

**RENATO TEIXEIRA VARGAS**

**MODELOS CONSTITUTIVOS DE ATRITO BI-DIMENSIONAIS  
PARA CONDIÇÕES DE DESLIZAMENTO ISOTRÓPICAS,  
CINEMÁTICAS E ANISOTRÓPICAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título  
de Doutor em Engenharia.

São Paulo

2003

**RENATO TEIXEIRA VARGAS**

**MODELOS CONSTITUTIVOS DE ATRITO BI-DIMENSIONAIS PARA  
CONDIÇÕES DE DESLIZAMENTO ISOTRÓPICAS, CINEMÁTICAS  
E ANISOTRÓPICAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo para obtenção do título de Doutor em  
Engenharia.

**Área de Concentração:**

**Engenharia Mecânica**

**Orientador:**

**Prof. Dr. João Batista de Aguiar**

**São Paulo**

**2003**

## Agradecimentos

*Não raro, as circunstâncias de um trabalho superam sobejamente o seu resultado. Com este pequeno espaço surge uma oportunidade para expressá-las, em meio aos agradecimentos às pessoas essenciais neste tempo. Evidentemente, as minhas limitações de engenheiro tornam esta página insuficiente para este intento. Assim, surgem as dúvidas e as prováveis injustiças do esquecimento.*

*Certamente, o convívio e as discussões - e a sua participação efetiva no resultado deste trabalho - fazem do meu orientador, professor João Batista de Aguiar, uma figura fundamental para superar tecnicamente a proposta do trabalho. Como se isto não fosse suficiente, portador de uma personalidade especial e uma tolerância incomensurável, permitiu-me alçar vôos paralelos, sem os quais não entenderia a formação de um doutor.*

*Assim, neste período pude engajar-me na política de pós-graduação da USP, com a forte motivação de refrear as "torrentes do neoliberalismo" que começavam a vicejar no âmbito da Universidade. Mera ilusão. Porém, desta experiência cheguei ao diagnóstico de que a mentalidade instaurada em vários setores universitários, embasada exclusivamente em interesses pessoais não se modifica apenas com trabalho e boa vontade. É necessário profundidade.*

*Então, fui buscar minha formação no Centro de História da Ciência da USP, e lá tive o privilégio de encontrar nas conversas e ensinamentos do professor Shozo Motoyama, um alento, e o entendimento sobre a história da ciência e da tecnologia e a sua importância na transformação das instituições e da sociedade.*

*Mas, se o mundo da racionalidade caminhava, ainda que a passos lentos, minha vida pessoal dava saltos.*

*Neste período assisti e protagonizei com imensa alegria, o nascimento dos meus três filhos, Sofia, João e Helena, a quem, certamente, soneguei várias horas de brincadeiras e de atenção que eles merecem. Ao João, por sua valentia na luta pela vida, devo um processo de maturação, entre os sofrimentos e aprendizados nos dois anos mais intensos de minha vida.*

*Também assisti emudecido ao desaparecimento de meu pai, o maior incentivador de uma carreira cevada pelo estudo e pela disciplina.*

*Assim, não é sem receios que lanço alguns nomes e fatos, possivelmente os mais expressivos desta trajetória, embora ciente de ter relegado várias pessoas e experiências.*

*Mas, há uma única dúvida que absolutamente não tenho: a quem dedicar o esforço e a dedicação, não relativos a este trabalho apenas, mas desta longa caminhada.*

*Dedico cada linha deste trabalho, cada hora de esforço, cada minuto de angústia e alegria, para a pessoa que ampliou, definitivamente, os meus limites de companheirismo, trabalho e compreensão.*

*Celinha, esta tese, é somente pra ti!*

## SUMÁRIO

### Capítulo I

#### Introdução

1.1 Aspectos Gerais .....	1
1.2 Motivações.....	1
1.3 Modelagem.....	7
1.3.1 Modelagem de Contato com Atrito.....	9
1.3.2 Considerações Sobre a História da Modelagem do Atrito.....	10
1.3.3 A Analogia com a Elasto-plasticidade.....	15
1.4 O Trabalho de Anand.....	21
1.5 O Escopo do Presente Trabalho.....	22
1.6 O Programa.....	24
1.7 Capítulos.....	25

### Capítulo II

#### Mecânica do Contínuo e Equilíbrio

2.1 Cinemática.....	29
2.1.1 Notação.....	29
2.1.2 Conceitos da Cinemática.....	29
2.1.3 Medidas de Deformação.....	32
2.1.4 Taxa de Deformação.....	33
2.1.5 O Tensor de Velocidade Angular $\Omega$ .....	35
2.1.6 A Decomposição Aditiva da Taxa de Deformação.....	36

2.1.7 Objetividade.....	37
2.2 Leis de Balanço.....	38
2.2.1 Conservação da Massa.....	39
2.2.2 Equilíbrio.....	39
2.3 Equilíbrio – O Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	41
2.3.1 Equilíbrio – Forma Local / Integral.....	41
2.3.2 Princípio das Velocidades Virtuais .....	43

### Capítulo III

#### Lei Constitutiva da Elastoplasticidade

3.1 Termodinâmica com Variáveis de Estado.....	49
3.1.1 Energia Livre.....	50
3.1.2 Superfície de Escoamento.....	52
3.1.3 O Fluxo Plástico.....	54
3.2 Modelo Constitutivo Hipoelástico.....	57
3.2.1 Medidas Objetivas de Taxas de Tensão.....	57
3.3 Relações Constitutivas para a Plasticidade.....	58
3.3.1 Consistência Plástica.....	59
3.3.2 Módulo Tangente.....	60
3.4 Implementação da Lei Constitutiva Elastoplástica.....	61
3.4.1 Equação Constitutiva Incremental - Esquema de Integração....	62

3.5 A Matriz Consistente.....	65
3.6 A Plasticidade com Encruamento Misto.....	66

## Capítulo IV

### Contato com Atrito

4.1 Cinemática de Contato.....	70
4.1.1 Definição das Medidas Objetivas.....	72
4.1.2 Função Gap.....	74
4.1.3 Decomposição Aditiva do Deslizamento Tangencial.....	75
4.2 As Trações na Forma Corotacional.....	76

## Capítulo V

### Equações Constitutivas para Contato com Atrito

5.1 Formulação do Modelo Constitutivo de Contato Normal.....	80
5.1.1 Lei Constitutiva Linear.....	81
5.1.2 A Lei Implementada no Abaqus.....	81
5.2 Contato Tangencial com Atrito.....	83
5.2.1 Decomposição do deslocamento em aderência e deslizamento.....	83
5.2.2 Critério de Deslizamento.....	86
5.2.3 Leis de Fluxo de Deslizamento.....	87
5.2.4 Leis de Encruamento no Deslizamento.....	89

## Capítulo VI

### Lei Constitutiva de Atrito Isotrópica

6.1 Modelo Constitutivo de Atrito Isotrópico.....	91
---	----

6.1.1 Modelo de Coulomb.....	95
6.2 Modelo Constitutivo de Anand.....	96
6.2.1 Os Experimentos para Estimativa dos Parâmetros .....	98
6.2.2 O Jacobiano da Interface.....	100
6.3 O Modelo Bi-dimensional.....	104
6.3.1 Determinação do Jacobiano.....	107

## **Capítulo VII**

### **Lei Constitutiva de Atrito Mista**

7.1 A Representação do Encruamento Cinemático no Atrito.....	110
7.2 Lei Constitutiva de Atrito Mista.....	112

## **Capítulo VIII**

### **Lei Constitutiva de Atrito Anisotrópica**

8.1 O Modelo Anisotrópico de Atrito.....	118
8.2 Determinação do Jacobiano.....	123

## **Capítulo IX**

### **Contato e o Princípio das Velocidades Virtuais**

9.1 Os Princípios Mecânicos para Imposição de Contato.....	128
9.2 Método da Penalidade.....	130
9.3 O Problema de Mecânica com Contato.....	131

## **Capítulo X**

### **Resultados**

10.1 Estudo da Objetividade.....	136
10.2 Estudo da Lei Constitutiva Normal e de Aderência.....	138
10.3 Estudo da Lei Constitutiva Mista.....	140
10.3.1 Deslizamentos Iguais em 1 e 2.....	141
10.3.2 Deslizamentos Diferentes em 1 e 2.....	143
10.4 Estudo da Lei Constitutiva Anisotrópica.....	144
10.5 Aplicação Referente ao Modelo Misto.....	153

## **Capítulo XI**

<b>Conclusão.....</b>	<b>158</b>
<b>Anexo I.....</b>	<b>162</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>1</b>
<b>Apêndice I.....</b>	<b>1</b>
<b>Apêndice II.....</b>	<b>3</b>
<b>Apêndice III.....</b>	<b>9</b>



## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1 – Chapa Indeformada.....	3
Fig. 1.2 – Chapa Deformada.....	3
Fig. 1.3 – Relação entre Energia x Deslocamento (Punção).....	3
Fig. 1.4 - Peça Indeformada.....	4
Fig. 1.5 – Peça Deformada.....	4
Fig. 1.6 – Relação entre Energia x Deslocamento (Peça).....	4
Fig. 1.7 - Figura apresentada em artigo de Drucker – 1950.....	16
Fig. 1.8 - Esquema de Mapeamento de Retorno.....	18
Fig. 2.1 - Configurações Inicial e Final de um Corpo.....	31
Fig. 3.1 - Esquema Preditor Elástico - Corretor Plástico.....	64
Fig. 3.2 – Encruamento Cinemático.....	67
Fig. 4.1 - Representação de 2 Corpos (rígido – deformável) em Contato.....	69
Fig. 4.2 - Cinemática de Contato.....	72
Fig. 4.3 – Função Gap.....	74
Fig. 5.1 - Relação Constitutiva de Contato Normal Implementada no Abaqus.....	82
Fig. 5.2 - Experimento de Courtney – Pratt; Eisner .....	83
Fig. 5.3 - Experimento de Tong; Anand.....	84
Fig. 5.4 - Critério de Deslizamento.....	87
Fig. 5.5 - Critério de Deslizamento Associativo.....	88
Fig. 6.1 - Experimentos para Determinação das Funções $\hat{\mu}(u^q)$ e $\hat{s}^*(u^q)$ .....	100
Fig. 7.1 - Experimento de Courtney-Pratt; Eisner.....	110
Fig. 7.2 - Experimento de Tong; Anand.....	111

Fig. 10.1 - Movimento de rotação sobreposta à translação de um bloco.....	137
Fig. 10.2 - Tensão Cisalhante na Interface x Deslocamento.....	138
Fig. 10.3 - Teste de Compressão e Tração Tangencial.....	139
Fig. 10.4 - Tensão Normal .....	139
Fig. 10.5 - Tração Tangencial.....	139
Fig. 10.6 – Representação do Movimento do Bloco (c/ tensão de von Mises)..	141
Fig. 10.7 - Trações x Deslocamento – Deslocamentos iguais em 1 e 2.....	142
Fig. 10.8 - Trações x Deslocamento – Deslocamentos em 1.....	144
Fig. 10.9 - Trações x Deslocamento – Deslocamentos em y.....	144
Fig. 10.10 - Trações com Curvas de Resistência Iguais nas Direções 1 e 2.....	146
Fig. 10.11 - Trações com Curvas de Resistências Diferentes nas Direções 1 e 2..	147
Fig. 10.12 - Dissipação de Energia no Processo de Extrusão.....	148
Fig. 10.13 - Curva de Tensão x deformação cobre (OFHC).....	148
Fig. 10.14 -Modelo de extrusão – Situação indeformada e deformada (tensões de von Mises).....	150
Fig. 10.15 - Curva de Força de Reação x deslocamento do processo de extrusão.	151
Fig. 10.16 - Curva de Evolução da Rigidez Normal x Deslocamento.....	152
Fig. 10.17 - Comparação do modelo de Anand com o proposto.....	152
Fig. 10.18 - Modelo Misto. Resultado Experimental e de Simulação.....	154
Fig. 10.19 Resultados Experimental x isotrópico x cinemático.....	156

## LISTA DE VARIÁVEIS

$\sigma$  - tensor de tensões de Cauchy

$S_y$  - tensão de escoamento

$\varepsilon$  - tensor de deformações (Green – Lagrange)

$C$  – tensor de elasticidade

$q$  - tensão equivalente

$q_c$  - tração equivalente de contato

$q_c^r$  - tração equivalente de contato relativa

$q_{cpr}^r$  - tração equivalente preditora de contato relativa

$S$  - tensão deviatórica

$s^\alpha$  - variável de estado

$\psi$  - energia livre

$f$  - função limite

$f_c$  - função limite de contato

$g$  - função gap

$F$  – gradiente de deformações

$L$  – gradiente de velocidades

$D$  – taxa de deformação

$W$  – taxa de rotação material

$\Omega$  - taxa de rotação

$R$  – rotação material

$\bar{v}$  - velocidade relativa

$\Delta \mathbf{u}^d$  - incremento de deslizamento irreversível.

$\Delta \mathbf{u}^a$  - incremento de deslizamento reversível (aderência)

$\mathbf{t}_T$  - tração tangencial

$\mathbf{t}_N$  - tração normal

$p$  - pressão hidrostática

$\mathbf{t}_{pr}$  - tração preditora

$\mu$  - coeficiente de atrito

$s$  – resistência ao deslizamento

$\lambda$  - multiplicador plástico

$\lambda_c$  - multiplicador de contato

$\mathbf{J}$  - tensão retroativa (back stress)

$\eta$  - fator de encruamento cinemático

$\mathbf{m}$  - vetor normal à superfície de escoamento

$u^q$  - deslizamento equivalente

$\rho$  - densidade

$k_T$  - módulo de rigidez tangencial

$k_N$  - módulo de rigidez normal

$\mathbf{F}_e$  - vetor de forças externas

$\mathbf{F}_i$  - vetor de forças internas

$\mathbf{K}$  – matriz de rigidez

$\Omega$  - configuração

$rf$  – fator de retorno radial

rrf – fator de retorno radial relativo

$\mathbf{M}$  – Jacobiano

$\mathbf{M}_c$  - Jacobiano de contato

$\theta$  - temperatura

## Resumo

Contato com atrito entre superfícies é uma área de extensa aplicação em mecânica, abrangendo desde problemas de conformação até modelagem de implantes cirúrgicos. Embora os avanços sejam significativos na área, persistem várias oportunidades de pesquisa na área de implementação, através do método dos elementos finitos. Neste segmento, em um número significativo de aplicativos, o atrito na interface ainda é baseado na lei de Coulomb, e há necessidade de modelos mais flexíveis para representar a complexidade de fenômenos presentes na interface. Baseado nos avanços teóricos e na metodologia de solução dos problemas numéricos da elastoplasticidade, este trabalho avança em vários aspectos da modelagem das condições de deslizamento na interface. Ao nível teórico, as leis constitutivas são formalizadas através da termodinâmica das variáveis internas para caracterizar o comportamento da interface com deslizamento relativo. As variáveis internas escolhidas são, o coeficiente de atrito e o limite de resistência ao deslizamento, ambas dependentes da distância de deslizamento. Alguns dos seus principais subsídios, são decorrentes do modelo de ANAND (1993), que propõe, com base no trabalho de CHENG;KIKUCHI (1985), uma lei constitutiva de atrito, isotrópica, isotérmica e independente da velocidade de deslizamento para uma dimensão. Seguindo esta proposta - e alguns resultados experimentais para incorporar as características dos materiais que compõem a interface de contato - o presente trabalho fez uma releitura da lei constitutiva de Anand para a situação bi-dimensional, e incorpora duas novas leis, representando os efeitos de encruamento misto (isotrópico e cinemático) e anisotrópico na interface de contato. Os experimentos numéricos foram realizados em duas etapas: estudos qualitativos para verificar a concordância das leis implementadas com as hipóteses de formulação; e a execução de aplicações com comprovações experimentais. Os resultados demonstram uma ampla concordância qualitativa dos resultados com as leis propostas. Por outro lado, as aplicações, ainda que em número restrito, demonstram a viabilidade de operacionalizar as leis constitutivas em casos práticos com eficiência e precisão.

## Abstract

Contact with friction between surfaces is an area of extensive application in mechanics, enclosing since conformation problems, until modeling of surgical implantations. Although the advances are significant in the area, some chances of research persist in the implementation area, through the finite element method. On this segment, on a significant number of softwares, the friction in the interface still is based on the law of Coulomb, and has necessity of more flexible models to represent the complexity of phenomena in the interface. Based in the theoretical advances and the methodology of solution of the numerical problems of the elastoplasticity, this work advances in some aspects of the modeling of the conditions of slipping in the interface. To the theoretical level, the constitutive laws are had been carried through the thermodynamics of the internal variable to characterize the behavior of the interface with relative slipping. The chosen internal variable are the coefficient of friction and the endurance limit to the slipping, both dependents of the relative slipping. Some of its main subsidies, are decurrent of the ANAND's model (1993), that it considers, on the basis of the CHENG;KIKUCHI work's (1985), a constitutive law of friction, isotropic, isothermal and independent of the speed of slipping for one dimension. Following this proposal - and some experimental results to incorporate the characteristics of the materials that compose the contact interface - the present work revisited the constitutive Anand's law for the two-dimensional situation, and incorporates two new laws, representing the effect of mixed strain hardening (isotropic and kinematic) and anisotropic in the contact interface. The numerical experiments had been carried through in two stages: qualitative studies, to verify the agreement of the laws implemented with the formularization hypotheses; and the execution of applications with experimental evidences. The results demonstrate a qualitative agreement of the results with the laws proposals. On the other hand, the applications, still that in restricted number, they recommend the viability of make use the constitutive laws in practical cases with efficiency and precision.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Aspectos Gerais

*Contato com atrito é um tema de extensiva aplicação em todos os ramos da engenharia. Na área de mecânica as aplicações mais comuns estão relacionadas ao deslizamento de mancais, usinagem, conformação mecânica, e vão incorporando novas áreas rapidamente, como o desenvolvimento de articulações para implantes cirúrgicos.*

Um dos problemas fundamentais encontrados na área de fabricação de componentes mecânicos é referente à transformação de uma massa metálica através de conformação. Este problema envolve desde a análise estática de um material com comportamento elastoplástico, até complexos modelos dependentes das temperaturas e da taxa de deformação. Outra caracterização fundamental para os modelos de conformação está relacionada à modelagem da interface das superfícies da peça e da ferramenta de aplicação, local de transferência do carregamento, assim como a dos mecanismos de sujeição da peça.

#### 1.2 Motivações

A conformação de metais abriga dois problemas fundamentais para a mecânica dos sólidos: a deformação da peça e os mecanismos associados à elastoplasticidade e às condições de contato entre as superfícies.

Notoriamente, a evolução da mecânica dos sólidos teve uma forte inclinação para a elastoplasticidade, e, baseada nos estudos de grande pesquisadores atingiu um patamar de desenvolvimento teórico – prático bastante elevado. Ao mesmo tempo, a



área de contato parece ter sido relegada, e a modelagem da interface ainda padece de algumas lacunas que levam à consideração de simplificações, muitas vezes grosseiras. Este fato tem suas evidências na disseminação da substituição de modelos de interface por condições de contorno inadequadas, ou mesmo, pela aplicação da lei de Coulomb, assumindo o ônus de considerar uma condição de atrito imutável durante um processo de deslizamento.

Aparentemente, esta preferência da comunidade acadêmica pelo estudo de elastoplasticidade seguiu alguma necessidade determinada pelo contexto acadêmico e industrial, e, embora não esteja entre os propósitos deste trabalho, certamente pode ser objeto de um estudo mais alentado.

Mas não faltaram alertas para este desenvolvimento assimétrico. MALVERN (1969) ponderava sobre quais fenômenos seriam mais significativos para os resultados da conformação mecânica: os relativos à lei constitutiva do material, ou aqueles relacionados à modelagem da interface entre as superfícies da interface. Segundo ele, “parece que o padrão de fluxo em operações confinadas, como a extrusão, depende mais das condições de contorno do que da própria lei constitutiva do material”.

Para verificar a procedência desta preocupação, foram realizados no âmbito deste trabalho dois exercícios de simulação numérica aplicando o método dos elementos finitos. O primeiro exercício é referente a um caso típico de conformação mecânica de chapa. Nas figuras 1.1 - 2 estão apresentados os estados da chapa antes e após a conformação, e na figura 1.3, as curvas de energia dissipada por atrito, e plastificação, em função do deslocamento do punção. Neste caso é possível perceber a plastificação como efeito predominante para acompanhar o processo de dissipação de energia, embora a energia dissipada por atrito seja significativa (13% do total da energia dissipada).

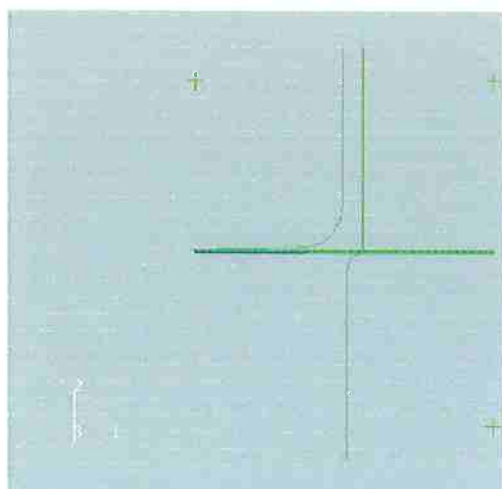


Fig. 1.1 – Chapa Indeformada

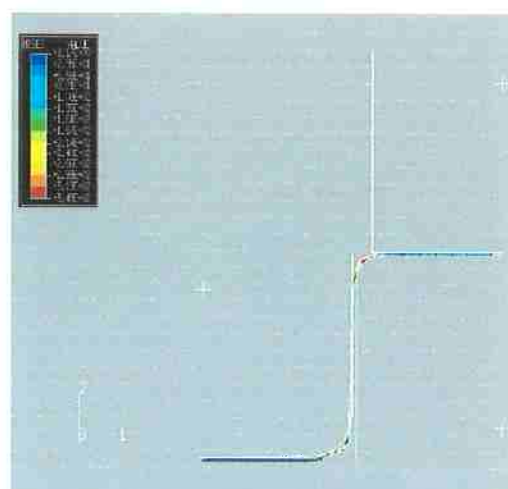


Fig. 1.2 – Chapa Deformada

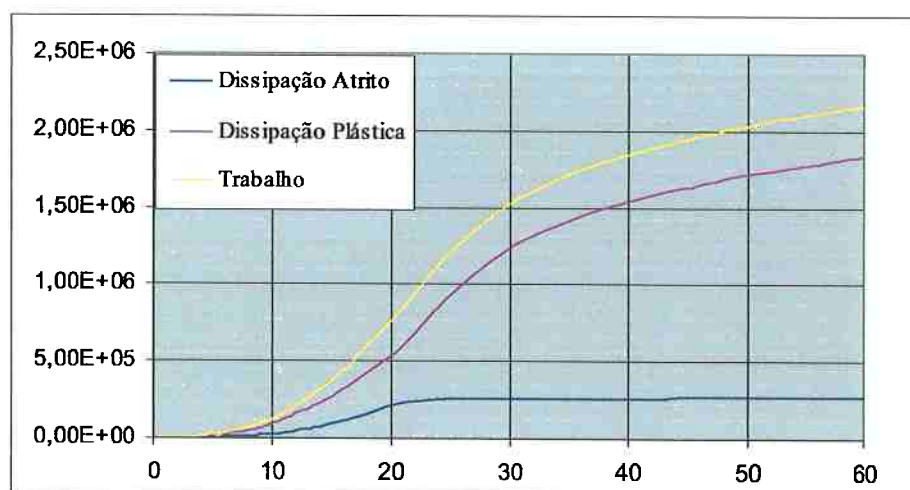


Fig. 1.3 – Relação entre Energia x Deslocamento (Punção)

Mas havia boas razões para Malvern considerar o processo de extrusão. Seguindo sua sugestão, foi realizado um segundo exercício de simulação para verificação deste questionamento. A peça extrudada é apresentada nas figuras 1.4 - 5 e o resultado da energia dissipada por atrito e plastificação na figura 1.6. A energia dissipada por atrito representa 87 % da energia total dissipada no sistema!

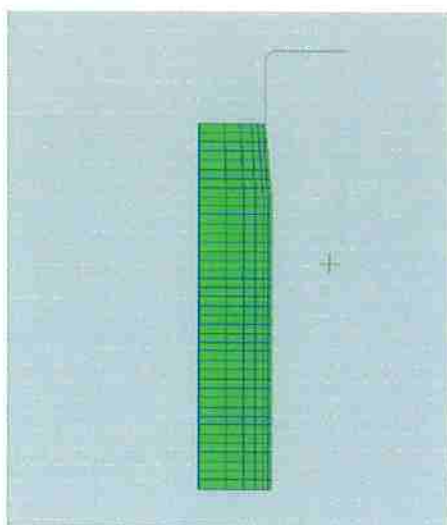


Fig. 1.4 - Peça Indeformada

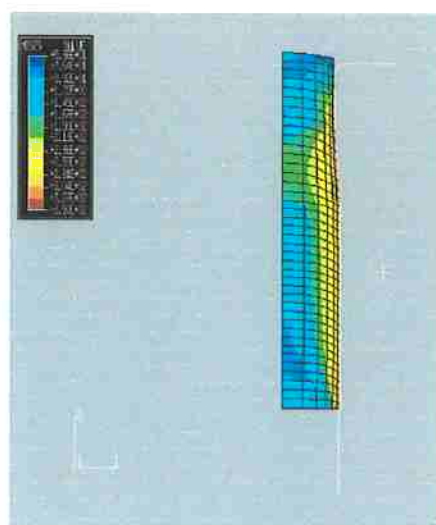


Fig. 1.5 - Peça Deformada

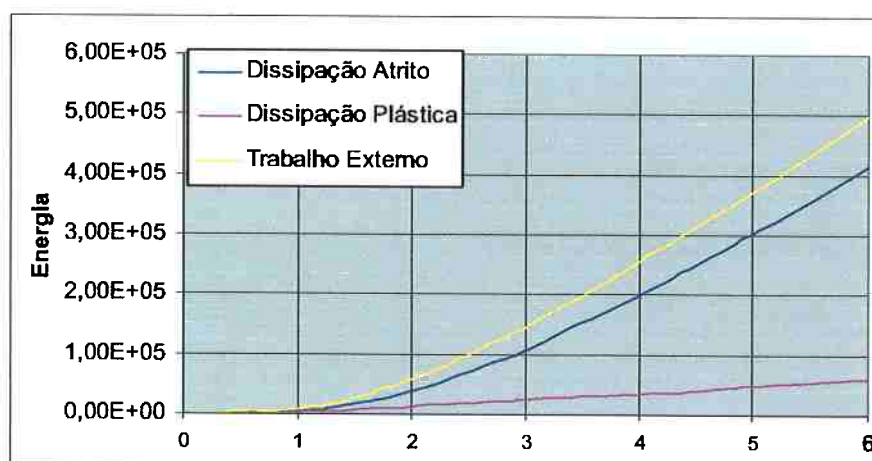


Fig. 1.6 - Relação entre Energia x Deslocamento (Peça)

Considerando este último exemplo, fica explícita a necessidade de apurar os modelos de atrito, passíveis de implementação através do método dos elementos finitos, e trazê-los ao nível do estado da arte das leis constitutivas da elastoplasticidade. Até porque, nesta linha de argumentação, surgem dificuldades para justificar a utilização de sofisticadas leis constitutivas de plasticidade, enquanto o problema está essencialmente relacionado ao atrito – que usualmente é modelado com sérias limitações.

Provavelmente, os benefícios decorrentes de uma lei constitutiva mais apurada do material, seriam absorvidos pela modelagem inadequada do atrito.

Evidentemente, a simplicidade deste diagnóstico não encerra a complexidade de uma situação que determina a centralização dos estudos sobre elastoplasticidade na área de mecânica dos sólidos. Ao mesmo tempo, não se pretende insinuar que apenas a determinação de se lançar sobre uma área de pesquisa seria suficiente para solucionar o problema. Certamente, as dificuldades inerentes ao tratamento analítico de contato, e o entendimento e modelagem do fenômeno de atrito entre as superfícies contribuíram para esta aparente letargia.

A complexidade encontrada para caracterizar a interface entre superfícies pode ser resgatada na afirmação de ODEN; MARTINS (1985) “A interface entre dois sólidos é um meio mecânico complexo, constituído por características diferentes daquelas de quaisquer dos dois materiais dos corpos, individualmente. A interface pode ser constituída por um par de superfícies compostas de impurezas, óxidos, gases e lubrificantes ou mecanicamente trabalhadas.” Neste trabalho, os autores ainda propõem um método para exploração do tema: “Portanto, é natural que o desenvolvimento de modelos fenomenológicos de atrito para identificar a interface como uma estrutura separada, caracterizada por uma equação constitutiva, independente daquelas que caracterizam os materiais dos corpos em contato.”

Outra dificuldade inerente ao problema de contato é referente à sua condição de acontecer apenas sob compressão, não admitindo a tração (normal) como esforço admissível. Isto determina a formalização de uma formulação variacional mais elaborada para reger o problema, e a exigência de um tratamento por métodos de otimização para restabelecer a condição para aplicação do princípio dos trabalhos virtuais com contato.

Uma característica peculiar do problema de contato - ele é não linear em todas situações -, e por isto é denominado por alguns autores como “inerentemente não linear”. Em quaisquer circunstâncias o fato de um corpo entrar em contato com outro causará uma modificação em sua matriz de rigidez, e portanto, a necessidade de sua constante atualização – condição típica de um problema não linear.

Também existem problemas de natureza numérica relacionados à forte inflexão – descontinuidade - da curva de atrito quando ocorre a modificação de coeficiente de atrito estático para cinemático. Esta característica que determina boa parte das dificuldades na solução de um problema de contato é responsável por um forte viés na maior parte dos trabalhos nesta área - trabalhos sobre contato com atrito são amplamente caracterizados pelo intensivo tratamento numérico dos programas. Como um problema não linear que apresenta dificuldades para solução, e a convergência constitui-se um desafio, é comum um trabalho de busca de ferramentas numéricas mais eficientes para solução de um problema de otimização. Evidentemente, que esta necessidade legítima é fundamental para o avanço do conhecimento. Porém, é freqüente na literatura, um aprofundamento talvez demasiado neste campo, mantendo o uso da lei clássica de Coulomb e suas limitações.

Ainda na área numérica, não menos problemático é o desconhecimento dos pontos de contato das superfícies à priori. Este fato determina que o programa procure, a cada incremento, para todos os pontos, aqueles que estão em contato, ou não. Isto representa um alto custo computacional e constitui uma área de desenvolvimento específica de sofisticados “algoritmos de busca de pontos de contato” para otimização do tempo de computação. Neste trabalho, este ponto não será abordado, mas são recomendados os trabalhos de ZHONG (1989) e WRIGGERS (2002).

Assim, a despeito de todos os esforços de pesquisa realizados, persistem vários planos para abordagem do problema de contato com atrito no âmbito de sua implementação através do método dos elementos finitos.

É fato, porém, que as leis constitutivas de atrito utilizadas nos aplicativos - e em boa parte dos trabalhos acadêmicos - em sua grande maioria, ainda estão baseados exclusivamente sobre as leis de Amontons-Coulomb, um expressivo legado dos pesquisadores do século XVIII.

Nos últimos anos, com a intensiva disseminação do método dos elementos finitos, foi verificado um crescente interesse na área de contato entre superfícies. Durante muito tempo, a área de contato foi relegada a situações de simplificação na modelagem, utilizando condições de contorno desprovidas de critérios adequados. Via de regra, o carregamento de uma peça era / é substituído por deslocamentos, ou forças aplicadas diretamente na superfície da peças a ser conformada, e sua sujeição, modelada por um engaste para restrição total dos movimentos.

Aliás, a própria área de contato teve sua implementação tardia nos programas de elementos finitos, visto que somente há pouco mais de cinco anos, foram implementados os elementos de contato de superfícies. Atualmente estão sendo realizados progressos importantes na área, em função da popularização do método dos elementos finitos e uma demanda crescente em torno da sofisticação de modelos.

### **1.3 Modelagem**

A representação dos fenômenos naturais através dos modelos idealizados, sejam de natureza analítica, experimental ou numérica, é fundamental para a ciência e tecnologia, pois permite sua predição, controle e modificação, segundo as nossas

necessidades. Por outro lado, a operacionalização das técnicas modernas de modelagem nos laboratórios - em alguns casos minimizando a importância da fenomenologia, e em outros, fazendo a apologia do experimental -, demonstram que existe uma oscilação e fragmentação de nossos critérios metodológicos no atual estágio de nossa teoria do conhecimento.

Os estudos comparativos entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais também constituem um desafio e ainda carecem de elos que justifiquem a postura hegemônica do experimento, pois como questiona VARGAS (1996), “sob o aspecto metodológico das ciências modernas, a experiência deve ser interpretada e organizada de acordo com a teoria. Portanto, o fenômeno observado e experimentado já contém a marca do pensamento humano<sup>1</sup>.” Neste sentido, nada mais “natural” que a concordância dos resultados, experimental / numérico / analítico, uma vez que estão organizadas segundo os mesmos fundamentos para a sua idealização.

Na ciência e tecnologia o experimentalismo é a referência para a maior parte dos estudos. Por outro lado, as modelagens analítica e numérica têm a seu favor o baixo custo e a diminuição do tempo necessário para simular diferentes modelos, o que os torna mais acessíveis para os estudos acadêmicos e desenvolvimentos na indústria. As simulações numéricas aumentaram o espaço de atuação dos cálculos analíticos, tanto na precisão e velocidade, quanto na flexibilidade para simulação de várias situações e modelos – vantagens adquiridas por estar atrelada a uma tecnologia que se desenvolve com extrema velocidade. Um reflexo deste novo ímpeto nas simulações teóricas é a retomada de problemas complexos, que durante muito tempo foram relegados a simplificações, mas que voltam ao centro dos questionamentos à luz destas novas

---

<sup>1</sup> “Primeiro concebo com a mente”. (Galileu)

ferramentas. Aparentemente, os problemas de contato com atrito pertencem a esta classe de problemas de engenharia.

### 1.3.1 Modelagem de Contato com Atrito

Na realidade, quando o tema contato com atrito entre superfícies é abordado, dois problemas distintos são tratados :

- contato normal - define o início do contato dos corpos e a transferência de cargas na direção normal – pressões de contato;

- contato tangencial com atrito – define a relação entre a pressão normal e as forças de resistência ao movimento, geradas pelo atrito entre superfícies;

O problema de atrito entre superfícies está tratado na literatura segundo algumas classificações. BELYTSCHKO (2000), por exemplo, faz a seguinte classificação dos modelos de atrito:

- Modelos de atrito de Coulomb, baseados na teoria clássica;
- Equações constitutivas de interface, que utilizam uma abordagem semelhante à teoria de equações constitutivas para materiais;
- Modelos que tratam de aspectos microscópicos, com lubrificação;

PLESHA et al. (1989), conciliaram a primeira abordagem - propondo que considerações macroestruturais definem a forma geral das equações constitutivas -, com a última (microestrutural), que permite a inclusão de uma idealização da superfície. Esta proposta é a mais disseminada, e agrega elementos da abordagem micro – leis de evolução do estado da superfície - na macromecânica - representada pela lei de Coulomb.

Embora as classificações sejam significativas para demarcação do objeto de estudo, elas normalmente perdem alguns aspectos essenciais ao tentar a sistematização demasiada frente aos fenômenos complexos. Uma fonte alternativa de informações para



o melhor entendimento do atrito, pode ser identificada através de uma pequena revisão histórica sobre o processo de estudo do fenômeno.

### 1.3.2 Considerações Sobre a História da Modelagem do Atrito

Não há dúvidas de que o problema atrito fazia parte das preocupações dos povos da antigüidade. A necessidade de transporte de materiais pesados – como o caso emblemático da construção das pirâmides no Egito – certamente incitava ao pensamento de como minorar os efeitos de atrito em superfícies. Embora fossem problemas relevantes, eles foram tratados essencialmente no plano da técnica. Segundo alguns registros, os primeiros estudos sistemáticos sobre atrito - de caráter experimental -, foram realizados por Leonardo da Vinci, no século XV. Ele verificou que a força de atrito é proporcional ao peso do corpo e independente da área das superfícies em contato. Leonardo ainda propôs um valor para o coeficiente de proporcionalidade entre o peso do corpo e a força de atrito ( $= 0.25$ ) – um valor que atravessaria dois séculos.

G. Amontons (1699) foi o responsável pela redescoberta destas propostas, e a partir de experimentos relacionados ao deslizamento de cordas em polias, ajustou um novo valor do coeficiente de proporcionalidade ( $= 1/3$ ) para todos os materiais testados, considerando uma pressão constante.

Dos trabalhos contemporâneos de De Camus, “*Traité des Forces do Mouvantes*”, e do cientista inglês Desaguillers (1724), “*Cours de Phisique*”, decorreram propostas de que o atrito em repouso é superior ao atrito em movimento. Desaguillers imaginava que este fenômeno seria explicado exclusivamente pelas forças moleculares entre os sólidos em contato (DUGAS; 1988).

Em 1781 a Academia de Ciências da França organizou uma competição relacionada a temas de interesse da Marinha, como deslizamento em planos inclinados e

atrito entre cordas e polias. Um capitão do Corpo de Engenheiros do Rei, Charles Coulomb, venceu esta competição propondo um trabalho experimental chamado “Théorie des Machines Simples en Ayant Égard au Frontment et à Roideur des Cordages”<sup>2</sup>.

Coulomb utilizou em seu estudo os seguintes parâmetros: os diferentes materiais das superfícies em contato com diferentes revestimentos, a pressão sob o qual as superfícies estão submetidas, a extensão das superfícies, o tempo decorrido de contato entre as superfícies, a velocidade relativa das superfícies e as condições de umidade. Os trabalhos experimentais foram realizados especialmente com a madeira, uma vez que o interesse versava sobre o deslizamento de embarcações em planos inclinados. Entretanto, Coulomb foi mais além e também estudaria o atrito entre madeira e metais, e somente entre metais, com ou sem revestimentos (DUGAS; 1988).

As principais conclusões dos trabalhos de, da Vinci, Amontons e Coulomb:

- A resistência ao movimento decorrente do atrito é proporcional à pressão;

$$t = \mu p$$

A força de atrito é proporcional à carga p. (Primeira lei de Atrito – Amontons).

- A força de atrito independe da área aparente de contato (Segunda lei de Atrito - Amontons)
- A força de Atrito independe da velocidade relativa entre os corpos (Terceira lei de atrito – Coulomb)

Coulomb promoveu a divisão do fenômeno de atrito em duas: atrito estático, resultante da força necessária para iniciar o deslizamento relativo; e atrito cinético, resultante da força requerida para manter o corpo em deslizamento. Coulomb também descartou a idéia de relação do atrito exclusivamente à adesão molecular, defendendo

---

<sup>2</sup> “Teoria das Máquinas Considerando o Atrito e a Tensão das Cordas”.

que o atrito estava relacionado principalmente ao intertravamento das rugosidades das superfícies<sup>3</sup>.

GIANNAKOPOULOS (1989), quando propôs algumas modificações na abordagem para modelagem e implementação de uma lei constitutiva de atrito, sintetizou o estado da arte para deslizamento seco entre superfícies rígidas nos seguintes aspectos:

- A força de atrito no início e durante o deslizamento é proporcional à força de contato normal. O coeficiente de proporcionalidade é conhecido como coeficiente de atrito – cinético e estático;
- O coeficiente de atrito é independente da área de contato;
- O coeficiente de atrito estático é maior do que o cinético;
- Para os casos de velocidade limitada, o coeficiente de atrito pode ser considerado constante;
- Quando ocorre o movimento tangencial, a força de atrito age na mesma direção da velocidade relativa, mas em sentido oposto;

Aparentemente, ao comparar às leis de Amontons - Coulomb com a síntese acima, o tema relacionado ao atrito pouco evoluiu nos últimos 200 anos.

Em verdade, neste tempo ocorreram proposições<sup>4</sup>, mas não impediram que a lei de Coulomb fosse extensivamente utilizada para problemas dependentes da velocidade, temperaturas, e com excelentes resultados em alguns casos.

No presente trabalho é seguida a denominação de ANAND(1993) para o fenômeno de atrito: resistência ao deslizamento. Anand segue a proposição de SUH;SIN (1983) que consideraram essenciais para a constituição da resistência ao deslizamento, a

---

<sup>3</sup> Na realidade este embate entre a escola inglesa e francesa teve vários desdobramentos, que podem ser recuperados no trabalho de BATALHA (1995).

combinação dos seguintes fatores: intertravamento das rugosidades, deformação elasto-plástica e fraturas das rugosidades, deformação plástica das camadas subjacentes à superfície de contato, adesão das superfícies, sulcagem, desgaste e arrancamento de material da superfície decorrente das rugosidades por partículas decorrentes de desgaste.

À esta multiplicidade de termos, e seus fenômenos associados sob uma única representação, ainda poderiam ser agregadas as inúmeras possibilidades de transformação da superfície mediante tratamentos térmicos. Aparentemente, o atrito é um efeito resultante da soma destes fatores e por certo que esta consideração para fenômenos tão distintos constitui um problema para o seu entendimento. Neste ponto, seria plausível retomar uma reflexão de Heinrich Hertz sobre um problema semelhante, o conceito de força.

#### **Uma Reflexão sobre Atrito**

Heinrich Hertz<sup>5</sup>, em seu “Princípios de Mecânica”, publicado em 1898, fez uma série de considerações inovadoras sobre aspectos da epistemologia da mecânica.

Entre elas, Hertz alertava para o acúmulo excessivo de fenômenos em torno dos conceitos de força, que ensejavam mais relações do que seria possível conciliar entre elas. Segundo ele, “a multiplicidade de eventos de natureza distintas sob uma mesma denominação, apenas nos conduz a um sentimento obscuro destas entidades”. Para Hertz, para responder: o que é força ? qual sua natureza ?, é necessário, inicialmente,

---

<sup>4</sup> No Anexo I é apresentada uma pequena síntese sobre os modelos correntes de atrito.

<sup>5</sup> Nascido em Hamburgo em 1857, foi um físico experimental de primeira grandeza, considerado por alguns como mais importante pensador daquela geração de filósofos cientistas que se deparou com uma crise na ciência, decorrente do abalo do paradigma newtoniano pela eletricidade e a termodinâmica. Ele estabeleceu um novo patamar de conhecimento para o estudo de contato entre superfícies, introduzindo uma abordagem analítica mais precisa. Portador de uma erudição invejável, era um estudioso de literatura e filosofia, passando ao conhecimento de árabe e sânscrito, e, poderia, não fosse a morte prematura aos 37 anos, desempenhar papel ainda mais importante nos fundamentos da ciência.

esclarecer os conceitos de cada um dos fenômenos associados à força, reduzindo o número de relações para descrevê-las. Esta ambigüidade na representação de fenômenos, segundo ele, absolutamente diferenciados, como inércia, força centrífuga, gravidade, sob um único conceito, somente vinha a dificultar o entendimento do conceito de força. Para Hertz, “removidas as contradições, estas questões não terão sido respondidas, mas nossas mentes cessarão de formular questões ilegítimas como estas”.

A referência às questões ilegítimas é uma nítida alusão a um antigo postulado sobre o qual vários cientistas apoiaram-se extensivamente, entre eles, mais tarde, o próprio Albert Einstein. Para estes pesquisadores<sup>6</sup>, as soluções principiavam por encontrar a pergunta certa para um determinado fenômeno.

Desde o tempo de Coulomb foram realizadas continuamente novas descobertas, fundamentalmente embasadas sobre o desenvolvimento tecnológico de novos instrumentos de medição. Assim, novos aspectos microestruturais e fenômenos foram agregados àquela noção bastante simples de Coulomb e incorporados ao fenômeno de atrito. Neste sentido, a complexidade do fenômeno de atrito, que de uma lei bem comportada, passou a abrigar, inclusive, efeitos de natureza caótica, foi substancialmente aumentada, mas conservou a mesma representação para a maioria das aplicações.

Assim, emulando este pequeno recorte da proposta de Hertz, talvez o fenômeno de atrito fosse passível de um questionamento semelhante, e assumindo o posicionamento destes pesquisadores, a pergunta certa seria: “O que é atrito?!”, ou talvez, “é possível manter esta diversidade de fenômenos sob um mesmo conceito?”

Infelizmente, estas discussões foram praticamente banidas do âmbito dos pesquisadores, ou, pelo menos, significativamente transferidas para o campo exclusivo

dos filósofos. Enquanto o campo da epistemologia praticamente se arrasta no ensino e na prática dos engenheiros, são procuradas algumas alternativas. Um equacionamento interessante, e adequado, para atingir um posicionamento mais privilegiado para tratamento do problema de atrito e a sua multiplicidade de fenômenos, surgiu com a possibilidade do utilizar o conhecimento gerado no âmbito da elastoplasticidade.

ODEN; MARTINS (1985), por exemplo, consideravam que a complexidade inerente ao fenômeno tornava natural um esforço para modelar fenômenos de naturezas diferentes e imaginar uma série de leis para descrição da interface. Como são os casos de modelos elastoplásticos.

### 1.3.3 A Analogia com a Elastoplasticidade

Entre as abordagens recentes, certamente uma das linhas de pesquisa mais bem sucedida, que fundamenta boa parte do esforço na pesquisa de novos modelos de atrito, está baseada nos conhecimentos da elastoplasticidade. A idéia básica consiste em transportar os benefícios do desenvolvimento teórico e implementação numérica na solução de problemas nesta área, para auxiliar na modelagem de atrito.

