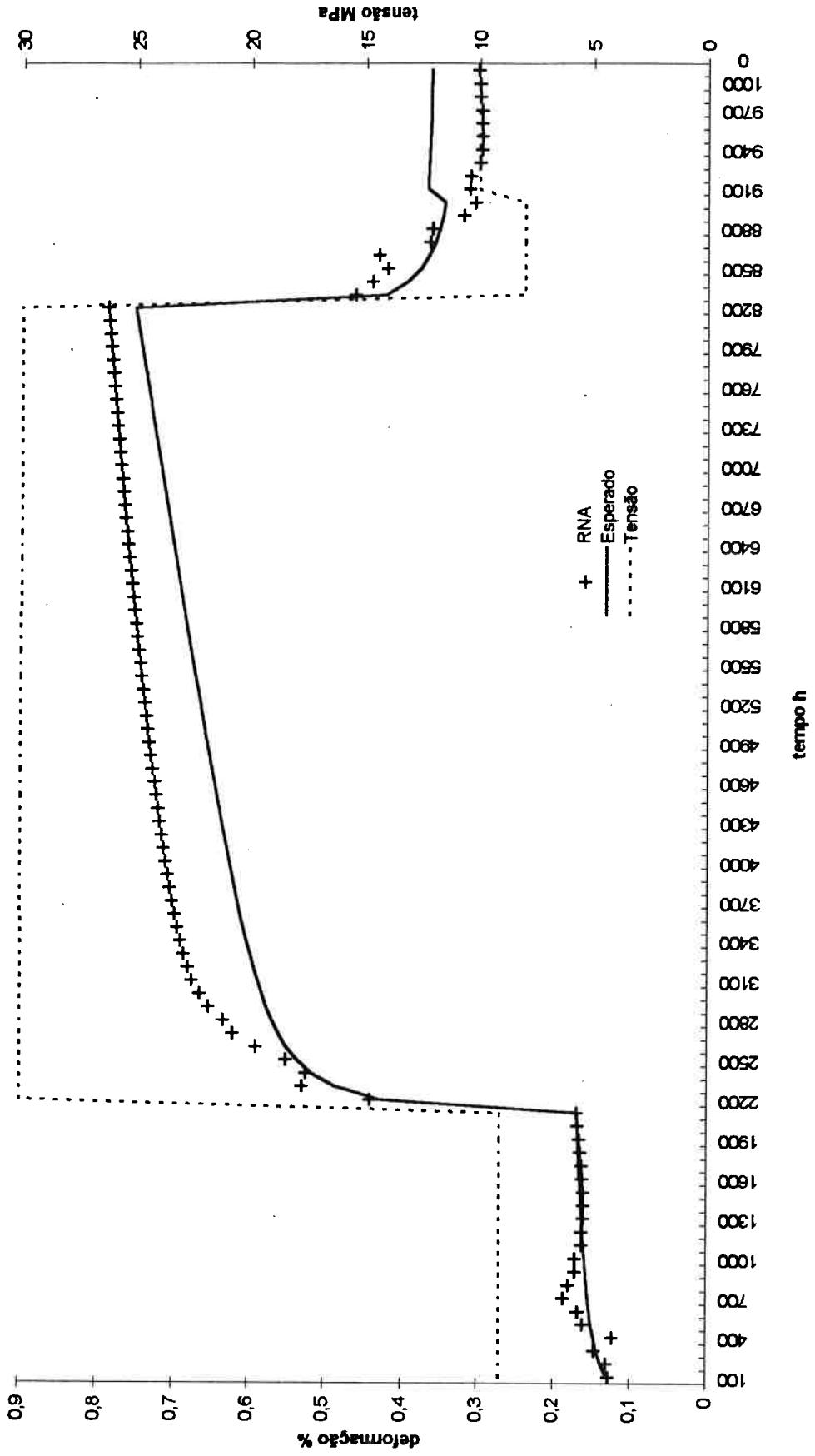


Figura 8.11 - Caso de teste 8: 9 MPa - 30 MPa - 8 MPa - 10 MPa.

