

JAIRSON DE LIMA

INEQUAÇÕES VARIACIONAIS APLICADAS AO
PROBLEMA DE ASSENTAMENTO DE
OLEODUTOS

Tese apresentada à ESCOLA POLITÉCNICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO para
obtenção do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo
1998

JAIRSON DE LIMA

INEQUAÇÕES VARIACIONAIS APLICADAS AO
PROBLEMA DE ASSENTAMENTO DE
OLEODUTOS

Tese apresentada à ESCOLA POLITÉCNICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO para
obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha

São Paulo
1998

Aos meus filhos por me insuflarem energia e manterem a minha chama acesa, durante a jornada:

- Patrícia Penhas de Lima
- Igor Renato Machado de Lima
- Ize Penhas de Lima
- Taíze Cristina Machado de Lima

AGRADECIMENTOS

Enumerar todas as fontes de inspiração, de estímulo, de apoio e de críticas construtivas que viabilizaram este trabalho é uma tarefa para a qual não tenho competência. Se tentasse realizá-la iria, inevitavelmente, ser incompleto e impreciso, portanto, apresento os meus agradecimentos extensíveis a todos aqueles que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Contudo, não posso deixar de lembrar dos amigos da antiga Divisão de Engenharia Naval do IPT e da atual Divisão de Tecnologia de Transportes, que foram, às vezes mais que companheiros de jornada, muitas vezes até mais que irmãos. A alguns deles eu devo também creditar grande parte do trabalho inicial, na compreensão mais aprofundada da física dos problemas de contato entre corpos deformáveis e do atrito entre eles.

Ao IPT, na figura de diretores da Instituição bem como na de diretores de Unidade, que por um lado me cobrou resultados mas por outro me abriu espaço para eu avançar, às vezes lentamente, mas sempre me servindo como um porto seguro, onde pudesse me abrigar.

Ao CNPq que no início do projeto de engenharia, desenvolvido para a PETROBRAS, forneceu apoio decisivo para o desbravamento conceitual do problema, através do processo número 304069/85-0.

À FAPESP que mais recentemente e de forma indireta propiciou a compra de recursos computacionais para atender às necessidades do Projeto Temático número 94/3528-3. Estes recursos acabaram dando um apoio relevante para a finalização deste trabalho.

À PETROBRAS por ser uma fonte inesgotável de desafios tecnológicos e por ter, no passado, confiado à uma equipe incipiente da DINAV do IPT a responsabilidade de desenvolver novos recursos de modelagem e simulação numérica, para atender a muitas de suas necessidades.

Ao Professor Aranha por sua paciência e firmeza conceitual no trabalho de orientação, sem a qual, possivelmente, eu ainda me encontrasse submerso nalgum labirinto.

Finalmente, aos meus filhos e à Lézer que me aturaram por todos estes anos na busca de um ideal que sempre se mostrava intangível. E que, em alguns casos, sacrificaram a realização de seus próprios objetivos para me servirem de alicerces e de reforços a cada passo do caminho.

A TODOS O MEU MUITO OBRIGADO.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.	i
0.1 SOBRE A COMPOSIÇÃO DOS SÍMBOLOS	i
0.2 SÍMBOLOS	i
0.3 SÍMBOLOS ESPECIAIS	v
1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA E APLICAÇÕES	1
1.1 INTRODUÇÃO	1
1.2 ORIGEM DAS INEQUAÇÕES VARIACIONAIS	3
1.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS	3
1.3.1 O Problema de Lubrificação de um Mancal	3
1.3.2 Escoamento de um Fluido através de Meio Poroso	4
1.3.3 Pré-requisitos de Matemática	8
1.3.4 Introdução ao Problema de Assentamento de Oleodutos	8
2 ASSENTAMENTO DE OLEODUTOS. HIPÓTESES E MODELAGEM	1
2.1 HIPÓTESES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	1
2.1.1 Algumas Observações sobre as Hipóteses Enunciadas	3
2.2 MODELAGEM DO OLEODUTO, CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO	4
2.2.1 Modelo Geral para as Duas Operações Elementares	4
2.2.2 Adimensionalizações e Simplificações	9
2.2.3 A Forma de Inequação Variacional para o Modelo da Operação de Lançamento	14
2.2.4 A Forma de Inequações Variacionais para o Modelo da Operação de Abandono	21
3 RESULTADOS QUALITATIVOS	1
3.1 INTRODUÇÃO	1
3.2 A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS PL	1
3.2.1 Existência e Unicidade da Solução do Problema PL2	8
3.3 A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS PA	10
3.3.1 Existência e Unicidade da Solução do Problema Pa2	17
3.4 MAJORAÇÕES DAS SOLUÇÕES DO PL2 E DO Pa2	20
3.4.1 Estimativa de Majoração da Solução do PL2	20
3.4.2 Estimativa de Majoração da Solução do Pa2	24
3.5 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO A SER USADO EM Pa2	33
3.6 APRECIÇÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS	37

3.6.1	Aspectos Físicos não Discutidos	38
4	DISCRETIZAÇÃO DO PL2 E DO Pa2 EM ELEMENTOS FINITOS	1
4.1	INTRODUÇÃO	1
4.2	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA PL2	2
4.3	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA Pa2	17
4.3.1	Discretização do Funcional do Pa2	18
4.3.2	Discretização da Inequação Variacional do Pa2	19
5	ALGUNS RESULTADOS QUANTITATIVOS	1
5.1	INTRODUÇÃO	1
5.2	MODELOS E RESULTADOS NUMÉRICOS	2
5.2.1	Problema Discreto da Operação de Lançamento	3
5.2.2	Problema Discreto da Operação de Abandono	8
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS	1
6.1	INTRODUÇÃO	1
6.2	PRINCIPAIS CONCLUSÕES	2
6.3	SUGESTÕES DE TÓPICOS PARA PESQUISAS FUTURAS	3
A	DEMONSTRAÇÃO DE RESULTADOS ESSENCIAIS A TESE	1
A.1	INTRODUÇÃO	1
A.2	ALGUNS RESULTADOS FUNDAMENTAIS UTILIZADOS NO CAPÍTULO 3	1
B	ELEMENTOS DE MATEMÁTICA	1
B.1	INTRODUÇÃO	1
B.2	ESPAÇOS MÉTRICOS	1
B.3	ESPAÇOS VETORIAIS	2
B.3.1	Exemplos de Espaços Vetoriais	4
B.3.2	Funcional, Funcional Convexo e Conjuntos Convexos	4
B.3.3	Espaços Vetoriais Normados	7
B.3.4	Espaços Vetoriais de Hilbert	10
B.3.5	Os Espaços de Funções mais Importantes Usados na Tese	12
B.4	TEOREMAS FUNDAMENTAIS	16
C	RESULTADOS SECUNDÁRIOS	1
C.1	INTRODUÇÃO	1
C.2	INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DA CAPA DE CONCRETO NA RIGIDEZ DO TUBO DE AÇO SOB FLEXÃO.	1
C.2.1	Descrição do Problema	1
C.2.2	Determinação da Posição da Linha Neutra.	3
C.2.3	Cálculo da Rigidez Equivalente	7
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	1

Lista de Figuras

1.1	Posição relativa dos mancais e da camada de lubrificante.	4
1.2	Percolação numa seção retangular $D = (a, b) \times (a, c) = (0, x_1) \times (0, y_1)$. . .	5
1.3	Bloco de peso \hat{P} , suspenso, tracionado e depositado sobre o plano horizontal. . .	9
1.4	Bloco tracionado e a mobilização da força de atrito $\hat{f}_a = \hat{F}$	10
2.1	Linha elástica do oleoduto em equilíbrio sobre solo de perfil irregular.	5
2.2	Curva característica do comportamento do solo	15
2.3	Linha elástica sobre um solo deformado.	17
4.1	Discretização do oleoduto em N elementos finitos.	2
4.2	Deslocamentos e rotações no elemento	4
4.3	Abcissas globais e locais para cada nó j	5
4.4	Gráficos das funções da base e_i , para $N = 4$ elementos	8
4.5	Cálculo do produto $p(x) p(x) $	16
5.1	Problema com condições de contorno não homogêneas.	2
5.2	Perfil irregular de solo do EXEMPLO 1	9
5.3	Configuração de equilíbrio do EXEMPLO 1	10
5.4	Configuração de equilíbrio do EXEMPLO 2	14
B.1	Deslocamentos verticais da linha elástica do oleoduto.	5
B.2	Ilustração dos conceitos sobre caminho.	17
C.1	Tramo de Tubo Sujeito à Flexão com o Fissuramento das "Fibras" Tra- cionadas.	2
C.2	Posição da Linha Neutra do Tubo Sujeito à Flexão.	3
C.3	Parte da Seção que está Tracionada - S_T	5
C.4	Momento de Inércia da Área S_c em Relação à LN.	8

Lista de Tabelas

5.1	PERFIL DO SOLO	6
5.2	RESULTADOS DO EXEMPLO 1	7
5.3	RESULTADOS DO EXEMPLO 1 (continuação)	8
5.4	RESULTADOS DO EXEMPLO 2	15
5.5	RESULTADOS DO EXEMPLO 2 (continuação)	16

LISTA DE SÍMBOLOS

0.1 SOBRE A COMPOSIÇÃO DOS SÍMBOLOS

Foram adotados alguns critérios para a composição dos símbolos desta tese, os principais são apresentados a seguir:

- i) as grandezas dimensionais são superpostas por um acento circunflexo. As correspondentes grandezas adimensionais são anotadas sem o acento circunflexo;
- ii) os símbolos que estão guarnecidos por um "★" representam grandezas associadas a uma configuração de equilíbrio do oleotuto. Assim $y_L^*(x)$ é a cota da seção x do oleoduto, na configuração de equilíbrio atingida durante a operação de lançamento.
- iii) a notação dos vetores e matrizes não recebem qualquer complemento e o contexto é suficiente para esclarecer quando uma grandeza é um vetor, uma matriz ou um escalar;
- iv) a lista dos principais símbolos é apresentada seguindo uma ordem alfabética apenas pelo primeiro caracter;
- v) no final da relação é apresentado um conjunto de símbolos especiais.

0.2 SÍMBOLOS

\hat{A} - área do anel de aço na seção transversal do oleoduto;

A, A^*, A_L - operadores definidos em algum subconjunto de $H^2(\Omega)$;

A_j ($1 \leq j \leq N - 1$)- matrizes auxiliares usadas na construção da matriz de rigidez \mathbf{K}_1 ;

B_j ($1 \leq j \leq N - 1$)- matrizes auxiliares usadas na construção da matriz de rigidez \mathbf{K}_2 ;

$C^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow R, \text{ com derivadas primeiras e segundas contínuas em } \Omega\}$;

\hat{E} -módulo de elasticidade do aço;

$e_j(x)$ ($1 \leq j \leq 2N + 2$)- função j -ésima do espaço V^{2N+2} ;

$f(x)$ -elemento genérico do espaço $H^2(\Omega)$;

$\hat{f}_a(\hat{s})$ - força de atrito Coulombiano por unidade de comprimento do oleoduto;

$F_a(x)$ - integral no intervalo $[x, p]$, $x \in \Omega$ da força de atrito Coulombiano por unidade de comprimento do oleoduto, nas condições da operação de abandono;

$\hat{f}_n(\hat{s})$ -força de reação do solo, segundo a normal, por unidade de comprimento do oleoduto;

$\hat{f}_{nL}(\hat{s})$ -força de reação do solo, segundo a normal, por unidade de comprimento do oleoduto, na condição da operação de lançamento;

$\hat{f}_{nA}(\hat{s})$ -força de reação do solo, segundo a normal, por unidade de comprimento do oleoduto, na condição da operação de abandono;

$\hat{f}_t(\hat{s})$ -força de reação do solo, segundo a tangente, por unidade de comprimento do oleoduto;

$\hat{F}_x(\hat{s})$ - força solicitante, na seção da linha elástica separada da origem por um trecho de tubo de comprimento \hat{s} . Medida no sentido positivo do eixo x ;

$\hat{F}_y(\hat{s})$ -força solicitante, na seção da linha elástica separada da origem por um trecho de tubo de comprimento \hat{s} . Medida no sentido positivo do eixo y ;

$g(x)$ -elemento genérico do espaço vetorial $H^1(\Omega)$;

G_j ($1 \leq j \leq N - 1$) matrizes auxiliares usadas na construção da matriz de rigidez \mathbf{K}_2 ;

$h(x)$ -elemento genérico de $H^2(\Omega)$, nas vizinhanças de y_L^* de $H^2(\Omega)$;

$h_{ik}(x)$ ($1 \leq k \leq 4, 1 \leq i \leq N$) polinômios de grau menor ou igual a três, usados na construção das funções $e_j(x)$ da base de V^{2N+2} ;

$H^1(\Omega)$ - espaço vetorial constituído pelas funções definidas em $\Omega = [0, p]$, tomando valores reais que são contínuas e cuja derivada primeira é quadrado integrável em Ω ;

$H^2(\Omega)$ - espaço vetorial constituído pelas funções definidas em $\Omega = [0, p]$, tomando valores reais que são contínuas com derivadas primeiras contínuas e cuja derivada segunda é quadrado integrável em Ω ;

$j(v(x))$ - funcional definido em $\mathcal{V}_A^2 \subseteq H^2(\Omega)$;

\hat{J} - momento de inércia da seção transversal do oleoduto;

$J_A^1(v(x))$ - funcional definido em $\mathcal{V}_A^1 \subseteq H^1(\Omega)$;

$J_A^2(v(x))$ - funcional definido em $\mathcal{V}_A^2 \subseteq H^2(\Omega)$;

$J_L^1(v(x))$ - funcional definido em $\mathcal{V}_L^1 \subseteq H^1(\Omega)$;

$J_L^2(y_L(x))$ - funcional definido em $\mathcal{V}_L^2 \subseteq H^2(\Omega)$;

\hat{k} - constante elástica de mola do solo;

\mathbf{K}_m - constante de mola do tubo de aço;

$\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ - matrizes parciais de rigidez do problema da operação de lançamento;

$\mathbf{K} = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \mathbf{K}_1 + \frac{1}{2\beta_f} \mathbf{K}_2$ - matriz global de rigidez do problema de lançamento;

$k_f = \frac{\hat{E}j\hat{V}_0}{\hat{L}_0^4 \hat{\gamma}_{ef}}$ - constante adimensional;

\hat{L} - comprimento não deformado do oleoduto;

\hat{L}_0 - comprimento típico de um vão livre do oleoduto;

$\hat{M}(\hat{s})$ - momento fletor solicitante na seção do oleoduto de abscissa curvilínea \hat{s} ;

\hat{N} - força normal à superfície horizontal de contato de um corpo de peso concentrado apoiado sobre ela;

N - número de elementos de discretização do oleoduto, $N + 1$ é o número de nós;

n_0 - distância, em número de nós, do nó em que cessa a atuação da força de atrito, na operação de abandono até o nó de abscissa $\nu = N + 1$;

P - vetor de carregamento, P^t é o seu transposto;

$p = \frac{\hat{L}}{\hat{L}_0}$ - comprimento adimensional do oleoduto;

$\hat{Q}(\hat{s})$ - força cortante solicitante na seção do oleoduto de abscissa curvilínea \hat{s} ;

r_{2j-1} - deslocamento vertical do nó j , $1 \leq j \leq N$;

r_{2j} - rotação do nó j , $1 \leq j \leq N$;

r_{2j+1} - deslocamento vertical do nó $j + 1$, $1 \leq j \leq N$;

r_{2j+2} - rotação do nó $j + 1$, $1 \leq j \leq N$;

\hat{S} - área da seção transversal do tubo de aço;

\hat{s} - abscissa curvilínea medida sobre a linha elástica do oleoduto com o mesmo sentido positivo do eixo das abscissas lineares;

$\hat{T}(\hat{s})$ - força tangente à linha elástica na seção situada na abscissa de medida \hat{s} ;

$\hat{T}_L(\hat{s})$ - força tangente à linha elástica na seção situada na abscissa de medida \hat{s} , durante a operação de lançamento;

$\hat{T}_A(\hat{s})$ - força tangente à linha elástica na seção situada na abscissa de medida \hat{s} , durante a operação de abandono;

$t(x)$ - variação da força $T(x)$ quando se passa da configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto, resultante da operação de lançamento para a operação de abandono;

$u(x)$ - deslocamento horizontal, motivado pela deformação originada pela ação da força $T(x)$ da seção de abscissa x ;

$u_L(x)$ - deslocamento horizontal, durante a operação de lançamento, motivado pela deformação originada pela ação da força $T(x)$ da seção de abscissa x ;

$u_A(x)$ - deslocamento horizontal, durante a operação de abandono, motivado pela deformação originada pela ação da força $T(x)$ da seção de abscissa x ;

$$\mathcal{U}_L^1 = \mathcal{V}_L^1 \cap \mathcal{C}^2(\Omega);$$

$$\mathcal{U}_A^1 = \mathcal{V}_A^1 \cap \mathcal{C}^2(\Omega);$$

$$\mathcal{V}_L^1 = \{g : H^1(\Omega) \longrightarrow R \mid g(0) = 0, \frac{dg}{dx}(p) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f}\};$$

$$\mathcal{V}_L^1 \subset H^1(\Omega);$$

$$\mathcal{V}_A^1 = \{g : H^1(\Omega) \longrightarrow R \mid g(0) = 0, \frac{dg}{dx}(p) = \frac{T_A(p)}{\delta_f}\};$$

$$\mathcal{V}_A^1 \subset H^1(\Omega);$$

$$\mathcal{V}_L^2 = \{f : H^2(\Omega) \longrightarrow R \mid f(0) = 0, f(p) = 0, \frac{df}{dx}(0) = 0, \frac{df}{dx}(p) = 0\};$$

$$\mathcal{V}_L^2 \subset H^2(\Omega);$$

$$\mathcal{V}_A^2 = \{f : H^2(\Omega) \longrightarrow R \mid f(0) = 0, f(p) = 0, \frac{df}{dx}(0) = 0, \frac{df}{dx}(p) = 0\};$$

$$\mathcal{V}_A^2 \subset H^2(\Omega);$$

\hat{V}_0 - flecha típica de um vão livre do oleoduto;

$\hat{V}_n(\hat{x})$ - diferença entre a ordenada, segundo a normal, do oleoduto no ponto de abscissa \hat{x} e a ordenada do perfil do solo não deformado neste ponto;

$V_L(x)$ - diferença entre a ordenada, segundo a vertical, do oleoduto no ponto de abscissa x e a ordenada do perfil do solo não deformado neste ponto. Análoga a $V_n(x)$ após a identificação da direção normal com a vertical. O índice L se refere á operação de lançamento.

$V_A(x)$ - diferença entre a ordenada, segundo a vertical, do oleoduto no ponto de abscissa x e a ordenada do perfil do solo não deformado neste ponto. Análoga a $V_L(x)$ mas relativa á operação de abandono.

$v(x)$ - deslocamento vertical arbitrário da linha elástica, na seção de abscissa x , $v \in \mathcal{V}_L^2$;

$v^*(x)$ - deslocamento vertical da linha elástica na configuração de equilíbrio, na seção de abscissa x , $v^* \in \mathcal{V}_L^2$;

$\hat{v}_s(\hat{x})$ - cota do perfil do solo não deformado, na seção do oleoduto de abscissa \hat{x} ;

$\hat{x}(\hat{s})$ - abscissa do ponto da linha elástica com abscissa curvilínea \hat{s} ;

$\hat{y}(\hat{x})$ - ordenada do ponto de abscissa \hat{x} ;

$y_L(x)$ - ordenada arbitrária, durante a operação de lançamento, do ponto de abscissa x ;

$y_L^*(x)$ - ordenada da configuração de equilíbrio, durante a operação de lançamento, do ponto de abscissa x ;

$y_A(x)$ - ordenada arbitrária, durante a operação de abandono, do ponto de abscissa x ;

$y_A^*(x)$ - ordenada da configuração de equilíbrio, durante a operação de abandono, do ponto de abscissa x ;

$\hat{w}_0(\hat{x})$ - empuxo por unidade de comprimento do oleoduto, no ponto de abscissa \hat{x} ;

$Z_j(x)$ - polinômio associado ao elemento j -ésimo do oleoduto adimensionalizado.

0.3 SÍMBOLOS ESPECIAIS

α - este símbolo, quando usado sem qualquer índice ou complemento, indica um parâmetro local numa dada definição ou uma variável auxiliar;

α_f - constante de adimensionalização da equação básica, cuja solução descreve uma configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto;

$$\alpha_f = \frac{\hat{E} \hat{J}}{\hat{\gamma}_{ef} L_0^3};$$

β - este símbolo, quando usado sem qualquer índice ou complemento, indica um parâmetro local numa dada definição ou uma variável auxiliar;

β_f - constante de adimensionalização da equação básica, cuja solução descreve uma configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto;

$$\beta_f = \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{T}_0};$$

ε_f - parâmetro que traduz a relação entre as escalas de comprimentos vertical e horizontal (por exemplo: flecha típica \hat{V}_0 e vão livre típico \hat{L}_0);

$$\varepsilon_f = \frac{\hat{V}_0}{\hat{L}_0};$$

δ - este símbolo, quando usado sem qualquer índice ou complemento, indica um parâmetro local numa dada definição ou uma variável auxiliar;

δ_f - constante de adimensionalização da equação básica, cuja solução descreve uma configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto;

$$\delta_f = \frac{\hat{E} \hat{S}}{\hat{T}_0};$$

Δ - comprimento adimensionalizado de cada elemento obtido na discretização do oleoduto;

$$\Delta = \frac{p}{N}$$

Δ_o ou Δ_1 - indicam parâmetros locais numa dada definição ou variáveis auxiliares;

$\gamma_0(x)$ - peso por unidade de comprimento do oleoduto (tubo + capa de concreto) no ar, adimensional;

$\hat{\gamma}_{ef}(x)$ - peso por unidade de comprimento do oleoduto (tubo + capa de concreto) no ar, valor dimensional;

κ - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

η - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

λ - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

ρ - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

ϱ - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

ϕ - indica uma função local, numa dada definição ou uma função auxiliar;

φ - indica uma função local, numa dada definição ou uma função auxiliar;

χ - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

ψ - indica uma função local, numa dada definição ou uma função auxiliar;

ω - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

Ω - conjunto de definição das abscissas adimensionais da linha elástica do oleoduto, corresponde ao intervalo fechado $[0,p]$;

μ - coeficiente de atrito de Coulomb entre o oleoduto e o solo;

$\nu(x)$ - variação arbitrária do deslocamento $u_L^*(x)$, quando se passa da configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto, da operação de lançamento para a operação de abandono;

σ_j - abscissa do j -ésimo nó do oleoduto adimensionalizado;

ς - indica um parâmetro local, numa dada definição ou uma variável auxiliar;

$\xi(x)$ - variação arbitrária do deslocamento $y_L^*(x)$, quando se passa da configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto, da operação de lançamento para a operação de abandono;

$\nu^*(x)$ - variação do deslocamento $u_L^*(x)$, quando se passa da configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto, da operação de lançamento para a operação de abandono;

$\xi^*(x)$ - variação do deslocamento $y_L^*(x)$, quando se passa da configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto, da operação de lançamento para a operação de abandono;

l_j - variável percorrendo o j -ésimo elemento de comprimento normalizado do oleoduto, $l_j \in [0, 1], \forall j, 1 \leq j \leq N$;

$\| \cdot \|$ - símbolo geral usado para denotar uma norma. Em alguns casos recebe complementos específicos que caracterizam uma particular norma.

RESUMO

A operação de **assentamento** de oleodutos sobre solo de perfil irregular foi modelada sob o pressuposto de que ela seja constituída de duas etapas, a de **lançamento** e a de **abandono**.

Na operação de lançamento, a modelagem matemática dos esforços sobre o oleoduto incluindo aqueles desenvolvidos nas interações oleoduto-solo conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias com condições de contorno, complementada por uma relação de desigualdade, traduzindo o vínculo de contato entre o oleoduto e o solo. Este modelo é transformado num modelo na forma variacional equivalente, que por sua vez pode ser formulado, equivalentemente, como um problema de inequação variacional.

A operação de abandono é considerada como uma perturbação do oleoduto em torno da configuração de equilíbrio, atingida pela linha elástica durante a operação de lançamento. A modelagem dos esforços sobre o oleoduto e daqueles devidos às interações oleoduto-solo conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias com condições de contorno, complementadas por duas relações de desigualdade, traduzindo os vínculos de contato e a ação do atrito entre o oleoduto e o solo. Neste caso aparece uma relação adicional de desigualdade, pela presença do atrito longitudinal imposto pelo solo sobre a linha. O modelo adotado para o atrito é o modelo de Coulomb, adaptado para contatos distribuídos. O modelo da operação de abandono é transformado num modelo equivalente, na forma de inequações variacionais.

Se os problemas enunciados estão associados à operação de lançamento eles são batizados de problemas **PL**. Aqueles associados à operação de abandono são batizados de **PA**.

Para cada tipo de problema são estabelecidas e demonstradas as equivalências entre os enunciados nas diferentes formulações. Além disso é demonstrada a existência e unicidade de solução para cada problema na forma de inequações variacionais. Pelas equivalências ficam demonstradas também a existência e unicidade de solução para os problemas nas outras formulações. Adicionalmente é estabelecida uma majoração para a solução de cada problema na forma de inequação variacional.

Tendo em vista ilustrar a utilidade destes modelos para aplicações práticas, eles foram discretizados em elementos finitos e um código simplificado, em linguagem FORTRAN 77, foi escrito. Permitindo assim a obtenção de alguns resultados numéricos.

ABSTRACT

In this work pipeline installation on irregular sea floor has been considered as a two-step process, namely, laying and abandon.

In the laying operation a system of ordinary nonlinear differential equations has been developed to model the efforts along the pipeline. Boundary conditions at both ends of the pipeline together with an inequality associated to the contact pipeline-soil have been established. The model has been rewritten in an equivalent variational inequality form.

The abandon operation has been treated as a perturbation around the equilibrium configuration associated to the laying operation. Modeling of the pipeline efforts including those due to the interaction between it and the soil has led to a system of nonlinear ordinary differential equations. A set of boundary conditions at both ends of the pipeline together with two inequalities expressing contact constraints and friction between the pipeline and the soil have been established. The additional constraint that arises in this case is due to the longitudinal friction between the soil and the pipeline. The Coulomb friction model for distributed contact has been adopted. An equivalent variational inequality form model has been derived.

Laying and abandon operations have been denoted respectively by **PL** and **PA** throughout the text.

The equivalence between the distinct formulations have been established and proved. Existence and uniqueness of the solution of each problem in the variational inequality form have been proved. As a consequence of the above mentioned equivalences the existence and uniqueness of the solutions corresponding to the remaining formulations have also been proved. An upper bound for the solution of each problem expressed in variational form has been obtained.

To illustrate their usefulness in practical situations the models have been discretized in finite-element form. A simplified FORTRAN 77 code has been written in order to get numerical results.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA E APLICAÇÕES

1.1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho originou-se do interesse manifestado pela PETROBRAS em avaliar as condições de tensão nas linhas (oleodutos) já instaladas, por ela, no fundo do oceano e daquelas que, no futuro seriam instaladas. Esse interesse acabou gerando um projeto de engenharia cujo objetivo principal era desenvolver um modelo matemático que permitisse avaliar as tensões em linhas apoiadas em solo de perfil irregular, levando em conta que em cada ponto a reação do solo no sentido vertical tem características de uma mola, que é elástica e linear sob compressão e sob tração tem coeficiente de elasticidade nulo, isto é, não oferece reação alguma sob tração. A interação da linha com o solo, no sentido longitudinal, deveria considerar o efeito do atrito. Além disso era importante avaliar o comportamento dinâmico dos trechos da linha em vão livre, considerando excitações provocadas por ondas ou correntezas.

Esse trabalho foi desenvolvido e forneceu resultados satisfatórios, mas deixou muitas dúvidas conceituais, em particular sob o aspecto matemático do problema. Essa tese responde a algumas destas dúvidas.

O primeiro problema conceitual a ser entendido está relacionado com a não unicidade da configuração de equilíbrio, em virtude da presença do atrito. Para contornar este problema, hipóteses bastante restritivas precisam ser introduzidas. Apesar disto, sob as condições das operações de assentamento das linhas, a partir de uma barcaça lançadora, elas são bastante realistas e permitem obter um modelo que pode ser tratado numericamente, visando a obtenção de resultados quantitativos.

O presente trabalho se concentra nos aspectos conceituais da determinação de configurações de equilíbrio da linha elástica de oleodutos apoiados sobre solo de perfil irregular e sob efeito de atrito no sentido longitudinal da linha.

Como resultados qualitativos foram obtidos:

- a) como consequência da hipótese básica que estabelece um par bem definido de passos para a operação de assentamento, foram obtidos dois modelos matemáticos, na forma de inequações variacionais. Estes modelos decorrem de correspondentes modelos na forma de equações diferenciais sujeitas a vínculos do tipo de desigualdades;
- b) uma “equivalência” é estabelecida entre cada modelo na forma de equações diferenciais e o correspondente na forma de inequação variacional, esta “equivalência” diz que as soluções obtidas via modelo de inequação variacional, se existirem, sob certas condições coincidem com aquelas obtidas via modelo diferencial, se estas também existirem;
- c) alguns resultados sobre a existência e a unicidade de soluções dos problemas estudados.

Os problemas enunciados na forma de equações diferenciais, se possível, são re-enunciados numa forma variacional equivalente e são discretizados em elementos finitos, originando problemas de minimização de funcionais em espaços de dimensão finita, que resolvidos numericamente fornecem resultados quantitativos, o que permite uma avaliação do potencial dessas técnicas.

A discretização dos problemas enunciados na forma de inequações variacionais, por envolver uma expressiva complexidade, foi considerada fora do escopo da tese; entretanto, algumas considerações sobre o assunto são apresentadas no final do Capítulo 3.

O conteúdo desse trabalho está distribuído em seis capítulos e três apêndices. O Capítulo 1 contém, além dessa introdução, uma rápida gênese das inequações variacionais, alguns exemplos de aplicação das inequações variacionais, uma mirada para as principais ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento do trabalho e finalmente o problema, objeto da tese, é enunciado com alguns detalhes.

O Capítulo 2 contém as hipóteses fundamentais e a formulação dos modelos matemáticos básicos. O Capítulo 3 contém os resultados qualitativos obtidos, sendo esse Capítulo o cerne da tese. O Capítulo 4 contém alguns detalhes da discretização e a formulação dos problemas discretizados, já preparados para serem convertidos em algoritmos e codificados em forma de programas de computador. O Capítulo 5 apresenta um exemplo ilustrativo do problema estudado, a título de complemento aos resultados qualitativos. O Capítulo 6 contém as principais conclusões e algumas discussões sobre futuros desenvolvimentos. O Apêndice A contém algumas demonstrações relativas ao Capítulo 3, envolvendo maior complexidade algébrica. O Apêndice B contém alguns elementos das ferramentas matemáticas usadas no desenvolvimento da tese. O Apêndice C apresenta alguns resultados secundários e não essenciais para justificar os resultados obtidos.

1.2 ORIGEM DAS INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

Apresenta-se uma rápida genealogia desta técnica que permite formular e resolver algumas classes de problemas de engenharia. As técnicas introduzidas pela Programação Matemática foram precursoras das técnicas numéricas desenvolvidas no escopo dos Métodos Variacionais e destes dois temas originaram-se as Inequações Variacionais [2]. Qualitativamente, o grande salto das primeiras para as segundas foram as generalizações para espaços de dimensão infinita, juntamente com todas as implicações que a infinitude das dimensões acarreta. Esta etapa na generalização dos conceitos se deu, por um lado, com o auxílio da Análise Funcional, que estuda os espaços de funções que, em geral, são de dimensão infinita. A infinitude da dimensão tem implicação na topologia destes espaços como, por exemplo, a não equivalência de normas e portanto das topologias engendradas por estas normas.

Por outro lado, a Teoria da Medida e Integração e a Teoria das Distribuições fornecem a base teórica para a análise de medidas, particularmente de distâncias. Apoiadas em todos os resultados fornecidos por estas teorias matemáticas, as desigualdades envolvendo funções chegaram às desigualdades envolvendo funcionais que, em sentido amplo, constituem o objeto das Inequações Variacionais.

As aplicações deste cabedal teórico a problemas de engenharia ainda é um tanto incipiente, o que é bastante compreensível dada a vastidão da base conceitual envolvida. Como consequência, observa-se que a maioria destas aplicações tem sido desenvolvida por matemáticos [3].

1.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

1.3.1 O Problema de Lubrificação de um Mancal

Trata-se do problema da hidrodinâmica da lubrificação de um mancal de diâmetros e comprimento dados. A função incógnita do problema é a distribuição da pressão p em uma fina camada de lubrificante (um fluido viscoso com coeficiente de viscosidade μ) contida numa estreita faixa, entre dois cilindros circulares de mesmo comprimento, mantida aberta em ambas as extremidades dos cilindros, sob a pressão atmosférica que por simplicidade, mas sem comprometer os resultados, é suposta nula. Os eixos de ambos os cilindros são considerados paralelos mas não coincidentes e é suposto que o cilindro externo permanece fixo e o cilindro interno gira em torno do seu eixo, com velocidade constante e igual a ω , ver Figura 1.1.¹

¹Todas as figuras e gráficos desta tese têm cunho estritamente ilustrativo. Foram desenhados para

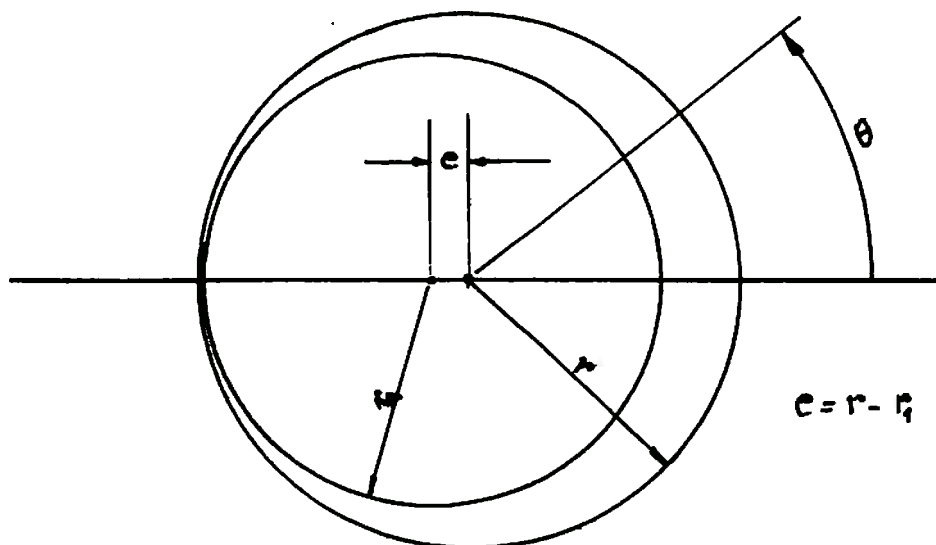


Figura 1.1: Posição relativa dos mancais e da camada de lubrificante.

A determinação da distribuição de pressão no interior do filme de fluido lubrificante pode ser estabelecida como um problema de equações diferenciais parciais do tipo elíptico, com condições de contorno especificadas [4].

A solução obtida nesta formulação fornece uma distribuição de pressão que admite pontos, no interior do filme fluido, onde a pressão se torna negativa. Evidências experimentais mostram que, se a pressão atinge um valor mínimo crítico p_c , relacionado à pressão de vapor do fluido, o filme de lubrificante se rompe e uma bolha de ar se forma. A geometria da região onde a pressão atinge o valor crítico é desconhecida, entretanto as condições de contorno para esta região, chamada região de cavitação ou região cavitada, são: gradiente nulo de pressão e valor constante p_c para a pressão. Em geral, o valor da pressão crítica p_c é inferior e muito próximo da pressão atmosférica. Na formulação do problema, como uma equação diferencial parcial do tipo elíptico com condições de contorno dadas, a pressão pode atingir valores menores que o valor crítico p_c , o que não é fisicamente consistente. Uma abordagem mais realista pode ser adotada, considerando-se o problema como um problema de fronteira livre, i.e um problema onde a geometria do contorno é desconhecida e deve tornar-se conhecida através da determinação da própria solução do problema. O problema de fronteira livre, que pode ser formalizado como um problema na forma de uma inequação variacional, fornece uma distribuição de pressão no interior do filme lubrificante satisfazendo $p \geq p_c$, mais realista portanto, uma vez que apresenta melhor concordância com as evidências experimentais. É de se notar que a inequação variacional, no presente caso, nasce da desigualdade básica $p \geq p_c$.

ajudar na compreensão qualitativa das idéias e conceitos sem preocupação em transmitir informações quantitativas.

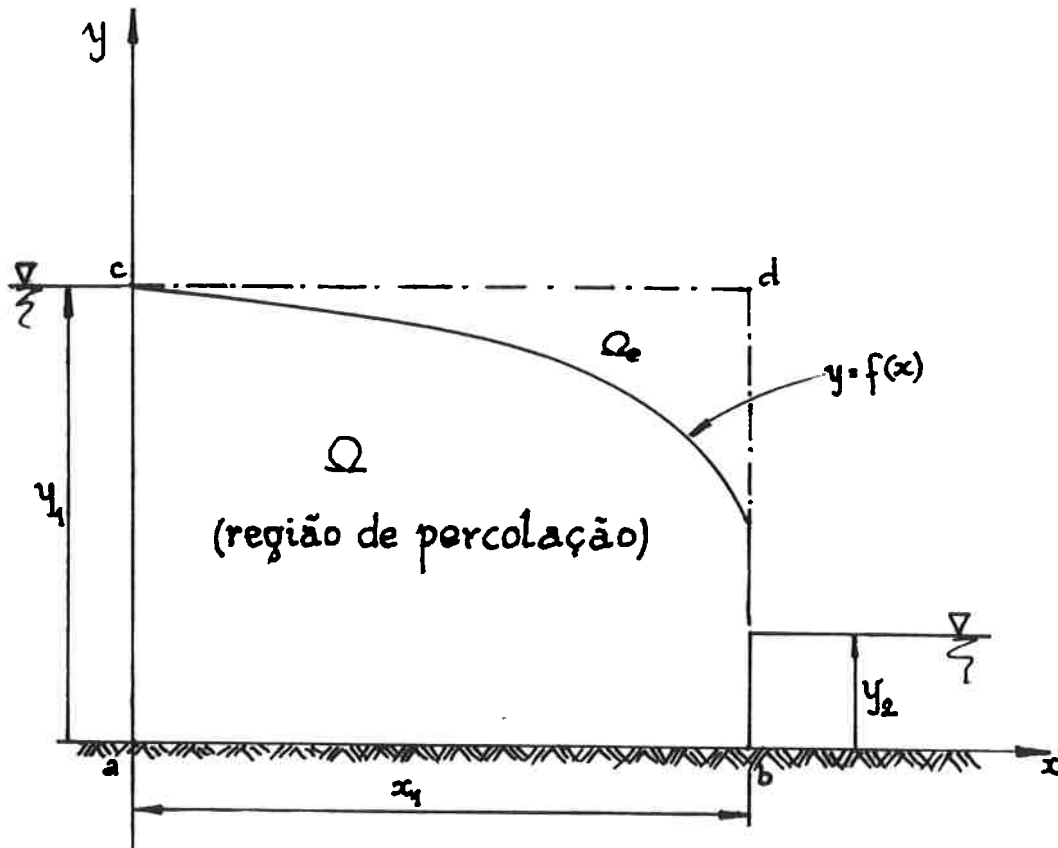


Figura 1.2: Percolação numa seção retangular $D = (a, b) \times (a, c) = (0, x_1) \times (0, y_1)$.

1.3.2 Escoamento de um Fluido através de Meio Poroso

Trata-se de um problema de infiltração de água através de uma barragem de terra, separando dois reservatórios de água. Diz-se tratar de um problema de **percolação**. Para barragens, cuja seção transversal é particularmente simples, o problema de percolação pode ser formulado como uma inequação variacional. Esclarece-se, no entanto, que para seções transversais cujas geometrias estejam mais próximas da realidade, este tipo de formulação conduz a uma família de inequações variacionais, dependentes de um ou mais parâmetros. Nos casos mais gerais, em que a geometria da seção é qualquer, a formulação conduz a uma inequação quase-variacional.

Como exemplo ilustrativo, considera-se o caso mais simples em que a seção transversal da barragem tem forma retangular, ver Figura 1.2.

Por questões de regularidade, o problema considerado pode ser entendido como sendo de um fluxo por percolação bidimensional, com superfície livre que é a linha de contorno entre o solo seco e o solo molhado.

Para apresentação do modelo do problema, algumas hipóteses simplificadoras são necessárias. Em primeiro lugar, considera-se o solo na região de percolação, como sendo homogêneo e isotrópico. Em segundo lugar, desprezam-se os efeitos de capilaridade e evaporação e, para finalizar, supõe-se que o fluxo seja laminar e obedeça à lei de Darcy

[3]. A partir desta lei, extraem-se uma função potencial de velocidades e uma função potencial de corrente que satisfazem à equação de Laplace.

A função potencial de velocidades φ fornecida pela lei de Darcy está definida em $\bar{\Omega}$. E pode ser prolongada continuamente para ficar definida em \bar{D} . Analogamente se procede com a função corrente ψ . Como mostra a Figura 1.2, o conjunto Ω pode ser definido por: $\Omega = \{(x, y) \in D, 0 < x < x_1, 0 < y < f(x)\}$. A função $f(x)$ deve satisfazer as seguintes condições:

$$f(0) = y_1, \quad \frac{d}{dx}f(0) = 0; \quad f(x_1) > y_2, \quad \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{d}{dx}f(x) = -\infty.$$

Além disso, a função f é suposta convexa e o conjunto $\bar{\Omega}$ é o fecho do conjunto Ω . O conjunto D está definido na legenda da figura e \bar{D} é o fecho de D .

Uma formulação convencional para o problema em pauta estabelece que existem funções $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ chamadas, respectivamente, função potencial de velocidades e função corrente, definidas e contínuas em $\bar{\Omega}$ tais que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ \varphi(0, y) &= y_1 & \forall y, 0 \leq y \leq y_1 \\ \varphi(x_1, y) &= y_2 & \forall y, 0 \leq y \leq y_2 \\ \varphi(x_1, y) &= y & \forall y, y_2 \leq y \leq y_3 \\ \varphi(x, y = f(x)) &= f(x) & \forall x, 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) &= q(x, y) & \forall x, 0 \leq x \leq x_1 \text{ e } y = 0 \\ \psi(x, y = f(x)) &= 0 & \forall x, 0 \leq x \leq x_1 \text{ e } y = 0 \end{aligned}$$

A partir dessa formulação os prolongamentos das funções $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ para o conjunto \bar{D} podem ser introduzidos:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) &= \varphi(x, y) & \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \\ \varphi^*(x, y) &= y & \forall (x, y) \in \bar{D} \setminus \bar{\Omega} \end{aligned}$$

onde o símbolo \setminus denota a operação diferença entre conjuntos.

$\psi(x, y)$ é a função corrente, definida e contínua em $\bar{\Omega}$.

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y) &= \psi(x, y) & \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \\ \psi^*(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in \bar{D} \setminus \bar{\Omega} \end{aligned}$$

As funções estendidas φ^* e ψ^* fornecem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial y} &= 0 \quad \forall (x, y) \in D \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} &= \chi_{D \setminus \Omega} \quad \forall (x, y) \in D, \quad \text{no sentido das distribuições}\end{aligned}$$

em que $\chi_{D \setminus \Omega}$ é a função característica do conjunto $D \setminus \Omega$, ver Apêndice B.

As expressões acima mostram que, sob o significado estrito das funções, não tem sentido considerar as derivadas de φ^* e de ψ^* em D e, mesmo no sentido das distribuições, essas funções não satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em D , embora satisfaçam em Ω .

Neste ponto BAIOCCHI [4] teve a idéia de introduzir uma transformação, na tentativa de obter uma formulação para o problema estendido, isto é, definido em D , que não precisasse lançar mão do conceito de distribuição. Assim foram introduzidas as seguintes definições:

$$\omega(x, y) = \int_y^{y_1} [\varphi^*(x, \nu) - \nu] d\nu \quad \text{ou}$$

para $P \in D$

$$\omega(P) = \int_{(0, c) \rightarrow P} -\psi^* dx + (y - \varphi^*) dy$$

em que $(0, c) \rightarrow P$ é a integral de linha, segundo um caminho² arbitrário ligando o ponto $(0, c)$ ao ponto P .

Uma vez introduzida a transformação de BAIOCCHI, a formulação do problema na forma de uma inequação variacional surge a partir da propriedade básica de $\omega(x, y)$, que é $\omega(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$. É verdade que alguns passos são necessários para, partindo das expressões que definem a função $\omega(x, y)$, chegar-se à inequação desejada, que é:

$$a(\omega, v - \omega) \geq L(v - \omega) \quad \forall v \in K \quad (1.1)$$

onde:

$$a(u, v) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.2)$$

$$L(u - v) = - \iint_D (u - v) dx dy \quad (1.3)$$

²Para o conceito de caminho ver Apêndice B

$$K = \{v \in H^1(D), v|_{\partial D} \geq 0 \text{ qtp}\}$$

a abreviatura **qtp** significa: **em quase todo ponto**, estando sempre associada à presença de uma distribuição.

Maiores detalhes da formulação podem ser acompanhados em [3] e [4].

1.3.3 Pré-requisitos de Matemática

Embora seja essencialmente de engenharia, o presente trabalho é revestido de cunho teórico conceitual que exige um formalismo matemático mínimo para que os resultados não adquiram caráter impreciso. Nesse sentido é apresentado um apêndice contendo conceitos e resultados considerados mais importantes para as justificativas diretas dos resultados qualitativos da tese. Estes resultados dizem respeito aos conceitos básicos sobre funcionais, “derivadas” de um funcional, espaços de funções, espaços completos e não completos, completamento de espaços, etc. Extremos de um funcional, condições necessárias para a existência de extremante de um funcional, funcionais convexos, teorema de existência e unicidade do mínimo de um funcional, etc. Os conceitos, definições e teoremas mais importantes são apresentados e referências básicas que contêm estes resultados também são fornecidas. Alguns resultados que não são estreitamente vinculados ao resultado da tese, ou que dizem respeito a aspectos secundários, são apresentados no Apêndice C.

1.3.4 Introdução ao Problema de Assentamento de Oleodutos

O objeto do presente trabalho é a apresentação de alguns resultados obtidos sobre o comportamento estrutural de um oleoduto durante as operações de assentamento em solo de perfil irregular e sujeito a ação de atrito entre o oleoduto e o solo (leito marinho) através da formulação do problema na forma de um par de inequações variacionais. A origem desse par de inequações se encontra no modelo do atrito Coulombiano e no modelo do solo semi-elástico.

De um modo geral, o problema de assentamento de um oleoduto no leito marinho não é bem definido, pelo fato de não admitir solução única de equilíbrio quando o efeito do atrito entre o leito marinho e o oleoduto é considerado. A presença do atrito faz com que a configuração de equilíbrio dependa da história das operações executadas sobre o oleoduto, ou seja, para se determinar uma solução do problema é necessário acompanhar o processo do assentamento do oleoduto.

Para exemplificar esta situação, considere-se um bloco de peso \hat{P} , apoiado sobre um plano horizontal e sujeito a ação de uma mola, conforme mostra a Figura 1.3. Seja μ o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano, \hat{k} a constante elástica da mola.

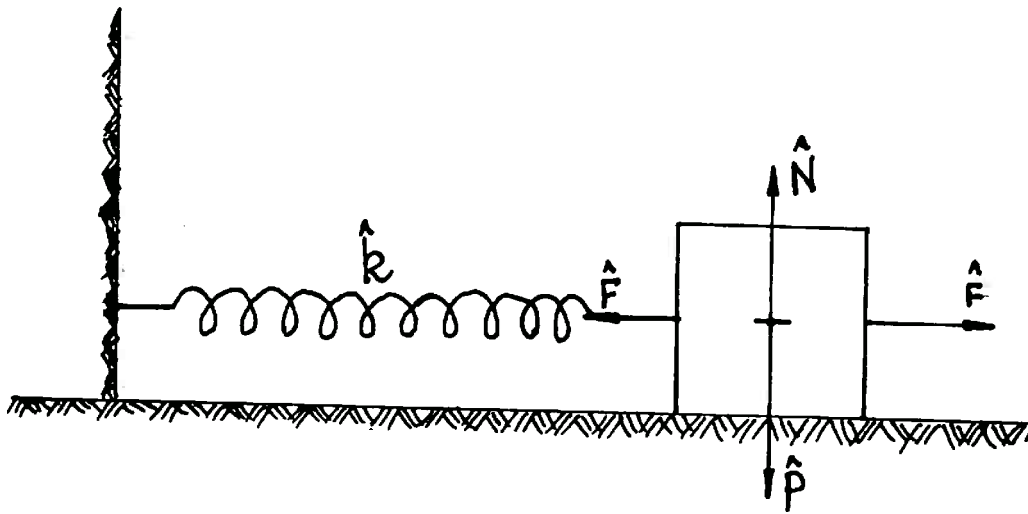


Figura 1.3: Bloco de peso \hat{P} , suspenso, tracionado e depositado sobre o plano horizontal.