Um aspecto interessante desta transposição foi observado por HILL (1950). Ele identificou a origem dos critérios para determinação do escoamento de materiais, principalmente dos solos, nas propostas de Coulomb (1773), que foram aplicadas por Poncelet (1840) e Rankine (1853) em problemas relacionados a muros para contenção de deslizamento de solos.

Daquela mesma época, existem trabalhos importantes de DRUCKER (1950) (figura 1.7), explorando o estudo de leis constitutivas de material perfeitamente plástico, através de analogia com modelos de blocos rígidos deslizando sobre superfícies.

---

<sup>6</sup> Mach, Kirchoff, Helmholtz, Hertz, Maxwell, entre outros.

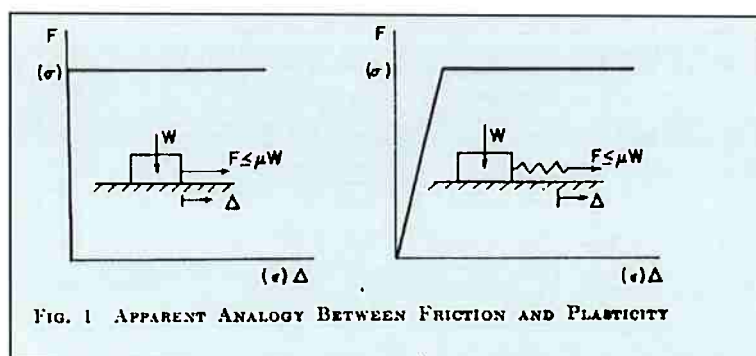


Fig. 1.7 Figura apresentada em artigo de Drucker - 1950

Neste sentido, a “proposta inovadora” dos pesquisadores contemporâneos, de apropriação da elastoplasticidade no estudo de atrito, talvez não reflita propriamente uma descoberta, mas a constatação da dualidade dos fenômenos, que já havia sido apontada pelos grandes pesquisadores da elastoplasticidade.

Um dos primeiros trabalhos a adotar a abordagem elastoplástica para estudar atrito foi realizado por FREDRIKSSON (1976). Neste artigo, ele praticamente definiu os principais aspectos para implementação de uma lei constitutiva de atrito através da elastoplasticidade: apresenta uma relação constitutiva entre as tensões de contato e o vetor de incrementos de deslizamento, um critério de deslizamento e uma lei de fluxo associada. Este desenvolvimento foi formalizado em um algoritmo para solução de problemas de contato, através da formulação incremental para pequenos deslocamentos.

FREDRIKSSON (1976) realizou alguns testes – utilizando a lei de Coulomb -, que foram comparados com experimentos para análise de tensões e deformações, baseados em fotoelasticidade, para comprovar a eficácia do programa.

O artigo que estabeleceu a fundamentação teórica para construção do modelo incremental de atrito de ANAND (1993) foi realizado por CHENG;KIKUCHI (1985).

CHENG; KIKUCHI (1985) apresentaram uma lei constitutiva incremental para o atrito entre superfícies com grandes deslocamentos, utilizando-se de medidas corotacionais para as trações e deslocamentos na interface de contato.

GIANNAKOPOULOS (1989) sistematizou a aplicação do clássico método de mapeamento de retorno para integração das equações constitutivas da elastoplasticidade no caso de atrito na interface. Este esquema de integração, logo depois seria implementado por ANAND (1993) e retomado no presente trabalho.

O mapeamento de retorno (returning mapping) é um método de integração implícito realizado na configuração atualizada nos pontos de Gauss do elemento. A base para sua aplicação é a decomposição aditiva do deslocamento tangencial em partes de adesão (elástica / reversível) e de deslizamento (plástico / irreversível).

O primeiro passo para execução do método de mapeamento de retorno consiste na integração das equações elásticas para obtenção do preditor elástico, a condição inicial para as equações do operador plástico. Este operador é definido pelo corretor plástico, enquanto as trações elásticas (calculadas pelo preditor) são relaxadas sobre a superfície de deslizamento atualizada ( $F_c$ ).

O algoritmo assume que são conhecidos no tempo  $t$ : as trações normais, o incremento de deslocamento. A atualização das trações para o tempo  $\tau = t + \Delta t$ :

1. Preditor elástico:

$$\mathbf{t}_{pre}^{\tau} = \mathbf{t} + \mathbf{C}:\Delta\mathbf{u} \quad 1.1$$

2. Corretor Plástico:

$$\mathbf{t}^{\tau} = \mathbf{t}_{pre}^{\tau} - \mathbf{C}:\Delta\lambda \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}} \quad 1.2$$



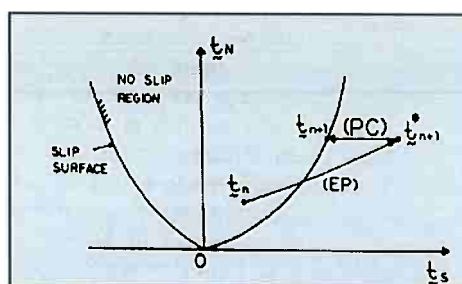


Fig. 1.8 Esquema de Mapeamento de Retorno

Na analogia entre elastoplasticidade e atrito para modelagem de interface existem algumas questões que permanecem como pontos de discussão. Um deles é referente à consideração do critério de deslizamento, - o critério de escoamento da elastoplasticidade - como uma lei não associada, decorrente da influência da pressão. Neste sentido, o critério mais apropriado seria o de Drucker Prager, construído para fenômenos elastoplásticos dependentes da pressão. Em todos os trabalhos revisados foi adotado o critério de von Mises com as simplificações explicitadas no Capítulo VI.

O primeiro trabalho a chamar a atenção sobre esta peculiaridade e propor uma analogia mais adequada foi realizado por MICHALOWSKY; MROZ (1978). Estes autores propõem a utilização de dois passos de integração para cálculo das trações na interface. Neste caso, a normal é determinada a partir das condições de equilíbrio e o critério de deslizamento (ou limite de atrito) com as leis de fluxo de velocidade definem as condições de contato tangencial.

A consideração feita por MICHALOWSKY; MROZ (1978) de fixar a tração normal e atualizar as tangenciais é aplicada no presente trabalho. Assim, a aplicação de um modelo constitutivo de contato com atrito é realizado em dois passos: atualização da normal no primeiro passo e, tomando este valor fixo da normal é aplicado o algoritmo de retorno para atualizar as trações tangenciais.

WRIGGERS et al. (1990) propuseram a resolução do problema através da aplicação de uma lei não associativa, ou seja, sem utilizar o algoritmo de dois passos. Assim as equações constitutivas (lei de deslizamento não associada) para formular a lei constitutiva de interface são as seguintes:

$$\dot{\mathbf{u}}_N^d = 0 \quad \dot{\mathbf{u}}_T^d = \lambda \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}_T} \quad 1.3$$

Neste artigo o problema de atrito é resolvido para a situação de pequenos deslocamentos.

PLESHA et al. (1989) realizaram um trabalho importante sobre a aplicação da termodinâmica das variáveis internas para acompanhamento da evolução do estado da interface.

PARISH (1989) discutiu e implementou a forma consistente da matriz de rigidez do modelo constitutivo de interface – o jacobiano - um aspecto importante para a integração das equações constitutivas, porque preserva a convergência quadrática do método de Newton Raphson.

PERIC; OWEN (1992) desenvolveram uma lei constitutiva de atrito considerando os principais aspectos dos artigos anteriores. Os autores aplicaram o método da penalidade, utilizaram o mapeamento de retorno para integração das equações constitutivas e determinaram a matriz consistente.

Aplicando o método de Lagrange aumentado, SIMO; LAURSEN (1993) desenvolveram um modelo semelhante ao anterior, embora com um nível de detalhamento superior.

SOUZA NETO et al. (1995), desenvolveram um modelo fenomenológico baseado na termodinâmica das variáveis internas, considerando o coeficiente atrito em função do trabalho de atrito ( $w$ ). Utilizando a formulação de PERIC;OWEN (1992), os

autores implementaram o seguinte algoritmo para o modelo constitutivo com encruamento:

**Modelo Constitutivo para Contato com Atrito**

1. *Decomposição aditiva da velocidade relativa tangencial:*

$$\dot{\mathbf{u}}_T = \dot{\mathbf{u}}_T^a + \dot{\mathbf{u}}_T^d$$

2. *Lei constitutiva para o componente de adesão (elástica)*

$$\mathbf{t}_T = -k_T \mathbf{u}_T^a$$

$$\mathbf{t}_N = -k_N \mathbf{u}_N$$

3. *Critério de Deslizamento*

$$f_c = q_c - \mu(w) t_N$$

4. *Lei de fluxo de deslizamento*

$$\dot{\mathbf{u}}_T^d = \dot{\lambda} \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}}$$

5. *Lei de evolução para a variável interna  $w$  (trabalho)*

$$\dot{w} = -\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}}_T^d$$

6. *Condição de carregamento e descarregamento*

$$f_c \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad f_c \dot{\lambda} = 0$$

SOUZA NETO et al. (1995), inovaram ao utilizar um processo equivalente ao encruamento por trabalho (*work hardening*) – utilizando uma variável interna de energia -, enquanto a grande parte dos trabalhos utiliza o encruamento por deformação (*strain hardening*) – variável interna cinemática -, como realizado no presente trabalho.

GEARING et al. (2001) retomaram o modelo de ANAND (1993) e o estenderam a aplicações experimentais dependentes da velocidade .

## 1.4 O Trabalho de Anand

Seguindo a proposta de FREDRIKSSON (1976), MICHALOWSKI; MROZ(1978) e CHENG;KIKUCHI (1985), ANAND (1993) realizou as seguintes hipóteses para a construção de sua lei constitutiva isotrópica de atrito:

- A decomposição aditiva do deslocamento relativo tangencial em componentes de aderência e deslizamento / escorregamento;
- Um critério para o início do deslizamento entre as superfícies;
- O deslizamento entre as superfícies é descrito por uma lei de fluxo;
- A área de contato é considerada dependente da pressão;

Para construção destes critérios foi introduzido o conceito de resistência ao deslizamento,  $s$ , uma quantidade escalar com dimensões de tensão, que representa a resistência isotrópica ao deslizamento relativo na interface.

No desenvolvimento da lei constitutiva unidimensional de Anand para grandes deslocamentos, entre as principais contribuições está a evolução das variáveis de estado – coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e resistência ao deslizamento limite ( $s^*$ ) - que descrevem a evolução do comportamento da resistência ao deslizamento  $s$ .

As considerações sobre as limitações do modelo de Anand são apresentadas:

- Apenas um dos sólidos da interface é considerado deformável. Esta limitação, amplamente utilizada nos trabalhos sobre contato, está em acordo com as situações onde as rigidezes dos corpos são significativamente diferentes. A conformação de metais, realizada pelo contato entre peça e ferramenta é um caso típico.
- Consideração de contato e deslizamento para superfícies sem lubrificação;
- A lei constitutiva é desenvolvida para uma dimensão, abrangendo processos quase-estáticos, isotrópicos e isotérmicos;

## 1.5 O Escopo do Presente Trabalho

Fundamentalmente, o presente trabalho propõe uma releitura sobre a implementação das leis constitutivas no âmbito da elastoplasticidade para tratamento do problema de contato com atrito. Neste sentido, esta tese tem um viés metodológico como em VARGAS (1985): “o método refere-se ao caminho percorrido pelo investigador durante a sua pesquisa”. Assim, pretende-se que este trabalho, fundamentado na analogia entre a elastoplasticidade e o atrito na interface, seja um alento à retomada de um tema estudado, principalmente no início da década de 90, conforme a breve revisão bibliográfica realizada anteriormente.

O ponto de partida para os avanços realizados no presente trabalho é o artigo de ANAND (1993), onde ele desenvolve uma lei constitutiva para deslizamento isotrópico para grandes deslocamentos. O presente trabalho propõe um modelo isotrópico com algumas modificações, incorporando a possibilidade de solução de problemas bi-dimensionais e introduz duas novas leis constitutivas:

- **Modelo Misto** - no artigo de CHENG; KIKUCHI (1985) é apresentada uma interessante proposição – que não foi desenvolvida em qualquer outro trabalho - sobre a existência de um efeito de encruamento cinemático no movimento de deslizamento cíclico. Os autores retomam a evidência experimental de COURTNEY-PRATT; EISNER (1957) para amparar a sua proposta.

O modelo proposto por ANAND (1993) é adequado para considerar o efeito de modificações isotrópicas com a distância de deslizamento. Entretanto, conforme evidências experimentais também ocorrem transformações na condição de deslizamento quando o corpo é submetido ao carregamento cíclico (o sentido de carregamento é

alternado). Para abordar este problema é retomado o conceito de “encruamento cinemático” da elastoplasticidade e introduzida uma outra variável de estado no modelo – análoga à tensão de fundo, ou referência, “back stress”. Assim, o modelo proposto por esta tese incorpora os efeitos de isotropia e encruamento cinemático, constituindo o que na terminologia da elastoplasticidade é identificado como modelo misto de encruamento.

- **Modelo anisotrópico.** Seguindo a proposta metodológica de aplicação da elastoplasticidade para o caso de atrito, o modelo isotrópico é estendido para o caso de anisotropia. A anisotropia é caracterizada pela utilização de diferentes coeficientes de atrito e resistências limite ao deslizamento para as direções.

A opção pela manutenção dos problemas em estado quase-estático e isotérmico foi uma medida de ordem metodológica. É considerado que a extensão destes modelos para resolução de problemas dependentes da temperatura e velocidade devem ser um seguimento natural para o esforço empreendido neste trabalho. Para tanto, estes efeitos estão apresentados na formulação geral para os modelos isotrópico e misto. Por outro lado, os resultados experimentais utilizados para comparação das leis constitutivas neste trabalho, segundo os seus autores (TONG; ANAND(1993)), dão conta que estes fenômenos não influenciaram significativamente os resultados.

O caminho percorrido para estudar as leis constitutivas de atrito, é apresentado segundo a ordem:

- Lei constitutiva normal;
- Lei Constitutiva Elástica (aderência);
- Lei Constitutiva de Atrito Isotrópica ;
- Lei Constitutiva de Atrito Mista (Isotrópica e Cinemática);
- Lei Constitutiva de Atrito Anisotrópica;

## 1.6 O Programa

Um dos desafios na utilização de aplicativos comerciais do método dos elementos finitos está na decodificação e entendimento do conteúdo dos programas. Uma parte significativa de usuários – e pesquisadores – utiliza o aplicativo como uma “caixa preta”, desconhecendo o conteúdo das principais operações do programa. Por outro lado, existem os defensores do “refazimento” dos programas de elementos finitos, em sua integralidade.

Se por um lado é condenável a utilização indiscriminada, sem o conhecimento da teoria envolvida na solução de um problema, não é passível de poucas críticas a eterna “reinvenção da roda”, onde cada grupo de pesquisa projeta-se na execução de seu próprio programa. Com este procedimento demonstram o desconhecimento de uma regra básica científica: apropriação do conhecimento para o embasamento dos avanços. Neste caso, evidentemente é ressaltada a execução de programas de préstimo puramente didático. O presente trabalho opta pela posição intermediária, adotando o programa Abaqus<sup>7</sup>, como módulo de solução (solver) principal do problema, e a sua reconhecida eficácia no âmbito acadêmico para soluções de problemas não lineares. A sua permeabilidade para incorporar novos elementos, e leis constitutivas, sejam, elastoplásticas, ou de atrito, favorecem a sua utilização em trabalhos de cunho acadêmico. As leis constitutivas de atrito desenvolvidas neste trabalho foram implementadas em Fortran 90 e introduzidas no módulo disponível no Abaqus, FRIC, adequado para implementação de leis constitutivas de interface.

---

<sup>7</sup> Versão 5.75.

## 1.7 Capítulos

Os Capítulos foram ordenados de maneira a organizar os conhecimentos de contato com atrito no âmbito dos elementos finitos aplicados à mecânica dos sólidos. Assim, foram primeiro dispostos os elementos básicos da mecânica do contínuo e em seguida enunciado o princípio de equilíbrio implementado no programa. Posteriormente, feita uma revisão sobre alguns conceitos da elastoplasticidade para fundamentar a analogia com o atrito.

Na seqüência são dispostos os elementos sobre a cinemática de contato e as leis constitutivas, que ao final do trabalho são acopladas ao princípio de equilíbrio desenvolvido no início do trabalho.

### **Capítulo II – Mecânica do Contínuo e Equilíbrio**

Normalmente, um problema não linear envolve a solução de um problema de elastoplasticidade com atrito. No problema elastoplástico, a formulação será desenvolvida para absorver casos de grandes deformações e grandes deslocamentos. Isto torna necessária a introdução dos conceitos de cinemática para a construção de medidas de deformação, e a discussão da objetividade para construção de modelos constitutivos.

Embora seja amplamente disseminado o Princípio dos Trabalhos Virtuais, no programa Abaqus foi optado pela forma de equilíbrio em taxa, o Princípio de Velocidades Virtuais, ou ainda Princípio da Taxa de Trabalho Virtual. As vantagens e desvantagens desta opção ainda são tema de debates e não serão abordadas neste trabalho. São apresentados neste capítulo, os principais passos para montagem deste princípio de equilíbrio, implementado no módulo de solução do programa.



### **Capítulo III - Lei Constitutiva da Elastoplasticidade**

A solução de um problema da mecânica dos sólidos necessariamente deve considerar as diferenças de comportamento sob o carregamento, entre os diversos materiais. Neste capítulo são introduzidas as equações constitutivas, com medidas objetivas para geração do modelo do comportamento do material. A lei constitutiva é apresentada em sua forma incremental, apropriada para montagem do algoritmo e integração.

### **Capítulo IV – Contato com Atrito**

Neste capítulo são apresentados os aspectos da cinemática de grandes deslizamentos e definidas as medidas objetivas de tração e deslizamento, para o problema de contato com atrito entre superfícies.

### **Capítulo V – Equações Constitutivas para Contato com Atrito**

São apresentados os modelos constitutivos para o contato normal – implementado no programa Abaqus – e para o atrito na interface, em forma incremental.

No tópico referente à lei constitutiva para atrito são desenvolvidos os principais elementos da analogia entre elastoplasticidade e atrito: decomposição aditiva, critério de deslizamento, lei de fluxo de deslizamento e lei de encruamento.

### **Capítulo VI – Lei Constitutiva de Atrito Isotrópica**

São apresentadas a formulação e implementação da lei constitutiva de atrito isotrópica. Parte do formalismo e da implementação desta lei constitutiva foi desenvolvido por CHENG; KIKUCHI (1985). Este trabalho recebeu um significativo incremento com desenvolvimento de uma lei constitutiva de atrito isotrópica,

desenvolvida por ANAND (1993), amparada em evidências experimentais do encruamento das condições de deslizamento em função da distância de deslizamento. Nesta capítulo é apresentada uma lei constitutiva com alguns aspectos diferenciados, desenvolvida no presente trabalho.

### **Capítulo VII– Lei Constitutiva de Atrito Mista**

Neste capítulo a idealização de CHENG; KIKUCHI (1985), sobre os efeitos de encruamento cinemático na interface de deslizamento é levada a termo, associada ao efeito de isotropia. São apresentadas a formulação e implementação das leis constitutivas de atrito mista (isotrópica e cinemática).

### **Capítulo VIII – Lei Constitutiva de Atrito Anisotrópica**

O desenvolvimento da lei isotrópica bi-dimensional possibilitou estender o modelo para o caso anisotrópico, adotando resistências ao deslizamento diferenciadas para as direções  $x$  e  $y$  (1 e 2) no plano de deslizamento. São apresentadas a formulação e implementação das leis constitutivas de atrito anisotrópicas.

### **Capítulo IX - Contato e o Princípio das Velocidades Virtuais**

Neste capítulo é demonstrado como o termo referente ao contato / atrito – a sua contribuição para a matriz de rigidez global - é acoplado ao Princípio das Velocidades Virtuais.

## **Capítulo X – Resultados**

Seguindo os trabalhos de ODEN; PIRES (1983) e WRIGGERS et al (1990), foi realizado um experimento numérico para verificar a adequação da lei constitutiva normal disponível no Abaqus, com alguns parâmetros sugeridos por estes pesquisadores. Na seqüência são apresentados resultados dos estudos qualitativos realizados para a teste das leis constitutiva mista bi-dimensional e anisotrópica.

Para referenciar o modelo numérico com aplicações são realizados dois estudos comparativos com resultados experimentais. A lei constitutiva mista é verificada segundo um experimento de compressão e deslizamento, e os resultados da lei constitutiva isotrópica são comparados com a aplicação de um caso de extrusão.

## **Capítulo XI – Conclusões**

## CAPÍTULO II

### MECÂNICA DO CONTÍNUO E EQUILÍBRIO

#### 2.1 Cinemática

##### 2.1.1 Notação

. Vetor – representado por letras minúsculas em negrito.

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$$

. Tensor de segunda ordem - representado por letras maiúsculas em negrito.

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

. Tensor de quarta ordem – representado por letra maiúscula em negrito/italico

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

##### 2.1.2 Conceitos da Cinemática

TRUESDELL(1966) no seu artigo “Rational Mechanics of Materials”, propõe os três elementos primitivos sobre os quais deve ser construída a mecânica: corpo, espaço-tempo e sistema de forças.

##### . *Corpo*

Um corpo é uma região regular do espaço euclidiano, formado por pontos materiais associados às propriedades físicas como massa, velocidade, etc..., chamados partículas  $\mathbf{p}$ . Os corpos sempre compõem uma geometria e, portanto, ocupam um volume no espaço.

### *. Espaço - Tempo Euclidiano*

Considerando um espaço euclidiano formado por pontos  $\mathbf{x}$ , independentes do tempo  $t$ . Um corpo  $B$  pode ser mapeado em regiões deste espaço, ocupando uma região denominada configuração - o corpo é observável somente na configuração. No tempo de referência  $t_0$  ( $t = 0$ ), a configuração (de referência) é denotada por  $\Omega_0$  e no tempo atual  $t = \tau$  é chamada de configuração presente,  $\Omega_\tau$ . Existe uma correspondência entre cada posição da partícula  $\mathbf{p}$  à uma posição  $\mathbf{x}$ , definida através de um mapeamento  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ . Supondo a existência de uma seqüência de mapeamentos, ordenada pela variável tempo, a configuração do corpo é definida:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t) \quad 2.1$$

Considerando uma configuração de referência no instante  $t_0$ , a posição da partícula  $\mathbf{p}$  é mapeada nesta configuração pela expressão  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}_0(\mathbf{p}, t)$ . Esta configuração é necessária para referenciar a evolução da geometria e das propriedades do corpo material. Assim, a partícula  $\mathbf{p}$  pode ser representada em sua configuração de referência através da seguinte função:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$$

Os mapeamentos realizados em função da variável  $\mathbf{X}$  são denominados material ou lagrangeano. Caso sejam dependentes da posição  $\mathbf{x}$ , a descrição é chamada espacial ou euleriana<sup>1</sup>.

### *. Movimento*

O movimento de um corpo, consiste na seqüência temporal de suas configurações.

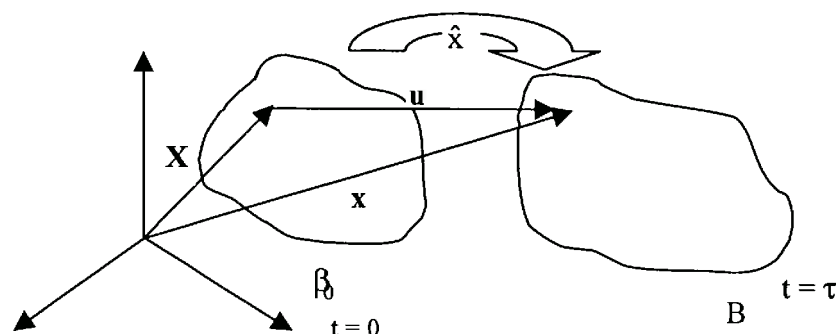


Fig. 2.1 Configurações Inicial e Final de um Corpo

Considerando a figura 2.1, o movimento do corpo  $B$  no tempo  $t = \tau$  é uma função  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, \tau)$  que localiza o ponto material  $\mathbf{p}$  no tempo  $\tau$ . A função do movimento pode ser invertida,  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}, \tau)$ , o que possibilita a obtenção da configuração de referência a partir da configuração presente.

O vetor de deslocamentos dos pontos do corpo é definido como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \text{onde} \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$$

$\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos da partícula.

### . Gradiente de Deformação

Para descrição da deformação é definido o gradiente de deformação, relacionando os vetores  $d\mathbf{X}$  – da configuração de referência – , com o vetor  $d\mathbf{x}$  da configuração presente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{onde} \quad \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\mathbf{X}} \quad 2.2$$

<sup>1</sup> Embora estas denominações sejam consagradas na literatura, Truesdell afirma que o sistema de descrição material (Lagrange) foi introduzido por Euler (1762), e a espacial (Euler) por d'Alembert 1753.

O gradiente de deformação pode ser expresso em função dos deslocamentos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \frac{d}{d\mathbf{X}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ e } \det \mathbf{F} > 0$$

Esta função garante que, a cada ponto  $\mathbf{X}$  na configuração de referência existe apenas um único ponto  $\mathbf{x}$  na configuração atualizada. A restrição  $\det \mathbf{F} > 0$  exclui a auto-penetração durante um processo de deformação.

De acordo com o teorema de decomposição polar, o gradiente de deformação pode ser decomposto em extensão e rotação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{X})\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{X}) \tag{2.3}$$

$\mathbf{U}(\mathbf{X})$  – tensor (direito) de extensão – material.

$\mathbf{V}(\mathbf{x})$  - tensor (esquerdo) de extensão – espacial.

$\mathbf{R}(\mathbf{X})$  - tensor de rotação que conecta as configurações material e espacial.

$\mathbf{R}$  é ortogonal i.e.  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  ;  $\det \mathbf{R} = 1$

### 2.1.3 Medidas de Deformação

A deformação é a grandeza mecânica que estabelece a relação entre a cinemática e a lei constitutiva do material. Existem várias medidas para mensurar a deformação elástica e plástica de um sólido. Uma das mais utilizadas é o tensor direito de deformação de Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \tag{2.4}$$

Este tensor é referenciado na configuração inicial e chamado de **Green-Lagrange** (tensor de deformação material):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad 2.5$$

A deformação na configuração presente é definida pelo **tensor de Almansi** (tensor de deformação espacial) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad 2.6$$

onde  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  é o tensor esquerdo de deformação.

Para deformação plástica, as medidas de deformação logarítmica são bastante utilizadas, fato motivado principalmente pela pequena parcela de deformação elástica em relação à plástica.

A escolha da medida mais apropriada para deformação está relacionada à sua facilidade e adequação para representar a cinemática, e a relação constitutiva de determinado problema. Neste aspecto, ainda é importante considerar a possibilidade de adoção de medidas de deformação diferenciadas para a cinemática e para a lei constitutiva.

#### 2.1.4 Taxa de Deformação

A expressão da deformação em função do tempo é fundamental para problemas não lineares, e para representação de leis constitutivas definidas em taxas. Tanto os processos dependentes do tempo, e mesmo em algumas situações não dependentes do tempo é necessário considerar a velocidade e a derivada material de algumas variáveis.

A representação da velocidade – taxa de mudança da posição espacial  $\mathbf{x}$  - de uma partícula é definida:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad 2.7$$

A velocidade entre duas partículas, na configuração presente:



$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad 2.8$$

$\mathbf{L}$  = gradiente espacial de velocidade

A derivada no tempo do gradiente de deformação:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \nabla_0 \mathbf{v} \quad 2.9$$

$\nabla_0 \mathbf{v}$  = gradiente material de velocidade

A derivada da velocidade em relação às coordenadas espaciais:

$$\nabla_x \mathbf{v} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right) = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad 2.10$$

Assim,  $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}$

O gradiente de velocidade pode ser decomposto em partes, simétrica,  $\mathbf{D}$ , e anti-simétrica,  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad 2.11$$

onde  $\mathbf{D} = \text{sym} \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$  taxa de deformação

$\mathbf{W} = \text{skw} \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$  tensor de rotação (spin)

A taxa de deformação  $\mathbf{D}$  representa na configuração presente, a mesma medida que a taxa de deformação de Green  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  na configuração de referência.

As duas medidas estão relacionadas por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}^{-1} \quad 2.12$$

### 2.1.5 O Tensor de Velocidade Angular $\boldsymbol{\Omega}^2$

Na ausência de deformação  $\mathbf{D} = 0$ , e apenas com o movimento de corpo rígido, o tensor  $\mathbf{W}$  torna-se igual ao tensor de velocidade angular,  $\boldsymbol{\Omega}$ .

<sup>2</sup> Parte deste tópico, foi baseado em DRIEMEIER (2001)

Considerando as bases:

$$\mathbf{e}^g = \{\mathbf{e}_1^g, \mathbf{e}_2^g, \mathbf{e}_3^g\} \quad - \text{base ortonormal fixa no espaço (global).}$$

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\} \quad - \text{base ortonormal na configuração inicial.}$$

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad - \text{base ortonormal na configuração presente.}$$

O tensor de rotações  $\mathbf{R}$  faz o mapeamento  $\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{E}_i$ . Desta maneira, podem ser definidos dois tensores de rotação, referenciando a rotação da base de referência e atualizada à base global:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{R}_L \mathbf{e}^g \quad \mathbf{R}_L \text{ - tensor de rotação lagrangeano}$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}_E \mathbf{e}^g \quad \mathbf{R}_E \text{ - tensor de rotação de euler}$$

A variação no tempo da base atualizada – considerando que  $\mathbf{e}^g$  não varia no tempo:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{R}}_E \mathbf{e}^g$$

$$\text{Se } \mathbf{e}^g = \mathbf{R}_E^T \mathbf{e}_i, \text{ então:}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{R}}_E \mathbf{R}_E^T \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\Omega}_E \mathbf{e}_i \quad 2.13$$

$\boldsymbol{\Omega}_E$  é tensor de velocidade angular da base euleriana ou espacial. Este tensor é fundamental para representação das medidas de tensão e deformação na base corotacional. A formulação corotacional, é construída a partir de um sistema de coordenadas para cada ponto material, possibilitando a rotação de cada sistema com o movimento do corpo.

Considerando a relação entre os componentes de um tensor  $\mathbf{T}$ , nas bases  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}^g$ :

$$\mathbf{T}^E = \mathbf{R}_E^T \mathbf{T}^{e^g} \mathbf{R}_E$$

O superescrito define a base dos componentes do tensor. Se  $\mathbf{e}$  é a base fixa, a derivada temporal desta equação:

$$\frac{d\mathbf{T}^E}{dt} = \mathbf{R}_E^T \dot{\mathbf{T}}^{e^g} \mathbf{R}_E$$

Se a base  $\mathbf{e}$  é móvel,

$$\mathbf{R}_E \frac{d\mathbf{T}^E}{dt} \mathbf{R}_E^T = \dot{\mathbf{T}}^{e^g} + \mathbf{R}_E \dot{\mathbf{R}}_E^T \mathbf{T}^{e^g} \mathbf{R}_E \mathbf{R}_E^T + \mathbf{R}_E \mathbf{R}_E^T \mathbf{T}^{e^g} \dot{\mathbf{R}}_E \mathbf{R}_E^T$$

Definição da derivada temporal corotacional:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^{e^g} - \boldsymbol{\Omega}_E \mathbf{T}^{e^g} + \mathbf{T}^{e^g} \boldsymbol{\Omega}_E \quad 2.14$$

### 2.1.6 A Decomposição Aditiva da Taxa de Deformação

Para problemas de plasticidade com pequenas deformações é possível realizar a decomposição aditiva do tensor de deformações, entre partes elástica e plástica. Esta suposição não é válida para o caso de grandes deformações, e, portanto, outras formas de decomposição devem ser encontradas.

Uma abordagem extensivamente utilizada nos programas de elementos finitos é baseada na hipoelasticidade, que utiliza a decomposição aditiva das taxas de deformação elástica e plástica. Um dos problemas nesta formulação é referente ao surgimento de tensões residuais decorrentes dos ciclos de deformações elásticas. Por outro lado, esta característica criou as condições para o surgimento de chamada hiperelasticidade baseada na decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.

Considerando um corpo sob carregamento, com deformações elástica e plástica. Removido o carregamento, ocorrerá o retorno elástico – a deformação associada com o descarregamento é  $(\mathbf{F}^e)^{-1}$  (LEE;1969). A deformação plástica  $\mathbf{F}^p$  do material, após este retorno:

$$\mathbf{F}^p = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{F}$$

A partir desta relação é possível definir a deformação total:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad 2.15$$

Retomando a relação  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  (configuração presente), resulta:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1}$$

$$\text{onde } \mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}$$

$$\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1}$$

Os materiais metálicos em geral suportam pequena deformação elástica (o módulo elástico é normalmente, duas a três ordens de grandeza superior à tensão de escoamento). Esta consideração permite a seguinte aproximação:

$$\mathbf{L} \approx \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad 2.16$$

Tomando a parte simétrica desta adição:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad 2.17$$

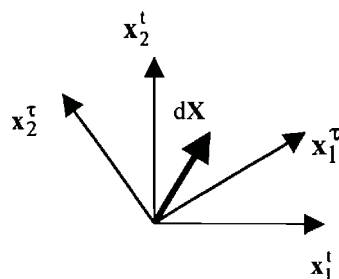
$$\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{L}) \quad \mathbf{D}^e = \text{sym}(\mathbf{L}^e) \quad \mathbf{D}^p = \text{sym}(\mathbf{L}^p)$$

A taxa de deformação portanto, é a parte simétrica do gradiente de velocidade na configuração presente ou espacial.

### 2.1.7 Objetividade

As medidas objetivas são necessárias para expressar as medidas de tensão e deformação, sem a influência do movimento de corpo rígido.

Considerando o movimento de corpo rígido com a rotação da base:



O vetor  $d\mathbf{X}$  permanece fixo, relacionado às duas bases  $\mathbf{x}_i^t$  e  $\mathbf{x}_i^\tau$ :

$$d\mathbf{X}^\tau = \mathbf{Q}(t)d\mathbf{X}^t$$

onde  $\mathbf{Q}$  é um tensor de rotação:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Considerando o movimento:

$$\hat{\mathbf{x}}^\tau(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\hat{\mathbf{x}}^t(\mathbf{X}, t)$$

Derivado no tempo:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}^\tau(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\hat{\mathbf{x}}^t(\mathbf{X}, t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\hat{\mathbf{x}}}^t(\mathbf{X}, t)$$

ou,

$$\mathbf{v}^\tau = \dot{\mathbf{Q}}(t)\hat{\mathbf{x}}^t(\mathbf{X}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}^t \quad \text{portanto, a velocidade não é objetiva em}$$

função do surgimento de um terceiro termo relativo à variação da rotação.

## 2.2 Leis de Balanço

TRUESDELL (1966) afirmou que a mecânica procura conectar os seus três elementos primitivos – corpo, movimento e força – para formular modelos descritivos do comportamento de materiais, através de duas instâncias:

1. Postular princípios comuns a todos os corpos: leis de conservação para força e torque – ou, conservação do momento linear e angular.

2. Formular equações constitutivas para descrever o comportamento de materiais diferentes.

O primeiro requisito - os princípios da mecânica - são descritos na seqüência:

### 2.2.1 Conservação da Massa

A massa do corpo B é conservada em todas as configurações, desde que o corpo não sofra desmembramento. Este princípio está representado na relação abaixo:

$$\frac{d}{dt}m(B, t) = 0; \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_t \quad 2.18$$

$$m = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V_t} \rho_t dV_t = \text{const.}$$

Como o valor da integral é constante, ela pode ser realizada na configuração inicial, onde a geometria do corpo é conhecida. Portanto,

$$\rho \det \mathbf{F} = \rho_0; \quad \rho_0 = \hat{\rho}(\mathbf{X}, 0)$$

$\rho(\mathbf{X}, t)$  e  $\rho_0$  são a massa por unidade de volume nas configurações presente e de referência (inicial). O jacobiano J, relaciona o volume da configuração de referência com o volume da configuração presente, e representa uma medida da evolução do volume dos elementos:

$$dV = JdV_0 \quad 2.19$$

### 2.2.2 Equilíbrio

As leis de conservação do momento linear e angular relacionam os movimentos e os esforços. Estas relações, aplicadas ao corpo no instante t:

. Momento linear

$$l(B, t) = \int_{V_t} \rho_s \dot{\mathbf{u}} dV; \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad 2.20$$

. Momento Angular

$$\mathbf{a}(B, t) = \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho_s \ddot{\mathbf{u}} dV; \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{0} \quad 2.21$$

A variação do momento linear no tempo :

$$\dot{\mathbf{i}}(\mathbf{B}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{B}, t) \quad 2.22$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}, t) = \int_{\partial V_t} \mathbf{t} dA + \int_{V_t} \rho \mathbf{b} dV$$

define a força resultante  $\mathbf{f}$  aplicada ao corpo.

A variação do momento angular no tempo:

$$\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{B}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{B}, t) \quad 2.23$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{B}, t) = \int_{\partial V_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA + \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV$$

define o momento  $\mathbf{m}(\mathbf{B}, t)$  destas forças em relação à origem. Os esforços  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  são as trações superficiais, e  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ , as forças de campo por unidade de volume. As posições são medidas pelo vetor  $\mathbf{r}$ . Os volumes em  $t$  são indicados como  $V_t$ , enquanto as áreas de superfície externas são denotadas como  $\partial V_t$  ou  $S_t$ .

Considerando o Teorema de Cauchy ( $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ ), é possível relacionar as trações com as tensões. As formas integrais acima podem ser convertidas em formas diferenciais aplicando o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}; & \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0}; & \mathbf{f} &= \mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad 2.24$$

Dependendo da configuração e da medida de tensão escolhida, podem ser derivadas diferentes expressões a partir desta equação de equilíbrio. Na configuração presente, a medida de tensão adequada é  $\boldsymbol{\sigma}$ , chamado tensor das tensões verdadeiras, ou tensor de Cauchy.

---

## 2.3. Equilíbrio – O Princípio das Velocidades Virtuais

### 2.3.1 Forma Local / Integral

A solução exata de um problema de mecânica dos sólidos requer o equilíbrio de forças e momentos em todo instante de tempo  $t$ . O método de elementos finitos, baseado nos deslocamentos, considera a aproximação deste equilíbrio, por um requerimento mais “fraco”: o equilíbrio deve ser mantido sobre um número finito de divisões do volume do corpo.

O equilíbrio exato - cada ponto material deve satisfazer à equação de equilíbrio - na forma diferencial, é apresentado, Eq. (2.24):

---


$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$$

onde,  $\mathbf{f} = \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$

$\mathbf{b}$  = forças de volume.

$\rho \ddot{\mathbf{u}}$  = forças de inércia.

$\rho$  = massa por unidade de volume.

$\boldsymbol{\sigma}$  = tensor de tensões de Cauchy.

A forma fraca é obtida pela integração do produto da equação de equilíbrio por um vetor de funções “teste”, definida em todo o volume. A função teste pode ser imaginada como um campo virtual de velocidades  $\delta \mathbf{v}$ , independente do tempo, com valores distintos no espaço, contínuo até a ordem necessária, e obedecendo às restrições cinemáticas (cinematicamente admissíveis). Esta forma de equilíbrio é chamada de



Princípio das Velocidades Virtuais. O produto escalar do campo de velocidades virtuais com as equações de equilíbrio, representa a taxa de trabalho virtual<sup>3</sup>.

Considerando um corpo em equilíbrio no tempo  $t$ ; a taxa de trabalho realizado :

$$\int_{V_t} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{V_t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad 2.25$$

resolvendo a integral pela regra da cadeia,

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) = \delta \mathbf{v} \cdot \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{v})$$

$$\int_{V_t} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{v} dV$$

$$\int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dV = \int_{S_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_{V_t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad 2.26$$

$\mathbf{t}$  representa o vetor de trações superficiais e satisfaz à condição  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}$ .

Esta integral resolvida na configuração deformada / presente é também conhecida como Lagrange atualizado (updated Lagrange). Na configuração de referência, Lagrange totalizada (total Lagrange).

A variação do gradiente de velocidades virtuais, representado por  $\delta \mathbf{L}$ , pode ser decomposta no gradiente de velocidade de deformação  $\delta \mathbf{D}$  (simétrico) e no gradiente de velocidade de rotação  $\delta \mathbf{W}$  (anti-simétrico):

$$\delta \mathbf{L} = \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{W} \quad 2.27$$

<sup>3</sup> A interpretação física da taxa dos trabalhos virtuais: a taxa de trabalho feito pelas forças externas sujeita a um campo de velocidades virtuais, é igual a taxa de trabalho feita pelas tensões de equilíbrio na taxa de deformação do mesmo campo de velocidades virtuais.

$$\delta \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T); \quad \delta \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{L} - \delta \mathbf{L}^T)$$

Considerando a simetria do tensor de tensões (somatório de momentos = 0), o produto tensorial entre um tensor simétrico  $\boldsymbol{\sigma}$ , e outro anti-simétrico,  $\mathbf{W}$ , é nulo. A expressão acima é simplificada utilizando apenas a taxa de deformação  $\mathbf{D}$ . Portanto, o par conjugado - medidas de tensão e deformação - para a expressão do equilíbrio é composto por: tensão de Cauchy<sup>4</sup> e a taxa de deformação.

### 2.3.2 Princípio das Velocidades Virtuais – Forma Incremental

Supondo o movimento  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  ocorrido no intervalo  $t \in [0, \infty)$ . O equilíbrio das taxas de trabalho virtual, interno e externo, nas configurações discretas  $[1, 2, \dots, n, n+1, \dots)$  é representado por:

$$G = \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dV - \int_{S_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{V_t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad 2.28$$

$$\text{e, } \Delta G = 0$$

Para determinar  $\Delta G$  é necessário obter a geometria no instante  $t + \Delta t$  para o cálculo dos valores de deslocamentos, deformações e tensões. São conhecidos: o incremento nos esforços externos aplicados e o valor atualizado das condições de contorno.

Inicialmente, para calcular a integral da taxa de trabalho virtual interno é utilizada a geometria anterior, que é conhecida. Esta modificação exige a representação do par conjugado na configuração de referência :

<sup>4</sup> É adotada a tensão de Cauchy, porque consiste na principal medida de interesse prático em engenharia.

$$G = \int_{V_0} \text{tr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{L})dV_0 - \int_{S_i} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}dS - \int_{V_i} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}dV \quad 2.29$$

O Jacobiano  $J$  foi incluído na expressão para representação do trabalho virtual interno na configuração de referência. Considerando a definição de gradiente de velocidade e as propriedades do produto interno, este termo pode ser representado :

$$\int_{V_0} \text{tr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{L})dV_0 = \int_{V_0} \text{tr}\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{x}}\right)dV_0 = \int_{V_0} [\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}^T : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}} \mathbf{F}^{-1}]dV_0 = \int_{V_0} [\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}^T : \mathbf{F}^{-T} : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}]dV$$

$$\int_{V_0} \text{tr}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{L})dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{P}^T : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}dV_0$$

considerando o primeiro tensor de Piola-Kirchoff (  $\mathbf{P}$  ) :

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

Tomando o incremento da expressão:

$$\Delta G = \Delta \int_{V_0} \text{tr}\left(\mathbf{P} : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}\right)dV_0 - \Delta \left[ \int_{S_i} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}dS + \int_{V_i} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}dV \right] \quad 2.30$$

Se o campo de deslocamentos virtuais independe do tempo, o termo relativo ao trabalho interno pode ser modificado :

$$\Delta \int_{V_0} \text{tr}\left(\mathbf{P} : \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}\right)dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial\delta\mathbf{v}^T}{\partial\mathbf{X}} : \Delta\mathbf{P}dV_0$$

$$\text{onde } \Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{J}\Delta\mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}$$

$$\text{Se } \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} , \quad \Delta\mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} : \Delta\mathbf{F}^{-1} = 0$$

$$\text{ou } \Delta\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} : \Delta\mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1}$$

Desta forma:

$$\Delta \int_{V_0} \text{tr} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{P} \right) dV = \int_{V_0} \text{tr} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{F}^{-1} \left( \frac{\Delta J}{J} \boldsymbol{\sigma} - \Delta \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \right) J \right] dV$$

fatorizando a inversa do gradiente de deformação :

$$\Delta G = \Delta I - \Delta E \quad 2.31$$

$$\Delta I = \int_{V_1} \text{tr} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \left( -\Delta \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \frac{\Delta J}{J} \right) \right] dV$$

$$\Delta E = \Delta \int_{S_1} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \Delta \int_{V_1} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV$$

Esta expressão pode ser apresentada de forma mais adequada, para demonstrar a dependência em relação aos incrementos de deslocamento e velocidade. Para tal é considerado :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}; \quad \Delta \mathbf{F} = \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}}$$

de forma que :

$$\Delta \mathbf{F} : \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \Delta \mathbf{l}$$

$$\det \mathbf{F} = J; \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J \mathbf{F}^{-T}$$

Assim o incremento de G pode ser calculado para a configuração atualizada:

$$\Delta I = \int_{V_1} \text{tr} \left[ \delta \mathbf{L} : \left( -\Delta \mathbf{l} \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \frac{\Delta J}{J} \right) \right] dV$$

O gradiente de deformação e o seu incremento devem ser especializados para realizar o cômputo indicado. O resultado obtido pode ser apresentado na forma :

$$\Delta I = \int_{V_i} \delta \mathbf{L} : (-\boldsymbol{\sigma} \Delta \mathbf{I}^T + \Delta \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \Delta \mathbf{I}) dV \quad 2.32$$

Já que  $\frac{\Delta J}{J} = \mathbf{F}^{-T} : \Delta \mathbf{F}$ .