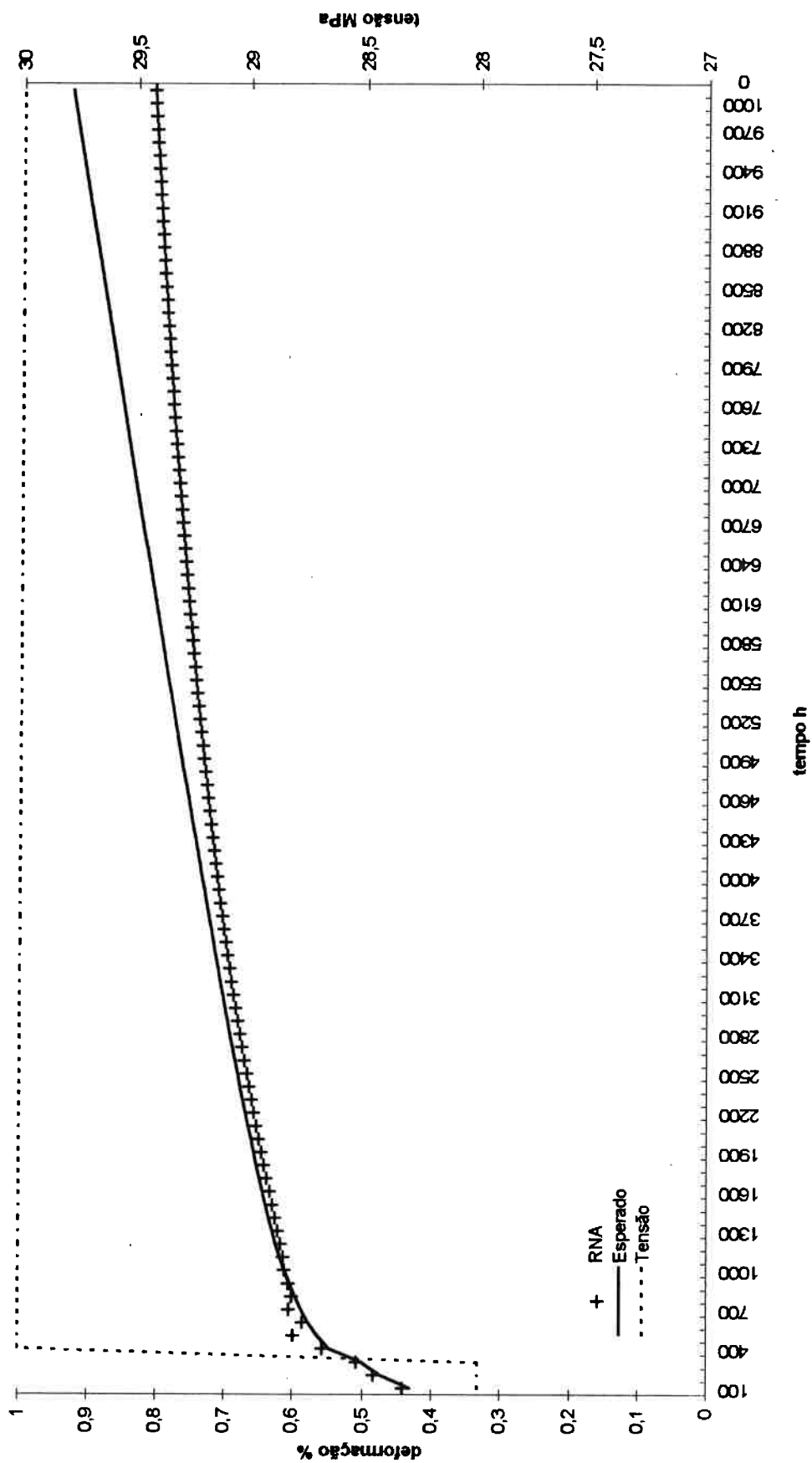


Figura 9.12 - Caso de teste 9: 28 MPa - 30 MPa.



