

LUIZ VICTOR SEIZE

PROPOSTA DE UM MODELO PARA O CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES
PERMANENTES EM CASCAS CILÍNDRICAS ENRIGECIDAS TRANS-
VERSALMENTE SUJETADAS A CARGAS IMPULSIVAS LATERAIS
DISTRIBUIDAS

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da USP
para a obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

CONSULTA
FD-524

São Paulo, 1983

FD-524

LUIZ VICTOR SEIZE

Engenheiro Naval, Escola Politécnica da USP, 1974

PROPOSTA DE UM MODELO PARA O CÁLCULO DAS DEFORMÇÕES
PERMANENTES EM CASCAS CILÍNDRICAS ENRIGECIDAS TRANS
VERSALMENTE SUOMETIDAS A CARGAS IMPULSIVAS LATERAIS
DISTRIBUÍDAS

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título
de Mestre em Engenharia.

Orientador : Prof.Dr. RONALDO DE FREYNE SALVAGNI
Prof. Assistente Doutor do Departa-
mento de Engenharia Mecânica da
EPUSP

São Paulo, 1983

AGRADECIMENTOS

- À MARINHA DO BRASIL, pelo apoio recebido.
- Ao Prof. RONALDO DE BREYNE SALVAGNI, pela orientação recebida.
- À minha família, pelo incentivo e compreensão.

RESUMO

É proposto um método de cálculo das deformações permanentes em cascas cilíndricas com enrijecedores transversais quando submetidas a cargas laterais impulsivas e distribuídas. Faz-se, também, uma análise crítica dos métodos propostos na literatura pertinente.

ABSTRACT

It is proposed a calculation method for transversally stiffened cylindrical shells permanent deflections when subjected to distributed and impulsive lateral loads. It is also done a critical analysis of the proposed methods for such in the relevant technical literature.

Í N D I C E

AGRADECIMENTO.	i
RESUMO/ABSTRACT.	ii
ÍNDICE.	iii
LISTA DE FIGURAS	
I. INTRODUÇÃO	I.1
II. ANÁLISE DO PROBLEMA.	II.1
II.1 - Considerações Gerais.	II.1
II.2 - Análise Crítica da Literatura	II.1
II.3 - Modelo Físico Proposto.	II.5
II.4 - Interação da Onda de Choque com a Estru <u>tura</u>	II.13
III. O MODELO MATEMÁTICO.	III.1
III.1 - Obtenção do Modelo Matemático	III.1
III.2 - Análise do Modelo Matemático e das Solu <u>ções</u> das suas Equações.	III.5
IV. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	IV.1
V. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTU <u>ROS</u>	V.1
VI. APÊNDICES.	VI.1
VI.1 - Dedução das Equações de Movimento	VI.1
VI.2 - Obtenção das Condições de Transição en <u>tre</u> Modos	VI.10
VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	VII.1

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PÁGINA
II.1	Análise usando o conceito de escoamento retardado.	II.2
II.2	Distribuição de deformações permanentes na direção circunferencial.	II.3
II.3	Porção do chapeamento mais avariada.	II.4
II.4	Mecanismo tri-articulado.	II.5
II.5	Mecanismo do 1º modo para a caverna.	II.8
II.6	Forma exagerada da deformação da caverna.	II.8
II.7	Mecanismo do 1º modo para o chapeamento (vista lateral).	II.9
II.8	Mecanismo do 1º modo para o chapeamento (perspectiva).	II.9
II.9	Modo I.	II.10
II.10	Mecanismo do 2º modo para o chapeamento.	II.11
II.11	Perfil de velocidades causado pela explosão.	II.14
II.12	Perfil de velocidades pelo deslocamento segundo o mecanismo do anel.	II.14
III.1	Campo de velocidades causado pela explosão.	III.2
III.2	Campo inicial de velocidades para o modo I.	III.2
III.3	Bloco sobre uma superfície rugosa.	III.7
III.4	Viga de material rígido-plástico.	III.8
III.5	Diagrama momento-deformação para uma viga rígido-plástica.	III.8
III.6	Sistema com dois graus de liberdade.	III.9

FIGURA		PÁGINA
III.7	Deformação do chapeamento para o modo I.	III.10
IV.1	Arranjo típico da caverna mais chapeamento.	IV.1
V.1	Caverna como mecanismo tetra-articulado.	V.1
V.2	Flambagem axissimétrica do cilindro.	V.2
VI.1	Trecho do anel considerado.	VI.1
VI.2	Trecho do chapeamento considerado.	VI.1

I - INTRODUÇÃO

Tendo em vista o crescente interesse sobre o estudo do efeito de cargas impulsivas em estruturas navais, são examinados no presente trabalho alguns aspectos do comportamento rígido-plástico de uma casca cilíndrica enrijecida transversalmente / quando a mesma é submetida a um carregamento lateral impulsivo distribuído. Com base nestas considerações é proposto um modelo simplificado para a obtenção das deformações permanentes de um casco de submarino, quando o mesmo é submetido à ação de onda de choque gerada por uma explosão submarina sem contato.

O modelo mencionado acima será obtido pela adoção, "a priori", de modos de deformação apropriados ao nível de tensão/deformação existentes na estrutura, caracterizando, assim, o modelo físico do comportamento da estrutura.

O modelo matemático será obtido pela formulação de LAGRANGE das equações da Dinâmica.

A adoção dos modos de deformação mencionados acima levará a obtenção de um modelo matemático com dois graus de liberdade, sendo um para o movimento da caverna e outro para a deformação da chapa. Tal modelo se resume em um sistema de equações diferenciais não lineares, acopladas, com segundo membro descontínuo. Esta descontinuidade, quando da adoção de um algoritmo numérico para a resolução das equações, pode levar a problemas de instabilidade numérica que serão discutidos posteriormente.

Através da imposição das condições iniciais procede-se à solução das equações do movimento, obtendo-se, assim, as deflexões permanentes na caverna e na chapa.

Finalmente faz-se uma análise dos resultados obtidos e são propostos aperfeiçoamentos ao modelo.

II - ANÁLISE DO PROBLEMA

II.1 - Considerações Gerais

O estudo do comportamento de estruturas em regime rígido plástico sob o efeito de cargas impulsivas é um campo relativamente bem estabelecido [1], [5].

Visando simplificar a abordagem do problema é costume introduzir "a priori", os modos que a estrutura seguirá ao se deformar sob o efeito do carregamento, reduzindo desta forma o problema a um que possa ser modelado por equações diferenciais ordinárias.

Apesar do aparentemente exagerado grau das simplificações mencionadas acima, constata-se que o uso das mesmas produz resultados em boa concordância com a experiência.

Nos capítulos subsequentes são mostrados os modos adotados no presente trabalho, bem como as equações resultantes da aplicação dos mesmos ao problema em estudo.

II.2 - Análise Crítica da Literatura

Em um exame crítico da literatura técnica disponível identifica-se, a grosso modo, a existência de duas tendências na formulação de modelos para o estudo de estruturas sob o efeito de cargas impulsivas.

Uma consiste em tratar a estrutura como um corpo rígido-plástico em que são consideradas desprezíveis as deformações elásticas, os efeitos viscosos e o encruamento do material com as deformações. Um exemplo típico desta abordagem pode ser encontrado no trabalho de NAGAI [14].

A outra consiste em analisar-se elasticamente a estrutura. Para a determinação das avarias pela abordagem visco-elástica usa-se o conceito de escoamento retardado do material; alguns mate-

riais sob cargas aplicadas muito rapidamente mostram um retardamento no início do escoamento o qual depende do nível de tensões e da duração da sua aplicação. Transformando o deslocamento radial do casco cilíndrico (w) resultante de uma carga de pressão de decaimento exponencial em tensão circunferencial e colocando em um gráfico a tensão versus tempo para diferentes carregamentos, tem-se um conjunto de curvas conforme mostrado na figura II.1. Considera-se como início da avaria quando esta curva de resposta toca a curva que representa a tensão associada com os respectivos intervalos de tempo requeridos para produzir o escoamento do material.

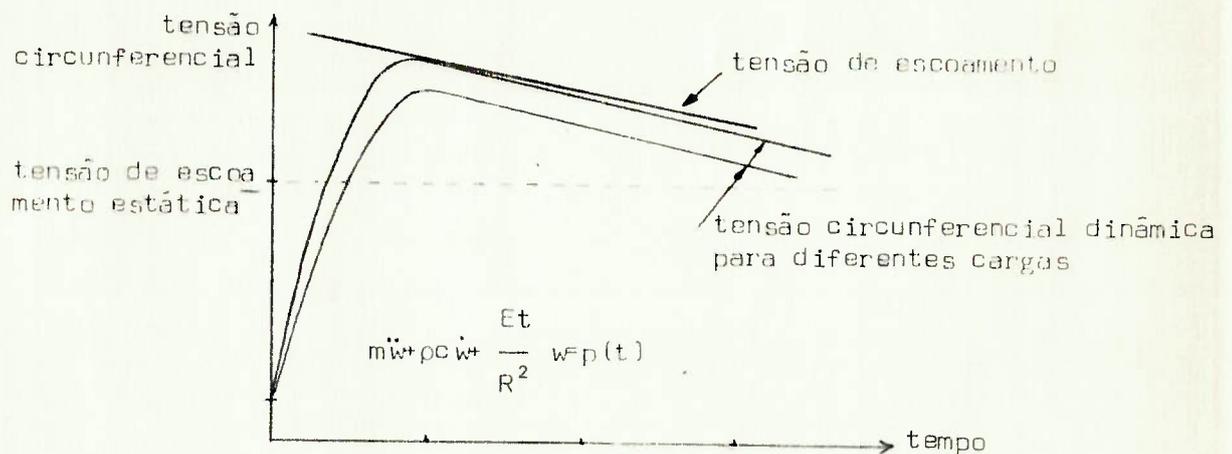


Figura II.1-Análise usando o conceito de escoamento retardado

Passar-se-á, agora a descrever mais permenorizadamente a referência [14], uma vez que a linha adotada por seu autor será seguida no presente trabalho.

Trata-se de um trabalho eminentemente experimental em que o autor construiu e ensaiou vários modelos que reproduzem, em escala, estruturas típicas de submarinos. É mencionado ainda que, como o interesse primordial da pesquisa era o estudo das deformações que ocorrem no chapeamento, os modelos foram construídos com as cavernas suficientemente rígidas de modo a prevenir a ocorrência de deformações permanentes nas mesmas.

Quando da ocasião do ensaio, os modelos eram suspensos por

um cabo e mergulhados no mar, ficando a uma profundidade de 30m. A distâncias variáveis eram colocadas minas explosivas que em seguida eram detonadas. Registrava-se, então, a variação da deformação com o tempo em um ponto do modelo e, após a recuperação destes, era medida a sua deformação residual.

O aspecto dos modelos após o efeito da explosão é mostrado na figura II.2.

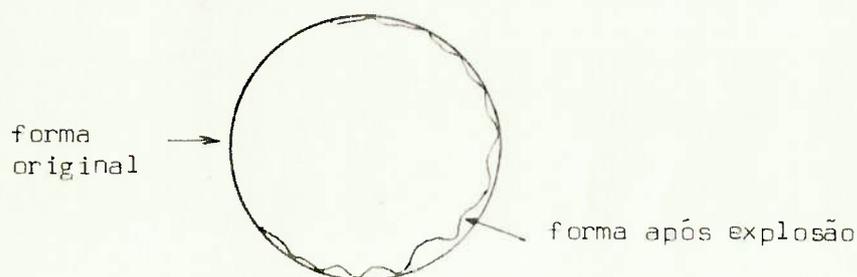


Figura II.2-Distribuição de deformações permanentes na direção circunferencial

Nota-se, pela figura acima, a existência de ondas no chapeamento do modelo afetado pela explosão. A existência destas ondas indica a ocorrência de fenômenos de instabilidade elasto-plástica no chapeamento. Realmente, procedendo-se à determinação do parâmetro de WINDEMBURG-TRILLING (λ) [18] para os modelos usados nestas experiências, verifica-se que os mesmos situam-se sempre acima de 0,8 que é o valor limite de λ , abaixo do qual, não haveria flambagem e sim escoamento do material do modelo.

