

YUKIO SHIGAKI

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE SÍNTESE DOS MODOS COMPONENTES

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Mestre em Engenharia.

São Paulo

1993

YUKIO SHIGAKI

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE SÍNTESE DOS MODOS COMPONENTES

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Naval

Orientador:  
Prof. Dr. Oscar Brito Augusto

São Paulo  
1993

**DEDALUS - Acervo - EPMN**



31600009949

*Aos meus pais.*

AGRADECIMENTOS

Aos professores Oscar Brito Augusto e Carlos Alberto Nunes Dias pelas diretrizes seguras e permanente incentivo.

Aos meus amigos que colaboraram na execução deste trabalho.

À Da. Josefa Uratsuka e à Clarice pelo ótimo trabalho de bibliografia.

### RESUMO

No presente trabalho apresentamos alguns métodos existentes de Síntese de Modos Componentes.

São métodos utilizados em análise dinâmica de estruturas de grande número de graus-de-liberdade ou de formas geométricas complexas, quando analisadas pela técnica de elementos finitos.

Apresentamos o desenvolvimento matemático e procuramos explicitar vantagens e desvantagens de cada método, além de resolvermos um exemplo simples de cada um deles.

Atemo-nos na determinação dos modos e frequências naturais de vibração de estruturas e desprezamos o amortecimento.

Ao final implementamos um dos métodos no microcomputador e verificamos a sua precisão.

Concluimos que estes métodos são uma ferramenta poderosa na análise dinâmica de estruturas pela sua precisão e versatilidade.

ABSTRACT

In this work, some Component Mode Synthesis Methods are presented.

They are methods employed in the dynamic analysis of large structures and/or structures with complex shapes, in a finite element analysis.

Mathematical development and advantages/disadvantages of each method are described and one example is solved for each one.

This study is limited to the determination of natural mode shapes and frequencies of structures. One of the methods is programmed in a microcomputer and its precision is verified.

It is concluded that these methods are a powerful design tool in the dynamic analysis for their precision and versatility.

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	ii
ABSTRACT.....	iii
SUMÁRIO.....	iv
LISTA DE FIGURAS E TABELAS.....	vii
NOTAÇÃO, NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA.....	ix
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Justificativa do trabalho.....	1
1.2 - Importância do estudo.....	1
1.3 - A respeito dos métodos de Síntese dos Modos Componentes.....	2
CAPÍTULO 2 - MÉTODOS DE SÍNTESE DOS MODOS COMPONENTES	
2.1 - Introdução.....	8
2.2 - Técnica de Subestruturação Estática.....	8
2.2.1 - Exemplo manual.....	11
2.3 - Método da Síntese dos Modos Componentes.....	18
2.3.1 - Introdução.....	18
2.3.2 - Método de Hurty.....	18
2.3.3 - Método de Craig-Bampton.....	28
2.3.3.1 - Para componentes sem grau-de-liberdade de corpo-rígido.....	28
2.3.3.2 - Descrição do método.....	30
2.3.3.3 - Para componentes com grau-de-liberdade de corpo-rígido.....	31
2.3.3.4 - Sistematização do método.....	35
2.3.3.5 - Exemplo manual.....	39

---

2.4 - Métodos de Modos Componentes Livre-livres.....	48
2.4.1 - Introdução.....	48
2.4.2 - Método de Goldman.....	49
2.4.2.1 - Exemplo manual.....	55
2.4.3 - Método de Craig-Chang.....	61
2.4.3.1 - Introdução.....	61
2.4.3.2 - Definição dos Modos de Ligação Residuais....	61
2.4.3.3 - Descrição do método.....	63
2.4.3.4 - Exemplo manual.....	72
2.5 - Método da Substituição por Modos Componentes.....	79
2.5.1 - Introdução.....	79
2.5.2 - Propriedades de massa e de rigidez reduzidas... 81	
2.5.3 - Modos-componentes Usando Carga de Inércia e Rigidez	
Interfaciais.....	83
2.5.4 - Modos do Sistema Utilizando Modos-tramos de	
Componentes Restringidos.....	86
2.5.5 - Modos do Sistema Utilizando Modos-componentes	
Livre-livres.....	95
2.5.6 - Diagrama de fluxos.....	101
2.5.7 - Exemplo manual.....	106
2.6 - <i>Branch Mode Analysis</i> .....	113
2.6.1 - Escolha dos tramos.....	113
2.6.2 - Desenvolvimento do método.....	119
2.6.3 - Exemplo manual.....	123

CAPÍTULO 3 - PROGRAMA

3.1 - Solução do exemplo sem subestruturação.....	126
3.2 - Solução com subestruturação (método de Craig-Bampton).....	127
3.3 - Comparação dos resultados.....	128
3.4 - Conclusão.....	130
RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ADICIONAIS.....	136
APÊNDICE.....	140
(INSTRUÇÕES E LISTAGEM DO PROGRAMA)	

## LISTA DE FIGURAS E DE TABELAS

## Figuras:

Número	Descrição	Página
2.2.1	Exemplo de estrutura global e subestrutura.....	9
2.2.2	Viga bi-engastada e sua subdivisão.....	11
2.2.3	Elemento de viga e graus-de-liberdade.....	11
2.2.4	Numeração dos graus-de-liberdade da subestrutura 1....	12
2.3.2.a	Superposição dos três tipos de modos.....	20
2.3.3.1	Sistema massa-mola bi-engastada.....	39
2.3.3.2	Subestrutura 1.....	41
2.3.3.a	Sistema original: pórtico plano.....	47
2.3.3.b	Modelo de elemento finito com 1 elemento entre os nós.	47
2.3.3.c	Modelo melhorado com a inclusão de modos.....	47
2.4.2.1	Sistema massa-mola e subdivisão em A e B.....	56
2.4.2.2	Subestrutura A.....	57
2.4.3.1	Alguns modos utilizados no método de Craig-Chang.....	66
2.4.3.2	Sistema massa-mola bi-engastada.....	73
2.4.3.3	Subestruturas.....	74
2.5.1	Componentes.....	81
2.5.2	Interface entre o tramo e o corpo principal.....	86
2.5.7.1	Sistema massa-mola bi-engastada.....	106
2.5.7.2	Subestrutura $\alpha$ .....	107
2.5.7.3	Subestrutura $\beta$ .....	107
2.5.7.4	Configuração do tramo.....	108
2.6.1	Representação dos tramos B e C.....	114
2.6.2	Duas subestruturas.....	114
2.6.3	Caso $\alpha$ para dois componentes livre-livres.....	115
2.6.4	Caso $\beta$ para dois componentes livre-livres.....	115
2.6.5	Caso especial para dois componentes livre-livres.....	116
2.6.6	Sistema de dois componentes fixo-fixos.....	116

---

Número	Descrição	Página
2.6.7	Sistema de dois componentes fixo-fixos - errada.....	116
2.6.8	Sistema de dois componentes fixo-fixos - correta.....	117
2.6.9	Sistema de eixos fixo-fixos.....	117
2.6.10	Sistema subdividido em três tramos.....	117
2.6.11	Sistema fixo-livre multi-componente.....	118
2.6.12	Matriz modal do sistema.....	118
2.6.13	Sistema massa-mola com dois graus-de-liberdade.....	123
2.6.14	Subdivisão.....	123
2.6.15	Tramos escolhidos.....	124
3.1	Sistema massa-mola bi-engastada.....	126
3.2	Subdivisão do sistema.....	127

## Tabelas:

Número	Descrição	Página
3.1	Comparação dos resultados do programa.....	128
Ap.1	Exemplo do programa.....	147

## NOTAÇÃO, NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA

*Notação*

De modo geral reservaremos letras maiúsculas do alfabeto português ou grego para a designação de matrizes e vetores, ficando as letras minúsculas para escalares. No entanto, em alguns itens, onde o não cumprimento dessa regra seja irrelevante para um perfeito entendimento do texto, usaremos, indistintamente, letras maiúsculas e minúsculas na designação de escalares.

Sempre que dois ou mais entes possuírem significados correlatos procurar-se-á adotar a mesma letra em suas designações, diferenciando-as pelo acréscimo de um caracter gráfico especial (circunflexo, asterístico, ponto, etc...).

A indicação do cálculo de determinante de matrizes será feita pelo acréscimo do prefixo *det*, quando se fizer referência ao nome, ou duas barras (cercando os elementos), quando se fizer referência à matriz por seus elementos.

Quando se fizer referência a matrizes ou vetores pelos elementos, estes virão cercados por colchetes ou chaves, respectivamente.

*Nomenclatura*

Os nomes serão escolhidos de forma que se possa, rapidamente, identificar o assunto nas referências bibliográficas, ou seja, par que o presente trabalho e suas referências bibliográficas tenham consistência de nomenclaturas procuramos, na medida do possível, não alterar a essência da simbologia original. Como consequência disso grande parte dos simbolos aqui utilizados encontram justificativa quando considerados seus significados na língua inglesa.

*Simbologia*

$n$	número de graus-de-liberdade;		
$t$	tempo;		
$U(t)$	vetor de deslocamentos nodais. $i=1, \dots, n;$	Elementos:	$u_i(t),$
$\dot{U}(t)$	vetor de velocidades nodais. $i=1, \dots, n;$	Elementos:	$\dot{u}_i(t),$
$\ddot{U}(t)$	vetor de acelerações nodais. $i=1, \dots, n;$	Elementos:	$\ddot{u}_i(t),$
$F, P$	vetores de forças externas;		
$W$	trabalho virtual;		
$U$	energia interna;		
$T$	energia cinética;		
$V$	energia potencial;		
$M$	matriz de massa;		
$C$	matriz de amortecimento;		
$K$	matriz de rigidez;		
$G$	matriz de flexibilidade;		
$\Phi$	matriz de autovalores;		
$k$	índice do número de modos retidos;		
$\Lambda$	matriz diagonal dos autovalores;		
$\Psi$	matriz dos modos componentes;		
$\psi$	matriz dos modos vinculados (ou corpo-rígido também);		
$(\alpha, b)$	subestruturas $\alpha$ e $b$ ;		
$(\alpha, \beta)$	subestruturas $\alpha$ e $\beta$ ;		
$(A, B)$	subestruturas A e B;		
$(1, 2)$	subestruturas 1 e 2;		
$EA$	rigidez;		
$m$	densidade linear de massa;		
$l, L$	comprimento;		
$C$	constante de normalização;		

Na apresentação dos métodos, ao longo deste trabalho, explicar-se-á também cada símbolo.

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 Justificativa do trabalho

O método da Síntese dos Modos Componentes está sendo correntemente utilizado em projetos estruturais, na análise dinâmica de estruturas por elementos finitos que tenham um grande número de graus-de-liberdade, ou que tenham formas complexas.

Existem atualmente uma série de métodos diferentes, cada uma com características próprias, e pouco há escrito em termos de unidade e de esclarecimentos.

Tendo visto os motivos acima, entendemos ser interessante fazer uma coletânea desses métodos, analisar a teoria e posteriormente torná-los práticos e para que possam ser corretamente utilizados, servindo de guia.

Trata-se de um trabalho inicial para servir de base em futuros estudos em Síntese dos Modos Componentes.

## 1.2 Importância do estudo dos Métodos de Síntese dos Modos Componentes

Estruturas navais, por sua própria natureza, estão sujeitas às mais diversas fontes de excitação internas e externas, tais como: motores, geradores, hélices, ondas, tubulação, eixos, etc... e, assim, ocorrendo vibrações indesejáveis tanto de caráter local como de global.

São vibrações que podem se manifestar na forma de ruídos ou acelerações desagradáveis à tripulação, como também dano por fadiga a longo prazo nas estruturas.

É interessante, ainda na fase de projeto, evitar tais problemas, pois, o custo final se minimizará, diminuindo os

efeitos indesejáveis.

Nesse sentido, o Método dos Elementos Finitos tem sido uma ferramenta muito útil na análise de estruturas projetadas. Alguns exemplos: modelo espacial de viga navio em caso de ressonância a altas frequências [DIAS 1978], determinação de tensões secundárias em painéis estruturais, cavernas e em regiões localizadas tais como descontinuidades [BULSON et al. 1983], modelo completo do casco de uma lancha patrulha [PURCELL et al. 1988].

Em certos casos pode-se requerer uma análise dinâmica que resulte num número elevado de graus-de-liberdade, seja pelas dimensões da estrutura, seja pela minuciosidade necessária, e acontecer do estudo se tornar inviável devido a limitações do programa ou do *hardware*.

Foi com esta finalidade principal, de tornar viáveis tais situações, que surgiu o Método da Síntese dos Modos Componentes - *Component Mode Synthesis* - CMS (também chamado de Síntese Modal).

Graças a este método pode-se reduzir drasticamente a capacidade de memória requerida e o tempo de processamento, mantendo um bom nível de precisão (ver referências [BOGERT 1989] e [AUGUSTO 1986]).

Assim, neste trabalho procuramos apresentar os métodos mais utilizados de CMS, seu desenvolvimento matemático, vantagens e desvantagens, servindo de guia para uma posterior implementação.

### 1.3 A respeito dos Métodos da Síntese dos Modos Componentes

O método da Síntese dos Modos Componentes foi pioneiramente desenvolvido por Hurty [HURTY 1960] e por Gladwell

[GLADWELL 1964] na década de 60, e procurava aplicar os conceitos de Subestruturação para a análise dinâmica de estruturas com grande número de graus-de-liberdade ou de formas muito complexas, de modo que no primeiro caso poder-se-ia reduzir o número de graus-de-liberdade, permitindo que tais estruturas fossem analisadas em computadores de capacidade de memória limitada; e no segundo caso, além da vantagem de se utilizar menor quantidade de memória, poder-se-ia sistematizar uma divisão racional, a fim de se facilitar a visualização e a análise dos resultados da estrutura.

É interessante citarmos que frequentemente em grandes projetos ocorre a participação de várias diferentes empresas, cada uma encarregando-se de uma parte isolada, onde o método da Síntese dos Modos Componentes pode ser utilizado para determinar modos e frequências naturais da estrutura como um todo, e, em caso de resultado indesejado pode-se modificar apenas uma das subestruturas em seguida uni-las novamente ao restante verificando o novo comportamento. Caso a estrutura fosse modelada inteiramente através de Elementos Finitos, sem subestruturação, a modificação de apenas uma pequena parte exigiria analisar toda a estrutura novamente. Podemos citar também a possibilidade de se empregar dados experimentais dos componentes que corroborem junto com a teoria a fim de se obter propriedades mais precisas (tais como frequências e modos de vibrar).

Ainda com relação aos grandes projetos, pode ocorrer de suas partes serem desenvolvidas em diferentes épocas e o Método da Síntese dos Modos Componentes pode ser utilizado na integração dessas partes.

Além disso, em estruturas que têm módulos repetidos (tais como cavernas de navios ou os andares de um prédio), pode-se analisar apenas um dos módulos e, então, na síntese,

repeti-los.

Um objetivo fundamental da Síntese dos Modos Componentes é o de se obter um problema computacional de menor ordem mantendo o requisito da precisão. Um segundo aspecto da síntese é que ao se minimizar o número de graus-de-liberdade requeridos para se representar cada componente, a aproximação pela síntese reduz a quantidade de informações a serem trocadas pelas diferentes organizações encarregadas dos componentes.

Até então era conhecida a técnica da subestruturação para estruturas estáticas. Esta técnica consistia na subdivisão da estrutura em componentes ou subestruturas bem delimitadas, que eram analisadas separadamente, uma a uma, mantendo-se as suas interfaces fixas e aplicando-se a carga externa. Por se tratar de análise estática, a junção destas partes formando o todo se processa de forma simples. Pela Condensação Estática (vide cap. 2.2) podemos representar a subestrutura em função apenas dos graus-de-liberdade fronteiros, prescindindo-se dos graus-de-liberdade internos à subestrutura, permitindo assim uma redução na matriz de rigidez, e, portanto, na redução da memória necessária para armazená-la (chama-se esta ``nova`` subestrutura de "super-elemento", fazendo um paralelo com um elemento finito).

Na análise dinâmica, esta junção não se processa de forma trivial, pois, existem forças de inércia e de amortecimento.

Em breves palavras, o Método da Síntese dos Modos Componentes consiste em se subdividir a estrutura em subestruturas e estudar cada uma destas separadamente. Tendo determinado as equações de movimento de cada uma delas, refaz-se a união destas impondo determinadas restrições e resultando, por fim, nas equações de movimento da estrutura original. De uma maneira geral, podemos formalizar a seguinte

sequência de operações:

1. Divisão da estrutura em duas ou mais subestruturas;
2. Cálculo dos modos-componentes das subestruturas individuais;
3. Síntese a partir de uns poucos primeiros modos das subestruturas para obter e resolver um problema de autovalor de um novo tamanho reduzido (transformado);
4. Retrotransformação dessas propriedades de autovalores calculados para obter as do sistema original.

O movimento de cada subestrutura é descrito em termos dos ``modos-componentes``, isto é, como uma combinação linear destes modos multiplicados por coordenadas generalizadas dependentes do tempo (hipótese de Rayleigh-Ritz). Nesta descrição, ao se tomar um número de modos-componentes menor que o número de graus-de-liberdade total da estrutura, resulta na redução da dimensão das matrizes de massa, rigidez e de amortecimento.

Numa análise dinâmica simples de uma estrutura, a matriz de rigidez obtida pelo método padrão do deslocamento unitário é suficiente para se ter resultados razoáveis. Ao se exigir, no entanto, uma maior sofisticação no modelo matemático, pode-se fazê-lo pelo aumento ou do número de nós na estrutura ou fazendo-se algumas hipóteses a respeito do comportamento dinâmico interno dos componentes e adicionando-as ao modelo pela inclusão destas características internas. Isto significa que se, por exemplo, vigas uniformes conectam-se para se formar a estrutura, então os modos-componentes derivados teoricamente para vigas contínuas poderiam ser utilizados para descrever o comportamento dinâmico de porções internas dessa estrutura. Verifica-se que a adição de, por exemplo, três modos-componentes de uma viga contínua resultam numa

melhor convergência do que a adição de um nó com três graus-de-liberdade no centro da mesma.

Sabemos, além do mais, que o tempo de processamento numa análise de vibração aumenta mais do que linearmente conforme o aumento do número de graus-de-liberdade (de forma quadrática ou cúbica dependendo do método de extração dos autovalores e do tipo da estrutura). Assim, se uma estrutura for subdividida em  $N$  partes, as  $N$  análises dos modos-componentes separados consomem menos tempo do que a análise de toda a estrutura sem divisões. Para se manter uma boa precisão é essencial que os primeiros modos calculados de cada componente sejam bastante precisos.

Como introdução apresentaremos inicialmente a técnica da subestruturação estática a fim de obtermos uma familiarização não só dos termos utilizados mas para também servir de modelo para procurarmos enxergar a representação física de cada passagem matemática e imaginar, se possível, o que veio primeiro: a intuição física, o puro desenvolvimento matemático, ou os dois de forma concomitante. Apresentamos também um exemplo simples de aplicação.

Ainda no capítulo 2 apresentaremos os diversos métodos de Síntese dos Modos Componentes, a começar pelo Método de Hurty. A seguir estudamos o Método Craig-Bampton, que se trata do método de Hurty melhorado.

A presença de movimentos de corpo-rígido na subestrutura faz aparecer alguns modos-componentes diferentes, e é estudado num sub-ítem à parté para o método de Craig-Bampton.

A seguir apresentamos alguns métodos que têm a particularidade de terem seus modos-componentes calculados na ausência de fixação, isto é, tendo livres as interfaces entre as subestruturas. Daí o nome de Modos Componentes Livre-livres (*Free-free Component Modes*). Estudamos os métodos de Goldman e Craig-Chang.

Finalmente apresentamos os métodos que não se encaixam nas duas categorias acima citadas e que podem ser chamados de Método dos Modos Componentes Híbridos pois misturam tanto interfaces fixas como livres de restrição. Entre eles estão o Método da Substituição por Modos Componentes e a Análise por Modos-Tramos (*Branch Mode Analysis*).

No capítulo 3 apresentamos um programa de computador na qual implementamos o Método de Craig-Bampton, e uma comparação onde analisamos os resultados com e sem Síntese dos Modos Componentes e tiramos algumas conclusões. A listagem e o modo de utilizá-lo estão no Apêndice.

Vamos nos limitar ao cálculo de modos e frequências naturais de vibração das estruturas, que são propriedades essenciais numa análise dinâmica (ressonância, resposta por superposição modal). Além disso estudamos os métodos com apenas duas subestruturas pois uma vez bem entendido para esse caso particular, fica fácil generalizá-los.

Ao longo da apresentação destes métodos procuraremos inter-relacioná-los, fazendo comparações e em alguns casos apresentando exemplos para esclarecer o "colocar em prática" da teoria.

## CAPÍTULO 2 - MÉTODOS DE SÍNTESE DOS MODOS COMPONENTES

### 2.1 Introdução

Apresentamos a seguir alguns dos métodos de Síntese dos Modos Componentes existentes.

Quanto à justificativa da seleção dos métodos aqui apresentados, podemos dizer que procuramos escolher os métodos mais citados em *handbooks* [KARDESTUNCER; NORRIE 1987], em livros e *papers* técnicos.

Infelizmente não é possível analisar todos os métodos hoje existentes tendo em vista a sua enorme variedade. Ao final deste trabalho citamos outros métodos que não os estudados aqui nas Referências Bibliográficas Adicionais.

### 2.2 Técnica da Subestruturação Estática

O método de subestruturação para uma análise estrutural estática é baseada na subdivisão de uma estrutura de grande número de graus de liberdade em partes menores que são analisadas separadamente a fim de obtermos as relações entre forças e deslocamentos nas suas interfaces.

Uma vez determinadas as novas matrizes de rigidez de cada subestrutura, que estão em função apenas dos graus de liberdade de fronteira, refazemos a montagem, resultando numa matriz do sistema de ordem igual à soma desses graus-de-liberdade, e, portanto, de ordem menor à original, que contava também com os graus de liberdade internos.

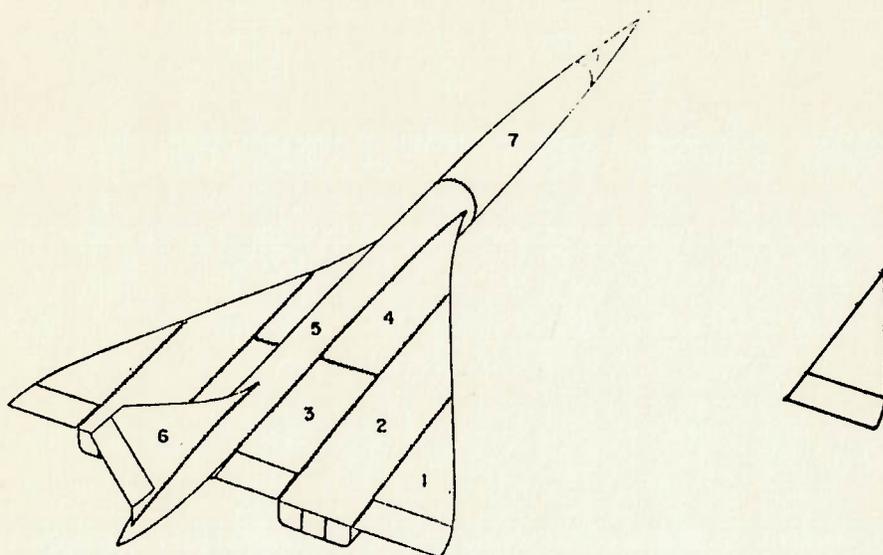


figura 2.2.1 - Exemplo de estrutura global e uma típica subestrutura.

Para a subestrutura  $j$ :

Vamos particionar a equação de equilíbrio da subestrutura de forma que os graus-de-liberdade da interface fiquem na parte inferior do vetor de deslocamentos  $U$ :

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ie} \\ k_{ei} & k_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde,

- o índice  $i$  representa os graus de liberdade interiores, e
- o índice  $e$  representa os graus de liberdade das interfaces.

Expandindo a equação na forma particionada da primeira linha da eq. (1), isolando  $U_i$  e substituindo o resultado na equação da segunda linha, chegamos às seguintes formas:



## 2.2.1 Exemplo manual

Desejamos determinar a flecha da seguinte viga bi-engastada submetida a uma carga concentrada  $P_0$  no centro:

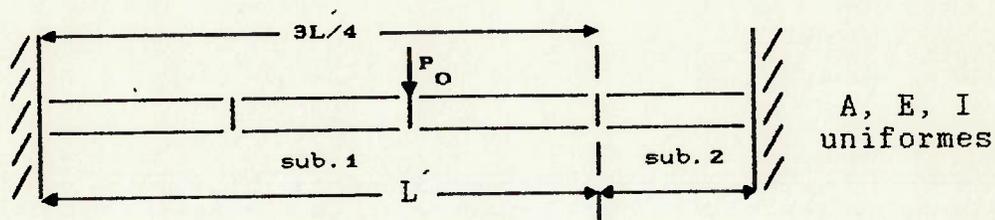


fig.2.2.2 - Viga bi-engastada e sua subdivisão

Conforme a figura 2.2.2 subdividimos a estrutura em duas subestruturas desiguais.

