

PMC

FD-1465

ENG^o JOSE CLAUDIO DA C. M. KNUDSEN

ANALISE DO EFEITO DE APROXIMAÇÕES
A DINAMICA DO ATRASO NA OTIMIZAÇÃO
DE SISTEMAS DE CONTROLE

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
1993

PMC

FD-1465

OK

PMC

FD-1465

ENG^o JOSE CLAUDIO DA C. M. KNUDSEN

ANÁLISE DO EFEITO DE APROXIMAÇÕES
À DINÂMICA DO ATRASO NA OTIMIZAÇÃO
DE SISTEMAS DE CONTROLE

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. José Sotelo Jr.

São Paulo
1993

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600009929

A todos aqueles que direta ou
indiretamente contribuíram para a
execução deste trabalho.

A G R A D E C I M E N T O S

Às mesmas pessoas a quem dedico esse trabalho.

ERRATA

Página

12 Em (2.9): ... - $[u]_1^t$... ao invés de: ... - $[1]_1^t$...

Em (2.10):
$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{t-2} - \left[u \right]_0^{t-2}$$

ao invés de:

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{t-2} - \left[1 \right]_0^{t-2}$$

18 Em (2.20):

$$\frac{e^{-\tau a}}{\tau b} = \frac{1 - \tau a s + \frac{a^2}{2!} \tau s - \dots}{1 + \tau b s + \frac{b^2}{2!} \tau s + \dots}$$

ao invés de:

$$\frac{e^{-\tau a}}{e^{-\tau b}} = \frac{1 - \tau a s + \frac{a^2}{2!} \tau s - \dots}{1 - \tau b s + \frac{b^2}{2!} \tau s - \dots}$$

34 Figura 2.6: $K = 0,8$ ao invés de: $K = 8$

41 Em (2.46):
$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s} \exp(-\tau s)} \right]$$

ao invés de:

$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s} \exp(\tau s)} \right]$$

Página

42

Em (2.48):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s (1 - k\tau + k\tau^2 s - \dots)}{s + k \exp(-\tau s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s (1 - k\tau + \frac{k\tau^2}{2} s^2 + \dots)}{s + k \exp(\tau s)}$$

48

2º parágrafo: ... com $E(s)$ como dado em (2.46) ...

ao invés de: ... com $E(s)$ como dado em (1) ...

51

Em (2.58):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t-\tau_i) + B u(t)$$

ao invés de:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^k A_i x(t-\tau_i) + B u(t)$$

58

$$K(-1) = K_0 A_1 = 0,3878 \times (-1) = -0,3873$$

ao invés de:

$$K(-1) = K_0 A_1 = 0,03878 \times (-1) = -0,3873$$

61

Em (9.2):

$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s} \frac{1}{\tau s + 1}} \right]$$

ao invés de:

$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{\frac{k}{s} \frac{1}{\tau s + 1}} \right]$$

79

Tabela 3.11: ... $\zeta = 0,8$... ao invés de: ... $\tau = 0,8$...

Em (9.25):

$$\begin{aligned}
 u^r(t) = & -0,2 \left[\left[\begin{matrix} K_1^{21}(-0,1) & K_1^{22}(-0,1) \end{matrix} \right] x(t-0,1) + \right. \\
 & + \left[\begin{matrix} K_1^{21}(-0,3) & K_1^{22}(-0,3) \end{matrix} \right] x(t-0,3) + \dots + \\
 & \left. + \left[\begin{matrix} K_1^{21}(-0,9) & K_1^{22}(-0,9) \end{matrix} \right] x(t-0,9) \right] \quad \text{ao invés de:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^r(t) = & -0,2 \left[\left[\begin{matrix} K_1^{21}(0,1) & K_1^{22}(0,1) \end{matrix} \right] x(t+0,1) + \right. \\
 & + \left[\begin{matrix} K_1^{21}(0,3) & K_1^{22}(0,3) \end{matrix} \right] x(t+0,3) + \dots + \\
 & \left. + \left[\begin{matrix} K_1^{21}(0,9) & K_1^{22}(0,9) \end{matrix} \right] x(t+0,9) \right]
 \end{aligned}$$

Figura 3.17:

$$K_1^{21}(-0,1), K_1^{21}(-0,9), K_1^{22}(-0,1) \text{ e } K_1^{22}(-0,9)$$

ao invés de:

$$K_1^{21}(0,1), K_1^{21}(0,9), K_1^{22}(0,1) \text{ e } K_1^{22}(0,9)$$

98 até 110 Acrescentar índice "n" em ω no texto de descrição das figuras

113 2º parágrafo: ... Figuras 3.3.1 e 3.3.2 ...
ao invés de: ... Figuras 3.2.1 e 3.2.2 ...

Página

113

Em (4.2):

$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{1}{Ts}}{1 + \frac{1}{Ts} e^{-\tau s}} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{Ts + e^{-\tau s} - 1}{Ts + e^{-\tau s}} \right]$$

ao invés de:

$$\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{Ts} e^{-\tau s}} \right] = \frac{1}{s + e^{-\tau s}}$$

114

Em (4.4):

$$E(s) = \frac{T - \tau}{(T - \tau)s + 1}$$

ao invés de:

$$E(s) = \frac{1}{(1 - \tau)s + 1}$$

119

1º Parágrafo: ... H(t) ou degrau unitário ...

ao invés de: ... H(t) ou degrau critério ...

SUMÁRIO

Lista de tabelas
Lista de figuras
Lista de símbolos
RESUMO
"ABSTRACT"

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 APRESENTAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 HISTÓRICO DAS OTIMIZAÇÕES PARA SISTEMAS COM ATRASO	3
1.3.1 SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA (EUSUD)	3
1.3.2 SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA (CMSM)	4
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	6
2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS DE CONTROLE COM ATRASO	7
2.1 DEFINIÇÕES	7
2.1.1 ASPECTOS GERAIS SOBRE O ATRASO	7
2.1.2 INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE DIFERENÇA	9
2.2 APROXIMAÇÕES ANALÍTICAS UTILIZADAS PARA O TERMO e^{-Ts}	16
2.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE	23
2.3.1 MÉTODO DO PSEUDO ATRASADO E DIRETO	24
2.3.2 TEOREMA DE NYQUIST	32
2.3.3 MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES	35
2.4 PROJETO DE CONTROLADORES ÓTIMOS PARA SISTEMAS COM ATRASO	37
2.4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FUNCIONAIS EM SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA (EUSUD)	37
2.4.2 SÍNTESE DE LEI DE CONTROLE ÓTIMA EM SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA (CMSM)	51

3 RESULTADOS DA UTILIZAÇÃO DE APROXIMAÇÕES À DINÂMICA DO ATRASO NA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE	60
3.1 SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA (EUSU)	60
3.2 SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA (EMSM) .	83
 4 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS APROXIMAÇÕES À DINÂMICA DO ATRASO	112
4.1 SISTEMAS EUSU	112
4.2 SISTEMAS EMSM	115
 5 CONCLUSÕES	118
5.1 SISTEMAS EUSU	118
5.2 SISTEMAS EMSM	120
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
 APÊNDICE I - TEOREMA DE PARSEVAL	125
APÊNDICE II - DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DE $J_0^{(0)}$ A PARTIR DE (2.56)	127

Lista de tabelas

Tabela 3.1. Aproximações resultantes do truncamento da série de Taylor de 1 ^a ordem.	60
Tabela 3.2.1. Expressões para $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ exatas (0).	66
Tabela 3.2.2. Expressões para $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ para a aproximação A.	68
Tabela 3.2.3. Expressões para $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ para as aproximações B e C.	69
Tabela 3.3. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 1.0$ s.	69
Tabela 3.4. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 0.5$ s.	70
Tabela 3.5. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 0.25$ s.	70
Tabela 3.6. Valores ótimos de τ para T = 1.	73
Tabela 3.7. Expressões para $J_0^{(0)}$ exata (0) e para aproximações A, B e C.	77
Tabela 3.8. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e $\omega_n = 1$ rad/s segundo $J_0^{(0)}$	78
Tabela 3.9. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e $\omega_n = 2$ rad/s segundo $J_0^{(0)}$	78

Tabela 3.10. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1$,
0.5 e 0.25 s e $\omega_n = 5$ rad/s segundo $J_o^{(0)}$ 79

Tabela 3.11. Valores de τ ótimos segundo $J_o^{(0)}$ para expressão
exata (O) e expressões derivadas das aproximações
A, B e C com $\tau = 0.8$ s e $\omega_n = 1$ rad/s. 79

Lista de figuras

Figura 2.1. Esquema físico e gráficos de temperatura em função do tempo na entrada e na saída do duto. 8

Figura 2.2. Diagrama de blocos de um sistema de controle com atraso. 10

Figura 2.3. Diagramas de Bode: (a) Elemento $e^{-\tau s}$.
(b) Elemento $1/(\tau s + 1)$ 20

Figura 2.4. Reprodução de uma onda quadrada pelo elemento de atraso e por aproximações de tipo (2.19). 21

Figura 2.5. Diagrama de blocos na forma reduzida. 32

Figura 2.6. Diagrama polar de $G(K, j\omega)H(K, j\omega)$ 34

Figura 2.7. Determinação de um lugar da raiz. 36

Figura 2.9. Contorno Γ_1 43

Figura 2.10. Contorno Γ_2 44

Figura 2.11. Contorno Γ_∞ 45

Figura 2.12. Contorno Γ_3 46

Figura 2.13. Laminadora de chapas com sensor de espessura. 49

Figura 2.14. Diagrama de blocos do sistema de controle de espessura de chapa. 50

Figura 3.1. Diagrama de blocos com a aproximação $1/(\tau s+1)$ a $e^{-\tau s}$ 61

Figura 3.2. Contorno Γ 63

Figura 3.3.1. Sistema de 1 ^o ordem com atraso na realimentação.	67
Figura 3.3.2. Sistemas de 2 ^o ordem com atraso na realimentação.	67
Figura 3.4. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 1.0$ s.	71
Figura 3.5. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 0.5$ s.	71
Figura 3.6. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 0.25$ s.	72
Figura 3.7. Gráfico da razão (τ ótimo da aproximação/ τ ótimo exato) para $T = 1$	73
Figura 3.8. Valores de $J_0^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.	74
Figura 3.9. Valores de $J_1^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.	75
Figura 3.10. Valores de $J_0^{(1)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.	76
Figura 3.11. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 1$ rad/s.	80

Figura 3.12. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 2$ rad/s.	80
Figura 3.13. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 5$ rad/s.	81
Figura 3.14. Valores de $J_0^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.	82
Figura 3.15. Representação do bloco $G(s)$ descrito por (3.17). .	85
Figura 3.16. Diagrama do sistema controlado.	86
Figura 3.17. Bloco controlador $I_r(s)$ em detalhe.	90
Figura 3.18. Substituições ao bloco de atraso.	91
Figura 3.19. Sistema $G_1(s)$ com aproximação por Padé de 1 ^a ordem.	92
Figura 3.20. Dinâmica de geração dos estados x_3 e x_4	94
Figura 3.21. Esquema do controlador $I_m(s)$ que sintetiza u^1	95
Figura 3.22. Esquema para obtenção de $Y^r(s)$ e $Y^m(s)$	96
Figura 3.23.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$	98

Figura 3.23.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$	98
Figura 3.23.3. Respostas y_1^r e y_2^r para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$. .	105
Figura 3.23.4. Respostas y_1^5 e y_2^5 para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$. .	106
Figura 3.24.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.5$	99
Figura 3.24.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.5$	99
Figura 3.25.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$	100
Figura 3.25.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$	100
Figura 3.25.3. Respostas y_1^r e y_2^r para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$	107
Figura 3.25.4. Respostas y_1^1 e y_2^1 para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$	108
Figura 3.26.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.1$	101
Figura 3.26.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.1$	101
Figura 3.27.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.5$	102
Figura 3.27.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.5$	102

Figura 3.28.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.8$	103
Figura 3.28.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.8$	103
Figura 3.29.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$	104
Figura 3.29.2. Parâmetros de y^r e y^m para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$	104
Figura 3.29.3. Respostas y_1^r e y_2^r para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$	109
Figura 3.29.4. Respostas y_1^5 e y_2^5 para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$	110

Lista de símbolos

(na ordem em que aparecem no texto)

t : tempo

τ : atraso puro de tempo

$e(t)$: função erro do tempo equivalente a diferença entre a entrada e a saída de um sistema de controle nessa ordem

$E(s)$: transformada de Laplace de $e(t)$

$w(t)$: função peso do tempo positiva

m : ordem de derivação da função $e(t)$
ordem do binômio de Padé
ordem de um polinômio

v : velocidade de uma massa de fluido
velocidade de uma chapa laminada
variável auxiliar de integração

L : comprimento de um duto
distância entre o sensor e os rolos de uma laminadora

$T_1(t)$: função temperatura do tempo à entrada do duto

$T_2(t)$: função temperatura do tempo à saída do duto

$x(t)$: função qualquer do tempo
entrada de um sistema de controle
estado singular de um sistema

a_0 : coeficiente da derivada da função $x(t)$ na forma geral de uma equação diferencial de diferença

a_1 : coeficiente da derivada da função $x(t - \omega)$ na forma geral de uma equação diferencial de diferença

ω : diferença no argumento de $x(t)$
frequência angular
parte imaginária de um número complexo

b_0 : coeficiente da função $x(t)$ na forma geral de uma equação diferencial de diferença

b_1 : coeficiente da função $x(t - \omega)$ na forma geral de uma equação diferencial de diferença

$y(t)$: saída de um sistema de controle

s : variável complexa do domínio de Laplace

$X(s)$: transformada de Laplace da entrada $x(t)$ de um sistema de controle

$Y(s)$: transformada de Laplace da saída $y(t)$ de um sistema de controle

e : número irracional resultante do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cong 2,71828$

$H(t)$: função degrau unitário definida por
 $H(t) = 0, t < 0_-$ e $H(t) = 1, t > 0_+$

∞ : infinito

u : variável auxiliar de integração
função de controle

i : índice

N : limitante do intervalo da solução continuada de $e(t)$

n : índice
ordem de um polinômio
uma das dimensões de uma matriz

L : operador transformada de Laplace para funções

$F(s)$: função analítica qualquer em s
transformada de Laplace de $f(t)$

a : variável no numerador da expansão em série de Taylor de
 $e^{-\tau(\alpha+b)s}$

b : variável no denominador da expansão em série de Taylor de
 $e^{-\tau(\alpha+b)s}$

$| \quad |$: módulo de uma função complexa

\arg : argumento de uma função complexa

j : unidade imaginária tal que $j^2 = -1$

$F(s, \tau)$: polinômio característico com argumento de atraso τ

$A(s)$: polinômio em s

$C(s)$: polinômio em s

T : pseudo-atraso

constante de tempo para sistema de 1^a ordem

π : número irracional pi igual a 3,14159 ...

$x(t)$: vetor estado de um sistema descrito no espaço de estados

$w(\omega^2)$: função polinomial em ω^2 cujas raízes reais determinam os pontos $s = j\omega$ de passagem de raízes de um semi-plano a outro complexo

τ_0 : atraso limite de estabilidade.

$\text{Re}(\)$: parte real de uma função complexa

S : função que avalia em que sentido ocorre a passagem de raízes entre os semi-planos complexos com a variação de τ
solução algébrica da equação de Riccati

sn : função sinal

ω_1 : raiz quadrada positiva de uma solução real de $w(\omega^2) = 0$

τ_1 : atraso correspondente a ω_1

$G(s)$: função de transferência no caminho direto de um diagrama de blocos na forma reduzida
transformada de Laplace de $g(t)$
função de transferência de um sistema com entrada e saída múltipla

$H(s)$: função de transferência na realimentação de um diagrama de blocos na forma reduzida

K : um ganho

vetor de ganhos obtido da solução algébrica de Riccati

matriz solução do procedimento desenvolvido em ROSS (1971)

K_{cr} : ganho crítico

ω_{cr} : frequência crítica

$P(s)$: polinômio em s

$Q(s)$: polinômio em s

p_1, p_2, \dots, p_n : oposto das raízes de $P(s) = 0$

q_1, q_2, \dots, q_n : oposto das raízes de $Q(s) = 0$

σ : parte real de s

$J_p^{(q)}$: funcional com expoente do tempo igual a p e
ordem de derivação da função $e(t)$ igual a q

$J_o^{(0)}$: funcional do erro quadrático

$J_1^{(0)}$: funcional do tempo multiplicando o erro ao quadrado

$J_o^{(1)}$: funcional da derivada ao quadrado do erro

$f(t)$: função qualquer do tempo

$g(t)$: função qualquer do tempo

$\exp(-\tau s)$: o mesmo que $e^{-\tau s}$

$x(t-1)$: vetor de estado atrasado para sistema com atraso normalizado a uma unidade

J : funcional quadrático envolvendo os vetores estado e controle do sistema

$\varphi(t)$: vetor função inicial definida em $[-1,0]$

Q : matriz quadrada $n \times n$ de ponderação de estados em J

R : matriz quadrada $r \times r$ de ponderação de controle em J

$u^0(t)$: lei de controle ótima para sistema com atraso normalizado a uma unidade

K_0 : matriz de controle para estado $x(t)$

$K_1(\theta)$: matriz polinomial de controle para estado $x(t + \theta)$

θ : variável no intervalo normalizado de -1 e 0

$\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n$: valores médios de θ nos intervalos $\Delta\theta_i, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ de igual amplitude

$u^f(t)$: lei de controle de referência

A_m : matriz de estados criados pelo procedimento de ROSS (1971)

B_m : matriz de controle para sistema com estados criados pelo procedimento de ROSS (1971)

Q_m : matriz de ponderação de estados criados pelo procedimento de ROSS (1971)

k : ganho

índice limite de uma somatória

$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_∞ : contornos no plano complexo com raio infinito

A_i : matriz quadrada $n \times n$ que multiplica o estado $x(t-\tau_i)$

B : matriz $n \times r$ de controle

matriz de controle para sistema com atraso normalizado a uma unidade

$u(t)$: vetor $r \times 1$ de controle

$x^*(t)$: vetor estado para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

A_0^* : matriz que multiplica $x^*(t)$ para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

$x^*(t - 2\tau^*)$: vetor de estado atrasado para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

A_1^* : matriz que multiplica $x^*(t - 2\tau^*)$ para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

$u^*(t)$: vetor de controle para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

B^* : matriz que multiplica $u^*(t)$ para sistema reduzido a atraso único $2\tau^*$

A_0 : matriz quadrada que multiplica estado $x(t)$ para sistema com atraso normalizado a uma unidade

A_1 : matriz quadrada que multiplica o estado atrasado $x(t-1)$ para sistema com atraso normalizado a uma unidade

$K_{i,j}$: elemento da matriz k do procedimento de ROSS (1971)

$y(t)$: vetor estado criado pelo procedimento de ROSS (1971)
vetor resposta de um sistema com entrada e saída múltipla

r_1, r_2 : oposto das raízes de um polinômio

ζ : constante de amortecimento

ω_n : frequência natural

$\alpha(\omega_n, \zeta)$: função real positiva de ω_n e ζ

$\beta(\omega_n, \zeta)$: função real positiva de ω_n e ζ

τ_{ot} : atraso ótimo

x_1, x_2 : estados 1 e 2 do vetor $x(t)$

y_1, y_2 : respostas 1 e 2 do vetor $y(t)$

$R_1(s)$: transformada de Laplace da referência para o estado x_1

$R_2(s)$: transformada de Laplace da referência para o estado x_2

$Y_1(s)$: transformada de Laplace da resposta $y_1(t)$

$Y_2(s)$: transformada de Laplace da resposta $y_2(t)$

$U(s)$: transformada de Laplace de $u(t)$

$R(s)$: vetor transformada de Laplace da referência

$Y(s)$: vetor transformada de Laplace do vetor resposta $y(t)$

$I(s)$: função de transferência do controlador

$K_0^{11}, K_0^{12}, K_0^{21}, K_0^{22}$: elementos da matriz K_0

$K_1^{11}(\theta), K_1^{12}(\theta), K_1^{21}(\theta), K_1^{22}(\theta)$: elementos da matriz K_1

l : número de divisões do intervalo $[-1, 0]$

$\Delta\theta$: amplitude do intervalo

y_1^r : resposta de referência

y_2^r : resposta de referência

y_1^r, y_2^r : respostas 1 e 2 de referência do vetor y^r

$I_r(s)$: função de transferência do controlador que gera u^r

u^m : lei de controle gerada a partir da substituição de e^{-Ts} por um binômio de Padé de ordem m em $G(s)$

u^1 : lei de controle gerada a partir da substituição de e^{-Ts} por um binômio de Padé de ordem 1 em $G(s)$

$G_m(s)$: função de transferência a partir da substituição de e^{-Ts} por um binômio de Padé de ordem m em $G(s)$

$G_1(s)$: função de transferência a partir da substituição de e^{-Ts} por um binômio de Padé em ordem 1 em $G(s)$

$I_m(s)$: função de transferência do controlador que gera u^m

$I_1(s)$: função de transferência do controlador que gera u^1

x_3 : estado gerado em $I_1(s)$ a partir de x_1

x_4 : estado gerado em $I_1(s)$ a partir de x_2

$X_3(s)$: transformado de Laplace de x_3

$X_4(s)$: transformada de Laplace de x_4

B_1 : vetor de controle para u^1

k_1, k_2, k_3, k_4 : ganhos de K para estados x_1, x_2, x_3, x_4

$U^m(s)$: transformada de Laplace de u^m

$U^1(s)$: transformada de Laplace de u^1

$Y^m(s)$: transformada de Laplace do vetor $y^m(t)$

$Y^f(s)$: transformada de Laplace do vetor $y^f(t)$

y_1^m, y_2^m : respostas 1 e 2 resultantes da aplicação de u^m em $G(s)$

y_1^5, y_2^5 : respostas 1 e 2 resultantes da aplicação de u^5 em $G(s)$

y_1^1, y_2^1 : respostas 1 e 2 resultantes da aplicação de u^1 em $G(s)$

RESUMO

Os procedimentos que determinam as soluções exatas para os parâmetros ótimos de um sistema de controle contendo atraso impõe consideráveis dificuldades algébricas e de compreensão da teoria envolvida. Por essa razão obteve-se as soluções exatas para parâmetros ótimos em sistemas de primeira e segunda ordens bem como as soluções com a substituição da dinâmica do atraso por outras estabelecidas, de tratamento algébrico mais fácil, com o intuito de analisar as diferenças entre os parâmetros ótimos das duas soluções. A dinâmica do atraso quando representada no domínio de Laplace introduz termos exponenciais no sistema. As dinâmicas utilizadas para substituírem o atraso são aproximações analíticas ao termo exponencial do atraso representadas por funções racionais de polinômios. O trabalho divide a análise das soluções em sistemas com entrada e saída únicas e em sistemas com entrada e saída múltiplas. Para sistemas com entrada e saída únicas utilizou-se aproximações resultantes do truncamento de primeira ordem da série de Taylor do termo exponencial e como objeto de otimização os critérios de desempenho baseados em combinações lineares entre funcionais do erro. Das aproximações estudadas uma delas, caracterizada por apresentar um pólo no lado esquerdo e um zero no lado direito do eixo imaginário, mostrou parâmetros ótimos mais próximos dos exatos. Para sistemas com entrada e saída múltiplas utilizou-se aproximações baseadas no binômio de Padé de diversas ordens e como objeto de otimização o critério quadrático envolvendo os estados e a função de controle. Resultados satisfatórios foram obtidos somente para aproximações de Padé de ordem três ou superior.

"ABSTRACT"

The procedures to establish the exact solutions for the optimal parameters of a control system with time-delay dynamics add significant algebraical and theory understanding difficulties. Due to this the exact solutions for the optimal parameters for first and second order systems as well as the solutions with a substitution of the time-delay dynamics by others, easier to perform algebraically, were obtained in order to analyse the differences of their results. The time-delay dynamics introduces exponential terms when represented in the Laplace domain. The approximations employed to substitute the time-delay dynamics correspond to analytical approximations to the exponential term represented by rational polynomial functions. This work divides the solution analysis into two classes of systems, one with single input and single output and the other with multiple input and multiple output. For systems with single input and single output the approximation employed resulted from the first order truncation of Taylor series and, as an object of optimization, the performance indexes based on linear combinations of error functionals. From the approximations studied, one particularly, which presented one pole in the left side and a zero in the right side of the imaginary axis, showed the closest results to the exact values of the optimal parameters. For systems with multiple input and multiple output the approximations employed were based on the Padé binomy and as an object of optimization the quadratic criterium involving the states and the control function. Satisfactory results were only obtained for Padé approximations of third order or superior.

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

Uma grande variedade de problemas de controle apresentam em sua formulação o atraso. Problemas dessa natureza fazem parte da teoria de equações diferenciais de diferença do tipo retardado onde aparecem argumentos do tipo $(t-\tau)$.

Em processos industriais o atraso apresenta-se basicamente associado ao transporte de materiais ao longo de canaletas ou dutos como é o caso da indústria química onde as substâncias percorrem distâncias consideráveis até uma câmara onde ocorre uma reação ou, simplesmente, uma mistura.

Na indústria de laminação de chapas e perfis o atraso decorre da distância entre o ponto de leitura do sinal de espessura e o ponto onde efetivamente ocorre a diminuição de espessura.

Os modelos sócio econômicos procuram refletir o comportamento resultante da agregação de determinadas variáveis como a taxa inflacionária, o nível de desemprego e o aumento de salários. Em alguns casos o efeito de uma variável, por exemplo a taxa inflacionária, sobre a outra, como o nível de desemprego, fica melhor representada se houver uma dinâmica do atraso envolvida entre as duas ao invés de uma dinâmica de sistema de primeira ordem como alguns modelos apresentam.

O atraso também se encontra presente em modelos de inventário onde as quantidades variam de local, em razão do processo produtivo, em intervalos de tempo muitas vezes inferior ao tempo de coleta geral obrigando a se processar conscientemente

informações sobre quantidades defasadas no tempo.

Em alguns modelos fisiológicos como é o caso da circulação sistêmica onde a equalização da pressão sanguínea numa determinada rede de vasos demora um tempo significativo faz-se útil o emprego de equações diferenciais com atraso.

Embora o atraso seja notadamente importante, o projeto de controladores com realimentação para sistemas com atraso tem sido esparsamente comentado na literatura. Segundo ROSS (1971), até mesmo os problemas básicos de projeto de controladores que estabilizam os sistemas com atraso tem permanecido sem um procedimento sistemático sendo dada maior atenção a aspectos teóricos.

Neste trabalho são mostrados métodos de solução para sistemas com atraso puro para formulação clássica no domínio de Laplace e moderna na forma de espaço de estados. Evidentemente os métodos aqui apresentados se aplicam a sistemas lineares sem atraso como um caso limite onde o atraso tende a zero.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo fundamental do trabalho é analisar em que medida as aproximações lineares à dinâmica do atraso substituem a dinâmica do atraso na determinação de parâmetros ótimos em sistemas de controle através de critérios de desempenho estabelecidos. De forma secundária, o trabalho mostra a aplicação dos métodos de otimização exato para sistemas tipo entrada única e saída única com atraso e aproximado aplicáveis a sistemas multivariáveis com atraso. O trabalho apresenta alguns métodos para análise de estabilidade e procura dar uma introdução à solução de equações diferenciais de diferença. Discute também, via análise de resposta em frequência, a natureza física da dinâmica do atraso em relação às aproximações comumente utilizadas.

1.3. HISTÓRICO DAS OTIMIZAÇÕES PARA SISTEMAS COM ATRASO

Na década passada foram feitos alguns desenvolvimentos em torno da obtenção de expressões para funcionais do erro em sistemas com atraso na formulação clássica, com entrada e saída únicas, publicados em WALTON; MARSHALL (1984) e WALTON et al. (1986) da Universidade de Bath, Inglaterra.

Para sistemas com entrada e saída múltiplas os trabalhos se desenvolveram a partir de ELLER et al. (1969) apud HWANG; CHEN (1986) na busca de algoritmos que pudessem resolver as equações em derivadas parciais acopladas que o método de ELLER et al. (1969) propunha para a obtenção do controlador ótimo segundo o critério quadrático.

As características dos trabalhos mencionados e de outros que serviram de base ou tentaram propor outras metodologias de solução encontram-se separados conforme a natureza do sistema quanto ao número de entradas e saídas.

1.3.1 SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA

JAMES et al (1947), NEWTON et al (1957), NASLIN (1968), ASTROM (1970) e JACOBS (1974) apud MARSHALL (1986) publicaram trabalhos a respeito do cálculo do funcional do erro quadrático definido por:

$$\int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad (1.1)$$

com $e(t)$ representando o erro ou a diferença entre a variável de entrada e a de saída do sistema nessa ordem, utilizando o teorema de Parseval que possibilita fazer esse cálculo em termos dos coeficientes de $E(s)$, transformada de Laplace de $e(t)$, para sistemas sem atraso.

GORECKI; POPEK (1983) apud WALTON; MARSHALL (1984) mostraram que é possível o cálculo do funcional do erro quadrático com $E(s)$ contendo termos exponenciais únicos do tipo e^{-Ts} no numerador e denominador. WALTON; MARSHALL (1984) publicaram o desenvolvimento do cálculo analítico do funcional do erro quadrático com $E(s)$ nas condições de GORECKI; POPEK (1983) apud WALTON; MARSHALL (1984). WALTON et al. (1986) estenderam o cálculo analítico para funcional do tipo:

$$\int_0^{\infty} w(t) [d^m e(t)/dt^m]^2 dt \quad (1.2)$$

com $w(t)$: função conhecida do tempo positiva
 m : um natural

em função também dos parâmetros de $E(s)$ nas mesmas condições citadas acima o que acabou por atingir um conjunto maior de funcionais embora ainda restrito uma vez que os funcionais baseados no valor absoluto do erro, tão importantes quanto aqueles dados por (1.2), não foram estudados.

1.3.2 SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA

KARATISHVILI (1962), OGUZTORELLI (1963), CHYUNG; LEE (1966) apud ROSS (1971) publicaram as condições necessárias para a otimização de sistemas multivariáveis. O enfoque dado por esses autores era essencialmente teórico e dirigido a questões relativas a controlabilidade sem o propósito de sugerir um procedimento para a síntese do controlador.

ELLER et al. (1969) apud ROSS (1971) desenvolveram um grupo de equações generalizadas de Riccati que produz uma função de controle ótima por realimentação para sistemas com atraso e parâmetros variantes no tempo.

ROSS; FLUGGE-LOTZ (1969) apud ROSS (1971) discutiram o problema para um restrito grupo de sistemas lineares com atraso mostrando que a solução de KALMAN (1960) apud ROSS (1971) pode ser obtida do seu caso particular onde o atraso é nulo. ROSS (1971) desenvolveu um procedimento computacional baseado num grupo de equações análogo a equação de Riccati embora sem a garantia que a função de controle estabilizasse o sistema.

JAMSHIDI; MALEK-ZAVAREI (1972) apud HWANG; CHEN (1986) desenvolveram um método de solução baseado no conceito de sensibilidade. MALEK-ZAVAREI (1980) apud HWANG; CHEN (1986) estendeu o método para sistemas com múltiplos atrasos no estado e na função de controle. O método baseado no conceito de sensibilidade contudo é somente aplicável a sistemas com pequeno atraso o que representa uma importante limitação.

HWANG; CHEN (1986) desenvolveram um algoritmo baseado em aproximações através de polinômios de Legendre que gera um controlador subotimizado.

FURUTA et al. (1988) desenvolveram um algoritmo mais genérico que o proposto por ROSS (1971) apud FURUTA et al. (1988) incluindo a possibilidade de atraso na função de controle e que assegura a estabilidade do sistema. O algoritmo desenvolvido, embora bastante abrangente, envolve conceitos matemáticos um tanto complexos e não se apresenta tão fácil de ser implementado.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em cinco partes. A primeira parte composta pela introdução procura situar o leitor quanto a importância da presença do atraso em vários modelos da atividade humana que necessitam de controle. Além disso são relatados brevemente os conteúdos de alguns trabalhos que buscaram a otimização de controladores para sistemas com atraso.

A segunda parte é composta de fundamentos da teoria de sistemas de controle com atraso como a questão da estabilidade, da utilização de aproximações à dinâmica do atraso e da solução das equações diferenciais de diferença. Os dois últimos tópicos abordados nessa parte dizem respeito à obtenção das soluções exatas para os parâmetros ótimos segundo um enfoque clássico e um moderno.

A terceira parte expõem os resultados obtidos para os parâmetros ótimos através da solução exata e da solução utilizando-se aproximações ao atraso para sistemas com entrada e saída únicas e para sistemas com entrada e saída múltiplas.

A discussão dos resultados obtidos na terceira parte para as duas naturezas de sistemas é feita na quarta parte e a quinta parte encerra o trabalho apresentando as conclusões mais importantes obtidas e propondo alguns tópicos para futuro desenvolvimento.

2. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS DE CONTROLE COM ATRASO

2.1 DEFINIÇÕES

2.1.1 ASPECTOS GERAIS SOBRE O ATRASO

O atraso puro ocorre em sistemas que possuem algum meio material de propagação cuja velocidade seja suficientemente pequena de modo que haja um intervalo de tempo significativo na reprodução de qualquer excitação sofrida entre seus extremos. É assim que acontece com sistemas que por exemplo possuem elementos que transportam fluidos. A Figura 2.1 mostra uma massa que flui através de um duto a uma certa temperatura.

Considere v a velocidade constante dessa massa. O comprimento do duto é L , então para um elemento de massa mover-se de uma extremidade a outra do duto serão necessários $\tau = L/v$ unidades de tempo. Seja $T_1(t)$ a temperatura à entrada do duto e $T_2(t)$ à sua saída. Agora suponha que a temperatura de entrada aumente subitamente o que pode ser modelado por uma função degrau como mostrado na Figura 2.1.

Admitindo que não haja trocas de calor ao longo do comprimento do duto a temperatura $T_2(t)$ será igual a $T_1(t-\tau)$. Somente após τ unidades de tempo a temperatura à saída do duto sofrerá o aumento. Um efeito similar ocorrerá com $T_2(t)$ qualquer que seja a alteração em $T_1(t)$.

