

FD-1261

ADRIANO SCREMIN

Eng<sup>o</sup>. Mecânico. Escola Politécnica da USP. 1986

AVALIAÇÃO DE CAMPO ACÚSTICO EMITIDO POR UMA SUPERFÍCIE QUE VIBRA,  
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da USP  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia  
Mecânica.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcos de Mattos Pimenta  
Dept<sup>o</sup>. de Eng<sup>o</sup>. Mecânica- EPUSP

São Paulo, 1991

Aos meus pais,

Giuseppe e Luciana,

uma homenagem em reparação  
pelos sofrimentos causados  
ao longo desses anos...

PREFÁCIO

Não poderia deixar de dizer uma palavra sobre a motivação e o propósito deste trabalho. A necessidade de pesquisa na área de Acústica em nosso país é patente, dada a carência de trabalhos em que se encontra. Por outro lado, a necessidade de se dispor de uma metodologia versátil na avaliação de campo acústico para fins de projeto, vem crescendo. Sem contar o interesse pessoal em desenvolver uma pesquisa em acústica. Estes fatores, mais o apoio da FAPESP e a orientação do Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta permitiu-nos desenvolver este trabalho que pouco representa na lacuna que aí existe. Contudo, é sempre mais um espaço preenchido.

Mas não podemos ficar somente com este trabalho. Esperamos que outros se interessem por este assunto, a fim de que pesquisas futuras se concretizem mais rapidamente, pondo à disposição dos projetistas métodos melhores com os quais poderão atender às exigências da sociedade, principalmente no tocante ao conforto acústico.

Ao Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta fica minha gratidão por ter-me aceitado como orientado, pelos esforços em conseguir a bolsa de estudo a mim concedida pela FAPESP e pela paciência com que manteve minha orientação ao longo desses anos. Sou muito grato ao Prof. Dr. Kazuo Nishimoto pelas sugestões e incentivo. Meus agradecimentos à FAPESP, a quem peço desculpas pelo atraso na conclusão da pesquisa, pelo apoio econômico prestado ao longo de dois anos e meio de trabalho.

O AUTOR

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta, pelo seu constante apoio, dedicação e incentivo que ajudaram a tornar realidade este trabalho.
- Ao Prof. Dr. Kazuo Nishimoto, pelas sugestões e incentivo.
- Ao amigo Alberto, pela cessão do Programa BIE3.
- Ao amigo Wilson, pela paciência e competência na digitação desta obra.
- À FAPESP, sem a qual este trabalho não se iniciaria.
- À assessoria do CCE, pela paciência e atenção com que atenderam às dúvidas pertinentes ao uso dos computadores e programas.
- Ao Prof. Dr. Kazunori Watanabe, pela atenção e disponibilidade no atendimento a problemas matemáticos.
- Ao CETEC, pela cessão do computador.

ÍNDICE

1 - CÁLCULO DE CAMPO ACÚSTICO PROVOCADO POR SUPERFÍCIES QUE VIBRAM	
- INTRODUÇÃO.....	1
2 - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	
2.1 - Equação da Onda Acústica.....	5
2.1.1 - Quantidades Termodinâmicas.....	5
2.1.2 - Quantidade Fluido-Dinâmica.....	7
2.1.3 - Equação da Conservação de Massa.....	7
2.1.4 - Equação da Conservação da Quantidade de Movimento .....	7
2.1.5 - Escoamento Irrotacional.....	10
2.1.6 - Apresentação da Equação de Onda.....	12
2.2 - Transformada da Equação de Onda - Equação de Helmholtz.....	13
2.2.1 - Transformada da Equação da Quantidade de Movimento.....	14
2.2.2 - Transformada da Velocidade e do Gradiente do Potencial de Velocidade.....	14
2.2.3 - Transformada da Equação de Onda.....	15
2.3 - A Equação Integral de Helmholtz.....	15
3 - LEVANTAMENTO DE ALGUNS MÉTODOS	
3.1 - Introdução.....	20
3.2 - Apresentação dos Métodos segundo seus Autores.....	21
3.3 - O Método mais Promissor.....	31

4 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE HELMHOLTZ PARA UMA ESFERA PULSANTE	
4.1 - Introdução.....	35
4.2 - A Equação Integral de Helmholtz para uma Esfera Pulsante.....	36
4.3 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Superficial..	39
4.4 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Interna.....	40
4.5 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Externa.....	40
4.6 - Comparação.....	41
4.7 - Determinação das Frequências Características.....	41
4.8 - Comprovação da Falha da Equação Integral de Helmholtz Interna.....	43
5 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE HELMHOLTZ PELO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO, CONSIDERANDO DUPLA AXI-SIMETRIA	
5.1 - Introdução.....	46
5.2 - Considerações Iniciais.....	47
5.3 - Implementação Numérica.....	51
5.3.1 - Formulação por Elementos de Contorno.....	51
5.4 - Obtenção dos Coeficientes.....	54
6 - ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA O TRATAMENTO DA FORMULAÇÃO DO PRESENTE MÉTODO: OS PROGRAMAS BIE	
6.1 - Introdução.....	57
6.2 - Programa de Leitura e Arquivamento de Dados - BIE1....	60
6.3 - Programa Montador da Matriz dos Coeficientes - BIE2...	60
6.4 - Programa que Resolve o Sistema Linear - BIE3.....	61
6.5 - Programa que Determina o Campo Acústico num Ponto Externo - BIE4.....	62

6.6 - Programa para Apresentação dos Dados e Resultados - BIE5.....	62
<b>7 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS</b>	
7.1 - Introdução.....	63
7.2 - Obtenção de Resultados.....	65
7.2.1 - 1 <sup>o</sup> Caso: Pressão Acústica Superficial por Freqüência.....	66
7.2.2 - 2 <sup>o</sup> Caso: Pressão Acústica Superficial por Freqüência.....	66
7.2.3 - 3 <sup>o</sup> Caso: Erro Percentual da Pressão Acústica Superficial por Número de Elementos.....	67
7.2.4 - 4 <sup>o</sup> Caso: Pressão Acústica ao Longe por Distância.....	67
7.2.5 - 5 <sup>o</sup> Caso: Diretividade da Pressão Acústica Superficial.....	67
<b>8 - ANÁLISE, CONCLUSÕES E FUTUROS TRABALHOS</b>	
8.1 - Número de Elementos.....	128
8.2 - Freqüência.....	131
8.3 - Precisão de Integração.....	132
8.4 - Proximidade da Fonte.....	133
8.5 - Condições de Contorno.....	134
8.6 - Conclusões Finais.....	135
<b>9 - BIBLIOGRAFIA</b>	
9.1 - Trabalhos Citados.....	137
9.2 - Bibliografia Adicional.....	139

Apêndice A - ALGUNS TÓPICOS SOBRE A EQUAÇÃO INTEGRAL DE HELMHOLTZ	
A.1 - Algumas Definições para as Equações Integrais Lineares.....	A-2
A.2 - Alguns Teoremas de Equações Integrais Lineares.....	A-4
A.2.1 - Teorema 1.....	A-5
A.2.2 - Teorema 2.....	A-5
A.2.3 - Teorema 3.....	A-6
A.3 - Discussão.....	A-6
Apêndice B - VALORES CARACTERÍSTICOS DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE HELMHOLTZ SUPERFICIAL.....	B-1
Apêndice C - VALORES CARACTERÍSTICOS E A EQUAÇÃO INTEGRAL DE HELMHOLTZ INTERNA.....	C-1
Apêndice D - OS PROGRAMAS BIE	
BIE1.....	D-2
BIE2.....	D-6
BIE3.....	D-14
BIE4.....	D-19
BIE5.....	D-21
Apêndice E - EXEMPLO DE SAÍDA DO PROGRAMA BIE5.....	E-3



INDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1	- Representação da superfície fechada $S$ , um ponto $Q$ pertencente a $S$ com sua respectiva normal à superfície, e as distâncias entre os pontos $Q$ e $P$ .....	16
Fig. 2.2	- Representação da região do espaço ( $V$ ) limitada pela superfície $S_1$ , a esfera de raio $R$ e a esfera de raio $\epsilon$ .....	18
Fig. 3.1	- Evolução cronológica do emprego das equações integrais de Helmholtz (EIH) - Parte 1.....	33
Fig. 3.2	- Evolução cronológica do emprego das equações integrais de Helmholtz (EIH) - Parte 2.....	34
Fig. 4.1	- Esfera pulsante de raio $\alpha$ .....	36
Fig. 5.1	- Corpo elástico axi-simétrico em coordenadas cilíndricas .....	48
Fig. 5.2	- Discretização da linha geratriz feita com elementos isoparamétricos lineares.....	52
Fig. 6.1	- Sequência de programação.....	59
Fig. 7.1	- Tabela que correlaciona cada caso com seu respectivo conjunto de dados utilizados na obtenção do resultado desejado.....	66
Fig. 7.2	- Detalhe da posição dos eixos $r$ e $z$ em relação ao eixo de simetria para uma esfera oscilante.....	68
Fig. 8.1	- Distribuição não-equidistante dos nós ao longo da geratriz. 20 nós ou 19 elementos empregados.....	129

INDICE DE GRÁFICOS

Gráf. 7.1 - $ p /z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	69
Gráf. 7.2 - Rep/ $z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	73
Gráf. 7.3 - Imp/ $z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	77
Gráf. 7.4 - $ p /z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	81
Gráf. 7.5 - Rep/ $z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	85
Gráf. 7.6 - Imp/ $z_v \times k_a$ - Esfera Pulsante.....	89
Gráf. 7.7 - Erro(%) x Elementos - Esfera Pulsante.....	93
Gráf. 7.8 - Erro(%) x Elementos - Esfera Pulsante - Di-log.....	94
Gráf. 7.9 - $ p /z_v \times k_r$ - Esfera Pulsante - Di-log.....	99
Gráf. 7.10 - $ p /z_v \times k_r$ - Esfera Pulsante - Di-log.....	101
Gráf. 7.11 - $ p /z_v \times k_r$ - Esfera Pulsante - Di-log.....	103
Gráf. 7.12 - $ p /z_v \times k_r$ - Esfera Pulsante - Di-log.....	105
Gráf. 7.13 - $ p /z_v \times k_r$ - Esfera Pulsante - Di-log.....	107
Gráf. 7.14 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	109
Gráf. 7.15 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	112
Gráf. 7.16 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	115
Gráf. 7.17 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	118
Gráf. 7.18 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	121
Gráf. 7.19 - Diretividade - Esfera Oscilante.....	124

INDICE DE TABELAS

Tab. 7.1 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	70
Tab. 7.2 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	71
Tab. 7.3 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	72
Tab. 7.4 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	74
Tab. 7.5 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	75
Tab. 7.6 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	76
Tab. 7.7 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	78
Tab. 7.8 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	79
Tab. 7.9 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	80
Tab. 7.10 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	82
Tab. 7.11 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	83
Tab. 7.12 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	84
Tab. 7.13 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	86
Tab. 7.14 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	87
Tab. 7.15 - Valores para $Rep(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	88
Tab. 7.16 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	90
Tab. 7.17 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	91
Tab. 7.18 - Valores para $Imp(Pa)$ - Esfera Pulsante.....	92
Tab. 7.19 - Valores para o erro relativo - Esfera Pulsante.....	95
Tab. 7.20 - Valores para o erro relativo - Esfera Pulsante.....	96
Tab. 7.21 - Valores para o erro relativo - Esfera Pulsante.....	97
Tab. 7.22 - Valor para o erro relativo - Esfera Pulsante.....	98
Tab. 7.23 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	100
Tab. 7.24 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	102
Tab. 7.25 - Valores para $ p (Pa)$ - Esfera Pulsante.....	104

Tab. 7.26 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Pulsante.....	106
Tab. 7.27 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Pulsante.....	108
Tab. 7.28 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	110
Tab. 7.29 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	111
Tab. 7.30 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	113
Tab. 7.31 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	114
Tab. 7.32 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	116
Tab. 7.33 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	117
Tab. 7.34 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	119
Tab. 7.35 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	120
Tab. 7.36 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	122
Tab. 7.37 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	123
Tab. 7.38 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	125
Tab. 7.39 - Valores para $ p $ (Pa) - Esfera Oscilante - Diretividade.. .....	126

LISTA DOS SIMBOLOS

- $a$  - raio da esfera pulsante;
- $A_{ij}$  - elemento da matriz  $\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}$  (Eq. 5.27);
- BIE - programa de computador destinado a determinar o campo acústico gerado por uma superfície de revolução que vibra com uma distribuição de velocidade superficial conhecida;
- $B_{ij}$  - elemento da matriz  $\begin{bmatrix} B_{ij} \end{bmatrix}$  (Eq. 5.27);
- $C_{ij}$  - elemento da matriz  $\begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix}$  (Eq. 5.27);
- $\mathcal{C}(P)$ ,  $\mathcal{C}(Q)$  - fator de determinação da Equação Integral de Helmholtz;
- $c_0$  - velocidade do som no meio em repouso;
- $E$  - integral elíptica completa de segunda espécie;
- EIH - Equação Integral de Helmholtz;
- $f$  - frequência;
- $F$  - integral elíptica completa de primeira espécie;
- $f, F$  - uma função qualquer e sua respectiva transformada de Laplace;
- $\vec{f}$  - vetor força específica;
- $f_l$  - função radial de ordem  $l$ ;
- $\vec{f}_0$  - vetor força específica do fluido em repouso;
- $h$  - entalpia específica;
- $H_\lambda$  - núcleo resolvente para o parâmetro  $\lambda$ ;
- $h_l^{(2)}$  - função de Hankel de 2<sup>a</sup> espécie e ordem  $l$ ;
- $i$  - unidade imaginária ( $\sqrt{-1}$ );
- $\text{Im}[\ ]$  - parte imaginária de uma grandeza;
- $J(\xi)$  - jacobiano de uma transformação de coordenadas;
- $j_l$  - função de Bessel de 1<sup>a</sup> espécie e grau  $l$ ;
- $k$  - número de onda;
- $KCP, Q$  - núcleo da equação integral;
- $\overline{KCP, Q}$  - conjugado de  $kCP, Q$ ;
- MEC - Método de Elementos de Contorno;
- $\vec{n}$  - versor normal à superfície num ponto determinado;
- $n_l$  - função de Neumann de ordem  $l$ ;
- NOS - número de nós resultante da discretização da geratriz da superfície de revolução;
- NPE - número de pontos externos sobre um arco de circunferência centrado na fonte, equidistantes entre si;

- $N_1, N_2$  - polinômios interpoladores;  
 $p$  - pressão ou pressão acústica;  
 $P$  - transformada de Laplace de  $p'$  ou ponto do espaço;  
 $\vec{P}$  - vetor posição do ponto  $P$  relativo ao ponto de referência  $O$ ;  
 $p'$  - perturbação de  $p$ ;  
 $p_0$  - pressão do fluido em repouso;  
 $Q$  - ponto do espaço;  
 $\vec{Q}$  - vetor posição do ponto  $Q$  relativo ao ponto de referência  $O$ ;  
 $\vec{Q}^+, \vec{Q}^-$  - vetor posição do ponto  $Q$  quando este se aproxima da superfície fechada pelo lado externo e interno, respectivamente;  
 $r, r'$  - distância do centro da esfera pulsante aos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente;  
 $\text{Re} \{ \}$  - parte real de uma grandeza;  
 $r_<, r_>$  - menor e maior entre  $r$  e  $r'$ , respectivamente;  
 $r(P, Q)$  - distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$ ;  
 $s$  - entropia específica ou frequência complexa;  
 $S, S_1, S_2, S_3$  - superfícies;  
 $s'$  - perturbação de  $s$ ;  
 $s_0$  - entropia específica do fluido em repouso;  
 $t$  - tempo;  
 $T$  - temperatura;  
 $u$  - energia interna específica, ou representação da transformada de Laplace das grandezas acústicas  $p$ ,  $\rho$  e  $\varphi$ ;  
 $u' - \frac{\partial u}{\partial v}$  ;  
 $v$  - solução da Equação de Helmholtz homogênea ou velocidade superficial de uma esfera pulsante;  
 $V$  - volume;  
 $\vec{v}$  - vetor velocidade de uma partícula do fluido;  
 $\vec{v}'$  - perturbação de  $\vec{v}$ ;  
 $v_n, V_n$  - velocidade de um ponto de uma superfície na direção normal e sua respectiva transformada de Laplace;  
 $Y_{lm}, Y_{lm}^*$  - harmônicos esféricos;  
 $w(P)$  - função qualquer;  
 $z_0$  - impedância acústica do meio;  
 $\gamma$  - curva geratriz de uma superfície de revolução;  
 $\delta_{ij}$  - delta de Kronecker;  
 $\theta$  - coordenada esférica;

- $\lambda$  - comprimento de onda ou parâmetro de uma equação integral linear;  
 $\bar{\lambda}$  - conjugado de  $\lambda$ ;  
 $\mu$  - campo acústico no interior de uma região delimitada por uma superfície fechada;  
 $\vec{v}$  - versor normal à superfície num ponto determinado:  $\vec{v} = -\vec{n}$ ;  
 $\xi$  - coordenada generalizada;  
 $\rho$  - densidade de massa;  
 $\rho'$  - perturbação de  $\rho$ ;  
 $\rho_0$  - densidade de massa do fluido em repouso;  
 $\bar{\tau}$  - tensor das tensões viscosas;  
 $\varphi$  - potencial de velocidade de uma partícula do fluido;  
 $\varphi$  - coordenada esférica;  
 $\phi$  - transformada de Laplace de  $\varphi$ ;  
 $\chi_m$  - solução das Eqs. B.1 com a condição de contorno dada pela Eq. B. 5;  
 $\psi_m$  - auto-função do problema de Dirichlet interno;  
 $\omega$  - frequência angular;  
 $\vec{\Omega}$  - vetor turbilhão de uma partícula do fluido;  
 $\mathcal{L}^2$  - símbolo indicando que uma função satisfaz as três condições do Apêndice A, item A-1;

RESUMO

Neste trabalho apresentou-se um método baseado nas Equações Integrais de Helmholtz e na formulação do método de elementos de contorno para a determinação do campo acústico provocado por uma superfície que vibra. Para tanto, foi realizado um estudo do comportamento das equações integrais de Helmholtz (EIH), assim como um levantamento bibliográfico de publicações que tratavam da aplicação de tais equações ao problema acústico. Desse estudo foi possível identificar o problema de não-unicidade de solução para as EIH superficial e interna quando a frequência de excitação da superfície emissora coincide com uma das frequências correspondentes ao auto-valor 1 da EIH superficial (frequências características). Além disso, observou-se que a melhor maneira de viabilizar o emprego de tais equações era através da formulação do método de elementos de contorno. Assim, foi apresentada uma formulação de elementos de contorno considerando dupla axi-simetria: da geometria e do modo de vibrar da superfície. Para a viabilização dessa formulação, elaborou-se um programa denominado BIE. Este método foi aplicado a uma esfera pulsante e a uma oscilante. Seus resultados foram comparados com aqueles analíticos e mostraram-se aceitáveis para as aplicações em engenharia. Mais ainda, permitiram mostrar o comportamento da solução através deste método face à variação do número de elementos, à disposição dos nós na malha, à proximidade da primeira frequência característica, à precisão de integração numérica empregada, à proximidade da fonte e à condição de contorno.



ABSTRACT

In this work it was presented a method based on the Helmholtz integral equations and on boundary elements formulation, which determines acoustic field generated by a vibrating surface. For this, it was made a study on the behavior of the Helmholtz integral equations (HIE), as well as a bibliographic survey of the publications referring to application of these equations to the acoustic problem. From this study it was possible to identify the nonuniqueness failure of the surface and internal HIE when the exciting surface frequency coincides with one of the corresponding frequencies of the HEI eigenvalue 1. Furthermore, it was realized that the best way to make their utilization viable was employing them through boundary elements formulation. So, an axi-symmetric boundary elements formulation was shown. Geometric and boundary condition axi-symmetry were considered. It was elaborated a computer program, named BIE, to deal numerically with this formulation. This method was applied to a uniformly vibrating sphere and to an oscillating sphere. Its results were compared to analitical ones and showed to be acceptable for engineering application. Moreover, it permitted to show the solution behavior due to the elements number, to the nodes distribution over the mesh, to the first characteristic frequency proximity, to the Gauss quadrature precision, to the source nearness and to the boundary condition.

1 - CÁLCULO DE CAMPO ACÚSTICO PROVOCADO POR SUPERFÍCIES QUE VIBRAM  
- INTRODUÇÃO

---

A avaliação do campo acústico provocado por superfícies que vibram é importante no projeto de transdutores, na análise do campo acústico gerado por veículos aéreos e subaquáticos, e também no projeto de máquinas onde, hoje em dia, faz-se necessário o conhecimento do campo acústico por elas provocado para atender as exigências de conforto.

Na sua avaliação é comum deparar-se com corpos emissores cujo

formato não permite uma abordagem analítica para a solução. Os formatos que dispõem de solução analítica são aqueles de onde se consegue a separação de variáveis da equação de onda por meio de uma escolha adequada de coordenadas. É o caso do cilindro infinito, da esfera e dos esferóides. Faz falta, portanto, um método de cálculo de campo acústico que seja genérico, e destine-se a qualquer formato e condição de contorno da superfície emissora.

Uma maneira de vencer essa limitação imposta pelos métodos analíticos vem através da equação integral de Helmholtz, que nada mais é do que a própria equação de onda escrita na forma de equação integral. Aplicando à equação integral de Helmholtz (EIH) a formulação do método de elementos de contorno (MEC) - maiores detalhes sobre o MEC, consulte a Ref.[1] - obtém-se um método genérico aproximado, porém eficiente, para esses problemas de emissão acústica.

Há três equações integrais que representam igualmente a equação de onda: a EIH superficial, a EIH interna e a EIH externa. A primeira e a segunda destinam-se exclusivamente à solução do campo acústico junto à superfície emissora e a terceira destina-se exclusivamente à EIH externa. Contudo, tanto a EIH superficial como a interna apresentam problemas de não-unicidade da solução a determinadas frequências, ditas características, conforme as Refs.[3] e [4], e ainda, a EIH superficial apresenta o inconveniente de possuir uma singularidade no seu integrando. Ambos os problemas são contornáveis, como mostram Brebbia et al.

(Ref.[1]), Schenck (Ref.[2]) - com o seu método CHIEF - e Seybert et al. (Ref.[4]). Além do que, para altas frequências existe um método proposto por Seybert e Rengarajan na Ref.[5] que substitui a EIH superficial por uma relação que fornece o campo de pressão acústica sobre a superfície a partir da distribuição superficial de velocidade, e que se revela eficiente.

Neste trabalho, pretende-se mostrar: os diversos estudos sobre o assunto realizados ao longo de vários anos, os quais apontam a EIH como modo eficiente para a solução de problemas genéricos; como se obtém as EIH a partir da equação de onda; como se conclui que não há solução única para as EIH superficial e interna em determinadas frequências (características); como se avaliam tais frequências; a constatação da falha nessas frequências pela resolução analítica das EIH para o campo de pressão acústica de uma esfera pulsante; desenvolvimento e apresentação da formulação do MEC com o emprego de elementos isoparamétricos lineares na aplicação das EIH a problemas de radiação acústica que envolvem axi-simetria geométrica e axi-simetria das próprias condições de contorno do problema; implementação dessa formulação por meio de um conjunto de programas computacionais chamados BIE, desenvolvidos em Turbo Pascal.

Uma vez obtidos a formulação do método (MEC) e o meio de aplicá-lo (BIE), formando a associação da formulação com o programa, denominada MEC-BIE, ambos são submetidos a uma série de testes devidamente programados para se evidenciar o comportamento

da solução obtida pelo MEC-BIE face à variação dos parâmetros que a influenciam. Do conjunto de dados daí resultantes, faz-se uma análise da qual depreende-se o melhor modo de aplicar o MEC-BIE, dando-se orientações e informações úteis a quem empregá-lo.

## 2 - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

---

### 2.1 - Equação da Onda Acústica

Neste trabalho é considerado o caso mais simples de propagação de onda acústica num meio fluido compressivo estacionário, no qual a equação que rege o fenômeno é linear. Para a obtenção dessa equação são necessárias de antemão algumas hipóteses, ou seja, o meio é contínuo e as mudanças de estado obedecem à termodinâmica do equilíbrio, isto é, os fenômenos aí envolvidos são reversíveis. Para simplificar a formulação

assume-se que o fluido é uma substância simples, do que decorre que seu estado é descrito com o conhecimento de duas variáveis dinâmicas.

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento que se seguirá, sejam definidas:

### 2.1.1. Quantidades Termodinâmicas

As quantidades termodinâmicas são dadas em função da posição  $\vec{Q}$  e do tempo  $t$ :

$p(\vec{Q}, t)$  - pressão;

$\rho(\vec{Q}, t)$  - densidade de massa;

$T(\vec{Q}, t)$  - temperatura;

$u(\vec{Q}, t)$  - energia interna específica;

$s(\vec{Q}, t)$  - entropia específica;

$h(\vec{Q}, t)$  - entalpia específica.

Uma relação entre as quantidades entropia específica, energia interna específica, pressão e densidade é dada pela expressão:

$$h = u + \frac{p}{\rho}. \quad (2.1)$$

Outra relação vem da equação de estado:

$$p = p(\rho, T)$$

$$\text{ou } p = p(\rho, S)$$

$$\text{ou } h = h(\rho, S)$$

(2.2)

### 2.1.2 - Quantidade Fluido-Dinâmica

A quantidade fluido-dinâmica é também dada em função da posição e do tempo:

$\vec{v}(\vec{Q}, t)$  - velocidade da partícula do fluido.

### 2.1.3 - Equação da Conservação de Massa

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

### 2.1.4 - Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p + \text{div } \bar{\tau} \quad (2.4)$$

onde:

$$\frac{D}{Dt} ( \ ) = \frac{\partial}{\partial t} ( \ ) + \vec{v} \cdot \nabla ( \ )$$

$\vec{f}$  - força de campo específica;

$\bar{\tau}$  - tensor das tensões viscosas.

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix},$$

definido num sistema coordenado  $(x, y, z)$ , com:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$   
e  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

É necessário fazer agora outras hipóteses para a obtenção final da equação de onda. Neste caso o fluido considerado é ideal, ou seja, não está sujeito à viscosidade e não ocorre condução de calor pelo fluido. O fluido inicialmente é homogêneo e está em repouso, as variações ocorridas no escoamento são muito pequenas se comparadas às respectivas grandezas em regime permanente. As duas primeiras considerações têm como consequência que o movimento



do fluido é irrotacional e que a entropia específica é constante para qualquer instante e lugar. A última consideração vem do fato de que o fenômeno da propagação de ondas provoca perturbações muito pequenas das grandezas envolvidas.

Defina-se uma condição inicial do escoamento, representada pelo índice zero:

$$\begin{aligned}\vec{v}_0(\vec{Q}) &= \vec{0}; \\ p_0(\vec{Q}) &= p_0, \text{ constante e uniforme}; \\ \rho_0(\vec{Q}) &= \rho_0, \text{ constante e uniforme}; \\ s_0(\vec{Q}) &= s_0, \text{ constante e uniforme}; \\ \vec{f}_0(\vec{Q}) &= \vec{f}_0, \text{ constante e uniforme};\end{aligned}$$

e uma condição num instante qualquer  $t$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{Q}, t) &= \vec{v}_0(\vec{Q}) + \vec{v}'(\vec{Q}, t) = \vec{v}'(\vec{Q}, t) \\ p(\vec{Q}, t) &= p_0(\vec{Q}) + p'(\vec{Q}, t) = p_0 + p'(\vec{Q}, t) \\ \rho(\vec{Q}, t) &= \rho_0(\vec{Q}) + \rho'(\vec{Q}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{Q}, t) \\ s(\vec{Q}, t) &= s_0(\vec{Q}) + s'(\vec{Q}, t) = s_0\end{aligned}$$

Considere-se que as perturbações - representadas pelo ('') - variam muito pouco, e que são válidas as hipóteses acima consideradas. Nestas condições, as equações que governam o fenômeno podem ser reescritas da forma mostrada a seguir.

A equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

nestas condições é reescrita:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho') + \text{div } (\rho_0 + \rho') \vec{v}' = 0, \quad (2.6)$$

reduzindo-se finalmente à forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0. \quad (2.7)$$

A equação da conservação da quantidade de movimento

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p + \operatorname{div} \bar{\tau}$$

por sua vez é reescrita:

$$(\rho_0 + \rho') \frac{D}{Dt} \vec{v}' = (\rho_0 + \rho') \vec{f} - \nabla(p_0 + p').$$

Nas condições iniciais de escoamento a equação da conservação da quantidade de movimento reduz-se a:

$$\rho_0 \vec{f}_0 - \nabla p_0 = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Como se supôs que a pressão inicial fosse uniforme, resulta que  $\nabla p_0 = \vec{0}$ . E portanto, é necessário que

$$\vec{f}_0 = \vec{0}.$$

Já que se supõe que as forças de campo não variam com o tempo:

$$\vec{f} = \vec{0}.$$

Finalmente, a equação da quantidade de movimento reduz-se a:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla p'. \quad (2.9)$$

Resta ainda submeter às hipóteses a equação de estado. Seja escolhida por conveniência a seguinte equação de estado daquele conjunto fornecido pela Eq. 2.2:

$$p = p(\rho, s).$$

Diferenciando a pressão nesta última expressão, resulta:

$$dp = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s d\rho + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho ds = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s_0} d\rho,$$

pois como consequência das hipóteses consideradas, a entropia não

varia. E segue que  $p$  é função apenas da densidade  $\rho$ :

$$p = p(\rho).$$

Esta última função pode ser expandida em série de Taylor em torno do estado de repouso  $\rho_0$ :

$$p = p_0 + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \left. \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right|_{\rho_0} \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2} + \dots,$$

e que pode ser melhor escrita da forma simplificada:

$$p' = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho_0, s_0) \right|_s \rho',$$

já que os termos em  $\rho$  de ordem igual ou superior a dois são desprezíveis.

Sabe-se que a velocidade de propagação ( $c_0$ ) de uma perturbação infinitesimal num meio fluido em repouso e em condições uniformes é

$$c_0 = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho_0, s_0) \right|_s} \quad \text{ou} \quad c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho_0, s_0) \right|_s.$$

Finalmente, obtém-se da equação de estado a relação:

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (2.10)$$

### 2.1.5 - Escoamento Irrotacional

Convém abrir um parêntese aqui, para mostrar que um fluido ideal cujo escoamento se inicia do repouso, situação esta que se encontra nas condições colocadas como hipóteses, é irrotacional. Das hipóteses, resultam que o tensor das tensões a que está submetido o fluido, bem como o fluxo de calor e a velocidade inicial  $\vec{v}(\vec{Q}, 0)$  são nulos.

Tomando-se a equação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p + \text{div } \vec{\tau},$$

e lembrando a relação:

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}, \quad (2.11)$$

resulta que a equação da quantidade de movimento pode ser reescrita como:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p + \text{div } \vec{\tau}. \quad (2.12)$$

Definindo-se:

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

e aplicando-se o operador rotacional (rot) à Eq. 2.12 vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} - \text{rot}(\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}) = \text{rot } \rho \vec{f} - \text{rot } \nabla p + \text{rot } \text{div } \vec{\tau}. \quad (2.13)$$

Lembrando que na situação considerada, como já foi visto,

$$\vec{f} = \vec{0},$$

e que o rotacional de um campo gradiente é nulo, resulta da Eq. 2.13 que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} - \text{rot}(\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}) = \vec{0}. \quad (2.14)$$

Considere-se agora o instante inicial  $t=0$ , quando  $\vec{v}(\vec{Q}, 0) = \vec{0}$ .

A Eq. 2.14 neste caso fica reduzida a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} \Big|_{t=0} = \vec{0}.$$

Da mesma forma, verifica-se que as derivadas parciais em relação ao tempo de  $\vec{\Omega}$  de ordens superiores no instante  $t=0$  são nulas. Para verificar isto basta diferenciar em relação a  $t$  a Eq. 2.14 o número de vezes necessário, e fazer  $t=0$ . Assim sendo, desenvolvendo o

vetor  $\vec{\zeta}$  em série de Taylor em torno de  $t=0$  vem:

$$\vec{\zeta}(\vec{Q}, t) = \vec{\zeta}(\vec{Q}, 0) + \left. \frac{\partial}{\partial t} \vec{\zeta} \right|_{t=0} t + \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\zeta} \right|_{t=0} \frac{t^2}{2} + \dots, \quad (2.15)$$

o que resulta:  $\vec{\zeta}(\vec{Q}, t) = \vec{\zeta}(\vec{Q}, 0) = \vec{0}$ .

Fechado o parêntese, só resta lembrar que um campo vetorial com rotacional nulo admite um potencial. Logo:

$$\vec{v}' = \nabla \varphi. \quad (2.16)$$

#### 2.1.6 - Apresentação da Equação de Onda

Substituindo este último resultado na Eq. 2.9 resulta:

$$\rho_0 \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) = \nabla p'. \quad (2.17)$$

Logo, conclui-se que:

$$p'(\vec{Q}, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{Q}, t). \quad (2.18)$$

Compondo-se as Eqs. 2.7, 2.10 e 2.16 resulta uma nova expressão:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} p' + \rho_0 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Esta última expressão pode ser diferenciada parcialmente em relação ao tempo, resultando:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' + \rho_0 \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0,$$

que por substituição de  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi$  dado pela Eq. 2.18 fica:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p - \nabla^2 p = 0, \quad (2.19)$$

que é a equação de onda em termos da perturbação de pressão ( $p$ ) - a partir de agora denotada sem o (').

De forma análoga obtém-se a equação de onda em termos do potencial de velocidade ( $\varphi$ ):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.20)$$

e em termos da perturbação de densidade  $\rho'$ , que também será denotada a partir de agora simplesmente por  $\rho$ :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho - \nabla^2 \rho = 0. \quad (2.21)$$

## 2.2 - Transformada da Equação de Onda - Equação de Helmholtz

Neste trabalho não se visa a obter soluções no domínio do tempo já que os problemas abordados são estacionários. Contudo, interessam as soluções no domínio do espaço e das frequências. Portanto, a aplicação da transformada de Laplace às equações básicas da onda acústica vem satisfazer essa necessidade prática.

Defina-se a transformada de Laplace ( $\mathcal{L}$ ) de uma função real  $f(\vec{Q}, t)$  dependente de uma variável  $t$  que tem um número finito de máximos e mínimos e descontinuidades como sendo:

$$\mathcal{L} [f(\vec{Q}, t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\vec{Q}, t) dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{L} [f(\vec{Q}, t)] = F(\vec{Q}, s),$$

onde  $s$  é a frequência. E a transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(\vec{Q}, s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(\vec{Q}, s) ds,$$

desde que  $\int_0^{\infty} e^{-ct} f(\vec{Q}, t) dt$  convirja absolutamente ( $\text{Re}[s] \geq c > 0$ ).

Considere-se as seguintes propriedades do operador transformada de Laplace:

- i - o operador transformada de Laplace é linear;
- ii - se  $f$  é contínua e tem derivadas de ordem 1, 2, ...,  $n$  em  $t$ , todas  $\mathcal{L}$ -transformáveis, então:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\right] = s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\right]_{t=0} s^{n-k-1}.$$

### 2.2.1 - Transformada da Equação da Quantidade de Movimento

$$p(\vec{Q}, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{Q}, t),$$

que  $\mathcal{L}$ -transformada fica pelas propriedades i e ii:

$$P(\vec{Q}, s) = -\rho_0 [s\phi(\vec{Q}, s) - \varphi(\vec{Q}, 0)].$$

Por conveniência pode-se fazer  $\varphi(\vec{Q}, 0) = 0$  sem alterar as equações acústicas, e portanto:

$$P(\vec{Q}, s) = -\rho_0 s\phi(\vec{Q}, s), \quad (2.22)$$

onde  $\phi(\vec{Q}, s) = \mathcal{L}[\varphi(\vec{Q}, t)]$  e  $P(\vec{Q}, s) = \mathcal{L}[p(\vec{Q}, t)]$ .

### 2.2.2 - Transformada da Velocidade e do Gradiente do Potencial Acústico

$$\vec{v}(\vec{Q}, t) = \nabla \varphi(\vec{Q}, t),$$

mais propriamente:

$$v_n(\vec{Q}, t) = \nabla \cdot \vec{n}[\varphi(\vec{Q}, t)] = \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\vec{Q}, t),$$

onde  $\vec{n}$  representa uma determinada direção.

$\mathcal{L}$ -transformando esta última expressão vem:

$$V_n(\vec{Q}, s) = \frac{\partial}{\partial n} \phi(\vec{Q}, s), \quad (2.23)$$

onde  $V_n(\vec{Q}, s) = \mathcal{L}[v_n(\vec{Q}, t)]$ .

