

OSWALDO URBANI FILHO

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL E O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS APLICADOS AO PROJETO DE PISTÕES PARA  
MOTORES A DIESEL**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica de Universidade de São  
Paulo para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Carlos Chien-Ching Tu

São Paulo  
1993

OK

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600009962

A minha esposa, Isabel  
e meus filhos, Erica e Lucas.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Metal Leve S.A Industria e Comércio, na figura de seus colaboradores, pelo apoio financeiro e por ter permitido a publicação do conteúdo deste trabalho.

Ao Professor e Orientador Dr Carlos Chien-Ching Tu, pelo encorajamento, sinceridade e lealdade, que sempre estiveram presentes ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Raul Antonino Feijóo do Laboratório Nacional de Computação Científica do Rio de Janeiro, pela sua valorosa contribuição ao aprimoramento de meu humilde conhecimento sobre Técnicas de Otimização.

Ao amigo Claudio Dutenhefner, pela colaboração e presteza na elaboração de inúmeras figuras contidas neste trabalho.

A minha esposa Isabel, pela exaustiva revisão ortográfica do texto. Todavia, qualquer erro ortográfico aqui presente é de minha inteira responsabilidade e autoria.

A todas as pessoas que de maneira direta ou indireta possibilitaram a conclusão deste trabalho.

## SUMÁRIO

1. Introdução.....	1
1.1. Objetivos Gerais.....	1
1.2. Os desafios da Engenharia de pistões dos anos 90.....	2
1.3. O processo tradicional de projeto.....	6
1.4. Ferramentas modernas de projeto e análise.....	7
1.5. Objetivos do presente trabalho.....	10
2. Métodos numéricos de otimização.....	13
2.1. Introdução.....	13
2.2. Formulação geral do problema de programação não linear restrita.....	17
2.3. Condição de existência e unicidade da solução ótima..	20
2.4. Estratégia geral de otimização.....	25
2.5. Métodos numéricos tradicionais de otimização.....	28
2.5.1. Métodos de busca unidimensionais.....	30
2.5.1. Método de aproximações polinomiais.....	31
2.5.3. Métodos de ordem-zero.....	32
2.5.4. Métodos de primeira-ordem.....	35
2.5.4.1. Método dos gradientes.....	36
2.5.4.2. Método das direções conjugadas.....	37
2.5.4.3. Métodos variável-métricos.....	38
2.5.5. Métodos de segunda-ordem.....	40
2.5.6. Métodos de minimização seqüencial sem restrições...	41
2.5.7. Métodos diretos.....	44

2.5.7.1. Método dos gradientes reduzidos generalizado.....	45
2.5.8. Métodos de aproximação.....	50
2.6. Critérios de convergência.....	51
<b>3. Otimização estrutural no programa ANSYS<sup>®</sup>.....</b>	<b>53</b>
3.1. Introdução.....	53
3.2. Formulação geral do problema de otimização no programa ANSYS <sup>®</sup> .....	55
3.3. Etapas essenciais do processo de otimização.....	57
3.4. Aproximação do problema real (subproblema).....	59
3.5. Minimização do subproblema.....	62
3.6. Determinação da nova configuração de projeto.....	67
3.7. Convergência e terminação.....	69
<b>4. Aspectos gerais sobre o método dos elementos finitos e sua aplicação particular na análise de pistões visando o problema de otimização.....</b>	<b>71</b>
4.1. Um breve Histórico sobre o MEF.....	71
4.2. O MEF aplicado ao problema de sólidos de revolução com simetria axial submetidos a carregamentos axialmente simétricos.....	73
4.3. Formulação do MEF para o problema de sólidos de revolução com simetria axial - abordagem pelo método dos deslocamentos.....	75
4.3.1. Considerações gerais.....	75
4.3.2. Formulação isoparamétrica para um elemento sólido bi-dimensional com simetria axial.....	78
4.3.3. Considerações sobre o carregamento.....	87
4.3.4. Avaliação das tensões no elemento.....	88
4.4. A técnica de subestruturação.....	89

4.4.1. Introdução.....	89
4.4.2. Aplicação prática do conceito de subestruturação...	91
5. Modelagem do problema térmico e estrutural de um pistão para motor diesel.....	96
5.1. Introdução.....	96
5.2. Os modelos térmico e mecânico de um pistão.....	99
5.2.1. Geometria.....	100
5.2.2. Propriedades de material.....	101
5.2.3. Condições de contorno (Carregamentos).....	103
5.2.3.1. Carregamento térmico.....	104
5.2.3.2. Carregamento mecânico.....	105
5.2.4. Vínculos estruturais.....	106
5.3. O modelo de elementos finitos do pistão.....	108
5.5. Aplicação da técnica de subestruturação no ciclo de análise do pistão pelo MEF.....	110
6. Aplicação da técnica de otimização estrutural e o MEF ao projeto de um pistão com galeria de refrigeração para motor diesel - estudo de caso.	115
6.1. Introdução.....	115
6.2. Formulação do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração para motor diesel.....	117
6.2.1. Função objetivo.....	117
6.2.2. Variáveis de projeto.....	118
6.2.3. Variáveis de estado ou funções de restrição do projeto.....	121
6.2.3.1. O processo de manufatura de um pistão com galeria de refrigeração.....	121

6.2.3.2. Degradação do óleo e eficiência de refrigeração.....	123
6.2.3.3. Resistência do material (Critério de falha).....	126
6.3. Exemplo numérico de aplicação.....	130
6.4. A estratégia de otimização - Recomendações práticas.....	135
6.5. Determinação da configuração de projeto inicial.....	138
6.6. Resultados numéricos.....	141
7. Conclusões e observações.....	146

Referências bibliográficas.

Apêndice 1.

Apêndice 2.

Apêndice 3.

Apêndice 4.

## LISTA DE FIGURAS

- Fig. (1-1) - Nomenclatura utilizada para identificação das principais regiões de um pistão.....4
- Fig. (2-1) - Classificação das soluções ótimas.....21
- Fig. (2-2a) - Isóclinas de  $f(\vec{x})$  para duas variáveis  $x_1, x_2$ .....27
- Fig. (2-2b) -  $f(\vec{x})$  expressa em função de  $\alpha$ .... ..27
- Fig. (2-3) - Classificação Geral dos Métodos Tradicionais de Otimização.....29
- Fig. (2-4) - Interpretação Geométrica do Método dos Gradientes.....36
- Fig. (3-1) - Função de Penalização Interior Estendida  $P_p(G_j)$ , no Domínio  $(\underline{g}_j, \overline{g}_j)$  das Variáveis de Estado  $G_j$ .....65
- Fig. (4-1) - Sólido de Revolução com Simetria Axial Submetido a um Carregamento Axialmente Simétrico.....74
- Fig. (4-2) - Elemento Isoparamétrico Bidimensional com Quatro Nós-Sistema de Coordenadas Local.....79
- Fig. (4-3) - Exemplo de Subestrutura Formada por 2 Elementos.....91
- Fig. (5-1a) - 1/4 do modelo 3D de um Pistão Monobloco.....101
- Fig. (5-1b) - Modelo 2D do pistão com simetria axial.....101
- Fig. (5-2) - Distribuição de Pressão (PCP) no Topo de um Pistão Monobloco para Motor Diesel.....106
- Fig. (5-3) - Vínculo Estrutural Estabelecido para o Modelo Mecânico do Pistão.....107
- Fig. (5-4) - Malha de elementos finitos de um pistão e o sistema de coordenadas global de referência da análise.....109
- Fig. (5-5) - Conjunto estrutura principal/subestrutura utilizado para análise térmica e/ou estrutural do pistão pelo MEF.....112

Fig. (5-6) - Fluxograma de análise do pistão pelo MEF utilizando a técnica de subestruturação dentro do ciclo de otimização.....	114
Fig. (6-1) - Fluxograma global mostrando o ciclo integrado de projeto e análise para a solução do problema de dimensionamento de uma galeria de refrigeração de um pistão de alumínio.....	116
Fig. (6-2) - Variáveis de projeto adotadas inicialmente para o problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.....	119
Fig. (6-3) - Espessuras mínimas permissíveis para o posicionamento de uma galeria de refrigeração em um pistão de alumínio.....	122
Fig. (6-4) - Limites máximos e mínimos para o domínio de parametrização no problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.....	123
Fig. (6-5) - Esquema do diagrama de Goodman modificado mostrando a forma de obtenção do coeficiente de segurança a fadiga.....	127
Fig. (6-6) - Cálculo das tensões médias e alternadas decorrentes da combinação dos carregamentos térmico e mecânico atuantes sobre o pistão.....	128
Fig. (6-7) - Principais modificações geométricas do pistão.....	132
Fig. (6-8) - Distribuição de temperaturas em regime permanente para o pistão redesenhado submetido á nova condição de operação.....	133
Fig. (6-9) - Proposta alternativa para restrição do projeto de uma galeria de refrigeração através do cálculo setorizado dos coeficientes de segurança a fadiga na superfície da mesma.....	137
Fig. (6-10a) - Geometria da configuração de projeto inicial $\bar{x}^0$ .....	144
Fig. (6-10b) - Geometria da configuração final otimizada $\bar{x}^{249}$ .....	144

## LISTA DE TABELAS

- Tab. (5-1) - Propriedades mecânicas médias dos materiais utilizados na construção de um pistão monobloco a temperatura de 270°C.....103
- Tab. (5-2) - Regiões do pistão e mecanismos típicos de transferência de calor.....104
- Tab. (6-1) - Principais modificações do motor e do pistão para atender as exigências do mercado e órgãos de proteção ambiental.....131
- Tab. (6-2) - Valores numéricos atribuídos aos limites das variáveis do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração e o vetor inicial de projeto  $\bar{x}^0$  .....140
- Tab. (6-3) - Histórico do processo de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.....142
- Tab. (6-4) - Valores exatos das variáveis do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração resultantes para as configurações inicial  $\bar{x}^0$  e final otimizada  $\bar{x}^{249}$  .....143

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a_0$  - constante independente do polinômio de aproximação.
- $a_i$  -  $i$ -ésima constante de multiplicação dos termos lineares do polinômio de aproximação.
- $A$  - Constante utilizada no cálculo da nova configuração de projeto.
- $[A']$  - Matriz dos gradientes da função objetivo em relação às variáveis independentes no método (GRG).
- $[A]$  - Matriz de atualização do método Quasi-Newton.
- $\alpha$  - Coeficiente de expansão térmica volumétrico.
- $\alpha^*$  - Escalar que defini a distância a ser percorrida na direção de busca da solução ótima.
- $b_i$  -  $i$ -ésima constante de multiplicação dos termos quadráticos do polinômio de aproximação.
- $[B]$  - Matriz de deformação-deslocamento.
- $[B']$  - Matriz dos gradientes da função objetivo em relação às variáveis dependentes no método (GRG).
- $\beta$  - Escalar utilizado no método das direções conjugadas.
- $c_{ij}$  -  $i$ -ésima constante de multiplicação dos termos cruzados do polinômio de aproximação.
- $C_o$  - fração da  $i$ -ésima VP da melhor configuração de projeto  $\vec{x}^*$  que contribui para a próxima configuração a ser calculada.
- $C_r$  - fração randômica que contribui para a próxima configuração de projeto a ser calculada.
- $C_i^*$  - número randômico aplicado a cada variável de projeto  $x_i$ .
- $[D]$  - Matriz de elasticidade.

- $\Delta x$  - Intervalo de incerteza para busca do ótimo de uma função de uma variável.
- $\Delta x^{(0)}$  - Intervalo de incerteza inicial para busca do ótimo de uma função de uma variável.
- $\partial$  - Derivada paracial.
- $\nabla$  - Operador diferencial.
- $\nabla_y$  - Gradiente da função objetivo em relação às variáveis dependentes, no método GRG.
- $\nabla_z$  - Gradiente da função objetivo em relação às variáveis independentes, no método GRG.
- $E$  - Módulo de elasticidade do material.
- $E^2$  - Erro quadrático médio das aproximações.
- $\mathcal{E}$  - Intervalo de tolerância aplicado no método de penalização interior estendido.
- $\mathcal{E}_r$  - Deformação na direção radial  $r$ .
- $\mathcal{E}_\theta$  - Deformação na direção axial  $z$ .
- $\mathcal{E}^{th}$  - Deformação de origem térmica no interior do elemento.
- $\{\mathcal{E}\}$  - Vetor de deformações específicas no interior do elemento.
- $f$  - Função objetivo.
- $f^*$  - Valor ótimo da função objetivo.
- $F$  - Aproximação polinomial da função objetivo.
- $F_i^r$  - Componente radial da força nodal sobre o nó  $i$ .
- $\{F\}$  - Vetor global de cargas.
- $\{\bar{F}\}$  - Vetor global de cargas condensado.

- $\{F^{nd}\}$  - Vetor de cargas nodais.
- $\{F_e^{pr}\}$  - Vetor de carga distribuída no elemento.
- $\{F_e^{th}\}$  - Vetor de carga térmica no elemento.
- $\Phi$  - Pseudo-função objetivo ou função objetivo penalizada.
- $g_j$  -  $j$ -ésima função de restrição.
- $\bar{g}_j$  - Valor do limite superior da  $j$ -ésima função de restrição.
- $\underline{g}_j$  - Valor do limite inferior da  $j$ -ésima função de restrição.
- $\hat{g}$  - Função de penalização do método de penalização interior estendido.
- $G_j$  - Aproximação da  $j$ -ésima função de restrição.
- $\bar{G}_R$  - Vetor dos gradientes reduzidos generalizados.
- $\gamma_{rz}$  - Distorção angular no plano  $rz$ .
- $h$  - Representação genérica de  $f$  ou  $g_j$ .
- $h_k$  -  $k$ -ésima função de restrição de igualdade.
- $\bar{h}$  - Representação genérica do valor médio ponderado da função  $f$  ou  $g_j$ .
- $[H]$  - Matriz Hessiana.
- $[\bar{H}]$  - Aproximação da matriz Hessiana inversa.
- $H$  - Representação genérica das aproximações de  $G_j$  ou  $F$ .
- $\eta$  - Coordenada natural do elemento.
- $[I]$  - Matriz identidade simétrica.

- $\lambda$  - Coeficiente multiplicador de Lagrange.  
 $[J]$  - Matriz Jacobiana.
- $k_{ij}^e$  - Termo genérico da matriz de rigidez de um elemento genérico.
- $K$  - Número de iterações no ciclo de otimização.
- $K_{\max}$  - Número máximo permissível de iterações no ciclo de otimização.
- $K_{inv.\max}$  - Número máximo permissível de configurações seqüenciais de projeto inviáveis.
- $[K]$  - Matriz de rigidez.
- $[\overline{K}]$  - Matriz de rigidez condensada ou reduzida.
- $[K_e]$  - Matriz de rigidez de um elemento genérico.
- $l$  - Número de funções de restrição de igualdade.
- $m$  - Número de funções de restrição de desigualdade.
- $n$  - Número de variáveis de projeto ou variáveis independentes.
- $[N]$  - Matriz das funções de forma do elemento e/ou das funções de transformação.
- $\nu$  - Coeficiente de proporcionalidade ou Poisson.
- $p$  - Grau máximo do polinômio de aproximação Cap.(2) ou número de ciclos de penalizações seqüencias Cap.(3).
- $P$  - Função de penalização.
- $q$  - Número da iteração no método de busca da solução ótima.
- $q_{\max}$  - Número máximo de iterações.
- $Q$  - Número de termos do polinômio de aproximação.
- $\theta$  - Coordenada angular no sistema de coordenadas cilíndrico.

- $\theta_e$  - Variação da temperatura média no interior do elemento.
- $r$  - Coordenada radial no sistema de coordenadas cilíndrico.
- $r_p$  - Fator de multiplicação que determina a magnitude da penalização.
- $R^2$  - Coeficiente de correlação quadrática ponderado.
- $\vec{S}$  - Vetor que define a direção de busca no espaço de projeto.
- $\{\sigma_e\}$  - Vetor de tensões no interior do elemento.
- $\tau$  - Tolerância para o processo de convergência.
- $u$  - Componente genérica do deslocamento no interior do elemento.
- $\{u\}$  - Vetor de deslocamentos nodais.
- $v$  - Componente genérica do deslocamento no interior do elemento.
- $W$  - Peso atribuído a cada configuração de projeto  $\vec{x}$ .
- $\vec{x}$  - Vetor das variáveis independentes ou vetor de projeto.
- $\vec{x}^*$  - Vetor ótimo ou ponto de ótimo da função objetivo.
- $\vec{x}^0$  - Vetor de projeto inicial.
- $\bar{x}_i$  - Valor do limite superior da  $i$ -ésima variável de projeto.
- $\underline{x}_i$  - Valor do limite inferior da  $i$ -ésima variável de projeto.
- $\hat{\vec{x}}$  - Vetor ótimo resultante do processo de minimização das aproximações de  $f$  e  $g_j$ .
- $\bar{X}$  - Vetor das variáveis de projeto normalizadas.
- $X_i$  -  $i$ -ésima variável de projeto normalizada.

$\bar{X}_i$  - Valor do limite superior da i-ésima variável de projeto normalizada.

$\underline{X}_i$  - Valor do limite inferior da i-ésima variável de projeto normalizada.

$\xi$  - Coordenada natural do elemento.

$\bar{y}$  - Vetor das variáveis dependentes no método GRG.

$z$  - Coordenada axial no sistema de coordenadas cilíndrico.

$\bar{z}$  - Vetor das variáveis independentes no método GRG.

## RESUMO

O método dos elementos finitos, utilizado em conjunto com técnicas numéricas de otimização, tem possibilitado a criação de ferramentas bastante eficientes para o desenvolvimento de projetos de engenharia.

Através da combinação adequada destes recursos e, graças à sofisticada tecnologia dos computadores, é possível integrar as etapas de projeto e análise, e reduzir substancialmente o ciclo de desenvolvimento de um produto.

Outra forte característica do método, é a possibilidade de incorporar-se critérios e restrições racionais ao projeto, para que se possa chegar efetivamente a um produto "otimizado" ou "melhorado", em um curto espaço de tempo e custos aceitáveis.

Para ilustrar este novo conceito, os recursos de análise e otimização disponíveis no programa ANSYS<sup>®</sup> Rev.5.0, foram utilizados no desenvolvimento de um projeto de galeria de refrigeração de um pistão de alumínio para motor diesel.

Adicionalmente, a técnica de subestruturação ou superelementos, e o uso de modelos 2D com simetria axial, foram introduzidos no processo de análise, com o objetivo de reduzir o tempo de processamento e simplificar a parametrização da geometria do modelo de elementos finitos.

Vantagens e limitações sobre o uso de ambas as técnicas em conjunto são apresentadas e discutidas, face aos resultados obtidos.

## ABSTRACT

The finite element method used together with optimization numerical techniques, has allowed the creation of very efficient tools for the development of a sort of projects in the field of engineering.

By means of properly combination of these techniques, and due to the availability of the sophisticated computer technology, it is possible to integrate the design and analysis phases in order to substantially reduce the cycle of development of a product.

Another important characteristic of this method, is the possibility of incorporate more rational criteria and restrictions into the project, to achieve the better design in the least time and lowest cost.

To illustrate this newest concept, the capabilities of analysis and optimization, available in the ANSYS<sup>r</sup> Rev. 5.0 program, were used for the development of a oil cooling gallery design of an aluminum piston for diesel engine.

Additionally, the substructuring or superelement technique, and a 2D axisymmetric finite element model, were used in order to decrease the computer time and simplificate the parameterization of the piston geometry.

Advantages and limitation about the use of both techniques are presented and discussed, on the face of the obtained results.

## CAPÍTULO (1): INTRODUÇÃO

### 1.1. Objetivos Gerais.

O uso de técnicas numéricas de otimização em conjunção com o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem possibilitado a criação de ferramentas muito eficientes para o desenvolvimento de projetos na Engenharia de uma maneira geral.

Neste particular, a técnica de otimização implementada no programa ANSYS<sup>F</sup> desperta uma série de atrativos, uma vez que esta baseia-se na otimização de uma aproximação do problema real[16-30], não existindo a necessidade de estabelecer-se uma formulação matemática explícita para o problema e suas restrições. Isto significa, em outras palavras, que os módulos de otimização e análise são completamente independentes e, em princípio, qualquer problema de elementos.finitos envolvendo qualquer tipo de elemento e/ou análise disponíveis no programa, pode ser otimizado. Entretanto, algumas limitações inerentes ao uso da técnica em questão, devem ser do conhecimento do usuário no sentido de evitar futuros desapontamentos.

Para ilustrar as vantagens e limitações do uso conjunto destas duas importantes técnicas numéricas, alguns aspectos relevantes associados ao projeto de pistões para motores de combustão interna à diesel são aqui abordados. Antes porém de considerar o processo de otimização propriamente dito,

convém situar o leitor quanto a importância e dificuldades de obter-se um projeto otimizado de pistão através de processos convencionais, bem como, os recursos disponíveis para tal, conforme descrito nos itens 1.2, 1.3 e 1.4 a seguir.

### 1.2.Os desafios da engenharia de pistões dos anos 90.

Os projetos de motores de combustão interna à diesel, especialmente aqueles para aplicações em veículos pesados, tem sido continuamente aprimorados no sentido de atender as exigências presentes e futuras estabelecidas pelo mercado e pelos órgãos governamentais de proteção ao meio ambiente [32].

Tendências observadas no desenvolvimento destes motores apontam fatores como aumento de potência e eficiência, associados a redução substancial dos níveis de emissões de poluentes produzidos pela combustão, como elementos decisivos para o asseguramento de sua continuidade no mercado automotivo. Estas tendências têm sido observadas não somente em projetos de novos motores mas também com elevada frequência nos motores em produção, que periodicamente sofrem aumento de potência específica ( $\text{kW/cm}^2$ ), até que seu limite físico de operação seja atingido.

Independentemente de qual seja a situação em que estas alterações se manifestem, o resultado será quase sempre uma

sobrecarga que incidirá sobre todos os componentes do motor, principalmente sobre aqueles que compõem o sistema reciprocativo, ou seja, mancais, girabrequim, bielas e pistões.

Notadamente os pistões são os componentes mais afetados por esta sobrecarga uma vez que recebem a influência direta das altas temperaturas e pressões decorrentes da queima e expansão dos gases da combustão. Adicionalmente sabe-se[32,54] que muitas das principais características de operação de um motor como consumo de óleo, "blow-by", eficiência da combustão, emissões, etc, estão fortemente relacionadas ao projeto do pistão que, portanto, deve ser conduzido cuidadosamente para que a máxima eficiência e desempenho do conjunto sejam atingidos.

Em particular, o projeto de pistões para motores à diesel confeccionados em liga de alumínio-silício, tem se constituído em uma opção sempre desejada pelos fabricantes de motores, sobretudo por fatores como baixo custo e menor peso. Porém pelas razões anteriormente descritas, estes componentes passaram a exigir materiais mais resistentes, projetos e processos mais otimizados e com alto grau de sofisticação, sem os quais sua utilização torna-se praticamente impossível. O emprego de materiais especiais como os compostos de fibra ou cerâmica, ou mesmo os de uso convencional como ferro-níquel (Ni-Resist), utilizados como reforço estrutural em algumas regiões críticas do pistão, como por exemplo na borda da câmara de combustão, na zona de anéis, na região de apoio do pino do pistão, -conforme

mostrado no esquema da Fig.(1-1)-, têm contribuído muito para a ampliação da faixa de utilização destes pistões. Entretanto na maior parte dos casos, quer seja pelo material empregado ou pela sofisticação do processo, o custo torna-se ainda um fator bastante sensível.

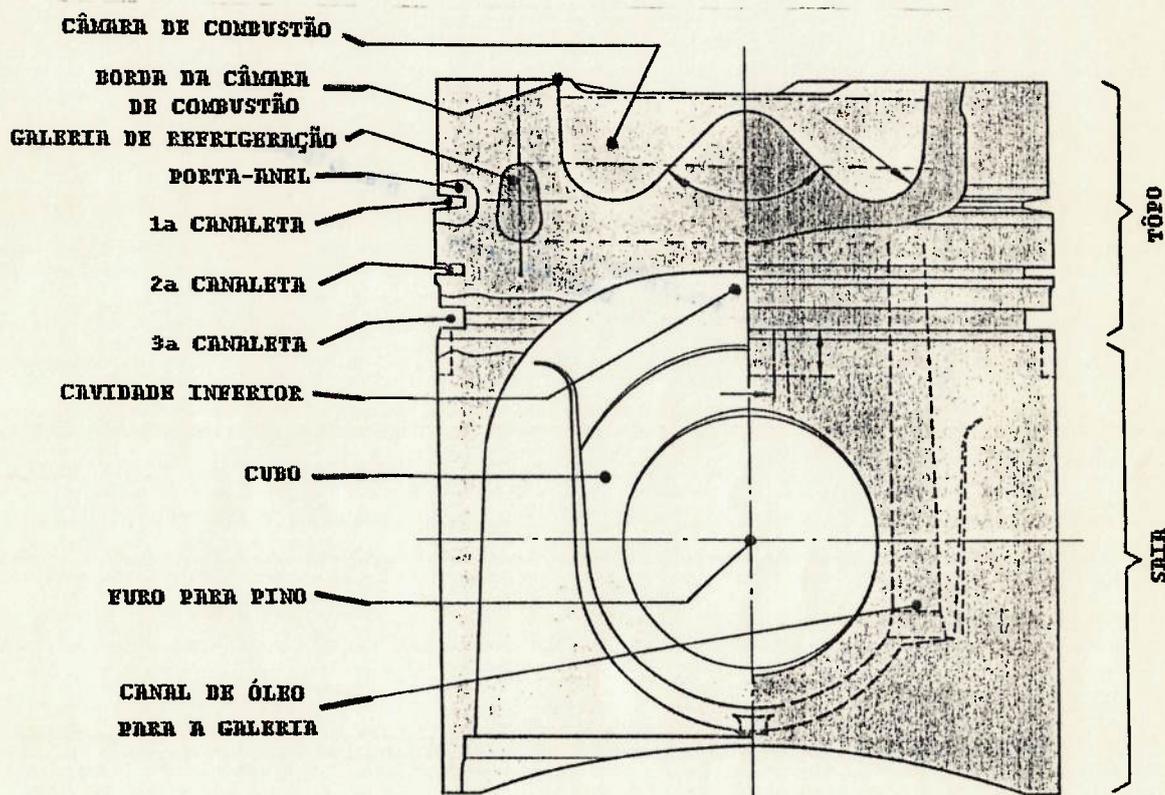


Fig. (1-1) - Nomenclatura utilizada para identificação das principais regiões de um pistão.

Algumas vezes, quando o projeto assim o permite, um sistema de refrigeração por galeria de óleo pode ser incorporado ao pistão [25,27,33] com o objetivo de minimizar os efeitos detrimenais decorrentes das altas temperaturas de operação do motor sobre este. Normalmente a concepção

destes sistemas é bastante simples, seu custo é baixo e sua eficiência notável, o que explica porque esta solução tem sido utilizada ao longo dos últimos 50 anos. Contudo os projetos atuais de pistões exigem sistemas de refrigeração altamente eficientes, o que implica que seu uso será possível apenas se uma configuração otimizada deste puder ser conseguida.

O procedimento para obter-se um projeto otimizado de pistão, quer seja no emprego de reforços estruturais ou sistemas de refrigeração por galeria de óleo, é sempre uma tarefa muito difícil, que consome uma quantidade muito grande de horas de engenharia, testes e conseqüentemente recursos financeiros.

Outro aspecto fundamentalmente crítico está associado às características do mercado automobilístico mundial, cujo cenário atual é marcado por um elevado grau de competitividade e dinamismo. Tais características, por sua vez, evidenciam a necessidade vital do aumento de velocidade de resposta das empresas às inovações tecnológicas e exigências dos consumidores. Neste sentido, é importante que as empresas do setor passem a incorporar e utilizar ferramentas de projeto que coadunem com tal filosofia, e possibilitem aos engenheiros enfrentarem estes desafios produzindo componentes com elevado grau de qualidade, baixo custo e em ciclos mais curtos de desenvolvimento.

### 1.3. O Processo Tradicional de Projeto.

Na atualidade, o desenvolvimento do projeto de um pistão envolve algumas etapas que compreendem desde a concepção do produto propriamente dita; -que advém de necessidades e informações previamente fornecidas pelo cliente-, até a fabricação de amostras e testes finais de homologação do componente, desenvolvidos por sua vez em laboratórios e/ou em campo. Em etapas intermediárias deste desenvolvimento, algumas situações típicas são freqüentemente observadas. Normalmente um simples modelo de Elementos Finitos do protótipo do pistão é criado e analisado para que se possa verificar o projeto do ponto de vista térmico e/ou estrutural. Em outros casos, se o tempo assim o permite, modificações são introduzidas no projeto original e uma reanálise é feita. Idealmente, este ciclo deve ser repetido até que todos ou a maioria dos principais requisitos do projeto sejam alcançados. Na prática entretanto, observa-se que o tempo disponível para o desenvolvimento do projeto é freqüentemente menor que aquele necessário para que um número suficiente de ciclos de análise seja realizado e, portanto, seu sucesso torna-se totalmente dependente da experiência acumulada pelo fabricante na manufatura, teste e uso de produtos similares.

Dentro deste contexto, o engenheiro ou projetista assume total controle sobre o ciclo de projeto e análise do produto. Ele determina se existe ou não a necessidade de

modificar o projeto, quais as alterações que podem melhorá-lo, e ainda, é o responsável pelas alterações no modelo de Elementos Finitos necessárias para a representação das modificações introduzidas. O tempo necessário para avaliar os resultados, decidir como e o que deve ser modificado, ajustar o modelo matemático, criar ou modificar a malha de Elementos Finitos, obter novos resultados e reavaliá-los, é sem dúvida o principal responsável pelas vulnerabilidades descritas anteriormente.

O problema pode tornar-se ainda mais complicado se considerarmos que o projeto e a análise do pistão são geralmente desenvolvidos por grupos de trabalho distintos, e que portanto possuem planejamentos e cronogramas de atividades também distintos.

Neste sentido, torna-se importante uma reavaliação das metodologias de projeto atualmente empregadas em face do potencial representado pelas modernas ferramentas de projeto e análise disponíveis, porém não totalmente exploradas, considerando-se principalmente os avanços significativos atingidos pela computação digital e técnicas numéricas como as de Programação Matemática e o próprio Método dos Elementos Finitos.

#### **1.4.Ferramentas Modernas de Projeto e Análise.**

É indiscutível nos dias de hoje a importância e a contribuição que o Método dos Elementos Finitos tem dado a

Engenharia ao longo das últimas três décadas, em particular ao desenvolvimento de projetos e tecnologia de pistões para motores de combustão interna. Porém é evidente, pelo exposto no item 1.2, que o MEF é ainda utilizado como ferramenta de verificação nos primeiros estágios do desenvolvimento de um projeto e não como uma ferramenta efetiva de projeto[21].

Entretanto, o campo da Engenharia tem sido virtualmente revolucionado nos últimos 25 anos pela sofisticada tecnologia dos computadores, que permitiu não só o desenvolvimento do MEF, mas também outras técnicas numéricas como as de Programação Matemática, que por sua vez possibilitaram também desenvolvimentos no campo da Otimização Estrutural, aplicada a uma série de problemas da Engenharia.

Inúmeras soluções analíticas e numéricas tem sido implementadas com relativo sucesso em programas de computador, porém com o propósito único de solucionar problemas específicos. Tentativas de criar-se metodologias gerais em Otimização Estrutural tem sido apenas alusivas, mesmo nos dias de hoje, e muito neste campo ainda necessita ser desenvolvido[1,2,26]. As técnicas clássicas de Otimização Estrutural empregam basicamente métodos matemáticos de forma fechada ou os chamados métodos analíticos provenientes do Cálculo Diferencial e/ou Cálculo Variacional. Neste caso, as equações que descrevem matematicamente o problema, isto é, a função a ser minimizada juntamente com suas restrições, são expressas em

termos de variáveis independentes, que por sua vez caracterizam um determinado projeto. Esta função é então diferenciada em relação às suas variáveis e igualada a zero. Limites são impostos e o mínimo é calculado. Esta abordagem é restrita apenas a problemas que tenham solução de forma fechada e utilizem um número bastante reduzido de variáveis independentes. Devido a tais características estes métodos são utilizados apenas com propósitos acadêmicos.

