

JORGE LUIZ FARIA GARCIA

**AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS DE
MINERAÇÃO, ENVOLVENDO DECISÕES DE
INVESTIMENTO, SOB CONDIÇÕES DE INCERTEZA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.

CONSULTA
FD-3343

São Paulo
2003

JORGE LUIZ FARIA GARCIA

**AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS DE
MINERAÇÃO, ENVOLVENDO DECISÕES DE
INVESTIMENTO, SOB CONDIÇÕES DE INCERTEZA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mineral

Orientador:
Prof. Dr. Giorgio F.C. de Tomi

São Paulo
2003



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA**

TERMO DE JULGAMENTO

DE

DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos 10 dias do mês de abril de 2003, às 10:00 horas, no Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, presente a Comissão Julgadora, integrada pelos Senhores Professores Doutores Giorgio Francesco Cesare de Tomi, orientador do candidato, Paulo Miranda de Figueiredo Filho e Manoel Rodrigues Neves, iniciou-se a Defesa de Dissertação de Mestrado do(a) Sr(a) **JORGE LUIZ FARIA GARCIA**.

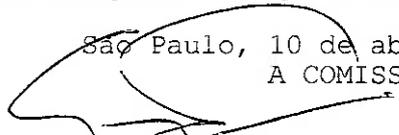
Título da Dissertação: **"AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS DE MINERAÇÃO, ENVOLVENDO DECISÕES DE INVESTIMENTO, SOB CONDIÇÕES DE INCERTEZA"**

Concluída a arguição, procedeu-se ao julgamento na forma regulamentar, tendo a Comissão Julgadora considerado o(a) candidato(a):

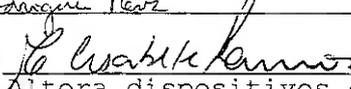
Prof. Dr. Giorgio Francesco Cesare de Tomi.... (APROVADO)
 . Dr. Paulo Miranda de Figueiredo Filho... (APROVADO)
 . Dr. Manoel Rodrigues Neves..... (APROVADO)

Para constar, é lavrado o presente termo, que vai assinado pela Comissão Julgadora e pela Secretária de Pós-Graduação.

São Paulo, 10 de abril de 2003.
 A COMISSÃO JULGADORA



 Manoel Rodrigues Neves

Secretária: Elisabete Apª F.S.Ramos 
 Obs: Resolução 4476, de 17.09.1997 Altera dispositivos do Regimento Geral da USP Art.109 - Imediatamente após o encerramento da arguição da dissertação ou da tese cada examinador expressará seu julgamento em sessão secreta, considerando o candidato aprovado ou reprovado.

Homologado pela C.P.G. em reunião realizada 27/04/03.

Lfp.

À minha esposa, Keliane, e;

Ao meu filho Matheus.

“A verdadeira dificuldade não está em aceitar idéias novas, mas em livrar-se das idéias antigas”. John Maynard Keynes (1883-1946)

AGRADECIMENTOS

- A CAPES, que financiou esse programa de mestrado;
- Ao Orientador Prof. Dr. Giorgio F.C. de Tomi, pelas sugestões e pela liberdade de criação;
- Ao Dr. Manoel Rodrigues Neves, Gerente de Estudos de Mercado da Jaakko Pöyry, pelas valiosas sugestões;
- À minha esposa, Keliane, pelo amor, estímulo, compreensão e incansável apoio dispensados nos momentos mais difíceis;
- A memória dos meus pais, Rubens e Nair, que me proporcionaram uma formação digna e de qualidade, e;
- A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

RESUMO

A análise de investimento em projetos de mineração é uma tarefa complexa, devido às incertezas do projeto, como preço do metal, a qualidade do minério e a estrutura física da jazida. Para avaliar os projetos de investimento em mineração, a maioria das empresas utiliza o método tradicional do fluxo de caixa descontado. O método do fluxo de caixa descontado é limitado no tratamento das incertezas e flexibilidades do projeto, induzindo freqüentemente a decisões erradas. Esse método assume alguns pressupostos, os quais podem resultar em uma subavaliação do projeto de investimento. A moderna avaliação econômica de projetos de mineração, envolvendo decisões de investimento, sob condições de incerteza, requer uma abordagem científica, na modelagem das incertezas como processos estocásticos. A análise de investimento sob condições de incertezas, também chamada de Teoria de Opções Reais, considera o valor da oportunidade de investimento através de regras de decisão que visam maximização do valor presente líquido do projeto. Esta Dissertação tem três objetivos: (a) apresentar o estado da arte da teoria da análise de investimentos sob condições de incerteza; (b) avaliar um projeto de investimento em uma mina de cobre, com o método do fluxo de caixa descontado e com o emprego da Teoria das Opções Reais, a qual é implementada, através de um modelo simples, seguro, flexível e adequado as principais questões envolvidas nas decisões de investimento; (c) comparar os resultados obtidos com a abordagem convencional e com a moderna Teoria das Opções Reais.

ABSTRACT

Mine investment analysis is a complex exercise because uncertainty of project, such as mineral price, deposit quality, and the physical structure of the mineral deposit. To evaluate projects as if mine ventures, the majority of organizations use the traditional method of discounted cash flow. The traditional method of discounted cash flow, is very limited to deal with uncertainties and flexibilities, and gives frequently the wrong decision. These methods have some associated assumptions that can result in the value of an investment being underestimated. The modern mine economic valuation investment project under uncertainty, comprehend a scientific approach in the modeling of uncertainty as a stochastic process. The analysis of investment under uncertainty, also named Real Options Theory, separates the value of investment opportunity from the decision rule, so that the latter maximizes the former. This dissertation has three aims: (a) to find the state-of-the-art of the theory of investment analysis under uncertainty; (b) to evaluate a copper mine venture with discounted cash flow technique and with Real Options Theory, that is represented as simple model, reliable, flexible, and adequate to the main questions of investment decisions;(c) to compare the results of the conventional and modern approach.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

CAPÍTULO 1 – MOTIVAÇÃO - OBJETIVO - ESTADO DA ARTE

1.1 Introdução.....	01
1.2 Objetivos.....	03
1.3 Estrutura da Dissertação.....	04
1.4 As Limitações dos Métodos Tradicionais de Avaliação de Investimento....	05
1.5 O Estado da Arte.....	08
1.5.1 Teoria das Opções Financeiras.....	08
1.5.2 Teoria das Opções Reais.....	13
1.6 Avaliação de Ativos e Riscos na Indústria Mineral.....	15

CAPÍTULO 2 - O MERCADO DO COBRE E GESTÃO DE RISCOS

2.1 Introdução.....	18
2.2 O Mercado do Cobre.....	19
2.2.1 Características, Propriedades e Usos.....	19
2.2.2 Oferta.....	23
2.2.3 Demanda.....	28
2.2.4 Substituições.....	30
2.2.5 Preços e Estoques.....	31
2.2.6 Negócios.....	33
2.2.7 Novos projetos no Brasil.....	36
2.3 Gerenciamento de Riscos na Indústria Mineral.....	38
2.3.1 Mercado de Futuros.....	40
2.3.2 Mercado a Termo.....	43
2.3.3 Mercado de <i>Swap</i>	45
2.3.4 Mercado de Opções.....	46
2.3.5 Operações de <i>Hedge</i>	50

CAPÍTULO 3 - TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

3.1 Introdução.....	52
3.2 Fundamentos Teóricos.....	54
3.2.1 Arbitragem.....	55
3.2.2 Mercado Completo.....	55
3.2.3 Investimento.....	55
3.2.4 A Oportunidade de Investimento como uma Opção Real.....	56
3.2.5 Taxas de Vedação.....	62
3.2.6 Irreversibilidade dos Custos de Investimentos.....	63

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
RESUMO	04 ^a	fluxo de caixa descontado	Fluxo de Caixa Descontado
RESUMO	16 ^a	fluxo de caixa descontado	Fluxo de Caixa Descontado
RESUMO	18 ^a	as	às
RESUMO	20 ^a	com a moderna Teoria das Opções Reais. Teoria das Opções Reais.	com a moderna Teoria das Opções Reais. Teoria das Opções Reais. Os resultados observados no mostraram que a estratégia de investimento tem valor e deve ser considerada pelas empresas de mineração, para que otimizem o valor dos novos empreendimentos
ABSTRACT	01 ^a	because uncertainty	because of uncertainties
ABSTRACT	03 ^a	as if	of
ABSTRACT	08 ^a	comprehend	comprehends
ABSTRACT	16 ^a	approach	approaches
ABSTRACT	16 ^a	approaches.	approaches. These results observed mean that the strategy of investment has value and must be considerate from mining company, to optmize the value of the new projects
SUMÁRIO	07 ^a	OBJETIVO	OBJETIVOS
SUMÁRIO	11 ^a	Avaliação de Investimento	Avaliação de Projetos Investimento
LISTA DE TABELAS	01 ^a	mundial de e concentrado	mundial de concentrado
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	01 ^a	Autoregressive conditional heterocedasticity	Autoregressive Conditional Heterocedasticity
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	09 ^a	Generalized conditional heterocedasticity	Generalized Conditional Heterocedasticity
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	11 ^a	Mina desativada	Mina Desativada
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	12 ^a	Mina fechada	Mina Fechada
LISTA DE ABREVIATURAS	15 ^a	Mina aberta	Mina Aberta

E SIGLAS			
02	25 ^a	Brealey e Myers	BREALEY E MYERS
03	26 ^a	teoria de opções reais	Teoria de Opções Reais
09	11 ^a	BLACK & SCHOLES	BLACK & SCHOLES(1973)
10	07 ^a	Européia	européia
10	08 ^a	Americana	americana
10	09 ^a	Européia	européia
10	10 ^a	Americana	americana
10	22 ^a	SMC	Simulação de Monte Carlo
11	09 ^a	Européias	européias
11	13 ^a	Européias	européias
11	19 ^a	Americanas	americanas
11	27 ^a	anexo a	Anexo A
15	09 ^a	integralmente	integralmente
18	01 ^a	O MERCADO DO COBRE E RISCOS NA INDÚSTRIA MINERAL	O MERCADO DO COBRE E GESTÃO DE RISCOS
23	18 ^a	Recuperação de Sucata	Recuperação Mundial de Sucata
24	10 ^a	II guerra mundial	II Guerra Mundial
25	19 ^a	de refino de foi de	de refino foi de
26	13 ^a	entre 1960 e 2000	entre 1960 e 1998
26	14 ^a	Fontes de Refino	Fontes Mundiais de Refino
27	03 ^a	Capacidade de Refino	Capacidade de Refino por Continente
27	07 ^a	Refino de Cobre	Refino Mundial de Cobre
29	08 ^a	a competição	à competição
30	08 ^a	Uso de Cobre	Uso Mundial de Cobre
31	22 ^a	implementação novos	implementação de novas
31	22 ^a	visando a adequar-se	visando adequar-se
37	3 ^a	Cabe observar	Cabe observar também
37	11 ^a	No entanto, conclui-se que é bastante provável	Portanto, pode-se inferir que é provável que a partir dos diversos projetos em desenvolvimento
49	12 ^a	Americanas	americanas
49	14 ^a	Americanas	americanas
50	7 ^a	NETO (1999)	NETO (1997)
53	15 ^a	gerarão um uma	gerarão uma
54	10 ^a	requerem a	requer a
98	10 ^a	investir no projeto sem um estudo detalhado de viabilidade, I_c ;	investir no projeto com um estudo detalhado de viabilidade, I_c ; I_u investir no projeto sem um estudo detalhado de viabilidade
98	11 ^a	esperar uma data julgada	esperar uma data julgada

		apropriada para tomar a decisão, W_c ;	apropriada para tomar a decisão, W_c ; W_u esperar uma data julgada apropriada para rejeitar o projeto
98	12 ^a	rejeitar o projeto, R_c .	rejeitar o projeto, R_c após estudo detalhado de viabilidade; R_u rejeitar o projeto, R_c sem estudo detalhado de viabilidade
103	02 ^a	ABORDAGEM FCD	ABORDAGEM FLUXO DE CAIXA DESCONTADO
106	12 ^a	custo operacional da lavra de lavra	custo operacional de lavra
107	4 ^a	encargos	encargos
108	3 ^a	Custos Operacionais	Custos Operacionais (US\$)
117	2 ^a	ABORDAGEM OPÇÕES REAIS	ABORDAGEM TEORIA DAS OPÇÕES REAIS
117	4 ^a	é a analisado	é analisado
117	5 ^a	de investir, da corporação	de investir, por parte da corporação
117	6 ^a	dos direitos de minerários	dos direitos minerários
117	13 ^a	EXCEL	EXCEL
118	03 ^a	inferiores	inferior
125	9 ^a	como setor mineral	Como o do setor mineral

3.3 Modelos de Decisões Gerenciais.....	64
3.3.1 Modelando a Incerteza como um Processo Estocástico.....	68
3.3.2 Opção de Espera	70
3.3.3 Opção de Suspensão Temporária e de Desativação.....	72
3.3.4 Opção de Expansão.....	75
3.3.5 Opção de Flexibilidade Operacional.....	76
3.3.6 A estratégia como opção Real.....	76
3.4 Métodos de Avaliação de Opções Reais.....	77
3.4.1 Direitos Contingenciais.....	78
3.4.2 Programação Dinâmica.....	80
3.4.3 Equivalência e Diferenças entre os Métodos de Ativos Contingentes e Programação Dinâmica.....	86
3.5 Opções Reais na Avaliação de Projetos de Mineração.....	90
3.5.1 Modelagem de Preços Futuros do <i>Commodities</i>	90
3.5.2 Modelo Geral de Avaliação da Mina.....	92
3.5.2.1 Valor da Mina Aberta.....	95
3.5.2.2 Valor da Mina Fechada.....	96
3.5.3 Decisões Estratégicas de Investimento nos Projetos de Mineração.....	97
3.5.4 Valor da Mina Após Estudo Detalhado de Viabilidade.....	99
3.5.5 Valor Presente do Projeto Empregando Opções Reais.....	100
3.5.6 Valor Presente do Projeto Empregando Fluxo de Caixa Descontado	101

CAPÍTULO 4 - ESTUDO DE CASO COM A ABORDAGEM FCD

4.1 Apresentação.....	103
4.2 Definição dos Dados de Projeto.....	104
4.2.1 Custo de Investimento.....	105
4.2.2 Custos de Operacionais.....	106
4.2.3 Capital de Giro.....	108
4.2.4 Preço de Venda do Concentrado.....	108
4.2.5 Taxa de Desconto.....	110
4.3 Caso Base.....	110
4.4 Análise de Sensibilidade.....	113

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DE CASO COM A ABORDAGEM OPÇÕES REAIS

5.1 Apresentação.....	117
5.2 Modelagem.....	118
5.3 Análise dos Resultados	123

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES

6.1 Considerações Gerais.....	126
6.2 Análise Comparativa entre a abordagem FCD e Opções Reais.....	127
6.3 Trabalhos Futuros.....	127

ANEXO A.....	129
ANEXO B.....	138
ANEXO C.....	154
LISTA DE REFERÊNCIAS.....	164

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Consumo do Cobre por Segmento Industrial.....	20
Figura 2.2 – Produção das minas/produção de refinado/consumo de refinado..	22
Figura 2.3 – Evolução da Produção Mundial de Concentrado de Cobre.....	24
Figura 2.4 – Distribuição continental da produção de cobre.....	25
Figura 2.5 – Fontes de Refino do Cobre Metálico.....	26
Figura 2.6 – Evolução da Capacidade de Refino.....	27
Figura 2.7 – Refino de Cobre.....	27
Figura 2.8 – Evolução da demanda de cobre nos continentes.....	29
Figura 2.9 – Consumo per capita de cobre: 1950 – 1998.....	29
Figura 2.10 – Intensidade do Uso de Cobre.....	30
Figura 2.11 – Variação do preço do cobre em função do nível dos estoques.....	32
Figura 2.12– Evolução do preço do cobre-1960/1998.....	32
Figura 2.13– Evolução do preço do cobre.....	33
Figura 2.14 – Fluxo de Negócios de Concentrado de Cobre.....	34
Figura 2.15 – Principais Exportadores e Importadores de Minério de Concentrado de Cobre.....	34
Figura 2.16 – Fluxo de Negócios Internacionais de Cobre Refinado.....	35
Figura 2.17– Principais Exportadores e Importadores de Cobre refinado.....	36
Figura 2.18 – Volatilidade do Preço do Cobre - 1989-2001.....	38
Figura 2.19 – Mercado de derivativos.....	39
Figura 2.20 – Convergência dos Preços à Vista e Futuros.....	42
Figura 2.21– Remuneração de uma opção de compra no vencimento.....	47
Figura 2.22 – Remuneração de uma opção de venda no vencimento.....	48

Figura 3.1 – Valor do Projeto Excluindo o Valor da Flexibilidade.....	53
Figura 3.2 – Valor do Projeto Incluindo o Valor da Flexibilidade.....	54
Figura 3.3 – Impacto da entrada de um novo concorrente no valor da oportunidade de investimentos.....	60
Figura 3.4 – Os dois lados da incerteza.....	65
Figura 3.5 – Comparação entre as decisões de investimento usando Teoria das Opções Reais e o VPL.....	72
Figura 3.6 - Fluxo de lucro da Empresa num período t.....	74
Figura 3.7 - Valor do Projeto com e sem Opção de Suspensão Temporária da Operação versus Custo de Operação.....	75
Figura 3.8 - Estratégias de Decisão de Investimento em Mineração.....	98
Figura 4.1 - Decisão Estratégica.....	111
Figura 4.2 – Análise gráfica do Caso Base.....	112
Figura 4.3 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre.....	114
Figura 4.4 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre.....	115
Figura 4.5 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre.....	115
Figura 5.1 – Histograma da Simulação de Monte Carlo – Sem Opção.....	122
Figura 5.2 –Histograma da Simulação de Monte Carlo – Com a Opção de Desenvolver.....	125

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Reserva e produção mundial de e concentrado de cobre.....	21
Tabela 2.2 – Recuperação de Sucata – 1996/2000.....	23
Tabela 2.3 – Mercados de futuros versus Mercado a Termo.....	44
Tabela 2.4 – Direitos e obrigações no mercado de opções.....	49
Tabela 2.5 – Relação de seu preço de exercício das opções para o preço do ativo objeto.....	49
Tabela 3.1– Analogia entre uma opção de compra e uma oportunidade de investimento.....	56
Tabela 3.2 – Classificação e Valor das opções.....	68
Tabela 4.1 – Parametragem das Reservas: Reservas x TC x TM.....	104
Tabela 4.2 – Cronograma Físico/ Financeiro.....	106
Tabela 4.3 – Custos variáveis de lavra.....	106
Tabela 4.4 – Custos fixos de lavra.....	107
Tabela 4.5 – Custos Variáveis da usina.....	107
Tabela 4.6 – Síntese dos Custos Operacionais.....	107
Tabela 4.7 – Custos Fixos da Usina.....	108
Tabela 4.8 – Parâmetros de dimensionamento do capital de giro.....	108
Tabela 4.9 – Parâmetros de Projeto do Caso Base.....	111
Tabela 4.10 –Sensibilidades do Preço de Venda do Concentrado e da Reservas e Teores.....	114
Tabela 5.1 –Resumo das informações empregadas na avaliação.....	119
Tabela 5.2 – Parâmetros de Estimativas dos Preços.....	121
Tabela 5.3 –Características do Projeto: Condicionado ao desenvolvimento após o 2 ^o ano.....	123

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARCH	Autoregressive conditional heterocedasticity
BA	Bahia
BNDES	Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social
CAPM	Capital Asset Price Model
CVRD	Companhia Vale do Rio Doce
DNPM	Departamento Nacional da Produção Mineral
EDP	Equação Diferencial Parcial
FCD	Fluxo de Caixa Descontado
GARCH	Generalized conditional heterocedasticity
LME	London Metal Exchange
MA	Mina desativada
MC	Mina fechada
MDF	Métodos das Diferenças Finitas
MGB	Movimento Geométrico Browniano
MO	Mina aberta
MRM	Movimento de Reversão à Média
PIB	Produto Interno Bruto
ROM	Run of Mine
SMC	Simulação de Monte Carlo
SXEW	Solvent Extraction and Eletrowinning
TC	Teor de Corte
TIR	Taxa Interna de Retorno
TM	Teor Médio
TOR	Teoria das Opções Reais
VPL	Valor Presente Líquido

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Tonelada
FV_t	Preço no mercado futuro no momento t
PV_t	Preço no mercado à vista no momento t
i	Taxa diária de juros
n	Número de dias a transcorrer até o vencimento do contrato futuro
CC	Custo de carregamento
C_t	Valor da Opção
T	Data de vencimento da Opção
S_T	Preço do ativo objeto no momento t
K	Preço de exercício da Opção
P_T	Valor da Opção de venda no momento t
I	Investimento inicial
Ω	Remuneração do Investimento
dV/V	Taxa de variação dos preços da reserva desenvolvida
α	Tendência
σ	Desvio padrão
dz	Incremento de Wiener
δ	Taxa de conveniência
μ	Taxa ajustada ao risco
$F(V_t)$	Valor da oportunidade de investimento
r	Taxa de Juros livre de risco
ρ	Taxa de desconto especificada de forma exógena ao modelo
π	Taxa do fluxo de lucros líquidos
F	Preços dos contratos futuros das commodities
S	Preço à vista da commodity
dr	Retorno instantâneo
Q	Volume das reservas da jazida
dq	Mudança instantânea no valor das reservas
φ	Estratégia operacional da empresa

M	Valor da mina
$S_1(Q, t)$	Preço de venda do metal o qual a mina é fechada temporariamente
$S_2(Q, t)$	Preço de venda do metal a qual a mina é reativada se estivesse previamente fechada temporariamente
$S_0(Q, t)$	Preço de venda de venda do metal o qual a mina é desativada caso estivesse temporariamente fechada
CF	Fluxo de caixa periódico da mina
β	Custo de produção unitário
τ	Alíquota do imposto
r	Taxa de royalty
k_1	Custo de fechamento e manutenção da mina temporariamente
k_2	Custo de abandono
$K_{C \rightarrow A}$	Custos de desativação
$K_{C \rightarrow A}$	Custos de reabertura
F_u	Realizar estudo detalhado de viabilidade
I_c	Investir no projeto sem um estudo detalhado de viabilidade
W_c	Esperar uma data julgada apropriada para tomar a decisão
R_c	Rejeitar o projeto
VI_c	Diferença entre o valor da mina aberta e o capital investido sob condições de pseudocerteza
VF_u	Valor da mina com a opção do estudo detalhado de viabilidade
VI_u	Valor da mina com investimento sob a opção de incerteza
VW_u	Valor da mina com a espera com a opção de incerteza
VR_u	Valor de rejeição da mina sob as condições de incerteza
FC_U	Custo do estudo de viabilidade
CI_U	Capital do investimento sob incerteza
Kwh	Quilo Watt hora
V	Valor líquido da tonelada de concentrado
P	Preço de venda da tonelada do metal
R	Taxa de refino por tonelada de metal pago

T	Teor em metal do concentrado
du	Dedução unitária
S	Taxas de fusão por tonelada do concentrado
C_{transp}	Custo de transporte da mina até a usina metalúrgica expresso por toneladas de concentrado
C_{int}	Custo de internação por tonelada de concentrado

CAPÍTULO 1

MOTIVAÇÃO, OBJETIVOS E ESTADO DA ARTE

1.1 - Introdução

O processo de avaliação econômica dos projetos de mineração envolvendo decisões de investimento é afetado por incertezas econômicas e por incertezas técnicas, assim como pelas flexibilidades gerenciais.

As incertezas econômicas estão relacionadas a fatores externos ao projeto, como as oscilações do preço do concentrado do minério e dos custos entre outros. As incertezas técnicas estão associadas aos fatores internos ao projeto, como a incerteza quanto ao real volume das reservas de minério e ao desempenho do projeto, em razão da utilização de uma rota tecnológica, que é única para cada unidade de beneficiamento.

As flexibilidades gerenciais embutidas nos projetos possibilitam ao gerente um grau de liberdade para tomada de decisões, como as decisões de investimento (escolha do tempo mais adequado, escala, expansão, etc), de parada temporária, e de abandono. Essas últimas são denominadas de Opções Reais. Ignorar qualquer desses fatores na análise econômica de projetos pode significar tanto uma subavaliação significativa de uma jazida, como levar a erros irreversíveis nas tomadas de decisões.

O objetivo primordial das empresas é a criação de valor para os seus acionistas. O sucesso desse objetivo depende fundamentalmente da análise de investimentos dos novos projetos, que precede a tomada de decisões. Os estudos de viabilidade técnica e econômica dos investimentos deverão contemplar questões de risco, retorno, incerteza e orçamento de capital.

Nas últimas décadas, têm coexistido duas metodologias para a alocação de recursos nas empresas: a Orçamentação de Capital e o Planejamento Estratégico. Myers (1984), refere-se a esses dois sistemas, como duas culturas olhando para o

mesmo problema. Essas técnicas têm, no entanto, levado a posições antagônicas, já que a técnica tradicional do Fluxo de Caixa Descontado, usada na orçamentação de capital, não considera a criação de capacidades como, por exemplo, a criação de vantagens competitivas e outros bens intangíveis, necessários para o crescimento em longo prazo de uma empresa, ou mesmo a sua simples sobrevivência num cenário competitivo e em constante transformação. A moderna teoria de orçamentação de capital, que considera as incertezas e as opções gerenciais de um projeto, nesse sentido vem diminuir a discrepância existente entre essas duas abordagens para a alocação de recursos.

A análise de investimentos consiste no levantamento e avaliação de todos os benefícios e impactos de um projeto para a empresa. É a partir dessa análise que os gestores das empresas tomarão as decisões de, em quais projetos investir, qual o orçamento de capital que deverá ser destinado a cada projeto e ainda poderão contar com uma previsão do resultado de cada um dos projetos.

As corporações industriais e as instituições financeiras usam em geral, os métodos tradicionais de análise de projetos de investimentos, Valor Presente Líquido (VPL), da Taxa Interna de Retorno (TIR) e *Payback* (período de recuperação do capital investido) que são regras de decisão do FCD. As empresas de mineração não são exceção, e, portanto normalmente empregam estas metodologias.

Tudo o mais constante, projetos com VPL positivos ou TIR superiores à taxa de desconto seriam, a princípio, melhores candidatos aos investimentos em novos projetos e melhores candidatos à concessão de financiamentos pelas instituições financeiras, do que projetos com VPL negativos ou TIR inferiores à taxa de desconto.

De acordo com Brealey e Myers (1996), as regras do VPL e da TIR são amplamente difundidas e as mais utilizadas no campo das finanças empresariais. Assim a preferência por esses métodos é compreensível.

Otimizar uma decisão quando não existe incerteza é relativamente simples, basta calcular o VPL de vários projetos de investimentos e escolher aquele que

oferece maior retorno. Na prática, porém, as decisões são quase sempre cercadas de incerteza.

Ao longo das últimas décadas, a eficiência das regras de decisão tradicionais (VPL e TIR) baseadas no FDC, foram fortemente questionadas; acadêmicos e gestores mostraram-se insatisfeitos por essas não conseguirem avaliar, corretamente, todas as fontes de valor de um investimento.

A partir de uma analogia com as opções financeiras, uma nova teoria de avaliação de projetos de investimento foi desenvolvida. Essa nova abordagem foi chamada em 1977 por MYERS de Teoria das Opções Reais (TOR) e, mais recentemente, de Análise de Investimento sob Incerteza.

A Teoria das Opções Reais permite considerar na análise de projetos, fatores como: flexibilidade, oportunidades de crescimento, opção de abandono do investimento, contração, decisões de investimentos seqüenciais e, até mesmo, a entrada de concorrentes em um mercado.

Projetos que poderiam ser descartados por que apresentavam VPL negativo podem ser considerados viáveis sob a justificativa de conterem valiosas opções embutidas.

A área de recursos minerais é um campo fértil para a aplicação da Teoria de Opções Reais, pois projetos de mineração são repletos de opções e fontes de incertezas.

1.2- Objetivos

Os principais objetivos dessa dissertação de mestrado são:

- Informar o estado da arte referente aos conceitos, premissas, métodos, procedimentos e ferramentas na avaliação econômica de projetos de mineração, envolvendo decisões de investimento, sob condições de incerteza (teoria de opções reais);

- Avaliar um projeto de investimento em uma mina de cobre, empregando a metodologia do Fluxo de Caixa Descontado, com as regras do VPL e TIR, e com emprego da Teoria das Opções Reais;
- Comparar os resultados da avaliação com o emprego do Valor Presente Líquido e com o emprego da Teoria de Opções Reais.

1.3. - Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2, é feita uma caracterização do mercado mundial de cobre. Suas estruturas físicas e financeiras são discutidas, sendo abordados os mecanismos de gerenciamento de risco na indústria mineral.

No Capítulo 3 os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento do tema central do trabalho são abordados. A teoria das opções reais, utilizada como ferramenta para avaliação de ativos reais é delineada. Os métodos de avaliação de opções dos Direitos Contingenciais e Programação Dinâmica são apresentados. Os recursos minerais serão modelados de acordo com o proposto BRENNAN e SCWARTZ (1985) e estendido por JACOBY e LAUGTON (1991).

No Capítulo 4 um estudo de caso será abordado utilizando o método do Fluxo de Caixa Descontado, com as regras de decisão do VPL e TIR, sensibilidades em relação às variáveis do problema são realizadas.

No Capítulo 5 o estudo de caso proposto no Capítulo 4, é abordado com a Teoria das Opções Reais, considerações sobre valor da opção de investir na jazida e valor da opção de espera são calculados.

No Capítulo 6 é feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5, considerações finais, conclusões e indicações de possíveis trabalhos futuros são também apresentados. Nos Anexos A, B e C são analisados os conceitos e formulações matemáticas necessários para subsidiar o entendimento do texto.

1.4. As Limitações dos Métodos Tradicionais na Avaliação de Projetos de Investimentos

A partir da segunda metade dos anos oitenta, ocorreu um acirramento do debate em torno dos métodos de avaliação de projetos de investimentos. Segundo AGMON (1993), tal fato teve como motivação duas grandes razões:

- por um lado, a crescente insatisfação pelo modo como os métodos tradicionais avaliam os investimentos;
- por outro, o desenvolvimento das técnicas de avaliação de opções, com grande capacidade de aplicação à avaliação de projetos.

Segundo MORCK, SCHWARTZ e STANGELAND (1989), as técnicas clássicas de avaliação de projetos são baseadas no pressuposto de que os fluxos de caixa seguem um padrão rígido e que podem ser previstos até um futuro distante. A incerteza ligada ao projeto, bem como as reações dos gestores à mudança das condições que o envolvem são tratadas superficialmente, aplicado-se taxas de atualização ajustadas ao risco e criando alguns cenários determinísticos. Portanto, em situações em que a incerteza e as decisões dos gestores, ao longo da vida do projeto, são importantes, as técnicas tradicionais podem levar a decisões equivocadas.

BREALEY e MYERS (1996) consideraram que o VPL trata os investimentos como se fossem “caixas pretas”, as quais produziram fluxos de caixas sem qualquer intervenção do gestor. Desta forma, a técnica do VPL faz com que o gestor assuma um comportamento passivo, em face de uma determinada estratégia operacional. Assim, o gestor tomaria decisões durante a vida do projeto com intuito de ajustar-se a estratégia previamente estabelecida.

Segundo AMRAM e KULATILAKA (1999), as técnicas tradicionais só funcionam corretamente quando não existem opções associadas ao projeto, ou se existirem, não se verifica qualquer tipo de incerteza.

PINDYCK (1991), considera que fundamentalmente o problema dos métodos tradicionais advém do fato de esses ignorarem duas importantes características, presentes em quase todas as oportunidades de investimento. Em primeiro lugar, os investimentos são, em muitos casos, irreversíveis¹ (i.e. eles são essencialmente *sunk cost* e por isso não poderão ser recuperados). Em segundo lugar, os investimentos poderão ser adiados, o que permite à empresa esperar por nova informação (acerca de preços, custos ou outras condições de mercado) antes de os realizar (o VPL pressupõe que o projeto é do tipo agora ou nunca). Para este autor, quer a regra básica do VPL (teoricamente dever-se-á investir somente se, o VPL de um projeto for positivo), quer o próprio modelo, está errado sempre que os investimentos forem irreversíveis e a decisão de investir pode ser adiada. PINDYCK (1991) e DIXIT e PINDYCK (1995), argumentam que a capacidade de adiar um investimento poderá afetar fortemente a decisão de investir.

TRIGEORGIS e MASON (1987), TRIGEORGIS (1988) e TRIGEORGIS (1996b), defendem que o VPL não consegue capturar, e, portanto avaliar, todas as fontes de valor associadas a um determinado projeto. Para estes autores, há dois aspectos, em particular, que o VPL ignora:

- a flexibilidade operacional, que permite ao gestor tomar decisões sobre o projeto em momentos futuros do tempo. (À medida que o projeto se vai desenrolando, e à medida que as incertezas se vão dissipando, o gestor tem a capacidade de tomar decisões que afetem o projeto, no sentido de maximizar ganhos ou reduzir perdas);
- o valor estratégico resultante das interações com futuros investimentos.

Para MYERS (1987), o VPL encerra um conjunto de dificuldades, sendo que a mais difícil de ser ultrapassada relaciona-se com as ligações que se pode estabelecer entre os investimentos atuais e as oportunidades futuras. Esta dificuldade resulta do fato de essas oportunidades serem claramente opções e o VPL não ter qualquer capacidade para as avaliar.

¹ Um projeto é irreversível se uma parte significativa ou a totalidade do investimento for irrecuperável.

KESTER (1993) salienta que os métodos tradicionais tratam os projetos como oportunidades de investimento isoladas, sobre as quais deve ser tomada, imediatamente, uma decisão do tipo aceitação/rejeição. Defende o autor que, na prática, a maior parte dos projetos não são realizações isoladas, antes fazem parte de um programa de investimentos de longo prazo, os quais contém, em si, uma maior ou menor flexibilidade operacional.

Para KULATILAKA e MARCUS (1992), projetos que contenham alguma flexibilidade operacional são sistematicamente sub-avaliados pelos métodos tradicionais.

Ao incorporar o valor da flexibilidade, defende KEMNA (1993), o valor do projeto poderá ser incrementado, o que aumentará a sua probabilidade de aceitação. Assim, ao não incorporar este valor, o VPL subavaliará os projetos de investimento e contribuirá para a rejeição de projetos com valor.

Para MCGRATH (1997), o VPL encerra limitações quando se avaliam investimentos que exijam elevadas necessidades de capital e sejam realizados em condições de grande incerteza, como é o caso de investimentos de capital em projetos de mineração.

Para SMIT e ANKUM (1993), os métodos tradicionais apresentam graves inconvenientes sempre que a informação acerca de futuras decisões de investimento ainda é desconhecida, (tal como ocorre com uma mineradora, ao dispor de uma nova jazida). Os autores defendem que a teoria das opções poderá ser utilizada para avaliar esses tipos de projetos.

Segundo KESTER (1984), sempre que um projeto de investimento puder ser adiado, modificado pela empresa (depois de implementado) ou que crie novas oportunidades de investimento deve ser avaliado recorrendo à teoria das opções.

Na presença de incertezas sobre o futuro decorrentes do mercado globalizado e competitivo, uma empresa com uma oportunidade de investimento irreversível,

carrega uma opção: ela tem o direito – mas não a obrigação – de comprar um ativo (o projeto) no futuro, a um preço de exercício (o investimento).

Quando a empresa investe, ela exerce essa opção de investir. Entretanto a opção de investir tem um valor que deve ser contabilizado como um custo de oportunidade no momento do investimento. Esse valor (preço de exercício) pode ser bastante elevado e as regras de investimento o ignoram - VPL e TIR conforme apontaram os diversos autores citados.

1.5. O Estado da Arte

O tema desta dissertação está relacionado à teoria de avaliação de opções, uma vez que a intenção é avaliar um projeto de investimento de uma mina, considerando que, a sua execução em cada uma das etapas do projeto (pesquisa mineral, lavra e beneficiamento) são opções e não obrigações. Assim, é importante discutir a Teoria das Opções Financeiras antes de entrar na avaliação de um projeto de mineração com o emprego de Opções Reais. Nesta seção introdutória, serão apresentados os principais trabalhos desenvolvidos nas áreas de opções financeiras e de opções reais na avaliação de projetos de investimento em recursos minerais.

1.5.1. Teoria das Opções Financeiras

BLACK e SCHOLLES (1973), publicaram um trabalho seminal, que propunha uma metodologia capaz de avaliar, de forma satisfatória, opções financeiras. A fórmula foi proposta para o cálculo do valor teórico de uma opção de compra² (*call*) do tipo europeu, exercida sobre um ativo que não paga nenhuma remuneração ou dividendo e que é livremente negociado no mercado a vista, sendo seu preço determinado pela oferta e demanda. Sendo considerado um mercado eficiente e perfeito.

² O conceito de opção de compra é apresentado e discutido no capítulo 2, seção 2.3.4.

Partindo da possibilidade de criação de uma posição coberta (*hedge*³ *position*) através de uma posição curta⁴ em opções de compra e uma posição longa⁵ numa determinada quantidade de ativo subjacente é, pelo menos teoricamente, possível eliminar o risco, de tal forma que alterações no preço do ativo subjacente serão compensadas por alterações no valor da opção.

Obviamente, que isto se verifica para curtíssimos períodos de tempo, o que implica em que, conforme o tempo for passando e o preço da ação for se modificando a posição de *hedge* deverá ser continuamente ajustada. Como desta forma o risco é eliminado, essa carteira deverá ter como remuneração, a taxa de juro isenta de risco (de curto prazo), caso contrário haverá possibilidade de arbitragem⁶.

Desde o artigo de BLACK & SCHOLES, muitos foram publicados sobre a avaliação de opções entre os quais: MERTON (1973), COX e ROSS (1976), BRENNAN e SCHWARTZ (1977), PARKINSON (1977), MARGRABRE (1978), COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979), STULZ (1982), JOHNSON (1987), CARR (1988), entre muitos outros.

Como foi salientado por TRIGEORGIS (1993a), a avaliação de opções foi significativamente facilitada pelo reconhecimento por parte de COX e ROSS (1976), também RUBINSTEIN e LELAND (1981), de que uma opção pode ser replicada através da criação de uma carteira de ativos transacionados no mercado, isto é, criando uma opção sintética.

Assim, a avaliação de opções financeiras parte da possibilidade de criação de uma carteira de ativos (dinamicamente gerida) a qual, em todos os momentos, deverá ter um comportamento igual ao da opção. Por exemplo, uma opção de compra pode ser replicada através da combinação de uma posição de compra numa determinada quantidade de ativo subjacente, ou numa carteira de ativos com eles perfeitamente correlacionados, e a contratação de um empréstimo à taxa de juro sem risco.

³ O *Hedge* pode ser definido como uma operação financeira que tem por objetivo reduzir o risco futuro de determinada posição de caixa, estoque ou até mesmo outra operação.

⁴ É a posição do comprador da opção de compra.

⁵ É a posição do vendedor da opção de compra.

⁶ O conceito de arbitragem é apresentado no Capítulo 3, seção 3.2.1.

Dado que esta carteira e a opção terão exatamente os mesmos resultados futuros, ambas deverão ter o mesmo preço, caso contrário haverá possibilidade de arbitragem. Assim, pode-se dizer que o valor da opção corresponderá ao custo de construir uma carteira equivalente, que replique, as futuras rentabilidades da opção.

Em trabalho publicado MERTON (1973), alguns conceitos apresentados por BLACK e SCHOLLES (1973), foram generalizados. Por exemplo, uma opção de compra Européia, cujo ativo objeto pagava dividendos foi avaliada. Foi mostrado que uma opção de compra Americana, sobre um ativo objeto que não paga dividendos, tem o mesmo valor que a opção Européia de compra, sobre o mesmo ativo objeto, ou seja, não é ótimo exercer antecipadamente uma opção de compra Americana quando o ativo objeto não paga dividendos.

Segundo COX e ROSS (1976), pela teoria da arbitragem, uma opção Européia pode ser avaliada usando a expectativa da remuneração terminal da opção para uma dada medida de probabilidade neutra ao risco. Essa conclusão foi utilizada por BOYLE (1977), para avaliar uma opção Européia usando Simulação Monte Carlo⁷ (SMC).

As principais vantagens de Monte Carlo, sobre outros métodos numéricos⁸, advém da possibilidade de calcular o erro da estimativa, o qual é independente da dimensão do problema. Mas, a principal desvantagem, é que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da amostra, ou seja, melhores estimativas requerem maiores amostras e conseqüentemente um maior esforço computacional.

Até o final da década de oitenta, poucos trabalhos utilizaram SMC para avaliar opções, já que métodos numéricos como árvore binomial proposto por COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979), e métodos de diferenças finitas, utilizados por BRENNAN e SCHWARTZ (1977), mostravam-se superiores seja em precisão, seja em eficiência computacional.

⁷ A Simulação de Monte Carlo é apresentada no Anexo B.

⁸ Os métodos numéricos empregados na solução das equações diferenciais obtidas na precificação de opções são analisados no Anexo C.

A SMC voltou ao cenário de avaliação de opção, quando foi proposto um modelo por HULL e WHITE (1988), para avaliação de opção com volatilidade⁹ estocástica¹⁰. Neste modelo, o preço do ativo e sua volatilidade são estocásticos, tornando a sua formulação analítica bastante complexa, o que torna SMC mais atrativo. Técnicas de redução de variância¹¹ foram utilizadas e conduziram a resultados relativamente precisos.

A década de noventa pode ser considerada como o período de consolidação da SMC como ferramenta para avaliação de opções. Vários trabalhos surgiram mostrando como avaliar opções Europeias mais complexas do que simples opções de compra e venda. Outras técnicas de redução de variância foram utilizadas, e mostraram-se bastante úteis em problemas financeiros. Uma ótima revisão dos principais trabalhos é feita por BOYLE, BROADIE e GLASSERMAN (1997).