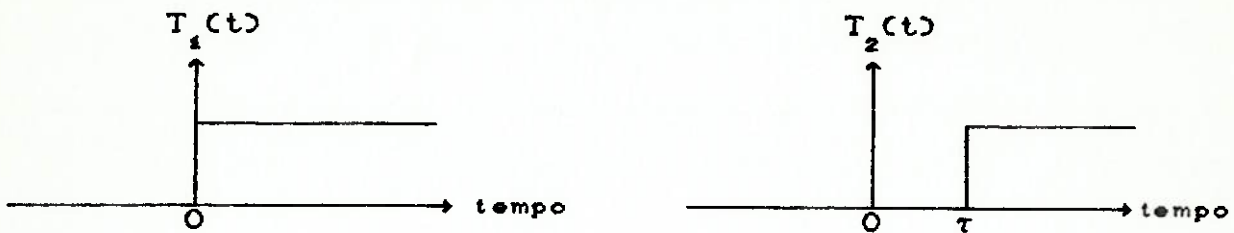
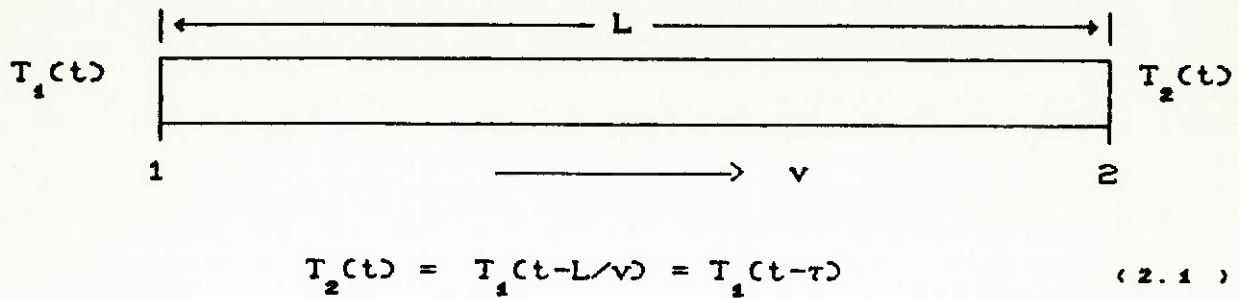


Figura 2.1. Esquema físico e gráficos de temperatura em função do tempo na entrada e na saída do duto.

Alguns sistemas de controle possuem um atraso inevitável no fluxo de sinal entre seus componentes. O atraso é normalmente resultado de uma separação física entre seus componentes e ocorre tipicamente entre a mudança da variável manipulada e seu efeito na planta original ou como um atraso na medição da saída.

O atraso descrito até então pode assumir outros nomes como tempo morto ou atraso puro de tempo para distinguir da constante de tempo presente em elementos de primeira ordem. Nota-se que a presença de atraso em sistemas causam oscilações tornando-os menos estáveis e, portanto, devem ser evitados ou reduzidos se possível.

2.1.2 INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE DIFERENÇA

Segundo BELLMAN (1963) equação diferencial de diferença é aquela descrita numa função e suas derivadas e cujos argumentos diferem entre si por um número fixo de valores. Exemplos:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t-1)}{dt} + x(t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t-1) - x(t-\sqrt{2}) = e^{2t} \quad (2.3)$$

Entende-se por ordem diferencial de uma equação a ordem de sua maior derivada e por ordem de diferença o seu número de argumentos distintos menos um. Assim, as ordens diferenciais de (2.2) e (2.3) são respectivamente 2 e 1 e as ordens de diferença são respectivamente 1 e 2.

A forma geral de uma equação diferencial de diferença de 1^a ordem é descrita por:

$$a_0 \frac{dx(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t-\omega)}{dt} + b_0 x(t) + b_1 x(t-\omega) = f(t) \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é dita do tipo retardado se $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$. É do tipo neutra se $a_0 \neq 0$ e $a_1 \neq 0$ e do tipo avançado se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Se $a_0 = a_1 = 0$, (2.4) reduz-se a uma equação de diferença pura. Se $a_0 = b_0 = 0$ ou $a_1 = b_1 = 0$, (2.4) reduz-se a uma equação diferencial ordinária. As equações diferenciais de diferença são classificadas em homogêneas se $f(t)$ for igual a zero, do contrário são ditas não homogêneas.

Em aplicações nas quais t representa usualmente o tempo uma equação do tipo retardado descreve o comportamento de um sistema no qual a taxa de variação da quantidade em investigação depende do seu passado e do seu presente.

Para se resolver uma equação diferencial de diferença do tipo retardado é necessário que seja dada a sua função inicial descrita num intervalo de tempo de amplitude mínima igual a τ (valor do atraso) anterior ao instante em que a sua descrição é válida.

Em outras palavras, é necessário contar um mínimo de sua história para que a solução possa evoluir a partir do instante inicial de sua descrição. Assim, se a equação vale somente para $t \geq 0$ e possui um argumento do tipo $t - \tau$ deverá ser dada pelo menos a função inicial no intervalo $[-\tau, 0]$.

Existem basicamente 2 processos de solução para equações diferenciais de diferença do tipo retardado. São eles: por continuação e por expansão em série.

A título de ilustração, será resolvida uma equação diferencial de diferença na variável $e(t)$ (erro) definida por $x(t)$ (entrada) menos $y(t)$ (saída) para cada um dos processos citados referente a um sistema de controle representado pelo diagrama de blocos na Figura 2.2.

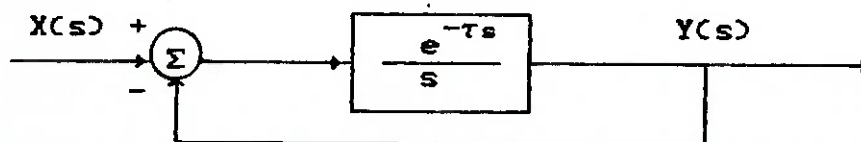


Figura 2.2. Diagrama de blocos de um sistema de controle com atraso.

Para o sistema representado na Figura 2.2 admite-se que a transformada de Laplace da entrada, $X(s) = 1/s$ o que significa $x(t) = H(t)$ ou degrau unitário. Dessa forma escreve-se:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - Y(s) = X(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{X(s)} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{e^{-\tau s}}{s}}{1 + \frac{e^{-\tau s}}{s}} \right] = \frac{1}{s + e^{-\tau s}}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

O processo por continuação utiliza-se da equação no domínio do tempo integrando-se a variável desejada em intervalos de tempo continuados. Esse processo gera uma solução analítica em geral diferente a cada intervalo cuja amplitude é igual ao valor do atraso.

Através de (2.5) chega-se a:

$$s E(s) + e^{-\tau s} E(s) = 1 \tag{2.6.1}$$

Subtraindo-se $e(0+)$ a cada um dos termos de (2.6.1) chega-se a:

$$s E(s) - e(0+) + E(s) e^{-\tau s} = 1 - e(0+) \tag{2.6.2}$$

Como $x(t)$ é um degrau unitário tem-se $e(0+) = 1$ e $e(t) = 0$ para $t < 0$ deduz-se trivialmente a partir de (2.6.2) que:

$$\frac{de(t)}{dt} + e(t-\tau) = 0, t > 0 \tag{2.7}$$

Assumindo que $\tau = 1$ desenvolve-se o processo de continuação que consiste na integração por intervalos de (2.7):

Para o intervalo de $]0, 1]$:

$$e(t) - e(0+) = \int_0^t \frac{de(u)}{du} du = - \int_0^t e(u-1) du = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e(t) = e(0+) = 1$$

(2.8)

Para o intervalo de $]1, 2]$:

$$e(t) - e(1+) = \int_1^t \frac{de(u)}{du} du = - \int_1^t e(u-1) du = - \left[1 \right]_1^t =$$

$$= - \left[t - 1 \right] \rightarrow e(t) = e(1+) - (t - 1) = 1 - (t - 1) \quad (2.9)$$

Para o intervalo de $]2, 3]$:

$$e(t) - e(2+) = \int_2^t \frac{de(u)}{du} du = - \int_2^t [1 - (u - 1 - 1)] du = \int_2^t (u - 3) du =$$

$$= \int_0^{t-2} (v - 1) dv = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{t-2} - \left[1 \right]_0^{t-2} = \frac{1}{2} (t - 2)^2 - (t - 2)$$

(2.10)

Pode-se sintetizar o resultado para $e(t)$ pelo processo de continuação como:

$$e(t) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{(t-i)^i}{i!}, \quad N \leq t \leq N+1 \quad (2.11)$$

O processo por expansão em série tem como primeira etapa tomar a transformada de Laplace da equação levando em consideração a função inicial. Embora o problema tenha sido formulado através do diagrama de blocos e, portanto, ser conhecida a expressão de $E(s)$ convém detalhar a passagem de (2.7) para o domínio de Laplace no caso do problema ser dado no domínio do tempo. Assim, aplicando-se a transformada de Laplace a ambos os termos de (2.7) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{de}{dt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e(t-\tau) e^{-st} dt = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow & \left[e(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e(t) (-s) e^{-st} dt + \int_0^{\tau} e(t-\tau) e^{-st} dt + \\ & + \int_{\tau}^{\infty} e(t-\tau) e^{-st} dt = 0 \quad (2.12) \end{aligned}$$

Definindo $u = t-\tau$, escreve-se:

$$\begin{aligned} & \left[0 - 1 \right] + sE(s) + \int_0^{\infty} e(u) e^{-s(u+\tau)} du = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow & -1 + sE(s) + e^{-s\tau} E(s) = 0 \rightarrow E(s) = \frac{1}{s + e^{-\tau s}} \quad (2.13) \end{aligned}$$

como deduzido do diagrama de blocos. Assim, também assumindo $\tau = 1$ tira-se a partir de (2.13):

$$E(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{e^{-s}}{s}} = \frac{1}{s} (1 + s^{-1} e^{-s})^{-1} \quad (2.14)$$

Desenvolvendo o binômio $(1 + s^{-1} e^{-s})^{-1}$ em série infinita:

$$\begin{aligned} (1 + s^{-1} e^{-s})^{-1} &= (1)^{-1} (s^{-1} e^{-s})^0 + (-1)(1)^{-2} (s^{-1} e^{-s})^1 + \\ &+ \frac{(-1)(-1-1)}{2} (1)^{-3} (s^{-1} e^{-s})^2 + \dots \\ &= 1 - (s^{-1} e^{-s}) + (s^{-1} e^{-s})^2 - (s^{-1} e^{-s})^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{-n} e^{-sn} \quad (2.15) \end{aligned}$$

Substituindo-se (2.15) em (2.14)

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{-n} e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{-(n+1)} e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{-ns}}{s^{n+1}} n! \right] \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{e^{-ns}}{s^{n+1}} n! \right] \quad (2.14.1) \end{aligned}$$

Sabe-se que $\frac{e^{-ns}}{s^{n+1}} n!$ equivale a transformada de Laplace de $(t-n)^n H(t-n)$ onde $H(t)$ representa o degrau unitário, então escreve-se:

$$\begin{aligned}
E(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^{\infty} (t-n)^n H(t-n) e^{-st} dt \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (t-n)^n H(t-n) e^{-st} dt \right) = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{0!} (t-0) H(t-0) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{-1}{1!} (t-1) H(t-1) e^{-st} dt + \\
&+ \int_0^{\infty} \frac{1}{2!} (t-2)^2 H(t-2) e^{-st} dt + \dots = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{0!} (t-0)^0 H(t-0) - \frac{1}{1!} (t-1) H(t-1) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2!} (t-2)^2 H(t-2) - \dots \right) e^{-st} dt \tag{2.14.2}
\end{aligned}$$

Deduz-se então que:

$$e(t) = 1 - (t-1)H(t-1) + \frac{1}{2!} (t-2)^2 H(t-2) - \dots \tag{2.16}$$

o que coincide com o resultado obtido em (2.11) para $e(t)$ pelo método de continuação.

2.2 APROXIMAÇÕES ANALÍTICAS UTILIZADAS PARA O TERMO $e^{-\tau s}$

Ao representar um sistema com atraso na forma de diagrama de blocos aparece um bloco do tipo $e^{-\tau s}$ resultante da transformada de Laplace de um estado qualquer atrasado dado por $x(t-\tau)$. Tal fato justifica-se tomando a transformada de Laplace de $x(t-\tau)$:

$$L [x(t-\tau)] = \int_0^{\infty} x(t-\tau) e^{-\tau s} dt = \int_{0-\tau}^{\infty-\tau} x(u) e^{-s(u+\tau)} du =$$

$$\int_{-\tau}^0 x(u) e^{-s(u+\tau)} du + \int_0^{\infty} x(u) e^{-s(u+\tau)} du$$

se $x(u) = 0$ para $u \in [-\tau, 0]$ então:

$$= e^{-s\tau} L [x(t)] \quad (2.17)$$

É sabido que qualquer função $F(s)$ analítica numa determinada região do plano complexo limitada por uma curva fechada simples pode ser aproximada ponto a ponto por uma série infinita de termos. Tomando-se como referência a origem 0 do plano complexo pode-se escrever:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{1}{2} \tau^2 s^2 + \frac{1}{6} \tau^3 s^3 + \frac{1}{24} \tau^4 s^4 + \dots}$$

(2.18)

Permite-se visualizar através de (2.18) que a existência de um termo como $e^{-\tau s}$ num sistema introduz infinitos pólos devido à série infinita de termos no denominador. A presença de um número infinito de pólos no denominador complica a questão do seu posicionamento no plano complexo cuja importância está diretamente relacionada a estabilidade do sistema.

Em particular, os métodos clássicos de análise e síntese de controle linear aplicam-se a funções de transferência que podem ser colocadas na forma de funções racionais polinomiais em s , portanto, com número finito de pólos e zeros.

Ao termo $e^{-\tau s}$ procura-se para efeitos práticos uma aproximação analítica que, substituída no sistema, venha a produzir resultados satisfatórios em termos da determinação de parâmetros limites para estabilidade e da otimização desses parâmetros no sistema pelos métodos clássicos.

Em PALM III (1986) aparece uma aproximação ao termo $e^{-\tau s}$ definida como de Padé dada por:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{\left(\frac{\tau}{m} s + 1 \right)^m} \quad (2.19)$$

A aproximação dada por (2.19) provém de fato da igualdade:

$$e^{-\tau s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{\tau s}{n}} \right]^n \quad (2.20)$$

como apontado em TRUXAL (1955).

Segundo TRUXAL (1955) entretanto, a aproximação de Padé é aquela que se apresenta como uma função racional, com numerador polinomial de grau n e denominador de grau m , de modo que sua expansão em série de Taylor na origem, também conhecida como expansão de Maclaurin, procure coincidir em um número de termos previamente fixado com a expansão de Maclaurin de $e^{-\tau s}$.

Considere como exemplo uma função racional de polinômios concebida com $n = 2$ e $m = 3$ dada por:

$$e^{-\tau s} \cong \frac{1 - \frac{3}{5} \tau s + \frac{9}{20} \tau^2 s^2 - \frac{1}{60} \tau^3 s^3}{1 + \frac{2}{5} \tau s + \frac{1}{20} \tau^2 s^2} \quad (2.21)$$

Expandindo-se o 2º termo de (2.21) em série de Maclaurin obtém-se:

$$1 - \tau s + \frac{1}{2} \tau^2 s^2 - \frac{1}{6} \tau^3 s^3 + \frac{1}{24} \tau^4 s^4 - \frac{1}{120} \tau^5 s^5 + \frac{1}{800} \tau^6 s^6 - \dots \quad (2.22)$$

Onde percebe-se que os primeiros 6 termos determinados equivalem simplesmente àqueles da expansão de Maclaurin de $e^{-\tau s}$.

Os coeficientes a serem adotados para uma função racional com $n = 3$ e $m = 2$ poderiam ser outros podendo haver uma coincidência maior ou menor entre os termos das expansões de Maclaurin. No exemplo dado os coeficientes foram escolhidos de maneira que pelo menos 6 termos coincidissem nas duas expansões de Maclaurin.

Uma outra forma de obter aproximações analíticas a $e^{-\tau s}$ é utilizar o truncamento da série de Taylor de $e^{-\tau s}$ na forma de razão de polinômios como em (2.23).

$$e^{-\tau s} = e^{-\tau(a+b)s} = \frac{e^{-\tau a}}{e^{-\tau b}} = \frac{1 - \tau a s + \frac{a^2}{2!} \tau s^2 - \dots}{1 - \tau b s + \frac{b^2}{2!} \tau s^2 - \dots}$$

com $a + b = 1$, a e b reais (2.23)

Dessa forma uma aproximação resultante de um truncamento de 1ª ordem seria:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau a s}{1 + \tau b s} \quad (2.24)$$

com $a + b = 1$, a e b reais

Considerando o estudo da resposta em frequência, um elemento $e^{-\tau s}$ apresenta características bastante peculiares que não podem ser acompanhadas pelas aproximações apresentadas em intervalos de alta frequência. Conforme HAAG (1967) aproximações provenientes de expansões omitem as características em alta frequência do atraso. Tal fato reflete-se diretamente na reprodução de sinais periódicos pois ocorre sempre uma perda de componentes de alta frequência ao se utilizar aproximações.

Tomando-se como exemplo a aproximação por uma dinâmica de sistema de primeira ordem representada por $1/(\tau s + 1)$, que corresponde à (2.19) para $m = 1$, verifica-se uma frequência de corte igual a $1/\tau$ e uma fase mínima de -90° . A resposta em frequência do elemento $e^{-\tau s}$ não apresenta frequência de corte e nem fase mínima. A Figura 2.3 mostra de forma qualitativa o aspecto dos diagramas de Bode para os elementos $1/(\tau s + 1)$ e $e^{-\tau s}$.

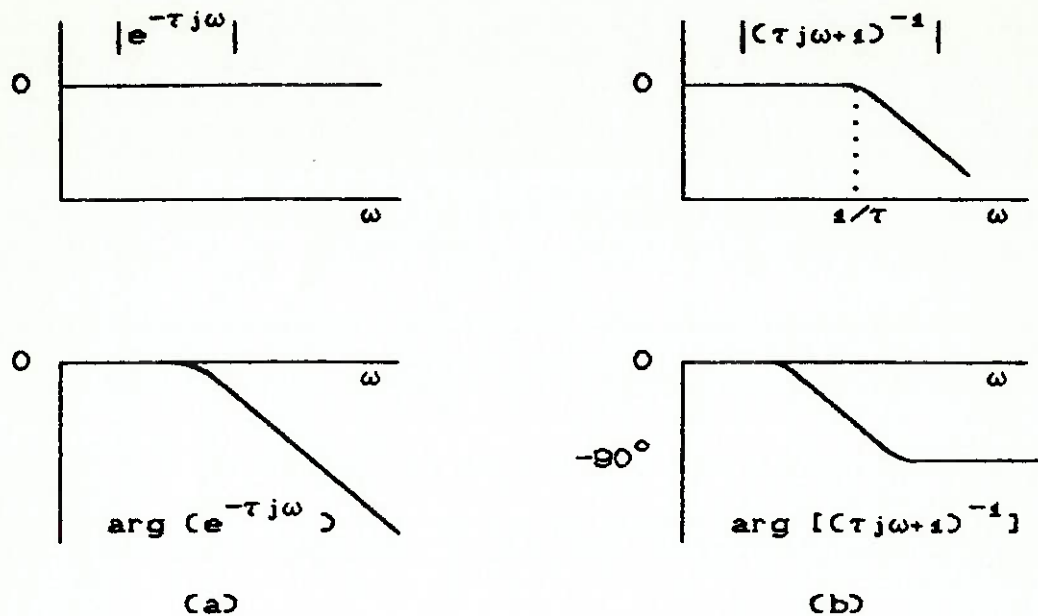


Figura 2.3. Diagramas de Bode: (a) Elemento $e^{-\tau s}$
 (b) Elemento $1/(\tau s + 1)$

Uma abrangência maior em termos de intervalo de frequência pode ser conseguida utilizando-se ora truncamentos de ordem superior da expansão de Taylor de $e^{-\tau s}$ ora m maiores para a aproximação tipo (2.14) entretanto, a medida que se trabalha com polinômios de graus maiores, dificulta-se o tratamento algébrico na aplicação de métodos otimizantes ou de análise de estabilidade.

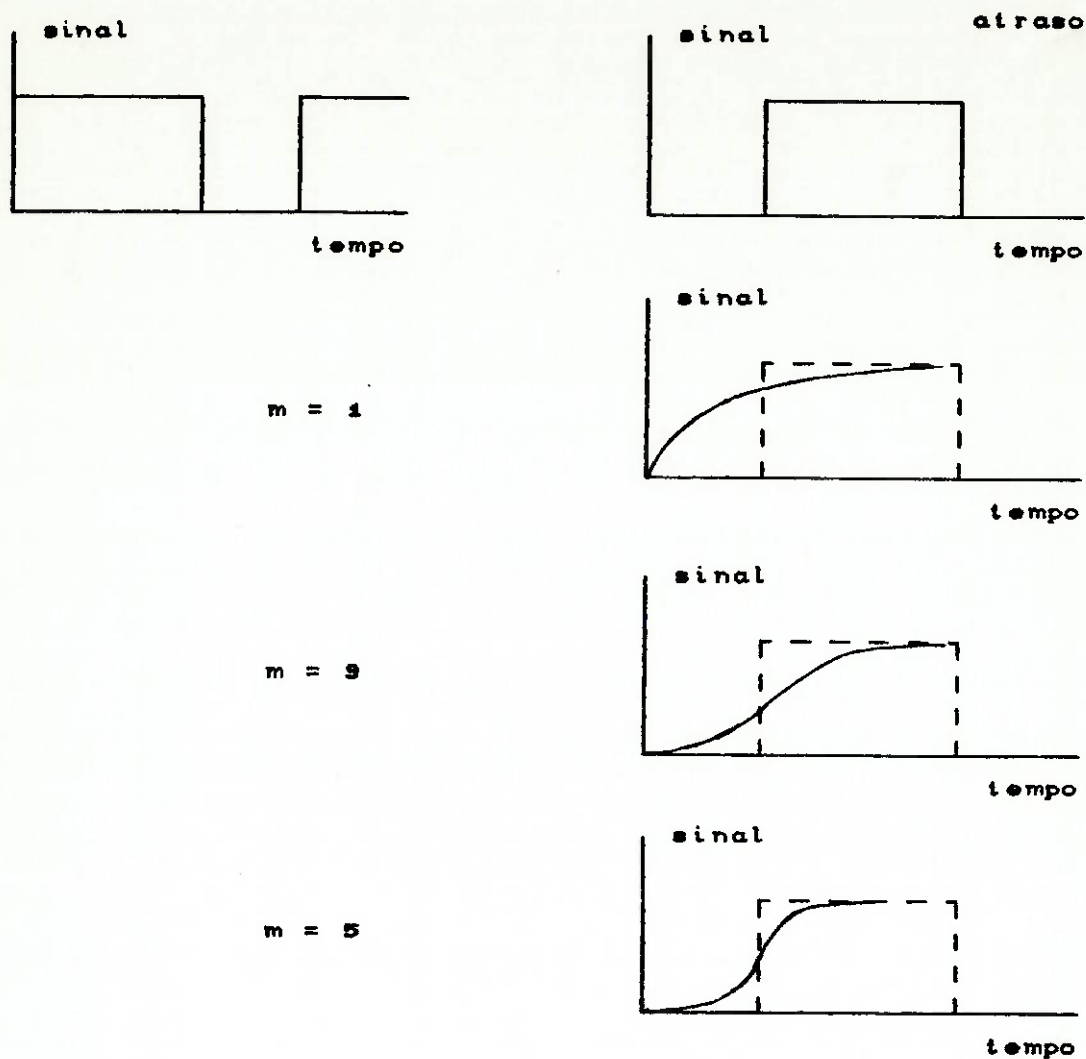


Figura 2.4. Reprodução de uma onda quadrada pelo elemento de atraso e por aproximações do tipo (2.19).

Imagine que um elemento de atraso e um elemento contendo uma aproximação do tipo (2.19) sejam submetidos a uma excitação do tipo onda quadrada.

A frequência de corte para uma aproximação tipo (2.19) de ordem m é dada por m/τ . A frequência de corte m/τ limita o número de frequências passantes da onda quadrada o que explica a diferença com relação à reprodução do sinal pelo elemento de atraso

Uma frequência de corte maior o que significa um m maior possibilita a passagem de uma banda maior de frequências pelo elemento o que explica a melhora consecutiva na reprodução do sinal. Como o elemento de atraso não possui frequência de corte ele deixa passar qualquer frequência. A Figura 2.4 mostra qualitativamente esse fato.

Imaginando a onda quadrada como uma série de infinitos termos de Fourier pode-se afirmar que a onda quadrada é reproduzida integralmente pelo elemento de atraso. Somente ocorre uma defasagem no domínio do tempo que é a caracterização física da passagem de um sinal por um elemento de atraso.

2.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

A análise de estabilidade para sistemas com atraso pode ser abordada de forma clássica através de aproximações analíticas, representadas por funções racionais ao termo exponencial, de forma a possibilitar a aplicação do critério de Routh ou do método do lugar das raízes.

As aproximações analíticas são tanto mais precisas, no sentido de estabelecerem limites aos parâmetros do sistema, quanto menor for o valor de τ . De qualquer forma pode-se melhorar a precisão das aproximações aumentando-se o seu número de termos.

Entretanto, pode-se somente adotar o número de termos satisfatórios da aproximação após essa ter sido empregada no sistema em estudo e verificado que os limites de estabilidade, calculados para os parâmetros do sistema por intermédio da aproximação, dão uma boa indicação com relação aos limites exatos.

Esse fato constitui uma séria desvantagem segundo apontado por TRUXAL (1955) o que direcionou a pesquisa em torno da análise de estabilidade para sistemas com atraso na busca de um critério exato que estabelecesse os limites reais para cada parâmetro. Em relação ao parâmetro τ especificamente foram desenvolvidos na década passada dois métodos de particular interesse: o método do pseudo-atraso e direto.

2.3.1 METODO DO PSEUDO ATRASO E DIRETO

Conforme WALTON; MARSHALL (1987) os sistemas lineares com atraso único τ apresentam equação característica tipicamente na forma :

$$F(s, \tau) = A(s) + C(s)e^{-\tau s} \quad (2.25)$$

onde $A(s)$ e $C(s)$ representam polinômios em s .

A estabilidade para tais sistemas é verificada se (2.25) não possuir raízes na metade direita do plano complexo. Na prática mudanças de estabilidade ocorrem a medida que τ aumenta o que significa uma aproximação das raízes de (2.25) ao eixo imaginário. Dessa forma, o problema de mudança de estabilidade está ligado ao estudo da existência ou não de raízes imaginárias puras de (2.25) e ao seu comportamento a medida que τ varia.

Em geral a não existência de raízes imaginárias puras depende de valores particulares de τ . Haverá intervalos de τ para os quais o sistema permanece estável e outros nos quais o sistema será instável. Um caso particular importante é aquele em que o sistema permanece estável qualquer que seja o valor não negativo de τ . Tais sistemas são ditos assintoticamente estáveis independentemente do atraso.

Recentemente vários autores THOWSEN (1981), HERTZ (1984) e McDONALD (1985) propuseram os chamados testes simplificados para determinação de intervalos de estabilidade para τ . Esses testes envolvem a introdução de um pseudo-atraso T definido por:

$$e^{-s\tau} = \frac{1 - sT}{1 + sT} \quad (2.26)$$

$$e^{-s\tau} = \left[\frac{1 - sT}{1 + sT} \right]^2 \quad (2.27)$$

para $s = j\omega$

É importante observar que tais métodos nada tem a ver com as aproximações de Padé ou Taylor. A motivação para o uso de tais métodos está no fato do círculo unitário definido por $e^{-\tau j\omega}$ ser inteiramente percorrido toda vez que τ aumenta de $2\pi/\omega$.

Observando-se o mapeamento do segundo termo de (2.26) com ω variando de $-\infty$ a $+\infty$ o círculo unitário seria percorrido uma única vez mantendo-se a variável auxiliar T chamada de pseudo-atraso finita e positiva.

Com o segundo termo de (2.27) nota-se que o círculo unitário é percorrido uma só vez para ω variando de 0 a $+\infty$. Além do mais com essa troca de variável de τ para T a equação (2.25) que possui um número infinito de raízes reduz-se a uma equação essencialmente polinomial com um número finito de raízes para cada T considerado.

Uma vez dessa forma (2.25) passa a ser tratável via critérios bem conhecidos de estabilidade para sistemas lineares sem atraso como o critério de Routh-Hurwitz. Para exemplificar o que foi dito vamos considerar o sistema linear com atraso tirado de THOWSEN (1981).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-\tau) \quad (2.28)$$

que possui como equação característica:

$$F(s, \tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s} \quad (2.29)$$

com $F(s, 0) = (s^2 + 2)(s + 1)$. Portanto para $\tau = 0$ existem 2 raízes imaginárias localizadas em $s = \pm j\sqrt{2}$. Essas raízes também são raízes de $F(s, 2k\pi/\sqrt{2})$ com $k \in \mathbb{N}$. Substituindo (2.27) em (2.29) e igualando-se a zero chega-se a:

$$T^2 s^5 + (2T + T^2) s^4 + (1 + 2T + 2T^2) s^3 + (1 + 4T + 2T^2) s^2 + 2s + 2 = 0 \quad (2.30)$$

A primeira coluna da matriz associada de Routh pode ser então facilmente calculada e, após multiplicada por fatores essencialmente positivos, tem-se:

$$T^2, T(2 + T), (1 + T^2), 1 + 2T + 9T^2 + 8T^3 + 2T^4, \\ T(T^3 + 4T^2 + 3T - 2), 2 \quad (2.31)$$

onde percebe-se que todos os elementos com exceção do penúltimo são positivos para T não negativo. Este termo se anula para $T = 1/(\sqrt{2} + 1)$. Para esse valor particular de T determina-se através de (2.30) as correspondentes raízes imaginárias $s = \pm j$. A partir dessas e do valor de T particular determina-se através de (2.27) o valor associado de $\tau = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) cujo menor valor positivo é $\pi/2$.

Dessa forma, as únicas raízes imaginárias de (2.25) advêm de $\tau = 2\pi k/\sqrt{2}$ e $\tau = \pi/2 + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) e são respectivamente $\pm j\sqrt{2}$ e $\pm j$.

Também, como apontado por McDONALD (1985), deve ser tomada atenção no sentido que não é todo valor de T proveniente do método de Routh-Hurwitz que necessariamente corresponde à mudança de estabilidade no problema original. Ainda, conforme McDONALD (1985), é necessário considerar todos os valores reais de T e não somente os positivos como estabelecido em HERTZ (1984). Tal fato é esclarecido em detalhes em WALTON; MARSHALL (1987).

As constatações acima motivaram o chamado Método Direto para análise de sistemas com atraso que é baseado nas seguintes considerações. Em primeiro lugar fica claro que $F(s, \tau) = 0$ corresponde a uma função implícita de s e τ a qual pode ou não interceptar o eixo imaginário. Assuma, por enquanto, por simplicidade de tratamento, que $F(s, 0) = 0$ possui todas suas raízes na metade esquerda do plano complexo o que significa que o sistema é estável para atraso igual a zero.

Em segundo lugar, se para algum τ , $F(s, \tau) = 0$ possuir uma raiz sobre o eixo imaginário $s = j\omega$, então $F(-s, \tau)$ será igual a 0 (zero) para os mesmos valores de τ e ω . Dessa forma olhando-se para as raízes sobre o eixo imaginário o problema reduz-se à determinação dos valores de τ para os quais $F(s, \tau)$ e $F(-s, \tau)$ são iguais a 0 (zero). Montando-se o sistema:

$$\begin{cases} A(s) + C(s)e^{-T_0} = 0 \\ A(-s) + C(-s)e^{+T_0} = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

conclui-se:

$$A(s)A(-s) - C(s)C(-s) = 0 \quad (2.33)$$

por eliminação de τ . A equação acima é polinomial em $\omega^2 = -s^2$.

Pode-se inclusive escrever:

$$W(\omega^2) = A(j\omega)A(-j\omega) - C(j\omega)C(-j\omega) = 0 \quad (2.34)$$

Para existência de raízes imaginárias de (2.32) as raízes de $W(\omega^2) = 0$ devem ser positivas. Como o sistema foi admitido estável para $\tau = 0$ assim o permanecerá qualquer que seja $\tau > 0$ (ou contrariamente se já for instável para $\tau = 0$ continuará assim para qualquer $\tau > 0$).

A equação (2.34) que é finita em ω^2 e independente de τ determina todos os pontos de intersecção com o eixo imaginário que, portanto, são finitos em número.

Um outro aspecto a ser levado em consideração é o posicionamento das raízes de (2.25) para τ ligeiramente superior a 0 (zero) até τ_0 ou atraso limite de estabilidade. Conforme WALTON; MARSHALL (1987) se o sistema é estável para $\tau = 0$ e o grau de $A(s)$ for superior ao de $C(s)$ as novas raízes originadas a partir de τ ligeiramente superior a 0 (zero) estarão posicionadas no infinito à esquerda do eixo imaginário. Assim, a medida que τ cresce até τ_0 tem-se a aproximação das raízes ao eixo imaginário.

O método Direto de análise propõe checar para cada uma das possíveis raízes ω^2 de (2.34) se, para os correspondentes $s = \pm j\omega$ a raiz cruza da esquerda para a direita o eixo imaginário com o aumento de τ , da direita para a esquerda com o aumento de τ

ou se, simplesmente, tangencia, a partir de uma das metades do plano complexo, o eixo imaginário.

Tal pode ser determinado pela análise do sinal de $\text{Re}(ds/d\tau)$. Entretanto não será necessário calcular esse último o que foi deduzido por WALTON; MARSHALL (1987) partir de $W(\omega^2)$:

$$S = \text{sn} \left[\text{Re} \left[\frac{ds}{d\tau} \Big|_{s = j\omega} \right] \right] = \text{sn} \left[\frac{d W(\omega^2)}{d \omega^2} \right] \quad (2.85)$$

com sn representando a função sinal

O resultado acima mostra que o comportamento da raiz no ponto de cruzamento é dado pelo comportamento de $W(\omega^2)$. WALTON; MARSHALL (1987) também mostram que se a raiz somente toca o eixo imaginário o mesmo faz $W(\omega^2)$, se cruza da esquerda(direita) para a direita(esquerda), $W(\omega^2)$ cruza de cima(baixo) para baixo(cima) o eixo positivo ω^2 .

