

D.A. 20.09.88

EDSON MARCONI

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA DO SISTEMA  
DE MANCAL DE ESCORA DOS HIDROGERADORES

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da USP  
para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia  
Mecânica.

CONSULTA  
FD-949

São Paulo, 1988

fd 949

EDSON MARCONI

Eng. Mecânico, Escola Politécnica da USP, 1982

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA DO SISTEMA  
DE MANCAL DE ESCORA DOS HIDROGERADORES

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da USP  
para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia  
Mecânica.

Orientador: Prof.Dr. José Sotelo Jr., Depto.Eng. Mecânica

São Paulo, 1988

## Agradecimentos

O autor deseja agradecer

ao Dr. José Sotelo Jr., pelo apoio, dedicação e orientação em todos os passos da pesquisa;

aos engenheiros Marco Saltara e Klaus Fiesenig da ABB (Asea Brown Boveri), pelo apoio à pesquisa;

ao estudante de Física Alberto V. Saa, pela colaboração no desenvolvimento de programas para manipulação de arquivos do IBM e micro PC;

aos projetistas José R. Guastaferrro e Tomio Konatu, pela elaboração dos desenhos;

à historiadora Rosana G. Marconi, pela revisão gramatical e ajuda na datilografia;

e a todos amigos da ABB que, direta ou indiretamente, colaboraram na elaboração deste trabalho.

À Rosana e ao Vinícius

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da estabilidade dinâmica do / sistema de sustentação do conjunto girante de um hidrogenador, / através de mancal de escora com lubrificação forçada.

Utilizando modelos matemáticos, que envolvem sistemas não-lineares de alta ordem, foi possível detectar a existência do fenômeno de ciclo-limite. Como principal hipótese simplificadora da análise aponta-se a incompressibilidade do fluido.

Os parâmetros da máquina da usina de Itaipu serviram de base para a análise dos limites de ocorrência de ciclo-limite com a alteração das principais variáveis.

Além disso, inclui-se os resultados da aplicação da técnica de / "Dither Injection" para a atenuação da amplitude de vibração, / como solução de fácil aplicabilidade no convívio com o problema.

## ABSTRACT

This work presents a dynamic stability study of the supporting / system of the rotating parts of a hidrogenator. This system / consists of a thrust bearing with forced lubrication.

Using mathematical models, that involve high order nonlinear / systems, it was possible to detect the existence of the cycle - / limit phenomenon. The incompressibility of the fluid is the / main assumption to simplify the analysis.

The parameters from the machine of Itaipu power plant were used as a basis to analyse the cycle-limit problem while changing / its main variables.

Besides, it was included the Dither Injection techniques results to attenuate the amplitude of vibration. This solution is easily applicable and can deal with the problem.

## ÍNDICE

	pág.
NOMENCLATURA E NOTAÇÃO	1
1. INTRODUÇÃO	8
2. APRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO E PRINCIPAIS HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	12
2.1. Hidrogeradores de Itaipu	12
2.2. Modelos Básicos para o estudo	15
3. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ESTABILIDADE	18
3.1. Introdução	18
3.2. Modelo do Sistema para Movimento Verti <u>cal</u> do Rotor (um grau de liberdade)	18
3.3. Critério da Estabilidade de Routh-Hur- witz	22
3.4. Aplicação do Critério de Routh-Hurwitz	24
3.5. Conclusão	28
4. ESTUDO DO MANCAL ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LI- NEAR	29
4.1. Introdução	29
4.2. Modelos Não-Lineares Estudados	31
4.3. Fluxo Através de uma Ranhura	31
4.4. Modelo I: Rotor, Filme de Óleo e Vazão Constante	34
4.5. Modelo II: Análise da Fonte de Vazão Não-Ideal	48
4.6. Modelo III: Análise da influência da <u>E</u> lasticidade da Cruzeta	53

4.6.1. Modulação da Resistência Hidráulica $R_2$	59
4.6.2. Resultados Obtidos por Integração Numérica	59
4.7. Variação dos Parâmetros: Massa do Rotor e Constante Elástica da Cruzeta	73
4.8. Conclusão	76
5. ESTUDO DO CONJUNTO GIRANTE COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE	77
5.1. Introdução	77
5.2. "Bond Graph" do Sistema	77
5.3. Equacionamento do Sistema Completo (Rotor com Dois Graus de Liberdade)	81
5.4. Características do Sistema Hidráulico (R, I e C)	84
5.4.1. Resistência Hidráulica (R)	84
5.4.2. Inertância Hidráulica (I)	86
5.4.3. Capacitância Hidráulica (C)	88
5.5. Resultados	89
5.6. Variação dos Parâmetros: Massa do Conjunto Girante e Constante Rotacional ( $L^2/4J$ )	96
5.7. Conclusão	99
6. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS	100
APÊNDICES	
A. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA COMPRESSIBILIDADE DO FLUIDO	107
a.1. Introdução	107
a.2. Nomenclatura do apêndice A	107
a.2.1. Mancal	107
a.2.2. Cruzeta Inferior (Mola Axial)	108
a.2.3. Conjunto Girante	108

a.2.4. Linha Hidráulica	109
a.2.5. Bomba	109
a.2.6. Junção dos Tubos	109
a.2.7. Vaso de Pressão	109
a.2.8. Orifício na Linha	109
a.2.9. Condições Iniciais	110
a.3. Modelo e Equacionamento	110
a.3.1. Segmento de Mancal do Lado E	111
a.3.2. Cruzeta Inferior	112
a.3.3. Conjunto Girante	113
a.3.4. Configuração dos Deslocamentos	118
a.3.5. Bomba	119
a.3.6. Junção dos Tubos	120
a.3.7. Vaso de Pressão	120
a.3.8. Orifício na Linha	123
a.3.9. Condição Inicial	124
a.4. Avaliação da Velocidade de Propagação de Um Pulso de Pressão no Fluido	125
a.5. Resultados	128
B. FUNDAMENTOS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	130
b.1. Equação do Movimento	130
b.2. Equação da Continuidade	131
b.3. Equações Características	133
b.4. Equações de Diferenças Finitas	135
b.5. Condições de Contorno	137
C. FUNDAMENTOS DA TÉCNICA DE "BOND GRAPH"	138
c.1. Introdução	138
c.2. "Bond Graph"	139
c.3. Componentes Básicos	140
c.3.1. Elementos de Um Porto	140
c.3.2. Elementos de Dois Portos	141

c.3.3. Elementos de Três Portos	141
c.4. Causalidade	142
c.4.1. Elementos de Um Porto	142
c.4.2. Elementos de Dois e Três Portos	143
c.5. Método de Construção de "Bond Graph"	144
c.5.1. Circuito Hidráulico	144
c.5.2. Mecânica de Translação	145
c.6. Campos de Armazenagem de Energia	146
D. EQUAÇÕES REFERENTES AO "BOND GRAPH" DA FIGU <u>RA</u> 3.2 (CAPÍTULO 3)	148
E. EQUAÇÕES REFERENTES AO "BOND GRAPH" DA FIGU <u>RA</u> 4.13 (CAPÍTULO 4)	150
F. EQUAÇÕES REFERENTES AO "BOND GRAPH" DA FIGU <u>RA</u> 5.4 (CAPÍTULO 5)	151
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	154
BIBLIOGRAFIA	156

## LISTA DE FIGURAS

FIGURAS	pág.
2.1. Esquema Geral do Hidrogerador	13
2.2. Sistema de Lubrificação Forçada	14
2.3. Centro de Força dos Mancais	16
3.1. Modelo Físico Simplificado, Rotor com 1 Grau de Liberdade	19
3.2. "Bond Graph" do Sistema	19
4.1. Cilindros Concêntricos de Newton	32
4.2. Extrusão de um Pequeno Elemento de Filme de Óleo por Diferença de Pressão	33
4.3. Distribuição de Pressão ao Longo do Raio de Um Mancal de Escora	35
4.4. $Q_0$ Constante e $Q=f(\dot{h})$	36
4.5. Ângulo da Tangente à Curva em 2 Pontos	44
4.6. Trajetória Limitada	45
4.7. Trajetória Fechada	45
4.8. "Bond Graph" $p/\dot{q}_3 < \frac{Q_0}{.R^2}$	47
4.9. "Bond Graph" $p/\dot{q}_3 > \frac{Q_0}{.R^2}$	48
4.10. Curva da Bomba	48
4.11. Sistema de Massa Escorregando numa Esteira	54
4.12. Sistema com Elasticidade da Cruzeta	55
4.13. "Bond Graph" do Sistema Incluindo a Elasticidade Axial da Cruzeta	57
5.1. Sistema Físico, Rotor com 2 Graus de Liberdade	77
5.2. "Bond Graph" do Sistema, Rotor com 2 graus de Liberdade	78
5.3. Campo de Inércia com 3 Portos	79

5.4. "Bond Graph" Simplificado	81
5.5. Posição do Tubo Rígido	87
A.1. Sistema Físico, Rotor com 2 Graus de Liberdade	111
A.2. Abertura Manca/Rotor	111
A.3. Equilíbrio do Rotor	113
A.4. Configuração dos Deslocamentos	118
A.5. Curva da Bomba	119
A.6. Junção	120
A.7. Vaso de Pressão	121
A.8. Orifício na Linha	123
A.9. Condições Iniciais	124
B.1. Diagrama de Corpo Livre para Aplicação da Equação de Movimento	130
B.2. Volume de Controle para a Equação da Continuidade	132
B.3. Plano X t	136
C.1. Convenção do Sinal de Causalidade	139

NOMENCLATURA E NOTAÇÃO

- A Área do tubo;
- $A_p$  Área do mancal;
- $A_{ed}$  Área efetiva de escoamento;
- $C_a$  Característica da linha;
- $C_d$  Coeficiente de descarga do mancal;
- $C_n$  Característica negativa, caminhando do mancal para a /  
bomba;
- $C_p$  Característica positiva, caminhando da bomba para o man  
cal;
- D Diâmetro do tubo;
- E Módulo de elasticidade do tubo;
- $F_i$  (i=1,2,D,E) força que o mancal aplica no Conjunto Gi -  
rante;
- H Carga manométrica;
- I Momento de inércia do Conjunto Girante relativo a um ei  
xo horizontal;
- $I_i$  (i=1 a 3) Inertância hidráulica e mecânica;
- J Momento de inércia do Conjunto Girante relativo a um ei  
xo horizontal;

K	Módulo de elasticidade volumétrica;
K	Constante elástica;
L	Comprimento do tubo;
P	Peso do Conjunto Girante;
P	Pressão;
$P_o$	Pressão na área do orifício do mancal;
$P_{atm}$	Pressão atmosférica;
$P_p$	Perímetro do mancal;
Q	Vazão;
Q	Calor líquido adicionado ao sistema;
$Q_b$	Vazão da bomba;
$Q_o$	Vazão que passa pelo orifício do mancal;
$Q_R$	Vazão pelo raio R do mancal;
$Q_x$	Vazão da bomba para $H = 0$ ;
R	Raio externo do mancal;
Rey	Número de Reynolds;
$R_o$	Raio do orifício;

$R_i$	( $i=1$ a $n$ ) resistências hidráulicas;
$R_m$	Raio do mancal onde a pressão é $p_m$ ;
$R_x$	Raio de giração do rotor;
$R_y$	Raio de giração da turbina + eixo;
$SE_1$	Fonte de pressão;
$SE_2$	Fonte de força;
SF	Fonte de vazão;
$V_i$	( $i=1,2,3$ ) velocidade linear do Conjunto Girante na direção vertical;
$\forall$	Volume;
W	Força que o mancal aplica no rotor;
$W_x$	Massa do rotor;
$W_y$	Massa da turbina + eixo;
a	Velocidade de propagação de um pulso de pressão;
a	Tangente do ângulo da curva Q X H da bomba;
b	Largura da superfície de escoamento;
c	Coefficiente de amortecimento;

$c_1$	Coeficiente que depende das condições de contorno do tubo;
$e$	Espessura da parede do tubo;
$f$	Fator de atrito;
$g$	Aceleração da gravidade;
$h$	espessura do filme de óleo;
$h_{B_{ax}}$	Posição axial do centro de massa do rotor em relação a um referencial fixo em qualquer instante;
$h_{B_{\alpha}}$	Deslocamento devido à inclinação do rotor em relação à linha horizontal, na posição dos centros de mancais;
$h_{eq}$	Espessura do filme de óleo no ponto de equilíbrio;
$h_e$	Perda de carga;
$h_p$	Posição do segmento de escora;
$h_{obst}$	Posição de um obstáculo;
$k$	Coeficiente elástico;
$l$	Comprimento na direção do fluxo;
$m$	Massa do Conjunto Girante;
$m$	Módulo do transformador;

$p$	Pressão;
$p_m$	Pressão Média;
$p_i$	( $i=1$ a $n$ ) impulso generalizado;
$q_i$	( $i=1$ a $n$ ) Deslocamento generalizado;
$r$	Coordenada ao longo do raio de um segmento de escora;
$r$	Raio do centro de atuação dos "mancais periféricos";
$t$	Tempo;
$t'$	Binário de excitação;
$u$	Energia interna por unidade de massa;
$u_1$	Velocidade do Conjunto girante no instante $t$ ;
$v$	Velocidade tangencial relativa entre superfícies;
$v_{\text{máx}}$	Velocidade máxima ao longo do perfil de velocidades;
$v_{\text{médio}}$	Velocidade média de escoamento;
$x, y, z$	Coordenadas retangulares;
$\alpha$	Ângulo;
$\beta$	Razão de calores específicos;
$\gamma$	Coefficiente politrópico do ar;

$\theta$	Deslocamento angular do rotor;
$\mu$	Viscosidade absoluta;
$\mu$	Coefficiente de Poisson;
$\rho$	Densidade do fluido;
$\sigma_1$	Tensão axial;
$\sigma_2$	Tensão tangencial;
$\tau$	Trabalho;
$\tau_0$	Força de cisalhamento;
$\omega$	Velocidade angular;
$(\dot{x})$	Derivada de $\underline{x}$ em relação ao tempo;
$(\Delta x)$	Intervalo finito da variável $\underline{x}$ ;
$(dx)$	Intervalo infinitesimal da variável $\underline{x}$ ;
$\frac{\partial x}{\partial t}$	Derivada parcial de $\underline{x}$ em relação à $\underline{t}$ ;

### ÍNDICES

(0)	Instante inicial;
-----	-------------------

(1)=(') Instante t;

(2)=('') Instante t+Δt.

\* As exceções estão apontadas no texto.

ESCOLA POLITÉCNICA - USP  
SERVIÇO DE BIBLIOTECAS

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho investiga a estabilidade dinâmica do sistema de / sustentação do conjunto girante de um hidrogerador, através de / mancal de escora com lubrificação forçada, para o caso em que a máquina não está em funcionamento (rotação nula). O estudo utiliza diversos métodos analíticos, sendo as principais conclusões obtidas através de integração numérica.

Os modelos adotados são abrangentes o suficiente para não limitar a pesquisa apenas à área de hidrogeradores, podendo ser estendida, também, à análise da estabilidade dinâmica de equipamentos que sejam sustentados por sistemas hidráulicos semelhantes.

A necessidade de se analisar a estabilidade do mancal de escora surgiu de um acidente técnico ocorrido na unidade três da usina de Itaipu, onde o mancal de guia superior teve seu revestimento de metal patente danificado, como consequência de uma sucessão / de choques com o eixo da máquina, durante a operação de alinhamento de eixo, onde a precisão dimensional é fundamental. Assim, em termos de engenharia, o estudo pode ser justificado para verificar, ainda em fase de projeto, eventuais instabilidades que possam ocorrer com o sistema, determinando as faixas em que os / principais parâmetros envolvidos devem situar-se, a fim de evitar tais comportamentos dinâmicos.

A operação de alinhamento do conjunto girante de um hidrogerador (rotor, turbina e eixo) tem dois objetivos: o primeiro é o de posicioná-lo concentricamente ao estator da máquina; o segundo é o de fazer coincidir o centro magnético do rotor com o centro magnético do estator (posicionamento na direção axial ou /

vertical). Durante esta operação a máquina encontra-se nas seguintes condições:

- O conjunto girante está sustentado por um filme de óleo, formado na superfície do mancal de escora, mantido por um sistema de bombeamento hidráulico.
- Os mancais de guia, que vinculam o movimento do rotor na direção radial, estão desacoplados, ou seja, distanciados do eixo / em alguns milímetros.

Embora o acidente tenha sido precariamente documentado, sabe-se que o conjunto girante, ao ser deslocado de sua posição de equilíbrio, começou a oscilar com movimento pendular do eixo. Tal movimento do eixo vertical esteve contido num único plano e foi / resultado da conjugação de movimento na direção vertical e de / rotação em torno de uma linha horizontal que passa pelo centro / de massa do conjunto girante. Assim, a superfície do rotor comprimia o filme de óleo numa determinada região ao longo de seu / perímetro e o descomprimia numa posição diametralmente oposta.

A impressão causada aos operadores foi a de uma oscilação instável do conjunto girante, limitada pelo mancal de guia superior. O movimento foi detido rapidamente com a despressurização da linha hidráulica, através da interrupção do bombeamento de óleo.

Com a evolução dos modelos adotados, foi possível detectar, para este arranjo físico, a existência do fenômeno de ciclo-limite tanto para a oscilação pendular do conjunto girante como para sua oscilação exclusivamente na direção vertical (no caso de Itaipu, os parâmetros envolvidos permitem apenas a existência / do segundo caso). Identificou-se, assim, mais um caso de ciclo-limite em sistemas mecânicos, fenômeno que não apresenta muitos exemplos na literatura especializada.

No primeiro modelo físico adotado, levou-se em conta a compressibilidade do fluido, considerando-a um fator importante na resposta do sistema quando perturbado, uma vez que atua como um elemento capaz de armazenar energia, por conseguinte, uma provável causa de instabilidade. Contudo, como será apresentado no apêndice A, a título de justificativa dos modelos adotados posteriormente, o efeito desta propriedade do fluido pode ser desprezado para um sistema com aquelas características (geométricas e de operacionalidade). Os modelos que o sucederam consideraram o fluido incompressível e estão apresentados em ordem cronológica de pesquisa.

O trabalho foi organizado em seis capítulos e apêndices de A a F, sendo este o capítulo introdutório.

O capítulo 2 apresenta o sistema físico de lubrificação forçada do mancal de escora, salientando algumas simplificações que, posteriormente, serão assumidas nos modelos matemáticos adotados.

O capítulo 3 mostra o primeiro modelo, que considera o conjunto girante com apenas um grau de liberdade (deslocamento axial). Utilizando-se a técnica de "Bond Graph", obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem, cujos coeficientes representam a linearização em torno do equilíbrio estacionário. Ainda neste capítulo, é feito um estudo do sinal das raízes do polinômio característico pelo método de Routh-Hurwitz.

O capítulo 4 descreve o comportamento do sistema na direção axial através da introdução da análise não-linear no equacionamento do mancal. É feita, também, uma análise qualitativa da influência de alguns componentes.

O capítulo 5 faz um equacionamento completo do sistema, novamente utilizando-se a técnica de "Bond Graph", com o rotor tendo / dois graus de liberdade (deslocamento vertical e deslocamento / angular).

O capítulo 6 dedica-se a comentários e conclusões, sugerindo pontos a serem abordados num eventual prosseguimento da pesquisa. Além disso, apresenta, como solução para minimizar as consequências da instabilidade, a utilização da técnica de "DITHER INJECTION", cujo efeito é alterar o ciclo-limite através da atenuação da amplitude de oscilação.

O apêndice A mostra o equacionamento do sistema através do Método das Características (método numérico) para analisar a importância relativa da compressibilidade do fluido na resposta do / sistema. Utilizam-se gráficos comparativos para diversas velocidades de propagação de onda de pressão, a fim de mostrar a validade de se aplicar a hipótese de fluido incompressível.

O apêndice B descreve os fundamentos do Método das Características e o apêndice C, bem resumidamente, os da técnica de "Bond Graph".

Finalmente, os apêndices D, E e F apresentam as equações extraídas da topologia dos gráficos ("Bond Graph") dos capítulos 3, 4 e 5, respectivamente, bem como as equações constitutivas correspondentes.

## 2. APRESENTAÇÃO DO SISTEMA FÍSICO E PRINCIPAIS HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

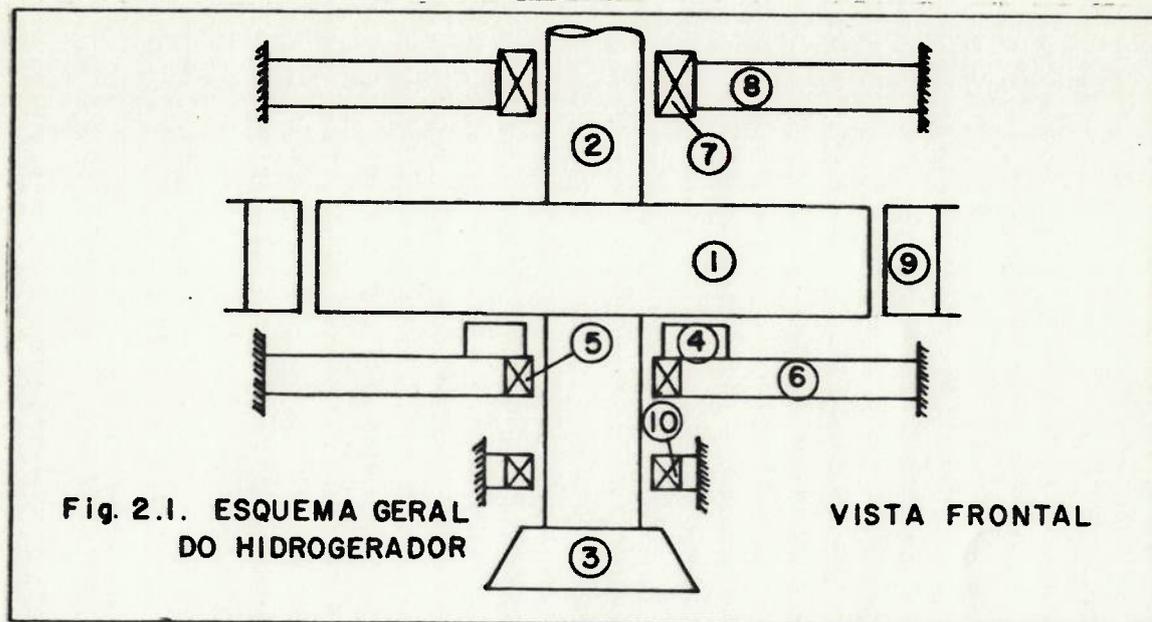
Uma das classificações de um hidrogenador é quanto à sua capacidade de gerar potência. Sob o ponto de vista dinâmico, as diferenças principais na construção mecânica dos hidrogenadores são: o número e a posição dos mancais. Todavia, os modelos matemáticos adotados referem-se à situação em que a máquina submete-se à operação de alinhamento de eixo, ou seja, não há vínculos radiais. A máquina está sustentada pelo mancal de escora montado sobre uma cruzeta, que pode ser tanto a superior como a inferior.

### 2.1. Hidrogenadores de Itaipu

O mancal de escora é composto por diversos segmentos de escora igualmente espaçados ao longo de uma circunferência concêntrica ao eixo da máquina. No caso de Itaipu, o conjunto girante é sustentado por 16 segmentos de escora. Cada segmento é conectado, através da linha secundária, ao distribuidor da linha principal. A alimentação do filme de óleo, na superfície do segmento de escora, ocorre através de um orifício central.

A cruzeta é uma estrutura constituída por um anel central bastante rígido, sustentado por vigas igualmente espaçadas ao longo de seu perímetro, que estão engastadas no concreto ou no estator da máquina. Sobre este anel são montados os segmentos do mancal de escora.

A figura 2.1 mostra de maneira esquemática as principais partes de um hidrogenador. A disposição dos mancais corresponde à existente na máquina de Itaipu e é típica de máquinas de grande porte (na classificação atual, capacidade acima de 200 MVA).



1. Rotor
2. Eixo
3. Turbina
4. Mancal de escora
5. Mancal de guia intermediário
6. Cruzeta inferior
7. Mancal de guia superior
8. Cruzeta Superior
9. Estator
10. Mancal de guia inferior

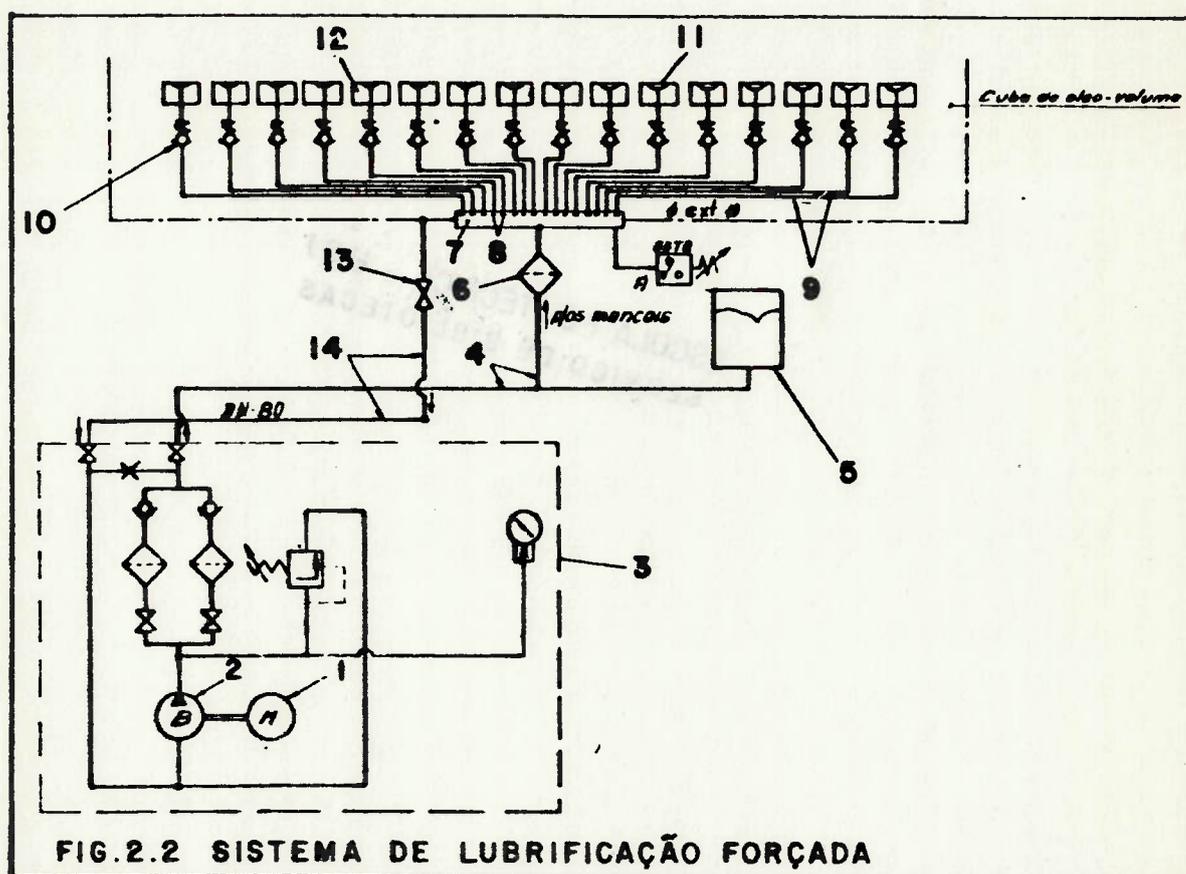
O conjunto girante (1,2,3) é sustentado na direção vertical / pelo mancal de escora (4).

O acidente ocorrido, durante a operação de alinhamento de eixo, provocou danos no mancal de guia superior (7), que é formado/ por segmentos, cujas superfícies de contato são revestidas de metal patente.

A elasticidade axial do conjunto é estabelecida, basicamente,

pela geometria e número de braços da cruzeta inferior (6). A de Itaipu possui 8 braços.

Quanto ao sistema de lubrificação forçada, a figura 2.2 mostra, esquematicamente, o circuito percorrido pelo óleo até chegar aos segmentos de escora. São 16 segmentos, cujos centros situam-se ao longo do perímetro de uma circunferência de raio 1,05 m.



1. Motor
2. Bomba com vazão de  $1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .
3. Conjunto de suprimento de óleo com filtros e válvulas de segurança
4. Linha principal, tubo de aço com comprimento de 10 m e diâmetro interno de 0,025 m.
5. Vaso de pressão conectado à linha principal.

6. Filtro de alta pressão conectado à linha principal.
7. Distribuidor com orifício regulador de pressão para cada segmento.
8. Orifício regulador de pressão.
9. Linha secundária, tubo de aço com comprimentos que variam / de 1 a 10 m e diâmetro interno de 0.010m.
10. Válvula anti-retorno.
11. Câmara de óleo.
12. Segmentos do mancal de escora (em número de 16).
13. Válvula.
14. Tubo de retorno de óleo, da cuba para o reservatório da bomba.

Como se pode notar, existem dois sistemas que se interagem: o / mecânico e o hidráulico. Assim, a pressão estabelecida na superfície do mancal de escora é causa e consequência do comportamento destes dois sistemas.

## 2.2. Modelos Básicos para o Estudo

Algumas hipóteses simplificadoras tornam-se necessárias para facilitar o entendimento do fenômeno físico sem comprometer qualitativamente os resultados finais.

Dois modelos básicos serão propostos nos próximos capítulos. No primeiro, será considerado apenas movimento na direção vertical / do conjunto girante. Assim, com a base do rotor na posição horizontal é válido dizer que a perda de carga em todos os dutos secundários é a mesma. Embora eles tenham comprimentos diferentes, os orifícios reguladores de pressão (8) têm seus diâmetros usinados de tal forma a compensar as diferenças de comprimentos, / fazendo com que as pressões nas superfícies dos segmentos de escora (12) sejam equalizadas. Havendo movimento somente na direção vertical, a contribuição de cada segmento, na sustentação /

do conjunto girante, é a mesma em qualquer instante, uma vez / que os 16 segmentos possuem igual espessura do filme de óleo. Pode-se então, estudar o sistema modelando apenas um segmento / de escora.

O segundo modelo confere ao rotor dois graus de liberdade (in- clui a rotação em torno de uma linha horizontal que passa pelo centro de massa do conjunto girante). Com o movimento angular / do rotor surgirá um binário fornecido pelos segmentos de esco- ra para colocá-lo novamente na posição horizontal. Este biná - rio é causado pela força adicional que o segmento aplica ao ro- tor com a diminuição da espessura do filme de óleo.

Neste modelo considera-se o rotor sustentado por apenas dois / pontos diametralmente opostos. Dividindo os segmentos em 3 gru- pos, conforme figura 2.3, verifica-se que a pequena variação / na espessura do filme de óleo dos segmentos da região central faz com que esta contribuição, para o binário aplicado ao rotor, possa ser desprezada. Assim, observando a posição dos segmen- tos de um grupo periférico, nota-se que é razoável aglutiná- los num único ponto e assumir que possuem mesma espessura de / filme de óleo.

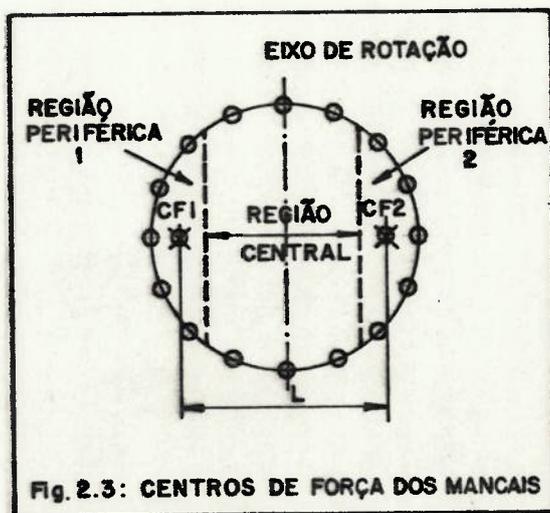


Fig. 2.3: CENTROS DE FORÇA DOS MANCAIS

Em termos gerais, as seguintes hipóteses simplificadoras são admitidas:

- fluido incompressível (justificada no apêndice A).
- cruzeta inferior com comportamento de mola ideal, isto é, sem amortecimento (avaliando-se o amortecimento devido à deformação estrutural, verificou-se, através de modelos não apresentados, que seu efeito é desprezível na resposta do sistema a uma excitação de magnitude realística).

As demais hipóteses simplificadoras serão tratadas durante a apresentação dos modelos de cálculo.

130 - ADMINISTRAÇÃO - UFRJ  
SERVIÇO DE BIBLIOTECA

### 3. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ESTABILIDADE

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo será feita a primeira abordagem sobre a estabilidade do sistema; para tanto, será proposto um modelo simplificado em que o rotor possui apenas movimento na direção/vertical, e linear.

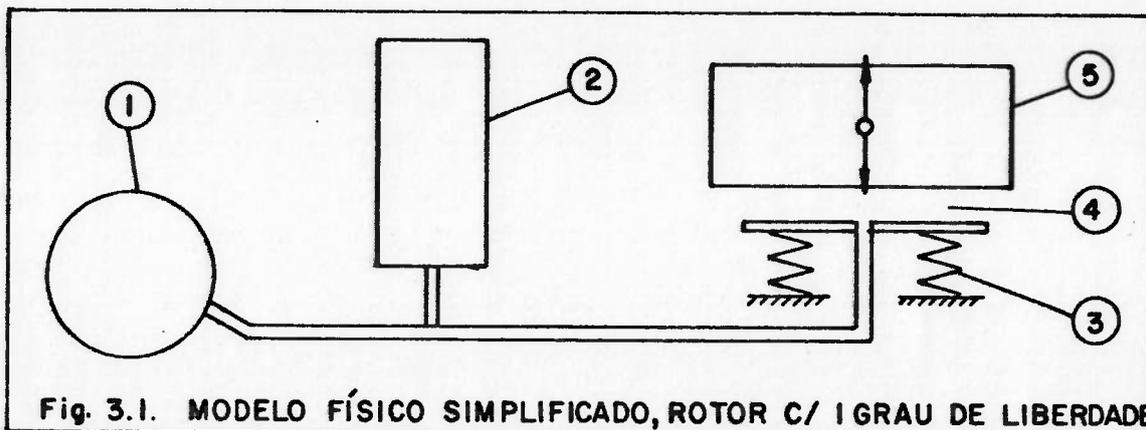
Com a utilização da técnica de "Bond Graph" o comportamento/ do modelo será descrito através de um sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem, do qual obtém-se a equação/ característica.

A aplicação do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz à / equação característica possibilita saber se o sistema possui todos os seus polos no semi-plano esquerdo do plano complexo, constituindo-se, assim, num sistema estável. A vantagem de se empregar o critério de Routh-Hurwitz é a de permitir analisar a equação característica com seus coeficientes na forma literal, generalizando a validade do resultado. Todavia, trabalhando com tais coeficientes corre-se o risco da análise não ser conclusiva.

Os parâmetros que definem o sistema (Resistências, Capacitâncias e Inertâncias) serão considerados constantes. Suas expressões encontram-se no item 5.6, onde pode-se verificar que algumas são obtidas de equações constitutivas linearizadas.

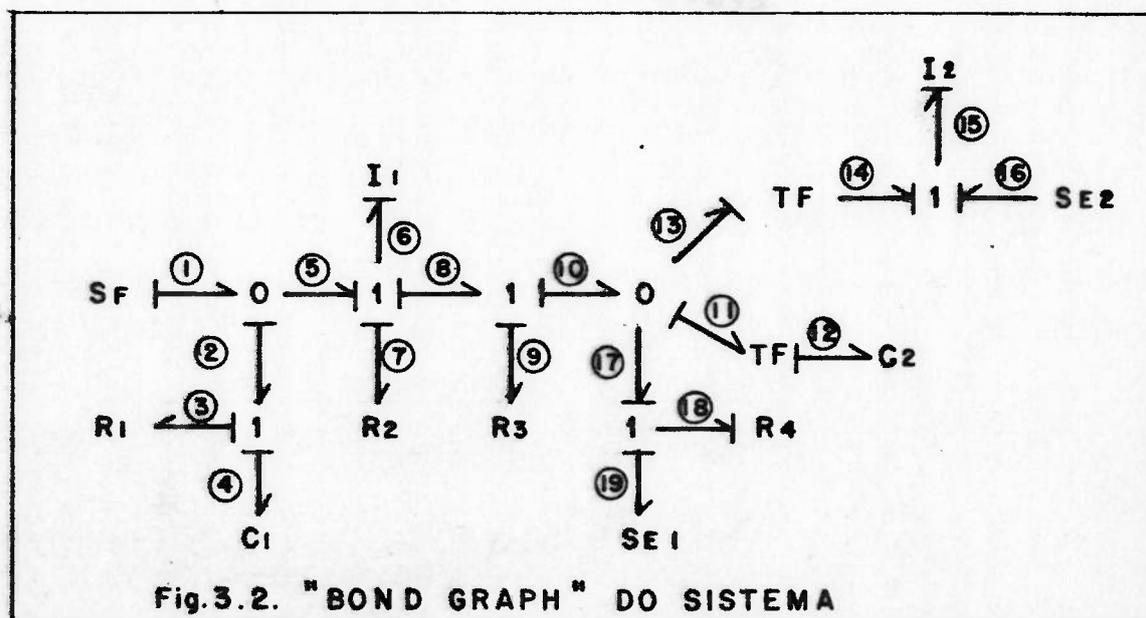
#### 3.2. Modelo do Sistema para Movimento Vertical do Rotor (um/ grau de liberdade)

A figura 3.1 mostra um esquema do sistema com seus componen - tes básicos:



1. Bomba com suprimento de vazão constante.
2. Vaso de pressão.
3. Mola atuando no segmento de escora (cruzeta inferior).
4. Segmento de escora.
5. Rotor

Tendo em vista o sistema físico apresentado acima, propõe-se o seguinte "Bond Graph" para representar seu comportamento:



OBS: No apêndice C serão expostos os princípios e a metodologia para a obtenção do "Bond Graph".

onde:  $R_i$  (i=1 a 4) = Resistências Hidráulicas

$C_1$  = Capacitância do vaso de pressão

$I_1$  = Inertância hidráulica dos tubos

$I_2$  = Inertância mecânica do conjunto girante

SF = Fonte de vazão (Bomba)

$SE_1$  = Fonte de pressão (Atmosférica)

$SE_2$  = Fonte de esforço (Peso do conjunto girante)

O gráfico revela duas indutâncias integrativas ( $I_1$  e  $I_2$ ) e duas capacitâncias integrativas ( $C_1$  e  $C_2$ ), portanto, a ordem do sistema é quatro e as variáveis de estado podem ser:  $q_4$ ,  $p_6$ ,  $q_{12}$  e  $p_{15}$ .

Estas variáveis e suas derivadas representam fisicamente:

$q_4$  = Volume de óleo no vaso de pressão

$\dot{q}_4$  = Vazão de óleo para o vaso de pressão

$p_6$  = Impulso de pressão na linha principal, depois do vaso de pressão

$\dot{p}_6$  = Pressão dinâmica na linha principal

$q_{12}$  = Deslocamento da mola ou do segmento de escora

$\dot{q}_{12}$  = Velocidade da mola ou do segmento de escora

$p_{15}$  = Impulso na direção vertical atuante no rotor

$\dot{p}_{15}$  = Resultante das forças verticais que atuam no rotor

Como mostrado no apêndice D, chamando de  $e_i$  - variáveis de esforço generalizado,  $f_i$  - vazão generalizada,  $p_i$  - impulso generalizado e  $q_i$  - deslocamento generalizado; aplicando as equações definidas pelas Junções 1 e 0 (apêndice D), da topologia do "Bond Graph" apresentado acima, e as equações constitutivas, chega-

se ao seguinte sistema de equações:

$$\dot{q}_4 = Q_b - \frac{p_6}{I_1} \quad (3.1)$$

$$\dot{p}_6 = \frac{q_4}{C_1} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3)}{I_1} \cdot p_6 - \frac{m}{C_2} \cdot q_{12} + R_1 \cdot Q_b \quad (3.2)$$

$$\dot{p}_{15} = \frac{q_{12}}{C_2} + P \quad (3.3)$$

$$\dot{q}_{12} = \frac{m}{I_1} \cdot p_6 - \frac{p_{15}}{I_2} - \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} \cdot q_{12} + \frac{m}{R_4} \cdot P_{atm} \quad (3.4)$$

onde:  $Q_b$  = Vazão da bomba

$P$  = Peso do conjunto girante

$P_{atm}$  = Pressão atmosférica

Impondo:  $\dot{q}_4 = 0$ ;  $\dot{p}_6 = 0$ ;  $\dot{p}_{15} = 0$  e  $\dot{q}_{12} = 0$ , obtém-se o ponto de equilíbrio estático do sistema, dado por:

$$q_{4_{eq}} = (R_2 + R_3) \cdot C_1 \cdot Q_b - m \cdot C_1 \cdot P \quad (3.5)$$

$$p_{6_{eq}} = I_1 \cdot Q_b \quad (3.6)$$

$$p_{15_{eq}} = m \cdot I_2 \cdot Q_b + \frac{m^2 \cdot I_2 \cdot P}{R_4} + \frac{m \cdot I_2 \cdot P_{atm}}{R_4} \quad (3.7)$$

$$q_{12_{eq}} = -C_2 \cdot P \quad (3.8)$$

Mas  $\dot{q}_{15}$ , que representa a velocidade do rotor, também deve ser nulo, portanto, de (D.38.a, vide apêndice D), tem-se que:

$$p_{15_{eq}} = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{De (3.7) e (3.9): } R_{4_{eq}} = \frac{-(m \cdot P + P_{atm})}{Q_b} \quad (3.10)$$

OBS.:  $R_{4_{eq}} > 0$ ; pois, conforme convenção utilizada no equacionamento,  $P < 0$  e sendo  $|m \cdot P| > |P_{atm}|$ , tem-se  $R_{4_{eq}} > 0$ .

A resistência hidráulica  $R_4$  representa o mancal de escora e ela não é constante ao longo do tempo pois, como será visto no capítulo seguinte, depende da distância entre rotor e mancal, relacionando-se através de uma função não-linear. A análise, a seguir, admitirá  $R_4 = R_{4_{eq}}$  = constante, o que limita seus resultados a uma região em torno do ponto de equilíbrio.

Esta é uma hipótese bastante importante porque faz com que o modelo se torne linear, restringindo, assim, as possibilidades de se obter resultados que indiquem instabilidade, pois, como se sabe, determinados comportamentos são intrínsecos a sistemas não-lineares.

Sob o ponto de vista físico, o modelo apresenta deficiência em descrever a interação rotor/mancal para condições "muito diferentes" das do equilíbrio.

### 3.3. Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Através deste critério pode-se determinar o número de polos / que estão no semi-plano direito do plano complexo sem ter que fatorar o polinômio, obtendo informação da estabilidade absoluta diretamente dos coeficientes da equação característica.

Pode-se resumir o procedimento do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz em três itens; segundo referência [1] tem-se:

I. Escreve-se o polinômio da equação característica na seguinte forma:

$$a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 \quad \text{com } a_n \neq 0.$$

II. A primeira condição necessária (mas não suficiente), para/

que haja estabilidade, é que todos os coeficientes  $a_i$  estejam presentes e tenham o mesmo sinal.

III. Satisfeita a primeira condição, deve-se arrumar os coeficientes do polinômio em linhas e colunas de acordo com o seguinte padrão:

$$\begin{array}{rcccccc}
 \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 \vdots & & & & & \\
 \lambda^2 & e_1 & e_2 & & & \\
 \lambda^1 & f_1 & & & & \\
 \lambda^0 & g_1 & & & & 
 \end{array}$$

onde os b's, c's, etc, são obtidos através de uma multiplicação "em cruz" que segue o seguinte esquema:

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}, \quad \text{etc; até que os restantes sejam todos nulos.}$$

"O critério de estabilidade de Routh diz que o número de raízes com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela." [1] Portanto, para que todas as raízes estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo, a condição necessária e suficiente é que todos os coeficientes da equação característica sejam/positivos e que todos os termos da primeira coluna da tabela acima tenham sinal positivo.

## 3.4. Aplicação do Critério de Routh-Hurwitz

O sistema obtido em 3.2. colocado na forma:  $\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{u}$ , gera a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 1/C_1 & -\frac{(R_1+R_2+R_3)}{I_1} & -\frac{m}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{I_1} & -\frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} & -\frac{1}{I_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

para:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{p}_{15} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_6 \\ q_{12} \\ p_{15} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A equação característica será fruto da seguinte equação:

$\det(\lambda \cdot [I] - A) = 0$ ; logo pode-se escrever:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{\lambda + (R_1+R_2+R_3)}{I_1} & \frac{m}{C_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hat{m}}{I_1} & \lambda + \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} & \frac{1}{I_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Chamando  $A = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{I_1}$ ;  $B = \frac{m}{C_2}$ ;  $C = \frac{-m}{I_1}$ ;  $D = \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2}$ ;  $E = \frac{1}{I_2}$  e /

$F = \frac{-1}{C_2}$ , obtém-se:

$$\lambda^4 + (A+D) \cdot \lambda^3 + \left( \frac{D \cdot A - F \cdot E \cdot A}{C_1 \cdot I_1} + \frac{1}{C_1 \cdot I_1} \right) \lambda^2 + \left( \frac{D}{C_1 \cdot I_1} - F \cdot E \cdot A \right) \lambda + \frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1 \cdot C_2} = 0 \quad (3.15)$$

Primeira condição: observando os coeficientes da equação / (3.15), verifica-se que nenhum é nulo, restando saber se são positivos.

(a)  $a_0 = 1 > 0$

(b)  $a_1 = A + D = \left( \frac{R_1 + R_2 + R_3}{I_1} \right) + \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} > 0$

(c)  $a_2 = \frac{D \cdot A - F \cdot E \cdot A}{C_1 \cdot I_1} + \frac{1}{C_1 \cdot I_1} = \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} \left( \frac{R_1 + R_2 + R_3}{I_1} \right) + \frac{1}{C_2 \cdot I_2} + \frac{m^2}{C_2 \cdot I_1} + \frac{1}{C_1 \cdot I_1} > 0$

(d)  $a_3 = \frac{D}{C_1 \cdot I_1} - F \cdot E \cdot A = \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2 \cdot C_1 \cdot I_1} + \frac{(R_1 + R_2 + R_3)}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_2} > 0$

(e)  $a_4 = \frac{1}{I_1 \cdot I_2 \cdot C_1 \cdot C_2} > 0$

Segunda condição:

(a)  $a_0 > 0$  (já visto)

(b)  $a_1 > 0$  (já visto)

(c)  $b_1 > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$  ou  $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

$$\text{Chamando: } K_1 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{I_1} ; K_2 = \frac{m^2}{R_4 \cdot C_2} ; K_3 = \frac{1}{C_2 \cdot I_1} \text{ e } K_4 = \frac{1}{C_1 \cdot I_1} ;$$

Portanto  $K_i (i=1 \text{ a } 4) > 0$ ; tem-se:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = K_1 + K_2$$

$$a_2 = K_1 \cdot K_2 + K_3 + K_4 + K_5$$

$$a_3 = K_2 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_3$$

$$a_4 = K_3 \cdot K_5$$

Logo, deve-se mostrar que:  $(K_1 + K_2) \cdot (K_1 \cdot K_2 + K_3 + K_4 + K_5) > K_2 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_3$

Ou seja:  $K_1^2 \cdot K_2 + K_1 \cdot K_4 + K_1 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_2^2 + K_2 \cdot K_3 + K_2 \cdot K_4 > 0$

o que é verdade, uma vez que todos os K's são positivos.

$$(d) \ c_1 > 0 \Rightarrow \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} > 0$$

Substituindo  $b_1$  e  $b_2$ , chega-se à seguinte expressão:

$$\left( \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_0 \cdot a_3^2}{a_1} \right) - \left( \frac{a_1^2 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_0 \cdot a_5}{a_1} \right) > 0$$

Mas  $a_5 = 0$ , logo:  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > a_0 \cdot a_3^2 + a_1^2 \cdot a_4$ . Colocando-se em termos

de  $K_i$ , tem-se:

$$(K_1 + K_2) \cdot (K_1 \cdot K_2 + K_3 + K_4 + K_5) \cdot (K_2 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_3) > (K_2 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_3)^2 + \\ + (K_1 + K_2)^2 \cdot K_3 \cdot K_5$$

$$\text{Ou seja: } (K_1^2 \cdot K_2 \cdot K_5) + (K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5) + (K_1 \cdot K_2 \cdot K_5^2) + (K_1 \cdot K_2^3 \cdot K_5) + \\ + (K_2^2 \cdot K_4 \cdot K_5) + (K_1^3 \cdot K_2 \cdot K_3) + (K_1^2 \cdot K_3 \cdot K_4) + (K_1^2 \cdot K_2^2 \cdot K_3) + (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3^2) + \\ + (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4) > 2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_5$$

Pode-se escrever:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_4 \cdot K_5 + K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 + C > 2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_5$$

onde  $C$  é o restante da primeira parcela e é positivo.  
Dividindo ambos os lados por  $(K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_5)$ , obtém-se:

$$\frac{C}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_5} + \frac{K_5}{K_3} + \frac{K_3}{K_5} > 2$$

$$\text{Mas } \frac{K_5}{K_3} + \frac{K_3}{K_5} = \frac{K_5^2 + K_3^2}{K_3 \cdot K_5}; \text{ portanto: } \frac{K_5^2 + K_3^2}{K_3 \cdot K_5} - 2 = \frac{K_5^2 + K_3^2 - 2 \cdot K_3 \cdot K_5}{K_3 \cdot K_5} =$$

$$= \frac{(K_5 - K_3)^2}{K_3 \cdot K_5} > 0. \text{ Logo, a inequação acima é verificada e } c_1 > 0.$$

$$(e) d_1 > 0 \Rightarrow \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} > 0$$

$$c_1 > 0 \Rightarrow c_1 \cdot b_2 > b_1 \cdot c_2$$

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} = a_4 > 0$$

$$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1} = \frac{-a_1 \cdot (a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7)}{a_1} = 0$$

Substituindo, tem-se:  $c_1 \cdot b_2 > 0$ ; o que é verdade pois  $c_1 > 0$  e  $b_2 > 0$ . Logo,  $d_1 > 0$ .

Assim, fica provado que todos os coeficientes da 1ª coluna são positivos e mais, confirmada as duas condições, pode-se afirmar que o sistema é assintoticamente estável (obviamente, dentro das condições já discutidas).

Tentou-se aplicar a mesma análise ao modelo com dois graus de liberdade (apresentado no capítulo 5); Entretanto, por tratar-se de um sistema de ordem nove, foi possível verificar apenas a primeira condição, uma vez que, a segunda, devido às multiplicações "em cruz", apresenta inequações com algumas centenas de termos, inviabilizando totalmente a análise literal do problema. \*

Dando continuidade à pesquisa, e tendo em vista a estabilidade que foi verificada para o sistema linear, surge, agora, a necessidade de um estudo mais acurado do mancal, para que se possa fazer a modulação da resistência hidráulica que o representa. Assim, como será visto no capítulo 4, passar-se-á a uma análise não-linear, procurando explorar modelos ainda simplificados.

\* Além do critério de Routh, para esta análise com variáveis / literais, outra ferramenta adequada seria o Método de Krasovskii. No entanto, este método fornece apenas condições suficientes para a estabilidade assintótica global, que no caso / não são atendidas.

### 3.5. Conclusão

A estabilidade assintótica encontrada para um modelo linear do sistema, obviamente, não pode ser definitiva. Cabe, agora, estudar qual a expressão da variação da resistência hidráulica que simula o mancal e, para tanto, serão calculadas as forças que agem entre a superfície do mancal e o rotor, introduzindo outra propriedade física, a viscosidade do óleo.

#### 4. ESTUDO DO MANCAL ATRAVÉS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR

##### 4.1. Introdução

Neste capítulo é feita uma análise qualitativa da influência de alguns componentes no comportamento dinâmico do sistema. Para tanto, será incluída a análise não-linear.

No equacionamento do mancal será estabelecida a relação da força que é exercida no rotor pelo filme de óleo, em função de sua espessura e sua variação ao longo do tempo.

Como esta relação não é linear, o estudo da estabilidade será mais abrangente, uma vez que determinados fenômenos oscilatórios só podem ser previstos ou explicados pela teoria não-linear. Por outro lado, processos analíticos para o tratamento de equações diferenciais não-lineares são factíveis apenas para poucas classes de problemas, ou seja, soluções exatas conhecidas são poucas e somente para certas equações diferenciais não-lineares simples. [2] e [3]

Desta forma, são inevitáveis, para a maioria dos problemas práticos de engenharia, soluções numéricas aproximadas que estão limitadas apenas sob as condições em que foram obtidas.

Quando se estuda um sistema não-linear é preciso ter em mente algumas características básicas desses sistemas, como por exemplo a dependência do comportamento da resposta em relação à amplitude e tipo de entrada (condições iniciais). Em sistemas com não linearidade da constante de mola, a frequência natural depende da amplitude, já em sistemas com não linearidade no amortecimento, essa dependência é bem menor. No caso das equações que posteriormente serão apresentadas, a não linearidade estará presente tanto na mola como no amortecedor.

Outro fato importante que pode ocorrer em sistemas não-lineares é a auto-excitação ou ciclo-limite, que é uma oscilação auto-mantida, onde a frequência da oscilação é mantida constante. No plano de fase, a trajetória descreve uma curva fechada onde o saldo de energia da oscilação é nulo, isto é, durante a trajetória a energia dissipada é compensada pela energia adquirida. As trajetórias do ponto no plano de fase pode convergir para, ou divergir da curva limite.

O ciclo-limite aparece apenas em sistemas não-lineares não-conservativos e com isto tais curvas fechadas do plano de fase são isoladas umas das outras, o que o diferencia de um sistema linear conservativo que apresenta trajetórias fechadas não isoladas, ou seja, uma família contínua de trajetórias fechadas. Outra característica dos sistemas que possuem oscilação de ciclo-limite é o fato de terem uma fonte não periódica de energia. |1|

A frequência do ciclo-limite, para a maioria dos casos práticos, é a frequência natural do sistema, pois uma força de amortecimento, negativa ou positiva, altera muito pouco a frequência natural do sistema, a menos que esta força de amortecimento seja grande comparada com as forças de inércia. |4|

Portanto, o objetivo do capítulo será incluir o efeito da não linearidade na análise da estabilidade; entretanto, agora o estudo é mais complexo que nos sistemas lineares, pois nestes, a estabilidade assintótica local implica na global, fato que não ocorre nos sistemas não-lineares.