A maioria dos trabalhos sobre SMC em finanças avaliava opções Europeias, ou seja, opções que somente eram exercidas no vencimento. Opções americanas, que podem ser exercidas em qualquer momento até o vencimento, possuem uma característica *backward*¹², que o torna mais difícil de ser avaliado usando Monte Carlo. A característica *backward* está ligada a avaliação da política ótima de investimento.

O primeiro trabalho a usar SMC para avaliação de opções Americanas, foi o publicado por TILLEY (1993). Neste trabalho o autor usou um algoritmo que aglomerava o espaço de estados do preço do ativo objeto em cada período de tempo em grupos preestabelecidos. Obtidos os grupos, calculava-se a probabilidade de transição de cada grupo em um período, para cada um dos grupos no período imediatamente a seguir. Assim, uma árvore simulada era obtida e um algoritmo de programação dinâmica estocástica era utilizado para avaliar em cada nó a equação de Bellman¹³, ou seja, verificar em cada nó se o melhor é exercer a opção

⁹ O conceito de volatilidade é um conceito fundamental no desenvolvimento desta dissertação a metodologia para seu cálculo é apresentada na primeira seção Anexo B.

¹⁰ Os conceito de cálculos estocástico são apresentados no anexo a

¹¹ A técnica de redução da variância é apresentada no Anexo B.

¹³ A equação de Bellman está apresentada no Anexo B .

imediatamente ou esperar até o próximo período. O principal problema com este algoritmo era sua dependência da dimensão do problema.

Uma mudança no algoritmo, citado no parágrafo anterior, foi sugerida por BARRAQUAND e MARTINEAU (1994). Ao invés de aglomerar o espaço de estados do preço do ativo objeto, o espaço de estados da remuneração da opção em cada período de tempo é que seria aglomerado. Este algoritmo ficou conhecido como Estratificação do Espaço de Estado da Remuneração da Opção. Com esta mudança, foi possível eliminar a dependência que o algoritmo proposto por TILLEY (1993), tinha com a dimensão da opção, mas alguns problemas ainda permaneciam, como o número ideal de grupos a ser utilizado em cada período de tempo.

Nos últimos anos, novos trabalhos apareceram na literatura de finanças sobre avaliação de opções Americanas usando SMC. Em trabalho apresentado por BOYLE, BROADIE e GLASSERMAN (1997), foi utilizado um modelo de árvore simulada para o preço do ativo objeto. Foi mostrado também que não existem estimadores não-tendenciosos para avaliar uma opção Americana usando SMC. Para resolver este problema, foram propostos dois estimadores consistentes que formam um intervalo de confiança para o preço da opção.

Um algoritmo composto por duas fases foi proposto por GARCIA (1999). Na primeira fase, a política ótima de investimento é estimada através de um problema de otimização. Na segunda fase, o valor da opção Americana é estimado utilizando SMC, já que o momento ótimo de investimento já foi estimado na fase anterior. Assim como proposto por BROADIE e GLASSERMAN (1997) um intervalo de confiança para o preço da opção foi formado por dois estimadores consistentes.

Uma outra maneira de avaliar uma opção Americana usando SMC foi apresentada por IBÁÑEZ e ZAPATERO (1999). Neste trabalho, foi utilizado um algoritmo computacionalmente eficiente, que calculava a política ótima de investimento, considerando-a como um ponto fixo em algoritmo de programação dinâmica.

1.5.2 -Teoria das Opções Reais¹⁴

A Teoria das Opções Reais é uma metodologia para avaliação de ativos reais, como, por exemplo, projetos de investimento, que leva em conta as flexibilidades operacionais e gerenciais ao longo da vida útil do projeto. Sua característica dinâmica, diferentemente de técnicas tradicionais tais como o VPL, conduz a resultados mais realistas. Os primeiros trabalhos a considerarem oportunidade de investimento como uma opção e não uma obrigação, surgiram no final da década de setenta.

Num artigo precursor, MYERS (1977), defendeu que uma oportunidade de investimento deve ser vista como uma opção.

TOURINHO (1979), calculou o valor de uma reserva de recurso natural, dado que o preço do recurso era estocástico, o recurso foi avaliado considerando-se que a reserva era uma opção perpétua sobre os recursos extraídos.

Posteriormente, KESTER (1984), reforça a idéia de que existe uma estreita semelhança entre uma oportunidade de investimento e uma opção de compra (*call option*) sobre um ativo financeiro. Desta forma, por analogia, o capital a investir no projeto representa o preço de exercício da opção, o valor atual dos fluxos de caixa, resultantes do projeto corresponde ao valor do ativo subjacente e o tempo disponível antes da oportunidade desaparecer representa o tempo para a maturidade.

BRENNAN e SCWARTZ (1985), publicaram um trabalho pioneiro no qual introduziram uma modelagem a partir da técnica de opções reais, onde modelaram o efeito das decisões gerenciais sobre os estudos de viabilidade em projetos de investimento em recursos naturais.

Muitos dos trabalhos sobre Opções Reais, dentre os quais podemos destacar, PADDOCK, SIEGEL e SMITH (1988) e BRENNAN (1991), avaliavam projetos de investimento na indústria do petróleo.

¹⁴ A teoria de opções reais é delineada ao longo do capítulo 3.

Os projetos que podem ter a decisão de investimento prorrogada, a fim de se beneficiar de informações disponíveis no futuro, possuem um custo de oportunidade de investimento, que deve ser levado em consideração. A não inclusão deste custo de oportunidade, no processo de avaliação, pode levar a decisões de investimento incorretas. Em MCDONALD e SIEGEL (1986), a opção de espera é considerada análoga a uma opção Americana de compra, onde o ativo objeto é o valor presente do projeto e o preço de exercício é o custo de investimento.

Segundo a teoria microeconômica, uma empresa somente deverá operar quando seus custos variáveis forem menores do que a sua receita operacional. Esta regra simples tem implicações importantes sobre a decisão inicial do investimento de se implantar uma mina, por exemplo. Em JACOBY e LAUGTON (1991), o valor de um projeto com esta flexibilidade operacional é calculado. A opção de abandono temporário em cada período de decisão (ou opção de *shutdown*) é análoga a uma opção Européia de compra, na qual o ativo objeto é o fluxo de caixa produzido pela receita operacional e o preço de exercício é o custo variável de produção. O valor do projeto de investimento é dado pelo somatório do valor de todas as opções ao longo da vida útil do projeto.

A opção de abandonar permanentemente o projeto em troca do seu valor residual foi avaliada em MAJD e MYERS (1990). Muitas vezes, as decisões de investimento são feitas seqüencialmente e em uma ordem determinada. Um modelo em que uma empresa investe continuamente até que o projeto esteja completo foi desenvolvido em MAJD e PINDYCK (1987).

Outras vezes, projetos de investimento apresentam mais de uma opção, e estas podem se interagir destruindo ou criando valor. Estas interações foram estudadas em TRIGEORGIS (1993).

Uma revisão geral, de caráter didático, de todos os desenvolvimentos na Teoria das Opções Reais em tempo contínuo é feita em DIXIT e PINDYCK (1995). Já modelos em tempo discreto são apresentados em TRIGEORGIS (1995). Outros artigos sobre Opções Reais, com desenvolvimentos teóricos e práticos são dados em BRENNAN e TRIGEORGIS (1999) e LUND e OKSENDAL (1991).

1.6 -Avaliação de Ativos e Riscos na Indústria Mineral

A indústria mineral apresenta características peculiares que a distingue das demais atividades econômicas. A mineração envolve o aproveitamento de recursos finitos e não renováveis de grande rigidez locacional e cujo desenvolvimento requer longos períodos de maturação, exigindo em grande parte das vezes, elevados investimentos de infra-estrutura.

Os métodos de avaliação econômica constituem os instrumentos para inferir a rentabilidade dos projetos minerais, porém não asseguram quaisquer garantias quanto ao sucesso comercial do projeto. Os depósitos minerais precisam ser descobertos e seu real valor comercial somente poderá ser computado, integralmente, após o seu total aproveitamento.

A implantação de uma mina requer estudos envolvendo atividades seqüenciais relativas à prospecção regional, pesquisa de detalhe, avaliação do depósito e estudos de viabilidade técnico-econômica. O lapso de tempo decorrido desde o início dos trabalhos de prospecção até a produção comercial do minério pode variar entre cinco e vinte anos.

A mineração de minerais metálicos destaca as características mais distintivas da indústria extrativa. O risco do empreendimento, o volume do capital despendido, a complexidade operacional, o longo período para desenvolvimento do projeto, a volatilidade dos preços dos minérios, a instabilidade da demanda, dentre outros aspectos, são fatores amplificados na mineração dos metálicos.

O desenvolvimento da mina, a construção da usina de beneficiamento e a instalação da infra-estrutura demandam o maior volume de investimentos. Os trabalhos de prospecção e os estudos de viabilidade exigem de acordo com a cultura do setor, cerca de 5 a 10% dos recursos do projeto, mesmo assim constituem investimento de risco, pois não existem garantias da descoberta de depósitos minerais economicamente lavráveis. Mesmo considerando-se que a maior parte dos investimentos em mineração é alocada nas fases de menor risco, comparando com as outras indústrias, o risco global dos empreendimentos mineiros é sensivelmente

maior. Tal situação decorre do fato de que na atividade de mineração a fase de prospecção de uma nova jazida, possui um grau de incerteza substancialmente superior do que a “prospecção” de novos mercados para a implantação de uma nova unidade industrial, por exemplo.

Ao avaliar um novo projeto de mineração os investidores são confrontados com incertezas técnicas e econômicas.

A incerteza econômica é correlacionada aos movimentos gerais da economia, que estão sujeitos a acontecimentos aleatórios, tais como recessão e aquecimento da economia, guerra e paz, descoberta de novas tecnologias, etc. Quanto mais distante for o futuro que se tente prever, mais incerta é essa previsão. Uma característica importante para a decisão de investimento de uma empresa é que a realização de um projeto, por si só, não reduz e nem aumenta esse tipo de incerteza. Um exemplo é a incerteza nos preços futuros do cobre, que dependem de fatores exógenos ao projeto ~~de~~ implantação de uma mina. Assim a incerteza econômica é exógena ao processo de decisão dos investidores. Esse tipo de incerteza, que não pode ser totalmente diversificável, afeta negativamente os investimentos, pois quanto maior a incerteza mais as empresas irão esperar antes de investirem, ou vão exigir preços muito elevados para investirem em produção. Muitos projetos com $VPL > 0$ serão postergados, e só serão realizados projetos com $VPL \gg 0$.

Sinteticamente pode-se relacionar as seguintes incertezas exógenas, comuns a todos os projetos de mineração:

- Como se comportará no futuro a demanda pelo minério?
- Qual o risco de ocorrer superoferta do minério que será produzido?
- Qual o nível de competitividade nacional e internacional do novo projeto?
- Como se comportará no futuro o preço do minério?
- Quais os riscos políticos e sociais envolvidos?

A Incerteza técnica é um tipo de incerteza que não é correlacionada aos movimentos macroeconômicos. Exemplos de incertezas técnicas são a tonelagem e os teores de uma jazida. Uma característica fundamental da incerteza técnica é que a

realização de investimentos reduz esse tipo de incerteza (as sondagens são um exemplo emblemático). A incerteza técnica incentiva o investimento passo a passo, no sentido da redução da variância dessa incerteza. É como se o investimento tivesse um benefício adicional (quantificável pela teoria das opções) de redução da incerteza técnica. Esse benefício adicional é chamado de valor-sombra, pois é um valor que não aparece diretamente no fluxo de caixa (o VPL não “enxerga” esse valor, outra limitação importante desse método).

A incerteza quanto à descoberta dos depósitos minerais e as características do mercado e dos preços dos bens minerais, atribuem riscos técnicos e econômicos significativamente, superiores àqueles relacionadas às demais indústrias.

Os investidores, em geral, tomam as decisões baseando-se em suposições, que são projetadas a partir da realidade vivida no momento da decisão. Desta forma, até os mais experientes analistas de projetos de investimentos podem cometer sérios erros de avaliação.

A complexidade e o número de variáveis de risco interferentes na mineração dificultam sobremaneira a decisão do investidor. Na tomada de decisão sobre investimentos em mineração devem ser consideradas fundamentalmente as seguintes condições:

- a mineração de metálicos é dependente dos preços internacionais do minério;
- a mineração é uma atividade intensiva em capital;
- a demanda pelos minérios é variável;
- as *commodities* minerais têm preço instável e de difícil previsão.

Assumindo-se que o preço do minério constitui o fator de maior relevância na decisão dos investimentos, a competitividade e a margem de lucro dos produtores são fundamentalmente dependentes do tipo de jazida, do tipo de minério, das condições de infra-estrutura e dos custos operacionais envolvidos. Jazidas de padrão internacionais apropriadas para lavra a céu-aberto, com grande tonelagem, elevado teor médio e localização geográfica privilegiada, constituem a maior aspiração das empresas de mineração

CAPÍTULO 2

O MERCADO DO COBRE E RISCOS NA INDÚSTRIA MINERAL

No presente capítulo é feita a análise das variáveis econômicas que são relevantes no mercado do cobre. Nas seções 2.1 e 2.2 são avaliadas as variáveis intervenientes no mercado desta *commodity*, que apresentam relevância na formação, e nos movimentos observados nos preços. Ainda na seção 2.2 é elaborada uma caracterização do mercado mundial do cobre, e por último são comentadas as perspectivas para os novos projetos programados para o Brasil.

Na seção 2.3 são abordados os fundamentos do gerenciamento dos riscos financeiros, relativos à operação das corporações que atuam na indústria mineral. São analisadas as operações de hedge, com o emprego dos instrumentos financeiros adequados, que são os derivativos.

2.1 – Introdução

A análise do comportamento do mercado de uma *commodity* como o cobre, envolve o estudo da demanda, oferta, substituições, preços, estoques e negócios. Essa análise requer também, a avaliação das interações entre esses fatores, para a determinação das quantidades ofertadas e demandas, e conseqüentemente o preço de equilíbrio do mercado. Os fundamentos econômicos para a realização dessa análise são baseados na teoria microeconômica.

A análise da demanda das *commodities* minerais, requer a avaliação da demanda derivada dos insumos industriais, e a substituição e reciclagem entre esses insumos. A análise da oferta das *commodities* minerais, é baseada na teoria da produção envolvendo minas e indústrias. Essa teoria descreve a relação entre insumo e produto e um balanço detalhado do mercado. A análise do comércio de

commodities é baseada na teoria das vantagens comparativas, no regime tributário e na política de subsídios. Finalmente, a total interação entre esses fatores depende das estruturas subjacentes do mercado.

A compreensão das variáveis de mercado, como instrumento de predição do seu comportamento em relação ao preço, que é em última instância, o componente chave na avaliação de projetos de investimento, requer um grande esforço cooperativo e não assegura total imunidade aos riscos decorrentes de suas variações.

2.2 – O Mercado do Cobre

2.2.1- Características, Propriedades e Usos

O minério de cobre encontra-se presente na natureza sob duas formas: o oxidado e de menor teor; e o sulfetado que possui teor mais elevado.

Após a lavra, o minério de cobre é beneficiado, obtendo-se primeiramente o concentrado. Em seguida, ele passa por um processo metalúrgico, que pode ser o pirometalúrgico, aplicável a minérios sulfetados, ou o hidrometalúrgico, especificamente o SX-EW - (*Solvent Extraction and Eletrowinning*), extração por solvente e eletrodeposição - de grande economicidade no aproveitamento de minérios oxidados de baixo teor. Além desses, um novo processo biológico denominado biolixiviação (*bioleaching*), de baixo custo e que utiliza bactérias para a concentração do metal, vem apresentando resultados satisfatórios. Posteriormente, o cobre é refinado por processo de eletrólise, resultando nos catodos de alta pureza, que serão fundidos gerando os produtos de cobre.

Outra forma importante na obtenção de cobre é a reciclagem de produtos descartados e obsoletos, que vem contribuindo significativamente para o suprimento do metal.

O cobre é um dos metais mais importantes na indústria de transformação. Devido as suas propriedades de alta ductilidade, maleabilidade, condutividade

térmica e elétrica e sua resistência à corrosão, o cobre tornou-se o terceiro metal mais empregado na indústria de transformação, superado apenas pelo ferro e pelo alumínio, primeiro e segundo respectivamente.

De modo geral, pode-se afirmar que a infra-estrutura da sociedade contemporânea é, em grande parte, baseada no emprego de metais, dentre os quais o cobre, que genericamente apresenta os seguintes usos principais:

- condutor de calor e eletricidade;
- comunicações;
- transporte de água e gás;
- construção;
- indústria automobilística;
- iluminação;
- usos gerais na indústria.

Os usos elétricos do cobre incluindo transmissão e geração de energia, produção de fios e cabos, equipamentos de telecomunicações e produtos elétricos e eletrônicos contabilizam cerca de 75% do uso total do cobre. A construção civil é o maior mercado individual do cobre, sendo seguida pela manufatura de produtos eletro-eletrônicos, transportes, equipamentos industriais e produtos de consumo em geral. A Figura 2.1 mostra a distribuição do consumo do cobre por segmento industrial.

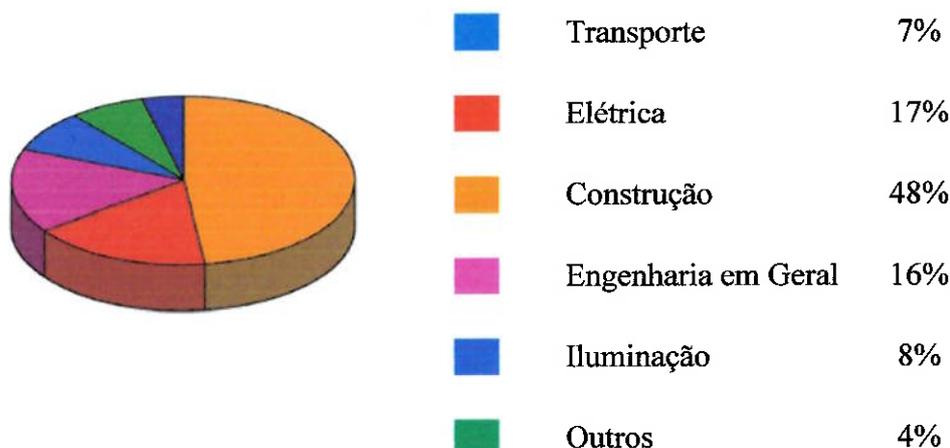


Figura 2.1- Consumo do Cobre por Segmento Industrial

Fonte: *London Metal Exchange* - 2001

De acordo com dados do *Mineral Commodity Summaries* (2001), as reservas mundiais de cobre (medidas e indicadas) atingiram em 2000, um total de 655 milhões de toneladas de metal contido, representando um incremento de 7,7%, referente ao ano de 1999. Cerca de 40,0% dessas reservas estão concentradas no Chile (24,4%) e nos Estados Unidos (13,7%). As reservas brasileiras somaram 11,83 milhões de toneladas de cobre contido, apresentando uma diminuição de 0,25%, frente às reservas do ano anterior. No quadro mundial das reservas, a participação brasileira conservou-se no nível de 1,8%.

A Tabela 2.1 apresenta os valores referentes às reservas e produção mundial do concentrado de cobre no período de 1996 a 2000.

Tabela 2.1 - Reserva e produção mundial de concentrado de cobre

DISCRIMINAÇÃO	1996		1997		1998		1999		2000	
	Reservas (10 ⁶ t)	Produção (10 ⁶ t)								
Austrália	23.000	525	23.000	545	23.000	600	23.000	735	23.000	760
Canadá	23.000	689	23.000	660	23.000	710	23.000	630	23.000	650
Cazaquistão	20.000	250	20.000	316	20.000	340	20.000	350	20.000	380
Chile	163.000	3.120	163.000	3.390	160.000	3.660	160.000	4.382	160.000	4.500
China	37.000	439	37.000	414	37.000	440	37.000	500	37.000	510
Brasil	11.582	46	11.930	40	11.896	34	11.865	31	11.833	32
Estados Unidos	90.000	1.920	90.000	1.940	90.000	1.850	90.000	1.600	90.000	1.450
Indonésia	15.000	507	15.000	529	25.000	750	25.000	740	25.000	850
México	27.000	341	27.000	391	27.000	400	27.000	362	27.000	390
Peru	24.000	572	24.000	491	40.000	450	40.000	536	40.000	530
Polônia	36.000	422	36.000	414	36.000	420	36.000	460	36.000	480
Rússia	30.000	520	30.000	505	30.000	450	30.000	520	30.000	520
Zâmbia	34.000	334	34.000	353	34.000	280	34.000	260	34.000	260
Outros Países	63.418	1.354	63.070	1.280	93.104	1.516	93.135	1.469	98.167	1.568
TOTAL	598.000	11.048	627.000	11.268	650.000	11.600	650.000	12.575	655.000	12.880

Fontes: Brasil: DNPM¹⁵ - Outros países: Mineral Commodity Summaries 2001.

Fatores econômicos, tecnológicos e sociais, influenciam a oferta e a demanda do cobre. Quando na sociedade aumenta a demanda por cobre, minas e unidades de beneficiamento já existentes são expandidas, e novos projetos são implementados. De outro modo, quando ocorre retração na demanda, as unidades em operação têm suas escalas reduzidas ou mesmo suspensas, e novos projetos são normalmente cancelados. As respostas das empresas de mineração às condições de mercado,

¹⁵ Departamento Nacional da Produção Mineral

proporcionam que não ocorram tanto superoferta, como desabastecimento de cobre refinado.

As características das respostas das empresas, em relação ao comportamento do mercado, são ilustradas pelo gráfico da Figura 2.2, que abrange o período entre 1960 e 1998. No período analisado, o consumo de refinado foi muito próximo da produção refinado e superior à produção das minas. Os déficits de produção das minas ao longo de toda a série, e os déficits de produção de refinado, observados em alguns períodos, em relação ao consumo, demonstram a importância da reciclagem como fonte de suprimento, e conseqüentemente de manutenção do equilíbrio do mercado.

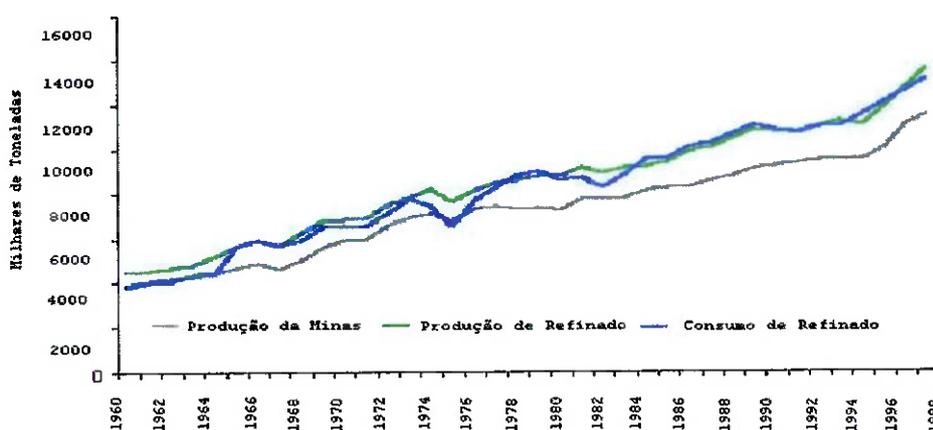


Figura 2.2 – Produção das minas – produção e consumo de refinado
Fonte: *Internacional Copper Study Group*

Como reflexo do movimento de reestruturação da mineração mundial, a indústria do cobre também vem passando por uma série de fusões, aquisições e associações. Buscando a diversificação geográfica e produtiva, os grandes grupos mineradores mundiais, que não atuavam na indústria do cobre, vêm investindo nesse objetivo. Os custos competitivos encontrados na América Latina, também têm motivado essa tendência, com o direcionamento dos grandes grupos, objetivando beneficiar-se da atratividade da região.

Um aspecto a ser destacado na análise do mercado do cobre, é o fato da indústria desse metal ser marcada pela larga participação de grupos mineradores de escala global. Desse modo, apesar de estar presente em todos os continentes e,

portanto, espalhada geograficamente, a produção encontra-se concentrada nas ‘mãos’ de poucas empresas. Em 2000, apenas seis empresas totalizaram cerca de 59% do cobre refinado produzido no mundo.

2.2.2 – Oferta

A abordagem utilizada para análise da oferta de uma *commodity* industrial como o cobre, leva em consideração fundamentalmente o tempo entre os investimentos em novos projetos, e o início de suas produções. Assim, o elemento chave da caracterização da variável oferta, diz respeito à quantidade da *commodity* que ingressará no mercado, depois de um determinado período.

O cobre é, dentre todos os metais, um dos mais reciclados e sua reciclagem representa uma importante fonte de disponibilidade do metal. O cobre reciclado, também denominado cobre secundário, uma vez processado não é distinguível do cobre primário, obtido a partir de minérios. A reciclagem do cobre amplia a eficiência do uso, resultando em economia de energia e contribuindo para assegurar uma fonte sustentável de metal.

A Tabela 2.2 apresenta valores estimados de reciclagem de sucata como fonte de obtenção de cobre metálico.

Tabela 2.2 Recuperação de Sucata – 1996/2000 - (Em 1000 t)

Recuperação de Sucatas	1996	1997	1998	1999	2000
Fundida para <i>Smelter</i>	1.594	1.482	1.355	1.400	1.480
Sucata Manufaturada	3.172	3.295	3.194	3.100	3.150
Total	4.766	4.777	4.549	4.500	4.630

Fonte: *Internacional Copper Study Group*

De acordo com dados da *Internacional Copper Association*, a produção mundial de concentrado de cobre alcançou no ano de 2000, aproximadamente 13 milhões de toneladas, registrando um aumento de 2,4% sobre o ano de 1999. Os principais produtores foram os países que detêm as maiores reservas de minério. O Chile, com cerca de 30,0% do total da produção, e os Estados Unidos, com 11,3%, lideraram a produção mundial. A participação brasileira de concentrado de cobre ficou em 0,2%.

Ao longo do Século XX, a produção de concentrado de cobre teve um forte incremento, passando de 494.000 toneladas iniciais, para mais de 13.000.000 de toneladas em 2000. Antes da II guerra mundial, a oferta cresceu a uma taxa anual média de 3,1%. Durante os anos de expansão do pós-guerra - 1945 a 1973 - a demanda cresceu impulsionando a oferta, a uma taxa média de 4,5% ao ano.

A partir do primeiro choque do petróleo e na década seguinte, a demanda retraiu-se, de tal forma, que a oferta expandiu-se à taxa 2,4% ao ano, bem inferior as três décadas anteriores. Durante a década de noventa, a taxa anual média de aumento da oferta, manteve-se em torno de 3,0 %.

A Figura 2.3 apresenta a evolução da produção de cobre durante o Século XX, onde se observa, que a maior inflexão, na curva da evolução da produção de concentrado, ocorreu a partir de 1960.

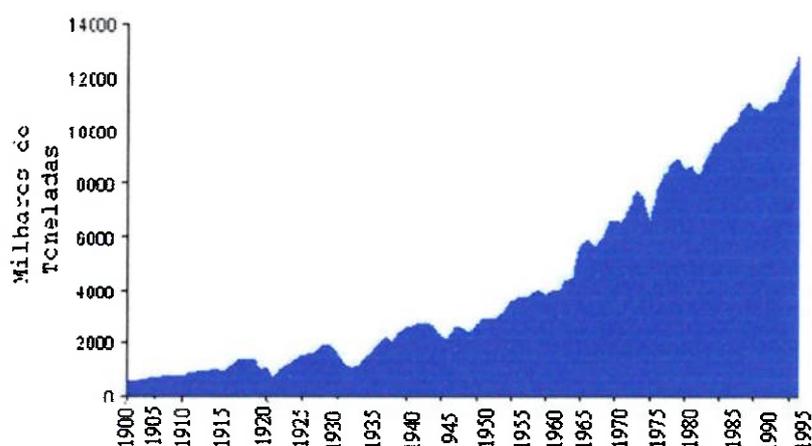


Figura 2.3 – Evolução da Produção Mundial de Concentrado de Cobre
Fonte: *Internacional Copper Association*

Segundo o *Internacional Copper Study Group* (2000), as mudanças mais significativas que ocorreram na participação dos produtores de concentrado de cobre, dizem respeito ao Chile, um tradicional produtor, que aumentou sua participação de 13% em 1978, para cerca de 30% em 1997, e o continente africano, que reduziu em 52% sua produção no mesmo período.

A Figura 2.4 mostra a evolução da participação por continentes na produção mundial de concentrado de cobre.

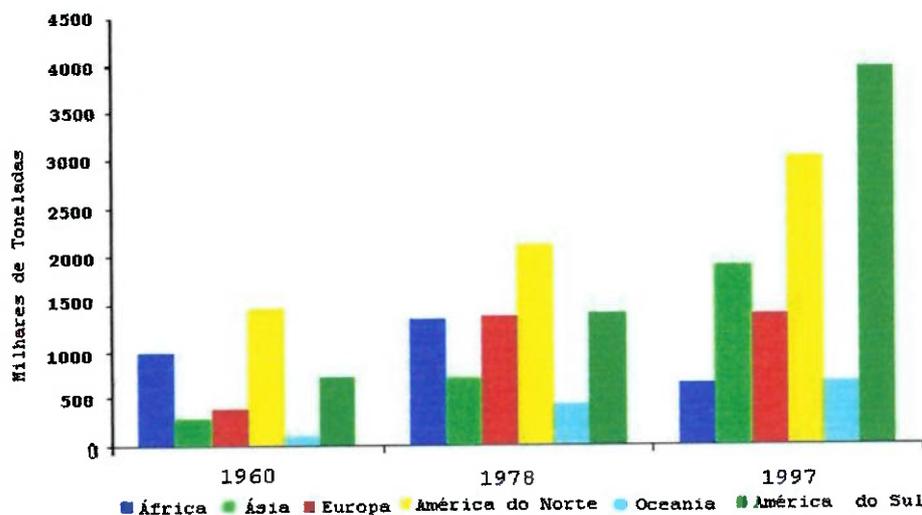


Figura 2.4 – Distribuição continental da produção de cobre

Fonte: *International Copper Study Group*

Segundo dados do *Internacional Copper Study Group*, no ano de 2000 os Estados Unidos (1.721.000 t), Chile (1.390.000 t), Japão (1.350.000 t) e China (969.000 t) foram os principais refinadores do metal, metade da produção de cobre metálica se deu a partir desses países. A produção brasileira atingiu o patamar de 1,3% do total mundial de refinado.

Com o gradual desenvolvimento da tecnologia *SX-EW* - de extração por solventes - o cobre produzido a partir de lixiviação já totaliza 13% da produção de cobre metálico.

Durante os anos 80 e na primeira metade dos anos 90, a capacidade mundial média de refino de foi de 12.331.000 toneladas, apresentando um aumento de 26%

em relação aos quinze anos anteriores no período. Em 1998, a capacidade de refino alcançou 16.228.000 toneladas.

Nos últimos trinta anos, a América do sul e particularmente o Chile, emergiram como região de grande produção de cobre metálico refinado. De uma modesta produção de 177.000 toneladas em 1960, a América do Sul aumentou sua produção em 1425%. Similarmente a Ásia também incrementou consideravelmente sua produção de refino em 800% no mesmo período, principalmente devido à participação do Japão e da China.

A produção de cobre refinado, que inclui o cobre primário e o cobre proveniente da recuperação de sucata, evoluiu de $11.170.10^3\text{t}$ para $12.954.10^3\text{t}$ no período 1992/97, com taxa média de 3% a.a.

O gráfico da Figura 2.5 mostra a participação das fontes de cobre metálico refinado entre 1960 e 2000.

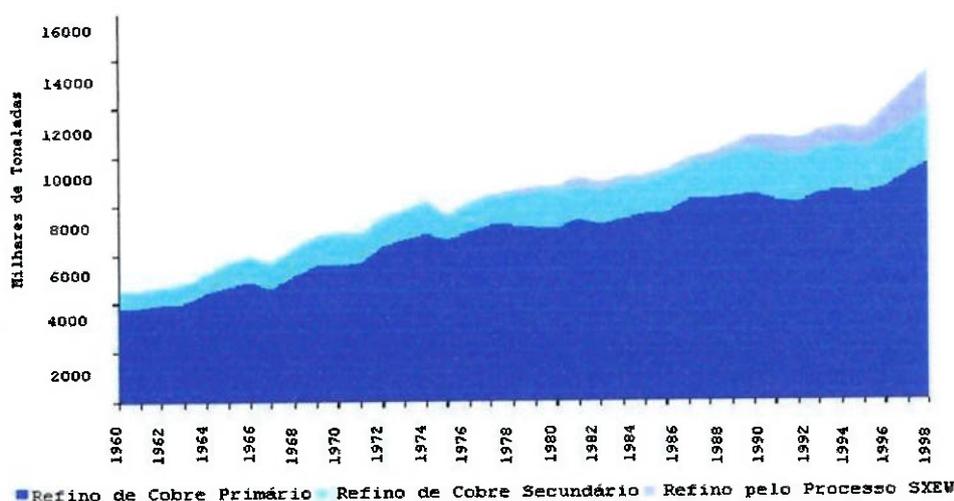


Figura 2.5 – Fontes de Refino do Cobre Metálico

Fonte: *International Copper Study Group*

Os quatro maiores produtores de cobre refinado, Estados Unidos, Chile, Japão e China, respondem por mais de 50% da produção mundial. Destes, apenas o Chile tem toda a sua produção proveniente de minério próprio, enquanto o Japão depende totalmente de concentrado importado e os Estados Unidos e China complementam suas necessidades de concentrado com importações.

O gráfico da Figura 2.6 mostra a evolução da capacidade de refino de cobre metálico nos continentes entre 1960 e 2000.

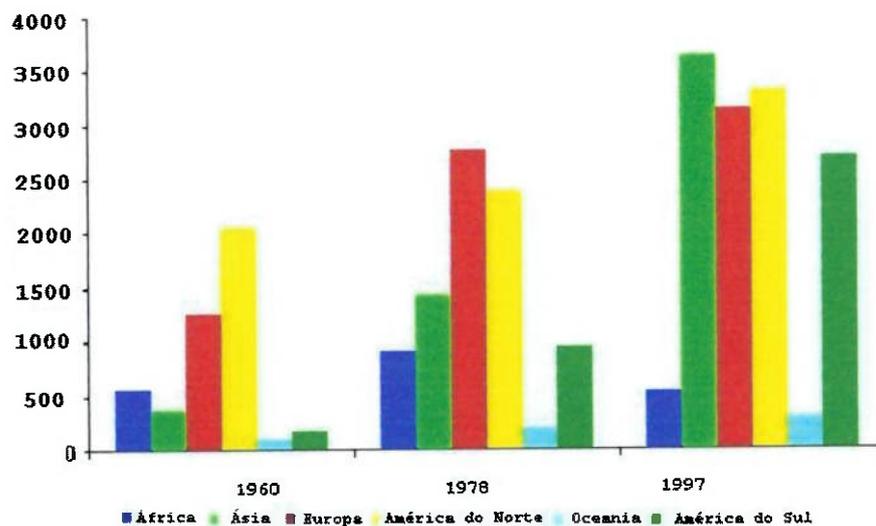


Figura 2.6 – Evolução da Capacidade de Refino
Fonte: *International Copper Study Group*

O gráfico da Figura 2.7 mostra a distribuição em 2001 da capacidade de refino de cobre metálico distribuído por continente.

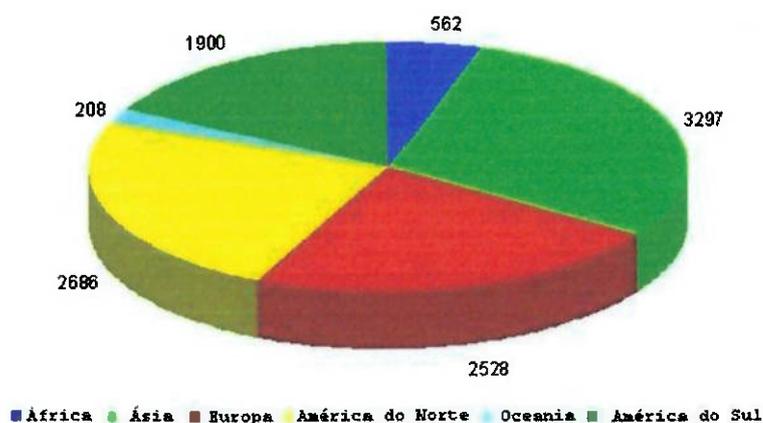


Figura 2.7 - Refino de Cobre (em 10³ Toneladas)
Fonte: *International Copper Study Group*

A expansão prevista para a oferta de cobre, considerando inclusive os novos projetos, é mais que suficiente para o atendimento da demanda prevista para o período de implantação dos novos projetos, influenciando negativamente na cotação média dos preços. Portanto, a correção da superoferta deverá gerar a necessidade de desativação de unidades com custos menos competitivos.

2.2.3 – Demanda

A análise da demanda por metais básicos inicia-se com a interpretação das respostas da demanda a mudanças nos preços. A elasticidade do preço da demanda é variável para cada *commodity*. A elasticidade tende a ser menor para *commodities* com menor possibilidade de substituição do que para aquelas com substitutos naturais.

Essas elasticidades variam ao longo do tempo de acordo com excessos de demanda ou excessos de oferta. A correlação entre a instabilidade de preços das *commodities* substitutas torna a avaliação do comportamento da demanda extremamente difícil.

Um complicador adicional na previsão da demanda ocorre em consequência das flutuações da renda. A maneira como a demanda pelos metais básicos responde às variações no nível da atividade industrial, depende da elasticidade de preço da demanda dos produtos acabados para os quais os metais básicos servem de insumos.

A industrialização no processo de desenvolvimento das economias asiáticas, e as mudanças no padrão de vida da região podem ser atribuídas à expansão da demanda por cobre da segunda metade da década de oitenta ao final da década de noventa.

O consumo mundial de cobre, que cresceu a taxa média anual de 3,6% no período 1992/96, apresentou redução de cerca de 2% em 1997, em consequência principalmente da crise asiática, obtendo-se taxa média de 2,5% a.a. no período 1992/97. Tendo em vista o processo de recuperação econômica apresentado pelo Sudeste Asiático, a partir do final da década de noventa, o consumo mundial de cobre situou-se em torno de 3,2% a.a em 2001.

O Sudeste Asiático consome pouco mais de um terço do cobre refinado produzido mundialmente. Esta região que vinha apresentando uma taxa de crescimento do consumo de 6,2% a.a. no período 1992/96 influenciada

principalmente pela China, Coréia do Sul, Taiwan e outros “tigres asiáticos”, apresentou redução de consumo estimado de 2,3% em 1997.

O gráfico da Figura 2.8 mostra a evolução da demanda de cobre.

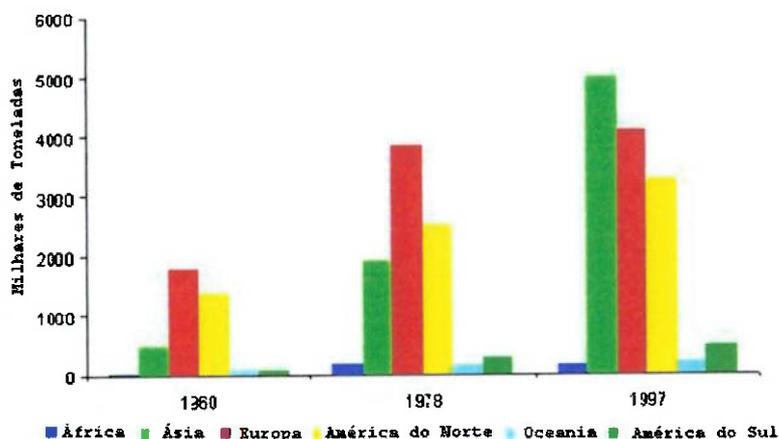


Figura 2.8 - Evolução da demanda de cobre nos continentes
Fonte: *International Copper Study Group*

Como a população mundial cresce continuamente, a demanda por cobre também tende a sofrer incrementos, sendo sensível às variações no ciclo econômico, mudanças tecnológicas e a competição entre os materiais para uso nas diversas aplicações. O gráfico da Figura 2.9 mostra a evolução da população mundial versus o consumo per capita em kg de cobre.

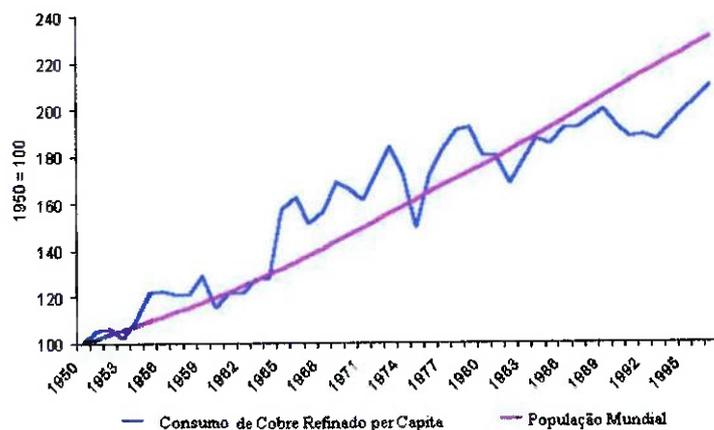


Figura 2.9- Consumo per Capito de cobre: 1950 – 1998
Fonte: *Internacional Copper Study Group*

A intensidade de uso de um material relaciona a demanda desse material com o nível da atividade econômica ou Produto Interno Bruto – PIB.

As regiões mais desenvolvidas do mundo beneficiam-se de uma infraestrutura bem estabelecida, na qual o cobre tem importante contribuição na atividade econômica. Para que as regiões menos desenvolvidas expandam suas infra-estruturas, o cobre conjuntamente com outros materiais, desempenha um papel estrutural na elevação do padrão de vida das populações.

O gráfico da Figura 2.10 mostra a relação entre o Produto Interno Bruto de países e regiões versus o consumo per capita de cobre.

