

UM MODELO DE PLACAS E VIGAS EXCÊNTRICAS PARA

A ANÁLISE DE CHAPEAMENTOS REFORÇADOS

Autor: MIGUEL ANGEL BUELTA MARTINEZ

Orientador: ÉLCIO DE SÃ FREITAS
CMG(EN), "M.Sc.", "Nav.Eng."

Dissertação

~~de~~ de Mestrado apresentada à ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

março - 1977

ã l ũ c í a

AGRADECIMENTOS

Desejo externar os sinceros agradecimentos às seguintes entidades e pessoas:

- à MARINHA DO BRASIL e o BANCO NACIONAL DO DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO (BNDE), cujo apoio financeiro ao projeto NDPN-420, possibilitou a execução deste trabalho;
- ao Professor ELCIO DE SÃ FREITAS, cuja orientação moral e técnica tornou-me capaz de desenvolver esta pesquisa;
- ao Professor VICTOR MANOEL DE SOUZA LIMA, pelas valiosas sugestões recebidas;
- ao Eng^o CARLOS ALBERTO NUNES DIAS e ao aluno VALDIR MANTOVANI, pelo auxílio na elaboração e preparação dos programas computacionais;
- ao Sr. MANOEL ROBLES e Sra. MARIA CAPRIOLI PAIOTTI, pelos excelentes trabalhos de desenho e datilografia respectivamente;
- aos meus pais e sogros, pela ajuda.

R E S U M O

Este trabalho procura desenvolver um novo modelo para análise estrutural de chapeamentos reforçados, que propõe ligar dois elementos estruturais de diferentes formulações, a saber:

- elementos de viga, analisados utilizando-se o método da rigidez, baseado na teoria linear de vigas, sendo, portanto, dentro das hipóteses inerentes à teoria, um método exato. Para tanto, desenvolve-se um novo elemento chamado viga excêntrica;
- elementos de placa, analisados utilizando-se o método dos elementos finitos, podendo trabalhar com cargas em flexão e cargas no próprio plano acarretando um comportamento de membrana.

O novo elemento de viga excêntrica é introduzido no programa SAP-IV⁽¹⁾ (podendo no entanto utilizar-se de outros programas), sendo realizados testes de interação com os elementos finitos de placa existentes no programa ⁽²⁾.

O novo modelo revelou-se economicamente viável quando da sua utilização em chapeamentos reforçados, evitando-se a divisão em elementos finitos dos enrijecedores, que têm seu próprio comportamento dentro da teoria simples de vigas.

A B S T R A C T

This work develops a new model for structural analysis of stiffened plating, involving two elements of different formulation, that is:

- beam elements, analysed by the matrix method, based in the linear theory of beams, being then, with the hypothesis inherent to that theory, an exact method. For this purpose, it is developed a new element called "eccentric beam";
- plate elements, analysed by the finit element technique, working in bending and with loads in it's own plane, occasioning a membrane effect.

The "eccentric beam" element is introduced in the SAP-IV⁽¹⁾ program (we might, however, use other programs). Tests were then carried out to assess the proper interaction of plate elements⁽²⁾ and "eccentric beam".

It was demonstrated that the new model is advantageous when used in stiffened plating, avoinding the division in finite elements of the stiffeners.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS -----	ii
RESUMO -----	iii
ABSTRACT -----	iv
ÍNDICE DE FIGURAS -----	viii
SIMBOLOGIA -----	xiii

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Definições -----	1.1
1.2 A "estrutura tipicamente naval" -----	1.3
1.3 A chapa colaborante -----	1.6
1.4 Distribuição de cargas -----	1.11
1.5 Processo da placa ortotrópica -----	1.13

CAPÍTULO II

ANÁLISE MATRICIAL

2.1 Processo dos deslocamentos -----	11.1
2.2 Método de estruturas reticuladas -----	11.1
2.2.1 Conceituação de nó -----	11.2
2.2.2 Matriz rígidez de uma viga -----	11.2
2.2.3 Equações gerais do método -----	11.6
2.2.4 Aplicação à estrutura do navio -----	11.7
2.3 Método dos Elementos Finitos -----	11.9
2.3.1 Princípios do método -----	11.11
2.3.2 Equações gerais do método -----	11.13
2.3.3 Aplicação à estrutura do navio -----	11.15

CAPÍTULO III

O PROGRAMA SAP-IV

3.1	Introdução -----	III.1
3.2	Estruturas reticuladas -----	III.2
3.3	Elementos para estado plano de tensão -----	III.2
3.4	Elementos de placa -----	III.8
3.4.1	O comportamento de membrana-----	III.9
3.4.2	O comportamento de flexão -----	III.11
3.5	A interação dos elementos de diferente formulação -----	III.14

CAPÍTULO IV

MODELO MISTO : VIGAS EXCÊNTRICAS/PLACAS

4.1	Matriz de rigidez de uma viga excêntrica---	IV.1
4.2	Novo modelo proposto -----	IV.14
4.3	Particularidades do modelo viga + placa----	IV.14
4.4	Cálculo das tensões normais nas vigas-----	IV.21
4.4.1	1a.Forma: a partir das tensões nas placas -----	IV.23
4.4.2	2a.Forma: por equivalência estática-	IV.28
4.5	Cálculo das tensões de cisalhamento nas vigas -----	IV.40
4.5.1	1a.Forma: a partir das tensões nas placas -----	IV.40
4.5.2	2a.Forma: a partir da força cortante	IV.42

CAPÍTULO V

TESTES DO MODELO VIGA + PLACA

5.1	Viga engastada em uma extremidade e livre na outra -----	V.1
5.1.1	Teoria simples de viga -----	V.2

5.1.2	Modelo de elementos finitos -----	V.3
5.1.3	Modelo viga + placa -----	V.3
5.1.4	Resultados e conclusão -----	V.4
5.2	Viga bi-engastada -----	V.27
5.2.1	Teoria simples de viga -----	V.27
5.2.2	Modelo de elementos finitos-----	V.29
5.2.3	Modelo viga + placa -----	V.30
5.2.4	Resultados e conclusão -----	V.30
5.3	Grelha formada de duas vigas -----	V.31
5.3.1	Teoria simples de viga -----	V.31
5.3.2	Modelo de elementos finitos -----	V.52
5.3.3	Modelo viga + placa -----	V.52
5.3.4	Resultados e conclusão -----	V.54
5.4	Convês de pouso do porta-aviões Minas Gerais	V.55
5.4.1	Modelo viga + placa -----	V.67
5.4.2	Modelo de elementos finitos -----	V.70
5.4.3	Resultados e conclusões -----	V.72
5.5	Porão vazio, engastado nas anteparas-----	V.77
5.5.1	Modelo viga + placa -----	V.79
5.5.2	Modelo de elementos finitos -----	V.83
5.5.3	Resultados e conclusões -----	V.83

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS -----	VI.1
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----	R.1

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA Nº:	
1.1	Navio Cargueiro ----- 1.4
1.2	Navio Mineraleiro ----- 1.4
1.3	Navio PEtroleiro ----- 1.5
1.4	Chapeamento Reforçado ----- 1.5
1.5	Distribuição de σ_x na chapa em flexão, solidá - ria ao perfil ----- 1.7
1.6	Largura efetiva ----- 1.7
1.7	Largura efetiva-vários enrijecedores ----- 1.7
1.8	Transmissão por cisalhamento entre a placa e o o enrijecedor ----- 1.10
1.9	Pressão hidrostática ----- 1.10
1.10	Hipótese sobre a distribuição de cargas ----- 1.12
2.1	Numeração dos deslocamentos dos nós de uma viga- 11.4
2.2	Matriz de rigidez de uma viga ----- 11.5
2.3	Coefficiente S68 ----- 11.4
2.4	Esforços em relação aos eixos centrais ----- 11.8
2.5	Idealização por vigas da estrutura da fig. 1.1 - 11.10
2.6	Interação por cisalhamento no costado ----- 11.10
2.7	Divisão na malha de elementos finitos ----- 11.11
2.8	Elemento plano e elemento de placa ----- 11.14
2.9	Divisão do chapeamento reforçado em elementos fi nitos ----- 11.15
2.10	Incompatibilidade do deslocamento na fronteira - 11.16
3.1	Elemento isoparamétrico quadrilátero ----- 111.3
3.2	Elemento isoparamétrico e com formas incompatí - veis de deslocamento ----- 111.5
3.3	Deformação sob flexão pura ----- 111.6
3.4	Incompatibilidade de deslocamento "ponto a ponto" 111.8
3.5	Triângulo de deformação constante ----- 111.9
3.6	Elemento quadrilátero em estado plano de tensão- 111.11
3.7	Triângulos de placa compatíveis ----- 111.12

FIGURA Nº:

3.8	Divisão em sub-triângulos -----	III.12
3.9	Sub-triângulo com eixos locais -----	III.13
4.1	Eixos locais, no caso do eixo da viga não coincidir com o eixo de torção -----	IV.3
4.2	Translação dos eixos locais -----	IV.7
4.3	Matriz de transformação [TA] -----	IV.9
4.4	Matriz de transformação [TD] -----	IV.11
4.5	Matriz de rigidez de uma viga para eixos locais centrados em uma posição arbitrária da secção, mas paralelos aos eixos baricêntricos principais -----	IV.12
4.6	Excentricidades para alguns reforços -----	IV.13
4.7	Interação placa + viga -----	IV.16
4.8	Substituição feita pelo modelo viga + placa --	IV.17
4.9	Esforço normal de contorno -----	IV.22
4.10	Distribuição do esforço normal ao longo da viga -----	IV.23
4.11	Pontos 1 e 2 da secção da viga excêntrica ----	IV.24
4.12	Exemplo para perfil T -----	IV.25
4.13	Distribuição de tensões normais para perfil --	IV.26
4.14	Elementos adjacentes à viga excêntrica -----	IV.27
4.15	Secção transversal no meio do vão -----	IV.28
4.16	Viga com excentricidade única -----	IV.30
4.17	Viga excêntrica fletida -----	IV.31
4.18	Distribuição de tensões normais -----	IV.33
4.19	Decomposição das tensões normais -----	IV.34
4.20	Viga + placa sob esforço de pressão e esforço normal -----	IV.38
4.21	Fundo sob flexão e compressão -----	IV.38
4.22	Perfis L -----	IV.39
4.23	Tensão de cisalhamento nas vigas -----	IV.40
4.24	Variação de σ_x e τ ao longo da placa -----	IV.41
4.25	Tensões de cisalhamento na alma -----	IV.42
5.1	Viga V - Extremidade livre -----	V.10
5.2	Carregamento na viga V - Extremidade livre ---	V.10
5.3	Malha 1 de elementos finitos -----	V.11
5.4	Malha 2 de elementos finitos -----	V.12
5.5	Malha 3 de elementos finitos -----	V.12

FIGURA Nº:

5.6	Malha 4 de elementos finitos -----	V.13
5.7	Malha 5 de elementos finitos -----	V.13
5.8	Malha 1 do modelo viga + placa -----	V.14
5.9	Malhas do modelo de viga excêntrica -----	V.15
5.10	Malha 3 - Caso 1 -----	V.16
5.11	Viga livre - Caso 1 - σ_F -----	V.17
5.12	Viga livre - Caso 2 - σ_F -----	V.18
5.13	Viga livre - Caso 3 - σ_F -----	V.19
5.14	Malha 3 - Caso 4 -----	V.20
5.15	Viga livre - Caso 4 - σ_F e σ_c -----	V.21
5.16	Viga livre - Caso 4 - σ_F -----	V.22
5.17	Malha 3 - Caso 5 -----	V.23
5.18	Viga livre - Caso 5 - σ_F -----	V.24
5.19	Viga livre Caso 1 - σ -----	V.25
5.20	Viga livre - Caso 2 - σ -----	V.26
5.21	Carregamento para a viga V - Biengastada -----	V.32
5.22	Viga bi-engastada - Caso 1 - σ_c e σ_f -----	V.33
5.23	Viga bi-engastada - Caso 1 - σ_c -----	V.34
5.24	Viga bi-engastada - Caso 2 - σ_c -----	V.35
5.25	Viga bi-engastada - Caso 3 - σ_c -----	V.36
5.26	Viga bi-engastada - Caso 4 - σ_c -----	V.37
5.27	Viga bi-engastada - Caso 5 - σ_c -----	V.38
5.28	Malha 3 - Caso 7 -----	V.39
5.29	Viga bi-engastada - Caso 7 - σ_c e σ_f -----	V.40
5.30	Viga bi-engastada - Caso 6 - σ_c -----	V.41
5.31	Viga bi-engastada - Caso 7 - σ_c -----	V.42
5.32	Viga bi-engastada - Caso 8 - σ_c -----	V.43
5.33	Viga bi-engastada - Caso 9 - σ_c -----	V.44
5.34	Viga bi-engastada - Caso 1 - σ_c -----	V.45
5.35	Viga bi-engastada - Caso 2 - σ_c -----	V.46
5.36	Viga bi-engastada - Caso 4 - σ_c -----	V.47
5.37	Viga bi-engastada - Caso 6 - σ_c -----	V.48
5.38	Viga bi-engastada - Caso 8 - σ_c -----	V.49
5.39	Grelha e suas dimensões -----	V.50

FIGURA Nº:

5.40	Carregamentos sobre a grelha -----	V.50
5.41	Modelo de elementos finitos para a grelha ----	V.53
5.42	Vigas VE e VE' -----	V.54
5.43	Modelo viga + placa para a grelha -----	V.54
5.44	Grelha - Caso 1 - σ_C e σ_F -----	V.56
5.45	Grelha - Caso 2 - σ_C e σ_F -----	V.57
5.46	Grelha - Caso 1 - σ_F -----	V.58
5.47	Grelha - Caso 2 - σ_F -----	V.59
5.48	Grelha - Caso 1 - τ -----	V.60
5.49	Grelha - Caso 2 - τ -----	V.61
5.50	Forma de aplicação de carga do pneu -----	V.63
5.51	Arranjo do convés -----	V.64
5.52	Secções dos longitudinais e transversais -----	V.65
5.53	Condições de contorno e "Regiões de Corte"-----	V.66
5.54	Região 2, considerando-se dupla simetria -----	V.68
5.55	Secção reta dos longitudinais -----	V.69
5.56	Secção reta dos transversais -----	V.70
5.57	Discretização de longitudinais e transversais-	V.71
5.58	Tensões de flexão no chapeamento -----	V.73
5.59	Tensões de cisalhamento na alma do longitudi- nal 1 -----	V.74
5.60	Tensões normais σ_C e σ_F no longitudinal ---	V.75
5.61	Deformação da secção reta do transversal -----	V.76
5.62	Arranjo do porão -----	V.78
5.63	Secções dos vaus, cavernas, quilha, hastilhas e sicorda -----	V.78
5.64	Pressão hidrostática na secção -----	V.79
5.65	Compartimento com dupla simetria -----	V.80
5.66	Modelo viga + placa, para o compartimento ----	V.81
5.67	Propriedades geométricas dos perfil -----	V.82
5.68	Discretização dos perfis -----	V.83
5.69	Tensão normal σ_F no anel -----	V.85
5.70	Tensão máxima de cisalhamento no anel -----	V.86
5.71	Tensão normal σ_F e tensão máxima de cizalha- mento τ na quilha -----	V.87

FIGURA Nº:

- 5.72 Tensão normal σ e tensão máxima de cisalhamento τ na sicofda ----- V.88
- 5.73 Idealização com elementos infinitamente rígidos à flexão ----- V.84
- 6.1 Idealização das borboletas por elementos rígidos ----- VI.3
- 6.2 Elementos de transição ----- VI.4

SIMBOLOGIA

A	área da secção transversal de uma viga
A_x	área da secção transversal de uma viga
$\{A\}$	vetor dos esforços agentes no modelo estrutural
$\{D\}$	vetor dos deslocamentos dos nós do modelo estrutural
E	módulo de elasticidade do material
G	Módulo transversal de elasticidade
I_x ou J_x	momento de inércia à torção da viga, em relação ao seu eixo de torção
I_y ou J_y	Momento de inércia à flexão, em relação ao eixo <u>bari</u> cêntrico principal y
I_2 ou J_2	momento de inércia à flexão, em relação ao eixo <u>bari</u> cêntrico principal z
J_{xy}	produto de inércia de uma secção no plano xy
$[K]$	matriz de rigidez da estrutura
L	comprimento da viga
L_e	largura efetiva
$\{R\}$	vetor dos esforços agentes na estrutura
$[S]$	matriz de rigidez do modelo estrutural
$[SM]$	matriz de rigidez de uma viga
σ_x	tensões normais na direção x
σ_y	tensões normais na direção y
σ_z	tensões normais na direção z
ϵ_x	deformação linear na direção x
ϵ_y	deformação linear na direção y
ϵ_z	deformação linear na direção z
γ_{xy}	deformação angular no plano xy

SIMBOLOGIA

- ν coeficiente de Poisson
- $\{\delta\}$ vetor dos deslocamentos da estrutura

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Definições

Alguns conceitos usados neste trabalho têm o significado que se segue:

- *barra, viga, perfil, reforço, enrijecedor*: são usados indistintamente.
- *chapa, placa*: usam-se os dois termos indistintamente para caracterizar tanto o comportamento em flexão, como sob cargas no próprio plano.
- *chapeamento reforçado*: estrutura formada de chapas e vigas solidárias estruturalmente, onde tanto o chapeamento como as barras colaboram para a resistência (fig. 1.4).
- *deslocamento*: usado inespecificamente, refere-se a deslocamentos lineares e angulares.
- *eixo baricêntrico*: é o eixo, contido no plano de uma secção transversal de uma barra, que passa pelo centro de gravidade da secção reta da barra.
- *eixos baricêntricos principais*: são os eixos baricên

tricos, ortogonais, x e y em relação aos quais o produto de inércia da secção transversal é nulo ($J_{xy}=0$).

- *eixos centrais*: idem a eixos baricêntricos principais.
- *eixo da barra*: é o eixo axial que contém os centros de gravidade de todas as secções transversais da viga.
- *eixo de torção da barra*: é o eixo axial que contém os centros de torção de todas as secções transversais da viga.
- *esforço*: é uma força ou um momento.
- *função de deslocamento*: é a função que define o modo de deformação de um tipo de elemento finito.
- *grelha chapeada*: idem a chapeamento reforçado.
- *linha neutra*: é a linha, contida no plano de uma secção transversal de uma barra, na qual as tensões normais são nulas.
- *linha neutra da flexão pura*: idem à linha neutra, quando a única sollicitação na barra é a flexão. Para este caso temos:

$$\int_A \sigma dA = 0,$$

onde:

- σ - tensão normal agente na secção transversal
- A - área da secção transversal

- *malha*: é a divisão do contínuo em elementos finitos.
- *método da superposição*: tal método ao ser aplicado as estruturas exige que:
 - a) as deflexões sejam pequenas;

- b) não se exceda o regime elástico;
 - c) o efeito das forças axiais na flexão seja desprezível.
- *superfície neutra*: é a superfície que contém as linhas neutras de cada secção transversal.
 - *superfície neutra à flexão pura*: idem à superfície neutra, quando a única solicitação, na barra, é a flexão.
 - *unidade de chapeamento*: definição aplicável a chapeamentos reforçados e que compreende a porção de chapeamento limitado por dois enrijecedores transversais e dois longitudinais.
 - *viga bloqueada*: usa-se esta terminologia para classificar uma viga que possui suas duas extremidades idealmente engastadas a qualquer deslocamento.

1.2 A "estrutura tipicamente naval"

A estrutura de um navio possui muitos aspectos próprios e como tal deve ser encarada. Uma das características principais que a distingue de outras estruturas é ser ela constituída essencialmente de grandes áreas de chapeamento, reforçado com a soldagem de vigas, que em geral se cruzam ortogonalmente. Alguns arranjos clássicos podem ser observados nas figs. 1.1, 1.2, 1.3. Tais figuras atestam, que a reunião de várias unidades, do tipo observado na fig. 1.4, é o que na realidade constitui o que chamaremos de uma "estrutura tipicamente naval".

Na maioria das estruturas constituídas por barras e associadas a um chapeamento, este apenas transmite a carga, não colaborando para a resistência. Como exemplo, temos os galpões e hangares, onde as vigas é que devem resistir, enquanto que as chapas apenas passam-lhes o carregamento (vento, etc...) e fazem a proteção ambiental. O chapeamento

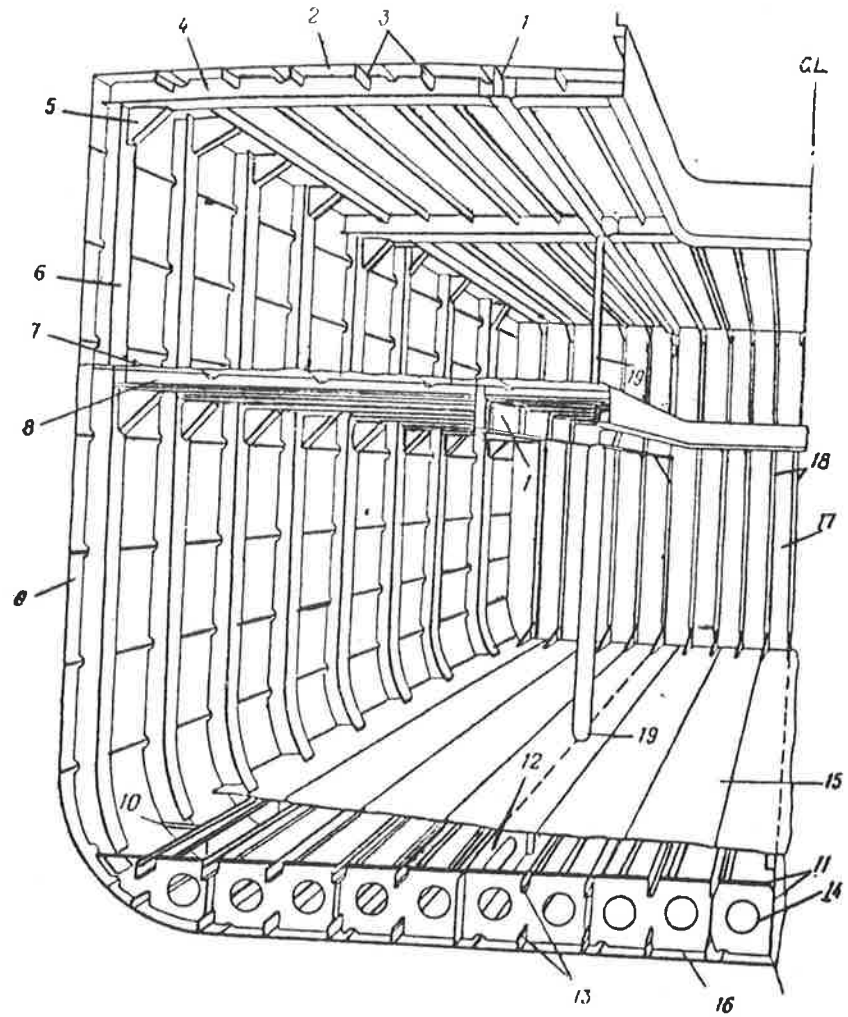


FIG. 1.1 - NAVIO CARGUEIRO

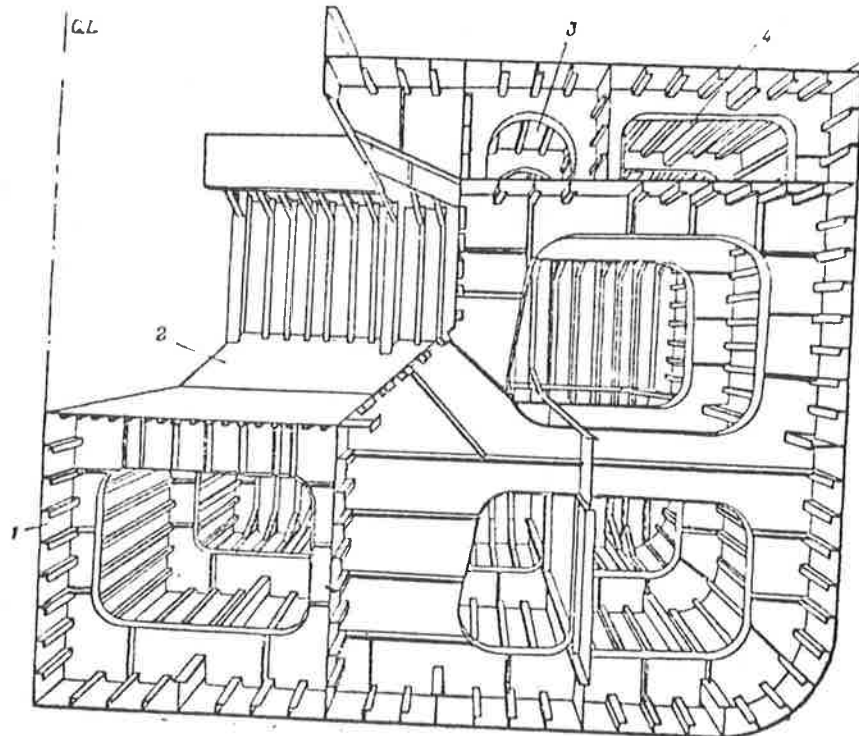


FIG. 1.2 - NAVIO MINERALEIRO

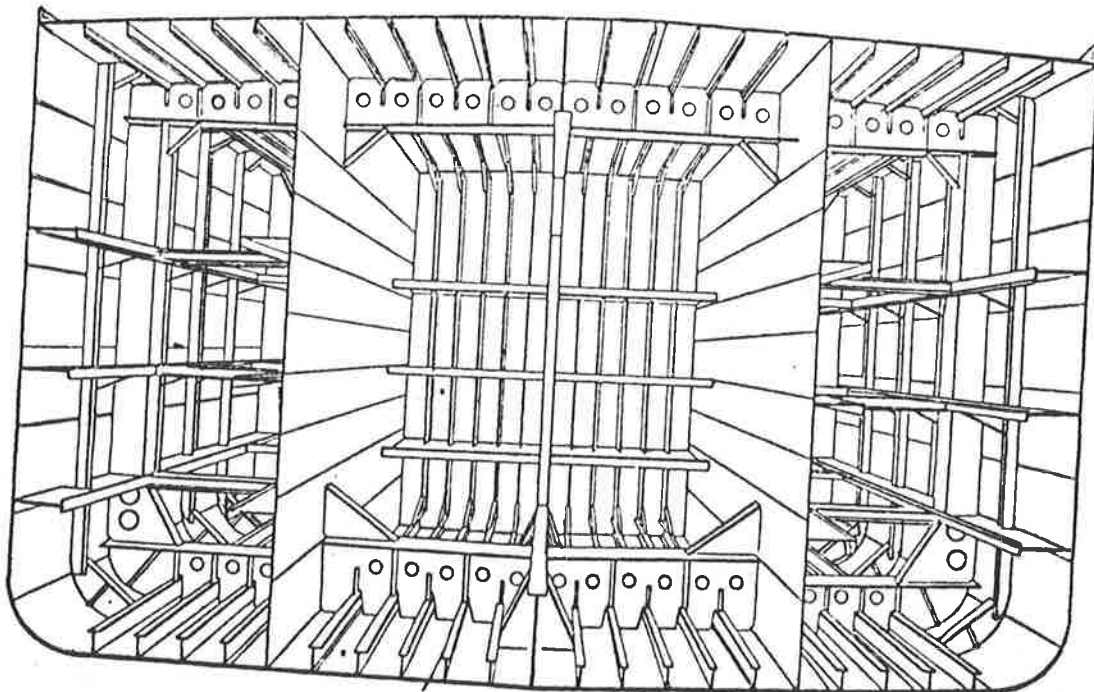


FIG. 1.3 - NAVIO PETROLEIRO

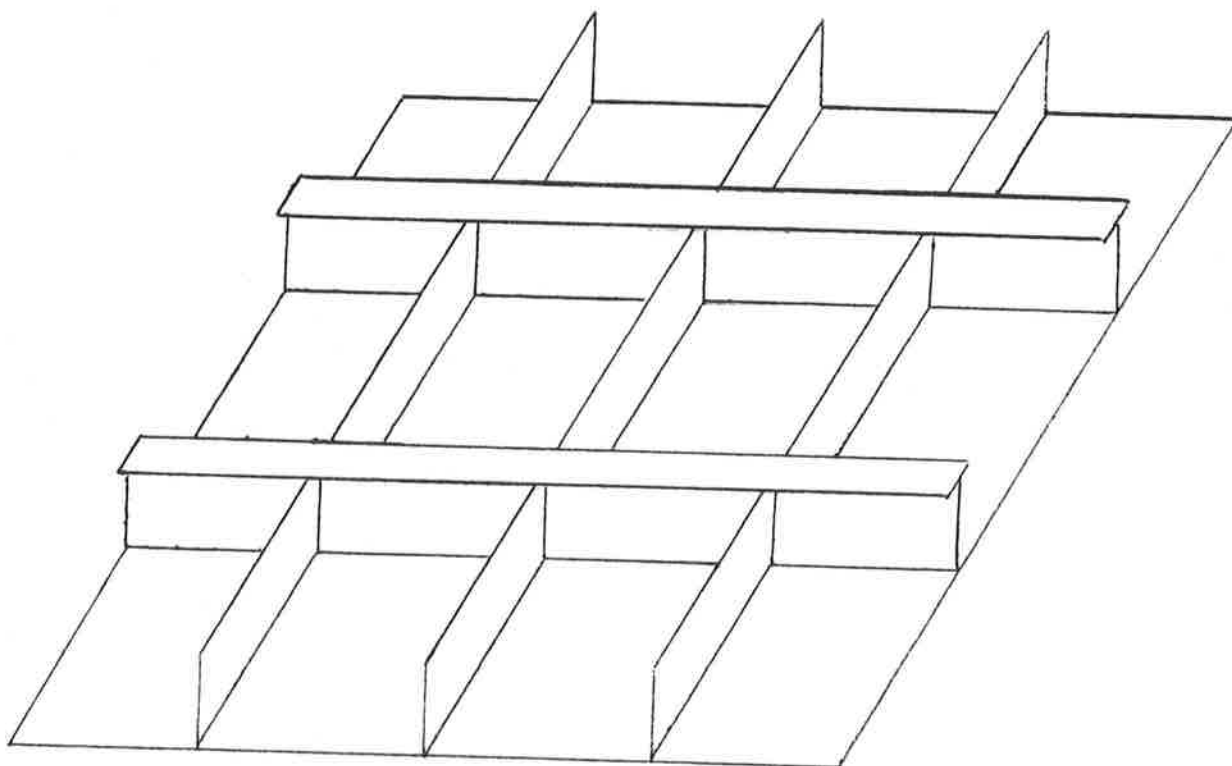


FIG. 1.4 - CHAPEAMENTO REFORÇADO

reforçado, ou grelha chapeada é, portanto, o problema central na análise de estruturas navais, onde o chapeamento tem também a finalidade de resistir aos esforços solici--tantes, colaborando estruturalmente com as vigas que o re--forçam.

Vários métodos racionais de análise, tanto numéri--cos como analíticos, servindo à "estrutura tipicamente na--val", tem sido desenvolvidos. Neste trabalho procura-se criar um novo modelo que utilize os recentes avanços na análise matricial, após o advento dos computadores dota--dos de grande capacidade de memória e velocidade, voltado essencialmente para a "estrutura tipicamente naval". Inicialmente, é feito um exame geral de alguns métodos atual--mente utilizados, dando-se ênfase, principalmente, aos as--pectos de cada um que levaram à necessidade da formulação de um modelo mais específico e completo.

1.3 A chapa colaborante (3)

Estando o reforço solidário à placa, logicamente a rigidez à flexão da viga sofre um aumento considerável. Na "estrutura tipicamente naval" pode-se pois dizer que o cha--peamento forma as flanges das diversas vigas. Entretanto, a distribuição de tensões normais na placa, ao longo da largura, não é uniforme, como se mostra na fig. 1.5 para as tensões σ_x ao longo da secção A-A, para o caso de fle--xão do conjunto viga e placa. Portanto, a teoria simples de vigas não pode ser prontamente aplicada à estrutura da fig. 1.5, pois chegar-se-ia a um nível de tensões muito a--fastado da realidade. De modo a permitir ao projetista o emprego da teoria elementar de vigas nesses casos desen--volveu-se o conceito de largura efetiva da chapa colaboran--te. Tal procedimento consiste em associar a cada enrijece--dor uma largura efetiva de chapa que, em conjunto com o perfil, formará a secção transversal de uma barra, de tal

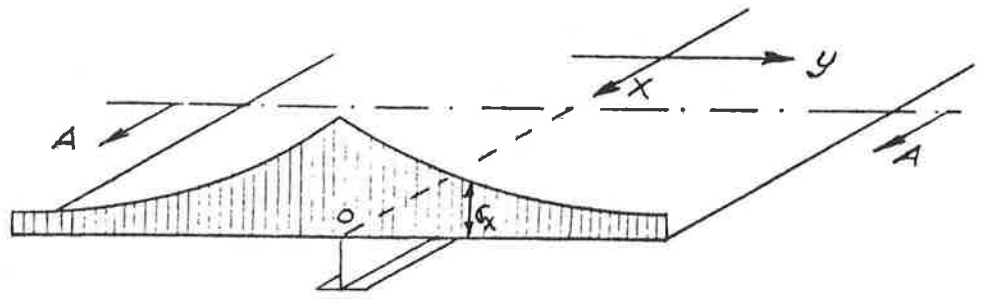


FIG 1.5- Distribuição de σ_x na chapa em flexão, solidária ao perfil

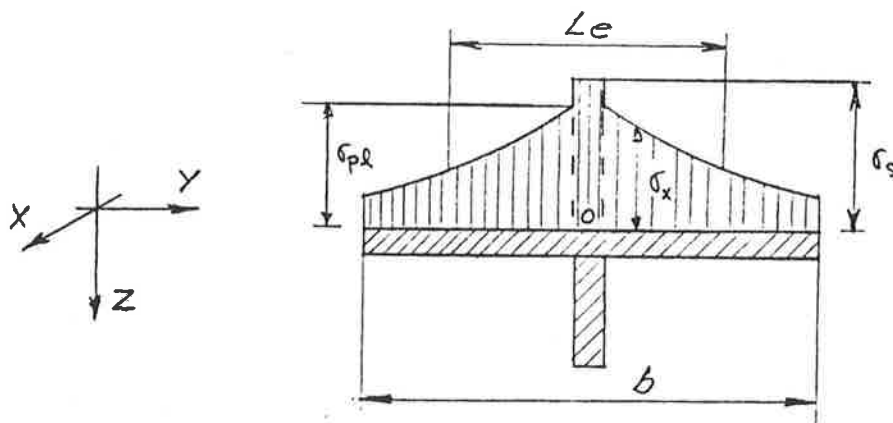


FIG. 1.6 - Largura efetiva

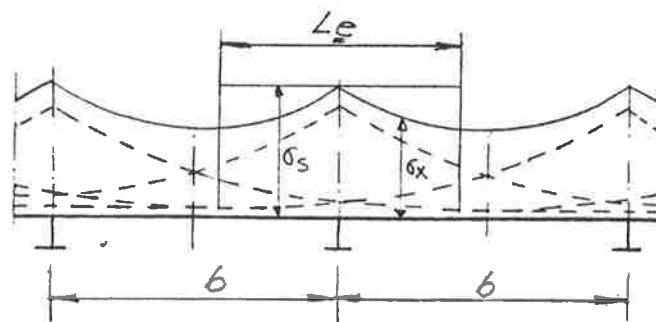


FIG. 1.7 - Largura efetiva - vários enrijecedores

modo que, a resolução da estrutura assim formada, usando a teoria simples de viga, forneça tensões normais, uniformemente distribuídas ao longo da largura efetiva, iguais às tensões normais máximas que realmente atuam na alma do perfil no ponto de intersecção com a placa (ponto 0 na fig. 1.5).

Considerando-se, na fig. 1.6, a placa em estado plano de tensão e sendo:

σ_{pl}	- tensão normal	σ_x na placa] no ponto de intersecção da placa com o reforço.
σ_s	- tensão normal	σ_x no perfil	
σ_{ply}	- tensão normal	σ_y na placa	
σ_{sz}	- tensão normal	σ_z no perfil	
b	- largura da chapa		

e ainda sabendo que, na intersecção com o reforço, a placa tem a mesma deformação linear que a alma, vem:

$$\epsilon_x = \sigma_s / E \quad (\text{na alma, com a hipótese que } \sigma_{sz} = 0)$$

$$\epsilon_x = (\sigma_{pl} - \nu \cdot \sigma_{ply}) / E \quad (\text{na placa})$$

ou seja:

$$\sigma_s = \sigma_{pl} - \nu \cdot \sigma_{ply} \quad (1.1)$$

Aplicando-se a definição da largura efetiva temos:

$$L_e = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \, dy}{\sigma_s} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \, dy}{\sigma_{pl} - \nu \cdot \sigma_{ply}} \quad (1.2)$$

Para o caso de vários enrijecedores, a tensão σ_s re-

sultante poderia ser determinada por adição de cada distribuição de tensões σ_x nos pontos, $o, b, 2b, \dots$ como observado na fig. 1.7. O Prof. Schade desenvolveu a solução da eq. (1.2) para alguns tipos de carregamentos utilizados em navios. Algumas hipóteses importantes, quando da utilização dos gráficos e tabelas de Schade, podem ser enunciadas:

- a) o chapeamento deve ter reforços ortogonais e comportar-se elásticamente;
- b) os reforços paralelos devem ser iguais e igualmente espaçados. Tal limitação é uma das mais severas para estruturas pouco convencionais, onde os enrijecedores tem diferentes tamanhos, como, por exemplo, a estrutura do fundo de navios petroleiros com quilhas verticais diferentes entre si, ou conveses com longitudinais e sicordas diversas;
- c) o carregamento é considerado aplicado diretamente aos enrijecedores, e portanto, o chapeamento é considerado como carregado somente por cisalhamento transmitido pelo reforço (fig. 1.8). Como consequência, a deformação na placa imposta pela sua própria flexão (como no caso de carregamento hidrostático) é desprezada, e seu efeito na largura efetiva ignorado;
- d) o carregamento é perpendicular ao chapeamento e deve ser igual para os reforços paralelos. Esta torna-se uma limitação para os longitudinais do costado do navio, onde o carregamento triangular de pressão d'água é diferente para cada longitudinal (fig. 1.9);
- e) a teoria de Schade não satisfaz rigorosamente as condições de extremidade, nem considera fugas da forma plana para a chapa, resultantes da fabricação.

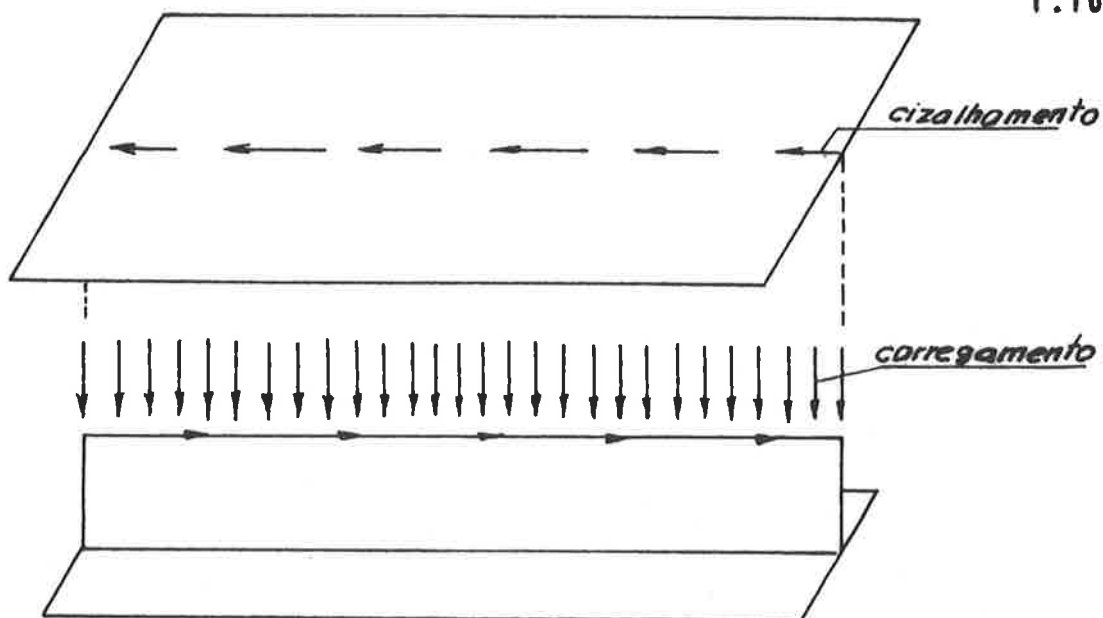


FIG. 1.8 - Transmissão por cisalhamento entre a placa e o arafecedor

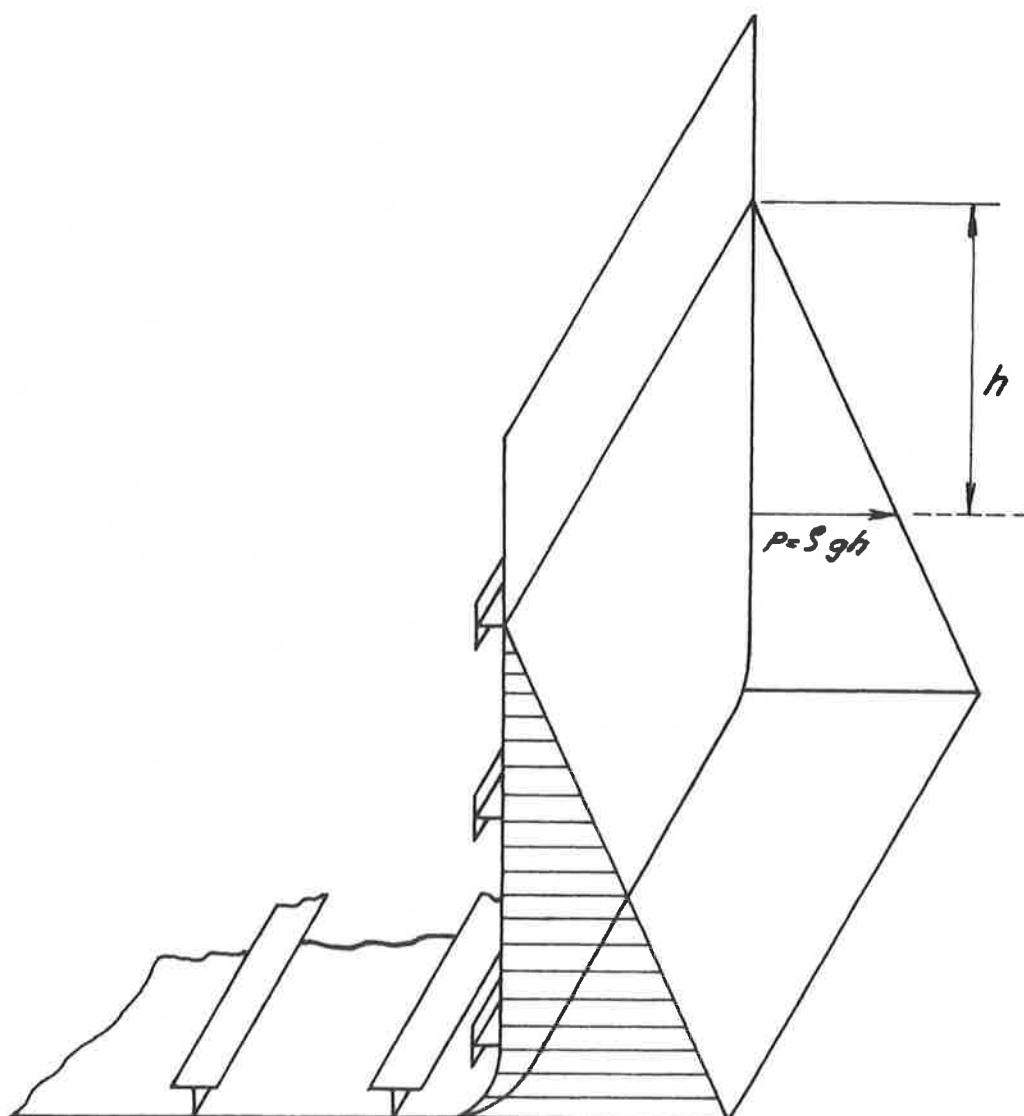


FIG. 1.9 - Pressão hidrostática

A largura efetiva, na realidade, varia ao longo da viga, pois depende do valor do momento fletor na secção. Se tal fato for considerado rigorosamente, torna-se impraticável o uso do conceito de largura efetiva. O usual é tomar-se uma largura constante, ao longo de cada barra, e igual àquela correspondente ao ponto de máximo de momento fletor. Isto constitui nova fonte de erro, pois têm-se aqui um caso típico de uma "viga de secção variável", aproximada para uma barra de secção constante.

A largura efetiva da chapa colaborante, para ser calculada de maneira prática, requer também que se conheça a distância, sobre a viga considerada, entre os pontos de momento fletor nulo. Portanto, como a priori não se conhece tal distância seriam necessários reiterações que, para estruturas complexas e com grande número de vigas, tornam-se proibitivamente dispendiosas, anulando uma das grandes vantagens em idealizar o chapeamento reforçado como estrutura formada unicamente de vigas, que é a rapidez e economia da análise.

1.4 Distribuição de cargas (4)

Na idealização do chapeamento reforçado por vigas, com as respectivas larguras efetivas, o carregamento, que age na estrutura distribuído sob forma de pressão no chapeamento, deve ser associado a cada viga. Procura-se, dessa maneira, fazer corresponder a cada enrijecedor a parte do carregamento de pressão que age "diretamente" sobre o mesmo. Tal procedimento é conhecido como "hipótese sôbre a distribuição das cargas". Como exemplo de algumas distribuição empíricas, temos (fig. 1.10):

a) Cada reforço recebe toda a carga aplicada sobre a largura s e a transmite aos reforços mais rígidos que lhe servem de apoio. A situação está esquematizada na região AEBDFC da fig. 1.10, onde se representa um trecho do con--

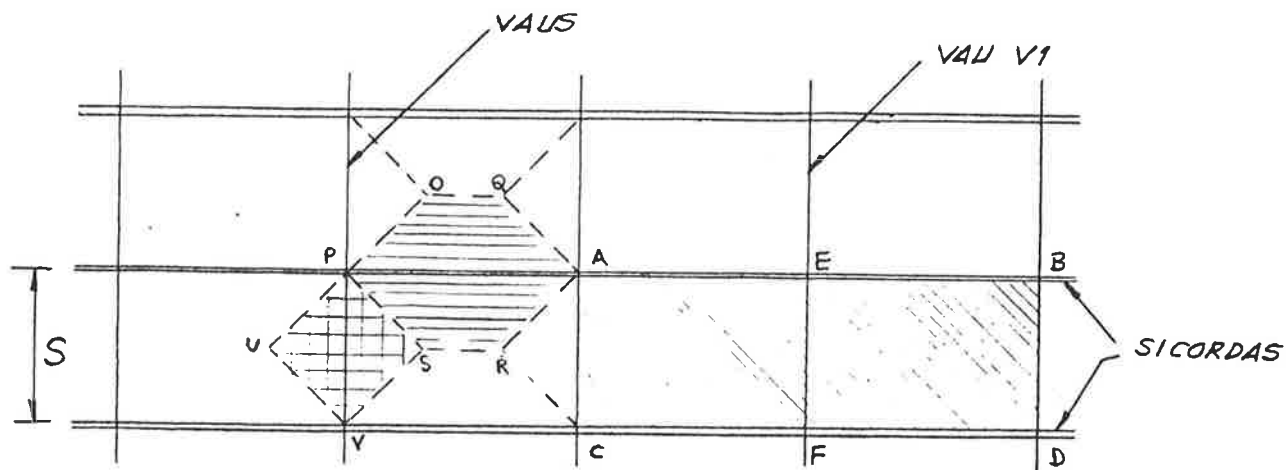


Fig.1.10 Hipótese sobre a distribuição das cargas.

vês. Aí o vau V_1 estaria recebendo a carga hidrostática hachuriada e transmitindo-a às sicordas mais pesadas, nos pontos E e F;

b) os esforços recebem a carga distribuída na região em cujo centro ficam, que é limitada por linhas, em ângulos de 45° . Como mostrado, o trecho PA da sicorda receberia a carga agente sobre a área POQARS, enquanto o trecho PV do vau receberia a carga PUVR.

Tais hipóteses tem grande influência nos resultados para grelhas com vigas leves em uma direção, e pesadas na outra. Os esforços solicitantes nas vigas leves são bem influenciados pela relação entre a parcela da carga que é aplicada diretamente nos seus vãos e a parcela que é considerada nos reforços mais pesados e que, portanto, é transmitida aos mais leves nas intersecções. Neste caso existe sempre uma grande incerteza sobre qual a porcentagem do carregamento que deve ser aplicado diretamente a cada reforço para que encontremos resultados próximos à realidade.

1.5 Processo da placa ortotrópica (5)(6).

Uma solução para os problemas de grelhas foi desenvolvido por Schade, baseada na teoria da placa ortotrópica. Tal método baseia-se em associar à grelha uma placa que tenha em comum as mesmas propriedades à flexão, nas direções ortogonais dos reforços. O processo tem a vantagem de ser rápido, fornecendo uma primeira aproximação do nível de tensões sobre a estrutura. Algumas limitações e hipóteses sobre o uso do processo nos interessam:

- a) deve-se idealizar o chapeamento reforçado para uma grelha, e portanto, todas as limitações da escolha da largura efetiva estão presentes neste processo;
- b) a associação da grelha a uma placa ortotrópica só é viável matematicamente para grelhas "bem comportadas" e convencionais. Schade realizou estudos de alguns casos⁽⁶⁾ sempre utilizando pressão uniforme sobre elas. Se o espaçamento dos reforços for muito grande ou a rigidez das barras for muito diferente numa e noutra direção, os resultados não são suficientemente precisos para aplicação em projeto;
- c) o processo não leva em conta deformações por força cortante. No caso de estruturas do fundo de navios, a deformação da alma de longarinas e hastilhas por força cortante pode ser importante;
- d) o método aplica-se a grelhas, não podendo ser usado portanto no navio como um todo, isto é, grelha do convés + grelha do costado + grelha do fundo. Tal fato tem todas as implicações da escolha de adequadas condições de contorno para cada uma isoladamente.

CAPÍTULO II

ANÁLISE MATRICIAL

2.1 Processo dos deslocamentos

Dentre os métodos matemáticos utilizados no estudo de estruturas, a análise matricial tem tido o mais alto nível de desenvolvimento, graças ao advento e aperfeiçoamento dos computadores de grande capacidade de memória e rapidez de cálculo. O processo dos deslocamentos, dentre os métodos de análise matricial, é o que mais se adapta à programação por computador⁽⁷⁾. Tal processo, na análise estática de estruturas, baseia-se fundamentalmente na resolução de uma equação matricial do tipo⁽⁸⁾:

$$\{R\} = [K] \cdot \{\delta\} \quad (2.1)$$

Portanto, sendo $\{\delta\}$ a incógnita do problema, a solução resume-se em resolver um sistema de equações constituído por (2.1). Estando trabalhando em regime linear e utilizando o método da superposição, (2.1) constitui um sistema de equações lineares. Uma vez determinado o vetor $\{\delta\}$ a aplicação de outras equações matriciais fornece o campo de tensões e deformações da estrutura.⁽⁹⁾

2.2 Método das estruturas reticuladas⁽⁷⁾

O processo dos deslocamentos aplicado a estruturas

constituídas de vigas (ou modeladas como tal) constitui um dos mais fortes instrumentos de que dispõe o analista na resolução de seu modelo estrutural.

2.2.1 Conceituação de nó

Para efeito de análise de sistemas reticulados convém adotar a seguinte definição para nó :

- Nó é qualquer ponto, escolhido de modo conveniente na estrutura, podendo ser a intersecção dos eixos de duas vigas, o ponto de eixo de uma barra em que se aplica um esforço ou a extremidade do eixo de uma viga.

Na equação (2.1), $\{\delta\}$ representa os deslocamentos dos nós, referenciados a algum sistema fixo de coordenadas.

2.2.2 Matriz de rigidez de uma viga

Consideremos uma estrutura reticulada qualquer (ou uma estrutura idealizada por um modelo estrutural formado de vigas) onde estão aplicados, nos nós, os esforços concentrados A_1, A_2, \dots, A_n . A cada nó da estrutura corresponde, devido a tal carregamento, os deslocamentos nodais D_1, D_2, \dots, D_n . Formemos os vetores carga e deslocamento assim definidos:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Relacionemos os dois vetores através da equação:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= S_{11} D_1 + S_{12} D_2 + \dots + S_{1n} D_n \\
 A_2 &= S_{21} D_1 + S_{22} D_2 + \dots + S_{2n} D_n \\
 &\vdots \\
 A_n &= S_{n1} D_1 + S_{n2} D_2 + \dots + S_{nn} D_n
 \end{aligned}$$

ou de forma matricial:

$$\{A\} = [S] \cdot \{D\} \quad (2.2)$$

que corresponde à equação (2.1).

No sistema acima, S_{ij} é o esforço A_i que aparece na estrutura quando a ela se impõe um deslocamento $D_j = 1$, mantendo, ao mesmo tempo, todos os demais deslocamentos do vetor $\{D\}$ iguais a zero⁽¹⁰⁾.

No caso mais geral de um reticulado é importante determinar, em cada barra, as forças cortantes e momentos fletores em dois eixos perpendiculares, bem como o momento de torção e a força axial. Interessam os seis graus de liberdade em cada nó, tendo portanto a matriz de rigidez da viga, o tamanho de 12×12 . Identifiquemos os 12 graus de liberdade em cada barra, segundo o esquema da fig. 2.1.

Da definição de cada coeficiente S_{mn} , podem ser facilmente deduzidos todos eles, pela teoria da resistência dos materiais, obtendo-se a matriz de rigidez da viga, $[SM]$. No caso de não se considerarem as deformações por cisalhamento, e tomando X como eixo da barra (coincidente com o eixo de torção), Y e Z como os eixos baricêntricos principais (fig. 2.1) a matriz $[SM]$ toma a forma apresentada na fig. 2.2.

Na matriz, por exemplo, o elemento da 6a. linha e 8a. coluna, corresponde ao coeficiente S_{68} , isto é, o esforço

na direção 6 que aparece quando se impõe um deslocamento unitário na direção 8, mantendo todos os outros deslocamentos nulos. Tal coeficiente pode ser encontrado conforme o esquema da fig. 2.3.

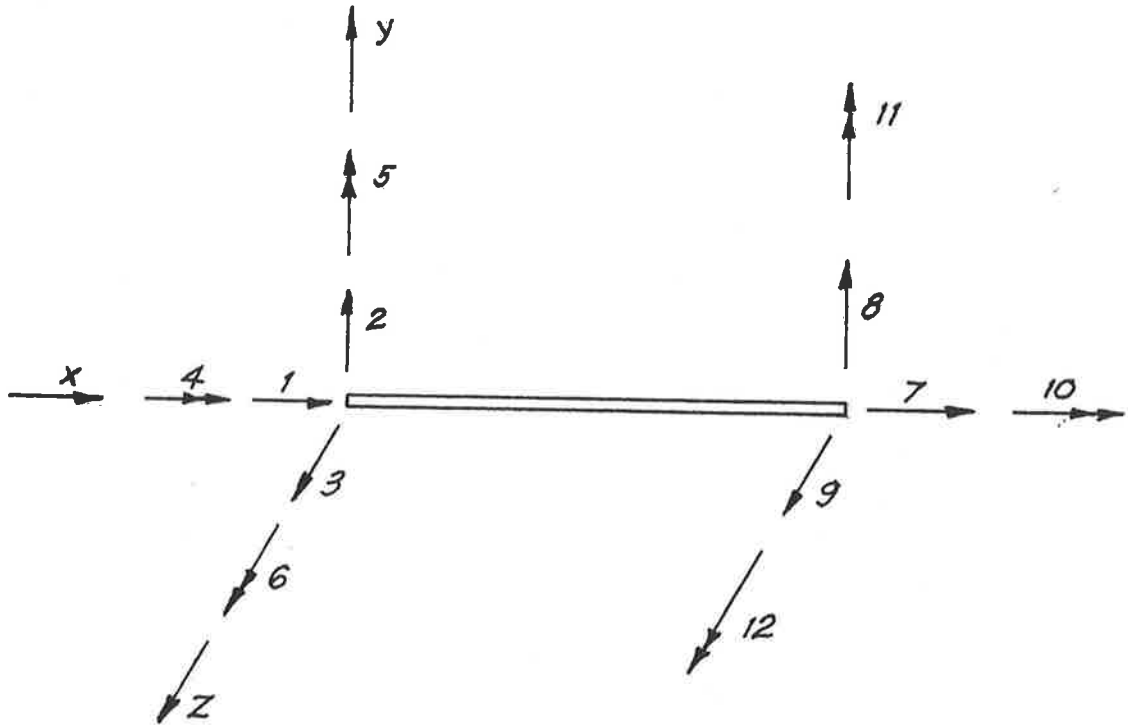


Fig. 2.1 Numeração dos deslocamentos dos nós de uma viga

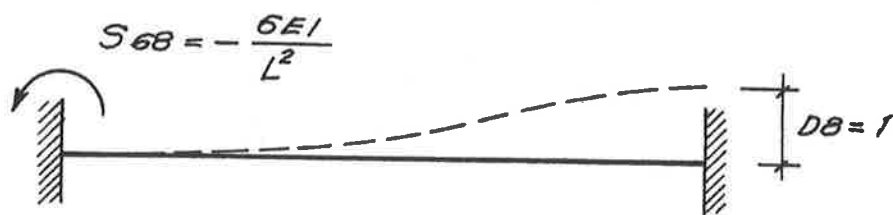


Fig. 2.3 - Coeficiente S_{68}

(SM) =

1	$\frac{EA_x}{L}$											
2	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$										
3	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$									
4	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$								
5	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$							
6	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$						
7	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA_x}{L}$					
8	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$				
9	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$			
10	0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$		
11	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	
12	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

SIMÉTRICA

FIG. 2.2 - Matriz de rigidez de uma viga

Para estruturas formadas de várias barras, o coeficiente S_{ij} , da matriz de rigidez $[S]$ total, será a soma dos S_{ij} individuais de cada viga, para determinados i e j . Quando se levar em conta a deformação por cisalhamento a matriz $[S]$ é mostrada em (7).

2.2.3 Equações gerais do método

De modo geral as equações utilizadas na resolução de estruturas reticuladas são (4):

$$\{AL_o\} + \{ALe\} = [SLL] \cdot \{DL\} \quad (2.3)$$

$$\{AR\} = \{AR_o\} + [SRL] \cdot \{DL\} \quad (2.4)$$

$$\{AM\} = \{AM_o\} + [SM] \cdot \{DM\} \quad (2.5)$$

onde:

$\{AL_o\}$ - cargas diretamente aplicadas nos nós

$\{ALe\}$ - cargas nodais equivalentes ao carregamento não nodal. O método matricial só admite cargas aplicadas nos nós. Portanto, no caso de cargas não nodais ou carregamento distribuído utilizam-se cargas equivalentes, isto é, cargas que aplicadas aos nós produzem os mesmos deslocamentos nodais das cargas reais, não nodais.

$[SLL]$ - sub-matriz da matriz de rigidez, onde estão contidos os coeficientes que correspondem aos deslocamentos livres da estrutura.

$\{DL\}$ - deslocamentos dos nós da estrutura.

$\{AR\}$ - matriz das reações dos vínculos da estrutura.

$\{AR_o\}$ - matriz das reações dos vínculos devidas às cargas não nodais para cada viga

$\{SRL\}$ - sub-matriz da matriz de rigidez total, onde estão contidos os coeficientes que relacionam os deslocamentos vinculados e livres da estrutura.

A equação (2.5) é utilizada para cada viga da estrutura onde:

$\{AM\}$ - matriz dos esforços resultantes nos nós da viga

$\{AM_o\}$ - esforços reativos na viga bloqueada, devido ao carregamento não nodal.

$\{SM\}$ - matriz de rigidez da viga.

$\{DM\}$ - deslocamentos dos dois nós da viga

2.2.4 Aplicação à estrutura do navio

Do exposto, podemos dizer que os conceitos, envolvidos no processo dos deslocamentos para estruturas reticuladas, são aqueles inerentes à teoria das vigas. Convém notar, entretanto, alguns pontos de importância para o presente trabalho:

- a) na matriz de rigidez, os momentos de inércia das vigas são calculados em relação aos eixos centrais, considerando-se os componentes dos esforços nodais segundo tais eixos. Por exemplo, na fig.2.4 temos:
 - a força normal F deve estar aplicada no centro de gravidade da secção transversal da viga;
 - o momento fletor M que se considera é aquele que age em torno ao eixo central (EC);
- b) a viga é associada geometricamente a uma linha que representa o seu eixo;

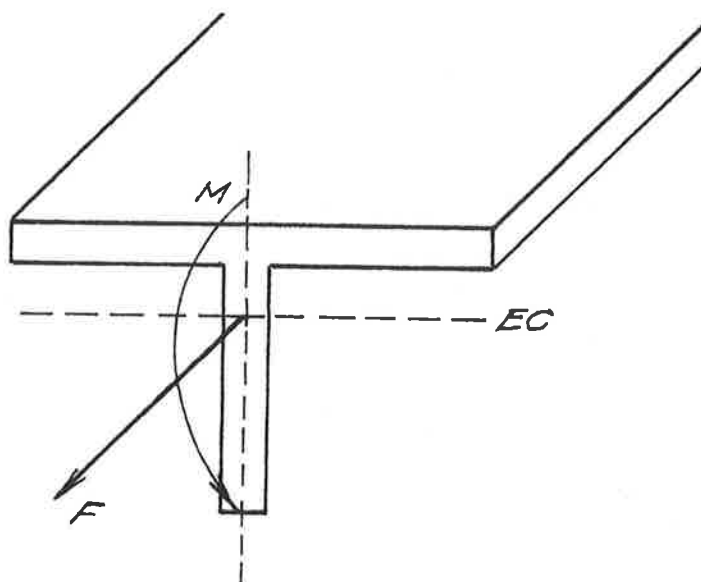


Fig. 2.4 - Esforços em relação aos eixos centrais.

- c) apesar da formulação matricial aceitar somente esforços aplicados nos nós, podem existir cargas não nodais concentradas ou distribuídas, e os esforços solicitantes sobre as vigas serão calculados levando em conta que realmente existem tais cargas não nodais.

A aplicação do método das estruturas reticuladas à "estrutura tipicamente naval" exige que primeiramente seja ela idealizada para um modelo formado unicamente de vigas. Tal idealização consiste na utilização dos conceitos de largura efetiva (ítem 1.3) e na "hipótese sobre a distribuição de cargas" (ítem 1.4) e, portanto, todas as limitações enunciadas nos ítems 1.3 e 1.4 mantem-se. Como foi visto a idealização torna-se pouco confiável nos seus resultados desde que haja uma diversificação de enrijecedores, espaçamentos e carregamentos fazendo com que as hipóteses na forma--

ção do modelo façam-no pouco aplicável ao caso em questão.

A estrutura da Fig. 1.1 seria idealizada conforme o modelo da fig. 2.5. Pode-se notar que na passagem do problema real (fig. 1.1) para o modelo físico (fig. 2.5) uma série de efeitos são desprezados ou muito mal reproduzidos. O fato de "cortar-se" o chapeamento causa imperfeições no modelo que, em alguns casos, podem ser importantes. Como exemplo, o "corte" feito no costado (fig. 2.6) faz com que a interação por cisalhamento na linha de corte seja desprezada (corte A-A, na fig. 2.6). Caso o movimento relativo entre duas cavernas adjacentes seja importante para a análise, isto se torna um sério problema. O próprio comportamento em flexão das unidades de chapeamento deve ser calculado utilizando outros métodos.

A idealização por estruturas reticuladas vem sendo usadas satisfatoriamente em alguns casos⁽¹¹⁾⁽¹²⁾. Seu maior mérito é ser um modelo relativamente barato e rápido, devendo sempre ser utilizado quando seus resultados forem confiáveis; entretanto as suas limitações e uma maior responsabilidade em algumas estruturas têm levado ao uso de modelos mais caros que utilizam o método dos elementos finitos.

2.3 Método dos elementos finitos

O método os elementos finitos fornece uma conveniente e poderosa técnica para a análise de problemas envolvendo estruturas contínuas. Desde seu desenvolvimento original durante a década de 50, o método tem sido aplicado a uma grande gama de problemas estruturais com bons resultados. Uma das grandes virtudes do método é a sua versatilidade: a mesma técnica geral é empregada na análise de tensões e deformações em qualquer tipo de estrutura contínua, para quaisquer tipos de carregamentos e condições de contorno. Tais estruturas podem possuir elementos de duas dimensões em estado plano de tensão ou deformação, placas em flexão, cascas, sólidos tri-dimensionais, etc..

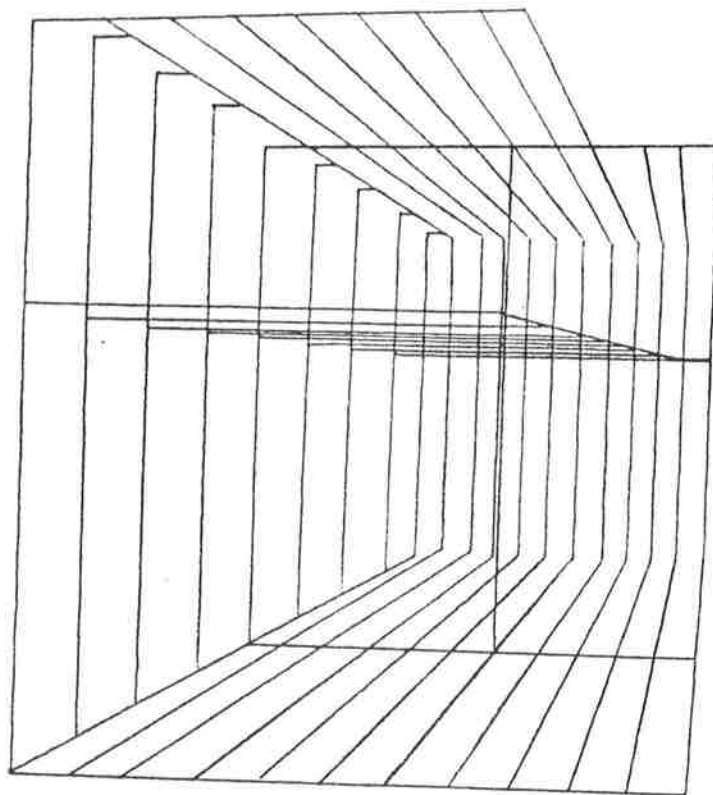


FIG. 2.5 - Idealização por vigas da estrutura da fig. 1.1

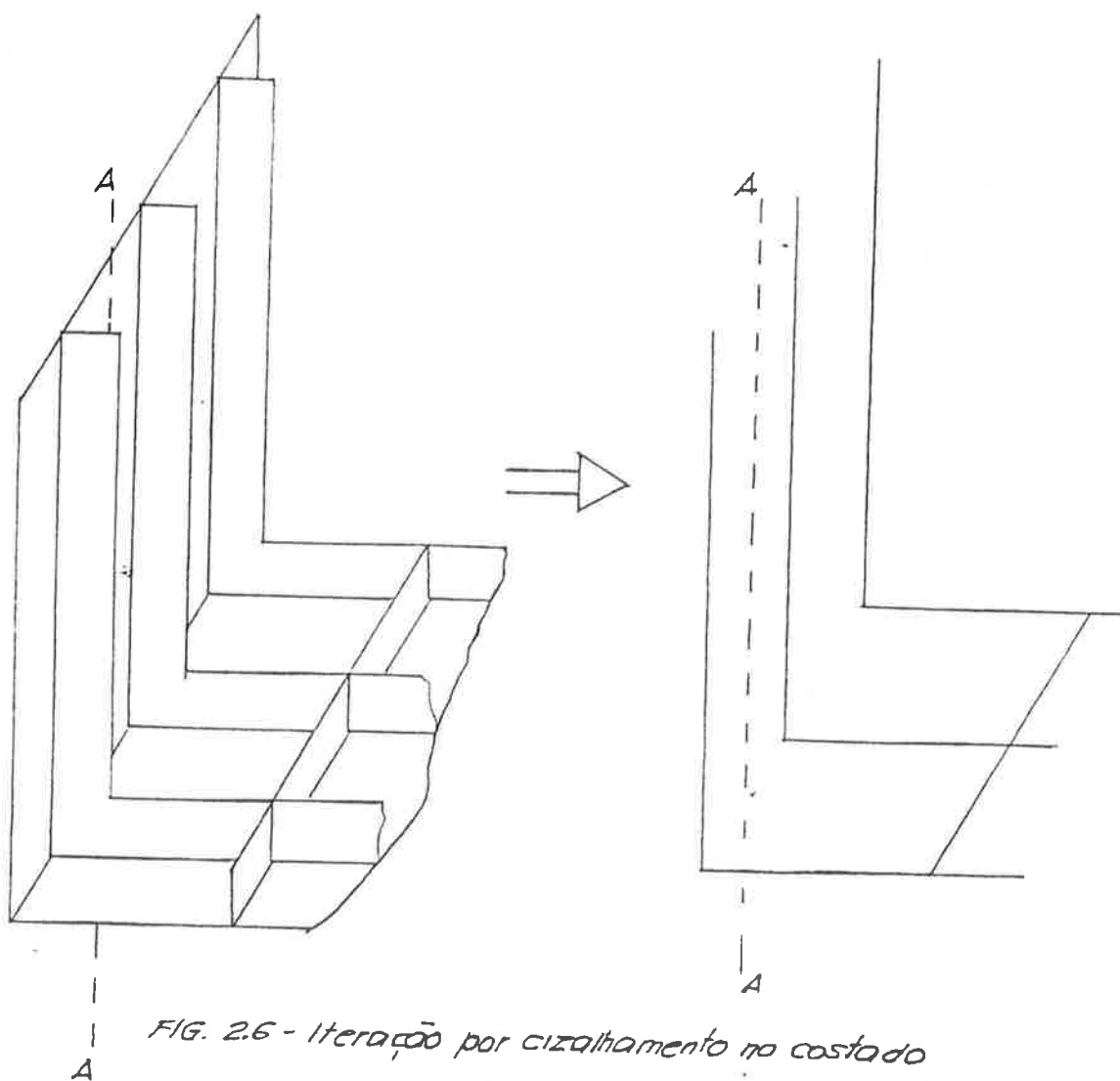


FIG. 2.6 - Iteração por cisalhamento no costado

2.3.1 Princípios do método

Alguns princípios do método dos elementos finitos são importantes para este trabalho:

- a) o contínuo é separado ("cortado") por linhas ou superfícies em um número finito de elementos (fig. 2.7) com dimensões e características adequadas ao problema;

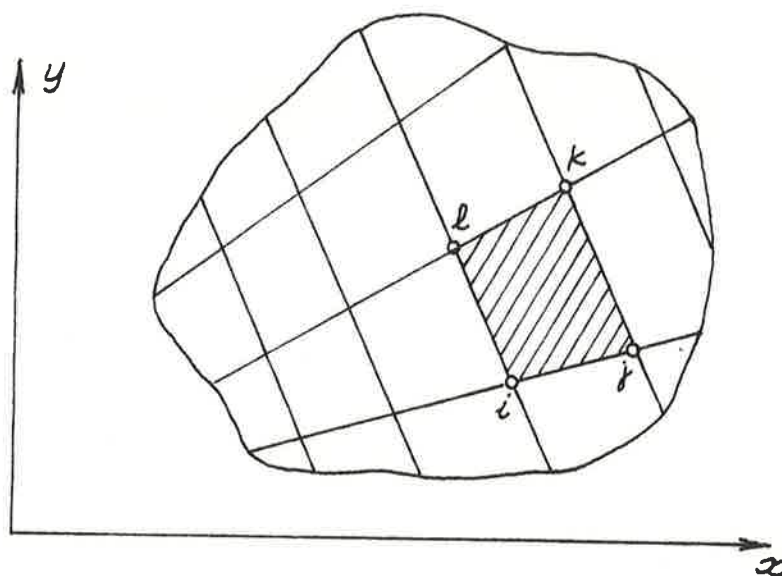


Fig. 2.7 - Divisão na malha de elementos finitos.

- b) os elementos são considerados como tendo interação apenas em um número discreto de pontos (nós), situados em suas fronteiras. Os deslocamentos desses nós são as incógnitas básicas do problema, pois a essência do processo dos deslocamentos é a mesma, apresentada no ítem 2.1.
- c) uma função é escolhida para definir o tipo de deformação dentro de cada "elemento finito", em termos dos deslocamentos nodais. A precisão dos resultados da análise vai depender, entre outras causas, de quanto a deformação suposta, dentro de cada elemento, vai-se aproximar das que verdadeiramente ocorrem no contínuo. É interessante notar que ao arbitrar uma função de deslocamento dos elementos finitos estamos utilizando uma forma particular do proce-

dimento de Rayleigh-Ritz⁽¹³⁾. Em geral, u'a malha fina de elementos leva a soluções cada vez mais próximas da realidade, desde que a função de deslocamento escolhida para os elementos finitos seja conveniente. Por outro lado, muito bons resultados podem ser obtidos com u'a malha grossa, se a função de deslocamento é de um tipo bem apropriado. Portanto, o fator mais crítico da análise por elementos finitos é a seleção de tal função. Regras básicas para sua escolha têm sido analisadas⁽⁹⁾⁽¹³⁾, podendo ser assim resumidas:

1. todo possível movimento de corpo rígido deve ser assegurado sem impor qualquer deformação;
2. todo estado de deformação uniforme deve estar incluído na função de deslocamento;
3. condições de compatibilidade devem ser satisfeitas ao longo das fronteiras entre os elementos, bem como dentro deles.

Se as três condições acima foram satisfeitas pela função de deslocamento, então pode-se dizer que os campos de deformação convergem para o caso real quando o tamanho da malha vai sendo reduzido;

- d) devido ao carregamento real, encontra-se um sistema de esforços concentrados nos nós, resultando uma relação do tipo da equação (2.1), sendo, o problema, a partir deste ponto, tratado como se estes esforços formassem o verdadeiro carregamento. Neste caso a situação é análoga à encontrada no método das estruturas reticuladas quando se consideram as "cargas nodais equivalentes". Há, porém, no caso do método dos elementos finitos uma diferença fundamental em relação ao que ocorre no caso das estruturas reticuladas. Enquanto que nestas últimas os esforços solicitantes são calculados levando-se em conta que realmente existem as cargas não nodais, no caso dos elementos finitos os campos de tensões não dependem da distribuição das cargas no interior dos elementos, mas apenas dos valores dos esforços nodais

equivalentes. Esta pode ser chamada de "a real aproximação do método dos elementos finitos".

Do exposto conclui-se que o método provém de uma teoria aproximada, assim como aproximado é o método de Rayleigh-Ritz, contrastando com o método de estruturas reticuladas que, dentro das hipóteses inerentes à teoria simples de vigas, pode ser considerado exato.

2.3.2 Equações gerais do método

O método dos elementos finitos é uma aplicação do processo dos deslocamentos ao contínuo, onde a matriz de rigidez de cada elemento é encontrada a partir da função de deslocamento e, mediante apropriada superposição da matriz de rigidez dos diversos elementos finitos, que compõe a estrutura, a matriz de rigidez total é determinada.