### 2.2.3 - Transformada da Equação de Onda

Seja a função  $f$  que represente qualquer uma das funções:  $p, \varphi$  e  $\rho$  - só para se evitar de repetir a mesma aplicação três vezes. Assim sendo, uma forma genérica da equação de onda seria:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \nabla^2 f = 0, \quad (2.24)$$

que  $\mathcal{L}$ -transformada fica:

$$\frac{1}{c_0^2} \left[ s^2 F(\vec{Q}, s) - sf(\vec{Q}, 0) - \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{Q}, t) \Big|_{t=0} \right] - \nabla^2 F(\vec{Q}, s) = 0.$$

Sendo  $f(\vec{Q}, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{Q}, t) \Big|_{t=0} = 0$  e  $s = i\omega$ , esta última equação fica:

$$\nabla^2 F(\vec{Q}, s) + \frac{\omega^2}{c_0^2} F(\vec{Q}, s) = 0 \quad (2.25)$$

onde  $\vec{Q}$  é a posição do ponto considerado e  $\omega$  é a frequência angular.

A Eq. 2.25 denomina-se Equação de Helmholtz, que é o ponto de partida para a formulação do método da Equação Integral de Helmholtz, explicado na seção que se segue.

### 2.3 - A Equação Integral de Helmholtz

Retomando a Eq. 2.25:

$$\nabla^2 F(\vec{Q}, s) + \frac{\omega^2}{c_0^2} F(\vec{Q}, s) = 0,$$



da qual uma solução particular é (há outras):

$$u(\vec{Q}) = \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \quad , \quad (2.26)$$

onde  $r = r(P,Q)$  é a distância do ponto  $Q$  dado por  $\vec{Q}$  a um ponto fixo  $P$  qualquer,  $i$  é a raiz quadrada de  $-1$ , e  $k = \frac{\omega}{c_0}$  é o número de onda.

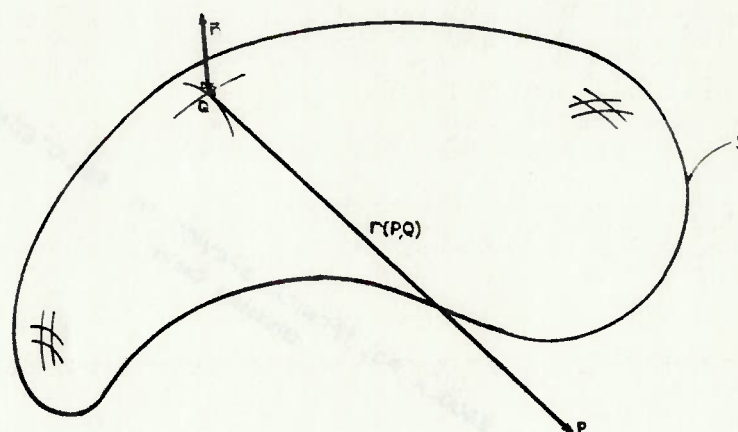


Fig.2.1. - Representação da superfície fechada  $S$ , um ponto  $Q$  pertencente a  $S$  com sua respectiva normal à superfície, e a distância entre os pontos  $Q$  e  $P$ .

Seja  $u(\vec{Q})$  a solução desejada para a Eq.2.25 com a seguinte condição de contorno  $u(\vec{Q}) = U(\vec{Q})$  para  $Q$  pertencente a uma superfície fechada  $S$ .

Considere-se a segunda forma do teorema de Green, aplicado para  $u$  e  $v$  definidas anteriormente:

$$\int_{\text{Volume}} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \int_{\text{Superfície}} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \vec{n} dS, \quad (2.27)$$

onde  $\vec{n}$  é o versor normal à superfície  $S$  apontado para a região externa ao volume  $V$  compreendido por  $S$ . Supõe-se que existam  $\nabla u$ ,  $\nabla^2 u$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla^2 v$  para qualquer  $Q \neq P$ .

Desenvolvendo-se  $u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$ , a partir de substituições feitas das seguintes equações:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c_0^2} u = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 v + \frac{\omega^2}{c_0^2} v = 0 \quad (2.28)$$

resulta que:

$$u \nabla^2 v - v \nabla^2 u = 0,$$

para qualquer  $Q$  onde se verifique as Eqs.2.28.

A aplicação da segunda forma do teorema de Green ao volume representado pela região hachurada na Fig.2.2, onde as Eqs.2.28 são válidas em todo o volume ( $V$ ), prescindindo-se dessa validade na fronteira da superfície  $S$  e em  $P = Q$ , resulta a seguinte expressão:

$$\int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.29)$$

Sendo a superfície  $S$  dada por  $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , segue que a Eq. 2.29 pode ser melhor escrita da forma:

$$\int_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (2.30)$$

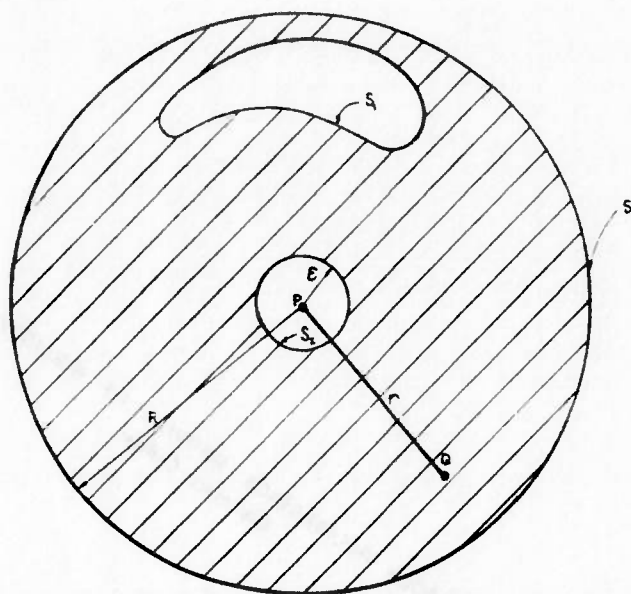


Fig. 2.2 - Representação da região do espaço ( $V$ ) limitado pela superfície  $S_1$ , a esfera de raio  $R$  e a esfera de raio  $\epsilon$ .

Substituindo  $v(P, Q) = \frac{e^{\pm ikr(P, Q)}}{r(P, Q)}$  na Eq. 2.30, e escrevendo  $\nabla \cdot \vec{n}$  como  $\frac{\partial}{\partial n}$  vem:

$$\int_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{\pm ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \right) - \frac{e^{\pm ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \frac{\partial}{\partial n} u \right] dS = 0 \quad (2.31)$$

Considere-se separadamente os seguintes limites para as integrais sobre  $S_2$  e  $S_3$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_2} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{\pm ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \right) - \frac{e^{\pm ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \frac{\partial}{\partial n} u \right] dS = C(P) u(P) ,$$

lembrando que para  $S_2$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  confunde-se com  $\frac{-\partial}{\partial r}$  ;

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_3} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) - \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial n} u \right] dS = 0 ,$$

devido à condição de radiação de Sommerfeld [7]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0 ,$$

lembrando que para  $S_3$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  confunde-se com  $\frac{\partial}{\partial r}$ .

Retornando à Eq.2.3.1, esta fica reduzida à expressão:

$$CCP) u(P) = \int_{S_1} \left[ u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) - \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) \right] dS_1 , \quad (2.32)$$

onde:  $\vec{\nu} = -\vec{n}$ ;

$CCP) = 4\pi$ , para P pertencente à região externa àquela compreendida por  $S_1$ ;

$= 2\pi$ , para P pertencente à superfície  $S_1$ ;

$= 0$ , para P pertencente à região interna àquela compreendida por  $S_1$ .

No ponto P da superfície  $S_1$  onde não existe um único plano tangente,  $CCP)$  assume uma expressão mais complexa:

$$CCP) = 4\pi + \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{1}{r(P,Q)} \right] dS . \quad (2.33)$$

Para maiores detalhes desta última expressão consulte a Ref. [5].

Como conseqüência resultam três equações integrais (Eqs.2.32) em termos da função incógnita  $u$  dada pela equação diferencial (2.24), conforme a posição do ponto P seja externa ou interna à região delimitada pela superfície  $S_1$ , ou pertencente à própria

### 3 - LEVANTAMENTO DE ALGUNS MÉTODOS

---

#### 3.1 - Introdução

O cálculo do campo acústico gerado por superfícies vibrantes, é feito por meio de métodos analíticos, exatos ou aproximados, e métodos numéricos, sendo que estes últimos se prestam em princípio para qualquer formato do corpo emissor.

Em particular, o método que emprega a equação integral de Helmholtz para determinar o campo acústico é versátil quanto ao formato do corpo, e ainda, permite simplificações para a aplicação em alta ou baixa frequência. Esta forma de se calcular campos

acústicos ou, generalizando, quaisquer equações diferenciais parciais a condições de contorno de comportamento semelhante ao do fenómeno acústico, têm um emprego recente justificado pelo desenvolvimento das técnicas de computação digital. Portanto, graças à evolução do uso do computador digital e da sua versatilidade, esse método mais geral para o cálculo do campo acústico aparece na literatura. Todavia, perdem em praticidade para os métodos analíticos clássicos, onde, obviamente, estes se aplicarem.

Ao longo dos últimos trinta anos tem-se empregado a equação integral de Helmholtz na determinação de campo acústico de uma maneira gradual, o que tem levado ao seu aperfeiçoamento. Nesta revisão bibliográfica, disposta em ordem crescente de data de publicação, nota-se perfeitamente essa evolução.

### 3.2 - Apresentação dos Métodos segundo seus Autores

Horton e Innis [9], em 1961, fizeram uma análise de dois métodos para calcular a radiação acústica a partir da medição da pressão sonora sobre uma superfície  $S$  fechada contendo a fonte. Um desses métodos envolve o uso de funções de Green e fornece dois casos, de acordo com a particular função de Green que é usada. A fórmula de Helmholtz, que resulta quando se usa a função de Green da forma  $e^{ikr}/r$ , requer o conhecimento do gradiente de pressões normal  $\partial p/\partial n$  sobre a superfície  $S$ , além da própria pressão  $p$ , mas leva a uma fórmula que é relativamente fácil de avaliar. Discutem uma aproximação para  $\partial p/\partial n$ . Se, ao invés, se empregar aquela

função de Green que se anula sobre a superfície S, pode-se avaliar a pressão no campo ao longe, em termos de medições feitas sobre S. A fórmula resultante é algo mais complicada que a outra, contudo não necessita do conhecimento de  $\partial p / \partial n$ , e de qualquer modo, é necessário avaliar numericamente uma integral de superfície.

Chen e Schweikert [10], em 1963, apresentaram um método para a avaliação do campo acústico gerado por corpos que vibram num meio fluido infinito. A variação deste método está no fato de que o campo acústico é determinado a partir do conhecimento da distribuição  $\sigma$  de fontes acústicas sobre a superfície do corpo. Em princípio esta distribuição  $\sigma$  é desconhecida, e se apresenta na forma de um conjunto de equações integrais. Esta formulação permite avaliar o campo acústico produzido por um corpo elástico conhecendo-se apenas as solicitações dinâmicas sobre o corpo e considerando as reações do fluido nele. Caso se conheça a distribuição de velocidade na superfície do corpo, a formulação fica bem mais simples. Por fim, os autores sugerem para a solução da equação integral resultante a discretização da superfície do corpo em elementos triangulares planos com distribuição de fonte constante sobre eles, o que transforma a equação integral num sistema algébrico de equações. A solução desse sistema permite a determinação do campo acústico em qualquer ponto através da avaliação numérica da integral  $\int_S \frac{\sigma e^{ikr}}{r} dS$  sobre o corpo emissor.

Chertock [11], num artigo de 1964, parte da equação integral de Helmholtz para apresentar o seu método de avaliar o campo acústico provocado por superfícies vibrantes. Repara que com a

equação integral de Helmholtz, conhecida a velocidade de distribuição normal, a determinação do campo acústico em qualquer ponto do meio fluido é possível, desde que se conheça também a distribuição de pressão sobre a superfície do corpo. Verifica que em caso de alta frequência, baixa frequência ou superfícies de formato particular é possível estimar a distribuição de pressão sobre a superfície com precisão suficiente, e portanto, reduzindo o cálculo do campo acústico num ponto à simples avaliação numérica de uma integral sobre a superfície do corpo. Para o caso geral, a distribuição de pressão na superfície pode ser obtida resolvendo-se a equação de Helmholtz superficial. Chertock detalha a obtenção da distribuição de pressão por tal equação para o caso específico de um corpo de revolução com uma distribuição de velocidade da forma  $v_0 \psi(x) \cos m\eta$ , onde  $x$  é a coordenada do eixo de revolução,  $\eta$  é a coordenada angular,  $\psi(x)$  é uma função adimensional arbitrária e  $v_0$  é a amplitude da velocidade. Neste caso, a avaliação da integral de superfície se reduz à avaliação de uma integral de linha. Chertock propõe a divisão do domínio dessa integral em outros menores, fazendo com que os valores incógnitos das extremidades de cada um desses novos domínios correspondam a pontos da interpolação polinomial de que se serve para aproximar a função desconhecida sobre a superfície emissora. Daí resulta um sistema de equações algébricas cuja solução permite determinar aproximadamente a distribuição de pressão sobre a superfície do corpo. A avaliação do campo acústico em qualquer ponto pode então ser feita através da própria equação integral de



Helmholtz. Para a computação do campo acústico ao longe, Chertock sugere uma simplificação na equação integral de Helmholtz da qual obtém uma expressão analítica para superfícies de revolução que pode ser facilmente empregada até com o auxílio de uma máquina de calcular.

Copley [12], num artigo de 1967, parte do fato de que o problema acústico deve ser resolvido juntamente com o problema dinâmico do corpo emissor. As distribuições de pressão e velocidade sobre a superfície do corpo emissor podem ser encontradas a partir de duas relações, uma acústica e a outra dinâmica, já que os dois fenômenos não são independentes. Copley faz referência a dois casos degenerados da relação dinâmica: um em que a distribuição de velocidade está especificada, e outro, em que a distribuição de pressão é que está especificada. Pois, é a eles que o seu método é destinado. O método proposto por Copley utiliza a equação integral de Helmholtz como relação acústica. Faz distinção entre a equação integral de Helmholtz superficial e interna, às quais denomina primeira e segunda equação, respectivamente. Apesar de genérico, o método é aplicado a corpos de superfície de revolução. As simplificações resultantes são apresentadas. Diferentemente de Chertock, Copley não supõe uma distribuição simétrica nessa simplificação. Na aplicação numérica, a equação integral é transformada num sistema de equações algébricas em termos de valores, a princípio desconhecidos, correspondentes aos pontos de uma malha definida na curva geratriz da superfície de revolução. Esses valores resultam do fato de se

assumir uma interpolação linear para a função desconhecida entre dois pontos consecutivos da malha. Ao contrário dos métodos vistos até aqui que se utilizam da equação integral de Helmholtz superficial (Eq.2.36) para determinar a distribuição de pressão sobre a superfície, Copley se utiliza da equação integral de Helmholtz interna (Eq.2.35), e assim evita problemas na avaliação de integrais cujo integrando apresenta uma singularidade. Contudo, Copley levanta uma dúvida quanto à garantia de solução única para a equação integral de Helmholtz em qualquer ponto interno considerado sobre o eixo de simetria do corpo emissor.

O mesmo Copley [3], num outro artigo de 1968, faz um estudo do problema decorrente do uso das equações integrais, especificamente para a equação integral de Helmholtz e para o método de fonte simples proposto por Chen e Schweikert [10]. Neste estudo, Copley mostra que a equação integral superficial não tem solução única, e que o método de fonte simples tem solução inexistente para aquelas frequências correspondentes às auto-frequências do problema de Dirichlet associado à região interna delimitada pela superfície do corpo emissor.

Copley, portanto, mostrou a limitação da equação integral de Helmholtz superficial, bem como da interna. Schenck [2], num artigo de 1968, propôs um método que vem a ser a combinação das equações integrais de Helmholtz superficial e interna, o qual supera as deficiências da equação superficial com relação à singularidade no integrando e à não-unicidade de solução e as características computacionais indesejáveis da equação interna,

pois a matriz dos coeficientes tem seus elementos sempre menores à medida que se reduz o tamanho dos elementos da malha. Essas características computacionais indesejáveis desta última equação nada mais são do que o efeito do refinamento da discretização da superfície do corpo com a finalidade de transformar a equação integral num sistema de equações algébricas, o que faz com que a matriz dos coeficientes desse último tenda à matriz singular, que em termos computacionais significa uma perda de precisão. O método CHIEF ("Combined Helmholtz Integral Equation Formulation") proposto por Schenck consiste num modo prático de se encontrar a solução única que satisfaça ambas as equações integrais, a superficial e a interna, para utilizá-la na equação integral de Helmholtz externa, e obter a grandeza acústica procurada em qualquer ponto do meio que circunda o corpo emissor. O método é implementado utilizando-se as equações integrais superficiais e internas nas suas formas discretas, ambas com o mesmo número de incógnitas  $N$ , mas com números de equações distintos,  $N$  para a superficial e  $K$  para a interna. Resulta, então, um sistema de equações sobre-determinado de  $N+K$  equações a  $N$  incógnitas. Procura-se que  $K$  seja pequeno, para assim preservar as boas características numéricas dos sistema proveniente da equação integral superficial. Schenck mostra através de aplicações a significativa melhora em relação aos demais métodos quando se trabalha próximo às frequências características.

Engblom e Nelson [13], em 1975, apresentaram um método eficiente e mais refinado para o cálculo do campo acústico. A

inovação proposta por eles está em aproximar por um polinômio quadrático as grandezas acústicas sobre o elemento de superfície resultante da discretização. Até então as grandezas acústicas eram consideradas constantes em cada elemento. Isto veio a aumentar a eficiência dos métodos que empregam a equação integral de Helmholtz discretizada, pois aumenta a precisão do método ou diminui o número de elementos na discretização da superfície do corpo para uma mesma precisão.

Piaszczyk e Klosner [14], num artigo de 1984, propõem um método capaz de superar os problemas de não unicidade da solução para as equações integrais de Helmholtz, superficial e interna, nas frequências características associadas ao problema de Dirichlet na região interna à superfície emissora. Para tanto fazem uso de um método iterativo que consiste primeiro em discretizar a equação integral de Helmholtz superficial. Se a frequência não for característica o sistema de equações algébricas pode ser resolvido diretamente, fornecendo os valores da grandeza acústica nos pontos nodais da superfície discretizada. Por outro lado, se a frequência for característica, não há solução direta possível para o sistema; é aí, então, que o método inova, pois assume-se uma impedância sobre toda a superfície emissora, da qual se obtém uma primeira aproximação do campo acústico ao longe. Com o valor aproximado do campo acústico ao longe, obtém-se, a partir da equação integral de Helmholtz externa, um número  $K$  de equações algébricas em termos da grandeza acústica desconhecida sobre a superfície do corpo, as quais adicionadas ao sistema de  $N$  equações

algébricas a  $N$  incógnitas resultam num sistema  $(N+K) \times N$  sobre-determinado, cuja solução permite recalcular o campo acústico nos mesmos pontos externos de antes e remontar o sistema sobre-determinado que fornece uma nova aproximação para os valores da grandeza acústica desconhecida sobre a superfície. O processo é então repetido sucessivamente até se obter uma convergência para esses valores na superfície do corpo. Finalmente, com esses valores obtêm-se a grandeza acústica em qualquer ponto através da equação integral de Helmholtz externa. Em relação ao CHIEF, o método de Piaszczyk e Klosner exige mais tempo de computação, pois é iterativo.

Seybert, Soenarko, Rizzo e Shippy [15], num artigo de 1984, melhoram a eficiência dos métodos existentes até então, não pelo lado das frequências características, mas pela forma de se discretizar a superfície do corpo emissor. Da evolução dos métodos aplicativos que se utilizam das equações integrais de Helmholtz nota-se que a maneira de discretizar essa superfície emissora sofreu constante evolução, começando pelos elementos triangulares planos com grandeza constante, passando depois a elementos triangulares planos com variação linear, quadrática, e então a elementos isoparamétricos, que são capazes de representar mais fielmente a distribuição da grandeza acústica sobre a superfície, e a própria superfície. Em particular, utilizam elementos isoparamétricos triangulares ou retangulares de segunda ordem para corpos não simétricos, e elementos isoparamétricos lineares de segunda ordem para corpos axi-simétricos. A melhoria da precisão

para um mesmo número de elementos é nítida, bem como a redução do número de elementos necessários para uma mesma precisão. Uma novidade apresentada consiste de uma formulação prevendo superfícies receptoras, além das emissoras, ou apenas receptora.

Jiang e Prasad [17], em 1986, descreveram a aplicação do método de elementos de contorno (MEC) na avaliação do campo acústico de vários tipos de estruturas vibrantes. Para esclarecer, a formulação do MEC aplicada à acústica está fundamentada nas equações integrais de Helmholtz. Dos seus estudos a respeito do MEC empregado à acústica, Jiang e Prasad indicaram que o tamanho dos elementos que discretizam a superfície e o seu número têm um efeito significativo nos resultados obtidos. Os estudos mostraram que se obtêm resultados muito bons quando a maior dimensão do elemento é igual a 0.2 vezes o comprimento de onda no ar.

Seybert e Rengarajan [4], em 1987, realizaram um estudo concernente ao problema de se obter solução única para a radiação e espalhamento acústicos em frequências características, quando a equação integral de Helmholtz é empregada. Eles mostraram que o CHIEF é válido sempre que ao menos um dos pontos para a equação integral de Helmholtz não coincida com uma das superfícies nodais correspondentes às auto-frequências do problema de Dirichlet interno, mesmo que um número grande desses pontos encontre-se sobre tais superfícies. Comparam o CHIEF à formulação denominada gradiente de Helmholtz na situação em que ambos têm de superar o problema de não-unicidade da solução, e encontraram que aquele fornece uma solução mais precisa. Seybert e Rengarajan sugeriram

um método para indicar o erro da solução quando se usam métodos que envolvem equações integrais, com ou sem técnicas que contornem o problema de não-unicidade. Este procedimento utiliza-se do valor do potencial de velocidade em um ponto interno como indicador de erro da solução. Em todos os casos analisados, o potencial interno indicou corretamente uma boa ou má solução; enquanto o outro indicador proposto, o número de condição da matriz dos coeficientes, indicou erroneamente, em muitos casos, uma má solução.

SEYBERT et al. [16], num artigo de 1986, apresentam uma formulação de elementos de contorno para problemas de emissão acústica com dupla axi-simetria: axi-simetria do próprio formato do corpo, como do modo de vibrar da superfície (condição de contorno). Esta abordagem reduz a integral de superfície a uma integral de linha sobre a geratriz, pois as integrais ao longo do ângulo de revolução são somas de integrais elípticas de primeira ou segunda espécie, cujas soluções possuem fórmulas aproximadas muito boas, com integrais não singulares fáceis de serem avaliadas pelo método de integração de Gauss. Na integração ao longo da geratriz empregam elementos isoparamétricos quadráticos com valores nodais desconhecidos. Obtêm um sistema de equações algébricas lineares em termos dos valores nodais resultantes da discretização da geratriz em elementos. Este sistema de equações decorre do emprego da própria EIH. Por fim, empregam o método na avaliação do espalhamento acústico resultante da incidência de ondas sonoras em esferas, e da emissão acústica de um cilindro

finito. Tal abordagem reduz sobremaneira o número de elementos necessários à discretização, para uma mesma precisão de solução.

Seybert e Rengarajan [5], em 1987, observaram que o intervalo entre frequências características sucessivas diminui com o incremento da frequência, o que torna difícil de se obter uma boa solução para a equação integral de Helmholtz a altas frequências. Desta forma, levando-se em conta que existem vários modos aproximados à alta frequência que dão bons resultados, os dois sugeriram substituir as equações integrais de Helmholtz superficial e interna, tão empregadas para determinar a distribuição superficial da grandeza acústica procurada, por uma relação algébrica para a impedância acústica que a altas frequências é aproximadamente válida sobre a superfície do corpo. O valor externo da grandeza é então calculado através da equação de Helmholtz externa. Substituindo as equações integrais de Helmholtz superficial e interna pela relação algébrica, evitam-se dois problemas: a necessidade de avaliar integrais singulares, e o problema de não-unicidade de solução para as frequências características.

Os quadros das Figs.3.1 e 3.2 resumem os métodos apresentados.

### 3.3 - O Método mais Promissor

Como os computadores continuam a evoluir em termos de capacidade de armazenamento e velocidade de processamento, as limitações na utilização das EIH com abordagem do Método de



Elementos de Contorno (MEC) ficam mais além. Daí, a viabilização da solução de problemas de emissão acústica genéricos, ou seja, com formatos e modos de vibrar da superfície quaisquer, tornar-se um fato. A abordagem pelo MEC é plenamente satisfatória para problemas genéricos, além de ser versátil, pois permite escolher um tipo de elemento que mais se ajuste ao formato e às condições de contorno da superfície. Quanto à inexistência de solução única para as EIH superficial e interna em frequências correspondentes aos auto-valores do problema de Dirichlet interno, os estudos até aqui realizados mostram que não há com que se preocupar, pois há simplificações razoáveis a baixa e alta frequências; e a média frequência, o próprio CHIEF mostra-se capaz de superar com sucesso tal inconveniente.

ANO	AUTOR(ES)	EIH	FORMATO DE CORPO	OBTENÇÃO C. ACÚSTICO SUPERFICIAL	DISCRETIZ. DA SUPERFÍCIE	VARIAÇÃO DA GRAND. ACÚST SUPERFICIAL	METODO APLICADO A:	HA INTERAÇ. CORPO-FLUIDO?	
1961	HORTON & INNIS	externa	esferóides	≈ 1kp	—	qualquer	hidrofone linear	não	
1963	CHEN & SCHWEIKERT	distribuiç. de fontes acústicas	nenhum	distribuiç. de fontes acústicas	elementos trianguls. planos	uniforme no elemento	pistão fixo esfera rígida, casca cilíndrica na água	sim	
1964	CHERTOCK	externa/ interna	axi-simetr.	EIH superf.	pontos ao longo da geratriz	vq(x) cos α	esfera oscilante, esferóide quadripolar	não	
1966	COPLEY	externa/ superficial / interna	axi-simetr.	EIH interna	elementos lineares (rudimentares)	ao longo do eixo de simetria	esferóide, cilindro finito	não	
1967	COPLEY	externa/ superficial / interna	apresenta a inexistência de solução única para EIH superficial em frequências características						
1967	SCHENCK	externa/ superficial / interna	não há	EIH superf. e interna (CHIEF)	elementos	uniforme no elemento	esfera pulsante, cil. finito, paralelepípedos	não	
1975	ENGBLOM & NELSON	externa/ superficial / interna	não há	EIH superf. e interna (CHIEF)	elementos trianguls. lineares planos	qualquer	cilindro finito, esfera	sim	

Fig.3.1: Evolução cronológica do emprego das equações integrais de Helmholtz (EIH) - Parte 1

ANO	AUTOR(ES)	EIH	FORMATO DE CORPO	OBTENÇÃO C. ACÚSTICO SUPERFICIAL	DISCRETIZ. DA SUPERFÍCIE	VARIAÇÃO DA GRAND. ACÚST SUPERFICIAL	MÉTODO APLICADO A:	HA INTERAÇ. CORPO-FLUIDO?
1983	PIASZCZYK & KLOSNER	externa/ superficial /interna	axi-simetr.	EIH superf. e externa	elementos	uniforme no elemento	cilindro finito	sim
1984	SEYBERT, SOENARKO RIZZO & SHIPPY	externa/ superficial /interna	não há	EIH superf.	elementos isoparamet. quadráticos	qualquer	esferas pulsante e oscilante, cubo puls.	não
1986	JIANG & PRASAD	externa/ superficial /interna	não há	EIH superf.	elementos planos	uniforme no elemento	pistão num abafador infinito e barras	não
1986	SEYBERT & RENGARAJAN	externa/ superficial /interna	axi-simetr.	EIH superf. e interna (CHIEF)	elementos isoparamet. quadráticos	ao longo do eixo de simetria	esfera pulsante e cil. finito	não
1986	SEYBERT & RENGARAJAN	externa/ superficial /interna	axi-simetr.	EIH superf. e interna (CHIEF)	elementos isoparamet. quadráticos	ao longo do eixo de simetria	cilindro finito	não

Fig.3.2: Evolução cronológica do emprego das equações integrais de Helmholtz (EIH) - Parte 2

## 4 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE HELMHOLTZ PARA UMA ESFERA PULSANTE

---

### 4.1 - Introdução

À primeira vista, pode-se suspeitar da confiabilidade da Equação Integral de Helmholtz (EIH), perguntando-se da sua validade: será que as soluções da EIH representam de fato a solução da Equação de Onda Acústica? Os problemas com a solução das EIH superficial e interna, como apontados nos Apêndices B e C, ocorrem de fato? Considerando o próprio desenvolvimento algébrico das EIH e dos Apêndices B e C, pode-se responder que sim. Contudo, a ilustração através da solução analítica da EIH para uma Esfera Pulsante permitirá visualizar e compreender os problemas dela

decorrentes, além de atestar sua validade.

#### 4.2 - A Equação Integral de Helmholtz para uma Esfera Pulsante

De início, considere-se a esfera pulsante representada na Fig.4.1. Esfera de raio  $a$  pulsando com uma distribuição de velocidade normal à superfície dada por:  $v(a) = v$ .

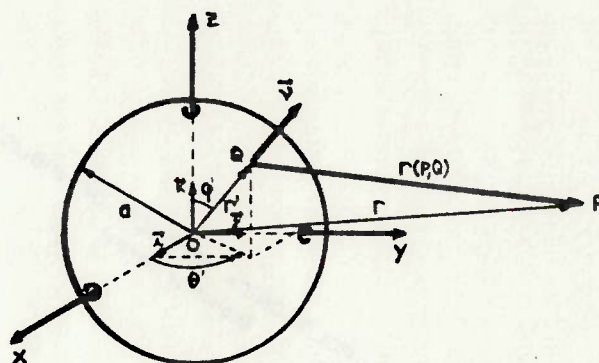


Fig.4.1 - Esfera pulsante de raio  $a$ .

Sabe-se que a solução de um campo acústico de pressão para uma esfera pulsante é da forma:

$$p(r) = \frac{a}{r} \frac{iz_0 vka}{i+ika} e^{-ik(r-a)}, \quad (4.1)$$

onde  $z_0$  é a impedância acústica do meio.

Resta mostrar, então, que a solução analítica das EIH resulta na própria expressão da Eq.4.1.

Para a obtenção da solução analítica das EIH aplicadas à esfera pulsante, é necessário fazer uso de coordenadas esféricas.

Seguindo a Fig. 4.1, tem-se:

$$\vec{v} = \text{sen}\varphi \text{cos}\theta \vec{i} + \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \vec{j} + \text{cos}\varphi \vec{k} \quad (4.2)$$

$$\nabla = \vec{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\vec{\theta}}{r \text{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.3)$$

onde:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{v} \\ \vec{\phi} = \text{cos}\varphi \text{cos}\theta \vec{i} + \text{cos}\varphi \text{sen}\theta \vec{j} - \text{sen}\varphi \vec{k} \\ \vec{\theta} = -\text{sen}\varphi \text{sen}\theta \vec{i} + \text{sen}\varphi \text{cos}\theta \vec{j} \end{cases} \quad (4.4)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.5)$$

A distância entre os pontos P e Q é  $r(P, Q) = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , com  $\vec{r} = \vec{OP}$  e  $\vec{r}' = \vec{OQ}$ . Isto permite escrever [8]:

$$\frac{e^{-ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -i4\pi k \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_<) h_l^{(2)}(kr_>) \cdot \sum_{m=-l}^l y_{lm}(\theta', \varphi') y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad (4.6)$$

onde:

$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x)$ , é a função de Hankel de 2<sup>a</sup> espécie de ordem  $l$ ;

$y_{lm}$  é o harmônico esférico;

$$y_{lm}^* = (-1)^m y_{l, -m};$$

$j_l(x)$  é a função de Bessel de 1<sup>a</sup> espécie de ordem  $l$ ;

$n_l(x)$  é a função de Neumann de ordem  $l$ ;

$$r_< = \text{mín}(r, r');$$

$$r_> = \text{máx}(r, r').$$

Considerando, agora, a EIH em termos de pressão acústica:

$$\mathbb{C}(P)p(P) = \int_S \left[ p(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{-ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \right) - \frac{e^{-ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} p(Q) \right] dS. \quad (4.7)$$

Fazendo a substituição das Eqs. 4.5 e 4.6 na Eq. 4.7, e notando que neste caso (esfera pulsante)  $p(P) = p(r)$  e  $p(Q) = p(r')$ :

$$\begin{aligned} C(r)p(r) = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ p(\omega)(-14\pi k) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[ j_l(kr) h_l^{(2)}(kr) \right]_{r'=a} \sum_{m=-l}^l y_{lm}(\theta', \varphi') y_{lm}^*(\theta, \varphi) - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial}{\partial r}, p(r') \right]_{r'=a} \cdot (-14\pi k) \sum_{l=0}^{\infty} \left[ j_l(kr) h_l^{(2)}(kr) \right] \sum_{m=-l}^l y_{lm}(\theta', \varphi') y_{lm}^*(\theta, \varphi) \right\} \\ & \cdot a^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lembrando que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y_{l,m}(\theta, \varphi) y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \sqrt{4\pi} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.9)$$

$$e \quad y_{00}(\theta, \varphi) = y_{00}^*(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (4.10)$$

vem:

$$\begin{aligned} C(r)p(r) = & -14\pi k a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \left[ p(\omega) \frac{\partial}{\partial r} \left[ j_l(kr) h_l^{(2)}(kr) \right]_{r'=a} - \left[ \frac{\partial}{\partial r}, p(r') \right]_{r'=a} \right. \\ & \left. \cdot \left[ j_l(kr) h_l^{(2)}(kr) \right] \sum_{m=-l}^l y_{lm}^*(\theta, \varphi) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi y_{lm}(\theta', \varphi') \sin\theta' d\theta' d\varphi' \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sendo:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y_{lm}(\theta', \varphi') \sin\theta' d\theta' d\varphi' = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad (4.12)$$

$$j_0(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{12x}, \quad (4.13)$$

$$n_0(x) = \frac{-e^{ix} - e^{-ix}}{2x}, \quad (4.14)$$

$$h_0(x) = \frac{1e^{-ix}}{x}, \quad (4.15)$$

e, para a esfera pulsante:

$$\frac{\partial}{\partial r'} p(r') \Big|_{r'=a} = -i\rho_0 \omega v, \quad (4.16)$$

resulta finalmente:

$$\begin{aligned} C(r)p(r) = & -i4\pi k a^2 \left\{ p(a) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2kr} \cdot \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]_{r'=a} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial}{\partial r} p(r') \right)_{r'=a} \left[ \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2kr} \cdot \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]_{r'=a} \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A Eq. 4.17 é a expressão final da EIH para uma esfera pulsante de raio  $a$ . A seguir serão apresentados, brevemente, o desenvolvimento da obtenção da solução analítica para cada uma das EIH: superficial, interna e externa.

#### 4.3 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Superficial

Para a solução da EIH superficial deve-se ter em conta o seguinte:  $C(r) = 2\pi$  e  $r_< = r_> = r = r'$ . Qual dos dois ( $r$  ou  $r'$ ), portanto, será substituído por  $r_<$  e  $r_>$ ? Para evitar tal inconveniente, considere-se a seguinte propriedade [3]:

$$\int_S p(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS = \int_S p(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P^+,Q)}}{r(P^+,Q)} \right] dS - 2\pi p(P), \quad (4.18)$$

onde  $P$  e  $Q$  pertencem à superfície  $S$ , enquanto que  $P^+$  representa um ponto externo à superfície  $S$  que no limite tende ao ponto  $P$ :

$$\lim_{P^+ \rightarrow P} r(P, P^+) = 0. \quad (4.19)$$

Combinando-se as Eqs. 4.7 e 4.18, resulta esta nova:

$$4\pi p(P) = \int_S \left[ p(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P^+,Q)}}{r(P^+,Q)} \right] - \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} p(Q) \right] dS. \quad (4.20)$$

Note-se que a Eq. 4.20 é, no caso da esfera pulsante, representada pela própria Eq. 4.17. Todavia, o inconveniente de se escolher  $r$  ou  $r'$  para  $r_<$  e  $r_>$  desaparece, e a solução torna-se possível. A



Eq. 4.17, neste caso, fica:

$$p(a) = -ika^2 \left\{ p(a) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{ikr'} - e^{-ikr'}}{2kr'} \cdot \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]_{r'=a} + \right. \\ \left. + i \frac{z_0 v}{a} \frac{e^{-ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)}}{2kr} \right\}, \quad (4.21)$$

cuja solução é:

$$p(a) = iz_0 v \frac{ka}{1+ika}, \quad (4.22)$$

onde  $z_0 = \rho_0 c$  é a impedância acústica do meio.