Além do mais, se $\omega = \omega_1$ é solução da (2.34) correspondendo a $\tau = \tau_1$ então $\omega = -\omega_1$ também é solução para $\tau = \tau_1$ o que significa que as raízes cruzam o eixo imaginário em pares. Pode ser mostrado que elas cruzam na mesma direção bastando somente considerar para efeito de análise $\omega > 0$.

Para exemplificar a aplicação do método direto para análise de estabilidade toma-se os seguintes exemplos:

Exemplo 1: $F(s, \tau) = s + e^{-\tau s}$

Nesse caso segue diretamente que $A(s) = s$ e $C(s) = 1$.

Para $\tau = 0$, $F(s, 0) = s + 1$, o que significa que o sistema

é estável para atraso nulo. O grau de $A(s)$ é superior ao grau de $C(s)$ o que significa que um pequeno aumento no valor de τ a partir de 0 (zero) irá gerar outros pólos posicionados à infinito com parte real negativa. Quanto aos possíveis pontos de cruzamento e/ou toque no eixo imaginário resolve-se:

$$W(\omega^2) = A(j\omega)A(-j\omega) - C(j\omega)C(-j\omega) = \omega^2 - 1 = 0$$

donde conclui-se que $\omega \in \mathbb{R}$, ou melhor, existem os pontos de cruzamento e/ou toque iguais a $\pm j$. O valor de τ_0 para $s = j$ é dado por:

$$A(j) + C(j) e^{-j\tau_0} = j + e^{-\tau_0}j = j + \cos(-\tau_0) + j \sin(-\tau_0) = 0$$

o que implica:

$$\begin{cases} \cos \tau_0 = 0 \\ \sin \tau_0 = 1 \end{cases} \quad \text{donde sai: } \tau_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$$

Resta a pergunta se $s = j$ é ponto de cruzamento ou toque. Note que $S = \text{sn} [dW(\omega^2)/d\omega^2] = \text{sn } 1 > 0$ o que implica cruzamento da esquerda para a direita desestabilizando o sistema. Portanto conclui-se que o sistema é estável para $0 \leq \tau < \pi/2$ e instável para $\tau > \pi/2$.

$$\text{Exemplo 2: } F(s, \tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$$

$$\text{Note que } F(s, 0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s + 1)(s^2 + 2) = 0$$

Então para $\tau = 0$ existem raízes em $s = \pm j\sqrt{2}$ o que significa que não há estabilidade assintótica em $\tau = 0$.

$$W(j\omega) = \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2) = 0$$

Como $s = 0$ não é raiz de F a solução $\omega = 0$ de W pode ser ignorada pois corresponde a um caso limite onde $\tau = \infty$. A solução $\omega = \sqrt{2}$ implica:

$$\begin{cases} \cos \tau_0 \sqrt{2} = 1 \\ \text{sen } \tau_0 \sqrt{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \tau_0 = k\pi \sqrt{2}, k \in \mathbb{N}$$

Da análise de WALTON; MARSHALL (1987) para $\omega = \sqrt{2}$ as raízes cruzam da esquerda para a direita.

A solução $\omega = 1$ implica:

$$\begin{cases} \cos \tau_0 = 0 \\ \text{sen } \tau_0 = 1 \end{cases} \rightarrow \tau_0 = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$$

Para $\omega = 1$ as raízes cruzam da direita para a esquerda conforme WALTON; MARSHALL (1987). Assim um par de raízes cruza da esquerda para a direita para $\tau = 0$ e permanece no semi-plano direito até τ atingir $\pi/2$ quando retorna ao semi-plano esquerdo.

O par de raízes permanece no semi-plano esquerdo até τ atingir $\pi\sqrt{2}$ quando cruza novamente para o lado direito permanecendo ali até retornar ao lado esquerdo para $\tau = 5\pi/2$. Esse par de raízes permanece no lado esquerdo até $\tau = 2\pi\sqrt{2}$ quando cruza para o lado direito.

Para $\tau = 3\pi\sqrt{2}$ um segundo par de raízes cruza da esquerda para a direita antes que o próximo valor de $\tau = 9\pi/2$ traga de volta o primeiro par de raízes ao lado esquerdo havendo após $\tau = 9\pi/2$ no mínimo um par de raízes remanescente a direita. Dessa maneira as únicas regiões em que existe estabilidade assintótica são de $\pi/2 < \tau < \pi\sqrt{2}$ e de $5\pi/2 < \tau < 2\pi\sqrt{2}$. Tal resultado confirma aquele determinado em THOWSEN (1981).

2.3.2 TEOREMA DE NYQVIST

Os métodos de análise descritos no item anterior dão ênfase exclusiva às margens de estabilidade com foco no parâmetro τ . Entretanto nem sempre é esse parâmetro o responsável por uma condição de instabilidade. Alguns sistemas com atraso conhecido passam a ser instáveis mediante a utilização de ganhos não apropriados.

WYLIE (1985) garante a utilização do teorema de Nyquist para sistemas de única entrada e única saída que tenham termos exponenciais no numerador da função de transferência em malha aberta. O teorema de Nyquist também é utilizado por OGATA (1970) e TRUXAL (1955) envolvendo sistemas com atraso visando estabelecer limites de estabilidade para os parâmetros do sistema.

A utilização do teorema de Nyquist não está restrita a um determinado parâmetro do sistema. Assim intervalos de estabilidade podem ser determinados em função de qualquer parâmetro escolhido.

Imagine um sistema controlado com única entrada e única saída cujo diagrama de blocos possa perfeitamente enquadrar-se na forma reduzida da Figura 2.5:

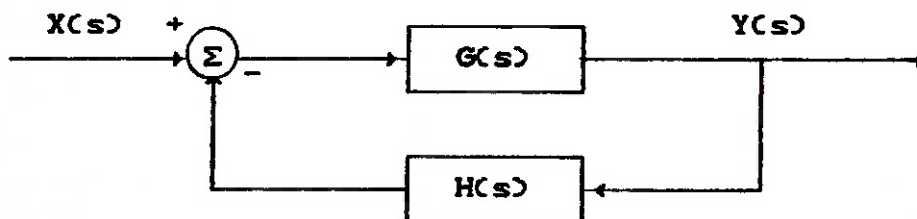


Figura 2.5. Diagrama de blocos na forma reduzida.

O diagrama de Nyqvist é o diagrama polar da função de transferência em malha aberta ou $G(j\omega)H(j\omega)$ com ω variando de 0 a $+\infty$. O nome diagrama de Nyqvist advém da sua relação com o teorema de estabilidade de Nyqvist.

O teorema de estabilidade de Nyqvist reza que: "O sistema é estável em malha fechada se, e somente se, o ponto $-1+j0$ se posicionar à esquerda do diagrama de Nyqvist em malha aberta relativo a um observador viajando ao longo do diagrama na direção do crescimento da frequência ω " (PALM III, 1986, p.484).

O teorema de Nyqvist se impõe como um fácil instrumento de análise de estabilidade para sistemas com atraso. Como exemplo tem-se a Figura 2.6 que representa o diagrama de Nyqvist da função de transferência em malha aberta dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K e^{-s}}{s(s+1)} \quad (2.36)$$

para diversos valores do parâmetro K.

Observe que o sistema de controle em malha fechada apresenta-se estável para $K < 1.13 = K_{cr}$ denominado de ganho crítico.

O ganho crítico pode ser determinado algebricamente através de:

$$G(K, j\omega)H(K, j\omega) = \frac{K e^{-\tau j\omega}}{j\omega(j\omega + 1)} = -1 \quad (2.37)$$

o que implica $\text{Im} [G(K, j\omega)H(K, j\omega)] = 0$, donde sai:

$$\frac{K}{\omega^2(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \omega^2 \sin \omega) = 0 \quad (2.98)$$

cuja solução mínima positiva é $\omega_{cr} \cong 0.86$. Substituindo esse valor em (2.37) tem-se:

$$K_{cr} = -1 (-\omega_{cr}^2 \cos \omega_{cr} - \omega_{cr} \sin \omega_{cr}) (\omega_{cr}^4 + \omega_{cr}^2) \quad (2.99)$$

donde sai $K_{cr} \cong 1.13$ como mostrado no diagrama à Figura 2.6.

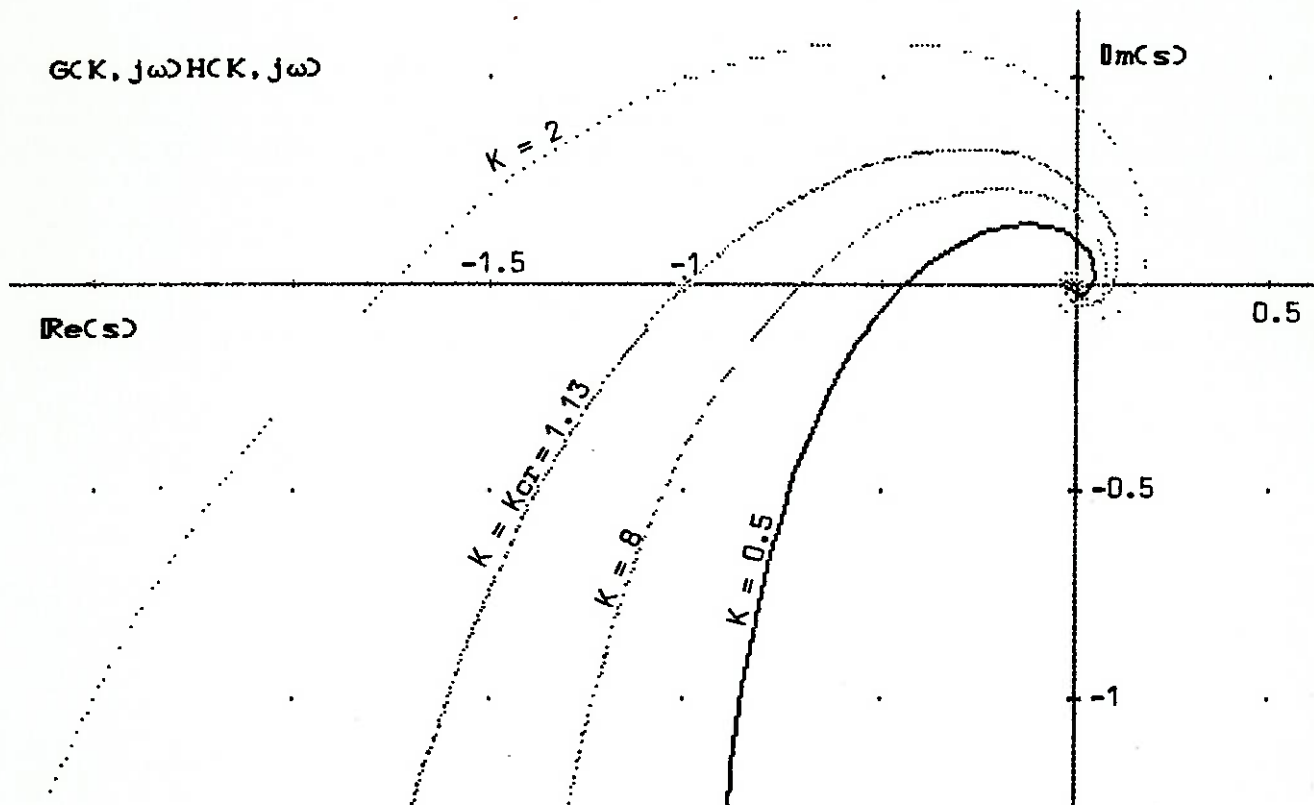


Figura 2.6. Diagrama polar de $G(s)H(s)$.

2.3.3 MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

O método do lugar das raízes é um outro instrumento para a análise de estabilidade em sistemas com atraso. O método consiste no mapeamento das raízes da equação característica do sistema em função da variação de algum parâmetro do sistema.

Em PALM III (1986) há um algoritmo específico à construção do lugar das raízes para sistemas com atraso conhecido em função de um ganho. Em OGATA (1970) há alguns exemplos simples aplicados a sistemas com atraso.

Em geral os algoritmos para construção do lugar das raízes são baseados na variação de um ganho K . Para sistemas com entrada única e saída única a equação característica tem a forma segundo PALM III (1986):

$$1 + K \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-\tau s} = 0 \quad (2.40.1)$$

com $P(s)$ e $Q(s)$ polinômios com coeficientes reais fatoráveis a:

$$\begin{aligned} P(s) &= (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) \\ Q(s) &= (s + q_1)(s + q_2) \dots (s + q_m) \end{aligned} \quad (2.40.2)$$

de graus n e m respectivamente.

De (2.40.1) e $s = \sigma + j\omega$ deduz-se:

$$\text{Eq. Escala } K: \quad K = \frac{e^{\tau\sigma}}{\left| \frac{P(\sigma + j\omega)}{Q(\sigma + j\omega)} \right|} \quad (2.41.1)$$

$$\text{Eq. Angular: } \arg \left[\frac{P(\sigma+j\omega)}{Q(\sigma+j\omega)} \right] - \omega\tau \frac{180^\circ}{\pi} =$$

$$= 180^\circ \pm 360^\circ k, \text{ com } k \in \mathbb{N}. \quad (2.41.2)$$

onde arg significa o argumento

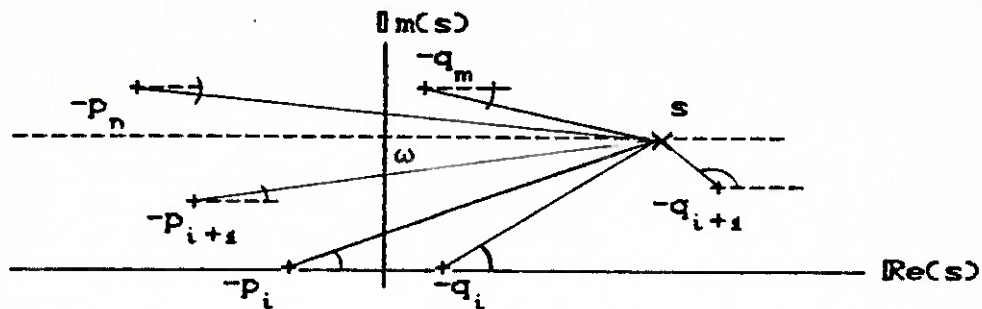


Figura 2.7. Determinação de um lugar da raiz.

Em geral os algoritmos tem a seguinte forma:

1 Escolher ω

2 Para $k = 0$ até N

2.1 Calcular $180^\circ [(1 \pm 2k) + \frac{\omega\tau}{\pi}]$ dado τ

2.2 Assumir σ

2.3 Calcular inclinações das retas que unem os pontos $-p$ e $-q$ a $s = \sigma + j\omega$

2.4 Calcular $[\sum^n \arg(s+p_i) - \sum^m \arg(s+q_i)]$

2.5 Confrontar resultado com 2.1. Se diferir volte para 2.2 senão marque o ponto s como na Figura 2.7

Em relação ao parâmetro τ a construção do lugar das raízes torna-se um tanto complexa devido a infinidade de raízes para cada τ escolhido.

2.4 PROJETO DE CONTROLADORES ÓTIMOS PARA SISTEMAS COM ATRASO

2.4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FUNCIONAIS EM SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA (EUSU)

No projeto de sistemas de controle é importante que o sistema atenda a certas especificações. Essas especificações podem ser traduzidas em termos do comportamento da resposta transitória ou em termos de critérios de desempenho.

O critério de desempenho é uma função positiva ou nula dos parâmetros do sistema devendo ser passível de otimização o que significa que os parâmetros ajustados podem resultar um valor mínimo ou máximo para o critério escolhido.

Os valores ótimos para os parâmetros dependem do critério de desempenho adotado. Na prática torna-se interessante que a expressão para o critério de desempenho seja de fácil obtenção analítica.

Entre os critérios de desempenho mais utilizados estão aqueles baseados em funcionais do erro como:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt : \quad \text{Funcional do erro quadrático.} \quad (2.42.1)$$

$$\int_0^{\infty} te^2(t) dt : \quad \text{Funcional do erro quadrático multiplicado pelo tempo.} \quad (2.42.2)$$

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt : \quad \text{Funcional do erro absoluto.} \quad (2.42.3)$$

$$\int_0^{\infty} t | e(t) | dt : \quad \text{Funcional do tempo multiplicado pelo erro absoluto.} \quad (2.42.4)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2 dt : \quad \text{Funcional da derivada ao quadrado do erro} \quad (2.42.5)$$

com $e(t) = x(t) - y(t)$

onde $x(t)$: entrada
 $y(t)$: saída

Os critérios de desempenho resultam da adoção individual de cada um dos funcionais citados ou da combinação linear entre eles. A otimização para esses critérios se faz no sentido de minimizá-los.

Convém ressaltar que em geral os funcionais com o tempo multiplicando uma função do erro como em (2.42.2) e (2.42.4) são usualmente os preferidos uma vez que as discrepâncias iniciais da resposta $y(t)$ em geral são menos importantes que aquelas em regime permanente.

Em sistemas com atraso o desenvolvimento das expressões analíticas para os funcionais em termos dos parâmetros do sistema constitui uma tarefa pouco elementar.

Os passos mais significativos no sentido de obter essas expressões analíticas foram dados na década passada a partir dos trabalhos publicados por WALTON; MARSHALL (1984) e WALTON et al. (1986).

Esses trabalhos são fundamentados na utilização do teorema de Parseval como desenvolvido em NEWTON et al (1957) para sistemas sem atraso onde escreve-se os funcionais baseados em $e(t)$

na forma de uma integral envolvendo a transformada de Laplace de $e(t)$ definida como $E(s)$.

Os funcionais estudados em WALTON et al (1986) tem a forma:

$$J = \int_0^{\infty} w(t) \left[\frac{d^m e(t)}{dt^m} \right]^2 dt \quad (2.43)$$

onde aparece uma função $w(t)$ do tempo positiva interpretada como uma função de ponderação da importância do tempo no funcional.

WALTON et al (1986) não aborda os funcionais contendo o valor absoluto do erro, embora sejam tão importantes como os demais, uma vez que o procedimento baseado no teorema de Parseval não se aplica para esses casos.

Neste trabalho são abordados somente os seguintes funcionais:

$$J_p^{(q)} = \int_0^{\infty} t^p \left[\frac{d^q e(t)}{dt^q} \right]^2 dt \quad (2.44)$$

para $p, q = \{ 0,1 \}$ e $p + q \leq 1$

onde p representa o expoente de t e q a ordem de derivação do erro.

Em outras palavras tem-se:

$$J_0^{(0)} = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad (2.44.1)$$

$$J_1^{(0)} = \int_0^{\infty} t [e(t)]^2 dt \quad (2.44.2)$$

$$J_0^{(1)} = \int_0^{\infty} \left[\frac{d e(t)}{dt} \right]^2 dt \quad (2.44.3)$$

O teorema de Parseval é utilizado na forma:

$$\int_0^{\infty} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s) G(-s) ds \quad (2.45)$$

onde $F(s)$ e $G(s)$ representam as respectivas transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$. Veja Apêndice I para demonstração.

Com o intuito de mostrar o procedimento apresentado em WALTON et al. (1986) toma-se o seguinte sistema representado em diagrama de blocos na Figura 2.8.

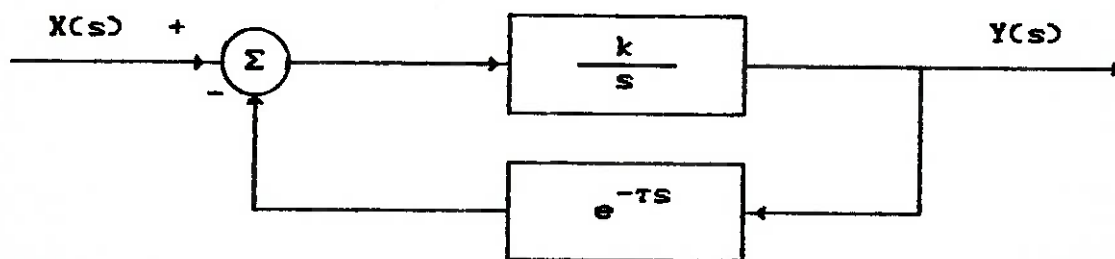


Figura 2.8. Diagrama de blocos para os casos em estudo.

Toma-se $x(t) = H(t)$, degrau unitário, o que implica que a transformada de Laplace $X(s) = 1/s$. A transformada de Laplace de

$e(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - Y(s) = X(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{X(s)} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s} \exp(\tau s)} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \frac{s - k + k \exp(-\tau s)}{s + k \exp(-\tau s)} \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s) E(-s) ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\frac{s - k + k \exp(-\tau s)}{s [s + k \exp(-\tau s)]} \frac{-s - k + \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} \right] ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\dots \right] ds \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

A integral em (2.47) sobre o eixo imaginário deve ser resolvida por integral de contorno em razão da dificuldade algébrica imposta pelas funções do integrando.

Entretanto mesmo a resolução de (2.47) por integral de contorno oferece poucas chances de sucesso se mantida nessa forma. Note antes que $s = 0$ não é um polo de $E(s)$ ou $E(-s)$. Tal justifica-se tomando-se o limite para s tendendo a zero em (2.46)

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} E(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s - k + k \exp(-\tau s)}{s + k \exp(-\tau s)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s - k + k \left(1 - \tau s + \frac{1}{2} \tau^2 s^2 - \dots \right)}{s + k \exp(-\tau s)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s - k + k - k \tau s \left(1 - \tau s + \frac{k}{2} \tau^2 s^2 - \dots \right)}{s + k \exp(-\tau s)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s \left(1 - k\tau + \frac{k\tau^2}{2} s^2 - \dots \right)}{s + k \exp(\tau s)} = \frac{1 - k\tau}{k}
\end{aligned}$$

(2.48)

Assumindo que as raízes de $s + k \exp(-\tau s) = 0$ localizam-se à esquerda do eixo imaginário, o que significa assumir que o sistema é estável, faz com que as raízes de $-s + k \exp(\tau s)$ localizem-se à direita do eixo imaginário.

O fato de $s = 0$ não ser pólo de $E(s)$ e, portanto também não de $E(-s)$, aliado à hipótese de não haver pólos sobre o eixo imaginário permite que se mantenha uma trajetória contínua ao longo do eixo imaginário não havendo a necessidade de desvios infinitesimalmente pequenos ao redor de pólos no eixo imaginário.

Fechando-se o contorno Γ_1 através de um semi-círculo de raio infinito na metade direita do plano complexo conforme ilustrado na Figura 2.9 o valor de $J_0^{(0)}$ não se altera uma vez que a contribuição do semi-círculo com raio infinito é nula devido ao grau dos denominadores de $E(s)$ e $E(-s)$ serem maiores ao de seus

numeradores.

Então escreve-se:

$$\begin{aligned}
 J_o^{(o)} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \left[\dots \right] ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} \left[\dots \right] ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} (-2\pi j) \sum_{\text{mdp}} \text{res} \left[\dots \right] = - \sum_{\text{mdp}} \text{res} \left[\dots \right] \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

onde mdp significa metade direita do plano complexo.

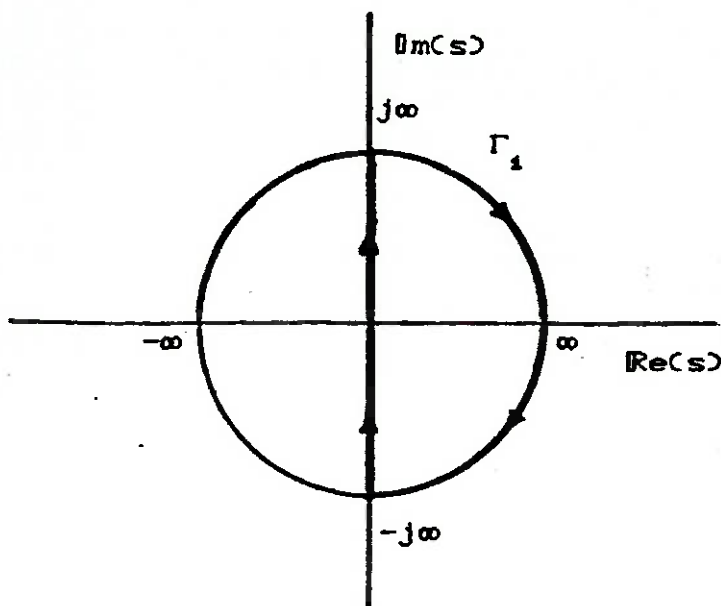


Figura 2.9. Contorno Γ_1 .

Devido a infinidade de pólos existentes na metade direita do plano complexo de s recorre-se a um artifício para o cálculo de (2.49) que tem como objetivo transformar a somatória de infinitos resíduos numa somatória finita de resíduos.

Observe que para as raízes de $-s + k \exp(\tau s) = 0$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} -s + k \exp(\tau s) = 0 & \rightarrow k \exp(\tau s) = s \rightarrow \\ \rightarrow \exp(\tau s) = s/k & \rightarrow \exp(-\tau s) = k/s \end{aligned} \quad (2.50)$$

Substituindo-se $\exp(-\tau s)$ na expressão (2.49) pelo valor encontrado em (2.50) resulta:

$$J_0^{(0)} = - \sum_{\text{mdp}} \text{res} \left[\frac{s^2 - ks + k^2}{s [s^2 + k^2]} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} \right] \quad (2.51)$$

Para o cálculo de (2.51) na metade direita do plano é necessário que se utilize um novo contorno com desvios infinitesimais denominado de Γ_2 que exclua as raízes de $s [s^2 + k^2] = 0$ posicionadas sobre o eixo imaginário como ilustrado na Figura 2.9.

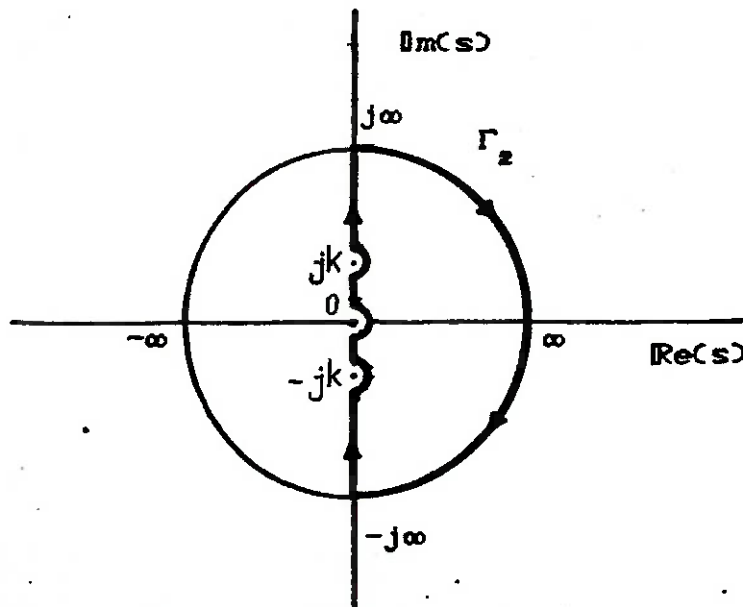


Figura 2.10. Contorno Γ_2 .

$$\text{Assim: } J_o^{(o)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} \left[\dots \right] ds \quad (2.52)$$

Essa mudança de contorno porém não elimina o problema do cálculo de resíduos em (2.51) uma vez que Γ_2 continua a conter em seu interior as infinitas raízes de $[-s + k \exp(\tau s)] = 0$.

Considere então a integral da expressão entre chaves de (2.51) denominada de J_∞ em torno de um círculo centrado na origem de raio infinito definido por Γ_∞ conforme Figura 2.11.

$$J_\infty = \int_{\Gamma_\infty} \left[\frac{s^2 - ks + k^2}{s [s^2 + k^2]} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} \right] ds \quad (2.53)$$

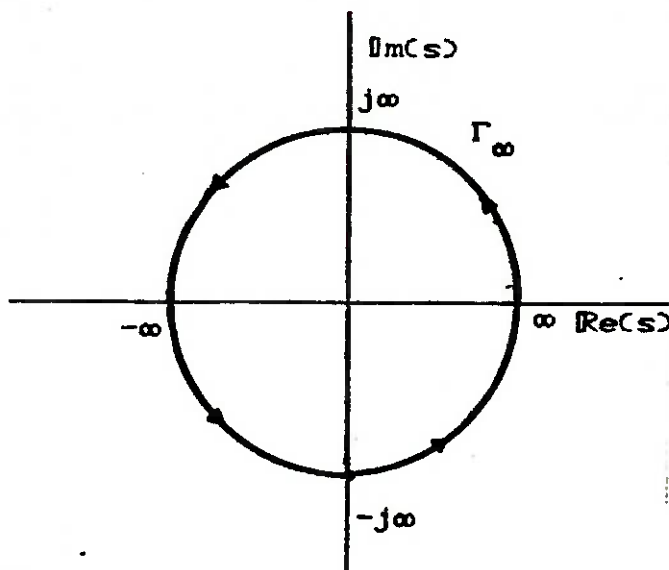


Figura 2.11. Contorno Γ_∞ .

Observe que a integral em (2.53) pode ser decomposta em outras duas conforme (2.54):

$$J_{\infty} = \int_{\Gamma_1} \left[\dots \right] ds + \left[- \int_{\Gamma_2} \left[\dots \right] ds \right] \quad (2.54)$$

onde Γ_1 aparece em detalhe na Figura 2.12.

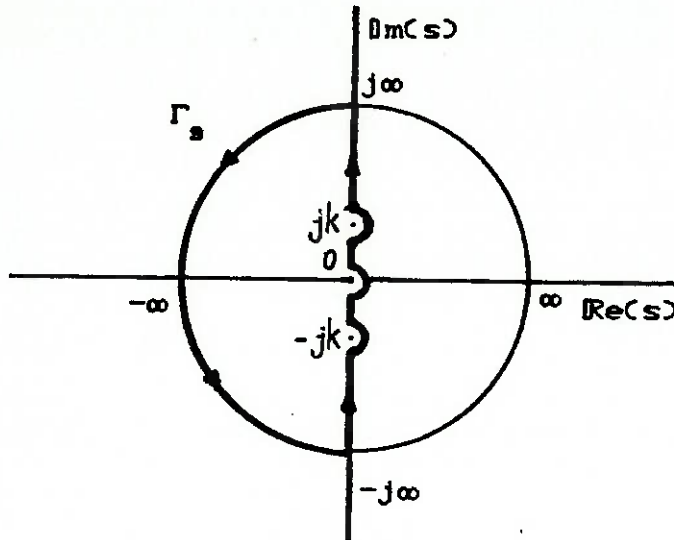


Figura 2.12. Contorno Γ_1 .

Como o valor de $J_{\infty} = 0$ em virtude do grau do denominador ser superior ao do numerador pode-se escrever a partir de (2.54):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \left[\dots \right] ds &= -2\pi j \sum_{\text{mdp}} \text{res} \left[\dots \right] = \int_{\Gamma_1} \left[\dots \right] ds = \\ &= 2\pi j \sum_{s=0, \pm k_j} \text{res} \left[\dots \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dessa forma, escreve-se:

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} \left[\dots \right] ds = \frac{1}{2\pi j} (2\pi j) \sum_{s=0, \pm kj} \text{res} \left[\dots \right] = \\
 &= \sum_{s=0, \pm kj} \text{res} \left[\dots \right] \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Deste modo (2.51) reduz-se a (2.56) que envolve uma soma finita de resíduos. Após alguma álgebra como detalhado no Apêndice II conclui-se:

$$J_0^{(0)} = \frac{1}{2k} \left[\frac{\cos(k\tau)}{1 - \text{sen}(k\tau)} - 2k\tau \right] \quad (2.57)$$

Para o funcional $J_1^{(0)}$ faz-se $f(t) = te(t)$ e $g(t) = e(t)$. Dessa forma escreve-se:

$$J_1^{(0)} = \int_0^{\infty} t [e(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s)E(-s) ds \quad (2.58)$$

onde $F(s)$ é dado por:

$$F(s) = \mathcal{L} [te(t)] = (-1) \frac{dE(s)}{ds} \quad (2.59)$$

Sendo assim:

$$J_1^{(0)} = - \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{dE(s)}{ds} E(-s) ds \quad (2.60)$$

Desenvolvendo-se $J_1^{(0)}$ com $E(s)$ como dado em (1) e $x(t) = H(t)$ ou degrau unitário chega-se através do mesmo método descrito para $J_0^{(0)}$ a:

$$J_1^{(0)} = \frac{3\tau \cos(k\tau)}{4k [\text{sen}(k\tau) - 1]} + \frac{2k^2 \tau^2 \text{sen}(k\tau) - 3k^2 \tau^2 - 1}{4k^2 [\text{sen}(k\tau) - 1]} \quad (2.61)$$

Para o funcional $J_0^{(1)}$ faz-se $f(t) = g(t) = de(t)/dt$ e o funcional fica:

$$J_0^{(1)} = \int_0^{\infty} \left[\frac{d e(t)}{dt} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s) F(-s) ds \quad (2.62)$$

Considerando $x(t) = H(t)$ ou degrau unitário tem-se que $e(0+) = 1$ e tomando-se $E(s)$ como em (2.46) escreve-se:

$$F(s) = s E(s) - e(0) = \frac{-k}{s + k \exp(-\tau s)} \quad (2.63)$$

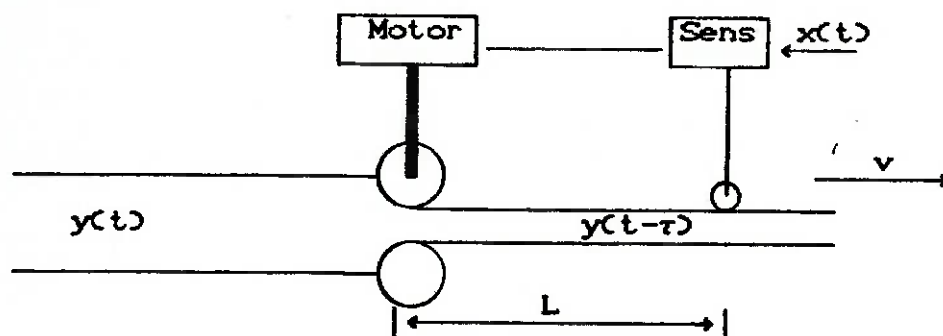
$$\text{e analogamente } F(-s) = \frac{-k}{-s + k \exp(\tau s)} \quad (2.64)$$

Desenvolvendo-se então $J_0^{(2)}$ de forma análoga aos casos anteriores chega-se a:

$$J_0^{(2)} = \frac{k \cos(k\tau)}{2 [1 - \text{sen}(k\tau)]} \quad (2.05)$$

Para mostrar uma aplicação dos funcionais desenvolvidos acima preparou-se um exemplo de aplicação baseado na ajustagem de um parâmetro de um sistema mecânico de modo a minimizar o funcional $J_0^{(0)}$.