Alguns métodos numéricos baseados em técnicas de Programação Matemática têm sido empregados com sucesso na solução de problemas de Otimização Estrutural visando por exemplo, redução de peso e/ou custo de estruturas[1]. Nestes métodos o problema é matematicamente formulado e uma configuração inicial é fornecida. Em geral, esta configuração inicial está nas imediações da solução "ótima" do problema e serve como ponto de partida para uma busca sistemática de melhores configurações. O processo termina quando determinados critérios são satisfeitos, indicando que a configuração final está relativamente "próxima" da solução "ótima" desejada. Problemas práticos tem sido resolvidos através destes métodos porém de forma também restrita e em áreas muito específicas[1].

Somente num período muito recente, -cerca de 10 anos- os métodos de otimização encontraram seu caminho efetivo através de sua incorporação à programas comerciais de Elementos Finitos[29] tais como ANSYS<sup>F</sup> (Swanson Analysis Systems, Inc.), MSC/Nastran<sup>F</sup> (MacNeal-Schwendler, Co.), I-

DEAS<sup>F</sup> (Structural Dynamics Research, Co.), Applied Structure<sup>F</sup> (Hasna, Co.), entre outros.

Vários métodos de Otimização Estrutural utilizados em conjunto com o MEF têm sido abordados na literatura e uma infinidade de trabalhos sobre o tema têm sido publicados [4-15]. Apesar da abordagem de certa forma revolucionária, que na opinião de alguns está trazendo o mesmo impacto provocado pelo próprio surgimento do MEF, limitações tais como a não disponibilidade do código fonte destes programas, torna a implementação destas técnicas de difícil execução, restringindo portanto sua aplicação a um pequeno número de tipos de elementos e análises [17,29].

Mesmo ainda sujeito a limitações, o uso efetivo de Técnicas de Otimização em conjunto com o Método dos Elementos Finitos, representa a possibilidade efetiva de integração e automação do ciclo de projeto e análise, podendo constituir-se em uma valiosa ferramenta de engenharia quando utilizada com conhecimento e bom senso.

### 1.5. Objetivos do presente trabalho.

No presente trabalho os recursos de otimização e análise disponíveis no programa ANSYS<sup>F</sup> são empregados para a solução de um problema típico, encontrado no projeto de pistões de alumínio com galeria de refrigeração, utilizados em motores à diesel. Evidentemente os conceitos aqui desenvolvidos podem ser estendidos de maneira análoga ao

projeto de outros componentes, dada à generalidade e abrangência da técnica empregada.

No Cap.(2), a formulação geral do problema de otimização com restrições e alguns aspectos básicos sobre a convergência destes são discutidos e apresentados juntamente com um breve resumo teórico dos principais métodos clássicos de otimização.

No Cap.(3), a técnica de otimização utilizada pelo programa ANSYS<sup>®</sup> é abordada e discutida na sua totalidade, tendo como base o disposto no Cap.(2).

Um exemplo de utilização do MEF em conjunto com a Técnica de Otimização descrita no Cap.(3), aplicados ao projeto de um pistão de alumínio com galeria de refrigeração, para motor diesel, é desenvolvido neste trabalho e os resultados apresentados e discutidos no Cap.(6). Neste caso, um modelo 2D simplificado do pistão, utilizando elementos 2D isoparamétricos com simetria axial, é definido com o objetivo de calcular-se os campos de temperaturas, deslocamentos e tensões nas sucessivas análises do problema pelo MEF, durante o ciclo de otimização. A formulação básica para este tipo de elemento é vista no Cap.(4) e, os modelos termomecânico e de elementos finitos do pistão são discutidos no Cap.(5).

Adicionalmente, a técnica de subestruturação (superelementos), descrita nos Caps.(4) e (5), é empregada não somente para reduzir-se o tempo de análise, mas também para simplificar a parametrização da geometria do modelo de elementos finitos do pistão.

Vantagens e limitações da técnica de otimização empregada pelo ANSYS<sup>r</sup> em conjunto com o MEF são discutidas no Cap.(7), face aos resultados obtidos.

## CAPÍTULO (2) : MÉTODOS NUMÉRICOS DE OTIMIZAÇÃO.

### 2.1. Introdução.

A História da Programação Matemática é relativamente recente, tendo despertado a atenção de matemáticos, economistas e engenheiros durante o período em que se desenvolveu a 2ª Grande Guerra Mundial.

Dada a sua grande abrangência, permitiu neste período o desenvolvimento de aplicações voltadas para a solução de problemas nas áreas de transportes, suprimentos, comunicações, armazenamento, planejamento de produção, entre outros[1-4].

O termo "Programação Matemática" foi idealizado por Robert Dorfman no início da década de cinquenta[2]. Na atualidade esta terminologia é muito mais ampla e envolve disciplinas como: programação linear (PL), programação não linear (PNL), programação convexa, programação inteira, programação dinâmica, controle ótimo, etc.

Na maior parte dos problemas reais de otimização na Engenharia, as funções são não lineares e pode-se considerar que as variáveis ocupam uma região contínua do campo dos números reais. Neste caso, o problema assim definido é conhecido como problema de PNL restrita, sendo que os métodos

numéricos para sua solução são iterativos e de convergência assintótica[31].

O uso de técnicas numéricas de otimização em projetos de engenharia tornou-se conhecido a partir de 1960 quando Schmit[1] utilizou técnicas de PNL no projeto de estruturas, denominando o processo de Síntese Estrutural.

Na atualidade pode-se afirmar que não existe nenhum método geral para a solução de problemas não lineares de otimização, da mesma forma que por exemplo, o método Simplex[1-4] existe para a solução de problemas lineares de otimização (i.e. todas as funções são lineares). Métodos de PNL restringem-se ainda a um campo experimental da pesquisa. Muitas estratégias tem sido propostas para a solução destes tipos de problemas, porém é muito maior o número de algoritmos sugeridos do que propriamente aqueles que tem sido aplicados com sucesso. Genericamente o que se observa é que os autores destes algoritmos usualmente apresentam exemplos numéricos específicos que demonstram a eficiência e/ou precisão do método. Posteriormente usuários menos cautelosos irão descobrir, após um grande esforço de programação, que estes algoritmos não são tão bons para a solução deste ou daquele problema em especial. Isto leva quase sempre a um grande desapontamento em relação ao uso destas técnicas, o que na maior parte dos casos pode ser evitado se o usuário tiver conhecimento dos conceitos básicos inerentes à estas.

Obviamente, o presente capítulo não tem a pretensão de fornecer todos estes conceitos, uma vez que estes podem ser vistos e estudados detalhadamente em inúmeros exemplares disponíveis na literatura[1-4]. Entretanto, uma introdução à formulação geral e terminologia utilizada em problemas de otimização, juntamente com a apresentação de um resumo abordando conceitos básicos e alguns dos principais métodos numéricos clássicos de PNL, são de grande valia para o entendimento da técnica de otimização descrita no Cap.(3), disponível no programa ANSYS<sup>®</sup> e particularmente utilizada neste trabalho.

É importante salientar que, o uso adequado de métodos numéricos de otimização naturalmente fornece a estrutura lógica para a integração e automatização do ciclo de projeto e análise, obviamente assumindo-se que um programa de computador para análise do projeto pelo MEF exista com anterioridade e, que o interfaceamento entre este último e o otimizador seja razoavelmente amigável, como no caso do programa ANSYS<sup>®</sup>.

As vantagens imediatas desta integração podem ser resumidas em:

(a) Redução substancial do ciclo de projeto; sendo que isto torna-se verdadeiro quando o mesmo programa pode ser utilizado para vários tipos de projetos.

(b) Embora a intuição e a experiência em Engenharia tenham uma importância fundamental no processo de otimização,

este último não é influenciado pelos dois primeiros, o que de certa forma amplia a possibilidade de obter-se projetos fora do convencional, porém muito eficientes.

(c) Pode-se lidar sistematicamente e, de maneira lógica (racional), com um "grande" número de parâmetros relacionados ao projeto e seu aprimoramento, o que de forma convencional torna-se muito difícil ou mesmo impossível.

(d) "Otimização sempre propicia algum tipo de aprimoramento no projeto"[1]- obviamente o problema é avaliar-se adequadamente o tempo e a relação custo/benefício de cada empreendimento.

Em contrapartida ao exposta acima, algumas limitações inerentes ao uso de qualquer técnica de otimização são:

(a) O tempo e, conseqüentemente, o custo computacional, aumentam substancialmente à medida que o número de variáveis do problema também aumenta.

(b) Uma vez que o número de variáveis aumente, a tendência é que estes métodos se tornem mal-condicionados do ponto de vista numérico, comprometendo a solução final do problema.

(c) Muitos algoritmos de otimização tem dificuldade no trato de funções descontínuas e/ou também problemas altamente não lineares, o que implica em convergência muito lenta ou mesmo divergência da solução.

(d) Uma vez que a maioria dos programas de análise não são originalmente projetados com o propósito de operarem em

conjunto com programas de otimização, a tarefa de adaptação e interfaceamento com estes torna-se bastante trabalhosa, podendo gerar soluções pouco eficientes.

## 2.2. Formulação Geral do Problema de Programação Não Linear Restrita.

De uma maneira geral, qualquer projeto em Engenharia divide-se em duas etapas fundamentais, sendo a primeira a concepção do desenho, materiais e procedimentos a serem adotados, e a segunda o dimensionamento. Este último consiste no cálculo e/ou verificação de um conjunto de parâmetros, as **variáveis de projeto (VP)**, que determinam um projeto particular.

No cálculo e/ou verificação, por sua vez, devem ser respeitadas condições provenientes de normas técnicas, necessidades funcionais e critérios de resistência dos materiais empregados. Tais condições estabelecem limites ou restrições ao projeto e são comumente denominadas **funções de restrição ou variáveis de estado (VE)**. O termo variável de estado é proveniente da teoria de controle ótimo[4].

Um valor particular das VP determina um vetor ou **configuração de projeto**, a qual é dita **configuração viável** quando todas as restrições estabelecidas para o projeto são satisfeitas. Caso contrário o projeto é dito **inviável**.

Otimizar consiste em estabelecer uma função custo ou função objetivo (FO), que quantifica a eficiência de cada projeto em relação a um ou mais aspectos inerentes a este, e determina a configuração viável para a qual o valor da FO é mínimo ou máximo [31].

No sentido matemático formal, o problema geral de PNL restrita ou problema de otimização com restrições, pode ser expresso na forma:

$$\text{Minimizar: } f(\bar{x}) \quad (2-1)$$

Sujeito a:

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad j = 1, m \quad (2-2)$$

$$h_k(\bar{x}) = 0 \quad k = 1, l \quad (2-3)$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, n \quad (2-4)$$

onde :

$n$  = número de variáveis de projeto

$m$  = número de restrições de desigualdade

$l$  = número de restrições de igualdade

e

$$\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$$

O vetor  $\vec{x}$  denomina-se **vetor de projeto**, e é definido em um espaço euclidiano n-dimensional, cujas componentes são variáveis independentes ou VP. A FO dada pela Eq.(2-1) e as VE ou funções de restrição de desigualdade e igualdade, respectivamente definidas pelas Eqs.(2-2) e (2-3), podem ser funções lineares ou não lineares expressas, explícita ou implicitamente pelas VP ou  $\vec{x}$ . Em alguns casos, se as restrições de igualdade são uma função explícita em  $\vec{x}$ , elas podem ser eliminadas do problema como variáveis independentes e utilizadas para reduzir-se o número de VP consideradas. Em geral,  $h_k(\vec{x}) \{k = 1, l\}$  são funções complicadas de  $\vec{x}$ , ou ainda, funções implícitas de  $\vec{x}$ , e nestes casos devem ser retidas no problema[1].

As Eqs.(2-4) representam os limites, inferior  $\underline{x}_i$  e superior  $\bar{x}_i$ , estabelecidos sobre as VP (i.e, região de projeto ou domínio das VP), e são denominadas restrições laterais. Embora restrições laterais possam ser incluídas junto às restrições de desigualdade, é conveniente tratá-las separadamente uma vez que definem os limites ou domínio de  $\vec{x}$  para a busca do valor ótimo de  $f(\vec{x})$ .

O vetor  $\vec{x}^*$ , que satisfaz totalmente as condições estabelecidas pelas Eqs.(2-1) a (2-4) é denominado **ponto de ótimo** da FO, e o correspondente valor de  $f(\vec{x}^*)$  é definido como **valor ótimo** de FO. Portanto o par  $\vec{x}^*$  e  $f(\vec{x}^*)$  constituem a **solução ótima** do problema. Aspectos básicos sobre a

convergência do problema e características da solução ótima são discutidos de maneira breve no item 2.3.

A formulação apresentada, obviamente não é a única e muitas outras formas podem ser encontradas na literatura[1,2,12]. Por exemplo, caso se deseje maximizar  $f(\vec{x})$  basta simplesmente minimizar-se  $-f(\vec{x})$ . De modo análogo, pode ser trocado o sinal de desigualdade da Eq.(2-2) de tal forma que  $g_j(\vec{x}) \geq 0$ . No caso da Eq.(2-2), a adoção do sinal de desigualdade não positiva para as restrições tem o significado geométrico de que, no ponto de ótimo, os gradientes da FO e todas as restrições ativas (críticas), apontam na direção da solução ótima do problema[1]. Isto torna a formulação compatível com os princípios básicos de operação dos métodos numéricos de busca mais tradicionais como será visto no item 2.5.

### 2.3. Condição de Existência e Unicidade da Solução Ótima.

Do ponto de vista matemático duas categorias de solução ótima podem existir; caso a FO não seja unimodal (i.e, possua apenas uma extremidade). Na Fig.(2-1) um exemplo de função multimodal de duas variáveis  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}^T$  e sem restrições é apresentado. Ao menor de todos os valores de  $f(\vec{x})$  compreendido no domínio de validade da função dá-se o nome de ótimo global, enquanto que ao menor valor de  $f(\vec{x})$ , porém

considerado nas imediações de um vetor  $\vec{x}$  específico, é dado o nome de ótimo local ou relativo.

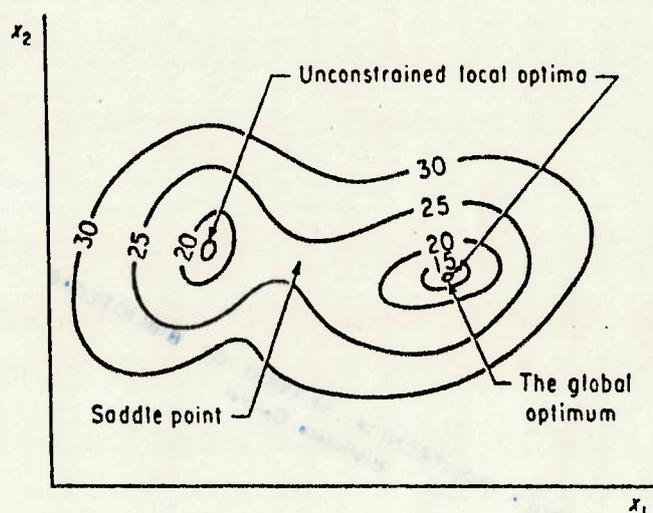


Fig. (2-1) - Classificação das soluções ótimas.

A obtenção de uma solução ótima global, ou relativa, esta intimamente relacionada às características iterativas e de convergência do método de otimização utilizado, bem como, do problema a ser resolvido. Todos os algoritmos fornecem soluções localmente ótimas uma vez que seu funcionamento depende primeiramente do valor inicial atribuído às VP, e conseqüentemente das propriedades locais da FO e funções de restrição. Na prática, é aconselhável atribuir-se diferentes valores iniciais para o vetor  $\vec{x}$  e observar se o valor de  $f(\vec{x}^*)$  resulta o mesmo para todas as soluções. Como regra geral, uma vez encontrado  $\vec{x}^*$ , não existem garantias de que a

solução tenha convergido para um ótimo global, a menos que informações sobre a natureza da FO e funções de restrição sejam conhecidas previamente. Em outras palavras, é possível definir-se as condições necessárias para a existência de um valor ótimo da função, porém somente sob circunstâncias muito especiais, como no caso de funções convexas diferenciáveis[1,2], estas condições necessárias são também suficientes, e a solução obtida é o ótimo global.

No caso mais geral de funções definidas no espaço n-dimensional, porém sem restrições, a condição necessária para que haja pelo menos um mínimo relativo ou ótimo local é dada por:

$$\nabla \vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad (2-5)$$

$$\nabla^2 f(\vec{x}) \geq 0 \quad (2-6)$$

onde:

$$\nabla \vec{f}(\vec{x}) = \left\{ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right\}^T$$

e

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = [H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

A matriz  $[H]$  é a matriz das derivadas parciais de 2ª ordem da FO em relação às VP, e é denominada matriz Hessiana. Para que a condição apresentada na Eq. (2-6) seja obtida,  $[H]$  deve ser positiva definida (i.e, identifica um problema convexo). Portanto se o gradiente da FO é zero e, a matriz Hessiana é positiva definida para um dado vetor  $\bar{x}$ , existe então garantias de que este ponto seja pelo menos um ótimo relativo da FO. A condição apresentada será suficiente somente se, para qualquer possível valor de  $\bar{x}$  a matriz  $[H]$  for positiva definida. Isto é praticamente impossível de se demonstrar na prática[1].

No caso de funções definidas no espaço n-dimensional, porém sujeitas agora a restrições de desigualdade e/ou

igualdade, a chamada condição de otimalidade será definida por:

$$\bar{x}^* \quad \text{é um vetor viável} \quad (2-7)$$

$$\lambda_j g_j(\bar{x}^*) = 0 \quad j=1, m \quad ; \lambda_j \geq 0 \quad (2-8)$$

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \bar{g}_j(\bar{x}^*) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla \bar{h}_k(\bar{x}^*) = 0 \quad (2-9)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (2-10)$$

$$\lambda_{m+k} \quad \text{sem restrição de sinal} \quad (2-11)$$

As Eqs. (2-7) a (2-11) determinam a chamada condição de otimalidade de 1ª ordem ou condição de Kuhn-Tucker. Uma explicação mais detalhada sobre a obtenção das Eqs. (2-8) e (2-9) e dos coeficientes multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , pode ser vista em [1].

A Eq. (2-7) traduz obviamente a condição de viabilidade de  $\bar{x}^*$ . A Eq. (2-8) implica que se a condição de restrição  $g_j(\bar{x})$  não é precisamente satisfeita (i.e,  $g_j(\bar{x}) < 0$ ) então o correspondente multiplicador de Lagrange  $\lambda_j$  deve ser igual a zero. Finalmente a Eq. (2-9) representa a condição necessária para que o problema tenha solução ótima em um domínio

restrito, o que pode não ser verdade caso este não seja convexo [1,2].

Em resumo, se a FO e todas as demais funções de restrição forem convexas, então o domínio de definição do problema será dito convexo e a condição necessária de Khun-Tucker será também suficiente para assegurar que, se um ótimo é obtido, este ótimo é global.

Embora seja difícil em situações práticas precisar-se quando uma condição suficiente de otimalidade é encontrada, os preceitos aqui descritos são importantes para um maior conhecimento das características do domínio de análise de qualquer problema de otimização, de modo que sua solução possa ser conduzida de maneira mais apropriada quando da utilização de técnicas numéricas de otimização.

#### 2.4. A estratégia geral de otimização.

A grande maioria dos métodos numéricos clássicos de otimização utilizados para a solução de problemas não lineares, pode ser entendida como uma aplicação tipicamente iterativa.

O processo iterativo requer que uma configuração inicial,  $\bar{x}^q$  ( $q = 0$ ), seja fornecida. Partindo-se desta configuração, novas configurações são então sucessivamente obtidas, sempre

no sentido de minimizar-se  $f(\vec{x})$ . A forma mais simples encontrada para expressar este procedimento<sup>[1]</sup> é dada por:

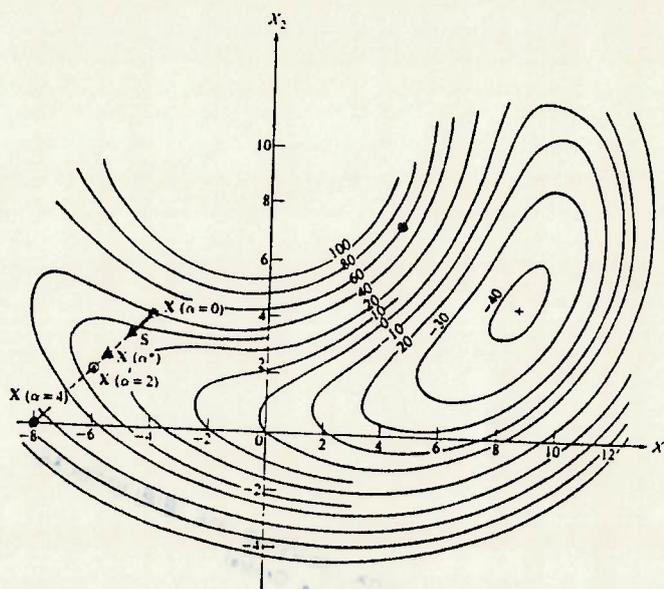
$$\vec{x}^q = \vec{x}^{q-1} + \alpha^* \vec{S}^q \quad (2-12)$$

onde  $q$  é o número da interação corrente,  $\vec{S}$  o vetor que determina a direção de busca no espaço de projeto, e  $\alpha^*$  é um escalar que define a distância que se deve percorrer na direção do vetor  $\vec{S}$

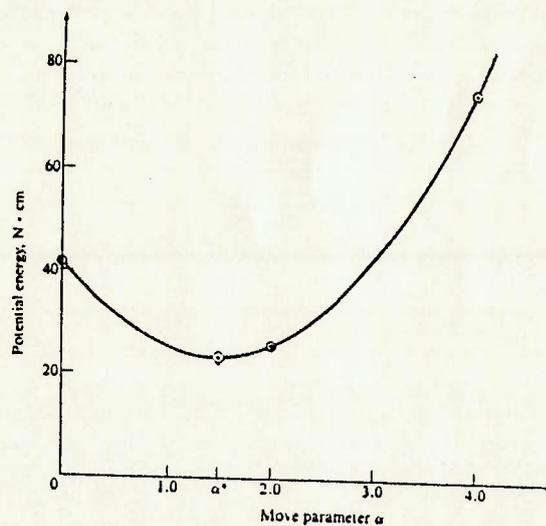
O uso da Eq.(2-12) compreende duas etapas essenciais. A primeira consiste na determinação da direção  $\vec{S}^q$ , e a segunda a obtenção do escalar  $\alpha^*$  que reduz ao máximo  $f(\vec{x})$  segundo  $\vec{S}^q$ .

Via de regra, a maneira de se obter  $\vec{S}$  caracteriza um determinado método em particular. O escalar  $\alpha$ , por sua vez, pode ser calculado utilizando-se os métodos descritos nos itens 2.5.1 e 2.5.2.

Um aspecto interessante da Eq.(2-12) é que, uma vez determinada a direção de busca  $\vec{S}$ , a dependência do problema passa de n-variáveis em  $\vec{x}$  para apenas uma variável em  $\alpha$ . Daí então o processo ser denominado busca unidimensional. Um exemplo do exposto acima pode ser visto nas Figs.(2-2a) e (2-2b).



(a)



(b)

Fig. (2-2) - (a) Isóclinas de  $f(\vec{x})$  para duas variáveis  $x_1, x_2$ ;  
 (b)  $f(\vec{x})$  expressa em função de  $\alpha$ .

Todavia, o aspecto mais importante relacionado aos métodos iterativos é decidir quando o processo deve ser terminado. O critério de terminação tem influência direta sobre a eficiência e confiabilidade do método utilizado. Estes aspectos são apresentados no item 2.6.

## 2.5. Métodos Numéricos Tradicionais de Otimização.

Do ponto de vista prático e também didático, é interessante estabelecer uma classificação para os métodos numéricos de otimização tradicionais disponíveis, levando-se em consideração, por exemplo, tipos de informações utilizadas para se chegar ao valor mínimo de uma função, características numéricas peculiares da técnica empregada, número de variáveis independentes (VP) consideradas, tipo de problema, se com restrição ou sem restrição, etc.

Neste sentido, Garret N. Vanderplaats<sup>[1]</sup> fornece uma das abordagens mais abrangentes e claras disponíveis na literatura sobre o assunto, a qual é sumarizada na forma de um quadro geral apresentado na Fig.(2-3). Algumas informações provenientes de outras fontes<sup>[2-4]</sup> foram também adicionadas à esse quadro, na tentativa de torná-lo o mais abrangente possível.

Características peculiares sobre alguns dos métodos apresentados na Fig.(2-3) são discutidas a seguir. Porém, é

conveniente e importante salientar-se que, apenas os métodos que apresentam algum tipo de relação, direta ou indireta, com a técnica de otimização utilizada pelo programa ANSYS<sup>r</sup>, - descrita no Cap.(3)-, serão enfatizados. Nos demais casos, o leitor interessado, deverá consultar as referências [1-4].

$\nabla^2 f(x) = [H]$									
$\nabla f(\bar{x})$									
$\bar{x}; f(\bar{x})$									
PROBLEMAS COM REST.									
PROBLEMAS SEM REST.									
FUNÇÕES DE N VARIÁVEIS									
FUNÇÕES DE 1 VARIÁVEL									
MÉTODOS NUMÉRICOS DE OTIMIZAÇÃO									
1. MÉTODO DE BUSCA UNIDIMENSIONAL									
1.1 SEQUENCIAL									
1.2 NÃO SEQUENCIAL									
2. APROXIMAÇÕES POLINOMINAIS									
3. MÉTODOS DE ORDEM - ZERO									
4. MÉTODOS DE 1a. ORDER									
4.1 MÉTODO DOS GRADIENTES									
4.2 MÉTODO DAS DIREÇÕES CONJUGADAS									
4.3 MÉTODOS VARIÁVEL-MÉTRICOS									
5. MÉTODOS DE 2a. ORDER									
6. MÉTODOS DE MINIMIZAÇÃO SEQUENCIAL									
6.1 MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERIOR									
6.2 MÉTODO DE PENALIZAÇÃO INTERIOR									
6.3 MÉTODO DE PENALIZAÇÃO INTERIOR EXTENDIDO									
7. MÉTODOS DIRETOS									
7.1 PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL									
7.2 MÉTODO DAS DIREÇÕES VIÁVEIS									
7.3 MÉTODO DOS GRADIENTES REDUZ. GENERALIZ.									
8. MÉTODOS DUAIS									
9. MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO									
9.1 MÉTODO DE BASES REDUZIDAS									
9.2 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO FORMAL									

Fig. (2-3) - Classificação Geral dos Métodos Tradicionais de Otimização.

### 2.5.1. Métodos de Busca Unidimensionais.

A maioria dos métodos numéricos de otimização apresentados na Fig.(2-3) utilizam o conceito de busca unidimensional, cuja estratégia encontra-se resumida no item 2.4. Existe porém uma classe particular de métodos de otimização que prestam-se a fornecer uma estimativa do valor máximo, mínimo ou zero para funções com apenas uma variável[1].

O princípio de operação destes métodos consiste primeiramente em conhecer-se um intervalo inicial  $\Delta x^{(0)}$  de  $f(x)$ , denominado intervalo de incerteza, no qual o valor de  $x^*$  está confinado. Em seguida, admitindo-se que a função seja localmente unimodal e não necessariamente contínua, o intervalo  $\Delta x$  é então sucessivamente reduzido. A estratégia de redução de  $\Delta x$  combina um critério particular de escolha de valores de  $x$ , internos a este intervalo, e sucessivas avaliações de  $f(x)$ . A cada interação, intervalos cada vez menores são obtidos, de tal forma que seus limites tornam-se cada vez mais próximos de  $x^*$ . Existem inúmeros métodos de busca para funções de uma variável[2], dentre os quais podemos citar: Dicotomia Uniforme (não sequencial), Dicotomia Sequencial, Método de Fibonacci, Método da Secção Áurea ou "Golden Section", etc. Este último, derivado do Método de Fibonacci[1,2], é considerado o mais importante método desta categoria. A característica favorável do método das Secções

Áureas é que a acuracidade da solução pode ser determinada com precisão, porém às custas de muitas avaliações de  $f(x)$  [1]. Os métodos desta classe são em geral pouco eficientes, porém representam o ponto de partida para o desenvolvimento de métodos mais sofisticados e poderosos.

### 2.5.2. Método de Aproximações Polinomiais.

Outra classe de métodos de otimização aplicados a funções de apenas uma variável é aquela baseada na minimização de  $f(x)$ , aproximada por sua vez, através de funções polinomiais na forma:

$$f(x) \cong F(x) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x^i \quad (2-13)$$

onde  $p$  representa o grau máximo do polinômio de interpolação e,  $a_0, a_i$  ( $i = 1, p$ ) são constantes a serem determinadas. Detalhes sobre a técnica de aproximação em questão podem ser vistos em [1,2,4] e, um caso similar é apresentado no Cap.(3). Uma vez ajustado o polinômio, o valor mínimo de  $F(x)$  é obtido através de técnicas clássicas de derivação associadas ao uso de técnicas numéricas como o Método de Newton, utilizado para a determinação do(s) zero(s) da função, conforme a condição de otimalidade expressa pela

Eq.(2-5). Usualmente raízes complexas são ignoradas. Em geral, bons ajustes são conseguidos utilizando-se polinômios de baixa ordem (i.e.  $p = 1, 2, \dots, 4$ ) [1,2].

O Método acima descrito tem a vantagem de necessitar de poucas avaliações de  $f(x)$ . Entretanto, não existem garantias de que a solução aproximada, assim obtida, seja precisa. No caso de funções altamente não lineares a aproximação resultante pode ser inadequada. O Método com base em aproximações polinomiais é, em geral, mais eficiente que os métodos descritos no item 2.5.1, justamente por requerer um número muito menor de avaliações de  $f(x)$ .

No caso do programa ANSYS<sup>F</sup>, este método é utilizado no sentido de obter-se as aproximações para a FO e funções de restrição ou VEs do problema a ser otimizado, uma vez que estas são normalmente desconhecidas ou sua determinação é muito trabalhosa, senão impossível (ver Cap.3).

### 2.5.3. Métodos de Ordem-Zero.

Os métodos de ordem-zero, são aqueles que utilizam apenas valores de  $\vec{x}$  e  $f(\vec{x})$  na estratégia de busca da solução ótima do problema. Em geral, os métodos pertencentes a esta classe, destinam-se a problemas que envolvam funções de múltiplas variáveis ou n-dimensionais sem restrições. Por serem métodos de busca essencialmente iterativos, sua característica básica

de funcionamento segue os princípios estabelecidos no item 2.4.

Neste sentido, um dos métodos de ordem-zero mais eficientes e confiáveis, e certamente o mais popular de todos, é o método desenvolvido por Powell<sup>[5]</sup>. Este método de convergência quadrática, baseia-se no conceito de direções conjugadas<sup>[5]</sup>, que por sua vez forma a base dos mais importantes e eficientes algoritmos de busca já desenvolvidos. Neste conceito, as direções de busca  $\vec{S}^i$  e  $\vec{S}^j$  serão conjugadas se:

$$(\vec{S}^i)^T [H] \vec{S}^j = 0 \quad (2-14)$$

$$(\vec{S}^i) [H] \vec{S}^j \geq 0 \quad (2-15)$$

onde  $[H] = \nabla^2 \vec{f}(\vec{x})$  é a matriz Hessiana.