Supondo, para desenvolver o argumento, que $\hat{F} < \mu\hat{N}$ e considerando as duas histórias de carregamento descritas a seguir:

a) o bloco é suspenso, tracionado com uma força de módulo \hat{F} , a seguir é depositado sobre o plano horizontal. Por equilíbrio a mola se distende de $\Delta\hat{x}$, tal que $\hat{k}\Delta\hat{x} = \hat{F}$. Quando o corpo é depositado no plano nenhuma força de atrito Coulombiano é mobilizada, pois a distensão da mola equilibra \hat{F} . Neste caso o módulo da força de tração sobre cada seção do bloco e sobre a mola é $\hat{R} = \hat{k}\Delta\hat{x} = \hat{F}$.

b) o bloco é tracionado com força de módulo \hat{F} estando apoiado no plano horizontal. Como $\hat{F} < \mu\hat{N}$, a força de atrito Coulombiano $\hat{f}_a = \hat{F}$ é mobilizada e, por equilíbrio, a mola não se distende. Neste caso a força de tração sobre cada seção do bloco e sobre a mola é $\hat{R} = 0$, ver Figura 1.4.

Na realidade pode-se imaginar uma infinidade de histórias de assentamento, de forma tal que a força de tração nas seções da estrutura seja qualquer valor entre 0 e \hat{F} , i.e., $0 \leq \hat{N} \leq \hat{F}$. Para que a solução resulte definida é necessário que informações adicionais sejam fornecidas.

Apesar desta dificuldade inerente ao problema de assentamento do oleoduto no leito marinho, ainda é pertinente a seguinte questão: é possível definir uma história de assentamento que simule as operações usuais de assentamento de um oleoduto no leito marinho?

A resposta a esta questão, sob a condição de que o oleoduto seja lançado por barça, pode ser dada satisfatoriamente, quando se reduz o problema de assentamento a um par ordenado de operações, chamadas **operações elementares**. Este par reproduz com

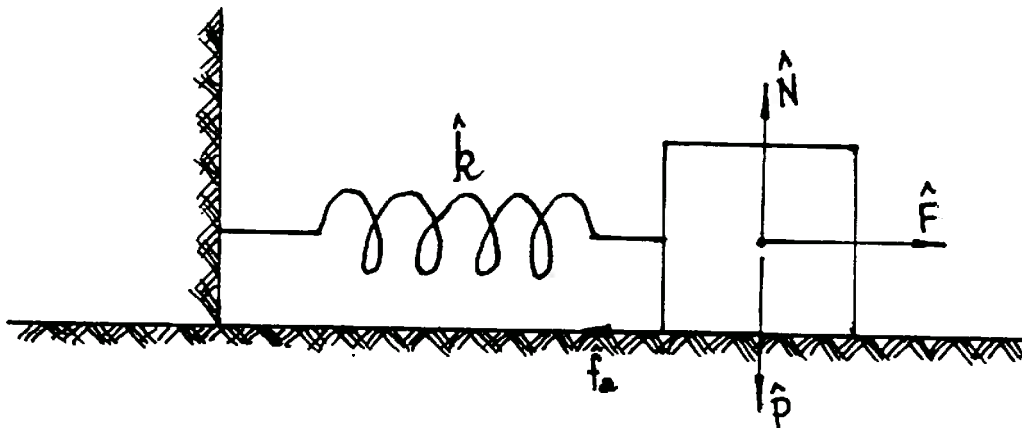


Figura 1.4: Bloco tracionado e a mobilização da força de atrito $f_a = \hat{F}$

fidelidade aceitável, os procedimentos operacionais a que é submetido um oleoduto durante uma operação real de assentamento. A este par ordenado de operações elementares denomina-se **história de assentamento** do oleoduto. Diz-se, também, que cada uma dessas operações é uma **etapa** da operação de assentamento. Seguem a definição de cada uma das operações elementares ou etapas da operação de assentamento.

A primeira operação elementar, chamada **operação de lançamento**, consiste na articulação de uma das extremidades de um tramo de tubo no fundo do oceano, tracionado por uma força de lançamento \hat{T}_L , aplicada na extremidade oposta àquela articulada e, por rotação em torno do ponto vinculado, como corpo rígido contido num plano vertical, o tubo é depositado sobre um solo de perfil irregular. Durante esta operação o atrito não intervém na interação entre o tubo e o solo.

A segunda operação elementar, chamada **operação de abandono**, consiste em se engastar uma das extremidades do oleoduto já lançado e depois atenuar, quase-estaticamente, a força de tração \hat{T}_L , na outra extremidade, até que assumam um valor pré-fixado \hat{T}_A , eventualmente nulo (isto significa que esta extremidade do oleoduto pode ficar sujeita a uma força de compressão, de origem hidrostática). Durante esta operação elementar, **forças de atrito Coulombiano atuam** sobre o oleoduto.

Após estas conceituações sobre as operações elementares, será abordada a sistemática da modelagem matemática do problema. O enfoque dado consiste em formular um modelo matemático que traduza com aproximação aceitável, em termos de engenharia, o problema

físico estudado e que possa ser analisado pelos recursos teóricos oferecidos pelo ferramental matemático pertinente. Como produto final desses modelos, um código de procedimentos computacionais permite obter resultados quantitativos, através de tratamento numérico adequado.

O modelo matemático formulado, seguindo a história do assentamento, assegura a existência e a unicidade de uma solução de equilíbrio para cada tipo de operação elementar, permitindo também que se exiba, em cada caso, uma aproximação da solução por meio de discretização da estrutura em elementos finitos.

O cerne desta investigação é a demonstração da existência e unicidade de solução de equilíbrio, para cada operação elementar do problema de assentamento. A existência e a unicidade da solução do problema de lançamento são demonstradas sem maiores dificuldades e sem restrições. A existência e a unicidade da solução do problema de abandono são demonstradas com razoável esforço adicional sob alguma restrição sobre a densidade linear da força de atrito \hat{f}_a .

O desenvolvimento do modelo consiste em escrever equações de equilíbrio para um elemento de oleoduto. Este procedimento conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias, em que uma das funções incógnitas está sujeita a um vínculo do tipo desigualdade. Mais precisamente a função deslocamento vertical $\hat{y}(\hat{s})$ é restrita pelo perfil do solo que ao ser comprimido gera uma força que se opõe e é crescente com $\hat{y}(\hat{s})$. Como o solo é modelado como sendo elástico linear sob compressão e neutro sob tração, as restrições que o perfil do solo impõe sobre os deslocamentos verticais não são do tipo obstáculo. O termo obstáculo tem um significado preciso e corresponde a um vínculo unilateral entre uma estrutura flexível (barbante, membrana etc.) e um contorno (apoio) infinitamente rígido. Confronte com a modelagem do comportamento do solo no Capítulo 2.

O sistema de equações então obtido incorpora as não linearidades geométricas da linha elástica, que se manifestam pela presença das funções trigonométricas, no modelo estabelecido pela geometria diferencial. Outras não linearidades do problema também estão presentes no modelo inicial básico. Estas não linearidades estão associadas às forças de atrito e ao próprio vínculo de contacto com o solo. Este modelo básico apresenta um nível de complexidade que torna difícil, senão impossível, a sua análise qualitativa. Mesmo uma análise quantitativa é dificultada pela presença das desigualdades associadas, respectivamente, ao contacto unilateral com o solo e com o atrito longitudinal do tipo Coulombiano. Etribado numa série de hipóteses fundamentais, explicitadas e discutidas no Capítulo 2, é possível introduzir simplificações no modelo, de modo a se obter um modelo simplificado ainda representativo do problema físico que se deseja estudar e que torne viável uma análise qualitativa mais aprofundada. Mesmo após as simplificações o modelo ainda retém manifestações de fenômenos físicos de difícil manipulação. Estas manifestações estão associadas às forças de atrito, que dependem fortemente, como já vimos, da história de assentamento. O que registra esta história de assentamento é a função $\hat{T}(\hat{x})$, que representa a força que atua axialmente, em cada seção do oleoduto. Uma questão que pode ser formulada neste ponto é: "dada uma função $\hat{T}(\hat{x})$, $\hat{x} \in [0, \hat{L}]$, contínua e um perfil de solo (suposto, por enquanto, infinitamente rígido) $\hat{v}_s(\hat{x})$, $\hat{x} \in [0, \hat{L}]$, e as condições de contorno do problema, é possível verificar se o sistema de equações diferenciais, com o vínculo $\hat{y}(\hat{x}) \leq \hat{v}_s(\hat{x})$, $\hat{x} \in [0, \hat{L}]$, admite uma solução? Esta solução, se existir, é única?

Depende continuamente das condições de contorno? O desenvolvimento deste estudo norteou-se por questões dessa natureza.

Para responder, em relação ao problema de assentamento (ainda que parcialmente) questões como as que estão postas acima, o que é feito no Capítulo 3, o problema é inicialmente formulado como um sistema de equações diferenciais ordinárias, sujeito a vínculos de desigualdade e a condições de contorno. Em continuação o problema é transformado num problema na forma de um par de inequações variacionais. Isto para cada etapa da história do assentamento.

Na primeira etapa desta formulação, a função $\hat{T}(\hat{x})$ é conhecida e, na presente abordagem é suposta constante, consistindo a solução do problema em minimizar-se um funcional e a conseqüente determinação de uma função extremante $\hat{y}_e(\hat{x})$, $\forall \hat{x} \in [0, \hat{L}]$. Na segunda etapa, a obtenção da solução do problema é mais complicada, pois não é possível escrevê-lo como um problema de minimização de um funcional. Neste caso a função que resolve o problema tem que ser buscada através da solução direta de uma inequação variacional. Como a função $\hat{T}(\hat{x})$ é a função que governa os deslocamentos horizontais $\hat{u}(\hat{x})$, é fácil entender que, de fato, há um acoplamento entre os deslocamentos horizontais $\hat{u}(\hat{x})$ e os deslocamentos verticais $\hat{y}(\hat{x})$. Este acoplamento se dá, exatamente, através da função $\hat{T}(\hat{x})$. No Capítulo 2, a natureza deste acoplamento é estabelecida para cada etapa do problema, ou seja, para cada operação elementar que compõe a história do assentamento. Os resultados obtidos no Capítulo 3 estão intimamente relacionados à natureza deste acoplamento.

CAPÍTULO 2

ASSENTAMENTO DE OLEODUTOS. HIPÓTESES E MODELAGEM

2.1 HIPÓTESES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

É necessário que se estabeleçam as hipóteses mais importantes que, explícita ou implicitamente, darão embasamento ao desenvolvimento do modelo. Algumas destas hipóteses são redundantes com aquelas da teoria da elasticidade e outras são específicas do problema em estudo. Segue o enunciado de cada uma das hipóteses:

H1- durante a operação de lançamento a força de tração ou função força de tração satisfaz $\hat{T}_L(\hat{x}) \geq 0 \quad \forall \hat{x} \in [0, \hat{L}]$;

H2- durante a operação de abandono, na interação solo-oleoduto forças de atrito atuam ao longo do oleoduto. A natureza desse atrito é suposta do tipo Coulombiano e o coeficiente de atrito é considerado constante. A função densidade linear de força de atrito é sempre não negativa, limitada e seccionalmente contínua.

H3- o problema tratado é plano, no sentido de que a estrutura está sempre contida num plano vertical, mais precisamente, a linha neutra do oleoduto está contida num plano vertical;

H4- o oleoduto é modelado estrutural e globalmente como uma viga, porque a relação *diâmetro/comprimento* é pequena;

H5- o material do oleoduto é homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, isto é, obedece a lei de Hooke. Além disso os deslocamentos também são considerados pequenos. Durante as deformações seções planas permanecem planas, isto é, o deslocamento relativo das “fibras” é desprezado. A curvatura \hat{c} e o momento fletor \hat{M} , numa dada seção do oleoduto, se relacionam através da lei constitutiva $\hat{c} = \frac{\hat{M}}{\hat{E}\hat{J}}$, onde $\hat{E}\hat{J}$ é o produto de rigidez à flexão do aço;

CAPÍTULO 2. ASSENTAMENTO DE OLEODUTOS. HIPÓTESES E MODELAGEM²

H6- o oleoduto é localmente rígido, seções transversais não se deformam e o efeito Poisson é desprezado;

H7- as forças axiais, em valor absoluto, são muito maiores que as correspondentes forças cortantes;

H8- o solo é considerado semi-elástico linear, o que significa que responde, em cada ponto que se encontra sob compressão, como uma mola linear e, sob tração, o coeficiente de elasticidade da mola é nulo. A rigidez do solo é suposta constante ao longo do eixo x . Admite-se, ainda, que a reação do solo se dá segundo a normal da “superfície” de contato;

H9- o peso específico da água do mar é considerado constante com a profundidade, ao longo da linha;

H10- o efeito da capa de concreto que recobre o tubo de aço é apenas de aumentar o seu peso, i.e, o concreto atua somente como lastro. Em geral, a espessura do lastro de concreto pode variar ao longo do eixo x . Nessa tese está sendo admitido que o peso por unidade de comprimento do tubo no ar é $\gamma_0(x) = \gamma_0 = \text{constante}$;

H11- o perfil do solo é uma função contínua de x . É admitido ainda que o perfil se inicia num trecho plano e horizontal e termina num segundo trecho, também plano e horizontal de mesma cota do trecho inicial. As condições nas extremidades permitem que se estabeleçam as condições essenciais de contorno, ver Figura 2.1.

$$\hat{y}(0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\hat{y}(\hat{L}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}(0) = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}(\hat{L}) = 0 \quad (2.3)$$

Além das condições de contorno nos deslocamentos verticais, restam também as condições de contorno para os deslocamentos horizontais, que são:

$$\hat{u}(0) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{x}}(\hat{L}) = \frac{\hat{T}(\hat{L})}{\hat{E}\hat{A}} \quad (2.5)$$

onde $\hat{E}\hat{A}$ é o produto de rigidez axial e $\hat{T}(\hat{L})$ é a tensão típica da tração aplicada na extremidade $\hat{x} = \hat{L}$ do oleoduto. As tensões típicas $\hat{T}(\hat{L})$ para as operações de lançamento e abandono são denotadas, respectivamente, por \hat{T}_L e \hat{T}_A . Isto significa que durante a operação de lançamento $\hat{T}(\hat{L}) = \hat{T}_L$, a seguir a tensão \hat{T}_L é aliviada muito lentamente, de modo a se considerar as variações de configurações independentes do tempo, até que seja atingido o valor típico de abandono \hat{T}_A .

2.1.1 Algumas Observações sobre as Hipóteses Enunciadas

O1- As hipóteses H1 e H2 têm conveniências teóricas e dão caracterização quantitativa aos conceitos das etapas da história de assentamento. A experiência mostra que em termos práticos, elas são, em geral, verificadas. A hipótese H2 simplifica uma das complexidades na interação entre o solo e a estrutura. Neste caso a complexidade tem a ver com a micro estrutura das superfícies em contato.

A referência [5] apresenta um outro modelo dessa interação, estabelecido a partir de hipóteses sobre a microestrutura das superfícies em contato.

O2- A hipótese H3 está dizendo apenas que o problema tratado é bidimensional.

O3- A hipótese H4 estabelece que, globalmente o oleoduto é um corpo filiforme, i.e, o sólido se confunde com a sua linha neutra, isto se justifica pela relação diâmetro/comprimento ser pequena quando comparada com a unidade.

O4- As hipóteses H5 e H6 são usuais em resistência dos materiais e se aplicam na maioria dos problemas de engenharia sobre estruturas delgadas. No caso específico, são inteiramente justificadas porque o objetivo é a análise prévia da estrutura e, por questão de segurança, é desejável que trabalhe dentro do regime elástico.

O5- A hipótese H7 tem particular importância, porque baseadas nela algumas simplificações importantes são feitas no modelo.

O6- A hipótese H8 permite simplificar a complexa interação entre o solo e a estrutura, complexidade esta motivada pelas características mecânicas do solo.

O7- A hipótese H9 é satisfatória para a maioria dos casos de estruturas oceânicas. Há situações, entretanto, em que a água do mar, numa parte da região de trabalho, contém grande quantidade de material sólido em suspensão. Infelizmente nestes casos, em geral, não se dispõem de dados confiáveis sobre a variação do peso específico da água com aprofundidade.

O8- No Apêndice C constam algumas considerações sobre a hipótese H10 onde, com base na referência [15], são feitas algumas estimativas da influência da capa de concreto nos esforços de flexão que ocorrem num oleoduto.

O9- A hipótese H11 também é feita para suprir a falta de informações precisas sobre a variação do perfil do solo ao longo da estrutura. Na realidade o que se dispõe sobre o perfil do solo é uma seqüência de cotas que são medidas ao longo da trajetória prevista, para o assentamento do oleoduto. Supõe-se então, para efeito de discretização da estrutura, que numa vizinhança arbitrária de cada ponto onde a cota é conhecida, há um intervalo de cota constante. A suposição que os trechos inicial e final do trajeto a ser seguido pela linha, são planos e horizontais não se distancia muito da realidade, uma vez que, por questões práticas, a instalação dos equipamentos de produção não é feita sobre solo com irregularidades pronunciadas. Entre os requisitos de instalação destes equipamentos há

aquele de um solo plano e horizontal. No que diz respeito a igualdade de cotas dos trechos inicial e final, esta é uma hipótese de caráter essencialmente simplificador e pode, dentro de certos limites, ser relaxada.

2.2 MODELAGEM DO OLEODUTO, CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO

2.2.1 Modelo Geral para as Duas Operações Elementares

Introduz-se, inicialmente, um modelo básico que pode ser particularizado posteriormente, para cada uma das operações elementares. Para construir o modelo básico, considera-se um elemento de oleoduto, sujeito a todas as forças externas e internas que atuam no oleoduto e impõem-se as condições de equilíbrio para o elemento. A seguir, usando as hipóteses simplificadoras, especializa-se o modelo para cada uma das operações elementares. O que se espera destes modelos é que possam fornecer informações qualitativas a respeito das configurações de equilíbrio da estrutura, em cada uma das operações elementares. Além disso, espera-se que através de um tratamento numérico adequado, informações quantitativas também possam ser extraídas dos modelos. Na presente etapa, faz-se uso das condições de contorno e introduz-se uma formulação conveniente do contato do oleoduto com o solo, que vai conduzir a uma formulação do problema, na forma de um par de inequações variacionais, para cada uma das operações elementares.

Considera-se um sistema de referência global Oxy , ver Figura 2.1, e um sistema de referência local $O_1x_1y_1$, em que os pares de eixos Ox, O_1x_1 e Oy, O_1y_1 são respectivamente paralelos. Associadas aos sistemas de referência considera-se também as bases ortonormais $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{t}, \vec{n}\}$, respectivamente.

É importante notar que, sendo o elemento $\Delta\hat{s}$ uma parte da estrutura, suas extremidades não sofrem a ação direta do fluido. Nestas condições, a força hidrostática $\hat{w}_0.\Delta\hat{s}$ que atua no elemento $\Delta\hat{s}$ não deve, em geral, se orientar segundo a vertical. É demonstrado na referência [22] que, de fato, a força $\hat{w}_0.\Delta\hat{s}$ se orienta segundo o vetor normal ao elemento, como mostrado na Figura 2.1.

As equações de equilíbrio para as forças e momentos são:

$$\sum \vec{F}_i = \hat{0} \quad (\text{equilíbrio de forças}) \quad (2.6)$$

$$\sum \vec{M}_i = \hat{0} \quad (\text{equilíbrio de momentos}) \quad (2.7)$$

Para o equilíbrio de forças tem-se:

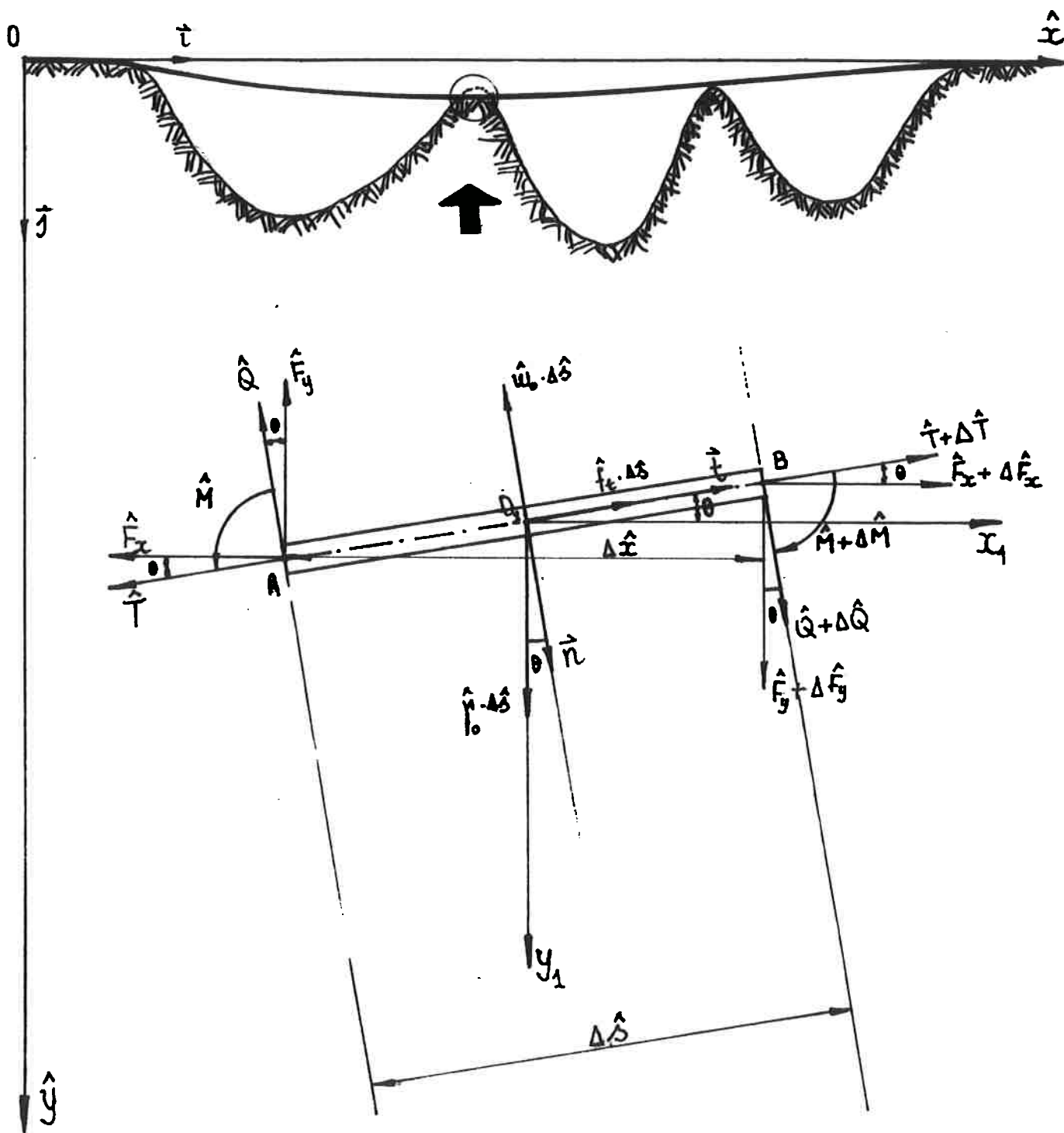


Figura 2.1: Linha elástica do oleoduto em equilíbrio sobre solo de perfil irregular.

$$\begin{aligned} & (-\hat{F}_x + \hat{F}_x + \Delta\hat{F}_x + \hat{w}_0 \cdot \Delta\hat{s} \cdot \sin \theta + \hat{f}_n \cdot \Delta\hat{s} \cdot \sin \theta + \hat{f}_t \cdot \Delta\hat{s} \cdot \cos \theta) \vec{i} + \\ & (-\hat{F}_y + \hat{F}_y + \Delta\hat{F}_y - \hat{w}_0 \cdot \Delta\hat{s} \cdot \cos \theta - \hat{f}_n \cdot \Delta\hat{s} \cdot \cos \theta + \hat{f}_t \cdot \Delta\hat{s} \cdot \sin \theta + \hat{\gamma}_0 \cdot \Delta\hat{s}) \vec{j} = \vec{0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\hat{f}_n(\hat{x})$ é a densidade linear de força que o solo exerce, segundo a normal, sobre o oleoduto no ponto de abscissa \hat{x} e $\hat{f}_t(\hat{x})$ é a densidade linear de força que o solo exerce, segundo a tangente, sobre o oleoduto no mesmo ponto.

Dividindo por $\Delta\hat{s}$ e admitindo a existência dos limites para $\Delta\hat{s} \rightarrow 0$, resulta:

$$\left(\frac{d\hat{F}_x}{d\hat{s}} + \hat{w}_0 \sin \theta + \hat{f}_n \cdot \sin \theta + \hat{f}_t \cdot \cos \theta \right) \vec{i} + \left(\frac{d\hat{F}_y}{d\hat{s}} - \hat{w}_0 \cdot \cos \theta - \hat{f}_n \cdot \cos \theta + \hat{f}_t \cdot \sin \theta + \hat{\gamma}_0 \right) \vec{j} = \vec{0} \quad (2.9)$$

Expressando \hat{F}_x e \hat{F}_y em função de \hat{T} e \hat{Q} , tem-se:

$$\hat{F}_x = \hat{T} \cdot \cos \theta - \hat{Q} \cdot \sin \theta \quad (2.10)$$

$$\hat{F}_y = \hat{T} \cdot \sin \theta + \hat{Q} \cdot \cos \theta \quad (2.11)$$

Calculando as derivadas $\frac{d\hat{F}_x}{d\hat{s}}$ e $\frac{d\hat{F}_y}{d\hat{s}}$, tem-se:

$$\frac{d\hat{F}_x}{d\hat{s}} = \cos \theta \cdot \frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} - \hat{T} \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{d\hat{s}} - \sin \theta \cdot \frac{d\hat{Q}}{d\hat{s}} - \hat{Q} \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{d\hat{s}} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\hat{F}_y}{d\hat{s}} = \sin \theta \cdot \frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} + \hat{T} \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{d\hat{s}} + \cos \theta \cdot \frac{d\hat{Q}}{d\hat{s}} - \hat{Q} \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{d\hat{s}} \quad (2.13)$$

De (2.9), (2.12) e (2.13), obtem-se:

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} - \hat{Q} \frac{d\theta}{d\hat{s}} = -\hat{\gamma}_0 \cdot \sin \theta - \hat{f}_t \quad (2.14)$$

$$\hat{T} \cdot \frac{d\theta}{d\hat{s}} + \frac{d\hat{Q}}{d\hat{s}} = -(\hat{\gamma}_0 \cos \theta - \hat{w}_0) + \hat{f}_n \quad (2.15)$$

Para o equilíbrio de momentos, pode-se calcular os momentos em relação ao ponto B, por exemplo. Da Figura 2.1, tem-se:

$$\begin{aligned} & (-\hat{M} + \hat{M} + \Delta\hat{M})\vec{k} + \Delta\hat{s} \cdot \cos\theta(-\vec{i}) \wedge \hat{F}_y(-\vec{j}) + \Delta\hat{s} \cdot \sin\theta(-\vec{j}) \wedge \hat{F}_x(-\vec{i}) + \\ & \frac{\Delta\hat{s}}{2} \cdot \cos\theta(-\vec{i}) \wedge \hat{w}_0 \cdot \Delta\hat{s} \cdot \cos\theta(-\vec{j}) + \frac{\Delta\hat{s}}{2} \cdot \cos\theta(-\vec{i}) \wedge \hat{f}_n \cdot \Delta\hat{s} \cdot \cos\theta\vec{j} + \\ & \frac{\Delta\hat{s}}{2} \cdot \cos\theta(-\vec{i}) \wedge \hat{\gamma}_0 \cdot \Delta\hat{s}\vec{j} = \vec{0}^1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dividindo (2.16) por $\Delta\hat{s}$, supondo a existência dos limites para $\Delta\hat{s} \rightarrow 0$ e lembrando que $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, obtém-se:

$$\left(\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}} + \cos\theta\hat{F}_y - \sin\theta\hat{F}_x\right)\vec{k} = \vec{0} \quad (2.17)$$

Considerando (2.10),(2.11) e (2.17) obtém-se:

$$\left(\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}} + \hat{Q}\right)\vec{k} = \vec{0} \quad (2.18)$$

ou ainda:

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}} = -\hat{Q} \quad (2.19)$$

Além das equações (2.14),(2.15) e (2.19) que exprimem as condições de equilíbrio do elemento $\Delta\hat{s}$, subsistem as seguintes relações:

$$\frac{d\theta}{d\hat{s}} = \frac{\hat{M}}{\hat{E}\hat{J}} \quad (2.20)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} = \sin\theta \quad (2.21)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} = \cos\theta \quad (2.22)$$

em que a expressão (2.20) é a lei constitutiva considerada na hipótese (H5). As expressões (2.21) e (2.22) são relações geométricas.

Tendo em vista o comportamento elástico do oleoduto (hipótese H5), é oportuna a introdução de uma lei constitutiva que relacione os deslocamentos longitudinais com a tração $\hat{T}(\hat{s})$.

¹O símbolo \wedge indica o produto exterior ou produto vetorial

CAPÍTULO 2. ASSENTAMENTO DE OLEODUTOS. HIPÓTESES E MODELAGEM

Um elemento de comprimento $\Delta\hat{s}$ sujeito a uma força de tração pura se deforma longitudinalmente e seu comprimento passa a ser $\Delta\hat{s} + \Delta\hat{u}$, definindo-se o alongamento ε por:

$$\varepsilon = \frac{(\Delta\hat{s} + \Delta\hat{u}) - \Delta\hat{s}}{\Delta\hat{s}} = \frac{\Delta\hat{u}}{\Delta\hat{s}} \quad (2.23)$$

Supondo a existência do limite, para $\Delta\hat{s} \rightarrow 0$, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{d\hat{u}}{d\hat{s}} \quad (2.24)$$

Da lei de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{E}} \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25), considerando que $\hat{\sigma} = \frac{\hat{T}}{\hat{A}}$, vem que:

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{s}} = \frac{\hat{T}}{\hat{E}\hat{A}} \quad (2.26)$$

É importante observar que a relação constitutiva (2.26) vale, rigorosamente, apenas para situações de estado simples de tensão, gerado por uma tração ou compressão pura. Este caso, como se verá, satisfaz, dentro das hipóteses estabelecidas, a relação (2.26) a menos de erros da ordem ε_f^2 . O parâmetro ε_f traduz a medida da flecha de um vão livre típico da linha elástica do duto, usando como unidade de medida o comprimento do vão. Mais precisamente, é o quociente entre a flecha de um vão livre e o seu comprimento. Trata-se, evidentemente, de um parâmetro cujos valores são pequenos se comparados com a unidade, pois um vão livre típico tem comprimento da ordem de uma centena de metros e as flechas correspondentes são da ordem de um metro.

O comportamento elástico do elemento $\Delta\hat{s}$, em equilíbrio, para $\Delta\hat{s} \rightarrow 0$, supondo a validade de (2.26) é descrito por:

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{s}} = \frac{\hat{T}}{\hat{E}\hat{A}} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} - \hat{Q} \frac{d\theta}{d\hat{s}} = -\hat{\gamma}_0 \sin \theta - \hat{f}_t \quad (2.28)$$

$$\hat{T} \frac{d\theta}{d\hat{s}} + \frac{d\hat{Q}}{d\hat{s}} = -(\hat{\gamma}_0 \cos \theta - \hat{w}_0) + \hat{f}_n \quad (2.29)$$

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{s}} = -\hat{Q} \quad (2.30)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{s}} = \frac{\hat{M}}{\hat{E}\hat{J}} \quad (2.31)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} = \sin \theta \quad (2.32)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} = \cos \theta \quad (2.33)$$

Antes de serem estabelecidos os modelos de atuação de \hat{f}_t e de \hat{f}_n , que são, respectivamente, as densidades da força tangencial originada pelo atrito entre o solo e as paredes externas do oleoduto e da força normal originada pela reação do solo sobre o oleoduto, podem ser introduzidas simplificações baseadas nas hipóteses estabelecidas. Para efetuar as simplificações é conveniente adimensionalizar as equações e depois considerar as ordens de grandeza de cada parcela que comparece nas equações adimensionalizadas.

2.2.2 Adimensionalizações e Simplificações

Basta uma análise superficial do problema do oleoduto apoiado no fundo do oceano para se identificar, com clareza, duas escalas básicas de comprimento bem distintas, associadas ao problema. Uma das escalas está associada às variações de cotas na vertical e, a outra, aos comprimentos dos vãos livres considerados na horizontal. Na busca de um critério de comparação das ordens de grandeza das parcelas que compõem as expressões (2.27) a (2.33), podem ser definidos fatores de adimensionalização. As seguintes grandezas básicas foram selecionadas:

- \hat{L}_0 - comprimento do vão livre típico. Fator de adimensionalização para os deslocamentos e comprimentos horizontais;
- \hat{V}_0 - flecha típica. Fator de adimensionalização para os deslocamentos verticais;
- \hat{T}_0 - força de tração típica durante a operação de assentamento do oleoduto. Fator de adimensionalização das forças axiais;
- $\hat{\gamma}_{ef}$ - peso efetivo por unidade de comprimento do oleoduto. Fator de adimensionalização para as densidades lineares de força (força/comprimento);
- $\hat{\gamma}_{ef} \cdot \hat{L}_0$ - fator de adimensionalização para as forças cortantes;
- $\hat{\gamma}_{ef} \cdot \hat{L}_0^2$ - fator de adimensionalização para os momentos fletores.

Considerando estas grandezas e as equações (2.27) a (2.33), pode-se escrever:

$$\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0} \frac{du}{ds} = \frac{\hat{T}_0}{\hat{E}\hat{A}} T \quad (2.34)$$

$$\frac{\hat{T}_0}{\hat{L}_0} \frac{dT}{ds} - \hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0 Q \frac{1}{\hat{L}_0} \frac{d\theta}{ds} = -\hat{\gamma}_{ef} (\gamma_0 \sin \theta + f_t) \quad (2.35)$$

$$\hat{T}_0 T \frac{1}{\hat{L}_0} \frac{d\theta}{ds} + \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{L}_0} \frac{dQ}{ds} = -\hat{\gamma}_{ef} (\gamma_0 \cos \theta - w_0 - f_n) \quad (2.36)$$

$$\frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0^2}{\hat{L}_0} \frac{dM}{ds} = -\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0 Q \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\hat{L}_0} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{E} \hat{J}} M \quad (2.38)$$

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{L}_0} \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (2.39)$$

$$\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0} \frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (2.40)$$

ou ainda:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\hat{T}_0}{\hat{E} \hat{A}} T \quad (2.41)$$

$$\frac{dT}{ds} - \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{T}_0} Q \frac{d\theta}{ds} = -\frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{T}_0} (\gamma_0 \sin \theta + f_t) \quad (2.42)$$

$$T \frac{d\theta}{ds} - \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{T}_0} \frac{dQ}{ds} = -\frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0}{\hat{T}_0} (\gamma_0 \cos \theta - w_0 - f_n) \quad (2.43)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q \quad (2.44)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\hat{\gamma}_{ef} \hat{L}_0^3}{\hat{E} \hat{J}} M \quad (2.45)$$

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{L}_0} \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (2.46)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (2.47)$$

Lembrando que os símbolos sem acento circunflexo representam as grandezas adimensionais.

Considerando a hipótese (H5) e considerando que a relação:

$$\varepsilon_f = \frac{\hat{V}_0}{\hat{L}_0} \quad (2.48)$$

é tal que $\varepsilon_f \ll 1$, podem ser feitas as aproximações:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \approx \theta \quad (2.49)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \approx 1 \quad (2.50)$$

que são consistentes com o fato de ser $\varepsilon_f \ll 1$.

Definindo-se:

$$\beta_f = \frac{\hat{\gamma}_{ef} \cdot \hat{L}_0}{\hat{T}_0} \quad (2.51)$$

$$\delta_f = \frac{\hat{E} \cdot \hat{A}}{\hat{T}_0} \quad (2.52)$$

$$\alpha_f = \frac{\hat{E} \cdot \hat{J}}{\hat{\gamma}_{ef} \cdot \hat{L}_0^3} \quad (2.53)$$

as equações (2.41) a (2.47) são reescritas como:

$$\frac{du}{ds} = \frac{T}{\delta_f} \quad (2.54)$$

$$\frac{dT}{ds} - \beta_f Q \frac{d\theta}{ds} = -\beta_f (\gamma_0 \theta + f_t) \quad (2.55)$$

$$T \frac{d\theta}{ds} + \beta_f \frac{dQ}{ds} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_n \quad (2.56)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q = -\alpha_f \frac{d^2\theta}{ds^2} \quad (2.57)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\alpha_f} M \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_f \frac{dy}{ds} = \theta \quad (2.59)$$

$$dx = ds \quad (2.60)$$

Considerando a igualdade (2.60) nas demais equações (2.54) a (2.59), pode-se descartá-la. Considerando também as relações entre y e θ , equação (2.59), e entre M , Q e θ equações (2.57) e (2.58) o sistema de equações pode ser reescrito como:

$$\frac{du}{dx} = \frac{T}{\delta_f} \quad (2.61)$$

$$\frac{dT}{dx} - \beta_f (-\alpha_f \varepsilon_f \frac{d^3y}{dx^3}) \varepsilon_f \frac{d^2y}{dx^2} = -\beta_f (\varepsilon_f \gamma_0 \frac{dy}{dx} + f_t) \quad (2.62)$$

$$T \varepsilon_f \frac{d^2y}{dx^2} - \alpha_f \beta_f \varepsilon_f \frac{d^4y}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_n \quad (2.63)$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q = -\alpha_f \varepsilon_f \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (2.64)$$

$$M = \alpha_f \varepsilon_f \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.65)$$

$$\theta = \varepsilon_f \frac{dy}{dx} \quad (2.66)$$

Desde que as equações (2.64), (2.65) e (2.66) são necessárias apenas para o cálculo de θ , Q e M , uma vez conhecida a expressão da linha elástica $y(x)$ e suas derivadas até a terceira ordem, é possível e conveniente mantê-las no “limbo” até que seja necessário calcular estas grandezas.

Proceder-se-á agora, a uma revisão da expressão (2.26) para identificar nela a lei de Hooke, quando admitido um erro da ordem ε_f^2 .

Considerando os esforços internos atuando sobre a linha, as tensões em cada seção da mesma podem ser calculadas pela expressão:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{T}}{\hat{A}} + \frac{\hat{M}}{\hat{J}} \hat{y}_r \quad (2.67)$$

onde $0 \leq \hat{y}_r \leq \hat{R}$, em que \hat{R} é o raio externo do tubo de aço.

Da expressão (2.25) resulta que:

$$\varepsilon = \frac{\hat{T}}{\hat{E}\hat{A}} + \frac{\hat{M}}{\hat{E}\hat{J}} \hat{y}_r. \quad (2.68)$$

Das expressões (2.31), (2.32) e (2.49) obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{\hat{T}}{\hat{E}\hat{A}} + \frac{d^2 \hat{y}}{d\hat{x}^2} \hat{y}_r \quad (2.69)$$

ou na forma adimensionalizada:

$$\varepsilon = \frac{T}{\delta_f} + \varepsilon_f^2 y_r \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.70)$$

onde considerou-se que $\hat{y}_r = \hat{V}_0 \cdot y_r$. O que se observa de (2.70) é que ambas as parcelas que a compõem são pequenas. Na realidade, a experiência mostra que o fator $\frac{1}{\delta_f}$ pode também ser considerado da ordem ε_f^2 . Tendo em conta que a parcela relativa à flexão gera uma deformação, que além de pequena, tem média nula em cada seção. Levando ainda em conta que o alongamento não pode ser considerado nulo pela importância de se avaliar o efeito do atrito longitudinal nas configurações de equilíbrio do oleoduto, faz-se então uma simplificação, em parte sustentada na hipótese (H7), quando se desprezam

as parcelas de ordem de grandeza ε_f^2 ou menores, quando comparadas com a unidade e em parte sustentada na hipótese (H2), que considera a ação do atrito longitudinal. O resultado conseqüente é que o alongamento é dado apenas pela parcela de tração pura.

Para se visualizar, quantitativamente, as ordens de grandeza das parcelas que compõem as expressões (2.61) a (2.66) e a expressão (2.70) foram calculados valores típicos dos parâmetros que aí comparecem.

Valores típicos dos parâmetros $\varepsilon_f, \beta_f, \alpha_f$ e δ_f .

Admitindo:

$$\begin{aligned}\hat{T}_0 &= 25000\text{kgf} \\ \hat{L}_0 &= 50\text{m} \\ \hat{V}_0 &= 0.5\text{m} \\ \hat{E} &= 2.10^{10}\text{kgf}/\text{m}^2 \\ \hat{A} &= 0.02\text{m}^2 \\ \hat{\gamma}_{ef} &= 100\text{kgf}/\text{m} \\ \hat{J} &= 10^{-3}\text{kgf}\cdot\text{m}^4\end{aligned}$$

obtem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_f &= \frac{0.5}{50} = 0,01 \quad \dots O(10^{-2}) \\ \beta_f &= \frac{100.50}{25000} = 0,2 \quad \dots O(10^{-1}) \\ \alpha_f &= \frac{2.10^{10}.10^{-3}}{10^2.125.10^3} \approx 2 \quad \dots O(1) \\ \delta_f &= \frac{4.10^8}{0,25.10^5} = 16.10^3 \quad \dots O(10^4)\end{aligned}$$

A título ilustrativo, pode-se considerar que o descarte de parcelas da ordem de grandeza de ε_f^2 corresponde a introduzir erros da ordem de 0,01%. Observe-se ainda que os parâmetros $\frac{1}{\delta_f}$ e ε_f^2 são comparáveis, mesmo assim a equação (2.61) foi mantida naquela forma e não considerada simplesmente na forma $u = cte$. As razões que levaram a manter a equação (2.61) naquela forma foram:

- a equação (2.61) na forma $u = cte = 0$ (da expressão (2.4)) tem como conseqüência a não consideração dos deslocamentos horizontais, mais precisamente os deslocamentos horizontais são considerados nulos;

- sendo $u = 0$ para todo valor de x , não há sentido em considerar o efeito do atrito, o que contraria um requisito fundamental de análise do problema, que é exatamente a

verificação do efeito do atrito sobre as configurações de equilíbrio. Na realidade o que se quer é avaliar como se comportam os vãos livres na condição de lançamento (altas trações) e na condição de abandono (baixas trações, pelo menos em alguns casos), quando submetidos a ação de correntezas que podem induzir vibrações por emissão de vórtices. As condições de equilíbrio estáticas são essenciais nestes casos, pois são o comprimento do vão e a tensão a que está sujeito que condicionam os modos naturais de oscilação que podem ser excitados.

Após as considerações sobre a ordem de grandeza das parcelas que as compõem, as equações (2.61) a (2.66) podem ser reescritas desprezando-se os termos de ordem de grandeza menor ou igual a ε_f^2 , com a exceção já apontada, obtendo-se:

$$\frac{du}{dx} = \frac{T}{\delta_f} \quad (2.71)$$

$$\frac{dT}{dx} = -\gamma_0 \beta_f \varepsilon_f \frac{dy}{dx} - \beta_f f_t \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_f T \frac{d^2 y}{dx^2} - \alpha_f \beta_f \varepsilon_f \frac{d^4 y}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_n. \quad (2.73)$$

Afortunadamente a expressão do alongamento (2.70) confirma a primeira avaliação feita e a expressão (2.71) é consistente com o erro adotado. Parte-se agora para a empreitada que vai conduzir à formulação do problema na forma de inequação ou inequações variacionais, para cada uma das operações elementares.

2.2.3 A Forma de Inequação Variacional para o Modelo da Operação de Lançamento

Como já considerado quando da conceituação das operações elementares, não existem mecanismos físicos, na operação de lançamento que imponham quaisquer valores, para f_t , diferentes de zero, em particular, o atrito não está presente, i.e, $f_a = 0$, portanto, pode-se fazer $f_t = 0$ em (2.72). As equações (2.71) a (2.73) para a operação de lançamento, juntamente com as condições de contorno já adimensionalizadas, podem ser escritas como:

$$p = \frac{\hat{L}}{\hat{L}_0} \text{ (comprimento adimensional do oleoduto)} \quad (2.74)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{T}{\delta_f} \quad (2.75)$$

$$\frac{dT}{dx} = -\gamma_0 \beta_f \varepsilon_f \frac{dy}{dx} \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_f T \frac{d^2 y}{dx^2} - \beta_f \varepsilon_f \alpha_f \frac{d^4 y}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) - \beta_f f_n \quad (2.77)$$

$$y(0) = 0 \quad (2.78)$$

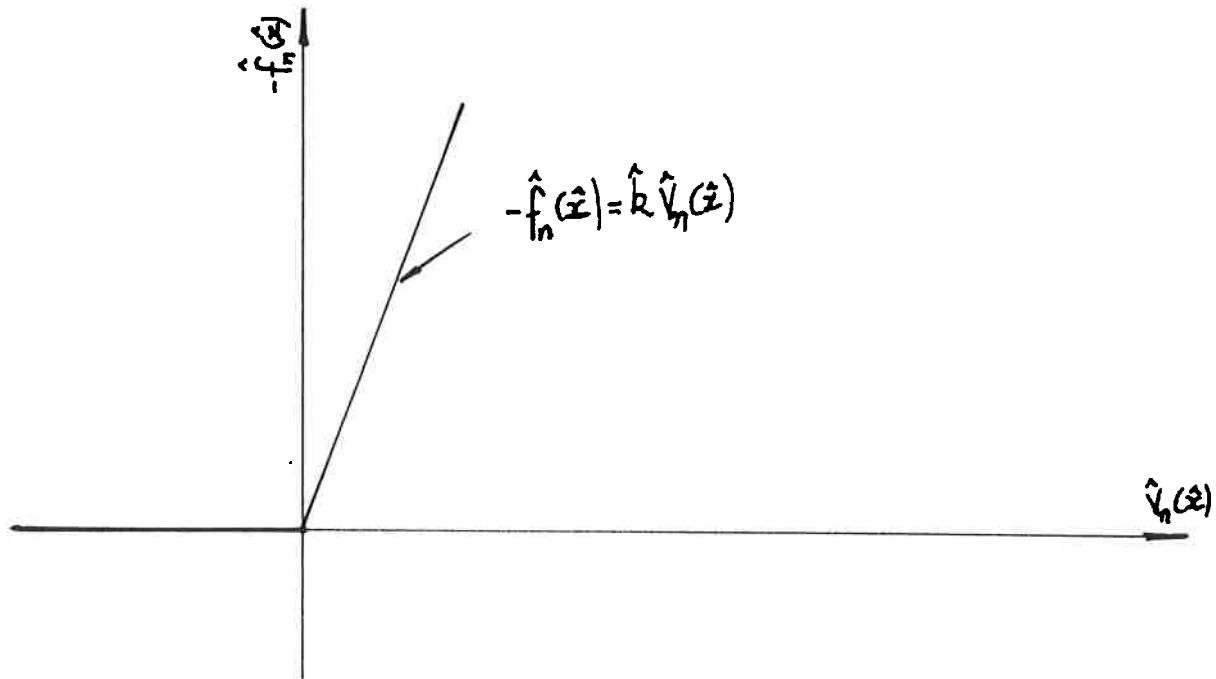


Figura 2.2: Curva característica do comportamento do solo

$$y(p) = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(p) = 0 \quad (2.80)$$

$$u(0) = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{du}{dx}(p) = \frac{T(p)}{\delta_f} \quad (2.82)$$

Para chegar ao modelo na forma de inequação variacional precisa-se considerar o modelo adotado para a interação entre o oleoduto e o solo. Conforme a hipótese (H8) o solo se comporta como uma mola linear e “contínua” ao longo do comprimento, sob cargas de compressão e não apresenta qualquer reação sob tração. A aludida interação é traduzida na modelagem desenvolvida através da densidade linear de força f_n que, de fato, é uma função da abscissa x . A natureza desta função, de forma indireta, é ilustrada na Figura 2.2. De forma indireta porque é mostrada a relação entre f_n e a função deslocamento ao longo do oleoduto. Essa última função pode ser considerada contínua, com primeiras derivadas também contínuas.