Imagine o seguinte sistema mecânico composto por uma laminadora de rolos mais um sistema de controle para espessura de chapa como detalhado na Figura 2.13.



v : velocidade da chapa
 L : distância dos Rolos ao Sensor
 τ : atraso = L/v

Figura 2.13. Laminadora de chapas com sensor de espessura.

O diagrama de blocos conforme PALM III (1986) pode ser

representado através da Figura 2.14.

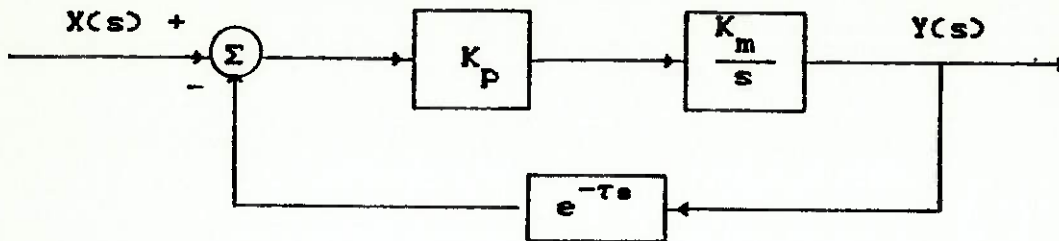


Figura 2.14. Diagrama de blocos do sistema de controle de espessura de chapa.

Admitindo que o produto dos ganhos K_p e K_m seja igual a 1 resulta que a transformada de Laplace de $e(t)$ é dada por:

$$E(s) = \frac{1}{s} \frac{s - 1 + \exp(-\tau s)}{s + \exp(-\tau s)} \quad (2.56)$$

Através do Exemplo 1 desenvolvido no item 2.3 conclui-se que o sistema é assintoticamente estável para $0 \leq \tau < \pi/2$ o que limita nosso universo de otimização.

A partir de (2.56) conclui-se:

$$J_0^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \tau}{1 - \sin \tau} - 2\tau \right] \quad (2.57)$$

Estudando-se essa função no intervalo de $[0, \pi/2]$ determina-se o valor de τ como abscissa de mínimo igual a aproximadamente $\pi/6$. Então deve-se ajustar a distância L e a velocidade v de forma a sua razão L/v ficar próxima de $\pi/6$ o que minimiza a integral de erro quadrático $J_0^{(0)}$ de 0 a ∞ .

2.4.2 SÍNTESE DE LEI DE CONTROLE ÓTIMA EM SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA (EMSM)

Será descrito neste item o procedimento computacional desenvolvido por ROSS (1971) para um determinado grupo de sistemas lineares com atraso. Fica evidente através deste procedimento que a solução de KALMAN (1960) apud ROSS (1971) para sistemas sem atraso é um caso particular em que o atraso é nulo.

O grupo de sistemas a serem considerados são do tipo determinístico modelados matematicamente por equações diferenciais de diferença com coeficientes invariantes no tempo:

$$\frac{d x(t)}{dt} = \sum_{i=1}^k A_i x(t-\tau_i) + B u(t) \quad (2.68)$$

com:

$x(t)$: vetor de dimensão n

A_i : matrizes $n \times n$ com $0 \leq i \leq k$

τ_i : valor do atraso i , com $\tau_0 = 0$

B : matriz $n \times r$

$u(t)$: vetor de dimensão r com $r \leq n$

Segundo ROSS (1971) o modelo descrito por (2.68) é redutível a um modelo com atraso único descrito por:

$$\frac{d x^*(t)}{dt} = A_0^* x^*(t) + A_1^* x^*(t-2\tau^*) + B^* u^*(t) \quad (2.69)$$

O modelo (2.69) pode ainda ser colocado na sua forma padrão conforme ROSS (1971) normalizando-se o atraso $2\tau^*$ para uma unidade de tempo. Assim, através dessa transformação o procedimento de projeto pode sempre basear-se no modelo padrão tirando-se a notação do asterisco:

$$\frac{d x(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + B u(t) \quad (2.70)$$

O procedimento computacional tem por objetivo projetar um controlador para sistemas redutíveis a (2.70) que "regule" o sistema, ou seja, leve o sistema ao equilíbrio ($x(t) \rightarrow 0$) após uma perturbação inicial minimizando o critério quadrático de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (2.71)$$

onde

$\varphi(t)$: vetor de funções contínuas iniciais definidas em $[-1, 0]$

Q: matriz $n \times n$ semidefinida positiva

R: matriz $r \times r$ definida positiva

O procedimento baseia-se no resultado que a lei de controle linear com realimentação de estados:

$$u^0(t) = -R^{-1} B^T K_0 x(t) - R^{-1} B^T \int_{-1}^0 K_1(\theta) x(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0 \quad (2.72)$$

garante o mínimo absoluto de (2.71) para o sistema dinâmico descrito por (2.70) se u^0 for uma lei de controle estável.

A lei de controle representada por (2.72) pode ser separada em duas partes. A primeira parte seria aquela que multiplica o vetor de estado presente $x(t)$ e a segunda aquela contendo o vetor dos estados atrasados $x(t + \theta)$ na integral.

A primeira parte equivale a solução para regulador quadrático através da equação de Riccati para sistemas sem atraso. A segunda equivale a uma somatória infinita de ganhos multiplicando cada valor da história passada do vetor de estado x no intervalo de tempo de 1 unidade.

$$\begin{aligned}
 R^{-1} B^T \int_{-1}^0 K_1(\theta) x(t + \theta) d\theta &= R^{-1} B^T \sum_{i=1}^{\infty} K_1(\bar{\theta}_i) x(t + \bar{\theta}_i) \Delta\theta_i = \\
 &= R^{-1} B^T \Delta\theta \left[K_1(\bar{\theta}_1) x(t + \bar{\theta}_1) + K_1(\bar{\theta}_2) x(t + \bar{\theta}_2) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + K_1(\bar{\theta}_n) x(t + \bar{\theta}_n) + \dots \right] = \\
 &= R^{-1} B^T \Delta\theta \begin{bmatrix} K_1(\bar{\theta}_1) & K_1(\bar{\theta}_2) & \dots & K_1(\bar{\theta}_n) & \dots \\ & & & & (1 \times \infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t + \bar{\theta}_1) \\ x(t + \bar{\theta}_2) \\ \vdots \\ x(t + \bar{\theta}_n) \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &\quad (2.79) \qquad \qquad \qquad (\infty \times 1)
 \end{aligned}$$

Observe que $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = \dots = \Delta\theta_n = \dots = \Delta\theta$

e $\bar{\theta}_i$ significa valor médio de θ_i no intervalo $\Delta\theta_i$

o vetor:

$$\begin{bmatrix} x(t + \bar{\theta}_1) \\ x(t + \bar{\theta}_2) \\ \vdots \\ x(t + \bar{\theta}_n) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

($\infty \times 1$)

de dimensão infinita contém toda a história passada durante uma unidade de tempo do vetor de estado x .

Observe que definição do vetor de funções contínuas iniciais $\varphi(t)$ é fundamental na dinâmica do controlador durante a primeira unidade de tempo corrida. Sem essa definição não haveria valores a que se recorrer durante o primeiro intervalo de uma unidade de tempo.

Esse resultado é difícil de ser aplicado rigorosamente por duas razões. A primeira é que se desconhece ainda um algoritmo capaz de avaliar se a lei de controle $u^o(t)$ é estável. A segunda é que somente métodos aproximados de solução existem para $u^o(t)$.

O método aproximado consiste em verificar se a solução aproximada definida como $u^r(t)$ caminha para um limite bem definido dividindo-se em partes cada vez menores o intervalo normalizado de -1 a 0 . Uma vez atingido esse limite deve-se testar a estabilidade do sistema controlado em malha fechada para uma grande variedade de condições iniciais. Se somente for observado comportamento estável provavelmente $u^r(t)$ será uma lei estável e, por consequência, ótima segundo o critério quadrático.

Quanto ao procedimento aproximado considere: A_0 , A_1 , B , Q e R como sendo as matrizes que aparecem em (2.70) e (2.71) e m um

inteiro qualquer. Seja K a solução semidefinida positiva para a equação algébrica de Riccati:

$$A_m^T K + K A_m - K B_m R^{-1} B_m^T K + Q_m = 0 \quad (2.74)$$

em que A_m , Q_m e B_m são definidas por:

$$A_m = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & A_1 \\ mI & -mI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & mI & -mI & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & mI & \dots & -mI \end{bmatrix}$$

$$Q_m = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$, A_m e Q_m são matrizes quadradas tendo $n \times (m+1)$ linhas e colunas, e B_m é $[n \times (m+1)] \times r$

Considerando-se a matriz simétrica K como $(m+1)^2$ sub-blocos $K_{i,j}$ para $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq j \leq m$ de tamanho $n \times n$ tem-se:

$$K = \begin{bmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & \dots & \dots & K_{0,m} \\ K_{1,0} & K_{1,1} & \dots & \dots & K_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{m,0} & \dots & \dots & \dots & K_{m,m} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Observe que $K_{i,j} = K_{j,i}^T$ por simetria de K .

Dessa forma (2.76) torna-se um sistema algébrico de equações nas variáveis desconhecidas $K_{i,j}$. Daí segue que:

$$K_0 = K_{0,0}$$

$$K_1(-1/m) = m K_{0,i+1} \quad \text{para } 0 \leq i \leq m-1$$

$$K_1(-1) = K_0 A_1 = K_{0,0} A_1 \quad (2.77)$$

O procedimento sugere que se faça uma sequência de soluções variando m . Para cada valor de m assumido $m = 1, 2, 3, \dots$ deve ser resolvida a equação de Riccati para os valores $K_{i,j}$, aí então determina-se as matrizes $K_0, K_1(-1/m)$ para $0 \leq i \leq m$ conforme (2.77).

A interpolação entre os pontos obtidos fornece uma aproximação aos valores ótimos de $K_0, K_1(\theta)$. Esse procedimento termina quando nenhuma melhora significativa na aproximação de K_0 e $K_1(\theta)$ vier a ocorrer.

A introdução das matrizes A_m, Q_m e B_m pode ser entendida observando-se que o sistema de equação diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_m y(t) + B_m u(t) \quad (2.78)$$

pode ser considerado como uma aproximação em dimensão finita à dinâmica do sistema com atraso representada por (2.70). Os primeiros n componentes de $y(t)$ aproximam-se a $x(t)$, os próximos n componentes aproximam-se a $x(t-1/m), \dots$, os últimos n componentes aproximam-se a $x(t-1)$.

Para mostrar uma aplicação do procedimento descrito acima foi elaborado um exemplo simples:

$$\frac{d x(t)}{d t} = -x(t-1) - x(t) + u(t), \quad p(t) = 2$$

$$J = \int_0^{\infty} [x^2 + u^2] dt \quad (2.79)$$

As matrizes envolvidas na determinação dos ganhos ótimos estão descritas abaixo e foram obtidas para $m = 5$ o que significa a divisão do intervalo de -1 a 0 em 5 partes o que é considerado satisfatório em ROSS (1971):

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \quad Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = [1]$$

(2.80)

Resolvendo a equação de Riccati associada,

$$A_5^T K + K A_5 - K B_5 R^{-1} B_5^T K + Q_5 = 0$$

(2.81)

obtem-se, numericamente:

$$K = \begin{bmatrix} 0.3873 & -0.0076 & -0.0164 & -0.0277 & -0.0415 & -0.0580 \\ -0.0076 & 0.0067 & 0.0067 & 0.0062 & 0.0050 & 0.0033 \\ -0.0164 & 0.0067 & 0.0074 & 0.0074 & 0.0067 & 0.0052 \\ -0.0277 & 0.0062 & 0.0074 & 0.0082 & 0.0083 & 0.0074 \\ -0.0415 & 0.0050 & 0.0067 & 0.0083 & 0.0094 & 0.0095 \\ -0.0580 & 0.0033 & 0.0052 & 0.0074 & 0.0095 & 0.0113 \end{bmatrix}$$

Determinam-se os ganhos através de:

$$K_0 = K_{0,0} = 0.3873$$

$$K_1(-1/m) = m K_{0,i+1} \quad \text{para } 0 \leq i \leq m$$

$$K_1(-0/5) = 5 \times (-0.0076) = -0.0378$$

$$K_1(-1/5) = 5 \times (-0.0164) = -0.0820$$

$$K_1(-2/5) = 5 \times (-0.0277) = -0.1384$$

$$K_1(-3/5) = 5 \times (-0.0415) = -0.2076$$

$$K_1(-4/5) = 5 \times (-0.0580) = -0.2901$$

$$K_1(-1) = K_0 A_1 = 0.3873 \times (-1) = -0.3873$$

A partir desses valores determinam-se o polinômio interpolador nesse intervalo de -1 a 0:

$$K_1(\theta) = 0.0195 \theta^5 + 0.0363 \theta^4 + 0.0333 \theta^3 - \\ - 0.1415 \theta^2 + 0.1916 \theta - 0.0378 \quad (2.02)$$

ROSS (1971) considera que interpolações de quinto grau são suficientes para $K_1(\theta)$. Polinômios de grau superior a 5 podem introduzir dificuldades computacionais ao problema e não acrescentam melhorias significativas em $K_1(\theta)$.

Com o valor do polinômio interpolador faz-se a seguinte aproximação:

$$\int_{-1}^0 K_1(\theta) x(t+\theta) d\theta \cong \sum_{i=1}^5 K_1(\bar{\theta}_i) x(t+\bar{\theta}_i) \Delta\bar{\theta}$$

(2.83)

Por motivos de implementação adota-se a lei de controle otimizada aproximada por uma discretização.

$$\begin{aligned} u^r(t) = & - K_0 x(t) - K_1(-0.1) x(t-0.1) 0.2 - K_1(-0.3) x(t-0.3) 0.2 - \\ & - K_1(-0.5) x(t-0.5) 0.2 - K_1(-0.7) x(t-0.7) 0.2 - \\ & - K_1(-0.9) x(t-0.9) 0.2 \end{aligned}$$

(2.84)

$$\begin{aligned} u^r(t) = & - 0.3873 x(t) + 0.01168 x(t-0.1) + 0.02172 x(t-0.3) + \\ & + 0.03428 x(t-0.5) + 0.04944 x(t-0.7) + \\ & + 0.06734 x(t-0.9) \end{aligned}$$

(2.85)

Note que os ganhos discretizados $K_1(\bar{\theta}_i)$ aumentam a medida que se distanciam do 0. Embora esse fato se verifique também para outros sistemas isso não constitui uma regra, o que foi comprovado quando da aquisição de resultados no item 3.2.

Na determinação de u^r , além da aproximação inerente ao procedimento, existe a aproximação à integral que contém $K_1(\theta)$. Apesar disso as soluções resultantes do procedimento análogo ao desenvolvido no exemplo serão consideradas como referência na comparação com outras que aproximam o elemento de atraso por numa dinâmica linear como detalhado no item 3.2.

3 RESULTADOS DA UTILIZAÇÃO DE APROXIMAÇÕES À DINÂMICA DO ATRASO NA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE

3.1 SISTEMAS COM ENTRADA ÚNICA E SAÍDA ÚNICA (EUSU)

Neste item são mostradas as expressões para os funcionais derivadas da solução exata comentada no item 2.4.1 e as expressões obtidas substituindo-se o termo $e^{-\tau s}$ por algumas de suas aproximações analíticas.

As aproximações escolhidas são resultantes do truncamento de 1^a ordem da expansão em série de Taylor. Relembrando o item 2.2 tem-se:

$$e^{-\tau s} = e^{-\tau(a+b)s} \approx \frac{1 - \tau a s}{1 + \tau b s}, \text{ com } a + b = 1 \quad (3.1)$$

As aproximações utilizadas estão na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Aproximações resultantes do truncamento da série de Taylor de 1^a ordem

	Trunc. 1 ^a ordem		Expressão
	a	b	
A	0	1	$\frac{1}{1 + \tau s}$
B	1/2	1/2	$\frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}}$
C	1	0	$1 - \tau s$

Para exemplificar como foram obtidas as expressões de $J_p^{(q)}$ dos funcionais considerados com a utilização das aproximações descritas na Tabela 3.1 considere que o bloco de atraso contendo

e^{-T_s} tenha sido substituído por um bloco contendo a aproximação $1/(\tau s + 1)$ como ilustrado na Figura 3.1.

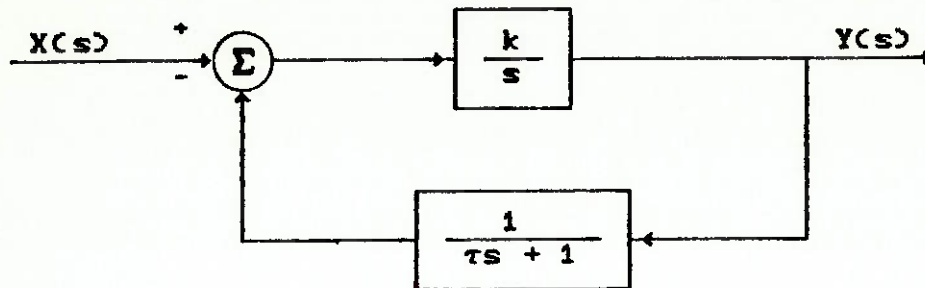


Figura 3.1. Diagrama de blocos com a aproximação $1/(\tau s + 1)$ a e^{-T_s} .

Considere também que como assumido em 2.4.1 a entrada do sistema $x(t) = H(t)$ ou degrau unitário de modo que $X(s) = 1/s$.

Dessa forma o erro $e(t) = x(t) - y(t)$ pode ser escrito na forma transformada de Laplace por:

$$E(s) = X(s) - Y(s) = X(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{X(s)} \right] =$$

$$= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{k}{s}}{\frac{k}{s} \frac{1}{\tau s + 1}} \right] = \frac{\tau s + (1 - k\tau)}{\tau s^2 + s + k} =$$

$$= \frac{\tau s + (1 - k\tau)}{\tau (s^2 + \frac{1}{\tau} s + \frac{k}{\tau})} = \frac{\tau s + (1 - k\tau)}{\tau (s + r_1)(s + r_2)} \quad (3.2)$$

onde $-r_1$ e $-r_2$ equivalem às raízes de:

$$s^2 + \frac{1}{\tau} s + \frac{k}{\tau} = 0 \quad (3.3)$$

que são:

$$-r_{1,2} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\frac{k}{\tau}}}{2} \quad (8.4)$$

Observe que como $k > 0$ e $\tau > 0$ implica:

$$1^\circ) \text{ se } \frac{1}{\tau^2} < 4\frac{k}{\tau} :$$

$$\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\frac{k}{\tau}} = \sqrt{(-1)\left[4\frac{k}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right]} = j \sqrt{4\frac{k}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}}$$

$$2^\circ) \text{ se } \frac{1}{\tau^2} > 4\frac{k}{\tau} :$$

$$\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\frac{k}{\tau}} < \sqrt{\frac{1}{\tau^2}} < \frac{1}{\tau}$$

De $1^\circ)$ e $2^\circ)$ conclui-se que as partes reais de $-r_1$ e $-r_2$, $\text{Re}(-r_{1,2}) < 0$, o que significa que o sistema é estável com a aproximação para quaisquer k e τ positivos.

Utilizando-se o teorema de Parseval escreve-se:

$$J_0^{(0)} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\tau s + (1 - k\tau)}{\tau s^2 + s + k} \frac{\tau(-s) + (1 - k\tau)}{\tau(-s)^2 - s + k} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\tau s + (1 - k\tau)}{\tau(s + r_1)(s + r_2)} \frac{-\tau s + (1 - k\tau)}{\tau(s - r_1)(s - r_2)} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} (\dots) ds \tag{ 3.5 }
\end{aligned}$$

Fechando-se o contorno por um semi-circulo de raio infinito na metade direita do plano complexo como ilustrado na Figura 3.2 tem-se:

$$J_o^{(o)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} (\dots) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (\dots) ds \tag{ 3.6 }$$

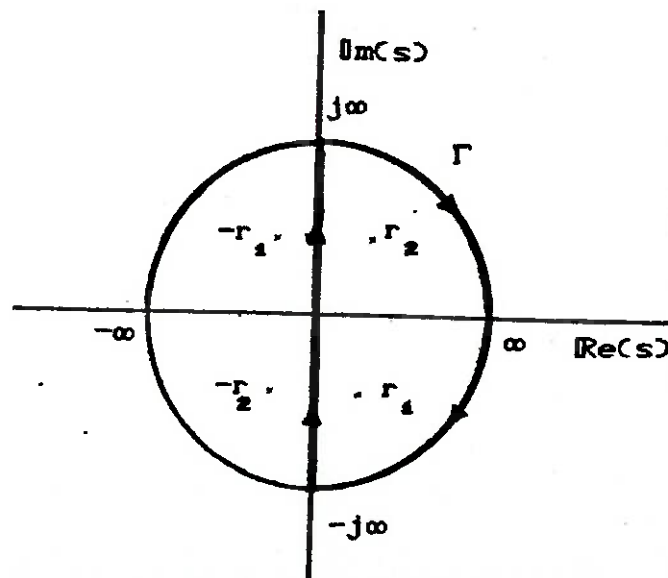


Figura 3.2. Contorno Γ .

Prosseguindo pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (\dots) ds = \frac{1}{2\pi j} (-2\pi j) \sum_{\text{mdp}} \text{res}(\dots) \\
 &= - \sum_{\text{mdp}} \text{res}(\dots) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

onde mdp significa metade direita do plano.

Os únicos pólos de $E(s)E(-s)$ na metade direita do plano complexo são: r_1 e r_2 como ilustrado na Figura 3.2. Assim, escreve-se:

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= - \sum_{\text{mdp}} \text{res}(\dots) = - \sum_{s=r_1, r_2} \text{res}(\dots) = \\
 &= - \lim_{s \rightarrow r_1} (s - r_1)(\dots) - \lim_{s \rightarrow r_2} (s - r_2)(\dots) = \\
 &= - \frac{\tau r_1 + (1 - k\tau)}{\tau(r_1 + r_1)(r_1 + r_2)} - \frac{-\tau r_1 + (1 - k\tau)}{\tau(r_1 - r_2)} - \\
 &\quad - \frac{\tau r_2 + (1 - k\tau)}{\tau(r_2 + r_1)(r_2 + r_2)} - \frac{-\tau r_2 + (1 - k\tau)}{\tau(r_2 - r_1)} = \\
 &= \frac{r_1 r_2 \tau^2 + (k\tau - 1)^2}{2r_1 r_2 \tau^2 (r_1 + r_2)} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Lembrando que $r_1 + r_1 = \frac{1}{\tau}$ e $r_1 \cdot r_2 = \frac{k}{\tau}$ tem-se:

$$J_o^{(0)} = - \sum_{s=r_1, r_2} \text{res}(\dots) = \frac{\frac{k}{\tau} \tau^2 + (k\tau - 1)^2}{2 \frac{1}{\tau} \tau^2 \frac{k}{\tau}} =$$

$$= \frac{1}{2k} (k^2 \tau^2 - k\tau + 1) \quad (3.9)$$

Se ao invés de utilizar o parâmetro k relativo a um ganho fosse utilizada uma constante de tempo T como feito nas Tabelas 3.2.2 e 3.2.3 bastaria substituir k em (3.9) por $1/T$ donde sai:

$$J_o^{(0)} = \frac{1}{2T} (T^2 - T\tau + \tau^2) \quad (3.10)$$

Além das expressões obtidas em função dos parâmetros do sistema são mostrados os resultados obtidos a partir da solução exata e da solução por aproximações para os parâmetros ótimos segundo os critérios de desempenho baseados nos funcionais comentados no item 2.4.1.

As expressões obtidas para os funcionais e os resultados ótimos para os parâmetros foram obtidos com o auxílio do software Derive - A Mathematical Assistant, Version 1.62 by Soft Warehouse, Inc... Entende-se por parâmetros ótimos aqueles que minimizam os critérios de desempenho:

$$J_o^{(0)} = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad : \text{Integral do erro quadrático}$$

(3.11)

$$J_1^{(0)} = \int_0^{\infty} t \left[e(t) \right]^2 dt : \text{Integral do tempo multiplicado pelo erro quadrático}$$

(3.12)

$$J_0^{(0)} + J_0^{(1)} = \int_0^{\infty} \left(\left[e(t) \right]^2 + \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2 \right) dt :$$

Integral do erro quadrático somada a derivada ao quadrado do erro.

(3.13)

$$J_1^{(0)} + J_0^{(1)} = \int_0^{\infty} \left(t \left[e(t) \right]^2 + \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2 \right) dt :$$

Integral do tempo multiplicada pelo o erro quadrático somada a derivada ao quadrado do erro.

(3.14)

Os resultados foram determinados a partir de dois tipos de sistemas a saber: 1^o ordem com parâmetros T, constante de tempo, e τ , atraso, e 2^o ordem com parâmetros ζ correspondendo à constante de amortecimento, ω_n , à frequência natural, e τ ao atraso. Os diagramas de bloco correspondentes aos dois sistemas encontram-se nas Figuras 3.3.1 e 3.3.2.

Nos dois sistemas considerados o bloco de atraso está colocado na realimentação. Segundo WALTON, MARSHALL (1983) o procedimento de cálculo não seria alterado se o bloco de atraso estivesse situado no caminho direto.

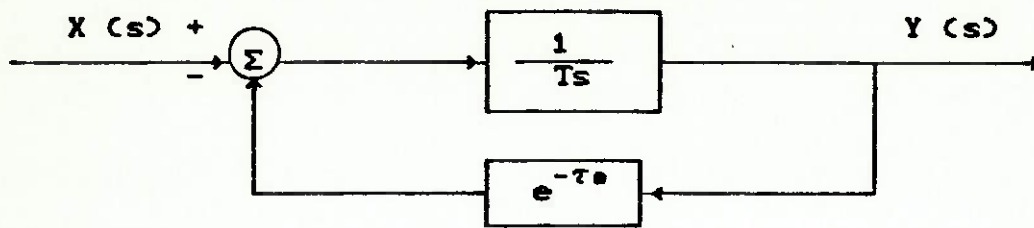


Figura 3.3.1. Sistema de 1^a ordem com atraso na realimentação.

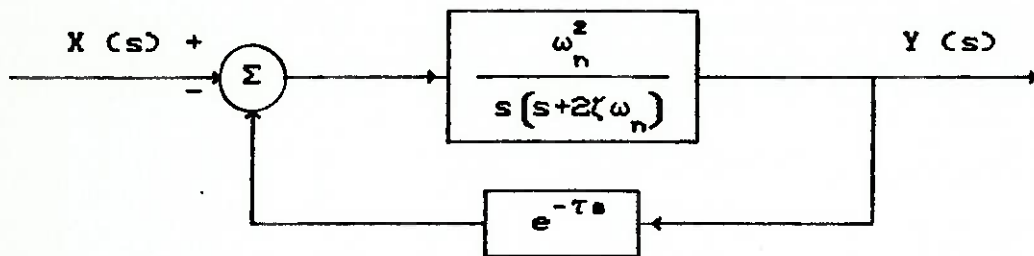


Figura 3.3.2. Sistema de 2^a ordem com atraso na realimentação.

A entrada considerada em ambos os sistemas é $x(t) = H(t)$ equivalente ao degrau unitário cuja transformada de Laplace é $X(s) = 1/s$.

3.1.1 SISTEMA DE 1^a ORDEM

As expressões em função de T e τ ilustrados na Figura 3.3.1 encontram-se nas Tabelas 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 onde 0 significa expressão exata obtida com bloco de atraso puro e A, B e C correspondem às aproximações detalhadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.2.1. Expressões para J_0^0 , $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ exatas (O).

	O
$J_0^{(0)}$	$\frac{\frac{1}{2} T \cos\left(\frac{\tau}{T}\right)}{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{T}\right)} - \tau$
$J_1^{(0)}$	$\frac{3\tau^2 + T^2 - 2\tau^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{T}\right)}{4 \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]} - \frac{3T\tau \cos\left(\frac{\tau}{T}\right)}{4 \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]}$
$J_0^{(1)}$	$\frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\tau}{T}\right)}{T \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]}$

Tabela 3.2.2. Expressões para J_0^0 , $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ para a aproximação A.

	A
$J_0^{(0)}$	$\frac{1}{2T} (T^2 - T\tau + \tau^2)$
$J_1^{(0)}$	$\frac{T^2 - 2T^2\tau + T\tau^2 + 2\tau^3}{4T}$
$J_0^{(1)}$	$\frac{T + \tau}{2T^2}$

Tabela 3.2.3. Expressões para $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ para as aproximações B e C.

	B	C
$J_0^{(0)}$	$\frac{\frac{1}{2} (2T^2 - 3T\tau + 2\tau^2)}{2T - \tau}$	$\frac{1}{2} (T - \tau)$
$J_1^{(0)}$	$\frac{4T^4 - 12T^3\tau + 13T^2\tau^2 - 4T\tau^3 + \tau^4}{4(2T - \tau)^2}$	$\frac{(T - \tau)^2}{4}$
$J_0^{(1)}$	$\frac{2T + \tau}{2T(2T - \tau)}$	$\frac{1}{2(T - \tau)}$

Os valores ótimos determinados para a constante de tempo T em sistemas de 1^a ordem com atraso na realimentação constam nas Tabelas 3.3, 3.4 e 3.5 para os quatro critérios de desempenho descritos por 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 e para o atraso τ igual a 1, 0.5 e 0.25 s.

Tabela 3.3. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 1.0$ s.

	O	A	B	C
$J_0^{(0)}$	1.35301	1	1.2071	não existe
$J_1^{(0)}$	1.63212	1.46557	1.49998	1
$J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.95687	1.76929	1.89902	2
$J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.97351	1.8737	1.92482	2

Tabela 3.4. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 0.5$ s.

	O	A	B	C
$J_0^{(0)}$	0.67644	0.5	0.60352	não existe
$J_1^{(0)}$	0.816061	0.732785	0.75	0.5
$J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.46255	1.40129	1.45003	1.5
$J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.45357	1.41493	1.44779	1.5

Tabela 3.5. Valores ótimos de T segundo $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para $\tau = 0.25$ s.

	O	A	B	C
$J_0^{(0)}$	0.338293	0.25	0.301776	não existe
$J_1^{(0)}$	0.40803	0.386392	0.375004	0.25
$J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.23358	1.2142	1.23133	1.25
$J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$	1.23107	1.21562	1.23031	1.25

As Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 contém os gráficos correspondentes aos valores em porcentagem da razão (T ótimo da aproximação/ T ótimo exato) proveniente dos resultados escritos nas Tabelas 3.3, 3.4 e 3.5.

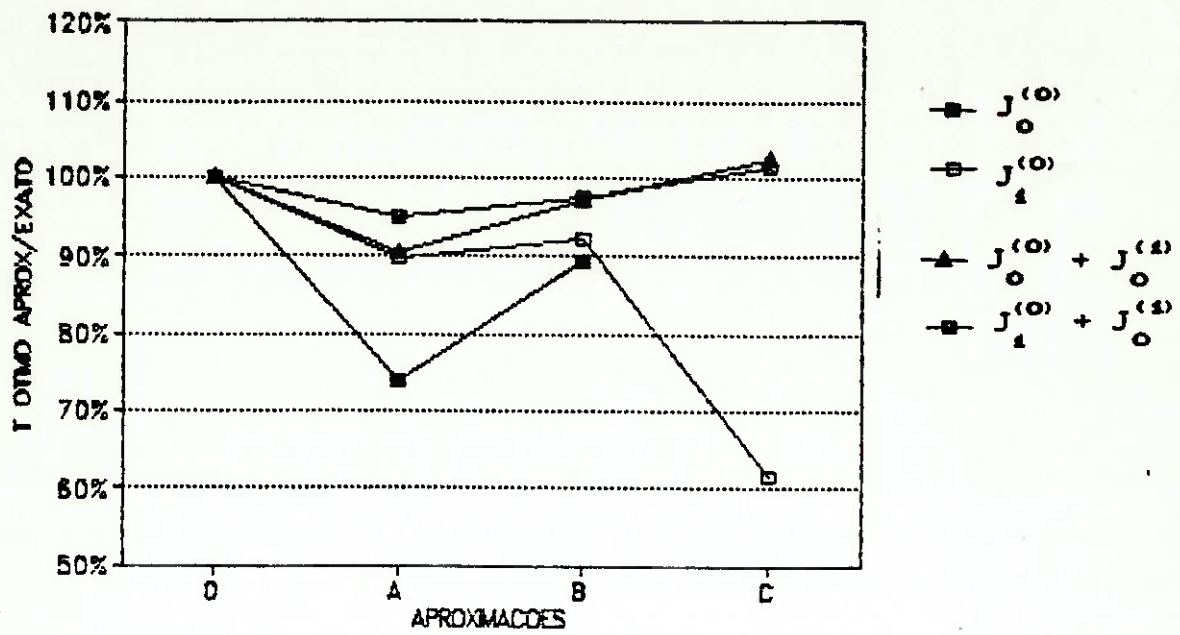


Figura 3.4. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 1.0$ s.