Com relação à contribuição das forças de corpo ao trabalho externo :

$$\Delta \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV = \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{f} dV + \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \Delta dV$$

$$\Delta dV_i = \Delta(J dV_0) = \Delta J dV_0 = \frac{\Delta J}{J} dV ; \quad dV = J dV_0$$

onde  $V_0$  é o volume de referência . Portanto,

$$\Delta \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV = \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \left( \Delta \mathbf{f} + \mathbf{f} \frac{\Delta J}{J} \right) dV$$

De forma análoga, a contribuição das trações ao trabalho externo :

$$\Delta \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS = \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{t}) dA + \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \Delta dA = \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot \left( \Delta \mathbf{t} + \frac{\Delta I}{I} \mathbf{t} \right) dA$$

$$\Delta dA = \Delta(I dA_0) = \frac{\Delta I}{I} dA ; \quad I = \frac{dA}{dA_0} \quad A_0 \text{ é a área de referência.}$$

A partir dos resultados anteriores, a expressão para determinação do incremento de  $G$  entre duas configurações sucessivas pode ser sintetizada por:

$$\Delta G = \Delta I - \Delta E \quad 2.33$$

$$\Delta I = \int_{V_i} \delta \mathbf{L} : (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \Delta \mathbf{I}^T + \text{tr} \Delta \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}) dV$$

$$\Delta E = \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot \left( \Delta \mathbf{t} + \frac{\Delta I}{I} \mathbf{t} \right) dA + \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot \left( \Delta \mathbf{f} + \frac{\Delta J}{J} \mathbf{f} \right) dV$$

O equilíbrio deve ser verificado na configuração  $n$  (instante  $t$ ) e na configuração seguinte,  $n+1$  (instante  $t+\Delta t$ ) – chamada discretização temporal. A solução deste problema passa pela resolução de um sistema de equações, que pode ser realizada através de uma forma totalizada, fazendo  $G_t = 0$  e após  $G_{t+\Delta t} = 0$ , ou de uma forma incremental  $\Delta G = 0$ .

O método dos elementos finitos discretiza o contínuo em elementos, ou seja, utiliza a chamada discretização espacial. Para a solução de um problema de mecânica dos sólidos pelo método dos elementos finitos baseado nos deslocamentos, são necessárias as funções de interpolação para determinar os incrementos de deslocamento. Como no Princípio de Velocidades Virtuais é considerada a aplicação de um campo de velocidades, os incrementos de deslocamento são provenientes da composição entre velocidades e tempo. Estas funções são diferentes para cada tipo de elemento. No presente trabalho, é considerado o caso geral de elemento sólido, e os deslocamentos e as velocidades podem ser interpoladas no espaço tridimensional :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^N; \quad \mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{v}^N; \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{x})$$

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{N}\delta\mathbf{v}^N; \quad \delta\mathbf{L} = \mathbf{B}_L\delta\mathbf{v}^N; \quad \mathbf{B}_L = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{x}}$$

Assim a expressão :

$$\Delta G = \delta\mathbf{v}^T \cdot \Delta\mathbf{F}; \quad \Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{F}_i - \Delta\mathbf{F}_e \quad 2.34$$

$$\Delta\mathbf{F}_i = \int_{V_i} \mathbf{B}_L^T \cdot (\Delta\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\Delta\mathbf{l}^T + \text{tr}\Delta\mathbf{l}\boldsymbol{\sigma}) dV$$

$$\Delta\mathbf{F}_e = \int_{S_i} \mathbf{N}^T \cdot (\Delta\mathbf{t} + \frac{1}{A_0} \partial_N A) dA + \int_{V_i} \mathbf{N}^T \cdot (\Delta\mathbf{f} + \frac{1}{V_0} \partial_N V) dV$$

que representam o desbalanceamento entre os esforços interno e externo.

## CAPÍTULO III

### LEI CONSTITUTIVA DA ELASTOPLASTICIDADE

Conforme citado no capítulo anterior, TRUESDELL (1966) enunciou as equações constitutivas dos materiais, como o segundo fator para conexão dos três elementos primitivos da mecânica – corpo, movimento e força – para formular modelos descritivos do comportamento de materiais. Isto porque, se por um lado as leis de equilíbrio são satisfeitas por todos os corpos, independente das suas propriedades mecânicas, a experiência demonstra que os princípios gerais da mecânica não são suficientes para determinar as tensões nos corpos. Este fato é simplesmente comprovado pela aplicação de um mesmo carregamento a dois corpos constituídos de materiais distintos: seus comportamentos são diferentes. Desta constatação, surge uma outra grande área da mecânica referente à representação da variedade de materiais: **equações constitutivas**.

TRUESDELL (1966) afirmou que uma teoria geral para equações constitutivas deve estar amparada sobre três princípios:

#### *. Princípio do Determinismo*

Fundamentalmente, as equações constitutivas determinam o estado de tensão de um corpo a partir da história de seu movimento. O conhecimento do movimento de todas partículas do corpo no presente, e em todo tempo passado é suficiente para determinar o estado presente da tensão na partícula. Portanto, as deformações e tensões podem ser determinadas a partir do histórico do gradiente de deformação;

#### *. Princípio da Ação Local*

Este princípio é uma restrição ao determinismo da equação constitutiva, que considera a possibilidade de ações à distância. Assim, devem ser consideradas apenas as forças presentes na região que delimita a partícula.

#### *. Princípio da Objetividade*

Uma equação constitutiva obedece ao princípio da objetividade, se para um movimento de partículas, observado de dois pontos distintos no espaço, determina a mesma tensão para ambos. De outra forma, a resposta do material é indiferente ao observador.

### **3.1 Termodinâmica com Variáveis de Estado**

A descrição de equações constitutivas através da história do gradiente de deformação é uma tarefa difícil (SOUZA NETO; 2003) e a alternativa encontrada é a adoção da termodinâmica de variáveis internas. Segundo esta abordagem, em qualquer instante do processo termodinâmico, o estado em um dado ponto material  $p$  é determinado através do conhecimento de um número finito das variáveis internas, que podem ser escalares, vetores ou tensores associados aos mecanismos dissipativos. O estado termodinâmico é caracterizado pelos valores instantâneos destas variáveis.

A escolha das variáveis internas para construir um modelo constitutivo é um fator essencial para descrição do comportamento de uma partícula material. A escolha das variáveis está vinculada a critérios não só relacionados ao tipo de material, como às possibilidades de medição da variável, e ao acoplamento entre o processo de deformação e o material (SOUZA NETO; 2003).

Um modelo elastoplástico pode ser definido através do formalismo de termodinâmica das variáveis internas (para formulação hiperelástica), postulando:



1. Um potencial de energia livre;
2. Uma função de escoamento – para definir o início do escoamento;
3. Um potencial dissipativo – utilizado para derivação da lei de fluxo das variáveis internas;

### 3.1.1 Energia Livre

A função de energia livre  $\psi$  é um potencial termodinâmico que mensura a energia de deformação, e a energia dissipada. Devido à sua natureza, esta função necessita ser convexa nas variáveis internas – esta condição garante o cumprimento da segunda lei da termodinâmica.

Embora nem sempre seja possível escrever uma função de energia livre  $\psi$ , quando ela existe é dependente do conjunto de variáveis: componente elástica do tensor de pequenas deformações ( $\epsilon^e$ ), temperatura ( $\theta$ ), gradiente de temperatura ( $\text{grad } \theta$ ) e um conjunto de variáveis internas ( $s_\alpha$ ). Fundamentalmente, a evolução de todos os fenômenos no material pode ser considerada como uma seqüência de estados de equilíbrio, e o conhecimento das variáveis - deformações elásticas, temperatura, e o seu gradiente -, suficiente para descrever os fenômenos internos e a evolução da degradação do material. As hipóteses adicionais relativas à existência de superfície de escoamento, normalidade e associatividade, permitem obter estas variáveis.

As variáveis de estado,  $s_\alpha$ , normalmente caracterizam as mudanças micro-estruturais decorrentes de fenômenos plásticos. Como exemplos, esta variável pode ser um vetor  $\alpha$ , para identificar a translação da superfície de escoamento (back stress) - característico do encruamento cinemático -, ou como um escalar, como a deformação plástica acumulada  $\bar{\epsilon}^p$ , ocorrida no encruamento isotrópico.

Utilizando a hipótese de decomposição aditiva, supõe-se a decomposição da energia livre  $\psi$  do material, em componentes elástica, e plástica:

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{s}_\alpha) &= \psi & 3.1 \\ \psi &= \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi_p(\mathbf{s}_\alpha); & \psi_e = \hat{\psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e); & \psi_p = \hat{\psi}_p(\boldsymbol{\varepsilon}^q, \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}); \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^q = \int_0^t \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p dt; \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Considerando a restrição de Rice<sup>1</sup> - a suposição de decomposição aditiva das deformações é um dos fundamentos para construção de um modelo constitutivo elasto-plástico. Conforme verificado no capítulo anterior,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad 3.2$$

Assumindo que a porção elástica é derivável do potencial de energia de deformação elástica:

$$\psi_e = \frac{1}{2} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad 3.3$$

Considerando a seguinte definição de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad 3.4$$

onde  $\mathbf{C}^e$  é o tensor de elasticidade.

Os modelos de plasticidade independentes da taxa de deformação possuem uma região onde a resposta é puramente elástica, e o seu limite é definido pela função de escoamento.

<sup>1</sup> A decomposição aditiva das taxas de deformações pode ser feita apenas para materiais com pequenas deformações elásticas.

### 3.1.2 Superfície de Escoamento

Em plasticidade, normalmente está implícito nas equações de escoamento à condição de que o material não apresenta falhas internas. Neste trabalho, são considerados os materiais metálicos dúcteis, incompressíveis, com um comportamento de encruamento isotrópico.

Enquanto a tensão de escoamento determina o limite de deformação elástica para o caso unidimensional, para os problemas multiaxiais é exigida a definição de um critério de escoamento. Existem alguns critérios para caracterizar o escoamento do material. O mais antigo foi definido por Tresca, baseado na afirmação de que o escoamento do material terá início quando a máxima tensão cisalhante do material for alcançada. Mais tarde, Richard Von Mises sugeriu que o limite entre o comportamento elástico e plástico do material fosse definido pela energia de distorção. Este critério passou a ser a referência fundamental para a maior parte dos trabalhos de mecânica dos sólidos, principalmente por sua adequação para implementação numérica.

Segundo CHABOCHE;LEMAITRE (1994), a maioria dos metais exibe um comportamento de encruamento anisotrópico. Porém, em várias situações é possível simplificar esta complexidade adotando o comportamento isotrópico, principalmente sob o carregamento monotônico, ou seja, quando a tensão mantém-se em um sentido constante no espaço de tensões.

Um material pode ser considerado isotrópico, se a superfície que define o domínio elástico depende apenas de um parâmetro escalar. Assim, a isotropia de um material pode ser caracterizada pelas componentes de tensão e a variável de encruamento.

$$f(\boldsymbol{\sigma}, S_y) = 0$$

representando a função através dos invariantes do tensor de tensões,

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, S_y) = 0$$

$$\sigma = S - p\mathbf{I}; \quad S = \text{tensão deviatórica} \quad S_y = \text{tensão de escoamento}$$

$$\text{e a pressão hidrostática } p = -\frac{1}{3} \sigma : \mathbf{I}$$

a representação de  $S$  através dos seus invariantes :

$$s_{II} = \frac{1}{2} \text{Tr}(S^2)$$

$$s_{III} = \frac{1}{2} \text{Tr}(S^3)$$

Assim, a função de critério de escoamento para materiais compressíveis:

$$f(s_{II}, s_{III}, S_y) = 0$$

Os escalares classicamente empregados para caracterização do encruamento isotrópico dos materiais são: a deformação plástica acumulada, para o chamado processo de encruamento por deformação (strain hardening),

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \dot{\epsilon}^p dt;$$

e o trabalho plástico dissipado, também chamado encruamento por trabalho (work hardening).

$$w_p = \int_0^t \sigma(\tau) : \dot{\epsilon}(\tau) d\tau$$

Considerando que os metais em geral apresentam a propriedade de incompressibilidade, independentes com relação à tensão hidrostática, é possível representar os critérios de escoamento apenas no plano deviatórico.

É retomado o desenvolvimento anterior para a função de escoamento de von Mises, com a função simplificada para materiais incompressíveis  $f(s_{II}, S_y) = 0$ , e

adotando como variável interna a deformação plástica equivalente, dependente da deformação plástica acumulada

$$f = q - S_y; \quad f \leq 0 \quad 3.5$$

$$S_y = \hat{S}_y(s^\alpha)$$

Onde a tensão equivalente é  $q = \left( \frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2}$ .

A função de escoamento é um escalar e constitui um critério para delimitar o estado elástico e plástico. Enquanto  $f < 0$ , o material permanece sob regime elástico - a deformação plástica acontece somente quando  $f = 0$ . Durante o carregamento plástico, as tensões devem permanecer na superfície de escoamento tal que  $\dot{f} = 0$ , também chamada de condição de consistência.

As condições de carregamento e descarregamento<sup>2</sup>:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} f = 0$$

A primeira condição indica que o multiplicador plástico é sempre não negativo, e a segunda que o estado de tensões deve permanecer sobre o limite ou dentro da superfície de escoamento. A última condição assegura que a tensão permanece sobre o limite de escoamento durante o fluxo plástico. Esta condição pode ser enunciada através da condição de consistência.

### 3.1.3 O Fluxo Plástico

A deformação plástica dos metais resulta do deslizamento entre os cristais, ou seja, ocorre um cisalhamento intercrystalino governado pelas tensões tangenciais. O encruamento isotrópico é a manifestação macroscópica do aumento na densidade de discordâncias em todas as direções, que com o fluxo, tem a tendência a desenvolver

intertravamentos entre os cristais. Esta aproximação do fenômeno de plasticidade, a evolução (lei de fluxo) da superfície de escoamento, pode ser realizada através de apenas uma variável escalar. Normalmente, a variável escolhida é a deformação plástica equivalente acumulada (CHABOCHE;LEMAITRE, 1994).

Assim, a deformação inelástica é definida por uma lei de fluxo plástico:

$$\varepsilon^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad 3.6$$

F é a função potencial de fluxo plástico, e  $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$  define a direção do fluxo plástico.

A taxa do fluxo plástico  $\dot{\lambda}$ , é determinada a partir da aplicação da condição de consistência.

Para alguns modelos da plasticidade, a direção do fluxo é a mesma da direção normal à superfície de escoamento no espaço de tensões. Estes modelos, que abrangem a maioria dos metais são chamados associativos, e as funções potencial e limite são iguais :

$$f = F$$

De maneira geral, a regra de normalidade é respeitada para os metais, mas no caso de materiais granulares, dependentes da pressão hidrostática, ou materiais danificados, este requisito não é observado. Assim, a função de escoamento deve ser especialmente desenvolvida para modelar a influência da pressão, ou do arranjo de fissuras e vazios no material.

A forma de taxa da lei de fluxo é fundamental para a teoria de plasticidade incremental, porque ela permite expressar a história da deformação por plastificação, um fenômeno não linear, que não admite o princípio da superposição de efeitos.

---

<sup>2</sup> Também chamadas de condições de Kuhn Tucker.

Para completar o modelo constitutivo são necessárias as leis associadas aos mecanismos dissipativos, ou seja, a definição das leis de evolução para as variáveis internas:

$$\dot{s}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad 3.7$$

### Relações Constitutivas para a Plasticidade

#### 1. Decomposição Aditiva da taxa de deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

#### 2. Taxa de Tensão

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

#### 3. Lei de Fluxo Plástico

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

#### 4. Evolução das variáveis internas

$$\dot{s}^\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

#### 5. Condição de Escoamento

$$f = q - S_y = 0$$

Então, o problema constitutivo pode ser enunciado: “Dados os valores iniciais das variáveis internas  $s_\alpha$  e a história do tensor de deformações, encontrar as funções de  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau})$  - tensor de tensões - e  $s_\alpha(\boldsymbol{\tau})$  - grupo de variáveis internas -, tal que as equações constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{e} \quad \dot{s}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

sejam satisfeitas para todo tempo. O tensor de tensões – dependente da história de deformações - é a solução do problema constitutivo inicial.

## 3.2 Modelo Constitutivo Hipoelástico

Considerando um modelo hipoelástico<sup>3</sup>, onde as deformações elásticas são pequenas comparadas às plásticas. Nestes modelos a função potencial não é definida, e é assumida a decomposição aditiva da taxa de deformação, em componentes elástica e plástica, representadas pelas medidas espaciais de deformação:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad 3.8$$

Para determinar o par conjugado desta medida de deformação, deve ser adotada uma taxa de tensão objetiva.

### 3.2.1 Medidas Objetivas de Taxas de Tensão

Para formular as equações constitutivas – expressas em termos de taxa – é necessário introduzir uma taxa objetiva da tensão de Cauchy como par conjugado. As três principais de taxas objetivas são: Jaumann, Truesdell<sup>4</sup> e Green-Naghdi.

Considerando a relação constitutiva objetiva  $\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}^J : \mathbf{D}^e$ , a taxa de Jaumann é expressa:

$$\sigma^{\nabla J} = \dot{\sigma} - \mathbf{W}\sigma - \sigma\mathbf{W}^T \quad 3.9$$

A taxa material para o tensor de tensões de Cauchy:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^J : \mathbf{D} + \mathbf{W}\sigma + \sigma\mathbf{W}^T \quad 3.10$$

O primeiro termo é a taxa de mudança devido à resposta material. Os dois termos restantes são a mudança da tensão devido à rotação.

A diferença da taxa de Jaumann em relação à Green-Naghdi está na medida de rotação utilizada. Enquanto a taxa de Jaumann utiliza o spin, a taxa de Green Naghdi emprega a velocidade angular  $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ . Assim,

<sup>3</sup> O modelo implementado no programa Abaqus é hipoelástico.

<sup>4</sup> A taxa de Truesdell é definida pela derivada do tensor de tensão segundo Piolla-Kirchoff.



$$\sigma^{\nabla G} = \dot{\sigma} - \Omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \Omega^T \quad 3.11$$

Esta medida objetiva para a taxa de tensão, é a utilizada pelo programa Abaqus<sup>5</sup>.

Considerando um tensor constitutivo constante, a relação entre a tensão de Cauchy e a taxa de deformação pode ser expressa em sua forma corotacional :

$$\sigma^{\nabla} = C^e : D^e$$

$$D^e = \frac{1}{2} (L^e + L^{eT});$$

onde  $D^e$  é a razão de extensão elástica do material.

O tensor de quarta ordem  $C^e$ , constante, determina o comportamento elástico do material, para quaisquer valores de tensão. Escrevendo o módulo elástico em termos da deformação volumétrica e deviatórica,

$$C^e = 2\mu J + \lambda II \quad 3.12$$

$J$  and  $I$  são tensores de quarta e segunda ordem, respectivamente.

$\delta_{ij}$  = delta de Kronecker;

$\mu$  e  $\lambda$  = coeficientes de Lamé. São propriedades do material que podem ser expressas em termos do módulo Elástico ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

### 3.3 Relações Constitutivas para a Plasticidade

Considerando a lei de fluxo do escoamento plástico :  $D^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$  3.13

E as variáveis internas:  $\dot{s}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha}$  3.14

---

<sup>5</sup> A partir deste ponto é assumido para simplificar a notação que  $\sigma^{\nabla G} = \sigma^{\nabla}$

Efetuando as substituições:  $\sigma^{\nabla} = C^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = C^e : (\mathbf{D} - \dot{\lambda}\mathbf{N})$

3.15

### 3.3.1 Consistência Plástica

Para determinar o comportamento plástico do material, é necessário calcular o multiplicador plástico no espaço de sua definição. Para tal, qualquer que seja a superfície de escoamento considerada, a função de carregamento/descarregamento em relação à mesma, deve observar as condições de Kuhn-Tucker:

$$f(\sigma, s^{\alpha}) \leq 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad \dot{\lambda}f(\sigma, s^{\alpha}) = 0$$

Aplicando a condição de consistência:

$$\begin{aligned} f = 0 \\ f^{\nabla} = 0 \end{aligned} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma^{\nabla} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} s^{\alpha \nabla} = 0$$

Considerando,

$$\sigma^{\nabla} = C^e : \mathbf{D}^e$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p$$

a partir da condição de consistência:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : [C^e : (\mathbf{D} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma})] + \frac{\partial f}{\partial \alpha} s^{\alpha \nabla} = 0$$

Desta forma, o multiplicador plástico é definido:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} s^{\alpha \nabla}} \quad 3.16$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : \mathbf{D}; \quad e \quad L = H + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C^e : \mathbf{D}$$

L = módulo de encruamento do material.

### 3.3.2 Módulo Tangente

As taxas de tensões podem ser relacionadas às taxas das deformações, utilizando o módulo tangente associado à matriz constitutiva do material,

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \hat{\mathbf{C}}^{ep} : \mathbf{D} \quad 3.17$$

$$\hat{\mathbf{C}}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\left[ \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s^{\alpha}} s^{\alpha \nabla}} = \mathbf{C}^e - \frac{1}{L} \mathbf{C}^e : \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e$$

#### Relações Constitutivas para a Plasticidade (Hipoelasticidade)

1. *Decomposição Aditiva da taxa de deformação*

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$$

2. *Taxa de Tensão*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$$

3. *Lei de Fluxo Plástico*

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

4. *Evolução das variáveis internas*

$$\dot{s}^{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha}$$

5. *Condição de Escoamento*

$$f = q - S_y = 0$$

6. *Condição de Carregamento e Descarregamento*

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} f = 0$$

7. *Multiplicador Plástico*

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}$$

8. *Taxa de tensão*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \hat{\mathbf{C}}^{ep} : \mathbf{D}$$

### 3.4 Implementação da Lei Constitutiva Elastoplástica

A decomposição da taxa de deformação em partes elástica e plástica simplifica a aplicação de um algoritmo para integração numérica das equações. Por outro lado, apresenta um inconveniente: como a deformação plástica é definida em forma de taxa, e o comportamento do material modifica bruscamente no escoamento, ocorrem alguns problemas numéricos no procedimento de integração. Assim, a integração das equações constitutivas é realizada em duas etapas:

#### *.Atualização do estado do material elastoplástico*

O fenômeno de plasticidade é dependente da história de deformação plástica acumulada. Isto torna necessário escrever as equações constitutivas na forma de taxa, ou seja, o processo é descrito em um “pseudo-tempo”. A partir desta taxa é obtida a forma incremental da equação constitutiva que pode ser integrada, por vários tipos de algoritmos.

No procedimento incremental, a cada passo de cálculo, o processador envia ao modelo constitutivo as deformações e as variáveis internas no instante  $t$ , passo  $n$ , e o incremento de razão de deformação entre os instantes  $t$  e  $t+\Delta t$ .

O algoritmo de integração constitutivo:

*. Dados:  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ,  $\mathbf{s}_n^\alpha$  no tempo  $t$ ;*

*. Dado: incremento de deformação  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ;*

*. Calcular:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $\mathbf{s}_{n+1}^\alpha$  no tempo  $t + \Delta t$ ;*

*. Satisfazendo a condição de consistência  $\Delta f = 0$ ;*

*. Calcular a tensão atualizada no tempo  $t+\Delta t$  :*

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$$

. *Determinação da matriz de rigidez consistente (Jacobiano).*

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}^{\nabla}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$$

A geração da matriz consistente é necessária para garantir a convergência quadrática do método de Newton-Raphson aplicado às equações de equilíbrio.

### 3.4.1 Equação Constitutiva Incremental - Esquema de Integração

As componentes de tensão objetivas em forma incremental no instante  $t+\Delta t$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\nabla} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}_{n+1}^e \quad 3.18$$

Com:

$$\mathbf{D}_{n+1}^e = \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_{n+1}^p$$

$$\mathbf{D}_{n+1}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}_{n+1} \quad \mathbf{N}_{n+1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}$$

Para garantir que os valores atualizados de tensão e das variáveis internas satisfaçam a condição de escoamento, tal que  $f_{n+1} = 0$ , - e a solução permaneça sobre a superfície de escoamento - a determinação do fator multiplicativo  $\dot{\lambda}$ , deve ser proveniente da condição de consistência. Este caso, determina a escolha de um esquema de integração implícita<sup>6</sup>.

Existem vários algoritmos de integração, e neste trabalho será adotado o método de Euler Retroativo – implementado no programa Abaqus - a partir das conclusões de ORTIZ; POPOV(1985). Neste método, os incrementos de deformação plástica e variáveis internas são calculados ao final do passo de integração – assim com a condição de escoamento.

<sup>6</sup> No caso explícito  $f_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, s_{n+1}^{\alpha}) \neq 0$ , ou seja não garante a condição de escoamento do material.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{n+1} &= \mathbf{D}_n + \Delta \mathbf{D} \\
\mathbf{D}_{n+1}^p &= \mathbf{D}_n^p + \Delta \mathbf{D}^p \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^v &= \mathbf{C}^e : (\mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_{n+1}^p) \\
f_{n+1} &= f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, s_{n+1}^\alpha) = 0
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Considerando,

$$\Delta \mathbf{D}_{n+1}^p = \mathbf{D}_{n+1}^p - \mathbf{D}_n^p \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_{n+1}^p)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{C}^e : (\mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n^p - \Delta \mathbf{D}_{n+1}^p) \\
&= \mathbf{C}^e : (\mathbf{D}_n + \Delta \mathbf{D} - \mathbf{D}_n^p - \Delta \mathbf{D}_{n+1}^p) \\
&= (\boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{D}) - \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{D}_{n+1}^p = \boldsymbol{\sigma}^{pr} - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{N}_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{pr} - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{N}_{n+1} \tag{3.20}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{pr}$  é tensão tentativa do preditor elástico e  $-\Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{N}_{n+1}$  é o corretor plástico, que retorna a tensão preditora para a tensão de escoamento presente, ao longo da direção especificada pelo fluxo plástico.

Assim, para a aplicação do esquema de mapeamento de retorno são realizados três passos:

1. *Aplicação do preditor elástico  $\boldsymbol{\sigma}_{pr}$ , que é uma progressão no espaço de tensões na direção normal à superfície de escoamento;*

$$\boldsymbol{\sigma}_{pr} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{D} \tag{3.21}$$

A fase do preditor elástico é conduzida pelo incremento de deformação total.

2. *Verificar se a tensão preditora é superior à tensão de escoamento*

Se  $q_{pr} - S_y(s_\alpha) \leq 0$  então  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{pr}$   $q_{pr}$  = tensão preditora equivalente

Caso  $q_{pr} - S_y(s_\alpha) > 0$ ,

3. É realizada a etapa de correção plástica que retorna o valor do preditor para a superfície de escoamento;

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{pr} - C^e : \Delta D^p \quad 3.22$$

$$C^e : \Delta D_{n+1}^p = \Delta \lambda_{n+1} C^e : N_{n+1} \quad 3.23$$

A fase do corretor plástico é conduzida pelo incremento do multiplicador plástico.

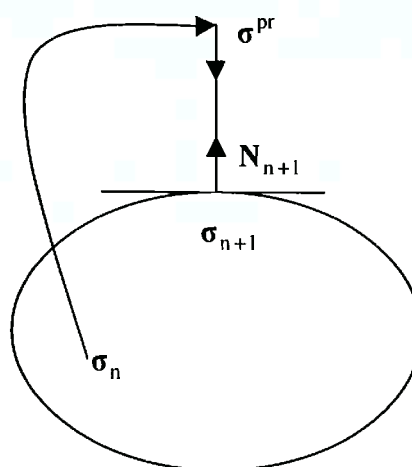


Fig 3.1 Esquema Preditor Elástico - Corretor Plástico

Para cálculo do incremento do multiplicador plástico é considerada a função de escoamento em  $f_{n+1}$ :

$$f_{n+1} = q_{n+1} - S_{y_{n+1}};$$

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1}}; \quad S_{n+1} = \sigma_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma_{n+1} \mathbf{I}$$

Tomando a condição de consistência em forma corrotacional para determinação do multiplicador plástico:

$$\Delta f^v = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \Delta \sigma^v + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta s^\alpha = 0 \quad 3.24$$

$$\Delta \sigma^v = C^e : \Delta D^e$$

$$\Delta \sigma^{\vee} = C^e : (\Delta \mathbf{D} - \Delta \mathbf{D}^p)$$

$$\Delta \mathbf{D}^p = \Delta \lambda \mathbf{m}$$

Então,

$$\Delta \sigma^{\vee} = C^e : (\Delta \mathbf{D} - \Delta \lambda \mathbf{N})$$

$$\text{se } \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathbf{m}$$

$$\Delta f^{\vee} = \mathbf{N} \cdot [C^e : (\Delta \mathbf{D} - \Delta \lambda \mathbf{m})] + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta s^{\alpha} = 0$$

Assim,

$$\Delta \lambda = - \frac{\mathbf{N} C^e : \Delta \mathbf{D} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta s^{\alpha}}{\mathbf{N} C^e : \Delta \mathbf{D}}$$

Assim, o incremento de tensão é definido:

$$\Delta \sigma^{\vee} = C^e : \left( \Delta \mathbf{D} - \frac{\mathbf{m} \cdot C^e : \Delta \mathbf{D} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta s^{\alpha}}{\mathbf{m} \cdot C^e : \Delta \mathbf{D}} \cdot \mathbf{m} \right)$$

### 3.5 A Matriz Consistente (Jacobiano)

Para garantir a convergência quadrática do método de Newton na solução das equações de equilíbrio geradas pelo método dos elementos finitos é necessário definir a contribuição para a matriz de rigidez através do jacobiano, ou matriz consistente.

Considerando o Jacobiano como a relação entre incrementos de tensão e deformação:

$$\mathbf{M}_{n+1} = \frac{\partial \Delta \sigma^{\vee}}{\partial \Delta \mathbf{D}} \quad 3.25$$

O Jacobiano não será desenvolvido, mas pode ser verificado em SOUZA NETO (2003), BELYTSCHKO (2000).



### 3.6 A Plasticidade com Encruamento Misto

A densidade de discordâncias, mencionada em 3.1.3, pode estar acompanhada de um outro fenômeno, decorrente das incompatibilidades geradas durante as deformações plásticas locais de um cristal para outro, o que provoca deformações permanentes diferentes nos cristais. Este fenômeno microscópico, torna-se particularmente importante quando são aplicados carregamentos cíclicos de tração e compressão (CHABOCHE;LEMAITRE, 1994).

A maioria dos metais experimenta uma variação em suas propriedades mecânicas durante os ciclos. No efeito Bauschinger - característica apresentada por metais em testes de tração, seguida de compressão - ocorre um encruamento na tração, e um “amolecimento” na compressão, de forma que, esta nova tensão de escoamento à compressão, é menor do que a tensão de escoamento seria no caso de um carregamento de compressão com o material sem deformação.

Uma variável escalar não permite representar os efeitos alternados de encruamento observados no carregamento cíclico, e surge a necessidade de criar uma outra variável, de natureza vetorial (ou tensorial) para representar o fenômeno. Uma variável considerada suficiente para caracterizar este efeito é a deformação plástica.

No encruamento cinemático linear o domínio elástico mantém suas dimensões, mas sofre uma translação no espaço de tensões principais. O centro de domínio elástico representa o estado neutro de tensões.

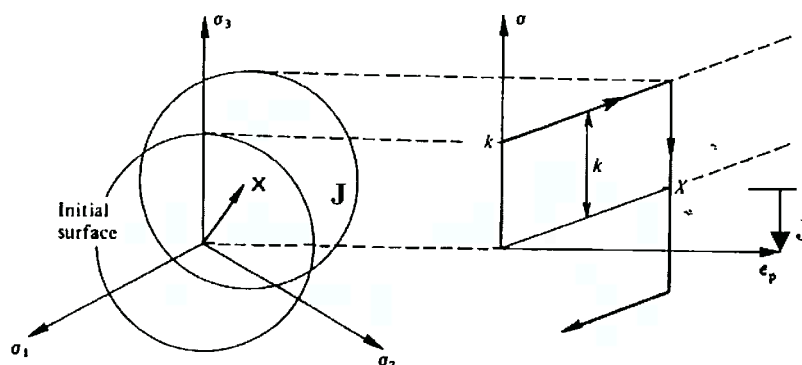


Figura 3.2 Encruamento Cinemático

Este modelo desenvolvido por Prager no início da década de 50, foi o primeiro desenvolvido para anisotropia, embora, naquele momento, Hill já desenvolvesse boa parte de seu critério.

Desta maneira, o encruamento isotrópico, associado a uma variável escalar para mensurar a densidade de deslocamentos, passa a incorporar uma variável vetorial para caracterizar as incompatibilidades internas geradas pela deformação plástica.

As variáveis internas, de natureza escalar ou vetorial, representam o estado corrente do material, ou seja, o estado de encruamento. O encruamento cinemático corresponde à translação da superfície de escoamento, caracterizada por uma variável  $J$  (figura 3.2), de natureza vetorial, chamada tensão de fundo (back stress), para denotar a posição atualizada da superfície de carregamento.

$$f = (\sigma - J) - S_y$$

Considerando o critério de Von Mises, a função passa a ser representada por:

$$f = q^r - S_y \quad \text{onde} \quad q^r = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{J}) : (\mathbf{S} - \mathbf{J})}$$

O encruamento cinemático material, é definido em Prager:

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \mathbf{J} = \eta \mathbf{D}^p \quad \eta = \text{fator de encruamento}$$

**Relação Constitutiva para Plasticidade com Encruamento Misto**

1. *Decomposição Aditiva da taxa de deformação*

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$$

2. *Taxa de Tensão*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^e \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$$

3. *Condição de Escoamento*

$$f = q^r - S_y = 0$$

4. *Lei de Fluxo Plástico*

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

4. *Encruamento isotrópico*

$$S_y = S_y(s_\alpha)$$

5. *Encruamento cinemático*

$$\mathbf{J} = \eta \mathbf{D}^p$$

6. *Condição de Carregamento e Descarregamento*

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} f = 0$$

7. *Multiplicador Plástico*

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}; \quad L = H + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}$$

8. *Taxa de tensão*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \hat{\mathbf{C}}^{ep} : \mathbf{D}$$

## CAPÍTULO IV

### CINEMÁTICA DE CONTATO

Dois corpos em contato podem ser considerados deformáveis, rígidos, ou constituir um par rígido – deformável. O último modelo é adotado nas situações onde existe uma diferença acentuada entre o módulo de elasticidade das superfícies em contato – típica modelagem de conformação mecânica: ferramenta – rígida , peça – deformável.

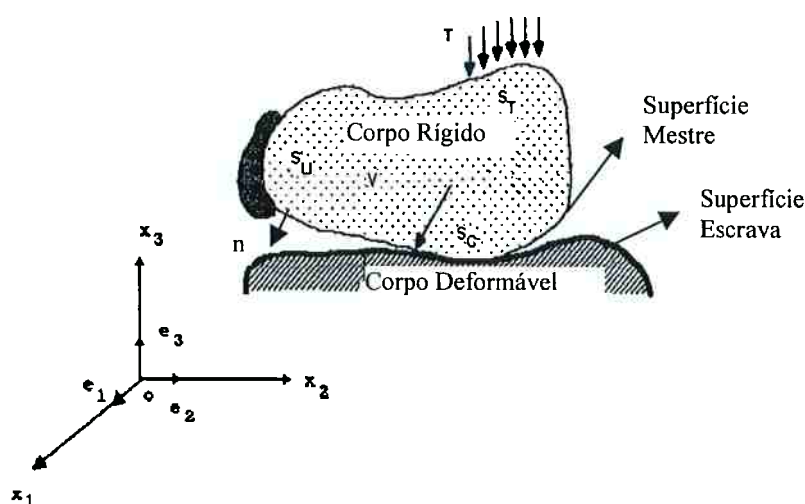


Fig. 4.1 Representação de Dois Corpos (rígido – deformável) em Contato

As superfícies envolvidas no contato são denominadas: mestre<sup>1</sup> e escrava<sup>2</sup>. As superfícies podem apresentar a seguinte segmentação:  $S_T^l$  onde trações são aplicadas,  $S_U^l$  onde deslocamentos são prescritos,  $S_C^l$  onde ocorre o contato com a superfície de um segundo corpo, através da superfície  $S_C^c$ . Se existe um movimento relativo entre estes corpos, ocorrem modificações temporais nas condições de contato de um par de pontos.

As alternativas para caracterização desta mudança incluem: contato aberto e fechado. Sendo verificada a condição de contato fechado, surgem outras duas possibilidades na interface: os pontos das superfícies podem estar em condições de aderência - onde não existe movimento relativo entre os pontos -, ou em deslizamento relativo (escorregamento).

Dois pontos em contato permanecem nesta condição enquanto a magnitude da tensão equivalente tangencial ( $q_c$ ) do vetor de tração presente, mantém-se menor que a resistência ao deslizamento ( $s$ ). Nessas condições, não existe movimento relativo entre os pontos e verifica-se a relação:

$$\Delta \mathbf{u}_T = \Delta \mathbf{u}_T^c \quad i = 1,2$$

onde o termo  $\Delta \mathbf{u}_T$  é o vetor de incremento de deslocamento tangencial na direção  $i$  do corpo deformável, enquanto  $\Delta \mathbf{u}_T^c$  é o vetor de incremento de deslocamento tangencial na mesma direção do corpo rígido. A outra condição a ser respeitada é relativa à manutenção do contato fechado: para o contato não tornar-se aberto, o incremento do deslocamento normal  $\Delta u_N$  dos corpos devem ser iguais.

#### 4.1 Cinemática de Contato

Considerando dois corpos em contato identificados como peça e ferramenta, denotados por  $B^+$  e  $B^-$ . O movimento dos corpos em relação a configuração de referência  $B_0^+$  e  $B_0^-$  é descrito por:

$$\mathbf{x}^+ = \hat{\mathbf{x}}^+(\mathbf{p}^+, t) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^- = \hat{\mathbf{x}}^-(\mathbf{p}^-, t)$$

---

<sup>1</sup> Na literatura podem ser encontradas outras denominações: rígida, alvo.

$\mathbf{p}$  indica a posição do ponto material no tempo  $t = 0$ . No tempo  $\tau = t + \Delta t$ , o movimento dos corpos em relação às suas configurações presentes:

$$\xi^+ = \hat{\mathbf{x}}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) \quad \text{e} \quad \xi^- = \hat{\mathbf{x}}_t^-(\mathbf{x}^-, \tau)$$

os incrementos de deslocamentos:

$$\Delta \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) = \xi^+ - \mathbf{x}^+ \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}^-, \tau) = \xi^- - \mathbf{x}^-$$

e as velocidades espaciais:

$$\mathbf{v}^+(\mathbf{x}^+, t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \Delta \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) \} \right|_{\tau=t} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}^-(\mathbf{x}^-, t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \Delta \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}^-, \tau) \} \right|_{\tau=t}$$

Se para a interface dos corpos em contato é assumida espessura zero, então  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^-$ . Considerando  $\mathbf{n}$  como a normal à superfície mestre, no ponto  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$ , são definidas as seguintes magnitudes:

A velocidade relativa entre a peça e a ferramenta:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_N + \bar{\mathbf{v}}_T \equiv \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$$

$$\bar{\mathbf{v}}_N = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \bar{v}_n \mathbf{n}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} - \bar{v}_n \mathbf{n}$$

O incremento de deslocamento relativo:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau) = \Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau)_N + \Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau)_T \equiv \Delta \mathbf{u}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) - \Delta \mathbf{u}_t^-(\mathbf{x}^-, \tau)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau)_N = (\mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}(t))\Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau) = (\Delta \bar{\mathbf{u}}_t \cdot \mathbf{n}(t))\mathbf{n}(t) \equiv \Delta \bar{u}_N(\tau)\mathbf{n}(t) \quad 4.1$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau)_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}(t))\Delta \bar{\mathbf{u}}_t(\tau) \equiv \Delta \bar{\mathbf{u}}_T(\tau) \quad 4.2$$

---

<sup>2</sup> Outras denominações: deformável, contatora.

#### 4.1.1 Definição das Medidas Objetivas

Para garantir a objetividade do modelo constitutivo é necessário considerar a transformação das variáveis do problema sob a mudança do observador, segundo uma rotação  $Q(t)$ .

Representando as coordenadas locais no sistema de coordenadas global (Fig. 4.2):

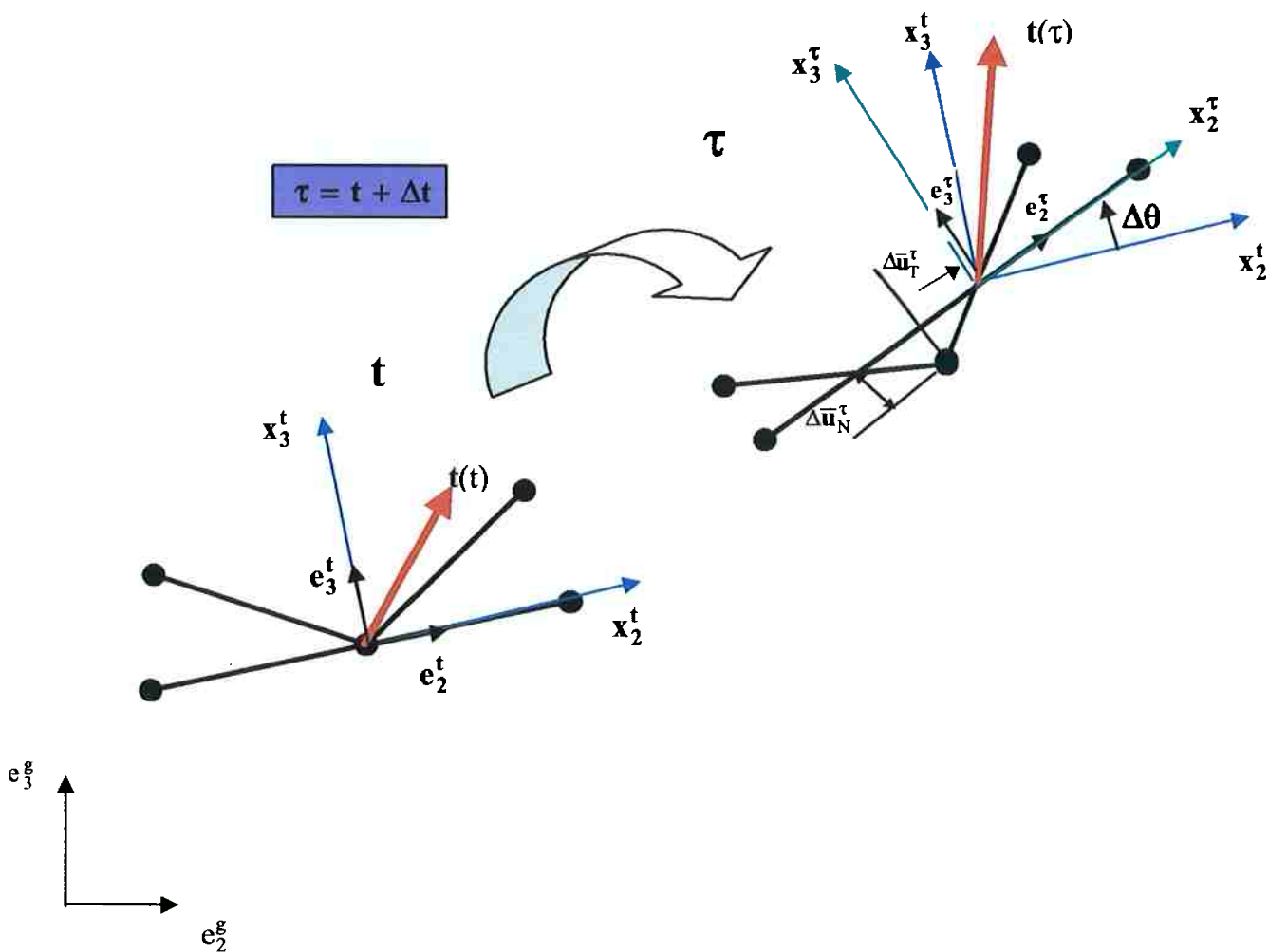


Fig. 4.2 Cinemática de Contato

A rotação da base local  $\mathbf{e}_i$  em relação à base global  $\mathbf{e}_i^g$  é obtida pela relação:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_2^g \\ \mathbf{e}_3^g \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}^g \quad \therefore \quad \mathbf{e}^g(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{e}(t) \quad 4.4$$

A base no tempo  $\tau$ :

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}(t) + \Delta\mathbf{e} \quad 4.5$$

$$\Delta\mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}}\Delta t$$

A rotação da base t em relação à base global:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{e}^g + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{e}}^g \quad \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{e}}^g = 0$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{e}^g$$

Substituindo a expressão 4.4:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{e}$$

Retornando à expressão 4.5:

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{e}}\Delta t$$

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{e}(t)\Delta t \quad \text{se} \quad \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) = \boldsymbol{\Omega}(t)$$

Assim, é possível representar a base no tempo  $\tau$ , em função da base no tempo t:

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{e}(t)\Delta t$$

$$\mathbf{e}(\tau) = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}(t)\Delta t)\mathbf{e}(t) \quad \text{se} \quad \mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}(t)\Delta t = \Delta\mathbf{R}(t)$$

$$\| \mathbf{e}(\tau) = \Delta\mathbf{R}(t)\mathbf{e}(t) \quad 4.6$$



Finalmente, é necessário definir  $\mathbf{R}_t(\tau)$  e  $\mathbf{\Omega}(t)$  a partir do movimento  $\hat{\mathbf{x}}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau)$ . Considerando o gradiente de deformação de superfície (ANAND;1992), correspondente a este movimento, e sua decomposição polar:

$$\mathbf{F}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+} \hat{\mathbf{x}}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) \quad \mathbf{F}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) = \mathbf{R}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) \mathbf{U}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau)$$

$\mathbf{R}_t(\tau)$  e  $\mathbf{\Omega}(t)$  são representadas na seguinte forma:

$$\mathbf{R}_t(\tau) \equiv \mathbf{R}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}_t^+(\mathbf{x}^+, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

#### 4.1.2 Função Gap

Para o estabelecer o fechamento do contato é necessário definir a função gap - a interpenetração e/ou folga instantânea na direção normal  $g_N^t$ :

$$g_N^t = h_N^0 - h = u_N - g_N^0; \quad g_N^0 = g_N \quad 4.3$$

como pode ser verificado por uma análise da figura 4.3.