Matriz de rigidez:

\* Um elemento:

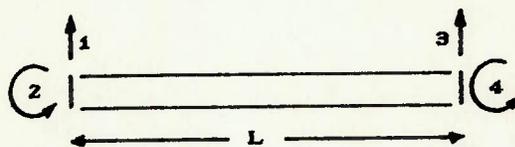


fig. 2.2.3 - Elemento de viga e seus graus-de-liberdade

$$K = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$Ku = p \quad (8)$$

\* Subestrutura 1:

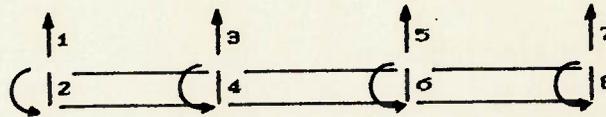


fig. 2.2.4 - Numeração dos graus-de-liberdade da subestrutura 1

$$K^1 = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3L & 12 & 0 & -6 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & L^2 & 0 & 4L^2 & -3L & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3L & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$



$$* \begin{matrix} U_{i1} \\ \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ -u_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} \\ U_{e1} \end{matrix} = \begin{matrix} P_{i1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_{e1} \end{matrix} \quad (11)$$

Chamando  $L = 1$ , teremos:

$$k_{ii1}^{-1} = \frac{1}{2EI} \begin{bmatrix} 0.197531 & 0.148148 & 0.135802 & -0.185185 \\ 0.148148 & 0.444444 & 0.185185 & -0.222222 \\ 0.135802 & 0.185185 & 0.197531 & -0.148148 \\ -0.185185 & -0.222222 & -0.148148 & 0.444444 \end{bmatrix}$$

$$k_{ei1} k_{ii1}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.740742 & 0.444444 & -0.259257 & 0.444444 \\ -0.444445 & 0.000000 & -0.222221 & 0.333333 \\ -0.259257 & -0.444444 & -0.740743 & -0.444444 \\ 0.222221 & 0.333333 & 0.444445 & 0.000000 \end{bmatrix}$$

\*Carga equivalente:

$$\bar{P}_{e1} = P_{e1} - k_{ei1} k_{ii1}^{-1} P_{i1}$$

$P_{e1} = 0$ , pois não há cargas externas nas bordas;

Assim:

$$\bar{P}_{e1} = \begin{bmatrix} -0.259257 \\ -0.222221 \\ -0.740743 \\ 0.444445 \end{bmatrix} P_0$$

\* Matriz de rigidez equivalente:

$$k_{e1} = -k_{ei1} k_{ii1}^{-1} k_{ie1} + k_{ee1}$$

$$k_{e1} = 2EI \begin{bmatrix} 0.222222 & 0.333333 & -0.222222 & 0.333333 \\ 0.333333 & 0.666667 & -0.333333 & 0.333333 \\ -0.222222 & -0.333333 & 0.222222 & -0.333333 \\ 0.333333 & 0.333333 & -0.333333 & 0.666667 \end{bmatrix}$$

Assim, a nova equação de movimento equivalente é:

$$2EI \begin{bmatrix} 0.222222 & 0.333333 & -0.222222 & 0.333333 \\ 0.333333 & 0.666667 & -0.333333 & 0.333333 \\ -0.222222 & -0.333333 & 0.222222 & -0.333333 \\ 0.333333 & 0.333333 & -0.333333 & 0.666667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.258257 \\ -0.222221 \\ -0.740743 \\ 0.444445 \end{bmatrix} P_0$$

\* Subestrutura 2:

Carga externa nula;

Equação de equilíbrio igual ao de um elemento, conforme as equações (6), (7) e (8).

\* Acoplamento das duas subestruturas:

$$2EI \begin{bmatrix} 0.222222 & 0.333333 & -0.222222 & 0.333333 & 0.000000 \\ 0.333333 & 0.666666 & -0.333333 & 0.333333 & 0.000000 \\ -0.222222 & -0.333333 & 6.222222 & 2.666667 & -6.000000 \\ 0.333333 & 0.333333 & 2.666667 & 2.666667 & -3.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -6.000000 & -3.000000 & 6.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 3.000000 & 1.000000 & -3.000000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 3.000000 \\ 1.000000 \\ -3.000000 \\ 2.000000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.259257 \\ -0.222221 \\ -0.740743 \\ 0.444445 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{bmatrix} P_o$$

Como a estrutura é bi-engastada temos que:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

E ao resolvermos o sistema acima para  $u_7$  e  $u_8$  obtemos:

$$u_7 = -0.333333 P_o/2EI$$

$$u_8 = 0.500000 P_o/2EI$$

Para determinar a flecha  $u_5$  recorreremos à eq. (2) da subestrutura 1, e chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.333333 \\ -0.500000 \\ -0.666667 \\ 0.000000 \end{Bmatrix} P_o/2EI$$

Estes resultados conferem com a realidade. Observe que se fôssemos resolver este problema sem subestruturação teríamos um sistema linear de ordem 10 ao invés de 6.

\* Observações:

- Caso houver carga externa distribuída, deve-se "concentrá-la" nos nós da estrutura;
- Deve-se ter cuidado para não fazer confusão nas dimensões das subestruturas e do sistema;
- Nas permutações das linhas e colunas da matriz de rigidez deve-se procurar manter sempre a simetria.

## 2.3 Método da Síntese dos Modos Componentes

### 2.3.1 Introdução

Apresentaremos brevemente o método pioneiro de Hurty. A seguir apresentaremos o método de Craig-Bampton que envolve simplificações no método de Hurty sem detrimento da precisão (obtem-se os mesmos resultados que Hurty).

### 2.3.2 Método de Hurty

O método de Hurty envolve uma aproximação na qual os deslocamentos das subestruturas ou componentes são definidos em termos das coordenadas generalizadas que são relacionadas com grupos específicos de funções ou modos de deslocamento normalizados.

É aplicável a estruturas complexas redundantemente conectadas e é um dos métodos mais simples de Síntese Modal. Possui boa convergência, mas, por outro lado quando houver um grande número de coordenadas de interface, também será grande a ordem do problema de autovalor.

Considera três categorias para esses modos, a saber:

1. Deslocamentos de corpo-rígido, onde a subestrutura é deslocada sem deformação (pode haver até 6 deslocamentos, sendo menos que 6 se houver alguma restrição ao movimento da subestrutura). São chamadas de  $u_j^r(x,y,z,t)$ , para a subestrutura  $j$ . Estes modos garantem o movimento de qualquer ponto  $P$  da subestrutura de se mover com movimento de

corpo-rígido.

2. Modos vinculados (*constraint modes*) que existirão somente no caso do sistema possuir vínculos indeterminados (ou seja, no caso de não se saber quantificar exatamente a intensidade da restrição, que pode ser um meio termo entre fixação de engaste e livre) que surgem do fato da subestrutura estar ligada a outras adjacentes que também estão em movimento. Estes modos são definidos pela imposição de um deslocamento unitário sobre cada vínculo redundante, uma por vez, mantendo todas os outros vínculos fixos. São chamadas de  $u_j^c(x,y,z,t)$ . Estes modos representam um deslocamento resultante do movimento das restrições redundantes sobre o movimento de corpo-rígido apresentado acima, e provê o deslocamento arbitrário de todos os vínculos móveis.

3. A terceira categoria inclui modos que definem deslocamentos sobre o anterior, o de vínculos. Estes são os modos naturais normalizados de vibração elástica da subestrutura com todas os vínculos redundantes presos. Estes modos provêem o deslocamento de qualquer ponto P na subestrutura em relação aos deslocamentos vinculados. São chamadas de  $u_j^n(x,y,z,t)$ . Para melhor visualização observe a figura 2.3.2a.

- vetores 1 a 6: conjunto de vínculos estaticamente conhecidos;
- vetores i, j, k: vínculos redundantes.

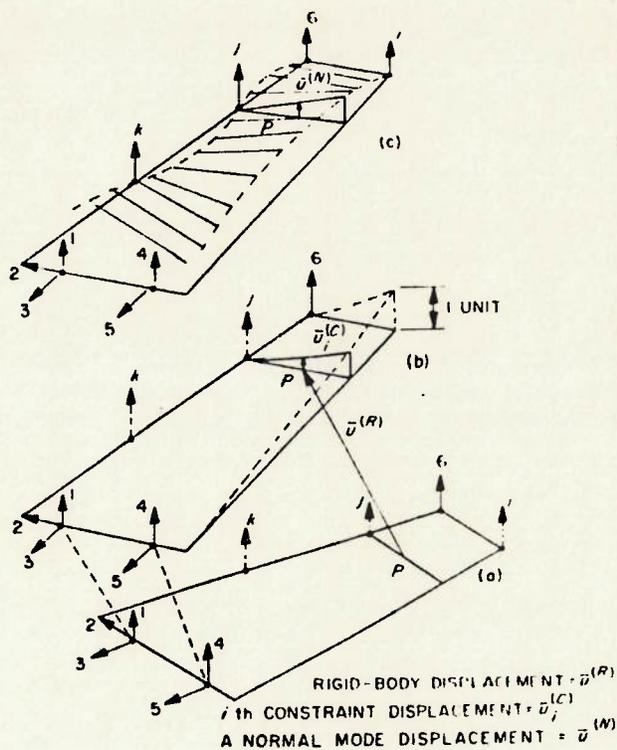


Fig. 2.3.2a

$$u_j(x, y, z, t) = u_j^R(x, y, z, t) + u_j^C(x, y, z, t) + u_j^N(x, y, z, t) \quad (1)$$

Superposição dos três tipos de deslocamentos

Uma vez derivadas as equações de movimento para cada subestrutura individual separadamente, procedemos ao acoplamento dessas através das restrições que surgem da interação de forças entre as várias subestruturas.

É conveniente representar as três categorias de

deslocamentos como uma série de funções dependentes do espaço multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo:

$$u_j^r = \Phi_j^r(x, y, z) p_j^r(t)$$

$$u_j^c = \Phi_j^c(x, y, z) p_j^c(t) \quad (2.1, 2, 3)$$

$$u_j^n = \Phi_j^n(x, y, z) p_j^n(t)$$

onde:

$\Phi_j^{r, c, n}$  são matrizes retangulares dos modos-componentes da subestrutura j

$p_j^{r, c, n}$  são vetores das coordenadas generalizadas da subestrutura j

O número máximo de colunas de  $\Phi_j^r$  é de no máximo 6, pois existem no máximo 6 movimentos de corpo-rígido.  $\Phi_j^c$  tem o número de colunas igual ao número de vínculos redundantes e  $\Phi_j^n$  tem o número de modos naturais menor ou igual ao número de graus-de-liberdade da subestrutura.

Reunindo as matrizes dos modos numa única matriz  $\Phi_j$  e os vetores das coordenadas generalizadas em  $p_j$ , temos:

$$\Phi_j = [\Phi_j^r \quad \Phi_j^c \quad \Phi_j^n] \quad (3)$$

$$p_j = \begin{Bmatrix} p_j^r \\ p_j^c \\ p_j^n \end{Bmatrix} = [(p_j^r)^T \ (p_j^c)^T \ (p_j^n)^T]^T \quad (4)$$

Podemos resumir as equações (1) e (2.1,2,3) na seguinte forma matricial:

$$u_j = \Phi_j p_j \quad (5)$$

Até o presente momento fizemos a descrição dos modos utilizados no método de Hurty. A partir de agora continuaremos a explicitar o método, mas, com a idéia de que estes passos seguintes são no geral semelhantes em todos os métodos de Síntese Modal.

Também por simplicidade suporemos apenas duas subestruturas.

Suponhamos que as duas subestruturas 1 e 2 estejam no mesmo referencial de coordenada global, de forma que não precisemos utilizar a matriz de transformação de coordenadas.

Sendo assim vamos impôr as restrições de deslocamento e de esforços junto à interface:

$$u_1 = u_2 \quad (6.1,2)$$

$$f_1 = f_2$$

Vamos agora determinar as equações de movimento da estrutura completa utilizando as equações de Lagrange com multiplicadores indeterminados.

$$\begin{aligned} \text{Energia Cinética Total: } T &= \frac{1}{2} \mathbf{p}_1^T \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{p}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p}_2^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{p}_2 \\ &\quad (7.1,2) \\ \text{Energia Potencial Total: } V &= \frac{1}{2} \mathbf{p}_1^T \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{p}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p}_2^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_k &= \Phi_k^T \mathbf{M}_k \Phi_k \\ \bar{\mathbf{K}}_k &= \Phi_k^T \mathbf{K}_k \Phi_k \end{aligned} \quad k=1,2 \quad (8.1,2)$$

Definindo:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (9.1,2,3)$$

podemos reescrever T e V na seguinte forma compacta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{p} \\ V &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (10.1,2)$$

e as equações de restrição podem ser escritas na forma matricial em termos das coordenadas generalizadas p:

$$\mathbf{H} \mathbf{p} = \emptyset \quad (11)$$

Então o lagrangeano para o sistema fica:

$$L = T - V + \alpha^T H p \quad (12.1,2)$$

onde  $\alpha$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange. Para os problemas de vibração livre, forças são exercidas junto às interfaces dos componentes, tal que o trabalho virtual  $\delta W$  desaparece:

$$\delta W = (\delta u_j^1)^T f_j^1 + (\delta u_j^2)^T f_j^2 = (\delta u_j^1)^T (f_j^1 + j_j^2) = 0 \quad (13)$$

onde as equações (6.1,2) foram utilizadas. Assim as equações de Lagrange tomam a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad (14)$$

onde  $z_i$  é  $p_i$  ou  $\alpha_i$ . Combinando as equações (10.1,2), (12.1,2) e (14), obtemos as equações de movimento do sistema:

$$\bar{M} \dot{p}' + \bar{K} p = H^T \alpha \quad (15)$$

Este sistema de equações diferenciais deve ser resolvido levando-se em conta as restrições impostas sobre  $p_k$  pela equação (11). A ordem de (15) é igual ao número de modos utilizados em (3). Como esta equação está escrita em termos de  $p_i$ , contém um certo número de elementos redundantes. Esta redundância é expressa pela equação (11). Se o vetor  $p$  tiver dimensão  $m$  e houver  $c$  restrições, então o número total de coordenadas independentes é  $n = m - c$ , onde  $n$  é o número

total de graus-de-liberdade do modelo do sistema composto. Se  $q$  for o vetor das coordenadas independentes, então a relação entre  $p$  e  $q$  pode ser expressa por:

$$p = S q \quad (16)$$

onde  $S$  é uma matriz de transformação ( $m \times n$ ) que depende das restrições das equações (11). Então a equação (15) é transformada em equações que governam o comportamento de  $q(t)$ ,

$$\hat{M}\dot{q} + \hat{K}q = S^T H^T \alpha \quad (17)$$

onde

$$\hat{M} = S^T \bar{M} S \quad (18)$$

$$\hat{K} = S^T \bar{K} S \quad (19)$$

Para determinar a matriz de transformação  $S$ , particionemos a matriz  $H$ , de ( $c \times m$ ) conforme abaixo:

$$H = [H_1 \ H_2] \quad (20)$$

sendo  $H_1$  de ordem ( $n \times c$ ) e  $H_2$  de ( $c \times c$ ). Assim a equação (11) fica:

$$H_1 q + H_2 p_d = 0 \quad (21)$$

onde  $p_d$  é um vetor de dimensão  $c$  e corresponde às coordenadas dependentes do vetor  $p$ . Assim, uma partição de  $p$  é dado por:

$$p = \begin{Bmatrix} q \\ p_d \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Como os  $p_{di}$  são combinações lineares de  $q_k$ , a matriz  $H_2$  deve ser inversível. Daí,

$$p_d = -H_2^{-1}H_1q \quad (23)$$

$$p = \begin{Bmatrix} q \\ p_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -H_2^{-1}H_1 \end{bmatrix} q \quad (24)$$

e, daqui, a matriz de transformação  $S$  fica:

$$S = \begin{bmatrix} I \\ -H_2^{-1}H_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

E segue-se que  $HS = 0$  e a equação (17) torna-se

$$\hat{M} \dot{q} + \hat{K} q = 0 \quad (26)$$

A equação (26) é o sistema de equações desejado para a vibração livre não amortecida. O problema do autovalor associado é

$$(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) \hat{\Psi} = 0 \quad (27)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural que corresponde ao vetor  $\hat{\Psi}$ . Este autovalor é transformado para obtermos o vetor  $p$  de coordenadas generalizadas original multiplicando-o pela

matriz S:

$$\Psi = S \hat{\Psi} \quad (28)$$

Assim, temos resolvido o problema de autovalor do sistema.

### 2.3.3 Método de Craig-Bampton

Como foi dito na introdução, o método de Craig-Bampton difere pouco do de Hurty. Uma das simplificações que este método faz é o de tratar todas as restrições como restrições de fronteira, sem considerar se é redundante ou determinada. O principal objetivo em se usar esta variação do original é para simplificar o trabalho de programação, pois já não se torna mais necessário a identificação desses dois tipos diferentes de restrições. Essa identificação requer um julgamento da parte do analista e, assim, requer uma função de tomada-de-decisão cuja programação não é trivial.

Inicialmente apresentaremos os modos-componentes. Então sistematizaremos o método e resolveremos um exemplo simples.

#### 2.3.3.1 Para componentes sem grau-de-liberdade de corpo-rígido

##### 1. Modos normais (ou naturais):

Componentes de modos normais podem ser classificados em modos normais de interface fixa, modos normais de interface livre, ou modos de interface híbrida dependendo de que todos, nenhuma ou parte respectivamente das coordenadas de junção (interface) entre as subestruturas sejam restringidas quando os modos normais do componente são obtidos usando um problema de autovalor da forma:

$$(k - w^2 m)\phi = 0 \quad (1)$$

Utilizaremos os modos naturais normalizados em relação à

matriz de massa (e daí o nome "modo normal"), isto é,

$$\Phi_n^T m \Phi_n = I_n \quad \Phi_n^T k \Phi_n = \Lambda = \text{diag}(w_r^2) \quad (2)$$

onde  $\Phi_n$  é uma matriz cujas colunas são os modos normalizados dos componentes. Normalmente a matriz modal (como é chamada  $\Phi_n$ ) terá um número de modos menor que o número máximo, e será por isso chamada de  $\Phi_k$  (k de *kept modes*, ou seja, modos retidos).

## 2. Modos elásticos vinculados (*constraint modes*)

Sejam as coordenadas físicas  $u$  particionadas num conjunto  $C$  na qual os modos vinculados estão definidos, e seja  $V$  o seu complemento. O modo vinculado é aquele definido pela imposição estática de um deslocamento unitário em uma coordenada física do conjunto  $C$ , mantendo deslocamento nulo para seu restante. Assim o conjunto de modos vinculados é definido pela equação:

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{vc} \\ k_{cv} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{vc} \\ I_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{vc} \\ R_{cc} \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $R_{cc}$  é o conjunto de reações nas coordenadas  $C$ . Da linha superior particionada:

$$\Psi_{vc} = [-k_{vv}^{-1} k_{vc}] \quad (4)$$

A matriz dos modos vinculados é, então:

$$\Psi_c = \begin{Bmatrix} \Psi_{vc} \\ I_{cc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{vv}^{-1} k_{vc} \\ I_{cc} \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. Modos de ligação (*attachment modes*)

Seja A um subconjunto de P no qual os modos de ligação estão definidos. Um modo de ligação é aquele definido como a deflexão estática do componente que resulta quando uma força unitária é aplicada em uma coordenada do conjunto A, mantendo as outras coordenadas de A livres de forças. Aqui vamos tratar de componentes que não têm grau-de-liberdade de corpo-rígido. Para um componente restringido, seja W o complemento de A em P. Então o conjunto de modos de ligação  $\Psi_a$  é definido por:

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{va} \\ k_{av} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{va} \\ \Psi_{aa} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{va} \\ I_{aa} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Seja a matriz de flexibilidade  $g = k^{-1}$ . Os modos de ligação para um componente restringido são as colunas da matriz de flexibilidade:

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{va} \\ \Psi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{va} \\ g_{aa} \end{bmatrix} \quad (7)$$

## 2.3.3.2 Descrição do método

O método de Craig-Bampton faz a seguinte aproximação:

$$u = \Phi_k p_k + \Phi_c p_c \quad (8)$$

para cada componente. A equação (8) pode também ser escrita na forma particionada:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ic} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_c \end{Bmatrix} \quad (9)$$

pois os modos normais são modos de interface fixa e  $p_c = u_j$ .

Além disso:

$$\Psi_{ic} = [ -k_{ii}^{-1} k_{ij} ] \quad (10)$$

Deve-se normalizar também os modos vinculados conforme as equações (2).

2.3.3.3 Para componentes com grau-de-liberdade de corpo-rígido

Para o caso de termos componentes com grau-de-liberdade de corpo-rígido, fazemos modificações apenas na definição dos modos-componentes:

#### 1. Modos Normais

Segue a mesma definição para modos sem grau-de-liberdade de corpo-rígido, com a presença de um ou mais modos de corpo-rígido (que têm frequência nula).

#### 2. Modos vinculados (*constraint modes*)

Segue a mesma definição que a dos modos vinculados para componentes com grau-de-liberdade de corpo-rígido, diferindo apenas em que agora devemos restringir alguns destes graus de forma que  $k_{vv}$  seja não-singular. Os modos de corpo rígido definidos a seguir são um caso especial dos modos vinculados.

### 3. Modos de corpo rígido

Embora os modos de corpo rígido possam ser obtidos no processo de solução de um problema de autovalor para modos normais do componente, elas podem também ser como um caso especial de modos vinculados. Se um componente tiver  $N_r$  graus-de-liberdade de corpo-rígido, então um conjunto  $r$  de coordenadas pode ser usada para restringir o componente contra o movimento de corpo-rígido. Os modos de corpo-rígido que correspondem ao conjunto  $R$  são obtidos fazendo-se ( $c = r$ ) na equação (3) e note que não há reação no conjunto  $R$ , isto é,  $R_{rr} = \emptyset$ . Assim, se  $V$  for o complemento de  $R$  em  $P$ , os modos de corpo-rígido são definidos por:

$$\Psi_r = \begin{bmatrix} \Psi_{vr} \\ I_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{vv}^{-1} k_{vr} \\ I_{rr} \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 4. Modos-de-ligação

Da mesma forma como restringimos os  $R$  graus-de-liberdade de corpo-rígido, vamos restringir também aqui. Tomemos um conjunto  $A$  de coordenadas físicas onde aplicaremos as forças unitárias para definir os modos-de-ligação.  $W$  é o complemento de  $(R + A)$  em  $P$ . Então os modos-de-ligação relativos ao conjunto  $R$  da restrição são definidos por:

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{va} & k_{va} \\ k_{av} & k_{aa} & k_{ar} \\ k_{rv} & k_{ra} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{va} \\ \Psi_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{va} \\ I_{aa} \\ R_{ra} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Conforme o item 2.3.3.1, os modos-de-ligação são essencialmente colunas de uma matriz de flexibilidade. Assim,

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{va} \\ \Psi_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{va} \\ g_{aa} \\ 0_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{vv}^{-1} k_{va} (k_{aa} - k_{av} k_{vv}^{-1} k_{va})^{-1} \\ (k_{aa} - k_{av} k_{vv}^{-1} k_{va})^{-1} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Na formulação acima, R pode ser qualquer grupo conveniente, excluídas as coordenadas de A, para restringir o componente contra movimento de corpo-rígido.

#### 5. Modos-de-ligação com Alívio-de-Inércia

Uma forma alternativa de se definir os modos-de-ligação para um componente com grau-de-liberdade de corpo-rígido é o chamado modo-de-ligação com alívio de inércia (*Inertia Relief Attachment Mode*). São obtidos pela aplicação no corpo de um sistema de cargas equilibradas  $f_e$ , que consiste no vetor  $f$  de forças externas equilibrado pelo vetor força ( $m \dot{u}_r$ ) de d'Alembert de corpo-rígido, onde  $u_r$  é o movimento de corpo-rígido devido a  $f$ .

$$f_e = f - m \dot{u}_r \quad (14)$$

Assim,  $u_r$  pode ser escrito como uma combinação linear dos modos de corpo-rígido:

$$u_r = \Psi_r q \quad (15)$$

e a equação diferencial para deslocamentos de corpo-rígido devido a  $f$ :

$$m \dot{u}_r = f \quad (16)$$

derivando duas vezes em relação ao tempo a eq. (15) e substituindo na (16) e multiplicando ambos os lados por  $\Psi_r^T$ :

$$\Psi_r^T m \Psi_r \dot{q}' = \Psi_r^T f \quad (17)$$

Se os modos de corpo-rígido forem normalizados, tal que:

$$\Psi_r^T m \Psi_r = I$$

então a eq. (16) fica:  $I \dot{q}' = \Psi_r^T f \quad (18)$

Substituindo a derivada segunda da eq. (15) em (14):

$$f_e = f - m \Psi_r \dot{q}' \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19):

$$f_e = f - m \Psi_r \Psi_r^T f \quad (20)$$

$$f_e = (I - m \Psi_r \Psi_r^T) f \quad (21)$$

Chamando  $P = (I - m \Psi_r \Psi_r^T)$ , temos

$$f_e = P f \quad (22)$$

A equação que define os modos-de-ligação  $\bar{\Psi}_a$  é obtida da eq. (12), substituindo-se o lado direito pela eq. (22):

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{va} & k_{vr} \\ k_{av} & k_{aa} & k_{ar} \\ k_{rv} & k_{ra} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{va} \\ \bar{\Psi}_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{vv} & P_{va} & P_{vr} \\ P_{av} & P_{aa} & P_{ar} \\ P_{rv} & P_{ra} & P_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{va} \\ I_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Os modos-de-ligação  $\bar{\Psi}_a$  diferem dos modos desejados  $\Psi_a$  de certos deslocamentos de corpo-rígido. Portanto,  $\Psi_a$  pode ser escrito como:

$$\Psi_{\alpha} = \bar{\Psi}_{\alpha} + \Psi_r C_r \quad (24)$$

Para que  $\Psi_{\alpha}$  seja livre das contribuições de corpo-rígido basta que  $\bar{\Psi}_{\alpha}$  seja ortogonal aos modos de corpo-rígido:

$$\Psi_r^T m (\bar{\Psi}_{\alpha} + \Psi_r C_r) = 0 \quad (25)$$

Resolvendo a eq. (25) para  $C_r$ , e substituindo-o em (24), ficaremos com:

$$\Psi_{\alpha} = (I - \Psi_r \Psi_r^T m) \bar{\Psi}_{\alpha} \quad (26)$$

ou, como a matriz entre parenteses é  $P^T$ ,

$$\Psi_{\alpha} = P^T \bar{\Psi}_{\alpha} \quad (27)$$

Os modos-de-ligação definidos pela (27) são chamados de modos-de-ligação com alívio-de-inércia. A sua utilidade é que aumenta a convergência no método de aceleração modal para obtenção de resposta.