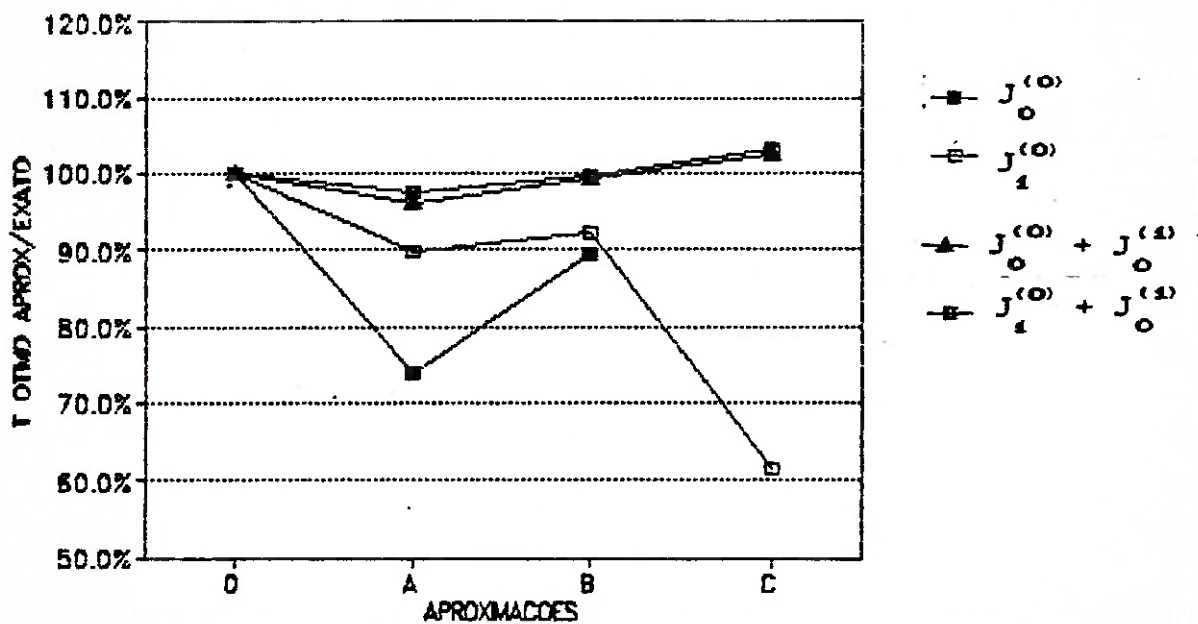


Figura 3.5. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 0.5$ s.

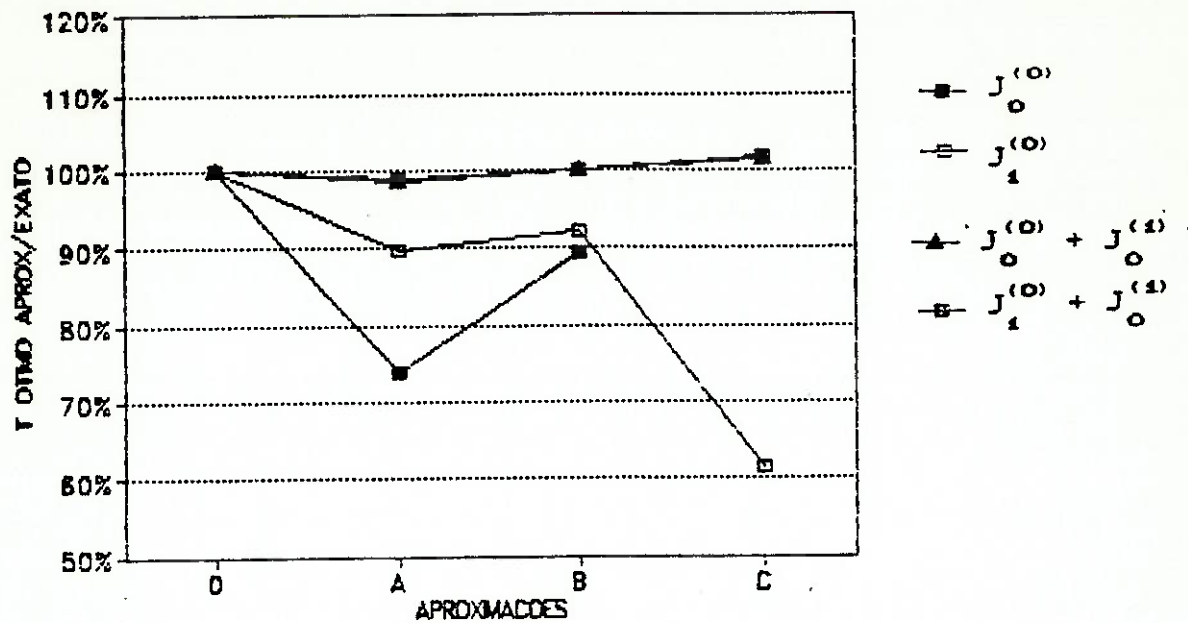


Figura 3.6. Gráfico da razão (T ótimo aprox / T ótimo exato) para aproximações A, B e C conforme critérios de desempenho para $\tau = 0.25$ s.

Assumindo $T = 1$ os valores encontrados para τ que minimizam os critérios de desempenho 3.11 e 3.12 encontram-se na Tabela 3.6. O gráfico da Figura 3.7 mostra os valores percentuais da razão (τ ótimo da aproximação / τ ótimo exato). As Figuras 3.8, 3.9 e 3.10 exibem as curvas $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$, e $J_0^{(1)}$ em função de τ .

Tabela 3.6. Valores ótimos de τ para $T = 1$.

	0	A	B	C
$J_0^{(0)}$	0.5236	0.5000	0.5859	não existe
$J_1^{(0)}$	0.4968	0.4343	0.5263	1.0000

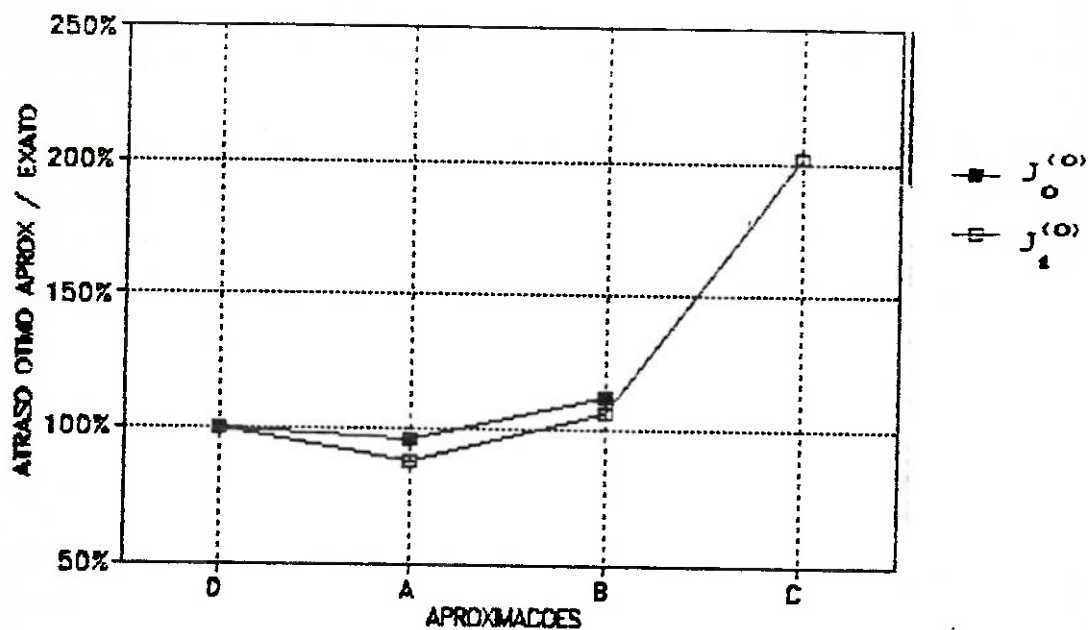


Figura 3.7. Gráfico da razão (τ ótimo da aproximação / τ ótimo exato) para $T = 1$.

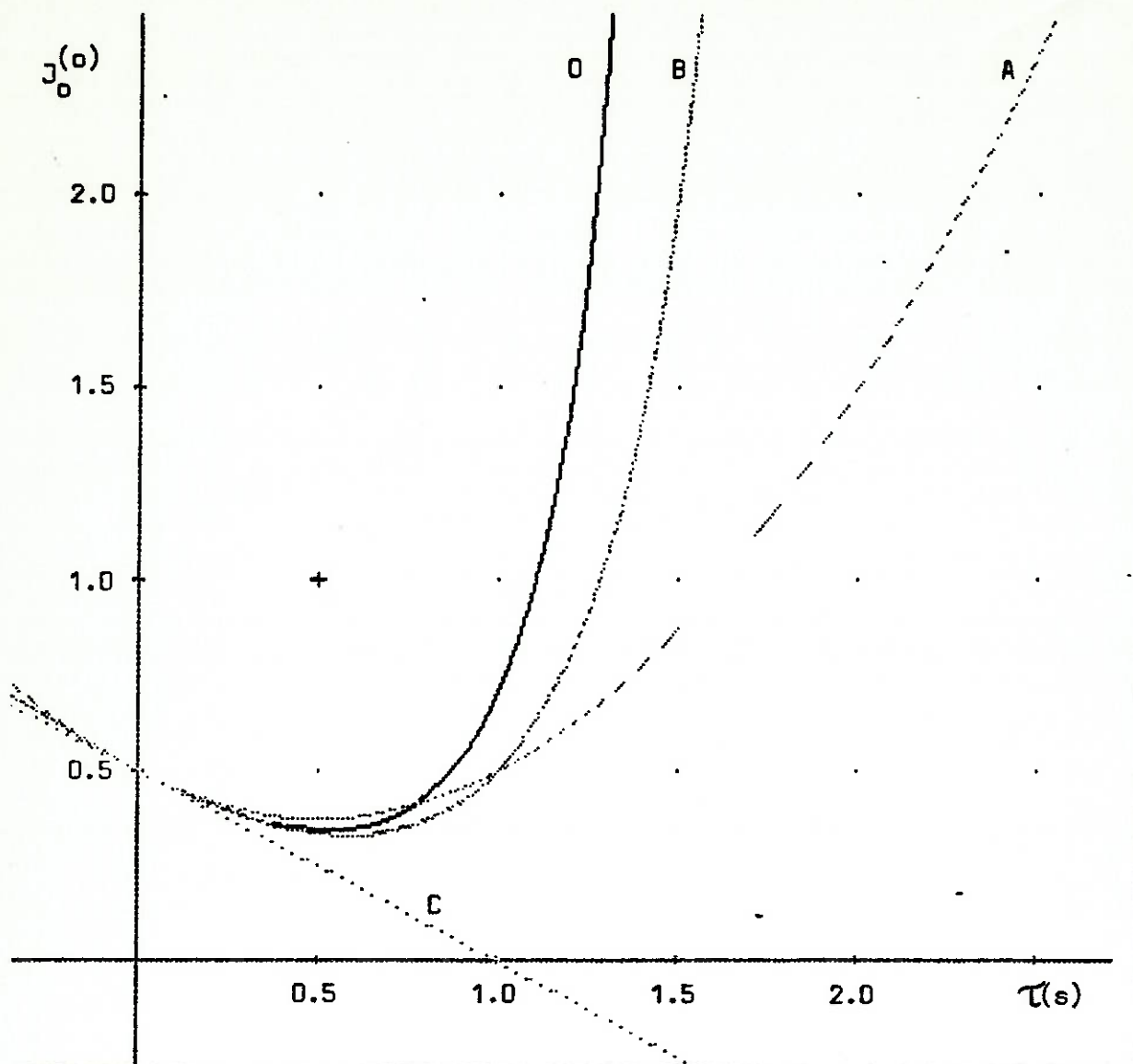


Figura 3.8. Valores de $J_0^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.

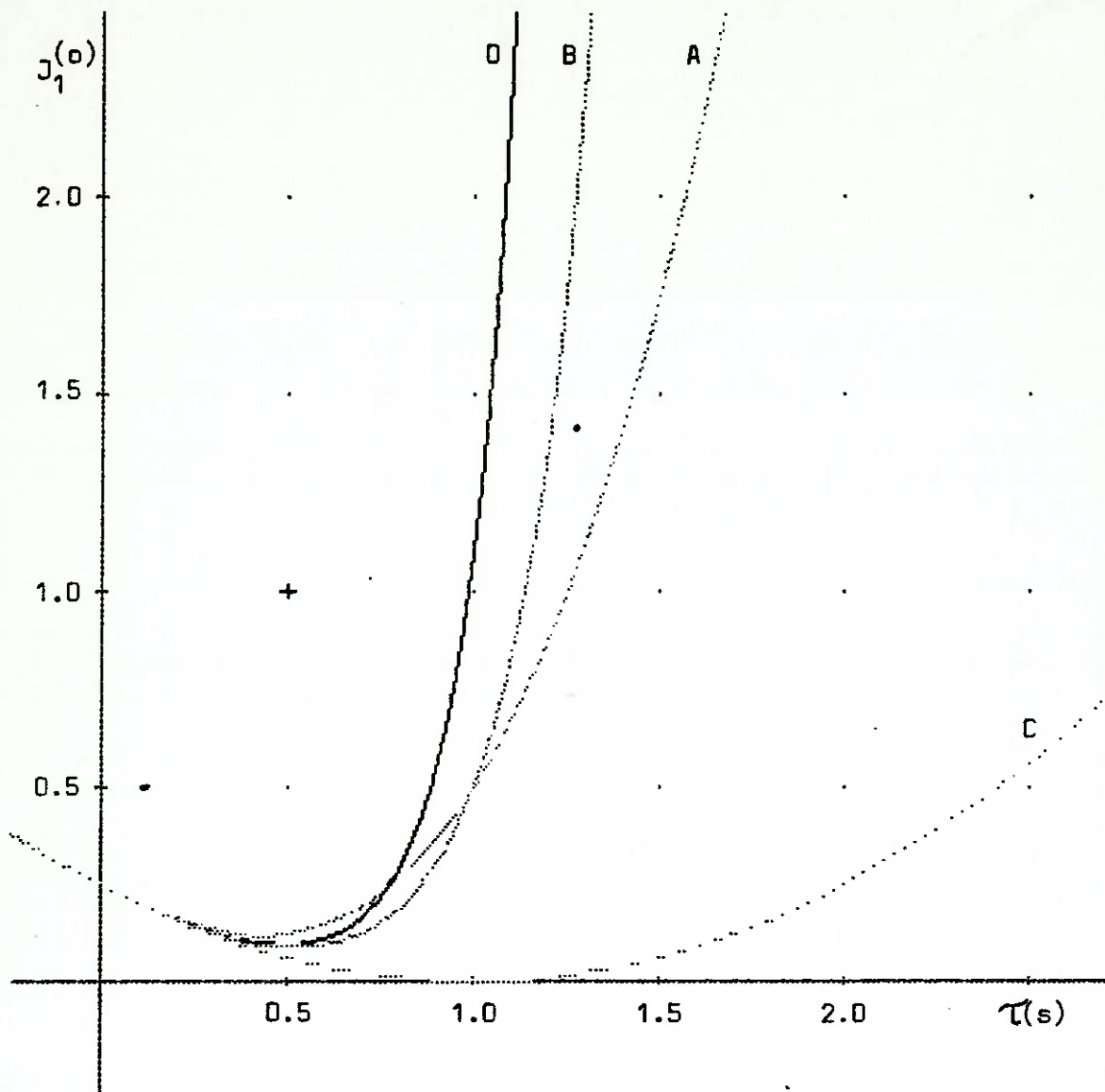


Figura 3.9. Valores de $J_1^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.

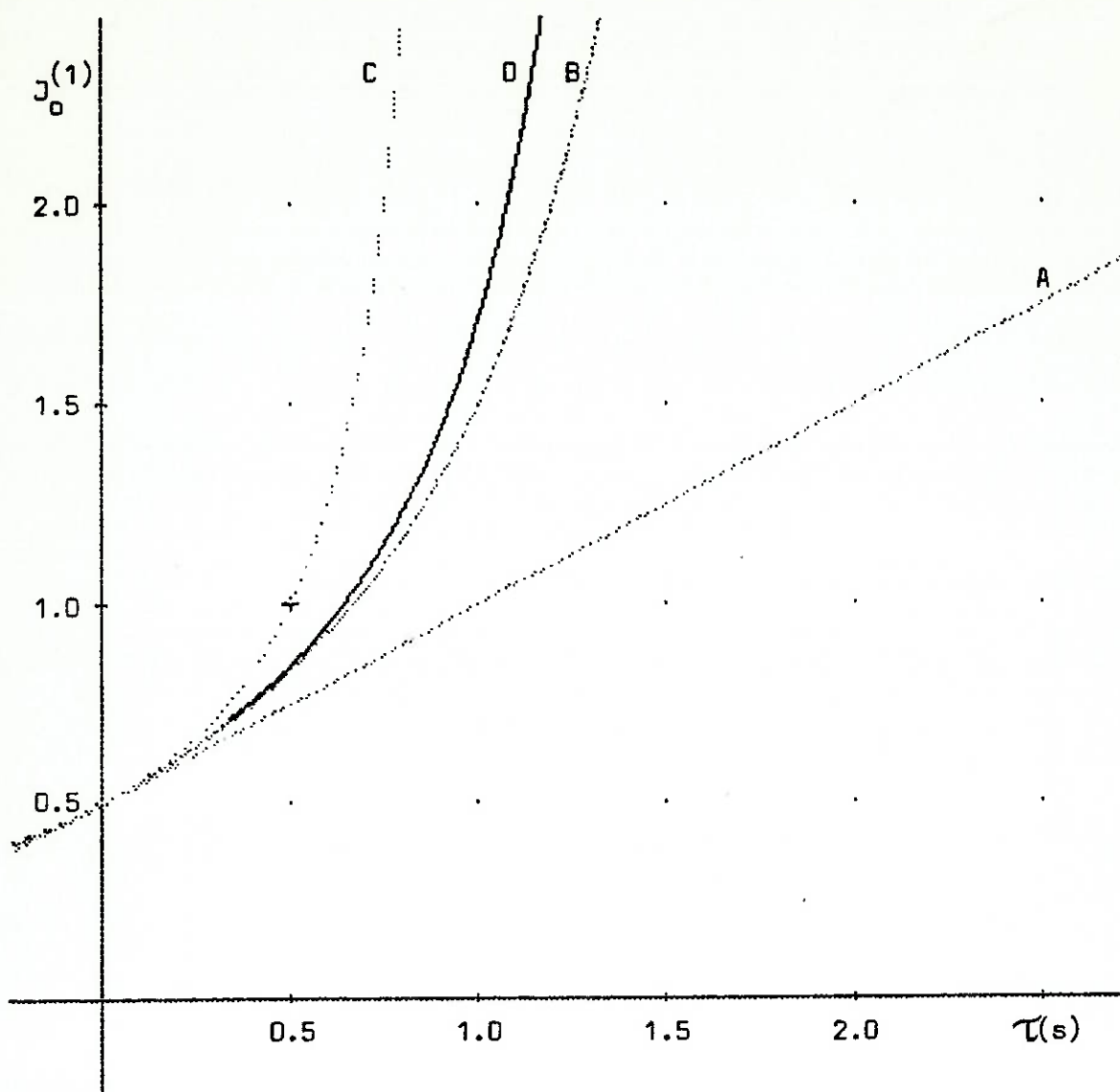


Figura 3.10. Valores de $J_0^{(1)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.

3.1.2 SISTEMAS DE 2ª ORDEM

Em vista da dificuldade algébrica imposta para a determinação da expressão exata para $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ em termos dos parâmetros ζ , ω_n e τ de um sistema de 2ª ordem com atraso na realimentação são apresentadas somente as expressões obtidas com base no critério $J_0^{(0)}$, erro quadrático, bem como seus parâmetros otimizantes. A Tabela 3.7 mostra as expressões exata e para aproximações segundo o critério $J_0^{(0)}$.

Tabela 3.7. Expressões para $J_0^{(0)}$ exata (O) e para aproximações A, B e C.

	$J_0^{(0)}$
O	$\frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\frac{\alpha^2 [\beta^2 - \omega_n^2 \cosh(\beta\tau)]}{\beta [2\zeta \omega_n \beta - \omega_n^2 \sinh(\beta\tau)]} + \frac{\beta^2 [\alpha^2 + \omega_n^2 \cos(\alpha\tau)]}{\alpha [2\zeta \omega_n \alpha - \omega_n^2 \sin(\alpha\tau)]} \right] - \tau$
A	$\frac{2\omega_n^3 \tau^3 \zeta + \omega_n^2 \tau^2 (3 - 4\zeta^2) + 2\omega_n \tau \zeta (4\zeta^2 - 1) + 4\zeta^2 + 1}{2\omega_n [\omega_n \tau (4\zeta^2 - 1) + 2\zeta]}$
B	$\frac{4\omega_n^3 \zeta \tau^3 + \omega_n^2 \tau^2 (7 - 12\zeta^2) + 4\omega_n \zeta \tau (4\zeta^2 - 3) + 4(4\zeta^2 + 1)}{4\omega_n [2\omega_n \tau (2\zeta^2 - 1) + 4\zeta - \omega_n^2 \zeta \tau^2]}$
C	$\frac{\omega_n^2 \tau^2 - 4\omega_n \tau \zeta + 4\zeta^2 + 1}{2\omega_n (2\zeta - \omega_n \tau)}$

Para a expressão (O) os valores das funções α e β aparecem indicados em (3.15) e (3.16).

$$\alpha(\omega_n, \zeta) = \frac{\sqrt{\left[\sqrt{(2\zeta\omega_n)^4 + 4\omega_n^4} - (2\zeta\omega_n)^2 \right]}}{\sqrt{2}} \quad (3.15)$$

$$\beta(\omega_n, \zeta) = \frac{\sqrt{\left[\sqrt{(2\zeta\omega_n)^4 + 4\omega_n^4} + (2\zeta\omega_n)^2 \right]}}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

As Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 exibem os resultados obtidos para o amortecimento ζ ótimo segundo $J_o^{(0)}$, erro quadrático, para tres valores de atraso: 1, 0.5 e 0.25 s, às frequências naturais iguais a 1, 2 e 5 rad/s.

Tabela 3.8. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1$, 0.5 e 0.25 s e $\omega_n = 1$ rad/s segundo $J_o^{(0)}$.

	0 (exato)	A	B	C
$\tau = 1s$	1.0579	1	1.03621	1
$\tau = 0.5s$	0.7711	0.764829	0.767026	0.75
$\tau = 0.25s$	0.6368	0.633377	0.630882	0.625

Tabela 3.9. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1$, 0.5 e 0.25 s e $\omega_n = 2$ rad/s segundo $J_o^{(0)}$.

	0 (exato)	A	B	C
$\tau = 1s$	1.6368	1.42828	1.56244	1.5
$\tau = 0.5s$	1.0416	1	1.03621	1
$\tau = 0.25s$	0.7711	0.764829	0.767026	0.75

Tabela 3.10. Valores ótimos do amortecimento ζ para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e $\omega_n = 5$ rad/s segundo $J_o^{(0)}$.

	O (exato)	A	B	C
$\tau = 1$ s	3.8111	2.75748	3.2182	2
$\tau = 0.5$ s	1.875	1.84145	1.82858	1.75
$\tau = 0.25$ s	1.1805	1.10932	1.16822	1.125

As Figuras 3.11, 3.12 e 3.13 exibem em valores percentuais da razão (amortecimento ζ ótimo a aproximação / amortecimento ζ ótimo exato) correspondentes às Tabelas 3.9, 3.10 e 3.11.

Considerando-se o diagrama de bloco exposto na Figura 3.3.2 constrói-se a Tabela 3.12 contendo os valores ótimos do atraso τ assumindo ζ , constante de amortecimento, igual a 0.8 e ω_n , frequência natural, igual a 1 rad/s.

Tabela 3.11. Valores de τ ótimos segundo $J_o^{(0)}$ para expressão exata (O) e expressões derivadas das aproximações A, B e C com $\tau = 0.8$ e $\omega_n = 1$ rad/s.

	O	A	B	C
τ_{ot} (s)	0.3921	0.330568	0.406253	0.599990

A Figura 3.14 exhibe as curvas de $J_o^{(0)}$ em função de τ para expressão exata (O) e aproximações A, B e C.

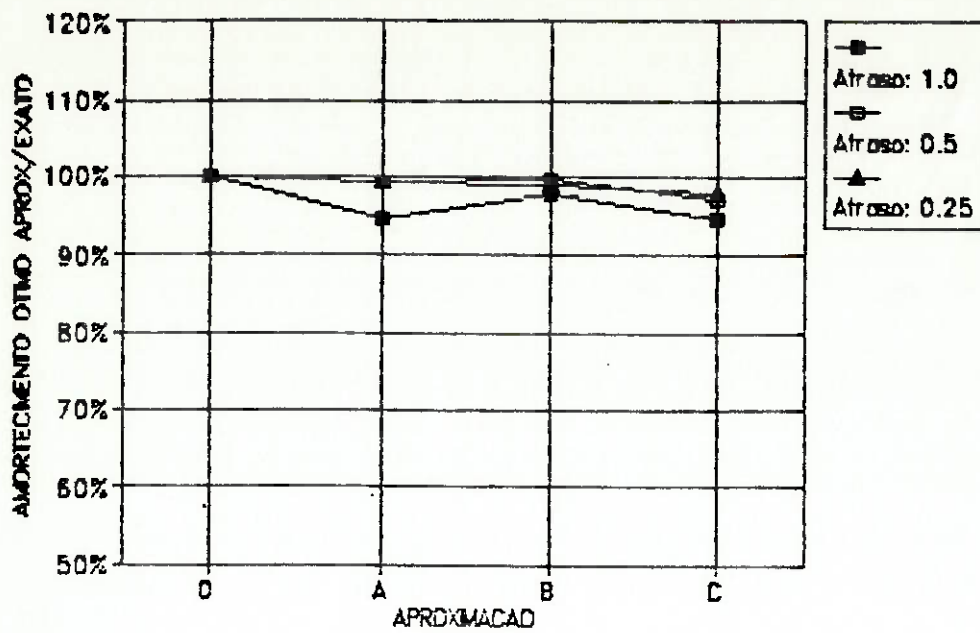


Figura 3.11. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 1$ rad/s.

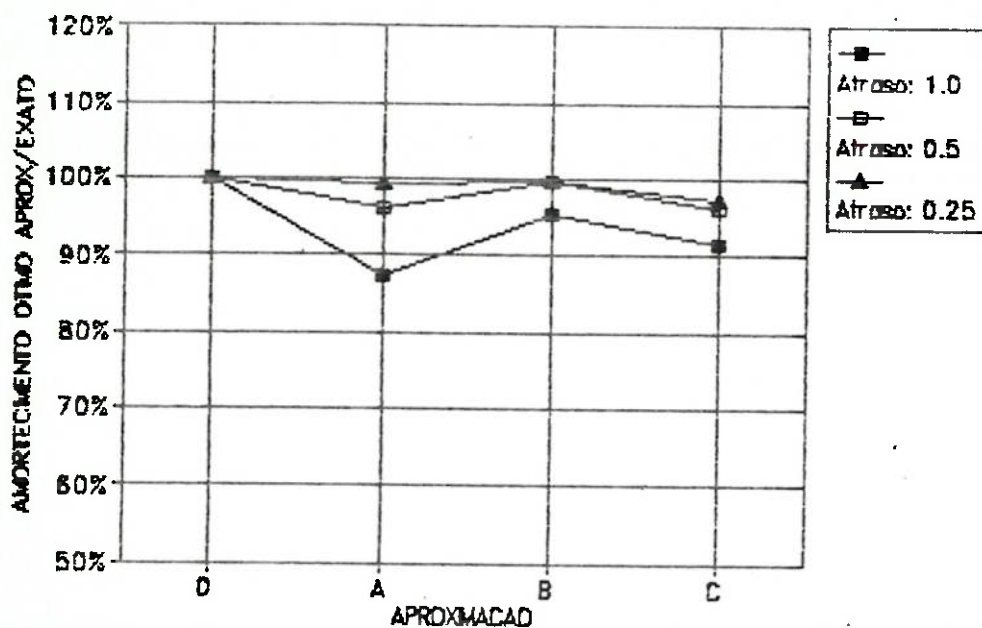


Figura 3.12. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 2$ rad/s.

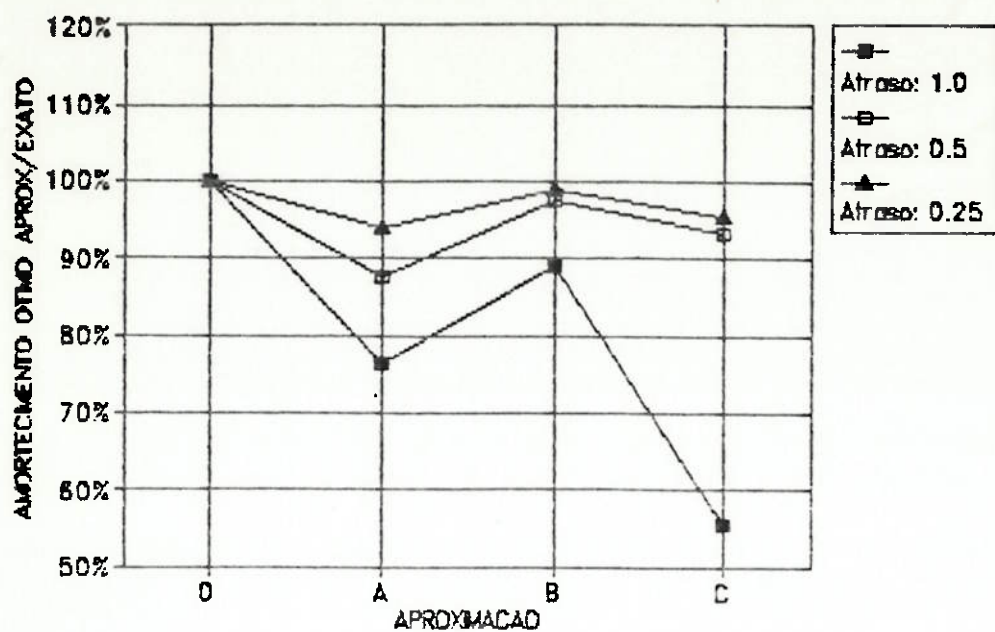


Figura 3.13. Gráfico da razão: (amortecimento ζ ótimo da aprox / amortecimento ζ ótimo exato) para as aproximações A, B e C para $\tau = 1, 0.5$ e 0.25 s e com $\omega_n = 5$ rad/s.

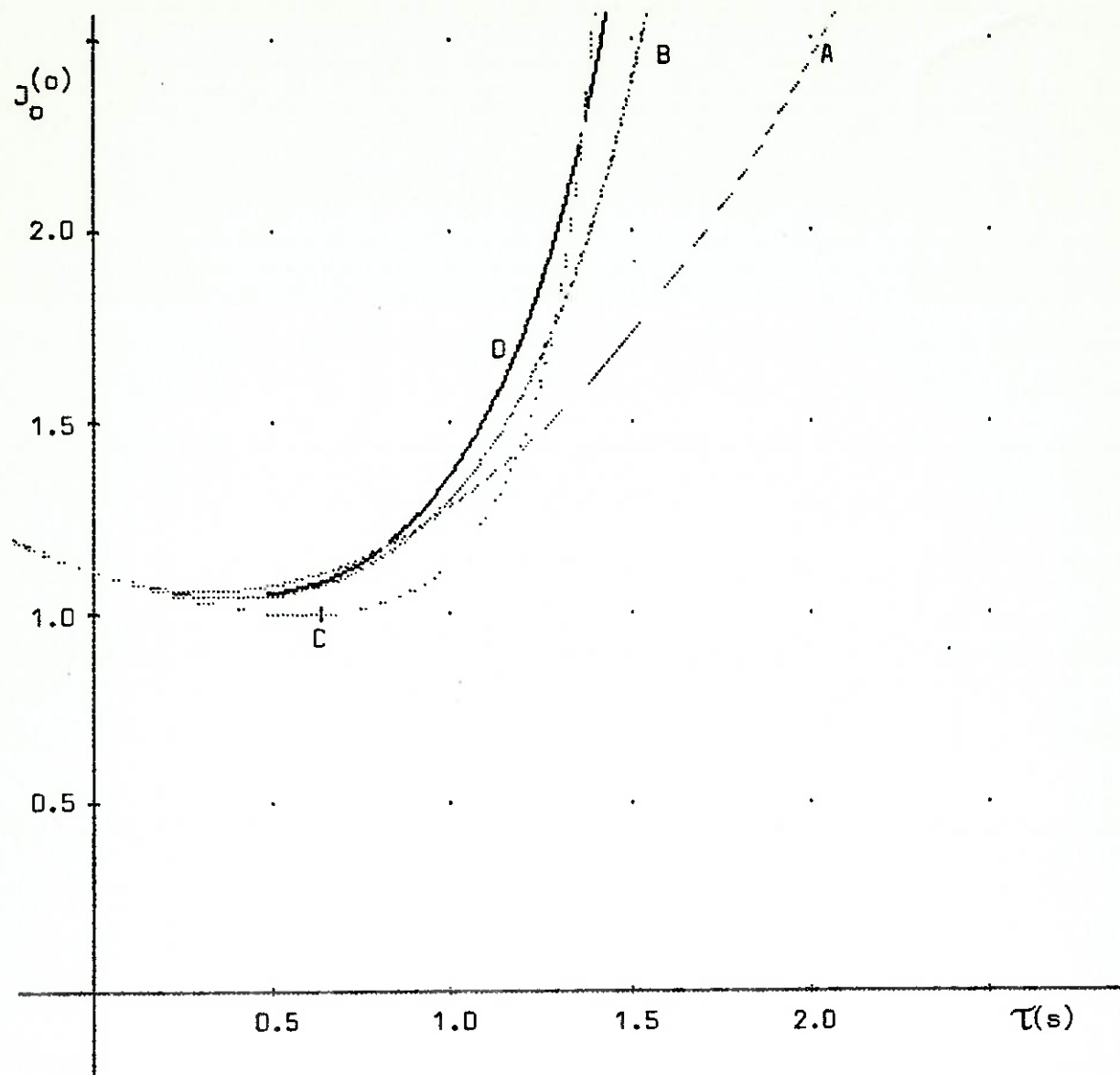


Figura 3.14. Valores de $J_0^{(0)}$ em função de τ exato e para as aproximações A, B e C.