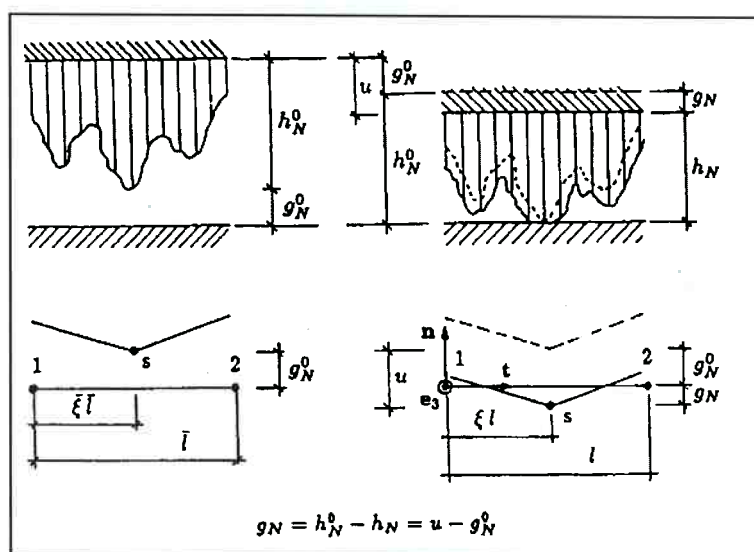


Fig. 4.3 Definição da Função Gap

Na forma incremental:

$$\Delta g_N^t = \Delta u_N - \Delta g_N^0, \text{ se } g_N^0 = \text{constante, então } \Delta g_N^0 = 0$$

$$\Delta g_N^t = \Delta u_N$$

#### 4.1.3 Decomposição Aditiva do Deslizamento Tangencial

Considerando uma situação de contato fechado, sem movimento relativo (em aderência) entre os pontos em contato das superfícies, mestre e escrava:

$$\Delta \mathbf{u}_{T_m} = \Delta \mathbf{u}_{T_e}$$

Quando existe movimento relativo entre as superfícies, o deslocamento total será a somatória das componentes de aderência e deslizamento. A parte relativa ao deslizamento - como em elastoplasticidade -, está relacionada ao deslocamento irreversível, e a aderência, ao deslocamento elástico e reversível<sup>3</sup>:

$$\Delta \mathbf{u}_{T_r}^t = \Delta \mathbf{u}_{T_r}^a + \Delta \mathbf{u}_{T_r}^d$$

Deste ponto em diante, com o intuito de simplificar a notação, os deslocamentos de aderência e deslizamento não estarão acompanhados de um índice referência a direção tangencial, uma vez que acontecem apenas nesta direção. Assim:

$$\Delta \mathbf{u}^t = \Delta \mathbf{u}^a + \Delta \mathbf{u}^d \tag{4.7}$$

## 4.2 As Trações na Forma Corotacional

Para dois pontos quaisquer em contato instantâneo (Fig. 4.1), o vetor  $\mathbf{t}$  que mensura a força de contato por unidade de área, atuante na superfície escrava ponto  $S = C$ , resultante da interação com a superfície mestre, pode ser decomposto em uma componente normal  $\mathbf{t}_N$  à superfície  $S_c^t$ , e outra componente tangencial  $\mathbf{t}_T$ ,

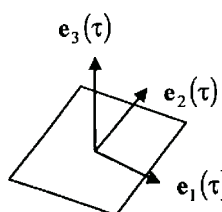
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_N \mathbf{n} + \mathbf{t}_T; \quad \mathbf{t}_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$  é a normal, com direção interna à superfície de contato no ponto instantâneo de contato.

A componente tangencial  $\mathbf{t}_T$  pode ser decomposta em duas componentes locais no plano de contato definido pelos versores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{t}_T = t_{T_i} \mathbf{e}_i \quad ; \quad i = 1, 2$$

Consideradas duas configurações quaisquer, nos tempos  $t$  e  $\tau$ , a evolução das trações dependem da atualização das trações e de sua rotação.



Assim, a componente normal de contato  $\mathbf{t}_N$  depende de sua atualização, e da mudança de direção da normal de contato :

$$\dot{\mathbf{t}}_N = \dot{t}_N \mathbf{n} + t_N \dot{\mathbf{n}}$$

---

<sup>3</sup> A evidência experimental desta proposição é apresentada no Capítulo VI.

sendo que :

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}$$

Definindo a taxa corotacional de  $\mathbf{t}_N^\nabla$  como a taxa não associada à rotação espacial – tração objetiva -, resulta :

$$\mathbf{t}_N^\nabla = \dot{\mathbf{t}}_N - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}_N; \quad 4.8$$

$$\mathbf{t}_N(\tau) = t_N \mathbf{n}(\tau) \quad \mathbf{n}(\tau) = \mathbf{e}_3(\tau)$$

Definindo o incremento da componente corotacional normal:

$$\Delta \mathbf{t}_N^\nabla = \mathbf{t}_N \Delta t - \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}_N \quad 4.9$$

Da mesma forma, as componentes tangenciais representadas na base t:

$$\mathbf{t}_i(t) = t_i \mathbf{e}_i(t) ; \quad i = 1, 2$$

$$\mathbf{t}_T(\tau) = \mathbf{t}_T(t) + \Delta \mathbf{t}_T \quad \text{se} \quad \Delta \mathbf{t}_T = \dot{\mathbf{t}}_T \Delta t$$

Então,

$$\dot{\mathbf{t}}_T(t) = \dot{t}_T \mathbf{e}(t) + t_T \dot{\mathbf{e}}(t)$$

$$\dot{\mathbf{t}}_T = \frac{\partial \mathbf{t}_T}{\partial \mathbf{x}_j} \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{t}_T = t_{ij} \mathbf{v}_j + \dot{\mathbf{t}}_T$$

Portanto,

$$\dot{\mathbf{t}}_T(t) = \left( \mathbf{v}_j t_{T,j}^T + \dot{\mathbf{t}} \right) \mathbf{e}(t) + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}_T(t)$$

$$\| \dot{\mathbf{t}}_T(t) = \mathbf{t}_T^\nabla + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}_T \quad 4.10$$

O vetor  $\mathbf{t}^\nabla$  representa a derivada temporal da força superficial medida por um observador rotacionando com uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_i^s\}$  - portanto, é uma medida invariante com a mudança do observador.

$$\Delta \mathbf{t}_T = \mathbf{t}_T^\nabla \Delta t = \dot{\mathbf{t}}_T \Delta t \mathbf{e}(t) + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}_T \Delta t \mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{t}_T(\tau) = \mathbf{t}_T(t) + \dot{\mathbf{t}}_T \Delta t$$

$$\mathbf{t}_T(\tau) = \mathbf{t}_T(t) + \dot{\mathbf{t}}_T \Delta t e(t) + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}_T(t) \Delta t e(t)$$

A tração no tempo  $\tau$ , escrita na base  $\tau$  (figura 4.2):

$$\mathbf{t}_T(\tau) = \mathbf{t}_T(t) + \mathbf{t}_T^V \Delta t + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}_T(t) \Delta t \quad \text{se} \quad \Delta \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \Delta t$$

O incremento de tração:

$$\| \Delta \mathbf{t}_T^V(\tau) = \mathbf{t}_T \Delta t + \Delta \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}(t) \quad 4.11$$

## CAPÍTULO V

### LEIS CONSTITUTIVAS PARA CONTATO COM ATRITO

Existem diferentes abordagens para modelagem matemática do contato entre superfícies. A imposição das condições de contato nas equações de equilíbrio de um sistema mecânico na direção normal ou tangencial, tanto pode ser de natureza geométrica – a imposição de uma equação de restrição de movimentos – quanto pode estar representada através de uma lei constitutiva.

Um aspecto fundamental na abordagem do problema de contato pela proposição de uma lei constitutiva para interface - em analogia com a elastoplasticidade – é a flexibilidade em introduzir um número ilimitado de variáveis de estado para modelar os diferentes fenômenos envolvidos na interface. Por outro lado, o seu desenvolvimento teórico e implementação numérica, passam a incorporar a os benefícios da teoria da elastoplasticidade, amplamente consolidada na academia.

Esta possibilidade de analogia vem especialmente da adoção do método de penalidade como instrumento para agregar o termo de contato ao Princípio das Velocidades Virtuais. Este método, fundamentalmente transforma as restrições de natureza geométrica, em restrições materiais, ao permitir uma interpenetração entre as superfícies e associá-las à uma rigidez. Na literatura podem ser encontradas algumas associações de modelos equivalentes a este problema: ele seria similar à introdução de um sistema de molas na interface, ou mesmo, a sua descrição através de um modelo constitutivo torna-se equivalente à introdução de um terceiro material na interface, com todas as possibilidades de uma lei constitutiva material. Esta abordagem poderá ser adotada tanto em referência ao contato na direção normal, quanto ao tangencial.

## 5.1 Formulação do Modelo Constitutivo de Contato Normal

Alguns dos desafios do problema de contato entre superfícies estão relacionados ao estabelecimento de uma lei constitutiva normal entre as superfícies. A complexidade de uma interface com rugosidades, durezas, e a presença de óxidos levou ao estudo de leis de homogeneização de superfícies - que constituem uma área de estudo com suas peculiaridades -, são consideradas fora do escopo deste trabalho.

O principal aspecto da modelagem da lei constitutiva normal está relacionado à sua evolução a partir do contato entre as extremidades das rugosidades. A abordagem tradicional refere-se à existência de uma relação  $\zeta = A_r/A$ , onde  $A_r$  é a área de contato real, e  $A$ , a área de contato aparente. A área real de contato  $A_r$  aumenta linearmente com  $p$ , na baixa pressão, mas após um certo valor de pressão, passa a exibir um comportamento de acordo com uma relação exponencial, de maneira que  $\zeta \rightarrow 1$  quando  $p \rightarrow \infty$ .

Existem vários modelos constitutivos que foram objeto de um estudo abrangente de ODEN;PIRES (1985), e os modelos micromecânicos mais importantes foram desenvolvidos na abordagem experimental de GREENWOOD;WILLIAMSON (1966) ou de KRAGELSKY et al.(1982). As variáveis fundamentais utilizadas nestes estudos foram dureza e rugosidade da superfície.

A lei de contato proposta por KRAGELSKY et al. (1982) relaciona a tensão normal, na interface de contato com a proximidade entre as superfícies, ou interpenetração, em forma de potência :

$$t_N = c[g_N]^m \qquad t_N = p \qquad 5.1$$

onde  $c$  e  $m$  são parâmetros que descrevem a rigidez de contato e dependem dos materiais em contato e da micromecânica das superfícies em contato. Várias funções podem ser utilizadas para estabelecer a relação entre a pressão de contato e a interpenetração das superfícies.

### 5.1.1 Lei Constitutiva Linear

Para manter dois pontos em contato, o incremento do deslocamento normal

$\Delta u_N = \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  é vinculado ao movimento da superfície rígida  $\Delta g_N$ . Assim,

$$\Delta u_N - \Delta g_N = 0 \quad 5.2$$

Para resolver esta restrição é aplicado o método da penalidade. A idealização deste procedimento é baseada na substituição da superfície rígida por um conjunto de molas rígidas distribuídas ao longo do contorno, com rigidez  $k_N$ . A relação entre os incrementos de deslocamento e incrementos de força pode representada através de uma relação linear entre as tensões normais de contato, e a interpenetração instantânea,

$$\Delta t_N = k_N (\Delta u_N - \Delta g_N); \quad \Delta \mathbf{u}_N = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \Delta t$$

$k_N$  = coeficiente de rigidez normal;

$\Delta \mathbf{u}_N$  = incremento de deslocamento normal;

$\Delta g_N$  = componentes do espaçamento (gap) ou interpenetração de contato.

$\Delta t_N$  = incremento da pressão normal de contato.

### 5.1.2 A Lei Implementada no Abaqus

No programa Abaqus está disponibilizado um modelo exponencial, definido através das funções exponenciais abaixo descritas. A pressão resultante do modelo,  $p$ , é função da proximidade entre as superfícies, em particular da interpenetração entre as



mesmas, determinada pela variável  $h^1$  (Figura 5.1). O presente trabalho utilizou esta lei constitutiva.

As funções dependem dos parâmetros, distância inicial de contato,  $c$ , o espaçamento entre as superfícies no início da transferência de pressão de contato, e o valor de pressão associado ao início do processo de contato,  $p^0$ .

$$p = 0; \quad \text{se} \quad h \leq -c \quad 5.3$$

$$p = \frac{p^0}{[\exp(1) - 1]} \left\{ \left( \frac{h}{c} + 1 \right) \left[ \exp\left( \frac{h}{c} + 1 \right) - 1 \right] \right\}; \quad \text{se} \quad -c < h < 6c \quad 5.4$$

$$p = \frac{p^0}{[\exp(1) - 1]} \left\{ 7 \exp(7) - 1 + \left( \frac{h}{c} - 6 \right) [8 \exp(7) - 1] \right\}; \quad \text{se} \quad 6c < h \quad 5.5$$

cujas derivadas são :

$$p_{,h} = k_N = 0; \quad \text{se} \quad h \leq -c \quad 5.6$$

$$p_{,h} = k_N = \frac{p^0}{[\exp(1) - 1]} \left\{ \frac{1}{c} \left( \frac{h}{c} + 2 \right) \exp\left( \frac{h}{c} + 1 \right) - \frac{1}{c} \right\}; \quad \text{se} \quad -c < h < 6c \quad 5.7$$

$$p_{,h} = k_N = \frac{p^0}{[\exp(1) - 1]} \left[ \frac{8}{c} \exp(7) - \frac{1}{c} \right]; \quad \text{se} \quad h \geq 6c \quad 5.8$$

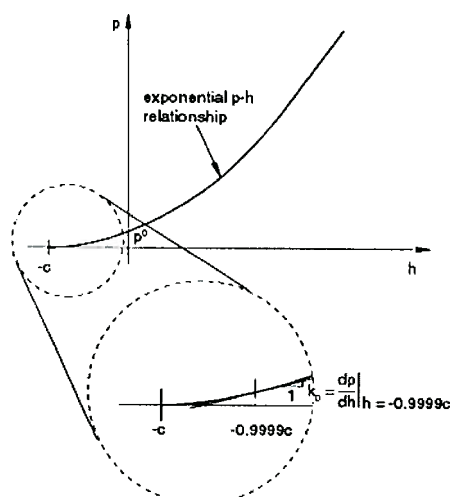


Fig. 5.1 Relação Constitutiva de Contato Normal Implementada no Programa Abaqus

<sup>1</sup> A formulação segue o formalismo apresentado nos manuais do aplicativo. Neste trabalho foi adotado  $h = g_N$ .

## 5.2 Contato Tangencial com Atrito

CURNIER (1984) realizou um importante esforço para aproximar a abordagem da elastoplasticidade e do atrito. Segundo ele, os aspectos essenciais para fazer este estudo são:

- Decomposição de deslocamento de contato entre aderência e deslizamento;
- Critério de Deslizamento (Critério de Escoamento);
- Leis de Fluxo de Deslizamento;
- Leis de Encruamento;

### 5.2.1 Decomposição do deslocamento de contato entre aderência e deslizamento

(Plasticidade: decomposição aditiva entre partes elástica e plástica)

Um experimento fundamental para as bases da abordagem da analogia de atrito com elastoplasticidade foi realizado por COURTNEY-PRATT;EISNER (1957).

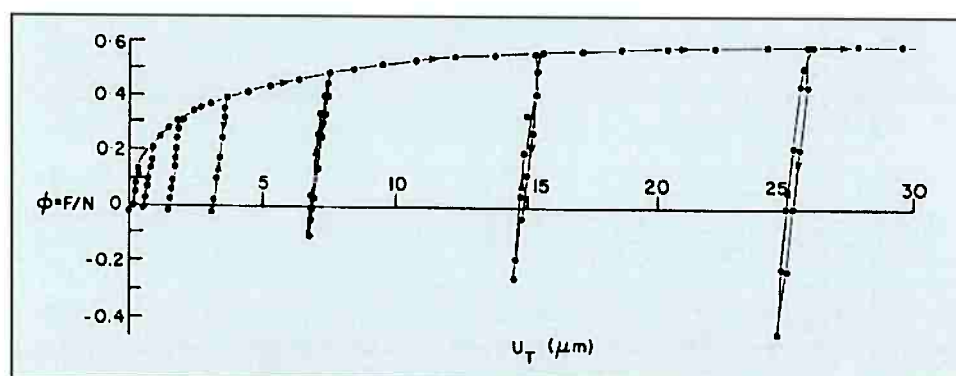


Fig. 5.2 Experimento de Courtney – Pratt ; Eisner

Eles estudaram o movimento relativo de um disco de 920 gramas sobre uma superfície, ambas em platina polida, sujeitas a forças tangenciais. Os resultados apresentados na figura 5.2, demonstram a relação aproximadamente linear entre a tração tangencial e o deslocamento relativo durante as operações de carregamento e

descarregamento. Embora ocorra um efeito de histerese é importante apontar que a curva característica de carregamento – descarregamento é reversível.

TONG;ANAND (1993) realizaram um experimento semelhante aplicando uma pressão seguida de torção em disco de cobre, com o resultado apresentado na figura 5.3.

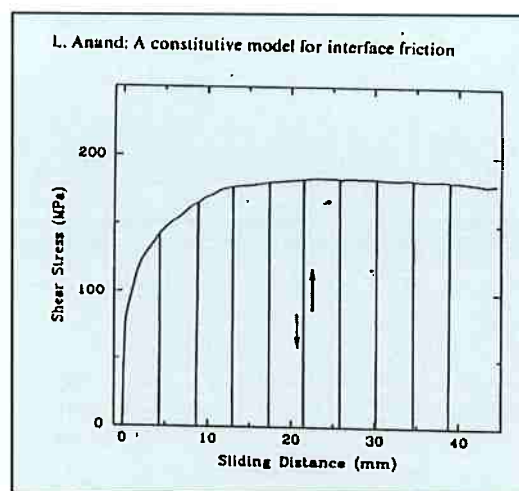


Fig. 5.3 Experimento de Tong; Anand

Ambos experimentos sugerem que o deslocamento tangencial relativo pode ser dividido em componentes reversível e irreversível. Neste trabalho são adotados os termos aderência - para o deslocamento relativo de caráter elástico e / ou reversível -, e deslizamento para o deslocamento irreversível ou “plástico”. Como em plasticidade, esta propriedade é fundamental para o desenvolvimento de leis constitutivas para os deslocamentos (deformações) em aderência (elásticas), e os deslizamentos (deformações plásticas).

$$\Delta \mathbf{u}^t = \Delta \mathbf{u}^a + \Delta \mathbf{u}^d \quad \text{onde} \quad \Delta u_i^t = v_T \Delta t e_i \quad i = 1,2; \quad 5.9$$

### *A Componente de Adesão (Elasticidade)*

Seguindo uma lei elástica linear – e adotando um procedimento semelhante ao procedimento para definição da função gap normal -, pode ser estabelecida uma relação linear entre as trações tangenciais e os deslocamentos. Na forma incremental,

$$\Delta t_T = -k_T \Delta g_T \quad 5.10$$

$$\Delta g_T^i = \Delta u_T - \Delta g_T^0 \quad \text{se } g_T^0 = \text{constante, então } \Delta g_T^0 = 0$$

$$\Delta g_T^i = \Delta u_T^a + \Delta u_T^d - \Delta g_T^0$$

$\Delta u_T$  = incremento de deslocamento tangencial total ;

$\Delta u_T^a$  = incremento de deslocamento em aderência nas direções  $i = 1, 2$  ;

$\Delta u_T^d$  = deslizamento relativo nas direções  $i = 1, 2$  ;

$\Delta g_T$  = componentes do espaçamento (gap) ou interpenetração de contato;

$k_T$  = coeficientes de rigidez tangencial;

em regime de aderência  $\Delta u_T^d = 0$  ,

$$\text{assim, } \Delta g_T^i = \Delta u_T^a - \Delta g_T^0$$

Portanto, as componentes incrementais tangenciais são:

$$\Delta t_T = -k_T (\Delta u_T^a - \Delta g_T^0)$$

A expressão para o incremento de tração tangencial é linear. O sinal negativo para as componentes tangenciais indica que elas opõem-se à direção de movimento.

$k_N > 0$  e  $k_T > 0$  são escalares chamados de, rigidez normal e tangencial. Em geral a rigidez é função dos parâmetros de estado  $(t, \alpha)$ . Estes parâmetros foram introduzidos por MICHALOWSKI;MROZ(1978) como parâmetros constitutivos, e retomados por CHENG; KIKUCHI (1985) como parâmetros de “penalidade”, para

resolver a condição de “não-penetração” para os pontos de contato: velocidade relativa normal nula ( $\bar{v}_N = 0$ ), e a condição de aderência, velocidade relativa tangencial ( $\bar{v}_T = 0$ ). Estas condições de restrição são satisfeitas tomando  $k_N \rightarrow \infty$  e  $k_T \rightarrow \infty$ , respectivamente. Segundo CHENG;KIKUCHI (1985), os experimentos de Courtney-Pratt e Eisner sugerem uma interpretação física de  $k_T$  como um parâmetro constitutivo que descreve o módulo de cisalhamento na interface.

### 5.2.2 Critério de Deslizamento - (Plasticidade: Critério de Escoamento)

A decomposição cinemática do deslocamento em aderência e deslizamento é determinada por um critério de deslizamento. Isto porque o deslizamento inicia apenas quando a magnitude da tensão cisalhante aplicada, iguala-se à resistência ao deslizamento,  $s$ .

O critério de deslizamento é formalizado pela função  $f_c(\mathbf{t}, s) \leq 0$ . O vetor  $\mathbf{t}$  representa as trações atuantes no ponto de contato e  $s$  é um escalar com dimensões de tensão, chamado de resistência ao deslizamento. A evolução de  $s$  é regida por variáveis internas - para caracterizar a modificação das condições de atrito no processo.

A função  $f_c$ , segue a forma geral:

$$f_c = q_c - s \quad 5.11$$

onde  $q_c$  é a tração equivalente tangencial:

$$q_c = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$$

$f_c < 0$  o par de pontos em contato está em condição de aderência.

$f_c = 0$  corresponde ao estado neutro. Se o carregamento for mantido, as superfícies estão em aderência, mas se ocorrer um aumento em sua magnitude, ocorrerá um deslizamento relativo entre elas.

O critério de deslizamento adotado é análogo ao critério de Drucker Prager na plasticidade (dependente da pressão hidrostática). Entretanto, na seqüência do trabalho serão realizadas algumas considerações que possibilitarão a analogia com o critério de escoamento de von Mises.

### 5.2.3 Leis de Fluxo de Deslizamento - (Plasticidade: Lei Constitutiva de Deslizamento)

A direção de deslizamento é derivada de superfícies potenciais  $F_c$ , no espaço das trações. Considerando o deslizamento como a variável interna (deformação plástica), a lei de fluxo em forma incremental é apresentada:

$$\Delta \mathbf{u}^d = \Delta \lambda_c \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}} \quad 5.12$$

Conforme pode ser verificado na figura 5.4, esta lei é não-associativa, porque a direção de deslizamento é diferente da normal à superfície potencial. A não-associatividade do critério está relacionada à existência de uma componente normal à superfície, agindo no sentido de separar os corpos em contato.

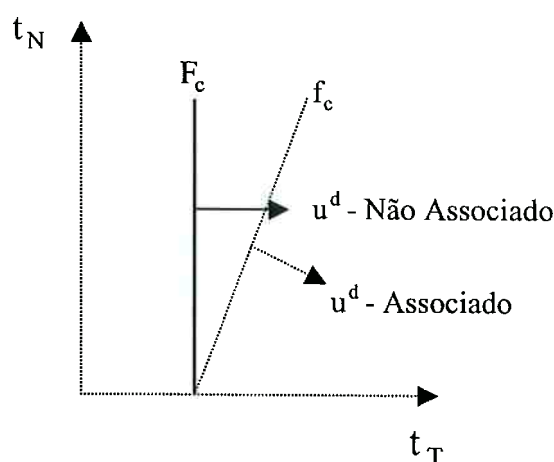


Fig. 5.4 Critério de Deslizamento

$F_c$  = Potencial de deslizamento

$f_c$  = Critério de deslizamento

Esta não associatividade foi estudada por MICHALOWSKI;MROZ (1978). Eles consideraram as forças  $T_x, T_y, N$  atuando sobre um bloco deslizando em uma superfície, e  $V_x, V_y, V_z$  as velocidades decorrentes destas cargas. Para este modelo obedecer ao critério de associatividade, as seguintes relações deveriam ser respeitadas para as leis de fluxo de

velocidade:

$$V_x = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial T_x} \quad V_y = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial T_y} \quad V_z = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial N}$$

Se  $F = (T_x^2 + T_y^2)^{1/2} - \mu N = 0$ , então

$$V_x = \dot{\lambda} \frac{T_x}{(T_x^2 + T_y^2)^{1/2}} \quad V_y = \dot{\lambda} \frac{T_y}{(T_x^2 + T_y^2)^{1/2}} \quad V_z = \dot{\lambda} \mu$$

A componente  $V_z$  demonstra a existência de uma velocidade normal separando as superfícies em contato. Se o potencial de deslizamento é substituído pelo critério de deslizamento a lei de fluxo torna-se associativa. Assim,

$$\Delta \mathbf{u}^d = \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} \quad 5.13$$

Uma das formas de recuperar a associatividade neste problema é considerar que, durante um incremento a pressão mantém-se constante. Com este valor de pressão é realizada a atualização das trações e do critério de deslizamento. No detalhe apresentado na figura 5.5, pode ser verificado que a linha pontilhada denota o escalonamento imposto ao critério, e a restauração da colinearidade entre deslocamento e lei de fluxo .

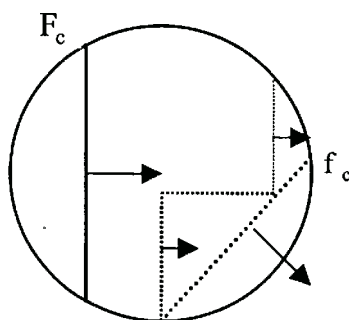


Fig. 5.5 Critério de Deslizamento Associativo

#### 5.2.4 Lei de Encruamento no Deslizamento (Plasticidade: leis de encruamento)

As figuras 5.2 e 5.3 apresentam ainda uma outra característica fenomenológica decorrente do deslizamento relativo entre superfícies. Segundo os experimentos, há uma evolução monotônica da curva a partir de um carregamento crescente, ou seja, a resistência ao deslizamento é constantemente modificada com o aumento do deslizamento relativo. Este comportamento pode ser qualificado como uma típica condição de “encruamento isotrópico” das condições de deslizamento da interface.

O estado de um ponto material na interface em um instante  $t$  pode ser caracterizado pela variável  $s$  (resistência ao deslizamento) e a tração aplicada  $t$ . Essencialmente, o modelo constitutivo de atrito de ANAND (1993) é um conjunto de equações diferenciais que descrevem a evolução de  $(t, s)$ . A taxa da tração tangencial é descrita pela função linear isotrópica da parte aderente da componente tangencial da velocidade relativa. A velocidade de deslizamento (incremento de deslizamento) tangencial é representada por uma lei de fluxo de deslizamento.

As alterações na condição da interface – a evolução da resistência ao deslizamento – são representadas através de uma abordagem por variáveis internas. Como aponta PISONI (1992), uma das vantagens desta formulação é que “o modelo pode ser estendido para outros regimes de atrito, escolhendo as variáveis internas e as formas de sua evolução de  $s$ ”.

Um dos desafios nesta formulação está relacionado à modelagem da origem e evolução da resistência ao deslizamento. Esta dificuldade é ligada à natureza complexa dos mecanismos que contribuem para a sua formação como o intertravamento das rugosidades, e sua deformação e fratura, adesão de novas superfícies, formação de partículas causadas pelo arrancamento das superfícies.



Assim, a resistência ao deslizamento  $s$  é uma função não só da pressão  $p$ , como também do estado  $\alpha$  da interface  $s = \hat{s}(p, \alpha)$ , que deve ser especificado em cada modelo de acordo com uma variável interna adequada.

O “encruamento isotrópico” na interface pode ser modelado apenas por uma variável escalar – é comum a utilização do deslizamento equivalente acumulado (análogo da deformação plástica equivalente acumulada).

Por outro lado, para o caso do “encruamento cinemático” é necessária a adição de uma variável correspondente à translação da superfície de deslizamento no espaço de trações (o análogo na plasticidade é a tensão de retorno (back-stress)).

Considerando um caso de encruamento isotrópico e cinemático, serão necessárias as duas variáveis de estado correspondentes a cada situação de encruamento.

Outra forma de encruamento pode ser verificada se em determinada interface, as resistências aos deslizamentos forem diferenciadas nas diferentes direções do plano de deslizamento. Estas características podem ser representadas através de uma formulação anisotrópica.

Na literatura pode ser encontrada a denominação de anisotropia para o somatório dos efeitos de isotropia e cinemático. No presente trabalho estes efeitos são formulados sob a lei constitutiva mista. O conceito de anisotropia será exclusivamente utilizada para representar as diferenças nas resistências ao deslizamento, segundo as direções.

## CAPÍTULO VI

### LEI CONSTITUTIVA DE ATRITO ISOTRÓPICA

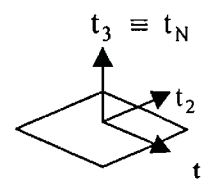
A partir dos conceitos desenvolvidos no Capítulo V é apresentada a formulação de uma lei constitutiva de atrito e a sua forma incremental. Embora a formulação geral desenvolvida inicialmente inclua as dependências com relação à velocidade e temperatura, o modelo constitutivo de atrito é implementado para um processo isotrópico, quase estático, isotérmico, em duas dimensões. Esta lei constitutiva está baseada na abordagem de CHENG;KIKUCHI (1985) e ANAND (1993).

#### 6.1 O Modelo Constitutivo de Atrito Isotrópico

Para simplificar a notação, deste ponto em diante as trações tangenciais serão representadas por  $\mathbf{t}$ , sem o subscrito  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_T$  e as trações  $t_{T_1} = t_1$  e  $t_{T_2} = t_2$ . O deslocamento não terá mais o subscrito T. Assim,

Retomando a expressão do modelo constitutivo elástico:

$$\Delta \mathbf{t}^V = -k_T (\Delta \mathbf{u}^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$



Assumindo, a existência de uma função de deslizamento  $f_c$ , que estabelece o critério de separação entre as condições de aderência e escorregamento :

$$f_c(\mathbf{t}, s) = q_c - s$$

Considerando o caso geral onde a resistência ao deslizamento é dependente da pressão, distância de deslizamento, temperatura e velocidade:

$$s = \hat{s}(t_N, \mathbf{u}_d, \theta, \dot{\mathbf{g}}_T) \quad 6.1$$

A tração de contato equivalente tangencial:

$$q_c = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}} = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \quad 6.2$$

O incremento de deslizamento pode ser determinado através da expressão:

$$\Delta \mathbf{u}^{d^\nabla} = \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} \quad 6.3$$

Para determinar o multiplicador de contato é aplicada a condição de consistência para que o par de variáveis  $(\mathbf{t}, s)$  continue a satisfazer a condição de deslizamento

$$q_c - s = 0 \text{ no tempo } t + \Delta t :$$

$$\Delta f_c(\mathbf{t}, s) = 0$$

Neste ponto deixa de existir o estado de aderência pura. Assim,

$$\Delta f_c = \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} \Delta \mathbf{t} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \Delta s = 0 \quad 6.4$$

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta \mathbf{t}^\nabla + \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}$$

Considerando a consistência na forma corotacional e incremental:

$$\Delta f_c^\nabla = \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} (\Delta \mathbf{t}^\nabla + \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}) - \frac{\partial f_c}{\partial s} \Delta s^\nabla \quad \Delta f_c^\nabla = \Delta f_c \quad \Delta s^\nabla = \Delta s$$

$$\Delta s^\nabla = \frac{\partial s}{\partial p} \Delta p^\nabla + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \Delta \mathbf{u}^{d^\nabla} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial s}{\partial \dot{g}_T} \Delta \dot{g}_T$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial t_1} = \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \frac{t_1}{q_c} = m_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_c}{\partial t_2} = m_2$$

Assim,

$$\Delta f_c^\nabla = \mathbf{m} \cdot (\Delta \mathbf{t}^\nabla + \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}) - \frac{\partial f_c}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \Delta p^\nabla + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial s}{\partial \dot{g}_T} \Delta \dot{g}_T \right) = 0$$

e as expressões:

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = k_T (\Delta \mathbf{u}^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$

$$\Delta \mathbf{u}^a = \Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{u}^d$$

$$\Delta \mathbf{t}_N^\nabla = k_N (\Delta u_N - \Delta g_N)$$

substituindo na expressão acima:

$$\mathbf{m}.k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{u}^d - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}.\Delta \Omega \mathbf{t} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \left[ \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T \right] = 0$$

$$\mathbf{m}.k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}.\Delta \Omega \mathbf{t} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) = \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T - \Delta \lambda_c \mathbf{m}.k_T \mathbf{m}$$

Portanto, o incremento do multiplicador de contato é determinado pela expressão:

$$\| \Delta \lambda_c = \frac{\mathbf{m}.k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}.\Delta \Omega \mathbf{t} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T}{\frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \mathbf{m} - \mathbf{m}.k_T \mathbf{m}} \quad 6.5$$

Substituindo na expressão 6.3, é obtido o incremento de deslizamento:

$$\| \Delta \mathbf{u}^d = \frac{\mathbf{m}.k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}.\Delta \Omega \mathbf{t} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T}{\frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \mathbf{m} - \mathbf{m}.k_T \mathbf{m}} \mathbf{m} \quad 6.6$$

E o incremento de deslocamento em aderência:

$$\Delta \mathbf{u}^a = \Delta \mathbf{u}^t - \chi \frac{\mathbf{m}.k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}.\Delta \Omega \mathbf{t} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T}{\frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \mathbf{m} - \mathbf{m}.k_T \mathbf{m}} \mathbf{m} \quad 6.7$$

O parâmetro  $\chi$  define o estado de contato: quando  $\chi = 0$  o processo está em aderência e quando  $\chi = 1$ , em deslizamento. As condições sob as quais  $\chi$  tem o valor 0 ou 1, estão baseadas nas noções do critério de escoamento.

$$\begin{aligned}\chi &= 1 & \text{se } \Delta \mathbf{u}^d \neq 0 & \text{ (em deslizamento)} \\ \chi &= 0 & \text{se } \Delta \mathbf{u}^d = 0 & \text{ (em aderência)}\end{aligned}$$

Retornando ao incremento das trações tangenciais:

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$

E desconsiderando os termos relacionados à variação de temperatura e velocidade, o incremento de tração é determinado:

$$\| \Delta \mathbf{t}^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) - \frac{k_T \chi \mathbf{m} \cdot k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T)}{D} \mathbf{m} + \frac{k_T \chi}{D} \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) \mathbf{m} \quad 6.8$$

$$D = \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot k_T \mathbf{m} \quad 6.9$$

### Modelo Constitutivo de Atrito – Forma Incremental

. *Decomposição aditiva da taxa de deslocamento*

$$\Delta \mathbf{u}^t = \Delta \mathbf{u}^a + \Delta \mathbf{u}^d$$

. *Equações Constitutivas de Aderência*

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$

. *Critério de Deslizamento*

$$f_c(\mathbf{t}, s) = q_c - s$$

. *Lei de Fluxo*

$$\Delta \mathbf{u}^{d\nabla} = \Delta \lambda_c \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}}$$

A expressão 6.8 para atualização das trações segundo um modelo constitutivo de interface de evolução isotrópica, pode ser particularizada para algumas funções de resistência ao deslizamento,  $s$ . A lei de Amontons - Coulomb é o modelo mais conhecido, e está implementado em todos os programas comerciais de elementos finitos.

### 6.1.1 O Modelo de Coulomb

A simplificação para o modelo clássico de Amontons - Coulomb é equivalente a reduzir uma lei constitutiva elastoplástica, com encruamento isotrópico, a um regime rígido perfeitamente plástico. Caso seja feita a opção de estabelecer uma rigidez para o regime de aderência, pode ser considerado como análogo ao caso elástico perfeitamente plástico. Retomando a função limite ,  $f_c(t, s) = q_c - s$

Na lei de Coulomb, a resistência ao deslizamento é representada por:

$$s = \mu p \quad 6.10$$

Com a particularização de  $s$ , a expressão 6.5, e considerando o caso isotérmico e quase estático é reduzida para:

$$\| \Delta \lambda_c = \mathbf{m} \cdot (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) - \mu \frac{k_N}{k_T} (\Delta u_N - \Delta g_N) \quad 6.11$$

a componente de aderência do incremento de deslocamento tangencial :

$$\| \Delta \mathbf{u}^a = \Delta \mathbf{u}^t - \chi \left[ \mathbf{m} \cdot (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) - \mu \frac{k_N}{k_T} (\Delta u_N - \Delta g_N) \right] \mathbf{m} \quad 6.12$$

que permite atualizar as trações tangenciais:

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$

Portanto, o incremento de trações pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\| \Delta \mathbf{t}^v = -k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) + \chi \left[ \mathbf{m} (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) - \mu \frac{k_N}{k_T} (\Delta u_N - \Delta g_N) \right] \mathbf{m} \quad 6.13$$

## 6.2 O Modelo Constitutivo de Anand

ANAND (1993) retomou os experimentos de BAY et al. (1987)<sup>1</sup> e propôs uma reavaliação do trabalho, porque segundo ele, embora aquele modelo explique o efeito da pressão sobre resistência ao deslizamento, não é considerado o efeito da história do deslizamento relativo acumulado.

Para consideração deste efeito, ANAND (1993) adotou a abordagem de variável interna de estado, como em PLESHA et al. (1989). O estado da interface foi denotado por uma variável genérica  $\alpha$ , para representar a rugosidade da superfície e detalhes microestruturais da interface. Especificamente, Anand escolheu o coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e a resistência limite ao deslizamento ( $s^*$ ), em função do deslizamento equivalente acumulado ( $u^d$ ), como as variáveis internas.

A partir disto, o estado de um ponto material na interface em um instante  $t$  é caracterizado pela variável  $s$  – dependente das variáveis internas - e a tração aplicada  $\mathbf{t}$ : *o modelo constitutivo é essencialmente um conjunto de equações diferenciais que descrevem a evolução de  $(\mathbf{t}, s)$ .*

O modelo constitutivo para aderência e deslizamento de Anand - isotrópico, independente da velocidade e isotérmico – foi formulado para o caso unidimensional de uma interface rígida - deformável.

*. Atualização das Trações<sup>2</sup>*

O vetor representativo da aderência pode ser descrito em suas componentes tangencial e normal, retomando as expressões:

$$\Delta \mathbf{t}_T = -k_T (\Delta \mathbf{u}_T^a - \Delta \mathbf{g}_T)$$

$$\Delta \mathbf{t}_N = k_N (\Delta u_N - \Delta g_N)$$

Estas equações podem ser escritas na forma compacta:

$$\Delta \mathbf{t} = -\{\mathbf{K}\Delta \mathbf{u} - k_T \Delta \mathbf{u}^d\} \quad 6.14$$

onde  $\Delta \mathbf{u}$  é o deslocamento (deslizamento relativo + deslocamento em aderência) relativo, e  $\Delta \mathbf{u}^d$  é o deslizamento relativo.

$$\mathbf{K} \equiv [k_T(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + k_N(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \quad 6.15$$

é o tensor de rigidez isotrópico de segundo ordem para aderência.

A atualização das trações tangenciais é realizada conforme a expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\tau) &= \mathbf{t}(t) + \Delta \mathbf{t} \\ \Delta \mathbf{t} &= -k_T (\Delta \mathbf{u}^a) \end{aligned} \quad \text{se } \Delta \mathbf{u}^a = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^d$$

$$\mathbf{t}(\tau) = \mathbf{t}(t) - k_T (\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^d) = \mathbf{t}(t) - k_T \Delta \mathbf{u} + k_T \Delta \mathbf{u}^d$$

Considerando a tração preditora:

$$\mathbf{t}_{pr} = \mathbf{t}(\tau) - k_T \Delta \mathbf{u}^d$$

O incremento de deslizamento tangencial  $\Delta \mathbf{u}^d$  é apresentado na forma de uma lei de fluxo de deslizamento, e a magnitude deste incremento é definida através da condição de consistência.

$$\Delta \mathbf{u}_T^d = -\Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} = -\Delta \lambda_c \mathbf{m}$$

<sup>1</sup> Verificar Anexo I.

<sup>2</sup> As medidas de tração a partir deste ponto são consideradas  $\mathbf{t}^\nabla = \mathbf{t}$



onde o vetor  $\mathbf{m}$  define a direção do deslizamento.

Então :

$$\mathbf{t}(\tau) = \mathbf{t}_{pr} - k_T \Delta \lambda_c \mathbf{m}(\tau) \quad 6.16$$

### *. Atualização da Resistência ao Deslizamento*

Seja  $s$  uma variável escalar chamada resistência isotrópica de deslizamento determinada pela equação constitutiva:

$$s = \hat{s}(p, u^{qd}) \geq 0 \quad 6.17$$

$u^{qd}$  é o deslizamento relativo equivalente. Deste ponto em diante, a sua notação será simplificada para  $u^{qd} = u^q$ .

A forma incremental para evolução da resistência ao deslizamento  $s$  :

$$\Delta s = h_N \Delta p + h_T \Delta u^q \quad 6.18$$

onde

$$h_N \equiv \frac{\partial \hat{s}}{\partial p} \quad \text{e} \quad h_T \equiv \frac{\partial \hat{s}}{\partial u^q}$$

$h_N$  e  $h_T$  são funções de encruamento que mensuram a variação da resistência ao deslizamento, com a variação da pressão de contato e o deslizamento equivalente.

Para completar a lei constitutiva é necessário determinar os parâmetros constitutivos: rigidez tangencial e normal na aderência,  $k_T$  e  $k_N$ ; a função para a resistência ao deslizamento  $s$ , e o seu valor inicial; e as funções de encruamento para  $\mu$  e  $s^*$ .

A função resistência ao deslizamento adotada por Anand foi originalmente proposta por BAY et al. (1987)<sup>3</sup>. Com a estimativa da evolução da resistência ao

---

<sup>3</sup> Mais detalhes no Anexo I.

deslizamento  $s^*$ , e do coeficiente de atrito, com a distância de deslizamento, o modelo passa a ser representado da seguinte forma:

$$\hat{s}(p(\tau), u^q(\tau)) = s^*(u^q) \tanh \left[ \frac{\mu(u^q) p(\tau)}{s^*(u^q)} \right] \quad 6.19$$

Para baixas pressões normais esta expressão é reduzida:

$$s = \mu p \quad \text{onde} \quad \mu = \hat{\mu}(u^q)$$

Para altas pressões a expressão é representada por um valor de saturação e  $s^* = \hat{s}^*(u^q)$ , que é o limite da tensão de cisalhamento interfacial para pressões para uma dada distância de deslizamento<sup>4</sup>.

As leis de evolução para  $\mu$  e  $s^*$  (funções de encruamento) dependentes de  $u^q$ , foram determinados experimentalmente.

### 6.2.1 Os Experimentos Realizados para Estimativa dos Parâmetros

O experimento que estimou os parâmetros para construção da curva representativa da evolução de  $s$ , foi desenvolvido em ANAND;TONG (1993). Seu procedimento foi baseado em um experimento para medição de atrito, aplicando o método de compressão e torção para processos quase estáticos, baseados nos trabalhos de SCHEY (1983).

Neste método, as peças são sujeitas à compressão, seguida de uma rotação para determinar a dependência da resistência ao deslizamento na interface, com relação pressão de contato e ao deslizamento relativo.

A ferramenta de sujeição foi feita em aço AISI A2, temperado e revenido para dureza de 60 HRC. O material sujeito ao teste é uma peça em forma de disco, em cobre OFHC<sup>5</sup> recozido.

O teste foi conduzido em uma máquina servo-hidráulica com capacidade para aplicar até 50.000 lbs (222 kN) de carga axial, 20.000 lb-in (2.26 kN-m) de torque, 2” de curso axial e 80° de rotação angular. O equipamento possui um controle independente dos cursos axial e de rotação.