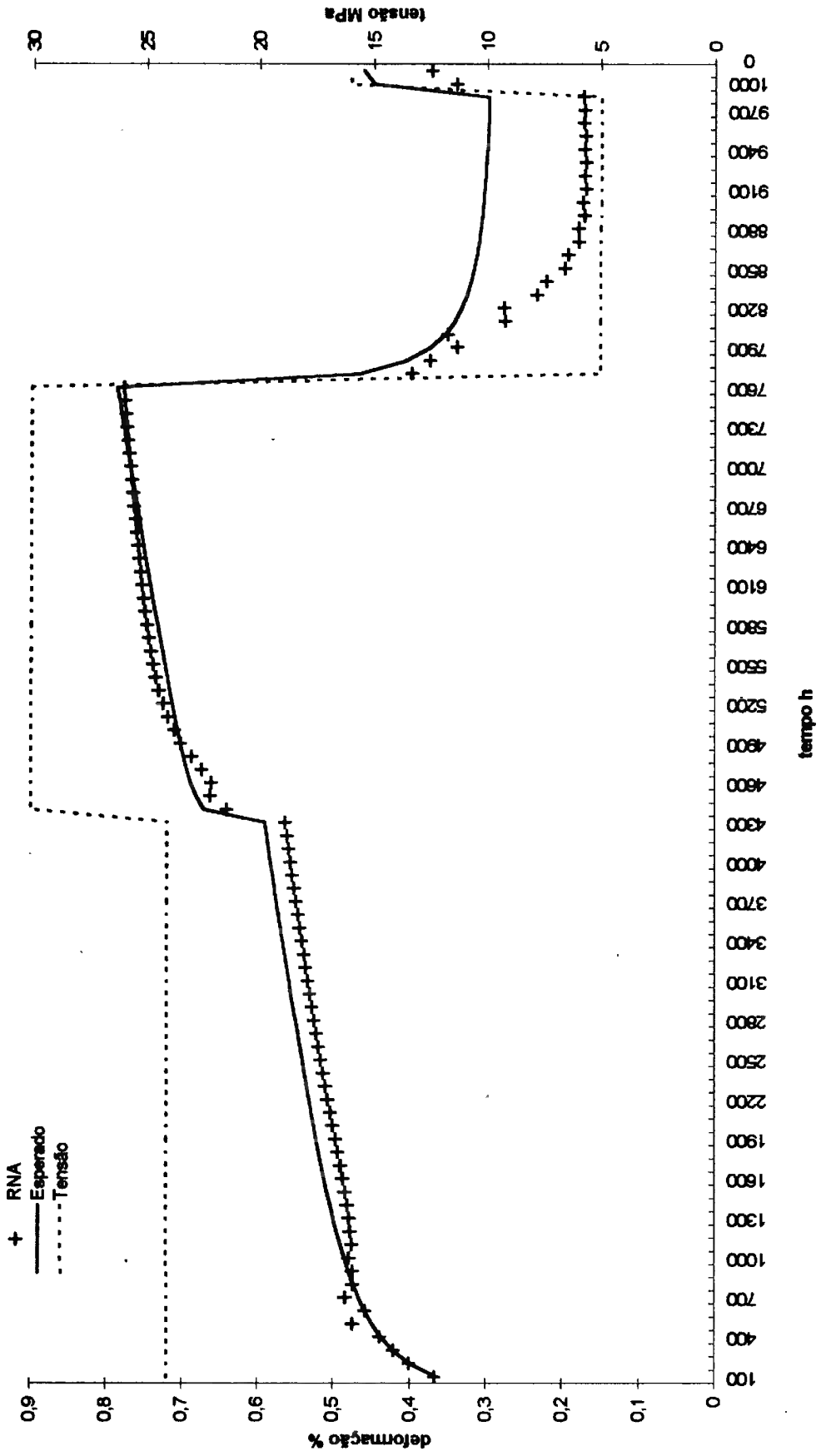


Figura 9.13 - Caso de teste 10: 24 MPa - 30 MPa - 5 MPa - 16 MPa.

Observa-se dos resultados indicados nas figuras:

- a forma geral das curvas é representada pela RNA;
- os erros são maiores para tempos maiores;
- a RNA consegue representar a forma da curva para carregamentos com ou sem variação de tensão.