Um elemento finito típico é definido através de seus nós i, j, k, l, \dots e suas linhas de fronteira (fig. 2.7). Sendo o deslocamento de qualquer ponto do elemento definido por um vetor coluna $\{f\}$, vem:

$$\{f\} = [N] \cdot \{\delta^e\} = \begin{bmatrix} N_{1i} & N_{1j} & \dots & \dots \\ N_{2i} & N_{2j} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde $\{\delta^e\}$ é o vetor dos deslocamentos dos nós do elemento e $[N]$ é a matriz da função de deslocamento. Como exemplo, consideremos um elemento de estado plano de tensão que possui dois deslocamentos lineares (u e v) por nó (fig. 2.8), com variações lineares entre dois nós consecutivos do elemento⁽¹⁴⁾; ou um elemento de placa em flexão, com três deslocamentos por nó (fig. 2.8), e tendo, para a flecha w , uma variação polinomial do 3º grau entre dois nós consecutivos do elemento.

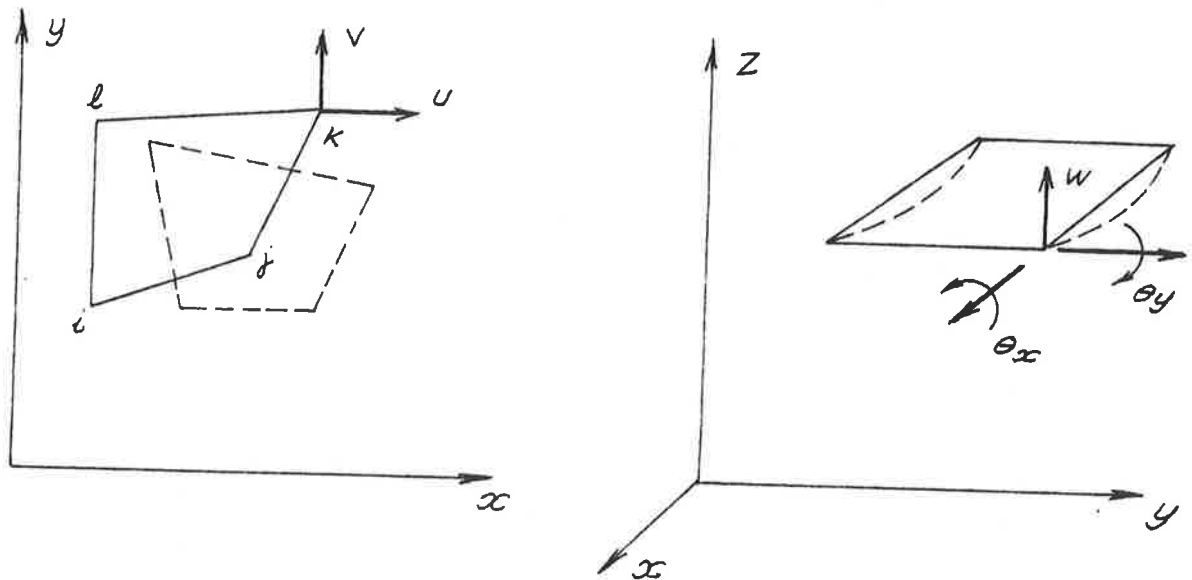


Fig. 2.8 . Elemento de estado plano de tensão e elemento de placa em flexão.

Com os deslocamentos dos nós determinados, a deformação dentro do elemento, sem deformações iniciais, é determinada por:

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{\delta^e\} \quad (2.7)$$

onde $[B]$ pode ser encontrada pela diferenciação conveniente de $[N]$.

As tensões dentro de cada elemento, sem tensões iniciais, podem ser determinadas pela relação:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad (2.8)$$

onde $[D]$ é chamada de matriz de elasticidade do material.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais chegamos a (8) (14):

$$\{F\}_p^e = - \int_V [N]^T \cdot \{p\} \cdot d(\text{vol}) \quad (2.9)$$

onde:

$\{F\}_p^e$ = forças nodais equivalentes, impostas pelo carregamento distribuído.

$\{p\}$ = carregamento distribuído

Para ser aplicada a equação (2.1) a matriz de rigidez de cada elemento pode ser determinada por:

$$[K]^e = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(\text{vol}) \quad (2.10)$$

Portanto, constata-se que toda a formulação depende da forma da matriz da função de deslocamento $[N]$.

2.3.3 Aplicações à estrutura do navio

A aplicação do método dos elementos finitos à "estrutura tipicamente naval" é feita, de modo geral, através do uso de elementos de placa em flexão e elementos em estado plano de tensão. Como se mostra na fig. 2.9, no caso de chapeamentos reforçados por vigas, onde temos carregamento de pressão sobre o chapeamento, podem-se considerar os reforços e o chapeamento divididos em elementos de placa. Tais elementos tem um comportamento conjunto de membrana (estado plano de tensão) e placa em flexão (sendo portanto a união de dois elementos dos tipos apresentados no sub-item 2.3.2, como será visto no ítem 3.3). Apenas com finalidade didática, há uma diferenciação no desenho da fig. 2.9 entre placa e estado plano de tensão.

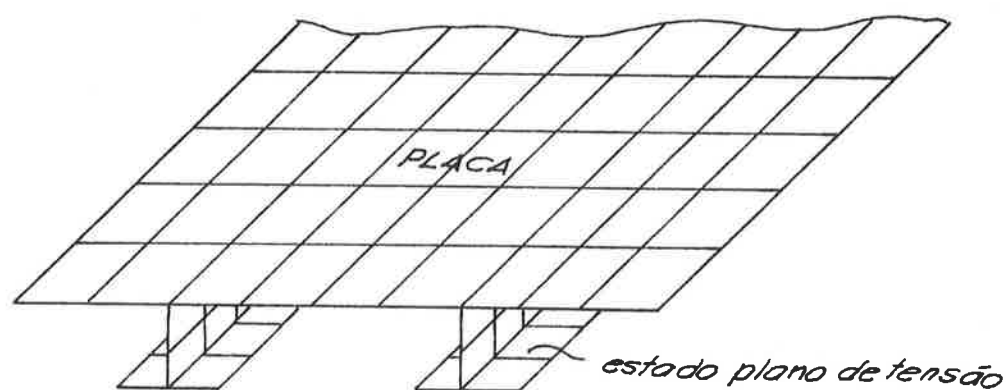


Fig. 2.9 - Divisão do chapeamento reforçado em elementos finitos.

Um primeiro aspecto matemático a considerar é que, se

tentarmos ligar os elementos de estado plano de tensão e elementos de placa em flexão apresentados no sub-ítem 2.3.2, vamos ter em suas fronteiras uma incompatibilidade da forma do deslocamento (fig. 2.10), pois o deslocamento w da placa (3º grau), corresponde ao deslocamento v (1º grau) do estado plano de tensão. Tal fato alerta para alguns cuidados que devem ser tomados quando se necessita ligar elementos finitos de diferente formulação.

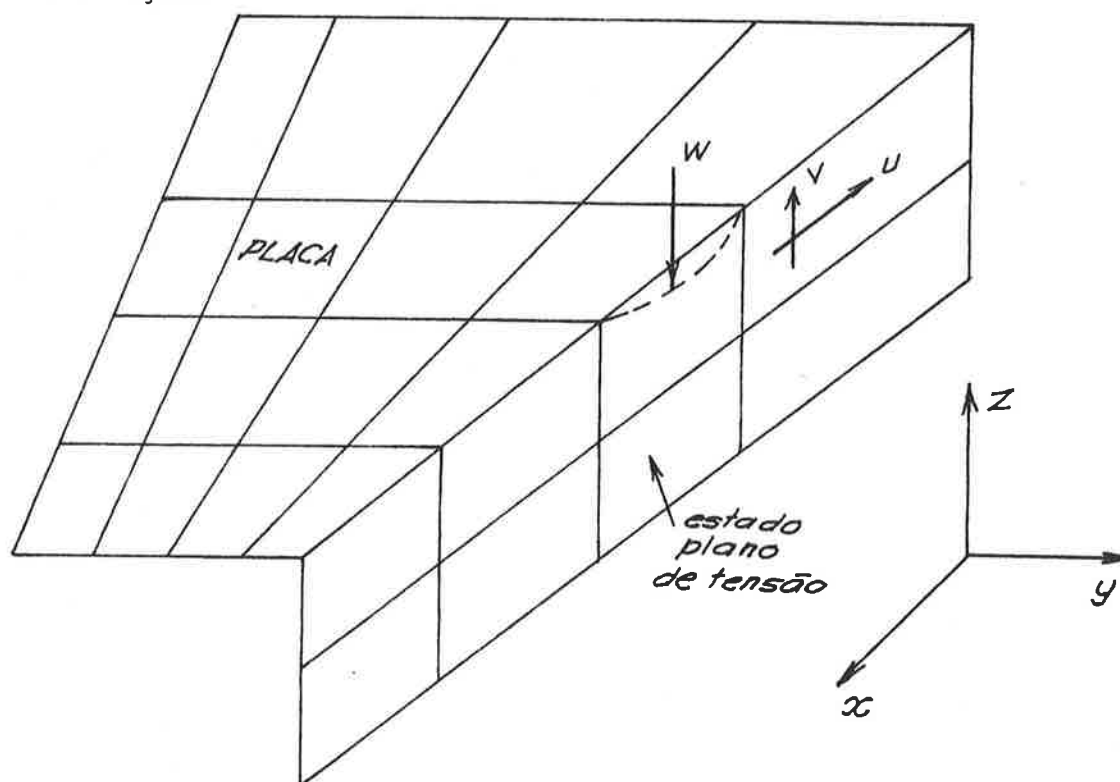


Fig. 2.10 Incompatibilidade do deslocamento na fronteira.

Num escopo mais amplo, alguns aspectos característicos de aplicação do método dos elementos finitos à estrutura de um navio devem ser abordados.

O primeiro aspecto concerne aos deslocamentos nodais que devem ser prescritos na equação (2.1) a fim de que o problema tenha solução, isto é, a fim de que a matriz $[K]$ não seja singular. De fato, ao contrário de estruturas de engenharia civil, a viga-navio não está vinculada em nenhum ponto, sendo necessário então prescrever vínculos, que impedindo mo-

vimentos de corpo rígido, não restrinjam a sua deformação natural ao sistema de cargas que a solicita.

O segundo aspecto refere-se ao grande porte e complexidade da estrutura do navio que faz com que uma análise por elementos finitos torne-se extremamente cara e demorada, de maneira geral, tendendo a limitar seu uso. A preparação dos dados constitui enorme tarefa, sujeita frequentemente a erros e repetidas verificações. A própria "corrida" de análise é cara, pelo grande tamanho o modelo, e na interpretação dos resultados apresentam-se os mesmos problemas. Tem-se procurado superar essas dificuldades com o desenvolvimento de pré e pós-processadores que utilizem um sistema de "plotter" e rotinas de verificação automática de dados (no ítem 3.1 são expostas as finalidades dos pré-e pós-processadores).

Portanto, como se nota, qualquer modelo que vise a diminuir o tempo e custo de uma análise é importante no estudo de "estruturas tipicamente navais".

CAPÍTULO III

O PROGRAMA S A P - IV

3.1 Introdução

Encontra-se em desenvolvimento no Departamento de Engenharia Naval - EPUSP o projeto de pesquisa NDPN-420 "Im-
plantação de um sistema de programas para análise de estruturas"⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹²⁾ cuja finalidade primeira é preparar uma equipe que atinja em seus trabalhos o nível dos centros mais avançados em análise estrutural. O projeto está voltado para estruturas navais, tendo, no entanto, o sistema potencial para estudar outros tipos. Vários trabalhos profissionais tem sido realizados⁽¹⁷⁾ para algumas entidades ligadas ao projeto e construção naval. Este próprio trabalho é produto de uma das fases do projeto, que visa o desenvolvimento de modelos específicos para a análise da "estrutura tipicamente naval".

O projeto está dividido em três etapas:

- a) pré-processadores - Consiste no desenvolvimento de programas, com a utilização de sistemas gráficos, que auxiliam o analista na produção do modelo, preparação e conferência de dados, evitando ao máximo que a estrutura "vá errada" para a análise. A necessidade de tais programas é mostrada no sub-ítem 2.3.3;
- b) programa-núcleo - O programa de análise adotado é o SAP-IV⁽¹⁾, que estuda estruturas usando a análise matricial. O programa foi ampla e intensamente testado pela equipe⁽¹²⁾ e sua alta pre

cisão e confiabilidade confirmados. Novos modelos matemáticos foram acrescentados ao programa, aumentando suas potencialidades;

- c) pós-processadores - São programas análogos aos pré-processadores, visando agora a análise de resultados do programa-núcleo, apresentando-os em forma conveniente para sua interpretação. Novamente sistemas gráficos são de grande valia, necessidade esta observada no sub-Ítem 2.3.3.

O programa SAP-IV resolve vários tipos de problemas, sejam estáticos ou dinâmicos, envolvendo uma grande gama de tipos de elementos, apresentando-se a seguir aqueles que interessam ao presente estudo.

3.2 Estruturas reticuladas (1)(2)

Os elementos de viga incluídos no programa consideram torção, flexão em torno de dois eixos e deformação axial e por cisalhamento. A programação baseia-se na resolução das equações gerais do método de estruturas reticuladas apresentadas no sub-Ítem 2.2.3, tendo como resultados os esforços solicitantes que agem em cada extremidade da barra, em relação aos eixos que passam pelos nós, bem como esforços e tensões máximas nas vigas.

3.3 Elementos para estado plano de tensão

O elemento de estado plano de tensão é o elemento isoparamétrico, que pode ter formas incompatíveis de deslocamento ("incompatible displacement models") (19)(20). O elemento isoparamétrico quadrilátero possui um sistema local de coordenadas (fig.3.1) que é função da posição dos quatro pontos nodais e formado pelos eixos locais s e t . As direções de tais eixos são dadas pela ligação dos pontos médios de dois

lados opostos do quadrilátero, tendo os nós coordenadas unitárias em relação ao sistema (fig. 3.1).

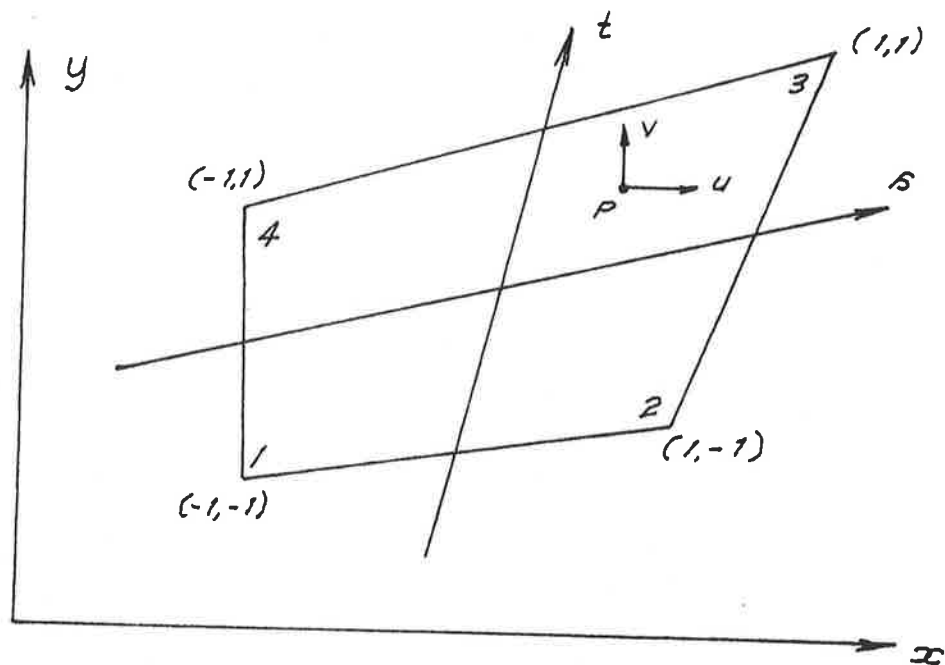


Fig. 3.1 Elemento isoparamétrico quadrilátero

Existe uma função que faz a transformação de coordenadas de qualquer ponto do elemento quadrilátero, do sistema local s e t para o sistema global x e y , a partir das coordenadas globais dos nós.

Por exemplo, podemos ter uma função do tipo:

$$\begin{cases} x_p = f_1(s, t) x_1 + f_2(s, t) x_2 + f_3(s, t) x_3 + f_4(s, t) x_4 \\ y_p = g_1(s, t) y_1 + g_2(s, t) y_2 + g_3(s, t) y_3 + g_4(s, t) y_4 \end{cases}$$

onde:

x_p, y_p - coordenadas globais de um ponto p do quadrilátero

s, t - coordenadas locais do ponto p

x_i, y_i - coordenadas globais dos nós ($i=1, 2, 3, 4$)

A relação acima é a mesma (dai o nome "isoparamétrico").

co"') que dá os deslocamentos de qualquer ponto do elemento em função dos deslocamentos nodais, isto é:

$$\begin{cases} u_p = f_1(s,t) u_1 + f_2(s,t) u_2 + f_3(s,t) u_3 + f_4(s,t) u_4 \\ v_p = g_1(s,t) v_1 + g_2(s,t) v_2 + g_3(s,t) v_3 + g_4(s,t) v_4 \end{cases}$$

onde:

u_p, v_p - deslocamentos em relação ao sistema X e Y de um ponto p do quadrilátero (fig. 3.1).

s, t - coordenadas locais do ponto p

u_i, v_i - deslocamentos nodais em relação ao sistema X e Y ($i = 1, 2, 3, 4$).

No programa SAP-IV o elemento isoparamétrico quadrilátero tem a função de deslocamento dada por:

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i u_i \quad (3.1)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 h_i v_i \quad (3.2)$$

onde:

$$h_1 = 1/4 (1 - s) (1 - t) \quad (3.3)$$

$$h_2 = 1/4 (1 + s) (1 - t) \quad (3.4)$$

$$h_3 = 1/4 (1 + s) (1 + t) \quad (3.5)$$

$$h_4 = 1/4 (1 - s) (1 + t) \quad (3.6)$$

O quadrilátero após deformar-se tem os lados formando segmentos retos (fig. 3.2a). Para as funções de deformação temos a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \epsilon_s = K_1 + K_2 t \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon_t = K_3 + K_4 s \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} = \gamma_{st} = K_5 + K_6 t + K_7 s \quad (3.9)$$

As deformações, portanto, variam linearmente dentro do elemento. Vai existir um "salto" na deformação ao passar de um para outro elemento, não sendo portanto satisfeita a compatibilidade na fronteira. Tal fato vai contra o critério de convergência 3 (pág.11.12) para a escolha da função de deslocamento.

O não respeito completo às equações de compatibilidade na fronteira é um fato comum para muitos tipos de elementos finitos, sendo que, somente a constatação numérica pode mostrar se isso provoca maus resultados, para cada caso específico. Neste elemento em particular os resultados são satisfatórios.

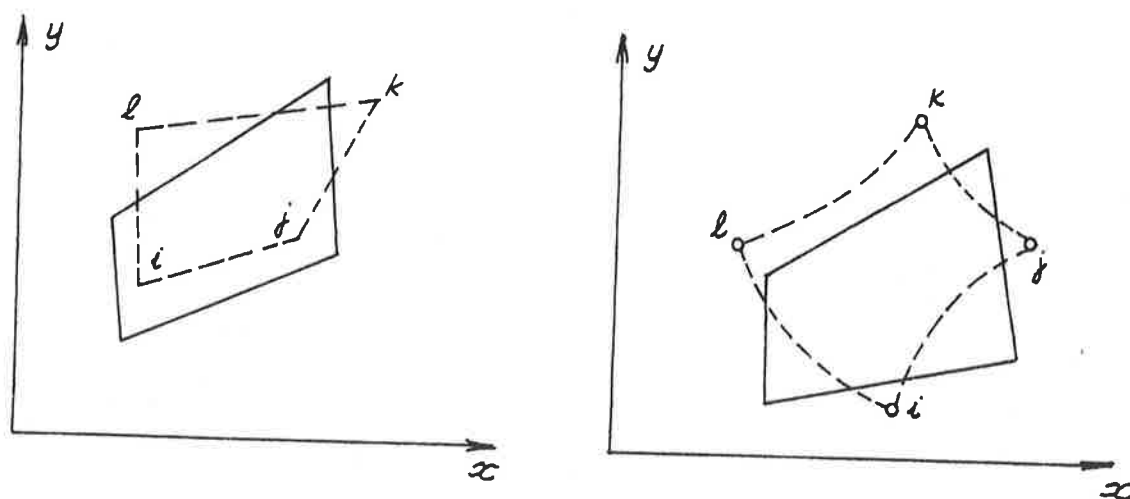


Fig. 3.2 Elemento isoparamétrico e com formas incompatíveis de deslocamentos.

Uma das principais causas dos erros cometidos pela técnica dos elementos finitos é a inabilidade que o elemento tenha de representar algumas formas simples de deformação. Isto pode ser ilustrado com um elemento retangular sob uma sollicitação de flexão pura (fig.3.3-a). O elemento isoparamétrico até aqui apresentado deforma-se conforme o mostrado na Fig. 3.3-b, enquanto que os des

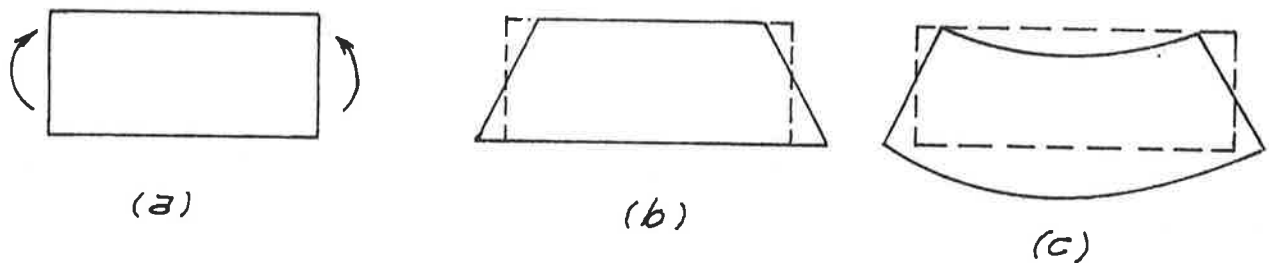


Fig. 3.3 - Deformação sob flexão pura

locamentos exatos dos lados seriam conforme a fig. 3.3-c.

A introdução de formas incompatíveis de deslocamentos visa melhorar a deformação do elemento (que no exemplo dado conseguir-se-ia caminhando para a forma da fig. 3.3.-c). Isto se faz com a mudança da função de deslocamento para ⁽²⁰⁾.

$$u = \sum h_i u_i + h_5 \alpha_1 + h_6 \alpha_2 \quad (3.10)$$

$$v = \sum h_i v_i + h_5 \alpha_3 + h_6 \alpha_4 \quad (3.11)$$

onde:

$$h_5 = (1-s^2) \quad (3.12)$$

$$h_6 = (1-t^2) \quad (3.13)$$

A determinação das novas constantes α_i é feita minimizando-se a energia de deformação dentro do elemento,

de modo análogo ao feito no método de Ritz. Neste caso o quadrilátero após deformar-se tem os lados formando um polinômio do 2º grau (fig. 3.2-b). As deformações dentro do elemento são diferentes do caso anterior, apesar de possuírem uma variação linear ponto a ponto, pois:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \epsilon_s = K_1 + K_2 s + K_3 t \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon_t = K_4 + K_5 s + K_6 t \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} = \gamma_{st} = K_7 + K_8 s + K_9 t \quad (3.16)$$

Deve-se notar que agora a função que dá a transformação de coordenadas não é aquela que dá os deslocamentos dos pontos internos do elemento (há a introdução de h_5 e h_6), e portanto, o nome "isoparamétrico" não deveria ser aplicável a este novo elemento. No entanto, a literatura técnica continua usando aqui o termo "isoparamétrico", o que será feito também neste trabalho.

A denominação de "formas incompatíveis de deslocamento" advem do fato de termos, no caso geral, deslocamentos "ponto a ponto" diferentes num mesmo lado comum a dois elementos adjacentes (fig. 3.4), o que não acontece no caso anterior. No entanto, mesmo com a existência desta nova incompatibilidade na fronteira, tal elemento tem revelado bons desempenhos; melhores que os do elemento isoparamétrico simples no caso de flexão de vigas (como mostrado pela fig. 3.3), onde um deslocamento sob a forma polinomial do 2º grau é mais próximo da realidade que um deslocamento simplesmente linear.

Pode-se usar no programa, tanto o elemento isoparamétrico simples como o elemento isoparamétrico com formas incompatíveis de deslocamento.

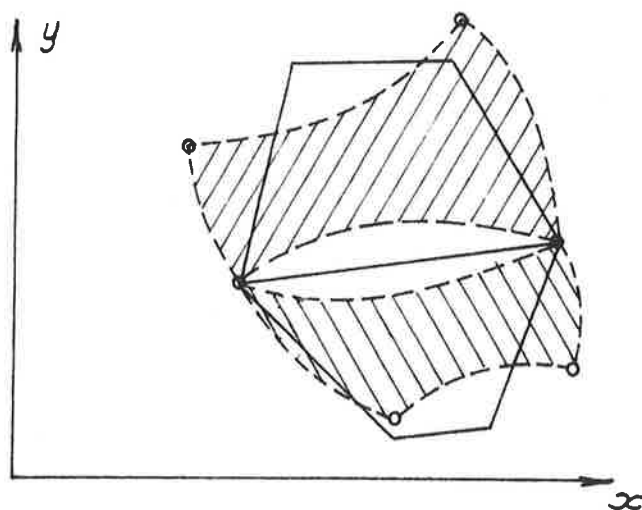


Fig. 3.4 = Incompatibilidade de deslocamento
"ponto a ponto".

3.4 Elementos de Placa

Os elementos finitos de placa do programa podem ser triangulares ou quadriláteros, podendo cada elemento ser de espessura diferente e estar localizado em um plano arbitrário em relação ao sistema tri-dimensional de coordenadas. Forças gravitacionais, inerciais ou gradientes de temperatura podem ser considerados. O elemento funciona sob cargas laterais ("comportamento de flexão") e cargas no próprio plano ("comportamento de membrana" ou estado plano de tensão), tendo portanto cinco deslocamentos por nó⁽⁹⁾ (os três da flexão e os dois do estado plano de tensão), como mostrado na fig. 2.8).

3.4.1 O comportamento de membrana

O elemento de placa triangular responde às cargas no próprio plano utilizando o elemento triangular de estado plano de tensão, de deformação constante⁽⁹⁾

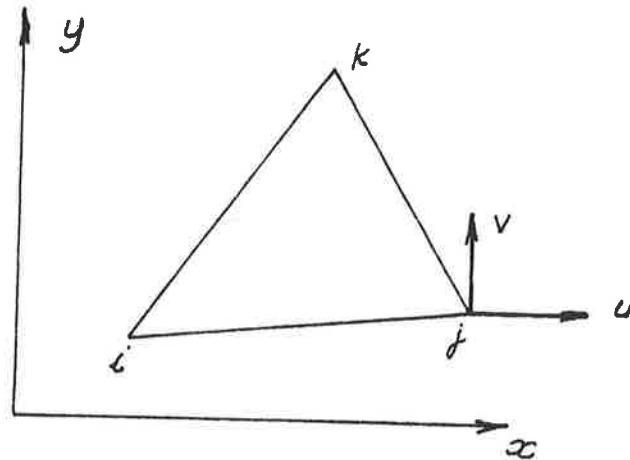


Fig. 3.5 Triângulo de deformação constante

Tal triângulo (fig. 3.5) apresenta os deslocamentos dos nós do tipo:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.17)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (3.18)$$

Portanto, há uma variação linear do deslocamento, que implica em considerar-se uma deformação constante no interior de todo o elemento, pois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \text{cte} & \frac{\partial u}{\partial y} &= \text{cte} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \text{cte} & \frac{\partial v}{\partial y} &= \text{cte} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tal deformação é diferente para dois elementos adjacentes, existindo portanto uma incompatibilidade na fronteira entre eles, apesar dos deslocamentos dos lados serem lineares, não existindo "buracos" na estrutura deformada como pode ocorrer no elemento de estado plano apresentado no item 3.3.

A aplicação da equação (2.10) para o cálculo da matriz de rigidez do elemento triangular leva a:

$$[K]^e = [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot A \cdot t \quad (3.20)$$

onde, sendo $[K]^e$ uma matriz 6×6 , vem:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_k - x_i) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) & (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[D] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde:

A - área do elemento

t - espessura do elemento

Para elementos de placa quadriláteros é feita a divisão do elemento em quatro triângulos de deformação constante,

determinando um ponto no interior do elemento ("nó central") cujas coordenadas, em função das coordenadas dos nós, são dadas por (fig. 3.6):

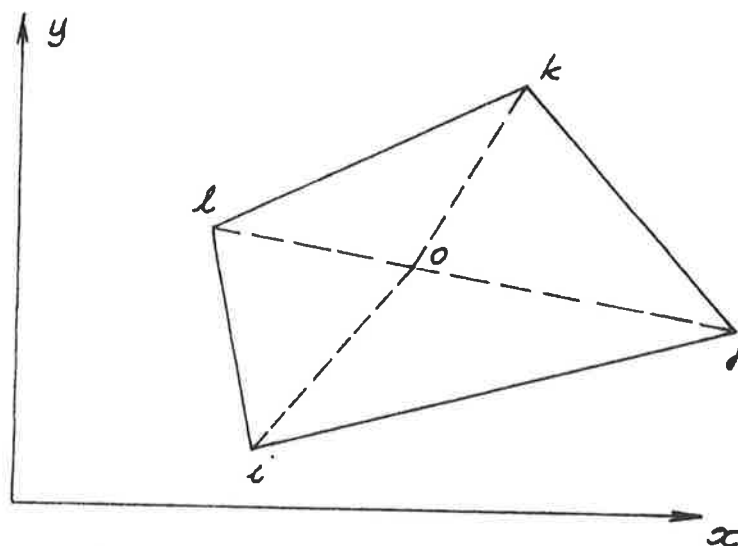


Fig. 3.6 - Elemento quadrilátero em estado plano de tensão

$$\begin{cases} x_o = (x_i + x_j + x_k + x_l) / 4 \\ y_o = (y_i + y_j + y_k + y_l) / 4 \\ z_o = (z_i + z_j + z_k + z_l) / 4 \end{cases} \quad (3.23)$$

A matriz de rigidez do elemento quadrilátero, contendo o ponto central, será de 10×10 . É feito um "rearranjo", abandonando-se o "nó central", que torna a matriz de dimensão 8×8 .

3.4.2 O comportamento de flexão

O elemento de placa triangular responde às cargas laterais utilizando o elemento LCCT9, chamado de triângulo compatível, desenvolvido em 1965⁽¹⁸⁾. É dito compatível pois, além de termos compatibilidade do deslocamento w entre elementos adjacentes, existe compatibilidade da derivada $\partial w / \partial n$ ao longo das fronteiras entre os elementos, onde n é a direção

perpendicular a cada fronteira (fig. 3.7).

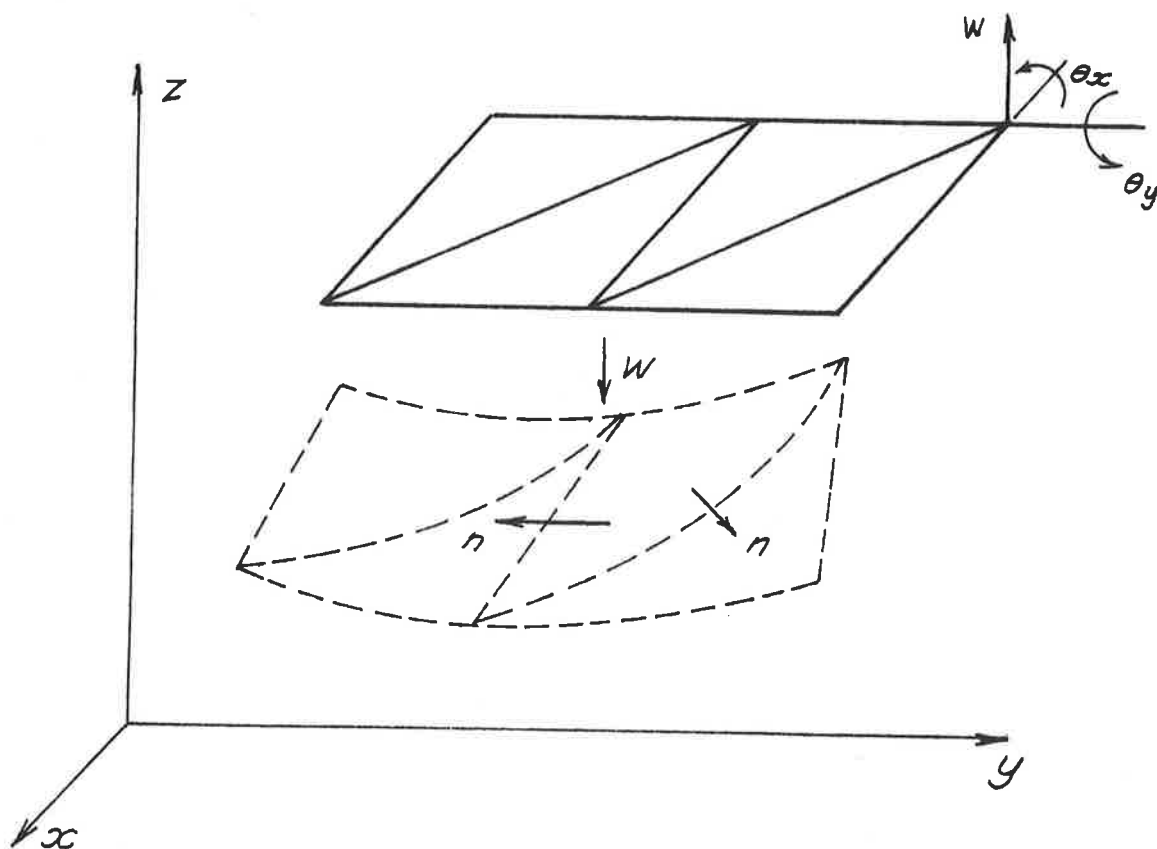


Fig. 3.7 Triângulos de placa compatíveis

Portanto, como vemos na fig. 3.7 a flexa w sobre qualquer fronteira é contínua e tem derivada primeira contínua mesmo na direção normal. A compatibilidade é conseguida dividindo-se o triângulo em três sub-triângulos (fig. 3.8).

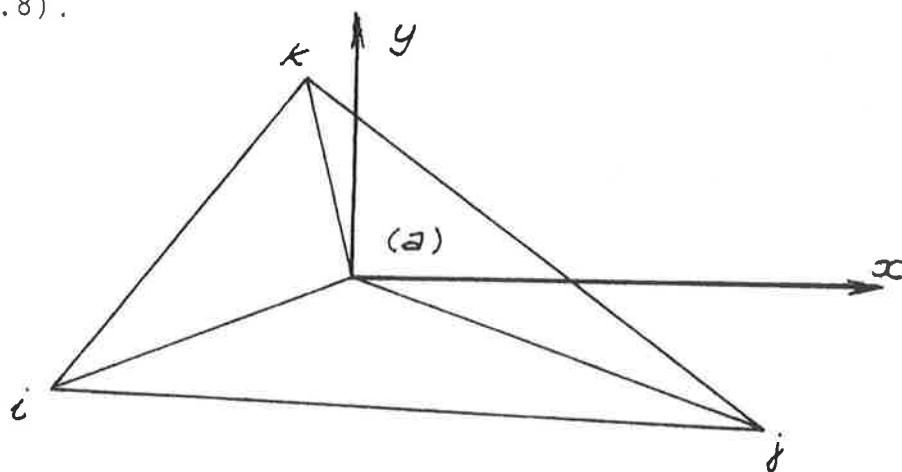


Fig. 3.8 Divisão em sub-triângulos

A metodologia baseia-se em assumir uma função para w independente para cada sub-triângulo. Como exemplo, para o sub-triângulo (a) da fig. 3.8 o deslocamento w é expresso em termos de \bar{x} e \bar{y} (fig. 3.9), no qual \bar{x} é paralelo ao lado externo do sub-triângulo, por um polinômio do 3º grau.

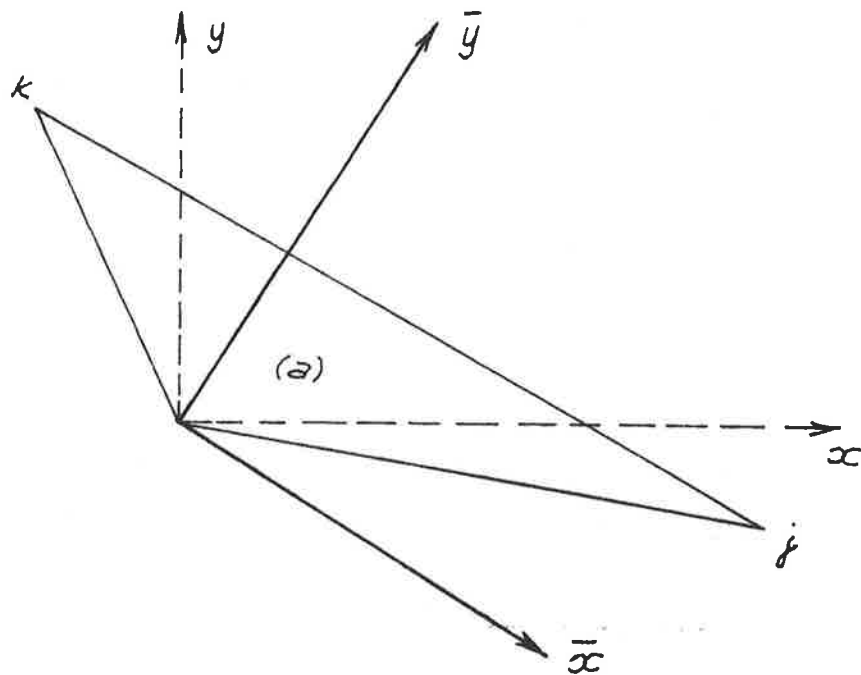


Fig. 3.9 - Sub-triângulo com eixos locais

$$w = a_1 + a_2\bar{x} + a_3\bar{y} + a_4\bar{x}^2 + a_5\bar{x}\bar{y} + a_6\bar{y}^2 + a_7\bar{x}^3 + a_8\bar{x}\bar{y}^2 + a_9\bar{y}^3 \quad (3.24)$$

Pode ser notado que o termo em $\bar{x}^2\bar{y}$ foi excluído do polinômio do 3º grau completo em duas variáveis; portanto a derivada normal pode variar apenas linearmente ao longo da fronteira exterior, pois:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = a_3 + a_5\bar{x} + 2a_6\bar{y} + 2a_8\bar{x}\bar{y} + 3a_9\bar{y}^2 \quad (3.25)$$

mas para o lado $\bar{j}\bar{k}$ temos $\bar{y} = \text{cte}$, portanto:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\bar{j}\bar{k}} = K_1 + K_2\bar{x} \quad (3.26)$$

Esta limitação na inclinação de w é que na verdade impõe a compatibilidade da derivada normal entre elementos adjacentes⁽¹⁸⁾. A prova completa, da compatibilidade da derivada normal, não foi encontrada nem no trabalho original⁽²⁾.

Expressões semelhantes a (2.34) podem ser mostradas para cada sub-triângulo; assim a flexa w do triângulo envolve um total de 27 coeficientes. Dezoito deles são encontrados a fim de satisfazer a compatibilidade interna de flecha e inclinações requerida entre os sub-triângulos adjacentes, enquanto os nove restantes são encontrados a partir dos nove graus de liberdade do triângulo completo.

Para elementos de placa quadriláteros o procedimento é análogo ao caso do comportamento de membrana, fazendo-se a divisão em quatro triângulos compatíveis. Tal elemento, chamado Q19, foi apresentado em 1968⁽²⁾. Pode-se escolher a posição do "nó central" (fig. 3.6) ou ele será tomado pelo programa com as coordenadas dadas pela expressão (3.23).

3.5 A interação dos elementos de diferente formulação

Foram apresentados alguns tipos de elementos utilizados pelo programa na análise. Quando existir a necessidade de utilizar diferentes espécimes de elementos na idealização de uma estrutura, de modo a melhorar a precisão e confiança nos resultados, o programa SAP-IV aceita a reunião. Placas sobre fundações elásticas, idealizadas por molas; placas com lados formados de vigas; elementos de estado plano de tensão e de placa em planos perpendiculares (como acontece na "estrutura tipicamente naval"), são alguns exemplos de interação de elementos.

Na formação da matriz rigidez de toda a estrutura usa-se o mesmo processo, sejam elementos de mesma formulação, sejam de formulação diferente, isto é, há uma "adição" da matriz rigidez de todos os elementos. Levando-se em

conta o exposto é fundamental, quando se tenta a interação de elementos de diferente espécie, conhecer a fundo o significado físico de cada um, bem como as funções de deslocamento utilizadas, de modo a saber-se quais os tipos de deslocamentos, deformações e esforços que podem agir em cada espécie, estudando-se a viabilidade física e matemática das combinações.

No exemplo de incompatibilidade citada no sub-ítem 2.3.3 através da fig. 2.10, deve-se notar que o fato de a flecha w não ser compatível na fronteira entre os elementos de placa e elementos em estado plano não tem nenhuma influência nos resultados de tensões de membrana na estrutura, mas pode levar a erros consideráveis nas tensões de flexão das placas quando vai-se crescendo a malha.

CAPÍTULO IV

MODELO MISTO : VIGAS EXCÊNTRICAS / PLACAS

4.1 Matriz de rigidez de uma viga excêntrica

Os nós de um elemento de viga poderão ocupar diferentes posições na sua secção reta, segundo a conveniência do problema. Da mesma forma, as direções dos eixos locais poderão variar. Em geral, faz-se com que um eixo local fique no plano da alma da viga; quanto ao nó, supõe-se elementarmente, que ele coincida com o centro de gravidade da secção. Ao fazer isso, adota-se geralmente a matriz de rigidez para uma viga apresentada na fig. 2.2. Esta é uma prática imprecisa, que pode gerar resultados aceitáveis ou não, segundo o caso. Na realidade, a matriz de rigidez muda sempre que alterarmos a posição dos nós ou a direção dos eixos locais. Isto nos leva a considerar os seguintes casos, em ordem crescente de complexidade, para a formulação da matriz rigidez $[S_M]$ de uma viga prismática:

- a) os eixos locais são baricêntricos principais; o centro de torção T e o centro de gravidade G coincidem;
- b) idem, mas T e G não coincidem;

- c) os eixos locais são apenas baricêntricos; T e G coincidem;
- d) idem, mas T e G não coincidem;
- e) os eixos locais não são baricêntricos; T e G coincidem;
- f) idem, mas T e G não coincidem. Este é o caso de maior generalidade.

A formulação para $[S_M]$ encontrada na fig. 2.2 é correta para o caso a mencionado acima. Convém examinar qual é o verdadeiro significado que adquire quando o aplicamos, sem alterá-la, à secção do caso b acima.

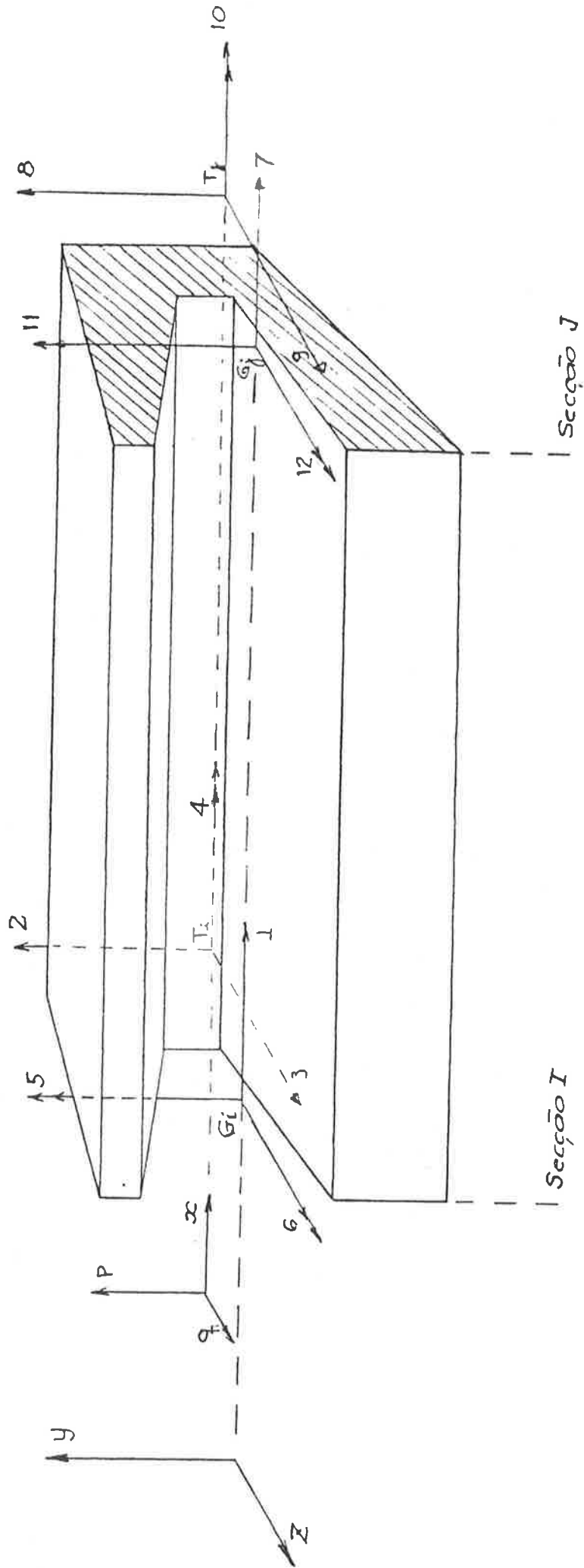
A fig. 4.1 ilustra o caso em questão, onde temos:

- G_i, G_j : centros de gravidade das secções transversais I e J, respectivamente. O eixo $\overline{G_i G_j}$ é o eixo da viga.
- T_i, T_j : são centros de torção das secções transversais I e J, respectivamente. O eixo $\overline{T_i T_j}$ é o eixo de torção da viga (coincidente com o eixo x);
- y e z : são eixos centrais das secções I e J;
- p e q : são eixos paralelos a y e z que formam um sistema tri-ortogonal com x, de origem T_i .

O exame da fig. 4.1 e da matriz $[S_M]$ da Fig. 2.2 leva às seguintes conclusões:

- a) a matriz $[S_M]$ mostra serem os movimentos nos planos perpendiculares formados pelos eixos centrais e eixo da viga independentes (pois, $s_{56} = s_{25} = s_{36} = s_{23} = 0$). Como exemplo, um esforço A_2 não deve produzir flexão oblíqua. Logo os eixos locais (e respectivos vetores 2,3,5 e 6) deverão ser paralelos a y e z;

FIG 4.1 - Eixos locais, no caso do eixo da viga não coincidir com o eixo de torção



- b) a matriz $[S_M]$ referida não considera flexão composta ($s_{1j} = 0$, a menos que $j = 1$). Logo o esforço A_1 e o deslocamento D_1 aplicam-se apenas ao baricentro;
- c) os coeficientes que relacionam as forças cortantes à rotação θ (D_4) são nulos na matriz $[S_M]$. Logo ela supõe que os esforços cortantes - A_2 e A_3 - estejam aplicados em \underline{I}_i ;
- d) os coeficientes que relacionam as translações D_2 e D_3 com o momento de torção A_4 são nulos, na matriz $[S_M]$. Isto significa que a imposição de uma dessas translações, mantendo-se nulos todos os demais graus de liberdade, não deve gerar torção. Isto só ocorre quando a translação é imposta em \underline{I}_i . Logo, D_2 e D_3 referem-se a \underline{I}_i ;
- e) os coeficientes que relacionam a rotação D_4 com os esforços cortantes A_2 e A_3 são nulos. Isto exige que D_4 se aplique ao mesmo ponto em que são aplicados A_2 e A_3 , o qual, segundo a conclusão c, é \underline{I}_i ;
- f) a matriz $[S_M]$ em pauta não leva em conta efeitos mais complexos da torção, tais como flexão induzida pela torção e deformação da secção reta. Supondo pois, que a secção reta não se deforma, vemos que a aplicação de A_4 a um ponto que não seja \underline{I}_i produzirá D_2 e D_3 diferentes de zero. Como s_{42} e s_{43} são nulos, na matriz rigidez $[S_M]$, segue-se que A_4 aplica-se a \underline{I}_i ;
- g) não há qualquer diferença, para composição da matriz $[S_M]$ referida, quando se mudam os pontos a que se atribuirá a aplicação dos esforços A_5 e A_6 e a medição dos deslocamentos D_5 e D_6 . É necessário apenas que os eixos 5 e 6 sejam paralelos aos eixos principais de inércia. Sendo assim, poderemos aplicar A_5 , A_6 , D_5 e D_6 em \underline{G}_i .

Idênticos comentários podem ser feitos para os deslocamentos e esforços 7, 8, 12.

As conclusões acima, podem sintetizar-se como abaixo se mostra.

"A matriz $[S_M]$, encontrada na fig. 2.2, é válida para uma secção que os eixos locais são baricêntricos principais, e G coincide com T. Quando aplicada a uma secção nas mesmas condições mas em que G e T não coincidem, poderá ter seus coeficientes tomados com o significado usual, desde que se considere:

- os eixos 2, 3, 4, 8, 9 e 10 tem origem em \bar{I} e são paralelos aos eixos baricêntricos principais;
- os eixos 5, 6, 11 e 12 tem origem em G e são baricêntricos principais;
- os eixos 1 e 7 têm origem em G e têm a direção do eixo da viga."

Tal esquematização consta da fig. 4.1.0 uso da matriz $[S_M]$ neste caso foge, em realidade, do método convencional de estruturas reticuladas onde os eixos 1, 2, 6 tem origem em um único ponto (nós), e uma viga é definida por seus dois nós extremos. Desde que tomemos os cuidados de aplicação dos esforços nos pontos G e T, convenientemente, e de interpretação correta dos resultados do vetor $\{D\}$, conforme mostrado acima, a utilização da mesma matriz $[S_M]$ para a viga da fig. 4.1 é satisfatória.

Para a situação da viga da fig. 4.1 podemos montar as matrizes coluna de carga e de deslocamentos, e vem:

$$\{A\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}\} \quad (4.1)$$

$$\{D\} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}\} \quad (4.2)$$

As matrizes estão relacionadas através da matriz de rigidez $\{S_M\}$ (fig. 2.2) por:

$$\{A\} = \{S_M\} * \{D\} \quad (4.3)$$

Vamos tomar agora a situação de interesse para este trabalho, que corresponde ao caso f (pág. IV.2), mas com os eixos locais paralelos aos eixos centrais. Para tanto, considere a fig. 4.2 onde é feita, em relação à fig. 4.1, uma translação de eixos de modo a que os deslocamentos e esforços estejam referenciados aos pontos I' e J' (que passam a ser os "novos" nós da viga). Definamos excentricidades dos pontos I' e J' .

e_1 - projeção de $\vec{G}_i I'$ na direção z

e_2 - projeção de $\vec{G}_i I'$ na direção y

t_1 - projeção $\vec{T}_i I'$ na direção q

t_2 - projeção $\vec{T}_i I'$ na direção p

Para os esforços e deslocamentos agentes em I' e J' podemos escrever:

$$\{A'\} = \{A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5, A'_6, A'_7, A'_8, A'_9, A'_{10}, A'_{11}, A'_{12}\} \quad (4.4)$$

$$\{D'\} = \{D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6, D'_7, D'_8, D'_9, D'_{10}, D'_{11}, D'_{12}\} \quad (4.5)$$

Tais matrizes podem ser relacionadas na forma:

$$\{A'\} = \{S_M'\} * \{D'\} \quad (4.6)$$

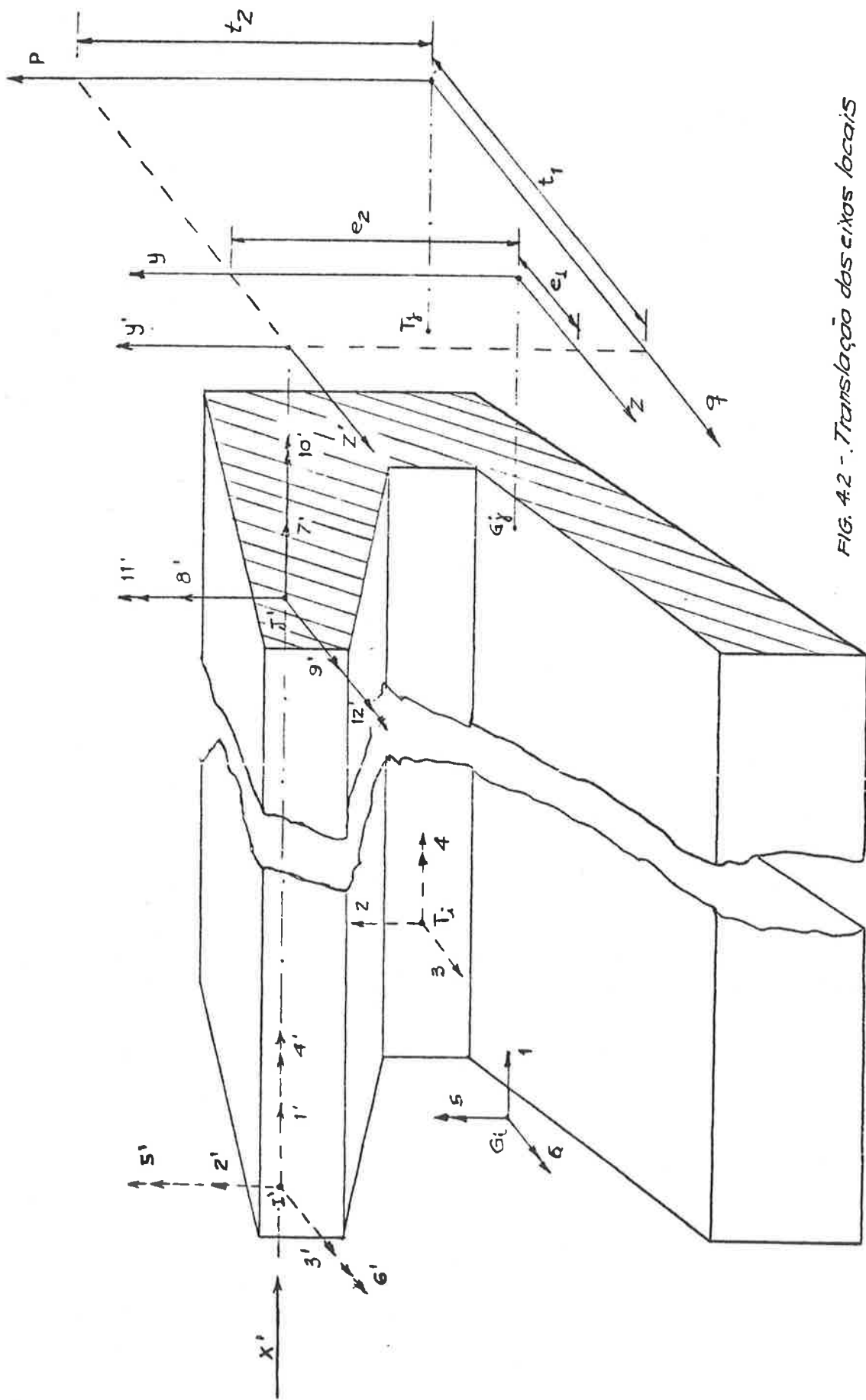


FIG. 4.2 - Translação dos eixos locais

Nosso problema portanto é calcular a matriz de rigidez $\{S_M'\}$, obtendo para tanto $\{A'\}$ a partir de $\{A\}$ por equivalência estática e $\{D'\}$ a partir de $\{D\}$ por considerações de geometria, dentro da teoria de pequenas deflexões.

Temos (considerando que os vetores 1,2,3,...12 e 1', 2', 12' tem o mesmo sentido):

a) Relação entre $\{A'\}$ e $\{A\}$

De acordo com a fig. 4.1 e 4.2 vem:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A'_1 \\
 A_2 &= A'_2 \\
 A_3 &= A'_3 \\
 A_4 &= A'_4 - A'_2 * t_1 + A'_3 * t_2 \\
 A_5 &= A'_5 + A'_1 * e_1 \\
 A_6 &= A'_6 - A'_1 * e_2 \\
 A_7 &= A'_7 \\
 A_8 &= A'_8 \\
 A_9 &= A'_9 \\
 A_{10} &= A'_{10} - A'_8 * t_1 + A'_9 * t_2 \\
 A_{11} &= A'_{11} + A'_7 * e_1 \\
 A_{12} &= A'_{12} - A'_7 * e_2
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Relacionando $\{A'\}$ com $\{A\}$, matricialmente, temos

$$\{A\} = [TA] * \{A'\} \quad (4.8)$$

onde $[TA]$ é mostrada na fig. 4.3.

$$[TA] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_1 & t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_1 & t_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.3 - Matriz de transformação $[TA]$

b) Relação entre $\{D'\}$ e $\{D\}$

De acordo com as fig. 4.1 e 4.2 vem:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= D'_1 - D'_{5*} e_1 + D'_{6*} e_2 \\
 D_2 &= D'_2 + D'_{4*} t_1 \\
 D_3 &= D'_3 - D'_{4*} t_2 \\
 D_4 &= D'_4 \\
 D_5 &= D'_5 \\
 D_6 &= D'_6 \\
 D_7 &= D'_7 - D'_{11*} e_1 + D'_{12*} e_2 \\
 D_8 &= D'_8 + D'_{10*} e_1 \\
 D_9 &= D'_9 - D'_{10*} e_2 \\
 D_{10} &= D'_{10} \\
 D_{11} &= D'_{11} \\
 D_{12} &= D'_{12}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Relacionando $\{D'\}$ com $\{D\}$, matricialmente, temos:

$$\{D\} = [TD] * \{D'\} \tag{4.10}$$

onde $[TD]$ é mostrada na fig. 4.4.

(4.3), vem: Substituindo as equações (4.8) e (4.10) na equação

$$[TA] * \{A'\} = [SM] * [TD] * \{D'\}$$

∴

$$\{A'\} = [TA]^{-1} * [SM] * [TD] * \{D'\} \tag{4.11}$$

Identificando com a equação (4.6), vem:

$$[S_M'] = [TA]^{-1} * [S_M] * [TD] \tag{4.12}$$

$$[TD] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.4 - Matriz de transformação TD

Portanto, temos desenvolvida a matriz de rigidez para uma viga com os esforços agentes em um eixo axial qualquer $\overline{T'J'}$, e com eixos locais paralelos aos eixos baricêntricos principais (viga excêntrica). Deve-se notar que na resolução de um problema utilizando a matriz $[SM']$, teremos como resposta os esforços nodais e deslocamentos dos pontos I' e J' (fig.4.2) que podem ser transferidos para os pontos G_i, G_j ou T_i, T_j usando as equações (4.7) e (4.9).

Tomando para $[SM]$ a matriz da fig. 2.2, utilizando-se as matrizes $[TA]$ e $[TD]$ desenvolvidas e fazendo - se os cálculos propostos na equação (4.12), chegamos à forma de $[SM']$, mostrada na fig. 4.5.

$$[SM]' =$$

1	$\frac{EA_x}{L}$																		
2	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$																	
3	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$																
4	0	$\frac{12EI_z}{L^3} \epsilon_1$	$\frac{12EI_y}{L^3} \epsilon_2$	α															
5	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_1$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	$\frac{6EI_z}{L^2} \epsilon_2$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{4EI_y}{L}$														
6	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_2$	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \epsilon_1$	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{4EI_z}{L}$														
7	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1$	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_2$	$\frac{EA_x}{L}$												
8	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	$-\frac{12EI_y}{L^3} \epsilon_1$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_x}{L^3}$											
9	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	$\frac{12EI_z}{L^3} \epsilon_2$	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_x}{L^3}$										
10	0	$-\frac{12EI_z}{L^3} \epsilon_1$	$\frac{12EI_y}{L^3} \epsilon_2$	$-\alpha$	$-\frac{6EI_y}{L^2} \epsilon_2$	$-\frac{6EI_z}{L^2} \epsilon_1$	0	$\frac{12EI_x}{L^3} \epsilon_1$	$-\frac{12EI_x}{L^3} \epsilon_2$	α									
11	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	$-\frac{6EI_z}{L^2} \epsilon_2$	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{2EI_y}{L}$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2$	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_1$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	$-\frac{6EI_z}{L^2} \epsilon_2$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{4EI_y}{L}$								
12	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_2$	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \epsilon_1$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{2EI_z}{L}$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2$	$\frac{EA_x}{L} \epsilon_2$	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2} \epsilon_1$	$-\frac{EA_x}{L} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{4EI_z}{L}$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12							

SIMÉTRICA

FIG. 4.5 - Matriz de Rigidez de uma viga, para eixos locais, centrados em uma posição arbitrária da secção, mas paralelos aos eixos baricêntricos principais.

Alguns exemplos de excentricidade para reforços de chapeamento são mostrados na fig. 4.6.

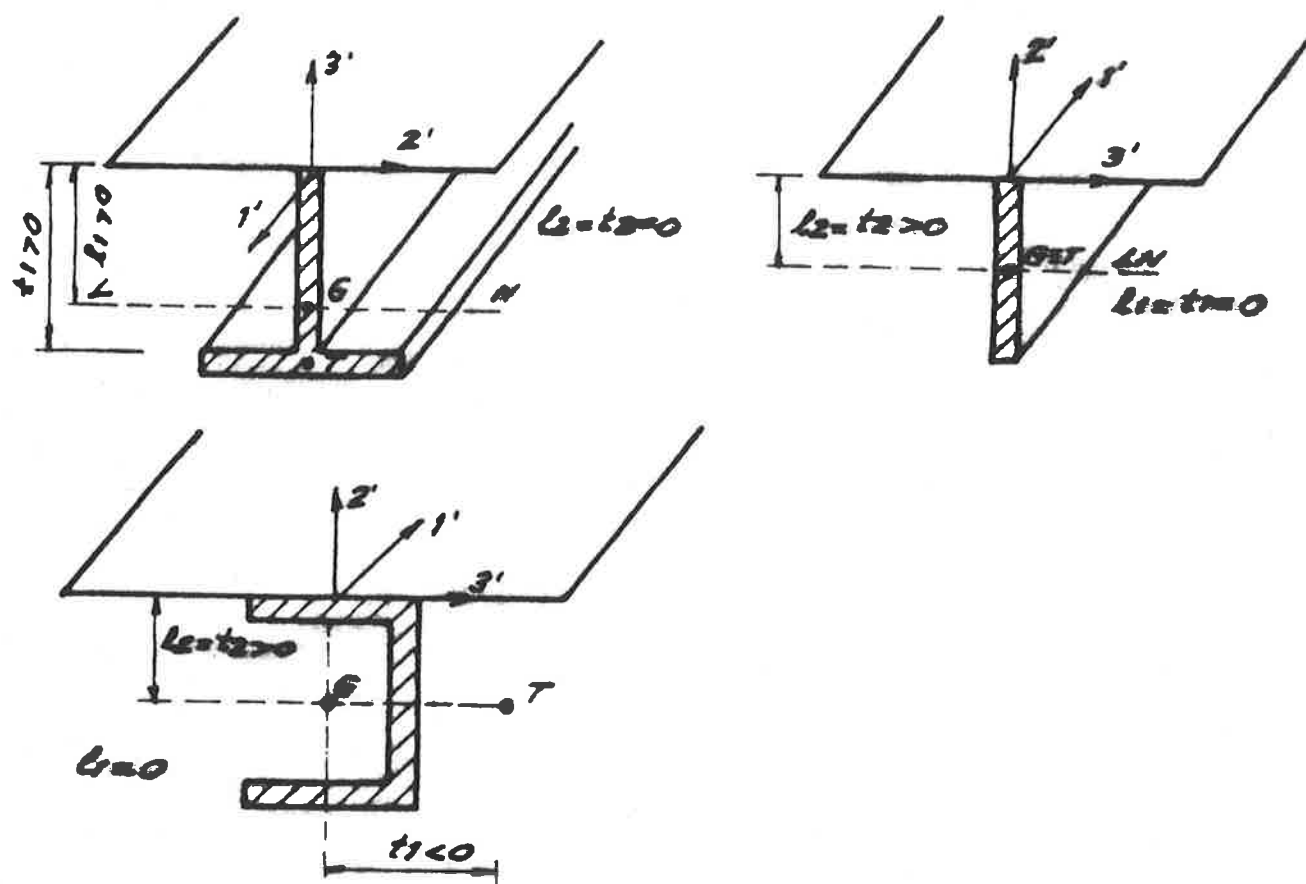


Fig. 4.6 Excentricidade para alguns reforços

No caso de considerar-se a deformação por força cortante, basta acrescentar os termos correspondentes à matriz $[SM']$ (7).

4.2 Novo modelo proposto

Como foi exposto, existem, dentro da análise matricial, duas formas principais de abordar o problema da "estrutura tipicamente naval" : através da idealização por estruturas reticuladas (que é relativamente simples e barata, mas com muitas limitações), ou através da divisão em elementos finitos, que é um modelo mais elaborado e geralmente muito caro. Propõe-se agora o desenvolvimento de um novo modelo que, utilizando as características próprias dos chapeamentos reforçados, preencha a grande distancia existente entre esses dois métodos, contornando suas deficiências, como a seguir se discute.

- a) Abandona-se do modelo de estruturas reticuladas o conceito de largura efetiva, tantas vezes não aplicável, bem como as hipóteses sobre a distribuição de cargas sobre as vigas idealizadas, evitando-se também o "corte" do chapeamento e suas implicações.
- b) Utiliza-se um modelo que seja mais barato que uma idealização completa por elementos finitos, e tão ou mais confiável, tomando vantagem das propriedades específicas da "estrutura tipicamente naval".

A introdução mais didática que pode ser dada ao modelo é dizer-se que ele vai analisar a estrutura de um navio "como ela realmente é", isto é, vigas soldadas a um chapeamento. Portanto, visa-se a interação de dois elementos apresentados no presente trabalho: o elemento de viga excêntrica e o elemento misto de placa em flexão e estado plano de tensão.

4.3 Particularidades do modelo viga + placa

Várias particularidades sobre tal interação podem

ser enumeradas. As mais características, em nosso entender, são as que se discutem a seguir.

- a) Como pode ser visto com tal modelo tenta-se aliar uma teoria que pode ser considerada exata (estruturas reticuladas) com uma teoria aproximada (método dos elementos finitos). Logicamente, tal modelo no seu todo formará também uma teoria aproximada.
- b) No caso deste modelo as cargas agentes nos enrijecedores não estarão aplicadas de modo tal a que se possa utilizar diretamente a matriz de rigidez $[SM]$, apresentada na fig. 2.2, para os elementos de viga.

Na fig. 4.7 está esquematizado o funcionamento conjunto de uma viga flangeada que se liga a uma placa, a qual recebe, por exemplo, um carregamento distribuído de pressão. A transmissão dos esforços entre placa e viga é feita na linha de contato FF' (fig. 4.7), por cisalhamento e esforço transversal, e portanto fora do eixo EV da viga isolada.

Daí, a matriz de rigidez a ser utilizada na análise é aquela calculada para uma viga excêntrica que possua uma excentricidade e e t (fig. 4.1). Tal matriz $[SM']$ pode ser retirada da fig. 4.5.

- c) A finalidade principal do novo modelo é evitar a divisão em elementos finitos das almas e flanges dos reforços do chapeamento, os quais, de forma geral, tem revelado um comportamento típico de vigas, através da variação linear de deformações nas almas e podendo, portanto, ser associados a vigas excêntricas.

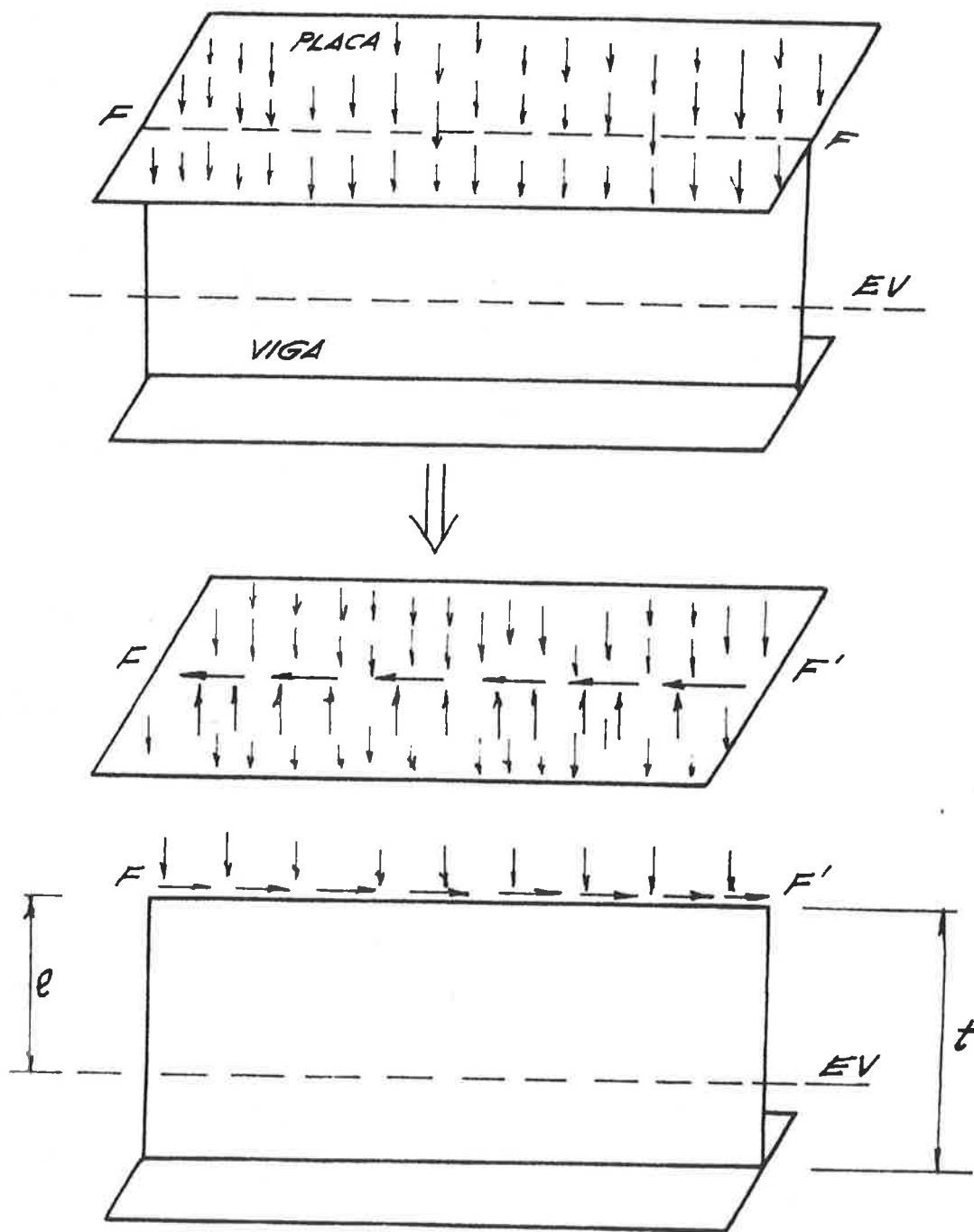


Fig. 4.7 - Interação placa + viga

Como se vê na fig. 4.8, toda a malha de elementos finitos que compõe o reforço é substituída por uma "linha" que vai representar a viga excêntrica. Fisicamente, está-se utilizando o conceito de "super elemento" (na fig. 4.8 o "segmento" substitui toda a região enegrecida) para a viga, amplamente justificável pela característica repetitiva de per

fís na "estrutura tipicamente naval". Fazendo-se esta substituição de uma malha para uma viga excêntrica para todos os reforços, pode-se sentir a grande economia, seja em tempo de processamento e análise de resultados como na mão de obra na preparação de dados.

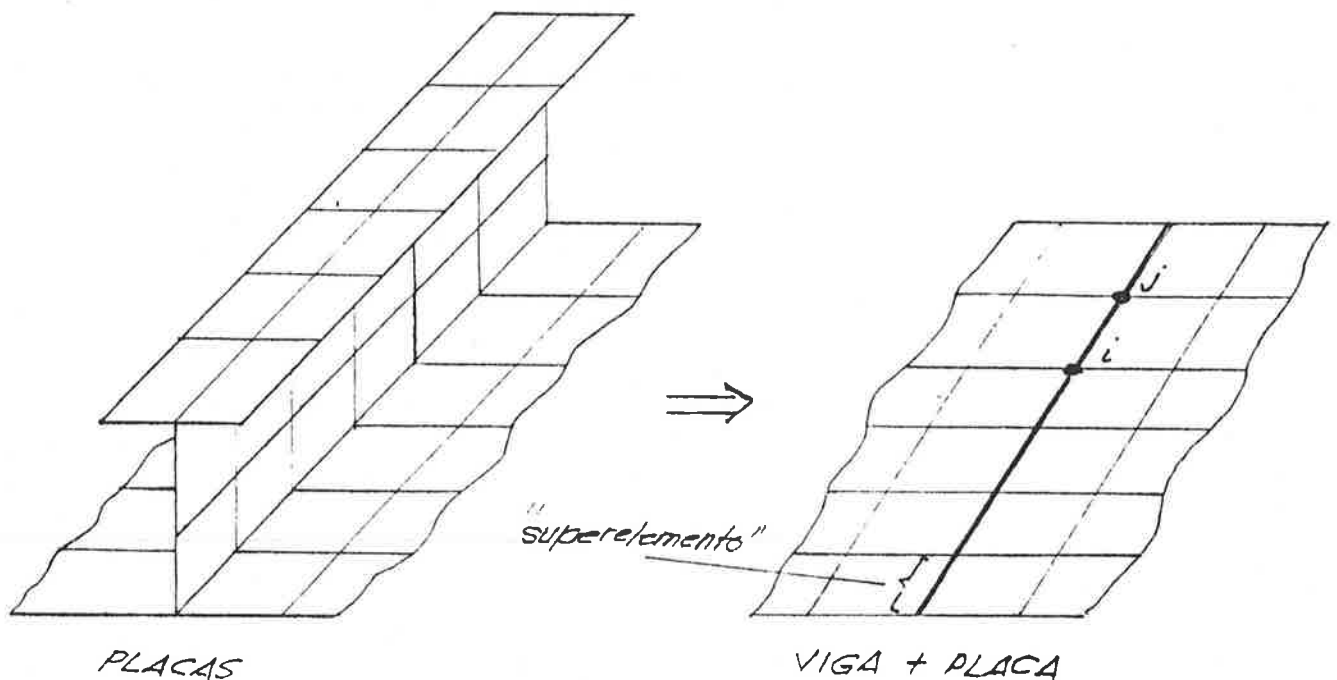


Fig. 4.8 Substituição feita pelo modelo viga + placa

- d) Conforme se mostrou em d do sub-ítem 2.3.1, existe uma grande diferença entre o método das estruturas reticuladas e o método dos elementos finitos quanto ao tratamento do carregamento não nodal. Como aqui a carga será de pressão sobre os elementos finitos de placa, encarregando-se eles de "distribuí-la" pelas vigas, evitando-se assim as hipóteses sobre a distribuição das cargas (ítem 1.4), teremos no final a mesma aproximação do método dos elementos finitos quanto às cargas (chamada de "real aproximação do método dos elementos finitos"), como pode ser deduzido do que se segue.