A técnica empregada consiste em desenvolver-se sucessivas buscas unidimensionais utilizando-se a Eq.(2-12), fazendo-se com que os  $n$  primeiros vetores  $\vec{S}^i$  ( $i = 1, n$ ) sejam respectivamente paralelos à cada uma das  $n$  coordenadas do problema. Estas direções em princípio não são conjugadas, mas fornecem o ponto de partida para a construção das mesmas.

Tendo completado as primeiras  $n$  direcionais buscas, uma nova direção  $\vec{S}^{n+1}$ , agora conjugada, é obtida conectando-se o primeiro e o último pontos  $\vec{x}^0$  e  $\vec{x}^n$  respectivamente.

Geometricamente o processo pode ser interpretado como a soma de todos os  $n$  vetores  $\alpha_i^* \vec{S}^i$  ( $i = 1, n$ ) definidos, logo:

$$\vec{S}^{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \vec{S}^i \quad (2-16)$$

A próxima busca é então no sentido de determinar-se  $\alpha_{n+1}^*$ . Posteriormente, os primeiros  $\alpha_i^* \vec{S}^i$  ( $i = 1, n-1$ ) são substituídos respectivamente pelos mesmos  $\alpha_i^* \vec{S}^i$  ( $i = 2, n$ ), sendo que  $\alpha_n^* \vec{S}^n$  é trocado por  $\alpha_{n+1}^* \vec{S}^{n+1}$ , e o processo é novamente reiniciado.

Assumindo que o ótimo de uma função quadrática seja encontrado após o cálculo de  $n$  ou menos direções conjugadas<sup>[1,5]</sup>, e considerando-se que cada aplicação da Eq.(1-12) caracterize uma iteração, então o método de Powell convergirá em  $n(n+1)$  iterações. Com isto pode-se concluir, que o método de Powell torna-se competitivo quando aplicado a problemas relativamente pequenos ( $1 \leq n \leq 10$ ), ou onde o custo de uma avaliação de  $f(\vec{x})$  seja muito baixo. Sua melhor eficiência entretanto, é verificada quando este é utilizado para a minimização de funções quadráticas ou problemas que possam ser aproximados através destas<sup>[1]</sup>.

No caso do programa ANSYS<sup>r</sup>, o conceito de direções conjugadas estabelecido pelo método de Powell, é utilizado em conjunção com outras estratégias de busca, no sentido de minimizar-se as aproximações quadráticas de  $f(\vec{x})$  e  $g_j(\vec{x})$ .

Outros métodos de ordem-zero como o método de Hooke e Jeeves, o método de Resenbrock, o método COMPLEX desenvolvido por Box, o método das tangentes paralelas ou PARTAN, etc, utilizam os mesmos conceitos do método de Powell e estão referenciados em [1,2]

#### 2.5.4. Métodos de Primeira-Ordem.

Métodos de primeira-ordem são aqueles que utilizam informações referentes ao gradiente da função a ser minimizada. Estes métodos em geral, são mais eficientes que os métodos de ordem-zero. Porém, tal eficiência somente é conseguida às custas de informações sobre o gradiente da função. Estas informações devem ser obtidas ou por via analítica ou numérica (diferenças finitas). O desempenho destes métodos torna-se bastante comprometido no caso de funções cujas derivadas de primeira-ordem sejam descontínuas.

Existem três tipos de abordagem distintas associadas ao princípio básico de funcionamento dos métodos de primeira-ordem. Tais abordagens permitem distinguir três sub-classes de métodos que são descritas a seguir.

### 2.5.4.1. Método dos Gradientes [1].

Este é provavelmente o método mais conhecido e o de mais baixa eficiência dos métodos de primeira-ordem. Sua principal importância é ser o ponto de partida para o desenvolvimento de outros métodos de primeira-ordem mais sofisticados pertencentes às sub-classes que estão descritas nos itens 2.5.4.2 e 2.5.4.3.

Seu princípio básico de funcionamento consiste em utilizar a Eq.(2-12), na qual o gradiente negativo de  $f(\vec{x})$  é tomado para se determinar a direção do vetor de busca  $\vec{S}^q$ , ou seja:

$$\vec{S}^q = -\nabla f(\vec{x}^{q-1}) \quad (2-17)$$

geometricamente o processo é mostrado na Fig.(2-4).

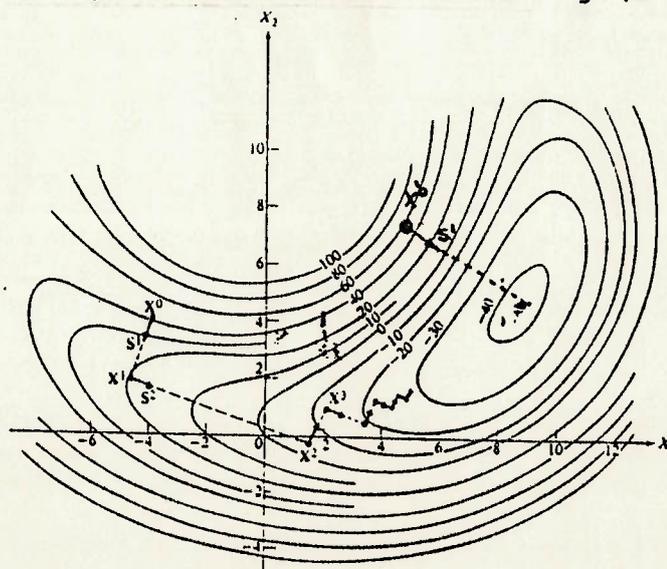


Fig. (2-4) - Interpretação Geométrica do Método dos Gradientes.

Pode-se notar que a taxa de convergência deste método pode ser extremamente baixa. Entretanto, é evidente que se tomarmos um outro ponto de partida, como por exemplo o ponto  $\bar{x}^0$ , mostrado na Fig.(2-4), a eficiência do método será substancialmente melhorada. Tal fato, ilustra apenas a importância de conhecer-se previamente as características da função ou problema a ser minimizado, sendo que o método dos gradientes não é reconhecidamente o melhor para aplicações gerais.

#### 2.5.4.2. Método das Direções Conjugadas.

O método das direções conjugadas, particularmente conhecido como método de Fletcher-Reeves[6], incorpora o mesmo princípio utilizado pelo método dos Gradientes, porém considerando também informações da iteração precedente.

Com esta simples modificação, o método de Fletcher-Reeves torna-se muito mais eficiente que o método dos Gradientes.

O processo consiste em determinar-se sucessivas direções de busca utilizando o princípio básico estabelecido pela Eq.(2-12). Na primeira iteração, o vetor  $\bar{S}^1$  é determinado utilizando-se a Eq. (2-17). Nas iterações posteriores, direções conjugadas são definidas na forma:

$$\bar{S}^q = -\nabla \bar{f}(\bar{x}^{q-1}) + \beta_q \bar{S}^{q-1} \quad (q > 1) \quad (2-18)$$

onde  $\beta_q$  é um escalar definido por:

$$\beta_q = \frac{|\nabla \vec{f}(\bar{x}^{q-1})|^2}{|\nabla \vec{f}(\bar{x}^{q-2})|^2} \quad (q > 1) \quad (2-19)$$

O método apresentado é conceitualmente similar ao método de Powell, descrito no item 2.5.3. Detalhes sobre o aprimoramento do critério de convergência do método das direções conjugadas podem ser vistos em [1].

#### 2.5.4.3. Métodos Variável-Métricos ou Quasi-Newton.

Os métodos variável-métricos são a sub-classe mais eficiente dos métodos de primeira-ordem para a otimização de problemas sem restrições. De maneira análoga ao método das direções conjugadas, informações referentes às iterações precedentes são também utilizadas no processo de busca. A diferença básica é que, neste caso, uma quantidade maior de informações sobre a função é armazenada em uma matriz n-dimensional a cada interação; ao invés apenas de um simples escalar  $\beta$ . No caso da minimização de funções quadráticas, a medida em que as interações evoluam, uma matriz n-dimensional,  $[\bar{H}]^q$ , aproxima-se do inverso da matriz Hessiana[1], ou seja:

$$[\bar{H}]^q \cong [H]^{-1} \quad (2-20)$$

Nestes métodos, o processo iterativo também é ditado pela Eq.(2-12), onde a cada iteração  $q$ , a direção do vetor de busca  $\bar{S}^q$  é dada por:

$$\bar{S}^q = -[\bar{H}]^q \nabla \bar{f}(\bar{x}^{q-1}) \quad (2-21)$$

Na primeira interação a matriz  $[\bar{H}]$  é considerada como sendo uma matriz identidade  $[I]_{n \times n}$ . Logo a Eq.(2-17) é aplicada diretamente como no método dos Gradientes. Nas interações subseqüentes a matriz  $[\bar{H}]^q$  é obtida através da Eq.(2-22) apresentada abaixo.

$$[\bar{H}]^q = [\bar{H}]^{q-1} + [A]^{q-1} \quad (2-22)$$

onde  $[A]^{q-1}$  é uma matriz simétrica, denominada matriz de atualização<sup>[1]</sup>, à qual armazena informações das duas últimas iterações precedentes à iteração  $q$ , e define uma família típica de métodos variável-métricos. Fazem parte desta família os métodos de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) [1,2] e Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [1,2].

Por características de convergência similares às dos métodos de segunda-ordem, descritos em 2.5.5, os métodos variável-métricos são também denominados quasi-Newton [1,2].

### 2.5.5. Métodos de Segunda-Ordem.

O método de segunda-ordem mais tradicional que existe, - obviamente acrescido de inúmeras modificações que melhoram seu aspecto de convergência-, é o método de Newton[1,2].

Neste caso, além das informações pertinentes a  $f(\vec{x})$  e seus gradientes, existe também a necessidade de fornecer-se informações sobre as derivadas de segunda-ordem, expressas por sua vez através da  $[H]$ .

O ponto de partida do método consiste em desenvolver-se  $f(\vec{x})$  através de uma série de Taylor de segunda-ordem. Utilizando-se então a Eq.(2-12), -de maneira análoga aos métodos anteriormente descritos-, a direção do vetor de busca  $\vec{S}^q$  será dada por:

$$\vec{S}^q = [H(\vec{x}^q)]^{-1} \nabla f(\vec{x}^q) \quad (2-23)$$

Na Eq.(2-23), não existe na realidade a necessidade de inverter-se  $[H]$ , mas somente resolver-se um sistema de equações simultâneas dado por  $[H]\vec{S} = -\nabla f$  [1].

A principal dificuldade do método reside no fato de que  $[H]$  pode ser uma matriz singular, ou pelo menos não positiva definida, -como requerido para assegurar a solução mínima de  $f(\vec{x})$ . Isto ocorrerá todas as vezes que  $f(\vec{x})$  for linear em um ou mais  $x_i$  ( $i = 1, n$ ), acarretando portanto, mal condicionamento numérico da solução[1].

O uso do método de Newton é restrito a problemas onde a obtenção das derivadas de segunda-ordem de  $f(\bar{x})$  seja uma tarefa relativamente simples, ou ainda, a problemas que possam ser representados através de uma formulação adequada às características do método. Em geral, isto é observado quando são utilizados métodos pertencentes à classe dos métodos de aproximação, listados na Fig.(2-3), e discutidos no item 2.5.7.

#### 2.5.6. Métodos de Minimização Sequencial sem Restrições.

Os Métodos de Minimização Sequencial sem Restrições foram desenvolvidos para a solução de problemas gerais de otimização, cuja formulação básica é fornecida pelas Eqs.(2-1) a (2-4).

A essência destes métodos é transformar um problema de otimização com restrições em um problema sem restrições, de tal forma que este último possa ser minimizado utilizando-se técnicas de otimização mais simples, como aquelas apresentadas nos itens 2.5.3, 2.5.4 e 2.5.5. A abordagem geral consiste em minimizar-se uma pseudo-função objetivo  $\Phi$ , cuja forma geral é dada por:

$$\Phi(\bar{x}, r_p) = f(\bar{x}) + r_p P(\bar{x}) \quad (2-24)$$

onde  $f(\bar{x})$  é a FO original,  $P(\bar{x})$  é a chamada função de penalização, imposta por sua vez à  $f(\bar{x})$ , todas as vezes que as restrições do problema são violadas. A forma atribuída à  $P(\bar{x})$  determina o tipo de método de minimização sequencial empregado. O parâmetro escalar  $r_p$  é um fator de multiplicação que determina a magnitude da penalização. Via de regra  $r_p$  cresce ou decresce a cada sequência  $p$  de minimização de  $\Phi(\bar{x}, r_p)$ , no sentido de reduzir problemas de mau condicionamento numérico da solução [1].

Existem basicamente três abordagens tradicionais da técnica de penalização. A primeira, denominada técnica de penalização exterior, consiste em penalizar-se  $f(\bar{x})$  somente quando uma ou mais restrições são violadas. O inconveniente desta técnica é que uma sequência de projetos inviáveis é criada, e no caso de uma paralisação prematura da sequência de solução, os valores de  $\bar{x}$ , então obtidos, não podem ser reutilizados. Neste caso a função de penalização tipicamente empregada assume a forma:

$$P(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \{\max[0, g_j(\bar{x})]\}^2 + \sum_{k=1}^l [h_k(\bar{x})]^2 \quad (2-25)$$

onde  $g_j$  e  $h_k$  são as restrições definidas pelas Eqs. (2-2) e (2-3) respectivamente.

Outra abordagem, denominada técnica de penalização interior, atribui penalizações à  $f(\bar{x})$  sempre que  $\bar{x}$  aproxima-

se de uma restrição. A diferença básica em relação a abordagem anterior, consiste em que a penalização é atribuída apenas às restrições de desigualdade. As funções de penalização mais comuns neste caso, são dadas pelas Eqs.(2-26) e (2-27) mostradas a seguir.

$$P(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\bar{x})} \quad (2-26)$$

$$P(\bar{x}) = -\sum_{j=1}^m \log[-g_j(\bar{x})] \quad (2-27)$$

A vantagem desta técnica é fornecer uma seqüência de pontos viáveis do problema. Por outro lado, as dificuldades principais residem nas potenciais descontinuidades presentes nos contornos das restrições[1,16].

Uma terceira e última abordagem, denominada técnica de **penalização interior estendida**, incorpora as vantagens das duas primeiras técnicas anteriormente descritas, ou seja, determina uma função de penalização contínua em todo o domínio de análise do problema e produz uma seqüência de pontos viáveis.

O método acima permite o uso de funções de penalização do tipo linear, quadrática e ajustável[1]. Funções de penalização lineares, por exemplo, podem ser dadas por:

$$P(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \hat{g}_j(\bar{x}) \quad (2-28)$$

onde

$$\hat{g}_j(\bar{x}) = \frac{-1}{g_j(\bar{x})} \quad \text{se } g_j(\bar{x}) \leq \varepsilon \quad (2-29)$$

$$\hat{g}_j(\bar{x}) = -\frac{\{2\varepsilon - g_j(\bar{x})\}}{\varepsilon^2} \quad \text{se } g_j(\bar{x}) > \varepsilon \quad (2-30)$$

O parâmetro  $\varepsilon$  é um número negativo pequeno (intervalo) que marca a transição entre a penalização interior Eq.(2-29) e a penalização interior estendida Eq.(2-30) [1].

Existem inúmeras formas estabelecidas para as funções de penalização relacionadas aos três métodos descritos e, caso o leitor tenha interesse poderá consultar as referências [1,2,3]. Um exemplo típico de função de penalização é mostrado no Cap.(3), sendo aquele o particularmente empregado pelo programa ANSYS<sup>®</sup>.

#### 2.5.7. Métodos Diretos.

Uma classe de métodos de otimização a qual aplica-se à problemas com restrições, é a chamada classe dos métodos diretos. Neste caso, ao contrário dos métodos sequenciais

descritos no item 2.5.6, os métodos diretos possibilitam trabalhar-se diretamente com as restrições do problema durante todo o processo de busca da solução ótima.

Existem vários métodos pertencentes à esta classe[1,2,3] como: Método de Programação Linear Seqüencial, Método dos Centros, Método das Direções Viáveis, Método dos Gradientes Reduzidos (para problemas com restrições lineares), Método dos Gradientes Reduzidos Generalizado (GRG), etc.

Dos métodos acima citados, o GRG constitui-se no mais geral e importante método pertencente à esta classe, sendo que uma descrição breve sobre seu princípio de funcionamento é apresentada a seguir.

#### 2.5.7.1. Método dos Gradientes Reduzidos Generalizado (GRG).

O método GRG é utilizado para a solução de problemas gerais de otimização cuja função objetivo e funções de restrição são não lineares[1]. Em essência este método emprega restrições linearizadas, podendo-se definir novas variáveis de projeto (variáveis fictícias) normais à algumas restrições e transformar assim o gradiente para esta nova condição. Um aspecto importante do método é reconhecer que para cada restrição de igualdade, pode-se definir uma variável de projeto dependente, de modo que o número de variáveis independentes possa ser então reduzido.

De maneira análoga às Eqs.(2-1) a (2-4), a formulação geral do problema a ser resolvido pelo método GRG é dada por.

$$\text{Minimizar: } f(\bar{x}) \quad (2-31)$$

Sujeito a:

$$g_j(\bar{x}) + x_{j+n} = 0 \quad j = 1, m \quad (2-32)$$

$$h_k(\bar{x}) = 0 \quad k = 1, l \quad (2-33)$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, n \quad (2-34)$$

e

$$x_{j+n} \geq 0 \quad j = 1, m \quad (2-35)$$

onde  $x_{j+n}$  são folgas estabelecidas sobre cada uma das  $m$  restrições de desigualdade do problema, de modo que este passa então a ter  $(m+n)$  VPs. Por conveniência o vetor de projeto  $\bar{x}$  assume a forma:

$$\bar{x} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{z} \\ \bar{y} \end{array} \right\} \quad (2-36)$$

onde os vetores  $\bar{z}$  e  $\bar{y}$  correspondem respectivamente às  $(n-l)$  variáveis independentes e  $(m+l)$  variáveis dependentes do problema, respectivamente

Combinado-se as Eqs. (2-32) e (2-33), e ainda, as Eqs. (2-34) e (2-35), o problema pode ser então definido na sua forma compacta como:

$$\text{Minimizar: } f(\bar{x}) \quad (2-37)$$

Sujeito a:

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, m+l \quad (2-38)$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, n+m \quad (2-39)$$

onde para os  $x_{j+n}$  ( $j = 1, m$ ) os limites inferior e superior assumem os valores  $\underline{x}_{j+n} = 0$  e  $\bar{x}_{j+n} = \infty$ , respectivamente.

Diferenciando-se  $f(\bar{x})$  e  $h_j(\bar{x})$  ( $j = 1, m+l$ ) em relação as variáveis independentes e dependentes, cujos gradientes são identificados respectivamente por  $\nabla_z$  e  $\nabla_y$ , teremos:

$$df(\bar{x}) = \nabla_z \bar{f}(\bar{x}) \cdot d\bar{z} + \nabla_y \bar{f}(\bar{x}) \cdot d\bar{y} \quad (2-40)$$

$$dh_j(\bar{x}) = \nabla_z \bar{h}_j(\bar{x}) \cdot d\bar{z} + \nabla_y \bar{h}_j(\bar{x}) \cdot d\bar{y} \quad j = 1, m+l \quad (2-41)$$

Assumindo que as restrições de igualdade estabelecidas inicialmente são satisfeitas, então para que a condição de

viabilidade permaneça também satisfeita, para qualquer mudança nas VP, é necessário que:

$$dh_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, m + l \quad (2-42)$$

logo a Eq. (2-41) pode ser escrita na forma matricial como:

$$d\vec{h}(x) = [A']_{(m+l) \times (n-l)} d\vec{z} + [B']_{(m+l) \times (m+l)} d\vec{y} \quad (2-43)$$

Para qualquer mudança atribuída às variáveis independentes  $d\vec{z}$ , a Eq. (2-43) pode ser resolvida para a correspondente mudança nas variáveis dependentes  $d\vec{y}$ , de modo que a condição de viabilidade seja mantida.

Da Eq. (2-42) resulta então que  $d\vec{h}(x) = 0$ , e portanto:

$$d\vec{y} = -[B']^{-1}[A']d\vec{z} \quad (2-44)$$

substituindo-se a Eq. (2-44) na Eq. (2-40) resulta:

$$\vec{G}_R = \frac{df(\bar{x})}{d\vec{z}} = \nabla_z \vec{f}(\bar{x}) - [[B']^{-1}[A']]^T \nabla_y \vec{f}(\bar{x}) \quad (2-45)$$

onde  $\vec{G}_R$  é o chamado Gradiente Reduzido Generalizado, sendo que este pode ser visto como o gradiente  $\nabla \vec{f}(\bar{x})$ , definido inicialmente no item 2.5.4, porém naquele caso utilizado para problemas sem restrições.

Finalmente  $\vec{G}_R$  pode ser aplicado para determinar-se a direção de busca  $\vec{S}$ , conforme Eq. (2-12).

Note entretanto, que a Eq. (2-44) é na verdade uma aproximação do problema original não linear<sup>[1]</sup> e, portanto  $d\vec{h}(\vec{x})$  na Eq. (2-43) pode não ser precisamente nulo. Entretanto mantendo-se  $\vec{z}$  fixo, pode-se encontrar um novo vetor  $d\vec{y}$  que irá conduzir  $\vec{h}(\vec{x})$  para zero. Portanto sendo:

$$h_j(\vec{x}) + dh_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, m + l \quad (2-46)$$

podemos então estimar o novo  $d\vec{y}$  através de:

$$d\vec{y} = [B']^{-1} \{-\vec{h}(\vec{x}) - [A']d\vec{z}\} \quad (2-47)$$

Tendo encontrado o mínimo, segundo a direção  $\vec{S}$ , o processo é então repetido até a convergência ser verificada.

É importante salientar-se que este método torna-se bastante ineficiente em problemas onde o número de restrições de desigualdade  $m$  é muito elevado, o que resulta automaticamente em um número de VP também muito elevado, diminuindo-se assim a eficiência do método.

Maiores detalhes sobre o método acima descrito podem ser vistos em [1].

### 2.5.8. Métodos de Aproximação.

A abordagem geral destes métodos é criar uma aproximação de  $f(\bar{x})$  e também de suas restrições  $g_j(\bar{x})$ . O processo de otimização é executado sobre as aproximações e estas são seqüencialmente atualizadas incorporando-se novos valores de  $f(\bar{x})$ . Estes novos valores são obtidos através do cálculo exato de  $f(\bar{x})$  e  $g_j(\bar{x})$  utilizando-se o valor ótimo resultante da aproximação precedente  $\bar{x}^{*q}$ . O processo então é repetido até que o valor ótimo para o problema real seja obtido. O tipo mais comum de aproximação, é aquele baseado na expansão do problema através da série de Taylor[1].

Na prática, esta classe de métodos pode tornar-se uma poderosa ferramenta de projeto para o caso em que avaliações de  $f(\bar{x})$  são muito onerosas ou principalmente se  $f(\bar{x})$  é desconhecida e seus valores exatos são obtidos indiretamente, por exemplo, pelo MEF. Neste caso entretanto, a experiência recomenda[1] que o método seja utilizado apenas em problemas com um número pequeno de VP (i.e,  $n \leq 10$ ), onde o custo computacional de análise normalmente é elevado, ou ainda, os mesmos dados possam ser utilizados em ciclos de otimização distintos. Um método similar ao acima descrito é utilizado pela rotina de otimização do programa ANSYS<sup>r</sup> e é descrito no Cap (3).

## 2.6. Critérios de Convergência.

O aspecto mais crítico de qualquer método numérico iterativo é determinar-se quando este deve ser finalizado. Existem vários critérios de finalização sendo que os mais utilizados são:

(a) Número Máximo de Interações

$$q \leq q_{\max} \quad (2-48)$$

(b) Mudança do valor absoluto e relativo de  $f(\bar{x})$

$$|f(\bar{x}^q) - f(\bar{x}^{q-1})| \leq \varepsilon_a \quad (2-49)$$

$$\frac{|f(\bar{x}^q) - f(\bar{x}^{q-1})|}{\max[|f(\bar{x}^q)|, 10^{-8}]} \leq \varepsilon_r \quad (2-50)$$

(c) Mudança do valor absoluto e relativo de  $x_i$  ( $i = 1, n$ )

$$|x_i^q - x_i^{q-1}| \leq \varepsilon_a \quad (2-51)$$

$$\frac{|x_i^q - x_i^{q-1}|}{\max[|x_i^q|, 10^{-8}]} \leq \varepsilon_r \quad (2-52)$$

onde:

$q_{\max}$  = máximo número de interações permitido

$\varepsilon_a$  = tolerância para variação do valor absoluto

$\varepsilon_r$  = tolerância para variação do valor relativo.

O valor ( $10^{-8}$ ), presente nos denominadores das Eqs.(2-50) e (2-52), é utilizado para evitar-se divisão por zero quando  $f(\vec{x})$  aproxima-se de zero.

Outros critérios podem ser implementados dependendo do tipo de algoritmo utilizado, da precisão desejada e das características do problema em estudo.

## CAPÍTULO (3) : OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL NO PROGRAMA ANSYS<sup>®</sup>

### 3.1. Introdução.

No presente capítulo, a técnica de otimização implementada no programa ANSYS<sup>®</sup> é apresentada e discutida em seus aspectos mais importantes. O objetivo maior de incorporar-se um módulo de otimização ao programa é permitir uma integração racional do ciclo de projeto e análise através de um procedimento automatizado, onde técnicas de programação não linear específicas são utilizadas em conjunto com o MEF. O resultado desta combinação permite ao projetista obter um projeto otimizado ou melhorado, segundo um determinado objetivo e restrições por ele pré-estabelecidos.

O processo de otimização consiste em criar-se aproximações (ver item 2.5.8.) da função objetivo e funções de restrição através de regressões polinomiais múltiplas utilizando-se pontos provenientes de soluções "exatas" do problema obtidas através do MEF ou fornecidas pelo próprio projetista. À estas aproximações é dado o nome de subproblema [16,17,19]. O subproblema é então otimizado aplicando-se a técnica clássica de minimização sequencial sem restrições, associada ao conceito de penalização interior estendida. Aspectos gerais do método foram abordados no Cap.(2), item 2.5.6. Detalhes sobre a forma da

função de penalização particularmente empregada são apresentados no item 3.5. O valor ótimo proposto, resultante do processo acima descrito, é analisado pelo MEF e o resultado "exato" utilizado para atualização das aproximações. O processo é então sucessivamente repetido até que a convergência para um valor ótimo, com base na solução "exata" do problema, seja verificada.

A natureza da técnica acima descrita permite, em tese, estender os recursos de otimização a qualquer tipo de elemento ou procedimento de análise disponíveis no programa [16-25]. Eventualmente, o tamanho do modelo e a complexidade da análise, podem tornar o processo de otimização do ponto de vista prático, completamente inviável. Neste sentido, o uso de modelos simplificados e técnicas de racionalização do processo de análise podem permitir o uso do módulo de otimização do programa de maneira mais eficiente. Estes aspectos são abordados nos Caps. (4) e (5).

Independentemente de dificuldades ou problemas que possam advir do uso da técnica de otimização implementada no ANSYS<sup>r</sup>, alguns atributos [17] tornam-na extremamente atraente em relação à outras técnicas, como:

(a) Liberdade de escolha da função objetivo e funções de restrição. Uma vez que o método é aproximado, não existe necessidade de fornecer-se expressões matemáticas explícitas para o problema, ou mesmo conhecê-las.

(b) Informações sobre os gradientes da FO e funções de restrição, em relação às VP, são apenas necessárias para as funções aproximadas do problema.

(c) Possibilidade de representação paramétrica do projeto, a qual permite a formulação do problema de otimização com total liberdade, possibilitando ainda a escolha de "qualquer" tipo de variável.

(d) O processo de otimização é iniciado conhecendo-se um número mínimo de soluções "exatas" do problema.

A formulação básica do problema de otimização, bem como as características operacionais e fundamentos teóricos do método de otimização implementado no ANSYS<sup>r</sup>, são abordados a seguir.

### 3.2. Formulação Geral do Problema de Otimização no ANSYS<sup>r</sup>.

O problema de otimização no ANSYS<sup>r</sup>, pode ser definido de maneira particular [16-25] como:

$$\text{Minimizar: } f(\bar{x}) \quad (3-1)$$

sujeito a:

$$\underline{g}_j \leq g_j(\bar{x}) \leq \bar{g}_j \quad (j = 1, m) \quad (3-2)$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i = 1, n) \quad (3-3)$$

De forma análoga àquela descrita no Cap.(2), item 2.2, as Eqs.(3-1) a (3-3) definem o chamado problema de programação não linear restrita. A eq.(3-1) é denominada função objetivo e é expressa em termos das  $n$  variáveis independentes  $x_i (i = 1, n)$ . A este conjunto de variáveis  $x_i$  é dado o nome de vetor de projeto, representado por  $\vec{x}$ . As  $m$  variáveis de estado ou funções de restrição estão representadas no problema pela Eq.(3-2), sujeitas aos limites inferior  $\underline{g}_j$ , e superior  $\bar{g}_j$ . A Eq.(3-3) representa os chamados limites laterais ou geométricos.

Na realidade, as Eqs.(3-1) à (3-3) são análogas àquelas apresentadas no Cap.(2), exceto pela ausência das restrições de igualdade. Estas, por sua vez, não podem ser diretamente manipuladas pelo módulo de otimização do programa ANSYS<sup>r</sup>, em virtude de características particulares do método de otimização empregado[17]. Neste caso, pode-se trabalhar com valores dos limites superior e inferior muito próximos para as restrições de desigualdade, porém este procedimento não é recomendado pois pode dificultar substancialmente a convergência do problema[19].

Uma vez que a filosofia básica do método de otimização empregado pelo ANSYS<sup>r</sup> visa minimizar uma aproximação do problema real (subproblema), a formulação básica assume então as seguintes características:

$$\text{Minimizar: } F(\bar{X}) \quad (3-4)$$

Sujeito a:

$$\underline{g}_j \leq G_j(\bar{X}) \leq \bar{g}_j \quad (j = 1, m) \quad (3-5)$$

$$\underline{X}_i \leq X_i \leq \bar{X}_i \quad (i = 1, n) \quad (3-6)$$

onde  $F$  e  $G_j$  são as aproximações de  $f$  e  $g_j$  respectivamente. Estas aproximações são obtidas utilizando-se as variáveis de projeto normalizadas  $X_i (i = 1, n)$ , onde:

$$X_i = \frac{x_i - \underline{x}_i}{\bar{x}_i - \underline{x}_i} \quad (i = 1, n) \quad (3-7)$$

e portanto para qualquer  $X_i$  tem-se:  $0 \leq X_i \leq 1$

### 3.3. Etapas Essenciais do Processo de Otimização.

O algoritmo implementado no programa ANSYS<sup>®</sup> permite a execução automática de um ou vários ciclos de otimização. Cada ciclo compreende quatro etapas distintas:

- (a) Aproximação do Problema Real (Subproblema)
- (b) Minimização do Subproblema
- (c) Definição da Nova Configuração de Projeto
- (d) Convergência e Terminação

O fluxograma completo do processo de otimização aqui abordado pode ser visto detalhadamente no Apêndice (1), tendo sido extraído diretamente da referência [19].

Para que o processo automático de otimização possa ser inicializado, é necessário dispor-se de um número  $K$  de soluções "exatas" do problema. Este número  $K$  é determinado pelo projetista e está restrito à no mínimo  $(n+2)$  soluções ( $n$  = num. de variáveis de projeto). Cada uma destas soluções compreende valores "exatos" da função objetivo  $f(\bar{x})$  e respectivas funções de restrição  $g_j(\bar{x})$  ( $j=1,m$ ), obtidos através da análise dos vetores de projeto  $\bar{x}^{(k)}$  ( $k=1,K$ ); ( $k$  = número do ciclo de projeto analisado).