Recorda-se, também que, de acordo com a mesma hipótese (H8), a reação do solo se dá segundo a normal às superfícies em contato. Traduz-se este comportamento através da curva mostrada na Figura 2.2, chamada de curva característica do comportamento do solo.

A curva característica da Figura 2.2 exprime que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \hat{V}_n < 0 \implies \hat{f}_n(\hat{x}) = 0 \\ \text{se } \hat{V}_n \geq 0 \implies \hat{f}_n(\hat{x}) + \hat{k}\hat{V}_n(\hat{x}) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.83)$$

onde $\hat{V}_n(\hat{x})$ é a diferença entre a coordenada, segundo a normal, do oleoduto no ponto de abscissa \hat{x} e a coordenada do perfil do solo não deformado neste ponto, também segundo a normal.

Observar que $\hat{V}_n(\hat{x}) \geq 0$ é o deslocamento, por deformação do perfil do solo, no ponto de abscissa \hat{x} e $\hat{V}_n(\hat{x}) < 0$ corresponde aos pontos de abscissa \hat{x} , em que o oleoduto não tem contato com o solo, ver Figura (2.3). A constante \hat{k} é a constante elástica do solo em $(\frac{N}{m^2})$ sob compressão. As condições (2.83) traduzem, precisamente, a hipótese (H8).

Considerando o significado físico de $\hat{V}_n(\hat{x})$, o deslocamento vertical da linha elástica no ponto de abscissa \hat{x} é dado por:

$$\hat{y}(\hat{x}) = \hat{v}_s(\hat{x}) + \hat{V}_n(\hat{x}) \cos \theta \quad (2.84)$$

onde $\hat{v}_s(\hat{x})$ é a cota do perfil do solo, medida na vertical, no ponto de abscissa \hat{x} . Pelas hipóteses de aproximação, resulta:

$$\hat{y}(\hat{x}) = \hat{v}_s(\hat{x}) + \hat{V}_n(\hat{x}) \quad (2.85)$$

ou seja, os deslocamentos segundo a vertical se identificam com os deslocamentos segundo a normal. De maneira análoga verifica-se que a densidade de força de reação do solo $\hat{f}\vec{n}$, pode ser identificada com sua componente vertical, pois:

$$\hat{f}\vec{n} = \hat{f}(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) \quad (2.86)$$

usando as hipóteses de aproximação, tem-se:

$$\hat{f}\vec{n} = \theta \hat{f}\vec{i} - \hat{f}\vec{j} \quad (2.87)$$

mas então:

$$\hat{f}_n = \|\hat{f}\vec{n}\| = [\hat{f}^2(1 + \frac{\theta^2}{2})]^{1/2} = \hat{f}[1 - \varepsilon_f^2(\frac{dy}{dx})^2 + \dots]. \quad (2.88)$$

De (2.88) segue que:

$$\hat{f}_n = \|\hat{f}\vec{j}\| + O(\varepsilon_f^2) \quad (2.89)$$

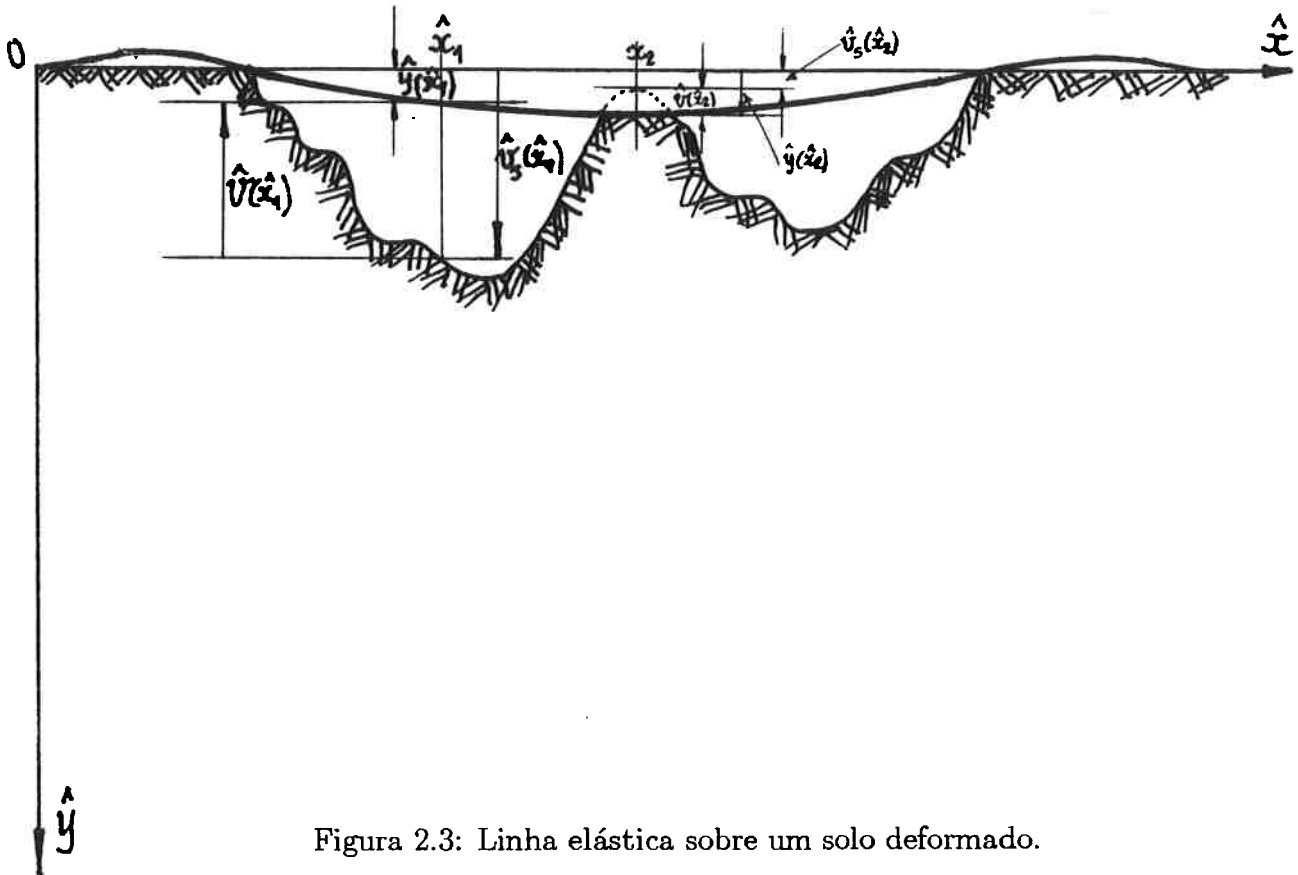


Figura 2.3: Linha elástica sobre um solo deformado.

Por simplicidade, a partir deste ponto o índice n dos deslocamentos V_n será omitido.

Definindo-se:

$$\hat{V}_+ = \frac{\hat{V} + |\hat{V}|}{2} \quad (2.90)$$

$$\hat{V}_- = \frac{-\hat{V} + |\hat{V}|}{2} \quad (2.91)$$

podendo-se escrever então:

$$\hat{V} = \hat{V}_+ - \hat{V}_- \quad (2.92)$$

observa-se que $\hat{V}_+ \geq 0$ bem como $\hat{V}_- \geq 0$.

A partir das definições (2.83), (2.90) e (2.91) é demonstrado no Lema 4 do Apêndice A, que:

$$\hat{f}_n(\hat{V} - \hat{V}^*) + \hat{k}_+ \hat{V}_+^*(\hat{V}_+ - \hat{V}_+^*) \geq 0 \quad \forall \hat{x} \in [0, \hat{L}] \quad (2.93)$$

onde as funções \hat{V} e \hat{V}^* são caracterizadas a seguir:

- a função $\hat{V}(\hat{x})$, $\hat{x} \in [0, \hat{L}]$, representa deslocamentos verticais arbitrários (em teoria de elasticidade são chamados de **deslocamentos admissíveis**) da linha elástica, em relação ao perfil do solo não deformado, mas satisfaz as condições de contorno, que decorrem da relação (2.85) e são satisfeitas por $\hat{y}(\hat{x})$. Em cada ponto em que o oleoduto comprime o solo deformando-o, o correspondente deslocamento vertical é não negativo. Num tal ponto o solo exerce sobre o oleoduto uma força vertical caracterizada pela densidade linear f_n ;

- a função $\hat{V}^*(\hat{x})$, $\hat{x} \in [0, \hat{L}]$, representa, na posição de **equilíbrio**, os deslocamentos da linha elástica em relação ao solo não deformado, segundo a vertical. Por (2.85) a existência da função \hat{V}^* decorre da existência da função \hat{y}^* . O deslocamento $\hat{V}^*(\hat{x})$ mede a posição da linha elástica do oleoduto, no ponto de abscissa x , em relação à cota do solo não deformado na mesma abscissa.

É conveniente observar, que por meio da expressão (2.85), a desigualdade (2.93) pode ser escrita como função das coordenadas $\hat{y}(\hat{x})$ e $\hat{y}^*(\hat{x})$ e das cotas do perfil do solo $\hat{V}_s(\hat{x})$. Introduzindo os fatores de adimensionalização na desigualdade (2.93), obtem-se:

$$\hat{\gamma}_{ef} \hat{V}_0 f_n (V - V^*) + \hat{k} \hat{V}_0^2 V_+^* (V_+ - V_+^*) \geq 0 \quad \forall \hat{x} \in [0, \hat{L}] \quad (2.94)$$

ou então, definindo-se:

$$k = \frac{\hat{k} \cdot \hat{V}_0}{\hat{\gamma}_{ef}} \quad (2.95)$$

considerando a variável independente \hat{x} adimensionalizada por \hat{L}_0 , anota-se na forma adimensional:

$$f_n (V - V^*) + k V_+^* (V_+ - V_+^*) \geq 0 \quad \forall x \in [0, p] \quad (2.96)$$

No Apêndice B são introduzidos alguns conceitos e espaços de funções. Por enquanto serão considerados o conjunto $\Omega = [0, p]$ e os espaços $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$, (ver Apêndice B) e em $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$ serão considerados, respectivamente, os subconjuntos \mathcal{V}_L^1 e \mathcal{V}_L^2 , definidos por:

$$\mathcal{V}_L^1 = \{f \in H^1(\Omega) \mid f(0) = 0; \frac{df}{dx}(p) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f} = \frac{T_L^*}{\delta_f}\} \quad (2.97)$$

$$\mathcal{V}_L^2 = \{g \in H^2(\Omega) \mid g(0) = g(p) = 0; \frac{dg}{dx}(0) = \frac{dg}{dx}(p) = 0\} \quad (2.98)$$

Chamando $C^n(\Omega)$ o espaço das funções definidas em Ω com valores em \mathbf{R} e que tem derivadas até a ordem $n \geq 0$ contínuas (nos extremos do intervalo as derivadas são as correspondentes **derivadas laterais**) e definindo os conjuntos \mathcal{U}_L^1 e \mathcal{U}_L^2 respectivamente, por:

$$\mathcal{U}_L^1 = \mathcal{V}_L^1 \cap C^2(\Omega) \quad (2.99)$$

$$\mathcal{U}_L^2 = \mathcal{V}_L^2 \cap C^4(\Omega) \quad (2.100)$$

decorre trivialmente que ambos os conjuntos são não vazios, pois os elementos de $C^2(\Omega)$ estão em $H^1(\Omega)$ e os de $C^4(\Omega)$ estão em $H^2(\Omega)$.

Obs.: o índice inferior L denota que as condições subseqüentes estão sendo aplicadas para a operação elementar de **lançamento**.

Nestas condições pode-se formular, preliminarmente, o seguinte problema:

PROBLEMA PL1

Achar $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2$, se existir, tal que:

$$\forall x \in \Omega \quad \frac{du_L^*}{dx} = \frac{T_L^*}{\delta_f} \quad (2.101)$$

$$\frac{dT_L^*}{dx} = -\beta_f \varepsilon_f \gamma_0 \frac{dy_L^*}{dx} \quad (2.102)$$

$$\varepsilon_f T_L^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \varepsilon_f k_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nL} \quad (2.103)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$y_L^*(0) = 0 \quad (2.104)$$

$$y_L^*(p) = 0 \quad (2.105)$$

$$\frac{dy_L^*}{dx}(0) = \frac{dy_L^*}{dx}(p) = 0 \quad (2.106)$$

$$u_L^*(0) = 0 \quad (2.107)$$

$$\frac{du_L^*}{dx}(p) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f} \quad (2.108)$$

e à condição:

$$f_{nL}(V_L - V_L^*) + k_{+L} V_L^*(V_L - V_L^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (2.109)$$

onde a constante $k_f = \beta_f \alpha_f$ em (2.103) foi introduzida apenas para tornar a notação um pouco mais leve, e onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L = y_L - v_s \\ V_L^* = y_L^* - v_s \end{array} \right\} \quad (2.110)$$

A desigualdade (2.109) acoplada com as relações (2.110) deve ser satisfeita para y_L^* , se existir, que verifique as equações (2.102) e (2.103), para todo $y_L \in \mathcal{U}_L^2$.

O problema assim formulado é difícil de ser analisado qualitativamente, pela presença da desigualdade (2.109). Neste caso existe a possibilidade de se aproveitar o fato do acoplamento entre as equações (2.101), (2.102) e (2.103) ser muito particular, ver a seção (3.2) do Capítulo 3. É possível formular o seguinte problema *PL2*, “equivalente” ao problema *PL1*.

PROBLEMA PL2.

Achar $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ se existir, tal que:

$$J_L^2(y_L^*) = \inf_{y_L \in \mathcal{V}_L^2} J_L^2(y_L) \quad (2.111)$$

$$u_L^*(x) = \frac{T_L^*}{\delta_f} x - \beta_f \frac{\varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \int_0^x y_L^*(\xi) d\xi \quad x \in \Omega \quad (2.112)$$

com:

$$J_L^2(y_L) = \frac{\varepsilon}{2} T_L^* \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2} \right)^2 dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p V_L^2 dx \quad (2.113)$$

Esta formulação do problema **PL2** já é adequada para a obtenção dos resultados qualitativos e quantitativos desejados. Entretanto, por uma questão de uniformidade com as formulações que virão do problema do abandono, é desejável apresentar a formulação desse problema na forma de inequação variacional. Isto é conseguido pela aplicação direta do Teorema 4 do Apêndice B, onde é estabelecido que a minimização do funcional $J_L^2(y_L)$ é equivalente a resolver uma inequação variacional, como enunciado a seguir. Para reforçar a importância da formulação na forma de inequação variacional adianta-se que o problema do abandono não admite uma formulação na forma variacional. Neste caso recai-se diretamente num problema na forma de inequação variacional. No Capítulo 3 é estabelecida uma “equivalência” entre os problemas **PL1** e **PL2**. É conveniente, no momento, atentar para o tipo de equivalência que pode ser estabelecida ao se constatar, por exemplo, que no problema **PL2** a função $y_L^*(x)$ pode não pertencer a $C^4(\Omega)$, enquanto

que no problema **PL1** a solução $y_L^*(x)$, se existir, deve estar em $C^4(\Omega)$. Como se verá no Capítulo 3, escrevendo o funcional J_L^2 como a soma $J_L^2(y_L) = J_1(y_L) + J_2(y_L)$, onde:

$$J_1(y_L) = \frac{\varepsilon}{2} T_L^* \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx}\right)^2 dx + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2}\right)^2 dx \quad (2.114)$$

$$J_2(y_L) = \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p V_L^2 dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L dx \quad (2.115)$$

o problema **PL2** pode ser reformulado de forma a ser equivalente ao seguinte problema na forma de uma inequação variacional e uma equação em $u_L^*(x)$, que fica determinada ao se conhecer $y_L^*(x)$.

PROBLEMA PL2 (inequação variacional)

Achar $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$, se existir, tal que:

$$\delta J_1[y_L^*; y_L^* - y_L] + J_2(y_L^*) \leq J_2(y_L) \quad \forall y_L \in \mathcal{V}_L^2 \quad (2.116)$$

$$u_L^*(x) = \frac{T_L^*}{\delta_f} x - \beta_f \frac{\varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \int_0^x y_L^*(\xi) d\xi \quad (2.117)$$

É importante observar que a decomposição do funcional $J_L^2(y_L)$, como realizada anteriormente, é arbitrária. No presente caso esta decomposição nem é indispensável, uma vez que o funcional $J_2(y_L)$ também é diferenciável segundo Gâteaux. Foi feita dessa forma por uma questão de uniformidade, pois no caso do problema de abandono, uma inequação variacional surge como a formulação natural. Decorre da arbitrariedade da decomposição a sua não unicidade e, conseqüentemente, a formulação do problema variacional sob a forma de inequação variacional também não é única, mas pode ser demonstrado que são equivalentes, uma vez que se demonstra que cada uma delas é equivalente ao problema na forma variacional. Uma introdução a esse aspecto do problema, escrita em linguagem acessível, é apresentada na referência [12].

2.2.4 A Forma de Inequações Variacionais para o Modelo da Operação de Abandono

Durante uma operação de abandono, decorre da própria definição, conforme subseção 1.3.4, o atrito entre o oleoduto e o solo está presente. Antes de escrever a formulação da operação de abandono na forma de inequações variacionais é necessário introduzir uma segunda desigualdade, semelhante à desigualdade (2.109). O modelo Coulombiano do atrito, para densidades lineares de forças, pode ser traduzido pelas expressões:

$$|\hat{f}_a^*(\hat{x})| < \mu |\hat{f}_n^*(\hat{x})| \implies \hat{u}^*(\hat{x}) = 0 \quad (2.118)$$

$$|\hat{f}_a^*(\hat{x})| = \mu |\hat{f}_n^*(\hat{x})| \implies \hat{u}^*(\hat{x}) \neq 0 \text{ e } \exists \hat{\lambda} > 0 \mid \hat{u}^*(\hat{x}) = -\hat{\lambda} \hat{f}_a^*(\hat{x}) \quad (2.119)$$

Este modelo estabelece que:

▷ para uma “superfície” de contato, entre duas estruturas, que possa ser assimilada a um segmento de reta com coeficiente de atrito μ em cada ponto, valem:

- se o módulo da densidade da força de atrito no ponto de abscissa \hat{x} , for menor que o produto de μ pelo módulo da densidade da força de contato normal à “superfície”, então o deslocamento \hat{u}^* segundo a direção do eixo das abscissas é nulo;

- se o módulo da densidade da força de atrito igualar o produto de μ pelo módulo da densidade da força de contato, normal à “superfície”, então existe um número real $\hat{\lambda} \geq 0$, tal que o deslocamento \hat{u}^* , segundo o eixo das abscissas tem módulo $\hat{\lambda} |\hat{f}_a^*(\hat{x})|$ e sinal contrário ao da densidade da força de atrito naquele ponto.

As expressões (2.118) e (2.119) constituem uma generalização e uma formalização do atrito de Coulomb para forças distribuídas ao longo de uma reta.

O Lema 5 do Capítulo 3 demonstra, a partir das expressões (2.118) e (2.119), aplicadas à condição de equilíbrio longitudinal do oleoduto, caracterizada pelos deslocamentos $\hat{u}^*(\hat{x})$, que subsiste a seguinte desigualdade:

$$\hat{f}_a^*(\hat{x})[\hat{u}(\hat{x}) - \hat{u}^*(\hat{x})] + \mu |\hat{f}_n^*(\hat{x})| [|\hat{u}(\hat{x})| - |\hat{u}^*(\hat{x})|] \geq 0 \quad \forall \hat{x} \in [0, \hat{L}] \quad (2.120)$$

que na forma adimensional se converte em:

$$f_a^*(x)[u(x) - u^*(x)] + \mu |f_n^*(x)| [|u(x)| - |u^*(x)|] \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.121)$$

Para este caso, analogamente ao caso da operação de lançamento, consideram-se os subconjuntos de $H^1(\Omega)$ e $H^2\Omega$ respectivamente, a seguir definidos:

$$\mathcal{V}_A^1 = \left\{ g \in H^1(\Omega) \mid g(0) = 0; \frac{dg}{dx}(p) = \frac{T_A(p)}{\delta_f} \right\} \quad (2.122)$$

$$\mathcal{V}_A^2 = \mathcal{V}_L^2 \quad (2.123)$$

Obs.: A partir desta seção e nas subseqüentes um índice A comparece nas variáveis associadas à operação de abandono.

Analogamente ao caso da operação de lançamento são definidos os conjuntos:

$$\mathcal{U}_A^1 = \mathcal{V}_A^1 \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \quad (2.124)$$

$$\mathcal{U}_A^2 = \mathcal{V}_A^2 \cap \mathcal{C}^4(\Omega) \quad (2.125)$$

e, da mesma maneira, como no caso anterior verifica-se trivialmente que ambos os conjuntos acima definidos são não vazios.

Nestas condições pode-se formular, preliminarmente, o seguinte problema:

PROBLEMA PA1

Achar $(u_A^*, y_A^*) \in \mathcal{U}_A^1 \times \mathcal{U}_A^2$, se existir, tal que:

$$\frac{du_A^*}{dx} = \frac{T_A^*}{\delta_f} \quad (2.126)$$

$$\frac{dT_A^*}{dx} = -\beta_f \varepsilon_f \gamma_0 \frac{dy_A^*}{dx} - \beta_f f_a^* \quad (2.127)$$

$$\varepsilon_f T_A^* \frac{d^2 y_A^*}{dx^2} - \varepsilon_f k_f \frac{d^4 y_A^*}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nA}^* \quad (2.128)$$

e satisfazendo as desigualdades:

$$f_a^*(u_A - u_A^*) + \mu |f_{nL}^*| (|u_A| - |u_A^*|) \geq 0 \quad (2.129)$$

$$f_{nA}^*(y_A - y_A^*) + k_{+} V_{+}^*(V_A - V_{+}^*) \geq 0 \quad (2.130)$$

As desigualdades (2.129) e (2.130) devem ser verificadas para todo par $(u_A, y_A) \in \mathcal{U}_A^1 \times \mathcal{U}_A^2$, $\forall x \in \Omega$. Além disso as funções V_A , V_{+}^* e V_{+}^* satisfazem:

$$V_A = y_A - v_s \quad (2.131)$$

$$V_{+}^* = \frac{V_A + |V_A|}{2} \quad (2.132)$$

$$V_A^* = y_A^* - v_s \quad (2.133)$$

$$V_{+}^* = \frac{V_A^* + |V_A^*|}{2} \quad (2.134)$$

Conforme argumento da subseção 1.3.4 o problema **PA1** não é um problema “bem posto”, pela presença do atrito, cuja ação se manifesta através da função $f_a^*(x)$ na expressão (2.127). O problema da operação de abandono pode se tornar um problema ”bem

posto” ao se fazer valer a história de lançamento, apoiada nas hipóteses já estabelecidas, em particular na hipótese (H2). Considerem-se as condições de equilíbrio do oleoduto, associadas ao término da operação de lançamento. Como está demonstrado no Capítulo 3, o problema PL2 tem solução única, pela hipótese (H1), $T_L^*(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$. Considerando a operação de abandono como uma “perturbação” na configuração de equilíbrio resultante da operação de lançamento, “perturbação” esta que não é arbitrária, pelo contrário, é realizada de modo que a força de tração $T_L^*(p)$ seja atenuada muito lentamente, até atingir o valor $T_A^*(p)$ (na prática $T_A^*(p) = 0$). Esta atenuação impõe uma variação $t(x)$ em $T_L^*(x)$. Em virtude da variação em $T_L^*(x)$ os deslocamentos $y_L^*(x)$ e $u_L^*(x)$ sofrem variações de $\xi(x)$ e $\nu(x)$, respectivamente. Assim pode-se escrever:

$$\forall x \in \Omega$$

$$T_A(x) = T_L^* + t(x) \quad (2.135)$$

$$y_A(x) = y_L^*(x) + \xi(x) \quad (2.136)$$

$$u_A(x) = u_L^*(x) + \nu(x). \quad (2.137)$$

Terminada a operação de abandono, admite-se que o oleoduto adquira uma **nova configuração de equilíbrio, caracterizada pelas variações de deslocamentos $\nu^*(x)$, $\xi^*(x)$ e pela variação da força de tração $t^*(x)$** . Estas grandezas devem satisfazer por (2.135) a (2.137), (2.103) a (2.107) e pelas definições de \mathcal{V}_A^1 e \mathcal{V}_A^2 as condições de contorno:

$$\xi^*(0) = \xi^*(p) = 0 \quad (2.138)$$

$$\frac{d\xi^*}{dx}(0) = \frac{d\xi^*}{dx}(p) = 0 \quad (2.139)$$

$$\nu^*(0) = 0 \quad (2.140)$$

$$\frac{d\nu^*}{dx}(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f}. \quad (2.141)$$

Considerando estas condições, podem ser introduzidos os conjuntos \mathcal{V}_a^1 e \mathcal{V}_a^2 que são partes de $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$ respectivamente.

$$\mathcal{V}_a^1 = \left\{ g \in H^1(\Omega) \mid g(0) = 0, \frac{dg}{dx}(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f} \right\} \quad (2.142)$$

$$\mathcal{V}_a^2 = \mathcal{V}_A^2 \quad (2.143)$$

A partir destes conjuntos são construídos os seguintes dois outros:

$$\mathcal{U}_a^1 = \mathcal{V}_a^1 \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \quad (2.144)$$

$$\mathcal{U}_a^2 = \mathcal{V}_a^2 \cap \mathcal{C}^4(\Omega) \quad (2.145)$$

que, como nos casos anteriores, são não vazios.

Estão dadas as condições para se enunciar um problema preliminar de abandono:

PROBLEMA Pa1

Achar $(\xi^*, \nu^*) \in \mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$, se existir, tal que:

$$\frac{d\nu^*}{dx} = \frac{t^*}{\delta_f} \quad (2.146)$$

$$\frac{dt^*}{dx} = -\beta_f \varepsilon_f \gamma_0 \frac{d\xi^*}{dx} - \beta_f f_a^* \quad (2.147)$$

$$\varepsilon_f (T_L^* + t^*) \frac{d^2}{dx^2} (y_L^* + \xi^*) - \varepsilon_f k_f \frac{d^4}{dx^4} (y_L^* + \xi^*) = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nA}^* \quad (2.148)$$

e satisfaçam as desigualdades:

$$f_a^* (\nu - \nu^*) + \mu |f_{nL}^*| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \nu^*|) \geq 0 \quad (2.149)$$

$$f_{nA}^* (\xi - \xi^*) + k_{+A} V_{+A}^* (V_{+A} - V_{+A}^*) \geq 0. \quad (2.150)$$

As desigualdades (2.149) e (2.150) devem ser verificadas para todo par $(\xi, \nu) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$, $\forall x \in \Omega$. Das equações (2.146) e 2.147) resulta que:

$$\frac{d^2 \nu^*}{dx^2} = -\frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \frac{d\xi^*}{dx} - \frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^*. \quad (2.151)$$

Conforme já estabelecido a respeito das ordens de grandeza, pode-se reescrever a equação (2.151) consistentemente como:

$$\frac{d^2 \nu^*}{dx^2} = -\frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^* + O(\varepsilon_f^2) \quad \forall x \in \Omega \quad (2.152)$$

pois claramente o coeficiente $\frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f}$ que multiplica a derivada de ξ^* é de ordem menor que ε_f^2 .

A partir das equações (2.146) a (2.148) e das desigualdades (2.149) e (2.150) o seguinte problema **Pa2** “equivalente” (ver Capítulo 3) ao problema **Pa1**, pode ser enunciado:

PROBLEMA Pa2

Achar $(\xi^*, \nu^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ se existir, tal que:

$$\begin{aligned} \forall (\nu, \xi) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2 \\ J_a^1(\nu^*) = \inf_{\nu \in \mathcal{V}_a^1} J_a^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\langle A\xi^*, \xi^* - \xi \rangle + j(\xi^*) \leq j(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (2.154)$$

onde:

$$J_a^1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*(x)| |u_L^*(x) + \nu(x)| dx \quad (2.155)$$

$$A\xi^*(x) = \beta_f \varepsilon_f \left\{ F_a^*(x) \frac{d^2 \xi^*(x)}{dx^2} + \alpha_f \frac{d^4 \xi^*(x)}{dx^4} \right\} \quad (2.156)$$

$$j(\xi) = \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (V_{+A}(x))^2 dx + \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{y_L^*}{dx}(x) - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi(x) dx \quad (2.157)$$

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.158)$$

É importante apresentar algumas observações para dar uma maior clareza ao problema enunciado. Em primeiro lugar é conveniente notar que o problema variacional (2.153) e a inequação variacional (2.154) admitem um acoplamento de natureza muito especial, que na realidade é um acoplamento sobre parcelas que são da ordem ε_f^2 que, no final das contas corresponde a um desacoplamento, senão veja-se:

• se existir uma função $\nu^* \in \mathcal{V}_a^1$ que seja extremante de $J_a^1(\nu)$ então fica determinada a função:

$$t^*(x) = \delta_f \frac{d\nu^*(x)}{dx}, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.159)$$

que a expressão (2.152) aliada à definição (2.158) permite escrever:

$$F_a^*(x) = \frac{\delta_f}{\beta_f} \int_x^p \frac{d^2 \nu^*}{dx^2}(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.160)$$

Conclui-se então que a solução do problema **Pa2** consiste em determinar a função ν^* que torna mínimo o valor do funcional $J_a^1(\nu)$, se ela existir. Uma vez determinada a função ν^* , ficam determinadas as funções t^* e f_a^* , ficando também completamente definida a inequação variacional (2.154). Se existir uma função ξ^* que seja solução desta inequação, o problema **Pa2** pode finalmente ser resolvido.

Como estabelecido para o caso da operação de lançamento, há uma formulação equivalente ao problema **Pa2**, de modo que a minimização do funcional J_a^1 se transforme também numa inequação variacional. Pelo teorema 4 do Apêndice B cujas hipóteses são trivialmente verificadas ao se decompor o funcional J_a^1 como a soma $J_a^1(\nu) = J_1^1(\nu) + J_2^1(\nu)$, onde:

$$J_1^1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 dx \quad (2.161)$$

$$J_2^1(\nu) = \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}(x)| |u_L^*(x) + \nu(x)| dx \quad (2.162)$$

esta formulação equivalente é a seguinte:

Achar $(\xi^*, \nu^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ se existir, tal que:

$$\delta J_1^1[\nu^*; \nu^* - \nu] + J_2^1(\nu^*) \leq J_2^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (2.163)$$

$$\langle A\xi^*, \xi^* - \xi \rangle + j(\xi^*) \leq j(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (2.164)$$

Lembrar que a notação $\delta J_1^1[\nu^*; \nu^* - \nu]$, conforme definida no Apêndice B, significa a diferencial de Gâteaux do funcional J_1^1 , calculada na função ν^* , para todas as funções nas vizinhanças de ν^* , ou seja para todas as diferenças $\nu^* - \nu$.

Os enunciados acima findam as formulações dos problemas, que constituem os objetivos deste Capítulo. No Capítulo 3 são estabelecidos os elos entre as correspondentes formulações, que no presente Capítulo foram apresentados, apenas, de maneira indicativa.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS QUALITATIVOS

3.1 INTRODUÇÃO

Este Capítulo acoplado ao Apêndice A contém o essencial da tese. A seguir são introduzidas algumas definições e enunciados e demonstrados os resultados qualitativos que constituem o núcleo da tese. Procurou-se encadear uma série de resultados parciais para compor os resultados mais fortes e gerais. As demonstrações, quando envolvendo muitas operações algébricas, foram remetidas ao Apêndice A.

3.2 A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS PL

Antes de chegar às proposições fundamentais deste capítulo, é necessário introduzir algumas definições e demonstrar alguns resultados intermediários. Em primeiro lugar caracteriza-se o que se entende por “equivalência” entre os problemas na forma diferencial e os correspondentes problemas na forma de inequação variacional.

Definição 1 *Diz-se que um problema P1 é equivalente a um problema P2 se e somente se:*

- a)-tanto P1 quanto P2 admitem pelo menos uma solução;*
- b)-cada solução de P1 é solução de P2 e reciprocamente.*

O conceito de “equivalência” utilizado é um pouco mais fraco do que este. Para a introdução deste conceito observe-se que, supondo a existência de solução tanto dos problemas na forma diferencial quanto dos problemas na forma de inequação variacional, nem todas as soluções de um problema na forma de uma inequação variacional são soluções do correspondente problema na forma diferencial, isto porque os requisitos que se impõem sobre os espaços de onde “saem” estas soluções são diferentes e, em princípio mais fortes sobre os espaços que “fornecem” as soluções para o problema na forma diferencial, ou

seja, as funções candidatas a serem solução do problema na forma diferencial pertencem a um conjunto que é parte do conjunto de onde “saem” as funções candidatas a serem solução do problema na forma de inequação variacional.

Pode-se afirmar então que se um problema **P1**, na forma diferencial, admite uma solução **S1**, esta solução é necessariamente solução do correspondente problema **P2** na forma de inequação variacional, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Estabelece-se a seguinte definição:

Definição 2

*Diz-se que um problema **PA** é “equivalente” a um problema **PB** se:*

*a) tanto **PA** quanto **PB** admitem pelo menos uma solução;*

*b) cada solução de **PA** é também solução de **PB**. Se uma solução de **PB** pertence ao espaço que contém as soluções de **PA**, então ela é, de fato, solução de **PA** também.*

É claro que nesta definição não se pode mudar a ordem dos problemas em questão, no entanto é usual, dizer que os problemas são “equivalentes”. A idéia é aplicar esta definição de “equivalência” aos problemas **PL1** e **PL2**, respectivamente, podendo-se enunciar a seguinte proposição:

Proposição 1

*O problema **PL1**, expressões (2.101) a (2.109), é “equivalente” ao problema **PL2**, expressões (2.111) a (2.113)*

Demonstração:

Deve-se mostrar que:

se $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2$ é solução de **PL1**, então $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ é solução de **PL2**.

Mostrar esta implicação corresponde a mostrar duas coisas, primeiro que $\mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2 \subseteq \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ e segundo, que se (u_L^*, y_L^*) satisfaz as equações (2.101) a (2.109) então (u_L^*, y_L^*) satisfaz (2.111) a (2.113). Além disso é preciso mostrar que se $(\tilde{u}_L, \tilde{y}_L) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ é solução de **PL2** e se $(\tilde{u}_L, \tilde{y}_L) \in \mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2$ então $(\tilde{u}_L, \tilde{y}_L)$ é solução de **PL1**.

Das definições (2.97) e (2.98) e das expressões (2.99) e (2.100) resulta que:

$$\mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2 \subseteq \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2.$$

Agora supondo que o par (u_L^*, y_L^*) satisfaz o problema **PL1**, lembrando que γ_0 está sendo considerado constante e integrando a expressão (2.102) no intervalo $[x, p]$ para todo $x \in \Omega$, obtém-se:

$$T_L^*(x) = T_L^*(p) + \beta_f \varepsilon_f \gamma_0 (y_L^*(p) - y_L^*(x)) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Substituindo (3.1) em (2.103) e considerando os critérios de aproximação, obtém-se:

$$\varepsilon_f T_L^*(p) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \beta_f \alpha_f \varepsilon_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nL}^* \quad \forall x \in \Omega \quad (3.2)$$

Considerando agora $y_L \in \mathcal{U}_L^2$ nas vizinhanças de y_L^* mas arbitrária e seja:

$$\delta y_L^*(x) = y_L^*(x) - y_L(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (3.3)$$

δy_L^* é uma função denominada **variação** da função y_L^* , mais precisamente **primeira variação** da função y_L^* .

Multiplicando (3.2) por $\delta y_L^*(x)$ e integrando no intervalo $[0, p]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f T_p^* \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} (y_L - y_L^*) dx + O(\varepsilon_f^2) - k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} (y_L - y_L^*) dx = \\ -\beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) (y_L - y_L^*) dx + \beta_f \int_0^p f_{nL}^* (y_L - y_L^*) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde:

$$k_f = \alpha_f \beta_f \quad (3.5)$$

Integrando a desigualdade (2.109) no intervalo $[0, p]$ e levando em conta as expressões (2.110) e a desigualdade fundamental do Lema 12 do Apêndice B, obtém-se:

$$\int_0^p f_{nL}^* (y_L - y_L^*) dx + \frac{k}{2} \int_0^p ((V_+)^2 - (V_+^*)^2) dx \geq 0 \quad (3.6)$$

A equação (3.4) pode ser trabalhada através de integrações por partes, assim:

$$\int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} (y_L - y_L^*) dx = \int_0^p \frac{d}{dx} \left[\frac{dy_L}{dx} (y_L - y_L^*) \right] dx - \int_0^p \frac{dy_L^*}{dx} \left(\frac{dy_L}{dx} - \frac{dy_L^*}{dx} \right) dx \quad (3.7)$$

Usando o fato de y_L^* e y_L pertencerem a \mathcal{U}_L^2 , obtém-se:

$$\int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} (y_L - y_L^*) = - \int_0^p \left[\frac{dy_L^*}{dx} \frac{dy_L}{dx} - \left(\frac{dy_L^*}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3.8)$$

De maneira análoga, integrando por partes duas vezes seguidas a parcela $\int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} (y_L - y_L^*) dx$ e usando o fato de y_L^* e y_L pertencerem a \mathcal{U}_L^2 , obtém-se:

$$\int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} (y_L - y_L^*) dx = \int_0^p \left[\frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \frac{d^2 y_L}{dx^2} - \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right)^2 \right] dx. \quad (3.9)$$

Considerando (3.4), (3.8), (3.9) e a desigualdade fundamental do Lema 12 do Apêndice B, pode-se escrever a desigualdade:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f \frac{T_L^*}{2} \left\{ \int_0^p \left[\left(\frac{dy_L}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dy_L^*}{dx} \right)^2 \right] dx \right\} + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \left\{ \int_0^p \left[\left(\frac{d^2 y_L}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right)^2 \right] dx \right\} - \\ \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) (y_L - y_L^*) dx - \beta_f \int_0^p f_{nL}^* (y_L - y_L^*) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Multiplicando (3.6) por β_f e somando a (3.10) obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f \frac{T_L^*}{2} \left\{ \int_0^p \left[\left(\frac{dy_L}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dy_L^*}{dx} \right)^2 \right] dx \right\} + \varepsilon_f \frac{k_f}{2} \left\{ \int_0^p \left[\left(\frac{d^2 y_L}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right)^2 \right] dx \right\} - \\ \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) (y_L - y_L^*) dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p \left((V_+)^2 - (V_+^*)^2 \right) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} J_L^2(y_L) = \varepsilon_f \frac{T_L^*(p)}{2} \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx}(x) \right)^2 dx + \varepsilon_f \frac{k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2}(x) \right)^2 dx \\ - \beta_f \int_0^p (\gamma_0(x) - w_0(x)) y_L(x) dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (V_+)^2(x) dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

conclui-se da desigualdade (3.10) e de (3.12) que se $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$ satisfaz a equação (2.103) e com erro de ordem ε_f^2 satisfaz também a equação (3.1), então y_L^* satisfaz o problema variacional:

$$J_L^2(y_L^*) = \inf_{y_L \in \mathcal{U}_L^2} J_L^2(y_L) \quad (3.13)$$

Pelo Teorema 4 do Apêndice B o problema variacional (3.13) é equivalente à inequação variacional:

$$\delta J_1[y_L^*; y_L^* - y_L] + J_2(y_L^*) \leq J_2(y_L) \quad \forall y_L \in \mathcal{V}_L^2 \quad (3.14)$$

onde:

$$J_1(y_L) = \frac{\varepsilon}{2} T_L^* \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.15)$$

$$J_2(y_L) = \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p V_L^2 dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L dx \quad (3.16)$$

em que $J_L^2(y_L)$ é a soma de $J_1(y_L)$ e de $J_2(y_L)$.

Adota-se procedimento semelhante para provar um resultado equivalente, em relação a u_L^* . Entretanto, neste caso, u_L^* pode ser obtido diretamente. Substituindo (3.1) em (2.101) e considerando que y_L^* existe e é determinado por (3.13), obtem-se:

$$\frac{du_L^*}{dx}(x) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f} + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0(x) (y_L^*(p) - y_L^*(x)) \quad (3.17)$$

assim, considerando que $u_L^* \in \mathcal{U}_L^1$, segue-se que:

$$u_L^*(x) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f} x + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^x \gamma_0(\xi) (y_L^*(p) - y_L^*(\xi)) d\xi \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.18)$$

No entanto, derivando (2.101) e usando (2.102) obtem-se:

$$\frac{d^2 u_L^*}{dx^2} = -\frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \frac{dy_L^*}{dx}. \quad (3.19)$$

Multiplicando (3.19) pela variação de u_L^* , para cada valor de x , isto é:

$$\delta u_L^*(x) = u_L^*(x) - u_L(x) \quad (3.20)$$

com $u_L^* \in \mathcal{U}_L^1$ arbitrário, tem-se, por integração:

$$\int_0^p \frac{d^2 u_L^*}{dx^2} (u_L - u_L^*) dx + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^p \gamma_0 \frac{dy_L^*}{dx} (u_L - u_L^*) dx = 0. \quad (3.21)$$

Integrando a primeira parcela de (3.21) por partes e lembrando que u_L^* e u_L pertencem a \mathcal{U}_L^1 , tem-se:

$$\int_0^p \left[\frac{du_L^*}{dx} \frac{du_L^*}{dx} - \left(\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^p \gamma_0 \frac{dy_L^*}{dx} (u_L - u_L^*) dx = 0. \quad (3.22)$$

Usando a desigualdade fundamental do Lema 12 do Apêndice B, tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left[\left(\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 - \left(\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^p \gamma_0 \left(\frac{dy_L^*}{dx} u_L^* - \frac{dy_L^*}{dx} u_L \right) dx \geq 0 \quad (3.23)$$

Definindo:

$$J_L^1(u_L) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 dx - \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^p \gamma_0 \frac{dy_L^*}{dx} u_L dx \quad (3.24)$$

pode-se concluir que se existe $u_L^* \in \mathcal{U}_L^1$ (neste caso a existência de u_L^* depende da existência de y_L^*) que satisfaça (2.101) e (2.102) então u_L^* resolve o problema variacional:

$$J_L^1(u_L^*) = \inf_{u_L \in \mathcal{U}_L^1} J_L^1(u_L) \quad (3.25)$$

que é equivalente, pelo Teorema 4 do Apêndice B, à inequação variacional:

$$\delta J_L^1[u_L^*; u_L - u_L^*] \geq 0 \quad \forall u_L \in \mathcal{U}_L^1. \quad (3.26)$$

Para completar a prova deve-se mostrar que se y_L^* e u_L^* satisfazem, respectivamente, a (3.25) e (3.13) e se $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2$ então (2.101) a (2.108) estão verificadas, além da desigualdade (2.109). Observe-se também, que se existir um par (u_L^*, y_L^*) em $\mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ satisfazendo (3.25) e (3.13), ele não necessariamente satisfará (2.101) a (2.108) e a desigualdade (2.109), mas se este par estiver em $\mathcal{U}_L^1 \times \mathcal{U}_L^2$, então estas relações devem ser verificadas. É o que se provará a seguir. Para começar considera-se que o funcional $J_L^2(y_L)$ é diferenciável segundo Gâteaux; a propósito, enuncia-se o seguinte Lema:

Lema 1

O funcional $J_L^2(y_L)$ é diferenciável segundo Gâteaux e sua diferencial calculada sobre a função y_L^* , para todo $h \in \mathcal{V}_L^2$ é:

$$\begin{aligned} \delta J_L^2[y_L^*; h] &= \varepsilon_f T_p^* \int_0^p \frac{dy_L^*}{dx} \frac{dh}{dx} dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \frac{d^2 h}{dx^2} dx \\ &\quad - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx + \beta_f k \int_0^p V_+^* h dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Dando continuidade à demonstração da equivalência dos problemas **PL1** e **PL2**, integra-se por partes, uma vez a primeira parcela e duas vezes a segunda parcela de δJ_L^2 , na expressão (3.27) e lembrando que $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$, tem-se:

$$\delta J_L^2[y_L^*; h] = -\varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} h dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} h dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx + \beta_f k \int_0^p V_+^* h dx. \quad (3.28)$$

Agora, pela definição de V_+ e pelas expressões (2.83), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } V_+^* \geq 0 \implies V_+^* = V_L^* \text{ e } kV_L^* = -f_{nL} \\ \text{se } V_+^* < 0 \implies V_+^* = 0 \text{ e } kV_+^* = -f_{nL}^* = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.29)$$

portanto, em (3.28) pode-se substituir kV_+^* por $-f_{nL}^*$. Feito isto, o teorema 1 do Apêndice B estabelece que uma condição necessária para que $y_L^*(x)$ seja extremo do funcional $J_L^2(y_L)$ é que $\delta J_L^2[y_L^*; h] = 0$, para todo $h \in \mathcal{V}_L^2$. Esta condição, por sua vez, fornece a equação diferencial:

$$\varepsilon_f T_L^*(p) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \varepsilon_f k_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nL}^* \quad (3.30)$$

que era o que se queria demonstrar. Atentar para o fato que $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$ e que portanto as condições de contorno relativas a y_L^* no problema **PL1**, já estão garantidas. Resta provar que esta mesma y_L^* satisfaz a desigualdade (2.109), para todo $y_L(x) \in \mathcal{U}_L^2$. Para provar que $y_L^*(x)$ satisfaz aquela condição é preciso demonstrar três Lemas, enunciados a seguir, ficando a demonstração deles para o Apêndice A.

Lema 2

Os conjuntos \mathcal{U}_L^2 e \mathcal{V}_L^2 são convexos.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 3

$H^2(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo. Considere o conjunto \mathcal{V}_L^2 subconjunto de $H^2(\Omega)$ e o funcional $J_L^2(y_L) = J_1(y_L) + J_2(y_L)$, definido em $H^2(\Omega)$, como apresentado pelas expressões (2.113) a (2.115) A forma bilinear $\delta J_1[y_L^, y_L^* - y_L]$ dada pela diferencial de Gâteaux de $J_1(y_L)$ é coerciva em $\mathcal{V}_L^2 \times \mathcal{V}_L^2$. Além disso, o funcional $J_2(y_L)$ é convexo.*

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 4

Considerem-se as funções y, V, V_+, y^*, V^*, V_+ em que: y é um elemento arbitrário de \mathcal{V}_L^2 , V é definida em (2.110), V_+ é a correspondente variável adimensional definida por (2.90), y^* é uma função candidata a ser solução do problema **PL2**, V^* também é definida por (2.110), V_+^* é uma função associada a y^* definida de maneira análoga a função V_+ . Seja f_n a correspondente função adimensional da função \hat{f}_n , definida por (2.83). Sob estas condições são equivalentes as seguintes desigualdades:

$$i) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^*(x) \leq 0 \implies f_n(x) = 0 \\ V^*(x) \geq 0 \implies f_n(x) = -kV^*(x) \end{array} \right\} \quad \forall x \in \Omega \quad (3.31)$$

$$ii) \quad \forall y \in \mathcal{V}_L^2 \\ f_n(x)(y(x) - y^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (3.32)$$

iii) Para todo $y_L \in \mathcal{V}_L^2$, e para toda terna de números $\varepsilon, a, (a+\varepsilon)$, tal que $\varepsilon, a, (a+\varepsilon) \in \Omega$

$$\int_a^{a+\varepsilon} [f_n(x)(y(x) - y^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x))] \geq 0 \quad (3.33)$$

em particular para $a = 0$ e $\varepsilon = p$ a desigualdade é verificada.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

O Lema 4 completa a demonstração da equivalência estabelecida pela Proposição 1.

3.2.1 Existência e Unicidade da Solução do Problema PL2

Proposição 2

O problema **PL2** admite uma e uma só solução. Dizendo de outra forma, existe um único par $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ que resolve o problema **PL2**.