Para explicar os resultados obtidos experimentalmente, NA GAI propõe um modelo de um grau de liberdade em que o comportamento da estrutura é considerado como sendo rígido-plástico.

Para tal, é isolado na estrutura um elemento de chapeamento de lados iguais, uma vez que foi constatado que o comprimento das ondas mencionadas acima era igual ao espaçamento de cavernas (figura II.3).

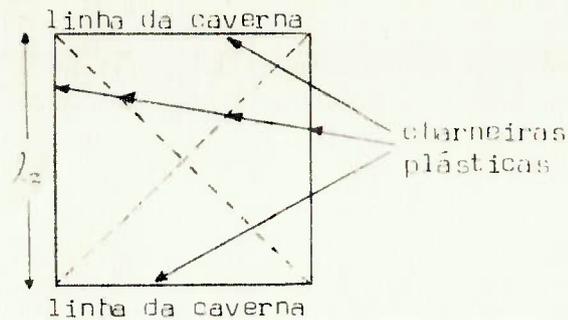


Figura II.3- Porção do chapeamento mais avariada

Para o elemento de chapeamento mostrado na figura II.3, NAGAI propõe a existência de dois mecanismos de dissipação de energia; um, pela existência de charneiras plásticas ao longo das diagonais do elemento (vide fig.II.3) e o outro pelo efeito de membrana plástica.

Ao igualar a energia da explosão absorvida pelo elemento de chapeamento à energia dissipada pelos mecanismos descritos no parágrafo anterior, NAGAI pôde determinar a deflexão permanente no centro do elemento de chapeamento, que, na notação do presente trabalho é dada por:

$$\frac{w_0}{l_z} = \left\{ \frac{-2,16t}{l_z} + \left[\frac{4,65t^2}{l_z^2} + \frac{6,97 W}{F_y t d^{2,46}} \right]^{1/2} \right\} \cdot \left[\frac{F_y \text{ do aço doce}}{F_y \text{ do aço da estrutura}} \right]^{1/2} \quad (\text{II.2.1})$$

onde:

w_0 = deflexão permanente no centro do elemento de chapeamento, em mm

l_z = distância entre cavernas, em mm

d = distância entre o elemento de chapeamento considerado e o explosivo, em m

t = espessura da chapa, em mm

W = massa do explosivo, em kg

F_y = tensão de escoamento do material da chapa, em kgf/mm^2

Apesar das críticas que possam incidir sobre os enfoques apresentados ou seja: a análise visco-plástica usando o conceito de escoamento retardado e a análise de NAGAI usando a hipóte

se de material rígido-plástica, parece razoável supor que, principalmente para carregamentos impulsivos muito intensos como no caso de uma explosão, o método de NAGAI reflita com mais fidelidade os principais aspectos do problema em estudo, uma vez que para tais carregamentos, uma grande parte do fenômeno se dá com parte ou toda a estrutura bem dentro do regime plástico.

II.3 - Modelo Físico Proposto

No caso do estudo de vigas simples em regime rígido-plástico sob o efeito de cargas impulsivas, mostra-se em [5] que após uma fase transitória, durante a qual as rótulas caminham pela estrutura, é atingida uma situação em que a localização das mesmas não muda mais até o esgotamento total da energia cinética inicial da viga. Assim, após uma fase inicial transitória, a viga se comporta como um mecanismo articulado com momentos nas articulações (figura II.4).



Figura II.4 - Mecanismo tri-articulado

De acordo com [1], para uma viga bi-engastada, o tempo de trânsito das rótulas desde o instante inicial do carregamento até as suas posições permanentes é dado por:

$$t_1 = \frac{l^2}{48M_y} \int_0^{t_c} q(t) dt \quad (II.3.1)$$

onde:

- t_1 - tempo de trânsito das rótulas
- l - vão da viga
- M_y - momento plástico da seção transversal da viga
- t_c - duração do carregamento

$q(t)$ - carregamento lateral em função do tempo

Como o carregamento será considerado impulsivo, podemos representá-lo pela seguinte expressão:

$$q(t) = q_M \delta(t) \quad (\text{II.3.2})$$

onde:

$$\delta(t) \text{ - delta de DIRAC } \begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (\text{II.3.3})$$

$$q_M = \int_0^{t^*} q(t) dt$$

t^* - tempo de interação da onda de choque com a estrutura. Segundo [16], $t^* = 6,7\theta$, onde θ é a constante de tempo do carregamento ($q(t) \approx q_0 e^{-t/\theta}$).

A hipótese mencionada acima de carregamento impulsivo, apesar de o mesmo ser aproximadamente exponencial com o tempo, parece razoável pelo fato de θ ser da ordem de fração de milisegundo na faixa de interesse.

Para o chapeamento de um submarino típico tem-se:

ℓ - espaçamento entre cavernas = 0,609m

F_y - tensão de escoamento do material = $323 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

t - espessura do chapeamento = $22,23 \times 10^{-3} \text{ m}$

b - largura do chapeamento considerado = 1 m

M_y - momento plástico de uma faixa de chapeamento com a largura b

$$M_y = 0,25 F_y b t^2 = 29950 \text{ Nm/m}$$

$$t_1 = \frac{0,609^2}{48 \times 29950} q_M$$

$$t_1 = 193,67 \times 10^{-9} q_M \text{ (s)}$$

Vê-se, assim, que o tempo de trânsito das rótulas no chapeamento varia diretamente com o impulso a ele transmitido.

Como exemplo, calcular-se-á o impulso fornecido pela explosão de uma carga de 100 Kg de TNT explodindo a 20m da faixa de chapeamento considerada e com incidência frontal da onda de choque [16].

$$q_M = 7400 W^{1/3} \left[\frac{W^{1/3}}{d} \right]^{1,05} \quad (\text{II.3.4})$$

onde:

- W - peso do explosivo em Kg
d - distância do ponto de explosão até a estrutura em m.

$$q_M = 7400 \times 100^{1/3} \times \left[\frac{100^{1/3}}{20} \right]^{1,05} = 7410 \text{ N}_s/\text{m}^2$$

$$t_1 = 193,67 \times 10^{-9} \times 7410 = 1,435 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Para a caverna, ainda segundo a formulação de [1], para a mesma carga, distância e incidência, usando o modelo da viga bi-engastada, tem-se:

$$t_1 = \frac{7,634^2}{48 \times 135,9 \times 10^3} \times 45,04 = 0,402 \text{ ms}$$

com:

$$\begin{aligned} l &= 7,634 \text{ m} \\ b &= 7,93 \times 10^{-3} \text{ m} \\ M_y &= 135,9 \times 10 \text{ N.m} \\ q_M &= 45,04 \text{ N}_s/\text{m} \end{aligned}$$

Apesar dos tempos calculados acima não serem desprezíveis em relação ao tempo de interação da onda de choque com a estrutura, que no caso referido acima ($W=100$ kg e $r=20$ m) vale $0,48$ ms [10], o tratamento do problema como apresentado em [9] considera-os desprezíveis e já coloca as rótulas da viga nas suas posições definitivas, conseguindo, apesar desta simplificação, uma excelente concordância com os valores experimentais [9].

Levando os fatos expostos acima em consideração, parece razoável propor-se para o primeiro modo um mecanismo de deformação com rótulas e charneiras plásticas em posições definitivas, tal como passará, agora, a ser descrito:

Para a caverna (anel):

Segundo [1] o mecanismo formado pela caverna é:

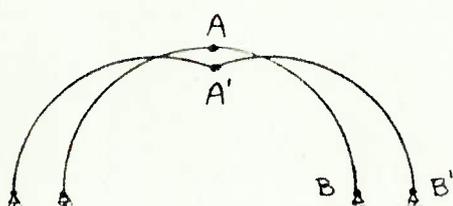


Figura II.5 - Mecanismo do 1º modo para a caverna [1]

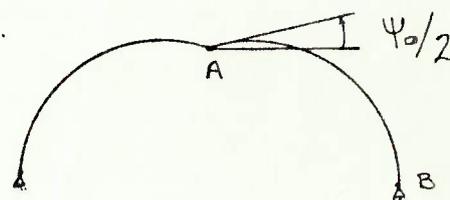


Figura II.6 - Forma exagerada da deformação da caverna [1]

Para o chapeamento:

De acordo com as referências [13] e [8], será adotado o mecanismo formado pelo chapeamento conforme descrito a seguir:

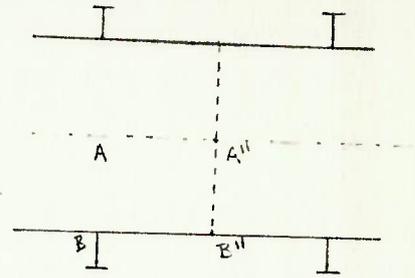
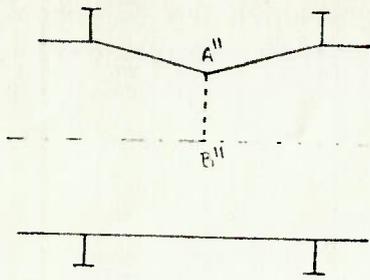
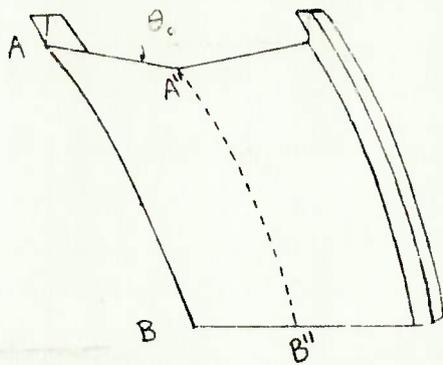


Figura II.7 - Mecanismo do 1º modo para o chapeamento [8] (vista lateral)

Idem (vista de topo)

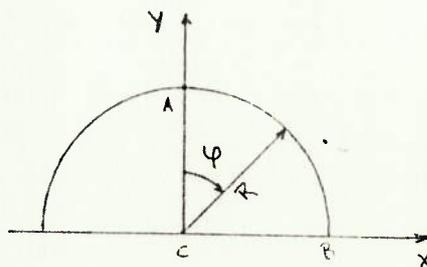


- charneira plástica
- A - coroa da caverna
- B - pé da caverna

Figura II.8 - Mecanismo do 1º modo para o chapeamento [8] (perspectiva)

Como se pode constatar observando a figura II.7, o ângulo θ é máximo na coroa da caverna e decai linearmente a zero no pé da mesma.

Para a figura II.8 valem as equações:



$$\left. \begin{aligned} x_a &= R \operatorname{sen} \phi \\ y_a &= R \operatorname{cos} \phi \end{aligned} \right\} -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \quad (\text{II.3.5})$$

Para pequenos deslocamentos, podemos escrever [1]:

$$\left. \begin{aligned} v_{xa} &= R(1-\operatorname{cos} \phi) \dot{\psi}_0(t)/2 \\ v_{ya} &= +R(\operatorname{sen} \phi - 1) \dot{\psi}_0(t)/2 \end{aligned} \right\} 0 \leq \phi \leq \pi \quad (\text{II.3.6})$$

onde o subscrito a refere-se ao anel e v_{xa} e v_{ya} são respectivamente a componente horizontal e a vertical da velocidade de um ponto do anel.