2.3.3.4 Sistematização do Método de Craig-Bampton (ver Referência [WEAVER; JOHNSTON 1987])

Seja a subestrutura 1:

- i: nós do interior da subestrutura;
- j: nós do contorno da subestrutura;
- D: vetor deslocamento generalizado;
- A: vetor de carregamento externo.

$$m_l \ddot{D}_l + k_l D_l = A_l \quad (28)$$

Particionando:

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{D}_i \\ \ddot{D}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Para nós restringidos e carga nula:

$$(k_{ii_l} - \omega_{ii_l}^2 m_{ii_l}) \Phi_{ii_l} = 0 \quad (30)$$

Normalizando os vetores nodais com respeito à submatriz de massa  $m_{ii_l}$ :

$$D_{ii_l} = \Phi_{n_l} D_{n_l} \quad (31)$$

Para deslocamentos do contorno não nulos (ocorrendo estaticamente), temos:

$$D_{ii_l} = \Phi_{n_l} D_{n_l} + T_{ij_l} D_{j_l} \quad (32)$$

onde,

$$T_{ij_l} = -k_{ii_l}^{-1} k_{ij_l} \quad (33)$$

Definindo a matriz de transformação  $T_l$ :

$$T_l = \begin{bmatrix} \Phi_n & T_{ij} \\ 0 & I_j \end{bmatrix}_l \quad (34)$$

$$D_l = \begin{bmatrix} D_i \\ D_j \end{bmatrix}_l = T_l \begin{bmatrix} D_n \\ D_j \end{bmatrix}_l = T_l \bar{D}_l \quad (35)$$

Repare que o vetor  $\bar{D}_l$  contém  $D_n$  na primeira parte e  $D_j$  na segunda. Temos também:

$$\ddot{D}_l = T_l \ddot{\bar{D}}_l \quad (36)$$

Substituindo em (28), temos:

$$m_l T_l \ddot{\bar{D}}_l + k_l T_l \bar{D}_l = A_l(t) \quad (37)$$

$$T_l^T m_l T_l \ddot{\bar{D}}_l + T_l^T k_l T_l \bar{D}_l = T_l^T A_l(t) \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} I_{mr} & \bar{m}_{nj} \\ \bar{m}_{jn} & \bar{m}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{D}_n \\ \ddot{D}_j \end{bmatrix}_l + \begin{bmatrix} \omega_{mr}^2 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ D_j \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \bar{A}_n \\ \bar{A}_j \end{bmatrix}_l \quad (39)$$

onde:

$$\bar{m}_{nn} = \Phi_n^T m_{ii} \Phi_n = I_{mr} \quad (40)$$

$$\bar{m}_{nj} = \Phi_n^T m_{ii} T_{ij} + \Phi_n^T m_{ij} = \bar{m}_{jn}^T \quad (41)$$

$$\bar{m}_{jj} = m_{jj} + T_{ij}^T m_{ij} + m_{ji} T_{ij} + T_{ij}^T m_{ij} T_{ij} \quad (42)$$

$$\bar{k}_{ni} = \bar{k}_{in} = 0 \quad (43)$$

$$\bar{k}_{jj} = k_{jj} + T_{ij}^T k_{ij} \quad (44)$$

$$\bar{A}_n = \Phi_n^T A_\alpha \quad (45)$$

$$\bar{A}_j = A_j + T_{ij}^T A_i \quad (46)$$

A eq. (40) representa os termos de acoplamento dinâmico entre as acelerações  $\ddot{D}_n$  e  $\ddot{D}_j$ .

$$\bar{m}_l \ddot{D}_l + \bar{k}_l D_l = \bar{A}_l(t) \quad (47)$$

Para montar as equações de movimento para todas as subestruturas, simplesmente "somamos" as matrizes da eq. (37) usando o método da rigidez. O resultado é:

$$\bar{m} \ddot{D} + \bar{k} D = A(t) \quad (48)$$

$n_s$  subestruturas.

## 2.3.3.5 Exemplo manual

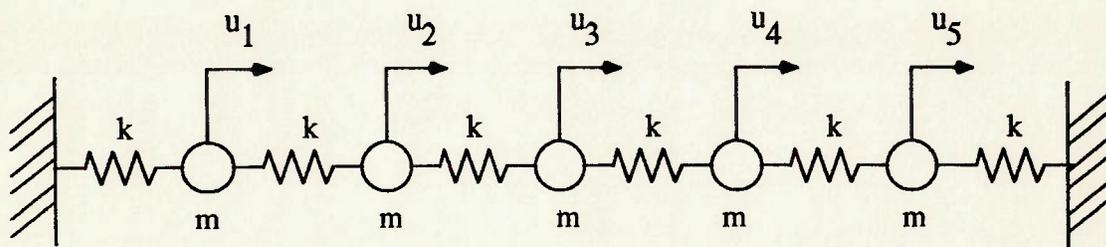


fig. 2.3.3.1.- sistema massa-mola bi-engastada

\* Sistema global:

$$W = \sum_{i=1}^5 p_i u_i = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3 + p_4 u_4 + p_5 u_5$$

$$U = \frac{1}{2} \{ k u_1^2 + k (u_1 - u_2)^2 + k (u_2 - u_3)^2 + k (u_3 - u_4)^2 + k (u_4 - u_5)^2 + u_5^2 \}$$

$$\Pi = U - W = k (u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 - u_2 u_3 + u_3^2 - u_3 u_4 + u_4^2 - u_4 u_5 + u_5^2) - p_1 u_1 - p_2 u_2 - p_3 u_3 - p_4 u_4 - p_5 u_5$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 2 k u_1 - k u_2 - p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k (-u_1 + 2 u_2 - u_3) - p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = k (-u_2 + 2 u_3 - u_4) - p_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = k (-u_3 + 2u_4 - u_5) - p_4 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = k (-u_4 + 2u_5) - p_5 = 0$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix}$$

Para a matriz de massa utilizaremos o modelo simples de massas concentradas:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

A solução do problema de autovalor para este caso é a seguinte:

(assumimos  $k = 1$  e  $m = 1$ )

Frequências:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.267949 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 2.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 3.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 3.732051 \end{bmatrix}$$

Modos:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.732051 \\ 2.000000 \\ 1.732051 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \\ 0.000000 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_4 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -1.732051 \\ 2.000000 \\ -1.732051 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_5 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -1.000000 \\ 0.000000 \\ 1.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix}$$

\* Subestrutura 1:

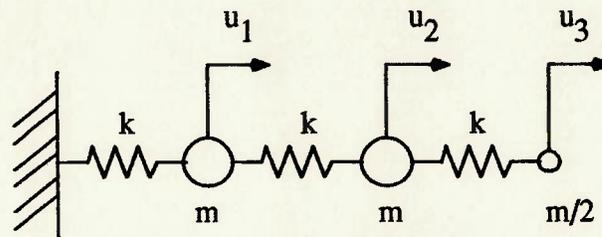


fig. 2.3.3.2 - subestrutura 1

$$n_{1A} = 2 ; n_{2B} = 1$$

$$W = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3$$

$$U = \frac{1}{2} \{ 2 k u_1^2 + k u_3^2 \}$$

$$\Pi = U - W = k (u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 - u_2 u_3 + u_3^2 - u_3 u_4 + u_4^2) + \\ - p_1 u_1 - p_2 u_2 - p_3 u_3 - p_4 u_4$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 2k u_1 - k u_2 - p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = -k u_1 + 2k u_2 - k u_3 - p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = -k u_2 + k u_3 - p_3 = 0$$

$$K_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2k & -k & & 0 \\ -k & 2k & & -k \\ \hline 0 & -k & & k \end{array} \right] \quad M_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} m & 0 & & 0 \\ 0 & m & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & m/2 \end{array} \right]$$

Neste método deve-se procurar sempre colocar os graus de liberdade de interface nas últimas linhas das matrizes e vetores.

$$(K_{AA1} - \omega_{i1}^2 M_{AA1}) \phi_{i1} = 0$$

Resolvendo o problema de autovalor chegamos a:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \omega_{11}^2 = k/m ; \quad \omega_{21}^2 = 3k/m$$

Normalizando em relação a  $M_{AA1}$ :

$$\phi_{1N} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix} \quad \phi_{2N} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_{N1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix}$$

Vamos reter apenas o primeiro modo:  $m_r = 1$

$$D_{A1} = \Phi_{N1} D_{N1} + T_{AB1} D_{B1}$$

$$T_{AB1} = -K_{AA1}^{-1} K_{AB1}$$

$$T_{AB1} = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3k} & \frac{1}{3k} \\ \frac{1}{3k} & \frac{2}{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadas as expressões no item 2.3.3.4, chegamos aos seguintes valores:

$$\bar{M}_{NB1} = \frac{m}{\sqrt{2m}}$$

$$\bar{M}_{BB1} = \frac{19m}{18}$$

$$\bar{K}_{NB1} = \bar{K}_{BN1}^T = \emptyset \qquad \bar{K}_{BB1} = \frac{k}{3}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & m/\sqrt{2m} \\ m/\sqrt{2m} & 19m/18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ D_N \\ \dots \\ D_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k/m & \emptyset \\ \emptyset & k/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_N \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_2) \sqrt{2m} \\ -P_1/3 - 2P_2/3 + P_3 \end{bmatrix}$$

\* Subestrutura 2:

Simétrica à subestrutura 1.

\* Síntese das duas subestruturas:

Rearranjando a equação normalizada do movimento da subestrutura 2:

$$\begin{bmatrix} 19m/18 & -m/\sqrt{2m} \\ -m/\sqrt{2m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ D_N \\ \dots \\ D_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k/3 & \emptyset \\ \emptyset & k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_N \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_2) \sqrt{2m} \\ -P_1/3 - 2P_2/3 + P_3 \end{bmatrix}$$

Equação global reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & -m/\sqrt{2m} & 0 \\ -m/\sqrt{2m} & 19m/9 & -m\sqrt{2m} \\ 0 & -m/\sqrt{2m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots \\ D_{N1} \\ \ddots \\ D_B \\ \ddots \\ D_{N2} \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} k/m & 0 & 0 \\ 0 & 2k/3 & 0 \\ 0 & 0 & k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{N1} \\ D_B \\ D_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autopares da equação acima são:

$$\lambda_1 = 0.268929 \quad \lambda_2 = 1.000000 \quad \lambda_3 = 2.231071$$

$$\tilde{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 3.844471 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} \quad \tilde{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix} \quad \tilde{\phi}_3 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -0.780341 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}$$

As matrizes de transformação de coordenadas  $T_1$  e  $T_2$  devem ser acopladas para obtermos  $\phi$  nas coordenadas do sistema:

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} 0.707107 & 0.333333 & 0.000000 \\ 0.707107 & 0.666667 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.666667 & 0.707107 \\ 0.000000 & 0.333333 & 0.707107 \end{bmatrix}$$

$$\phi_i = T_{AB} \tilde{\phi}_i$$

Assim:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.64442 \\ 1.93326 \\ 1.64442 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.41808 \\ -1.74576 \\ 0.41808 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}$$

Concluimos que reterdo apenas o primeiro modo chegamos aos dois primeiros modos do sistema com uma boa aproximação.

#### 2.3.3.4 Algumas observações finais

Observe que não se faz nenhuma modificação nas coordenadas de junção, e, portanto, essas coordenadas permanecem compatíveis com todas as outras subestruturas nos pontos de junção.

Uma explicação muito interessante do método está contida na referência [HURTY et al. 1971] e que descrevemos a seguir por ser bastante esclarecedor quanto ao correspondente paralelo físico do método matemático.

Dissemos na introdução deste trabalho que há mais vantagem em se introduzir modos de vibração ao invés de se aumentar o número de graus-de-liberdade de uma estrutura a fim de se obter uma análise dinâmica mais precisa. Observe a figura 2.3.3:

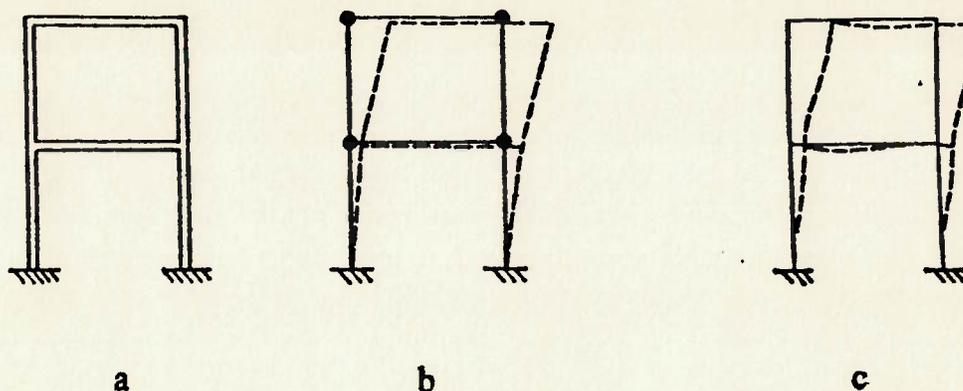


Fig. 2.3.3 - a) estrutura original: pórtico plano;  
b) modelo de elemento finito com um elemento entre os nós;  
c) modelo melhorado com a inclusão de modos.

Reverendo a equação (39), observe que as submatrizes de massa e de rigidez com índice  $jj$  de uma subestrutura  $l$  corresponde exatamente a um elemento da figura 2.3.3b. Já os termos com índice  $nj$  correspondem aos incrementos de modos e frequências que aperfeiçoam o modelo (figura 2.3.3c).

## 2.4 Métodos dos Modos Componentes Livre-livres

### 2.4.1 - Introdução

Apresentamos a seguir 2 métodos que utilizam os modos normais com interfaces livres: o método de Goldman (também chamado de Particionamento Dinâmico) e o método de Craig-Chang, que utiliza os chamados modos residuais.

O método de Goldman [GOLDMAN 1969], um dos pioneiros na utilização dos modos componentes livre-livres, consiste em utilizar, além destes modos, os modos de corpo-rígido previamente normalizados. Assim é possível calcular os autopares do sistema sem a necessidade das matrizes de massa e de rigidez, uma vez que aqueles dados podem ser obtidos experimentalmente.

Ao fazermos uma série de transformações matriciais chegamos à forma clássica da equação dos autopares com graus-de-liberdade reduzidos.

O método de Craig-Chang [CRAIG 1981], desenvolvido mais recentemente, faz uso dos modos normais de interface livre e dos modos de ligação residuais com ou sem alívio de inércia. De uma forma diferente MacNeal e Rubin chegaram aos mesmos resultados [MacNeal 1971; Rubin 1975].

Observamos que quando dizemos modos de interface livre-livre queremos significar que os seus modos naturais são calculados na ausência de qualquer tipo de fixação nas fronteiras entre uma e outra subestrutura. E para estas condições de contorno o ensaio experimental é mais fácil de ser executado do que no caso de interfaces fixas.

Assim, como vantagens destes métodos podemos citar a independência total entre as subestruturas, de forma a não se requerer nenhuma troca de informações entre elas (ou entre as

empresas), e a compatibilidade para a utilização de dados experimentais.

#### 2.4.2 Método de Goldman (Particionamento Dinâmico)

##### 2.4.2.1 Introdução

O método de Goldman usa apenas os modos de corpo-rígido e os modos normais para resolver o problema de interconexão. Os modos-normais são, contudo, do tipo de vibração livre-livre, ao invés do tipo de restrição fixa de Hurty.

Diz o autor que a precisão do método é limitada, especialmente se utilizada de modo irrestrito. A técnica, contudo, evita a necessidade de se desenvolver a análise à parte de restrições sugerida por Hurty. Isto, por sua vez, introduz certos erros que sob certas circunstâncias mal-condicionadas pode ser bastante grande. Assim, para se obter bons resultados, este método requer uma boa seleção dos modos e frequências a serem utilizados.

Apesar disso, a técnica tem sido aplicada com sucesso no cálculo das vibrações de foguetes do tipo modular.

##### 2.4.2.2 Desenvolvimento

Vamos colocar como meta chegarmos a uma equação de interconexão estrutural na forma específica de autovalor:

$$([S] - \omega^2[I])\{\xi\} = \{0\} \quad (1)$$

onde

[S] é uma matriz real simétrica e quadrada;

[I] é a matriz identidade, e

$\omega$  é o autovalor ou frequência característica da matriz [S].

Considere a estrutura subdividida em duas subestruturas, A e B. O ponto 1 em A é conectado com o ponto 1 de B, e assim por diante. Se o sistema é separado dessa maneira, então existe uma certa combinação única de vetores de forças e momentos harmônicos discretos  $\{P_A\}$  e  $\{P_B\}$  que quando aplicada a cada um dos N pontos de interconexão da subestrutura, satisfaz a compatibilidade do vetor de deslocamentos e rotações  $\{U_{AN}\}$  e  $\{U_{BN}\}$  em cada um dos N pontos de interconexão da estrutura.

$$\text{Condição de Equilíbrio: } \{P_A\} + \{P_B\} = \emptyset \quad (2)$$

Compatibilidade de Deformação:

$$\begin{Bmatrix} U_{A1} \\ U_{A2} \\ \vdots \\ U_{AN} \end{Bmatrix} = \{\bar{U}_A\} = \begin{Bmatrix} U_{B1} \\ U_{B2} \\ \vdots \\ U_{BN} \end{Bmatrix} = \{\bar{U}_B\} \quad (3)$$

(Pontos de conexão entre A e B)

Vamos assumir que uma análise de vibração já tenha sido feita em cada subestrutura, e que um conjunto consistente de vetores modais de vibração ortogonalizadas livre-livres de corpo-rígido e naturais já se tenha em mãos (uma análise de vibração livre-livre se utiliza no caso de não se haver prioridade nas restrições de deflexão nos pontos de interconexão das duas subestruturas, segundo Goldman).

O vetor deslocamento de qualquer ponto,  $\{U_A\}$  e  $\{U_B\}$  pode ser encontrado pela superposição destes vetores modais. Por exemplo, na subestrutura A, a resposta de deslocamento de qualquer ponto na estrutura pode ser dada pela equação:

$$\{U_A\} = [\psi_A] \{\delta_A\} + [\Phi_A] \{\zeta_A\} \quad (4)$$

onde

$[\psi_A]$  = matriz retangular dos vetores de modos de corpo-rígido ortogonais da subestrutura A.

$[\Phi_A]$  = matriz retangular dos vetores de modos de vibração naturais ortogonais da subestrutura A.

$\{\delta_A\}$  = matriz coluna das coordenadas generalizadas de corpo-rígido da subestrutura A.

$\{\zeta_A\}$  = matriz coluna das coordenadas generalizadas de modos naturais de vibração da subestrutura A.

As equações de movimento do sistema (negligenciando o amortecimento) para a subestrutura A, escritas em termos destas coordenadas generalizadas e cargas dos pontos de interconexão, têm a forma:

$$[I] \{\ddot{\delta}_A\} = [\bar{\psi}_A]^T \{P_A\} \quad (5)$$

$$[I] \{\ddot{\zeta}_A\} + [\omega_A^2] \{\zeta_A\} = [\bar{\Phi}_A]^T \{P_A\}$$

onde:

$[\bar{\psi}_A]^T$  = transposta da matriz retangular dos vetores dos modos de corpo-rígido da subestrutura A nos N pontos de

interconexão (estes são os pontos onde  $P_A$  age).

$[\bar{\Phi}_A]^T$  = transposta da matriz retangular dos vetores dos modos de vibração natural junto aos N pontos de interconexão.

$[\omega_A^2]$  = matriz diagonal dos quadrados das frequências naturais da subestrutura A.

Na particular representação da eq. (5), os vetores modais escolhidos foram normalizados, tal que:

$$\begin{aligned} [\psi_A]^T [M_A] [\psi_A] &= [I] \\ [\bar{\Phi}_A]^T [M_A] [\bar{\Phi}_A] &= [I] \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $[M_A]$  = matriz quadrada das massas da estrutura A.

Aqueles elementos particulares das deformações da estrutura A que estão associados apenas com deformações dos N pontos de interconexão podem ser extraídos da eq. (4) na forma:

$$\{\bar{U}_A\} = [\bar{\psi}_A] \{\delta_A\} + [\bar{\Phi}_A] \{\zeta_A\} \quad (7)$$

Obviamente se  $[P_A]$  fosse conhecido poderíamos obter as respostas dos pontos de interconexão da eq. (7) pelas soluções das eqs. (5).

Podemos escrever equações similares para a subestrutura B, e as deformações dos contornos  $\{U_B\}$  devido às forças aplicadas  $\{P_B\}$  podem ser computadas em termos dos vetores modais da subestrutura B e as coordenadas generalizadas.

Através da combinação das eqs. (2, 3, 5 e 7) da estrutura A com um conjunto similar de equações para a subestrutura B, chegamos às seguintes equações básicas de

interconexão:

$$[I] \{\dot{\delta}\} = [C]^T \{P_A\}$$

$$[I] \{\ddot{\zeta}\} + [\omega_c^2] \{\zeta\} = [B]^T \{P_A\} \quad (8 \text{ a,b,c})$$

$$[C] \{\delta\} + [B] \{\zeta\} = \{0\}$$

Nesta representação fazemos o seguinte particionamento:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

$$\{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \zeta_A \\ \zeta_B \end{Bmatrix}$$

$$[\omega_c^2] = \left[ \begin{array}{c|c} \omega_A^2 & 0 \\ \hline 0 & \omega_B^2 \end{array} \right] \quad (9)$$

$$[B] = [\bar{\phi}_A \quad -\bar{\phi}_B]$$

$$[C] = [\bar{\psi}_A \quad -\bar{\psi}_B]$$

A matriz retangular dos coeficientes de corpo-rígido é da ordem de  $(m \times r)$ , onde  $m$  é o número de condições de compatibilidade a serem descontados em todos os pontos de interconexão e  $r$  é o número de graus-de-liberdade de corpo-rígido no vetor  $\{\delta\}$ . A matriz retangular de coeficientes de vibração natural é da ordem  $(m \times n)$ , onde  $n$  é o número de graus-de-liberdade elásticos livre-livres no vetor  $\{\zeta\}$ .

A matriz diagonal de frequências  $[\omega_c^2]$  é uma matriz  $(n \times n)$ .

Solução da frequência:

O problema agora é combinar e transformar a eq. (8) na forma simétrica da eq. (1) e então resolver para os

autovalores ou frequências características de  $[S]$ . Multiplicando-se a eq. (8c), podemos obter, após uma pequena manipulação, a expressão:

$$[B] [\omega_c^2] \{\zeta\} = [C C^T + B B^T] \{P_A\} = [G] \{P_A\} \quad (10)$$

A matriz de particionamento  $[G]$  é uma matriz simétrica e quadrada e é não-singular enquanto o número de condições de compatibilidade de interconexão for menor que o número total de graus-de-liberdade elástico (ou seja,  $[G]$  é não-singular se  $(n \geq m)$ ). Pela inversão de  $[G]$ , a equação para as forças de contorno desconhecidas é:

$$\{P_A\} = [G]^{-1} [B] [\omega_c^2] \{\zeta\} \quad (11)$$

Se a equação for substituída na (8a), as equações modais e de corpo-rígido ficam:

$$[I] \{\dot{\delta}\} = [C]^T [G]^{-1} [B] [\omega_c^2] \{\zeta\} \quad (12a)$$

e,

$$[I] \{\dot{\zeta}\} + [I - B^T G^{-1} B] [\omega_c^2] \{\zeta\} = \{0\} \quad (12b)$$

Finalmente, fazendo

$$\{\zeta\} = [\omega_c^2]^{-1} \{\xi_n\} \quad (13)$$

que substituído na eq. (12b) e pré-multiplicando por  $[\omega_c]$  resulta nas equações compostas na forma da equação (1):

$$\{\dot{\xi}_n\} + [S] \{\xi_n\} = \{0\} \quad (14)$$

onde  $[S]$ , a matriz final de frequência composta, é uma matriz

simétrica real de ordem  $(n \times n)$  dada pela equação:

$$[S] = [I - B^T G^{-1} B] [\omega_c] \quad (15)$$

A representação cinemática da estrutura composta está contida na formulação da eq. (14) e as frequências naturais e formas modais da estrutura composta podem ser obtidas dos autovalores e autovetores não triviais de  $[S]$ . O presente problema, na realidade, foi formulado nesta maneira particular a fim de levar vantagem das rotinas de computadores digitais para determinar rapidamente os autovalores e autovetores. Estas rotinas podem ser manipuladas tal que a partir de  $[S]$  possam ser obtidas uma matriz diagonal de autovalores  $[\omega_i^2]$  e uma matriz de autovetores  $[X]$ .

Como as equações de movimento da eq. (14) são cinematicamente compatíveis com a dinâmica da estrutura composta, é claro que os elementos da diagonal da matriz de autovalores  $[\omega_i^2]$  correspondem a uma lista de frequências naturais quadráticas da estrutura. Estas frequências estão associadas com um particular modo de vibração estrutural que, por sua vez, está relacionado com cada um dos autovetores ortogonais contidos em  $[X]$ . Modos desejados na forma de uma matriz modal podem, com alguma álgebra, serem derivadas de  $[X]$  fazendo-se uso das eqs. (4) e (13).

#### 2.4.2.3 Exemplo manual

Seja a seguinte estrutura simples:

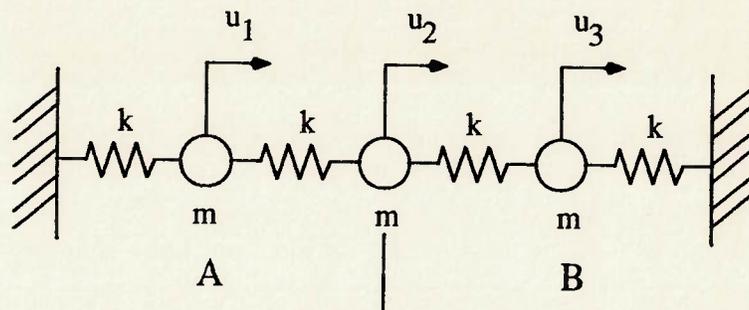


Fig. 2.4.2.1 - Sistema massa-mola bi-engastada subdividida em subestruturas A e B

Matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} k$$

Matriz de massa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m$$

Vetor de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Autopares:

$$\omega_1^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$\omega_2^2 = 2$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3^2 = 2 + \sqrt{2} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

\* Subestrutura A

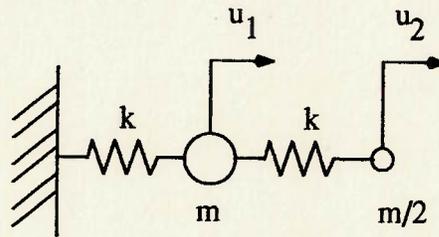


Fig. 2.4.2.2 - Subestrutura A

$$m_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} m \quad k_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} k \quad u_A = \begin{Bmatrix} u_{1A} \\ u_{2A} \end{Bmatrix}$$

$$\omega_{1A}^2 = 2 - \sqrt{2} \quad \phi_{1A} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\omega_{2A}^2 = 2 + \sqrt{2} \quad \phi_{2A} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

\* M-ortonormalizando:

$$\phi_{1AN} = \frac{\phi_{1A}}{(\phi_{1A}^T m_A \phi_{1A})^{1/2}} = \frac{\phi_{1A}}{\sqrt{2}}$$

Analogamente:

$$\phi_{2AN} = \frac{\phi_{2A}}{(\phi_{2A}^T m_A \phi_{2A})^{1/2}} = \frac{\phi_{2A}}{\sqrt{2}}$$

\* Subestrutura B: análogo ao A.

\* Aplicação das fórmulas de Goldman:

\* Vamos reter apenas o primeiro modo de cada subestrutura. E, como não temos modos de corpo-rígido,  $[C] = \emptyset$ .

$$[B] = [ 1 \quad -1 ]$$

$$[G] = [C C^T + B B^T] = [2]$$

$$[G]^{-1} = 1/2$$

$$[\omega_c^2] = \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2}) & \emptyset \\ \emptyset & (2 - \sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Assim, de acordo com a fórmula de  $[S]$ :

$$[S] = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo este valor de  $S$  na eq.(14), obteremos os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = \emptyset, \quad e \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$$

e o último valor corresponde exatamente ao primeiro autovalor da estrutura global.