#### 4.4 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Interna

Para a solução analítica da EIH interna deve-se ter em conta o seguinte:  $C(r) = 0$ ,  $r_1 = r$  e  $r_2 = r'$ . A Eq. 4.17, neste caso, fica:

$$-14\pi ka^2 \left\{ p(a) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2kr} \cdot \frac{e^{-ikr'}}{kr'} \right]_{r'=a} + \right. \\ \left. + i \frac{z_0 v}{a} \frac{e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)}}{2kr} \right\} = 0, \quad (4.23)$$

cuja solução é:

$$p(a) = iz_0 v \frac{ka}{1+ika}. \quad (4.24)$$

#### 4.5 - Solução da Equação Integral de Helmholtz Externa

Para a solução analítica da EIH externa deve-se ter em conta que:  $C(r) = 4\pi$ ,  $r_1 = r'$  e  $r_2 = r$ . A Eq. 4.17, neste caso, fica:

$$p(r) = -ika^2 \left\{ iz_0 v \frac{ka}{1+ika} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{ikr'} - e^{-ikr'}}{2kr'} \cdot \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]_{r'=a} + \right. \\ \left. + i \frac{z_0 v}{a} \frac{e^{-ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)}}{2kr} \right\}, \quad (4.25)$$

cuja solução é:

$$p(r) = \frac{a}{r} \frac{iz_0 v ka}{1+ika} e^{-ik(r-a)}. \quad (4.26)$$

#### 4.6 - Comparação

Dos resultados obtidos verifica-se que tanto a solução analítica da EIH superficial, como da interna, fornecem a solução do campo de pressão acústica sobre a superfície da esfera e ambas, por sinal, são idênticas à expressão obtida para  $p(\alpha)$ , através da Eq.4.1. Além disto, a solução analítica da EIH externa, única entre as três que fornece uma expressão para o campo acústico em pontos externos, apresenta-se idêntica à Eq.4.1. Com isto, foi possível mostrar a validade do emprego das EIH na obtenção da solução da Equação de Onda.

A seguir serão determinadas as frequências características da EIH superficial, utilizando-se o resultado do Apêndice B. Depois, então, será mostrado, através do exemplo da esfera pulsante, que verdadeiramente nessas frequências a EIH superficial não apresenta solução única, conforme o Apêndice B. Também será mostrado, através do mesmo exemplo, que a solução da EIH interna não é única para frequências características, quando o ponto interno escolhido coincide com uma superfície nodal do problema de Dirichlet interno, como apontam os resultados do Apêndice C.

#### 4.7 - Determinação das Frequências Características

Para determinar as frequências características é necessário considerar o problema de Dirichlet interno aplicado à Equação de Helmholtz, em termos de pressão acústica, por exemplo:

$$\nabla^2 p(P, \omega) + k^2 p(P, \omega) = 0, \quad (4.27.a)$$

com:  $p(P, \omega) = 0,$  (4.27.b)

sobre a superfície da esfera.

A solução deste problema fica simples de se obter empregando coordenadas esféricas à Eq. 4.27.a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sene} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \operatorname{sene} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} p \right] \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} p + k^2 p = 0. \quad (4.28)$$

Fazendo a seguinte separação de variáveis:

$$p(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, m} f_l(r) y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.29)$$

onde  $y_{lm}$  são harmônicos esféricos, resulta a seguinte equação em termos de  $f_l(r)$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} f_l(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} f_l(r) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = 0, \quad (4.30)$$

cuja solução é:

$$f_l(r) = C_1 j_l(kr) + C_2 n_l(kr), \quad (4.31)$$

com:

$$j_l(x) = \left[ \frac{\pi}{2x} \right]^{1/2} J_{l+1/2}(x) \quad (4.32.a)$$

$$e \quad n_l(x) = \left[ \frac{\pi}{2x} \right]^{1/2} N_{l+1/2}(x). \quad (4.32.b)$$

No caso particular da esfera pulsante, em que  $p$  não varia angularmente,  $l(l+1)$  é nulo, donde se conclui que a solução da Eq. 4.30 é:

$$f_0(r) = C_1 j_0(kr) + C_2 n_0(kr). \quad (4.33)$$

De que  $p(r, \theta, \varphi)$  é limitada no interior da esfera pulsante, e da condição dada pela Eq. 27.b, resulta a condição para os auto-valores do problema de Dirichlet interno:

$$j_0(k_n a) = 0. \quad (4.34)$$

Logo, os auto-valores são da forma:

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4.35)$$

Do Apêndice B conclui-se que os auto-valores  $k_n$  são os valores característicos da EIH superficial. Logo, pelo TEOREMA 1 do Apêndice A, a EIH superficial não possui solução única quando a frequência for igual a um múltiplo de  $c/2a$ . Para se comprovar isto, deve-se considerar o desenvolvimento para obtenção da solução analítica da EIH superficial, em particular a seguinte passagem, que no caso foi omitida:

$$\frac{P}{ka} (1 - e^{-ika})(z_0 v - ka + 1) = 0, \quad (4.36)$$

onde se assumiu que:

$$1 - e^{-ika} \neq 0. \quad (4.37)$$

Contudo, para valores de  $k=k_n$ , tal desigualdade não é verificada, ou seja, não existe solução única para a EIH superficial quando se tem valores característicos.

Este resultado confirma a validade do TEOREMA 1, e além disso indica o motivo da inexistência da solução única: "divisão por zero".

#### 4.8 - Comprovação da Falha da Equação Integral de Helmholtz Interna

Foi mostrado no Apêndice C que a EIH interna não apresenta solução única quando o ponto P escolhido coincide com uma superfície nodal do problema de Dirichlet interno. Pode-se verificar isto por meio do exemplo da Esfera Pulsante, onde a condição imposta pela Eq.C.4 para inexistência de solução única traduz-se em:

$$J_0(k_m r) = 0, \quad (4.38)$$

o que equivale a dizer que não existe solução única para a EIH interna aplicada à Esfera Pulsante quando  $k_m r = n\pi$  ( $n=0,1,2,3,\dots$ ), ou ainda, levando-se em conta  $k_m = \frac{m\pi}{a}$ , quando  $r = a \frac{n}{m}$  ( $m > n$ ).

Afim de confirmar este último resultado, considere-se o desenvolvimento para obtenção da solução da pressão acústica superficial através da EIH interna. Nele observa-se uma passagem que, no caso, também foi omitida:

$$\left( e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)} \right) \left[ ikz_0 v - p(\alpha) \frac{(1+ik\alpha)}{a} \right] = 0, \quad (4.39)$$

onde se assumiu que:

$$e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)} \neq 0. \quad (4.40)$$

Note-se que para valores de  $kr = n\pi$  ( $n=0,1,2,3,\dots$ ), tal desigualdade não se verifica, ou seja, não existe solução única para a EIH interna quando o produto  $kr$  for múltiplo de  $\pi$ , observando que  $k$  não é necessariamente característico, sendo este último resultado, portanto, mais abrangente em termos de não unicidade de solução, que aquele fornecido pelo Apêndice C. Estaria, portanto, errada a demonstração obtida no Apêndice C para identificar as condições de não existência de solução única para a EIH interna? A resposta é negativa, pois nada impede que haja uma outra solução para a condição do TEOREMA 3 - Eq.A.20 -, sem contudo, implicar em<sup>1</sup>  $u(Q) = 0$ , conforme o mesmo Teorema do Apêndice A. É isto o que ocorre com a Esfera Pulsante quando se

---

1 - Se duas funções, classe  $\mathcal{L}^2$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  são iguais para todos os valores de  $t$ , isto é, exceto para o conjunto de valores de  $t$  de medida de Lebesgue nula,  $x(t)$  e  $y(t)$  são ditas equivalentes, e denota-se:  $x(t) = {}^0y(t)$ . Se  $x(t) = {}^00$ , então  $x(t)$  é dita uma função nula.

lhe aplica essa mesma condição. Tal condição fica, então:

$$p(a) \frac{(1-ika)(e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r+a)})}{2k^2 r a^2} = 0, \quad (4.41)$$

para a qual, quando  $k\pi = nk$  ( $n=0,1,2,3,\dots$ ), não se tem necessariamente  $p(a)=0$ , o que, pelo TEOREMA 3, não implica em solução única para a EIH interna.

Portanto, a condição de unicidade de solução apontada pelo Apêndice C para a EIH interna não abrange todas as condições possíveis<sup>2</sup>. Contudo, fornece condições com as quais se tem certeza de não unicidade da solução.

---

2 - para chegar às demais condições deve-se procurar soluções para a Eq. A.20 tais que não verifiquem  $u(0) = 0$ .

## 5 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE HELMHOLTZ PELO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO, CONSIDERANDO DUPLA AXI-SIMETRIA

---

### 5.1 - Introdução

No Cap. 2 foram apresentadas as três equações integrais de Helmholtz (EIH), Eq.2.32. Neste, será apresentada uma formulação para resolver tais equações, que provém do método de elementos de contorno (MEC). Por questão de simplicidade, optou-se pela formulação axi-simétrica, ou seja, será suposto um corpo elástico axi-simétrico com condições de contorno também axi-simétricas. Contudo, tal simplificação não compromete a análise geral do método, pelo contrário, permite conhecer vários aspectos do

emprego das EIH com formulação do MEC, dos quais extraem-se boas conclusões. Esta simplificação foi apresentada nas Refs. [1] e [16].

## 5.2 - Considerações Iniciais

Antes de iniciar propriamente a formulação, convém reaperresentar as EIH na sua forma condensada:

$$C(P)u(P) = \int_S \left[ u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) - \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) \right] dS. \quad (5.1)$$

A Fig. 5.1 permite identificar as coordenadas dos pontos P e Q, bem como o formato axi-simétrico do corpo elástico emissor.

Partindo-se da hipótese que todas as condições de contorno do problema acústico, bem como o próprio formato do corpo emissor, são axi-simétricos, a Eq. 5.1 pode ser escrita em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) como:

$$C(P)u(P) = \int_{\gamma} u(Q) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) d\theta(Q) r(Q) d\gamma(Q) - \\ - \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} d\theta(Q) r(Q) d\gamma(Q), \quad (5.2)$$

pois

$$dS(Q) = r(Q) d\theta(Q) d\gamma(Q).$$

Note que  $\gamma$  é a curva geratriz da superfície (Fig. 5.1).



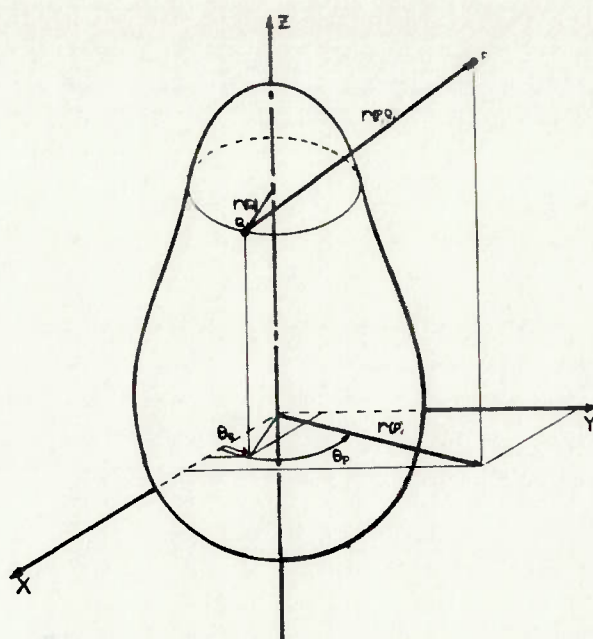


Fig. 5.1 - Corpo elástico axi-simétrico em coordenadas cilíndricas.

Como sugerido na Ref. [16], as integrais em  $\theta$  na Eq. 5.2 podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 K^A(P, Q) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} d\theta(Q) \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr(P, Q)} - 1}{r(P, Q)} d\theta(Q) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(P, Q)} d\theta(Q) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e \quad K^B(P, Q) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P, Q)}}{r(P, Q)} \right] d\theta(Q) \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P, Q)} - 1}{r(P, Q)} \right] d\theta(Q) + \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{1}{r(P, Q)} \right] d\theta(Q). \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Fazendo-se

$$K_1^A(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr(P, Q)} - 1}{r(P, Q)} d\theta(Q) \quad (5.5)$$

$$K_2^A(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(P, Q)} d\theta(Q) \quad (5.6)$$

$$K_1^B(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{-ikr(P, Q)} - 1}{r(P, Q)} \right] d\theta(Q) \quad (5.7)$$

$$K_2^B(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{1}{r(P, Q)} \right] d\theta(Q), \quad (5.8)$$

fica mais fácil notar que as integrais singulares  $K^A$  e  $K^B$  foram divididas em duas parcelas,  $(K_1^A + K_2^A)$  e  $(K_1^B + K_2^B)$  respectivamente, onde a singularidade no integrando aparece, para ambas, na segunda parcela. Este é o grande achado desta formulação, pois as segundas parcelas correspondem, como se verá adiante, a integrais elípticas completas, as quais possuem expressões aproximadas que estimam bem o seu valor. Por outro lado, as demais parcelas podem ser estimadas utilizando-se as fórmulas de integração de Gauss, já que seus integrandos não são singulares, conforme a Ref. [16].

Antes de dar uma nova apresentação a  $K_2^A(P, Q)$  e  $K_2^B(P, Q)$ , faz-se necessário representar  $r(P, Q)$  em coordenadas cilíndricas:

$$r(P, Q) = \sqrt{\bar{r}^2(P, Q) - 2r(Q)r(P)[1 + \cos(\theta(Q) - \theta(P))]}, \quad (5.9)$$

onde

$$\bar{r}(P, Q) = \sqrt{(r(Q) + r(P))^2 + (z(Q) - z(P))^2}.$$

Desde que pela axi-simetria, não importa a posição angular do ponto P, mas a diferença  $(\theta(Q) - \theta(P))$ , pode-se muito bem considerar o ponto P na origem da posição angular, ou seja, fazer  $\theta(P) = 0$ , e assim, ter:

$$\theta(Q) = \theta(Q) - \theta(P).$$

Substituindo a Eq. 5.9 em  $K_2^A(P, Q)$  e aplicando esta última simplificação, resulta:

$$K_2^A(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2(P, Q) - 2r(Q)r(P)(1 + \cos\theta(Q))}} d\theta(Q). \quad (5.10)$$

Fazendo

$$\bar{k} = \frac{2\sqrt{r(Q)r(P)}}{\bar{r}(P,Q)}, \quad (5.11)$$

e substituindo-o na Eq. 5.10, vem:

$$K_2^A(P,Q) = \frac{1}{\bar{r}(P,Q)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{k}^2}{2}(1+\cos\theta(Q))}} d\theta(Q). \quad (5.12)$$

Seja:

$$\psi(Q) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta(Q)}{2},$$

que substituída na Eq. 5.12 fornece  $K_2^A(P,Q)$  na sua forma final de integral elíptica completa de primeira espécie:

$$\begin{aligned} K_2^A(P,Q) &= \frac{4}{\bar{r}(P,Q)} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \psi(Q)}} d\psi(Q) \\ &= \frac{4}{\bar{r}(P,Q)} F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right)$  é a integral elíptica completa de primeira espécie,

cujo valor aproximado é dado na Ref. [18].

Tomando-se agora  $K_2^B(P,Q)$  e notando-se que o operador  $\partial/\partial\nu$  independe de  $\theta(Q)$ , vem que:

$$\begin{aligned} K_2^B(P,Q) &= \frac{\partial}{\partial\nu} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(P,Q)} d\theta(Q) \\ &= \frac{\partial}{\partial\nu} K_2^A(P,Q), \end{aligned} \quad (5.14)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} K_2^B(P,Q) &= \frac{1}{\bar{r}(P,Q)^2} \left\{ \frac{1}{2r(Q)} \left[ \frac{r^2(P)-r^2(Q)+[z(P)-z(Q)]^2}{[r(P)-r(Q)]^2+[z(P)-z(Q)]^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right) \right] \nu_r(Q) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z(P)-z(Q)}{[r(P)-r(Q)]^2+[z(P)-z(Q)]^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right) \nu_z(Q) \right\}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde  $\nu_r(Q)$  e  $\nu_z(Q)$  são respectivamente os cossenos diretores da

normal externa  $\vec{\nu}(\mathcal{Q})$  nas direções  $r$  e  $z$ , e  $E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right)$  é a integral elíptica completa de segunda espécie, cujo valor aproximado é dado também na Ref. [18].

A Eq. 5.2 pode ser assim reescrita como:

$$C(P)u(P) = \int_{\gamma} \left[ u(\mathcal{Q})K^B(P, \mathcal{Q}) - \frac{\partial}{\partial \nu} u(\mathcal{Q})K^A(P, \mathcal{Q}) \right] r(\mathcal{Q}) d\gamma(\mathcal{Q}). \quad (5.16)$$

Esta última equação mostra que a EIH está agora reduzida a uma integral de linha ao longo da geratriz do corpo, a qual pode ser avaliada numericamente por meio das fórmulas de integração de Gauss.

### 5.3 - Implementação Numérica

#### 5.3.1 - Formulação para Elementos de Contorno

A Eq. 5.16 pode ser avaliada numericamente para um corpo axi-simétrico de formato arbitrário se a linha geratriz for discretizada em elementos (Fig. 5.2). Logo, utilizando-se elementos isoparamétricos lineares, ou seja, aproximando a geometria e a grandeza acústica ao longo da geratriz, por meio da combinação linear dos polinômios interpoladores  $\{N_1(\xi), N_2(\xi)\}$ , de forma que:

$$r(\xi) = N_1(\xi)r_1 + N_2(\xi)r_2 \quad (5.17)$$

$$z(\xi) = N_1(\xi)z_1 + N_2(\xi)z_2 \quad (5.18)$$

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (5.19)$$

$$u'(\xi) = N_1(\xi)u'_1 + N_2(\xi)u'_2, \quad (5.20)$$

onde, por conveniência  $u' = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ , chega-se a uma aproximação para a EIH.

Os polinômios interpoladores lineares são:

$$N_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad \bullet \quad N_2(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad . \quad (5.21)$$

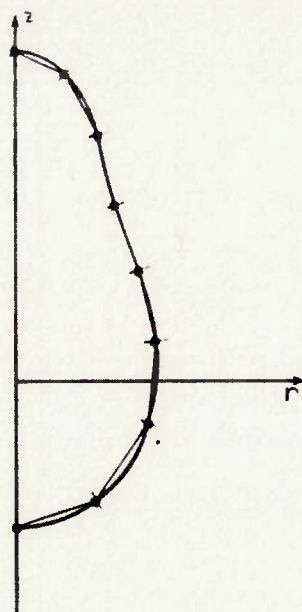


Fig. 5.2 - Discretização da linha geratriz feita com elementos isoparamétricos lineares.

A coordenada generalizada  $\xi$  é definida no intervalo  $[-1,1]$ . Os termos  $r_1$  e  $r_2$ ,  $z_1$  e  $z_2$ ,  $u_1$  e  $u_2$ ,  $u'_1$  e  $u'_2$  representam os respectivos valores, conhecidos ou não, nos nós do elemento. Deste modo, a EIH resulta num somatório de expressões, algumas indeterminadas a princípio, as quais dependem unicamente dos valores nodais da variável acústica. Uma vez utilizadas essas expressões na EIH, permitirão obter um sistema linear de equações algébricas em termos dos valores nodais desconhecidos. Para tanto, substituindo-se as Eqs. 5.17-5.21 na Eq. 5.16, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(P)u(P) = & \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{m=1}^2 u_j^m \int_{-1}^1 K^B(P, \xi) N_m(\xi) r_j(\xi) J_j(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^2 u_j^{\prime m} \int_{-1}^1 K^B(P, \xi) N_m(\xi) r_j(\xi) J_j(\xi) d\xi \right], \quad (5.22) \end{aligned}$$

onde  $N$  é o número de elementos utilizados na discretização da linha geratriz e  $J_j(\xi)$  é o jacobiano da transformação dada pelas

Eqs. 5.17 e 5.18 para o elemento  $j$ :

$$J_j(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}(\xi)\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}(\xi)\right)^2}. \quad (5.23)$$

Seja agora  $P$  um ponto genérico representado pelo índice  $i$ , ou seja,  $u(P) = u_i$  e  $C(P) = C_i$ . Assim, obtém-se a seguinte expressão para a Eq. 5.22:

$$C_i u_i = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{m=1}^2 a_{ij}^m u_j^m - \sum_{m=1}^2 b_{ij}^m u_j'^m \right]. \quad (5.24)$$

onde

$$a_{ij}^m = \int_{-1}^1 K^B(P_i, \xi) N_m(\xi) r_j(\xi) J_j(\xi) d\xi, \quad (5.25)$$

$$e \quad b_{ij}^m = \int_{-1}^1 K^A(P_i, \xi) N_m(\xi) r_j(\xi) J_j(\xi) d\xi. \quad (5.26)$$

A Eq. 5.24, por sua vez, pode ser escrita em forma matricial, mas para isto é necessário observar que  $u_j' = u_{j-1}^2$ ,

$$\left( [A_{ij}] - [C_{ij}] \right) \{u_i\} = [B_{ij}] \{u_i'\}, \quad (5.27)$$

onde:

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{i(j-1)}^2, & \text{se } j=N+1 \\ a_{ij}^1, & \text{se } j=1 \\ a_{i(j-1)}^2 + a_{ij}^1, & \text{se } 2 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (5.28)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} b_{i(j-1)}^2, & \text{se } j=N+1 \\ b_{ij}^1, & \text{se } j=1 \\ b_{i(j-1)}^2 + b_{ij}^1, & \text{se } 2 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (5.29)$$

e  $C_{ij} = C_i \delta_{ij}$ ,  $\delta$  é o delta de Kronecker.

#### 5.4 - Obtenção dos Coeficientes

Uma vez obtido o sistema de equações representando a EIH, resta apresentar um modo de avaliar os coeficientes deste sistema - Eqs. 5.25 e 5.26. Como se nota, estes são obtidos por meio de integrais duplas. Para avaliá-las será empregado o método de integração de Gauss, salvo as integrais que sejam do tipo elíptica, conforme Ref. [16].

Anteriormente, foi visto que as integrais  $K^A(P, Q)$  e  $K^B(P, Q)$  são compostas por duas parcelas, sendo uma delas do tipo integral elíptica. As integrais elípticas possuem uma expressão aproximada dada na Ref. [18] por:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right) = \left[ a_0 + a_1(1-\bar{k}^2) + a_2(1-\bar{k}^2)^2 \right] - \left[ b_0 + b_1(1-\bar{k}^2) + b_2(1-\bar{k}^2)^2 \right] \ln(1-\bar{k}^2) + \epsilon(\bar{k}) \quad (5.30)$$

$$|\epsilon(\bar{k})| \leq 3 \cdot 10^{-5},$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \bar{k}\right) = \left[ 1 + \bar{a}_1(1-\bar{k}^2) + \bar{a}_2(1-\bar{k}^2)^2 \right] - \left[ \bar{b}_1(1-\bar{k}^2) + \bar{b}_2(1-\bar{k}^2)^2 \right] \ln(1-\bar{k}^2) + \epsilon(\bar{k}) \quad (5.31)$$

$$|\epsilon(\bar{k})| \leq 4 \cdot 10^{-5}.$$

Logo,  $K_2^A(P, Q)$  e  $K_2^B(P, Q)$  podem ser prontamente obtidos por meio das Eqs. 5.30 e 5.31.

As outras parcelas  $K_1^A(P, Q)$  e  $K_1^B(P, Q)$  vêm avaliadas pela fórmula de Gauss:

$$K_1^A(P, \xi) = \pi \left[ \sum_{t=1}^M \frac{\cos(kr(P, \alpha_t, \xi)) - 1}{r(P, \alpha_t, \xi)} w_t + i \sum_{t=1}^M \frac{-\sin(kr(P, \alpha_t, \xi)) - 1}{r(P, \alpha_t, \xi)} w_t \right], \quad (5.32)$$

$$K_1^B(P, \xi) = \pi \sum_{l=1}^M \frac{\vec{r}(P, \alpha_l, \xi) \cdot \vec{\nu}(\alpha_l, \xi)}{r^3(P, \alpha_l, \xi)} w_l \cdot \left\{ \left[ \cos[kr(P, \alpha_l, \xi)] + kr(P, \alpha_l, \xi) \sin[kr(P, \alpha_l, \xi)] - 1 \right] + i \left[ kr(P, \alpha_l, \xi) \cos[kr(P, \alpha_l, \xi)] - \sin[kr(P, \alpha_l, \xi)] \right] \right\}, \quad (5.33)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\Theta}{\pi} - 1,$$

M = número de pontos tomados no intervalo  $[-1, 1]$  na integração pelo método de Gauss,

$$\vec{r}(P, Q) = \vec{r}(P, \alpha, \xi) = P - Q,$$

$$\vec{r}(P, Q) \cdot \vec{\nu}(Q) = [r(P) \cos(\Theta(Q) + \Theta(P)) - r(Q)] \nu_r(Q) + [z(P) - z(Q)] \nu_z(Q),$$

$\nu_r$  e  $\nu_z$  = cossenos diretores de  $\vec{\nu}(Q)$  segundo os eixos  $r$  e  $z$ , respectivamente.

Uma expressão exata e mais simples para  $K_1^A(P, Q)$  e  $K_1^B(P, Q)$  se obtém quando  $r(P) = 0$ , caso em que  $r(P, Q)$  independe de  $\Theta(Q)$ . Neste caso:

$$K_1^A(P, \xi) = 2\pi \left[ \frac{\cos(kr(P, \xi))}{r(P, \xi)} + i \frac{-\sin(kr(P, \xi))}{r(P, \xi)} \right] \quad (5.34)$$

$$K_1^B(P, \xi) = 2\pi \vec{r}(P, \xi) \cdot \vec{\nu}(\xi) \left[ \frac{\cos(kr(P, \xi)) + kr(P, \xi) \sin(kr(P, \xi))}{r^3(P, \xi)} + i \frac{kr(P, \xi) \cos(kr(P, \xi)) - \sin(kr(P, \xi))}{r^3(P, \xi)} \right]. \quad (5.35)$$

Uma vez avaliadas  $K^A(P, Q)$  e  $K^B(P, Q)$ , é possível avaliar agora os coeficientes  $a_{ij}^m$  e  $b_{ij}^m$ , também pela fórmula de integração de Gauss:

$$a_{ij}^m = \sum_{l=1}^M K^B(P_i, \xi_l) N_m(\xi_l) r_j(\xi_l) J_j(\xi_l) w_l, \quad (5.36)$$

$$b_{ij}^m = \sum_{l=1}^M K^A(P_i, \xi_l) N_m(\xi_l) r_j(\xi_l) J_j(\xi_l) w_l. \quad (5.37)$$



Para arrematar, as formas expressas nas Eqs.5.36 e 5.37 são genéricas, isto é, aplicam-se em princípio a qualquer elemento isoparamétrico e EIH - superficial, externa e interna. Para torná-las aplicáveis aos elementos isoparamétricos lineares faz-se a substituição de  $r(\xi)$  e  $z(\xi)$  como representadas pelas Eqs.5.17 e 5.18.

## 6 - ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA O TRATAMENTO DA FORMULAÇÃO DO PRESENTE MÉTODO: OS PROGRAMAS BIE

---

### 6.1 - Introdução

Viu-se no capítulo anterior o modo aproximado de transformar as EIH em um sistema de equações lineares em termos dos valores nodais da grandeza acústica e sua derivada normal sobre a superfície do corpo emissor. É fácil notar a quantidade de operações que envolve o cálculo dos coeficientes  $a_{ij}^m$  e  $b_{ij}^m$ , sem dizer que a dependência da precisão da solução das EIH através deste método está relacionada com o número de nós empregados,  $e$ , principalmente quando a integral a ser avaliada possui uma

singularidade no seu integrando, com o número de pontos utilizados figura 6.1

na integração pelo método de Gauss. Disto decorre a necessidade de se empregar um computador na avaliação da solução das EIH pelo MEC.

A seguir será apresentada uma seqüência de etapas de programação do algoritmo computacional aqui proposto para o método. Tal algoritmo não possui grandes pretensões do ponto de vista da ciência da computação e da análise numérica, apenas mostra uma maneira de viabilizar o método. Um trabalho mais apurado em termos numéricos e computacionais fica para trabalhos futuros.

O esquema da Fig.6.1 mostra a seqüência de etapas de programação empregada. Há cinco partes: a primeira representa a entrada de dados e o seu armazenamento em arquivos próprios, para um aproveitamento posterior de cada conjunto de dados; a segunda diz respeito à determinação dos coeficientes das matrizes  $[A_{ij}]$  e  $[B_{ij}]$ , tanto para a EIH superficial, como para a externa; a terceira trata da solução do sistema linear, relacionado com a EIH superficial, em termos das grandezas acústicas nodais figura desconhecidas; a quarta envolve a determinação da grandeza acústica procurada nos pontos externos; e a quinta apresenta os dados e resultados de forma correlacionada e ordenada.

Com base nesse esquema foi elaborado um programa em linguagem Pascal para aplicação em microcomputadores do tipo IBM-PC. Na verdade são cinco programas, cada qual envolvendo uma das partes esquematizadas na Fig.6.1. A seguir são apresentados cada um dos cinco programas.

BIEE1

BIEE2

BIEE3

BIEE4

BIEE5

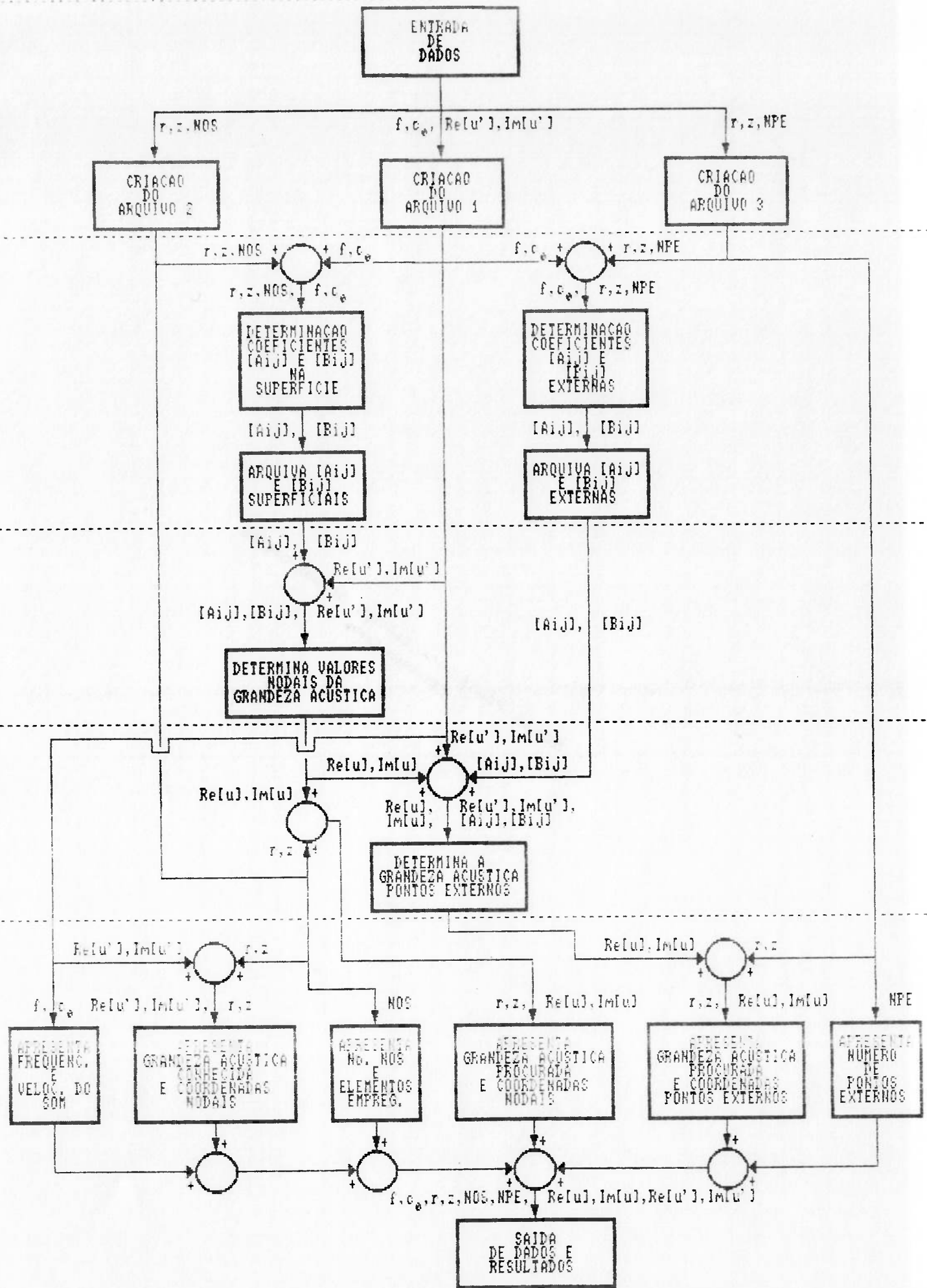


Fig. 6.1 - Sequencia de programacao

## 6.2 - Programa de Leitura e Arquivamento de Dados - BIE1

Faz a leitura dos dados conforme são pedidos na tela do vídeo e processa o arquivamento correspondente. No arquivo 1 são armazenados os valores da frequência, da velocidade do som no meio e da grandeza acústica conhecida em cada nó resultante da discretização da linha geratriz da superfície. No arquivo 2 são armazenados o número de nós da linha geratriz, as coordenadas desses pontos e os valores nodais reais e imaginários da grandeza acústica conhecida sobre a superfície. No arquivo 3 são armazenados o número de pontos externos onde se quer conhecer a grandeza acústica e as coordenadas desses pontos.

No Apêndice D há uma listagem em Turbo Pascal 3.0 deste programa, denominado BIE1.

## 6.3 - Programa Montador da Matriz dos Coeficientes - BIE2

Monta a matriz dos coeficientes  $[A_{ij}]$  e  $[B_{ij}]$  a partir do número de nós e/ou pontos, frequência, velocidade do som e coordenadas desses mesmos nós/pontos, utilizando-se das Eqs. 5.36, 5.37 e subsequentes. Presta-se à obtenção dos coeficientes matriciais, tanto para a EIH superficial, como para a externa, bastando para isso responder a pergunta relativa a essas duas opções quando se dá início ao programa.

O programa considera um número de pontos de integração distinto na aplicação da quadratura gaussiana para a variável generalizada  $\xi$ , com relação à variável  $\theta$  do ângulo de revolução, quando o elemento no qual se faz a integração possui uma singularidade no integrando. Isto é, se no elemento onde se estiver integrando houver uma singularidade, o programa faz a integração em

é utilizando um número maior de pontos no intervalo de integração, visando ao aumento da precisão, enquanto mantém o mesmo número de pontos para a integração em  $\theta$ . No caso em que o ponto P considerado é externo à superfície, e portanto não ocorre singularidade no cálculo dos coeficientes, o programa assume o menor dos dois números de pontos de integração na quadratura de Gauss.

No Apêndice D há uma listagem em Turbo Pascal 3.0 deste programa, denominado BIE2.

#### 6.4 - Programa que Resolve o Sistema Linear - BIE3

Utiliza-se do método conhecido por LU, o qual consiste em desmembrar o sistema original em dois outros sistemas cujas matrizes dos coeficientes sejam triangulares, os quais têm solução mais imediata. Resumidamente, seria:

- $\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$ , o sistema original;
- determina-se  $\bar{L}$  e  $\bar{U}$  triangulares opostas, tais que  $\bar{L} \cdot \bar{U} = \bar{A}$ ;
- fazendo  $\bar{U} \cdot \bar{x} = \bar{y}$ , resulta o novo sistema  $\bar{L} \cdot \bar{y} = \bar{b}$ , o qual resolvido permite determinar  $\bar{y}$ , permitindo por sua vez resolver o sistema  $\bar{U} \cdot \bar{x} = \bar{y}$ .

Este método é simples, já que a obtenção das duas matrizes triangulares  $\bar{L}$  e  $\bar{U}$  também é; e que, além disso, a solução dos dois sistemas lineares resultantes  $\bar{L} \cdot \bar{y} = \bar{b}$  e  $\bar{U} \cdot \bar{x} = \bar{y}$  é de fácil obtenção, pelo fato de suas matrizes dos coeficientes serem triangulares.

O programa que resolve o sistema por este método foi desenvolvido por um estudante de engenharia enquanto cursava a cadeira de Cálculo Numérico na Escola Politécnica da USP. O programa não apresenta técnicas de refinamento da solução, nem

técnicas de programação mais apuradas, como já foi adiantado na introdução deste capítulo.

No Apêndice D há uma listagem em Turbo Pascal 3.0 deste programa, denominado BIE3.

#### 6.5 - Programa que Determina o Campo Acústico num Ponto Externo - BIE4

Este programa nada mais faz que multiplicar as matrizes dos coeficientes, já calculadas pelo programa BIE2 para alguns pontos externos, com os respectivos vetores colunas correspondentes aos valores nodais, como por exemplo, da pressão acústica e de seu gradiente normal. A quantidade de pontos escolhidos para a determinação do campo ao longe é disposta de tal modo que os pontos ficam igualmente espaçados sobre o semi-arco de circunferência - cujo raio já foi definido no program BIE1 - que envolve a geratriz do corpo emissor. Dessa multiplicação resultam os valores do campo acústico procurado nesses mesmos pontos.

No Apêndice D há uma listagem em Turbo Pascal 3.0 deste programa, denominado BIE4.

#### 6.6 - Programa para Apresentação dos Dados e Resultados - BIE5

Este último trata de fazer uma apresentação geral dos dados envolvidos no cálculo do campo acústico e de seus resultados. Há duas opções de saída no programa: saída em tela e saída em impressora; sendo idênticos os dois formatos.