Segundo Gibson, |5|, para sistemas não-lineares, mais de 28 de

finições têm sido propostas e usadas pelos pesquisadores. Neste trabalho, fazer-se-á uso da teoria clássica da mecânica sobre estabilidade de um sistema vibratório, onde se considera / estável o sistema que tem sua energia total continuamente de - crescente. Em outras palavras, a energia, que é uma função positiva definida, deverá ter sua derivada temporal uma função / negativa definida.

#### 4.2. Modelos Não-lineares Estudados

Três modelos simplificados, dando ao rotor apenas um grau de / liberdade, serão estudados para a análise de estabilidade:

I- Modelo contendo apenas três elementos: rotor, filme de óleo e suprimento de óleo constante.

II- Modelo contendo: rotor, filme de óleo e suprimento de óleo segundo uma curva -carga manométrica X vazão da bomba.

III- No terceiro modelo é acrescentada a elasticidade axial da cruzeta que sustenta o mancal de escora, no modelo do item I.

A análise do primeiro e segundo modelos será feita através da / representação geométrica da trajetória no plano de fase, por / tratar-se de sistemas de segunda ordem. O método do plano de / fase fornece uma visualização das trajetórias e não é restrito a pequenas não-linearidades (entenda-se como relação que con - têm pequena não linearidade aquela cuja função é contínua e / lisa em todo o domínio).

#### 4.3. Fluxo Através de uma Ranhura

Para fazer a "modulação" do mancal simulando-o como uma resis - tência hidráulica variável, que é função da distância entre as superfícies no rotor e mancal, é necessário fazer uso de uma / propriedade física ainda não considerada, a viscosidade do ó - leo.

Dados dois cilindros concêntricos, figura 4.1, que giram imersos num fluido "newtoniano" estabelecendo um fluxo laminar / entre eles, tem-se que a força resistiva para rodar um em relação ao outro, [6], é dada pela expressão:

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{v}{h} \quad (4.1)$$

onde: F= força resistiva

A= área de escorregamento entre as superfícies

v= velocidade tangencial relativa entre as superfícies

h= espessura do filme de óleo

$\mu$ = viscosidade absoluta

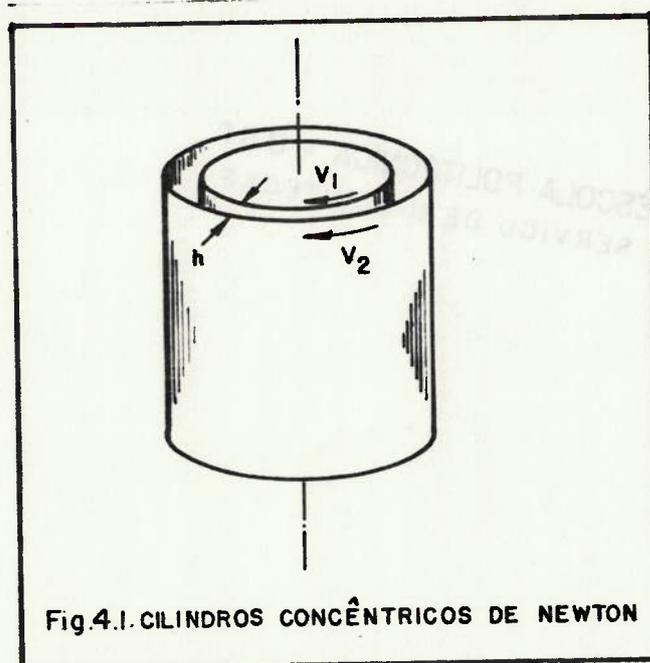


Fig.4.1. CILINDROS CONCÊNTRICOS DE NEWTON

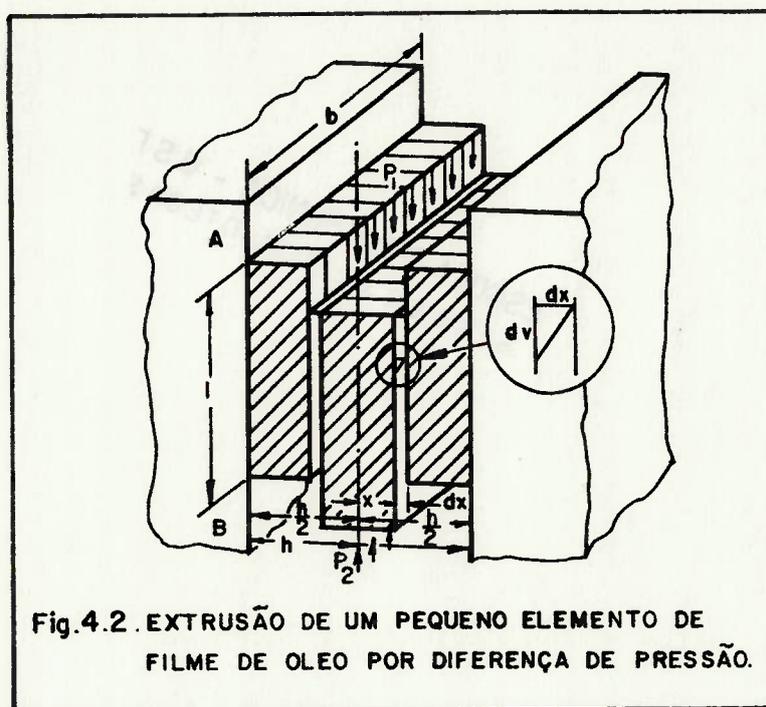
Sendo  $v/h$  o gradiente de velocidade do filme em regime laminar, na análise de lubrificação, pode-se considerar a velocidade do fluido uma função contínua da espessura do filme de óleo. Assim, é mais conveniente representar  $v/h$  por  $dv/dh$  e (4.1) fica:

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dh} \quad (4.2)$$

Considerando-se agora, uma ranhura de largura  $b$ , comprimento / na direção do fluxo  $l$  e espessura  $h$ , sendo a largura  $b$  muito / maior que a espessura  $h$ , pode-se desprezar os efeitos de borda

da ranhura. O mesmo para a outra dimensão, ou seja,  $l$  é suficientemente grande, comparado com  $h$ , para poder desprezar a situação das extremidades.

Na figura 4.2 encontram-se representadas estas dimensões. A diferença de pressão entre os pontos A e B causa um escoamento / de fluido, que será de A para B.



Imaginando um "bloco" de líquido de espessura  $2x$ , largura  $b$  e comprimento  $l$  sendo extrudado devido a diferença de pressão, / pode-se escrever a expressão da força propulsora:  $F=2 \cdot x \cdot b \cdot \Delta P$ ; / onde  $\Delta P$  é a diferença de pressão entre A e B.

A força resistiva sobre o bloco pode ser obtida da equação(4.2):

$$F= 2 \cdot l \cdot b \cdot \mu \cdot \frac{dv}{dx} \quad (4.3)$$

Igualando (4.2) com (4.3) para impor o equilíbrio estático de / forças e lembrando que quando  $x$  aumenta,  $v$  diminui; e portanto,

$dv/dx$  é negativo, tem-se:

$$2 \cdot x \cdot b \cdot \Delta P = -2 \cdot l \cdot b \cdot \mu \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{ou} \quad dv = -\frac{\Delta P \cdot x \cdot dx}{l \cdot \mu} \quad (4.4)$$

$$\text{Integrando:} \quad v = -\frac{\Delta P}{l \cdot \mu} \cdot \frac{x^2}{2} + C \quad (4.5)$$

Tem-se então: Para  $x = \frac{h}{2}$ ,  $v = 0$

$$\text{De (4.5):} \quad C = \frac{\Delta P \cdot h^2}{8 \cdot \mu \cdot l} \quad (4.6)$$

$$\text{Assim:} \quad v = \frac{\Delta P}{2 \cdot \mu \cdot l} \left[ \frac{h^2}{4} - x^2 \right] \quad (4.7), \text{ que representa uma distri}$$

buição parabólica em  $x$  com velocidade máxima para  $x=0$ ,

$$v_{\text{máx}} = \frac{\Delta P \cdot h^2}{8 \cdot \mu \cdot l} \quad (4.8)$$

e velocidade média igual a dois terços da máxima:

$$v_{\text{médio}} = \frac{2}{3} \cdot v_{\text{máx}} = \frac{\Delta P \cdot h^2}{12 \cdot \mu \cdot l} \quad (4.9)$$

Como a vazão através de uma secção é a velocidade média pela / sua área, escreve-se:  $Q = \frac{\Delta P \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot \mu \cdot l}$  (4.10)

#### 4.4. Modelo I: Rotor, Filme de Óleo e Vazão Constante

Para obter a capacidade de carga fornecida pelo mancal é ne - cessário, primeiramente, determinar o gradiente de pressão ao/ longo do raio.

A figura 4.3 representa, de maneira esquemática, um segmento / de mancal de escora com a distribuição de pressão ao longo de seu raio. Considere um anel diferencial, como representado, de comprimento  $2 \cdot \pi \cdot r$  e largura  $dr$  através da qual o óleo flui. A/ expressão para a vazão de um fluido viscoso e incompressível a través desta ranhura é dada pela equação (4.10), onde por ana - logia identificam-se as dimensões, ou seja:

$l =$  largura do anel ( $dr$ )

$b =$  comprimento do anel ( $2 \cdot \pi \cdot r$ )

$h =$  espessura do filme de óleo ( $h$ )

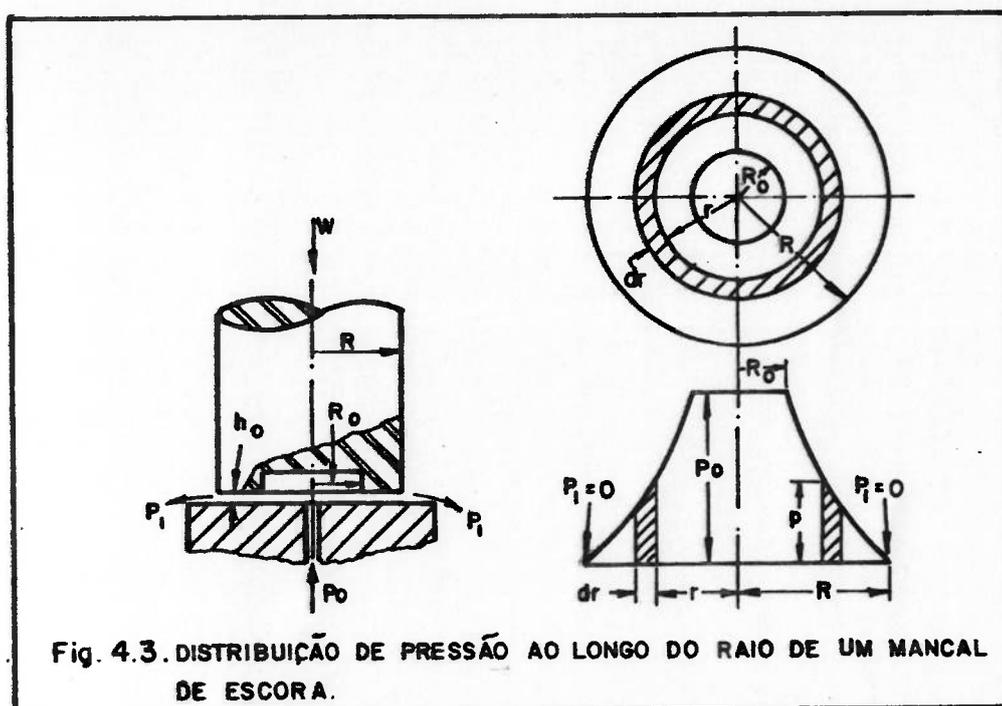


Fig. 4.3. DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO AO LONGO DO RAIÃO DE UM MANCAL DE ESCORA.

Portanto, para um anel infinitesimal, a equação (4.10) torna-se:

$$Q = -dp \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h^3}{12 \cdot \mu \cdot dr} \quad \text{ou} \quad dp = \frac{-6 \cdot \mu \cdot Q \cdot dr}{\pi \cdot h^3 \cdot r} \quad (4.11)$$

$$\text{Integrando: } p = \frac{-6 \cdot \mu \cdot Q \cdot \ln(r)}{\pi \cdot h^3} + C \quad (4.12)$$

Aplicando-se a condição de contorno:  $p=0$  para  $r=R$ , obtém-se:

$$C = \frac{6 \cdot \mu \cdot Q}{\pi \cdot h^3} \cdot \ln(R) \quad (4.13)$$

$$\text{Substituindo (4.13) em (4.12): } p = \frac{6 \cdot \mu \cdot Q}{\pi \cdot h^3} \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (p / 0 \leq p \leq P_0) \quad (4.14)$$

Pela figura acima tem-se uma pressão  $P_0$  uniformemente distribuída até o raio  $R_0$  que produz uma força  $P_0 \cdot (\pi \cdot R_0^2)$  e uma segunda parcela que é fruto da integração da expressão (4.14) entre os raios  $R_0$  e  $R$ . Portanto, a força total  $W$  aplicada ao rotor, / será:

$$W = \int_{R_0}^R p \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot dr + P_0 \cdot (\pi \cdot R_0^2) \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) em (4.15):

$$W = P_0 \cdot (\pi \cdot R_0^2) + \frac{12 \cdot \mu \cdot Q}{h^3} \int_{R_0}^R \ln\left(\frac{R}{r}\right) \cdot r \cdot dr \quad (4.16)$$

Resolvendo a integral, chega-se à seguinte expressão da carga:

$$W = P_o \cdot \pi \cdot R_o^2 + \frac{6 \cdot \mu \cdot Q \cdot R_o^2}{h^3} \cdot \ln\left(\frac{R_o}{R}\right) + \frac{3 \cdot \mu \cdot Q \cdot R^2}{h^3} - \frac{3 \cdot \mu \cdot Q \cdot R_o^2}{h^3} \quad (4.17)$$

Tendo em vista que  $R_o$  é muito menor que  $R$  ( $R_o = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 0,6\%$  de  $R$ ), para simplificar esta expressão calcula-se o limite de  $W$  / para  $R_o$  tendendo a zero:

$$(i) \lim_{R_o \rightarrow 0} P_o \cdot \pi \cdot R_o^2 = 0$$

$$(ii) \lim_{R_o \rightarrow 0} \frac{-3 \cdot \mu \cdot Q \cdot R_o^2}{h^3} = 0$$

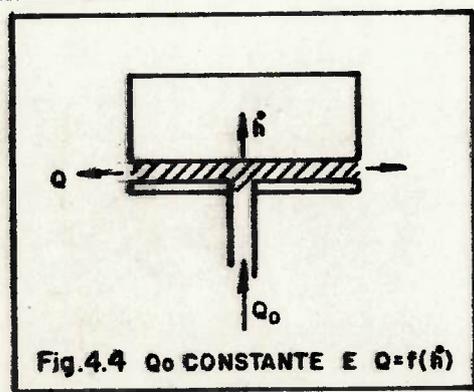
$$(iii) \lim_{R_o \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \mu \cdot Q \cdot R_o^2}{h^3} \cdot \ln\left(\frac{R_o}{R}\right) = \lim_{R_o \rightarrow 0} 6 \cdot \mu \cdot Q \cdot R_o^2 \cdot \ln(R_o) - \lim_{R_o \rightarrow 0} 6 \mu \cdot R_o^2 \ln(R)$$

O segundo termo é nulo e o primeiro indeterminado ( $0 \cdot -\infty$ ); entretanto, aplicando-lhe a regra de L'Hospital, verifica-se que também é nulo. Assim, a expressão (4.17), para  $R_o \approx 0$ , torna-se:

$$W = \frac{3 \cdot \mu \cdot Q \cdot R^2}{h^3} \quad (4.18)$$

A expressão (4.18) é uma equação estática onde a carga é uma / função da vazão e da distância entre as superfícies;  $W=f(Q,h)$ .

Havendo o fornecimento de uma vazão constante  $Q_o$ , como indicado na figura 4.4, para condições não estacionárias, num dado instante  $t$ , a vazão  $Q$  que atravessa a secção ( $2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ ) não coincide com  $Q_o$ .



Introduzindo a equação da continuidade, obtém-se a expressão "quasi-estática" para o sistema, onde a carga / é expressa como uma função da distância  $h$  e sua derivada em relação ao / tempo;  $W = f(h, \hat{h})$

$$\text{Portanto: } Q = Q_o - (\hat{h} \cdot \pi \cdot R^2) \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.18), tem-se:

$$W = \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h^3} - \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \dot{h}}{h^3} \quad (4.20)$$

Da equação (4.20) impondo  $\ddot{h}=0$  e  $\dot{h}=0$ , obtém-se o  $h$  de equilíbrio, que é dado por:  $h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{P}}$  (4.21)

Com a expressão da carga (4.20) pode-se escrever a equação não-linear do movimento da massa do conjunto girante:

$$M \cdot \ddot{h} = W - P = \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2}{h^3} (Q_0 - \dot{h} \cdot \pi \cdot R^2) - P \quad (4.22)$$

$$\text{Portanto: } M \cdot \ddot{h} - \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h^3} + \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \dot{h}}{h^3} + P = 0 \quad (4.23)$$

Mas,  $\ddot{h} = \dot{h} \cdot \frac{d\dot{h}}{dh}$ ; substituindo em (4.23), tem-se:

$$\frac{d\dot{h}}{dh} = \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot Q_0 \cdot R^2}{M} \right) \cdot \frac{1}{h^3 \cdot \dot{h}} - \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{M} \right) \cdot \frac{1}{h^3} - (g) \cdot \frac{1}{\dot{h}} \quad (4.24)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

Observando a expressão (4.22), nota-se que esta é válida desde / que a vazão  $Q$  seja positiva, ou seja:

$$Q_0 - \dot{h} \cdot \pi \cdot R^2 > 0 \Rightarrow \dot{h} < Q_0 / (\pi \cdot R^2)$$

$$\text{Assim, para } \dot{h} \geq Q_0 / (\pi \cdot R^2), \text{ tem-se: } M \cdot \ddot{h} = -P \quad (4.25)$$

$$\text{Logo, } M \cdot \dot{h} \cdot \frac{d\dot{h}}{dh} = -P \text{ e } \frac{d\dot{h}}{dh} = (-g) \cdot \frac{1}{\dot{h}} \quad (4.26)$$

Para linearizar (4.23) em torno do ponto de equilíbrio, reescreve-se a equação em termos de uma nova variável, definida como:

$$y = h - h_{eq} \quad (4.27)$$

$$\text{Assim, tem-se: } M \cdot \ddot{y} - \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{(y+h_{eq})^3} + \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \dot{y}}{(y+h_{eq})^3} + P = 0 \quad (4.28)$$

Mas:  $(y+h_{eq})^{-3} = \left(1 + \frac{y}{h_{eq}}\right)^{-3} \cdot h_{eq}^{-3}$ , que expandindo em série de Taylor,

$$\text{obtem-se: } (y+h_{eq})^{-3} \approx h_{eq}^{-3} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot y}{h_{eq}}\right) \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.28):

$$M \cdot \ddot{y} + \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h_{eq}^3}\right) \cdot \dot{y} + \left(\frac{9 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h_{eq}^4}\right) \cdot y = \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h_{eq}^3} - P\right) = 0 \quad (4.30)$$

Pode-se notar que a equação (4.30) do movimento linearizado em torno do ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, pois a constante de mola é positiva e o amortecimento dissipativo. Logo, pelo teorema de Liapunov, (| 7 | página 222), conclui-se que a equação não linear (4.23) em torno do ponto de equilíbrio, / também é assintoticamente estável.

OBS.: Para o caso de haver um choque do rotor com um obstáculo/ existente em sua trajetória, pode-se descrever tal situação a - través da equação (4.23) acrescida de um termo, o da reação for- necida pelo limitador, em sentido contrário ao movimento. O fe- nômeno encarado como a presença de uma mola de constante elásti- ca elevada a partir de um ponto da trajetória, faz com que a e- quação equivalente à (4.24), válida durante o choque, seja:

$$\frac{d\dot{h}}{dh} = \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{M}\right) \cdot \frac{1}{h^3 \cdot \dot{h}} - \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{M}\right) \cdot \frac{1}{h^3} - (g) \cdot \frac{1}{\dot{h}} - \left(\frac{K_m}{M}\right) \cdot \frac{(h-h_{obst})}{\dot{h}} \quad (4.31)$$

onde:  $K_m$  = constante elástica da mola que simula o obstáculo

$h_{obst}$  = posição onde se encontra o obstáculo

Chamando:  $A = \frac{3 \cdot \mu \cdot Q_0 \cdot R^2}{M}$  ;  $B = \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{M}$  e  $C = g$  ; portanto, A, B/

e C positivos. Substituindo em (4.24) e (4.26):

$$\frac{d\dot{h}}{dh} = \frac{A}{h^3 \cdot \dot{h}} - \frac{B}{h^3} - \frac{C}{\dot{h}} \quad p/ \dot{h} < Q_0 / (\pi \cdot R^2) \quad (4.32.a)$$

$$\frac{d\dot{h}}{dh} = -\frac{C}{\dot{h}} \quad p/ \dot{h} \geq Q_0 / (\pi \cdot R^2) \quad (4.32.b)$$

Utilizando-se o Método das Isóclinas para obter as trajetórias/ das equações (4.32) no plano de fase, verifica-se que para os / valores dos parâmetros (A, B e C) referentes à máquina de Itaipu, conforme os gráficos 4.1 e 4.2, tem-se um nó estável.

OBS.: 1- Os gráficos a seguir foram obtidos através de um programa computacional escrito em linguagem "Basic" e processado em micro-computador.

$$2- \dot{h}_{\text{limite}} = Q_0 / (\pi \cdot R^2)$$

3- Valor dos parâmetros:  $M=2,3 \cdot 10^6 \text{ Kg}$ ;  $Q_0=1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ; /  $R=8,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$  e  $\mu=3,1 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/ms}$ .

4- A exploração das equações (4.32) resume-se à variação dos parâmetros A e B.

5- Observa-se, pelos gráficos 4.3 e 4.4, que, com o aumento da relação A/B, o ponto de equilíbrio passa de nó estável para foco estável.

6- As condições iniciais referentes aos gráficos 4.1 e 4.4 são as seguintes:

Condição inicial nº	Gráfico 4.1		Gráfico 4.4	
	h[m]	$\dot{h}$ [m/s]	h[m]	$\dot{h}$ [m/s]
1	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$
2	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
3	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$
4	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-1}$
5	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$-1,5 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
6	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	—	—

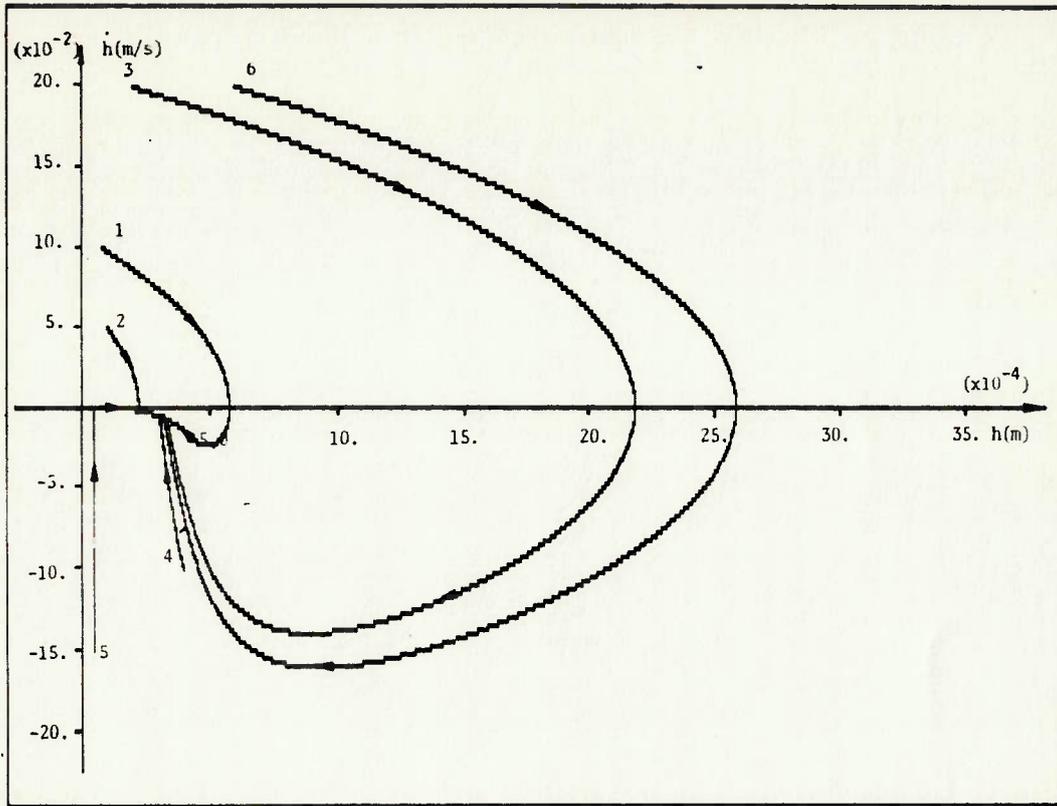


Gráfico 4.1: Valor dos parâmetros:  $A=3,23 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=5,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$   
 Condições iniciais [m;m/s]: (vide pág.39);  $\dot{h}_{\text{limite}}=6,2 \cdot 10^{-4}$

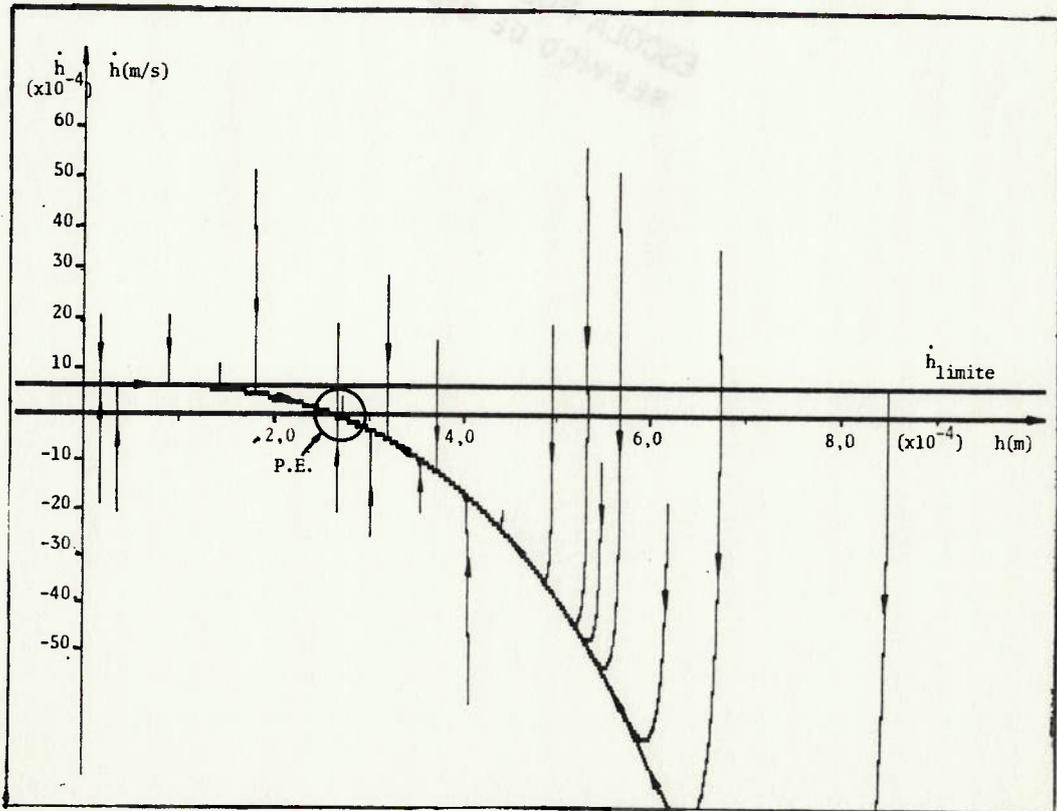


Gráfico 4.2: Valor dos parâmetros:  $A=3,23 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=5,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$   
 Condições iniciais [m;m/s]: Próximos do ponto de equilíbrio (P.E.);  
 $\dot{h}_{\text{limite}}=6,2 \cdot 10^{-4}$

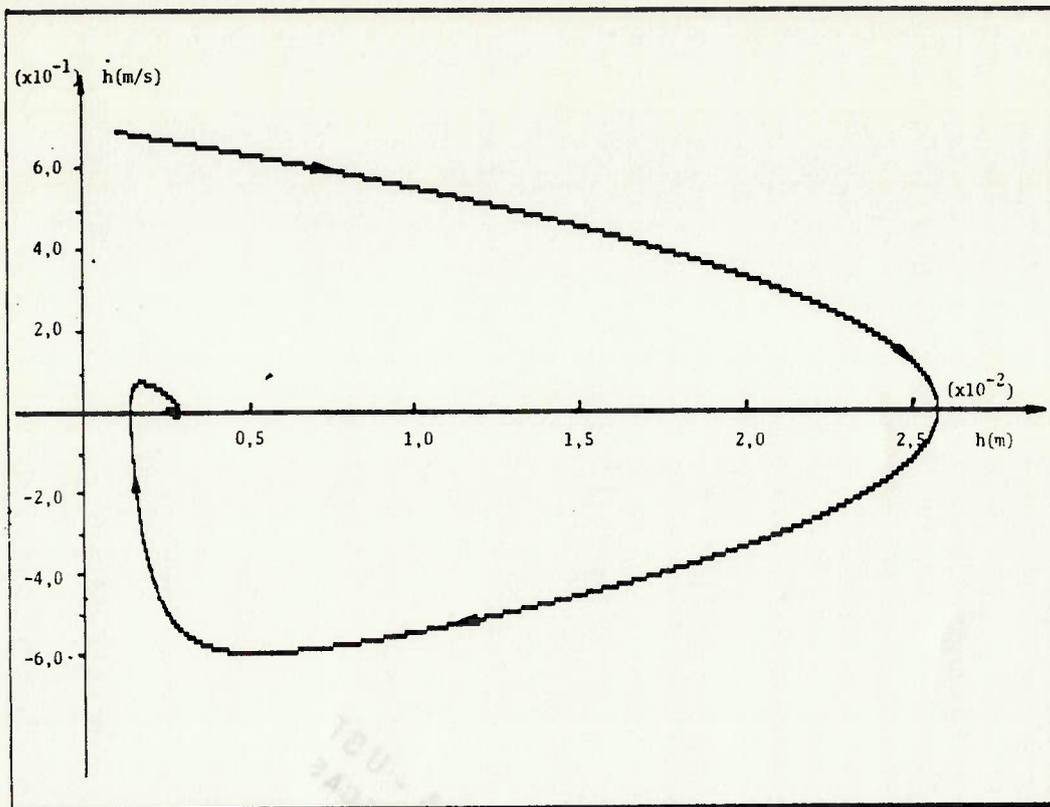


Gráfico 4.3: Valor dos parâmetros:  $A=2,02 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$   
Condição inicial [m;m/s]:  $h_{\text{inicial}}=1,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $\dot{h}_{\text{inicial}}=7,0 \cdot 10^{-1}$ ;  
 $\dot{h}_{\text{limite}}=9,95 \cdot 10^{-2}$

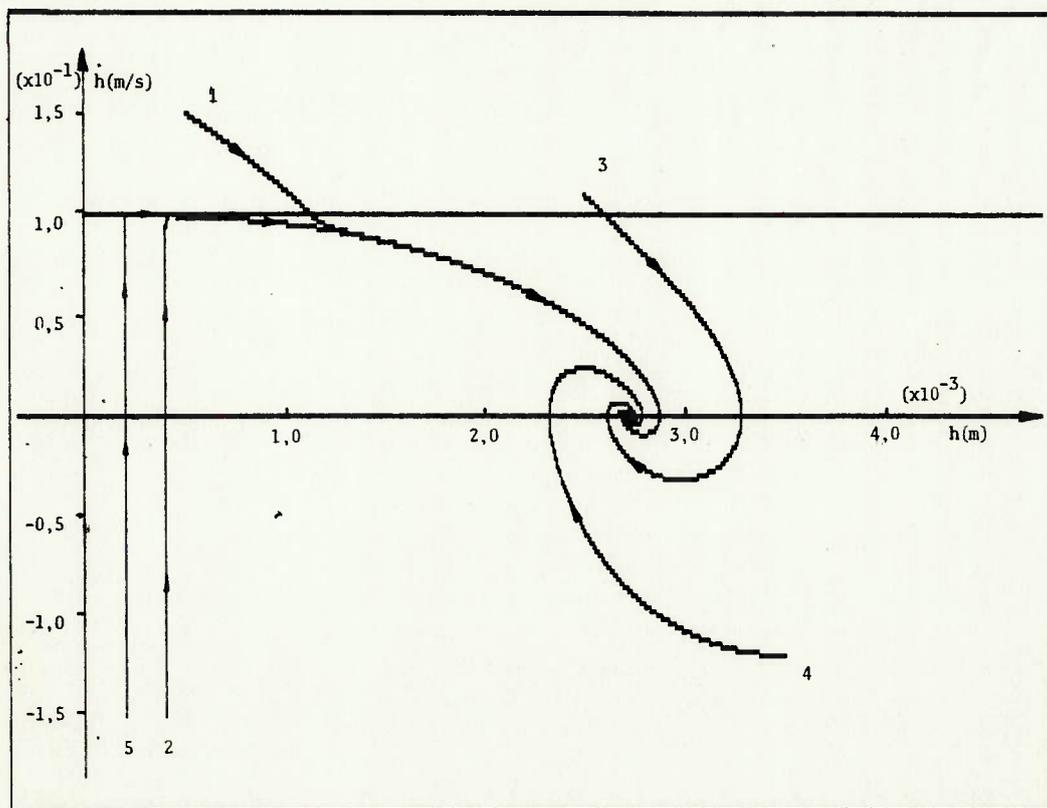


Gráfico 4.4: Valor dos parâmetros:  $A=2,02 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=2,0 \cdot 10^{-6}$   
Condições iniciais [m;m/s]: (vide pág.39);  $\dot{h}_{\text{limite}}=9,95 \cdot 10^{-2}$

É interessante observar que, as curvas 5 e 2 do gráfico 4.4 têm/ suas direções bruscamente alteradas quando atingem a velocidade  $\dot{h}_{lim.}$ , já este efeito é bastante reduzido na curva 1 e praticamente inexistente na curva 3.

Fisicamente, este comportamento das trajetórias pode ser entendido observando as forças que agem no rotor. Comparando as curvas 3 e 5, verifica-se que a curva 3 passa pelo  $\dot{h}_{limite}$  para um valor de  $\underline{h}$ , bem maior do que acontece na curva 5. Quanto maior/ o  $\underline{h}$ , menor a força de interação entre rotor e mancal. Assim, no caso da curva 3, a força que começa a compor a dinâmica do rotor é bem menor que a que deixa de atuar no caso da curva 5. Logo, haverá esta mudança radical na direção da trajetória da curva 5, enquanto na outra este efeito é bastante atenuado.

O parâmetro B está relacionado com o coeficiente de amortecimento da equação do movimento (4.23) e o parâmetro A, relacionado/ com a constante elástica. Assim, à medida que A aumenta em relação a B, a trajetória tende ao ponto de equilíbrio mais lentamente, ou melhor, com um maior número de ciclos; o sistema torna-se menos "amortecido". Os gráficos 4.5 e 4.6 mostram as trajetórias para uma relação A/B ainda maior.

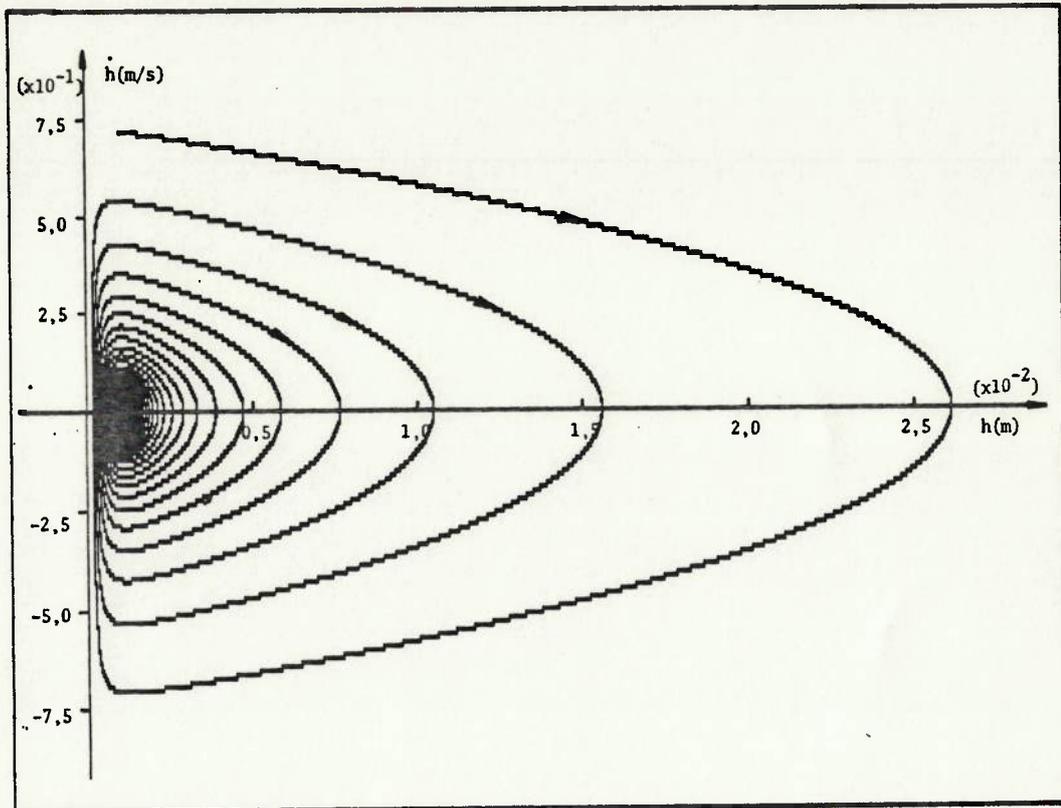


Gráfico 4.5: Valor dos parâmetros:  $A=1,26 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=7,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$   
 Condição inicial [m;m/s]:  $h_{\text{inicial}}=1,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $\dot{h}_{\text{inicial}}=7,0 \cdot 10^{-1}$ ;  
 $\dot{h}_{\text{limite}}=1,59$

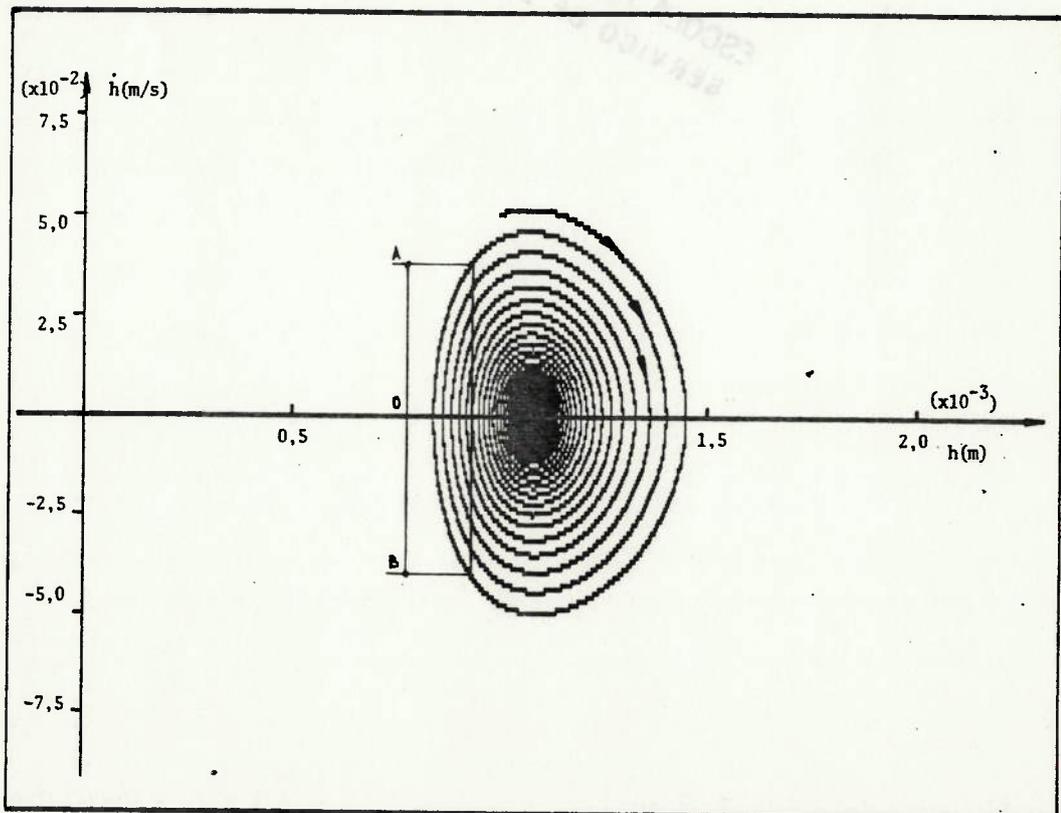


Gráfico 4.6: Valor dos parâmetros:  $A=1,26 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=7,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$   
 Condição inicial [m;m/s]:  $h_{\text{inicial}}=1,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $\dot{h}_{\text{inicial}}=5,0 \cdot 10^{-2}$ ;  
 $\dot{h}_{\text{limite}}=1,59$

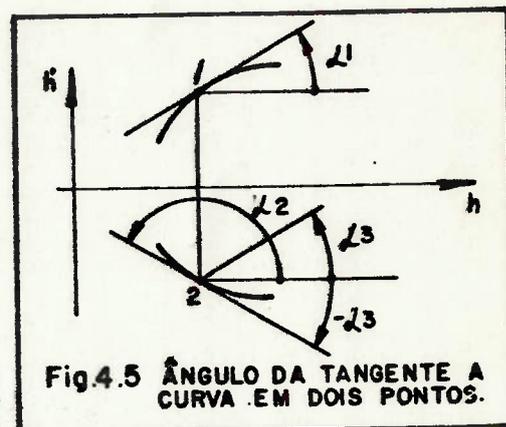
Estabilidade: o gráfico 4.6 sugere a possibilidade de existirem valores de A e B (positivos) capazes de tornar a trajetória uma curva fechada, ou seja, um ciclo-limite. Será demonstrado, agora, que tal fato não ocorre.

No plano de fase, tomando-se dois pontos (1 e 2) equidistantes/ do eixo  $\dot{h}=0$ , figura 4.5, tem-se:  $h_1=h_2$  e  $\dot{h}_1=-\dot{h}_2$ . Portanto, de / (4.32.a):

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{A}{h_1^3 \cdot \dot{h}_1} - \frac{B}{h_1^3} - \frac{C}{\dot{h}_1} = K_1 - \frac{B}{h_1^3}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_2) = \frac{-A}{h_1^3 \cdot \dot{h}_1} - \frac{B}{h_1^3} + \frac{C}{\dot{h}_1} = -K_1 - \frac{B}{h_1^3}$$

$$\text{Mas: } \operatorname{tg}(\alpha_3) = -\operatorname{tg}(\alpha_2) = K_1 + \frac{B}{h_1^3}$$



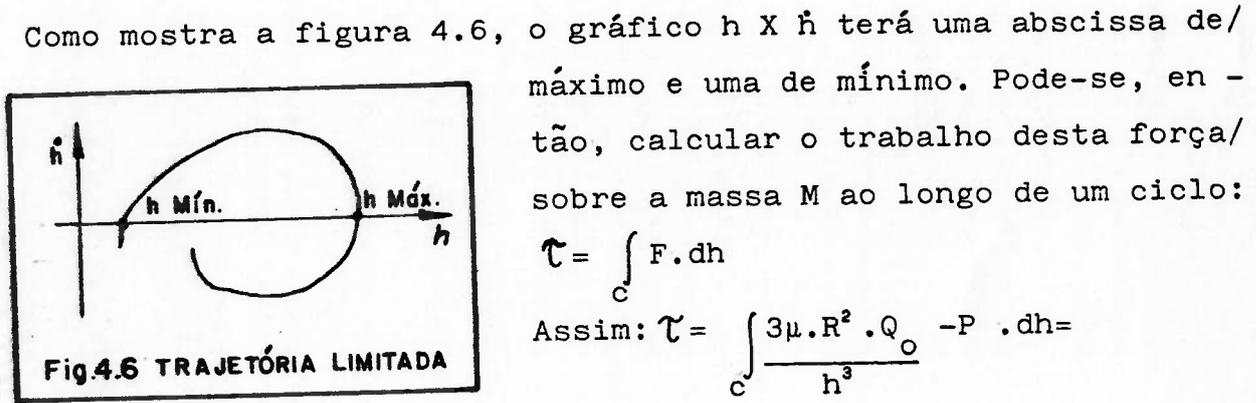
Logo,  $\alpha_3 > \alpha_1$  faz com que a trajetória se / ja uma espiral que caminha para o foco estável, uma vez que o / sentido de rotação é obrigatoriamente anti-horário, ou seja, /  $\dot{h} > 0$  implica em aumento de  $h$  e  $\dot{h} < 0$  em diminuição. Assim, pelo / gráfico 4.6, pode-se afirmar que o segmento  $\overline{AO}$  é menor que o se / gmento  $\overline{BO}$ .

Pode-se observar que, quando o conjunto girante tem sua trajetória regida pela equação (4.32.b), sua velocidade diminui sempre, passando obrigatoriamente para a região, no plano de fase, regi / da pela equação (4.32.a). Portanto, a estabilidade da última im / plica na estabilidade assintótica global.

A estabilidade do sistema pode ser analisada sob o ponto de vis / ta do trabalho realizado pelas forças que agem na massa em sus / pensão. Para tanto, é necessário fazer algumas considerações: / supondo, inicialmente, a equação (4.23) sem o termo viscoso, ou / seja:  $M\ddot{h} = \frac{3\mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h^3} - P$

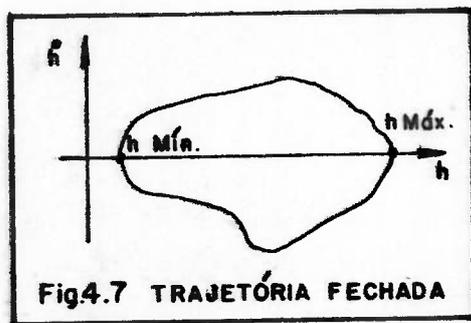
Nesta expressão, para  $h \rightarrow 0$ , tem-se o segundo termo tendendo a /  $+\infty$  e, conseqüentemente,  $\ddot{h} \rightarrow +\infty$ , o que implica na existência de /

um limite inferior para  $h$ . Por outro lado, verifica-se que, para  $h > h_{\text{equilíbrio}}$ , o segundo termo passa a ser negativo, tendendo (em módulo) à  $P$  quando  $h \rightarrow +\infty$ , limitando o  $h$  a um valor máximo.



$$\mathcal{T} = \int_{h \text{ mín}}^{h \text{ máx}} \left( \frac{3\mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h^3} - P \right) \cdot dh + \int_{h \text{ máx}}^{h \text{ mín}} \left( \frac{3\mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{h^3} - P \right) \cdot dh = 0 \quad (4.34)$$

Portanto, o trabalho desta força ao longo do ciclo é nulo, ou seja, o fenômeno hipotético descrito por (4.33) é conservativo/ e a trajetória no plano de fase, uma curva fechada. (figura 4.7)



Feito isto, calcula-se, agora, o trabalho realizado pela força viscosa ao longo da curva fechada. Assim, pode-se escrever:

$$\mathcal{T}_{\text{visc}} = \int_C \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h} \cdot dh \quad (4.35)$$

$$\mathcal{T}_{\text{visc}} = \int_{h \text{ mín}}^{h \text{ máx}} \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h} \cdot dh + \int_{h \text{ máx}}^{h \text{ mín}} \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h} \cdot dh \quad (4.36)$$

Chamando-se  $F(h) = \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h}$ , tem-se para a 1ª integral:

$$F(h) \leq 0, \text{ pois: } \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) < 0 \text{ e } \dot{h} \geq 0.$$

Pela definição de integral definida:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x; \text{ tem-se para } F(h_i^*) \leq 0:$$

$$\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h} \cdot dh < 0 \quad (4.37)$$

Para a 2ª integral, chamando-se:  $G(h) = \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h}$ , tem-se:

$$G(h) \geq 0, \text{ pois: } \left( \frac{-3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) < 0 \text{ e } \dot{h} \leq 0.$$

$$\text{Lembrando que: } \int_{h_{\max}}^{h_{\min}} G(h) \cdot dh = - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} G(h) \cdot dh = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} -G(h) \cdot dh \text{ e sen}$$

$$\text{do: } -G(h_i^*) \leq 0, \text{ tem-se: } \int_{h_{\max}}^{h_{\min}} G(h) \cdot dh < 0 \quad (4.38)$$

Desta forma, as duas parcelas da equação (4.36) são negativas, / mostrando que há trabalho negativo da força viscosa ao longo de toda trajetória. Assim, havendo perda de energia da massa a todo instante, sua trajetória torna-se uma espiral a caminho do / foco estável.

Os motivos que justificam a estabilidade deste sistema, servem inclusive para o caso descrito pela equação (4.31), que procura simular a presença de um obstáculo através de uma mola muito rí gida, pois uma interrupção da trajetória causada por um choque (mesmo que perfeitamente elástico) só impede que o corpo perca energia no percurso que deixou de fazer, não alterando sua situ ação dissipativa no resto do ciclo. O gráfico 4.7 ilustra esta/ situação.

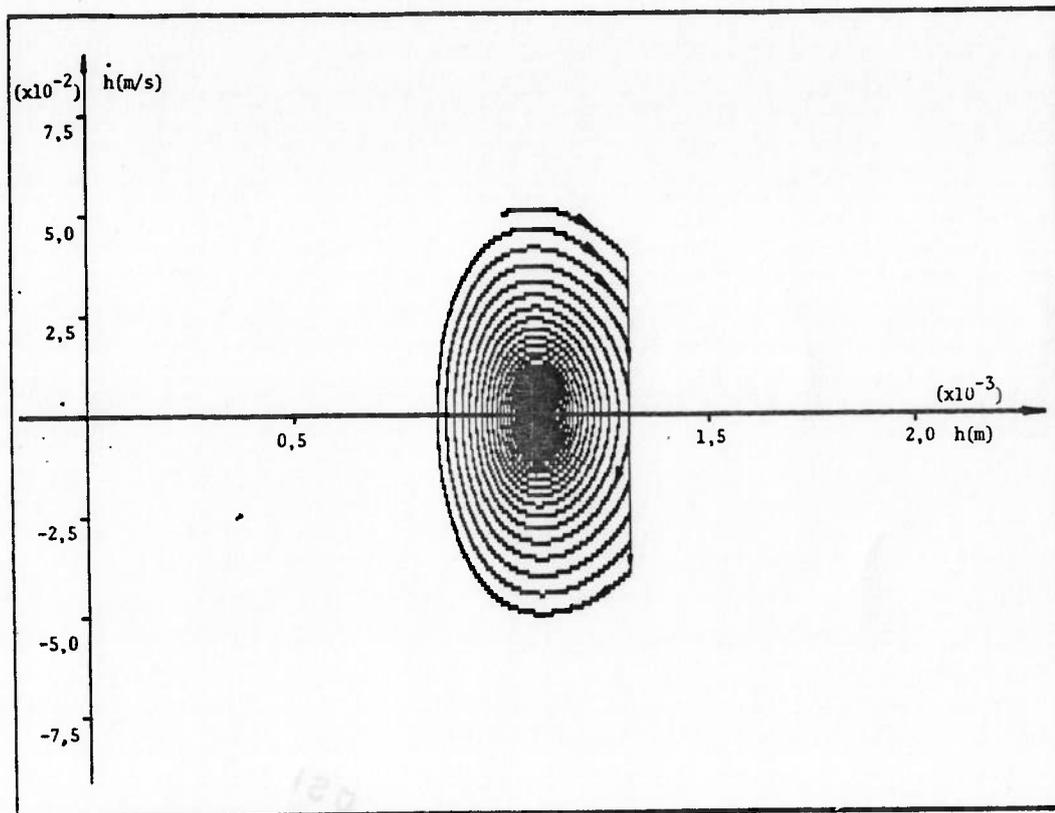


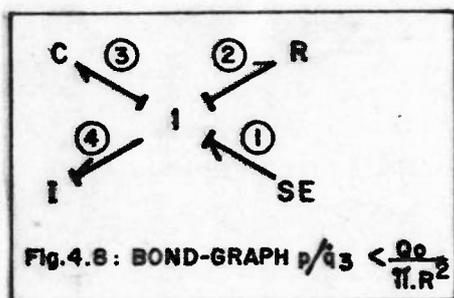
Gráfico 4.7: Valor dos parâmetros:  $A=1,26 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4/\text{s}^2$ ;  $B=7,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$   
 Condições iniciais [m;m/s]:  $h_{\text{inic}}=1,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $\dot{h}_{\text{inic}}=5,0 \cdot 10^{-2}$ ;  
 $\dot{h}_{\text{limite}}=1,59$ ;  $h_{\text{obst}}=1,3 \cdot 10^{-3}$ .

Obs.: Para aferição da precisão dos resultados obtidos pelo Método das Isóclinas, utilizou-se a integração numérica pelo método de Runge-Kutta. Equacionou-se o problema como um sistema massa-mola-amortecedor, onde os coeficientes elástico e de amortecimento são funções de  $h$  (espessura do filme de óleo) e, portanto, são parâmetros que devem ser "modulados".

Assim sendo, tem-se:  $M \cdot \ddot{h} + k \cdot h + c \cdot \dot{h} - P = 0$

De (4.23) obtém-se:  $k = \frac{1}{c} = -3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0 / h^4$  e  $c = R = 3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4 / h^3$

Dado o "Bond Graph" para o sistema, figura 4.8, escreve-se:



$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_4 &= \frac{P-R}{I} \cdot p_4 - \frac{1}{C} \cdot q_3 \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{I_1} \cdot p_4 \end{aligned} \right\} p / \dot{q}_3 < Q_0 / (\pi \cdot R^2)$$

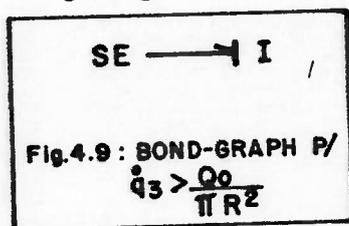
onde:  $p_4$  = Quantidade de movimento da massa do conjunto girante

$\dot{p}_4$  = Força agindo na massa do rotor

$q_3$  = Posição da massa do rotor

$\dot{q}_3$  = Velocidade da massa do rotor

Para  $\dot{q}_3 > Q_0 / (\pi R^2)$ , tem-se o seguinte "Bond Graph", figura 4.9:



( $M \cdot \ddot{h} = P$ ) e o sistema fica:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_4 &= P \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{I} \cdot p_4 \end{aligned} \right\}$$

#### 4.5. Modelo II: Análise da Fonte de Vazão Não-Ideal

Neste item é analisada a influência do efeito da fonte de vazão/ ser limitada, não-ideal, na estabilidade do sistema.