Para determinação da dependência do coeficiente de atrito com relação à distância de deslizamento equivalente,  $\mu(u^q)$ , é realizado um teste à baixa pressão (40 MPa). A dependência da resistência ao deslizamento em relação à mesma variável,  $s^*(u^q)$ , foi determinado à alta pressão (540 MPa). Os resultados dos experimentos são apresentados na figura 6.1:

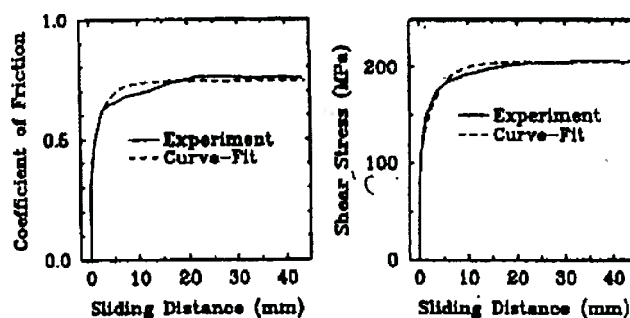


Figura 6.1 Experimentos para Determinação das Funções  $\mu = \hat{\mu}(u^q)$  e  $s^* = \hat{s}^*(u^q)$

As expressões decorrentes do ajuste das curvas experimentais, que determinam o “encruamento” das variáveis com o deslizamento:

$$\mu(u^q) = \mu_0 + (\mu_s - \mu_0) \left[ 1 - e^{\left( \frac{-u^q}{u_1} \right)} \right] \quad 6.20$$

$\mu_0$ ,  $u_1$ ,  $\mu_s$  são parâmetros da interface.

$\mu_0, \mu_s$  são os valores, inicial e de saturação do coeficiente de atrito;

<sup>4</sup> Mais detalhes no Anexo I.

<sup>5</sup> Oxygen Free High Conductivity (Livre de Oxigênio de Alta Condutividade), este material é utilizado em aplicações onde é necessária uma distribuição de corrente elétrica uniforme.

$$s^*(u^q) = s_0^* + (s_s^* - s_0^*) \left[ 1 - e^{\left( -\frac{u^q}{u_2} \right)} \right] \quad 6.21$$

$s_0^*$ ,  $s_s^*$ ,  $u_2$  são parâmetros da interface.

$s_0^*$ ,  $s_s^*$  são os valores, inicial e de saturação da resistência ao deslizamento.

### *Atualização da Resistência ao Deslizamento*

Com estas relações, é retomada a expressão para atualização de  $s$ , 6.18:

$$\Delta s = h_N \Delta p + h_T \Delta u^q$$

Considerando

$$s = s^* \tanh\left(\frac{\mu p}{s^*}\right) \quad h_p = \frac{\partial s}{\partial p} \quad h_T = \frac{\partial s}{\partial u^q}$$

Podem ser determinados os termos,

$$h_T = \frac{\partial s}{\partial u^q} = \frac{\partial s}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u^q} \Delta u^q + \frac{\partial s}{\partial s^*} \frac{\partial s^*}{\partial u^q} \Delta u^q \quad 6.22$$

$$\frac{\partial s}{\partial s^*}(\tau) = \tanh\left[\frac{\mu p}{s^*}\right] - \frac{\mu p}{s^*} \cosh\left[\frac{\mu p}{s^*}\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mu}(\tau) = s^* \cosh^{-2}\left[\frac{\mu p}{s^*}\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}(\tau) = \mu \cosh^{-2}\left[\frac{\mu p}{s^*}\right]$$

Para derivação das expressões de  $\frac{\partial \mu}{\partial u^q}$  e  $\frac{\partial s^*}{\partial u^q}$  são necessárias as expressões de variação 6.19 e 6.20.

$$\frac{\partial \mu}{\partial u^q} = \frac{\mu_s}{u_1} \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right) = h_\mu \quad \frac{\partial s^*}{\partial u^q} = \frac{s_s^*}{u_2} \left( 1 - \frac{s^*}{s_s^*} \right) = h_s.$$

### *Determinação de $\Delta u^q$*

ANAND (1993) considerou que  $\Delta \lambda_c = \Delta u^q$ , e  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{pr}$  (item 6.3), Portanto retomando a expressão 6.16:

$$\Delta \lambda_c = \Delta u^q = \frac{q_{cpr} - q_c}{k_T} = \frac{q_{cpr} - s}{k_T}$$

Considerando que no deslizamento,  $q_c = s$ , então

$$\Delta u^q = \frac{q_{cpr} - s}{k_T} \quad 6.23$$

### *Determinação do fator de retorno radial rf*

Atualizada a resistência  $s$ , com os valores de  $\mu$  e  $s^*$ , é determinado o fator de retorno radial através da expressão:

$$rf(\tau) \equiv \frac{q_c(\tau)}{q_{cpr}(\tau)} \quad 6.24$$

$$\text{Onde } q_{cpr} = \sqrt{t_{pr} \cdot t_{pr}} \quad q_c = \sqrt{t \cdot t}$$

Então  $rf \equiv \frac{s}{q_{cpr}}$  e são atualizadas as trações,

$$t_1 = rf * t_{pr1} \quad t_2 = rf * t_{pr2}$$

As trações poderiam também serem atualizadas através da expressão 6.8.

$$\mathbf{t}^v(\tau) = \mathbf{t}_{pr}^v - \frac{k_T \chi \mathbf{m} \cdot k_T (\Delta u^i - \Delta \mathbf{g}_T)}{D} \mathbf{m} - \frac{k_T \chi}{D} h_p k_N (\Delta u_N - \Delta \mathbf{g}_N) \mathbf{m} \quad 6.25$$

$$\text{Onde } D = -h_T \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot k_T \mathbf{m}$$

### 6.2.2 O Jacobiano da Interface

Uma vez computadas as trações, é necessário determinar o jacobiano, ou matriz consistente, para garantir a convergência quadrática do método de Newton. Considerando o Jacobiano da interface  $\mathbf{M}_c(\tau)$  como a relação entre incrementos de tração e deslizamento:

$$\mathbf{M}_c(\tau) \equiv -\frac{\partial \mathbf{t}^\vee}{\partial \Delta \mathbf{u}^t} \quad 6.26$$

$$\mathbf{M}_c(\tau) = \mathbf{K}(\tau) + \Delta t \left[ k_T \mathbf{m}(\tau) \otimes \frac{\partial \Delta u^q(\tau)}{\partial \Delta \mathbf{u}^t} + \frac{\Delta u^q(\tau)}{q_{cpr}(\tau)} k_T \mathbf{m}(\tau) \otimes k_T \mathbf{m}(\tau) \right] \quad 6.27$$

$$\mathbf{K} \equiv k_T (\mathbf{1} \mathbf{r} \mathbf{f}(\tau) - \mathbf{n}(\tau) \otimes \mathbf{n}(\tau)) + k_N (\mathbf{n}(\tau) \otimes \mathbf{n}(\tau)) \quad 6.28$$

O desenvolvimento desta derivação pode ser verificado em PISONI (1993)

#### Algoritmo para Modelo de Anand

*Atualização das trações normais:*

$$t_N(\tau) = t_N(t) + (-k_N)(\Delta u_N - \Delta g_N)$$

*Cálculo do preditor elástico:*

$$\mathbf{t}_{pr}^\vee(\tau) = \mathbf{t}^\vee(t) + k_T(\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T)$$

*Verificação da condição de deslizamento:*

Se  $q_{cpr}(\tau) < s(t)$  processo está em aderência

Senão  $q_{cpr}(\tau) \geq s(t)$  está em deslizamento.

*Atualiza s com*

$$\mu(\tau) = \mu(t) + \hat{h}_\mu(\mu(\tau)) \Delta u^q$$

$$s^*(\tau) = s^*(t) + \hat{h}_s(s^*(\tau)) \Delta u^q$$

*Calcular o fator de retorno radial*

*Atualiza as trações*

*Calcula o Jacobiano e retorna para o solver principal*

### 6.3 O Modelo Bi-dimensional

Conforme a proposta inicial deste trabalho é desenvolvida uma lei constitutiva isotrópica, com algumas diferenças em relação ao modelo de Anand. Considerando,

$$t_N(\tau) = t_{prN}(t) + k_N \Delta u_N$$

$$t_1(\tau) = t_{pr1} + k_T m_1 \Delta \lambda_c$$

$$t_2(\tau) = t_{pr2} + k_T m_2 \Delta \lambda_c$$

onde

$$m_1 = \frac{t_1}{q_c}; \quad m_2 = \frac{t_2}{q_c}; \quad q_c = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$$

$$m_{pr1} = \frac{t_{pr1}}{q_{cpr}}; \quad m_{pr2} = \frac{t_{pr2}}{q_{cpr}}; \quad q_{cpr} = \sqrt{t_{pr1}^2 + t_{pr2}^2}$$

Verificando a relação entre  $\mathbf{m}_{pr}$  e  $\mathbf{m}$  :

$$\mathbf{m}(\tau) = \frac{\mathbf{t}(\tau)}{q_c(\tau)} \quad \text{e} \quad \mathbf{m}_{pr}(\tau) = \frac{\mathbf{t}_{pr}(\tau)}{q_{cpr}(\tau)}$$

Assim,  $\mathbf{t}(\tau) = \mathbf{m}(\tau) q_c(\tau)$  e  $\mathbf{t}_{pr}(\tau) = \mathbf{m}_{pr}(\tau) q_{cpr}(\tau)$

Substituindo em 6.14 :

$$\mathbf{m}_{pr}(\tau) q_{cpr}(\tau) = \mathbf{m}(\tau) q_c(\tau) + k_T \Delta \lambda_c \mathbf{m}(\tau) \quad 6.29$$

$$\mathbf{m}_{pr}(\tau) = \frac{q_c(\tau) + k_T \Delta \lambda_c}{q_{cpr}(\tau)} \mathbf{m}(\tau) = \frac{1}{\omega}$$

$$\mathbf{m}(\tau) = \omega \mathbf{m}_{pr}(\tau)$$

Considerando,

$$\mathbf{m}(\tau) = m_1(\tau) \cdot \mathbf{e}_1(\tau) + m_2(\tau) \cdot \mathbf{e}_2(\tau)$$

$$\sqrt{m_1^2(\tau) + m_2^2(\tau)} = 1$$

$$\sqrt{\omega^2 m_{pr1}^2(\tau) + \omega^2 m_{pr2}^2(\tau)} = \omega \sqrt{m_{pr1}^2(\tau) + m_{pr2}^2(\tau)} = 1 \quad \therefore \quad \omega = 1$$

então,

$$\mathbf{m}(\tau) = \mathbf{m}_{pr}(\tau)$$

Esta simplificação permite escrever a relação para determinar  $\Delta\lambda_c$  a partir de 6.29.

$$q_{cpr}(\tau) = q_c(\tau) + k_T \Delta\lambda_c \quad \therefore \quad \Delta\lambda_c = \frac{q_{cpr} - q_c}{k_T} \quad 6.30$$

### *Atualização dos incrementos de deslizamento*

Com o multiplicador, calculado através de 6.30, são atualizados os incrementos de deslizamento:

$$\Delta u^d = \Delta\lambda_c \mathbf{m}_{pr}(\tau)$$

Com estes deslizamentos é possível calcular o novo deslizamento equivalente acumulado.

### *Determinação do deslizamento equivalente tangencial*

Considerando

$$u^q = \sqrt{u_1^{d2} + u_2^{d2}} \quad \text{onde } u_1, u_2 \text{ são os deslizamentos acumulados nas direções 1 e 2.}$$

E o seu incremento,

$$\Delta u^q = \frac{\partial u^q}{\partial u_1} \Delta u_1^d + \frac{\partial u^q}{\partial u_2} \Delta u_2^d$$

$$\frac{\partial u^q}{\partial u_1^d} = \frac{\partial}{\partial u_1^d} (u_1^{d2} + u_2^{d2})^{1/2} = \frac{1}{2} (u_1^{d2} + u_2^{d2})^{-1/2} \cdot 2u_1^d = \frac{u_1^d}{u^d}$$

$$\Delta u^q = \frac{u_1^d}{u^q} \Delta u_1^d + \frac{u_2^d}{u^q} \Delta u_2^d \quad 6.31$$

Então,

$$\Delta\lambda_c = \frac{\Delta u^q}{\zeta} \quad \text{onde} \quad \zeta = \frac{u_1^d}{u^q} m_{1pr} + \frac{u_2^d}{u^q} m_{2pr}$$

Pode ser observado que, a relação de Anand  $\Delta\lambda_c = \Delta u^q$ , considerava

$$\Delta u^q = \sqrt{\Delta u_1^2 + \Delta u_2^2}, \text{ uma relação menos precisa do que a desenvolvida em 6.31.}$$



### *Atualização da resistência ao deslizamento s*

Com o valor atualizado de  $\Delta u^q$  é calculada a resistência ao deslizamento em  $n+1$ . Aqui é realizado um desenvolvimento alternativo ao de Anand.

#### *. Determinação de $s_{n+1}^*$*

$$s_{n+1}^* = s_n^* + \Delta s^*$$

$$\begin{aligned} \Delta s^* &= h_s \cdot \Delta u^q & h_s &= h_{20} \left[ 1 - \frac{s^*(\tau)}{s_s^*} \right] & h_{20} &= \frac{s_s^*}{u_2} & \Delta u^q &= u_{n+1}^q - u_n^q \\ s_{n+1}^* &= \frac{s_s^*(s_n^* + h_{20}\Delta u^q)}{s_s^* + h_{20}\Delta u^q} \end{aligned} \quad 6.32$$

#### *. Determinação de $\mu_{n+1}$ :*

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \Delta \mu$$

$$\begin{aligned} \Delta \mu &= h_\mu \Delta u^q & e & \quad h_\mu = h_{10} \left[ 1 - \frac{\mu(\tau)}{\mu_s} \right] & e & \quad h_{10} = \frac{\mu_s}{u_1} \\ \mu_{n+1} &= \mu_s \frac{\mu_n + h_{10}\Delta u^q}{\mu_s + h_{10}\Delta u^q} \end{aligned} \quad 6.33$$

Determinação de  $p_{n+1}$ ,

$$p_{n+1} = p_n + \Delta p$$

Com os valores atualizados de  $s^*$ ,  $\mu$  e  $p$  é calculado o novo valor de  $s$  em 6.19.

### *Atualização das trações*

Com o valor atualizado de  $s$  é determinado o fator de mapeamento de retorno,  $rf$  considerando  $s = q_c$  no deslizamento. Então,

$$rf \equiv \frac{s}{q_{cpr}}$$

E são atualizadas as trações

$$t_1 = rf * t_{pr1} \quad t_2 = rf * t_{pr2}$$

### 6.3.1 Determinação do Jacobiano

Definição do Jacobiano:

$$\mathbf{M}_c = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \quad 6.34$$

Adotando a representação  $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta \mathbf{u}} = \partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{t}$ , e retomando a expressão 6.16,

$$\mathbf{M}_c = \partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{t}_{pr} + k_T \Delta \lambda_c \partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{m} + k_T \mathbf{m} \partial_{\Delta \mathbf{u}} \Delta \lambda_c$$

A primeira das derivadas, resulta na matriz tangente,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & k_T & 0 \\ 0 & 0 & k_T \end{bmatrix},$$

A derivada do termo  $\mathbf{m}$ ,

$$\partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{m}(\tau) = -\frac{k_T}{q_{cpr}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - m_{pr1} m_{pr1} & -m_{pr1} m_{pr2} \\ 0 & -m_{pr1} m_{pr2} & 1 - m_{pr2} m_{pr2} \end{bmatrix},$$

E a derivada do incremento do multiplicador de contato,

$$\partial_{\Delta \mathbf{u}} \Delta \lambda_c = \frac{1}{k_T} [\partial_{\Delta \mathbf{u}} q_{cpr} - \partial_{\Delta \mathbf{u}} s]$$

Então, obtém-se a primeira componente do incremento de deslocamento tangencial,

$$\frac{\partial \Delta \lambda_c}{\partial \Delta u_1} = \frac{\frac{1}{k_T} [k_T m_{pr1} - (\frac{\partial s}{\partial \mu} \bar{h}_\mu \beta_1 + \frac{\partial s}{\partial s^*} \bar{h}_s \beta_1)] \Delta \lambda_c}{1 + \frac{1}{k_T} \frac{\partial s}{\partial \mu} \bar{h}_\mu \alpha + \frac{1}{k_T} \frac{\partial s}{\partial s^*} \bar{h}_s \alpha}$$

onde,  $\alpha = \frac{u_1}{u^q} \left| m_{pr1} \right| + \frac{u_2}{u^q} \left| m_{pr2} \right|$  e  $\beta_1 = \frac{u_1}{u^q} \left| \frac{\partial m_{pr1}}{\partial \Delta u_1} \right| + \frac{u_2}{u^q} \left| \frac{\partial m_{pr2}}{\partial \Delta u_1} \right|$

Com,

$$\frac{\partial m_{pr1}}{\partial \Delta u_1} = -\frac{k_T}{q_{cpr}} (1 - m_{pr1} m_{pr1}), \quad \frac{\partial m_{pr2}}{\partial \Delta u_1} = \frac{k_T}{q_{cpr}} (m_{pr1} m_{pr2})$$

$$\bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{1 - \frac{\partial h_\mu}{\partial \mu} \Delta u^q} \quad \bar{h}_s = \frac{h_s}{1 - \frac{\partial h_s}{\partial s^*} \Delta u^q}$$

Para o termo relativo à outra direção,

$$\frac{\partial \Delta \lambda_c}{\partial \Delta u_2} = \frac{\frac{1}{k_T} [k_T m_{pr2} - (\frac{\partial s}{\partial \mu} \bar{h}_\mu \beta_2 + \frac{\partial s}{\partial s^*} \bar{h}_s \beta_2)] \Delta \lambda_c}{1 + \frac{1}{k_T} \frac{\partial s}{\partial \mu} \bar{h}_\mu \alpha + \frac{1}{k_T} \frac{\partial s}{\partial s^*} \bar{h}_s \alpha}$$

Com,

$$\beta_2 = \frac{u_1}{u^q} \left| \frac{\partial m_{pr1}}{\partial \Delta u_2} \right| + \frac{u_2}{u^q} \left| \frac{\partial m_{pr2}}{\partial \Delta u_2} \right|$$

Para finalizar, é determinada a derivada da pressão,

$$\partial_{\Delta u} p = \begin{bmatrix} -k_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Algoritmo do Modelo Isotrópico***Atualização das trações normais:*

$$t_N(\tau) = t_N(t) + (-k_N)(\Delta u_N - \Delta g_N)$$

*Cálculo do preditor elástico:*

$$t_{pr}^{\nabla}(\tau) = t^{\nabla}(t) + k_T(\Delta u^t - \Delta g_T)$$

*Verificação da condição de deslizamento:**Se*

$$q_{cpr}(\tau) < s(t) \quad \text{processo está em aderência}$$

*senão*

$$q_{cpr}(\tau) \geq s(t) \quad \text{está em deslizamento.}$$

*Calcular  $\Delta \lambda_c$* *Atualizar  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$* *Calcular  $\Delta u^q$  e atualizar*

$$\mu(\tau) \quad \text{e} \quad s^*(\tau)$$

*Calcular  $s(\tau)$* *Calcular o fator de retorno radial  $rf = \frac{s}{q_{cpr}}$* 

$$\text{Calcular } t_1 = rf * t_{pr1} \quad \text{e} \quad t_2 = rf * t_{pr2}$$

*Calcular o Jacobiano.**Retornar para o solver principal do programa.*

## CAPÍTULO VII

### LEI CONSTITUTIVA DE ATRITO MISTA

#### 7.1 A Representação do Encruamento Cinemático no Atrito

Como apontado por CHENG; KIKUCHI (1985), o efeito Bauschinger constitui um aspecto importante nos deslizamentos cíclicos. Uma evidência experimental foi obtida por COURTNEY-PRATT; EISNER (1957) e apresentada na figura 7.1. Foi aplicada uma força tangencial cíclica a um disco de platina polida (peso= 0.920 kgf), para deslizar-lo sobre uma chapa de aço.

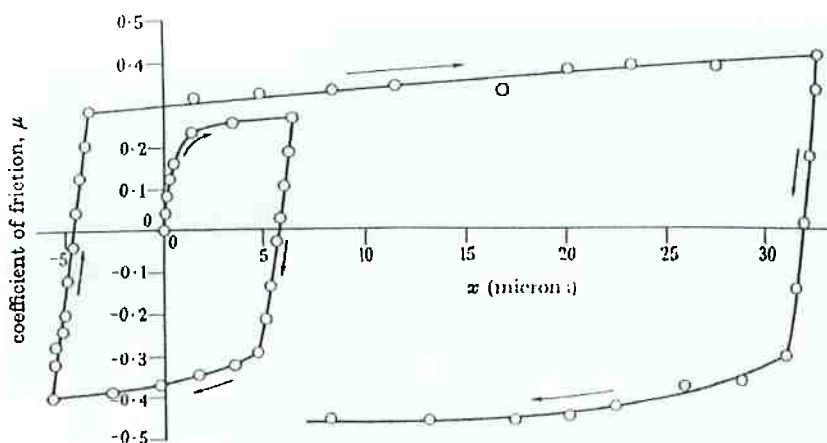


Figura 7.1 Experimento de Courtney-Pratt; Eisner (1957)

Neste experimento é possível perceber o referido efeito a partir do segundo ciclo de descarga. O experimento sugere também, a adoção de curvas diferentes para a modelagem dos efeitos de encruamento decorrentes dos carregamentos tangenciais em sentidos diferentes.

ANAND;TONG (1993) realizaram um experimento semelhante, apresentado na figura 7.2, e também verificaram a presença do efeito Bauschinger.

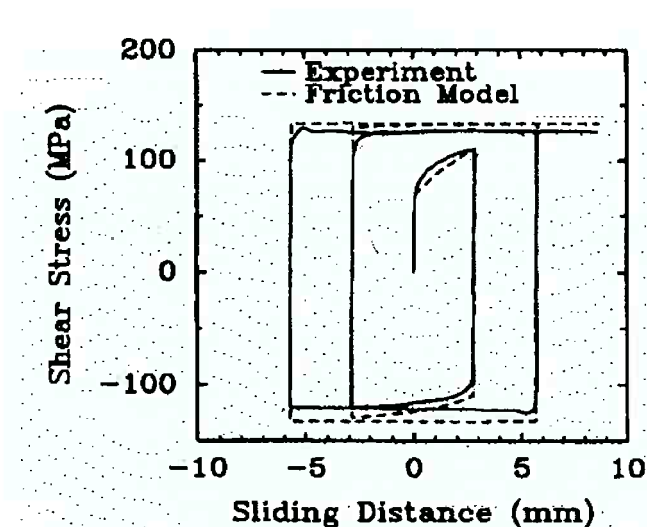


Figura 7.2 Experimento de Tong;Anand (1993)

O aparato experimental utilizado por estes pesquisadores consiste de um disco de cobre e uma superfície de aço. Sobre o disco é aplicado um esforço de compressão (207 MPa), seguido de deslocamentos (rotações) em sentidos alternados segundo as magnitudes representadas na figura. O teste foi realizado a baixa velocidade (0.288 mm/s), tal que o aumento de temperatura devido ao aquecimento devido ao atrito é insignificante (ANAND;TONG (1993)).

Na figura 7.2 estão representadas duas curvas. O referido modelo de atrito corresponde à lei constitutiva de atrito isotrópica implementada em ANAND (1993). É possível perceber na figura, que na inversão do sentido do movimento, a linha referente ao modelo implementado não consegue representar o efeito de “amolecimento” da resistência na interface.

A partir destas evidências é possível inferir o surgimento de um efeito cinemático na interface de deslizamento. Uma explicação plausível para este fenômeno, é considerar que, conforme vai se processando o deslizamento, cada ponto material, a cada instante, deve encontrar a superfície em estado diferente. Se a deformação permanente das rugosidades define boa parte do efeito de atrito, durante o deslizamento

os pontos de contato vão encontrando estas superfícies com um perfil de rugosidades continuamente diferentes. No espaço das trações, este efeito pode ser considerado como se o ponto encontrasse uma superfície limite (escoamento) de deslizamento diferente, transladada no espaço de trações.

## 7.2 Lei Constitutiva de Atrito Mista

No encruamento cinemático a tração é definida relativamente à tração de fundo (back stress),  $\mathbf{J}$ , que define a translação da superfície de deslizamento no espaço de trações (figura 3.2).

Assim,

$$\mathbf{t}^r = \mathbf{t} - \mathbf{J}$$

Considerando a seguinte função de escoamento:

$$f_c(\mathbf{t}, \mathbf{J}, s) = q_c^r - s$$

$$q_c^r = \sqrt{(t_i - J_i)(t_i - J_i)} \quad i = 1, 2 \quad 7.1$$

Considerando o caso geral onde a resistência ao deslizamento é dependente da pressão, distância de deslizamento, temperatura e velocidade. No modelo desenvolvido no presente trabalho,  $s$  é independente de  $\mathbf{J}$ .

$$s = s(p, \mathbf{u}^d, q, \dot{g}_T)$$

Retomando a consistência, para que o par de variáveis  $(t, s)$  continue a satisfazer a condição de deslizamento  $q_c^r - s = 0$ .

$$\Delta f_c(\mathbf{t}, \mathbf{J}, s) = 0$$

$$\Delta f_c = \frac{\partial f_c}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{J}} \Delta \mathbf{J} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \Delta s$$

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta \mathbf{t}^\nabla + \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}$$

$$\Delta f_c = \frac{\partial f_c}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f_c}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial f_c}{\partial J_1} \Delta J_1 + \frac{\partial f_c}{\partial J_2} \Delta J_2 - \frac{\partial f_c}{\partial s} \Delta s = 0 \quad 7.2$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial t_1} = \frac{1}{2} \frac{t_1 - J_1}{\sqrt{(t_1 - J_1)(t_2 - J_2)}} = \frac{t_1 - J_1}{2q_c^r} = m_1^r$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial t_2} = \frac{t_2 - J_2}{q_c^r} = m_2^r$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial J_1} = \frac{\partial f_c}{\partial t^r} \frac{\partial t^r}{\partial J_1} = \frac{J_1 - t_1}{q_c^r} = -m_1^r$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial J_2} = \frac{J_2 - t_2}{q_c^r} = -m_2^r$$

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^a) = -k_T (\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^d)$$

$$\Delta t_1^\nabla = -k_T (\Delta u_1 - \Delta u_1^d)$$

$$\Delta t_2^\nabla = -k_T (\Delta u_2 - \Delta u_2^d)$$

$$\Delta t_N^\nabla = k_N (\Delta u_N - \Delta g_N)$$

O encruamento cinemático na interface é considerado linear<sup>1</sup>, como proposto em CHENG; KIKUCHI (1985):

$$\mathbf{J} = -\eta_c \mathbf{u}^d$$

A tensão retroativa apresentada na forma corotacional, incremental:

$$\Delta \mathbf{J}^\nabla = -\eta_c \Delta \mathbf{u}^{d^\nabla} \quad 7.3$$

Assim, as componentes da tensão retroativa nas direções 1 e 2,

$$\Delta J_1^\nabla = -\eta_c \Delta u_1^{d^\nabla}$$

$$\Delta J_2^\nabla = -\eta_c \Delta u_2^{d^\nabla}$$

$$\text{onde } \Delta \mathbf{u}^{d^\nabla} = \lambda_c^r \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}}$$

<sup>1</sup> Equivalente ao modelo de Prager na elastoplasticidade.



O incremento de resistência ao deslizamento é determinado:

$$\Delta s^{\nabla} = \frac{\partial s}{\partial p} \Delta p^{\nabla} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \Delta \mathbf{u}^{d\nabla} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T$$

Portanto, substituindo as expressões acima 7.2:

$$\Delta f_c^{\nabla} = \mathbf{m}^r \cdot (\Delta \mathbf{t}^{\nabla} + \Delta \Omega \mathbf{t}) - \eta_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{J}} \Delta \lambda_c^r \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \Delta p^{\nabla} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \Delta \lambda_c^r \frac{\partial F_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T \right) = 0$$

Substituindo  $\Delta \mathbf{t}^{\nabla}$ ,  $\Delta \mathbf{u}^a$  e  $\Delta \mathbf{t}_N$

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}^r \cdot k_T (\Delta \mathbf{u}^i - \Delta \mathbf{g}_T) + \mathbf{m}^r \cdot \Delta \Omega \mathbf{t} - \Delta \lambda_c^r \eta_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{J}} \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) + \\ & + \Delta \lambda_c^r \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T + \Delta \lambda_c^r \mathbf{m}^r \cdot k_T \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_c^r \left( -\eta_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{J}} \mathbf{m}^r + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \mathbf{m}^r + \mathbf{m}^r \cdot k_T \mathbf{m}^r \right) &= -\mathbf{m}^r \cdot k_T (\Delta \mathbf{u}^i - \Delta \mathbf{g}_T) - \mathbf{m}^r \cdot \Delta \Omega \mathbf{t} - \\ & \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T \end{aligned}$$

O multiplicador de contato relativo é determinado pela expressão:

$$\| \Delta \lambda_c^r = \frac{-\mathbf{m}^r \cdot k_T (\Delta \mathbf{u}^i - \Delta \mathbf{g}_T) - \mathbf{m}^r \cdot \Delta \Omega \mathbf{t} - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} \Delta \theta - \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{g}}_T} \Delta \dot{\mathbf{g}}_T}{\left( -\eta_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{J}} \mathbf{m}^r + \frac{\partial f_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^d} \mathbf{m}^r + \mathbf{m}^r \cdot k_T \mathbf{m}^r \right)} \quad 7.4$$

Desprezando os termos referentes à temperatura e velocidade, e expandindo nas componentes direcionais,

$$\| \Delta \lambda_c^r = - \frac{m_1^r k_T \Delta u_1 + m_2^r k_T \Delta u_2 + h_p \Delta p}{(k_T + \eta_c) m_1^r + (k_T + \eta) m_2^r + h_T} \quad 7.5$$

Desprezando os termos referentes à temperatura e velocidade, e expandindo nas componentes, o incremento nas trações relativas é determinado:

$$\| \Delta \mathbf{t}^r = -k_T (\Delta \mathbf{u} - \frac{m_1^r k_T \Delta u_1 + m_2^r k_T \Delta u_2 + h_p \Delta p}{(k_T + \eta_c) m_1^{r2} + (k_T + \eta_c) m_2^{r2} + h_T} \mathbf{m}^r) \quad 7.6$$

Uma forma alternativa de proceder esta seqüência para atualizar as trações segue<sup>2</sup>:

$$\mathbf{t}^r(\tau) = \mathbf{t}^r(t) + \Delta \mathbf{t}^r$$

$$\mathbf{t}^r(\tau) = \mathbf{t}^r(t) - k_T (\Delta \mathbf{u} - \Delta \lambda_c^r \mathbf{m}^r(\tau))$$

Considerando a tração preditora:

$$\mathbf{t}_{pr}^r = \mathbf{t}^r - k_T \Delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{t}^r(\tau) = \mathbf{t}_{pr}^r - k_T \Delta \lambda_c^r \mathbf{m}^r(\tau) \quad 7.7$$

Verificação da relação entre  $\mathbf{m}^r$  e  $\mathbf{m}_{pr}^r$ :

$$\mathbf{m}^r(\tau) = \frac{\mathbf{t}^r(\tau)}{q_c^r} \quad \text{onde} \quad q_c^r(\tau) = \sqrt{t_1^{r2}(\tau) + t_2^{r2}(\tau)}$$

$$\mathbf{m}_{pr}^r(\tau) = \frac{\mathbf{t}_{pr}^r(\tau)}{q_{cpr}^r} \quad \text{onde} \quad q_{cpr}^r(\tau) = \sqrt{t_{pr1}^{r2}(\tau) + t_{pr2}^{r2}(\tau)}$$

Substituindo na expressão 7.7:

$$\mathbf{m}_{pr}^r q_{cpr}^r = \mathbf{m}^r q_c^r + k_T \mathbf{m}^r \Delta \lambda_c$$

$$\mathbf{m}_{pr}^r = \left[ \frac{q_c^r + k_T \Delta \lambda_c}{q_{cpr}^r} \right] \mathbf{m}^r = \frac{1}{\omega^r}$$

$$\mathbf{m}^r = \omega^r \mathbf{m}_{pr}^r \quad \text{como} \quad \omega^r = 1 \quad (3) \quad \text{então,}$$

<sup>2</sup> A partir deste ponto foi retirada a simbologia corotacional, embora as medidas conservem a sua objetividade.

<sup>3</sup> Demonstrado no capítulo anterior

$$\mathbf{m}^r(\tau) = \mathbf{m}_{pr}^r(\tau)$$

Retomando a expressão acima,

$$q_{cpr}^r = q_c^r + k_T \Delta \lambda_c^r \quad \text{e, portanto.}$$

$$\Delta \lambda_c^r = \frac{q_{cpr}^r - s}{k_T}$$

Com o multiplicador, são calculados os incrementos de deslizamento

$$\Delta \mathbf{u}^d = \Delta \lambda_c^r \mathbf{m}_{pr}^r(\tau)$$

e o incremento de deslizamento equivalente  $\Delta u^d$ , com a expressão 6.31.

Como é considerado que a evolução da resistência ao deslizamento  $s$  independe de  $\mathbf{J}$ , a seqüência para atualizar  $s$ , segue o Capítulo VI (expressão 6.31 em diante). Da mesma forma, o Jacobiano desenvolvido para o modelo isotrópico é o mesmo a ser aplicado para a lei mista. A atualização das trações tem a mesma seqüência lógica do capítulo VI.

**Algoritmo do Modelo Misto***Atualização das trações normais*

$$t_N(\tau) = t_N(t) + (-k_N)(\Delta u_N - \Delta g_N)$$

*Cálculo da tração relativa*

$$t^{r\nabla} = t - J$$

*Cálculo do preditor elástico:*

$$t_{pr}^{r\nabla}(\tau) = t^{r\nabla}(t) + k_T(\Delta u^t - \Delta g_T)$$

*Verificação da condição de deslizamento:*

Se  $q_{cpr}^r(\tau) < s(t)$  processo está em aderência

Senão  $q_{cpr}^r(\tau) \geq s(t)$  e o processo está em deslizamento.

Calcular  $\Delta \lambda_c^r$  e atualizar  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$

Calcular  $\Delta u^q$  e atualizar  $\mu(\tau)$  e  $s^*(\tau)$

Calcular  $s(\tau)$

Calcular o fator de retorno radial relativo  $rrf = \frac{s}{q_{cpr}^r}$

Calcular  $t_1^r = rrf * t_{pr1}^r$  e  $t_2^r = rrf * t_{pr2}^r$

Atualizar  $J$

$$\Delta J = \Delta u * \eta_c$$

e

$$J(\tau) = J(t) + \Delta J$$

Atualizar  $t$

$$t = t^r + J$$

Calcular o Jacobiano.

Retornar para o solver principal do programa.

## CAPÍTULO VIII

### LEI CONSTITUTIVA DE ATRITO ANISOTRÓPICA

Embora em muitos problemas seja possível simplificar o comportamento elastoplástico para o regime isotrópico, segundo CHABOCHE;LEMAITRE (1994), a maioria dos metais exibe um comportamento de encruamento anisotrópico.

Para o atrito na interface é possível estabelecer uma idéia análoga, uma vez que é comum a presença de características direcionais nas superfícies. Por exemplo, os processos de conformação mecânica podem levar a formação de sulcagem nas superfícies da interface, e, portanto, a diferenças na resistência ao deslizamento segundo as direções.

#### 8.1 O Modelo Anisotrópico de Atrito

O desenvolvimento da formulação de uma lei constitutiva anisotrópica tem por objetivo a construção de um modelo que possibilite a adoção de comportamentos diferentes para resistência,  $s$ , segundo as direções deslizamento. Assim, neste modelo, também surge a oportunidade de simular diferentes curvas para  $\mu, s^*$  segundo a magnitude do deslizamento. O modelo anisotrópico desenvolvido na seqüência, na realidade é ortotrópico, uma vez que as direções consideradas são duas.

Como nos capítulos anteriores, a atualização das trações segue o procedimento:

$$\mathbf{t}(\tau) = \mathbf{t}(t) + \Delta \mathbf{t}$$

$$\Delta \mathbf{t} = \mathbf{k}_T (\Delta \mathbf{u} - \Delta \lambda_c \mathbf{m})$$

onde  $\mathbf{k}_T$  = vetor das rigidezes tangenciais, direções 1 e 2

Assim como as expressões para  $\mu, s^*$ . Da mesma forma, são mantidas as expressões propostas inicialmente por Anand, em função dos deslizamentos nas direções 1 e 2.

$$\begin{aligned}\mu_1(u_1) &= \mu_{0_1} + (\mu_{s_1} - \mu_{0_1}) \left[ 1 - e^{-s_1/s_\alpha} \right] & \mu_2(u_2) &= \mu_{0_2} + (\mu_{s_2} - \mu_{0_2}) \left[ 1 - e^{-s_2/s_\beta} \right] \\ s_1^*(u_1) &= s_{0_1}^* + (s_{s_1}^* - s_{0_1}^*) \left[ 1 - e^{-s_1/s_\alpha} \right] & s_2^*(u_2) &= s_{0_2}^* + (s_{s_2}^* - s_{0_2}^*) \left[ 1 - e^{-s_2/s_\beta} \right]\end{aligned}$$

As evoluções das curvas, tanto de  $\mu$ , quanto de  $s^*$ , são consideradas desacopladas nas direções 1 e 2.

Aplicando a condição de consistência  $\Delta f_c = 0$

$$\Delta f_c = \frac{\partial f_c}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial f_c}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial f_c}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial f_c}{\partial s_1} \Delta s_1 + \frac{\partial f_c}{\partial s_2} \Delta s_2 \quad 8.5$$

8.6

sendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_c}{\partial t_1} &= \frac{1}{\left[ \left( \frac{t_1}{s_1} \right)^2 + \left( \frac{t_2}{s_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{t_1}{s_1^2} = m_1 \\ \frac{\partial f_c}{\partial t_2} &= - \frac{1}{\left[ \left( \frac{t_1}{s_1} \right)^2 + \left( \frac{t_2}{s_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{t_2}{s_2^2} = m_2\end{aligned} \quad 8.7$$

Da mesma forma, podem ser determinados,

$$\frac{\partial f_c}{\partial s_1} = - \frac{t_1^2}{s_1^3} = -m_1 \frac{t_1}{s_1} \quad \frac{\partial f_c}{\partial s_2} = - \frac{t_2^2}{s_2^3} = -m_2 \frac{t_2}{s_2}$$

Destas expressões é possível extrair uma relação entre as trações e as resistências. No deslizamento,

Assim, a expressão para calcular as trações segundo o preditor é a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\tau) &= \mathbf{t}_{pr}(\tau) - \mathbf{k}_T \Delta \lambda_c \mathbf{m} \\ \mathbf{t}_{pr} &= \mathbf{t} \left[ 1 + \Delta \lambda_c \mathbf{k}_T \mathbf{m} \mathbf{t}^{-1} \right] \end{aligned} \quad 8.1$$

Para determinar os valores de  $m_1$  e  $m_2$  são retomadas as relações:

$$\mathbf{m}_{pr} = \frac{\mathbf{t}_{pr}}{q_{cpr}} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{t}}{q_c} \quad \text{onde} \quad q_{cpr} = \sqrt{t_{pr1}^2 + t_{pr2}^2}$$

Com a expressão 8.1,

$$q_{cpr} \mathbf{m}_{pr} = q_c \mathbf{m} \left( 1 + \frac{\Delta \lambda_c \mathbf{k}_T}{q_c} \right)$$

$$\mathbf{m}_{pr} = \frac{q_c}{q_{cpr}} \left[ \frac{q_c + \Delta \lambda_c \mathbf{k}_T}{q_c} \right] \mathbf{m}$$

portanto,

$$m_1 = \frac{t_{pr1}}{q_c + \Delta \lambda_c k_{T1}} \quad m_2 = \frac{t_{pr2}}{q_c + \Delta \lambda_c k_{T2}} \quad 8.2$$

Assim, considerando um problema bi-dimensional, a função de carregamento é definida pela seguinte função:

$$f_c = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} - s = 0 \quad 8.3$$

$$f_c = \sqrt{\left( \frac{t_1}{s_1} \right)^2 + \left( \frac{t_2}{s_2} \right)^2} - 1 = 0$$

As funções  $s_1, s_2$  podem ser diferentes. No presente trabalho foi arbitrado pela manutenção das funções utilizadas nos capítulos anteriores.

$$s_1 = s_1^* \tanh \left( \frac{p\mu_1}{s_1^*} \right) \quad \text{e} \quad s_2 = s_2^* \tanh \left( \frac{p\mu_2}{s_2^*} \right) \quad 8.4$$

$$f_c = \sqrt{\left(\frac{t_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{s_2}\right)^2} - 1 = 0$$

Portanto,

$$\sqrt{\left(\frac{t_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{s_2}\right)^2} = 1$$

Assim, as expressões 8.6 - 7 podem ser simplificadas:

$$\frac{t_1}{s_1^2} = m_1 \quad \therefore \quad t_1 = m_1 s_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{t_2}{s_2^2} = m_2 \quad \therefore \quad t_2 = m_2 s_2^2 \quad 8.8$$

Os incrementos de tração são determinados:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= k_{T1} \Delta u_1^a = k_{T1} (\Delta u_1 - \Delta u_1^d) \\ &= k_{T1} (\Delta u_1 - \Delta \lambda_c m_1) \end{aligned}$$

$$\Delta t_2 = k_{T2} (\Delta u_2 - \Delta \lambda_c m_2)$$

Retornando à expressão 8.5:

$$\begin{aligned} & m_1 k_{T1} (\Delta u_1 - \Delta \lambda_c m_1) + m_2 k_{T2} (\Delta u_2 - \Delta \lambda_c m_2) - \\ & - m_1 \frac{t_1}{s_1} (h_{T1} \Delta u_1^d + h_{p1} \Delta p) - m_2 \frac{t_2}{s_2} (h_{T2} \Delta u_2^d + h_{p2} \Delta p) = 0 \end{aligned}$$

Assim, o incremento multiplicador de contato para o modelo anisotrópico é o determinado pela expressão:

$$\Delta \lambda_c = \frac{m_1 k_{T1} \Delta u_1 + m_2 k_{T2} \Delta u_2 - m_1 \frac{t_1}{s_1} h_{p1} \Delta p - m_2 \frac{t_2}{s_2} h_{p2} \Delta p}{m_1^2 k_{T1} + m_2^2 k_{T2} + m_1 \frac{t_1 h_{T1}}{s_1} m_1 + m_2 \frac{t_2 h_{T2}}{s_2} m_2} \quad 8.9$$

E são calculados os novos incrementos de deslizamento:

$$\Delta u_1^d = \Delta \lambda_c m_1$$



$$\Delta u_2^d = \Delta \lambda_c m_2$$

Que serão utilizados para atualizar os valores de  $\mu_{1n+1}$  e  $s_{1n+1}^*$ ;  $\mu_{2n+1}$  e  $s_{2n+1}^*$ .

Determinando os coeficientes de atrito e resistências ao deslizamento limite nas direções 1,2, de acordo com as expressões determinadas 6.32-33, substituindo o deslizamento equivalente por sua componente direcional:

$$\begin{aligned} \mu_{1n+1} &= \mu_{1S} \frac{\mu_{1n} + h_{110} \Delta u_1}{\mu_{1S} + h_{110} \Delta u_1} & \mu_{2n+1} &= \mu_{2S} \frac{\mu_{2n} + h_{210} \Delta u_2}{\mu_{2S} + h_{210} \Delta u_2} \\ s_{1n+1}^* &= \frac{s_{1S}^* (s_{1n}^* + h_{120} \Delta u_1)}{s_{1S}^* + h_{120} \Delta u_1} & s_{2n+1}^* &= \frac{s_{2S}^* (s_{2n}^* + h_{220} \Delta u_2)}{s_{2S}^* + h_{220} \Delta u_2} \end{aligned}$$

Com estes valores são calculados os novos valores de  $s_1$  e  $s_2$  através das expressões 8.4.

A atualização das trações pode ser realizada utilizando o formalismo abaixo:

$$\Delta t_1 = k_{T1} (\Delta u_1 - \Delta \lambda_c m_1)$$

$$\Delta t_2 = k_{T2} (\Delta u_2 - \Delta \lambda_c m_2)$$

$$\Delta t_1 = k_{T1} \left( \Delta u_1 - \frac{m_1 k_{T1} \Delta u_1 + m_2 k_{T2} \Delta u_2 - m_1 \frac{t_1}{s_1} h_{p1} \Delta p - m_2 \frac{t_2}{s_2} h_{p2} \Delta p}{m_1^2 k_{T1} + m_2^2 k_{T2} + m_1 \frac{t_1 h_{T1}}{s_1} m_1 + m_2 \frac{t_2 h_{T2}}{s_2} m_2} m_1 \right) \quad 8.10$$

$$\Delta t_2 = k_{T2} \left( \Delta u_2 - \frac{m_1 k_{T1} \Delta u_1 + m_2 k_{T2} \Delta u_2 - m_1 \frac{t_1}{s_1} h_{p1} \Delta p - m_2 \frac{t_2}{s_2} h_{p2} \Delta p}{m_1^2 k_{T1} + m_2^2 k_{T2} + m_1 \frac{t_1 h_{T1}}{s_1} m_1 + m_2 \frac{t_2 h_{T2}}{s_2} m_2} m_2 \right) \quad 8.11$$

Uma forma alternativa para atualizar as trações utilizando as expressões determinadas em 8.8 com 8.2.