O autovetor para  $\lambda_2$  corresponde a:

$$[\xi_n] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\zeta] = [\omega_c^2]^{-1} [\xi_n] \quad (\text{eq. 13})$$

$$[\zeta] = \begin{bmatrix} \zeta_A \\ \zeta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 - \sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \end{bmatrix} [\xi_n]$$

$$\begin{Bmatrix} \zeta_A \\ \zeta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

Segundo a equação (4):

- aplicada à subestrutura A:

$$\{U_A\} = [\phi_A] \{\zeta_A\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 + 1/2 \\ 1 + \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

Da mesma forma:

$$\{U_B\} = [\phi_B] \{\zeta_B\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 + 1/2 \\ 1 + \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

A equação de compatibilidade é:

$$u_{2A} = u_{2B}$$

Assim:

$$[\phi_{AB}] = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 + 1/2 \\ 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 + 1/2 \end{Bmatrix}$$

Normalizando o autovetor acima tal que o termo superior seja igual à unidade, chegamos ao seguinte resultado:

$$[\phi_{AB}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

que corresponde exatamente ao autovetor do sistema global.

### 2.4.3 Método de Craig-Chang

#### 2.4.3.1 Introdução

O método de Craig-Chang considera para o cálculo dos seus modos os componentes com interfaces livres e, adicionalmente, introduz os modos residuais que corrigem de certa forma os modos mais altos que não foram retidos. Assim, utilizaremos os modos normais livre-livres, definidos no item 2.3.3.1 ou 2.3.3.3 para o caso da presença de modos de corpo rígido, e, os modos de ligação também definidos nesses itens acrescentados dos resíduos que terão a seguinte nova denominação: modos de ligação residuais ou modos de ligação residuais com alívio de inércia. Também devemos citar que com a consideração destes resíduos teremos garantido que os modos normais livre-livres não sejam combinações lineares dos modos de ligação.

Começaremos definindo estes novos modos residuais e a seguir apresentaremos o método de Craig-Chang.

Vale a pena observar ainda que tanto este método como os métodos de MacNeal e Rubin têm íntima relação entre si e entre o Método da Aceleração Modal para o cálculo de tensões [CRAIG 1981].

#### 2.4.3.2 Definição dos Modos de Ligação Residuais

Copiamos abaixo as equações (23) e (27) do item 2.3.3.3:

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{va} & k_{vr} \\ k_{av} & k_{aa} & k_{ar} \\ k_{rv} & k_{ra} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{va} \\ \bar{\Psi}_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{vv} & P_{va} & P_{vr} \\ P_{av} & P_{aa} & P_{ar} \\ P_{rv} & P_{ra} & P_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{va} \\ I_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Após a remoção dos modos de corpo rígido, havíamos chegado à seguinte equação:

$$\Psi_{\alpha} = P^T \bar{\Psi}_{\alpha} \quad (2)$$

ou, isolando  $\Psi_{\alpha}$  na eq. (1):

$$\Psi_{\alpha} = (P^T G P) F_{\alpha} \quad (3)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} g_{vv} & g_{va} & 0 \\ g_{av} & g_{aa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

e

$$F_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0_{va} \\ I_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \quad (\text{segundo a eq. (1)}) \quad (5)$$

Vamos chamar  $G$  de matriz de flexibilidade especial relativa às restrições  $r$ , e de  $G_e$  a expressão que multiplica  $F_{\alpha}$  em (3):

$$G_e = (P^T G P) \quad (6)$$

chamado de matriz de flexibilidade elástica.

Pode-se mostrar que:

$$G_e = \Phi_e \Lambda_{ee}^{-1} \Phi_e^T \quad (7)$$

onde  $\Phi_e$  é o conjunto de modos normais elásticos ortonormalizados.

Vamos agora separar a eq. (7) em modos retidos (*kept*

modes) e modos deletados (*deleted modes*):

$$G_e = \Phi_e \Lambda_{ee}^{-1} \Phi_e^T = \Phi_k \Lambda_{kk}^{-1} \Phi_k^T + \Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T \quad (8)$$

A matriz de flexibilidade residual é dada por:

$$G_d = \Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T \quad (9)$$

Esta pode ser obtida sem o direto conhecimento dos modos deletados combinando-se as equações (6), (8) e (9) para dar:

$$G_d = P^T G P - \Phi_k \Lambda_{kk}^{-1} \Phi_k^T \quad (10)$$

Das eqs. (3) e (10) obtém-se os chamados modos de ligação residuais com alívio de inércia:

$$\Psi_d = G_d F_a \quad (11)$$

Se a estrutura não tiver modos de corpo rígido, teremos que  $P = I$  e, a eq. (10) torna-se

$$G_d = G - \Phi_k \Lambda_{kk}^{-1} \Phi_k^T \quad (12)$$

que é a chamada matriz de flexibilidade residual e as eqs. (11) e (12) podem ser combinadas para obtermos os modos de ligação residuais.

#### 2.4.3.3 Descrição do método

Uma forma de aproximar o movimento de uma subestrutura é a seguinte:

$$u = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{id} \\ \Phi_{jk} & \Psi_{jd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_d \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde:

$u$  = vetor deslocamento da subestrutura;

$p$  = coordenada generalizada;

$i$  = correspondentes aos graus de liberdade internos;

$j$  = correspondentes aos graus de liberdade das junções;

$k$  = modos retidos (*kept modes*);

$d$  = modos deletados (*deleted modes*);

$\Phi$  = modos normais de interface livre;

$\Psi$  = modos de ligação residuais (e se tiver modos de corpo rígido deve-se acrescentar o alívio de inércia);

Iremos considerar o movimento sem modos de corpo rígido. Para o caso de haver esses modos basta utilizar  $\Psi_d$  com alívio de inércia.

Vimos que:

$$\Psi_d = G_d F_d = (\Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T) F_\alpha \quad (14)$$

$$\Psi_d = G_d F_d = (G - \Phi_k \Lambda_{kk}^{-1} \Phi_k^T) F_\alpha \quad (15)$$

Na eq. (13) os modos de ligação são definidos substituindo as forças unitárias nas coordenadas de junção,  $u_j$ , tal que:

$$F_\alpha = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Daí a eq. (14) fica:

$$\Psi_d = \Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T = \Phi_d (\Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T) \quad (17)$$

A equação de movimento da subestrutura é:

$$m \ddot{u} + k u = f \quad (18)$$

Substituindo a eq. (13), ficamos com:

$$\mu_{kk} \dot{p}_k + k_{kk} p_k = \Phi_k^T f \quad (19)$$

$$\mu_{dd} \dot{p}_d + k_{dd} p_d = \Psi_d^T f \quad (20)$$

Estas equações são desacopladas pois os modos em  $\Psi_d$  são combinações lineares dos modos em  $\Phi_d$  (conforme a eq. (17)), que por sua vez são ortogonais aos modos em  $\Phi_k$ .

Agora vamos efetuar a seguinte aproximação: vamos escolher para aproximar a resposta das coordenadas  $p_d$  a resposta pseudostática, ignorando  $\dot{p}_d$  na equação (20), isto é:

$$k_{dd} p_d = \Psi_d^T f \quad (21)$$

Como para vibração livre,  $f$  consiste apenas de forças interfaciais  $f_j$ , e como

$$k_{dd} = \Psi_d^T k \Psi_d \quad (22)$$

as eqs. (17), (21) e (22) podem ser combinadas para resultar

$$(\Phi_{jd} \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T) (p_d - f_j) = 0 \quad (23)$$

Como o produto matricial entre parênteses é não-nulo,

$$p_d = f_j \quad (24)$$

A equação (24) é a aproximação pseudostática para as coordenadas generalizadas  $p_d$  (que são as respostas dos modos

de ligação residuais).

Como os componentes  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem a eq. (25) abaixo

$$f_j^\alpha + f_j^\beta = 0 \quad (25)$$

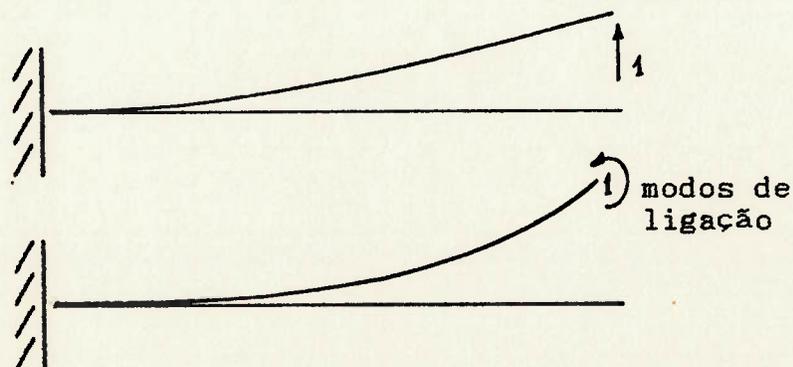
quando são acoplados juntos, esta equação e a (24) podem ser combinadas para resultar na equação de vínculo:

$$p_d^\alpha + p_d^\beta = 0 \quad (26)$$

Vamos agora proceder ao acoplamento dos dois componentes  $\alpha$  e  $\beta$ .

Deve-se satisfazer duas condições de vínculo: a eq. (26) e a equação de compatibilidade de deslocamentos físicos  $u_j^\alpha + u_j^\beta = 0$ .

Como indica a equação (13) repetida abaixo, o método de Craig-Chang faz uso de um grupo de modos normais de interfaces livres e de um outro grupo de modos de ligação residuais para aproximar o movimento de uma estrutura (vide a fig. 2.4.3.1):



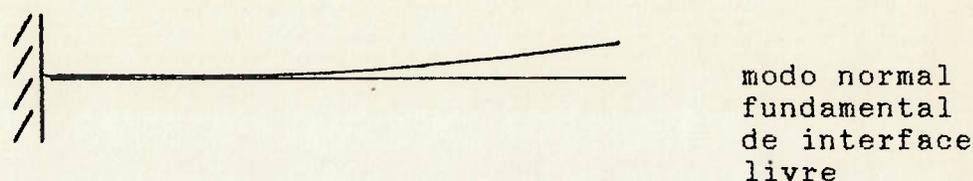


Fig. 2.4.3.1 - Alguns modos utilizados no método de Craig-Chang

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [\Phi_k \quad \Psi_d] \begin{Bmatrix} p_k \\ p_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{id} \\ \Phi_{jk} & \Psi_{jd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_d \end{Bmatrix} \quad (27)$$

De acordo com as equações (9) do item 2.3.2 que trata da Síntese dos Modos Componentes, temos:

$$\mu^\alpha = \Psi^{\alpha T} m^\alpha \Psi^\alpha \quad \kappa^\alpha = \kappa^{\alpha T} k^\alpha \kappa^\alpha \quad (28)$$

onde:

$$\mu^\alpha = \begin{bmatrix} \mu_{kk} & \mu_{kd} \\ \mu_{dk} & \mu_{dd} \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} \Phi_k^T \\ \Psi_d^T \end{bmatrix} m^\alpha [\Phi_k \quad \Psi_k]^\alpha \quad (29)$$

Obs.:  $\mu$  e  $\kappa$  correspondem respectivamente a  $\bar{M}$  e  $\bar{K}$  na eq. (9) do item 2.3.2.

Efetuando as multiplicações, tirando o superescrito de todas as matrizes, e empregando a eq. (17), temos:

$$\begin{aligned} \mu_{kk} &= I_{kk} \\ \mu_{kd} &= \mu_{dk}^T = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mu_{dd} = \Psi_d^T m \Psi_d = \Phi_{jd} \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T$$

Analogamente:

$$\kappa^\alpha = \begin{bmatrix} \kappa_{kk} & \kappa_{kd} \\ \kappa_{dk} & \kappa_{dd} \end{bmatrix}^\alpha = \begin{bmatrix} \Phi_k^T \\ \Psi_d^T \end{bmatrix} m^\alpha [\Phi_k \quad \Psi_k]^\alpha \quad (31)$$

$$\kappa_{kk} = I_{kk}$$

$$\kappa_{kd} = \kappa_{dk}^T = \emptyset \quad (32)$$

$$\kappa_{dd} = \Psi_d^T k \Psi_d = \Phi_{jd} \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T = \Psi_{jd}$$

Comparando a eq. (30c) com a eq. (9) observamos que  $\kappa_{dd}$  é exatamente a partição interfacial da matriz de flexibilidade residual  $G_d$ . Assim as equações (10) e (12) poderiam ser utilizadas no cálculo real de  $\kappa_{dd}$ .

Reescrevendo as equações de vínculo a serem observadas:

$$u_j^\alpha - u_j^\beta = \emptyset \quad (33)$$

$$p_d^\alpha + p_d^\beta = \emptyset$$

Vamos chamar de  $C$  a matriz que reúne as equações de vínculo (33) tal que:

$$Cp = 0 \quad (34)$$

Além disso vamos particionar o vetor  $p$  (que possui coordenadas linearmente dependentes) da seguinte forma:

$$p = \begin{Bmatrix} p_d^\alpha \\ p_d^\beta \\ p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix} \quad (35)$$

e,

$$q = \begin{Bmatrix} p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix} \quad (36)$$

que é o vetor de coordenadas linearmente independentes que preferimos tomar como tais.

Particionando  $C$  em  $C_{dd}$  (relacionado com as coordenadas dependentes) e em  $C_{ld}$  (relacionado com as coordenadas independentes):

$$[C_{dd} \mid C_{ld}] \quad (37)$$

$$[C_{dd} \quad C_{ld}] \begin{Bmatrix} p_d \\ p_l \end{Bmatrix} = \emptyset \quad (38)$$

Vamos agora determinar a matriz  $C$ :

de acordo com a eq. (13),  $u$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u_i &= \Phi_{ik} p_k + \Psi_{id} p_d \\ u_j &= \Phi_{jk} p_k + \Psi_{jd} p_d \end{aligned} \quad (39)$$

Substituindo  $u_j$  da eq. (39b) na eq. (33a) chegamos a:

$$[\Phi_{jk}^\alpha \quad -\Phi_{jk}^\beta] \begin{Bmatrix} p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix} + [\Psi_{jd}^\alpha \quad -\Psi_{jd}^\beta] \begin{Bmatrix} p_d^\alpha \\ p_d^\beta \end{Bmatrix} = \emptyset \quad (40)$$

e a eq. (33b) pode também ser escrita como:

$$[ \text{I} \quad \text{I} \quad \text{O} \quad \text{O} ] \begin{Bmatrix} p_d^\alpha \\ p_d^\beta \\ p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix} = \emptyset \quad (41)$$

Combinando as eqs. (40) e (41) chegamos finalmente à expressão de C:

$$C = [C_{dd} \quad C_{ld}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} \Psi_{jd}^\alpha & -\Psi_{jd}^\beta & \Phi_{jk}^\alpha & -\Phi_{jk}^\beta \\ \text{I} & \text{I} & \text{O} & \text{O} \end{array} \right] \quad (42)$$

Chamando de S a equação que relaciona p e q:

$$p = S q \quad (43)$$

pode-se verificar que das expressões (34) e (41):

$$S = \begin{bmatrix} C_{dd}^{-1} C_{ld} \\ \text{I}_{ll} \end{bmatrix} \quad (44)$$

A forma de  $C_{dd}$  na eq. (42) permite a sua inversão, resultando:

$$C_{dd}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_l & \alpha_l \Psi_{jd}^\beta \\ -\alpha_l & (\text{I} - \alpha_l \Psi_{jd}^\beta) \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde:

$$\kappa_l = ( \Psi_{jd}^\alpha + \Psi_{jd}^\beta )^{-1} \quad (46)$$

As eqs. (42) e (45) podem ser combinadas para resultar em:

$$S = \begin{bmatrix} -\kappa_l \Phi_{jk}^\alpha & \kappa_l \Phi_{jk}^\beta \\ \kappa_l \Phi_{jk}^\alpha & -\kappa_l \Phi_{jk}^\beta \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (47)$$

As matrizes de massa e de rigidez do sistema são dadas por:

$$M = S^T \mu S \quad K = S^T \kappa S \quad (48)$$

As equações (30) a (32) podem ser utilizadas para rearranjar  $\mu$  e  $\kappa$  de acordo com a eq. (35) para resultar em:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{dd}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{dd}^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{kk}^\beta \end{bmatrix} \quad \kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{dd}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{dd}^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{kk}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{kk}^\beta \end{bmatrix} \quad (49)$$

Efetuando as multiplicações da eq. (48) usando as eqs. (47) e (49), e notando que da eq. (32c) que a eq. (46) pode ser escrita na forma:

$$\kappa_l = ( \kappa_{dd}^\alpha + \kappa_{dd}^\beta )^{-1} \quad (50)$$

chegamos a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\alpha\alpha} & \mathbf{M}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{M}_{\beta\alpha} & \mathbf{M}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\alpha\alpha} &= \mathbf{I}_{kk}^{\alpha} + \Phi_{jk}^{\alpha T} m_l \Phi_{jk}^{\alpha} \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta} &= \mathbf{M}_{\beta\alpha}^T = -\Phi_{jk}^{\alpha T} m_l \Phi_{jk}^{\beta} \\ \mathbf{M}_{\beta\beta} &= \mathbf{I}_{kk}^{\beta} + \Phi_{jk}^{\beta T} m_l \Phi_{jk}^{\beta} \\ \mathbf{K}_{\alpha\alpha} &= \Lambda_{kk}^{\alpha} + \Phi_{jk}^{\alpha T} \kappa_l \Phi_{jk}^{\alpha} \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta} &= \mathbf{K}_{\beta\alpha}^T = -\Phi_{jk}^{\alpha T} \kappa_l \Phi_{jk}^{\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\beta} &= \Lambda_{kk}^{\beta} + \Phi_{jk}^{\beta T} \kappa_l \Phi_{jk}^{\beta} \end{aligned} \quad (52)$$

onde

$$m_l = \kappa_l (\mu_{dd}^{\alpha} + \mu_{dd}^{\beta}) \kappa_l \quad (53)$$

#### 2.4.3.4 Exemplo manual

Como exemplo manual vamos tomar o seguinte sistema:

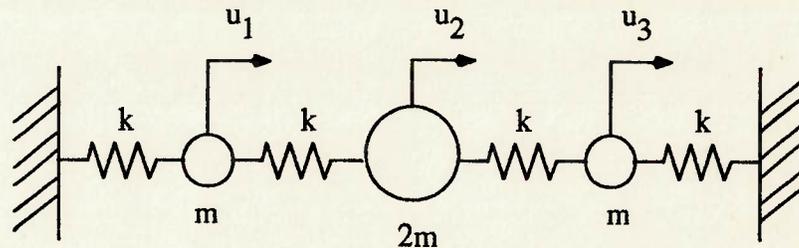


Fig. 2.4.3.2 - Sistema massa-mola bi-engastada

Matrizes de rigidez e de massa e vetor de deslocamentos:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} k \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m \quad U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Solução de autovalores:

$$\lambda_1 = 0.38196$$

$$\lambda_2 = 2.00000$$

$$\lambda_3 = 2.61802$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.000 \\ -1.000 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

Subestrutura:

Por simplicidade vamos subdividir o sistema em duas subestruturas simétricas:

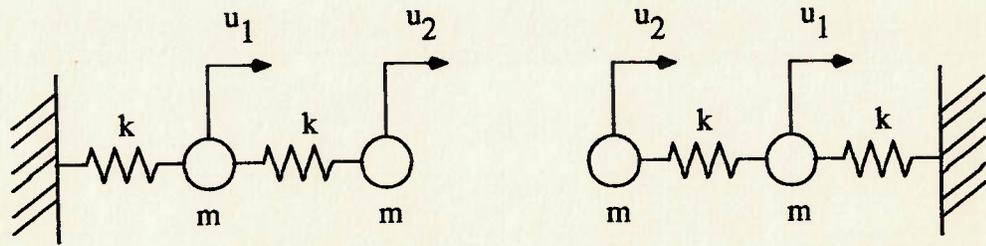


Fig. 2.4.3.3 - Subestruturas

$$K_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} k \quad M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m \quad i = \alpha, \beta$$

\* Os autopares são:

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$$

Os autovalores quando normalizados em relação à matriz de massa ficam:

$$\phi_{Nj} = \frac{\phi_j}{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} \quad j = 1, 2$$

Dentre os modos normais iremos reter apenas o primeiro modo.

\* Cálculo dos modos residuais:

Das equações (11) e (12):

$$G = K_1^{-1}$$

$$F_\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

pois o grau-de-liberdade número 2 é o de ligação.

$$\phi_{k1} = \phi_{N1}$$

$$\Lambda_{kk} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Assim, substituindo os valores acima na expressão de  $\Psi_d$ , ficamos com:

$$\Psi_d = \begin{Bmatrix} \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} \end{Bmatrix}$$

E,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} & \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} & \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

ou,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_{ik} & \psi_{id} \\ 0.525731 & -0.170820 \\ 0.850651 & 0.105573 \end{bmatrix}$$

$\phi_{jk}$                    $\psi_{jd}$

Substituindo os correspondentes valores nas equações (30c), (46) e (53) e então nas (52) obtemos:

$$m_1 = 0.289443$$

$$\kappa_1 = 1.89443$$

$$M_{\alpha\alpha} = 1.209443$$

$$M_{\alpha\beta} = -0.209443 = M_{\beta\alpha}^T$$

$$M_{\beta\beta} = 1.209443$$

$$K_{\alpha\alpha} = 1.752789$$

$$K_{\alpha\beta} = -1.370823 = K_{\beta\alpha}^T$$

$$K_{\beta\beta} = 1.752789$$

e as matrizes reduzidas:

$$M = \begin{bmatrix} 1.209443 & -0.209443 \\ -0.209443 & 1.209443 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.752788 & -1.370823 \\ -1.370823 & 1.752789 \end{bmatrix}$$

cuja solução de autopares resulta em:

$$\lambda_1 = 0.38195$$

$$\lambda_2 = 2.20152$$

$$\tilde{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Para obtermos os autovetores nas coordenadas do sistema, temos de calcular a matriz S, dada pela expressão (47) cujos valores são:

$$S = \begin{bmatrix} -1.611496 & 1.611496 \\ 1.611496 & -1.611496 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_d^\alpha \\ p_d^\beta \\ p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix} = \quad q = \begin{Bmatrix} p_k^\alpha \\ p_k^\beta \end{Bmatrix}$$

Substituindo, assim, o vetor p na expressão (13) chegamos a:

	$\alpha$	$\beta$		$\alpha$	$\beta$
$\lambda_1$	$p_k = 1$	$p_k = 1$	$u_i =$	0.525731	0.525731
	$p_d = 0$	$p_d = 0$	$u_j =$	0.850651	0.850651

$$\lambda_2 \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} & \alpha & \beta & & \\ \hline & p_k = 1 & p_k = -1 & u_i = & \\ \hline & p_d = 0 & p_d = 0 & u_j = & \\ \hline & & & & \end{array} \right| \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline 1.07628 & -1.07628 \\ \hline 0.51039 & -0.51039 \end{array}$$

Acoplando os  $u_i$  e  $u_j$  de  $\alpha$  e  $\beta$  pela coordenada de interface  $u_j$  e normalizando-os, chegamos finalmente aos autovetores aproximados do sistema:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.474 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

O primeiro modo foi obtido com boa precisão. O segundo, porém, está bastante longe do real.

## 2.5 Método da Substituição por Modos Componentes

### 2.5.1 Introdução

O método da substituição por modos componentes apresentado por Benfield e Hruda possui a grande vantagem de não requerer que as coordenadas generalizadas dos modos vinculados estáticos ( $\phi_j^c$  e  $p_j^c$  segundo Hurty) apareçam na análise final dos modos da estrutura completa ou sistema, reduzindo assim o tempo de cálculo. Isso é particularmente importante para estruturas que têm um elevado número de coordenadas interfaciais, tais como os modelos de casca por elementos finitos. Quando há muitas coordenadas interfaciais, a capacidade de memória do computador pode ser excedida se se tiver que guardar os modos vinculados por causa das coordenadas generalizadas.

Os modos vinculados estáticos são utilizados quando o componente contém uma interface fixa. O trabalho original define os chamados *branch components*. As coordenadas generalizadas dos modos de restrição são evitadas pelo uso desses *branch components* ou componentes-tramos traduzindo-se literalmente. Um *branch component* é um tramo constituído de 2 ou mais componentes e cujo movimento é definido com relação às interfaces. Um tramo *ab* é montado pela união de um componente *b* a um outro *a* (Fig. 2.5.1). No geral, a seleção das condições de contorno para obter os modos componentes é arbitrário. Isto é, tanto as condições de contorno de restrição quanto livre podem ser escolhidos, exceto para uma situação: se uma interface de um componente é fixa, então a correspondente interface do componente conectado deve ser livre. Qualquer componente que tenha uma interface fixa será chamada de componente-tramo restringido (*constrained branch component*). Isso permite que os modos de restrição sejam usados na conexão e permite também que as

coordenadas generalizadas dos modos de restrição sejam eliminadas, como veremos no desenvolvimento matemático.

Se se utilizarmos como modos-componentes os autovalores e autovetores, então, para um tramo de 2 componentes, 3 soluções de autovalores serão necessárias ao longo do processo. Para cada componente adicional ligado para formar um tramo em corrente (*chain like branch*) mais duas soluções serão necessárias. Para N componentes será necessário resolvermos  $(2N - 1)$  problemas de autovalor. Apesar do razoável número de problemas de autovalores por resolver, devemos lembrar que cada um destes problemas tem um grau-de-liberdade reduzido em comparação com o do sistema, de forma que são facilmente obtidos.

A precisão deste método pode ser melhorada pela utilização de dois tipos de *cargas externas* nas coordenadas de interface livre do componente em questão. O primeiro tipo de carregamento é um carregamento de rigidez, que representa as propriedades de rigidez reduzidas do sistema *ab*, e o segundo é um carregamento inercial que representa as propriedades de massa reduzida do sistema *ab*. Estes dois carregamentos são calculados num processo de redução em que as matrizes de massa e de rigidez do sistema são reduzidas às coordenadas interfaciais do componente que está sendo considerado. Esta técnica para melhorar a precisão permite que os modos componentes sejam modificados pela inclusão de efeitos dinâmicos aproximados do sistema, e produz modos componentes que se assemelham aos modos do sistema. A técnica é baseada no conceito de Rayleigh-Ritz de substituição por modos componentes. Além disso espera-se obter resultados melhores quanto maiores forem as semelhanças entre os modos componentes e os modos do sistema. Os resultados obtidos utilizando-se esta técnica têm sido extremamente precisos.