Para o caso de carregamentos complexos não foi encontrado nenhum modelo analítico capaz de representar o comportamento de fluência sob uma história de carregamentos complexa.

Sem hipóteses sobre o comportamento do material e somente a partir de exemplos a RNA recorrente consegue desenvolver uma representação desse comportamento.

## 10. Conclusões e trabalhos futuros

### 10.1 Dificuldades observadas

- **Definição das RNA's.** A grande dificuldade no uso das RNA's é a definição do paradigma a ser usado e, se for o caso, a determinação do número de camadas ocultas e do número de neurônios por camada. De fato, sabe-se que RNA's multi-camadas para frente podem, teoricamente, aproximar qualquer função com uma precisão desejada (41), e o que não se sabe é qual a configuração da RNA e o conjunto de dados de treinamento para isso.
- **O tempo usado no processo de treinamento de uma RNA.** No caso dos exemplos realizados, o treinamento das RNA's recorrentes pode ser considerado como demorado. Para o exemplo 3 foram necessários 12 horas de processamento num computador com um microprocessador Pentium 200 MHz para treinar a configuração final.
- **As RNA's necessitam de exemplos para o treinamento.** Uma dificuldade quando o objetivo é representar o comportamento viscoelástico de um material é conseguir dados experimentais em quantidade suficiente para treinar uma RNA. Os modelos constitutivos analíticos procuram definir parâmetros representativos do material e que possam ser obtidos de poucos ensaios. A abordagem usando RNA's exige uma maior quantidade de ensaios. A síntese de RNA's que representam o comportamento viscoelástico depende de dados experimentais.
- **Definição do conjunto de treinamento ideal.** Parece ser consenso que quanto mais dados para treinamento melhor. Mas não se sabe como precisar a quantidade de exemplos suficiente para um treinamento supervisionado nem sua distribuição no domínio de interesse. Ainda existe

- a dificuldade de como representar os dados para treinamento - a normalização feita nos dados é decisiva para a obtenção de bons resultados.
- **O funcionamento das RNA's não está completamente esclarecido.** Com o pouco conhecimento a respeito de RNA's, a definição da arquitetura e do número de pares de treinamento suficientes para treinar uma RNA é feito de forma empírica.
  - **As RNA's não explicam o comportamento do material.** O conhecimento a respeito do comportamento do material não é acessível, fica distribuído pela RNA na forma dos pesos das conexões. As RNA's não aumentam o conhecimento a respeito do comportamento do material.

## 10.2 Vantagens observadas em relação aos modelos constitutivos analíticos

- **Nenhuma hipótese a respeito do material é necessária.** Nos exemplos desenvolvidos a preocupação foi somente a de definir uma RNA que representasse os dados de treinamento e de teste com determinada precisão. Os dados obtidos de ensaios compõem o conjunto de treinamento de onde o comportamento viscoelástico do material é apreendido. Na verdade nem se considerou que a massa de dados veio de um dado comportamento de um material.
- **Nenhuma regra formal ou expressão matemática é usada.** O uso de RNA's para modelar materiais viscoelásticos dispensa o uso de equações e regras que normalmente limitam a aplicação dos modelos analíticos.
- **Possibilidade de melhorar o modelo com novos dados de ensaios.** A RNA pode ser treinada novamente e incorporar os novos dados de ensaios à sua representação do comportamento viscoelástico do material.
- **RNA's são de fácil utilização após treinadas.** Nenhuma aproximação numérica é necessária para a implementação computacional. Uma vez

treinada a utilização de uma RNA consiste em propagar os sinais da entrada para a saída realizando operações matemáticas simples.