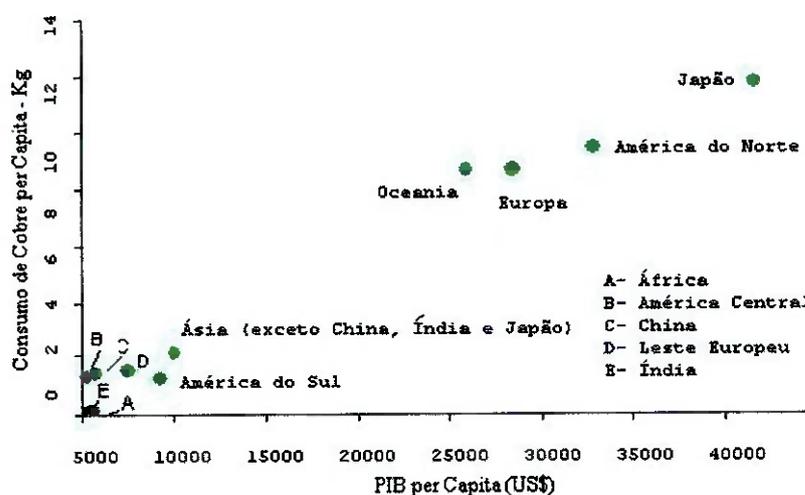


Figura 2.10 - Intensidade do Uso de Cobre

Fonte: *Internacional Copper Association*

A taxa de crescimento do consumo mundial de cobre refinado situou-se em cerca de 3% em 2001. Apesar do aumento do consumo em alguns países da América Latina, houve menor ênfase na Europa e nos Estados Unidos, além da desaceleração da retomada do consumo da Ásia. Estima-se que o consumo mundial de cobre refinado mantenha, no período 2001/08, a mesma taxa média de crescimento verificada na década de 90, ou seja, 3% a.a.

2.2.4 – Substituições

O mercado de metais básicos é fortemente influenciado pelo padrão de substituição entre as *commodities*.

A substituição de um metal ocorre quando os custos dos insumos industriais podem ser reduzidos variando a proporção dessa *commodity* na composição dos produtos acabados. A substituição técnica ocorre devido a mudanças no processo de produção as quais possibilitam a utilização de menores quantidades do insumo e conseqüentemente um menor custo com a *commodity*.

O cobre como insumo industrial apresenta substitutos nos diversos segmentos industriais em que é empregado. O alumínio o substitui em vários produtos, como cabos de transmissão elétrica, em tubulações de aquecimento e refrigeração. O titânio e aço podem substituí-lo em trocadores de calor, e o aço também, é usado na indústria bélica em sua substituição. As fibras óticas têm sido largamente empregadas como substitutas do cobre em diversas aplicações em telecomunicações. Os plásticos também o substituem em canalizações de água e em muitas aplicações estruturais

2.2.5 – Preços e Estoques

Do mesmo modo que a economia emerge em períodos de expansão, a demanda industrial por cobre sofre pressões da oferta, fazendo com que os preços reajam tendo comportamento de alta. De outra forma durante períodos de redução da atividade econômica, o excesso de oferta e/ou baixo consumo faz com que os preços declinem.

Durante estes ciclos, a indústria mineral empenha-se no aumento de sua eficiência, com o aumento de produtividade e redução de custos, normalmente através da implementação novas tecnologias, visando a adequar-se aos preços.

Os estoques de cobre são mantidos por produtores, consumidores, comerciantes e bolsas, e em alguns casos, por governos, sendo entretanto, extremamente difícil sua precisa quantificação. Contudo seu nível tem influência direta sobre os preços, conforme se pode observar no gráfico da Figura 2.11.

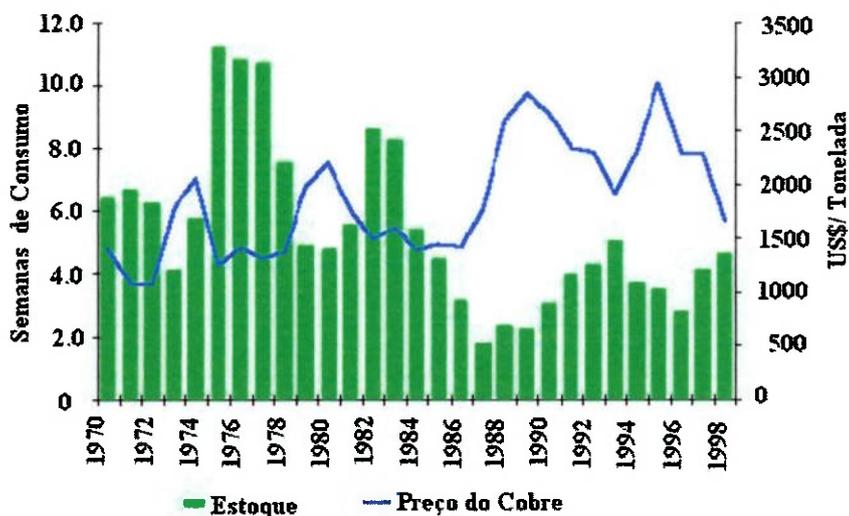


Figura 2.11- Variação do preço do cobre em função do nível dos estoques
 Fontes: LME e Internacional Copper Study Group (US\$ de dezembro de 2000)

O preço real do cobre tem seguido uma tendência declinante expressa através de sucessivas quedas. A Figura 2.12 apresenta a tendência geral de queda dos preços do cobre nas últimas quatro décadas.

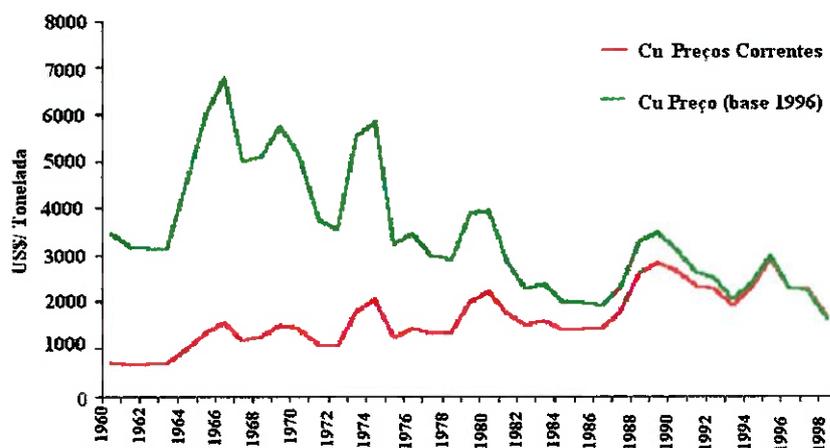


Figura 2.12- Evolução do preço do cobre-1960/1998
 Fonte: London Metal Exchange

Seguindo a tendência de baixa no longo prazo, os preços do cobre vêm sofrendo sucessivas quedas desde 1995. As maiores foram registradas no período 1995/96, quando recuaram 22% na média, e no biênio 1997/98, com declínio de 18%, devido à crise econômica ocorrida na Rússia.

Em 1999, a cotação da *London Metal Exchange* atingiu um preço médio de US\$ 1.572/t, com decréscimo de 4,9% em relação ao preço médio de US\$ 1.653/t praticado em 1998. Em 2000, houve recuperação do preço médio, que atingiu cerca de US\$ 1.865/t, e sua retomada tem propiciado melhores oportunidades para os produtores. O gráfico da Figura 2.13 mostra essas tendências.

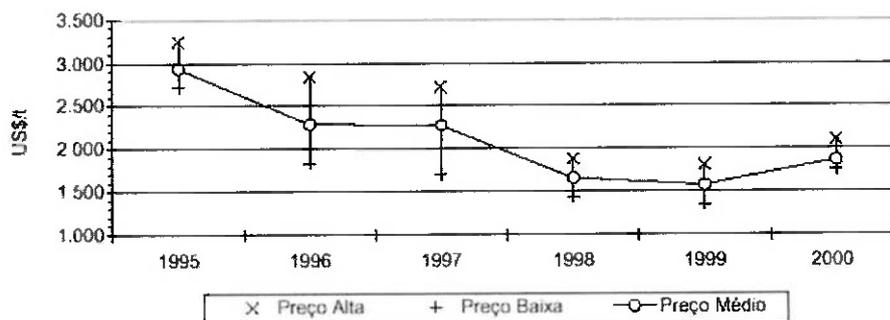


Figura 2.13- Evolução do preço do cobre
Fonte: *LME* (US\$ de dezembro de 2000).

A partir do final de setembro de 2000, o preço do cobre começou a dar sinais de desaceleração, saindo de US\$ 1.950/t para cerca de US\$ 1.800/t em dezembro. Em janeiro de 2001 sua cotação atingiu US\$ 1.770/t.

A melhora do preço do cobre em 2000 deu um novo ânimo aos produtores. A alta vinha ocorrendo devido a uma escassez frente a uma acelerada demanda, gerando redução em 2000 de 45% dos estoques segundo o *LME*. Com essa alta, os produtores apuraram maiores receitas e resultados e intensificaram suas estratégias de expansão, visando ao aumento da produção.

2.2.6- Negócios

Chile, Indonésia e Canadá são os maiores exportadores de concentrado sendo responsáveis por mais de 70% das exportações mundiais em 1997. Esses países vêm aumentando suas participações no comércio internacional de concentrado, passando de 55% das exportações em 1992 para cerca de 75% em 2001.

O Japão é o maior importador de concentrado de cobre, com cerca de 48,5% das importações mundiais. Os demais países importam concentrado em quantidades relativamente reduzidas. O mercado japonês é abastecido, principalmente, pelo concentrado importado do Chile. A Figura 2.14 representa esquematicamente o fluxo de negócios de concentrado de cobre.



Figura 2.14 - Fluxo de Negócios de Concentrado de Cobre
 Fonte: *London Metal Exchange*

Os gráficos da Figura 2.15 sintetizam o comércio de concentrado de cobre.

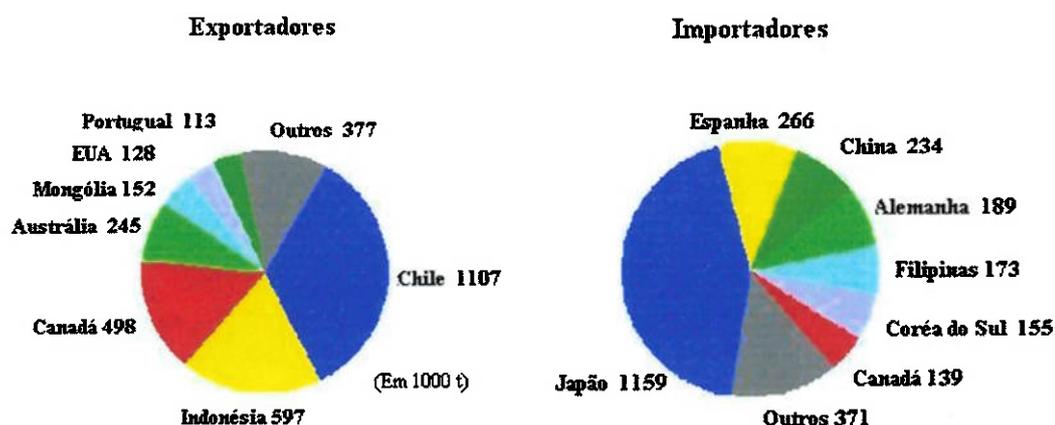


Figura 2.15- Principais Exportadores e Importadores de Concentrado de Cobre
 Fonte: *London Metal Exchange (2000)*

O mercado internacional de cobre refinado é bastante representativo, figurando como principais países exportadores o Chile, o Canadá e a Rússia, que juntos perfazem 52% do volume exportado. O crescimento das exportações mundiais registrou uma taxa média de 6,3% a.a. entre 1996 e 1999, atingindo no final desse

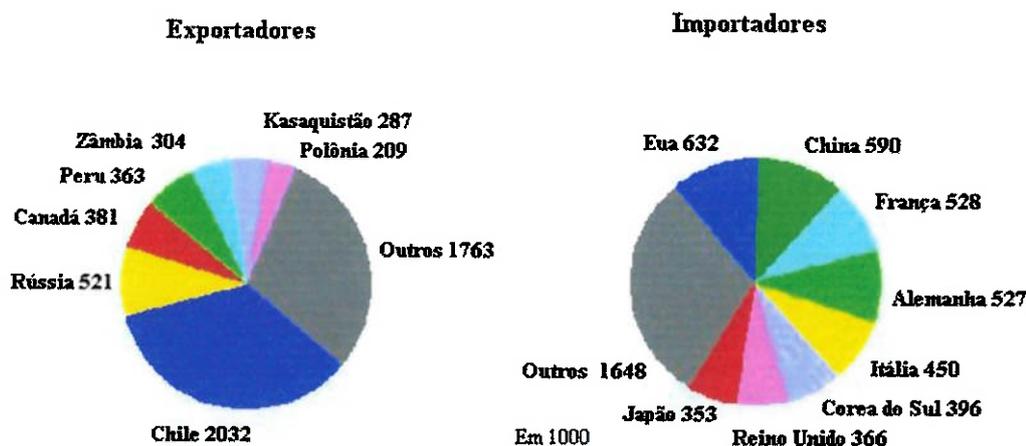


Figura 2.17- Principais Exportadores e Importadores de Cobre refinado
 Fonte *London Metal Exchange* (2000)

2.2.7 – Novos Projetos no Brasil

O Brasil apresenta grande potencial geológico, carecendo entretanto, de mais pesquisas para definição de novas jazidas. Segundo dados do Sumário Mineral DNPM (2001), o cobre é o metal que apresenta maior déficit comercial no comércio internacional brasileiro, devido ao grande volume de importações, principalmente sob a forma de concentrado.

A Caraíba Metais, localizada em Jaguarari (BA), tem capacidade de produção de 186 t/a de cobre metálico, tendo sido implementado um plano de expansão para 200 mil t/a a partir de 1998.

Note-se que, apesar da produção atual da Caraíba ser inferior ao consumo interno, registram-se importação e exportação de cobre metálico e de semi-acabados em quantidade e valores quase idênticos, em face da globalização do mercado, das baixas tarifas de importação e dos financiamentos a custos internacionais.

De acordo com relatório da Gerência Setorial de Mineração e Metalurgia do BNDES¹⁶, diversos projetos encontram-se em andamento no Brasil, envolvendo a

¹⁶ Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social

cadeia produtiva do cobre, cabendo ressaltar a atuação da CVRD¹⁷, com apoio financeiro do BNDES, na região de Carajás (Pará).

Cabe observar que grandes grupos internacionais vêm demonstrando grande interesse em pesquisa mineral no Brasil, sobretudo para o cobre e o ouro.

A auto-suficiência do Brasil no segmento, ou mesmo a mudança do padrão de importador para exportador, tem de ser avaliada no contexto do mercado global. Deve-se considerar que as perspectivas não são tão otimistas quanto no passado para os preços do cobre, constatando-se a constante busca de redução de custos nos processos produtivos visando à rentabilidade do negócio nos novos patamares de preço.

No entanto, conclui-se que é bastante provável que o Brasil atinja níveis de competitividade compatíveis com a mudança de seu patamar na indústria do cobre, assumindo posição destacada entre os maiores produtores mundiais, com importantes benefícios para a balança comercial do país e contribuindo para o desenvolvimento regional e a geração de novos empregos.

¹⁷ Cia. Vale do Rio Doce

2.3 - Gerenciamento de Riscos na Indústria Mineral

A importância dos instrumentos de gestão de risco financeiros associados à atividade de produção de *commodities* minerais pode ser avaliada quando é examinada a volatilidade dos preços destes ativos e, conseqüentemente, o peso de seus efeitos no planejamento nos níveis micro e macro das corporações mineiras.

O gráfico da Figura 2.18 mostra a volatilidade¹⁸ de preços à vista e dos contratos futuros do cobre nos últimos 13 anos.

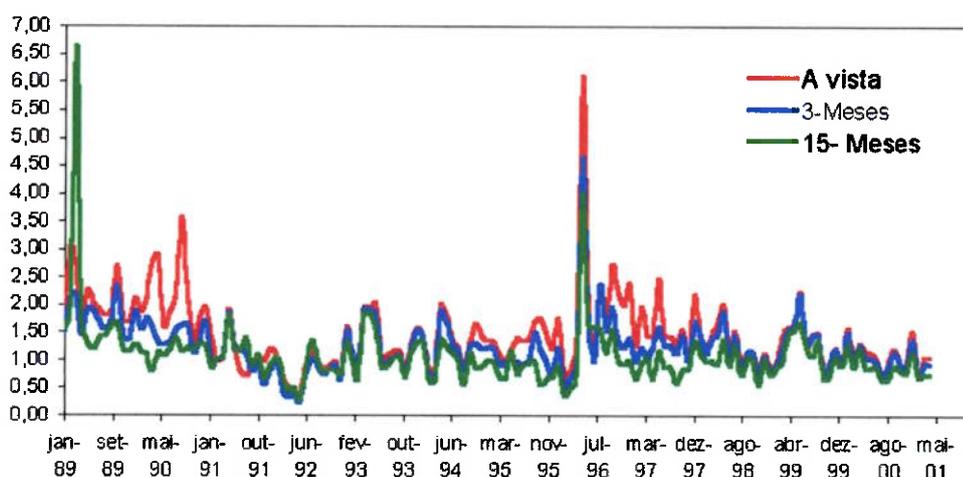


Figura 2.18 - Volatilidade do Preço do Cobre - 1989-2001
 Fonte: *London Metal Exchange*

O impacto da volatilidade do preço de uma *commodity* mineral não é apenas limitado ao fluxo de caixa presente das corporações. Seus efeitos também afetam a produção e as decisões de investimento.

Segundo DIXIT e PINDYCK (1995), a incerteza sobre os preços no futuro pode implicar em redução de investimentos, devido à probabilidade de subalocação dos recursos para investimentos, em função do comportamento dos preços. Por outro lado, a convexidade da função lucro em relação aos preços implica que um aumento na incerteza dos preços aumenta a expectativa de lucros com a *commodity* e conseqüentemente, poderá levar a maiores investimentos.

¹⁸ A metodologia de cálculo da volatilidade é apresentada no Anexo B.

A exposição aos riscos decorrentes das flutuações nos preços das matérias primas minerais pode ser em parte, neutralizada pela correta administração desses riscos, sendo os derivativos, os instrumentos adequados para redução da volatilidade dos fluxos de caixa e dos lucros. O objetivo da adequada gestão de risco, antes de obter ganhos financeiros, é atingir os resultados programados.

O mercado de derivativos é aquele cuja formação de seus preços deriva dos preços do mercado à vista. Com o uso dos derivativos as empresas podem concentrar esforços, prioritariamente, na administração dos aspectos referentes a investimentos, produção e vendas, ocupando um papel secundário a engenharia financeira, requerida para participar de um mercado global.

No universo do mercado de derivativos, podemos identificar os mercados a termo, os mercados de futuros, os mercados de opções e o mercado de *swaps*, conforme esquematicamente é mostrado na Figura 2.19.



Figura 2.19- Mercado de derivativos

Com os diversos instrumentos financeiros disponíveis no mercado, poder-se-ia pensar em reduzir o risco econômico do negócio através de operações puramente financeiras (fazer *hedge*). No entanto, como mostra a clássica e ainda válida proposição de MODIGLIANI e MILLER, (1958):

“Em mercados eficientes¹⁹, qualquer redução no risco é compensada por uma redução do retorno”.

¹⁹ No contexto de mercado eficiente, o valor de um ativo é reflexo do consenso dos participantes com relação ao seu desempenho esperado. Na hipótese de eficiência, o preço de um ativo qualquer é formado a partir das diversas informações publicamente disponíveis aos investidores, sendo as decisões de compra e venda tomadas com base em suas interpretações dos fatos relevantes.

Desta forma o valor da oportunidade de investimento (opção) não é afetado se a empresa pode ou não efetuar operações de *hedge*. Assim a operação financeira não tem efeito na decisão (econômica) de investimento.

A decisão de investimento é, geralmente, uma decisão livre de preferências (requer apenas a maximização de riqueza) enquanto que, a decisão financeira é geralmente uma decisão dependente de preferências. Essas decisões são, geralmente, tomadas separadamente, isto é, primeiro se toma a decisão econômica e depois a decisão financeira (não só *hedge*, como também a participação de capital de terceiros, isto é, alavancagem).

Em mercados menos eficientes, uma operação financeira pode agregar algum valor, mas tem um efeito secundário (de segunda ordem). É oportuno recordar a proposição de BREALEY e MYERS (1991):

“Você pode ganhar muito mais dinheiro com o lado esquerdo do balanço - conta de ativos - do que com o lado direito (títulos e estrutura de capital). Isto é, existe mais valor a ser ganho com boas decisões de investimento do que com boas decisões financeiras”.

2.3.1 – Mercado de Futuros

Uma operação de mercado futuro envolve basicamente um compromisso de compra ou venda de determinado ativo em certa data futura (data do vencimento), sendo previamente fixado o preço objeto de negociação.

Os mercados de futuros têm como objetivo básico a proteção dos agentes econômicos (produtores primários, indústrias, comerciantes, instituições financeiras e investidores) contra a volatilidade dos preços de seus produtos e de seus investimentos. Pode-se afirmar, que este mercado existe para facilitar a distribuição de risco entre os agentes econômicos, ao mesmo tempo em que, pelas expectativas

criadas pela lei da oferta e da procura, passa a influir diretamente na formação futura dos preços.

Os investidores do mercado futuro são identificados essencialmente nos especuladores e *hedgers*.

Os especuladores são todos os aplicadores (pessoas físicas e jurídicas) que buscam resultados financeiros nas operações a futuro. Operam entrando e saindo do mercado de maneira bastante rápida, não demonstrando interesse comercial pelo objeto de negociação. Sua intenção restringe-se à obtenção de lucro, medido pela diferença entre o preço de compra e o preço de venda. Ao assumir o risco dos contratos futuros, o especulador atribui liquidez às operações colaborando com as operações de *hedging*.

Os *hedgers* constituem-se nas empresas que utilizam o mercado para se proteger de mudanças no preço esperado de um produto, que possam afetar negativamente seus resultados operacionais. Estas operações denominadas *hedge* são realizadas para que a empresa garanta quaisquer oscilações negativas no preço do ativo objeto do contrato. Sua atividade econômica principal está diretamente relacionada com a produção ou consumo da *commodity*.

O conceito mais importante para o entendimento da formação de preços nos mercados futuros é o conceito de base, que é a diferença entre o preço futuro de uma *commodity* para um determinado vencimento e o preço à vista dessa mercadoria, podendo ser também um ativo financeiro ou índice. A base corresponde, em valor, ao custo de carregar uma determinada posição física até a data de vencimento do contrato. Esse custo de carregamento inclui o armazenamento da *commodity*, transportes seguros e o custo financeiro do capital aplicado no estoque. Além dessas variáveis deve ser incluído também, na formação dos preços a futuro, o prêmio pela incerteza quanto ao comportamento dos preços no mercado, influenciado por diversos fatores.

Em um mercado típico o preço futuro supera o preço à vista pelo custo de carregamento. Contudo, o preço do mercado à vista em condições de equilíbrio

devem elevar-se ao longo do tempo de forma a incorporarem o custo de carregamento, convergindo para os preços no mercado futuro, conforme ilustrado no gráfico (a) da Figura 2.20.

Na hipótese de escassez de estoque físico, poderá haver uma inversão, e o preço futuro ficar menor que o preço à vista, caracterizando um mercado invertido conforme ilustrado no gráfico (b) da Figura 2.20.

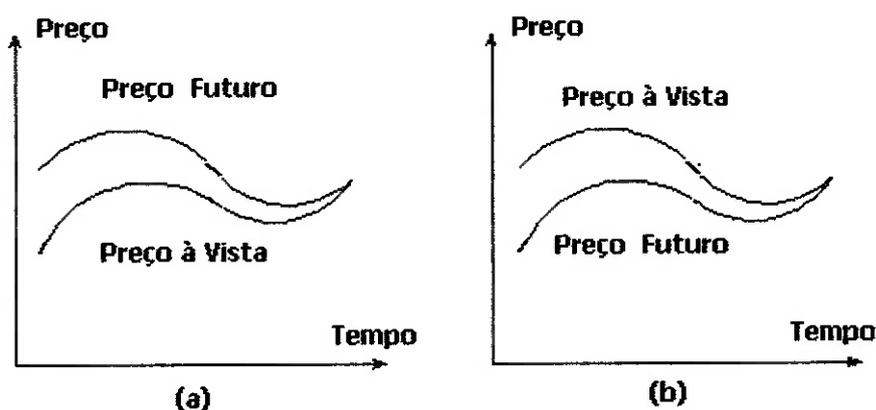


Figura 2.20 - Convergência dos Preços à Vista e Futuros

O preço no mercado futuro pode ser expresso pela equação (2.1):

$$FV_t = PV_t \cdot (1+i)^n + CC \cdot n \quad (2.1)$$

Onde: FV_t = preço no mercado futuro no momento t ;

PV_t = preço no mercado à vista no momento t ;

i = taxa diária de juros;

n = número de dias a transcorrer até o vencimento do contrato futuro;

CC = Custo de carregamento.

Os preços no mercado futuro podem apresentar grandes variações durante o período de vigência dos contratos, permitindo que se realizem ganhos ou perdas expressivos. Para garantir o cumprimento das obrigações previstas nos contratos futuros, é prática das Bolsas de Futuros, exigir dos investidores garantias formalizadas mediante a exigências de um depósito inicial. Esse crédito pode ser realizado através de dinheiro, carta de fiança ou ativos que apresentem valor no mercado.

Em função das variações verificadas nas cotações dos contratos futuros, o investidor deve efetuar depósitos diários em dinheiro, com o objetivo de cobrir eventuais perdas em sua posição. Em caso de ganhos nos contratos, as Bolsas providenciam depósitos na conta do investidor, determinados pela valorização da posição assumida nos contratos futuros.

Os contratos futuros têm sido largamente empregados (conjuntamente com outros derivativos) como instrumentos de *hedge*, especialmente, nos períodos de maior volatilidade pelas corporações de mineração.

2.3.2 – Mercado a Termo

Os mercados a termo deram origem aos mercados de futuros, e são semelhantes a esses, pelo fato de serem constituídos de acordos de compra e venda de um ativo (frequentemente *commodities*) em uma data futura, por um preço previamente estabelecido, no entanto, não são negociados em bolsa, são acordos particulares entre as partes.

Uma das partes assume sua posição de compra no contrato a termo em data específica e por preço certo e ajustado. A contraparte assume sua posição de venda nas mesmas condições. O preço do contrato a termo é estabelecido adicionando-se ao preço à vista a expectativa de juros, fixada livremente no mercado, pelo prazo do contrato.

Pode-se definir um Contrato a Termo, como uma promessa de compra e venda, firmada hoje, com entrega da *commodity* e recebimento do pagamento em data futura. Na data da contratação, são definidos todos os elementos da comercialização do produto, tais como:

- especificação da mercadoria (para o caso dos metais, o grau de pureza);
- quantidade negociada;
- local e data da entrega;
- preço e penalidades pelo não cumprimento das cláusulas do contrato.

A título ilustrativo pode-se citar uma mineradora de cobre, que negocia contratos de venda a termo para garantir o preço da sua produção, com uma empresa de metalurgia, que compra o cobre para garantir o preço de sua matéria prima.

O *hedge* pode ser feito tanto na compra quanto na venda de um contrato a termo. Uma empresa metalúrgica pode *hedgear* sua posição tanto comprando quanto vendendo contratos a termo de cobre. Se seu estoque está baixo, ela irá comprar contratos a termo para garantir seu preço de reposição, caso ela esteja com seu estoque alto, ela poderá vender o cobre à vista ou a termo, protegendo-se de eventuais perdas no valor da *commodity* em seu poder. À medida que ela vai comercializando o produto industrializado, poderá progressivamente diminuir sua posição no mercado de derivativos, evitando ficar com mais *hedge* do que necessita.

Nesse exemplo, na hipótese em que a empresa metalúrgica *hedgeou* sua posição comprando contratos a termo, a parte vendedora no contrato derivativo pode ser uma empresa mínero-metalúrgica que operando com cobre possui uma condição de risco oposta, ou seja, deseja limitar o preço de seu produto em um nível que não comprometa suas receitas futuras, de tal forma que gerem resultados negativos, mas por outro lado irá também limitar seus ganhos, na hipótese dos preços terem um comportamento de alta.

Como ficou ilustrado no exemplo, a existência dos mercados futuros, de negociação de ativos, acaba ocorrendo de forma natural pelo fato das decisões nas corporações serem tomadas no presente em função das expectativas futuras dos gestores. A Tabela 2.3 compara os mercados de futuros e a termo.

Tabela 2.3 - Mercados de futuros versus Mercado a Termo.

	MERCADO DE FUTURO	MERCADOS A TERMO
Negociação	Bolsa	Balcão
Vencimento	Determinado pela Bolsa	A Combinar
Valor de Referência	Múltiplo Valor do Contrato	A Combinar
Ajuste Diário	Diário	Não
Contrato	Padronizado	A Combinar
Entrega do Ativo	Não é Comum	Comum
Liquidação	Diária	Final

2.3.3 – Mercado de *Swaps*

Os *Swaps* são definidos como acordos privados entre duas empresas por meio do qual as partes trocam os fluxos de caixa futuros, respeitada uma fórmula pré-estabelecida, sem trocar o principal. Para que o *swap* ocorra deveremos ter sempre duas partes com riscos mutuamente exclusivos.

Existem requisitos básicos que dão origem aos *swaps*, entre os principais podemos relacionar os seguintes:

- descasamento entre o ativo e passivo das partes contratantes, o que gera risco;
- prazo de vencimento das operações que causam o descasamento;
- características do descasamento;
- troca do fluxo , ou resultado financeiro, resultante do descasamento entre o ativo e o passivo;
- eliminação ou diminuição dos riscos existentes;

Diferentemente, do mercado a termo num *swap*, não ocorre mudança de *commodity*, em vez disso trocam-se os fluxos de caixa com base em diferentes preços para a *commodity*. Uma parte – geralmente o comprador da *commodity* – concorda em pagar um preço fixo pelo produto e receber um fluxo indexado e receber um preço fixo. Portanto, o produtor evita perdas por declínio de preços, e o comprador, por aumento. Os bancos servem como intermediários entre as duas partes.

Os *swaps* além de instrumentos de *hedge* podem ser utilizados para fazer caixa, ou serem vinculados a financiamentos bancários.

Como exemplo ilustrativo para melhor entendimento deste importante derivativo, considere-se um exemplo muito comum no Brasil que é a negociação de *swap* de taxa pré-fixada contra a taxa de câmbio. Nesta operação, as contrapartes definem o período de vigência da operação, um valor inicial e taxa pré-fixada. No vencimento do contrato, o valor inicial será corrigido pela taxa pré-fixada e pela correção cambial; se a primeira for maior do que a segunda, o comprador do contrato

paga ao vendedor a diferença, caso ela seja maior, ele recebe do vendedor da operação. Supondo-se a seguinte situação:

(a) Um banco contrata com uma mineradora exportadora de concentrado de cobre, um *swap*, em que a mineradora busca garantir uma taxa de câmbio para o pagamento de uma exportação de concentrado no valor de US\$ 10.000.000,00 que irá receber em seis meses. Lembrando que no Brasil, a liquidação financeira da operação ocorre um dia útil após seu vencimento;

(b) Considerando-se que o mercado futuro de taxa de câmbio está prevendo uma correção cambial para o período de 16% a.a (linear no período). A taxa média de venda do dólar informada pelo Banco Central do Brasil, foi de R\$2,69/US\$1,00, no dia anterior à contratação. Usando o mercado futuro como referência, e a taxa de câmbio de fechamento do dia anterior, o banco e a mineradora exportadora contratam esse *swap*, de valor inicial de US\$ 10.000.000,00;

(c) Passados seis meses, se a taxa de câmbio verificada no período for inferior aos 16% a.a contratado, o banco terá que pagar a mineradora a diferença. Caso ela seja maior, ocorrerá o contrário e a mineradora deverá pagar ao banco. Se a taxa for, por exemplo, R\$2,99/US\$1,00, o exportador estará recebendo mais reais por cada dólar. Esse valor seria R\$0,0848 (R\$2,9900 - R\$2,9052). No montante do contrato corresponderia a R\$84.800,00, valor a ser pago ao banco na liquidação do contrato.

2.3.4 – Mercado de Opções

Opção é um instrumento financeiro, que dá a seu titular ou comprador, um direito futuro sobre um determinado ativo objeto, mas, não uma obrigação; e a seu vendedor, uma obrigação futura, caso solicitado pelo comprador da opção.

O vendedor de uma opção está vendendo um direito para que o comprador da opção exerça-o ou não em data futura. O comprador da opção paga em data presente o prêmio ou preço da opção, sendo essa a remuneração do vendedor do título, por ter assumido a responsabilidade de tomar uma posição no mercado em data futura, se

assim, o solicitar o comprador da ação. Existem dois tipos básicos, as de compra e de as de venda.

Para o entendimento da lógica operacional das opções, considere-se, por exemplo, a hipótese em que alguém que deseja comprar um imóvel, paga ao proprietário desse imóvel um sinal. Esse sinal (preço da opção) irá lhe proporcionar o direito, mas não a obrigação, de comprar o imóvel até uma data fixada, por um preço previamente ajustado. Caso o comprador desista da compra, ele não estará exercendo sua “opção de compra”.

Nas Opções de Compra – *Call options* - o comprador da opção tem o direito de comprar o ativo, objeto da negociação, por determinado preço, em uma data pré-estabelecida. Este preço previamente acertado é denominado preço de exercício. O comprador desta opção tem como objetivo adquirir o ativo em data futura garantindo o preço de compra do ativo. O vendedor da opção tem como contrapartida do prêmio recebido, a obrigação de venda do ativo objeto, se o comprador o solicitar. Este tipo de opção apresenta uma função de remuneração dada pela equação (2.2), a seguir:

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad (2.2)$$

Onde: C_T é o valor da opção, T é a data de vencimento, S_T é o preço do ativo objeto e K é o preço de exercício.

O gráfico da Figura 2.21 mostra como o valor da opção varia em função do preço do ativo objeto, na data de vencimento. Observe que a opção só tem valor quando o preço do ativo objeto for superior ao preço de exercício.

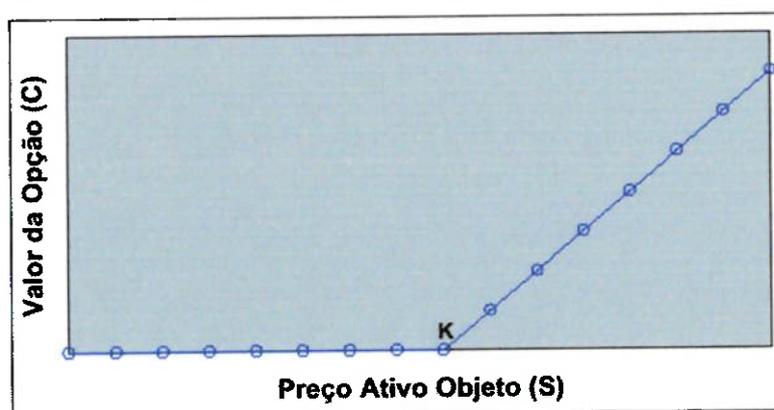


Figura 2.21 – Remuneração de uma opção de compra no vencimento

Nas Opções de Venda – *Put options* - o comprador da opção tem o direito de vender o ativo, objeto da negociação, por determinado preço, na data do exercício. O comprador da opção de venda tem como objetivo vender o ativo em data futura garantindo o preço de venda do ativo. O vendedor da opção tem como contrapartida do prêmio recebido, a obrigação de compra do ativo objeto, se o comprador o solicitar.

A função de remuneração da *put*, no vencimento, é dada pela equação (2.3), a seguir:

$$P_T = \max(K - S_T, 0) \quad (2.3)$$

Onde: P_T é o valor da opção de venda em T , S_T é o preço do ativo objeto e K é o preço de exercício.

O gráfico da Figura 2.22 que é a função de remuneração mostra como o valor da opção de venda varia em relação ao preço do ativo objeto na data de vencimento. Neste caso, a opção tem valor quando o preço do ativo objeto for menor do que o preço de exercício.



Figura 2.22 – Remuneração de uma opção de venda no vencimento.

A Tabela 2.4 sintetiza os direitos e obrigações no mercado de opções.

Tabela 2.4 - Direitos e obrigações no mercado de opções

		VENDEDOR	COMPRADOR
Prêmio		Recebe o Prêmio	Paga o Prêmio
Direito/Obrigações		Tem a obrigação de atender o Titular	Tem o direito de escolha do Exercício
No Exercício	<i>Call</i>	Vende o Ativo	Compra o Ativo
	<i>Put</i>	Compra o Ativo	Vende o Ativo

A opções podem ser também classificadas segundo a possibilidade de exercício em européias e americanas. Nas opções européias os direitos somente podem ser exercidos na data de vencimento. Nas opções americanas os direitos podem ser exercidos a qualquer tempo, antes da data prevista para o vencimento. Segundo HULL (1989), essa característica confere às opções Americanas um valor no mínimo igual ao valor de opções Européias semelhantes.

Para avaliação de opções Americanas é necessária a determinação de uma política ótima de investimento na qual se deve determinar a partir de qual valor do preço do ativo objeto, a opção deve ser exercida, de modo a maximizar o valor presente de sua remuneração.

A classificação pode ser feita também de acordo com a relação de seu preço de exercício para o preço do ativo objeto, conforme é mostrado na Tabela 2.4.

Tabela 2.5 – Relação de seu preço de exercício das opções para o preço do ativo objeto

CLASSIFICAÇÃO	OPÇÃO DE COMPRA	OPÇÃO DE VENDA
Dentro do dinheiro (<i>in the money</i>)	Preço do objeto é maior do que o preço de exercício	Preço do objeto é menor do que o preço de exercício
No dinheiro (<i>at the money</i>)	Preço do objeto é igual ao preço de exercício	Preço do objeto é igual ao preço de exercício
Fora do dinheiro (<i>out of the money</i>)	Preço do objeto é menor do que o preço de exercício	Preço do objeto maior do que o preço de exercício

2.3.5 - Operações de Hedge

Após a apresentação dos instrumentos derivativos como instrumento de gestão de risco uma questão que se coloca é a seguinte: Quanto a empresa deve *Hedgear*?

Para estabelecer uma política de *hedge*, a empresa deve estudar o assunto com cautela e definir o nível de risco que pretende assumir e avaliar as vantagens e as desvantagens da operação. Para NETO (1999), fazer uma operação de *hedge* é tão complicado quanto não fazer *hedge*, pois a decisão sempre terá uma parcela subjetiva. A decisão de realizar ou não *hedge* é, em última análise, uma decisão especulativa.

O risco é um fator inerente a todas as atividades econômicas, contudo conforme já foi analisado na seção 1.4, no Capítulo 1 desta Dissertação, a atividade de mineração possui determinadas especificidades que a tornam uma atividade particularmente afetada por riscos de ordem técnico-econômica. O gestor de uma empresa de mineração nunca poderá eliminar todos os riscos, poderá no máximo administrar alguns deles, dependendo de suas características, probabilidades de ocorrência e do custo para fazê-lo.

O retorno está diretamente ligado ao nível de risco assumido. Os agentes econômicos que assumem o risco, especuladores, seguradoras e bancos visam obter lucro, o que irá onerar as operações de *hedge*. Em última análise, cobram por sua atividade. Lembrando que existem ainda outros custos envolvidos no processo de transferência de risco, tais como *spread*, corretagens e emolumentos de bolsa ou centrais de registros. A estrutura tributária pode também ser considerada um custo adicional, especialmente no caso brasileiro.

Portanto, se o gestor quiser eliminar todos os riscos, a empresa mineradora sob sua gestão terá provavelmente prejuízo, mesmo que seja muito eficiente operacionalmente.

Para a realização de *hedge* não existe um instrumento derivativo melhor ou pior, o que existe é aquele instrumento que se adapta mais ou menos às necessidades de *hedge* que uma empresa tem. Os instrumentos derivativos podem ainda ser utilizados em conjunto, buscando o melhor gerenciamento do risco a um custo menor.

Ao longo do presente Capítulo foram analisadas as variáveis fundamentais para a avaliação econômica de projetos de mineração, tanto os aspectos referentes à caracterização e predição das variáveis do mercado, como também os instrumentos de gestão dos riscos decorrentes das incertezas associadas a essas variáveis. No próximo Capítulo, será abordada a Teoria das Opções Reais. Essa teoria é utilizada para avaliação de ativos reais (projetos), que diferentemente dos ativos financeiros não são negociados de maneira regular no mercado de bolsa.

CAPÍTULO 3

TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

3.1 – Introdução

A Teoria das Opções Reais (TOR) é fundamentada na teoria das opções financeiras, uma vez que decisões gerenciais, ao longo da vida útil de um projeto de investimento, podem ser consideradas análogas às opções.

A abordagem de opções reais trata-se de uma abordagem complementar ao fluxo de caixa descontado. As opções reais podem incrementar as estimativas dos projetos de investimentos.

A análise de investimento num projeto pela teoria das opções fornece basicamente, dois resultados: o valor da oportunidade de investimento (ou da opção de investimento) e a regra de decisão, através do valor crítico ou de “gatilho” da variável estocástica (preço do cobre, por exemplo) a partir do qual deve-se realizar o investimento.

O valor da oportunidade de investimento pela ótica da TOR é sempre maior ou igual ao VPL, já que pode incluir valiosas opções gerenciais embutidas no projeto, que não foram incluídas no VPL tradicional. Em VAN HORNE (1992), a questão é colocada na forma de uma equação tipo:

$$\text{Valor do Projeto} = \text{VPL} + \text{Valor da Opção}$$

A idéia consiste em adicionar o valor da opção (ou das opções) ao VPL, pois de outra forma se subavaliará o valor da oportunidade do investimento.

Os métodos tradicionais de análise de investimento, baseados nas regras de decisão do Fluxo de Caixa Descontado, assumem determinados pressupostos que podem subestimar o valor de um investimento. Eles assumem uma gestão passiva a uma determinada estratégia operacional como, por exemplo, a hipótese de iniciar o

projeto imediatamente, e operar continuamente em uma determinada escala até a vida útil pré-estabelecida. Estes métodos ignoram os efeitos de sinergia que um projeto de investimento pode criar.