Assim,

$$t_1 = \frac{t_{pr1}}{s_1 + \Delta\lambda_c k_{T1}} s_1^2 \quad t_2 = \frac{t_{pr2}}{s_2 + \Delta\lambda_c k_{T2}} s_2^2 \quad 8.12$$

## 8.2 Determinação do Jacobiano

Como desenvolvido no Capítulo VI, o Jacobiano provém da relação:

$$M_c = \partial_{\Delta u} t \quad t = t_{pr} - k_T m \Delta\lambda_c$$

$$M_c = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & \partial t_1 / \partial \Delta u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial t_2 / \partial \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

Considerando,

$$t(\tau) = t_n(t) - k_T \Delta u_N$$

$$t_1 = t_{pr1} - k_{T1} m_1 \Delta\lambda_c$$

$$t_2 = t_{pr2} - k_{T2} m_2 \Delta\lambda_c$$

e

$$m_1 = \frac{t_1}{s_1^2} \quad m_2 = \frac{t_2}{s_2^2}$$

Podem ser determinados os componentes do Jacobiano

Para a componente  $t_1$ ,

$$\frac{\partial t_1}{\partial \Delta u_1} = \frac{\partial}{\partial \Delta u_1} [t_1 + k_{T1} \Delta u_1] - k_{T1} \frac{\partial m_1}{\partial \Delta u_1} \Delta\lambda_c - k_{T1} m_1 \frac{\partial \Delta\lambda_c}{\partial \Delta u_1} \quad 8.13$$

Realizando as derivações, a expressão final é determinada:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \Delta u_1} = \frac{k_{T1}}{1 + k_{T1} \frac{\Delta \lambda_c}{s_1^2} [1 - 2t_1 \frac{\phi(1 + t_1 s_1)}{s_1^3 + 2t_1 \phi \Delta \lambda_c}] + k_{T1} m_1 \gamma} \quad 8.14$$

onde,

$$\phi = \frac{\partial s_1}{\partial \mu_1} \bar{h}_{\mu_1} + \frac{\partial s_1}{\partial s_1^*} \bar{h}_{s_1}$$

$$\gamma = \frac{1}{k_{T1}} \left[ \frac{t_{pr1} - t_1}{q_c} \right] + \frac{q_c}{t_1} - \frac{1}{k_{T1}} \frac{t_{pr1}}{t_1} \frac{q_c}{t_1}$$

Linearizando  $h_\mu$  e  $h_s$ .

$$\bar{h}_{\mu_1} = \frac{h_{\mu_1}}{1 - \frac{\partial h_{\mu_1}}{\partial \mu_1} \Delta s_1} \quad \bar{h}_{s_1} = \frac{h_{s_1}}{1 - \frac{\partial h_{s_1}}{\partial s_1^*} \Delta s_1^*}$$

Para a componente  $t_2$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \Delta u_2} = \frac{\partial}{\partial \Delta u_2} [t_2(t) + k_{T2} \Delta u_2] - k_{T2} \frac{\partial m_2}{\partial \Delta u_2} \Delta \lambda_c - k_{T2} m_2 \frac{\partial \Delta \lambda_c}{\partial \Delta u_2} \quad 8.15$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \Delta u_2} = \frac{k_{T2}}{1 + k_{T2} \frac{\Delta \lambda_c}{s_2^2} [1 - 2t_2 \frac{\phi(1 + t_2 s_2)}{s_2^3 + 2t_2 \phi \Delta \lambda_c}] + k_{T2} m_2 \gamma} \quad 8.16$$

$$\phi = \frac{\partial s_2}{\partial \mu_2} \bar{h}_{\mu_2} + \frac{\partial s_2}{\partial s_2^*} \bar{h}_{s_2}$$

$$\gamma = \frac{1}{k_{T2}} \left[ \frac{t_{pr2} - t_2}{q_c} \right] + \frac{q_c}{t_2} - \frac{1}{k_{T2}} \frac{t_{pr2}}{t_2} \frac{q_c}{t_2}$$

$$\bar{h}_{\mu_2} = \frac{h_{\mu_2}}{1 - \frac{\partial h_{\mu_2}}{\partial \mu_2} \Delta s_2} \quad \bar{h}_{s_2} = \frac{h_{s_2}}{1 - \frac{\partial h_{s_2}}{\partial s_2^*} \Delta s_2^*}$$

A derivada com relação à pressão segue o caso isotrópico.

**Algoritmo do Modelo Anisotrópico**

*Atualização das trações normais:*

$$t_N(\tau) = t_N(t) + (-k_N)(\Delta u_N - \Delta g_N)$$

*Cálculo do preditor elástico:*

$$t_{pr}^\nabla(\tau) = t^\nabla(t) + k_T(\Delta u^t - \Delta g_T)$$

*Verificação da condição de deslizamento:*

*Se*

$$f_c < 0, \text{ processo está em aderência}$$

*Senão, está em deslizamento.*

*Calcular  $\Delta\lambda_c$*

*Atualizar  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$*

*Atualizar  $\mu_1, \mu_2, s_1^*, s_2^*$  segundo as expressões*

$$\mu(\tau)$$

$$s^*(\tau)$$

*Atualizar*

$$s_1 \text{ e } s_2$$

*Calcular*

$$t_1 = m_1 s_1^2 \quad t_2 = m_2 s_2^2$$

*Calcular o Jacobiano.*

*Retornar para o solver principal do programa.*

## CAPÍTULO IX

### CONTATO E O PRINCÍPIO DAS VELOCIDADES VIRTUAIS

Considerando um corpo B no instante t, ocupando a configuração  $\Omega_0$ , em equilíbrio, solicitado por trações  $\mathbf{t}$  na superfície. O corpo muda continuamente de configuração e a atualização da geometria do corpo depende da determinação de posição dos pontos do corpo no tempo t. Utilizando a formulação atualizada de Lagrange foi verificado no Capítulo III, que a solução deste problema - a determinação do campo de deslocamentos, deformações e tensões - é obtida com a solução da equação :

$$\Delta G = 0$$

$$\Delta G = \delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{F}; \quad \Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{F}_e$$

$$\Delta \mathbf{F}_i = \int_{V_i} \mathbf{B}_L^T (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \Delta \mathbf{l}^T + \text{tr} \Delta \mathbf{l} \boldsymbol{\sigma}) dV$$

$$\Delta \mathbf{F}_e = \int_{S_i} \mathbf{N}^T (\Delta \mathbf{t}^\nabla + \frac{1}{A_0} \partial_N A) dA + \int_{V_i} \mathbf{N}^T (\Delta \mathbf{f}^\nabla + \frac{1}{V_0} \partial_N V) dV$$

Esta expressão pode ser simplificada :

$$\mathbf{K}^m \Delta \mathbf{u}^N = \Delta \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{K}^m = \int_{V_i} \mathbf{B}_L^T (\mathbf{C} - \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Gamma}) \mathbf{B}_L dV \quad \Delta \mathbf{u}^N = \text{incremento de deslocamentos nodais}$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}^m$ , referente ao problema mecânico, pode ainda ser dividida em diferentes componentes referentes à rigidez geométrica, material e inicial.

### 9.1 Os Princípios Mecânicos para Imposição de Contato

A aplicação do método dos elementos finitos para solução do problema de contato entre superfícies pode ser estabelecida através de um problema de otimização com uma restrição, relacionada à condição de validade das equações de equilíbrio apenas para a compressão. Esta abordagem gera um princípio variacional com uma desigualdade, e não será desenvolvida neste trabalho, mas poderá ser acompanhada em detalhes em DUVAUT ; LIONS (1976).

Uma segunda abordagem utiliza métodos de otimização na imposição da restrição de contato para restabelecer a igualdade no Princípio das Velocidades Virtuais. Esta abordagem permite a solução pelos meios convencionais do método dos elementos finitos.

Para acoplar o problema de contato ao método dos elementos finitos existem problemas devido à inexistência das geometrias e deslocamentos anteriores. Assim, nesta classe de problemas, não são conhecidas as áreas de contato, o estado de tensão e o campo de deslocamentos - variáveis sob as quais o método dos elementos finitos é baseado – que permitem o estabelecimento de equações algébricas para a solução do problema. Diante desta impossibilidade, para solução deste problema são combinados dois princípios na área de contato:

. *Princípio da impenetrabilidade - a condição cinemática de contato.*

$g_N \geq 0$       é a função gap entre os corpos.

. *Princípio da Ação e Reação - a condição mecânica de contato.*

$t_N = p \leq 0$

Desta maneira a condição de contato pode ser enunciada na forma de Kuhn-Tucker:

$$g_N \geq 0 \quad p \leq 0 \quad e \quad p \cdot g_N = 0$$

A partir destes princípios, válidos no contato entre superfícies, o problema mecânico geral, pode ser expresso:

*“Determinar o valor dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , tal que a energia potencial seja minimizada, e não viole os princípios da impenetrabilidade e de ação e reação”.*

A minimização da energia potencial é executada através da solução da expressão:

$\min \Pi(\mathbf{u})$  tal que :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad 9.1$$

Para imposição do princípio da impenetrabilidade existem duas possibilidades :

- A separação dos corpos é medida no tempo  $t$ , e é requerido que os deslocamentos não excedam a função  $g$ .

- Permitir a interpenetração dos corpos sobre o qual deve ser realizada alguma ação.

Ao primeiro tipo pertence a técnica de **multiplicadores de lagrange**, que acrescenta uma restrição ao sistema através de uma variável  $\gamma$ .

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \gamma \quad 9.2$$

Um problema desta abordagem é a adição de variáveis, que torna maior o sistema de equações a ser resolvido. Por outro lado, esta variável pode ser interpretada fisicamente como força de contato, e a condição de impenetrabilidade é aplicada com exatidão.

## 9.2 Método da Penalidade

A segunda forma de aplicação do princípio de impenetrabilidade está associada à utilização de técnicas de penalização da energia, relacionada à interpenetração das superfícies. A penalização pode ser realizada através de duas abordagens :

- Criação de um corpo fictício na interface onde após o deslocamento, ainda restará uma camada fina de material;
- Permitir a penetração e aplicar forças de correção proporcionais à profundidade de penetração;

Na última abordagem, o método detecta o erro (penetração) e o corrige, associando uma penalização de energia à interpenetração. Uma força normal é relacionada à penetração, por um parâmetro de penalidade, e assim, transfere o problema de não linearidade cinemática para não linearidade material. A penalidade é ajustada de tal maneira que os movimentos nodais em direção às soluções admissíveis diminuem a penalização a ser paga, e isto permite que, minimizando a energia do problema, conduza à solução do problema.

O principal problema na utilização do método da penalidade está na escolha do parâmetro de penalização, que não dispõe de um método formal para a sua determinação. Via de regra, o valor inicial deste parâmetro é associado ao módulo de elasticidade do material mais macio da interface.

Com relação à eficiência de processamento dos métodos de penalidade e Lagrange, existem dois aspectos relevantes a ponderar: o método de Lagrange introduz uma variável e expande a matriz de rigidez global, embora não afete os seus componentes; o de penalidade não introduz novas variáveis, mas atua diretamente sobre a matriz global de rigidez.



Atualmente, o método de Lagrange aumentado vai encontrando cada vez mais espaço entre os aplicativos de elementos finitos, em função de associar as vantagens dos métodos de Lagrange e penalidade. Este tema foi extensivamente estudado por BANDEIRA (2001)<sup>1</sup>.

Um ponto fundamental para a escolha do método da penalidade neste trabalho: a interpretação do parâmetro de penalização como a rigidez da interface permite a aplicação de uma lei constitutiva para descrever o comportamento do contato entre superfícies. Esta possibilidade é importante para expandir a capacidade de exploração do comportamento da interface, através da aplicação de todo arcabouço teórico da elastoplasticidade.

### 9.3 O Problema de Mecânica com Contato

Quando o corpo analisado apresenta, além das trações e / ou deslocamentos prescritos, a possibilidade de contato com outros corpos, deve ser acrescentado ao Princípio das Velocidades Virtuais um termo referente ao contato, na forma:

$$C = \int_{A_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dA \geq 0 \quad 9.3$$

sendo  $\mathbf{t}$  o vetor de trações e  $\mathbf{v}$  o vetor de velocidades, ambos mensurados nas coordenadas locais do ponto de contato. O vetor  $\mathbf{t}$  representa a força de contato por unidade de área agindo na superfície escrava no instante  $t$ , quando os pontos S e T das superfícies mestre e escrava são coincidentes. A superfície instantânea de contato entre os corpos é caracterizada pela normal  $\mathbf{n}$  à superfície mestre. A superfície escrava é

---

<sup>1</sup> O foco do trabalho está sobre a analogia com elastoplasticidade - e esta possibilidade aparece no método de penalidade. Entretanto, toda a metodologia desenvolvida poderia ser aplicada através do método de Lagrange aumentado, uma vez que contém um passo referente à penalização da função.

definida pelo conjunto de pontos do corpo deformável no tempo  $t$ . Considerando o incremento desta integral entre as configurações  $t$  e  $t + \Delta t$  :

$$\Delta C = \int_{A_t} \Delta \mathbf{t}^\nabla \cdot \delta \mathbf{v} \, dA \geq 0 \quad A_t = A_t^e \cup A_t^m; \quad \emptyset = A_t^e \cap A_t^m$$

$A_t^e, A_t^m$  são áreas das superfícies escrava e mestre.

A integral de contato pode ser definida em diferentes superfícies de referência. A sua contribuição para a formulação global de equilíbrio é sempre maior ou igual a zero: é nula apenas quando não existe contato.

O termo tangencial  $\mathbf{t}_T \cdot \Delta \mathbf{u}^d$  - que representa a energia dissipada em atrito -, deve ser positivo, de acordo com a segunda Lei da Termodinâmica. Este termo é nulo em duas situações: aderência perfeita, e, portanto,  $\Delta \mathbf{u}^d$  é nulo, e quando o processo é considerado sem atrito, e assim,  $\mathbf{t}_T = 0$ . Em qualquer outra situação entre estes dois limites, devem existir efeitos de dissipação, e a necessidade da inclusão de uma lei de atrito para modelagem do fenômeno.

Retomando a expressão incremental de equilíbrio apresentada no Capítulo III, e adicionando o termo de contato, resulta :

$$\Delta G = \Delta I - \Delta E + \Delta C \tag{9.4}$$

ou :

$$\int_{V_i} \delta L : (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \nabla_x^T \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \nabla_x \Delta \mathbf{u}) dV + \int_{A_i} \delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{t}^\nabla dA = \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{f}^\nabla + \mathbf{f} \frac{\Delta J}{J}) dV \quad 9.5$$

$$+ \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{t}^\nabla + \mathbf{T} \frac{\Delta I}{I}) dS$$

onde :

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = \Delta t_N^\nabla \mathbf{n} + \Delta \mathbf{t}_T^\nabla \quad .$$

como determinado no capítulo VI:

$$\Delta t_N^\nabla = k_N (\Delta u_N - \Delta g_N)$$

$$\Delta \mathbf{t}_T^\nabla = -k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T) - \frac{k_T \chi \mathbf{m} \cdot k_T (\Delta \mathbf{u}^t - \Delta \mathbf{g}_T)}{D} \mathbf{m} - \frac{k_T \chi}{D} h_p k_N (\Delta u_N - \Delta g_N) \mathbf{m}$$

introduzindo os resultados na expressão 9.5, e definindo os termos:

Trabalho interno:

$$I = \int_{V_i} \delta L : (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \nabla_x^T \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \nabla_x \Delta \mathbf{u}) dV \quad 9.6$$

Contato:

$$\mathbf{X} = \int_{S_i^c} \delta \mathbf{v} \cdot k_N \Delta u_N dA - \int_{S_i^c} \delta \mathbf{v} \cdot k_T \Delta \mathbf{u}^t dA \quad 9.7$$

$$- \int_{S_i^c} \delta \mathbf{v} \cdot \chi \frac{\mu k_T k_N}{D} \mathbf{t}_T \Delta u_N dA + \int_{S_i^c} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\chi k_T^2}{D q_c} \mathbf{t}_T (\mathbf{t}_T \cdot \Delta \mathbf{u}^t) dA$$

e o termo de carregamento externo :

$$\Xi = \int_{V_i} \delta \mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{f}^\nabla + \mathbf{f} \frac{\Delta J}{J}) dV + \int_{S_i} \delta \mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{T}^\nabla + \mathbf{T} \frac{\Delta I}{I}) dS \quad 9.8$$

e finalmente :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y} = & \int_{s_c^i} \delta \mathbf{v} \cdot k_N \Delta \mathbf{g}_N dA - \int_{s_c^i} \delta \mathbf{v} \cdot k_T \Delta \mathbf{g}_T dA - \int_{s_c^i} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\chi \mu k_T}{D} k_N \Delta \mathbf{g}_N dA - \\
 & \int_{s_c^i} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\chi k_T^2}{D q_c} \mathbf{t} (\mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{g}_T) dA
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Considerados os termos acima, a equação de equilíbrio para o caso do problema mecânico com contato :

$$\mathbf{I} + \mathbf{X} = \mathbf{\Xi} + \mathbf{Y} \tag{9.10}$$

Para discretização desta expressão é necessário converter as componentes da base local à base global, para cada termo de contato. Isto é automático quando se supõe as equações escritas na base global. De outra forma, uma matriz de transformação deve ser introduzida para o termo de contato.

Considerando a discretização por elementos finitos, realizada no capítulo II, e introduzindo os termos de contato, a partir dos termos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ :

$$\Delta \mathbf{t}^\nabla = \mathbf{k}_c (\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{g})$$

$$\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ -\chi \frac{\mu k_T}{D} k_N t_1 & -k_T + \frac{\chi k_T^2 t_1^2}{D q_c} & \chi \frac{k_T^2}{D q_c} t_1 t_2 \\ -\chi \frac{\mu k_T}{D} k_N t_2 & \chi \frac{k_T^2}{D q_c} t_1 t_2 & -k_T + \chi \frac{k_T^2}{D q_c} t_2^2 \end{bmatrix}$$

$$D = q_c k_T + \lambda_N \frac{\partial \mu}{\partial u^q} \frac{\mathbf{u}^d}{u^q} \cdot \mathbf{t}_T$$

é dependente do termo :

$$u^q = \sqrt{\mathbf{u}^d \cdot \mathbf{u}^d} \quad \mathbf{u}^d = \mathbf{u}^t - \mathbf{u}^a$$

Assim, a integral de contato pode ser escrita:

$$\int_{A_i} \delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{t}^\nabla dA = \delta \mathbf{v}^{N^T} \left[ \int_{S_c^t} \mathbf{N}^T \mathbf{k}_c \mathbf{N} dA \right] (\Delta \mathbf{u}^N - \Delta \mathbf{g}^N) \quad 9.11$$

e o termo relativo ao trabalho virtual interno:

$$\Delta I = \int_{V_i} \delta \mathbf{L} : (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \nabla_{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{u}) dV \quad 9.12$$

A resolução do problema mecânico com contato:

$$[\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^c] \Delta \mathbf{u}^N = \Delta \mathbf{F}^e + \Delta \mathbf{F}^c \quad \Delta \mathbf{u}^N = \text{incremento de deslocamentos nodais} \quad 9.13$$

$$\mathbf{K}^c = \int_{S_c^t} \mathbf{N}^T \mathbf{k}_c \mathbf{N} dA \quad 9.14$$

$$\Delta \mathbf{F}^c = \mathbf{K}^c \Delta \mathbf{g}^N$$

## CAPÍTULO X

### RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os principais resultados dos experimentos numéricos realizados com os modelos implementados nos capítulos VI, VII e VIII.

Este capítulo está dividido em duas partes: estudos qualitativos para validação dos modelos utilizando as leis constitutivas propostas nos capítulos anteriores, e alguns exemplos de aplicação para comparação com os resultados experimentais.

Antes da apresentação dos resultados é realizado um pequeno estudo sobre a objetividade da lei constitutiva mista, para demonstrar a validade das leis constitutivas sob grandes deslocamentos (rotações). É considerado que, as leis isotrópica e anisotrópica também seguem este comportamento, uma vez que utilizam as mesmas medidas para construção do modelo constitutivo.

#### **10.1 Estudo da Objetividade**

Estes testes consistem na comparação entre as trações geradas na interface, decorrentes do deslocamento de um bloco sobre uma superfície rígida. A amplitude do deslocamento aplicado é metade do comprimento do bloco.

Este modelo foi submetido a dois testes. No primeiro, ao deslizamento relativo é adicionada uma rotação de  $360^\circ$ , para verificação da influência do movimento de corpo rígido sobre o cálculo das trações na interface. A seqüência dos movimentos de deslizamento e de rotação está apresentada na figura 10.1. O movimento de rotação é aplicado através de uma subrotina em Fortran, com interface no programa Abaqus

(Disp)<sup>1</sup>. O outro teste prevê a aplicação do deslocamento no bloco, com a mesma lei constitutiva de interface, conservando apenas o movimento de translação (mesma amplitude), sem rotação.

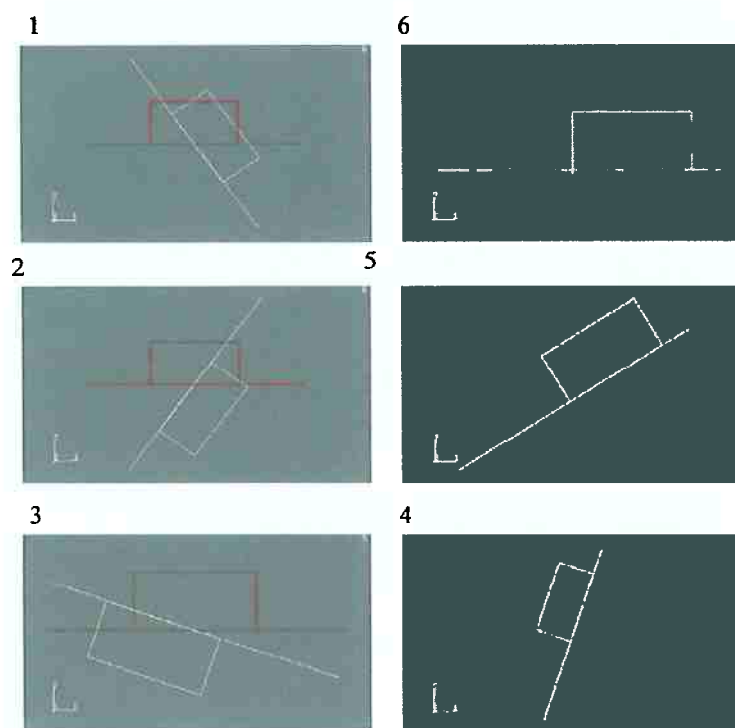


Fig. 10.1 Movimento de rotação sobreposta à translação de um bloco

No gráfico da figura 10.2 são apresentados os resultados destas simulações. A linha representa os valores das trações na interface do bloco e superfície para o caso de translação com rotação. Os pontos representam as trações resultantes do deslizamento, sem o movimento de rotação.

Os resultados apontam para a perfeita concordância dos valores das trações calculados com a lei constitutiva de atrito, envolvendo os efeitos de encruamento

<sup>1</sup> Apêndice III.

isotrópico e cinemático. Assim, as leis constitutivas apresentadas neste trabalho não são influenciadas pelo movimento de corpo rígido, e, portanto, são objetivas.

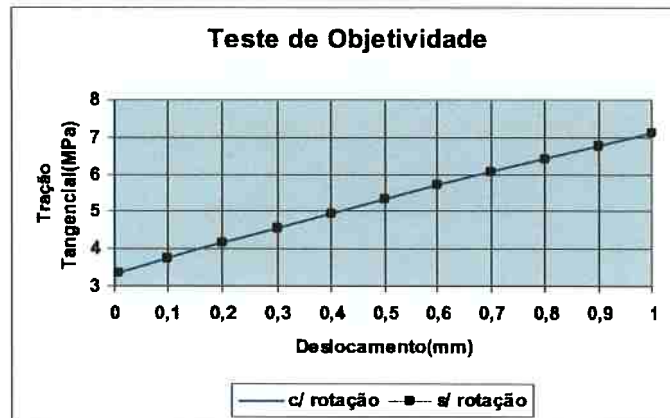


Fig. 10.2 Tensão Cisalhante na Interface x Deslocamento

## 10.2 Estudo da lei Constitutiva Normal e Aderência

Embora a lei normal utilizada esteja implementada no Abaqus, é interessante realizar simulações para comparar com outros resultados obtidos por pesquisadores para justificar a sua utilização nos experimentos seguintes.

Um trabalho importante para o estabelecimento de uma lei constitutiva normal foi realizado por ODEN;PIRES (1983) e seguido por WRIGGERS et. al (1990). Entre os testes realizados por estes pesquisadores para validação numérica de seus modelos constitutivos (tangencial e normal), está apresentado o caso da figura 10.3.

O teste consiste na compressão de um bloco de dimensões, altura = 2; comprimento = 4 (unidades de comprimento), seguido de um carregamento tangencial.

No primeiro passo de carregamento o corpo é sujeito à compressão de 200 / unidade de comprimento na parte superior do bloco, e em seguida é aplicada em sua face direita uma tração de 60/ unidade de comprimento no sentido positivo do eixo x. Este processo é desenvolvido no estado de aderência, e, portanto, sem deslizamento do



bloco. O módulo de rigidez tangencial na interface é  $k_T = 1e+4$ . A discretização (20 x 10 elementos de 4 nós) está apresentada na figura 10.3, com as tensões de Von Mises.

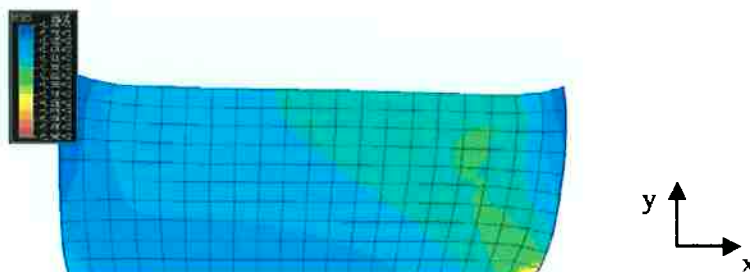


Fig. 10.3 Teste de Compressão e Tração Tangencial

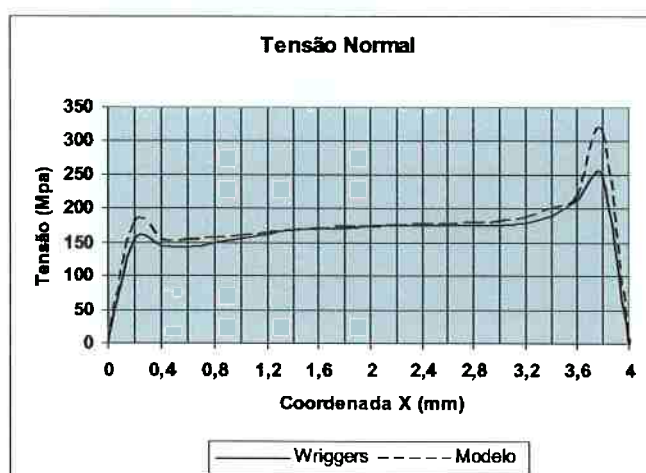


Fig. 10.4 Tensão Normal

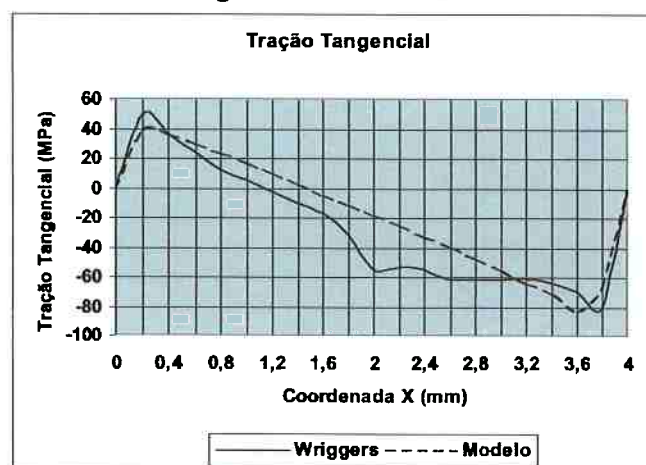


Fig. 10.5 Tração Tangencial

Os resultados da simulação para determinação das tensões normais demonstram uma boa concordância entre os experimentos do modelo utilizado neste trabalho e o apresentado por WRIGGERS et. al (1990). Nas extremidades, em função dos efeitos de concentração de tensões nas extremidades – um fenômeno comum neste tipo de geometria – existem diferenças mais significativas, e um estudo específico deveria ser realizado para apurá-las.

A lei constitutiva tangencial - solicitada apenas em sua porção elástica -, apresenta uma concordância razoável. Possivelmente, as oscilações apresentadas pelo modelo de WRIGGERS et al. (1990) na região central do bloco – para o qual os autores não apresentam uma explicação – constitui um dos motivos da discordância. Aparentemente, não existe algum motivo físico<sup>2</sup> -, para justificar a oscilação na magnitude das trações se os corpos mantiveram a aderência. Portanto, pode ser considerado que a lei constitutiva utilizada no presente trabalho reproduz o modelo físico com maior proximidade.

### **10.3 Estudo da Lei Constitutiva Mista**

Estes estudos de caráter qualitativo, são apresentados para verificação de capacidade da lei constitutiva mista de representar dois aspectos:

- efeitos de encruamento isotrópico e cinemático na interface;
- modelo bi-dimensional;

---

<sup>2</sup> Possivelmente ocorreu o deslizamento de algum nó daquela região no modelo de Wriggers.

O modelo geométrico consiste de um bloco sobre uma superfície (fig. 10.6). O bloco foi modelado com 128 elementos de oito nós e sujeito à uma pressão de 1 MPa. A base onde o bloco é deslizado foi modelada como superfície rígida.

Considerando que as resistências ao deslizamento apresentem as mesmas características nas direções 1 e 2, ortogonais no plano de deslizamento, a lei será dependente apenas da magnitude dos deslocamentos.

Foram realizados dois estudos, caracterizados pela aplicação de dois deslocamentos diferentes ao bloco. Um deles na diagonal da superfície, conservando coordenadas iguais em 1 e 2 durante toda a trajetória. Desta maneira, o bloco desliza quantidades idênticas nas direções. No segundo estudo foi imposto um deslocamento com diferentes coordenadas em 1 e 2 ao bloco.

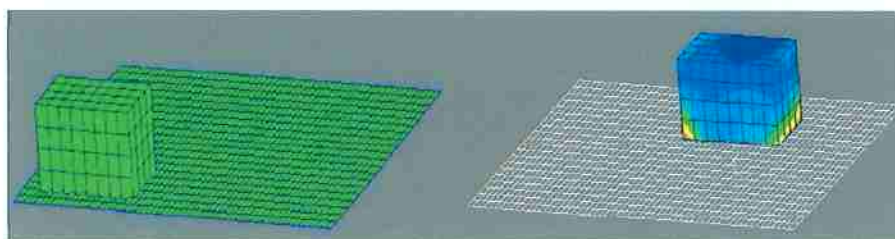


Fig. 10.6 . Representação do movimento do bloco (c/ tensões de von Mises)

### 10.3.1 Deslizamentos iguais em 1 e 2

No primeiro estudo o bloco é deslocado das coordenadas (0;0) para (1,5;1,5), e em seguida aplicado um movimento de retorno para as coordenadas (0,0). Com este movimento é esperado que a evolução da resistência ao deslizamento nas duas direções sejam iguais, porque são utilizadas as mesmas funções para as variáveis  $\mu, s^*$ , e elas são dependentes apenas dos deslocamentos. Assim, as trações geradas na interface durante todo o percurso devem ser iguais.

A aplicação do movimento cíclico tem o objetivo de verificar a capacidade do modelo de representar o efeito Bauschinger, quando da inversão do sentido do deslizamento.

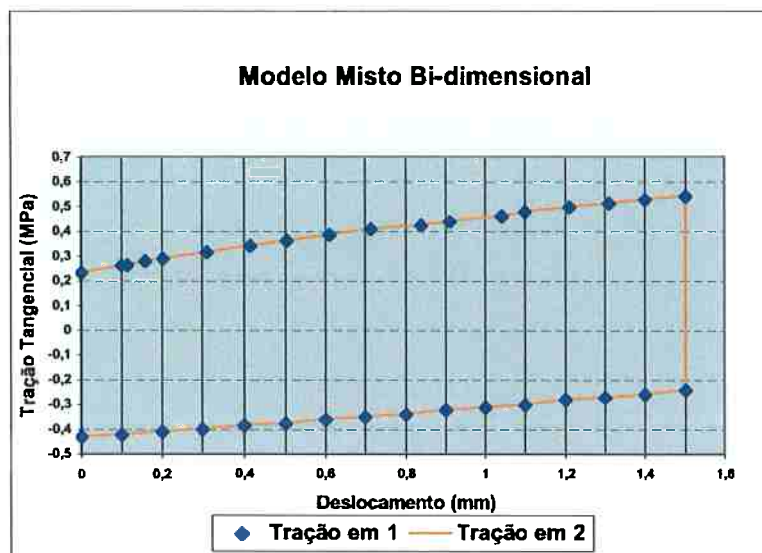


Fig. 10.7 Trações x Deslocamento – Deslocamentos iguais em 1 e 2

O resultados das trações geradas na interface versus deslocamento são apresentadas na figura 10.7 para o nó central do bloco<sup>3</sup> na interface. Os resultados estão em acordo com a idealização da lei constitutiva. As trações nas direções 1 e 2 são iguais em magnitude durante toda a trajetória de deslizamento do bloco. O deslocamento inicial para as coordenadas (1,5;1,5), representando o encruamento isotrópico e cinemático da interface, apresenta um aumento da resistência e, portanto, das trações na interface.

Na inversão de sentido do movimento, retornando para as coordenadas (0;0), o modelo representa o efeito de amolecimento da interface, determinando uma nova tração limite para o deslizamento. A verificação deste efeito pode ser demonstrada:

<sup>3</sup> Como verificado na Figura 11.5, o comportamento das trações na interface decorrentes do deslizamento tem comportamento assimétrico. Para minimizar os efeitos de borda foi considerado apenas o nó central.

Considerando um fator de encruamento cinemático ( $\eta_c$ ) - que determina a translação da superfície de resistência - arbitrário, igual a 0,1 MPa/mm.

Nas coordenadas (1,5;1,5) o valor da tração = 0,542 MPa

Valor com a inversão do movimento = - 0,242 MPa

Este valor pode ser determinado:

Com o deslocamento de 1,5, o encruamento cinemático  $J = \eta * u = 0,15$  MPa

Assim, tomando ( $t^f = t - J$ )  $0,542 - 0,1 * 1,5 = 0,392$  MPa

O valor tração no retorno será  $0,15 - 0,392 = - 0,242$  MPa

### 10.3.2 Deslizamentos Diferentes em 1 e 2

Considerando que a magnitude do deslizamento determina a evolução da resistência, foi realizado um novo experimento submetendo o bloco a deslocamentos diferentes nas direções 1 e 2. O bloco foi deslocado no primeiro passo de (0;0) para as coordenadas (2,0;1,0) e no segundo passo retornado para a posição de origem.

Neste experimento é esperado que as trações em 1 e 2 sejam diferentes, uma vez que os deslocamentos foram diferentes. Como o deslizamento na direção 1 é superior ao da direção 2, a interface deve sofrer um encruamento superior nesta direção e, portanto, desenvolver trações maiores em 1.

Os resultados apresentados nas figuras 10.8 - 9 demonstram estas hipóteses. Podem ser observadas as magnitudes superiores de tração desenvolvidas na direção 1, com relação a 2 (aproximadamente o dobro). Também é verificado o efeito Bauschinger nas duas direções.

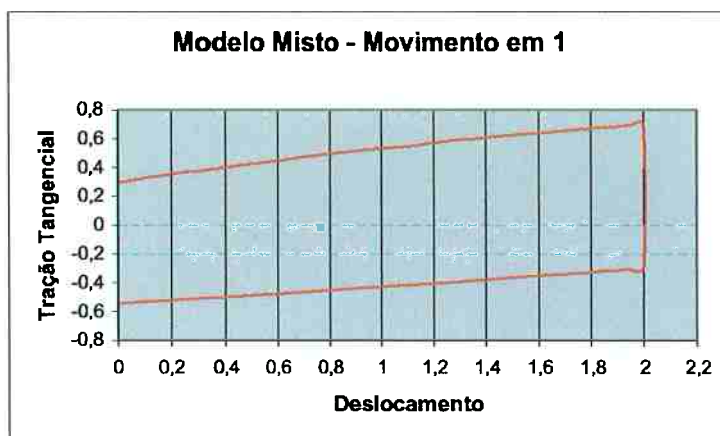


Fig. 10.8 Trações x Deslocamento – Deslocamentos em 1

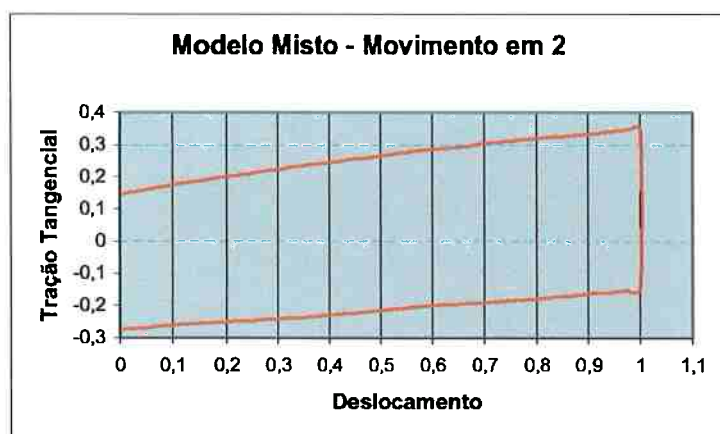


Fig. 10.9 Trações x Deslocamento – Deslocamentos em 2

#### 10.4 Estudo da Lei Constitutiva Anisotrópica

A lei anisotrópica possibilita a inclusão de diferentes funções de resistência ao deslizamento para as direções de deslocamento 1 e 2. Neste estudo foi retomado o modelo representado na figura 10.6 e imposto um deslocamento de  $0,8 \text{ mm}^4$ . As rigidezes tangenciais ( $k_T = 1e+4$ ) foram consideradas iguais nas duas direções.

<sup>4</sup> Neste modelo o deslocamento elástico permitido, sem deslizamento, é  $1,08$  e  $-3 \text{ mm}$ .

Foram mantidas as formas das funções utilizadas nos capítulos anteriores para  $\mu, s^*$  e  $s$ , a serem aplicadas nas direções 1 e 2. No primeiro estudo, foi adotada uma diferença de 20% nos valores dos parâmetros para as duas direções, com o objetivo de verificar o comportamento similar das duas curvas.

$$\mu_1(u_1) = \mu_{0_1} + (\mu_{s_1} - \mu_{0_1}) \left[ 1 - e^{-s_1/s_\alpha} \right] \quad \mu_2(u_2) = \mu_{0_2} + (\mu_{s_2} - \mu_{0_2}) \left[ 1 - e^{-s_2/s_\beta} \right]$$

$$s_1^*(u_1) = s_{0_1}^* + (s_{s_1}^* - s_{0_1}^*) \left[ 1 - e^{(-s_1/s_\alpha)} \right] \quad s_2^*(u_2) = s_{0_2}^* + (s_{s_2}^* - s_{0_2}^*) \left[ 1 - e^{(-s_2/s_\beta)} \right]$$

$$s_1 = s_1^*(u_1) \tanh \left[ \frac{\mu_1(u_1) p(\tau)}{s_1^*(u_1)} \right] \quad s_2 = s_2^*(u_2) \tanh \left[ \frac{\mu_2(u_2) p(\tau)}{s_1^*(u_2)} \right]$$

onde os parâmetros são,

$$\mu_{0_1} = 0,10 \quad \mu_{s_1} = 0,30 \quad s_{0_1}^* = 10,8 \text{ MPa} \quad s_{s_1}^* = 22,00 \text{ MPa}$$

$$\mu_{0_2} = 0,12 \quad \mu_{s_2} = 0,36 \quad s_{0_2}^* = 12,96 \text{ MPa} \quad s_{s_2}^* = 26,40 \text{ MPa}$$

notação:  $\mu_{0_1}$  - coeficiente de atrito inicial na direção 1;

$\mu_{s_1}$  - coeficiente de atrito de saturação na direção 1;

Este estudo teve o propósito de assegurar que sob condições de deslizamento idênticas, a lei constitutiva seria capaz de calcular as trações, que, logicamente, deveriam ser semelhantes. As diferenças dos resultados serão decorrentes da diferença nos parâmetros de entrada para cálculo da resistência  $s$ . Por outro lado, por tratar-se de modelos não lineares, com o decorrer do processo ocorre um pequeno distanciamento das duas curvas. De forma geral, a figura 10.10 demonstra que o modelo comportou-se de acordo com o esperado.

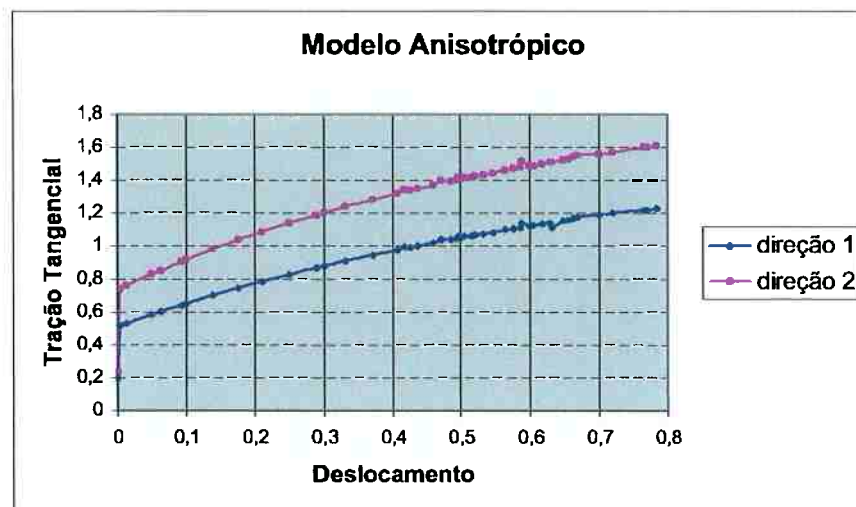


Fig. 10.10 Trações com Curvas de Resistência Iguais nas Direções 1 e 2

No segundo estudo é modificado um parâmetro na função de resistência na direção 2, para caracterizar a presença de um comportamento diferente no deslizamento de um bloco segundo as direções.

O parâmetro alterado foi  $\mu_{s_2} = 0,5$ . Com esta alteração, a curva de evolução do coeficiente de atrito apresentará um encruamento mais acentuado, e, portanto, a resistência ao deslizamento nesta direção será superior à direção 1. Assim, é esperada a evolução da curva de trações na direção 2 com valores superiores aos apresentados no estudo anterior.

A figura 10.11 apresenta os resultados da simulação comprovando as evoluções diferenciadas das trações, decorrentes da adoção de curvas de encruamento diferentes para os coeficientes de atrito.



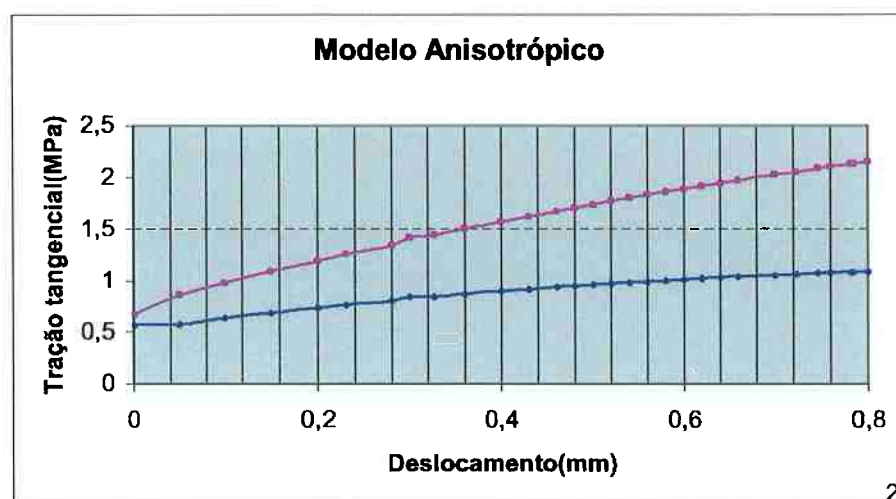


Fig. 10.11 Trações com Curvas de Resistência Diferentes nas Direções 1 e 2

As possibilidades de exploração deste modelo ainda poderiam passar pela adoção de parâmetros diferenciados para  $s^*$ ,  $k_T$  e funções diferentes para evolução de  $\mu, s^*$  e  $s$ . Os resultados apresentados são considerados suficientes para validação da lei constitutiva anisotrópica – dentro do âmbito de sua exploração qualitativa.

### 10.5 Aplicação Referente ao Modelo Isotrópico

A extrusão (figura 10.13) é um caso apropriado para simulação de uma lei constitutiva de interface, porque representa o mecanismo principal de dissipação de energia no processo, como demonstra a figura 10.12. Por outro lado, este processo apresenta os principais efeitos de não linearidade - plasticidade, grandes deformações, grandes deslocamentos (neste exemplo) e contato com atrito – e por isso constitui um teste importante para verificação de resultados.