### 10.3 Balanço: vantagens x dificuldades

- As desvantagens relacionadas com a definição de RNA's, determinação do conjunto de treinamento ideal e demora no treinamento, se devem ao pouco conhecimento do funcionamento das RNA's. Essas desvantagens são transitórias e irão desaparecer a medida que avançar o desenvolvimento de paradigmas de RNA's e de algoritmos de treinamento.
- O fato do conhecimento a respeito do comportamento do material ser inacessível não tem importância para o uso em projeto, que é a motivação deste trabalho. A necessidade, neste caso, é um modelo que possa representar o comportamento do material em condições diversas e não explicá-lo. O uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico de um material é uma "abordagem do engenheiro" da viscoelasticidade não linear.
- O número de ensaios necessários para se obter os exemplos para o treinamento, é a maior desvantagem do uso de RNA's. Os modelos constitutivos analíticos são baseados em regras e expressões que definem parâmetros do material obtidos de poucos ensaios. Ao contrário das RNA's, os modelos analíticos permitem economizar nos ensaios.
- Os resultados dos exemplos foram obtidos sem o estabelecimento de hipóteses a respeito do material e sem a definição de expressões matemáticas, que é a grande vantagem do uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico de materiais. Os mesmos resultados apresentados pelas RNA's seriam extremamente trabalhosos de se obter com modelos constitutivos analíticos.

- Nenhuma aproximação numérica é necessária com o uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico. A não linearidade fica impregnada nos pesos das ligações distribuídos na RNA.

Com esta análise de vantagens e desvantagens do uso de RNA's, a conclusão obtida pelo autor é a seguinte:

**As RNA's são viáveis para representar o comportamento viscoelástico de materiais para o caso uniaxial de tensão.**

#### **10.4 Passos seguintes**

Para desenvolver melhores modelos de materiais com RNA's, alguns desenvolvimentos são necessários. Especificamente:

- **Aumentar o conhecimento a respeito do funcionamento das RNA's.** É preciso explicar melhor como são obtidos os resultados pelas RNA's especialmente pelas RNA's recorrentes para que sejam usadas de forma mais consciente.
- **Desenvolver procedimentos para a síntese de RNA's.** As dificuldades para síntese de RNA's devem ser diminuídas através do desenvolvimento de algoritmos e métodos para a definição da configuração mais adequada para a aplicação.
- **Procedimentos de ensaio de materiais viscoelásticos.** O maior número de ensaios necessários para o treinamento de RNA's pede formas simples de realizar testes em materiais viscoelásticos.

#### **10.5 Sugestões para trabalhos futuros.**

- 1) **Utilizar RNA's para modelar outros comportamentos complexos.** Existem comportamentos de materiais que exigem modelos analíticos

sofisticados e difíceis de serem usados e que poderiam ser substituídos por RNA's

- 2) **Desenvolver RNA's para modelar materiais viscoelásticos considerando a fluência e a relaxação para várias temperaturas.** No presente trabalho foi considerado somente a fluência do material. Pode-se desenvolver RNA's que representem a relaxação do material. Eventualmente, o modelo constitutivo de um material poderia ser composto de duas RNA's: uma para representar a fluência e a outra para representar a relaxação.
- 3) **Desenvolver procedimentos para síntese de RNA's recorrentes.** As RNA's recorrentes parecem ser adequadas para representar o comportamento viscoelástico de materiais. Possuem variáveis de contexto e por isso podem levar em conta a história de carregamentos. Talvez, melhores resultados possam ser obtidos com RNA's dotadas de realimentações mais elaboradas, mais de uma camada oculta, etc.
- 4) **Investigar a quantidade de dados de treinamento necessários.** Uma dificuldade no uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico está na quantidade de dados de treinamento, e portanto, de ensaios necessários. Um desenvolvimento importante seria determinar a quantidade de pares de treinamento que possa gerar uma RNA capaz de representar de forma adequada um determinado comportamento de um material, e assim determinar a quantidade de ensaios.
- 5) **Desenvolver a formulação de um elemento finito como sendo uma RNA.** O modelo do material estaria embutido no elemento. O comportamento da estrutura seria dado pelos processamentos internos a cada elemento e distribuído por toda a malha.
- 6) **Aumentar a quantidade de informações para o treinamento de RNA's obtidas em um ensaio.** Um ensaio de fluência pode fornecer mais

informações se combinado com um modelo de elementos finitos do ensaio. As condições de tensões e deformações poderiam ser obtidas dos elementos do modelos. Seria uma forma de se conseguir dados para treinar RNA's que representassem o comportamento viscoelástico de materiais quando submetidos a condições tridimensionais de tensão, a partir de um ensaio de fluência uniaxial.