Admitindo-se uma dependência linear entre vazão e carga manométrica, como representada na figura 4.10, pode-se escrever:

$$Q = Q_x - H \cdot a \tag{4.39}$$

onde:  $Q_x$  = vazão da bomba para uma carga nula.

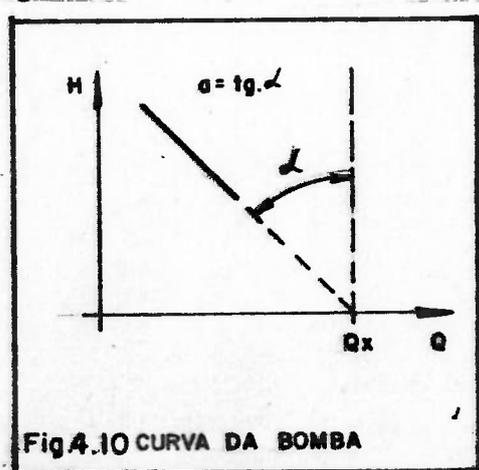
$a$  = tangente do ângulo definido na figura.

$H$  = carga manométrica da linha. Desprezando a parcela da velocidade/ e as diferenças de cotas (que juntas contribuem com menos de 1% do valor de  $H$ ), pode-se escrever:

$$H \approx p / (\rho \cdot g) \tag{4.40}$$

onde  $p$  = pressão na linha.

Substituindo (4.14) em (4.39), obtém-se a expressão da vazão fornecida pela bomba:



$$Q = \frac{Q_x}{\left( \frac{6 \cdot \mu \cdot \ln(R/R_o) \cdot a + 1}{\pi \cdot \rho \cdot g \cdot h^3} \right)} \quad (4.41)$$

Portanto,  $Q_o$  da equação (4.23) transformou-se em  $Q=f(h)$ ; assim / sendo, substituindo (4.41) em (4.23), tem-se:

$$M \cdot \ddot{h} - \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_x}{\left( \frac{6 \cdot \mu \cdot \ln(R/R_o) \cdot a + h^3}{\pi \cdot \rho \cdot g} \right)} + \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{h^3} \right) \cdot \dot{h} + P = 0 \quad (4.42)$$

Nesta expressão, fazendo-se  $\ddot{h}=0$  e  $\dot{h}=0$ , chega-se ao  $h$  de equilí -  
brio: 
$$h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_x}{P} - \frac{6 \cdot \mu \cdot \ln(R/R_o) \cdot a}{\pi \cdot \rho \cdot g}} \quad (4.43)$$

Novamente, para utilizar o Método das Isóclinas, faz-se a substi -  
tuição de  $\ddot{h}$  por  $\dot{h} \cdot \frac{dh}{dh}$ , obtendo-se a expressão da tangente à traje -

tória em cada ponto do plano de fase:

$$\frac{dh}{dh} = \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_x}{\frac{6 \cdot \mu \cdot M \cdot \ln(R/R_o) \cdot a + M \cdot h^3}{\pi \cdot \rho \cdot g}} \right) \frac{1}{h} - \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{M \cdot h^3} - g \cdot \frac{1}{h} \quad (4.44)$$

$$\text{Válida para: } \left( \frac{Q_x}{\frac{6 \cdot \mu \cdot \ln(R/R_o) \cdot a + M \cdot h^3}{\pi \cdot \rho \cdot g}} \right) - \dot{h} \cdot \pi \cdot R^2 \geq 0$$

$$\text{Ou seja: } \dot{h} \leq \frac{Q_x}{\left( \frac{6 \cdot \mu \cdot \ln(R/R_o) \cdot R^2 \cdot a + \pi \cdot R^2}{\pi \cdot \rho \cdot h^3} \right)} \quad (4.45)$$

Caso contrário, a expressão válida é a (4.26):

$$\frac{dh}{dh} = (-g) \cdot \frac{1}{h}$$

Analogamente, para a presença de um obstáculo, durante o choque, a expressão relacionada à trajetória apresenta mais um termo, cu -  
ja origem é a da força resistiva simulada por uma mola rígida:

$$\frac{\dot{dh}}{dh} = \left( \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_x}{6 \cdot \mu \cdot M \cdot \ln(R/R_o) \cdot a + M \cdot h^3} \right) \cdot \frac{1}{h} - \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4}{M \cdot h^3} - \frac{g \cdot 1}{h} + \frac{-K_m \cdot (h - h_{\text{obst}})}{M \cdot h} \quad (4.46)$$

Comparando a equação (4.42) com (4.23), percebe-se que apenas o termo em  $\dot{h}$  foi alterado (termo "elástico"), e é fácil ver que isto não é suficiente para alterar o estado de estabilidade do sistema, pois seguindo o mesmo raciocínio do item 4.4., chega-se à mesma conclusão. Ou seja, sem o termo viscoso, trata-se de uma curva que tem máximo e mínimo, e é fechada. Além disso, sendo o termo viscoso idêntico, seu trabalho é negativo.

Dentro deste quadro, surge a necessidade de verificar se o modelo matemático adotado não está negligenciando algum efeito que pudesse, de alguma forma, alterar a expressão do termo viscoso.

É importante notar, pela expressão (4.45), que o  $\dot{h}_{\text{limite}}$ , agora, é uma função de  $\dot{h}$ . Portanto, no diagrama de fase não é mais uma reta paralela ao eixo das abscissas.

A seguir, os gráficos 4.8 e 4.9 são os correspondentes de 4.1 e 4.2, respectivamente. Possuem os parâmetros da máquina de Itaipu, sendo admitido um valor hipotético para o  $\underline{a}$  da bomba. Além disso, o valor de  $Q_x$  é tal que, para o instante inicial,  $Q=Q_o$ . As condições iniciais, também, são correspondentemente iguais. Nota-se, portanto, que o comportamento é fundamentalmente o mesmo, apresentando nó estável.

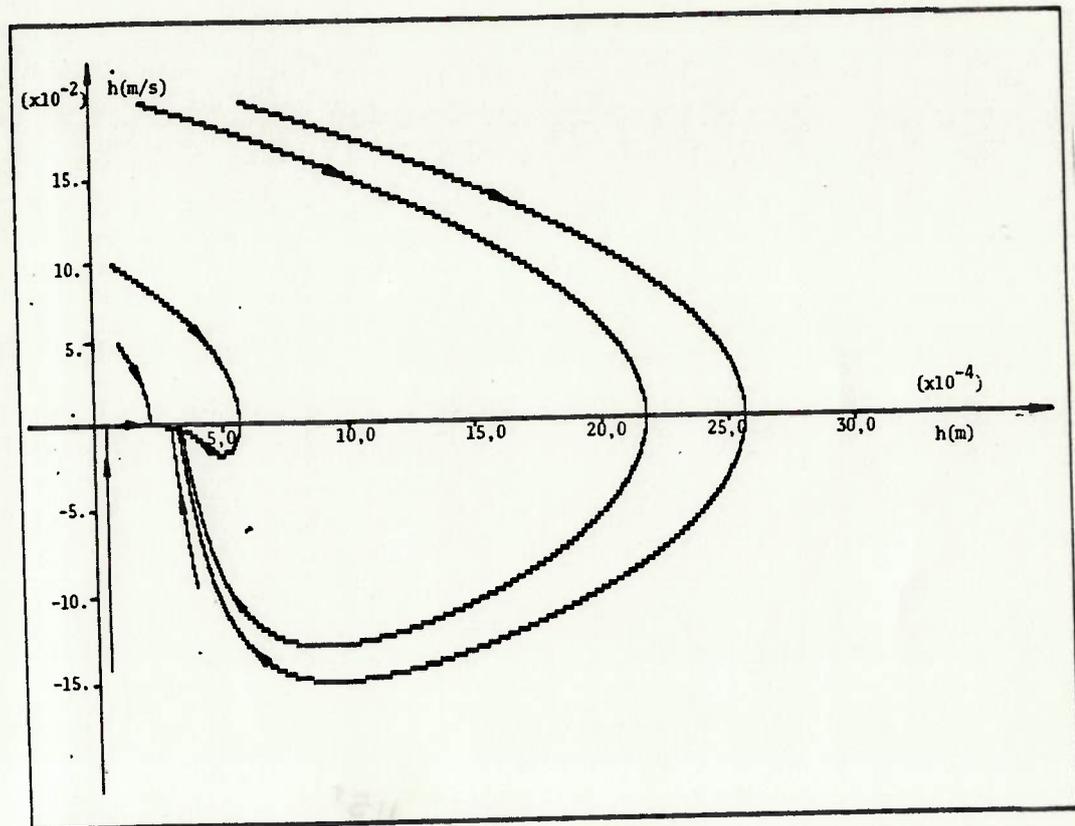


Gráfico 4.8: Valor dos parâmetros:  $\mu, R$  e  $M$  iguais aos de 4.1;  $a=1$  e  $Q_x = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ . Condições iniciais: iguais às do gráfico 4.1

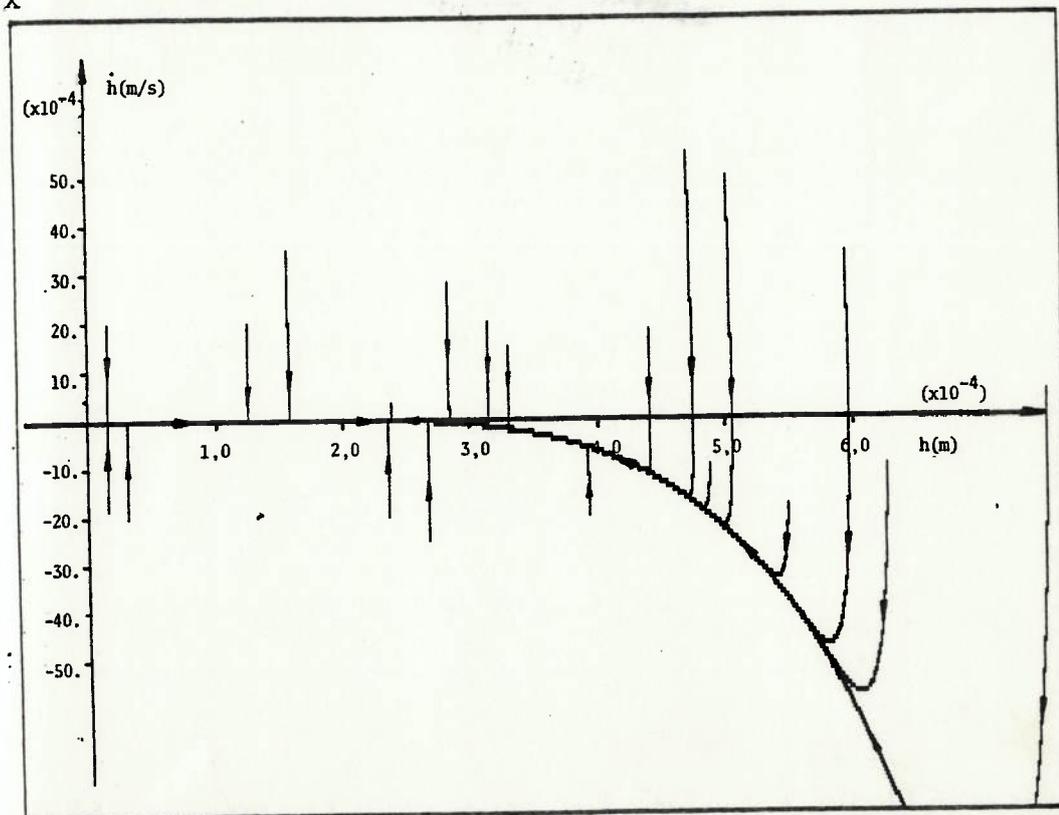


Gráfico 4.9: Valor dos parâmetros:  $\mu, R$  e  $M$  iguais aos de 4.1;  $a=1$  e  $Q_x = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ . Condições iniciais: iguais às do gráfico 4.2

Para valores fictícios dos parâmetros, como os adotados na obtenção do gráfico 4.6, verifica-se que o comportamento também é análogo, isto é, apresenta foco estável e "elasticidade" semelhantes. (gráfico 4.10)

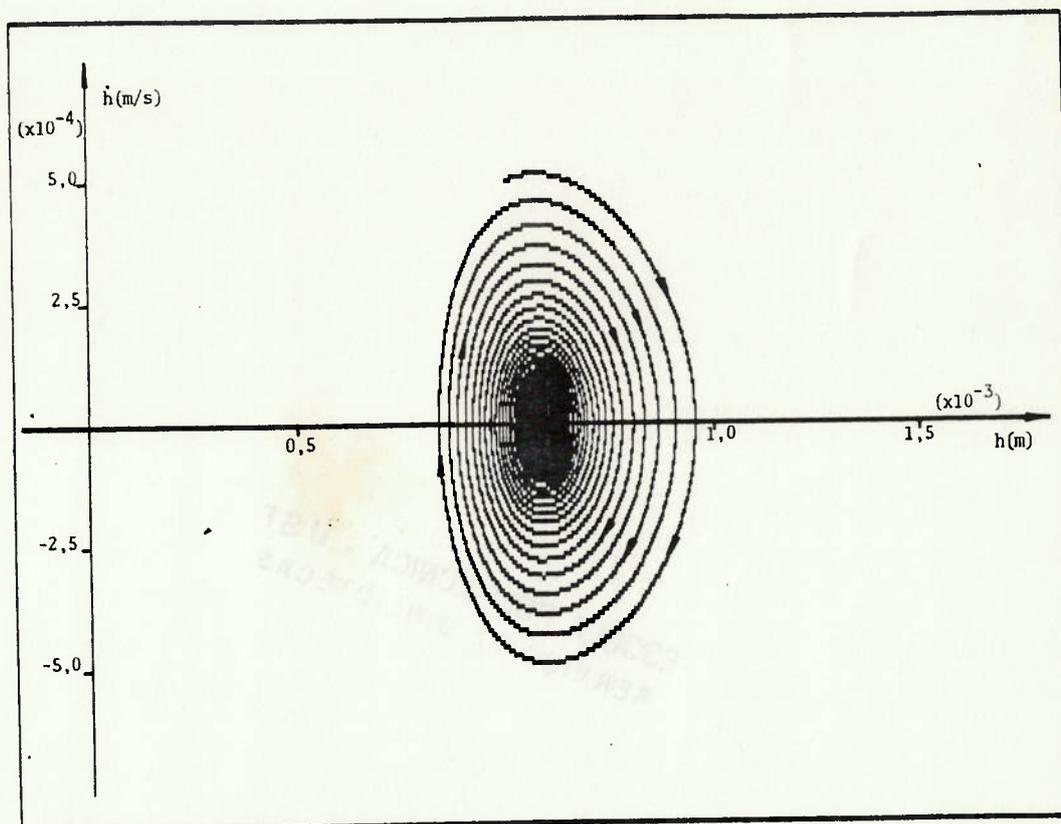


Gráfico 4.10: Valor dos parâmetros:  $\mu, R$  e  $M$  iguais aos de 4.6;  $a=1$  e conseqüente  $Q_x = 1,3 \text{ m}^3/\text{s}$ . Condições iniciais: iguais às do Gráfico 4.6

Para finalizar, no gráfico 4.11, com parâmetros correspondentes ao 4.4, pode-se notar a alteração causada pelo  $\dot{h}_{\text{limite}}$ , agora, / como função de  $\underline{h}$ . De qualquer forma, a convergência para o foco estável é mantida (A exemplo dos casos anteriores, admite-se /  $a=1,00$  e calcula-se  $Q_x$  para que, no instante inicial,  $Q$  seja igual a  $Q_0$ ).

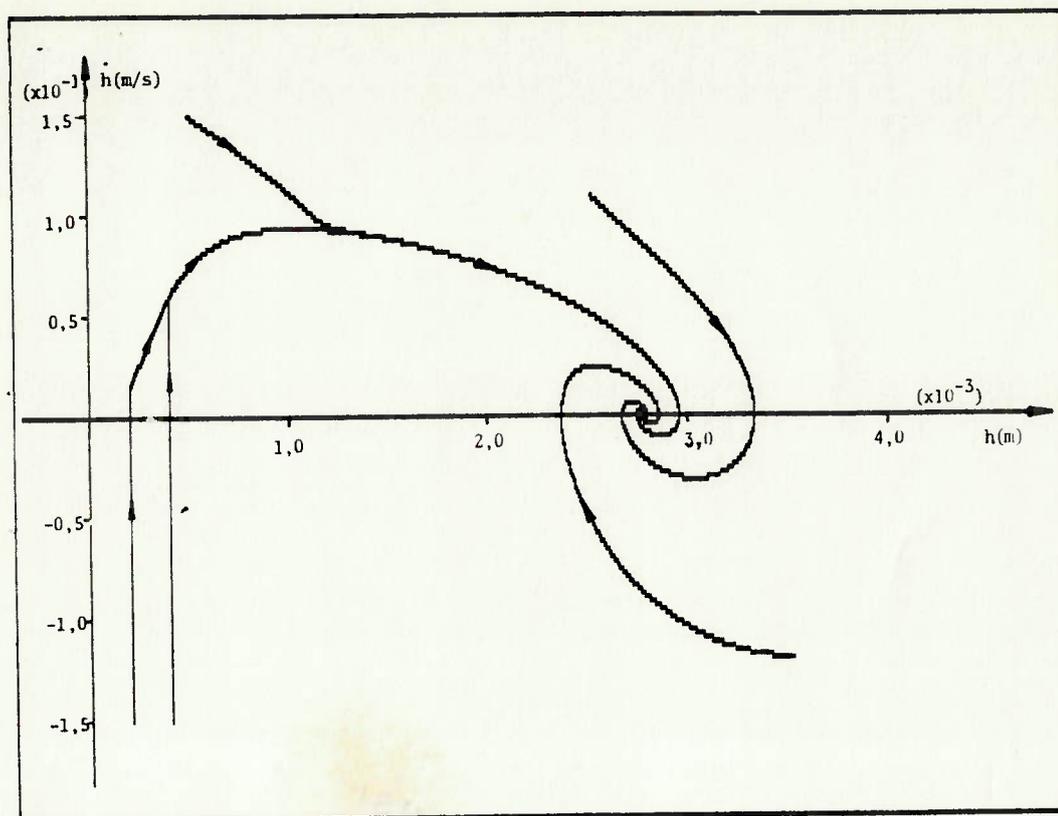


Gráfico 4.11: Valor dos parâmetros:  $\mu$ ,  $R$  e  $M$  iguais aos de 4.4,  $a=1$  e  $Q_x=1,3\text{m}^3/\text{s}$ . Condições iniciais. iguais às do gráfico 4.4.

#### 4.6. Modelo III: Análise da Influência da Elasticidade da Cruzeta

É oportuno, nesta altura do trabalho, analisar um problema que possui uma fonte de energia análoga, ou seja, constante no tempo. Assim, considera-se uma massa apoiada numa esteira acionada com velocidade constante por um par de polias, presa a uma parede através de uma mola, conforme figura 4.11.

Chamando de  $\mu_d$  o coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies da massa e da esteira, pode-se escrever as equações do movimento da massa:

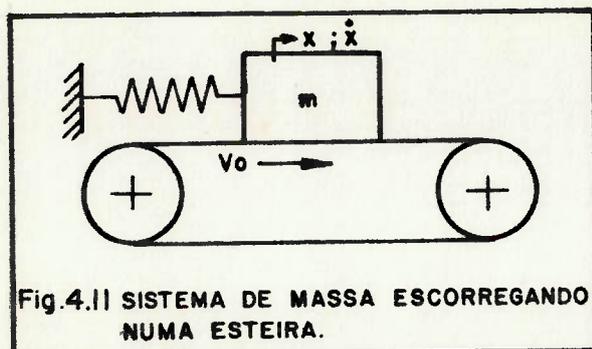


Fig.4.11 SISTEMA DE MASSA ESCORREGANDO NUMA ESTEIRA.

$$(i) m \cdot \ddot{x} + k \cdot x - \mu_d \left[ \frac{(V_0 - \dot{x})}{|V_0 - \dot{x}|} \right] m \cdot g = 0;$$

para  $\dot{x} \neq V_0$

(i) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(ii) m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + \mu_d \cdot m \cdot g \left[ \frac{(1 - V_0 / \dot{x})}{|V_0 - \dot{x}|} \right] \dot{x} = 0; \text{ para } \dot{x} \neq 0$$

Desta forma, é fácil identificar o coeficiente de amortecimento, que é uma função de  $\dot{x}$ :

$$(iii) c = \mu_d \cdot m \cdot g \left[ \frac{(1 - V_0 / \dot{x})}{|V_0 - \dot{x}|} \right]$$

Assim, para  $|\dot{x}| < V_0$ ; tem-se  $c < 0$

para  $|\dot{x}| > V_0$ ; tem-se  $c > 0$

O comportamento do sistema massa-mola é o seguinte: enquanto o módulo da velocidade da massa  $\dot{x}$  for menor que  $V_0$ , isto é,  $c < 0$ , haverá transferência de energia para o sistema massa-mola e aumento da amplitude, pois o atrito é uma força motora que faz com que  $|\dot{x}|$  vá atingindo valores maiores. Há um momento em que  $|\dot{x}|$  tende ser maior que  $V_0$ , e daí o efeito se inverte, pois com  $c > 0$  o sistema passa a perder energia, pois o atrito torna-se resistivo. Desta forma, tal sistema tende a uma oscilação auto-excitada com amplitude e freqüência constantes (ciclo-limite).

Além disso, tendo em vista a seguinte afirmação: "... em uma vibração auto-excitada a força alternada que sustenta o movimento é gerada ou controlada pelo movimento em si; quando cessa o movimento, desaparece a força alternada; ..."|4|; nota-se que tal fato ocorre nesta vibração, pois a força alternada é consequência

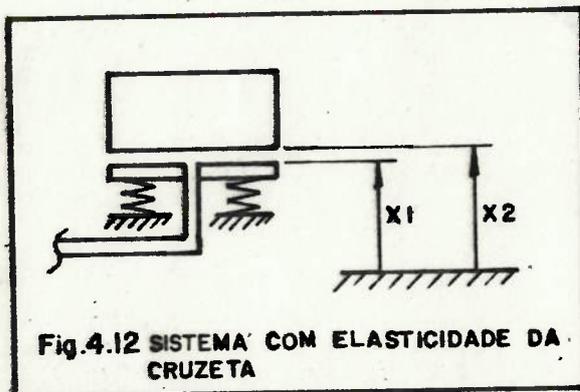
do movimento da massa, uma vez que não há excitação alternada / provocada pela correia.

No caso do mancal de escora, será verificada a possibilidade do / termo associado à velocidade agir, em certo intervalo de tempo, / como força motora.

Na figura 4.12 está representada uma mola atuando na base do mancal, seu objetivo é simular a elasticidade axial da cruzeta que / sustenta o mancal de escora.

Reescrevendo a equação 4.23, para o sistema de coordenadas mos - trado na figura, obtém-se:

$$M \cdot \ddot{x}_2 - \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_0}{(x_2 - x_1)^3} + \frac{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{(x_2 - x_1)^3} + P = 0 \quad (4.47)$$



onde:

$x_1$  = posição da mola

$\dot{x}_1$  = velocidade da mola

$x_2$  = posição da massa

$\dot{x}_2$  = velocidade da massa

Chamando de  $K_m$  a constante de rigidez elástica da mola e  $x_e$  a posição que esta ocuparia se não estivesse submetida à compressão / de carga; pode-se então dizer, que a força que age sobre ela é:

$$K_m \cdot (x_e - x_1) \text{ e que } K_m \cdot (x_e - x_1) = \frac{3 \cdot \mu \cdot R^2}{(x_2 - x_1)^3} \cdot \left[ Q_0 - \pi \cdot R^2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \right] \quad (4.48)$$

Isolando  $\dot{x}_1$ , tem-se:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 - \frac{Q_0}{\pi \cdot R^2} + \frac{K_m \cdot (x_e - x_1) \cdot (x_2 - x_1)^3}{3 \cdot \mu \cdot \pi \cdot R^4} \quad (4.49)$$

Manipulando a equação (4.47), pode-se escrever:

$$M.\ddot{x}_2 - \frac{3.\mu.R^2.Q_o}{(x_2-x_1)^3} + \left[ \frac{3.\mu.\pi.R^4}{(x_2-x_1)^3} \cdot \left( 1 - \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \right) \right] \cdot \dot{x}_2 + P = 0 \quad (4.50)$$

Novamente, pode-se identificar o coeficiente de amortecimento, / que desta vez é função de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ :

$$c = \left[ \frac{3.\mu.\pi.R^4}{(x_2-x_1)^3} \cdot \left( 1 - \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \right) \right] \quad (4.51)$$

Lembrando que  $(x_2-x_1)$  é a espessura de filme de óleo; e portanto, sempre positiva, pode-se escrever:

Para  $\dot{x}_2 > 0$ : Se  $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$ ; tem-se  $c < 0$

Se  $\dot{x}_1 < \dot{x}_2$ ; tem-se  $c > 0$

Para  $\dot{x}_2 < 0$ : Se  $\dot{x}_1 < \dot{x}_2$ ; tem-se  $c < 0$

Se  $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$ ; tem-se  $c > 0$

Comparando o coeficiente de amortecimento descrito pela expressão (iii) com o coeficiente de amortecimento do problema em questão,

que é descrito pela expressão (4.51), nota-se grande semelhança, contudo, existe uma diferença fundamental entre  $\underline{V}_o$  (da equação iii) e  $\dot{x}_1$  (da equação 4.51). Enquanto  $\underline{V}_o$  é constante,  $\dot{x}_1$  não o é; e mais, o valor de  $\dot{x}_1$  está vinculado ao de  $\dot{x}_2$  pela expressão / (4.49). Assim, em princípio, pode ocorrer que em momento algum  $\dot{x}_1$  consiga ser maior que  $\dot{x}_2$  (para  $\dot{x}_2 > 0$ ) ou  $\dot{x}_1$  ser menor que  $\dot{x}_2$  (para  $\dot{x}_2 < 0$ ), para que se tenha coeficiente de amortecimento negativo.

Obs.: Se  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  têm mesmo sinal, pode-se escrever:

Se  $|\dot{x}_1| > |\dot{x}_2|$ ; tem-se  $c < 0$

Se  $|\dot{x}_1| < |\dot{x}_2|$ ; tem-se  $c > 0$

O ponto de equilíbrio do sistema definido por (4.47) e (4.49) pode ser obtido impondo as condições:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \tag{4.52}$$

$$\ddot{x}_2 = 0 \tag{4.53}$$

Chamando as coordenadas do ponto de equilíbrio de:

$$x_1 = X_1 \tag{4.54}$$

$$x_2 = X_2 \tag{4.55}$$

$$\text{Obtém-se: } X_1 = x_e - \frac{P}{K_m} \tag{4.56}$$

$$X_2 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \mu \cdot R^2 \cdot Q_o}{P}} + \left( x_e - \frac{P}{K_m} \right) \tag{4.57}$$

Para resolver numericamente o sistema descrito por (4.47) e (4.49), através do método de Runge-Kutta, utilizou-se novamente a técnica de "Bond Graph" para obter um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, onde a não linearidade do sistema estará / contida na modulação da resistência hidráulica do mancal.

Na figura 4.13 está representado o sistema em estudo com uma bomba cujo fornecimento de vazão é constante ao longo do tempo, e ao lado, o "Bond Graph" correspondente.

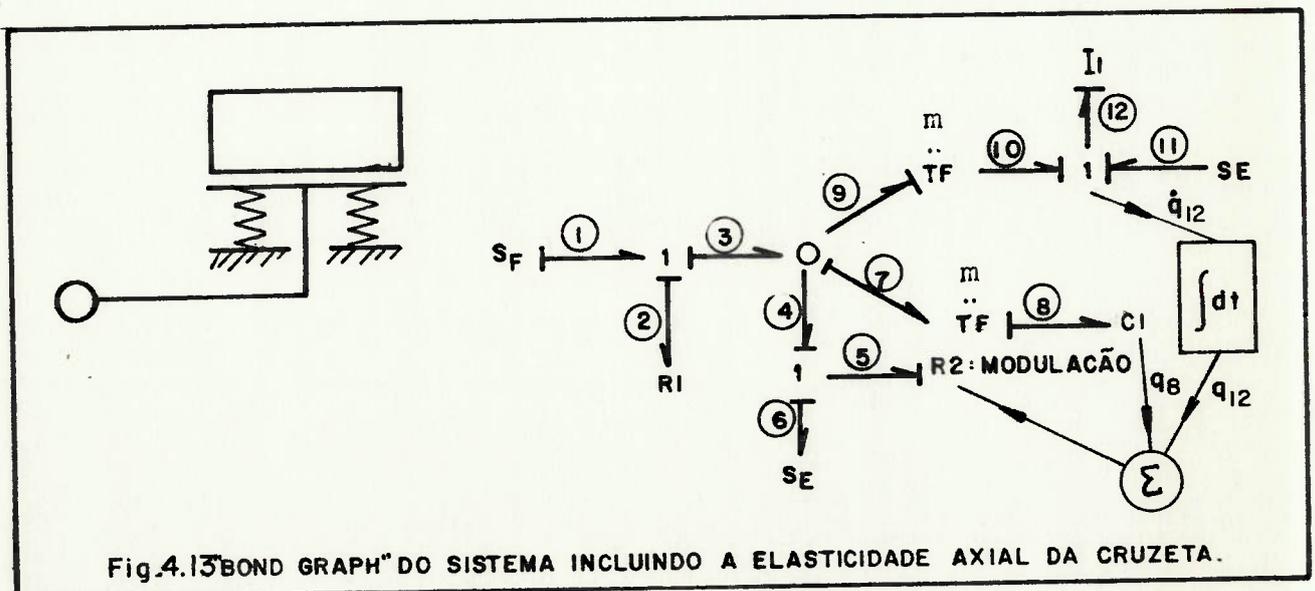


Fig.4.13 "BOND GRAPH" DO SISTEMA INCLUINDO A ELASTICIDADE AXIAL DA CRUZETA.

Pelo gráfico tem-se uma capacitância e uma indutância, ambas integrativas. Assim, as variáveis de estado podem ser:  $p_{12}$  e  $q_8$ . A modulação da resistência  $R_2$  fará com que seja anexado ao sistema/ mais uma equação, envolvendo a variável  $q_{12}$ . Portanto, trata-se / de um sistema de terceira ordem e não de segunda, como aparenta.

O significado físico das variáveis é o seguinte:

$p_{12}$  = Impulso na massa do conjunto girante

$\dot{p}_{12}$  = Força vertical agindo na massa do conjunto girante

$q_8$  = Deslocamento da mola

$\dot{q}_8$  = Velocidade da mola

Além disso, para a modulação da resistência hidráulica deve-se / integrar a equação que define a velocidade do conjunto girante.

$q_{12}$  = deslocamento do conjunto girante

$\dot{q}_{12}$  = velocidade do conjunto girante

$h = (q_8 + q_{12})$  = espessura do filme de óleo

Manipulando as equações obtidas da topologia do gráfico 4.13 com as equações constitutivas dos seus componentes (Apêndice E), resulta no seguinte sistema:

$$\dot{p}_{12} = \frac{q_8}{C_1} + P \quad (4.58)$$

$$\dot{q}_8 = \frac{-p_{12}}{I_1} - \frac{m^2 \cdot q_8}{R_2 \cdot C_1} + m \cdot \left( Q_b + \frac{P_{atm}}{R_2} \right) \quad (4.59)$$

Obs.: 1- A velocidade da mola, tal como definida no equacionamento, é positiva quando está se deslocando para baixo, ou seja, / contrária ao que foi estabelecido para a massa, que tem velocidade negativa quando faz este deslocamento.

2- As expressões (4.58) e (4.59) são válidas para:

$\dot{h} = (\dot{q}_8 + \dot{q}_{12}) < Q_b / (\pi \cdot R^2)$ , que é o domínio utilizado nas curvas que/ serão apresentadas.

3- Não foi bem sucedida a tentativa de simular a presença/

de obstáculo à trajetória da massa, através do método de Runge - Kutta. O cálculo apresentou problema de convergência dada a brusca mudança do valor das derivadas das variáveis no instante do choque.

#### 4.6.1. Modulação da Resistência Hidráulica $R_2$

A equação (E.21) relaciona a vazão de óleo que deixa o mancal com a pressão média no mancal. Chamando esta pressão de  $p_m$ ; de (4.18) tem-se:

$$p_m = \frac{3 \cdot \mu \cdot Q_R}{\pi \cdot h^3} \quad (4.60) \text{ onde } Q_R \text{ é a vazão que deixa o mancal no raio } R,$$

ou seja,  $\dot{q}_5$ .

$$\text{Portanto, } \frac{3 \cdot \mu \cdot Q_R}{\pi \cdot h^3} = R_2 \cdot \dot{q}_5; \text{ Logo: } R_2 = \frac{3 \cdot \mu}{\pi \cdot h^3} \quad (4.61)$$

Obs.: No sistema obtido, para o estudo analítico da estabilidade, pode-se aplicar o Método de Krasovskii. É necessário, contudo, fazer uma mudança do sistema de coordenadas, uma vez que o método aplica-se para  $f(0)=0$  (num sistema da forma  $\dot{x}=f(x)$ ). No entanto, ao se calcular a matriz Hermitiana  $\hat{F}(x)$ , definida como:

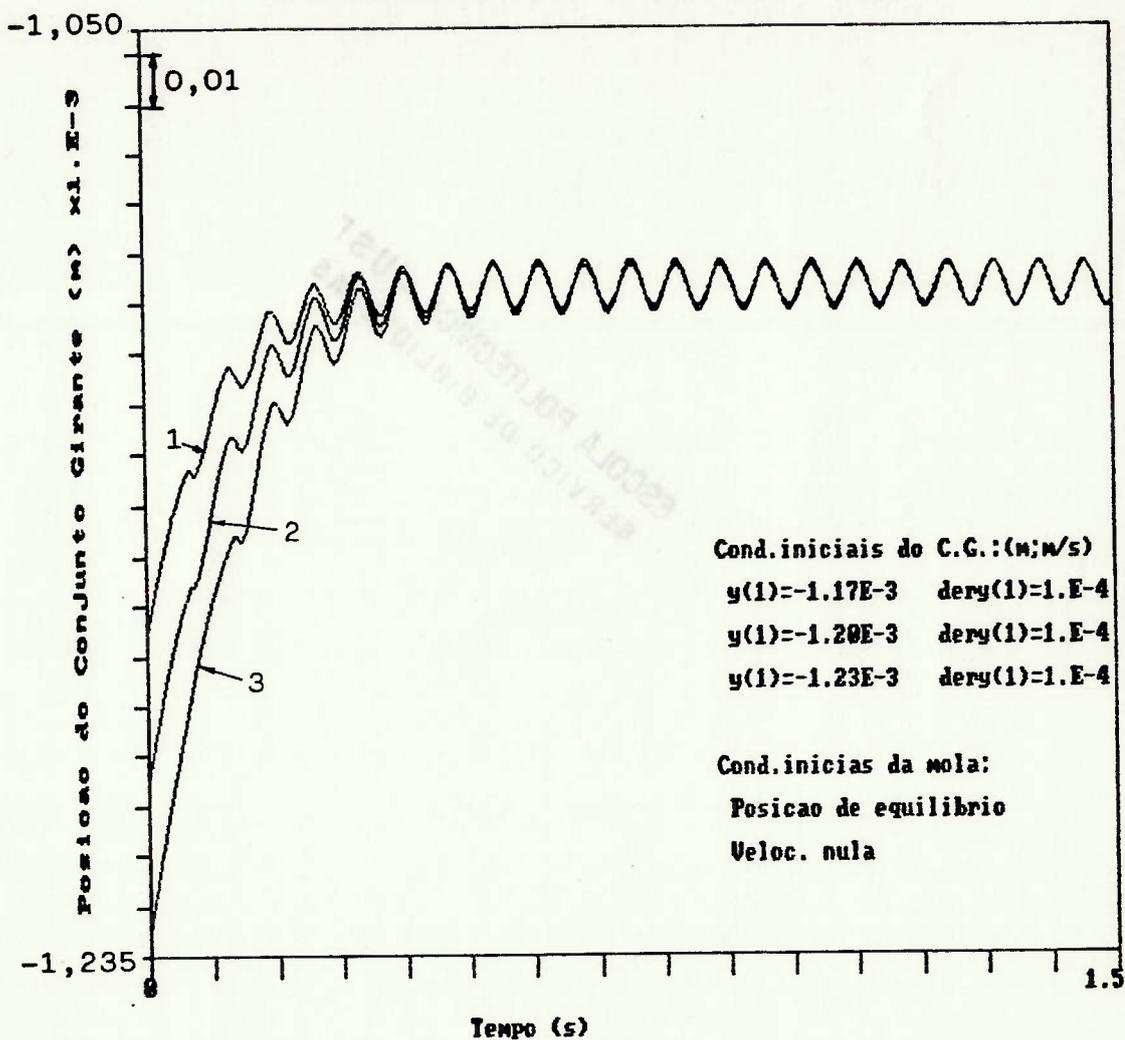
$\hat{F}(x) = F^*(x) + F(x)$ ; onde  $F(x)$  é a matriz Jacobiana do sistema e  $F^*(x)$  é a transposta conjugada de  $F(x)$ ; verifica-se que ela não é negativa definida e, portanto, não atende a uma condição suficiente para haver estabilidade. Como este método apresenta apenas uma condição suficiente, ele não é conclusivo.

#### 4.6.2. Resultados Obtidos por Integração Numérica

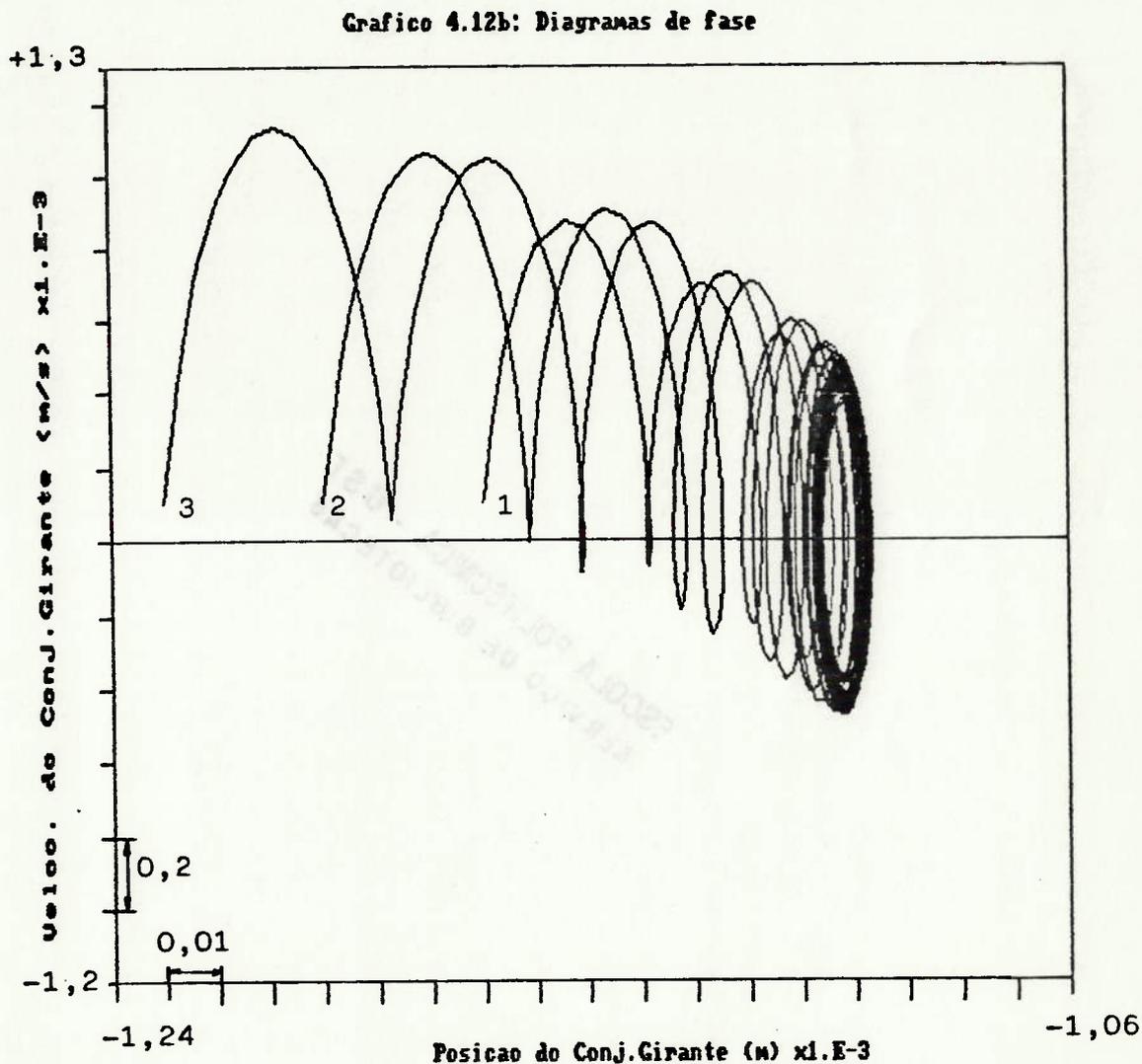
Os resultados apresentados nos gráficos (4.12.a) e (4.12.b) foram obtidos por integração numérica e mostram a posição do rotor ao longo do tempo, para três condições iniciais diferentes. Nos três casos a mola foi colocada na sua posição de equilíbrio/estático, com velocidade nula e o rotor deslocado de sua posição de equilíbrio para as seguintes cotas:  $1,17 \cdot 10^{-3}$ ;  $1,20 \cdot 10^{-3}$  e  $1,23 \cdot 10^{-3}$  m, e sempre com velocidade de  $1,00 \cdot 10^{-4}$  m/s para cima.

Este posicionamento do rotor impõe ao sistema uma espessura de filme de óleo menor que a estabelecida na condição de equilíbrio estático. Assim, observa-se que, nos três casos o rotor tende a oscilar com amplitude e frequência constantes, indicando a presença de um ciclo-limite no plano de fase.

Grafico 4.12a: Posicao do Conjunto Girante x Tempo



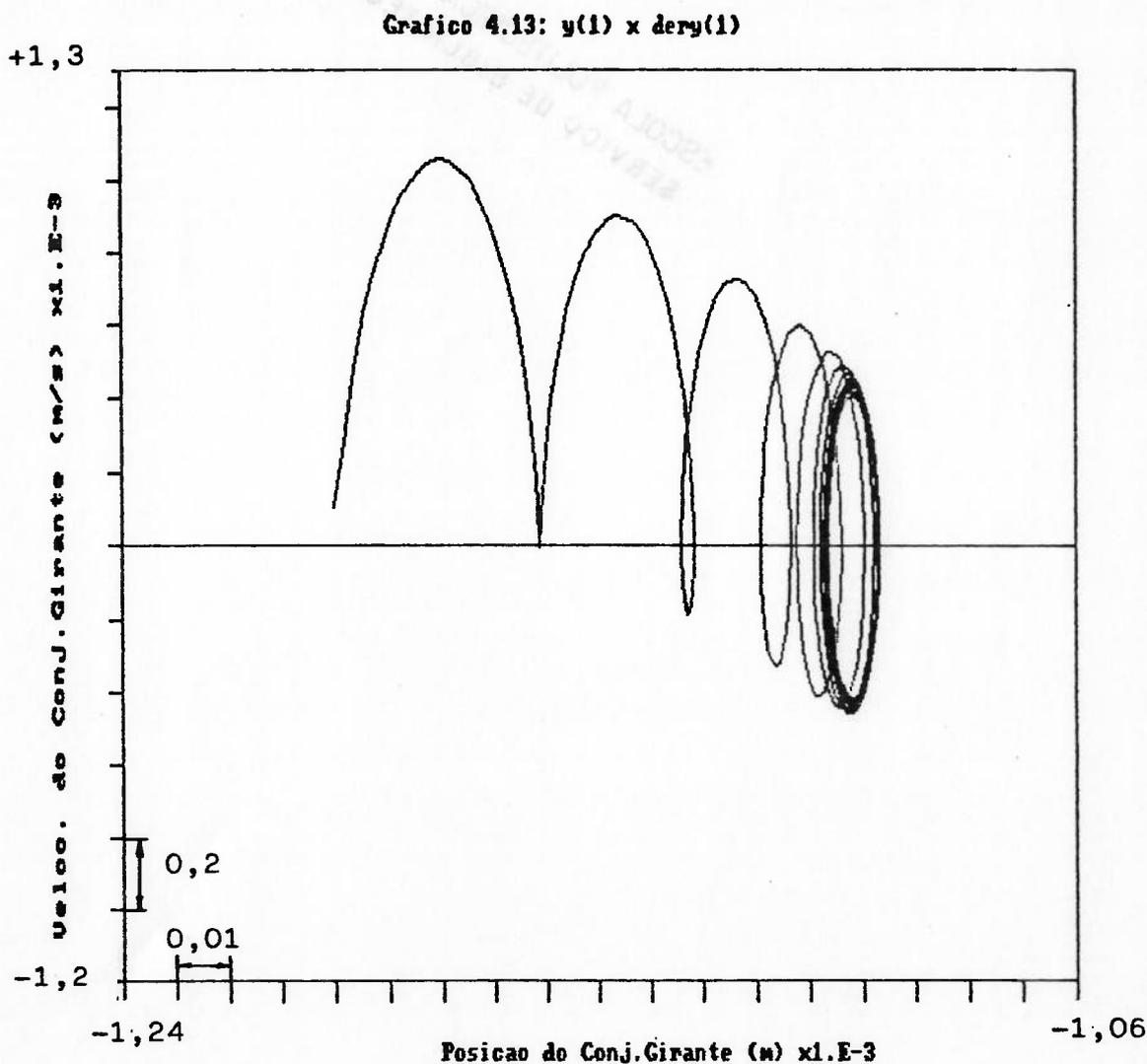
Os respectivos diagramas de fase são apresentados no gráfico /  
(4.12.b).



O comportamento deste sistema é estabelecido pelas variáveis: /  
 $p_{12}$ ,  $q_8$  e  $q_{12}$ , e suas derivadas. Assim, embora não se possa re-  
presentar geometricamente esta trajetória num espaço de sexta /  
dimensão, pode-se dizer que, se há tendência a um ciclo-limite,  
ou seja, a uma trajetória fechada, suas projeções nos diversos/  
planos de fase envolvendo tais variáveis também devem apresen-  
tar trajetórias que caminhem para curvas fechadas (no caso, as/  
possíveis combinações entre as variáveis são  $15 = C_{6,2}$ ).

Tendo em vista os aspectos descritos acima, tomou-se como exemplo o sistema iniciado por uma das condições mostradas no gráfico 4.12.a, e constatou-se que as projeções de sua trajetória nos planos de fase tornam-se curvas fechadas, como no gráfico 4.12.b; caracterizando, assim, um ciclo-limite deste sistema de terceira ordem.

São apresentadas, a seguir, algumas destas projeções, onde a trajetória é gerada pelas condições iniciais da curva 2 do gráfico 4.12.a.