Os valores acima descritos são utilizados para determinar-se as aproximações de  $f(\bar{x})$  e  $g(\bar{x})$ . Podem ser obtidos diretamente no programa através da geração randômica do vetor  $\bar{x}$  (e subsequente análise pelo MEF.), ou fornecidos diretamente pelo projetista. Note que, no caso da definição randômica de  $\bar{x}$ , os valores de  $x_i$  ( $i=1,n$ ) sempre [17] obedecerão os limites estabelecidos pela Eq. (3-3). Todavia, isto não garante que o projeto analisado seja viável, uma vez que a Eq. (3-2) somente será verificada após o início do processo de otimização. Detalhes sobre cada uma das etapas do ciclo de otimização são discutidos a seguir.

### 3.4. Aproximação do Problema Real (Subproblema).

Uma vez que um número  $K$  mínimo de soluções "exatas" do problema esteja disponível, a etapa seguinte é estabelecer-se as aproximações do problema real através das funções  $F(\vec{X})$  e  $G_j(\vec{X})$  ( $j = 1, m$ ), determinando-se assim o chamado subproblema.

Três tipos de aproximações utilizando funções polinomiais podem ser selecionadas [16-25, 30]: linear, quadrática e quadrática com termos cruzados. A forma geral destas aproximações é dada por:

$$H = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{i=1}^n a_i X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i X_i X_j \quad (3-11)$$

onde  $H$  é a nomenclatura utilizada para representar-se genericamente  $F(\vec{X})$  ou qualquer  $G_j(\vec{X})$  ( $j = 1, m$ ). Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , são constantes cuja determinação baseia-se na aplicação do método dos mínimos quadrados ou resíduos ponderados [53]. Neste caso o erro quadrático total  $E^2$  das aproximações, pode ser expresso por:

$$E^2 = \sum_{k=1}^K W^{(k)} (h^{(k)} - H^{(k)})^2 \quad (3-12)$$

onde  $h^{(k)}$  é o valor "exato" da função, obtido da análise do  $k$ -ésimo vetor de projeto  $\bar{x}^{(k)}$ , e  $H^{(k)}$  o correspondente valor da aproximação. O peso  $W^{(k)}$  atribuído a cada configuração de projeto  $\bar{x}^{(k)}$  será discutido mais adiante. O objetivo é determinar-se os coeficientes da Eq.(3-11) para os quais o valor de  $E^2$  é mínimo. Isto obviamente ocorre quando as derivadas parciais da Eq.(3-12) em relação aos coeficientes  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  se anulam, ou seja:

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_0} = 0 ; \frac{\partial E^2}{\partial a_i} = 0 ; \frac{\partial E^2}{\partial b_i} = 0 ; \frac{\partial E^2}{\partial c_{ij}} = 0 \quad (3-13)$$

Da combinação das Eqs.(3-12) e (3-13) resulta um sistema linear de equações simultâneas, cuja solução, portanto, fornece os coeficientes procurados.

Dependendo do número de soluções "exatas" disponíveis e da forma das aproximações adotadas, é possível que os termos da Eq.(3-11) sejam utilizados por completo ou apenas parcialmente. A possibilidade de utilizar-se todos os termos das aproximações dar-se-á somente quando:

$$\begin{array}{ll}
 n + 2 & \text{aprox. linear} \\
 K \geq 2n + 2 & \text{aprox. quadrática} \\
 n + [0.5(n + 1)n] + 2 & \text{aprox. quadrática+} \dots (3-13) \\
 & \text{termos cruzados}
 \end{array}$$

A cada ciclo de otimização, os termos das aproximações podem ser adicionados ou excluídos [16]. Os termos adicionados são aqueles que reduzem  $E^2$ , enquanto que os termos excluídos são aqueles que pouco influenciam o valor do coeficiente de correlação quadrática ponderado  $R^2$ . Este último é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{(K - 1) E^2}{(K - Q) \sum_{k=1}^K W^{(k)} [h^{(k)} - \bar{h}]^2} \quad (3-14)$$

onde  $Q$  é o número de termos da Eq.(3-11) incluídos no presente ajuste e  $\bar{h}$  é o valor médio ponderado de  $h$ , expresso por:

$$\bar{h} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K W^{(k)} h^{(k)} \quad (3-15)$$

Detalhes sobre a estratégia utilizada para determinar-se a melhor aproximação podem ser visto em [16,17,18,19].

A determinação do peso  $W^{(k)}$  é feita com base no menor valor corrente "exato" de  $f(\bar{x})$ , representado por  $f^*$ , proveniente de uma configuração de projeto viável  $\bar{x}^*$ . Existem basicamente cinco possibilidades [16] para determinar-se o valor de  $W^{(k)}$ , são elas:

(1) Vetores de projeto  $\bar{x}^{(k)}$  que possuam suas componentes mais próximas de  $\bar{x}^*$ , recebem o maior peso.

(2) Configurações de projeto  $\bar{x}^{(k)}$  cujo valor de  $f(\bar{x}^{(k)})$  esteja mais próximo de  $f^*$ , recebem o maior peso.

(3) Configurações viáveis recebem um peso maior que configurações inviáveis (grau de viabilidade) [16].

(4) Peso baseado no produto de (1), (2) e (3) acima.

(5) Todas as configurações tem o mesmo peso.

A discussão e apresentação das expressões correspondentes às cinco possibilidades acima descritas podem ser vistas detalhadamente em [16,17,19].

### 3.5. Minimização do Subproblema.

As aproximações de  $f$  e  $g_j$  ( $j = 1, m$ ) obtidas através do procedimento descrito no item 3.4, definem o problema de otimização estabelecido pelas Eqs. (3-4) a (3-6).

A técnica de minimização seqüencial sem restrições, discutida no Cap.(2), item 2.5.6, é então utilizada para minimizar-se a aproximação do problema ou subproblema.

Funções de penalização são atribuídas às variáveis de projeto e restrições do problema aplicando-se o conceito de penalização interior estendida. O problema sem restrições, assim estabelecido, pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\Phi_p^{(k)} = F^{(k)} + 3^{(p-3)} F^{(k)} \left[ \sum_{i=1}^n P(X_i^{(k)}) + \sum_{j=1}^m P_p(G_j^{(k)}) \right] \quad (3-16)$$

onde:

$k$  =  $k$ -ésima iteração do ciclo de projeto e análise.

$p$  =  $p$ -ésimo ciclo de minimização da iteração  $k$ .

$\Phi_p^{(k)}$  =  $p$ -ésima pseudo-função objetivo referente a iteração de projeto  $k$ .

$F^{(k)}$  = aproximação de  $f$  para a iteração  $k$ .

$P(X_i^{(k)})$  = função de penalização referente a violação da  $i$ -ésima variável de projeto da iteração  $k$ .

$P_p(G_j^{(k)})$  = função de penalização referente a  $j$ -ésima função de restrição, sendo processada no  $p$ -ésimo ciclo de minimização da iteração  $k$ .

A cada iteração  $k$  do ciclo de projeto e análise,  $p$  ( $p \leq 5$ ) séries de minimizações de  $\Phi_p^{(k)}$  são executadas. O resultado de cada minimização é utilizado como ponto de partida para a minimização seguinte. Este é o princípio da

técnica de minimização seqüencial discutida no Cap.(2), item 2.5.6. No caso das funções de restrição  $G_j$  ( $j = 1, m$ ), a forma estabelecida para as funções de penalização interior estendidas  $P_p(G_j)$  [16], é dada por:

$$P_p(G_j) = 7 - 16 \frac{(G_j - \underline{g}_j)}{\varepsilon_{pj}} \quad ; \quad G_j < (\underline{g}_j + \frac{\varepsilon_{pj}}{4})$$

$$P_p(G_j) = \frac{\varepsilon_{pj}}{(G_j - \underline{g}_j)} - 1 \quad ; \quad (\underline{g}_j + \frac{\varepsilon_{pj}}{4}) \leq G_j < (\underline{g}_j + \varepsilon_{pj})$$

$$P_p(G_j) = 0 \quad ; \quad (\underline{g}_j + \varepsilon_{pj}) \leq G_j \leq (\bar{g}_j - \varepsilon_{pj}) \quad (3-17)$$

$$P_p(G_j) = \frac{\varepsilon_{pj}}{(\bar{g}_j - G_j)} - 1 \quad ; \quad (\bar{g}_j - \varepsilon_{pj}) < G_j \leq (\bar{g}_j - \frac{\varepsilon_{pj}}{4})$$

$$P_p(G_j) = 7 - \frac{16(\bar{g}_j - G_j)}{\varepsilon_{pj}} \quad ; \quad (\bar{g}_j - \frac{\varepsilon_{pj}}{4}) < G_j$$

onde  $\varepsilon_{pj}$  é o chamado fator de tolerância [16] expresso por:

$$\varepsilon_{pj} = 2.10^{-3} . 3^{(3-p)} (\bar{g}_j - \underline{g}_j) \quad (3-18)$$

A função de penalização interior estendida  $P_p(G_j)$ , descrita no domínio  $(\underline{g}_j, \overline{g}_j)$  das variáveis de estado  $G_j$ , é mostrada na Fig.(3-1).

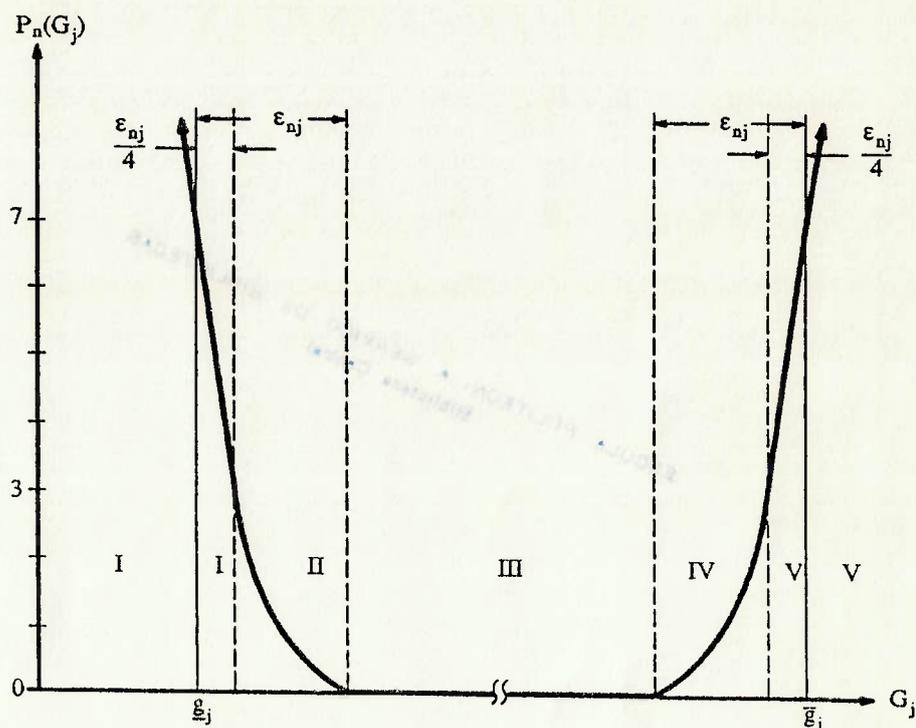


Fig.(3-1) - Função de penalização interior estendida  $P_p(G_j)$  no domínio  $(\underline{g}_j, \overline{g}_j)$  das variáveis de estado  $G_j$ .

A penalização estabelecida para violações dos limites laterais do problema é ligeiramente diferente daquela estabelecida para as funções de restrição. Neste caso a tolerância utilizada na função de penalização permanece constante durante os  $p$  ciclos de minimização, e é dada por:

$$\varepsilon_i = 2.10^{-3}(\overline{g}_j - \underline{g}_j) \quad (3-19)$$

enquanto a função de penalização interior estendida  $P(x_i)$  é expressa<sup>[16]</sup> através de:

$$P(x_i) = 10^3 \left[ 7 - 16 \frac{(x_i - \underline{x}_i)}{\varepsilon_i} \right] ; \quad x_i < \left( \underline{x}_i + \frac{\varepsilon_i}{4} \right)$$

$$P(x_i) = 10^3 \left[ \frac{\varepsilon_i}{(x_i - \underline{x}_i)} - 1 \right] ; \quad \left( \underline{x}_i + \frac{\varepsilon_i}{4} \right) \leq x_i < (\underline{x}_i + \varepsilon_i)$$

$$P(x_i) = 0 ; \quad (\underline{x}_i + \varepsilon_i) \leq x_i \leq (\bar{x}_i - \varepsilon_i) \quad (3-20)$$

$$P(x_i) = 10^3 \left[ \frac{\varepsilon_i}{(\bar{x}_i - x_i)} - 1 \right] ; \quad (\bar{x}_i - \varepsilon_i) < x_i \leq \left( \bar{x}_i + \frac{\varepsilon_i}{4} \right)$$

$$P(x_i) = 10^3 \left[ 7 - 16 \frac{(\bar{x}_i - x_i)}{\varepsilon_i} \right] ; \quad \left( \bar{x}_i - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) < x_i$$

É interessante observar que a penalização estabelecida pelas Eqs.(3-20) é muito mais intensa que aquela estabelecida através das Eqs.(3-18). Tal característica deve-se ao fato de que, no caso de limites laterais, os valores utilizados para as VPs são "exatos", enquanto que para as funções de restrição trabalha-se com valores aproximados.

A estratégia de busca consiste em determinar-se o vetor  $\vec{S}$  da Eq.(2-12) do Cap.(2), através das seguintes direções:

(1) Direções conjugadas, tomando-se cada uma das coordenadas do problema, de modo análogo ao estabelecido pelo método de Powell (ver Cap.(2), item 2.5.3 e 2.5.4.2).

(2) Direções tangentes a cada restrição, empregando algumas características do método das direções viáveis[1].

(3) Direção do gradiente negativo da função objetivo  $F(\vec{X})$ ; similar ao método dos gradientes (ver Cap.(2), item 2.5.4.1).

Finalmente, tendo sido obtida uma estimativa do valor ótimo de  $\vec{x}$  através da minimização do subproblema e, sendo este representado por  $\hat{\vec{x}}$ , a próxima etapa é obter-se os valores "exatos" de  $f(\vec{x})$  e  $g_j(\vec{x})$  para esta nova configuração.

### 3.6. Determinação da Nova Configuração de Projeto.

No item 3.5 o valor ótimo da  $k$ -ésima aproximação do problema, isto é  $\hat{\vec{x}}$ , é obtido empregando-se uma técnica de minimização seqüencial sem restrições e funções de penalização. O vetor de projeto a ser utilizado para a obtenção da nova solução "exata" do problema, ou seja,  $f^{(k+1)}$  e  $g_j^{(k+1)}$  ( $j = 1, m$ ) [16], é dado por:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^* + A(\hat{x}_i - x_i^*) \quad (i = 1, n) \quad (3-21)$$

onde o valor da constante  $A$  é definido como:

$$A = 1.0 - (C_o + C_r C_i^*) \quad (3-22)$$

onde:

$C_o$  = fração da  $i$ -ésima VP da melhor configuração de projeto  $\bar{x}^*$  que contribui para a próxima configuração a ser calculada ( $0.0 \leq C_o \leq 0.9$ )

$C_r$  = fração randômica que contribui para a próxima configuração de projeto a ser calculada ( $0.0 \leq C_r \leq 1.0 - C_o$ )

$C_i^*$  = número randômico aplicado a cada variável de projeto  $x_i$ . ( $-0.5 \leq C_i^* \leq 0.5$ )

Se a próxima configuração de projeto  $\bar{x}^{(k+1)}$  é inviável,  $C_o$  e  $C_r$  são alternadamente substituídos por:

$$C_o' = C_o \quad (3-23)$$

$$C_r' = \min \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \begin{array}{l} 0.25 \\ C_r \end{array} \right. \\ 1.0 - C_o' \end{array} \right. \quad (3-24)$$

e

$$C_o'' = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.75 \\ C_o \end{array} \right. \quad (3-25)$$

$$C_r'' = 1.0 - C_o'' \quad (3-26)$$

A Eq.(3-22) é então combinada com as Eqs.(3-23) e (3-24) ou com as Eqs.(3-25) e (3-26), alternadamente a cada configuração de projeto inviável resultante. Uma vez que uma configuração de projeto viável torne a ocorrer, então  $C_o$  e  $C_r$  são novamente utilizadas.

Através da variação de  $C_o$ , a nova configuração de projeto pode estar ou mais próxima da melhor configuração de projeto  $\vec{x}^*$ , ou mais próxima da configuração pré-estabelecida pela aproximação de  $f(\hat{\vec{x}})$ , isto é,  $\hat{\vec{x}}$ .

No caso da variação de  $C_r$ , é possível diminuir-se ou aumentar-se o grau de aleatoriedade que contribui para a determinação da nova solução.

Caso  $C_o = 0.0$  e  $C_r = 0.0$ , então  $\hat{\vec{x}}$  passa a ser, diretamente a nova configuração de projeto, e  $\vec{x}^*$  é ignorado. A menor contribuição possível de  $\hat{\vec{x}}$  é da ordem de 5% e, é obtida quando  $C_o = 0.9$ ;  $C_r = 0.1$  e  $C_i^* = 0.5$ . Os valores nominais de  $C_o$  e  $C_r$  adotados pelo programa são 0.25 e 0.1 respectivamente.

A utilização destes coeficientes deve ser entendida como uma forma de acelerar-se a convergência do processo. Seu uso deve ser direcionado segundo o grau de conhecimento que se tenha do problema e suas respectivas aproximações.

### 3.7. Convergência e Terminação.

O critério de convergência passa a ser verificado a partir do momento em que o número de soluções "exatas" do

problema é maior que o número  $K$  mínimo de soluções necessárias para o início das aproximações. A convergência é obtida quando uma configuração viável de projeto  $\bar{x}^{(k)}$  é determinada e, um ou mais dos seguintes critérios são satisfeitos<sup>[16]</sup>:

$$|f^{(k)} - f^*| < \tau \quad (3-27)$$

$$|f^{(k)} - f^{(k-1)}| < \tau \quad (3-28)$$

$$|x_i^{(k)} - x_i^*| < \tau_i \quad (i = 1, n) \quad (3-29)$$

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \tau_i \quad (i = 1, n) \quad (3-30)$$

As Eqs. (3-27) e (3-28) e Eqs. (3-29) e (3-30) observam a convergência para a função objetivo e variáveis de projeto, respectivamente. Em cada um dos casos, são verificadas as diferenças relativas e absolutas, conforme já discutido no Cap. (2), item 2.6.

Finalmente, a terminação do problema pode ocorrer antes que as condições de convergência estabelecidas nas Eqs. (3-27) a (3-30) sejam verificadas. Neste caso a terminação dá-se através do seguinte critério:

(1) Um número máximo de interações permitidas  $K_{\max}$  é suplantado.

(2) Um número seqüencial máximo de configurações inviáveis de projeto,  $K_{inv.\max}$ , é suplantado.

## CAPÍTULO (4) : ASPECTOS GERAIS SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E SUA APLICAÇÃO PARTICULAR NA ANÁLISE DE PISTÕES VISANDO O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.

### 4.1. Um Breve Histórico sobre o Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica, que possibilita a obtenção de soluções aproximadas, para uma grande variedade de problemas da mecânica dos meios contínuos encontrados na Engenharia [34-41]. Graças ao advento dos computadores o MEF tem sido uma das ferramentas numéricas que mais tem se desenvolvido nas últimas três décadas. A razão para este sucesso dá-se fundamentalmente pela facilidade que o método propicia à representação do domínio físico-geométrico do problema e de suas condições de contorno, muitas vezes complexas, além de ser relativamente simples sua implementação computacional [39].

Existem dois enfoques através dos quais a evolução do MEF pode ser vista e entendida. O primeiro deles, dado pela Engenharia, vê o MEF como um aprimoramento natural das técnicas inicialmente utilizadas em mecânica dos sólidos para a análise de estruturas reticuladas, que por sua vez constitui o fundamento da Análise Matricial de

Estruturas[37]. A base desta teoria, remonta-se a trabalhos ainda publicados no século XIX, como os de Maxwell [1864], Castigliano [1868] e [1872], entre outros.

O outro enfoque, dado pelos matemáticos, visualiza o MEF como uma técnica de aproximação das soluções de equações diferenciais parciais lineares. Em outras palavras, por meio de uma formulação variacional, procura-se em geral, uma função que minimize um potencial associado ao problema[34-41]. No caso do problema estrutural, por exemplo, este funcional está associado a energia potencial do sistema, armazenada[34,35]. Neste sentido, o matemático R. Courant desenvolveu em 1943 um trabalho pioneiro onde foi utilizado uma estrutura de elementos triangulares e o princípio da energia potencial mínima, para estudo do problema de torção inicialmente formulado por Saint Venant[35,36]. Historicamente portanto, é interessante notar que estes dois enfoques coexistiram de maneira independente por muitos anos e, somente no início da década de setenta, surgiram trabalhos interligando estas duas correntes. Certamente a maior motivação para tal acontecimento foi o sucesso resultante da aplicação do MEF na resolução de problemas práticos da Engenharia ao longo da década de sessenta. Nesta mesma década, foram publicados trabalhos clássicos como os de Clough [1960], -para o tratamento de problemas em elasticidade plana-, Wilson [1965], -para problemas envolvendo sólidos de revolução-, Zienckewicz e Cheung

[1965], -que propuseram a extensão do método a todos os problemas passíveis de formulação variacional-, entre outros. Atualmente o MEF constitui-se em uma das ferramentas de análise numérica mais poderosas para a solução de problemas da Engenharia, sendo uma ferramenta essencial para a análise e o aprimoramento de projetos.

#### 4.2. O MEF Aplicado ao Problema de Sólidos de Revolução com Simetria Axial Sujeitos a Carregamentos Axialmente Simétricos.

Inúmeros problemas da Engenharia envolvem os chamados sólidos de revolução (sólidos com simetria axial); podendo estes estarem ou não submetidos a carregamentos simétricos ou assimétricos.

No presente trabalho, a hipótese de simetria axial é adotada para a análise do modelo de elementos finitos de um pistão, visando o problema de otimização. Detalhes sobre este modelo encontram-se no Cap.(5).

Um exemplo típico deste problema é mostrado na Fig.(4-1), onde um tubo de parede espessa e comprimento finito, é carregado externamente por pressão uniforme ou outro tipo de carregamento axialmente simétrico. Por conveniência um sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \theta, z)$  é utilizado.

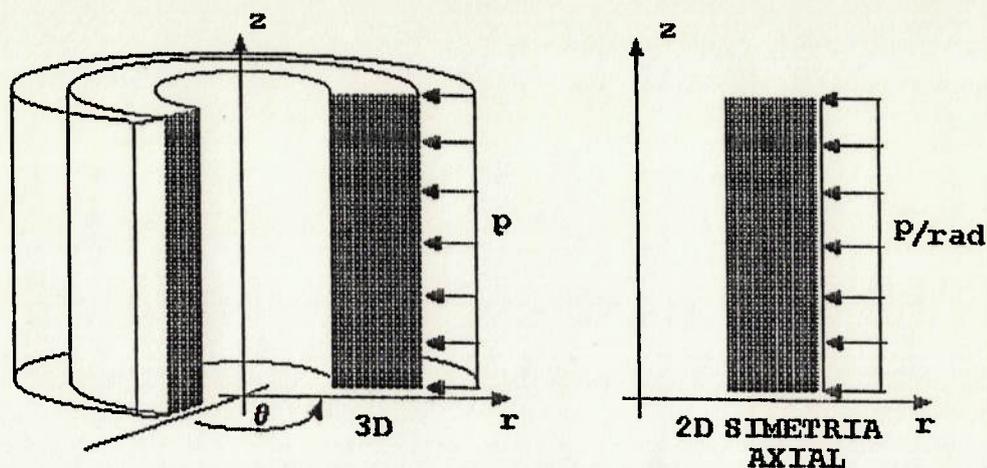


Fig. (4-1) - Sólido de Revolução com Simetria Axial Submetido a um Carregamento Axialmente Simétrico.

Devido à simetria, as componentes de tensão são independentes da coordenada  $\theta$ ; conseqüentemente os deslocamentos e todas as derivadas parciais em relação à esta direção se anulam[42]. Desta forma, apenas as componentes de deslocamento nas direções radial ( $r \rightarrow u$ ) e axial ( $z \rightarrow v$ ), são suficientes para definir o estado de deformações específicas, e portanto o respectivo estado de tensões, como será visto adiante. Estas propriedades são válidas para qualquer secção radial escolhida.

Assim sendo, o problema de sólidos de revolução com simetria axial, embora tridimensional, pode ser tratado de forma bidimensional. Para isto, basta considerar-se que o volume de material associado a um elemento da secção radial,

é o de um corpo de revolução com área igual a deste elemento, e portanto todas as integrais devem referir-se a este volume.

O objetivo de utilizar-se o conceito exposto acima é o de obter uma formulação mais simples para a representação do problema, acarretando uma diminuição substancial do tamanho deste e do tempo de processamento da análise.

Eventualmente alguns problemas envolvendo sólidos tridimensionais, com algumas características geométricas e de carregamento especiais, podem ser aproximados assumindo-se cuidadosamente a hipótese de simetria axial apresentada. Um exemplo típico desta aproximação é mostrado no Cap.(5), para o caso da análise de um pistão monobloco de alumínio. Alguns aspectos teóricos da formulação do problema de sólidos de revolução com simetria axial são apresentados de maneira breve no item 4.3.

#### 4.3. Formulação do MEF para o Problema de Sólidos de Revolução com Simetria Axial - Abordagem pelo Método dos Deslocamentos.

##### 4.3.1. Considerações Gerais.

No presente item, alguns dos principais aspectos da formulação do problema estrutural pelo MEF envolvendo sólidos

de revolução, sujeitos a carregamentos axialmente simétricos, são apresentados. O método dos deslocamentos é utilizado visando-se estabelecer a formulação básica do problema, sem necessitar do rigor e generalismo característicos dos métodos variacionais. Evidentemente, torna-se desnecessário esboçar minúcias desta formulação, uma vez que o leitor pode consultar inúmeras referências com estas informações[34-41].

No caso de uma análise estática, a formulação geral matricial do problema é dada por:

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (4-1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez global, representada pelo somatório das matrizes de rigidez individuais de cada um dos elementos, que formam a estrutura discretizada ou malha de elementos finitos. O vetor  $\{u\}$  representa os deslocamentos associados a cada um dos nós da estrutura, considerando-se seus distintos graus de liberdade. Finalmente o vetor  $\{F\}$ , constitui-se no chamado vetor de cargas e representa genericamente os esforços aplicados à estrutura incluindo, as reações de apoio, estabelecidas por sua vez através de vínculos ou deslocamentos nodais restritos. De uma maneira simplificada o vetor de cargas pode ser expresso por:

$$\{F\} = \{F^{nd}\} + \sum_{e=1}^N [\{F_e^{pr}\} + \{F_e^{th}\}] \quad (4-2)$$

onde  $\{F^{nd}\}$  é o vetor de esforços nodais,  $\{F_e^{pr}\}$  é o vetor de cargas distribuídas ao longo das superfícies livres de cada um dos  $N$  elementos que formam a estrutura, e  $\{F_e^{th}\}$  é o vetor de "esforços térmicos" resultante sobre cada um destes elementos.

Uma das grandes habilidades do MEF, que inclusive o distingue em relação aos demais métodos numéricos, é a de propiciar soluções para elementos individuais da estrutura e posteriormente colocá-los em conjunto para representar-se a solução geral do problema [35]. Isto significa, por exemplo, que no caso do problema estrutural de sólidos de revolução, pode-se determinar as características de rigidez para um elemento individualmente e, posteriormente determinar-se a rigidez de toda a estrutura, ou seja:

$$[K] = \sum_{e=1}^N [K_e] \quad (4-3)$$

onde  $[K_e]$  é a matriz de rigidez de um elemento típico da estrutura.

A determinação da matriz de rigidez de um elemento, de uma maneira geral, e particularmente para o caso de elementos com simetria axial sujeitos a carregamentos axialmente simétricos, envolve a solução de uma integral do tipo:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4-4)$$

onde a matriz  $[B]$ , denominada matriz de deformação-deslocamento, relaciona as deformações em cada ponto do elemento com os deslocamentos de seus pontos nodais ou nós e, a matriz  $[D]$ , denominada matriz de elasticidade, relaciona as tensões no interior do elemento às suas deformações específicas, através das chamadas relações constitutivas do material do qual este é formado. A obtenção das matrizes  $[B]$  e  $[D]$  para o caso particular do elemento bidimensional com simetria axial e material isotrópico, utilizando a formulação isoparamétrica, é apresentada a seguir.

#### 4.3.2. Formulação Isoparamétrica para o Elemento Sólido Bidimensional com Simetria Axial.

O princípio básico da formulação isoparamétrica em elementos finitos é expressar as coordenadas do elemento e os

seus deslocamentos através de interpolações, utilizando-se o sistema de coordenadas local (natural) do elemento. Este sistema de coordenadas é mostrado na Fig.(4-2), sendo representado pelas coordenadas  $(\xi, \eta)$ .

A idéia do enfoque é utilizar-se as mesmas funções tanto para a interpolação dos deslocamentos (função de forma), quanto para a transformação de coordenadas do elemento (função de transformação). Estas funções são definidas no sistema local de coordenadas do elemento; onde  $\xi$  e  $\eta$  variam de -1 a 1; como mostrado também na Fig.(4-2).

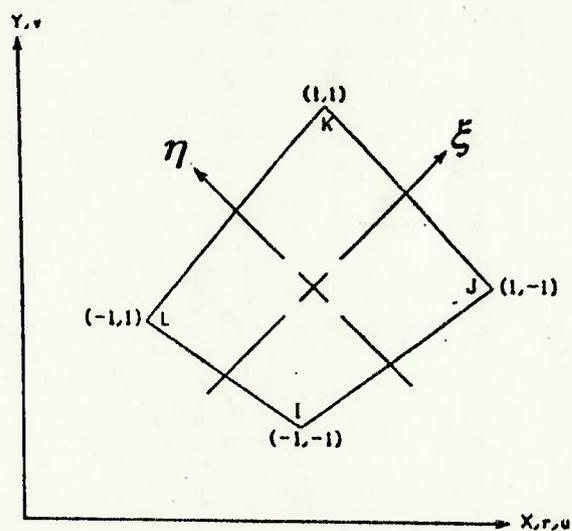


Fig. (4-2) - Elemento Isoparamétrico Bidimensional com Quatro Nós - Sistema de Coordenadas Local.

No caso do elemento bidimensional isoparamétrico de quatro nós, suas coordenadas no sistema global são expressas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} r(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N] \{r_i z_i r_j z_j r_k z_k r_l z_l\}^T \quad (4-5)$$

onde  $\{r_i z_i r_j z_j r_k z_k r_l z_l\}^T$  são as coordenadas dos nós do elemento no sistema global e  $[N]$  contém as chamadas funções de transformação cuja forma é dada por:

$$[N] = [[I]N_i; [I]N_j; [I]N_k; [I]N_l] \quad (4-6)$$

com

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & ; & & N_j &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_k &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & ; & & N_l &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4-7)$$

onde  $[I]$  é uma matriz identidade 2x2.

Analogamente as funções de deslocamento do elemento, expressas no sistema local de coordenadas são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N]\{u\} \quad (4-8)$$

onde  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos nodais definido na Eq.(4-1).

As relações entre deformações específicas e deslocamentos, para o caso particular de sólidos de revolução submetidos a carregamentos axialmente simétricos [34, 35, 42, 44], são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (4-9)$$

onde  $u$  e  $v$  são as componentes genéricas de deslocamento do elemento.

De acordo com a definição da matriz  $[B]$  dada no item 4.3.1, as deformações no elemento são expressas na forma:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (4-10)$$

onde

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r ; \varepsilon_z ; \gamma_{rz} ; \varepsilon_\theta\}^T \quad (4-11)$$

e

$$[B] = [[B_i]; [B_j]; [B_k]; [B_l]] \quad (4-12)$$

com

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{N_i}{r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4-13)$$

A Eq. (4-13) pode ser expressa de maneira análoga para os índices  $j$ ,  $k$  e  $l$ . Nota-se entretanto, das Eqs. (4-7), que as funções  $(N_i, \dots, N_l)$  estão definidas em relação ao sistema local, e portanto suas derivadas devem ser expressas em relação a este mesmo sistema. Neste caso portanto, é necessário proceder-se a uma transformação de coordenadas.