Demonstração I:

Para simplificar e sem perda de generalidade, considera-se que $u_L^*(x)$ seja conhecida através de (3.1) e (2.101), posto que $y_L^*(x)$ exista. De fato, de (3.1) obtem-se explicitamente $T_L^*(x)$ e depois usando a condição de contorno (2.81) e integrando (2.101), segue-se que:

$$\forall x \in \Omega$$

$$u_L^*(x) = \frac{T_L^*(p)}{\delta_f} x + \beta_f \frac{\varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \int_0^x y_L^*(\zeta) d\zeta \quad (3.34)$$

Supondo que a função y_L^* exista e é única e que existam duas funções $u_L^1(x)$ e $u_L^2(x)$ obtidas através de (3.34) conclui-se trivialmente que $u_L^1(x) = u_L^2(x)$, $\forall x \in \Omega$. Resta provar que y_L^* existe e é única. Para provar este fato devem ser verificadas as hipóteses do Teorema 5 do Apêndice B, quais sejam:

- a) $H^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, portanto reflexivo;
- b) \mathcal{V}_L^2 é um subconjunto convexo de $H^2(\Omega)$.
- c) $\mathcal{V}_L^2 \neq \emptyset$ e a forma bilinear $\delta J_1 [y_L^*; y_L^* - y_L]$, diferencial de Gâteaux do funcional $J_1(y_L)$, calculada em y_L^* e $y_L^* - y_L$ é coerciva em $\mathcal{V}_L^2 \times \mathcal{V}_L^2$ e o funcional $J_2(y_L)$ é convexo;

A verificação da condição a) é garantida pelo Teorema 11 do Apêndice B. Que \mathcal{V}_L^2 é não vazio não há dúvida. A coercividade da forma bilinear $\delta J_1 [y_L^*; y_L^* - y_L]$ e a convexidade de $J_2(y_L)$ são garantidos pelo Lema 3.

Uma vez verificadas estas condições, estão então verificadas todas as hipóteses do Teorema 5 do Apêndice B. Segue-se, portanto, que existe e é única a função $y_L^* \in \mathcal{V}_L^2$ que torna ínfimo o valor do funcional $J_L^2(y_L^*)$ ou equivalentemente que satisfaça a inequação variacional (3.14).

Esta demonstração da Proposição 2, com base no Teorema 5 do Apêndice B é a mais simples e direta. No entanto, como exercício preparatório para a demonstração da existência e unicidade da solução do problema **Pa2** é apresentada uma segunda demonstração da Proposição 2, com base no Teorema 10 do Apêndice B.

Demonstração II:

Neste caso trabalha-se diretamente com a inequação variacional (3.14), reproduzida a seguir:

$$\delta J_1 [y_L^*; y_L^* - y_L] + J_2(y_L^*) \leq J_2(y_L) \quad \forall y_L \in \mathcal{V}_L^2 \quad (3.35)$$

Em busca de clareza é útil introduzir algumas definições e notações que induzam a aplicação do Teorema 10 na demonstração da Proposição 2. Considerando-se então o operador A_L , definido em $H^2(\Omega)$, assumindo valores em $(H^2(\Omega))^*$, considera-se então a restrição de A_L ao conjunto \mathcal{V}_L^2 , dada pela expressão:

$$A_L = \varepsilon_f T_p^* \frac{d}{dx} + k_f \varepsilon_f \frac{d^2}{dx^2}. \quad (3.36)$$

Considerando o funcional $J_2(y_L(x))$ de $H^2(\Omega)$ em R , dado pela expressão (3.16), que é reproduzida a seguir:

$$J_2(y_L(x)) = -\beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L(x) dx + \beta_f k \int_0^p V_+^* y_L dx. \quad (3.37)$$

Pelo teorema de representação de Riesz a inequação variacional (3.35) pode ser reescrita como:

$$\langle A_L y_L^*; y_L^* - y_L \rangle + J_2(y_L^*) \leq J_2(y_L) \quad \forall y_L \in \mathcal{V}_L^2 \quad (3.38)$$

A demonstração da existência e unicidade da solução da inequação variacional (3.38), através do Teorema 10 é feita demonstrando que o operador A_L é estritamente monótono, hemicontínuo e coercivo. Além disso deve ser demonstrado que o funcional $J_2(y_L)$ é próprio e semicontínuo inferiormente.

A demonstração desses fatos seguem de perto àquelas desenvolvidas no Lema 3 e que se encontram no Apêndice A. Elas não serão rerepresentadas aqui.

Considerando a existência e a unicidade da função $u_L^*(x)$ como foi provado na subseção (3.2.1) e se $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$ é a única função que torna o valor do funcional J_L^2 ínfimo ou, equivalentemente, se y_L^* é a única função que satisfaz a inequação variacional (3.38), então o par (u_L^*, y_L^*) é solução do problema **PL1**, o que completa a prova da existência e unicidade da solução do problema **PL1**.

É importante observar que o teorema de existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais não se aplica ao problema **PL1**, uma vez que existe uma condição de desigualdade a ser satisfeita.

3.3 A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROBLEMAS PA

Conforme as definições de equivalência apresentadas na seção 3.2, enuncia-se a Proposição 3.

Proposição 3

O problema **Pa1**, conforme definido pelas expressões (2.146) a (2.150) e é “equivalente” ao problema **Pa2**, como definido pelas expressões (2.153) a (2.158).

Demonstração:

Uma primeira observação é necessária para que se evite dificuldades posteriores. De fato, o termo “equivalente” acima ainda embute os erros de ordem menor ou igual a ε_f^2 . Uma segunda observação que se faz necessária é a respeito da estratégia seguida para a demonstração da Proposição 3 e Proposição 4, a seguir. Nas demonstrações das Proposições 1 e 2, relativas, respectivamente a “equivalência” entre os problemas **PL1** e **PL2** e a existência e unicidade da solução de **PL2** foi possível seguir uma estratégia usual e direta. Primeiro provando que se existe uma solução do problema **PL1**, então ela é solução do problema **PL2** e que sob certas condições vale a recíproca. Em continuação foram demonstradas a existência e a unicidade da solução do problema **PL2**. Como os problemas são “equivalentes” ficou provado também que o problema **PL1** admite, no máximo, uma solução.

No presente caso não é possível seguir essa lógica. Como o problema **Pa2** é constituído de um sistema de duas inequações variacionais desacopladas, enquanto a primeira delas é equivalente à minimização de um funcional convexo mas não diferenciável segundo Gâteaux, em virtude de incorporar a desigualdade (2.149), para a segunda nem há essa equivalência. Mas ainda é possível, de forma indireta, provar a Proposição 3 associada à Proposição 4, desde que a função de atrito $F_a^*(x)$ obedeça as hipóteses subsidiárias estabelecidas na demonstração da Proposição 4.

Para provar a Proposição 3 tem-se que provar duas coisas:

i) $\mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2 \subset \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$

ii) se $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$ é solução de **Pa1** então (ν^*, ξ^*) é solução de **Pa2** e se $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ é solução de **Pa2** e $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$ então (ν^*, ξ^*) é também solução de **Pa1**.

i) trivial

ii) para se provar esta parte procede-se construtivamente, isto é, supondo que o par resolve **Pa1**, ou seja:

$$\forall x \in \Omega$$

$$\frac{d\nu^*}{dx}(x) = \frac{t^*(x)}{\delta_f} \tag{3.39}$$

$$\frac{d\xi^*}{dx}(x) = -\beta_f \varepsilon_f \gamma_0(x) \frac{d\xi^*}{dx}(x) - \beta_f f_a^*(x) \tag{3.40}$$

$$\varepsilon_f (T_L^*(x) + t^*(x)) \frac{d^2}{dx^2} (y_L^*(x) + \xi^*(x)) - k_f \varepsilon_f \frac{d^4}{dx^4} (y_L^*(x) + \xi^*(x))$$

$$= -\beta_f (\gamma_0(x) - w_0(x)) + \beta_f f_{nA}^*(x) \tag{3.41}$$

$$f_a^*(x)(\nu(x) - \nu^*(x)) + \mu |f_{nL}^*(x)| (|u_L^*(x) + \nu(x)| - |u_L^*(x) + \nu^*(x)|) \geq 0 \quad (3.42)$$

$$f_{nA}^*(x)(\xi(x) - \xi^*(x)) + k V_{+A}^*(x)(V_{+A}(x) - V_{+A}^*(x)) \geq 0. \quad (3.43)$$

A partir destas expressões deve-se mostrar que o par $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$ satisfaz a inequação:

$$\langle A\xi^*(x), \xi(x) - \xi^*(x) \rangle + j(\xi) \geq j(\xi^*) \quad \forall \xi \in \mathcal{U}_a^2 \quad (3.44)$$

bem como ao problema variacional:

$$J_a^1(\nu^*) = \inf_{\nu \in \mathcal{U}_a^1} J_a^1(\nu). \quad (3.45)$$

Para chegar a (3.44) e (3.45) é mais simples construir primeiro a expressão do problema variacional e depois obter a formulação da inequação variacional. Este é o procedimento que será seguido.

De (3.39) e (3.40) segue-se que:

$$\frac{d^2 \nu^*}{dx^2} = -\frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \frac{d\xi^*}{dx} - \frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^*. \quad (3.46)$$

Conforme estabelecido na subseção (2.2.2) $\frac{1}{\delta_f} \simeq o(\varepsilon_f^2)$ e, portanto,

$$\frac{d^2 \nu^*}{dx^2} = -\frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^* + O(\varepsilon_f^3) \simeq -\frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^*. \quad (3.47)$$

Considerando a primeira variação de ν^* , indicada por $\delta\nu^*$, tem-se:

$$\delta\nu^*(x) = \nu^*(x) - \nu(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.48)$$

Multiplicando (3.47) por $\delta\nu^*$ e integrando no intervalo $[0, p]$, tem-se:

$$\int_0^p \frac{d^2 \nu^*}{dx^2} (\nu - \nu^*) dx = -\frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* (\nu - \nu^*) dx. \quad (3.49)$$

Integrando por partes o primeiro membro de (3.49) e lembrando que $\nu(0) = \nu^*(0)$ e que $\nu(p) = \nu^*(p)$, ou seja que $\nu \in \mathcal{U}_a^1$, obtém-se:

$$\int_0^p \frac{d\nu^*}{dx} \left(\frac{d\nu}{dx} - \frac{d\nu^*}{dx} \right) dx - \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* (\nu - \nu^*) dx = 0. \quad (3.50)$$

Usando a desigualdade fundamental:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left[\left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 \right] dx \geq \int_0^p \frac{d\nu}{dx} \frac{d\nu^*}{dx} dx \quad (3.51)$$

e a integral de (3.42) multiplicada por $\frac{\beta_f}{\delta_f}$, tem-se:

$$\frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^*(\nu - \nu^*) dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| (|u^* + \nu| - |u^* + \nu^*|) dx \geq 0. \quad (3.52)$$

Por soma de (3.50), (3.51) e (3.52) obtém-se a desigualdade:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left[\left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| (|u^* + \nu| - |u^* + \nu^*|) dx \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathcal{U}_a^1 \quad (3.53)$$

Definindo:

$$J_a^1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| |u^* + \nu| dx \quad (3.54)$$

obtem-se, conseqüentemente, que:

$$J_a^1(\nu^*) = \inf_{\nu \in \mathcal{U}_a^1} J_a^1(\nu). \quad (3.55)$$

Agora considerando (3.40) e integrando no intervalo $[x, p]$ para todo $x \in \Omega$, tem-se:

$$t^*(p) - t^*(x) = -\beta_f \varepsilon_f \int_x^p \gamma_0(\zeta) \frac{d\xi^*}{d\xi}(\zeta) d\zeta - \beta_f \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta. \quad (3.56)$$

Lembrando que:

$$t^*(p) = -T_L^*(p) = -T_L^*(x) \quad (3.57)$$

resulta que:

$$t^*(x) + T_L^*(x) = \beta_f \varepsilon_f \int_x^p \gamma_0(\zeta) \frac{d\xi^*}{d\xi}(\zeta) d\zeta + \beta_f \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta. \quad (3.58)$$

Usando (3.58) em (3.41), realizando as aproximações pertinentes e lembrando a definição de $F_a^*(x)$ de (2.158) obtém-se:

$$-\beta_f \varepsilon_f F_a^* \frac{d^2}{dx^2} (y_L^* + \xi^*) dx - k_f \varepsilon_f \frac{d^4}{dx^4} (y_L^* + \xi^*) = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nA}^* \quad (3.59)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \beta_f \varepsilon_f F_a^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} + \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - k_f \varepsilon_f \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} + \varepsilon_f T_L^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - k_f \varepsilon_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} = \\ -\beta_f (\gamma_0 - w_0) - \beta_f f_{nL}^* + \beta_f f_{nL}^* + \beta_f f_{nA}^* \end{aligned} \quad (3.60)$$

Eliminando-se a identidade correspondente à equação (3.2), resulta:

$$\beta_f \varepsilon_f F_a^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} + k_f \varepsilon_f \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} = -\beta_f f_{nL}^* + \beta_f f_{nA}^* + \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}. \quad (3.61)$$

Está implícito nesta equação que $F_a^*(x)$ e $t^*(x)$ são funções conhecidas. Supõe-se, no caso, que elas são obtidas a partir da solução do problema variacional (3.55).

Multiplicando a equação (3.61) pela primeira variação de ξ^* e integrando no intervalo $[0, p]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} (\xi - \xi^*) dx + k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} (\xi - \xi^*) dx = \\ - \int_0^p (\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}) (\xi - \xi^*) dx - \beta_f \int_0^p f_{nA}^* (\xi - \xi^*) dx. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Integrando, duas vezes por partes a parcela contendo a quarta derivada de ξ^* e tendo em mente que $\xi, \xi^* \in \mathcal{U}_a^2$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} (\xi - \xi^*) dx + k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right) dx + \\ \int_0^p (\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}) (\xi - \xi^*) dx - \beta_f \int_0^p f_{nA}^* (\xi - \xi^*) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Usando a desigualdade fundamental:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 \right] \geq \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \quad (3.64)$$

e a desigualdade (3.43), obtem-se:

$$\begin{aligned}
 & \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} (\xi - \xi^*) dx + \\
 & \frac{k_f \varepsilon_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right) dx + \int_0^p \left(\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right) (\xi - \xi^*) dx + \\
 & \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left((V_A)^2 - (V_A^*)^2 \right) dx \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Se se define:

$$A\xi^*(x) = \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p F_a^*(x) \frac{d^2 \xi^*}{dx^2}(x) dx + k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4}(x) dx \right\} \quad \forall x \in \Omega \tag{3.66}$$

e se considera que A é um operador do espaço $H^2(\Omega)$ no seu espaço dual $[H^2(\Omega)]^*$, ver Apêndice B. Pelo teorema de representação de Riesz, tem-se que:

$$\langle A\xi^*, h \rangle = \int_0^p \beta_f \varepsilon_f \left\{ F_a^*(x) \frac{d^2 \xi^*}{dx^2}(x) h(x) dx + k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4}(x) h(x) dx \right\} \quad \forall h \in \mathcal{U}_a^2. \tag{3.67}$$

Definindo ainda:

$$j(\xi) = \int_0^p \left(\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right) \xi dx + \frac{1}{2} \beta_f k \int_0^p (V_A)^2 dx \tag{3.68}$$

pode-se escrever, com $h = \xi^* - \xi$, que:

$$\langle A\xi^*, \xi - \xi^* \rangle + j(\xi) \geq j(\xi^*) \quad \forall \xi \in \mathcal{U}_a^2. \tag{3.69}$$

Esta é a inequação variacional que se procurava. Isto completa a primeira parte da prova da Proposição 3, ou seja, se existe um par (ν^*, ξ^*) em $\mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$ que seja solução de **Pa1**, então ele é solução de **Pa2**.

A demonstração da volta, isto é, se existe um par $(\bar{\nu}, \bar{\xi}) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ que é solução de **Pa2**, então esse par é também solução de **Pa1**, é feita em duas etapas que têm procedimentos completamente diferentes, graças ao desacoplamento entre o problema variacional descrito por (3.55) e a inequação variacional descrita por (3.69), primeira parte da demonstração, relativa ao problema variacional, se completa pela aplicação dos Lemas 5 e 6 a seguir enunciados.

Observar que o Lema 5 apenas organiza alguns resultados, basicamente já estabelecidos, para serem usados no Lema 6.

Lema 5

Considere a lei de atrito de Coulomb aplicada ao caso contínuo como descrito pelas desigualdades (2.118) e (2.119), com as variáveis convenientemente adimensionalizadas e que são transcritas a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ |f_a^*(x)| < \mu |f_n(x)| \implies u^*(x) = 0 \\ |f_a^*(x)| = \mu |f_n(x)| \implies u^* \neq 0 \text{ e } \exists \lambda > 0 \mid u^*(x) = -\lambda f_a^*(x) \end{array} \right\} \quad (3.70)$$

As desigualdades (3.70) são equivalentes à desigualdade:

$$f_a^*(x)[u(x) - u^*(x)] + \mu |f_n(x)| [|u(x)| - |u^*(x)|] \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.71)$$

Além disso a aplicação destes resultados à situação do problema de abandono, em que $u = u_A = u_L^* + \nu$ permite afirmar:

se existe $\nu^* \in \mathcal{U}_a^1$ satisfazendo (3.39), (3.40) e (3.42), conseqüentemente satisfazendo (3.47) e (3.42) então ν^* satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(\nu) \geq j_1(\nu^*) \\ f_a^*(\nu - \nu^*) + \mu |f_{nL}^*| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \nu^*|) \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.72)$$

onde:

$$j_1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 \nu}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* \nu dx \quad (3.73)$$

e reciprocamente, se existe $\bar{\nu} \in \mathcal{V}_a^1$ satisfazendo (3.72) e se $\bar{\nu} \in \mathcal{U}_a^1$ então $\bar{\nu}$ satisfaz (3.47) e (3.42).

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 6

Se existe $\nu^* \in \mathcal{V}_a^1$ satisfazendo (3.72) então ν^* satisfaz ao problema variacional:

$$J_a^1(\nu^*) \leq J_a^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.74)$$

e reciprocamente.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Os Lemas anteriores permitem concluir que a primeira parte do problema **Pa1** é “equivalente” ao problema na forma variacional, que é parte do problema **Pa2**.

A demonstração da segunda parte da volta segue uma estratégia diversa. A demonstração da “equivalência” só se completa com a prova da existência e unicidade de solução do problema **Pa2**, conforme estabelecido na Proposição 4 a seguir.

3.3.1 Existência e Unicidade da Solução do Problema Pa2

Proposição 4

Considere o problema:

Achar um par $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$, tal que:

$$a) \quad J_a^1(\nu^*) \leq J_a^1(\nu) \quad \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.75)$$

$$b) \quad \langle A\xi^*, \xi - \xi^* \rangle + j(\xi) \geq j(\xi^*) \quad \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.76)$$

Existe uma única função $\nu^* \in \mathcal{V}_a^1$, a menos de erros da ordem ε_f^2 , que satisfaz a) e, satisfeitas as hipóteses subsidiárias, a seguir enunciadas, existe uma única função $\xi^* \in \mathcal{V}_a^2$ que satisfaz b).

Demonstração:

A prova desta proposição é feita em duas etapas. Na primeira etapa enunciam-se dois Lemas que fornecem a base para a aplicação de um Teorema Fundamental da teoria dos funcionais convexos e diferenciáveis segundo Gâteaux que garante a existência e unicidade de solução do Problema Variacional em a). Na segunda etapa enunciam-se três Lemas que fornecem a base para a aplicação de um Teorema Fundamental da Teoria das Inequações Variacionais que garante a existência de solução da Inequação Variacional em b).

No que segue são ressaltadas as hipóteses subsidiárias, relativas a função de atrito $f_a^*(x)$ já apresentadas nos comentários iniciais da demonstração desta Proposição 3. Elas é que vão permitir demonstrar que existe um único par $(\nu^*, \xi^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ que é solução de **Pa2**. Uma vez demonstrado esse fato, a “equivalência” dos problemas **Pa1** e **Pa2** fica estabelecida desde que o par (ν^*, ξ^*) também pertença ao conjunto $\mathcal{U}_a^1 \times \mathcal{U}_a^2$.

Hipóteses Subsidiárias

A função de atrito $F_a^*(x)$, definida a partir da função densidade linear de atrito $f_a^*(x)$, pela expressão (2.158) transcrita a seguir, deve satisfazer as condições subsidiárias seguintes:

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega \quad (3.77)$$

- ter até a segunda derivada contínua;

- existem números reais λ (que dependem essencialmente da monotonicidade de F_a^*) tais que o número λ_a definido em (3.78), a seguir, é sempre positivo. Dado um número real λ , a existência de um número λ_a está garantida pois trata-se do ínfimo de uma função contínua definida num conjunto compacto Ω , resta saber em que casos ele é positivo. Para aqueles casos que é verificada esta última condição está satisfeita uma hipótese subsidiária que vai permitir a demonstração da Proposição 4.

$$\lambda_a = \inf_{x \in \Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} - \lambda^2 F_a^*(x) \right]. \quad (3.78)$$

Esta segunda hipótese subsidiária se apresenta de maneira um tanto artificial; no entanto, como é visto na prova do Lema 9 a seguir enunciado, ambas surgem de maneira bastante natural. O que está sendo manifestado por estas hipóteses, tem a ver com a complexidade inerente ao modelo Coulombiano do atrito, que de resto já é um fenômeno físico complexo. A segunda hipótese subsidiária traduz de certa forma o fato de que a mobilização da força de atrito, a partir de um ponto de abscissa x do oleoduto até a extremidade em que a força de tração é atenuada, deve atender a algum requisito para que o modelo que descreve a operação de abandono mantenha consistência matemática. Pode-se afirmar, então, que sob condições mais gerais o modelo proposto para a operação de abandono não dá conta de representar o fenômeno físico correspondente. A introdução desta hipótese estabelece que, para cada abscissa x a metade da derivada segunda de F_a^* , calculada em x é sempre superior a $\lambda^2 F_a^*(x) \leq 0$. Com este reforço, o modelo proposto passa a representar satisfatoriamente a operação de abandono.

São agora enunciados alguns Lemas, entre eles, os Lemas 9 e 10 que permitem a aplicação do Teorema 3 do Apêndice B, que por sua vez garante a existência e a unicidade da solução do problema variacional descrito em a), expressão (3.75).

Lema 7

O conjunto $\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ é convexo, além disso o funcional $J_a^1(\nu)$ é não só convexo em \mathcal{V}_a^1 como estritamente convexo.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 8

$\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ é um conjunto fechado e completo

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Estes dois Lemas completam os requisitos necessários para a aplicação do Teorema 3 do Apêndice B à parte a) do problema **Pa2**.

Agora são enunciados alguns Lemas que dão conta da parte b) do mesmo problema **Pa2**.

Lema 9

Seja \mathcal{V}_a^2 , segue da definição deste conjunto que ele é parte do espaço de Hilbert $H^2(\Omega)$, considere então o operador:

$$A : H^2(\Omega) \longrightarrow (H^2(\Omega))^*$$

definido por:

$$A = \beta_f \varepsilon_f \left\{ F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_f \frac{d^4}{dx^4} \right\} \quad (3.79)$$

e seja A a restrição do operador A ao subconjunto \mathcal{V}_a^2 de $H^2(\Omega)$. A é estritamente monótono, hemicontínuo e **coercivo** (ver Apêndice B).

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 10

O conjunto $\mathcal{V}_a^2 \subset H^2(\Omega)$ é um subespaço vetorial do espaço $H^2(\Omega)$, é não vazio, convexo e fechado.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Lema 11

Seja o funcional:

$$j(\xi) = \frac{1}{2} \beta_f k \int_0^p (V_+^A)^2 dx + \int_0^p (\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L}{dx^2}) \xi dx \quad (3.80)$$

definido em \mathcal{V}_a^2 . Pode-se afirmar que j é convexo, próprio e semicontínuo inferiormente.

Observação: este Lema é reenunciado e demonstrado no Apêndice A.

Com base nos Lemas 9, 10 e 11 acima enunciados e demonstrados no Apêndice A o Teorema Fundamental das Inequações Variacionais, ver Teorema 10 do Apêndice B, pode-se garantir a existência e a unicidade da função $\xi^* \in \mathcal{V}_a^2$ que satisfaz a Inequação (3.76) correspondente à parte b) do problema posto pela Proposição 4 em questão.

Este Capítulo apresentou os elementos necessários e suficientes para se atingir o objetivo essencial da tese, qual seja:

- demonstrar que os problemas **PL1** e **PL2** são " equivalentes" e que possuem solução única;
- demonstrar que o problema **Pa2** possui solução única e como a solução do problema **Pa1**, se ela existir, é também solução do problema **Pa2** chega-se também na equivalência dos problemas **Pa1** e **Pa2**.

As demonstrações dos Lemas anteriormente enunciados são elaboradas no Apêndice A.

3.4 MAJORAÇÕES DAS SOLUÇÕES DO PL2 E DO Pa2

Uma vez provadas a existência e a unicidade da solução de cada um dos problemas tratados, ou seja, **PL2** e **Pa2**, é pertinente o estabelecimento de propriedades dessas soluções. Uma propriedade muito importante e que pode ser verificada é a majoração da solução de cada um dos problemas estudados. Segue-se uma estimativa de majorantes para estas soluções.

3.4.1 Estimativa de Majoração da Solução do PL2

Para o estabelecimento das estimativas desejadas é recapitulada a formulação do problema **PL2** do Capítulo 2. As expressões (2.111), (2.112) e (2.113) repetidas a seguir são as escolhidas para a determinação dos majorantes. Vale lembrar que a formulação do problema **PL2** na forma de inequação variacional é dada pelas expressões (2.116), (2.117), com a mesma definição do funcional $J_L^2(y_L)$ dada pela expressão (2.113). Como estabelece o Teorema 4 do Apêndice B, ambas as formulações são equivalentes.

O enunciado do problema **PL2**, do Capítulo 2 é:

Achar $(u_L^*, y_L^*) \in \mathcal{V}_L^1 \times \mathcal{V}_L^2$ se existir, tal que:

$$J_L^2(y_L^*) = \inf_{y_L \in \mathcal{V}_L^2} J_L^2(y_L) \quad (3.81)$$

$$u_L^*(x) = \frac{T_L^*}{\delta_f} x + \beta_f \frac{\varepsilon_f}{\delta_f} \int_0^x y_L^*(\xi) \gamma_0(\xi) d\xi \quad x \in \Omega \quad (3.82)$$

com:

$$J_L^2(y_L) = \frac{\varepsilon_f T_L^*}{2} \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx}\right)^2 dx + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2}\right)^2 dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p V_{+L}^2 dx \quad (3.83)$$

Como estabelece o Teorema 1 do Apêndice B, uma condição necessária para que o ínfimo do funcional $J_L^2(y_L)$ seja atingido é que sua primeira derivada de Gâteaux seja nula, quando calculada para a função extremante e para toda função h nas suas vizinhanças, isto é, $\delta J_L^2[y_L^*; h] = 0$. A expressão (A.8) do Apêndice A fornece explicitamente a derivada acima, reproduzida a seguir:

$$\begin{aligned} \delta J_L^2[y_L^*; h] &= -\varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} h dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} h dx \\ &\quad - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx + \beta_f k \int_0^p V_{+L}^* h dx. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Impondo a condição de nulidade da derivada de Gâteaux de $J_L^2(y_L)$, calculada em $y_L^*(x)$ e uma vez que a função h é arbitrária podendo ser tomada como a própria função $y_L^*(x)$, resultando então:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} y_L^* dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} y_L^* dx - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L^* dx + \\ \beta_f k \int_0^p V_{+L}^* y_L^* dx = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Integrando, por partes, uma vez a primeira parcela, duas vezes a segunda parcela de (3.85) e lembrando que $y_L^* \in \mathcal{V}_L^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx + \beta_f k \int_0^p V_{+L}^* y_L^* dx \\ = \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L^* dx. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Explicitando a parcela $\int_0^p V_L^* y_L^* dx$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^p V_L^* y_L^* dx &= \int_0^p \frac{y_L^* - v_s + |y_L^* - v_s|}{2} y_L^* dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^p (y_L^*)^2 dx - \int_0^p y_L^* v_s dx + \int_0^p |y_L^* - v_s| y_L^* dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

A expressão (3.86) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p |y_L^* - v_s| y_L^* dx + \\ \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (y_L^*)^2 dx = \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L^* dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p y_L^* v_s dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Essencialmente como decorrência da definição de valor absoluto de uma função a valores reais, pode-se escrever:

$$-|y_L^*| |y_L^* - v_s| \leq y_L^* |y_L^* - v_s| \quad (3.89)$$

Com base na desigualdade triangular do módulo, resulta:

$$-|y_L^*|^2 - |y_L^* v_s| \leq -|y_L^*| |y_L^* - v_s| \leq y_L^* |y_L^* - v_s|. \quad (3.90)$$

De (3.90) e (3.88), segue a desigualdade:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (y_L^*)^2 dx \\ \leq \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) y_L^* dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p y_L^* v_s dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p |y_L^* v_s| dx \end{aligned} \quad (3.91)$$

ou ainda, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (y_L^*)^2 dx \\ \leq \beta_f \|(\gamma_0 - w_0)\|_2 \|y_L^*\|_2 + \beta_f k \|y_L^*\|_2 \|v_s\|_2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Definindo-se o número real positivo m_f por:

$$m_f = \min\{\varepsilon_f T_L^*(p), \beta_f \frac{k}{2}, \varepsilon_f k_f\} \quad (3.93)$$

a desigualdade (3.92) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} m_f \left\{ \int_0^p (y_L^*)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx \right. \\ \left. \leq \beta_f \{ \|(\gamma_0 - w_0)\|_2 + k \|v_s\|_2 \} \|y_L^*\|_2. \right. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Desde que no espaço $H^2(\Omega)$ a norma da função y_L^* é dada por:

$$\|y_L^*\|_{H^2(\Omega)}^2 = \int_0^p (y_L^*)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx \quad (3.95)$$

e como $\|y_L^*\|_2 \leq \|y_L^*\|_{H^2(\Omega)}$, supondo $\|y_L^*\| \neq 0$ segue uma majoração para a solução de **PL2**, ou seja:

$$\|y_L^*\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{\beta_f}{m_f} \{ \|(\gamma_0 - w_0)\|_2 + k \|v_s\|_2 \}. \quad (3.96)$$

A restrição da não nulidade da norma de y_L^* pode ser eliminada, uma vez que a desigualdade (3.96) vale também para o caso em que ela é nula.

Vale observar, ainda, que sendo a norma $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ para todos os casos onde ambas se aplicam, a desigualdade (3.96) tem sentido para todos os elementos de $H^2(\Omega)$.

O significado dado pela expressão (3.96) é bastante importante e traduz claramente que, se existir a função y_L^* , que componha uma solução do problema **PL2**, ela é limitada em $\mathcal{V}_L^2 \subset H^2(\Omega)$ e um seu majorante só depende das funções que caracterizam os dados do problema.

Uma vez que a solução do problema **PL2** é constituída de duas funções, a que descreve os deslocamentos verticais $y_L^*(x)$ e a que descreve os deslocamentos horizontais $u_L^*(x)$, as estimativas da solução ainda não estão completas. A partir da expressão (3.82) e da definição da norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ pode-se obter uma das possíveis majorações. Por simplicidade, é elaborada uma majoração que faz uso da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, conforme está feito a seguir. A norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ de $u_L^*(x)$ é dada por:

$$\|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_0^p (u_L^*(x))^2 dx + \int_0^p \left(\frac{du_L^*(x)}{dx}\right)^2 dx \quad (3.97)$$

Considerando as expressões (3.17) e (3.18) e descartando os termos de ordem menor que ε_f^2 , a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left[\frac{T_L^*}{\delta_f}\right]^2 \frac{p^3}{3} + \left[\frac{T_L^*(p)}{\delta_f}\right]^2 p \quad (3.98)$$

O parâmetro p é o comprimento adimensionalizado da linha e seu valor, certamente, não supera o valor do comprimento L , assim a expressão (3.98) fornece:

$$\|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left[\frac{T_L^*}{\delta_f}\right]^2 \left[\frac{L^3}{3} + L\right] \quad (3.99)$$

Esta desigualdade fornece a majoração desejada e junto com a desigualdade (3.96) completa as estimativas das majorações da solução do problema **PL2**.

3.4.2 Estimativa de Majoração da Solução do Pa2

O problema **Pa2**, conforme descrito pelas equações (2.153) a (2.158), é transcrito a seguir:

Achar $(\xi^*, \nu^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ se existir, tal que:

$$\begin{aligned} \forall (\nu, \xi) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2 \\ J_a^1(\nu^*) = \inf_{\nu \in \mathcal{V}_a^1} J_a^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\langle A\xi^*, \xi^* - \xi \rangle + j(\xi^*) \leq j(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.101)$$

onde:

$$J_a^1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*(x)| |u_L^*(x) + \nu(x)| dx \quad (3.102)$$

$$A\xi^*(x) = \beta_f \varepsilon_f \left\{ F_a^*(x) \frac{d^2 \xi^*(x)}{dx^2} + \alpha_f \frac{d^4 \xi^*(x)}{dx^4} \right\} \quad (3.103)$$

$$j(\xi) = \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (V_{+A}(x))^2 dx + \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi(x) dx \quad (3.104)$$

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.105)$$

Admite-se, por enquanto, que a função $\nu^*(x)$ que minimiza o funcional J_a^1 é limitada em $H^1(\Omega)$. Na seqüência essa hipótese será verificada. Agora o que se quer é estabelecer

um limite superior para a função ξ^* solução da inequação variacional (3.103). Para tanto, nesta mesma equação, pela arbitrariedade da função ξ do espaço \mathcal{V}_a^2 , pode ser tomada como a função identicamente nula, que está em \mathcal{V}_a^2 , obtendo-se:

$$\langle A\xi^*, \xi^* - 0 \rangle + j(\xi^*) \leq j(0) \quad (3.106)$$

usando a definição de $V_A(x)$ obtida das expressões (2.133) a (2.136) e de (2.138), a desigualdade (3.106) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p F_a^*(x) \xi^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} dx + \alpha_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} \xi^* dx \right\} + \\ & \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p \left(\frac{y_L^* - v_s + \xi^* + |y_L^* - v_s + \xi^*|}{2} \right)^2 dx + \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi^* dx \\ & \leq \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p \left(\frac{y_L^* - v_s + |y_L^* - v_s|}{2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Desenvolvendo convenientemente os termos quadráticos e procedendo as simplificações possíveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p F_a^*(x) \xi^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} dx + \alpha_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} \xi^* dx \right\} + \beta_f \frac{k}{2} \left\{ \int_0^p \frac{|y_L^* - v_s + \xi^*| \xi^*}{2} dx \right. \\ & \left. \int_0^p \frac{(\xi^*)^2}{2} dx + \int_0^p (y_L^* - v_s) \xi^* dx + \int_0^p \frac{(y_L^* - v_s) |y_L^* - v_s + \xi^*|}{2} dx \right\} + \\ & \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi^* dx \leq \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p \frac{(y_L^* - v_s) |y_L^* - v_s|}{2} dx. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Das propriedades do valor absoluto de funções a valores reais, pode-se escrever as desigualdades seguintes:

$$-|y_L^* - v_s|^2 - |y_L^* - v_s| |\xi^*| \leq -|y_L^* - v_s| |y_L^* - v_s + \xi^*| \leq (y_L^* - v_s) |y_L^* - v_s + \xi^*| \quad (3.109)$$

$$-|\xi^*|^2 - |y_L^* - v_s| |\xi^*| \leq -|\xi^*| |y_L^* - v_s + \xi^*| \leq (\xi^*) |y_L^* - v_s + \xi^*|. \quad (3.110)$$

Integrando as desigualdades (3.109) e (3.110) multiplicadas pelas constantes positivas apropriadas, combinando-as com a desigualdade (3.108) e procedendo as simplificações pertinentes, tem-se:

$$\begin{aligned} & \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p F_a^*(x) \xi^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} dx + \alpha_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} \xi^* dx \right\} - \\ & \beta_f \frac{k}{2} \left\{ \int_0^p (y_L^* - v_s) \xi^* dx - \int_0^p |y_L^* - v_s| |\xi^*| dx + \int_0^p \frac{|y_L^* - v_s|^2}{2} dx \right\} + \\ & \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi^* dx \leq \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p \frac{(y_L^* - v_s) |y_L^* - v_s|}{2} dx. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Aplicando a desigualdade triangular para a soma do módulo de funções a valores reais e a seguir a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p F_a^*(x) \xi^* \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} dx + \alpha_f \int_0^p \frac{d^4 \xi^*}{dx^4} \xi^* dx \right\} \leq \beta_f \frac{k}{2} \left\{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \right. \\ & \left. \| y_L^* - v_s \|_2^2 \right\} + \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \end{aligned} \quad (3.112)$$

A seguir são apresentadas algumas relações que constituem as bases para as manipulações algébricas feitas sobre a desigualdade (3.112).

$$\int_0^p (\xi^*)^2 dx \leq \frac{p^2}{\pi^2} \int_0^p \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{Poincaré-Friedrichs}) \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx = [-F_a^*(\zeta_0)] \int_0^p \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx \\ & \int_0^p [-F_a^*(x)] (\xi^*)^2 dx = [-F_a^*(\zeta_1)] \int_0^p (\xi^*)^2 dx \end{aligned} \quad (3.114)$$

Teorema 8, Apêndice B

$$\begin{aligned} & \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx = \frac{p^2 - 1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx \quad \text{Decomposição da Integral} \\ & \text{para aplicação da desigualdade de Poincaré-Friedrichs} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Integrando por partes, uma vez a primeira parcela e duas vezes a segunda parcela de (3.112), resulta:

$$\begin{aligned}
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx - \int_0^p f_a \xi^* \frac{d\xi^*}{dx} dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
& \leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2 \} + \\
& \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Usando a relação (3.115) em (3.116), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{p^2 - 1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(x)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx - \int_0^p f_a \xi^* \frac{d\xi^*}{dx} dx + \right. \\
& \left. \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2 \} + \\
& \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \tag{3.117}
\end{aligned}$$

Usando as relações (3.114) em (3.117), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{p^2 - 1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(x)] (\xi^*)^2 dx - \int_0^p f_a \xi^* \frac{d\xi^*}{dx} dx + \right. \\
& \left. \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
& \leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
& \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Integrando, por partes a parcela $\int_0^p f_a \xi^* \frac{d\xi^*}{dx} dx$, lembrando que

$$\frac{df_a(x)}{dx} = \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2}, \quad \forall x \in \Omega \tag{3.119}$$

e substituindo em (3.118), tendo usado a segunda relação de (3.114) e reordenado os termos, chega-se em:

$$\begin{aligned}
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p \left(\frac{p^2 - 1}{p^2} \frac{F_a^*(\zeta_1)}{F_a^*(0)} [-F_a^*(x)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} \right) (\xi^*)^2 dx + \right. \\
& \left. \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
 &\| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2.
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Usando a relação (3.113) em (3.121) tem-se:

$$\begin{aligned}
 &\beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p \left(\pi^2 \frac{p^2 - 1}{p^4} \frac{F_a^*(\zeta_1)}{F_a^*(0)} [-F_a^*(x)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} \right) (\xi^*)^2 dx + \right. \\
 &\left. \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
 &\leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
 &\| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Observar que o fator $F_a^*(\zeta_1)$, que comparece no denominador da primeira parcela, pode ser substituído por $F_a^*(0)$, pois pela definição da função $F_a^*(x)$, dada por (3.105), vale:

$$0 \leq [-F_a^*(x)] \leq [-F_a^*(0)], \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.122}$$

Definindo o fator real positivo λ^2 , por:

$$\lambda^2 = 2\pi^2 \frac{p^2 - 1}{p^4} \frac{F_a^*(\zeta_0)}{F_a^*(0)} \tag{3.123}$$

a desigualdade (3.121) pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 &\beta_f \frac{\varepsilon_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} - \lambda^2 F_a^*(x) \right) (\xi^*)^2 dx + \\
 &\beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
 &\leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
 &\| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2.
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Levando em conta as hipóteses subsidiárias estabelecidas na demonstração da proposição 4, a função $f(x)$ como lá definida é não negativa para todo $x \in \Omega$. Assim, a primeira versão do Teorema do Valor Médio pode ser usada e a expressão (3.124) fica:

$$\begin{aligned}
& \beta_f \frac{\varepsilon_f}{2} f(x_0) \int_0^p (\xi^*)^2 dx + \\
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
& \leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
& \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \tag{3.125}
\end{aligned}$$

onde:

$$f(x_0) = \frac{d^2 F_a^*(x_0)}{dx^2} - \lambda^2 F_a^*(x_0). \tag{3.126}$$

Considerando que cada coeficiente que comparece nas parcelas do primeiro membro da desigualdade é positivo, pode-se definir um número:

$$m_0 = \min \{ \beta_f \frac{\varepsilon_f}{2} f(x_0), \beta_f \frac{\varepsilon_f}{p^2} [-F_a^*(\zeta_0)], k_f \varepsilon_f \} \tag{3.127}$$

tal que:

$$\begin{aligned}
& m_0 \left\{ \int_0^p (\xi^*)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \\
& \leq \beta_f \frac{\varepsilon_f}{2} f(x_0) \int_0^p (\xi^*)^2 dx \\
& \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p [-F_a^*(\zeta_0)] \left(\frac{d\xi^*}{dx} \right)^2 dx + \alpha_f \int_0^p \left(\frac{d^2 \xi^*}{dx^2} \right)^2 dx \right\}. \tag{3.128}
\end{aligned}$$

Considerando a definição da norma em $H^2(\Omega)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
m_0 \| \xi^* \|_{H^2(\Omega)}^2 & \leq \beta_f \frac{k}{2} \{ 2 \| (y_L^* - v_s) \|_2 \| \xi^* \|_2 + \| y_L^* - v_s \|_2^2 \} + \\
& \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2 \| \xi^* \|_2. \tag{3.129}
\end{aligned}$$

Tendo em mente a relação entre a norma de $H^2(\Omega)$ e a de $\mathcal{L}_2(\Omega)$ a desigualdade (3.129) se converte em:

$$\begin{aligned}
m_0 \| \xi^* \|_{H^2(\Omega)}^2 - [\beta_f k \| (y_L^* - v_s) \|_2 + \| \beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \|_2] \| \xi^* \|_{H^2(\Omega)} - \\
\| y_L^* - v_s \|_2^2 \leq 0 \tag{3.130}
\end{aligned}$$

que constitui uma inequação do segundo grau em $\|\xi^*\|_{H^2(\Omega)}$ e o discriminante da equação do segundo grau correspondente é:

$$\Delta_o = [\beta_f k \|(y_L^* - v_s)\|_2 + \|\beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\|_2]^2 + 4 m_0 \|y_L^* - v_s\|_2^2 \quad (3.131)$$

que evidentemente é positivo, o que significa que a equação do segundo grau correspondente a (3.130) tem duas raízes reais. Daí que a inequação será satisfeita, tendo em conta que m_0 também é positivo, se e somente se os valores assumidos pela norma de ξ^* estiverem compreendidos entre as raízes, ou seja:

$$\begin{aligned} \|\xi^*\|_{H^2(\Omega)} &\geq \frac{1}{2m_0} \{ \beta_f k \|(y_L^* - v_s)\|_2 + \|\beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\|_2 - (\Delta_o)^{\frac{1}{2}} \} \\ \|\xi^*\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2m_0} \{ \beta_f k \|(y_L^* - v_s)\|_2 + \|\beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\|_2 + (\Delta_o)^{\frac{1}{2}} \} \end{aligned} \quad (3.132)$$

A primeira raiz é claramente negativa. Como a norma, por definição, é sempre não negativa, segue-se que:

$$\|\xi^*\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2m_0} \{ \beta_f k \|(y_L^* - v_s)\|_2 + \|\beta_f f_{nL}^*(x) - \varepsilon_f t^*(x) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\|_2 + (\Delta_o)^{\frac{1}{2}} \} \quad (3.133)$$

que é uma majoração para a solução $\xi^*(x)$ da inequação variacional (3.101).

Ainda há que se resolver o problema da majoração da função que minimiza o funcional J_a^1 do problema **Pa2**, fato que foi admitido na determinação da majoração da função $\xi^*(x)$, solução da inequação variacional (3.101). Para tanto será considerado o problema equivalente, estabelecido com base no Teorema 4 do Apêndice B e formulado no Capítulo 2, expressão (2.163). A seguir é transcrita a formulação do problema **Pa2** em termos de inequações variacionais, conforme o Capítulo 2.

Achar $(\xi^*, \nu^*) \in \mathcal{V}_a^1 \times \mathcal{V}_a^2$ se existir, tal que:

$$\delta J_1^1[\nu^*; \nu^* - \nu] + J_2^1(\nu^*) \leq J_2^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.134)$$

$$\langle A\xi^*, \xi^* - \xi \rangle + j(\xi^*) \leq j(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.135)$$

Para a determinação da majoração desejada, tendo em vista que a função ν em (3.134) é arbitrária, pode ser tomada uma qualquer função de \mathcal{V}_a^1 . A função mais simples que satisfaz as condições para pertencer a \mathcal{V}_a^1 é:

$$\nu(x) = -u_L^*(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (3.136)$$

Como a derivada de Gâteaux de J_1^1 , calculada em ν^* , $\nu^* - \nu$ é dada por:

$$\delta J_1^1[\nu^*; \nu^* - \nu] = \int_0^p \left[\left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 - \frac{d\nu^*}{dx} \frac{d\nu}{dx} \right] dx \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.137)$$

a inequação variacional (3.134) fica:

$$\int_0^p \left[\left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 - \frac{d\nu^*}{dx} \frac{d\nu}{dx} \right] dx + J_2^1(\nu^*) \leq J_2^1(\nu), \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1. \quad (3.138)$$

Usando a desigualdade fundamental:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left[\left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 \right] dx \geq \int_0^p \frac{d\nu}{dx} \frac{d\nu^*}{dx} dx \quad (3.139)$$

em (3.140), tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 dx + J_2^1(\nu^*) \leq J_2^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (3.140)$$

ou ainda, explicitando o funcional J_2^1 de (2.162) e usando a particular função definida em (3.136) obtem-se, como em (3.50) que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| (|u_L^* + \nu^*|) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^p \left(-\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| |u_L^* - u_L^*| dx. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Usando a desigualdade triangular para o valor absoluto de funções a valores reais e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx} \right)^2 dx - \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|\nu^*\|_2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^p \left(-\frac{du_L^*}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|u_L^*\|_2. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Novamente surge uma situação onde a desigualdade de Poincaré-Friedrichs (desigualdade (B.22) do Apêndice B) pode ser aplicada para substituir o quadrado da derivada de ν^* por duas parcelas: uma delas sendo uma fração do quadrado da derivada e a outra, uma parcela do quadrado da própria função ν^* dada pela aludida desigualdade, fornecendo para $(p + 2\eta)^2 > 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{(p + 2\eta)^2 - 1}{2(p + 2\eta)^4} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx}\right)^2 dx + \frac{\pi^2}{2(p + 2\eta)^4} \int_0^p (\nu^*)^2 dx - \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|\nu^*\|_2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|\nu^*\|_2 + \frac{c_2}{2} \frac{\pi^2}{(p + 2\eta)^4} \end{aligned} \quad (3.143)$$

onde a constante c_2 e o parâmetro η que comparecem em (3.143) foram importados diretamente da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, Lema 13 do Apêndice B, identificando apenas que: $a = 0$ e $b = p$.

Esta desigualdade impõe que se estabeleça uma majoração independente para $\nu^*(p)$. Não é difícil extrair de (3.39), (3.57) e de (3.58), sob as hipóteses estabelecidas sobre a função $f_a(x)$ que uma majoração para $|\nu^*(p)|$ é dada por:

$$|\nu^*(p)| \leq \frac{|pT_L^*|}{\delta_f} + \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \|\xi^s\|_2 + \frac{\beta_f p}{\delta_f} |F_a^*(0)| \quad (3.144)$$

Incorporando esta desigualdade em (3.143) e considerando que $\|\nu^*\|_2 \leq \|u^*\|_{H^1(\Omega)}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{(p + 2\eta)^2 - 1}{2(p + 2\eta)^4} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx}\right)^2 dx + \frac{\pi^2}{2(p + 2\eta)^4} \int_0^p (\nu^*)^2 dx - \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|\nu^*\|_2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|u^*\|_{H^1(\Omega)} + \frac{c_2}{2} \frac{\pi^2}{(p + 2\eta)^4} (\nu^*(p))^2. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Considerando ainda que $\|\nu^*\|_2 \leq \|u^*\|_{H^1(\Omega)}$, definindo o número positivo m_1 , como:

$$m_1 = \min\left\{\frac{(p + 2\eta)^2 - 1}{2(p + 2\eta)^4}, \frac{\pi^2}{2(p + 2\eta)^4}\right\} \quad (3.146)$$

a desigualdade (3.145) se converte em:

$$\begin{aligned} & m_1 \|u^*\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|u^*\|_{H^1(\Omega)} \\ & - \frac{1}{2} \|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|u_L^*\|_{H^1(\Omega)} + \frac{c_2}{2} \frac{\pi^2}{(p + 2\eta)^4} (\nu^*(p))^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.147)$$

que, como no caso anteriormente estudado constitui uma inequação do segundo grau em $\|\nu^*\|_{H^1}$ e o discriminante Δ_1 da equação correspondente é positivo. Neste caso, considerando que a norma é não negativa vale a majoração:

$$\|\nu^*\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2m_1} \left\{ \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 + \sqrt{\Delta_1} \right\} \quad (3.148)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \left(\frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \right)^2 + 2m_1 \left[\|u_L^*\|_{H^1(\Omega)}^2 + \right. \\ & \left. 2 \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \|f_{nL}^*\|_2 \|u_L^*\|_{H^1(\Omega)} + \frac{c_2}{2} \frac{\pi^2}{(p+2\eta)^4} (\nu^*(p))^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.149)$$

A expressão (3.148) fornece uma majoração para a função ν^* que só depende dos dados de entrada do problema **Pa2**, que é o que se procurava. Além disso, fica também resolvida a majoração da função ξ^* que foi estabelecida a menos da dependência da função t^* . Mas se ν^* é limitada, é também limitada a função t^* , o que completa as majorações procuradas.