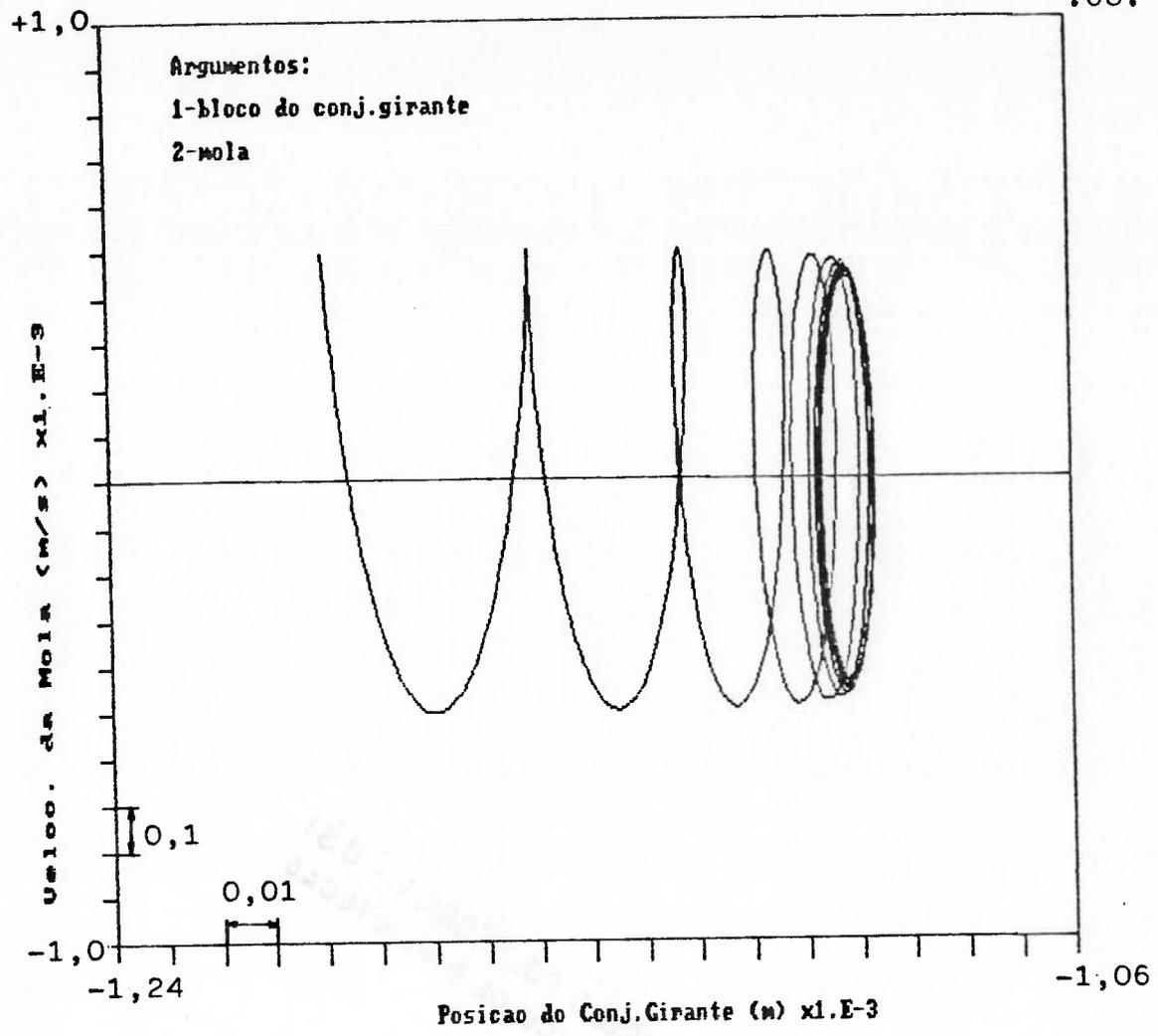
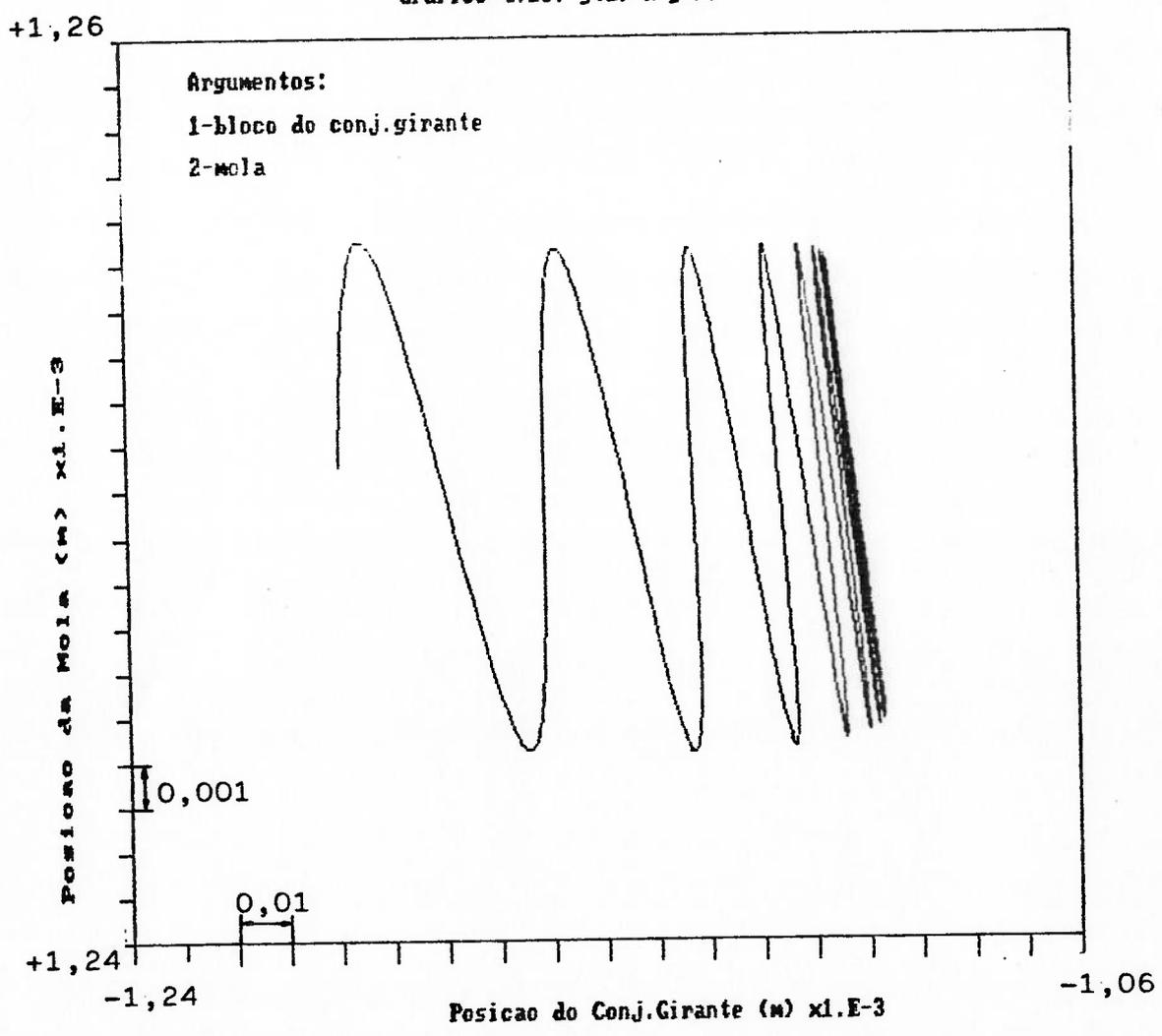


Grafico 4.15:  $y(1) \times y(2)$



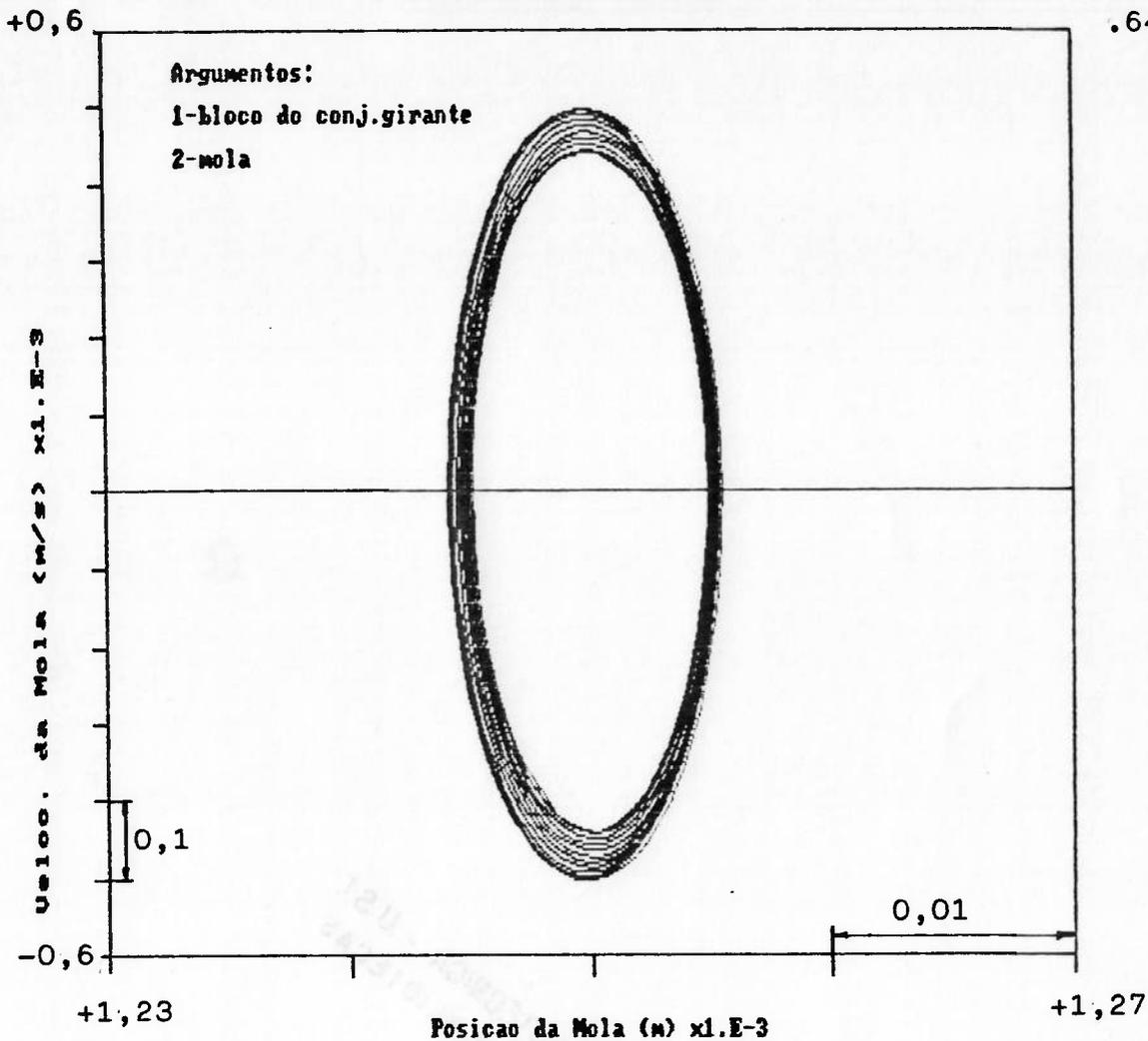
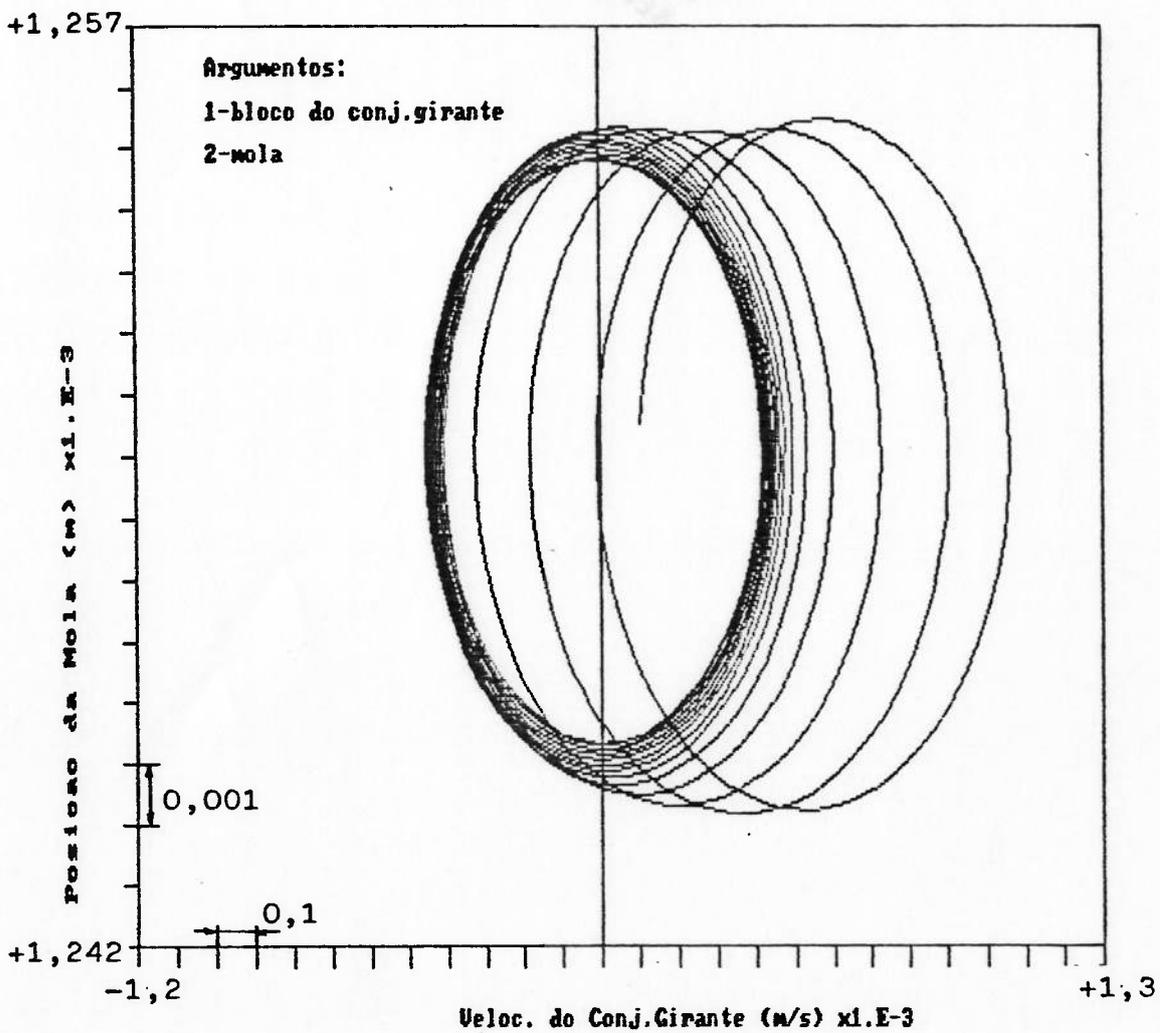
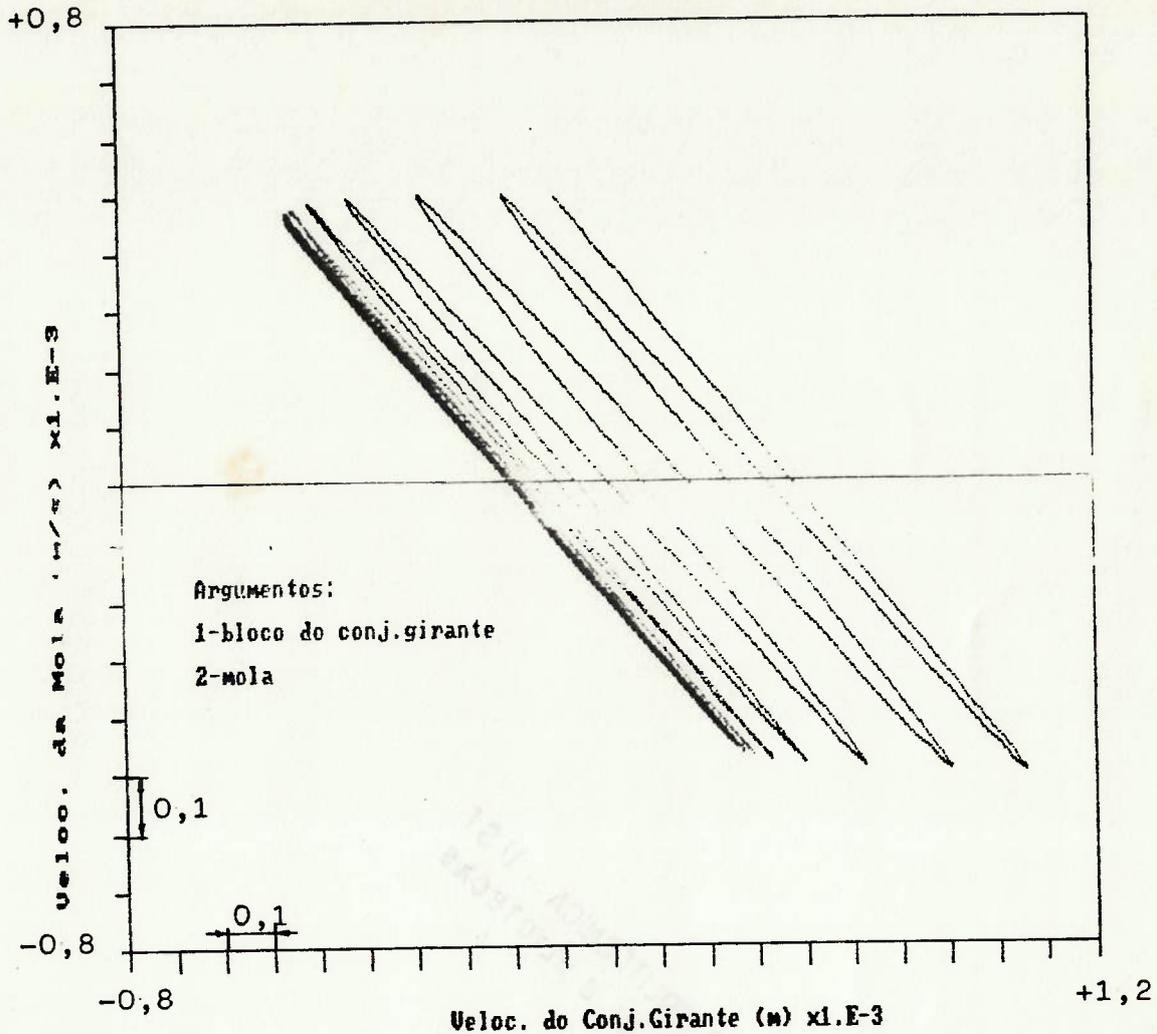


Grafico 4.17: derj(1) x y(2)





Os gráficos 4.15 e 4.18, embora aparentemente atingir uma reta no limite, na realidade constituem elipses cujos eixos maior e menor/ possuem diferenças muito acentuadas.

Como visto anteriormente, a equação 4.50 é uma equação diferencial não-linear de segunda ordem que descreve a projeção da trajetória do sistema (que é de terceira ordem), no plano  $x_2$  X tempo/ (trajetória do rotor).

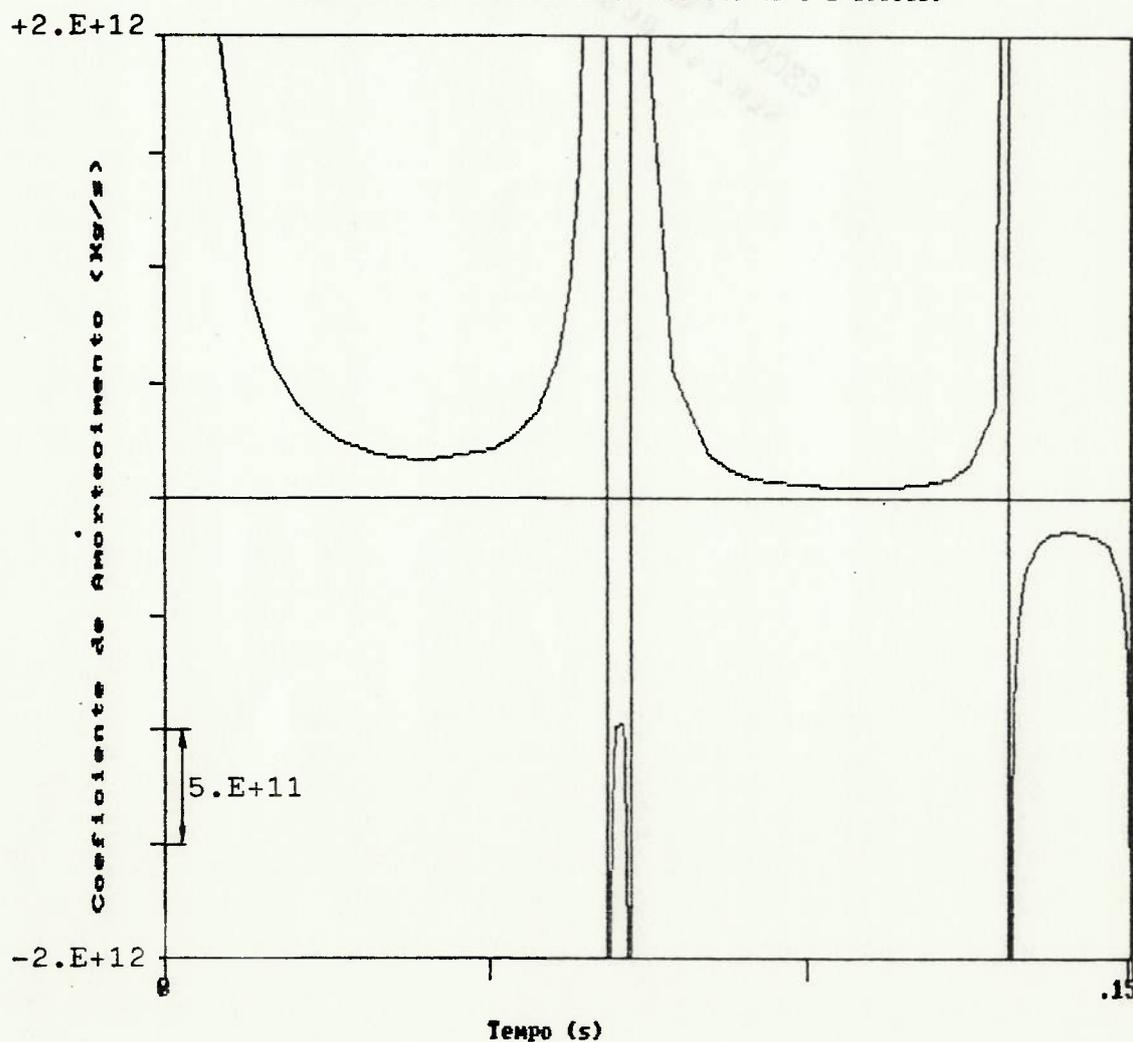
Seu coeficiente de amortecimento viscoso (equação 4.51) é uma / função que depende de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  e possui, como mostrado, uma série de condições para assumir valor negativo, caracterizando auto-excitação, mas que, "a priori", não se sabe se ocorrem. Através da integração numérica pode-se, então, obter a variação/

deste coeficiente ao longo do tempo e verificar se condiz com a conclusão de ciclo-limite.

Em outras palavras, os sistemas de segunda ordem que apresentam comportamento de ciclo-limite possuem coeficiente de amortecimento que assume valores negativos. Desta forma, é de se esperar / que o coeficiente de amortecimento da equação de segunda ordem, / que representa a projeção no plano  $x_2$  X tempo do ciclo-limite / do sistema de terceira ordem, também assumam valores negativos e / positivos que tendam a um equilíbrio de atuação.

Os gráficos a seguir mostram o comportamento deste coeficiente / ao longo do tempo.

Grafico 4.19: Coef.de Amortecimento (1'e 2' ciclos)



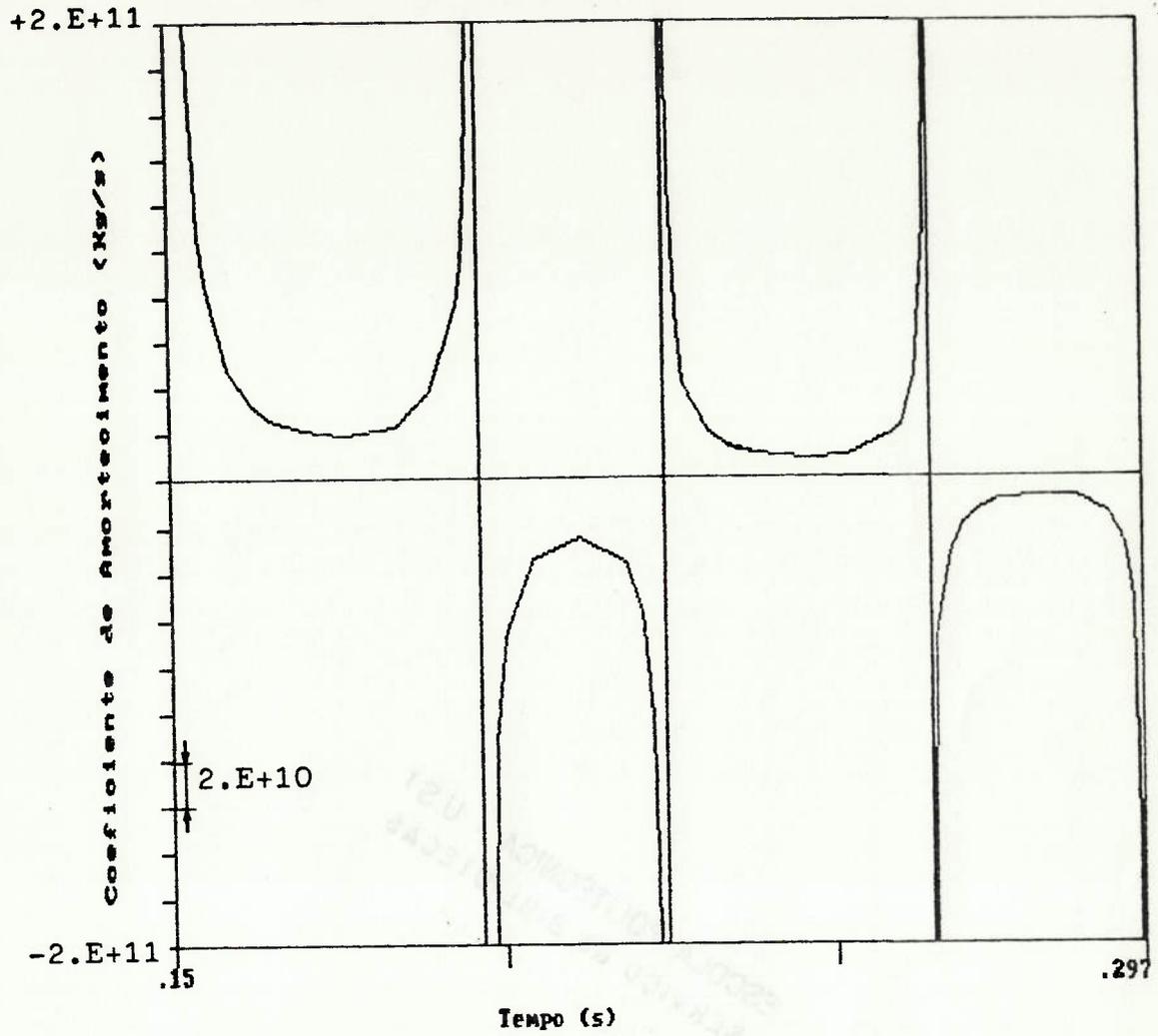
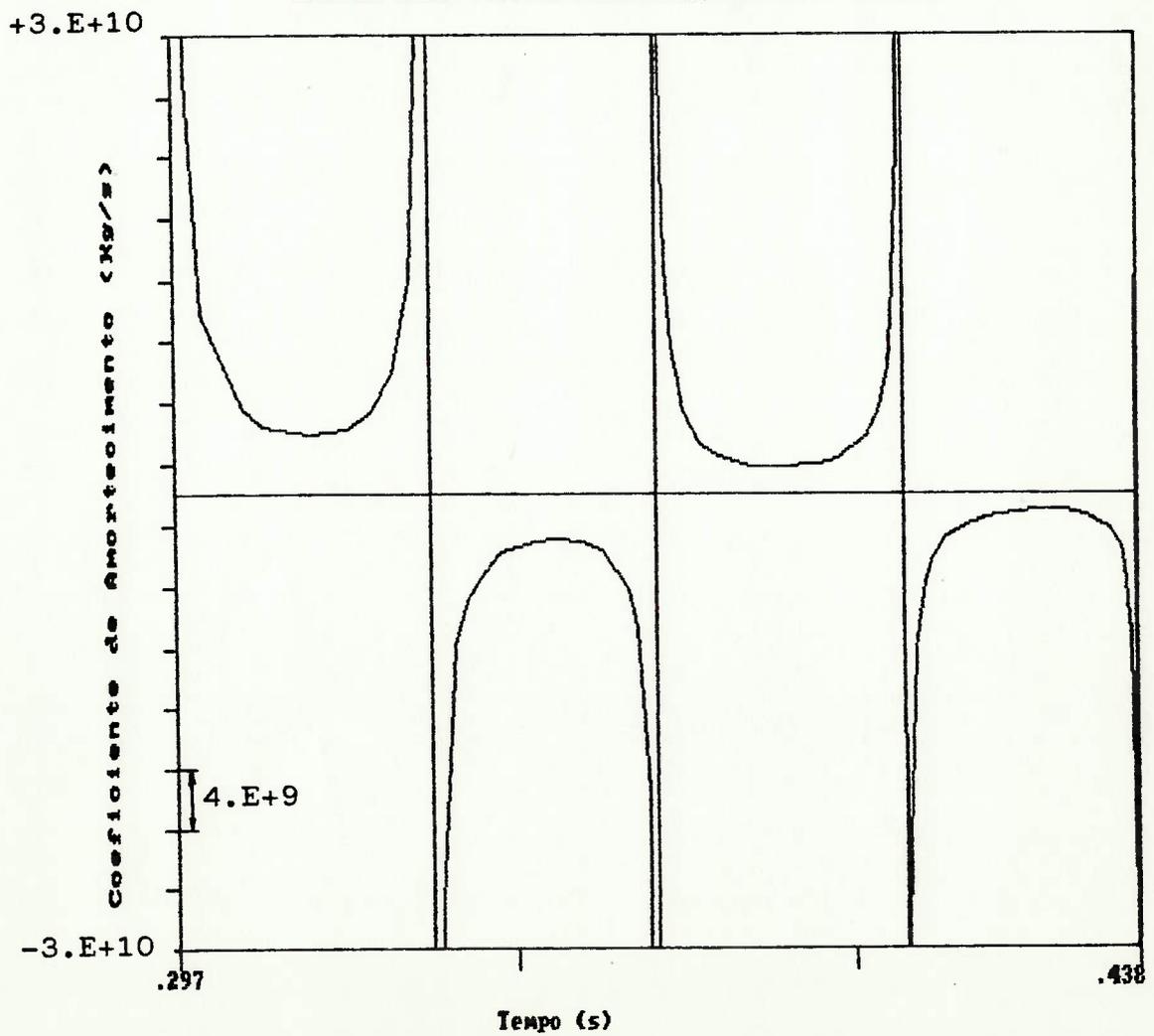


Grafico 4.21: Coef. de Amortecimento (5' e 6' ciclos)



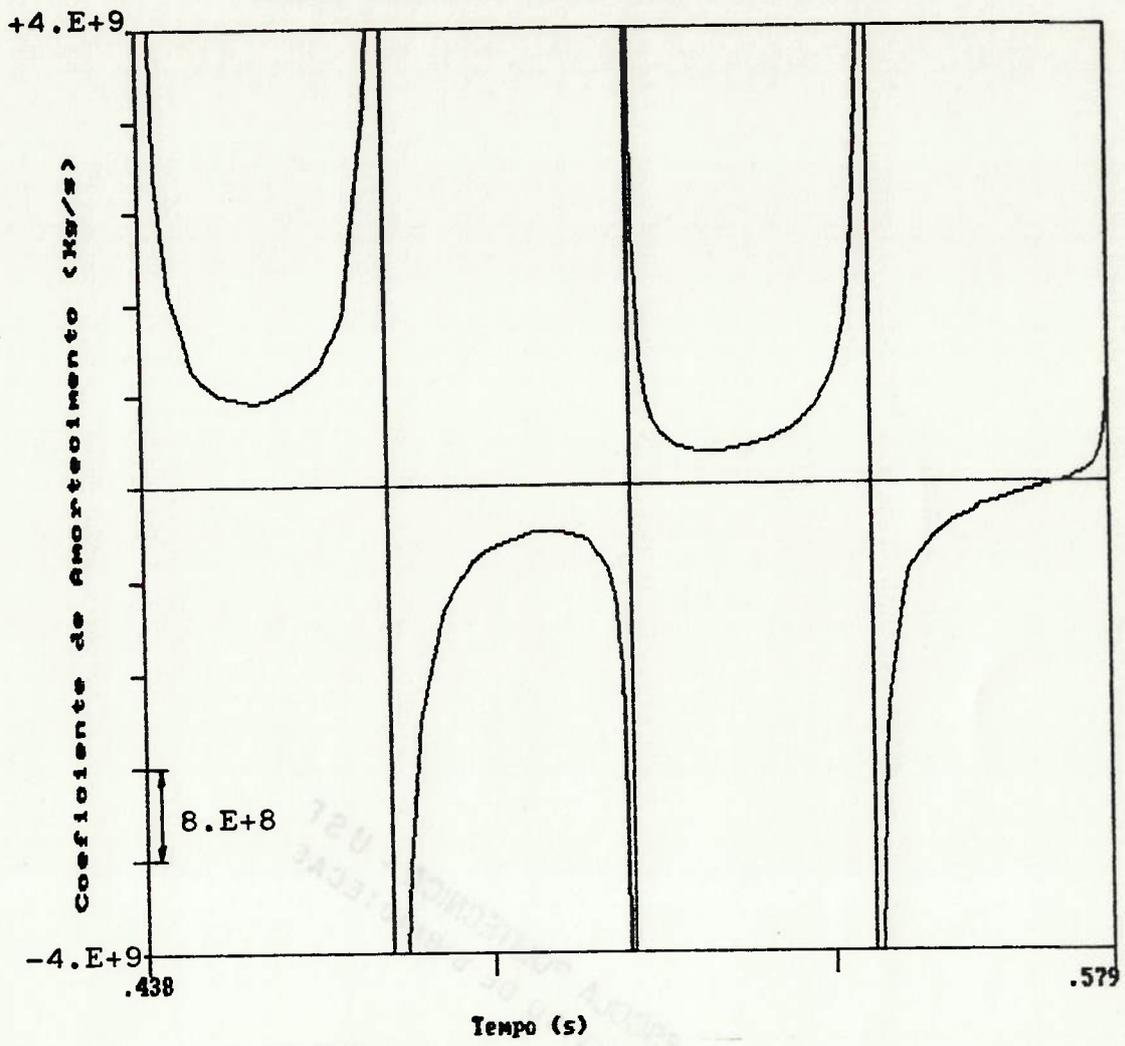


Grafico 4.23: Coef.de Amortecimento (9'e 10' ciclos)

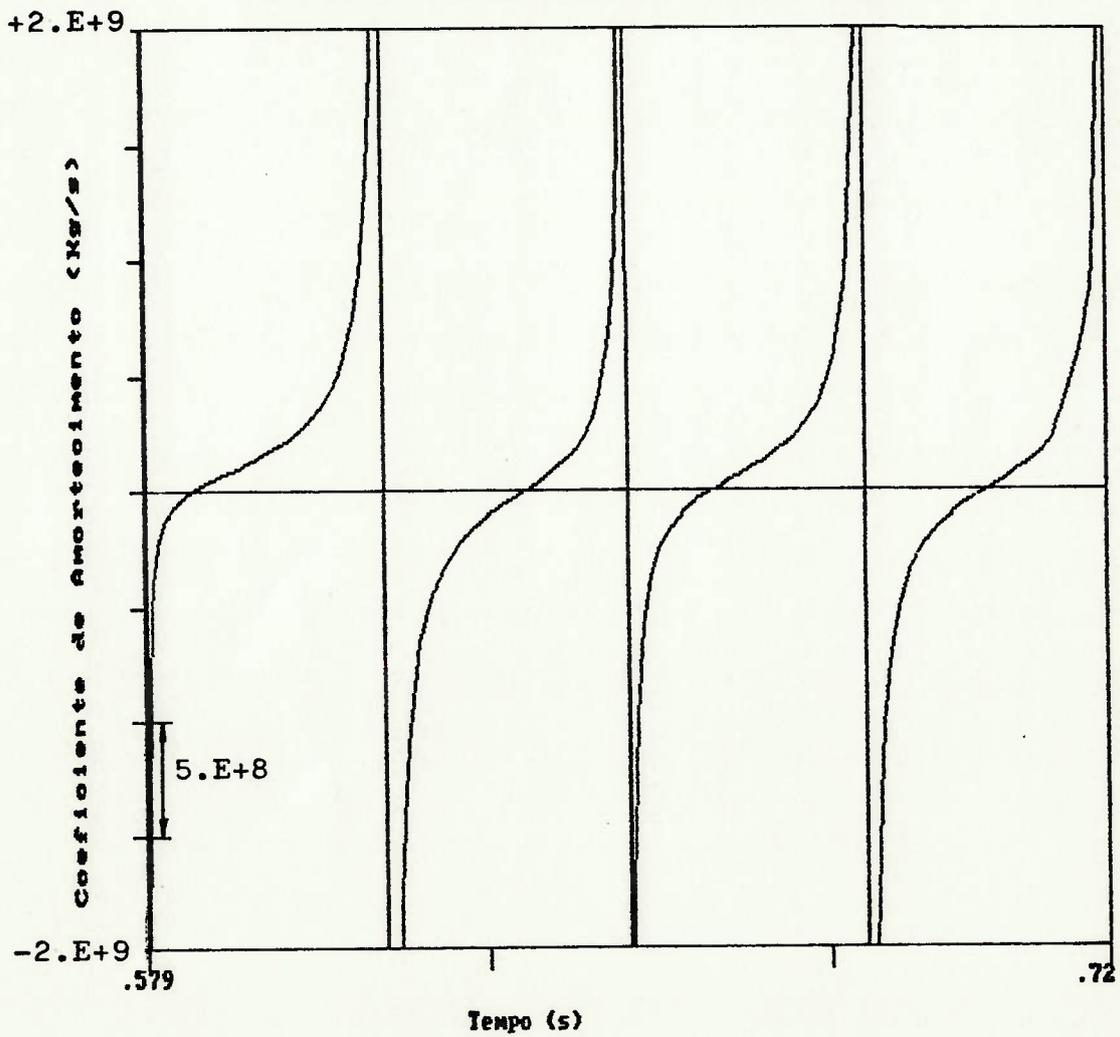


Grafico 4.24: Coef. de Amortecimento (11' e 12' ciclos)

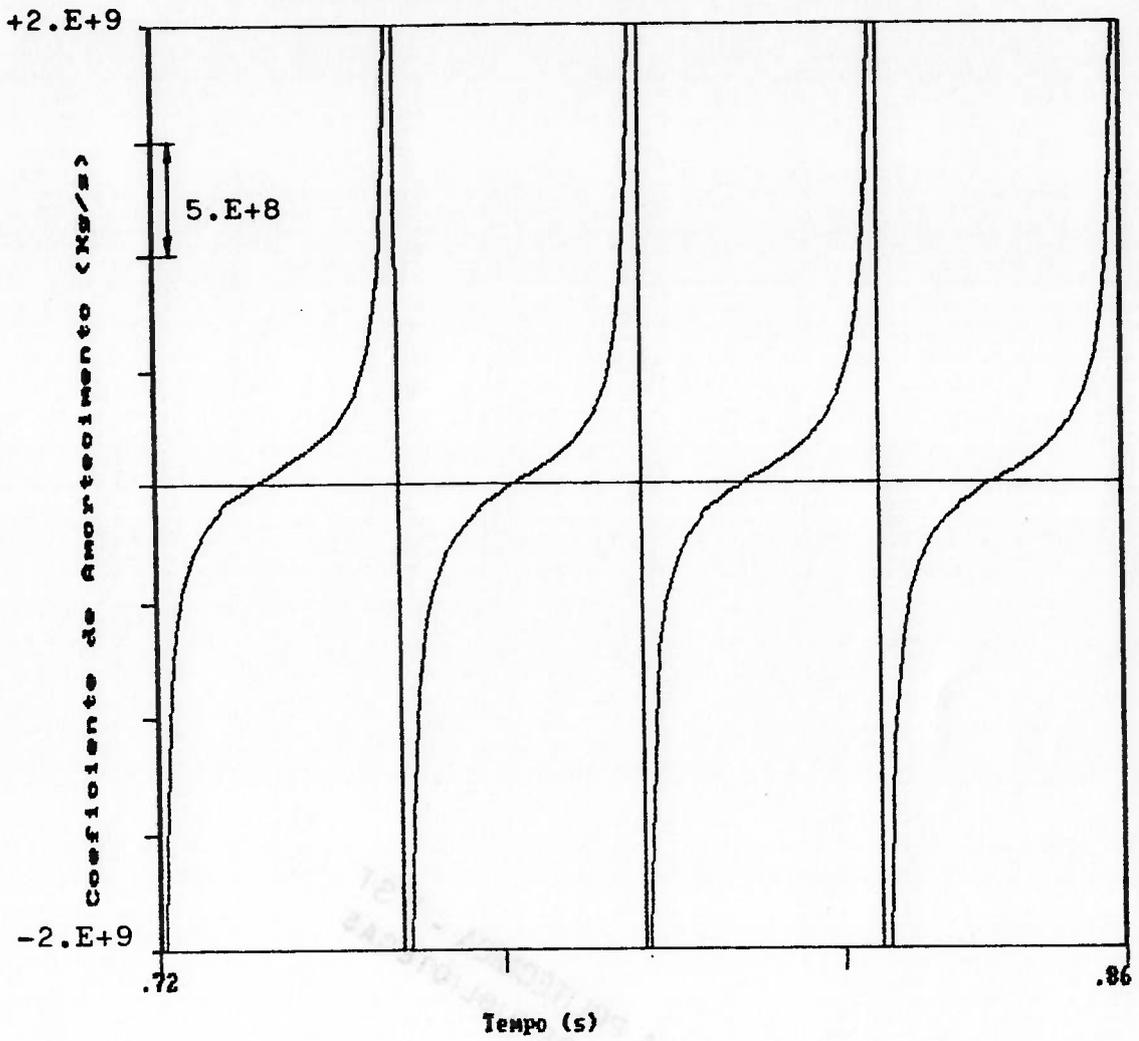
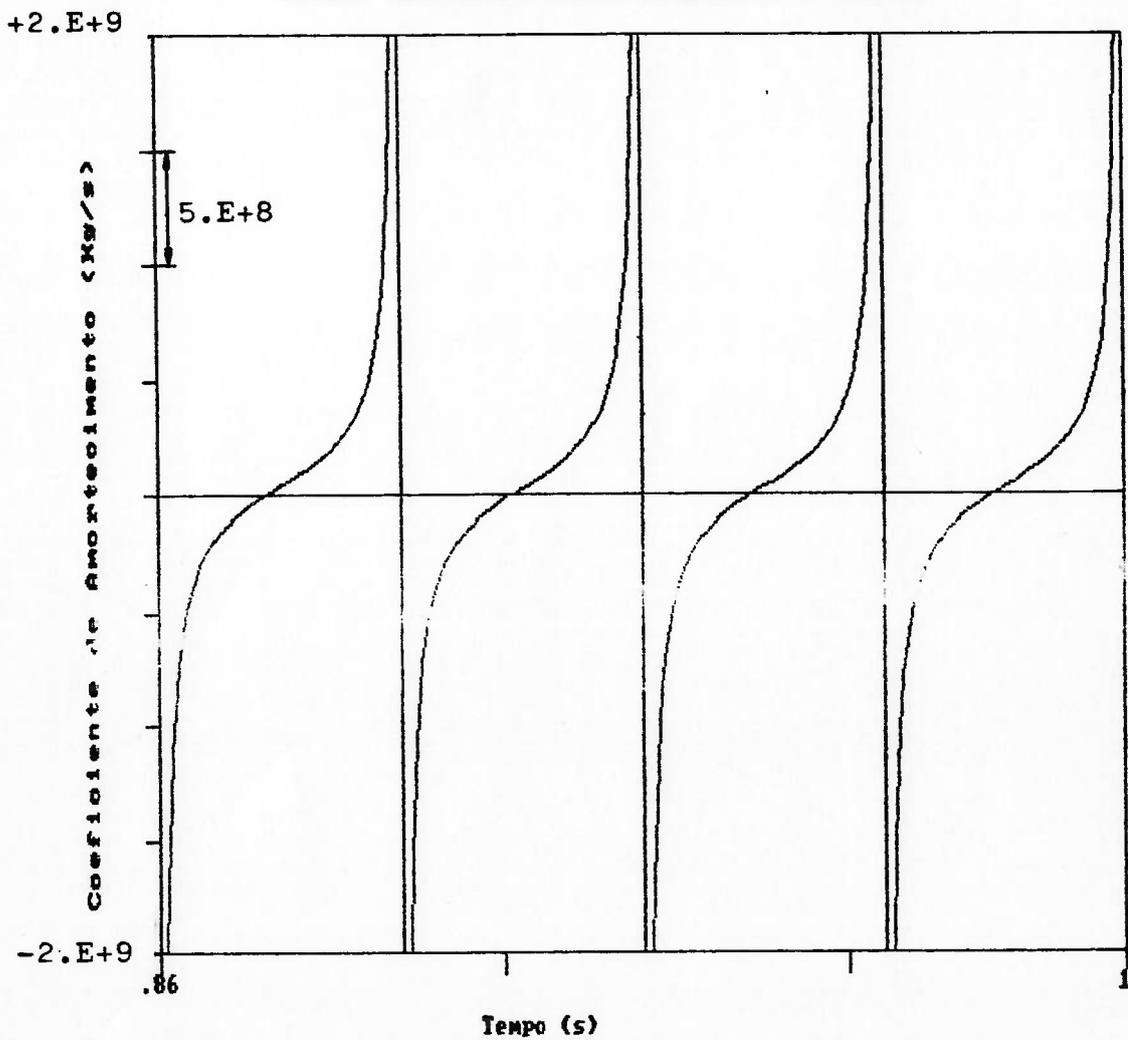


Grafico 4.25: Coef. de Amortecimento (13' e 14' ciclos)



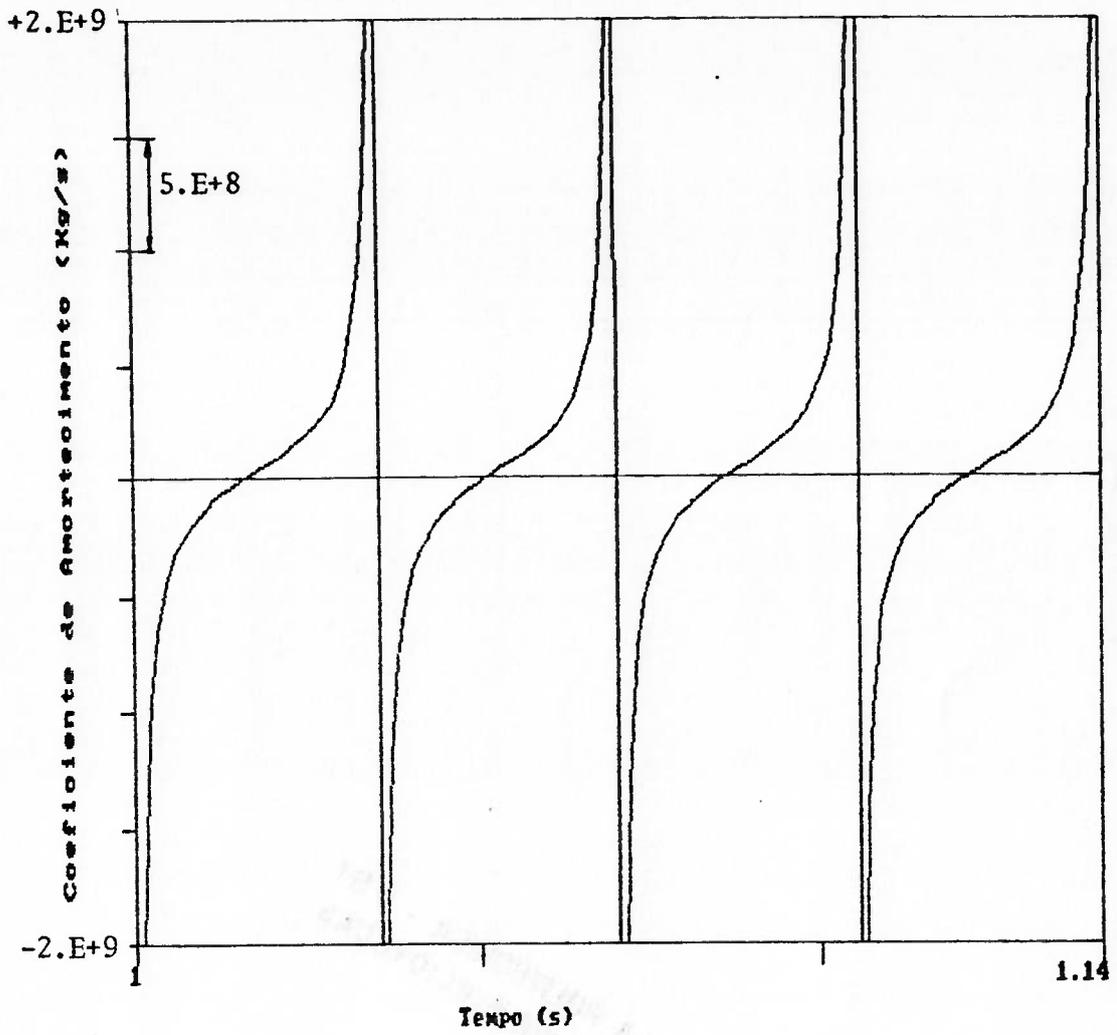


Grafico 4.27: Coef. de Amortecimento (17' e 18' ciclos)

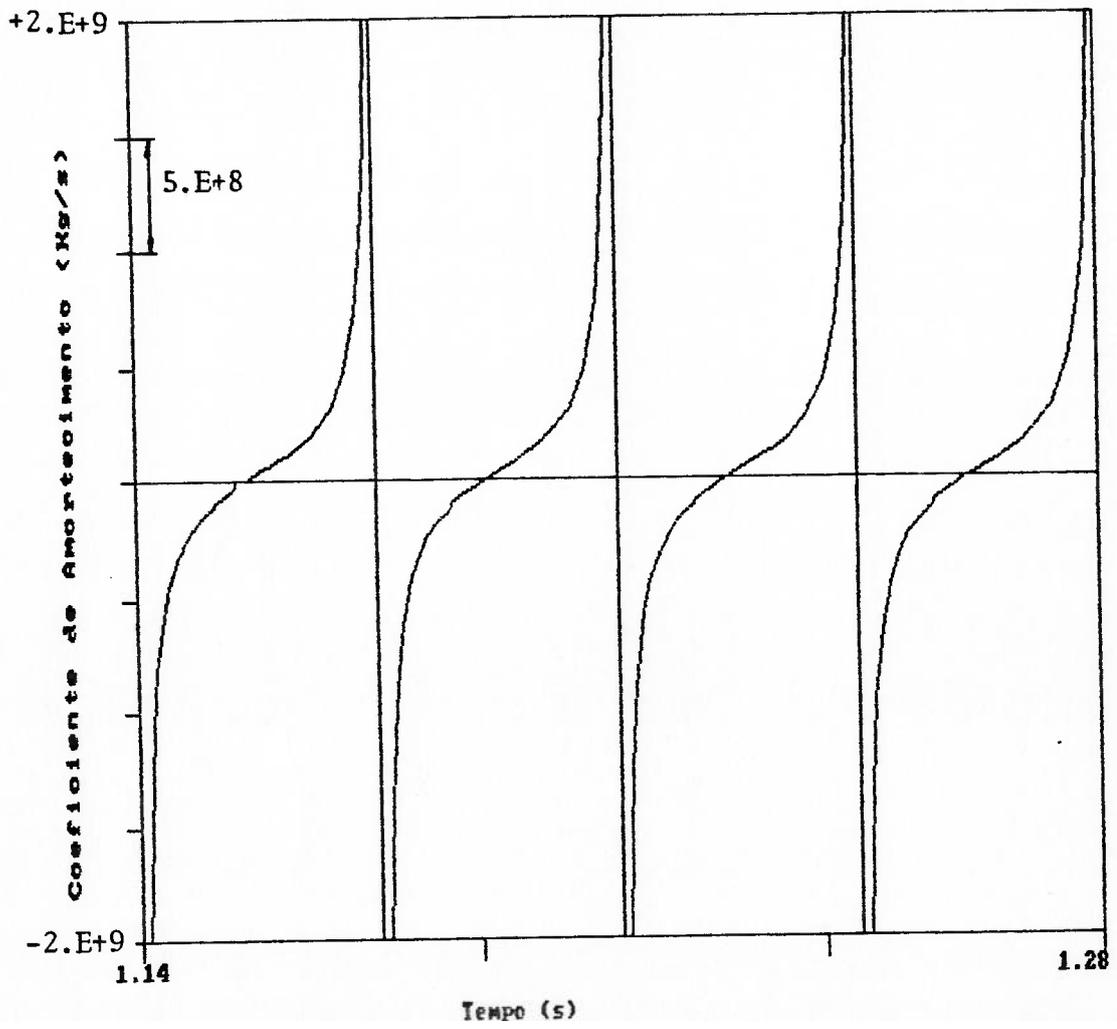
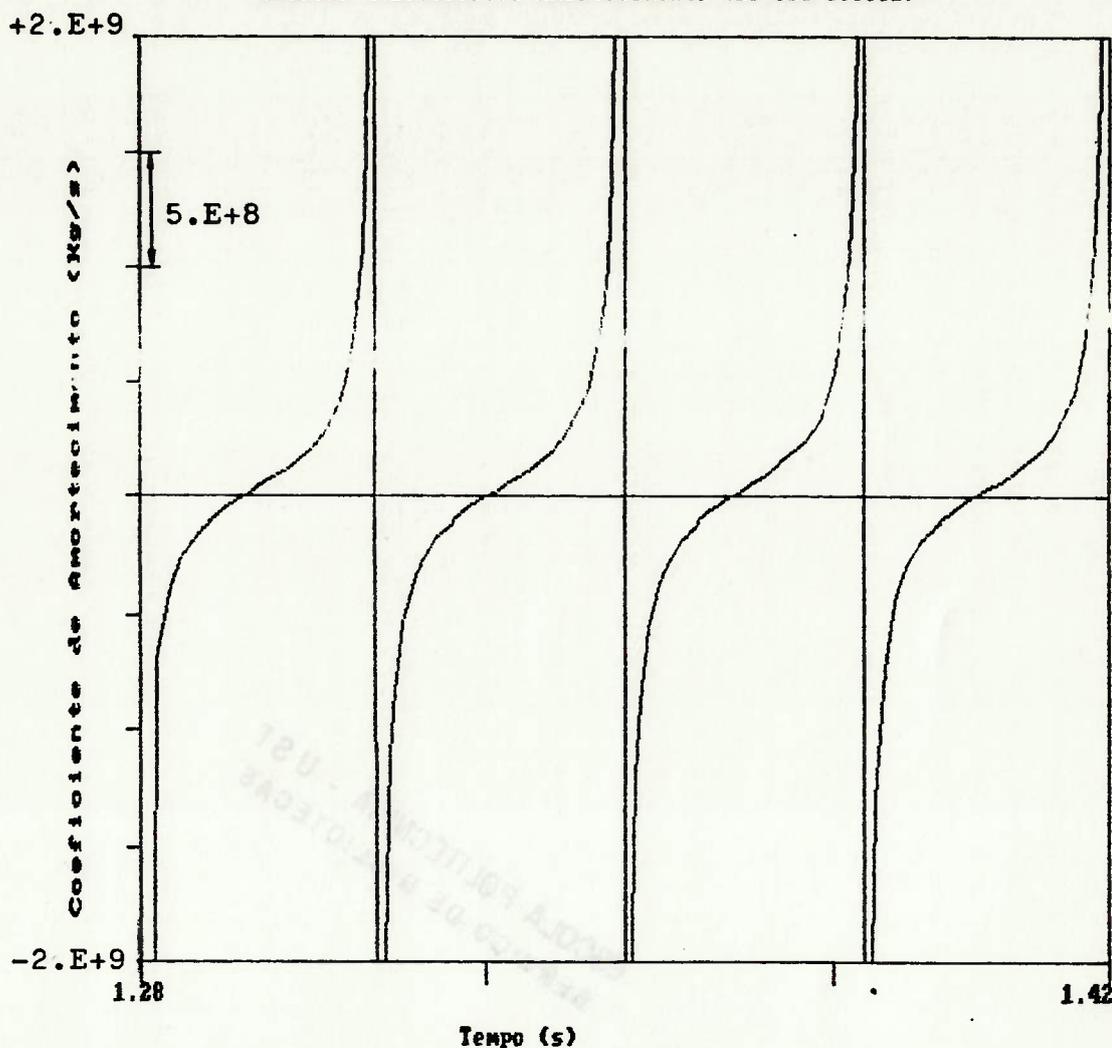


Gráfico 4.28: Coef. de Amortecimento (19'e20' ciclos)



- Observando a seqüência de gráficos 4.19 a 4.28, conclui-se que:
- 1- O coeficiente de amortecimento assume valores negativos, caracterizando, assim, a auto-excitação do sistema.
  - 2- À medida que o tempo evolui, ocorre, em cada ciclo, um aumento do tempo de duração em que este coeficiente possui valor negativo, até que esta duração atinja o valor de 50% do período de oscilação.
  - 3- Quanto às magnitudes, observa-se, inicialmente, que os valores atingidos na região positiva são maiores que os da região negativa, conferindo ao sistema um saldo de amortecimento positivo (dissipação de energia). Com o transcorrer do tempo as magnitudes (positivas e negativas) vão diminuindo e se aproximando em valor absoluto, isto é, a área ocupada na região positiva, do gráfico coeficiente de amortecimento X tempo, iguala-se à negativa.
  - 4- Os pontos de "picos" (máximos e mínimos) correspondem à situa

ção em que  $\dot{x}_1$  (velocidade da mola) e  $\dot{x}_2$  (velocidade do rotor) estão trocando de sinal, e portanto assumem valores próximos de zero. Como o coeficiente de amortecimento depende da relação  $\dot{x}_1/\dot{x}_2$ , nesta situação este coeficiente tende a uma indeterminação.

5- O gráfico 4.28, revela que, durante um ciclo o trabalho negativo da força viscosa sobre o rotor é igual ao positivo. Devido à simetria é suficiente analisar metade do ciclo. Assim, observa-se que o trabalho (positivo ou negativo) realizado no primeiro / quarto, onde a velocidade do rotor evolui de zero até o seu máximo com o coeficiente de amortecimento evoluindo do mínimo até o valor nulo, é compensado no segundo quarto, quando a velocidade / do rotor passa do máximo ao valor nulo, com coeficiente de amortecimento indo do valor nulo ao valor máximo.

6- É importante, ainda, salientar que, pela equação (4.51), se / não houvesse velocidade relativa entre o rotor e a superfície do mancal, isto é, se a espessura de filme de óleo permanecesse / constante, o coeficiente de amortecimento seria nulo, fato que / nunca ocorre num intervalo finito de tempo.