Vê-se na fig. 4.7 que, temos, na realidade, uma distribuição de forças ao longo de FF' , o que e quivale a existir um carregamento não nodal tanto nas vigas como aos elementos finitos de placa, de valor desconhecido.

Tal carregamento deverá gerar forças nodais equivalentes nas placas (cujo valor dependerá da forma e tamanho do elemento finito, sua matriz de deslocamento $\{N\}$, etc..., de maneira análoga à expressa pela equação (2.9)) e nas vigas (matriz $\{AM_0\}$ no sub-ítem 2.2.3 ou $\{AM_0'\}$ para o caso de viga excêntrica). Sendo este carregamento, a priori desconhecido, gerando forças nodais equivalentes também desconhecidas, supor-se-á aqui, que os valores destas forças num mesmo nó (F ou F'), são iguais, sejam elas calculadas para as vigas (matriz $\{AM_0'\}$) ou para as placas, mas de sinal contrário, acarretando resultantes nulas no nó. Com isso, os únicos esforços agentes nos nós F e F' são aqueles gerados pelo carregamento distribuído de pressão, sobre os elementos finitos de placa, calculados pela equação (2.9).

O conceito exposto acima é amplamente utilizado na própria teoria dos elementos finitos. Quando se diz que "os elementos são considerados como tendo interação apenas em um número discreto de pontos (nós),..." está-se desprezando o efeito do contato nas linhas de fronteira. Somente os testes numéricos do modelo poderão dizer quão satisfatória é esta suposição.

Para efeito de cálculo das tensões nos elementos finitos de placa, o fato acima não altera em nada ao que até aqui se tem visto. As tensões não dependem da distribuição das cargas no interior dos diversos elementos, mas apenas dos valores

finais dos esforços nodais equivalentes. O problema ocorre quando da determinação das tensões nos elementos de viga.

Deveríamos, para o cálculo dos esforços resultantes nos nós das vigas, aplicar a equação (2.5), que no caso de viga excêntrica fica:

$$\{AM^i\} = \{AM_o^i\} + \{SM^i\} * \{DM^i\} \quad (4.13)$$

onde $\{DM^i\}$ é calculada a partir dos esforços determinados conforme se expõe acima. Acontece que nosso modelo não é capaz de determinar o valor exato do vetor $\{AM_o^i\}$.

No modelo matemático a ser desenvolvido adotar-se-á o seguinte desenvolvimento, de modo a contornar este problema:

- numa primeira etapa o programa SAP-IV analisa a estrutura de placas e vigas, tomando conhecimento apenas das cargas laterais sobre as placas, e calculando os esforços $\{AM^i\}$ da equação (4.13) com o vetor $\{AM_o^i\}$ nulo, daí resultando:

$$\{AM^{i*}\} = \{SM^i\} * \{DM^i\} \quad (4.14)$$

O asterisco no vetor $\{AM^{i*}\}$ destina-se a diferenciá-lo do correto vetor $\{AM^i\}$, dado pela equação (4.13);

- numa segunda etapa é a partir do vetor $\{AM^{i*}\}$, que deveríamos calcular as tensões. Para esta finalidade, no sub-ítem 4.4.2, será engendrado um conveniente vetor auxiliar $\{AM_o^{i*}\}$, obtido a partir do próprio $\{AM^{i*}\}$ e de certas hipóteses simplificadoras. Com o vetor $\{AM_o^{i*}\}$ será calculado o vetor $\{AM^{i**}\}$, através da relação (4.15), e este finalmente utilizado para o cá

culo das tensões nas vigas, em alguns casos específicos.

$$\{AM^{**}\} = \{AM^*_0\} + \text{certa partição da matriz } \{AM^*\}$$

ou

$$\begin{bmatrix} AM^{**}_1 \\ AM^{**}_5 \\ AM^{**}_6 \\ AM^{**}_7 \\ AM^{**}_{11} \\ AM^{**}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AM^*_{01} \\ AM^*_{05} \\ AM^*_{06} \\ AM^*_{07} \\ AM^*_{011} \\ AM^*_{012} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AM^*_1 \\ AM^*_5 \\ AM^*_6 \\ AM^*_7 \\ AM^*_{11} \\ AM^*_{12} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Os elementos que constam da matriz $\{AM^{**}\}$ são os únicos que vão nos interessar.

Os elementos do vetor $\{AM^*_0\}$ serão assim compostos:

- AM^*_{01} e AM^*_{07} serão engendrados, para alguns casos específicos;
- AM^*_{05} , AM^*_{06} , AM^{**}_{011} e AM^*_{012} serão considerados de valor desprezível (e portanto feitos nulos), para a finalidade de calcular as tensões nas vigas;
- AM^*_{04} e AM^*_{010} não serão considerados na nossa formulação, pois não calcularemos a tensão de cisalhamento devido à torção, não sendo necessários, portanto, os respectivos elementos na matriz $\{AM^{**}\}$;

- AM'^*_{02} , AM'^*_{03} , AM'^*_{08} e AM'^*_{09} não serão considerados na nossa formulação, pois não calcularemos as tensões de cisalhamento devido à força cortante nas secções extremas das vigas.

4.4 Cálculo das tensões normais nas vigas

Após a análise estrutural ou durante a própria corrida do programa, nossa finalidade principal consiste no cálculo das tensões nos elementos. Sobre tais procedimentos passamos a dissertar agora.

Como visto em d do ítem 4.3, não conhecemos a matriz $\{AM\}$ para as vigas, ficando o cálculo dos esforços nos nós, pelo programa, como mostrado na equação (4.14). Por outro lado, conforme se vê na fig. 4.7, a matriz $\{AM_0\}$ ($\{AM'_0\}$ para viga excêntricas) deveria ter, entre outros, os elementos AM'_{01} e AM'_{07} não nulos (ver fig. 4.5). Aplicando a equação (4.14), tomando AM'^*_1 , AM'^*_7 , $[SM']$ e $\{DM'\}$ temos:

$$P = AM'^*_1 = -AM'^*_7 = \frac{EA_x}{L} (DM'_1 - DM'_7) + \frac{EA_x}{L} e_1 (DM'_{11} - DM'_{15}) + \frac{EA_x}{L} e_2 (DM'_{16} - DM'_{12}) \quad (4.16)$$

Portanto, como mostrado na fig. 4.9, teremos como resultado:

$$P_1 = -P_2 \quad (4.17)$$

onde:

P_1 - força normal no ponto I'

P_2 - força normal no ponto J'

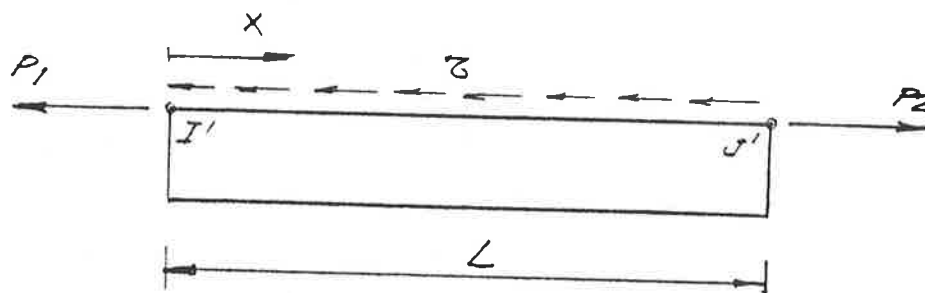


Fig. 4.9 - Esforço normal de contorno

Caso conhecessemos $\{AM'_{0}\}$, calculado a partir da distribuição de força "normal" da fig. 4.9 chegaríamos, por equilíbrio, a:

$$P_2 = P_1 + \int_L Z \, dx \quad (4.18)$$

Vamos fazer a hipótese que a distribuição de Z é niforme ao longo do vão da viga (chamaremos esta hipótese de: 1a. hipótese para cálculo das tensões). Nestas condições a variação do esforço normal na viga é linear, conforme mostrado na fig. 4.10. Sendo Z_M o valor do esforço normal distribuído teremos (fig. 4.10), usando a nomenclatura de d do ítem 4.3:

$$AM'_{01} = AM'_{07} = \frac{Z_M * L}{2} \quad (4.19)$$

$$AM'_{1}^{**} = P_1 = AM'_{1}^* + \frac{Z_M * L}{2} = P + \frac{Z_M * L}{2} \quad (4.20)$$

$$AM'_{7}^{**} = P_2 = AM'_{7}^* + \frac{Z_M * L}{2} = -P + \frac{Z_M * L}{2} \quad (4.21)$$

onde P é dado pela equação (4.16). Como se nota pelas equa

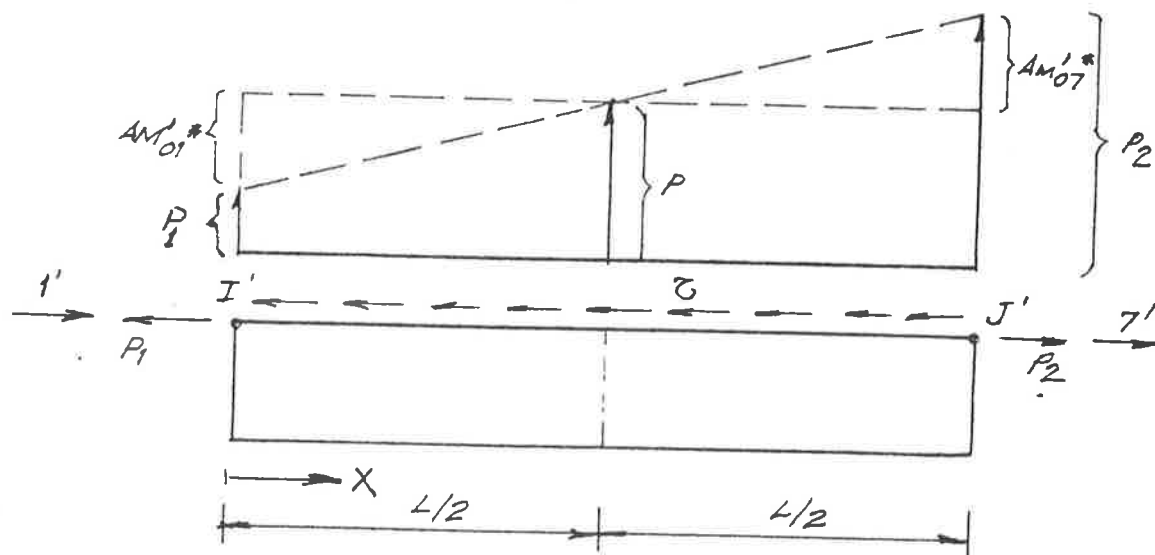


Fig. 4.10 - Distribuição do esforço normal ao longo da viga.

ções (4.20) e (4.21) AM'_{01} é também o valor do esforço normal a $x = L/2$ (fig. 4.10). Tomando os valores em módulo, temos:

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (4.22)$$

4.4.1 1ª Forma: a partir das tensões nas placas

Vamos definir na secção transversal da viga excêntrica dois pontos característicos (fig. 4.11):

Ponto 1 - ponto de contacto com a chapa. Tal ponto será chamado: *ponto da flange superior ou ponto na chapa.*

Ponto 2 - ponto da alma mais afastado do ponto 1. Tal ponto será chamado: *ponto da flange*

inferior. O ponto 2 pode ser também, qual quer outro ponto da secção transversal onde se quer saber a tensão.

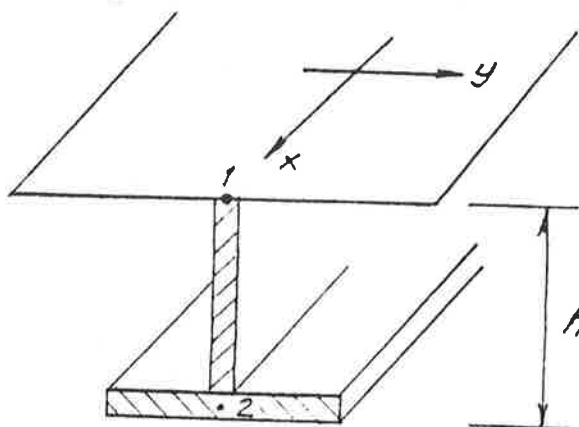


Fig. 4.11 - Ponto 1 e 2 da secção da viga excêntrica

Para o Ponto 1, seguindo o mesmo raciocínio do ítem 1.3., podemos calcular a tensão normal a partir da tensão na chapa, usando a equação (1.1), isto é:

$$\sigma_{1xv} = \sigma_{1xp} - \nu * \sigma_{1yp} \quad (4.23)$$

onde:

σ_{1xv} - tensão normal na viga, no ponto 1, na direção x (fig. 4.11).

σ_{1xp} - tensão normal no ponto da chapa em contacto com a viga (ponto 1) na direção x da barra.

σ_{1yp} - idem para y

Tendo a força normal P na secção da viga considerada (para o meio do vão, usa-se a própria saída da análise, dada pela equação (4.16), como foi mostrado no desenvolvi -

mento feito no ítem 4.4) podemos escrever:

$$\int_A \sigma_{xv} dA = P \quad (4.24)$$

onde (fig. 4.12 como exemplo para perfil T):

σ_{xv} - distribuição de tensões normais ao longo da secção transversal.

A - área da secção transversal

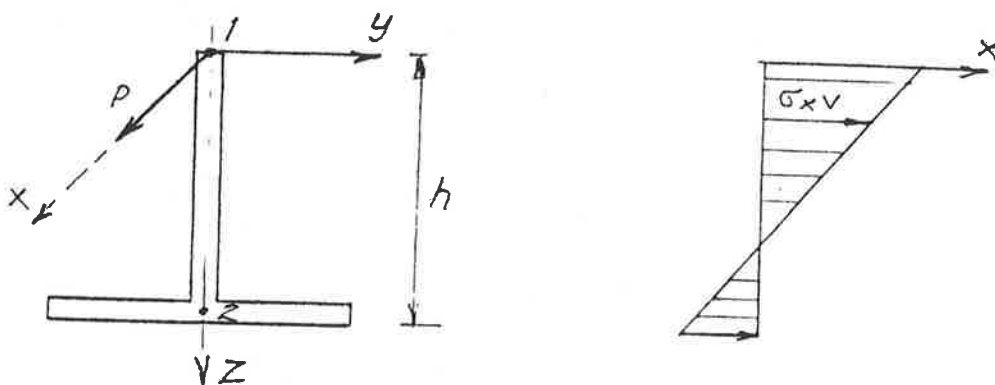


Fig. 4.12 - Exemplo para perfil T

Impondo a distribuição linear para σ_{xv} , podemos usando as equações (4.23) e (4.24) calcular a tensão σ_{2xv} , isto é, tensão normal na viga, no ponto 2, na direção x.

Como exemplo utilizemos o mesmo perfil T da fig. 4.12, com a distribuição de tensões σ_{xv} esquematizada na fig. 4.13, sendo ainda:

t - espessura da alma

Af - área da flange inferior

a, h - dados na fig. 4.13

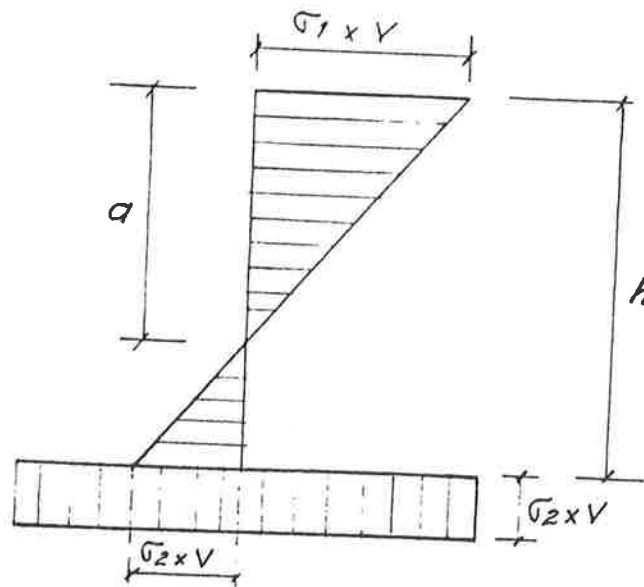


Fig. 4.13 Distribuição de tensões normais para perfil T

Por triângulos semelhantes temos:

$$\sigma_{2xv} = - \frac{\sigma_{1xv}}{a} (h - a) \quad (4.25)$$

Aplicando a equação (4.24) vem:

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{\sigma_{1xv} * a * t}{2} - \frac{\sigma_{2xv} * (h-a) * t}{2} - Af * \sigma_{2xv} = P$$

Usando (4.25) vem:

$$P = \frac{\sigma_{1xv} * a * t}{2} - \frac{\sigma_{1xv}}{2a} (h-a)^2 * t - Af * \frac{\sigma_{1xv}}{a} * (h-a)$$

portanto:

$$a = \frac{h^2 * t/2 + Af * h}{ht + Af - P/\sigma_{1xv}} \quad (4.26)$$

Donde, para calcular σ_{2xv} , basta usar as equações (4.25) e (4.26).

O procedimento geral, em suma, consiste em usar as equações (4.23) e (4.24) para calcular σ_{1xv} e σ_{2xv} . Deve-se notar que temos, no caso geral, dois elementos finitos de placa ligados a uma viga excêntrica (fig. 4.14). Pode-se usar o procedimento de calcular a média entre as tensões σ_{ixp} para os dois elementos adjacentes à viga, fazendo o mesmo para σ_{iyp} , ao aplicar a equação (4.23).

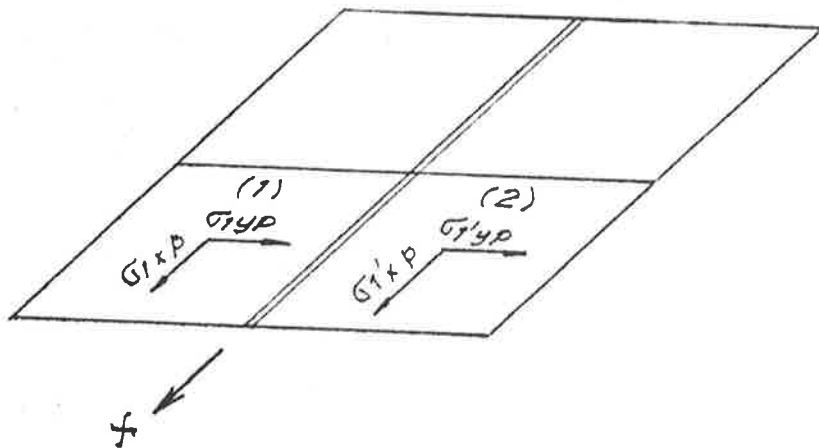


Fig. 4.14 - Elementos adjacentes à viga excêntrica

Tais tensões nos elementos de placa são dadas no centro do elemento. Portanto, é conveniente ao utilizar a equação (4.24) usar a própria saída da análise (equação 4.16) e teremos calculadas as tensões normais somente no meio do vão de cada elemento de viga excêntrica.

Esta 1ª forma de cálculo, além da limitação de só termos as tensões no meio da viga, não é conveniente "computacionalmente", isto é, presta-se bem para um cálculo manual das tensões, mas não convém para um cálculo automático através de pós-processadores. A cada viga deverão estar "associados" os dois elementos de placa que formam sua "flange superior". Isto pode ser conseguido seja aumentando os dados de

entrada como aumentando o tempo de computação. Torna-se pois conveniente tentar uma 2ª forma para realizar o cálculo, que inclusive seja capaz de calcular as tensões normais nos extremos da viga excêntrica.

4.4.2 2ª Forma: por equivalência estática

A saída do programa nos fornece para cada viga o valor da força normal no meio do vão (P) bem como os momentos fletores nos nós I' e J' (fig. 4.2) em relação a dois eixos paralelos aos eixos centrais. Tomemos a variação de momento fletor como linear calculando-se assim seu valor no meio do vão como sendo a média dos extremos. Completando-se esta afirmação, podemos dizer que os valores finais dos momentos fletores nos nós I' e J' serão considerados como aqueles calculados diretamente pela equação (4.14), ignorando-se, portanto, a contribuição dos termos AM'_{05} , AM'_{06} , AM'_{011} e AM'_{012} (chamaremos esta hipótese de 2ª hipótese para cálculo de tensões).

Na Fig. 4.15 temos:

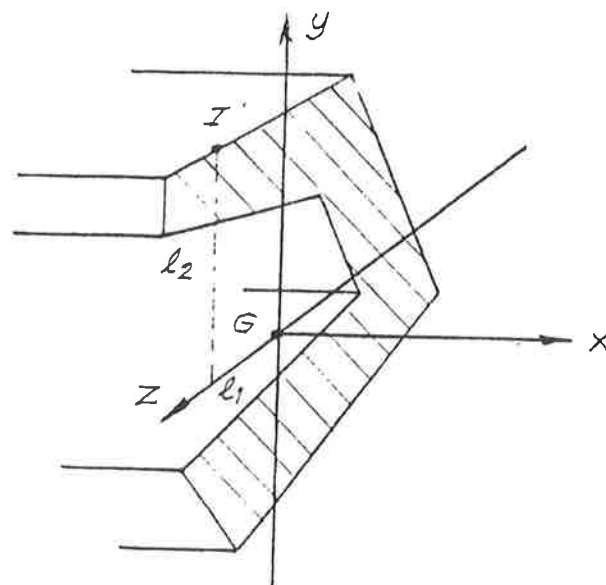


Fig. 4.15 - Secção transversal no meio do vão

- secção transversal no meio do vão
- G : centro de gravidade da secção
- y, z : eixos centrais
- I' : idem à fig. 4.2
- e₁, e₂ : excentricidades de I' em relação a G
- P : resultado da análise para a força normal (sinal de acordo com x)
- M_y : momento fletor em torno de y na secção média (sinal de acordo com a regra da mão direita para y)
- M_z : idem para z
- A : área da secção transversal

Fazendo a transferência dos esforços de I' para o ponto G, qualquer ponto i da secção, de coordenadas y_i e z_i, terá a tensão normal dada por:

$$\sigma_{xi} = \frac{P}{A} - \frac{Mz - P * e_2}{J_z / y_i} + \frac{My + P * e_1}{J_y / z_i} \quad (4.27)$$

Com tal fórmula conseguimos a tensão normal em qualquer ponto da secção transversal média da viga.

Para calcular as tensões normais nos extremos da viga deveríamos saber somente os valores reais de P₁ e P₂, onde:

P₁ - força normal no ponto I' (fig. 4.2)

P₂ - força normal no ponto J' (fig. 4.2)

pois, os valores dos momentos fletores nos nós I' e J' se-

rão tomados diretamente do programa (eq. 4.14). Adotando-se as direções dadas pela fig. 4.16 como positivas, vem:

M_1 - momento em I' , em torno de z'

M_2 - momento em J' , em torno de z'

Vamos tentar resolver o problema para o caso de uma viga com uma única excentricidade (por exemplo, ainda, a fig. 4.16, onde temos $e_1 = t_1 = 0$, $e_2 \neq 0$ e $t_2 \neq 0$), representando a linha EV o traço da superfície neutra à flexão pura de uma viga, quando isolada do chapeamento, onde x' , y' e z' estão de acordo com a fig. 4.2.

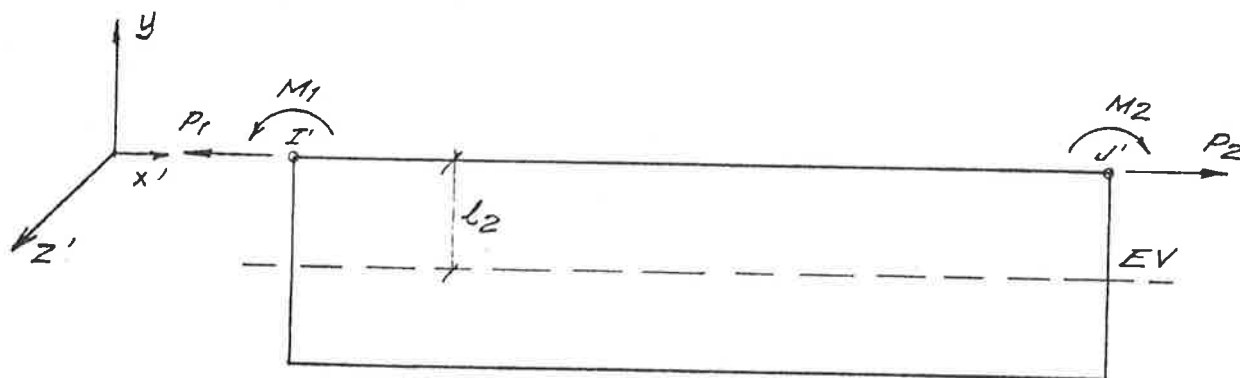


Fig. 4.16 - Viga com excentricidade única

Sob estes esforços a viga toma a forma fletida da fig. 4.17, onde temos:

σ_0 - traço da superfície neutra (quando a viga está sob os esforços da fig. 4.16)

YI' - distância de σ_0 ao ponto I'

YJ' - distância de σ_0 ao ponto J'

YA' - distância de σ_0 ao ponto A' qualquer (segmento $A'-A$)

ρ_A - raio de curvatura de θ no ponto A qualquer

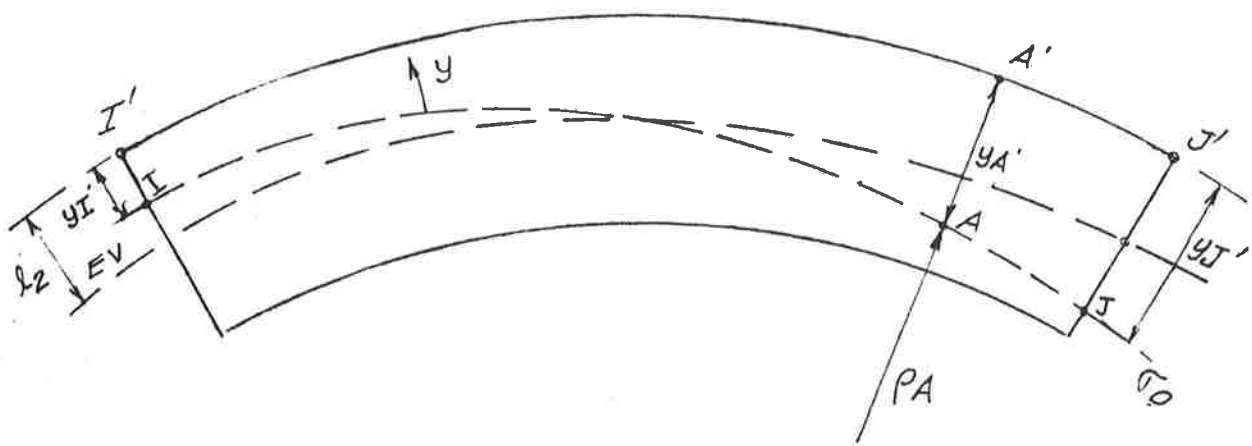


Fig. 4.17 - Viga excêntrica fletida

$$\epsilon_{xA} = y_{A'} / \rho_A \quad (4.28)$$

Para os pontos I' e J' teremos:

$$\epsilon_{xI'} = y_{I'} / \rho_I \quad (4.29)$$

$$\epsilon_{xJ'} = y_{J'} / \rho_J \quad (4.30)$$

Definamos:

$$M''_{A'} = \int_A y \sigma_x dA \quad (4.31)$$

onde:

A - área da seção transversal em A'

y - ordenada y com origem em σ_0 para cada seção (fig. 4.17)

σ_x - distribuição de tensões normais na seção

Substituindo na equação (4.31)

$$\sigma_x = E * \epsilon_x = E * y / \rho_A, \quad \text{temos:}$$

$$M''_{A'} = \frac{E}{\rho_A} \int_A y^2 dA$$

Definindo $I'_{A'} = \int_A y^2 dA$, vem:

$$M''_{A'} = \frac{EI'_{A'}}{\rho_A} \quad (4.32)$$

para os pontos I' e J' temos:

$$M''_{I'} = \frac{EI'_{I'}}{\rho_I} \quad (4.33)$$

$$M''_{J'} = \frac{EI'_{J'}}{\rho_J}$$

Eliminando ρ_I das equações (4.29) e (4.33) e ρ_J das equações (4.30) e (4.34) vem:

$$\frac{\epsilon_{xI'}}{y_{I'}} = \frac{M''_{I'}}{EI'_{I'}} \quad (4.35)$$

$$\frac{\epsilon_{xJ'}}{y_{J'}} = \frac{M''_{J'}}{EI'_{J'}} \quad (4.36)$$

Dividindo membro a membro vem:

$$\frac{\epsilon_{xI'}}{\epsilon_{xJ'}} = \frac{M''_{I'}}{M''_{J'}} * \frac{y_{I'}}{y_{J'}} * \frac{I'_{J'}}{I'_{I'}} \quad (4.37)$$

OBS: As restrições algébricas do desenvolvimento são analisadas em e, a seguir.

Usando a formulação (4.27), com a convenção da fig. 4.16, podemos escrever:

$$\sigma_{xI'} = E * \epsilon_{xI'} = \frac{P_1}{A} + \frac{M_1 + P_1 * e_2}{J_2 / e_2} \quad (4.38)$$

Chamado $W' = J_2 / e_2$, fazendo analogamente para o nó J' e substituindo a equação (4.38) em (4.37) vem:

$$\frac{\sigma_{xI'}}{\sigma_{xJ'}} = \frac{\frac{P_1}{A} + \frac{M_1 + P_1 * e_2}{W'}}{\frac{P_2}{A} + \frac{M_2 + P_2 * e_2}{W'}} = \frac{M''_{I'}}{M''_{J'}} * \frac{Y_{I'}}{Y_{J'}} * \frac{I''_J}{I''_I} \quad (4.39)$$

Vamos encontrar os valores de $M''_{I'}$ e $M''_{J'}$ para o caso de um perfil T (fig. 4.18) que terá na secção do nó I' uma distribuição de tensões σ_x (fig. 4.18, análoga à fig. 4.13);

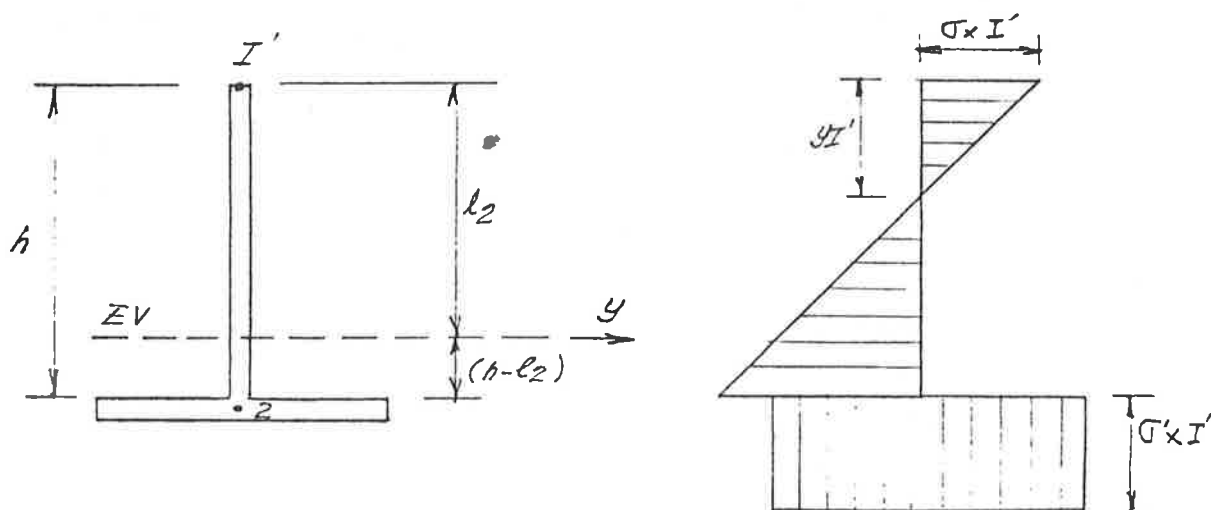


Fig. 4.18 Distribuição de tensões normais

onde:

σ_{x1}' - dada pela equação (4.38)

σ_{x1}' - tensão no ponto 2 (igual a tensão na flange)

$$\sigma_{x1}' = \frac{P_1}{A} - \frac{M_1 + P_1 * e_2}{J_z / (h - e_2)} \quad (4.40)$$

Chamemos $W'' = J_2 / (h - e_2)$

A distribuição σ_x pode portanto ser dividida em duas parcelas como mostrado na fig. 4.19.

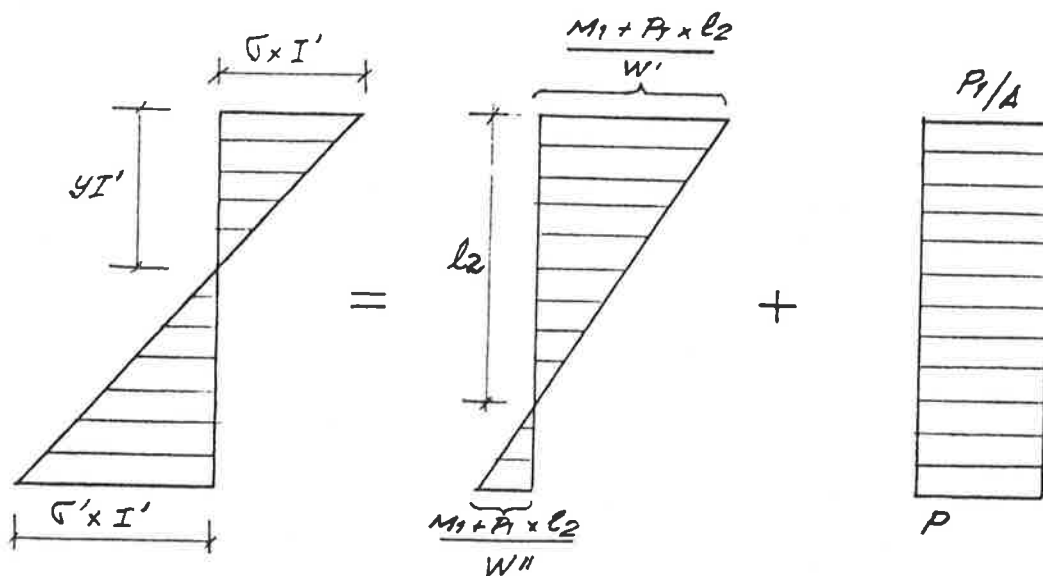


Fig. 4.19 - Decomposição das tensões normais

O cálculo de M''_{11} , conforme a equação (4.31), da fig. 4.19 nos dá

$$M''_{11} = \sigma_{x1}' * \frac{y I'}{2} * t * \frac{2 y I'}{3} - \sigma_{x1}' * \frac{(h - y I')}{2} * t * \frac{2}{3} (h - y I') +$$

$$- \sigma_{x1}' * A f * (h - y I')$$

Fazendo analogamente para $M''_{J'}$, e substituindo seus valores na equação (4.39), vem:

$$\frac{\sigma_{xI'}}{\sigma_{xJ'}} = \frac{\sigma_{xI'} * \gamma_{I'}^2 * t/3 - \sigma_{xI'} * [(h-\gamma_{I'})^2 * t/3 + Af(h-\gamma_{I'})]}{\sigma_{xJ'} * \gamma_{J'}^2 * t/3 - \sigma_{xJ'} * [(h-\gamma_{J'})^2 * t/3 + Af(h-\gamma_{J'})]} * \frac{\gamma_{I'}}{\gamma_{J'}} * \frac{I'_{J'}}{I'_{I'}} \quad (4.41)$$

onde:

Af - área da flange

t - espessura da alma

Vamos fazer agora a hipótese que $\gamma_{I'} = \gamma_{J'} = \gamma$ (chamaremos esta hipótese de 3a. hipótese para cálculo das tensões), o que implica em termos $I'_{I'} = I'_{J'}$. Portanto a equação (4.41) fica:

$$\begin{aligned} \sigma_{xI'} * \sigma_{xJ'} * \gamma^2 * t + \sigma_{xI'} * (-\sigma_{xJ'}) * [(h-\gamma)^2 * \frac{t}{3} + Af(h-\gamma)] &= \\ = \sigma_{xJ'} * \sigma_{xI'} * \gamma^2 * \frac{t}{3} + \sigma_{xJ'} * (-\sigma_{xI'}) * [(h-\gamma)^2 * \frac{t}{3} + Af(h-\gamma)] \end{aligned}$$

portanto, simplificando:

$$\sigma_{xI'} * \sigma_{xJ'} = \sigma_{xJ'} * \sigma_{xI'}$$

Substituindo os valores das tensões dadas pelas equações precedentes vem:

$$\left(\frac{P_1}{A} + \frac{M_1 + P_1 * e_2}{W'}\right) \left(\frac{P_2}{A} - \frac{M_2 + P_2 * e_2}{W''}\right) = \left(\frac{P_2}{A} + \frac{M_2 + P_2 * e_2}{W'}\right) \left(\frac{P_1}{A} - \frac{M_1 + P_1 * e_2}{W''}\right)$$

multiplicando vem:

$$\begin{aligned} & \frac{P_1}{A} * \frac{P_2}{A} - \frac{P_1}{A} * \frac{M_2}{W''} - \frac{P_1}{A} * \frac{P_2 * e_2}{W''} + \frac{M_1}{W'} * \frac{P_2}{A} + \frac{P_1 * e_2}{W'} * \frac{P_2}{A} - \frac{M_1}{W'} * \frac{M_2}{W''} - \frac{M_1}{W'} * \frac{P_2 * e_2}{W''} \\ & - \frac{P_1 * e_2}{W'} * \frac{M_2}{W''} - \frac{P_1 * e_2}{W'} * \frac{P_2 * e_2}{W''} = \frac{P_2}{A} * \frac{P_1}{A} - \frac{P_2}{A} * \frac{M_1}{W''} - \frac{P_2}{A} * \frac{P_1 * e_2}{W''} + \\ & + \frac{M_2}{W'} * \frac{P_1}{A} + \frac{P_2 * e_2}{W'} * \frac{P_1}{A} - \frac{M_2}{W'} * \frac{M_1}{W''} - \frac{M_2}{W'} * \frac{P_1 * e_2}{W''} - \frac{P_2 * e_2}{W'} * \frac{M_1}{W''} - \frac{P_2 * e_2}{W'} * \frac{P_1 * e_2}{W''} \end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais dos dois membros temos:

$$- \frac{P_1 M_2}{W''} + \frac{M_1 P_2}{W'} = - \frac{P_2 M_1}{W''} + \frac{M_2 P_1}{W'}$$

$$\therefore \frac{P_2 M_1}{W'} + \frac{P_2 M_1}{W''} = \frac{P_1 M_2}{W'} + \frac{P_1 M_2}{W''}$$

$$\therefore P_2 M_1 \left(\frac{1}{W'} + \frac{1}{W''} \right) = P_1 M_2 \left(\frac{1}{W'} + \frac{1}{W''} \right)$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

$$\therefore P_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (P_1 + P_2)$$

Usando agora a equação (4.22), que subentende todo o desenvolvimento apresentado no ítem 4.4 vem:

$$P_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} * (2 P) \quad (4.42)$$

e analogamente para P_2 vem:

$$P_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} * (2 P) \quad (4.43)$$

Portanto utilizando as equações (4.42) e (4.43) podemos calcular as tensões normais nos extremos das vigas, já que o valor de P consta da saída do programa. Alguns aspectos importantes devem ser citados sobre desenvolvimento precedente:

- como se nota esta é uma forma indireta de encontrar os valores de AM'_{07} e AM'_{01} , pois são calculados os novos AM'_1 e AM'_7 (P_1 e P_2), diferentes daqueles simplesmente dados pela equação (4.16), que não leva em conta a matriz $\{AM_0\}$;
- a dedução realizada, como exemplo, para um perfil T pode ser estendida a outros tipos de secções transversais, com uma única excentricidade, valendo ainda as equações (4.42) e (4.43);
- a hipótese feita de que $YI' = YJ'$ é aceitável para o caso de flexão, onde a variação da largura efetiva da chapa colaborante ao longo do vão da viga seja pequena.

Quando temos pressão no chapeamento aliada a um esforço normal no conjunto viga + placa (flexão composta, fig. 4.20), vai realmente existir uma diferença entre YI' e YJ' para um dado elemento, que será maior quanto mais

relevante for a força normal.

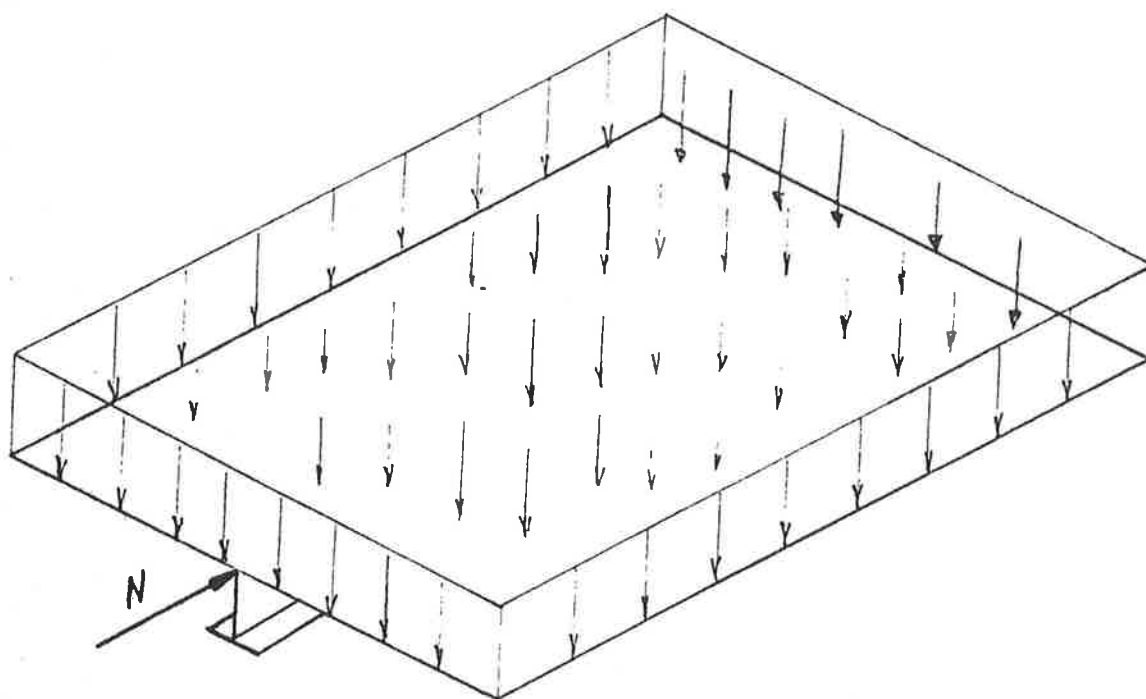


Fig. 4.20 Viga e placa sob esforço de pressão e esforço normal.

Como outro exemplo, temos o fundo do navio que recebe a pressão d'água e ainda um esforço de compressão proveniente da pressão no costado (fig. 4.21). Nestes casos de estruturas navais o esforço de flexão é, em geral, bem mais preponderante que o esforço normal, po

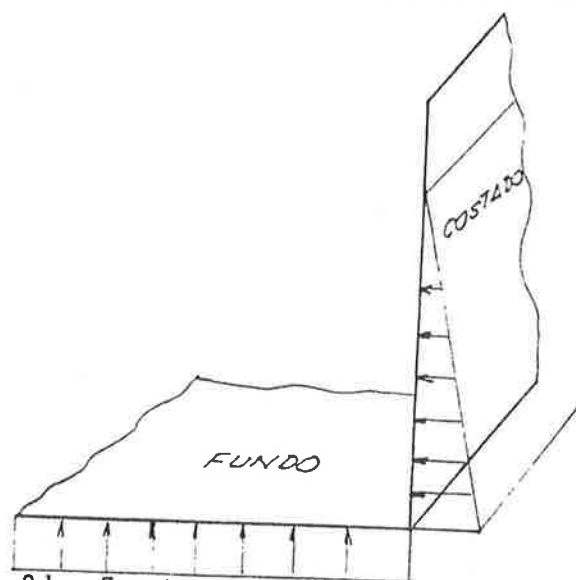


Fig. 4.21 Fundo sob flexão e compressão

dendo-se usar a 3a. hipótese para cálculo das tensões satisfatoriamente. Recomenda-se, no entanto, estudar cada caso em particular, analisando a validade do uso das equações (4.42) e (4.43). A própria saída das tensões mostrará se está sendo satisfatória a aplicação das equações para o caso específico, como será visto nos testes realizados;

- d) quanto a perfis com dupla excentricidade poder - se-ã sempre usar a equação (4.27). Os esforços mais comuns em engenharia naval que apresentam duas excentricidades são os perfis L. Na fig. 4.22 mostra-se um corte típico de um chapeamento reforçado por perfis assimétricos L.

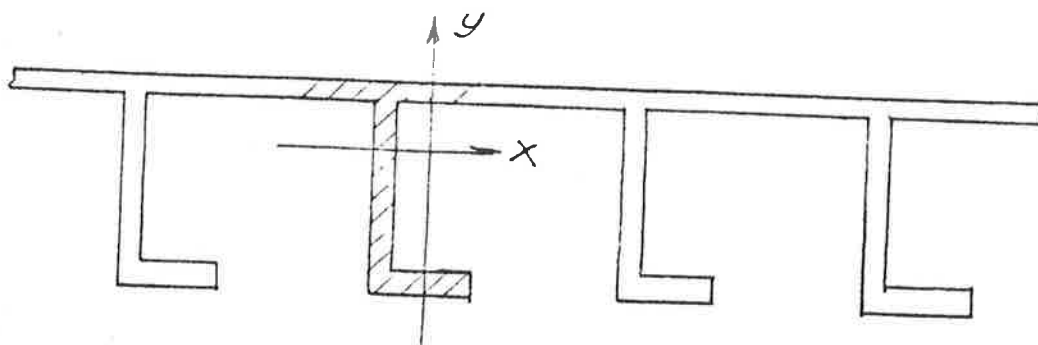


Fig. 4.22 Perfis L

O plano de carregamento é perpendicular ao chapeamento e, no cálculo das tensões nos perfis, é usual não fazer-se qualquer consideração sobre a posição do plano de flexão em relação aos eixos centrais de inércia da secção transversal. emprega-se para isso a expressão $\sigma = \frac{Mx}{J_x} y$, onde J_x é o momento de inércia em relação ao eixo baricêntrico paralelo ao chapeamento (fig. 4.22). Como se pode ver trata-se aqui de um problema de flexão oblíqua. No entanto, o modo simplificado de atacar o problema tem revelado bons resultados para os perfis encontrados comumente na engenharia naval, podendo-se usar aqui ainda as equações (4.42) e (4.43).

Tal assunto é discutido com mais detalhe na referência (21);

- e) as equações (4.42) e (4.43) não tem solução quando tivermos $M_1 = -M_2$. Outro problema ocorre quando tivermos $P = 0$, que implica em $P_1 = P_2 = 0$, que não necessariamente corresponde à realidade. Essas limitações advêm da forma como é feito o desenvolvimento matemático.

Passemos a chamar o uso da equação (4.27) como sendo a 2a. forma A e o uso das equações (4.42) e (4.43) como sendo a 2a. forma B.

4.5 Cálculo das tensões de cisalhamento nas vigas

4.4.1 1a. forma : a partir das tensões nas placas

Analogamente ao que foi feito na 1a. forma o cálculo das tensões normais, podemos calcular as tensões de cisalhamento na alma das vigas excêntricas.

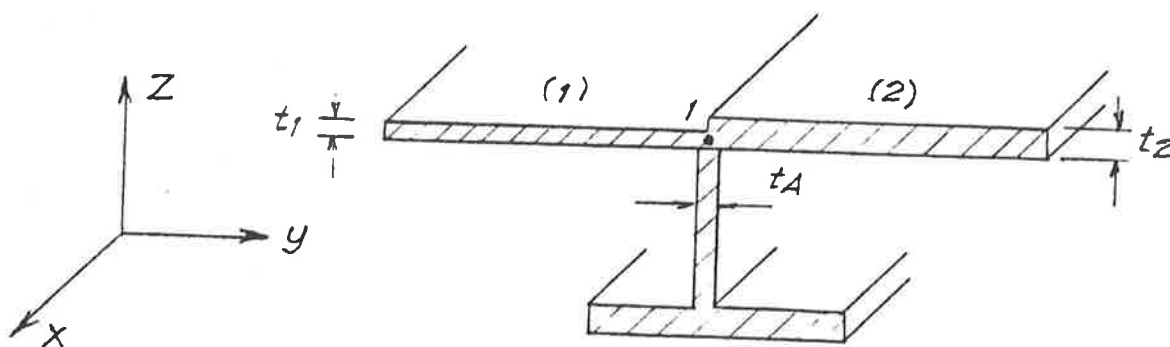


Fig. 4.23 - Tensão de cisalhamento nas vigas

Na fig. 4.23 está mostrada a viga excêntrica (com espessura t_A da alma) ligada aos dois elementos de placa

((1) e (2) com espessuras t_1 e t_2). Sejam:

τ_{p1} - tensão de cisalhamento no elemento (1) agente no plano yz na direção y .

τ_{p2} - idem para o elemento (2)

τ_x - tensão de cisalhamento na alma da viga, no ponto 1, no plano xz e na direção z .

Podemos escrever:

$$\tau_{p1} * t_1 + \tau_{p2} * t_2 = \tau_x * t_A$$

$$\tau_x = \frac{\tau_{p1} * t_1 + \tau_{p2} * t_2}{t_A} \quad (4.44)$$

Analogamente à 1ª. forma para cálculo das tensões normais, este não é um procedimento "computacionalmente" conveniente. Existe ainda aqui outro agravante pois como saída de análise, temos a tensão constante para todo o elemento finito de placa, que no caso do cisalhamento pode ser bem diferente da tensão no ponto 1 (fig. 4.24), pela sua variação mais acentuada ao longo da direção Y , em relação às tensões normais.

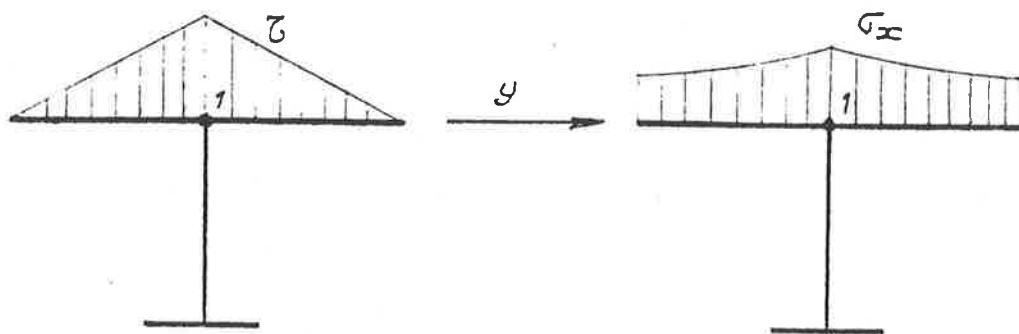


Fig. 4.24 Variação de σ_x e τ ao longo da placa

4.5.2 2a. forma : a partir da força cortante

Todo o raciocínio feito no ítem 4.4 em relação ao esforço normal é aplicável também para a força cortante tanto porque não conhecemos a matriz $\{AM_0^1\}$, como também porque adotaremos uma variação linear ao longo do vão da viga para o esforço cortante. Analogamente portanto consideraremos os esforços $AM^*_2 = AM^*_8$ ou $AM^*_3 = AM^*_9$ aplicados ao meio do vão da viga.

Para a secção média será usada a formulação aproximada:

$$\tau = \frac{Q}{Aa} \quad (4.45)$$

onde:

- τ - tensão de cisalhamento, constante, na alma
- Q - força cortante na direção da alma
- Aa - área da alma

A aproximação feita, em relação à máxima tensão de cisalhamento agente na alma, pode ser estimada tomando o perfil H da fig. 4.25, onde:

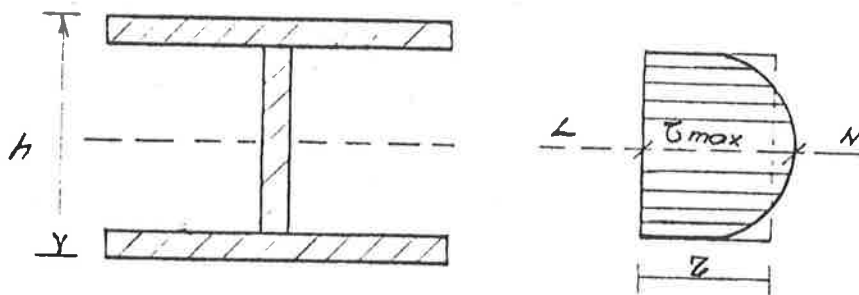


Fig. 4.25 Tensões de cisalhamento na alma

- τ - tensão calculada conforme a equação (4.45)
- τ_{\max} - tensão máxima realmente agente na alma
- LN - linha neutra à flexão

Af - área das flanges

h - altura da alma

Temos:

$$\tau_{\max} = \frac{Q M_s}{b J_y} \quad (4.46)$$

onde:

M_s - momento estático da área da secção transversal acima da LN em relação à LN

b - espessura da alma

Aplicando os valores do perfil H temos:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \left(\frac{A_f}{2} + \frac{A_a}{8} \right)}{A_a \left(\frac{A_f}{2} + \frac{A_a}{12} \right)}$$

$$\tau_{\max} = \tau_* \frac{(A_f/2 + A_a/8)}{(A_f/2 + A_a/12)} \quad (4.47)$$

Portanto, a aproximação entre as eq. (4.45) e (4.46) será tanto melhor, quanto maiores forem as flanges. No caso de flanges diferentes (perfil T com chapa colaborante) ou sem a flange inferior (perfil I) relações semelhantes podem ser encontradas, valendo a mesma conclusão. O limite superior da aproximação seria encontrado quando só tivéssemos a alma sem flanges, onde vale:

$$\tau = \frac{2}{3} \tau_{\max} \approx 66\% \tau_{\max}$$

Como no nosso caso sempre teremos a flange superior (chapeamento), estaremos com uma aproximação bem melhor, constatação essa feita nos testes realizados.

A tensão de cisalhamento nos extremos não é conhecida, pois dependeria do conhecimento do exato valor da força cortante nesses pontos.

CAPÍTULO V

TESTES DO MODELO : VIGA + PLACA

5.1 Viga engastada em uma extremidade e livre na outra

Como primeiro exemplo vamos analisar a viga mostrada na fig. 5.1, que chamaremos de viga V. Para sua secção reta temos:

$$A = 40 \text{ cm}^2$$

$$J_y = 773,33 \text{ cm}^4$$

posição da linha neutra à flexão : VCG = 6,25 cm
material da viga com $\nu = 0$.

Consideremos 5 (cinco) carregamentos, a saber (fig. 5.2):

- caso 1 : pressão na flange superior igual a $0,05 \text{ Kg/cm}^2$ o que equivale para a teoria simples de viga a uma pressão linear uniformemente distribuída $w = 1 \text{ Kg/cm}$;
- caso 2 : carga transversal concentrada na direção Z, no ponto c (fig. 5.1) de valor $P = 50 \text{ Kg}$;
- caso 3 : é a combinação dos casos 1 e 2;

- CASO 4 : carga normal concentrada na direção x , no ponto c (fig. 5.1) de valor $N = 2000 \text{ kg}^*$; Aplicação fora do centro de gravidade 0 implica em uma flexão composta para a viga;
- CASO 5 : é a combinação dos casos 1 e 4

5.1.1 Teoria simples de vigas

Aplicando as equações da teoria simples de vigas para o cálculo das tensões normais (equação (4.27) para $e_1 = e_2 = 0$) e tensões de cisalhamento máximas na alma (equação (4.46)) para a viga V e para os diferentes casos de carregamento temos:

- σ_c - tensões normais no ponto C ao longo de x (fig. 5.1) em Kg/cm^2 ;
- σ_F - tensões normais no ponto F ao longo de x (fig. 5.1) em Kg/cm^2 ;
- τ_{\max} - tensões de cisalhamento máximo na alma ao longo de x (agentes nos pontos 0 ; fig.5.1) em Kg/cm^2 .

- CASO 1

$$\sigma_c = \frac{x^2}{412,44} ; \quad \sigma_F = \frac{-x^2}{247,46} ; \quad \tau_{\max} = -1,061 x \quad (5.1)$$

- CASO 2

$$\sigma_c = \frac{x}{4,124} ; \quad \sigma_F = \frac{-x}{2,474} ; \quad \tau_{\max} = -5,3 \quad (5.2)$$

- CASO 3

$$\sigma_c = \frac{x^2}{412,44} + \frac{x}{4,124} \quad \sigma_F = \frac{-x^2}{247,46} - \frac{x}{2,474} \quad (5.3)$$

- CASO 4

$$\sigma_c = 86,37 \quad \sigma_F = -10,62 \quad (5.4)$$

- CASO 5

$$\sigma_c = \frac{x^2}{412,44} + 86,37 \quad \sigma_F = -\frac{x^2}{247,46} - 10,62 \quad (5.5)$$

5.1.2 Modelo de elementos finitos

A viga V é dividida em elementos finitos de placa na flange superior e elementos finitos de estado plano de tensão na alma e flange inferior. Vamos considerar 5 malhas, mostradas da fig. 5.3 à fig. 5.7.

5.1.3 Modelo viga + placa

A viga V é agora dividida em duas partes:

- a flange superior, a ser considerada como constituída de elementos finitos de placa;
- a alma e flange inferior, consideradas como constituindo uma viga excêntrica (viga VE), que terá as seguintes propriedades (fig. 5.8):

$$\begin{aligned}
 A &= 20 \text{ cm}^2 \\
 J_y &= 209,17 \\
 e_2 &= 7,5 \text{ cm} \\
 t_2 &= 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Analogamente ao caso de elementos finitos vamos considerar 5 malhas, mostradas nas fig. 5.8 e 5.9.

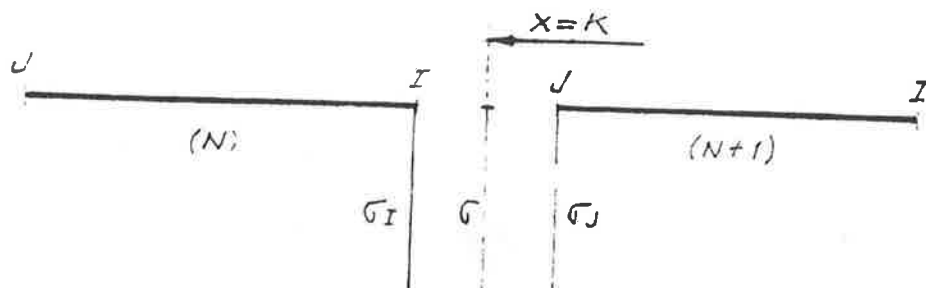
5.1.4 Resultados e conclusão

São analisadas as cinco malhas sob os cinco carregamentos, para os dois modelos. Deve-se notar que, sendo o plano xoz de simetria, pode-se considerar metade da estrutura para a análise.

Para o modelo viga + placa podemos levantar, para cada malha, um gráfico do tipo esquematizado na fig. - 5.10, onde temos, como exemplo, os resultados da análise da malha 3 para o caso 1 de carregamento. Tal figura mostra:

- numeração das vigas EV de acordo com a malha 3 da fig. 5.9.

- para cada par de vigas apresenta-se um esquema do tipo (tanto para σ_c como para σ_f):



onde:

$(N), (N+1)$ - numeração das vigas

$x = K$ - coordenada x do nó 1 da viga (N) (que é a mesma que o nó J para a viga $(N+1)$)

σ - valor da tensão normal (σ_c ou σ_F , conforme o caso) no ponto $x=K$, segundo a teoria simples de viga. Para este caso tal valor pode ser tirado das equações (5.1).

σ_I - valor da tensão normal (σ_c ou σ_F) no nó 1 da viga (N) calculado usando a 2a. forma B (i.é. calculando-se os valores de P_1 e P_2 conforme o desenvolvido no sub-ítem 4.4.2).

σ_J - idem para o nó 5 da viga $(N+1)$

Deve-se notar que os resultados são satisfatórios, importando, de forma geral, em σ_I da viga $(N) \cong \sigma_J$ da viga $(N+1)$, não havendo "ressalto" ao passar de uma para outra viga.

Podemos agora traçar para cada carregamento e cada malha o gráfico das tensões σ_F , tomando para seu valor em cada nó a média entre σ_I da viga (N) e σ_J da viga $(N+1)$.

Os carregamentos 1, 2 e 3 são apresentados respectivamente nas figs. 5.11, 5.12 e 5.13, onde também aparecem os resultados de σ_F para o modelo de elementos finitos. Os resultados são comparados com a teoria simples de viga retirados das equações do sub-ítem 5.1.1. Deve-se notar que para o modelo de elementos finitos só temos a tensão no meio do comprimento do elemento, o que faz, por exemplo, para a malha 5, com que tenhamos as tensões em apenas metade da viga VE.

Na fig. 5.14 temos o resultado da malha 3, para a viga VE, no caso 4 de carregamento. Como vemos:

$$\sigma_j \text{ para a viga (10)} = -181,63 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{na chapa})$$

$$\sigma \text{ pela teoria simples de viga} = -86,37 \text{ Kg/cm}^2 \\ (\text{na chapa})$$

$$\sigma_i \text{ para a viga (9)} = -90,08 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{na chapa})$$

Existe uma grande diferença entre σ_j e σ_i para os dois elementos consecutivos. Tal fato pode ser explicado pois, como visto na malha 2 da fig. 5.9, a forma de aplicação da carga concentrada N impõe uma "difusão" das tensões, fazendo com que a extremidade a chapa não "colabore" uniformemente. Temos, portanto, um caso típico onde há uma variação da "largura efetiva" ao longo do elemento de viga excêntrica. Isto faz com que haja uma variação da linha neutra, violando a 3a. hipótese para cálculo das tensões que é a base para o desenvolvimento das equações (4.42) e (4.43). Nesse caso é de se esperar que ao usar a 2a. forma B para o cálculo das tensões, apareçam estes erros na região de extremidade da viga. Caso ainda assim, tracemos os gráficos das tensões σ_F e σ_C , calculados da mesma forma que nos casos anteriores (i.é., média entre σ_i e σ_j), teremos como resultado a fig. 5.15, onde se nota o "mau comportamento" na extremidade. Para este caso basta que, na extremidade, seja usada a 2a. forma A (i.é., calculando só as tensões no meio dos elementos de viga VE), passando a usar a 2a. forma B a partir de um ponto conveniente, facilmente detectável observando a fig. 5.15. Usando tal procedimento para σ_F temos o gráfico da fig. 5.16, onde são mostrados também os resultados do modelo de elementos finitos. Observando esta figura notamos o excelente comportamento do modelo viga + placa, bem superior até que o modelo de elementos finitos.

Na fig. 5.17 apresenta-se o resultado da malha 3, para a viga VE, no caso 5 de carregamento. Além do mesmo

problema de extremidade do caso anterior, este caso de carregamento causa uma variação da linha neutra ao longo de toda a viga, fazendo com que o resultado da 2a. forma B apresente σ_i da viga (N) \neq σ_j da viga (N + 1) para todos os elementos. Deve-se notar que o valor da carga N (2000 Kg) é relativamente exagerado, mas proposital, de modo a detectar-se facilmente este problema de "mudança da linha neutra". Traçando-se o gráfico de σ_F (analogamente ao gráfico da fig. 5.16 para o caso 4, tomando-se os mesmos "cuidados" na extremidade) para este caso, temos a fig. 5.18. Observando o gráfico vemos que, mesmo com a força N de grande valor, os resultados são altamente satisfatórios, o que leva a concluir que, mesmo a 2a. forma B não sendo completamente aplicável, a média entre σ_i da viga (N) e σ_j da viga (N+1) fica bem próxima da teoria. Tal fato pode ser bem detectado observando-se os gráficos da fig. 5.17. Novamente neste caso os resultados podem inclusive ser considerados melhores do que os do modelo de elementos finitos.

Em primeira instância parece que o método mais conveniente é sempre usar a 2a. forma B e, com a observação do gráfico resultante (seja na forma da fig. 5.17 ou da 5.18), "corrigir" os pontos onde notar-se sua não aplicabilidade.

Nas fig. 5.19 e 5.20 traçam-se os resultados das tensões de cisalhamento usando a equação (4.45) para o modelo viga + placa, para os casos de carregamento 1 e 2. Na mesma figura apresentam-se os resultados do modelo de elementos finitos, fazendo-se as comparações com o cálculo da teoria simples de viga utilizando as equações desenvolvidas no sub-ítem 5.1.1. A observação dos gráficos demonstra serem satisfatórios os resultados seja quando comparados com a teoria simples de viga, como com o modelo de elementos finitos.

A seguir apresenta-se uma tabela onde são comparados o tempo total de processamento, bem como o preço desse

processamento (computador Bourroughs 6700 do C.C.E. da U.S.P. em julho de 1976) para as diferentes malhas. Deve-se notar que não existe uma proporção entre o preço e tempo de processamento, pois inclui-se aqui também os gastos com leitura de dados e linhas impressas.

Malha	PREÇO (Cr\$)		TEMPO DE PROCESSAMENTO(S)	
	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA
1	936,35	369,49	766,88	458,46
2	241,86	97,71	177,06	108,06
3	87,35	33,73	57,15	31,53
4	48,53	20,39	29,74	17,24
5	25,36	12,17	13,57	8,45

Dois aspectos devem ser salientados:

- como já discutido em capítulos anteriores o tempo na preparação de dados é bem maior para o modelo de elementos finitos, sendo tal parâmetro de difícil medição;
- este exemplo simples não deve ser tomado como característico da relação entre tempos de processamento para os dois modelos (elementos finitos e viga + placa). Quando a estrutura for maior, espacial, com cruzamento de vigas, a banda da matriz de rigidez global crescerá consideravelmente para o modelo de elementos finitos, sendo bem menor tal crescimento para o modelo viga + placa, tornando-se a relação entre os tempos de processamento (e conseqüente preço) bem mais relevante.