## 2.5.2 Propriedades de massa e de rigidez reduzidas

Matrizes de massa e de rigidez reduzidas são usadas para simular componentes ligados para os modos componentes de interface carregada. Para reduzir uma matriz de massa ou de rigidez de um componente devemos fazer com que o movimento das coordenadas internas  $\hat{q}$  sejam forçadas a se moverem apenas com o movimento das coordenadas  $\bar{q}$  da interface (é o conceito de *constraint*). Um modo conveniente para fazer essa transformação é o processo de condensação estática. Como exemplo considere o componente b, na figura 2.5.1.

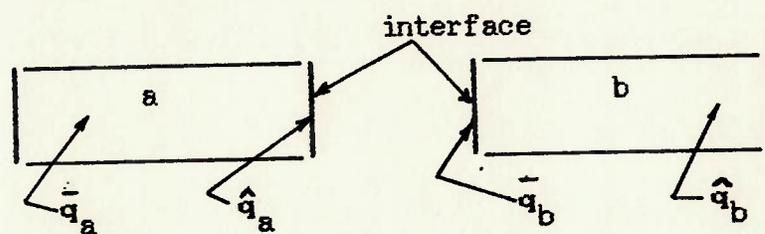


figura 2.5.1 - componentes

Para o componente b, a relação linear entre as forças externas aplicadas e os deslocamentos podem ser escritos:

$$p_b = k_b q_b \quad (1)$$

Vamos particionar as coordenadas do componente  $b$  em dois grupos: um dos grupos,  $\bar{q}_b$ , de coordenadas localizadas na interface de conexão com o componente  $a$ . E o outro,  $\hat{q}_b$ , das coordenadas não localizadas na interface:

$$\begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \hat{p} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_b \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \hat{q} \end{Bmatrix}_b \quad (2)$$

$$\hat{p} = \emptyset \quad (3)$$

$$\hat{q}_b \text{ (para } \hat{p}_b = \emptyset) = \hat{q}_{cb} = T_{cb} \bar{q}_b \quad (4)$$

onde

$$T_{cb} = -k_{22b}^{-1} k_{21b} \quad (5)$$

$$q_b \text{ (para } \hat{p}_b = \emptyset) = \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \hat{q} \end{Bmatrix}_b = T_{rb} \bar{q}_b \quad (6)$$

onde

$$T_{rb} = \begin{bmatrix} I \\ T_{cb} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{Energia Potencial de } b = \frac{1}{2} q_b^T k_b q_b \quad (8)$$

$$\text{En. Potencial de } b \text{ restringido} = \frac{1}{2} \bar{q}_b^T \bar{k}_b \bar{q}_b \quad (9)$$

onde

$$\bar{k}_b = T_{rb}^T k_b T_{rb} \quad (10)$$

matriz de rigidez do componente  $b$  em termos das coordenadas interfaciais

De maneira análoga para a massa:

$$\text{Energia Cinética de } b = \frac{1}{2} \dot{q}_b^T m_b \dot{q}_b \quad (11)$$

$$\text{En. Cinética de } b \text{ restringido} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}_b^T \bar{m}_b \dot{\bar{q}}_b \quad (12)$$

onde

$$\bar{m}_b = T_{rb}^T m_b T_{rb} \quad (13)$$

matriz de massa do componente  $b$  em termos das coordenadas interfaciais

### 2.5.3 Modos Componentes Usando Carga de Inércia e Rigidez Interfaciais

Vamos aqui utilizar as matrizes de massa e de rigidez reduzidas que foram deduzidas no item anterior.

Os modos-componentes que incluem carga de inércia e rigidez interfaciais são utilizados para melhorar a precisão dos resultados obtidos para o sistema.

A energia potencial total para os componentes  $\alpha$  e  $b$  desacoplados podem ser escritos na seguinte forma:

$$(PE)_T = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{k}_a \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T \mathbf{k}_b \mathbf{q}_b \quad (14)$$

Na interface dos dois componentes as coordenadas são idênticas:

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{q}}_b \quad (15)$$

assumindo que as duas coordenadas estejam no mesmo sistema de coordenadas de referência.

Portanto, a transformação de coordenadas que liga os componentes  $a$  e  $b$  fica:

$$\bar{\mathbf{q}}_b = \mathbf{T}_L \mathbf{q}_a = [\mathbf{I} \ 0] \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{array} \right\}_a \quad (16)$$

A transformação de redução, eq. (6), e a transformação de acoplamento, eq. (16), podem ser substituídas na eq. (14) para obtermos a energia potencial total do sistema ligado,  $(PE)^a$ :

$$(PE)^a = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T \mathbf{k}^a \mathbf{q}_a \quad (17)$$

onde,

$$\mathbf{k}^a = \mathbf{k}_a + \mathbf{T}_L^T \bar{\mathbf{k}}_b \mathbf{T}_L \quad (18)$$

Vemos que a matriz de rigidez reduzida, anteriormente definida na eq. (10), aparece na eq. (18).

A energia cinética do sistema ligado,  $(KE)^a$ , é determinado numa maneira similar:

$$(KE)^\alpha = \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha^T m^\alpha \dot{q}_\alpha \quad (19)$$

onde,

$$m^\alpha = m_\alpha + T_L^T \bar{m}_b T_L \quad (20)$$

e onde a matriz previamente definida pela eq. (13) aparece na eq. (20).

As equações homogêneas de movimento para o sistema ligado não-amortecido podem ser facilmente formadas a partir das expressões de energia potencial e cinética pela sua substituição nas equações de Lagrange, que resulta em:

$$m^\alpha \ddot{q}_\alpha + k^\alpha q_\alpha = 0 \quad (21)$$

A solução de autovalor da eq. (21) produz a transformação de substituição modal:

$$q_\alpha = \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \hat{q} \end{Bmatrix}_\alpha = \Phi_\alpha \xi_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \hat{\Phi} \end{bmatrix}_\alpha \xi_\alpha \quad (22)$$

A eq. (22) e seus correspondentes autovalores representam os modos do componente  $\alpha$ , e incluem os efeitos dinâmicos aproximados do componente  $b$ . Os modos-componentes determinados desta maneira aproximam-se dos modos do sistema. Utilizando este tipo de modos-componentes a precisão dos resultados do sistema melhora substancialmente. A substituição por modos-componentes mostrada na eq. (22) pode também ser determinada sem as matrizes de massa e de rigidez reduzidas do componente  $b$ . Todas as substituições subsequentes por modos-componentes podem ser feitas usando modos que

foram obtidos tanto com ou sem a carga de interface. Quando a carga de interface não for usada deve-se deletar as eqs. (10) e (13).

O procedimento acima ilustra o conceito de carga de rigidez e de massa interfacial do componente  $\alpha$ . Para o caso geral de se incluir mais componentes, o componente  $b$  representa todos os outros componentes do tramo acoplados juntos.

#### 2.5.4 - Modos do Sistema Utilizando Modos-tramos de Componentes Restringidos

No método de Substituição por Modos-componentes usando componentes-tramos restringidos, um componente é escolhido como o corpo principal e todos os outros são chamados de componentes-tramos. As coordenadas de cada tramo são então transformadas sucessivamente em coordenadas do corpo principal. O corpo principal é considerado como livre-livre, e portanto usam-se os modos-componentes livre-livres (incluindo modos de corpo-rígido). Os modos-componentes dos tramos são determinados com a interface entre o tramo e o corpo principal mantida fixa (Fig. 2.5.2).

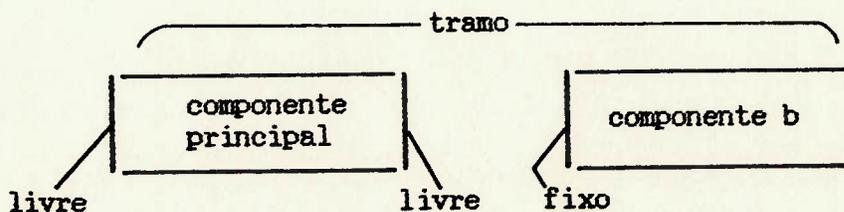


Fig. 2.5.2 - Interface entre o tramo e o corpo principal

O método para acoplar os componentes formando o sistema será por uma transformação de coordenadas que transforme as coordenadas dos componentes desacoplados naquelas do sistema acoplado, onde os modos-componentes são referenciados como coordenadas generalizadas. Esta transformação é feita através da combinação de uma série de transformações intermediárias.

Para o componente  $b$  introduz-se um novo conjunto de coordenadas generalizadas. Segundo os autores, de acordo com Bajan e Feng [BAJAN; FENG 1968], os deslocamentos não interfaciais do componente  $b$  podem ser expressos como uma superposição de deslocamentos dos modos vinculados e de modos-normais de interface-fixa. Os modos vinculados são definidos como um conjunto de deslocamentos elásticos e de corpo-rígido que ocorrem nas coordenadas não interfaciais  $\hat{q}$  devido a deslocamentos unitários sucessivos nas coordenadas interfaciais  $\bar{q}$ . Esta definição foi utilizada para definir  $\hat{q}_{cb}$  na eq. (4). Daqui, as colunas da matriz  $T_{cb}$  (vide a eq. (4)) são os modos de restrição. Os deslocamentos de modos-normais de interface fixa  $\hat{q}_n$  definem os deslocamentos elásticos das coordenadas não interfaciais  $\hat{q}$  em relação às coordenadas interfaciais fixas  $\bar{q}$ . Estas relações podem ser usadas para expressar os deslocamentos não interfaciais do componente  $b$  como:

$$\hat{q}_b = \hat{q}_{cb} + \hat{q}_{nb} \quad (23)$$

Então, das equações (23) e (4), a transformação dos modos vinculados  $T_1^c$  pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_a^- \\ q_a^+ \\ q_b^- \\ q_b^+ \\ q_{nb} \end{Bmatrix} = T_1^c \begin{Bmatrix} q_a^- \\ q_a^+ \\ q_b^- \\ q_b^+ \\ q_{nb} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

onde

$$T_1^c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & T_{cb} & I \end{bmatrix} \quad (25)$$

Observe que não há introdução de outras coordenadas além das que já existem (as internas e interfaciais) como no método de Hurty.

Os componentes  $a$  e  $b$  são acoplados juntos pela relação mostrada na eq. (15). Desta equação, a transformação de acoplamento do componente  $a$  para o componente  $b$ ,  $T_2^c$ , pode ser formada como

$$\begin{Bmatrix} q_a^- \\ q_a^+ \\ q_b^- \\ q_b^+ \\ q_{nb} \end{Bmatrix} = T_2^c \begin{Bmatrix} q_a^- \\ q_a^+ \\ q_b^- \\ q_b^+ \\ q_{nb} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

onde

$$T_2^c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (27)$$

As equações (24) e (26) podem, então, serem combinadas na

transformação chamada de  $T_3^c$ :

$$\begin{Bmatrix} \hat{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \hat{q}_b \\ \hat{q}_b \end{Bmatrix} = T_3^c \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \hat{q}_{nb} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

onde

$$T_3^c = T_1^c T_2^c \quad (29)$$

A equação (28) define o movimento completo dos componentes  $a$  e  $b$  acoplados em termos das coordenadas do componente  $a$  e das coordenadas de modos-normais de interface-fixa do componente  $b$ .

No caso geral onde houver mais de dois componentes, deve-se fazer mais particionamentos interfaciais, e as eqs. (24)-(29) serão usadas sucessivamente, começando do mais remoto tramo até que todos os componentes sejam acoplados.

Os deslocamentos de modos-normais de interface-fixa do componente  $b$ ,  $\hat{q}_{nb}$ , podem ser calculados via substituição de modos componentes usando modos de interface fixa. As equações de movimento de interface fixa para o componente  $b$  não amortecido pode ser escrito como:

$$m_{22_b} \ddot{\hat{q}}_b + k_{22_b} \hat{q}_b = 0 \quad (30)$$

A solução de autovetor da eq. (30) produz a seguinte substituição modal para a interface fixa do componente  $b$ :

$$\hat{q}_b \text{ (para } \bar{q}_b = 0 \text{ e } \dot{\bar{q}}_b = 0) = \hat{q}_{nb} = \hat{\Phi}_b^c \xi_b^c \quad (31)$$

Podemos agora efetuar as substituições por modos-componentes para ambos os componentes  $\alpha$  e  $b$ . Das eqs. (22) e (31), a combinada transformação de substituição por modos-componentes,  $T_4^c$ , pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ q_a \\ \hat{q}_{nb} \end{Bmatrix} = T_4^c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} \quad (32)$$

onde

$$T_4^c = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}_b^c \end{bmatrix} \quad (33)$$

Para o caso geral de se existirem mais de dois componentes, as eqs. (32) e (33) são expandidas para incluir as substituições por modos vinculados para todos os tramos.

O sistema de transformação de coordenadas  $T_5^c$ , que irá transformar as coordenadas discretas desacopladas dos componentes  $\alpha$  e  $b$  naquelas do sistema acoplado na qual os modos-componentes são descritos na forma de coordenadas generalizadas, pode agora ser formada. As eqs. (28) e (32) podem ser combinadas para formarem

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ q_a \\ \bar{q}_b \\ \hat{q}_b \\ q_b \end{Bmatrix} = T_5^c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} \quad (34)$$

onde

$$T_5^c = T_3^c T_4^c = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ \Phi_a & 0 \\ T_{cb} & \hat{\Phi}_b^c \end{bmatrix} \quad (35)$$

Da transformação de coordenadas do sistema definida pela eq. (34), os modos do sistema podem ser determinados. A energia potencial total para os componentes desacoplados  $a$  e  $b$  podem ser escritos da eq. (14) na forma:

$$(PE)_T = \frac{1}{2} [q_a^T \ q_b^T] \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Usando as eqs. (36) e (34), a energia potencial para o sistema acoplado que contém apenas as coordenadas de modos-componentes pode ser formado como:

$$(PE)_{ab} = \frac{1}{2} [\xi_a^T \ \xi_b^c] K_c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde

$$K^c = T_5^{cT} \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} T_5^c \quad (38)$$

Tomando a derivada no tempo da eq. (34), a matriz de massa

modal do sistema pode ser formada da energia cinética numa maneira similar:

$$(KE)_{ab} = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_a^T \dot{\xi}_b^T] M_c \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_a \\ \dot{\xi}_b \end{Bmatrix} \quad (39)$$

onde

$$M^c = T_s^{cT} \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} T_s^c \quad (40)$$

As equações homogêneas do movimento não amortecido para o sistema pode ser escrito usando apenas coordenadas de modos-componentes das eqs. (37) e (39); assim:

$$M^c \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_a \\ \ddot{\xi}_b \end{Bmatrix} + K^c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = 0 \quad (41)$$

A solução de autovalor da eq. (41) produz a seguinte transformação por substituição modal para o sistema:

$$\begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = \Phi_m^c \xi_m^c \quad (42)$$

Os deslocamentos dos componentes  $a$  e  $b$  são obtidos pela substituição da eq. (42) na eq. (34), que resulta em:

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \Phi_D^c \xi_m^c \quad (43)$$

onde

$$\Phi_D^c = T_5^c \Phi_m^c \quad (44)$$

A eq. (44) representa os deslocamentos dos modos do sistema.

É interessante notar que a combinação das equações (28) e (36) resulta em:

$$(PE)_{ab} = \frac{1}{2} [\bar{q}_a^T \quad \hat{q}_a^T \quad q_{nb}^T] k_{ab}^c \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ q_{nb} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

onde

$$k_{ab}^c = T_3^c \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} T_3^c \quad (46)$$

Expandindo a eq. (46), temos:

$$k_{ab}^c = \left[ \begin{array}{cc|c} k_{11a} + \bar{k}_b & k_{12a} & 0 \\ k_{21a} & k_{22a} & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_{22b} \end{array} \right] \quad (47)$$

Uma inspeção da eq. (47) mostra que as propriedades de rigidez reduzida do componente  $b$ , anteriormente definida pela eq. (10), foi somada na partição superior esquerda, e que a matriz de rigidez restringida para o componente  $b$  ocorre na partição inferior direita. Não ocorre nenhum termo de acoplamento entre os componentes  $a$  e  $b$ ;

ao invés disso, há acoplamento entre os dois componentes apenas na matriz de massa correspondente do sistema. Daí que esta parte do método possa ser chamada de "acoplamento inercial generalizado".

Deve-se notar também que os modos-componentes substituídos na eq. (33) para o componente  $\alpha$  não precisam ser os modos com carga de rigidez e de massa interfaciais da eq. (22). Qualquer grupo de modos-componentes pode ser usado no componente  $\alpha$ . Contudo, se os modos com carga de massa e de rigidez interfaciais definidos pela eq. (22) forem utilizadas, a eq. (37) será expandida para a forma:

$$(PE)_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_a^T & \xi_b^c{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^\alpha & 0 \\ 0 & K_b^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} \quad (48)$$

onde

$$K^\alpha = \Phi_a^T k^\alpha \Phi_a = [\beta_i \omega_i^2]_a \quad (49)$$

e

$$K_b^c = \hat{\Phi}_b^c{}^T k_{22b} \hat{\Phi}_b^c = [\beta_i \omega_i^2]_b \quad (50)$$

A matriz de rigidez modal  $K^c$ , definida pela eq. (38) tornar-se-á diagonal devido às propriedades ortogonais dos modos.

### 2.5.5 Modos do Sistema Usando Modos-componentes Livre-livres

Nesta parte do método da substituição por modos-componentes vamos usar os modos-componentes livre-livres para todos os componentes ou subestruturas (incluindo modos de corpo-rígido).

O componente  $b$  é acoplado ao componente  $a$  usando a eq. (15)

para formar a transformação de acoplamento,  $T_2$ , que pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \bar{q}_b \\ \hat{q}_b \end{Bmatrix} = T_2 \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \bar{q}_b \\ \hat{q}_b \end{Bmatrix} \quad (51)$$

onde

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (52)$$

Quando houver mais de dois componentes, deve-se fazer mais particionamentos. A eq. (51) é expandida para acoplar todos os componentes juntos.

Os modos livre-livres do componente  $\alpha$  que contém os efeitos das matrizes de massa e de rigidez reduzidas do componente  $\beta$  estão mostradas na eq. (22). De maneira similar, os modos livre-livres do componente  $\beta$  são determinados de forma que contenham os efeitos das matrizes de massa e de rigidez reduzidas do componente  $\alpha$ :

$$q_b = \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \hat{q} \end{Bmatrix}_b = \Phi_b \xi_b = \begin{Bmatrix} \bar{\Phi} \\ \hat{\Phi} \end{Bmatrix}_b \xi_b \quad (53)$$

A transformação por substituição modal do componente  $\beta$  escrita da partição inferior da eq. (53) torna-se:

$$\hat{q}_b = \hat{\Phi}_b \xi_b \quad (54)$$

Substituições por modos-componentes são possíveis para ambos os componentes. A combinação da transformação da substituição por modos-componentes  $T_4$  para os componentes  $\alpha$  e  $b$  é formada a partir das eqs. (22) e (54) como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = T_4 \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} \quad (55)$$

onde

$$T_4 = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}_b \end{bmatrix} \quad (56)$$

No caso de haver mais de dois componentes, as eqs. (55) e (56) são expandidas para incluírem substituições adicionais por modos-componentes para todas as subestruturas do sistema.

A matriz de transformação de coordenadas do sistema,  $T_5$ , irá transformar as coordenadas desacopladas dos componentes  $\alpha$  e  $b$  naquelas do sistema acoplado. As eqs. (51) e (55) podem ser combinadas para formarem:

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \bar{q}_b \\ \hat{q}_b \end{Bmatrix} = T_5 \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} \quad (57)$$

onde

$$T_5 = T_2 T_4 = \begin{bmatrix} \Phi_a^- & 0 \\ \Phi_a^+ & 0 \\ \Phi_a^- & 0 \\ 0 & \Phi_b^+ \end{bmatrix} \quad (58)$$

Usando a transformação de coordenadas do sistema definida pela eq. (57), os modos do sistema podem ser achados. A energia potencial total do sistema pode ser determinada pela combinação das eqs. (57) e (36):

$$(PE)_{ab} = \frac{1}{2} [\xi_a^T \quad \xi_b^T] K \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} \quad (59)$$

onde

$$K = T_5^T \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} T_5 \quad (60)$$

Tomando a derivada no tempo da eq. (57), a matriz de massa modal do sistema pode ser formada da energia cinética numa maneira similar:

$$(KE)_{ab} = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_a^T \quad \dot{\xi}_b^T] M \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_a \\ \dot{\xi}_b \end{Bmatrix} \quad (61)$$

onde

$$M = T_5^c \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} T_5 \quad (62)$$

As equações homogêneas do movimento não-amortecido do sistema

podem ser escritas usando apenas as coordenadas dos modos-componentes livre-livres a partir das eqs. (59) e (61):

$$M \begin{Bmatrix} \ddots \\ \xi_a \\ \ddots \\ \xi_b \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = \emptyset \quad (63)$$

A solução de autovetor para a eq. (63) produz a seguinte transformação de substituição modal:

$$\begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = \Phi_m \xi_m \quad (64)$$

Deslocamentos dos componentes  $a$  e  $b$  são determinados pela substituição da eq. 64 na eq. 57, e resulta em:

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \Phi_D \xi_m \quad (65)$$

onde

$$\Phi_D = T_{\psi} \Phi_m \quad (66)$$

A eq. (66) representa os deslocamentos componentes dos modos do sistema.

Para algumas aplicações pode ser útil determinar apenas as coordenadas de translação. Se houver coordenadas de rotação, estas serão misturadas com as coordenadas dos modos componentes nas eqs. (41) e (63). As coordenadas de rotação podem ser subsequentemente eliminadas de uma maneira semelhante às eqs. (2 - 7) pela

determinação de uma transformação de redução que usará as matrizes de rigidez  $K^c$  ou  $K$ . esta transformação é, então, utilizada nas eqs. (37, 39, 59 e 61) para deixar apenas as coordenadas dos modos componentes.

No caso de se aplicar o método para mais de dois componentes citamos dois métodos. O primeiro consiste em acoplar todos eles simultaneamente, conforme se tem indicado no desenvolvimento precedente (vide [HOLZE; BORESI 1975]). O outro, que é útil para quando houver uma maior restrição na memória do computador, consiste em calcular em *casca*, sucessivamente. Inicialmente dois componentes são acoplados e, então, são considerados como um. Usando as suas novas matrizes de rigidez e de massa juntamos o componente seguinte, e assim por diante.

Um aspecto interessante ao se utilizar este método é a possibilidade de se combinar tanto componentes restringidos como livres simultaneamente. Isto, contudo, deve ser feito com cuidado e requer um completo entendimento do método.

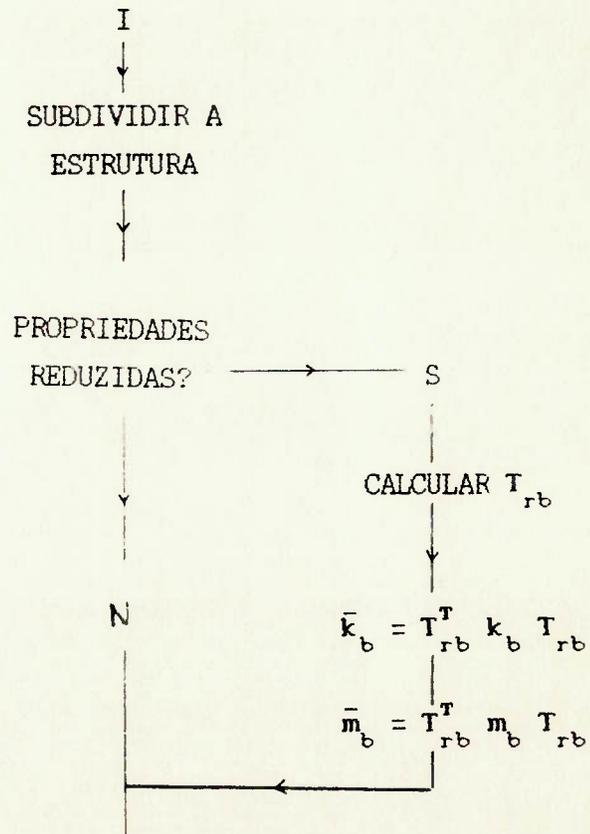
O estudo de alguns casos levou à conclusão de que os resultados obtidos utilizando modos-tramos de componentes restringidos são geralmente mais precisos, especialmente nos modos mais altos, do que os resultados obtidos usando modos componentes livre-livres.

A carga de interface nos modos-componentes inicialmente melhorou os modos mais baixos e, para os modos mais altos no caso livre-livre não se chegou a conclusão nenhuma. A melhora na precisão obtida pelo uso dos modos-componentes com carga interfacial diminuiu com o aumento no número de modos-componentes.

Em geral, para o mesmo número de modos-componentes, resultados mais precisos são obtidos usando modos com carga de interface.

A partir do trabalho de Benfield e Hruda não se compreende muito bem a utilidade dos *branch components* e, de fato, em trabalhos posteriores (tais como [KARDESTUNCER; NORRIE 1987] ou [HOLZE; BORESI 1975]) quase não se dá importância nenhuma a esses componentes compostos, trabalhando-se apenas com as próprias subestruturas.

#### 2.5.6 Algoritmo do método da Substituição por modos componentes



$$\bar{k}_b = \emptyset; \bar{m}_b = \emptyset$$

CALCULAR MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO  
DE COORDENADAS E DE LIGAÇÃO

$$(\bar{q}_a = \bar{q}_b)$$

$$T_L = [I \ 0]$$

$$k^a = k_a + T_L^T \bar{k}_b T_L$$

$$m^a = m_a + T_L^T \bar{m}_b T_L$$

RESOLVER

$$m^a \dot{q}_a + k^a q_a = \emptyset$$

MODOS TRAMOS DE  
COMPONENTES  $\longrightarrow$  N (2)  
RESTRINGIDOS?