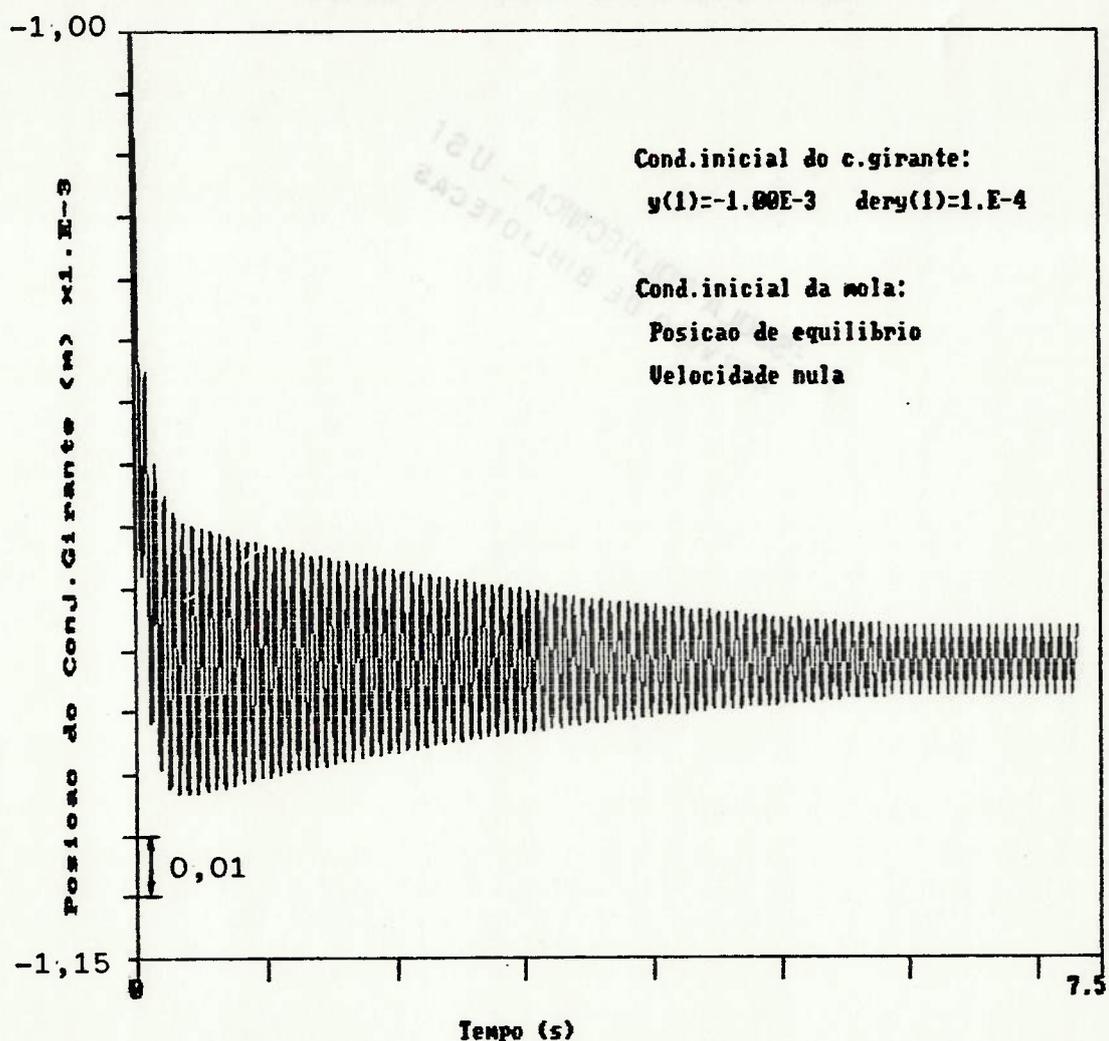
O gráfico 4.12.a apresenta condições em que o rotor está posicionado numa cota abaixo do ponto de equilíbrio estático e com um / filme de óleo cuja espessura é menor que a estabelecida no equilíbrio. O ciclo-limite é alcançado após aproximadamente 1,3 s do início do movimento e confere ao rotor uma amplitude de oscilação da ordem de  $9,0 \cdot 10^{-6}$  m (9 microns) e frequência de 14,2 Hz.

O gráfico 4.29 ilustra o que acontece quando o rotor inicialmente está numa cota acima da de equilíbrio. De maneira bem mais / lenta, vê-se que a oscilação de ciclo-limite é alcançada com a / proximadamente 6 s de movimentação.

OBS.: A classificação tradicional de ciclo-limite para sistemas / de segunda ordem quanto ao tipo (estável, instável e semi-estável -

vel), baseia-se na análise do que acontece quando a condição inicial é interior ou exterior à região limitada pelo ciclo-limite. No problema em questão, o ciclo-limite é uma superfície fechada/ num espaço de sexta dimensão, assim, torna-se bem mais complexo/ tentar aplicar conceitos análogos. De qualquer forma, observa-se que para condições iniciais "próximas" do ponto de equilíbrio / estático, a trajetória converge para este ponto, sugerindo, então, a existência de um ciclo-limite análogo ao semi-estável.

Grafico 4.29: Posicao do C.Girante x Tempo

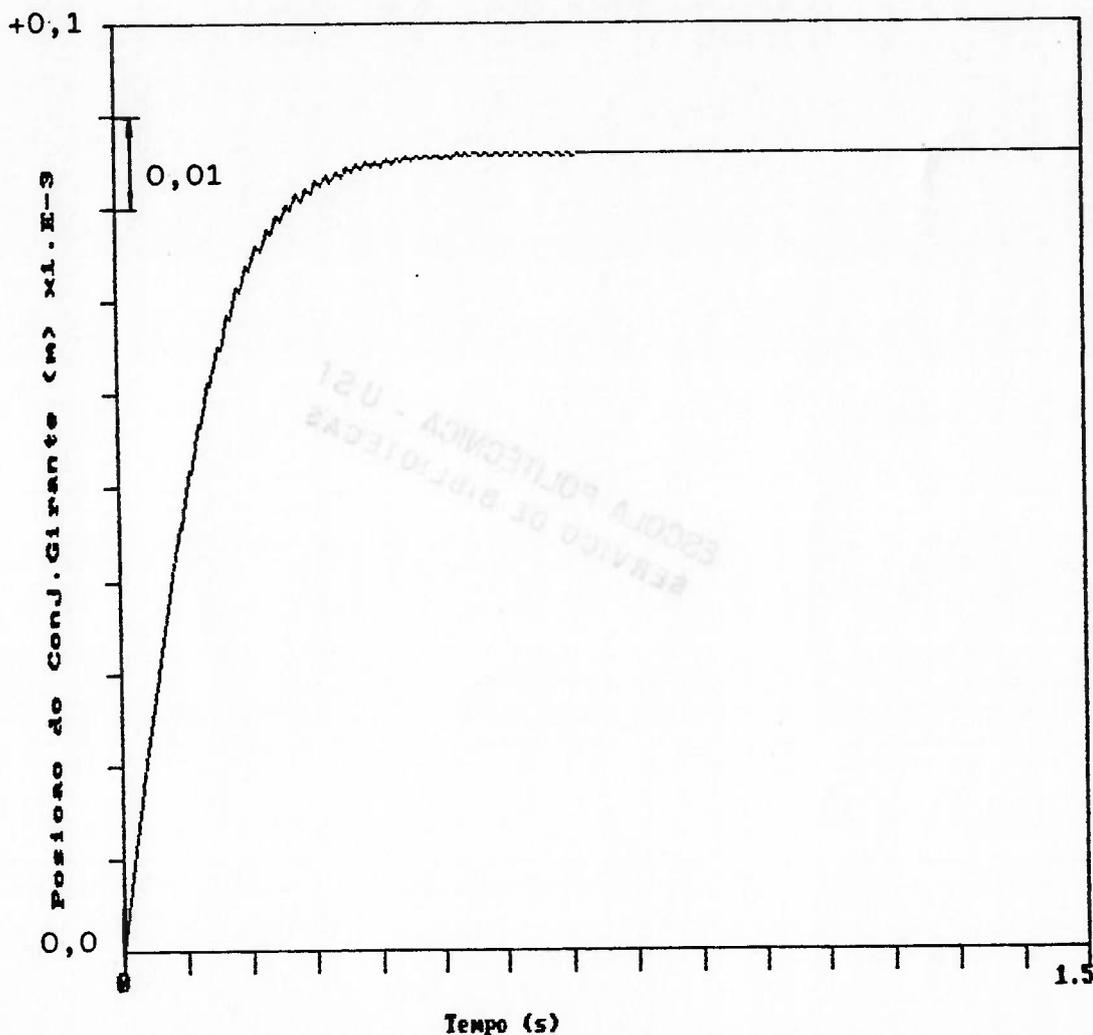


#### 4.7. Variação dos Parâmetros: Massa do Rotor e Constante Elástica da Cruzeta

Para uma cruzeta rígida, o modelo apresentado no ítem 4.4, mos -

trou estabilidade assintótica do sistema. Assim, é de se esperar que o aumento da constante elástica da cruzeta tende ao mesmo resultado. O gráfico 4.30 confirma esta expectativa, exemplificando para uma constante de mola vinte vezes maior que a da cruzeta de Itaipu e mantendo os outros parâmetros inalterados

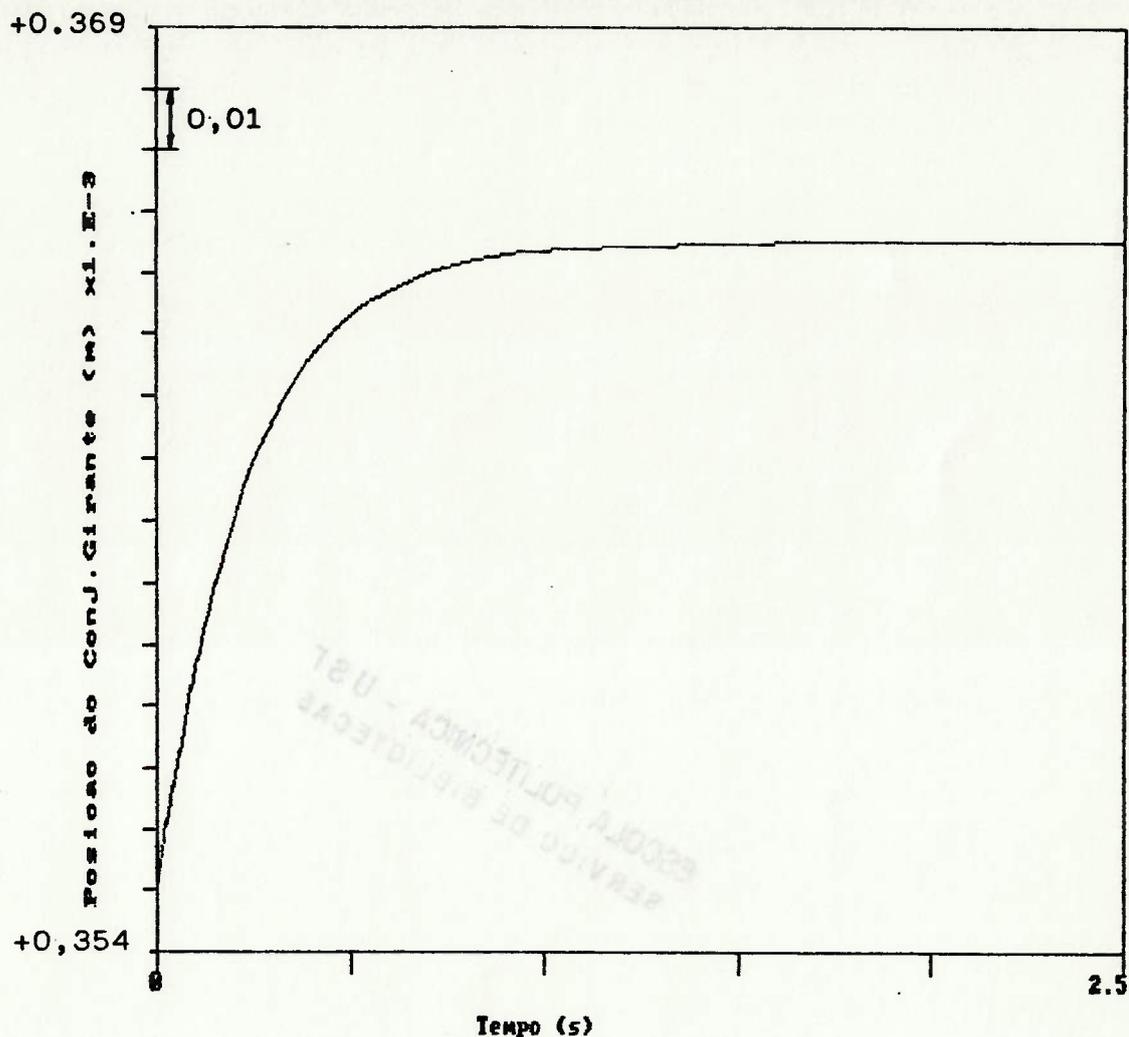
Gráfico 4.30: Constante de mola 20 vezes maior



Se, por um lado, aumentar a constante elástica leva à estabilidade assintótica global, por outro, a diminuição da massa do rotor também o faz, conforme mostra o gráfico 4.31.

Desta forma, é de grande interesse conhecer os limites entre estabilidade assintótica global e ciclo-limite para variações de massa do rotor e constante elástica da cruzeta, que são os principais parâmetros deste sistema.

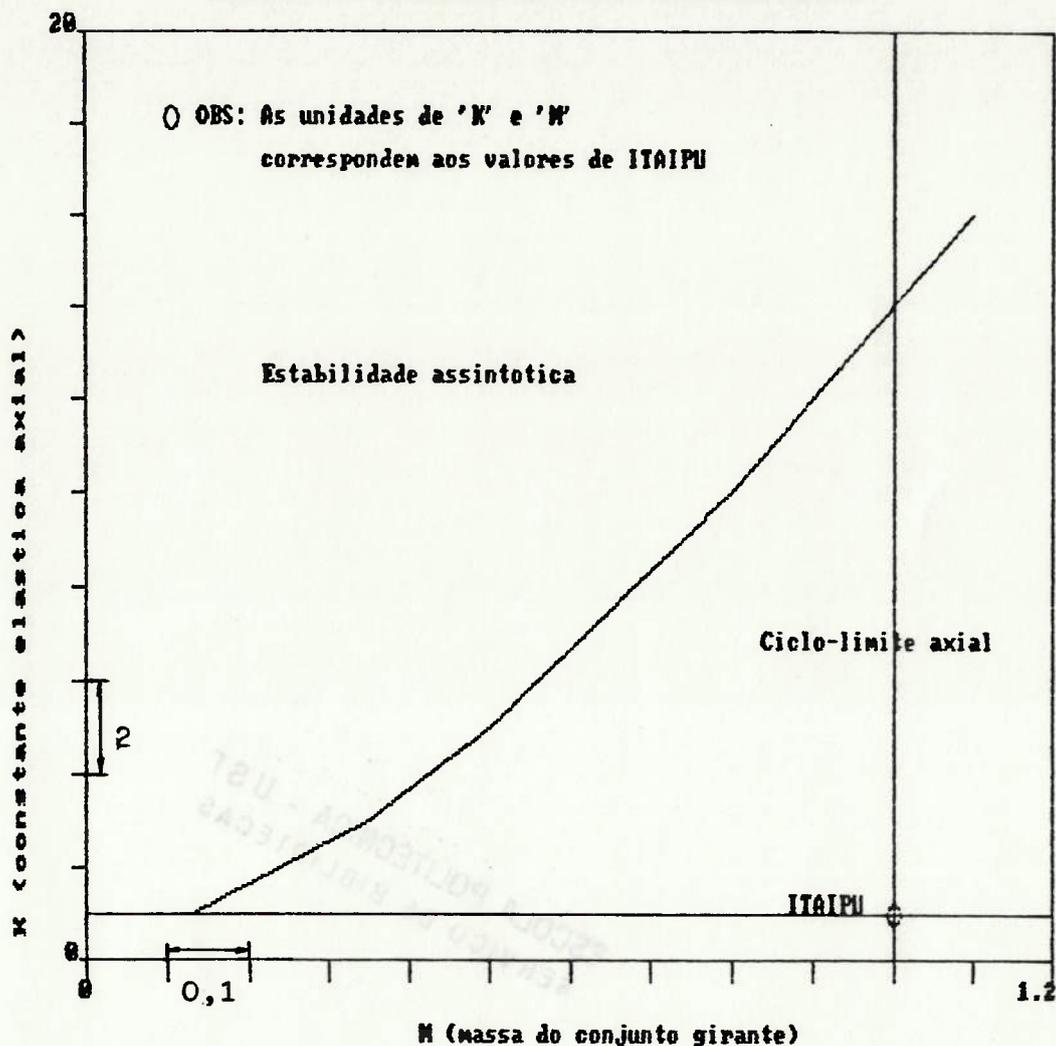
Grafico 4.31: Massa do C.Girante 20 vezes menor



O gráfico 4.32 mostra o mapeamento feito no plano K X M, procurando varrer uma faixa bastante significativa dos hidrogeradores comerciais.

OBS.: Os valores unitários de massa e constante elástica, referem-se aos da máquina de Itaipu.

Grafico 4.32: Mapeamento de ciclo-limite (dir. axial)



#### 4.8 Conclusão

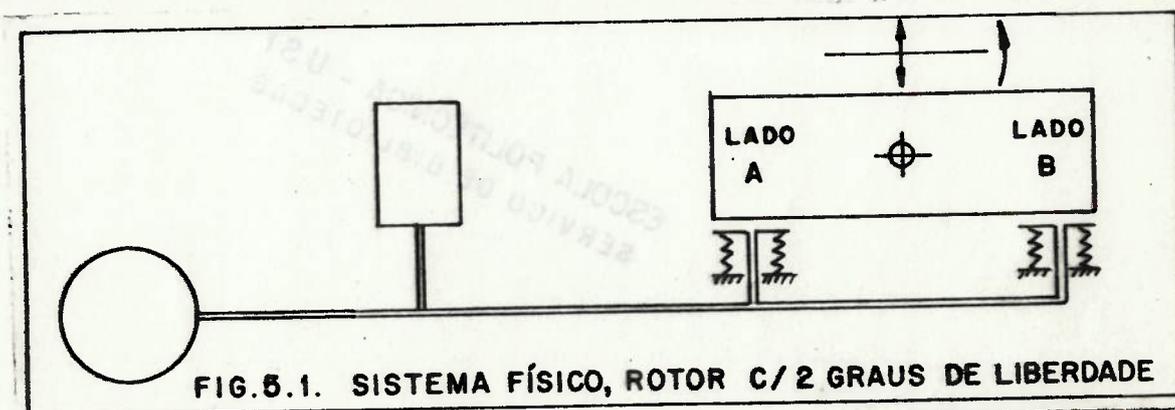
O modelo não-linear mostra para o sistema axial, com inclusão da rigidez da cruzeta, a presença de solução periódica que, dinamicamente, por ser um sistema com dissipação de energia, revela a existência da auto-excitação.

## 5. ESTUDO DO CONJUNTO GIRANTE COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

### 5.1. Introdução

Comprovada a existência de ciclo-limite na direção vertical, cabe agora analisar sua existência para movimento pendular do rotor, isto é, rotação contida num único plano e em torno de uma linha horizontal passando pelo seu centro de massa.

O conjunto girante será sustentado por dois pontos diametralmente opostos, conforme mencionado no capítulo dois, tendo liberdade, além do movimento angular, de mover-se na direção vertical. O modelo a ser equacionado está representado na figura 5.1.



O modelo, como se vê, possui os seguintes elementos: bomba, linha principal, vaso de pressão, linhas secundárias (menor diâmetro), mancal de escora, molas que representam a elasticidade da cruzeta e conjunto girante.

### 5.2. "Bond Graph" do Sistema

Tendo em vista o sistema acima representado, propõe-se o seguinte "Bond Graph" para simular seu comportamento (figura 5.2).

Onde:  $R_i$  ( $i=1$  a  $7$ ) = Resistências hidráulicas

$C_1$  = Capacitância do vaso de pressão

$C_2$  e  $C_3$  = Capacitância das molas que simulam a elasticidade

da cruzeta

$I_1$  e  $I_2$ : Inertância hidráulica dos tubos

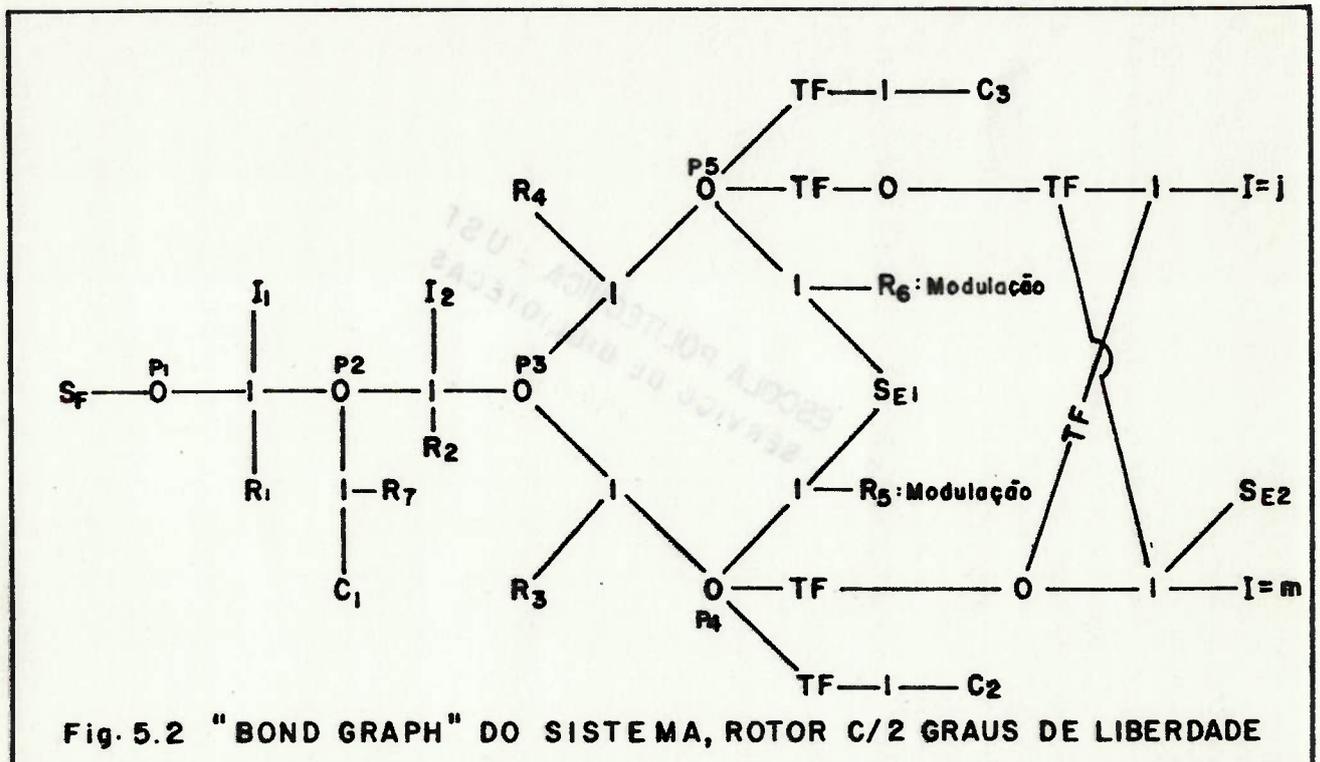
$m$ : Massa do Conjunto Girante (inércia linear)

$J$ : Inércia rotacional do conjunto Girante (no plano descrito)

SF: Fonte de vazão (bomba)

SE<sub>1</sub>: Fonte de pressão (atmosférica)

SE<sub>2</sub>: Fonte de força (peso do conjunto girante)



Levando em conta que o movimento do rotor está contido num plano, e contém deslocamento vertical do seu centro de massa e uma pequena rotação em torno de uma linha horizontal; além disso, considerando-se dois portos na extremidade do rotor com forças  $F_1$  e  $F_2$  e velocidades  $V_1$  e  $V_2$ , então, este corpo rígido pode ser considerado como um campo linear de inércia. Aplicando o seu peso próprio no centro de gravidade, pode-se descrevê-lo por um campo com 3 portos.

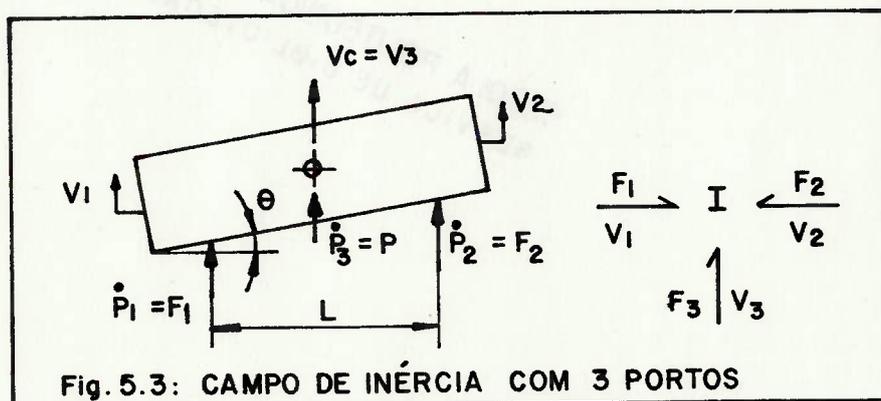
Uma maneira de encontrar a lei constitutiva para o campo de inércia é descrever o movimento em termos da velocidade do centro/

de massa  $V_c$  e a velocidade angular  $\omega = \dot{\theta}$ . A força resultante na massa é, então, a variação da quantidade de movimento linear, e o momento é relativo à  $V_c$  e à massa ( $p_c = V_c \cdot m$ ).

Similarmente, a resultante do binário sobre o centro de massa é a variação do momento angular, e o momento angular está relacionado ao  $\omega = \dot{\theta}$  pelo momento de inércia ( $\omega = p_\theta / J$ ).

Deve-se, agora, relacionar  $V_1$  e  $V_2$  ao  $V_c$  e  $\omega$ , e também relacionar as resultantes de força e de binário ao  $F_1$  e  $F_2$ .

A figura 5.3 mostra o rotor com as forças que nele atuam e a representação através de um campo de inércia com 3 portos.



$$V_1 = V_c - \frac{L}{2} \cdot \omega = \frac{p_c}{m} - \frac{L}{2} \cdot \frac{p_\theta}{J} \tag{5.1}$$

$$V_2 = V_c + \frac{L}{2} \cdot \omega = \frac{p_c}{m} + \frac{L}{2} \cdot \frac{p_\theta}{J} \tag{5.2}$$

$$V_3 = V_c = \frac{p_c}{m} \tag{5.3}$$

onde  $p_c$  e  $p_\theta$  são as variáveis de momento linear e angular, respectivamente. Quanto aos índices: 1 para o lado indicado na figura/ como A, 2 lado B e 3 referente ao centro de massa do conjunto girante.

As equações de estado são:

$$\dot{p}_c = F_1 + F_2 + P \quad (5.4)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{L}{2} \cdot F_1 + \frac{L}{2} \cdot F_2 \quad (5.5)$$

Para que se tenha um campo explícito de portos externos, estas equações devem ser integradas no tempo. Se  $p_c$  e  $p_\theta$  (e portanto  $V_c$  e  $\omega$ ) forem nulos no instante inicial da integração, então, as possíveis constantes de integração anulam-se, e o resultado é:

$$p_c = p_1 + p_2 + p_3 \quad (5.6)$$

$$p_\theta = -\frac{L}{2} \cdot p_1 + \frac{L}{2} \cdot p_2 \quad (5.7)$$

Substituindo-se as equações (5.6) e (5.7) em (5.1), (5.2) e (5.3) resulta a seguinte lei constitutiva explícita de um campo de inércia:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/m) + (L^2/4J) & (1/m) - (L^2/4J) & 1/m \\ (1/m) - (L^2/4J) & (1/m) + (L^2/4J) & 1/m \\ 1/m & 1/m & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Com  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  variáveis de fluxo (f)

$$\text{Chamando: } \xi = 1/m + L^2/4J$$

$$\beta = 1/m - L^2/4J$$

$$\delta = 1/m$$

$$\text{Tem-se: } \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \beta & \delta \\ \beta & \xi & \delta \\ \delta & \delta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Com a introdução deste campo de inércia pode-se simplificar o "Bond Graph" apresentado anteriormente. (figura 5.4)

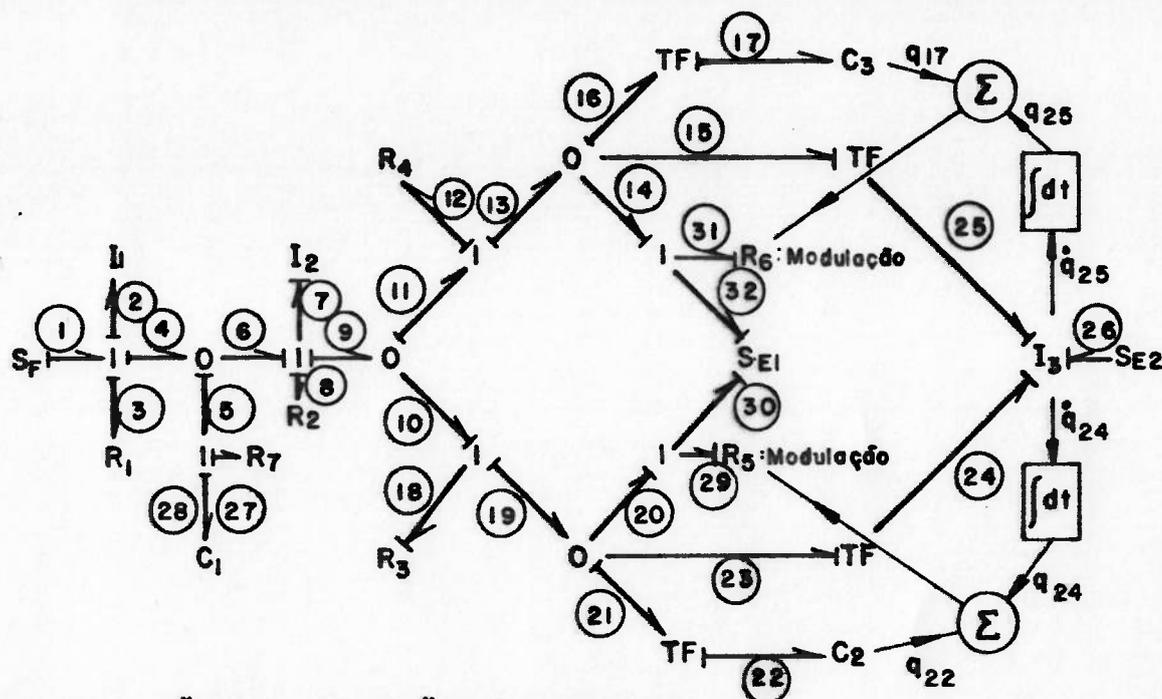


Fig. 5.4 : "BOND GRAPH" SIMPLIFICADO

### 5.3. Equacionamento do Sistema Completo (Rotor com Dois Graus / de Liberdade)

Do "Bond Graph" tem-se: uma indutância integrativa ( $I_2$ ), três / capacitâncias integrativas ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ) e um campo de inércia / integrativo de 3 portos. Assim, as variáveis de estado podem / ser:  $q_{28}$ ,  $p_7$ ,  $q_{17}$ ,  $q_{22}$ ,  $p_{26}$ ,  $p_{24}$  e  $p_{25}$ . Lembrando que as resis- / tências  $R_5$  e  $R_6$ , que serão moduladas, requerem a anexação de / mais duas equações, conclui-se que a ordem do sistema é 9.

OBS.: A inercância  $I_1$  é derivativa e, portanto, não colabora pa- / ra aumentar a ordem do sistema.

As equações obtidas de sua topologia, bem como as equações cons- / titutivas, estão no apêndice F.

Manipulando as equações do apêndice F, chega-se ao seguinte sis- / tema:

$$\dot{q}_{28} = \frac{-p_7}{I_2} + Q_b \quad (5.10)$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{m' I}{m' II} \cdot \frac{q_{22}}{C_2} \quad (5.11)$$

$$\dot{p}_{25} = \frac{m''_I}{m''_{II}} \cdot \frac{q_{17}}{C_3} \tag{5.12}$$

$$\dot{p}_7 = \frac{q_{28}}{C_1} - \left[ R_2 + R_7 + \frac{R_3 + R_4}{(R_3 + R_4)} \right] \cdot \frac{p_7}{I_2} - \frac{m'_I}{(1 + R_3/R_4)} \cdot \frac{q_{22}}{C_2} - \frac{m''_I}{(1 + R_4/R_3)} \cdot \frac{q_{17}}{C_3} + R_7 \cdot Q_b \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{17} = & \frac{m''_I}{(1 + R_4/R_3)} \cdot \frac{p_7}{I_2} \left[ \frac{m''_I{}^2}{(1 + R_4/R_3) \cdot R_6 \cdot C_3} + \frac{(R_4/R_6 + 1) \cdot m''_I{}^2}{(R_3 + R_4) \cdot C_3} \right] \cdot q_{17} + \\ & - \left[ \frac{m'_I \cdot m''_I}{(1 + R_3/R_4) \cdot R_6 \cdot C_2} - \frac{(R_4/R_6 + 1) \cdot m'_I \cdot m''_I}{(R_3 + R_4) \cdot C_2} \right] \cdot q_{22} - \frac{m''_I}{m''_{II}} \cdot (\beta p_{24} + \xi p_{25} + \delta p_{26}) + \\ & + \frac{m''_I \cdot P_{atm}}{R_6} \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{22} = & \frac{m'_I}{(1 + R_3/R_4)} \cdot \frac{p_7}{I_2} - \left[ \frac{m'_I \cdot m''_I}{(1 + R_4/R_3) \cdot R_5 \cdot C_3} - \frac{(R_3/R_5 + 1) \cdot m'_I \cdot m''_I}{(R_3 + R_4) \cdot C_3} \right] \cdot q_{17} + \\ & - \left[ \frac{m'_I{}^2}{(1 + R_3/R_4) \cdot R_5 \cdot C_2} + \frac{(R_3/R_5 + 1) \cdot m'_I{}^2}{(R_3 + R_4) \cdot C_2} \right] \cdot q_{22} - \frac{m'_I}{m'_{II}} \cdot (\xi p_{24} + \beta p_{25} + \delta p_{26}) + \\ & + \frac{m'_I \cdot P_{atm}}{R_5} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Assim, ao sistema formado pelas equações: (F.52 -vide apêndice F), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) e (5.15) basta anexar as duas equações que modulam  $R_5$  e  $R_6$  para que seja obtido as nove equações que definem o comportamento do modelo a cada instante.

Significado físico das variáveis que compõem este sistema:

- $q_{28}$  = Volume de óleo no vaso de pressão
- $\dot{q}_{28}$  = Vazão de óleo para o vaso de pressão
- $p_7$  = Impulso de pressão na linha principal, depois do vaso de pressão

$\dot{p}_7$  = Pressão na linha, depois do vaso de pressão

$p_{24}$  = Impulso linear do rotor do lado A (figura 5.1)

$\dot{p}_{24}$  = Força vertical agindo no rotor do lado A

$p_{25}$  = Impulso linear do rotor do lado B (figura 5.1)

$\dot{p}_{25}$  = Força vertical agindo no rotor do lado B

$q_{22}$  = Deslocamento da mola do lado A

$\dot{q}_{22}$  = Velocidade da mola do lado A

$q_{17}$  = Deslocamento da mola do lado B

$\dot{q}_{17}$  = Velocidade da mola do lado B

$p_{26}$  = Impulso do centro de massa do rotor, devido ao peso

$\dot{p}_{26}$  = Peso do rotor

Para a modulação de  $R_5$  e  $R_6$ , associam-se ao sistema acima as equações F.46 e F.47, onde aparecem as variáveis:

$q_{24}$  = Deslocamento do rotor do lado A

$\dot{q}_{24}$  = Velocidade do rotor, na direção vertical, do lado A

$q_{25}$  = Deslocamento do rotor do lado B

$\dot{q}_{25}$  = Velocidade do rotor, na direção vertical, do lado B

Assim, as espessuras do filme de óleo, dos lados A e B, são respectivamente:

$$h_A = (q_{22} + q_{24}) \quad (5.16)$$

$$h_B = (q_{17} + q_{25}) \quad (5.17)$$

No cálculo apresentado no capítulo anterior, está embutida a hipótese de que a pressão não varia ao longo da espessura de filme de óleo, ou seja, a pressão atuante no rotor é a mesma na face do mancal, em qualquer instante. Como consequência às equações anteriormente apresentadas, pode-se escrever:

$$m'_{\text{I}} = m'_{\text{II}} \quad (5.18)$$

$$m''_{\text{I}} = m''_{\text{II}} \quad (5.19)$$

E mais, a área do lado A é igual a área do lado B, ou seja,

$$m' = m'' \quad (5.20)$$

O módulo dos transformadores fica, então, simplesmente

$$m = \frac{1}{(\pi \cdot R^2)} \quad (5.21)$$

Modulação de  $R_5$  e  $R_6$ : utilizando-se dos resultados apresentados em 4.6, pode-se escrever:

$$R_5 = \frac{3\mu}{\pi \cdot (q_{22} + q_{24})^3} \quad (5.22)$$

$$R_6 = \frac{3\mu}{\pi \cdot (q_{17} + q_{25})^3} \quad (5.23)$$

#### 5.4. Características do Sistema Hidráulico (R, I e C)

##### 5.4.1. Resistência hidráulica (R)

Perda de carga para escoamento em tubo: referência [8]

Da primeira lei da termodinâmica aplicada a um tubo de corrente para um escoamento incompressível permanente, sem trabalho de eixo, tem-se: 
$$\left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g \cdot y_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g \cdot y_2 \right) = (u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm} \quad (5.24)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se a duas secções quaisquer e  $p$  = pressão,  $V$  = velocidade do fluido,  $y$  = cota em relação a uma referência,  $\rho$  = densidade de massa,  $u$  = energia interna por unidade de massa e  $Q$  = calor líquido adicionado ao sistema.

O segundo membro da equação representa o aumento da energia interna do fluido e a transferência de calor. Qualquer aumento da energia interna é de pequena importância porque ela é usualmente perdida. Chamando de perda de carga  $h_e = (u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm}$  (5.25),

para um escoamento incompressível permanente, onde as linhas de corrente são horizontais e paralelas, tem-se:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = (u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm} = h_e \quad (5.26)$$

Se não houver atrito algum nesse escoamento, pela segunda lei de Newton, não há mudança de pressão. Assim, pode-se interpretar a perda de carga, como perda de carga de pressão,  $\Delta p/\rho$ , devido ao atrito.

OBS.: Para o caso de escoamento não horizontal, a variação da pressão resulta de uma perda de carga e de uma variação na elevação, ou seja:  $\frac{\Delta p}{\rho} = g.(y_2 - y_1) + h_e$ . Como mencionado, a diferença de cotas no sistema hidráulico do mancal de escora é muito pequena, o que permite desprezar esse termo da equação.

Considerando, então, um escoamento laminar incompressível permanente através de um tubo reto de secção transversal constante, e utilizando as equações de Navier-Stokes, conforme referência /8/, obtém-se, para um perfil totalmente desenvolvido:

$$h_e = \frac{128.\mu.Q.L}{\pi.D^4.\rho} \quad (5.27)$$

onde Q=vazão; L=comprimento do tubo; D=diâmetro do tubo. Portanto:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{128.\mu.Q.L}{\pi.D^4.\rho} \Rightarrow \Delta p = \frac{128.\mu.L}{\pi.D^4} . Q \quad (5.28)$$

Assim, da equação constitutiva,  $e=R.f$ , conclui-se que:

$$R = \frac{128.\mu.L}{\pi.D^4} \quad (5.29)$$

OBS.: 1- Para o escoamento no circuito de lubrificação forçada, o maior número de Reynolds acontece na linha principal e vale aproximadamente 1782, daí a consideração de regime laminar.

2- É importante salientar que, para o escoamento laminar, a perda de carga é independente da rugosidade da parede do tubo. O fator de atrito "f", obtido experimentalmente, na faixa de escoamento laminar, fica reduzido a  $f = 64/\text{Rey}$ .

Perdas secundárias nos sistemas de tubos:

Através de resultados experimentais pode-se calcular as perdas /

singulares e adicioná-las às perdas nos tubos. |8|

Tem-se:  $h_e = \frac{K \cdot V^2}{2}$ , onde o parâmetro K, para diversos acessórios,

é dado em inúmeros manuais. Não se faz diferença entre o escoamento laminar e turbulento. Na fórmula acima, a velocidade  $V$  pode ser tomada como a média à montante ou jusante.

Equivalentemente, pode-se escrever:  $h_e = \frac{K \cdot V^2}{2} = \frac{K \cdot Q^2}{2 \cdot A^2}$  (5.30)

para  $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \Rightarrow h_e = \frac{8 \cdot K \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^4}$  ou  $Q = \frac{\pi D^2}{\sqrt{8 \cdot K}} \sqrt{\Delta H}$  (5.31)

Linearizando em torno de um determinado instante (o inicial, por exemplo, indicado pelo índice  $\underline{0}$ ):  $dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial (\Delta H)} \right) d(\Delta H) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{(\Delta H)_{\underline{0}}}} \cdot \Delta H \quad (5.32)$$

$$\text{onde } B = \frac{\pi \cdot D^2}{\sqrt{8K}} \quad (5.33)$$

Tomando-se um intervalo de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequeno em relação à frequência com que  $\Delta H$  varia, pode-se admitir, durante este intervalo, regime permanente onde  $\Delta H = \Delta p / \rho$ . Portanto:

$$\Delta p = 2 \cdot B \cdot Q \sqrt{\rho \cdot p_{\underline{0}}} \quad (5.34)$$

$$\text{E assim, } R = 2 \cdot B \cdot \sqrt{\rho \cdot p_{\underline{0}}} \quad (5.35)$$

#### 5.4.2. Inertância hidráulica (I)

Considerando-se um trecho rígido de tubo de comprimento  $\underline{l}$  e área  $A(s)$  onde  $\underline{s}$  é a distância ao longo da linha de centro,  $v(s, t)$  representa a velocidade média na posição  $\underline{s}$  no tempo  $\underline{t}$  e  $p(s, t)$  a pressão, conforme representado na figura 5.5. Para um escoamento / incompressível, aplicando-se a lei de Newton:

$$\rho \cdot \frac{dv}{dt} = \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho \cdot g \cdot \frac{dz}{ds} \quad (5.36)$$

A incompressibilidade implica em vazão constante ao longo de  $\underline{s}$ . Assim, pode-se escrever:  $v(s, t) = \frac{Q(t)}{A(s)}$  (5.37)

De (5.37) e (5.36):

$$\rho \left( \frac{\dot{Q}(t)}{A(s)} + \frac{Q^2(t)}{A(s)} \cdot \frac{\partial 1/A(s)}{\partial s} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho \cdot g \cdot \frac{dz}{ds} \quad (5.38)$$

Integrando em  $s$  de zero a  $l$ :

$$I \cdot \dot{Q} + \frac{\rho \cdot Q^2}{2} \left( \frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) = p_0(t) - p_1(t) - \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_0) \quad (5.39)$$

$$\text{Com } I = \rho \cdot \int_0^l \frac{ds}{A(s)} \quad (5.40)$$

Para  $A(s) = \text{constante}$  e  $z_1 = z_0$ , tem-se:

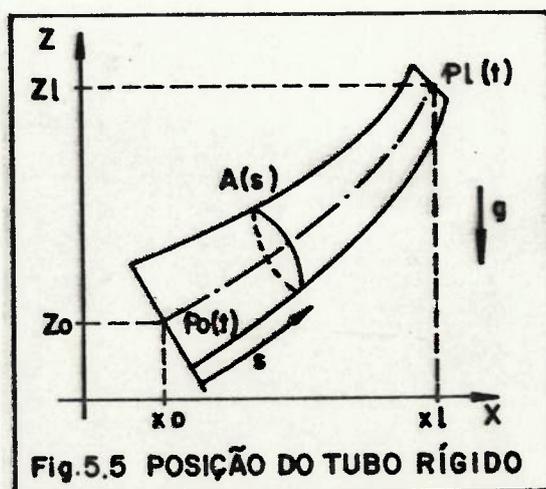
$$I \cdot \dot{Q} = p_0(t) - p_1(t) \quad (5.41)$$

$$\text{Com } I = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (5.42)$$

$$\text{De (5.42) e (5.41): } \left( \frac{\rho \cdot l}{A} \right) \cdot \frac{dQ}{dt} = \Delta p \text{ ou } Q = \left( \frac{A}{\rho \cdot l} \right) \cdot p_p \quad (5.43)$$

onde  $p_p$  é o impulso de pressão.

Obs.: Foi admitida a hipótese de unidimensionalidade do escoamento, e o fluido no tubo, tratado como tendo movimento de corpo rígido./ Esta hipótese só poderia ser descartada se fosse conhecido o perfil de velocidades ao longo da secção e do tempo. Para condições / transitórias, a distribuição de velocidades é freqüentemente muito difícil de ser estimada, contudo, a precisão do cálculo pode ser / melhorada pela introdução de fator de correção, geralmente obtido / experimentalmente.



## 5.4.3. Capacitância hidráulica (C)

Para o vaso de pressão, considerando-se o gás no seu interior com/ comportamento de gás perfeito, a seguinte expressão é válida:

$$P \cdot V^{\gamma} = \text{constante} \quad (5.44)$$

onde:  $P$ =pressão,  $V$ =volume ocupado pelo gás e  $\gamma$ =coeficiente que depende do processo politrópico. Para um instante qualquer, identificado com o índice  $0$ , pode-se escrever  $P_0 \cdot V_0^{\gamma} = \text{constante}$ .

$$\text{Logo, } P V^{\gamma} = P_0 \cdot V_0^{\gamma} \quad \text{ou } P = (P_0 \cdot V_0^{\gamma}) \cdot V^{-\gamma} \quad (5.45)$$

$$\text{Linearizando em torno de um determinado instante: } dP = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 dV \quad (5.46)$$

$$\text{Mas, } \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 = - \frac{\gamma P_0}{V_0} \quad (5.47)$$

De (5.47) em (5.46), para um intervalo de variação finito:

$$\Delta P = \left( \frac{-\gamma \cdot P_0}{V_0} \right) \cdot \Delta V \quad (5.48)$$

Lembrando que  $\Delta V$  de ar =  $-\Delta V$  de óleo; então, para o óleo,

$$\Delta P = \left( \frac{\gamma \cdot P_0}{V_0} \right) \cdot \Delta V \quad \text{ou } \Delta V = \left( \frac{V_0}{\gamma \cdot P_0} \right) \cdot \Delta P \quad (5.49)$$

$$\text{Comparando com a equação constitutiva: } q=C.e, \text{ tem-se } C = \frac{V_0}{\gamma \cdot P_0} \quad (5.50)$$

Obs.: Caso fosse necessário levar em conta a compressibilidade do/ fluido de trabalho, deveria ser estudada sua elasticidade. Os fluidos hidráulicos não são normalmente muito elásticos, ou seja, uma / pequena alteração na densidade é acompanhada de uma grande alteração de pressão. Uma relação constitutiva linear é, normalmente, su ficientemente precisa. Assim, uma maneira de definir o módulo volu métrico ( $K_0$ ) é através da relação de pressão  $P$  e da mudança de volume  $V$  da massa do fluido que ocupa o volume  $V_0$  quando  $P_0=0$ .

$$P = K_0 \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \quad (5.51)$$

Na realidade  $K_0$  varia com a pressão média, a temperatura, o ar dis

solvido no fluido, etc. Assim, tal fenômeno (compressibilidade), pode ser modelado através de capacitâncias de trechos em trechos da linha.

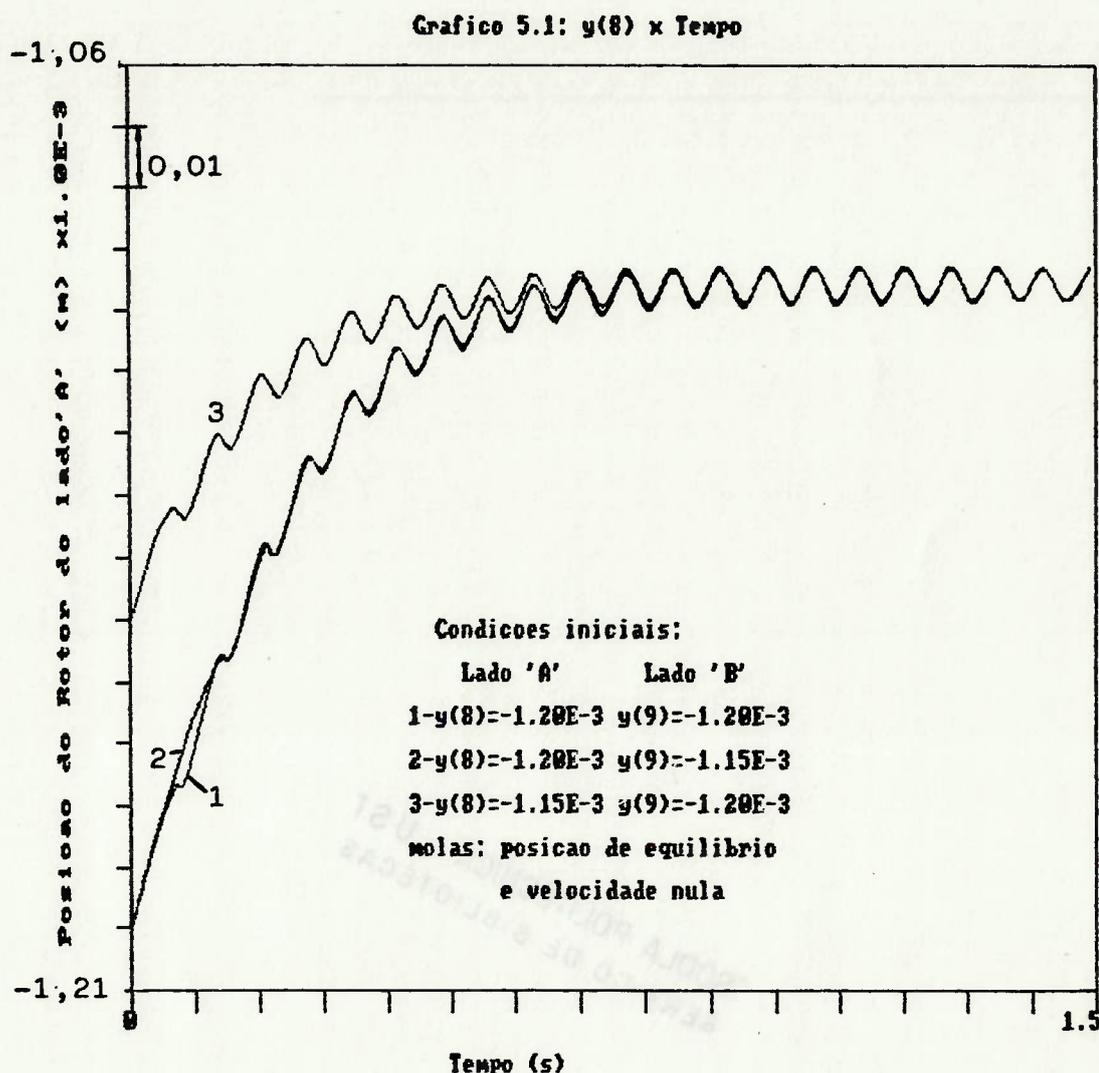
### 5.5. Resultados

Os resultados foram obtidos através de um programa computacional, escrito em linguagem Fortran, que faz a integração numérica do sistema pelo método de Runge-Kutta e utiliza a seguinte correlação de variáveis:

$$\begin{array}{ll}
 q_{28} = y(1) & \dot{q}_{28} = \text{dery}(1) \\
 p_7 = y(2) & \dot{p}_7 = \text{dery}(2) \\
 p_{24} = y(5) & \dot{p}_{24} = \text{dery}(5) \\
 p_{25} = y(6) & \dot{p}_{25} = \text{dery}(6) \\
 q_{17} = y(3) & \dot{q}_{17} = \text{dery}(3) \\
 q_{22} = y(4) & \dot{q}_{22} = \text{dery}(4) \\
 p_{26} = y(7) & \dot{p}_{26} = \text{dery}(7) \\
 q_{24} = y(8) & \dot{q}_{24} = \text{dery}(8) \\
 q_{25} = y(9) & \dot{q}_{25} = \text{dery}(9)
 \end{array}$$

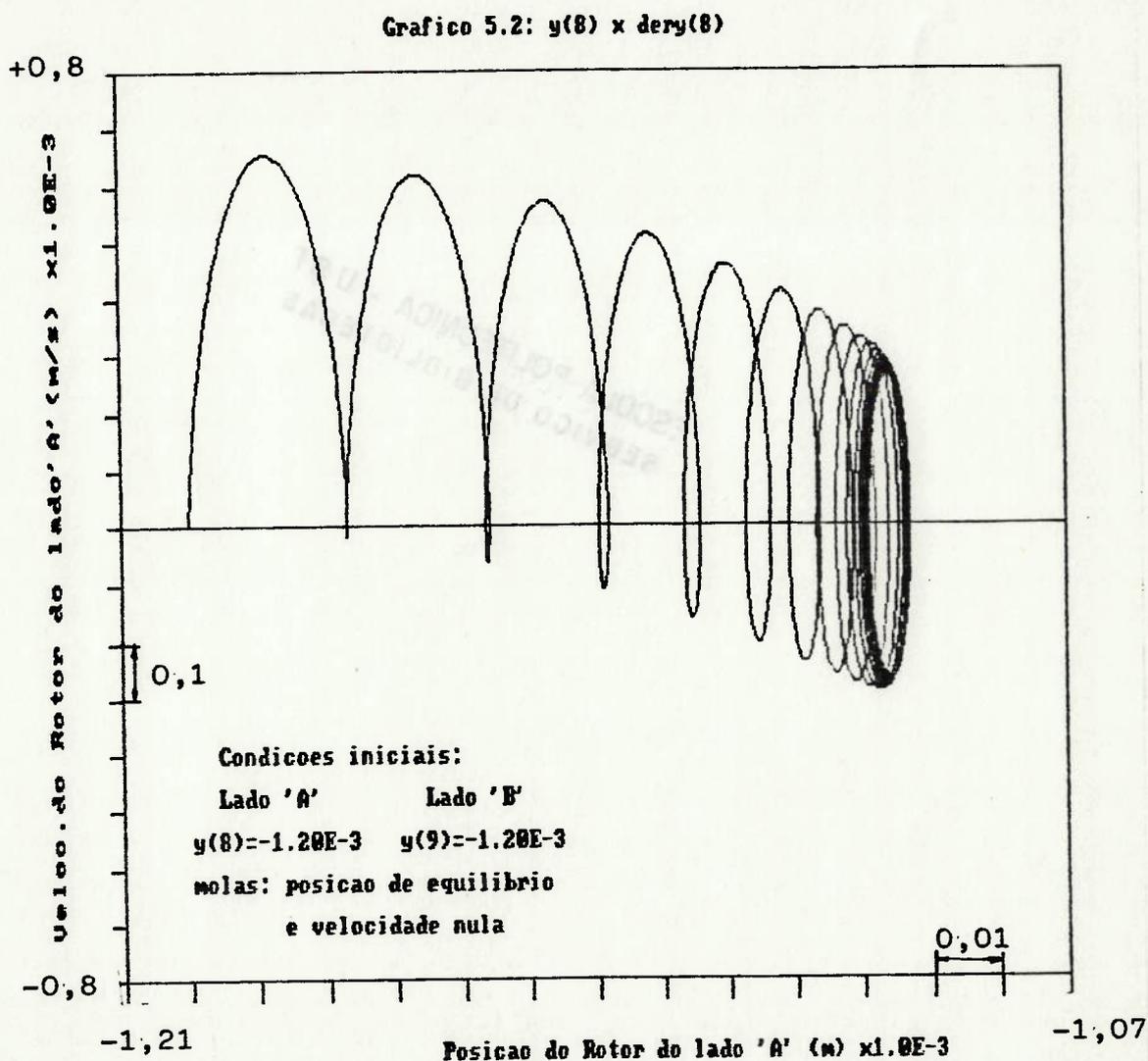
A exemplo do que foi apresentado no capítulo anterior, o gráfico 5.1 apresenta a posição do lado A do rotor ao longo do tempo para 3 diferentes condições iniciais. Nos três casos as molas encontram-se, inicialmente, nas suas posições de equilíbrio estático e com velocidades nulas. A única excitação do sistema aparece no posicionamento do rotor, que impõe espessura de filme de óleo menor que a estabelecida no equilíbrio estático. Inicialmente o rotor possui velocidades angular e axial nulas.