No Apêndice D há uma listagem em Turbo Pascal 3.0 deste programa, denominado BIE5, e no Apêndice E há uma listagem da saída impressa do BIE5.

## 7 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

---

### 7.1 - Introdução

Uma vez elaborados os programas que viabilizam o método, foi possível fazer um estudo de sensibilidade do método de elementos de contorno (MEC) aplicado à obtenção de campo acústico provocado por vibração de corpos axi-simétricos. Para realizá-lo, foi elaborado um planejamento de aplicações sobre dois problemas clássicos de emissão acústica: a esfera pulsante e a esfera oscilante; sendo que no primeiro concentraram-se o maior número de testes. Os resultados foram obtidos num micro-computador PC-XT e os cálculos envolvidos foram realizados com precisão simples.

Desejou-se através deste estudo de sensibilidade identificar



o comportamento das soluções obtidas pelo MEC através dos programas BIE, para então permitir a adequada utilização do método e programa, prevenir de erros inerentes ao método, como no caso da proximidade das frequências características, e ainda, garantir a eficiência dos dois: MEC e BIE.

Da consulta aos artigos listados na bibliografia apresentada no final desta obra, pode-se destacar os parâmetros que mais influem na precisão da solução. São eles: o número de elementos empregados na discretização; a frequência; a proximidade a uma das frequências características; a precisão com que são feitas as integrações; o formato; a proximidade da fonte; e as condições de contorno. Desses, o único parâmetro que não se estudou foi o formato, por não ser este um dos objetivos do presente estudo.

O que convém também observar, é que se deu maior atenção às soluções do campo acústico junto à superfície. Pois, como visto no capítulo segundo, as equações integrais de Helmholtz superficial e interna - apropriadas à solução na superfície do corpo - são as mais sensíveis quanto ao espectro de frequência; e no caso da superficial, é a mais sensível quanto à precisão das integrais avaliadas.

Por não se tratar dos objetivos desta obra, não foram feitos estudos com a equação integral de Helmholtz interna, mas apenas com a superficial e a externa. Com relação a essa última, por ser a única que permite determinar o campo acústico ao longe, e pelo fato de sua precisão estar diretamente ligada à precisão da solução obtida junto à superfície, é que mereceu a análise de alguns parâmetros que influenciam a sua solução.

Todos os resultados são comparados com aqueles preditos pelas fórmulas analíticas para o problema de uma esfera pulsante e uma esfera oscilante, ambas de raio  $a$ . A expressão para cada um desses problemas é, respectivamente:

$$p(r) = \frac{a}{r} v \frac{iz_0 ka}{1+ika} e^{-ik(r-a)} \quad (7.1)$$

$$e \quad p(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 v \cos\theta \frac{iz_0 ka(1+ikr)}{2(1+ika) - k^2 a^2} e^{-ik(r-a)} \quad (7.2)$$

Os resultados - somente aqueles obtidos para a esfera pulsante - apresentados para a pressão acústica (módulo, parte real ou imaginária) são aqueles considerados piores quando comparados com o valor teórico esperado, ou seja, comparou-se cada um dos resultados obtidos em cada nó da malha com o valor teórico, aquele nó que mostrou o maior afastamento do valor teórico foi escolhido para representar a pressão acústica sobre toda a superfície emissora. No caso da pressão acústica superficial, a escolha se fez ora entre 5 nós, ora entre 10 nós, ..., conforme fosse o caso. No entanto, para a pressão acústica fora da superfície, a escolha se fez entre 10 pontos situados sobre um arco de circunferência concêntrico à esfera emissora.

## 7.2 - Obtenção de Resultados

O plano de obtenção de resultados foi dividido em cinco casos, como mostra resumidamente a Fig.7.1, cada qual formado por conjuntos de dados, cada um deles correspondendo a um parâmetro específico, correlacionado a outros parâmetros. Os gráficos e tabelas que se encontram no fim deste capítulo apresentam os resultados obtidos para cada um dos casos.

CASO	OBJETIVOS	FREQÜÊNCIAS	ELEMENTOS	PREC. INTEGR.
1 <sup>o</sup>	$\frac{ P_{anal.} - P_{BIE} }{P_{analitico}}$	500 Hz 1000 Hz 1500 Hz	4, 9, 14, 19 e 24	Gauss(4,12) Gauss(6,12) Gauss(6,12)
2 <sup>o</sup>	Rep. Imp e $ p $	100Hz, 300Hz, 500Hz, 900Hz, 1300Hz, 1600Hz 1700Hz, 2000Hz	9, 16 e 24	Gauss(6,12)
3 <sup>o</sup>	idem	100Hz, 500Hz, 900Hz, 1300Hz 1600Hz, 1700Hz 2000Hz	9	Gauss(4,12) Gauss(6,12) Gauss(12,12)
4 <sup>o</sup>	$ p $	300Hz, 500Hz, 1300Hz, 1600Hz 2000Hz	24	Gauss(6,12)
5 <sup>o</sup>	Direti- vidade $ p $	100Hz, 500Hz, 900Hz, 1300Hz, 1600Hz, 2000Hz	24	Gauss(4,12) Gauss(6,12)

Fig.7.1 - Tabela que correlaciona cada caso com seu respectivo conjunto de dados utilizados na obtenção do resultado desejado.

#### 7.2.1 - 1<sup>o</sup> Caso: Pressão Acústica Superficial por Freqüência

- Gráfs.7.1, 7.2 e 7.3 e Tabs.7.1-7.9;
- esfera pulsante de raio 0.1 m e produto do comprimento de onda ( $k$ ) pela densidade do meio fluido ( $\rho$ ) e pela amplitude da velocidade de vibração da superfície ( $v$ ):  $k\rho v = 10000 \text{ Pa/m}$ ;
- integrações feitas com 6 pontos, tanto na coordenada  $\theta$  como na coordenada  $\xi$ , exceto 12 pontos para a coordenada  $\xi$  quando o elemento possuisse uma singularidade: Gauss (6,12);
- para cada número de elementos empregado (vide gráficos e tabelas) um conjunto de pares ordenados formados pelo módulo ou parte real ou imaginária da pressão acústica na superfície - pior resultado entre todos os

nós - obtida pelo MEC-BIE, e pela frequência (vide gráficos e tabelas).

### 7.2.2 - 2º Caso: Pressão Acústica Superficial por Frequência

- Gráfs.7.4-7.6 e Tabs.7.10-7.18;
- esfera pulsante de raio 0.1m e produto  $k\rho v = 10000 \text{ Pa/m}$ ;
- três conjuntos de pares ordenados formados pelo módulo ou parte real ou imaginária da pressão acústica - pior resultado entre todos os nós - obtida pelo MEC-BIE, e pela frequência. Cada conjunto corresponde a um grau de precisão na integração - usando a mesma notação anterior: Gauss(4,12), Gauss(6,12) e Gauss(12,12);
- todos os conjuntos de dados foram obtidos com o emprego do mesmo número de elementos (9) pelo programa BIE.

### 7.2.3 - 3º Caso: Erro Percentual da Pressão Acústica Superficial por Número de Elementos

- Gráfs.7.7 e 7.8 e Tabs.7.19-7.22;
- esfera pulsante de raio 0.1 m e produto  $k\rho v = 10000 \text{ Pa/m}$ ;
- para cada frequência analisada (vide gráficos e tabelas) um conjunto de pares ordenados formados pelo erro relativo do módulo da pressão acústica superficial - pior resultado entre todos os nós - obtida pelo MEC-BIE, e pelo número de elementos empregados na sua obtenção;
- o grau de precisão nas integrações foi de Gauss(4,12) para a frequência de 500 Hz e de Gauss(6,12) para as frequências de 1000 Hz e 1500 Hz.

#### 7.2.4 - 4<sup>o</sup> Caso: Pressão Acústica ao Longe por Distância

- Gráfs.7.9-7.13 e Tabs.7.23-7.27;
- resultados obtidos a partir da pressão acústica superficial conseguida pelo MEC-BIE (1<sup>o</sup> Caso: 25 nós, esfera de raio 0.1 m,  $k\rho v = 10000 \text{ Pa/m}$ , Gauss(6,12));
- para cada frequência analisada (vide gráficos e tabelas) um conjunto de pares ordenados formado pelo módulo da pressão acústica ao longe - pior resultado entre os 10 pontos - obtida pelo MEC-BIE, e pela distância ao centro da esfera (vide tabelas).

#### 7.2.5 - 5<sup>o</sup> Caso: Diretividade da Pressão Acústica Superficial

- Gráfs.7.14-7.19 e Tabs.7.28-7.39;
- esfera oscilante de raio 0.1 m e produto  $k\rho v = 10000 \text{ Pa/m}$ ;

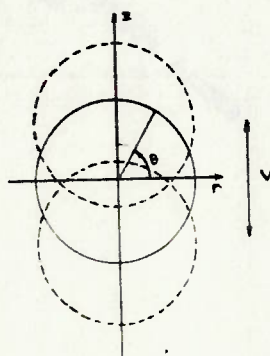
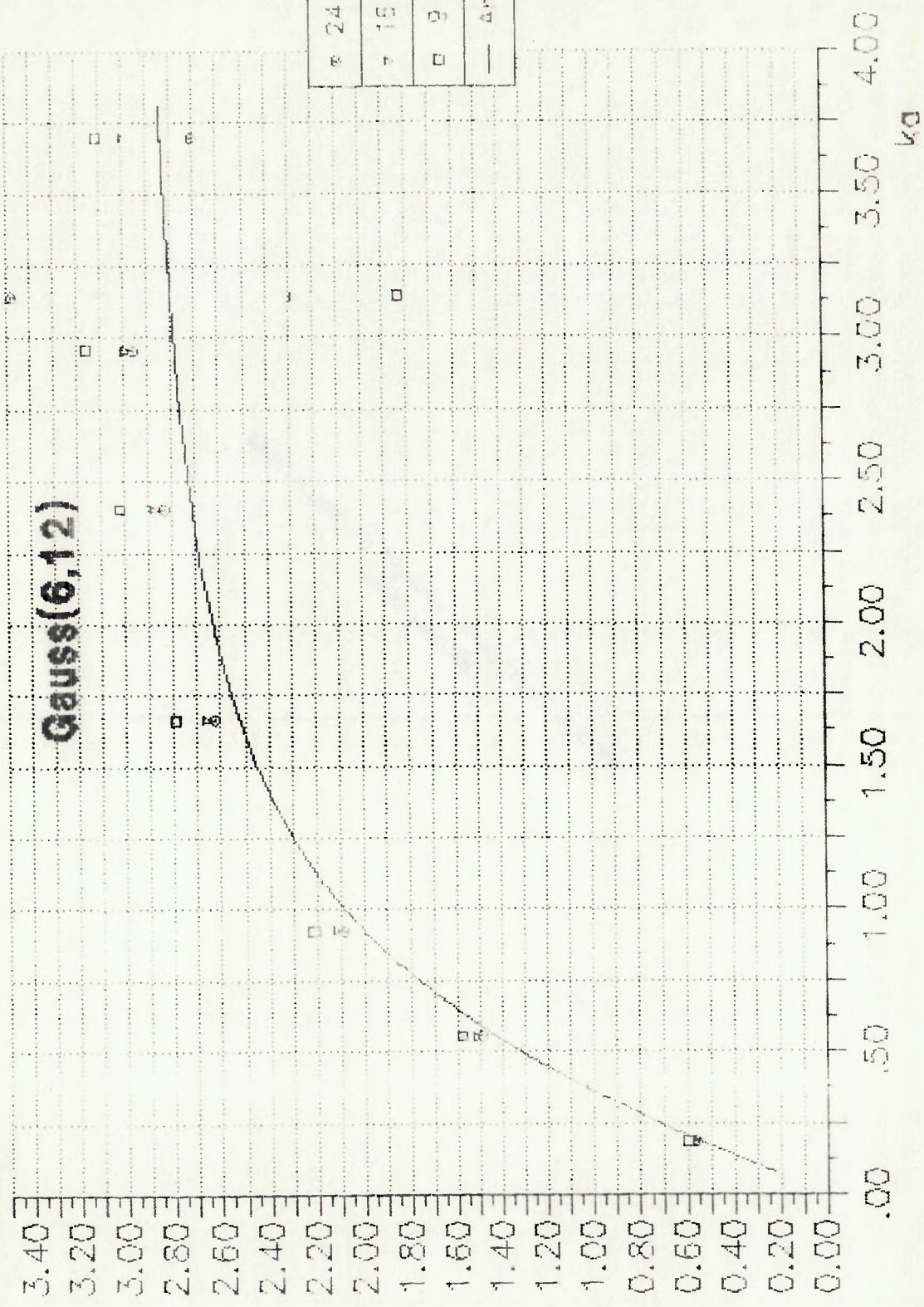


Fig.7.2 - Detalhe da disposição dos eixos r e z em relação ao eixo de simetria para uma esfera oscilante.

- um conjunto de pares ordenados formados pelo ângulo de revolução  $\theta$  e pelo correspondente módulo da pressão acústica. Cada conjunto deste corresponde a uma frequência analisada (vide gráficos e tabelas);
- grau de precisão nas integrações: um grupo com Gauss(4,12) e outro com Gauss(6,12).

$|p|/z_v$   
\*0.001



●	24 Elementos
○	18 Elementos
□	9 Elementos
—	Analitico

Graf.7.1 -  $|p|/z_v$  x  $ka$  - Esfera Pulsante

**Gauss(6,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,092.9	11.1
300.0	874.6	970.6	11.0
500.0	734.5	814.0	10.8
900.0	515.3	570.7	10.7
1,300.0	384.3	427.7	11.3
1,600.0	320.4	363.1	13.3
1,700.0	303.3	198.2	34.7
2,000.0	261.2	286.2	9.6

**Tab.7.1 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**16 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,046.4	6.4
300.0	874.6	929.4	6.3
500.0	734.5	779.2	6.1
900.0	515.3	545.3	5.8
1,300.0	384.3	407.4	6.0
1,600.0	320.4	344.7	7.6
1,700.0	303.3	246.3	18.8
2,000.0	261.2	275.9	5.6

**Tab.7.2 - Valores para  $|p|$ (Pa) - Esfera Pulsante**

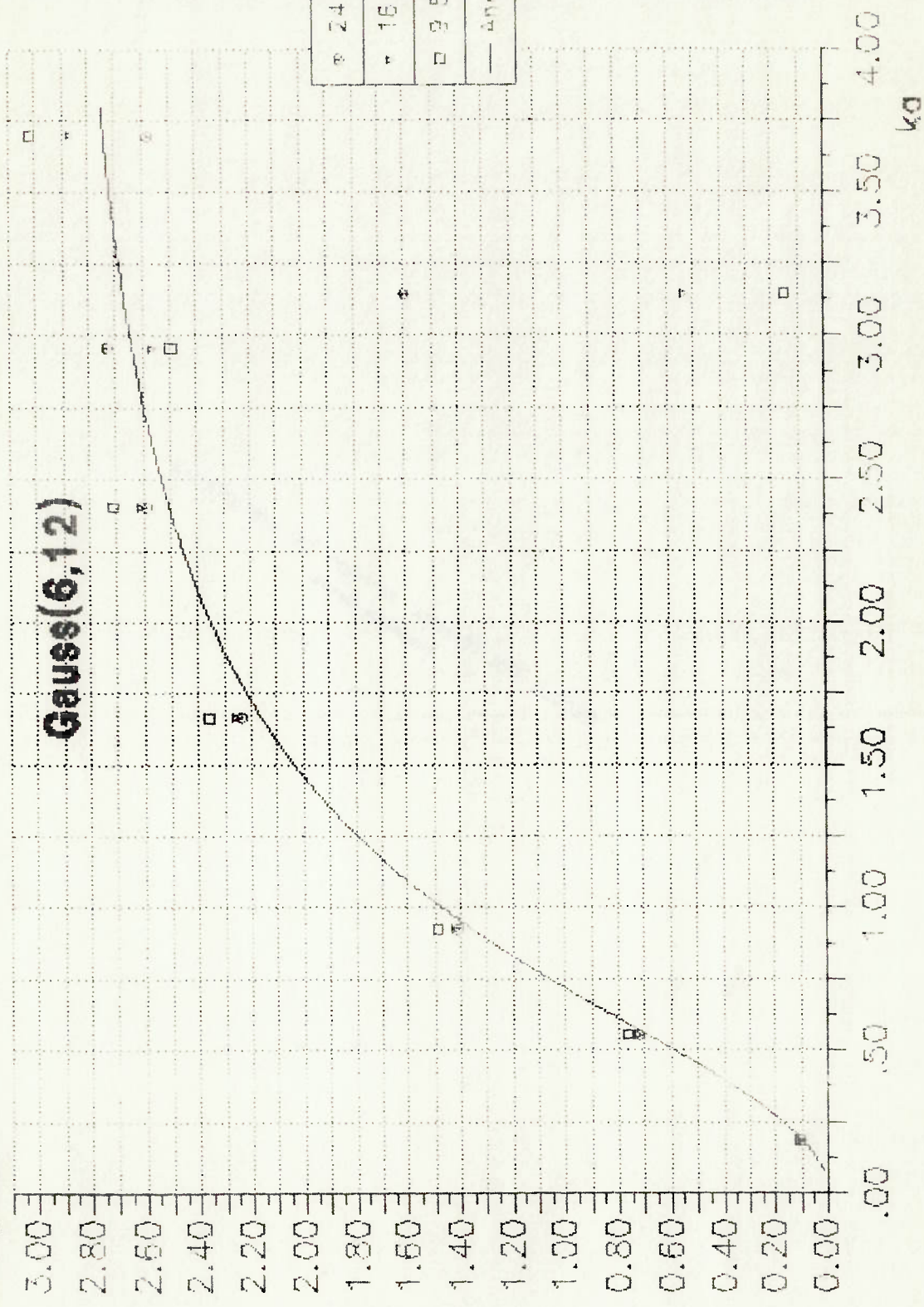


**Gauss(6,12)**  
**24 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,029.5	4.7
300.0	874.6	914.7	4.6
500.0	734.5	767.1	4.4
900.0	515.3	537.0	4.2
1,300.0	384.3	401.3	4.4
1,600.0	320.4	340.6	6.3
1,700.0	303.3	376.3	24.1
2,000.0	261.2	249.0	4.7

**Tab.7.3 - Valores para  $|p|$ (Pa) - Esfera Pulsante**

Rep/zv  
\*0.001



□	24 Elementos
•	16 Elementos
□	9 Elementos
—	Análítico

Graf.7.2 - Rep/zv x ka - Esfera Pulsante

**Gauss(6,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	197.8	10.7
300.0	424.1	467.7	10.3
500.0	498.4	547.7	9.9
900.0	441.6	482.1	9.2
1,300.0	354.8	384.1	8.3
1,600.0	303.5	287.1	5.4
1,700.0	289.0	15.9	94.5
2,000.0	252.1	278.0	10.3

**Tab.7.4 - Valores para Re p(Pa) - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**16 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	189.8	6.2
300.0	424.1	449.1	5.9
500.0	498.4	526.0	5.5
900.0	441.6	463.0	4.8
1,300.0	354.8	369.8	4.2
1,600.0	303.5	295.4	2.7
1,700.0	289.0	57.8	80.0
2,000.0	252.1	264.1	4.8

**Tab.7.5 - Valores para Re p(Pa) - Esfera Pulsante**

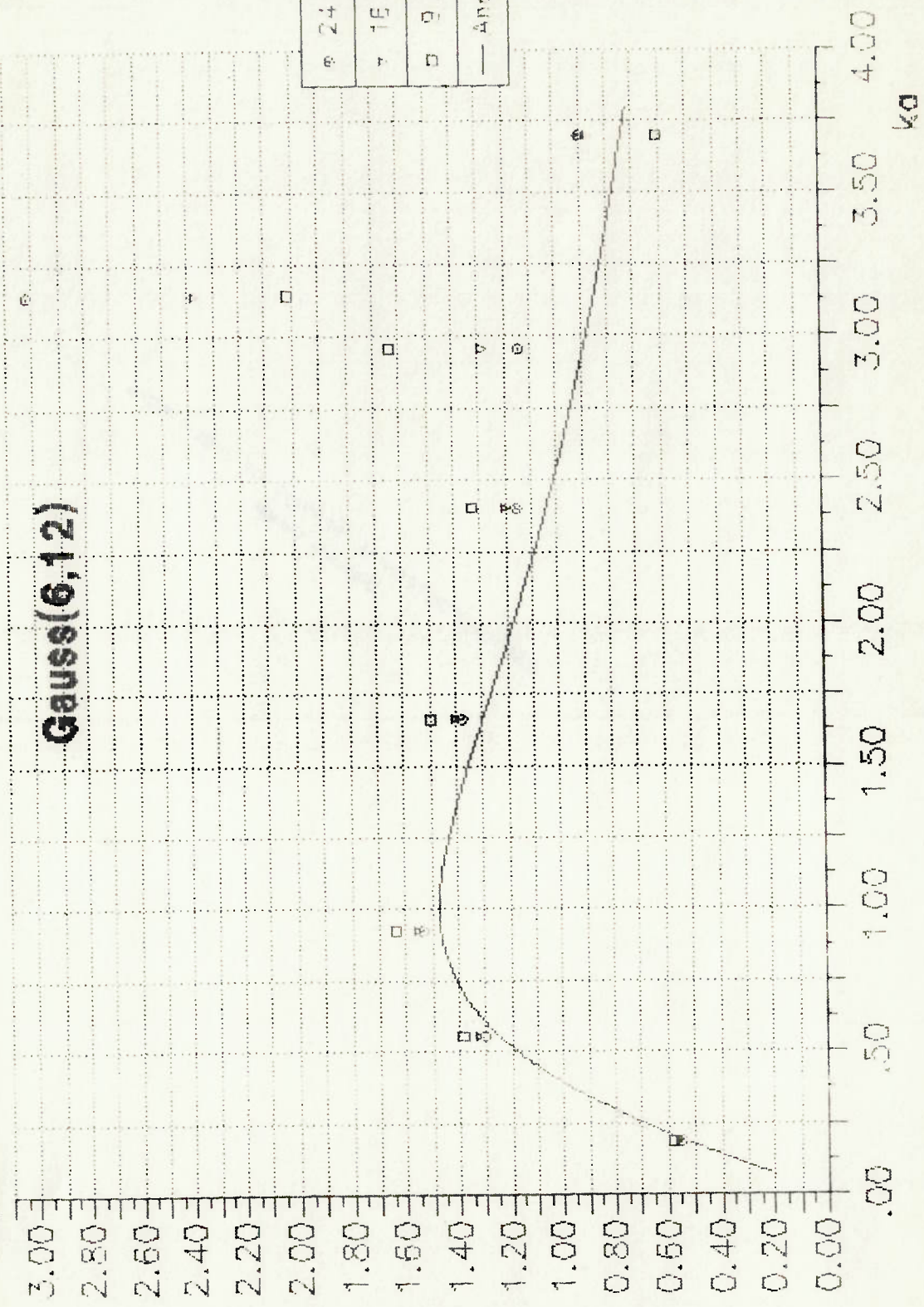
**Gauss(6,12)**  
**24 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	186.9	4.6
300.0	424.1	442.6	4.4
500.0	498.4	518.8	4.1
900.0	441.6	457.3	3.5
1,300.0	354.8	366.2	3.2
1,600.0	303.5	314.2	3.5
1,700.0	289.0	173.0	40.1
2,000.0	252.1	237.2	5.9

**Tab.7.6 - Valores para Re p(Pa) - Esfera Pulsante**

Imp/zv  
\*0.001

### Gauss(6,12)



○	24 Elementos
△	16 Elementos
□	9 Elementos
—	Analítico

Grat.7.3 - Imp/zv x ka - Esfera Pulsante

## Gauss(6,12) 9 Elementos

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,074.8	11.2
300.0	764.9	850.5	11.2
500.0	539.4	602.3	11.6
900.0	265.5	305.3	15.0
1,300.0	147.7	188.1	27.4
1,600.0	102.6	188.2	83.4
1,700.0	92.0	218.5	137.5
2,000.0	68.2	56.0	17.9

**Tab.7.7 - Valores para Im p(Pa) - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**16 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,029.1	6.4
300.0	764.9	813.7	6.4
500.0	539.4	574.9	6.6
900.0	265.5	288.1	8.5
1,300.0	147.7	170.9	15.7
1,600.0	102.6	148.3	44.5
1,700.0	92.0	257.4	179.8
2,000.0	68.2	79.9	17.1

**Tab.7.8 - Valores para  $Im p$  (Pa) - Esfera Pulsante**

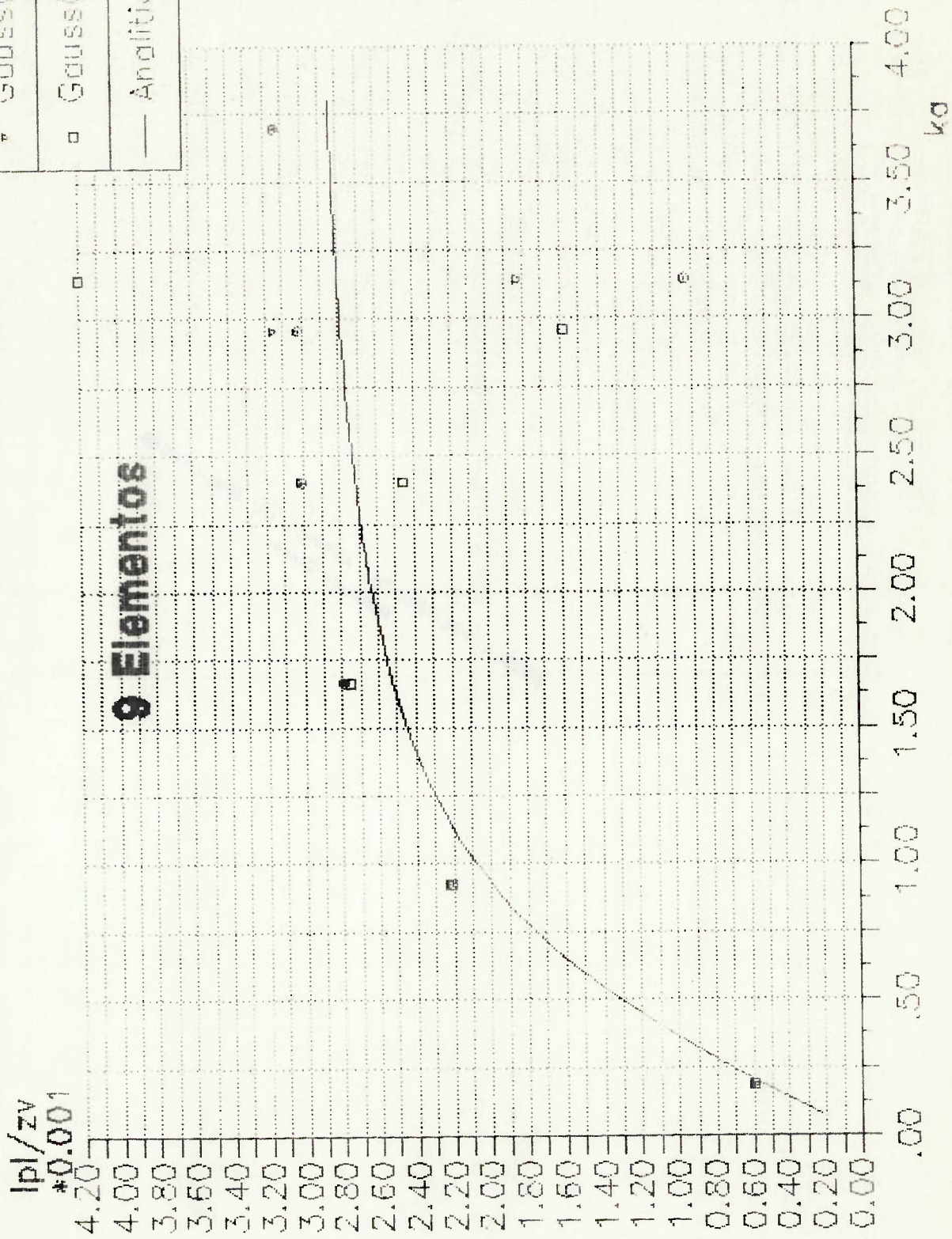


## Gauss(6,12) 24 Elementos

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,012.4	4.7
300.0	764.9	800.5	4.6
500.0	539.4	565.1	4.8
900.0	265.5	281.6	6.1
1,500.0	147.7	164.0	11.1
1,600.0	102.6	131.6	28.2
1,700.0	92.0	326.8	255.3
2,000.0	68.2	83.1	21.8

**Tab.7.9 - Valores para Im p (Pa) - Esfera Pulsante**

•	Gauss(12,12)
▴	Gauss(5,12)
□	Gauss(4,12)
—	Analitico



**Graf.7.4 - |pl/zv x ka - Esfera Pulsante**

**Gauss(4,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,092.9	11.1
500.0	734.5	814.1	10.8
900.0	515.3	562.3	9.1
1,300.0	384.3	348.3	9.4
1,600.0	320.4	182.7	43.0
1,700.0	303.3	454.5	49.9
2,000.0	261.2	346.6	32.7

**Tab.7.10 - Valores para  $|p|$ (Pa) - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Anolítico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,092.9	11.1
500.0	734.5	814.0	10.8
900.0	515.3	570.7	10.7
1,300.0	384.3	427.7	11.3
1,600.0	320.4	363.1	13.3
1,700.0	303.3	198.2	34.7
2,000.0	261.2	286.2	9.6

**Tab.7.11 - Valores para  $|p|(\text{Pa})$  - Esfera Pulsante**

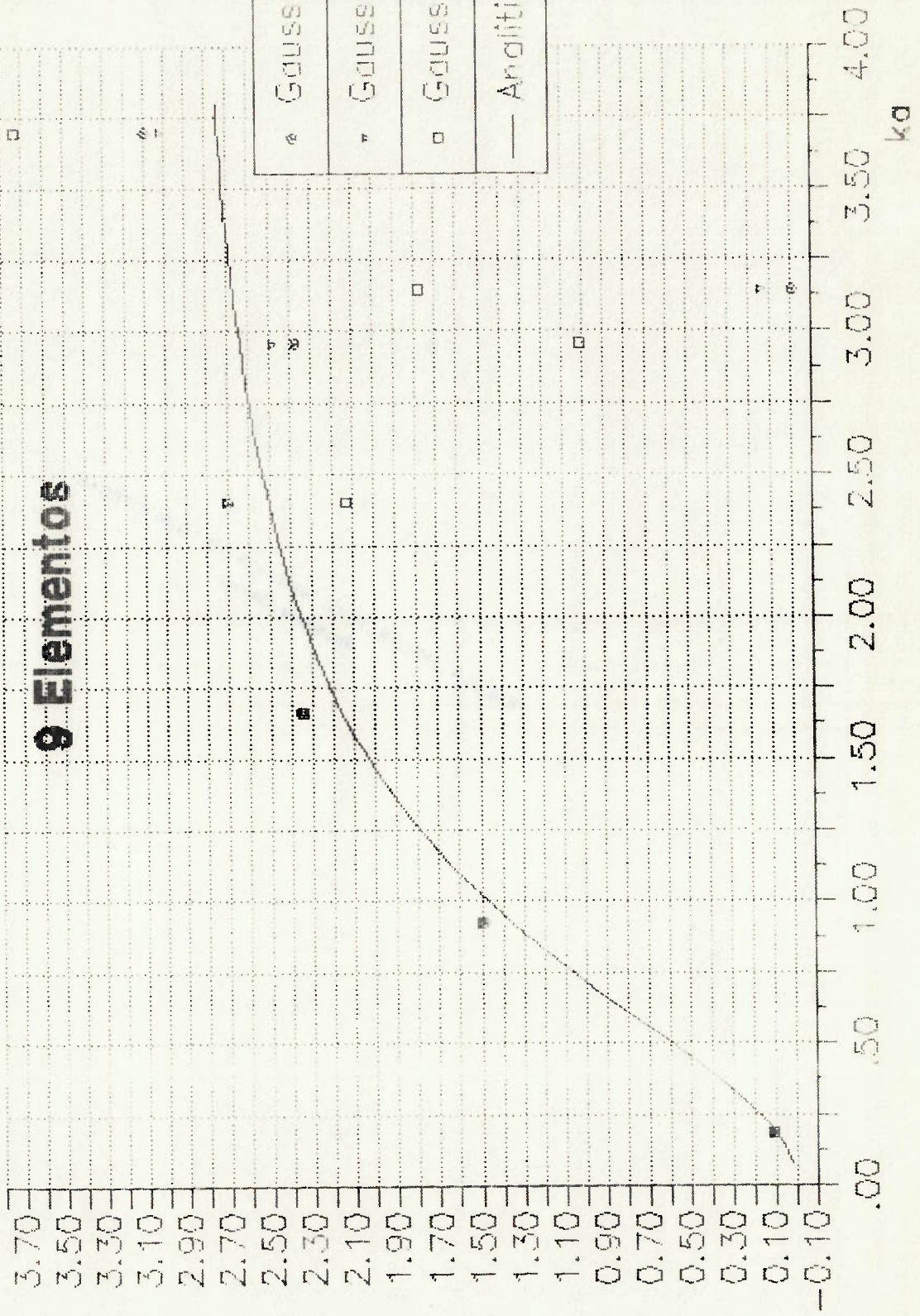
**Gauss(12,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	983.3	1,092.9	11.1
500.0	734.5	814.1	10.8
900.0	515.3	570.9	10.8
1,300.0	384.3	425.9	10.8
1,600.0	320.4	347.3	8.4
1,700.0	303.3	100.5	66.9
2,000.0	261.2	288.9	10.6

**Tab.7.12 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Pulsante**

Rep/zv  
\*0.001

### 9 Elementos



Graf.7.5 - Rep/zv x ka - Esfera Pulsante

**Gauss(4,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analítico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	197.8	10.7
500.0	498.4	548.4	10.0
900.0	441.6	479.3	8.5
1,300.0	354.8	303.0	14.6
1,600.0	303.5	115.4	138.0
1,700.0	289.0	192.6	33.4
2,000.0	252.1	343.0	36.1

**Tab.7.13 - Valores para Re p(Pa) - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	197.8	10.7
500.0	498.4	547.7	9.9
900.0	441.6	482.1	9.2
1,300.0	354.8	384.1	8.3
1,600.0	303.5	287.1	5.4
1,700.0	289.0	15.9	94.5
2,000.0	252.1	278.0	10.3

**Tab.7.14 - Valores para  $Re_p$ (Pa) - Esfera Pulsante**



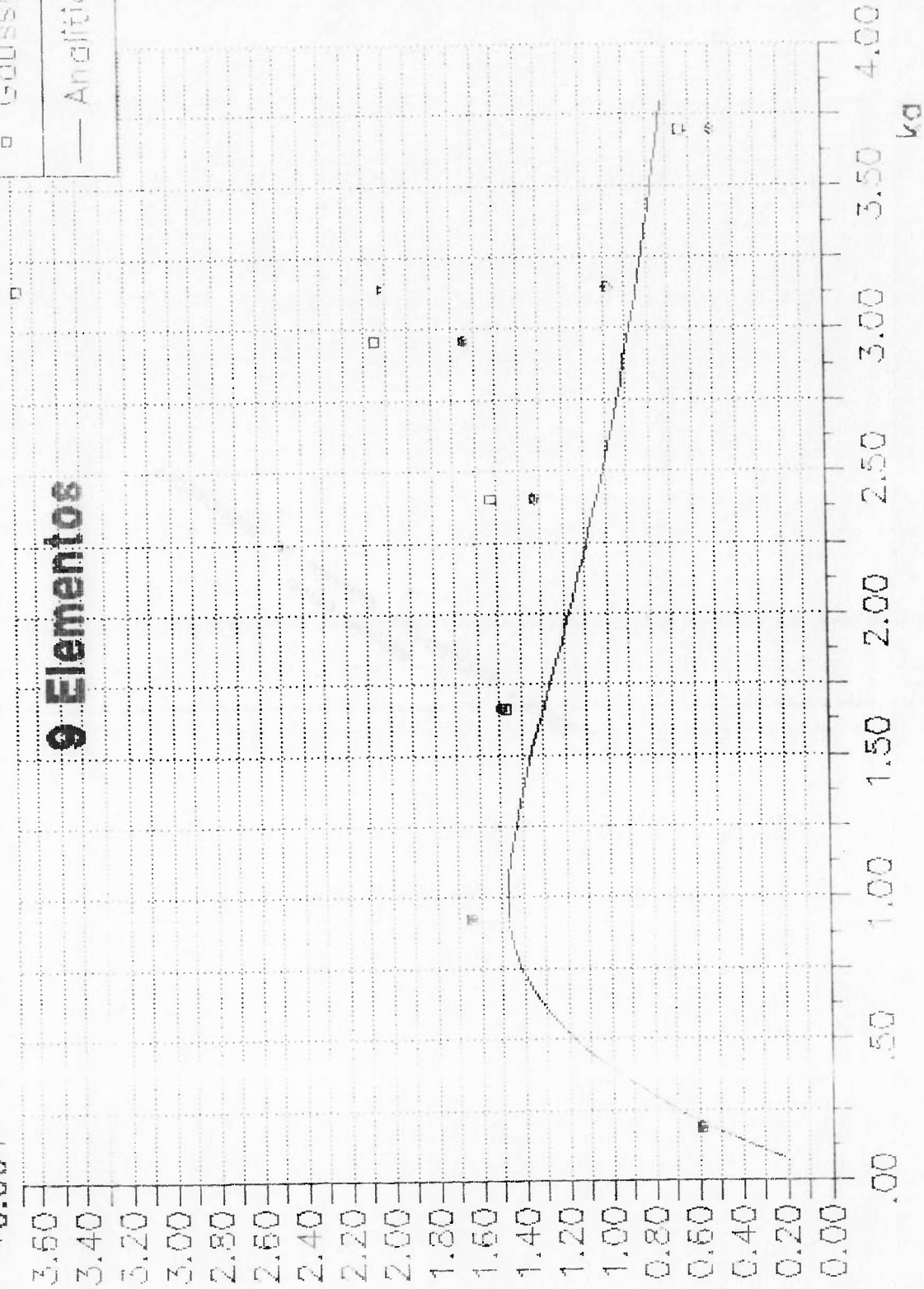
**Gauss(12,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	178.7	197.8	10.7
500.0	498.4	547.7	9.9
900.0	441.6	482.5	9.3
1,300.0	354.8	382.6	7.9
1,600.0	303.5	273.3	9.9
1,700.0	289.0	0.9	100.3
2,000.0	252.1	284.8	13.0