3.2 SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA (EMSM)

Neste item são apresentados os resultados de diversas simulações baseadas no procedimento computacional proposto por ROSS (1971) comentado em 2.4.2 e na utilização de aproximações de Padé conforme definição por PALM III (1986) em (2.19) à dinâmica do atraso.

A solução para lei de controle derivada do procedimento computacional de ROSS (1971) será considerada como referência às soluções obtidas através das aproximações.

Escolheu-se, para efeito de análise e coleta de resultados, um sistema particular de 2^ª ordem descrito por:

$$\frac{d x(t)}{d t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\text{com } \varphi(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ para } -1 \leq t \leq 0 \quad (3.17)$$

O critério de desempenho escolhido é o critério

quadrático definido para esse caso como:

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right) dt \quad (3.18)$$

onde as variáveis em negrito representam o vetor de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e de saída ou resposta: } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

O sistema descrito através de (3.17) tem o propósito de dissociar a parte dissipativa representada pela matriz que multiplica o estado atual $\mathbf{x}(t)$ da parte acumulativa representada pela matriz que multiplica o estado atrasado $\mathbf{x}(t-1)$.

Por parte dissipativa entende-se aquela que possui o amortecimento representado por ζ , e por acumulativa aquela contendo exclusivamente a frequência ω_n de oscilação. Caso não houvesse atraso a dinâmica descrita em (3.17) seria reduzida a:

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{d t} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.20)$$

O sistema descrito por (3.17) pode ser representado na forma de diagrama de blocos através da Figura 3.15. O bloco que representa o sistema descrito por (3.17) recebe a denominação de $G(s)$.

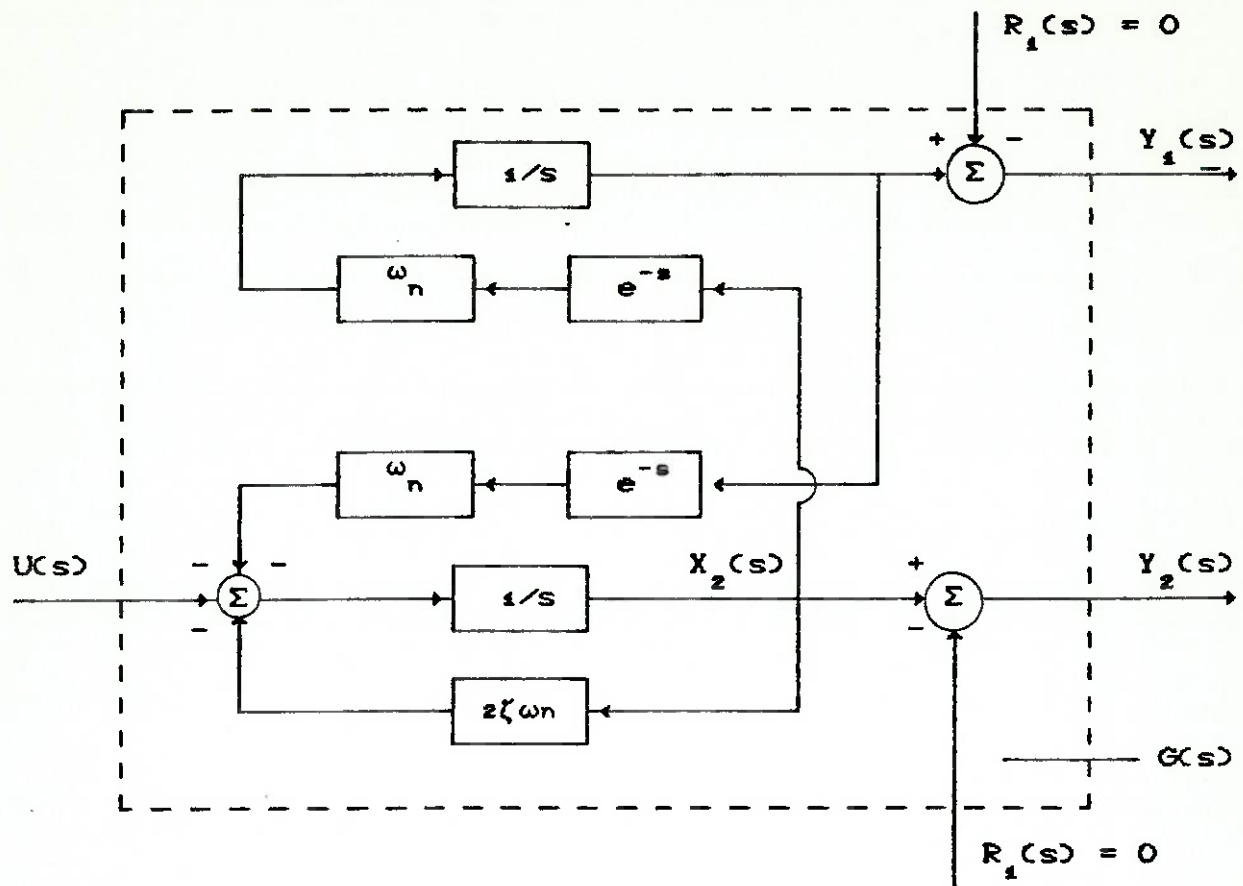


Figura 3.15. Representação do bloco $G(s)$ descrito por (3.17).

O diagrama simplificado do sistema controlado pode ser representado através da Figura 3.16 onde aparece o bloco do controlador denominado de $I(s)$.

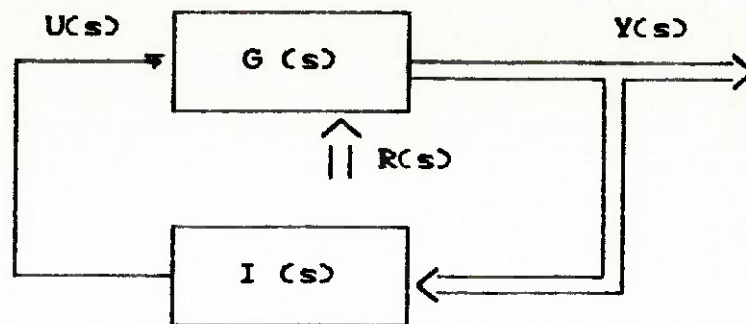


Figura 3.16. Diagrama do sistema controlado.

Para a determinação da lei de controle u ótima segundo ROSS (1971) procede-se conforme exemplificado no item 2.4.2 formulando-se o problema como :

$n = 2$: ordem do sistema ;

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} : \text{matriz de estado ;}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{bmatrix} : \text{matriz de estado atrasado ;}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \text{matriz de controle ;}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{matriz de ponderação de estado para critério quadrático ;}$$

$$R = [1] : \text{matriz de ponderação de controle para critério quadrático ;}$$

$m = 5$: número de divisões no intervalo de -1 a 0 para determinação da função matricial $K_1(\theta)$;

Assim definidos as matrizes e os parâmetros determina-se:

K_0 : matriz de controle sobre o estado x ;

$K_1(\theta)$: matriz de controle sobre o estado atrasado $x(t+\theta)$

onde θ varia no intervalo $[-1,0]$;

Na determinação de K_0 e $K_1(\theta)$ utilizou-se o software PC-MATLAB VERSION 3.05 by The Mathworks, Inc..

Uma vez calculadas as matrizes K_0 e $K_1(\theta)$ escreve-se a lei de controle:

$$u^0(t) = -R^{-1} B^T K_0 x(t) - R^{-1} B^T \int_{-1}^0 K_1(\theta) x(t+\theta) d\theta \quad (9.21)$$

Conforme as matrizes adotadas pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u^0(t) &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0^{11} & K_0^{12} \\ K_0^{21} & K_0^{22} \end{bmatrix} x(t) - \\ &- 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} K_1^{11}(\theta) & K_1^{12}(\theta) \\ K_1^{21}(\theta) & K_1^{22}(\theta) \end{bmatrix} x(t+\theta) d\theta = \\ &= - \begin{bmatrix} K_0^{21} & K_0^{22} \end{bmatrix} x(t) - \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} K_1^{21}(\theta) & K_1^{22}(\theta) \end{bmatrix} x(t+\theta) d\theta \end{aligned} \quad (9.22)$$

Devido a dificuldade de implementação do 2º termo de (3.22), em razão da integral na segunda parcela significar uma somatória de infinitos termos a cada instante de tempo t , procurou-se aproximar esse termo a uma somatória finita:

$$\int_{-1}^0 \left[K_1^{21}(\theta) \quad K_1^{22}(\theta) \right] x(t+\theta) d\theta \cong \sum_{i=1}^l \left[K_1^{21}(\bar{\theta}_i) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_i) \right] x(t + \bar{\theta}_i) \Delta \theta$$

(3.23)

onde $\bar{\theta}_i$: valor médio de θ no intervalo i

$\Delta \theta = \frac{1}{l}$: amplitude do intervalo

Assim pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l \left[K_1^{21}(\bar{\theta}_i) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_i) \right] x(t + \bar{\theta}_i) \Delta \theta = \\ & = \Delta \theta \sum_{i=1}^l \left[K_1^{21}(\bar{\theta}_i) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_i) \right] x(t + \bar{\theta}_i) = \\ & = \Delta \theta \left[\left[K_1^{21}(\bar{\theta}_1) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_1) \right] x(t + \bar{\theta}_1) + \right. \\ & \quad + \left[K_1^{21}(\bar{\theta}_2) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_2) \right] x(t + \bar{\theta}_2) + \dots + \\ & \quad \left. + \left[K_1^{21}(\bar{\theta}_l) \quad K_1^{22}(\bar{\theta}_l) \right] x(t + \bar{\theta}_l) \right] \end{aligned}$$

(3.24)

Foram feitas simulações em alguns casos para $l=5$ e $l=10$ e os resultados obtidos em termos das respostas y_1^r e y_2^r foram praticamente os mesmos sendo adotado em definitivo $l=5$ por simplicidade de aplicação. Para $l=5$, cada divisão do intervalo passa a ser $1/5$ ou 0.2 . Dessa forma descreve-se a lei de controle u^r tomada como referência por:

$$\begin{aligned}
 u^r(t) = & - \begin{bmatrix} K_0^{21} & K_0^{22} \end{bmatrix} x(t) - \\
 & - 0.2 \left[\begin{bmatrix} K_1^{21}(0,1) & K_1^{22}(0,1) \end{bmatrix} x(t + 0,1) + \right. \\
 & + \begin{bmatrix} K_1^{21}(0,3) & K_1^{22}(0,3) \end{bmatrix} x(t + 0,3) + \dots + \\
 & \left. + \begin{bmatrix} K_1^{21}(0,9) & K_1^{22}(0,9) \end{bmatrix} x(t + 0,9) \right] \tag{ 9.25 }
 \end{aligned}$$

Uma vez descrita u^r pode-se detalhar o bloco do controlador denominado para a solução de referência como $I_r(s)$ através da Figura 3.2.

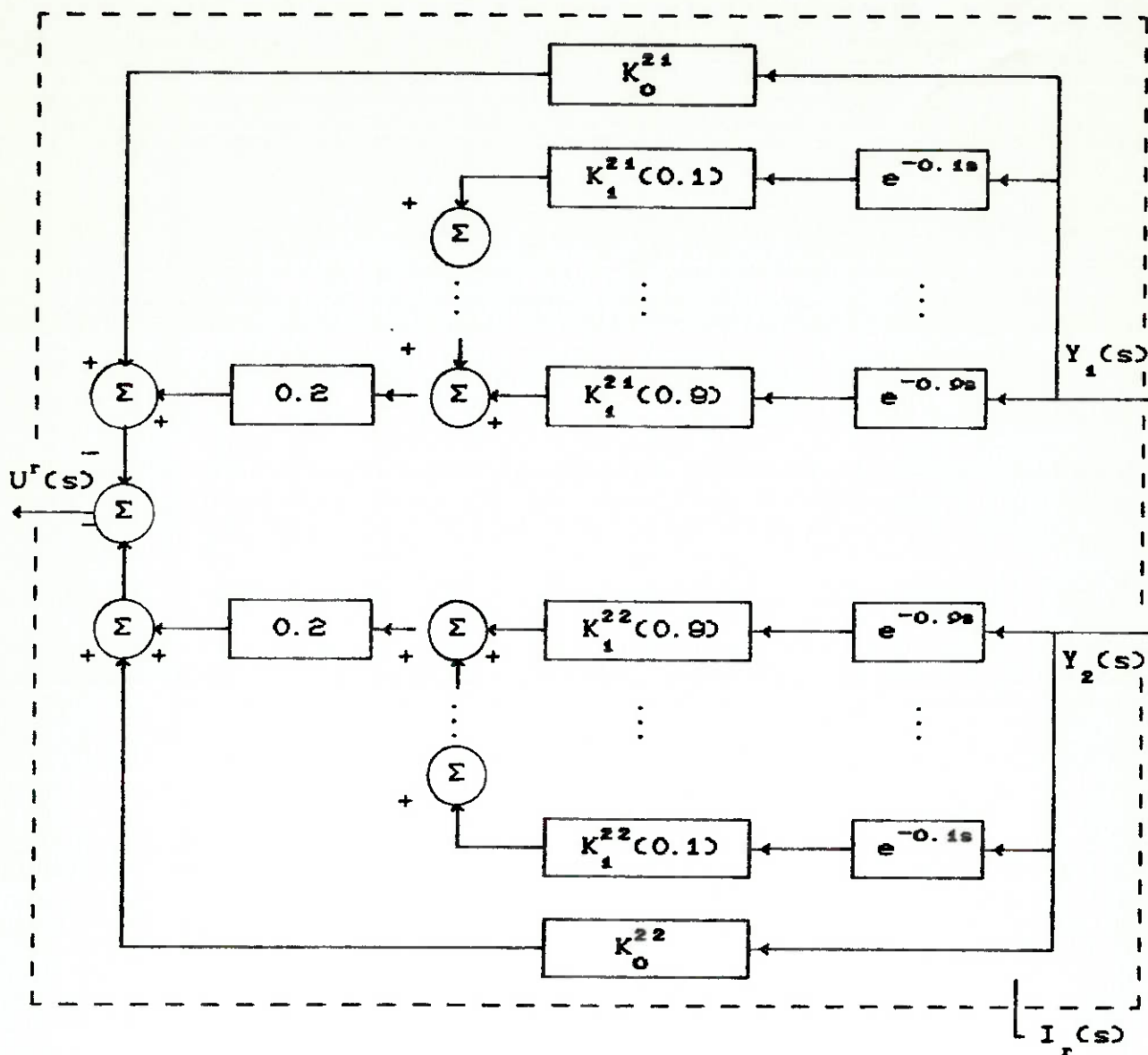


Figura 3.17. Bloco controlador $I_r(s)$ em detalhe.

Para a implementação de u^r utilizou-se o software TUTSIM IBM PC/XT/AT VERSION 5.0 by APPLIED i.

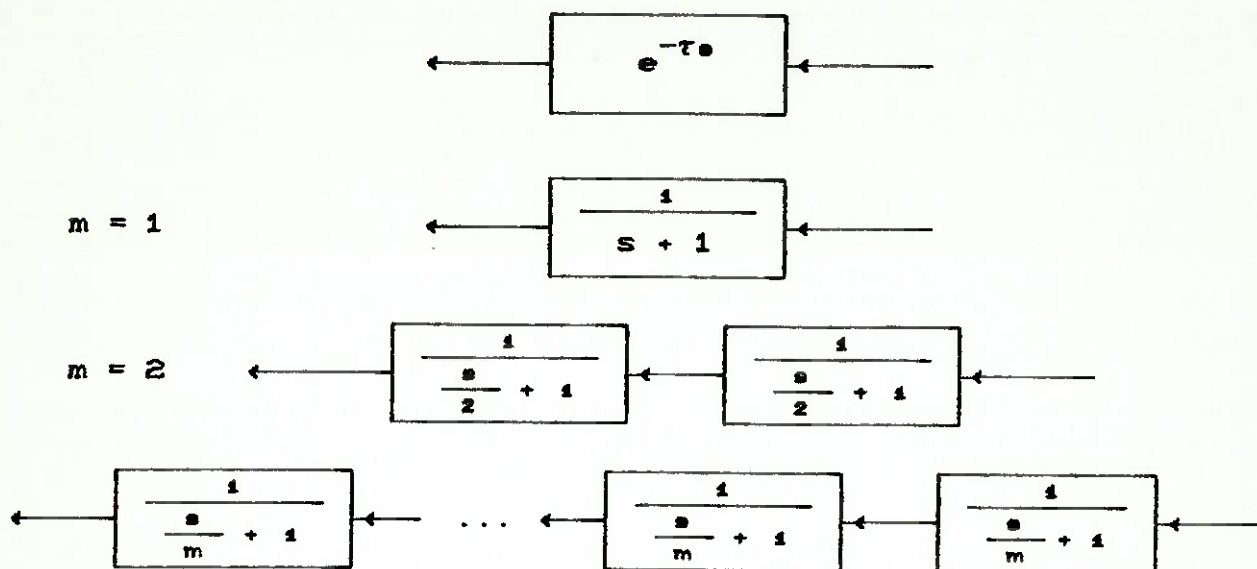


Figura 3.18. Substituições ao bloco de atraso.

Quanto a solução denominada de u^m através de aproximação à dinâmica do bloco de atraso procede-se a substituição em $G(s)$ do bloco contendo e^{-s} por uma aproximação de Padé de ordem m conforme ilustrado na Figura 3.18.

Com a introdução da aproximação de Padé amplia-se o número de estados a serem utilizados na síntese da lei de controle u^m . Como exemplo considere a substituição em $G(s)$ de e^{-s} por $1/(s+1)$, isto é, $m=1$ resultando a Figura 3.19 que descreve o sistema com aproximação denominado $G_m(s)$, no caso $G_1(s)$.

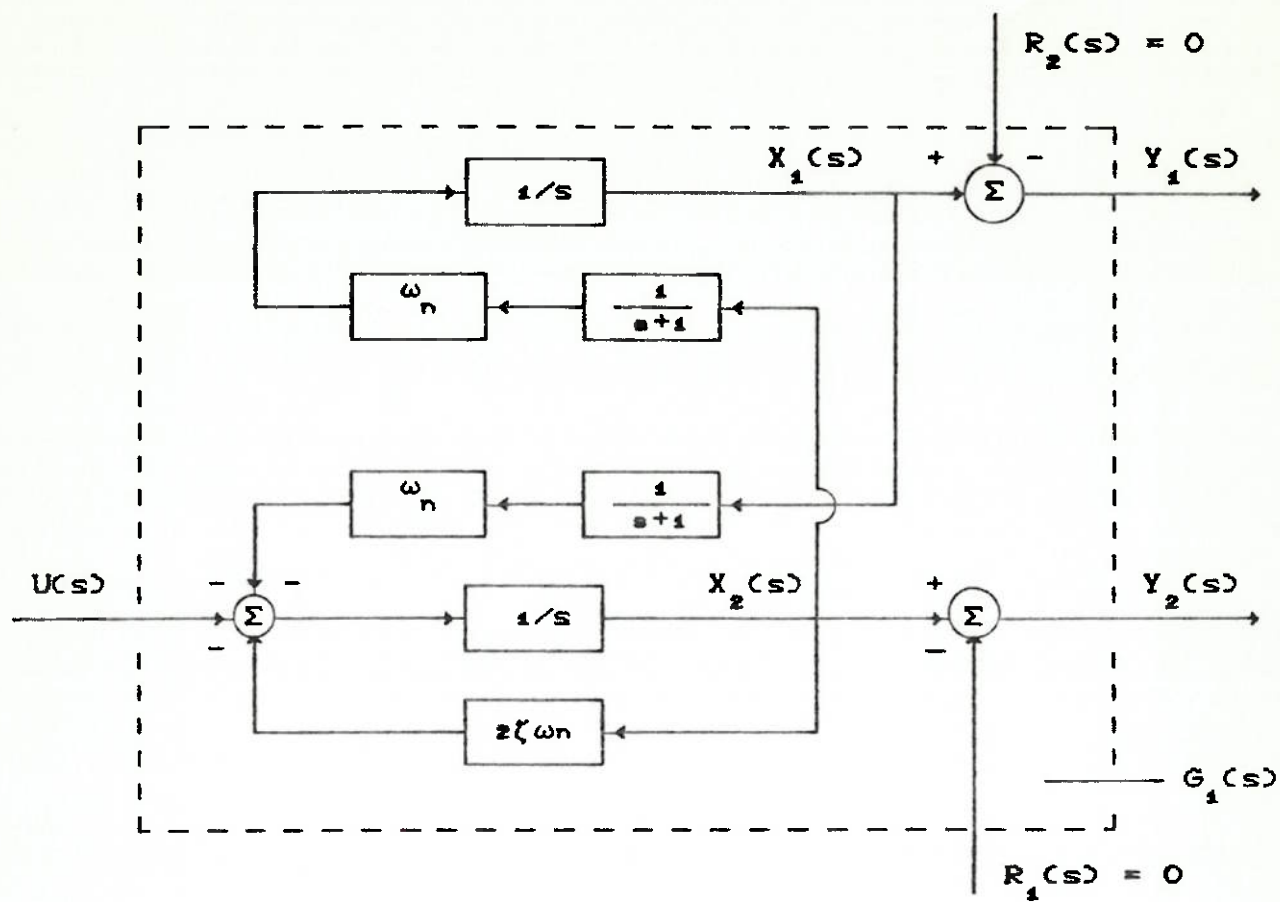


Figura 3.10. Sistema $G_1(s)$ com aproximação por Padé de 1^o ordem.

Através da Figura 3.19 pode-se escrever:

$$s X_1(s) = \omega_n X_4(s)$$

$$s X_2(s) = -2(\omega_n X_2(s) - \omega_n X_3(s))$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+1} X_1(s) \rightarrow s X_3(s) = X_1(s) - X_3(s)$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s) \rightarrow s X_4(s) = X_2(s) - X_4(s)$$

(9.26)

Em forma matricial:

$$s X(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_n \\ 0 & -2(\omega_n) & -\omega_n & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$s X(s) = A X(s) + B_1 U(s)$$

(9.27)

A passagem para o domínio do tempo é trivial reduzindo o problema à determinação de um regulador ótimo quadrático u^1 dado por:

$$u^1 = -K^T x = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] x \quad (9.28)$$

$$\text{onde } K = S B_1 R^{-1}$$

e S a solução da equação de Riccati:

$$S B_1 R^{-1} B_1^T S - A^T S - S A - Q = 0 \quad (9.29)$$

Com Q e R iguais a da formulação da solução u^r de referência já que o critério quadrático deve permanecer o mesmo.

Uma vez determinada a lei de controle u^1 aplica-se a mesma no sistema $G(s)$ com a ressalva que esse sistema fornece somente os estados x_1 e x_2 .

Os estados x_3 e x_4 deverão ser gerados a partir de $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ no controlador através da dinâmica representada pela Figura 3.20.

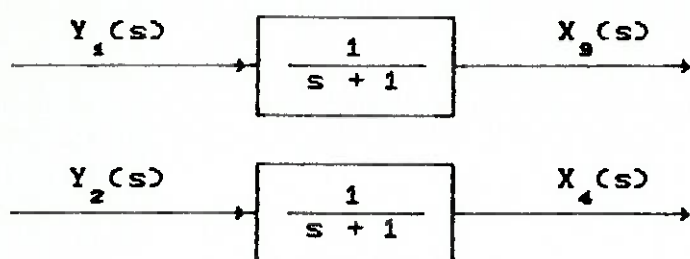


Figura 3.20. dinâmica de geração dos estados x_3 e x_4 .

O bloco do controlador que sintetiza u^1 a partir da substituição do bloco de atraso por uma aproximação de 1ª ordem de Padé em $G(s)$ recebe a denominação de $I_1(s)$ e está esquematizado através da Figura 3.21.

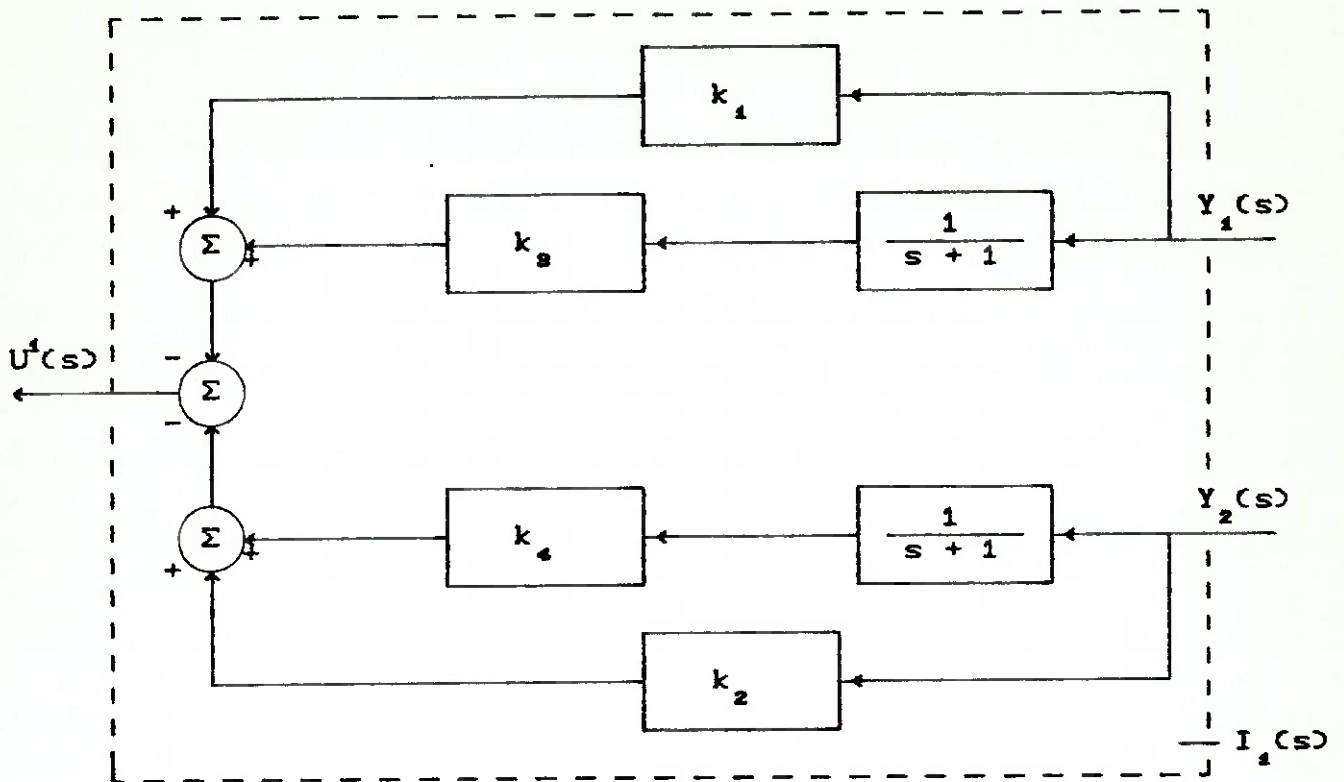
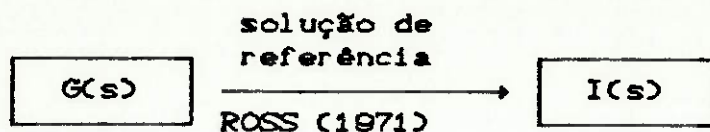


Figura 3.21. Esquema do controlador $I_1(s)$ que sintetiza u^1 .

1º)



2º)



3º)

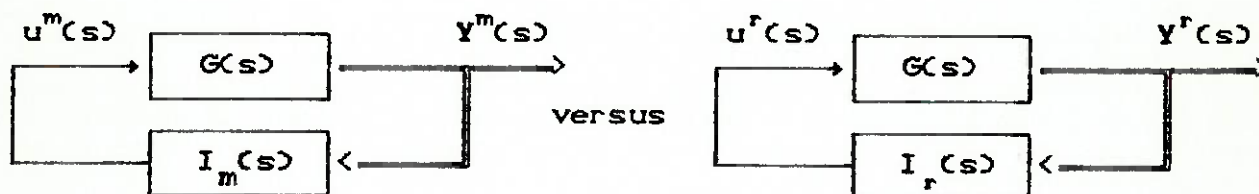


Figura 3.22. Esquema para obtenção de $Y^r(s)$ e $Y^m(s)$.

Com a definição do controlador $I_m(s)$ segue a sua aplicação no sistema $G(s)$ para a obtenção da resposta y^r que será avaliada quanto a sua proximidade à resposta y^o resultante da aplicação de $I_r(s)$ em $G(s)$.

De forma esquemática pode-se resumir o procedimento idealizado para a coleta de resultados através da Figura 3.22.

Os resultados obtidos em termos das características da resposta y^m para solução com aproximação à dinâmica do atraso em comparação à solução de ROSS (1971) ou de referência y^r constituem uma forma indireta de avaliar o quão próximas estão as leis de controle u^r e u^m derivadas dessas duas soluções quando implementadas no sistema .

A proximidade de respostas y^r e y^m foram avaliadas quanto aos valores obtidos para os parâmetros: sobresinal, tempo de subida, tempo de descida, tempo de acomodação e pela forma geral da curva.

Foram realizadas simulações para três valores de frequência ω_n : 1, 2 e 5 rad/s e a cada frequência para três valores da constante de amortecimento ζ : 0.1, 0.5 e 0.8. Em relação às aproximações ao bloco contendo e^{-s} utilizou-se três ordens m : 1, 3 e 5 para o binômio de Padé.

Os resultados são exibidos na forma da razão em porcentagem:

$$\frac{\text{parâmetro da curva para aproximação } m}{\text{parâmetro de referência}} \times 100 \%$$

através de gráficos referindo-se a um par de frequência e constante de amortecimento. Os valores desses parâmetros foram medidos diretamente às curvas das respostas y^r e y^m .

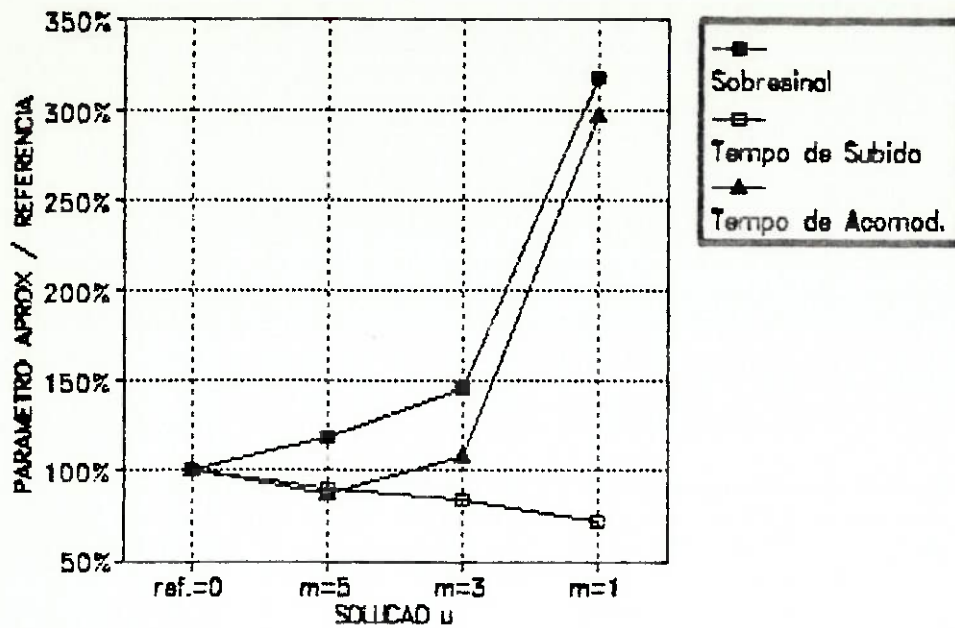


Figura 3.23.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

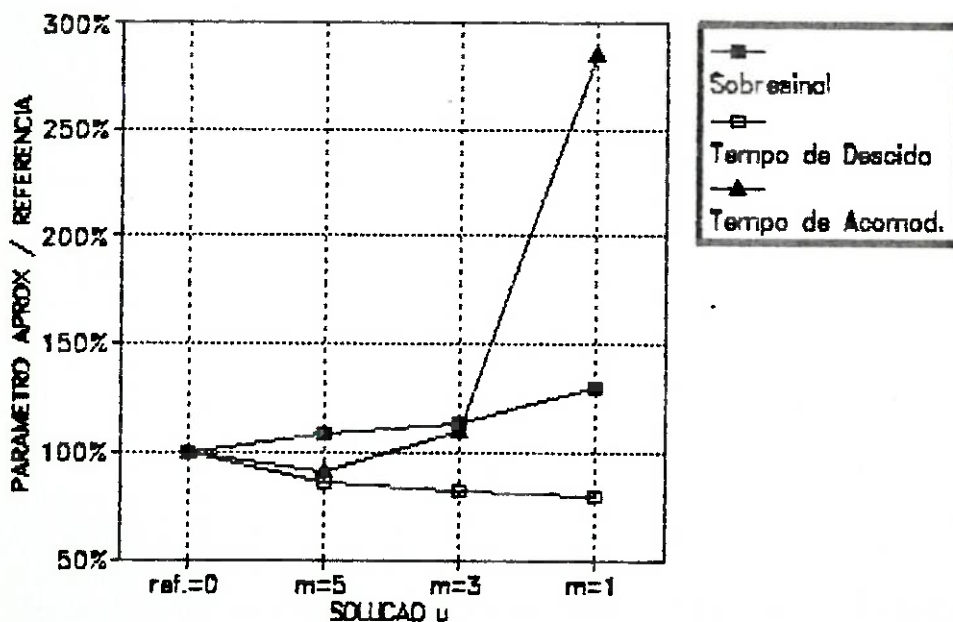


Figura 3.23.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

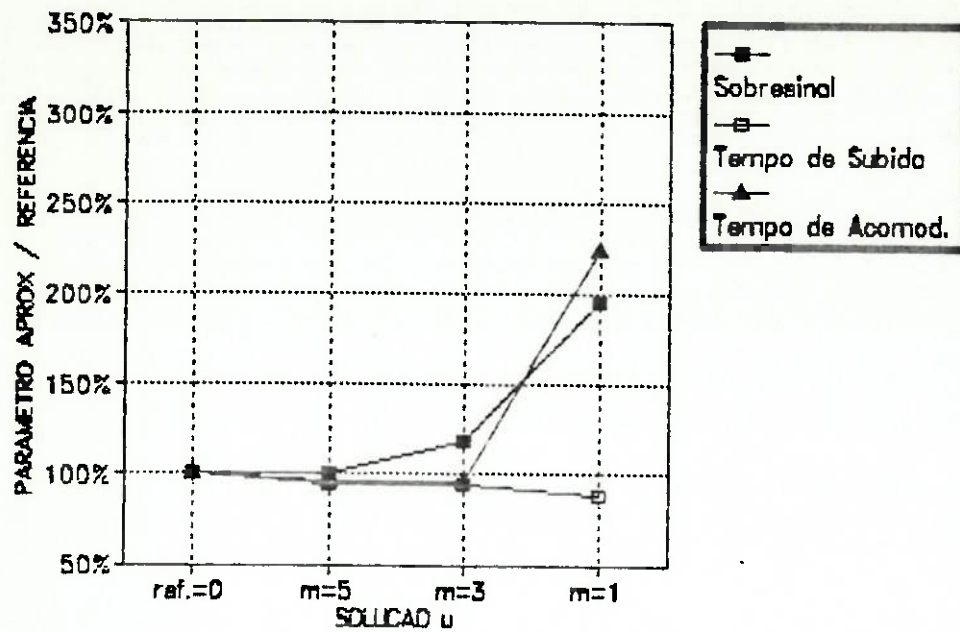


Figura 3.24.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.5$.