3.5 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO A SER USADO EM Pa2

Os resultados desta seção estão baseados nas seções 2 e 3 do Capítulo 1 de [9].

Parte-se do fato de que o operador A é não simétrico e fortemente monótono, ou seja, vale a desigualdade:

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle & \geq m_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ m_2 & > 0 \text{ e } \forall u \in \mathcal{V}_a^2 \end{aligned} \quad (3.150)$$

o Lema 9 afirma que o operador A é estritamente monótono e coercivo. No Apêndice A ele é reenunciado e demonstrado. Demonstra-se que, de fato, o operador A é fortemente monótono.

A idéia para a obtenção de uma aproximação da solução da inequação variacional:

$$\langle A\xi^*, \xi^* - \xi \rangle + j(\xi^*) \leq j(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.151)$$

é admitir que seja conhecida uma forma simétrica, bilinear e contínua $b(u, v)$ em \mathcal{V}_a^2 , tal que:

$$b(u, u) \geq m_3 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad m_3 > 0 \text{ e } \forall u \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.152)$$

e para a qual o problema de achar $\omega^* \in \mathcal{V}_a^2$ de:

$$b(\omega^*, v - \omega^*) + j(v) \geq j(\omega^*) \quad \forall v \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.153)$$

constitui um problema numérico mais fácil. Uma vez que a forma $b(u, v)$ é fortemente monótona, o problema agora enunciado admite solução única. O que é garantido pelo Teorema 5 do Apêndice B.

No presente caso pode-se exibir uma forma simétrica contínua e bilinear que atende o requisito exigido. Esta forma bilinear pode ser obtida a partir do operador A , pela expressão:

$$b(u, v) = \frac{1}{2} [\langle Au, v \rangle + \langle Av, u \rangle] \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.154)$$

Não é difícil demonstrar que uma tal forma é simétrica contínua e bilinear. A partir da expressão de definição do operador A , obtém-se explicitamente que:

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \frac{1}{2} [\langle Au, v \rangle + \langle Av, u \rangle] \\ &= \beta_f \epsilon_f \left\{ \int_0^p (-F_a^*(x)) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^p \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} uv dx + \right. \\ &\quad \left. \alpha_f \int_0^p \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right\} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Agora, do problema formulado em (3.153), decorre o seguinte: **para u dado em \mathcal{V}_a^2 e para $\rho > 0$ fixado mas arbitrário por enquanto, existe um único $\omega \in \mathcal{V}_a^2$, tal que:**

$$b(\omega, v - \omega) \geq b(u, v - \omega) - \rho [\langle Au, v - \omega \rangle + j(v) - j(\omega)] \quad \forall v \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.156)$$

A expressão (3.156) fornece uma "regra" que: dado $u \in \mathcal{V}_a^2$, permite obter um único $\omega \in \mathcal{V}_a^2$, ou seja, fornece uma aplicação que a cada u fica associado um

$$\omega = \mathcal{S}(u) \text{ de } \mathcal{V}_a^2 \rightarrow \mathcal{V}_a^2 \quad (3.157)$$

Não é difícil concluir que resolver o problema dado pela expressão (3.151) é equivalente a achar um **ponto fixo** de (3.157), isto é, achar $u = \mathcal{S}(u)$. Agora é apresentado um procedimento para determinar o parâmetro ρ de maneira que, para todo par $u_1, u_2 \in \mathcal{V}_a^2$, tenha-se:

$$\|\mathcal{S}(u_1) - \mathcal{S}(u_2)\| \leq \delta \|u_1 - u_2\|, \quad 0 < \delta < 1. \quad (3.158)$$

Admitindo a veracidade de (3.158) pode-se concluir que:

- a existência e unicidade da solução ξ^* de (3.151);
- a possibilidade de usar o método das aproximações sucessivas para se determinar uma aproximação de ξ^* , partindo de um $\xi^0 \in \mathcal{V}_a^2$ e construindo $\xi^{n+1} \in \mathcal{V}_a^2$, como a solução em \mathcal{V}_a^2 de:

$$b(\xi^{n+1}, \xi - \xi^{n+1}) \geq b(\xi^n, \xi - \xi^{n+1}) - \rho [\langle A\xi^n, \xi - \xi^{n+1} \rangle + j(\xi) - j(\xi^{n+1})] \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (3.159)$$

e assim gerar uma seqüência $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para ξ^* em \mathcal{V}_a^2 ; tudo isso tendo admitido (3.158) como verdadeiro. Falta verificar este fato, o que será feito a seguir.

Uma vez que $b(u, v)$ é simétrico e fortemente monótono, pode-se tomar a expressão (3.154) como a definição de um **novo produto interno** em \mathcal{V}_a^2 e tomar

$$\|v\| = (b(v, v))^{\frac{1}{2}} \quad (3.160)$$

como uma norma. Tendo em vista a expressão (3.156) e fazendo, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_1, \quad \omega_1 = \mathcal{S}(u_1) \text{ e } v = \omega_2 \\ u = u_2, \quad \omega_2 = \mathcal{S}(u_2) \text{ e } v = \omega_1 \end{array} \right\} \quad (3.161)$$

obtem-se, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\omega_1, \omega_2 - \omega_1) \geq b(u_1, \omega_2 - \omega_1) - \rho [\langle Au_1, \omega_2 - \omega_1 \rangle + j(\omega_2) - j(\omega_1)] \\ b(\omega_2, \omega_1 - \omega_2) \geq b(u_2, \omega_1 - \omega_2) - \rho [\langle Au_2, \omega_1 - \omega_2 \rangle + j(\omega_1) - j(\omega_2)] \end{array} \right\} \quad (3.162)$$

Somando-se membro a membro as desigualdades de (3.162) e usando a nova norma introduzida por (3.160), resulta:

$$- \|\omega_1 - \omega_2\|^2 \geq -b(u_1 - u_2, \omega_1 - \omega_2) + \rho \langle Au_1 - Au_2, \omega_1 - \omega_2 \rangle. \quad (3.163)$$

Tomando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_2 = \varphi \\ \omega_1 - \omega_2 = \psi \\ b(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle_{V_2^2} \end{array} \right\} \quad (3.164)$$

e fazendo as substituições em (3.163), obtem-se:

$$\|\psi\|^2 \leq \langle \varphi, \psi \rangle_{V_2^2} - \rho \langle A\varphi, \psi \rangle_{V_2^2} \quad (3.165)$$

que permite escrever:

$$\|\psi\|^2 \leq \langle (I - \rho A)\varphi, \psi \rangle \quad (3.166)$$

ou ainda

$$\|\psi\|^2 \leq \|(I - \rho A)\varphi\| \|\psi\|. \quad (3.167)$$

Levando em conta que:

$$\begin{aligned} \|(I - \rho A)\varphi\|^2 &= \|\varphi\|^2 + \rho^2 \|A\varphi\|^2 - 2\rho \langle A\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq (1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2m_2\rho) \|\varphi\|^2 \end{aligned} \quad (3.168)$$

e usando (3.168) em (3.167), vem:

$$\|\psi\| \leq (1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2m_2\rho)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|. \quad (3.169)$$

Desde que o operador A é fortemente monótono, ou seja, $m_2 > 0$, pode-se escolher valor para o parâmetro ρ , tal que:

$$(1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2m_2\rho)^{\frac{1}{2}} < 1 \quad (3.170)$$

o que garante que a desigualdade (3.158) seja verificada. Em decorrência, a seqüência gerada converge para o ponto fixo procurado.

3.6 APRECIACÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados relativos ao problema da primeira etapa da operação de assentamento de oleodutos, chamada de operação elementar de lançamento, correspondente ao problema **PL1** na forma diferencial ou ao problema **PL2** na forma de inequação variacional, apesar de importantes, provocam pouco impacto, uma vez que eles podem ser obtidos sem lançar mão das técnicas envolvendo o conceito de inequação variacional. Os resultados relativos ao problema da segunda etapa da operação de assentamento, chamada de operação elementar de abandono, correspondente ao problema **Pa1** na forma diferencial ou ao problema **Pa2** na forma de inequação variacional, além de importantes, não é conhecida pelo candidato qualquer outra alternativa que permita obtê-los, tornando-os, pelo menos na avaliação do candidato, singulares.

A importância que estes resultados representam se encontra não apenas no significado específico de se poder falar, sob determinadas condições, na configuração de equilíbrio da linha elástica de um oleoduto, mas principalmente no fato de se esclarecer que a aplicação das técnicas de inequações variacionais a estas classes de problemas tem boas possibilidades de sucesso. Uma vez que este ponto esteja esclarecido, pode-se imaginar uma série de outras situações semelhantes onde a aplicação destas técnicas pode tornar mais fácil a obtenção de solução de problemas de contato unilateral, envolvendo ou não apoios elásticos, com ou sem atrito.

De maneira sintética os principais resultados obtidos e a singularidade de cada um deles são exibidos a seguir:

▷ foi estabelecida uma "equivalência" entre o problema de lançamento na forma diferencial **PL1** e o problema de lançamento na forma variacional, mais ainda, na forma de inequação variacional **PL2**. Em termos de engenharia, a singularidade do estabelecimento dessa "equivalência" está no último passo, o que estabelece a equivalência entre a formulação variacional e a inequação variacional com base no Teorema 4 do Apêndice B;

▷ foram provadas a existência e a unicidade da solução do problema **PL2** e por decorrência se esta solução tiver os atributos adequados ela é também solução do problema **PL1**. Em termos de engenharia, esse resultado é relevante porque ao se projetar um algoritmo de busca para determinar o mínimo do funcional $J_L^2(y_L)$ há certeza de que se busca um elemento y_L^* que, de fato, existe. Este fato, apesar de parecer trivial pode ser fonte de muitos contratempos na busca de uma solução numérica de um modelo matemático.

▷ obedecidas algumas condições denominadas de subsidiárias, foram demonstradas a existência e a unicidade da solução do problema de abandono **Pa2**. Apesar das concessões, este resultado é, ele próprio singular, porque apesar de se tratar de um caso particular, ele é representante de uma família de problemas envolvendo inequações variacionais, que por si só já constitui uma novidade em termos de engenharia tão ou mais relevante do que o caso do problema de lançamento, uma vez que as complexidades, oriundas do atrito e que ocorrem neste caso, são muito maiores.

▷ a existência e a unicidade da solução do problema **Pa2** permitem estabelecer uma "equivalência" entre o problema de abandono na forma diferencial e o problema de abandono na forma de inequações variacionais, isto porque foi provado que se o problema de abandono na forma diferencial, problema **Pa1**, tiver solução, essa solução é também solução do problema de abandono na forma de inequações variacionais. Como foi provado que o problema **Pa2** tem solução única, se ela possuir os atributos adequados ela, necessariamente, é a solução do problema **Pa1**. Em termos de engenharia, estes resultados são considerados incomuns e mesmo no universo das aplicações conhecidas, realizadas por matemáticos, não constam os resultados aqui obtidos. Isto lhes dá alguma relevância, mesmo em termos de Matemática Aplicada.

3.6.1 Aspectos Físicos não Discutidos

A preocupação principal do candidato ao desenvolver esta tese foi, de posse de um modelo matemático aceitável do problema em estudo, explorar com certa profundidade as técnicas de inequações variacionais. Daí a importância de abordar o problema relativo à segunda etapa da operação de assentamento, pois é nesta etapa que as maiores dificuldades se manifestaram e foram das superações delas que vieram os maiores alentos.

Não há dúvida que aspectos importantes do problema foram tratados superficialmente. Alguns deles estão relacionados às interpretações físicas associadas às próprias formulações, como por exemplo atribuir significado físico às diversas parcelas dos funcionais definidos, ou mesmo às parcelas das expressões que constituem as inequações variacionais. Em geral, não há maiores dificuldades em associar a estas parcelas um significado de energia ou de trabalho mecânico realizado. Como o problema estudado é estático, as energias envolvidas estão associadas a fenômenos de deformação da estrutura, do solo e de trabalhos realizados pelas forças presentes.

Outros aspectos que não foram abordados com suficiente detalhamento têm a ver, por exemplo, com o significado físico da maioria das hipóteses adotadas. Só para exempli-

ficar, é apresentada uma interpretação física associada à hipótese subsidiária contida na demonstração da Proposição 4. Esta hipótese estabelece que a função densidade linear de atrito $f_a(x)$, que comparece na formulação do problema Pa2 é não negativa. O significado físico que acompanha esta hipótese é que os trechos de oleoduto mais próximos da extremidade que sofre atenuação da força de tração estão sujeitos à força de atrito. As seções do oleoduto que vão sendo sucessivamente aliviadas, a partir da extremidade de aplicação da força de lançamento, tendem a escorregar no sentido contrário àquele do eixo das abscissas, portanto o atrito que vai sendo mobilizado em cada seção atua no sentido deste eixo, conseqüentemente, a densidade f_a deve ser positiva em cada seção. A partir da seção em que a força de tração é atenuada e na medida em que o atrito vai sendo mobilizado, há uma tendência de se mobilizar menos força de atrito (monotonicidade da força $F_a^*(x)$), até o ponto em que a força de atrito mobilizada iguala a força de tração aplicada no início da operação de abandono. Como os pontos de aplicação destas forças tendem a se deslocar, trabalhos elementares estão sendo realizados em trechos elementares do oleoduto.

Muito mais explicações poderiam ser dadas a respeito da física do problema. Por não ter sido esta a tônica da tese pouco se falou sobre estas interpretações, mas considera-se que elas tornariam a tese muito extensa se o candidato se propusesse a detalhá-las e aprofundá-las.

CAPÍTULO 4

DISCRETIZAÇÃO DO PL2 E DO Pa2 EM ELEMENTOS FINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

Como mostra o problema **PL2**, expressões (2.112) a (2.113), as grandezas associadas ao comportamento estrutural longitudinal do oleoduto aparecem na expressão (2.112) e as grandezas associadas ao comportamento estrutural transversal aparecem na expressão (2.113). Estas expressões se "acoplam" de forma muito especial, o que na prática significa um desacoplamento, pois os termos de acoplamento são da ordem ε_f^2 . Como decorrência desse fato a solução numérica do problema **PL2** fica bastante simplificada, visto que dada a tensão adimensional de lançamento $T_L^*(p)$, os deslocamentos longitudinais da configuração de equilíbrio dependem linearmente da distância à origem, como se pode ver da expressão (2.112). Considerando nesta expressão que o fator $1/\delta_f$ é da ordem de grandeza de ε_f^2 e considerando também o requisito, pressuposto como indispensável, que é o efeito do atrito nas diferentes configurações de equilíbrio, como já observado, resulta:

$$\forall x \in \Omega \quad u_L^*(x) = \frac{T_L^*}{\delta_f} x \quad (4.1)$$

Neste caso o problema da discretização restringe-se à discretização em elementos finitos da estrutura, tendo em vista a minimização do funcional fornecido pela expressão (2.113), reescrita a seguir.

$$\begin{aligned} J_L^2(y_L) = & \varepsilon_f \frac{T_L^*(p)}{2} \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx}(x) \right)^2 dx + \varepsilon_f \frac{k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2}(x) \right)^2 dx \\ & - \beta_f \int_0^p (\gamma_0(x) - w_0(x)) y_L(x) dx + \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (V_+)^2(x) dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Discretizar o problema **PL2** em elementos finitos vai significar fixar um subespaço vetorial V_{2N+2} do espaço $H_2^2(\Omega)$ de dimensão $2N + 2$, em que N é o número de elementos em que será subdividida a estrutura, e achar $v_L^* \in V_{2N+2}$, tal que:

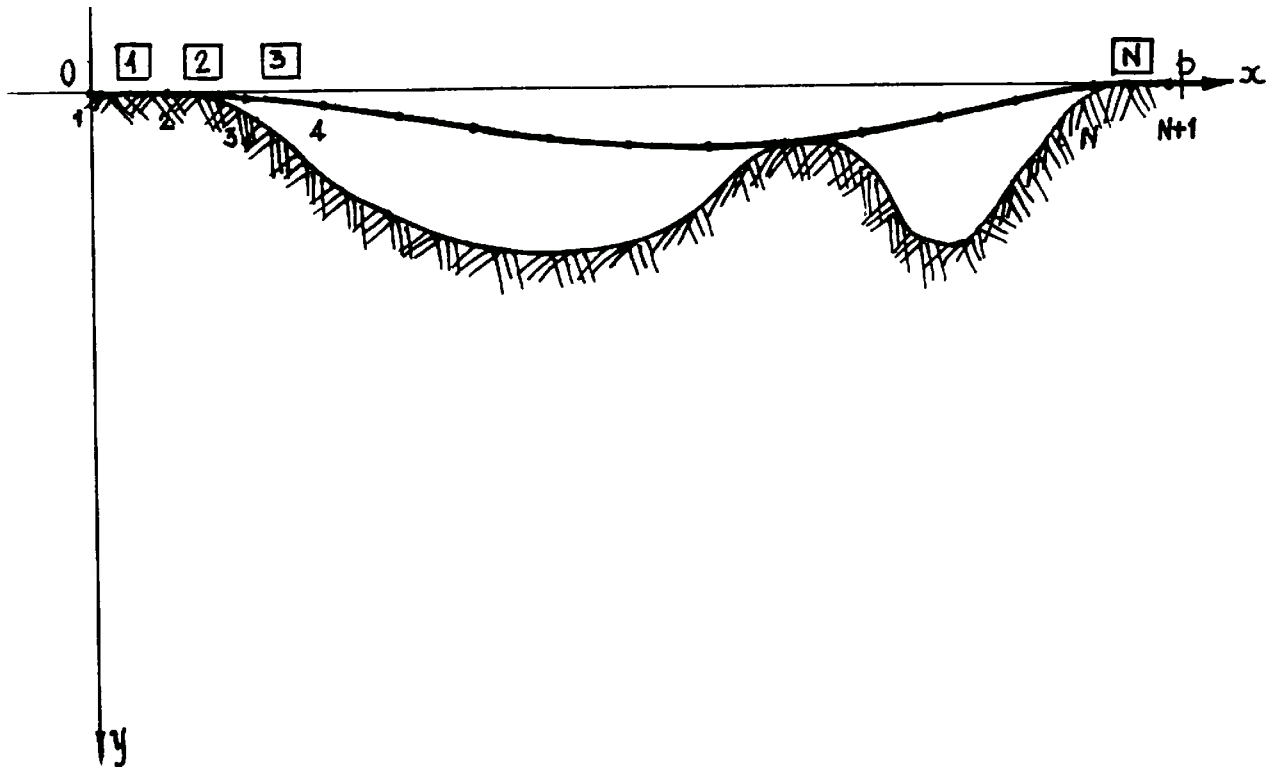


Figura 4.1: Discretização do oleoduto em N elementos finitos.

$$J_L^2(v_L^*) = \inf_{y_L \in \mathcal{U}_L^2} J_L^2(y_L) \quad (4.3)$$

É importante lembrar que o problema de minimizar J_L^2 , pelo Teorema 4 do Apêndice B, é equivalente ao problema de inequação variacional (3.14). Isto significa dizer que para se obter uma aproximação numérica para o problema **PL2**, tanto pode ser resolvido, numericamente, o problema de minimização do funcional J_L^2 , quanto a equivalente inequação variacional. No caso apresenta-se uma aproximação via minimização do funcional.

4.2 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA PL2

Como o subespaço V_{2N+2} tem dimensão finita, a primeira coisa a fazer é escolher uma base conveniente ou construí-la, é isto que vai ser feito. O número de elementos desta base é precisamente $2N + 2$. É suposta uma distribuição uniforme de nós ao longo da estrutura (oleoduto), ver Figura 4.1. Segue-se que o comprimento adimensional de elemento do oleoduto é:

$$\Delta = \frac{p}{N} \quad (4.4)$$

CAPÍTULO 4. DISCRETIZAÇÃO DO PL2 E DO PA2 EM ELEMENTOS FINITOS3

Sejam:

$$\sigma_j = (j - 1)\Delta \quad 1 \leq j \leq N + 1 \quad (4.5)$$

a abscissa do j -ésimo nó e $e_i \in V_{2N+2}$, $1 \leq i \leq 2N + 2$, a i -ésima função da base de V_{2N+2} .

O propósito imediato é construir as funções e_i , $1 \leq i \leq 2N + 2$. Para se chegar a estas funções definidas ao longo de toda a estrutura, ou seja no intervalo $[0, p]$ constrói-se, inicialmente, um conjunto de funções, cada uma delas associada a um elemento da estrutura. A seguir, por um processo de "colagem" as funções e_i são definidas a partir daquelas definidas nos elementos. Considere-se, portanto, os conjuntos $\mathcal{P}_3[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N$, de polinômios cujos graus sejam menores ou iguais a 3, definidos para cada intervalo $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N$. Para cada elemento j cujos nós são j e $j + 1$ pode-se associar um polinômio Z_j , definido em $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N$, a valores reais, i. e.:

$$Z_j(x) = r_{2j-1}z_{j1}(x) + r_{2j}z_{j2}(x) + r_{2j+1}z_{j3}(x) + r_{2j+2}z_{j4}(x) \quad x \in [\sigma_j, \sigma_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.6)$$

onde $\{z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}, z_{j4}\}$ são polinômios do conjunto $\mathcal{P}_3[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N$, assim definidos:

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} z_{j1}(\sigma_j) = 1 \\ z'_{j1}(\sigma_j) = 0 \\ z_{j1}(\sigma_{j+1}) = 0 \\ z'_{j1}(\sigma_{j+1}) = 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{j3}(\sigma_j) = 0 \\ z'_{j3}(\sigma_j) = 0 \\ z_{j3}(\sigma_{j+1}) = 1 \\ z'_{j3}(\sigma_{j+1}) = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} z_{j2}(\sigma_j) = 0 \\ z'_{j2}(\sigma_j) = 1 \\ z_{j2}(\sigma_{j+1}) = 0 \\ z'_{j2}(\sigma_{j+1}) = 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{j4}(\sigma_j) = 0 \\ z'_{j4}(\sigma_j) = 0 \\ z_{j4}(\sigma_{j+1}) = 0 \\ z'_{j4}(\sigma_{j+1}) = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad (4.7)$$

Decorre trivialmente das condições (4.7) que:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{2j-1} - \text{deslocamento do nó } j \\ r_{2j} - \text{rotação do nó } j \\ r_{2j+1} - \text{deslocamento do nó } j + 1 \\ r_{2j+2} - \text{rotação do nó } j + 1 \end{array} \right\} \quad 1 \leq j \leq N$$

Até este ponto foi construída uma seqüência de funções polinomiais $Z_j(x)$, $1 \leq j \leq N$, $x \in [\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, ver Figura 4.2. É bom que se esclareça o porquê do grau 3 para os polinômios da base. Esta escolha resulta do fato de que as funções do subespaço \mathcal{V}_L^2 de $H_2^2(\Omega)$ que comparecem no funcional J_L^2 devem ter, pelo menos, derivada primeira contínua. Para garantir a continuidade das funções polinomiais e de suas derivadas primeiras são necessários, pelo menos, quatro coeficientes, de onde decorre o grau 3.

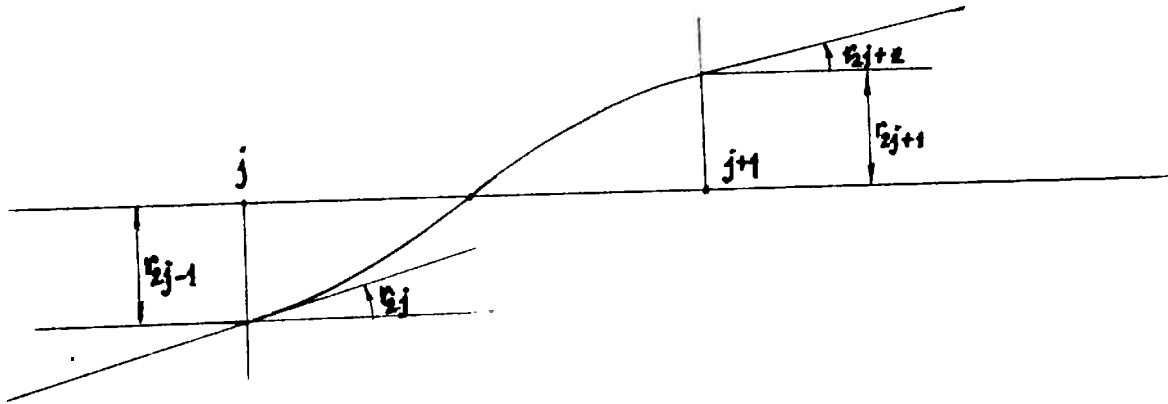


Figura 4.2: Deslocamentos e rotações no elemento

Com vistas a uma maior simplicidade nos procedimentos computacionais sobre o funcional $J_L^2(y_L)$ é feita uma mudança de escala, através da mudança de variáveis:

$$\iota_j = \frac{x_j}{\Delta} - (j - 1), \quad 1 \leq j \leq N \quad x_j \in [\sigma_j, \sigma_{j+1}] \quad (4.8)$$

Com esta mudança de variáveis resulta que $\iota_j \in [0, 1]$, $\forall j$, $1 \leq j \leq N$; este fato autoriza a eliminação do índice j da variável ι . Por razões de clareza o índice será mantido. Como consequência da mudança de variáveis os coeficientes $\{r_{2j-1}, r_{2j}, r_{2j+1}, r_{2j+2}, 1 \leq j \leq N\}$, serão redefinidos, obtendo-se os polinômios $\{h_{ji}(\iota_j), 1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq 4\}$, definidos no intervalo $[0, 1]$ e as funções:

$$Z_j(\iota_j) = y_{2j-1}h_{j1}(\iota_j) + y_{2j}h_{j2}(\iota_j) + y_{2j+1}h_{j3}(\iota_j) + y_{2j+2}h_{j4}(\iota_j) \quad (4.9)$$

$$\iota_j \in [0, 1], \quad 1 \leq j \leq N$$

De maneira análoga as relações (4.7) se convertem em:

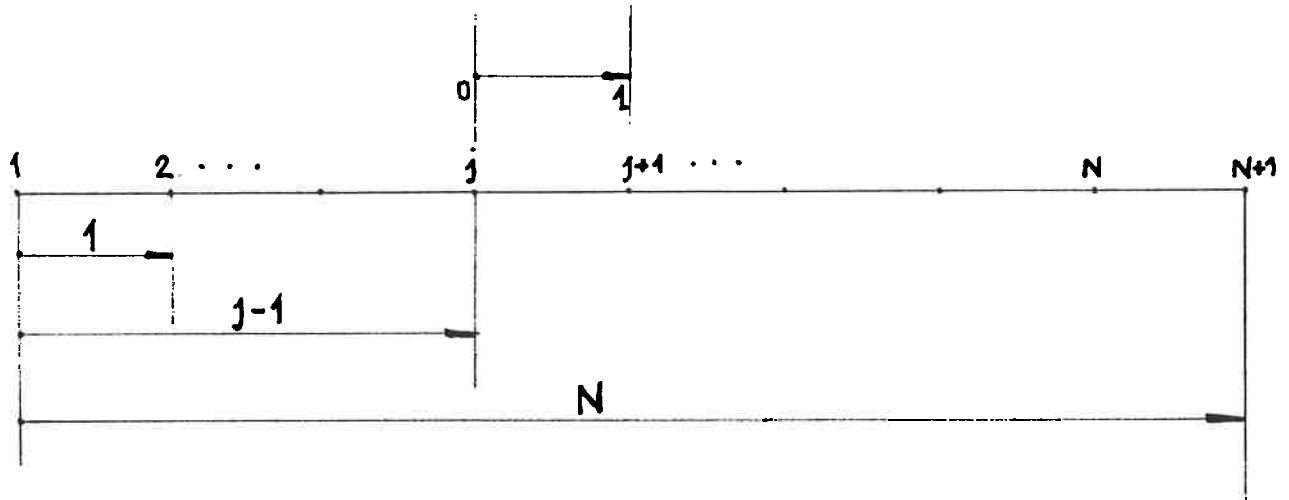


Figura 4.3: Abscissas globais e locais para cada nó j .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_{j1}(0) = 1 \\ h'_{j1}(0) = 0 \\ h_{j1}(1) = 0 \\ h'_{j1}(1) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} h_{j2}(0) = 0 \\ h'_{j2}(0) = 1 \\ h_{j2}(1) = 0 \\ h'_{j2}(1) = 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} h_{j3}(0) = 0 \\ h'_{j3}(0) = 0 \\ h_{j3}(1) = 1 \\ h'_{j3}(1) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} h_{j4}(0) = 0 \\ h'_{j4}(0) = 0 \\ h_{j4}(1) = 0 \\ h'_{j4}(1) = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

O que, de fato, representa a mudança de variáveis (4.8) é a definição de um sistema de coordenadas locais, para cada elemento da estrutura, ver Figura 4.3. Através das relações (4.10) obtém-se, para cada elemento j , $1 \leq j \leq N$, os polinômios:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{j1}(\lambda_j) = (\lambda_j - 1)^2(2\lambda_j + 1) \\ h_{j2}(\lambda_j) = \lambda_j(\lambda_j - 1)^2 \\ h_{j3}(\lambda_j) = \lambda_j^2(3 - 2\lambda_j) \\ h_{j4}(\lambda_j) = \lambda_j^2(\lambda_j - 1) \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

com $\lambda_j \in [0, 1]$, para cada elemento do oleoduto. Dado que estes polinômios são idênticos para todo j , $1 \leq j \leq N$, pois $\lambda_j \in [0, 1]$, diz-se que são polinômios **invariantes** dos elementos.

Neste ponto já há condição para exibir uma base para o subespaço V_{2N+2} . Para exibir esta base deve-se apresentar $2N + 2$ funções contínuas, com derivadas primeiras

também contínuas e derivadas segundo quadrado integráveis, em todo o intervalo $[0, N]$, ver Figura 4.3. Além disso essas funções devem ser linearmente independentes. Sejam então:

$$\nu = \frac{x}{\Delta}, \quad x \in [0, p] \implies \nu \in [0, N] \quad (4.12)$$

$$e_1 = \begin{cases} h_{11}(\nu) & \nu \in [0, 1] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [0, 1] \end{cases} \quad (4.13)$$

$$e_2 = \begin{cases} h_{12}(\nu) & \nu \in [0, 1] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [0, 1] \end{cases} \quad (4.14)$$

$$e_3 = \begin{cases} h_{13}(\nu) & \nu \in [0, 1] \\ h_{21}(\nu - 1) & \nu \in [1, 2] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [0, 2] \end{cases} \quad (4.15)$$

$$e_4 = \begin{cases} h_{14}(\nu) & \nu \in [0, 1] \\ h_{22}(\nu - 1) & \nu \in [1, 2] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [0, 2] \end{cases} \quad (4.16)$$

$$e_5 = \begin{cases} h_{23}(\nu) & \nu \in [1, 2] \\ h_{31}(\nu - 1) & \nu \in [2, 3] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [1, 3] \end{cases} \quad (4.17)$$

$$e_6 = \begin{cases} h_{24}(\nu) & \nu \in [1, 2] \\ h_{32}(\nu - 1) & \nu \in [2, 3] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [1, 3] \end{cases} \quad (4.18)$$

$$e_7 = \begin{cases} h_{33}(\nu) & \nu \in [2, 3] \\ h_{41}(\nu - 1) & \nu \in [3, 4] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [2, 4] \end{cases} \quad (4.19)$$

$$e_8 = \begin{cases} h_{34}(\nu) & \nu \in [2, 3] \\ h_{42}(\nu - 1) & \nu \in [3, 4] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [2, 4] \end{cases} \quad (4.20)$$

⋮

Observar que para o N -ésimo e último elemento tem-se:

$$e_{2N+1} = \begin{cases} h_{N3}(\nu - N + 1) & \nu \in [N - 1, N] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [N - 1, N] \end{cases} \quad (4.21)$$

$$e_{2N+2} = \begin{cases} h_{N4}(\nu - N + 1) & \nu \in [N - 1, N] \\ 0 & \nu \in [0, N] \setminus [N - 1, N] \end{cases} \quad (4.22)$$

Observe-se ainda que na definição das funções e_j , $1 \leq j \leq (2N+2)$, foi usada a notação $A \setminus B = A - B$.

Não é difícil concluir, ver Figura 4.4, que a seqüência de funções $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2N+2$, é constituída de funções contínuas com derivadas primeiras contínuas e derivadas segundas quadrado integráveis; além disso, são também linearmente independentes no intervalo $[0, N]$ e, portanto, formam uma base do subespaço V_{2N+2} . Desde que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 2N+2}$ é uma base de V_{2N+2} , todo elemento deste espaço pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base.

Assim, se uma função $v \in V_{2N+2}$, então:

$$v(\nu) = \sum_{i=1}^{2N+2} \lambda_i e_i(\nu) \quad \nu \in [0, N] \quad (4.23)$$

Relembrando a expressão do funcional $J_L^2(y_L)$ de (4.2), o problema **PL2**, que na forma discreta é identificado por **PL2D**, é formulado como:

PROBLEMA PL2D

Dada a força de tração adimensional de lançamento $T(p) = T_p$ que é constante, obtenha a função deslocamento longitudinal adimensional $u(\nu)$, dada por:

$$u(\nu) = \frac{\Delta T_p}{\delta_f} \nu \quad \nu \in [0, N] \quad (4.24)$$

Conhecendo-se T_p e a função de deslocamento longitudinal u , resta:

achar $v^* \in V_{2N+2}$ tal que:

$$J_L^2(v^*) \leq J_L^2(v) \quad \forall v \in V_{2N+2} \quad (4.25)$$

onde:

$$J_L^2(v) = \frac{k_f^2}{2} \int_0^N \left[\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \frac{dv}{d\nu} \right) \right]^2 \Delta d\nu + \frac{1}{2\beta_f} \int_0^N T_p \left(\frac{dv}{dx} \frac{dv}{d\nu} \right)^2 \Delta d\nu + \int_0^N (w_0 - \gamma_0) v \Delta d\nu + \frac{k}{2} \int_0^N (V_f)^2 \Delta d\nu \quad (4.26)$$

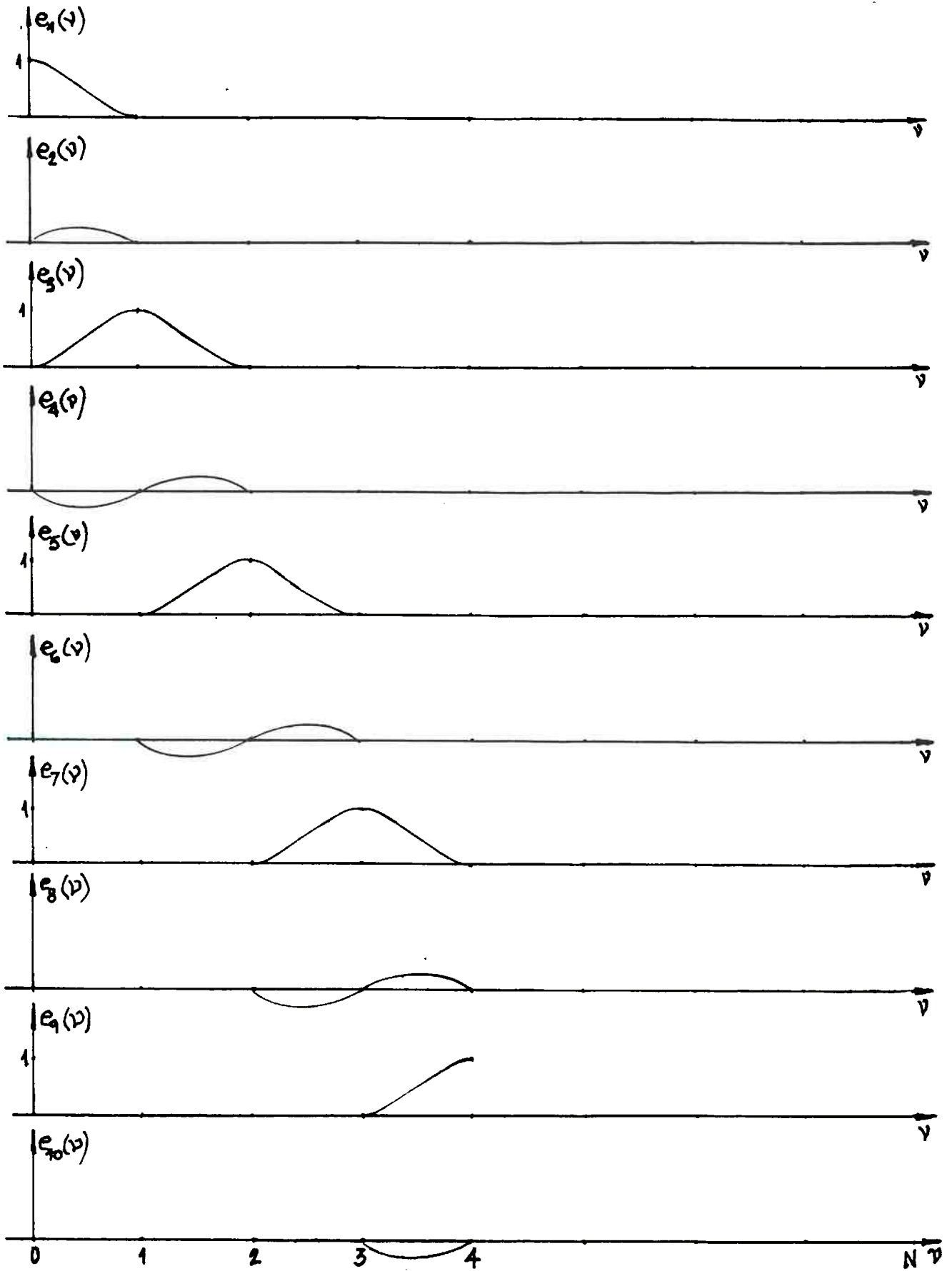


Figura 4.4: Gráficos das funções da base e_i , para $N = 4$ elementos

Para simplificar a exposição da discretização do funcional $J_L^2(v)$, ele é decomposto como a soma dos funcionais $J_1(v)$, $J_2(v)$, $J_3(v)$ e $J_4(v)$, definidos a seguir:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2} \int_0^N \left[\frac{d\nu}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\nu}{dx} \frac{d\nu}{d\nu} \right) \right]^2 \Delta d\nu \quad (4.27)$$

$$J_2(v) = \frac{1}{2\beta_f} \int_0^N T_p \left(\frac{d\nu}{dx} \frac{d\nu}{d\nu} \right)^2 \Delta d\nu \quad (4.28)$$

$$J_3(v) = \int_0^N (w_0 - \gamma_0) v \Delta d\nu \quad (4.29)$$

$$J_4(v) = \frac{k}{2} \int_0^N (V_+)^2 \Delta d\nu \quad (4.30)$$

Exibe-se agora a discretização detalhada de $J_1(v)$. As discretizações de $J_2(v)$ e $J_3(v)$ podem ser feitas de maneira análoga e não são apresentadas. A discretização de $J_4(v)$ apresenta uma particularidade especial e é tratada à parte.

Usando a expressão (4.12), decorre que:

$$\left[\frac{d\nu}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\nu}{dx} \frac{d\nu}{d\nu} \right) \right]^2 = \frac{1}{\Delta^4} \left(\frac{d^2 v}{d\nu^2} \right)^2 \quad (4.31)$$

e portanto:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \int_0^N \left(\frac{d^2 v}{d\nu^2} \right)^2 d\nu. \quad (4.32)$$

De (4.23) segue-se que:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \int_0^N \left(\sum_{i=1}^{2N+2} \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu. \quad (4.33)$$

Pelas propriedades da integral, o funcional $J_1(v)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} J_1(v) = & \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \left\{ \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{2N+2} \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu + \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^{2N+2} \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu + \dots \right. \\ & \left. + \int_{N-1}^N \left(\sum_{i=1}^{2N+2} \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Observando que em cada intervalo $[j - 1, j]$, $1 \leq j \leq N$, apenas as funções $\{e_{2j-1}, e_{2j}, e_{2j+1}, e_{2j+2}\}$ não são identicamente nulas bem como suas derivadas segundas, $J_1(v)$ é escrito como:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \left\{ \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu + \int_1^2 \left(\sum_{i=3}^6 \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu + \dots \right. \\ \left. + \int_{N-1}^N \left(\sum_{i=2N-1}^{2N+2} \lambda_i \frac{d^2 e_i}{d\nu^2} \right)^2 d\nu \right\} \quad (4.35)$$

Se é observado que $\nu_j = \nu - (j - 1)$, $\forall j, 1 \leq j \leq N$, e que os coeficientes λ_j de (4.35) podem ser identificados com os coeficientes y_j da expressão (4.9), conclui-se que:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{d^2 Z_1}{d\lambda_1^2} \right)^2 d\lambda_1 + \int_1^2 \left(\frac{d^2 Z_2}{d\lambda_2^2} \right)^2 d\lambda_2 + \dots \right. \\ \left. + \int_0^N \left(\frac{d^2 Z_N}{d\lambda_N^2} \right)^2 d\lambda_N \right\} \quad (4.36)$$

Como cada um dos λ_j , $1 \leq j \leq N$, varia no mesmo intervalo $[0, 1]$, daqui para a frente fica eliminado o índice da variável λ e escreve-se para $J_1(v)$ a expressão:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{d^2 Z_j}{d\lambda^2} \right)^2 d\lambda \quad (4.37)$$

ou ainda:

$$J_1(v) = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(y_{2j-1} \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j1} + y_{2j} \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j2} + y_{2j+1} \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j3} + y_{2j+2} \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j4} \right)^2 d\lambda \quad (4.38)$$

Agora a continuação do desenvolvimento da discretização é formal, tendo a única vantagem de facilitar o manuseio das expressões em termos computacionais. Mostra-se que a expressão (4.38) pode ser escrita sob a forma de uma soma de produtos de matrizes. Para dar continuidade aos detalhes deste formalismo são introduzidas algumas notações adicionais.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} h_{j1} &= 6\lambda(\lambda-1) = h'_{j1} \\ \frac{d}{d\lambda} h_{j2} &= (3\lambda-1)(\lambda-1) = h'_{j2} \\ \frac{d}{d\lambda} h_{j3} &= (6-6\lambda)\lambda = h'_{j3} \\ \frac{d}{d\lambda} h_{j4} &= (3\lambda-2)\lambda = h'_{j4} \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j1} &= 6(2\lambda-1) = h''_{j1} \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j2} &= 2(3\lambda-2) = h''_{j2} \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j3} &= 6(1-2\lambda) = h''_{j3} \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} h_{j4} &= 2(3\lambda-1) = h''_{j4} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

$$k_{\Delta} = \frac{k_f^2}{2\Delta^3} \quad (4.40)$$

A primeira parcela do funcional $J_1(v)$, i. e. para $j = 1$, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & k_{\Delta} \int_0^1 (y_1 h''_{11} + y_2 h''_{12} + y_3 h''_{13} + y_4 h''_{14})^2 d\lambda = \\ & = k_{\Delta}(y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} \int_0^1 h''_{11} h''_{11} & \int_0^1 h''_{11} h''_{12} & \int_0^1 h''_{11} h''_{13} & \int_0^1 h''_{11} h''_{14} \\ \int_0^1 h''_{12} h''_{11} & \int_0^1 h''_{12} h''_{12} & \int_0^1 h''_{12} h''_{13} & \int_0^1 h''_{12} h''_{14} \\ \int_0^1 h''_{13} h''_{11} & \int_0^1 h''_{13} h''_{12} & \int_0^1 h''_{13} h''_{13} & \int_0^1 h''_{13} h''_{14} \\ \int_0^1 h''_{14} h''_{11} & \int_0^1 h''_{14} h''_{12} & \int_0^1 h''_{14} h''_{13} & \int_0^1 h''_{14} h''_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

para $j = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} & k_{\Delta} \int_0^1 (y_3 h''_{21} + y_4 h''_{22} + y_5 h''_{23} + y_6 h''_{24})^2 d\lambda = \\ & = k_{\Delta}(y_3, y_4, y_5, y_6) \begin{bmatrix} \int_0^1 h''_{21} h''_{21} & \int_0^1 h''_{21} h''_{22} & \int_0^1 h''_{21} h''_{23} & \int_0^1 h''_{21} h''_{24} \\ \int_0^1 h''_{22} h''_{21} & \int_0^1 h''_{22} h''_{22} & \int_0^1 h''_{22} h''_{23} & \int_0^1 h''_{22} h''_{24} \\ \int_0^1 h''_{23} h''_{21} & \int_0^1 h''_{23} h''_{22} & \int_0^1 h''_{23} h''_{23} & \int_0^1 h''_{23} h''_{24} \\ \int_0^1 h''_{24} h''_{21} & \int_0^1 h''_{24} h''_{22} & \int_0^1 h''_{24} h''_{23} & \int_0^1 h''_{24} h''_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

⋮

para $j = N$, tem-se:

$$\begin{aligned} & k_{\Delta} \int_0^1 (y_{2N-1} h''_{N1} + y_{2N} h''_{N2} + y_{2N+1} h''_{N3} + y_{2N+2} h''_{N4})^2 d\lambda = \\ & = k_{\Delta}(y_{2N-1}, y_{2N}, y_{2N+1}, y_{2N+2}) \begin{bmatrix} \int_0^1 h''_{N1} h''_{N1} & \int_0^1 h''_{N1} h''_{N2} & \int_0^1 h''_{N1} h''_{N3} & \int_0^1 h''_{N1} h''_{N4} \\ \int_0^1 h''_{N2} h''_{N1} & \int_0^1 h''_{N2} h''_{N2} & \int_0^1 h''_{N2} h''_{N3} & \int_0^1 h''_{N2} h''_{N4} \\ \int_0^1 h''_{N3} h''_{N1} & \int_0^1 h''_{N3} h''_{N2} & \int_0^1 h''_{N3} h''_{N3} & \int_0^1 h''_{N3} h''_{N4} \\ \int_0^1 h''_{N4} h''_{N1} & \int_0^1 h''_{N4} h''_{N2} & \int_0^1 h''_{N4} h''_{N3} & \int_0^1 h''_{N4} h''_{N4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2N-1} \\ y_{2N} \\ y_{2N+1} \\ y_{2N+2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$G_j(k, i) = G_j(i, k) \quad \forall j, 1 \leq j \leq N \quad (4.53)$$

No caso específico da operação de lançamento, as matrizes G_j são todas iguais pois, além da uniformidade da discretização, a tensão de lançamento adimensional T_p é constante ao longo de todo o comprimento do oleoduto. Entretanto, no caso geral, como a tensão ao longo do oleoduto pode assumir diferentes valores, dependendo do ponto do oleoduto, as matrizes G_j podem não ser idênticas.