**Tab.7.15 - Valores para  $Re_p$ (Pa) - Esfera Pulsante**

Imp/zv  
\*0.001

### 9 Elementos



Graf.7.6 - Imp/zv x ka - Esfera Pulsante

**Gauss(4,12)**  
**9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,074.8	11.2
500.0	539.4	601.7	11.5
900.0	265.5	300.9	13.3
1,300.0	147.7	216.4	46.5
1,600.0	102.6	235.2	129.1
1,700.0	92.0	398.3	532.9
2,000.0	68.2	59.3	186.9

**Tab.7.16 - Valores para  $Im p(Pa)$  - Esfera Pulsante**

**Gauss(6,12)**  
**9 Elementos**

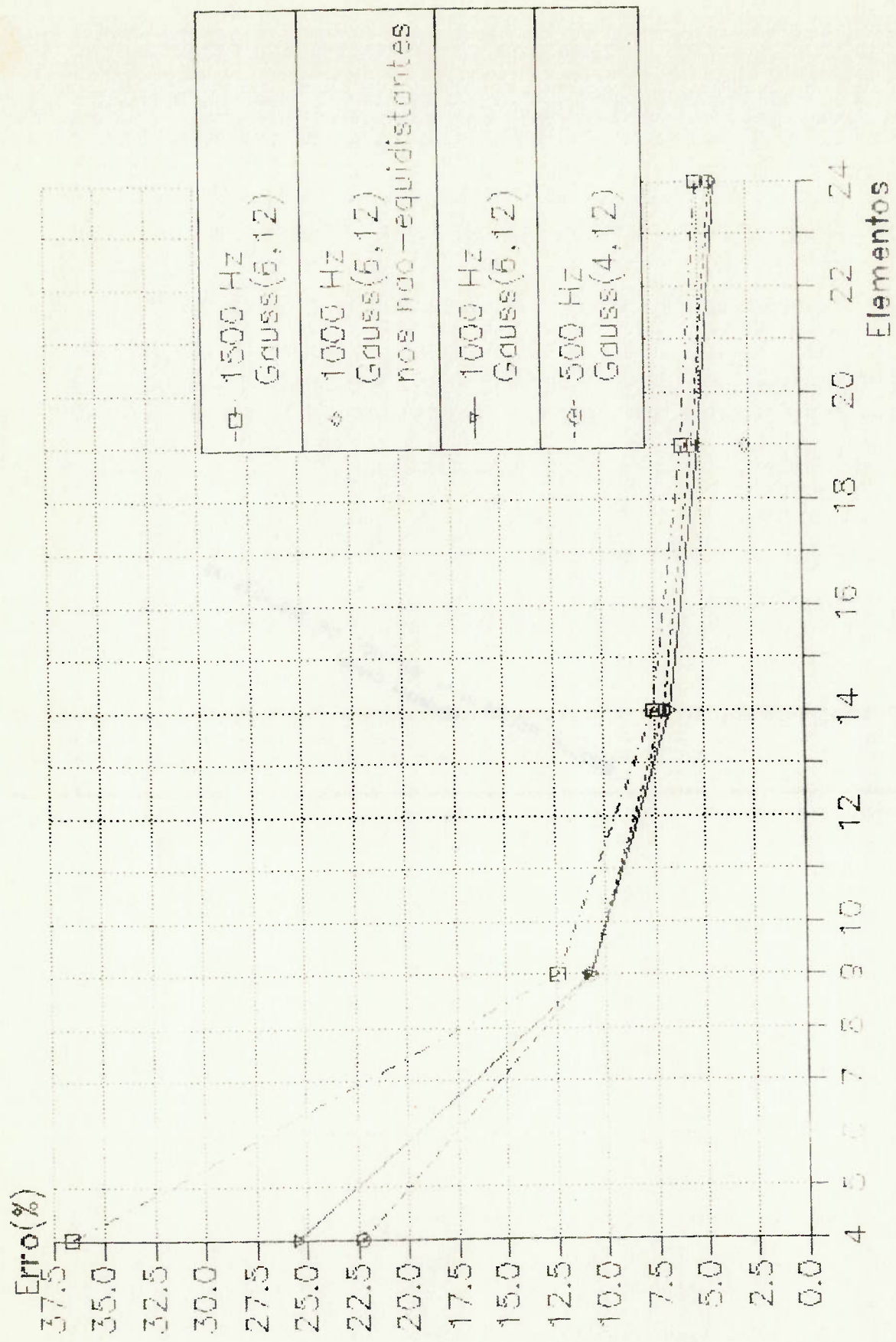
f(Hz)	Anolítico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,074.8	11.2
500.0	539.4	602.3	11.6
900.0	265.5	305.3	15.0
1,300.0	147.7	188.1	27.4
1,600.0	102.6	188.2	83.4
1,700.0	92.0	218.5	137.5
2,000.0	68.2	56.0	17.9

**Tab.7.17 - Valores para  $Im p(Pa)$  - Esfera Pulsante**

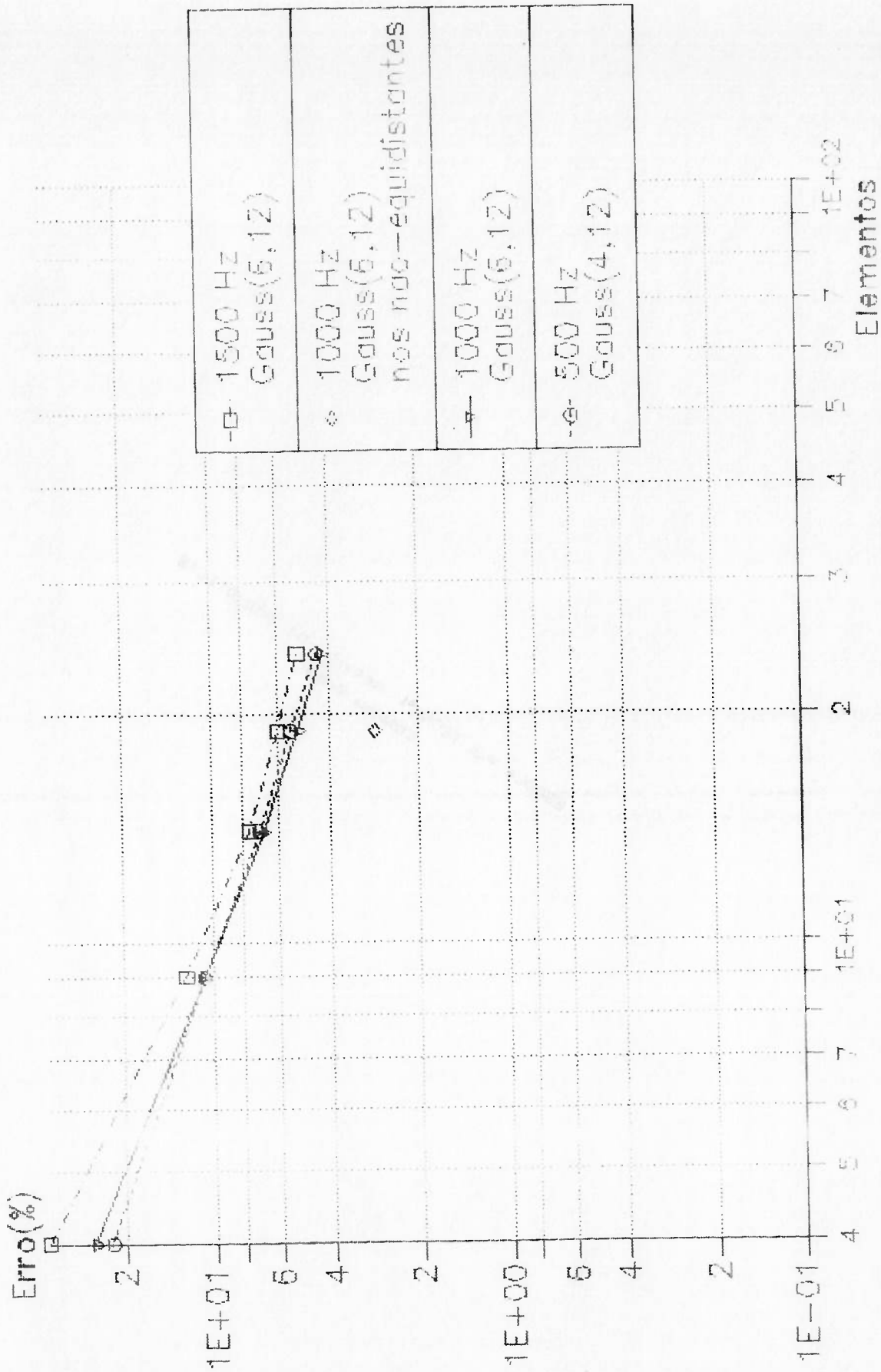
**Gauss(12,12)  
9 Elementos**

f(Hz)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
100.0	967.0	1,074.8	11.2
500.0	539.4	602.3	11.7
900.0	265.5	305.3	15.0
1,300.0	147.7	187.0	26.6
1,600.0	102.6	188.9	84.0
1,700.0	92.0	106.3	15.6
2,000.0	68.2	45.9	32.6

**Tab.7.18 - Valores para Im p(Pa) - Esfera Pulsante**



Graf.7.7 - Erro(%) x Elementos - Esfera Pulsante



**Graf.7.9 - Erro(%) x Elementos - Esfera Pulsante DI-log**

500 Hz  
Gauss(4,12)  
 $|p| = 734.5 \text{ Pa}$

Elementos	MEC-BIE(Pa)	Erro(%)
4.0	898.2	22.3
9.0	814.1	10.8
14.0	786.0	7.0
19.0	774.2	5.4
24.0	767.1	4.4

Tab.7.18 - Valores para o erro relativo - Esfera Pulsante



1000 Hz  
Gauss(6,12)  
|p| = 475.9 Pa

Elementos	MEC-BIE(Pa)	Erro(%)
4.0	597.3	25.5
9.0	527.2	10.8
14.0	508.0	6.7
19.0	500.3	5.1
24.0	495.9	4.2

1500 Hz  
Gauss(6,12)  
|p| = 339.3 Pa

Elementos	MEC-BIE(Pa)	Erro(%)
4.0	463.6	36.6
9.0	381.3	12.4
14.0	365.2	7.6
19.0	359.6	6.0
24.0	356.6	5.1

Tab.7.21 - Valores para o erro relativo - Esfera Pulsante

1000 Hz

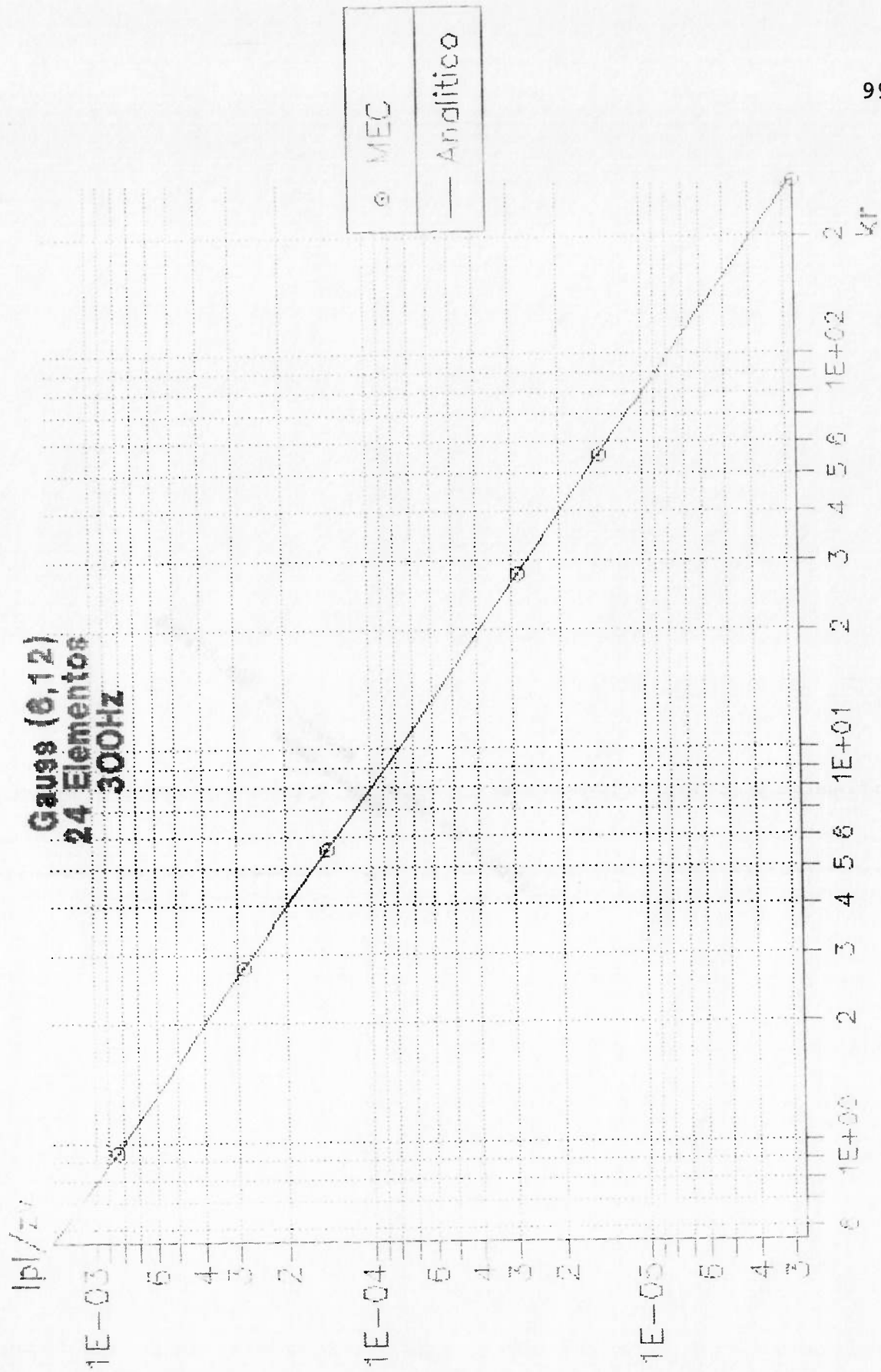
Gauss(6,12)

$|p| = 475.9 \text{ Pa}$

Distrib. nno-equidistante dos nos

Elementos	MEC-BIE(Pa)	Erro(%)
19.0	489.0	2.8

Tab.7.22 - Valor para o erro relativo - Esfera Pulsante

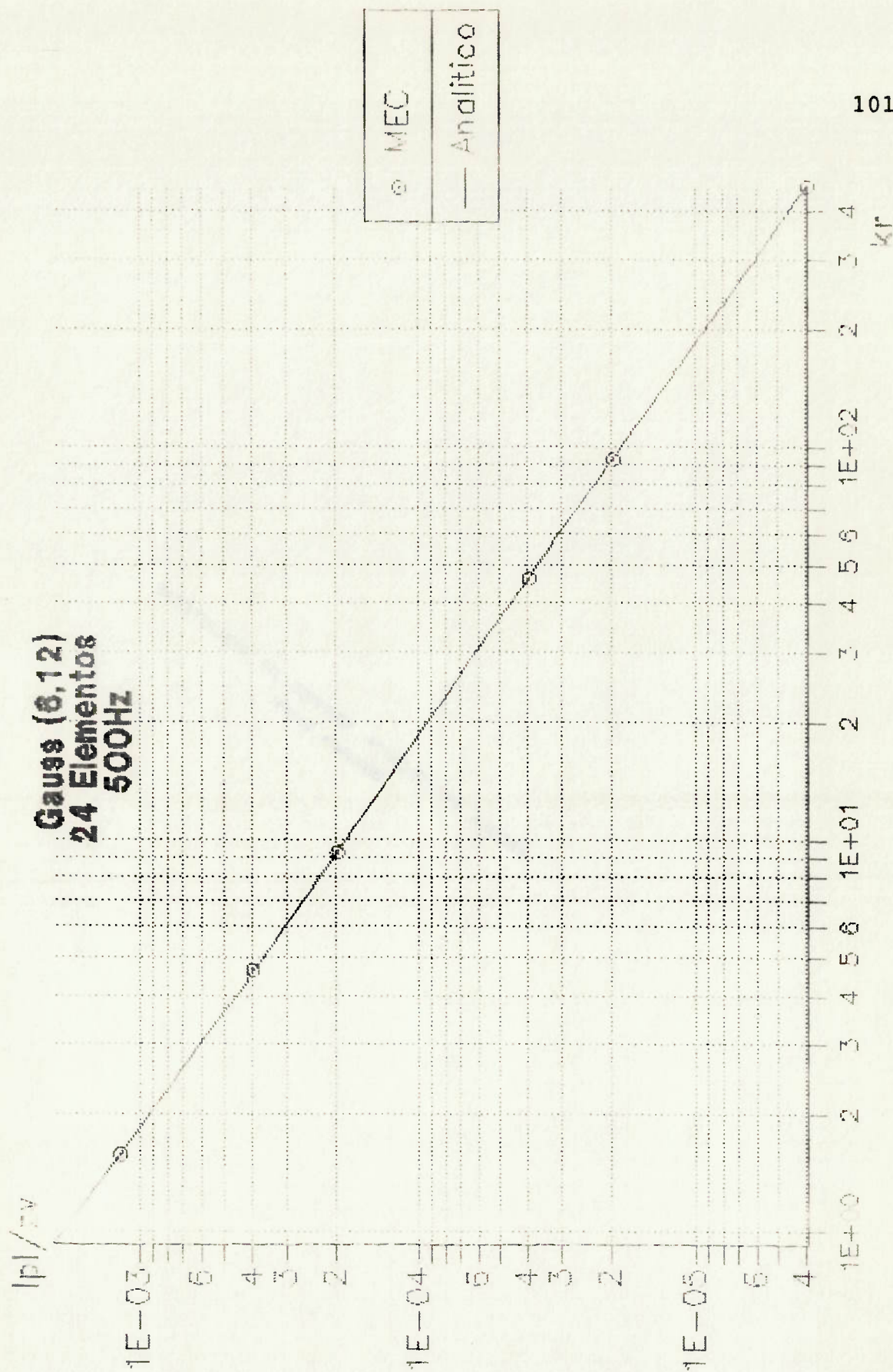


**Graf.7.9 - |p|/zv x kr - Esfera Pulsante**  
**DI-log**

Gauss(6,12)  
300 Hz  
24 Elementos

r(m)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.17	514.46	512.64	0.40
0.50	174.92	174.29	0.40
1.00	87.46	87.10	0.40
5.00	17.49	17.41	0.40
10.00	8.75	8.71	0.40
50.00	1.75	1.74	0.40

Tab.7.23 - Valores para  $|p|(\text{Pa})$  - Esfera Pulsante

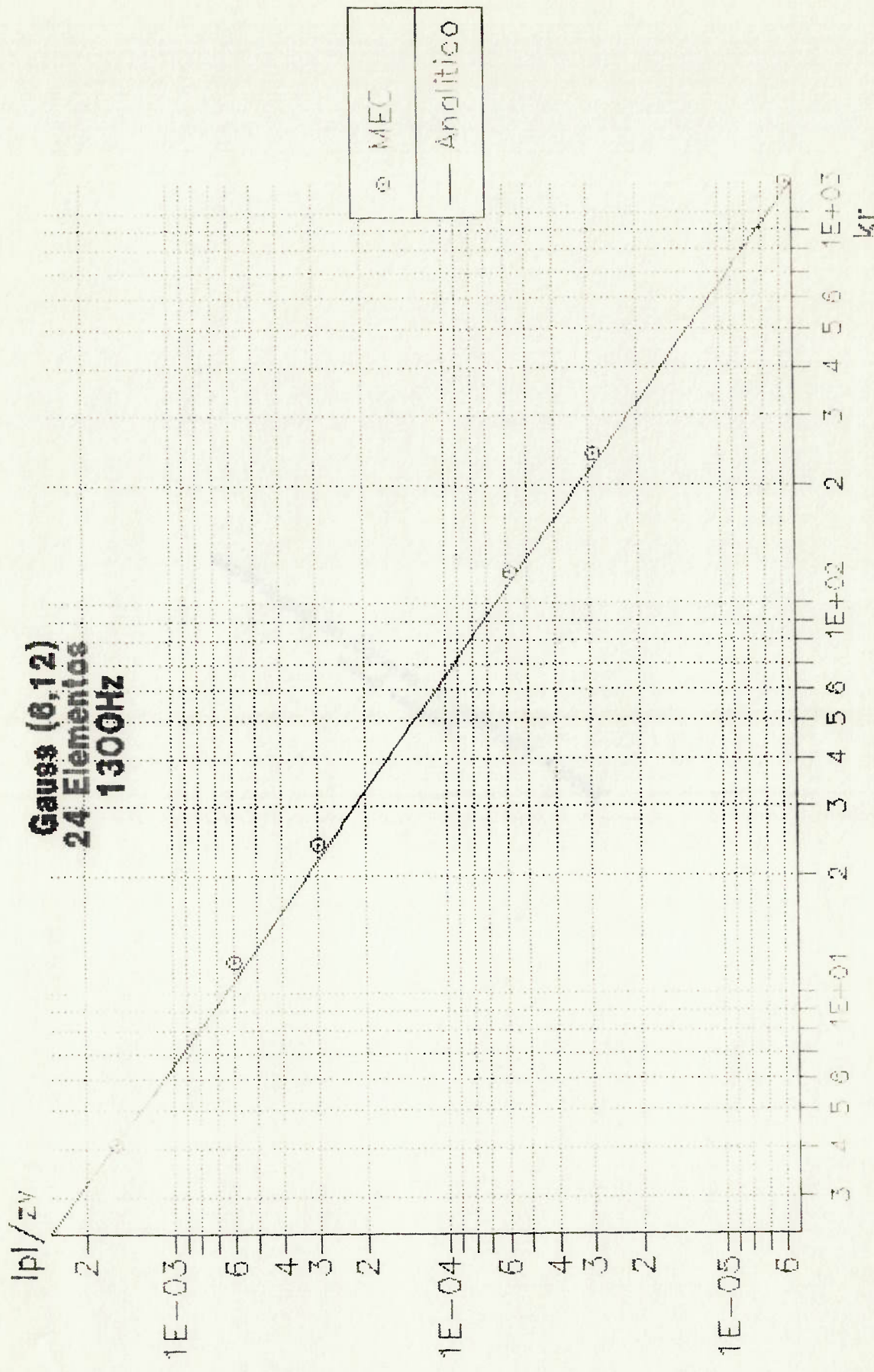


**Graf.7.10 - |p|/zv x kr - Esfera Pulsante  
DI-log**

Gauss(6,12)  
500 Hz  
24 Elementos

r(m)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.17	432.04	429.93	0.50
0.50	146.89	146.14	0.50
1.00	73.45	72.88	0.80
5.00	14.69	14.54	1.00
10.00	7.34	7.27	1.00
50.00	1.47	1.45	1.10

Tab.7.24 - Valores para  $p_l$ (Pa) - Esfera Pulsante



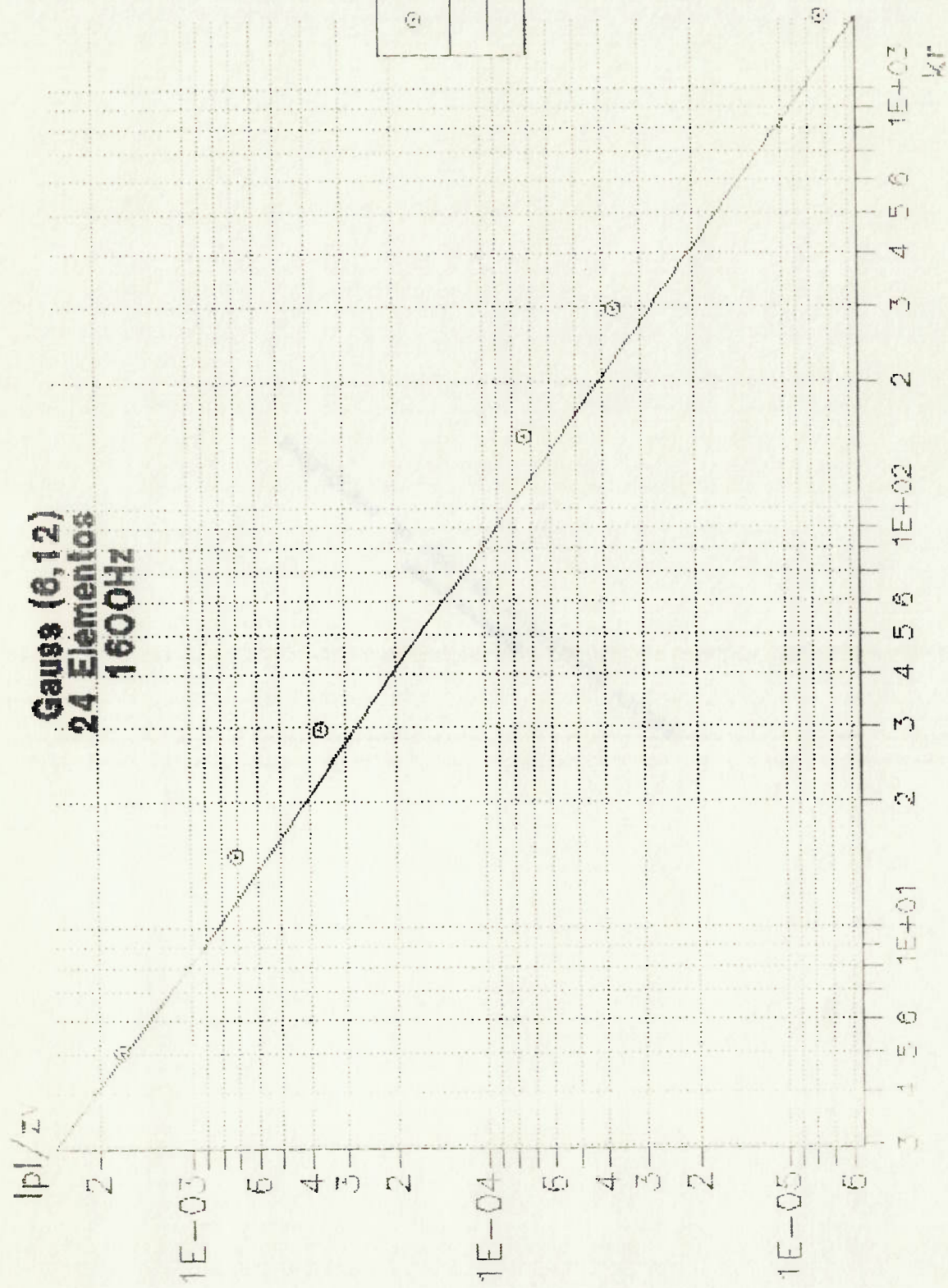
**Graf.7.11 - |p|/zv x kr - Esfera Pulsante**  
**DI-log**



Gauss(6,12)  
 1300 Hz  
 24 Elementos

r(m)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.17	226.05	224.94	0.50
0.50	76.86	84.99	10.60
1.00	38.43	42.14	9.70
5.00	7.69	8.21	6.80
10.00	3.84	4.09	6.30
50.00	0.77	0.81	5.90

Tab.7.25 - Valores para  $|p|$ (Pa) - Esfera Pulsante

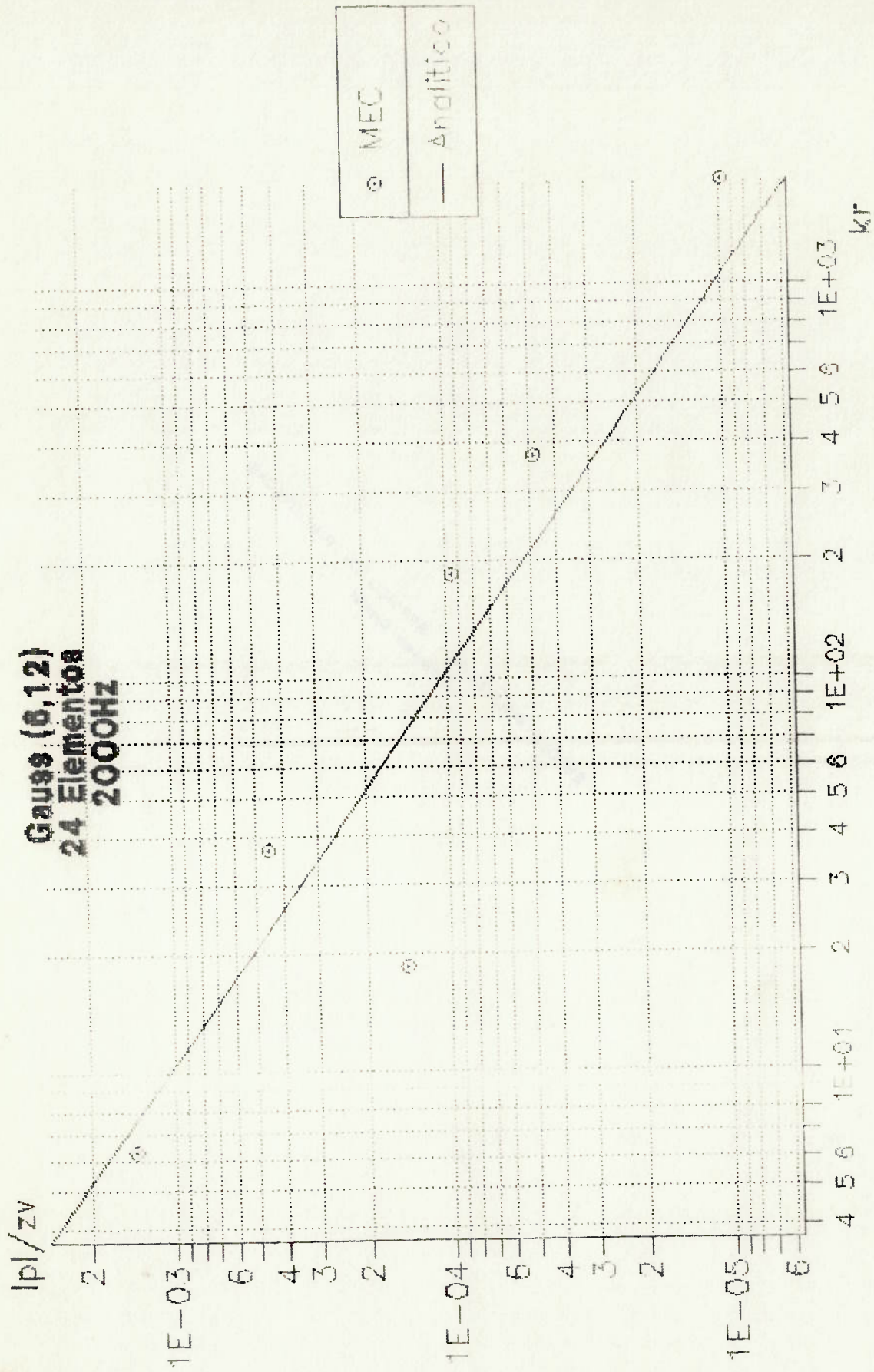


**Graf.7.12 - |p|/zv x kr - Esfera Pulsante**  
**DI-log**

Gauss(6,12)  
 1600 Hz  
 24 Elementos

r(m)	Analítico	MEC-BIE	Erro(%)
0.17	188.46	193.62	2.70
0.50	64.08	81.83	27.70
1.00	32.04	42.16	31.60
5.00	6.41	8.45	31.90
10.00	3.20	4.22	31.80
50.00	0.64	0.84	31.60

Tab.7.26 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Pulsante

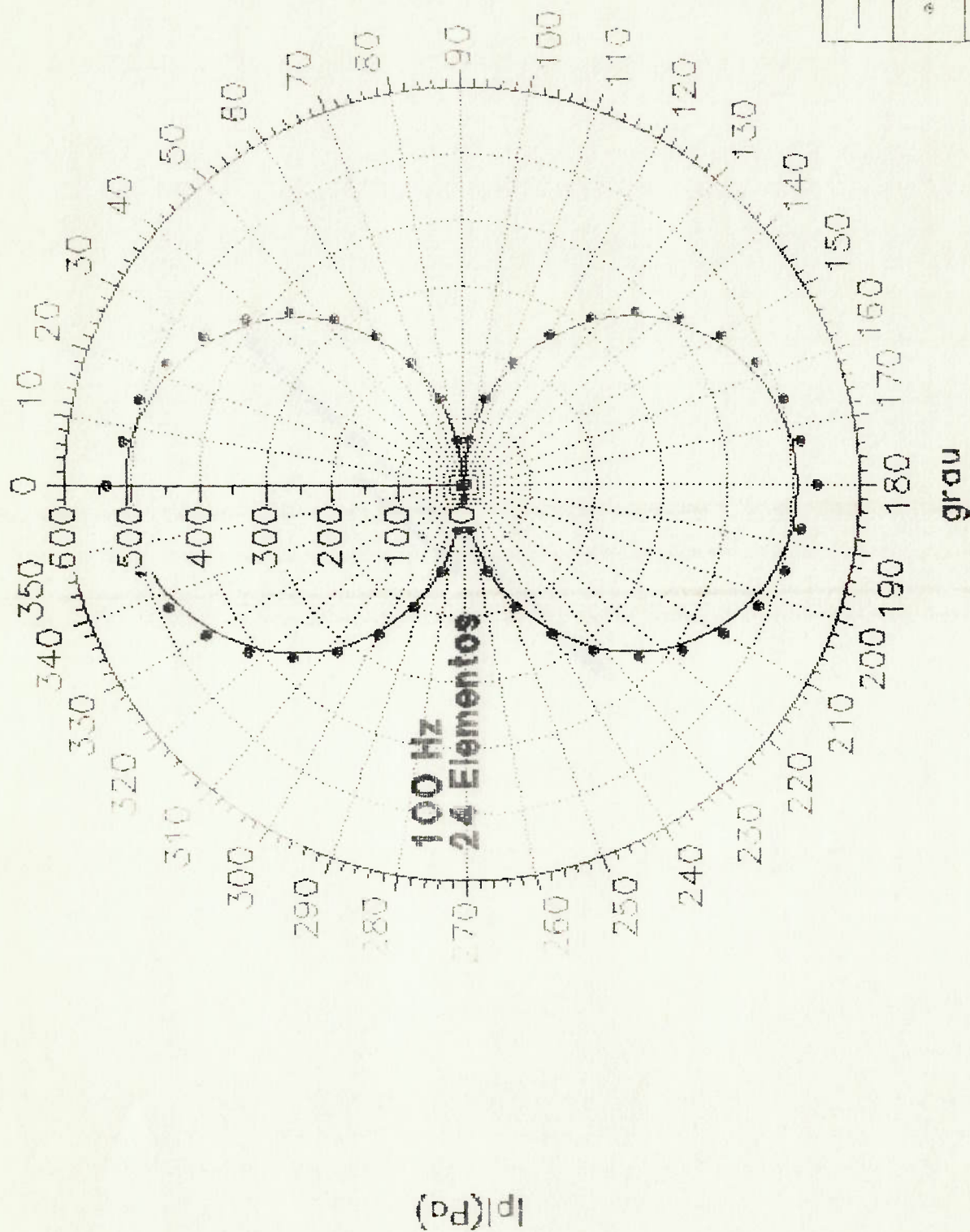


**Grat.7.13 - |p|/zv x kr - Esfera Pulsante**  
**DI-log**

Gauss(6,12)  
2000 Hz  
24 Elementos

r(m)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.17	153.63	127.49	17.00
0.50	52.23	13.31	74.50
1.00	26.12	41.60	59.30
5.00	5.22	8.77	67.80
10.00	2.61	4.41	68.70
50.00	0.52	0.88	69.40

Tab.7.27 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Pulsante



—	Analítico
•	Gauss (6,12)
•	Gauss (4,12)