Para a figura II.9 valem as equações:

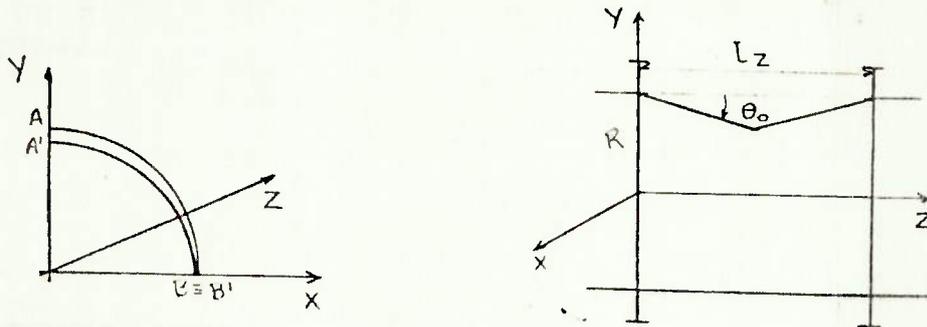


Figura II.9 - Modo I

$$\left. \begin{aligned} v'_{xc_1} &= -\dot{\theta}_0(t) Z ((\pi-2\phi)/\pi) \operatorname{sen} \phi \\ v'_{yc_1} &= -\dot{\theta}_0(t) Z ((\pi-2\phi)/\pi) \operatorname{cos} \phi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Z &\leq \frac{Lz}{2} \\ 0 &\leq \phi \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (\text{II.3.7})$$

onde o subscrito c refere-se ao chapeamento e v'_{xc} e v'_{yc} são respectivamente a componente horizontal e a vertical da velocidade de um ponto do chapeamento em relação ao anel. Ao impormos a compatibilidade dos deslocamentos e velocidades, tem-se que o movimento da caverna afeta o deslocamento dos pontos do chapeamento, arrastando-os solidariamente ao seu movimento.

tem-se assim:

$$v_{x_{c_1}} = v_{x_a} + v'_{x_{c_1}} \quad (II.3.8)$$

$$v_{y_{c_1}} = v_{y_a} + v'_{y_{c_1}}$$

onde o subscrito c refere-se ao chapeamento e v_{x_c} e v_{y_c} são respectivamente a componente horizontal e vertical da velocidade absoluta de um ponto do chapeamento.

Para o segundo modo será adotado que a caverna se comporta como o arco tri-articulado mostrado anteriormente, enquanto o chapeamento entre cavernas (anéis) passa a ter um comportamento de membrana plástica.

Não repetiremos a apresentação feita para a caverna. Para a chapa, as velocidades relativas são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} v'_{x_{c_2}} &= - \dot{w}_0(t) \operatorname{sen}((\pi Z)/l_z) \cos \phi \operatorname{sen} \phi \\ v'_{y_{c_2}} &= - \dot{w}_0(t) \operatorname{sen}((\pi Z)/l_z) \cos \phi \cos \phi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z &\leq \frac{l_z}{2} \\ 0 &\leq \phi \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (II.3.9)$$

onde w_0 é apresentado na figura II.10 abaixo.

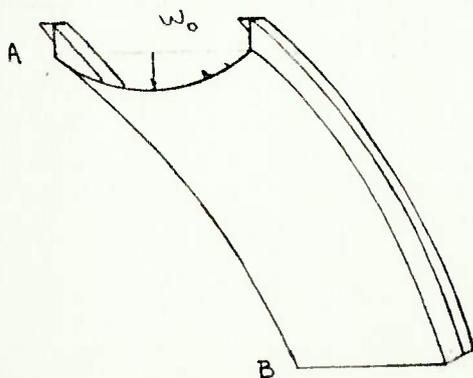


Figura II.10 - Mecanismo do 2º modo para o chapeamento

A própria existência das rótulas e charneiras plásticas como postuladas pelo modelo aqui adotado é condicionada ao fato de que fenômenos de instabilidade elasto-plástica não venham a se manifestar.

Será mostrado a seguir que para a estrutura típica de submarino que vem sendo considerada tal fato não ocorre. Para tal adotaremos a formulação de [17].

Segundo o critério elaborado na referência acima, não ocorrerá instabilidade elasto-plástica se:

$$\lambda = \left(\frac{D}{t} \right)^{0,75} \sqrt{\frac{L F_y}{D E}} < 0,8 \quad (\text{II.3.10})$$

onde:

- λ - parâmetro de WINDENBURG-TRILLING
- D - diâmetro do casco
- t - espessura da chapa
- L - distância entre cavernas (anéis)
- F_y - tensão de escoamento do material
- E - módulo de YOUNG do material

Para o caso em pauta:

$$\lambda = \left(\frac{4,86}{0,002223} \right)^{0,75} \sqrt{\frac{0,4572 \times 312,85 \times 10^6}{4,86 \times 2,05 \times 10^{11}}} = 0,681$$

com:

- $D = 4,86 \text{ m}$
- $t = 0,002223 \text{ m}$
- $L = 0,4572 \text{ m}$
- $F_y = 312,85 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
- $E = 2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

Como o valor obtido para λ é menor que 0,8 pode-se afirmar que o casco do submarino não falhará por instabilidade elasto-plástica.

Caso não obtivéssemos $\lambda < 0,8$, poderia ocorrer flambagem como a constada nos modelos estudados por NAGAI, cujos λ estão sempre acima de 0,8.

II.4 - Interação da Onda de Choque com a Estrutura

A interação da onda de choque com a estrutura é um fenômeno bastante complexo [16]. Para as finalidades do presente trabalho serão introduzidas algumas hipóteses, usuais neste tipo de abordagem [19], que conduzem a formulações suficientemente precisas para os fins em vista.

Começar-se-á por considerar a interação entre uma onda de choque plana e uma placa infinita sem vínculos, com somente uma face em contato com o meio fluido e em incidência frontal. Neste caso tem-se [19]:

- a) Velocidade que a chapa adquire após a passagem da onda de choque.

$$v_c = \frac{2 P_o}{\rho c} Z / (1-Z) \quad (\text{II.4.1})$$

onde:

- v_c - velocidade final da chapa
 P_o - valor máximo da pressão na onda de choque

$$[p(t) = P_o e^{-t/\theta}]$$

$$Z = \frac{\rho_c}{\rho c \theta}$$

- ρ_c - densidade superficial da chapa
 ρ - densidade do meio em que a chapa está imersa
 c - velocidade do som neste meio
 θ - constante de tempo da pressão da onda de choque

b) Tempo de interação

$$t_0 = \left[\frac{Z}{Z-1} \ln Z \right] \theta \quad (\text{II.4.2})$$

onde os símbolos são os utilizados no item anterior.

No mesmo caso anterior mas com incidência oblíqua tem-se aproximadamente:

$$v_{c\alpha} \approx \frac{2P_0 \cos \alpha}{\rho c} Z^{Z/(1-Z)} \quad (\text{II.4.3})$$

onde:

α - ângulo de incidência da onda de choque em relação à normal, naquele ponto, à estrutura.

Tem-se, assim

$$v_{c\alpha} \approx v_c \cos \alpha \quad (\text{II.4.4})$$

Pelo exposto acima nota-se que basta analisar-se uma faixa de chapeamento de largura unitária na coroa da caverna para incidência frontal uma vez que o perfil de velocidade resultante do efeito da onda de choque sobre a estrutura será bastante semelhante ao obtido pelo deslocamento do anel segundo o seu mecanismo. Ver figuras abaixo.

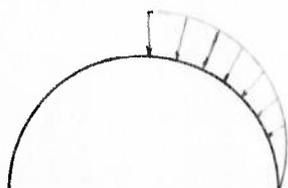


Figura II.11 - Perfil de velocidades causada pela explosão

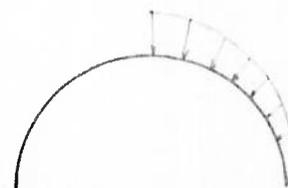


Figura II.12 - Perfil de velocidades pelo deslocamento do anel segundo o mecanismo do anel

III - MODELO MATEMÁTICO

III.1 - Obtenção do Modelo Matemático

Utilizando-se os campos de velocidades obtidos no capítulo anterior para os modos I e II pode-se agora obter as equações do movimento para o problema em estudo.

Para tal usaremos o método de LAGRANGE [4]; esta escolha se deve ao fato de que, através deste procedimento, as forças vinculares serem automaticamente levadas em conta, sem que, na dedução das equações, seja necessário haver uma preocupação explícita com elas.

Como primeiro passo para a obtenção das equações do movimento será obtida a função Lagrangeana (L) [4] do sistema caverna (anel) mais chapeamento. Procedendo assim, já estará sendo considerada a interação entre chapa e enrijecedor, implícita nas hipóteses de compatibilidade geométrica dentro da estrutura.

No presente caso, a Lagrangeana será simplesmente a energia cinética da estrutura expressa em função das suas coordenadas generalizadas e através dos modos de deformação adotados.

O outro elemento necessário à obtenção das equações do movimento, dentro do procedimento que está sendo descrito, será a dedução das forças externas generalizadas. Isto será feito através da determinação do trabalho realizado pelas mesmas quando o sistema sofre uma mudança infinitesimal em sua configuração. Este trabalho é na verdade uma expressão diferencial (dw) cujos coeficientes são as forças generalizadas e exprimirá a energia dissipada nas rótulas e charneiras plásticas para o primeiro modo e, para o segundo modo, a energia dispendida pela extensão da membrana plástica que modela o chapeamento, somada à energia dissipada nas rótulas da caverna.

Os detalhes envolvidos na obtenção do modelo matemático encontram-se no Apêndice VI.1.

Quanto ao carregamento, consideraremos o mesmo como sendo simultâneo e impulsivo, isto é, suporemos que a carga

(onda de choque) atua simultaneamente sobre toda a superfície da estrutura em estudo e que a duração desta interação é desprezível, podendo seu efeito ser considerado como uma variação brusca da quantidade de movimento dos elementos da estrutura [11]. A variação da quantidade de movimento referida acima é obtida impondo-se que:

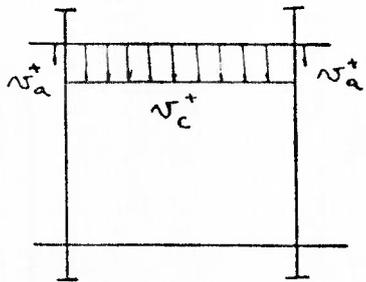
$$\left[\int_0^{t_2} p(t) dt \right] dA = [\sigma v^+(Z, \varphi)] dA \quad (\text{III.1.1})$$

onde:

- σ - densidade superficial do elemento, kg/m^2
- $p(t)$ - pressão no elemento considerado em função do tempo, N/m^2
- dA - elemento de área, m^2
- t_2 - duração da interação carga/estrutura, s
- $v^+(Z, \varphi)$ - velocidade do elemento após cessar a interação com a carga, m/s

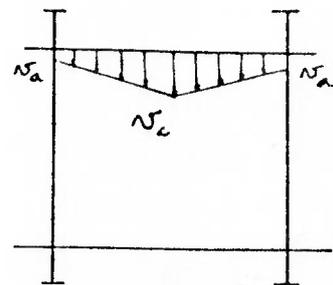
Tal formulação é a mesma usada em [11], no estudo de unidades de chapeamento sob o efeito da culapada de amura ("slamming").

O campo de velocidades obtido do modo descrito acima é, de maneira geral, incompatível com a hipótese de continuidade estrutural.



Campo de velocidades causado pela explosão

Figura III.1



Campo inicial de velocidades para o modo I

Figura III.2

Conforme representado na figura III.1, a chapa devido à sua densidade superficial menor, terá velocidades iniciais muito maiores que as do anel, mostrando, assim, que tal campo de velocidades não pode subsistir na estrutura real sem violar os vínculos existentes. Visando obter um campo de velocidades compatível com a hipótese de continuidade estrutural, aplica-se a técnica do Λ -mínimo [9].

Tal técnica conforme descrita na referência [9], permite obter os valores iniciais das velocidades generalizadas de maneira que o modo de deslocamento da estrutura seja respeitado e, conseqüentemente, sua compatibilidade geométrica.

Passa-se a descrever sucintamente tal técnica como será aplicada no caso em estudo.

Obtêm-se, a partir dos campos de velocidades envolvidos (inicial e do modo I) a expressão de Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_S \sigma(Z, \varphi) [V^+(Z, \varphi) - V_I(Z, \varphi, \dot{\psi}_0(0), \dot{\theta}_0(0))]^2 d\Lambda \quad (\text{III.1.2})$$

onde $\dot{\psi}_0(0)$ e $\dot{\theta}_0(0)$ são as velocidades iniciais no modo I para o anel e para a chapa respectivamente.