Do cálculo diferencial [51, 52], as derivadas em relação a  $(r, z)$  podem ser expressas na forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$
(4-14)

A Eq. (4-14) na sua forma matricial é definida como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$
(4-15)

Para obter-se  $\partial/\partial r$  e  $\partial/\partial z$ , é necessário conhecer-se  $\xi(r,z)$  e  $\eta(r,z)$ , cuja determinação na prática é extremamente dificultosa. Entretanto, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$
(4-16)

onde a matriz de transformação  $[J]$  é denominada operador Jacobiano ou apenas matriz Jacobiana, e cujo determinante é conhecido como Jacobiano. A Eq.(4-16) pode então ser escrita na forma inversa, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

onde a matriz inversa da matriz Jacobiana,  $[J]^{-1}$ , é dada por[51].

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \end{pmatrix}}_{DET[J]}} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

Finalmente, as derivadas das funções de interpolação podem ser definidas através da expressão:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

sendo a Eq.(4-19) válida também para os índices  $j, k$ , e  $l$ .

No caso do problema com simetria axial, a matriz de rigidez do elemento é obtida através da seguinte integração [34, 49]:

$$[K_e] = 2\pi \int_A [B]^T [D][B] r dr dz \quad (4-20)$$

sendo que a integração no sistema local do elemento é expressa na forma [45]:

$$[K_e] = 2\pi \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} [B]^T [D][B] r(\xi, \eta) DET[J]^T d\xi d\eta \quad (4-21)$$

Uma vez que a Eq.(4-21) é integrada numericamente através de uma técnica denominada quadratura de Gauss [45, 54], então  $r(\xi, \eta)$  deve ser considerado para os pontos de integração ou

pontos de Gauss. Valores típicos de  $\xi$  e  $\eta$  podem ser vistos em [34].

Finalmente, a matriz de elasticidade  $[D]$  para o caso de sólidos de revolução com simetria axial, considerando-se a hipótese de material isotrópico [34,44,49], assume a forma:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & \underline{\text{simétrica}} & 1 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de proporcionalidade ou Poisson.

Desta forma obtém-se a matriz de rigidez expressa pela Eq. (4-21).

#### 4.3.3. Considerações sobre o Carregamento.

Os carregamentos com simetria axial que atuam sobre o sólido de revolução, devem ser entendidos de tal forma que as forças nodais equivalentes representem um efeito combinado ao longo de todo o perímetro da circunferência formada pela revolução do nó ou ponto da estrutura em estudo.

Assim sendo, se  $F_i^r$  representa a componente radial da força nodal  $F_i^{nd}$ , por unidade de comprimento da circunferência resultante da revolução de um nó  $i$  de raio  $r_i$ , então a "força" externa que deverá ser considerada no nó será  $2\pi r F_i^r$  [43, 44].

As forças nodais equivalentes resultantes de efeitos térmicos são expressas [43, 44] na forma:

$$\{F_e^{th}\} = 2\pi \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} r(\xi, \eta) DET[J]^T d\xi d\eta \quad (4-23)$$

com

$$\{\varepsilon^{th}\} = \{\alpha\theta_e; \alpha\theta_e; 0; \alpha\theta_e\} \quad (4-24)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica do material, e  $\theta_e$  variação de temperatura média no elemento.

#### 4.3.4. Avaliação das Tensões no Elemento.

As equações anteriormente apresentadas, permitem a montagem e integração da matriz de rigidez global da estrutura ou elemento, e a obtenção dos deslocamentos nodais  $\{u\}$ , através da solução da Eq. (4-1).

Logo as tensões em qualquer ponto do elemento podem ser obtidas por:

$$\{\sigma_e\} = [D][B]\{u\} - [D]\{\epsilon_e^{th}\} \quad (4-25)$$

Note entretanto, que a integração da matriz de rigidez é feita de maneira exata sobre os pontos de integração do elemento [34-41] e, portanto, os valores de tensão obtidos para o elemento também se referem a estes pontos e são igualmente exatos. Posteriormente estes valores podem ser "extrapolados" para os pontos nodais do elemento (nós) [44] ou ponderados sobre o centróide do mesmo.

#### 4.4. A Técnica de Subestruturação.

##### 4.4.1. Introdução.

O conceito de subestruturação tem sua origem no chamado Processo de Condensação Estática de Matrizes [34,38,41], cuja finalidade é reduzir a ordem de sistemas de equações algébricas lineares, como aquele definido pela Eq.(4-1). O termo "condensação estática" é proveniente da análise dinâmica de estruturas [41].

Em outras palavras, este processo permite a redução do número de graus de liberdade, normalmente associados à nós internos de um elemento, e que por sua vez não afetam sua interconectividade com outros elementos da estrutura [35,41].

Portanto, o processo de subestruturação pode ser visto como um método, através do qual, uma grande estrutura é subdividida em um número pequeno de elementos muito complexos ou **superelementos**, que se conectam uns aos outros, ou à estrutura principal, através de seus nós externos denominados **supernós**. Os graus de liberdade associados aos supernós recebem o nome de **graus de liberdade principais**, enquanto que os graus de liberdade associados aos nós internos da subestrutura, são denominados **graus de liberdade secundários** ou **reduzidos**. Logo, uma vez que apenas os nós externos de cada superelemento se conectam, pode-se utilizar o processo de condensação estática matricial para eliminar-se os graus de

liberdade secundários e formar-se uma matriz de rigidez condensada ou reduzida  $[\bar{K}]$  para cada superelemento. Estas matrizes podem então ser armazenadas na forma reduzida (biblioteca de superelementos) e reutilizadas todas as vezes que um superelemento específico fizer parte da estrutura principal ou mesmo outra subestrutura.

É importante notar entretanto, como será visto mais adiante, que o esforço computacional dispendido para efetivar-se a redução do sistema de equações é, na melhor das circunstâncias, o mesmo que aquele para resolver-se o sistema na íntegra[38,41]. Portanto, de uma maneira geral, o uso da técnica de subestruturação tem suas vantagens, por exemplo, na solução de problemas que envolvam sistemas muito grandes, cuja solução torna-se impossível em computadores com capacidade de memória limitada, ou ainda, em problemas onde porções lineares da estrutura possam ser separadas de porções não lineares da mesma.

No presente trabalho, a técnica de subestruturação é empregada basicamente com dois objetivos. O primeiro deles é reduzir-se substancialmente o tempo de análise pelo MEF de um pistão e, conseqüentemente reduzir-se o tempo total do ciclo completo de otimização. O segundo por sua vez, é que, em decorrência da subestruturação, é possível desenvolver-se todo o processo de otimização em regiões mais localizadas e mais simples da estrutura, facilitando-se portanto a parametrização da mesma. Estes aspectos são abordados no

Cap.(5). As restrições mais importantes quanto ao uso de sub-estruturação são[46]:

(1) Os elementos da subestrutura devem ter comportamento linear.

(2) As propriedades dos materiais dos elementos da subestrutura devem ser constantes.

#### 4.4.2. A Aplicação Prática do Conceito de Subestruturação.

Considere a subestrutura mostrada na Fig.(4-3), a qual é constituída por dois elementos bidimensionais de três nós, com dois graus de liberdade de translação ( $u_i, v_i$ ) por nó.

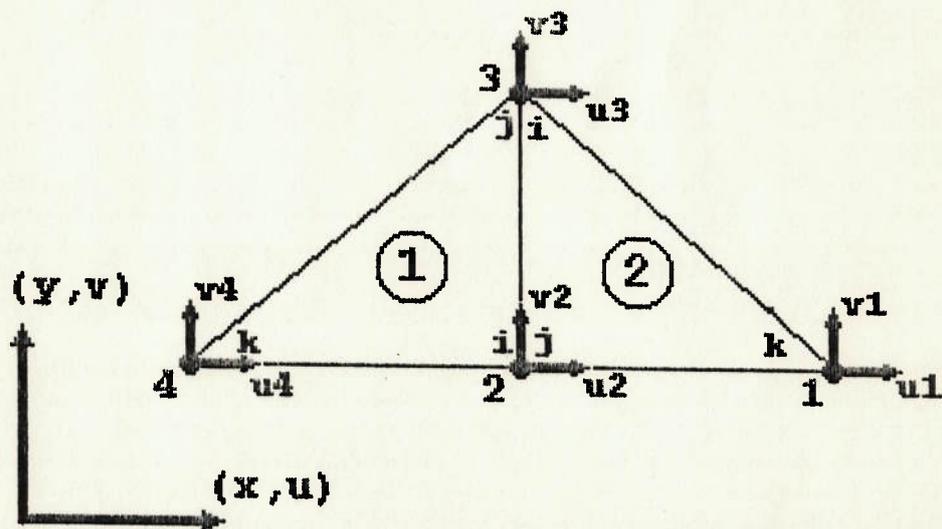


Fig. (4-3) - Exemplo de Subestrutura Formada por 2 Elementos.

Supondo que o nó 1 seja um super-nó, então os graus de liberdade  $u_1$  e  $v_1$  serão os graus de liberdade principais. Os demais graus de liberdade  $u_2, v_2, \dots, u_4, v_4$  serão portanto os graus de liberdade secundários. As matrizes de rigidez individuais de cada elemento serão dadas por:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & \dots & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & \dots & k_{26}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{61}^e & k_{62}^e & \dots & k_{66}^e \end{bmatrix} \quad (e = 1, 2)$$

Conseqüentemente, a equação de equilíbrio na forma matricial, definida para toda a subestrutura, é escrita como:

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 \\
 k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 \\
 k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{35}^1 + k_{13}^2 & k_{36}^1 + k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\
 k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{45}^1 + k_{23}^2 & k_{46}^1 + k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\
 k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 + k_{31}^2 & k_{54}^1 + k_{32}^2 & k_{55}^1 + k_{33}^2 & k_{56}^1 + k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\
 k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 + k_{41}^2 & k_{64}^1 + k_{42}^2 & k_{65}^1 + k_{43}^2 & k_{66}^1 + k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\
 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\
 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2
 \end{bmatrix}_{12 \times 12}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4
 \end{Bmatrix}_{1 \times 6}
 =
 \begin{Bmatrix}
 Fx_1 \\
 Fy_1 \\
 Fx_2 \\
 Fy_2 \\
 Fx_3 \\
 Fy_3 \\
 Fx_4 \\
 Fy_4
 \end{Bmatrix}_{1 \times 6}$$

A Eq.(4-27) pode ser escrita de maneira simplificada como:

$$\begin{bmatrix}
 [K_{11}] & [K_{12}] \\
 [K_{21}] & [K_{22}]
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \{u_1\} \\
 \{u_2\}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \{F_1\} \\
 \{F_2\}
 \end{Bmatrix}
 \quad (4-28)$$

onde  $\{u_1\}$  e  $\{u_2\}$  são os vetores de deslocamento do superelemento da Fig.(4-3), correspondentes aos graus de liberdade principais e secundários respectivamente. Na forma expandida, a Eq.(4-28) pode ser escrita como:

$$[K_{11}]\{u_1\} + [K_{12}]\{u_2\} = \{F_1\} \quad (4-29)$$

$$[K_{21}]\{u_1\} + [K_{22}]\{u_2\} = \{F_2\} \quad (4-30)$$

Isolando  $\{u_2\}$  na Eq. (4-30) e substituindo-o na Eq. (4-29) resulta:

$$[[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]]\{u_1\} = \{F_1\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1}\{F_2\} \quad (4-31)$$

ou

$$[\bar{K}]_{2 \times 2} \{u_1\}_{1 \times 2} = \{\bar{F}\}_{1 \times 2} \quad (4-32)$$

onde  $[\bar{K}]$  é a matriz condensada do superelemento e  $\{\bar{F}\}$  seu respectivo vetor de carga.

Note portanto que a rigidez da estrutura original é dada por uma matriz de dimensões  $12 \times 12$ , enquanto que para o superelemento sua dimensão é apenas  $2 \times 2$ .

Conforme já mencionado, o superelemento pode então ser utilizado em conjunto com outros superelementos, acoplados a uma estrutura principal, ou ainda, como parte de outro superelemento.

Uma vez obtidos os deslocamentos  $\{u_1\}$ , pode-se então obter os demais deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade secundários e conseqüentemente, caso seja de interesse, as tensões nos elementos internos ao superelemento.

## CAPÍTULO (5) : MODELAGEM DO PROBLEMA TÉRMICO E ESTRUTURAL DE UM PISTÃO PARA MOTOR À DIESEL.

### 5.1. Introdução.

De uma maneira geral, a grande maioria dos componentes presentes em um motor de combustão interna possui representação geométrica tridimensional e estão sujeitos a esforços de origem térmica, mecânica e inercial, os quais por sua vez são de difícil determinação.

Os pistões em sua totalidade não são uma exceção e, na maior parte dos casos, o uso de hipóteses simplificativas aplicadas ao modelo mecânico do componente, tais como: geometria, carregamento, restrições de deslocamento, etc, são indispensáveis para que uma análise deste pelo MEF seja viabilizada. Isto torna-se essencial em um contexto como o industrial, onde tempo e custo são fatores altamente críticos e restritivos.

As dificuldades iniciam-se no próprio processo de discretização do modelo de elementos finitos onde, dependendo da complexidade geométrica do componente, -quase sempre tridimensional-, e do nível de detalhamento desejado para a análise, o trabalho de geração da malha pode estender-se por semanas até que a geometria discretizada completa do modelo seja obtida. Neste caso, uma consequência imediata relacionada ao uso de modelos 3D é

que, em geral, estes apresentam um número maior de nós e graus de liberdade, resultando em um maior tempo e esforço computacional para a solução do problema. O tamanho do problema é função direta do tipo de elemento adotado, seu número de nós e respectivos graus de liberdade.

Considerações sobre o tipo de análise, podem também aumentar proibitivamente o tempo de processamento e o espaço necessário para armazenamento de dados, principalmente se comportamentos não lineares e/ou dinâmicos forem associados ao modelo. O uso de modelos 3D geralmente está restrito no máximo, a análises do tipo estática não linear e distribuições de temperatura em regime estacionário. Para análises mais complexas, soluções em tempo hábil, são somente possíveis através do uso de computadores muito velozes e com grandes memórias de processamento (RAM-"Random Access Memory") e armazenamento ("Hard Disk"). Equipamentos com tais características, - embora na atualidade se observe uma redução acelerada da relação custo/desempenho-, representam ainda investimentos da ordem de dezenas ou até mesmo centenas de milhares de dólares, estando portanto fora do alcance de grande parte das empresas e instituições de ensino e pesquisa, pelo menos no contexto brasileiro atual.

Uma solução de compromisso largamente utilizada é a adoção de modelos 2D simplificados. Estes não só permitem uma rápida definição da malha de elementos finitos, como também viabilizam a execução de análises mais sofisticadas como: dinâmica, elasto-plástica, fluência, temperatura em

regime transitório, etc. Na realidade este tipo de modelo apresenta inúmeras restrições, porém em alguns casos tem se mostrado de extrema utilidade na análise de fenômenos termo-mecânicos associados a regiões de particular interesse em alguns componentes.

No caso dos pistões, mesmo para aqueles que apresentam descentralização da câmara de combustão, é possível utilizar-se modelos 2D com simetria axial, acompanhados de algumas simplificações. Evidentemente certas limitações e cuidados devem ser observados em função do tipo de análise e resultados desejados, como será visto mais adiante.

É porém no campo da otimização estrutural aqui discutido, que o emprego de modelos de pistões 2D simplificados com simetria axial apresenta grandes vantagens de utilização em comparação com modelos 3D, geometricamente muito mais complexos. Como o processo de otimização, utilizado particularmente pelo programa ANSYS<sup>r</sup>, envolve os conceitos de parametrização e geração automática de malhas de elementos finitos, a definição de parâmetros geométricos (variáveis de projeto) para o controle da mudança de forma do componente durante o processo de otimização fica extremamente difícil, senão impossível, quando utilizado para modelos 3D.

É evidente que o problema acima descrito é uma particularidade inerente ao tipo de pré-processador (gerador de malhas) disponível, sendo que este será o responsável pela determinação do grau de dificuldade para a geração do modelo. Entretanto, mesmo dispondo-se de um

gerador de malhas poderoso, a solução do problema estaria comprometida em função do tamanho do modelo, e portanto do elevado tempo de processamento de um ciclo de análises.

Mesmo utilizando-se modelos 2D simplificados, o controle de forma através da parametrização não é uma questão simples, sendo que a técnica de subestruturação, abordada brevemente no Cap.(4), será aqui empregada com o objetivo de facilitar esta tarefa e também reduzir substancialmente o tempo de análise em cada ciclo de otimização. Tais particularidades serão discutidas ainda neste capítulo.

## 5.2. Os modelos térmico e mecânico de um pistão.

Conforme já mencionado em itens precedentes, os pistões de uma maneira geral, apresentam geometrias relativamente complexas e estão sujeitos a cargas térmicas, mecânicas e inerciais de características dinâmicas e altamente não lineares. Tal fato decorre diretamente da ação das altas temperaturas, pressões e acelerações que atuam sobre o pistão durante cada ciclo de operação do motor, em decorrência do fenômeno da combustão.

Um tratamento físico-matemático rigoroso deste problema torna-se extremamente difícil, senão impossível, a tal ponto que hipóteses simplificativas necessariamente devem ser adotadas para que uma solução aproximada do problema seja conseguida em tempo hábil. Obviamente tais hipóteses

devem, sempre que possível, serem confrontadas com dados experimentais, para que o modelo numérico assim concebido possa então ser validado.

O modelo mecânico do pistão, para o propósito a que se dispõe o presente trabalho, assume basicamente quatro hipóteses simplificativas, envolvendo aspectos tais como geometria, propriedades de material, carregamentos e vínculos estruturais ou restrições de deslocamento. Cada um destes itens é discutido a seguir.

#### 5.2.1. Geometria.

Uma geometria 2D simplificada, considerando-se simetria axial, é adotada em lugar da geometria 3D real do pistão, basicamente visando:

(a) Simplificar e imprimir maior eficiência ao processo de parametrização e geração de malhas, utilizando os recursos ora disponíveis no programa ANSYS<sup>®</sup>.

(b) Reduzir as dimensões do problema para reduzir o tempo de processamento de cada configuração de projeto analisada e, conseqüentemente reduzir o tempo global de um ciclo completo de otimização.

Um modelo típico 3D de um pistão monobloco utilizado em motor diesel, neste caso com câmara de combustão centrada, e o modelo 2D com simetria axial adotado como simplificação geométrica, são mostrados nas Figs.(5-1a) e (5-1b) respectivamente.

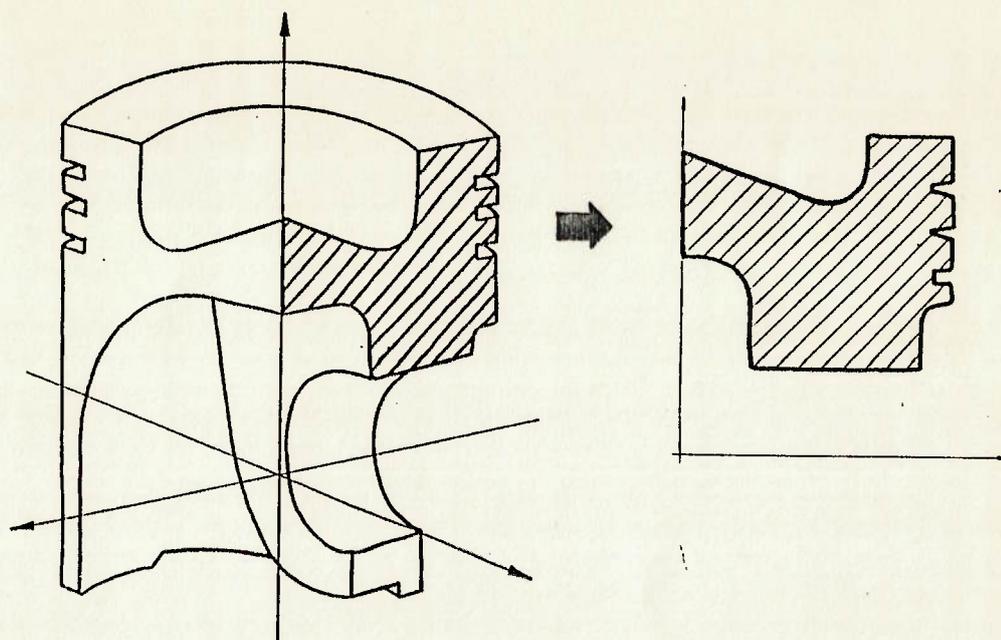


Fig. (5-1)- (a) 1/4 do modelo 3D de um pistão monobloco.  
 (b) Modelo 2D do pistão com simetria axial.

#### 5.2.2. Propriedades de material.

Os pistões monobloco geralmente são confeccionados em liga de alumínio-silício (material comumente empregado), possuindo em alguns casos insertos como os de Ferro-Níquel (Ni-Resist), ou mesmo os chamados compostos cerâmicos ou fibras (FRM-"Fiber Reinforced Material", CRM-"Ceramic Reinforced Material", etc), cuja finalidade é reforçar estruturalmente determinadas regiões do pistão sujeitas a grandes solicitações térmicas e/ou mecânicas. Dentre estas regiões podemos citar por exemplo, a borda da câmara de combustão e as canaletas (1ª e 2ª).

Uma vez que a técnica de subestruturação é utilizada dentro do processo de otimização, o modelo de elementos finitos, deve automaticamente incorporar as restrições

inerentes ao uso desta, conforme o exposto no item 4.4.1. do Cap.(4).

Neste caso portanto, qualquer variação das propriedades dos materiais, em função de variações pontuais de temperatura no interior do pistão devem ser desconsideradas, resultando na necessidade de utilização de propriedades de material constantes, sobretudo para o modelo térmico, onde a condutividade térmica do material, em função da temperatura, torna a análise não linear. Além desta característica particular, as hipóteses de homogeneidade e isotropia são também consideradas.

Finalmente, as propriedades constantes do material são então tomadas à uma temperatura média representativa da região a ser analisada ( $\sim 270$  °C), a qual corresponde à temperatura média do topo do pistão para a condição de operação analisada.

Valores médios típicos de propriedade de material, utilizados na análise de elementos finitos de um pistão monobloco para a temperatura média de referência acima especificada, são mostrados na tabela(5-1)

Tabela(5-1): Propriedades mecânicas médias dos materiais utilizados na construção de um pistão monobloco a temperatura de 270°C

PROPRIEDADE DE MATERIAL	PISTÃO	PORTA-ANEL	UNIDADE
MÓDULO DE ELASTICIDADE	65000	84288	N/mm <sup>2</sup>
MÓDULO DE POISSON	0.33	0.28	—
COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA	21E-06	19.5E-06	°C <sup>-1</sup>
CONDUTIVIDADE TÉRMICA	0.162	0.038	W/mm°C

### 5.2.3. Condições de contorno (Carregamentos).

Para efeito de modelagem do problema térmico e estrutural do pistão, os carregamentos térmico e mecânico são considerados separadamente, embora na realidade estes atuem simultaneamente sobre o pistão. A hipótese acima é adotada basicamente devido a natureza teórica distinta dos problemas e, pela possibilidade de utilização do princípio da superposição de efeitos, na elaboração do critério de falha, conforme será descrito no Cap.(6). A hipótese de simetria axial dos carregamentos é aqui também empregada.

Independente de tais considerações, estes carregamentos são obtidos via de regra para a condição de potência máxima do motor, uma vez que esta representa normalmente a condição mais crítica de operação. A determinação e forma de aplicação destes carregamentos é discutida a seguir.

### 5.2.3.1. Carregamento térmico.

Em relação ao carregamento térmico, existem basicamente três regiões distintas do pistão sobre as quais podem ser associados mecanismos também distintos de transferência de calor. Na tabela(5-2) estas regiões são devidamente identificadas, bem como os respectivos mecanismos típicos de transferência de calor sobre elas atuante.

Tabela(5-2): Regiões do pistão e mecanismos típicos de transferência de calor.

REGIÃO	NUM.	DESCRIÇÃO DO MECANISMO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR
TOPO E CÂMARA	①	CONVECÇÃO, RADIAÇÃO (gases da combustão)
ZONA DE ANEIS E SAIA	②	CONVECÇÃO, CONDUÇÃO (pelos anéis, óleo lubrificante)
CAVIDADE INFERIOR E GALERIA	③	CONVECÇÃO, CONDUÇÃO (óleo refrigerante)

Através destes mecanismos, pode-se chegar a valores de coeficientes de película médios  $h_m$  e temperaturas médias  $T_m$ , os quais irão definir a condição de contorno do problema térmico (condição de contorno de Dirichille).

A determinação dos  $h_m$  e  $T_m$  é uma tarefa bastante complexa e, no caso particular de pistões estas informações podem ser obtidas através de :

(a). Medição experimental de temperaturas. Procedimento este realizado em banco de provas de motores, com auxílio de termopares ou "templugs", localizados em pontos específicos do pistão e, com o motor funcionando na condição desejada de operação (regiões 1, 2 e 3).

(b). Modelos numéricos de simulação: Desenvolvidos e utilizados para simulação do ciclo termodinâmico de combustão em motores diesel (região 1) e simulação da refrigeração do pistão (região 3).

(c). Dados de literatura técnica especializada sobre o assunto e/ou experiência acumulada em testes e simulação de pistões similares já homologados (região 2).

Normalmente o procedimento (b) prevalece sobre os demais, principalmente no caso de novos produtos.

#### 5.2.3.2. Carregamento mecânico.

No caso do carregamento mecânico, a pressão máxima de combustão (PCP="Peak Cylinder Pressure"), resultante ao longo de um ciclo de combustão, é aplicada integralmente sobre a superfície do topo do pistão e parcialmente sobre a região dos anéis, conforme mostrado na Fig.(5-2). Este valor de pressão (estático), pode ser obtido através de medição experimental em banco de provas de motores, ou

numericamente por meio de um simulador de ciclo termodinâmico.

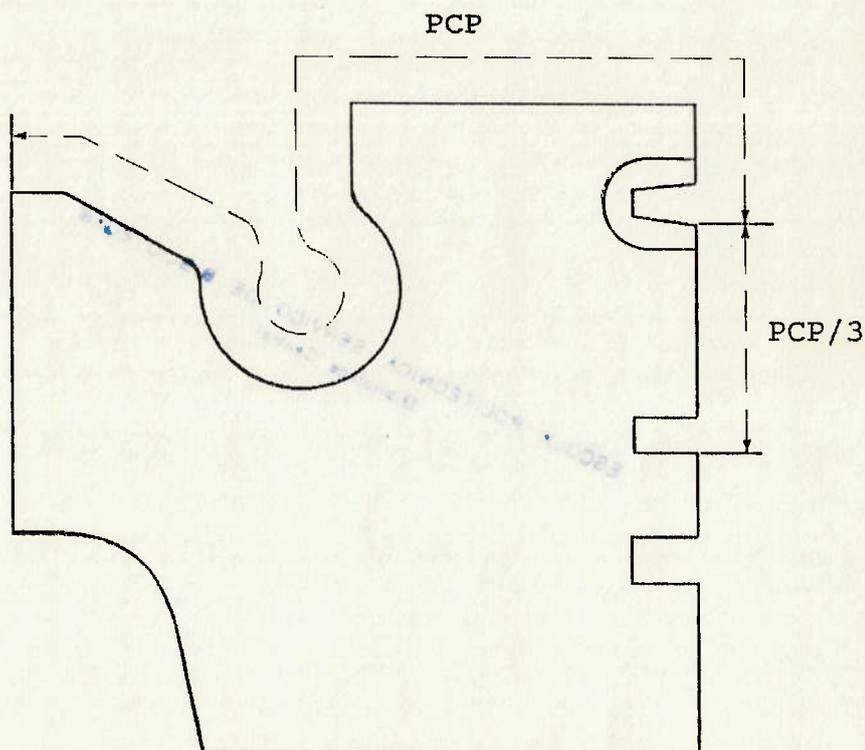


Fig. (5-2) - Distribuição de Pressão (PCP) no Topo de um Pistão Monobloco para Motor Diesel.

Para o cálculo das tensões de origem térmica ou termicamente induzidas, provenientes dos gradientes de temperatura que se estabelecem no pistão, são utilizados diretamente os resultados de uma análise térmica do componente (temperaturas nodais), que necessariamente deve ser executada com anterioridade.

#### 5.2.4. Vínculos estruturais.

Para que não se tenha indeterminação da solução do problema estrutural, caracterizada por um movimento de corpo rígido da estrutura, o modelo 2D com simetria axial é restrito quanto à movimentação na direção axial ( $y$ ), nas proximidades da área de contato do pistão com o pino, ou seja, na porção interna-superior do furo para pino conforme mostrado na Fig. (5-3).

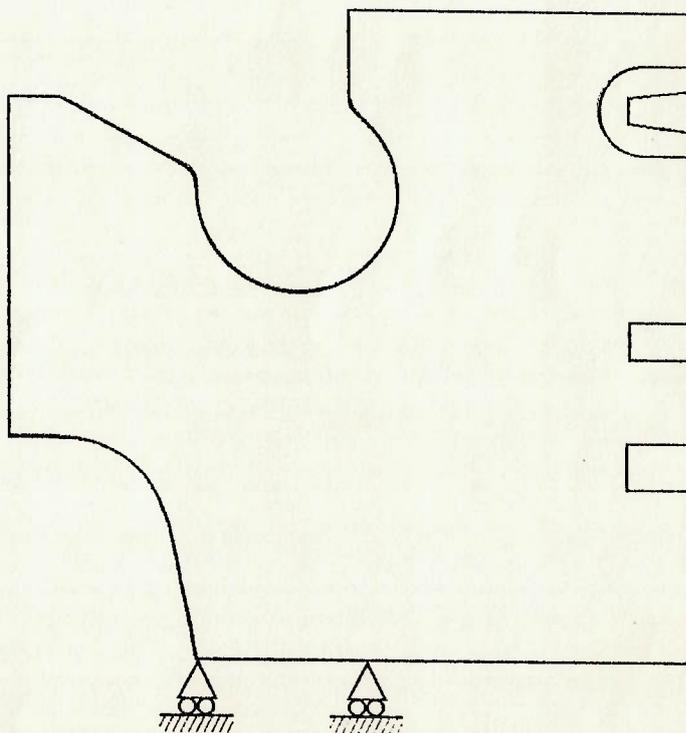


Fig. (5-3) - Vínculo Estrutural Estabelecido para o Modelo Mecânico do Pistão.

### 5.3. O modelo de elementos finitos do pistão.

Uma vez estabelecidas as hipóteses simplificativas para os modelos térmico e mecânico do pistão, o próximo passo é introduzi-las no modelo de elementos finitos onde deverão ser também definidos aspectos como: tipo de elemento (térmico, estrutural), funções de forma (linear, parabólica), número e tipos de graus de liberdade por nó (temperatura, translações, rotações, etc), grau de refinamento da malha, sistema de coordenadas, etc.

Para o caso particular do modelo de elementos finitos do pistão utilizado no presente trabalho, são adotados elementos sólidos isoparamétricos de oito e/ou seis nós (degenerado), com opção para a formulação que considera simetria axial, tanto para o carregamento quanto para as tensões e deformações. O tipo de elemento adotado admite dois graus de liberdade de translação por nó,  $U_x$  e  $U_y$ , correspondendo estes aos deslocamentos nodais computados nas direções  $x$  e  $y$ , segundo o sistema de coordenadas local do elemento, paralelo por sua vez ao sistema global de referência da análise. Uma malha típica 2D de elementos finitos de um pistão é mostrada na Fig. (5-4).

As propriedades dos materiais são mantidas constantes para todas as análises ao longo do ciclo de otimização, conforme estabelecido anteriormente no item 5.2.2.