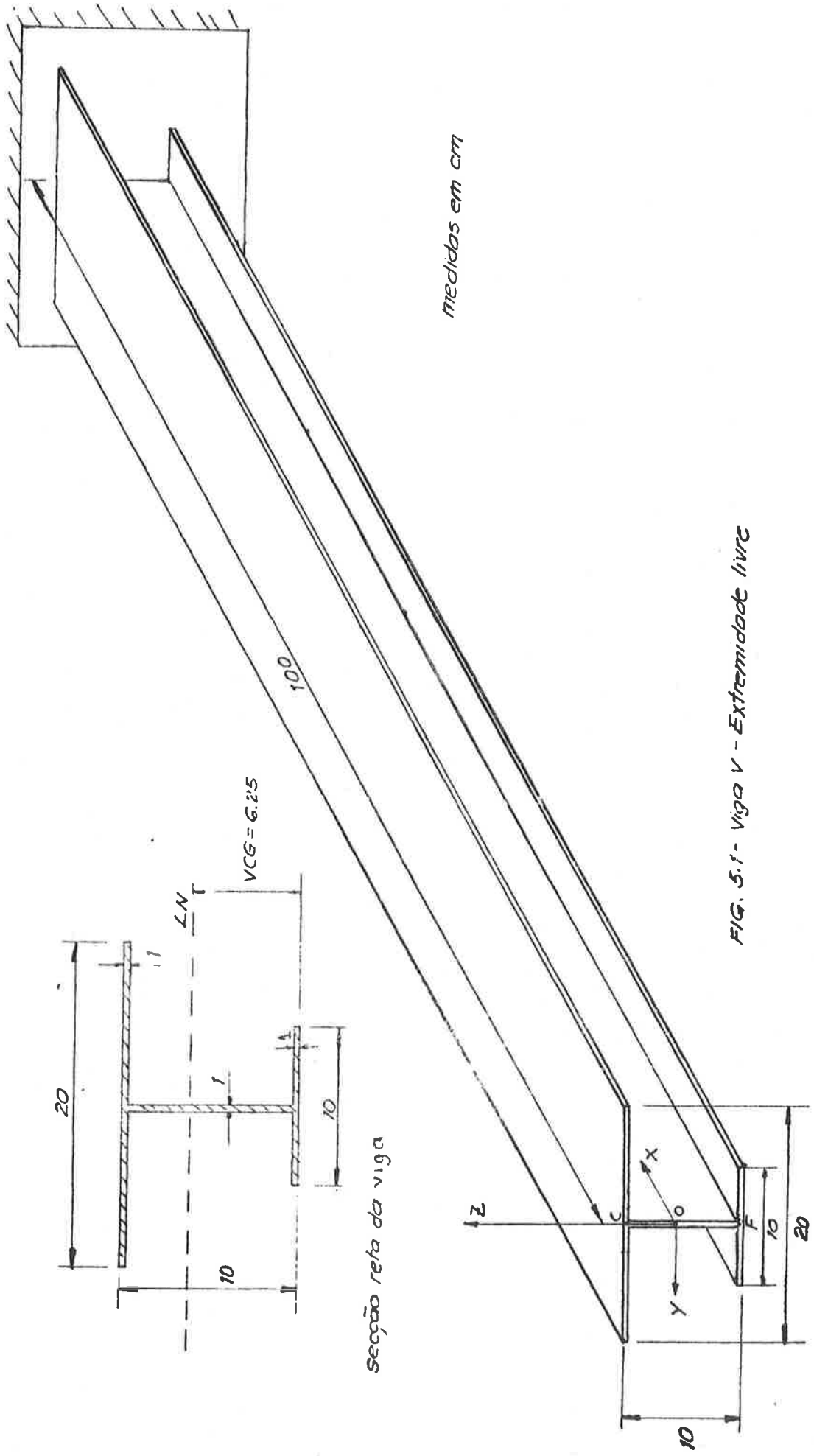


FIG. 5.1 - Viga V - Extremidade livre

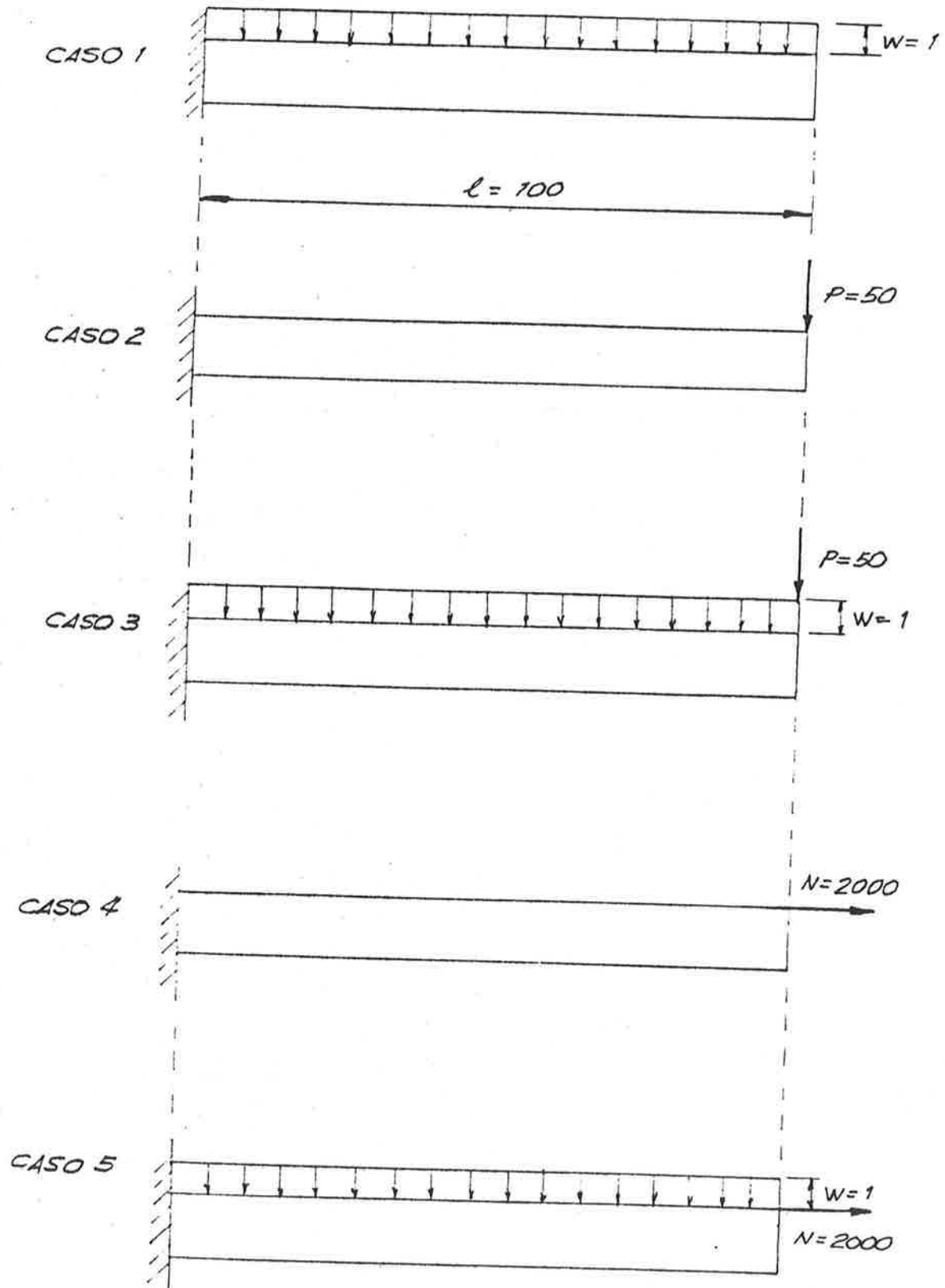
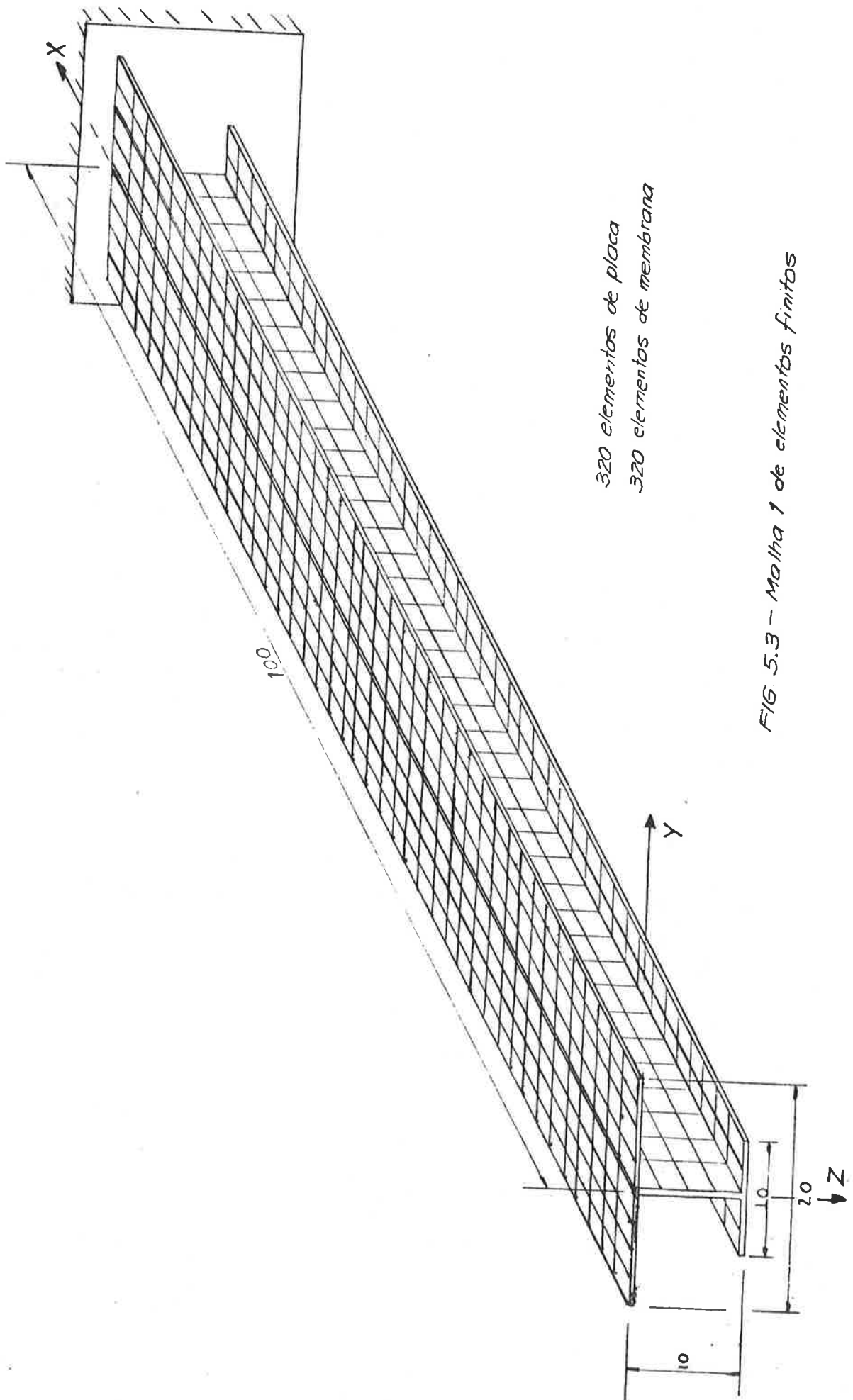


FIG. 5.2 - Carregamento na viga V - Extremidade livre



320 elementos de placa
320 elementos de membrana

FIG. 5.3 - Malha 1 de elementos finitos

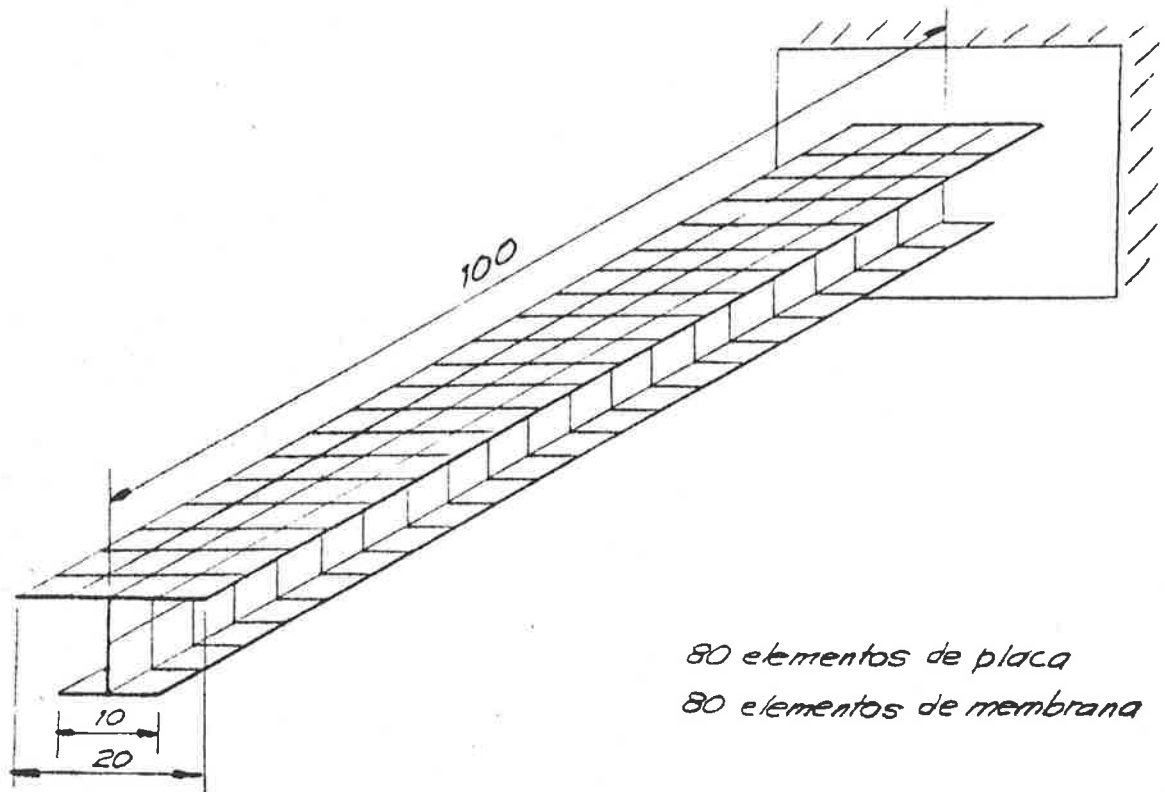


FIG 5.4- Malha 2 de elementos finitos

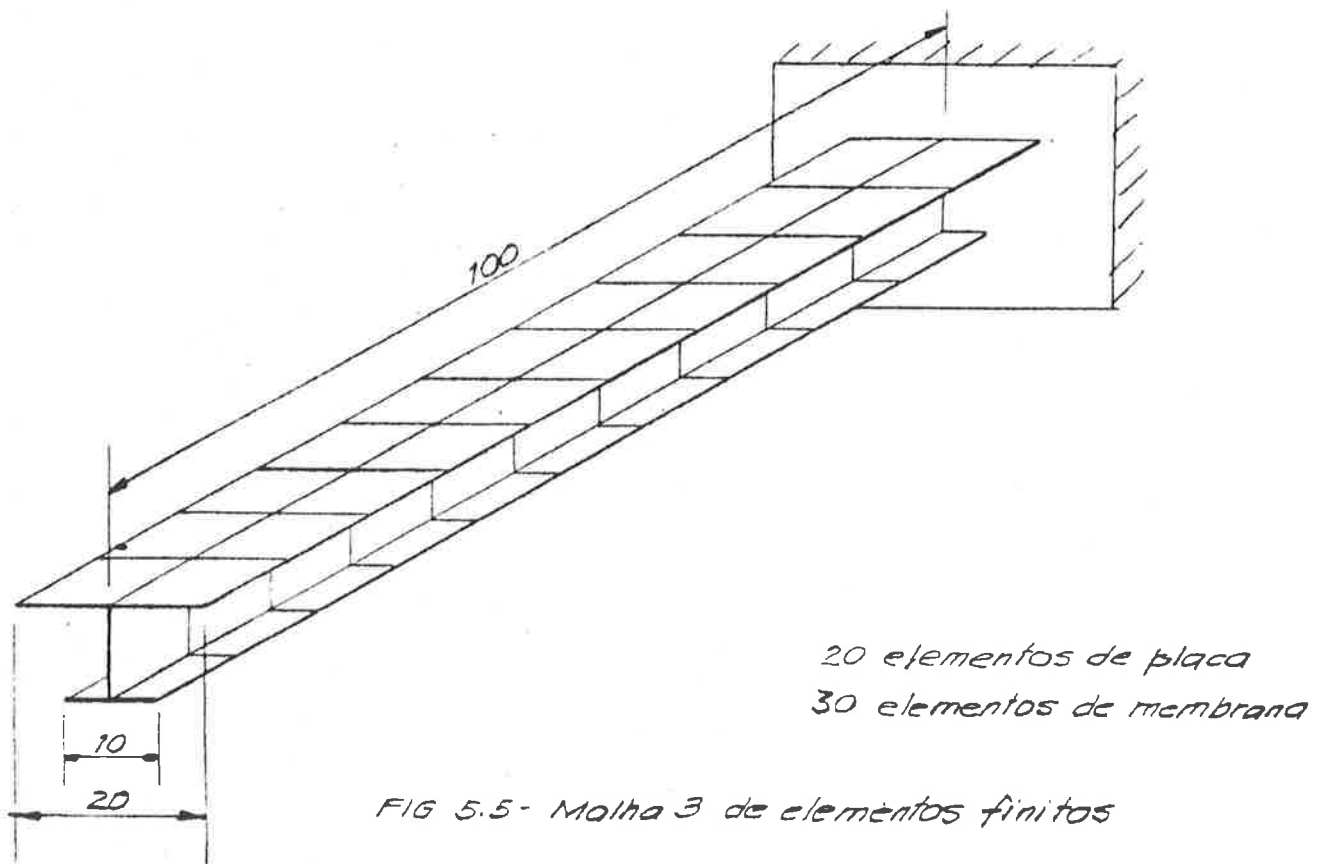


FIG 5.5- Malha 3 de elementos finitos

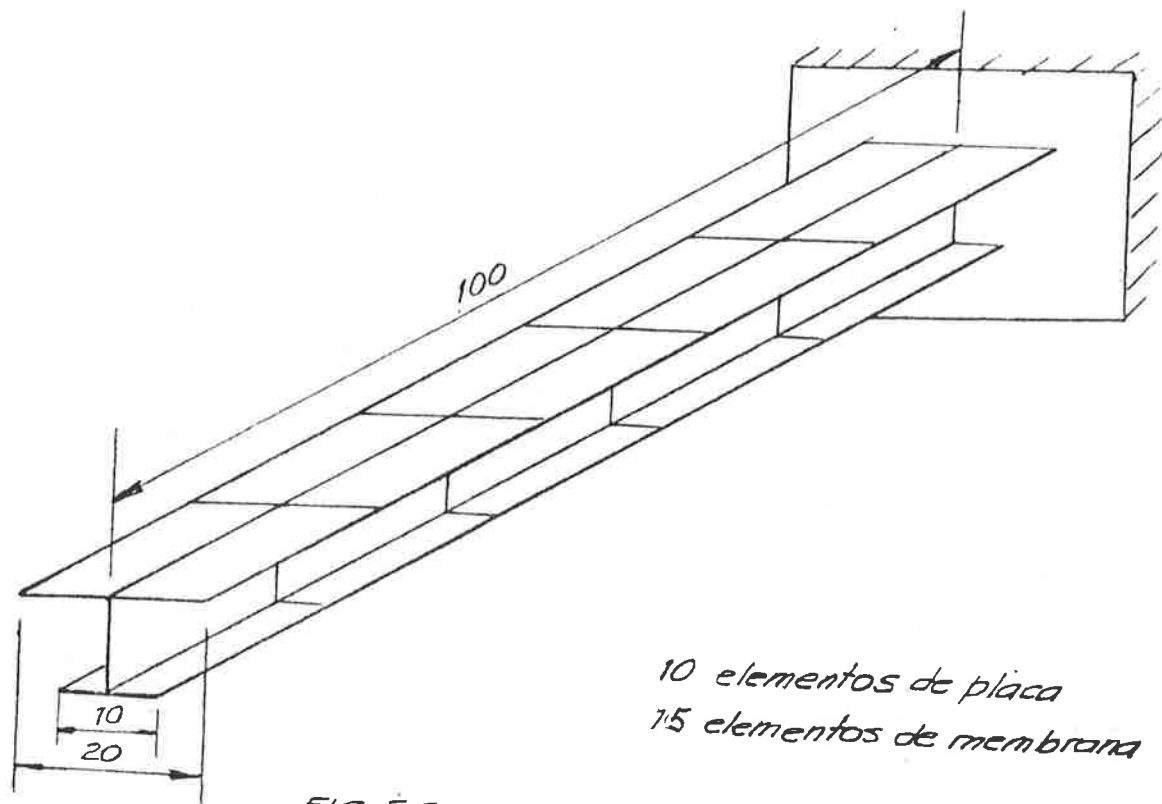


FIG. 5.6- Malha 4 de elementos finitos

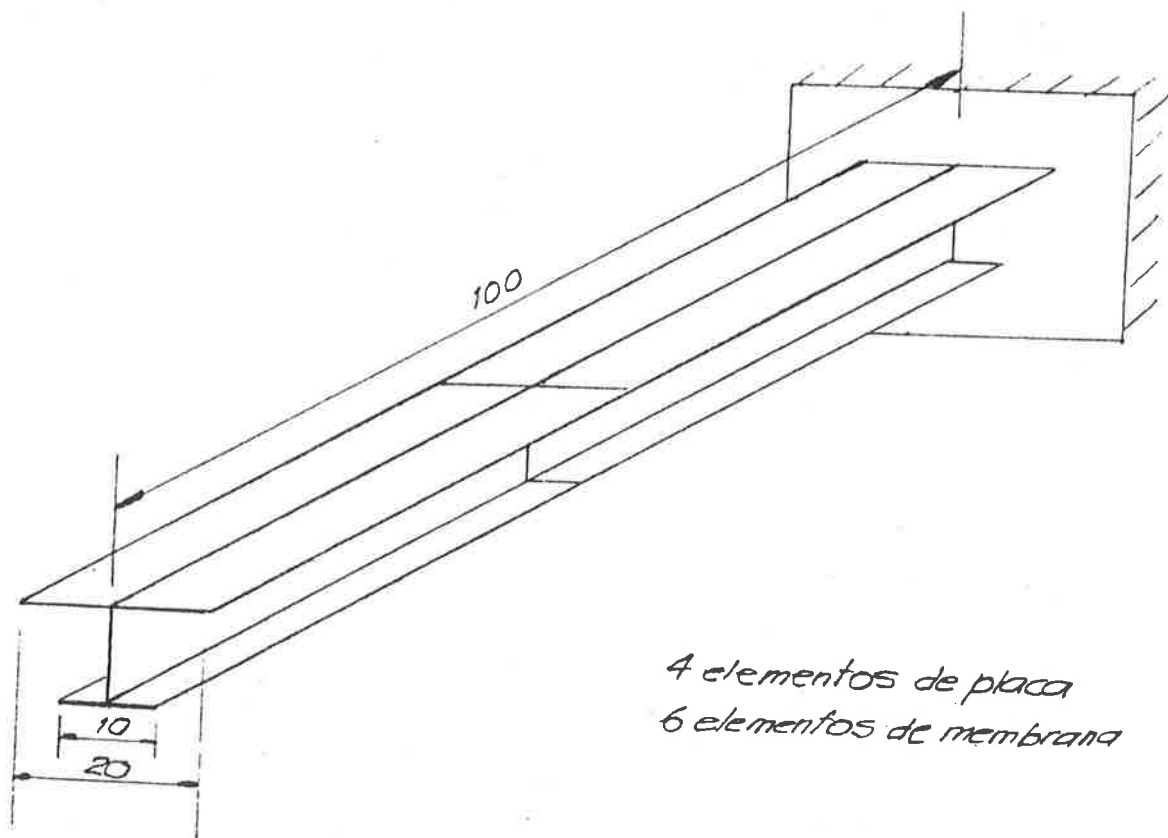
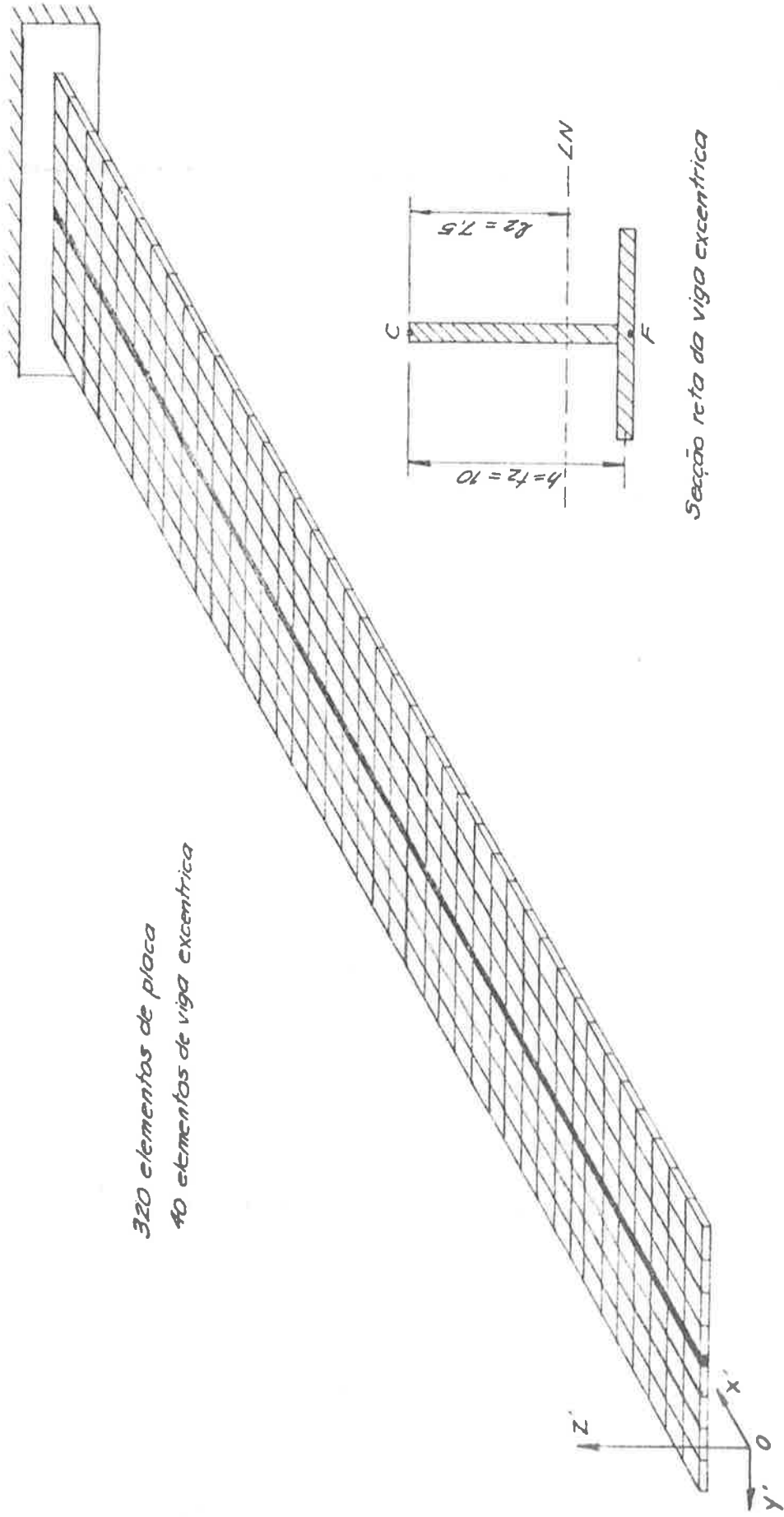


FIG. 5.7- Malha 5 de elementos finitos

320 elementos de placa
40 elementos de viga excentrica



Seção reta da viga excentrica

FIG. 5.8- Modelo 1 do modelo viga + placa

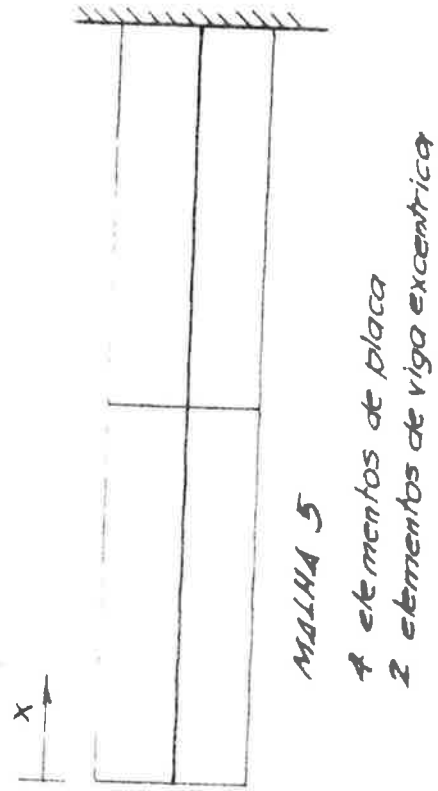
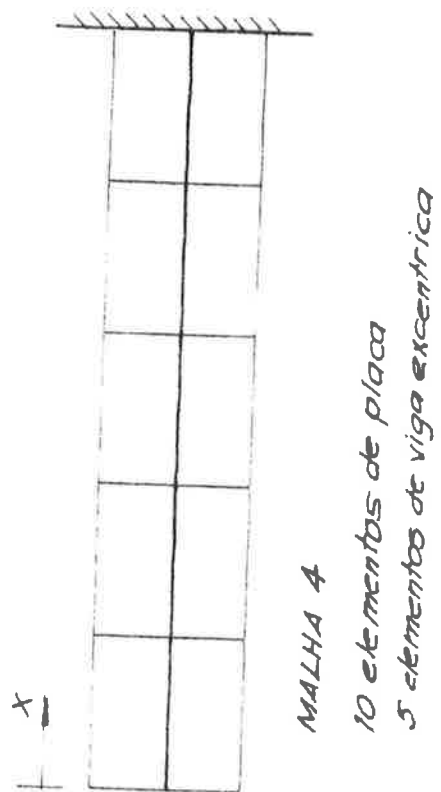
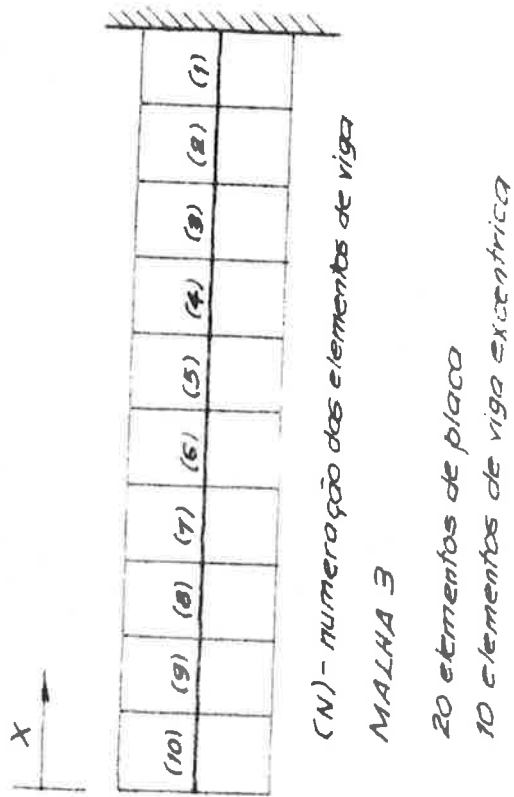
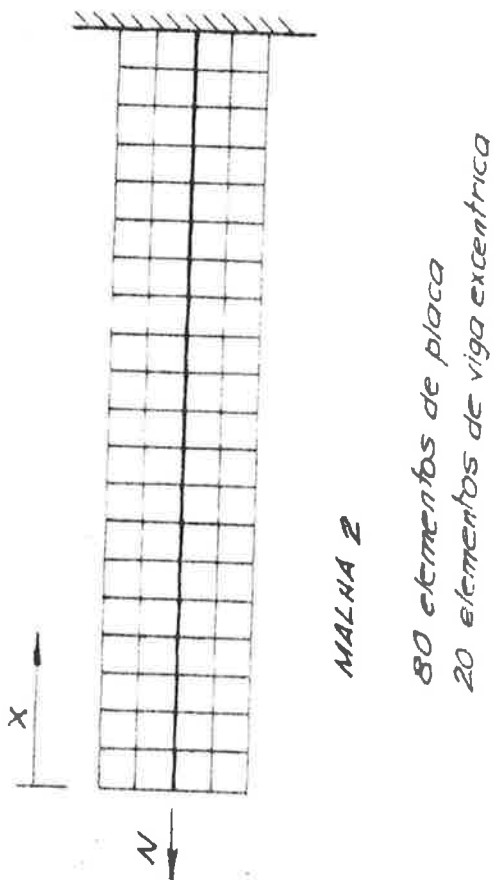
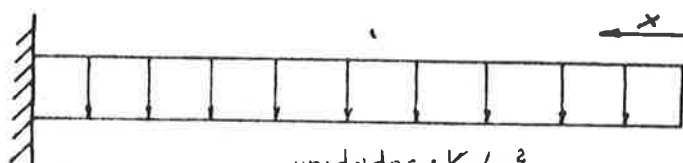


FIG. 5.8 - Malhas do modelo de viga excêntrica

MALHA 3
 Carregamento uniformemente distribuido (caso 1)
 Extremidade livre



unidades: Kg/cm²
 σ_C - Tensão normal na flange superior (chapa)
 σ_F - Tensão normal na flange inferior

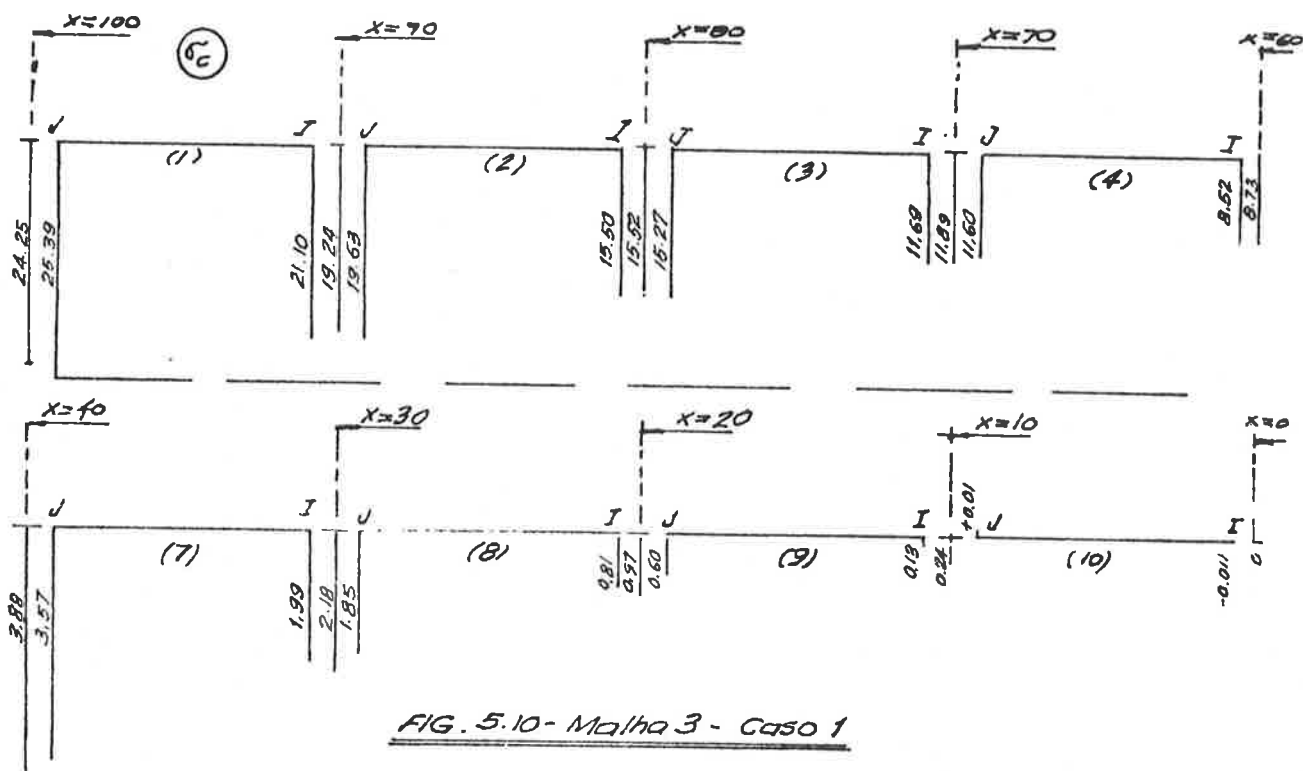
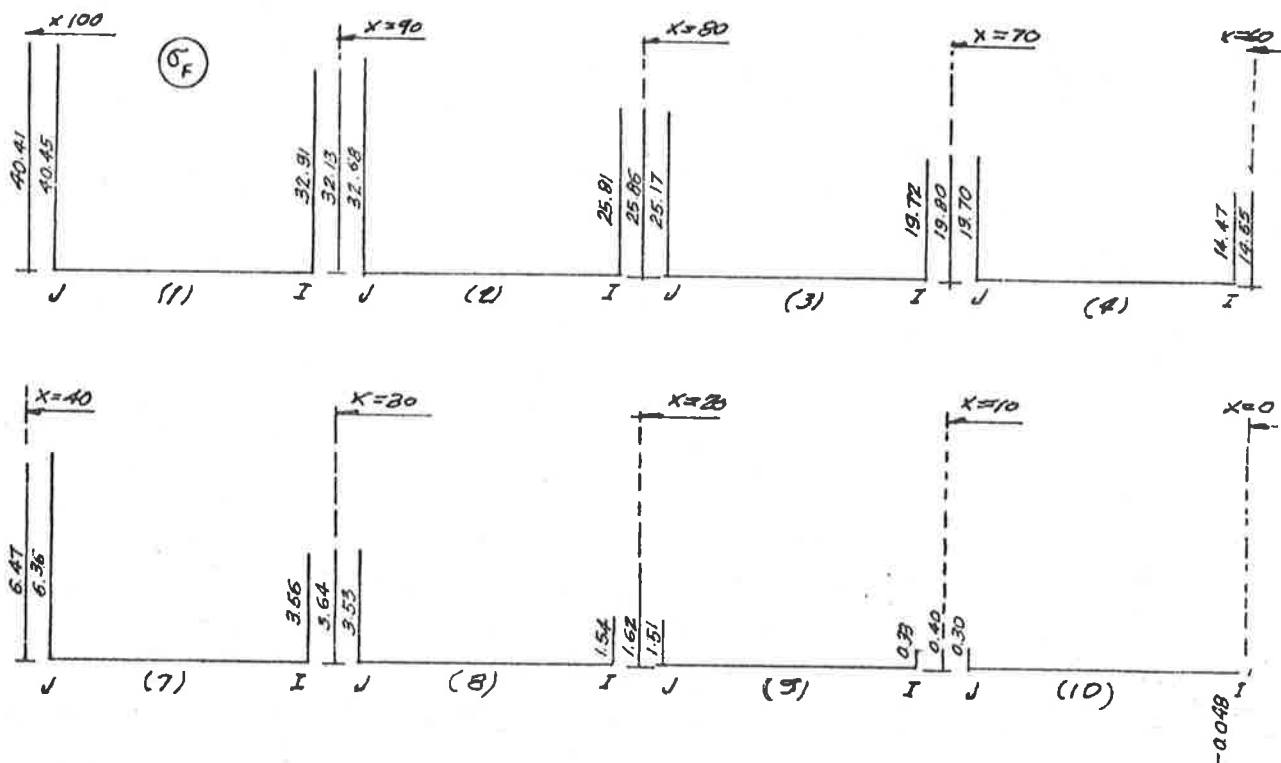
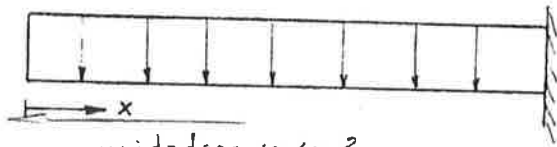


FIG. 5.10 - Malha 3 - caso 1



CASO 1

Carregamento uniformemente distribuído
Extremidade livre



unidades: kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teoria) ———

Malha 1 - - - - -

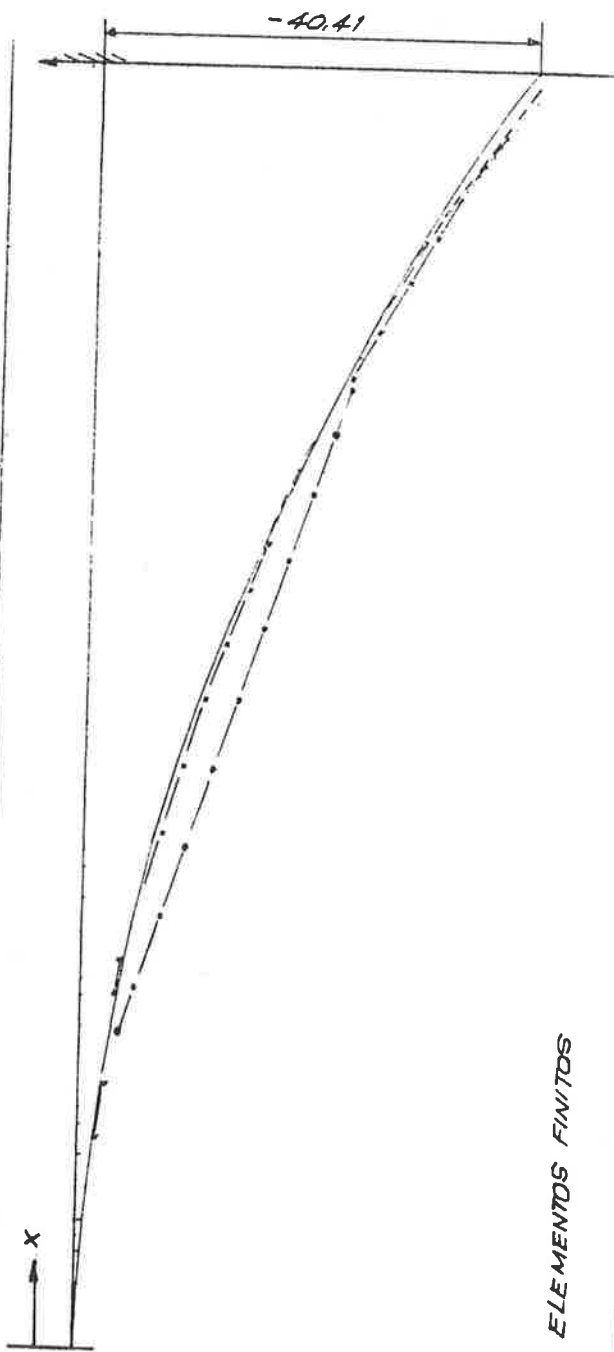
Malha 2 ·····

Malha 3 — · — · — · — · —

Malha 4 - x - x - x -

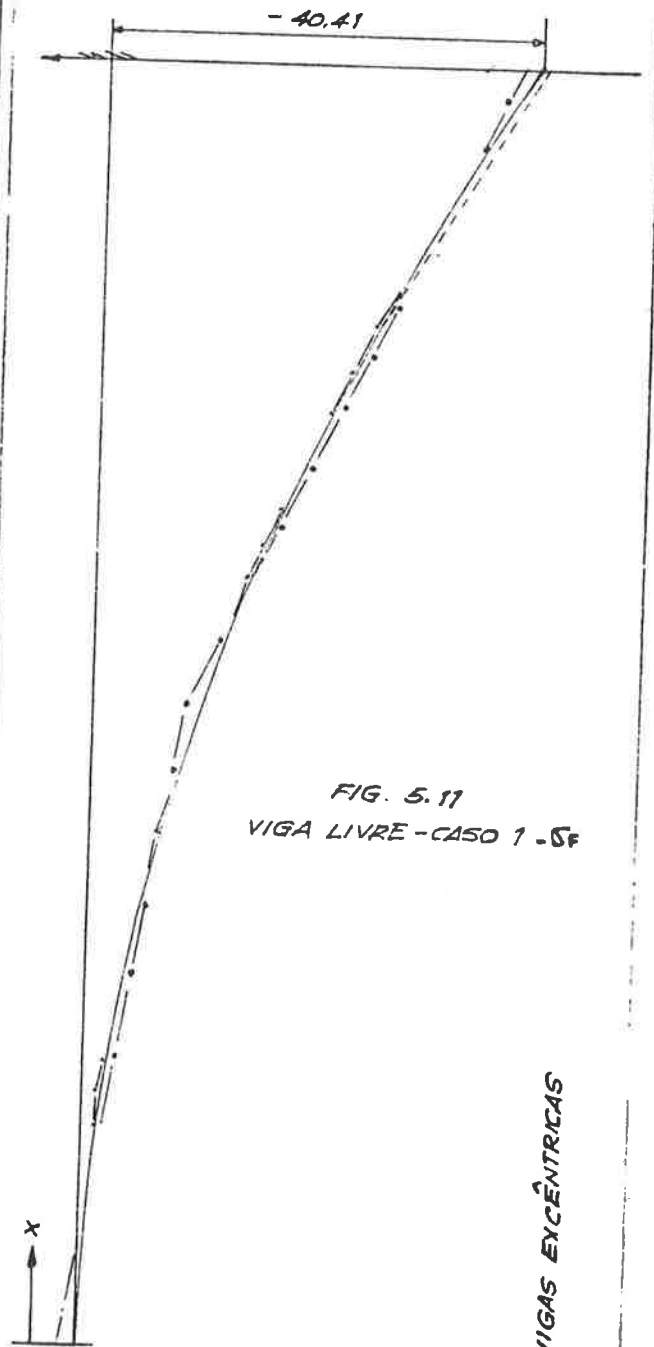
Malha 5 ·····

(3)



ELEMENTOS FINITOS

(4)

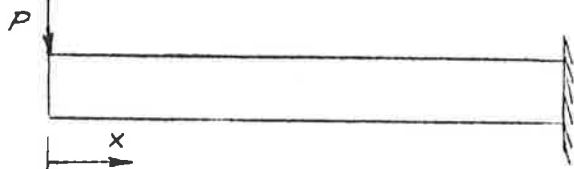


VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.11
VIGA LIVRE - CASO 1 - σ_F

CASO 2

Carga transversal concentrada na extremidade
Extremidade livre



unidades: Kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teoria)

Malha 1

Malha 2

Malha 3

Malha 4

Malha 5

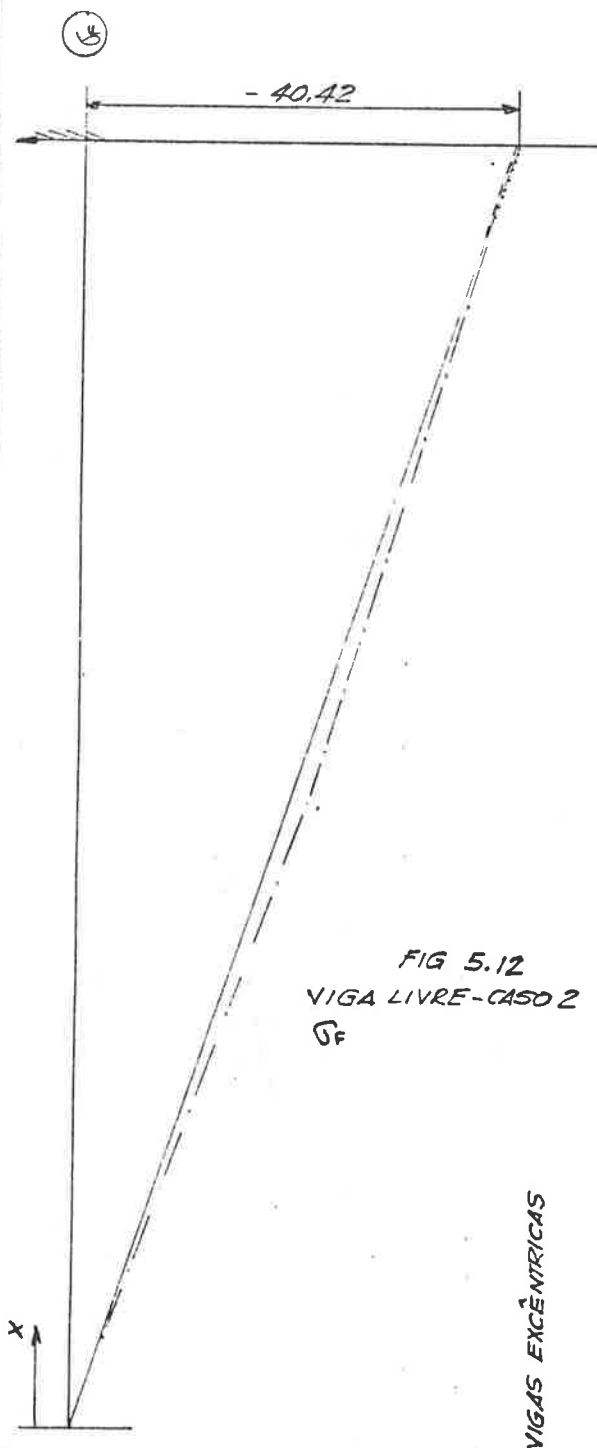
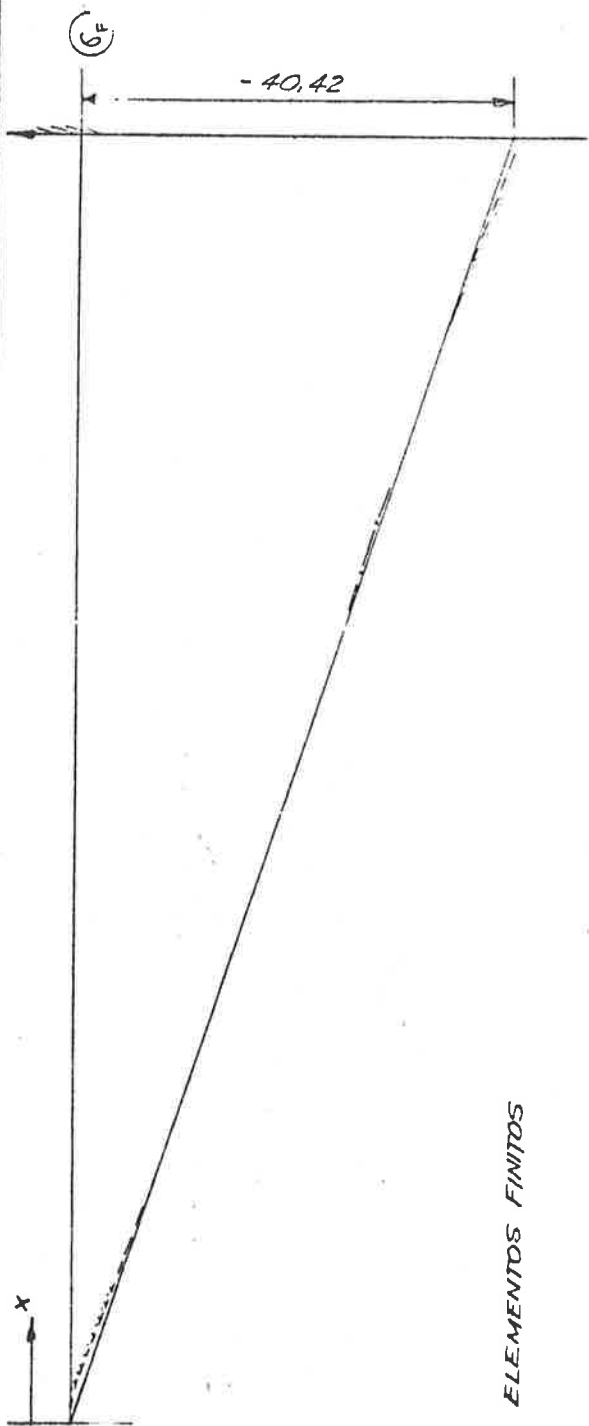
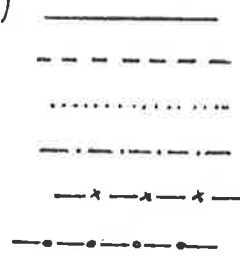
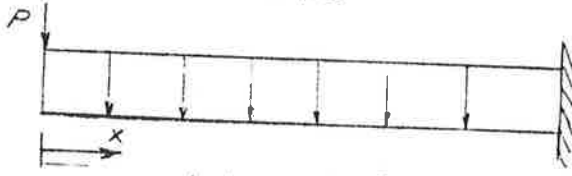


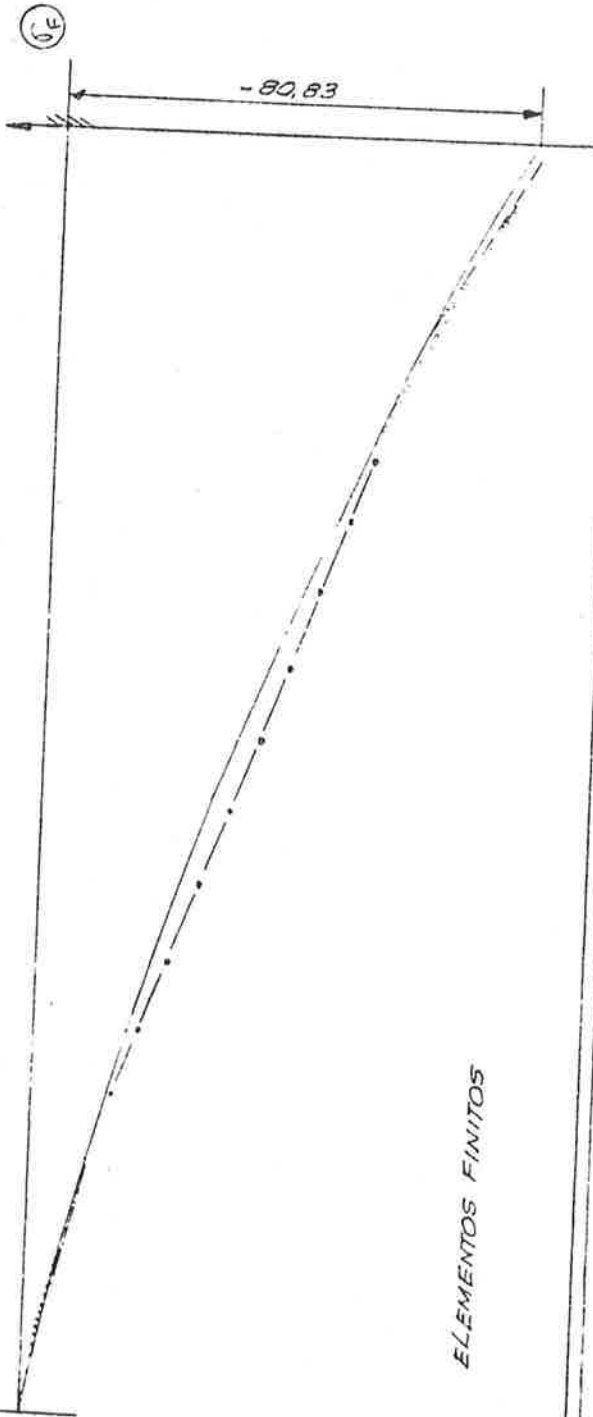
FIG 5.12
VIGA LIVRE-CASO 2
 σ_F

CASO 3
 Caso 1 + caso 4
 Extremidade Livre



unidades: Kg/cm²
 σ_F - Tensão normal na fôrme inferior

- σ_F (Teoria) —————
- Malha 1 - - - - -
- Malha 2
 Malha 3 - · - · - ·
 Malha 4 — x — x
 Malha 5 — o — o



ELEMENTOS FINITOS

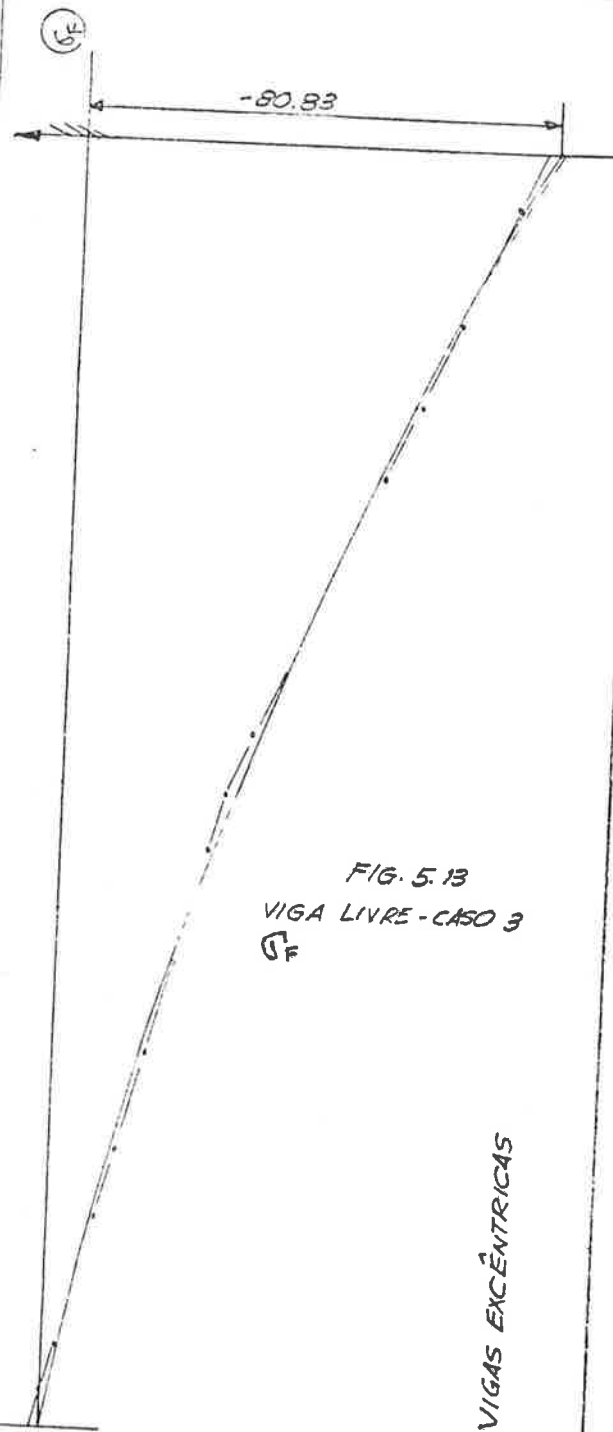
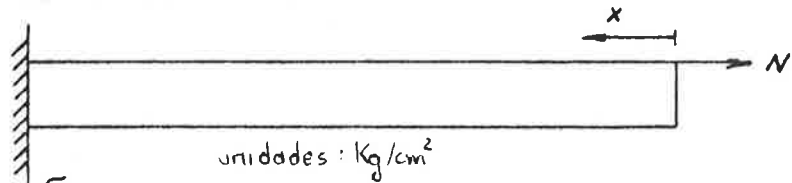


FIG. 5.13
 VIGA LIVRE - CASO 3
 σ_F

VIGAS EXCÊNTRICAS

Malha 3
 Carga normal concentrada na extremidade (caso 4)
 Extremidade livre



unidades : Kg/cm²

σ_C - Tensão normal na flange superior (chapa)

σ_F - Tensão normal na flange inferior

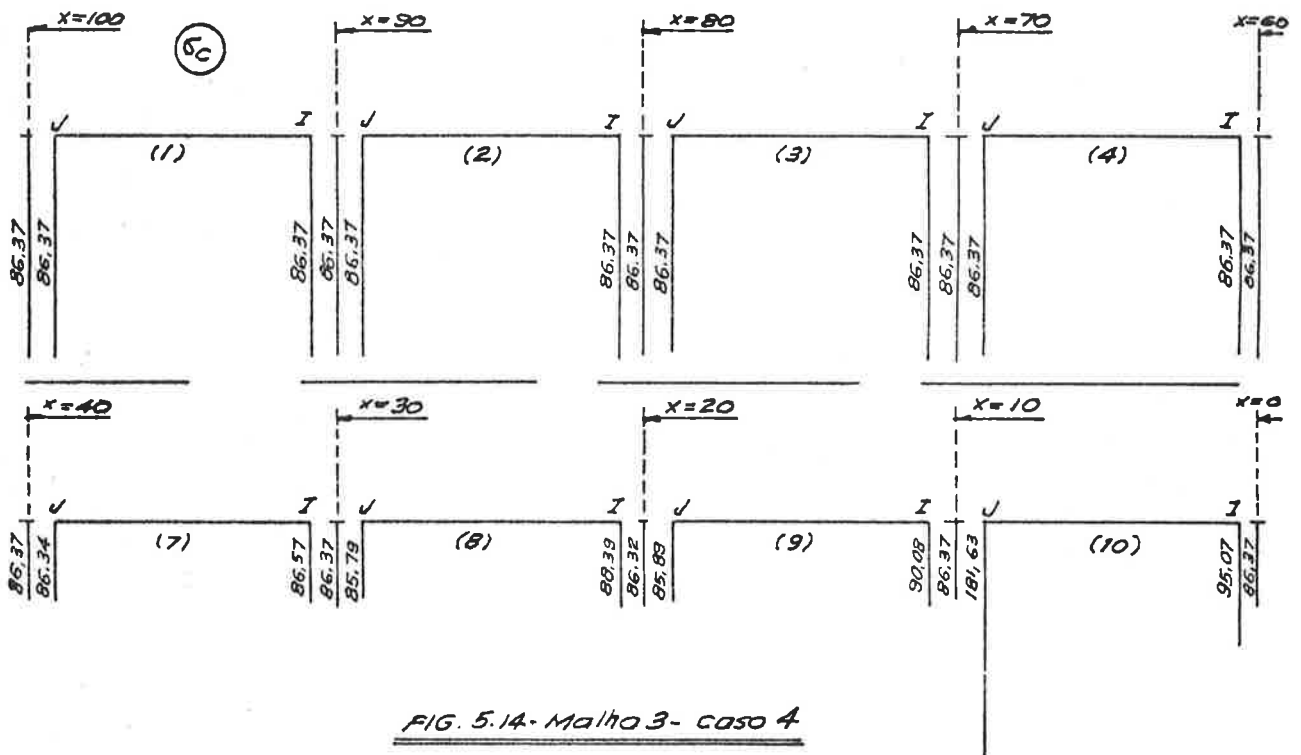
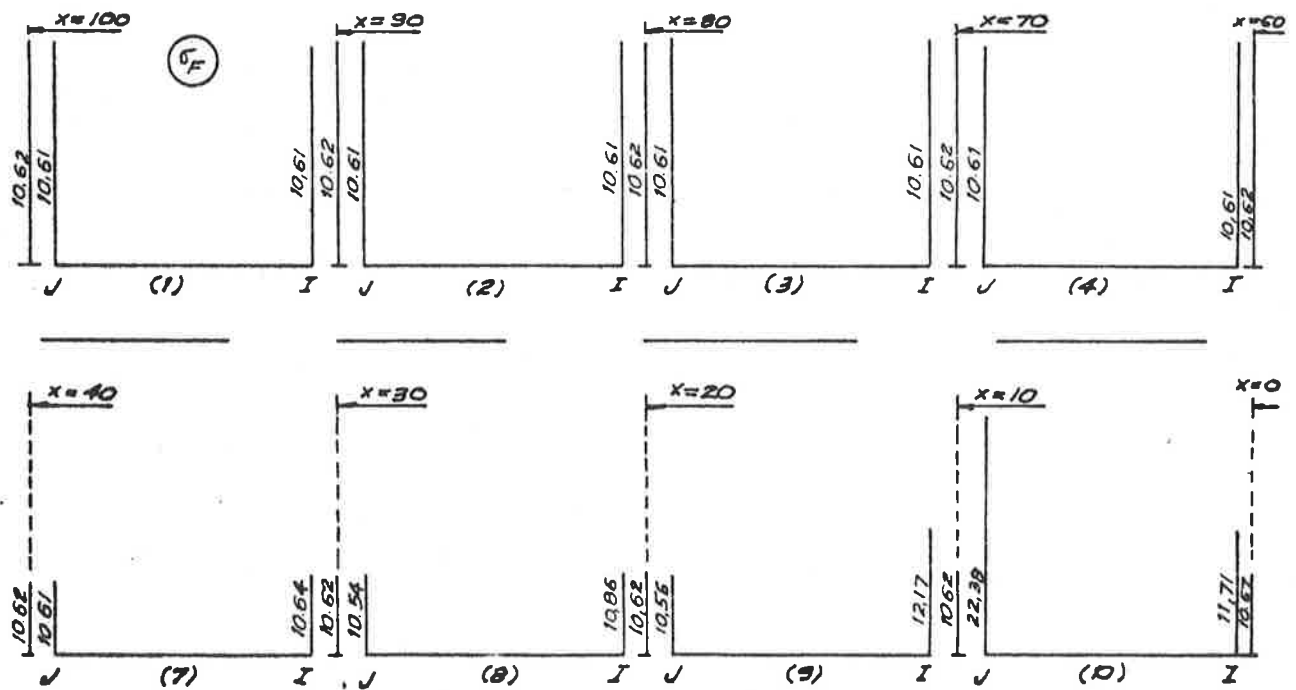
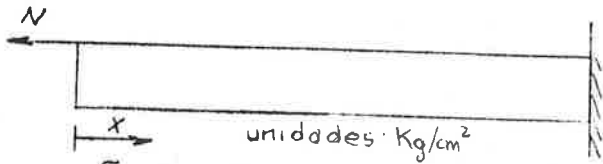


FIG. 5.14- Malha 3- caso 4



CASO 4

Carga normal concentrada na extremidade
Extremidade livre



σ_C - Tensão normal na flange superior (chapa)
 σ_F - Tensão normal na flange inferior

$\sigma_C = 86,37$

$\sigma_F = 10,62$

Malha 1

Malha 2

Malha 3

Malha 4

Malha 5

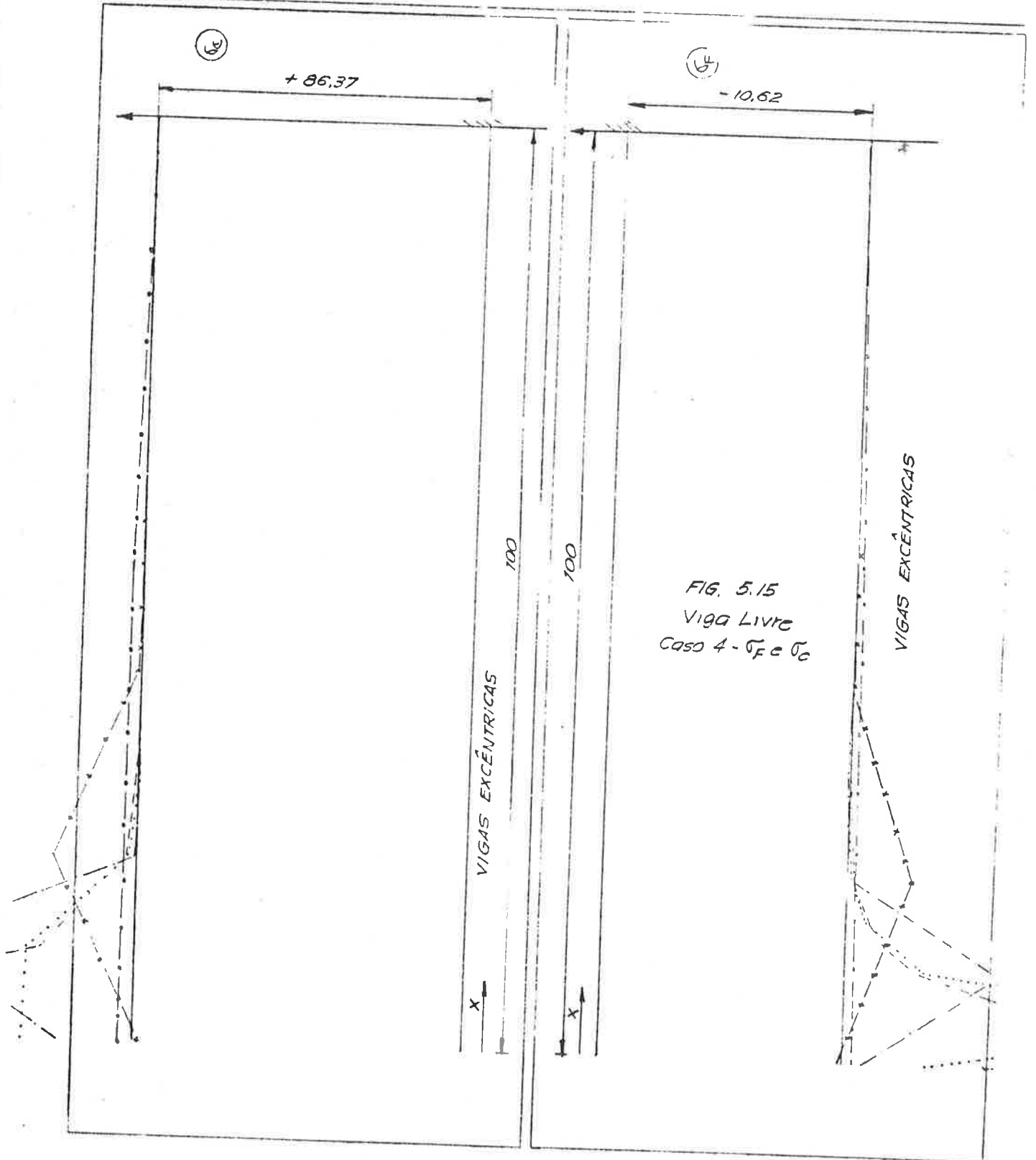
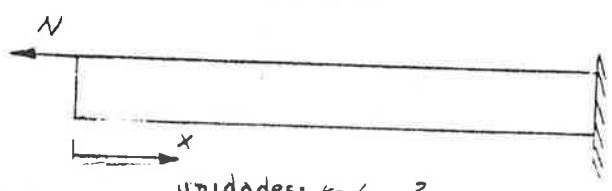


FIG. 5.15
VIGA LIVRE
CASO 4 - σ_F e σ_C

CASO 4
 Carga normal concentrada na extremidade
 Extremidade Livre



unidades: kg/cm²
 σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teoria)	—————
Malha 1	- - - - -
Malha 2
Malha 3	- . - . - .
Malha 4	- x - x -
Malha 5	- o - o -

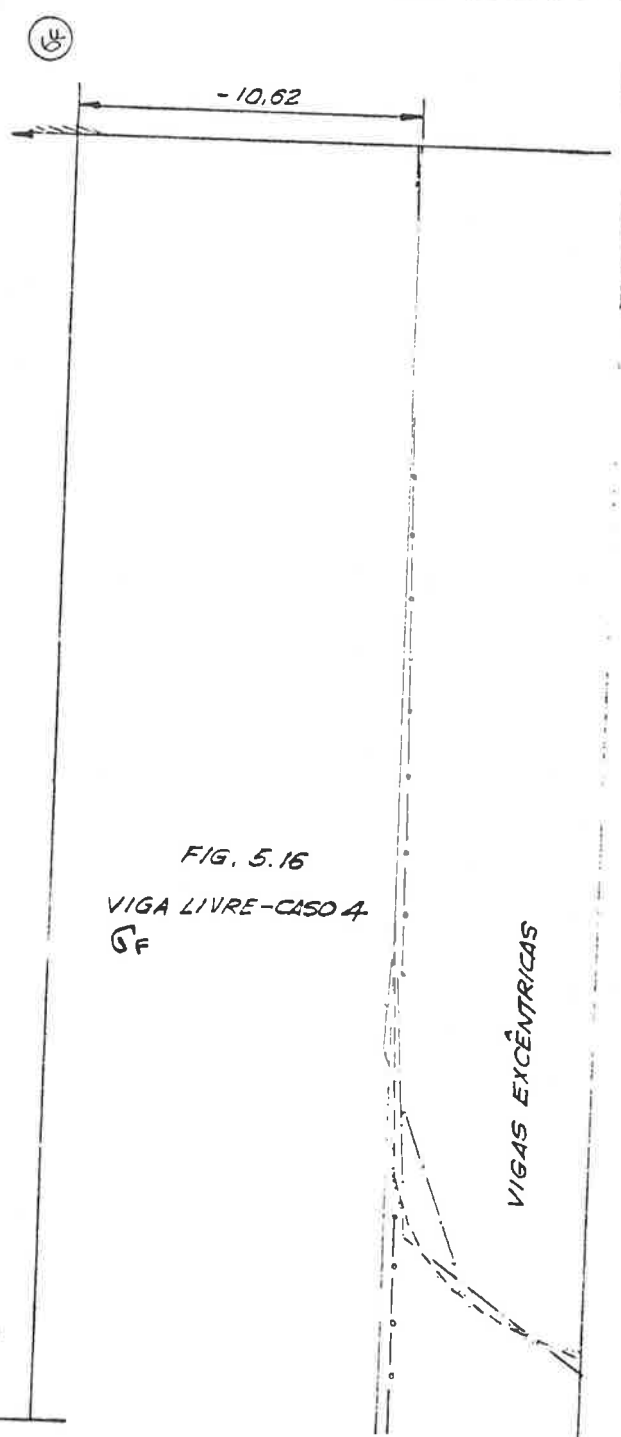
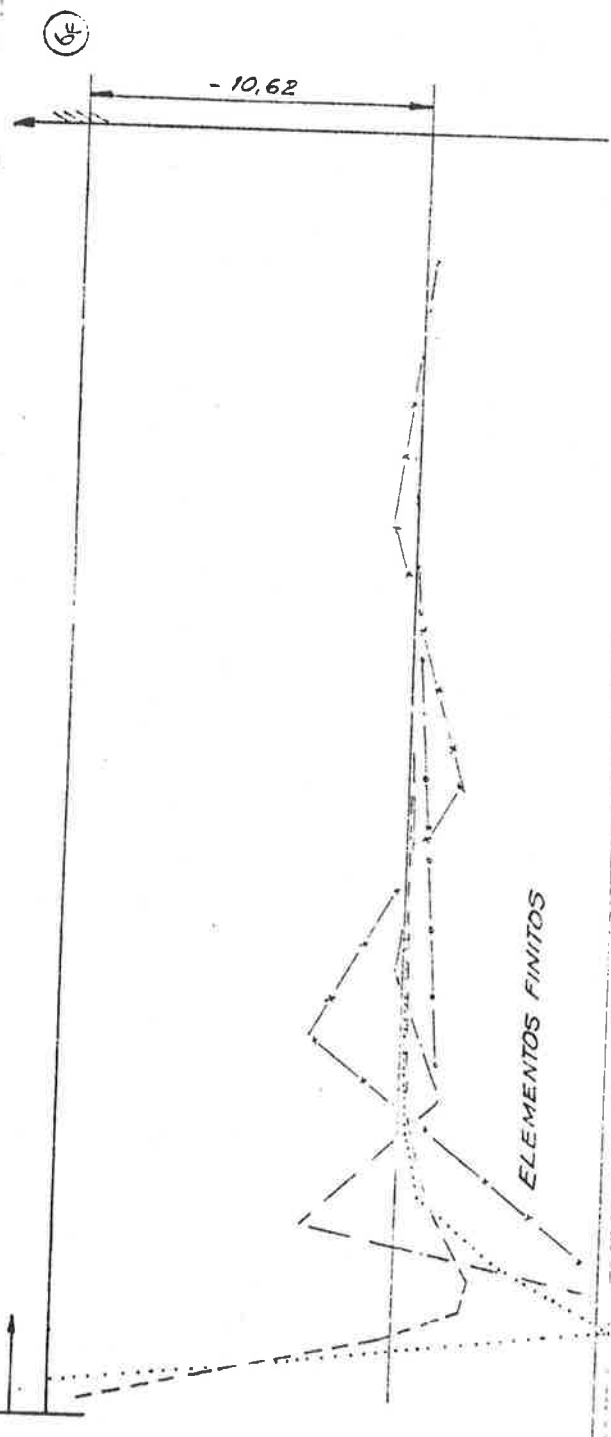
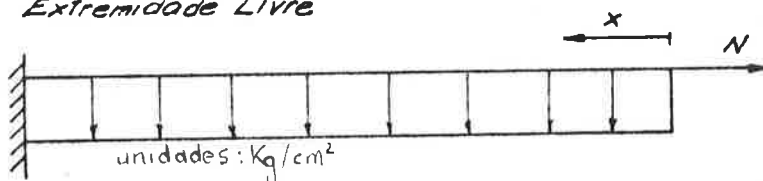


FIG. 5.16
 VIGA LIVRE-CASO 4
 σ_F

Malha 3
 Caso 5 = caso 4 + caso 1
 Extremidade Livre



σ_c - Tensão normal na flange superior (chapa)
 σ_c - Tensão normal na flange inferior

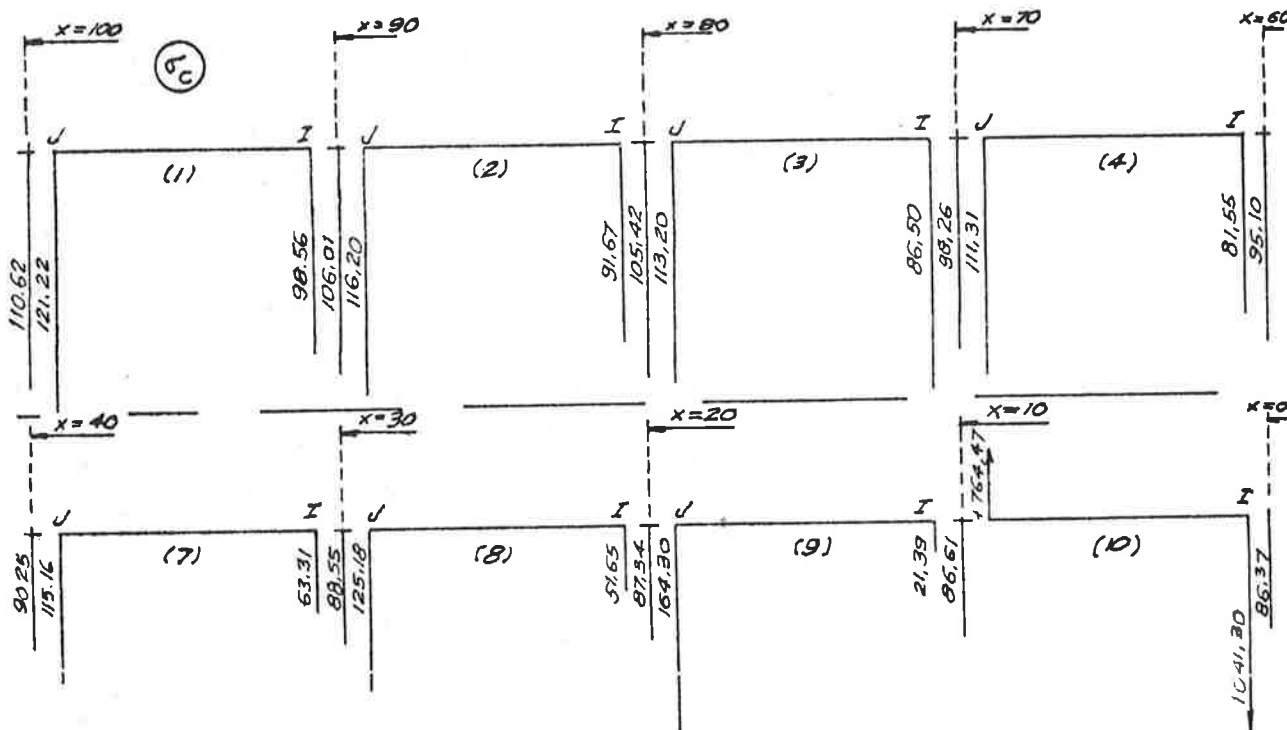
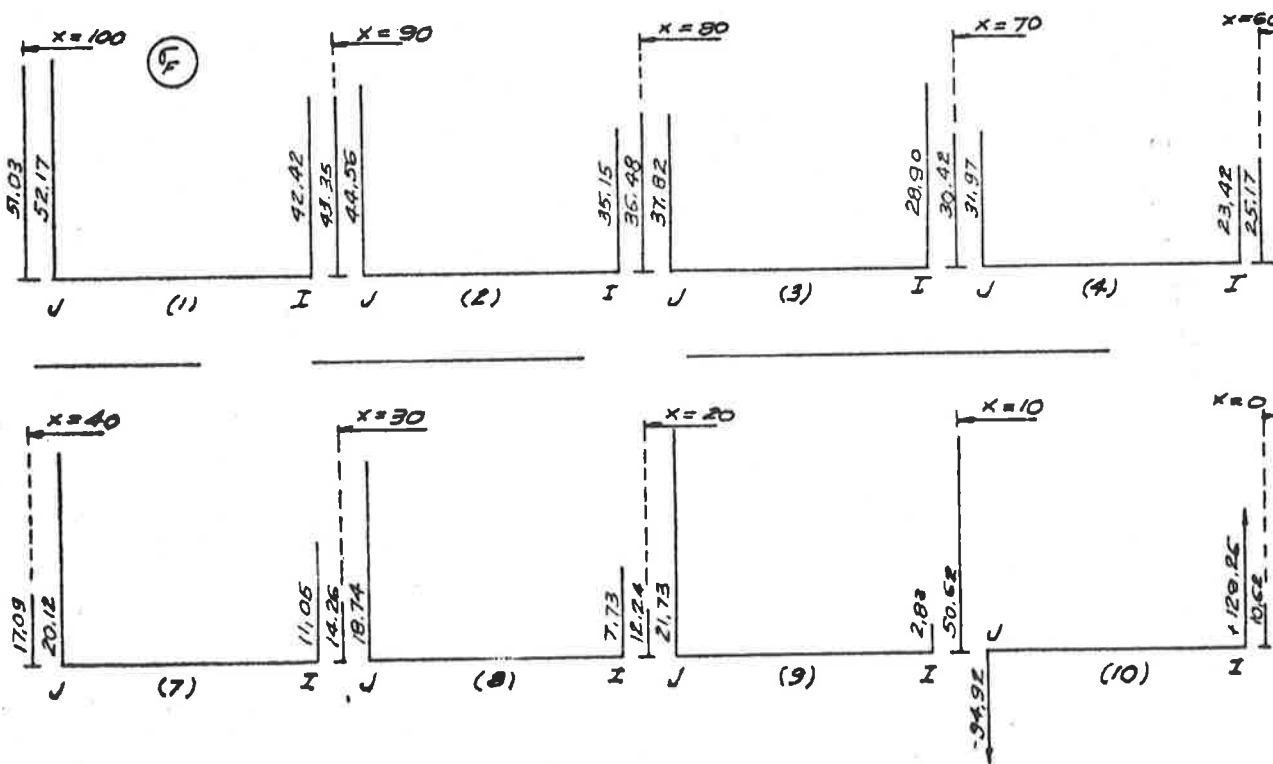
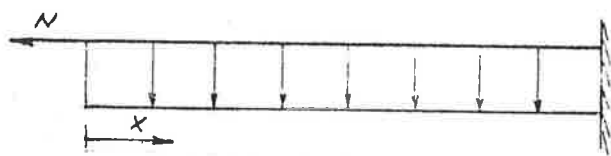