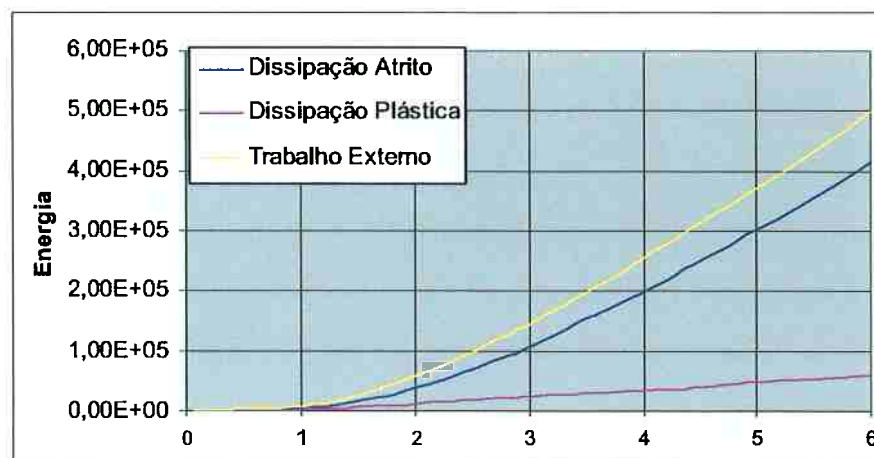


Fig. 10.12 Dissipação de Energia no Processo de Extrusão

### ***O Modelo***

As considerações do modelo correspondem àquelas realizadas por PISONI (1992), que implementou o modelo de ANAND (1992). Este procedimento possibilitará a comparação dos resultados das simulações.

Considerando a forma cilíndrica da peça<sup>5</sup>, com raio de 5 mm e comprimento de 25.4 mm e as condições de carregamento uniformes, o modelo foi simplificado para a condição de axissimetria.

Como carregamento foi aplicado o deslocamento de 6 mm na parte inferior da peça (movimento no sentido axial do cilindro). A ferramenta foi considerada rígida e permanece imóvel durante o processo.

A peça foi modelada por 240 elementos axisimétricos de 4 nós (CAX4 – possui formulação para grandes deslocamentos e grandes deformações). Na interface foram

<sup>5</sup> O material da peça conformada por extrusão é cobre OFHC.

utilizados elementos de superfície para grandes deslizamentos (finite sliding). Na figura 10.13 são apresentadas as formas, indeformada e deformada da peça.

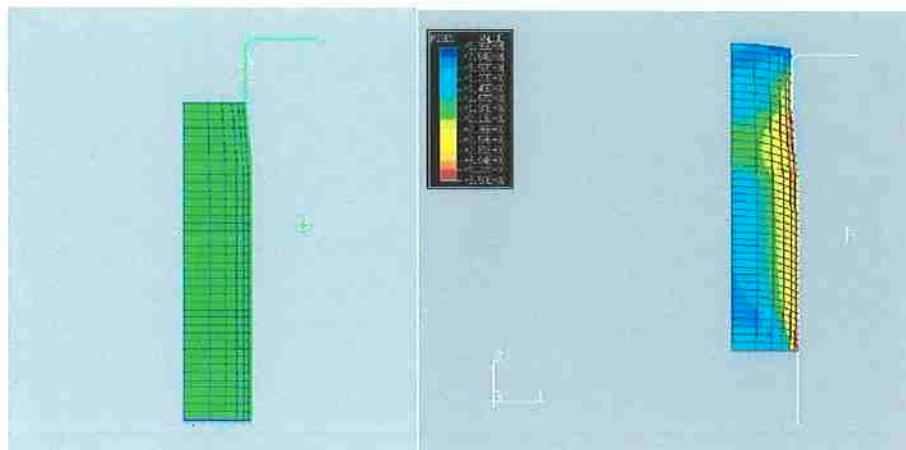


Fig. 10.13 Extrusão – Situação indeformada e deformada (tensões de von Mises)

#### . Experimentos Numéricos

Foram realizadas as seguintes análises:

Análise com a utilização da lei constitutiva de atrito isotrópica, com os seguintes parâmetros<sup>6</sup>:

$$\mu_0 = 0,33 \quad \mu_s = 0.577 \quad s_0^* = 108 \text{ MPa} \quad s_s^* = 220 \text{ MPa}$$

$$\text{Constante de encruamento para } \mu \Rightarrow h_\mu = 0,418$$

$$\text{Constante de encruamento para } s^* \Rightarrow h_s^* = 44$$

$$\text{Rigidez em aderência - } k_T = 10000 \text{ (MPa/mm)}$$

Em função da sensibilidade do comportamento da lei constitutiva normal aos parâmetros  $p^0, c$ , foram simuladas duas situações para verificar a sua influência nos resultados.

1. rigidez normal utilizando os parâmetros  $p = 5$  ;  $c = 0.3$  (modelo 1)
2. rigidez normal utilizando os parâmetros  $p = 5$  ;  $c = 0.4$  (modelo 2)

As curvas resultantes destas simulações são comparadas com as curvas decorrentes das simulações com a lei de Coulomb, implementada no Abaqus (default). Os valores para os coeficientes de atrito foram escolhidos nos extremos entre os quais a lei de atrito foi limitada. Assim foram procedidas as seguintes análises:

3. Análise com a utilização da lei de Coulomb,  $\mu = 0,33$ ;
4. Análise com a utilização da lei de Coulomb,  $\mu = 0,577$  ;

### **. Resultados**

Os resultados das simulações apresentados na figura 10.14 são referentes à evolução da força de reação no sentido axial da extrusão (eixo 2 negativo - na figura 10.14) em relação ao deslocamento da peça.

As curvas estão identificadas pelas cores :

$\mu = 0,33$  (verde) ;  $\mu = 0,577$  (azul) ; Modelo 1 = amarelo ; Modelo 2 = laranja

Resultados experimentais = exp (vermelho)

As curvas decorrentes das simulações demonstram alguns pontos:

O encruamento isotrópico modelado através da lei constitutiva aproxima o modelo numérico do experimental, comparativamente ao modelo de Coulomb.

A limitação da lei de Coulomb é demonstrada através da modificação brusca de comportamento após os nós (a média) da interface iniciarem o deslizamento. Existe um pequeno afastamento inicial entre as superfícies rígida e deformável.

A influência dos parâmetros para construção da rigidez normal pode ser verificada na figura na figura 10.15. O resultado da simulação com os parâmetros  $p = 5$

---

<sup>6</sup> A aplicação de extrusão e os parâmetros apresentados, foram tomados dos experimentos numéricos

;  $c = 0,3$  estão representados em vermelho; e para  $p = 5$ ;  $c = 0,4$ , em verde. Assim, a elevação do parâmetro de folga,  $c$ , provoca uma diminuição da rigidez normal (figura 5.1), e modificações no comportamento das reações, conforme observado na figura 10.15. A sua influência será importante enquanto a pressão é transferida através da interface, até atingir um valor de estabilidade para  $k_N$  ( $\sim 4\text{mm}$ ). Pode ser observado nas figuras 10.15-16, que após esta estabilidade, as leis tornam-se bastante semelhantes

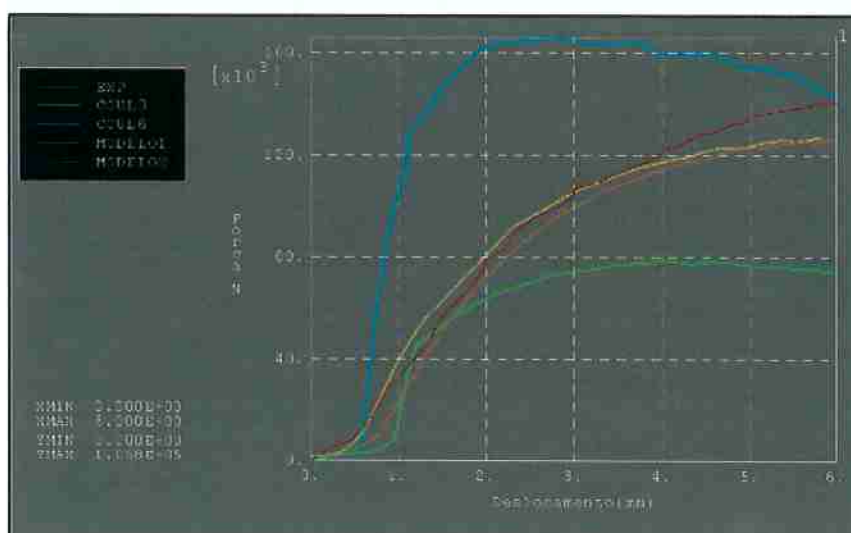


Fig. 10.14 Curva de Força de Reação x deslocamento (processo de extrusão)

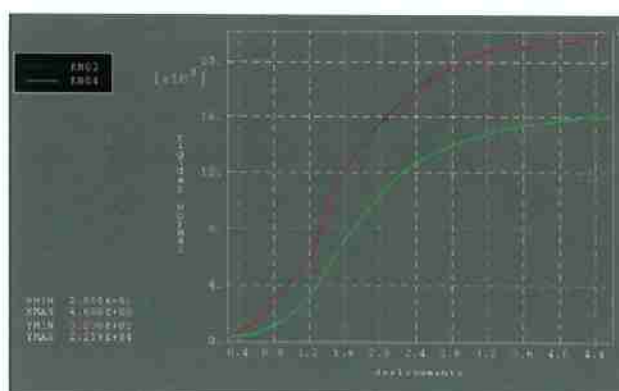


Fig 10.15 Curva de Evolução da Rigidez Normal x Deslocamento

realizados por PISONI (1992).

5. Comparação entre os resultados das simulações realizadas por PISONI (1992) e do presente trabalho.

A seguir é apresentado o resultado comparativo dos resultados encontrados por PISONI (1992) (vermelho), e a lei constitutiva isotrópica desenvolvida no presente trabalho (azul) – com parâmetros idênticos. A curva dos resultados experimentais foi plotada em verde. Pode ser verificada uma boa concordância na evolução das reações x deslocamento, principalmente no início e final dos deslocamentos. Não foi possível precisar a causa associada à pequena separação entre as curvas na região intermediária do deslocamento.

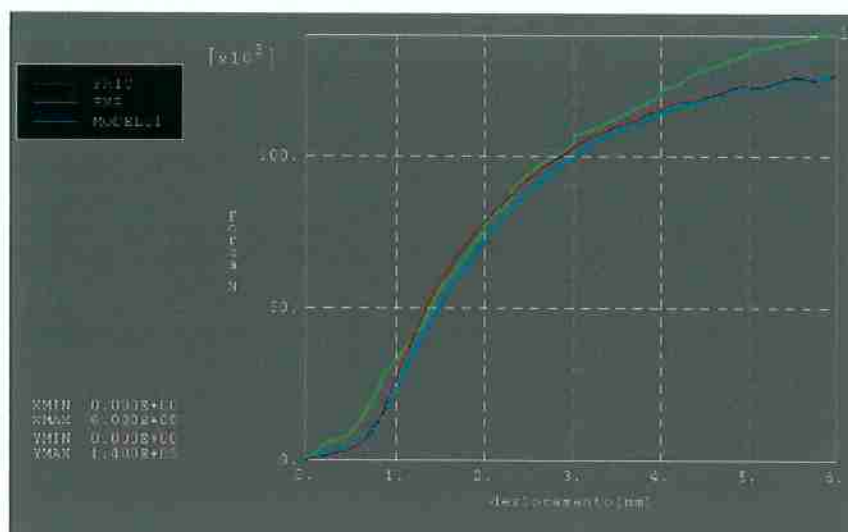


Fig. 10.16 Comparação do modelo de Anand com a lei constitutiva proposta

### 10.5 Aplicação referente ao Modelo Misto

Os resultados experimentais obtidos por TONG;ANAND (1993) descritos no item 6.2.1 e representados na figura 7.2, foram utilizados para a realização de uma comparação utilizando a lei constitutiva mista. Este ensaio é comum para a medição do coeficiente de atrito, envolvendo, a compressão de um anel sobre uma superfície rígida, seguida de rotações alternadas em torno do eixo do anel.

Na figura 7.2 pode ser verificada a presença do encruamento isotrópico e cinemático quando da inversão do movimento. Ocorre um pequeno efeito de “amolecimento”. Considerando este amolecimento decorrente de um encruamento cinemático linear, foi tomado o valor de  $\eta_c$  (fator de encruamento) diretamente da figura 7.2. Através dos valores das trações no ponto onde o sentido de deslizamento é invertido (distância de deslizamento = 2,73 mm), pode ser calculado o fator de encruamento. Este fator multiplicado pela distância de deslizamento determina a translação da superfície de deslizamento ( J ).

$$t_n = 109,7 \text{ MPa}$$

$$t_{n+1} = -96,8 \text{ MPa}$$

$$\eta_c = 2,366 \text{ MPa/mm}$$

Este ensaio foi representado no presente trabalho pela aplicação de uma compressão sobre um bloco, e submetido a deslocamentos cíclicos em uma dimensão.

No experimento de TONG;ANAND (1993) é aplicado um esforço de compressão sobre a peça de 207 MPa, que posteriormente foi submetida a deslocamentos, conforme explícito na figura 7.2.

No experimento numérico realizado no presente trabalho, foi aplicada a mesma pressão, e reproduzido apenas o primeiro ciclo de deslocamentos, conforme a figura 10.17. Nesta figura é apresentada a curva das trações resultantes na interface x deslocamento. No mesmo gráfico está representada a curva construída com os resultados experimentais encontrados por TONG; ANAND (1993).

A comparação das curvas permite concluir que a modelagem de encruamento no carregamento / deslizamento (deslocamento de zero a 2,7 mm) da lei constitutiva mista, apresenta uma boa concordância com os dados experimentais.

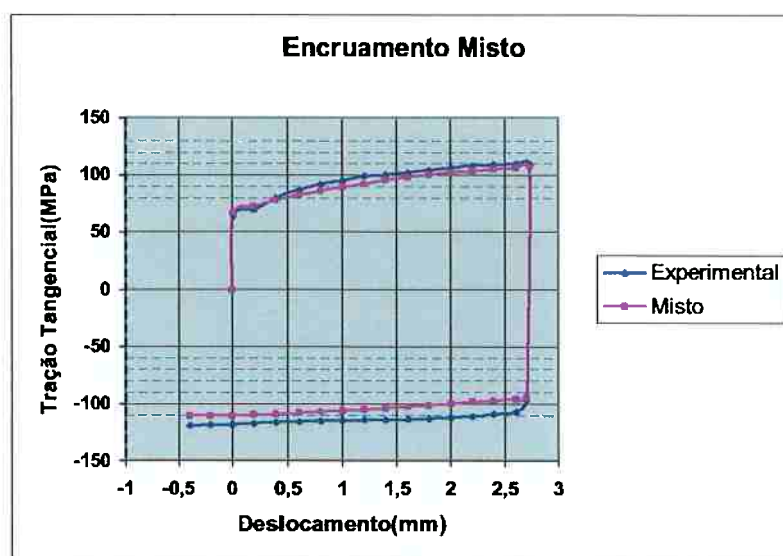


Fig. 10.17 Modelo Misto. Resultado Experimental e de Simulação.

Na modificação do sentido do movimento (em 2,7 mm), a curva reproduz o efeito de amolecimento dos dados experimentais com boa precisão. Os resultados neste ponto da curva são apresentados na tabela abaixo.

Deslocamento (mm)	Tração(MPa) Experimental	Tração (MPa) Modelo Misto
2,73	109,5	107
2,7	-96,8	-94,9

A tabela demonstra que a curva das trações está representando o efeito de amolecimento com boa aproximação (2 %). Com o aumento do número de incrementos este valor seria melhorado. Por outro lado, como TONG;ANAND (1993) consideram que o erro experimental é da ordem de 5%, foi considerada boa esta discretização dos incrementos. O valor calculado da tração, decorrente da modificação do sentido do movimento,  $t - 2 * \eta * u = 94,1$  (MPa)<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> A diferença é decorrente da discretização dos incrementos de deslocamento.



Após este ponto, as curvas experimental e numérica sofrem um afastamento -, relacionado a uma limitação do modelo constitutivo proposto. Ao adotar apenas uma curva de encruamento de  $s$  para todo o processo de simulação, a rotina considera que há uma continuidade da curva de  $s$ , como se mantivesse o encruamento anterior à inversão do sentido de deslocamento. Assim, a curva de  $s$  representada após a modificação do sentido é apenas uma continuidade da curva no instante anterior à esta modificação. Para uma reprodução mais apropriada do encruamento seria necessário adotar uma outra função para  $s$ , após a inversão do movimento. Esta evidência já estava registrada no experimento de COURTNEY-PRATT; EISNER (1957).

Evidentemente, que o encruamento cinemático linear é uma aproximação do efeito observado, uma vez que é possível perceber na figura 7.2, que ele praticamente desaparece após o terceiro ciclo. Devem ser implementadas funções de ordem mais elevada para caracterizar a não-linearidade este fenômeno de encruamento cinemático. Outras duas limitações devem ser consideradas nas avaliações dos resultados.

Na formulação do modelo misto não foi estabelecida relação alguma entre a evolução de  $s$  e  $J$ . Esta relação, de natureza experimental deve modificar a evolução destas variáveis no modelo.

Por fim, na realidade, a superfície definida para  $s$  pode transladar, aumentar de diâmetro e mudar de forma. Este último efeito não foi considerado na lei constitutiva mista implementada.

Ainda referente ao experimento realizado por TONG;ANAND (1993), foi procedida uma última simulação com aplicação da lei constitutiva isotrópica desenvolvida neste trabalho. Este resultado está representado na figura 10.18 e comparado às curvas experimentais e do modelo misto.

Pode ser verificado que a curva do modelo misto apresenta um encruamento levemente superior ao isotrópico em função da presença do efeito cinemático. Este resultado pode receber uma explicação: qualquer ponto em deslizamento encontrará no incremento seguinte uma superfície de escoamento transladada por um incremento de  $J$ .

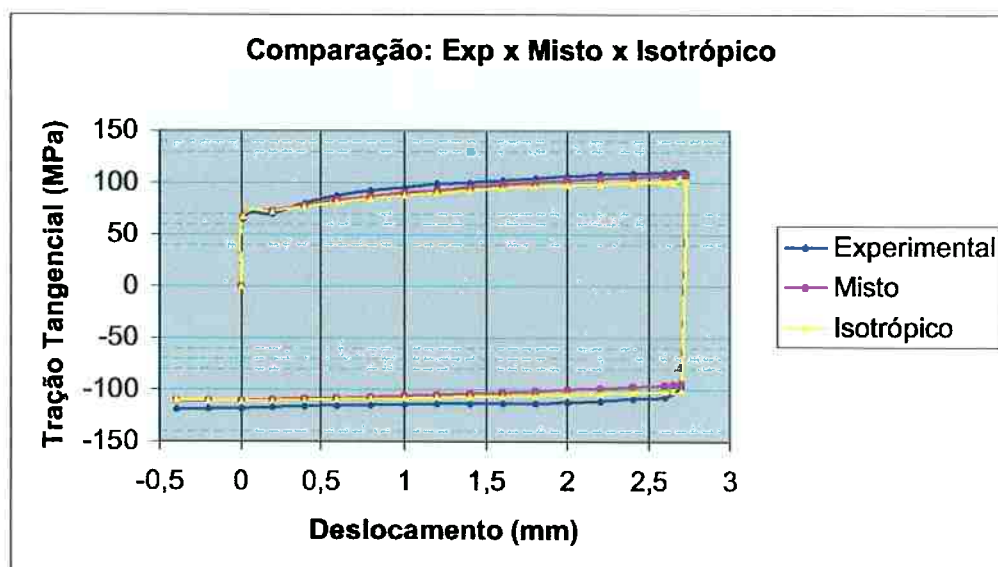


Fig. 10.18 Resultados Experimental x isotrópico x cinemático

Como previsto, o modelo isotrópico não pode representar o efeito de amolecimento na mudança de sentido do movimento, como apresentado na tabela abaixo.

Deslocamento (mm)	Tração (MPa) (experimental)	Tração (MPa) (isotrópico)	Tração (MPa) (cinemático)
2,73	109,5	100,9	107
2,70	-96,8	-100,9	-94,9

Na situação disposta no gráfico, aparentemente o modelo isotrópico seria mais adequado para representar o movimento de retorno. Este fato justifica-se apenas porque,

como não sofre uma translação no espaço de trações, a curva inicia em uma magnitude de tração mais alta (negativa) do que o modelo cinemático.

Ainda pode ser observado que a lei de atrito mista continua a apresentar no retorno, um comportamento levemente superior ao isotrópico.

## CAPÍTULO XI

---

### CONCLUSÃO

O problema de contato com atrito passa por um período de amplo interesse da comunidade de usuários de aplicativos de elementos finitos, levados pela contínua necessidade de sofisticação dos modelos, e principalmente, de resultados confiáveis para problemas de ordem prática. Entretanto, as dificuldades no entendimento do tema, normalmente associado às questões numéricas, o tornam um problema de difícil compreensão e solução.

Entre os pesquisadores do meio acadêmico, o contato com atrito ainda mantém-se distante da temática da plasticidade, o que demonstra o desconhecimento do conteúdo da temática e sua implementação nos aplicativos.

Para apresentação das conclusões deste trabalho, pode consistir em um exercício interessante a circunscrição deste trabalho no âmbito das propostas de BUNGE (1980) para verificação da adequação do procedimento desta pesquisa segundo o método científico. Segundo ele, uma investigação deve cumprir as seguintes etapas:

*Colocação precisa do problema - pode tratar-se da recolocação de um problema antigo à luz de novos conhecimentos; procura de conhecimentos ou instrumentos relevantes para solução do problema;*

A complexidade do problema de atrito é exposta sob duas ferramentas essenciais da mecânica dos sólidos: o método dos elementos finitos e a elastoplasticidade. Agregando as vantagens destas áreas de conhecimento, e a sua flexibilidade, é possível inferir que o problema de contato com atrito tenha um tratamento adequado.

Por outro lado, a utilização dos conceitos teóricos da elastoplasticidade e sua implementação através de programas de elementos finitos são amplamente disseminadas na comunidade científica. Isto torna possível a incorporação desta linha de pesquisa nos grupos de mecânica dos sólidos com alguma facilidade.

*Tentativa de solução do problema com auxílio dos meios identificados;*

Neste trabalho foram desenvolvidas novas possibilidades para tratamento do problema de contato com atrito na interface de superfícies através do método dos elementos finitos. Foi realizada uma releitura da lei constitutiva isotrópica, isotérmica e independente da velocidade deslizamento, desenvolvida por ANAND (1993) e estendida para o caso bi-dimensional.

Considerando a abordagem da termodinâmica de variáveis internas – que permite o acesso a um patamar privilegiado para inclusão de novos efeitos e / ou fenômenos da interface, e seguindo os modelos constitutivos da lei da elastoplasticidade -, foi agregado o efeito de encruamento cinemático à esta lei, para formular e implementar um lei constitutiva de atrito mista.

Com base no modelo isotrópico, também foi apresentada uma lei constitutiva de atrito anisotrópica. Esta lei torna possível adotar curvas diferenciadas de variação da resistência ao deslizamento segundo as direções, assim como para a resistência limite de deslizamento e o coeficiente de atrito.

Seguindo o trabalho de ANAND (1993), estas formulações foram construídas com medidas objetivas de deslocamento e trações para possibilitar os desenvolvimentos com grandes deslocamentos. Após a elaboração da forma incremental desta formulação foi utilizado um método implícito de integração para a sua solução.

*Obtenção de uma solução; Prova da solução: confrontação da solução com a totalidade das teorias e da informação empírica pertinente;*

Os resultados das simulações numéricas realizadas no âmbito deste trabalho validam os modelos propostos. Com a lei de atrito mista é possível captar os efeitos de encruamento com o deslizamento, e, uma vez submetido a movimentos cíclicos, é possível verificar o surgimento de um efeito Bauschinger na transição do sentido do movimento – um efeito verificado nos resultados experimentais de COURTNEY-PRATT;EISNER (1957) e TONG;ANAND(1993).

*Investigação das conseqüências da solução obtida;*

Os resultados são encorajadores para continuar a linha de pesquisa, e, principalmente, indicam a viabilidade de adequar as leis constitutivas propostas aos programas comerciais de elementos finitos.

Por outro lado, a diversidade de fenômenos na interface e a multiplicidade de características decorrentes de tratamentos térmicos e / ou rugosidades, permitem inferir que existe um campo promissor de pesquisa para continuidade desta linha de pesquisa.

Assim, há vários efeitos que não foram considerados neste trabalho, mas que poderiam ser explorados. Por exemplo, poderiam ser adotadas funções lineares e / ou não lineares para rigidez tangencial. A função linear adotada para evolução da tração de fundo ( $J$ ) poderia se representada por uma função não linear para o encruamento cinemático. Também podem ser desenvolvidas novas aplicações com novas curvas de  $s$ ,  $s^*$  e  $\mu$  obtidas de novos resultados experimentais. Com relação ao comportamento da resistência ao deslizamento durante um carregamento cíclico, os experimentos sugerem a adoção de curvas diferentes para modelagem dos movimentos alternados. Por outro lado, o comportamento de anisotropia poderia ser estendido para a lei mista, e assim poderiam ser identificados comportamentos de encruamento cinemático e isotrópico diferentes, de acordo com as direções.

É provável que a incorporação da mecânica do dano dentre os efeitos de encruamento durante o deslizamento, influenciando no comportamento em aderência, também seja uma boa alternativa de investigação.

Como já alertavam CHENG;KIKUCHI (1985) e ANAND (1993) para estes modelos tornarem-se mais apropriados para a modelagem de atrito é recomendável a inclusão dos fenômenos de temperatura e velocidade. Evidentemente, curvas experimentais devem estar disponíveis para implementar a influência destes efeitos na evolução da resistência ao deslizamento.

Enfim, as possibilidades são amplas, embora seja necessário um passo anterior para seguir nestas novas pesquisas.

*Correção das hipóteses – novo ciclo de investigação;*

Uma necessidade imediata para a continuidade destas pesquisas é referente à realização de experimentos mais adequados, com o objetivo específico de estudar os fenômenos modelados pelas leis constitutivas desenvolvidas e implementadas neste trabalho. Certamente, esta interação entre estas leis e um novo ciclo de experimentos possibilitaria realizar avanços e algumas hipóteses simplificadoras. Por outro lado, permitirá avançar dos aspectos qualitativos demonstrados neste trabalho para outras aplicações, além daquelas que estão demonstradas no capítulo X.

Um outro aspecto que oferece uma linha de pesquisa interessante é referente à interação entre atrito e elastoplasticidade na interface de dois corpos. Há a necessidade de estabelecer critérios mais precisos, através de relações causais entre os fenômenos relacionados à elastoplasticidade e à evolução do atrito na interface. Assim, as propostas iniciais de analogia entre as áreas por inspeção observadas pelos pesquisadores, ganhariam relações causais mais esclarecedoras sobre o fenômeno de deslizamento na interface de dois sólidos.

## ANEXO I

### CONSIDERAÇÕES SOBRE ATRITO

Neste apêndice são dispostas algumas considerações complementares aos capítulos VI e VII sobre o atrito entre superfícies. Uma revisão alentada sobre o tema, foi realizada por BATALHA (1995).

SCHEY (1983) classificou as condições de atrito - segundo a montante de lubrificante na interface - nos regimes: atrito seco, com lubrificação e lubrificação hidrodinâmica. ODEN;MARTINS (1985) propuseram a classificação de atrito seco segundo os efeitos dinâmicos, decorrentes do deslizamento entre superfícies, em três tipos: quase estático, deslizamento dinâmico e o desgaste. Segundo os autores, o atrito seco quase estático é caracterizado pelo “mecanismo de atrito atuante quando duas superfícies metálicas são pressionadas vagarosamente, conservando o equilíbrio estático a todo instante, e são deslocadas relativamente, sem ocorrer uma penetração severa entre as superfícies. Nesta situação, os mecanismos mais significativos são: a deformação plástica das rugosidades, a formação de junções elastoplásticas na superfície de contato, o acoplamento entre as deformações plásticas, normal e tangencial, e os mecanismos de dissipação regidos pela dependência da história de deformação e fratura das junções.”

BATALHA (1995), sistematizou os mecanismos básicos de geração de atrito:

- aderência;
- interação mecânica das rugosidades ;
- Sulcagem provocada pelas rugosidades de uma superfície;
- Deformação e / ou fratura de camadas superficiais, tais como óxidos;



- Interferência e deformação plástica, causadas por terceiros corpos, como as partículas resultantes do processo de desgaste;

O estabelecimento de uma teoria para o atrito, foi o centro de um embate entre a escola inglesa – defendendo o fenômeno de atrito decorrente das aderência das rugosidades em contato – e a francesa – atribuindo uma importância maior ao intertravamento das rugosidades. Philip Bowden e David Tabor, fortaleceram a teoria de atrito por aderência na interface, incluindo a participação da deformação elástica e plástica das rugosidades neste mecanismo. Segundo eles, o atrito entre corpos metálicos pode ser atribuído a duas causas: formação de junções metálicas entre as superfícies, e a deformação plástica das superfícies mais macias pelas rugosidades mais duras. Assim, os autores propõem que, o coeficiente de atrito pode se dividido em duas componentes:

$$\mu = \mu_a + \mu_p \quad \text{onde} \quad \mu_a \text{ é resultante da adesão;}$$

$$\mu_p \text{ é resultante da deformação plástica;}$$

O deslizamento das superfícies ocorreria apenas quando a força cisalhante atinge um valor maior que a resistência ao cisalhamento destas junções metálicas.

Neste trabalho, basicamente serão adotados os conceitos de aderência, relacionado ao deslocamento relativo que é reversível ou elástico; e o deslocamento relacionado aos mecanismos de deslizamento entre as superfícies.

Embora os modelos de atrito admitam estados de aderência e/ ou deslizamento puros, normalmente eles são construídos em torno da combinação destes dois estados.

Existem várias teorias abordando os mecanismos de origem e evolução da resistência ao deslizamento. SUH; SIN (1981) consideraram essenciais para a constituição resistência ao deslizamento, a combinação dos seguintes fatores: intertravamento das rugosidades, deformação elastoplástica e fraturas das rugosidades, a deformação plástica das camadas subjacentes à superfície de contato, adesão das

superfícies, e desgaste e arrancamento de material da superfície decorrente das rugosidades por partículas decorrentes de desgaste. Segundo ANAND (1992), a contribuição destes mecanismos é dependente da condição de deslizamento, determinada pelo material de ferramenta e peça, sua superfície topográfica e os aspectos físico químicos do ambiente e da história de deslizamento.

Embora estes mecanismos sejam objetos de estudos, individualmente, neste trabalho será considerado apenas a característica macroscópica da evolução da resistência ao deslizamento, s.

### **1. Modelos de Atrito**

Os modelos de atrito basicamente são construídos para cumprir dois objetivos:

1. Determinar a resistência ao cisalhamento dos pontos em contato a partir de um conjunto de variáveis de estado. Esta resistência representa o limite ao cisalhamento na interface: se a tração aplicada é menor do que este limite, a interface permanece em aderência, se atingir o limite, inicia o deslizamento.

2. Determinar a direção de deslizamento. O deslizamento ocorre na direção que maximiza a taxa de dissipação de energia na interface. Para as superfícies isotrópicas, esta direção é oposta à direção da tração aplicada.

Existem vários modelos de atrito. Os modelos clássicos são três:

#### ***Amontons – Coulomb***

Suas limitações estão em não tratar o processo de dissipação de energia e considerar apenas a área de contato aparente. Seu comportamento é mais adequado para baixas pressões.

### Prandtl

Este modelo utiliza um fator de atrito constante ( $m$ ), e é aplicado com frequência em processos de conformação envolvendo altas pressões. É considerado que, para pressões normais elevadas, a área aparente de contato aproxima-se de um valor constante. A resistência ao deslizamento alcança um valor de saturação ( $s^*$ ) – devido ao escoamento do material da interface - e se torna independente da pressão de contato, e igual à fração de resistência de escoamento ao cisalhamento, definida pela expressão  $\tau = m\tau_y$  (SCHEY;1983). A relação entre o coeficiente de atrito  $\mu$ , fator de atrito  $m$ , e tensão de cisalhamento:

$$\tau = \mu p \quad \mu = \frac{\tau_y}{p} = \frac{\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\right)}{\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

$$\tau = m\tau_y \quad \text{Portanto } 0 \leq m \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \mu \leq 0.577$$

Esta relação está baseada na teoria de Von Mises: a resistência ao escoamento  $p$

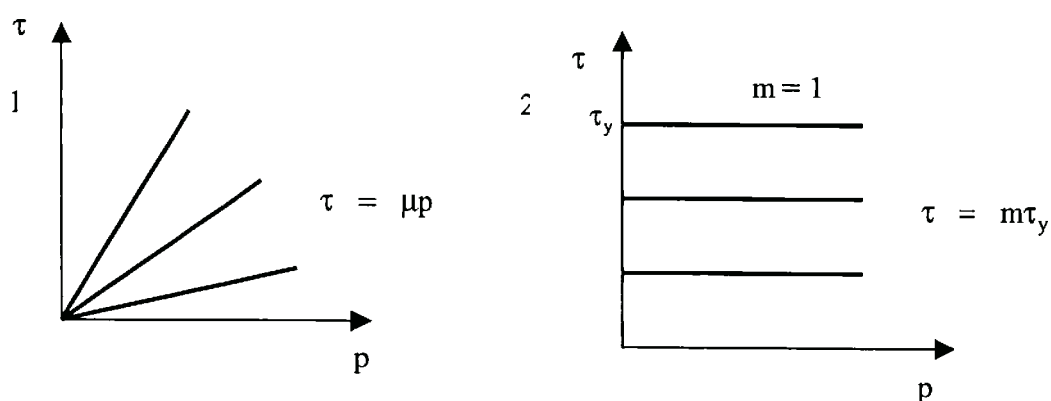
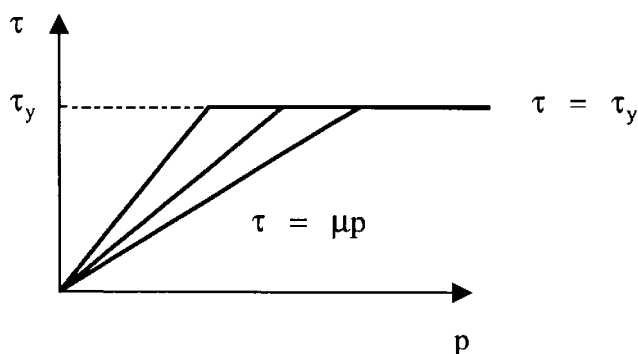


Fig.1 Modelos de Atrito com Coeficiente e /ou fator de Atrito Constante

1. Lei de Amontons-Coulomb  $\tau = \mu p$
2. Lei de Prandtl  $\tau = s^* = m\tau_y$



3. Modelo de Orowan  $\tau = \mu p$  para  $\mu p < \tau_y$   
 $\tau = \tau_y$  para  $\mu p \geq \tau_y$

Por cisalhamento  $\tau_y$ , é  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  vezes a resistência ao escoamento por tração ou compressão  $\sigma_y$ .

Neste modelo, a resistência ao deslizamento não depende do estado de tensões na interface, mas de uma propriedade do material – a tensão de escoamento ao cisalhamento.

**Orowan** – baixas e altas pressões;

Baseado na teoria de aderência, este modelo retoma para as pressões baixas a relação linear entre a pressão normal e a resistência ao deslizamento. Para as pressões elevadas, a resistência ao deslizamento das juntas metálicas formadas por aderência são iguais à tensão de escoamento do material que apresenta o menor módulo de elasticidade. Este modelo apresenta uma transição brusca entre as altas e baixas pressões.

SHAW et al. (1980), estudaram a variação do coeficiente de atrito de acordo com a pressão normal. A modificação da pressão normal atua sobre a relação entre a área aparente e real de contato, e portanto, na formação de uma área maior de junção metálica. Deste estudo ele identificaram três regimes de atrito (Fig. 1.3):

- Baixa pressão, onde são válidas as leis de Amontons-Coulomb;
- Região de transição;
- Região onde o acréscimo da pressão normal não produz modificações no coeficiente;

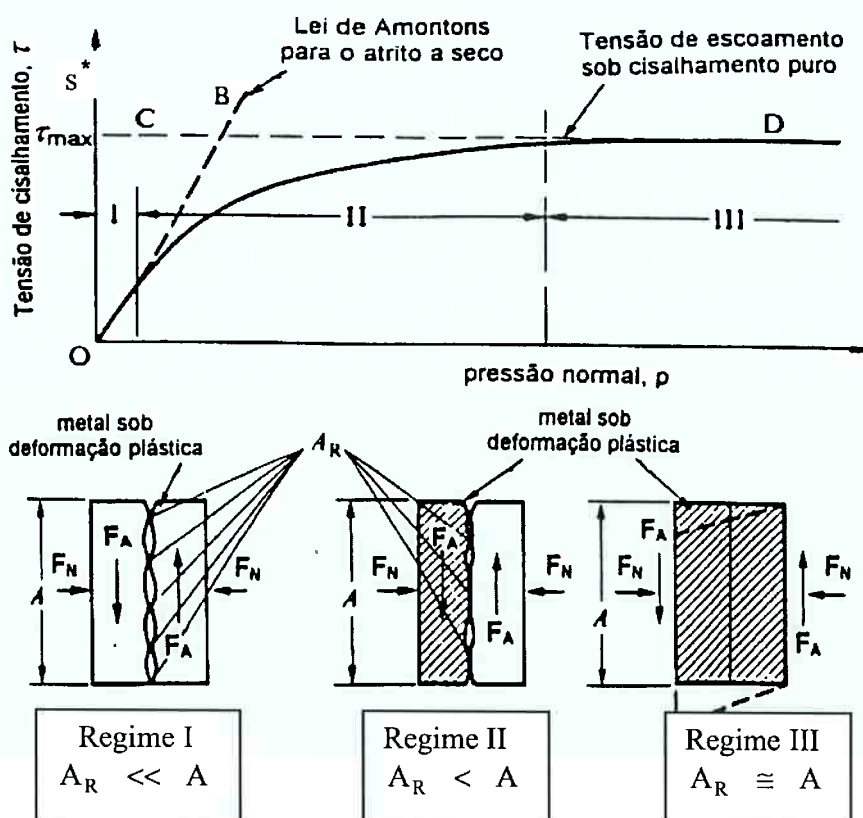


Fig. 2 Regimes de Atrito

Outro trabalho relevante explicando os três regimes de atrito de acordo com a pressão normal foi realizado por THOMSEN et al. (1965). Segundo eles, a região do regime I é relativa ao escoamento plástico das rugosidades, atribuindo uma relação linear entre a tensão de atrito e a pressão normal – região de validade da lei de Amontons com coeficiente constante.

No regime de transição, conforme o escoamento vai ocorrendo em todo material, o coeficiente de atrito diminui com a carga, e vai aproximando-se de 0.577.

Corresponde a um caso típico de conformação, onde o deslizamento peça – ferramenta é acompanhado por um escoamento abaixo da superfície.

## 2. O Modelo de BAY – ANAND

Um modelo micro mecânico para a relação entre  $\tau$  e  $p$ , foi desenvolvida por BAY et al. (1987). O resultado é semelhante ao modelo de SHAW et al. (1980), e apresenta como a resistência ao deslizamento desvia da proporcionalidade com o aumento de pressão. Também capta a diminuição de sua taxa até que o valor de tensão de contato atinja um valor de saturação.

Assim, em baixas pressões, a resistência ao deslizamento é aproximadamente proporcional à pressão, o que corresponde à lei de Amontons Coulomb. Quando ocorre um aumento das pressões de contato, a taxa de aumento da resistência ao deslizamento vai diminuindo gradualmente até um valor de saturação ( $s = s^*$ ).

A explicação para esta característica está amparada sobre duas noções:

- Resistência ao deslizamento limite  $s^* = m\tau_y$  onde  $s^* = \tau$ .
- Razão de área de contato  $\xi = \frac{A_r}{A}$ , onde  $A_r$  é a área de contato real, e  $A$  é a área de contato aparente;

Desta relação resulta,

$$s = s^*\xi \quad \text{com} \quad \xi = \hat{\xi}(p)$$

O modelo micro mecânico de BAY et al. (1987) apresenta: a partir da deformação das rugosidades,  $\xi$  é proporcional à pressão normal em baixa pressão, e que,  $\xi \rightarrow 1$  quando  $p \rightarrow \infty$ .

A função proposta por BAY et al.(1987) apresenta a dependência da resistência ao deslizamento à pressão:

$$s = s^* \tanh\left[\frac{\mu p}{s^*}\right] \quad \text{válida para } p \geq 0$$

Em baixas pressões:  $s = \mu p$       Em altas pressões:  $s = s^*$

O modelo constitutivo proposto por ANAND(1992) – a partir do qual é construída a proposta deste trabalho - é função de duas variáveis: o coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e o limite de resistência ao deslizamento ( $s^*$ ), ambas dependentes da variável interna - distância de deslizamento -, e da pressão de contato. Anand propõe considerar as alterações na condição da interface de acordo com a distância de deslizamento das superfícies da interface, e apresenta a evolução da resistência ao deslizamento de um valor inicial para um valor mais alto após um transiente de alguns milímetros.

Anand retomou os experimentos de BAY et al. (1987), e argumentou que, embora aquele modelo explique o efeito da pressão sobre resistência ao deslizamento, não foi considerado o efeito da história do deslizamento relativo. Para consideração deste efeito, ANAND (1992) adotou a abordagem de variável interna de estado, como em PLESHA et al (1989). O estado da interface é denotado por  $\alpha$  que representa simbolicamente a rugosidade da superfície e detalhes microestruturais da interface. Especificamente, Anand escolheu o deslizamento relativo como a variável interna e a função de resistência passa a uma função:  $s = \hat{s}(p, u^d)$ .

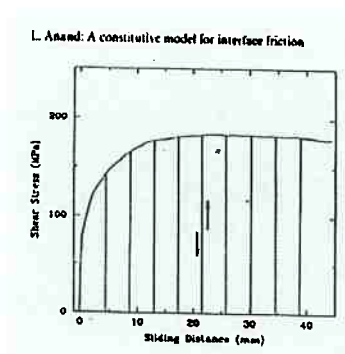


Fig. 3 Variação da tração na interface com a distância de deslizamento.

**BIBLIOGRAFIA**

---

ANAND, L. A Constitutive Model for Interface Friction. **Computational Mechanics**. Vol. 12, p. 197-213, 1993.

ARAVAS, N., On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Model, **Int. J. of Numerical Methods in Eng.**, vol. 24, p. 1395-1416, 1987.

BANDEIRA, A. B. **Análise de Problemas de Contato com Atrito 3D**, São Paulo, 2001. 276p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

BATALHA, G. F. **Influência da Camada Anodizada Sobre o Atrito na Conformação Plástica do Alumínio**, São Paulo, 1995. 247p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

BAY, N.; WANHEIM, T.; AVITZUR, B. Models for friction in metal forming. **Manufacturing Technology Review**, vol. 2, p. 372-378, 1987.

BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**, John Wiley & Sons, 2000.

BUNGE, M. **Epistemologia: curso de atualização**. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1980.



CHENG, J., KIKUCHI, N., An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-plastic Formulations, **Comp. Meths. In Applied Mechanics and Eng.**, 40, p. 71-108, 1985.

COURTNEY- PRATT, J. S.; EISNER, E. The effect of tangential force on the contact of metallic bodies. **Proc. of the Royal Society A** 238, 529-550, 1957.

CURNIER, A., A Theory of Friction, **Int. J. Solids Structures**, vol. 20, 7, p. 637-647, 1984.

DRIEMEIER, L. **A Finite Element Including Damage, Plasticity and Finite Deformation**, São Paulo, 2001. 124 p. Tese (Pós-Doutorado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

DRUCKER, D.C. Some Implications at work hardening and ideal plasticity. **Quarterly of Applied Mathematics**. Vol. 7, 411-418, 1950.

DRUCKER, D.C. Coulomb friction, plasticity and limit loads. **Journal Applied Mechanics, Transactions ASME**, vol.21, 1 71-74,1954.

DUGAS, R. **A History of Mechanics**, 2. Ed. New York, Dover Publications, 1988.

DUVAUT, G., LIONS, J. L. **Inequalities In Mechanics and Physics**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

FREDRIKSSON, B., Finite Element Solution of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems, **Computers & Structures**, vol.6, p. 281-290, 1976.

GEARING, B. P., Moon, H. S., Anand L. A Plasticity Model for Interface Friction: Application to Sheet Metal Forming. **International Journal of Plasticity**, Vol. 17, n. 2 , p. 237-271, 2001.

GIANNAKOPOULOS, A. E. The Return Mapping Method For The Integration of Friction Constitutive Relations. **Computers & Structures**, vol. 32, n1, p. 157-167, 1989.

GREENWOOD, J. A., WILIAMSON, J. B. P. Contact of Nominally Flat Surfaces, **Proceedings of Royal Society**, series A, vol. 295, p. 300-319, 1966.

HERTZ, H., **The Principles of Mechanics**. Dover Publications, New York, 1956.

HILL, R., **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford, 1950.

KRAGELSKY, I. V. DOBYCHIN, M.N. **Friction Wear – Calculation Methods**. Pergamon Press, 1982.

LEE, E.H., Elastic-plastic Deformation at Finite Strains, **Journal of Applied Mechanics**, March, 1969.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. **Mechanics of Solid Materials**, Cambridge University Press, 1990.

MALVERN, L. E., **Introduction to the Mechanics of Continuous Medium**, Prentice-Hall, Engle-Wood Cliffs, NJ, 1969.

MICHALOWSKY, R., MRÓZ, Z., (1978) Associated and Non-Associated Sliding Rules in Contact Friction Problems. **Archives of Mechanics**. 30, 259 – 276.

ODEN, J. T. and MARTINS, J. A. C., Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 52 527-634, 1985.