A discretização do funcional $J_3(v)$ é trivial e resulta:

$$J_3(v) = \Delta \mathbf{P}^t \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^t = & \left(\int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)h_{11}]d\xi, \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)h_{12}]d\xi, \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)(h_{13} + h_{21})]d\xi, \right. \\ & \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)(h_{14} + h_{22})]d\xi, \dots \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)(h_{N-1,3} + h_{N1})]d\xi, \\ & \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)(h_{N-1,4} + h_{N2})]d\xi, \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)h_{N3}]d\xi, \\ & \left. \int_0^1 [(w_0 - \gamma_0)h_{N4}]d\xi \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

A discretização de $J_4(v)$ merece atenção especial por conter, este funcional, uma não linearidade bem mais complicada que uma não linearidade quadrática como aquelas contidas em $J_1(v)$ e em $J_2(v)$. Neste caso, quando a função v é escrita como uma combinação linear dos elementos de uma base de V_{2N+2} , não se consegue separar, como um produto de matrizes, os coeficientes da combinação linear e os elementos da base. Para tratar numericamente, de modo simples, o problema, introduz-se o seguinte artifício:

- i) define-se um funcional auxiliar $\mathcal{J}_L^2(v)$ constituído pela soma de $J_1(v)$, $J_2(v)$, $J_3(v)$ e de $\mathcal{J}_4(v)$ que inicialmente é identicamente nulo;
- ii) como $\mathcal{J}_L^2(v)$ é um funcional estritamente convexo e contínuo, o seu único ponto de mínimo pode ser determinado. Seja $\mathcal{V}(l)$ este ponto;
- iii) o ponto $\mathcal{V}(l)$ determina uma $(2N + 2)$ -upla de números reais que descrevem as ordenadas e os ângulos de rotação dos $N + 1$ pontos de discretização do oleoduto, na hipótese da configuração de equilíbrio ser descrita pelo mínimo deste funcional;

iv) determinam-se os **zeros** da função polinomial $\mathfrak{D}_v(\iota)$, o que significa determinar os **zeros** de um polinômio do terceiro grau;

v) verifica-se, por inspeção, os subintervalos do intervalo $[0, 1]$ em que $\mathfrak{D}_v(\iota)$ é negativa, ver Figura 4.5. Sejam Ω_i estes subintervalos;

vi) supondo que a função polinomial $v^*(\iota)$ que minimiza o funcional $J_L^2(v)$ assuma valores negativos exatamente nestes mesmos subintervalos Ω_i , e só nestes, determina-se o funcional $J_4(v)$ modificado, que já numa forma elaborada de discretização (ver a discretização do funcional $J_1(v)$), pode ser descrito por:

$$\mathfrak{J}_4(v) = \frac{k\Delta}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^1 (y_{2j-1}h_{j1} + y_{2j}h_{j2} + y_{2j+1}h_{j3} + y_{2j+2}h_{j4}) |y_{2j-1}h_{j1} + y_{2j}h_{j2} + y_{2j+1}h_{j3} + y_{2j+2}h_{j4}| d\iota \quad (4.56)$$

vii) uma vez conhecidos os subintervalos em que a função $\mathfrak{D}_v(\iota)$ é negativa, a expressão do funcional $\mathfrak{J}_4(v)$, pode ser reescrita como:

$$\mathfrak{J}_4(v) = \frac{k\Delta}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{[0,1] \setminus \cup \Omega_i} (y_{2j-1}h_{j1} + y_{2j}h_{j2} + y_{2j+1}h_{j3} + y_{2j+2}h_{j4})^2 d\iota - \int_{\cup \Omega_i} (y_{2j-1}h_{j1} + y_{2j}h_{j2} + y_{2j+1}h_{j3} + y_{2j+2}h_{j4})^2 d\iota \right\}. \quad (4.57)$$

Definindo-se as matrizes locais $L_j(i, k)$ e fazendo as composições de maneira análoga ao que foi feito para as matrizes $H_j(i, j)$, obtem-se uma expressão para o funcional $\mathfrak{J}_4(v)$ na forma de produto de vetores e matrizes, como:

$$\mathfrak{J}_4(v) = \frac{k\Delta}{2} (y_1, y_2, \dots, y_{2N+2}) \mathbf{K}_3 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2N+2} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

em que:

$$L_j(i, k) = \int_{[0,1] \setminus \cup \Omega_i} h_{j1}h_{jk} d\iota - \int_{\cup \Omega_i} h_{j1}h_{jk} d\iota \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq N \\ 1 \leq k \leq 4 \end{array} \right\} \quad (4.59)$$

e

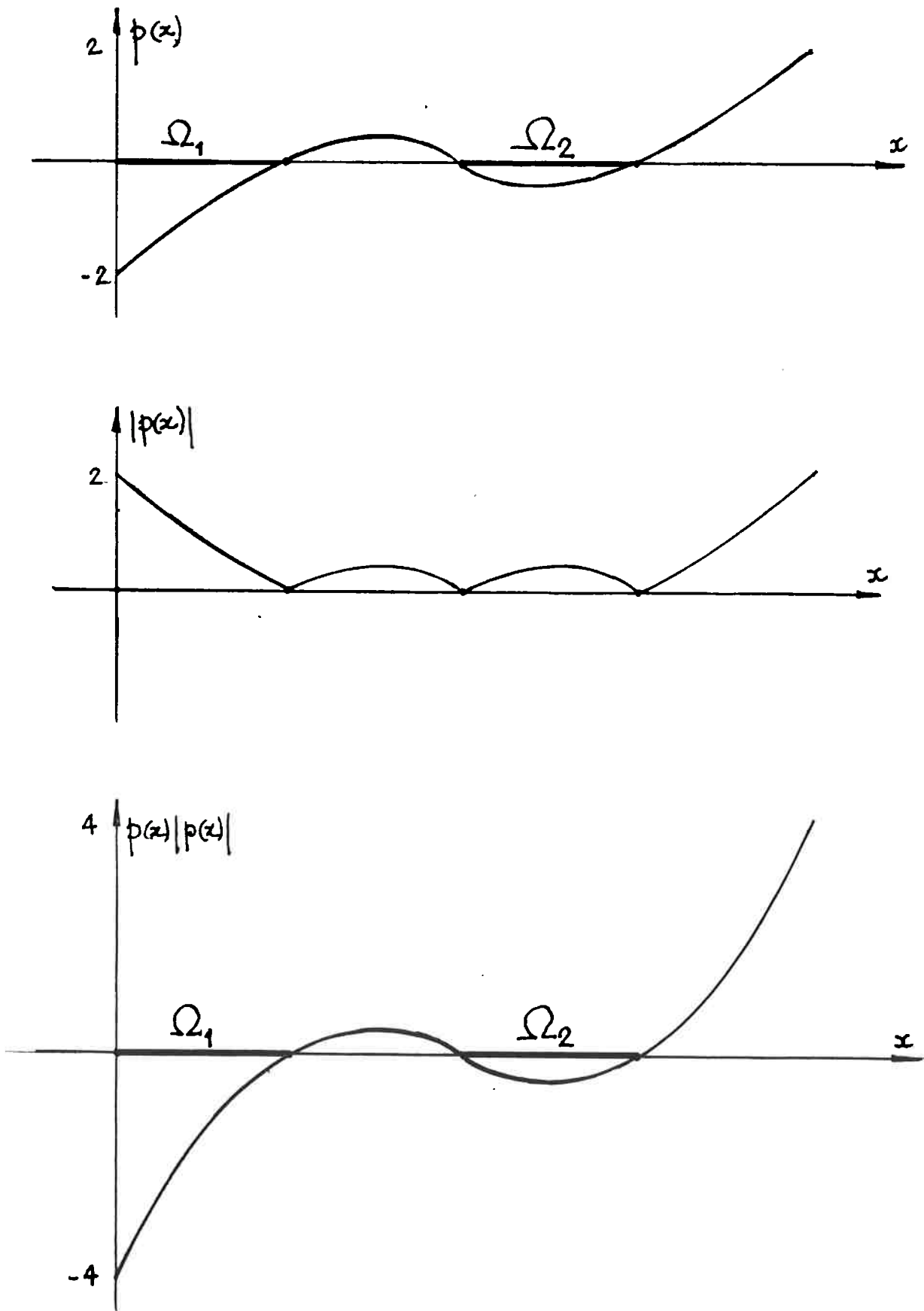


Figura 4.5: Cálculo do produto $p(x)|p(x)|$.

O problema **Pa2** é constituído de duas desigualdades, sendo a primeira associada à minimização do funcional correspondente aos deslocamentos longitudinais da linha elástica do oleoduto. A segunda está associada a uma inequação variacional que, por sua vez, corresponde aos deslocamentos verticais da linha elástica do oleoduto. Como estas duas desigualdades são desacopladas, na realidade tem-se dois problemas para serem resolvidos numericamente.

Para simplificar a apresentação, as duas partes do problema **Pa2** são tratadas independentemente. Portanto, inicialmente é feita a discretização do funcional a ser minimizado e a seguir apresenta-se a discretização da inequação variacional.

4.3.1 Discretização do Funcional do Pa2

Conforme definido pela expressão (2.155), o funcional em questão, é descrito por:

$$J_a^1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta_f \mu}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*(x)| |u_L^*(x) + \nu(x)| dx. \quad (4.63)$$

A discretização do funcional $J_a^1(\nu)$ torna-se difícil por causa da não linearidade apresentada pela função módulo que comparece na segunda integral. Para as condições práticas com que se depara, isto é, para as condições que em se dá a operação de abandono, é aceitável introduzir a seguinte hipótese de trabalho:

HIPÓTESE DE TRABALHO

para $\nu(x) = \nu^*(x)$, vale a desigualdade:

$$u_L^*(x) + \nu^*(x) \geq 0. \quad (4.64)$$

Esta desigualdade significa que quando o oleoduto contrai-se pelo alívio da força de lançamento, que é de tração, o deslocamento sofrido em cada seção do oleoduto (que, em geral, é negativo) não supera em módulo o correspondente deslocamento (neste caso positivo) sofrido pela seção por ocasião da aplicação da força de lançamento.

Sob esta hipótese a minimização do funcional $J_a^1(\nu)$ é trivial e a solução pode ser explicitada. Se é suposto que a diferencial de Gâteaux $\delta J_a^1[\nu; h]$ de J_a^1 se anula $\forall h \in H^1(\Omega)$, decorre que a função $\nu^*(x)$ que satisfaz esta condição, satisfaz também a equação diferencial:

$$\frac{d^2 \nu^*(x)}{dx^2} = \frac{\beta_f}{\delta_f} \mu |f_{nL}^*(x)| \quad (4.65)$$

A função f_{nL}^* fica determinada na operação de lançamento, mais precisamente, é calculada a partir dos valores dos deslocamentos verticais $v^*(x)$ da configuração de equilíbrio resultante da operação de lançamento. Como mostra a expressão (2.82), reproduzida a seguir na forma adimensional, a função $f_{nL}^*(x)$ é calculada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } v_n^*(x) < 0 \implies f_{nL}^*(x) = 0 \\ \text{se } v_n^*(x) \geq 0 \implies f_{nL}^*(x) + k v_n^*(x) = 0. \end{array} \right\} \quad (4.66)$$

Uma vez conhecida a função $f_{nL}^*(x)$, os deslocamentos $\nu^*(x)$ são calculados através da integração direta da equação diferencial (4.65), fazendo-se uso das condições de contorno. Assim:

$$\frac{d\nu^*(\ell)}{dx} = -\frac{T_L^*}{\delta_f} - \frac{\beta_f}{\delta_f} \mu \int_{\ell}^p |f_{nL}^*(b)| db \quad (4.67)$$

Da expressão (4.67) e da definição da função $f_a^*(x)$ que comparece na expressão do operador A , na inequação variacional (2.154), sob a **HIPÓTESE DE TRABALHO** anteriormente estabelecida decorre que:

$$f_a^*(x) = \mu |f_{nL}^*(x)|, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.68)$$

Para concluir, a determinação da função deslocamento $\nu^*(x)$ é obtida pela integração da equação diferencial (4.67), fazendo-se uso da condição de contorno pertinente, o que fornece:

$$\nu^*(x) = -\frac{T_L^*}{\delta_f} x + \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^x f_a^*(\ell) d\ell. \quad (4.69)$$

A expressão (4.69) permite calcular o deslocamento ν^* em qualquer seção do oleoduto e, portanto, a discretização do funcional J_a^1 fica resolvida pela determinação explícita da função $\nu^*(x)$, que é possível, pelo menos sob a hipótese adotada.

4.3.2 Discretização da Inequação Variacional do Pa2

Antes de discretizar a inequação variacional deve-se estabelecer uma estratégia para a solução numérica do problema discretizado. No presente caso, não foi estabelecida uma estratégia apoiada em técnicas numéricas com bases teóricas sólidas, isto porque, em primeiro lugar, o problema numérico em si, já constitui uma empreitada de vulto. Em segundo lugar o objetivo básico da tese não inclui um tratamento numérico aprofundado. Sob este prisma o que se estabeleceu, como suficiente, para apresentar alguns resultados ilustrativos foi um procedimento heurístico que permitiu avaliar quantitativamente o problema do abandono. Este procedimento é delineado no Capítulo seguinte, onde são

apresentados alguns resultados quantitativos. Nos parágrafos subseqüentes são apresentadas algumas considerações adicionais sobre o método de aproximação da solução da inequação variacional:

$$\langle A\xi^*, \xi - \xi^* \rangle + j(\xi) \geq j(\xi^*) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (4.70)$$

onde:

$$A\xi(x) = \beta_f \varepsilon_f F_a^*(x) \frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} + \varepsilon_f k_f \frac{d^4 \xi}{dx^4} \quad (4.71)$$

$$j(\xi) = \beta_f \frac{k}{2} \int_0^p (V_A(x))^2 dx + \int_0^p [\varepsilon_f t^*(x) \frac{y_L^*}{dx}(x) - \beta_f f_{nL}^*(x)] \xi(x) dx \quad (4.72)$$

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega \quad (4.73)$$

Como foi antecipado no Capítulo 3, as dificuldades que se apresentam para resolver numericamente a inequação (4.70) são devidas ao fato da não simetria da forma bilinear presente, pois caso fosse simétrica haveria um problema de minimização de funcional, equivalente à inequação variacional e os problemas numéricos relativos à minimização de funcionais já estão ampla e profundamente estudados. Isto reduziria bastante a tarefa para a obtenção de resultados numéricos. Além disso essas técnicas são matematicamente bem estabelecidas, oferecendo algoritmos robustos e bem testados. A situação real é um pouco mais complexa, não havendo procedimentos consagrados para se atacar o problema. Certamente pode ser resolvido, mas um algoritmo deve ser desenvolvido a partir do método de aproximação já introduzido e que conduz a um problema do tipo ponto fixo. As dificuldades estão na complexidade algébrica e lógica para se esquematizar o problema de ponto fixo de uma forma que: dada uma aproximação $\xi^0(x)$ da solução da inequação variacional (4.70), como obter, de maneira computacionalmente simples, uma aproximação que seja melhor que a anterior.

É evidente que não basta construir um procedimento que permita obter computacionalmente uma aproximação melhor. É preciso que se demonstre que a seqüência de aproximações geradas converge e, mais ainda, que a seqüência converge para uma função que é a solução da inequação variacional. A base de um algoritmo, como sugerido no Capítulo 3, está na expressão:

$$b(\xi^{n+1}, \xi - \xi^{n+1}) \geq b(\xi^n, \xi - \xi^{n+1}) - \rho [\langle A\xi^n, \xi - \xi^{n+1} \rangle + j(\xi) - j(\xi^{n+1})] \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (4.74)$$

conforme demonstrado, se o parâmetro ρ for escolhido convenientemente, a expressão (4.74) permite gerar uma seqüência que converge para o ponto fixo $\xi^* = \mathcal{S}(\xi^*)$, como

CAPÍTULO 4. DISCRETIZAÇÃO DO PL2 E DO PA2 EM ELEMENTOS FINITOS²¹

estabelecido na secção (3.5) do Capítulo 3. A questão é que, em termos computacionais, o espaço de funções em que se trabalha tem que ser de dimensão finita, portanto é necessário selecionar um subespaço de dimensão finita de $H^2(\Omega)$, e esse subespaço tem que ser denso em $H^2(\Omega)$. A construção desta estrutura é que envolve alguma complexidade e trabalho adicional, que dentro dos objetivos fundamentais da tese não foi considerado indispensável.

CAPÍTULO 5

ALGUNS RESULTADOS QUANTITATIVOS

5.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de ilustrar as possibilidades de aplicações práticas que os resultados qualitativos podem ensejar são apresentados alguns resultados numéricos gerados por um programa de computador codificado em FORTRAN 77. Os resultados apresentados foram gerados por uma versão preliminar do programa **AOALEM** de ANÁLISE DE OLEODUTO APOIADO NO LEITO DO MAR. Este programa foi desenvolvido tendo como base os modelos matemáticos das operações elementares executadas sobre um oleoduto. Na versão utilizada do programa **AOALEM**, os modelos das operações de **lançamento** e **abandono** são ligeiramente diferentes daqueles apresentados nos capítulos 2 e 4 da tese. As razões dessas diferenças são de duas ordens. Para a operação de lançamento, os procedimentos numéricos utilizados para minimizar o funcional descrito pela expressão (2.114) não se mostraram efetivos; houve dificuldades na convergência dos algoritmos usados para obtenção do ponto de mínimo. Para solos bastante flexíveis, ou seja, para solos cujo valor da constante de mola é artificialmente baixo, as técnicas numéricas de minimização de funcionais se mostraram efetivas, isto é, convergiam para uma função que minimizava o funcional. Para os casos de solo cuja flexibilidade correspondia a situações reais, as técnicas de minimização usadas não convergiam. A estratégia utilizada nos procedimentos numéricos foi considerar um perfil de solo infinitamente rígido, obter uma configuração de equilíbrio da linha elástica do oleoduto para este problema, obter o carregamento que o oleoduto impõe sobre este perfil; supondo então o solo flexível determinar as deformações resultantes sobre ele. Estas deformações definem um novo perfil de solo que é, de novo suposto infinitamente rígido. Uma nova configuração de equilíbrio é determinada e assim sucessivamente.

Nos casos em que as duas técnicas foram utilizadas, os resultados foram consistentes e a estratégia se mostrou adequada para tratar os problemas onde a flexibilidade do solo correspondia às situações reais. Este procedimento é detalhado na seção seguinte.

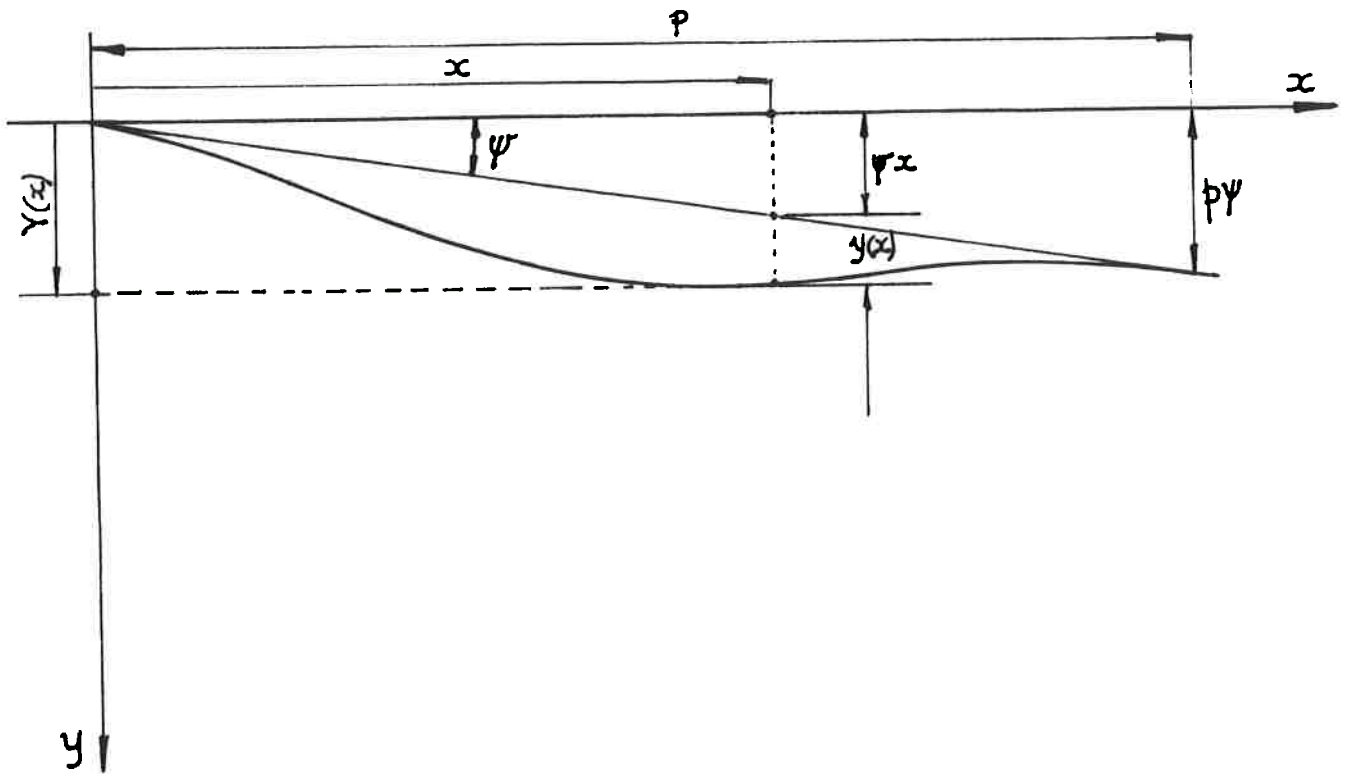


Figura 5.1: Problema com condições de contorno não homogêneas.

5.2 MODELOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

Nos problemas reais de assentamento de oleodutos é freqüente ocorrerem situações em que o leito marinho sofre uma declividade que pode ser suposta constante ao longo do trecho da operação de assentamento. Para os casos em que o ângulo de inclinação ψ é pequeno (o que significa $\cos \psi \cong 1$, $\sin \psi \cong \tan \psi \cong \psi$) o problema pode ser resolvido considerando as formulações estabelecidas para condições de contorno homogêneas e introduzindo-se uma mudança de variáveis, ver Figura 5.1.

Considere então um problema de lançamento cujas condições de contorno são:

$$Y(0) = 0, \quad Y(p) = p\psi \quad \text{e} \quad Y'(0) = Y'(p) = \psi \quad (5.1)$$

Introduzindo-se a mudança de variáveis:

$$y(x) = Y(x) - \psi x \quad (5.2)$$

verifica-se, imediatamente, que os deslocamentos $y(x)$ satisfazem as condições de contorno homogêneas.

Existem casos em que, mesmo considerando o perfil do solo com uma declividade constante, a introdução de um ângulo de inclinação não compatibiliza a ordenada do trecho final do assentamento com a ordenada $p\psi$, introduzida pela declividade. Nestes casos permite-se, incorporar um pequeno degrau no trecho final, de altura adimensional h_d que seja compatível com erros de ordem menor que ε_f^2 , ou seja $h_d = \frac{\hat{h}_d}{L_0} < \varepsilon_f^2$. O problema discreto a ser resolvido, correspondente à operação de lançamento, retrata a situação descrita:

5.2.1 Problema Discreto da Operação de Lançamento

As configurações de equilíbrio do oleoduto envolvem os deslocamentos horizontais e os verticais e, sob as hipóteses adotadas, estes deslocamentos estão desacoplados. Os deslocamentos para a configuração de equilíbrio da operação de lançamento são determinados como segue:

O deslocamento adimensional horizontal do nó j -ésimo é dado por:

$$u_j = \frac{T_p^*}{\delta_f} j \quad j \in [0, N] \quad (5.3)$$

Os deslocamentos horizontais são determinados resolvendo-se o seguinte problema numérico:

Minimizar o funcional:

$$J_{DL}^2(Y) = Y^t [k_\Delta \mathbf{K}_1 + \frac{1}{2\Delta\beta_f} \mathbf{K}_2] Y + \Delta \mathbf{P}^t Y \quad (5.4)$$

sujeito aos vínculos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \in \mathbf{R}^{2N+2} \\ Y_I \leq Y_s \end{array} \right\}. \quad (5.5)$$

A desigualdade acima significa que cada componente do vetor Y_I é menor ou igual à correspondente componente do vetor Y_s . Esclarece-se também que o vetor Y_I contém apenas e tão somente as componentes ímpares do vetor Y , que são precisamente aquelas componentes de Y que correspondem a deslocamentos da linha elástica do oleoduto. As componentes pares de Y correspondem às rotações dos nós da linha elástica, portanto:

$$Y_I^t = (y_1, y_3, y_5 \cdots y_{2N-1}, y_{2N+1}). \quad (5.6)$$

Em correspondência a cada nó está associada a ordenada do solo daquele nó. O vetor Y_s contém precisamente estas ordenadas.

O problema assim posto corresponde à situação em que o oleoduto é apoiado sobre um solo indeformável, ou seja, o vínculo acima traduz a condição de um solo infinitamente rígido.

Observar que na expressão do funcional $J_L^2(Y)$ importada de (4.62) e reproduzida em (5.4) não comparece a parcela que contém a matriz de rigidez \mathbf{K}_3 . Esta parcela é precisamente aquela que depende dos deslocamentos do oleoduto, por deformação do solo. Como estes deslocamentos, no caso de solo infinitamente rígido são nulos, a correspondente matriz de rigidez é nula e portanto não comparece em (5.4) Para se resolver, numericamente, o problema de solo semi-elástico, o procedimento numérico adotado foi determinar a configuração da linha elástica considerando o solo indeformável. A seguir, admitiu-se que uma configuração de equilíbrio sobre o solo semi-elástico pudesse ser determinada a partir da configuração inicial. O procedimento para essa determinação foi calcular as reações que o solo indeformável exerce sobre o oleoduto. A seguir, considerando o solo semi-elástico e a lei de ação e reação, determinar o novo perfil do solo agora deformado, considerá-lo indeformável e calcular a nova configuração de equilíbrio da linha elástica e, assim por diante. Este procedimento iterativo gera uma seqüência de configurações de equilíbrio da linha elástica e uma correspondente seqüência de perfis de solo. O procedimento termina quando duas configurações consecutivas de equilíbrio permanecem suficientemente próximas.

Exemplos Numéricos da Operação de Lançamento

Nesta subseção é apresentado um exemplo de determinação da linha elástica de um oleoduto apoiado sobre um solo de perfil irregular, sob as hipóteses da operação de lançamento.

É importante observar que o perfil do solo no exemplo é plano nos trechos contínuos mas não horizontal, apresentando declividade constante a partir da origem. A incorporação, nos modelos matemáticos desse tipo de mudança, a partir das hipóteses básicas e das condições de contorno, é um exercício bastante simples, pois basta, neste caso considerar uma rotação no sistema de eixos, desde que o ângulo de rotação seja consistente com as hipóteses de aproximação adotadas no Capítulo 2.

EXEMPLO 1. OPERAÇÃO DE LANÇAMENTO

DADOS: (os dados são apresentados no Sistema Internacional)

E = módulo de elasticidade do aço.....	0.21093E+11
γ_a = peso específico do aço.....	0.78500E+04
D_e = diâmetro externo do tubo.....	0.15000E+00
e = espessura da parede do tubo.....	0.50000E-02
L = comprimento de oleoduto.....	0.28000E+03
T_e = tensão de escoamento do aço.....	0.35000E+08
N = número de elementos para discretização.....	56
N_L = número de lastros de concreto.....	1
N_{L1} = número de elementos no lastro 1.....	56
e_c = espessura da parede do lastro 1.....	0.30000E-01
γ_c = peso específico do concreto.....	0.25000E+04
γ_f = peso espec. do fluido contido no oleoduto...	0.90000E+03
γ_{am} = peso específico da água do mar.....	0.10250E+04
D_f = altura do fluido contido no oleoduto.....	0.
D_m = profundidade do mar.....	0.80000E+02
V_0 = adimens. de comprimentos verticais.....	0.14000E+01
L_0 = adimens. de comprimentos horizontais.....	0.55000E+02
μ = coef. de atrito entre o oleoduto e o solo.....	0.50000E+00
T_L^* = tensão de lançamento.....	0.18258E+05
T_A = tensão de abandono.....	0.

$(y_s(i), i = 1, 57) =$ perfil do solo

.00000E+00	.43633E+00	.87266E+00	.13090E+01	.17453E+01	.21816E+01
.26180E+01	.30543E+01	.34906E+01	.39270E+01	.43633E+01	.47996E+01
.52360E+01	.56723E+01	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02
.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02
.10472E+02	.10908E+02	.11344E+02	.11781E+02	.12217E+02	.12653E+02
.13090E+02	.13526E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02	.40000E+02
.40000E+02	.20144E+02	.20580E+02	.21017E+02	.21453E+02	.21890E+02
.22326E+02	.22762E+02	.23198E+02	.23635E+02	.24071E+02	.24507E+02
.24944E+02	.25380E+02	.25816E+02	.26353E+02	.26689E+02	.27125E+02
.27562E+02	.27998E+02	.28434E+02			

Tabela 5.1: PERFIL DO SOLO

$SKS =$ constante elástica do solo.....0.80000E+07

$\phi_s =$ ângulo de inclinação do solo em graus.....0.50000E+01

O perfil do solo é mais facilmente descrito através de uma representação gráfica como é mostrado na Figura 5.2.¹ A Figura 5.3 ilustra os deslocamentos da linha elástica. A Tabela 5.2 traz, para cada nó, o deslocamento da linha elástica do oleoduto, o ângulo com a horizontal, a cota do solo não deformado, a cota do solo deformado, a forças de tração, a força de reação do solo, o momento fletor e a porcentagem da tensão de escoamento.

¹As figuras relativas aos exemplos têm caráter apenas ilustrativas. Para enfatizar os deslocamentos verticais as escalas estão, propositalmente deformadas.

$nó$	x	y	ϕ	y_s	y_{s0}	T	R	M_f	$\sigma(\%)$
1	0.0	0.000	5.0	0.000	0.000	16688.	-351.	-.5545E+00	22.9
2	5.0	0.436	5.0	0.436	0.436	16688.	-193.	.2326E+00	22.9
3	10.0	0.873	5.0	0.873	0.873	16688.	-193.	.1696E+00	22.9
4	15.0	1.309	5.0	1.309	1.309	16688.	-193.	-.3189E+00	22.9
5	20.0	1.745	5.0	1.745	1.745	16668.	-193.	-.1848E+00	22.9
6	25.0	2.182	5.0	2.182	2.182	16668.	-194.	.1081E+01	22.9
7	30.0	2.618	5.0	2.618	2.618	16668.	-192.	-.9795E+00	22.9
8	35.0	3.054	5.0	3.054	3.054	16668.	-193.	-.3962E+00	22.9
9	40.0	3.491	5.0	3.491	3.491	16688.	-197.	.2841E+01	23.0
10	45.0	3.927	5.0	3.927	3.927	16688.	-182.	-.9036E+01	22.9
11	50.0	4.363	5.0	4.363	4.363	16688.	-238.	.3570E+02	24.2
12	55.0	4.800	4.9	4.800	4.800	16688.	-77.	-.1304E+03	23.7
13	60.0	5.220	4.8	5.236	5.236	16688.	0.	-.7528E+02	23.3
14	65.0	5.672	6.2	5.672	5.672	16688.	-1432.	.1400E+04	72.8
15	70.0	6.299	7.6	40.000	40.000	16688.	0.	-.9193E+02	23.4
16	75.0	6.950	7.3	40.000	40.000	16688.	0.	-.2596E+03	25.4
17	80.0	7.558	6.6	40.000	40.000	16688.	0.	-.2872E+03	25.8
18	85.0	8.109	6.0	40.000	40.000	16688.	0.	-.2918E+03	25.9
19	90.0	8.603	5.3	40.000	40.000	16688.	0.	-.2926E+03	25.9
20	95.0	9.040	4.7	40.000	40.000	16688.	0.	-.2926E+03	25.9
21	100.0	9.418	4.0	40.000	40.000	16688.	0.	-.2918E+03	25.9
22	105.0	9.739	3.4	40.000	40.000	16688.	0.	-.2873E+03	25.8
23	110.0	10.005	2.7	40.000	40.000	16668.	0.	-.2596E+03	25.4
24	115.0	10.226	2.4	40.000	40.000	16688.	0.	-.9217E+02	23.4
25	120.0	10.472	3.8	10.472	10.472	16688.	-1430.	.1398E+04	72.7
26	125.0	10.892	5.2	10.908	10.908	16688.	0.	-.7514E+02	23.3
27	130.0	11.344	5.1	11.344	11.344	16688.	-77.	-.1281E+03	23.7
28	135.0	11.781	5.0	11.781	11.781	16668.	-273.	.6087E+02	25.1
29	140.0	12.217	4.9	12.217	12.217	16688.	-93.	-.1310E+03	23.7
30	145.1	12.632	4.6	12.653	12.653	16688.	0.	-.2064E+03	24.6
31	150.1	13.024	4.6	13.090	13.090	16688.	0.	.1131E+03	26.9
32	155.1	13.526	8.1	13.526	13.526	16688.	-2678.	.3104E+04	133.7
33	160.1	14.434	11.5	40.000	40.000	16688.	0.	.1099E+03	26.8
34	165.1	15.451	11.6	40.000	40.000	16688.	0.	-.2262E+03	24.9
35	170.1	16.437	11.0	40.000	40.000	16688.	0.	-.2817E+03	25.7
36	175.1	17.370	10.4	40.000	40.000	16688.	0.	-.2909E+03	25.9
37	180.1	18.246	9.7	40.000	40.000	16688.	0.	-.2924E+03	25.9

Tabela 5.2: RESULTADOS DO EXEMPLO 1

$nó$	x	y	ϕ	y_s	y_{s0}	T	R	M_f	$\sigma(\%)$
38	185.1	19.064	9.0	20.144	20.144	16688.	0.	-.2927E+03	25.9
39	190.1	19.825	8.4	20.580	20.580	16688.	0.	-.2927E+03	25.9
40	195.1	20.527	7.7	21.017	21.017	16688.	0.	-.2927E+03	25.9
41	200.1	21.171	7.1	21.453	21.453	16688.	0.	-.2925E+03	25.9
42	205.1	21.758	6.4	21.890	21.890	16688.	0.	-.2914E+03	25.9
43	210.1	22.287	5.7	22.326	22.326	16688.	0.	-.2848E+03	25,8
44	215.1	22.762	5.2	22.762	22.762	16688.	-3.	-.2442E+03	25.1
45	220.1	23.198	5.0	23.198	23.198	16688.	-292.	.8042E+02	25.8
46	225.1	23.635	5.0	23.635	23.635	16688.	-163.	-.2919E+02	23.0
47	230.1	24.071	5.0	24.071	24.071	16688.	-198.	.3487E+01	23.0
48	235.1	24.507	5.0	24.507	24.507	16688.	-203.	.9811E+01	23.3
49	240.1	24.944	5.0	24.944	24.944	16688.	-183.	-.1041E+02	22.9
50	245.1	25.380	5.0	25.380	25.380	16688.	-193.	-.4536E-01	22.9
51	250.1	25.816	5.0	25.816	25.816	16688.	-204.	.1063E+02	23.3
52	255.1	26.253	5.0	26.253	26.253	16688.	-183.	-.1072E+02	22.9
53	260.1	26.689	5.0	26.689	26.689	16688.	-194.	.5779E+00	22.9
54	265.1	27.125	5.0	27.125	27.125	16688.	-200.	.8006E+01	23.2
55	270.1	27.562	5.0	27.562	27.562	16688.	-198.	.9736E+00	22.9
56	275.1	27.998	5.0	27.998	27.998	16688.	-72.	.4218E+01	23.1
57	280.1	28.434	5.0	28.434	28.434	16688.	44.	-.2029E+02	23.0

Tabela 5.3: RESULTADOS DO EXEMPLO 1 (continuação)

5.2.2 Problema Discreto da Operação de Abandono

O problema numérico da operação de abandono foi tratado de forma simplificada e, neste caso, as aplicações numéricas consistiram apenas em exercícios de avaliação do efeito do atrito sobre as configurações de equilíbrio da linha elástica. O procedimento adotado para a determinação das configurações de equilíbrio, sob as hipóteses da operação de abandono, segue a mesma linha do procedimento para a operação de lançamento. A incorporação do efeito do atrito foi feita sobre uma configuração discreta da linha elástica em que a massa de cada elemento é dividida entre os nós das extremidades. Em decorrência, as forças distribuídas no elemento são concentradas nos nós, entre estas forças está a de atrito entre o oleoduto e o solo e a força interna axial entre duas seções. Através deste artifício, a determinação da configuração de equilíbrio do oleoduto para a operação de abandono consiste em resolver uma seqüência de problemas de lançamento. Nesta seqüência a força axial ao longo do oleoduto não é mais constante, mas depende de como o atrito é mobilizado a partir da extremidade em que se atenua a força de tração. A mobilização do atrito é no sentido de "substituir" o efeito da força de tração que estava

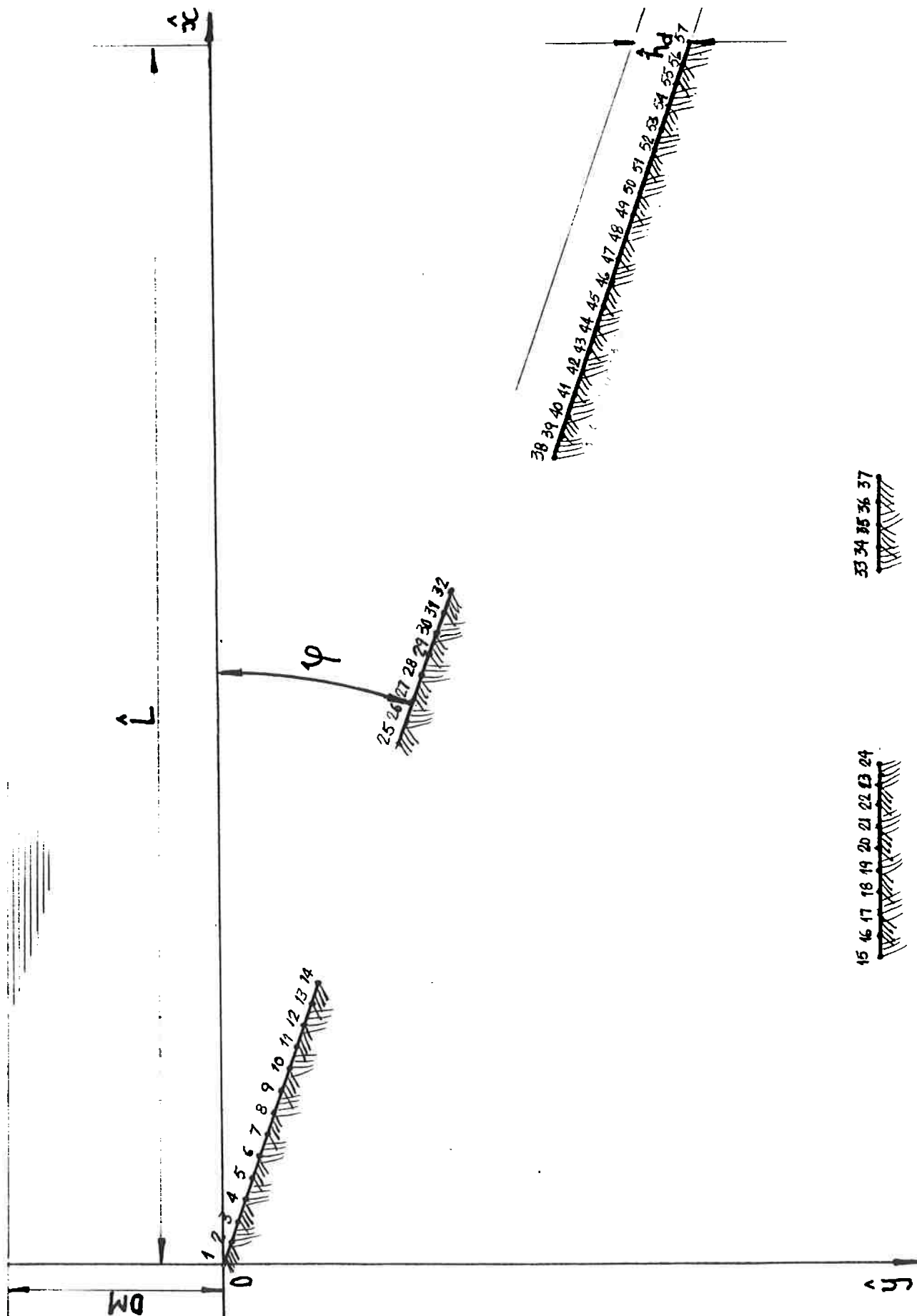


Figura 5.2: Perfil irregular de solo do EXEMPLO 1

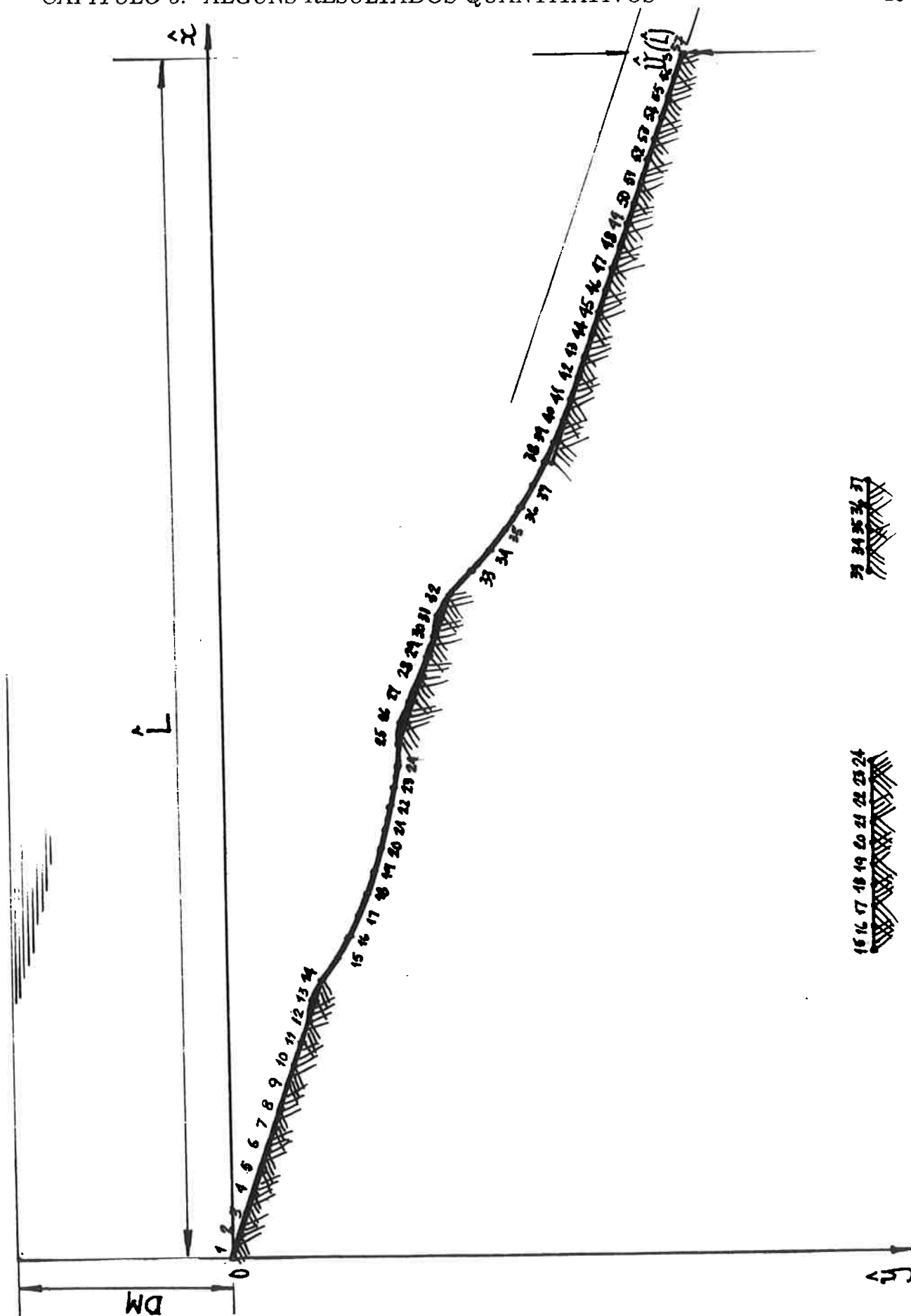


Figura 5.3: Configuração de equilíbrio do EXEMPLO 1

aplicada nesta extremidade.

Ao nível das ilustrações que se propõe apresentar, o problema da operação de abandono pode ser simplificado no sentido de convertê-lo em um problema variacional relacionado à minimização de um funcional convexo. Isto é feito admitindo-se que a ação do atrito em cada elemento permanece constante no elemento. Nestas condições a função $f_a^*(x)$ é constante por trechos. É precisamente este fato que permite converter a inequação variacional cuja solução descreve as ordenadas da configuração de equilíbrio em um problema variacional.

A visão básica é que a atenuação da força de tração na extremidade do nó de abscissa N do oleoduto faz com que a tendência ao escorregamento comece a mobilizar o atrito neste nó, que se propaga para os nós de abscissa $N - 1, N - 2, \dots, n_0$. Sendo n_0 a abscissa do nó tal que o atrito mobilizado a partir do nó N gere na seção que lhe corresponde, exatamente a mesma força axial que ali existia após o término da operação de lançamento. Dizendo em outras palavras, a configuração de equilíbrio da linha elástica, da origem até o nó de abscissa n_0 permanece inalterada após a operação de abandono e é alterada do nó de abscissa n_0 até o nó de abscissa N .

Se F_H é a força hidrostática de compressão, T_A^* a força de tração de abandono, ambas adimensionais, aplicadas no nó de abscissa N a força resultante efetiva que está aplicada no nó de abscissa N é a diferença $T_A^* - F_H$.

Se T_p^* era a força adimensional de tração aplicada no nó N durante a operação de lançamento, então a força de atrito que deve ser mobilizada do nó n_0 até o nó N é $T_p^* - T_A^* + F_H$.

Se $K_m = \frac{\hat{E}\hat{S}}{L_0\Delta}$ é o módulo de rigidez à tração do oleoduto, R_i é a força de reação do solo sobre o nó de abscissa i , $n_0 \leq i \leq N$ e μ é o coeficiente de atrito entre cada um dos nós i e o solo, é possível determinar, começando do N e progredindo passo a passo, no sentido do nó n_0 os deslocamentos e as forças que atuam em cada nó i , $n_0 \leq i \leq N$. A seguir são apresentadas as expressões que determinam estas grandezas.

Na operação de abandono a força de tração que atuava na operação de lançamento é atenuada em uma das extremidades até o valor adimensional $T_A^* - F_H$, portanto na operação de abandono ou a força de tração é atenuada ao longo de todo o oleoduto ou existe um nó de abscissa n_0 , tal que:

$$\bullet 0 \leq n_0 \leq N.$$

Na realidade, o modelo matemático da operação de abandono já estabelece que:

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5.7)$$

O que está-se dizendo é que, na prática, existe um ponto $\bar{x} \in \Omega$, tal que à esquerda de \bar{x} a função $f_a^*(x)$ é constantemente nula até o ponto de abscissa $x = 0$, mais precisamente:

$$F_a^*(x) = F_a^*(\overset{\circ}{x}) = - \int_{\frac{x}{\Delta}}^p f_a^*(\zeta) d\zeta \quad \forall x \leq \overset{\circ}{x} \quad (5.8)$$

No problema discretizado, o ponto $\overset{\circ}{x} \in \Omega$ define um ponto de abscissa inteira dado por $n_0 = [\overset{\circ}{x}/\Delta]$ ². Para efeito dos resultados que seguem é adotada a hipótese:

HIPÓTESE DE TRABALHO: $n_0 > 0$.

• $F_a^* = T_p^* - (T_A^* - F_H)$ é a força de atrito mobilizada do nó de abscissa n_0 até o nó de abscissa N .

$$\bullet F_A^* \leq \mu \sum_{i=N-n_0}^N R_i.$$

$$\bullet F_A^* > \mu \sum_{i=N-n_0+1}^N R_i.$$

Nestas condições pode-se mostrar que o problema numérico de abandono pode ser formulado como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{N+1} = T_A^* - F_H \\ T_{i+1} = T_i - \mu R_i \quad N - n_0 + 1 \leq i \leq N - 1 \\ T_{N-n_0+1} = \mu \sum_{i=N-n_0+1}^N R_i + (T_A^* - F_H) \\ u_N = u_{N-1} + \frac{\mu}{K_m} R_N + (T_A^* - F_H) \\ u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \frac{\mu}{K_m} R_i \quad N - n_0 + 1 \leq i \leq N - 1 \\ u_{N-n_0+1} = u_{N-n_0} + \frac{1}{K_m} [\mu \sum_{i=N-n_0+1}^N R_i + (T_A^* - F_H)] \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Observar que conforme o raciocínio apresentado, a força T_{n_0} é de tração e exatamente igual a $T_p^* - F_H$, que era a condição existente nessa seção durante a operação de lançamento. Além disso o deslocamento u_{n_0} , por pressuposto é nulo.