FIG. 5.17 - Malha 3 - Caso 5



CASO 5
 CASO 2 + CASO 1
 Extremidade LIVRE



unidades: kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teoria) —————

Malha 1 - - - - -

Malha 2

Malha 3 - · - · - ·

Malha 4 — x — x —

Malha 5 — o — o —

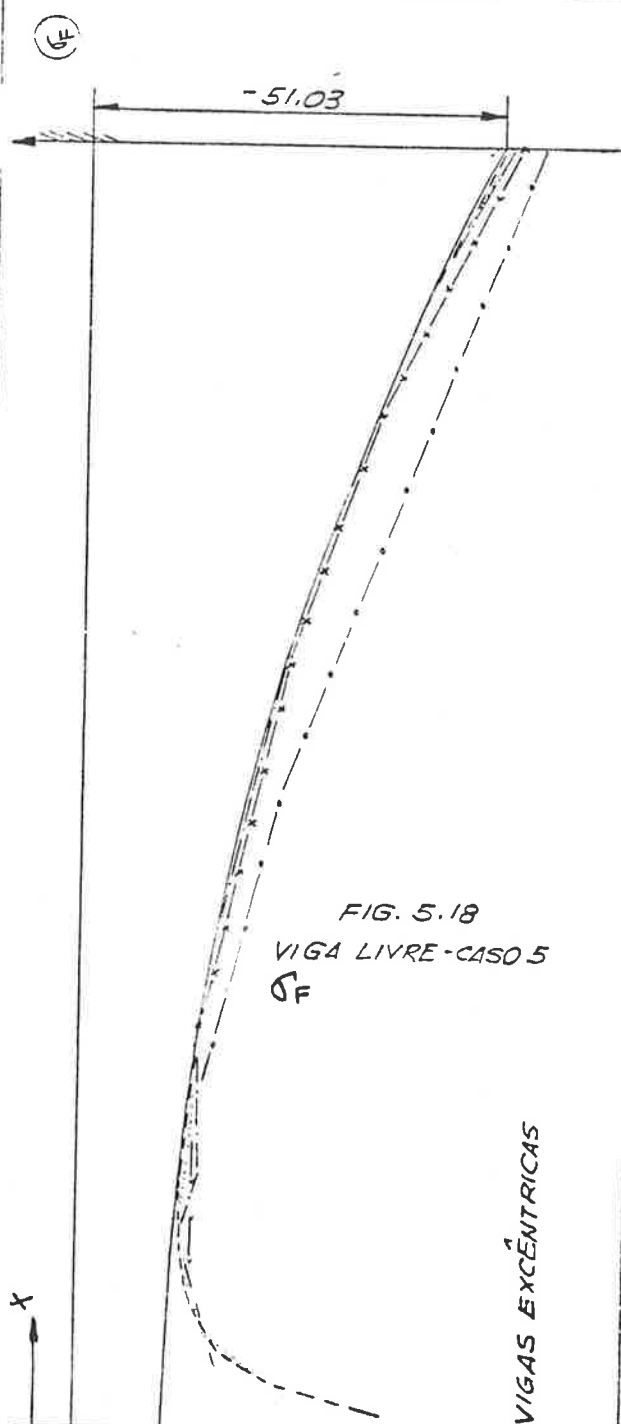
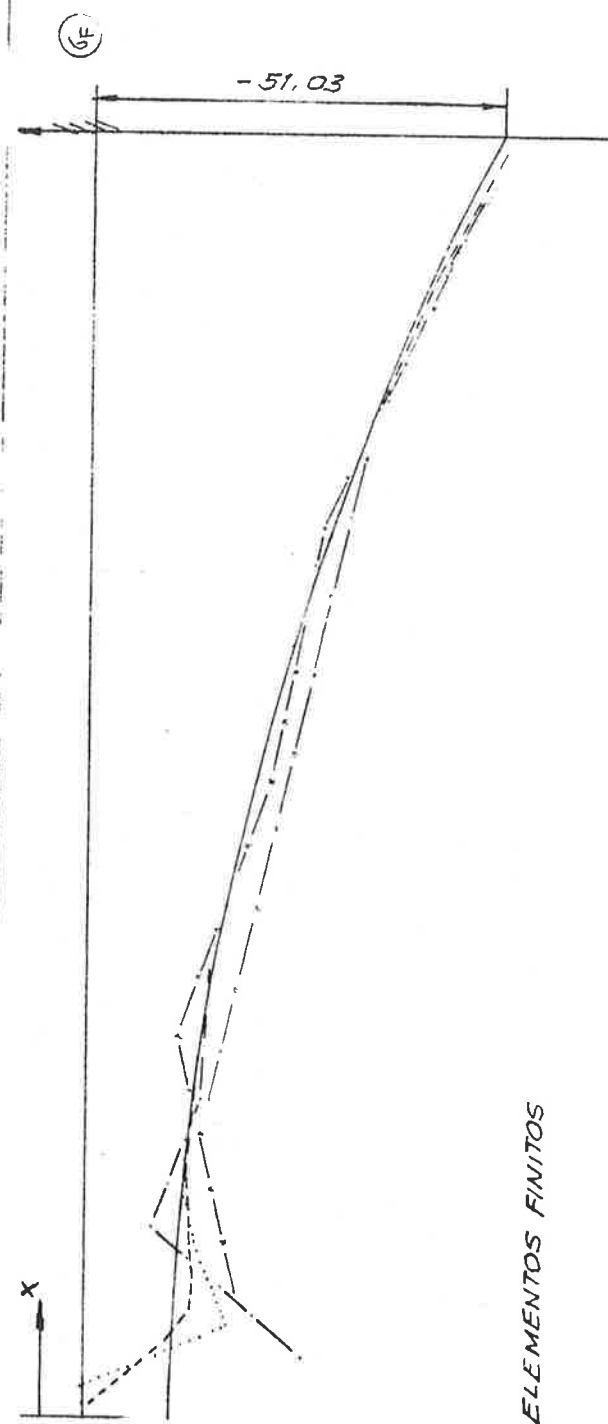
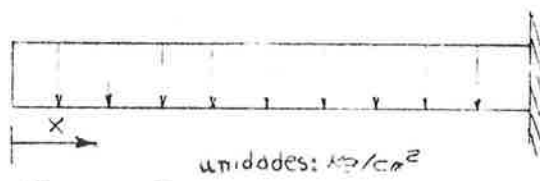


FIG. 5.18
 VIGA LIVRE - CASO 5
 σ_F

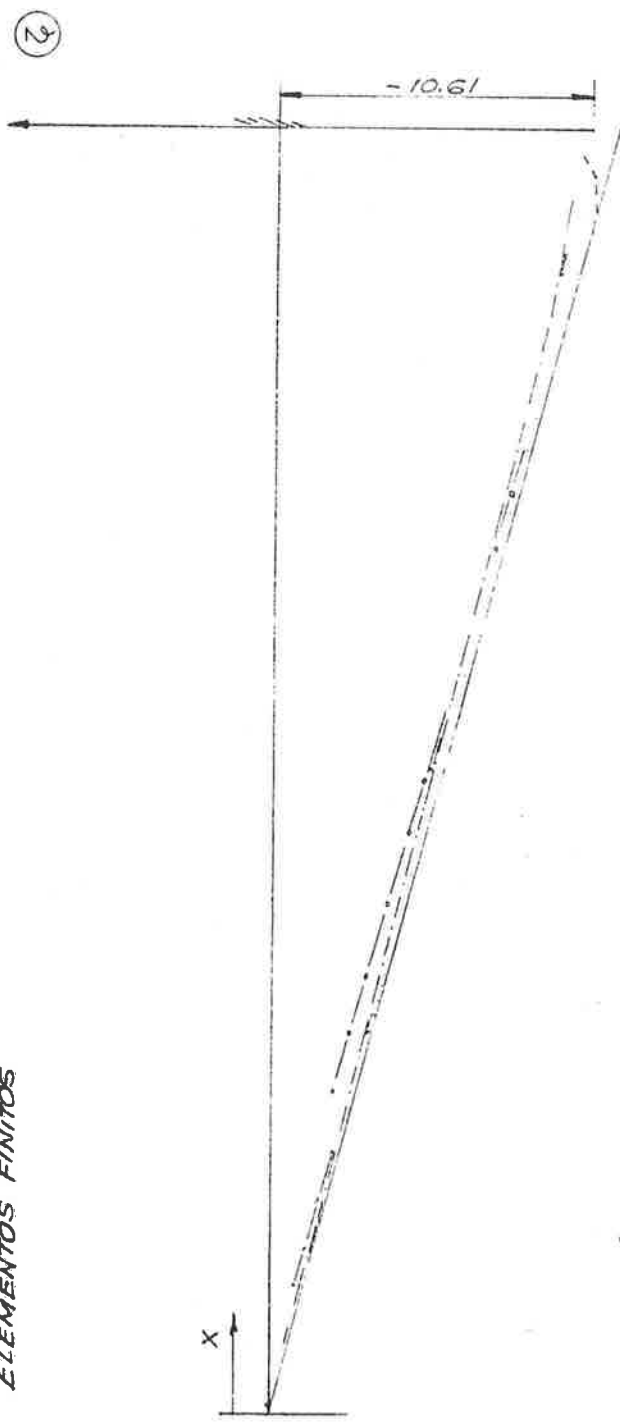
CASO 1
 Extremidade Livre
 Carregamento uniformemente distribuido



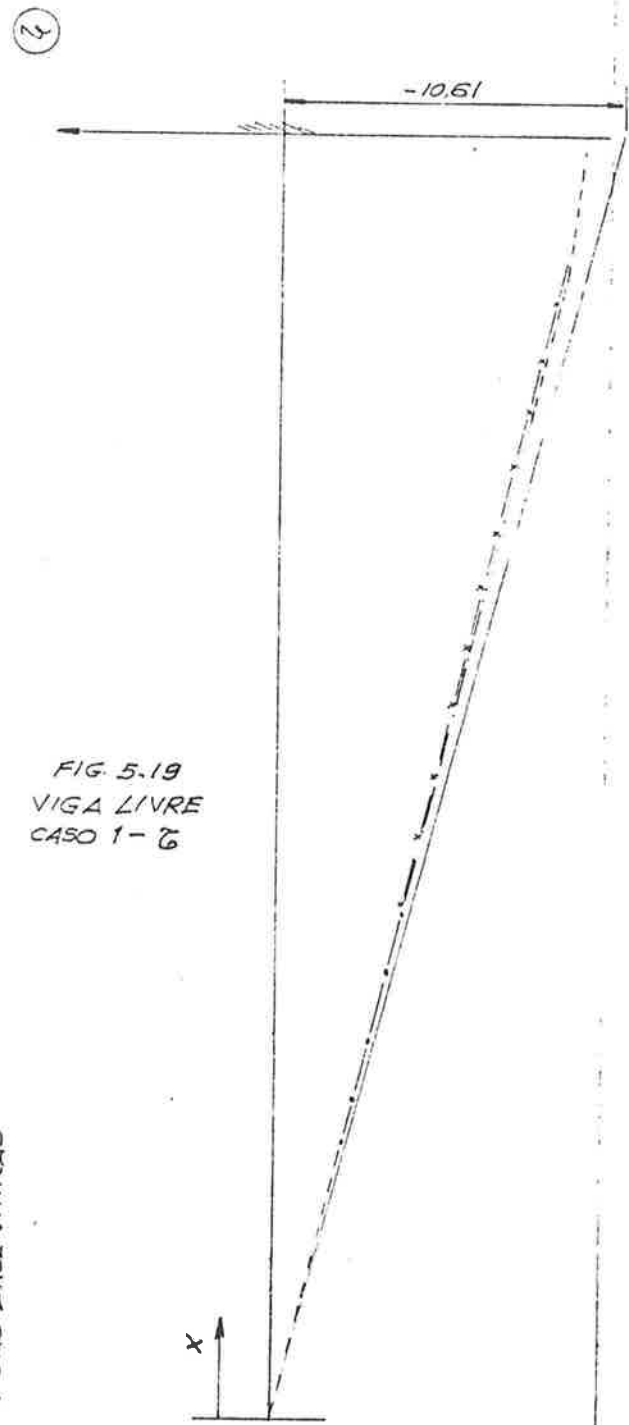
unidades: kg/cm^2

$\bar{\sigma}$ - Tensão de cisalhamento máxima na alma

- $\bar{\sigma}_{max}$ (Teórico) —————
- Malha 1 - - - - -
- Malha 2
- Malha 3 - · - · -
- Malha 4 — x — x —
- Malha 5 — · — · —



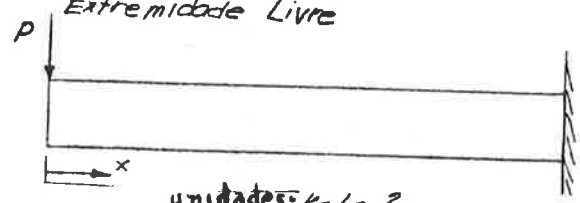
ELEMENTOS FINITOS



VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG 5-19
 VIGA LIVRE
 CASO 1 - $\bar{\sigma}$

CASO 2
 Carga transversal concentrada na extremidade
 Extremidade Livre



unidades: kg/cm²

τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma

τ_{max} (Teórico)	—————
Malha 1	- - - - -
Malha 2
Malha 3	- . - . -
Malha 4	- x - x -
Malha 5	— o —

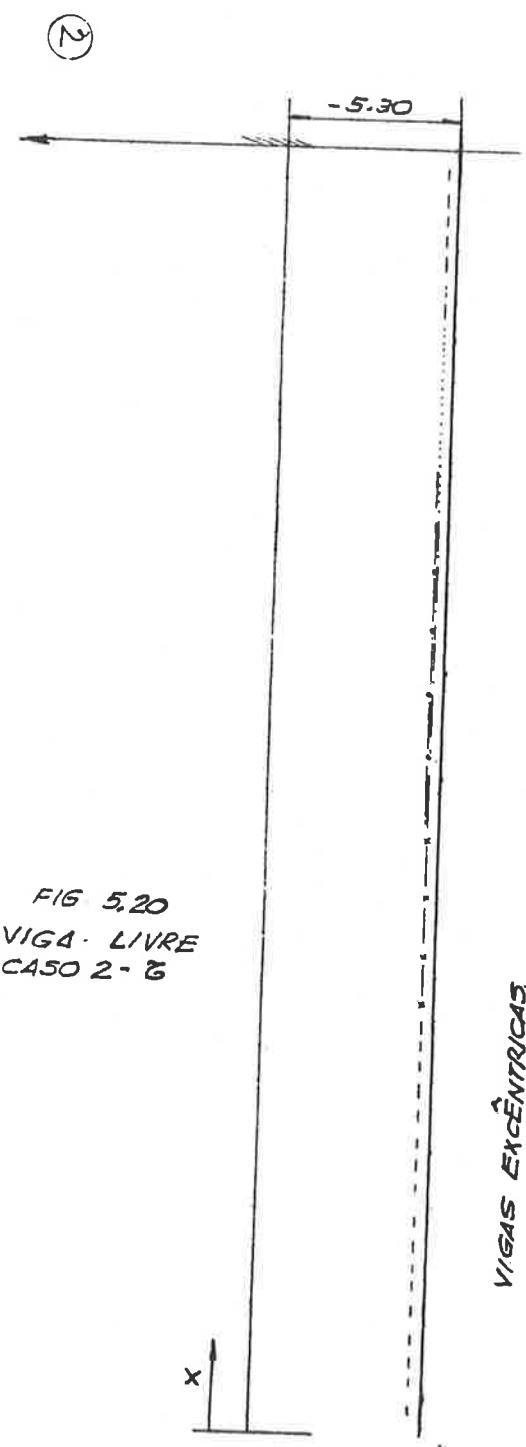
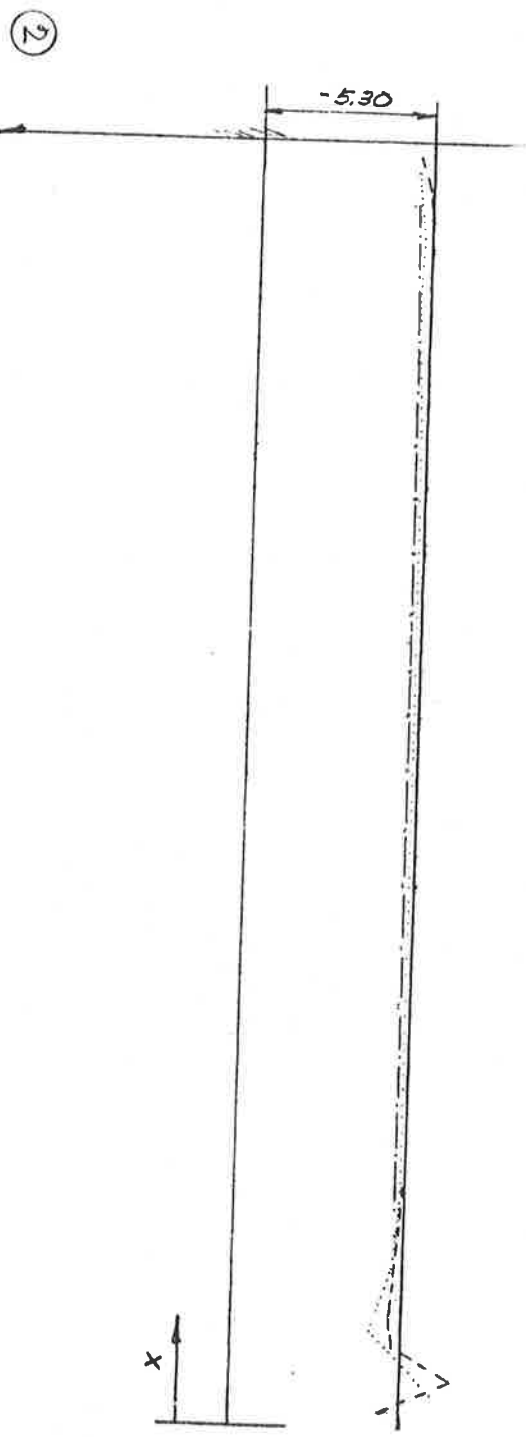


FIG 5.20
 VIGA LIVRE
 CASO 2 - τ

5.2 Viga bi-engastada

A mesma viga V do caso anterior (fig. 5.1) é agora bi-engastada e considerados 9 (nove) carregamentos a saber (fig. 5.21).

- CASO 1 - idem ao CASO 1 da viga com extremidade livre;
- CASO 2 - carga transversal concentrada na direção Z; no ponto c (fig. 5.1), no meio do vão, de valor $P = 50 \text{ Kg}^*$;
- CASO 3 - é a combinação dos casos 1 e 2;
- CASO 4 - idem ao CASO 2, mas aplicada a $2 L/5$, como mostra a fig.5.21;
- CASO 5 - é a combinação dos casos 1 e 4;
- CASO 6 - carga normal concentrada na direção x, no ponto c, no meio do vão, de valor $N = 2000 \text{ kg}^*$;
- CASO 7 - é a combinação dos casos 1 e 6;
- CASO 8 - idem ao CASO 6, mas aplicada a $2 L/5$;
- CASO 9 - é a combinação dos CASOS 1 e 8.

5.2.1 Teoria simples de viga

Procedendo analogamente ao sub-ítem 5.1.1, para os diferentes casos de carregamento, temos:

$$\text{CASO 1 : } M = \frac{x^2}{2} - 50x + 833,33$$

$$J_c = \frac{M}{206,22} ; \quad J_F = \frac{-M}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = 1,06x - 5,3$$

(5.6)

CASO 2:

$$M_1 = -25x + 625 \qquad M_2 = 25x - 1875$$

para $0 \leq x \leq 50$:

$$\sigma_c = \frac{M_1}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M_1}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = -2,65 \quad (5.7)$$

para $50 \leq x \leq 100$:

$$\sigma_c = \frac{M_2}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M_2}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = 2,65 \quad (5.8)$$

CASO 3 = CASO 1 + CASO 2

CASO 4:

$$M_1 = -17,6x + 480 \qquad M_2 = 32,4x - 2520$$

para $0 \leq x \leq 60$:

$$\sigma_c = \frac{M_1}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M_1}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = -1,86 \quad (5.9)$$

para $60 \leq x \leq 100$:

$$\sigma_c = \frac{M_2}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M_1}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = 3,44 \quad (5.10)$$

CASO 5 = CASO 1 + CASO 4

CASO 6

$$M_1 = -112,5x + 1875 \qquad M_2 = -112,5x + 9375$$

para $0 \leq x \leq 50$:

$$\sigma_c = \frac{M_1}{206,22} - 25 ; \quad \sigma_F = \frac{-M_1}{123,73} - 25 ; \quad \sigma_{\max} = -11,93 \quad (5.11)$$

para $50 \leq x \leq 100$:

$$\sigma_c = \frac{M_2}{206,22} + 25 ; \quad \sigma_F = \frac{-M_2}{123,73} + 25 ; \quad \sigma_{\max} = -11,93 \quad (5.12)$$

CASO 7 = CASO 1 + CASO 6

CASO 8:

$$M_1 = -108x + 2400$$

$$M_2 = -108x + 9900$$

para $0 \leq x \leq 60$:

$$\sigma_c = \frac{M_1}{206,22} - 20 ; \quad \sigma_F = \frac{-M_1}{123,73} - 20 ; \quad \sigma_{\max} = -11,46 \quad (5.13)$$

para $60 \leq x \leq 100$:

$$\sigma_c = \frac{M_2}{206,22} + 30 ; \quad \sigma_F = \frac{-M_2}{123,73} + 30 ; \quad \sigma_{\max} = -11,46 \quad (5.14)$$

CASO 9 = CASO 1 + CASO 8

5.2.2 Modelo de elementos finitos

São analisadas as mesmas malhas do caso anterior, exceto a malha 5 que não é considerada para este caso de bi-engastamento.

5.2.3 Modelo de viga + placa

Analogamente ao caso anterior são analisadas todas as malhas, exceto a malha 5, que tanto no modelo de elementos finitos como neste não é conveniente (por exemplo temos o caso 2 de carregamento, onde todos os deslocamentos dos nós da malha 5 serão nulos).

5.2.4 Resultados e conclusões

Feitas as análises e traçando o gráfico de σ_F e σ_C para o caso 1 de carregamento, do modelo viga + placa, usando a 2a. forma B temos a fig. 5.22. O fato mais importante a notar é que dois elementos da malha 1 tem o seu ponto médio no ponto onde a tensão normal é nula. Ora, isso acarreta que se tenha $P = 0$ nesses elementos (ver paragrafo e do sub-ítem 4.4.2) não valendo portanto o uso da 2a. forma B. O resultado da análise é numericamente dado por $P \approx 0$, que implica em tensões nesses elementos que não tem significado, como pode ser visto pela fig. 5.22 para σ_F e de forma mais relevante para σ_C . Esta outra limitação é também facilmente detectável, no caso geral, por simples observação do gráfico resultante e podendo ser corrigida "ignorando-se" esses pontos. Faz-se o gráfico passar pelas tensões calculadas no ponto médio do elemento (2a. forma A) da mesma forma que é feito para o efeito da brusca variação da linha neutra, visto no caso anterior. Realizando tal procedimento temos o gráfico da fig. 5.23, onde também estão apresentados os resultados de σ_F para o modelo de elementos finitos. Para os casos 2,3,4 e 5 de carregamento os resultados de σ_F estão apresentados da fig. 5.24 à 5.27.

Do caso 6 ao caso 9, todos eles apresentam uma variação da linha neutra ao longo da viga, além do problema, já mencionado, perto do ponto de aplicação da carga normal N. Como exemplo temos o gráfico da fig. 5.28 feito para a malha 3 sob o caso 7 de carregamento. Nesta figura pode-se

ver os efeitos da "mudança da linha neutra" bem como o forte erro cometido perto da região de aplicação de N ($x = 50$). Caso fossemos traçar o gráfico de σ_c e σ_F através da média entre σ_i e σ_j chegaríamos à fig. 5.29, onde facilmente detecta-se a não aplicabilidade da 2a.forma B em vários pontos.

Aplicando a 2a.forma A nos pontos necessários temos finalmente os resultados do caso 6 ao caso 9, para σ_F , mostrados da fig. 5.30 à 5.33, onde vemos também as respostas do modelo de elementos finitos.

Os resultados das tensões de cisalhamento são apresentados da fig. 5.34 à 5.38 para diferentes casos de carregamento, tanto para o modelo viga+ placa (equação (4.45)) como para o modelo de elementos finitos.

De forma geral, pode-se dizer, que os exemplos 5.1 e 5.2 apresentaram resultados satisfatórios para o modelo viga + placa, inclusive melhores que o modelo de elementos finitos.

5.3 Grelha formada de duas vigas

É constituída uma grelha com a intersecção ortogonal da viga V (a mesma dos casos anteriores) e da viga V' (fig. 5.39) engastadas nas quatro extremidades.

Vamos considerar dois carregamentos sobre a grelha (fig. 5.40):

- CASO 1 : pressão nos flanges superiores igual a $.05 \text{ Kg/cm}^2$, equivalendo a uma pressão uniformemente distribuída $w = 1 \text{ Kg/cm}$;
- CASO 2 : carga transversal concentrada no ponto de intersecção na direção 2, de valor $P = 100 \text{ Kg}$.

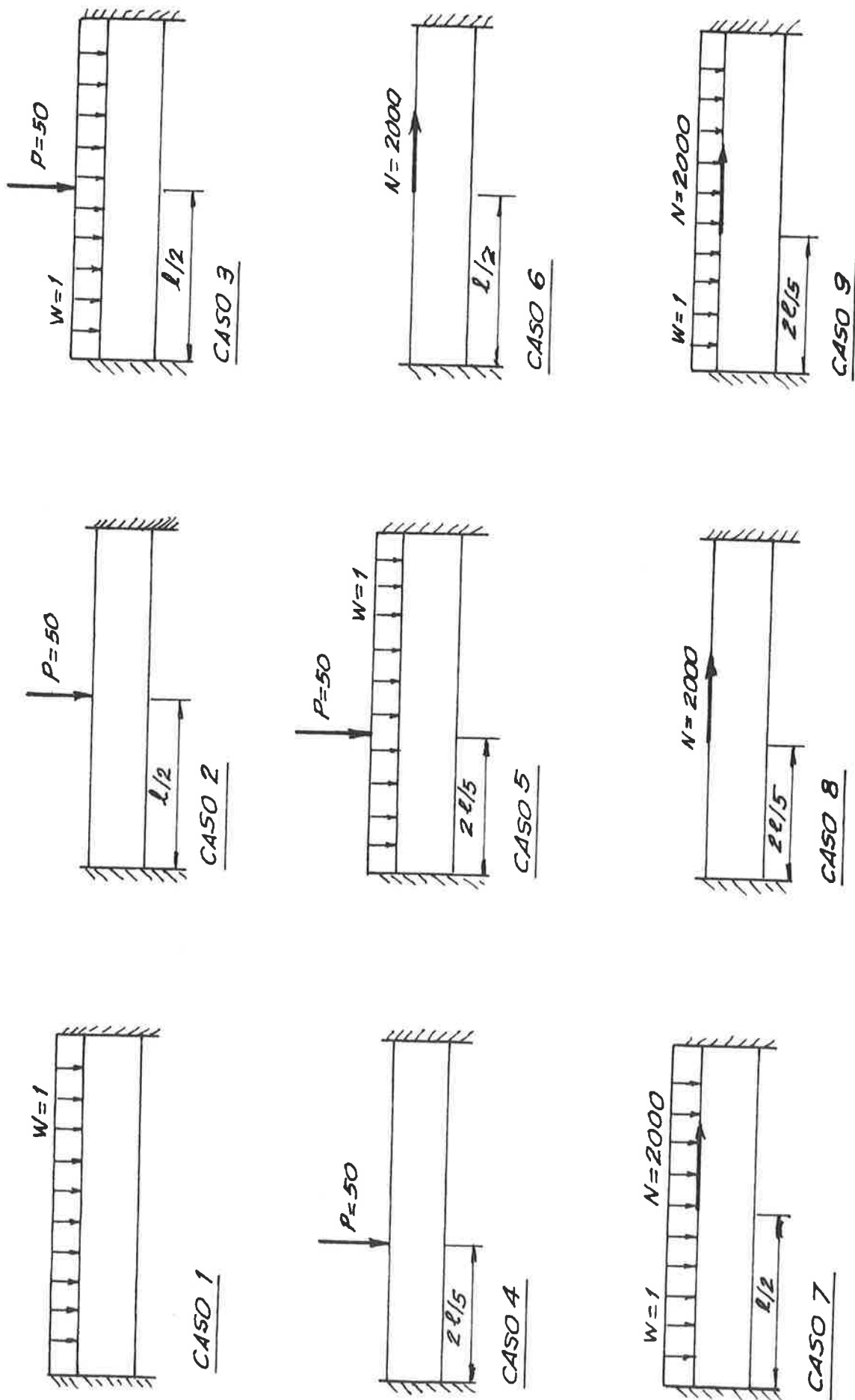
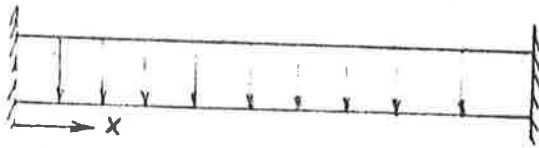


FIG. 5.21 - Corregamento para a viga V - Biengastada

CASO 1

Carregamento uniformemente distribuido
Extremidade engastada



σ_c - Tensão normal na flange superior
 σ_f - Tensão normal na flange inferior

σ_c _____

σ_f _____

Malha 1 - - - - -

Malha 2 -

Malha 3 - x - x - x -

Malha 4 -

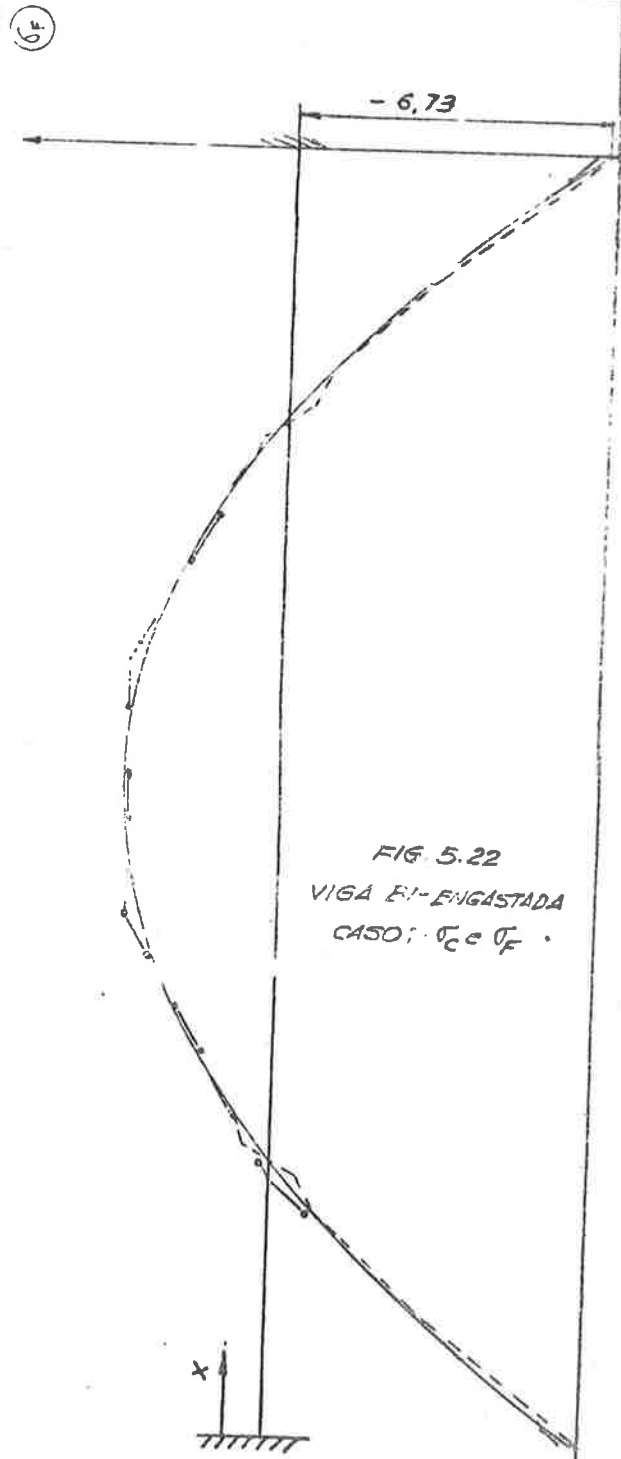
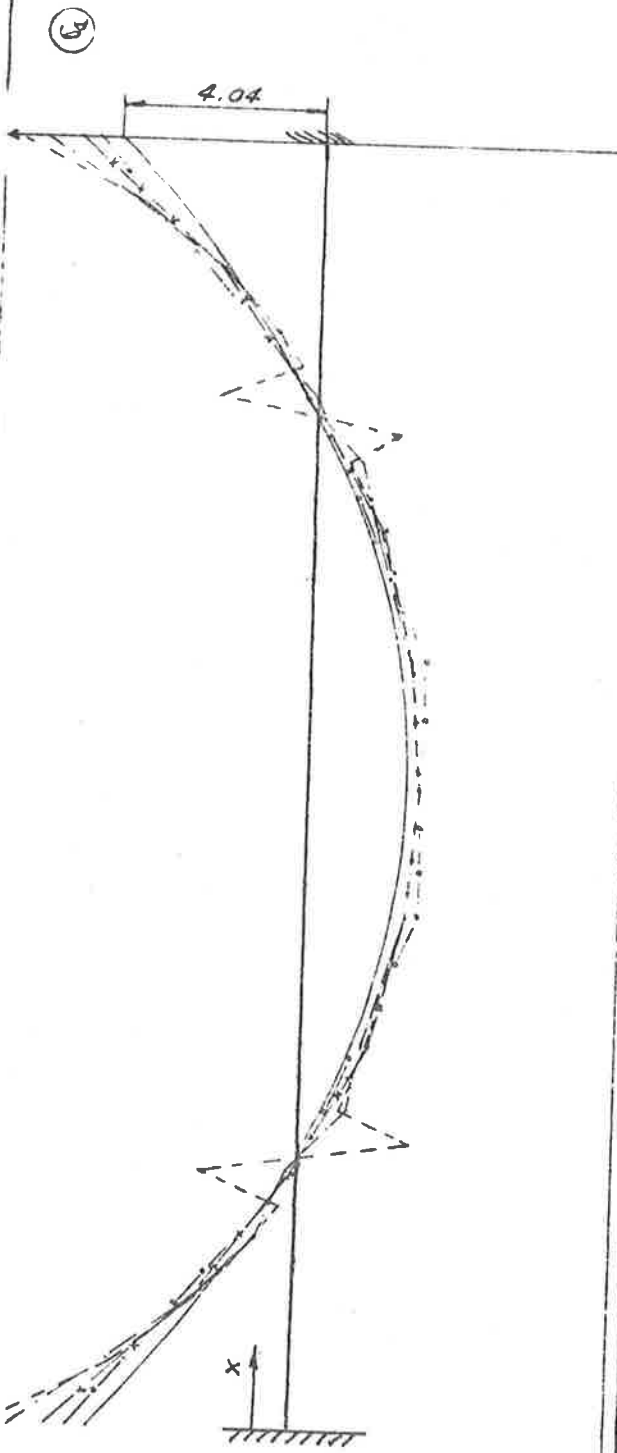
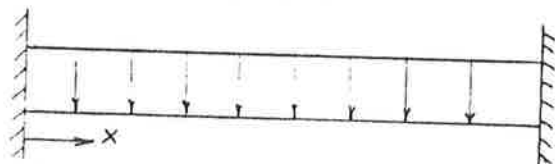


FIG. 5.22
VIGA EI-ENGASTADA
CASO: σ_c σ_f

CASO 1

Carregamento uniformemente distribuído
Extremidade engastada



σ_F - Tensão normal na flange inferior

unidades: Kg/cm²

σ_F (Teórico) ———

Malha 1 - - - - -

Malha 2 - · - - · -

Malha 3 - x - x -

Malha 4 - o - o -

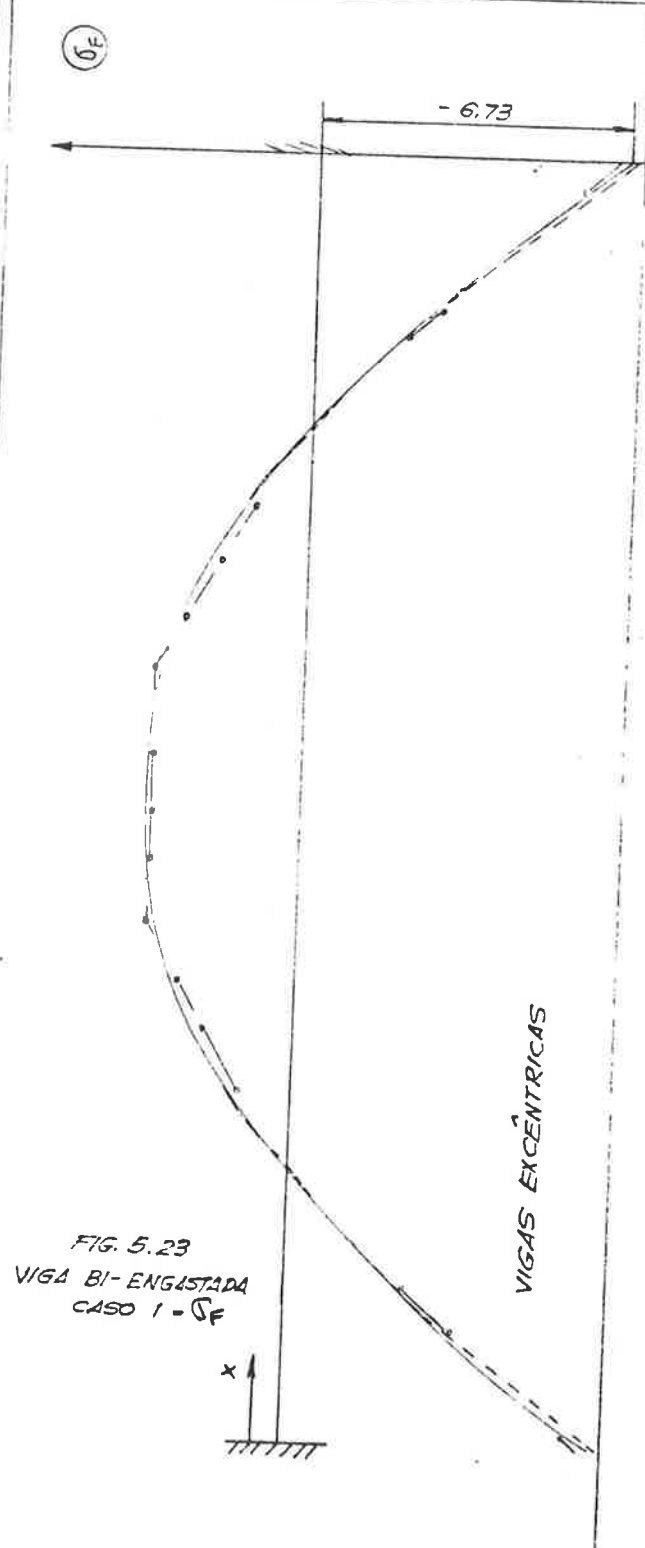
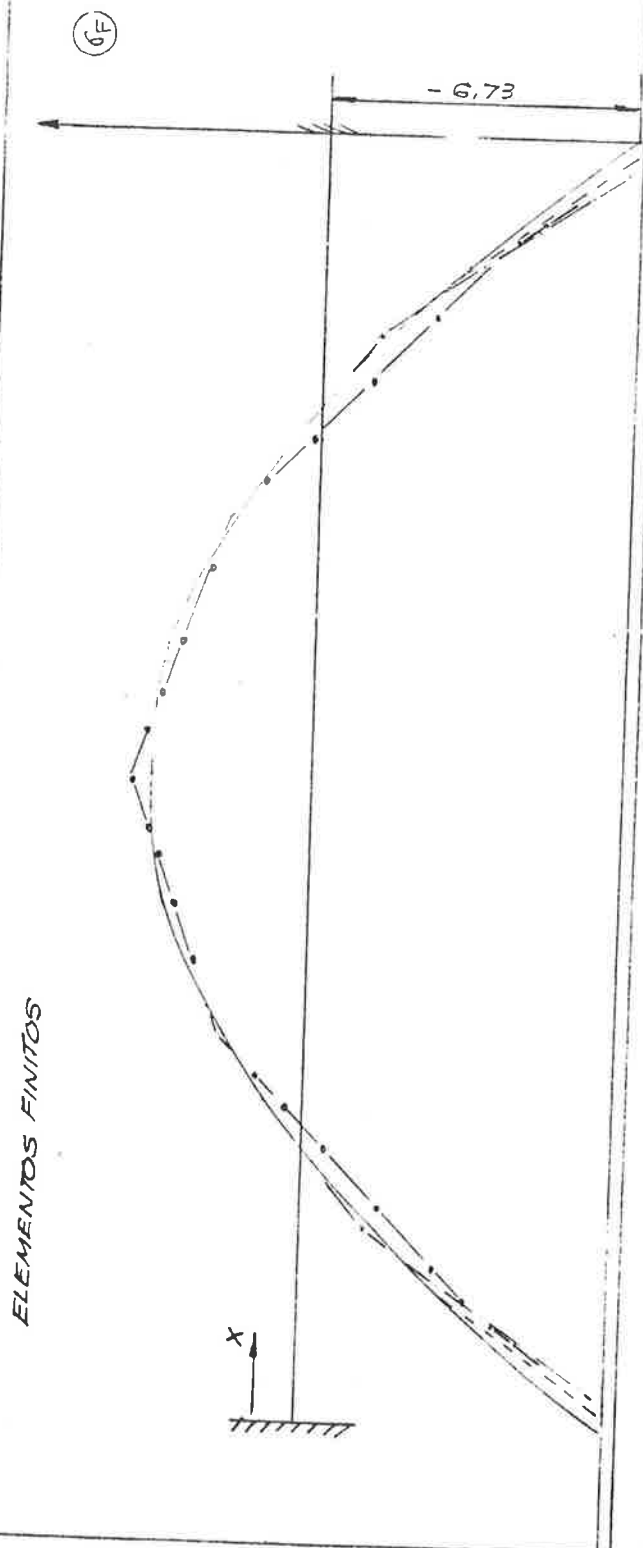
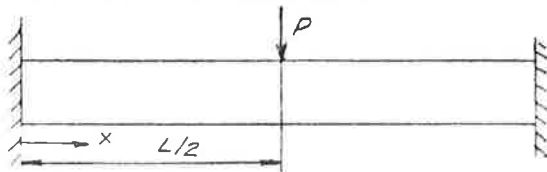


FIG. 5.23
VIGA BI-ENGASTADA
CASO 1 - σ_F

CASO 2

Carga transversal concentrada a $L/2$
 Extremidade engastada



σ_F - Tensão normal na fianga inferior

unidades: Kg/cm^2

σ_F (Teórico) ———

Malha 1 - - - - -

Malha 2 - · - - - -

Malha 3 — x — x —

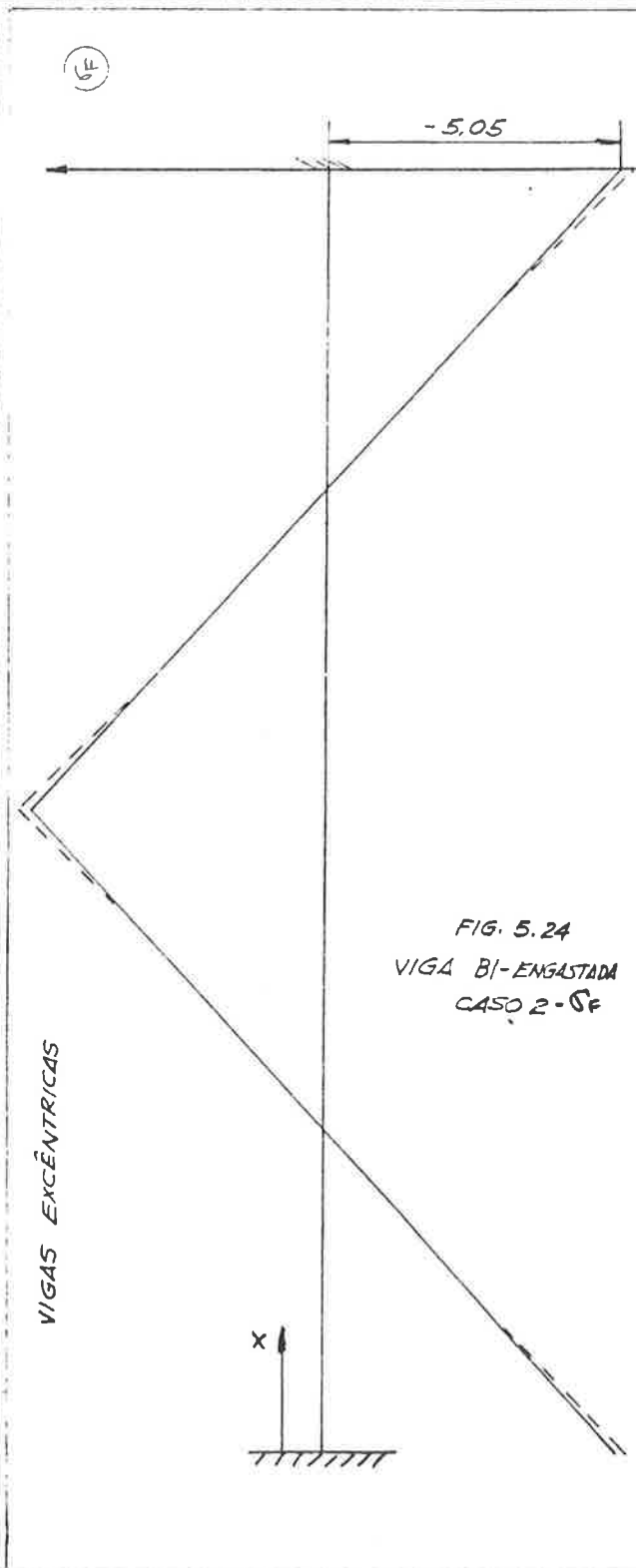
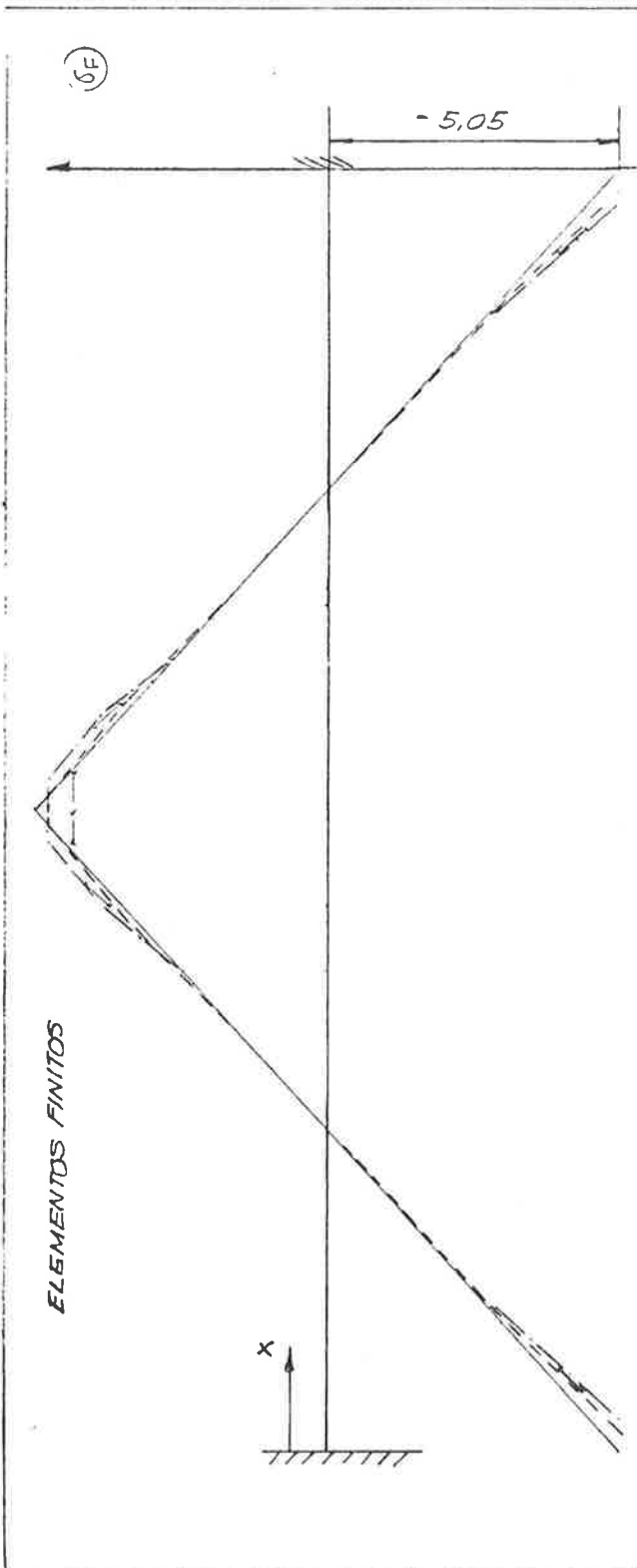
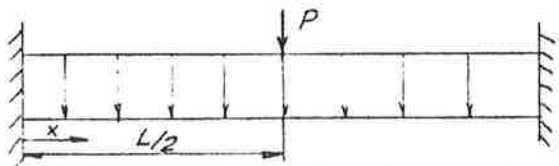


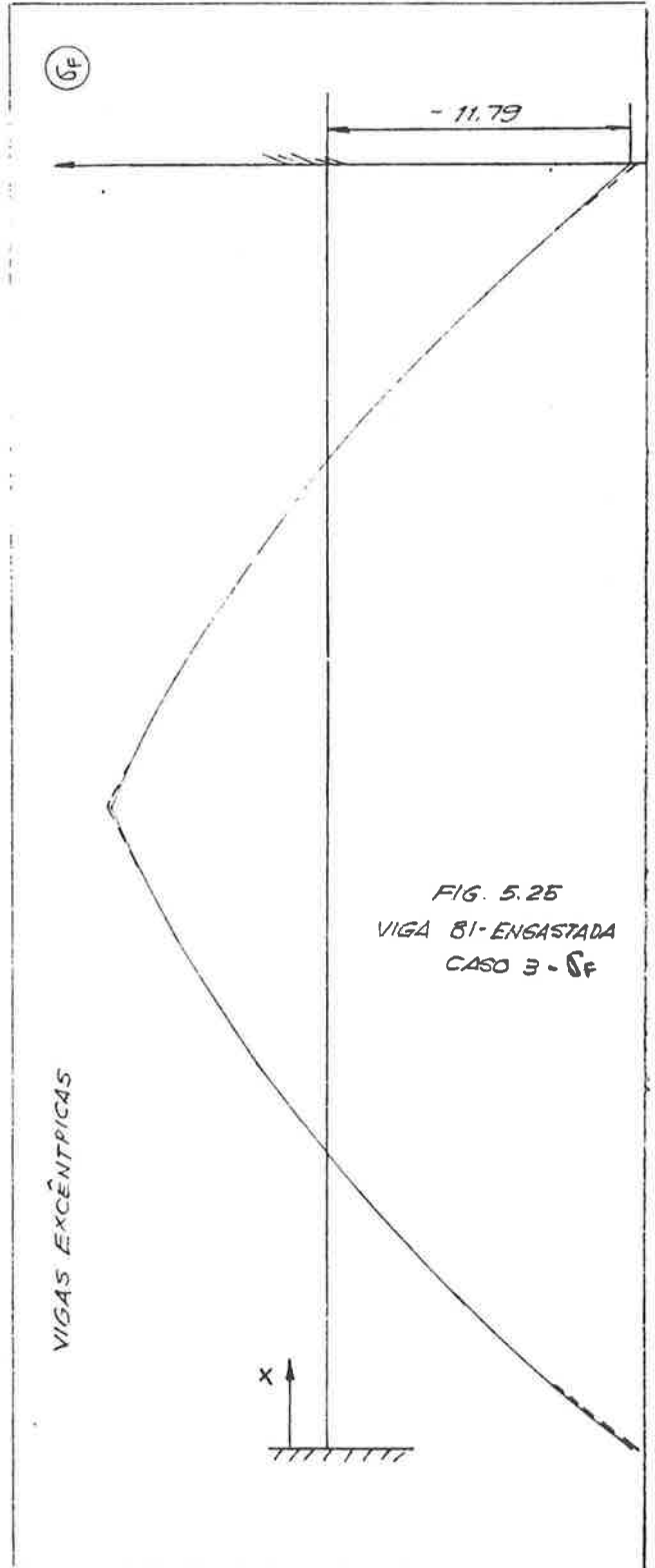
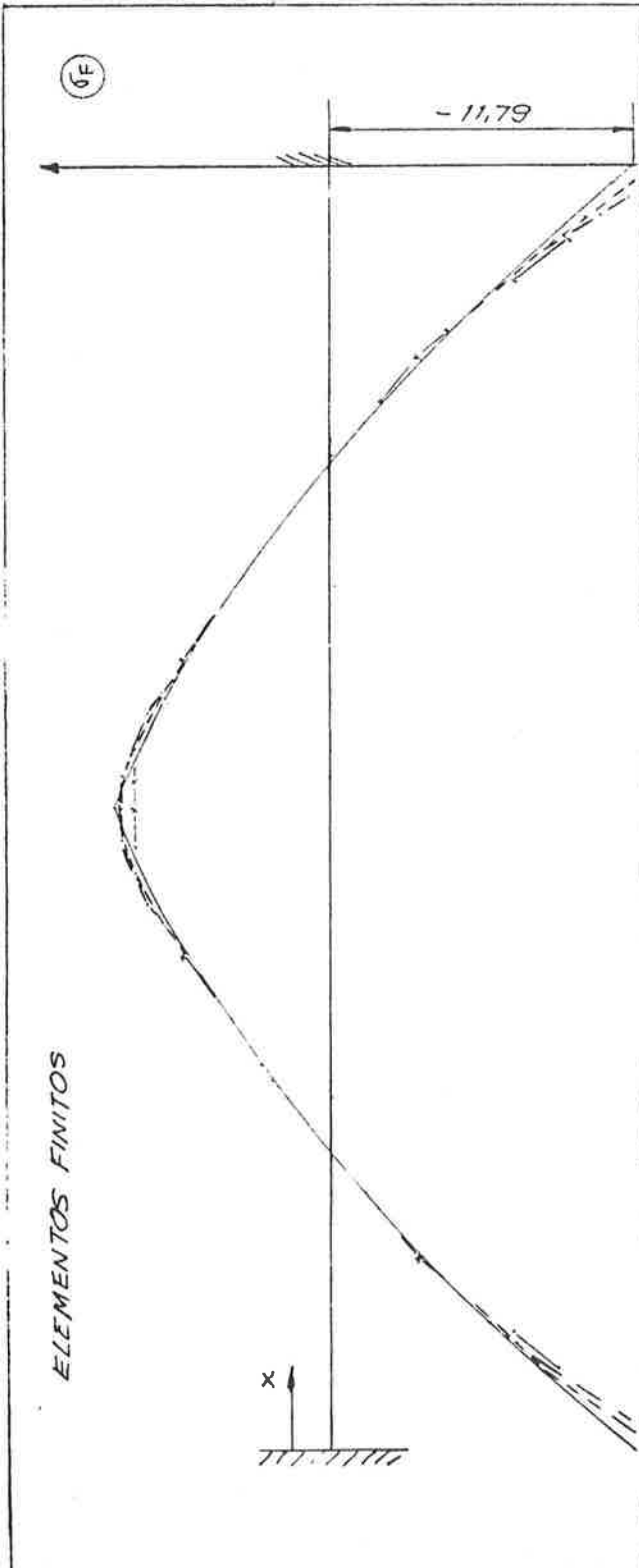
FIG. 5.24
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO 2 - σ_F

CASO 3
 Caso 2 + caso 1
 Extremidade engastada



σ_F - Tensão normal na flange inferior
 unidades: kg/cm^2

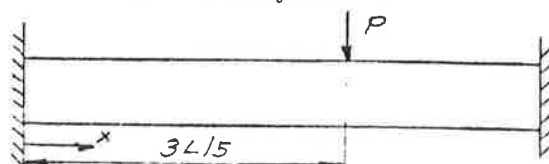
σ_F (Teórico)	—————
Malha 1	- - - - -
Malha 2	- · - · -
Malha 3	— x — x —



CASO 4

Carga transversal concentrada a $3L/5$

Extremidade engastada



σ_F - Tensão normal na flange inferior

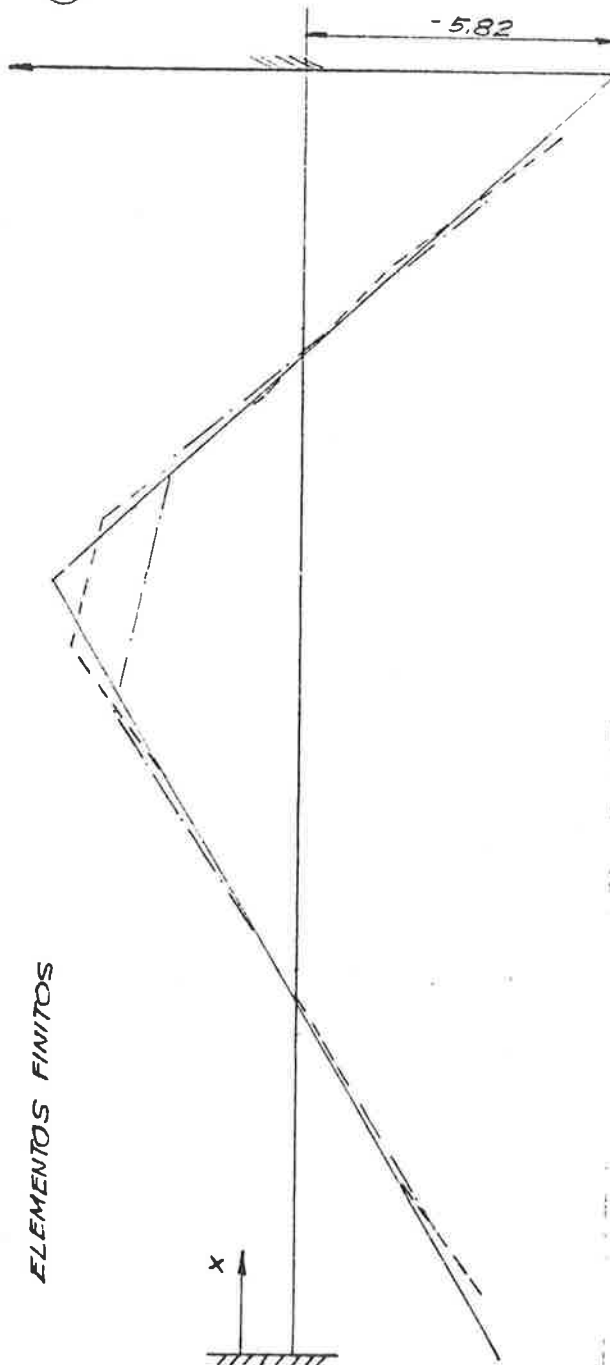
unidades: Kg/cm^2

σ_F (Teórico) —————

Malha 3 - - - - -

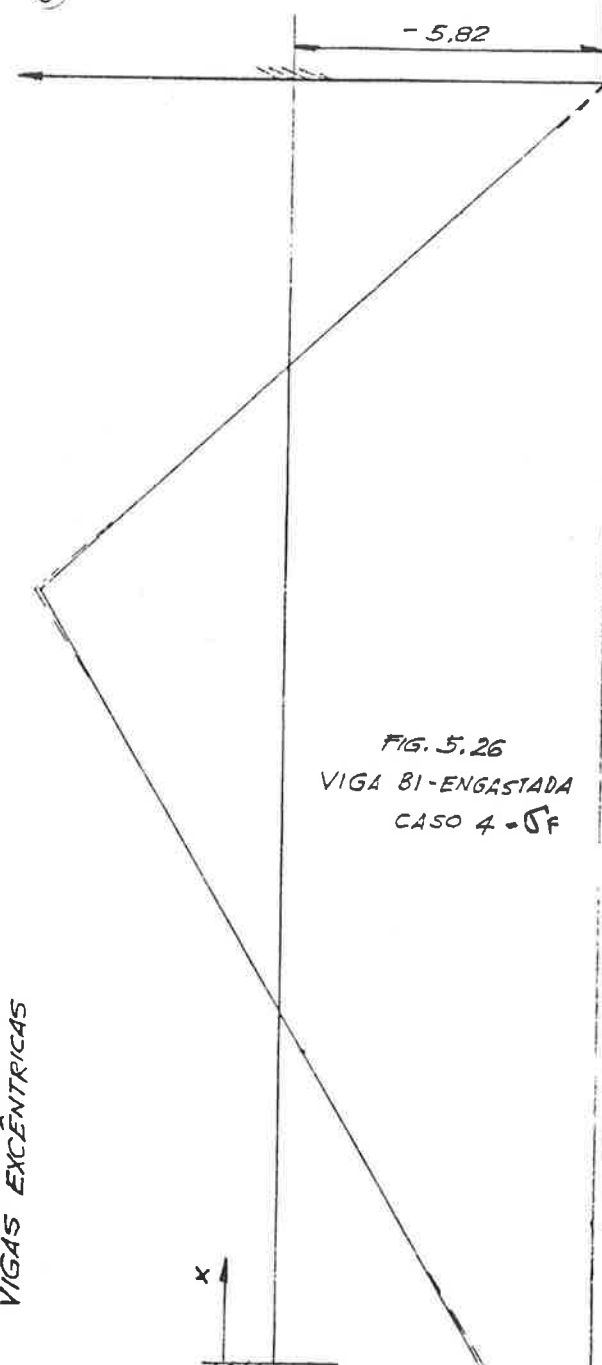
Malha 4 - - - - -

(σ_F)



ELEMENTOS FINITOS

(σ_F)



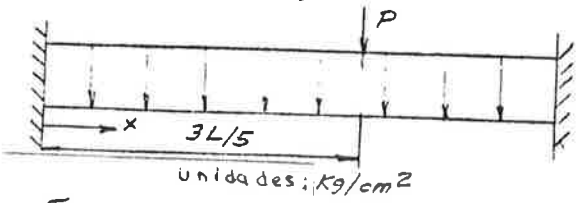
VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.26
VIGA BI-ENGASTADA
CASO 4 - σ_F

CASO 5

Caso 4 + caso 1

Extremidade engastada



unidades: Kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange inferior

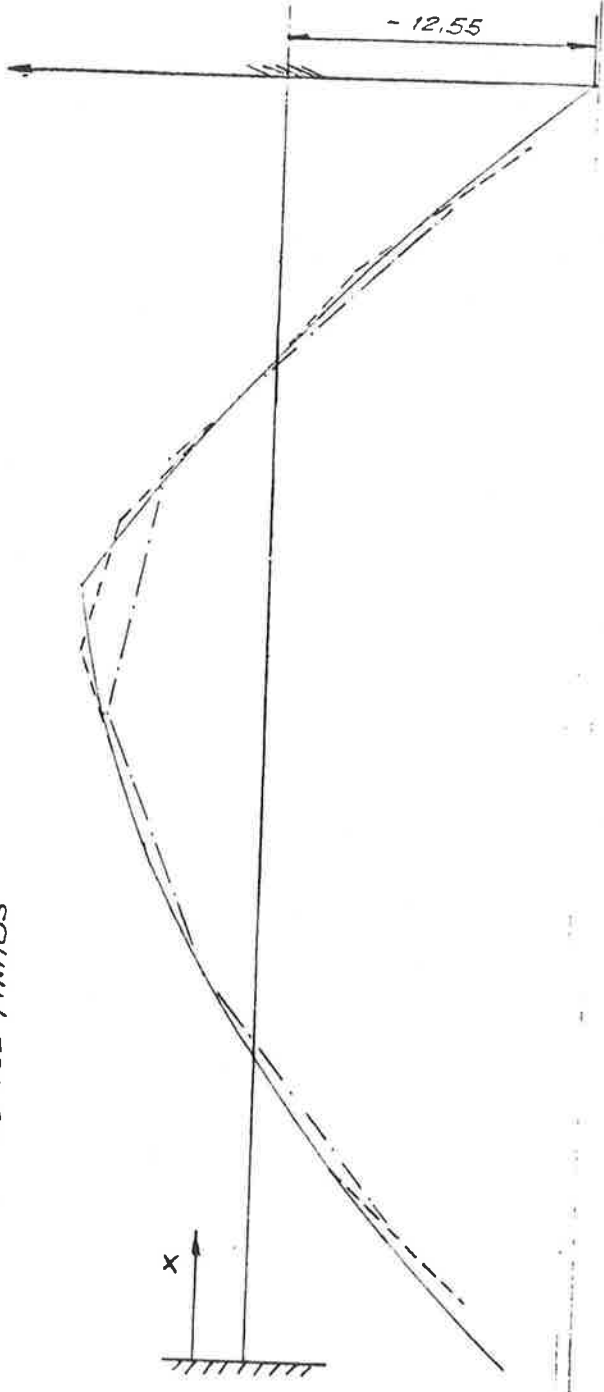
σ_F - (Teórico) ———

Malha 3 - - - - -

Malha 4 - - - - -

(5)

ELEMENTOS FINITOS



(6)

VIGAS EXCÊNTRICAS

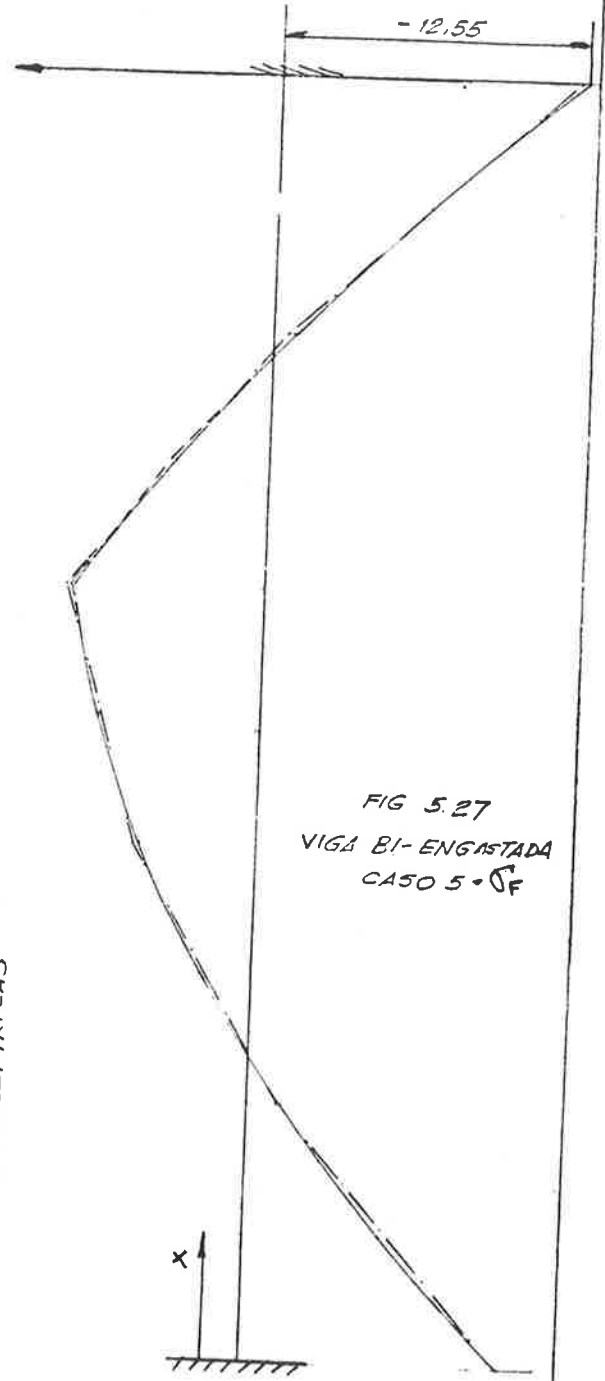
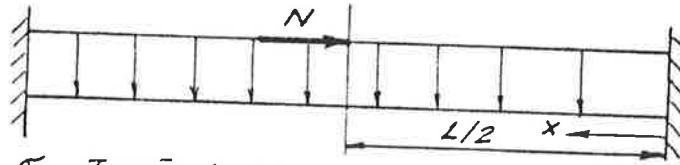
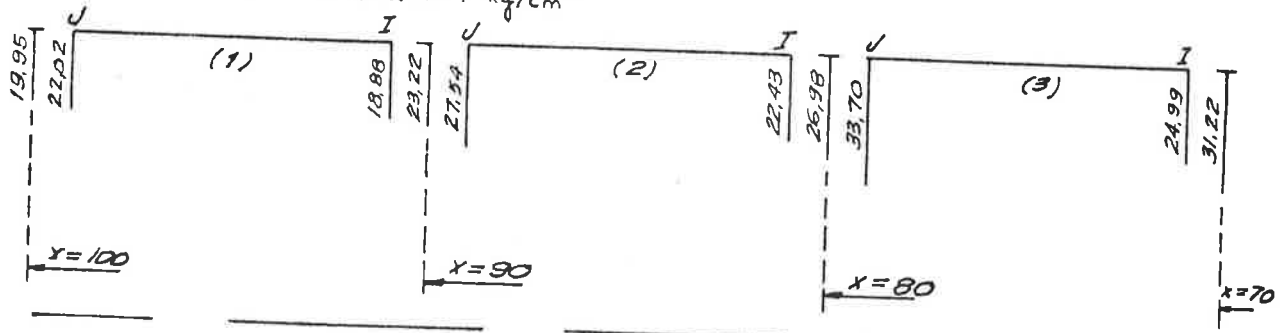


FIG 5.27
VIGÁ BI-ENGASTADA
CASO 5 - σ_F

Malha 3
 Caso 7 = caso 1 + caso 6
 Extremidade engastada



σ_c - Tensão normal na flange superior (chapa)
 σ_f - Tensão normal na flange inferior
 Unidades: Kg/cm^2



(C)

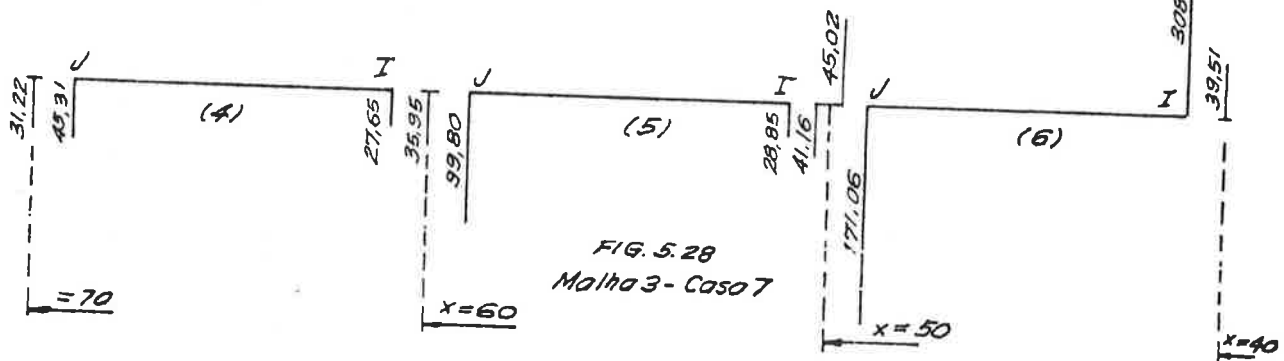
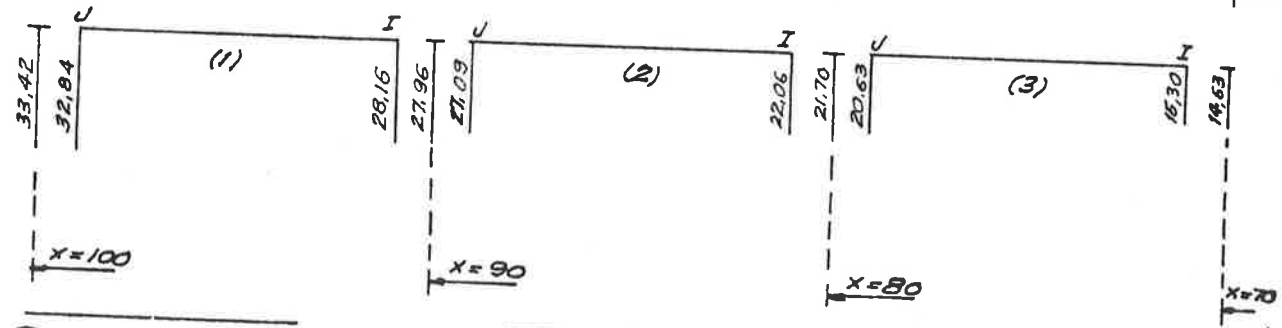
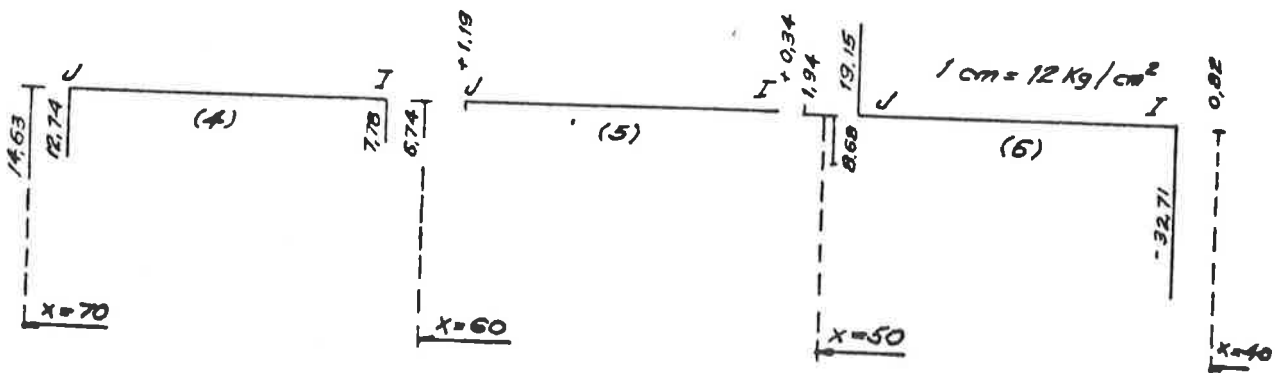


FIG. 5.28
 Malha 3 - Caso 7



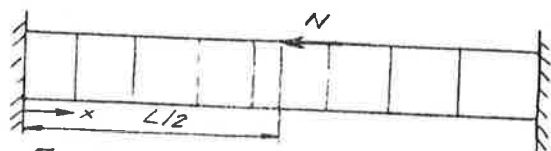
(F)



CASO 7

Caso 1 + caso 6

Extremidade engastada



σ_c - Tensão normal na flange superior (chapa)
 σ_f - Tensão normal na flange inferior