Segundo a técnica em estudo, obtêm-se $\dot{\psi}_0(0)$ e $\dot{\theta}_0(0)$ ao ser imposto que Λ seja mínimo, ou seja, que ocorra a mínima variação de energia cinética ao passarmos do campo inicial de velocidades para o campo de velocidades do primeiro modo. Tal técnica muito se assemelha ao processo dos mínimos quadrados, quando quer-se ajustar uma curva com parâmetros livres à uma coleção de dados; da mesma forma, determinam-se os valores destes parâmetros ao ser imposto que a soma dos quadrados dos erros deva ser mínimo. Como Λ é uma função das variáveis $\dot{\psi}_0(0)$ e $\dot{\theta}_0(0)$, basta, simplesmente, derivar Λ parcialmente em relação a cada uma das variáveis e impor que cada derivada parcial seja igual a zero (condição de ponto estacionário). Obtêm-se, assim, duas equações que permitem a determinação de $\dot{\psi}_0(0)$ e $\dot{\theta}_0(0)$.

O mesmo procedimento se aplica quando da passagem do

campo final de velocidades do modo I para o campo de velocidades do modo II.

A obtenção das velocidades iniciais descritas acima en contra-se feita no Apêndice VI.2.

Apresentar-se-á, abaixo, um resumo das equações pertinentes:

a) Transição do campo causado pela explosão para o campo inicial de velocidades

$$\begin{aligned} 0,5R^2(0,5\rho_a + \rho_c(\ell_c - t_w/2))\dot{\psi}_{0I} + 0,5\rho_c R(\ell_c^2 - t_w^2/4)\dot{\theta}_{0I} &= \\ = R(0,5\rho_c v_a + \rho_c v_c(\ell_c - t_w/2)) & \quad \text{(III.1.3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,5\rho_c R(\ell_c^2 - t_w^2/4)\dot{\psi}_{0I} + 0,6667\rho_c(\ell_c^2 - t_w^2/8)\dot{\theta}_{0I} &= \\ = \rho_c v_c(\ell_c^2 - t_w^2/4) & \quad \text{(III.1.4)} \end{aligned}$$

onde:

- R - raio do cilindro enrijecido, m
- ρ_a - densidade linear do perfil da caverna, kg/m
- ρ_c - densidade superficial da chapa, kg/m²
- ℓ_c - metade do espaçamento entre as cavernas, m
- t_w - espessura da alma do perfil da caverna, m
- v_a - velocidade linear causada pela explosão na caverna, m/s
- v_c - velocidade linear causada pela explosão na chapa, m/s
- $\dot{\psi}_{0I}$ - velocidade angular no início do modo I para a caverna, rad/s
- $\dot{\theta}_{0I}$ - velocidade angular no início do modo I para a chapa, rad/s

b) Transição do campo final do modo I para o campo inicial de velocidades do modo II

$$0,5R^2(0,5\rho_a + \rho_c(\ell_c - t^v/2))\dot{\psi}_{0II} + 0,6366\rho_c\ell_c R\dot{w}_{0II} =$$

$$= 0,25\rho_a R^2\dot{\psi}_{0f} + \rho_c R(\ell_c - t^v/2)(0,5R\dot{\psi}_{0f} + 0,5\dot{\theta}_{0f}(\ell_c + t^v/2)) \quad (\text{III.1.5})$$

$$0,6366\rho_c\ell_c R\dot{\psi}_{0II} + \ell_c\dot{w}_{0II} =$$

$$= \rho_c\ell_c(0,6366R\dot{\psi}_{0f} + 0,2027\ell_c\dot{\theta}_{0f}) \quad (\text{III.1.6})$$

onde os símbolos acrescentados são:

$\dot{\psi}_{0f}$ - velocidade angular da caverna no final do modo I, rad/s

$\dot{\theta}_{0f}$ - velocidade angular da caverna no final do modo I, rad/s

$\dot{\psi}_{0II}$ - velocidade angular da caverna no início do modo II, rad/s

\dot{w}_{0II} - velocidade linear do chapeamento no início do modo II, m/s

A transição do modo I para o modo II se dá quando a deflexão w_0 do chapeamento for igual à espessura do mesmo |9|.

III.2 - Análise do Modelo Matemático e das Soluções das suas Equações

Far-se-á uma análise sucinta do modelo matemático citado no capítulo anterior, realçando as suas principais características:

1) Na obtenção das equações que descrevem a dinâmica do movimento foi suposto que a estrutura se desloca seguindo modos separados, isto é, os seus deslocamentos são descritos por expressões que são o produ

to de duas funções, uma dando a variação temporal e a outra fornecendo a variação espacial do deslocamento.

Em forma simbólica, para o caso em estudo, tem-se:

$$X(Z, \varphi, t) = \sum_{i=1}^2 T_i(t) W_i(Z, \varphi) \quad (\text{III.2.1})$$

$$Y(Z, \varphi, t) = \sum_{i=1}^2 T_i(t) V_i(Z, \varphi) \quad (\text{III.2.2})$$

onde:

$T_i(t)$ - função somente do tempo

$W_i(Z, \varphi), V_i(Z, \varphi)$ - funções somente das coordenadas espaciais.

- 2) Os modos sucessivos são acoplados através da imposição que o deslocamento final do modo anterior seja igual ao deslocamento inicial do modo subsequente e para as velocidades, através da técnica do Δ -mínimo, isto é, o campo de velocidades do novo modo é determinado a partir do campo de velocidades do modo anterior impondo-se que a passagem de um modo para outro se dê de modo a tornar mínima a variação da energia cinética da estrutura.
- 3) Cada modo termina ao se atingir uma condição apropriada de deslocamento ou velocidade. No caso em estudo, o modo I termina quando o deslocamento do chapamento atinge um valor igual à espessura da própria chapa [9] e o modo II findará quando a estrutura retornar ao repouso, isto é, quando tiver esgotado toda a sua energia cinética.

Será analisado, agora, o sistema de equações diferenciais característico do problema e que foi obtido no Apêndice VI.1.

O sistema típico é da forma:

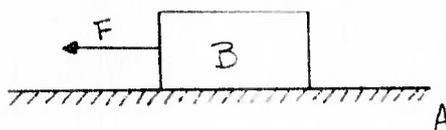
$$A \ddot{x}_1 + E \ddot{x}_2 = E (\dot{x}_1, \ddot{x}_1) \quad (\text{III.2.4})$$

$$C \ddot{x}_1 + D \ddot{x}_2 = F (\dot{x}_1, \ddot{x}_1) \quad (\text{III.2.5})$$

onde:

- A, B, C, D - constantes que dependem das características da estrutura em estudo
 x_1 - coordenada generalizada da caverna
 x_2 - coordenada generalizada do chapeamento
 $E(\dot{x}_1, \ddot{x}_1)$, $F(\dot{x}_1, \ddot{x}_1)$ - funções de \dot{x}_1 e \ddot{x}_1 que descrevem o comportamento das forças generalizadas

Como, por hipótese, o material empregado segue o modelo-rígido plástico, far-se-á, abaixo, uma analogia deste comportamento com o comportamento de um bloco pousado sobre uma superfície rugosa.



Bloco sobre uma superfície rugosa

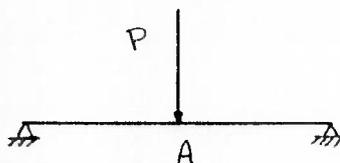
Figura III.3

No caso simples acima sale-se o seguinte:

- a) Se a velocidade de B for diferente de zero, a força de atrito atuante em B terá um sentido contrário à velocidade de B e uma intensidade igual a μN , onde μ é o coeficiente de atrito entre o bloco B e a superfície, e N, no caso da figura, é igual ao peso de B.

- b) Se a velocidade de B for igual a zero, a força $F < \mu N$

Considere-se, agora o caso abaixo em que o material da viga é rígido-plástico:



Viga de material rígido-plástico

Figura III.4

Para este caso vale o seguinte:

- 1) Se o ponto A, ponto de aplicação da força P, estiver se deslocando, o momento em A é o momento plástico da viga (M_p).
- 2) Se o ponto A estiver estacionário, o momento em A (M_A), será menor ou igual a M_p .

Ou seja:

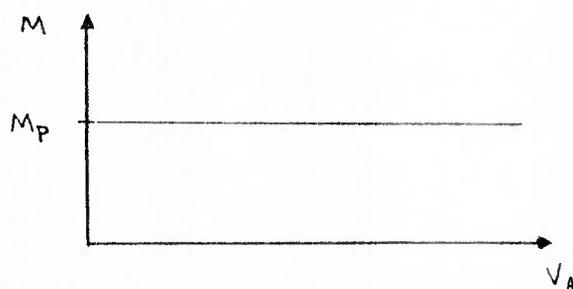


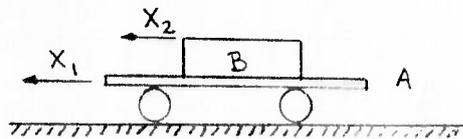
Diagrama momento-deformação para uma viga rígido-plástica

Figura III.5

onde:

V_A - velocidade do ponto A

Passar-se-á, agora ao estudo de um caso ligeiramente mais complexo que permitirá extrair valiosas conclusões sobre o problema em estudo.



Sistema com dois graus de liberdade

Figura III.6

onde:

- x_1 - deslocamento da placa A em relação a um referencial adotado como fixo
- x_2 - deslocamento do bloco B em relação à placa A
- M - massa do bloco B
- μ - coeficiente de atrito entre o bloco B e a placa A

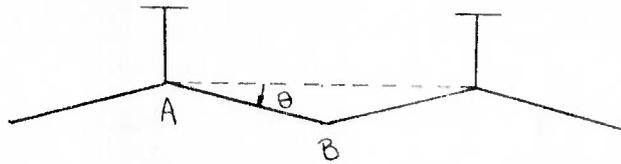
Neste caso podem-se distinguir as situações abaixo:

- 1) Quando $\dot{x}_2 \neq 0$ haverá em B uma força devida ao atrito de valor igual a μMg e de sentido contrário ao da velocidade \dot{x}_2 .
- 2) Quando \dot{x}_2 atinge instantaneamente o valor 0 podem-se distinguir dois casos:
 - a) $\mu Mg > |M \ddot{x}_1|$, neste caso, a força devida ao atrito será capaz de fazer com que o bloco B permaneça estacionário em relação à placa A e ter-se-á, desde que a mantenha a desigualdade acima, para todo o instante t subsequente $x_2 = \text{cte}$, o que im-

placa $\dot{x}_2 = 0$, $\ddot{x}_2 = 0$, etc.

- b) $\mu Mg < |M \ddot{x}_1|$, neste caso a força de atrito não será capaz de fornecer a aceleração necessária para manter o bloco B estacionário com relação à placa A; esse bloco estará sendo acelerado em relação ao referencial inercial por uma força de intensidade igual a μMg e de sentido igual a \ddot{x}_1 . Note-se que, em relação à placa A, o bloco B parecerá mover-se em sentido contrário a \ddot{x}_1 .

No problema que é o objetivo do presente trabalho tem-se uma situação análoga em que é o movimento da chapa que é medido em relação à caverna.



Deformação do chapeamento para o modo I

Figura III.7

Também neste caso podem-se fazer considerações análogas às anteriores.