Algumas vezes a performance do projeto pode levar ao desenvolvimento de um segundo projeto que não seria possível sem o primeiro. Portanto, as técnicas tradicionais de análise normalmente subestimam oportunidades de investimento porque ignoram a flexibilidade gerencial para alterar decisões com novas informações.

No processo de análise de investimento as variáveis de entrada alteram-se, dependendo dos diferentes parâmetros assumidos, como a suposição da melhor hipótese e da pior hipótese. Pode-se realizar a análise diversas vezes variando os parâmetros de projeto. O resultado desta análise pode ser expresso como uma função de densidade de probabilidade dos retornos monetários esperados para o projeto. Esses tipos de análise utilizando os métodos tradicionais VPL, TIR e *Payback* gerarão um uma distribuição de retornos como o da Figura 3.1.

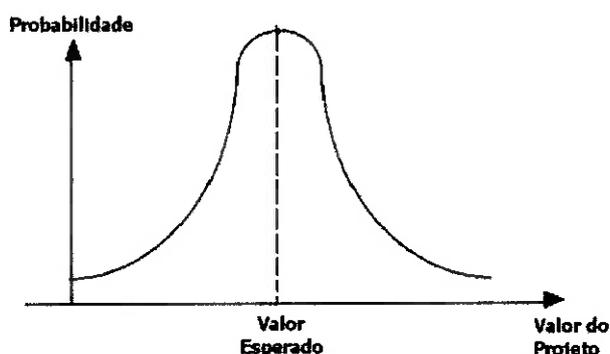


Figura 3.1 -Valor do Projeto excluindo o valor da flexibilidade

Na realidade sempre se considera o método tradicional de análise, sob a perspectiva dos pressupostos considerados no parágrafo anterior. Entretanto tem-se a flexibilidade de alterar as decisões de acordo com as informações futuras. Se no futuro as condições são favoráveis, pode-se expandir o projeto e absorver as vantagens advindas desta condição. Se o futuro mostra-se desfavorável, pode-se reduzir ou cancelar o projeto.

Outra maneira de tratar a flexibilidade é levar em consideração o potencial de expansão do projeto, enquanto limita-se o impacto da redução do projeto. O que resulta em um projeto com alto valor esperado causando uma distorção na distribuição conforme pode ser visto no lado direito da Figura 3.2.

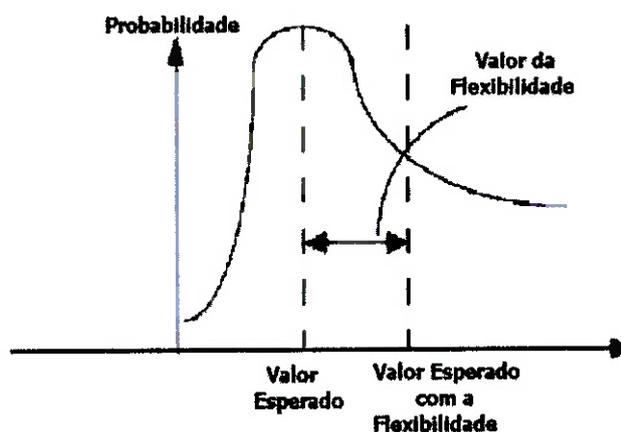


Figura 3.2 - Valor do Projeto incluindo o valor da flexibilidade

Segundo DIXIT E PINDYCK (1995), irreversibilidade, incerteza e possibilidade de adiamento são as três características mais importantes das decisões de investimento. Na prática, as decisões dos investidores levam em conta, cada uma delas e as suas interações. A abordagem de opções reais é uma tentativa de modelar teoricamente, as decisões dos investidores, e o seu entendimento requerem a análise dessas características.

3.2 – Fundamentos Teóricos

Alguns conceitos são fundamentais para a compreensão da Teoria de Opções Reais²⁰. Esses conceitos advêm da Teoria Financeira de Opções e serão apresentados na seqüência, visando subsidiar o entendimento das seções posteriores.

²⁰ As fundamentações matemáticas dos principais conceitos apresentados neste capítulo estão detalhadas nos anexos A, B, e C.

3.2.1 – Arbitragem

É um dos conceitos centrais da teoria de avaliação de ativos derivativos como as opções. O primeiro trabalho a utilizar este conceito foi o célebre artigo de BLACK E SCHOLLES (1973). O conceito de arbitragem encerra a possibilidade de um participante do mercado que, assumindo um risco praticamente nulo, operar em mais de um mercado, simultaneamente, valendo-se de distorções de preços relativos para garantir um retorno livre de risco, maior do que o retorno do ativo livre de risco do mercado. Se este lucro existir então há uma oportunidade de arbitragem no mercado.

O conceito de arbitragem é utilizado para definir o preço justo de um ativo financeiro. O preço justo de um ativo é aquele obtido em um ambiente livre de oportunidades de arbitragem.

3.2.2 - Mercado Completo

Para DIXIT e PINDYCK, (1995), um mercado é dito completo quando existem ativos suficientes para reproduzir a remuneração de um título derivativo, como por exemplo, uma opção. Já um mercado incompleto é aquele em que a remuneração de um título derivativo, não pode ser replicada utilizando os ativos existentes.

Se um mercado for completo, uma opção pode ser avaliada utilizando o argumento de ausência de arbitragem, ou seja, o valor da opção é dado pelo valor esperado no vencimento, descontada à taxa de juros livre de risco. Caso o mercado não seja completo, a taxa de juros livre de risco não pode ser utilizada como taxa de desconto.

3.2.3 – Investimento

DIXIT e PINDYCK (1995), definem investimento como sendo o ato de incorrer em custos imediatos na expectativa de futuros benefícios. Um conceito que será bastante empregado é o retorno de um investimento.

Numa analogia com o retorno de uma ação, o retorno de qualquer investimento pode ser decomposto em duas parcelas aditivas:

Dividendos + Ganho de Capital

No investimento em uma jazida, por exemplo, em cada instante da operação da mina, o dividendo é o fluxo de produção do concentrado do minério (convertido monetariamente pelo preço desse produto no mercado) enquanto que o ganho de capital é a valorização (ou desvalorização, pois o ganho de capital pode ser negativo) do volume recuperável de minério que ainda não foi produzido, em virtude da evolução do preço metal.

3.2.4 - A Oportunidade de Investimento Como Uma Opção Real

Num artigo precursor, MYERS (1977), defendeu que uma oportunidade de investimento deve ser vista como uma opção. Mais tarde, KESTER (1984), reforça a idéia de que existe uma estreita semelhança entre uma oportunidade de investimento e uma opção de compra (*call option*) sobre um ativo financeiro. Assim, por analogia, o capital a investir no projeto representa o preço de exercício da opção, o valor presente dos fluxos de caixa resultantes do projeto, corresponde ao valor do ativo subjacente e o tempo disponível antes da oportunidade desaparecer representa o tempo para o exercício. TRIGEORGIS (1988) sistematiza essas analogias através da Tabela 3.1

Tabela 3.1- Analogia entre uma opção de compra e uma oportunidade de investimento

Opção de Compra de uma Ação	Oportunidade de Investimento
• Valor de Mercado da Ação	• VPL do Fluxo de Caixa do Projeto
• Preço de exercício	• Investimento Inicial
• Tempo até o exercício	• Tempo até a oportunidade de Investir desaparecer
• Incerteza relativa ao Preço da Ação	• Incerteza relativa ao Valor do Projeto
• Taxa de Juros sem riscos	• Taxa de Juros sem riscos

Adaptado de TRIGEORGIS (1988)

KESTER (1984), afirma que o valor de uma oportunidade de investimento corresponde, pelo menos, a diferença entre o VPL dos fluxos de caixa e o valor do investimento, i.e., valerá pelo menos o VPL, mas o seu valor será, provavelmente, mais elevado dependendo:

- intervalo de tempo pelo qual o projeto possa ser diferido (o adiamento da implementação do projeto dá à empresa a capacidade de ‘esperar para ver’);
- do risco do projeto (curiosamente é um fator que tende a contribuir positivamente para o valor da oportunidade de investimento);
- o nível das taxas de juros (altas taxas de juros geralmente se traduzem em altas taxas de atualização, o que diminui o VPL dos fluxos de caixa futuros gerados pelo projeto, mas, altas taxas de juros implicam também um menor VPL do capital necessário para exercer a opção);
- finalmente, do grau de exclusividade para exercer a opção (ao contrário das opções financeiras, as opções reais são geralmente partilhadas, o que não permite à empresa ter a exclusividade no direito de investir).

Na mesma linha, PINDYCK (1991) e DIXIT E PINDYCK (1995), afirmam que um projeto de investimento irreversível é semelhante a uma opção de compra. O detentor de uma opção de compra tem o direito, sem qualquer obrigação, de em uma (ou até uma) determinada data, pagar o preço de exercício e receber em troca um determinado ativo. Da mesma forma uma empresa que detenha uma oportunidade de investimento, possui a opção de investir, agora ou no futuro, recebendo em troca um ativo com um determinado valor (o projeto). Mas, tal como sucede com as opções financeiras, o ato de investir, isto é, o ato de exercer a opção, é irreversível, já que o investidor ou a empresa não mais poderá recuperar a posição que detinham anteriormente.

Assim, quando se realiza um investimento, exerce-se uma opção e, ao fazê-lo, perde-se a oportunidade de investir mais tarde, isto é “mata-se” a opção de diferir o investimento. A empresa perde assim a possibilidade de esperar por nova (e imprevisível) informação que possa afetar o valor do projeto. Desta forma, a perda da opção de investir (mais tarde) é um custo de oportunidade, que deve ser adicionado

ao custo do investimento. Daí, não é suficiente que o VPL de um projeto seja positivo. Como afirma SICK (1995), o VPL deverá ser pelo menos igual ao valor da opção de investimento quando mantida “viva”, ou, dito de outro modo, o VPL deverá compensar o custo de oportunidade associado à perda da opção de adiar o investimento.

TRIGEORGIS (1988), salienta que mesmo que não exista nenhuma outra opção real, o direito de adiar o projeto tem um valor positivo, mesmo que o VPL do projeto, se realizado agora, seja negativo. Tal direito dá ao gestor a capacidade de esperar e só investir no projeto caso o VPL se torne positivo, sem haver a correspondente obrigação (de investir) se o cenário oposto ocorrer.

Como referem diversos autores, e tal como nas opções financeiras, o valor de uma oportunidade de investimento resulta, em parte, das incertezas ligadas ao valor futuro do projeto, e, mais concretamente, da assimetria ligada ao direito de opção.

Até o exercício, ou seja, até a data em que a oportunidade de investimento desaparece, a empresa só investe se essa for a melhor decisão, caso contrário a empresa adia o investimento. No exercício, a empresa apenas realiza o projeto se este estiver *in-the-money*, caso contrário deixa morrer a opção sem a exercer. Vê-se assim o caráter assimétrico dos ganhos e perdas da oportunidade de investimento. O detentor da opção de investimento poderá maximizar o seu ganho, mas limita sempre a sua perda ao que pagou para deter a oportunidade de investimento.

Segundo DIXIT E PINDYCK (1995), o fato de os gestores olharem para um investimento como uma opção, semelhante a uma opção de compra poderá ajuda-los a compreender melhor o impacto da incerteza na decisão de investir e na determinação do momento ótimo para realizar o investimento. Quanto maior for a incerteza ligada ao projeto, maior será o valor da opção de investimento e maior será o incentivo para manter viva essa opção, isto é, maior será o incentivo para diferir o investimento.

Como se observou, existe uma estreita analogia entre as opções financeiras e as opções reais, no entanto, como refere TRIGEORGIS (1988), essa analogia não é

perfeita. Dentre as diferenças existentes, a que mais influenciará a decisão e a escolha do tempo mais adequado para o investimento será a seguinte:

“Enquanto que as opções de compra são um direito exclusivo do seu detentor, as opções de investimento são, na maioria dos casos, compartilhadas com os concorrentes. Tal fato poderá motivar a realização, mais cedo, do investimento de tal forma que ocorra uma antecipação da empresa em face desses concorrentes”.

KESTER (1984), esclarece que a antecipação do investimento poderá dever-se às seguintes razões:

- presença de concorrentes;
- elevado VPL do projeto;
- baixo nível de risco e de taxa de juro;
- grande rivalidade.

Como facilmente se percebe, elevados níveis de competição entre as empresas de uma dada indústria, terão grande influência, quer ao nível da escolha do tempo mais adequado para o investimento, quer ao nível do próprio valor da oportunidade de investimento. Isto se deve à conjugação de dois fatores, por um lado o valor do projeto pode diminuir significativamente como resultado da entrada de um concorrente, por outro lado a empresa não escapará a essa perda pela simples venda da opção de investimento a outros. Assim, conforme conclui KESTER (1993), a única solução que a empresa terá, será antecipar-se aos seus concorrentes e investir mais cedo.

Na Figura 3.3 é mostrado, graficamente, o impacto que a entrada de um novo concorrente poderá ter relativamente ao valor do projeto.

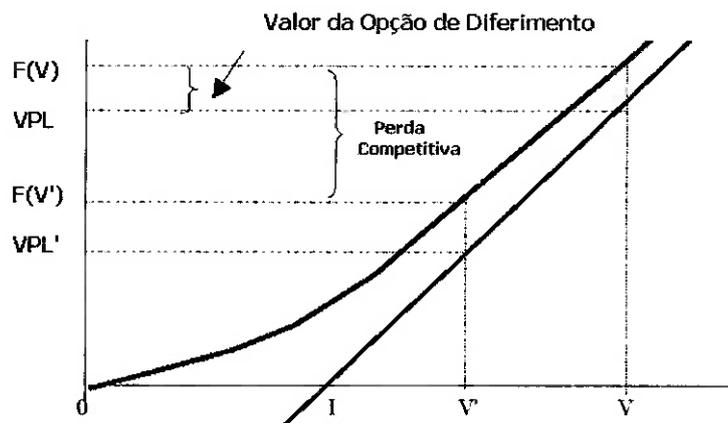


Figura 3.3 – Impacto da entrada de um novo concorrente no valor da oportunidade de investimentos - Adaptado de TRIGEORGIS 1988

Onde:

- VPL - Valor Presente Líquido dos fluxos de caixa do projeto se realizado agora;
- VPL' - Valor Presente Líquido dos fluxos de caixa do projeto após a entrada de um novo concorrente;
- I - Investimento inicial;
- VPL e VPL' - Respectivamente $V-I$ e $V'-I$;
- $F(V)$ e $F(V')$ - Valor da oportunidade de investimento antes e após a entrada de um novo concorrente.

Se a perda competitiva (perda no valor da opção de investimento), pela entrada de um concorrente, puder ser antecipada pela empresa, esta deverá investir mais cedo, desde que a perda potencial do valor do projeto seja maior do que o custo associado à morte da opção de diferir o investimento.

No entanto, o custo de adiar o projeto não resulta apenas do risco de entrada de novos concorrentes. Conforme apontam DIXIT e PINDYCK (1995), esse custo inclui também os fluxos de caixa que a empresa deixa de gerar pelo fato de diferir o investimento. Assim, como apontam SMIT e ANKUM (1993), a escolha do tempo mais adequado para o investimento, deve ser visto da mesma forma que a escolha do

tempo mais adequado para exercer uma opção de compra sobre uma ação que distribua dividendos.

DIXIT e PINDYCK (1995), consideram que a questão central é saber qual o momento certo para exercer a opção de investimento, ou seja, é fundamental saber qual o tempo ótimo para a realização da opção de investir. Para tal é necessário ver a influência no valor do projeto dos fatores atrás referidos, por um lado, o impacto da incerteza no valor da opção de investir, que poderá impelir o gestor a adiar o investimento, por outro, o impacto da existência de concorrentes e de fluxos de caixa perdidos, que incentivará a empresa a investir mais cedo de tal modo a antecipar-se aos concorrentes (e, assim, ganhar alguma vantagem competitiva) e receber os fluxos gerados pelo projeto.

Na prática conforme concluem SMIT e ANKUM (1993), trata-se de encontrar, para todos os pontos de decisão, um valor crítico, no qual aquilo que se perde, em resultado do adiamento, iguala o valor da opção de diferir o projeto por mais um período. Sempre que o valor do projeto for inferior a esse valor crítico, o projeto deverá ser diferido. Caso contrário, a empresa deverá realizar, de imediato, o investimento.

Foi visto, até aqui, que as oportunidades de investimento são semelhantes às opções de compra e que o seu valor depende de um conjunto de fatores, dentre os quais pode-se destacar, a incerteza que envolve o projeto, o tempo a decorrer até o exercício, a taxa de juro e a exclusividade (ou não) do direito de opção. Foi visto também, que a realização de um investimento é um ato irreversível e que essa realização constitui um custo de oportunidade. Realçou-se que o gestor, pelo fato de olhar para as oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais (opções reais), estará mais atento ao impacto da incerteza na decisão de investir, particularmente, na escolha do tempo mais adequado. Finalmente, foi feita a referência cuja questão fundamental que se coloca ao gestor será a de determinar qual o momento ótimo para a execução do projeto, e que para o qual concorrem fatores que se opõem: por um lado, quanto maior a incerteza, maior a tendência para o diferimento, por outro, quanto mais partilhada for a oportunidade de investimento e

mais volume de fluxo de caixa a empresa perder com o adiamento, maior será a tendência para antecipar esse investimento.

3.2.5- Taxas de Vedação

Para evitar fazer todos os projetos que normalmente teriam $VPL > 0$ muitos gestores estabelecem elevadas taxas de desconto, chamadas de taxas de vedação, que são muito superiores a taxas que seriam obtidas usando o CAPM²¹ ou o custo médio ponderado de capital. Como indicam DIXIT e PINDYCK (1995), essas taxas são tipicamente de três a quatro vezes maiores que o custo de capital.

Pode-se calcular as taxas de vedação usando a teoria das opções. A partir desse ponto, portanto, taxa de vedação é a taxa de desconto do fluxo de caixa que implica em uma decisão idêntica à decisão que seria tomada usando a moderna teoria das opções. Essa taxa será válida apenas para uma situação específica, isto é, será função do projeto e do tempo de expiração dos direitos de investimento naquele projeto, calculada pela teoria das opções. A taxa de vedação será única, isto é, descontará o fluxo de caixa total do projeto. Projetos com $VPL > 0$, calculados com essa taxa, seriam realizados imediatamente.

A regra de decisão da teoria das opções é mais bem vista através do seu valor de gatilho, como por exemplo, P^* , preço do concentrado do minério (metal) de gatilho, o qual levaria ao imediato investimento num projeto. Assim, com a teoria das opções se determina P^* e em seguida, se substitui P^* no fluxo de caixa²². Calcula-se então a taxa interna de retorno (TIR) desse fluxo de caixa. Essa TIR é a taxa de vedação, já que a partir dela o VPL fica positivo (recomendando o investimento), e a decisão seria a mesma que a obtida pela teoria das opções.

²¹ *Capital Asset Pricing Model*, os conceitos referentes ao CAPM estão detalhados no apêndice B, seção B5.

²² Assim se teria o valor do fluxo de caixa no momento em que é ótima a realização do investimento.

Uma aplicação da taxa de vedação seria no estudo de carteira de projetos com restrições orçamentárias, em que se faria uma hierarquização de projetos por taxas de vedação de projetos, para comparar classes de projetos em termos de disposição para investimento. Isso poderia ser feito com P^* , mas em alguns casos pode-se ter outras variáveis como estocástica, por exemplo, p^* (preço unitário crítico, isto é, por unidade de investimento), ou I^* (investimento crítico em projetos com incerteza em custos), de maneira que a taxa de vedação poderia comparar projetos com diferentes tipos de gatilho.

3.2.6 – Irreversibilidade dos Custos de Investimentos

A irreversibilidade dos custos de investimento é sem dúvida, a principal característica da decisão de investir. Uma despesa de investimento deve ser considerada com um custo afundado (*sunk cost*) e, portanto, irreversível. Tal fato está associado à impossibilidade do investidor recuperar os valores já empregados caso desista do projeto, pois os investimentos de um projeto específico são em grande parte irrecuperáveis.

Tomando-se como exemplo, uma mineradora que detém um prospecto, os investimentos em pesquisa mineral são específicos de cada depósito e irrecuperável nesse sentido. Os investimentos em uma campanha de levantamentos geológicos com sondagens mal sucedidas (resultados aquém das expectativas), só teriam chances de serem recuperados através da venda do direito minerário a outra mineradora, provavelmente com um desconto bastante elevado.

Segundo mesmo o investimento, não exclusivo de uma mineradora, por exemplo, são parcialmente irreversíveis. Microcomputadores, caminhões comuns, edificações civis, podem ser vendidos a empresas que não são do setor, mas a preços muito inferiores ao custo de reposição, frequentemente o mercado de equipamentos usados paga valores abaixo do que se poderia supor como justo, devido ao efeito da

assimetria de informação entre comprador e vendedor (desconfiança do comprador) sobre o real estado do equipamento²³.

Em terceiro lugar, a irreversibilidade pode ser produzida até mesmo pelo estatuto social da empresa, que pode limitar a venda de ativos para um concorrente direto no mercado. Por último, investimentos em recursos humanos também são parcialmente irreversíveis uma vez que não é assegurado que os custos de recrutamento, seleção e treinamento serão recuperados pela contribuição de produtividade dos colaboradores.

Assim a maior parte do custo de investimento é um custo afundado. Logo, a irreversibilidade faz com que a espera tenha valor. Somente quando a probabilidade de insucesso é suficientemente baixa é que o investimento irreversível deve ser feito. A espera é reversível (exceto no caso de investimentos do tipo agora ou nunca).

A irreversibilidade desempenha um papel fundamental na avaliação de projeto de investimento. Uma empresa quando faz um investimento irreversível cria custo de oportunidade importante, que deve ser levado em consideração. Este custo corresponde à oportunidade de esperar por novas informações ao invés de investir imediatamente. A opção de espera, sua importância e o seu valor serão estudados nas seções 3.3 e 3.4.

3.3 - Modelos de Decisões Gerenciais

Para ROSS (1995), o valor de qualquer projeto de investimento resulta de três fatores. Primeiro depende do seu *in-the-money value*, que nada mais é do que o VPL do investimento, se realizado agora. Depois, o seu valor depende também da sua capacidade de diferimento, ou seja, ao VPL tradicional se acresce o valor da opção de diferimento. Finalmente, a terceira fonte de valor vincula-se com a flexibilidade

²³ Na literatura econômica, isso é conhecido como efeito do “mercado de limões” (limão seria um equipamento usado).

operacional ou de gestão que corresponde à capacidade do gestor de tomar decisões ao longo da vida do projeto, de forma a adaptá-lo à realidade.

Conforme afirmam BUSBY e PITTS (1997) e KOGUT e KULATILAKA (1994), um projeto que possa ser modificado e adaptado pelo gestor, conforme o tempo for passando e a suas condições de contorno forem se modificando, valerá mais do que outro que não contenha esta possibilidade. Logo, a flexibilidade tem valor. No entanto, esse valor só existe porque existe a incerteza, e quanto maior ela for, maior o valor da flexibilidade.

A incerteza refere-se a situações onde pode ocorrer um conjunto de valores, associados a seus respectivos estados, com probabilidades estritamente positivas para, no mínimo, dois diferentes valores. Em outras palavras, a incerteza em uma variável (exemplos: o preço do cobre, o valor do projeto e a demanda) pode ser vista como a possibilidade dessa variável assumir valores diferentes do que se espera.

A Figura 3.4 mostra esses possíveis desvios, em relação ao valor esperado em termos de distribuição de probabilidades²⁴. Pode-se observar que a incerteza tem dois lados: o “lado ruim” da incerteza, que para uma mineradora que investe em uma jazida de cobre é o lado esquerdo (para da indústria de transformação seria o oposto) e o “lado bom” da incerteza, no caso o lado direito da distribuição.

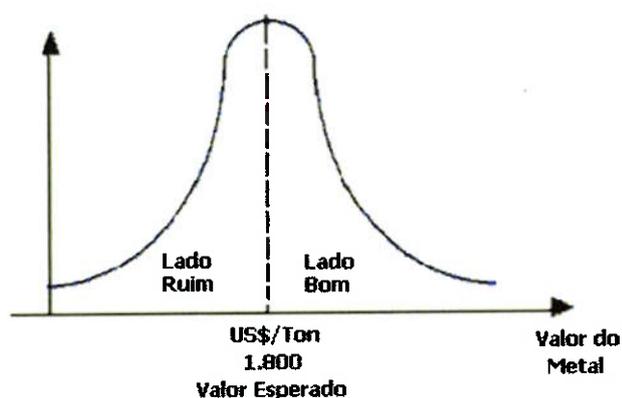


Figura 3.4 - Os dois lados da incerteza

²⁴ A distribuição normal mostrada é apenas ilustrativa, já que na verdade ela é inadequada para os preços do cobre, pois atribui probabilidades positivas para preços negativos.

Os gestores eficientes revisam decisões de investimento e decisões operacionais, com o objetivo de maximizar o valor dos projetos. Uma ação gerencial racional procura maximizar os ganhos quando os preços estão altos e minimizar as perdas quando os preços estão baixos.

Conforme concluem TRIGEORGIS e MASON (1987), o gerenciamento ativo, portanto, faz com que a incerteza²⁵ adicione valor à oportunidade de investimento, e isso não é considerado pelo método do VPL. Assim, a incerteza aumenta o valor da oportunidade de investimento (ao contrário do que diz o VPL) devido à ação gerencial assimétrica em resposta à incerteza. Esse é o primeiro efeito de assimetria da incerteza: assimetria no valor da opção de investimento.

O aumento no valor da oportunidade de investimento causado pela incerteza econômica não significa um aumento na disposição de investir, pois o aumento de valor é devido à valorização da flexibilidade gerencial, que no caso mais comum²⁶ é o valor da habilidade de espera, e o ato de investir destrói essa flexibilidade gerencial ('mata a opção').

Assim, um aumento da incerteza econômica em geral reduz a disposição de investir em um projeto (adia o exercício da opção de investir)²⁷.

Para efeito de tomada de decisão, o questionamento em relação a qual o lado da incerteza (conforme a Figura 3.4) será mais importante dependerá do tipo de decisão a ser tomada. Se for uma decisão de investimento, o 'lado ruim' da incerteza é o que governa a decisão ótima de investimento, quando a espera é possível. Por outro lado, se for uma decisão de abandono, o "lado bom" da incerteza é o relevante. Esse é o segundo efeito de assimetria da incerteza: assimetria na regra de decisão.

²⁵ Isso é válido para a incerteza econômica, como também (e com até maior intensidade) para a incerteza técnica.

²⁶ Se a opção mais relevante for a opção de expansão ou a de parada temporária, por exemplo, um aumento no valor dessas opções estimularia o imediato investimento. Para investimentos em desenvolvimento de uma jazida, no entanto, o *escolha do tempo mais adequado* é geralmente a flexibilidade mais relevante (ver item 3.3.2 da dissertação).

²⁷ Para a incerteza técnica o efeito é o oposto, desde que o investimento possa ser feito em estágios, como se fosse uma opção de expansão.

Como foi referido anteriormente, uma das dificuldades do VPL e de outros métodos tradicionais, é a sua incapacidade de incorporar e corretamente avaliar a flexibilidade de gestão. Assim, diversos autores defendem que a perspectiva correta é a de entender esta flexibilidade como um conjunto de opções, as quais devem ser levadas em conta para efeitos de avaliação do projeto.

Até agora as referências feitas à flexibilidade operacional, ou de gestão, foram feitas de uma forma superficial, apenas dizendo-se que esta corresponde à capacidade do gestor em modificar o projeto, durante a sua realização, de maneira a adaptá-lo às alterações ocorridas no seu meio envolvente. O que importa saber, é em que consiste, na prática, a flexibilidade operacional. Para tal será seguido, genericamente, TRIGEORGIS (1996b).

A medida em que o projeto se vai desenrolando e as incertezas iniciais vão-se dissipando, o gestor poderá usar a flexibilidade do projeto para adaptá-lo à nova realidade. Genericamente, o gestor poderá diferir, expandir, contrair, encerrar temporariamente, abandonar ou de qualquer outra forma alterar a estratégia inicialmente estabelecida. Tudo isto são opções Reais, análogas às opções financeiras e que poderão ser avaliadas recorrendo à Teoria de Avaliação de Opções conforme sugere KENSINGER (1987).

As decisões gerenciais relacionadas às opções reais podem ser esquematicamente sintetizadas como a seguir:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| | - Investir Já |
| Decisão de Investimento: | - Esperar |
| | - Perder a Oportunidade |
| | - Mudar a Escala |
| Decisão de Operação: | - Continuar |
| | - Fechar |
| | - Desativar |

O valor decisão gerencial pode ser visto como a soma do VPL com o valor da(s) opção (ões) e com o efeito competitivo conforme mostrado na Tabela 3.2 a seguir:

Tabela 3.2 Classificação e Valor das Opções

Classificação	Estratégia Operacional	Valor da Opção
VPL Estático		VPL
Método de Opções		VPL + Opção de Abandono
Única - Expirando		VPL - Perda Competitiva
Compartilhada Expirando		VPL + Opção de Espera
Única - Adiável		VPL + Espera + Abandono
Única com Abandono		VPL + Espera - Perda Comp
Compartilhada Adiável		Volta ao casos anteriores
Compartilhada Adiável Entrando Antes		

Legenda: ↓ Decisão de Investir; ↑ Decisão de Sair; ⚡ Entrada de Competidor (fora de Controle)
 T = Vida Esperada do Projeto; T_1 = Período Adiável; T' = Abandono Antecipado Devido ao Mercado

3.3.1 - Modelando a Incerteza como um Processo Estocástico

Quando se usa o FCD na avaliação de um projeto de investimento em mineração, por exemplo, o preço do concentrado do minério usado para calcular a receita é o preço atual do mercado, ou um valor esperado do preço para a época em que o projeto entrará em operação. Complementa-se o estudo com uma análise de sensibilidade para preços maiores e menores.

Na teoria das opções, considera-se a natureza estocástica da evolução desses preços (ou de outra variável sujeita a incerteza econômica) através de diferentes modelos estocásticos e também se considera a ação gerencial que são tomadas nos projetos devido às variações desses preços. Do ponto de vista teórico, esse é outro ponto a favor da teoria das opções reais em relação ao FCD²⁸.

Em relação à variável estocástica a ser escolhida num projeto de investimento, geralmente se escolhe uma variável ligada à receita, em mineração o preço do concentrado do minério (P_c) ou o valor da jazida desenvolvida (V), que

²⁸ Quando não há ações gerenciais relevantes (opções) pode se usar apenas o valor esperado (1º momento probabilístico). Na presença de decisões gerenciais, a não consideração de parâmetros da distribuição probabilística, como a variância (2º momento), leva a erros importantes.

pode ser visto como um valor unitário do projeto. No primeiro caso, existe a vantagem da liquidez no mercado, enquanto que no segundo caso, praticamente não existe um mercado regular e organizado de jazidas minerais. Assim, a formação de preços é pouco confiável para adoção da segunda hipótese.

Ao se utilizar o preço do concentrado do minério como variável estocástica, para que o modelo se torne razoavelmente realista, é conveniente que se considere também o custo operacional como estocástico, o que torna o modelo mais complexo, com duas variáveis estocásticas.

Pode-se também tratar os custo de investimento como estocástico, mas o impacto da incerteza desses custos na economicidade de um projeto de investimento em mineração é menor que o caso da receita. Contudo, a adoção de um modelo mais complexo em que o investimento também é estocástico não refina significativamente a solução.

A incerteza técnica remanescente na época da decisão do desenvolvimento de uma jazida, é pequena, desde que o programa de delimitação da jazida foi suficiente, e continua se reduzindo com o investimento acumulado com a lavra. Essa incerteza é um risco considerado diversificável pelos investidores.

Caso se considere ainda alta a incerteza técnica após o programa de delimitação da jazida, o gerente poderá:

- a) programar novos investimentos seqüenciais em informações (sondagens) antes de investir em desenvolvimento;
- b) considerar as opções operacionais do projeto, de expandir caso a jazida seja maior ou apresente teores melhores do que o esperado, e caso seja menor, as opções de contrair, parar a operação, e abandonar o projeto, pelo uso alternativo de seus ativos;
- c) considerar diversificável o risco;
- d) considerar que o risco não é todo diversificável, desprezar as opções operacionais, e considerar as preferências subjetivas do gerente,

considerando por exemplo a aversão ao risco e também uma escala de prêmio de risco em função do volume de reservas.

Teoricamente, se a incerteza técnica é significativa, a rigor deve-se optar por fazer as análises dos itens (a) e (b), e comparar as alternativas de investir em informação, investir em desenvolvimento, ou esperar.

Os três principais processos estocásticos de interesse em aplicações econômicas e de finanças são: o Movimento Geométrico Browniano (MGB); o Movimento de Reversão à Média (MRM); e o Movimento de Saltos (*jump*) ou processo de Poisson, geralmente acoplado ao MGB.

3.3.2 - Opção de Espera (Escolha do tempo mais adequado)

A teoria tradicional de análise de investimentos, usando o VPL, pressupõe que o gerenciamento é passivo. Contingências futuras não criam flexibilidades gerenciais e posições tomadas no passado são mantidas inalteradas no futuro. Portanto, o VPL compara a decisão de investir agora ou nunca, verificando se o valor presente dos fluxos de caixa futuro é maior do que o custo de investimento.

Como os projetos possuem custos de investimento irreversíveis, a decisão de investir deve levar em consideração o custo de oportunidade de esperar por novas informações. Logo, a decisão de investimento é a decisão de trocar um custo irreversível por um ativo real, cujo valor flutua ao longo do tempo. Esta decisão de investimento é análoga ao exercício ótimo de uma opção Americana.

Considerando-se um projeto de investimento de capital, em que o gestor tem a flexibilidade de retardar o início do projeto, a fim de se beneficiar de informações futuras, e que tenha que tomar a decisão de investimento num período de T anos, onde este número é menor do que a vida útil do projeto. A remuneração do investimento em T , $\Omega(V_T, I)$, é dada pela equação (3.1), a seguir:

$$\Omega(V_T, I) = \max(V_T - I, 0) \quad (3.1)$$

Onde V_T é o Valor Presente dos Fluxos de Caixa Futuro e I é o Custo de Investimento.

Para DIXIT E PINDYCK (1995), a escolha do tempo mais adequado para a decisão de investimento é o período de tempo que conduz ao valor presente máximo da equação (3.1). Se a opção de investir não for exercida até T , então não é ótimo investir no projeto. Se o maior valor for atingido em zero, então a opção de espera não é valiosa, e o investimento deve ser realizado imediatamente. Caso a opção seja valiosa, então existe um período $\tau \in (0, T)$ em que será ótimo exercer a opção.

A equação (3.2) calcula o valor da opção de investir em um projeto.

$$F(V_t) = \max\left\{\Omega(V_t, I), \frac{1}{1 + \rho} E[F(V_{t+\Delta t})]\right\} \quad (3.2)$$

- $F(V_t)$ é o valor da oportunidade de investimento em t , $E[F(V_{t+\Delta t})]$ é o valor esperado da oportunidade de investimento em $t + \Delta t$;
- $\Omega(V_t, I)$ é a remuneração do investimento em t e ρ é uma taxa de desconto especificada exogenamente.

Na prática, ρ é interpretado como o custo de oportunidade de capital e, deste modo, ele deve ser igual ao retorno que o investidor poderia ter em outras oportunidades de investimento, com risco comparável.

Normalmente, o gerente de um projeto não quer saber somente o valor da opção de investir, quer saber também o Valor Crítico (V^*), a partir do qual é ótimo investir. V^* é dado pelo valor de V para o qual a igualdade em (3.3) é verdadeira, ou seja, é o valor de V para o qual é indiferente entre exercer a opção agora ou esperar até o próximo período.

$$V - F(V) = I \quad (3.3)$$

Se realmente a opção for valiosa, então mesmo que $V < I$, pode ser interessante investir no projeto. De acordo com MCDONALD e SIEGEL (1986) e DIXIT e PINDYCK (1995), a prática diz que o valor crítico é normalmente duas ou três vezes maior do que o custo de investimento.

Os gráficos da Figura 3.5 apresentam uma comparação ilustrativa das decisões de investimento tomadas sobre um mesmo projeto usando a metodologia Tradicional e Teoria das Opções Reais.

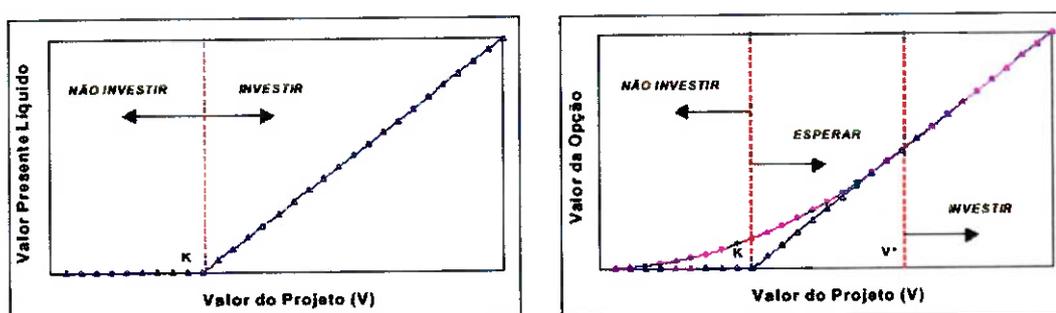


Figura 3.5 -Compara as decisões de investimento usando Teoria das Opções Reais e o VPL

O valor da opção de espera é influenciado pelas incertezas embutidas nas variáveis subjacentes ao problema. Por exemplo, quanto maior a volatilidade do Valor Presente dos Fluxos de Caixa, maior será o Valor da Opção, e conseqüentemente maior será o Valor Crítico.

3.3.3 - Opção de Suspensão Temporária e de Desativação

Em alguns projetos, especialmente nos de mineração, o gestor poderá ter a flexibilidade de suspender temporariamente a lavra, em determinado período, sempre que as receitas operacionais não permitirem cobrir os custos variáveis operacionais. Cada ano de lavra poderá ser visto como uma opção de compra sobre as receitas de venda do concentrado, tendo como preço de exercício os custos variáveis operacionais. Caso as condições de mercado se tornem altamente adversas, o projeto poderá ser definitivamente desativado, sendo os seus ativos vendidos ou usados em outro projeto. Em ambos os casos o seu valor será denominado por salvado.

Como, em princípio, o projeto poderá ser desativado em qualquer altura, este tipo de flexibilidade é semelhante a uma opção de venda Americana sobre o valor presente do projeto, tendo como preço de exercício o seu salvado. Assim, o valor do projeto corresponderá ao seu valor base mais o valor da opção de desativação.

Será importante referir, como defendem DIXIT e PINDYCK (1995), que a desativação do projeto poderá ter associada um custo de oportunidade, que corresponde à perda da opção de manter o projeto em funcionamento, de forma a poder ser usado de maneira lucrativa, caso as condições de mercado viessem a melhorar. Neste modelo, as receitas e os custos variáveis de produção futuros são considerados incertos (variáveis aleatórias) e definidos por processos estocásticos correlacionados. A empresa é suposta neutra ao risco e maximizadora de riqueza.

A suposição neutra ao risco (ou risco-neutra) parte do princípio que o valor de uma opção não depende do valor do retorno esperado do ativo-objeto.

Introduzido por COX e ROSS (1976), o conceito de avaliação neutra ao risco diz que, se um derivativo como, por exemplo, as opções, dependem somente dos preços dos ativos objetos, então a equação diferencial do valor da opção, não possuirá parâmetros que dependam das atitudes dos investidores em relação ao risco.

Em um ambiente no qual os investidores são indiferentes ou neutros em relação ao risco, o retorno esperado dos ativos comercializados é a taxa de juros livre de riscos. Assim sendo, os pagamentos efetuados, por exemplo, por uma opção são descontados (trazidos a valor presente) pela taxa de juros livre de riscos.

Em um mundo real, o valor de um ativo é resultado da sua relação risco e retorno. Como no ambiente risco-neutro todos ativos possuem o mesmo retorno esperado, o preço de um ativo é determinado pelo seu risco, ou volatilidade. A avaliação risco-neutra facilita enormemente o esforço de precificação das opções, sem que os resultados deixem de ser válidos no mundo real.

Seja t , um período de tempo durante a vida útil da empresa. As receitas pela venda de uma unidade de produção no tempo t e seus custos variáveis de operação

são dados por P_t e C_t , respectivamente. O lucro operacional da empresa no tempo t , representado por Π_t , é dado pela equação (3.4), a seguir:

$$\Pi_t = \max(P_t - C_t, 0) \quad (3.4)$$

Neste caso, a empresa irá operar quando a receita for maior do que os custos variáveis de operação; caso contrário, a empresa não irá operar evitando com isso prejuízos. É óbvio que em situações reais, uma empresa não conseguiria suspender a operação sem incorrer em custos adicionais, mas esses custos não serão considerados agora (para fins didáticos), tornando a avaliação mais simples.

O gráfico da Figura 3.6 mostra como o fluxo de lucro no tempo t varia em relação à receita operacional.

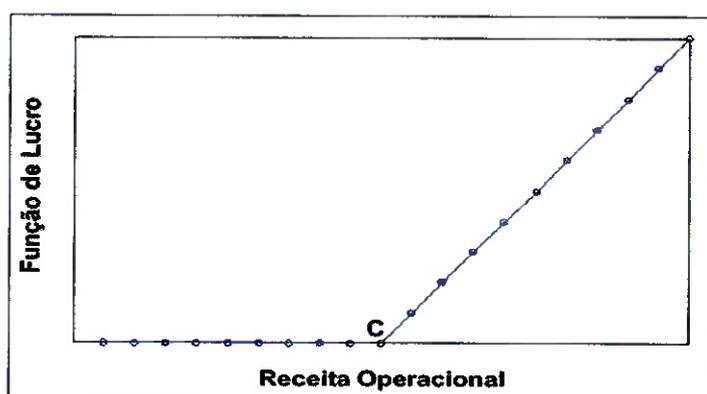


Figura 3.6 – Fluxo de lucro da Empresa num período t

Esta Figura é semelhante à Figura 2.21, que representa a remuneração de uma opção de compra no vencimento. E é através desta semelhança que o valor da decisão de operar ou não a empresa em um determinado estágio, condicionado às informações em $t=0$, será calculado.