σ_c (Teórico) ———

σ_f (Teórico) ———

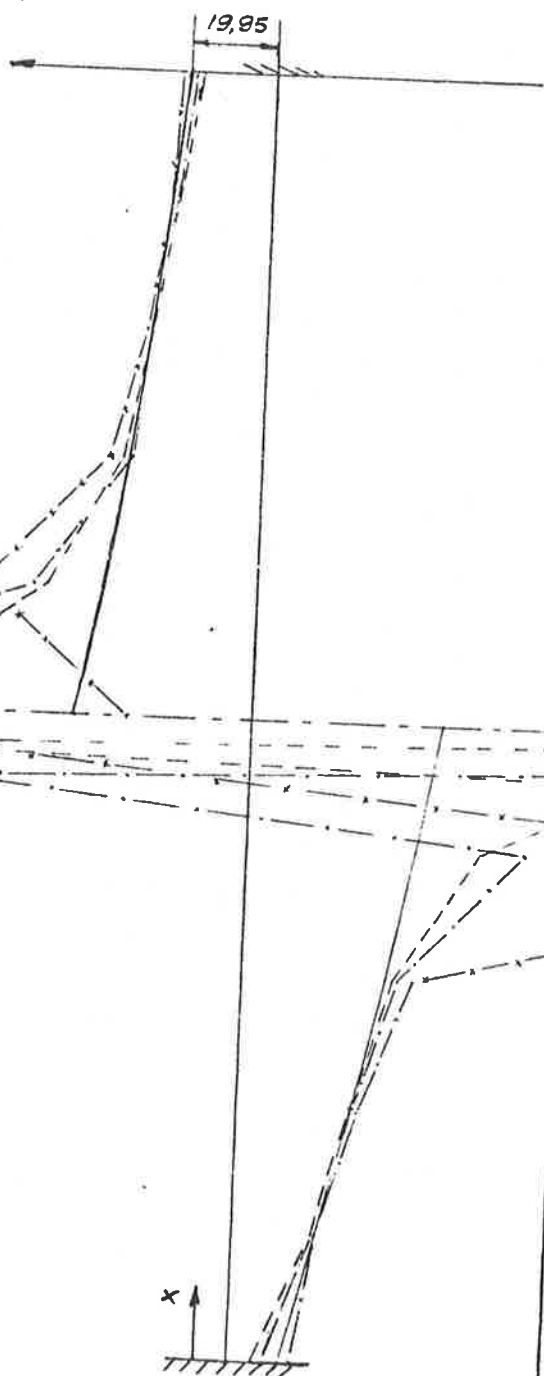
Malha 1 - - - - -

Malha 2 - . - - -

Malha 3 - x - x - x

(3)

unidades: Kg/cm²



(6)

unidades: Kg/cm²

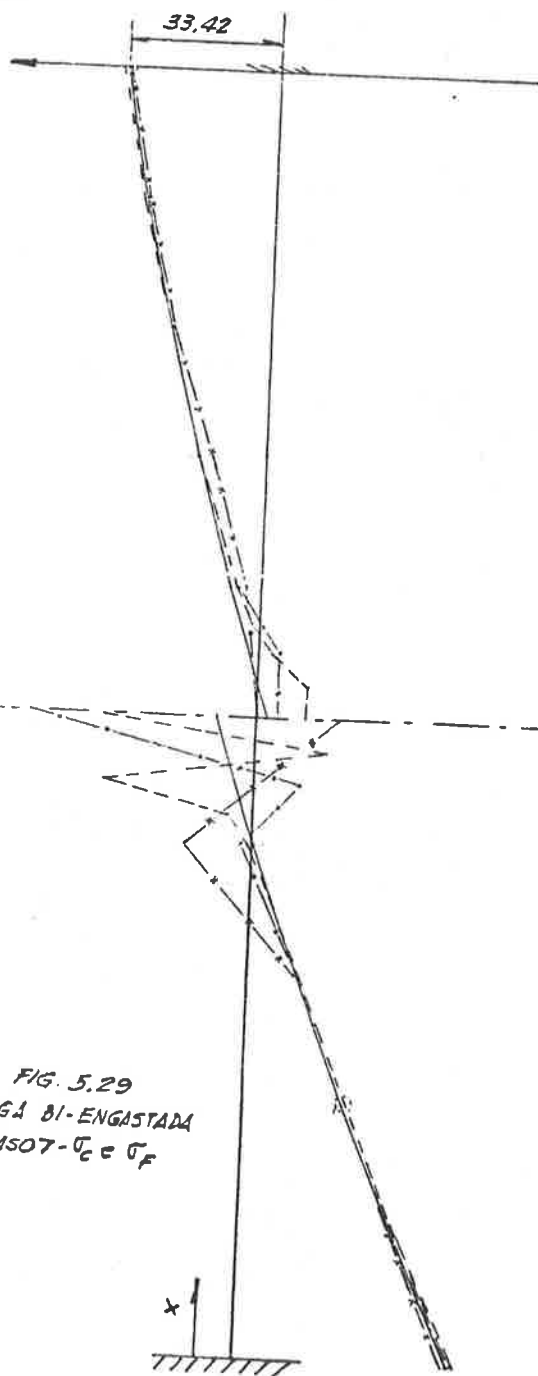
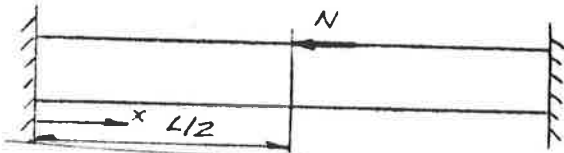


FIG. 5.29
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO 7 - σ_c e σ_f

CASO 6

Carga normal concentrada a $x = L/2$
 Extremidade engastada



unidades: Kg/cm^2

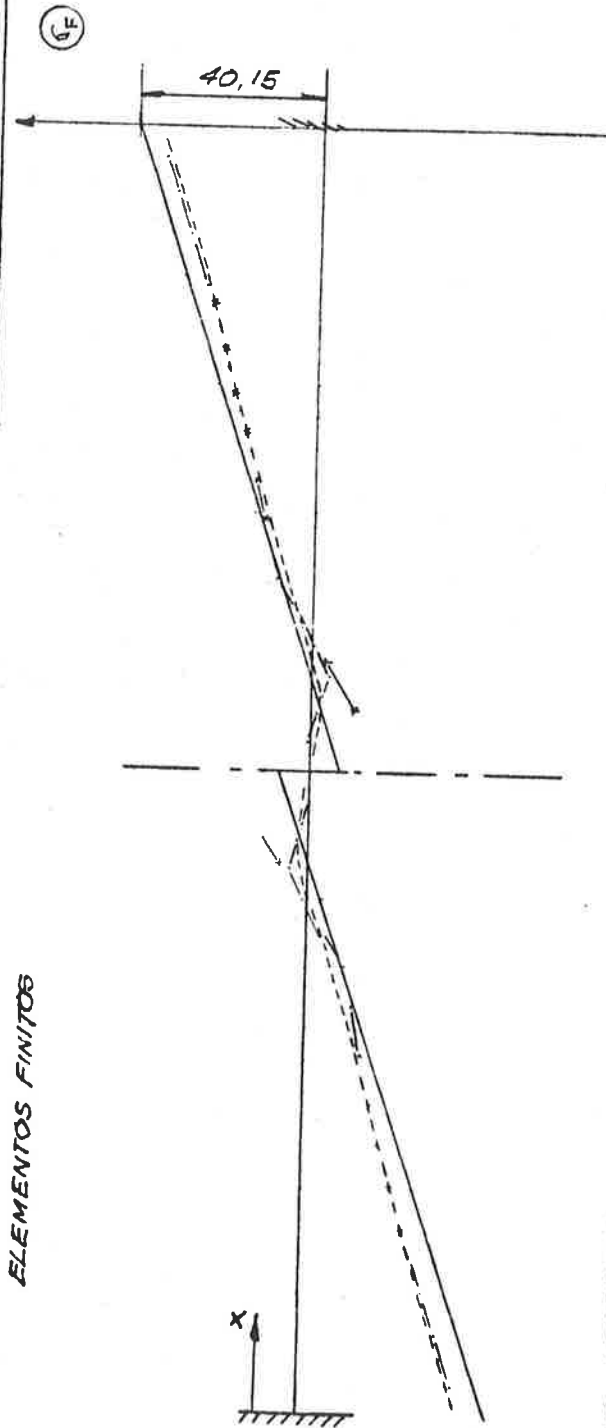
σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teórico) —————

Malha 1 - - - - -

Malha 2 - . - . -

Malha 3 — x — x —



ELEMENTOS FINITOS

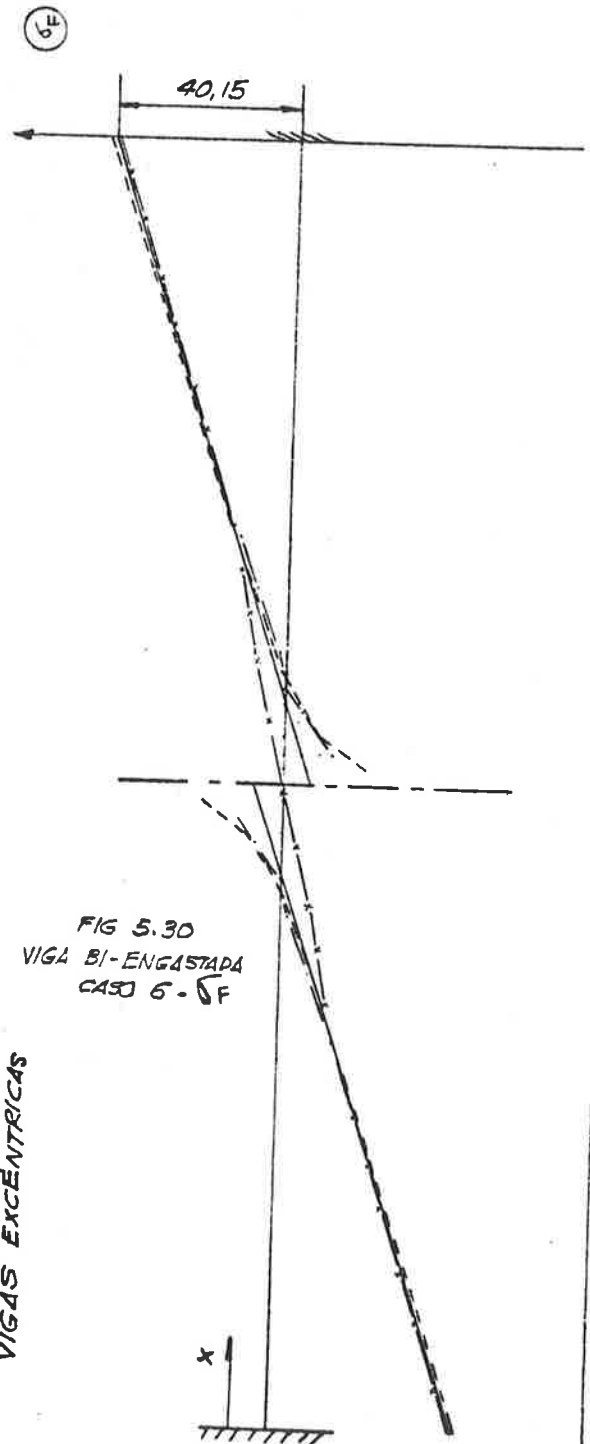


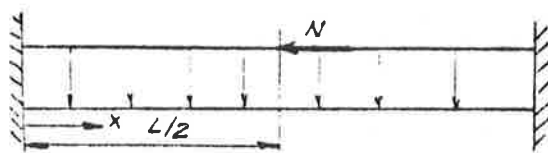
FIG 5.30
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO 6 - σ_F

VIGAS EXCÊNTRICAS

CASO 7

Caso 6 + caso 1

Extremidade LIVRE



σ_F - Tensão normal na flange inferior
 Unidades: Kg/cm²

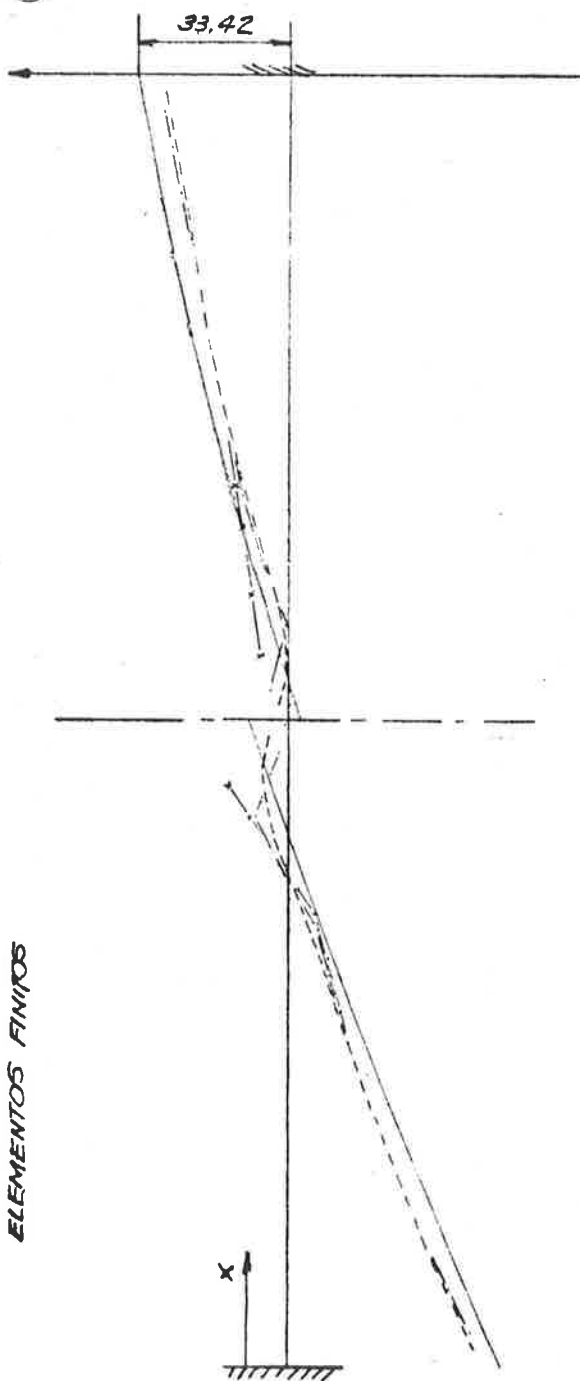
σ_F (Teórico) —————

Malha 1 - - - - -

Malha 2 - · - · - ·

Malha 3 — x — x —

(σ_F)



ELEMENTOS FINITOS

(σ_F)

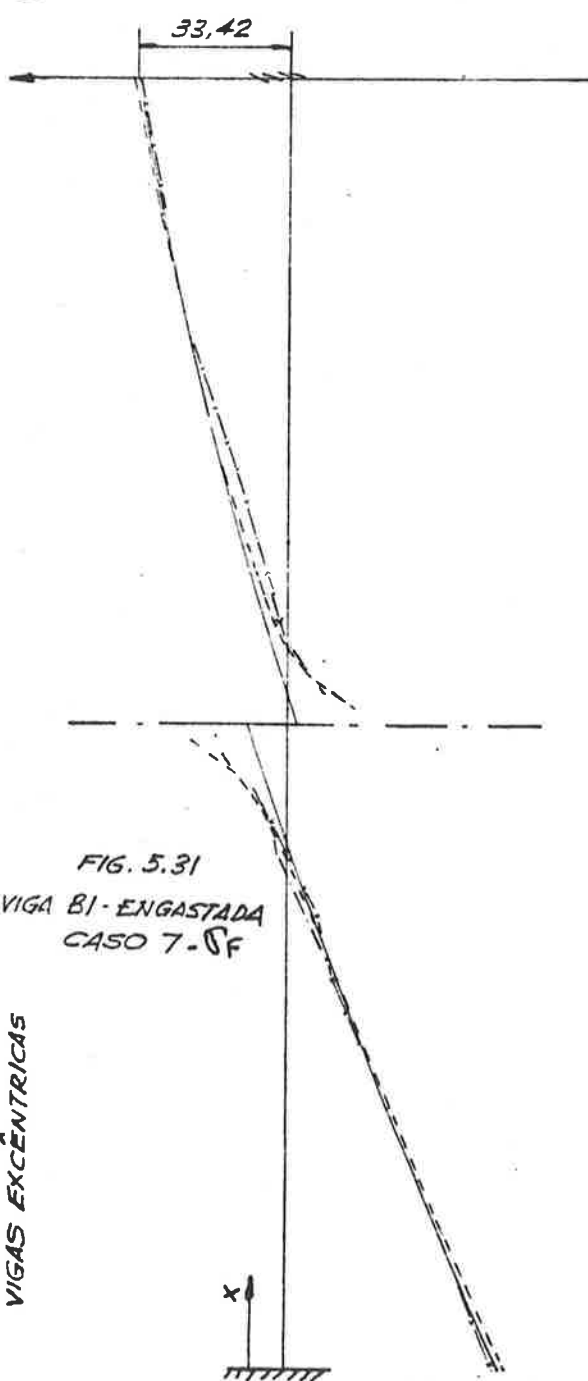
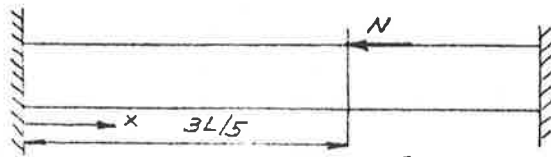


FIG. 5.31
 VIGA B1 - ENGASTADA
 CASO 7 - σ_F

VIGAS EXCÊNTRICAS

CASO 8

Carga normal concentrada a $3L/5$
Extremidade Livre



unidades: Kg/cm^2

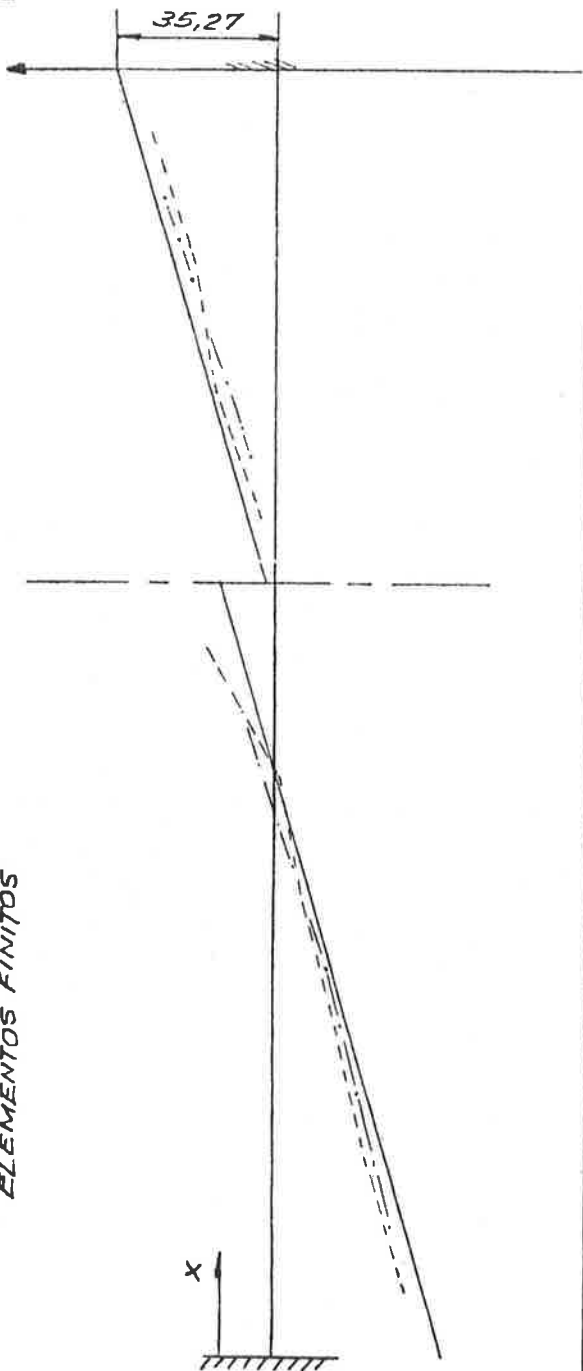
σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teórico) —————

Malha 3 - - - - -

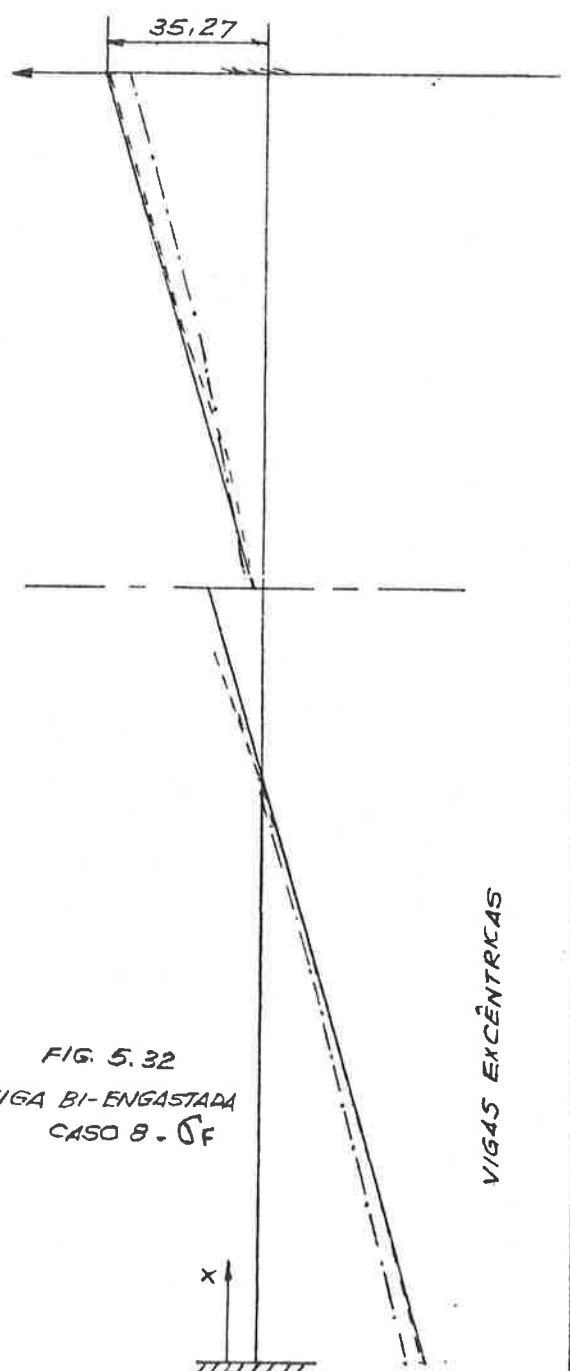
Malha 4 - - - - -

(σ_F)



ELEMENTOS FINITOS

(σ_F)



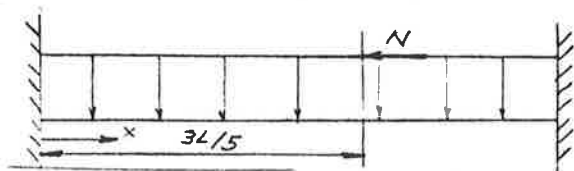
VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.32
VIGA BI-ENGASTADA
CASO 8 - σ_F

CASO 9

Caso 8 + caso 1

Extremidade engastada



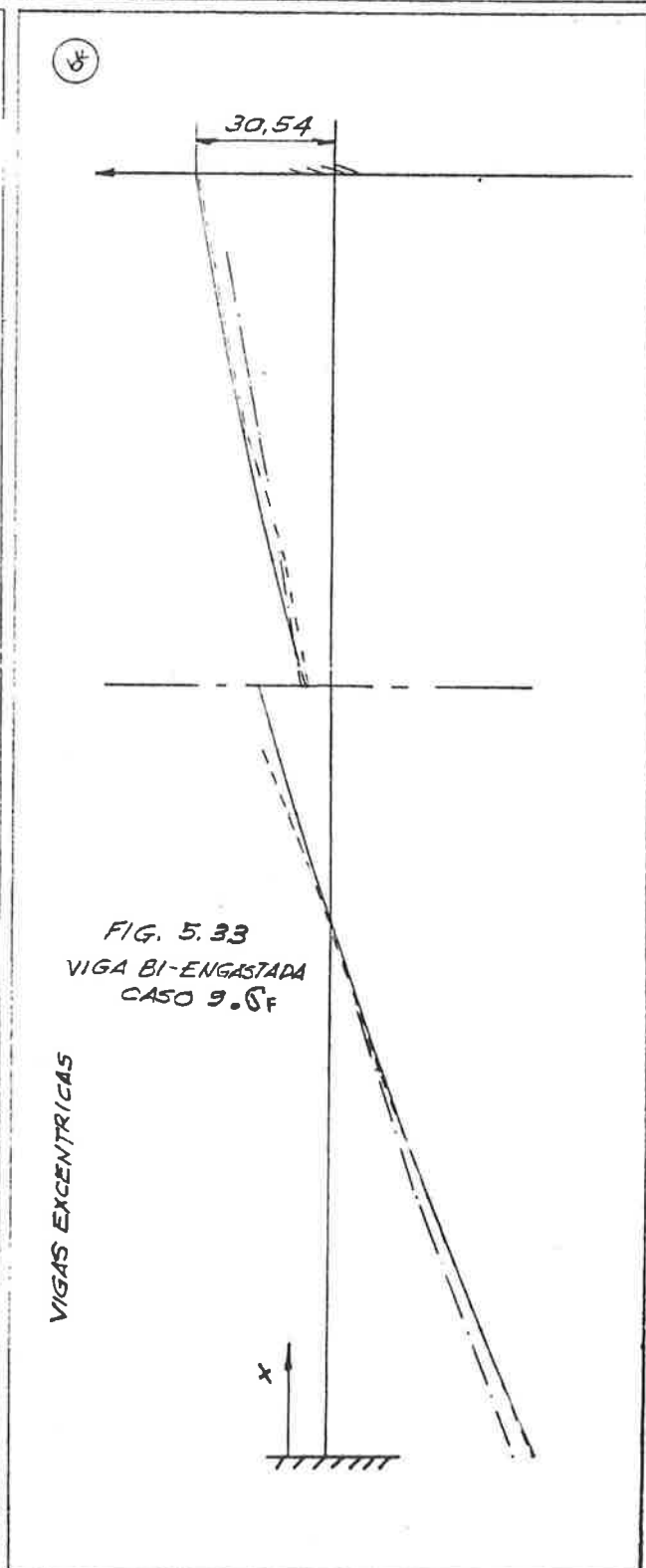
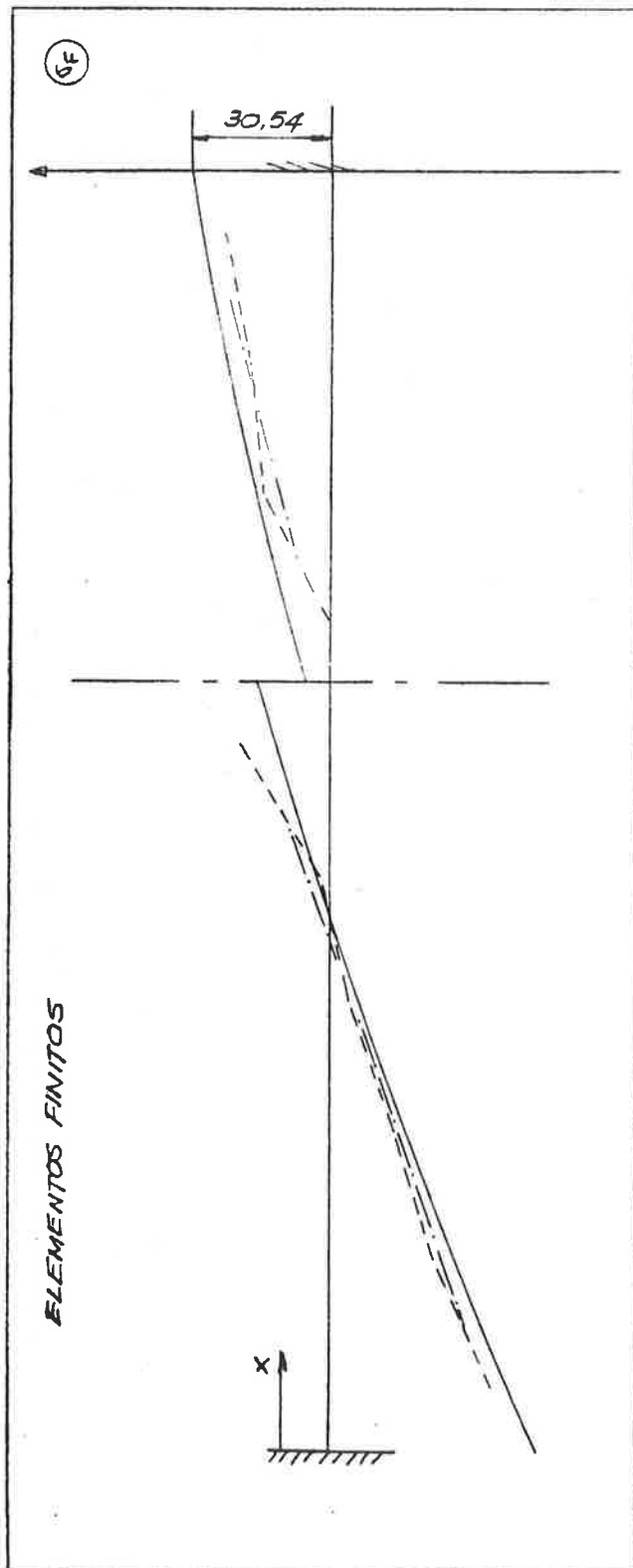
unidades: Kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_F (Teórico) —————

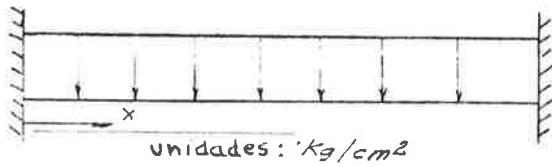
Malha 3 - - - - -

Malha 4 - · - - - -



CASO 1

Carregamento uniformemente distribuído
Extremidade engastada



τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma

τ - (Teórico) ———

Malha 1 - - - - -

Malha 2

Malha 3 - - - - -

Malha 4 —○—○—

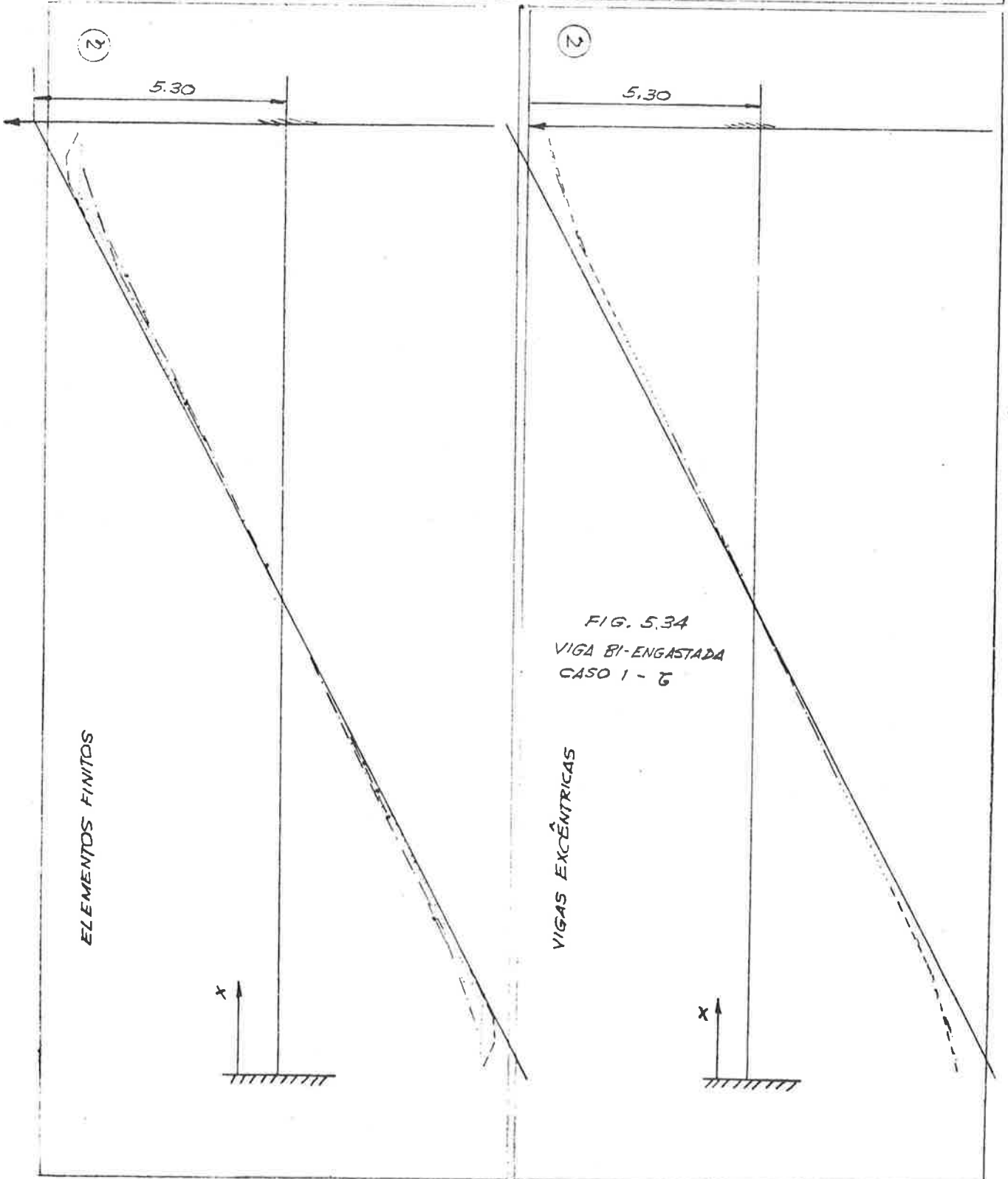


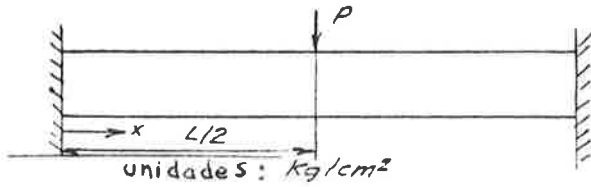
FIG. 5.34
VIGA BI-ENGASTADA
CASO 1 - τ

ELEMENTOS FINITOS

VIGAS EXCÊNTRICAS

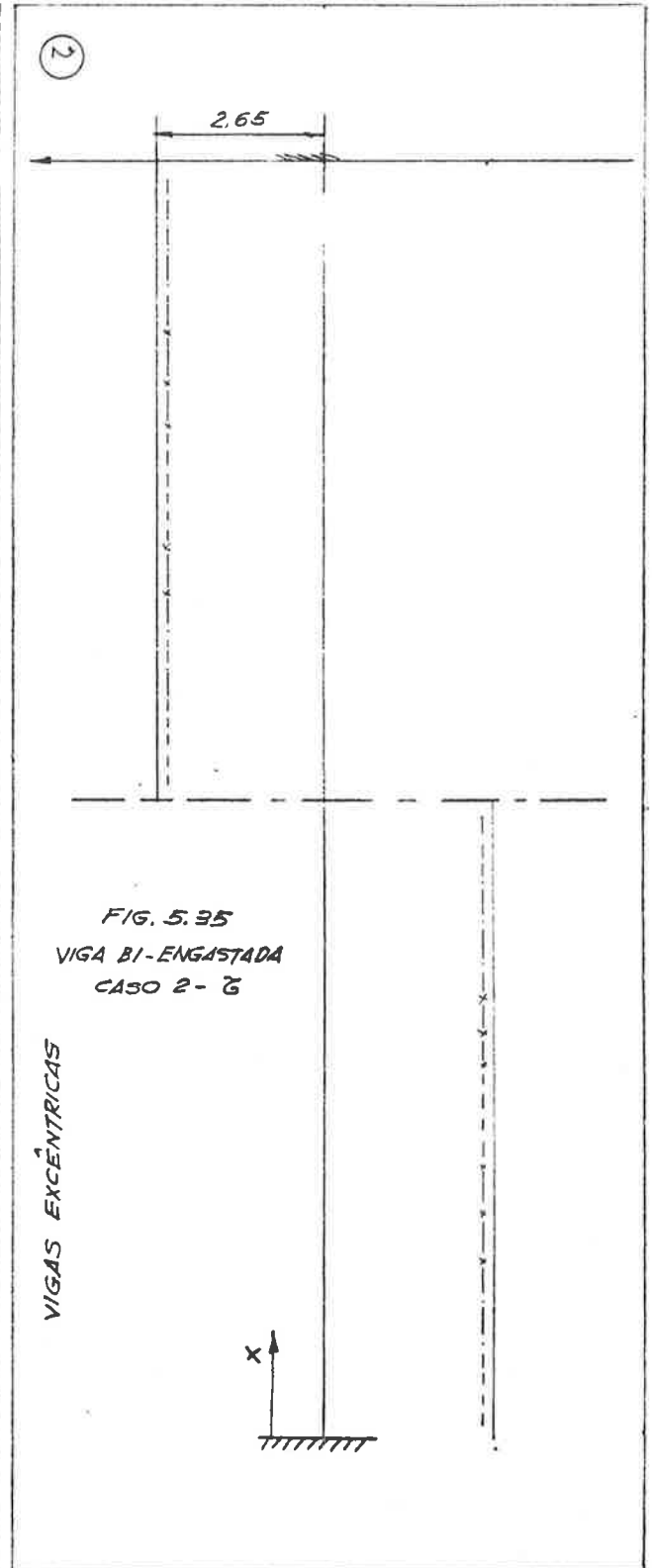
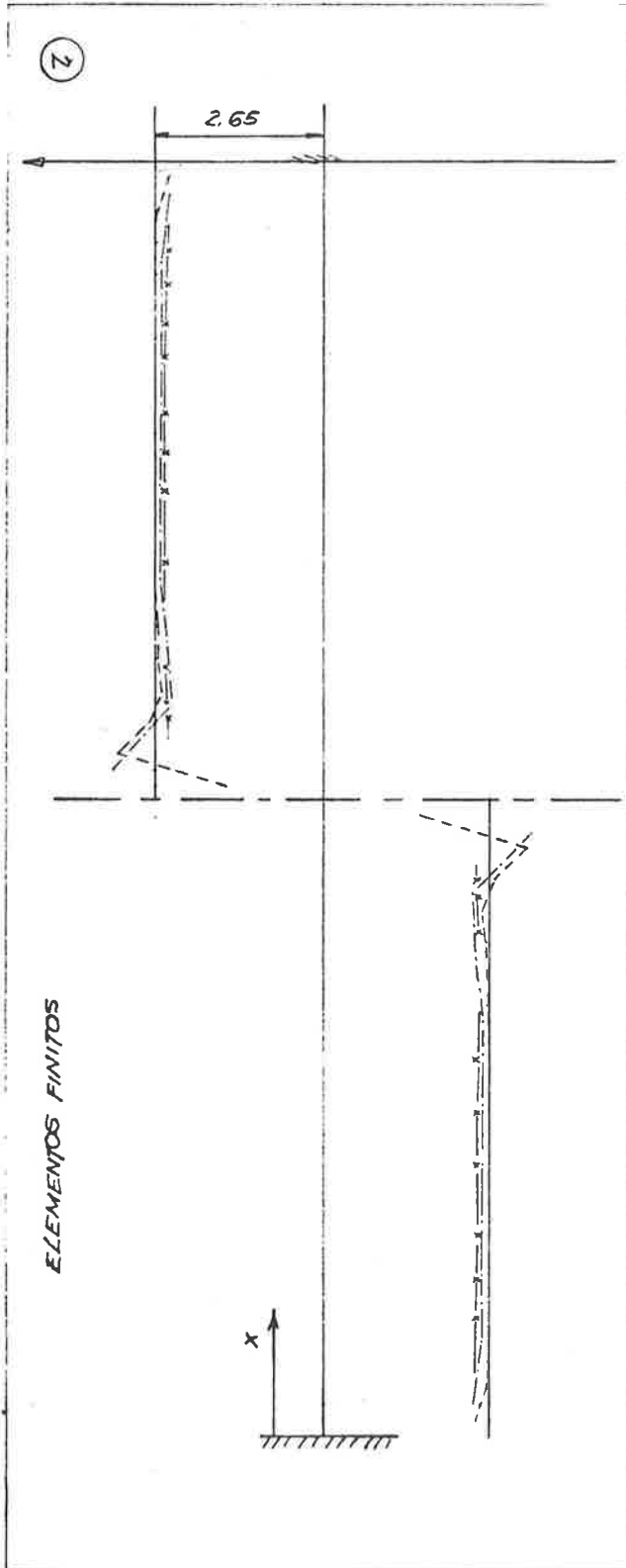
CASO 2

Carga transversal concentrada a $L/2$
 Extremidade engastada

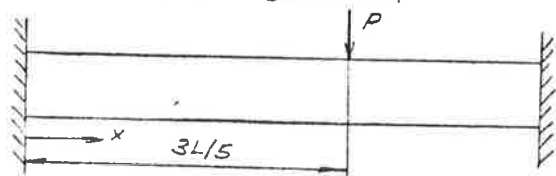


τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma

τ - (Teórico)	—————
Malha 1	- - - - -
Malha 2	—————
Malha 3	— x — x —



CASO 4
 Carga transversal concentrada a $3L/5$
 Extremidade engastada

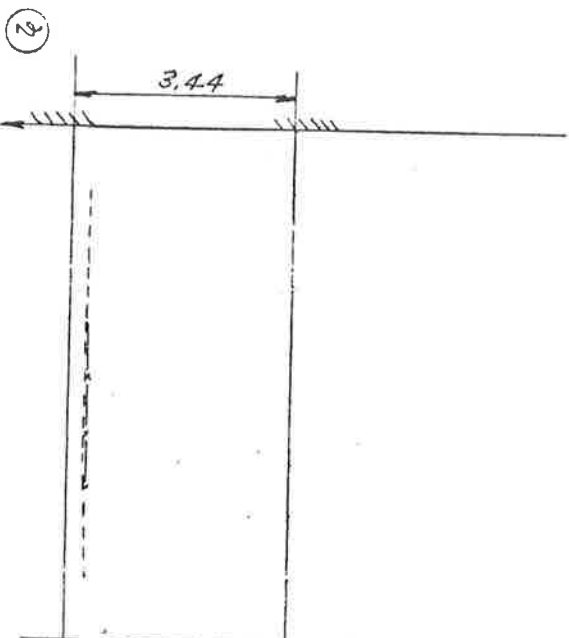


τ (Teórico) _____

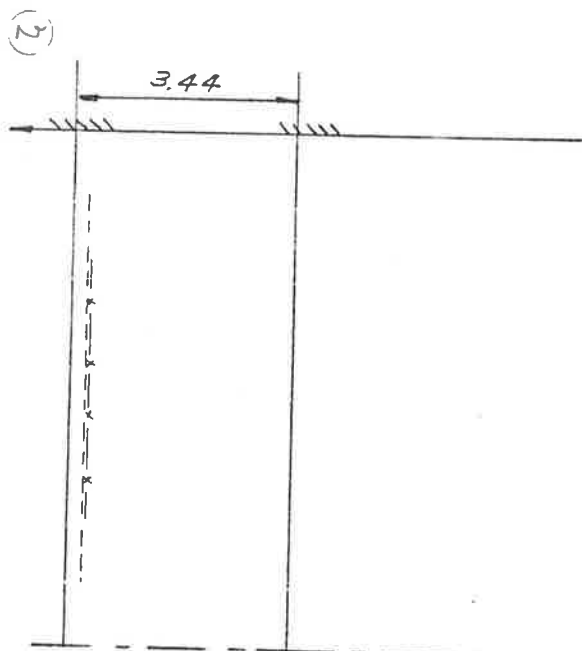
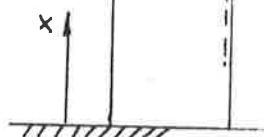
Malha 3 - - - - -

Malha 4 — x — x —

τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma
 Unidades : kg/cm^2



ELEMENTOS FINITOS



VIGAS ENGASTADAS

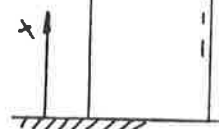
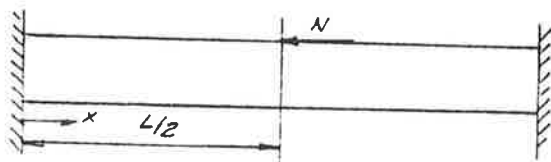


FIG. 5.36
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO 4 - τ

CASO 6

carga concentrada a $x = L/2$

Extremidade engastada



τ (Teórica) —————

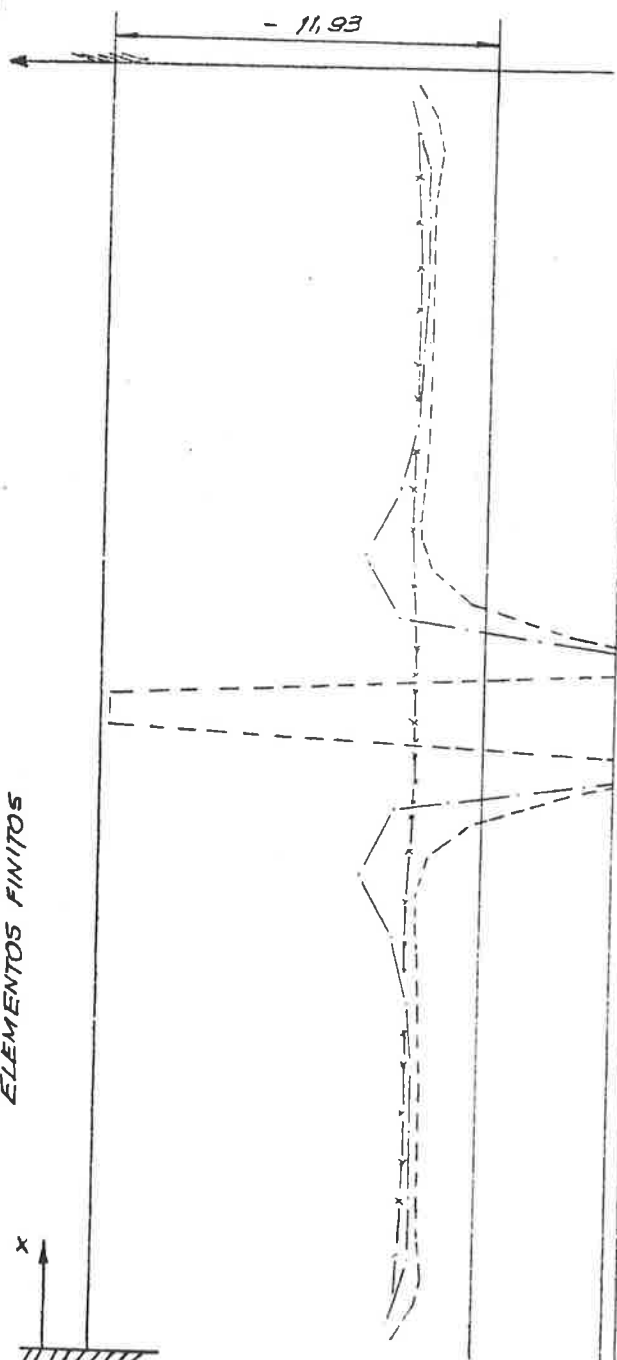
Malha 1 - - - - -

Malha 2 - · - - - -

Malha 3 — x — x

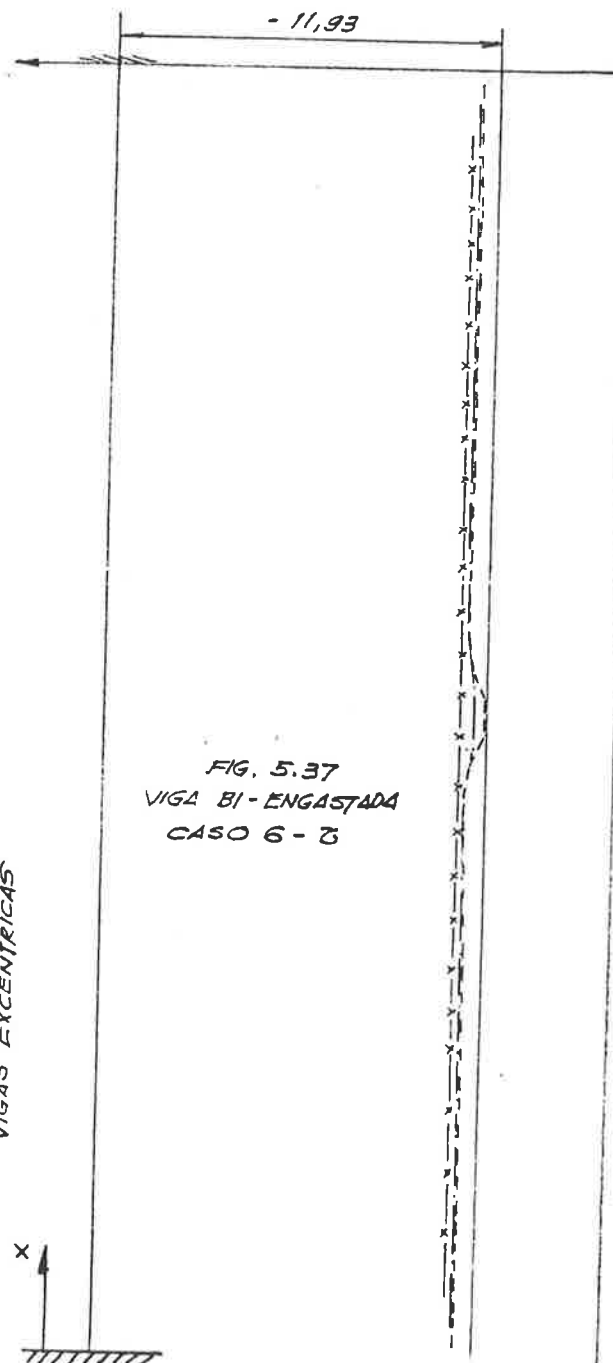
τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma
 Unidades : Kg/cm²

②



ELEMENTOS FINITOS

②



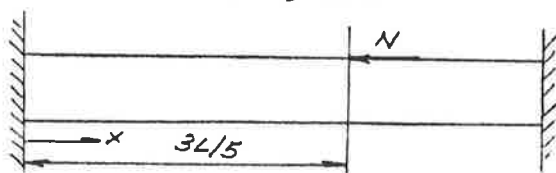
VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.37
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO 6 - τ

CASO B

Carga normal concentrada a $3L/5$

Extremidade engastada



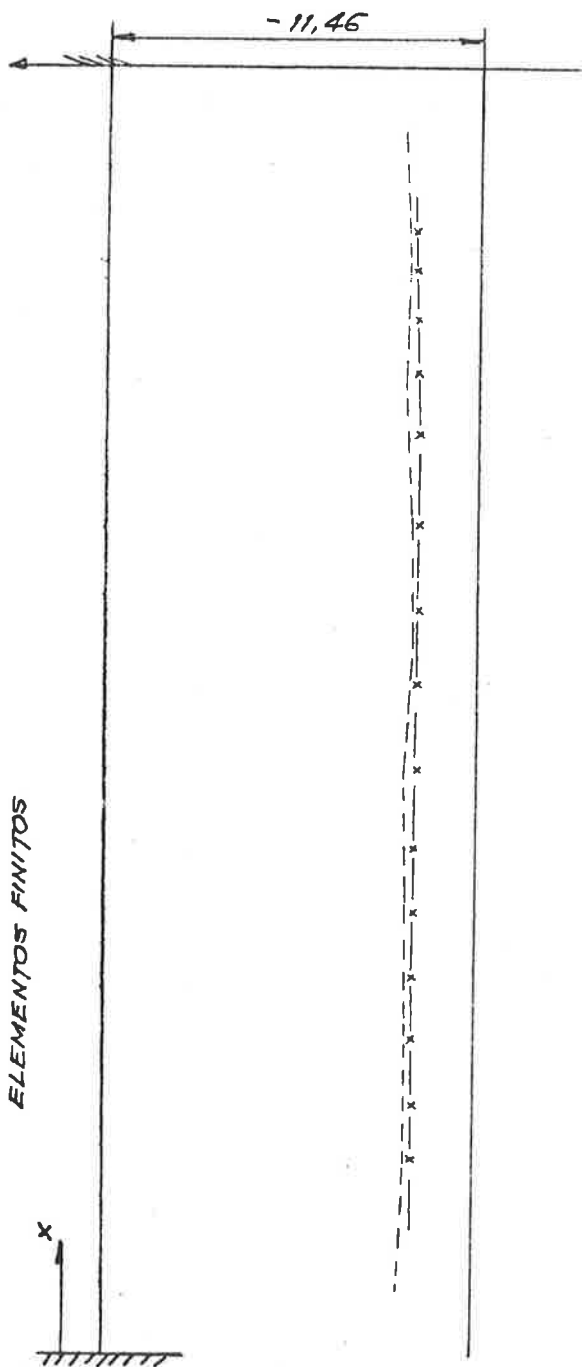
τ (Teórico) ———

Malha 3 - - - - -

Malha 4 — x —

τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma
 unidades: Kg/cm²

2



2

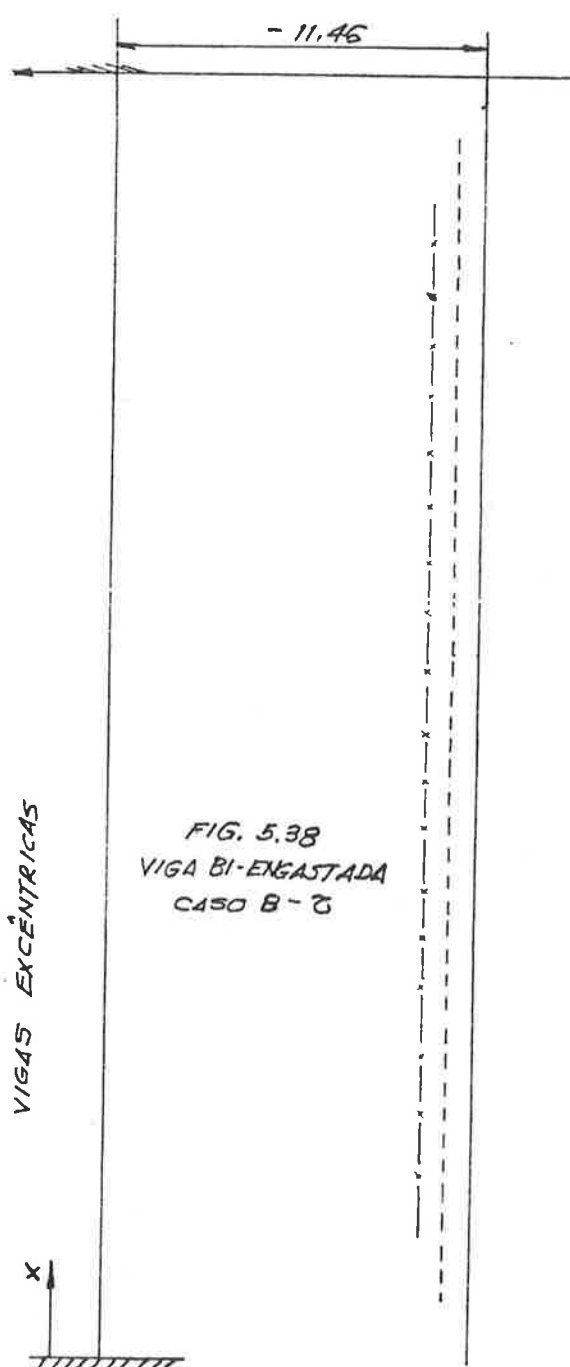


FIG. 5.38
 VIGA BI-ENGASTADA
 CASO B - τ

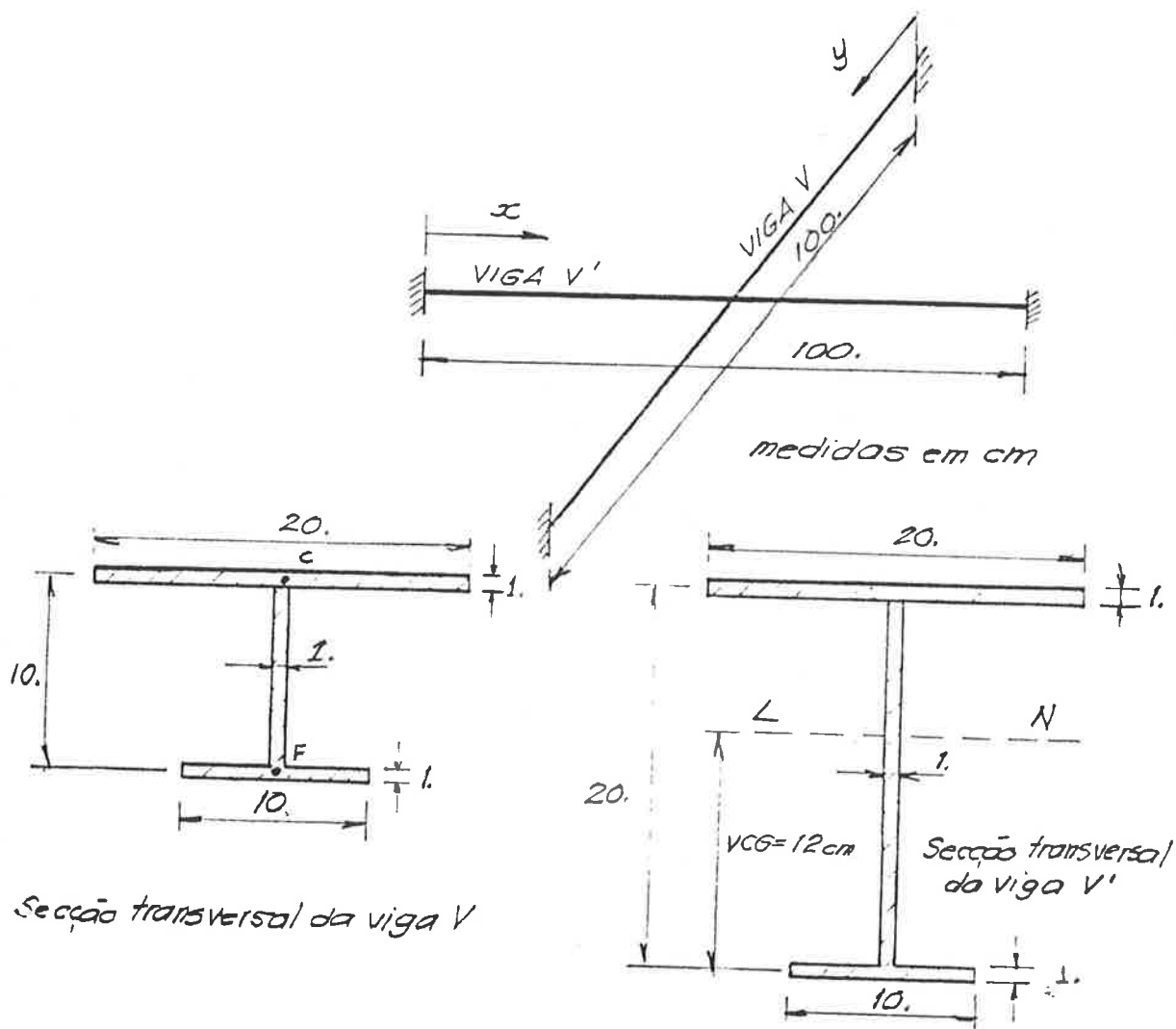


Fig. 5.39 Greiha e suas dimensões

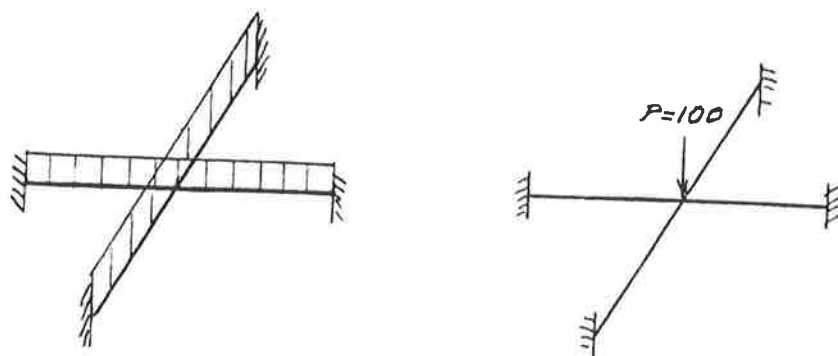


Fig. 5.40 Carregamentos sobre a greiha

As propriedades da viga V são dadas no ítem 5.1, sendo as da viga V' apresentadas abaixo:

$$A = 50 \text{ cm}^2$$

$$JY = 3466,67 \text{ cm}^4$$

posição da linha neutra à flexão : $VCG = 12 \text{ cm}$

5.3.1 Teoria simples de viga

A resolução da grelha fornece, em função das coordenadas esquematizadas na fig. 5.39 (Kg#, em):

- VIGA V

- CASO 1 :

$$M = \frac{y^2}{2} - 34,12 y + 436,33$$

$$\sigma_c = \frac{M}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = (y-34,8) \cdot 106$$

(5.15)

- CASO 2:

$$M = -9,12 y + 228$$

para $0 \leq y \leq 50$:

$$\sigma_c = \frac{M}{206,22} ; \quad \sigma_F = \frac{-M}{123,73} ; \quad \tau_{\max} = .97 \quad (5.16)$$

- VIGA V':

- CASO 1:

$$M = \frac{x^2}{2} - 65,88 x + 1230,33$$

$$\sigma_c = \frac{M}{433,33} ; \quad \sigma_F = \frac{-M}{288,89} ; \quad \tau_{\max} = (x - 65,2) \cdot 055$$

(5.17)

- CASO 2 :

$$M = - 40,88x + 1022$$

para $0 \leq x \leq 50$:

$$\sigma_c = \frac{M}{433,33} ; \quad \sigma_F = \frac{-M}{238,89} ; \quad z_{\max} = -2,26 \quad (5.18)$$

5.3.2 Modelo de elementos finitos

A malha de elementos finitos considerada está mostrada na fig. 5.41, onde aparece apenas uma porção da estrutura para melhor visualização da malha.

5.3.3 Modelo viga + placa

Temos neste caso a viga VE, que corresponde à viga excêntrica de propriedades dadas no sub-ítem 5.1.3 e a viga VE' (que constitui uma porção da viga V') com propriedades (fig. 5.42):

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

$$J_y = 1333,34 \text{ cm}^4$$

$$e_2 = 13,33 \text{ cm}$$

$$t_2 = 20 \text{ cm}$$

Mantendo as mesmas dimensões da malha do modelo de elementos finitos, a malha do modelo viga + placa é a da fig. 5.43.

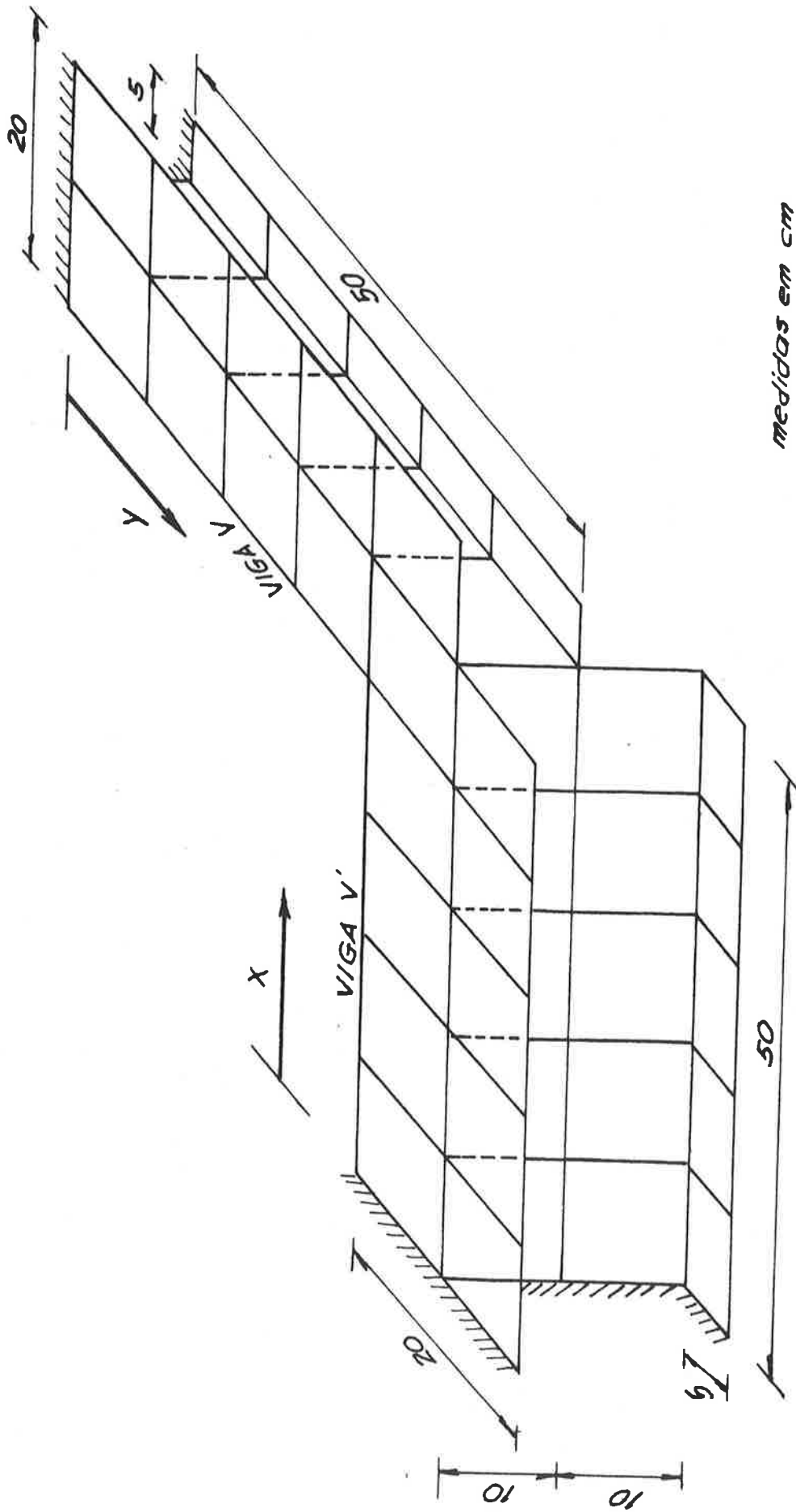
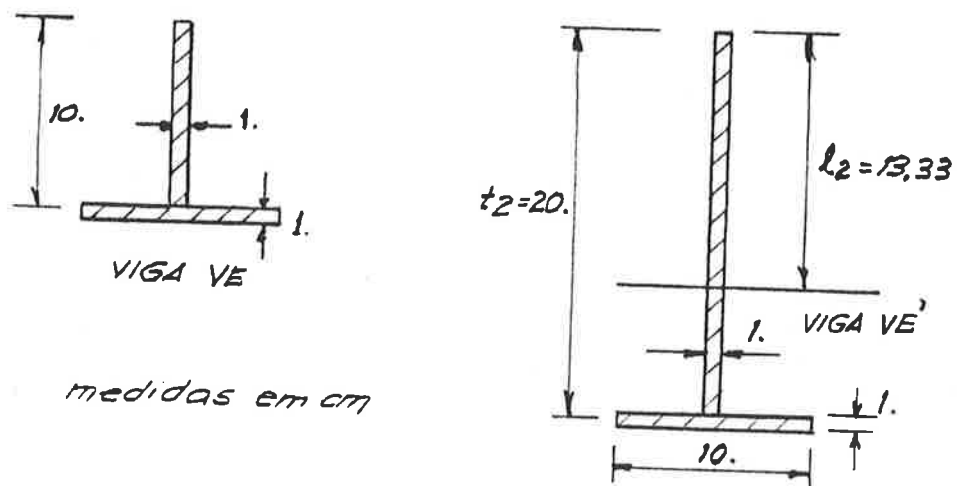


FIG. 5.41 - Modelo de elementos finitos para a grelha



medidas em cm

Fig. 5.42 Vigas VE e VE'

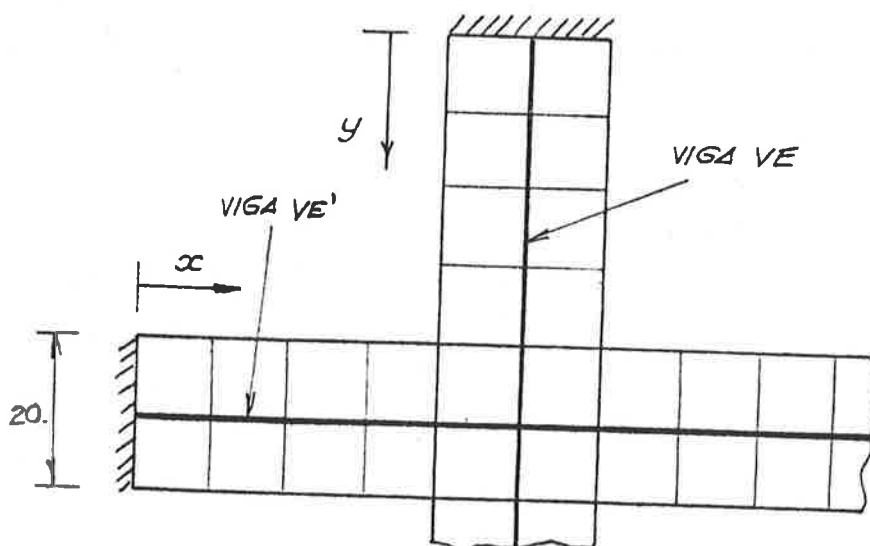


Fig. 5.43 Modelo viga + placa para a grelha

5.3.4 Resultados e conclusão

Na fig. 5.44 está apresentado o resultado, para o CASO 1, da análise do modelo viga + placa, em termos das tensões σ_C e σ_F . Faz-se uma comparação entre o cálculo feito pela 2a.forma B, o cálculo usando a 1a.Forma (a partir das tensões das placas", utilizando as equações (4.23) e (4.24)) e os resultados teóricos (sub-ítem 5.3.1). Analogamente temos na fig. 5.45 o resultado para o caso 2. A

observação das figuras revela que ambas as formas de cálculo para σ_c e σ_F apresentaram resultado satisfatório, sendo que as vantagens da 2a. forma B sobre a 1a. forma já foram amplamente discutidas (em tais figuras só metade de cada viga excêntrica é mostrada, pois existe uma dupla simetria). Nas figs. 5.46 e 5.47 são apresentados os resultados do modelo de elementos finitos, de viga + placa (2a. forma B) e o cálculo teórico. As respostas do modelo viga+placa, de modo geral, mais se aproximam da teoria.

Nas fig. 5.48 e 5.49 estão mostrados os resultados das tensões máximas de cisalhamento na alma para os dois modelos.

A comparação entre preço e tempo de processamento é mostrada abaixo (Bourroughs 6700 do C.C.E. da U.S.P., em agosto de 1976):

PREÇO (Cr\$)		TEMPO DE PROC. (s)	
ELEMENTOS FINITOS	VIGA + PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA + PLACA
75,17	43,87	53,70	30,46

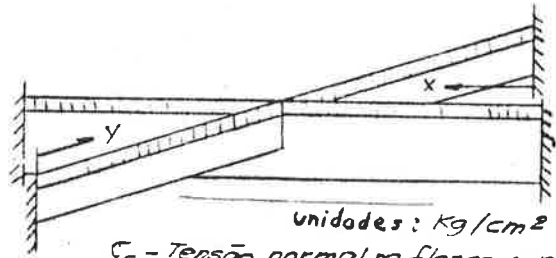
5.4 Convês de pouso do porta-aviões Minas Gerais

O convês de pouso do navio porta-aviões Minas Gerais, pertencente à Marinha do Brasil, deveria ser operado por aviões maiores que aqueles para os quais foi projetado inicialmente. O problema da possível falta de resistência estrutural foi submetido à equipe de estruturas do NDPN-420, que se propôs a resolvê-lo. O estudo completo do problema consta da referência (22).