- 1) $\dot{\theta} \neq 0$, neste caso ter-se-á aplicado sobre o chapeamento um momento igual a $-M_{yc} \pi R \text{sgn}(\dot{\theta}_0)$ nas charneiras A e B.

onde:

M_{yc} - momento plástico da chapa por unidade de comprimento

$$\text{sgn}(\dot{\theta}_0) = \begin{cases} = 1 & \text{se } \dot{\theta}_0 > 0 \\ = 0 & \text{se } \dot{\theta}_0 = 0 \\ = -1 & \text{se } \dot{\theta}_0 < 0 \end{cases}$$

2) Quando $\dot{\theta}_0$ atinge instantaneamente o valor 0:

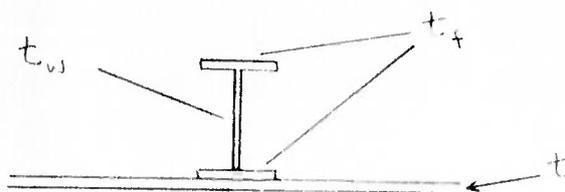
- a) $|0,2732 \rho_c \ell_c^2 R \dot{\psi}_0| < \pi R M_{vc}$; caso esta desigualdade seja satisfeita, a chapa não mais terá movimento relativo à caverna (ver Apêndice VI.1)
- b) $|0,2732 \rho_c \ell_c^2 R \dot{\psi}_0| > 2\pi R M_{vc}$; neste caso a chapa não poderá permanecer estacionária em relação à caverna e surgirão os momentos nas charneiras A e E descritos no item 1 acima (ver Apêndice VI.1).

Pelo exposto acima, pode-se constatar que, embora o comportamento global do sistema de equações diferenciais que constituem o modelo matemático do fenômeno não seja simples, / quando são feitas considerações como as acima, pode-se subdividir a região de estudo em sub-regiões dentro das quais o comportamento do sistema seja elementar. tais considerações permitem descartar a necessidade de confecção de um programa de computador para a solução do sistema, podendo o mesmo ser resolvido manualmente como será mostrado no capítulo IV: Exemplo de Aplicação.

IV - EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação estudar-se-á pela metodologia proposta o efeito de uma explosão submarina sobre o casco resistente de um submarino da classe GUPPY.

Para a região de espaçamento entre cavernas igual a 24" tem-se a configuração da figura abaixo, conforme a referência [20].



Arranjo típico da caverna mais chapeamento

Figura IV.1

espessura da chapa, $t = 22,23 \times 10^{-3} \text{ m}$

espessura dos flanges da caverna $t_f = 9,525 \times 10^{-3} \text{ m}$

espessura da alma da caverna $t_w = 7,93 \times 10^{-3} \text{ m}$

espaçamento entre cavernas, $\ell_z = 0,609 \text{ m}$

semi-espaçamento entre cavernas, $\ell_c = 0,3045 \text{ m}$

densidade linear do perfil da caverna, $\rho_a = 30,9 \text{ kg/m}$

densidade superficial da chapa, $\rho_c = 173,4 \text{ kg/m}$

momento plástico do perfil da caverna mais o chapeamento colaborante, $M_{y0} = 135,9 \times 10^3 \text{ Nm}$

Como já foi visto em um capítulo anterior, para esta combinação de enrijecedor mais chapa colaborante, não haverá o aparecimento de fenômenos de instabilidade elasto-plástica.

Para fins do exemplo proposto, usar-se-á uma carga de TNT de 100 kg explodindo a uma distância de 10 m da estrutura. Tal carga corresponde a grosso modo a uma bomba de profundidade usada durante a II Guerra Mundial.

Calcular-se-á agora os valores das velocidades v_a e v_c , impressos respectivamente na caverna e no chapeamento.

$$w = 100 \text{ kg}$$

$$d = 10 \text{ m}$$

$$\rho = 1025 \text{ kg/cm}^3 \text{ (densidade da água do mar)}$$

$$c = 1515 \text{ m/s} \text{ (velocidade do som na água)}$$

$$\theta = 1,3 \times 10^{-4} w^{1/3}$$

$$P_m = 5,46 \times 10^7 \left[\frac{w^{1/3}}{d} \right]^{1,13}$$

onde:

θ - constante de tempo de decaimento da pressão

P_m - pressão máxima exercida pela explosão

$$\theta = 1,3 \times 10^{-4} \times 100^{1/3} = 603,4 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$P_m = 5,46 \times 10^7 \left[\frac{100^{1/3}}{10} \right]^{1,13} = 22,94 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$Z_c = \frac{\rho_c}{\rho c \theta}$$

$$Z_a = \frac{\rho_a}{t_w \rho c \theta}$$

$$Z_c = \frac{173,4}{1025 \times 1515 \times 603,4 \times 10^{-6}} = 0,185$$

$$Z_a = \frac{30,9}{7,93 \times 10^{-3} \times 1025 \times 1515 \times 603,4 \times 10^{-6}} = 4,159$$

$$v_c = \frac{2P_m}{\rho_c} \frac{Z_c / (1 - Z_c)}{Z_c}$$

$$v_a = \frac{2P_m}{\rho_c} \frac{Z_a / (1 - Z_a)}{Z_a}$$

$$v_a = \frac{2 \times 22,94 \times 10^6}{1025 \times 1515} \frac{4,159 / (1 - 4,159)}{4,159} = 4,524 \text{ m/s}$$

$$v_c = \frac{2 \times 22,94 \times 10^6}{1025 \times 1515} \frac{0,185 / (1 - 0,185)}{0,185} = 20,14 \text{ m/s}$$

Far-se-á agora a determinação do campo inicial de velocidades do modo I a partir do campo de velocidades impresso na estrutura pela explosão (v_a e v_c).

Cálculo dos coeficientes do sistema de equações de transição.

$$A = 0,5 R^2 (0,5 \rho_a + \rho_c (\ell_c - t_w/2))$$

$$A = 0,5 \times 2,43^2 \times (0,5 \times 30,9 + 173,4 \times (0,3045 - 7,93 \times 10^{-3} / 2))$$

$$A = 199,48$$

$$B = 0,5 \rho_c R (\ell_c^2 - t_w^2/4)$$

$$B = 0,5 \times 173,4 \times 2,43 \times (0,3045^2 - (7,93 \times 10^{-3})^2 / 4)$$

$$B = 19,53$$

$$C = R (0,5 \rho_a v_a + \rho_c v_c (\ell_c - t_w/2))$$

$$C = 2,43 \times (0,5 \times 30,9 \times 4,524 + 173,4 \times 20,14 \times (0,3045 - 7,93 \times 10^{-3} / 2))$$

$$C = 2720,25$$

$$D = B$$

$$D = 19,53$$

$$E = 0,6667 \rho_c (\ell_c^3 - \frac{t^3}{8})$$

$$E = 0,6667 \times 173,4 \times (0,3045^3 - \frac{(7,93 \times 10^{-3})^3}{8})$$

$$E = 3,26$$

$$F = \rho_c v_c (\ell_c^2 - \frac{t^2}{4})$$

$$F = 173,4 \times 20,14 \times (0,3045^2 - \frac{(7,93 \times 10^{-3})^2}{4})$$

$$F = 323,75$$

Resolvendo o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{OI}(0) \\ \dot{\theta}_{OI}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$$

tem-se assim:

$$\dot{\psi}_{OI}(0) = 9,465 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\theta}_{OI}(0) = 42,6 \text{ rad/s}$$

Determinação das acelerações do modo I

$$A = 0,3562 R^3 (\rho_a + \rho_c \ell_c)$$

$$A = 0,3562 \times 2,43^3 \times (30,9 + 173,4 \times 0,3045)$$

$$A = 697,7$$

$$B = 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2$$

$$B = 0,2732 \times 173,4 \times 0,3045^2 \times 2,43^2$$

$$B = 25,9$$

$$C = -4 M'_{ya} \operatorname{sgn} (\dot{\psi}_0)$$

$$C = -4 \times 231,03 \times 10^3$$

$$C = -924,12 \times 10^3$$

$$D = B$$

$$D = 25,9$$

$$E = 0,6982 \rho_c \ell_c^3 R$$

$$E = 0,6982 \times 173,4 \times 0,3045^3 \times 2,43$$

$$E = 8,307$$

$$F = -\pi R M'_{yc} \operatorname{sgn} (\dot{\theta}_0)$$

$$F = -\pi \times 2,43 \times 67837,6$$

$$F = -517,9 \times 10^3$$

onde M'_{ya} é o momento plástico do perfil da caverna mais chapéu-mento colaborante quando se leva em conta os efeitos viscosos devidos à alta taxa de deformação do material.

$$M'_{ya} = F_c \cdot M_{ya}, \text{ onde } F \text{ é retirado da referência [21]}$$

Para o caso em estudo $F_c = 1,7$.

$$M'_{ya} = 1,7 \times M_{ya}$$

$$M'_{ya} = 1,7 \times 135,9 \times 10^3 = 231,03 \times 10^3 \text{ N.m}$$

O valor de F_c é obtido da referência [21], capítulo 4, item 36.a.ii, usando o gráfico da figura 4.2 desta referência, considerando como tempo de carregamento a constante de tempo da onda de choque (θ) que, no caso é menor que 5 ms.

M'_{yc} é o momento plástico de uma faixa unitária de chapamento quando se leva em conta os efeitos viscosos devidos à alta taxa de deformação do material.

$$M'_{yc} = F_c M_{yc}, \text{ onde } F \text{ é retirado da referência [21].}$$

Para o caso em estudo $F_c = 1,7$.

$$M_{yc} = 0,25 F_y t^2$$

$$M_{yc} = 0,25 \times 323 \times 10^6 \times (22,23 \times 10^{-3})^2$$

$$M_{yc} = 39904,5 \text{ Nm/m}$$

$$M'_{yc} = 1,7 \times 39904,5$$

$$M'_{yc} = 67837,6 \text{ Nm/m}$$

O sistema de equações diferenciais para o modo I é:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear acima tem-se:

$$\ddot{\psi}_0 = 1119,4 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{\theta}_0 = -65835,2 \text{ rad/s}^2$$

Cálculos do tempo decorrido para que a chapa atinja momentaneamente a velocidade zero em relação à caverna:

$$t_z = \frac{-\dot{\theta}_{0I}(0)}{\ddot{\theta}_0}$$

$$t_z = \frac{-42,6}{-65835,2} = 647,1 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Cálculo do deslocamento do centro da chapa (a meia distância entre cavernas), na região de incidência frontal da onda de choque:

$$\theta_o = \dot{\theta}_{OI}(0) t_z + 0,5 \ddot{\theta}_o t_z^2$$

$$\theta_o = 42,6 \times 647,1 \times 10^{-6} + 0,5 \times (-65835,2) \times (647,1 \times 10^{-6})^2$$

$$\theta_o = 13,783 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Cálculo do deslocamento da coroa da caverna:

$$\psi_o = \dot{\psi}_{OI}(0) t_z + 0,5 \ddot{\psi}_o t_z^2$$

$$\psi_o = 9,465 \times 647,1 \times 10^{-6} + 0,5 \times 1119,4 \times (647,1 \times 10^{-6})^2$$

$$\psi_o = 368,3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Verificar-se-á, agora, se a chapa passará a se mover solidariamente com a caverna, após a velocidade da chapa em relação à caverna ter-se anulado momentaneamente. Para tal, far-se-á a aceleração relativa da chapa ($\ddot{\theta}_o$) igual a zero e resolver-se-á o sistema resultante. Ao ser conhecida a aceleração / que o sistema caverna mais chapeamento passará a possuir, será calculado o momento plástico do chapeamento requerido (M_{yc}^*) para que a chapa se mova solidariamente com a caverna.

Com $\ddot{\theta} = 0$ o sistema de equações para o modo I fica:

$$A \ddot{\psi}_{of} = C$$

$$D \ddot{\theta}_{of} = F$$

$$\ddot{\psi}_{of} = \frac{C}{A}$$

$$\ddot{\psi}_{of} = \frac{-924,12 \times 10^3}{697,7}$$

$$\ddot{\psi}_{of} = -1324,5 \text{ rad/s}^2$$

$$M_{yc}^* = \frac{-I \ddot{\psi}_{of}}{\pi R}$$

$$M_{yc}^* = \frac{-25,9 \times (-1324,5)}{\pi \times 2,43}$$

$$M_{yc}^* = 4493,7 \text{ Nm/m}$$

Como $M_{yc}^* < M_{yc}$, vê-se assim que o momento plástico do chapeamento é menor do que o disponível (valor estático, uma vez que o movimento relativo cessou). Do exposto acima conclui-se que a partir deste momento (t_2) caverna e chapa passarão a se movimentar solidariamente.