**Graf.7.14 - Diretividade - Esfera Oscilante**

grau

24 Elementos  
100 Hz  
Gauss(4,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	508.4	536.7	5.6
7.5	504.0	517.2	2.8
15.0	491.1	505.0	2.8
22.5	469.7	482.9	2.8
30.0	440.3	452.3	2.7
37.5	403.3	414.4	2.7
45.0	359.5	369.5	2.8
52.5	309.5	318.2	2.8
60.0	254.2	261.2	2.8
67.5	194.6	200.1	2.9
75.0	131.6	135.2	2.8
82.5	66.4	68.3	2.9
90.0	0.0	0.0	.
97.5	66.4	68.3	2.9
105.0	131.6	135.2	2.8
112.5	194.6	200.1	2.9
120.0	254.2	261.2	2.8
127.5	309.5	318.2	2.8
135.0	359.5	369.5	2.8
142.5	403.3	414.4	2.7
150.0	440.3	452.3	2.7
157.5	469.7	482.9	2.8
165.0	491.1	505.0	2.8
172.5	504.0	517.2	2.8
180.0	508.4	536.7	5.6

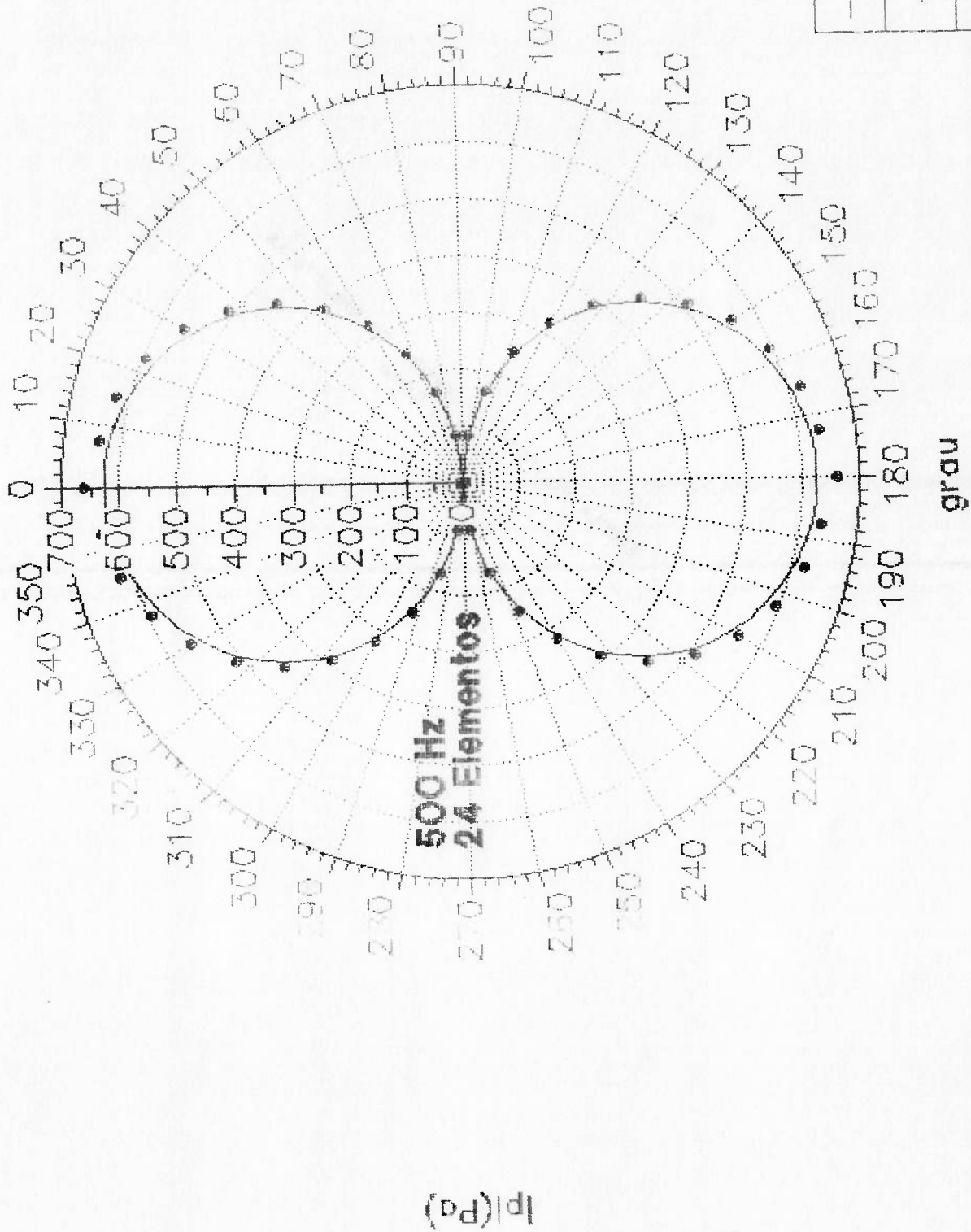
Tob.7.28 - Valores para  $I_p(\text{Pa})$  - Esfera Oscilante  
Diretividade

24 Elementos  
100 Hz  
Gause(6,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BE	Erro(%)
0.0	508.4	536.7	5.6
7.5	504.0	517.2	2.6
15.0	491.1	505.0	2.8
22.5	469.7	482.9	2.8
30.0	440.3	452.3	2.7
37.5	403.3	414.4	2.7
45.0	359.5	369.4	2.8
52.5	309.5	318.2	2.8
60.0	254.2	261.2	2.8
67.5	194.6	200.1	2.9
75.0	131.6	135.2	2.8
82.5	66.4	68.3	2.9
90.0	0.0	0.0	.
97.5	66.4	68.3	2.9
105.0	131.6	135.2	2.8
112.5	194.6	200.1	2.9
120.0	254.2	261.2	2.8
127.5	309.5	318.2	2.8
135.0	359.5	369.4	2.8
142.5	403.3	414.4	2.7
150.0	440.3	452.3	2.7
157.5	469.7	482.9	2.8
165.0	491.1	505.0	2.8
172.5	504.0	517.2	2.6
180.0	508.4	536.7	5.6

Tab.7.22 - Valores para  $p_p(Pa)$  - Esfera Oscilante  
Diretividade





**Gráf.7.15 – Diretividade – Esfera Oscilante**

24 Elementos  
500 Hz  
Gauss(4,12)

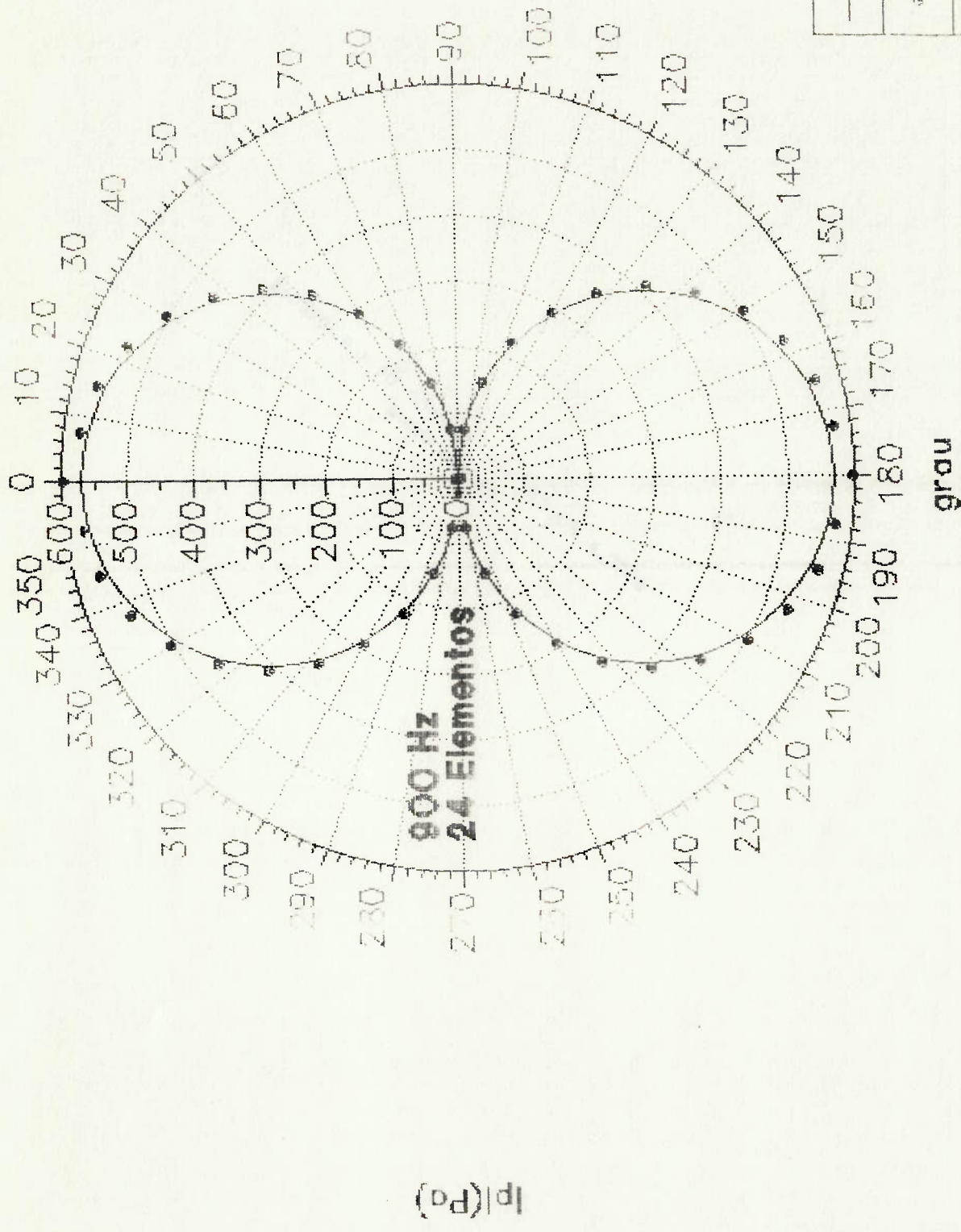
Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	626.1	661.0	5.6
7.5	620.7	636.9	2.6
15.0	604.8	622.0	2.9
22.5	578.4	594.9	2.9
30.0	542.2	557.4	2.8
37.5	496.7	510.8	2.8
45.0	442.7	455.5	2.9
52.5	381.1	392.4	3.0
60.0	313.1	322.2	2.9
67.5	239.6	246.9	3.0
75.0	162.0	166.8	2.9
82.5	81.7	84.2	3.0
90.0	0.0	0.0	.
97.5	81.7	84.2	3.0
105.0	162.0	166.8	2.9
112.5	239.6	246.9	3.0
120.0	313.1	322.2	2.9
127.5	381.1	392.4	3.0
135.0	442.7	455.5	2.9
142.5	496.7	510.8	2.8
150.0	542.2	557.4	2.8
157.5	578.4	594.9	2.9
165.0	604.8	622.0	2.9
172.5	620.7	636.9	2.6
180.0	626.1	661.0	5.6

Tab.7.30 - Valores para  $|p|(\text{Pa})$  - Esfera Oscilante  
Diretividade

24 Elementos  
500 Hz  
Gause(6,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	626.1	661.0	5.6
7.5	620.7	637.0	2.6
15.0	604.8	622.1	2.9
22.5	578.4	594.8	2.8
30.0	542.2	557.2	2.8
37.5	496.7	510.4	2.8
45.0	442.7	455.1	2.8
52.5	381.1	392.0	2.8
60.0	313.1	321.8	2.8
67.5	239.6	246.6	2.9
75.0	162.0	166.6	2.8
82.5	81.7	84.1	2.9
90.0	0.0	0.0	.
97.5	81.7	84.1	2.9
105.0	162.0	166.6	2.8
112.5	239.6	246.6	2.9
120.0	313.1	321.8	2.8
127.5	381.1	392.0	2.9
135.0	442.7	455.1	2.8
142.5	496.7	510.4	2.8
150.0	542.2	557.2	2.8
157.5	578.4	594.8	2.8
165.0	604.8	622.1	2.9
172.5	620.7	637.0	2.6
180.0	626.1	661.0	5.6

Tab.7.31 - Valores para  $I_p(\text{Pa})$  - Esfera Oscilante  
Diretividade



—	Analtico
⋯	Gauss (5,12)
- - -	Gauss (4,12)

**Grat.7.16 - Diretividade - Esfera Oscilante**

grau

24 Elementos  
900 Hz  
Gauss(4,12)

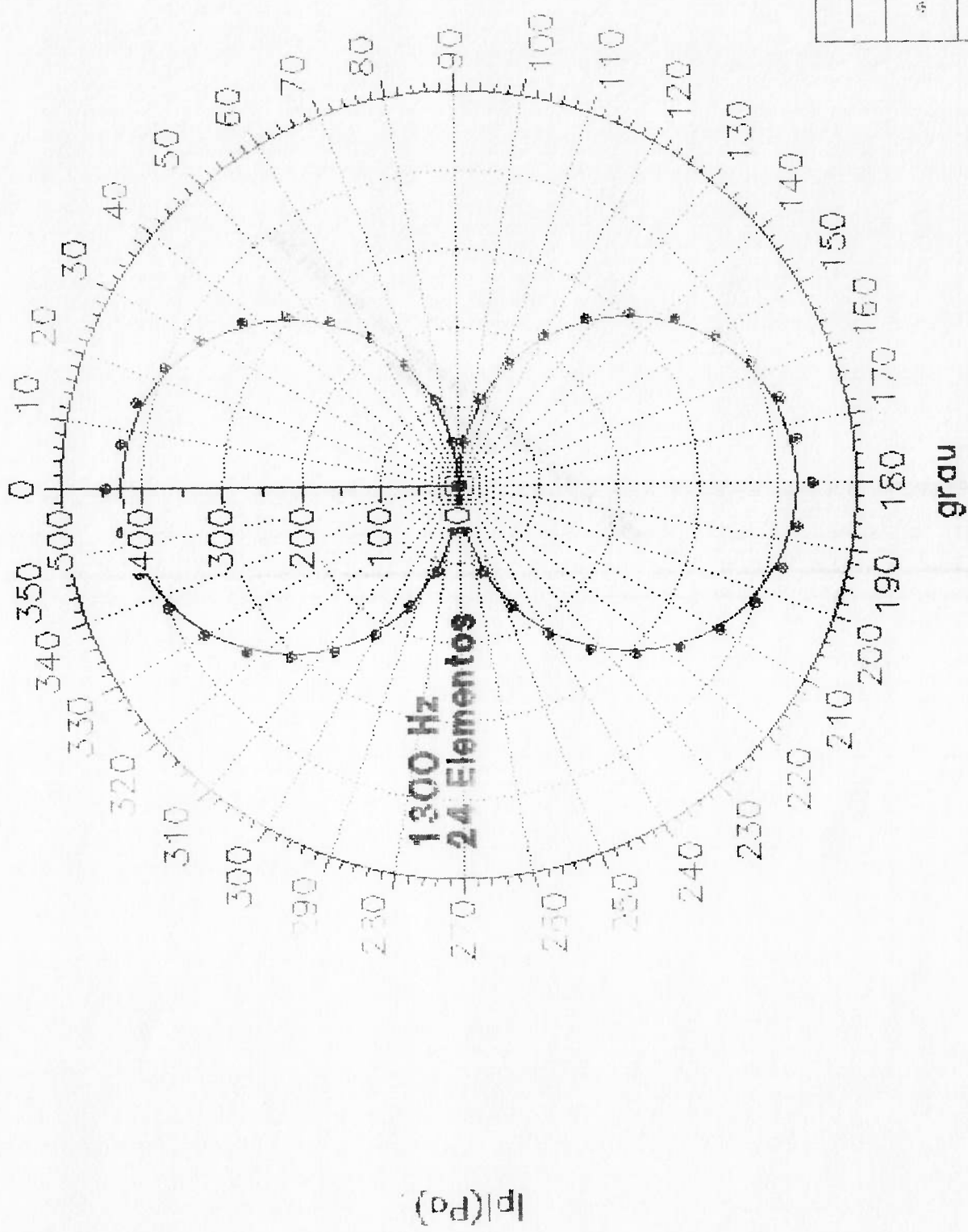
Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	568.5	596.9	5.0
7.5	563.7	575.0	2.0
15.0	549.2	561.5	2.2
22.5	525.3	537.1	2.3
30.0	492.4	503.4	2.2
37.5	451.0	461.6	2.3
45.0	402.0	411.9	2.5
52.5	346.1	355.1	2.6
60.0	284.3	291.7	2.6
67.5	217.6	223.6	2.8
75.0	147.1	151.2	2.7
82.5	74.2	76.3	2.8
90.0	0.0	0.0	.
97.5	74.2	76.3	2.8
105.0	147.1	151.2	2.7
112.5	217.6	223.6	2.8
120.0	284.3	291.7	2.6
127.5	346.1	355.1	2.6
135.0	402.0	411.9	2.5
142.5	451.0	461.6	2.3
150.0	492.4	503.4	2.2
157.5	525.3	537.1	2.3
165.0	549.2	561.5	2.2
172.5	563.7	575.0	2.0
180.0	568.5	596.9	5.0

Tab.7.32 - Valores para  $p_l(\text{Pa})$  - Esfera Oscilante  
Diretividade

24 Elementos  
900 Hz  
Gause(6,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	568.5	597.0	5.0
7.5	563.7	575.3	2.1
15.0	549.2	561.9	2.3
22.5	525.3	537.3	2.3
30.0	492.4	503.2	2.2
37.5	451.0	461.0	2.2
45.0	402.0	411.1	2.3
52.5	346.1	354.2	2.3
60.0	284.3	290.8	2.3
67.5	217.6	222.8	2.4
75.0	147.1	150.6	2.3
82.5	74.2	76.0	2.4
90.0	0.0	0.0	.
97.5	74.2	76.0	2.4
105.0	147.1	150.6	2.3
112.5	217.6	222.8	2.4
120.0	284.3	290.8	2.3
127.5	346.1	354.2	2.3
135.0	402.0	411.1	2.3
142.5	451.0	461.0	2.2
150.0	492.4	503.2	2.2
157.5	525.3	537.3	2.3
165.0	549.2	561.9	2.3
172.5	563.7	575.3	2.1
180.0	568.5	597.0	5.0

Tab.7.33 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Oscilante  
Diretividade



**Graf.7.17 - Diretividade - Esfera Oscilante**

24 Elementos  
1300 Hz  
Gauss(4,12)

Ang.(Grau)	Análítico	MEO-BE	Erro(%)
0.0	426.0	442.3	3.8
7.5	422.4	425.7	0.8
15.0	411.5	415.3	0.9
22.5	393.6	397.5	1.0
30.0	368.9	373.4	1.2
37.5	338.0	343.7	1.7
45.0	301.2	308.4	2.4
52.5	259.3	267.4	3.1
60.0	213.0	220.9	3.7
67.5	163.0	170.2	4.4
75.0	110.3	115.6	4.8
82.5	55.6	58.5	5.2
90.0	0.0	0.0	.
97.5	55.6	58.5	5.2
105.0	110.3	115.6	4.8
112.5	163.0	170.2	4.4
120.0	213.0	220.9	3.7
127.5	259.3	267.4	3.1
135.0	301.2	308.4	2.4
142.5	338.0	343.7	1.7
150.0	368.9	373.4	1.2
157.5	393.6	397.5	1.0
165.0	411.5	415.3	0.9
172.5	422.4	425.7	0.8
180.0	426.0	442.3	3.8

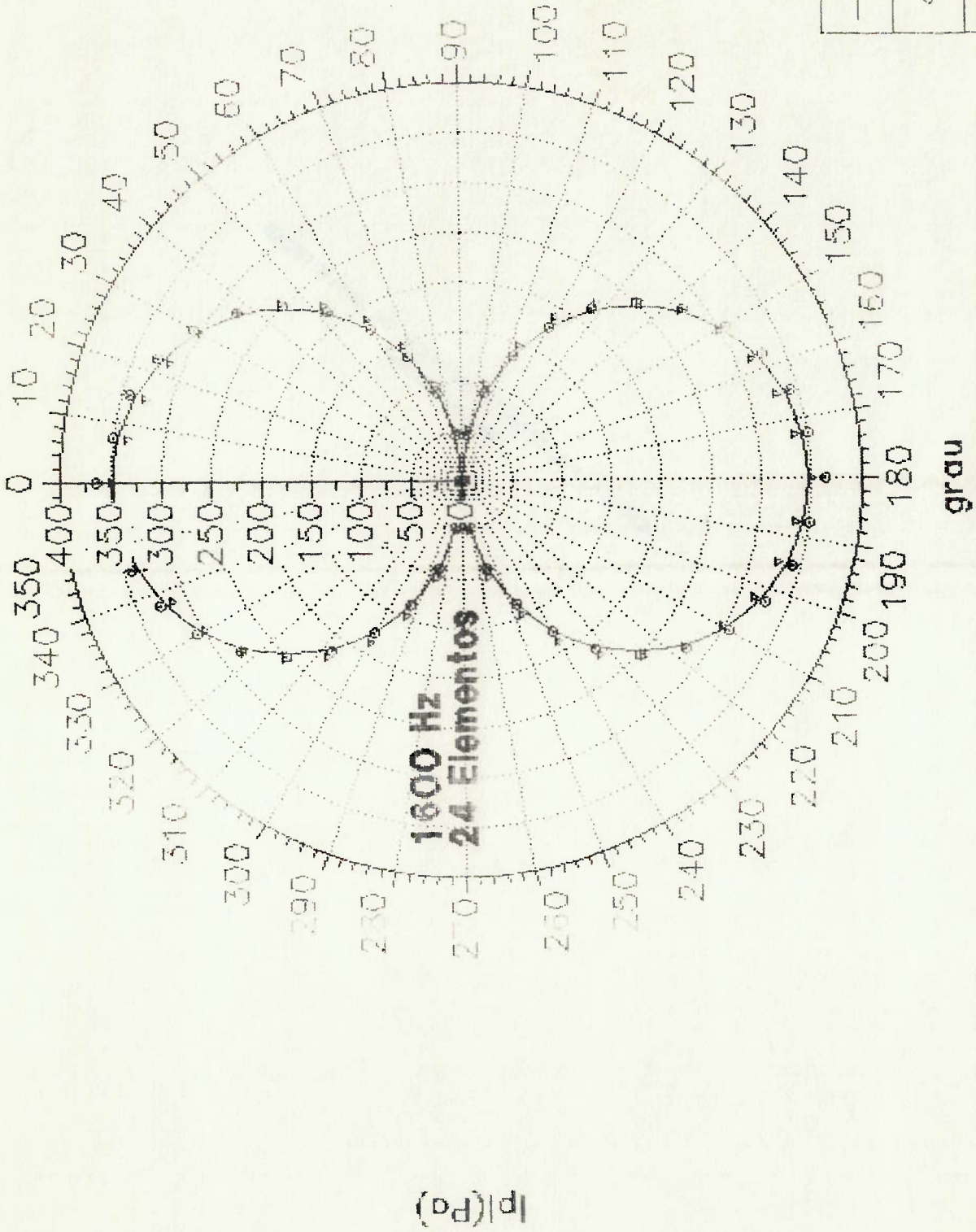
Tab.7.34 - Valores para  $|p|$ (Pa) - Esfera Oscilante  
Diretividade



24 Elementos  
1300 Hz  
Gauss(6,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	426.0	445.6	4.6
7.5	422.4	429.4	1.7
15.0	411.5	419.3	1.9
22.5	393.6	401.0	1.9
30.0	368.9	375.6	1.8
37.5	338.0	344.2	1.8
45.0	301.2	307.0	1.9
52.5	259.3	264.5	2.0
60.0	213.0	217.1	1.9
67.5	163.0	166.4	2.1
75.0	110.3	112.4	2.0
82.5	55.6	56.8	2.1
90.0	0.0	0.0	.
97.5	55.6	56.8	2.1
105.0	110.3	112.4	2.0
112.5	163.0	166.4	2.1
120.0	213.0	217.1	1.9
127.5	259.3	264.5	2.0
135.0	301.2	307.0	1.9
142.5	338.0	344.2	1.8
150.0	368.9	375.6	1.8
157.5	393.6	401.0	1.9
165.0	411.5	419.3	1.9
172.5	422.4	429.4	1.7
180.0	426.0	445.6	4.6

Tab.7.35 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Oscilante  
Diretividade



**Graf.7.18 - Diretividade - Esfera Oscilante**

24 Elementos  
1600 Hz  
Gauss(4,12)

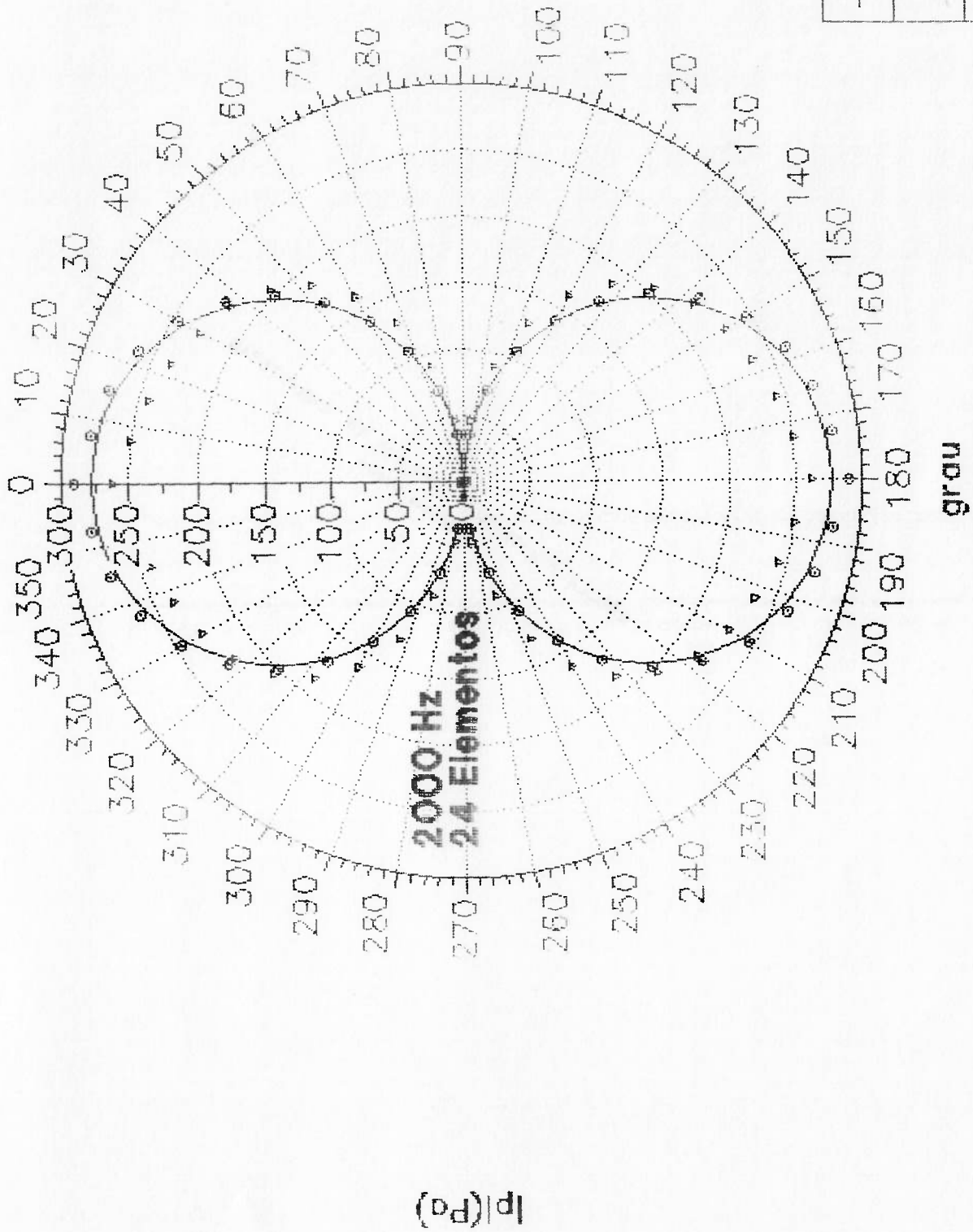
Ang.(Grau)	Analitico	MEO-BIE	Erro(%)
0.0	348.0	349.8	0.5
7.5	345.1	336.2	2.6
15.0	336.2	327.9	2.5
22.5	321.5	314.9	2.1
30.0	301.4	298.3	1.0
37.5	276.1	278.2	0.8
45.0	246.1	253.6	3.1
52.5	211.9	223.7	5.6
60.0	174.0	187.9	8.0
67.5	133.2	146.9	10.3
75.0	90.1	100.8	12.0
82.5	45.4	51.4	13.1
90.0	0.0	0.0	.
97.5	45.4	51.4	13.1
105.0	90.1	100.8	12.0
112.5	133.2	146.9	10.3
120.0	174.0	187.9	8.0
127.5	211.9	223.7	5.6
135.0	246.1	253.6	3.1
142.5	276.1	278.2	0.8
150.0	301.4	298.3	1.0
157.5	321.5	314.9	2.1
165.0	336.2	327.9	2.5
172.5	345.1	336.2	2.6
180.0	348.0	349.8	0.5

Tab.7.38 - Valores para  $h_p(\text{Pa})$  - Esfera Oscilante  
Diretividade

24 Elementos  
1600 Hz  
Gauss(6,12)

Ang.(Grau)	Analtico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	348.0	363.9	4.5
7.5	345.1	350.6	1.6
15.0	336.2	342.4	1.8
22.5	321.5	327.4	1.8
30.0	301.4	306.7	1.8
37.5	276.1	281.0	1.8
45.0	246.1	250.5	1.8
52.5	211.9	215.7	1.8
60.0	174.0	176.9	1.7
67.5	133.2	135.5	1.7
75.0	90.1	91.5	1.5
82.5	45.4	46.2	1.6
90.0	0.0	0.0	.
97.5	45.4	46.2	1.6
105.0	90.1	91.5	1.6
112.5	133.2	135.5	1.7
120.0	174.0	176.9	1.7
127.5	211.9	215.7	1.8
135.0	246.1	250.5	1.8
142.5	276.1	281.0	1.8
150.0	301.4	306.7	1.8
157.5	321.5	327.4	1.8
165.0	336.2	342.4	1.8
172.5	345.1	350.6	1.6
180.0	348.0	363.9	4.5

Tab.7.37 - Valores para  $|p|(Pa)$  - Esfera Oscilante  
Diretividade



—	Analitico
▲	Gauss(6,12)
■	Gauss(4,12)

**Graf.7.19 - Diretividade - Esfera Oscilante**

24 Elementos  
2000 Hz  
Gauss(4,12)

Ang.(Grau)	Analitico	MEC-BE	Erro(%)
0.0	277.3	261.9	5.6
7.5	275.0	250.3	9.0
15.0	267.9	243.2	9.2
22.5	256.2	235.3	8.2
30.0	240.2	227.6	5.3
37.5	220.0	218.6	0.7
45.0	196.1	205.7	4.9
52.5	168.8	187.2	10.9
60.0	138.7	161.6	16.5
67.5	106.1	129.2	21.7
75.0	71.8	90.1	25.6
82.5	36.2	46.4	28.1
90.0	0.0	0.0	.
97.5	36.2	46.4	28.1
105.0	71.8	90.1	25.6
112.5	106.1	129.2	21.7
120.0	138.7	161.6	16.5
127.5	168.8	187.2	10.9
135.0	196.1	205.7	4.9
142.5	220.0	218.6	0.7
150.0	240.2	227.6	5.3
157.5	256.2	235.3	8.2
165.0	267.9	243.2	9.2
172.5	275.0	250.3	9.0
180.0	277.3	261.9	5.6

Tab.7.38 - Valores para  $|p|(Pa)$ - Esfera Oscilante  
Diretividade

24 Elementos  
2000 Hz  
Gauss(6,12)

Ang.(Grau)	Analtico	MEC-BIE	Erro(%)
0.0	277.3	290.8	4.8
7.5	275.0	280.2	1.9
15.0	267.9	273.8	2.2
22.5	256.2	262.0	2.3
30.0	240.2	245.4	2.2
37.5	220.0	224.5	2.0
45.0	196.1	199.6	1.8
52.5	168.8	171.1	1.4
60.0	138.7	139.7	0.7
67.5	106.1	106.4	0.3
75.0	71.8	71.6	0.3
82.5	36.2	36.0	0.5
90.0	0.0	0.0	.
97.5	36.2	36.0	0.5
105.0	71.8	71.6	0.3
112.5	106.1	106.4	0.3
120.0	138.7	139.7	0.7
127.5	168.8	171.1	1.4
135.0	196.1	199.6	1.8
142.5	220.0	224.5	2.0
150.0	240.2	245.4	2.2
157.5	256.2	262.0	2.3
165.0	267.9	273.8	2.2
172.5	275.0	280.2	1.9
180.0	277.3	290.8	4.8

Tab.7.38 - Valores para  $I_p(Pa)$  - Esfera Oscilante  
Diretividade

## 8 - ANÁLISE, CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

---

Os resultados obtidos no capítulo anterior mostram o comportamento da solução pelo MEC-BIE face às variações dos parâmetros: número de elementos, frequência, proximidade de uma das frequências características, precisão de integração, formato, proximidade da fonte e condições de contorno. A seguir serão apresentadas as análises e conclusões para cada um destes parâmetros.



### 8.1 - Número de Elementos

Pode-se observar pelo Gráf.7.7 e Tabs.7.19-7.22 que há uma diminuição do erro relativo com o acréscimo do número de elementos para qualquer frequência, indistintamente. Contudo, quando a frequência é menor, a convergência se acentua mais com o aumento do número de elementos. Nota-se, ainda, considerando-se a mesma quantidade de elementos na malha, que a diferença dos erros relativos entre as frequências distintas, tende a valores muito baixos a partir de 14 elementos.

Extrapolando os pontos do Gráf.7.8, pode-se afirmar que o método alcança um erro percentual relativo em torno de 1% quando se atinge uma ordem de  $10^2$  elementos na malha. Deste mesmo gráfico observa-se uma característica linear na faixa de 4 a 24 elementos, exibindo-se um comportamento do erro percentual relativo pelo número de elementos do tipo:  $EC(\%) = C(n^{\circ} \text{ elementos})^P$ , o qual, por extrapolação, permite prever para determinada frequência o número de elementos necessários para se alcançar determinado grau de precisão através do MEC-BIE. Nota-se, ainda no referido gráfico, que a inclinação da reta é mais acentuada quanto menor for a frequência, conforme as curvas para 1000 Hz e 1500 Hz, e também, é mais acentuada quanto maior for o grau de precisão de integração utilizado, conforme as curvas para 500 Hz e 1000 Hz.

Os Gráfs.7.1-7.3 e Tabs.7.1-7.9 mostram um comportamento bem definido dos resultados ao longo do espectro de frequência, pois a tendência geral é de se obter sempre melhores resultados com o acréscimo do número de elementos para uma mesma frequência.

Convém lembrar que nesta análise os nós que compõem o elemento estão eqüidistantemente espaçados, para se poder concluir melhor sobre a influência da variação do número de elementos nos resultados da aplicação do MEC-BIE. Contudo, constatou-se que a distribuição adequada dos nós ao longo da geratriz do corpo influi sobremaneira nesses resultados. Especificamente, a aplicação do MEC-BIE com a distribuição de 19 elementos na malha, como mostra a Fig.8.1, levou a uma significativa melhora do resultado: de 5,1% de erro conseguido com distribuição eqüidistante, passou-se a 2,8% com esta nova.

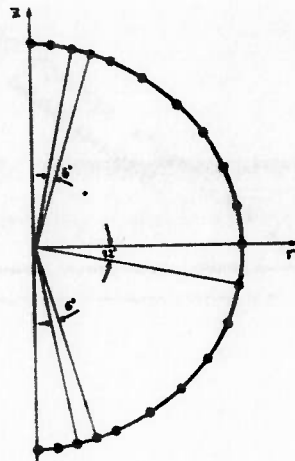


Fig.8.1 - Distribuição não-eqüidistante dos nós ao longo da geratriz. 20 nós ou 19 elementos empregados.

O observado por Seybert e Rengarajan [5]: "O modo usual de melhorar a solução sobre a superfície emissora quando se emprega o MEC é aumentar o número de elementos na malha.", "A malha deve ser suficientemente fina para representar ambos: a geometria e a variação da condição de contorno sobre a superfície.", "O refinamento da malha é necessário com o aumento da frequência, devido ao incremento da variação dos núcleos das equações

integrais no domínio de integração, isto é, ao longo do elemento.", também é notado nos resultados aqui obtidos (Gráfs. 7.7 e 7.8) e confirmam o comportamento da solução com o aumento do número de elementos.