A análise estrutural baseou-se no seguinte procedimento:

- a) as cargas adotadas foram retiradas do DDS⁽²³⁾. O DDS consta de curvas e âbacos para projeto de convês de

CARGA DISTRIBUIDA



unidades: Kg/cm²
 σ_c - Tensão normal na flange superior
 σ_F - Tensão normal na flange inferior

- σ_c (Teórico) —————
- σ_F (Teórico) —————
- 1ª forma - - - - -
- 2ª forma B - - - - -

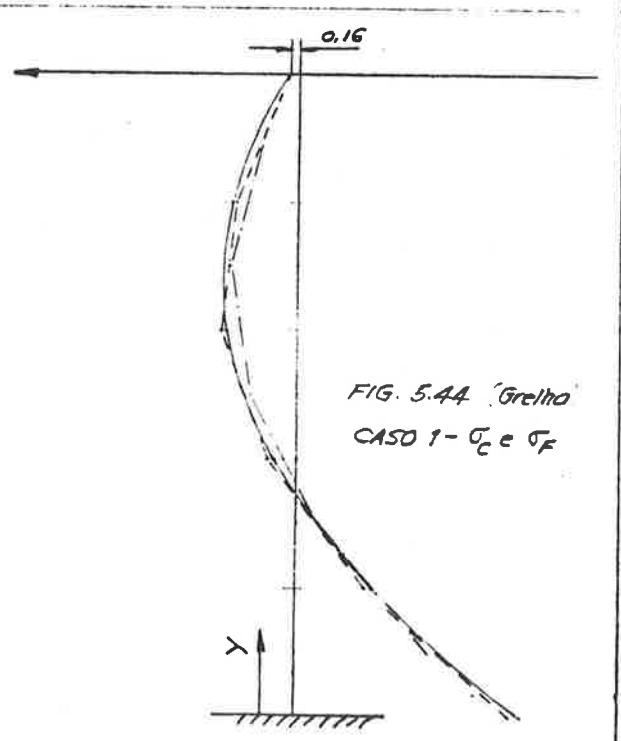
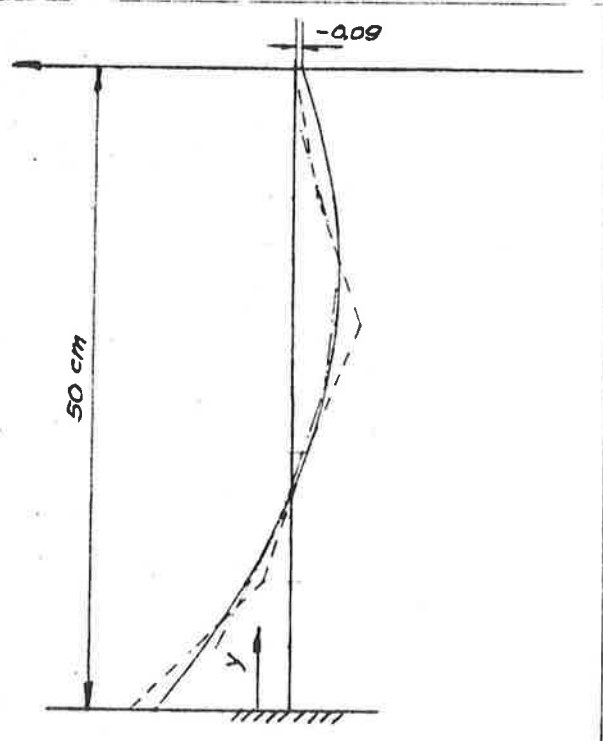
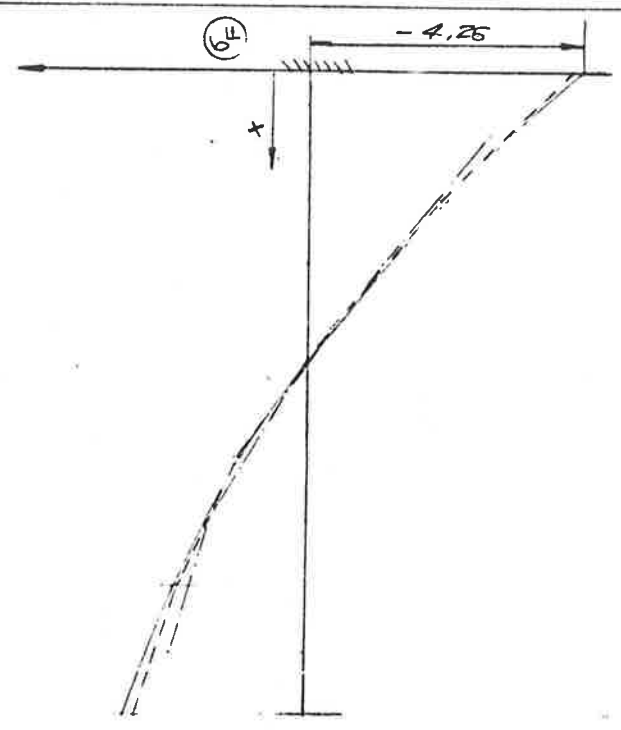
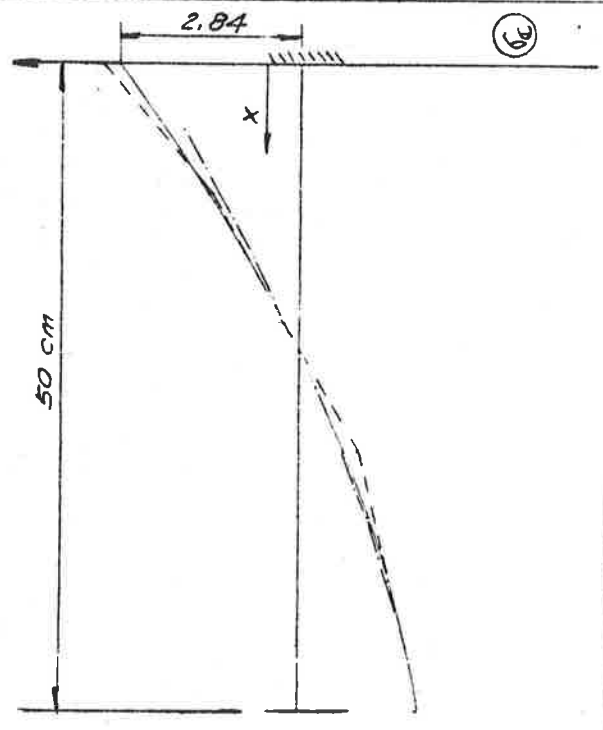
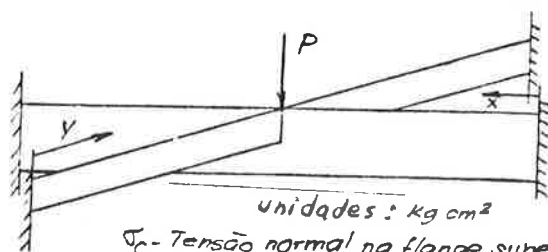


FIG. 5.44 'Grelho'
 CASO 1 - σ_c e σ_F

CARGA CONCENTRADA



unidades : kg cm²
 σ_c - Tensão normal na flange superior
 σ_F - Tensão normal na flange inferior

σ_c (Teórico) _____

σ_F (Teórico) _____

1ª forma - - - - -

2ª forma B - - - - -

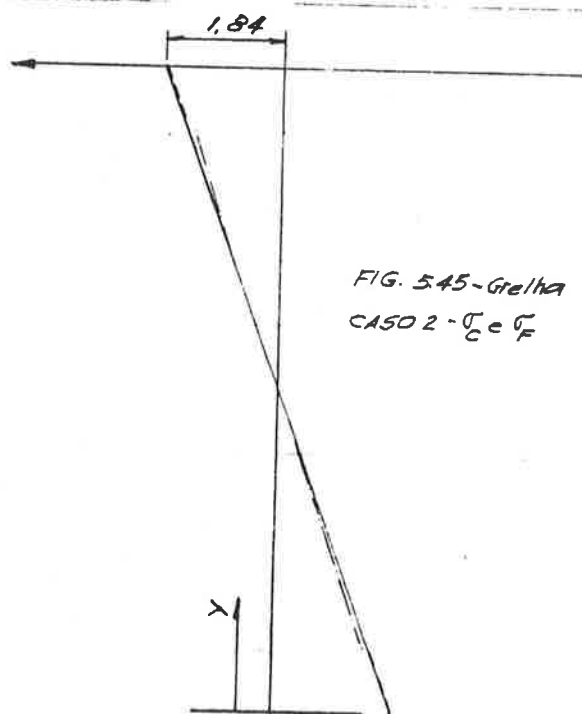
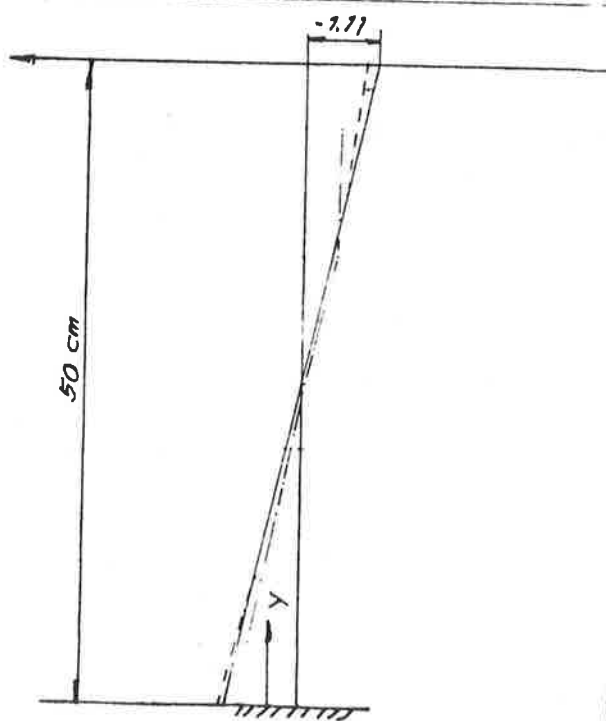
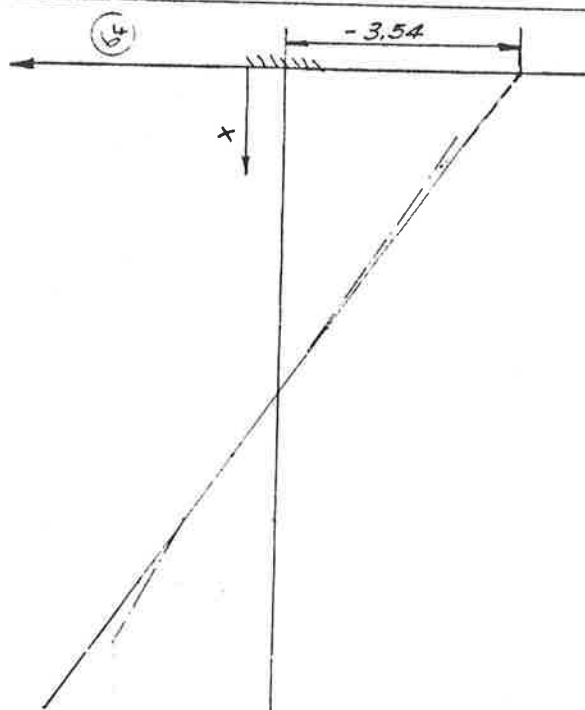
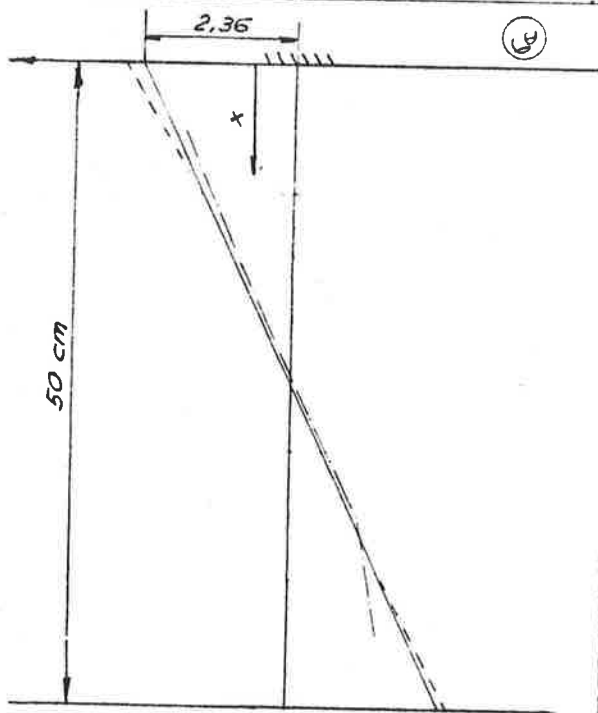
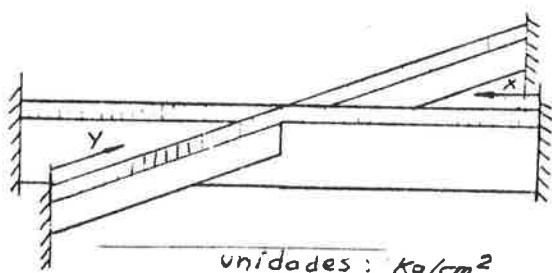


FIG. 545 - Grelha
 CASO 2 - σ_c e σ_F

CARGA DISTRIBUIDA

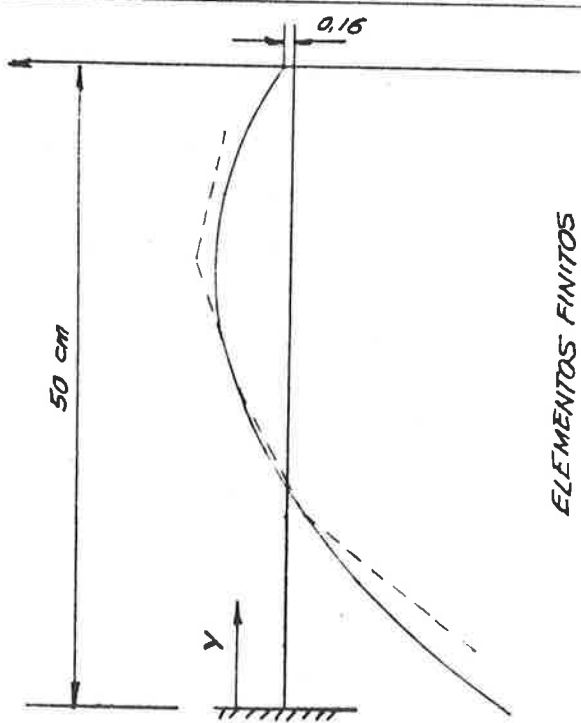
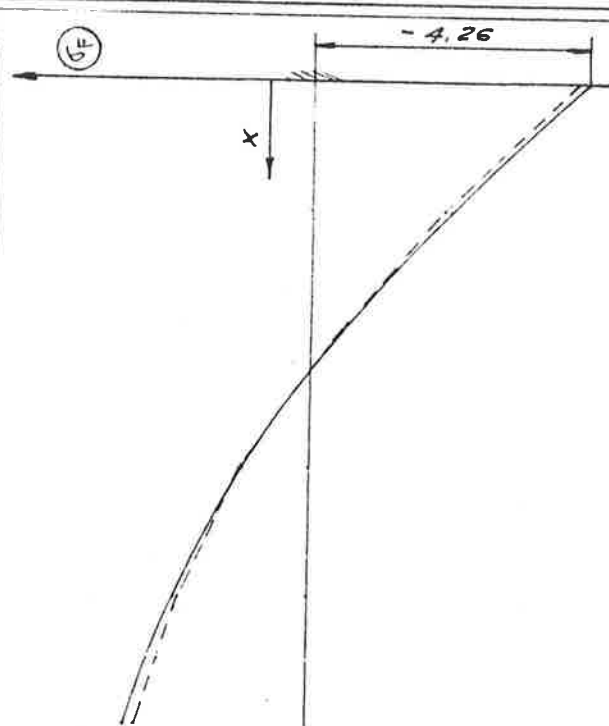
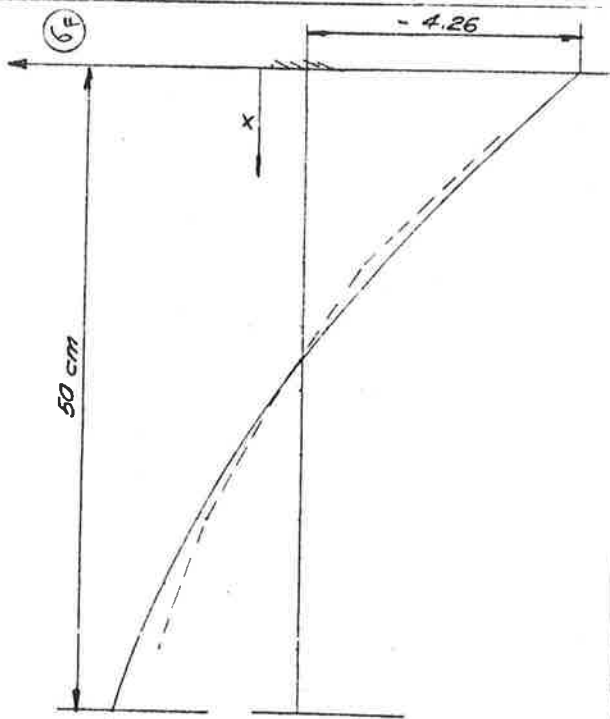


σ_F (Teórico) ———

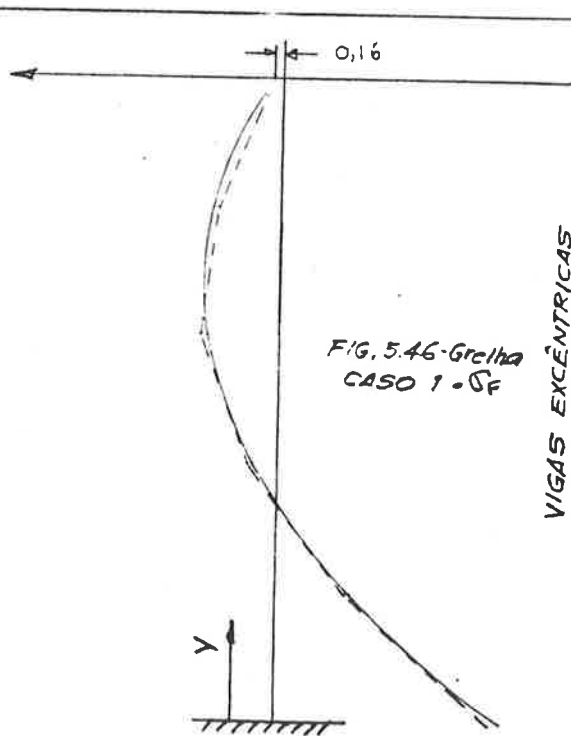
σ_F (Numérico) - - -

unidades: kg/cm^2

σ_F - Tensão normal na flange superior



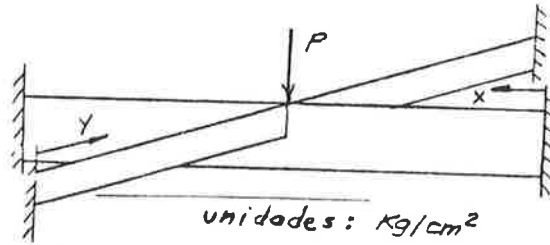
ELEMENTOS FINITOS



VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.46 - Grelha
CASO 1 - σ_F

CARGA CONCENTRADA

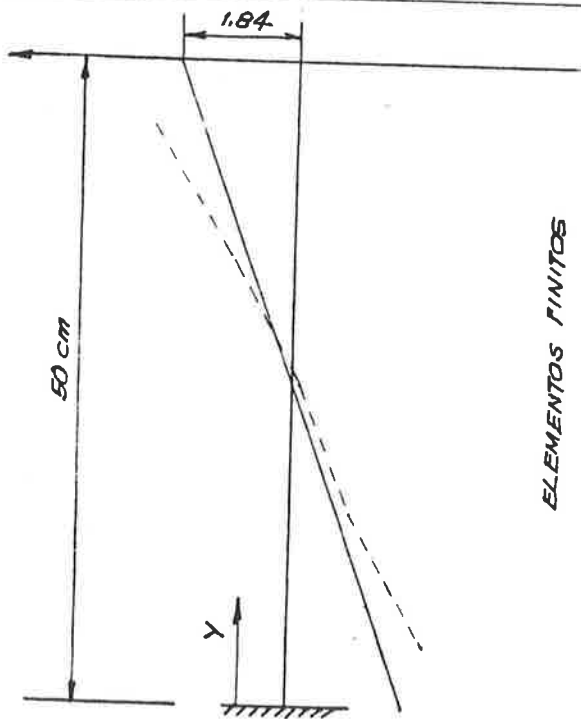
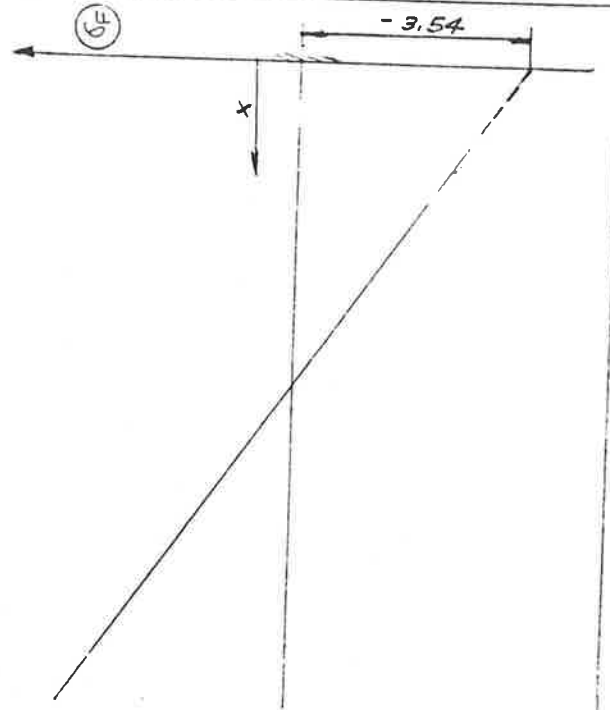
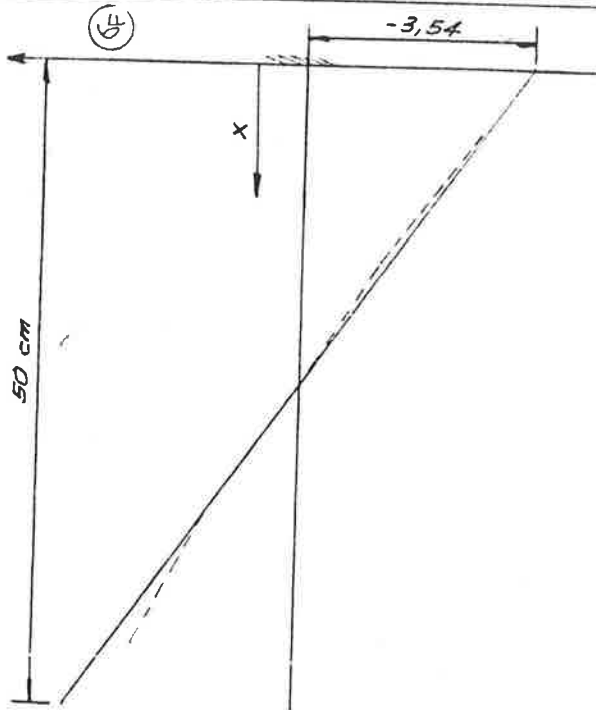


σ_F (Teórico) ———

σ_F (Numérico) - - -

unidades: Kg/cm²

σ_F - Tensão normal na flange superior



ELEMENTOS FINITOS

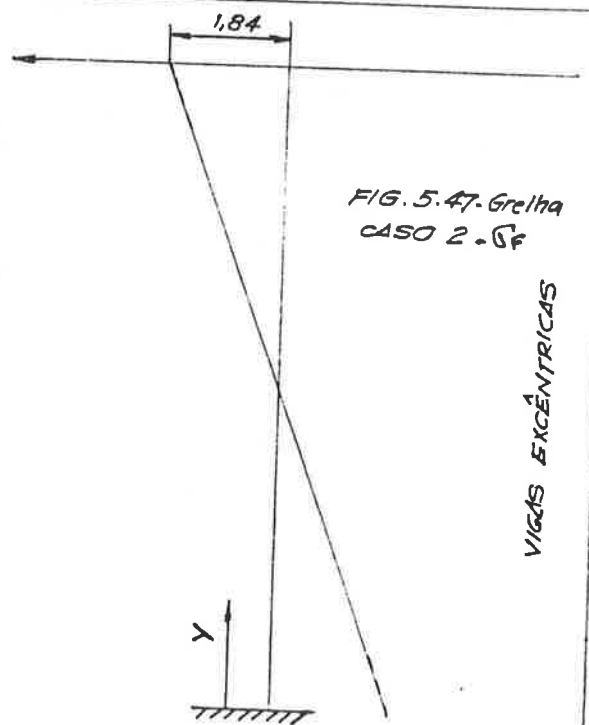
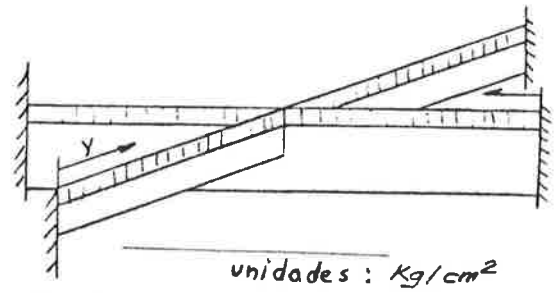


FIG. 5.47. Grelha
CASO 2. σ_F

VIGAS EXCÊNTRICAS

CARGA DISTRIBUIDA

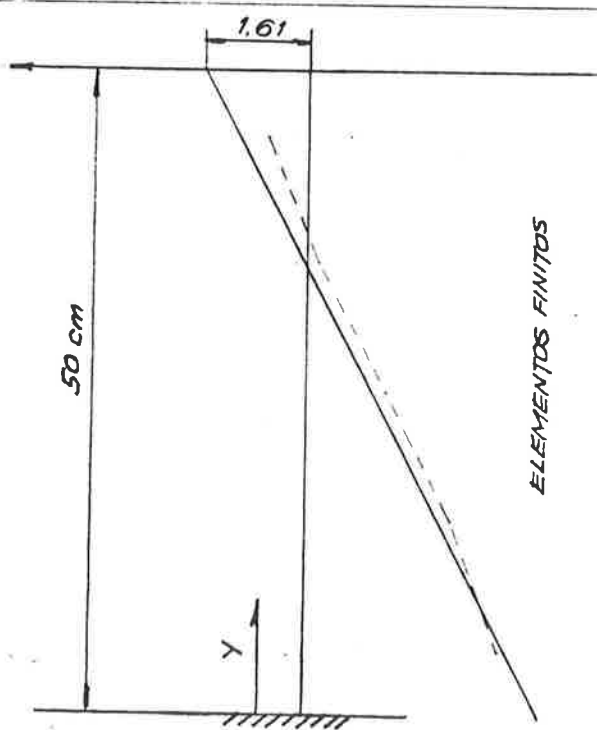
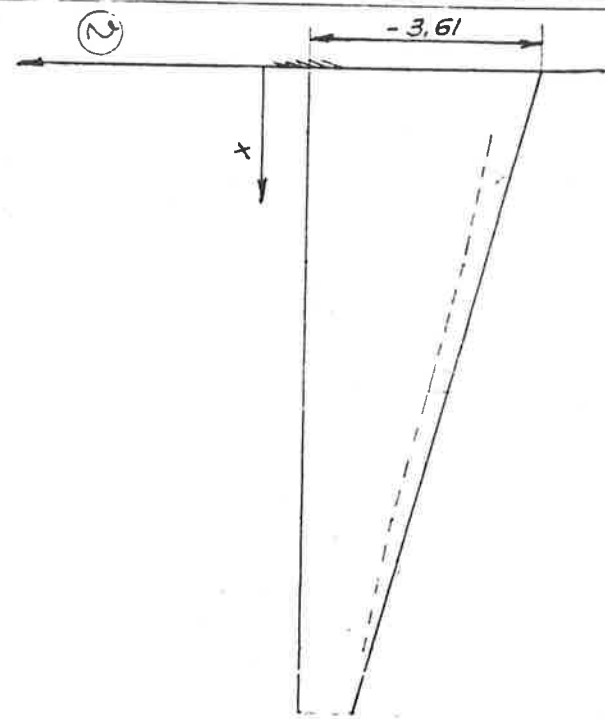
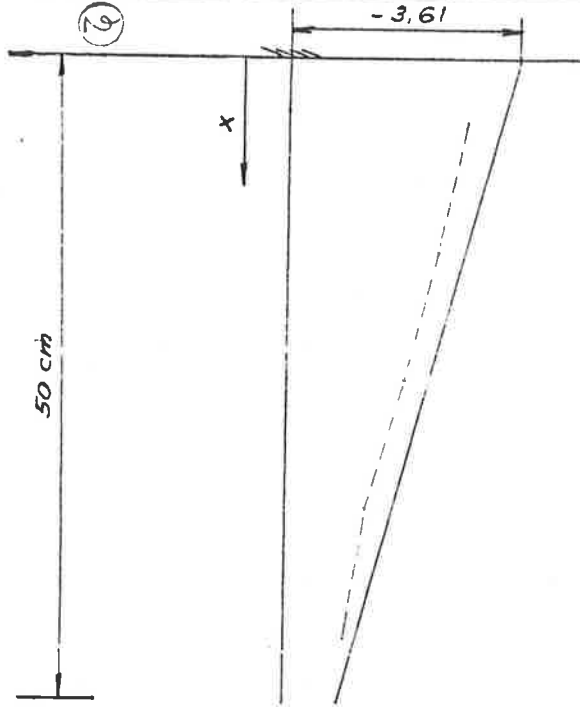


$\tau_{m\acute{a}x}$ (Teórico) ———

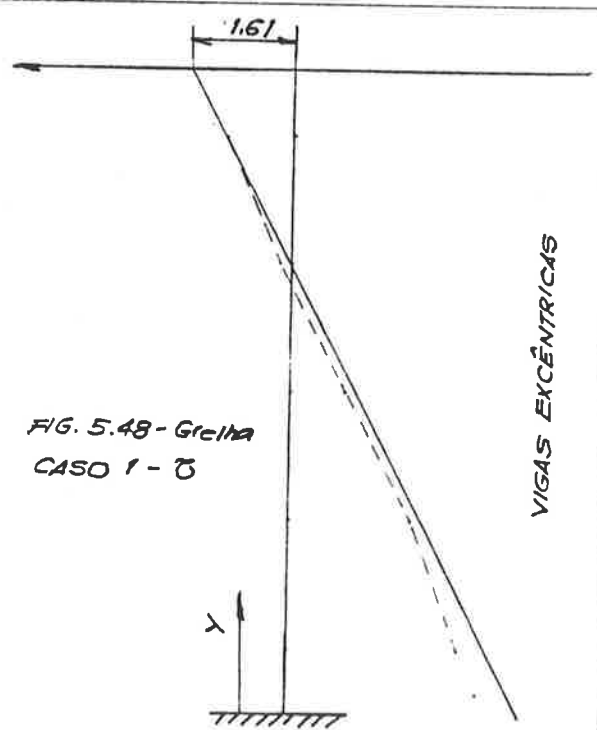
$\tau_{m\acute{a}x}$ (Numérico) - - - - -

unidades : Kg/cm²

τ - Tensão de cisalhamento máxima na alma



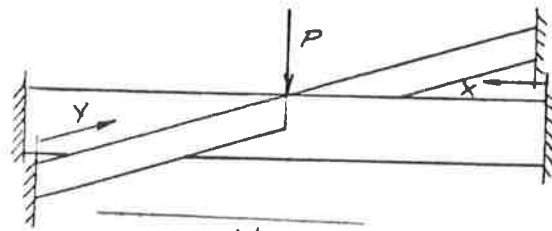
ELEMENTOS FINITOS



VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.48 - Grelha
CASO 1 - τ

CARGA CONCENTRADA

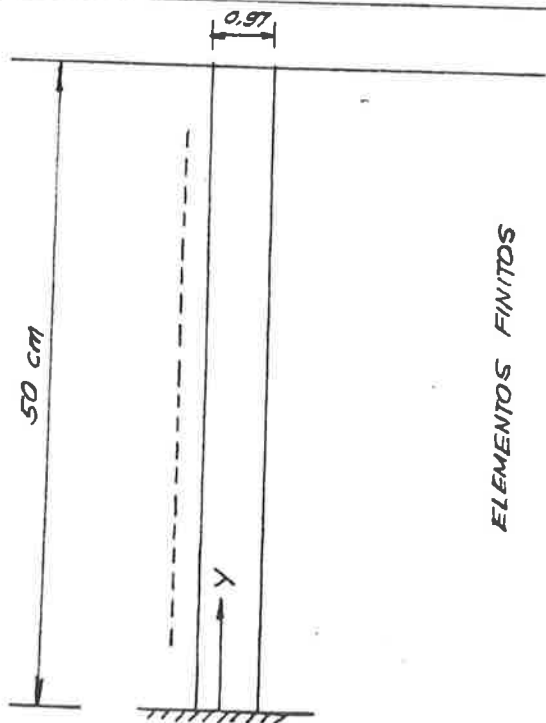
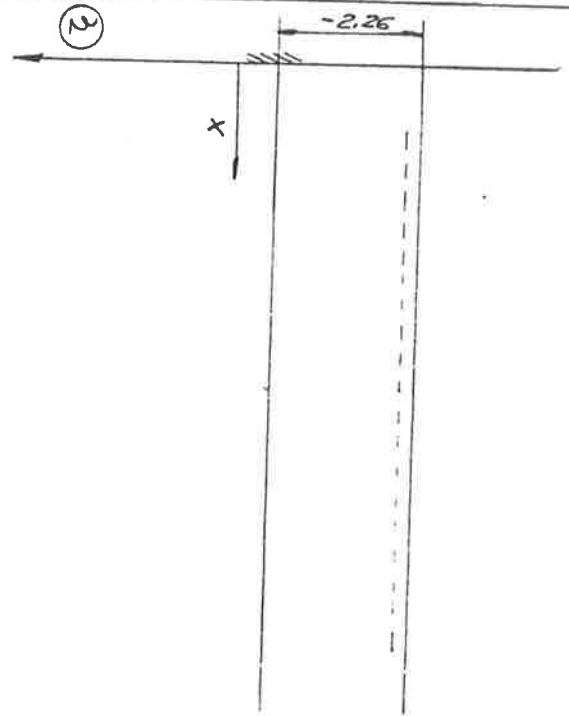
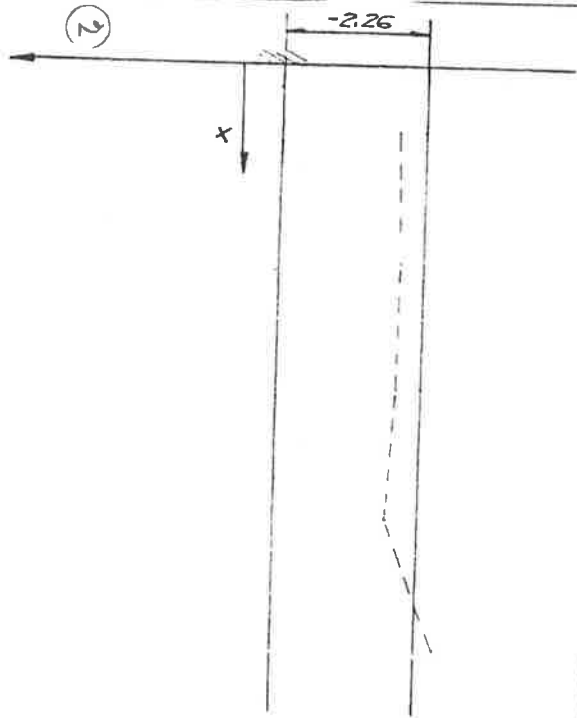


τ_{max} (Teórico) _____

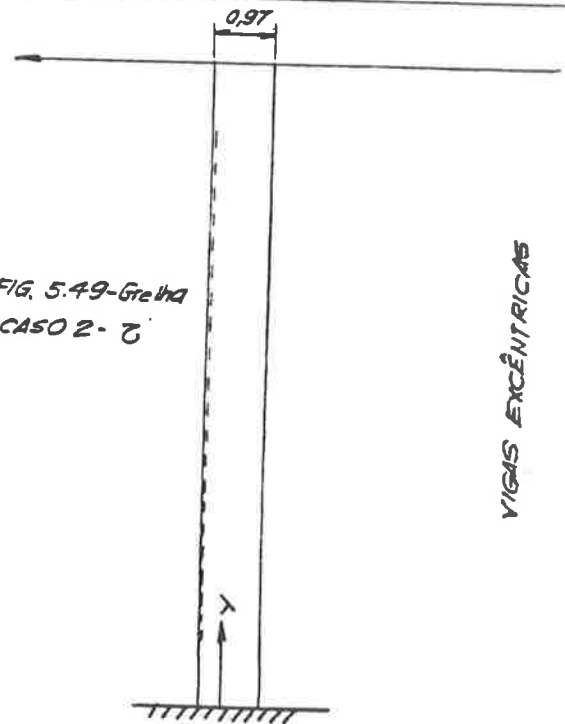
τ_{max} (Numérico) - - - - -

unidades : kg/cm^2

τ - Tensão máxima de cisalhamento na alma



ELEMENTOS FINITOS



VIGAS EXCÊNTRICAS

FIG. 5.49 - Grelha CASO 2 - τ

pouso. É utilizada uma "carga estática equivalente", proveniente do choque dos pneus do avião, que depende de uma série de fatores, entre os quais temos:

- peso do avião
- largura e pressão do pneu
- período de jôgo do navio
- ângulo máximo de "pitch"
- distância entre o centro de gravidade do avião e o centro de flutuação do navio.

Supõe-se que o pneu suporta uma determinada carga, a partir da qual o próprio aro da roda passa a ter contato com o convês, descarregando o restante do "cho - que". Para o nosso caso, foi encontrado um "fator de ampliação" 5 o que corresponde a termos:

$$W = 5 * \text{peso do avião} = 5 * 24150 \text{ lbf}$$

$$\therefore W = 120\ 750 \text{ lbf}$$

\therefore a "carga estática equivalente" em cada roda vale

$$W_R = W/2 = 60375 \text{ lbf} \quad (5.19)$$

Tal carga foi aplicada, para cada pneu, conforme o esquema da fig. 5.50, onde o retangulo maior corresponde à parcela da carga suportada pelo pneu e os retangulos (hachurados) menores à parte dos aros da roda.

Os valores correspondem a:

- carga sobre o pneu = 37240 lbf, o que equivale a uma pressão uniforme sobre o retangulo (22,16'x11,49") de 143,3 lbf/pol².

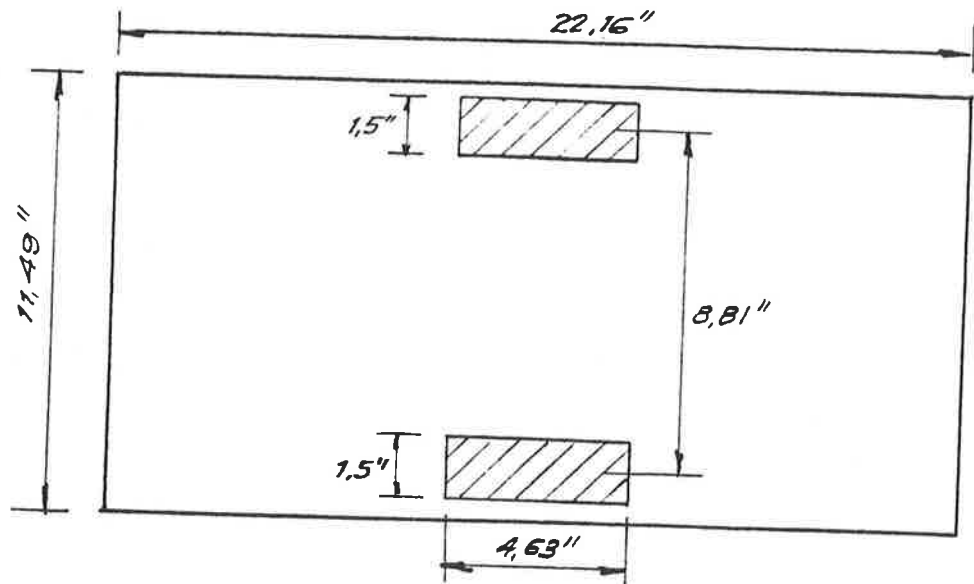


Fig. 5.50 Forma de aplicação da carga do pneu

- carga sobre os aros = 23135 lbf, o que equivale a um acréscimo de pressão nos retângulos menores (1,5" x 4,63") de 1665 lbf/pol^2 .

Na fig. 5.51 apresenta-se um arranjo do convês de pouso, entre as duas anteparas longitudinais, anteparas transversal "mais a ré" e a abertura do elevador dos aviões (caverna 173). Mostra-se também a posição escolhida para o "choque" dos pneus ("negrito") tomada de modo a que uma roda seja aplicada no meio do "vão" de um longitudinal e a outra no centro de uma unidade de chapeamento, procurando-se assim as condições mais desfavoráveis.

As dimensões e escantilhões dos longitudinais e transversais são mostrados na fig. 5.52, com o respectivo chapeamento do convês.

Deve-se notar que existe grande diferença entre as alturas das almas dos transversais e longitudinais. Este é o principal motivo da apresentação deste exem-

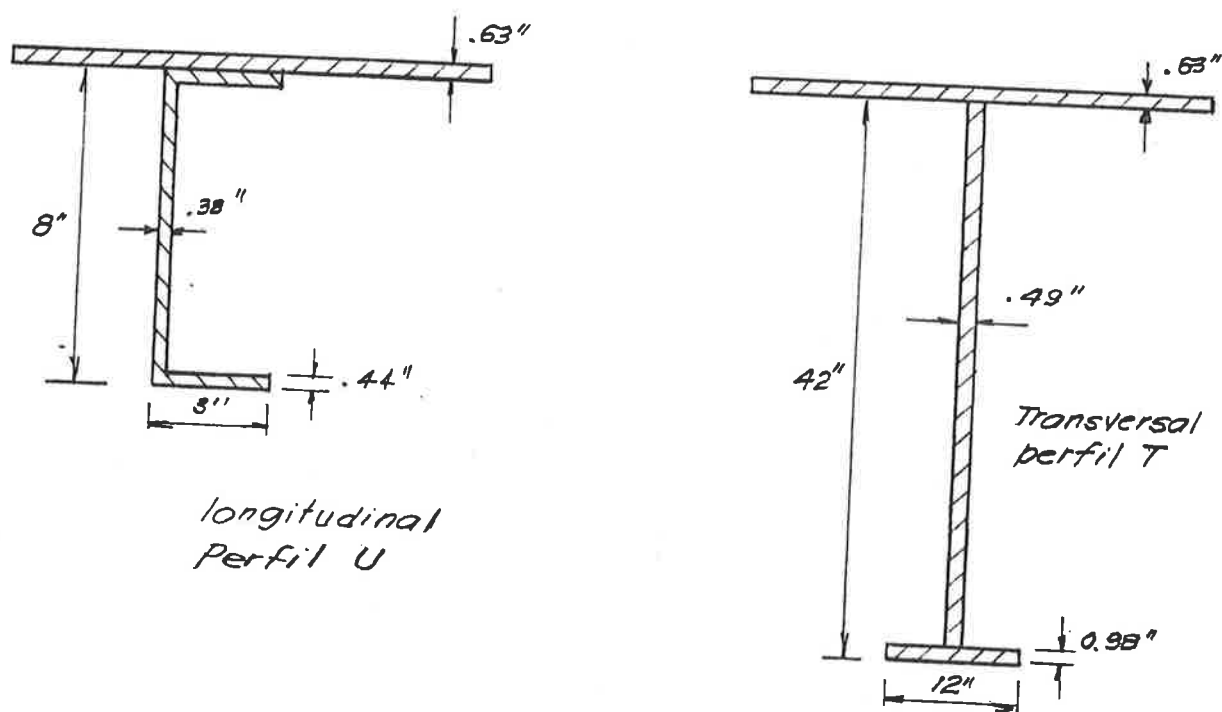


Fig. 5.52 Secções dos longitudinais e transversais
plo no trabalho, como será mostrado a seguir.

O material do convês é o aço médio com as propriedades:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = .3$$

- b) primeiramente é considerada a estrutura mostrada na fig. 5.51 é analisada como grelha formada de vigas constituídas pelos longitudinais e transversais, com largura de chapa colaborante igual ao espaçamento. Tal modelo tem as condições de contorno mostradas na fig. 5.53. Da estrutura reticulada são consideradas duas porções localizadas perto da região de aplicação das cargas, chamadas de região 1 e região 2 na fig. 5.53. A região 1 corresponde à situação mais crítica para o longitudinal e a região 2 para a unidade de chapeamento.

Como segunda etapa, essas regiões, constituídas de

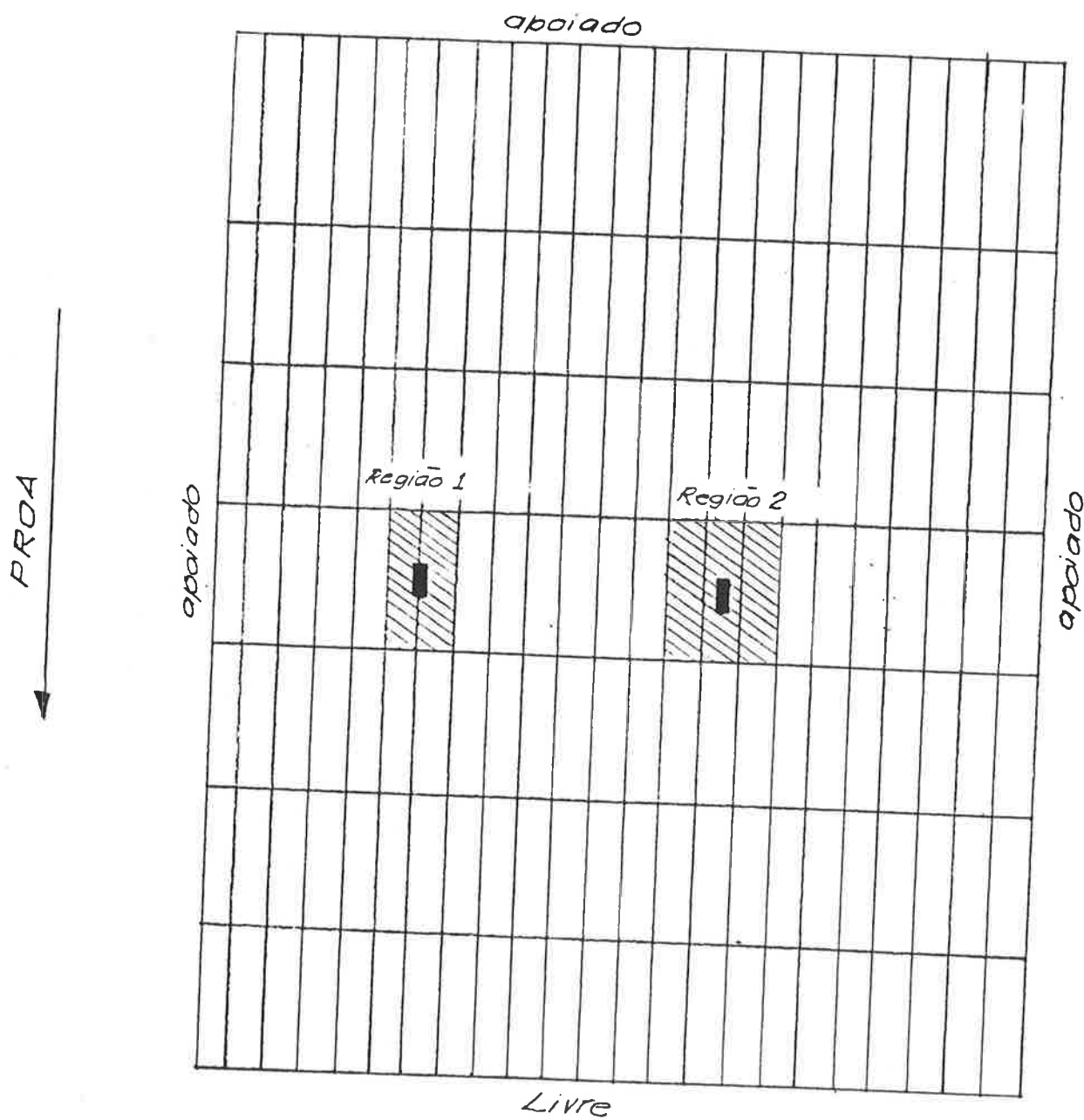


FIG. 5.53 - Condições de contorno e "Regiões de Corte"

chapeamento, longitudinais e transversais, são "retiradas" e considerados os esforços de contorno na "região de corte", resultantes da análise da grelha. Tais regiões são agora analisadas sob os esforços de contorno e a carga direta da roda, sendo discretizadas por elementos finitos de placa no chapeamento e por vigas excêntricas nos longitudinais e transversais. Uma outra discretização é feita, considerando-se agora os longitudinais e transversais também divididos em elementos finitos de placa, com a finalidade de realizar uma comparação de resultados entre os dois modelos.

5.4.1 Modelo viga + placa

Tomando como exemplo a região 2 e considerando como alvos principais da análise as tensões nos longitudinais e no chapeamento, podemos admitir dois eixos de simetria para essa região. Na fig. 5.54 vemos a malha de elementos finitos e vigas excêntricas, mostrando-se apenas a porção analisada (1/4 da estrutura, considerando-se eixos de simetria $S_1 - S_1$ e $S_2 - S_2$).

O modelo é considerado apoiado (vinculado à direção Z) no ponto P_1 (fig. 5.54) tomando-se nas linhas $S_1 - S_1$ e $S_2 - S_2$ condições de contorno próprias da simetria. No ponto P_2 é colocado um momento de contorno $M_x = 163380 \text{ lbf pol}$ (em torno de x), advindo da análise da grelha. Deve-se ressaltar que o modelo leva em conta a deformação por força cortante.

Mostra-se também na fig. 5.54 a região de aplicação da carga da roda (região hachurada).

Para os longitudinais temos (fig. 5.55):

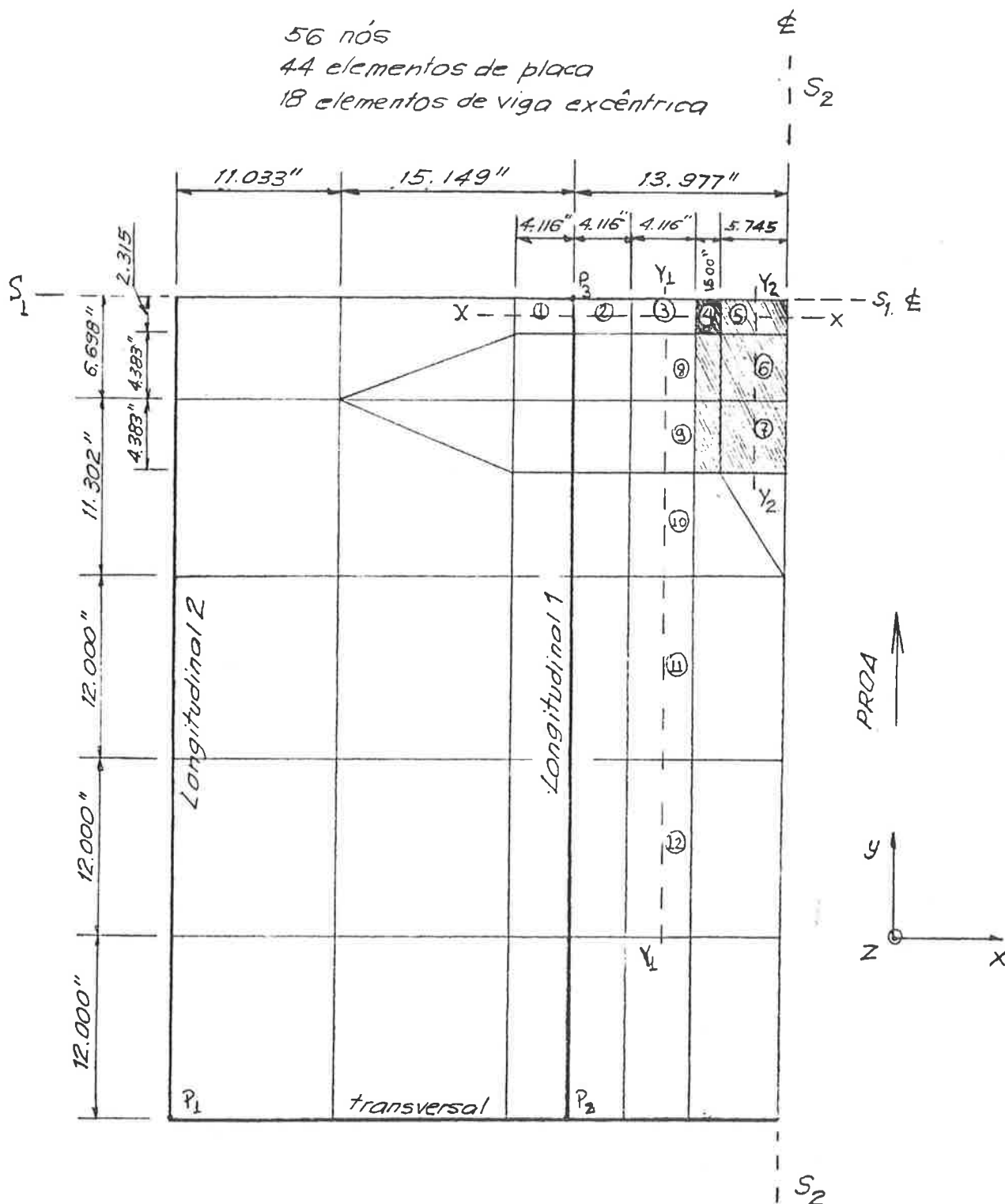


FIG.5.54-Região 2, considerando-se dupla simetria

- momentos de inércia :

$$J_2 = 53,93 \text{ pol}^4, \quad J_3 = 5,16 \text{ pol}^4$$

- momento de inércia à torção:

$$J_T = .32 \text{ pol}^4$$

- área da secção transversal e áreas de cisalhamento:

$$A = 5,69 \text{ pol}^2, \quad A_2 = 2,64 \text{ pol}^2, \quad A_3 = 3,04 \text{ pol}^2$$

- excentricidades:

$$e_1 = 4 \text{ pol}, \quad e_2 = -.7 \text{ pol}, \quad t_1 = 4 \text{ pol}, \quad t_2 \cong 1,1 \text{ pol}$$

- pontos I', T e G da fig. 5.55 estão de acordo com a fig. 4.2.

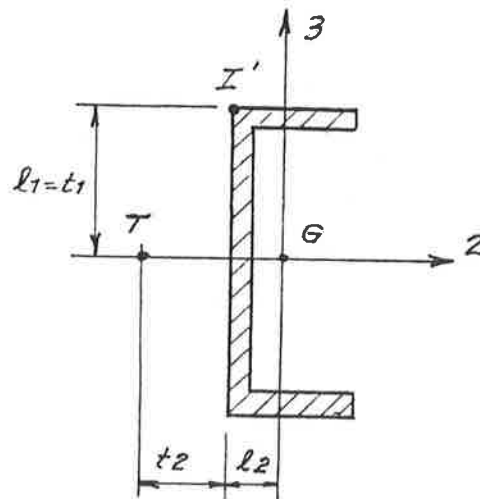


Fig. 5.55 Secção reta dos longitudinais

Para os transversais temos (fig. 5.56):

- momentos de inércia:

$$J_2 = 6326 \text{ pol}^4, \quad J_3 = 141 \text{ pol}^4$$

- momento de inércia à torção:

$$J_T = 5,4 \text{ pol}^4$$

- área da secção transversal e áreas de cisalhamento:

$$A = 32,34 \text{ pol}^2, \quad A_2 = 11,76 \text{ pol}^2, \quad A_3 = 20,58 \text{ pol}^2$$

- excentricidades:

$$e_1 = 28,6 \text{ pol}, \quad e_2 = 0, \quad t_1 = 42 \text{ pol}, \quad t_2 = 0$$

- pontos I' , T e G da fig. 5.56 estão de acordo com a fig. 4.2

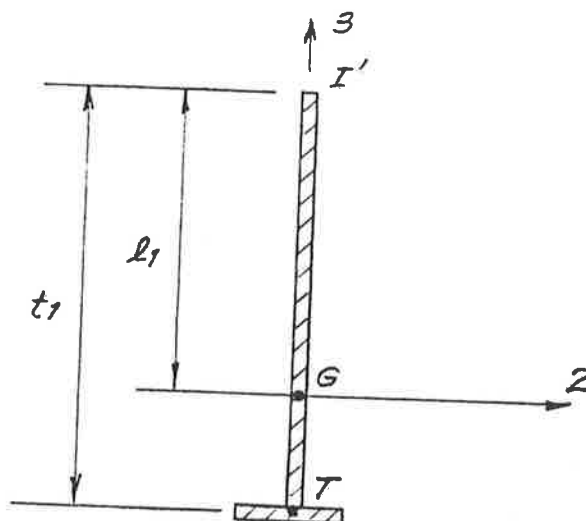


Fig. 5.56 Secção reta dos transversais

5.4.2 Modelo de elementos finitos

A malha de elementos finitos para o chapeamento é a mesma do modelo viga + placa, sendo agora os longitudinais e transversal discretizados conforme a fig. 5.57. O momento M_x de contorno é colocado através do binário formado pelas forças $F = 20497,5 \text{ lbf}$, aplicadas como mostrado na

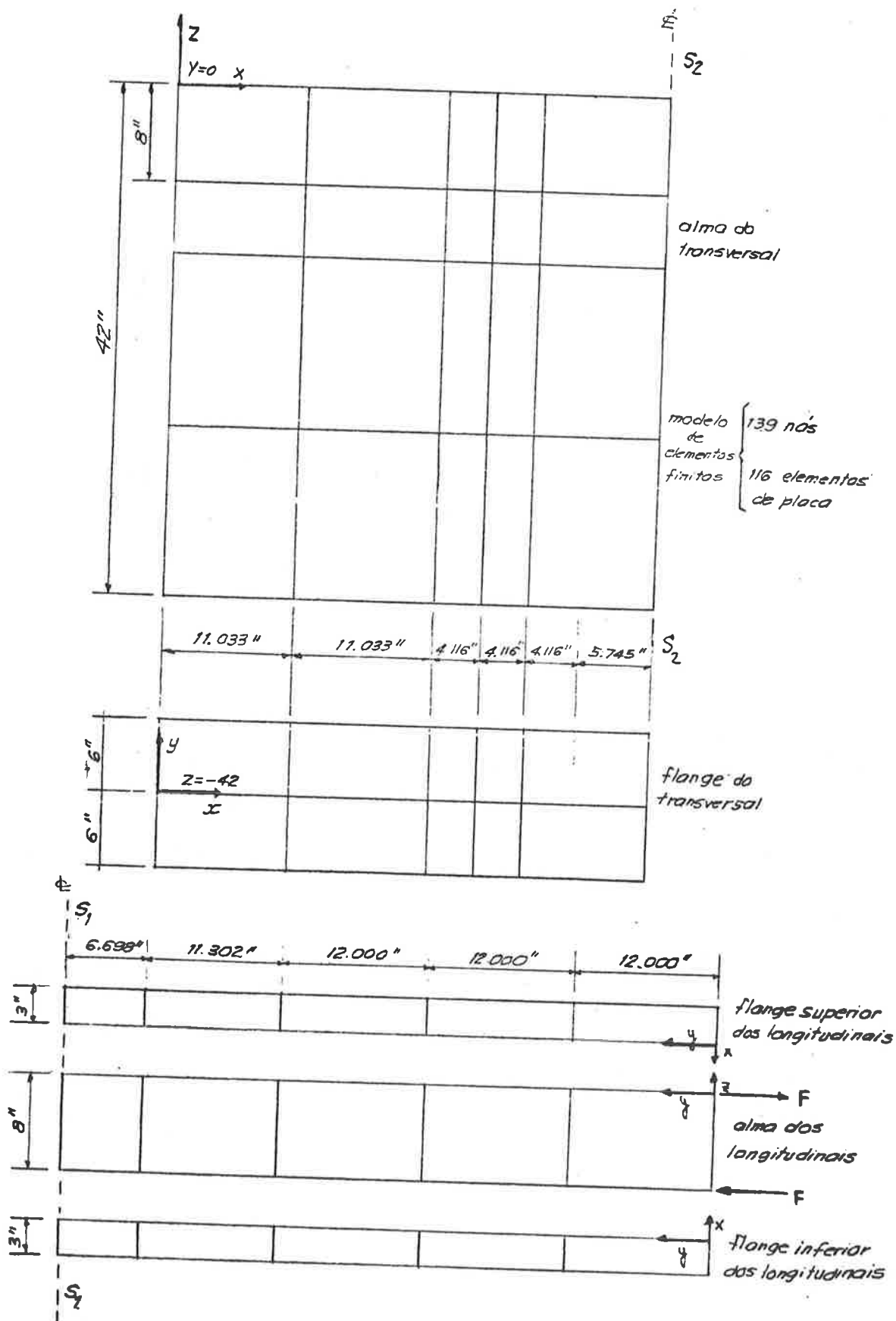


FIG 5.58 Discretiza\u00e7\u00e3o de Longitudinais e Transversais

fig. 5.57 ($M_x = F * 8''$).

Tanto no modelo viga + placa como neste modelo, a numeração dos nós foi feita de modo a termos a menor diferença de incidência possível.

5.4.3 Resultados e conclusões.

Na fig. 5.58 são mostrados os resultados das tensões, advindas da flexão própria do chapeamento, para os dois modelos. Temos:

$\underline{\sigma_{1y}}$: tensões de flexão na fibra superior do chapeamento ($\sigma_y = My/(t^2/6)$, onde t é a espessura do chapeamento) na direção y , na linha $Y_1 - Y_1$ da fig. 5.54.

$\underline{\sigma_{2y}}$: idem, na linha $Y_2 - Y_2$ da fig. 5.54.

$\underline{\sigma_x}$: tensões na direção x , na linha $x - x$ da fig. 5.54.

A numeração \textcircled{N} dos elementos está de acordo com a fig. 5.54.

Na fig. 5.59 aparecem os resultados das tensões máximas de cisalhamento na alma do longitudinal 1 (fig. 5.54) para os dois modelos. Os pontos P_2 e P_3 estão de acordo com a fig. 5.54.

Na fig. 5.60 estão apresentados os resultados para σ_c e σ_f . No caso do modelo viga + placa, faz-se o cálculo usando a 2a. forma B e a 1a. forma ("a partir das tensões nas placas").

A comparação dos resultados revela-se satisfatória,

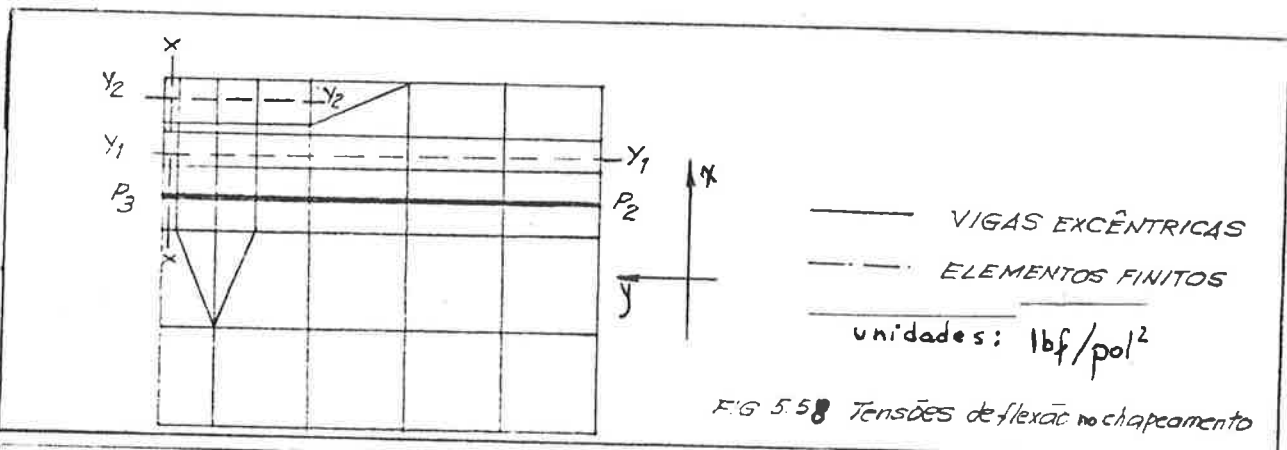
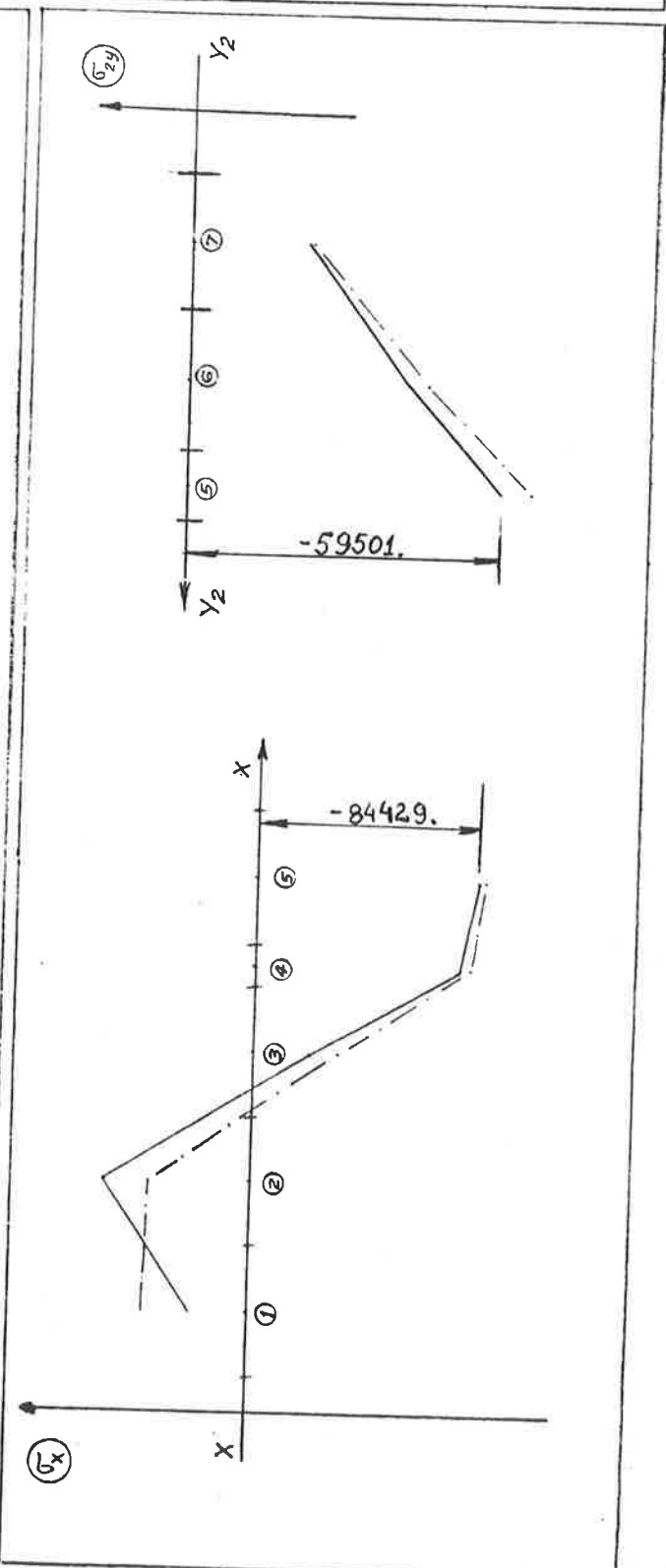
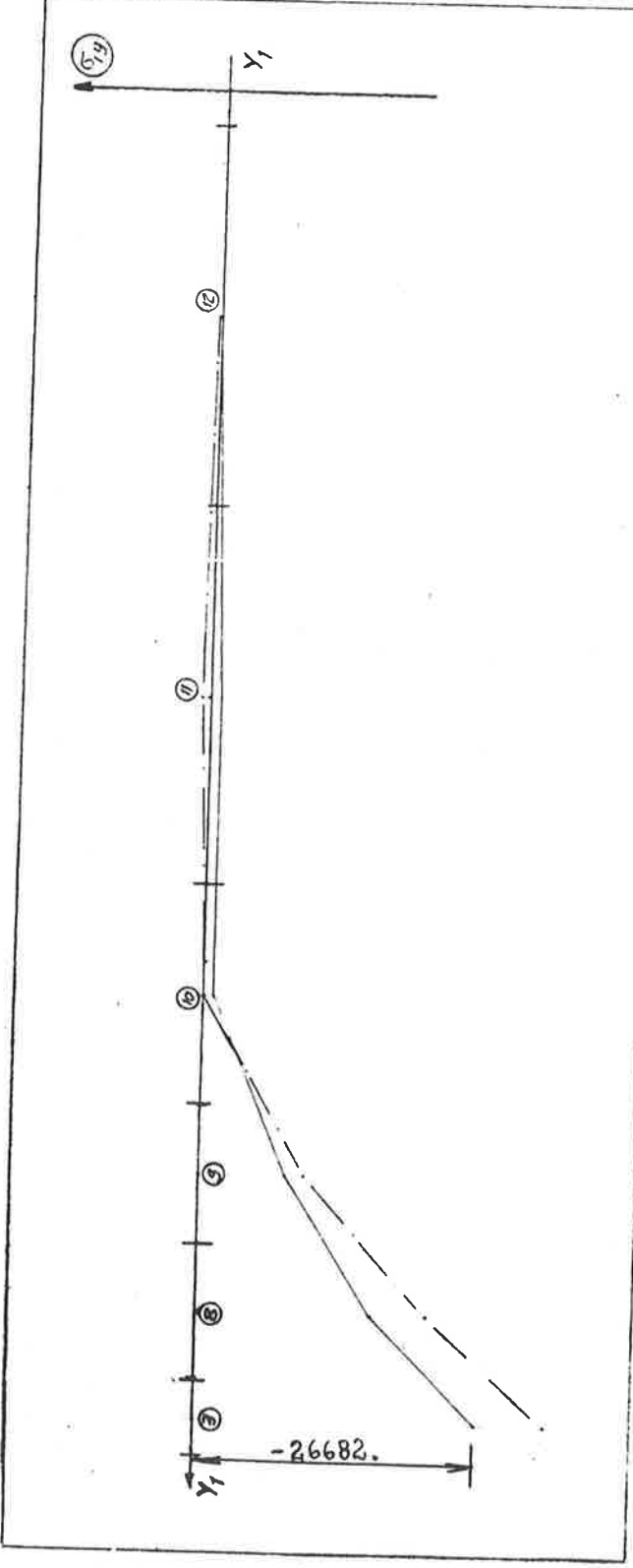
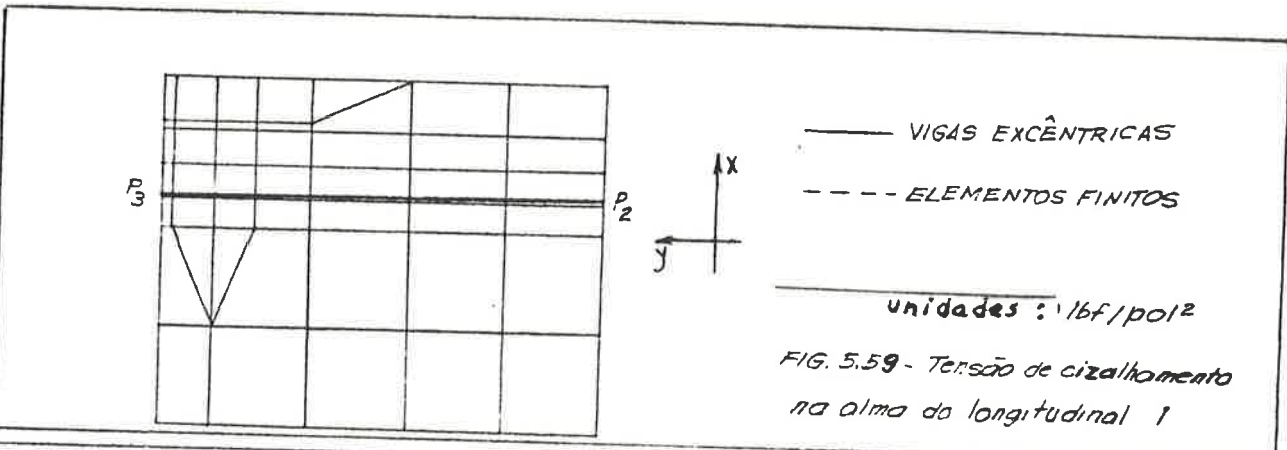
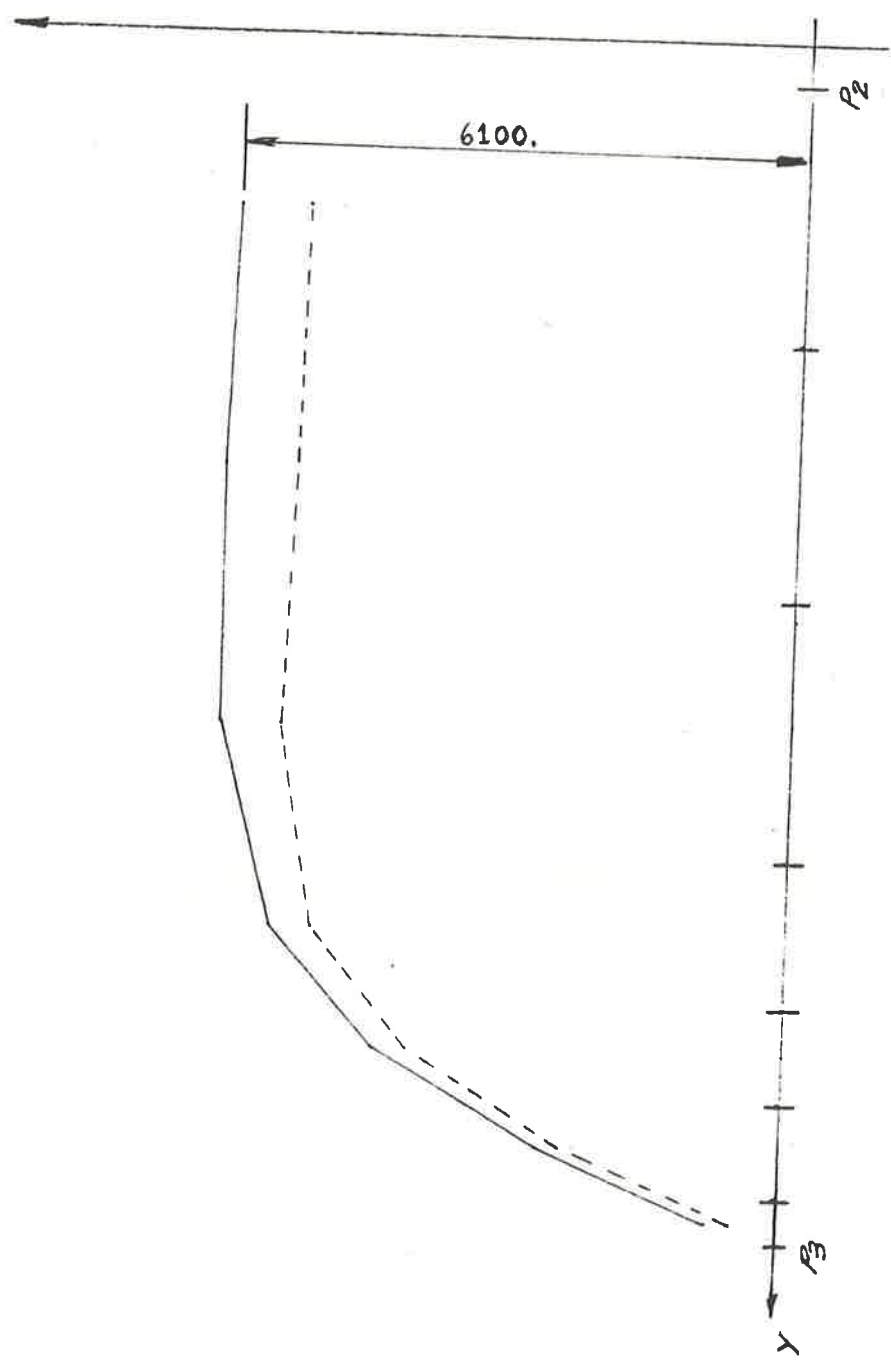


FIG 5.58 Tensões de flexão no chapeamento





2



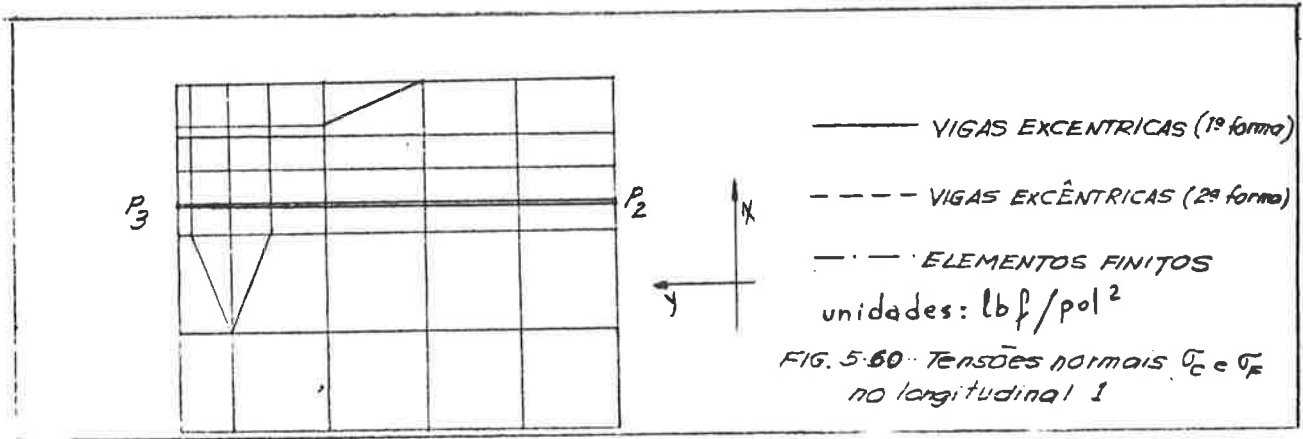
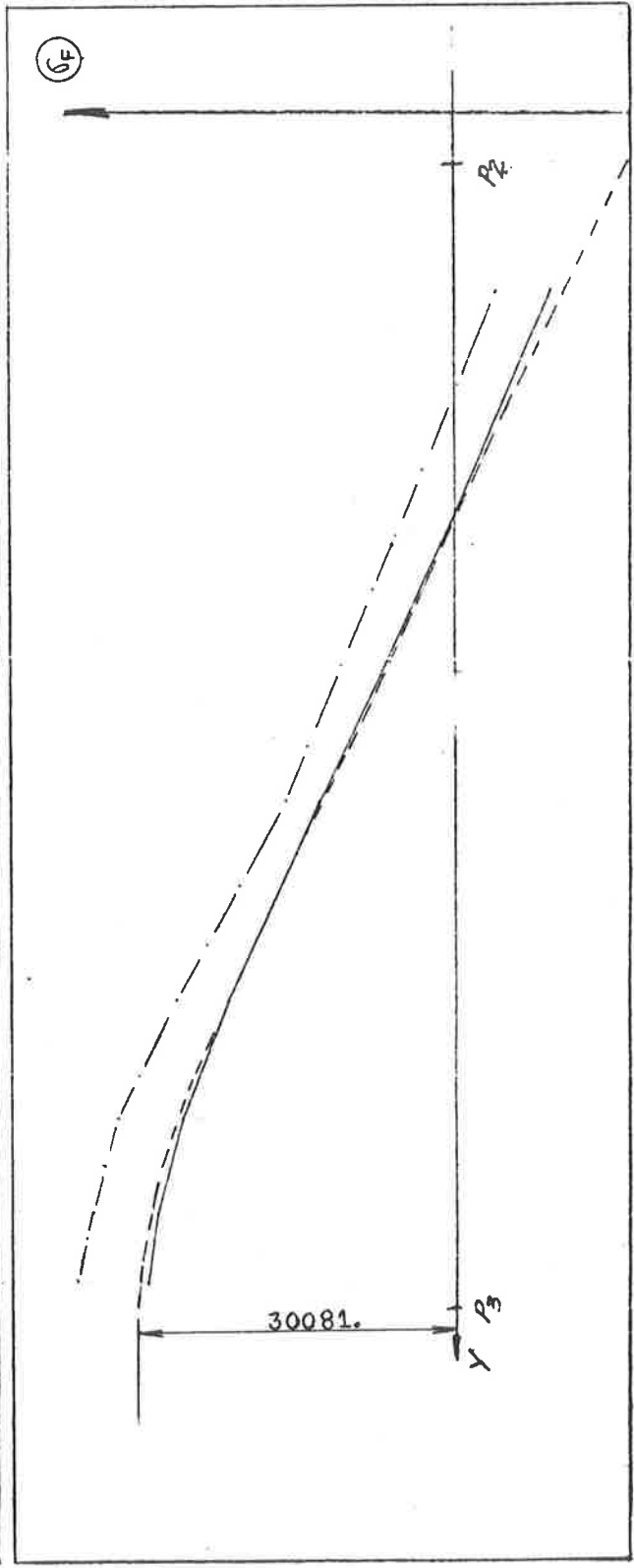
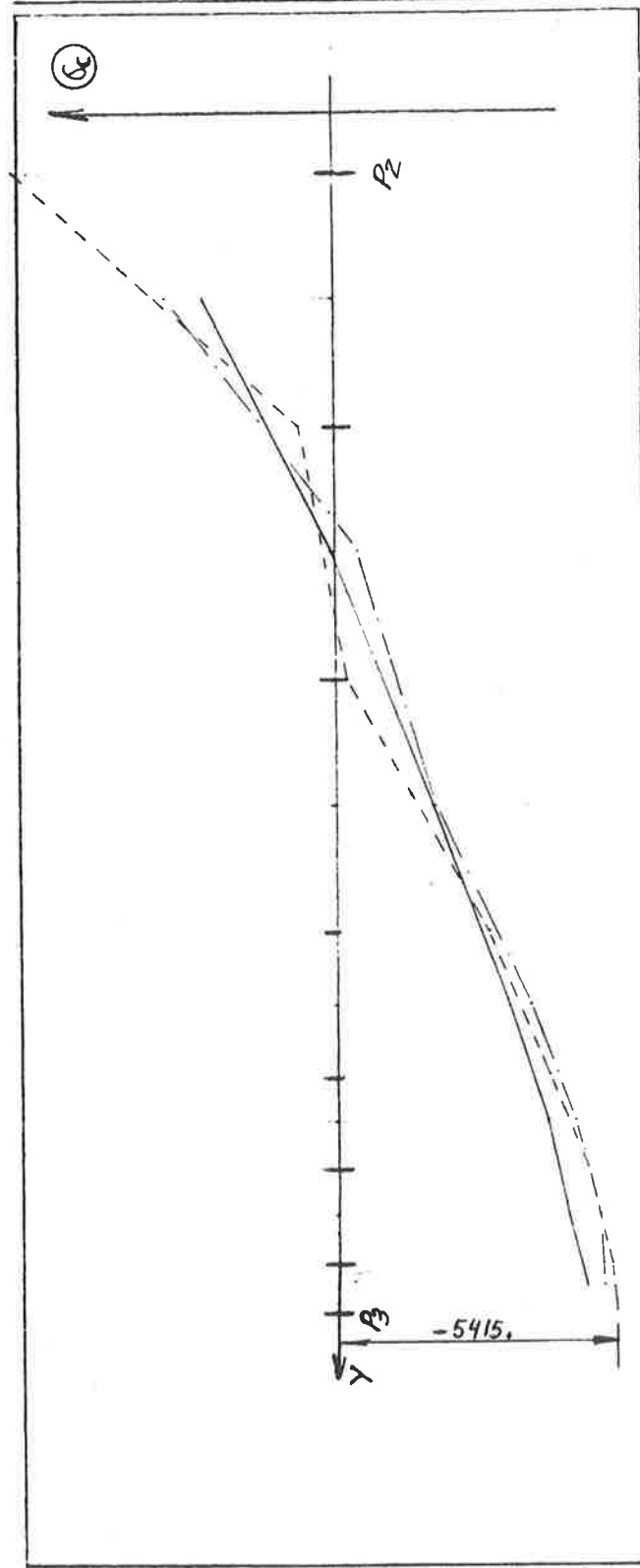


FIG. 5-60 TENSÕES NORMAIS σ_C e σ_F NO LONGITUDINAL 1



exceto para a tensão σ_F (fig. 5.60) onde há, praticamente, um "deslocamento" das curvas representativas dos dois modelos.