Cálculo do tempo necessário para que a caverna mais a chapa cheguem ao repouso.

$$\dot{\psi}_{of} = \dot{\psi}_{CI(0)} + \ddot{\psi}_o t_2$$

$$\dot{\psi}_{of} = 9,465 + 1119,4 \times 647,1 \times 10^{-6}$$

$$\dot{\psi}_{of} = 10,19 \text{ rad/s}$$

Cálculo do tempo necessário para que a chapa chegue ao repouso:

$$t_f = \frac{-\dot{\psi}_{of}}{\ddot{\psi}_{of}}$$

$$t_f = \frac{-10,19}{-1324,5} = 7,693 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Cálculo do deslocamento angular da coroa da caverna:

$$\psi_{of} = \psi_o + \dot{\psi}_{of} t_f + 0,5 \ddot{\psi}_{of} t_f^2$$

$$\psi_{of} = 368,3 \times 10^{-3} + 10,19 \times 7,693 \times 10^{-3} + 0,5 \times (-1324,5) \times$$

$$\times (7,693 \times 10^{-3})^2$$

$$\psi_{of} = 407,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Cálculo do deslocamento linear no centro do chapeamento (a meia distância entre as cavernas) na região de incidência frontal, em relação a linha de topo das cavernas:

$$d_c = \theta_o \times l_c$$

$$d_c = 13,783 \times 10^{-4} \times 0,3045$$

$$d_c = 4,192 \times 10^{-3} \text{ m} = 4,192 \text{ mm}$$

Cálculo do deslocamento linear na coroa da caverna:

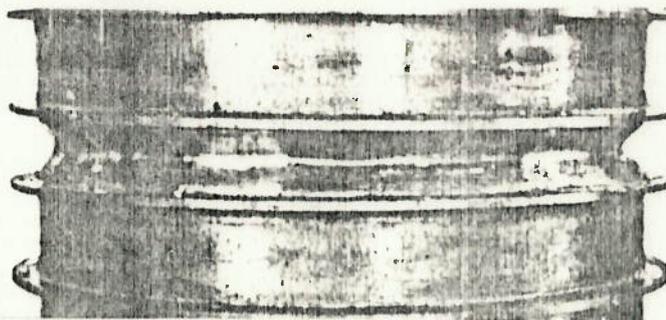
$$d_d = \frac{\psi_{of}}{2} \times R$$

$$d_a = \frac{407,5 \times 10^{-3}}{2} \times 2,43$$

$$d_a = 495,1 \times 10^{-3} \text{ m} = 495,1 \text{ mm}$$

Como $d_c < t$ o modo II não se inicia, a estrutura permanecendo inteiramente no modo I.

Talvez a restrição de maior porte quanto ao uso do presente método seja o fato de que ele não fornece meios para a determinação "a priori" dos modos de deformação, tendo estes que ser fornecidos, baseados principalmente em dados experimentais quanto ao comportamento da estrutura sob a ação do carregamento (figura V.2).



Flambagem axissimétrica do cilindro

Figura V.2

A existência de elementos gigantes pouco espaçados, como já foi mencionado anteriormente, traria modificações consideráveis ao modelo proposto. Para levar em conta a presença de tais elementos ter-se-ia que considerar a interação entre anéis, aumentando sobre-maneira a complexidade do modelo necessário pela introdução de graus de liberdade adicionais.

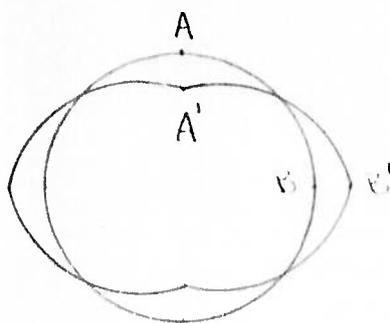
Outra limitação que convém apontar é que não se considerou no presente trabalho a possibilidade do aparecimento de trincas durante o processo de deformação da estrutura quando o material da mesma tiver sido solicitado além do seu limite de ruptura.

A possibilidade de existência de fenômenos de instabilidade elasto-plástica ($\lambda > 0,8$) invalidaria o modelo proposto, sendo necessário, embora seguindo as mesmas linhas do presente trabalho, mudar as funções de forma utilizadas para melhor representar a configuração do chapeamento após o efeito da explosão.

Finalmente, devido à complexidade inerente ao proble-

V CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dos resultados obtidos no exemplo de aplicação pode-se concluir que, a menos que as cavernas sejam extremamente rígidas, a casca cilíndrica falhará por deformação excessiva das cavernas, tornando o anel em um mecanismo tetra-articulado.



Caverna como mecanismo tetra-articulado

Figura V.1

A existência de anteparas e cavernas gigantes pouco espaçadas certamente alteraria significativamente os valores obtidos no exemplo de aplicação, pois seriam elementos que auxiliariam a casca a manter a sua forma circular, diminuindo sobremaneira a deformação das cavernas.

A presença de outros elementos internos, estruturais ou não, podem também causar profundas modificações no modo de falhar da estrutura, quer seja por enrijecer o chapeamento, quer criando cargas concentradas por efeito da sua inércia.

Vê-se, então, pelas considerações efetuadas acima que não é imediata a transposição dos resultados obtidos via modelo simplificado ao caso real.

Cabe aqui apontar, de maneira breve, algumas limitações do procedimento proposto e possíveis formas de superá-las.

ma parece razoável supor que a abordagem mais frutífera seria a experimental. Visando a reduzir os custos de um programa deste tipo seria interessante a utilização de modelos da estrutura a ser ensaiada. Para que tal seja possível é necessário primeiro identificar os grupos adimensionais que regem o fenômeno permitindo, assim, através destes grupos, extrapolar para o caso real os resultados obtidos nos modelos.

VI APÊNDICES

Nos itens que se seguem serão apresentadas as deduções das equações de movimento e das condições de transição entre modos.

Para as condições de transição entre modos será utilizada a técnica do Δ -mínimo [9].

Para a obtenção das equações do movimento será usada a formulação de LAGRANGE da Dinâmica.

VI.1 Dedução das Equações de Movimento

- 1) Para a obtenção das equações do movimento serão considerados os seguintes elementos da estrutura:
 - a) Um semi-anel (figura VI.1)
 - b) Duas semi-larguras do chapeamento (figura VI.2)

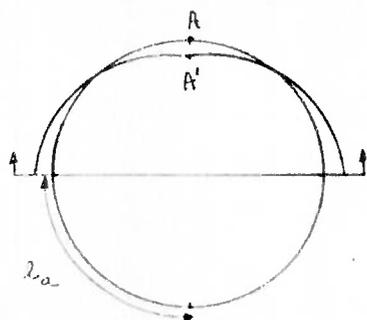


Figura VI.1-Trecho do anel considerado

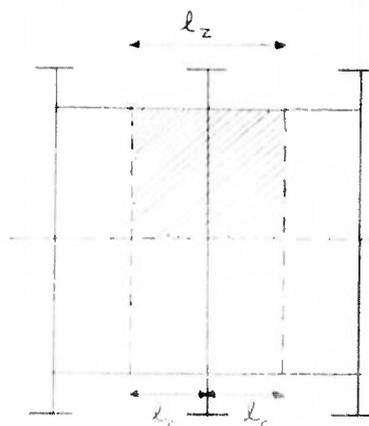


Figura VI.2-Trecho do chapeamento considerado

Tal escolha se deve ao fato de se supor que a totalidade do anel se comporta como um quadro com três rótulas conforme mostrado na figura VI.1, enquanto que, para a chapa, se considera que somente a região hachurada se põe em movimento.

2) Energia cinética do anel para os modos I e II:

$$v_{xa} = R(1 - \cos \varphi) \dot{\psi}_0(t)/2 \quad (\text{VI.1.1})$$

$$v_{ya} = R(\sin \varphi - 1) \dot{\psi}_0(t)/2 \quad (\text{VI.1.2})$$

$$T_a = \frac{1}{2} \rho_a \int_{-l_a}^{l_a} (v_{xa}^2 + v_{ya}^2) dl \quad (\text{VI.1.3})$$

$$T_a = \rho_a \int_0^{\pi/2} (v_{xa}^2 + v_{ya}^2) R d\varphi \quad (\text{VI.1.4})$$

onde:

T_a - energia cinética do semi-anel

ρ_a - densidade linear do perfil da caverna

$$v_{xa}^2 = R^2 (1 - \cos \varphi)^2 \dot{\psi}_0^2 / 4 \quad (\text{VI.1.5})$$

$$v_{ya}^2 = R^2 (\sin \varphi - 1)^2 \dot{\psi}_0^2 / 4 \quad (\text{VI.1.6})$$

$$T_a = \frac{1}{4} \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2\sin \varphi + 1) d\varphi \quad (\text{VI.1.7})$$

$$T_a = \frac{1}{4} \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 \int_0^{\pi/2} (3 - 2(\sin \varphi + \cos \varphi)) d\varphi \quad (\text{VI.1.8})$$

$$T_a = \frac{1}{4} \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 \left[\frac{3\pi}{2} - 4 \right] \quad (\text{VI.1.9})$$

$$T_a = 0,1781 \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 \quad (\text{VI.1.10})$$

3) Energia cinética do chapeamento (modo I):

$$T_c = \frac{1}{2} \rho_c \int_{-l_a}^{l_a} \int_{-l_c}^{l_c} ((v_{xa} + v_{xc})^2 + (v_{ya} + v_{yc})^2) dz dl \quad (\text{VI.1.11})$$

onde v_{xa} e v_{ya} são as expressões mostradas no item anterior.

Para o modo I tem-se

$$v_{xc} = -\dot{\theta}_0(t) z \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right) \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{VI.1.12})$$

$$v_{yc} = -\dot{\theta}_0(t) z \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right) \operatorname{cos} \varphi \quad (\text{VI.1.13})$$

$$\begin{aligned} T_c = & 2 \rho_c \int_0^{l_a} \left(v_{xa}^2 l_c + v_{ya}^2 l_c + 2v_{xa} \right) \int_0^{l_c} v_{xc} dz + \\ & + 2v_{ya} \int_0^{l_c} v_{yc} dz + \int_0^{l_c} (v_{xc}^2 + v_{yc}^2) dz \, dl \quad (\text{VI.1.14}) \end{aligned}$$

Calcular-se-ão primeiro as integrais correspondentes à terceira, quarta e quinta parcelas de T_a :

$$A = 2v_{xa} (-\dot{\theta}_0) \frac{l_c^2}{2} \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right) \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{VI.1.15})$$

$$B = 2v_{ya} (-\dot{\theta}_0) \frac{l_c^2}{2} \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right) \operatorname{cos} \varphi \quad (\text{VI.1.16})$$

$$C = (\dot{\theta}_0) \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right)^2 \frac{l_c^3}{3} \quad (\text{VI.1.17})$$

$$\begin{aligned} T_c = & 2\rho_c \int_0^{l_a} \left(l_c (v_{xa}^2 + v_{ya}^2) + 2(-\dot{\theta}_0) \frac{l_c^2}{2} \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right) \right) \\ & \cdot (v_{xa} \operatorname{sen} \varphi + v_{ya} \operatorname{cos} \varphi) + (\dot{\theta}_0) \left(\frac{\pi-2\varphi}{\pi} \right)^2 \frac{l_c^3}{3} \, dl \quad (\text{VI.1.18}) \end{aligned}$$