Seybert et al. [15] e Latcha e Akay [19] apontam a relação entre comprimento de onda (ou frequência) e tamanho do elemento (ou número de elementos) e sua influência sobre os resultados. Seybert et al. [15] chegam a afirmar que a precisão da solução obtida através do MEC para uma mesma frequência é função do tamanho do elemento, e, na mesma linha, Latcha e Akay [19] afirmam que o tamanho do elemento comparado ao comprimento de onda influi na qualidade da resposta. Esta comparação se explica quando se considera a formulação do MEC na sua forma geral, onde ocorrem funções do tipo  $e^{-ikr}$  no integrando, acarretando conseqüentemente prejuízo da precisão de integração pelo método de Gauss quando se aumenta o intervalo do argumento  $kr$ , ou seja, quando o comprimento de onda aproxima-se do tamanho do elemento e passa a ser menor que este (altas frequências). Nas aplicações aqui realizadas, por utilizar uma formulação axi-simétrica, essa comparação com o comprimento de onda tem maior peso quando feita em relação ao diâmetro da esfera. Logo, o comportamento dos resultados a altas frequências fica justificado, pois a relação  $a/\lambda$  vai-se aproximando do valor unitário, dando sinais de perda de precisão das integrações pelo método de Gauss a um dado grau de precisão.

## 8.2 - Frequência

A inspeção dos Gráfs.7.1-7.2, 7.4-7.5 e Tabs.7.1-7.6, 7.10-7.15 revela, independentemente do número de elementos ou grau de precisão de integração, um comportamento homogêneo da qualidade da solução ao longo do espectro de frequência [100 Hz, 2000 Hz] para cada número de elementos, excetuando-se as frequências que estão numa faixa de amplitude de 100 Hz em torno da frequência característica, onde como já se esperava, o comportamento é totalmente distinto e imprevisível. Esta imprevisibilidade para as frequências características se nota nos gráficos e tabelas acima mencionados, quando, ora 9 elementos apresenta melhor solução, ora 16 elementos e ora 24 elementos para os Gráfs.7.1-7.3 e Tabs.7.1-7.9; e ora Gauss(4,12), ora Gauss(6,12) e ora Gauss(12,12), para os Gráfs.7.4-7.6 e Tabs.7.10-7.18. O caráter homogêneo do erro relativo da solução ao longo do espectro de frequência já não se observa no Gráf.7.3 e nas Tabs.7.7-7.9, correspondentes à parte imaginária da pressão acústica. Neste caso, o erro relativo aumenta consideravelmente à medida que se aproxima da frequência característica, a partir da qual começa a decrescer. A taxa de acréscimo de erro é tanto menor quanto maior é o número de elementos empregado ou o grau de precisão de integração.

Nos Gráfs.7.1-7.3 e Tabs.7.1-7.9, o erro percentual relativo para uma mesma frequência ao longo do espectro de 100 Hz a 2000 Hz é, via de regra, sempre menor quanto maior é o número de elementos empregados na malha, como anotado na seção anterior, excetuando-se a faixa em torno da frequência característica.

O emprego do MEC-BIE não seria recomendável a altas frequências por dois motivos: um é aquele apontado na Sec.8.1 referente ao argumento da função  $e^{-ikr}$ , e o outro é o fato de que a altas frequências a não-unicidade de solução é especialmente severa devido à concentração de frequências características aumentar [5]. Contudo, o uso do MEC associado ao CHIEF, apresentado por Schenck [2] e discutido por Seybert et al. [4], ou as aproximações apresentadas e discutidas por Seybert e Rengarajan [5], vem contornar esse problema.

### 8.3 - Precisão de Integração

Na Ref.[5] Seybert e Rengarajan afirmam que um dos modos usuais de se melhorar a solução de campo acústico obtida através do MEC é o de aumentar em cada elemento o número de pontos utilizados na integração pelo método de Gauss. Nos resultados aqui obtidos, Gráfs.7.4-7.6, constatou-se que a distinção entre as soluções dadas pelos três graus de precisão adotados surge a partir de  $ka=2.40$ . Contudo, são só aqueles obtidos com Gauss(4,12) se destacam em relação aos demais. No ponto correspondente à frequência característica ( $ka=\pi$ ) a aparente melhor solução fornecida por Gauss(4,12) não representa nada, pois trata-se de um ponto anômalo, como já visto.

O comportamento dos Gráfs.7.9-7.15 e Tabs.7.19-7.30 aponta para o mesmo observado no parágrafo acima em termos da influência do grau de precisão de integração sobre a qualidade dos resultados, ou seja, a influência só se nota a partir de  $ka=2.40$ , onde então, os resultados para Gauss(6,12) destacam-se como os melhores.

Por outro lado os Gráfs.7.7 e 7.8 revelam que para se conseguir soluções melhores com um número menor de elementos, faz-se necessário o incremento do grau de precisão na integração pelo método de Gauss. É o que se evidencia no Gráf.7.8 por meio das curvas de 500 Hz e 1000 Hz, as quais empregam respectivamente Gauss(4,12) e Gauss(6,12).

Uma possível justificativa para os resultados melhores de Gauss(6,12) que de Gauss(12,12) com valores de  $k_a$  superiores a 2.40, está no fato de se ter que avaliar a integral para o ângulo de revolução um número de vezes maior num mesmo elemento. Como essas integrais estão sujeitas a erros mais elevados em altas frequências, a integração ao longo da geratriz está intrinsicamente sujeita ao erro, por depender daquelas. Logo, ao se fazer a integração ao longo da geratriz com uma precisão de integração maior, pode ocorrer do resultado ser mais fiel aos valores obtidos anteriormente com erro, por ser mais exato, o que não ocorreria necessariamente com essa mesma integração se fosse utilizada uma precisão menor, pois o erro daí resultante poderia compensar aqueles da integração no ângulo de revolução.

#### 8.4 - Proximidade da Fonte

A inspeção dos Gráfs.7.9-7.13 e Tabs.7.23-7.27 revela que os resultados do campo acústico ao longe pioram à medida que se trabalha com frequências maiores, dando a nítida impressão que o efeito do tamanho do elemento em relação ao comprimento de onda se faz presente aqui, como se era de esperar.

Nota-se ainda que, para uma mesma frequência, melhores soluções do campo de pressões acústicas são obtidas no campo próximo até duas vezes o raio da esfera emissora, conforme os Gráfs.7.9-7.13 e Tabs.7.23-7.27. Quanto maior a frequência fica mais caracterizado esse comportamento.

Ao diagnosticar os resultados para o campo fora da esfera pode-se pensar que uma justificativa para eles seria o fato de se estar introduzindo valores da pressão acústica não muito precisos na equação que dá o valor da mesma num ponto externo qualquer. Todavia, Chertock, na Ref.[11], diz que, já que o campo acústico ao longe depende de uma integral de superfície, poderia haver grandes erros na distribuição local do campo acústico superficial, sem contudo haver grandes erros no campo ao longe, sempre que a média do campo sobre a superfície fosse aproximadamente precisa.

### 8.5 - Condições de Contorno

O MEC-BIE mostra-se eficiente também no caso de uma esfera oscilante. Através dos Gráfs.7.14-7.19 e Tabs.7.28-7.39, nota-se a qualidade das soluções obtidas pelo MEC-BIE ao longo do espectro de frequência [100 Hz, 2000 Hz] para os dois graus de precisão: Gauss(4,12) e Gauss(6,12). Até a frequência de 1300 Hz não há diferença considerável entre os dois graus de precisão, bem como, entre estes e o próprio resultado analítico. A partir do Gráf.7.18 e Tab.7.36 apresenta-se uma diferença maior entre os resultados obtidos por cada uma das duas precisões de integração, destacando-se a precisão de Gauss(6,12) como aquela que mais se aproxima do resultado obtido analiticamente. Nos Gráfs.7.14-7.19 e Tabs.7.28-7.39 observa-se que nos pontos correspondentes a  $0^\circ$  e

180° a diferença com a solução analítica tende a ser maior que nos demais pontos: tendo-se em conta Gauss(6;12). Pode-se atribuir a isto as condições de singularidade mais severas nesses pontos, onde a integração pelo método de Gauss não consegue alcançar boa aproximação com o grau de precisão empregado. De qualquer modo, pode-se dizer que a qualidade da solução para as duas condições de contorno são equivalentes, tendo em vista a maneira de se escolher o valor representativo para a solução do campo acústico de pressões de uma esfera pulsante.

#### 8.6 - Conclusões Finais

Da análise feita sobre os resultados obtidos pelo MEC-BIE nota-se que: o método é satisfatório para aplicações em Engenharia, as quais permitem soluções aproximadas dentro de uma faixa de 15% em torno da solução verdadeira; exige-se maiores cuidados quando se trabalha próximo de uma frequência característica; os esforços para se obter melhores soluções do campo acústico fora da superfície emissora são maiores quando a frequência é superior à primeira frequência característica.

De um modo geral, conclui-se que há três maneiras de se alcançar melhores resultados através do MEC-BIE: (1) aumentar o número de nós da malha, (2) aumentar o grau de precisão de integração e (3) distribuir os nós de forma adequada ao longo da geratriz do corpo emissor. As duas primeiras influem diretamente no tempo de processamento. A primeira influi na alocação de memória. E a terceira permite uma grande melhora da precisão, sem contudo interferir no tempo de processamento e na alocação de memória. Uma quarta medida que traria melhores resultados seria o



emprego de elementos isoparamétricos quadráticos, como proposto por Seybert [16], a qual não foi aqui estudada, e que fica como sugestão para trabalhos vindouros.

Previne-se aqueles que queiram empregar o MEC-BIE quanto ao uso desmedido de elementos na malha e de pontos no intervalo de integração. Como analisado, um número superior a 19 elementos não leva a grandes melhoras da solução, assim como a utilização de Gauss(12,12) não representa melhora sensível sobre Gauss(6,12).

Para estudos futuros ficam, além daquele já sugerido: a análise do método aplicado a outras superfícies; a eliminação das singularidades no integrando, como proposto por Engblom & Nelson [13] e Seybert et al. [6]; a generalização do método MEC-BIE para qualquer formato de corpo e condição de contorno da superfície; a utilização do CHIEF, desenvolvido por Schenck [2] para superar as deficiências do método nas proximidades das frequências características; o estudo mais detalhado do comportamento da solução do campo acústico a frequências mais elevadas, visando à obtenção de resultados melhores.

9 - BIBLIOGRAFIA9.1 - Trabalhos Citados

- 1) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C., BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUES. Heidelberg, Springer-Verlag Berlin, (1984).
- 2) Schenck, H.A., Improved integral formulation for acoustic radiation problems. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 44(1) : (1968).
- 3) Copley, L.G., Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 44(1) : (1968).
- 4) Seybert, A.F. & Rengarajan, T.K., The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 81(5) : (1987).
- 5) Seybert, A.F. & Rengarajan, T.K., The high-frequency radiation of sound from bodies of arbitrary shape. JOURNAL OF VIBRATION, ACOUSTICS, STRESS, AND RELIABILITY IN DESIGN, 109 : (1987).
- 6) Seybert, A.F., Soenarko, B., Rizzo, F.J. & Shippy, D.J., An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 77(2) : (1985).
- 7) Sommerfeld, A., PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PHYSICS. New York, Academic Press, (1949).

- 8) Jackson, J.D., CLASSICAL ELECTRODYNAMICS. New York, John Wiley and Sons, (1975).
- 9) Horton & C.W., Innis, G.S., The computation of far-field radiation patterns from measurements made near the source. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 33(7) : (1961).
- 10) Chen, L.H. & Schweikert, D.G., Sound of radiation from an arbitrary body. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 35(10) : (1963).
- 11) Chertock, G., Sound radiation from vibrating surfaces. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 36(7) : (1964).
- 12) Copley, L.G., Integral equation method for radiation from vibrating bodies. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 41(4) : (1967).
- 13) Engblom, J.J. & Nelson, R.B., Consistent formulation of sound radiation from arbitrary structure. JOURNAL OF APPLIED MECHANICS : (junho de 1975).
- 14) Piaszczyk, C.M. & Klosner, J.M., Acoustic radiation from vibrating surfaces at characteristic frequencies. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 75(2) : (1984).
- 15) Seybert, A.F., Soenarko, B., Rizzo, F.J. & Shippy, D.J., Application of the BIE method to sound radiation problems using an isoparametric element. JOURNAL OF VIBRATION, ACOUSTICS, STRESS, AND RELIABILITY IN DESIGN, 106 : (1984).

- 16) Seybert, A.F., Soenarko, B., Rizzo, F.J. & Shippy, D.J.,  
A special integral equation formulation for acoustic  
radiation and scattering for axisymmetric bodies and  
boundary conditions. JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF  
AMERICA, 80(4) : (1986).
- 17) Jiang, J.K. & Prasad, M.G., On the applications of the  
boundary element method to acoustical field studies of  
vibrating structures. JOURNAL OF VIBRATION, ACOUSTICS,  
STRESS, AND RELIABILITY IN DESIGN, 108 : (1986).
- 18) Abramowitz, M., HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS, WITH  
FORMULAS, GRAPHS, AND MATHEMATICAL TABLES. New York,  
Dover, (1964).
- 19) Latcha, M.A. & Akay, A., Application of the Helmholtz  
integral in acoustics. JOURNAL OF VIBRATION, ACOUSTICS,  
STRESS, AND RELIABILITY IN DESIGN, 108 : (1986).

## 9.2 - Bibliografia Adicional

- Pipes, L.A. & Harvill, L.R., APPLIED MATHEMATICS FOR  
ENGINEERS AND PHYSICISTS. New York, McGraw-Hill, (1970).
- Sokolnikoff, I.S. & Redheffer, R.M., MATHEMATICS OF  
PHYSICS AND MODERN ENGINEERING. New York, McGraw-Hill,  
(1958).
- Pimenta, M.M., Notas de aula. MEDIÇÃO E CONTROLE DE  
RUIDO. EPUSP. Departamento de Engenharia Mecânica, São  
Paulo, SP, (1988).
- Smithies, F., INTEGRAL EQUATIONS. Cambridge, University  
Press, (1958).
- Kellogg, O.D., FOUNDATIONS OF POTENTIAL THEORY. New York,

Dover Publications, (1953).

- Courant, R. & Hilbert, D., METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS. New York Interscience Publishers, (1953).
- Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J.O., APPLIED NUMERICAL METHODS. New York, John Wiley and Sons, (1969).

APÊNDICE A

ALGUNS TÓPICOS SOBRE A EQUAÇÃO INTEGRAL DE HELMHOLTZ

Na Sec. 2.3 chegou-se às Eqs. 2.32, que nada mais representam que equações integrais lineares:

$$4\pi u(P) = \int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS - \int_S \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) dS, \quad (\text{A.1})$$

para o ponto P externo a S;

$$\int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS - \int_S \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) dS = 0, \quad (\text{A.2})$$

para o ponto P interno a S;

$$C(P) u(P) = \int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS - \int_S \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) dS, \quad (\text{A.3})$$

para o ponto P sobre S. C(P) é dado pela Eq. 2.33.

#### A.1 - Algumas Definições para as Equações Integrais Lineares

O método utilizado aqui envolve estas equações integrais (Eqs. A.1-3). As duas últimas são empregadas, geralmente, para se obter a função u sobre a superfície S, e a primeira permite obter o valor da função u em qualquer ponto externo à superfície S, conhecendo-se sua expressão sobre a mesma superfície. Às Eqs. A.2 e A.3 dá-se o nome respectivamente de Equação Integral de Helmholtz Interna e Equação Integral de Helmholtz Superficial.

Para simplificar a apresentação dessas equações, sejam definidas as seguintes funções:

$$K(P,Q) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right], \quad (\text{A.4})$$

$$e \quad w(P) = - \int_S \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) dS, \quad (\text{A.5})$$

onde a função K é denominada de núcleo da equação integral, definida para todo P e Q sobre a superfície S.

Equações do tipo:

$$\int_S K(P,Q) u(Q) dS + w(P) = 0, \quad (A.6)$$

em que a função incógnita aparece apenas sob o sinal de integração, são denominadas de equações integrais do primeiro tipo.

Equações deste outro tipo:

$$u(P) = \int_S K(P,Q) u(Q) dS + w(P), \quad (A.7)$$

em que a função incógnita aparece tanto sob o sinal de integração como fora dele, são denominadas de equações integrais de segundo tipo.

Definem-se, ainda, os núcleos  $\mathcal{K}^2$ , funções  $K(P,Q)$  satisfazendo as três seguintes condições:

i-  $K(P,Q)$  é uma função mensurável de  $(P,Q)$ , onde  $P$  e  $Q$  pertencem a  $S$ , tal que:

$$\int_S \int_S [K(P,Q)]^2 dS_P dS_Q \quad (A.8)$$

é limitada.

O índice  $P$  ou  $Q$  no elemento de área  $dS$  indica qual a variável de integração considerada.

ii- para cada valor de  $P$ ,  $K(P,Q)$  é uma função mensurável de  $P$  tal que:

$$\int_S [K(P,Q)]^2 dS_Q \quad (A.9)$$

é limitada.



iii- para cada valor de  $Q$ ,  $K(P, Q)$  é uma função mensurável de  $P$  tal que:

$$\int_S [K(P, Q)]^2 dS_P \quad (A.10)$$

é limitada.

Uma forma mais completa de se apresentar uma equação integral do segundo tipo é:

$$u(P) = w(P) + \lambda \int_S K(P, Q) u(Q) dS. \quad (A.11)$$

## A.2 - Alguns Teoremas de Equações Integrais Lineares

Existem vários teoremas que indicam o comportamento da solução da equação com o parâmetro  $\lambda$ . Serão considerados aqui apenas aqueles que convêm para a análise do método empregado aqui. Para enunciá-los é necessário fazer de antemão algumas definições:

i- se, para um dado valor de  $\lambda$ , existe uma função  $\mathcal{L}^2 H_\lambda(P, Q)$  satisfazendo as equações:

$$H_\lambda(P, Q) - K(P, Q) = \lambda \int_S K(P, T) H_\lambda(T, Q) dS_T = \lambda \int_S H_\lambda(P, T) K(T, Q) dS_T, \quad (A.12)$$

então  $H_\lambda(P, Q)$  é um núcleo resolvente, ou resolvente apenas, do núcleo  $K(P, Q)$  para o valor  $\lambda$ , e  $\lambda$  é um valor regular do núcleo  $K(P, Q)$ .

ii- se a equação integral homogênea:

$$u(P) = \lambda \int_S K(P, Q) u(Q) dS \quad (A.13)$$

tem outra solução além da trivial, o valor  $\lambda$  associado a seu núcleo será denominado de valor característico.

## A.2.1 - Teorema 1

TEOREMA 1: Todo número complexo  $\lambda$  é um valor regular ou um valor característico do núcleo  $K$ ; em outras palavras, ou a equação:

$$u(P) = w(P) + \lambda \int_S K(P, Q) u(Q) dS \quad (A.14)$$

tem uma única solução  $u(P)$  para toda função  $\mathcal{L}^2 w(P)$ , ou a equação homogênea associada:

$$u(P) = \lambda \int_S K(P, Q) u(Q) dS \quad (A.15)$$

tem uma solução  $\mathcal{L}^2 u(P)$  não identicamente nula.

## A.2.2 - Teorema 2

TEOREMA 2: Se  $\lambda$  é um valor característico do núcleo  $\mathcal{L}^2 K$  e  $w(P)$  é uma função  $\mathcal{L}^2$ , a equação:

$$u(P) = w(P) + \int_S K(P, Q) u(Q) dS \quad (A.16)$$

tem uma solução  $\mathcal{L}^2 u(P)$  se, e somente se,  $w(P)$  é ortogonal a toda solução  $\mathcal{L}^2 u(P)$  da equação homogênea adjunta:

$$u(P) = \bar{\lambda} \int_S K^*(P, Q) u(Q) dS, \quad (A.17)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é o conjugado de  $\lambda$  e  $K^*(P, Q) = \overline{K(Q, P)}$ ; e a solução  $\mathcal{L}^2$  geral da equação é obtida pela adição de uma solução particular  $\mathcal{L}^2$  à solução geral  $\mathcal{L}^2$  da equação homogênea:

$$u(P) = \lambda \int_S K(P, Q) u(Q) dS. \quad (A.18)$$

## A.2.3 - Teorema 3

TEOREMA 3<sup>1</sup>: Seja o núcleo  $\mathcal{L}^2$   $K(P,Q)$  e uma função  $\mathcal{L}^2$   $w(P)$  dada. Então, a equação:

$$w(P) = \int_S K(P,Q) u(Q) dS \quad (\text{A.19})$$

tem uma solução  $\mathcal{L}^2$   $u(Q)$  única, se e somente se:

$$\int_S K(P,Q) u(Q) dS = {}^0_0, \quad (\text{A.20})$$

implica em:

$$u(Q) = {}^0_0.$$

## A.3 - Discussão

Como se nota, a Eq.A.3 pode não ter uma solução única, conforme o núcleo  $\frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right]$  seja resolvente ou não para o valor  $\lambda=1$ . Para cada número de onda  $k$  existe um núcleo correspondente  $K_k$  que pode ou não ser resolvente. Portanto, falta identificar os valores do número de onda  $k$  que correspondem ao valor característico 1 para o núcleo  $K_k$ . A esses números de onda seja atribuída a denominação: característico.

Para a Eq.A.2 resta saber, também, para quais núcleos  $\frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right]$  sua solução é única ou não. Portanto, é necessário identificar em que circunstância o núcleo  $K_k$  permite mais de uma solução para a equação integral de Helmholtz interna.

---

1 - Se duas funções, de classe  $\mathcal{L}^2$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  são iguais para todos os valores de  $t$ , isto é, exceto para o conjunto de valores de  $t$  de medida de Lebesgue nula,  $x(t)$  e  $y(t)$  são ditas equivalentes, e denota-se:  $x(t) = {}^0_0 y(t)$ . Se  $x(t) = {}^0_0$ , então  $x(t)$  é dita uma função nula.

O interesse pelos valores característicos está no fato de que os métodos numéricos falham ao se avaliarem as equações integrais de Helmholtz nesses valores de número de onda.

A seguir serão apresentadas as expressões que fornecem os números de onda característicos para estas equações. Nesta apresentação omite-se maiores rigores matemáticos.

Deve-se alertar o leitor para o fato de que existe no máximo uma única solução para a equação de onda, como mostrou Sommerfeld [7]. O problema de não unicidade de solução para os valores característicos é atribuído à sua transformação numa equação integral.

APÊNDICE B

VALORES CARACTERÍSTICOS DA EQUAÇÃO

INTEGRAL DE HELMHOLTZ SUPERFICIAL

A formulação clássica de problemas de radiação acústica é dada pelo seguinte problema de contorno:

$$k^2 u(\vec{P}) + \nabla^2 u(\vec{P}) = 0, \quad (\text{B.1. a})$$

para todo ponto P externo à região delimitada por S;

$$\lim_{|\vec{P}| \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial}{\partial |\vec{P}|} u(\vec{P}) - iku(\vec{P}) \right] = 0; \quad (\text{B.1. b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(\vec{P}) = f(\vec{P}), \quad (\text{B.1. c})$$

para todo ponto P sobre a superfície S.

Considere os números de onda  $k_m$  como sendo os auto-valores, e  $\psi_m(\vec{P})$  as suas respectivas auto-funções do seguinte problema de Dirichlet:

$$k^2 \mu(\vec{P}) + \nabla^2 \mu(\vec{P}) = 0 \quad (\text{B.2. a})$$

$$\mu(\vec{P}) = 0, \quad (\text{B.2. b})$$

respectivamente, para todo ponto P dentro e sobre a superfície S.

Escrevendo as Eqs. B.1 e B.2 na forma de equações integrais, resultam respectivamente:

$$C(P) u(P) = \int_S \left[ u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] - \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) \right] dS, \quad (\text{B.3})$$

para todo ponto P sobre a superfície S, e

$$C'(P) \mu(P) = \int_S \left[ \mu(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] - \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} \mu(Q) \right] dS, \quad (\text{B.4})$$

para todo ponto P sobre a superfície S.

Seja  $\chi_m(\vec{P})$  uma solução que satisfaça às Eqs. B.1 para o número de onda  $k_m$ , e que além disso, satisfaça esta outra:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \chi_m(\vec{Q}^+) = \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_m(\vec{Q}^-), \quad (\text{B.5})$$

para todo o ponto P sobre a superfície S.  $\vec{Q}^+$  e  $\vec{Q}^-$  é o limite de  $P \rightarrow Q$  por fora e por dentro, respectivamente.

A substituição das soluções  $\psi_m(\vec{P})$  e  $\chi_m(\vec{P})$  nas suas respectivas equações integrais, Eqs. B.3 e B.4, resulta, para um ponto P situado sobre a superfície S:

$$C(P) \chi_m(P) = \int_S \left[ \chi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) - \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} \chi_m(Q) \right] dS, \quad (B.6)$$

e

$$C'(P) \psi_m(P) = \int_S \left[ \psi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) - \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_m(Q) \right] dS, \quad (B.7)$$

para P sobre a superfície S.

Sendo  $\chi_m$  e  $\psi_m$  definidas conforme as condições dadas pelas Eqs. B.1 e B.2, as Eqs. B.6 e B.7 combinam para formar:

$$C(P) \chi_m(P) = \int_S \chi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right) dS, \quad (B.8)$$

e portanto,  $\chi_m(\vec{P})$ , cuja existência é garantida por Sommerfeld, é a solução que satisfazendo as condições dadas pelas Eqs. B.1 e B.5, satisfaz também a equação integral homogênea da equação integral de Helmholtz superficial, Eq. B.6. Sendo  $\chi_m(\vec{P})$  diferente de zero, o TEOREMA 1, do Apêndice A, garante que o número de onda  $k_m$  é característico.

Resumindo, os números de onda característicos são dados pelos auto-valores do problema de Dirichlet expresso pelas Eqs. B.2.

APENDICE C

VALORES CARACTERÍSTICOS E A EQUAÇÃO

INTEGRAL DE HELMHOLTZ INTERNA



A seguir será mostrado que para os números de onda  $k_m$  dados pelo problema de Dirichlet, Eqs. B.2, a equação integral de Helmholtz não apresenta solução única quando se escolhe um ponto interno à região delimitada pela superfície S o qual coincida com um dos nós de ondas estacionárias associadas ao problema de Dirichlet para a região interna à superfície S.

Para tanto, sejam tomadas as equações integrais de Helmholtz dadas pelas Eqs. B.3 e B.4, com P interno à região delimitada por S, e sejam atribuídas para cada uma delas, respectivamente, a solução das Eqs. B.1 para o número de onda  $k_m$ , a função  $\chi_m(\vec{P})$ , e a solução do problema de Dirichlet, Eqs. B.2, para o mesmo número de onda  $k_m$ , a auto-função  $\psi_m(\vec{Q})$ .

Sendo assim, tem-se:

$$\int_S \chi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] - \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} \chi_m(Q) \Big] dS = 0 \quad (C.1)$$

e

$$\int_S \left[ \psi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] - \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_m(Q) \right] dS = C'(P) \psi_m(P), \quad (C.2)$$

para todo ponto P interno à região delimitada pela superfície S.

Sendo  $\chi_m$  e  $\psi_m$  definidas conforme as condições dadas pelas Eqs. B.1 e B.2, as Eqs. C.1 e C.2 se combinam para formar esta outra:

$$\int_S \chi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] = -C'(P) \psi_m(P). \quad (C.3)$$

Seja o ponto interno P, tal que

$$\psi_m(P) = 0. \quad (C.4)$$

Assim sendo, resulta pela Eq. C.3 que:

$$\int_S \chi_m(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm i k_m r(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] = 0. \quad (C.5)$$

Logo, foi possível mostrar que existe uma  $\chi_m(P)$  não nula que satisfaz a equação homogênea:

$$\int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS = 0. \quad (C.6)$$

Isto implica, pelo TEOREMA 3 do Apêndice A, que a equação:

$$\int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] dS - \int_S \left[ \frac{e^{\pm ikr(P,Q)}}{r(P,Q)} \right] \frac{\partial}{\partial \nu} u(Q) dS = 0, \quad (C.7)$$

não tem solução única para os números de onda correspondentes aos auto-valores  $k_m$  do problema de Dirichlet interno, quando o ponto P interno à superfície S satisfaz a Eq.C.4.

Concluindo, a equação integral de Helmholtz interna não possui solução única para os números de onda  $k_m$ , quando o ponto interno P coincidir com um dos nós da onda estacionária associada ao problema de Dirichlet para o número de onda  $k_m$ .

APENDICE D  
OS PROGRAMAS BIE

```

(*****)
(*)
(*)      BIE1: Este programa faz a entrada de dados do (*)
(*)      programa BIE. São pedidos os seguintes dados : (*)
(*)      número de nós, velocidade do som, frequência, (*)
(*)      número de pontos externos, raio da posição dos (*)
(*)      pontos externos, coordenadas dos nós, valor da (*)
(*)      grandeza conhecida em cada nó. (*)
(*)
(*****)
PROGRAM BIE1,
  VAR IND1,IND2,IND3,NOS, NPE,L,I,N,P : INTEGER;
      FHZ, VSDM, RAID,AUX,NN,NP : REAL;
      MATNOS : ARRAY [1..25,1..2] OF REAL;
      MATEXT : ARRAY [1..25,1..2] OF REAL;
      ReQ : ARRAY [1..25] OF REAL;
      ImQ : ARRAY [1..25] OF REAL;
      ARQ : FILE OF REAL;
      C : CHAR;
(*****)
BEGIN      (*      INÍCIO DO PROGRAMA BIE1      *)
  CLRSCR;
  ASSIGN(ARQ,'ARQ2.DAT');
  RESET(ARQ);
  READ(ARQ,AUX);
  N:=TRUNC(AUX);
  FOR I:=1 TO N DO
    READ(ARQ,MATNOS[I,1],MATNOS[I,2]);
  CLOSE(ARQ);
  ASSIGN(ARQ,'ARQ1.DAT');
  RESET(ARQ);
  READ(ARQ, RAID, FHZ, VSDM);
  FOR I:=1 TO N DO
    READ(ARQ, ReQ[I], ImQ[I]);
  CLOSE(ARQ);
  ASSIGN(ARQ,'ARQ3.DAT');
  RESET(ARQ);
  READ(ARQ,AUX);
  P:=TRUNC(AUX);
  CLOSE(ARQ);
  GOTOXY(20,1);
  WRITE('DADOS ATUAIS');
  GOTOXY(5,4); WRITE('Número de nós:',N);
  GOTOXY(5,6); WRITE('Frequência empregada (Hz):',FHZ:4:0);
  GOTOXY(5,8); WRITE('velocidade do som no meio (m/s):',VSDM:6:2);
  GOTOXY(5,10);
  WRITE('Raio da circunferência onde se quer o campo acústico:',RAID:6:2);
  GOTOXY(5,12); WRITE('Número de pontos externos:',P);
  GOTOXY(5,19);
  WRITE('Deseja alterar um destes dados?');
  GOTOXY(6,21);
  WRITE('Em caso afirmativo digite      (1)');
  GOTOXY(6,22);
  WRITE('Em caso negativo digite      (2)');

```

```

GOTOXY(46,23);
WRITE('R :');
GOTOXY(50,23);
READ(IND1);
CLRSCR;
IF IND1=1
  THEN
  BEGIN
    GOTOXY(15,1); WRITE('DIGITE OS DADOS CONFORME FOREM PEDIDOS:');
    GOTOXY(5,4); WRITE('Numero de nós:');
    GOTOXY(5,6); WRITE('Frequência empregada (Hz):');
    GOTOXY(5,8); WRITE('Velocidade do som no meio (m/s):');
    GOTOXY(5,10);
    WRITE('Raio da circunferência onde se quer o campo acústico:');
    GOTOXY(5,12); WRITE('Número de pontos externos:');
    GOTOXY(20,4); READLN(NOS);
    GOTOXY(32,6); READLN(FHZ);
    GOTOXY(38,8); READLN(VSOM);
    GOTOXY(59,10); READLN(RAIO);
    GOTOXY(32,12); READLN(NPE);
    CLRSCR;
  END
ELSE
  BEGIN
    NOS:=N;
    NPE:=P;
  END;

WRITELN('          ARQUIVO ATUAL DE COORDENADAS');
L:=0;
FOR I:=3 TO N+2 DO
  BEGIN
    GOTOXY(1,I-L);
    WRITE((I-2):2,'ª nó. Coordenadas R:');
    GOTOXY(26,I-L);
    WRITE(MATNOS(I-2,1));
    GOTOXY(48,I-L);
    WRITE('Z:');
    GOTOXY(51,I-L);
    WRITE(MATNOS(I-2,2));
    IF I=22 THEN
      BEGIN
        L:=21;
        GOTOXY(15,24);
        WRITE('Digite qualquer tecla para continuar ...');
        GOTOXY(56,24);
        READ(KBD,C);
        CLRSCR;
      END;
  END;
GOTOXY(15,24);
WRITE('Digite qualquer tecla para continuar ...');
GOTOXY(56,24);
READ(KBD,C);

```

```

CLRSCR;
GOTOXY(15,11);
WRITE('Deseja alterar este ultimo arquivo?');
GOTOXY(18,13);
WRITE('Em caso afirmativo digite      (1)');
GOTOXY(18,14);
WRITE('Em caso negativo digite      (2)');
GOTOXY(55,14);
WRITE('R :');
GOTOXY(58,14);
READ(IND2);
CLRSCR;
IF IND2=1 THEN
  BEGIN
    FOR I:=1 TO NOS DO
      BEGIN
        WRITE(I:2,'ª nú. Coordenadas R: '); READ(MATNOSEI,1);
        WRITE(' Z: '); READLN(MATNOSEI,2);
      END;
    CLRSCR;
    END;
  WRITELN('      ARQUIVO ATUAL DA GRANDEZA CONHECIDA SOBRE A SUPERFICIE');
  L:=0;
  FOR I:=3 TO N+2 DO
    BEGIN
      GOTOXY(1,I-L);
      WRITE('NO ',I-2);
      GOTOXY(11,I-L);
      WRITE('Real:');
      GOTOXY(17,I-L);
      WRITE(ReQCI-2);
      GOTOXY(41,I-L);
      WRITELN('Imaginário: ',ImQCI-2);
      IF I=22 THEN
        BEGIN
          L:=21;
          GOTOXY(15,24);
          WRITE('Digite qualquer tecla para continuar ...');
          GOTOXY(56,24);
          READ(KBD,C);
          CLRSCR;
        END;
      END;
    GOTOXY(15,24);
    WRITE('Digite qualquer tecla para continuar ...');
    GOTOXY(56,24);
    READ(KBD,C);
    CLRSCR;
    GOTOXY(15,11);
    WRITE('Deseja alterar este ultimo arquivo?');
    GOTOXY(18,13);
    WRITE('Em caso afirmativo digite      (1)');
    GOTOXY(18,14);
    WRITE('Em caso negativo digite      (2)');

```

```

GOTOXY(55,14);
WRITE('R :');
GOTOXY(56,14);
READ(IND3);
CLRSCR;
IF IND3=1 THEN
  BEGIN
    FOR I:=1 TO NOS DO
      BEGIN
        WRITE('  QI',I,'J Real:      Imaginário:');
        GOTOXY(19,I); READ(ReQIJJ); GOTOXY(45,I); READLN(ImQIJJ);
        END;
      END;
    NN:=NOS;
    NP:=NPE;
    FOR I:=1 TO NPE DO
      BEGIN
        MATEXTI,1J := ABS(RAIO * COS(3.14159*(I-1)/(NPE-1) - 1.57080));
        MATEXTI,2J := -RAIO * SIN(3.14159*(I-1)/(NPE-1) - 1.57080);
        END;
      CLRSCR;
      ASSIGN(ARG,'ARQ1.DAT');
      REWRITE(ARG);
      WRITE(ARG, RAIO, FHZ, VSDM);
      FOR I:=1 TO NOS DO
        WRITE(ARG, ReQIJJ, ImQIJJ);
      CLOSE(ARG);
      ASSIGN(ARG,'ARQ2.DAT');
      REWRITE(ARG);
      WRITE(ARG, NN);
      FOR I:=1 TO NOS DO
        WRITE(ARG, MATNOSCI,1J, MATNOSCI,2J);
      CLOSE(ARG);
      ASSIGN(ARG,'ARQ3.DAT');
      REWRITE(ARG);
      WRITE(ARG, NP);
      FOR I:=1 TO NPE DO
        WRITE(ARG, MATEXTI,1J, MATEXTI,2J);
      CLOSE(ARG);
    END;
  (*          F I M D O P R O G R A M A   B I E 1          *)