Uma vez recalculados a força axial e o deslocamento de cada nó, a partir do nó de abscissa $N - n_0 + 1$ até o nó de abscissa N , um novo problema relativo às forças e deslocamentos verticais pode ser resolvido e, por sua vez, realimentar o procedimento descrito anteriormente e assim por diante. Este procedimento iterativo termina quando os deslocamentos e forças de um passo para o seguinte sofrem variações que não superam um parâmetro ε de precisão, obtendo-se assim uma nova configuração de equilíbrio da linha elástica, para as condições da operação de abandono.

O problema numérico relativo às forças e deslocamentos verticais a ser resolvido em cada passo do procedimento iterativo é análogo ao descrito pela expressão (5.4). A diferença que ocorre é no cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K}_2 . Esta matriz resulta da discretização do funcional $J_2(v)$ que comparece na expressão (4.28). Neste caso, no funcional $J_2(v)$ comparece uma força de tração que é igual a T_p^* , do nó de abscissa zero até o nó de

²o símbolo [] indica o maior inteiro contido em.

abscissa n_0 . A partir deste último nó a força de tração se modifica conforme as expressões (5.9). Assim sendo, a expressão do funcional $J_2(v)$ fica:

$$J_{2A}(v) = \frac{1}{2\beta_f} \sum_{j=n_0}^N \int_j^{j+1} T_j \left(\frac{dv}{dx} \frac{dv}{d\nu} \right)^2 \Delta d\nu \quad (5.10)$$

Exemplos Numéricos da Operação de Abandono

Nesta subsecção é apresentado um exemplo de determinação da linha elástica de um oleoduto apoiado sobre um solo de perfil irregular, sob as hipóteses da operação de abandono. Na realidade, o exemplo aqui apresentado é a continuação do correspondente exemplo da operação de lançamento, já apresentado.

EXEMPLO 2. OPERAÇÃO DE ABANDONO

DADOS:

Os dados para este exemplo são precisamente os mesmos dados utilizados para a operação de lançamento e é exatamente nesta situação que é usado o valor da tensão de abandono já fornecida no primeiro conjunto de dados.



Figura 5.4: Configuração de equilíbrio do EXEMPLO 2

$nó$	x	y	ϕ	y_s	y_{s0}	T	R	M_f	$\sigma(\%)$
1	0.0	0.000	5.0	0.000	0.000	16688.	-350.	-.5541E+00	22.9
2	5.0	0.436	5.0	0.436	0.436	16688.	-193.	.2324E+00	22.9
3	10.0	0.873	5.0	0.873	0.873	16688.	-193.	.1696E+00	22.9
4	15.0	1.309	5.0	1.309	1.309	16688.	-193.	-.3189E+00	22.9
5	20.0	1.745	5.0	1.745	1.745	16668.	-193.	-.1848E+00	22.9
6	25.0	2.182	5.0	2.182	2.182	16668.	-194.	.1081E+01	22.9
7	30.0	2.618	5.0	2.618	2.618	16668.	-192.	-.9795E+00	22.9
8	35.0	3.054	5.0	3.054	3.054	16668.	-193.	-.3962E+00	22.9
9	40.0	3.491	5.0	3.491	3.491	16688.	-197.	.2841E+01	23.0
10	45.0	3.927	5.0	3.927	3.927	16688.	-182.	-.9036E+01	22.9
11	50.0	4.363	5.0	4.363	4.363	16688.	-238.	.3570E+02	24.2
12	55.0	4.800	4.9	4.800	4.800	16688.	-77.	-.1304E+03	23.7
13	60.0	5.220	4.8	5.236	5.236	16688.	0.	-.7528E+02	23.3
14	65.0	5.672	6.2	5.672	5.672	16688.	-1432.	.1400E+04	72.8
15	70.0	6.299	7.6	40.000	40.000	16688.	0.	-.9193E+02	23.4
16	75.0	6.950	7.3	40.000	40.000	16688.	0.	-.2596E+03	25.4
17	80.0	7.558	6.6	40.000	40.000	16688.	0.	-.2872E+03	25.8
18	85.0	8.109	6.0	40.000	40.000	16688.	0.	-.2918E+03	25.9
19	90.0	8.603	5.3	40.000	40.000	16688.	0.	-.2926E+03	25.9
20	95.0	9.040	4.7	40.000	40.000	16688.	0.	-.2926E+03	25.9
21	100.0	9.418	4.0	40.000	40.000	16688.	0.	-.2918E+03	25.9
22	105.0	9.739	3.4	40.000	40.000	16688.	0.	-.2873E+03	25.8
23	110.0	10.005	2.7	40.000	40.000	16668.	0.	-.2596E+03	25.4
24	115.0	10.226	2.4	40.000	40.000	16688.	0.	-.9216E+02	23.4
25	120.0	10.472	3.8	10.472	10.472	16688.	-1431.	.1398E+04	72.7
26	125.0	10.892	5.2	10.908	10.908	16688.	0.	-.7518E+02	23.3
27	130.0	11.344	5.1	11.344	11.344	16688.	-76.	-.1286E+03	23.7
28	135.0	11.781	5.0	11.781	11.781	16668.	-277.	.6363E+02	25.2
29	140.0	12.217	4.9	12.217	12.217	16688.	-84.	-.1413E+03	23.8
30	145.1	12.630	4.5	12.653	12.653	16688.	0.	-.2062E+03	24.8
31	150.1	13.022	4.6	13.090	13.090	16688.	0.	.1401E+03	27.9
32	155.1	13.526	8.1	13.526	13.526	14002.	-2358.	.3183E+04	133.2
33	160.1	14.472	12.6	40.000	40.000	9373.	0.	.6995E+03	38.6
34	165.1	15.609	13.1	40.000	40.000	9373.	0.	-.2330E+03	17.1
35	170.1	16.725	12.4	40.000	40.000	9373.	0.	-.4467E+03	22.4
36	175.1	17.759	11.3	40.000	40.000	9373.	0.	-.5016E+03	24.0
37	180.1	18.694	10.1	40.000	40.000	9373.	0.	-.5153E+03	24.4

Tabela 5.4: RESULTADOS DO EXEMPLO 2

$nó$	x	y	ϕ	y_s	y_{s0}	T	R	M_f	$\sigma(\%)$
38	185.1	19.529	9.0	20.144	20.144	9373.	0.	-.5177E+03	24.5
39	190.1	20.261	7.8	20.580	20.580	9373.	0.	-.5136E+03	24.4
40	195.1	20.893	6.7	21.017	21.017	9373.	0.	-.4944E+03	23.8
41	200.1	21.428	5.6	21.453	21.453	9373.	0.	-.4184E+03	21.7
42	205.1	21.890	5.1	21.890	21.890	9002.	-189.	-.9458E+02	14.3
43	210.1	22.326	5.0	22.326	22.326	8180.	-230.	.2953E+02	13.4
44	215.1	22.762	5.0	22.762	22.762	7374.	-181.	-.9937E+01	11.5
45	220.1	23.198	5.0	23.198	23.198	6618.	-204.	.1276E+02	11.0
46	225.1	23.635	5.0	23.635	23.635	5855.	-185.	-.1092E+02	9.7
47	230.1	24.071	5.0	24.071	24.071	5112.	-193.	.1799E+00	8.7
48	235.1	24.507	5.0	24.507	24.507	4339.	-200.	.1020E+02	8.2
49	240.1	24.944	5.0	24.944	24.944	3580.	-186.	-.1023E+02	7.1
50	245.1	25.380	5.0	25.380	25.380	2836.	-193.	.8160E-02	6.1
51	250.1	25.816	5.0	25.816	25.816	2064.	-200.	.1023E+02	5.6
52	255.1	26.253	5.0	26.253	26.253	1306.	-186.	-.1042E+02	4.7
53	260.1	26.689	5.0	26.689	26.689	558.	-194.	.9688E+00	4.0
54	265.1	27.125	5.0	27.125	27.125	-206.	-195.	.6600E+01	3.5
55	270.1	27.562	5.0	27.562	27.562	-967.	-203.	.2773E+01	3.1
56	275.1	27.998	5.0	27.998	27.998	-1528.	-73.	.5449E+01	3.1
57	280.1	28.434	5.0	28.434	28.434	-1570.	47.	-.2441E+02	3.6

Tabela 5.5: RESULTADOS DO EXEMPLO 2 (continuação)

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

6.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste Capítulo é apresentar as principais conclusões sobre os resultados obtidos nesta tese e oferecer algumas sugestões de tópicos de pesquisa em continuidade ao que foi aqui realizado.

Antes da formulação das conclusões cabem algumas observações que permitem situar com maior precisão o espírito que permeou o desenvolvimento desta tese.

A primeira observação diz respeito ao escopo dos resultados obtidos. Num certo sentido os recursos matemáticos utilizados oferecem um potencial maior do que o que foi explorado na tese. Só para exemplificar: seria possível adotar uma curva característica para o solo bem mais geral e os resultados básicos persistiriam inalterados. Como esta extensão, outras poderiam ser feitas sem invalidar os resultados fundamentais.

A segunda observação de alguma maneira vai em sentido contrário ao da observação anterior, uma vez que para se obterem os resultados da tese algumas concessões foram necessárias. Estas concessões se tornam visíveis pela presença de algumas hipóteses de trabalho formuladas ao longo da tese. Só para se ter presente as hipóteses estabelecidas, frente as situações objetivas que se apresentaram durante o desenvolvimento da tese, elas são, a seguir lembradas:

Hipóteses Subsidiárias

Foram estabelecidas no Capítulo 3, para se atingir condições de garantir a coercividade do operador associado ao problema **Pa2**.

A função de atrito $F_a^*(x)$, definida a partir da função densidade linear de atrito $f_a^*(x)$, pela expressão (2.158) transcrita a seguir, deve satisfazer as condições subsidiárias seguintes:

$$F_a^*(x) = - \int_x^p f_a^*(\zeta) d\zeta, \quad \forall x \in \Omega \quad (6.1)$$

- ter até a segunda derivada contínua;

• existem números reais λ (que dependem essencialmente da monotonicidade de F_a^*) tais que o número λ_a definido em (6.2), a seguir, é sempre positivo. Dado um número real λ , a existência de um número λ_a está garantida pois trata-se do ínfimo de uma função contínua definida num conjunto compacto Ω , resta saber em que casos ele é positivo. Para aqueles casos que é verificada esta última condição está satisfeita uma hipótese subsidiária que vai permitir a demonstração da Proposição 4.

$$\lambda_a = \inf_{x \in \Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} - \lambda^2 F_a^*(x) \right] \quad (6.2)$$

Hipótese de Trabalho

Esta hipótese foi estabelecida no Capítulo 4 com vistas a obtenção de alguns resultados numéricos do problema **Pa2**, da forma simples possível e, de fato corresponde a uma concessão estratégica. Caso o objetivo da tese fosse desenvolver procedimentos numéricos gerais e robustos, ela deveria e poderia ser eliminada.

Para $\nu(x) = \nu^*(x)$, vale a desigualdade:

$$u_L^*(x) + \nu^*(x) \geq 0. \quad (6.3)$$

Esta desigualdade significa que, quando o oleoduto contrai-se pelo alívio da força de lançamento, que é de tração, o deslocamento sofrido em cada seção do oleoduto que, em geral é negativo, não supera em módulo o correspondente deslocamento (neste caso positivo) sofrido pela seção por ocasião da aplicação da força de lançamento.

Uma terceira observação diz respeito a uma certa despreocupação que transparece na formulação das hipóteses subsidiárias, sem uma avaliação cuidadosa da necessidade delas ou se haveria uma forma mais simples e clara de se apresentar um dado resultado. Em resumo: não se buscou ao longo da tese atender requisitos de elegância matemática e de formulação mas apenas e tão somente apresentar uma solução para uma família de problemas.

6.2 PRINCIPAIS CONCLUSÕES

As principais conclusões oferecidas são:

1) sem uma forte simplificação dos modelos iniciais seria, para o candidato uma tarefa talvez insuperável obter os resultados vislumbrados, ou seja, o problema formulado sob hipóteses mais gerais de não linearidades geométricas seria intratável e, possivelmente, não seriam atingidos quaisquer resultados relevantes. As simplificações envolvendo pequenas deformações e pequenos deslocamentos foram fundamentais para a realização deste trabalho;

2) os resultados teóricos obtidos estão fortemente vinculados à concepção das operações são realizadas sobre o oleoduto durante o procedimento de assentamento e ao modelo proposto para estas operações. Se o procedimento de assentamento envolver operações de outra natureza, os resultados aqui apresentados não garantem que as configurações de equilíbrio, que venham a ser obtidas, atendam aos requisitos de existência e unicidade;

3) o ponto fundamental da tese é a comprovação, sob as hipóteses estabelecidas, de que o problema de assentamento de oleodutos sobre solo de perfil irregular e sob a ação de atrito longitudinal, se realizado segundo as etapas descritas pelas duas operações elementares tem, em cada etapa, solução única. Decorre também dos resultados obtidos que o efeito do atrito longitudinal, em termos práticos, manifesta-se através de uma interferência sobre a configuração de equilíbrio de lançamento e se limita a umas poucas centenas de metros a partir da extremidade em que a tensão de tração é aliviada;

4) como o objetivo essencial da tese não é desenvolver ferramenta numérica para cálculos de configurações de equilíbrio de oleodutos, apenas alguns exemplos ilustrativos são apresentados e não se explorou em profundidade as possibilidades numéricas potencializadas pelos resultados qualitativos. Um programa de computador de caráter prospectivo foi desenvolvido tendo em vista uma avaliação preliminar desse potencial. O que se pode concluir dessa avaliação é que os resultados práticos são muito promissores, no sentido de velocidade de convergência, flexibilidade operacional, precisão dos resultados, etc.

6.3 SUGESTÕES DE TÓPICOS PARA PESQUISAS FUTURAS

As possibilidades de avanços nas aplicações das inequações variacionais a problemas de contato unilateral são consideradas muito amplas, particularmente pelo fato desta área de aplicações ainda estar restrita a exercícios de natureza essencialmente acadêmica. O problema específico tem uma outra face constituída pelo comportamento dinâmico global do oleoduto. Mais simplificada mente pode-se pensar no comportamento dinâmico dos trechos da configuração de equilíbrio que se apresentam como vãos livres. Apresentam-se portanto, como tópicos a serem explorados em estudos posteriores:

1) extensão dos modelos matemáticos para abarcarem o comportamento dinâmico das linhas e todas as implicações decorrentes, tais como: estabilidade dinâmica das soluções, se elas existirem, ferramentas numéricas para geração de configurações dinâmicas das linhas, etc;

- 2) especialização dos modelos matemáticos para aplicações envolvendo estruturas que não ofereçam resistência a momentos fletores, tipo amarras de plataformas ou embarcações e as extensões para se considerar a dinâmica dessas estruturas;
- 3) generalizações tridimensionais para assentamento de linhas sem o requisito da hipótese H3 do Capítulo 2. Sob este contexto o problema do atrito entre o solo e a estrutura se torna muito complexo, com a possibilidade de inviabilizar a análise por não se conseguir formular um problema que seja "bem posto".
- 4) desenvolvimento de ferramentas numéricas, apoiadas em resultados teóricos bem estabelecidos.

APÊNDICE A

DEMONSTRAÇÃO DE RESULTADOS ESSENCIAIS A TESE

A.1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste apêndice é apresentar algumas demonstrações e resultados que prejudicariam o desenvolvimento harmonioso do Capítulo 3. Nesse sentido ele é parte essencial daquele capítulo. Os resultados que são partes da tese e que foram usados naquele capítulo, foram lá enunciados para maior clareza nas aplicações. A seguir estes resultados são novamente enunciados e demonstrados.

A.2 ALGUNS RESULTADOS FUNDAMENTAIS UTILIZADOS NO CAPÍTULO 3

Lema 1

O funcional $J_L^2(y_L)$ é diferenciável segundo Gâteaux e sua diferencial calculada sobre a função y_L^ , para todo $h \in \mathcal{V}_L^2$ é:*

$$\begin{aligned} \delta J_L^2(y_L^*; h) = & \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{dy_L^*}{dx} \frac{dh}{dx} dx + k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \frac{d^2 h}{dx^2} dx - \\ & \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx + \beta_f k \int_0^p V_L^* h dx. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Demonstração:

Da definição de diferencial de Gâteaux, ver Apêndice B, verifica-se trivialmente que as derivadas das parcelas do funcional $J_L^2(y_L^*)$ são:

$$\delta_f \left[\frac{\varepsilon_f}{2} T_L^*(p) \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx} \right)^2 dx; h \right] = \varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{dy_L^*}{dx} \frac{dh}{dx} dx \quad (\text{A.2})$$

$$\delta_f \left[\frac{\varepsilon_f}{2} k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \right)^2 dx; h \right] = \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \frac{d^2 h}{dx^2} dx \quad (\text{A.3})$$

$$\delta_f \left[-\beta \int_0^p (\gamma_0 - w_0) dx; h \right] = -\beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx \quad (\text{A.4})$$

A parcela seguinte é a que necessita de algum trabalho. Em primeiro lugar é útil verificar que se $I \subseteq R$, aberto e

$$g : I \longrightarrow R \quad (\text{A.5})$$

é diferenciável então:

$$\frac{d}{dx} [g(x)|g(x)|] = 2|g(x)| \frac{d}{dx} g(x) \quad \forall x \in I. \quad (\text{A.6})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \delta_f \left[\frac{\beta_f k}{2} \int_0^p (V_{+L}^*)^2 dx; h \right] &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left[\frac{y_L^* - v_s + \varepsilon h + |y_L^* - v_s + \varepsilon h|}{2} \right]^2 dx \right\}_{\varepsilon=0} \\ \delta_f \left[\frac{\beta_f k}{2} \int_0^p (V_{+L}^*)^2 dx; h \right] &= \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p (y_L^* - v_s + |y_L^* - v_s|) h dx \\ \delta_f \left[\frac{\beta_f k}{2} \int_0^p (V_{+L}^*)^2 dx; h \right] &= \beta_f k \int_0^p V_{+L}^* h dx \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A soma da diferencial de Gâteaux das parcelas (A.2), (A.3), (A.4) e (A.7) fornece a diferencial de Gâteaux do funcional J_L^2 , dada pela expressão (A.1).

Integrando uma vez, por partes, a primeira parcela e duas vezes a segunda parcela de δJ_L^2 na expressão (A.1) e lembrando que $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta J_L^2(y_L^*; h) &= -\varepsilon_f T_L^*(p) \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} h dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} h dx \\ &\quad - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) h dx + \beta_f k \int_0^p V_{+L}^* h dx \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Pelo Teorema 1 do Apêndice B, uma condição necessária para que $y_L^* \in \mathcal{V}_L^2$ seja extremo do funcional $J_L^2(y_L)$ é que $\delta J_L^2(y_L^*; h) = 0$, para todo $h \in \mathcal{V}_L^2$. Da expressão (A.8) obtém-se, portanto, a equação diferencial:

$$\varepsilon_f T_L^*(p) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \varepsilon_f k_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} - \beta_f (\gamma_0 - w_0) - \beta_f k V_{+L}^* = 0 \quad (\text{A.9})$$

Agora, observa-se que, pela definição de V_{+L}^* e pelas expressões (2.82), tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } V_L^* \geq 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} V_{+L}^* = V_L^* \\ k V_{+L}^* = -f_{nL}^* \end{array} \right\} \\ \text{se } V_L^* < 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} V_{+L}^* = 0 \\ k V_{+L}^* = -f_{nL}^* = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

De (A.9) e (A.10) segue-se que:

$$\varepsilon_f T_L^*(p) \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} - \varepsilon_f k_f \frac{d^4 y_L^*}{dx^4} = -\beta_f (\gamma_0 - w_0) + \beta_f f_{nL}^* \quad (\text{A.11})$$

que era o que se queria demonstrar.

Atentar para o fato que $y_L^* \in \mathcal{U}_L^2$, portanto as condições de contorno relativas a y_L^* , no problema **PL1**, já estão garantidas. Resta mostrar que esta mesma y_L^* satisfaz a desigualdade (2.109), para todo $y_L \in \mathcal{U}_L^2$. Para provar que y_L^* satisfaz a desigualdade (2.109) são demonstrados os Lemas 2, 3 e 4 a seguir.

Lema 2

Os conjuntos \mathcal{U}_L^2 e \mathcal{V}_L^2 são convexos.

Demonstração:

Da definição de \mathcal{U}_L^2 verifica-se que seus elementos são funções $g, g \in C^4(\Omega)$, que verificam as condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(p) = 0 \\ \frac{dg}{dx}(0) = 0 \\ \frac{dg}{dx}(p) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

Para provar que \mathcal{U}_L^2 é convexo deve ser verificado que: $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{U}_L^2$ e $\forall \lambda, \lambda \in [0, 1]$, tendo-se que a função: $\lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_2(x)$ é um elemento de \mathcal{U}_L^2 . É imediato verificar que esta função é um elemento de $C^4(\Omega)$ e satisfaz (A.12), portanto \mathcal{U}_L^2 é convexo.

A prova que \mathcal{V}_L^2 é convexo é realizada verificando que, para quaisquer pares de funções $g_1, g_2 \in \mathcal{V}_L^2$, isto é que tem até segunda derivada quadrado integráveis e satisfazem (A.12), o elemento $\lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_2(x)$ tem até a segunda derivada quadrado integrável e satisfaz (A.12). Isto termina a demonstração do Lema 2.

Lema 3

$H^2(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, considere o conjunto \mathcal{V}_L^2 subconjunto de $H^2(\Omega)$ e o funcional $J_L^2(y_L) = J_1(y_L) + J_2(y_L)$, definido em $H^2(\Omega)$, como apresentado pelas expressões (2.114) e (2.115) A forma bilinear $\delta J_1[y_L^*; y_L^* - y_L]$ dada pela diferencial de Gâteaux de $J_1(y_L)$ é coerciva em $\mathcal{V}_L^2 \times \mathcal{V}_L^2$. Além disso, o funcional $J_2(y_L)$ é convexo.

Demonstração:

A demonstração deste lema gera as condições estabelecidas pelo Teorema 5 para garantir a existência e a unicidade da solução do problema **PL2**.

Para provar que a forma bilinear $\delta J_1[y_L^*; y_L^* - y_L]$ é coerciva pode ser verificada a seguinte condição, que é uma condição suficiente para a coercividade de uma forma bilinear.

$$\begin{aligned} \delta J_1[y_L; y_L] &\geq \kappa \|y_L\|_{H^2(\Omega)} \\ \forall y_L \in \mathcal{V}_L^2 \quad \text{e } \kappa \in \mathbb{R}, \quad \kappa > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Transcrevendo a expressão do funcional $J_1(y_L)$ dada por (2.114), tem-se:

$$J_1(y_L) = \frac{\varepsilon_f T_L^*}{2} \int_0^p \left(\frac{dy_L}{dx}\right)^2 dx + \frac{\varepsilon_f k_f}{2} \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L}{dx^2}\right)^2 dx \quad (\text{A.14})$$

cuja diferencial de Gâteaux calculada para as funções y_L^* e h é obtida facilmente e vale:

$$\delta J_1[y_L^*; h] = \varepsilon_f T_p^* \int_0^p \frac{dy_L^*}{dx} \frac{dh}{dx} dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \frac{d^2 y_L^*}{dx^2} \frac{d^2 h}{dx^2} dx. \quad (\text{A.15})$$

Tomando $h = y_L^*$, resulta:

$$\delta J_1[y_L^*; y_L^*] = \varepsilon_f T_p^* \int_0^p \left(\frac{dy_L^*}{dx}\right)^2 dx + \varepsilon_f k_f \int_0^p \left(\frac{d^2 y_L^*}{dx^2}\right)^2 dx. \quad (\text{A.16})$$

Decompondo a parcela da integral do quadrado da primeira derivada de y_L^* na soma de duas parcelas (notar que esta decomposição não é única), pode-se aplicar a desigualdade de Poioncaré-Friedrichs para obter:

$$\delta J_1[y_L^*; y_L^*] \geq \kappa \|y_L^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad (\text{A.17})$$

onde:

$$\kappa = \min\left\{\pi^2 \frac{2p^2 - 1}{p^4} \varepsilon_f T_L^*(p), \frac{1}{p^2} \varepsilon_f T_L^*(p), \varepsilon_f k_f\right\} \quad (\text{A.18})$$

κ é claramente positivo. Fica demonstrado que a forma bilinear $\delta J_1 [y_L^*; y_L^* - y_L]$ é coerciva. Resta verificar a segunda parte do Lema, o que vem a seguir.

Para provar que J_2 é convexo deve-se verificar que para todo par $(y_1, y_2) \in \mathcal{V}_L^2 \times \mathcal{V}_L^2$ e $\lambda, \lambda \in [0, 1]$, tem-se que:

$$J_2[\lambda y_1(x) + (1 - \lambda)y_2(x)] \leq \lambda J_2[y_1(x)] + (1 - \lambda)J_2[y_2(x)] \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.19})$$

Da expressão do funcional $J_2(y_L)$ em (2.115) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} J_2[\lambda y_1(x) + (1 - \lambda)y_2(x)] &= \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \frac{1}{4} [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - v_s + |\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - v_s|]^2 dx \\ &\quad - \beta_f \int_0^p (\gamma_0 - w_0) [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] dx \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Agora utilizando um resultado trivial da teoria dos funcionais convexos, que diz: se um funcional é constituído de um número finito de parcelas e cada uma delas é convexa, então o funcional é convexo. A idéia é verificar que cada uma das parcelas do funcional J_2 é convexa, conseqüentemente o funcional é convexo. A verificação da convexidade da segunda parcela constitutiva de J_2 é imediata, pois é linear, valendo portanto a igualdade. A verificação da primeira parcela é pouco mais trabalhosa e é apresentada em detalhes a seguir.

Apenas para tornar a apresentação mais didática introduz-se o funcional $\eta(y)$, definido por:

$$\eta(y) = \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left(\frac{y - v_s + |y - v_s|}{2} \right)^2 dx \quad (\text{A.21})$$

Mostrando que: $\forall \lambda, \lambda \in [0, 1]$ e $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{U}_L^2$, tem-se:

$$\eta[\lambda y_1(x) + (1 - \lambda)y_2(x)] \leq \lambda \eta(y_1(x)) + (1 - \lambda)\eta(y_2(x)) \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{A.22})$$

Observando que $v_s(x) = \lambda v_s(x) + (1 - \lambda)v_s(x)$, $\forall x \in \Omega$, escreve-se:

$$\eta(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left(\frac{\lambda(y_1 - v_s) + (1 - \lambda)(y_2 - v_s) + |\lambda(y_1 - v_s) + (1 - \lambda)(y_2 - v_s)|}{2} \right)^2 dx \quad (\text{A.23})$$

Agora deve-se considerar que, para: $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{V}_L^2$ e $\forall \lambda, \lambda \in [0, 1]$, valem:

$$(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2)^2 = |\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2|^2 \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 + |\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2| \leq \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 + \lambda |z_1| + (1 - \lambda)|z_2| \quad (\text{A.25})$$

$$\lambda(1 - \lambda)z_1 |z_2| \leq \lambda(1 - \lambda) \left(\frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} \right) \quad (\text{A.26})$$

Considerando (A.23), (A.24), (A.25) e (A.26), pode-se escrever:

$$\eta(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \frac{[\lambda(y_1 - v_s + |y_1 - v_s|) + (1 - \lambda)(y_2 - v_s + |y_2 - v_s|)]^2}{4} dx. \quad (\text{A.27})$$

Desenvolvendo o colchete do integrando, vem:

$$\begin{aligned} \eta(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \frac{\beta_f k}{2} \left\{ \int_0^p \frac{\lambda^2(y_1 - v_s + |y_1 - v_s|)^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(y_1 - v_s + |y_1 - v_s|)(y_2 - v_s + |y_2 - v_s|)}{2} dx \right. \\ \left. + \int_0^p \frac{(1 - \lambda)^2(y_2 - v_s + |y_2 - v_s|)^2}{2} dx \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Considerando a desigualdade (A.26) resulta:

$$\eta(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left(\frac{y_1 - v_s + |y_1 - v_s|}{2} \right)^2 dx + (1 - \lambda) \frac{\beta_f k}{2} \int_0^p \left(\frac{y_2 - v_s + |y_2 - v_s|}{2} \right)^2 dx. \quad (\text{A.29})$$

Portanto:

$$\eta(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda \eta(y_1) + (1 - \lambda)\eta(y_2) \quad (\text{A.30})$$

o que prova que η é um funcional convexo. Como a segunda parcela de J_2 também é convexa, conclui-se sobre a convexidade de J_2 .

Lema 4

Considerem-se as funções y, V, V_+, y^*, V^*, V_+ em que: y é um elemento arbitrário de \mathcal{V}_L^2 , V é definida em (2.110), V_+ é a correspondente variável adimensional definida por (2.90), y^* é uma função candidata a ser solução do problema **PL2**, V^* também é definida por (2.110), V_+ é uma função associada a y^* definida de maneira análoga a função V_+ . Seja f_n^* a correspondente função adimensional da função \hat{f}_n , definida por (2.83). Sob estas condições são equivalentes as seguintes desigualdades:

$$i) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^*(x) \leq 0 \implies f_n^*(x) = 0 \\ V^*(x) \geq 0 \implies f_n^*(x) = -kV^*(x) \end{array} \right\} \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.31})$$

ii)

$$\forall y \in \mathcal{V}_L^2 \quad f_n^*(x)(y(x) - y^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.32})$$

iii) Para todo $y_L \in \mathcal{V}_L^2$ e para todo $\varepsilon \geq 0$ e $\varepsilon, a, (a + \varepsilon) \in \Omega$

$$\int_a^{a+\varepsilon} [f_n^*(x)(y(x) - y^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x))] \geq 0 \quad (\text{A.33})$$

em particular para $a = 0$ e $\varepsilon = p$ a desigualdade (A.33) é verificada.

Demonstração:

i) \implies ii)

Vale lembrar que a implicação a ser demonstrada corresponde à demonstração da desigualdade (2.96) que caracteriza o comportamento do solo. Esta desigualdade em si é relevante no desenvolvimento da tese.

Se $V^*(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \longrightarrow f_n^*(x) = 0$ e $V_+^*(x) = 0$

Portanto:

$$0 \cdot (y_L(x) - y_L^*(x)) + k \cdot 0 \cdot (V_+(x) - 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.34})$$

Se $V^*(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \longrightarrow f_n^*(x) = -kV^*(x)$ e $V_+^*(x) = V^*(x)$. Assim:

$$\begin{aligned} f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) &= \\ = -kV^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV^*(x)(V_+(x) - V^*(x)) &= \\ = k[V^*(x)(V_+(x) - V(x))] &\geq 0 \end{aligned}$$

pois $V^*(x) > 0$ e $V_+(x) - V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Conclui-se então que para $\forall x \in \Omega$, sendo a expressão

$$f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) \quad (\text{A.35})$$

sempre não negativa a implicação fica demonstrada.

ii) \implies iii)

Se

$$[f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x))] \geq 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_L^2 \quad (\text{A.36})$$

então:

para toda terna $a, \varepsilon, (a + \varepsilon) \in \Omega$, fixada arbitrariamente mas atendendo ao requisito de que cada dos elementos da terna seja um elemento de Ω , tem-se que:

$$\int_a^{a+\varepsilon} [f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x))] dx \geq 0. \quad (\text{A.37})$$

Não há o que demonstrar.

iii) \implies ii)

Neste caso quer-se demonstrar que se cada família de funcionais $j_\varepsilon(V) \geq 0$, para $V^*(x) \in \mathcal{V}_L^2$ fixo, $a \in \Omega$ também fixo, para todo $V(x) \in \mathcal{V}_L^2$ e todo ε tal que $\varepsilon, a + \varepsilon \in \Omega$, então:

$$g(x) = f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) \geq 0. \quad (\text{A.38})$$

Supondo-se, por hipótese, que existe $\bar{V} \in \mathcal{V}_L^2$, tal que para algum $x_0 \in \Omega$, tenha-se:

$$g(x_0) = f_n^*(x_0)(\bar{V}(x_0) - V^*(x_0)) + k\bar{V}_+^*(x_0)(\bar{V}_+(x_0) - V_+^*(x_0)) < 0 \quad (\text{A.39})$$

Pela continuidade de $g(x)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(x_0)$, tal que $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathcal{V}(x_0) \cup \Omega$. A vizinhança $\mathcal{V}(x_0)$ permite que se tome um $\varepsilon_0 > 0$, tal que $(x_0 + \varepsilon_0) \in \Omega$ e que:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon_0} g(x) dx < 0 \quad (\text{A.40})$$

pois $g(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon_0)$. A desigualdade (A.40) gera uma contradição, pois, por hipótese:

$$j_{\varepsilon_0}(\bar{V}) = \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon_0} g(x) dx \geq 0 \quad (\text{A.41})$$

e \bar{V} é arbitrário. Tem-se portanto que:

$$g(x) = f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) + kV_+^*(x)(V_+(x) - V_+^*(x)) \geq 0 \quad (\text{A.42})$$

o que demonstra ii).

ii) \implies i)

a) Considerem-se os pontos $x \in \Omega$, tais que, $V^*(x) \leq 0$. o que implica $V_+^*(x) = 0$. Portanto:

$$f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) \geq 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_L^2 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.43})$$

Como $(V(x) - V^*(x))$ tem sinal arbitrário, a desigualdade (A.44) só é verificada se $f_n^*(x) = 0$, o que demonstra i), neste caso.

b) Agora, considerem-se os pontos $x \in \Omega$, tais que, $V^*(x) > 0$, o que implica em $V_+^*(x) = V^*(x)$ e

$$f_n^*(x)(V(x) - V^*(x))kV^*(x)(V_+(x) - V(x)) \geq 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_L^2, \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{A.44})$$

Há dois casos a se considerar:

b1) se $V(x) \leq 0 \rightarrow V_+(x) = 0$ e

$$f_n^*(x)(V(x) - V^*(x)) - k(V^*(x))^2 \geq 0 \quad (\text{A.45})$$

ou ainda:

$$-k(V^*)^2 - f_n^*V^* + f_n^*V \geq 0 \quad (\text{A.46})$$

Para aqueles $V \in \mathcal{V}_L^2$, tais que, existe algum $x \in \Omega$, para o qual $V(x) \leq 0$, mas para $k > 0$, tem-se:

$$k(V^*(x) + \frac{V(x)}{2})^2 \geq 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_L^2, \forall x \in \Omega \quad (\text{A.47})$$

Somando (A.46) e (A.47), obtem-se:

$$\frac{k}{4}V^2(x) + f_n^*(x)V(x) - f_n^*(x)V^*(x) + kV(x)V^*(x) \geq 0 \quad (\text{A.48})$$

para os elementos $V \in \mathcal{V}_L^2$ e $\forall x \in \Omega$, tal que, $V(x) \leq 0$.

Desde que os valores de $x \in \Omega$ em consideração, são tais que $V^*(x) > 0$ e $V(x) \leq 0$, segue-se que:

$$-kV(x)V^*(x) \geq 0, \quad k > 0 \quad (\text{A.49})$$

Somando (A.48) e (A.49), obtem-se:

$$\frac{k}{4}V^2(x) + f_n^*V(x) - f_n^*V^*(x) \geq 0 \quad (\text{A.50})$$

Para que (A.50), seja satisfeita para todo $V \in \mathcal{V}_L^2$ é suficiente que:

$$\Delta_o = (f_n^*)^2 + kV^* f_n^* = 0 \quad (\text{A.51})$$

Como $f_n^*(x) < 0, \forall x \in \Omega$, resulta que:

$$f_n^* + kV^*(x) = 0 \quad (\text{A.52})$$

que é o que se queria demonstrar, neste caso.

Finalmente, considere-se o segundo caso:

b2) se $V(x) > 0 \rightarrow V_+(x) = V(x)$ e

$$f_n^*(V(x) - V^*(x)) + kV^*(x)(V(x) - V^*(x)) \geq 0 \quad (\text{A.53})$$

para todos os elementos $V \in \mathcal{V}_L^2$ e $\forall x \in \Omega$, tais que, $V(x) > 0$, ou então:

$$(f_n^* + kV^*(x))(V(x) - V^*(x)) \geq 0 \quad (\text{A.54})$$

Como o sinal de $(V(x) - V^*(x))$ é arbitrário, a desigualdade (A.54) só é verificada se:

$$f_n^* + kV^*(x) = 0 \quad (\text{A.55})$$

o que demonstra o último caso do Lema 4.

Lema 5

Considere a lei de atrito de Coulomb aplicado ao caso contínuo como descrito pelas desigualdades (2.118) e (2.119), com as variáveis convenientemente adimensionalizadas e que são transcritas a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ |f_a^*(x)| < \mu |f_n^*(x)| \implies u^*(x) = 0 \\ |f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)| \implies u^* \neq 0 \text{ e } \exists \lambda > 0 \mid u^*(x) = -\lambda f_a^*(x) \end{array} \right\} \quad (\text{A.56})$$

As desigualdades (A.56) são equivalentes à desigualdade:

$$f_a^*(x)[u(x) - u^*(x)] + \mu |f_n^*(x)| [|u(x)| - |u^*(x)|] \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.57})$$

Além disso a aplicação destes resultados à situação do problema de abandono, em que $u = u_A = u_L + \nu$, permite afirmar:

se existe $\nu^* \in \mathcal{U}_a^1$ satisfazendo (3.39), (3.40) e (3.42), conseqüentemente satisfazendo (3.47) e (3.42) então ν^* satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(\nu) \geq j_1(\nu^*) \\ f_a^*(\nu - \nu^*) + \mu |fnL| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \nu^*|) \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.58})$$

e reciprocamente, se existe $\bar{\nu} \in \mathcal{V}_a^1$ satisfazendo (A.58) e se $\bar{\nu} \in \mathcal{U}_a^1$, então $\bar{\nu}$ satisfaz (3.47) e (3.42), onde j_1 é dado por:

$$j_1(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx} \right)^2 dx - \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* \nu dx \quad (\text{A.59})$$

Demonstração:

Inicialmente é feita a demonstração da equivalência afirmada e, esta equivalência e as desigualdades envolvidas são relevantes para o desenvolvimento da tese.

O que se quer demonstrar é que as desigualdades (A.56) implicam na desigualdade (A.57) e reciprocamente. A demonstração da primeira implicação está feita em detalhes na referência [21] e é apresentada aqui, de forma sintética, em duas etapas:

• **primeira etapa:** partindo do fato que: $|f_a^*(x)| < \mu |f_n^*(x)|$ e conseqüentemente $u^*(x) = 0$, para cada valor de x em que a desigualdade é verificada, portanto basta provar que neste caso, tem-se:

$$f_a^*(x)u(x) + \mu |f_n^*(x)| |u(x)| \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}_a^1. \quad (\text{A.60})$$

Tomando $u^*(x) \geq 0$, em decorrência $|u^*(x)| = u^*(x)$. Como $-f_a^*(x) \leq |f_a^*(x)| < \mu |f_n^*(x)|$, resulta que $f_a^*(x) + \mu |f_n^*(x)| > 0$, mas $|u^*(x)| = u^*(x) \geq 0$, portanto conclui-se que a desigualdade (A.60) vale para este caso.

Se se toma $u^*(x) < 0$, um raciocínio análogo leva também à conclusão sobre a validade da desigualdade (A.60), portanto fica encerrada a primeira etapa da demonstração.

• **segunda etapa:** neste caso parte-se do fato que: $|f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)|$, em decorrência $u^*(x) \neq 0$ e $u^*(x) = -\lambda f_a^*(x)$, com $\lambda > 0$. Note-se então que $f_a^*(x) \neq 0$. Num primeiro momento, suponha-se que $f_a^*(x) > 0$. Neste caso $|f_a^*(x)| = f_a^*(x)$. Este fato mais o fato de que $\lambda > 0$ implicam que $u^*(x) < 0$ e portanto $|u^*(x)| = -u^*(x)$.

Tendo em conta que $|f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)|$ decorre que $|f_a^*(x)||u^*(x)| = \mu |f_n^*(x)||u^*(x)|$ e como $|f_a^*(x)| = f_a^*(x)$ e $|u^*(x)| = -u^*(x)$ resulta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \text{ tal que } f_a^*(x) = |f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)| \\ -f_a^*(x)u^*(x) - \mu |f_n^*(x)||u^*(x)| = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.61})$$

Por outro lado, tendo em vista que $|u(x)| \geq u(x)$, $\forall x \in \Omega$ se $|u(x)|$ é multiplicada por $f_a^*(x) > 0$ fornece $f_a^*(x)|u(x)| \geq -f_a^*(x)u(x)$. Nesta última expressão, substituindo $f_a^*(x)$ por $\mu |f_n^*(x)|$, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \text{ tal que } f_a^*(x) = |f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)| \\ f_a^*(x)u(x) + \mu |f_n^*(x)||u(x)| \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.62})$$

Adicionando a igualdade de (A.61) à desigualdade (A.62), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \text{ tal que } f_a^*(x) = |f_a^*(x)| = \mu |f_n^*(x)| \\ f_a^*(x)[u(x) - u^*(x)] + \mu |f_n^*(x)||u(x) - u^*(x)| \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{A.63})$$

Para o caso em que $f_a^*(x) > 0$ é o que se queria demonstrar. Admitindo, ao contrário, que $f_a^*(x) < 0$ e desenvolvendo raciocínios semelhantes ao caso anterior, conclui-se sobre a validade da desigualdade (A.57) também para este caso. Em resumo, admitindo como verdadeiras as expressões (A.56), resulta verdadeira a desigualdade (A.57). Para completar a demonstração da equivalência resta demonstrar a recíproca.

Fazendo $u(x) - u^*(x) = \phi(x)$ em (A.57) e tendo em conta que, pelas propriedades do valor absoluto de funções a valores reais $|\phi(x)| = |u(x) - u^*(x)| \geq |u(x)| - |u^*(x)|$, para cada valor de $x \in \Omega$, obtem-se:

$$f_a^*(x)\phi(x) + \mu |f_n^*(x)| |\phi(x)| \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.64})$$

se em (A.64) $\phi(x)$ é suposto positivo. Para estes valores de $x \in \Omega$ decorre que $-f_a^*(x) \leq \mu |f_n^*(x)|$. Se ao contrário $\phi(x)$ é suposto negativo, para os valores de $x \in \Omega$ que isto se verifica decorre que $f_a^*(x) \leq \mu |f_n^*(x)|$, conclui-se portanto que:

$$|f_a^*(x)| \leq \mu |f_n^*(x)| \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.65})$$

Como a função u é um elemento arbitrário de $H^1(\Omega)$ pode ser tomada como $u = \rho u^*$, com ρ real e $\rho \geq 0$. Substituindo a função u na desigualdade (A.57) e fazendo ρ assumir os valores 0 e 2, respectivamente, obtem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} -f_a^*(x)u^*(x) - \mu |f_n^*(x)| |u^*(x)| \geq 0 \\ f_a^*(x)u^*(x) + \mu |f_n^*(x)| |u^*(x)| \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.66})$$

Das relações (A.66) decorre que vale a igualdade. Tendo em mente a desigualdade (A.65) e a igualdade decorrente de (A.66), resulta que:

se $|f_a^*(x)| < \mu |f_n^*(x)|$ então $u^*(x) = 0$.

Valendo a igualdade em (A.65) e a igualdade decorrente de (A.66), conclui-se que:

se $u^*(x) \neq 0$ então:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^*(x) = -\left[\frac{|u^*(x)|}{|f_a^*(x)|}\right] f_a^*(x) = -\lambda f_a^*(x) \\ \lambda > 0 \text{ para cada valor de } x \end{array} \right\} \quad (\text{A.67})$$

Fica demonstrado portanto que (A.56) e (A.57) são equivalentes. Na seqüência são demonstrados alguns resultados adicionais relacionados ao uso dessas desigualdades no caso do problema de abandono e que constituem a segunda parte do Lema 5.

\implies De (3.50) e (3.51) obtem-se trivialmente que:

$$\frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 dx - \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* \nu dx \geq \frac{1}{2} \int_0^p \left(\frac{d\nu^*}{dx}\right)^2 dx - \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* \nu^* dx \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^2 \quad (\text{A.68})$$

A (3.42) é a própria desigualdade de (A.58).

\Leftarrow Como $j_1(\nu)$ é diferenciável segundo Gâteaux, supondo existir $\bar{\nu} \in \mathcal{U}_a^2$ que satisfaça (A.58) então fazendo uso do Teorema 1 do Apêndice B, obtem-se facilmente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \bar{\nu}}{dx^2} = -\frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^* \\ f_a^*(\nu - \bar{\nu}) + \mu |f_n^*| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \bar{\nu}|) \leq 0 \end{array} \right\} \quad \forall \nu \in \mathcal{U}_a^1 \quad (\text{A.69})$$

Como o fator $\frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \frac{d\xi^*}{dx}$ é da ordem ε_f^2 , pode-se escrever:

$$\frac{d^2 \bar{\nu}}{dx^2} \simeq -\frac{\beta_f}{\delta_f} f_a^* - \frac{\beta_f \varepsilon_f}{\delta_f} \gamma_0 \frac{d\xi^*}{dx} = \frac{1}{\delta_f} \frac{dt^*}{dx} \quad (\text{A.70})$$

Para $x \in \Omega$, arbitrário, obtem-se por integração:

$$\frac{d\bar{\nu}}{dx}(p) - \frac{d\bar{\nu}}{dx}(x) = \frac{t^*(p)}{\delta_f} - \frac{t^*(x)}{\delta_f} \quad (\text{A.71})$$

Como $\frac{d\bar{\nu}}{dx}(p) = \frac{t^*(p)}{\delta_f}$, pois $\bar{\nu} \in \mathcal{U}_a^1$, resulta:

$$\frac{d\bar{\nu}}{dx} = \frac{t^*(x)}{\delta_f} \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.72})$$

As equações (A.70) e (A.72), completam a prova, uma vez que a desigualdade em (A.69) é idêntica àquela de (3.42).

Lema 6

Se existe $\nu^* \in \mathcal{V}_a^1$, satisfazendo (A.58), então ν^* satisfaz a inequação:

$$J_a^1(\nu^*) \leq J_a^1(\nu) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.73})$$

e reciprocamente.

Demonstração:

Se ν^* satisfaz (A.58), então para toda terna $\varepsilon, z, (z + \varepsilon)$ em que cada um dos elementos pertence a Ω , vale:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(\nu) \geq j_1(\nu^*) \\ j_\varepsilon(\nu) \geq j_\varepsilon(\nu^*) \end{array} \right\} \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.74})$$

onde, para cada $z \in \Omega$, fixo:

$$j_\varepsilon(\nu) = \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_z^{z+\varepsilon} f_a^* \nu dx + \frac{\beta_f}{\delta_f} \mu \int_z^{z+\varepsilon} |f_{nL}^*| |u_L^* + \nu| dx \quad (\text{A.75})$$

De (A.58) (A.74) e (A.75) pode-se observar que:

$$\text{a) } \bullet \quad j_\varepsilon(\nu) \geq j_\varepsilon(\nu^*) \quad \forall \varepsilon, z, (z + \varepsilon) \in \Omega \quad (\text{A.76})$$

$$\text{b) } \bullet \quad j_0(\nu) = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$\text{c) } \bullet \quad j_p(\nu) = \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p f_a^* \nu dx + \frac{\beta_f}{\delta_f} \mu \int_0^p |f_{nL}^*| |u_L^* + \nu| dx \quad (\text{A.78})$$

e seja

$$\mathcal{J}_a^1(\nu, \varepsilon) = j_1(\nu) + j_\varepsilon(\nu) \quad (\text{A.79})$$

De (A.74) decorre que:

$$\mathcal{J}_a^1(\nu, \varepsilon) \geq J_a^1(\nu^*, \varepsilon) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.80})$$

e, para todo $\varepsilon, z, (z + \varepsilon) \in \Omega$.

Em particular:

$$\mathcal{J}_a^1(\nu, p) \geq \mathcal{J}_a^1(\nu^*, p) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1. \quad (\text{A.81})$$

Identificando $J_a^1(\nu)$ com $\mathcal{J}_a^1(\nu, p)$, a primeira parte do Lema fica demonstrada.