Os gráficos a seguir foram obtidos com os parâmetros referentes à máquina de Itaipu:  $m=2,3 \cdot 10^6 \text{ Kg}$ ;  $J=8,01 \cdot 10^6 \text{ Kg.m}^2$ ;  $L=1,79 \text{ m}$ ;  $C=1,085 \cdot 10^{-7} \text{ s}^2/\text{Kg}$ ;  $\mu=3,1 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/m.s}$ .



Na curva de número 1, a excitação consiste em igual deslocamento para baixo, dos dois lados do rotor. Surge então, uma oscilação, sem movimentação angular, com frequência de 13,9 Hz e amplitude  $7,0 \cdot 10^{-6}$  m (7 microns) constantes, caracterizando o ciclo-limite já conhecido. Em relação ao modelo apresentado no capítulo anterior, tanto a frequência como a amplitude são menores, 2% e 22%, respectivamente. Dois fatores explicam esta diferença: primeiro a presença de um vaso de pressão neste modelo, / e em segundo lugar, as linhas secundárias fazem com que as dissipações nas resistências hidráulicas sejam diferentes.

As curvas 2 e 3 são causadas por um deslocamento vertical somado a um deslocamento angular do rotor e, como se pode observar, logo nos primeiros ciclos os dois lados passam a oscilar em fase, apresentando, então, movimento apenas na direção vertical. A seguir, os diagramas de fase referentes ao ponto localizado do lado A do rotor, para as três curvas do gráfico 5.1 (Gráficos: 5.2; 5.3 e 5.4)



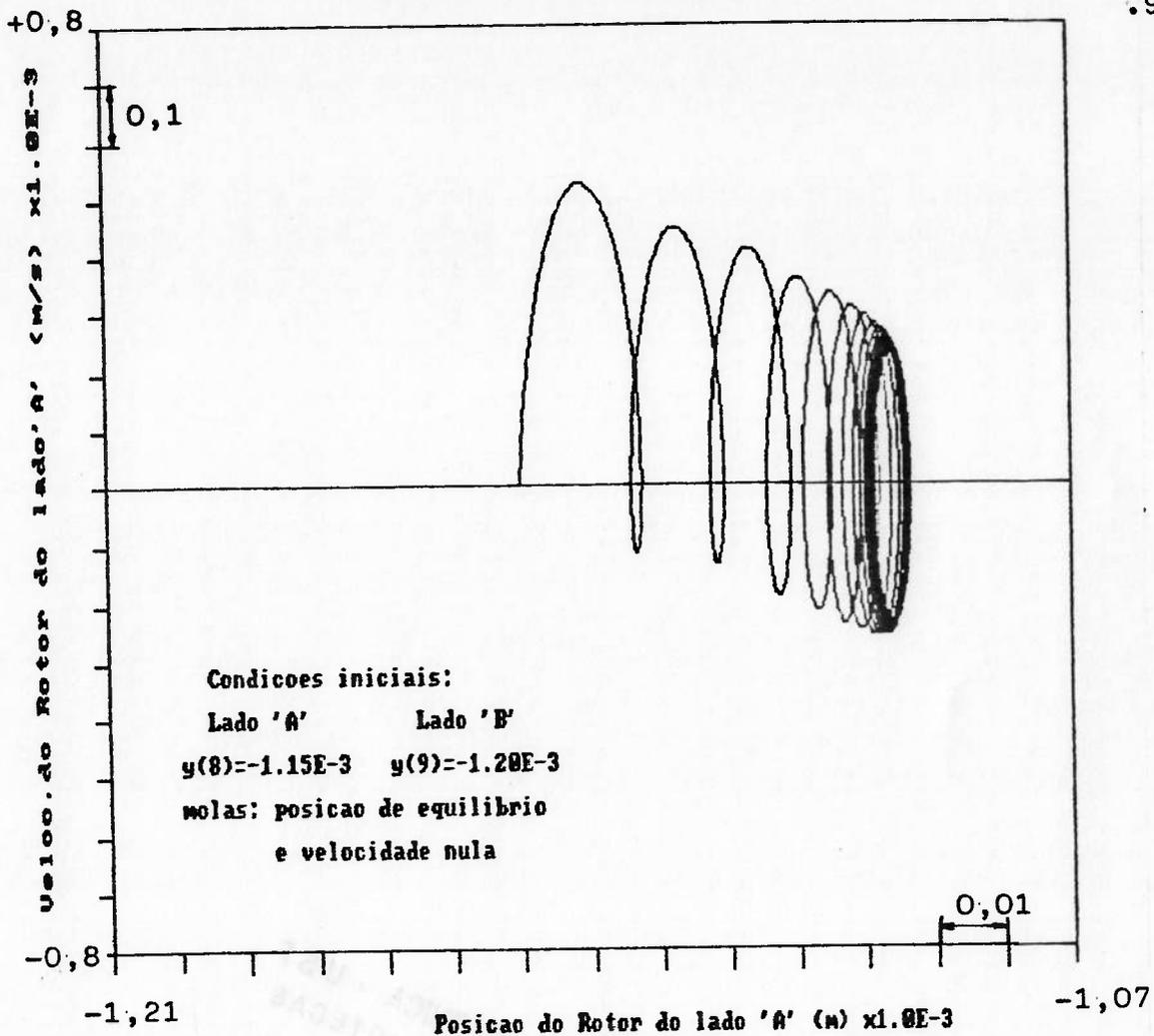
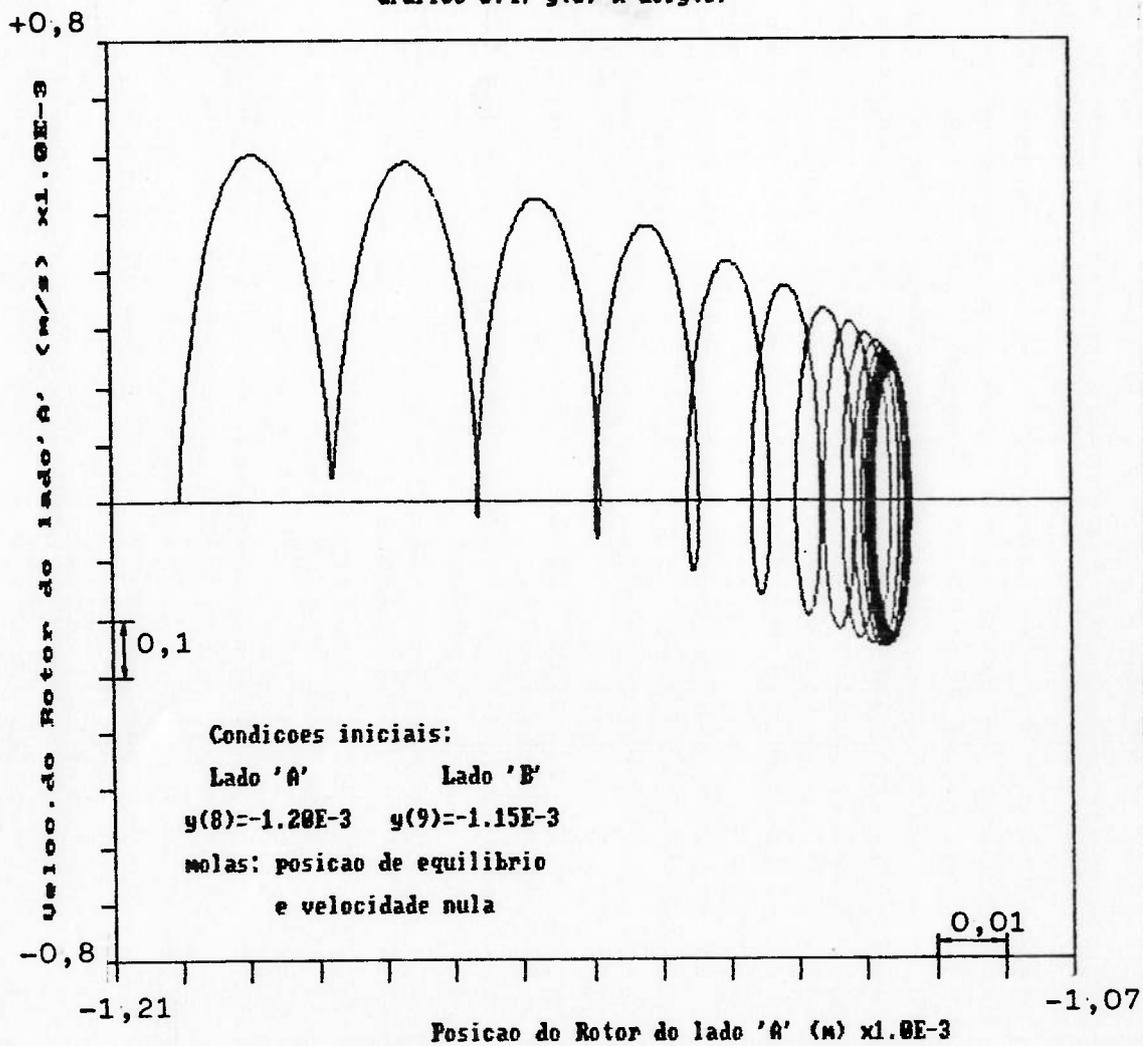


Grafico 5.4:  $y(8) \times dery(8)$

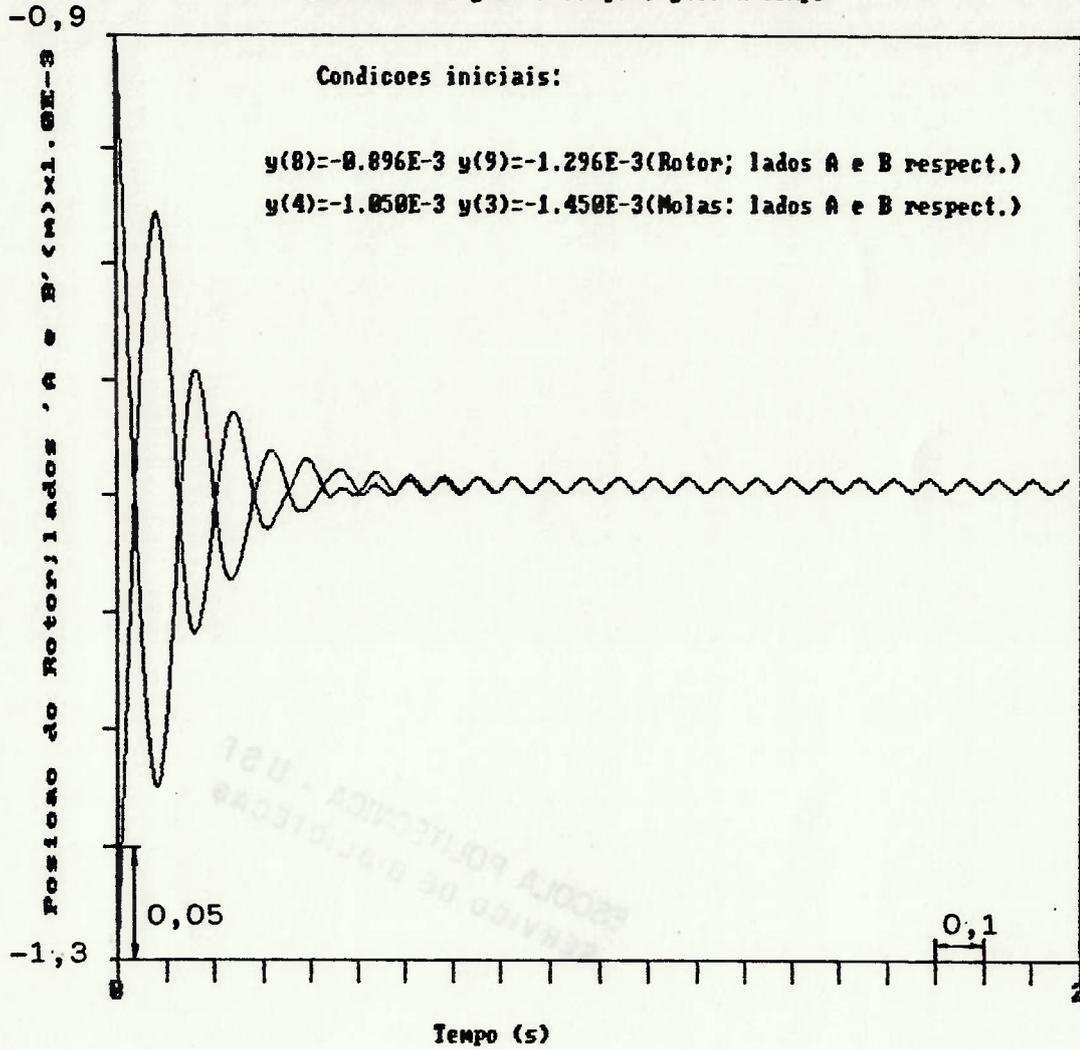


Foi realizada uma exploração do comportamento do sistema para / diferentes condições iniciais e verificou-se, em todos os casos, que o rotor, após alguns ciclos de movimento combinado, passa a / oscilar exclusivamente na direção vertical e atinge o ciclo-li- mite esperado. Para os valores de Itaipu, não se obtém um movi- mento rotacional "mantido" e isto se deve ao fato da constante / rotacional  $(L^2/4J)=1,0 \cdot 10^{-7} \text{ Kg}^{-1}$  ser pequena em relação à cons- tante de inércia linear  $(1/m)=4,34 \cdot 10^{-7} \text{ Kg}^{-1}$ , pois  $L=1,79\text{m}$ , que / é a distância entre os centros de aplicação de força dos segmen- tos de mancais "das regiões periféricas" (conforme figura 2.3), é pequeno em relação ao diâmetro do rotor (aproximadamente 18m) que confere ao conjunto girante um momento de inércia em rela- ção a um eixo horizontal (J) de  $8,01 \cdot 10^6 \text{ Kg.m}^2$ .

O gráfico 5.5 mostra um exemplo em que as molas estão inicial- mente deslocadas do seu ponto de equilíbrio estático. Assim, a / mola do lado A está comprimida de  $2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  e a do lado B dis- tendida de  $2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Além disso, foi imposta uma espessura de / filme de óleo igual para os dois lados ( $1,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ), o que equi- vale dizer, que, o rotor encontra-se inicialmente inclinado em / relação à linha horizontal.

É importante observar que, a frequência da oscilação, que inici- almente vale aproximadamente 6,56 Hz, referente à presença so- mente de movimentação angular, vai aumentando, com o surgimento de movimento combinado, até atingir o valor de 13,9 Hz com movi- mentação exclusivamente translatória na direção vertical.

Grafico 5.5:  $y(8) \times \text{Tempo}$  e  $y(9) \times \text{Tempo}$



Os gráficos 5.6a e 5.6b mostram o diagrama de fase correspondente ao lado A do rotor.

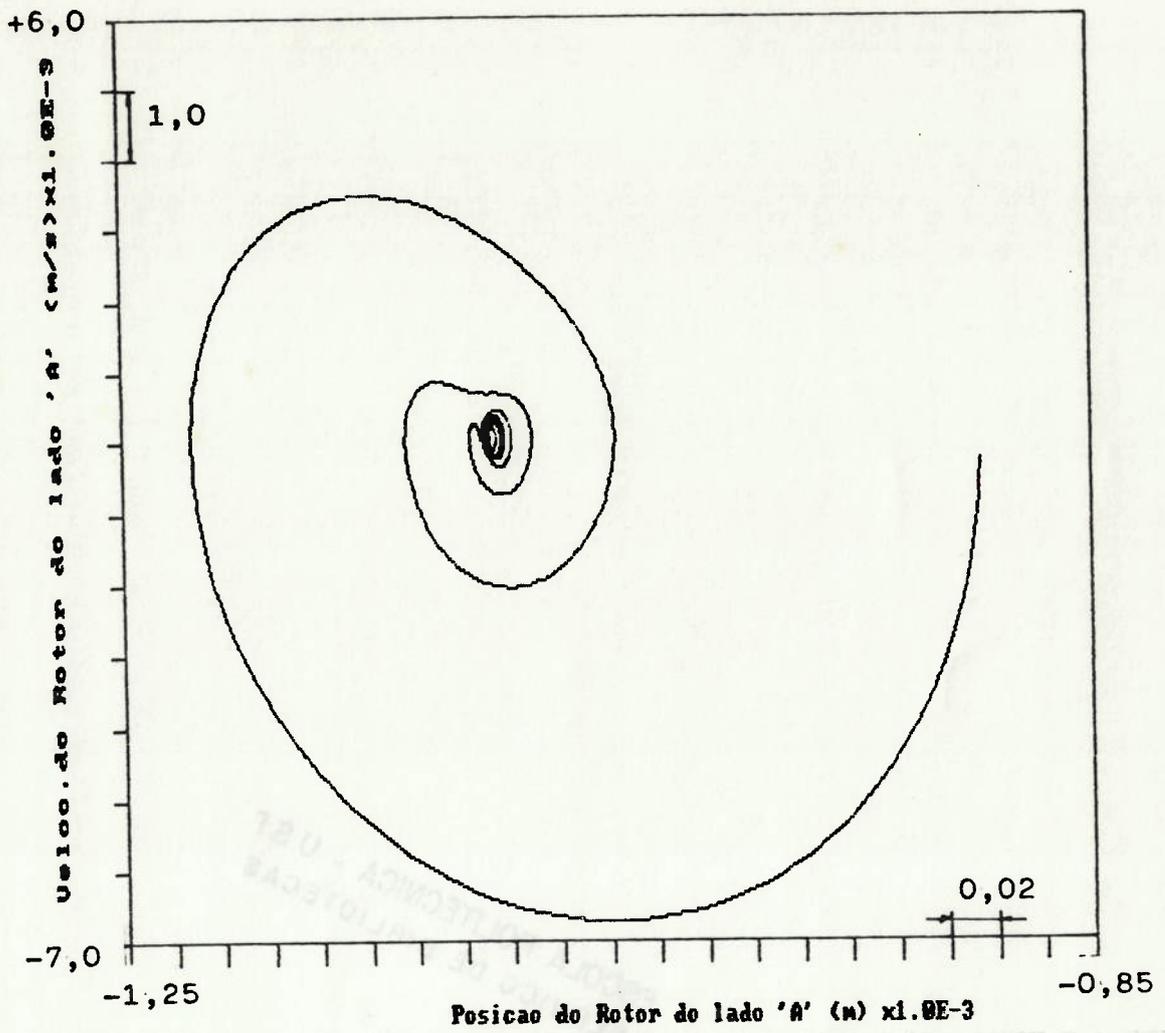
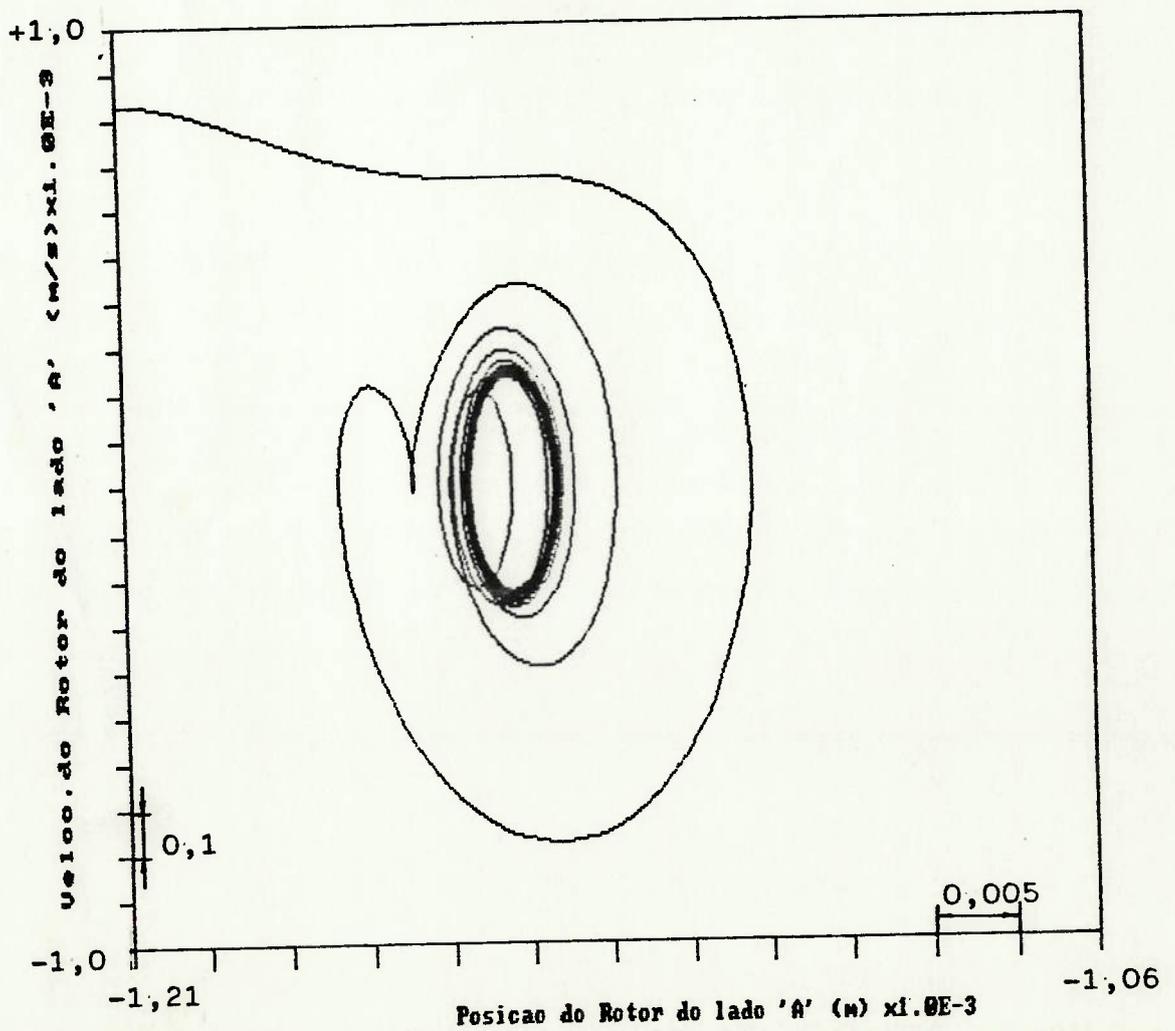


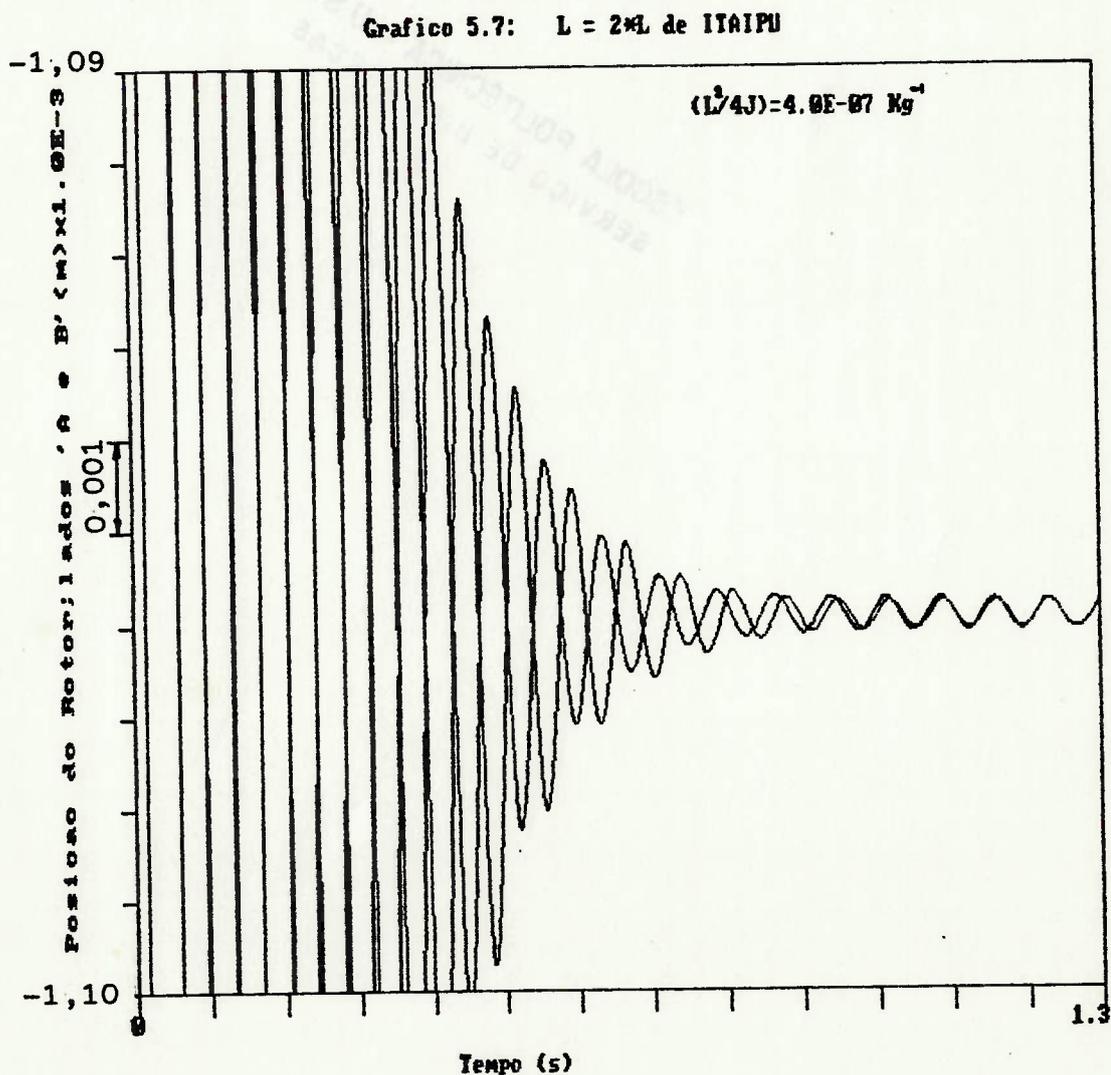
Grafico 5.6b:  $y(\theta) \times dery(\theta)$



### 5.6. Variação dos Parâmetros: Massa do Conjunto Girante e Constante Rotacional ( $L^2/4J$ )

No ítem anterior verificou-se o não estabelecimento de um ciclo limite com deslocamento angular do rotor, indicando que o trabalho realizado pelo binário surgido do desequilíbrio de forças dos mancais é insuficiente para manter movimento angular da inércia rotacional ( $J$ ). Assim, é de se esperar que para valores maiores de  $L$  haja uma "tendência" maior de oscilação angular e eventual ciclo-limite neste modo de vibrar.

A seqüência de gráficos (5.7 a 5.9) mostra o comportamento do rotor ao longo do tempo para os valores de  $L$  multiplicados por 2, 4 e 8, respectivamente.



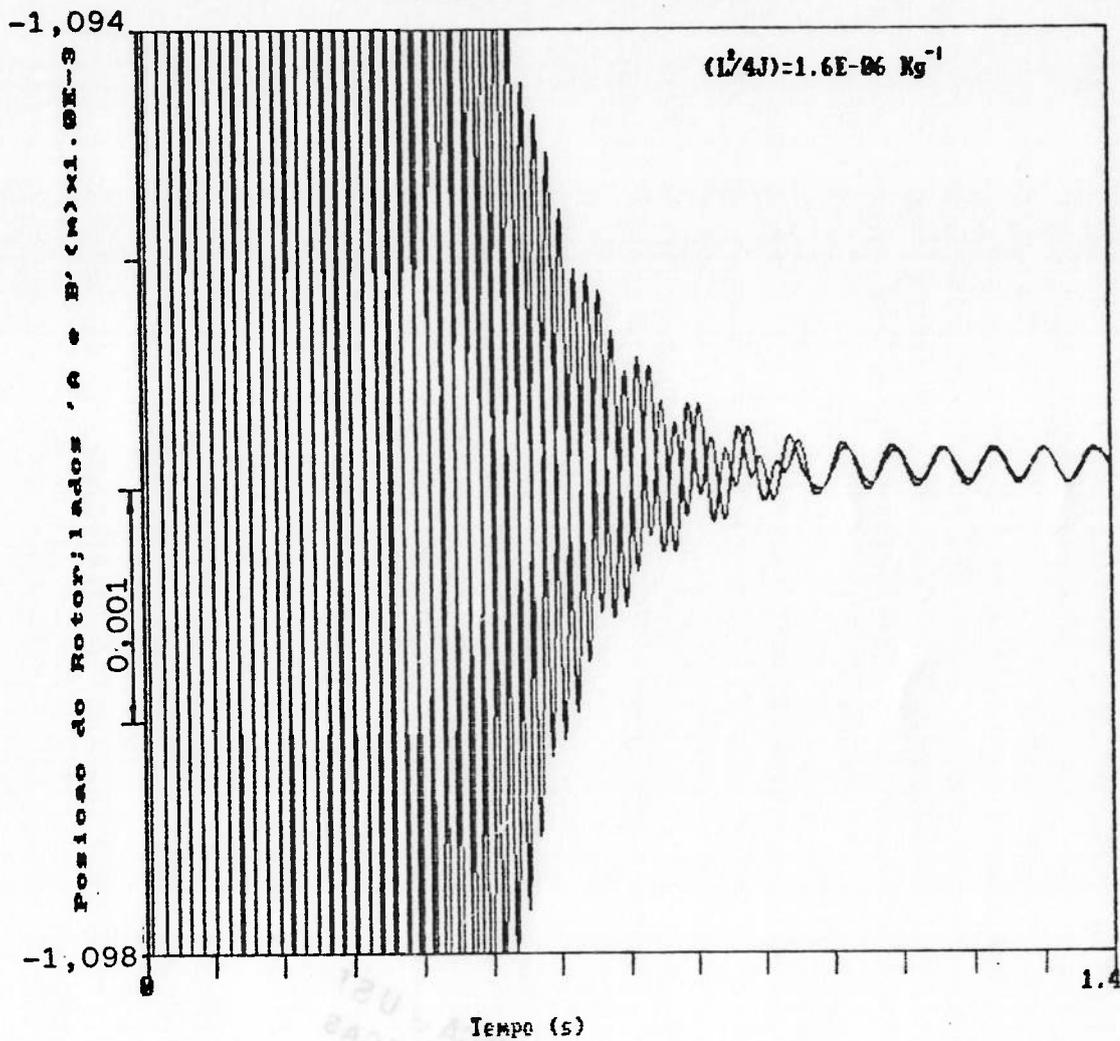
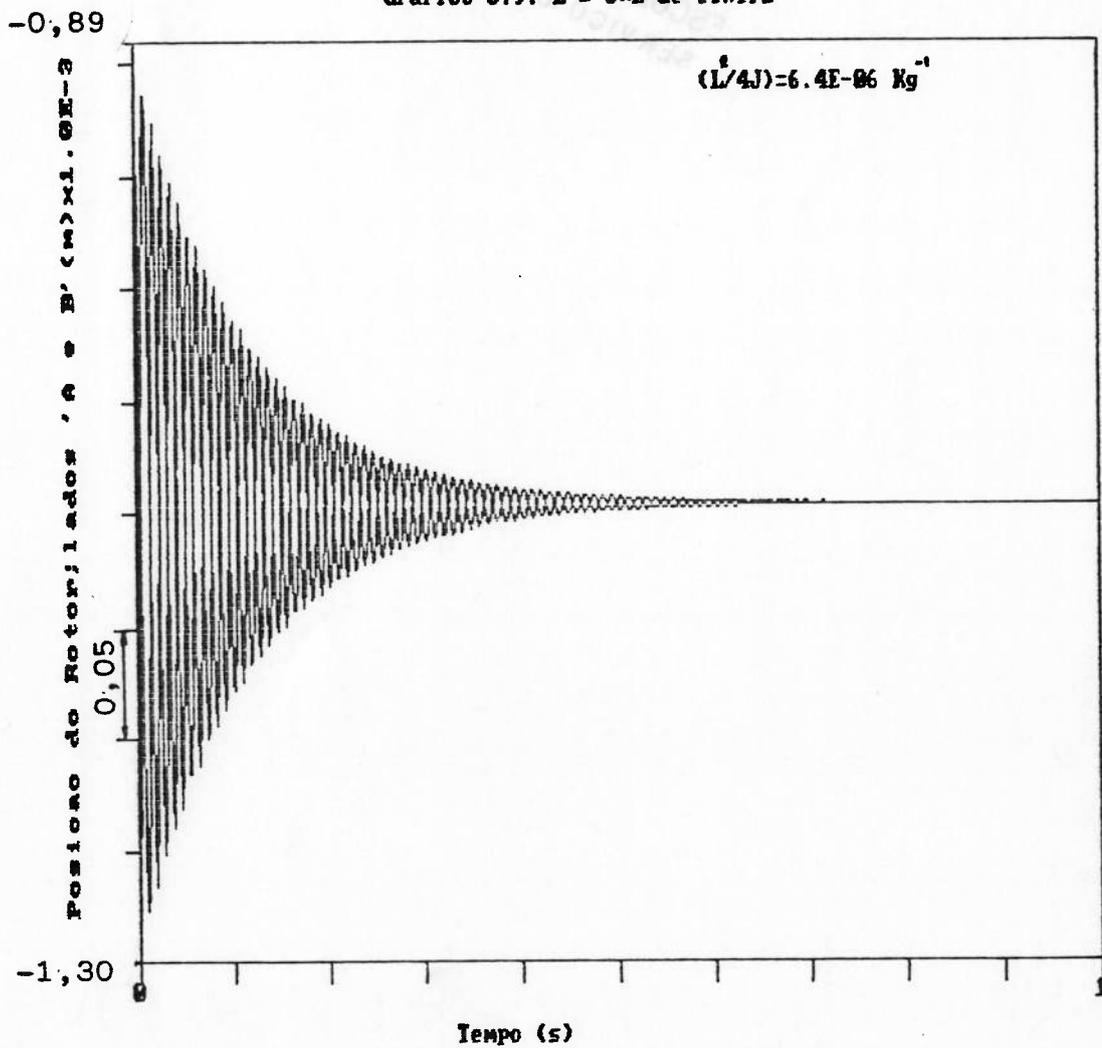
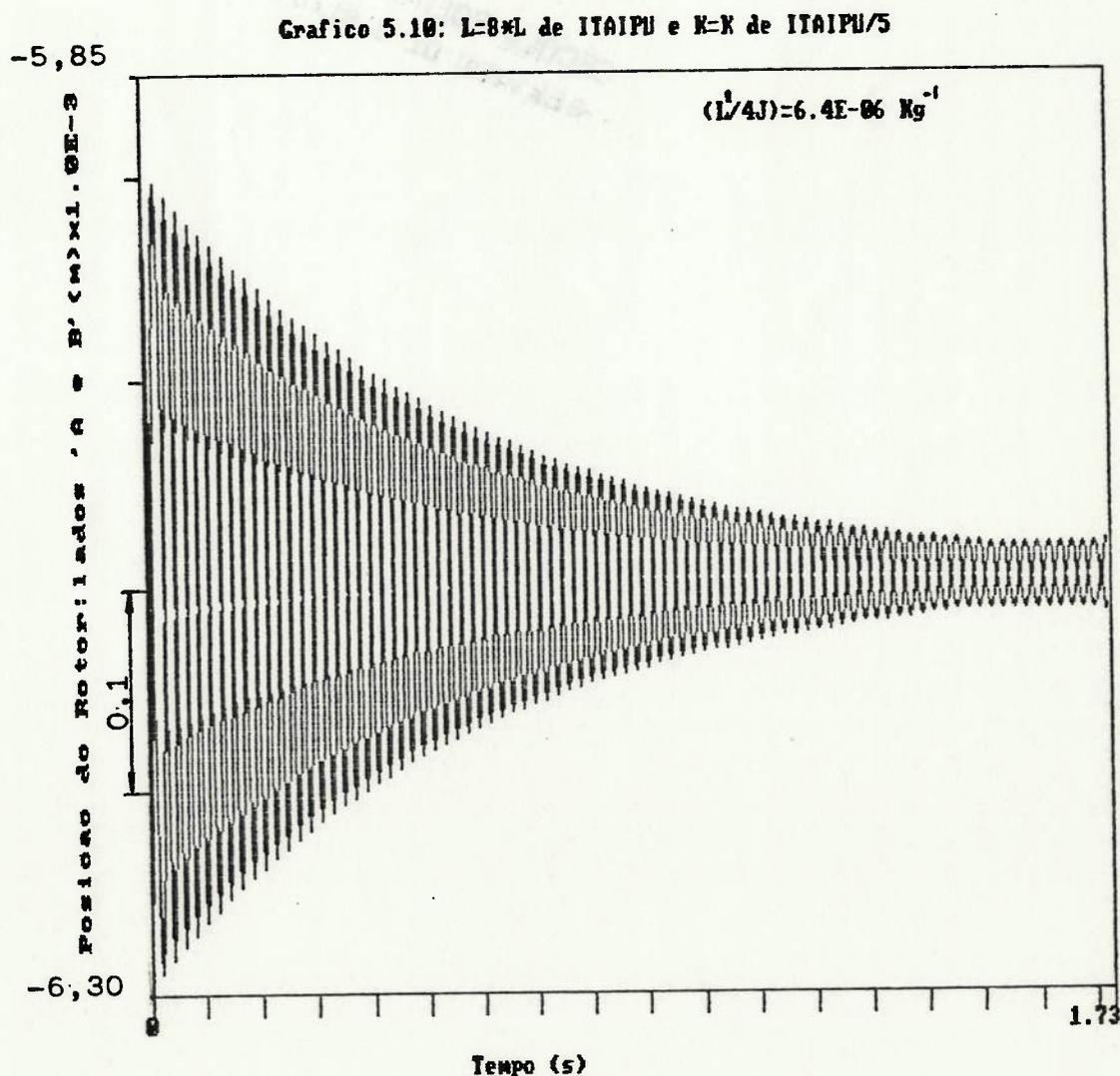


Grafico 5.9: L = 8\*L de ITAIPU



Como pode ser notado no gráfico 5.9, neste caso não há mais a / transformação da oscilação angular do conjunto girante em oscilação de translação na direção vertical e correspondente ciclo-limite.

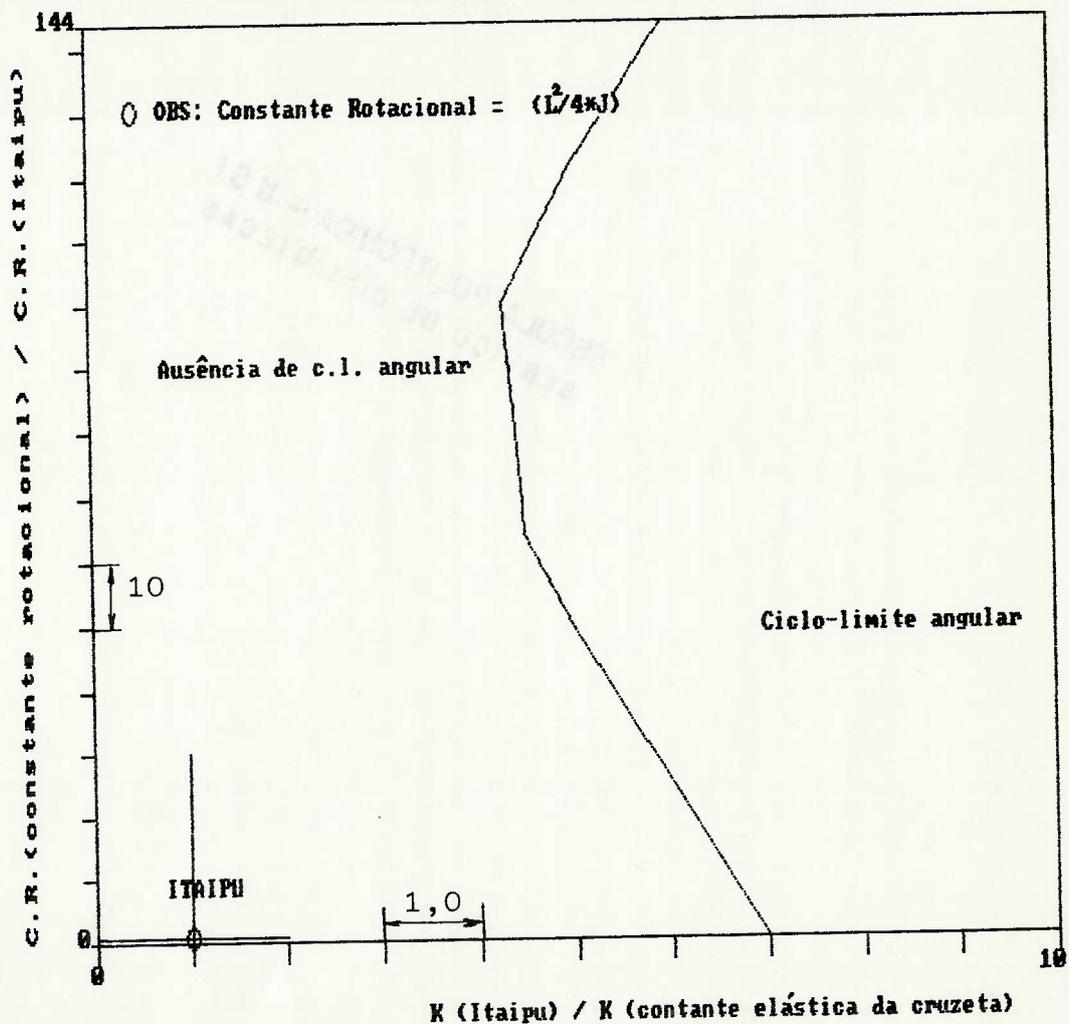
A estabilidade assintótica apresentada é coerente com o mapeamento  $K \times m$  apresentado no gráfico 4.32 do capítulo anterior, / onde, para um dado valor de  $K$ , a estabilidade assintótica é atingida com a diminuição da inércia  $m$ . Assim, o aumento de /  $(L^2/4J)$  pode ser interpretado como a diminuição da inércia  $J$  para um valor de  $L$  mantido constante. Por outro lado, o gráfico / 4.32 mostra que, com a diminuição de  $K$  pode-se chegar ao ciclo-limite, o que também foi verificado no caso da vibração angular, conforme mostra o gráfico 5.10.



OBS.: Fala-se aqui em ciclo-limite de um sistema de nona ordem / que envolve 18 variáveis ( $x_i, \dot{x}_j$ ,  $i=1$  a 9;  $j=1$  a 9) e, portanto, / 153 possíveis projeções ( $C_{18,2}$ ). É, obviamente, impraticável obter todas essas projeções, todavia, cabe salientar que houve a / preocupação de verificar o comportamento das principais projeções, isto é,  $x_i$  X  $\dot{x}_i$ .

A exemplo do que foi apresentado no capítulo anterior, o gráfico 5.11 mostra um mapeamento do ciclo-limite com oscilação angular/ do conjunto girante, no plano  $K$  X  $(L^2/4J)$ , para valores constantes dos demais parâmetros.

Grafico 5.11: Mapeamento de ciclo-limite angular



### 5.7. Conclusão

O modelo com dois graus de liberdade do conjunto girante mostrou que, embora seja possível o ciclo-limite angular, no caso de Itaipu tal fato não ocorre. Qualquer movimentação angular ou combinada, com o tempo, transforma-se em movimentação de translação.

## 6. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

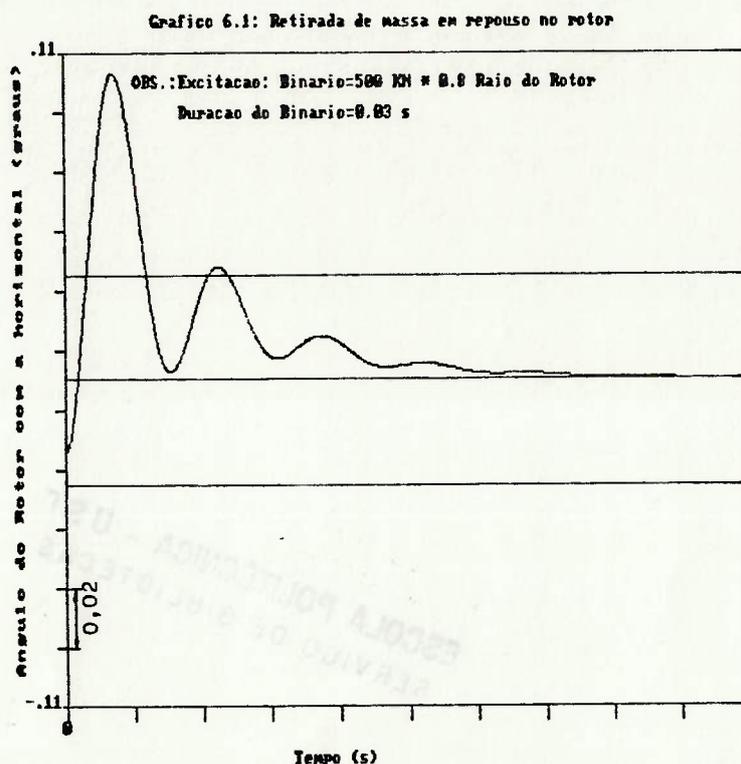
O estudo do comportamento dinâmico do sistema de sustentação por mancal de escora com lubrificação forçada detectou, através de / modelos não-lineares, a possibilidade de existência de ciclo-limite relacionada tanto com a movimentação translacional na direção vertical do conjunto girante quanto com a movimentação angular. A presença deste fenômeno depende da magnitude dos parâmetros envolvidos e das condições iniciais a que o sistema é submetido.

No caso de Itaipu, o ciclo-limite ocorre apenas com deslocamento translacional do conjunto girante, não sendo constatado o ciclo-limite com movimentação angular que, devido à geometria de posicionamento de mancal e rigidez da cruzeta, é levada a transformar-se em oscilação na direção axial. Assim, o sistema deve ser classificado de instável, no sentido clássico da definição, contudo, a oscilação angular provocada, e que deu origem ao acidente com danos à superfície do mancal de guia, não foi causada pela instabilidade encontrada.

Utilizando o equacionamento apresentado no capítulo 5, obteve-se o gráfico 6.1 que mostra ser factível o choque do eixo da máquina com o mancal de guia superior, em razão de uma brusca retirada de massa que, inicialmente, encontrava-se em repouso na periferia do rotor. No caso, a simulação deste transiente foi feita/ para uma massa de 50 toneladas, correspondente à viga secundária do dispositivo de içamento do conjunto girante.

O gráfico 6.1 apresenta a variação temporal do ângulo que a superfície do rotor forma com uma linha horizontal do plano de oscilação. O gráfico mostra duas linhas horizontais indicando o máximo valor do ângulo, em módulo, para o qual não há contato do ei-

xo com a superfície do mancal de guia superior (o ângulo positivo corresponde ao deslocamento angular no sentido anti-horário/ e o negativo, no sentido horário). Como pode ser visto, um dos / limites é ultrapassado, mostrando ser possível que o acidente / tenha sido motivado pelo içamento de um dispositivo de montagem.



Resumindo o que foi apresentado, pode-se dizer que, a classificação de ciclo-limite, às trajetórias encontradas, fundamenta-se / nos fatos de que o sistema é dissipativo e evolui ao longo do / tempo para o estabelecimento de uma oscilação com frequência e / amplitude constantes, com a trajetória deste sistema de alta or / dem constituindo uma superfície fechada no seu espaço dimensio- / nal. Além disso, as forças que sustentam o movimento do conjun- / to girante são provocadas pelo seu próprio movimento, o que ca- / racteriza a auto-excitação do sistema e, finalmente, outro pon- / to típico é a presença de uma fonte energética não-periódica / (vazão hidráulica da bomba) que não pode ser causa da oscilação / mantida.

Foi preocupação constante do autor a utilização de métodos analíticos, mas como são raras as vezes em que se consegue aplicá-los com êxito, a utilização de integração numérica, também aqui, foi indispensável.

Quanto aos mapeamentos apresentados nos capítulos 4 e 5, cabe / ressaltar que cada ponto do plano requer um estudo minucioso, / onde é necessário verificar o comportamento para diversas con- / dições iniciais. Assim, pela quantidade de pontos pesquisados, / na obtenção das curvas que estabelecem os limites de existência de ciclo-limite, pode-se dizer que tais gráficos têm o objetivo principal de ilustrar a tendência do fenômeno.

Embora estes gráficos sejam válidos para as características hidráulicas do equipamento utilizado em Itaipu (vazão da bomba, / viscosidade do óleo, resistências, inertâncias e capacitância / hidráulicas), sabe-se que estes parâmetros não são os mais sen- / síveis para a alteração do comportamento dinâmico do sistema. A / além disso, não existem diferenças exageradas entre as unidades / hidráulicas utilizadas em máquinas de pequeno e grande porte. / Desta forma, em fase de projeto, estes mapas podem ser bastante / úteis para uma primeira avaliação sobre a "tendência" a ciclo- / limite de uma determinada máquina, quando estabelecidos seus / principais parâmetros (M, J, L e K).

É condição de projeto dos hidrogeradores, fazer com que o man- / cal de escora fique o mais próximo possível do eixo da máquina, / procurando-se com isto, as menores velocidades periféricas pos- / síveis, minimizando os problemas do desgaste. Portanto, o valor / assumido pela constante rotacional ( $L^2/4J$ ), via de regra, impedi- / rá a existência de ciclo-limite com movimento angular. Por ou- / tro lado, o ciclo-limite com translação na direção vertical po- / derá ser problema no alinhamento de diversas máquinas, e proble- / ma sério se o fenômeno persistir com a máquina em funcionamento

quando a espessura do filme de óleo necessita ser a mais constante possível para evitar perdas de energia mecânica. Além disso, um desalinhamento vertical do centro do estator com o centro do rotor faz surgir uma força, de natureza elétrica, na direção vertical que certamente diminuirá o rendimento da máquina e poderá, se tiver o sentido para baixo, sobrecarregar o mancal de escora.

O mapeamento do capítulo 4, que se refere ao movimento axial, / mostra duas maneiras de afastar a presença do ciclo-limite. Ou diminuindo a massa do conjunto girante ou aumentando a rigidez / da cruzeta inferior.

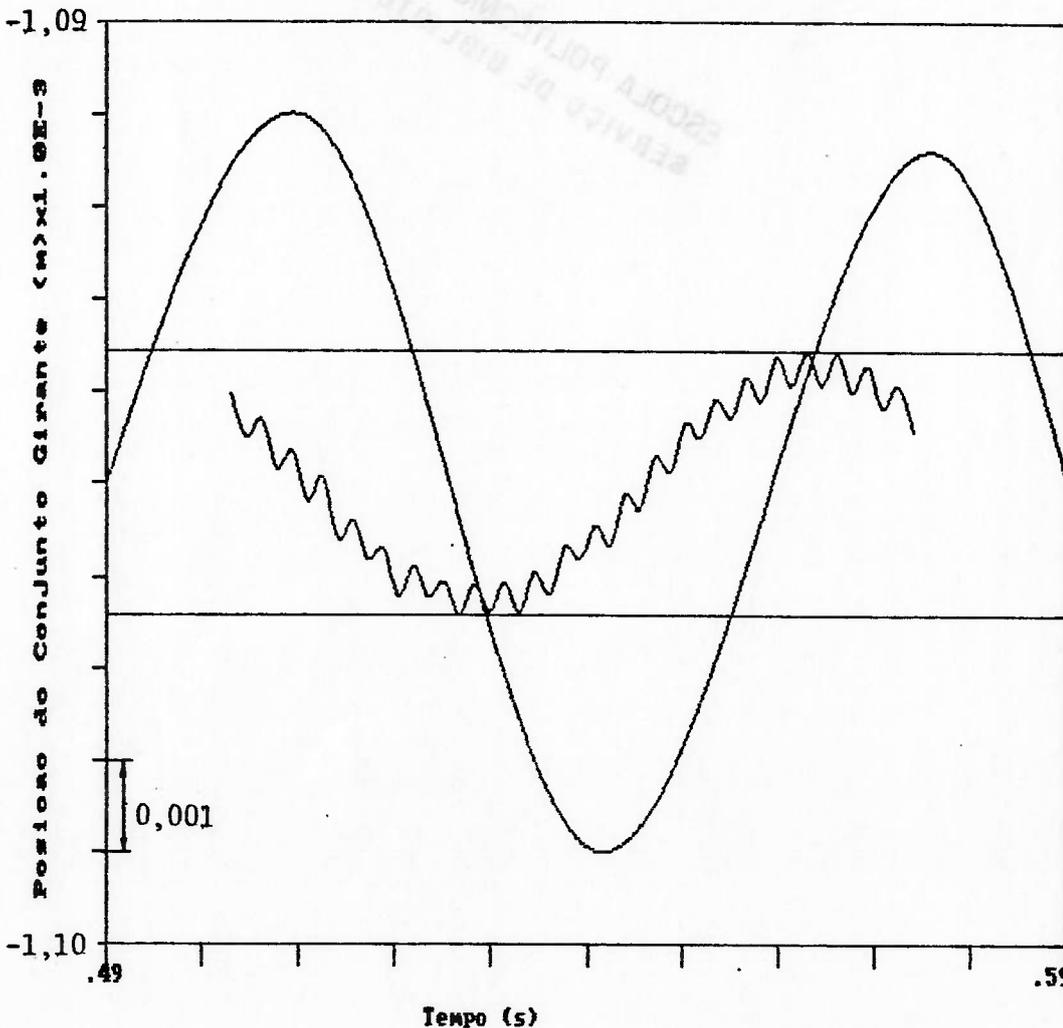
No caso de Itaipu, a amplitude de ciclo-limite encontrada justifica providências no sentido de eliminá-la ou, pelo menos, atenuá-la. Tornar a cruzeta inferior mais rígida axialmente é problemático pois, além de anti-econômico, suas dimensões já estão vinculadas a outros fatores do projeto. Diminuir a massa do conjunto girante é mais difícil ainda, praticamente não há flexibilidade. As soluções apontadas são adequadas em fase de projeto. Para uma máquina já construída, suas aplicações são extremamente complicadas e dispendiosas, tornando-se necessárias outras / soluções.

Uma moderna técnica de atenuação de oscilações de ciclo-limite / vem sendo empregada com sucesso em controle de circuitos eletrônicos. Trata-se da injeção no sistema de um sinal de alta fre - quência (em relação à sua frequência natural).