Segundo MCDONALD e SIEGEL (1985), para cada estágio (t) de operação da empresa, o valor da decisão de operar, é semelhante ao valor de uma opção de compra do tipo Européia com vencimento em t . O valor desta opção é dado pela equação (3.5).

$$F_0(S) = E_0 \left[e^{-\rho t} \Pi_t(S_t, C) \right] \quad (3.5)$$

Como a decisão deve ser tomada ao longo da vida útil da empresa, então o valor presente da empresa, com opção de suspensão temporária, é dado a seguir:

$$VP = \int_0^T F_0(t) dt \quad (3.6)$$

Portanto, o valor de um projeto (ou empresa) que possui uma opção de decidir em cada período de operação, se suspende ou não a operação, é dado pelo somatório do valor de cada uma dessas decisões ao longo da sua vida útil do projeto.

O gráfico da Figura 3.7 compara o valor presente dos fluxos de caixa futuro de um projeto com suspensão temporária, com o de um projeto sem flexibilidades operacionais.

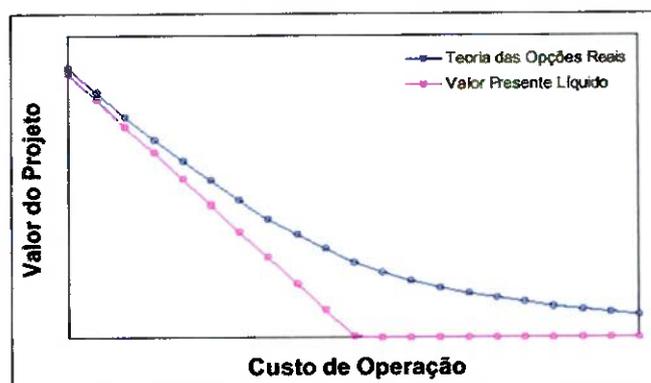


Figura 3.7 - Valor do Projeto com e sem Opção de Suspensão Temporária da Operação versus Custo de Operação

O segundo projeto foi avaliado usando VPL. Observasse que mesmo quando os custos aumentam, o projeto com flexibilidade tem valor presente positivo, diferentemente do projeto sem flexibilidades, que está negativo.

3.3.4. Opção de Expansão

Após ter iniciado o projeto, e caso as condições de mercado se mostrem favoráveis, a empresa poderá ter a flexibilidade de expandir a escala produtiva em $e\%$, suportando, para isso, um investimento adicional de I_e . A opção de expansão poderá ser vista como uma opção de compra do tipo Americano, pela qual se compra

e% da capacidade, pagando para isso um preço de exercício de I_e . Neste caso, a oportunidade de investimento poderá ser vista como o valor base do projeto mais o valor da opção de expansão.

3.3.5 Opção de Flexibilidade Operacional

Um parâmetro operacional chave em mineração é de teor de corte. O teor de corte pode ser empregado como uma opção de flexibilidade operacional levando-se em consideração a seleção dos teores de corte para modificação da estratégia de operação da mina, fazendo o melhor uso das capacidades operacionais nas fases de lavra, beneficiamento e refino do metal.

A capacidade de produção e a estratégia inicial do teor de corte são determinadas simultaneamente no planejamento da operação do projeto de acordo com os valores esperados dos preços, custos, tonelagem/teor e distribuição das reservas. A estratégia inicial do teor de corte é também chamada de teor de corte de projeto embora seja um conjunto de teores de corte para cada período na vida útil do projeto.

Uma vez que as capacidades operacionais estejam instaladas, há ainda a possibilidade de alteração do teor de corte de acordo com as mudanças no valor esperado do preço. O conjunto de teores de corte de projeto que podem ser alterados segundo as mudanças no ambiente (do negócio) serão os teores de corte operacionais. O projeto de lavra também poderá ser modificado em função de mudanças de grande magnitude no ambiente do negócio.

As possibilidades de flexibilidade operacional como acima descrita, entretanto não serão quantificadas como opções reais nesta dissertação, um detalhamento desta hipótese pode ser visto em MARDONES (1993) e SAMIS (2001).

3.3.6 A Estratégia como Opção Real

Como já analisado nas seções anteriores um dos principais problemas do VPL prende-se com a sua incapacidade de corretamente, estabelecer relações entre os investimentos atuais e as oportunidades futuras. Essas ligações existem sempre que as oportunidades de investimento futuro dependerem de decisões tomadas no presente.

Nessa linha LAI e TRIGEORGIS (1995), salientam que um dos problemas centrais na aplicação dos métodos tradicionais resulta da interdependência entre as decisões atuais e as decisões futuras. Muitas vezes as empresas investem e entram em novos mercados, não tanto pelo fato de esses investimentos terem VPL positivo, mas antes pelas oportunidades de crescimento que eles proporcionam. Muitos projetos de investimento poderão ser vistos como o primeiro passo de uma série de projetos futuros, em que estes últimos dependem, em absoluto, dos primeiros.

À primeira vista, a avaliação de projetos deste tipo apenas parece ser um problema de previsão em que bastará estimar os fluxos de caixa para determinar, em conjunto, o VPL das várias fases do projeto. Só que, como refere MYERS (1987), desta forma não se chegará à resposta correta. Isto porque a fase subsequente do projeto é uma opção, já que a empresa não está obrigada a realiza-la, antes, ela apenas continuará com o projeto se essa for a melhor decisão, caso contrário não investirá e limitará as suas perdas. Dessa forma, investir na primeira fase permite à empresa comprar um ativo intangível: a opção de compra sobre a fase seguinte.

Os projetos de investimento poderão ser semelhantes a *compound options*, i.e., opções que ao serem exercidas criam novas opções. Investir em projetos com VPL negativo poderá ser uma decisão correta se o valor atual das opções que dele resultarem for suficiente para compensar esse VPL negativo.

Para KESTER (1984), grande parte do valor das empresas resulta das suas oportunidades de investimento futuras. Como realça o autor, alguns projetos poderão, quando vistos isoladamente, ser pouco atrativos. No entanto, eles poderão ser a única forma de realizar outros projetos. Neste caso, o valor do projeto inicial não resulta apenas dos fluxos de caixa que ele próprio possa gerar, mas também das

oportunidades de investimento que dele resultem. Para KASANEN (1993), o importante é criar valor através da criação de oportunidades de crescimento.

AMRAM e KULATILAKA (1999 b), defendem que a questão central deixa de ser:

‘O que ganharemos nos movendo do ponto A para o ponto B? Passando a ser: Partindo de A para B, que opções iremos ganhar adotando esse caminho?’

Para os autores, o primeiro passo na reorganização do planejamento estratégico deverá ser a definição das opções reais que existem nas decisões de investimento.

Segundo KESTER (1984), a vantagem chave da perspectiva da opção de crescimento é que ela integra orçamentação de capital com planejamento de longo prazo. KULATILAKA e VENKATRAMEN (1998), introduzem uma nova abordagem de formulação estratégica. Esta nova abordagem é, na linha da teoria das opções reais, particularmente importante em períodos de elevada incerteza. Esta metodologia pretende fazer a ponte entre as metodologias de formulação estratégica e a teoria das opções reais.

3.4 – Métodos de Avaliação de Opções Reais

Analogamente a uma opção financeira, uma opção real pode ser avaliada usando as Técnicas de Otimização Dinâmica sob Incerteza. Conforme defendem DIXIT e PINDYCK (1995), o problema geral de investimento sob incerteza pode ser visto como um problema de maximização de riqueza sujeito a um ou mais processos estocásticos. Para isso é necessário um método de otimização sob incerteza.

Os dois métodos mais usados em otimização dinâmica sob incerteza²⁹, que serão analisados nesta seção, são os métodos da Análise dos Direitos Contingentes (*Contingente Claim Analysis*) e o da Programação Dinâmica. Em ambos os casos

²⁹ Também chamada pelos matemáticos de teoria de controle ótimo de processos estocásticos.

usualmente são obtidas equações diferenciais, com a condição de optimalidade colocada nas condições de contorno dessas equações. Também nas condições de contorno se colocam as condições de decisão gerencial e os limites econômicos do modelo.

Normalmente, equações diferenciais parciais não possuem soluções analíticas, assim métodos numéricos devem ser utilizados para aproximar a solução. Os principais métodos numéricos³⁰ que podem ser aplicados nas soluções das equações diferenciais obtidas no emprego das Técnicas de Otimização Dinâmica Sob Incerteza, na avaliação das Opções Reais, podem ser divididos em três grupos, a saber:

- métodos baseados em lattice: método binomial, trinomial e multinomial;
- métodos baseados em processos de simulação: simulação de Monte Carlo;
- métodos baseados na solução aproximada para equações diferenciais Parciais: método das diferenças finitas.

Se os investidores forem considerados neutros ao risco, então o valor da opção pode ser obtido montando-se uma carteira dinâmica, neutra ao risco, que replica o valor do ativo real.

Utilizando ferramentas do cálculo estocástico, obtém-se uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida analiticamente ou através de métodos numéricos. Este método denominado Análise de Direitos Contingentes apresenta limitações, pois à medida que as incertezas sobre as variáveis subjacentes tornam-se mais complexas, o processo de avaliação pode tornar-se oneroso computacionalmente ou intratável algebricamente.

No método de Programação Dinâmica, a modelagem é implementada através da equação de Bellman, que resulta numa equação diferencial A Programação Dinâmica é utilizada para avaliar opções Americanas, já que as mesmas devem ser avaliadas com um algoritmo *backward*³¹.

³⁰ Um detalhamento desses métodos é feito no Anexo C.

³¹ Um algoritmo *backward* considera o problema trabalhando de trás para frente, ou seja, cada seqüência lógica é retro-alimentada pela última instrução ou parâmetro.

3.4.1 – Análise de Direitos Contingentes

O método de precificação denominado Análise de Direitos Contingentes é utilizado para a avaliação de ativos replicáveis, e é baseado no modelo³² de arbitragem dinâmica proposto por BLACK e SCHOLLES (1973). A teoria da arbitragem dinâmica foi construída com o emprego de uma série de pressupostos sobre a estrutura dos mercados e nas informações contidas nos preços desses mercados.

Portanto, nestes mercados é possível replicar o fluxo de caixa de um ativo complexo, como um projeto de mineração, através da composição de *portfolios* de ativos como os contratos futuros de commodities.

Todos os preços de ativos são determinados através das preferências e aversão ao risco dos investidores. Assim, os ativos básicos que fornecem informações sobre o risco estão diretamente associados ao futuro das variáveis, como os contratos futuros de *commodities* os quais estão relacionados com os preços futuros dessas *commodities*.

Esta modelagem possibilita a avaliação de ativos complexos e fornece aos gestores desses ativos, ferramentas para projetar posições de *hedge*, com vistas à maximização dos *portfolios* de projetos.

Um projeto de investimento é definido por um fluxo de custos e benefícios futuros que variam com o tempo e com a incerteza. A empresa que detem os direitos a este fluxo ou a uma oportunidade de investimento, é proprietária de um ativo que tem um valor, que em uma economia moderna poderá ter um mercado diversificado desses ativos.

Se o projeto for um destes ativos negociados no mercado basta observar o seu valor no mercado. Por outro lado se o projeto não for negociado no mercado pode-se calcular o seu valor implícito relacionando-o com outros ativos negociados no mercado. Para isso, precisa-se montar um *portfolio* de ativos negociados no mercado

³² O detalhamento do modelo de BLACK e SCHOLLES (1973), pode ser visto no apêndice B.

que replique exatamente os retornos do projeto de investimento agora e no futuro. A composição deste *portfolios* não precisa ser fixa podendo variar com o tempo. O valor do projeto então deve ser idêntico ao valor deste *portfolio*, pois como ambos geram o mesmo retorno qualquer diferença entre eles daria margem a um ganho de arbitragem. Pode-se afirmar que este método é apropriado quando o mercado é completo.

Supondo-se que o objetivo de um projeto de investimento seja instalar uma unidade de produção. O produto final, ou ativo, será considerado o componente principal das receitas deste projeto. O processo de avaliação pode ser desmembrado em dois casos diferentes, de acordo com as características de negociação do ativo objeto. No primeiro caso, o ativo objeto é negociado no mercado, ou seja, é uma *commodity*. No segundo caso, o ativo objeto não é negociado de maneira regular no mercado.

Ativos Negociados no Mercado

Neste caso, o preço do ativo objeto, ao longo do tempo, segue um processo estocástico de acordo com a evolução histórica de seus preços negociados no mercado à vista e no mercado futuro.

Trabalhos publicados no campo de avaliação de ativos reais tais como DIXIT e PINDYCK (1995), LUND e OKSENDAL (1991) E TRIGEORGIS (1995), supõem que o preço do ativo segue um processo conhecido como Movimento Geométrico Browniano definido pela equação dada a seguir:

$$\frac{dV}{V} = \alpha dt + \sigma dz \quad (3.7)$$

Essa equação diz que a taxa de variação dos preços da reserva desenvolvida (na hipótese de mineração) (dV/V) por unidade de tempo tem uma tendência α e um desvio padrão σ . Assim, no lado direito da equação, o primeiro termo (termo de expectativa) reflete o que se espera da variável (ou seja, a tendência), enquanto que o segundo termo (ou termo de variância) considera o desvio que pode ocorrer em

relação ao esperado. O termo dz é o incremento de Wiener, definido pela equação a seguir:

$$dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt} \quad (3.8)$$

Onde: ε tem distribuição normal padrão. Se no lado esquerdo da equação (3.8) fosse dV em vez de dV/V , seria um movimento aritmético Browniano em vez de geométrico³³, e V teria distribuição normal³⁴ em vez de log-normal.

No caso do valor (preço) de uma reserva de cobre, por exemplo, para evitar que ela tenha valores negativos, é preferível usar os modelos do tipo geométrico. Nota-se, no entanto, que se for feito a substituição $v = \ln V$, a equação anterior (geométrica) vira uma equação aritmética Browniana, mas para o logaritmo do preço (ou seja, se garante preço não-negativo), apenas mudando o termo de tendência (*drift*), que passa a ser $\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2$, mas com o mesmo termo de variância. Note também que $d(\ln V) < dV/V$.

A tendência α , para os modelos desenvolvidos nessa dissertação e em inúmeras outras aplicações, não necessita ser calculada ou estimada, já que a solução depende apenas da diferença $\delta = \mu - \alpha$ (onde μ ³⁵ é a taxa ajustada ao risco, que pode variar continuamente e também não necessita ser estimada). Essa diferença, chamada de taxa de conveniência (*convenience yield*) em alguns modelos é medida no mercado (à vista e futuro) de *commodities*, que dá um valor agregado (médio) e em outros é estimada pelo fluxo de caixa, como um valor específico do projeto (quando pode ser interpretada como a taxa de distribuição de fluxo de caixa do projeto ou *dividend yield*).

O Movimento Geométrico Browniano foi utilizado BLACK e SCHOLLES (1973), para modelar o preço de ativo financeiro, a fim de avaliar uma opção de compra Européia. Para a avaliação de opções reais, este modelo apresenta algumas

³³ Os termos aritmético e geométrico usados nessa dissertação são num sentido análogo às duas equações da SHIMKO (1992): (a) dX (aritmético); (b) dX/X (geométrico).

³⁴ No instante t , V teria distribuição normal com média $V_0 + \alpha t$, e variância $\sigma^2 t$, onde V_0 é o valor inicial (em $t = 0$), ver Dixit (1993a).

³⁵ De acordo com o *Capital Asset Pricing Method* (CAPM) μ reflete os riscos sistemáticos de um ativo, ou seja, aqueles riscos que não podem ser diversificados pelo investidor.

restrições. Trabalhos como os de GIBSON e SCHWARTZ (1990), SCHWARTZ (1997) e SLADE (1998) mostraram que a reversão para média e a reversão para a média com saltos (*jump*) são processos estocásticos mais indicados para *commodities*, como o petróleo e cobre.

Ativos que não são Negociados no Mercado

Neste caso, o produto não é negociado no mercado, então não se pode supor um processo estocástico para o preço deste produto. Deve-se utilizar ativos negociados no mercado para tentar reproduzir as incertezas no preço do produto.

Como esta dissertação está preocupada em avaliar um projeto de investimento em um ativo cujo produto final é o cobre, que é negociado no mercado, o segundo caso não será analisado. Uma formulação completa para ambos os casos é apresentada em DIXIT E PINDYCK (1995).

Portfolio Replicante

Uma carteira é formada para reproduzir o retorno e o risco do valor do projeto com opção de espera. O valor da oportunidade de investimento é dado pelo valor de mercado desta carteira.

Seja $F(V_t)$ o valor da oportunidade de investimento e V_t o valor presente do projeto no tempo t . Suponha que V_t varia de acordo com um Movimento Geométrico Browniano dado pela equação (3.9) a seguir:

$$\frac{dV}{V} = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (3.9)$$

Onde: α é a taxa de crescimento de V , σ é a volatilidade de V e dz é um processo de *Wiener*.

Considerando-se uma carteira composta por uma posição comprada sobre a opção $F(V_t)$ e $F'(V)$ posições vendidas sobre o projeto (ou o ativo ou a carteira perfeitamente correlacionado). Então, o valor da carteira é dado pela equação (3.10) a seguir:

$$\Phi = F(V) - F'(V)V \quad (3.10)$$

A carteira é dinâmica, pois a posição sobre unidades do projeto varia de um período de tempo para outro, de acordo com o seu valor presente. Visando à simplificação do modelo, o tamanho da posição é mantido constante dentro de um intervalo de tempo qualquer.

Supondo-se que um investidor mantenha uma posição comprada sobre uma unidade do projeto. O retorno ajustado ao risco esperado por este investidor é dado por μV , μ onde é a taxa de retorno ajustada ao risco.

Mas, o retorno total é composto por um fator de ganho de capital, representado por αV , mais um fator de dividendos, dado por ³⁶ δV . Pela carteira dinâmica que reproduz os movimentos no valor do projeto, a posição vendida é mantida sobre $F'(V)$ posições de V , então ela requer $\delta F'(V)V$ como pagamento pela posição. O ganho de capital obtido mantendo-se a carteira Φ por um determinado intervalo de tempo dt é dado pela equação (3.11), a seguir:

$$d\Phi = F(V) - F'(V)V \quad (3.11)$$

O retorno total da carteira, em um determinado intervalo de tempo, é igual ao ganho de capital mais os dividendos.

$$\text{Retorno Total} = dF(V) - F'(V)dV - \delta F'(V)dV \quad (3.12)$$

Aplicando o Lema de Ito³⁷ sobre dF e simplificando quando necessário, a equação (3.13) representa o retorno total sobre a carteira.

³⁶ O δ parâmetro desempenha um papel fundamental na avaliação de modelos de opções reais. Ele está diretamente ligado ao custo de oportunidade de manter a opção viva ou não. Se $\delta=0$ então a opção de investir somente deve ser exercida no vencimento, nunca antes. Se $\delta>0$, então existe um custo de oportunidade de manter a opção viva, melhor do que investir. À medida que δ cresce o valor da opção cai devido ao aumento no custo de oportunidade de esperar. Quando $\delta \rightarrow \infty$, então o valor da opção tende para zero, e então só existem duas decisões, investir agora ou nunca.

³⁷ O Lema de Ito é apresentado no Anexo A, seção A2.5.

$$\text{Retorno Total} = \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dt - \delta V \frac{\partial F}{\partial V} dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (3.13)$$

Pela equação (3.13), o retorno total não depende do fator estocástico dz . Logo, para que não existam oportunidades de arbitragem, a carteira exige um retorno total livre de risco, de acordo com a equação (3.14) a seguir:

$$\text{Retorno Total} = r\Phi dt \quad (3.14)$$

Igualando-se as equações (3.13) e (3.14) e simplificando quando necessário, encontra-se a equação diferencial parcial (3.15), que $F(V)$ deve satisfazer:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (r - \delta)V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \quad (3.15)$$

Esta equação deve ser resolvida usando as seguintes condições de contorno.

$$F(0) = 0 \quad (3.16)$$

$$F(V^*) = V^* - I \quad (3.17)$$

$$F'(V^*) = 1 \quad (3.18)$$

Onde: V^* é o valor crítico, a partir do qual é ótimo investir.

Conforme foi mencionado as equações diferenciais parciais normalmente possuem soluções analíticas difíceis de serem encontradas e os métodos numéricos devem ser empregados para resolver estes tipos de equações. Outra possibilidade é tentar remover o componente tempo, transformando a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária, que pode ser resolvida analiticamente.

Como se referem DIXIT e PINDYCK (1995), remover o componente tempo significa considerar a oportunidade de investimento perpétua e a equação diferencial parcial (3.15), transforma-se na equação diferencial ordinária (3.19):

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2F}{\partial V^2}+(r-\delta)V\frac{\partial F}{\partial V}-rF=0 \quad (3.19)$$

Resolvendo-se esta equação em conjunto com as condições de contorno (3.16), (3.17) e (3.18) a solução para $F(V)$ e V^* são dadas por:

$$F(V) = AV^\beta \quad (3.20)$$

$$V^* = \frac{\beta}{(\beta-1)I} \quad (3.21)$$

Onde β e A são dados por:

$$\beta = \frac{1}{2} - \left(\frac{r-\delta}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (3.22)$$

$$A = \frac{V^* - I}{(V^*)^\beta} \quad (3.23)$$

3.4.2 – Programação Dinâmica³⁸

A técnica de Programação Dinâmica divide todas as seqüências de decisão de um projeto em apenas duas etapas:

- decisão imediata;
- decisão futura (compreende uma função de valoração que engloba as conseqüências de todas as decisões subseqüentes).

Para entender a programação dinâmica suponha-se um problema discreto simples de dois períodos, em que se pode investir uma quantia I num projeto, resultando em um $VPL = V - I$, ou esperar um período e então escolher entre investir

³⁸ Os fundamentos teóricos da técnica de Programação Dinâmica são apresentados no Anexo B.

ou não. O valor desta oportunidade de investimento (F), numa ótica de maximização da riqueza do investidor, seria equacionado da seguinte forma:

$$F_0 = \max \left\{ V_0 - I, \frac{1}{1 + \rho} E_0 [F_1] \right\} \quad (3.24)$$

Onde: os subscritos zero e um representam os dois instantes de tempo, enquanto que ρ é a taxa de desconto (especificada de forma exógena ao modelo).

A equação (3.24) diz que o valor da opção de investimento é o máximo entre o imediato exercício e o valor esperado dessa oportunidade, caso se espere um período, chamado de valor de continuação.

A idéia essencial da programação dinâmica é dividir a seqüência de decisões em duas partes, a imediata escolha e as subseqüentes decisões.

Para achar a ótima seqüência de decisões deve-se empregar um procedimento *backward*, no caso da equação (3.24) se determina F_1 primeiro e o segundo termo entre colchetes seria comparado com o investimento imediato, sendo então escolhido o máximo entre os dois. Para vários períodos o raciocínio seria análogo e para o caso de horizonte infinito, teria de ser usado um processo iterativo.

Já a programação dinâmica para tempo contínuo, pode ser escrita em termos de retorno da opção de investimento, dado uma ação de controle ótimo u (por exemplo, investir ou esperar) que maximiza o retorno, pela equação de Bellman:

$$\rho F(V, t) = \max_u \left\{ \pi(V, u, t) + \frac{1}{dt} E [dF] \right\} \quad (3.25)$$

Onde: π é a taxa do fluxo de lucros líquidos, que pode ser visto como uma taxa de dividendos.

Assim a equação do retorno tem dois componentes familiares dentro dos colchetes, o dividendo e o ganho de capital, que também pode ser vista como o lucro

imediatamente mais o valor de continuação. A idéia é adotar uma política ótima u que maximiza a soma dessas duas parcelas do retorno.

Essa equação pode ser trabalhada, expandindo dF com o Lema de Ito, usando a equação estocástica para descrever a dinâmica de V (o problema de maximização é sujeito a um processo estocástico estipulado).

O principal problema para usar a programação dinâmica advém da taxa de desconto, especificada de forma exógena ao problema, cuja determinação na prática é difícil, e se torna subjetiva quando não se tem um mercado suficientemente completo para uma precificação do risco do projeto.

3.4.3. Equivalência e Diferenças entre os métodos de Ativos Contingentes e Programação Dinâmica

A totalidade dos artigos consultados para o desenvolvimento dessa dissertação, que usam a moderna teoria de investimentos em projetos de mineração, adotaram o método dos *ativos contingentes*. Tal fato pode ser atribuído à existência de um amplo, mercado de *commodities* minerais. Existem mercados à vista, a termo e de futuros.

A programação dinâmica é usada quando não se tem esse mercado suficientemente completo. Assim, nesse caso não se conseguiria uma referência de mercado e, portanto não será possível montar um *portfolio* livre de risco. É fundamental ressaltar que quando não há condições de montar esse *portfolio* não há teoria que possa determinar o correto valor da taxa de desconto a ser usada na programação dinâmica.

A programação dinâmica se torna equivalente ao método dos ativos contingentes quando se usa a avaliação equivalente neutra ao risco. Como assinala HULL (1993), desde a equação de BLACK e SCHOLES (1973), a precificação das opções não envolve qualquer parâmetro que dependa de preferências do investidor

ou de sua atitude em relação ao risco, e se esses parâmetros não entram na equação também não entram na solução. A solução é válida em todos os contextos de atitude em relação ao risco (de neutralidade e de aversão), inclusive no mais simples contexto em que os investidores são neutros ao risco.

Quando se move de um mercado neutro ao risco para outro mercado avesso ao risco, duas coisas ocorrem, a taxa de crescimento esperado do ativo (α) varia e a taxa de desconto também, de forma que os dois efeitos se anulam.

DIXIT e PINDYCK (1995), mostram que a programação dinâmica é equivalente aos ativos contingentes se for usada a neutralidade ao risco na primeira, isto é, se assumir ρ igual a taxa livre de risco. Como afirma MERTON (1990), essa equivalência é um conveniente artifício para computar o preço de opções.

Alternativamente, pode-se pensar em taxas de desconto iguais à taxa livre de risco para atualizar os fluxos de caixa (ou ramos de uma árvore binomial), mas assumindo que dV/V segue um processo com uma taxa de crescimento esperado diferente: $\alpha = r - \delta$, ou seja usando uma medida de probabilidade adequada para o cálculo de valor esperado desses fluxos e se comportando como num mundo neutro ao risco.

Uma outra abordagem seria: se existe mercado suficientemente completo e o método dos ativos contingentes é considerado correto, então o correto valor de ρ nesse caso é a taxa livre de risco, pois senão os valores calculados pela programação dinâmica seriam diferentes do método dos ativos contingentes que é considerado correto nesse contexto.

Segundo RITCHKEN (1987), o argumento de avaliação neutra ao risco poderá ser usado, se for possível demonstrar que o preço do ativo a ser avaliado não depende de preferências. Quando o mercado é incompleto, deve-se assumir premissas, ou nas preferências ou nos preços.

Em resumo o método dos ativos contingentes deve ser usado quando existe mercado completo. Quando o mercado é incompleto, pode-se usar a programação

dinâmica, estabelecendo uma taxa arbitrária de desconto, ou usar a extensão da neutralidade ao risco, ajustando as probabilidades para fazer o desconto pela taxa livre de risco.

3.5 Opções Reais na Avaliação de Projetos de Mineração

O modelo de avaliação de recursos minerais propostos por BRENNAN e SCHWARTZ (1985) e estendido por JACOBY e LAUGHTON (1991), é baseado métodos da Análise dos Direitos Contingentes.

A avaliação das opções reais em projetos de mineração compreende a modelagem de preços futuros das *commodities* e os modelo de avaliação da mina proposto por BRENNAN E SCHWARTZ (1985).

3.5.1 Modelagem de Preços Futuros do Commodities

O preço *à vista* da *commoditie* está relacionado a incertezas do mercado e assume-se que segue o processo estocástico descrito pela equação 3.9. De acordo com BRENNAN e SCHWARTZ (1985), uma relação funcional, entre o preço *à vista* e os preços futuros da *commoditie* baseada no equilíbrio do mercado pode ser estabelecida a partir do conhecimento das seguintes variáveis.

- preços dos contratos futuros das *commodities*, (F);
- taxa³⁹ de remuneração da *commodity*, (ρ);
- preço *à vista* da *commodity* (S);
- volatilidade de preços da *commodity* σ .

³⁹ A taxa de remuneração da *commodity* advém da posse física desta e não da posse de contratos futuros. Esta taxa depende equilíbrio do estoque, sendo proporcional a estes. Portanto quando os estoque são elevados, a taxa tende a ser baixa, sendo que neste caso o preço spot também será. Neste modelo os autores BRENNAN e SCHWARTZ (1985), fazem uma simplificação assumindo que a taxa líquida marginal da *commodity* pode ser escrita como um a função apenas do preço spot. Sendo uma constante

Fazendo-se $F(S, t)$ os preços futuros no tempo t da entrega de uma unidade da *commodity* no vencimento do contrato. Implicitamente assume-se que os preços futuros são uma função do tempo e do preço à vista. A variação instantânea nos preços futuros é obtida em termos das variações do preço à vista, pela equação (3.26):

$$dF = \left[F_s \mu S + F_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 \right] dt + F_s \sigma S dz \quad (3.26)$$

Quando a equação (3.9) é substituída na equação (3.26) resulta na equação (3.27) a seguir:

$$dF(S, t) = \left[F_t + \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 \right] dt + F_s ds \quad (3.27)$$

Onde: S segue o processo estocástico descrito pela equação 3.9.

Considere-se o retorno instantâneo, dR de um investidor que *hedgeou* sua exposição ao risco da posição comprada em *call* em uma unidade da *commodity* com uma posição vendida em *call* $1/F_s$ em contratos futuros. Como os contratos futuros não envolvem desembolsos iniciais, o retorno do investimento considerando-se a taxa de juros marginal c , será dado pela equação (3.28):

$$dR = \frac{dS}{S} + c dt - (SF_s)^{-1} dF \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.9) e (3.28) na equação (3.29) tem-se:

$$dR = (SF_s)^{-1} \left[F_s c S - \frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 - F_t \right] dt \quad (3.29)$$

Segundo HULL (1989), para a eliminação da possibilidade de arbitragem, dR deve ser igual ao retorno sem risco ρdt . Onde ρ é a taxa livre de risco. Portanto, o preço futuro da *commodity* e suas condições de contorno são dados pela equação (3.30).

$$\frac{1}{2}F_{ss}\sigma^2S^2 + F_s(\rho - c)S + F_t = 0 \quad (3.30)$$

A equação (3.30) deve ser resolvida usando as seguintes condições de contorno.

$$F(S,T) = S \quad (3.31)$$

$$F(0,t) = 0 \quad (3.32)$$

$$S^2F_{ss}(S,t) \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad S \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

A condição de contorno (3.31) estabelece que o valor do contrato futuro na data de vencimento é igual ao preço *à vista* corrente da *commodity*. A condição de contorno (3.32) impõe, que se o valor *à vista* é zero o valor do contrato futuro também é zero. Finalmente a condição de contorno (3.33) estabelece que para altos preços *à vista* os contratos futuros são uma função linear do preço *à vista* coerente com a condição do vencimento.

3.5.2. Modelo Geral de Avaliação da Mina

O valor da oportunidade de desenvolver e operar uma mina depende dos seguintes fatores:

- Preço corrente *à vista* da *commodity*, S ;
- Volume das reservas da jazida, Q ;
- Tempo, t ;
- Estratégia operacional da empresa, ϕ .

Desta forma segundo BRENNAN e SCHWARTZ (1985), o valor da mina pode ser expresso com uma relação funcional como na equação (3.34).

$$M = M(S, Q, t, j, \phi) \quad (3.34)$$

O índice j presente na relação funcional tem valores variáveis se a mina estiver aberta ou estiver fechada.

A estratégia operacional da empresa, ϕ , pode ser descrita por uma função que determina a taxa de produção, quando a mina está aberta $q(S, Q, t)$, e por três preços críticos a saber:

- $S_1(Q, t)$, que é o preço de venda do metal o qual a mina é fechada temporariamente;
- $S_2(Q, t)$, que é o preço de venda do metal a qual a mina é reativada se estivesse previamente fechada temporariamente;
- $S_0(Q, t)$, que é o preço de venda do metal o qual a mina é desativada caso estivesse temporariamente fechada.

A distinção entre fechamento temporário e desativação reside no fato que o fechamento temporário incorre em custos fixos de manutenção, levando-se em consideração a hipótese de reativação, por outro lado a desativação considera nos dias atuais o custo de monitoramento das condições ambientais, que é substancialmente menor que os custos de manutenção. Assim será assumido no modelo por simplificação que a desativação não envolve custos.

Aplicando o lema de Ito na relação funcional (3.34) a mudança instantânea no valor da mina, dM é dado por:

$$dM = M_t dt + M_Q dQ + M_S dS + \frac{1}{2} M_{SS} (dS)^2 \quad (3.35)$$

Onde: a mudança instantânea no valor das reservas, dQ é determinada pela taxa de produção q , conforme a seguir:

$$dQ = q dt \quad (3.36)$$

$$q(j) = \begin{cases} q & j = o, \quad ot \\ 0 & j = c, a, n \end{cases} \quad (3.37)$$

Onde: j é igual o se a mina estiver aberta sem tributação e ot com tributação, c se esta fechada, a se a mina estiver desativada e n se não estiver desenvolvida.

O fluxo de caixa periódico, CF da mina é dado por:

$$CF(S, Q, t, j; \phi) = \begin{cases} q(S - \beta) & j = 0 \\ (1 - \tau)q[(1 - r)S - \beta] & j = ot \\ -k_1 & j = c \\ -k_2 & j = a \\ 0 & j = n \end{cases} \quad (3.38)$$

Onde β é o custo de produção unitário; τ é a alíquota do imposto, r é a taxa de *royalty*; k_1 é o custo de fechamento e manutenção da mina temporariamente; k_2 é o custo de abandono.

Sob a estratégia operacional ϕ a equação diferencial que descreve a mina pode ser derivada considerando dR , o retorno instantâneo, para um *portfolio* de uma *long position* da mina e de uma *short position* em M_s/F_s contratos futuros de *commodities* será:

$$dR = dM + CF dt - \left(\frac{M_s}{F_s} \right) dF \quad (3.39)$$

Substituindo-se F_t na equação (3.39) e posteriormente levando-se a equação (3.38), dF pode ser escrita como:

$$dF(S, t) = F_s [S(\mu - \rho + c)] dt + F_s \sigma S dz \quad (3.40)$$

Substituindo-se as equações (3.35), (3.36), (3.37) e (3.40) na equação (3.39), o resultado será:

$$dR = \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 M_{ss} - qM_q + M_t + CF + S(\rho - c)M_s \right] dt \quad (3.41)$$

De acordo com HULL (1989) e FRIMPONG (1992), na ausência da possibilidade de arbitragem, este *portfolio* deve ter o risco sem retorno $\rho M dt$. Portanto, o valor geral da mina é dado por:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 M_{ss} - qM_q + M_t + CF + S(\rho - c)M_s - \rho M = 0 \quad (3.42)$$

Conforme se pode verificar os parâmetros da equação (3.42) e suas condições de contorno são independentes do tempo, portanto os custos podem ser dependentes do tamanho da reservas remanescentes em qualquer tempo.

Sob estas condições a equação (3.42) pode ser escrita conforme a equação (3.43):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 M_{ss} - qM_q + CF + S(\rho - c)M_s - \rho M = 0 \quad (3.43)$$

A equação (3.43) é a equação diferencial para o valor da mina para diferentes estados. O valor da mina é obtido resolvendo as condições de contorno do problema baseado nesta equação, o que resulta nos modelos de mina aberta (MO), mina fechada (MC) e mina desativada (MA) conforme será mostrado a seguir.

3.5.2.1- Valor da Mina Aberta

O valor da mina aberta (MO) depende do fluxo de caixa durante o tempo que ela permanecer aberta, CFO , da reserva Q a qual decresce a uma taxa de produção q , conforme mostrada na equação (3.36). Portanto, o valor da mina aberta e satisfaz a equação diferencial (3.43):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 MO_{ss} + S(\rho - c)MO_s - qMO_q - \rho MO + CFO = 0 \quad (3.44)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$MO(0, Q) = -K_{O \rightarrow A} \quad (3.45)$$

$$MO(S, 0) = -K_{O \rightarrow A} \quad (3.46)$$

$$S^2 MO_{SS}(S, Q) \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad S \rightarrow \infty \quad (3.47)$$

$$MO(S, Q) = \max[MC(S, Q) - K_{O \rightarrow C}, MO(S, Q) - K_{O \rightarrow A}] \quad S \leq S_{O \rightarrow C/A} \quad (3.48)$$

$$MO(S, Q) > \max[MC(S, Q) - K_{O \rightarrow C}, MA(S, Q) - K_{O \rightarrow A}] \quad S > S_{O \rightarrow C/A} \quad (3.49)$$

Onde $K_{O \rightarrow A}$ e $K_{A \rightarrow C}$ são respectivamente os custos de desativação e fechamento quando a mina esta aberta, as equações (3.45) e (3.46) são respectivamente zero para o preço do metal e volume das reservas as quais garantem a desativação da mina.

Segundo LAUGHTON E JACOBY (1991), a condição de contorno (3.47) indica que se S tende para o infinito a curva MO tende a ser linear com S , de acordo com o modelo de fluxo de caixa.

A equação (3.48) indica que se os preços caírem abaixo de um preço crítico $S_{O \rightarrow C/A}$ a mina deverá ser temporariamente fechada ou desativada. A cima deste preço crítico a mina deverá permanecer aberta como na equação (3.49).

3.5.2.2 Valor da Mina Fechada

Como não há produção durante o período que ela esta fechada, q é zero, portanto o termo qM_q também. Assim uma quantidade CFM, é despendida para manter a mina enquanto ela permanecer fechada temporariamente. Logo o valor da mina fechada obedece a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 MC_{ss} + S(\rho - c)MC_S - \rho MC + CFC = 0 \quad (3.50)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$MC(0, Q) = -K_{C \rightarrow A} \quad (3.51)$$

$$MC(S, 0) = -K_{C \rightarrow A} \quad (3.52)$$

$$S^2 MC_{ss}(S, Q) \rightarrow \text{com } S \rightarrow \infty \quad (3.53)$$

$$MC(S, Q) = MO(S, Q) - K_{C \rightarrow 0} \quad S \geq S_{C \rightarrow 0} \quad (3.54)$$

$$MC(S, Q) > MO(S, Q) - K_{C \rightarrow 0} \quad S < S_{C \rightarrow 0} \quad (3.55)$$

$$MC(S, Q) = MA(S, Q) - K_{C \rightarrow A} \quad S \leq S_{C \rightarrow A} \quad (3.56)$$

$$MC(S, Q) > MA(S, Q) - K_{C \rightarrow A} \quad S > S_{C \rightarrow A} \quad (3.57)$$

Onde: $K_{C \rightarrow A}$ e $K_{C \rightarrow 0}$ são respectivamente custos desativação e reabertura. As condições de contorno (3.51) e (3.52) são respectivamente preço zero para o metal e condições das reservas que levam ao fechamento ou desativação da mina. A função MC é linear em S com S tendendo ao infinito como na equação (3.53). Acima de um preço crítico $S_{C \rightarrow 0}$, a mina fechada deve ser aberta como na equação (3.54). Abaixo de um preço crítico, a mina deve permanecer fechada como na equação (3.55). Se o preço da *commodity* continuar a cair, a mina deve ser abandonada abaixo do preço crítico $S_{F \rightarrow D}$ como na equação (3.56). Abaixo deste preço crítico a mina deve permanecer fechada como na equação (3.57).

3.5.3-Decisões Estratégicas de Investimento nos Projetos de Mineração

Considerando-se uma situação típica de uma empresa de mineração durante a análise de um prospecto para viabilização de um novo projeto, conforme é sabido, os

preços dos metais que serão produzidos são incertos. As incertezas dizem respeito também à geologia do depósito e a estrutura de custo do projeto. Portanto para o desenvolvimento do prospecto a empresa terá alternativas de decisões estratégicas conforme ilustrado na Figura 3.8.

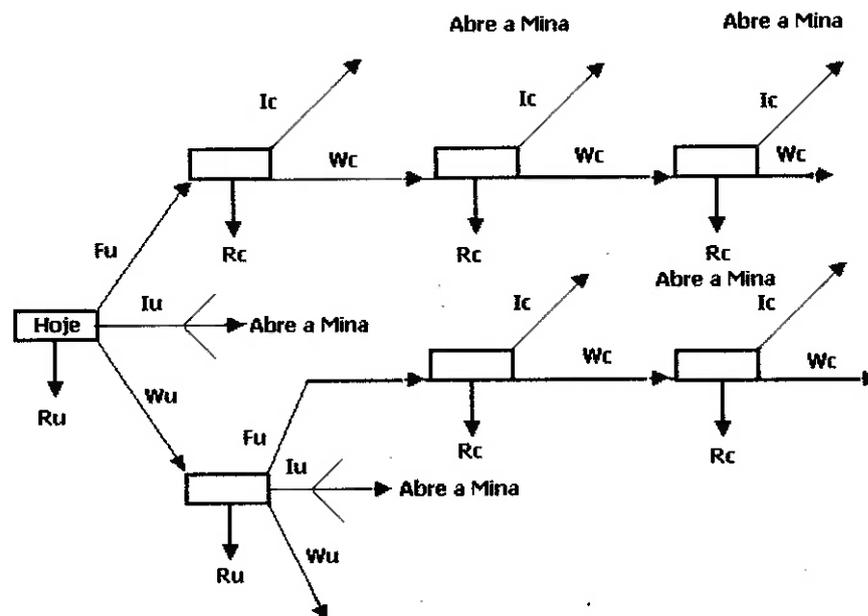


Figura 3.8 – Estratégias de Decisão de Investimento em Mineração
(Adaptado de FRIMPONG (1991))

Na data da avaliação a empresa pode decidir por uma das quatro decisões estratégicas:

- conduzir um estudo detalhado de viabilidade para eliminar ou reduzir as incertezas quanto às reservas e estrutura de custos do projeto, F_u ;
- investir no projeto sem um estudo detalhado de viabilidade, I_c ;
- esperar uma data julgada apropriada para tomar a decisão, W_c ;
- rejeitar o projeto, R_c .