- 7) **Desenvolver RNA's para analisar o caso triaxial de tensões.** O uso de RNA's para representar o comportamento viscoelástico pode ser muito vantajoso no caso de tensões triaxiais, devido à grande dificuldade de se desenvolver modelos constitutivos analíticos.



## 11. Bibliografia

- (1) ARAI, F.; TANAKA, T.; FUKUDA, T. Recurrent neural network modeling and control of flexible plate material. In: Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Neural Networks, Orlando, 1994. **Conference Proceedings IEEE**, v.6, p.3770-3773, Piscataway, 1994.
- (2) ARSLAN, A.; INCE, R. The neural network approximation to the size effect in fracture of cementitious materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v.54, n.2, p.248-261, 1996.
- (3) ARRAS, M.K.; MOHRAZ, K. **FORWISS artificial neural network simulation toolbox - FAST v2.2**. Erlangen, Bavarian Research Center for Knowledge-Based Systems (FORWISS), 1996.
- (4) BARSCHDORFF, D.; MONOSTORI, L. Neural networks - their applications and perspectives in intelligent machining. **Computers in Industry**, n.17, p.101-119, 1991.
- (5) BECKER, A.A.; HYDE, T.H.; XIA, L. Numerical analysis of creep in components. **Journal of Strain Analysis**, v.29, n.3, p.185-192, 1994.
- (6) BERKE, L.; PATNAIK, P.L.; MURTHY, P.L.N. Optimum design of aerospace structural components using neural networks. **Computers and Structures**, v.48, n.6, p.1001-1010, September 1993.
- (7) BOSE, N.K.; CARGA, A.K. Neural network design using Voronoi diagrams: preliminaries. In **IJCNN International Joint Conference on Neural Networks, Baltimore, IEEE**, p.127-132, 1992.
- (8) BRERETON, M.G. et al. Non-linear viscoelastic behavior of polymers: an implicit equation approach. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.22, p.97-125, 1974.
- (9) BRUELLER, O. S. On the nonlinear characterization of the long term behavior of polymeric materials. **Polymer Engineering and Science**, v.27, n.2, January 1987.
- (10) BUCKLEY, C.P. Multiaxial nonlinear viscoelasticity of solid polymers. **Polymer Engineering and Science**, v.27, n.2, p.155-164, January 1987.
- (11) CARPENTER, W.C. Common misconceptions about neural networks as approximations. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.8, n.3, July 1994.
- (12) CHABOCHE, J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, part 1: a thermodynamically consistent formulation. **Journal of Applied Mechanics**, v.60, p.813-821, December 1993.
- (13) CHABOCHE, J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, part 2: Comparison between models and experiments. **Journal of Applied Mechanics**, v.60, p.813-821, December 1993.