Usando os resultados obtidos no item 2:

$$\begin{aligned} T_c = & 2\rho_c l_c \cdot \frac{R^3}{4} \dot{\psi}_0 \left[\frac{3\pi}{2} - 4 \right] - 2\rho_c \dot{\theta}_0 \frac{l_c^2}{\pi} \int_0^{l_a} (\pi-2\varphi) \\ & \cdot (v_{xa} \operatorname{sen} \varphi + v_{ya} \operatorname{cos} \varphi) \, dl + 2\rho_c \frac{\dot{\theta}_0^2}{\pi^2} \frac{l_c^3}{3} \\ & \cdot \int_0^{l_a} (\pi-2\varphi)^2 \, dl \quad (\text{VI.1.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_c = & 0,3562 \rho_c l_c R^3 \dot{\psi}_0^2 - 2\rho_c \dot{\theta}_0 \frac{l_c^2}{\pi} \frac{\dot{\psi}_0}{2} R^2 \int_0^{\pi/2} (\pi-2\varphi) \\ & \cdot ((1-\operatorname{cos} \varphi) \operatorname{sen} \varphi + (\operatorname{sen} \varphi - 1) \operatorname{cos} \varphi) \, d\varphi + 2\rho_c \frac{\dot{\theta}_0^2}{\pi^2} \frac{l_c^3}{3} R \int_0^{\pi/2} (\pi-2\varphi)^2 \, d\varphi \quad (\text{VI.1.20}) \end{aligned}$$

A primeira integral em φ fica:

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - 2\varphi) (\sin\varphi - \cos\varphi \sin\varphi + \sin\varphi \cos\varphi - \cos\varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\pi - 2\varphi) (\sin\varphi - \cos\varphi) d\varphi = -0,8584 \quad (\text{VI.1.21})$$

A segunda integral em φ vale:

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - 2\varphi)^2 d\varphi = 5,168 \quad (\text{VI.1.22})$$

Tem-se assim:

$$T_c = 0,3562 \rho_c l_c R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,2732 \rho_c l_c^2 R \dot{\psi}_0 \dot{\theta}_0 + 0,1745 \rho_c l_c^3 R \dot{\theta}_0^2 \quad (\text{VI.1.23})$$

4) Energia cinética do chapeamento (modo II)

Para a fase II tem-se:

$$v_{xc} = -w_0(t) \sin((\pi z)/(2l_c)) \cos\varphi \sin\varphi \quad (\text{VI.1.24})$$

$$T_c = 2\rho_c \int_0^{l_a} (v_{xa}^2 l_c + v_{ya}^2 l_c + 2v_{xa} \int_0^{l_a} v_{xc} dz +$$

$$+ 2v_{ya} \int_0^{l_c} v_{yc} dz + \int_0^{l_c} (v_{xc}^2 + v_{yc}^2) dz) dl \quad (\text{VI.1.25})$$

Como no item anterior calcularemos a terceira, a quarta e a quinta parcelas.

$$A = 2v_{xa} (-w_0) \frac{2l_c}{\pi} \cos\varphi \sin\varphi \quad (\text{VI.1.26})$$

$$B = 2v_{ya} (-w_0) \frac{2l_c}{\pi} \cos\varphi \cos\varphi \quad (\text{VI.1.27})$$

$$C = (\dot{w}_0 \cos\varphi)^2 \frac{l_c}{2} \quad (\text{VI.1.28})$$

$$T_c = 2\rho_c \int_0^{\ell_a} (v_{xa}^2 \ell_c + v_{ya}^2 \ell_c - 2v_{xa} \dot{w}_0 \frac{2\ell_c}{\pi} \cos \varphi \sin \varphi - 2v_{ya} \dot{w}_0 \frac{2\ell_c}{\pi} \cos \varphi \cos \varphi + (\dot{w}_0 \cos \varphi)^2 \frac{\ell_c}{2}) d\ell \quad (\text{VI.1.29})$$

Usando-se os resultados obtidos anteriormente:

$$T_c = 2\rho_c \ell_c \frac{R^3}{4} \dot{\psi}_0^2 \left[\frac{3\pi}{2} - 4 \right] - 8\rho_c \frac{\ell_c}{\pi} \dot{w}_0 \int_0^{\ell_a} (v_{xa} \cos \varphi \sin \varphi + v_{ya} \cos \varphi \cos \varphi) d\ell + \rho_c \ell_c \dot{w}_0^2 \int_0^{\ell_a} \cos^2 \varphi d\varphi \quad (\text{VI.1.30})$$

$$T_c = 0,3562 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0^2 - \frac{8}{\pi} \rho_c \ell_c \dot{w}_0 R^2 \frac{\dot{\psi}_0}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) \cdot$$

$$\cdot (\cos \varphi \sin \varphi) + (\sin \varphi - 1) \cos^2 \varphi) d\varphi = 0,7854 \cdot$$

$$\rho_c \ell_c R \dot{w}_0^2 \quad (\text{VI.1.31})$$

A integral em φ pode ser simplificada:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} ((1 - \cos \varphi) (\cos \varphi \sin \varphi) + (\sin \varphi - 1) \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi \sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = -0,2854 \quad (\text{VI.1.32}) \end{aligned}$$

Assim, tem-se finalmente:

$$T_c = 0,3562 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \dot{w}_0 \dot{\psi}_0 + 0,7854 \rho_c \ell_c R \dot{w}_0^2 \quad (\text{VI.1.33})$$

5) Equações do movimento para o modo I:

$$T = T_a + T_c \quad (\text{VI.1.34})$$

$$T = 0,1781 \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,3562 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \dot{\psi}_0^2 \dot{\theta}_0 + 0,3491 \rho_c \ell_c^3 R \dot{\theta}_0^2 \quad (\text{VI.1.35})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_0} = 0,3562 \rho_a R^3 \dot{\psi}_0 + 0,7124 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0 + 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \dot{\theta}_0 \quad (\text{VI.1.36})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_0} = 0,3562 \rho_a R^3 \ddot{\psi}_0 + 0,7124 \rho_c \ell_c R^3 \ddot{\psi}_0 + 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \ddot{\theta}_0 \quad (\text{VI.1.37})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_0} = 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \dot{\psi}_0 + 0,6982 \rho_c \ell_c^3 R \dot{\theta}_0 \quad (\text{VI.1.38})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_0} = 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \ddot{\psi}_0 + 0,6982 \rho_c \ell_c^3 R \ddot{\theta}_0 \quad (\text{VI.1.39})$$

A forma geral da Equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{VI.1.40})$$

onde Q_i é a força generalizada correspondente à i -ésima coordenada.

O sistema de equações do movimento para o modo I fica:

$$0,3562 R^3 (\rho_a + 2\rho_c \ell_c) \ddot{\psi}_0 + 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \ddot{\theta}_0 = Q_1 \quad (\text{VI.1.41})$$

$$0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \ddot{\psi}_0 + 0,6982 \rho_c \ell_c^3 R \ddot{\theta}_0 = Q_2 \quad (\text{VI.1.42})$$

6) Equações do movimento para o modo II:

$$T = T_a + T_c \quad (\text{VI.1.43})$$

$$T = 0,1781 \rho_a R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,3562 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0^2 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \dot{w}_0 \dot{\psi}_0 + 0,7854 \rho_c \ell_c R \dot{w}_0^2 \quad (\text{VI.1.44})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_0} = 0,3562 \rho_a R^3 \dot{\psi}_0 + 0,7124 \rho_c \ell_c R^3 \dot{\psi}_0 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \dot{w}_0 \quad (\text{VI.1.45})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_0} = 0,3562 \rho_a R^3 \ddot{\psi}_0 + 0,7124 \rho_c \ell_c R^3 \ddot{\psi}_0 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{w}_0 \quad (\text{VI.1.46})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_0} = 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \dot{\psi}_0 + 1,5708 \rho_c \ell_c R \dot{w}_0 \quad (\text{VI.1.47})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_0} = 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{\psi}_0 + 1,5708 \rho_c \ell_c R \ddot{w}_0 \quad (\text{VI.1.48})$$

O sistema de equações do movimento para o modo II fica:

$$\begin{cases} 0,3562 R^3 (\rho_a + 2 \rho_c \ell_c) \ddot{\psi}_0 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{w}_0 = Q_1 & (\text{VI.1.49}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{\psi}_0 + 1,5708 \rho_c \ell_c R \ddot{w}_0 = Q_2 & (\text{VI.1.50}) \end{cases}$$

7) Determinação das forças generalizadas:

a) Para o modo I:

$$dw = \sum_{i=1}^2 Q_i \delta q_i \quad (\text{VI.1.51})$$

$$dw = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) \delta \psi_0 \rightarrow A$$

$$-4 M_{yc} \frac{\ell_a}{2} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_0) \delta \theta_0 \rightarrow B \quad (\text{VI.1.52})$$

O termo A provém do trabalho das rótulas da caverna, considerando-a um mecanismo tetra-articulado.

O termo B provém do trabalho das charneiras plásticas da chapa.

Conclui-se, então, que:

$$Q_1 = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) \quad (\text{VI.1.53})$$

$$Q_2 = -2 M_{yc} \frac{\pi R}{2} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_0)$$

$$= -\pi R M_{yc} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_0) \quad (\text{VI.1.54})$$

b) Para o modo II:

$$dw = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) \delta \psi_0 \rightarrow A$$

$$-F_y \ell_c t \frac{1}{\ell_a} \operatorname{sgn}(\dot{w}_0) \delta w_0 \rightarrow B$$

$$-F_y \ell_a t \frac{1}{\ell_c} \operatorname{sgn}(\dot{w}_0) \delta w_0 \rightarrow C \quad (\text{VI.1.55})$$

O termo A provém do trabalho dissipado nas rótulas da caverna.

O termo B provém do trabalho dissipado na chapa quando a mesma se comporta como uma membrana plástica e se alonga na direção transversal.

O termo C tem a mesma origem do termo B e é devido ao alongamento longitudinal.

Tem-se, então, que:

$$Q_1 = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) \quad (\text{VI.1.56})$$

$$Q_2 = -F_y t \left[\frac{\ell_c}{\pi R} + \frac{\pi R}{\ell_c} \right] \operatorname{sgn}(\dot{w}_0) \quad (\text{VI.1.57})$$

8) Equações finais:

Para o modo I:

$$\begin{aligned} 0,3562R^3(\rho_a + 2\rho_c \ell_c) \ddot{\psi}_0 + 0,2732 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{\theta}_0 &= \\ = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) & \quad (\text{VI.1.58}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,2732 \rho_c \ell_c^2 R^2 \ddot{\psi}_0 + 0,6982 \rho_c \ell_c^3 R \ddot{\theta}_0 &= \\ = -\pi R M_{yc} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_0) & \quad (\text{VI.1.59}) \end{aligned}$$

Para o modo II:

$$\begin{aligned} 0,3562R^3(\rho_a + \rho_c \ell_c) \ddot{\psi}_0 + 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{w}_0 &= \\ = -4 M_{ya} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_0) & \quad (\text{VI.1.60}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,3634 \rho_c \ell_c R^2 \ddot{\psi}_0 + 1,5708 \rho_c \ell_c R \ddot{w}_0 &= \\ = -F_y t \left[\frac{\ell_c}{\pi R} + \frac{\pi R}{\ell_c} \right] \operatorname{sgn}(\dot{w}_0) & \quad (\text{VI.1.61}) \end{aligned}$$

VI.2 - Obtenção das Condições de Transição entre Modos

1) Para a obtenção das condições iniciais para cada modo será usada a técnica do Δ -mínimo [9].

Achar-se-á o campo inicial de velocidades provocado pela ação da carga impulsiva externa sobre a estrutura.

A obtenção do campo referido no parágrafo anterior far-se-á de acordo com a metodologia exposta na referência [19], assimilando o comportamento da caverna à de uma tira de chapeamento de largura t_w e de densidade linear igual a ρ_a .

Designaremos por v_c a velocidade do chapeamento após a passagem da onda de choque e por v_a a velocidade da caverna após o mesmo evento.