Para o caso de um hidrogenador, este efeito pode ser obtido a - través de um motor acionando um disco excêntrico colocado em cima do rotor. O gráfico 6.2 mostra a simulação desta técnica, /

chamada "Dither Injection", no problema em questão. Foi colocada uma força alternada com frequência de 318 Hz, aproximadamente 23 vezes a frequência natural de oscilação do sistema, e magnitude igual a 2% do peso do rotor, ou seja, a massa excêntrica deve produzir uma força centrífuga de 2% do peso do rotor quando girar nesta frequência. Como resultado obteve-se 70% de atenuação da amplitude após aproximadamente 0,5 s de exposição a este sinal. No gráfico tem-se a superposição das curvas de resposta do sistema com e sem o "Dither Injection". O grau de atenuação depende da amplitude e frequência do sinal injetado. Os valores apontados acima são frutos de um estudo onde se procurou obter o máximo de atenuação. Embora este método não elimine a oscilação, consegue, de maneira bastante simples, atenuá-la de forma significativa.

Grafico 6.2: "Dither Injection" 318 Hz e 2%Peso C.G



A aplicação da excitação de alta frequência, através de um excêntrico colocado em cima do rotor, obviamente não é viável com a máquina em funcionamento. Por outro lado, existem, neste caso, dois fatores que certamente amenizam o problema. Em primeiro lugar, com a máquina em funcionamento, existe o empuxo hidráulico da turbina, o que equivale aumentar sensivelmente o peso do conjunto girante. Em segundo lugar, é de se esperar que a própria vibração surgida com a rotação da máquina substitua, em parte, o efeito do excêntrico. Mesmo não tendo a frequência e magnitude mostradas acima, seu efeito contribuirá para a atenuação da amplitude de ciclo-limite, caso este fenômeno venha ocorrer com a máquina operando.

Finalmente, são sugeridos os próximos passos para o prosseguimento da pesquisa.

Quanto à parte teórica pode-se, ainda, investir no modelo do capítulo 5 acrescentando o efeito do choque do conjunto girante com o mancal de guia superior, a fim de verificar se fatos novos ocorrem. Como mencionado, o programa de integração pelo método de Runge-Kutta apresenta problemas de convergência neste tipo de simulação. Todavia, existem desenvolvidos programas especiais, que utilizam os multiplicadores de Lagrange no tratamento desta descontinuidade geométrica, e que aqui poderiam ser empregados.

Além disso, pode-se aprofundar o estudo da variação dos parâmetros, procurando acrescentar, prioritariamente, os mais importantes para o comportamento do sistema, obtendo, se possível, curvas adimensionalizadas.

É desejável também, fazer a verificação experimental dos modelos aqui estudados.

APÊNDICES

12 U - ADMICETLOR ANGE  
SERVICO DE BIBLIOTECA  
ESCOLA POLITECNICA - USP

## A. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA COMPRESSIBILIDADE DO FLUIDO

### a.1. Introdução

Este apêndice apresenta o primeiro modelo matemático para o / problema em questão. Considera a compressibilidade do fluido / e, portanto, não é o mais simples, mas foi o primeiro a ser / cogitado, uma vez que se acreditava que a instabilidade do sistema estava intimamente relacionada com a compressibilidade do óleo, causa de um armazenamento contínuo de energia de pressão.

Assim, o objetivo do apêndice é mostrar que para as condições geométricas e operacionais, específicas deste problema, a compressibilidade do fluido pode ser desprezada, possibilitando / adotar modelos de cálculo mais simples.

Dada a grande dificuldade de resolver analiticamente o cálculo, optou-se por uma solução numérica que faz a integração por diferenças finitas. Foi utilizado o Método das Características, / que permite, com facilidade, subdividir o sistema em elementos básicos.

### a.2. Nomenclatura do Apêndice A

A nomenclatura será dividida em itens para facilitar a identificação.

#### a.2.1 Mancal

$Q$  = Vazão através do mancal

$P_p$  = Perímetro do mancal

$C_d$  = Coeficiente de descarga do mancal

$h$  = Distância entre a superfície do mancal e o rotor, em qualquer instante

$h_p$  = Distância da superfície do mancal a um referencial fixo, em qualquer instante

$h_{Bax}$  = Distância axial do rotor a um referencial fixo, em qual-

quer instante

$h_{B\alpha}$  = Desloca/o devido a inclinação do rotor em relação à /  
linha do horizonte, na posição dos centros de mancais

$\Delta t$  = Intervalo de tempo finito

Índices: 0 = Condição inicial

1 = Condição no instante  $t$

2 = Condição no instante  $t + \Delta t$

a.2.2. Cruzeta inferior (mola axial)

$K_3$  = Constante elástica da mola

$A_p$  = Área do mancal

$\rho$  = densidade do fluido

a.2.3. Conjunto girante

$W_x$  = Massa do rotor

$W_y$  = Massa da turbina + eixo

$R_x$  = Raio de giração do rotor

$R_y$  = Raio de giração da turbina + eixo

$t'$  = Binário de excitação

$\theta$  = Deslocamento angular do rotor

$F_D$  = Força no mancal do lado D (ver figura A.3)

$F_E$  = Força no mancal do lado E (ver figura A.3)

$I$  = momento de inércia do conjunto girante em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centro de massa

$t$  = Tempo

$\Delta t$  = intervalo de tempo

$u_1$  = Velocidade do conjunto girante no instante  $t$

$r$  = Raio do mancal de escora

Índices: D = Referente ao lado D

E = Referente ao lado E

## a.2.4. Linha hidráulica

$C_p$  = Característica positiva caminhando da bomba para o mancal

$C_a$  = Característica da linha:  $\frac{g \cdot A}{a}$

A = Área do tubo

a = Velocidade de propagação de onda de pressão no fluido

## a.2.5. Bomba

$Q_x$  = Vazão da bomba para carga nula (H=0)

a = Inclinação da curva carga / vazão

$C_n$  = Característica negativa caminhando do mancal para a bomba

$A_{ed}$  = Área de vazão efetiva do orifício da bomba

## a.2.6. Junção dos tubos

Índices: I = Linha principal

D = Linha secundária do lado D

E = Linha secundária do lado E

## a.2.7. Vaso de pressão

$A_{ed}$  = Área de vazão efetiva do orifício do vaso de pressão

$V$  = Volume de ar no vaso

$\gamma$  = Coeficiente politrópico do ar

$H_a$  = Carga referente à pressão atmosférica

Índices: 1 = linha antes do vaso

2 = Linha depois do vaso

3 = Linha para dentro do vaso

' = Referente ao instante  $t$

'' = Referente ao instante  $t + \Delta t$

## a.2.8. Orifício na linha

$A_{ed}$  = Área efetiva do orifício

Índices: 1= Antes do orifício  
2= Depois do orifício

#### a.2.9. Condições iniciais

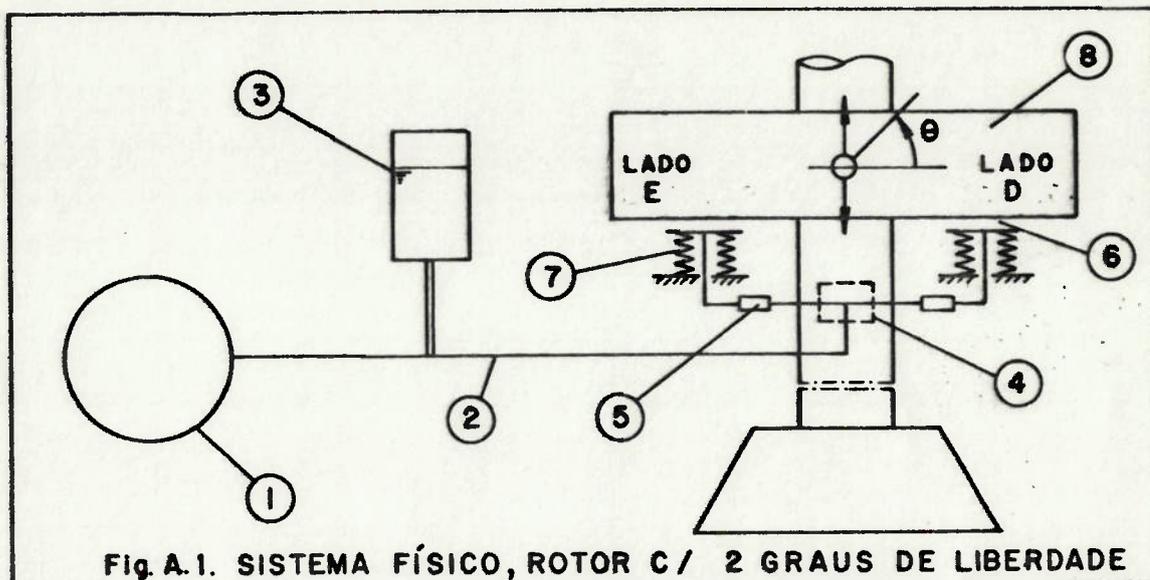
$K_1$  = Coeficiente de perda de carga na linha 1  
 $K_2$  = Coeficiente de perda de carga na linha 2  
 $K_3$  = Coeficiente de perda de carga na linha 3  
 $K_D$  = Coeficiente de perda no mancal do lado D  
 $K_E$  = Coeficiente de perda no mancal do lado E

Índices: 1= Linha principal  
2= Linha secundária do lado D  
3= linha secundária do lado E

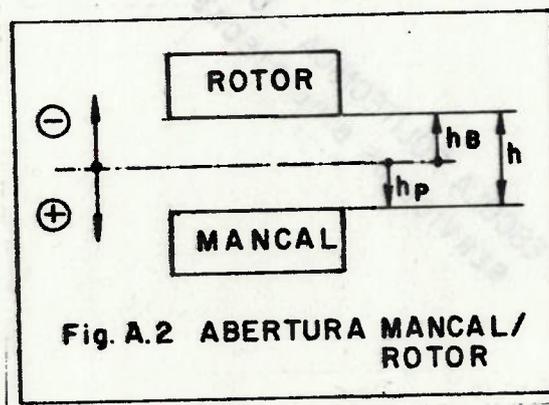
#### a.3. Modelo e Equacionamento

Neste equacionamento, como mostra a figura A.1, serão incluídos no modelo os seguintes elementos: bomba hidráulica (1), linha principal (2), vaso de pressão (3), Junção com tubos / secundários (4), perda de carga localizada (5), mancal (6), mola axial (7) e conjunto girante (8). Portanto, o rotor terá sustentação em dois pontos, podendo mover-se com dois / graus de liberdade (deslocamento na direção vertical e deslocamento angular). Quanto ao mancal, será encarado como um orifício que provoca uma vazão regulada pela sua carga e abertura (distância entre superfície do mancal e rotor).

A exemplo do que foi discutido anteriormente, para simplificar o cálculo, os segmentos que ocupam a região periférica / (ver capítulo 2) serão reunidos em dois grupos (lados D e E).



a.3.1. Segmento de mancal do lado E



A espessura do filme de óleo, como mostra a figura A.2, num/ instante qualquer, é dada por:  $h = h_p - h_B$  (A.1)

A mudança na espessura do filme com o tempo, conforme nomen- clatura é:  $\Delta h = h_2 - h_1$  (A.2)

Vazão no segmento:  $Q = K_1 \cdot h \cdot \sqrt{H}$  (A.3)

onde,  $K_1 = C_d \cdot P_p \cdot \sqrt{2g}$  (A.4)

Linearizando a equação A.3, para o instante 1, tem-se:

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial h} \right)_1 dh + \left( \frac{\partial Q}{\partial H} \right)_1 dH$$

$$\text{Com, } \left( \frac{\partial Q}{\partial h} \right)_1 = K_1 \cdot \sqrt{H_1} \quad (\text{A.5}) \quad \left( \frac{\partial Q}{\partial H} \right)_1 = \frac{K_1 \cdot h}{2 \cdot \sqrt{H_1}} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Assim: } dQ = K_1 \cdot \sqrt{H_1} dh + \frac{K_1 \cdot h_1}{2 \cdot \sqrt{H_1}} dH \quad (\text{A.7})$$

Aproximando para um intervalo de tempo finito, pode-se escrever:  $\Delta Q = K_1 \cdot \left( \sqrt{H_1} \cdot \Delta h + \frac{h_1}{2 \cdot \sqrt{H_1}} \cdot \Delta H \right)$  (A.8)

$$\text{De (A.1) e (A.2): } \Delta h = (h_{p_2} - h_{B_2}) - (h_{p_1} - h_{B_1}) \quad (\text{A.9});$$

posteriormente o deslocamento do bloco do rotor será subdividido em axial e angular. Para qualquer instante,  $Q_1, H_1, h_{B_1}$  e  $h_{p_1}$  são conhecidos e são constantes.

$$\text{Pode-se escrever, ainda: } Q_2 = Q_1 + \Delta Q \quad (\text{A.10})$$

$$\text{e } H_2 = H_1 + \Delta H \quad (\text{A.11})$$

Logo, de (A.11), (A.10) e (A.9) em (A.8):

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = K_2 \cdot \left\{ 2 \cdot H_1 \left[ (h_{p_2} - h_{p_1}) - (h_{B_2} - h_{B_1}) \right] + h_1 \cdot (H_2 - H_1) \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{onde: } K_2 = \frac{K_1}{2 \sqrt{H_1}} \quad (\text{A.13})$$

Observando a expressão (A.12) nota-se que é necessário obter/ as expressões de  $\Delta h_{p_2}$  e  $\Delta h_{B_2}$  e resolvê-las em conjunto com as equações características para o fluido em regime não-permanente.

### a.3.2. Cruzeta inferior

$$\text{Se } h_{p_2} > h_{p_1} \Rightarrow H_2 > H_1 \quad (\text{A.14})$$

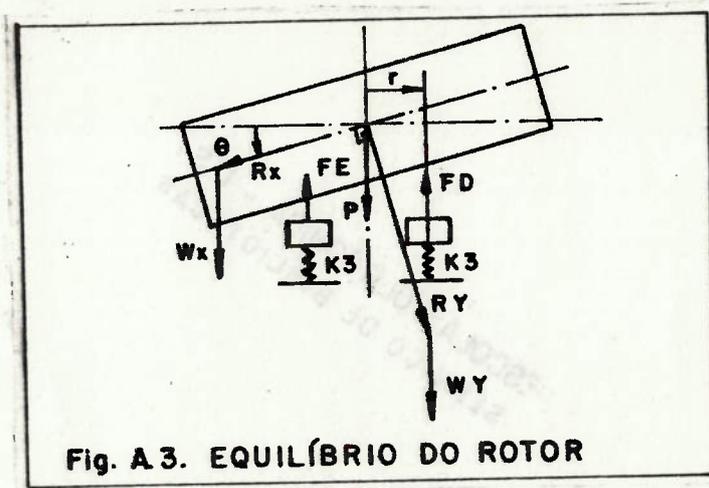
$$\text{Pode-se, então, escrever: } h_{p_2} - h_{p_1} = \frac{K_4}{K_3} \cdot (H_2 - H_1) \quad (\text{A.15})$$

$$\text{onde: } K_4 = A_p \cdot \rho \quad (\text{A.16})$$

### a.3.3 Conjunto girante

A figura A.3 mostra, esquematicamente, o rotor sendo sustentado pelos segmentos de mancal, indicando as forças atuantes.

O momento de inércia em torno de uma linha horizontal pelo centro de massa vale:  $I = W_x \cdot R_x^2 + W_y \cdot R_y^2$  (A.17)



Assumindo  $\theta$  pequeno, ou seja,  $\sin \theta = \theta$  e  $\cos \theta = 1$ , pode-se escrever o binário agindo no rotor:

$$T = (F_D - F_E) \cdot r + W_y \cdot R_y \cdot \theta + t' \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Da segunda lei de Newton: } T = I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (\text{A.19})$$

O deslocamento angular do rotor, entre os instantes 1 e 2, utilizando a expansão de Taylor, é aproximadamente:

$$\theta_2 - \theta_1 = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_1 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right)_1 \cdot (t_2 - t_1)^2 \quad (\text{A.20})$$

De (A.17), (A.18) e (A.20):

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{T}{I} = \frac{(F_D - F_E) \cdot r + W_y \cdot R_y \cdot \theta + t'}{W_x \cdot R_x^2 + W_y \cdot R_y^2} \quad (\text{A.21})$$

Tendo em vista que  $W_y \cdot R_y \cdot \theta \ll (F_D - F_E) \cdot r$  ( $\approx 0,1\%$ ), então (A.21)

$$\text{pode ser simplificada: } \frac{T}{I} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{(F_D - F_E) \cdot r + t'}{I} \quad (\text{A.22})$$

Introduzindo as coordenadas do bloco do rotor, escreve-se:

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = \left[ \frac{(h_{B_2} - h_{B_1}) \alpha}{r} \right] \quad (\text{A.23})$$

De (A.20), (A.22) e (A.23):

$$\frac{(h_{B_2} - h_{B_1}) \alpha}{r} = \frac{(F_D - F_E) \cdot r \cdot \Delta t^2 + t' \cdot \Delta t^2 + u_1 \cdot \Delta t}{2 \cdot I} \quad (\text{A.24})$$

$$\text{onde: } u_1 = \left( \frac{dh_B}{dt} \right) \alpha_1 \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Mas, } F_D = (H_{2D} + H_{1D}) \cdot K_4 / 2 \quad (\text{A.26})$$

$$\text{e } F_E = (H_{2E} + H_{1E}) \cdot K_4 / 2 \quad (\text{A.27})$$

Portanto, de (A.26) e (A.27) em (A.24):

$$\frac{(h_{B_2} - h_{B_1}) \alpha}{r} = \frac{(H_{2D} + H_{1D} - H_{2E} - H_{1E}) \cdot K_4 \cdot r^2 \cdot \Delta t^2}{4I} + \frac{t' \cdot r \cdot \Delta t^2}{2I} + u_1 \cdot \Delta t \quad (\text{A.28})$$

$$\text{De (A.25): } u_1 = \left( \frac{dh_B}{dt} \right) \alpha_1 = \left( \frac{dh_B}{dt} \right) \alpha_0 + \frac{T_0 \cdot r \cdot \Delta t}{I} \quad (\text{A.29})$$

$$\text{De (A.22): } u_1 = u_0 + \left[ \left( \frac{H_{2D} + H_{1D} - H_{2E} - H_{1E}}{2I} \right) \cdot K_4 \cdot r^2 + \frac{t' \cdot r}{I} \right] \cdot \Delta t \quad (\text{A.30})$$

$$\text{Chamando } K_5 = K_4 \cdot r^2 \cdot \Delta t^2 / (4I) \quad (\text{A.31})$$

$$\text{e } K_6 = t' \cdot r \cdot \Delta t^2 / (2I) + u_1 \cdot \Delta t \quad (\text{A.32})$$

Assim, de (A.31) e (A.32) em (A.28):

$$\frac{(h_{B_2} - h_{B_1}) \alpha}{r} = K_5 \cdot [H_{2D} + H_{1D} - H_{2E} - H_{1E}] + K_6 \quad (\text{A.33})$$

Para o movimento axial, tem-se:

$$(h_{B_2} - h_{B_1})_{ax} = \left(\frac{dh_B}{dt}\right)_1 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 h_B}{dt^2}\right)_1 \cdot (t_2 - t_1)^2 \quad (A.34)$$

$$\text{Do equilíbrio de forças: } \left(\frac{d^2 h_B}{dt^2}\right)_{ax} = \frac{(F_E + F_D - M \cdot g)}{M} \quad (A.35)$$

De (A.26), (A.27) e (A.35) em (A.34):

$$(h_{B_2} - h_{B_1})_{ax} = \frac{(H_{2E} + H_{1E} + H_{2D} + H_{1D}) \cdot K_4 \cdot \Delta t^2 - g \cdot \Delta t^2 + \bar{u}_1 \cdot \Delta t}{4 \cdot M} \quad (A.36)$$

$$\text{Com } \bar{u}_1 = \left(\frac{dh_B}{dt}\right)_{ax_0} + \left(\frac{F_E + F_D - M \cdot g}{M}\right) \cdot \Delta t \quad (A.37)$$

$$\text{Chamando } C_1 = \frac{K_4 \cdot \Delta t^2}{4 \cdot M} \quad (A.38) \text{ e } C_2 = \frac{-g \cdot \Delta t^2}{2} + \bar{u}_1 \cdot \Delta t \quad (A.39)$$

Reescrevendo (A.36), através de (A.38) e (A.39):

$$(h_{B_2} - h_{B_1})_{ax} = C_1 \cdot [H_{2E} + H_{1E} + H_{2D} + H_{1D}] + C_2 \quad (A.40)$$

Substituindo (A.40) e (A.33) em (A.12), para os segmentos de/ mancal do lado E:

$$Q_{2E} - Q_{1E} = K_{2E} \left\{ 2 \cdot H_{1E} \left[ -K_5 \cdot (H_{2D} + H_{1D} - H_{2E} - H_{1E}) - K_6 + C_1 \cdot (H_{2E} + H_{1E} + H_{2D} + H_{1D}) + C_2 + \frac{K_4}{K_3} \cdot (H_{2E} - H_{1E}) \right] + h_{1E} \cdot (H_{2E} - H_{1E}) \right\} \quad (A.41)$$

Agrupando as variáveis conhecidas (condição no instante 1), tem-se:

$$K_7 = Q_{1E} + K_{2E} \cdot \left\{ 2 \cdot H_{1E} \left[ -K_5 \cdot (H_{1D} - H_{1E}) - K_6 + C_1 \cdot (H_{1E} + H_{1D}) + C_2 + \frac{K_4}{K_3} \cdot (-H_{1E}) \right] + h_{1E} \cdot (-H_{1E}) \right\} \quad (A.42)$$

Fazendo o mesmo com as variáveis incógnitas (instante 2):

$$K_7 = Q_{2E} - K_{2E} \left\{ 2 \cdot H_{1E} \left[ -K_5 \cdot (H_{2D} - H_{2E}) + C_1 \cdot (H_{2E} + H_{2D}) + \frac{K_4}{K_3} \cdot (H_{2E}) \right] + h_{1E} \cdot (H_{2E}) \right\} \quad (A.43)$$

Fazendo  $K_8 = 2 \cdot H_{1E}$  (A.44) e rearranjando os termos de (A.43):

$$K_7 = Q_{2E} - K_{2E} \cdot \left[ H_{2E} \cdot (K_8 \cdot K_5 + K_8 \cdot C_1 + \frac{K_8 \cdot K_4 + h_{1E}}{K_3}) + H_{2D} \cdot (K_8 \cdot C_1 - K_8 \cdot K_5) \right] \quad (A.45)$$

$$\text{Fazendo } K_9 = K_{2E} \cdot (K_8 \cdot K_5 + K_8 \cdot C_1 + \frac{K_8 \cdot K_4}{K_3} + h_{1E}) \quad (A.46)$$

$$\text{De (A.46) em (A.45): } K_7 = Q_{2E} - K_9 \cdot H_{2E} + K_{2E} \cdot H_{2D} \cdot (K_8 \cdot K_5 - K_8 \cdot C_1) \quad (A.47)$$

Substituindo (A.40) e (A.33) em (A.12), para os segmentos de mancal do lado D:

$$Q_{2D} - Q_{1D} = K_{2D} \cdot \left\{ 2 \cdot H_{1D} \left[ K_5 \cdot (H_{2D} + H_{1D} - H_{2E} - H_{1E}) + K_6 + C_1 \cdot (H_{2E} + H_{1E} + H_{2D} + H_{1D}) + C_2 + \frac{K_4}{K_3} \cdot (H_{2D} - H_{1D}) \right] + h_{1D} \cdot (H_{2D} - H_{1D}) \right\} \quad (A.48)$$

Agrupando as variáveis conhecidas (condição no instante 1), tem

$$\text{se: } B_1 = Q_{1D} + K_{2D} \cdot \left\{ 2 \cdot H_{1D} \cdot \left[ K_5 \cdot (H_{1D} - H_{1E}) + K_6 + C_1 \cdot (H_{1E} + H_{1D}) + C_2 + \frac{K_4}{K_3} \cdot (-H_{1D}) \right] + h_{1D} \cdot (-H_{1D}) \right\} \quad (A.49)$$

$$\text{Analogamente com as incógnitas: } B_1 = Q_{2D} - K_{2D} \cdot \left\{ 2 \cdot H_{1D} \cdot \left[ K_5 \cdot (H_{2D} - H_{2E}) + C_1 \cdot (H_{2E} + H_{2D}) + \frac{K_4}{K_3} \cdot (H_{2D}) \right] + h_{1D} \cdot (H_{2D}) \right\} \quad (A.50)$$

Fazendo  $B_2 = 2 \cdot H_{1D}$  (A.51) e rearranjando os termos de (A.50), tem-se:

$$B_1 = Q_{2D} - K_{2D} \cdot \left[ H_{2E} \cdot (B_2 \cdot C_1 - B_2 \cdot K_5) + H_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 + C_1 \cdot B_2 + \frac{B_2 \cdot K_4 + h_{1D}}{K_3}) \right] \quad (A.52)$$

$$\text{Fazendo: } B_3 = K_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 + B_2 \cdot C_1 + \frac{B_2 \cdot K_4}{K_3} + h_{1D}) \quad (A.53)$$

$$\text{De (A.53) em (A.52): } B_1 = Q_{2D} + K_{2D} \cdot H_{2E} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) - B_3 \cdot H_{2D} \quad (A.54)$$

Equações características para os pontos D e E:

$$Q_{2E} = C_{PE} - C_{aE} \cdot H_{2E} \quad (\text{A.55})$$

$$Q_{2D} = C_{PD} - C_{aD} \cdot H_{2D} \quad (\text{A.56})$$

Substituindo (A.55) e (A.56) em (A.47) e (A.54), tem-se:

$$K_7 = C_{PE} - C_{aE} \cdot H_{2E} - K_9 \cdot H_{2E} + K_{2E} \cdot H_{2D} \cdot (K_8 \cdot K_5 - K_8 \cdot C_1) \quad (\text{A.57})$$

$$B_1 = C_{PD} - C_{aD} \cdot H_{2D} - B_3 \cdot H_{2D} + K_{2D} \cdot H_{2E} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) \quad (\text{A.58})$$

$$\text{De (A.57): } H_{2E} = - \frac{[K_7 - C_{PE} - H_{2D} \cdot K_{2E} \cdot (K_8 \cdot K_5 - K_8 \cdot C_1)]}{(C_{aE} + K_9)} \quad (\text{A.59})$$

De (A.59) em (A.58):

$$H_{2D} \cdot \left[ \frac{K_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) + K_{2E} \cdot (K_8 \cdot K_5 - K_8 \cdot C_1) - (C_{aD} + B_3)}{(C_{aE} + K_9)} \right] =$$

$$= B_1 - C_{PD} + \frac{K_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) \cdot (K_7 - C_{PE})}{(C_{aE} + K_9)} \quad (\text{A.60})$$

$$\text{Fazendo: } B_5 = \frac{K_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) \cdot (K_7 - C_{PE})}{(C_{aE} + K_9)} \quad (\text{A.61})$$

$$\text{e } B_6 = \frac{K_{2D} \cdot (B_2 \cdot K_5 - B_2 \cdot C_1) \cdot K_{2E} \cdot (K_8 \cdot K_5 - K_8 \cdot C_1) - (C_{aD} + B_3)}{(C_{aE} + K_9)} \quad (\text{A.62})$$

Assim, tem-se finalmente:  $B_6 \cdot H_{2D} = B_1 - C_{PD} + B_5$  ou

$$H_{2D} = \frac{B_1 - C_{PD} + B_5}{B_6} \quad (\text{A.63})$$

Resumindo:

$$H_{2D} \quad (A.63)$$

$$H_{2E} \quad (A.59)$$

$$Q_{2D} \quad (A.56)$$

$$Q_{2E} \quad (A.55)$$

$$h_{B2} \quad (A.40)+(A.33)$$

$$h_{P2} \quad (A.15)$$

$$h_2 \quad (A.1)$$

## a.3.4. Configuração dos deslocamentos

A figura A.4 apresenta, esquematicamente, os deslocamentos do bloco do rotor (angular e axial) e das molas dos segmentos de mancais.

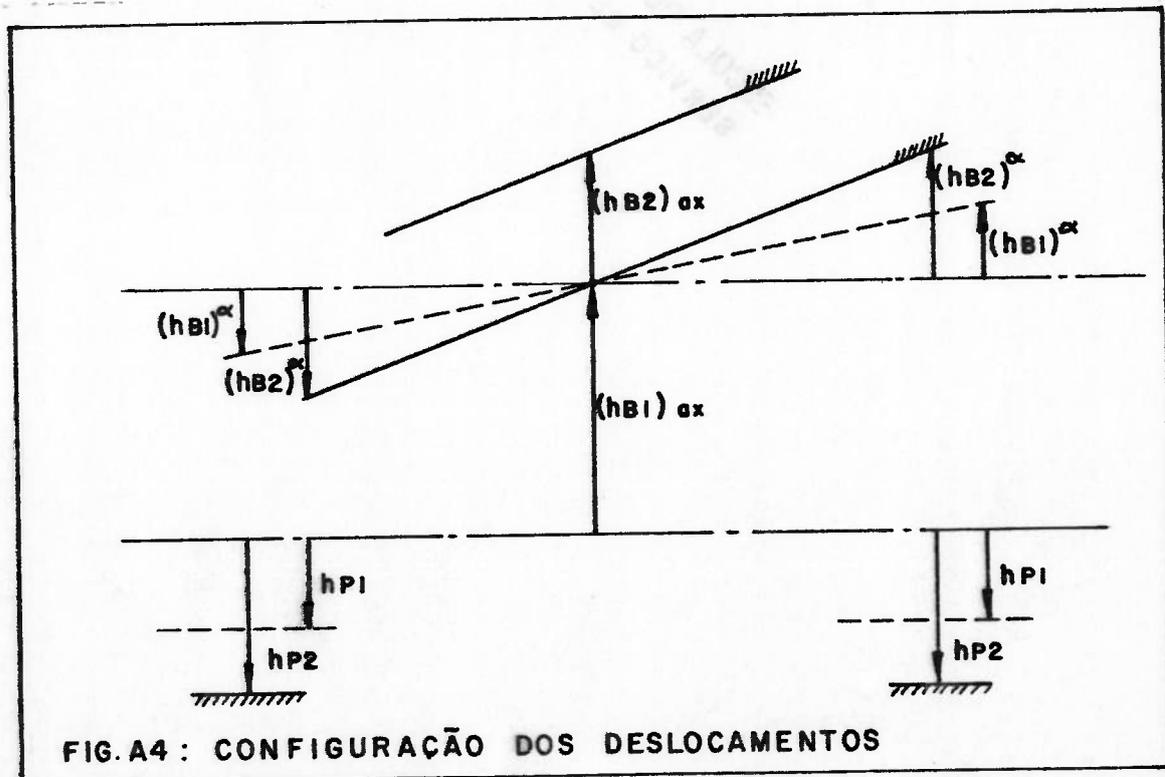


FIG. A4 : CONFIGURAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Lado E:

$$h_{1E} = h_{p1} - [(h_{B1})_{\alpha} - (h_{B1})_{ax}] \quad (\text{A.64})$$

$$h_{2E} = h_{p2} - [(h_{B2})_{\alpha} - (h_{B2})_{ax}] \quad (\text{A.65})$$

Portanto, para  $\Delta h = h_2 - h_1$

$$\Delta h_E = (h_{p2} - h_{p1})_E - (h_{B2} - h_{B1})_{\alpha} + (h_{B2} - h_{B1})_{ax} \quad (\text{A.66})$$

Lado D:

$$h_{1D} = h_{p1} + [(h_{B1})_{\alpha} + (h_{B1})_{ax}] \quad (\text{A.67})$$

$$h_{2D} = h_{p2} + [(h_{B2})_{\alpha} + (h_{B2})_{ax}] \quad (\text{A.68})$$

$$\Delta h_D = (h_{p2} - h_{p1})_D + (h_{B2} - h_{B1})_{\alpha} + (h_{B2} - h_{B1})_{ax} \quad (\text{A.69})$$

### a.3.5. Bomba

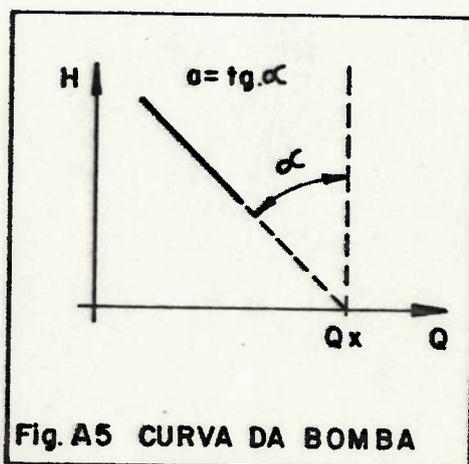
Pela figura A.5, que representa a curva característica da bomba, pode-se escrever a seguinte equação:

$$Q = Q_x - H \cdot a \quad (\text{A.70})$$

A equação característica à montante, fornece:  $Q = C_n + C_a \cdot H$  (A.71)

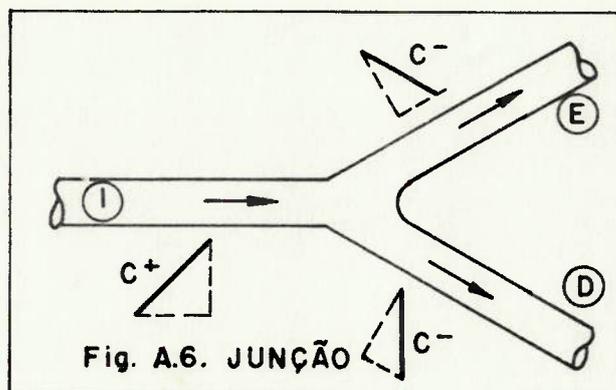
Logo, de (A.70) e (A.71):  $H = (Q_x - C_n) / (C_a + a)$  (A.72)

$$e \quad Q = \frac{Q_x - (a/C_a \cdot C_n)}{(1 + a/C_a)} \quad (\text{A.73})$$



## a.3.6. Junção dos tubos

A expressão da carga na Junção, como mostram as referências / |9| e |10|, é fruto da aplicação da equação da continuidade e/ de assumir cargas iguais nas extremidades de cada tubo.



Assim, para a configuração da figura A.6, pode-se escrever a/ expressão da carga na Junção:

$$H = \frac{C_{p_I} - C_{n_E} - C_{n_D}}{C_{a_I} + C_{a_E} + C_{a_D}} \quad (\text{A.74})$$

$$Q_1 = \frac{-H}{C_{a_I}} + \frac{C_{p_I}}{C_{a_I}} \quad (\text{A.75})$$

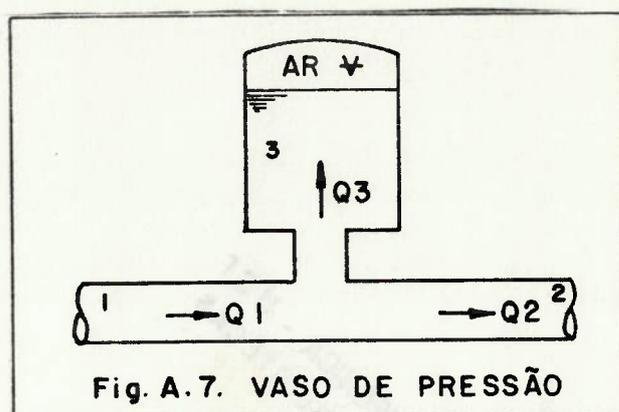
$$Q_D = \frac{H}{C_{a_D}} - \frac{C_{n_D}}{C_{a_D}} \quad (\text{A.75})$$

$$Q_E = \frac{H}{C_{a_E}} - \frac{C_{n_E}}{C_{a_E}} \quad (\text{A.77})$$

## a.3.7. Vaso de pressão

Quanto ao acumulador, são assumidas algumas hipóteses simplificadoras: a pressão, em qualquer instante, é a mesma através do volume, a compressibilidade do líquido no vaso é considerada desprezível comparada com a do ar, para o gás é assumido / um processo politrópico reversível. Se o gás é perfeito, os /

dois extremos que o expoente  $\gamma$ , da relação politrópica, pode assumir são:  $\gamma=1$  (processo isotérmico) e  $\gamma=1.4$  (processo isoentrópico). No vaso de pressão, o processo politrópico que ocorre não é nem isotérmico nem isoentrópico. Não é do escopo deste trabalho discutir qual o melhor valor para  $\gamma$ . Será utilizado o valor médio de 1.2, que, com frequência, aparece na literatura. A referência [11] é um exemplo.



Aplicando a equação da continuidade às secções 1, 2 e 3, figura A.7, tem-se:  $Q_1 = Q_2 + Q_3$  (A.78)

Igualando as cargas:  $H_1 = H_2$  (A.79)

Para o escoamento entrando no vaso, escreve-se:

$$Q_3 = A_{ed} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H_1 - H_3)} \quad (A.80)$$

$$\text{ou } Q_3 = B_7 \cdot \sqrt{H_1 - H_3} \quad (A.81)$$

$$\text{com } B_7 = A_{ed} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \quad (A.82)$$

Para o processo politrópico:

$$(H_3 + H_a) \cdot v^\gamma = N_1 \quad (\text{constante}) \quad (A.83)$$

$$\text{Da geometria: } \frac{dv}{dt} = -Q_3 \quad (A.84)$$

Linearizando a equação do orifício, para o instante ('), /

$$\text{tem-se: } dQ_3 = \left( \frac{\partial Q_3}{\partial (\Delta H)} \right)_i \cdot d(\Delta H) \quad (A.85)$$

Para um intervalo de tempo finito,  $\Delta t$ :

$$\Delta Q_3 = \frac{-B_7 \cdot (H_1' - H_1'' - H_3' + H_3'')}{2 \cdot (H_1' - H_3')^{1/2}} \quad (\text{A.86})$$

$$\text{Fazendo: } B_8 = \frac{-B_7}{2 \cdot (H_1' - H_3')^{1/2}} \quad (\text{A.87})$$

$$\text{De (A.87) em (A.86): } Q_3' - Q_3'' = B_8 \cdot (H_1' - H_1'' - H_3' + H_3'') \quad (\text{A.88})$$

De (A.83) pode-se escrever a expressão de  $\Psi$ , calculando  $N_1$  pa

$$\text{ra o instante } \underline{0}: \Psi = \frac{N_1}{(H_3 + H_a)^{1/\delta}} \quad (\text{A.89})$$

$$\text{com } N_1 = (H_3^0 + H_a)^{1/\delta} \cdot \Psi^0 \quad (\text{A.90})$$

Linearizando a equação do vaso, para o instante ( $'$ ), tem-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial H_3} \right) \cdot \frac{\partial H_3}{\partial t} \quad (\text{A.91}) \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial H_3} \right) = \frac{-N_1}{\delta} \cdot (H_3 + H_a)^{-(\delta+1)/\delta} = N_2 \quad (\text{A.92})$$

Para um intervalo finito,  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \approx \frac{-(Q_3' - Q_3'')}{2} = \frac{N_2}{\Delta t} \cdot (H_3' - H_3'') \quad (\text{A.93})$$

Equações Características:

$$Q_1' = C_{p_1} - C_{a_1} \cdot H_1' \quad (\text{A.94})$$

$$Q_2' = C_{n_2} + C_{a_2} \cdot H_2' \quad (\text{A.95})$$

$$\text{De (A.93): } H_3' = \frac{-\Delta t}{2 \cdot N_2} \cdot (Q_3' + Q_3'') + H_3'' \quad (\text{A.96})$$

$$\text{De (A.88) e (A.96): } Q_3' \cdot B_2 = B_3 - B_8 \cdot H_1' \quad (\text{A.97})$$

$$\text{onde: } B_1 = \frac{-\Delta t}{2 \cdot N_2} \quad (\text{A.98})$$

$$B_2 = 1 - B_1 \cdot B_8 \quad (\text{A.99})$$

$$B_3 = B_8 \cdot H_1'' + Q_3'' \cdot (1 + B_1 \cdot B_8) \quad (\text{A.100})$$

$$\text{De (A.78): } Q_1' = Q_2' + Q_3' \quad (\text{A.101})$$

$$\text{De (A.79): } H_1'' = H_2'' \quad (\text{A.102})$$

De (A.94), (A.95), (A.101) e (A.102):

$$B_2 \cdot (C_{p_1} - C_{a_1} \cdot H_1'' - C_{n_2} - C_{a_2} \cdot H_1'') = B_3 - B_8 \cdot H_1'' \quad (\text{A.103})$$

$$\text{Portanto: } H_1'' = \frac{B_3 - B_2 \cdot (C_{p_1} - C_{n_2})}{B_8 - B_2 \cdot (C_{a_1} + C_{a_2})} \quad (\text{A.104})$$

$$\text{Resumindo: } H_1'' \quad (\text{A.104})$$

$$Q_3'' \quad (\text{A.97})$$

$$H_3'' \quad (\text{A.96})$$

$$Q_1'' \quad (\text{A.94})$$

$$Q_2'' \quad (\text{A.95})$$

OBS: Não havendo orifício, tem-se  $B_7 \rightarrow \infty$ , então:  $H_1'' = H_2'' = H_3''$  (A.105)

$$\text{De (A.96), (A.98) e (A.105): } H_1'' = B_1 \cdot Q_3'' + B_1 \cdot Q_3'' + H_3'' \quad (\text{A.106})$$

Fazendo  $B_3^* = B_1 \cdot Q_3'' + H_3''$  (A.107), e substituindo as equações caracte

$$\text{rísticas, tem-se: } H_1'' = \frac{B_1 \cdot (C_{p_1} - C_{n_2}) + B_3^*}{1 + B_1 \cdot (C_{a_1} + C_{a_2})} \quad (\text{A.108})$$

$$\text{e } Q_3'' = \frac{H_1'' - B_3^*}{B_1} \quad (\text{A.109})$$

### a.3.8. Orifício na linha

Impondo a equação da continuidade entre as secções 1 e 2:

$$Q_1 = Q_2 \quad (\text{A.110}). \text{ Para o orifício, escreve-se: } Q = B_1 \cdot \sqrt{(H_1 - H_2)} \quad (\text{A.111})$$

$$\text{onde } B_1 = A_{ed} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \quad (\text{A.112})$$

Equações características:

$$Q_1 = C_{p_1} - C_{a_1} \cdot H_1 \quad (\text{A.113})$$

$$Q_2 = C_{n_2} + C_{a_2} \cdot H_2 \quad (\text{A.114})$$

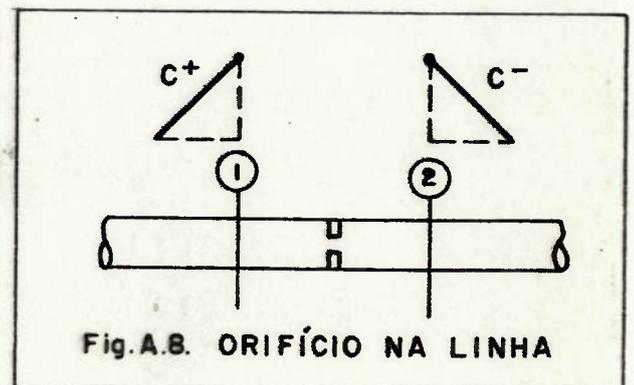


Fig.A.B. ORIFÍCIO NA LINHA

De (A.110), (A.113) e (A.114):

$$H_1 = \frac{C_{p_1} - C_{n_2}}{C_{a_1}} - \frac{C_{a_2}}{C_{a_1}} \cdot H_2 \quad (\text{A.115})$$

ou  $H_1 = B_2 - B_3 \cdot H_2$  (A.116); com  $B_2 = \frac{C_{p_1} - C_{n_2}}{C_{a_1}}$  (A.117) e  $B_3 = \frac{C_{a_2}}{C_{a_1}}$  (A.118)

Substituindo (A.116) em (A.111):  $Q^2 = B_1^2 \cdot [B_2 - H_2 \cdot (1 + B_3)]$  (A.119)

De (A.114) e (A.119):

$$C_{a_2}^2 \cdot H_2^2 + 2 \cdot C_{a_2} \cdot C_{n_2} \cdot H_2 + C_{n_2}^2 = B_1^2 \cdot [B_2 - H_2 \cdot (1 + B_3)] \quad (\text{A.120})$$

Resolvendo (A.120) para  $H_2$ , obtém-se como solução:

$$H_2 = \frac{-B_5 + \sqrt{B_5^2 - 4 \cdot B_6 \cdot B_4}}{2 \cdot B_6} \quad (\text{A.121})$$

onde  $B_4 = C_{n_2}^2 - B_1^2 \cdot B_2$  (A.122)

$$B_5 = 2 \cdot C_{a_2} \cdot C_{n_2} + B_1^2 \cdot (1 + B_3) \quad (\text{A.123})$$

$$B_6 = C_{a_2}^2 \quad (\text{A.124})$$

### a.3.9. Condição inicial

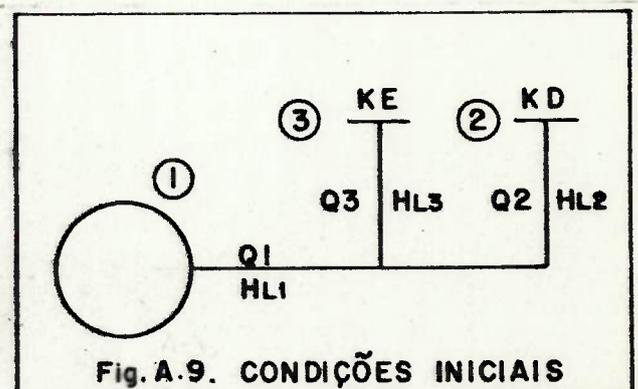
Considerando, inicialmente, o sistema estabilizado, pode-se dizer que as perdas nos segmentos de mancais do lado D são iguais às do lado E, assim:

$$H_2 = \left( \frac{Q_2}{K_D} \right)^2 = \left( \frac{Q_3}{K_E} \right)^2 = H_3 \quad (\text{A.125})$$

As perdas em cada trecho de linha são dados por:

$$H_{L_1} = Q_1^2 \cdot K_1 \quad (\text{A.126})$$

$$H_{L_2} = Q_2^2 \cdot K_2 + \frac{Q_2^2}{K_D^2} = Q_2^2 \cdot \left( K_2 + \frac{1}{K_D^2} \right) \quad (\text{A.127})$$



$$H_{L_3} = Q_3^2 \cdot K_3 + Q_3^2 / K_E^2 = Q_3^2 \cdot (K_3 + 1/K_E^2) \quad (\text{A.128})$$

Lembrando que  $Q_1 = Q_x - H_b$ .a (A.129), sendo  $H_b$  a carga na bomba,

$$\text{pode-se dizer: } H_b = Q_1^2 \cdot K_1 + Q_3^2 \cdot (K_3 + 1/K_E^2) \quad (\text{A.130})$$

$$\text{Portanto: } Q_1 = Q_x - a \cdot [Q_1^2 \cdot K_1 + Q_3^2 \cdot (K_3 + 1/K_E^2)] \quad (\text{A.131})$$

$$\text{Note que: } H_{L_2} = H_{L_3} \quad (\text{A.132})$$

$$\text{Assim, de (A.128), (A.127) e (A.125): } \frac{Q_2^2}{Q_3^2} = \frac{K_3}{K_2} \quad (\text{A.133})$$

$$\text{ou } Q_2 = Q_3 \cdot K_4^{1/2} \quad (\text{A.134}) \quad \text{onde } K_4 = K_3 / K_2 \quad (\text{A.135})$$

Aplicando a equação da continuidade, para a linha principal/ e as secundárias:  $Q_1 = Q_2 + Q_3$  (A.136)

$$\text{Logo: } Q_1 = Q_3 (1 + K_4^{1/2}) \quad (\text{A.137})$$

Substituindo (A.137) em (A.131):

$$Q_3 \cdot K_6 - Q_x + Q_3^2 \cdot [a \cdot K_6^2 \cdot K_1 + a \cdot (K_3 + 1/K_E^2)] = 0 \quad (\text{A.138})$$

$$\text{com } K_6 = 1 + K_4^{1/2} \quad (\text{A.139})$$

Resolvendo (A.138) para  $Q_3$ , obtém-se como resultado:

$$Q_3 = -K_6 + \sqrt{K_6^2 + 4 \cdot K_5 \cdot Q_x} \quad (\text{A.140})$$

$$\text{com } K_5 = a \cdot K_6^2 \cdot K_1 + a \cdot (K_3 + 1/K_E^2) \quad (\text{A.141})$$

$$\text{Resumindo: } Q_3 \quad (\text{A.140})$$

$$Q_1 \quad (\text{A.137})$$

$$Q_2 \quad (\text{A.136})$$

$$H_3 \quad (\text{A.125})$$

$$H_2 \quad (\text{A.125})$$

a.4. Avaliação da velocidade de propagação de um pulso de pressão no fluido

Conforme é mostrado no apêndice B, a expressão para a velo

cidade de propagação de onda é dada por:

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + (K/E) \cdot (D/e) \cdot c_1}} \quad (\text{A.142})$$

onde  $a$  = velocidade de propagação de onda de pressão no fluido

$$K = \text{módulo de elasticidade volumétrico do fluido} = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}$$

$E$  = módulo de elasticidade do tubo

$D$  = diâmetro interno do tubo

$e$  = espessura da parede

$c_1$  = coeficiente que depende das condições de contorno do tubo

Para as tubulações utilizadas o máximo valor que o termo  $(K/E) \cdot (D/e) \cdot c_1$  assume é 0.019. Portanto, para simplificar, este termo será desprezado, considerando-se, então, que a velocidade  $a$  é contante ao longo de toda a linha hidráulica e  $a$  torna-se:  $a = \sqrt{K/\rho}$  (A.143).

Normalmente, na linha, existe uma porcentagem de ar dissolvido que provoca diminuição da velocidade de propagação. Para estas condições as expressões de  $\rho$  e  $K$  são alteradas.

$$K = \frac{K_{liq}}{1 + \left(\frac{V_g}{V}\right) \cdot \left(\frac{K_{liq}}{K_g} - 1\right)} \quad (\text{A.144})$$

$$\rho = \rho_g \cdot \frac{V_g}{V} + \rho_{liq} \cdot \frac{V_{liq}}{V} \quad (\text{A.145})$$

Onde os índices  $g$  e  $liq$  referem-se ao ar e óleo, respectivamente. O  $K_{liq}$  é praticamente invariante com a pressão no tubo, / entretanto,  $K_g$  é bastante sensível à pressão da linha. Admitindo que o processo de aumento de pressão na bomba seja adiabático e o ar tenha comportamento de gás perfeito, pode-se/

escrever que  $K_g = \beta \cdot p$  (A.146), onde  $p$  é a pressão da linha e  $\beta$  é a razão de calores específicos ( $\beta = 1.4$  para o ar).

Para o problema em questão tem-se os seguintes valores:

$$p = 2,00 \cdot 10 \text{ MPa}$$

$$K_{liq} = 1,65 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

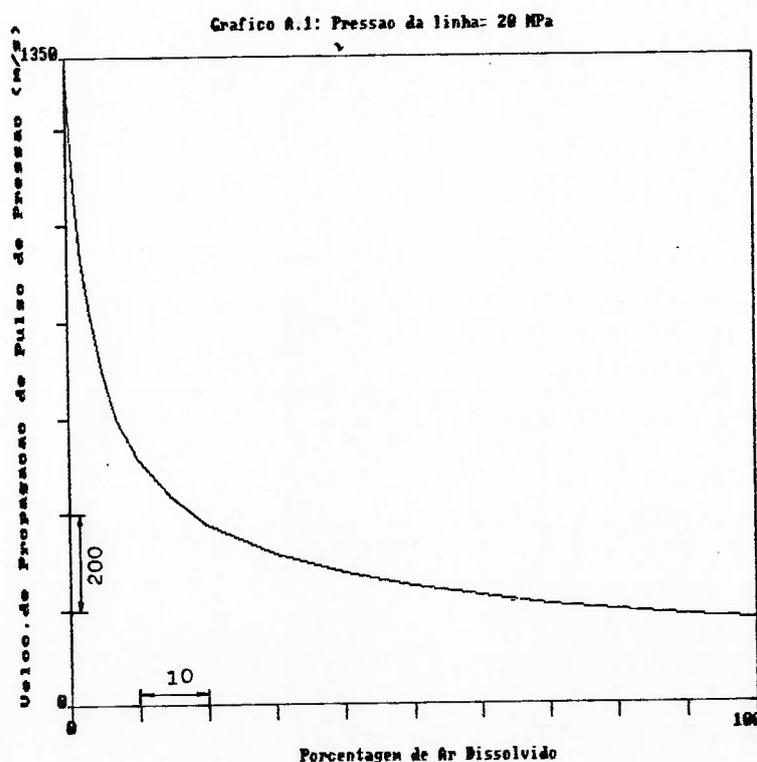
$$K_g = 2,66 \cdot 10 \text{ MPa}$$

$$\rho_{liq} = 8,78 \cdot 10^2 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_g = 3,03 \cdot 10^2 \text{ Kg/m}^3$$

Admitindo um valor máximo de 2%, em volume, de presença de ar dissolvido, obtém-se:  $K = 7,42 \cdot 10^2 \text{ MPa}$  e  $\rho = 8,68 \cdot 10^2 \text{ Kg/m}^3$ . Assim, a velocidade de propagação de um pulso de pressão é 925 m/s.

O gráfico A.1 mostra a variação da velocidade de propagação/ de onda de pressão em função da porcentagem de ar dissolvido para uma pressão na linha de 20 MPa.



#### a.5. Resultados

Quanto mais rígrado o meio elástico de propagação de onda de pressão, maior será a velocidade de propagação. Por exemplo, no ferro esta velocidade é da ordem de 5000 m/s e o limite superior apontado na literatura é o do granito com 6000 m/s. Assim, a partir de uma certa velocidade  $\underline{a}$  é de se esperar que o comportamento do sistema passe a ser pouco alterado com o aumento desta velocidade.

A finalidade deste apêndice é mostrar, em face à geometria do circuito hidráulico (diâmetros e comprimentos) e às condições de operações (pressão, fluido utilizado, quantidade de ar dissolvido), que o problema pode ser tratado considerando-se o fluido incompressível.

Para tanto, é necessário mostrar que, para a velocidade de 925 m/s, o comportamento do rotor, quando deslocado de seu ponto de equilíbrio, já é "muito próximo" do limite de incompressibilidade ( $\underline{a} \rightarrow \infty$ ).