- (14) CHEN, H.M.; et al. Neural network for structure control. **Journal of Computing in Civil Engineering**. v.9, n.2, p.168-176, Apr 1993.
- (15) CHOW, M.; ROBERT, N.S.; HUNG, J.C. On the application and design of artificial neural networks for motor fault detection - part 1. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v.40, n.2, p.178-185, April 1993.
- (16) CHOW, M.; ROBERT, N.S.; HUNG, J.C. On the application and design of artificial neural networks for motor fault detection - part 2. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v.40, n.2, p.186-193, April 1993.
- (17) CREUS, G.J. **Viscoelasticity - Basic theory and applications to concrete structures**. New York, Springer-Verlag, 1986.
- (18) DONNE, J.D.; ÖZGÜNER, Ü. GARRET JR., J.H. A comparative study of neural vs. conventional methods for modeling and prediction. **IEEE International Symposium on Intelligent Control**, Glasgow, p.548-553, 1992.
- (19) DOVSTAM, K.; DALENBRING, M. Damping function estimation based on modal receptance models and neural nets. **Computational Mechanics**, v.19, n.4, p.271-286, 1997.
- (20) ELMAN, J.L. **Incremental learning, or The importance of starting small**. San Diego, Center for Research in Language, University of California, 1991 (CRL Technical Report 9101).
- (21) ELMAN, J.L. Learning and development in neural networks: The importance of starting small. **Cognition**, n.48, p.71-99, 1993.
- (22) FAHLMANN, S.E.; LEBIERE, C. The cascade-correlation learning architecture. In Touretzky, D.S. (ed.) **Advances in Neural Information Processing 2**, p.524-532, San Mateo CA, Morgan Kaufmann, 1990.
- (23) FAHLMANN, S.E.; LEBIERE, C. **The cascade-correlation learning architecture**. Pittsburgh, Carnegie Mellon University, 1990 (Technical Report CMU-CS-90-100).
- (24) FAHLMANN, S.E. **The recurrent cascade-correlation architecture**. Pittsburgh, Carnegie Mellon University, 1991 (Technical Report CMU-CS-91-100).
- (25) FAHLMANN, S.E.; BALUJA, S. **Reducing network depth in the cascade-correlation learning architecture**. Pittsburgh, Carnegie Mellon University, 1994 (Technical Report CMU-CS-94-209).
- (26) FAUSETT, L. **Fundamentals of neural networks - Architectures, algorithms and applications**. New Jersey, Prentice-Hall, 1994.
- (27) FINDLEY, W.N; KHOSLA, G. An equation for tension creep of three unfilled thermoplastics. **SPE Journal**, p.20-24, December, 1956.

- (28) FLOOD, I.; KARTAM, N. Neural networks in civil engineering I: principles and understanding. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.8, n.2, p.131-148, April 1994.
- (29) FLOOD, I.; KARTAM, N. Neural networks in civil engineering II: systems and applications. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.8, n.2, p.149-162, April 1994.
- (30) GAGARIN, N.; FLOOD, I.; ALBRECHT, P. Computing truck attributes with neural network. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.8, n.2, p.179-200, April 1994.
- (31) GALLAGHER, R.H. **Finite element analysis - Fundamentals**. New Jersey, Printice-Hall, 1975.
- (32) GAUBE, E. Kriechverhalten von hartpolyäthylen und polypropylen. **Kunststoffe**, v.57, n.4, p.270-275, Apr. 1967.
- (33) GHABOUSSI, J.; GARRET JR., J.H. Knowledge-based modeling of material behavior with neural network. **Journal of Engineering Mechanics**, v.117, n.1, p.132-153, January 1991.
- (34) GHABOUSSI, J.; et al. Neural network constitutive models determined from structural tests. In: Proceedings of the 1996 11th Conference on Engineering Mechanics, New York, 1996. **Proceedings ASCE**, v.2, p.701-704, 1996.
- (35) GLOCKNER, P.G.; SZYSZKOWSKI, W. On a multiaxial non-linear hereditary constitutive law for non-ageing materials with fading memory. **International Journal of Solids Structures**, v.23, n.2, p.305-324, 1987.
- (36) GLOCKNER, P.G.; SZYSZKOWSKI, W. An engineering multiaxial constitutive model for nonlinear time-dependent materials. **International Journal of Solids Structures**, v.26, n.1, p.73-82, 1990.
- (37) HAJELA, P.; BERKE L. Neurobiological computational models in structural analysis and design. **Computers & Structures**, v.41, n.4, p.657-667, 1991.
- (38) HARP, S.A.; SAMAD, T.; GUHA, A. Designing application-specific neural networks using the genetic algorithm. In Touretzky, D.S. (ed.) **Advances in Neural Information Processing 2**, p.447-454, San Mateo CA, Morgan Kaufmann, 1990.
- (39) HEILMANN, E.M. **Projeto de componentes em material termoplástico - dimensionamento e análise sob carregamento estático**. São Paulo, 1992. 152p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- (40) HERTZ, J.; KROGH, A.; PALMER, R.G. **Introduction to the theory of neural computation**. Redwood City, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- (41) HORNIK, K. Multilayer feedforward networks are universal approximators. **Neural Networks**, v.2, p. 359-366, 1989.