Visando aplicar a técnica do Δ -mínimo calcular-se-á a integral abaixo:

$$\Delta = \int_0^{t_w/2} \frac{\rho_a}{t_w} (v^2 - 2vv' + v'^2) dz + \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c (v^2 - 2vv' + v'^2) dz$$

Desdobrando a integral acima:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_0^{t_w/2} \frac{\rho_a}{t_w} v_a^2 dz - 2 \int_0^{t_w/2} \frac{\rho_a}{t_w} v_a \frac{R\dot{\psi}_{0I}}{2} dz + \\ & + \int_0^{t_w/2} \frac{\rho_a}{t_w} \left[\frac{R\dot{\psi}_{0I}}{2} \right]^2 dz + \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c v_c^2 dz - \\ & - 2 \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c v_c \left[\frac{R\dot{\psi}_{0I}}{2} + \dot{\theta}_{0I} z \right] dz + \\ & + \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c \left[\frac{R\dot{\psi}_{0I}}{2} + \dot{\theta}_{0I} z \right]^2 dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & \frac{\rho_a}{t_w} v_a^2 \frac{t_w}{2} - 2 \frac{\rho_a}{t_w} v_a \frac{R \dot{\psi}_{OI}}{2} \frac{t_w}{2} + \frac{\rho_a}{t_w} \frac{R^2 \dot{\psi}_{OI}}{4} \frac{t_w}{2} + \\
& + \rho_c v_c^2 \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] - 2 \rho_c v_c \frac{R \dot{\psi}_{OI}}{2} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] - \\
& - 2 \rho_c v_c \dot{\theta}_{OI} \frac{1}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right], \\
& + \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c \left[\frac{R^2 \dot{\psi}_{OI}}{4} + 2 \frac{R \dot{\psi}_{OI}}{2} \dot{\theta}_{OI} z + \dot{\theta}_{OI}^2 z \right] dz
\end{aligned}$$

Chamando a última integral de A:

$$\begin{aligned}
A = & \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{OI}^2}{4} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \rho_c R \dot{\psi}_{OI} \dot{\theta}_{OI} \frac{1}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] + \\
& + \rho_c \dot{\theta}_{OI}^2 \frac{1}{3} \left[\ell_c^3 - \frac{t_w^3}{8} \right]
\end{aligned}$$

Para a obtenção do ponto mínimo deve-se derivar em relação a $\dot{\psi}_{OI}$ e $\dot{\theta}_{OI}$ e igualar as derivadas a zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{\psi}_{OI}} = & -\rho_a v_a \frac{R}{2} + 2 \rho_a \frac{R^2}{8} \dot{\psi}_{OI} - \rho_c v_c R \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \\
& + 2 \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{OI}}{4} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \rho_c \frac{R}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] \dot{\theta}_{OI} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{\theta}_{OI}} = & -\rho_c v_c \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] + \rho_c \frac{R}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] \dot{\psi}_{OI} + \\
& + \frac{2}{3} \rho_c \left[\ell_c^3 - \frac{t_w^3}{8} \right] \dot{\theta}_{OI} = 0
\end{aligned}$$

Resumindo tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c|c} \rho_a \frac{R^2}{4} + \rho_c \frac{R^2}{2} \left[\ell_c - \frac{t}{w} \right] & \rho_c \frac{R}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t^2}{4} \right] \\ \hline \rho_c \frac{R}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t^2}{4} \right] & \frac{2}{3} \rho_c \left[\ell_c^3 - \frac{t^3}{w} \right] \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{OI} \\ \dot{\theta}_{OI} \end{bmatrix} = \\
 & = \left[\begin{array}{c} R \left[\frac{\rho_a v_a}{2} + \rho_c v_c \left[\ell_c - \frac{t}{w} \right] \right] \\ \hline \rho_c v_c \left[\ell_c^2 - \frac{t^2}{4} \right] \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

2) Obter-se-ão, agora, as condições de transição entre o campo final de velocidades do modo I e o campo inicial de velocidades do modo II. A transição de um modo para o outro dar-se-á quando o deslocamento do centro do chapeamento na região da coroa da caverna atingir um valor igual à espessura da chapa

a) Campo final do modo I:

$$v_I(0, z) = \frac{R \dot{\psi}_{fI}}{2} + \dot{\theta}_{fI} z$$

b) Campo inicial do modo II:

$$v_{II}(0, z) = \frac{R}{2} \dot{\psi}_{OII} + \dot{w}_{OII} \operatorname{sen}((\pi z)/(2\ell_c))$$

Procedendo como no item 1:

$$\Delta = \int_0^{t_w/2} \frac{\rho_a}{t_w} \left[v_I^2 - 2v_I v_{II} + v_{II}^2 \right] dz + \\ + \int_{t_w/2}^{\ell_c} \rho_c (v_I^2 - 2v_I v_{II} + v_{II}^2) dz$$

Substituindo na integral acima as expressões que definem v_I e v_{II} :

$$\Delta = \frac{\rho_a}{t_w} \int_0^{t_w/2} \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}^2}{4} dz - 2 \frac{\rho_a}{t_w} \int_0^{t_w/2} \frac{R \dot{\psi}_{fI}}{2} \frac{R \dot{\psi}_{OII}}{2} dz + \\ + \frac{\rho_a}{t_w} \int_0^{t_w/2} \frac{R^2 \dot{\psi}_{OII}^2}{4} dz + \\ + \rho_c \int_{t_w/2}^{\ell_c} \left[\frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}^2}{4} + 2 \frac{R \dot{\psi}_{fI}}{2} \dot{\theta}_{fI} z + \dot{\theta}_{fI}^2 z^2 \right] dz - \\ - 2 \rho_c \int_{t_w/2}^{\ell_c} \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI} \dot{\psi}_{OII}}{4} + \frac{R \dot{\psi}_{fI}}{2} \dot{w}_{OII} \text{sen}((\pi z)/(2\ell_c)) + \\ + \dot{\theta}_{fI} z \frac{R \dot{\psi}_{OII}}{2} + \dot{\theta}_{fI} z \dot{w}_{OII} \text{sen}((\pi z)/2\ell_c) + \\ + \dot{w}_{OII}^2 \text{sen}^2((\pi z)/(2\ell_c))$$

Calculando as integrais acima tem-se:

$$\Delta = \frac{\rho_a}{t_w} \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}^2}{4} \frac{t_w}{2} - 2 \frac{\rho_a}{t_w} \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI} \dot{\psi}_{OII}}{4} \frac{t_w}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_a}{t_w} \frac{R^2 \dot{\psi}_{OII}^2}{4} \frac{t_w}{2} + \\
& + \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}^2}{4} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \ell_c R \dot{\psi}_{fI} \dot{\theta}_{fI} \frac{1}{2} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] + \\
& + \rho_c \dot{\theta}_{fI}^2 \frac{1}{3} \left[\ell_c^3 - \frac{t_w}{8} \right] - \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI} \dot{\psi}_{OII}}{2} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] - \\
& - \rho_c R \dot{\psi}_{fI} \dot{w}_{OII} \int_{t_w/2}^{\ell_c} \text{sen}(\pi z / (2\ell_c)) dz - \rho_c R \dot{\theta}_{fI} \dot{\psi}_{OII} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] - \frac{1}{2} \rho_c \dot{\theta}_{fI} \dot{w}_{OII} \int_{t_w/2}^{\ell_c} z \text{sen}(\pi z / (2\ell_c)) dz + \\
& + \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{OII}^2}{4} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \\
& + \rho_c R \dot{\psi}_{OII} \dot{w}_{OII} \int_{t_w/2}^{\ell_c} \text{sen}(\pi z / (2\ell_c)) dz + \\
& + \rho_c \dot{w}_{OII} \int_{t_w/2}^{\ell_c} \text{sen}^2(\pi z / (2\ell_c)) dz
\end{aligned}$$

Calculando agora, as derivadas parciais de Δ em relação a $\dot{\psi}_{OII}$ e \dot{w}_{OII} e igualando-as a zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{\psi}_{OII}} &= -\rho_a \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}}{4} + \frac{\rho_a}{4} R^2 \dot{\psi}_{OII} - \rho_c \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}}{2} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \rho_c R \dot{\theta}_{fI} \left[\ell_c^2 - \frac{t_w^2}{4} \right] + \frac{\rho_c}{2} R^2 \dot{\psi}_{OII} \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] + \\
& + \rho_c R \dot{w}_{OII} \frac{2\ell_c}{\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{w}_{OII}} = -\rho_c R \dot{\psi}_{OI} \frac{2\ell_c}{\pi} - \frac{1}{2} \rho_c \dot{\theta}_{fI} \cdot 0,4053 \ell_c^2 +$$

$$+ \rho_c R \dot{\psi}_{OII} \frac{2\ell_c}{\pi} + 2 \frac{\ell_c}{2} \dot{w}_{OII} = 0$$

Resumiendo:

$$\begin{bmatrix} 0,25 \rho_c R^2 + 0,5 \rho_c R^2 \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] & \left| \frac{2\rho_c \ell_c R}{\pi} \right| \\ \frac{2\rho_c \ell_c R}{\pi} & \left| \ell_c \right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{OII} \\ \dot{w}_{OII} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho_a \frac{R^2 \dot{\psi}_{fI}}{4} + \rho_c R \left[\ell_c - \frac{t_w}{2} \right] \left[\frac{R \dot{\psi}_{fI}}{2} + \frac{\dot{\theta}_{fI}}{2} \left[\ell_c + \frac{t_w}{2} \right] \right] \\ \rho_c \ell_c \left[\frac{2R}{\pi} \dot{\psi}_{fI} + 0,2027 \ell_c \dot{\theta}_{fI} \right] \end{bmatrix}$$

VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HENRYCH, J. The dynamics of explosion and its use.
Prague, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1979.
2. NEAL, B.G. The plastic methods of structural Analysis.
London, Chapman and Hall Ltd., 1963.
3. KACHANOV, L.M. Fundamentals of the theory of plasticity.
Moscow, Mir Publishers, 1974.
4. WELLS, D.A. Theory and problems of lagrangian dynamics.
New York, Schaum Publishing Co., 1967.
5. HODGE Jr., P.G. Plastic analysis of structures. New York,
Mc Graw-Hill Book Company, inc., 1959.
6. AUGUSTO, O.E. Proposta de um modelo para cálculo das deflexões transversais de chapas retangulares submetidas a uma onda de choque gerada por uma explosão submarina.
Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, São Paulo, 1982.
7. A.I.S.C. Manual of steel construction. New York, American Institute of Steel Construction, Inc., 1970, seventh edition.

8. SNAME. Principles of naval architecture. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1967.
9. SYMONDS, P.S. Finite elastic and plastic deformations of pulse loaded structures by an extended mode technique. International Journal of Mechanical Sciences, Pergamon Press, Great Britain, vol. 22, 597-605, 1980.
10. ROSS, Donald Mechanics of underwater noise. New York, Pergamon Press, 1976.
11. JONES, N. Plastic behavior of ship structures. New York, SNAME Transactions; SNAME, vol. 84, 1976.
12. GRIFFIN, P.D. & MARTIN, L.E. Geometrically nonlinear mode approximations for impulsively loaded homogeneous viscous beams and frames. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 25, 15-26, 1983.
13. KEIL, A.H. Problems of plasticity in naval structures: explosive and impact loading. Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, Great Britain, 1960.
14. NAGAI, T. On the results of damages of cylindrical shells due to underwater explosion. Journal of SNARJ, vol.117, 1985.

15. BLEICH, H.H. & MINDLIN, R.D. Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, step shock wave. JAM, vol. 20, 1953.
16. COLE, R.H. Under water explosions. Princeton, Princeton University Press, 1948.
17. JOHNSTON, B.G. ed Guide to stability design criteria for metal structures. 3rd Ed., John Wiley Inc., USA, 1976.
18. WINDENBURG, D.F. & TRILLING, C. Collapse by instability of thin cylindrical shells under external pressure. Transactions ASME, vol. 56, nº 11, 1934.
19. HOLLYER, R.S. Direct Shock .- Wave damage to merchant ships from non-contact under water explosions. Transactions SNAME, 1967.
20. FREITAS, E.S. Efeito de falta de circularidade no casco do Sb. Ceará. ETCN-SP, 1979 (CONFIDENCIAL).
21. BR 3021(1). Shock manual. Ministry of Defence, Ship Department, 1975, (RESTRI101).