S

$$m_{22_b} \hat{\dot{q}}_b + k_{22_b} \hat{q}_b = \emptyset$$

$$\hat{q}_{nb} = \hat{\Phi}_b^c \xi_b^c$$

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_a \\ q_b \\ q_b \end{Bmatrix} = T_5^c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix}$$

$$T_5^c = T_3^c T_4^c = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ T_{cb} \hat{\Phi}_a & \hat{\Phi}_b^c \end{bmatrix}$$

$$K^c = T_5^{cT} \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} T_5^c$$

$$M^c = T_5^{cT} \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} T_5^c$$

RESOLVER

$$M^c \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_a \\ \ddot{\xi}_b^c \end{Bmatrix} + K^c \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} = \Phi_m^c \xi_m^c$$

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \Phi_D^c \xi_m^c$$

$$\Phi_D^c = T_5^c \Phi_m^c$$

F

CONTINUAÇÃO DO ALGORITMO A PARTIR DE (2):

MODOS COMPONENTES

LIVRE-LIVRES

RESOLVER

$$m_{22_b} \hat{\hat{q}}_b + k_{22_b} \hat{q}_b = 0$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_a \\ \hat{q}_a \\ \bar{q}_b \\ \hat{q}_b \end{Bmatrix} = T_5 \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix}$$

$$T_5 = T_2 T_4 = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_a & 0 \\ \hat{\Phi}_a & 0 \\ \bar{\Phi}_b & 0 \\ \hat{\Phi}_b & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = T_5^T \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} T_5$$

$$M = T_5^c \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} T_5$$

$$M \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$
$$\begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{Bmatrix} = \Phi_m \xi_m$$

$$\downarrow$$
$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \Phi_D \xi_m$$

$$\downarrow$$
$$\Phi_D = T_s \Phi_m$$

$$\downarrow$$
$$F$$

## 2.5.7 Exemplo manual

\*Seja o sistema da figura 2.5.7.1 abaixo:

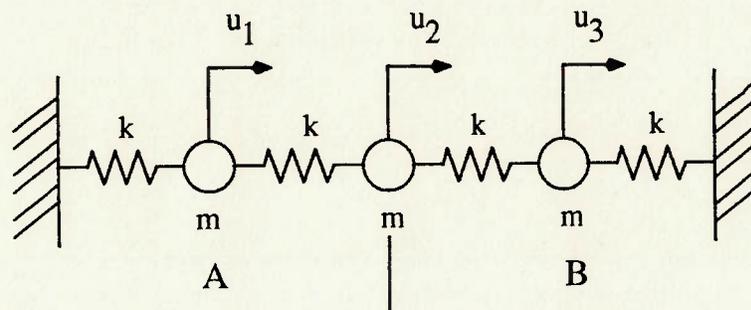


Fig. 2.5.7.1 - Sistema massa-mola

Matrizes de rigidez, de massa e vetor deslocamento:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} k \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Autopares:

$$\lambda_1 = 0.585786 \quad \lambda_2 = 2.000000 \quad \lambda_3 = 3.414214$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.414214 \\ 1.000000 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ -1.414214 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

Por simplicidade vamos particionar o sistema em duas subestruturas simétricas:

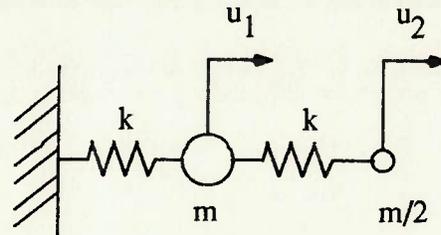


Fig. 2.5.7.2 - Subestrutura  $\alpha$

$$m_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m \quad k_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} k \quad u_{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

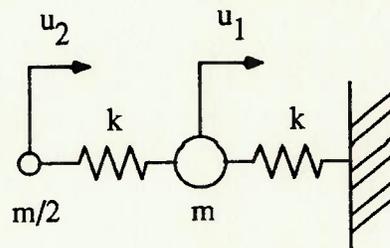


Fig. 2.5.7.3 - Subestrutura  $b$

$$m_b = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m \quad k_b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} k \quad u_b = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

$$T_{cb} = (-2)^{-1} \cdot -1 = 1/2$$

$$T_{rb} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{k}_b = k/2$$

$$\bar{m}_b = 9m/8$$

$$T_L = [1 \ 0]$$

$$k^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} k + [1 \ 0]^T k/2 [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} k$$

$$m^\alpha = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m + [1 \ 0]^T 9m/8 [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 13/8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m$$

$$m^\alpha \ddot{q}_\alpha + k^\alpha q_\alpha = 0$$

A solução da equação acima é:

$$\lambda_{1\alpha} = 0.510053k/m$$

$$\lambda_{2\alpha} = 2.413024k/m$$

$$\phi_{1\alpha} = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.671165 \end{Bmatrix} \quad \phi_{2\alpha} = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -2.421165 \end{Bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}_\alpha = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 \\ 0.671165 & -2.421165 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{\alpha 2} \\ \xi_{\alpha 1} \end{Bmatrix}$$

Podemos reter um ou dois modos.

\*Modos-tramos de componentes restringidos:

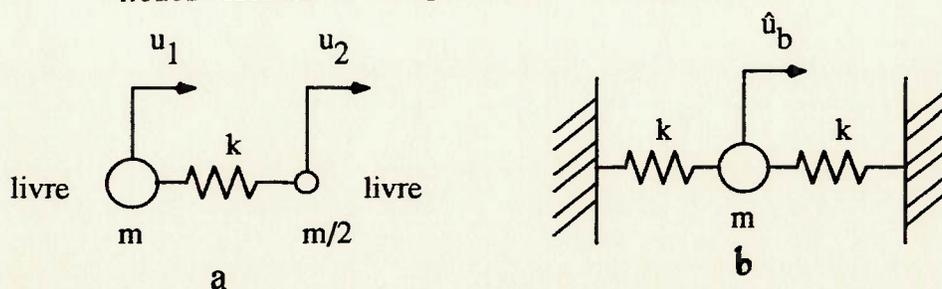


Fig. 2.5.7.4 - Configuração do tramo

$$\begin{Bmatrix} u_{2a} \\ u_{1a} \\ u_{2b} \\ u_{1b} \end{Bmatrix} = \overset{T_1^c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} u_{2a} \\ u_{1a} \\ u_{2b} \\ \hat{u}_{nb} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{2a} \\ u_{1a} \\ u_{2b} \\ \hat{u}_{nb} \end{Bmatrix} = \overset{T_2^c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} u_{2a} \\ u_{1a} \\ \hat{u}_{nb} \end{Bmatrix}$$

pois  $u_{2b} = u_{2a}$

$$T_3^c = T_1^c T_2^c$$

$$T_3^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A parte b do tramo tem como autopar:

$$\lambda_{1b} = 2k/m \quad \phi_{1b} = \{ 1 \} = \hat{\phi}_b^c$$

$$\hat{u}_{nb} = \{ 1 \} \xi_b^c$$

Assim,

$$T_4^c$$

$$\begin{Bmatrix} u_{2a} \\ u_{1a} \\ \hat{u}_{nb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_a & 0 \\ \hat{\phi}_a & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_b^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_a \\ \xi_b^c \end{Bmatrix}$$

Caso retenhamos todos os modos,  $T_4^c$  será:

$$T_4^c = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.671165 & -2.421165 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$T_5^c = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.671165 & -2.421165 & 0.000000 \\ 1.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.500000 & 0.500000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$K^c = \begin{bmatrix} 1.058595 & -0.000002 & 0.000000 \\ -0.000002 & 18.066410 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 2.000000 \end{bmatrix}$$

$$M^c = \begin{bmatrix} 1.700462 & -0.375001 & 0.500000 \\ -0.375001 & 7.112040 & 0.500000 \\ 0.500000 & 0.500000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$M^c \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_{a1} \\ \ddot{\xi}_{a2} \\ \ddot{\xi}_b^c \end{Bmatrix} + K^c \begin{Bmatrix} \xi_{a1} \\ \xi_{a2} \\ \xi_b^c \end{Bmatrix} = 0$$

Ao resolver o problema de autovalor acima, teremos:

$$\lambda_1 = 0.585787 \quad \lambda_2 = 2.000000 \quad \lambda_3 = 3.414214$$

$$\phi_{1m}^c = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -0.011490 \\ 0.204727 \end{Bmatrix} \quad \phi_{2m}^c = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -1.000000 \\ -3.092331 \end{Bmatrix} \quad \phi_{3m}^c = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.804098 \\ -2.177738 \end{Bmatrix}$$

Da equação (44),

$$\Phi_D^c = \begin{bmatrix} 0.988510 & 0.000000 & 1.804098 \\ 0.698984 & 3.092331 & -1.275689 \\ 0.988510 & 0.000000 & 1.804098 \\ 0.698982 & -3.092331 & -1.275689 \end{bmatrix}$$

e utilizando a equação (43) considerando que  $u_{2a} = u_{2b}$ , temos:

$$\Phi_{\text{ sistema}} = \begin{bmatrix} 0.698984 & 3.092331 & -1.275689 \\ 0.988510 & 0.000000 & 1.804098 \\ 0.698984 & -3.092331 & -1.275689 \end{bmatrix}$$

que é equivalente a:

$$\Phi_{\text{ sistema}} = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 1.414210 & 0.000000 & -1.414215 \\ 1.000000 & -1.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

O resultado acima é bastante preciso, mas, devemos lembrar que retivemos todos os dois modos normais. Ao utilizarmos apenas o primeiro modo, chegamos aos seguintes resultados:

$$\lambda_1 = 0.586723 \quad \lambda_2 = 2.487828$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.489947 \\ 1.054250 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 1.489946 \\ -3.0542470 \end{Bmatrix}$$

Observa-se o primeiro modo é preciso até a primeira casa decimal, e quanto ao segundo a imprecisão é bastante razoável.

## 2.6 Método de Gladwell (*Branch Mode Analysis*)

A característica essencial do *Branch Mode Method* (ou Método dos Modos dos Tramos, traduzindo-se literalmente) é o agrupamento dos modos componentes em subgrupos chamados "tramos" e cuja "soma" por Rayleigh-Ritz utilizando os modos obtidos a partir desses tramos leva ao movimento aproximado do sistema. Assim, para o sistema existem vários tramos, independentemente do número de subestruturas, e cada um deles fornece um conjunto de modos componentes (Vide a figura 2.6.1).

Estes tramos têm características especiais que o diferenciam de um mero componente: cada tramo ou é flexível ou é rígido em seu todo, e, ou é livre ou fixo nas suas interfaces.

Um sistema de tramos deve estar completo, isto é, deve ser possível expressar qualquer movimento do sistema como uma soma do movimento dos vários tramos.

Apresentamos a seguir a escolha dos tramos apresentada por Gladwell.

### 2.6.1 - Escolha dos tramos:

A escolha dos tramos é, talvez, a etapa mais importante de todo o método. Vamos mostrar em sistemas simples para depois ser generalizado para sistemas mais complicados.

#### (i) Sistemas de dois componentes livre-livres

Suponhamos um sistema composto de duas vigas, B e C. Suponhamos também que a viga B tenha  $(n + 1)$  graus de liberdade e que a viga C tenha  $(n' + 1)$ . Ao unirmos as duas vigas teremos (vide a fig. 2.6.1)

$$(n + 1) + (n' + 1) - 2 \text{ graus de liberdade}$$

ou

$$n + n' \text{ graus de liberdade}$$

pois há dois movimentos de corpo rígido na viga: um de translação

transversal e outro de rotação; ao unirmos as duas vigas, os dois graus de liberdade da viga B na junção fundem-se com os dois da viga C, restando, portanto  $(n + n')$  graus de liberdade.

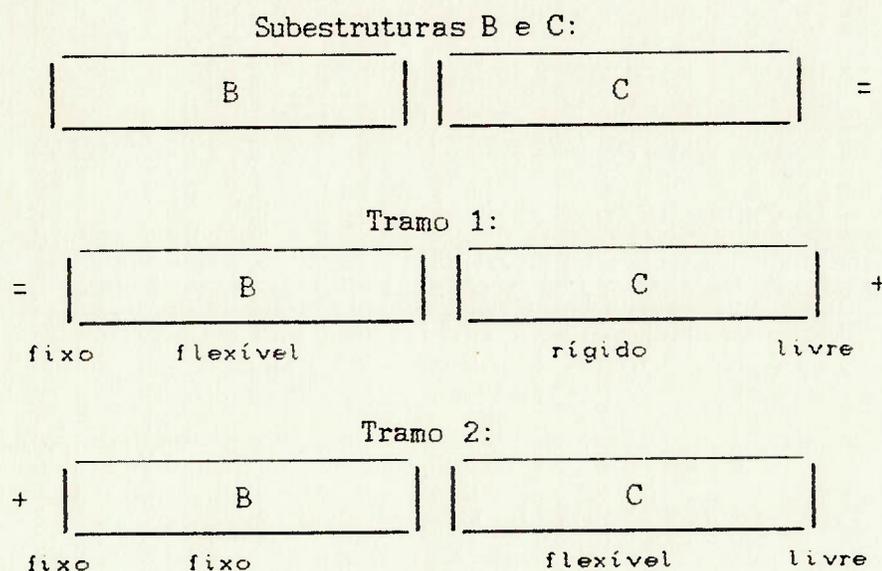


Fig. 2.6.1 - Representação dos tramos B e C: a partir de cada tramo obter-se-á um conjunto de autopares.

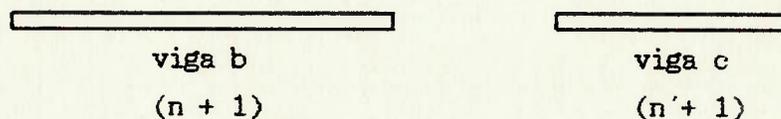


Fig. 2.6.2 - Duas subestruturas

Para encontrarmos um grupo de tramos adequados vamos raciocinar do seguinte modo: para uma análise exata do seu sistema, o seu movimento deve ser descrito em termos de  $(n + n')$  modos linearmente independentes sendo um destes o modo de corpo rígido. Assim, uma apropriada seleção pode ser a seguinte:

Caso  $\alpha$ :

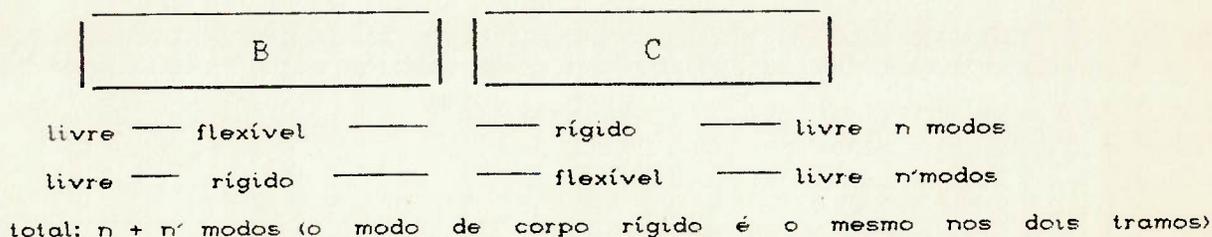


Fig. 2.6.3

ou o caso  $\beta$ :

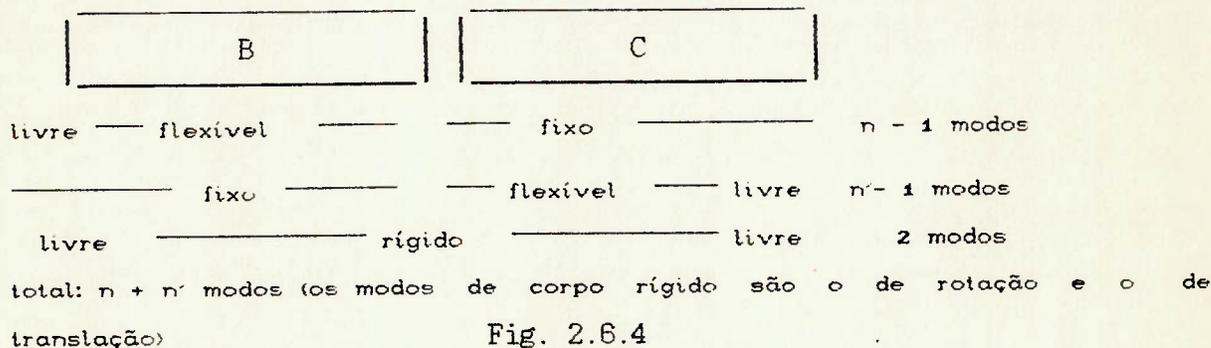


Fig. 2.6.4

Note que tanto o caso  $\alpha$  como o caso  $\beta$  satisfazem o número de graus de liberdade requerido.

No caso  $\alpha$  os modos e as frequências naturais de vibração do sistema BC devem ser calculados nas duas condições indicadas na figura 2.6.3. O caso  $\beta$  requer um cálculo separado do modo de corpo rígido (Fig. 2.6.4).

Observe ainda que, uma vez entendido o raciocínio na determinação dos tramos, facilmente se estende para a situação de mais de dois tramos.

No caso de se ter um dos componentes muito maior que o outro, aconselha-se levar isso em conta e usar a seguinte divisão (Fig. 2.6.5):

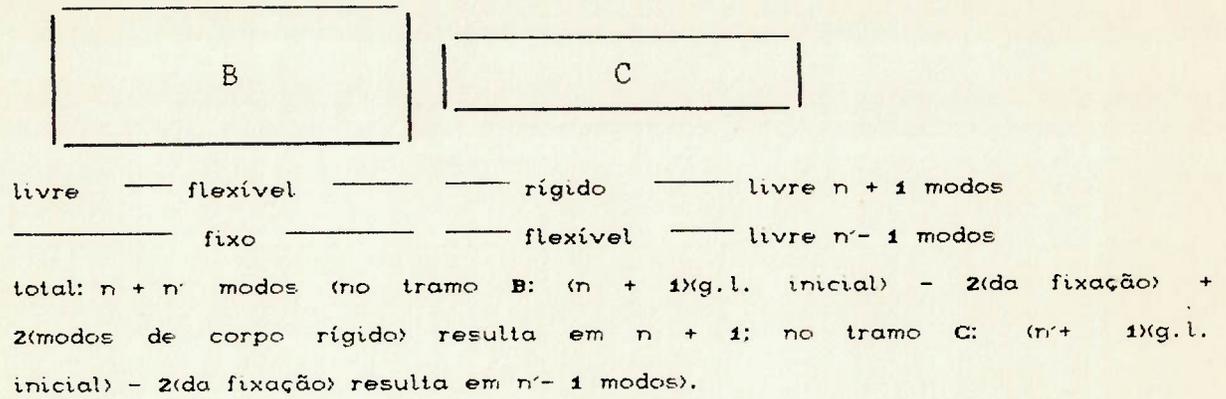


Fig. 2.6.5

(ii) Sistemas de dois componentes fixo-livres

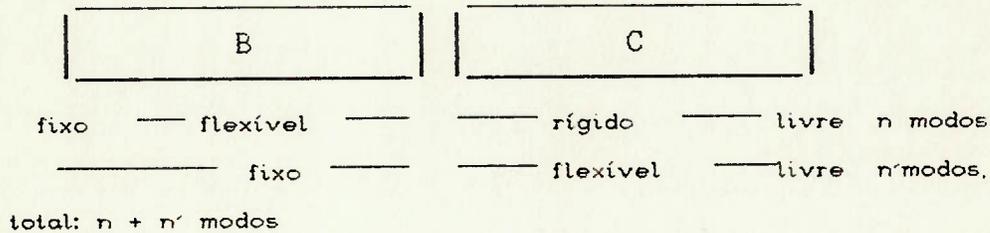


Fig. 2.6.6

(iii) Sistemas de dois componentes fixo-fixos:

Quando o sistema é do tipo fixo-fixo não é possível encontrar uma configuração de apenas dois tramos que satisfaça o número de graus de liberdade necessários (observe a Fig. 2.6.7):

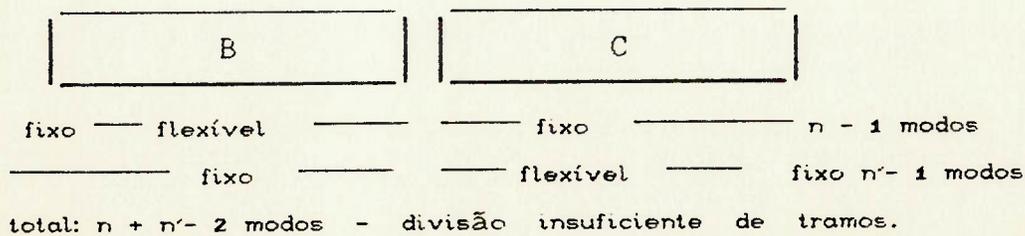


Fig. 2.6.7

A configuração acima permite  $(n + n' - 2)$  modos mas são necessários  $(n + n' - 1)$ . Também ocorre que nessa situação teremos deflexão nula entre os tramos, o que é improvável na prática.

Uma solução para este problema é o de dividir o sistema em 3 partes:

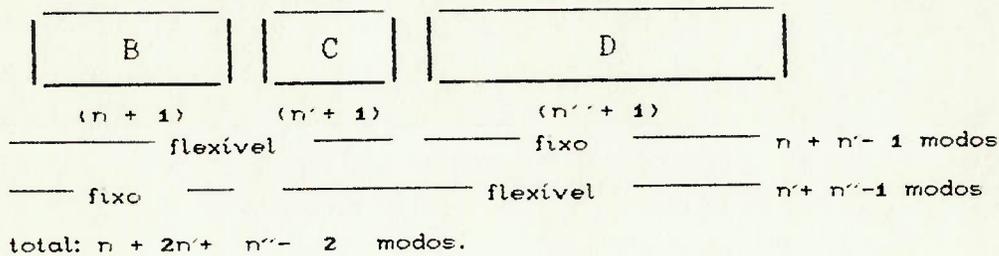


Fig. 2.6.8

Por exemplo, suponha um sistema fixo-fixo de um eixo submetido a torção com 7 graus de liberdade (descontados os dois fixos) na Fig. 2.6.9:

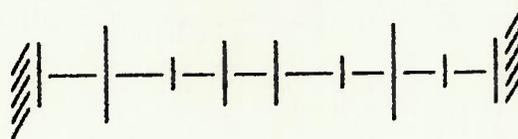


Fig. 2.6.9 - sistema de eixos fixo-fixos



Fig. 2.6.10 - sistema subdividido em três tramos

Subdividindo o sistema em três tramos B, C e D, ficamos com:

Tramo B: 4 graus de liberdade,  $n = 3$

Tramo C: 2 graus de liberdade,  $n' = 1$

Tramo D: 5 graus de liberdade,  $n'' = 4$

Total:  $n + 2n' + n'' - 2 = 3 + 2 * 1 + 4 - 2 = 7$  graus de liberdade, que é o requerido.

(iv) Sistemas com muitos componentes

Os sistemas com mais de dois tramos seguem a análise anterior de forma análoga. Particularmente, sistemas que tenham ao menos um grau de liberdade de corpo rígido podem ser analisados de forma análoga aos de (i)( $\alpha$ ) na Fig. 2.6.3, isto é, assumindo-se que apenas um dos tramos vibre de forma flexível enquanto que os outros permanecem rígidos.

Na análise de um sistema multicomponente do tipo fixo-livre podemos fixar as características de cada tramo da seguinte maneira:

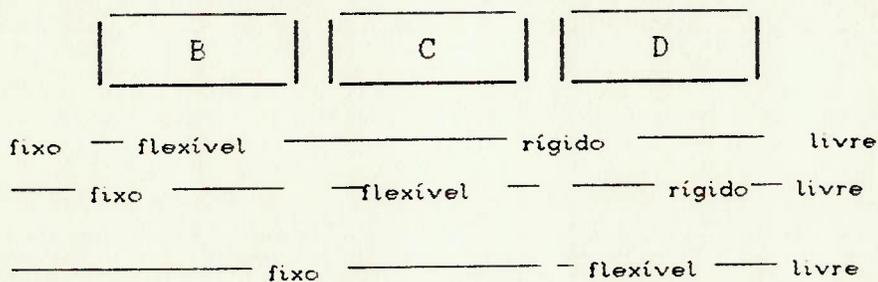


Fig. 2.6.11 - Sistema fixo-livre multicomponente

Uma vez definidos os tramos e suas condições de contorno partimos para o cálculo dos modos de vibrar de cada tramo.

Se o sistema tiver  $n$  graus de liberdade, a matriz dos modos dos tramos (ou matriz modal  $X$ ) terá necessariamente  $n$  linhas. Quanto ao número de colunas, isso depende de quantos modos de cada tramo se vai considerar no cálculo. Vamos chamar o número de modos por tramo de  $m_i$  ( $i = B, C, \dots$  etc.). Assim, a matriz modal  $X$  terá a forma da Fig. 2.6.12:

$$X = [X_o \ X_B \ X_C \ \dots \ X_S] \quad (1)$$

$$\begin{array}{cccccc}
 m_o \text{ colunas} & m_B \text{ colunas} & m_C \text{ colunas} & \dots & m_S \text{ colunas} & \\
 \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
 & \phi_{B1} \ \phi_{B2} \dots & 0 & \dots \ 0 \ \dots & 0 \\
 \phi_{o1} \ \phi_{o2} \dots & 0 & \phi_{C1} \ \phi_{C2} \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & 0 & 0 & 0 & \phi_{S1} \ \phi_{S2} \dots
 \end{array} \right] & (2)
 \end{array}$$

Fig. 2.6.12 - matriz modal do sistema

Gladwell desenvolve o seu trabalho para estruturas em linha, isto é, na configuração em corrente, na qual cada tramo é conectado a dois outros, um de cada lado. Mas o método pode ser extendido para casos em que vários tramos são conectados em um único ponto. sabe-se da sua aplicação em estruturas aeronáuticas.

### 2.6.2 Desenvolvimento do método

O *Branch Mode Method* difere dos métodos tradicionais (Hurty, Craig-Chang) apenas na obtenção dos seus modos.

Os *branch modes* entram no lugar dos modos tradicionais na aproximação de Rayleigh-Ritz.

Considere um sistema de  $n$  graus de liberdade. A energia cinética e potencial são respectivamente:

$$T = 1/2 (\dot{q}^T M \dot{q}) \quad (3a)$$

$$M = 1/2 (q^T K q) \quad (3b)$$

Pelas equações de Lagrange chegamos a um sistema de  $n$  equações

diferenciais (para maiores detalhes vide capítulo do método de Hurty).

Quando  $n$  é muito elevado fazemos a aproximação pelos modos, no caso, os modos dos tramos de forma a obtermos um novo sistema de grau  $m$  ( $m \ll n$ ).

Supondo que o sistema seja subdividido nos tramos B, C, ... S, e que o seu movimento seja representado por  $m_B, m_C, \dots, m_S$  modos, então o número de graus de liberdade do novo sistema reduzido é:

$$m = m_o + m_B + m_C + \dots + m_S \quad (4)$$

vide (Fig. 2.6.12)

definida a matriz modal  $X$  (eq. 11), podemos escrever o vetor  $q$  de deslocamentos físicos na forma:

$$q = X u \quad (5)$$

onde  $u$  representa o vetor  $m$ -dimensional da configuração reduzida.