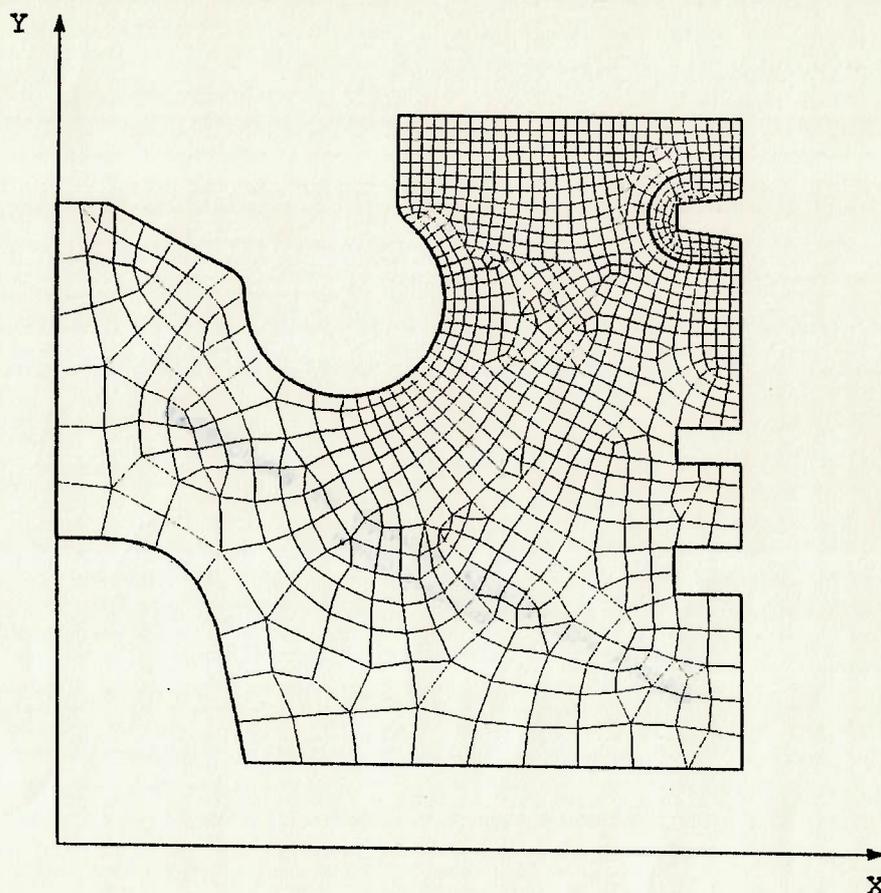


Fig. (5-4)- Malha de elementos finitos de um pistão e o sistema de coordenadas global de referência da análise.

As condições de contorno para o problema térmico e estrutural, são definidas segundo o disposto nos itens 5.2.3.1 e 5.2.3.2. e aplicadas, em cada caso, sobre as superfícies livres dos elementos (arestas) correspondentes às superfícies livres do pistão. O mesmo é válido para a vinculação estrutural do modelo, porém somente aplicada à análise de carga mecânica (carga de gás), conforme descrito no item 5.2.4.

### 5.5. Aplicação da técnica de subestruturação no ciclo de análise do pistão pelo MEF.

A técnica de subestruturação ou superelemento, cujos conceitos teóricos encontram-se brevemente descritos no Cap.(4), item 4.4., é utilizada no presente trabalho tendo dois objetivos distintos, ou seja:

(a) Reduzir o tempo individual de cada análise, pelo MEF, do problema térmico-estrutural do pistão, - independente de sua natureza-, possibilitando assim a redução substancial do tempo total de um ciclo completo de otimização.

(b) Facilitar a parametrização da geometria e do carregamento (condições de contorno) do modelo de elementos finitos, simplificando o processo de geração automática de malhas e possibilitando um melhor controle sobre as mudanças de geometria(forma) ao longo do processo de otimização.

O uso da técnica de subestruturação naturalmente requer algum trabalho adicional por parte do usuário(analista) quando comparada a uma análise convencional[19,46,47,48]. Tal fato deve-se basicamente a um número maior de procedimentos, informações e arquivos a serem manipulados durante cada análise e conseqüentemente ao longo do todo o processo de otimização. Este porém, é um problema que pode ser substancialmente reduzido, se o procedimento de manipulação dos arquivos das subestruturas for racionalizado e automatizado dentro do processo de análise

e otimização. O programa ANSYS<sup>®</sup> permite este tipo de abordagem[19].

Uma vez que todo o processo de análise, subestruturação e otimização, é inteiramente desenvolvido utilizando-se o programa ANSYS<sup>®</sup>, é interessante que se conheça a terminologia peculiar do processo e suas etapas, de modo que a estratégia de uso de subestruturas dentro do ciclo de análise estrutural e otimização possa ser melhor entendida. Muito desta terminologia já foi apresentado no Cap.(4), item 4.4.1, sendo que terminologia similar é também empregada pelo programa ANSYS<sup>®</sup>.

Particularmente no caso da subestruturação de um pistão, o conjunto típico estrutura principal/subestrutura, é mostrado na Fig.(5-5).

A solução do problema térmico e/ou estrutural utilizando-se a técnica de subestruturação empregada pelo programa ANSYS<sup>®</sup>, envolve basicamente três passos distintos a saber:

**ETAPA(1) - GERAÇÃO DO SUPERELEMENTO(GSE):** Processo no qual a matriz de rigidez do superelemento ou subestrutura, juntamente com seus vetores de carga, são condensados sobre os graus de liberdade principais definidos na interface comum estrutura principal/superelemento.

**ETAPA(2) - SOLUÇÃO DA ESTRUTURA PRINCIPAL(SEP):** A estrutura principal é resolvida utilizando-se o superelemento condensado. Obtem-se como resultado os deslocamentos, tensões, deformações ou temperaturas da

estrutura principal, incluindo-se os deslocamentos dos supernós ou deslocamentos reduzidos.

**ETAPA (3) - EXPANSÃO DO SUPERELEMENTO (ESE):** As temperaturas ou deslocamentos reduzidos, calculados na etapa precedente, são utilizados para a obtenção das temperaturas ou deslocamentos, tensões e deformações no interior do superelemento ou graus de liberdade secundários.

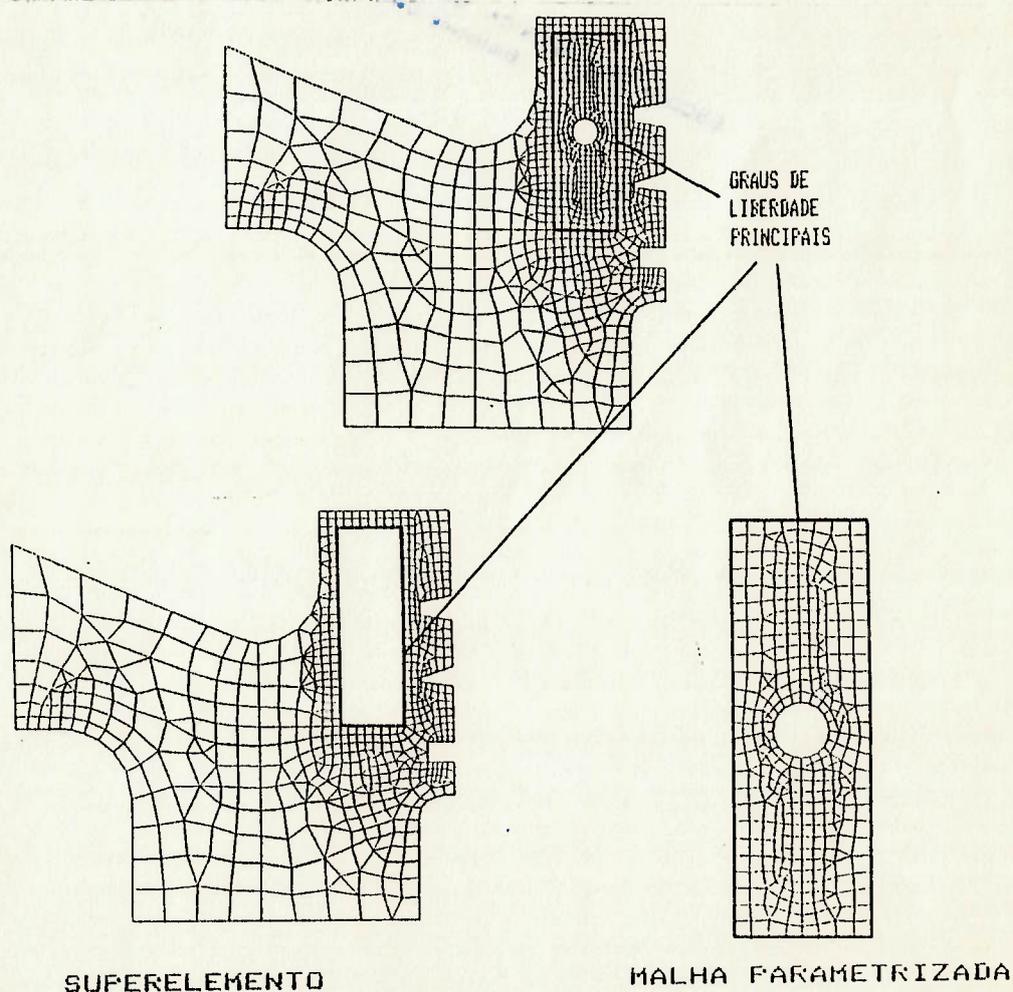


Fig. (5-5) - Conjunto estrutura principal/subestrutura utilizado para análise térmica e/ou estrutural do pistão pelo MEF.

Uma vez que o processo de otimização, neste caso, envolve a utilização de parâmetros provenientes da análise do problema térmico-estrutural do pistão pelo MEF, existe a necessidade de trabalhar-se com três superelementos distintos: um para o problema térmico envolvendo o cálculo de temperaturas (SE1) e dois para o problema estrutural, ou seja, para o cálculo de tensões térmicas (SE2) e tensões mecânicas (SE3). A estratégia de utilização dos superelementos no processo de análise, em cada ciclo de otimização, é mostrada no fluxograma da Fig.(5-6).

Na Fig.(5-6), os retângulos menores e de bordas arredondadas, identificam algumas variáveis de projeto, variáveis de estado e função objetivo, que serão utilizadas especificamente no problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração para motor diesel desenvolvido no Cap.(6). Evidentemente a estrutura e o conceito apresentados na Fig.(5-6) podem ser utilizados em qualquer outro tipo de problema de otimização no ANSYS<sup>®</sup> envolvendo subestruturação.

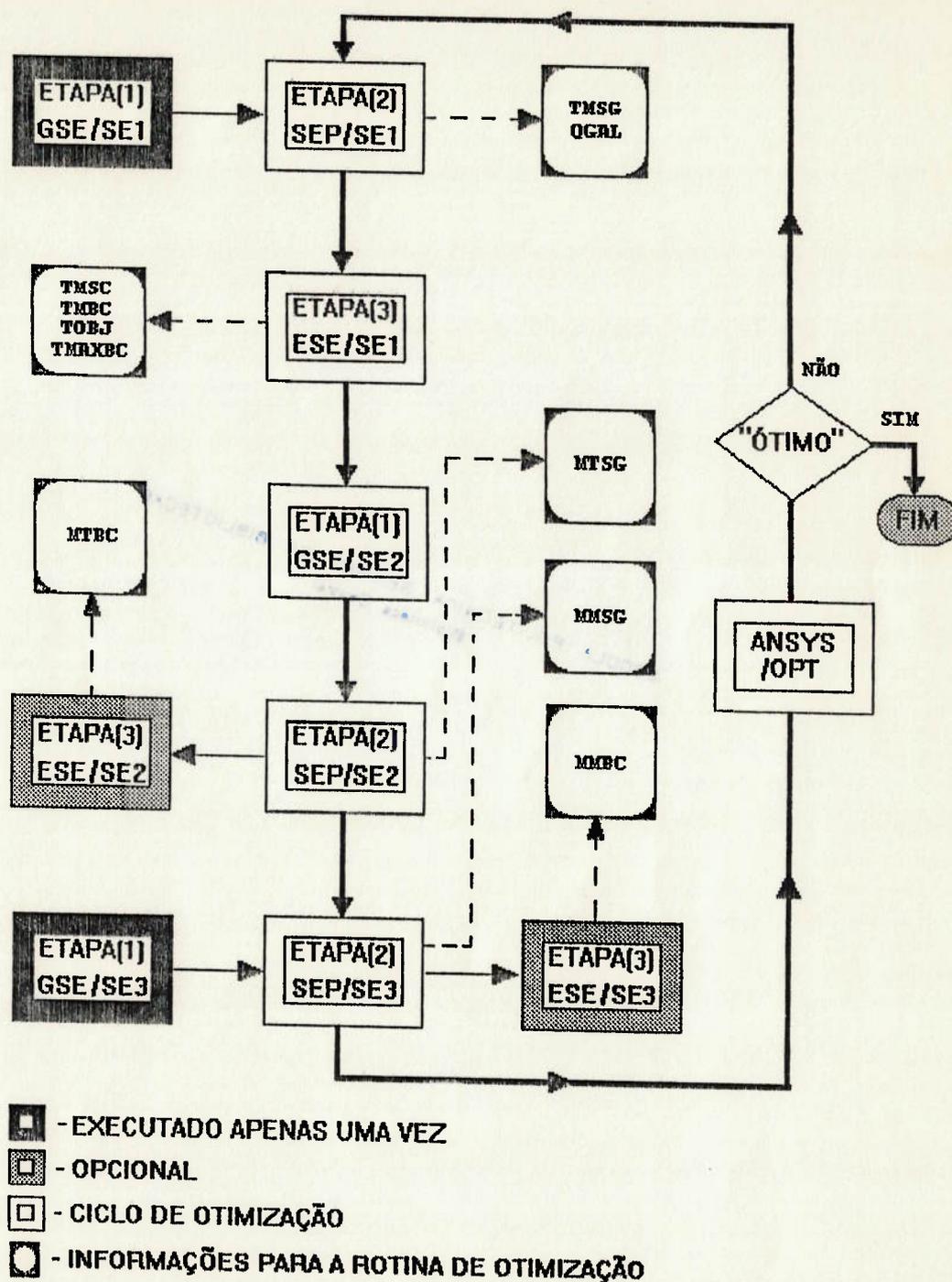


Fig.(5-6)- Fluxograma de análise do pistão pelo MEF utilizando a técnica de subestruturação dentro do ciclo de otimização.

## CAPÍTULO (6) : APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL E O MEF AO PROJETO DE UM PISTÃO COM GALERIA DE REFRIGERAÇÃO PARA MOTOR A DIESEL - ESTUDO DE CASO.

### 6.1. Introdução.

O objetivo do presente capítulo é demonstrar a aplicação prática do conceito de otimização, utilizado em conjunto com o MEF, no desenvolvimento do projeto de um pistão de alumínio com galeria de refrigeração para motor diesel. Os recursos de análise e otimização disponíveis no programa ANSYS<sup>R</sup>, brevemente descritos nos Caps.(3) e (4), juntamente com as hipóteses simplificativas e aspectos da modelagem do problema discutidos no Cap.(5), são aqui empregados. O fluxograma geral para solução do problema, mostrando o ciclo integrado de projeto e análise, é apresentado na Fig.(6-1). A estratégia adotada para o uso da técnica de subestruturação segue o disposto no Cap.(5), Fig(5-6). A formulação e montagem do problema de otimização para o presente caso é discutida a seguir.

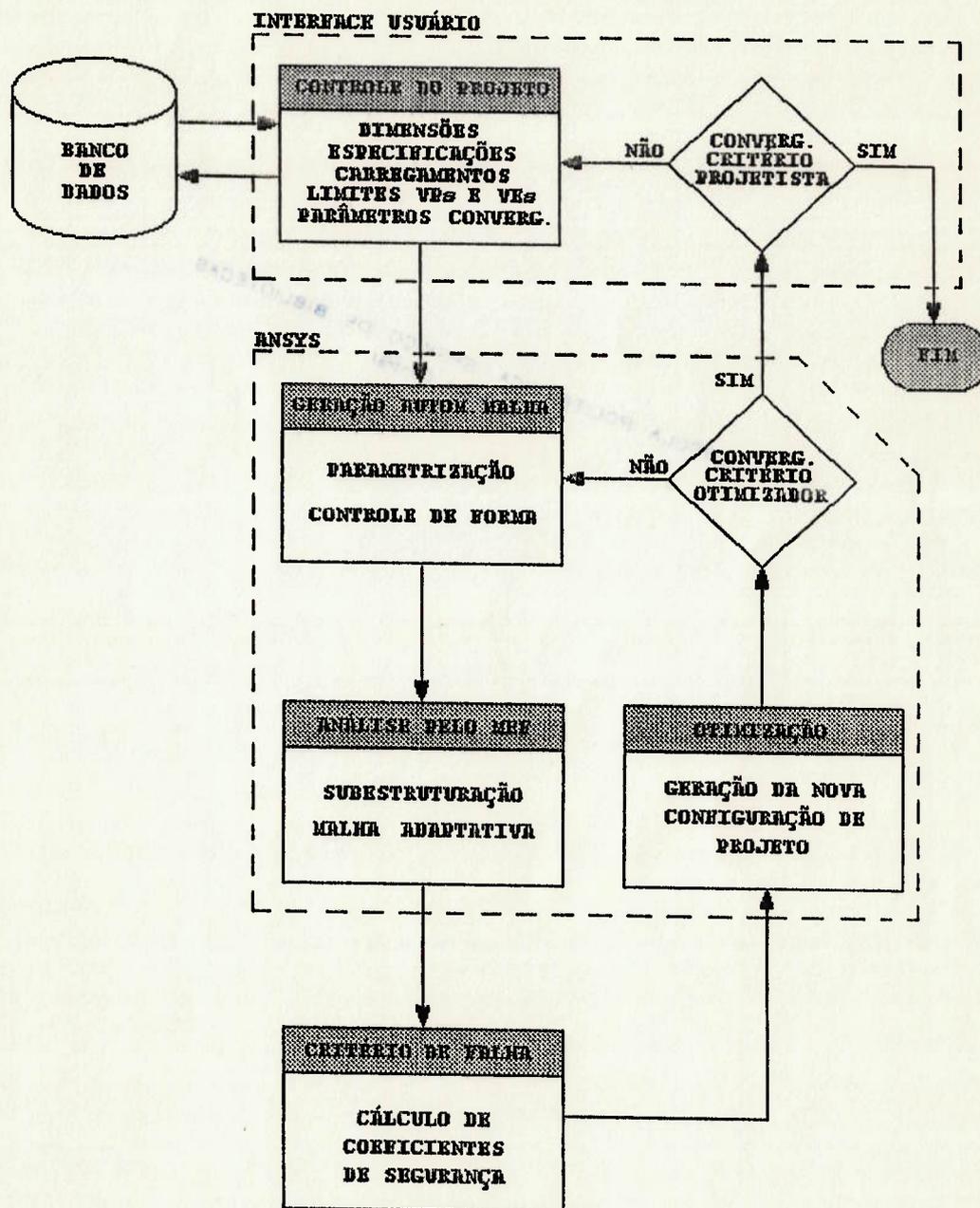


Fig. (6-1)- Fluxograma global mostrando o ciclo integrado de projeto e análise para a solução do problema de dimensionamento de uma galeria de refrigeração de um pistão de alumínio.

## 6.2. Formulação do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração para motor diesel.

O método de otimização utilizado no programa ANSYS<sup>®</sup> emprega três tipos de variáveis que por sua vez caracterizam o problema de otimização (ver Cap.(3)). Estas variáveis podem ser facilmente definidas no interior do programa através de parâmetros, graças ao módulo APDL (ANSYS Parametric Design Language).

A formulação geral do problema é representada pelas Eqs.(3-1) a (3-3) descritas no Cap.(3), sendo que para o caso particular do problema de otimização do pistão aqui apresentado, igualmente iremos considerar a função objetivo, as variáveis de projeto e variáveis de estado ou funções de restrição, as quais são descritas a seguir.

### 6.2.1. Função objetivo.

O projeto de uma galeria de refrigeração tem por objetivo reduzir temperaturas em regiões críticas localizadas no tampo do pistão, principalmente na borda da câmara de combustão.

Através da redução das temperaturas, é possível obter-se uma melhoria substancial das propriedades do material e conseqüentemente aumentar-se a resistência e durabilidade do componente.

A formulação da função objetivo neste caso é bastante simples e, consiste em reduzir-se a temperatura máxima local da borda da câmara. Esta função pode ser representada pela Eq.(6-1) abaixo.

$$TOBJ = TMBC \quad (6-1)$$

onde:

*TOBJ* - Função objetivo.

*TMBC* - Temperatura máxima local da borda da câmara.

### 6.2.2. Variáveis de projeto.

A escolha das variáveis de projeto, via de regra, é uma tarefa que requer alguns cuidados adicionais, uma vez que um número excessivo destas ou a utilização de variáveis que pouca ou nenhuma influência tenham sobre a função objetivo, podem elevar substancialmente o tempo de processamento sem efetivamente produzir-se o efeito desejado.

Normalmente estas variáveis estão associadas a forma geométrica ou dimensões do componente. No presente exemplo, foram adotadas 6 variáveis de projeto, como mostrado na Fig.(6-2).

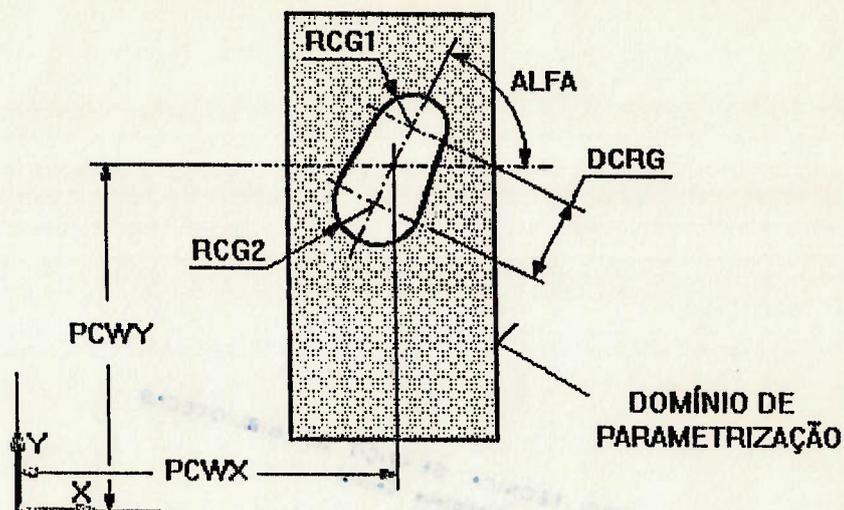


Fig. (6-2) - Variáveis de projeto adotadas inicialmente para o problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.

O objetivo inicial é desenvolver-se um estudo preliminar, através do qual pode-se determinar quais as variáveis de projeto que maior influência têm sobre o processo de otimização. Isto pode ser feito através de uma análise de sensibilidade do problema observando-se as derivadas parciais das aproximações, tanto da função objetivo  $F(\vec{X})$  quanto das funções de restrição  $G_j(\vec{X})$ , em relação as variáveis de projeto  $X_i$ , ou seja:

$$\frac{\partial F(\bar{X})}{\partial X_i} \quad (i=1,n) \quad ; \quad \frac{\partial G_j(\bar{X})}{\partial X_i} \quad (i=1,n ; j=1,m) \quad (6-3)$$

É importante neste caso também verificar-se o chamado coeficiente de correlação das aproximações ( $R^2$ ), uma vez que estas podem não representar adequadamente o problema real.

Outra consequência direta da escolha das variáveis de projeto é o controle de seus limites e da geometria (forma) do componente, sobretudo no interior do espaço de projeto ou domínio de parametrização. É possível que neste caso um vetor de projeto  $\bar{x}^k$  qualquer seja produzido, de tal forma que a geração automática da malha de elementos finitos fique inviabilizada. Isto ocorre, por exemplo, quando o contorno da secção transversal da galeria de refrigeração tangencia ou ultrapassa os limites estabelecidos para o domínio de parametrização.

No presente caso, uma rotina foi especialmente desenvolvida para o controle total e/ou parcial das variáveis de projeto e, portanto, da geometria da galeria de refrigeração no interior do domínio de parametrização. Esta rotina é apresentada no Apêndice(2) e permite o controle de qualquer geometria representada pelas variáveis de projeto mostradas na Fig.(6-2), obedecendo evidentemente seus respectivos limites.

### 6.2.3. Variáveis de estado ou funções de restrição do projeto.

Quatro aspectos importantes são considerados no sentido de determinar-se as variáveis de estado e/ou funções de restrição do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração, são eles: processo de manufatura, degradação do óleo, eficiência de refrigeração, e resistência do material. Cada um destes aspectos é brevemente discutido a seguir.

#### 6.2.3.1. O processo de manufatura de um pistão com galeria de refrigeração.

Os pistões com galeria são normalmente produzidos através do processo de fundição por gravidade, sendo que durante este, a cavidade da galeria de refrigeração é ocupada por um "macho" de sal (molde), o qual após o resfriamento é dissolvido por água pressurizada, dando lugar a cavidade ou galeria propriamente dita. O processo de fixação do "macho" de sal é bastante rudimentar por questões de construção do ferramental e, desta forma, torna-se extremamente difícil o controle dimensional de espessuras de parede durante o seu posicionamento. Pelo motivo anteriormente exposto, não são recomendadas espessuras de parede inferiores a 2mm, como mostrado na Fig. (6-3).

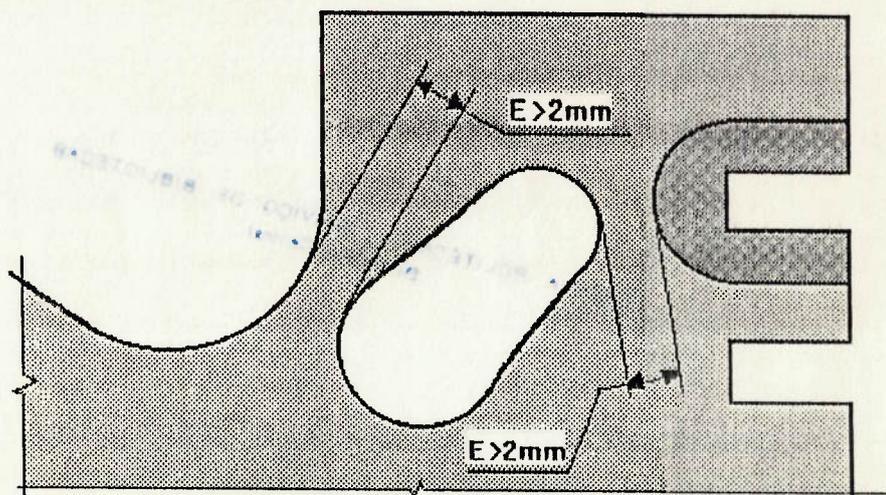


Fig. (6-3) - Espessuras mínimas permissíveis para o posicionamento de uma galeria de refrigeração em um pistão de alumínio.

O controle dos limites de posicionamento da galeria pode ser feito através de um estudo prévio dos limites máximos (horizontal e vertical) permissíveis para o domínio de parametrização, como esquematizado na Fig. (6-4).

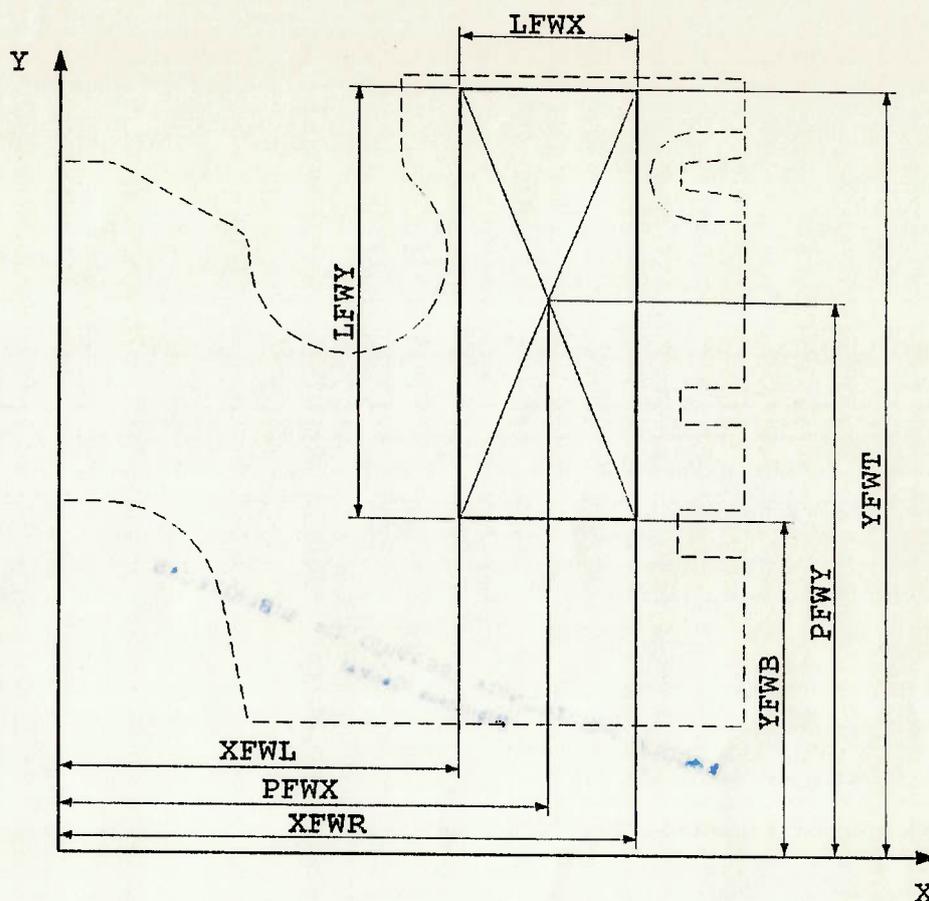


Fig.(6-4)- Limites máximos e mínimos para o domínio de parametrização no problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.

#### 6.2.3.2. Degradação do óleo e eficiência de refrigeração.

É de extrema importância para o funcionamento do motor que a temperatura do óleo de refrigeração seja mantida abaixo de determinado limite, acima do qual poderá ocorrer um fenômeno conhecido como degradação do óleo. Este fenômeno além de alterar de maneira detrimental propriedades do óleo como a viscosidade, -essencial para a lubrificação dos componentes em movimento e contato-, pode

ainda, em alguns casos, provocar a formação de verniz ou carvão devido a sua exposição a altas temperaturas, o que irá comprometer seriamente o funcionamento e durabilidade do motor e seus componentes.

Desta forma, torna-se imprescindível o controle das temperaturas médias de algumas superfícies do pistão como galeria de refrigeração e 1ª canaleta, as quais por sua vez, mantêm contato direto com o óleo de refrigeração e podem eventualmente estar a temperaturas bastante elevadas. A temperatura média máxima suportada pelos óleos de refrigeração comuns é da ordem de 230°C[55], e portanto podemos estabelecer:

$$TMSG \leq 230 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6-4)$$

$$TMSC \leq 230 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6-5)$$

onde:

*TMSG* - Temperatura média da superfície da galeria de refrigeração.

*TMSC* - Temperatura média da superfície da 1ª canaleta.

Outro aspecto importante relacionado ao óleo, é a elevação de sua temperatura média durante o processo de refrigeração. De uma maneira geral, quanto maior a elevação da temperatura do óleo, menor a eficiência de refrigeração do sistema[33]. Isto ocorre, uma vez que o acréscimo de

energia ao óleo de refrigeração contribui também para a elevação da temperatura média do reservatório de óleo ou "carter", diminuindo portanto, a diferença de temperatura do óleo na entrada e na saída da galeria. Este problema pode ser solucionado acoplado-se um trocador de calor ao motor (radiador de óleo), porém tal solução pode comprometer substancialmente o rendimento global e custo final do produto.