A alternativa R_c conduz a empresa à não desenvolver e operar a mina em qualquer período de tempo no futuro. A alternativa W_c posterga as decisões que a empresa tem que tomar hoje. A alternativa I_c resulta na abertura da mina a qual apresentará altos riscos quanto aos níveis de incerteza das reservas. Com a alternativa F_u qualquer uma das demais decisões estratégicas poderão ser tomadas com redução do nível de incerteza quanto a reservas.

Entretanto a redução da incerteza quanto ao volume das reservas não elimina a necessidade de estudos de viabilidade futuros. Segundo FRIMPONG (1991), esta condição é denominada de estado pseudocerteza. Assim, qualquer umas das outras três decisões, investir (I_c), espera (W_c) ou rejeitar pode ser tomada a qualquer tempo depois de F_u .

3.5.3.1 Valor da Mina Após Estudo Detalhado de Viabilidade

O Valor da mina após estudo detalhado de Viabilidade VF é o valor máximo entre VI_c , VW_c e VR_c . O valor de VI_c é a diferença entre o valor da mina aberta e o capital investido sob condições de pseudocerteza, CI_c . Os valores VW_c e VR_c são respectivamente os valores de esperar e rejeitar o projeto após estudo detalhado de viabilidade. O estudo detalhado de viabilidade é usado para reduzir as incertezas quanto às reservas e fornecer aos investidores informações quanto à necessidade de capital. Posteriormente a este estudo de viabilidade e antes do desenvolvimento o valor da mina é fundamentalmente guiado pelas variações no preço do metal.

O valor da mina, VF, e suas condições de contorno são dados pelas seguintes relações:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 VF_{ss} + S(\rho - c)VF_s - \rho VF = 0 \quad (3.58)$$

$$VF(0, Q, t, j) = 0 \quad (3.59)$$

$$S^2 VF_{ss}(S, Q, t, j) \rightarrow 0 \text{ com } S \rightarrow \infty \quad (3.60)$$

$$VF(S, Q, t, j) = VI_c = MO(S, Q, t) - CI_c \quad S \geq S_c \quad (3.61)$$

$$VF(S, Q, t, j) = VW_c > VI_c = MO(S, Q, t) - CI_c \quad S < S_c \quad (3.62)$$

$$VF(S, Q, t, j) \leq VR_c \leq S_{\min}^c \quad (3.63)$$

A equação (3.58) é a condição de preço zero. O valor de Vf varia linearmente com S e S aproxima-se do infinito como na equação (3.59). Acima de um preço crítico S_c , Vf é igual a VI_c e o investimento deve ser feito como na equação (3.60). Abaixo de um certo preço crítico S_c Vf é igual a VW_c e maior que VI_c e os investidores devem esperar como na equação (3.62). Abaixo de um certo preço crítico S_{\min}^c Vf é menor ou igual a VR_c e os investidores deverão rejeitar o projeto como mostrado na equação (3.63).

3.5.4. Valor Presente do Projeto Empregando Opções Reais

O Valor Presente do Projeto PV empregando Opções Reais é o máximo entre os valores de VF_u , VI_u , VW_u e VR_u . VF_u é o valor da mina com estudo a opção do estudo detalhado de viabilidade. O valor VI_u , é o valor da mina com investimento sob a opção de incerteza, VW_u é o valor da mina com a espera com a opção de incerteza e VR_u é o valor rejeitado da mina sob as condições de incerteza.

As variáveis fundamentais são descontadas utilizando a taxa de juros livre de risco, como taxa de atratividade e as probabilidades das variáveis. As decisões de estratégias de investimento são feitas baseadas no nível de incerteza dos dados preliminares sobre o depósito e preços do metal. O valor de PV fornece as bases para o investimento.

O valor de PV e suas condições de contorno são dados pelos seguintes relações:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 PV_{ss} + S(\rho - \gamma)PV_s - \rho PV = 0 \quad (3.64)$$

$$PV(0) = 0 \quad (3.65)$$

$$PV(S) = \max [VF_U(S), VI_U(S)] \quad S \geq S_u \quad (3.66)$$

$$PV(S) = VW_U > \max [VF_U(S), VI_U(S)] \quad S < S_u \quad (3.67)$$

$$PV(S) \leq VR_u \quad S \leq S_{\min}^u \quad (3.68)$$

$$VF_U(S) = \int VF(S, Q, t, j) du(Q) - FC_U \quad (3.69)$$

$$VI_U(S) = \int MO(S, Q, t) du(Q) - CI_U \quad (3.70)$$

Onde FC_U e CI_U são respectivamente custo do estudo de inabilidade e custo de capital de capital do investimento sob incerteza. A probabilidade de distribuição das reservas, $du(Q)$, a equação (3.65) é a condição de preço zero.

Acima de um preço crítico S_U o investidor irá exercer o máximo dos valores VF_U e VI_U como na equação (3.66). Abaixo do preço crítico S_{\min}^u PV é menor ou igual a VR_U o qual leva o investidor a rejeitar o projeto como indica a condição (3.67). Acima de S_U PV é igual a VW_U e maior que os valores VF_U e VI_U e o investidor irá espera de acordo com a equação (3.68). Os valores VR_U e VR_C são baseados nas expectativas do investidor e na performance de projetos similares no mercado . As equações (3.69) e (3.70) são respectivamente os valores da mina com estudo detalhado de viabilidade e de investimento sob condições de incerteza.

3.5.5. Valor Presente do Projeto Empregando Fluxo de Caixa Descontado

Sem o emprego das opções estratégicas o Valor Presente do Projeto Empregando Fluxo de Caixa descontado, PV_{DCF} , segundo FRIMPONG (1992), é dado pela seguinte equação:

$$PV_{DCF}(S) = \int VO(S, Q, t) du(Q) - FC_U \quad (3.71)$$

Onde VO é o valor da mina aberta sem estratégia de Opções Reais, sendo definido pela equação (3.72), conforme a seguir:

$$VO(S, Q, t) = \left(\frac{S_q}{c} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-c}{q} \right) \right] - \left(\frac{\beta q}{\rho} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-\rho Q}{q} \right) \right] \quad (3.72)$$

Ao não ser levado em consideração as estratégias de opções na sua formulação, o método do fluxo de caixa descontado restringe o investidor a examinar o valor e a viabilidade de um projeto na base do “agora ou nunca”. Portanto conforme concluem BRENNAN & SCHWARTZ (1985), FRIMPONG (1992) e JACOBY & LAUGHTON (1992), a mina após o estudo de viabilidade será aberta e operará até o fechamento e valor de PV_{DCF} é maior que zero, por outro lado o projeto será rejeitado sem nenhuma consideração futura.

CAPÍTULO 4

ESTUDO DE CASO – ABORDAGEM FCD

4.1 - Apresentação

Os dados do projeto empregados no estudo de caso reproduzem a situação real de uma jazida de cobre, situada na Região Norte do Brasil. Pelo caráter confidencial dos dados, não foram indicadas as localizações da jazida e a corporação detentora dos direitos minerários.

Os produtos secundários presentes na jazida, que poderiam apresentar relevância econômica, como o ouro e a prata, não foram considerados na avaliação, pela sua condição subsidiária em termos de tonelagens e teores, não exercendo, portanto, papel decisivo na avaliação econômica.

Todas as variáveis monetárias estavam originalmente expressas em dólares americanos, junho de 2002 igual a um.

Os recursos financeiros empregados no investimento foram considerados como próprios.

Os preços de venda do cobre empregados na avaliação econômica foram estimados a partir das cotações dos negócios realizados na *London Metal Exchange*, a mais importante Bolsa de metais do mundo.

A avaliação econômica do projeto foi desenvolvida no presente Capítulo com o emprego da metodologia, convencional do FCD. A abordagem empregada está discriminada a seguir:

- o projeto foi analisado com emprego da metodologia do FCD, sendo calculados os indicadores VPL e TIR.;
- foram feitas análises de sensibilidade para o preço de venda do concentrado, teor do minério e tonelagem das reservas;

4.2 – Definição dos Dados de Projeto

As características básicas da jazida estão relacionadas a seguir na Tabela 4.1.

Tabela 4.1- Parametragem das Reservas

TC in Situ %	Reserva Recuperável (1000 T)	TM in Situ %
0,35	52.200	1,16
0,40	47.600	1,24
0,45	43.600	1,31
0,50	39.600	1,39
0,55	36.200	1,48
0,60	33.200	1,56
0,70	28.400	1,71
0,75	26.000	1,8
0,80	24.000	1,89
0,85	22.400	1,96
0,90	20.800	2,05

TC = Teor de Corte; TM = Teor Médio; Teores em % de Cu

Os parâmetros mais importantes da lavra são os seguintes:

- jazida com lavra prevista a céu aberto;
- relação estéril minério estimada em 1,5: 1;
- diluição estimada da lavra igual a 12%;
- reservas e teores conforme Tabela 4.1;
- escala de produção 2.000.000 de toneladas de minério por ano.

A curva de maturação do empreendimento segue a seguinte relação:

- 1^o ano de operação :50% da capacidade nominal;
- 2^o ano de operação: 80% da capacidade nominal;
- 3^o ano de operação em diante: 100% da capacidade nominal.

A apropriação de despesas de depreciação, exaustão das reservas e ainda impostos e taxas foram feitas de acordo com a legislação em vigor. Os parâmetros do processo de avaliação serão a seguir discutidos, iniciando-se pelo custo de investimento.

4.2.1 - Custo de Investimento

Os custos de investimento deste projeto são compatíveis com o padrão mundial de investimentos para minas a céu aberto, com volume de produção superior a um milhão de toneladas, de acordo com SLADE (1998), que analisou os investimentos de 21 minas de cobre. Os investimentos do projeto estão discriminados a seguir:

a) Resumo Investimento por área de custo (em US\$ milhões)

Mina	34
Usina de Beneficiamento	69
Infra-estrutura	7
Aquisição de Direitos Minerários	6
Total	<u>116</u>

b) Resumo dos investimentos por objeto de custo (em US\$ milhões)

Obras Civis	32
Equipamentos fixos	44
Equipamentos Móveis	9
Despesas pré-operacionais	13
Preparação para Lavra	12
Aquisição de Direitos Minerários	6
Total	<u>116</u>

Os reinvestimentos serão realizados levando-se em consideração os seguintes critérios:

- equipamentos móveis: vida útil de sete anos e valor residual de 20% do valor de aquisição;
- equipamentos fixos: estimada uma reserva de venda anual para investimento igual a 1% do investimento em equipamentos fixos.

O cronograma físico/financeiro da implantação é apresentado na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Cronograma Físico/ Financeiro

Item	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Total
Aquisição da Jazida	6.000,00				6.000,00
Pré-operacional	8.666,67	4.333,33			13.000,00
Obra Civil		16.000,00	16.000,00		32.000,00
Equipamentos Fixos			22.000,00	22.000,00	44.000,00
Equipamentos Móveis				9.000,00	9.000,00
Preparação de Lavra				12.000,00	12.000,00
TOTAL	14.666,67	20.333,33	38.000,00	43.000,00	116.000,00
%	12,64	17,53	32,76	37,07	100,00

4.2.2 - Custos Operacionais

Os custos operacionais foram discriminados em custo operacional da lavra de lavra e custo operacional de beneficiamento, a saber:

Custo Operacional de Lavra

Foi adotado o mesmo custo específico variável para o minério e para o estéril. Os custos operacionais de lavra estão discriminados em custos variáveis e custos fixos, a seguir:

Tabela 4.3 – Custos variáveis de lavra (US\$)

	Unidade	Consumo Específico (unidade/t)	Custo Unitário (US\$/t)	Custo Específico (US\$/t)	Cons. Ano (US\$)
Brocas de perfuração	pç	0,00001	10.000,00	0,10	200.000,00
Acessórios Perfuração	vb	-	-	0,04	80.000,00
Explosivos	kg	0,20	1,30	0,26	520.000,00
Acessórios. Desmonte	vb	-	-	0,02	40.000,00
Pneus	pç	0,00008	2.500,00	0,20	400.000,00
Óleo Diesel	l	0,40	0,25	0,10	200.000,00
Energia elétrica	Kwh	0,90	0,05	0,05	90.000,00
Materiais Manutenção(a)	vb	-	-	0,26	510.000,00
Outros custos variáveis(b)	vb	-	-	0,10	204.000,00
			TOTAL	1,122	2.244.000,00

(a) 6% do investimento da mina a céu aberto por ano; (b) 10% dos custos acima.

Tabela 4.4 – Custos fixos de lavra

Componente	Descrição	Valor US\$
Mão de Obra	Efetivo de 170 pessoas com salário médio de US\$280,00 e encargos sociais	1.142.400,00
Despesas Gerais	30% custo de mão de obra e encargos por ano	342.720,00
Tarifa de demanda energia elétrica	US\$0,04/t de capacidade	80.000,00
Seguros	0,3% do investimento total da mina por ano	25.500,00
Outros custos fixos	10% dos custos acima	159.062,00
	Total	1.749.682,00

Custo Operacional da Usina

Os custos operacionais da usina estão discriminados em custos variáveis e custos fixos a seguir:

Tabela 4.5 – Custos Variáveis da usina

	Unidade	Consumo Específico (unid./t)	Custo Unitário (US\$/t)	Custo Específico (US\$/t)	Cons. Ano (US\$)
Reagente	kg	0,08000	3,50	0,28	560.000,00
Bolas de moinho	kg	0,50	1,50	0,75	1.500.000,00
Revestimentos	kg	0,15	2,50	0,38	750.000,00
Energia elétrica	Kwh	20,00	0,05	1,00	2.000.000,00
Materiais Manutenção (a)	vb	-	-	0,52	1.035.000,00
Outros custos variáveis (b)	vb	-	-	0,29	584.500,00
			TOTAL	3,21	6.429.500,00

(a)6% do investimento da usina por ano; (b) 10% dos custos acima

Tabela 4.6 – Custos Fixos da Usina

Componente	Descrição	Valor Us\$
Mão de Obra	Efetivo de 290 pessoas com salário médio de US\$280,00 e encargos sociais	1.948.800,00
Despesas Gerais	30% custo de mão de obra e encargos por ano	584.640,00
Tarifa demanda Energ. Elét.	US\$0,35/tde capacidade	700.000,00
Seguros	0,3% do investimento total da mina por ano	51.750,00
Outros custos fixos	10% dos custos acima	328.519,00
	Total	3.613.709,00

Síntese dos Custos Operacionais

Os custos operacionais do projeto estão sintetizados na Tabela 4.7 a seguir:

Tabela 4.7 - Síntese dos Custos Operacionais

	Mina	Usina	Total
Custos Variáveis	2.244.000,00	6.429.500,00	8.673.500,00
Custos Fixos	1.749.682,00	3.613.709,00	5.363.391,00
TOTAL	3.993.682,00	10.043.209,00	14.036.891,00

4.2.3- Capital de giro

O dimensionamento do capital de giro levou em consideração os parâmetros apresentados na Tabela 4.7 a seguir:

Tabela 4.8 – Parâmetros de dimensionamento do capital de giro

	Período (dias)	Custo unitário(US\$/dia)	Valor (US\$)
SAÍDAS			
Caixa mínimo	15 dias de custos fixos	14.898,31	223.474,63
Financiamento de Clientes	30 dias de custos de produção	38.991,36	1.169.740,92
Estoques			
Insumos	20 dias de custos variáveis	24.093,06	481.861,11
Produtos acabados	20 dias de custos de produção	38.991,36	779.827,28
Total de saídas		116.974,09	2.654.903,93
ENTRADAS			
Créditos de fornecedores	10 dias de custos variáveis		240.930,56
		Capital Giro	2.413.973,38

4.2.4 – Preço de Venda do Concentrado

A definição do preço de venda do concentrado é um fator fundamental para a devida remuneração do projeto. Além disso, o preço deve refletir o comportamento

esperado de acordo com a tendência observada no mercado. O preço de venda do concentrado foi obtido a partir da fórmula geral de venda, expressa pela equação 4.1:

$$V = (P - R) \times (T - du) - S - C_{transp} + C_{int} \quad (4.1)$$

Onde:

- V = valor líquido da tonelada de concentrado;
- P = preço de venda da tonelada do metal;
- R = taxa de refino por tonelada de metal pago;
- T = teor em metal do concentrado;
- du = dedução unitária;
- S = taxas de fusão por tonelada do concentrado;
- C_{transp} = custo de transporte da mina até a usina metalúrgica expresso por toneladas de concentrado;
- C_{int} = custo de internação por tonelada de concentrado

Os preços de venda P_1 , da tonelada de metal, empregados no cálculo do preço de venda do concentrado foram os seguintes:

- P_1 : preço estimado por um desvio padrão abaixo da média no período entre os anos 1990 e 2002 - US\$/t 1647,00;
- P_2 : preço médio do metal entre os meses de janeiro e junho de 2002, US\$/t 1.530,00;
- P_3 : preço médio do metal entre os anos 1990 e 2002 - US\$/t 2115,00;

Os preços anuais são uma média dos preços mensais e esses, são médias dos preços praticados nos negócios diários realizados à vista.

Os valores de taxa de refino, dedução unitária, taxas de fusão, custo de transporte e custo de internação, empregados na determinação do preço da venda do concentrado, são os valores correntes de acordo com dados da *Internacional Copper Association*. Os valores empregados estão relacionados a seguir:

- Taxa de refino (R): US\$/t_{concentrado} 165,00;
- Dedução unitária (du): 1,2%;

- Taxas de fusão(S): US\$/t_{concentrado} 95,00;
- Custo de transporte(C_{transp}): US\$/t_{concentrado} 15,00;
- Custo de internação(C_{int}): US\$/t_{concentrado} 90,00.

4.2.5 - Taxa de Desconto

É a taxa empregada para descontar os fluxos de caixa futuros do projeto. Normalmente estas taxas refletem as expectativas do investidor em relação aos riscos assumidos com o projeto.

De acordo com levantamentos do Banco Mundial, *World Bank* (1998), as Corporações Transnacionais de Mineração, esperavam obter um intervalo entre 12 e 15% a.a. de taxas de retorno para atividades de mineração na América latina. Esses níveis de retorno refletiam na época (1998), um prêmio adicional de cerca de 8% ao ano, referente aos riscos exógenos, adicionais aos projetos de investimento, pelos quais, os investidores costumam exigir para investimentos em países em desenvolvimento. Atualmente, estes níveis de retorno elevaram-se bastante no Brasil, podendo chegar até 25% a.a.

Neste estudo de caso, foram empregadas taxas de vedação consideradas como taxas mínimas de atratividade (r), empregadas como critério de aceitação/rejeição do projeto entre os valores de 15 e 20% a.a.

4.3 Caso Base

O caso base reflete as características mais comuns do empreendimento. Na análise do caso base, considerou-se a taxa de desconto como único parâmetro sensível dentro de um intervalo de atratividade mínima para o projeto, entre 15 e 20% a.a. Em relação aos parâmetros do projeto algumas simplificações e pressupostos foram assumidos, a saber:

- a. Quanto à decisão estratégica de investimento no projeto: adotou-se, alternativa I_u , representada esquematicamente na Figura 4.1, que é uma das hipóteses apresentadas na Figura 3.8, e resulta na abertura da mina sem um estudo detalhado da jazida, que implicará em alto risco quanto ao nível de incerteza das reservas;



Figura 4.1 - Decisão Estratégica

- b. Quanto à escala de produção: considerou-se uma produção anual de 2.000.000 de toneladas de minério ao longo de toda a vida útil do projeto;
- c. Quanto ao preço de venda do concentrado: adotou-se o preço de US\$/t 466,10, obtido a partir da fórmula do preço de venda (4.1), considerando como preço de venda do metal, US\$/t 1647,00, calculado por um desvio padrão abaixo da média verificada, entre os anos 1990 e 2002;
- d. Quanto às reservas: a tonelagem e teor da jazida foram discretizados por um par de valores, correspondentes às medianas das distribuições dessas variáveis apresentadas na Tabela 4.1.

A seguir, são apresentados os valores dos principais parâmetros:

Tabela 4.9 – Parâmetros de Projeto do Caso Base

Parâmetros	Valores
Produção - toneladas /ano	2.000.000,00
Reserva Recuperável - toneladas	33.200.000,00
Diluição da Lavra (%)	12,00
Teor in Situ (%)	1,56
Custo de Investimento (US\$)	116.000.000,00
Custo de Operação (US\$/ ano)	14.036.891,00
Recuperação do Metal no Beneficiamento (%)	86,00
Preço do concentrado (US\$/t)	466,10
Produção de Concentrado (Toneladas/ ano)	70.462,18
Receita de Venda do Concentrado (US\$/ano)	32.842.424,37
Custo Unitário do Concentrado (US\$/t)	199,21
Taxa de Desconto (%)	15,00 17,50 20,00

Os resultados obtidos para o caso base, de acordo com a metodologia do FCD foram os seguintes:

Taxa de Desconto (%)	VPL US\$(10 ⁶)
15,00	-31,90
17,50	-35,86
20,00	-38,26
TIR	7,33 %

A Figura 4.2 apresenta uma análise gráfica dos resultados obtidos para o caso base:

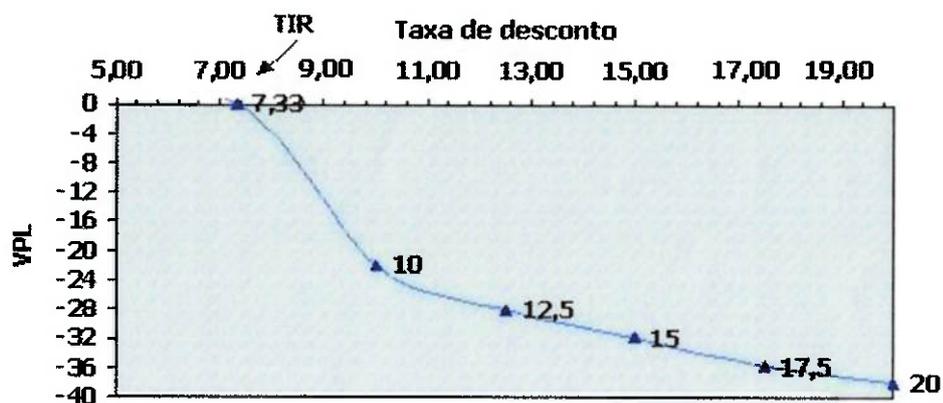


Figura 4.2 – Análise gráfica do Caso Base

A análise dos resultados obtidos para o caso base indica que o projeto não é atrativo, levando-se em consideração, as regras de decisão do método, que indicaram o seguinte cenário:

- O VPL obtido com as taxas de desconto empregadas, consideradas como de vedação ou mínimas de atratividade, revelou-se negativo: $VPL \ll 0$;
- A TIR mostrou-se muito menor que as taxas consideradas como atrativas $TIR \ll r$.

Portanto, pelos critérios de aceitação do FCD, o projeto deve ser descartado.

4.4 – Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade realizada buscou quantificar as alterações no retorno esperado para o projeto, em função das variações nos parâmetros de entrada, que apresentam elevados níveis de incerteza em suas estimativas e são considerados críticos ou estratégicos

A análise de sensibilidade avaliou os efeitos que as variações no preço de venda do concentrado, na reserva recuperável e no teor médio *in situ*, podem causar nos indicadores VPL e TIR. Todas as sensibilidades foram realizadas com as taxas de desconto de 15,00%, 17,50% e 20%. A sensibilidade do projeto, em relação às variações nas estimativas dos parâmetros considerados críticos, foi avaliada considerando-se intervalos de -20%, -10%, +10%, +20% para cada parâmetro.

Foram estimados e considerados como esperados, três preços de venda para o concentrado, a saber:

- P_1 US\$/t 466,10;
- P_2 US\$/t 427,72;
- P_3 US\$/t 619,60.

As reservas e os teores considerados como esperados foram discretizados por três pares de valores. Esses valores foram obtidos a partir das medianas das distribuições dessas variáveis e pelos limites superiores e inferiores, apresentados na Tabela 4.1, e estão indicados a seguir:

Reserva Recuperável (toneladas)	TM in Situ %
▪ 52.200.000	▪ 1,16
▪ 33.200.000	▪ 1,56
▪ 20.800.000	▪ 2,05

Os parâmetros críticos do projeto sensibilizados para análise foram combinados, obtendo-se quarenta e cinco cenários possíveis de fluxo de caixa. Com os fluxos descontados por três taxas (15,00%, 17,50% e 20%) obtendo-se 135 resultados para o retorno do projeto. A Tabela 4.10 apresenta os valores dos preços do concentrado e as tonelagens e teores que foram empregados na análise.

Tabela 4.10 – Sensibilidades do Preço de Venda do Concentrado e das Reservas e Teores

Preço Concentrado (US\$/t)				
	20%	10%	-10%	-20%
466,10	559,32	512,71	419,49	372,88
427,72	513,26	470,492	384,948	342,176
619,60	743,52	681,56	557,64	495,68
Reserva Recuperável (10 ³ t)				
	20%	10%	-10%	-20%
33.200,00	39.840,00	36.520,00	29.880,00	26.560,00
55.200,00	66.240,00	60.720,00	49.680,00	44.160,00
20.800,00	24.960,00	22.880,00	18.720,00	16.640,00
Teor médio <i>in situ</i> (%)				
	20%	10%	-10%	-20%
1,56	1,87	1,72	1,40	1,25
1,16	1,39	1,28	1,04	0,93
2,05	2,46	2,26	1,85	1,64

Os resultados da análise de sensibilidade estão representados graficamente nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5, que mostram a variação da TIR em função do preço de venda do concentrado e teor das reservas.

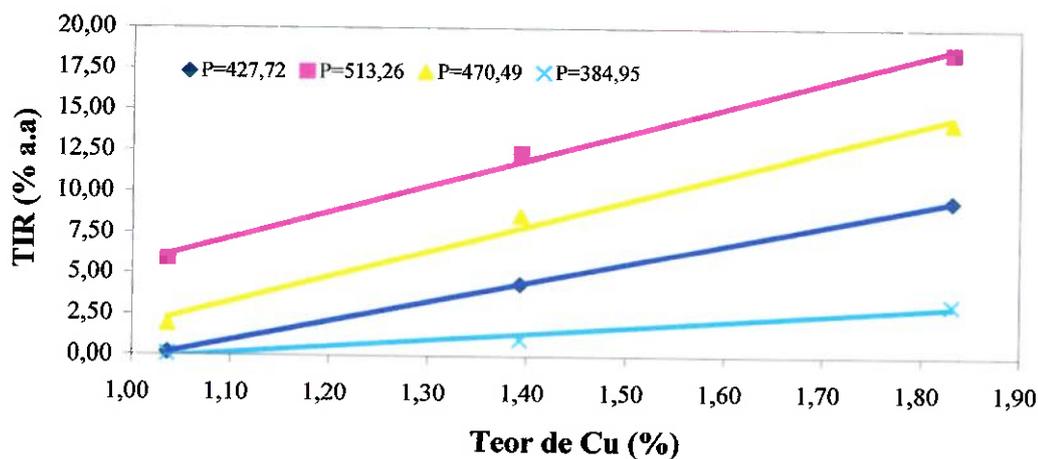


Figura 4.3 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre

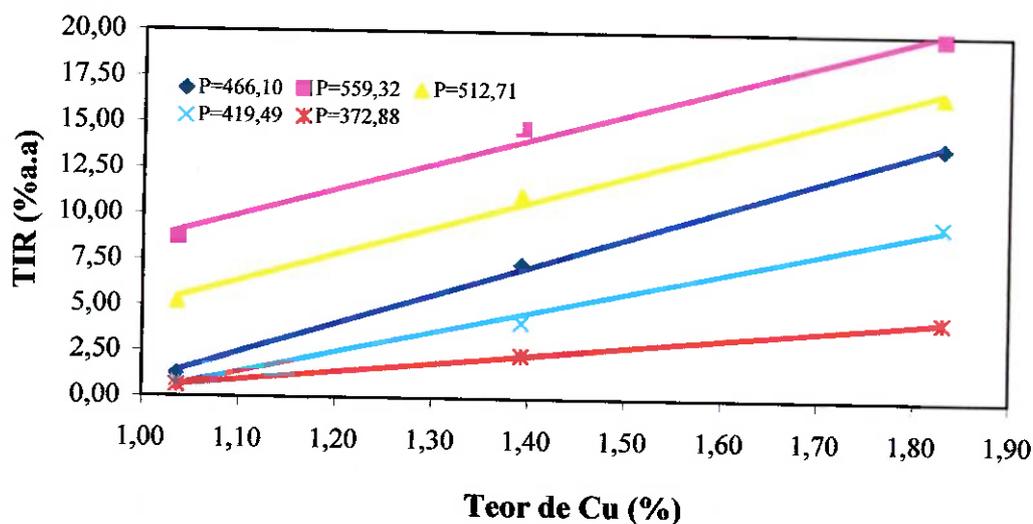


Figura 4.4 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre

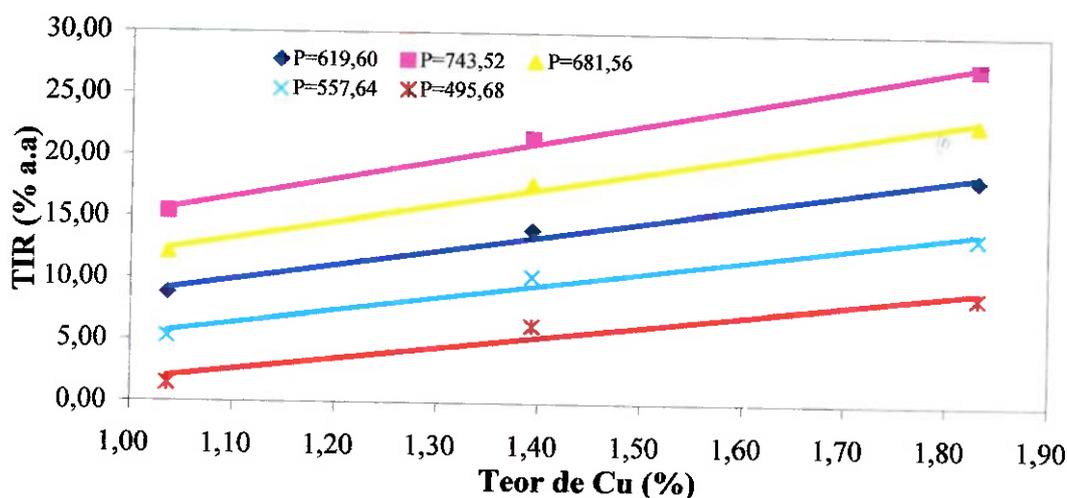


Figura 4.5 – Análise de Sensibilidade da TIR em Relação ao Preço e teor de Cobre

Análise de sensibilidade indica três cenários distintos, de acordo com os preços de venda do concentrado, estimados para o projeto, a saber:

- I. O cenário de avaliação do projeto, considerando-se o preço de venda do concentrado US\$/t 427,72 (US\$/t 1.530,00 do metal), revela-se não atrativo. A análise do gráfico da Figura 4.3 indica que somente a partir de uma variação positiva de 20% sobre o preço de venda do concentrado, seria obtida uma TIR superior à taxa mínima de

atratividade de 15%, assumindo-se que o teor médio seja próximo de 1,58% ;

- II. A análise do gráfico da Figura 4.4 revela que o projeto, somente será atrativo, para variações positivas superiores a 10% do preço de venda do concentrado estimado de US\$/t 466,10 (US\$/t 1.647,00 do metal), com teor médio de 1,8%;
- III. O gráfico da Figura 4.5 indica que se considerando o preço estimado de US\$/t 619,60 (US\$/t 2.115,00 do metal), o projeto seria atrativo, apresentando TIR de até 27%, na hipótese de variação positiva de 20% sobre o preço de venda do concentrado. Mesmo para variações negativas de até 10% do preço e teor próximo a 1,6%, obter-se-ia uma TIR superior à taxa de desconto de 15%. Entretanto, os resultados obtidos a partir do preço estimado de US\$/t 619,60 não refletem a realidade do mercado, que tem praticado preços próximos a US\$/t 420,00.

Assim de acordo com os cenários delineados pela análise de sensibilidade, o projeto não é atrativo e deve ser rejeitado.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DE CASO – ABORDAGEM OPÇÕES REAIS

5.1 – Apresentação

No presente capítulo é analisado o direito de desenvolver a mesma jazida avaliada no Capítulo 4. O foco da análise é a opção de investir, da corporação detentora dos direitos de minerários. O direito de desenvolver a mina foi avaliado como uma opção de compra, considerando-se a mina desenvolvida como ativo objeto e os investimentos necessários para o desenvolvimento da mina, com o preço de exercício dessa opção.

A metodologia empregada na precificação da opção de desenvolver a mina foi a da análise dos direitos contingentes, através da composição de um *portfolio* replicante com contratos futuros de cobre. Para avaliar a jazida foi utilizado Simulação de Monte Carlo, implementada através do programa EXEL.

A decisão do emprego dessa metodologia levou em consideração dois aspectos. Primeiro o estilo de opção europeia torna possível a abordagem de Monte Carlo. Segundo essa abordagem possibilita que variações na quantidade dos investimentos e na vida da mina, de acordo com a tonelagem de minério verificada. Em particular a SMC permite a simulação das trajetórias de preços para o cobre, os quais podem ser empregados como *inputs* do fluxo de caixa do projeto e estabelecer a distribuição de valores para o ativo objeto (mina desenvolvida).

O modelo avaliou a opção real de desenvolver a mina depois de completado um estudo detalhado de viabilidade de dois anos, com as incertezas relacionadas ao minério estando resolvidas.

Tendo como base os mesmos valores que subsidiaram a avaliação realizada no Capítulo anterior, a reserva recuperável e o teor esperado, são 33,20 milhões de toneladas e 1,56 %, respectivamente. Entretanto, apenas parte do depósito foi

considerada como bem conhecida, resultando em grande incerteza quanto ao real volume das reservas e teores.

Para que possam ser assumidos como confiáveis, os limites inferiores e superior da reserva e teor, foram considerados como estimados a partir de um detalhamento adicional do depósito, os quais são obtidos a partir de pesquisa geológica adicional, com emprego de sondagens. Essas sondagens adicionais permitem estabelecer com maior segurança a quantidade e a qualidade do minério presente no depósito. Os limites fixados pela pesquisa, para fins didáticos, foram os mesmos empregados na avaliação convencional realizada no Capítulo 4. A pesquisa de detalhe teve um custo estimado de US\$ 2 milhões e duração de dois anos.

5.2 - Modelagem

A modelagem adotada levou em consideração os seguintes pressupostos e simplificações:

- a) Foi enfocada a opção de escolha do tempo mais adequado para o investimento (*timing*), sendo ignoradas as opções operacionais. Em particular, assumiu-se que uma vez iniciado o desenvolvimento do projeto, as opções de adiamento ou aceleração no desenvolvimento, fechamento temporário e reabertura, e mudança no volume de produção, foram ignoradas sendo considerada apenas a hipótese de desativação;
- b) A taxa livre de risco e a taxa de inflação são conhecidas e determinísticas;
- c) As distribuições de probabilidades das reservas recuperáveis e teores de minério podem ser adequadamente caracterizadas por três valores cada, conforme apresentado na Tabela 5.1;
- d) Os valores expressos na Tabela 5.1, para custos operacionais, depreciação e tributos foram obtidos com o emprego da mesma metodologia empregada no Capítulo 4, considerando-se uma variação de 5% positiva e negativa, para as hipóteses de melhor cenário e pior cenário, respectivamente;

Tabela 5.1 –Resumo das informações empregadas na avaliação

CENÁRIO		PIOR	ESPERADO	MELHOR
Reservas	Milhões de toneladas	52.20	33.20	22.400
Teor	%	1,16	1,56	2,05
Vida da mina	Anos	19	19	15
Produção de Concentrado	Milhares de Toneladas	52.395	70.462	92,595
Custo operacional	Milhões de US\$	13,68	14,4	15,12
Estudo de Viabilidade	Milhões de US\$	2,0	2,0	2,0
Ano 1	Milhões de US\$	2,0	2,0	2,0
Ano 2	Milhões de US\$	2,0	2,0	2,0
Investimentos				
Ano 3	Milhões de US\$	14,67	14,67	14,67
Ano 4	Milhões de US\$	19,31	20,33	21,35
Ano 5	Milhões de US\$	36,00	38,00	39,90
Ano 6	Milhões de US\$	40,85	43,00	45,15
Custo de Desativação	Milhões de US\$	4,7	4,7	4,7

A tabela 5.1 apresenta estimativas das produções anuais, investimento, e custos operacionais para os três cenários propostos que correspondem à reserva recuperável da jazida.

- e) Os preços do cobre seguem o processo estocástico de movimento geométrico browniano, enquanto a taxa de conveniência da *commodity* segue o processo de reversão a média. O preço do cobre é negativamente correlacionado com a taxa de conveniência da *commodity*. Formalmente representados, o preço do cobre e sua taxa de conveniência são expressos respectivamente pelas seguintes equações:

$$\frac{dP}{P} = (r - \delta)dt + \sigma dz \quad (5.1)$$

$$d\delta = k(\alpha - \delta)dt + \sigma_{\delta} dz \quad (5.2)$$

Onde: P é o preço, r é a taxa livre de risco, δ é a taxa de conveniência da *commodity*, α é o termo de longo prazo da taxa de conveniência; k é o coeficiente de reversão a média que dita a velocidade na qual a taxa de conveniência aproxima-se da média de longo prazo; dz é o incremento de ruído no processo Browniano, σ e σ_δ as volatilidades de preço e a taxa de conveniência da *commodity* respectivamente;

- f) Os parâmetros relevantes foram obtidos a partir do mercado de cobre nos mercados à vista e de futuros da *LME* entre setembro de 1991 e junho de 2002; foram empregados preços dos negócios à vista e contratos futuros de três meses, para a determinação da taxa de conveniência da *commodity*, de conforme a Equação 5.3 proposta por GIBSON e SCHWARTZ (1990) e SCHWARTZ (1997):

$$\delta = r' - 4 \ln \frac{F(S,3)}{S} \quad (5.3)$$

Onde r' é a taxa livre de risco, S é o preço à vista e $F(S, 3)$ é o preço futuro dos contratos de 3 meses;

- g) a determinação dos parâmetros k e α foi realizada a regressão da pela equação, $\delta_t - \delta_{t-1} = a + b\delta_{t-1} + \varepsilon_t$ (5.4) e calculados :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a}{b} \\ k &= -\ln(1+b) \\ \sigma &= \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\ln(1+b)}{(1+b)^2 - 1}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Onde σ_ε é o erro padrão da regressão.

A tabela 5.2 apresenta os parâmetros k e α e as volatilidades, calculados em uma janela de 90 dias maior variação de preços. Foram estimados preços e taxa de conveniência da *commodity* para os dois primeiros anos, empregando uma versão discreta do processo descrito pela equação (5.1). A taxa de conveniência da *commodity* e o preço inicial do cobre considerados foram 20% e US\$/t 2.115,00 (preço médio do metal entre os anos 1990 e 2002), respectivamente.

Tabela 5.2– Parâmetros de Estimativas dos Preços

Parâmetros de reversão à média da Taxa de conveniência da <i>commodity</i>		Volatilidades	
k_c	α_c	σ_c	$\sigma_{\delta c}$
0,8%	6,0%	22%	25%

Foram empregadas para determinar os parâmetros k e α da equação (5.1), cotações diárias da *London Metal Exchange* no período compreendido entre setembro de 1991 e Junho de 2002.

Considerando-se que o mercado de contratos futuros realiza-se indefinidamente no futuro e que a taxa de conveniência da *commodity* reverte para a média, o preço futuro do cobre depois de um período de dois anos pode ser aproximado pelas equações (5.6) e (5.7):

$$F(P, \delta, t) = P \exp -\delta \frac{1 - e^{-kt}}{k} + A(t) \quad (5.6)$$

Com $A(T)$ obtido por:

$$A(t) = (r - \alpha + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\delta}^2}{k^2} - \frac{\sigma_s \sigma_{\rho_s}}{k}) t + \frac{1}{4} \frac{\sigma_{\delta}^2}{k^2} + \frac{1 - e^{-2kt}}{k^3} + (\alpha k + \sigma_{\delta} \sigma_{\rho_{\delta}} - \frac{\sigma_{\delta}^2}{k}) \frac{1 - e^{-kt}}{k^2} \quad (5.7)$$

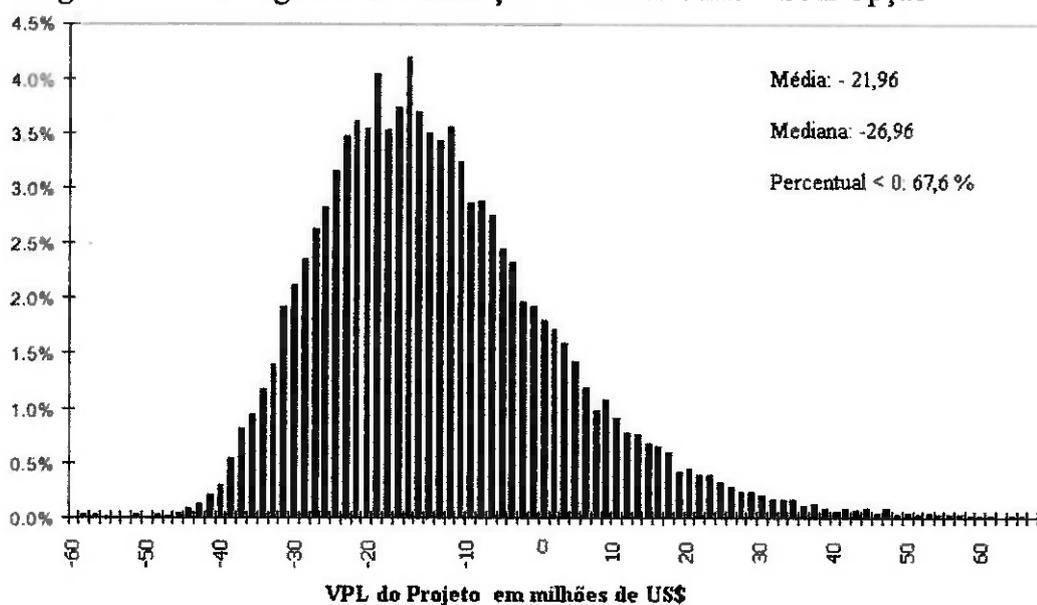
Onde σ é a volatilidade de preços, δ é a taxa de conveniência da *commodity* estocástica, α é taxa de conveniência da *commodity* de longo prazo, k é o coeficiente de reversão a média, σ_{δ} é a volatilidade da taxa de conveniência da *commodity* e ρ_{δ} é o coeficiente de correlação entre a taxa de conveniência da *commodity* e o preço da *commodity*.