Introduzindo a eq. (5) na eq. (3a,b) teremos:

$$T = 1/2 (u^T M^* \dot{u}) \quad (6a)$$

$$M = 1/2 (u^T K^* u) \quad (6b)$$

onde

$$M^* = X^T M X \quad (7a)$$

$$K^* = X^T K X \quad (7b)$$

são as matrizes reduzidas de massa e de rigidez. O problema de autovalor correspondente é:

$$K^* U = M^* U \Lambda^m \quad (8)$$

onde  $\Lambda^m$  é a matriz diagonal dos autovalores estimados e  $U$  é a matriz dos autovetores do problema reduzido. Chamando de  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) os

autovetores do problema reduzido, os autovetores do sistema original podem ser obtidos de:

$$q_i = X u_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

Evidentemente estimamos somente os  $m$  primeiros modos do sistema.

Pelo fato de haverem  $m_0$  modos de corpo rígido,  $m_0$  autovetores são nulos. Podemos reduzir o problema de determinação dos autovalores eliminando esses modos de corpo rígido através de um processo similar à condensação estática:

particionando  $X$ :

$$X = [ X_O \mid X_A ] \quad (10)$$

onde

$$X_A = [ X_B \ X_C \ \dots \ X_S ] \quad (11)$$

então

$$M^* = \left[ \begin{array}{c|c} M_{OO} & M_{OA} \\ \hline M_{AO} & M_{AA} \end{array} \right] \quad (12a)$$

$$K^* = \left[ \begin{array}{c|c} K_{OO} & K_{OA} \\ \hline K_{AO} & K_{AA} \end{array} \right] \quad (12b)$$

onde

$$M_{OO} = X_O^T M X_O; \quad M_{OA} = X_O^T M X_A = M_{AO}; \quad M_{AA} = X_A^T M X_A \quad (13a)$$

$$K_{OO} = X_O^T K X_O; \quad K_{OA} = X_O^T K X_A = K_{AO}; \quad K_{AA} = X_A^T K X_A \quad (13b)$$

Da mesma maneira, a partição de  $U$  e  $\Lambda^m$  fica:

$$U = \left[ \begin{array}{c|c} U_{OO} & U_{OA} \\ \hline U_{AO} & U_{AA} \end{array} \right] \quad (14a)$$

$$\Lambda^m = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{m-m_0} \end{array} \right] \quad (14b)$$

onde  $\Lambda^{m-m_0}$  é a matriz de autovalores não nulos. Introduzindo as eqs. (13a,b) e 14a,b) na eq. (9) obtemos:

$$\emptyset = (M_{OO} U_{OA} + M_{OA} U_{AA}) \Lambda^{m-m_0} \quad (15a)$$

$$K_{AA} U_{AA} = (M_{AO} U_{OA} + M_{AA} U_{AA}) \Lambda^{m-m_0} \quad (15b)$$

Além disso,  $K_{AA} U_{AO} = \emptyset$  pois  $U_{AO}$  é parte da matriz representando os modos de corpo rígido. A eq. (15a) pode ser resolvida para  $U_{OA}$ :

$$U_{OA} = -M_{OO}^{-1} M_{OA} U_{AA} \quad (16)$$

que introduzida na eq. (15b) resulta num problema de autovalores mais reduzido ainda:

$$K_{AA} U_{AA} = (M_{AA} - M_{AO} M_{OO}^{-1} M_{OA}) U_{AA} \Lambda^{m-m_0} \quad (17)$$

## 2.6.3 - Um exemplo simples

Vamos agora resolver um exemplo simples de um sistema massa-mola com dois graus-de-liberdade mostrada na figura 2.6.13:

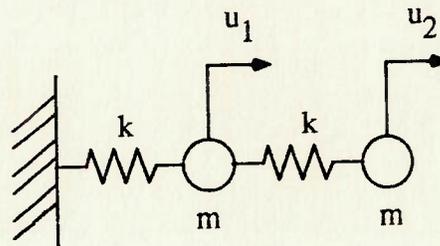


Fig. 2.6.13 - Sistema massa-mola com dois graus-de-liberdade

\*Solução do sistema ("real"):

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$$

\*Solução com subestruturação:

Vamos subdividir o sistema ao meio, conforme a figura 2.6.14:

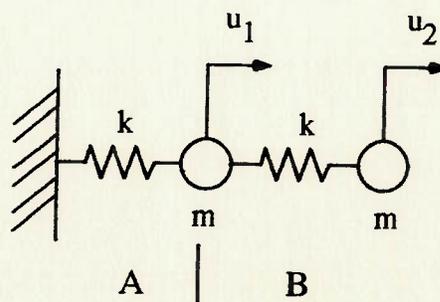


Fig. 2.6.14 - Subdivisão

De acordo com o sistema temos uma estrutura do tipo fixo-livre, e podemos, então, adotar os tramos mostrados na figura 2.6.5, e teremos então:

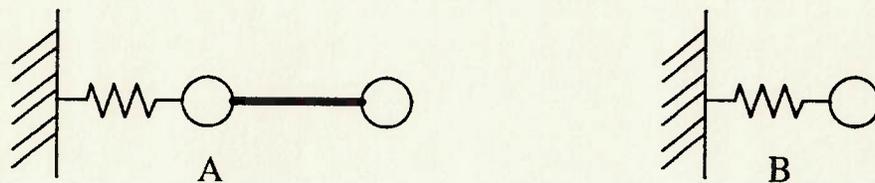


Fig. 2.6.15 - Tramos escolhidos

Do tramo A temos:

$$\lambda_A = \sqrt{k/2m}$$

$$\phi_A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e do tramo B:

$$\lambda_B = \sqrt{k/2m}$$

$$\phi_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

De acordo com a equação (1):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, segundo as equações (6):

$$M^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad K^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, então, o problema de autovalor com estas novas matrizes

(segundo a equação (8)), e retro-transformando os autovetores pela equação (9), obtemos como resposta:

$$\lambda_1^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi_1^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{array} \right\}$$

$$\lambda_2^* = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi_2^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right\}$$

e são os mesmos resultados comparados aos "reais".



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m$$

A solução deste problema de autovalor requer trabalharmos com matrizes de grau-de-liberdade 10. Os resultados deste problema estão na tabela 3.1 de comparação dos resultados. Chamaremos aos autopares obtidos sem subestruturação de "reais".

### 3.2 - Exemplo com subestruturação

No exemplo com subestruturação subdividiremos o sistema em duas subestruturas, uma com 7 graus-de-liberdade e a outra com 4, conforme a figura 3.2 abaixo:

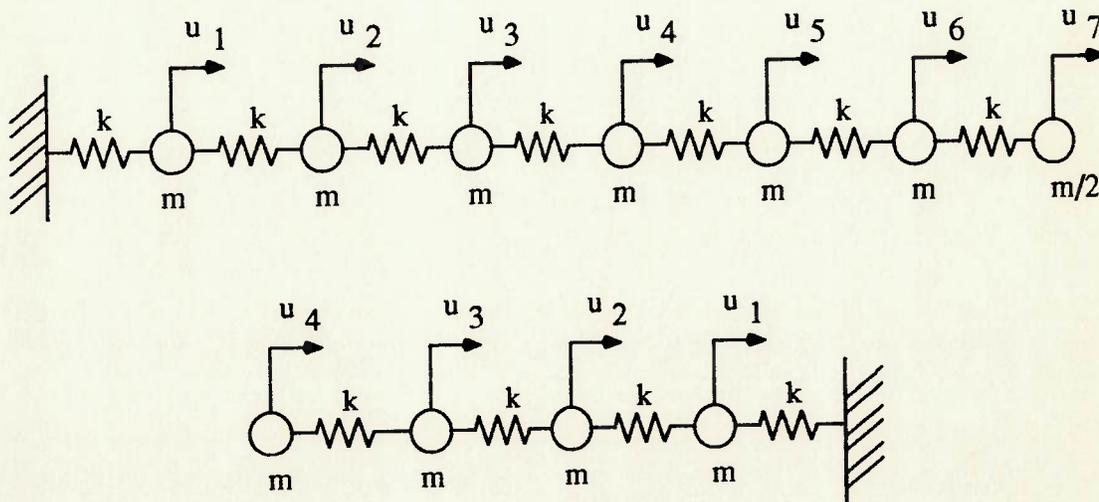


fig. 3.2 - Subdivisão do sistema

As matrizes de rigidez e de massa foram montadas seguindo o modelo utilizado no sistema.

O número de modos retidos da subestrutura 1 foi de 4 e da subestrutura 2 de 2, de forma que o grau-de-liberdade final das matrizes modais foi de 7. Note-se a boa redução no número de elementos das matrizes.

### 3.3 - Comparação dos resultados

Apresentamos os resultados na tabela 3.1 abaixo:

	Modo 1			Modo 2		
	S.Modal	Real	Erro(%)	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	0.08102	0.08101	0.02	0.31764	0.31749	0.05
1	<del>1.00000</del>	<del>1.00000</del>	<del>0.00</del>	<del>1.00000</del>	<del>1.00000</del>	<del>0.00</del>
2	1.92938	1.91899	0.54	1.66486	1.68251	-1.05
3	2.69151	2.68251	0.34	1.81926	1.83083	-0.63
4	3.23505	3.22871	0.20	1.39666	1.39788	-0.09
5	3.53265	3.51334	0.55	0.50321	0.52111	-3.43
6	3.51971	3.51334	0.18	-0.50921	-0.52111	-2.28
7	3.23941	3.22871	0.33	-1.38985	-1.39788	-0.57
8	2.68568	2.68251	0.12	-1.81065	-1.83083	-1.10
9	1.93356	1.91900	0.76	-1.68861	-1.68251	0.36
10	0.99758	<del>1.00000</del>	-0.24	-0.98450	<del>-1.00000</del>	-1.55

Tabela 3.1.a

	Modo 3			Modo 4		
	S.Modal	Real	Erro(%)	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	0.69038	0.69028	0.02	1.17382	1.16917	0.40
1	1.00000	1.00000	0.00	1.00000	1.00000	0.00
2	1.29947	1.30972	-0.78	0.87787	0.83083	5.67
3	0.71245	0.71537	-0.41	-0.32896	-0.30972	6.21
4	-0.36595	-0.37279	-1.83	-1.15229	-1.08816	5.89
5	-1.20747	-1.20362	0.32	-0.54250	-0.59435	-8.72
6	-1.19169	-1.20362	-0.99	0.58315	0.59435	-1.88
7	-0.37056	-0.37279	-0.60	1.11304	1.08816	2.29
8	0.71707	0.71537	0.24	0.28190	0.30972	-8.98
9	1.29091	1.30972	-1.44	-0.78447	-0.83083	-5.58
10	1.00002	1.00000	0.00	-1.06531	-1.00000	6.53

Tabela 3.1.b

	Modo 5			Modo 6		
	S.Modal	Real	Erro(%)	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	1.71938	1.71537	0.23	2.29527	2.28463	0.47
1	1.00000	1.00000	0.00	1.00000	1.00000	0.00
2	0.24360	0.28463	-14.42	-0.33959	-0.28463	19.31
3	-0.89281	-0.91899	-2.85	-0.85324	-0.91899	-7.15
4	-0.49233	-0.54620	-9.86	0.59369	0.54620	8.69
5	0.69708	0.76352	-8.70	0.60902	0.76352	-20.24
6	0.77440	0.76352	1.42	-0.67001	-0.76352	-12.25
7	-0.54322	-0.54620	-0.55	-0.48715	-0.54620	-10.81
8	-0.88786	-0.91899	-3.39	0.86052	0.91899	-6.36
9	0.22568	0.28463	-20.70	0.15120	0.28463	-46.89
10	1.04791	1.00000	4.79	-0.78937	-1.00000	-21.06

Tabela 3.1.c

	Modo 7		
	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	3.04373	2.83083	7.52
1	1.00000	1.00000	0.00
2	-0.71602	-0.83083	-13.82
3	-0.59640	-0.30972	92.56
4	1.32248	1.08816	21.53
5	-0.27434	-0.59435	-53.84
6	-1.80139	-0.59435	203.09
7	2.71613	1.08816	149.61
8	-1.37854	-0.30972	345.45
9	-0.67196	-0.83083	-19.12
10	1.22379	1.00000	22.38

Tabela 3.1.d

### 3.4 Conclusões

Observando os resultados das tabelas 3.1 concluímos que em termos de frequência os resultados foram muito bons até o sexto modo e o sétimo modo é aceitável. Já em termos dos autovetores vemos uma maior imprecisão a partir do quinto modo, quando surgem erros maiores que 10%.

Assim concluímos que o método é satisfatório para a determinação dos primeiros modos de um sistema de grande porte. Também é possível que a precisão melhore com a utilização de dupla-precisão nos cálculos.

**Recomendações para trabalhos futuros:**

Como recomendações para trabalhos futuros propomos:

- Programação e teste dos outros métodos não implementados;
- Inclusão do amortecimento;
- Adaptar o programa feito para atuar como pós-processador de algum programa de elementos finitos;
- Estudar a otimização do número de modos a serem retidos;
- Estudo da possibilidade de se utilizar o método em análises não lineares e em transientes;
- Quantificação do erro devido à truncagem dos modos superiores;
- Estudo de métodos mais recentes de Síntese dos Modos Componentes;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUGUSTO, O. B. Análise dinâmica de tubulações por síntese modal. /Apresentado ao 4. Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, 1986.
- BATHE, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.
- BENFIELD, W. A.; HRUDA, R. F. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, v.9, n.7, p. 1255-61, July 1971.
- DIAS, C. A. N.; Introdução ao estudo de vibrações da viga-navio - técnica dos elementos finitos - adaptação do programa SAP-IV Dissertação de Mestrado EPUSP 1978.
- BOGERT, P. B.; McPHEETERS, B. W.; MILAM, C. P. Finite element model size reduction for machinery shock and vibration problems using component mode synthesis techniques. In: SHIP TECHNOLOGY AND RESEARCH (STAR) SYMPOSIUM, 14., Louisiana, 1989. Proceedings. Jersey City, Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1989. p. S6-3-1 - S6-3-12.
- BULSON, F. S.; CALDWELL, J. B.; SEVERN, R. T. Engineering structures - developments in the twentieth century. London, University of Bristol 1983.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. Dynamics of structures. New York, McGraw-Hill, 1975.
- CRAIG Jr., R. R. Structural dynamics, an introduction to

computer methods. New York, John Wiley, 1981.

CRAIG Jr., R. R.; BAMPTON, M. C. C. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, v.6, n.7, p. 1313-9, July 1968.

CRAIG Jr., R. R. Methods of Component Mode Synthesis. *Shock and Vibrations Digest*, v.9, p. 3-10, Nov. 1977.

CRAIG Jr., R. R.; CHANG, C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, v.14, n.11, p. 1633-5, Nov. 1976.

EWINS, D. J. Modal Testing: Theory and Practice. New York, John Wiley, 1988.

GLADWELL, G. M. L. Branch mode analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, v.1, p. 41-59, 1964.

GOLDMAN, R. L. Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA Journal*, v.7, n.6, p. 1152-4, June 1969.

HOLZE, G. H.; BORESI, A. P. Free vibration analysis using substructuring. *Journal of the Structural Division*, v.101, n.12, p. 2627-39, Dec. 1975.

HURTY, W. C.; COLLINS, J. D. and HART, G. C. Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques. *Computers and Structures*, v.1, p. 535-563, 1971.

HURTY, W. C. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, v.3, n.4, p. 678-85, Apr. 1965.

KARDESTUNCER, H.; NORRIE, D. H. Finite element handbook.  
New York, McGraw-Hill, 1987.

MACNEAL, R. H. A hybrid method of component mode synthesis.  
*Computers and Structures*, v.1, p. 581-601, 1971.

MADDOX, N. R. On the number of modes necessary for accurate  
response and resulting forces in dynamic analyses.  
*Transactions of the ASME. Series E: Journal of Applied  
Mechanics*, v.42, n.2, p. 516-7, June 1975.

MASSON, J. C.; BESNIER, F. Modal Synthesis Techniques  
Application with the ASKA Program to Ship Structures.

MEIROVITCH, L. Computational methods in structural dynamics.  
Sijthoff & Noordhoff, 1980.

PURCELL, E. S.; ALLEN, S. J.; WALKER, R. T. Structural  
analysis of the U. S. Coast Guard Island Class Patrol Boat  
*SNAME Transactions*, v.96, p.221-246, 1988.

PRZEMIENIECKI, J. S. Matrix structural analysis of  
substructures. *AIAA Journal*, v.1, n.1, p. 138-47, Jan.  
1963.

ROSEN, R.; RUEBINSTEIN, M. F. Substructure analysis by matrix  
decomposition. *Journal of the Structural Division*, v.96,  
n.3, p. 663-70, Mar. 1970.

ROSS, C. T. F. Finite elements in structural mechanics. New  
York, John Wiley, 1985 (Ellis Horwood series in Engineering  
Science).

RUBIN, S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, v.13, n.8, p. 995-1006, Aug. 1975.

SALVAGNI, R. de B.; MASSARANI, M. Manual do programa "Hou" para cálculo de frequências e modos de vibração usando um método de síntese modal. São Paulo, Escritório Técnico de Construção Naval em São Paulo, 1988. (Estudo técnico, 0941/1988)

SENJANOVIC, I.; FAN, Y. On modelling of thin-walled girders and accuracy of vibration analysis performed by the finite element technique related to ship structures. *Computers and Structures*, v. 34, p. 603-614, 1990.

SOKOLNIKOFF, I. S.; REDHEFFER, R. M. Mathematics of physics and modern engineering. New York, McGraw-Hill, 1966.

SUAREZ, L. E.; SINGH, M. P. An exact component mode synthesis approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.16, p. 293-310, 1988.

SUAREZ, L. E.; SINGH, M. P. Successive synthesis of substructure modes. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.58, n.3, p. 759-65, 1991.

WEAVER Jr., W.; JOHNSTON, P. R. Structural dynamics by finite elements. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987.

YEE, E. K. L., TSUEI, Y. G. Direct component modal synthesis technique for system dynamic analysis. *AIAA Journal*, v.27, n.8, p. 1083-8, Aug. 1989.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ADICIONAIS

Apresentamos abaixo algumas referências bibliográficas recentes, com a intenção de mostrar outros estudos mais avançados e utilizações do método de Síntese dos Modos Componentes nas mais variadas estruturas.

KOJI, K.; FUJITA, K.; YANAGI, K. Vibrational analysis of superstructure by mode synthesis method. Mitsubishi Heavy Industries, *Mitsubishi Technical Bulletin* n.179, Feb. 1988.

LU, B. H.; KU, C. H. Practical algorithm of mode synthesis of sandwich structures. Paper presented at the ASME Annual Meeting 1987, Dec. 13-18, pap. 87-WA/NCA-6, 5p.

TSUEI, Y. G.; YEE, E. K. L. Component mode synthesis method for linear and nonlinear transient responses. Conference title: *Vibration Analysis - Techniques and Applications Presented at the 1989 ASME Design Technical Conference - 12th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise.*

YEE, E. K. L.; TSUEI, Y. G. Transient response by component modal synthesis method. *Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design* v.112, n.1, Jan. 1990 p.21-25.

PARSZEWSKI, Z. A.; KRYNICKI, K. Rotor-bearing systems stability. Composition approach with

bearing shape function presentation. *Tribology Transactions* v.32 n.4 Oct. 1989, p.517-523.

SUBBIAH, M.; SHARAN, A. M.; JAIN, J. Study of the dynamic condensation techniques for the machine tools and robotic manipulators. *Mechanism & Machine Theory* v.23, n.1 1988, p.63-69.

GU, J.; GAO, H. Vibration characteristics of a well-modeled mistuned bladed disk. 1987 ASME Design Technology Conferences - 11th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise.

HUCKELBRIDGE, A. A.; LAWRENCE, C. Identification of structural interface characteristics using component mode synthesis. NASA Tech. Memo 88960, 1987, 13p.

OKUMA, M.; NAMPE, M.; PARK, S.; NAGAMATSU, A. Technique of structural dynamic optimization. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, v.54, n.504 Aug.1988, p.1753-1761.

HINO, J.; TANIZUMI, K.; YOSHIMURA, T. Vibration analysis of a compact motor by the substructure sinthesis method. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, v.54, n.504 Aug.1988, p.1700-1707.

SPANOS, J. T.; MINGORI, D. L. Multibody model reduction by component mode synthesis and component cost analysis. 31st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.

- YEE, V. Reduction of component mode synthesis formulated matrices for correlation studies. *AIAA Journal*, v.28, n.6, Jun. 1990, p.1142-1143.
- WANG, S. L.; HSIUNG, C. C.; HAZELL, C. R. Ship icebreaking resistance with flooding water effect. Proceedings of the Ninth International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 1990, v.IV: Artic/Polar Technology.
- YEE, E. K. L.; TSUEI, Y. G. Improved method for the lateral vibration analysis of a rotor system. *Journal of Propulsion and Power*, v.6, n.2, Mar-Apr 1990, p.165-170.
- PARK, S.-C.; ISHII, T.; HONDA, S.; NAGAMATSU, A. Vibration analysis and optimum design for press machines. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, v.56, n.524, Apr. 1990, p.872-879.
- TSUCHIYA, K.; KASHIWASE, T.; YAMADA, K. Reduced-order models of a large flexible spacecraft. *Journal of Guidance, Control & Dynamics*, v.12, n.6, Nov-Dec 1989, p.845-850.
- JEN, C. W.; JOHNSON, D. A. Modal sensitivity analysis of planar robots, based on a simplified component mode synthesis approach. *Journal of Robotic Systems*, v.8, n.4, Aug 1991, p.443-463.

YASUI, Y.; YASAKA, T. Improvement of component mode synthesis by using orthonormalized attached modes. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Part C, v.55, n.511, Mar 1989, p.517-523.

LIMA, E. C. P.; COUTINHO, A. L. G. A.; ALVES, J. L. D. Nonlinear dynamic substructure analysis using direct integration of steady-state solution. *Communications in Applied Numerical Methods*, v.5, n.6, Aug.1989, p.405-413.

MILLER, R. D. Theoretical analysis of HVAC (Heating, Ventilation and Air-Conditioning) duct hanger systems. Fifteenth NASTRAN User's Colloquium 1987.

Uma bibliografia extensa pode ser encontrada na página 4.147 da referência [KARDESTUNCER; NORRIE 1987].

## APÊNDICE - Listagem e Instruções do Programa SÍNTESE

Neste Apêndice apresentamos as instruções necessárias para a utilização do programa de Síntese dos Modos Componentes, método de Craig-Bampton, além da sua listagem. Aconselhamos uma leitura atenta do item 2.3 para uma melhor compreensão deste programa que chamamos de Síntese.

O programa SÍNTESE para determinação das matrizes modais reduzidas de massa e de rigidez depende de um "pré-processador" chamado PREPARA.PAS e de um "pós-processador" chamado STODOLA.PAS para a determinação dos modos do sistema pela aproximação pelos modos-componentes (para sistemas ou subestruturas com número de graus-de-liberdade menor ou igual a 10).

O programa PREPARA.PAS tem como objetivo obter os autopares normalizados e os modos vinculados a partir do arquivo de dados de entrada inicial chamado ARQUIVO1.DAT, e que servirão de dados de entrada (que estarão no arquivo ARQUIVO2.DAT criado pelo PREPARA.PAS) para o programa SÍNTESE. Este, por sua vez, faz os cálculos necessários para a obtenção das matrizes modais reduzidas de massa e de rigidez de cada subestrutura, além da matriz  $T_1$  para retro-transformação para as coordenadas do sistema. Estes dados estarão contidos no arquivo ARQUIVO3.DAT. Este programa gera também um arquivo chamado COMPLET1.DAT que contém os dados mais importantes utilizados e as matrizes modais do SÍNTESE. É no programa SÍNTESE que se escolhe o número de modos-normais a serem retidos.

Uma vez determinadas as matrizes modais, procede-se à montagem da nova equação de movimento do sistema somando, segundo os graus-de-liberdade interfaciais, essas matrizes pelo método da rigidez. O resultado será um novo problema de autovalor do sistema com graus-de-liberdade reduzidos e que poderá facilmente ser resolvido pelo programa auto-explicativo STODOLA.PAS para obtenção dos autopares.

Para uma maior compreensão apresentaremos a seguir um exemplo com todos os seus passos. Adotaremos para tanto o exemplo manual resolvido no item 2.3.3.5 do método de Craig-Bampton.

Os programas foram feitos em linguagem de programação PASCAL e podem ser rodados em qualquer IBM-PC.

\* Exemplo passo-a-passo:

1) Arquivo ARQUIVO1.DAT:

2 (número de subestruturas)

1 (subestrutura 2)

2 (número de graus de liberdade interiores da sub. 1)<sup>1</sup>

1 (número de graus-de-liberdade interfaciais da sub. 1)

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}} \right\} \text{matriz de rigidez da sub. 1}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array}} \right\} \text{matriz de massa da sub. 1}$$

2 (subestrutura 2)

2 (número de graus de liberdade interiores da sub. 2)<sup>1</sup>

1 (número de graus-de-liberdade interfaciais da sub. 2)

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}} \right\} \text{matriz de rigidez da sub. 2}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array}} \right\} \text{matriz de massa da sub. 2}$$

<sup>1</sup> Neste programa limitamo-nos a duas subestruturas.

<sup>2</sup> Deve-se colocar sempre nas últimas linhas os graus-de-liberdade interfaciais e ao mesmo tempo manter simétricas as matrizes.