Logo, admitindo-se que o processo de refrigeração ocorra em regime permanente e que a temperatura média do óleo no interior da galeria seja constante, e ainda, que o maior acréscimo de temperatura a este não ultrapasse 25°C[55], podemos então escrever a expressão que nos forneça aproximadamente a quantidade de energia máxima que pode ser liberada através da superfície da galeria de refrigeração, logo:

$$Q_{MAX} = \frac{1}{2\pi} * F * DENS_{OLEO} * \dot{V}_{OLEO} * CP_{OLEO} * DELT \quad (6-6)$$

onde:

- $Q_{MAX}$  - Quantidade máxima de calor permissível, retirada através da superfície da galeria de refrigeração (W/rad)
- $F$  - Fator de preenchimento volumétrico da galeria(-) ( $0 < F < 1$ )

$DENS_{OLFO}$  - Densidade do óleo (kg/l)

$\dot{V}_{OLFO}$  - Vazão de óleo de refrigeração (l/seg)

$CP_{OLFO}$  - Calor específico do óleo a pressão cte. (J/kg°C)

$DELT$  - Máximo acréscimo de temperatura admissível para o óleo de refrigeração (°C).

finalmente,

$$QGAL \leq QMAX \quad (6-7)$$

onde:

$QGAL$  - Calor retirado pela galeria de refrigeração (W/rad)

#### 6.2.3.3. Resistência do material (Critério de falha).

O quarto e último aspecto a ser abordado está relacionado a resistência do material, uma vez que o pistão é submetido aos carregamentos de pressão e temperaturas provenientes da combustão, ao longo do ciclo de operação do motor. As considerações e hipóteses simplificativas referentes a estes carregamentos encontram-se descritas no Cap. (5).

No presente caso, o diagrama de Goodman modificado é utilizado para o cálculo dos coeficientes de segurança à fadiga do material do pistão ao longo da superfície da galeria de refrigeração. Este diagrama é construído

utilizando-se as propriedades do material (i.e. limite de ruptura  $SU$ , limite de escoamento  $SY$  e limite de fadiga  $SE$  para  $10^7$  ciclos), conforme mostrado na Fig.(6-5), tomadas a temperatura de referência do ponto sob análise.

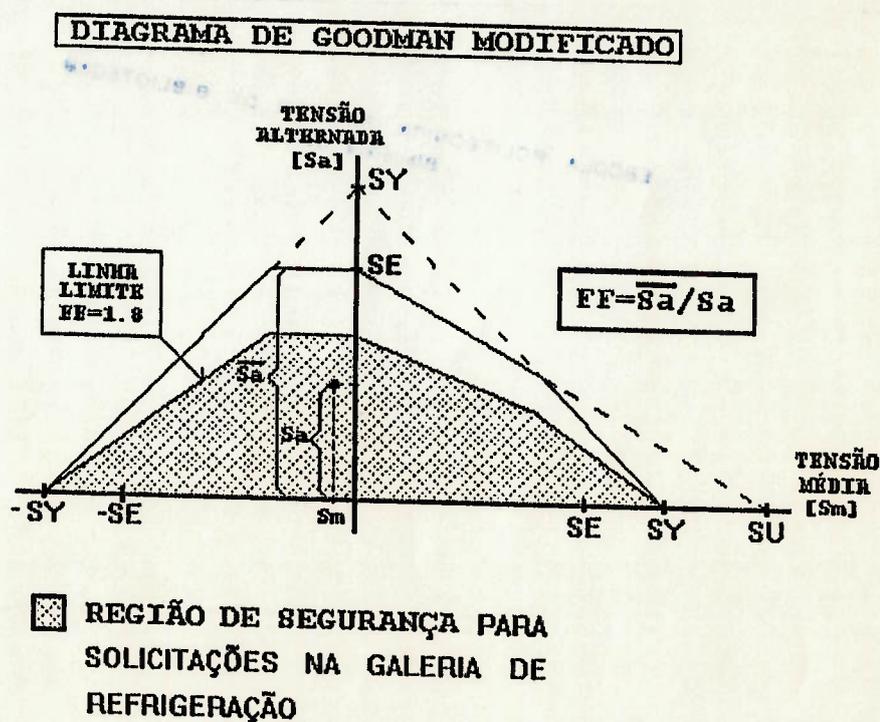


Fig.(6-5)- Esquema do diagrama de Goodman modificado mostrando a forma de obtenção do coeficiente de segurança à fadiga.

A determinação das tensões médias  $S_m$  e alternadas  $S_a$ , por sua vez, é feita considerando-se os carregamentos

térmico e mecânico, combinados através do princípio da superposição de efeitos, -válido apenas para estruturas de comportamento elástico linear-, onde, a (tensão térmica) é tomada como mínima e, a (tensão térmica + tensão mecânica) tomada como máxima, conforme mostrado na Fig.(6-6).

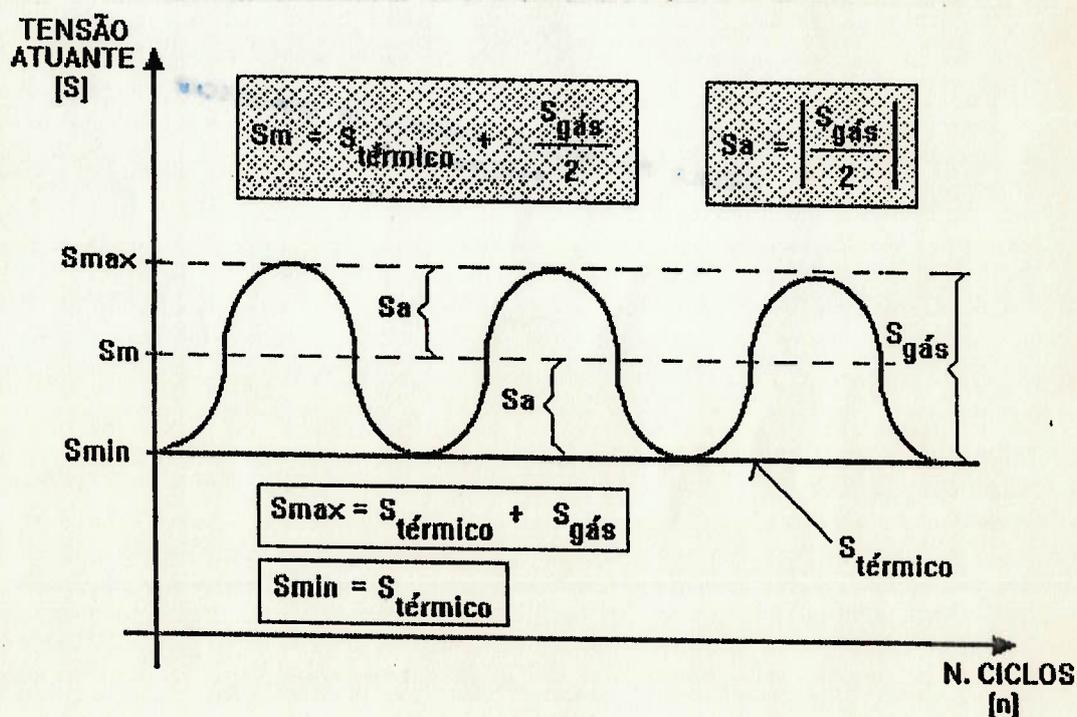


Fig.(6-6)- Cálculo das tensões médias e alternadas decorrentes da combinação dos carregamentos térmico e mecânico atuantes sobre o pistão.

Como critério de projeto, adota-se um coeficiente de fadiga  $FF \geq 1.8$ , sendo este valor resultante da experiência praticada pela maioria dos fabricantes de motores e pistões

em todo o mundo[56]. Outros critérios como os definidos por Fuchs[57] e Shigley[58], embora de utilização mais geral, demonstram exatamente a mesma tendência verificada pelo critério aqui empregado, porém com valores de coeficientes de segurança a fadiga menos conservativos.

Pelas características de simetria axial, tanto do modelo quanto dos carregamentos térmico e mecânico, o cálculo dos  $FF_s$  pode ser feito, considerando-se apenas as tensões principais automaticamente resultantes nas direções tangente ao contorno da secção transversal da galeria e circunferencial a esta ("hoop stress"), sendo que as tensões normais nesta mesma superfície são nulas. Logo, as restrições do problema referentes a resistência do material podem ser definidas na forma:

$$FF_T \geq 1.8 \quad (6-8)$$

$$FF_H \geq 1.8 \quad (6-9)$$

onde:

$FF_T$ - Coeficiente de segurança a fadiga mínimo, considerando-se as tensões na direção tangente ao contorno da secção transversal da galeria.

$FF_H$ - Coeficiente de segurança a fadiga mínimo, considerando-se as tensões na direção tangente circunferencial da superfície da galeria ("hoop").

### 6.3. Exemplo numérico de aplicação.

Um motor diesel normal de produção, com 6 cilindros,  $\phi_{\text{pistão}} = 114\text{mm}$ , turbo comprimido e com resfriador posterior ("TCA-Turbo Charged Aftercooled"), utilizado em aplicações automotivas (caminhões), está sendo modificado no sentido de atender exigências do mercado e órgãos de regulamentação de proteção ambiental (emissões de poluentes).

As modificações básicas consistem em elevar-se a potência média efetiva no eixo de saída do motor, - exigência do mercado-, e redesenhar-se o sistema de combustão, -exigência dos órgãos de proteção ambiental.

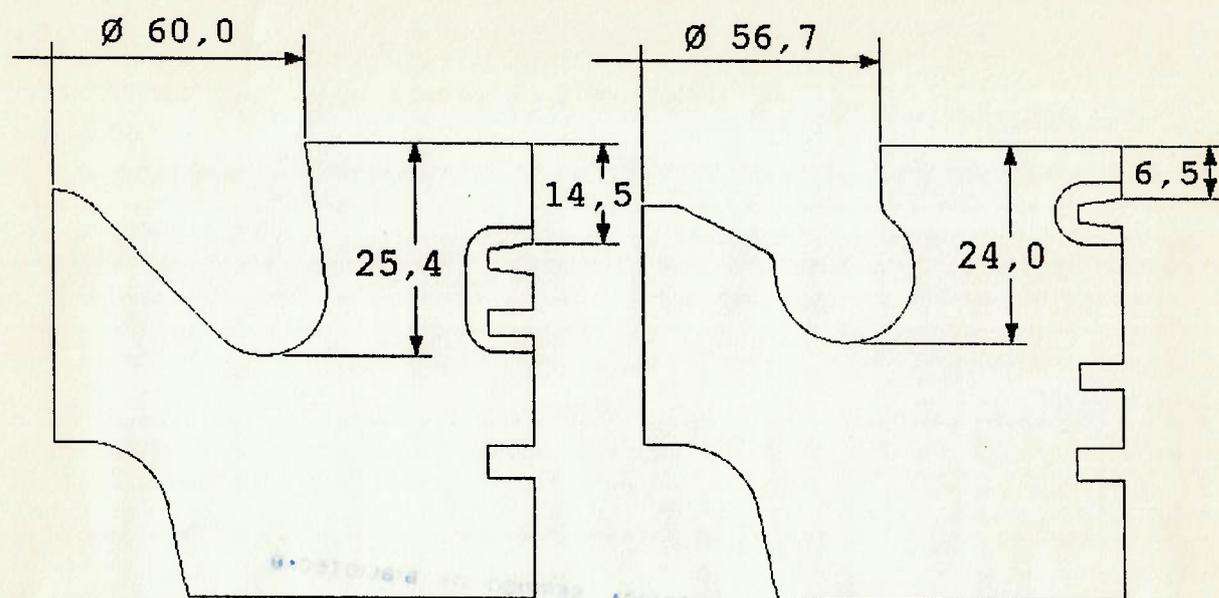
Ambas as modificações afetam diretamente o pistão, uma vez que o aumento de potência implica diretamente em um aumento de cargas e temperaturas sobre este e, uma modificação no sistema de combustão implica particularmente em modificações na geometria da câmara de combustão e posicionamento da 1ª canaleta. Esta última, deve ser posicionada o mais próximo possível do topo do pistão para que se possa reduzir o chamado "volume morto", o qual durante a combustão retém uma certa parcela da mistura ar-combustível que não é queimada ou, é parcialmente queimada (combustão incompleta), e que posteriormente é lançada diretamente à atmosfera, liberando então elementos nocivos à vida como  $\text{NO}_x$ , fuligem, etc.

As principais modificações nas características operacionais do motor são listadas na Tab.(6-1).

Tabela(6-1)- Principais modificações do motor e do pistão para atender as exigências do mercado e órgãos de proteção ambiental

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS	MOTOR ATUAL DE PRODUÇÃO	MOTOR MOD. PROPOSTO	UNIDADE
POTÊNCIA EFETIVA NO EIXO DE SAÍDA	205	250	kW
ROTAÇÃO	2200	2200	rpm
PRESSÃO MÁXIMA DE COMBUSTÃO	14.3	17.6	MPa
TAXA DE COMPRESSÃO	17:1	18:1	—
DIÂMETRO NOMINAL DO CILÍNDRIO	114.0	114.0	mm
DIST. 1ª CANALETA AO TOPO DO PISTÃO	14.5	6.5	mm
TIPO DE PORTA-ANEL	DUPLO	SIMPLES	—
TIPO DE CÂMARA DE COMBUSTÃO	SEMI-REENTRANTE	REENTRANTE	—

As principais alterações geométricas do pistão são mostradas na Fig.(6-7).



PISTÃO NORMAL DE PRODUÇÃO      PISTÃO MODIFICADO PROPOSTO

Fig. (6-7) - Principais modificações geométricas do pistão

Uma análise de distribuição de temperaturas 2D de elementos finitos, em regime permanente, foi então desenvolvida em caráter preliminar para a nova configuração do pistão, porém sem galeria de refrigeração, objetivando determinar-se o nível de temperaturas, resultante sobre este para a nova condição de operação. As condições de contorno de temperaturas e coeficientes de película, para a superfície do pistão, foram obtidas através de um simulador de ciclo termodinâmico para motores diesel. Estas informações estão listadas no Apêndice(3). Os resultados da análise acima descrita são apresentados na Fig. (6-8).

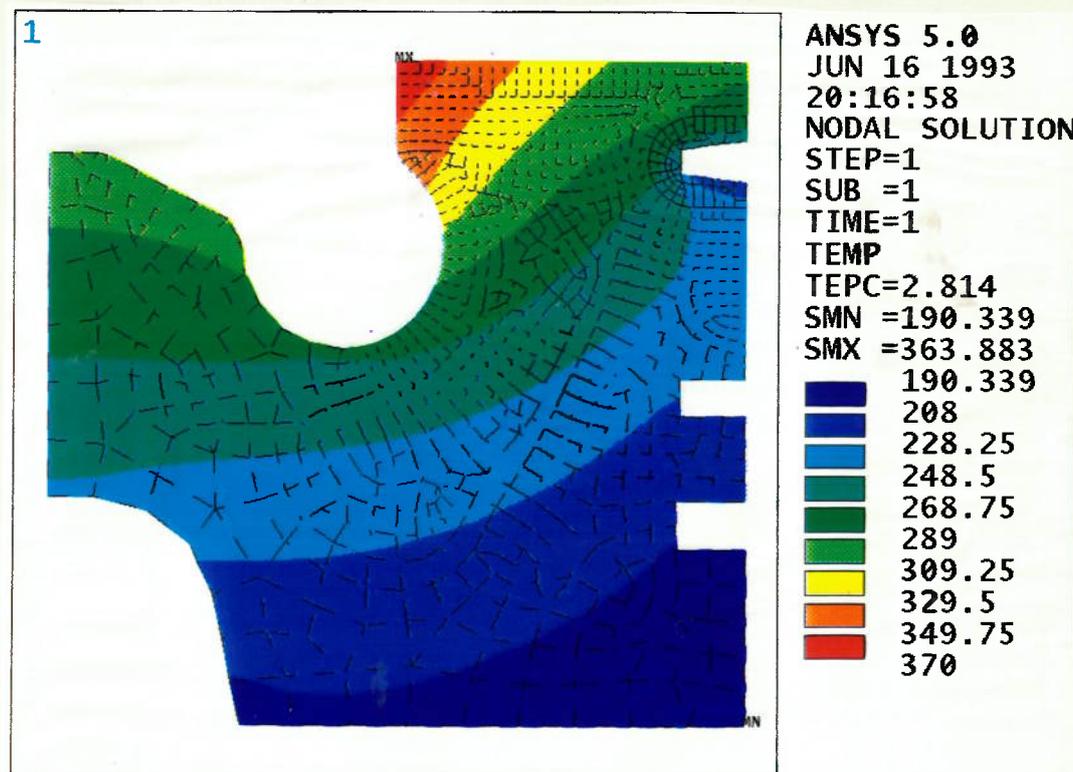


Fig. (6-8) - Distribuição de temperaturas em regime permanente para o pistão redesenhado submetido á nova condição de operação.

Através da análise da Fig. (6-8), observar-se temperaturas extremamente elevadas em regiões críticas como borda da câmara de combustão ( $\sim 370^{\circ}\text{C}$ ) e 1ª canaleta ( $\sim 246^{\circ}\text{C}$ ), as quais pelo anteriormente exposto, inviabilizam por completo a utilização deste pistão para a aplicação em questão.

Desta forma, através da utilização dos recursos de análise e otimização disponíveis no programa ANSYS<sup>r</sup>, já anteriormente discutidos, um sistema de refrigeração por

galeria de óleo é introduzido no pistão, de tal forma que as temperaturas deste possam ser reduzidas sem o comprometimento de sua integridade estrutural.

De acordo com especificações do fabricante do motor, um sistema de bombeamento do óleo de refrigeração será utilizado, sendo que através deste pode-se conseguir uma vazão de aproximadamente ( $\dot{V}_{OLIO} = 0.133$  l/seg) à rotação de potência máxima, conforme apresentado na tab.(6-1). Admitindo que a temperatura média do óleo na galeria seja da ordem de (115 °C), para a qual tem-se ( $DENS_{OLIO} = 0.95$  kg/l) e ( $CP_{OLIO} = 2.1 \times 10^3$  J/kg°C) e, que a máxima variação de temperatura deste não ultrapasse os ( $DELTA = 25$  °C), e ainda, que durante o funcionamento do motor a galeria tenha aproximadamente 60% de seu volume preenchido pelo óleo ( $F = 0.6$ ), podemos então determinar através da Eq.(6-6) que ( $QMAX = 633$  W/rad). As temperaturas médias máximas admissíveis para as superfícies da galeria de refrigeração e 1ª canaleta, seguem os limites estabelecidos pelas Eqs.(6-4) e (6-5).

O critério de falha baseado no diagrama de Goodman modificado, conforme exposto no item 6.2.3.3, é aqui utilizado para o cálculo dos coeficientes de segurança a fadiga mínimos, sobre a superfície da galeria, considerando-se as propriedades monotônicas do material  $SE(T)$ ,  $SY(T)$  e  $SU(T)$ , como funções explícitas da temperatura. Os valores mínimos de coeficientes de segurança a fadiga são estabelecidos pelas Eqs.(6-8) e (6-

9). A rotina utilizada para cálculo destes coeficientes encontra-se no Apêndice(4).

#### 6.4. A estratégia de otimização - Recomendações práticas.

Uma vez que o problema de otimização tenha sido formulado através da escolha das variáveis de projeto, da função objetivo e funções de restrição, torna-se importante definir uma estratégia de otimização, através da qual pode-se chegar o mais rápido possível à configuração final otimizada do projeto ("projeto ótimo"). É importante salientar que não existe uma metodologia que defina tal estratégia, uma vez que esta possui características totalmente dependentes do tipo de problema e do método de otimização empregado. Portanto, o sucesso de qualquer estratégia de otimização é um fator que depende sobretudo da experiência e do conhecimento do engenheiro ou analista na formulação e solução do problema em questão, e ainda, no uso eficiente do método de otimização adotado.

A estratégia aqui empregada, baseia-se em características peculiares da técnica de otimização implementada no programa ANSYS<sup>F</sup>, tendo sido estabelecida observando-se alguns aspectos práticos e teóricos do método em questão e, eventualmente algumas sugestões apresentadas no manual de utilização do programa (ver ref.[19]).

Como avaliação geral deste procedimento, verifica-se que algumas observações quanto ao uso desta técnica são

fundamentais para a solução deste e, de qualquer outro problema que utilize o método em questão. Tais observações consistem em:

(a) Caso seja necessário, o controle da forma geométrica da malha de elementos finitos ao longo do processo de otimização, deve ser feito através de uma "rotina de controle" que permita apenas a construção de configurações viáveis do ponto de vista geométrico. Isto significa, que somente configurações de projeto que não violem os limites do domínio de parametrização e que possibilitem a geração automática (paramétrica) da malha, sem comprometer a qualidade de seus elementos (distorsão, volume nulo, etc), serão definidas e posteriormente analisadas.

(b) A escolha de variáveis de projeto, funções de restrição e a própria função objetivo, deve ser conduzida de modo racional e lógico, observando-se a realidade física do problema sob análise.

(c) Apenas devem ser consideradas variáveis de projeto que efetivamente contribuam no processo de otimização. A utilização de um número muito grande de VPs pode conduzir, na maioria dos casos, a soluções locais do problema de otimização. No caso do programa ANSYS<sup>r</sup> o número ideal de VPs deve ser inferior a 10 e não superior a 20[19].

(d) A escolha das funções de restrição ou variáveis de estado deve ser feita criteriosamente de modo a definir limites realísticos ao problema para que estes possam suficientemente restringi-lo. Por exemplo, no caso do

problema de otimização da galeria de refrigeração aqui abordado, a escolha de um coeficiente de segurança mínimo global como restrição do projeto (i.e. o menor calculado para toda a superfície da galeria), ocasiona convergência muito lenta da solução, uma vez que este baseia-se na combinação de tensões máximas nesta mesma superfície e, que por sua vez podem mudar de posição de uma configuração para outra. Neste caso seria mais conveniente escolher-se algumas regiões chave do contorno, conforme mostrado na Fig.(6-9), e proceder-se ao cálculo setorizado dos coeficientes de segurança. Tal proposta será objeto de trabalhos futuros.

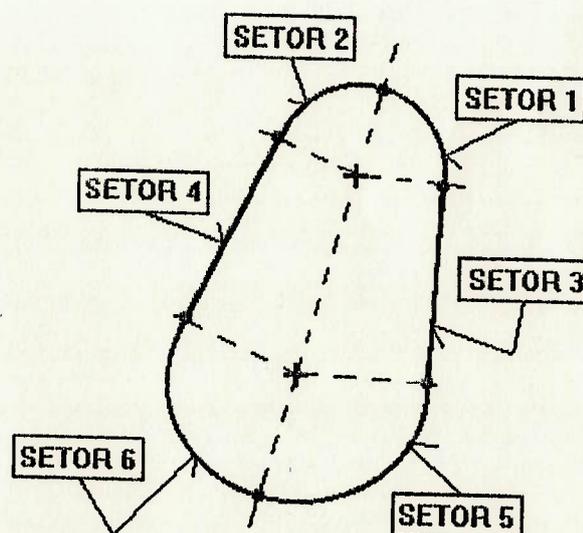


Fig. (6-9)- Proposta alternativa para restrição do projeto de uma galeria de refrigeração através do cálculo setorizado dos coeficientes de segurança a fadiga na superfície da mesma.

(e) Preferencialmente as funções de restrição devem ser, se possível, funções lineares ou quadráticas das variáveis de projeto, uma vez que as aproximações, tanto destas quanto da função objetivo, assumem uma destas formas.

(f) Os limites superior e inferior para as funções de restrição devem ser escolhidos cuidadosamente, uma vez que, em se escolhendo valores muito próximos ou muito distanciados para estes, pode-se aumentar a dificuldade de convergência do problema devido ao método de penalização utilizado; ver Eqs.(3-17) a (3-20). Recomenda-se portanto, apenas utilizar limites que tenham efetivamente algum significado físico para o problema.

#### 6.5. Determinação da configuração de projeto inicial.

De uma maneira geral, conforme já mencionado anteriormente nos Cap.(2) e (3), é importante que se inicie o processo de otimização a partir de uma configuração de projeto o mais próxima possível da configuração "ótima" procurada. Na realidade, dependendo da complexidade do problema esta tarefa pode tornar-se bastante difícil, sobretudo se este possuir um número muito grande de variáveis de projeto ( $>10$ ) e/ou funções de restrição muito complicadas, como por exemplo aquelas utilizadas neste exemplo. A título de ilustração, para o problema em questão, a escolha da configuração inicial de projeto pode

ser orientada com base em dois aspectos: a) experiência prévia adquirida em projetos similares de pistões com galeria e b) princípio térmico de funcionamento de uma galeria de refrigeração. Em outras palavras, a) observa-se normalmente galerias com formas oblongas ou elípticas ( $RCG1 = RCG2$ ), -por questões de simplicidade construtiva-, com inclinações que vão de aproximadamente  $45^\circ$  até  $90^\circ$  graus ( $45^\circ \leq ALFA \leq 90^\circ$ ), -para propiciar maior eficiência de arrefecimento do sistema (efeito coqueteleira<sup>[33]</sup>)-, b) localizadas o mais próximo da borda da câmara de combustão ou "fonte quente" ( $PCWX \cong \overline{PCWX}$ ,  $PCWY \cong \overline{PCWY}$ ) e, com maior área de troca de calor possível ( $RCG1 \cong \overline{RCG1}$  ;  $RCG2 \cong \overline{RCG2}$  ;  $DCRG \cong \overline{DCRG}$ ).

Com base no exposto acima e, considerando-se as dimensões físicas reais do pistão do exemplo, podemos então calcular as dimensões do domínio de parametrização apresentado na Fig.(6-4) e conseqüentemente estabelecer os limites superior e inferior para cada uma das variáveis de projeto, conforme mostrado na Figs.(6-2). Estes limites devem ser escolhidos cuidadosamente obedecendo as recomendações apresentadas no item 6.4. Finalmente o vetor  $\vec{x}^0$ , que defini a primeira configuração de projeto, pode ser determinado. A Tab.(6-2) apresenta os valores numéricos atribuídos aos limites e tolerâncias referentes á cada uma das variáveis (VP, VE e OBJ), juntamente com a configuração inicial de projeto  $\vec{x}^0$  adotada para o exemplo.

Tabela(6-2)- Valores numéricos atribuídos aos limites das variáveis do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração e o vetor inicial de projeto  $\bar{x}^0$ .

NOME DA VARIÁVEL	TIPO	LIMITE INFERIOR	LIMITE SUPERIOR	TOLER.	VALOR INICIAL
PCWX	VP	37.3	44.0	0.1	37.80 mm
PCWY	VP	45.82	73.82	0.1	70.82 mm
RCG1	VP	3.0	6.0	0.1	3.5 mm
RCG2	VP	3.0	6.0	0.1	3.5 mm
DCRG	VP	3.0	6.0	0.1	5.0 mm
ALFA	VP	45	90	0.5	90.00 deg
TMSG	VE	0.0	230.0	1.0	°C
TMSC	VE	0.0	230.0	1.0	°C
QGAL	VE	0.0	633.0	5.0	W/rad
FFY	VE	1.8	10.0	0.01	-----
FFH	VE	1.8	14.0	0.01	-----
TOBJ	OBJ	---	---	0.1	°C

Vale lembrar que a viabilidade do projeto inicial é um requisito desejável, porém não imprescindível, uma vez que uma escolha adequada deste pode acelerar significativamente a convergência do problema.

Uma outra forma, é fornecer não apenas uma configuração mas um número  $k$  inicial de configurações, tomando-se como base aspectos do projeto associados às VPs e seus respectivos limites. Para o caso particular do exemplo, pode-se considerar aspectos referentes a galeria de refrigeração tais como: posição ( $PCWX, PCWY$ ), tamanho

associado a forma  $(RCG1, RCG2, DCRG)$  e inclinação  $(ALFA)$ . Consequentemente gera-se uma série de configurações através de combinações dos três aspectos acima levantados, onde cada conjunto de VPs é utilizado, ora no seu limite máximo ora no mínimo, e portanto  $(k=8)$ . Isto permite ao usuário conhecer melhor o espaço de projeto ou domínio de parametrização, possibilitando inclusive identificar regiões em que possam existir pontos de mínimo locais. Alternativamente, é interessante que o usuário, com base na sua experiência, forneça uma ou mais configurações de projeto e, vá analisando-as seqüencialmente, uma a uma ou em conjunto, de tal forma que possa ir adquirindo sensibilidade e conhecimento sobre os limites do projeto. Posteriormente, o comando pode ser transferido ao próprio programa. Este último procedimento é o mais recomendado embora não tenha sido aqui utilizado.

#### 6.6. Resultados numéricos.

A convergência final do problema foi obtida após 7 ciclos de projeto (análise e otimização), perfazendo um total de 249 iterações, correspondentes a aproximadamente 50 horas de "elapsed time", rodando em uma DECStation modelo 5000/200 com 24Mb de memória real 1.2Gb de disco rígido e aprox. 27MIPS. A configuração inicial utilizada foi tomada com base na primeira alternativa apresentada no item 6.5 .O processo de convergência da solução foi

conduzido interativamente através da observação de configurações de galerias, resultantes ao final de cada ciclo de projeto, manipulando-se então parâmetros de ajuste e controle de convergência existentes no próprio programa, além dos limites das variáveis (VPs e SVs). Durante a solução foram observados aspectos tais como: viabilidade do projeto, valor da função objetivo resultante, tipo de aproximações utilizadas para FO e SVs, limites superiores e inferiores para as VPs e SVs, assim como as respectivas tolerâncias estabelecidas para convergência.

A Tab.(6-3) apresenta um histórico resumido do ciclo completo de projeto e análise, mostrando o número de iterações e os valores da função objetivo obtidos ao final de cada ciclo, até a convergência final do problema.

Tabela (6-3)- Histórico do processo de otimização de um pistão com galeria de refrigeração.

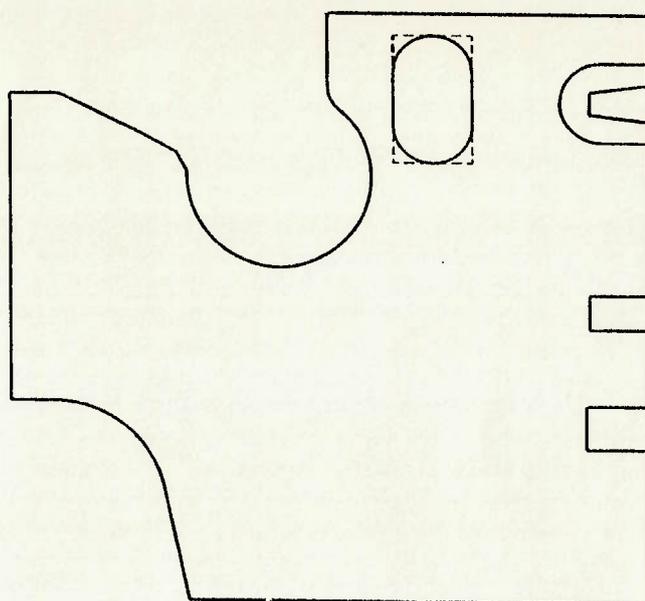
NÚMERO DO CICLO DE PROJETO	NÚMERO DE ITERAÇÕES	TEMPO TOTAL DO CICLO [seg]	VALOR DA FUNÇÃO OBJ [°C]	STATUS DA CONFIG. FINAL
①	33	19901	331.9	VIÁVEL
②	31	18231	333.1	VIÁVEL
③	33	23352	327.6	VIÁVEL
④	11	9026	327.3	VIÁVEL
⑤	87	68675	323.5	VIÁVEL
⑥	44	35720	320.7	INVIÁVEL
⑦	10	6993	323.4*	VIÁVEL
TOTAL	249	181898	323.4	VIÁVEL

\* Valor Ótimo

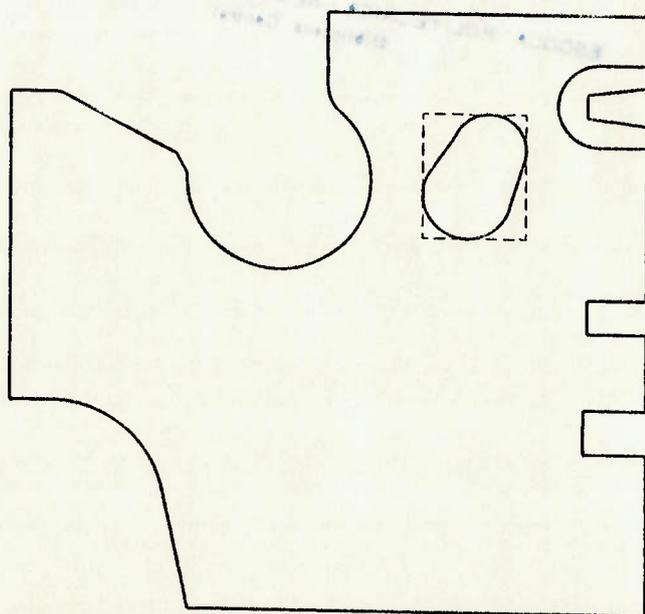
Na Tab.(6-4) são apresentados os valores de todas as variáveis do problema e da função objetivo para os vetores  $\bar{x}^0$  e  $\bar{x}^{249}$ , correspondentes aos projetos inicial e final (otimizado). As geometrias correspondentes às configurações de projeto analisadas na Tab.(6.4) são mostradas nas Figs.(6-10a) e (6-10b) respectivamente.