```

```

(*****)
(*)
(*)   BIE2 : Este programa determina os coeficientes das matrizes (*)
(*)   complexas A e B. Presta-se à EIH superficial ou à EIH exter- (*)
(*)   na, conforme a necessidade do usuário. (*)
(*) (*)
(*****)
Program BIE2;
const N1=6;
      N2=12;
type MATRIZ = array[1..25,1..25] of real;
      MATR = array[1..25,1..2] of real;
      VET = array[1..15] of real;
      VETOR = array[1..25] of real;
      TRIMATRIZ = array[1..25,1..25,1..2] of real;
var OP,I,J,L,H,T,NOS,N1,AUX,ELEM,PONTINT,NINT : integer;
    R,FHZ,K,VSDM : real;
    MATI,MATJ : matr;
    QSI,QSI1,QSI2,PESO,PESO1,PESO2 : vetor;
    DNIJ,DIJ,REIJ,RJ,ZJ,Njm,KBij,Fkij,dFdkij,Ekij : vetor;
    ReA,ImA,ReB,ImB : trimatriz;
    ReNOVA_A,ImNOVA_A,ReNOVA_B,ImNOVA_B : matriz;
    JJ,SINFI,COSEFI,ReBq,ImBq,ReG,ImG : vetor;
    ARG : file of real;
(*****)
Function RBARRAIJ(RI1,ZI1 : real):real;
begin
  RBARRAIJ:=sqrt( (RI1 + RJCLJ)*(RI1 + RJCLJ) + (ZJCLJ - ZI1)*(ZJCLJ - ZI1) );
end;
(*****)
Function fRJ(QSIL2,RJ12,RJ22 : real):real;
begin
  fRJ:=(RJ12 + RJ22 + (RJ12 - RJ22)*QSIL2)/2;
end;
(*****)
Function RIJ(ALFAT2,RI2 : real):real;
begin
  RIJ:=sqrt(RBijCLJ*RBijCLJ - 2*RI2*RJCLJ*(1 - COS(3.14159*ALFAT2)));
end;
(*****)
Function RNII(ALFAT2,RI2,ZI2 : real):real;
begin
  RNII:=COSFIJ*(RI2*(COS(3.14159*(ALFAT2+1)))-RJCLJ)+SINFIJ*(ZI2-ZJCLJ);
end;
(*****)
Function ReBIIJ : real;
begin
  RekBIIJ:=(COS(K*DijETJ) + K*DijETJ*SIN(K*DijETJ) - 1)*DNIJETJ/
            (DijETJ*DijETJ*DijETJ);
end;
(*****)
Function ImBIIJ : real;
begin
  ImkBIIJ:=(K*DijETJ*COS(K*DijETJ) - SIN(K*DijETJ))*DNIJETJ/

```



```

(DIJCT3*DIJCT3*DIJCT3);
end;
(*****)
Function ReKA1IJ : real;
begin
  ReKA1IJ:=(COS(K*DIJCT3) - 1)/DIJCT3;
end;
(*****)
Function ImKA1IJ : real;
begin
  ImKA1IJ:=-SIN(K*DIJCT3)/DIJCT3;
end;
(*****)
Function ReKMB1IJ : real;
var KAUX : real;
begin
  KAUX:=0;
  for T:=1 to N11 do
    KAUX:=ReKB1IJ*PES01[CT]+KAUX;
    ReKMB1IJ:=3.14159*KAUX;
  end;
(*****)
Function ImKMB1IJ : real;
var KAUX : real;
begin
  KAUX:=0;
  if MATIII,1]=0
  then
    ImKMB1IJ:=-6.28319*DNj[2]*(K*DIJ[2]*COS(K*DIJ[2])-SIN(K*DIJ[2]))/
      (DIJ[2]*DIJ[2]*DIJ[2])
  else
    begin
      for T:=1 to N11 do
        KAUX:=ImKB1IJ*PES01[CT]+KAUX;
        ImKMB1IJ:=3.14159*KAUX;
      end;
    end;
(*****)
Function ReKMA1IJ : real;
var K1AUX : real;
begin
  K1AUX:=0;
  for T:=1 to N11 do
    K1AUX:=ReKA1IJ*PES01[CT]+K1AUX;
    ReKMA1IJ:=3.14159*K1AUX;
  end;
(*****)
Function ImKMA1IJ : real;
var KAUX : real;
begin
  if MATIII,1]=0
  then
    ImKMA1IJ:=-6.28319*SIN(K*DIJ[2])/DIJ[2]
  else

```

```

begin
  KAUX:=0;
  for I:=1 to N11 do
    KAUX:=ImkA1IJ*PESD1[I]+KAUX;
    ImkMA1J:=3.14159*KAUX;
  end;
end;
(*****
Function INTELIP1(KA2 :real):real;
begin
  INTELIP1:=( 1.3862944 + 0.1119723*(1-KA2) + 0.0725296*(1-KA2)*(1-KA2) ) -
    ( 0.5      + 0.1213478*(1-KA2) + 0.0288729*(1-KA2)*(1-KA2) ) *
    LN(1-KA2);
end;
(*****
Function INTELIP2(KA2 :real):real;
begin
  INTELIP2:=( 1      + 0.4630151*(1-KA2) + 0.1077812*(1-KA2)*(1-KA2) ) -
    (      0.2452727*(1-KA2) + 0.0412496*(1-KA2)*(1-KA2) ) *
    LN(1-KA2);
end;
(*****
Function RekMA2IJ : real;
begin
  RekMA2IJ:=4*FkijELJ/RBijELJ;
end;
(*****
Function RekMB2IJ(RI3,ZI3 :real):real;
begin
  RekMB2IJ:=4/RBijELJ*
    (((RI3*RI3-RjELJ)*RjELJ+(ZI3-ZjELJ)*(ZI3-ZjELJ))*EkijELJ/
    (RBijELJ*RBijELJ-4*RI3*RjELJ)-FkijELJ)*COSFicJJ/(2*RjELJ)+
    EkijELJ*SINFicJJ*(ZI3-ZjELJ)/(RBijELJ*RBijELJ-4*RI3*RjELJ);
end;
(*****
Function JACOB(RJ14,RJ24,ZJ14,ZJ24 :real):real;
begin
  JACOB:=0.5*sqrt((RJ14-RJ24)*(RJ14-RJ24) + (ZJ14-ZJ24)*(ZJ14-ZJ24));
end;
(*****
Function RekMA1J : real;
begin
  if MATI1I,1I=0
  then
    RekMA1J:=3.14159*008(K*3,JL21)/0.1J001
  else
    RekMA1J:=RekMA1IJ + RekMA2IJ;
  end;
(*****
Function RekMB1J(RI4,ZI4 :real):real;
var RAUX :real;
begin
  if RI4=0
  then

```

```

ReKMBIJ:=6.28319*DNJJC2J*(COS(K*DijC2J) +
K*DijC2J*SIN(K*DijC2J))/(DijC2J*DijC2J*DijC2J)
else
ReKMBIJ:=ReKMB1IJ + ReKMB2IJ(RI4,ZI4);
end;
(*****)
Function INTERPOL(GRAU,QSIL4 :real):real;
begin
if GRAU=1 then INTERPOL:=(1 + QSIL4)/2
else INTERPOL:=(1 - QSIL4)/2
end;
(*****)
Function ReAMIJ : real;
begin
ReAMIJ:=ReKMBIJ(MATICI,1J,MATICI,2J) * NjmCLJ * RJCLJ * JJCJ * PESOCLJ
end;
(*****)
Function ImAMIJ : real;
begin
ImAMIJ:=ImKMBIJ * NjmCLJ * RJCLJ * JJCJ * PESOCLJ
end;
(*****)
Function ReBMIJ : real;
begin
ReBMIJ:=ReKMAIJ * NjmCLJ * RJCLJ * JJCJ * PESOCLJ
end;
(*****)
Function ImBMIJ : real;
begin
ImBMIJ:=ImKMAIJ * NjmCLJ * RJCLJ * JJCJ * PESOCLJ
end;
(*****)
Procedure MONTA_MATRIZES(NPI: integer);
begin
for I:=1 to NPI do
for J:=1 to ELEM do
begin
JJCJ:=JACOB(MATJCI,1J,MATJCI+1,1J,MATJCI,2J,MATJCI+1,2J);
COSFCJ:=(MATJCI,2J - MATJCI+1,2J)/(2*JJCJ);
SINFCJ:=(MATJCI+1,1J - MATJCI,1J)/(2*JJCJ);
for H:=1 to 2 do
begin
ReACI,J,H:=0;
ImACI,J,H:=0;
ReBCI,J,H:=0;
ImBCI,J,H:=0;
if (MATICI,1J=0) or (((J=1) or (J=I-1)) and (OP=1)) then
begin
NINT:=N2;
for L:=1 to NINT do
begin
QSIL1:=QSIL1L;
PESOL1:=PESOL2L;
end;

```

```

end
else
begin
  NINT:=N11;
  for L:=1 to NINT do
  begin
    QSI1CLJ:=QSI1CLJ;
    PESO1CLJ:=PESO1CLJ;
  end;
end;
for L:=1 to NINT do
begin
  RJCLJ:=#RJ(QSI1CLJ,MATJCL,1J,MATJCL+1,1J);
  ZJCLJ:=#RJ(QSI1CLJ,MATJCL,2J,MATJCL+1,2J);
  RB1JCLJ:=RBARR1J(MAT1CI,1J,MAT1CI,2J);
  Njm1CLJ:=INTERPOL(H,QSI1CLJ);
  KB1JCLJ:=4*MAT1CI,1J*RJCLJ/sqr(RB1JCLJ);
  FK1JCLJ:=INTELIPT1(KB1JCLJ);
  EK1JCLJ:=INTELIPT2(KB1JCLJ);
  for T:=1 to N11 do
  begin
    D1JCTJ:=R1J(QSI1CTJ,MAT1CI,1J);
    DN1JCTJ:=RN1J(QSI1CTJ,MAT1CI,1J,MAT1CI,2J);
  end;
  ReACI,J,HJ:=ReACI,J,HJ + ReAK1J;
  ImACI,J,HJ:=ImACI,J,HJ + ImAK1J;
  ReBCI,J,HJ:=ReBCI,J,HJ + ReBK1J;
  ImBCI,J,HJ:=ImBCI,J,HJ + ImBK1J;
end;
end;
end;
(*****
Procedure SOMA_A_E_B;
var I,
    J,
    H : integer;
begin
  for I:=1 to N1 do
  for J:=1 to N2 do
  begin
    ReNOVA_ACI,JJ:=0;
    ImNOVA_ACI,JJ:=0;
    ReNOVA_BCI,JJ:=0;
    ImNOVA_BCI,JJ:=0;
  end;
  for I:=1 to N1 do
  begin
    for J:=1 to ELEM do
    begin
      for H:=1 to 2 do
      begin
        ReNOVA_ACI,H+J-1J:=ReNOVA_ACI,H+J-1J + ReACI,J,HJ;
        ImNOVA_ACI,H+J-1J:=ImNOVA_ACI,H+J-1J + ImACI,J,HJ;

```

```

      ReNOVA_BCI,H+J-1:=ReNOVA_BCI,H+J-1 + ReBCI,J,H;
      ImNOVA_BCI,H+J-1:=ImNOVA_BCI,H+J-1 + ImBCI,J,H;
    end;
  end;
end;
(*****)
Procedure Multiplica_Bq;
begin
  for I:=1 to Ni do
    begin
      ReBqCII := 0;
      ImBqCII := 0;
      for J:=1 to NDS do
        begin
          ReBqCII := ReBqCII + ReNOVA_BCI,JI*ReQCIIJ - ImNOVA_BCI,JI*ImQCIIJ;
          ImBqCII := ImBqCII + ReNOVA_BCI,JI*ImQCIIJ + ImNOVA_BCI,JI*ReQCIIJ;
        end
      end
    end;
end;
(*****)
Begin (*      INÍCIO DO PROGRAMA BIE2      *)
(
  QSI1[1]:=-0.26114; PESO1[1]:=0.34785;
  QSI1[2]:=-0.33998; PESO1[2]:=0.65215;
  QSI1[3]:= 0.33998; PESO1[3]:=0.65215;
  QSI1[4]:= 0.86114; PESO1[4]:=0.34785;
)
  QSI1[1]:=-0.93247; PESO1[1]:=0.17132;
  QSI1[2]:=-0.66121; PESO1[2]:=0.36076;
  QSI1[3]:=-0.23862; PESO1[3]:=0.46791;
  QSI1[4]:=0.23862; PESO1[4]:=0.46791;
  QSI1[5]:=0.66121; PESO1[5]:=0.36076;
  QSI1[6]:=0.93247; PESO1[6]:=0.17132;

  QSI2[1]:=0.12523; PESO2[1]:=0.24915;
  QSI2[2]:=0.36783; PESO2[2]:=0.23349;
  QSI2[3]:=0.58732; PESO2[3]:=0.20317;
  QSI2[4]:=0.76990; PESO2[4]:=0.16088;
  QSI2[5]:=0.90410; PESO2[5]:=0.10694;
  QSI2[6]:=0.98156; PESO2[6]:=0.04718;
  QSI2[7]:=-0.12523; PESO2[7]:=0.24915;
  QSI2[8]:=-0.36783; PESO2[8]:=0.23349;
  QSI2[9]:=-0.58732; PESO2[9]:=0.20317;
  QSI2[10]:=-0.76990; PESO2[10]:=0.16088;
  QSI2[11]:=-0.90410; PESO2[11]:=0.10694;
  QSI2[12]:=-0.98156; PESO2[12]:=0.04718;

  clrscr;
  gotoxy(25,3); write('Cálculo das matrizes dos pesos');
  gotoxy(10,7); write('Digite (1) para matriz dos nós ou');
  gotoxy(17,9); write('(2) para matriz dos pontos externos:');
  repeat
    gotoxy(54,9); clrcol; read(OP)

```

```

until (OP=1) OR (OP=2);
clrscr;
gotoxy(32,12); write('Lendo arquivos ... ');
assign(ARQ, 'ARQ2.DAT');
reset(ARQ);
read(ARQ, R);
NOS := trunc(R);
ELEM := NOS - 1;
for I:=1 to NOS do
  read(ARQ, MATJCI,1, MATJCI,2);
close(ARQ);
assign(ARQ, 'ARQ1.DAT');
reset(ARQ);
read(ARQ, R, FHZ, VSDM);
for I:=1 to NOS do
  read(ARQ, ReGCIJ, ImGCIJ);
close(ARQ);
K := 6.283185*FHZ/VSDM;
if OP=2 then
  begin
    assign(ARQ, 'ARQ3.DAT');
    reset(ARQ);
    read(ARQ, R);
    N1:=trunc(R);
    for I:=1 to N1 do
      read(ARQ, MATICI,1, MATICI,2);
    close(ARQ);
  end
else
  begin
    N1:=NOS;
    for I:=1 to N1 do
      begin
        MATICI,1:=MATJCI,1;
        MATICI,2:=MATJCI,2;
      end;
  end;
gotoxy(32,12); write(' Calculando ... '); clrscr;
MONTA_MATRIZES(N1);
SOMA_A_E_B;
MULTIPLICA_Bq;
gotoxy(32,12); write(' Gravando ... '); clrscr;
if OP = 1 then
  assign(ARQ, 'ARQ4.DAT')
else
  assign(ARQ, 'ARQ5.DAT');
rewrite(ARQ);
for I:=1 to N1 do
  for J:=1 to NOS do
    write(ARQ, ReNOVA_ACI, JJ);
for I:=1 to N1 do
  for J:=1 to NOS do
    write(ARQ, ImNOVA_ACI, JJ);
for I:=1 to N1 do

```

```
write(ARQ, ReEqC11);  
for I:=1 to N1 do  
write(ARQ, ImEqC11);  
close(ARQ);  
clrscr;
```

End.

(\*

FIM DO PROGRAMA BIE2

\*)

```

(*****)
(*)
(*)      BIES : Este programa resolve o sistema de equações      (*)
(*)      algébricas lineares ( $A*u = B*q$ ), correspondente à      (*)
(*)      EIH superficial. Utiliza o método LU.                    (*)
(*)
(*)
(*****)
PROGRAM BIE3;
CONST MAXM=50;
      MAXV=50;
      PI=3.141592;
TYPE  VETOR=ARRAY[0..MAXV] OF REAL;
      MATRIZ=ARRAY[0..MAXM,0..MAXM] OF REAL;
VAR   I,J,K,M,N,R,P,LL,NG,INDI:INTEGER;
      V:ARRAY[0..MAXV] OF INTEGER;
      X,Y,D,S,SD,B:VETOR;
      A,L,U:MATRIZ;
      AUX1,AUX2,AUX3,AUX,IND,RT:REAL;
      AUXC:STRING[3];
      ARQUIV0ENT,ARQUIV0SAI:STRING[15];
      AENT,ASAI:FILE OF REAL;
(*****)
PROCEDURE CALCO;
VAR  AUXD,MAX:REAL;
BEGIN
  FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
      FOR J:=1 TO M DO
        BEGIN
          IF J=1 THEN MAX:=ABS(A[I,J])
          ELSE IF ABS(A[I,J]) > MAX THEN MAX:=ABS(A[I,J]);
        END;
      D[I]:=MAX;
    END;
END;
(*****)
PROCEDURE LEMATRIZ;
BEGIN
  ASSIGN(AENT,'ARQ2.DAT');
  RESET(AENT);
  READ(AENT,RT);
  CLOSE(AENT);
  N:=TRUNC(RT);
  ASSIGN(AENT,'ARQ4.DAT');
  RESET(AENT);
  FOR I:=1 TO N*2 DO
    FOR J:=1 TO N DO
      READ(AENT,A[I,J]);
    FOR I:=1 TO N*2 DO READ(AENT,B[I]);
    FOR I:=1 TO N DO
      A[I,I]:=A[I,I] - 2*PI;
    FOR I:=1 TO N DO
      FOR J:=1 TO N DO
        BEGIN

```



```

    ACI,J+N3 := -ACI+N,J3;
    ACI+N,J+N3 := ACI,J3;
  END;
  M := N*2;
  N := M;
END;
(*****)
PROCEDURE CALCSI;
VAR SS,PP:REAL;
BEGIN
  FOR I:=R TO N DO
    BEGIN
      SS:=0;
      PP:=0;
      FOR K:=1 TO R-1 DO
        BEGIN
          PP:=LII,K3*UEK,R3;
          SS:=SS+PP;
        END;
      SCII:=ACI,R3-SS;
    END;
  END;
(*****)
PROCEDURE CALSPDF;
VAR MAX:REAL;
BEGIN
  FOR I:=R TO N DO
    BEGIN
      IF I=R THEN BEGIN
        MAX:=ABS(SCII/DCII);
        P:=I;
      END
      ELSE IF ABS(SCII/DCII) > MAX THEN BEGIN
        MAX:=ABS(SCII/DCII);
        P:=I;
      END;
    END;
  END;
END;
(*****)
PROCEDURE TROCAL;
VAR AUXTROCA:REAL;
    AUCTROCA:INTEGER;
    VTROCA:ARRAY[1..MAX3] OF REAL;
BEGIN
  FOR LL:=1 TO N DO
    BEGIN
      VTROCALLL:=ACR,LL3;
      ACR,LL3:=ACP,LL3;
      ACP,LL3:=VTROCALLL;
    END;
  FOR LL:=1 TO N DO
    BEGIN
      VTROCALLL:=UCR,LL3;
      UCR,LL3:=UCP,LL3;
    END;
  END;

```

```

    UCP,LLJ:=VTROCAELLJ
  END;
FOR LL:=1 TO N DO
  BEGIN
    VTROCAELLJ:=LCP,LLJ;
    LCP,LLJ:=LCP,LLJ;
    LCP,LLJ:=VTROCAELLJ
  END;
AUXTROCA:=SERJ;
SERJ:=SEPJ;
SEPJ:=AUXTROCA;
AUXTROCA:=DERJ;
DERJ:=DEPJ;
DEPJ:=AUXTROCA;
AUXTROCAI:=VERJ;
VERJ:=VEPJ;
VEPJ:=AUXTROCAI;
AUXTROCA:=BERJ;
BERJ:=BEPJ;
BEPJ:=AUXTROCA;
END;
(*****)
PROCEDURE DALCUEL;
VAR SS,PP:REAL;
BEGIN
  UCR,RJ:=SERJ;
  FOR J:=R+1 TO N DO
    BEGIN
      SS:=0;
      PP:=0;
      FOR K:=1 TO R-1 DO
        BEGIN
          PP:=LER,KJ*UEK,JJ;
          SS:=SS+PP;
        END;
      UCR,JJ:=ACR,JJ-SS;
    END;
  FOR I:=R+1 TO N DO LCI,RJ:= SCID/UCR,RJ;
  LER,RJ:=1.0;
END;
(*****)
PROCEDURE INICILU;
BEGIN
  FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
      YCIJ:=0.0;
      XCIJ:=0.0;
      FOR J:=1 TO M DO
        BEGIN
          UEI,JI:=0.0;
          LCI,JI:=0.0;
        END;
    END;
END;

```

```
(*****)
```

```
PROCEDURE CALCY;
```

```
VAR SS,PP:REAL;
```

```
BEGIN
```

```
FOR I:=1 TO N DO
```

```
  BEGIN
```

```
    SS:=0.0;
```

```
    PP:=0.0;
```

```
    FOR K:=1 TO I-1 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        PP:=LDI,KJ*YCKJ;
```

```
        SS:=SS+PP;
```

```
      END;
```

```
    YCII:=-BCII-SS;
```

```
  END;
```

```
END;
```

```
(*****)
```

```
PROCEDURE CALCX;
```

```
VAR SS,PP:REAL;
```

```
BEGIN
```

```
FOR I:=N DOWNTD 1 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    SS:=0.0;
```

```
    PP:=0.0;
```

```
    FOR K:=I+1 TO N DO
```

```
      BEGIN
```

```
        PP:=UCI,KJ*XCKJ;
```

```
        SS:=SS+PP;
```

```
      END;
```

```
    XCII:=(YCII-SS)/UCI,II;
```

```
  END;
```

```
END;
```

```
(*****)
```

```
BEGIN (* INICIO DO PROGRAMA BIE3 *)
```

```
ASSIGN(ASAI,'ARQ6.DAT');
```

```
REWRITE(ASAI);
```

```
LEMATRIZ;
```

```
INICILU;
```

```
CALCD;
```

```
FOR I:=1 TO N DO VCII:=0;
```

```
FOR RI:=1 TO N DO
```

```
  BEGIN
```

```
    CALCSI;
```

```
    CALCD;
```

```
    CALCSPP;
```

```
    TROCAL;
```

```
    CALDUEL;
```

```
  END;
```

```
CALCY;
```

```
CALCX;
```

```
CLRSOR;
```

```
FOR I:=1 TO N DO WRITE(ASAI,XCII);
```

```
N:=N div 2;
```

```
FOR I:=1 TO N DO
```

```
WRITE('ReUE',I,'J = ',XCII:8.4);  
WRITELN('          ImUC',I,'J= ',XCII+NI:8.4);  
CLOSE(AENT);  
CLOSE(ASAI);  
END.  
(*          FIM DO PROGRAMA BIE3          *)
```

```

(*****)
(*)
(*)      BIE4: Este programa determina o campo acústico em      (*)
(*)      pontos distribuídos equidistantemente sobre um      (*)
(*)      arco de circunferência, de raio pré-estabelecido      (*)
(*)      no programa BIE1, e centrado na fonte sonora.      (*)
(*)
(*****)
Program BIE4;
type MATRIZ = array[1..25,1..25] of real;
      VETOR = array[1..25] of real;
var NOS,NPE,I,J : integer;
      T : real;
      ReNOVA_C,ImNOVA_C : MATRIZ;
      ReU,ImU,ReV,ImV,ReCu,ImCu,ReDq,ImDq : VETOR;
      ARQ : file of real;
(*****)
Procedure Multiplica_Cu(LIN,COL: integer);
begin
  for I:=1 to LIN do
    begin
      ReCu[I]:=0;
      ImCu[I]:=0;
      for J:=1 to COL do
        begin
          ReCu[I]:=ReNOVA_C[I,J]*ReU[J] - ImNOVA_C[I,J]*ImU[J] + ReCu[I];
          ImCu[I]:=ReNOVA_C[I,J]*ImU[J] + ImNOVA_C[I,J]*ReU[J] + ImCu[I];
        end;
      end;
    end;
end;
(*****)
Begin (*      INÍCIO DO PROGRAMA BIE4      *)
  assign(ARQ, 'ARQ2.DAT');
  reset(ARQ);
  read(ARQ, T);
  close(ARQ);
  NOS := trunc(T);
  assign(ARQ, 'ARQ3.DAT');
  reset(ARQ);
  read(ARQ, T);
  close(ARQ);
  NPE := trunc(T);
  assign(ARQ, 'ARQ5.DAT');
  reset(ARQ);
  for I:=1 to NPE do
    for J:=1 to NOS do
      read(ARQ, ReNOVA_C[I,J]);
  for I:=1 to NPE do
    for J:=1 to NOS do
      read(ARQ, ImNOVA_C[I,J]);
  for I:=1 to NPE do
    read(ARQ, ReDq[I]);
  for I:=1 to NPE do
    read(ARQ, ImDq[I]);

```

```
close(ARG);
assign(ARG, 'ARG6.DAT');
reset(ARG);
for I:=1 to NOS do
  read(ARG, ReVCII);
for I:=1 to NOS do
  read(ARG, ImVCII);
Multiplica_Cu(NPE,NOS);
for I:=1 to NPE do
  begin
    ReVCII:=(ReCuCII - ReDqCII)/12.56637;
    ImVCII:=(ImCuCII - ImDqCII)/12.56637;
  end;
for I:=1 to NPE do
  write(ARG, ReVCII);
for I:=1 to NPE do
  write(ARG, ImVCII);
writeln('VALORES DO CAMPO ACUSTICO');
for I:=1 to NPE do
  writeln('ReVC',I,'=' ,ReVCII:1:6,' ImVC',I,'=' ,ImVCII:1:6);
Enc.
(*          F I M D O P R O G R A M A   B I E 4          *)
```

```

(******)
(*)
(*)      BIES: Este programa apresenta como saída na tela ou
(*)      na impressora todo o conjunto de entrada e saída dos
(*)      programas BIE: número de elementos, frequência, ve-
(*)      locidade do som, número de pontos externos, raio da
(*)      posição dos pontos externos, coordenadas dos nós,
(*)      valor da grandeza acústica conhecida sobre a super-
(*)      fície do corpo emissor em cada nó, valor da grandeza
(*)      acústica procurada em cada nó, coordenadas dos pon-
(*)      tos externos e valor da grandeza acústica procurada
(*)      em cada ponto externo selecionado.
(*)
(*)

```

```

(******)

```

```

Program BIES;

```

```

  type MATRIZ = array [1..25,1..25] of real;
  type VETOR = array [1..25] of real;
  var I,J,L,OP,NPE,NOS : integer;
      T,RNDS,RNPE,RAIO,FHZ,VSDM : real;
      C : char;
      MATEXT,MATNOS : array [1..25,1..2] of real;
      ReQ,ImQ,ReU,ImU,ReV,ImV : VETOR;
      ARQ : file of real;
      ARQT : text;

```

```

(******)

```

```

Procedure Leitura;

```

```

begin

```

```

  assign(ARQ, 'ARQ2.DAT');
  reset(ARQ);
  read(ARQ, T);
  NOS := trunc(T);
  for I:=1 to NOS do
    for J:=1 to 2 do
      read(ARQ, MATNOS[I,J]);
  close(ARQ);
  assign(ARQ, 'ARQ1.DAT');
  reset(ARQ);
  read(ARQ, RAIO, FHZ, VSDM);
  for I:=1 to NOS do
    read(ARQ, ReQ[I], ImQ[I]);
  close(ARQ);
  assign(ARQ, 'ARQ3.DAT');
  reset(ARQ);
  read(ARQ, T);
  NPE := trunc(T);
  for I:=1 to NPE do
    for J:=1 to 2 do
      read(ARQ, MATEXT[I,J]);
  close(ARQ);
  RNDS:=NOS;
  RNPE:=NPE;
  assign(ARQ, 'ARQ4.DAT');
  reset(ARQ);
  for I:=1 to NOS do

```

```

    read(ARQ, ReUEI1);
    for I:=1 to NOS do
        read(ARQ, ImUEI1);
    for I:=1 to NPE do
        read(ARQ, ReVEI1);
    for I:=1 to NPE do
        read(ARQ, ImVEI1);
    close(ARQ);
    assign(ARQT, 'DAT61.DAT');
    rewrite(ARQT);
    writeIn(ARQT, RNOS, FHZ, VSOM, RNPE);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, MATNOSCI, 1);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, MATNOSCI, 2);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, ReQE1);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, ImQE1);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, ReUEI1);
    for I:=1 to NOS do
        writeIn(ARQT, ImUEI1);
    for I:=1 to NPE do
        writeIn(ARQT, MATEXTEI, 1);
    for I:=1 to NPE do
        writeIn(ARQT, MATEXTEI, 2);
    for I:=1 to NPE do
        writeIn(ARQT, ReVEI1);
    for I:=1 to NPE do
        writeIn(ARQT, ImVEI1);
    close(ARQT);
end;
(***** )
Procedure Video:
begin
    clrscr;
    write(' ');
    write(' ');
    for I:=2 to 8 do
        gotoxy(80, I); write(' ');
    gotoxy(80, 9);
    write(' ');
    write(' ');
    gotoxy(10, 3);
    write('RESOLUÇÃO DE CAMPO ACÚSTICO');
    gotoxy(20, 5);
    write('CORPO ELÁSTICO QUE VIBRA');
    gotoxy(24, 8);
    write('MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO');
    gotoxy(10, 13);
    write('Frequência empregada: ', FHZ:4:2, ' Hz');
    gotoxy(10, 16);
    write('Velocidade de propagação do som no meio: ', VSOM:4:2, ' m/s');

```



```

gotoxy(10,19);
write('Número de nós empregados na malha: ',NDS);
gotoxy(10,22);
write('Número de elementos que compõem a malha: ',NDS-1);
L:=22; I:=1;
while(I<=NDS) do
begin
  if(L=22) then
  begin
    gotoxy(10,25);
    write('Digite qualquer tecla para continuar... ');
    read(KBD, c);
    clrscr;
    gotoxy(9,2);
    write('Valor da grandeza acústica conhecida ');
    write('sobre a superfície emissora');
    gotoxy(1,4);
    write('NO      R      Z      Real      ',
          'Imaginária');
    L:=L-16;
  end;
  L:=L+1;
  gotoxy(1,L);
  write(I:2);
  for J:=1 to 2 do
  begin
    gotoxy((J-1)*19 + 3, L);
    write(MATNOSCI,JJ);
  end;
  gotoxy(41, L);
  write(ReQCII);
  gotoxy(60, L);
  write(ImQCII);
  I:=I+1;
end;
L:=22; I:=1;
while(I<=NDS) do
begin
  if(L=22) then
  begin
    gotoxy(10,25);
    write('Digite qualquer tecla para continuar... ');
    read(KBD, c);
    clrscr;
    gotoxy(9,2);
    write('Valor da grandeza acústica procurada ');
    write('sobre a superfície emissora');
    gotoxy(1,4);
    write('NO      R      Z      Real      ',
          'Imaginária');
    L:=L-16;
  end;
  L:=L+1;
  gotoxy(1,L);

```

```

write(I:2);
for J:=1 to 2 do
begin
  gotoxy((J-1)*19 + 3, L);
  write(MATNOSEI, JJ);
end;
gotoxy(41, L);
write(ReUCID);
gotoxy(60, L);
write(ImUCID);
I:=I+1;
end;
L:=24; I:=1;
while(I<=NPE) do
begin
  if(L=24) then
  begin
    gotoxy(10,25);
    write('Digite qualquer tecla para continuar... ');
    read(KBD, c);
    clrscr;
    gotoxy(7,1);
    write('Valor da grandeza acústica sobre ');
    write('a superfície esférica de raio ',RAIO:5:2);
    gotoxy(16,3);
    write('Número de pontos sobre a geratriz dessa esfera: ',NPE);
    gotoxy(21,5);
    write('Valor da grandeza acústica nesses pontos');
    gotoxy(1,7);
    write('Pt.      R          Z          Real          ',
          'Imaginária');
    L:=L-15;
  end;
  L:=L+1;
  gotoxy(1,L);
  write(I:2);
  for J:=1 to 2 do
  begin
    gotoxy((J-1)*19 + 3, L);
    write(MATEXTDI, JJ);
  end;
  gotoxy(41, L);
  write(ReVICI);
  gotoxy(60, L);
  write(ImVICI);
  I:=I+1;
end;
gotoxy(10,25);
write('Digite qualquer tecla para continuar... ');
read(KBD, c);
end;
(*****
Procedure Impressora;
begin

```

```

writeln(1st,'':13,'RESOLUCAO DE CAMPO ACUSTICO');
writeln(1st);
writeln(1st);
writeln(1st,'':28,'CORPO ELASTICO QUE VIBRA');
writeln(1st,'':24,'METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO');
writeln(1st);
writeln(1st,'':10,'Frequencia empregada: ',FHZ:4:2,' Hz');
writeln(1st,'':10,'Velocidade de propagacao do som no meio: ',
      VSON:4:2,' m/s');
writeln(1st,'':10,'Numero de nos empregados na malha: ',NOS);
writeln(1st,'':10,'Numero de elementos que compoem a malha: ',NOS-1);
writeln(1st);
writeln(1st);
write(1st,'':9,'Valor da grandeza acustica conhecida ');
writeln(1st,'sobre a superficie emissora');
writeln(1st);
write(1st,'NO          R          Z          ');
writeln(1st,'          Real          Imaginaria');
for I:=1 to NOS do
  begin
    write(1st,I:2);
    write(1st,MATNOSEI,11:18,MATNOSEI,21:19);
    writeln(1st,ReQCI:19,ImQCI:19);
  end;
writeln(1st);
writeln(1st);
write(1st,'':9,'Valor da grandeza acustica procurada ');
writeln(1st,'sobre a superficie emissora');
writeln(1st);
write(1st,'NO          R          Z          ');
writeln(1st,'          Real          Imaginaria');
for I:=1 to NOS do
  begin
    write(1st,I:2);
    write(1st,MATNOSEI,11:18,MATNOSEI,21:19);
    writeln(1st,ReUCI:19,ImUCI:19);
  end;
writeln(1st);
writeln(1st);
write(1st,'':7,'Valor da grandeza acustica sobre ');
writeln(1st,'a superficie esferica de raio ',RAIO:5:2);
writeln(1st);
write(1st,'':16,'Numero de pontos sobre ');
writeln(1st,'a geratriz dessa esfera: ',NPE);
writeln(1st);
writeln(1st,'':21,'Valor da grandeza acustica nesses pontos');
writeln(1st);
write(1st,'Pt.          R          Z          ');
writeln(1st,'Real          Imaginaria');
for I:=1 to NPE do
  begin
    write(1st,I:2);
    write(1st,MATEXTI,11:18,MATEXTI,21:19);
    writeln(1st,ReVCI:19,ImVCI:19);
  end;

```

```
end;
end;
(*****)
Begin  (*          INICIO DO PROGRAMA BIE5          *)
OP:=1;
Leitura;
while(OP<>3) do
begin
  clrscr;
  gotoxy(24,8); write('1 - Saída para o vídeo');
  gotoxy(24,10); write('2 - Saída para a impressora');
  gotoxy(24,12); write('3 - Término');
  gotoxy(30,15); write('Escolha a opção: '); read(OP);
  if OP=1 then Video
  else if OP=2 then Impressora
end;
End.
(*          FIM DO PROGRAMA BIE5          *)
```

APÊNDICE E

EXEMPLO DE SAÍDA DO PROGRAMA BIES

## RESOLUCAO DE CAMPO ACUSTICO

CORPO ELASTICO QUE VIBRA  
METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Frequencia empregada: 1300.00 Hz  
 Velocidade de propagacao do som no meio: 340.00 m/s  
 Numero de nos empregados na malha: 10  
 Numero de elementos que compoem a malha: 9

Valor da grandeza acustica conhecida sobre a superficie emissora

NO	R	Z	Real	Imaginaria
1	0.000000000E+00	1.000000000E-01	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
2	3.420000000E-02	9.400000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
3	6.430000000E-02	7.660000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
4	8.660000000E-02	5.000000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
5	9.850000000E-02	1.740000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
6	9.850000000E-02	-1.740000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
7	8.660000000E-02	-5.000000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
8	6.430000000E-02	-7.660000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
9	3.420000000E-02	-9.400000000E-02	0.000000000E+00	-1.000000000E+04
10	0.000000000E+00	-1.000000000E-01	0.000000000E+00	-1.000000000E+04

Valor da grandeza acustica procurada sobre a superficie emissora

NO	R	Z	Real	Imaginaria
1	0.000000000E+00	1.000000000E-01	3.8263150537E+02	1.8696437016E+02
2	3.420000000E-02	9.400000000E-02	3.5943912838E+02	1.7620387845E+02
3	6.430000000E-02	7.660000000E-02	3.5927421781E+02	1.7664399119E+02
4	8.660000000E-02	5.000000000E-02	3.5934204972E+02	1.7710342248E+02
5	9.850000000E-02	1.740000000E-02	3.5972422533E+02	1.7725079081E+02
6	9.850000000E-02	-1.740000000E-02	3.5972422533E+02	1.7725079081E+02
7	8.660000000E-02	-5.000000000E-02	3.5934204972E+02	1.7710342248E+02
8	6.430000000E-02	-7.660000000E-02	3.5927421781E+02	1.7664399118E+02
9	3.420000000E-02	-9.400000000E-02	3.5943912838E+02	1.7620387845E+02
10	0.000000000E+00	-1.000000000E-01	3.8263150537E+02	1.8696437016E+02

Valor da grandeza acustica sobre a superficie esferica de raio 1.00

Numero de pontos sobre a geratriz dessa esfera: 2

Valor da grandeza acustica nesses pontos

Pt.	R	Z	Real	Imaginaria
1	3.6732053559E-06	9.999999999E-01	-2.5833156350E+01	-2.7496770975E+01
2	6.3267925725E-06	-9.999999999E-01	-2.5833156347E+01	-2.7496770952E+01