O desenvolvimento feito no capítulo IV para a determinação da matriz de rigidez de uma viga excêntrica leva à hipótese de indeformabilidade da secção reta da barra. Neste problema temos no ponto P_2 (fig. 5.54) a intersecção de duas vigas excêntricas de alturas de alma com grande diferença. Tal fato leva a um comportamento da estrutura nesse ponto do tipo esquematizado na fig. 5.61, onde existe grande deformação da secção reta do transversal. Isso, matematicamente, corresponde a não termos a mesma rotação do

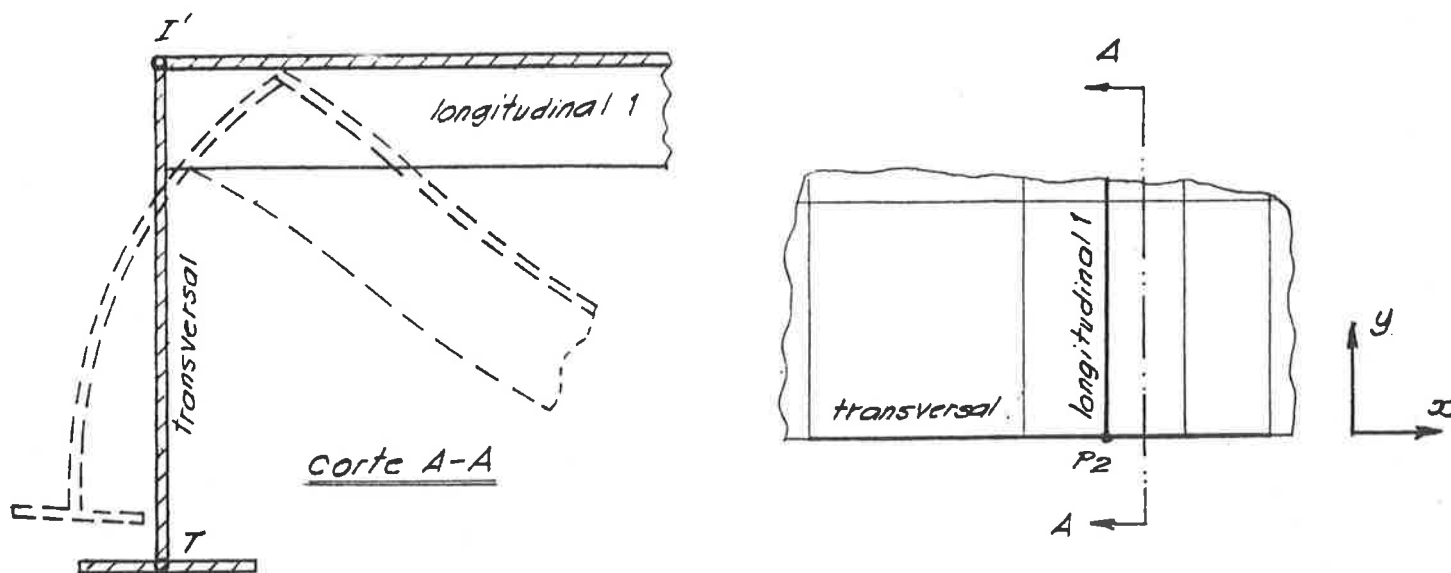


Fig. 5.61 Deformação da secção reta do transversal

ponto T e I' (fig. 5.61) que é uma das relações usadas quando do desenvolvimento da matriz de rigidez de uma viga excêntrica. Portanto, enquanto o modelo de elementos finitos leva em conta esta deformação, o modelo viga + placa não a considera. Temos daí uma resistência à rotação em torno de x (fig. 5.61), no ponto P_2 , para o longitudinal, diferente para os dois modelos, acarretando esse "deslocamento" en

tre as curvas de σ_F (fig. 5.60).

Concluindo: os resultados do modelo viga + placa devem ser analisados cuidadosamente no caso de cruzamento de vigas com grande diferença de altura de alma e onde haja uma considerável torção da viga maior. Portanto, a hipótese da indeformabilidade da secção reta da viga deve ser sempre "conferida".

A comparação entre o preço e tempo de processamento de 1/4 da região 2 (fig. 5.54) segue abaixo (Bourroughs 6700 do C.C.E. da U.S.P., em setembro de 1976):

PREÇO Cr\$		TEMPO DE PROC. (s)		Nº de CARTÕES DE DADOS	
ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA
414,24	131,51	444,30	130,32	190	109

5.5 Porão vazio, engastado nas anteparas

Vamos analisar o compartimento mostrado na fig. 5.62 (6 x 6 x 3 m), com o seguinte arranjo estrutural (aço com $E = 2100 \text{ ton/cm}^2$ e $\nu = .25$):

- aneis transversais, espaçados de 2 m, constituídos de vau, caverna e hastilha, com secção transversal mostrada na fig. 5.63
- longitudinais do convés, costado e fundo espaçados de 1 m. O longitudinal central do convés (sicorda) é constituído do perfil $\underline{\text{T}}$ mostrado na fig. 5.62, enquanto o central do fundo (quilha) é formado pelo mesmo perfil dos aneis (vau, etc). Os longitudinais

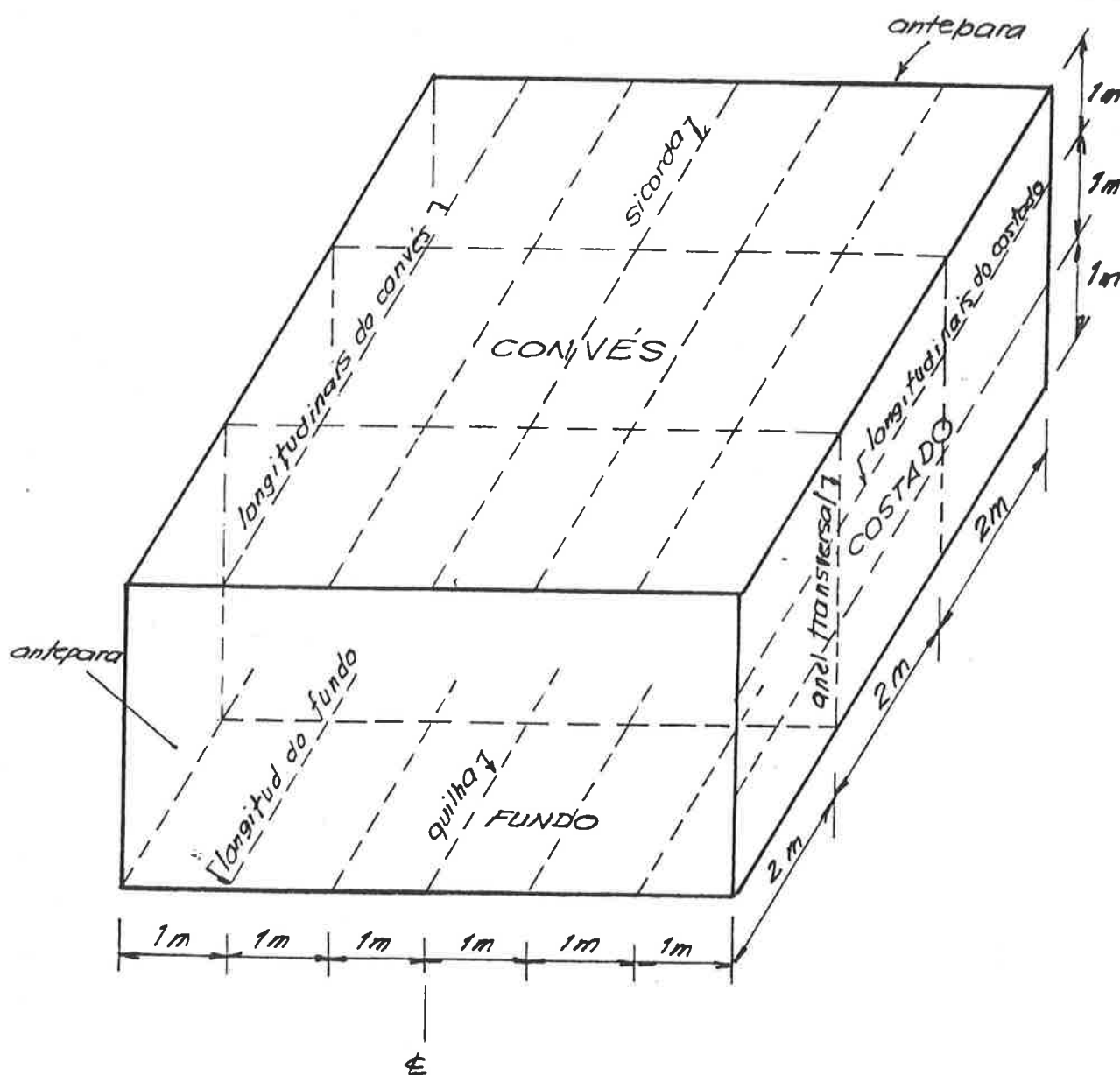


Fig. 5.62 Arranjo do porão

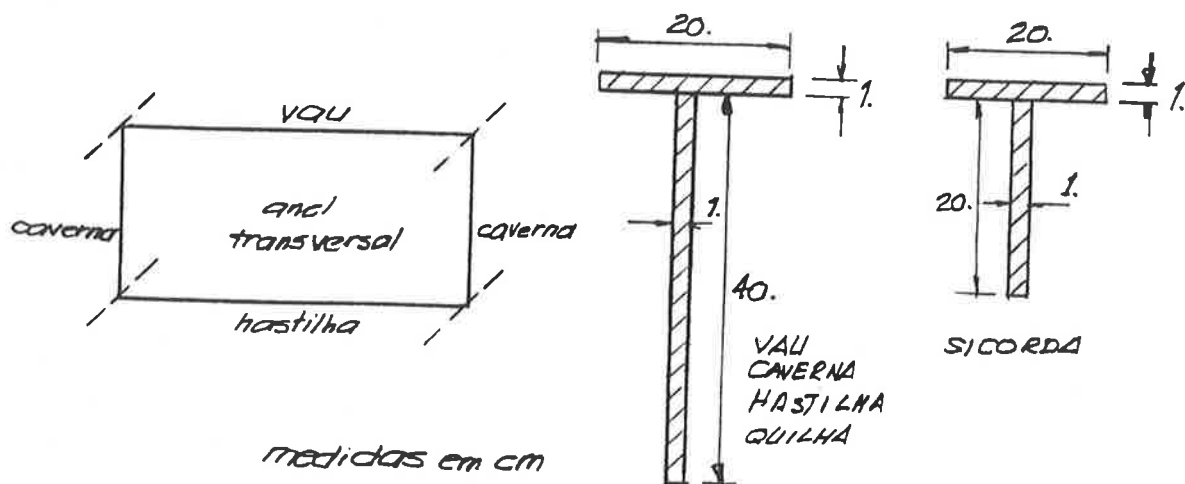


Fig. 5.63 Secções dos vaus, cavernas, quilha, hastilhas e sicorda.

comuns são constituídos de um perfil "barra chata" (20x1 cm). A espessura do chapeamento no convés, costado e fundo é de 1 cm.

Consideremos o compartimento engastado nas anteparas e sob o carregamento (fig. 5.64):

- porão vazio
- pressão de 1 metro de coluna d'água no convés ($.0001 \text{ ton/cm}^2$).
- pressão hidrostática correspondente no costado
- pressão de 4 metros de coluna d'água no fundo.

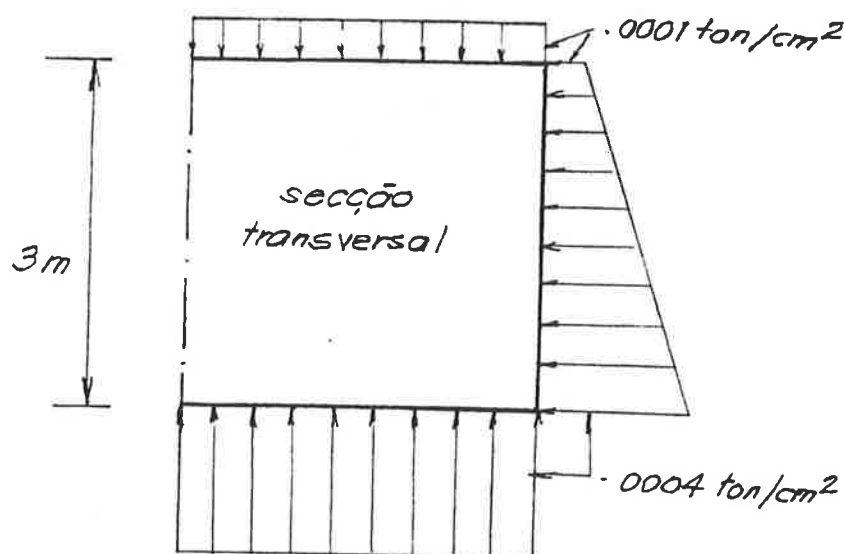


Fig. 5.64 Pressão hidrostática na seção

Nas condições anunciadas, podemos considerar dois planos de simetria e analisar 1/4 da estrutura como esquematizado na fig. 5.65, onde também está mostrado o sistema (x, y, z) de referência utilizado.

5.5.1 Modelo viga + placa

A porção da estrutura da fig. 5.65 é discretizada em elementos finitos de placa e vigas excêntricas, como mostrado na fig. 5.66, considerando-se a deformação por força cortante.

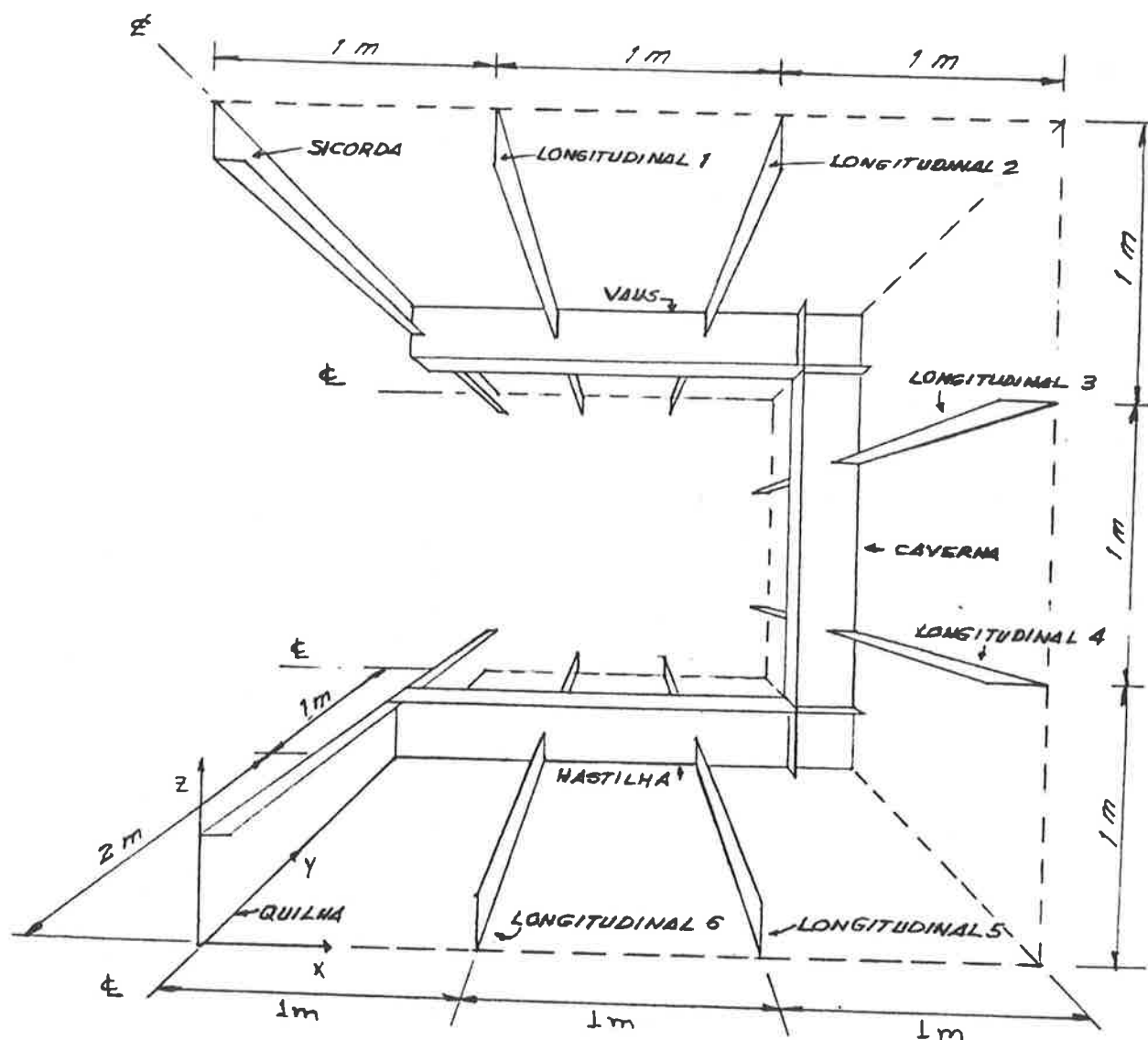
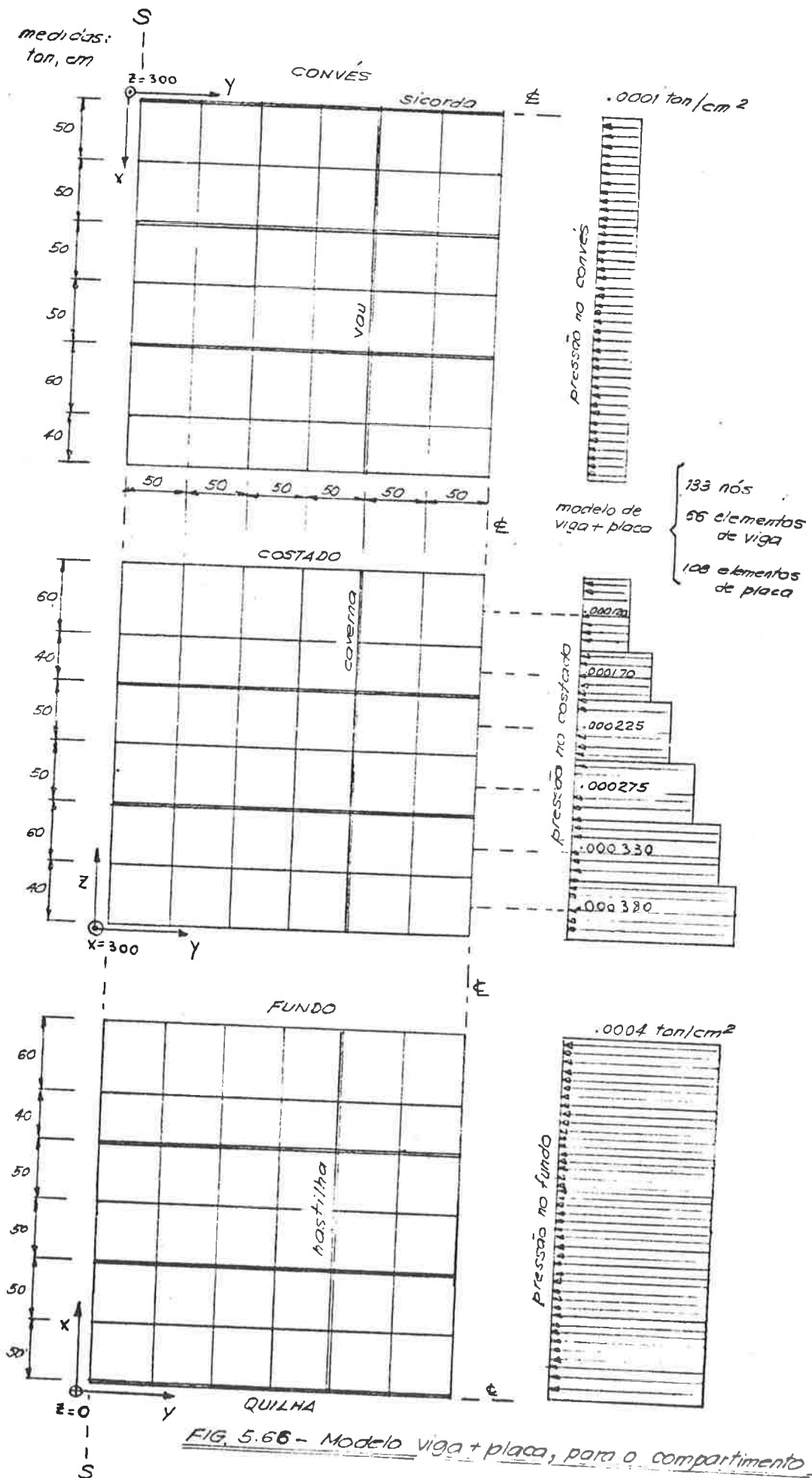
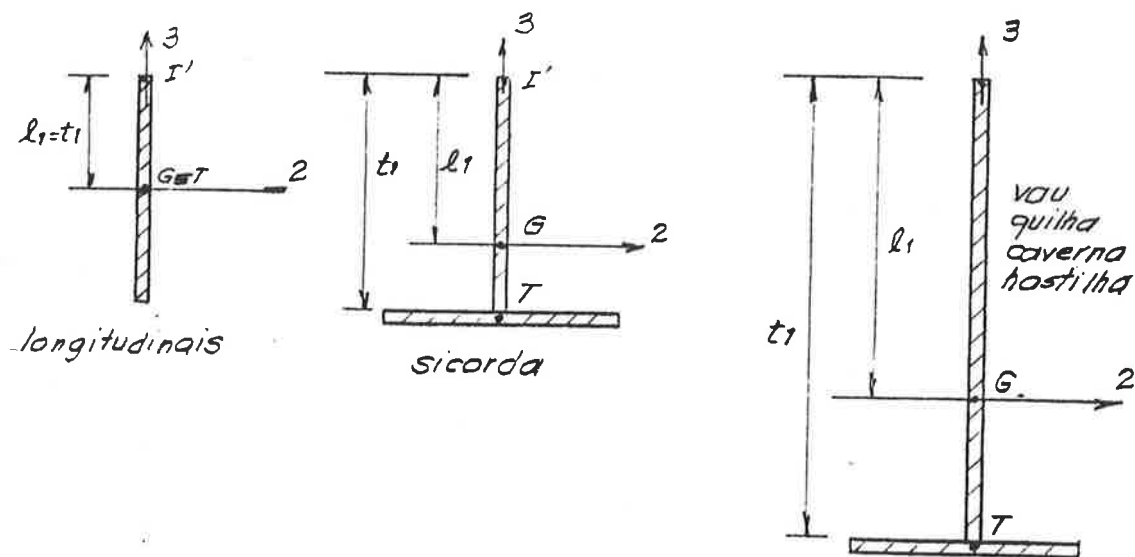


Fig. 5.65 Compartimento com dupla simetria

O modelo é engastado na linha S-S (antepara) to_o mando-se nas linhas de simetria, condições próprias de contorno. É mostrada também a distribuição de pressão no modelo, considerando-se no costado a pressão média para cada fila horizontal de elementos de placa.

As propriedades geométricas das vigas, são mostradas na fig. 5.67.





**	longitudinais	sicorda*	Quilha, caverna, hastilha, vau
J_2 (cm ⁴)	666.67	1666.67	10666.72
J_3 (cm ⁴)	0.	666.67	666.66
J_T (cm ⁴)	6.67	13.33	20.
A (cm ²)	20.	40.	60.
A_2 (cm ²)	0.	20.	20.
A_3 (cm ²)	20.	20.	40.
e_1 (cm)	10.	15.	26.67
t_1 cm	10.	20.	40.

* por simetria, na análise, considera-se 1/2 perfil

** a nomenclatura das propriedades geométricas está conforme o exemplo anterior (5.4).

Fig. 5.67 Propriedades geométricas dos perfis

5.5.2 Modelo de elementos finitos

A malha de elementos finitos para o chapeamento é a mesma do modelo viga + placa, sendo agora os perfis discretizados conforme a fig. 5.68.

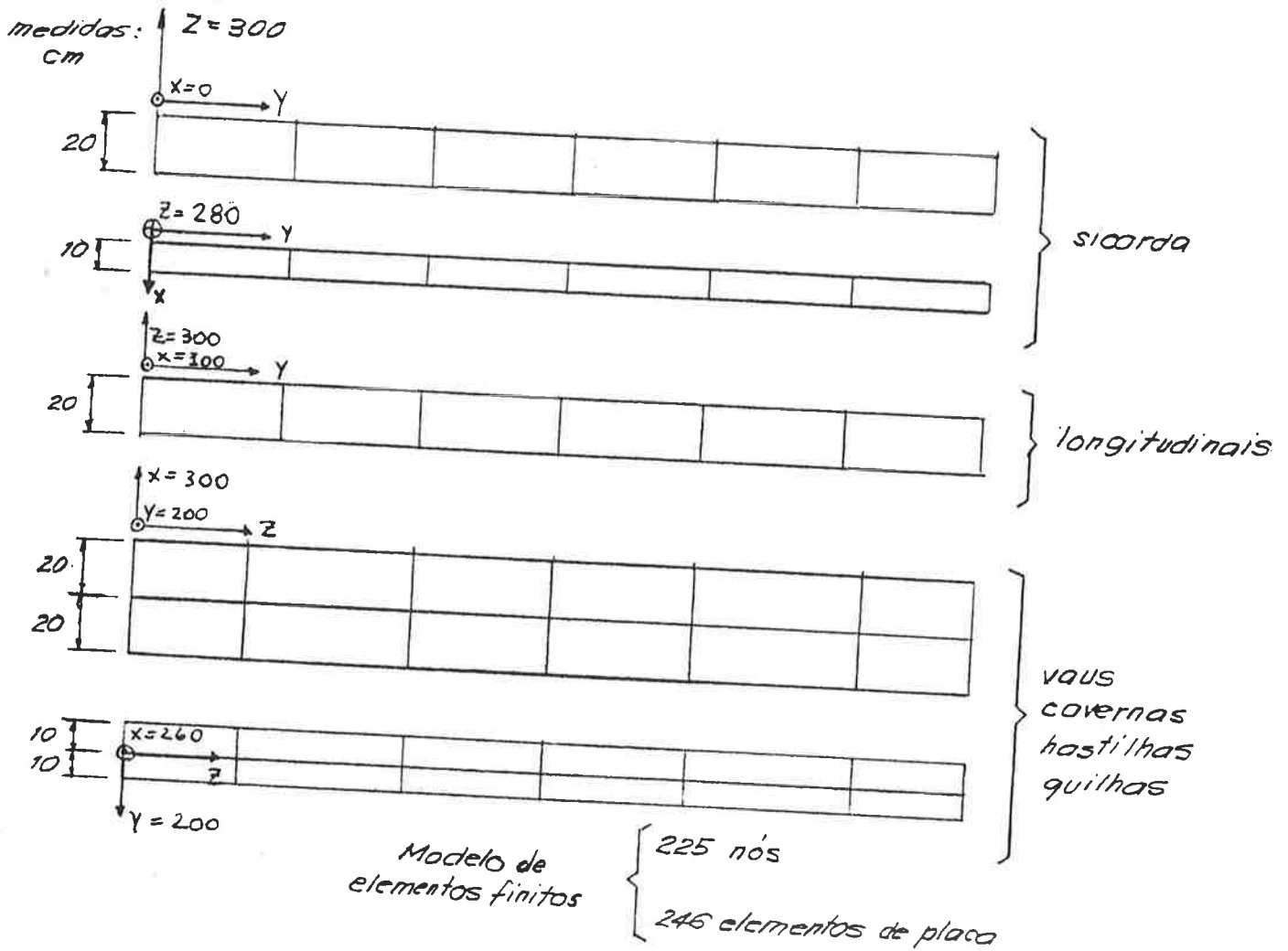


Fig. 5.68 Discretização dos perfis

Em ambos os modelos a numeração dos nós é feita de modo a termos a menor diferença de incidência possível.

5.5.3 Resultados e conclusões

Tracemos para os dois modelos os seguintes gráficos:

- fig. 5.69 e 5.70 : tensões σ_F e τ_{\max} , respectivamente, para o anel (vau, caverna e hastilha).

- fig. 5.71: tensões σ_F e τ_{\max} para a quilha.
- fig. 5.72 : tensões σ_F e τ_{\max} para a sicorda.

Convém comentar os resultados das tensões σ_F e τ nos aneis (figs. 5.69 e 5.70). Pode-se notar que nos "cantos" (regiões de intersecção entre vau e caverna, ou caverna e hastilha) as tensões advindas da análise por elementos finitos sofrem uma queda brusca, enquanto o modelo viga + placa não apresenta tal resultado.

Tomando como exemplo a intersecção do vau com a caverna (fig. 5.73a), pode-se notar que a idealização por vigas excêntricas mais recomendável, deveria levar em conta a existência de tramos infinitamente rígidos⁽²⁴⁾ à flexão (fig. 5.73b), de modo a melhor nos aproximarmos da estrutura real, inclusive possuindo nesse caso, tanto o vau como caverna, um vão flexível menor do que o advindo da idealização pelo modelo viga + placa. Isto tende a justificar ainda todas as diferenças encontradas nas tensões σ_F (fig. 5.68), para os dois modelos.

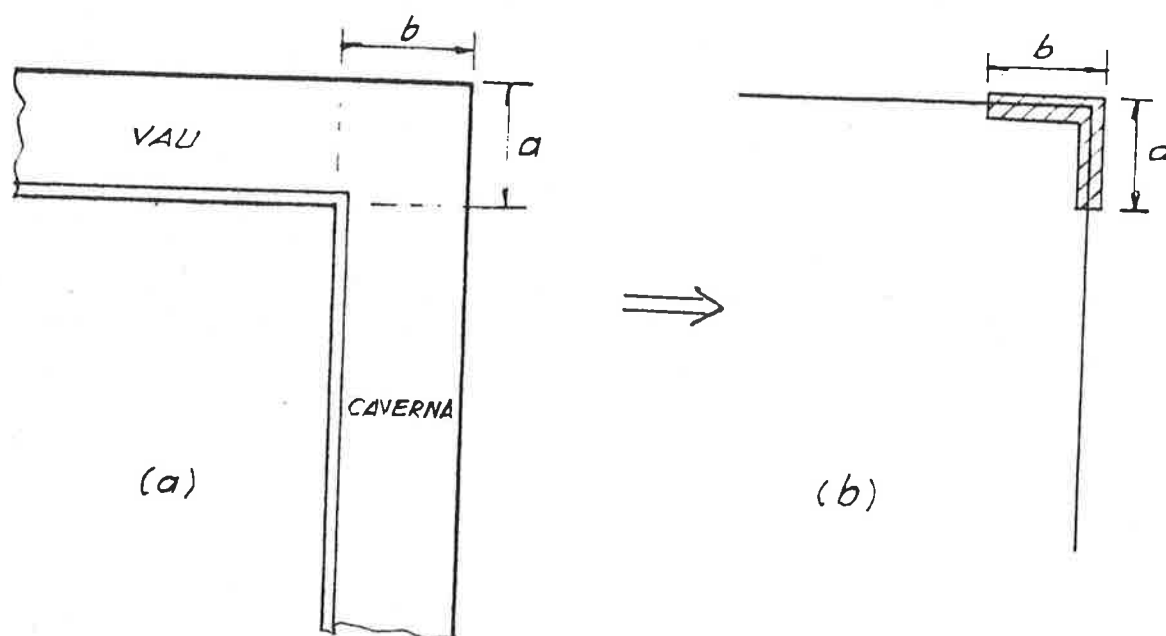
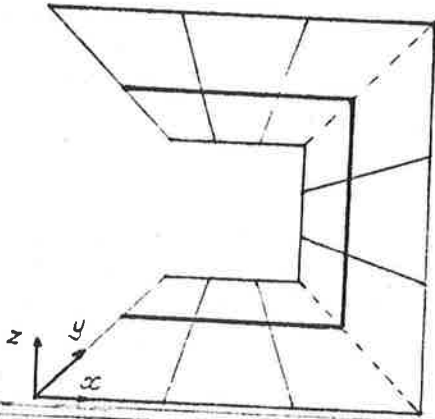


Fig. 5.73 Idealização com elementos infinitamente rígidos à flexão.

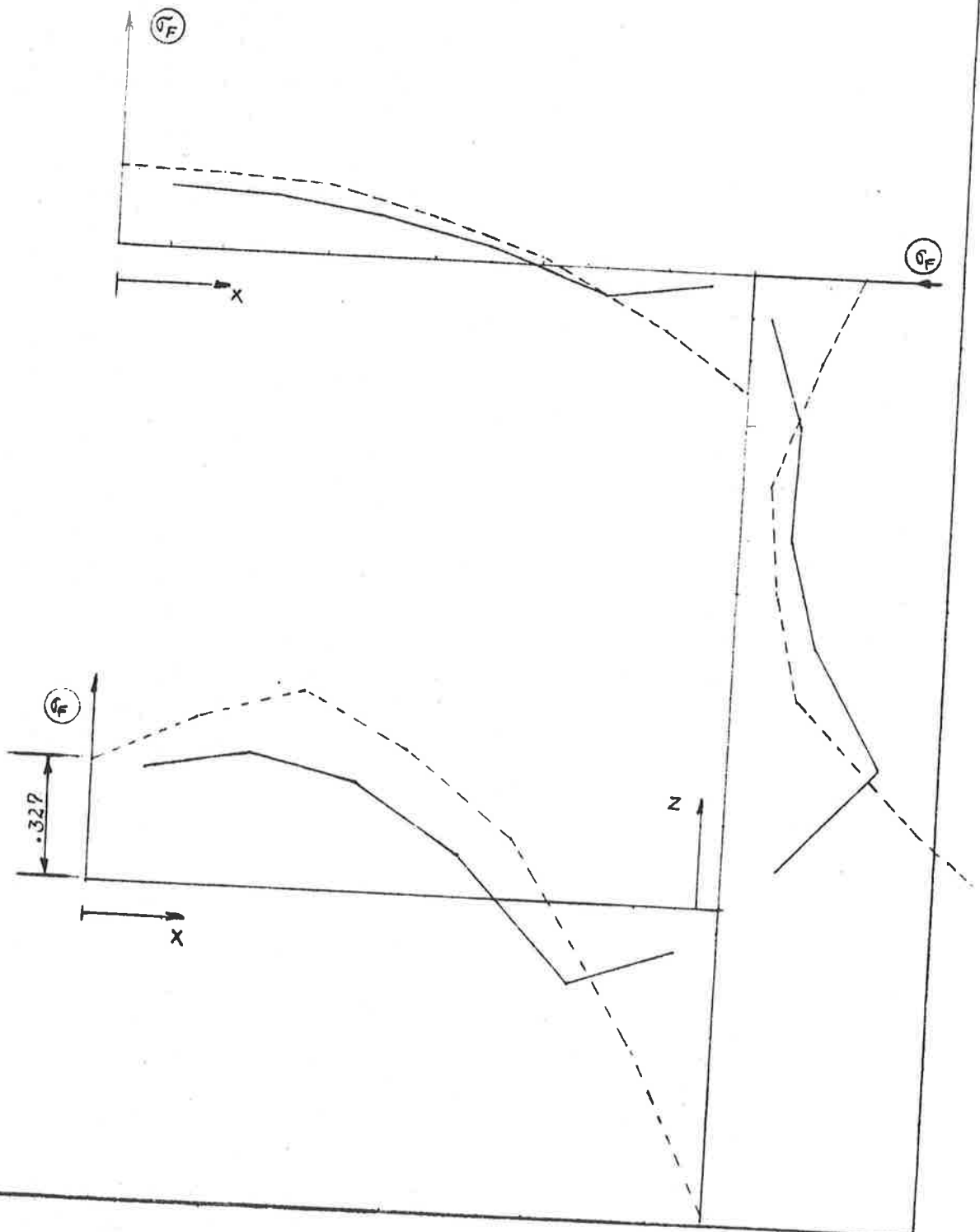


--- VIGAS EXCÊNTRICAS

— ELEMENTOS FINITOS

unidades : ton/cm²

FIG. 5.69 - Tensão normal σ_F no anel



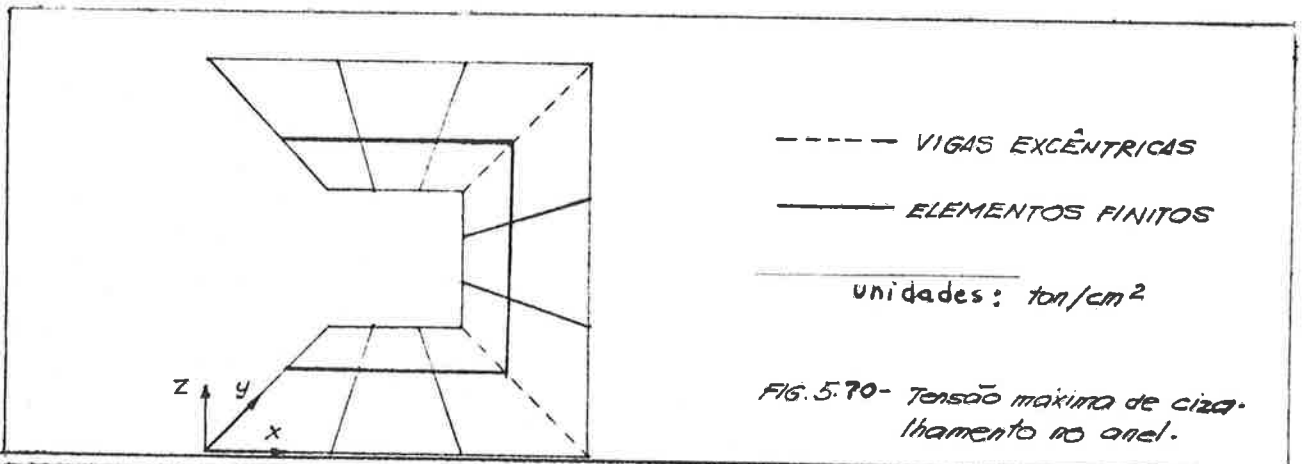
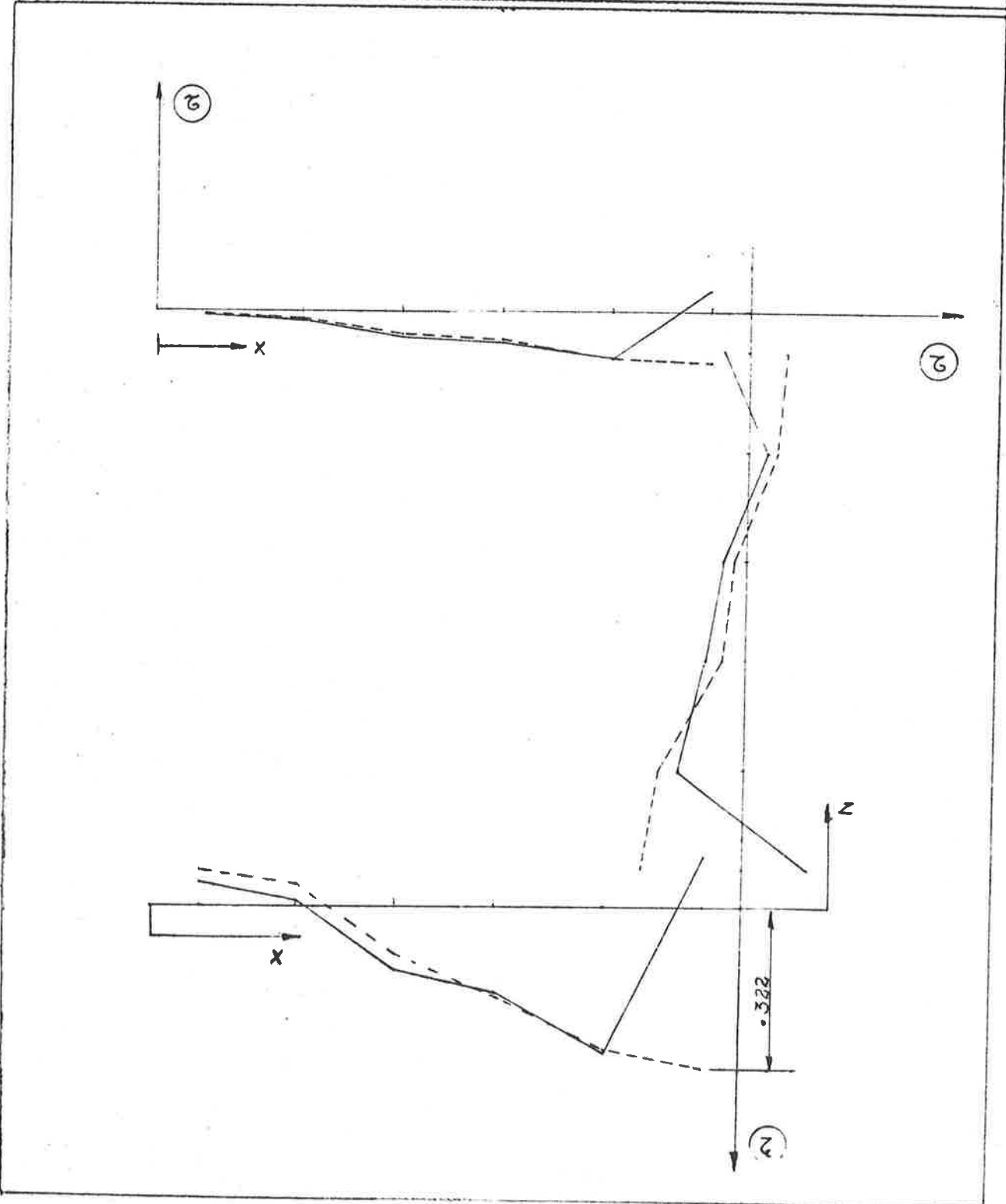


FIG. 5.70- Tensão máxima de cisalhamento no anel.



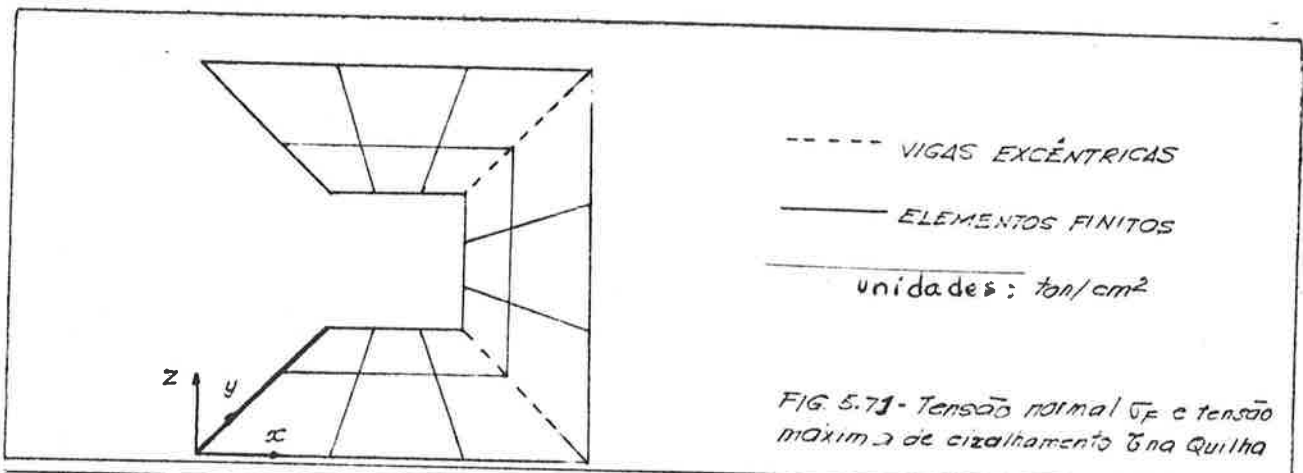
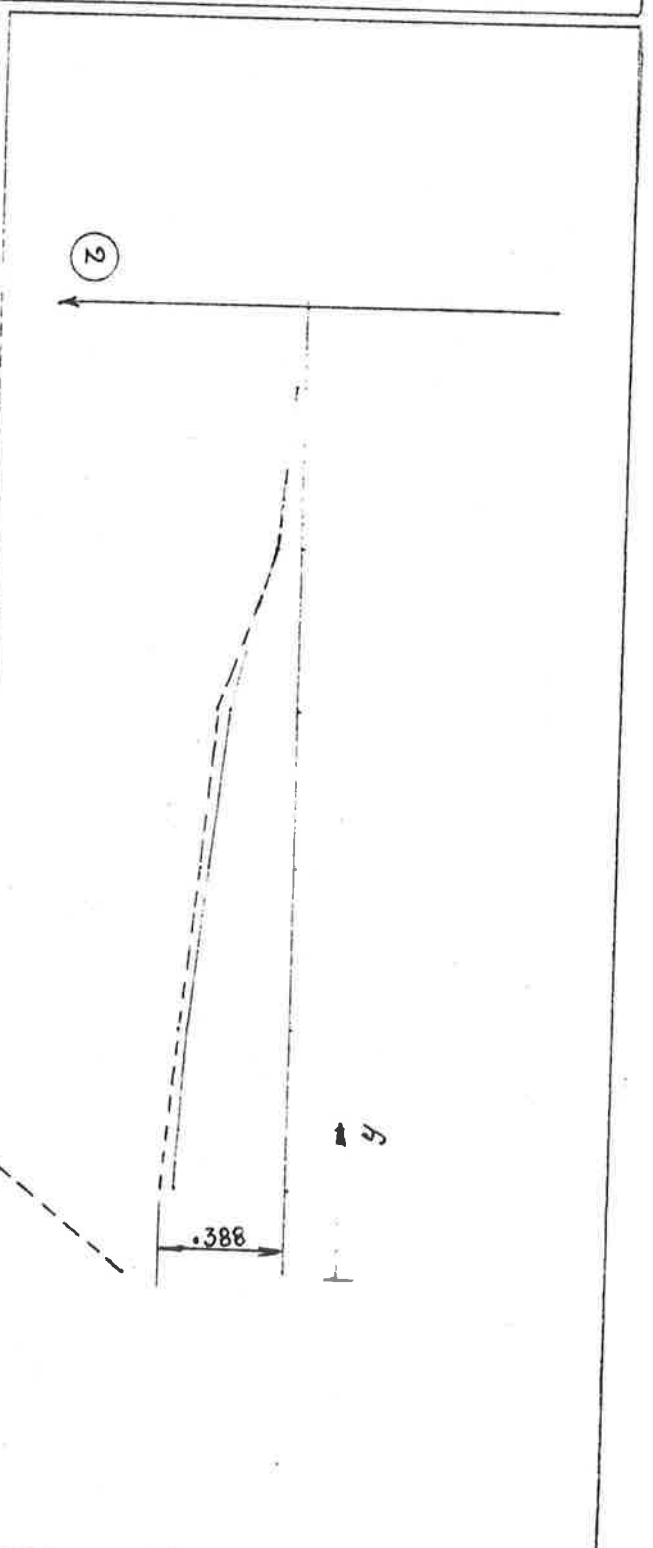
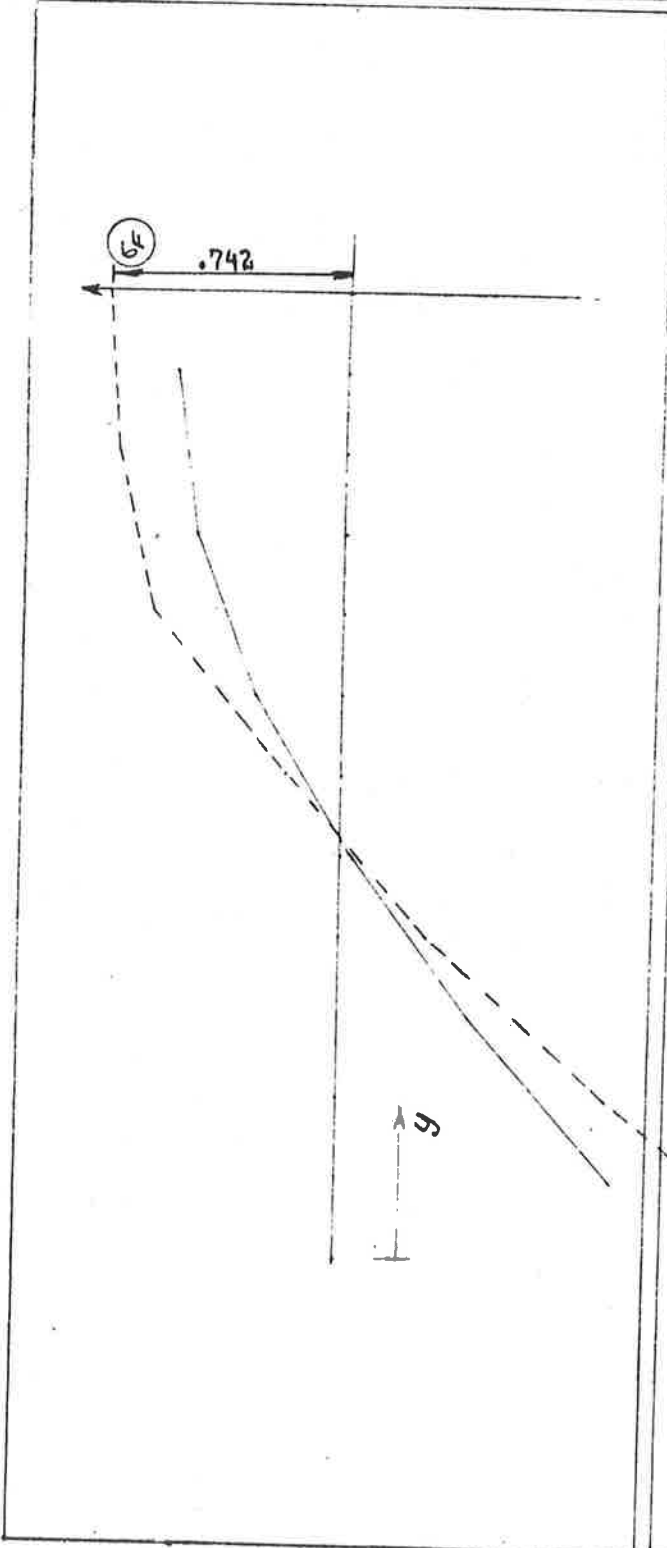


FIG. 5.71 - Tensão normal $\bar{\sigma}_F$ e tensão máxima de cisalhamento $\bar{\tau}_{na}$ Quilha



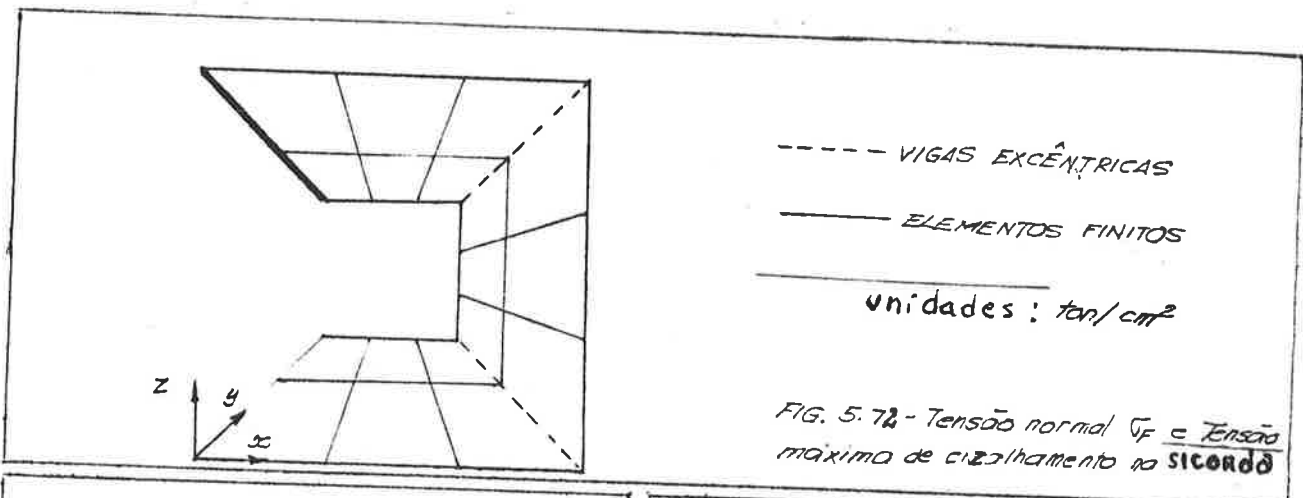
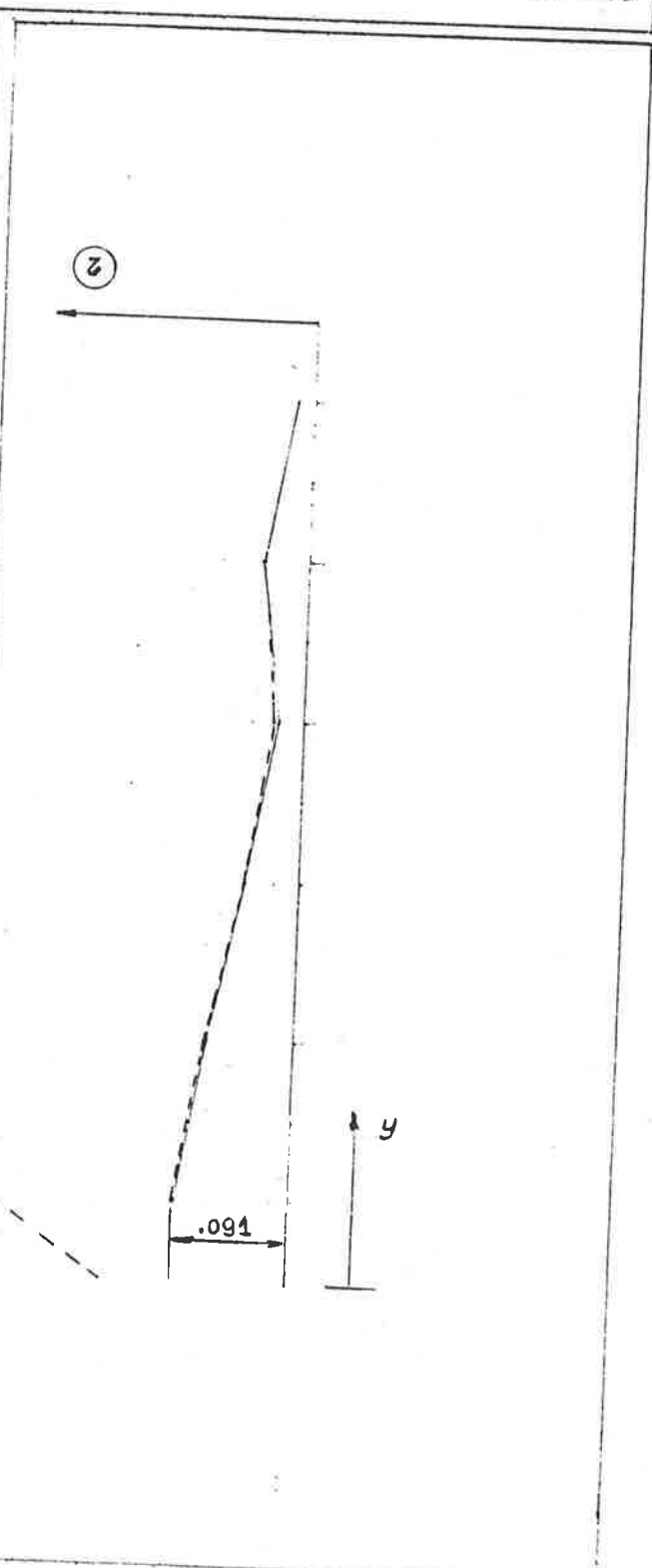
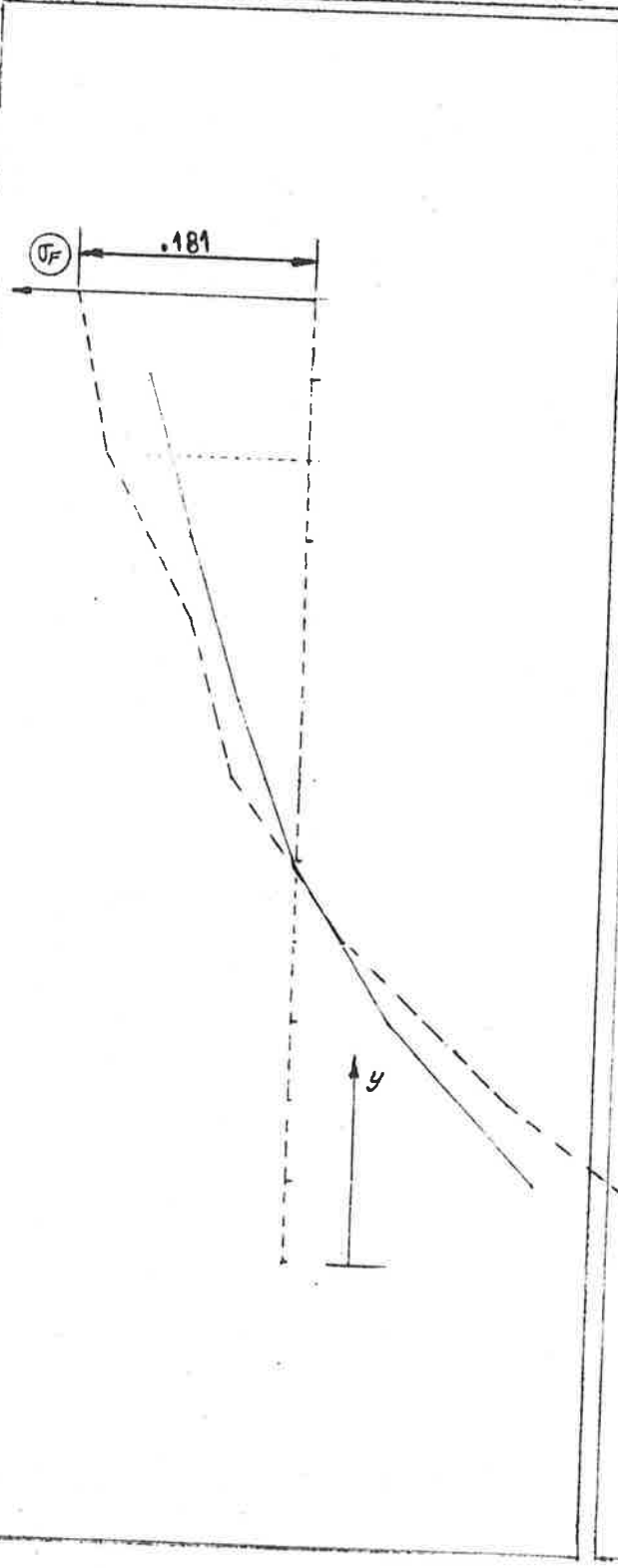


FIG. 5.72 - Tensão normal σ_F e Tensão máxima de cisalhamento no SICORDO



A comparação entre o preço e tempo de processamento de 1/4 da estrutura (fig. 5.64) segue abaixo (Bourroughs 6700 do C.C.E. da USP, em outubro de 1976):

PREÇO (Cr\$)		TEMPO DE PROC. (S)		Nº DE CARTÕES DE DADOS	
ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA	ELEMENTOS FINITOS	VIGA+PLACA
844,34	308,16	918,05	314,43	261	109

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Vários exemplos ⁽¹²⁾ foram ainda realizados, mostrando a aceitabilidade do modelo viga + placa. A análise de tais testes revelou que a maior vantagem do uso deste modelo é a grande economia de tempo na preparação de dados, quando em confronto com o modelo de elementos finitos convencional. Tal fato não pode ser somente medido pelo número de cartões de dados necessários, mas também porque ao trabalharmos com o modelo viga + placa, sua forma muito mais simples, faz com que a numeração de nós e elementos seja largamente facilitada e, portanto, menos sujeita a erros. Como exemplo temos o teste 5.5, em que para o modelo viga + placa (fig. 5.66) basta efetuar a numeração de tres planos (convês, costado e fundo), enquanto no modelo de elementos finitos devemos nos preocupar em numerar esses mesmos planos, mais os perfis (fig. 5.68), buscando obter uma diferença de incidência mínima, de modo a diminuir o tempo de processamento. Pode-se avaliar a grande diferença de tempo para a preparação das duas topologias.

Como já visto, o modelo viga + placa está loca

lizado entre a idealização da "estrutura tipicamente naval" por um modelo formado de vigas e um modelo total de elementos finitos. Em alguns casos particulares, pode-se usar o desenvolvido neste trabalho para a confecção de modelos ainda mais simples, como por exemplo:

- a) modelo formado de vigas excêntricas e elementos finitos com comportamento único de membrana no chapeamento. Tal idealização pode ser utilizada tanto quando não haja carga de pressão no chapeamento, ou quando as "hipóteses sobre a distribuição do carregamento" sejam aceitáveis, e neste caso tais cargas são diretamente aplicadas sobre as vigas excêntricas.

O modelo tem a vantagem de ser mais econômico no processamento, pois enquanto aqui os elementos finitos de membrana tem dois deslocamentos por nó, no modelo viga + placa os elementos do chapeamento possuem cinco. A formação da matriz rigidez dos elementos de membrana é muito mais "rápida", que a dos elementos de placa em flexão.

A desvantagem estaria em não termos o resultado das tensões de flexão do próprio chapeamento;

- b) se em adição ao acima exposto, pudermos ainda aceitar as limitações envolvidas na escolha da largura efetiva, utilizamos um modelo formado de vigas simples (perfil + chapa colaborante) e elementos de membrana. Em relação à modelagem por estrutura reticulada simples temos a vantagem de não "cortar" o chapeamento, mantendo a "ligação por cisalhamento" entre duas cavernas consecutivas.

De modo a conseguir-se um maior refinamento do modelo viga + placa, algumas "ferramentas" podem ser incorporadas. Como exemplo temos:

- a) desenvolvimento de um método para determinação de um "momento de inércia à torção fictício", de modo a levar em conta os problemas de deformabilidade da secção reta da barra, como mostrado no teste 5.4;
- b) implantação no modelo de elementos infinitamente rígidos, de modo a levar em conta o efeito mostrado no teste 5.5, ou ainda, utilizáveis na idealização de ligações entre vigas (como exemplo, vemos na fig. 6.1, a modelagem de borboletas através de elementos rígidos);

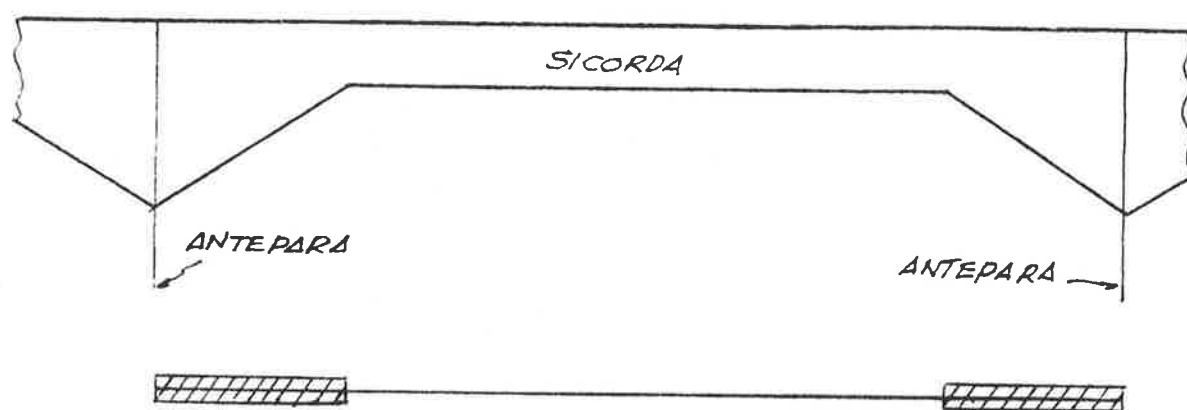


Fig. 6.1 Idealização das borboletas por elementos rígidos.

- c) a completa modelagem da "estrutura tipicamente naval" não poderá, em alguns casos, ser totalmente feita por vigas excêntricas. Na estrutura da fig. 6.1 pode-se querer detalhar o nível de tensões nas borboletas. Neste caso, o mais conveniente seria: fazer uma idealização por elementos finitos em estado plano de tensão destas regiões, mantendo a viga excêntrica pra a sicorda (fig. 6.2).

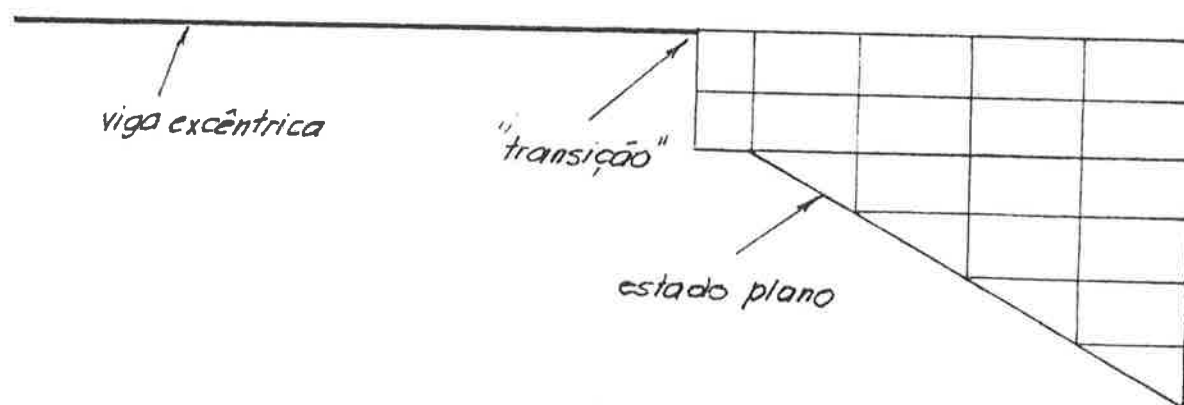


Fig. 6.2 Elementos de Transição

Como pode ser notado na fig. 6.2 é necessário o desenvolvimento de um "elemento de transição" entre a viga excêntrica e os elementos de estado plano. Com a implantação desta técnica, o modelo viga + placa tornar-se-á suficientemente versátil para a aplicação na análise estrutural de chapeamentos reforçados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. WILSON, E.L., BATHE, K.J., PETERSON, F.E. "SAP_{IV} - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems". College of Engineering University of California, 1974.
2. CLOUGH; R.W., FELIPPA, C.A. "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending". Proceedings and Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson, AFB, Ohio, 1968.
3. SCHADE, H.A. "The effective breadth of stiffened plating under bending loads". Transactions, SNAME, vol. 59, 1951.
4. SÁ FREITAS, E., BUELTA, M.A.M. "Notas de aula do curso PNV-523 - Análise estrutural do navio II". Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1976.
5. SCHADE, H.A. "Bending theory of ship bottom structure" SNAME, Transaction, vol. 46, 1938.
6. SCHADE, H.A. "Design curves for cross-stiffened plating". SNAME, Transactions, vol.49, 1941.
7. GERE AND WEAVER "Analysis of framed structures". Van Nostrand Reinhold Company, 1965.
8. SÁ FREITAS; E. "Progressos recentes na análise de estruturas de navios". 4º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, 1972.
9. ZIENKIEWICZ, O.C. "The finite element method in engineering science". McGraw-Hill, London, 2º edition, 1971.

10. GANDOLFO, A.C.B. *"Notas de aula do curso PNV-728-Métodos matriciais aplicados à estrutura"*. Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1976.
11. SÁ FREITAS, E., BUELTA, M.A.M. *"Notas de aula do curso PNV-524-Projeto estrutural do navio II"*. Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1976.
12. BUELTA, M.A.M., CALTABELOTI, O. *"Manual de Engenharia-Implantação de um sistema de programas para análise de estruturas típicas de navios"*. Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1975.
13. SOUZA LIMA; V.M. *"Notas de aula do curso PNV-725-Projeto estrutural avançado do navio"*. Departamento Naval, EPUSP, 1975.
14. GANDOLFO, A.C.B. *"Notas de aula do curso PNV-726-Análise do Sistema estrutural II"*. Departamento Engenharia Naval, EPUSP, 1976.
15. CALTABELOTI, O., SPIGUEL, C.P. *"Configuração atual do sistema de programas para análise, pelo método dos elementos finitos, de estruturas planas, desenvolvido no projeto NDPN-420"*. Seminário I, Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1974.
16. BUELTA, M.A.M. *"Introdução ao modelo viga + placa"*. Seminário, Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1975.
17. BUELTA, M.A.M.; CALTABELOTI, O; BREYNE, R.; NUNES DIAS, C.A.; SÁ FREITAS, E. *"Aplicações da análise estrutural"*. VI Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, SOBENA, 1976.
18. CLOUGH, R.W., TOCHER, J.L. *"Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending"*. Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics". Wright Patterson, AFB, Ohio, 1968.

19. WILSON, E.L.; TAYLOR, R.L.; DOHERTY, W.P., & GHABOUSSI, J.. *"Incompatible displacement models"*. ONR Symposium on Matrix Methods in Structural Mechanics, University of Illinois, Urbana, Illinois, sept.1971.
20. WILSON, E.L.. *"Solid SAP - A static analysis program for three dimensional solid structures"*. Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California, 1971.
21. FUSCO, P.B. *"Critérios de projeto estrutural dos navios de superfície"*. Tese de doutoramento. Escola Politécnica da U.S.P., São Paulo, 1967.
22. SÁ FREITAS, E.; VEIGA, J.P.C.; BUELTA, M.A.M. NUNES DIAS, C.A.; *"Análise da resistência e dimensionamento da estrutura do convés de pouso do porta-aviões Minas Gerais visando a utilização dos aviões S-2E"*. ETCN, Divisão de Estudos e Projetos, ESTUDO Nº 012/76.
23. FISCHER, A.W.; PARK, Y.. *"Design data sheet - DDS 1106-1-Structural design of aircraft handling decks"*. Department of the Navy Bureau of Ships, Washington 25, DC.
24. GANDOLFO, A.C.B.. *"Determinação das tensões em nós dos anéis transversais de grandes navios utilizando modelo misto de estruturas reticuladas e elementos finitos"*. Tese de Livre-Docência. Escola Politécnica da U.S.P., 1976.