A Simulação de Monte Carlo gerou 10.000 trajetórias de preços e taxas de conveniência dos anos zero a dois, empregando o intervalo de tempo mensal. Para cada simulação os resultados do preço e taxa de conveniência da *commodity* foram empregados nas equações e (5.6) e (5.7) para a obtenção dos preços futuros do cobre. Esses preços futuros então foram empregados para gerar três cenários de fluxo de

caixa descontados, os quais correspondem ao pior cenário, cenário esperado e melhor cenário resultante.

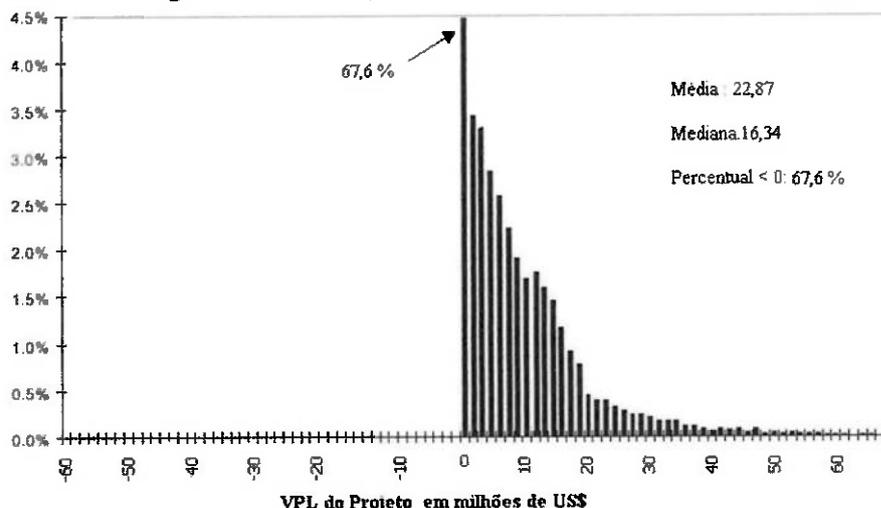
O gráfico da Figura 5.1 mostra a distribuição dos VPLs se a mina fosse desenvolvida no segundo ano (i.é se não houvesse, a opção de diferir o projeto, e o modelo do FCD fosse aplicado).

Figura 5.1 – Histograma da Simulação de Monte Carlo – Sem Opção



A Figura 5.1 apresenta o resultado de 10.000 simulações de Monte Carlo para o projeto se a mina fosse desenvolvida ao final do segundo ano. A média do VPL dessa opção real, isto é, do direito de desenvolver o projeto é US\$ -21,96 milhões. A distribuição mostra que 67,6% dos resultados no segundo ano são negativos. Dessa constatação pode-se desprender a essência da Teoria de Opções Reais, na qual para tomada de decisão de investir ou não em um projeto os gestores podem otimizar essa decisão, optando por não investir depois de ir “conhecendo” os resultados da exploração, se os valores econômicos da mina tornarem-se negativos.

Ao longo do projeto esses resultados negativos podem ser truncados conforme é mostrado na Figura 5.2, onde se pode verificar o efeito da opção de abandonar o desenvolvimento no VPL do projeto. Os valores para resultados negativos de VPL não são desenvolvidos, resultando em uma expansão da média para US\$ 22,87 milhões.

Figura 5.2 - Histograma da Simulação de Monte Carlo – Com a Opção de Desenvolver

5.3 –Análise dos Resultados

Como é apresentada na Tabela 5.3 a decisão de não desenvolver o projeto pode ser tomada em 60% do cenário de alto teor, 80% do cenário esperado e 93% do pior cenário para o teor. A mina não deverá ser desenvolvida quando o preço do metal é baixo, a TIR é menor que a taxa de desconto, a taxa de conveniência tem inclinação negativa e quando a quantidade de minério é insuficiente. Nessas condições, o valor da mina desenvolvida não justifica os encargos das despesas de desenvolvimento, e a opção adotada é não investir e abandonar o projeto, tendo sido o investimento em pesquisa o prêmio pago pela opção de desenvolver a jazida.

Tabela 5.3 –Características do Projeto: Condicionado ao desenvolvimento após o 2^o ano

	Projeto Desenvolvido	Projeto não Desenvolvido
Teor Alto		
Preço do Cobre/Taxa de Conveniência	\$1.989,67/5,5%	\$1566,52/8,8%
Percentual de Hipóteses	40%	60%
Teor Esperado		
Preço do Cobre/Taxa de Conveniência	\$2.242,65/5,4	\$1.644,36/0,75
Percentual de Hipóteses	20%	80%
Teor Baixo		
Preço do Cobre/Taxa de Conveniência	\$2.492,80/5,3%	\$1.711,95/7,4%
Percentual de Hipóteses	7%	93%
Todos os Resultados		
Preço do Cobre/Taxa de Conveniência	\$2.104,42/5,4%	\$1.653,8/7,8
Percentual de Hipóteses	32,4%	67,6%

Portanto, ao exercer a opção de abandonar o projeto no segundo ano, pode-se eliminar todos resultados negativos de VPL. Nesse caso, a média “expandida” do VPL eleva-se a para US\$ 22,87 milhões. A diferença entre essa hipótese e a hipótese sem opção é US\$ 44,83 milhões, o que corresponde ao valor da opção esperar para desenvolver ou abandonar o projeto no ano dois.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Esta Dissertação apresentou o estado da arte referente aos conceitos, premissas, métodos, procedimentos e ferramentas na avaliação econômica de projetos de mineração, envolvendo decisões de investimento, sob condições de incerteza. Avaliou um projeto de uma mina de cobre empregando a metodologia do Fluxo de Caixa Descontado, com as regras do VPL e TIR, e com emprego da Teoria das Opções Reais.

Foi mostrado no Capítulo 2 que o preço do cobre é volátil e que mecanismos de proteção contra esta volatilidade devem ser utilizados pelos gestores das empresas. Num ambiente de grandes incertezas, como setor mineral, a avaliação de ativos deve ser feita levando-se em consideração as oportunidades de investimento, criadas ao longo do tempo. A Teoria das Opções Reais é indicada para este tipo de avaliação, pois leva em conta as decisões gerenciais, que tendem a alterar o comportamento do projeto, à medida que as incertezas são reveladas.

O Capítulo 3 apresentou os modelos de opções reais que foram utilizados no processo de avaliação do Capítulo 5. As opções de espera, suspensão temporária e de desativação da operação foram definidas e modeladas. Finalmente, as principais técnicas de avaliação de opções reais na avaliação de projetos de mineração foram apresentadas.

No Capítulo 4, o projeto de uma mina de cobre foi analisado com emprego da metodologia do FCD, sendo calculados os indicadores VPL e TIR. Foram feitas análises de sensibilidade para o preço de venda do concentrado, teor do minério e tonelagem das reservas.

No Capítulo 5 foi enfocada a opção de escolha do tempo mais adequado para o investimento (*timing*) o valor de se declarar flexível, ou o valor da opção de abandono da operação, foi calculado.

6.1 - Considerações Gerais

Em relação à revisão bibliográfica sobre o “estado da arte” da avaliação econômica de projetos de mineração, envolvendo decisões de investimento, sob condições de incerteza, pode-se destacar as seguintes conclusões:

- Para a adoção de um modelo de opções reais em uma empresa de mineração, em aplicações rotineiras em análise econômica de projetos de investimentos em mineração, algumas características são desejadas. As principais qualidades que deve ter esse modelo são a simplicidade, a confiabilidade, a adequabilidade e a flexibilidade;
- Os Modelo de Avaliação de Opções Reais tem um largo campo de utilização na avaliação dos projetos de mineração de empresas;
- A moderna empresa de mineração deve usar uma abordagem científica para a análise de investimentos na presença de incertezas. Desta forma, se faz necessário o emprego de técnicas que incorporem a teoria da probabilidade e técnicas de otimização dinâmica sob incerteza. A teoria das opções reais integra essas ferramentas ao considerar as flexibilidades gerenciais embutidas nas oportunidades de investimentos;
- A teoria das opções usa as informações de mercado de forma muito mais eficiente do que o FCD, avaliando projetos de forma que em geral independe das preferências individuais dos investidores;
- Enquanto o método do FCD usa o mesmo indicador (o VPL) para representar o valor do projeto e estabelecer a regra de decisão, a teoria moderna mostra que são dois conceitos distintos, sendo que a regra de decisão é tal que maximiza o valor da oportunidade de investimento, sujeito à incerteza envolvida;
- A moderna teoria modela a incerteza econômica como um processo estocástico, e a incerteza técnica como um processo no qual se pode reduzir a

variância dessa incerteza através do investimento seqüencial. Essas duas formas de incerteza têm papéis diferentes na decisão de investimentos, pois a primeira incentiva a espera por novas informações, enquanto a segunda incentiva o investimento inicial em novas informações.

6.2 Análise Comparativa entre a abordagem FCD e Opções Reais

Os resultados observados no Capítulo 5 mostraram que a estratégia de investimento tem valor (US\$ 44,83 milhões para o caso analisado) e deve ser considerada pelas empresas de mineração, para que maximizem o valor dos novos empreendimentos. A negligência quanto ao reconhecimento dessa opção, faz com que projetos considerados marginais, como o proposto nessa dissertação, mas rentáveis, sejam rejeitados como concluído no Capítulo 4, considerando-se a técnica do FCD. A técnica de opções reais permite as empresas exercer a opção, e resolver as limitações do FCD.

6.3 - Trabalhos Futuros

Dentre as perspectivas de trabalhos futuros no campo avaliação econômica de projetos com emprego das técnicas de opções reais pode-se destacar:

- Avaliar o teor de corte como uma opção de flexibilidade operacional levando-se em consideração a seleção dos teores de corte para modificação da estratégia de operação da mina, fazendo o melhor uso das capacidades operacionais nas fases de lavra, beneficiamento e refino do metal de acordo com as mudanças no valor esperado do preço concentrado;
- Estudar o uso da teoria das opções reais na seleção de carteira de projetos;
- Desenvolver um modelo que leve em conta a competição no mercado considerando-se as incertezas inerentes ao processo de avaliação e as interações

competitivas entre os outros mineradores da mesma substância, participantes do mercado;

ANEXO A

Definições e Conceitos

A.1 - Teorema do Limite Central

Sejam $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ N variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas. Como a distribuição das variáveis é a mesma, as esperanças e variâncias delas coincidirão, ou seja:

$$E(\delta_1) = E(\delta_2) = \dots = E(\delta_N) = m \quad (\text{A.1})$$

$$Var(\delta_1) = Var(\delta_2) = \dots = Var(\delta_N) = v^2 \quad (\text{A.2})$$

Agora denota-se a soma das variáveis como $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ como:

$$\alpha_N = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n \quad (\text{A.3})$$

Desta forma a esperança e variância da soma são dadas por:

$$E(\alpha_N) = E(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) = N.m \quad (\text{A.4})$$

$$Var(\alpha_N) = Var(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) = N.v^2 \quad (\text{A.5})$$

Supondo a variável aleatória normal ζ_N , com distribuição definida pelos parâmetros $\mu = N.m$, $\sigma^2 = N.v^2$. O teorema do limite central diz que, para qualquer intervalo (a, b) e N suficientemente grande, tem-se:

$$P\{a < \alpha_N < b\} \approx \int_a^b P_{\zeta_N}^{\xi}(x) dx \quad (\text{A.6})$$

onde , $P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ é a função densidade de probabilidade da distribuição normal.

Uma interpretação do teorema, é que a soma de um elevado número de variáveis independentes igualmente distribuídas é aproximadamente normal. Este teorema explica o aparecimento freqüente de variáveis normais.

A.2 - Processos Estocásticos

Um processo é dito estocástico quando a variável de estudo é determinada ao longo do tempo ou do espaço, sendo que esta variável possui pelo menos uma parte aleatória. Assim, um processo estocástico é sinônimo de função aleatória, sujeitando-se às leis probabilísticas. Na maioria das vezes, uma variável estocástica é composta por dois termos um valor esperado e um valor aleatório.

Pode-se entender um processo estocástico de previsão de uma variável aleatória, como um valor esperado $E[X]$ mais um valor previsto de erro, que segue uma distribuição de probabilidade. Logo se tem:

$$X(t) = E [X(t)] + \text{erro}(t) \quad (\text{A.7})$$

Considerando-se um intervalo de tempo dt a variação será:

$$d(\text{variável}) = \text{Fator} \times d(\text{tempo}) + \text{Fator} \times d(\text{aleatoriedade})$$

A.2.1- Processo Aleatório Discreto

O exemplo mais simples de processo estocástico é um processo aleatório discreto. Um processo é dito aleatório discreto quando uma variável aleatória X_t que varia ao longo do tempo. Com probabilidade $p = (1 - q)$, ou seja:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{A.8})$$

Onde ε_t é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade:

$$\text{prob}(\varepsilon_t = +1) = p \quad e \quad \text{prob}(\varepsilon_t = -1) = q \quad (\text{A.9})$$

Na figura A.1 tem-se o exemplo de um passeio aleatório discreto com centenas de realizações.

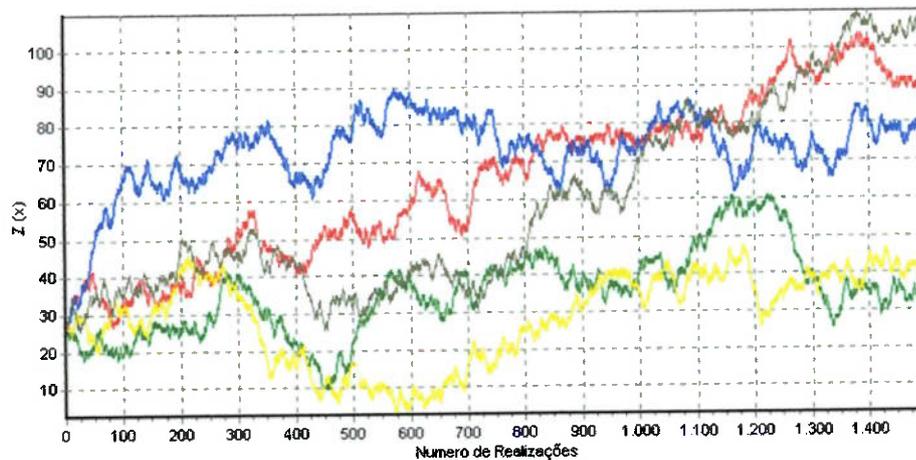


Figura A.1 – Passeio Aleatório Discreto

A.2.2 - Processo Aleatório Com Deriva

Uma forma de generalizar o processo passeio aleatório com estado e tempo discreto é através da mudança de probabilidades dos saltos para cima ou para baixo. Seja p a probabilidade de um salto para cima e $q = (1 - p)$ a probabilidade de um salto para baixo, com $p > q$. Deste modo tem-se um passeio aleatório com deriva. No tempo $t = 0$, o valor esperado de X_t para t é maior que zero, e aumenta com t .

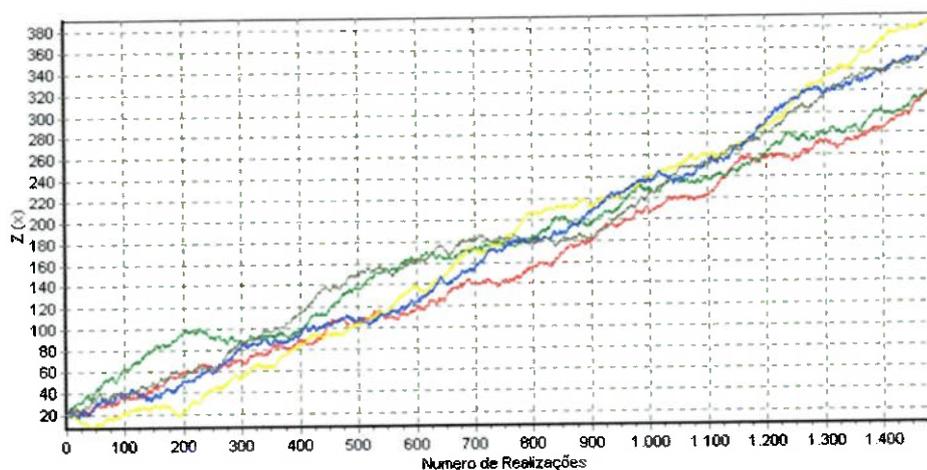


Figura A.2 - Passeio Aleatório com Deriva

A.2.3 - Processo Auto-regressivo de 1ª Ordem ou AR(1)

Um outro exemplo estocástico discreto é o processo auto-regressivo de 1ª ordem. Ele é dado pela equação:

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \xi_t \quad (\text{A.10})$$

Onde ρ e δ são constantes com valor entre $-1 < \rho < 1$ e ξ_t é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e variância igual a 1. Este processo é estacionário. O valor esperado para longas distâncias de x_t é igual a $\delta / (1 - \rho)$, independente de seu valor corrente. O processo AR(1) é também conhecido como processo de reversão à média, porque x_t tende a reverter para este valor esperado em grandes distâncias.

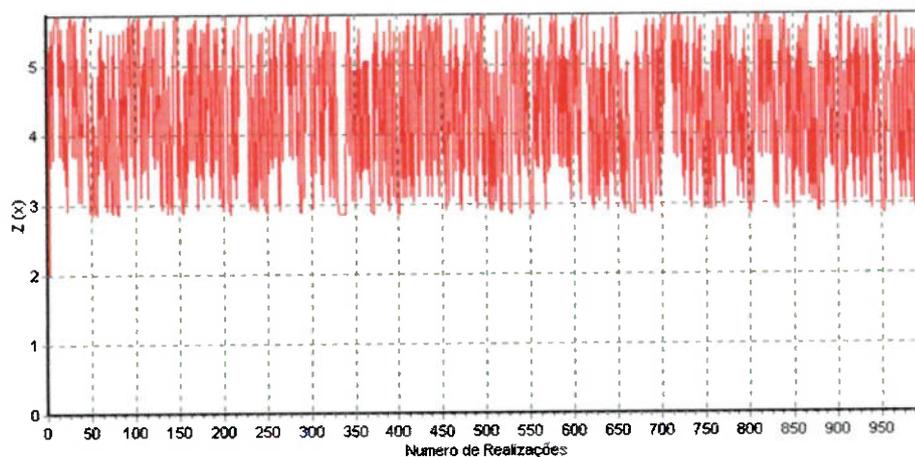


Figura A.3 - Processo Auto-regressivo de 1ª ordem com $\rho = 0,3$ e $\delta = 3$

O Processo Aleatório Discreto, Aleatório com Deriva e Aleatório Auto-regressivo satisfazem as propriedades de Markov. São desta maneira chamados de processos de Markov. Esta característica assegura que a distribuição de probabilidades para x_{t+1} depende somente de x_t e não adicionalmente do que aconteceu antes do tempo t .

A.2.4 - Processo de Wiener

Um processo de Wiener contínuo no tempo - também chamado de Movimento Geométrico Browniano, pode ser visto como a versão em tempo contínuo (ou o limite) de um movimento discreto de passeio aleatório - é um processo estocástico com três propriedades, a saber:

- É um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo dependem somente do seu valor atual, não sendo afetado pelos valores passados do processo, ou por qualquer outra informação;
- Possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidades da variação do processo em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo (que não sobreponha o primeiro);
- As variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo Δt .

Um processo de Wiener é descrito por meio da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dx = dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt} \quad (\text{A.11})$$

$$dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt} \quad (\text{A.12})$$

A.2.5 - Lema de Ito

Um processo estocástico contínuo $x(t)$, é chamado processo de Ito, quando é representado pela equação:

$$dx = a(x, t)Xdt + b(x, t)Xdz \quad (\text{A.13})$$

A equação (A.13) é a forma mais geral do processo de Wiener e as funções $a(x, t)$ e $b(x, t)$ são conhecidas e não aleatórias.

Onde: $a(x,t)$ é a função não-aleatória de tendência, $b(x,t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener, e t é o tempo.

Percebe-se que o movimento geométrico browniano é um caso especial o processo de Ito, onde $a(x,t) = \alpha x$ e $b(x,t) = \sigma x$.

Dada uma função $F(x, t)$, diferenciável no mínimo duas vezes em x , e uma vez em t , o lema de Ito mostra que a mesma segue o seguinte processo:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (\text{A.14})$$

O Lema de Ito é a base das fórmulas e métodos de precificação de opções.

Enquanto parece razoável que o preço de uma *commodity* siga um processo de Markov, e tenha incrementos independentes, não é razoável assumir que as variações do preço sigam uma distribuição normal, afinal o preço de uma *commodity* não pode ser inferior a zero. Assim, pode-se assumir que os preços das *commodities* sigam uma distribuição lognormal, ou seja, as variações no logaritmo do preço seguem uma distribuição normal.

Dessa forma, sendo S o processo geométrico browniano que descreve o preço da *commodity*, $F(S) = \ln S$, tem-se, pelo lema de Ito:

$$ds = \alpha S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (\text{A.15})$$

$$dF = \left[0 + \alpha S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} + (\sigma \cdot S)^2 - \frac{1}{S^2} \right] dt + \sigma S \frac{1}{S} dz = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (\text{A.16})$$

Assim, baseado nos resultados obtidos acima e na análise do movimento browniano, tem-se que dentro do intervalo de tempo T , a variação em $\ln S$ segue uma distribuição normal com média, $(\alpha - \sigma^2/2)T$ e variância $\sigma^2 T$.

A versão discreta da equação estocástica acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t \quad (\text{A.17})$$

ou

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t\right]} \quad (\text{A.18})$$

pois dz é um processo de Wiener ($\Delta Z = \varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$) é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, a data $t+1$ é igual a $t + \Delta t$, $\Delta F = F_{t+1} - F_t = \ln S_{t+1} - \ln S_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, e ΔF , Δt , ΔZ , são as versões discretas de dF , dt , e dz , respectivamente.

Em um ambiente neutro ao risco (ou risco-neutro), onde a taxa de retorno de todos ativos é igual à taxa de juros livre de riscos, a tendência α acima é igual à taxa de juros livre de riscos r .

A.2.6 - Movimento Browniano Com Deriva

Este é um dos mais simples processos de Weiner e é definido da seguinte forma:

$$X_t = X_{t-1} + \alpha + \sigma\varepsilon_t \quad (\text{A.19})$$

Sendo nesta equação α chamado de parâmetro de deriva e σ a variância. A figura A.4 mostra que com uma deriva $\alpha=0,2$ por ano (0,01667 por mês) e desvio padrão igual a 1.

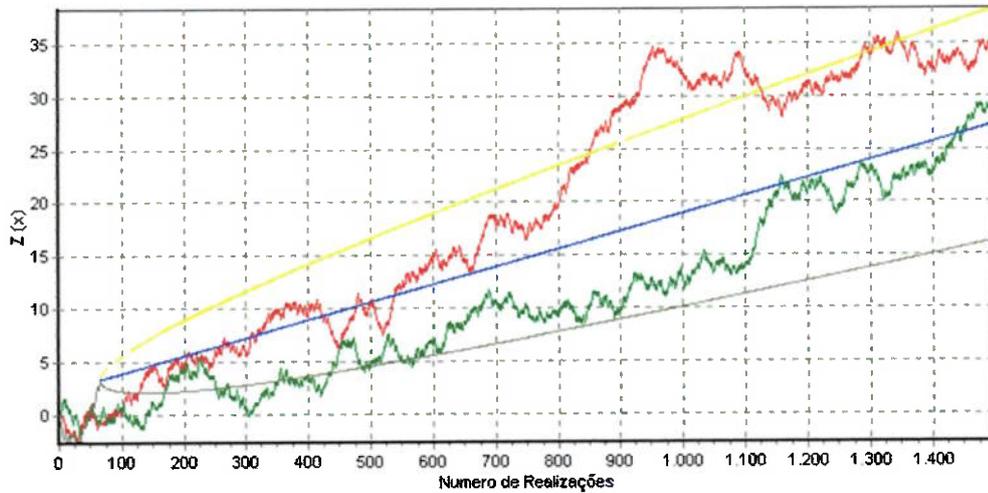


Figura A.4 - - Movimento Browniano Com Deriva

A.2.7 Processo de Reversão a Média

É um caso especial e importante da equação do Lema de Ito $dx = a(x, t)Xdt + b(x, t)Xdz$.

Considerem-se, por exemplo, os preços de *commodities* tais como o cobre. Apesar de tais preços serem modelados como movimentos Brownianos, pode-se argumentar que eles deveriam de alguma forma ser relacionados a custos de produção marginais para longos períodos. Em outras palavras, enquanto que para horizontes de tempo pequeno o preço do cobre poderia flutuar aleatoriamente para cima ou para baixo, para longo prazo ele deveria desviar-se de volta ao custo marginal de produção.

O processo de reversão à média também como processo no de Ornstein - Unlenbeck é o seguinte:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (\text{A.20})$$

Neste caso η é a velocidade de reversão à média. A figura A.5 tem uma simulação de preço através do processo de reversão a média.

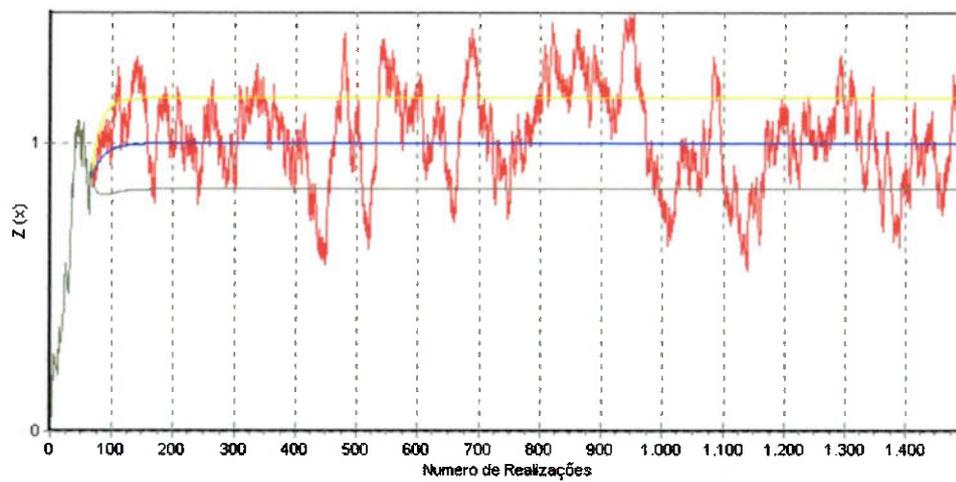


Figura A.5 – Processo de Reversão à média

ANEXO B

MODELOS

B.1- Volatilidade

A volatilidade é a medida da incerteza quanto aos retornos proporcionados pela variação de preço do ativo (no presente trabalho refere-se ao preço do cobre negociado na *LME*), sendo uma medida da velocidade do mercado e dos ativos que o compõem. Por exemplo, se o ativo não se mover a uma velocidade suficiente, uma opção de compra sobre este terá valor menor, pois a probabilidade dela ser exercida é muito pequena.

Segundo HULL (1996), na hipótese de mercados eficientes um ativo que possui liquidez no mercado, tem a volatilidade do seu preço causada unicamente pela sucessão aleatória de novas informações sobre retornos futuros do ativo.

NATENBERG (1994), descreve vários tipos de volatilidade, que seguem:

- histórica;
- atual;
- futura;
- prevista ou projetada;
- implícita.

As volatilidades históricas, futuras e projetadas são números associados ao comportamento do ativo. A volatilidade implícita é a que se refere às opções, portanto, é aquela que imputada em modelo de precificação de opções, faz com que o prêmio originado por seu cálculo seja igual ao que está sendo correntemente negociado no mercado.

Dentre as diversas formas de estimar a volatilidade futura, a mais utilizada é através da medida da volatilidade histórica pressupondo que o ativo irá representar o mesmo comportamento no futuro.

Para otimizar a estimativa da volatilidade futura, inicialmente escolhe-se um período de tempo o qual é retirada a amostra dos dados passados, o qual se acredita que possa ser semelhante ao período futuro de interesse. O preço do ativo objeto costuma ser observado em intervalos de tempos fixos (por exemplo, diário). A volatilidade histórica pode ser obtida através da fórmula do desvio padrão:

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{1}{N} [(r_0 - \bar{r})^2 + (r_1 - \bar{r})^2 + \dots + (r_i + \bar{r})^2 + \dots + (r_N + \bar{r})^2]} \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{r} = \frac{1}{N+1} (r_0 + r_1 + \dots + r_i + \dots + r_N) \quad (\text{B.2})$$

Onde $N+2$ é o tamanho da amostra de preço do ativo, Δt é o intervalo de tempo fixo, medido em anos, que determina quando o preço, S do ativo é coletado, r é o retorno do ativo no período de i até $i+1$, \bar{r} é a média de r_i que é dado pela fórmula:

$$r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (\text{B.3})$$

Divide-se a fórmula do desvio padrão por $1/\Delta t$, pois a unidade de medida padrão na avaliação de opções é um ano, e, de acordo com o modelo de movimento browniano, $\sigma\Delta t$ é a volatilidade para um período de tempo Δt .

O cálculo da volatilidade implícita é feito através de um modelo teórico que fornecerá o valor da volatilidade quando o igualarmos ao preço de mercado da opção. Entre os modelos para o cálculo da volatilidade implícita pode-se destacar:

- BINOMIAL;
- BLACK & SCHOLES;
- BLACK;
- ARCH - Autoregressive conditional heterocedasticity;
- GARCH - Generalized conditional heterocedasticity.

Tomando-se, por exemplo, o modelo de BLACK¹ (1976), para precificação de opções sobre futuros, que parte da premissa que os preços futuros, F , seguem um

¹ O Modelo de BLACK (1976), foi originado a partir do aprimoramento do modelo de BLACK & SCHOLES (1973), que é descrito na seção B.2 deste apêndice.

movimento geométrico browniano. Com essa premissa, e assumindo que os contratos futuros podem ser tratados como ativos que fornecem dividendos contínuos iguais à taxa livre de riscos, chega-se às seguintes fórmulas de avaliação de opções de compras sobre contratos futuros:

$$C = e^{-rt} F.N(d) - e^{-rt} .E.N(d - \sigma\sqrt{T}) \quad (\text{B.4})$$

$$d = \frac{\ln(F/E) + (\sigma^2/2).T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (\text{B.5})$$

Onde r é a taxa livre de riscos anual, F é o preço futuro do ativo, E é o preço de exercício da opção, T é o tempo restante até o vencimento da opção, medido em anos, e $N(x)$ é a função distribuição acumulada normal.

Como o parâmetro de volatilidade σ da fórmula acima não pode ser isolado para obter-se a volatilidade implícita, é necessário usar métodos numéricos para extração de raízes de funções. A função $C(\sigma)$ (apenas outra representação da fórmula acima) é monotônica crescente, assim dois métodos muito conhecidos são o de Bissecção e o de Newton-Raphson que podem ser aplicados.

B.2 - Modelo de Black & Scholes

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram um trabalho seminal no qual propunham uma fórmula para o cálculo do valor teórico de uma opção de compra (*call*) do tipo europeu, exercida sobre um ativo que não paga nenhuma remuneração ou dividendo e que é livremente negociado no mercado à vista, sendo seu preço determinado pela oferta e demanda, supondo um mercado eficiente e perfeito. Esse trabalho foi o mais importante marco para o desenvolvimento do mercado de opções, ficando conhecido como modelo de BLACK & SCHOLES. Apesar de matematicamente sofisticado (envolve conceitos de cálculo estocástico e equação diferencial parcial) o modelo de Black & Scholes (B&S) ganhou uma rápida popularidade, sendo hoje largamente usado no mercado. Aprimoramentos e

extensões do modelo de B&S não tardaram, assim como as extensões dos conceitos de opções para investimentos em projetos industriais.

O modelo de B&S assume que a distribuição de probabilidades do ativo básico² é *log-normal*, que é completamente descrito pelo seu valor esperado (média) e pela *volatilidade*. No entanto, a sua fórmula não depende da média dessa distribuição, apenas da volatilidade e de parâmetros que seriam usados se não houvesse incerteza, isto é, se a função lucro fosse linear³. Assim, a precificação de opções sob incerteza independe das atitudes dos indivíduos em relação ao risco.

De acordo com o modelo de B&S preço de uma *call* é função dos seguintes fatores:

- valor do ativo objeto, S;
- valor do seu exercício, F;
- tempo a decorrer até o vencimento da opção, t;
- nível da taxa de juros, r;
- probabilidade de a opção ser exercida.

As premissas usadas no modelo derivação da equação diferencial de BLACK & SCHOLLES são:

- O preço da ação segue um processo geométrico browniano da seguinte forma: $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$;
- A venda a descoberto de ativos é permitida e ilimitada, com o uso total dos recursos obtidos. Uma venda a descoberto ocorre quando um investidor toma emprestada uma ação, com a promessa de devolvê-la no futuro, e a vende com a finalidade de obter recursos;
- Não há custos de transação, impostos, e todos ativos são perfeitamente divisíveis;

² Ativo básico aqui é o “*underlying asset*”. Outra palavra inglesa que não tem uma tradução precisa e simples é “*payoff*”, que aqui será traduzida como *resultado* ou *lucro*.

³ Ver RUBINSTEIN (1987 pg.80): para “*payoff*” linear, é necessário apenas o preço corrente do ativo, o preço de exercício, o tempo de expiração (T), a taxa de juros e os dividendos antes de T.

- O ativo objeto (ação) não paga dividendos no decorrer da vida do derivativo (a vida de um derivativo termina na sua data de vencimento ou quando é exercido);
- Não há oportunidades de arbitragem livre de riscos (o princípio de ausência de arbitragem é válido);
- O ativo-objeto é comercializado de forma contínua, e não discreta;
- A taxa de juros livre de riscos é constante durante a vida do derivativo;
- A volatilidade do preço da ação é constante durante a vida do derivativo.

Supondo que, $F(S, t)$ seja o preço de uma opção de compra européia, com uma função do preço da ação S e do tempo t . Pelo Lema de Ito, tem-se:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dz \quad (\text{B.6})$$

As versões discretas das equações acima são:

$$\Delta S = \alpha \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta Z \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta F = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha \cdot S \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right] \Delta t + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta Z \quad (\text{B.8})$$

Como os processos de Wiener das equações acima são os mesmos, ou seja, $\Delta Z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ para ambas. Assim, uma carteira composta pelo ativo-objeto e seu derivativo podem eliminar o processo de Wiener, ou a sua componente aleatória. Para tal, toma-se uma carteira composta da venda de um derivativo e da compra de $\frac{\partial F}{\partial S}$ ações. O valor da carteira é dado por:

$$\Pi = -F + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot S \quad (\text{B.9})$$

A variação do valor da carteira dentro de um intervalo de tempo Δt é

$$\Pi = -\Delta F + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot \Delta S \quad (\text{B.10})$$

Substituindo a versão discreta do processo geométrico browniano do preço da ação, e do processo do preço do derivativo, na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma \cdot S \frac{\partial F}{\partial S} \Delta Z \right] + \frac{\partial F}{\partial S} (\alpha \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \Delta Z) = \\ & - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Nota-se que, na equação acima, a componente aleatória foi eliminada; por isso, no período Δt , a carteira Π não possui risco. Pelo princípio de ausência de arbitragem, a carteira Π terá no período Δt , retorno igual à taxa livre de riscos r :

$$\Delta \Pi = \Pi \cdot r \cdot \Delta t \quad (\text{B.12})$$

Quando se substitui a equação (B.7) na equação (B.6) da variação da carteira, tem-se:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta t &= \Pi \cdot r \cdot \Delta t \quad \therefore \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) \Delta t &= \left(S \cdot \frac{\partial F}{\partial S} - F \right) r \cdot \Delta t \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot r \cdot S = r \cdot F \quad (\text{B.13})$$

A equação diferencial acima é a equação de BLACK & SCHOLES, que tem como solução à função $F(S, t)$, que pode ser o preço de um derivativo qualquer, e não apenas de uma opção de compra européia. A metodologia de construção da carteira é muito importante, por apresentar uma forma de eliminação da componente aleatória e a obtenção de equações diferenciais que permitem alcançar soluções analíticas para os preços de derivativos. A carteira é livre de riscos dentro de um período de tempo

infinitesimal; para mantê-la permanentemente livre de riscos, é necessário alterar as quantidades de derivativos e ações freqüentemente.

No caso de uma opção de compra européia, que tem como ativo-objeto uma ação que não paga dividendos durante a vida do derivativo, temos a seguinte condição de contorno:

$$F(S, t) = \text{Máximo}\{S - E; 0\}, \text{ quando } t = T \quad (\text{B.14})$$

Onde E é o preço de exercício da opção, e T é o tempo de vida da opção, medido em anos.

Considerando a condição de contorno (B.14), e a premissa de que o preço da ação segue uma distribuição lognormal, BLACK e SCHOLLES (1973), chegaram à seguinte solução para a sua equação diferencial (B.13):

$$C = SN(d) - Ee^{-rt} N(d - \sigma\sqrt{T}) \quad (\text{B.15})$$

$$d = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (\text{B.16})$$

Onde C é o preço de uma opção de compra européia, com preço de exercício E , tempo de vida T , taxa livre de riscos r , volatilidade (expressa de forma decimal) do retorno da ação σ , e N é a função distribuição de probabilidades normal acumulada, para uma variável com média zero e desvio-padrão igual a um.

A fórmula de BLACK e SCHOLLES para uma opção de venda européia é a seguinte:

$$P = E.e^{-rt} N(-d + \sigma\sqrt{T}) - S.N(-d) \quad (\text{B.17})$$

$$d = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (\text{B.18})$$

Onde P é o preço de uma opção de venda européia, e os demais parâmetros permanecem os mesmos.

O valor de uma opção pode ser dividido em duas componentes:

- Valor intrínseco, ou seja, é o valor da opção no caso da mesma ser exercida imediatamente. Se a opção for de compra, este valor é Máximo $\{S - E; 0\}$, onde S é o preço do ativo-objeto, e E é o preço de exercício da opção;
- Valor do tempo ou prêmio por risco é o valor que a opção possui no caso de ser mantida ao invés de exercida imediatamente. Este valor depende principalmente do tempo restante até o vencimento da opção, e da volatilidade.

Os parâmetros de *hedging* ou medidas de sensibilidade são as derivadas parciais do preço de uma opção, que indicam a variação do preço da opção para uma dada variação em uma variável, mantidas as outras constantes. O conhecimento do comportamento desses parâmetros é importante para a formação de estratégias e carteiras de *hedging*. Os cinco principais parâmetros são:

- I. **Delta** - corresponde à variação do prêmio teórico de uma opção, dada uma variação do ativo objeto, $\delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ na forma diferencial ou $\Delta = N(h)$;
- II. **Gama** - corresponde à taxa de variação do delta, ou quão rapidamente uma opção muda as suas características, passando a comportar-se mais ou menos com o ativo objeto, $\Gamma = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}$ na forma diferencial ou $\Gamma = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left(e^{-d^2/2} \right) / S \cdot \sigma \sqrt{T} \right]$;
- III. **Teta** - é a medida que reflete a perda de valor da opção com o passar do tempo se todas as outras condições permanecerem constantes, $\Theta = \frac{\partial F}{\partial t}$, na forma diferencial ou $\Theta = \frac{S\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}}{2\pi} + rEe^{-rt} N(d - \sigma\sqrt{T})$;
- IV. **Vega** - descreve o comportamento dos prêmios teóricos de opções de acordo com variações na volatilidade, $\nu = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$, na forma diferencial ou $\nu = S\sqrt{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-d^2/2}$;

V. **Rho** - é a taxa de variação do valor de uma opção com respeito a variações na taxa de juros livre de riscos, $\rho = \partial F / \partial r$, na forma diferencial ou

$$\rho = -E.T.e^{-rT} . N(-d + \sigma\sqrt{T}).$$

Como exemplo das medidas de sensibilidade, pode-se escrever a equação de BLACK e SCHOLLES, que apresenta um exemplo de carteira livre de riscos, como a seguir:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2.S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial S}.r.S = r.F \quad (\text{B.19})$$

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2.S^2.\Gamma_t + \Delta_t.r.S = r.F \quad (\text{B.20})$$

B.3 - Programação Dinâmica

A programação dinâmica é um procedimento matemático de otimização que surgiu no início da década de 50. Richard Bellman foi responsável não somente pela formulação do principal aspecto teórico do método, mas também pela sua sistematização. A programação dinâmica oferece algumas vantagens em relação a outras técnicas de programação matemática. A primeira dessas vantagens é poder tratar funções descontínuas, não diferenciáveis, não convexas, determinísticas ou estocásticas. Além disso, não exige o isolamento prévio de uma região convexa para a aplicação do procedimento. A última e não menos importante dessa série de vantagens é o fato de a programação dinâmica oferecer um menor custo computacional⁴ que a simples enumeração de todas as possibilidades de um problema combinatório, o que, em alguns casos, se torna impraticável ou extremamente caro.

⁴ Custo Computacional é o custo total de um método numérico representado pela soma de todas as instruções realizadas por este durante a computação de um algoritmo. Este custo é obtido através da inserção de um contador de instruções nos programas de computador dos métodos numéricos. Tendo esse valor de custo, pode-se determinar, independentemente do equipamento que se possua, qual o método mais rápido ou lento, barato ou caro.