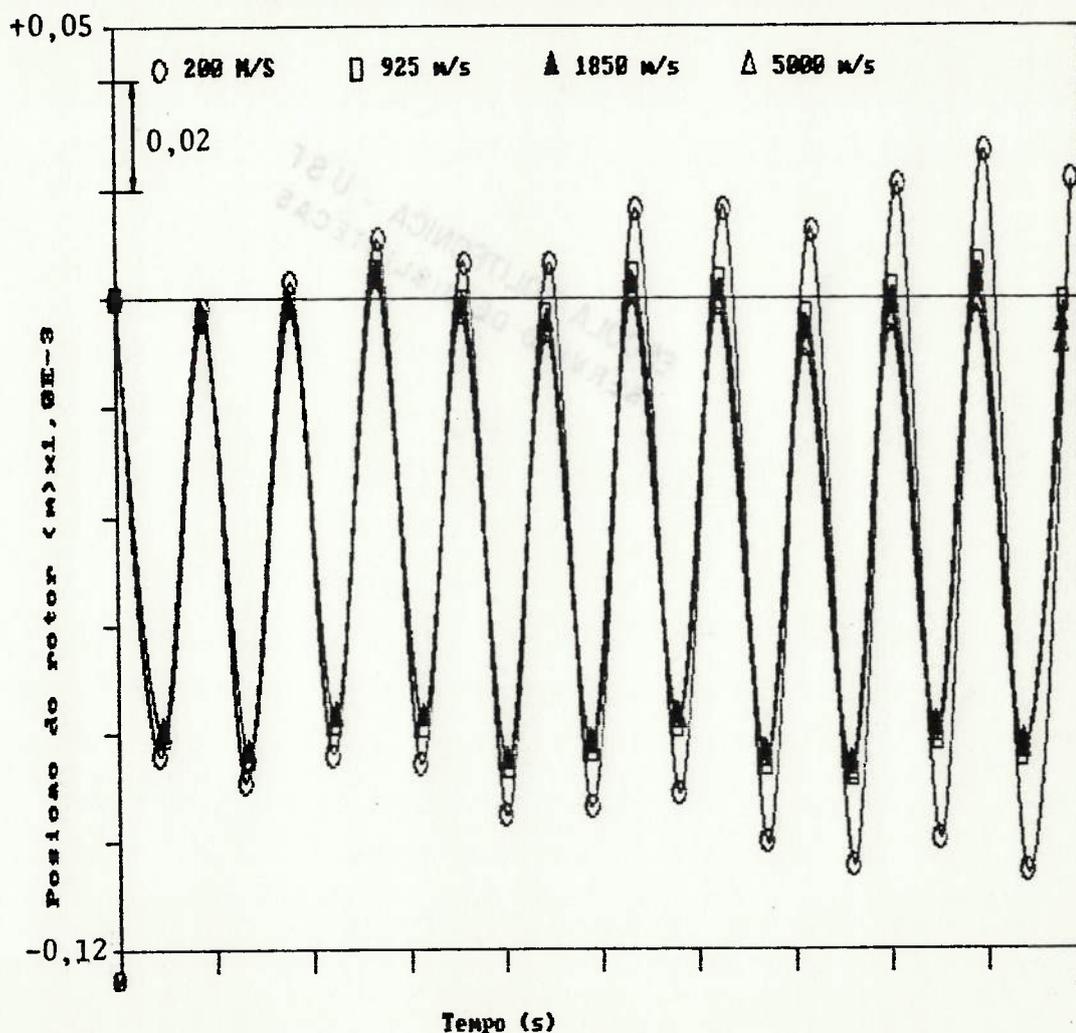
De maneira subjetiva, o autor admite como limite para  $\underline{a}$  o valor de 5000 m/s, valor no qual o fluido comporta-se como incompressível. Além disso, considera como comportamento "próximo" a este limite, em qualquer instante, uma diferença máxima de 5% na amplitude de oscilação.

O gráfico A.2 mostra a resposta do rotor, através do deslocamento de um ponto situado no raio dos segmentos do mancal, quando submetido a um binário inicial aplicado em curto intervalo de tempo (10% do período de oscilação livre do rotor). O gráfico apresenta as curvas superpostas para as velocidades de 200, 925, 1850 e 5000 m/s. Comparando-se as curvas correspondentes a 925 e 5000 m/s obtém-se como diferença máxima da

amplitude de oscilação, o valor de 3,5% para o tempo de 0,89 s. Foram feitas simulações para diferentes condições iniciais e verificou-se que em todas o comportamento do sistema foi favorável a se poder considerar o fluido incompressível, dentro do critério adotado.

Finalmente, cabe ressaltar a importância desta simplificação, possibilitando estudar o fenômeno através de modelos cujas equações facilitam a interpretação física.

Grafico A.2: Veloc.de onda:200/925/1850 e 5000 m/s



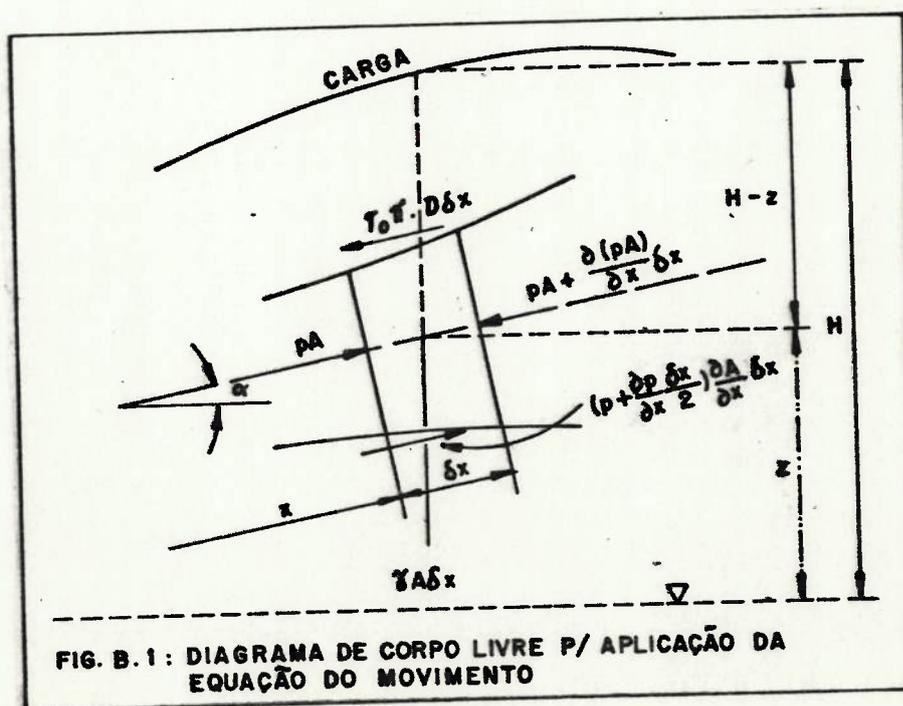
## B. FUNDAMENTOS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

### b.1. Equação do Movimento

A equação do movimento é estabelecida para um escoamento através de um tubo cônico com atrito na parede interna. A equação é dada em termos da pressão na linha de centro do tubo  $p(x,t)$  e da velocidade média  $V(x,t)$ , sendo posteriormente convertida para a forma que usa como variável dependente a carga piezométrica  $H(x,t)$ ,  $x$  é a coordenada ao longo da linha de centro e  $t$  é o tempo.

Considerando um tubo de área  $A = f(x)$ , inclinado com a horizontal de um ângulo  $\alpha$  com sentido  $x_+$  de acordo com o aumento de elevação  $z$ , as forças de cisalhamento  $\tau_0$  são consideradas atuando em  $x_-$ . Assim, como mostra a figura B.1, somando as forças sobre o volume de líquido, igualando-as à aceleração da massa, eliminando os termos que contém  $(\delta x)^2$  e simplificando, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot A + \tau_0 \cdot \pi \cdot D + \rho \cdot g \cdot A \cdot \sin \alpha + \rho \cdot A \cdot \dot{V} = 0 \quad (\text{B.1})$$



onde  $D$  é o diâmetro interno em  $x$ . No cálculo de transiente, / o cisalhamento  $\tau_o$  é considerado igual ao de regime permanente, assim, em termos de fator de atrito de Darcy-Weisbach ( $f$ ):

$$\tau_o = \frac{\rho \cdot f \cdot V \cdot |V|}{8} \quad (\text{B.2})$$

O termo  $\dot{V}$ , para um volume de controle infinitesimal, com velocidade  $V$ , é dado por:  $\dot{V} = V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$  (B.3)

De (B.2) e (B.3) em (B.1):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \text{sen} \alpha + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Fazendo  $p = \rho \cdot g \cdot (H - z)$  (B.5)

$$\text{tem-se: } \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \text{sen} \alpha \right) \quad (\text{B.6})$$

( $\rho$  é considerado relativamente constante comparado com  $H$  ou  $z$ ). A equação (B.4) é válida para gases, mas a equação (B.6) é restrita a líquidos. Substituindo (B.6) em (B.4):

$$g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \quad (\text{B.7})$$

#### b.2. Equação da Continuidade

A equação da continuidade é obtida aplicando a lei de conservação de massa sobre um volume de controle (figura B.2). A taxa líquida de massa entrando no volume é igual ao acréscimo deste:  $-\frac{\partial[\rho \cdot A \cdot (V-u)]}{\partial x} \cdot \delta x = \frac{d(\rho \cdot A \cdot \delta x)}{dt}$  (B.8)

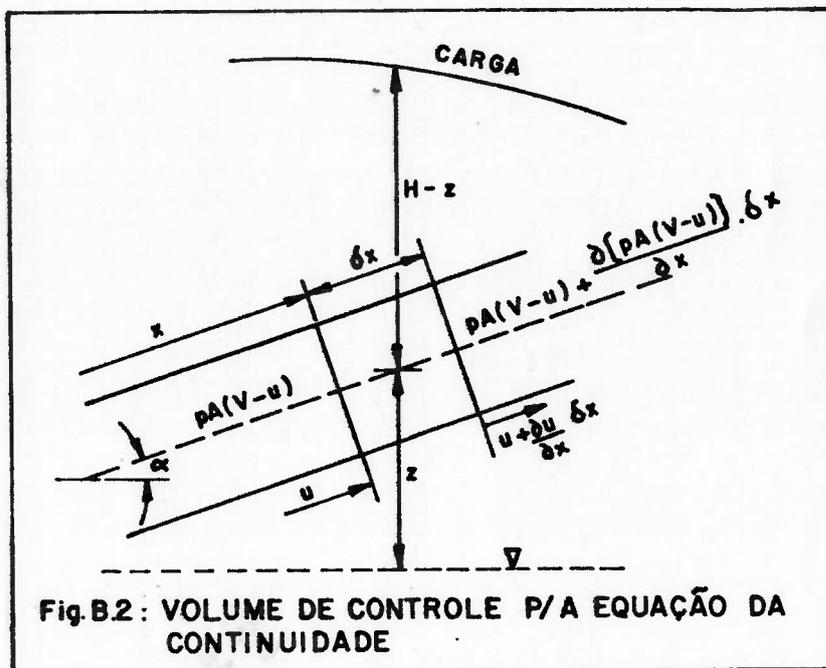
Como mostra a figura, o início do volume de controle está na cota  $x$  e  $u$  é a velocidade da parede do tubo na direção  $x$ . A derivada total com respeito ao movimento axial do tubo é dado por:  $\frac{d}{dt} = u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$  (B.9)

e o acréscimo no comprimento do V.C. é  $\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta x$  (B.10).

Assim, de (B.8), (B.9) e (B.10):

$$\frac{\partial(\rho \cdot A \cdot V)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \frac{D(\rho \cdot A)}{Dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\text{onde } \frac{D}{Dt} = V \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{B.12})$$



Esta equação é válida para tubos convergentes, divergentes ou cilíndricos e também para tubos flexíveis e escoamento de gás, ou seja, nenhuma restrição foi introduzida.

A equação (B.11) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Da definição de módulo de elasticidade volumétrico do fluido :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{p}}{K} \quad (\text{B.14})$$

A mudança de área por unidade de área por unidade de tempo é :

$$\frac{\dot{A}}{A} = 2 \cdot \dot{\xi}_T \quad (\text{B.15}) \quad \text{e} \quad \dot{\xi}_T = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_2 - \mu \cdot \dot{\sigma}_1) \quad (\text{B.16})$$

onde: E= módulo de elasticidade do tubo

$\sigma_2$  = tensão tangencial

$\sigma_1$  = tensão axial

$\mu =$  coeficiente de Poisson

Assim, de (B.14), (B.15) e (B.16) em (B.13):

$$\frac{\dot{p}}{E} \cdot (\dot{r}_2 - \mu \dot{r}_1) + \frac{\dot{p}}{K} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\text{ou } \frac{\dot{p}}{\rho} + a^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\text{onde } a^2 = \frac{K/\rho}{1 + [(K/E) \cdot (D/e)] \cdot c_1} \quad (\text{B.19})$$

A constante  $c_1$  é um parâmetro adimensional que descreve o efeito da condição de vinculação mecânica do tubo sobre a velocidade de propagação de onda de pressão. Ele está relacionado à deformação mecânica do tubo e é um fator de correção/ao efeito do coeficiente de Poisson. Na literatura, referências |9|, |10|, etc, pode ser encontrado o valor que  $c_1$  assume para algumas condições de vinculações usuais.

Introduzindo em (B.18), a carga piezométrica dada por (B.5), tem-se:

$$\dot{p} = \rho \cdot g \cdot (\dot{H} - \dot{z}) = \rho \cdot g \cdot \left( V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - V \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad (\text{B.20})$$

Se não houver movimento transversal  $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$  e sendo  $\frac{\partial z}{\partial x} = \text{sen} \alpha$ ,

$$(\text{B.20}) \text{ torna-se: } V \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - V \cdot \text{sen} \alpha + \frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.21})$$

### b.3. Equações Características

As equações da continuidade e quantidade de movimento formam um par de equações diferenciais de derivadas parciais hiperbólicas "quasi-lineares" em termos de duas variáveis dependentes (velocidade e carga); e duas independentes (distância ao longo do tubo e tempo). Estas equações são transformadas, pelo Método das Características, em quatro equações diferenciais ordinárias.

Chamando  $L_1$  e  $L_2$  as equações simplificadas do movimento e / continuidade, respectivamente, tem-se:

$$L_1 = g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2D} = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Combinando-as linearmente usando um multiplicador  $\lambda$  desconhecido:  $L = L_1 + \lambda \cdot L_2$  (B.24), selecionando dois particulares valores de  $\lambda$  consegue-se simplificar esta equação.

Se a variável independente  $x$  permite ser função de  $t$ , então, do cálculo:  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$  (B.25)

$$\text{e } \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{B.26})$$

Examinando (B.24), (B.25) e (B.26), nota-se que se

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda \cdot a^2}{g} \quad (\text{B.27}),$$

a equação (B.24) transforma-se na equação diferencial ordinária:  $\lambda \cdot \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0$  (B.28)

A solução da equação (B.27) fornece os dois valores particulares de  $\lambda$ , isto é,  $\lambda = \pm \frac{g}{a}$  (B.29)

Substituindo estes valores de  $\lambda$  em (B.27), obtém-se

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (\text{B.30})$$

Agora, substituindo (B.29) em (B.28), chega-se a dois pares de equações as quais são agrupadas e identificadas como  $C^+$  e  $C^-$ :

$$C^-: \left. \begin{aligned} \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{dx}{dt} = +a \quad (\text{B.32})$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (B.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = -a \end{aligned} \right\} \quad C^- \quad (B.34)$$

No plano  $xt$ , como  $a$  é geralmente constante para um dado tubo, as equações (B.32) e (B.34) apresentam linhas retas (linhas / características) ao longo das quais (B.31) e (B.33) são válidas.

#### b.4. Equações de Diferenças Finitas

Dividindo o comprimento de um tubo em  $n$  partes iguais de comprimento  $\Delta x$ , para um intervalo de tempo  $\Delta t = \Delta x/a$ , partindo-se de um ponto A, cujas variáveis V e H são conhecidas, a equação (B.32) é satisfeita para uma inclinação positiva no plano  $xt$ , como mostrado na figura B.3 pela linha AP. Se as variáveis dependentes V e H são conhecidas no ponto A, então, a equação (B.31), a qual é válida ao longo da linha  $C^+$ , pode ser integrada entre as linhas A e P. Desta forma, pode-se escrever V e H no ponto P, em função das variáveis conhecidas em A.

Partindo-se de B, através da integração de (B.33), ao longo da linha de inclinação negativa, obtém-se a segunda equação. Portanto, a solução simultânea destas duas equações dá a condição num particular tempo e posição no plano  $xt$ , chamado ponto P. Assim, multiplicando-se (B.31) por  $a \cdot \frac{dt}{g} = \frac{dx}{g}$  e introduzindo a área do tubo para escrever a equação em termos da vazão no lugar da velocidade,

$$\int_{H_A}^{H_P} dH + \frac{a}{g \cdot A} \cdot \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + \frac{f}{2g \cdot DA^2} \cdot \int_{x_A}^{x_P} Q \cdot |Q| dx = 0 \quad (B.35)$$

A variação de  $Q$  com  $x$ , "a priori", não é conhecida, requerendo



$$R = f \cdot \Delta x / (2gDA^2) \quad (B.43)$$

$$\text{De (B.38) e (B.39): } H_{Pi} = (C_P + C_M) / 2 \quad (B.44)$$

A notação acima pode ser vista na figura B.3.

#### b.5. Condições de Contorno

Nas extremidades dos tubos, somente uma das equações acima é, de início, disponível ( $C^+$  ou  $C^-$ ). Na extremidade à montante / tem-se a característica  $C^-$ , e à jusante é válido a característica  $C^+$ .

Uma equação auxiliar é necessária em cada extremidade (contorno) relacionando  $Q_p$  e  $H_p$  e será resolvida independentemente. Ela é função do "equipamento" conectado na extremidade da / linha e no apêndice A é apresentada sua obtenção.

## C. FUNDAMENTOS DA TÉCNICA DE "BOND GRAPH"

### c.1. Introdução

A técnica de "Bond Graph" criada pelo professor Henry Paynter em 1950, e divulgada pelos professores Karnopp e Rosenberg, é / uma ferramenta eficaz para modelagem de sistemas dinâmicos de várias entradas (e saídas) de energia.

A estrutura de "Bond Graph" é caracterizada por linhas ("bonds") e junções, através das quais a potência instantânea é propaga - gada. Por convenção, a potência é determinada pelo produto de uma variável "e" (esforço generalizado) e uma variável "f" / (vazão generalizada). As funções escalares  $e(t)$  e  $f(t)$  estão diretamente associadas a um dado "bond" e são chamadas de variáveis de potência. Desta forma, a potência é dada por: /  $P(t) = e(t) \cdot f(t)$ .

Define-se, também, duas variáveis adicionais, chamadas de variáveis de energia:

Impulso generalizado,  $p = \int_0^t e(t) dt$   
 e Deslocamento generalizado,  $q = \int_0^t f(t) dt$ .

Estas quatro variáveis ( $e, f, p$  e  $q$ ) formam, juntamente com as / variáveis de entrada conhecidas, o conjunto de variáveis ne - cessárias para escrever as equações de estado.

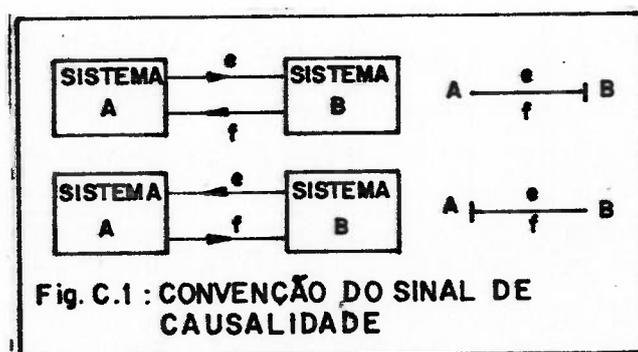
OBS.: "Ao conjunto mínimo de variáveis que caracteriza comple - tamente as inter-relações do sistema (estática ou dinamicamen - te) dá-se o nome de variáveis de estado do sistema". |12|

Variáveis de potência e energia para os diversos sistemas:

Domínio	Esforço $e(t)$	Fluxo $f(t)$	Impulso $p(t)$	Deslocamento $q(t)$
Mecânica Translacional	Força $F(t)$	Velocidade $V(t)$	Impulso $P$	Deslocamento $X$
Mecânica Rotacional	Binário $\tau(t)$	Veloc. Ang. $w(t)$	Imp. Ang. $P_{\tau}$	Ângulo $\theta$
Hidráulico	Pressão $P(t)$	Vazão $Q(t)$	Imp. Pres. $P_p$	Volume $V$

### c.2. "Bond Graph"

Um "Bond Graph" consiste simplesmente em subsistemas unidos a través de linhas que representam as ligações onde estão associadas as variáveis de "entrada" e "saída" (variáveis de potência). Os "bonds" ou "portos" são linhas com uma "meia flecha" na extremidade indicando a direção em que a potência escoa. A cada "porto" estão associadas duas variáveis, onde apenas uma é possível ser "entrada" do elemento, sendo a outra, conseqüentemente, a "saída". Exemplo: aplicando-se uma determinada força a um bloco, ele terá, como efeito, uma velocidade que não será qualquer. Portanto, força estabelecida como / "entrada" gera uma velocidade proporcional. Desta forma, fica evidente que não se consegue impor força ( $e$ ) e velocidade ( $f$ ) simultaneamente. O modo como as "entradas" e "saídas" são especificadas é chamado causalidade. A causalidade é indicada por um traço curto, perpendicular à extremidade do "bond". A figura C.1 mostra a convenção adotada.



Nota-se que o sinal de direção de fluxo de potência (meia / flecha) e o sinal de causalidade são completamente independentes, ou seja, todas as seguintes combinações das convenções de sinal são possíveis:

$$A \xrightarrow{\quad} B, \quad A \xleftarrow{\quad} B, \quad A \xrightarrow{\quad} B \text{ e } A \xleftarrow{\quad} B.$$

### c.3. Componentes Básicos

c.3.1. Elementos de 1 porto: elementos que têm apenas um porto de potência e um par de variáveis de esforço e fluxo.

- Resistor  $\frac{e}{f} \xrightarrow{\quad} R$

	Relação Geral	Relação Linear
Variáveis Genéricas	$e = \phi_r (f)$	$e = r \cdot f$
	$f = \phi_r^{-1} (e)$	$f = e/r$

A convenção de sinal estabelece como positivo a flecha do lado do resistor.

- Capacitor  $\frac{e}{f=\dot{q}} \xrightarrow{\quad} C$

	Relação Geral	Relação Linear
Variáveis Genéricas	$q = \phi_c (e)$	$q = C \cdot e$
	$e = \phi_c^{-1} (q)$	$e = q/C$

- Inércia  $\frac{e=\dot{p}}{f} \xrightarrow{\quad} I$

	Relação Geral	Relação Linear
Variáveis Genéricas	$p = \phi_I (f)$	$p = I \cdot f$
	$f = \phi_I^{-1} (p)$	$f = p/I$

- Fontes: são os elementos que suprem o sistema de potência, / e a convenção adotada é: quando  $e(t).f(t)$  é positivo, está ha vendo um fluxo de potência da fonte para o sistema.

$S_e \longrightarrow e(t)$  é dado;  $f(t)$  arbitrário (fonte de esforço)

$S_f \longleftarrow f(t)$  é dado;  $e(t)$  arbitrário (fonte de vazão)

Percebe-se que a causalidade, por definição, será sempre es - ta, bem como o sinal de fluxo de potência.

c.3.2. Elementos de 2 Portos: os elementos de dois portos se- rão ideais, isto é, a potência é conservativa, valendo a rela ção  $e_1(t).f_1(t) = e_2(t).f_2(t)$ . Além disso, a potência "passa" / através dele implicando na seguinte convenção de sinal:

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \longrightarrow \\ f_1 \end{array} \quad \text{TP} \quad \begin{array}{c} e_2 \\ \longleftarrow \\ f_2 \end{array}$$

Um dos elementos de dois portos é o chamado transformador e / sua lei constitutiva é definida pelas expressões:  $e_1 = m.e_2$  e /  $m.f_1 = f_2$ ; onde  $m$  é chamado de módulo do transformador.

c.3.3. Elementos de 3 portos: Também chamados de Junção, são / os elementos que definem a topologia do sistema. A exemplo do caso anterior, são conservativos.

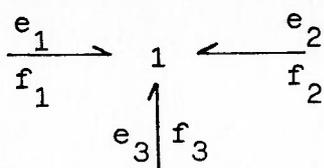
- Junção 0: O símbolo para esta Junção é o número zero com / três "bonds" saindo dele. Definem-se as seguintes relações ca racterísticas para a convenção de sinal assinalada.

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \longrightarrow \\ f_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ e_3 \mid f_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} e_2 \\ \longleftarrow \\ f_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \end{array}$$

Ou seja, as variáveis de esforço generalizado de todos os por - tos da Junção 0 são sempre idênticas e a soma algébrica das / variáveis de deslocamento generalizado, nula.

- Junção 1: O símbolo para esta Junção é o número um com três

"bonds" conectados. Para a convenção de sinal assinalada tem-se as seguintes relações:



$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$$

Significado físico das Junções 0 e 1 nos vários sistemas:

- Sistema Mecânico:  $\text{---}0\text{---}$ , representa a compatibilidade geométrica para a situação envolvendo uma força e 3 velocidades com soma algébrica nula.

$\text{---}1\text{---}$ , representa o equilíbrio dinâmico das forças associadas a uma velocidade.

- Sistema Hidráulico:  $\text{---}0\text{---}$ , representa a conservação do fluxo/ de vazão no ponto em que os três tubos se unem.

$\text{---}1\text{---}$ , representa a condição de que a soma de pressões ao longo do circuito, envolvendo uma singular/ vazão, deve ser nula quando o percurso do circuito é completado.

#### c.4. Causalidade

c.4.1 Elementos de 1 porto: Só existe uma possibilidade de ocorrência, como já visto, na causalidade das fontes de esforço e vazão. Quanto ao resistor, é indiferente a causalidade / imposta. As duas possibilidades podem ser representadas na seguinte forma de equação:  $e = \phi_R(f)$ ;  $f = \phi_R^{-1}(e)$ , onde do lado esquerdo da igualdade está a "saida" e do direito a "entrada". Ambas funções ( $\phi_R$  e  $\phi_R^{-1}$ ) são conhecidas, não havendo razão para uma preferência (a menos que para uma relação não-linear / haja multiplicidade de valores de  $\phi_R$  e  $\phi_R^{-1}$ ).

As leis constitutivas dos elementos C- e I- são expressas como relações estáticas entre  $\underline{e}$  e  $\underline{q} = \int^t f dt$  e  $\underline{f}$  e  $\underline{p} = \int^t e dt$ , respectivamente, e por este motivo a troca de causalidade tem um

importante efeito.

Tomando o capacitor, pode-se reescrever as relações anteriores da seguinte forma:  $e = \Phi_C^{-1}(\int^t f dt)$ ;  $f = \frac{d}{dt}[\Phi_C(e)]$ .

Nota-se que quando  $\underline{f}$  é a "entrada" de C-,  $\underline{e}$  é dado por uma função estática de integral de  $\underline{f}$  no tempo, mas quando  $\underline{e}$  é a "entrada",  $\underline{f}$  é uma derivada em relação ao tempo de uma função estática de  $\underline{e}$ . A estes dois tipos de causalidade dá-se o nome de causalidade integrativa e derivativa, respectivamente.

Para o caso da Inércia, a causalidade integrativa existe quando  $\underline{e}$  é a "entrada" e a derivativa quando é o  $\underline{f}$ .

A tabela C.1 mostra as possíveis causalidades para os elementos de um porto.

Elemento	Forma causal	Relação causal
Fonte de esforço	$S_e \longrightarrow$	$e(t) = E(t)$
Fonte de fluxo	$S_f \longleftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistor	$R \longleftarrow$	$e = \Phi_R(f)$
	$R \longrightarrow$	$f = \Phi_R^{-1}(e)$
Capacitor	$C \longleftarrow$	$e = \Phi_C^{-1}(\int^t f dt)$
	$C \longrightarrow$	$f = \frac{d}{dt}[\Phi_C(e)]$
Inércia	$I \longleftarrow$	$f = \Phi_I^{-1}(\int^t e dt)$
	$I \longrightarrow$	$e = \frac{d}{dt}[\Phi_I(f)]$

Tabela C.1.: Causalidade dos elementos de 1 porto.

c.4.2. Elementos de 2 e 3 portos: Para os elementos de 2 portos, apenas duas possibilidades são possíveis:  $\longleftarrow TF \longleftarrow e/$

—TF—, pois assim que um dos es ou fs são estabelecidos / como "entrada", o outro e ou f será a "saída".

As propriedades de causalidade de elementos de 3 portos (Junção 0 e 1) são similares, ou seja, não são permitidas todas / combinações.

Na Junção 0 os es de todos os portos são iguais e os fs somam/zero. Assim, se num porto o e é "entrada", então todos os outros es estão determinados e em todos os outros portos eles devem ser a "saída" da Junção 0. Se o f sobre todos os portos, exceto um, é "entrada" na Junção 0, o f do porto excluído está/determinado e deve ser a "saída" da Junção. Como consequência, na Junção 0 existem apenas três diferentes causalidades permitidas. Na Junção 0 com n portos estas descrições das restrições de causalidade continuam valendo, podendo haver apenas n/diferentes possibilidades.

Para a Junção 1 as mesmas considerações aplicam-se, exceto que as regras para e e f são trocadas, consequência de que os fs / em todos os portos são iguais e os es somam zero.

#### c.5. Método de Construção de "Bond Graph"

##### c.5.1 Circuito hidráulico

- i. Para cada pressão distinta, estabelecer uma Junção 0.
- ii. Inserir os componentes do modelo entre os apropriados pares de Junção 0, usando Junção 1. Adicionar fonte de pressão e vazão.
- iii. Marcar a direção da potência.
- iv. Definir todas as pressões relativas a um referencial (normalmente a pressão atmosférica), e eliminar a Junção 0 da referência e seus portos.
- v. Simplificar o "Bond Graph". Por exemplo, caso haja dois portos de Junção 1 unidos por uma Junção 0, trocar por um singular porto.

## c.5.2. Mecânica de translação

- i. Para cada distinta velocidade, estabelecer uma Junção 1 (algumas Junções 1 representam velocidades absolutas e outras, ve locidades relativas).
- ii. Inserir o elemento de geração de força (1 porto) entre os/ apropriados pares de Junção 1, usando Junção 0. Adicionar também as inércias em suas respectivas Junções 1.
- iii. Marcar todas as direções de potência.
- iv. Eliminar as Junções 1 com velocidades nulas e seus portos.
- v. Simplificar o "Bond Graph" resultante.

OBS.: Para a mecânica de rotação, os passos são análogos.

Estabelecida a topologia do modelo, deve-se assinalar os sinais de fluxo de potência e causalidade. De maneira metódica, pode-se proceder como indicado abaixo:

1º Numerar todos os portos.

2º Assinalar em cada porto o sentido de escoamento de potência.

3º Assinalar em cada porto a causalidade da seguinte forma:

i. Escolher qualquer fonte ( $S_e, S_f$ ) e assinalar sua requerida / causalidade. Imediatamente, estender as implicações de causalidade nos outros portos vizinhos, o mais "longe" possível, através do gráfico, usando as restrições dos elementos (0,1,TF).

ii. Repetir o item i. até todas as fontes estarem definidas.

iii. Escolher qualquer elemento de armazenagem (C ou I) e assinalar a causalidade integrativa. Imediatamente, estender as / conseqüências, o mais "longe" possível, ao longo do gráfico, / usando as restrições dos elementos (0,1,TF).

iv. Repetir o item iii. até todos os elementos de armazenagem/ terem sido assinalados. Em muitos casos práticos todos os portos terão a causalidade definida depois deste estágio. Em alguns / casos, contudo, haverá portos não definidos.

v. Escolher qualquer elemento R não assinalado e marcar-lhe uma causalidade (arbitrária). Imediatamente, estender as conseqüên

cias, o mais "longe" possível, usando as restrições dos elementos (0,1,TF).

vi. Repetir o item v. até todos os elementos R estarem definidos.

vii. Escolher qualquer ponto remanescente não assinalado e assinalar a causalidade arbitrariamente. Imediatamente, estender as conseqüências aos demais, respeitando restrições.

viii. Repetir o item vii. aos portos ainda não definidos.

Há várias situações que podem surgir terminada a colocação da causalidade:

1º Todos os elementos de armazenagem têm causalidade integrativa e o gráfico é completado após o item iv.

2º A causalidade é completada nos elementos R ou portos remanescentes como indicado nos itens de v. a viii..

3º Alguns elementos de armazenagem devem ter causalidade derivativa. Neste caso, os elementos não são dinamicamente independentes.

"A regra geral é que as variáveis de energia para os elementos de armazenagem com causalidade integrativa servem como variáveis de estado.

Todo elemento de armazenagem com causalidade derivativa não contribui para variáveis de estado...". |13|

#### c.6. Campos de armazenagem de energia

Os elementos -C e -I podem armazenar energia e devolvê-la ao sistema sem perda. Qualquer relação funcional entre esforço e deslocamento define um capacitor de energia conservativa e qualquer / relação funcional entre fluxo e impulso define um elemento de / inércia conservativo.

A generalização de multiporço -C e -I, a qual é chamada de / campo, também será conservativa.

c.6.1. Campo C

Escreve-se:  $1 \xrightarrow{C} n$ , e é caracterizado por

$$e_i = \Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n); i=1 \text{ a } n$$

$$e q_i(t) = q_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(t) dt; i=1 \text{ a } n$$

c.6.2. Campo I

Escreve-se:  $1 \xrightarrow{I} n$ , e é caracterizado por

$$f_i = \Phi_i(p_1, p_2, \dots, p_n); i=1 \text{ a } n$$

$$e p_i(t) = p_i(t_0) + \int_{t_0}^t e_i(t) dt; i=1 \text{ a } n$$

D. EQUAÇÕES REFERENTES AO BOND GRAPH DA FIGURA 3.2 (CAPÍTULO 3)

As equações obtidas da topologia são:

$$e_1 = e_2 = e_5 \quad (D.1) \qquad \dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_5 \quad (D.3)$$

$$f_1 - f_2 - f_5 = 0 \quad (D.2) \qquad \dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_5 = 0 \quad (D.4)$$

$$e_2 - e_3 - e_4 = 0 \quad (D.5) \qquad \dot{p}_2 - \dot{p}_3 - \dot{p}_4 = 0 \quad (D.7)$$

$$f_2 = f_3 = f_4 \quad (D.6) \qquad \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 \quad (D.8)$$

$$e_5 - e_6 - e_8 - e_7 = 0 \quad (D.9) \qquad \dot{p}_5 - \dot{p}_6 - \dot{p}_8 - \dot{p}_7 = 0 \quad (D.11)$$

$$f_5 = f_6 = f_7 = f_8 \quad (D.10) \qquad \dot{q}_5 = \dot{q}_6 = \dot{q}_7 = \dot{q}_8 \quad (D.12)$$

$$e_8 - e_9 - e_{10} = 0 \quad (D.13) \qquad \dot{p}_8 - \dot{p}_9 - \dot{p}_{10} = 0 \quad (D.15)$$

$$f_8 = f_9 = f_{10} \quad (D.14) \qquad \dot{q}_8 = \dot{q}_9 = \dot{q}_{10} \quad (D.16)$$

$$e_{10} = e_{17} = e_{11} = e_{13} \quad (D.17) \qquad \dot{p}_{10} = \dot{p}_{17} = \dot{p}_{11} = \dot{p}_{13} \quad (D.19)$$

$$f_{10} - f_{17} - f_{11} - f_{13} = 0 \quad (D.18) \qquad \dot{q}_{10} - \dot{q}_{17} - \dot{q}_{11} - \dot{q}_{13} = 0 \quad (D.20)$$

$$e_{14} + e_{16} - e_{15} = 0 \quad (D.21) \qquad \dot{p}_{14} + \dot{p}_{16} - \dot{p}_{15} = 0 \quad (D.23)$$

$$f_{14} = f_{16} = f_{15} \quad (D.22) \qquad \dot{q}_{14} = \dot{q}_{16} = \dot{q}_{15} \quad (D.24)$$

$$e_{17} - e_{18} - e_{19} = 0 \quad (D.25) \qquad \dot{p}_{17} - \dot{p}_{18} - \dot{p}_{19} = 0 \quad (D.27)$$

$$f_{17} = f_{18} = f_{19} \quad (D.26) \qquad \dot{q}_{17} = \dot{q}_{18} = \dot{q}_{19} \quad (D.28)$$

$$\dot{q}_1 = Q_b \quad (\text{vazão da bomba}) \quad (D.29)$$

$$\dot{p}_{16} = P \quad (\text{peso do conjunto girante}) \quad (D.30)$$

$$\dot{p}_{19} = P_{atm} \quad (\text{pressão atmosférica}) \quad (D.31)$$

Equações constitutivas:

$q_4 = C_1 \cdot e_4$	(D.32)	$q_4 = C_1 \cdot \dot{p}_4$	(D.32.a)
$e_3 = R_1 \cdot f_3$	(D.33)	$\dot{p}_3 = R_1 \cdot \dot{q}_3$	(D.33.a)
$p_6 = I_1 \cdot f_6$	(D.34)	$p_6 = I_1 \cdot \dot{q}_6$	(D.34.a)
$e_7 = R_2 \cdot f_7$	(D.35)	$\dot{p}_7 = R_2 \cdot \dot{q}_7$	(D.35.a)
$e_9 = R_3 \cdot f_9$	(D.36)	$\dot{p}_9 = R_3 \cdot \dot{q}_9$	(D.36.a)
$e_{18} = R_4 \cdot f_{18}$	(D.37)	$\dot{p}_{18} = R_4 \cdot \dot{q}_{18}$	(D.37.a)
$p_{15} = I_2 \cdot f_{15}$	(D.38)	$p_{15} = I_2 \cdot \dot{q}_{15}$	(D.38.a)
$e_{11} = m \cdot e_{12}$	(D.39)	$\dot{p}_{11} = m \cdot \dot{p}_{12}$	(D.39.a)
$m \cdot f_{11} = f_{12}$	(D.40)	$m \cdot \dot{q}_{11} = \dot{q}_{12}$	(D.40.a)
$e_{13} = m \cdot e_{14}$	(D.41)	$\dot{p}_{13} = m \cdot \dot{p}_{14}$	(D.41.a)
$m \cdot f_{13} = f_{14}$	(D.42)	$m \cdot \dot{q}_{13} = \dot{q}_{14}$	(D.42.a)
$q_{12} = C_2 \cdot e_{12}$	(D.43)	$q_{12} = C_2 \cdot \dot{p}_{12}$	(D.43.a)

E. EQUAÇÕES REFERENTES AO "BOND GRAPH" DA FIGURA 4.13 (CAPÍTULO 4)

As equações obtidas da topologia são:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (\text{E.1}) \qquad \dot{p}_1 + \dot{p}_2 + \dot{p}_3 = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$f_1 = f_2 = f_3 \quad (\text{E.2}) \qquad \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 \quad (\text{E.4})$$

$$e_3 = e_4 = e_7 = e_9 \quad (\text{E.5}) \qquad \dot{p}_3 = \dot{p}_4 = \dot{p}_7 = \dot{p}_9 \quad (\text{E.7})$$

$$f_3 + f_4 + f_7 + f_9 = 0 \quad (\text{E.6}) \qquad \dot{q}_3 - \dot{q}_4 - \dot{q}_7 - \dot{q}_9 = 0 \quad (\text{E.8})$$

$$e_4 + e_5 + e_6 = 0 \quad (\text{E.9}) \qquad \dot{p}_4 - \dot{p}_5 - \dot{p}_6 = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$f_4 = f_5 = f_6 \quad (\text{E.10}) \qquad \dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \dot{q}_6 \quad (\text{E.12})$$

$$e_{10} + e_{11} + e_{12} = 0 \quad (\text{E.13}) \qquad \dot{p}_{10} + \dot{p}_{11} - \dot{p}_{12} = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$f_{10} = f_{11} = f_{12} \quad (\text{E.14}) \qquad \dot{q}_{10} = \dot{q}_{11} = \dot{q}_{12} \quad (\text{E.16})$$

Além disso, tem-se:  $\dot{q}_1 = Q_b$  (vazão da bomba) (E.17)

$$\dot{p}_{11} = P \quad (\text{peso do conjunto girante}) \quad (\text{E.18})$$

$$\dot{p}_6 = P_{atm} \quad (\text{pressão atmosférica}) \quad (\text{E.19})$$

Equações constitutivas:  $\dot{p}_2 = R_1 \cdot \dot{q}_2$  (E.20)

$$\dot{p}_5 = R_2 \cdot \dot{q}_5 \quad (\text{E.21})$$

$$p_{12} = I_1 \cdot \dot{q}_{12} \quad (\text{E.22})$$

$$q_8 = C_1 \cdot \dot{p}_2 \quad (\text{E.23})$$

$$\dot{p}_7 = m \cdot \dot{p}_8 \quad (\text{E.24})$$

$$m \cdot \dot{q}_7 = \dot{q}_8 \quad (\text{E.25})$$

$$\dot{p}_9 = m \cdot \dot{p}_{10} \quad (\text{E.26})$$

F. EQUAÇÕES REFERENTES AO "BOND GRAPH" DA FIGURA 5.4 (CAPÍTULO 5)

As equações obtidas da topologia são:

$$f_1=f_2=f_3=f_4=Q_b \text{ (vazão da bomba)} \quad (\text{F.1})$$

$$e_1-e_2-e_3-e_4=0 \quad (\text{F.2})$$

$$e_4=e_5=e_6 \quad (\text{F.3})$$

$$\dot{p}_4=\dot{p}_5=\dot{p}_6 \quad (\text{F.5})$$

$$f_4-f_5-f_6=0 \quad (\text{F.4})$$

$$\dot{q}_4-\dot{q}_5-\dot{q}_6=0 \quad (\text{F.6})$$

$$f_6=f_7=f_8=f_9 \quad (\text{F.7})$$

$$\dot{q}_6=\dot{q}_7=\dot{q}_8=\dot{q}_9 \quad (\text{F.9})$$

$$e_6-e_7-e_8-e_9=0 \quad (\text{F.8})$$

$$\dot{p}_6-\dot{p}_7-\dot{p}_8-\dot{p}_9=0 \quad (\text{F.10})$$

$$e_9=e_{10}=e_{11} \quad (\text{F.11})$$

$$\dot{p}_9=\dot{p}_{10}=\dot{p}_{11} \quad (\text{F.13})$$

$$f_9-f_{11}-f_{10}=0 \quad (\text{F.12})$$

$$\dot{q}_9=\dot{q}_{11}=\dot{q}_{10}=0 \quad (\text{F.14})$$

$$f_{10}=f_{18}=f_{19} \quad (\text{F.15})$$

$$\dot{q}_{10}=\dot{q}_{18}=\dot{q}_{19} \quad (\text{F.17})$$

$$e_{10}-e_{18}-e_{19}=0 \quad (\text{F.16})$$

$$\dot{p}_{10}-\dot{p}_{18}-\dot{p}_{19}=0 \quad (\text{F.18})$$

$$e_{19}=e_{20}=e_{21}=e_{23} \quad (\text{F.19})$$

$$\dot{p}_{19}=\dot{p}_{20}=\dot{p}_{21}=\dot{p}_{23} \quad (\text{F.21})$$

$$f_{19}-f_{20}-f_{21}-f_{23}=0 \quad (\text{F.20})$$

$$\dot{q}_{19}-\dot{q}_{20}-\dot{q}_{21}-\dot{q}_{23}=0 \quad (\text{F.22})$$

$$f_{12}=f_{11}=f_{13} \quad (\text{F.23})$$

$$\dot{q}_{12}=\dot{q}_{11}=\dot{q}_{13} \quad (\text{F.25})$$

$$e_{11}-e_{12}-e_{13}=0 \quad (\text{F.24})$$

$$\dot{p}_{11}-\dot{p}_{12}-\dot{p}_{13}=0 \quad (\text{F.26})$$

$$e_{13}=e_{14}=e_{15}=e_{16} \quad (\text{F.27})$$

$$\dot{p}_{13}=\dot{p}_{14}=\dot{p}_{15}=\dot{p}_{16} \quad (\text{F.29})$$

$$f_{13}-f_{14}-f_{15}-f_{16}=0 \quad (\text{F.28})$$

$$\dot{q}_{13}-\dot{q}_{14}-\dot{q}_{15}-\dot{q}_{16}=0 \quad (\text{F.30})$$

$$f_5=f_{27}=f_{28} \quad (\text{F.31})$$

$$\dot{q}_5=\dot{q}_{27}=\dot{q}_{28} \quad (\text{F.33})$$

$$e_5-e_{27}-e_{28}=0 \quad (\text{F.32})$$

$$\dot{p}_5-\dot{p}_{27}-\dot{p}_{28}=0 \quad (\text{F.34})$$

$$f_{20}=f_{29}=f_{30} \quad (\text{F.35})$$

$$\dot{q}_{20}=\dot{q}_{29}=\dot{q}_{30} \quad (\text{F.37})$$

$$e_{20}-e_{29}-e_{30}=0 \quad (\text{F.36})$$

$$\dot{p}_{20}-\dot{p}_{29}-\dot{p}_{30}=0 \quad (\text{F.38})$$

$$f_{14} = f_{31} = f_{32} \quad (\text{F.39})$$

$$e_{14} - e_{31} - e_{32} = 0 \quad (\text{F.40})$$

$$\dot{q}_{14} = \dot{q}_{31} = \dot{q}_{32} \quad (\text{F.41})$$

$$\dot{p}_{14} - \dot{p}_{31} - \dot{p}_{32} = 0 \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{bmatrix} f_{24} \\ f_{25} \\ f_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \beta & \delta \\ \beta & \xi & \delta \\ \delta & \delta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{24} \\ p_{25} \\ p_{26} \end{bmatrix} \quad \text{ou,}$$

$$f_{24} = \xi p_{24} + \beta p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.43}) \quad \dot{q}_{24} = \xi p_{24} + \beta p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.46})$$

$$f_{25} = \beta p_{24} + \xi p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.44}) \quad \dot{q}_{25} = \beta p_{24} + \xi p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.47})$$

$$f_{26} = \delta p_{24} + \delta p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.45}) \quad \dot{q}_{26} = \delta p_{24} + \delta p_{25} + \delta p_{26} \quad (\text{F.48})$$

Além disso, tem-se:  $\dot{q}_4 = Q_b$  (vazão da bomba) (F.49)

$$\dot{p}_{30} = P_{\text{atm}} \quad (\text{pressão atmosférica}) \quad (\text{F.50})$$

$$\dot{p}_{32} = P_{\text{atm}} \quad (\text{pressão atmosférica}) \quad (\text{F.51})$$

$$\dot{p}_{26} = P \quad (\text{peso do conj. girante}) \quad (\text{F.52})$$

Equações constitutivas:

$$p_2 = I_1 \cdot f_2 \quad (\text{F.53})$$

$$e_3 = R_1 \cdot f_3 \quad (\text{F.54})$$

$$e_{27} = R_7 \cdot f_{27} \quad (\text{F.55})$$

$$\dot{p}_{27} = R_7 \cdot \dot{q}_{27} \quad (\text{F.55.a})$$

$$q_{28} = C_1 \cdot e_{28} \quad (\text{F.56})$$

$$q_{28} = C_1 \cdot \dot{p}_{28} \quad (\text{F.56.a})$$

$$p_7 = I_2 \cdot f_7 \quad (\text{F.57})$$

$$p_7 = I_2 \cdot \dot{q}_7 \quad (\text{F.57.a})$$

$$e_8 = R_2 \cdot f_8 \quad (\text{F.58})$$

$$\dot{p}_8 = R_2 \cdot \dot{q}_8 \quad (\text{F.58.a})$$

$$e_{18} = R_3 \cdot f_{18} \quad (\text{F.59})$$

$$\dot{p}_{18} = R_3 \cdot \dot{q}_{18} \quad (\text{F.59.a})$$

$$e_{12} = R_4 \cdot f_{12} \quad (\text{F.60})$$

$$\dot{p}_{12} = R_4 \cdot \dot{q}_{12} \quad (\text{F.60.a})$$

$$e_{29} = R_5 \cdot f_{29} \quad (\text{F.61})$$

$$\dot{p}_{29} = R_5 \cdot \dot{q}_{29} \quad (\text{F.61.a})$$

$$e_{31} = R_6 \cdot f_{31} \quad (\text{F.62})$$

$$\dot{p}_{31} = R_6 \cdot \dot{q}_{31} \quad (\text{F.62.a})$$

$$q_{22} = C_2 \cdot e_{22} \quad (\text{F.63})$$

$$q_{22} = C_2 \cdot \dot{p}_{22} \quad (\text{F.63.a})$$

$$q_{17} = C_3 \cdot e_{17} \quad (\text{F.64})$$

$$e_{23} = m'_{II} \cdot e_{24} \quad (\text{F.65})$$

$$m'_{II} \cdot f_{23} = f_{24} \quad (\text{F.66})$$

$$e_{15} = m''_{II} \cdot e_{25} \quad (\text{F.67})$$

$$m''_{II} \cdot f_{15} = f_{25} \quad (\text{F.68})$$

$$e_{21} = m'_I \cdot e_{22} \quad (\text{F.69})$$

$$m'_I \cdot f_{21} = f_{22} \quad (\text{F.70})$$

$$e_{16} = m''_I \cdot e_{17} \quad (\text{F.71})$$

$$m''_I \cdot f_{16} = f_{17} \quad (\text{F.72})$$

$$q_{17} = C_3 \cdot \dot{p}_{17} \quad (\text{F.64.a})$$

$$\dot{p}_{23} = m'_{II} \cdot \dot{p}_{24} \quad (\text{F.65.a})$$

$$m'_{II} \cdot \dot{q}_{23} = \dot{q}_{24} \quad (\text{F.66.a})$$

$$\dot{p}_{15} = m''_{II} \cdot \dot{p}_{25} \quad (\text{F.67.a})$$

$$m''_{II} \cdot \dot{q}_{15} = \dot{q}_{25} \quad (\text{F.68.a})$$

$$\dot{p}_{21} = m'_I \cdot \dot{p}_{22} \quad (\text{F.69.a})$$

$$m'_I \cdot \dot{q}_{21} = \dot{q}_{22} \quad (\text{F.70.a})$$

$$\dot{p}_{16} = m''_I \cdot \dot{p}_{17} \quad (\text{F.71.a})$$

$$m''_I \cdot \dot{q}_{16} = \dot{q}_{17} \quad (\text{F.72.a})$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. (trad. André F. Kohn e José C.T.de Barros Moraes), Rio de Janeiro, Prentice/Hall do Brasil, 1985.
- |2| MEIROVITCH, Leonard. Elements of vibrations analysis. Japan, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1977.
- |3| THOMSON, W.T. Theory of vibration with applications. New Jersey, Prentice/Hall Inc., 1972.
- |4| DEN HARTOG, J.P. Vibrações nos sistemas mecânicos. (trad. Mauro O.C.Amorelli), São Paulo, Edgard Blücher/ EDUSP, 1972.
- |5| GIBSON, J.E. Nonlinear automatic control. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1963.
- |6| FULLER, D.D. Theory and practice of lubrication for engineers. John Wiley & Sons Inc., 1965.
- |7| PONTRIAGNINE, L. Équations différentielles ordinaires. Moscou, Éditions MIR, 1969.
- |8| SHAMES, I.H. Mecânica dos fluidos. (trad. Mauro O.C.Amorelli), Brasília, Edgard Blücher/INL, 1973.
- |9| STREETER, V.L. & WYLIE, E.B. Hydraulic transients. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1967.

- |10| STREETER, V.L. & WYLEI, E.B. Fluid transients. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1982.
- |11| GARDNER, P.E.J. & GUMMER, J.H. The use of ais chambers to suppress hydraulic resonance (parte 1). Water Power & Dam Construction. 25 (3), março, 1973.
- |12| SOTELO Jr, J. & LIMA, A.F. Introdução à simulação e modelagem matemática de sistemas. Comunicado técnico 320-IPT, são Paulo, 1984.
- |13| KARNOPP, Dean & ROSENBERG, R. System dynamics: a unified approach. John Wiley & Sons Inc., 1975.

## BIBLIOGRAFIA

STREETER, V.L. & WYLIE, E.B. Hydraulic transients. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1967.

\_\_\_\_\_ . Fluid transients. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1982.

GARDNER, P.E.J. & GUMMER, J.H. The use of air chambers to suppress hydraulic resonance (part 1). Water Power & Dam Construction. 25 (3), march, 1973.

SHAMES, I.H. Mecânica dos fluidos. (trad. Mauro O.C. Amorelli), Brasília, Edgard Blücher/INL, 1973.

KARNOPP, Dean & ROSENBERG, R. System dynamics: a unified approach. John Wiley & Sons Inc., 1975.

SOTELO Jr, J. & LIMA, A.F. Introdução à simulação e modelagem matemática de sistemas. Comunicado técnico 320-IPT, São Paulo, 1984.

FULLER, D.D. Theory and practice of lubrication for engineers. John Wiley & Sons Inc., 1965.

KARNOPP, Dean & ROSENBERG, R. A definition of the Bond Graph language. Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control. September, 1972.

PAYNTER, H.M. System graphing concepts. Instruments and Control. July, 1970.

OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. (trad. André F. Kohn e José C.T. de Barros Moraes), Rio de Janeiro, Prentice/Hall do Brasil, 1985.

PAYNTER, H.M. Analysis and design of engineering systems. M.I.T. Press, 1961.

MEIROVITCH, Leonard. Elements of vibrations analysis. Japan, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1977.

GIBSON, J.E. Nonlinear automatic control. New York, Mc Graw-Hill Inc., 1963.

DEN HARTOG, J.P. Vibrações nos sistemas mecânicos. (trad. Mauro O.C. Amorelli), São paulo, Edgard Blücher/EDUSP, 1972.

COSGRIFF, R. Lien. Nonlinear control systems. New york, Mc Graw-Hill Inc., 1958.

THOMSON, W.T. Theory of vibration with applications. New Jersey, Prentice/Hall Inc., 1972.

PONTRIAGNINE, L. Équations différentielles ordinaires. Moscou, Éditions MIR, 1969.

SIMPSON, R.J. & POWER, H.M. Stability and subharmonic responses of a nonlinear system with Dither Injection. IEEE Transactions on Automatic Control, 1973.

WAGNER, J.A. A dither technique applied to a constant fuel-rate problem. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972.

JONNADA, R.K. & WEYGANDT, C.N. Limit cycles of higher order nonlinear autonomous systems. Journal of the Franklin Institute, 291 (3), march, 1971.

THOMPSON, J.M.T. & STEWART, H.B. Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley & Sons, 1986.