ODEN, J. T., PIRES, E.B., Algorithms and Numerical Results for Finite element Approximations of Contact Problems with Non-Classical Friction Laws, **Computers and Structures**, vol 19, 12, p. 137-147, 1984.

ORTIZ, M., POPOV, E. P., Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations. **International Journal Numerical Methods Engineering**, 23, p. 353-366,1986.

ORTIZ, M., SIMO, J., An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, **Int. Journal Numerical Methods Engineering**, 23, p. 353-366,1984.

PARISH, H., A Consistent Stiffness Matrix for Three Dimensional Non-linear Contact Analysis, **Int. Journal Numerical Methods Engineering**, 28, p. 1803-1812, 1989.

PERIC, D., OWEN, D. R. J., Computational Model for 3-D Contact Problems with Friction Based on the Penalty Method, **Int. J. of Numerical Methods in Eng.**, vol. 35, p. 1289-1309, 1992.

PLESHA, M. E.; BALLARINI; R., PARULEKAR, A., Constitutive Model and Finite Element Procedure for Dilatant Contact Problems, **Journal of Engineering Mechanics**, vol.15, n.12, p. 2649-68, 1989.

PISONI, A. **A Constitutive Model for Friction in Metal-Working**, 1993. 138 p. Dissertação (Mestrado) - Massachussets Institute of Technology.

SCHEY, J. A. **Tribology in Metalworking. Friction, Lubrication and Wear.** American Society for Metal. Metal Park, 1983.

SHAW, M. C., A New Mechanism of Plastic Flow, **International Journal Mechanical Science**, vol. 22, 674, 1980.

SIMO, J. C., LAURSEN, T. A., A Continuum - Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems, **Int. J. of Numerical Methods in Eng.**, vol. 36, 3451-3485, 1993.

SOUZA NETO, E. A., HASHIMOTO, K. PÉRIC, D., OWEN, D. R. J., A Phenomenological Model for Frictional Contact of Coated Steel Sheets, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 50, 252-263, 1995.

SUH, N. P., SIN, H. C., The Genesis of Friction, **Wear**, vol. 69, 91-114, 1981.

THOMSEN, E. G., YANG, C.C., KOBAYASHI, S. **Plastic Deformation in Metal Processing**, Mac-Millan, 217-229, New York, 1965.

TRUESDELL, C., **Six Lectures on Modern Natural Philosophy - Rational Mechanics of Materials**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1966.

TABOR, D., Friction – the present state of our understanding, **J. Lubr. Technology**, vol 103, p. 169-179, 1981.

TONG, W., ANAND, L. A Constitutive Model for Friction in Forming. **Annals of the CIRP**, vol. 42, p. 361-366, 1993.

VARGAS, M. (1985) - **Metodologia da Pesquisa Tecnológica**. Editora Globo. Rio de Janeiro.

WRIGGERS, P., VU van, T. and STEIN, E., Finite element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction, **Computers and Structures**, vol. 37, p. 319-331, 1990.

WRIGGERS, P., (2002) **Computational Contact Mechanics**. John Wiley & Sons. England.

ZHONG (1993) - **Finite Element Procedures for Contact Impact Problems**. Oxford University Press, New York.

ZHONG, Z., NILSSON, L. A Contact Search Algorithm For General Contact Problems. **Computers & Structures**, Vol. 33, 1, p. 197-209,1989.

## APÊNDICE I

### CINEMÁTICA NO ABAQUS

A simulação de contato entre superfícies no Abaqus, inclui as seguintes formalizações:

- Formulação para o movimento relativo entre as superfícies;
- Formulação do modelo constitutivo para o contato normal entre as superfícies;
- Formulação do modelo constitutivo para o atrito entre as superfícies;

Neste trabalho são adotadas as formulações do Abaqus para os dois primeiros itens, e desenvolvido o modelo constitutivo para o atrito entre as superfícies.

As superfícies da interface podem ser modeladas com as seguintes características:

- Contato entre superfícies deformáveis ;
- Contato entre uma superfície rígida e uma deformável;
- Auto contato;

Estas opções podem ser realizadas em duas ou três dimensões.

Para modelagem do deslizamento relativo entre as superfícies, o programa possui três abordagens:

- Infinitesimal sliding e rotation – pequenas rotações e pequenos deslizamentos;
- Small Sliding – grandes rotações das superfícies, com pequenos deslizamentos;
- Finite Sliding – permite qualquer movimento relativo entre as superfícies;

Considerando os grandes deslocamentos e deslizamentos ocorridos na conformação mecânica, o movimento relativo entre as superfícies será modelado segundo o “finite sliding”.

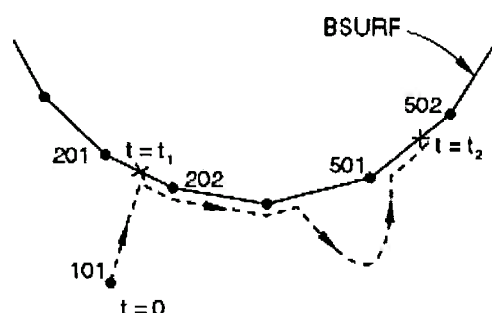
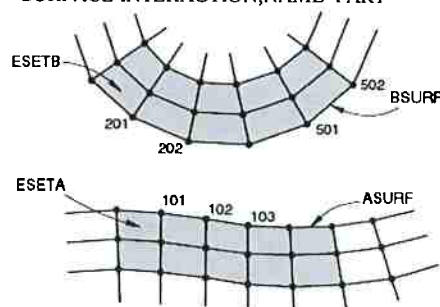
No aplicativo, a interação entre as superfícies é definida através de três passos:

- Criar a superfície ou conjunto de nós que terão contato;
- Especificando os pares de superfícies em contato;
- Definir o modelo de interação (apresentando uma lei constitutiva normal, ou não)

As superfícies em contato são denominadas: mestre, definindo a superfície rígida, indeformável, e escrava – contatora ou deformável. Na realidade, ambas superfícies são discretizadas por nós, sendo que a superfície escrava utiliza os nós dos elementos. Durante as iterações, os nós da superfície escrava procuram o ponto mais próximo da superfície mestre. A interação entre as superfícies é realizada através da normal à superfície mestre. Os nós escravos são restringidos a não penetrar na superfície mestre, entretanto, os nós da superfície mestre, podem penetrar na superfície escrava.

Considerando o exemplo de 2 superfícies ESETA (mestre) e ESETB (escrava), a interação é operacionalizada

```
*SURFACE,NAME=ASURF
ESETA,
*SURFACE,NAME=BSURF
ESETB,
*CONTACT PAIR,INTERACTION=PAR1
ASURF, BSURF
*SURFACE INTERACTION,NAME=PAR1
```



No exemplo acima, o nó 101 está em contato com a face do elemento formado pelos nós 201, 202 no tempo  $t_1$ , e a carga neste instante é transferida apenas entre 101, 201 e 202. O mesmo acontece no tempo  $t_2$ , transferindo a carga para os nós 501 e 502.



## APÊNDICE II

### Subrotina FRIC

Um aspecto que credencia a utilização do Abaqus em trabalhos acadêmicos está em sua permeabilidade para introdução de novas leis constitutivas de material (UMAT), elementos (UEL), leis de atrito (FRIC), deslocamentos (DISP) e outros módulos. Evidentemente, outros programas comerciais possuem possibilidades semelhantes, mas ainda fazem parte de um processo complicado e pouco disseminado entre os usuários.

O módulo instalado no Abaqus para implementação de leis de atrito é fundamental para os estudos na área. Seu funcionamento é descrito abaixo.

#### **Algoritmo de Contato do Abaqus**

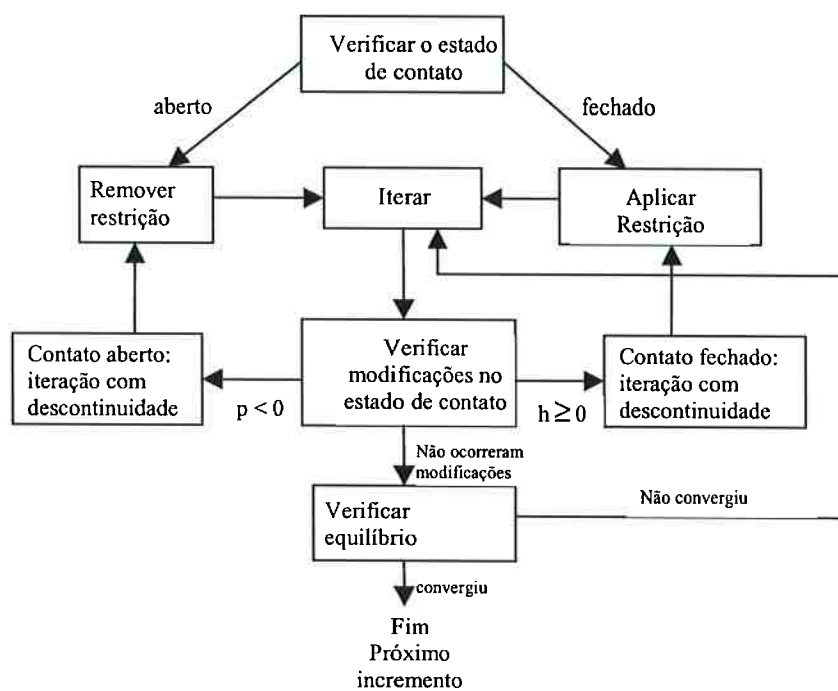
O programa verifica o estado de contato de todos os pares de contato no início de cada incremento para identificar se os nós escravos estão abertos ou fechados. Com a situação de contato fechado, o programa verifica se ele está em estado de aderência ou deslizamento. O programa então aplica uma restrição para cada ponto de contato, e remove as restrições daqueles onde a condição de contato torna-se aberta. Em seguida, procede a iteração e atualiza a configuração com as correções calculadas.

Antes de calcular o equilíbrio de forças e momentos, o programa verifica as mudanças nas condições de contato dos nós escravos. Os nós onde a folga após a iteração torna-se negativa ou zero, sua condição de contato é modificada de aberto para fechada, e aqueles onde a pressão torna-se negativa, sua condição de contato é alterada para aberto.

Se for detectada qualquer modificação na iteração corrente, o programa avisa a ocorrência de uma severa descontinuidade, e não executa o cálculo do equilíbrio.

Sempre que ocorrer uma descontinuidade, o Abaqus atualiza o contador de iterações para zero.

O programa modifica as restrições de contato para refletir a modificação na condição de contato, após a primeira iteração, e tenta a próxima. O programa repete o procedimento até executar uma iteração completa, sem modificações na condição de contato. Esta iteração torna-se a primeira iteração de equilíbrio e o Abaqus realiza o teste de convergência para o equilíbrio normal. Se não ocorrer a convergência, a iteração será refeita.



$p$  = pressão de contato  
 $h$  = penetração da superfície escrava na superfície mestre

A Subrotina Fric é chamada apenas quando um corpo entra em contato com outro. O contato é identificado em duas situações:

- pressão de contato é positiva - contato fechado na iteração anterior.
- ponto de contato está aberto – contato aberto na última iteração.

Durante as iterações, o valor de LM (sinalizador de contato) é passado para a subrotina como o valor definido na iteração anterior. Existem três condições:

- . LM = 0 => ponto de contato estava deslizando;
- . LM = 1 => ponto de contato estava em aderência;
- . LM = 2 => ponto de contato estava aberto.

Se a condição de contato é confirmada, o valor atualizado de deslizamento é verificado. Se o ponto de contato apresentava um movimento relativo, o programa ajusta LM = 0. Este identificador caracteriza o estado de deslizamento ou aderência (elástico). Neste caso a subrotina deve especificar a tração na interface  $t_1$  ( $t_2$  no caso tri-dimensional) como uma função do deslizamento relativo  $\Delta u_1$  ( e  $\Delta u_2$ ), e da pressão de contato  $p$ , e das outras variáveis de estado definidas. Além disto, a subrotina deve definir as derivadas na tensão de atrito com relação a  $\Delta u_1$  ( e  $\Delta u_2$ ), e  $p$ . Por exemplo,

no caso de aderência, isotrópica e elástica:  $\frac{\partial t_1}{\partial \Delta u_1} = \frac{\partial t_2}{\partial \Delta u_2} = k_\tau$  e  $\frac{\partial \tau_1}{\partial \Delta u_2} = \frac{\partial \tau_2}{\partial \Delta u_1} = 0$   $k_\tau$  é a rigidez elástica de aderência.

Se o contato estava em aderência na iteração anterior, o Abaqus ajusta LM = 1 quando chama a rotina. A condição de aderência rígida é aplicada através do método dos multiplicadores de Lagrange. Neste caso, o valor da tração de atrito  $t$ , é repassado para a subrotina Fric através da variável TAULM que é comparado com  $t = \mu p$ . Se o valor não excede  $s$  (resistência ao deslizamento), então o estado de atrito permanece em aderência. De outra maneira, o estado é modificado para deslizamento e as outras variáveis são ajustadas apropriadamente.

O Abaqus ajusta LM = 2 quando chama a rotina, se o contato estava aberto no incremento anterior. Se o coeficiente de atrito é zero, o estado de atrito é considerado

deslizamento sem atrito, ajustando  $LM = 2$  e saindo da rotina. De outra maneira o estado de atrito é ajustado para aderência.

### 1. Se $LM=0$ (contato fechado, em deslizamento)

#### 1.1 As seguintes variáveis devem estar atualizadas ao final da rotina:

TAU (NFDIR) – valores das componentes da tração na interface,  $t_1$  e  $t_2$ , são repassadas à rotina no início do incremento, que deve atualizar estes valores ao final do incremento.

DDTDDG (NFDIR,NFDIR) -  $\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \Delta u_j}$  derivada parcial da tração de atrito na direção  $i$  ( $i=1,2$ ) com relação ao movimento relativo na direção  $j$  ( $j=1,2$ ).

DDTDDP (NFDIR) -  $\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \Delta p}$  derivada parcial da tração de atrito na direção  $i$  em relação à pressão de contato.

#### 1.2 Variáveis que podem ser atualizadas:

DSLIP (NFDIR) -  $\Delta u_1^d$  incremento de deslizamento irreversível. Se  $LM = 0$  na iteração anterior, esta matriz é passada para a subrotina com todos os valores definidos na iteração anterior, de outra maneira será zero. Esta matriz também detecta a reversão do deslizamento entre as iterações, comparando o seu sinal anterior o sinal do valor atualizado de deslizamento estimado (DGAM). Esta variável também é utilizada para indicar se o ponto está em aderência ou em deslizamento. Após a convergência de um incremento, os valores desta variável são acumulados em SLIP -  $u_1^d$ .

SED – Esta variável é passada como o valor da densidade de energia elástica no início do incremento e deve ser atualizado ao final do incremento.

SFD – incremento de dissipação por atrito.

DDTDDT(NFDIR,2) -  $\frac{\partial \Delta t_i}{\partial \Delta \theta_j}$  derivadas parciais da tensão de atrito na direção  $i$  ( $i=1,2$ ) com relação a temperatura nas duas superfícies em contato.

PNEWDT – razão de tempo sugerida para o novo incremento de tempo – DTIME.

STATEV (NSTATEV) – matriz contendo as variáveis de estado. O número de variáveis de estado é definido no parâmetro DEPVAR na opção \*FRIC.

### *1.3 Valores Passados para a Subrotina para Informação*

DGAM (NFDIR) - se  $LM = 0$  na iteração anterior, este valor é o incremento de deslizamento no incremento atualizado  $\Delta u_j$ . Para outro valor de  $LM$ , será zero. Sua comparação com  $DSLIP$ , permite verificar se a condição de aderência modifica deslizamento e/ou se ocorre uma mudança de direção de deslizamento.

TAULM (NFDIR) – se  $LM = 1$  na iteração prévia, é a valor da tensão ao final do incremento. Comparando-o com a tensão crítica ao cisalhamento, é possível determinar se a condição de aderência modifica-se para deslizamento.

PRESS –  $p$ , pressão de contato ao final do incremento.

DPRESS -  $\Delta p$ , incremento na pressão de contato.

DDPDDH -  $\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta h}$  rigidez de contato atualizada, no caso de “contato macio”.

KSTEP – número do passo.

KINC – número do incremento.

TIME (1) – valor do incremento de tempo no final do incremento.

TIME (2) – valor do tempo  $t$  ao final do incremento.

DTIME – incremento de tempo atual.

NOEL – identificador dos elementos de contato.

CINAME – nome da interação de superfície definido em \*SURFACE INTERACTION.

SLNAME – nome da superfície escrava.

MSNAME – nome da superfície mestre.

NPT – número dos pontos de integração do ponto de contato.

NODE – número do nó escravo no ponto de contato.

COORDS(MCRD) – matriz contendo as coordenadas atualizadas do ponto.

RCOORD(MCRD) – se a superfície mestre é definida como rígida, esta matriz contém as coordenadas do ponto oposto à esta superfície em sua posição e orientação atualizadas.

DROT(2,2) -  $\Delta R$  - matriz de incremento de rotação. Ele aplica rotação nas variáveis de estado vetoriais ou tensoriais. Os componentes de deslizamento e tensão são rotacionados antes da FRIC ser chamada.

TEMP (2) - temperatura atualizada no nó escravo e na superfície mestre.

NFDIR – número das direções de atrito.

MCRD – número das direções no ponto de contato.

NPRED – número de variáveis de campo pré-definidas.

NSTATV – número de variáveis de estado.

CHRLNGTH – dimensão característica da superfície de contato que pode ser definida para estabelecer um deslizamento elástico máximo.

PROPS (NPROPS) – matriz de propriedades para definir o comportamento de atrito entre as superfícies.

NPROPS – número de propriedades associadas com o modelo de atrito.

## APÊNDICE III

### Sub Rotinas

#### 1. Teste de objetividade apresentado no capítulo X

Rotina para imposição de deslocamentos e rotação

```

subroutine disp(u,kstep,kinc,time,node,jdof)
c
  dimension u(3),time(2)
  implicit real*8(a-h,o-z)
c
  pi=dacos(-1.d+00)
  tdot=2.d0*pi
  sldot=1.d0
c
  theta=tdot*time
  sldot=sldot*time
c
  c=dcos(theta)
  s=dsin(theta)
c
  if(jdof.eq.1)then
c
    if(node.eq.1)then
      u=(c-1)*(-1)+slide*c
    else if (node.eq.2) then
      u=(c-1)+slide*c
    else if(node.eq.3) then
      u=(c-1)+s+slide*c
    else if(node.eq.4)then
      u=(c-1)*(-1)+s+slide*c
    else if (node.eq.1000) then
      u=slide
    end if
c
  else if(jdof.eq.2) then
    if(node.eq.1) then
      u=s-slide*s
    else if(node.eq.2)then
      u=-s-slide*s
    else if(node.eq.3) then
      u=c-1-s-slide*s
    else if(node.eq.4)then
      u=c-1+s-slide*s
    end if
c
  else if(jdof.eq.6) then
c
    u=-theta
c
  end if
  return
end

```

## 2. Rotina de Implementação da Lei Constitutiva Isotrópica

```

*****
** Problema de Extrusão**
*****
*HEADING,UNSYMM
*****
**Definição dos Nós**
*****
*NODE
1,5.045,0
65,5.045,20.32
81,4.63556,25.4
1201,1.d-10,0
1265,1.d-10,20.32
1281,1.d-10,25.4
9999,9,15.7
*NGEN,NSET=um
1,65,1
*NGEN,NSET=dois
1201,1265,1
*NGEN,NSET=tres
65,81,1
*NGEN,NSET=quatro
1265,1281,1
*NFILL,BIAS=.65,TWO STEP
um,dois,12,100
*NFILL,BIAS=.65,TWO STEP
tres,quatro,12,100
*NSET,NSET=inicio,GENERATE
1,1201,100
*NSET,NSET=fim,GENERATE
81,1281,100
*NSET,NSET=rigido
9999
*NSET,NSET=raio
um,tres
*NSET, NSET=DEF
1201
*****
**Definição dos Elementos**
*****
*ELEMENT,TYPE=CAX4
1,1,2,202,201
*ELGEN,ELSET=METAL
1,80,1,1,11,100,80
*ELSET,ELSET=ESID,GENERATE
1,80,1
*SURFACE DEFINITION, NAME=ASURF
ESID,S1
*RIGID SURFACE,TYPE=SEGMENTS,NAME=BSURF,REF NODE=9999,FILLET RADIUS=.8
START,5.08,0
LINE,5.08,20.32
LINE,4.63556,25.4
LINE,4.63556,30.48
LINE,10,30.48
*CONTACT PAIR, INTERACTION=SMOOTH, ADJUST=0.04
ASURF,BSURF
*SURFACE INTERACTION, NAME=SMOOTH

```



```

*FRICTION,USER,DEPVAR=2
*SURFACE BEHAVIOR, SOFTENED
0.04,5
*BOUNDARY
9999,ENCASTRE
dois,1,1
quatro,1,1
*****
**Propriedades do Material**
*****
*MATERIAL,NAME=OFHCcop
*ELASTIC
123000,.33
*PLASTIC
25,0
170,.1
233,.2
275,.3
305,.4
322,.5
352,.7
382,1
420,1.5
450,2
*SOLID SECTION,MATERIAL=OFHCcop,ELSET=METAL
*****
**Solução**
*****
*RESTART,WRITE,FREQUENCY=50
*STEP,INC=20000,NLGEOM
*STATIC
.0001,1,1E-9,.001
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
.005,1
*CONTROLS,PARAMETERS=CONSTRAINTS
,,,00005
*CONTROLS,PARAMETERS=LINE SEARCH
4
*BOUNDARY
begin,2,2,6
*****
**Impressão das Propriedades**
*****
*NODE PRINT,NSET=rigido,FREQUENCY=10
U2
RF
*NODE PRINT, NSET=DEF,FREQUENCY=10
RF
U2
*ENERGY PRINT, FREQUENCY=10
*PRINT, CONTACT=YES
*CONTACT PRINT,SLAVE=ASURF,MASTER=BSURF,FREQUENCY=10
*EL PRINT,ELSET=METAL,FREQUENCY=100
S,MISES
E,PEEQ
*EL FILE, ELSET=ESID,FREQUENCY=20,POSITION=AVERAGED AT NODES
S
*NODE FILE,NSET=inicio , FREQUENCY=5
U

```

```

*NODE FILE,NSET=rigido, FREQUENCY=5
RF
*END STEP
*****
**SUB ROTINA**
*****
*USER SUBROUTINES
  SUBROUTINE FRIC(LM,TAU,DDTDDG,DDTDDP,DSLIP,SED,SFD,
  1 DDTDDT,PNEWDT,STATEV,DGAM,TAULM,PRESS,DPRESS,DDPDDH,SLIP,
  2 KSTEP,KINC,TIME,DTIME,NOEL,CINAME,SLNAME,MSNAME,NPT,NODE,
  3 NPATCH,COORDS,RCOORD,DROT,TEMP,PREFDEF,NFDIR,MCRD,NPRED,
  4 NSTATV,CHRLNGTH,PROPS,NPROPS)
  c
    implicit real*8(a-h,o-z)
    parameter (nprec=2)
    character*8 ciname,slname,msname
    dimension tau(nfdir),ddtddg(nfdir,nfdir),ddtddp(nfdir),
    1 dslip(nfdir),ddtddt(nfdir,2),statev(*),dgam(nfdir),
    2 taulm(nfdir),slip(nfdir),time(2),coords(mcrd),
    3 rcoord(mcrd),drot(2,2),temp(2),predef(2,*),props(nprops)
  c
    external slres,dslrdx,dslrds,dslrdp,hf,dhf
  c *****
  c **Parâmetros**
  c *****
  c Valor Inicial do Coeficiente de Atrito
  xmui=0.33d+00
  c Valor de Saturação do Coeficiente de Atrito
  xmus=0.577d+00
  c Constante de Encruamento para o Coeficiente de Atrito
  h10=0.418d+00
  c Valor Inicial da Resistência ao Deslizamento
  sstari=108d+00
  c Valor de Saturação para a Resistência ao Deslizamento
  sstars=220d+00
  c Constante de Encruamento para a Resistência ao Deslizamento
  h20=44d+00
  c Rigidez na Adesão
  sis=10000d+00
  zero=0.0
  c Tolerâncias
  tolx=.00001
  tols=.001
  c
  lm=0
  c *****
  c Condições Iniciais
  c *****
  if(statev(1).lt.xmuo)then
    statev(1)=xmuo
    statev(2)=sstaro
  end if
  c
  c *****
  c Calcular a tração Preditora e Verificar se processo está em aderência ou deslizamento
  c *****
  taup1=tau(1)+sis*dgam(1)
  taup2=tau(2)+sis*dgam(2)
  if(nfdir.eq.1)taup2=0.d+00

```

```

    tauep=sqrt(taup1**2+taup2**2)
    p=press+dpres
    s=slres(statev(1),statev(2),p)
if(dabs(taup).lt.s)then
c
c *****
c Processo em Aderência
c *****
    in=1
    tau(1)=taup1
    tau(2)=taup2
c *****
c Calcular o Jacobiano
c *****
    dtdg(1,1)=sis
    dtdg(1,2)=zero
    dtdg(2,1)=zero
    dtdg(2,2)=sis
    dtdp(1)=zero
    dtdp(2)=zero
else
c
c *****
c Processo em Deslizamento
c *****
    in=2
    xmun=statev(1)
    ssn=statev(2)
    us1n=slip(1)
    us2n=slip(2)
    xm1p=taup1/taup
    xm2p=taup2/taup
    dsled=0.d+00
do 10 i=1,20
c *****
c Cálculo do Coeficiente de Atrito e Resistência ao Deslizamento
c *****
    xnum=xmus*(xmun+h10*dsled)
    xden=xmus+h10*dsled
    xmu=xnum/xden
    snum=sstars*(ssn+h20*dsled)
    sden=sstars+h20*dsled
    ss=snum/sden
    dsdxmu=dslrdx(xmu,ss,p)
    dsdss=dslrds(xmu,ss,p)
    dsdp=dslrdp(xmu,ss,p)
    hxmu=hf(h10,xmu,xmus)
    hss=hf(h20,ss,sstars)
    s=slres(xmu,ss,p)
c *****
c Cálculo do Multiplicador de Contato
c *****
    dellc=(taup-s)/sis
c *****
c Cálculo dos Deslizamentos nas Direções 1,2
c *****
    delus1=dellc*xm1p
    dslip(1)=abs(delus1)
    slip(1)=slip(1)+dslip(1)

```

```

us1np1=us1n+delus1
delus2=dellec*xm2p
dslip(2)=abs(delus2)
slip(2)=slip(2)+dslip(2)
us2np1=us2n+delus2
use=sqrt(us1np1**2+us2np1**2)
slipe=sqrt(slip(1)**2+slip(2)**2)
c *****
c Cálculo do Deslizamento Equivalente
c *****
dsled=(slip(1)*dslip(1)+slip(2)*dslip(2))/slipe
delxmu=hxmu*dsled
delss=hss*dsled
if(dabs(delxmu).le.tolxmu.and.dabs(delss).le.tolss)go to 11
10 continue
c *****
c Atualizar as trações e a Resistência ao Deslizamento
c *****
11 statev(1)=xmu
statev(2)=ss
s=slres(statev(1),statev(2),p)
rf=s/tauep
tau(1)=rf*taup1
tau(2)=rf*taup2
slip(1)=us1np1
slip(2)=us2np1
dslip(1)=delus1
dslip(2)=delus2
c *****
c Calcular o Deslizamento Equivalente
eslip=sqrt(slip(1)**2+slip(2)**2)
dsled=(slip(1)*dslip(1)+slip(2)*dslip(2))/eslip
spd=rf*tauep*dsled
c *****
c Calcular o Jacobiano
c *****
c1=tau(1)/s
c2=tau(2)/s
call git(sis,rf,statev(1),statev(2),press,dsled,xmus,sstars,ginvt,
& h10,h20)
call gin(sis,statev(1),statev(2),press,dsled,xmus,sstars,ginvn,
& h10,h20)
dtdddg(1,1)=rf*sis-ginvt*(c1*sis)**2
dtdddg(1,2)=-ginvt*c1*c2*sis**2
dtdddg(2,1)=-ginvt*c1*c2*sis**2
dtdddg(2,2)=sis-ginvt*(c2*sis)**2
dtdddp(1)=ginvn*sis*c1
dtdddp(2)=ginvn*sis*c2
end if
c *****
c Imprimir Variáveis
c *****
nl=40
iflagl=kinc/nl
iflag=iflagl*nl
if (iflag.eq.kinc) then
open(unit=20,file='c:\abaqus\renato\friciso1.txt',
& status='unknown')
write(20,5) kinc,in,statev(1),statev(3),tau(1),node,

```

```

& slip(1),tau(1),s,dslip,press,dpress,ddpddh
end if
c
5 format(I5,I3,F9.4,F9.4,F9.3,I5,F9.4,F9.4,F9.4,F9.4,
& E11.2,E11.2,F11.4)
c
return
end
c *****
c Subrotina ginvt
c *****
c subroutine git(sis,rf,x1,x2,press,dsled,xmus,sstars,ginvt,
& h10,h20)
implicit real*8(a-h,o-z)
dsds=dslrds(x1,x2,press)
dsdx=dslrdx(x1,x2,press)
h1hat=hf(h10,x1,xmus)/(1-dsled*dhf(h10,xmus))
h2hat=hf(h20,x2,sstars)/(1-dsled*dhf(h20,sstars))
hhat=dsdx*h1hat+dsds*h2hat
ginvt=(rf-(hhat/(sis+hhat)))/sis
return
end
c *****
c Subrotina gin
c *****
c subroutine gin(sis,x1,x2,press,dsled,xmus,sstars,ginvn,h10,h20)
implicit real*8(a-h,o-z)
dsds=dslrds(x1,x2,press)
dsdx=dslrdx(x1,x2,press)
dsdp=dslrdp(x1,x2,press)
h1hat=hf(h10,x1,xmus)/(1-dsled*dhf(h10,xmus))
h2hat=hf(h20,x2,sstars)/(1-dsled*dhf(h20,sstars))
hhat=dsdx*h1hat+dsds*h2hat
ginvn=dsdp/(sis+hhat)
return
end
c *****
c Declaração das Funções
c *****
c *****
c Função de Resistência ao Deslizamento
function slres(x1,x2,p)
implicit real*8(A-H,O-Z)
slres=x2*dtanh(x1*p/x2)
return
end
c *****
c Derivada da função de resistência com relação a  $\mu$ 
function dslrdx(x1,x2,p)
implicit real*8(A-H,O-Z)
arg=x1*p/x2
dslrdx=p/(dcosh(arg))**2
return
end
c *****
c Derivada da função de resistência com relação a  $s^*$ 
function dslrds(x1,x2,p)
implicit real*8(A-H,O-Z)

```

```

    arg=x1*p/x2
    dslrds=dtanh(arg)-x1*p/(x2*(dcosh(arg))**2)
    return
    end
c *****
c Derivada da função de resistência com relação a à pressão
  function dslrdp(x1,x2,p)
  implicit real*8(A-H,O-Z)
    arg=x1*p/x2
    dslrdp=x1/(dcosh(arg))**2
  return
  end
c *****
c Função de Encruamento
  function hf(h0,x,sat)
  implicit real*8(A-H,O-Z)
    hf=h0*(1-x/sat)
  return
  end
c *****
c Derivada de hf
  function dhf(h0,sat)
  implicit real*8(A-H,O-Z)
    dhf=-h0/sat
  return
  end

```

### 3. Rotina de Implementação da Lei Constitutiva Mista

```

*****
**FRIC SUBROUTINE**
*****
*USER SUBROUTINES
  SUBROUTINE FRIC(LM,TAU,DDTDDG,DDTDDP,DSLIP,SED,SFD,
    1 DDTDDT,PNEWDT,STATEV,DGAM,TAULM,PRESS,DPRESS,DDPDDH,SLIP,
    2 KSTEP,KINC,TIME,DTIME,NOEL,CINAME,SLNAME,MSNAME,NPT,NODE,
    3 NPATCH,COORDS,RCOORD,DROT,TEMP,PREFDEF,NFDIR,MCRD,NPRED,
    4 NSTATV,CHRLNGTH,PROPS,NPROPS)
c
c
  implicit real*8(a-h,o-z)
  parameter (nprecd=2)
  character*8 ciname,slname,msname
  dimension tau(nfdir),ddtddg(nfdir,nfdir),ddtddp(nfdir),
    1 dslip(nfdir),ddtddt(nfdir,2),statev(nstatv),dgam(nfdir),
    2 taulm(nfdir),slip(nfdir),time(2),coords(mcrd),
    3 rcoord(mcrd),drot(2,2),temp(2),predef(2,npred),props(nprops),
    4 taur(nfdir),aslip(nfdir)
c
c
  external slres,dslrdx,dslrds,dslrdp,hf,dhf
c *****
c Parâmetros
c *****
c Coeficiente de Atrito Inicial
  xmuo=0.33d+00
c Valor de Saturação Para o Coeficiente de Atrito
  xmus=0.627d+00
c Constante de Encruamento para o Coeficiente de Atrito

```

```

h10=0.418d+00
c Valor Inical da Resistência ao Deslizamento
sstaro=108d+00
c Valor Inicial da Tensão de Retorno
xji1=0.d+00
xji2=0.d+00
c Valor de Saturação para a Resistência ao Deslizamento
sstars=220d+00
c Constante de Encruamento para a Resistência ao Encruamento
h20=44d+00
c Constante de Encruamento da Tensão de Retorno
h30=2.366d+00
c Rigidez em Aderência
sis=10000d+00
zero=0.d+0
c Tolerâncias
tolxmu=.001
tolsled=.001
c
lm=0
c *****
c Condições Iniciais
c *****
if(statev(1).lt.xmuo)then
statev(1)=xmuo
statev(2)=sstaro
statev(3)=xji1
statev(4)=xji2
end if
c
c *****
c Calcular a Tensão Preditora Relativa / Verificar condição Aderência/Deslizamento
c *****
taur(1)=tau(1)-statev(3)
taur(2)=tau(2)-statev(4)
taurp1=taur(1)+sis*dgam(1)
taurp2=taur(2)+sis*dgam(2)
c if(nfdir.eq.1)taurp2=0.d+00
taurep=sqrt(taurp1**2+taurp2**2)
p=press+dpres
s=slres(statev(1),statev(2),p)
if(dabs(taurep).lt.s)then
c
c *****
c Processo em Aderência
c *****
in=1
tau(1)=taurp1
tau(2)=taurp2
c *****
c Calcular o Jacobiano
c *****
dtdddg(1,1)=sis
dtdddg(1,2)=zero
dtdddg(2,1)=zero
dtdddg(2,2)=sis
dtdddp(1)=zero
dtdddp(2)=zero
else

```

```

c
c *****
c Processo em Deslizamento
c *****
  in=2
  xmun=statev(1)
  ssn=statev(2)
  us1n=slip(1)
  us2n=slip(2)
  xm1rp=taurp1/taurep
  xm2rp=taurp2/taurep
  dsled=0.d+00
do 10 i=1,20
c *****
c Cálculo do Coeficiente de Atrito e Resistência Limite
c *****
  xnum=xmus*(xmun+h10*dsled)
  xden=xmus+h10*dsled
  xmu=xnum/xden
  snum=sstars*(ssn+h20*dsled)
  sden=sstars+h20*dsled
  ss=snum/sden
c *****
c Incremento de Resistência
c *****
  dsdxmu=dslrdx(xmu,ss,p)
  dsdss=dslrds(xmu,ss,p)
  dsdp=dslrdp(xmu,ss,p)
  hxmu=hf(h10,xmu,xmus)
  hss=hf(h20,ss,sstars)
  s=slres(xmu,ss,p)
c *****
c Cálculo do Multiplicador de Contato Relativo
c *****
  dellrc=(taurep-s)/sis
c *****
c Atualização dos Deslizamentos nas Direções 1,2
c *****
  delus1=dellrc*xm1rp
  dslip(1)=abs(delus1)
  slip(1)=slip(1)+dslip(1)
  us1np1=us1n+delus1
  delus2=dellrc*xm2rp
  dslip(2)=abs(delus2)
  slip(2)=slip(2)+dslip(2)
  us2np1=us2n+delus2
  use=sqrt(us1np1**2+us2np1**2)
  slipe=sqrt(slip(1)**2+slip(2)**2)
  dsled=(slip(1)*dslip(1)+slip(2)*dslip(2))/slipe
  delxmu=hxmu*dsled
  delss=hss*dsled
  if(dabs(delxmu).le.tolxmu.and.dabs(delss).le.tolss)go to 11
c   if(dabs(dsled).le.tolsled) go to 11
10 continue
c *****
c Atualizar as trações e a Resistência ao Deslizamento
c *****
11 statev(1)=xmu
   statev(2)=ss

```



```

s=slres(statev(1),statev(2),p)
rrf=s/taurep
taur(1)=rrf*taurp1
taur(2)=rrf*taurp2
slip(1)=us1np1
slip(2)=us2np1
dslip(1)=delus1
dslip(2)=delus2
c
c *****
c Calcular o Deslizamento Equivalente
  eslip=sqrt(slip(1)**2+slip(2)**2)
  dsled=(slip(1)*dslip(1)+slip(2)*dslip(2))/eslip
  spd=rrf*taurep*dsled
c *****
c Atualizar a Tensão de Fundo (Back Stress)
c *****
  cj1=h30*dslip(1)
  cj2=h30*dslip(2)
  statev(3)=statev(3)+cj1
  statev(4)=statev(4)+cj2
c *****
c Atualizar as Trações
c *****
  tau(1)=taur(1)+statev(3)
  tau(2)=taur(2)+statev(4)
c *****
c Calcular o Jacobiano
c *****
c1=tau(1)/s
c2=tau(2)/s
call git(sis,rrf,statev(1),statev(2),p,dsled,xmus,sstars,
&  ginvt,h10,h20)
call gin(sis,statev(1),statev(2),p,dsled,xmus,sstars,ginvn,
&  h10,h20)
ddtdg(1,1)=rrf*sis-ginvt*(c1*sis)**2
ddtdg(1,2)=-ginvt*c1*c2*sis**2
ddtdg(2,1)=-ginvt*c1*c2*sis**2
ddtdg(2,2)=sis-ginvt*(c2*sis)**2
ddtdp(1)=ginvn*sis*c1
ddtdp(2)=ginvn*sis*c2
end if
c Deste ponto em diante a subrotina é igual à anterior.

```

#### 4. Rotina de Implementação da Lei Constitutiva Anisotrópica

```

*****
**FRIC SUBROUTINE**
*****
*USER SUBROUTINES
  SUBROUTINE FRIC(LM,TAU,DDTDDG,DDTDDP,DSLIP,SED,SFD,
1 DDTDDT,PNEWDT,STATEV,DGAM,TAULM,PRESS,DPRESS,DDPDDH,SLIP,
2 KSTEP,KINC,TIME,DTIME,NOEL,CINAME,SLNAME,MSNAME,NPT,NODE,
3 NPATCH,COORDS,RCOORD,DROT,TEMP,PREFDEF,NFDIR,MCRD,NPRED,
4 NSTATV,CHRLNGTH,PROPS,NPROPS)
c
  implicit real*8(a-h,o-z)
  parameter (nprec=2)
  character*8 ciname,slname,msname

```

```

dimension tau(nfdir),ddtddg(nfdir,nfdir),ddtddp(nfdir),
1 dslip(nfdir),ddtdt(nfdir,2),statev(nstatv),dgam(nfdir),
2 taulm(nfdir),slip(nfdir),time(2),coords(mcrd),
3 rcoord(mcrd),drot(2,2),temp(2),predef(2,npred),props(nprops)
c
external slres,dslrdmu,dslrdss,dslrdp,hf,dhf
c *****
c Parâmetros
c *****
c Coeficiente de Atrito Inicial
xmuo1=0.10d+00
xmuo2=0.12d+00
c Valor de Saturação do Coeficiente de Atrito
xmus1=0.3d+00
xmus2=0.33d+00
c Constante de Encruamento do Coeficiente de Atrito
hmu1=0.418d+00
hmu2=0.501d+00
c Valor Inicial da Resistência ao Deslizamento
sso1=1.080d+01
sso2=1.296d+01
c Valor de Saturação da Resistência ao Deslizamento
sss1=2.20d+01
sss2=2.64d+01
c Constante de Encruamento da Resistência ao Deslizamento
hss1=4.40d+0
hss2=5.28d+0
c Rigidez em Aderência
k1=1.0d+03
k2=1.2d+03
zero=0.d+0
c Tolerâncias
tolss=0.001
tolxmu=0.001
c
lm=0
c *****
c Condições Iniciais
c *****
if(statev(1).lt.xmuo1.and.statev(2).lt.xmuo2)then
statev(1)=xmuo1
statev(2)=xmuo2
statev(3)=sso1
statev(4)=sso2
end if
c *****
c Cálculo da Tensão Preditora e Verificação da condição Aderência / Deslizamento
c *****
t1=tau(1)
t2=tau(2)
delu1=dgam(1)
delu2=dgam(2)
tp1=t1+k1*delu1
tp2=t2+k2*delu2
p=press+dpres
r1=slres(statev(1),statev(3),p)
r2=slres(statev(2),statev(4),p)
fc=sqrt((tp1/r1)**2+(tp2/r2)**2)-1
if(fc.lt.zero)then

```

```

c *****
c Processo em Aderência
c *****
  in=1
  tau(1)=tp1
  tau(2)=tp2
c *****
c Cálculo do Jacobiano
c *****
  ddtddg(1,1)=k1
  ddtddg(1,2)=zero
  ddtddg(2,1)=zero
  ddtddg(2,2)=k2
  dtddp(1)=zero
  dtddp(2)=zero
else
c *****
c Processo em Deslizamento
c *****
  in=2
  xmu1n=statev(1)
  xmu2n=statev(2)
  ss1n=statev(3)
  ss2n=statev(4)
  us1n=slip(1)
  us2n=slip(2)
  s1n=slip(1)
  s2n=slip(2)
  dels1=0.d+00
  dels2=0.d+00
  dellc=0.e+00
  delse=0.e+00
do 10 i=1,20
c *****
c Cálculo do Coeficiente de Atrito - dir: 1,2
c *****
  a1=xmus1*(xmu1n+hmu1*dels1)
  b1=xmus1+hmu1*dels1
  xmu1=a1/b1
  a2=xmus2*(xmu2n+hmu2*dels2)
  b2=xmus2+hmu2*dels2
  xmu2=a2/b2
c *****
c Cálculo do Valor de Saturação ss - dir: 1,2
c *****
  c1=sss1*(ss1n+hss1*dels1)
  d1=sss1+hss1*dels1
  ss1=c1/d1
  c2=sss2*(ss2n+hss2*dels2)
  d2=sss2+hss2*dels2
  ss2=c2/d2
c *****
c Incremento de Resistência - dir: 1,2
c *****
  dr1dmu1=ds1rdmu(xmu1,ss1,p)
  dm1ds1=hf(hmu1,xmu1,xmus1)
  dr1dss1=ds1rdss(xmu1,ss1,p)
  dss1ds1=hf(hss1,xmu1,xmus1)
  ht1=dr1dmu1*dm1ds1+dr1dss1*dss1ds1

```

```

hp1=dsldp(xmu1,ss1,p)
dr2dmu2=dsldmu(xmu2,ss2,p)
dmu2ds2=hf(hmu2,xmu2,xmus2)
dr2dss2=dsldss(xmu2,ss2,p)
dss2ds2=hf(hss2,xmu2,xmus2)
ht2=dr2dmu2*dmu2ds2+dr2dss2*dss2ds2
hp2=dsldp(xmu2,ss2,p)
*****
c
c Cálculo das Trações
c *****
r1=slres(xmu1,ss1,p)
xm1=tp1/(r1**2+k1*dellc)
t1=xm1*(r1**2)
am1=abs(xm1)
r2=slres(xmu2,ss2,p)
xm2=tp2/(r2**2+k2*dellc)
t2=xm2*(r2**2)
am2=abs(xm2)
*****
c
c Incremento do Multiplicador de Deslizamento
c *****
e=xm1*k1*delu1+xm2*k2*delu2-(xm1*t1*hp1/r1+xm2*t2*hp2/r2)*dpress
f=k1*(xm1**2)+k2*(xm2**2)+xm1*t1*ht1*am1/r1+xm2*t2*ht2*am2/r2
dellc=e/f
delus1=dellc*xm1
dels1=abs(delus1)
delus2=dellc*xm2
dels2=abs(delus2)
delxmu1=dmu1ds1*dels1
delxmu2=dmu2ds2*dels2
delss1=dss1ds1*dels1
delss2=dss2ds2*dels2
if(dabs(delxmu1).le.tolxmu.and.dabs(delxmu2).le.tolxmu.and.
& dabs(delss1).le.tolss.and.dabs(delss2).le.tolss) go to 11
c
10 if(dabs(dellc).le.toldellc)go to 11
c
c continue
c *****
c Atualização de Variáveis
c *****
11 statev(1)=xmu1
statev(2)=xmu2
statev(3)=ss1
statev(4)=ss2
dslip(1)=delus1
slip(1)=s1n+dels1
us1np1=us1n+delus1
dslip(2)=delus2
slip(2)=s2n+dels2
us2np1=us2n+delus2
t1=xm1*(r1**2)
t2=xm2*(r2**2)
tau(1)=t1
tau(2)=t2
r1=slres(xmu1,ss1,p)
r2=slres(xmu2,ss2,p)
c
c Cálculo do Jacobiano
c *****
ddtdg(1,1)=k1
ddtdg(1,2)=0

```

$ddtddg(2,1)=0$   
 $ddtddg(2,2)=k^2$