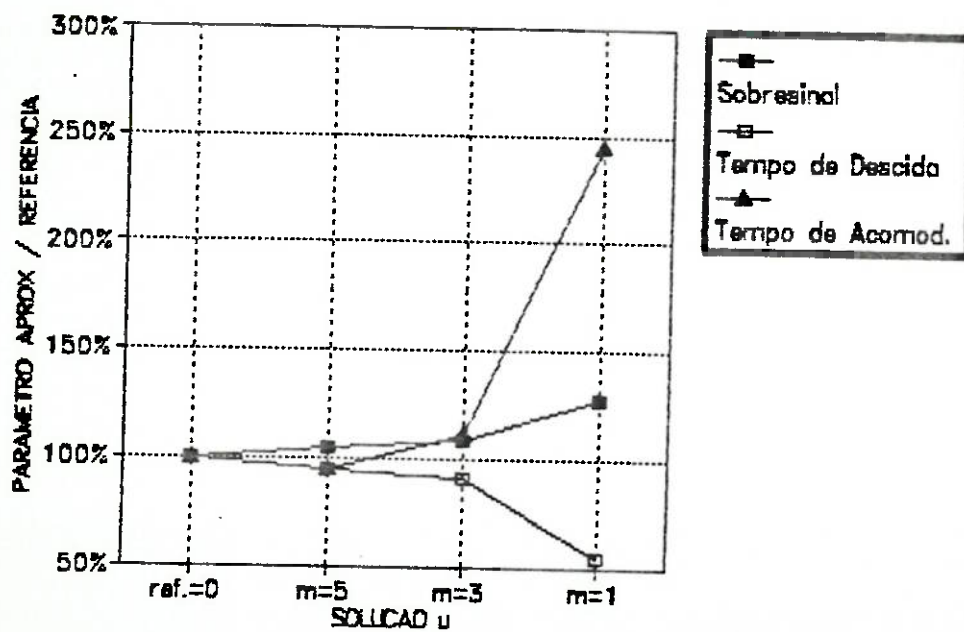


Figura 3.24.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.5$.

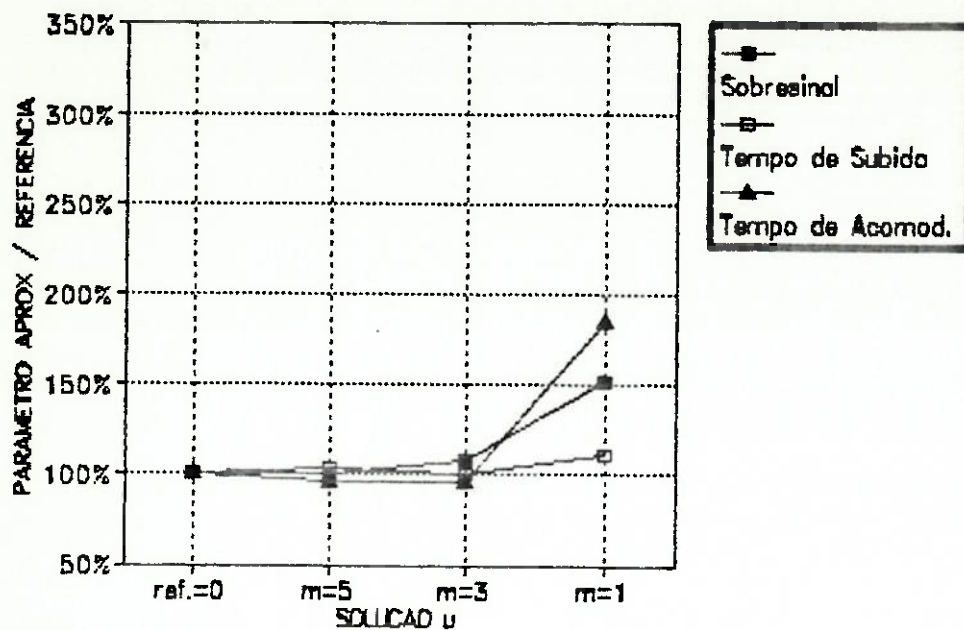


Figura 3.25.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

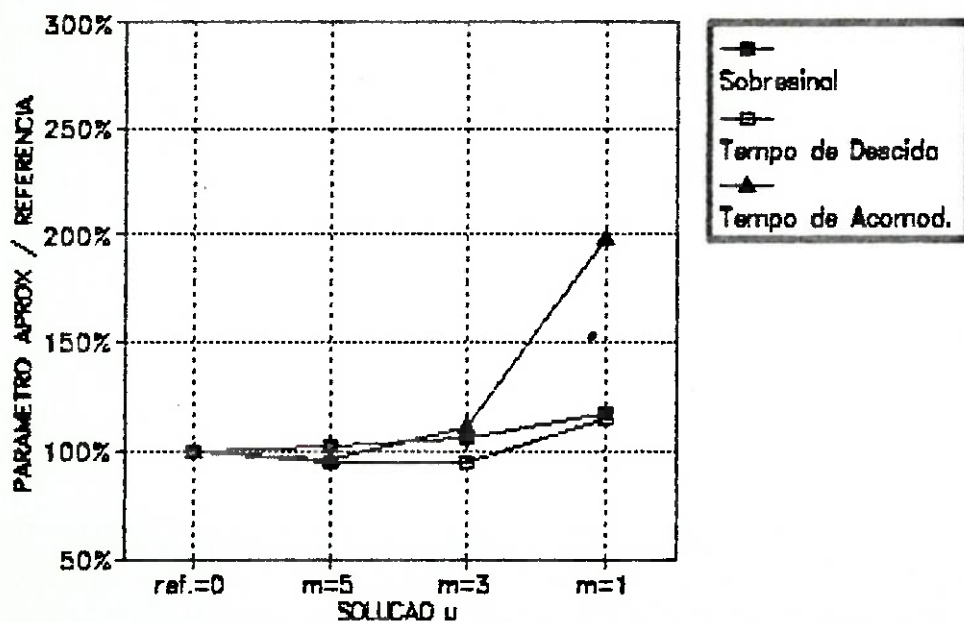


Figura 3.25.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

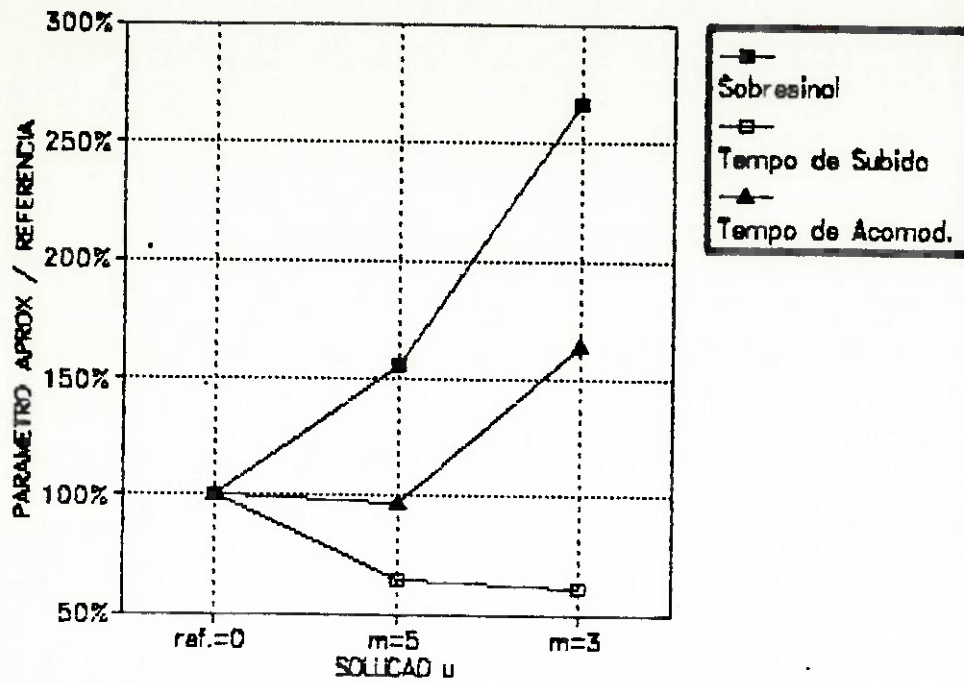


Figura 3.26.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

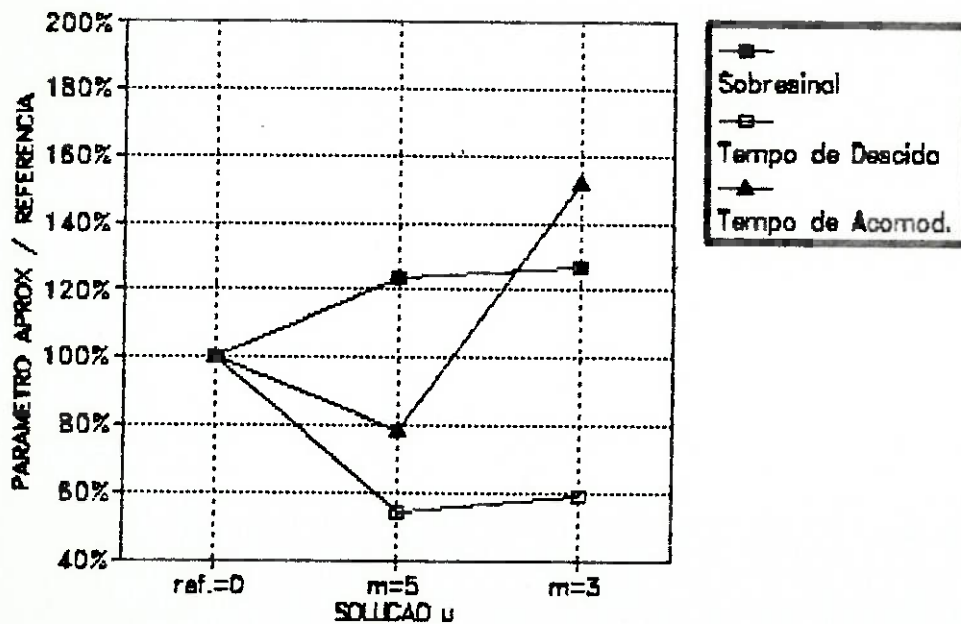


Figura 3.26.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

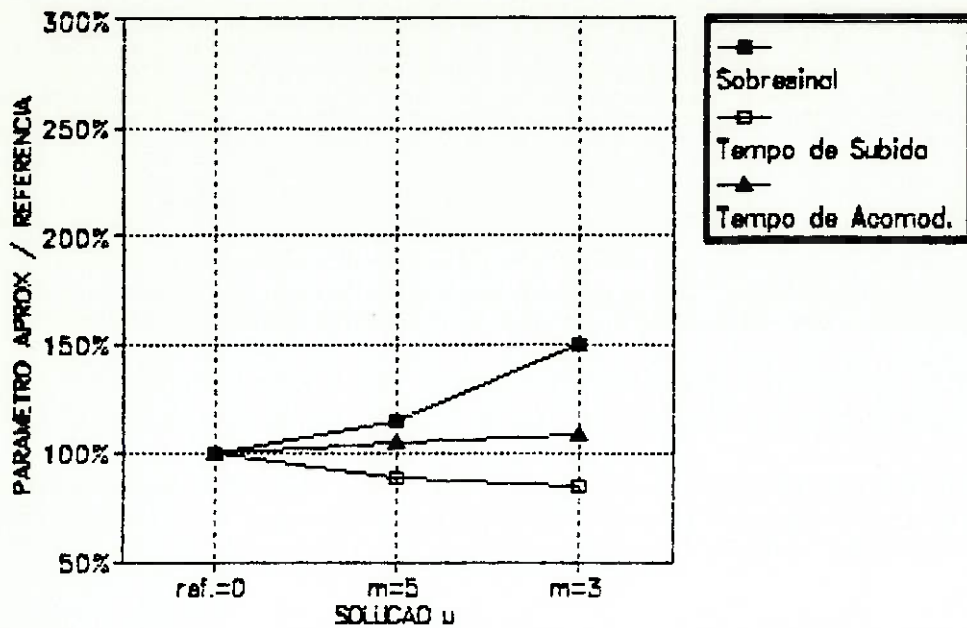


Figura 3.27.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.5$.

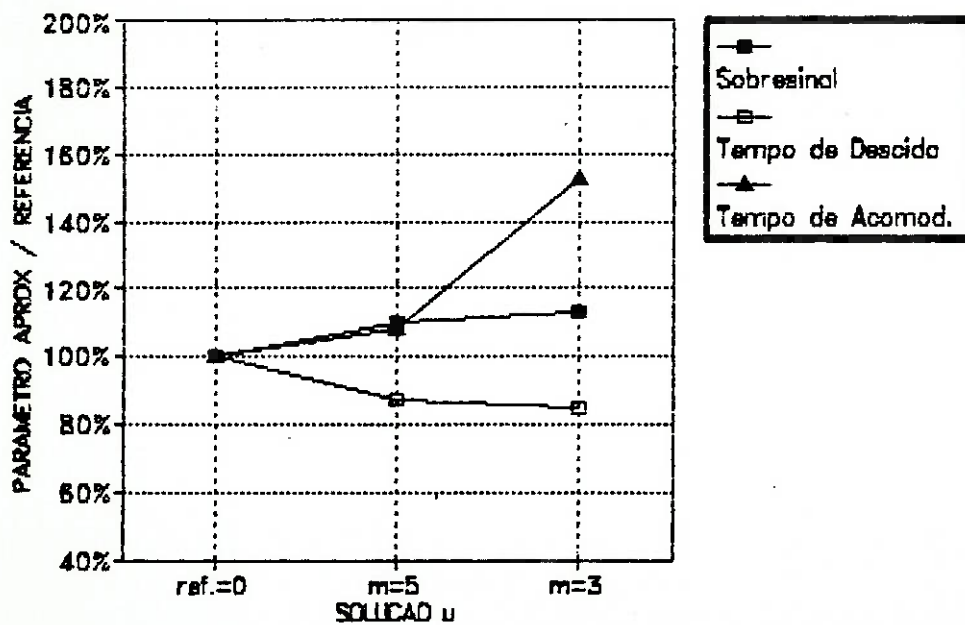


Figura 3.27.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.5$.

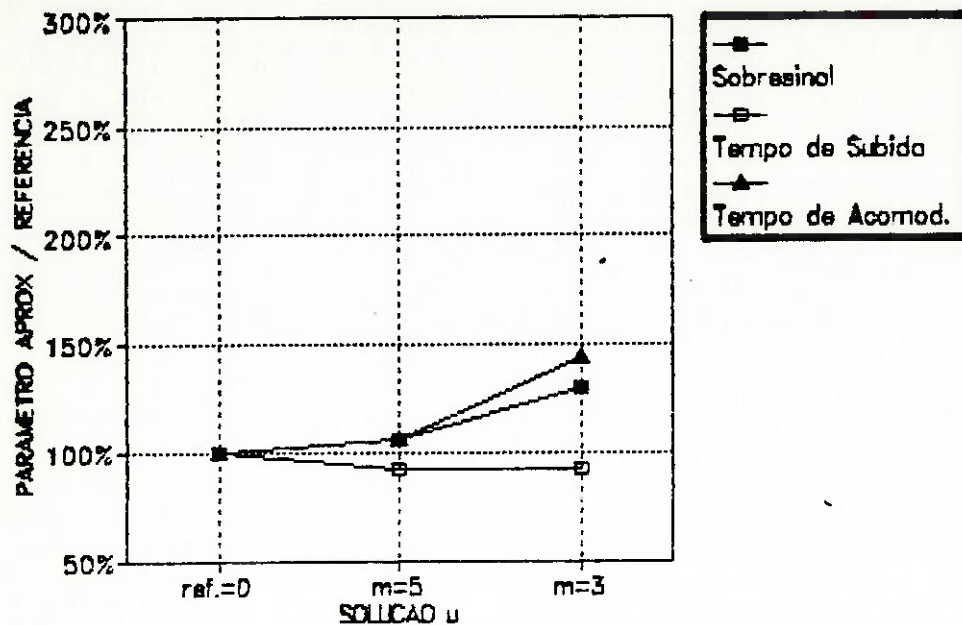


Figura 3.28.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

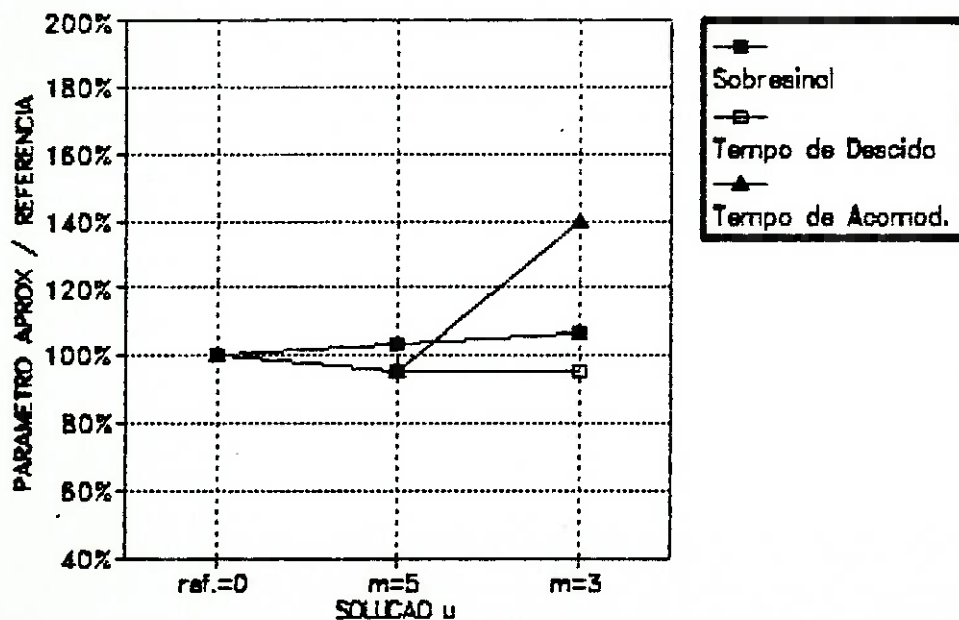


Figura 3.28.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 2$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

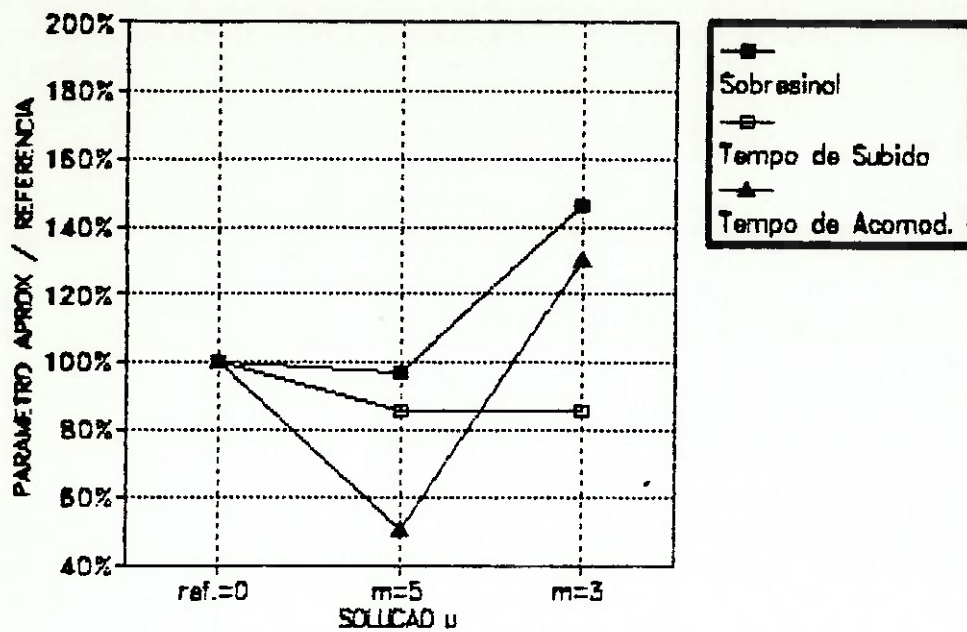


Figura 3.29.1. Parâmetros de y_1^r e y_1^m para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

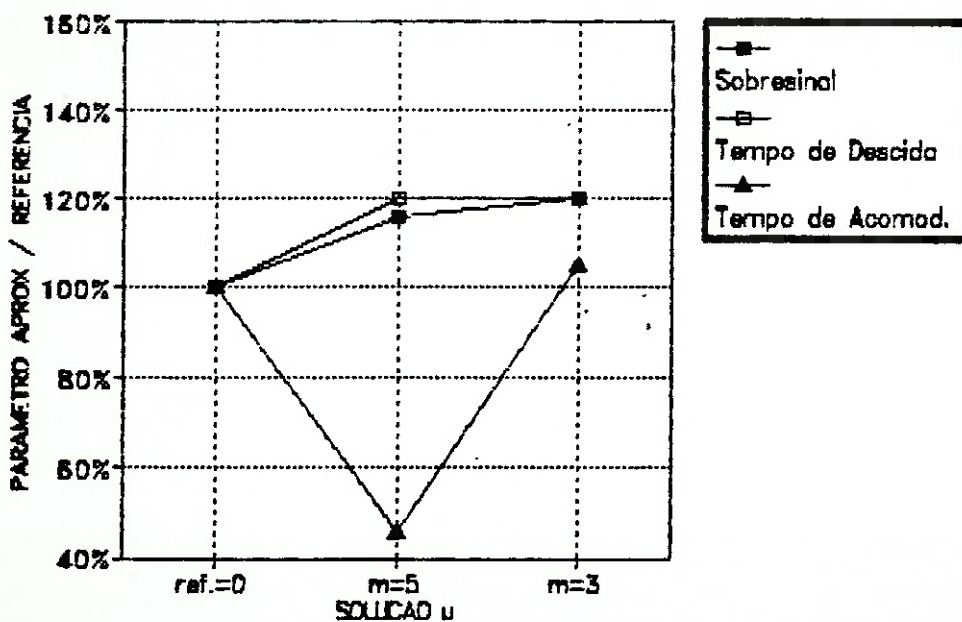


Figura 3.29.2. Parâmetros de y_2^r e y_2^m para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

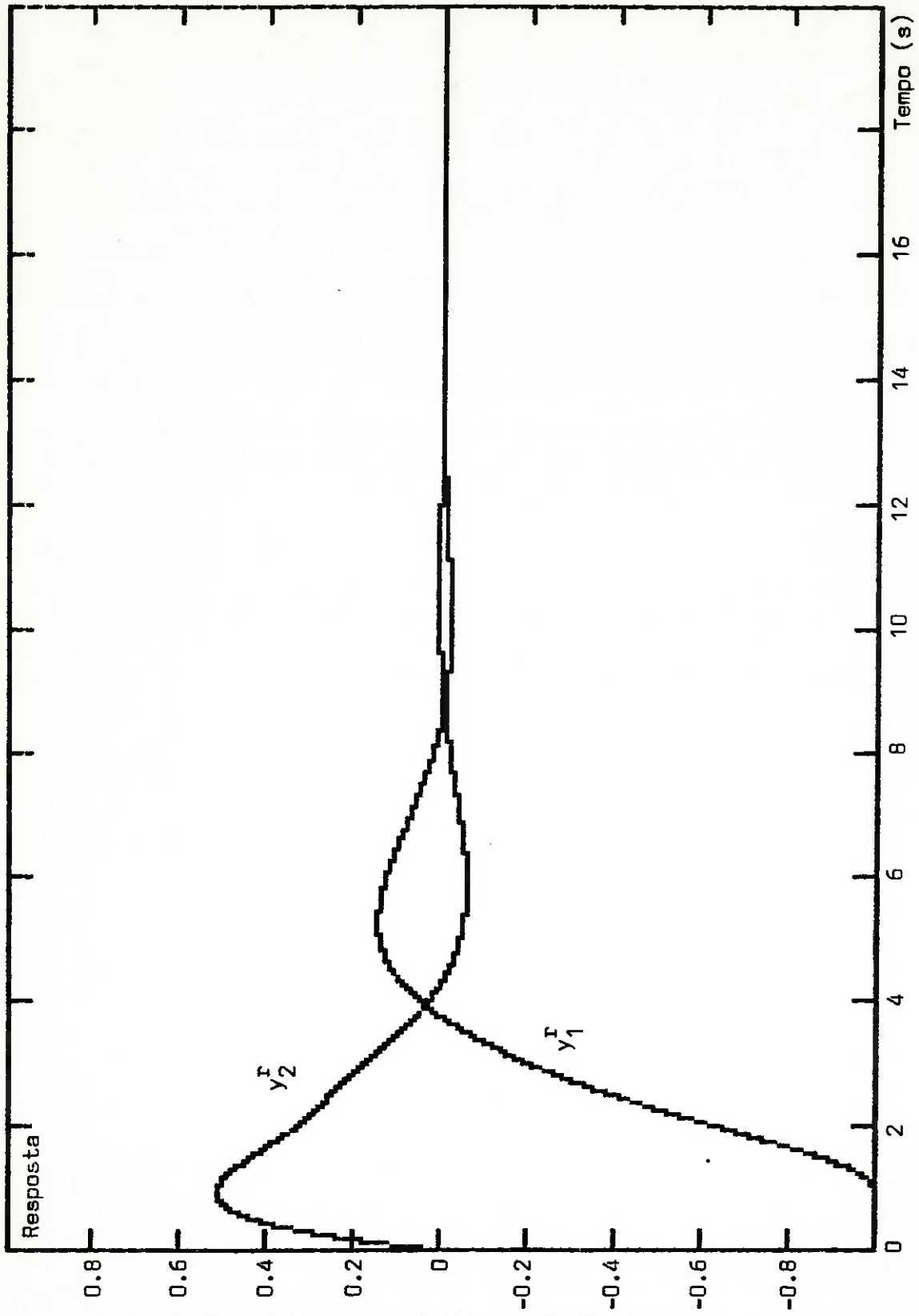


Figura 3.23.3. Respostas y_1^r e y_2^r para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

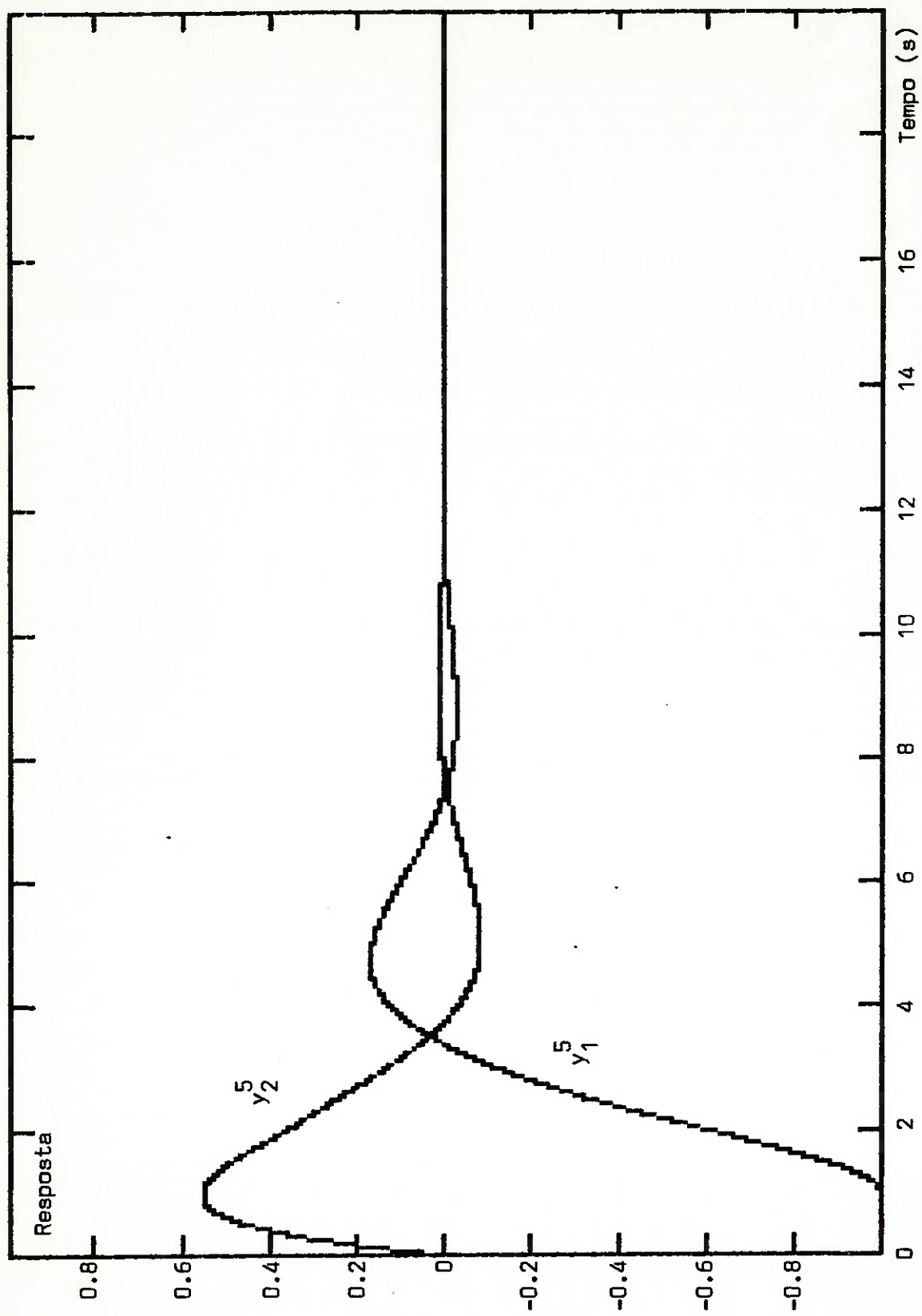


Figura 3.23.4. Respostas y_1^5 e y_2^5 para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.1$.