Tabela (6-4)- Valores exatos das variáveis do problema de otimização de um pistão com galeria de refrigeração resultantes para as configurações inicial  $\bar{x}^0$  e final otimizada  $\bar{x}^{249}$ .

VARIÁVEIS DE PROJETO	CONFIGURAÇÃO INICIAL	CONFIGURAÇÃO FINAL	UNIDADE
PCWX	37.80	41.60	mm
PCWY	70.82	64.00	mm
RCG1	3.5	3.3	mm
RCG2	3.5	4.0	mm
DCRG	5.0	4.6	mm
ALFA	90.00	64.70	mm
<b>VARIÁVEIS DE ESTADO</b>			
TMSG	240.52	221.94	oC
TMSC	204.55	211.74	oC
QGAL	425.82	323.49	W/rad
FFT	0.00	1.86	----
FFH	3.45	10.00	----
<b>FUNÇÃO OBJETIVO</b>			
TOBJ	307.09	323.40	oC



- (a) -



- (b) -

Fig. (6-10) - a) Geometria da configuração de projeto inicial  $\bar{x}^0$  e b) geometria da configuração final otimizada  $\bar{x}^{249}$ .

O resultado particularmente obtido no exemplo apresentado, pode ser considerado bastante satisfatório, pois permite uma redução de aproximadamente  $47^{\circ}\text{C}$  da temperatura máxima do pistão (borda da câmara), ao passo que através de um procedimento convencional de projeto, normalmente observa-se reduções de temperatura da ordem de  $25^{\circ}\text{C}$  até no máximo  $35^{\circ}\text{C}$ , em uma ou duas tentativas (configurações) de projeto.

Este resultado pode ser ainda substancialmente melhorado se utilizarmos valores de coeficientes de película para a galeria como função de sua forma e alguns outros parâmetros (posição, vazão de óleo, etc). Tais considerações encontram-se em fase de estudo e serão objeto de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO (7) : CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES.

Através do exemplo apresentado no Cap.(6), pode-se verificar o grande potencial e viabilidade de implementação e uso de Técnicas de Otimização em conjunto com o Método dos Elementos Finitos, sobretudo no sentido de propiciar a integração racional dos ciclos de projeto e análise e, também reduzir os custos e tempos de desenvolvimento. É muito importante ressaltar, que o uso de métodos de otimização, de certa forma, sempre propiciam alguma melhoria ao projeto, contudo, o maior desafio é estabelecer-se os limites técnicos (escolha de um método eficiente e eficaz) e financeiros (relação custo/benefício), para que tal empreendimento possa ser viável e competitivo dentro do contexto industrial.

Alguns aspectos importantes podem ser utilizados para se orientar um estudo de viabilidade técnica e econômica deste tipo de ferramenta, de modo a reduzirem-se as chances de desapontamento e insucesso. Tais aspectos são basicamente fundamentados em:

(a) Conhecimento prévio do produto no que diz respeito aos processos físicos, operacionais e produtivos relacionados a este, ou seja, é importante que se conheça todo o processo de desenvolvimento do produto, desde o seu nascimento até a sua aprovação pelo cliente, seu funcionamento, tipos e magnitude de esforços atuantes, as características dos materiais e processos empregados, etc.

(b) Identificação de etapas mais críticas do processo de desenvolvimento do produto, buscando relacioná-las a aspectos como: tempo de resposta, custo de desenvolvimento, valor agregado ao produto, estratégia mercadológica, etc, de tal forma que seja justificável a adoção desta tecnologia e, todos os riscos que dela advenham, para que se possa atingir a melhoria desejada do produto.

(c) Escolha, disponibilidade ou desenvolvimento (não recomendado no contexto industrial) de um programa de elementos finitos, dotado ou não de um pré-processador (gerador de malhas), -o qual pode também ser considerado separadamente-, capazes de fornecerem malhas e resultados quantitativa e qualitativamente confiáveis do ponto de vista numérico e físico. É também fundamental que estes programas tenham um interfaceamento amigável, e que possibilitem a geração automática e paramétrica de malhas (modificação automática da geometria do modelo), além da manipulação e tratamento dos resultados de análise, independentemente do método de otimização escolhido.

(d) Escolha, disponibilidade ou desenvolvimento de um programa de otimização que utilize uma técnica o mais adequada possível ao problema que se quer otimizar. Neste caso é imprescindível que se tenha uma visão geral dos métodos de otimização existentes e suas limitações [ver referências 1, 2, 3, 4 e Cap.(2)]. Por exemplo, técnicas mais elaboradas, como aquelas utilizadas em otimização de forma, operam com grande eficiência e precisão, porém têm campo de aplicação muito restrito (redução de peso) e

possuem grande dificuldade de implementação (i.e. necessitam que o código fonte do programa de elementos finitos esteja disponível). De outro lado, técnicas que se baseiam em métodos de aproximação, -como no programa ANSYS<sup>r</sup>-, embora sejam menos precisas e necessitem de um interfaceamento mais elaborado, podem oferecer vantagens quanto a sua versatilidade de aplicação e facilidade de implementação.

(e) Integração total entre os grupos de projeto, análise e manufatura, uma vez que o fluxo de informações, a experiência e o conhecimento humanos, por parte de cada um dos setores envolvidos direta ou indiretamente no processo de produção/otimização de qualquer produto, são imprescindíveis à consecução destes objetivos.

Independente da utilização do método de otimização em si, o fato de se poder integrar as etapas de projeto e análise, permite por si só, agilizar o ciclo de desenvolvimento do produto e aprimorar a sensibilidade do projetista para a busca de melhores alternativas de projeto.

A metodologia de projeto apresentada no Cap.(6) é o estágio embrionário de um sistema mais complexo e sofisticado em desenvolvimento no centro de pesquisas da Metal Leve S.A em São Paulo, o qual destina-se ao projeto de galerias de refrigeração de pistões utilizados em motores diesel. A idéia central é desenvolver-se um sistema de projeto e análise computadorizado integrado, utilizando-se a base da tecnologia apresentada neste trabalho e

recursos de análise e otimização disponíveis no programa ANSYS<sup>r</sup>, através dos quais pode-se chegar a um projeto de galeria de refrigeração melhorado. A grande vantagem é que através desta tecnologia, conforme já mencionado, pode-se dispor de critérios de dimensionamento e restrições de projeto com fundamentação científica, mais elaborados e precisos, capazes de conduzirem a soluções de projeto otimizadas e, em ciclos de desenvolvimento do produto sensivelmente mais curtos.

Uma vez que se disponha do modelo de elementos finitos, dos critérios de dimensionamento, rotinas de controle de forma e interfaceamento com o usuário, devidamente ajustados e implementados, é possível na fase de desenvolvimento do produto, reduzir-se o tempo de projeto de um pistão com galeria de refrigeração, de alguns meses (4 meses) para apenas algumas semanas (2 semanas), reduzindo-se ainda sensivelmente os custos de fabricação, prototipagem e testes de motores em dinamômetro.

Alguns aprimoramentos importantes estão sendo introduzidos no sistema de modo a torná-lo mais eficiente e inteligente. Alguns destes aprimoramentos são:

(a) Incorporação de rotinas de controle inteligentes, as quais permitirão a geração de formas de galeria mais elaboradas e eficientes do ponto de vista térmico e estrutural.

(b) Dentro desta lógica de controle, será também incorporado o cálculo setorizado de temperaturas e coeficientes de segurança na superfície da galeria, de modo

a tornar mais rápido o processo de convergência do problema de otimização.

(c) Outro aspecto é a possibilidade de substituir-se a parte interativa com o usuário por um sistema especialista, capaz por sua vez, de tomar decisões ao longo do processo de otimização sem intervenção direta deste.

(d) Em estágios futuros, existirá a necessidade de acoplar-se um modelo matemático para determinação do coeficiente de película na superfície da galeria de refrigeração, uma vez que este demonstrou ser um fator importante a ser considerado ao longo do ciclo de otimização, em função de sua sensível influência sobre o cálculo de temperaturas e, conseqüentemente tensões, atuantes sobre o pistão. Um trabalho, exatamente com este propósito, porém mais abrangente, encontra-se em desenvolvimento na presente data, por um aluno de mestrado deste departamento e, poderá brevemente ser incorporado a este sistema de otimização de galerias.

(e) Módulo interativo para ajuste e calibração do modelo mecânico 2D do pistão, com simetria axial, para tornar a resposta da estrutura á solicitação de carga mecânica o mais próxima possível da estrutura 3D (o apoio da secção 2D analisada não é axialmente simétrico).

(f) Embora originalmente desenvolvido em plataforma DIGITAL (DecStation 5000/200), o sistema poderá ser utilizado em rede de microcomputadores (PC-386/486) rodando em ambiente WINDOWS.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] Vanderplaats, G. N. "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", McGraw-Hill, New York, 1984.
- [2] Himmelblau, D. M., "Applied Nonlinear Programming", McGraw-Hill, 1972, New York.
- [3] Luenberger, D. G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, 1973, MA.
- [4] Daniels, R. W., "An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques", Elsevier North-Holland, Inc., New York, 1978.
- [5] Powell, M. J. D., "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables Without Calculating Derivatives", Computer J., Vol.7, n° 4, pp. 155-162, 1964.
- [6] Fletcher, R. and Reeves, C. M., "Function Minimization by Conjugate Gradients", Computer J., Vol. 7, n° 4, pp. 149-154, 1964.
- [7] Liefoghe, D. and Fleury, C. "An Interactive Capability for Shape Optimal Design", Finite Elements in Analysis and Design, 1989, pp. 39-55, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.
- [8] Yang, R. J., "Component Shape Optimization Using Bem", Computers & Structures, Vol. 37, n° 4, pp. 561-568, 1990 - MI.
- [9] Sandgren E., Lee-H. and Sayed-El, "Optimal Design of Mechanical Components With Sizing, Configurational and Topological Consideration" Presented at the 1989 ASME Design Technical Conferences 15th Design Automation Conference - ASME, 1989, New York - NY, pp. 101-110.
- [10] Morris, A. J. "Structural Optimisation Programs and Methods", Second International Symposium on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Bonn , West Ger, pp. 393-406, 1985.
- [11] Sobieski, J. S. and Bhat, R. B., "Adaptable Structural Synthesis Using Advanced Analysis and Optimization Coupled by a Computer Operating System", Journal of Aircraft, V. 18, n° 2, Feb. 1981, pp. 142-149.

[12] Gallagher, R. H, "Computation and Its Role in the Unification of Design", Finite Elements in Analysis and Design, 1986, pp.99-117, North Holland, MA.

[13] Kumar, V., Lee, S. J. and German M. D. "Finite Element Design Sensitivity Analysis and Its Integration with Numerical Optimization Techniques for Structural Design", Computers & Structures, Vol.32, n° 3/4, pp. 883-897, Maxwell Pergamon Macmillon - N.Y.

[14] Arora, J. S., "Analysis of Optimality Criteria and Gradient Projection Methods for Optimal Structural Design", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 23, pp. 185-213 North-Holland Publishing, 1980.

[15] Rajan, S. D., "A Hibrid Nonlinear Programming Method for Design Optimization", Journal of Structural Mechanics, V. 14, n° 4, pp. 455-474, 1986.

[16] Kohnke, P.C., "Ansys Theoretical Manual at Rev, 4.4.A", Chap. 7, Swanson Analysis Sistem, Inc., Houston, P.A., 1989.

[17] Imgrund, M. C., "Design Improvements Using Finite Elements & Optimizing with Approximate Functions", Proc. ASCE 9th Conference on Eletronic Computation, Birmingham, Alabama, february, 1986, pp. 507-718.

[18] - Beazley, P.K., "Design Optimization, ANSYSr revision 4.3. Seminar Notes", Swanson Analysis System, Inc., august 21, 1987.

[19] Desalvo, G.J., and Gorman, R.W., "Ansys User's Manual", Rev.4.4, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, P.A., 1989.

[20] Beazley, P.K., "Design Optimization, ANSYSr revision 4.3 Tutorials", Swanson Analysis Systems, Inc., march 30, 1987.

[21] Swanson, J.A., and Batt, S.C., "Design Optimization", Machine Desing Magazine, 1986.

[22] Imgrund, M.C., "Using The Approximate Optimization Algorithm in the ANSYSr Program for the Solution of Optimum Convective Surfaces and other Thermal Design Problem", Swanson Analysis Systems, Inc., "Fifth International Conference on Thermal Problems", Montreal, Canadá, 1986.

[23] Imgrund, M. C. and Wheeler, M. J. "Reducing Design Costs by Integrating Finite Element and Optimization Techniques", Proc. 1986 ASME Spring National Design Show, March, 1986, pp. 79-92.

[24] Beazley, P. and Solecki, J. "Exploring Design Optimization", ANSYS News, Swanson Analysis Systems, Inc., 1988, First Issue.

[25] Urbani, O.F. and Feijóo, R.A., "Design Optimization of an Oil Cooled Gallery Piston for a Diesel Engine", Presented at 4th ANSYS Conference and Technology, Pittsburgh, 1991.

[26] Maison, J.R., "Optimization as a Design Tool for Ocean Engineering", Presented at the Tenth Annual Energy - Sources Technology Conference and Exhibition, ASME, N.Y., pp. 131-141, 1987.

[27] Urbani, O.F. - Dutenhefner, C. and Feijóo, R. A., "Design Optimization of an Oil Cooled Aluminum Gallery Piston for Diesel Engine", 2° Simposiun on Piston Technology - Metal Leve - 1990.

[28] Motz, D. S. and Haghghi, K. "An Integrated Approach to Knowledge - Aided Design and Optimization of Mechanical Springs", Transactions of the ASAE, V. 33, n° 5, Sep-Oct., 1990, pp. 1729-1735.

[29] Rouse, N.E., "Design Optimization Goes Commercial", Machine Design, Cleveland, V. 58, n° 25 Oct. 23 - 1986, pp.84-87.

[30] Solecki, J. and Beazley, P. "ANSYS Finite Element Analysis Design Optimization Series - Reprinted from ANSYS News. - Swanson Analysis Systems, Inc., 1989.

[31] Laboratório de Computação Científica, "Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento, Formação de Recursos Humanos e Cooperação Internacional", L.C.C., Rio de Janeiro.

[32] Wunsche, P. and Herzog, P., "The Design of a Truck Engine to Meet Current and Future Requirements", A.V.L. list Gmbh, to be presented at the 5th "International Pacific Conference", China, 1989.

[33] Evans, G.A. and Hay, N. "Heat Transfer Model for the Cocktail Shaker Piston", 13th International Congress on Combustion Engines", Viena, 1979.

- [34] Zienckiewicz, O. C. "The Finite Element Method", (3rd Expanded and Revised Edition of the Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill Book Co., Ule, 1977.
- [35] Hwebner, K. H., and Thornton, E. A., "The Finite Element Method for Engineer", John Willey Sons, Inc., NY, 1982.
- [36] Desai, C. S. and Abel, J. F., "Introduction to the Finite Element Melhod", Van Nostrand Reinhold, Co., NY, 1972.
- [37] Moura, A.C., Kubrusly, R. S. & Kritz, M.V., "Elementos Finitos e Aplicações à Mecânica dos Fluidos", Vol. I, Laboratório de Computação Científica, Rio de Janeiro, 1984.
- [38] Martin, H. C. and Carey, G. F., "Introduction to Finite Element Analysis - Theory and Application", McGraw-Hill Book, Co., NY, 1973.
- [39] Feijóo, R. A., "Introduccion al Metodo de los Elementos Finitos", Laboratório de Computação Científica/CNPq, Rio de Janeiro, 1981.
- [40] Brebbia, C. A. and Connor, J. J., "Fundamentals of Finite Element Techniques", Butterworth & Co., London, 1973.
- [41] Bath, J. J. and Wilson, E.L., "Numerical methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [42] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", third edition, McGraw-Hill Book, Co., NY, 1970.
- [43] Kohnke, P. C., "ANSYS Theoretical Manual at Rev. 4.4A", Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA, 1985, pp. 2.42 (1-20).
- [44] Urbani, O. F., Braguim, J. R., Andrade, J. E. Le Paiva, D. S., "Análise de Estruturas com Simetria Axial Submetidas a Carregamentos Axialmente Simétricos, pelo Método dos Elementos Finitos - 1ª Parte", Depto. de Estruturas, EPUSP, SP., 1987.
- [45] Esteves, A. M., Fainguelernt, D., Cabral, C.M.D.A.C., Maluf, J. G., "Elementos Finitos Isoparamétricos", Depto. de Estruturas, EPUSP, SP., 1987.

- [46] Vuckovich, D. C., "Substructuring in ANSYS", Seminar Notes, Printed at Defiance, Inc., Troy, MI, 1990.
- [47] Swanson Analysis Systems, Inc., "ANSYS Substructuring and submodels Seminar for Rev. 4.3", SASI, Houston, PA, 1989.
- [48] Johson, D., "Substructuring - Additional Notes at Rev. 4.4", SASI, Houston, PA, 1990.
- [49] Zienckiewicz, O. C., "The Finite Element Method", 1st edition, chapter 4, pp. 46-61, McGraw-Hill Book, Co., NY, 1970.
- [50] Wilson, L. E., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", AIAA Journal, Vol. 3, NO. 12, DEC, 1965.
- [51] Hildebrand, F. B., "Advanced Calculus for Engineers", Printice-Hall, Inc., New Jersey, 1956.
- [52] Spiegel, M. R., "Advanced Mathematics for Engineers and Scientists", McGraw-Hill Book, Co., NY, 1971.
- [53] Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, Inc., NY, 1969.
- [54] Rao, S.S., and Rao, S.S.S., "Optimum Design of an I. C. Engine Piston", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 106, pp. 209-213, June, 1984.
- [55] Clemente, M., "Degradação do Óleo Lubrificante - Pistão Articulado X Pistão de Alumínio", Relatório Técnico, Metal Leve S.A. Ind. e Com., 1988.
- [56] Urbani, O. e Rebello J. R., "Projeto de Galeria de Refrigeração para Pistões Diesel utilizando a Técnica de Fotoelasticidade e o Método dos Elementos Finitos", IV SIMEA, São Paulo, NOV, 1991.
- [57] Shigley, E. Joseph e Mitchell, D. Larry, "Mechanical Engineering Design", 4<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill Book, Co, NY, 1983.
- [58] Fatigue Design Handbook: A Guide for Product Design and Development Engineers, SAE, 1968, Vol.4.

APÊNDICE I

"FLUXOGRAMA DE OPERAÇÃO DA ROTINA DE OTIMIZAÇÃO  
DISPONÍVEL NO PROGRAMA ANSYS<sup>®</sup> REV.5.0"

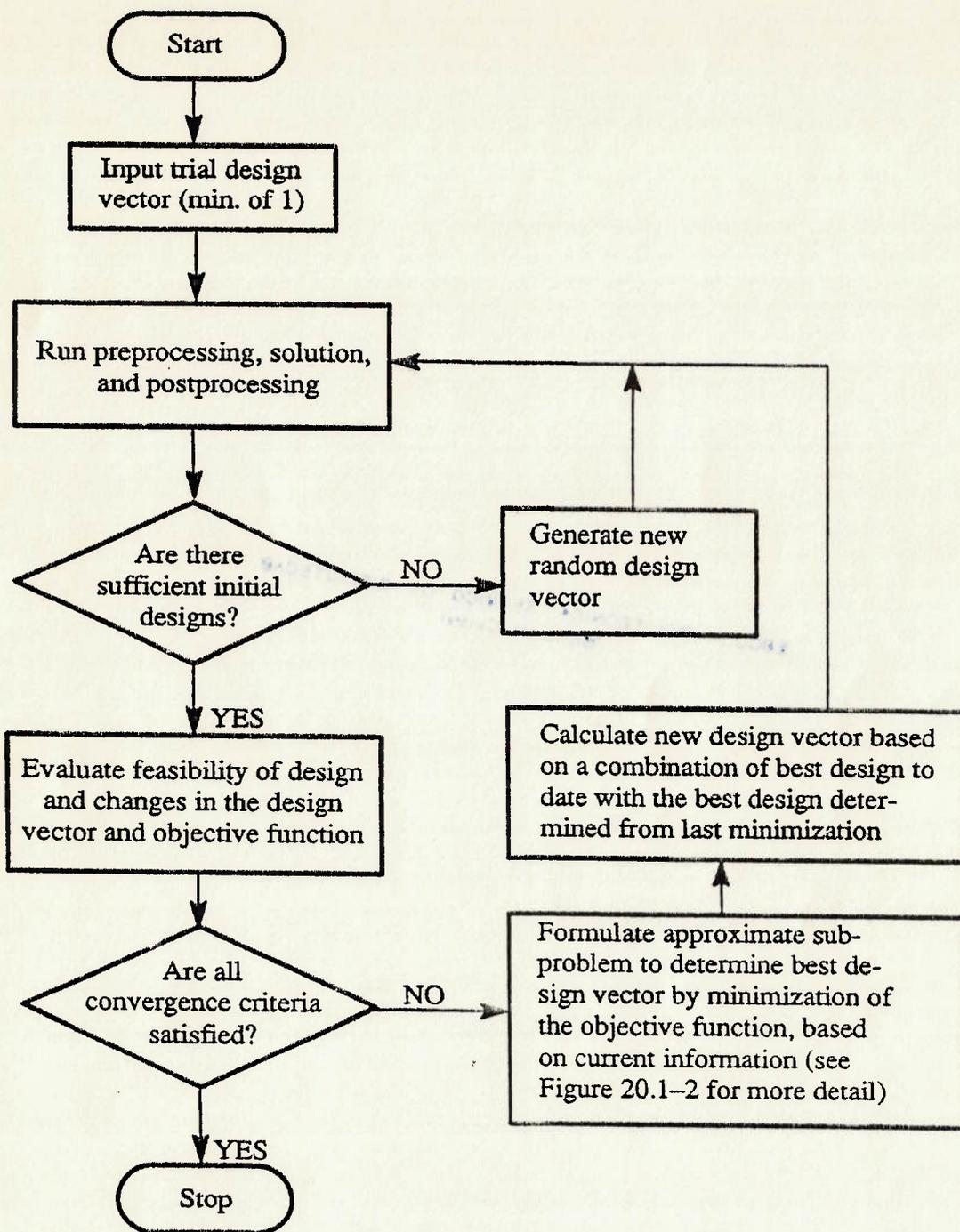


Figure 20.1-1 Optimization Flow Chart

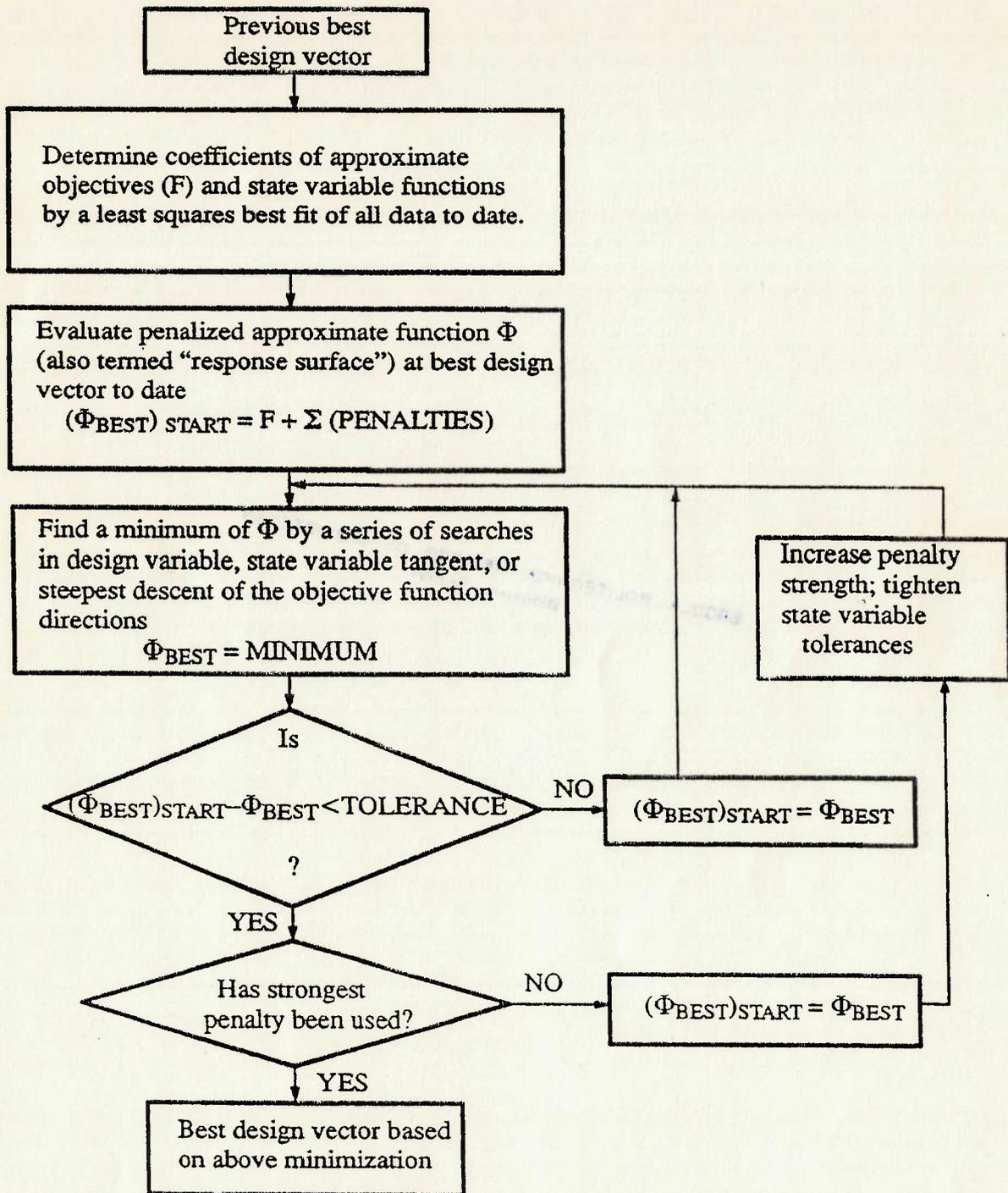


Figure 20.1-2 Approximate Subproblem

## APÊNDICE II

"ROTINA PARA CONTROLE DE FORMA E POSICIONAMENTO DA GALERIA  
DE REFRIGERAÇÃO DO EXEMPLO NUMÉRICO APRESENTADO NO CAP. (6)"

(Elaborada em linguagem de programação APDL, disponível no  
programa ANSYS<sup>®</sup> REV.5.0)











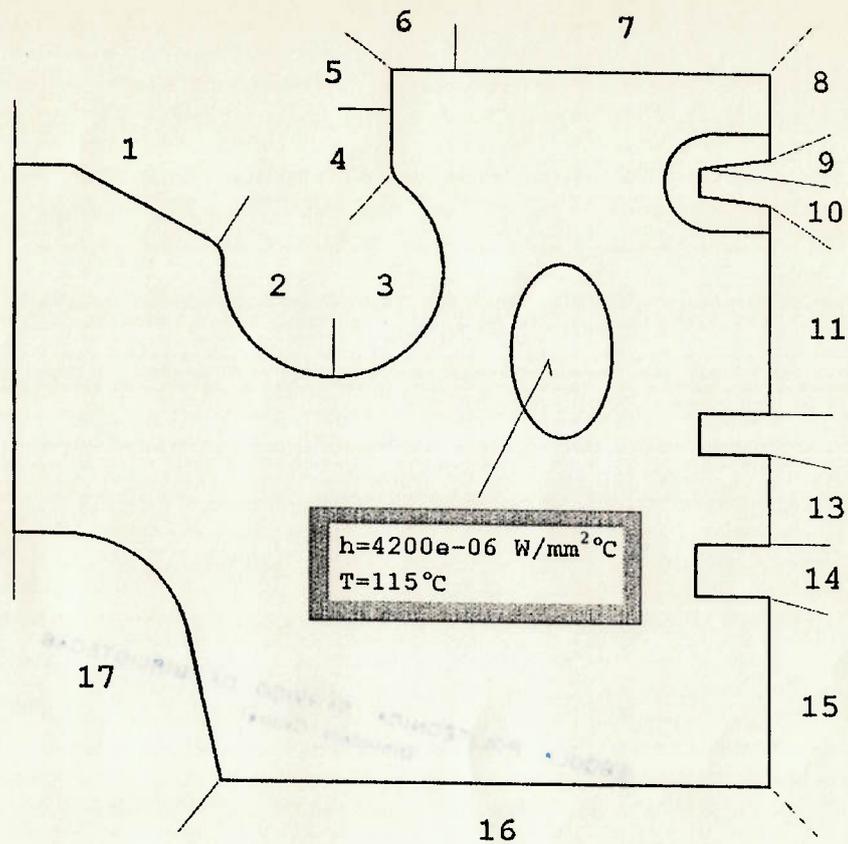




### APÊNDICE III

"CONDIÇÕES DE CONTORNO TÉRMICAS UTILIZADAS PARA A  
ANÁLISE DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS DO PISTÃO DO  
EXEMPLO DO CAP. (6) "

(Obtidas através de um simulador de ciclo termodinâmico  
para motor diesel - MLCYCLE<sup>r</sup>)



REGION	$h$ [W/mm <sup>2</sup> °C]	$T$ [°C]
1	0.40 * hm	Tg
2	0.70 * hm	Tg
3	1.20 * hm	Tg
4	1.25 * hm	Tg
5	1.20 * hm	Tg
6	1.12 * hm	Tg
7	0.75 * hm	Tg
8	600 E-06	160
9	5000 E-06	160
10	9000 E-06	160
11	600 E-06	140
12	2750 E-06	140
13	600 E-06	130
14	1250 E-06	130
15	600 E-06	120
16	2470 E-06	120
17	1000 E-06	120

	FULL LOAD	NO LOAD
hm [w/mm <sup>2</sup> °C]	795.1 E-06	309.1 E-06
Tg [°C]	962.6	532.2

## APÊNDICE IV

"ROTINA PARA CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE SEGURANÇA A  
FADIGA DEVIDO ÀS TENSÕES DE ORIGEM TÉRMICA E MECÂNICA  
ATUANTES NA SUPERFÍCIE DA GALERIA DE REFRIGERAÇÃO DO PISTÃO  
DO EXEMPLO DO CAP. (6) "

(Elaborada em linguagem de programação APDL, disponível no  
programa ANSYS<sup>®</sup> REV.5.0)