2) Rodamos, então, o programa PREPARA.PAS e obtemos o arquivo ARQUIVO2.DAT abaixo:

```

2 (número de subestruturas)
1 (subestrutura 1)
3 (número de graus-de-liberdade)
2.000  -1.000  0.000 }
-1.000  2.000 -1.000 } matriz de rigidez da sub. 1
0.000  -1.000  1.000 }
1.000  0.000  0.000 }
0.000  1.000  0.000 } matriz de massa da sub. 1
0.000  0.000  0.500 }

2 (número de graus-de-liberdade internos)
7.0710678058E-01 }  $\phi_1$       7.0710678301E-01 }  $\phi_2$ 
7.0710678179E-01 }           -7.0710677936E-01 }

3.3333333333E-01 } modo vinculado
6.6666666667E-01 }

1.0000000000E+00 ( $\lambda_1$ )
3.0000000000E+00 ( $\lambda_2$ )

2 (subestrutura 2)
3 (número de graus-de-liberdade)
2.000  -1.000  0.000 }
-1.000  2.000 -1.000 } matriz de rigidez da sub. 2
0.000  -1.000  1.000 }
1.000  0.000  0.000 }
0.000  1.000  0.000 } matriz de massa da sub. 2
0.000  0.000  0.500 }

2 (número de graus-de-liberdade internos)
7.0710678058E-01 }  $\phi_1$       7.0710678301E-01 }  $\phi_2$ 
7.0710678179E-01 }           -7.0710677936E-01 }

```

$3.3333333333E-01$  } modo vinculado  
 $6.6666666667E-01$  }

$1.0000000000E+00$  ( $\lambda_1$ )

$3.0000000000E+00$  ( $\lambda_2$ )

3) Rodamos, então, o programa SÍNTESE e obtemos os arquivos ARQUIVO3.DAT e COMPLET1.DAT. Copiamos abaixo os arquivos COMPLET1.DAT e ARQUIVO3.DAT, respectivamente:

\*COMPLET1.DAT:

No. de Subestruturas= 2

Caso= 1 No. G.L.= 3

Matriz de rigidez:

$2.000000$   $-1.000000$   $0.000000$   
 $-1.000000$   $2.000000$   $-1.000000$   
 $0.000000$   $-1.000000$   $1.000000$

Matriz de massa:

$1.000000$   $0.000000$   $0.000000$   
 $0.000000$   $1.000000$   $0.000000$   
 $0.000000$   $0.000000$   $0.500000$

No. G.L. internos:2      No. de modos retidos= 1

Autovetores (2x1):

$0.70711$

$0.70711$

Modos Vinculados:

0.33333

0.66667

Matriz das frequências quadráticas:

1.00000

MATRIZ MODAL DE MASSA:

1.0000000000E+00 7.0710678220E-01

7.0710678220E-01 1.0555555556E+00

MATRIZ MODAL DE RIGIDEZ:

1.0000000000E+00 0.0000000000E+00

0.0000000000E+00 3.3333333333E-01

Caso= 2 No. G.L.= 3

Matriz de rigidez:

2.00000 -1.00000 0.00000

-1.00000 2.00000 -1.00000

0.00000 -1.00000 1.00000

Matriz de massa:

1.00000 0.00000 0.00000

0.00000 1.00000 0.00000

0.00000 0.00000 0.50000

No. G.L. internos:2 No. de modos retidos= 1

Autovetores (2x1):

0.70711

0.70711

Modos vinculados:

0.33333

0.66667

Matriz das frequências quadráticas:

1.00000

MATRIZ MODAL DE MASSA:

1.0000000000E+00 7.0710678220E-01

7.0710678220E-01 1.0555555556E+00

MATRIZ MODAL DE RIGIDEZ:

1.0000000000E+00 0.0000000000E+00

0.0000000000E+00 3.3333333333E-01

\*ARQUIVOS.DAT:

MATRIZES MODAIS DE MASSA E RIGIDEZ; T12; SUBESTRUTURA 1

1.0000000000E+00 7.0710678220E-01

7.0710678220E-01 1.0555555556E+00

1.0000000000E+00 0.0000000000E+00

0.0000000000E+00 3.3333333333E-01

7.0710678058E-01 3.3333333333E-01

7.0710678301E-01 6.6666666667E-01

0.0000000000E+00 1.0000000000E+00

MATRIZES MODAIS DE MASSA E RIGIDEZ; T12; SUBESTRUTURA 2

1.0000000000E+00 7.0710678220E-01

7.0710678220E-01 1.0555555556E+00

```

1.0000000000E+00  0.0000000000E+00
0.0000000000E+00  3.3333333333E-01

7.0710678058E-01  3.3333333333E-01
7.0710678301E-01  6.6666666667E-01
0.0000000000E+00  1.0000000000E+00

```

As terceiras matrizes tanto da subestrutura 1 quanto da 2 representam os  $T_1$  de transformação de coordenadas que serão utilizadas após o programa STODOLA.

4) Agora procedemos à montagem da nova equação de movimento reduzida somando os coeficientes correspondentes ao grau de liberdade interfaciais das matrizes de rigidez e de massa das 2 subestruturas.

Matriz de massa:

```

1.0000000000E+00  7.0710678220E-01  0.0000000000E+00
7.0710678220E-01  2.1111111111E+00  7.0710678220E-01
0.0000000000E+00  7.0710678220E-01  1.0555555556E+00

```

Matriz de rigidez:

```

1.0000000000E+00  0.0000000000E+00  0.0000000000E+00
0.0000000000E+00  6.6666666667E-01  0.0000000000E+00
0.0000000000E+00  0.0000000000E+00  1.0000000000E+00

```

5) Agora rodamos o programa STODOLA entrando os valores das matrizes acima, obtendo os seguintes resultados:

$$\lambda_1 = 0.268929 \quad \lambda_2 = 1.000000 \quad \lambda_3 = 2.231071$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 3.844471 \\ 1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ 0.000000 \\ -1.000000 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -0.780341 \\ 1.000000 \end{Bmatrix}$$

Estes autovetores devem ser retro-transformados para o sistema de coordenadas original pela matriz T montada a partir das matrizes  $T_1$  das duas subestruturas:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 7.0710678058E-01 & 3.3333333333E-01 & 0.0000000000E+00 \\ 7.071067801E-01 & 6.6666666667E-01 & 0.0000000000E+00 \\ 0.0000000000E+00 & 1.0000000000E+00 & 0.0000000000E+00 \\ 0.0000000000E+00 & 6.6666666667E-01 & 7.0710678058E-01 \\ 0.0000000000E+00 & 3.3333333333E-01 & 7.0710678058E-01 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{\text{ sistema }} = T_{12} \phi_{12}$$

Assim obtemos os  $\phi$  do sistema.

A tabela Ap.1 mostra os resultados do programa em comparação com os valores "reais":

	Modo 1			Modo 2		
	S.Modal	Real	Erro(%)	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	0.26893	0.26795	-0.37	1.00000	1.00000	0.00
1	1.00000	1.00000	0.00	1.00000	1.00000	0.00
2	1.64442	1.73205	-5.06	1.00000	1.00000	0.00
3	1.93326	2.00000	-3.34	0.00000	0.00000	0.00
4	1.64442	1.73205	-5.06	-1.00000	-1.00000	0.00
5	1.00000	1.00000	0.00	-1.00000	-1.00000	0.00

Tabela Ap.1a

	Modo 3		
	S.Modal	Real	Erro(%)
$\lambda$	2.23107	2.00000	0.02
1	1.00000	1.00000	0.00
2	0.41808	0.00000	41.81
3	-1.74576	-1.00000	74.58
4	0.41808	0.00000	41.81
5	1.00000	1.00000	0.00

Tabela Ap.1b

É interessante observar neste caso que o modo 2 foi mais preciso que o anterior, quando normalmente os primeiros modos calculados são mais precisos que os posteriores.

```
program STODOLA;

{ Este programa calcula modos e frequências naturais de estru- }
{ turas discretizadas para até 10 graus-de-liberdade.      }
{ Esta versão está programada para Síntese dos Modos Componen- }
{ tes.                                                         }

{uses Printer;}

type matriz=array[1..10,1..10] of real;

var i,j,k,aux,it,n,l,m,p,q,v,nb:integer;
    AA,C,D,KK,LL,MM,FI,FIL,LA,KIJ,TAB,E:matriz;
    di,R,err,MIN,MAX,MAUX,z,NORM:real;

procedure PRODUTO(A,B:matriz;n1,n2,n3,v:integer);
    var i,j,k:integer;
    begin

        if v=1 then for i:=1 to n do B[i,1]:=B[1,i];{transpondo o 2 vetor}
        if v=2 then for i:=1 to n do A[i,1]:=A[1,i];{transpondo o 1 vetor}

            for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do C[i,j]:=0;
            for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do
                for k:=1 to n2 do C[i,j]:=C[i,j]+A[i,k]*B[k,j];
            end;

begin
    writeln('Entre com a ordem das matrizes K e M:');
    readln(n);

    writeln('Entre com os valores das matrizes:');
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do begin
```

```
writeln('K[',i,' ',j,']='); readln(KK[i,j]); end;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do begin
  writeln('M[',i,' ',j,']='); readln(MM[i,j]); end;
```

```
writeln(lst);
writeln(lst,'Matriz de rigidez:');
for i:=1 to n do begin
  for j:=1 to n do write(lst,KK[i,j]:5:2);
  writeln(lst);
end;
```

```
writeln(lst);
writeln(lst,'Matriz de massa:');
for i:=1 to n do begin
  for j:=1 to n do write(lst,MM[i,j]:5:2);
  writeln(lst);
end;
writeln(lst);
```

```
aux:=1;
```

```
{-----inversao da matriz de rigidez-----}
```

```
for i:=1 to n do for j:=1 to n do AA[i,j]:=KK[i,j];
for m:=1 to n do
begin
  di:=AA[m,1];
  if di=0 then writeln('Matriz Singular');
  for q:=1 to (n-1) do AA[m,q]:=AA[m,q+1]/di;
  AA[m,n]:=1/di;
  for p:=1 to n do
begin
```

```
    if p<>m then
      begin
        R:=AA[p,1];
        for q:=1 to (n-1) do AA[p,q]:=AA[p,q+1]-R*AA[m,q];
        AA[p,n]:=-R*AA[m,n];
      end;
    end;
  end;

  writeln(lst);
  PRODUTO(AA,MM,n,n,n,0);
  for i:=1 to n do for j:=1 to n do D[i,j]:=C[i,j];

  {-----início da iteracao-----}

  while aux <= n do
    begin
      writeln('Chute os valores do autovetor do ',aux,'modo:');
      for i:=1 to n do begin
        writeln('FI[',1,' ',i,']='); readln(FI[1,i]);
      end;

      it:=1; err:=1;

      while err>1E-8 do
        begin
          PRODUTO(D,FI,n,n,1,1);
          { for i:=1 to n do writeln(C[i,1]); }
          for i:=1 to n do FIL[1,i]:=C[i,1];
          for i:=1 to n do LA[1,i]:=FI[1,i]/FIL[1,i];
          for i:=1 to n do FI[1,i]:=FIL[1,i]/FIL[1,1];

          MIN:=LA[1,1]; MAX:=LA[1,n];
```

```

    for i:=1 to n do
      begin
        if LA[1,i]<MIN then MIN:=LA[1,i];
        if LA[1,i]>MAX then MAX:=LA[1,i];
      end;
    { writeln('it=',it); writeln('Lambda max=',MAX,' Lambda min=',MIN); }

    err:=(MAX-MIN)/MAX; it:=it+1;

  end;
writeln(lst,'Resultados do ',aux,' modo (na ',it,' iteracao):');
writeln(lst,'Lambda=',(MAX+MIN)/2);
writeln(lst,'Autovetor:'); for i:=1 to n do writeln(lst,FI[1,i]);

  PRODUTO(FI,MM,1,n,n,0);
  for i:=1 to n do E[1,i]:=C[1,i];
  for i:=1 to n do FIL[i,1]:=FI[1,i];
  PRODUTO(E,FIL,1,n,1,0);
  norm:=1/sqrt(C[1,1]);

WRITELN(LST);
WRITELN(lst,'CNORM.= ',NORM);
FOR I:=1 TO N DO WRITELN(lst,NORM*FI[1,i]);
writeln(lst);
read(z);
aux:=aux+1;

{-----calculo da matriz de limpeza-----}
  if aux<=n then begin
    PRODUTO(MM,FI,n,n,1,1);
    for i:=1 to n do FIL[1,i]:=C[i,1];
    PRODUTO(FI,FIL,1,n,1,1);
    MAUX:=C[1,1];
  end;

```

```
PRODUTO(FI,FI,n,1,n,2);
for i:=1 to n do for j:=1 to n do AA[i,j]:=C[i,j];
PRODUTO(AA,MM,n,n,n,0);
  for i:=1 to n do for j:=1 to n do C[i,j]:=C[i,j]/MAUX;
  for i:=1 to n do for j:=1 to n do
    if i=j then LL[i,j]:=1-C[i,j]
      else LL[i,j]:=-C[i,j];
  PRODUTO(D,LL,n,n,n,0);
  for i:=1 to n do for j:=1 to n do D[i,j]:=C[i,j];
end;
end;
end.
```

```

program PREPARA;

{uses Printer;}
type matriz=array[1..10,1..10] of real;
var i,j,k,aux,it,n,l,m,p,q,v,nb,ns,cont,nsup:integer;
    AA,C,D,KK,LL,MM,FI,FIL,FIN,LA,KIJ,TAB,E,AX:matriz;
    aux1,di,R,err,MIN,MAX,MAUX,z,NORM:real;
    ent,res:text;
    trocou:boolean;

procedure PRODUTO(A,B:matriz;n1,n2,n3,v:integer);
    var i,j,k:integer;
    begin
        if v=1 then for i:=1 to n do B[i,1]:=B[1,i];{transpondo o 2 vetor}
        if v=2 then for i:=1 to n do A[i,1]:=A[1,i];{transpondo o 1 vetor}
            for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do C[i,j]:=0;
            for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do
                for k:=1 to n2 do C[i,j]:=C[i,j]+A[i,k]*B[k,j];
            end;
    }

begin {1}
    assign(ent,'ARQUIVO1.DAT'); reset(ent);
    assign(res,'ARQUIVO2.DAT'); rewrite(res);
    cont:=1;
    read(ent,nsup); {nsup é o número de subestruturas}
    writeln(res,nsup); {writeln(lst,nsup);}
    while cont<=nsup do
begin {2}

    read(ent,ns); {número da subestrutura estudada}
    {writeln(lst,ns);}
    read(ent,n); {ordem das matrizes K e M - na verdade e o NA da dedução}

```

```

{writeln(lst,n);}
read(ent,nb); {ordem nb de Kij}
{writeln(lst,nb);}

{valores das matrizes:}

for i:=1 to (n+nb) do for j:=1 to (n+nb) do read(ent, KK[i,j]);
for i:=1 to (n+nb) do for j:=1 to (n+nb) do read(ent, MM[i,j]);
for i:=1 to n do for j:=(n+1) to (n+nb) do KIJ[i,j-n]:=KK[i,j];
{_____}

aux:=1;

{-----inversão da matriz de rigidez-----}
for i:=1 to n do for j:=1 to n do AA[i,j]:=KK[i,j];
for m:=1 to n do
begin
di:=AA[m,1];
if di=0 then writeln('Matriz Singular');
for q:=1 to (n-1) do AA[m,q]:=AA[m,q+1]/di;
AA[m,n]:=1/di;
for p:=1 to n do
begin
if p<>m then
begin
R:=AA[p,1];
for q:=1 to (n-1) do AA[p,q]:=AA[p,q+1]-R*AA[m,q];
AA[p,n]:=-R*AA[m,n];
end;
end;
end;
PRODUTO(AA,MM,n,n,n,0);
for i:=1 to n do for j:=1 to n do D[i,j]:=C[i,j];

```

```
PRODUTO(AA,KIJ,n,n,nb,0);
for i:=1 to n do for j:=1 to nb do TAB[i,j]:=-C[i,j];

{-----início da iteracao-----}
while aux <= n do
begin
  writeln('Chute os valores do autovetor do ',aux,'modo:');
  for i:=1 to n do begin
    writeln('FI['1,' ',i,']='); readln(FI[1,i]);
  end;
  it:=1; err:=1;
  while err>1E-8 do
  begin
    PRODUTO(D,FI,n,n,1,1);
    for i:=1 to n do FIL[1,i]:=C[i,1];
    for i:=1 to n do AX[1,i]:=FI[1,i]/FIL[1,i];
    for i:=1 to n do FI[1,i]:=FIL[1,i]/FIL[1,1];

    MIN:=AX[1,1]; MAX:=AX[1,n];
    for i:=1 to n do
    begin
      if AX[1,i]<MIN then MIN:=AX[1,i];
      if AX[1,i]>MAX then MAX:=AX[1,i];
    end;

    err:=(MAX-MIN)/MAX; it:=it+1;
  end;
  LA[1,aux]:=(MAX+MIN)/2;
  PRODUTO(FI,MM,1,n,n,0);
  for i:=1 to n do E[1,i]:=C[1,i];
  for i:=1 to n do FIL[i,1]:=FI[1,i];
  PRODUTO(E,FIL,1,n,1,0);
```

```
        norm:=1/sqrt(C[1,1]);
FOR I:=1 TO N DO
  begin
    err:=NORM*FI[1,i];
    FIN[i,aux]:=err;
  end;
aux:=aux+1;

{-----calculo da matriz de limpeza-----}

  if aux<=n then begin
    PRODUTO(MM,FI,n,n,1,1);
    for i:=1 to n do FIL[1,i]:=C[i,1];
    PRODUTO(FI,FIL,1,n,1,1);
    MAUX:=C[1,1];
    PRODUTO(FI,FI,n,1,n,2);
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do AA[i,j]:=C[i,j];
    PRODUTO(AA,MM,n,n,n,0);
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do C[i,j]:=C[i,j]/MAUX;
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do
      if i=j then LL[i,j]:=1-C[i,j]
      else LL[i,j]:=-C[i,j];
    PRODUTO(D,LL,n,n,n,0);
    for i:=1 to n do for j:=1 to n do D[i,j]:=C[i,j];
  end;
end;

{-----Ordenacao crescente de FIN e LA-----}
i:=n;
repeat
  trocou:=false;
  for j:=1 to i-1 do
    if LA[1,j]>LA[1,j+1]
      then begin
```

```
    aux1:=LA[1,j];
    LA[1,j]:=LA[1,j+1];
    LA[1,j+1]:=aux1;
    for k:=1 to n do
        begin
            aux1:=FIN[k,j];
            FIN[k,j]:=FIN[k,j+1];
            FIN[k,j+1]:=aux1;
        end;
    trocou:=true;
end;
i:=i-1;
until (i<2) or (not trocou);

{-----Impressao dos resultados em Arquivo2.dat-----}
writeln(res,ns);
writeln(res,n+nb);
for i:=1 to (n+nb) do begin
    for j:=1 to (n+nb) do write(res, KK[i,j]);
    writeln(res);
end;
for i:=1 to (n+nb) do begin
    for j:=1 to (n+nb) do write(res, MM[i,j]);
    writeln(res);
end;
writeln(res,n);
for i:=1 to n do begin
    for j:=1 to n do
        write(res, FIN[j,i]);
    for j:=1 to n do write(lst, 'FIN(' ,i, ' ',j, ')= ', FIN[i,j]:8:5);
    writeln(lst);
    writeln(res);
end;
```

---

```
        for i:=1 to n do for j:=1 to nb do writeln(res,TAB[i,j]);
        for i:=1 to n do writeln(res,LA[1,i]);
        {-----Fim da gravacao-----}
        cont:=cont+1;
        end; {2}
        close(ent); close(res);
end. {1}
```

```
program SINTESE;

type matriz=array[1..10,1..10] of real;

var i,j,k,N,l,v,CASO,KEPT,NA,NB,NSUB,cont:integer;
    KK,MM,LA,TAB,TBA,MAUX,FIN,MK,KM,C:matriz;
    w,aux1,z:real;
    ENT,RES,CPT:TEXT;

procedure PRODUTO(A,B:matriz;n1,n2,n3,v:integer);
    var i,j,k:integer;

    begin

        for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do C[i,j]:=0;
        for i:=1 to n1 do for j:=1 to n3 do
            for k:=1 to n2 do C[i,j]:=C[i,j]+A[i,k]*B[k,j];
        end;

    begin {1}

    {---CALCULO DAS MATRIZES MODAIS DE MASSA E DE RIGIDEZ---}

    ASSIGN(ENT,'ARQUIVO2.DAT'); RESET(ENT);
    ASSIGN(RES,'ARQUIVO3.DAT'); REWRITE(RES);
    ASSIGN(CPT,'complet1.dat'); REWRITE(CPT);
    cont:=1;
    READ(ENT,NSUB);

    writeln(CPT,'No. de Subestruturas= ',nsub);

    WHILE cont<=nsub DO BEGIN {2}
        READ(ENT,CASO);
```

```
READ(ENT,N);

FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(ENT,KK[I,J]);
FOR I:=1 TO N DO FOR J:=1 TO N DO READ(ENT,MM[I,J]);

READLN(ENT,NA);

WRITELN('ESCOLHA O NUM. DE MODOS A SEREM RETIDOS (valores de 1 a ',na,'):');
readln(KEPT);

FOR I:=1 TO kept DO FOR J:=1 TO na DO READ(ENT,FIN[j,i]);
for i:=1 to (na-kept) do for j:=1 to na do read(ent,z);
FOR I:=1 TO NA DO FOR J:=1 TO (N-NA) DO READ(ENT,TAB[I,J]);
FOR I:=1 TO KEPT DO FOR J:=1 TO KEPT DO LA[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO KEPT DO READ(ENT,LA[I,I]);
for i:=1 to (na-kept) do read(ent,z);

NB:=N-NA;
for i:=1 to (kept+nb) do for j:=1 to (kept+nb) do
begin
  KM[i,j]:=0; MK[i,j]:=0;
end;
writeln(cpt);
writeln(CPT,'Caso= ',caso,' No. G.L.= ',n);
writeln(CPT);
writeln(CPT,'Matriz de rigidez:');
for i:=1 to n do begin for j:=1 to n do write(CPT,kk[i,j]:9:5);
writeln(CPT); end;
writeln(CPT);
writeln(CPT,'Matriz de massa:');
for i:=1 to n do begin for j:=1 to n do write(CPT,mm[i,j]:9:5);
writeln(CPT); end;
writeln(cpt);
```

```
writeln(CPT,'No. G.L. internos:',na,'      No. de modos retidos= ',kept);
  writeln(cpt);
  writeln(cpt,'Autovetores (',NA,'x',kept,'):');
  for i:=1 to NA do begin for j:=1 to KEPT do write(CPT,fin[i,j]:9:5);
  writeln(CPT); end;
  writeln(cpt);
  WRITELN(CPT,'T',caso,':');
  for i:=1 to NA do begin for j:=1 to (n-na) do write(CPT,tab[i,j]:9:5);
  writeln(CPT); end;
  writeln(cpt);
  WRITELN(CPT,'Matriz das frequencias quadraticas: ');
  for i:=1 to kept do begin for j:=1 to kept do write(CPT,la[i,j]:9:5);
  writeln(CPT); end;
```

{---MNB---

```
for i:=1 to NA do for j:=1 to KEPT do
  begin
    AUX1:=FIN[i,j];
    FIN[i,j]:=FIN[j,i];
    FIN[j,i]:=aux1;
  end;
{   for i:=1 to NA do begin for j:=1 to KEPT do write(lst,fin[i,j]:9:5);}
{   writeln(lst); end;                                     }
```

PRODUTO(FIN,MM,KEPT,NA,NA,Ø);

for i:=1 to KEPT do for j:=1 to NA do MAUX[i,j]:=C[i,j];

PRODUTO(MAUX,TAB,KEPT,NA,NB,Ø);

for i:=1 to KEPT do for j:=1 to NB do MK[i,KEPT+j]:=C[i,j];
for i:=1 to NA do for j:=(NA+1) to N do MAUX[i,j-NA]:=MM[i,j];

```
PRODUTO(FIN,MAUX,KEPT,NA,NB,Ø);
```

```
FOR i:=1 to KEPT do for j:=1 to NB do  
  MK[i,KEPT+j]:=MK[i,KEPT+j]+C[i,j];
```

```
{-----MBB-----}
```

```
for i:=1 to NA do for j:=1 to NB do TBA[j,i]:=TAB[i,j];
```

```
PRODUTO(TBA,MAUX,NB,NA,NB,Ø);
```

```
for i:=(KEPT+1) to (KEPT+NB) do  
  for j:=(KEPT+1) to (KEPT+NB)  
    do MK[i,j]:=MM[i+na-kept,j+na-kept]+C[i-KEPT,j-KEPT];
```

```
for i:=(NA+1) to N do for j:=1 to NA do  
  MAUX[(i-NA),j]:=MM[i,j];
```

```
PRODUTO(MAUX,TAB,NB,NA,NB,Ø);
```

```
for i:=(KEPT+1) to (KEPT+NB) do for j:=(KEPT+1) to (KEPT+NB)  
  do MK[i,j]:=MK[i,j]+C[i-KEPT,j-KEPT];
```

```
PRODUTO(TBA,MM,NB,NA,NA,Ø);
```

```
for i:=1 to NB do for j:=1 to NA do MAUX[i,j]:=C[i,j];
```

```
PRODUTO(MAUX,TAB,NB,NA,NB,Ø);
```

```
for i:=(KEPT+1) to (KEPT+NB) do  
  for j:=(KEPT+1) to (KEPT+NB) do  
    MK[i,j]:=MK[i,j]+C[i-KEPT,j-KEPT];
```

```
for i:=1 to KEPT do for j:=(KEPT + 1) to N do
    MK[j,i]:=MK[i,j];
```

```
{---SBB---}
```

```
for i:=1 to NA do for j:=(NA+1) to N do
    MAUX[i,j-NA]:=KK[i,j];
```

```
PRODUTO(TBA,MAUX,NB,NA,NE,Ø);
```

```
for i:=1 to NB do for j:=1 to NB do
    KM[KEPT+i,KEPT+j]:=KK[i+NA,j+NA]+C[i,j];
for i:=1 to KEPT do KM[i,i]:=LA[i,i];
```

```
{-----}
```

```
for i:=1 to KEPT do MK[i,i]:=1;
{---impressao das matrizes modais de massa e de rigidez---}
```

```
writeln(CPT);
```

```
writeln(CPT, 'MATRIZ MODAL DE MASSA:');
```

```
for i:=1 to (KEPT + NB) do begin
```

```
for j:=1 to (KEPT + NB) do
```

```
    write(CPT,MK[i,j]);
```

```
    WRITELN(CPT);
```

```
end;
```

```
writeln(CPT);
```

```
writeln(CPT, 'MATRIZ MODAL DE RIGIDEZ:');
```

```
for i:=1 to (KEPT + NB) do begin
```

```
for j:=1 to (KEPT + NB) do
```

```
    write(CPT,KM[i,j]);
```

```
    WRITELN(CPT); end;
```

```
WRITELN(RES, 'MATRIZES MODAIS DE MASSA E RIGIDEZ; T1; SUBESTRUTURA ',CASO);
```

```
for i:=1 to (KEPT + NB) do begin
```

```
for j:=1 to (KEPT + NB) do
  write(RES,MK[i,j]);
  WRITELN(RES);
  end;
WRITELN(RES);
for i:=1 to (KEPT + NB) do begin
for j:=1 to (KEPT + NB) do
  write(RES,KM[i,j]);
  WRITELN(RES); end;
WRITELN(RES);

for i:=1 to na do begin
  for j:=1 to kept do write(res,FIN[j,i]);
  for j:=1 to nb do write(res,TAB[i,j]);
  writeln(res);
  end;

for i:=1 to nb do
  begin
  for j:=1 to kept do write(res,0.00);
  for j:=1 to nb do
    if j=i then write(res,1.00)
    else write(res,0.00);
  writeln(res);
  end;
  WRITELN(RES);
  cont:=cont+1;
  end;  {2}

CLOSE(ENT);
CLOSE(RES);
CLOSE(CPT);
end.  {1}
```