- (56) OKUDA, H.; MIYAZAKI, H.; YAGAWA, G. A neural network approach for modeling of viscoplastic material behaviors. In: Proceedings of the 1994 Pressure Vessels and Piping Conference, Minneapolis, 1994. **Advanced Computers Applications ASME PVP**, v.274, p.141-145, 1994.
- (57) PATTERSON, D.W. **Artificial neural networks - Theory and applications**. New York, Prentice-Hall, 1996.
- (58) PIDAPARTI, R.M. Material model for composites using neural networks. **AIAA Journal**, v.31, n.8, p.1533-1535, August 1993.
- (59) PIMENTA, P.M. On the analysis of viscoelastic plane frames. In Proceedings of the sessions related to design, analysis and testing at Structures Congress '89, San Francisco, 1989. **Proceedings ASCE**, p.922-931, May 1989.
- (60) PIMENTA, P.M.; YOTO, T. Análise não-linear de pórticos espaciais aplicada a estruturas de madeira. In: **Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira**, 4, São Carlos, julho 1992. **Anais**, São Carlos, LaMEM/EESC/USP, p.153-163, 1992.
- (61) QINGBIN, L.; et al. Acquiring the constitutive relationship for a thermal viscoplastic material using an artificial neural network. **Journal of Materials Processing Technology**, v.62, n.1-3, p.206-210, November 1996.
- (62) RABOTNOV, YU.N.; PAPERNIK, L.KH.; STEPANYCHEV, E.I. Application of the non-linear theory of heredity to the description of time effects in polymers materials. **Polymer Mechanics**, v.7, n.1, p.63-73, Jan./Feb. 1971.
- (63) RAMOS JR., R. **O efeito da deformação lenta sobre o comportamento estrutural de materiais poliméricos**. São Paulo, 1994. 140p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- (64) ROGERS, J.L. Simulating structural analysis with neural network. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.8, n.2, p.252-265, April 1994.
- (65) RUZICKA, P. Neural net configuration design using theory of sensitivity and tolerances. In **IJCNN International Joint Conference on Neural Networks**, Baltimore, IEEE, p.625-630, 1992.
- (66) SUMPTER, B.G.; NOID, D.W. On the design, analysis, and characterization of materials using computational neural networks. **Polymers Annual Review of Materials Science**, v.25, p.223-277, 1996.
- (67) SUNDER, S.S. Numerical modeling of transient creep in polycrystalline ice. **Journal of Engineering Mechanics**, v.119, n.10, p.2011-2033, October 1993.
- (68) TAFFNER, M.A. et al. **Redes neurais artificiais - Introdução e princípios da Neurocomputação**. Blumenau, Editora EKO, 1996.
- (69) TALLEC, P.L.; RAHIER, C. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.37, p.1159-1186, 1984.

- (70) TAN, S.; VANDEWALLE, J. Efficient algorithm for the design of multilayer feedforward neural networks. In **IJCNN International Joint Conference on Neural Networks, Baltimore, IEEE**, p.190-195, 1992.
- (71) VARGAS, M. **Metodologia da pesquisa tecnológica**. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1985.
- (72) WARD, I.M. **Mechanical properties of solid polymers**. 2<sup>a</sup> ed. Chichester, John Wiley & Sons, Inc (Wiley-Interscience), 1983.
- (73) WASSERMAN, P.D. **Advanced methods in neural computing**. New York, Van Nostrand Reinhold, 1993.
- (74) WHITE, P.S.; GOODMAN, A.M. Constitutive equations for creep. **Journal of Strain Analysis**, v.29, n.3, p.167-175, 1994.
- (75) WIDROW, B.; LEHR, M.A. 30 years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation. **Proceedings of the IEEE**, v.78, n.9, September 1990.
- (76) WILSHIRE, B.; EVANS, R.W. Acquisition and analysis of creep data. **Journal of Strain Analysis**, v.29, n.3, p.159-165, 1994.
- (77) ZDENEK, P.B.; PERE, C.P. Creep of anisotropic clay: new microplane model. **Journal of Engineering Mechanics**, v.113, n.7, p.1051-1064, July 1987.
- (78) ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method**. 3.ed., London, Mc Graw-Hill, 1977.