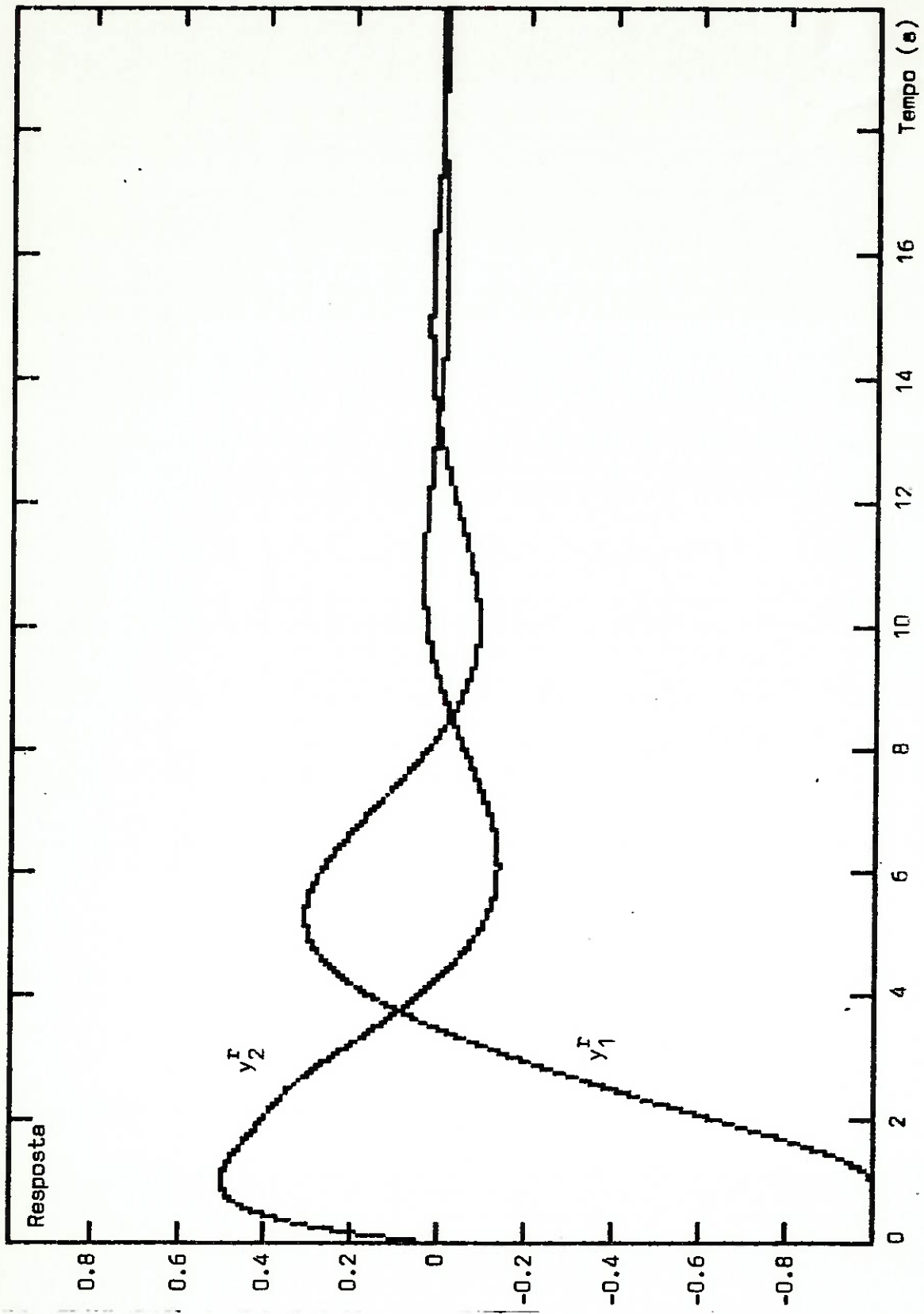


Figura 3.25.3. Respostas y_1^I e y_2^I para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

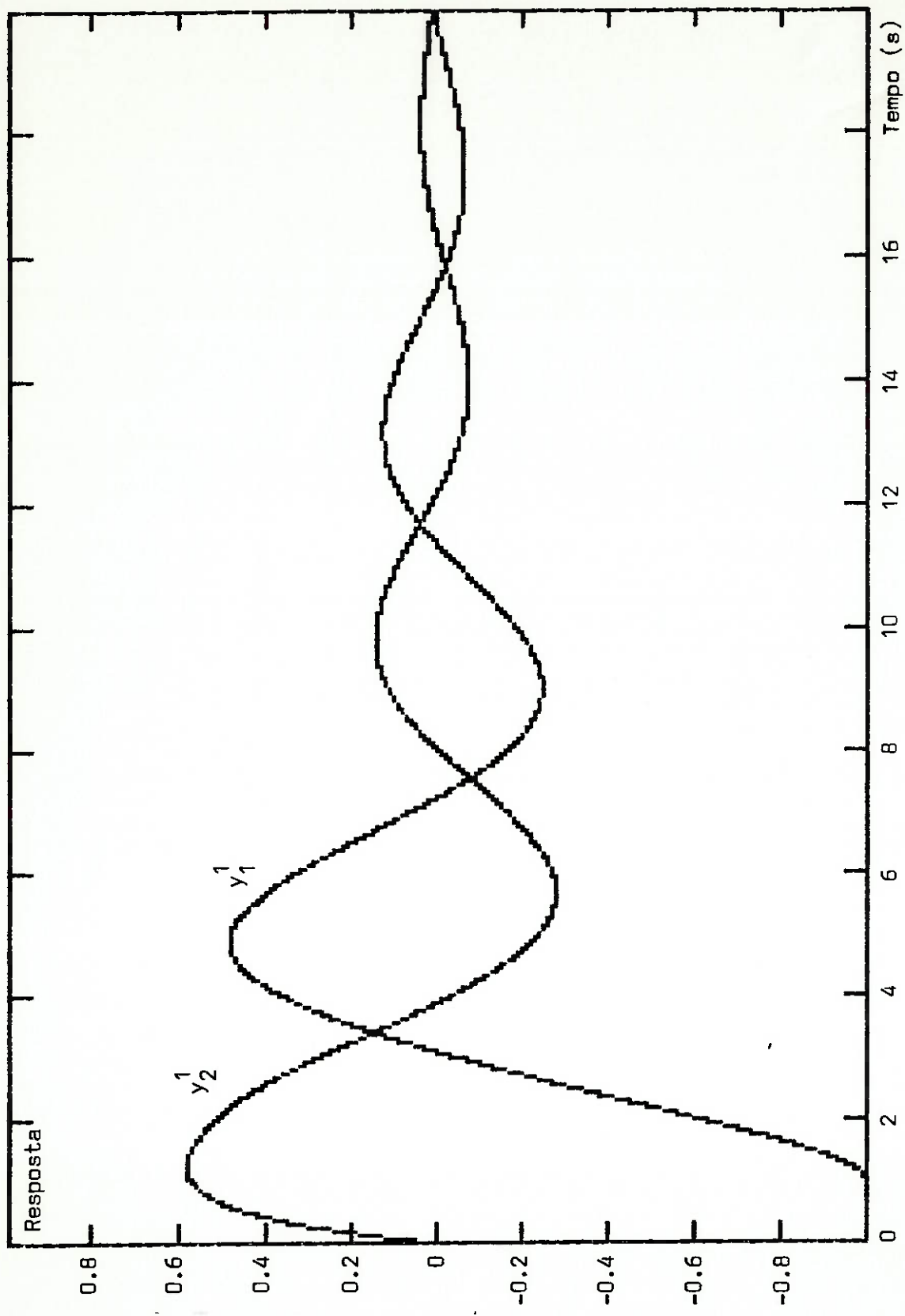


Figura 3.25.4. Respostas y_1^1 e y_2^1 para $\omega = 1$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

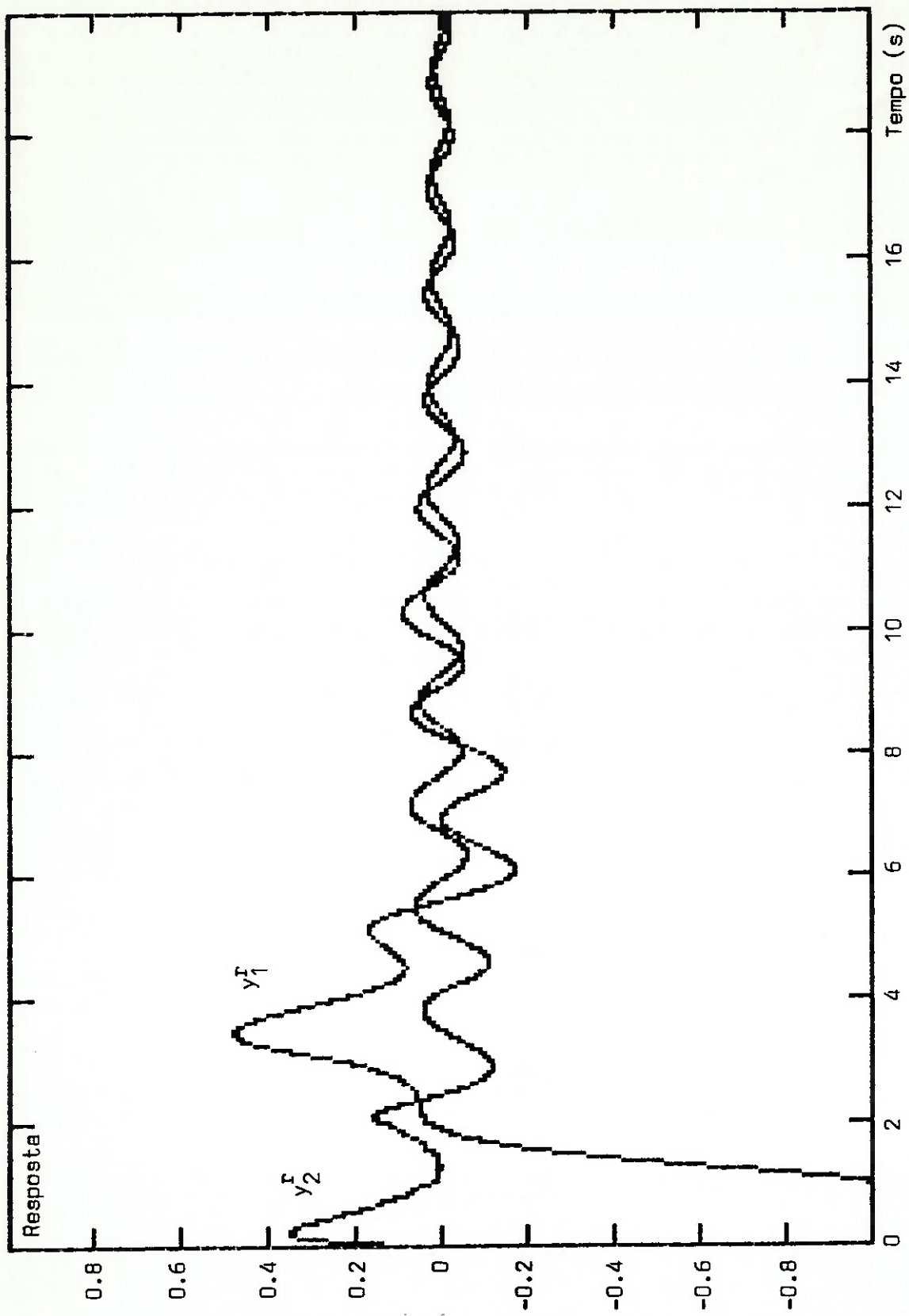


Figura 3.20.3. Respostas y_1^I e y_2^I para $\omega = 5 \text{ rad/s}$ e $\zeta = 0.8$.

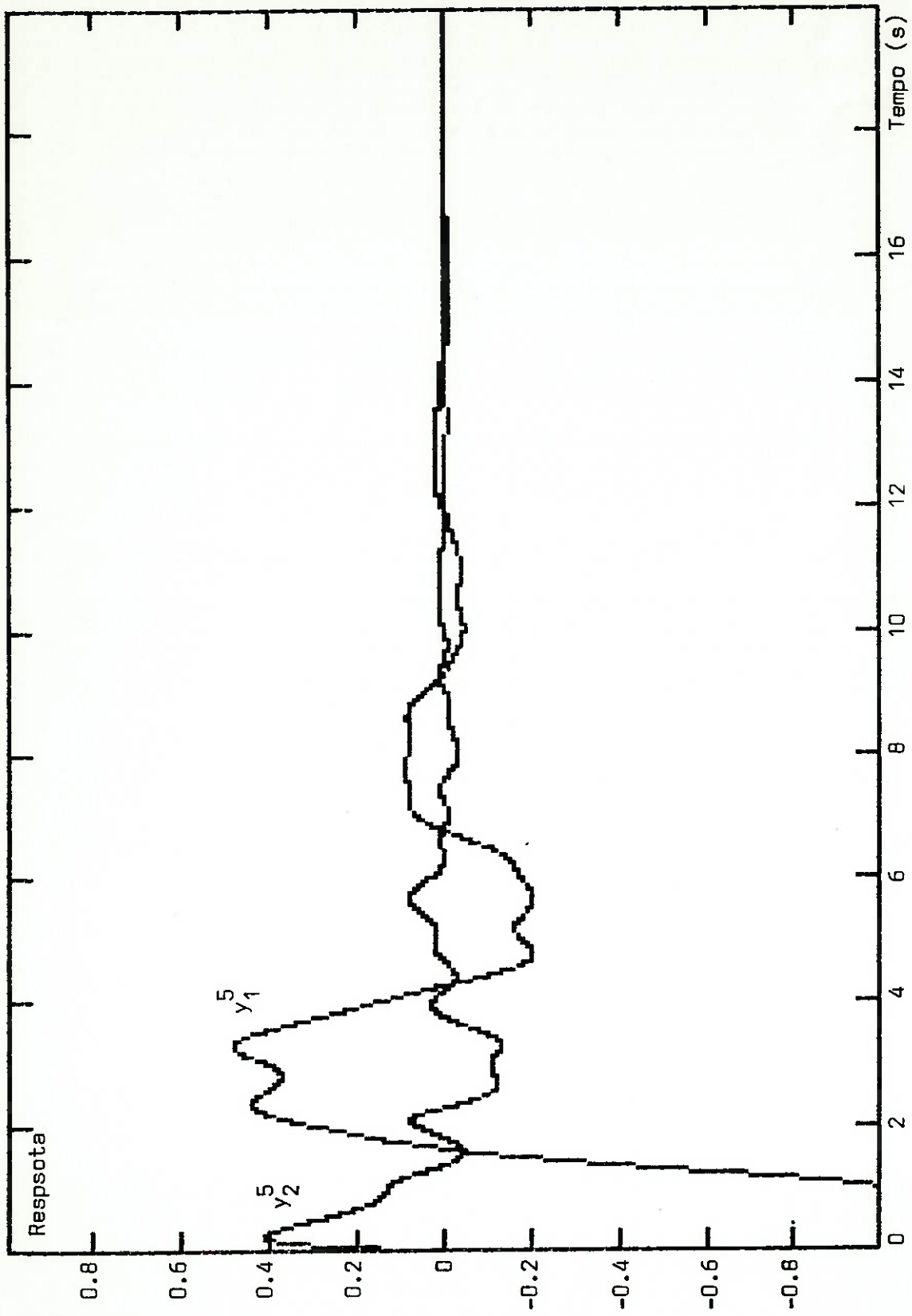


Figura 3.29.4. Respostas y_1^5 e y_2^5 para $\omega = 5$ rad/s e $\zeta = 0.8$.

As Figuras 3.23.3 e 3.23.4 mostram as respostas y^r e y^5 obtidas para a menor constante de amortecimento $\zeta = 0.1$ e a menor frequência utilizadas nas simulações a uma aproximação de ordem $m = 5$.

As respostas obtidas para a aproximação $m = 1$ apresentam-se relativamente distantes da solução de referência. Para as frequências ω_n iguais a 2 rad/s e 5 rad/s todas as respostas a $m = 1$ mostraram-se instáveis independentemente das constantes de amortecimento ζ adotadas: 0.1, 0.5 ou 0.8.

O melhor resultado para a aproximação com $m = 1$ com respeito a proximidade de respostas foi obtido com $\zeta = 0.8$ e $\omega_n = 1$ o que pode ser visto através das Figuras 3.25.3 e 3.25.4.

À frequência $\omega_n = 5$ rad/s obteve-se respostas estáveis para a solução de referência somente para a constante de amortecimento $\zeta = 0.8$. Para $\zeta = 0.1$ e $\zeta = 0.5$, embora a solução de referência não garantisse a estabilidade de resposta, obteve-se respostas estáveis para as aproximações $m = 5$ e $m = 3$.

Ainda à frequência $\omega_n = 5$ rad/s, apesar dos valores obtidos para os parâmetros, com $\zeta = 0.8$ e $m = 5$, apresentarem-se relativamente próximos daqueles obtidos na resposta de referência, nota-se pelas Figuras 3.29.3 e 3.29.4 diferenças acentuadas nas formas das curvas de resposta.

4 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS APROXIMAÇÕES À DINÂMICA DO ATRASO

4.1 SISTEMAS EUSU

A análise dos gráficos das Figuras 3.4, 3.5, 3.6, 3.11, 3.12 e 3.13 presentes no item 3.1 mostra que a aproximação B definida por:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} \quad (4.1)$$

(ver Tabela 3.1) apresenta sempre o melhor resultado com relação à obtenção de parâmetros ótimos do sistema.

A aproximação B difere de A e C no sentido de possuir um zero e um pólo. A aproximação A não possui zero e a C não possui pólo. Além disso, o pólo e o zero de B estão posicionados de forma simétrica em relação ao eixo imaginário fazendo com que essa aproximação apresente um comportamento de filtro do tipo "passa tudo". Esse fator pode ser a explicação para as menores diferenças verificadas entre os parâmetros ótimos obtidos por B em relação aos valores exatos.

Os parâmetros ótimos calculados através das aproximações para critérios de desempenho dos tipos $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ (ver item 2.4.1) apresentam-se mais próximos dos seus valores exatos. É curioso que mesmo a aproximação C, não recomendada para os critérios $J_0^{(0)}$ e $J_1^{(0)}$ tomados individualmente, apresente bons resultados para critérios dos tipos $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$.

De certa forma pode-se afirmar que $J_0^{(1)}$ funciona como um corretor viabilizando a utilização de critérios do tipo $J_0^{(0)} + J_0^{(1)}$ e $J_1^{(0)} + J_0^{(1)}$ para qualquer das aproximações A, B ou C.

Em sistemas de 1ª ordem a utilização de C resulta em parâmetros ótimos distantes dos seus valores exatos para o critério do tipo $J_1^{(0)}$ e, para o critério $J_0^{(0)}$, não existe sequer um valor mínimo. Entretanto, para sistemas de 2ª ordem o emprego de C apresenta-se relativamente satisfatório embora as aproximações A e B mostrem resultados melhores.

Tomando-se os sistemas representados pelos diagramas de blocos nas Figuras 3.2.1 e 3.2.2 tem-se para as expressões da transformada de Laplace do erro $e(t)$, $E(s)$ o seguinte:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - Y(s) = X(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{X(s)} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} e^{-\tau s}} \right] = \frac{1}{s + e^{-\tau s}} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - Y(s) = X(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{X(s)} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} e^{-\tau s}} \right] = \\
 &= \frac{1}{s} \left[\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 e^{-\tau s} - \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 e^{-\tau s}} \right] \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

onde $x(t) = H(t)$ corresponde ao degrau unitário.

Substituindo $e^{-\tau s}$ pela aproximação C em (4.2) e (4.3)

tem-se:

$$E(s) = \frac{1}{(1-\tau)s + 1} \quad (4.4)$$

$$E(s) = \frac{s + 2(\zeta\omega_n - \omega_n^2\tau)}{s^2 + (2(\zeta\omega_n - \omega_n^2\tau)s + \omega_n^2)} \quad (4.5)$$

Em (4.4), ao contrário de (4.5), a substituição de $e^{-\tau s}$ por C não introduz dinâmica no numerador o que significa que a expressão de $E(s)$ para sistemas de 1ª ordem dada por (4.4) não possui zeros. Esse fato talvez explique os piores resultados obtidos com o emprego de C em sistemas de 1ª ordem para critérios de desempenho do tipo $J_0^{(0)}$ e $J_1^{(0)}$.

Quanto às expressões dos funcionais $J_0^{(0)}$, $J_1^{(0)}$ e $J_0^{(1)}$ pode-se dizer que a utilização de aproximações facilitam sua determinação analítica especialmente para o funcional $J_1^{(0)}$ que envolve a derivada de $E(s)$ que resulta num cálculo de resíduos sobre pólos duplicados.

Embora as aproximações facilitem a determinação das expressões para os funcionais em relação à determinação das expressões exatas, o emprego de aproximações ainda assim envolve bastante manipulação algébrica que torna-se tanto maior quanto maior for o número de parâmetros do sistema.

As Figuras 3.8, 3.9, 3.10 e 3.14 mostram que para valores relativamente baixos de τ existe uma coincidência quase que absoluta entre as expressões derivadas de aproximações e as expressões exatas. Infelizmente nem sempre os valores ótimos para os parâmetros em estudo estão próximos aos intervalos em que existe grande coincidência entre as curvas.

4.2 SISTEMAS COM ENTRADA MÚLTIPLA E SAÍDA MÚLTIPLA

As diversas simulações mostram através das Figuras de 3.23 a 3.29 que a a proximidade dos parâmetros das curvas y^r e y^m torna-se maior à medida que m , a ordem da aproximação de Padé, aumenta, ζ , a constante de amortecimento, aumenta e ω_n , a frequência, diminui.

Quanto a ordem da aproximação de Padé, m , era de se esperar que seu aumento implicasse na maior proximidade dos parâmetros das curvas pois quanto maior for m melhor fica a reprodução da dinâmica do atraso puro. Inclusive, na determinação das matrizes K_0 e $K_1(\theta)$ da lei de controle dada por (3.21), o procedimento idealizado em ROSS (1971) faz uso de sucessivas aproximações de Padé para reproduzir o atraso até que a diferença entre K_0 e $K_1(\theta)$ para dois valores de m consecutivos torne-se desprezível.

Com respeito à constante de amortecimento ζ verifica-se que os valores obtidos para K_0 e $K_1(\theta)$ como também para K (ver 3.28 e 3.29) diminuem à medida que ζ aumenta de valor. Em outras palavras os ganhos das leis de controle u^r e u^m sintetizadas a partir das definições dadas por (3.17) e (3.27) respectivamente e para o critério quadrático dado por (3.18) exercem menor influência com o aumento de ζ . Sendo assim o sistema fica cada vez menos dependente de sua estrutura com controles u^r ou u^m e as curvas y^r e y^m tendem naturalmente a ficar mais próximas.

Em relação à frequência ω_n convém explicar que seu aumento na verdade pode ser traduzido por um aumento no valor do atraso tomando-se uma unidade de tempo diferente.

Suponha que se tome o sistema descrito por :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10\zeta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.6)$$

onde pode-se identificar a partir de (3.17) o valor $\omega_n = 5 \text{ rad/ut}$ com ut significando uma unidade de tempo qualquer.

Sabe-se que a mudança da unidade de tempo não deve alterar os valores do estado x se for fixada uma unidade de grandeza para o próprio. Em contrapartida para que isso ocorra é necessário que o valor das constantes que compõe as matrizes que multiplicam o estado atual e o estado passado se alterem. Escolhendo uma outra unidade de tempo, por exemplo, ut' de forma que $ut = 5 ut'$ escreve-se (4.6) como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t-5) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.7)$$

com t medido em unidade ut' e o valor do atraso que era de 1 ut passa a ser 5 ut' e de ω_n que era de 5 rad/ut passa a ser 1 rad/ ut' .

Com o aumento do valor do atraso, pelo menos em unidade ut' , o sistema descrito por (4.7) torna-se menos estável se comparado a outro, para os mesmos valores de ζ ou ω_n (na unidade rad/ ut'), com atraso menor que 5 ut' .

Um sistema menos estável faz com que $u(t)$ se torne mais necessária o que se traduz em ganhos maiores na realimentação de estados. Com ganhos maiores na lei de controle qualquer diferença entre u^r e u^m acentua seu efeito nas respostas $y^r(t)$ e $y^m(t)$ o que explica as maiores divergências encontradas em termos dos parâmetros e das formas dessas curvas para valores de ω_n maiores.

Um outro aspecto interessante a ser discutido diz respeito à natureza de u^r quanto a sua capacidade de estabilizar o sistema. Para $\omega_n = 5$ rad/s foi verificado, na maioria das simulações, que u^r não era uma lei estável. Entretanto, o fato de u^r não estabilizar o sistema não significa que u^m , gerada a partir de uma aproximação de Padé de ordem m , também não o seja o que pode ser verificado para $\zeta = 0,5$ e $m = 3$ ou $m = 5$.

Quanto às curvas de y^r e y^m foi verificado uma proximidade satisfatória para os valores de $m = 3$ ou 5 , $\zeta = 0,5$ ou $0,8$ e $\omega_n = 1$ ou 2 . Nos demais casos as formas das curvas y^r e y^m mostraram-se bem distintas mesmo quando alguns parâmetros como o sobre-sinal, tempo de subida, descida e acomodação apresentaram-se relativamente próximos.

5 CONCLUSÕES

Em linhas gerais através das simulações foi possível verificar que atrasos pequenos em sistemas de controle podem ter suas dinâmicas satisfatoriamente aproximadas por funções racionais visando o ajuste de parâmetros ótimos de operação ou de ganhos ótimos para realimentação de estados. À medida que o atraso aumenta o desempenho dessas aproximações piora tornando o ajuste mais impreciso ou impraticável.

5.1 SISTEMAS EUSU

Para certos valores do atraso, os critérios de desempenho baseados no erro e na sua derivada mostraram bons resultados independentemente do tipo de aproximação escolhida. Para os critérios de desempenho adotados em geral a aproximação representada por uma função racional com um zero posicionado à direita e um pólo à esquerda do eixo imaginário foi a que mostrou os melhores resultados.

Uma das características importantes do critério de desempenho a escolher deve ser a facilidade de obtenção de sua expressão analítica em função dos parâmetros do sistema. Para sistemas de controle com atraso, a obtenção dessas expressões para os funcionais que compõem os critérios de desempenho, constitui uma tarefa um tanto árdua, no sentido algébrico e conceitual do desenvolvimento de sua solução, mesmo para os casos elementares representados por sistemas de 1^ª e 2^ª ordens.

As expressões para os funcionais obtidas via aproximações são relativamente mais fáceis para os casos elementares entretanto, para sistemas mais complexos, de ordens superiores a 2, a obtenção dessas expressões torna-se igualmente árdua no sentido

algébrico.

Para sistemas EUSU a entrada adotada $x(t)$ correspondeu sempre a $H(t)$ ou degrau critério por essa apresentar-se um tanto difícil de ser seguida durante o transitório. Seria interessante testar outras entradas, principalmente aquelas mais suaves durante o transitório como a função rampa, $x(t) = t$, a função parabólica, $x(t) = 1/2 t^2$ ou a função senoidal, $x(t) = \sin \omega t$ para verificar o efeito das aproximações na indicação de parâmetros ótimos.

Os funcionais baseados no erro absoluto como descritos em (2.42.3) e (2.42.4) não foram abordados. Esse trabalho poderia ser complementado com uma pesquisa direcionada à determinação de expressões analíticas para esses funcionais que, igualmente aos demais tratados, são bastante utilizados na prática.

Poderia-se utilizar também aproximações do tipo:

$$e^{-\tau s} \cong \frac{1 - \tau a s}{1 + \tau b s} \quad \text{com} \quad a + b = 1 \quad (5.1)$$

para valores de a e b diferentes entre si porém sem que nenhum deles seja nulo. Em outras palavras procuraria-se aproximações do tipo (5.1) em que o pólo e o zero não estivessem simetricamente posicionados em relação ao eixo imaginário como foi o caso da aproximação denominada de B onde $a = b = 1/2$.

Essas aproximações teriam por finalidade aproximar cada vez mais os parâmetros ótimos determinados a partir delas dos valores determinados pela solução exata.

5.2 SISTEMAS EMSM

Para sistemas EMSM obteve-se somente resultados satisfatórios para a dinâmica do atraso aproximada pelo binômio de Padé de ordem 3 ou superior. Em alguns casos como para $\omega_n \geq 2$ e $\zeta = 0.1$ o controlador gerado a partir do binômio de Padé para $m=1$ provocou instabilidade no sistema.

O critério quadrático adotado para o estudo de sistemas multivariáveis gerou os controladores u^r e u^m tais que as respostas y^r e y^m ficaram bem próximas quando se tratava de ζ amortecimento grande, ω_n frequência baixa e aproximações mais precisa com m maiores.

Deve-se lembrar que as conclusões tiradas apresentando-se os valores numéricos para ω_n , ζ e m estão vinculadas as matrizes Q e R do funcional estabelecido e à função inicial $\varphi(t)$ escolhida. Isso significa que outros valores adotados na formulação do problema podem estabelecer valores limites para ω_n , ζ e m um tanto diferentes.

A obtenção de u^r é um tanto complexa assim como sua implementação à medida que torna-se necessário uma precisão maior para K_0 e $K_1(\theta)$. Para u^m a implementação torna-se também complexa para m maiores devido ao aumento de estados a serem gerados no controlador.

Quanto aos sistemas EMSM seria interessante em primeira instância variar bastante a função inicial $\varphi(t)$ de modo a testar a estabilidade das leis de controle u^r e u^m como também as diferenças entre as curvas y^r e y^m em função somente da função inicial.

As matrizes Q e R que compõem o critério quadrático poderiam variar seus elementos de modo a aumentar ou diminuir o peso do controlador nas respostas y^r e y^m permitindo-se tirar conclusões quanto aos valores de m , ζ e ω_n satisfatórios à utilização de aproximações.

O sistema estudado descrito por (3.17) constitui um exemplo bem particular embora outros sistemas de 2ª ordem possam ser reduzidos àquela forma. Conclusões mais gerais poderiam ser tiradas estudando-se outras formas elementares de sistemas de 2ª ordem descritos no espaço de estados com atraso único.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEKAL, YOGISH ; PAVOL BRUNOVSKY ; DONG H. CHIUNG ; E. BRUCE LEE, The Quadratic problem for Systems with Time Delays, IEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. AC-16, NO. 6, DECEMBER 1971, n.p..
- BELLMAN, R. E. ; K. L. COOKE, Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963, n.p..
- FURUTA, K. ; YAMAKITA, M. ; SATO Y., Computation of optimal control for lineas systems with delay, INT. J. CONTROL, 1988, VOL. 48, NO. 2, 577-589.
- GULEE, G. GU ; E. B. LEE, On the Quadratic CostFunctional for Time Delay Systems and Two-Dimensional Systems, Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, December 1987, n.p..
- HAAG, F. G., Comparing Dead Time Approximations, Control Engineer ing n. 120, 167, s.d..
- HERTZ, D. ; E. I. JURY ; E. ZEHEB, Simplified analytic stability test for systems with commensurate time delays, IEE PROCEEDINGS, Vol.131, Pt.D, No.1, JANUARY 1984.
- HWANG, C. ; CHEN, MUH-YANG, A direct approach using the shifted Legendre series expansions for near optimum control of linear time-varying systems with multiple state and control delays, INT.J. CONTROL, 1986, VOL. 43, NO. 6, 1673-1692.

MAC DONALD, N., Comments on a simplified analytical stability test for systems with delay, IEE PROCEEDINGS, Vol. 132, Pt. D, No. 5, SEPTEMBER 1985.

NEWTON, G. C.; GOULD, L. A.; KAISER, J. F., Analytical Design of Linear Feedback Controls, Wiley, New York, 1957.

OGATA, KATSUHIKO, MODERN CONTROL THEORY, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970, n.p..

PALM III, WILLIAM J., Control Systems Engineering, John Wiley & Sons, 1986.

ROSS, DALE W., Controller Design for Time Lag Systems via a Quadratic Criterion, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. AC-16, NO. 6, DECEMBER 1971.

SCHMITT, KLAUS, Delay and Functional Differential Equations and Their Applications, Academic Press Inc., New York, 1972.

SHULTZ, DONALD G. ; JAMES L. MELSA, State Functions and Linear Control Systems, McGraw-Hill Book Company, 1967, n.p..

THOWSEN, ARILD, An Analytic Stability Test for a Class of Time-Delay Systems, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL AC-26, NO. 3, JUNE 1981.

TRUXAL, JOHN G., Automatic Feedback Control System Synthesis, (p 547 - 553) McGraw Hill, 1955.

WALTON, K. ; J. E. MARSHALL, Closed form solution for time-delay systems' cost functionals, INT.J.CONTROL, 1984, VOL. 39, NO. 5, 1063-1071.

WALTON K. ; B. IRELAND ; J. E. MARSHALL, Evaluation of weighted quadratic functionals for time-delay systems, INT.J. CONTROL, 1986, VOL.44, NO.6, 1491-1498.

WALTON, K. ; J. E. MARSHALL, Direct method for TDS stability analysis, IEE PROCEEDINGS, Vol. 134, Pt. D, No.2, March 1987.

WALTON, K. ; J. E. MARSHALL, Evaluation of cost functionals for systems with commensurate delays by a finite polynomial method, IEE PROCEEDINGS, Vol.134, Pt.D, No.2, MARCH 1987.

WYLIE, C. RAY ; BARRET, LOUIS C., Advanced Engineering Mathematics, 5th edition, McGraw Hill, 1985.

APENDICE I - TEOREMA DE PARSEVAL

O Teorema de Parseval permite o cálculo da integral J definida por:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)g(t)dt, \text{ se } f(t)=g(t)=0 \text{ para } t < 0 \quad (1.1)$$

em função das transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$ respectivamente iguais a $F(s)$ e $G(s)$.

Observe que se $f(t)$ não possuir pólos na metade direita do plano complexo pode-se escrever:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (1.2)$$

Substituindo esse valor em (1.1) resulta:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{1}{2\pi j} dt \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (1.3)$$

Trocando-se a ordem de integração de forma a integrar-se primeiro em função do tempo tem-se:

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} g(t) dt \quad (1.4)$$

Pela transformada direta de Fourier sabe-se que:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t) dt \quad (1.5)$$

Então a integral com respeito ao tempo do lado direito de (1.5) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{st} g(t) dt = G(-s) \quad (1.6)$$

Isso permite que se escreva (1.4) como:

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) G(-s) ds \quad (1.7)$$

que resulta a expressão desejada para J.

Esse resultado é conhecido como Teorema de Parseval. Esse teorema representa uma maneira conveniente de expressar o valor da integral de extremo(s) infinito(s) de um produto de funções do tempo no domínio complexo de $-j\infty$ até $j\infty$.

Se $f(t)=g(t)$, a expressão de J é conhecida como integral quadrática.

APENDICE II - CONTINUAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DE $J_0^{(0)}$ A PARTIR DE
(2.56)

$$\sum_{s=0, \pm jk} \text{res} \left\{ \frac{1}{s} \frac{s^2 + k^2 - ks}{s^2 + k^2} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} \right\} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} (s - 0) \left\{ \dots \right\} + \lim_{s \rightarrow -jk} (s + jk) \left\{ \dots \right\} + \lim_{s \rightarrow jk} (s - jk) \left\{ \dots \right\}$$

(II.1)

Tomando-se individualmente cada limite tem-se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s - 0) \left\{ \dots \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + k^2 - ks}{s^2 + k^2} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + k^2 - ks}{s^2 + k^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} = \frac{1 - k\tau}{k}$$

(II.2)

$$\lim_{s \rightarrow -jk} (s + jk) \left\{ \dots \right\} = \frac{\cos^2(k\tau)}{4k [\text{sen}(k\tau) - 1]} - \frac{\cos(k\tau)}{4k [\text{sen}(k\tau) - 1]} +$$

$$+ \frac{\text{sen}(k\tau)}{4k} - \frac{1}{4k} - \frac{j}{4k}$$

(II.3)

$$\lim_{s \rightarrow jk} (s - jk) \left\{ \dots \right\} = \frac{\cos^2(k\tau)}{4k [\text{sen}(k\tau) - 1]} - \frac{\cos(k\tau)}{4k [\text{sen}(k\tau) - 1]} +$$

$$+ \frac{\text{sen}(k\tau)}{4k} - \frac{1}{4k} + \frac{j}{4k} \quad (II.4)$$

Somando-se os três limites resulta:

$$\sum_{s=0, \pm jk} \text{res} \left\{ \frac{1}{s} \frac{s^2 + k^2 - ks}{s^2 + k^2} \frac{-s - k + k \exp(\tau s)}{-s [-s + k \exp(\tau s)]} \right\} =$$

$$= - \frac{\cos(k\tau) + 2k\tau [\text{sen}(k\tau) - 1]}{2k [\text{sen}(k\tau) - 1]} = \frac{\cos(k\tau)}{2k [1 - \text{sen}(k\tau)]} - \tau \quad (II.5)$$