O método possui também desvantagens entre as quais as principais são a necessidade de separabilidade e monotonicidade. Uma função é dita separável se, e somente se, a função de retorno ótimo depender apenas do estágio em que é avaliada, não sendo afetada pelos demais estados do sistema. Funções monotônicas, por sua vez, são aquelas em que um crescimento na função de retorno ótimo acarreta um crescimento na função objetivo.

A programação dinâmica oferece uma abordagem alternativa ao problema de controle ótimo que explora de forma mais direta a estrutura dinâmica do problema. A sua principal vantagem em relação à formulação tradicional do problema de controle ótimo é que, uma vez resolvido o problema, a lei de controle ótimo para todo o domínio viável do estado é obtida. Será necessário resolver uma equação diferencial parcial que é a função de retorno ótimo e é derivada da equação de Bellman. A partir desse ponto, obtém-se a função de retorno ótimo. A vantagem que advém disso é que se dispõe de uma gama completa de controles ótimos em malha aberta que poderão servir de pré-programação para um sistema dinâmico. Como a dinâmica do problema é uma abstração do sistema físico real, é possível que existam diferenças entre os resultados do modelo matemático e os resultados reais. Essa é a vantagem de se trabalhar o controle em malha fechada, como faz a programação dinâmica.

No método de programação dinâmica a função de desempenho é escrita como função do controle e do estado em um estágio isolado. Deseja-se conhecer o conjunto de estados ótimos para que essa função de desempenho seja otimizada. Conhecer o conjunto de estados ótimos significa conhecer o conjunto de controles ótimos. Através de restrições aos estados (finais, intermediários ou iniciais), deve-se estabelecer a lei de controle ótimo que também deve satisfazer as restrições impostas ao controle. A variável N representa o número de mudanças de estado.

A empresa deverá escolher as variáveis de controle u_t que irão gerar um lucro $\Pi_t(x_t, u_t)$. No período seguinte ($t+1$), o estado será x_{t+1} . A decisão ótima leva a $F_{t+1}(x_{t+1})$. Uma vez que o período t é uma variável de comportamento randômico, utiliza-se o valor esperado: $E [F_{t+1}(X_{t+1})]$ que é chamado de valor de continuidade. O valor atual da soma do lucro mais o valor de continuidade será:

$$\Pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \varepsilon_t [F_{t+1}(x_{t+1})] \quad (\text{B.21})$$

O problema de otimização consiste em encontrar o conjunto de controles u_t que maximize a expressão acima. O resultado nos leva à equação de Bellman, também conhecida como equação fundamental da otimalidade, ou equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, como é conhecida pelos matemáticos devido à grande similaridade dessa abordagem com aquela formulada por Hamilton-Jacobi na teoria de controle ótimo.

$$F_t(x_t) = \max \left\{ \Pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \varepsilon_t [F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (\text{B.22})$$

A equação de Bellman é derivada do princípio de otimalidade também formulado por Bellman:

“De qualquer ponto de uma trajetória ótima, a trajetória remanescente é ótima para o problema correspondente que se inicia naquele ponto e termina no mesmo ponto do problema anterior”.

A função retorno ótimo é caracterizada pelo estado $F_t(x_t)$. Essa função para cada estágio consiste em um vetor, em que a ordem do vetor é o número de estados viáveis para cada estágio. Assim, a dimensão F pode variar de estágio para estágio.

No estágio final, o valor de F é dado apenas pela contribuição do estado final à função objetivo. Assim, o procedimento geral de solução do problema de programação dinâmica consiste na avaliação recursiva da função de retorno ótimo. Inicia-se com a avaliação de $F_T(x_T)$. Em seguida, são avaliadas as funções para os pontos intermediários anteriores. O vetor de estado ótimo é aquele que, após essas avaliações recursivas, proporcionar o $F_t(x_t)$ máximo.

É importante notar que o estado final não precisa ser conhecido. É necessário apenas que a avaliação da função retorno ótimo se inicie no último estágio, o que não implica a definição do estágio final.

B4. Técnicas De Simulação

Pela definição de HAMMERSLEY e HANDSCOMB (1964), Monte Carlo é uma ferramenta de simulação estatística que utiliza métodos de amostragem para resolver problemas de natureza estocástica ou determinísticas. Normalmente, quantidades que podem ser escritas sob a forma de valor esperado de uma variável aleatória, definida sob um espaço de probabilidades, podem ser estimadas por estes métodos.

O método de Monte Carlo é baseado na simulação de variáveis aleatórias para resolução de problemas. O método de Monte Carlo é considerado muito simples e flexível para ser aplicado em problemas de qualquer nível de complexidade. Entretanto, a maior inconveniência do método, é o número de simulações necessário para se reduzir o erro da estimativa da solução procurada, o que tende, na prática, a tornar o método muito lento.

A idéia básica da Simulação de Monte Carlo⁵ (SMC), quando empregada na precificação de opções, é a de que, dada a equação estocástica que determina o comportamento do ativo-objeto, um possível caminho que este ativo-objeto pode percorrer é simulado, e o valor da opção é calculado. Este valor da opção é considerado como uma amostra aleatória dos possíveis valores que a opção pode assumir. Então, este procedimento é repetido N vezes ($N=10.000$ é considerado, na literatura de opções, um “bom” N), e se obtém a distribuição dos valores da opção, onde a média é uma estimativa do valor esperado da opção.

Segundo BOYLE (1977), a SMC pode ser empregada para avaliação de opções financeiras, principalmente do tipo Européia. Neste caso, a decisão de exercício somente é tomada no vencimento do título e o valor da opção não é influenciado pelas decisões do proprietário, ao longo de sua vida útil. Supondo a não existência de oportunidades de arbitragem, o valor da opção Européia (F_0) é dado pelo valor esperado da sua remuneração terminal (π_T) descontado, usando uma taxa de juros livre de risco (r), de acordo com a equação (B.23), dada a seguir:

⁵ Os fundamentos matemáticos da Simulação de Monte Carlo apresentadas no Apêndice C.

$$F_0 = E[e^{-rT} \pi_T(S_T, C) | S_0] \quad (\text{B.23})$$

O algoritmo a seguir descreve os passos necessários para avaliar uma opção Européia, usando Simulação de Monte Carlo.

- Geram-se M caminhos (amostras) para o ativo objeto até o vencimento;
- Descontam-se as remunerações terminais da opção em cada caminho;
- Estima-se o valor da opção através da média de todas as remunerações descontadas.

No passo um, o processo estocástico do preço do ativo objeto é utilizado para gerar a amostra do problema. Caso não exista, pode-se utilizar séries históricas do preço do ativo objeto ou então séries sintéticas futuras geradas por algum processo.

No passo dois, a função de remuneração da opção é utilizada. A remuneração de uma opção de compra, venda ou exótica é utilizada para o caso de se avaliar uma opção financeira. No caso de avaliação de opções reais, é utilizada a remuneração referente à decisão gerencial.

O valor obtido no passo três, é dado pela equação (B.24). Segundo BOYLE (1977), é um estimador não-tendencioso do preço verdadeiro de uma opção Européia com vencimento em T e remuneração π_T .

$$\hat{F}_0 = e^{rT} \sum_{j=1}^M \pi_{T,j}(S_{T,j}, K) \quad (\text{B.24})$$

Uma das grandes vantagens da SMC sobre outras técnicas numéricas é a possibilidade de avaliar o erro das estimativas. O desvio padrão das amostras, equação (B.25), é uma medida da dispersão dos valores estimados em relação à média.

$$SD(F_0) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \left\{ \sum_{j=1}^M [\pi_{T,j}]^2 - M \left[\sum_{j=1}^M \pi_{T,j} \right]^2 \right\}} \quad (\text{B.25})$$

O erro padrão, equação (B.25), é uma medida do erro cometido pelas estimativas em relação à média da amostra.

$$SE(F_0) = \frac{SD(F_0)}{\sqrt{M}} \quad (\text{B.26})$$

As estimativas feitas com SMC não possuem um padrão bem definido de convergência para o valor verdadeiro. De acordo com a equação (B.26), o erro das estimativas diminui com a \sqrt{M} , então deve-se ter uma amostra muito grande, para que uma precisão aceitável seja atingida. Mas, quanto maior a amostra, maior o custo computacional, podendo até inviabilizar a aplicação.

Analisando novamente a equação (B.26), o erro das estimativas pode ser reduzido se o desvio padrão das estimativas puder ser reduzido de alguma forma. Existem várias técnicas para reduzir o erro, manipulando o desvio padrão (ou variância) das estimativas. Estas técnicas são conhecidas como Técnicas de Redução de Variância.

O valor de um projeto de investimento com flexibilidade operacional pode ser estimado usando Simulação Monte Carlo. A flexibilidade operacional é dada por uma opção de compra do tipo Européia, que será exercida se o valor da receita for superior ao custo variável de operação.

B.4.1. Técnica de Redução da Variância

A técnica da variável de controle (*control variate*) de redução de variância, proposta por BOYLE (1977) para avaliar opções, pode ser utilizada quando existem duas opções similares, e uma delas possui solução analítica. A idéia básica deste método é ajustar o estimador da opção sem solução analítica (calculado através do método de Monte Carlo), de acordo com a diferença entre um valor conhecido (calculado analiticamente) e um valor observado (calculado, também, através de Monte Carlo). O erro conhecido (diferença entre os valores conhecidos e

observados), serve como um controle na estimação da opção sem solução analítica.

Assim, temos:

$$f_A = f_{AM} + (f_B - f_{BM}) \quad (\text{B.27})$$

ou

$$f_A = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_{AM}(\varepsilon_j) + \left(f_B - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_{BM}(\varepsilon_j) \right) \quad (\text{B.28})$$

Onde f_A é o valor procurado da opção A, f_{AM} é a estimativa da solução gerada por Monte Carlo, da opção A que não possui solução analítica; f_{BM} é a estimativa, também gerada por Monte Carlo, da opção B que possui solução analítica, f_B é o valor da solução analítica da opção B; N é o número de observações utilizadas nas simulações, e j e ε é um valor aleatório, que é usado para ambas simulações. Por exemplo, a opção A pode ser uma opção de venda americana, que não possui solução analítica, enquanto a opção B pode ser uma opção de compra européia, cuja solução pode ser obtida através da fórmula de Black e Scholes. A variância da equação (B.29) é dada por:

$$\text{Var}(f_A) = \text{Var}(f_{AM}) + \text{Var}(f_{BM}) - 2\text{Cov}(f_{AM}; f_{BM}) \quad (\text{B.29})$$

Ou seja, a técnica da variável de controle é mais eficaz se a covariância entre f_{AM} e f_{BM} for grande. Em (B.29), nota-se que a variância do valor procurado da opção A é reduzida devido ao sinal negativo no termo da covariância, que é resultado da construção da expressão (B.29).

B.5 - Capital Asset Pricing Model e Taxas de Desconto

No método tradicional do FCD é necessário que se saiba a taxa de desconto apropriada ao risco (μ). A principal teoria existente para calcular essa taxa é o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Ela diz que essa taxa de desconto pode ser vista como a soma de duas parcelas, o prêmio pelo valor do dinheiro no tempo (a

taxa livre de risco r ⁶) e um prêmio de risco proporcional ao valor esperado do “*spread*” de mercado ($r_m - r$) multiplicado por um fator β que mede o quociente entre a covariância ($\text{COV}[r_V, r_m]$) do retorno do ativo de risco (isto é, retorno do valor do projeto V) com o retorno do mercado (m), e a variância do retorno do mercado ($\beta = \text{COV}_{V, m} / \sigma_m^2$). O símbolo r_m denota uma medida do valor esperado do retorno de mercado. Assim, a taxa de retorno esperada de um projeto (taxa de desconto ajustada ao risco) de acordo com o *CAPM* é:

$$\mu = r + \beta (r_m - r) \quad (\text{B.30})$$

⁶ Pode-se pensar como o retorno de um título garantido pelo governo (como os “*bonds*” de 30 anos do tesouro norte-americano), com um retorno previamente conhecido. A rigor, mesmo esses títulos têm risco, devido às incertezas com a inflação futura, que torna incerto o ganho *real*.

ANEXO C

MÉTODOS NUMÉRICOS

C.1 – Método Binomial

Desenvolvido praticamente na mesma época, mas independentemente, por RENDLEMAN E BARTTER (1979) e COX, ROSS E RUBINSTEIN (1979), o Método Binomial, (MB), possui a premissa de que a distribuição de probabilidades do ativo em cada período, suposta log-normal, foi aproximada por uma distribuição binomial. O modelo parte das seguintes hipóteses:

- Os ativos são negociados continuamente, e todos os preços seguem processos estocásticos contínuos e estacionários;
- A distribuição dos preços do ativo base é log-normal;
- A variância do retorno e a taxa livre de risco são constantes ao longo do tempo;
- Os modelos são desenvolvidos com base em opções européias;
- Inexistência de restrições ou custos atrelados à venda curta e custos de transação.

O MB envolve a construção de uma árvore binomial, em que para cada instante discreto (representado por um nó), estarão relacionadas às probabilidades de alteração do preço do ativo base. Considera-se que o ativo base obedece a um processo binomial multiplicativo.

O valor da opção deverá ser igual ao valor de um *portfolio* que permita o mesmo retorno da opção. Esse *portfolio*, que deverá se ajustar de forma dinâmica a cada nova posição será formado pela compra de Δ ações e pela venda de uma opção. O valor Δ deve ser escolhido de modo que o retorno gerado pelo *portfolio* seja igual ao retorno obtido em uma aplicação livre de risco. Isso garante que não existirão oportunidades de lucro através de operações de arbitragem.

A cada intervalo de tempo Δt , o retorno sobre o ativo poderá variar de duas maneiras: na primeira, o retorno seria dado por $u - 1$, ($u > 1$); ou o retorno poderia

ser igual a $d - 1$, ($d < 1$). Seja S_0 o valor atual do ativo, o preço, no momento $t = 1$, seria dado por $S_1 = u.S_0$, e nessa situação o valor da opção seria f_u ; ou por $S_1 = d.S_0$ e a opção valeria f_d . Se houver um aumento no preço do ativo-base, o valor do portfólio será:

$$S_0 u \cdot \Delta - f_u \quad (\text{C.1})$$

Por outro lado, se o preço do ativo recuar, teremos:

$$S_0 d \cdot \Delta - f_d \quad (\text{C.2})$$

Logo, para que o *portfolio* ofereça um retorno livre de risco, (C.1) e (C.2) devem ser iguais. Nesse caso,

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad (\text{C.3})$$

O parâmetro Δ pode ser interpretado como sendo a taxa de variação do preço da opção em relação à variação do preço do ativo-base. Se o custo do *portfolio* é igual a $S_0 \Delta - f$, (C.4), segue que $S_0 \Delta - f = (S_0 u \cdot \Delta - f_u) e^{-rt}$ (C.4), em que r representa a taxa livre de risco.

Substituindo o resultado obtido pela equação (C.3) em (C.4), temos:

$$f = S_0 \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) - \left(S_0 u \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) - f_u \right) e^{-rt} \quad (\text{C.5})$$

Simplificando temos:

$$f = \frac{f_u - f_d - e^{-rt} \cdot u \cdot f_d + e^{-rt} \cdot d \cdot f_u}{u - d} \quad (\text{C.6})$$

Fazendo $p = \frac{e^{-rt} - d}{u - d}$ e substituindo em (C.6) vem :

$$f = e^{-rt} \cdot [p \cdot f_u + (1 - p) f_d] \quad (\text{C.7})$$

Os parâmetros u e d são calculados a partir da volatilidade e o retorno esperado do ativo-base. De acordo com Hull (1999), isso pode ser feito da forma descrita a seguir.

Os intervalos entre os nós têm comprimento igual a Δt . A probabilidade associada a um aumento no preço do ativo, u , é dada por p . De maneira análoga, a probabilidade de que o preço seja reduzido em d é igual a $1 - p$. O valor esperado do ativo ao final do primeiro período é obtido por $S_0 e^{\mu \Delta t}$, em que μ representa o retorno esperado do ativo. Portanto, o valor esperado do ativo base, ao considerar-se as probabilidades, será dado por:

$$q \cdot S_0 \cdot u + (1 - q) S_0 \cdot d \quad (\text{C.8})$$

Igualando a equação (C.8), ao retorno esperado do ativo $S_0 e^{\mu \Delta t}$, podemos calcular p :

$$p = \frac{e^{-\mu \Delta t}}{u - d} \quad (\text{C9})$$

O mesmo raciocínio é aplicado para ajustar os parâmetros à volatilidade. Em um processo de Wiener, a variação do termo estocástico Δz , em pequenos períodos de tempo Δt , é igual a $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ em que ε é uma variável randômica relacionada a uma distribuição normal padrão. Como Δz é normalmente distribuído, a variância de Δz é dada por Δt , e o desvio padrão é igual a $\sqrt{\Delta t}$. A volatilidade é definida como o desvio padrão dos retornos em um período de tempo Δt . Logo, a volatilidade é obtida por $\sigma \sqrt{\Delta t}$. A variância é igual a $\sigma^2 \Delta t$. Para adequar os parâmetros da árvore binomial à volatilidade, deve-se então igualar a variância dos retornos àquela proposta na árvore, obtendo-se:

$$q \cdot u^2 + (1 - q) \cdot d^2 - [q \cdot u + (1 - q) \cdot d]^2 = \sigma^2 \cdot \Delta t \quad (\text{C.10})$$

Substituindo (C.9) em (C.10) e ignorando os termos de ordem superior a Δt^2 chegamos aos valores de u e d , propostos por COX, ROSS & RUBINSTEIN (1979).

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (C.11)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (C.12)$$

Uma vez calculados esses parâmetros, o modelo binomial apura o valor justo para o prêmio a cada nó, e esses valores são trazidos até a data presente descontados à taxa livre de risco.

C.2 - Métodos das Diferenças Finitas

Os métodos de diferenças finitas buscam uma aproximação para a função do preço da opção, a qual é solução de uma equação diferencial.

A idéia básica dos vários métodos de diferenças finitas existentes é a de substituir as derivadas parciais de uma equação diferencial por aproximações baseadas em expansões das séries de Taylor na região dos pontos de interesse. Feitas às substituições das derivadas parciais pelas aproximações de diferenças finitas na equação diferencial, esta pode ser resolvida de “trás para frente”, ou seja, da data de maturidade da opção até a data atual, de uma forma recursiva, de maneira similar àquela realizada pelos modelos baseados em lattice.

Dada a seguinte Equação Diferencial Parcial (EDP) linear de segunda ordem:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (C.13)$$

Onde a , b , c , e , f e g podem ser função de ambas as variáveis independentes (x ou y), ou da variável dependente u .

A equação será:

- Tipo parabólico se $b^2 - 4ac = 0$;
- Tipo elíptico se $b^2 - 4ac < 0$;
- Tipo Hiperbólico se $b^2 - 4ac > 0$.

Grande parte das EDP verificadas na literatura de finanças é do tipo parabólica em uma dimensão, como a equação de Black-Scholes.

Na Teoria de Opções Reais são verificadas as EDP do tipo parabólica e elíptica em uma ou duas dimensões.

O MDF consiste em transformar as derivadas parciais em diferenças de equações dentro de um pequeno intervalo

Assumindo-se que u é função das variáveis independentes x e y , pode-se dividir o plano x, y em uma malha de pontos igual a $\Delta x = h$ e $\Delta y = k$, conforme o gráfico da Figura C2 seguinte:

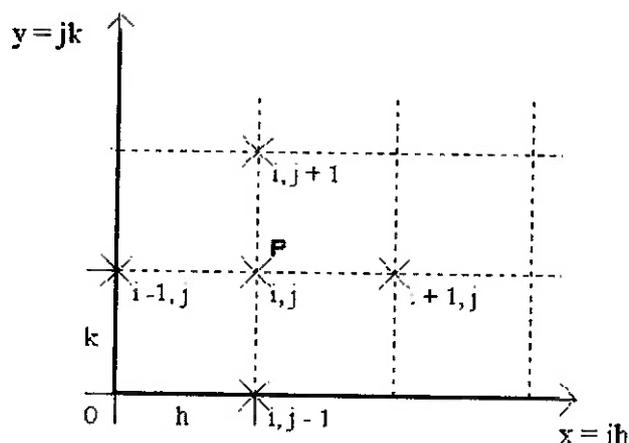


Figura C2

O valor de u no ponto P pode ser avaliado por:

$$u_P = u(ih, jk) = u_{i,j} \quad (\text{C.14})$$

O valor da derivada segunda derivada em P pode ser avaliado da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{C.15})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{k^2} \quad (\text{C.16})$$

O valor da derivada primeira em P pode ser avaliada por três aproximações:

- **Diferença Central:**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{C.17})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2k} \quad (\text{C.18})$$

- **Diferença a Posterior**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h} \quad (\text{C.19})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{k} \quad (\text{C.20})$$

- **Diferença anterior:**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (\text{C.21})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad (\text{C.22})$$

C.2.1 - Método Explícito e o Método Implícito em uma EDP do Tipo Parabólica

Depois da substituição das aproximações das derivadas na EDP, a EDP é convertida em um conjunto de diferenças que podem ser resolvidas pelo método implícito ou explícito.

O índice j será considerado como o tempo e o índice i o preço.

O Método Explícito permite avaliar o desconhecido hoje $u_{i,j+1}$ diretamente a partir do valor subsequente futuro conhecido $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$ e $u_{i+1,j}$.

Portanto aplicação do método explícito, torna a equação diferencial como segue:

$$u_{i,j+1} = p_{i,j}^- u_{i-1,j} + p_{i,j}^0 u_{i,j} + p_{i,j}^+ u_{i+1,j} \quad (\text{C.35})$$

O núcleo de uma EDP utilizando o método explícito é representado abaixo. O valor desconhecido está representado pelo círculo preto e os valores conhecidos pelos círculos em branco conforme mostra a Figura C.2.

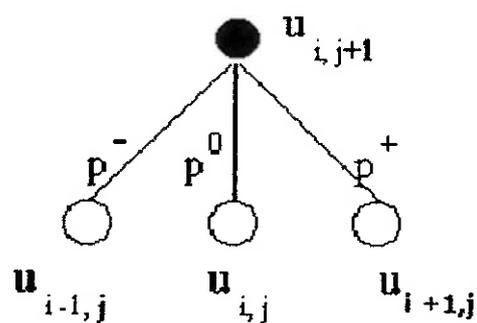


Figura C.2 - Método Explícito

O Método Implícito não permite uma abordagem direta para avaliação do valor desconhecido. Conforme podemos verificar na expressão que segue:

$$u_{i,j} = P_{i,j}^- u_{i-1,j+1} + P_{i,j}^0 u_{i,j+1} + P_{i,j}^+ u_{i+1,j+1} \quad (\text{C.23})$$

O núcleo de uma EDP utilizando-se o método implícito é representado na Figura C.3 abaixo. Os valores desconhecidos são representados pelo círculo pretos e o valor conhecido pelos círculos em branco:

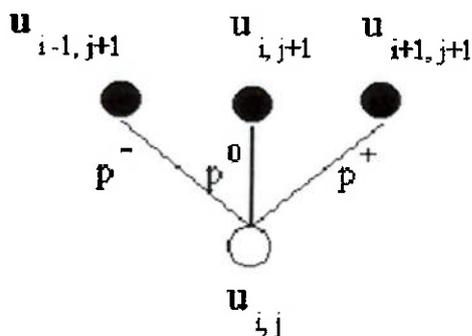


Figura C.3 - Método Implícito

Portanto deve-se resolver um sistema linear de equações para avaliar os valores desconhecidos.

Supondo que a EDP parabólica já tenha sido transformada em um conjunto de diferenças de equações. Pode-se obter um *grid*, conforme indicado no gráfico da Figura C.4, onde os termos dos nós u_1, u_2, u_3 , etc, remanescentes são avaliados.

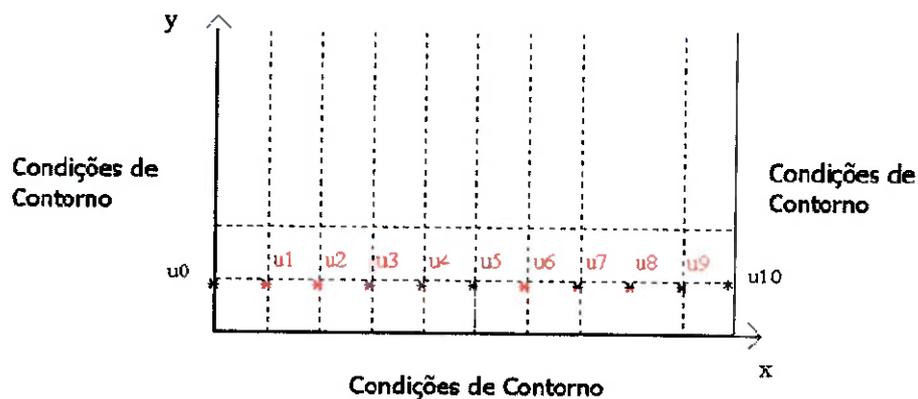


Figura C.4

Quando é utilizado o método explícito, os elementos $u_1 - u_9$ podem ser avaliados diretamente a partir dos elementos subsequentes, os quais são as condições de contorno um.

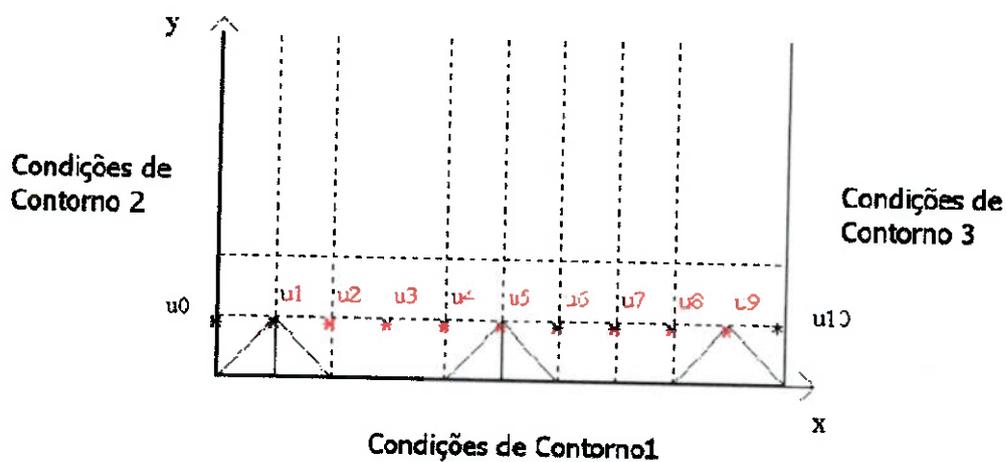


Figura C.5

Se for utilizado método implícito será obtido um sistema simultâneo de nove equações lineares simultâneas, e o obtêm-se simultaneamente o valor dos nove valores desconhecidos.

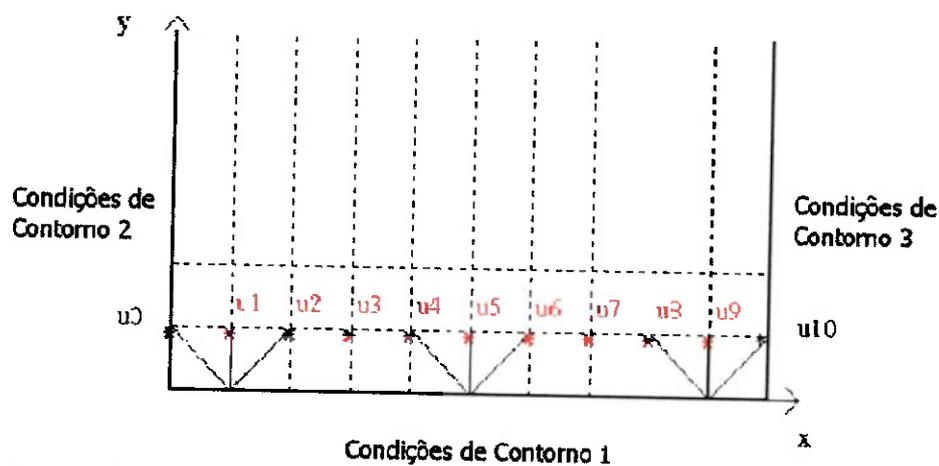


Figura C.6

C.2.2 - Convergência e Estabilidade

O método explícito é sempre estável. Para uma EDP parabólica, após a substituição das derivadas pelas aproximações, é obtida a equação das diferenças que segue:

$$u_{i,j+1} = a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i,j} + c_{i,j}u_{i-1,j} + kd_{i,j} \quad (\text{C.24})$$

Uma maneira rápida de garantir a convergência e estabilidade é atribuindo a , b e $c > 0$ através da mudança do comprimento do intervalo no processo de discretização.

LISTA DE REFERÊNCIAS

- AMRAM, M. ; KULATILAKA, N. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World, *Harvard Business School Press*, Boston, Massachusetts, 1999.
- AMRAM, M.; KULATILAKA, N. Disciplined Decisions - Aligning Strategy Withthe Financial Markets, *Harvard Business Review*, Jan. p.95-104, 1999b.
- ANUÁRIO MINERAL BRASILEIRO. Brasília: Departamento Nacional da Produção Mineral. V. 30, 2001, p.393.
- BARRAQUAND, J.; MARTINEAU, D. Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 30, p.383-405, 1994.
- BELLMAN, R. S. Dynamic programming. New Jersey: Princeton University Press, 1957.
- BLACK, F. ; SHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, v.81, p. 637-659, 1973.
- BOYLE, P. Options: A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics*, v.4, p.323-338, 1977.
- BOYLE, P.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. Monte Carlo Methods for Security Pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, June, v.21, n. 8-9, p.1267-1321, 1997.
- BREALEY, R.; MYERS, S. *Principals of Corporate Finance*. v.5, 1991.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E.S. The Valuation of American Put Options *Journal of Finance*, v.32, n. 2, May, p.449-462, 1977.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E.S. Evaluating Natural Resources Investments, *Journal of Business*, v.58, n.2, p.135-157, 1985.
- BRENNAN, M. ; TRIGEORGIS L.. Flexibility, Natural Resources, and Strategic Options. Oxford: Oxford University Press. 1999. p.158-184.
- BUSBY, J.; C, PITTS. Real Options and Capital Investment Decisions, *Management Accounting*, London, v.75, n.10, pp.38-39, 1997.
- CARR, P. The Valuation of Sequential Exchange Opportunities. *The Journal of Finance*, v.43, n.5, p.1235-1256, 1998.

- COX, J.; ROSS, S. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process. *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 145-166, 1976.
- COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, v.7, p.229-263, 1979.
- DEPARTAMENTO NACIONAL DA PRODUÇÃO MINERAL. Apresenta estatística, legislação e dados referentes a indústria mineral brasileira . Disponível em:< <http://www.dnpm.gov.br/> >. Acesso em: 3 maio 2002.
- DIXIT, A. ; PINDYCK, R. *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press. 2ª Ed., 1995.
- FRIMPONG, S. ; WHITING, J. M. Derivative Mine Valuation, *Resources Policy* , v..23, n.4, p.163-161, 1992.
- GARCIA. D. A Monte Carlo Method for Pricing American Options. *Working Paper*. Berkeley: University of California, 1999.
- GIBSON, R. ; SCHWARTZ, E. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. *Journal of Finance*, v.45, p. 959-976, 1990.
- HULL, J. C. ; WHITE, A. The Use of Control Variate Technique in Option Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 23, p. 237-251, 1989.
- HULL, J. C. Option, Futures, and other de Derivatives Securities. New Jersey: Prentice-Hall, 2ª ed, 1993.
- IBÁÑEZ A. ; ZAPATERO, F. Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier. *Working Paper*. México: Departamento de Administração. Instituto de Tecnología do México, 1999.
- INTERNATIONAL COPPER STUDY GROUP. Fórum de discussão permanente envolvendo questões relativas aos desafios, oportunidades e promoção de cooperação internacional na indústria do cobre. Disponível em < <http://www.icsg.org/>>. Acesso em 08 de jun. de 2002.
- INTERNACIONAL COPPER ASSOCIATION. Disponibiliza acesso a um banco de dados sobre o cobre relativo a tecnologias e usos. Disponível em < <http://www.copper.org/>>. Acesso em 05 jun.2002.
- JACOBY, H. D.; LAUGHTON, D. G. Project Evaluation: A Pratical Asset Pricing Model. *Energy Journal*, v.13, n.2, p.19-47, 1992.
- JOHNSON, H. Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.22, n.3, p.277-283, 1987.

- KASANEN, E.; TRIGEORGIS, L. Flexibility, Synergy, and Control in Strategic Investment Planning. *Capital Budgeting under Uncertainty*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, p.208-231, 1993.
- KEMNA, A.G. Z. Case studies on real options, *Financial Management*, v.22, n.33, p. 259-270, 1993.
- KESTER, W. C. Today's Options for Tomorrow's Growth. *Harvard Business Review*, March-April, p.153-160, 1984.
- KESTER, W. C. Turning Growth Options into Real Assets. In: *Capital Budgeting Under Uncertainty*, C.11, Raj Aggarwal, New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- KENSINGER, J. Adding the Value of Active Management into Capital Budgeting Equation, *Midland Corporate Finance Journal*, V..5, n1, p.31-42, 1987.
- KOGUT, B.; KULATILAKA, N. Operating Flexibility, Global Manufacturing and the Option Value of a Multinational Network, *Management Science*, v.40; n1; p.123-139, 1994.
- KULATILAKA, N. ; MARCUS, S. The Strategic Value of Flexibility: Reducing the Ability to Compromise, *The American Economic Review*, v.78, n.3, p.574-580, 1988.
- KULATILAKA, N. ; VENKATRAMAN; N. Are You Prepared to Compete in the New Economy? Use a Real Option Navigator, *Working Paper*, Boston University. 1998
- LAI, V.S.; TRIGEORGIS, L. The Strategic Capital Budgeting Process: A Review of Theories and Practice. *Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications* Ed. by L. Trigeorgis, Praeger Publisher, Westport, Conn., p.69-86, 1995.
- LONDON METAL EXCHANGE. Apresenta dados referentes aos contratos derivativos de metais não ferrosos realizados na bolsa de Metais de Londres. Disponível em:< <http://www.lme.co.uk/> >. Acesso em: 10 de jun. 2002.
- LUND, D.; OKSENDAL, B. Stochastic Models and Option Values: With Applications to Resources, Environment, and Investment Problems. Amsterdam: North Holland, 1991.p.45-69.
- MCDONALD, R. SIEGEL, D. Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down. *International Economic Review*, 26, 331-349, 1985
- MCDONALD, R.; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. *Quarterly Journal of Economics*, v.101, p.707-727, 1986.

- MAJD, S.; MYERS, S. C. Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options. Research*, v. 4, p. 1-21, 1990.
- MAJD, S.; PINDYCK, R. Time to Build, Option Value, and Investment Decisions. *Journal of Financial Economics*, v. 18, p. 7-27, 1987.
- MARDONES, J. Option valuation of real assets: Application to a copper mine with operating flexibility. *Resources Policy*, Mar. p.51-65, 1993.
- MARGRABE, W. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Finance*, v.33, n.1, p.177-186, 1978.
- MCGRATH, R. G. A Real Option Logic For Initiating Technology Positioning Investments, *Academy of Management Review*, v.22, n.4, p. 974-996, 1997.
- MERTON, R. The Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v.4, p.141-183, 1973.
- MINERAL COMMODITY SUMMARIES. Disponibiliza dados referentes a reservas e produção de noventa e três substâncias minerais. Disponível em: <http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/mcs/>. Acesso em 03 de Fev. 2002.
- MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment. *American Economic Review*, v.48, June, p.261-297, 1958.
- MORCK, R. ; SCHWARTZ, E. ; STANGELAND, D. The valuation of Forestry Resources under Stochastic Prices and Inventories. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.24, n.4, p.473-487, 1989.
- MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*, n. 5 Nov., p.147-175, 1977.
- MYERS, S.C. Finance Theory and Financial Strategy. *Interfaces*, v.14, Jan. p.126-137, 1984.
- NETO, L. A. S. Derivativos: Definições, emprego e risco. São Paulo: Atlas, 1997, 220 p.
- PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R. , ; SMITH, J. L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. *Quarterly Journal of Economics*, v.103, p: 479-508, 1988.
- PARKINSON, A. Option Pricing: The American Put. *Journal of Business*, v. 50, January, p.21-36, 1977.
- PINDYCK, R. Irreversibility, Uncertainty, and Investment. *Journal of Economic Literature*, v.29, n.3, p.1110-1148, 1991.

ROSS, S. Uses, Abuses, and Alternatives to the Net-Present-Value Rule, *Financial Management*, v.24, n.3, p. 96-112,1995.

RITCHKEN, P. ; RABINOWITZ, G. Capital Budgeting Using Contingent Claims Analysis: A Tutorial. *Advances in Futures and Options Research*, v.3, 1988, p.119-143, 1988.

SLADE, M E. Managing Projects Flexibly: An Application of Real-Option Theory Discussion Paper No.: 98-02. Department of Economics .The University of British Columbia Vancouver, Canada, 1998.

SAMIS, M. Valuing a Multi-Zone Mine as a Real Asset Portfolio – A Modern Asset Pricing (Real Options) Approach. In: 5TH ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS – THEORY MEETS PRACTICE. Los Angeles, California, United States, jul.13-14 p.1-38, 2001.

SCHWARTZ, E. The Stochastic Behaviour of Commodity Prices: Implications for Pricing and Hedging. *The Journal of Finance*, v.52, p.923-973, 1997.

SHIMKO, D.C. Finance in Continuous Time. A Primer Kolb Publishing Company, 1992.

SMIT, H. ; ANKUM, L. A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy Under Competition. *Financial Management*, v. 22, Iss: 3, p. 241-250, 1993.

STULZ, R. Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets, *Journal of Financial Economics*, v.10, p.161-185, 1982.

TOURINHO, O. The Option Value of Reserves of Natural Resources. *Working Paper*. Berkeley: University of California, 1979.

TRIGEORGIS, L. ; MASON, S. Valuing Managerial Flexibility. *Midland Corporate Finance Journal*, v.5, n.1, p.14-21. 1988.

TRIGEORGIS, L. Real Options in Capital Budgeting. Managerial Flexibility in Capital Resource Allocation. MIT Press, 1995.

TRIGEORGIS, L. Real options and interactions with financial flexibility, *Financial Management*, v. 22, n.3, p.202-224, 1996a.

TRIGEORGIS, L.: The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options, *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, v.28, n.1, p.1-20, 1996b.

TRIGEORGIS, L. Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation, *The MIT Press*, Cambridge MA, 1995.

TILLEY, J. Valuing American Options in a Path Simulation Model. *Transaction of the Society of Actuaries*, v.45, p.83-104, 1993.

VAN HORNE, J.C. Financial Management and Policy. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall International. 1992 p.132-156.

WORLD BANK, Commodity Markets and the Developing Countries. *Global Commodity Markets*. Washington: Jul. 1998.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

AGMON, T. Capital Budgeting and the Utilization of Full Information: Performance Evaluation and the Exercise of Real Options. In: AGGARWAL, R. *Capital Budgeting Under Uncertainty*. N. J: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993, p. 289-310.

BHAPPU, R.R.; GUZMAN, J. Mineral Investment Decision Making. *Engineering and Mining Journal*, July, p. 36-38, 1995.

BRENNAN, M. The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims. In: LUND, D.; OKESSENDAL, B. *Stochastic Models and Options Values: With Applications to Resources, Environment, and Investment Problems*. Amsterdam: North Holland, p.33-77, 1991.

BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. Finite Difference Methods and Jump Process Arising. In: The Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. *Journal of financial and Quantitative Analysis*, v.13, p.462-474, 1978.

BRENNAN, M. ; TRIGEORGIS, L. *Flexibility, Natural Resources, and Strategic Options*. Oxford: Oxford University Press, 1999.

BROADIE, M. ; GLASSERMAN, P. Pricing American-Style Securities using Simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 21, p.1323-1352, 1997.

BRUNETTI, C. Metals Price Volatility. *Resources Policy*, v.21, n.4, p.238-254, 1995.

CASTRO, A. L. Avaliação de Investimento de Capital em Projetos de Geração Termoelétrica no Setor Elétrico Brasileiro Usando Teoria Das Opções Reais. 2000. 113p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

DAVIS, G. A. Option premiums in mineral asset pricing: Are they important? *Land Economics*, v. 72, p.167-186, 1996.

DIAS, M.A. Investimento Sob Incerteza em Exploração e Produção de Petróleo. 1999. 300p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Industrial Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

DIAS, M. A. G. A Note on Bibliographical Evolution of Real Options. In: L. Trigeorgis, *Real Options and Business Strategy – Applications to Decision Making*. Risk Books, 1999, p. 357-362.

DIXIT, A ; PINDYCK, R. The Option Approach to Capital Investment, *Harvard Business Review*. May-June, p.105-115, 1995.

KULATILAKA, N.; STEPHEN, M. The Strategic Value of Flexibility: Reducing the Ability to Compromise. *The American Economic Review*, v.78, n.3, p.574-580, 1988.

MYERS, S. Finance Theory and Financial Strategy, *Midland Corporate Finance Journal*, v.5, n.1, p.6-13, 1987.

PINDYCK, R. Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm, *American Economic Review*, v.78, n.5, p.969-985, 1988.

SMITH, J.; MCCARDLE, K. Valuing Oil Properties: Integrating Option Pricing and Decision Analysis Approaches. *Operation Research*, v.46, n.2, p.198-217, 1998.

SOUZA, P. A. Avaliação Econômica de Projetos de Mineração, 1994. 198p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Administração e Política de Recursos Minerais - Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas

SOUZA, P. A. Impacto Econômico da Questão Ambiental no Processo Decisório do Investimento de Mineração. 1999. 268 p. Tese (Doutorado) - Departamento de Administração e Política de Recursos Minerais - Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas.

TRIGEORGIS, L. A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*, n.3, p.145-167, 1988.

TRIGEORGIS, L. A Real Option Application in Natural Resource Investments, *Advances in Futures and Options Research*, v.4, p.153-164, 1990.

TRIGEORGIS, L. A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, v. 26, p.309-326, 1991.

TRIGEORGIS, L. Anticipated Competitive Entry and Early Preemptive Investment in Deferrable Projects. *Journal of Economics and Business*, v.43, p.143-156, 1991.