Para demonstrar a recíproca, considerar a expressão (A.80), observando que, em particular:

$$\mathcal{J}_a^1(\nu, 0) \geq \mathcal{J}_a^1(\nu^*, 0) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1. \quad (\text{A.82})$$

Mas então lançando mão de (A.77) e (A.79) segue-se que:

$$j_1(\nu) \geq j_1(\nu^*) \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.83})$$

Além disso, por hipótese e pela definição de $j_\varepsilon(\nu)$, tem-se de (A.58) que:

$$\frac{\beta_f}{\delta_f} \left\{ \int_z^{z+\varepsilon} [f_a^*(\nu - \nu^*) + \mu |f_{nL}^*| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \nu^*|)] dx \geq 0 \right\} \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.84})$$

de onde se conclui facilmente, (ver demonstração do Lema 4) que:

$$f_a^*(\nu - \nu^*) + \mu |f_{nL}^*| (|u_L^* + \nu| - |u_L^* + \nu^*|) \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.85})$$

que finaliza a demonstração do Lema 6.

Lema 7

O conjunto $\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ é convexo, além disso o funcional $J_a^1(\nu)$ é não só convexo em \mathcal{V}_a^1 como estritamente convexo.

Demonstração:

Transcrevendo a definição de \mathcal{V}_a^1 ,

$$\mathcal{V}_a^1 = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{dx}(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f} \right\} \quad (\text{A.86})$$

quer-se mostrar que se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{V}_a^1 \implies \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathcal{V}_a^1 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$.

Mas se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{V}_a^1$, seja:

$$\phi(x) = \lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_2(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{A.87})$$

Verifica-se trivialmente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = 0 \\ \phi(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f} \end{array} \right\} \quad (\text{A.88})$$

Portanto $\phi \in \mathcal{V}_a^1 \quad \forall \lambda \in \Omega$, o que implica a convexidade de \mathcal{V}_a^1 .

Resta mostrar que $J_a^1(\nu)$ é estritamente convexo, ou seja, quer-se mostrar que:

$\forall \lambda \in [0, 1]$ e $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{V}_a^1$, com $\varphi_1 \neq \varphi_2$, tem-se:

$$J_a^1(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2) \leq \lambda J_a^1(\varphi_1) + (1-\lambda) J_a^1(\varphi_2) \quad (\text{A.89})$$

valendo a igualdade se e apenas se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Da definição de $J_a^1(\nu)$, vem:

$$\begin{aligned} J_a^1(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2) &= \frac{1}{2} \int_0^p \left(\lambda \frac{d\varphi_1}{dx} + (1-\lambda) \frac{d\varphi_2}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta_f}{\delta_f} \mu \int_0^p |f_{nL}^*| |u_L^* + \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^p \left[\lambda^2 \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 + 2\lambda(1-\lambda) \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} + (1-\lambda)^2 \left(\frac{d\varphi_2}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{\beta_f}{\delta_f} \int_0^p |f_{nL}^*| \\ &\quad |\lambda(u_L^* + \varphi_1) + (1-\lambda)(u_L^* + \varphi_2)| dx \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Da desigualdade fundamental:

$$\bullet \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dx} \right)^2 \quad (\text{A.91})$$

A igualdade vale se e apenas se $\frac{d\varphi_1}{dx}(x) = \frac{d\varphi_2}{dx}(x)$, $x \in \Omega$. Pelas condições de contorno, e pela continuidade das funções φ_1 e φ_2 a condição (A.91) implica que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Pela desigualdade triangular:

$$\bullet |\lambda(u_L^* + \varphi_1) + (1 - \lambda)(u_L^* + \varphi_2)| \leq \lambda|u_L^* + \varphi_1| + (1 - \lambda)|u_L^* + \varphi_2| \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{V}_a^1 \quad (\text{A.92})$$

De (A.91) e (A.92) pode-se escrever que:

$$J_a^1(\lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2) \leq \lambda J_a^1(\varphi_1) + (1 - \lambda) J_a^1(\varphi_2) \quad (\text{A.93})$$

Supondo $\varphi_1 \neq \varphi_2$ a igualdade vale se e apenas se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Isto conclui a demonstração do Lema 7.

Lema 8

$\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ é um conjunto fechado e completo.

Demonstração:

Que \mathcal{V}_a^1 é fechado decorre dos seguintes fatos:

• $\{\varphi_i\}_{i \in N}$, $\varphi_i \in \mathcal{V}_a^1$ uma seqüência convergente para uma função φ_0 , o que se quer mostrar é que $\varphi_0 \in \mathcal{V}_a^1$.

• $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ pois a seqüência das φ_i pertence a $\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ é completo.

• $\varphi_0(0) = 0$, pelo fato de que cada uma das φ_i , $\forall i \in N$ satisfaz $\varphi_i(0) = 0$, o que significa que elas geram no conjunto R uma seqüência de Cauchy. Mas R é completo, decorre então que a seqüência de números reais $\varphi_i(0)$ converge. Evidentemente o limite dessa seqüência é o número real nulo.

• $\frac{d\varphi_0}{dx}(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f}$, pelo fato de as derivadas das $\frac{d\varphi_i}{dx}(p)$ $\forall i \in N$ satisfazerem $\frac{d\varphi_i}{dx}(p) = -\frac{T_L^*(p)}{\delta_f}$, significa que elas também geram uma seqüência de Cauchy no conjunto dos reais e por raciocínio análogo decorre a conclusão.

Destes fatos segue-se que \mathcal{V}_a^1 é fechado. Considerando que $\mathcal{V}_a^1 \subset H^1(\Omega)$ e que $H^1(\Omega)$ é completo, pelo Teorema 2 do capítulo 3 \mathcal{V}_a^1 é completo.

Lema 9

Seja \mathcal{V}_a^2 , segue da definição deste conjunto que ele é parte do espaço de Hilbert $H^2(\Omega)$, considere então o operador:

$$A : H^2(\Omega) \longrightarrow (H^2(\Omega))^*$$

definido por:

$$A = \beta_f \varepsilon_f \left\{ F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_f \frac{d^4}{dx^4} \right\} \quad (\text{A.94})$$

e seja A a restrição do operador A ao subconjunto \mathcal{V}_a^2 de $H^2(\Omega)$. A é estritamente monótono, hemicontínuo e coercivo (ver Apêndice B).

Demonstração:

Como a monotonicidade forte já implica em estrita monotonicidade e coercividade, para demonstrar que o operador A é estritamente monótono basta demonstrar que A é fortemente monótono. Mesmo que esta condição não seja necessária para a verificação das hipóteses do teorema 10 do Apêndice B, ela é suficiente para a verificação das aludidas hipóteses. A idéia é determinar diretamente o número λ que satisfaz a desigualdade (B.18), oriunda da definição de monotonicidade forte, como transcrita a seguir, uma vez identificado o espaço reflexivo E com o espaço reflexivo $H^2(\Omega)$ e o subconjunto K com o subconjunto \mathcal{V}_a^2 .

$$\begin{aligned} \exists m_2 > 0 \text{ tal que} \\ \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2 \quad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq m_2 \|u - v\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Da definição do operador A , vem:

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle = \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} (u - v) (u - v) dx + \\ k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4}{dx^4} (u - v) (u - v) dx \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Integrando duas vezes por partes cada uma das parcelas de (A.96) e considerando a existência da segunda derivada da função $F_a^*(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle &= \beta_f \varepsilon_f \left\{ \int_0^p (-F_a^*(x)) \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^p \frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*}{dx^2} (u - v)^2 dx \right\} + \\
 &\quad k_f \varepsilon_f \int_0^p \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \quad (\text{A.97})
 \end{aligned}$$

Decompondo, na suposição de que $p > 1$, a primeira parcela na soma de duas parcelas equivalentes, para efeito da aplicação da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle &= \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{1}{p^2} \int_0^p (-F_a^*(x)) \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx + \right. \\
 &\quad \frac{p^2 - 1}{p^2} \int_0^p (-F_a^*(x)) \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx + \\
 &\quad \left. \int_0^p \frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*}{dx^2} (u - v)^2 dx \right\} + \\
 &\quad k_f \varepsilon_f \int_0^p \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \quad (\text{A.98})
 \end{aligned}$$

Lembrando que $(-F_a^*(x)) \geq 0 \forall x \in \Omega$, além de ser não crescente, a desigualdade (B.26) de Poincaré-Friedrichs, proveniente do Lema 13 do Apêndice B, pode ser aplicada sobre a primeira parcela de (A.97), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle &\geq \beta_f \varepsilon_f \left\{ \frac{\pi^2}{p^4} \frac{F_a^*(\zeta_1)}{F_a^*(0)} \int_0^p (-F_a^*(x)) (u - v)^2 dx + \right. \\
 &\quad \frac{p^2 - 1}{p^2} \int_0^p (-F_a^*(x)) \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx + \\
 &\quad \left. \int_0^p \frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*}{dx^2} (u - v)^2 dx \right\} + \\
 &\quad k_f \varepsilon_f \int_0^p \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \quad (\text{A.99})
 \end{aligned}$$

Definindo o número λ^2 das hipóteses subsidiárias do Capítulo 3, como $\lambda^2 = \frac{\pi^2}{p^4} \frac{F_a^*(\zeta_1)}{F_a^*(0)}$ e fazendo uso da referida hipótese, pode ser definido o número real positivo λ_a conforme estabelecido pela expressão (3.78), obtendo-se:

$$\lambda_a = \inf_{x \in \Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 F_a^*(x)}{dx^2} - \lambda^2 F_a^*(x) \right] \quad (\text{A.100})$$

Decorre da desigualdade (A.99) e das expressão (A.100) que:

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle \geq & \beta_f \varepsilon_f \left\{ \lambda_a \int_0^p (u - v)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{p^2 - 1}{p^2} [-F_a^*(\zeta_1)] \int_0^p \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx \right\} \\
 & + k_f \varepsilon_f \int_0^p \left[\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \quad (\text{A.101})
 \end{aligned}$$

Definindo o número real positivo m_2 , a seguir:

$$m_2 = \min \left\{ \beta_f \varepsilon_f \lambda_a, \beta_f \varepsilon_f \frac{p^2 - 1}{p^2} [-F_a^*(\zeta_1)], k_f \varepsilon_f \right\} \quad (\text{A.102})$$

resulta a desigualdade:

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle \geq & m_2 \left\{ \int_0^p (u - v)^2 dx + \int_0^p \left[\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right]^2 dx \right. \\
 & \left. \int_0^p \left[\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx \right\} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2. \quad (\text{A.103})
 \end{aligned}$$

que é reconhecida imediatamente como:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq m_2 \|u - v\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad (\text{A.104})$$

como m_2 é um número positivo decorre que $\langle Au - Av, u - v \rangle = 0$ se e somente se $u = v$, portanto o operador A é fortemente monótono. Em consequência ele é estritamente monótono e coercivo.

Resta provar que o operador A é hemicontínuo. É o que será feito na seqüência.

Conforme a definição de operador hemicontínuo do Apêndice B, particularizada para o caso em que o domínio do operador é convexo, para se provar que o operador A é hemicontínuo em \mathcal{V}_a^2 deve-se verificar que, para todo par de elementos $u, v \in \mathcal{V}_a^2$ e todo elemento $w \in H^2(\Omega)$ a função $t \mapsto f(t) = \langle A(tu + (1-t)v), w \rangle$ é uma função contínua do intervalo $[0, 1]$ em \mathbb{R} . A partir da definição de A , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 f(t) = \langle A(tu + (1-t)v), w \rangle = & \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} (tu + (1-t)v) w dx + \\
 & k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4}{dx^4} (tu + (1-t)v) w dx \\
 & \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2 \text{ e } \forall w \in H^2(\Omega) \quad (\text{A.105})
 \end{aligned}$$

que pelas propriedades da derivada e da integral pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} u w dx + \\
 &\quad (1-t) \beta_f \varepsilon_f \int_0^p F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} v w dx + \\
 &\quad t k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4}{dx^4} u w dx + \\
 &\quad (1-t) k_f \varepsilon_f \int_0^p \frac{d^4}{dx^4} v w dx \\
 &\quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2 \text{ e } \forall w \in H^2(\Omega).
 \end{aligned} \tag{A.106}$$

Reordenando os termos em t e em $(1-t)$, resulta:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t \langle Au, w \rangle + (1-t) \langle Av, w \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_a^2 \\
 &\quad \text{e } \forall w \in H^2(\Omega)
 \end{aligned} \tag{A.107}$$

$f(t)$ é uma função linear e portanto contínua em t . Como conseqüência o operador A é hemicontínuo em \mathcal{V}_a^2 . Este fato conclui a demonstração do lema que dá sustentação para a demonstração da existência e unicidade da solução do problema **Pa2**.

Lema 10

O conjunto $\mathcal{V}_a^2 \subset H^2(\Omega)$ é um subespaço vetorial do espaço $H^2(\Omega)$, é não vazio, convexo e fechado.

Demonstração:

Considere o conjunto $\mathcal{V}_a^2 \subset H^2(\Omega)$ conforme definido por (A.94). É fácil ver que \mathcal{V}_a^2 é não vazio. Basta considerar os polinômios que satisfaçam as condições especificadas no contorno, isto é, em 0 e em p .

A convexidade de \mathcal{V}_a^2 também é trivial pois, se u e v são elementos arbitrários de \mathcal{V}_a^2 então qualquer combinação convexa de u e v também pertence a \mathcal{V}_a^2 .

A prova de que \mathcal{V}_a^2 é fechado acompanha a prova do Lema 8.

Lema 11

Seja o funcional:

$$j(\xi) = \frac{1}{2}\beta_f k \int_0^p (V_+^A)^2 dx + \int_0^p (\beta_f f_{nL}^* - \varepsilon_f t^* \frac{d^2 y_L}{dx^2}) \xi dx \quad (\text{A.108})$$

definido em \mathcal{V}_a^2 . Pode-se afirmar que j é convexo, próprio e semicontínuo inferiormente.

Demonstração:

A prova da convexidade de j não apresenta qualquer dificuldade e segue os passos da prova da convexidade do funcional $J_L(y_L)$ feita no Lema 3. A semicontinuidade inferior decorre do fato de j ser contínuo, mais ainda, j é diferenciável segundo Gâteaux.

Que j é próprio é de fácil verificação, pois tomando a função $\xi_0(x) = 0$, observando que $\xi_0 \in \mathcal{V}_a^2$, tem-se:

$$j(0) = \frac{1}{2}\beta_f k \int_0^p \left(\frac{V_L(x) + |V_L(x)|}{2} \right)^2 dx \quad (\text{A.109})$$

Como $V_L(x)$ é a única solução do problema $PL2$, segue-se que $j(0) < \infty$ e, portanto, j é próprio.

APÊNDICE B

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

B.1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal desse Apêndice é oferecer uma coleção de definições e de resultados, tais como:

- teoremas fundamentais da Análise Funcional, do Cálculo Variacional e das próprias Inequações Variacionais que dão a base para os resultados apresentados no Capítulo 3.

Espera-se que este expediente permita percorrer o Capítulo 3 sem necessidade de consultar a bibliografia especializada. A função destas notas tem caráter mais de lembretes do que de introdução organizada e didática de temas.

B.2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 3 *Métrica*

Uma **métrica** num conjunto \mathcal{M} é uma aplicação $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$, que associa a cada par ordenado (x, y) de elementos de \mathcal{M} um único número real $d(x, y)$, denominada **distância** de x a y e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} d1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d2) d(x, y) = d(y, x) \text{ simetria} \\ d3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ desigualdade triangular} \end{array} \right\} \quad (\text{B.1})$$

O conjunto \mathcal{M} munido de uma métrica é chamado **espaço métrico**.

Nota: \mathbb{R}^+ é o conjunto dos números reais não negativos.

Definição 4 *Bola Aberta*

Seja \mathcal{M} um espaço métrico. Chama-se **Bola Aberta** de centro a e raio r ao conjunto de todos os elementos de \mathcal{M} situados a uma distância de a estritamente menor que r , mais precisamente:

$$B(a, r) = \{x \in \mathcal{M} : d(a, x) < r\}.$$

Definição 5 *Bola Fechada*

Bola Fechada de centro a e raio r é o conjunto de elementos x de \mathcal{M} dados por:

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathcal{M} : d(a, x) \leq r\}.$$

Pode-se falar em seqüências em um espaço métrico, bem como em seqüências convergentes, seqüências de Cauchy, espaços métricos completos, etc. No contexto dessa tese estes conceitos serão apresentados e usados no sentido mais restrito, de espaços vetoriais.

B.3 ESPAÇOS VETORIAIS

Apesar de desnecessário, mas por se tratar de um dos conceitos mais fundamentais que está subjacente a todos os demais abordados na tese, é apresentada a definição de espaço vetorial acompanhada de uns poucos exemplos.

Definição 6

Um espaço vetorial é um par (\mathbf{K}, V) , em que:

• \mathbf{K} é um corpo de escalares;

• V é um conjunto de elementos de mesma natureza. Este conjunto é munido de uma operação, assim definida:

$+$ é uma aplicação de $V \times V \longrightarrow V$, chamada soma de vetores, como indicado a seguir:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \tag{B.2}$$

tal que $+(x, y) \longrightarrow x+y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

+1) *Associativa*

$\forall x, y, z \in V$, tem-se: $(x+y)+z = x+(y+z)$.

+2) *Existência do elemento neutro da soma:*

$\forall x \in V, \exists$ um elemento $\theta \in V$ tal que: $x + \theta = x$.

+3) *Existência do oposto de cada elemento $x \in V$*

$\forall x \in V, \exists$ um elemento $y \in V$, tal que: $x + y = \theta$, indica-se $y = \theta - x = -x$

+4) *Comutativa*

$\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$

\mathbf{K} é um corpo, com uma estrutura de grupo comutativo em relação às operações: soma de escalares e produto de escalares, além disso vale a propriedade distributiva do produto em relação à soma. Os elementos do corpo \mathbf{K} e do conjunto V se combinam através de uma operação chamada produto de escalar por vetor, que é definida a seguir: \cdot é uma aplicação de $\mathbf{K} \times V \rightarrow V$, chamada produto por escalar, assim:

$\cdot : (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{x}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

.1) $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$, tem-se:

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$$

$\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall x \in V$, valem:

$$.2) (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$$

$$.3) (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$$

$$.4) 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

OBSERVAÇÕES:

i) O elemento neutro da propriedade +2) é usualmente denotado com o símbolo 0 (zero), apesar da diferença conceitual entre ele e o 0 (zero) do conjunto dos reais. No que segue o elemento neutro de um espaço vetorial é sempre denotado pelo símbolo 0 (zero).

ii) A operação \cdot (produto por escalar) é capaz de "fundir" um escalar com um vetor resultando um vetor. Conceitualmente a operação " \cdot " é diferente do produto entre números. Apesar disso, a notação para produto de escalar por vetor é a mesma que se usa para produtos de dois números.

iii) Na propriedade .2) a operação $+$ (soma) entre números é conceitualmente diferente da operação $+$ (soma) introduzida. Na propriedade .3) há um produto de dois escalares e um produto de um escalar por um vetor.

iv) O elemento neutro introduzido na propriedade +2) é único.

v) No que segue o corpo de escalares \mathbf{K} é identificado com o corpo dos reais \mathbf{R} . A maioria dos conceitos e resultados enunciados vale se o corpo de escalares for o corpo \mathbf{Q} dos números racionais ou o corpo \mathbf{C} dos números complexos.

B.3.1 Exemplos de Espaços Vetoriais

e1) Considere o conjunto V como sendo o conjunto de n -uplas ordenadas de números reais e o corpo \mathbf{R} de números reais como sendo o corpo de escalares. A operação $+$ (soma) no conjunto V é a soma de n -uplas. A operação produto por escalar é a operação de números por n -uplas. Neste caso o par (\mathbf{R}, V) com correspondentes operações é um espaço vetorial.

e2) Considere o conjunto V das funções definidas e contínuas num intervalo $[a, b]$ da reta, assumindo valores reais, definindo-se:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ e } \forall x, y \in V$$

a) $(x+y)(t) = x(t) + y(t) \quad \forall t \in [a, b]$, onde a operação " $+$ " é a soma de dois vetores no primeiro caso e é a soma de dois números reais no segundo caso.

b) $(\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)$, onde a operação " \cdot " é o produto de um escalar por um vetor no primeiro caso e é o produto de dois números no segundo caso.

Os exemplos e1) (para cada valor de n tem-se um espaço) constituem casos em que a dimensão do espaço é finita. O exemplo e2) é um caso em que a dimensão do espaço vetorial é infinita.

B.3.2 Funcional, Funcional Convexo e Conjuntos Convexos

Definição 7 Seja (\mathbf{R}, E) , munido das operações correspondentes, um espaço vetorial. Chama-se **funcional** toda aplicação que associa a cada vetor f de E um único escalar pertencente a \mathbf{R} . Anota-se:

$$J : E \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$J : f \longmapsto J(f)$$

Exemplos de Funcionais

i) Considere a aplicação que a cada vetor do \mathbf{R}^n associa o seu módulo, que é um número real. Portanto essa aplicação é um funcional.

ii) Considere um oleoduto de comprimento L , com uma de suas extremidades situada na origem de um sistema coordenadas, submetido a uma força de tração T , aplicada

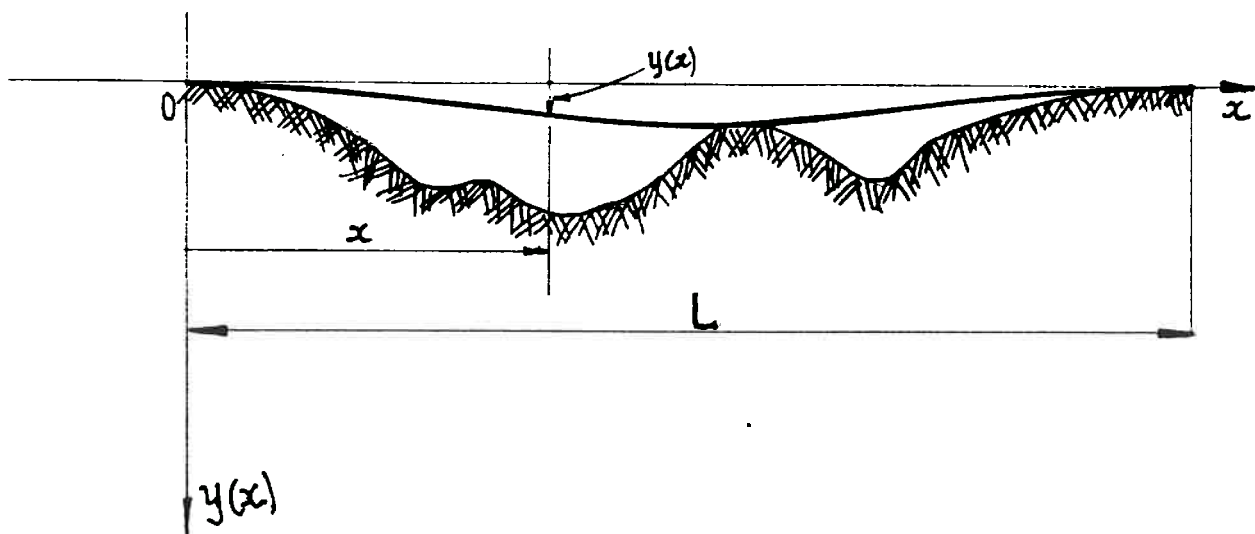


Figura B.1: Deslocamentos verticais da linha elástica do oleoduto.

tangencialmente na outra extremidade. Suponha que o oleoduto tenha peso por unidade de comprimento no ar igual a γ_0 , esteja submetido a uma força de empuxo por unidade de comprimento igual a w_0 e esteja apoiado em um solo semi-elástico linear de constante de elasticidade k , cujo perfil é descrito por uma função $v_s(x)$. Se $y(x)$ é o deslocamento vertical (em relação ao eixo horizontal) da seção de abscissa x , ver Figura B.1

suponha que:

$$y(0) = y(L) = 0 \tag{B.3}$$

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(L) = 0. \tag{B.4}$$

Definindo:

$$V = \{f : [0, L] \longrightarrow \mathbf{R} \mid f \in C^1[0, L], f^{(2)} \in \mathcal{L}_2[0, L], f(0) = f(L) = 0, \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(L) = 0\} \tag{B.5}$$

$E = \{\mathbf{R}, V\}$, munido das operações correspondentes, é um espaço vetorial.

Seja:

$$J : E \longrightarrow \mathbf{R}$$

$J : y \longmapsto J(y)$, definido por:

$$J(y) = \frac{1}{2}T \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \alpha_f \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}k \int_0^L \left(\frac{y - v_s + |y - v_s|}{2}\right)^2 dx - \int_0^p (w_0 - \gamma_0)y dx \quad (\text{B.6})$$

$J(y)$ é um funcional cujo domínio é o espaço E e o seu contra domínio é o conjunto \mathbf{R} , ou seja, para cada configuração $y(x)$ da linha elástica está associado o número real $J(y)$, dado por (B.6).

Definição 8 *Funcional Linear*

Sejam:

E espaço vetorial sobre o corpo \mathbf{R} e

J um funcional definido de E em \mathbf{R} .

J diz-se linear se $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall u, v \in V$, tem-se:

$$J(\alpha u + \beta v) = \alpha J(u) + \beta J(v) \quad (\text{B.7})$$

Definição 9 *Conjunto Convexo*

E -espaço vetorial. $K_c \subseteq E$

Diz-se que K_c é um conjunto convexo se e somente se:

$\forall u, v \in K_c, \forall \lambda \in [0, 1]$, o conjunto

$\lambda u + (1 - \lambda)v$ está inteiramente contido em K_c .

Definição 10 *Funcional Convexo*

J é um funcional definido em E . $K_c \subseteq E$ é um conjunto convexo.

J diz-se um funcional convexo em K_c se $\forall u, v \in K_c$ e $\forall \lambda \in (0, 1)$

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v) \quad (\text{B.8})$$

Diz-se ainda que J é estritamente convexo se vale a desigualdade estrita em (B.9) sempre quando $u \neq v$.

B.3.3 Espaços Vetoriais Normados

Definição 11 *Seminorma.* Seja E um espaço vetorial. Uma seminorma é um funcional s definido em E , que goza das seguintes propriedades:

$$s1) \forall u \in E \quad s(u) \geq 0 \text{ (não negatividade)}$$

$$s2) \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u \in E \quad s(\lambda u) = |\lambda|s(u) \text{ (homogeneidade)}$$

$$s3) \forall u, v \in E \quad s(u + v) \leq s(u) + s(v) \text{ (desigualdade triangular)}.$$

EXEMPLOS DE SEMINORMA

es1) \mathbf{R}^2 -espaço vetorial sobre \mathbf{R} . Seja o funcional:

$$\begin{aligned} s_1 : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) &\longmapsto s_1(u, v) \end{aligned}$$

com s_1 dado por:

$$s_1(u, v) = |u + v| \quad (\text{B.9})$$

Verifica-se facilmente que as propriedades s1), s2) e s3) são satisfeitas. Portanto o funcional s_1 é uma seminorma.

es2) $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ -espaço vetorial das funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, $a < b$, com valores reais. Para todo $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ define-se o funcional:

$$\|f\|_s = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (\text{B.10})$$

Também neste caso é facilmente verificado que as propriedades s1), s2) e s3) são satisfeitas. Portanto, o funcional $\| \cdot \|_s$ é uma semi-norma.

Definição 12 *Norma*

Chama-se **norma** n sobre E a toda seminorma definida em E que cumpre o seguinte requisito:

$$\forall v \in E \quad n(v) = 0 \implies v = 0.$$

Apesar de ter sido indicado o funcional norma pelo símbolo n , o símbolo básico, mais usual para se indicar uma norma é $\| \cdot \|$. Para diferenciar uma norma de outra é freqüente este símbolo receber complementos, tais como subíndices, superíndices, mais uma barra vertical de cada um dos lados guarnecendo as já existentes, etc.

Definição 13 *Espaço Vetorial Normado*

Um Espaço Vetorial Normado é qualquer par (E, n) .

Ocorrem situações em que se fala em distância entre elementos de um espaço vetorial normado. Nestes casos se a norma do espaço é $\| \cdot \|$, a distância entre dois elementos x, y quaisquer do espaço é: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 14 *Seqüência de Cauchy*

Uma seqüência $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é chamada seqüência de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$ existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \geq n_0 \text{ e } n \geq n_0 \text{ implica } |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

esta implicação permite escrever que:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |a_m - a_n| = 0$$

Demonstra-se que em \mathbb{R} toda seqüência de Cauchy é convergente e reciprocamente que toda seqüência convergente é de Cauchy. O conceito de seqüência de Cauchy pode ser aplicado para os elementos de um espaço vetorial E qualquer, no entanto, o resultado acima pode não ser verdadeiro. O que se pode afirmar é que toda seqüência convergente de elementos de E é de Cauchy mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Ela só é verdadeira se o espaço E for **completo**. Isto quer dizer que um espaço vetorial normado é completo se toda seqüência de Cauchy de elementos do espaço for convergente para algum elemento do próprio espaço.

Cabe, portanto, a seguinte definição:

Definição 15 *Seqüência de Cauchy em um espaço vetorial normado E*

Uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos do espaço E é de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tal que, para todos $m, n \in \mathbb{N}$ e $m, n \geq n_0$ tem-se a desigualdade $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Uma vez introduzida a definição de seqüência de Cauchy em espaço vetorial normado qualquer, fica claro o que se entende por espaço vetorial normado completo.

Definição 16 *Espaço de Banach*

Um espaço vetorial normado e completo é chamado espaço de Banach.

Definição 17 *Espaço Vetorial Dual*

Seja E um espaço vetorial.

Sejam ϕ_1 e ϕ_2 dois funcionais lineares definidos em E . A soma $\phi_1 + \phi_2$ também é um funcional linear $\phi = \phi_1 + \phi_2$, assim:

$$\phi(x) = (\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad \forall x \in E \quad (\text{B.11})$$

O produto de um funcional linear ψ por um escalar α é um funcional linear $\chi = \alpha \cdot \psi$, assim:

$$\chi(x) = \alpha \cdot \psi(x), \quad \forall x \in E \quad (\text{B.12})$$

As operações soma e produto por escalar assim definidas estabelecem os requisitos essenciais para tornar o conjunto de todos os funcionais lineares definidos em E , um espaço vetorial. De fato, não é difícil verificar que estas operações satisfazem as propriedades impostas para que se tenha um espaço vetorial. Obtem-se desse modo um novo espaço vetorial, indicado por E^* . Este espaço é chamado espaço dual do espaço E .

O processo usado para construir o espaço dual de E pode também ser usado para se obter o espaço dual do espaço E^* . Desse modo é construído o segundo dual de E , normalmente indicado por E^{**} . Considere o caso em que o espaço E é um espaço de Banach. De uma maneira bastante natural pode ser introduzida uma norma em E^* . Se ϕ é um funcional linear definido em E , uma norma pode ser definida em E^* , através da expressão:

$$\|\phi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\phi(x)}{\|x\|}, \quad x \in E \quad (\text{B.13})$$

Verifica-se facilmente que esta expressão define, de fato, uma norma em E^* .

Definição 18 *Imersão Isométrica*

Diz-se que um espaço normado X é imerso em um espaço normado Y se existem uma aplicação linear φ , definida no espaço X com valores no espaço Y e uma constante $\beta > 0$, tais que:

$$\|\varphi(x)\| \leq \beta\|x\|, \quad \forall x \in X \quad (\text{B.14})$$

Naqueles casos em que os espaços X e Y foram obtidos pela introdução de duas normas diferentes num mesmo espaço vetorial básico E , então escolhendo como φ a correspondência que identifica os elementos de X e de Y como elementos de E , diz-se que X é imerso naturalmente ou canonicamente em Y . Se $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ diz-se que a imersão de X em Y é isométrica.

Definição 19 *Espaços Reflexivos*

Esta definição parte de um resultado importante quando se trata de espaços duais. O resultado é um teorema de análise funcional que estabelece:

"Todo espaço de Banach X admite uma imersão isométrica em X^{**} ". Decorre deste fato que $X \subset X^{**}$.

Se $((X^*)^* = X$, diz-se que o espaço de Banach X é reflexivo.

B.3.4 Espaços Vetoriais de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um particular espaço de Banach onde a norma é obtida a partir de um produto escalar. Um produto escalar tem propriedades muito interessantes que permitem generalizar alguns conceitos fundamentais da geometria elementar. Como no caso dos espaços de Banach, aqui também interessam os espaços vetoriais definidos sobre o corpo dos reais.

Definição 20 *Produto Escalar*

Seja H um espaço vetorial definido sobre o corpo dos reais.

Um **produto escalar** sobre H é uma aplicação de $H \times H$ em R , que a cada par ordenado (x, y) de elementos de H faz corresponder um número real, denotado por $\langle x, y \rangle$ e que verifica as seguintes propriedades:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, y, z \in H \quad \forall \lambda \in R \\ h1) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ positividade} \\ h2) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ simetria} \\ h3) \left\{ \begin{array}{l} \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{array} \right\} \text{ linearidade} \end{array} \right\} \quad (B.15)$$

Um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, munido de um produto escalar é também chamado um espaço euclidiano ou espaço pré-hilbertiano. Pode-se demonstrar que o produto escalar, que permite associar a cada elemento $x \in H$ o número positivo $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, notado também por $\|x\|$, define uma norma sobre o espaço vetorial H .

Se o espaço H munido da norma definida a partir de um produto escalar é completo, diz-se que H tem uma estrutura de **espaço de Hilbert**.

Definição 21 *Funcional Próprio*

Sejam H um espaço de Hilbert, $D \subseteq H$ e J um funcional definido em D que assume valores em $R \cup \{+\infty\}$. J é dito **próprio** se existe $u \in D$ tal que $J(u) < +\infty$. Neste caso diz-se também que o conjunto $D_{ef} = \{u \in D \mid J(u) \neq +\infty\}$ é o **domínio efetivo** de J . Assim, um funcional é **próprio** se e somente se $D_{ef} \neq \emptyset$.

Definição 22 *Funcional Semicontínuo Inferiormente*

Seja E um espaço de Banach e j um funcional definido em E .

j diz-se **semicontínuo inferiormente** num ponto $x_0 \in E$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $\|x - x_0\| < \delta \implies j(x_0) - \varepsilon < j(x)$. j é **semicontínuo** em E se ele é **semicontínuo** em cada ponto de E

Definição 23 *Diferencial de Gâteaux de um Funcional*

A **diferencial de Gâteaux** de um operador é uma generalização do conceito do cálculo de derivada direcional de uma função. No caso em questão, o operador é do tipo que se denomina funcional.

Seja J um funcional definido numa vizinhança de um ponto ν_0 de um espaço de Banach E a valores no conjunto dos reais. Se para todo $h \in E$ existe o limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\nu_0 + th) - J(\nu_0)}{t} = \delta J(\nu_0; h) \quad (\text{B.16})$$

este limite é chamado primeira variação de J em ν_0 .

Supondo que J admita em ν_0 uma primeira variação da forma $\delta J(\nu_0; h) = \delta J(\nu_0)h$, onde $\delta J(\nu_0)$ é um funcional linear limitado. Diz-se então que o funcional é diferenciável no sentido de Gâteaux, no ponto ν_0 . O funcional linear $\delta J(\nu_0)$ é a derivada de Gâteaux de J em ν_0 . Quanto a primeira variação $\delta J(\nu_0; h) = \delta J(\nu_0)h$, ela é também chamada diferencial de Gâteaux de J em ν_0 segundo a direção h .

É usual, apesar de imprecisa, a denominação "diferencial de Gâteaux" para designar a primeira variação de um funcional mesmo que os requisitos da definição não sejam todos verificados.

B.3.5 Os Espaços de Funções mais Importantes Usados na Tese

Definição 24 Espaço $C^k[a, b]$

Espaço $C^k[a, b]$ é o espaço vetorial das funções a valores reais, definidas em $[a, b]$, k vezes continuamente diferenciáveis, munido da norma:

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max |x^{(i)}(t)|$$

onde $x^{(i)}(t)$ é a i -ésima derivada da função $x(t)$.

Definição 25 Espaços l_p

Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denota-se por l_p o espaço de todas as seqüências infinitas $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de números reais tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Os espaços l_p assim definidos e munidos da correspondente norma definida por $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ constituem, de fato, exemplos de espaços de Banach.

Definição 26 *Espaços \mathcal{L}_p*

Espaço $\mathcal{L}_p[a, b]$ é o espaço vetorial das funções contínuas, definidas em $[a, b]$ a valores reais, munido da norma:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

a integração sendo entendida no sentido de Riemann.

Um espaço assim definido não é completo. Para as necessidades desta tese o que se considera como um espaço $\mathcal{L}_p[a, b]$ é, de fato, o espaço obtido **completando-se** o espaço $\mathcal{L}_p[a, b]$ anteriormente definido. O completamento de espaços, no sentido geral, é uma construção análoga àquela feita para, a partir do conjunto Q dos racionais, se obter o conjunto R dos reais, agregando ao primeiro todas as seqüências de Cauchy lá existentes.

Na operação de completamento dos espaços $\mathcal{L}_p[a, b]$ passa-se naturalmente do conceito de integral de Riemann para o de integral de Lebesgue. Desta maneira, nas referências aos espaços $\mathcal{L}_p[a, b]$, está implícita a suposição de que se trata de espaços completos e as integrais são entendidas no sentido de Lebesgue.

Definição 27 *Espaço $H^1[a, b]$*

Espaço $H^1[a, b]$ é o espaço vetorial das funções definidas em $[a, b]$ a valores reais, contínuas com derivadas primeiras também contínuas, munido do produto escalar:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt + \int_a^b x'(t)y'(t)dt.$$

Este produto escalar induz naturalmente em $H^1[a, b]$ uma norma, definida por:

$$\|x\|_{H^1[a, b]} = \left(\int_a^b x^2(t)dt + \int_a^b (x'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Na definição do espaço $H^1[a, b]$ é admitido que tanto as próprias funções quanto suas derivadas primeiras estão em $\mathcal{L}_2[a, b]$.

Definição 28 *Espaço $H^2[a, b]$*

Espaço $H^2[a, b]$ é o espaço vetorial das funções definidas em $[a, b]$ a valores reais, contínuas com derivadas primeiras e segundas também contínuas, munido do produto escalar:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt + \int_a^b x'(t)y'(t)dt + \int_a^b x''(t)y''(t)dt$$

De modo análogo ao caso anterior introduz-se uma norma em $H^2[a, b]$, dada pela expressão:

$$\|x\|_{H^2[a,b]} = \left(\int_a^b x^2(t) dt + \int_a^b (x'(t))^2 dt + \int_a^b (x''(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta norma é uma das mais importantes para esta tese e é seguramente a mais usada ao longo dos capítulos seguintes. Como não há uma notação consagrada na literatura, será mantida a notação usual $\|\cdot\|_2$ para a norma dos espaços \mathcal{L}_2 . As notações para as normas dos espaços H^1 ou H^2 , sempre que necessário por razões de clareza, serão indexadas com o símbolo que denota o próprio espaço, como nas definições correspondentes.

Os espaços $H^1[a, b]$ e $H^2[a, b]$ são exemplos muito importantes de espaços de Hilbert. Estes espaços são exatamente aqueles munidos de um produto escalar e cujas normas são induzidas pelo produto escalar. Considera-se também, neste caso, os espaços completados. Está se falando, portanto, em espaços vetoriais normados e completos.

Definição 29 Função Característica de um Conjunto

Seja M um conjunto qualquer e D um subconjunto de M . Considere a função ϕ_D definida em D com valores em \mathbf{R} , como indica o esquema:

$$\phi_D : D \longrightarrow \mathbf{R}$$

Chama-se **função característica** do conjunto D à função ϕ_D assim definida e tal que:

$\phi_D(x) = 1$, $\forall x \in D$ e $\phi_D(x) = 0$ se $x \notin D$. O conjunto dos pontos que estão na fronteira de D são pontos de descontinuidade de ϕ_D .

Definição 30 Operadores

Sejam E e F dois conjuntos quaisquer e D uma parte de E . Se através de uma regra T é possível associar a cada elemento de D um e apenas um elemento de F , diz-se que T é um **operador**. Para as necessidades deste trabalho considera-se que E e F sejam espaços vetoriais normados. D é chamado conjunto de definição do operador T e escreve-se $D(T)$. Usualmente escreve-se $T : E \longrightarrow F$, para indicar que T está definido em alguma parte de E e não necessariamente $D(T) = E$.

Observar que no caso particular em que o conjunto F se identifica com o conjunto dos reais, o que se chama de operador é, de fato, um funcional que assume valores no conjunto dos reais. Situação análoga ocorre se o conjunto F coincide com o conjunto dos complexos.

Definição 31 Operadores Lineares

Seja T um operador definido em $D(T) \subseteq E$ com valores em F . T é dito **linear** se ele conserva as operações, ou seja, para todo par x e y de elementos de $D(T)$ e para quaisquer par de números reais λ, μ , tem-se:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Definição 32 Operadores Contínuos

Sejam E e F dois espaços vetoriais normados e $A : E \rightarrow F$ um operador definido em todo ponto $x \in E$, isto é, $D(A) = E$ e seja $x_0 \in E$. O operador é dito contínuo no ponto x_0 se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ tal que, para qualquer ponto $x \in B(x_0, \varepsilon)$ o correspondente ponto $A(x)$ pertence à bola $B(A(x_0), \delta)$. Esta maneira formal, porém precisa de expressar, diz que se dois pontos estão próximos em E , as imagens deles, pela aplicação do operador A , permanecem próximas.

Definição 33 Operadores Monótonos, Fortemente Monótonos e Coercivos

Seja E um espaço de Banach reflexivo, $K \subseteq E$ e T um operador definido em K e assumindo valores em E^* . Diz-se que T é **monótono** em K se é satisfeito o requisito:

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in K \tag{B.17}$$

O operador T é dito **fortemente monótono** em K se:

$$\exists \lambda > 0 \text{ tal que} \\ \forall u, v \in K \quad \langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq \lambda \|u - v\|_E^2 \tag{B.18}$$

O operador T é dito **coercivo** em K se:

$$\exists v_0 \in K \quad \frac{\langle T(u), u - v_0 \rangle}{\|u\|_E} \rightarrow +\infty, \text{ quando } \|u\|_E \rightarrow +\infty, u \in K. \tag{B.19}$$

Algumas observações são pertinentes:

- a definição é vaziamente satisfeita se o conjunto K é limitado;
- caso o operador T seja linear, a forma $\langle T(u), u \rangle$ é bilinear e, neste caso, uma condição suficiente para que o operador T seja coercivo (diz-se também que a forma bilinear é coerciva) é que:

$$\langle T(u), u \rangle \geq \lambda \|u\|_E^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq 0; \quad (\text{B.20})$$

- se o operador T é fortemente monótono, então ele é também coercivo.

Definição 34 Operadores Hemicontínuos

Seja E um espaço de Banach e $A : E \rightarrow E^*$ um operador definido em $D(A) \subseteq E$ fechado a valores no espaço dual de E . A é dito hemicontínuo em $x_0 \in D(A)$ se a toda seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ corresponder uma seqüência $\{A(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$, tais que se $x_n \rightarrow x_0$ para $n \rightarrow \infty$ então, para todo $x \in E$ $\langle x, A(x_n) \rangle \rightarrow \langle x, A(x_0) \rangle$, para $n \rightarrow \infty$. Se A é hemicontínuo em cada ponto $x_0 \in D(A)$, então A é dito hemicontínuo em $D(A)$.

Observação:

- se o conjunto $D(A)$ é convexo, que é o caso mais freqüente, a definição de hemicontinuidade pode ser particularizada da seguinte maneira:

$A : D(A) \subset E \rightarrow E^*$ é hemicontínuo em $D(A)$ se para todo par $u, v \in D(A)$ e $w \in E$ a função $t \mapsto f(t) = \langle A(tu + (1+t)v), w \rangle$ é uma função contínua do intervalo $[0, 1]$ em \mathbb{R} (isto é, a restrição de A aos segmentos contidos em $D(A)$ é contínua na topologia de E^*).

Definição 35 Caminho

Um **caminho** num espaço vetorial normado E é uma aplicação contínua $\phi : [0, 1] \rightarrow E$. As imagens $p = \phi(0) \in E$ e $q = \phi(1) \in E$ são chamadas extremos do caminho ϕ , p é o ponto inicial ou origem e q é o ponto final ou fim do caminho ϕ . Diz-se então que o caminho ϕ liga o ponto p ao ponto q . Se os pontos p e q coincidirem o caminho ϕ é dito fechado, ver Figura B.2.

B.4 TEOREMAS FUNDAMENTAIS

Lema 12

Lema Fundamental

Considere as funções f e g definidas em algum intervalo aberto (a, b) da reta com valores reais. Se f e g são contínuas, então:

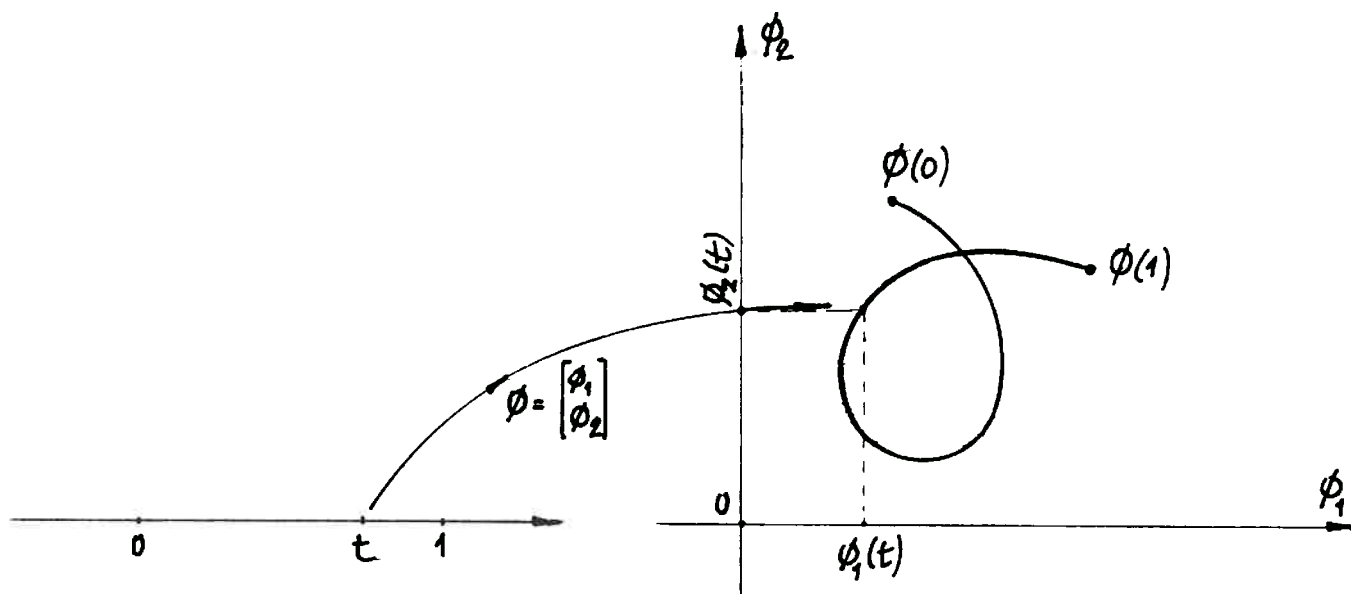


Figura B.2: Ilustração dos conceitos sobre caminho.

$$f(x)g(x) \leq \frac{1}{2} [f^2(x) + g^2(x)] \quad \forall x \in (a, b) \quad (\text{B.21})$$

A demonstração deste lema é trivial.

Lema 13

Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Considere as funções f a valores reais, definidas em algum intervalo fechado $[a, b]$, $a \leq b$, da reta. Se f é contínua com derivada primeira contínua em $[a, b]$, então existem constantes reais c_1, c_2 e c_3 , não negativas, tais que:

$$\int_a^b (f(x))^2 dx \leq c_1 \int_a^b \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx + c_2 (f(b))^2 + c_3 (f(a))^2. \quad (\text{B.22})$$

Pode-se demonstrar que uma terna de constantes que satisfazem a desigualdade (B.22) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2} \\ c_2 = \frac{b-a+2\eta}{\pi} \cotg \frac{\pi\eta}{b-a+2\eta} \\ c_3 = c_2 \end{array} \right\} \quad (\text{B.23})$$

onde o parâmetro η é um número real positivo arbitrário. Em geral é conveniente tomá-lo pequeno, tendo em vista tornar o segundo membro da desigualdade (B.22) o mais próximo possível do primeiro membro. Este resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [10]. Observa-se que no caso em que $f(a) = f(b) = 0$, como η é arbitrário, pode-se tomá-lo com o valor nulo e a desigualdade (B.22) pode ser escrita como:

$$\int_a^b (f(x))^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx \quad (\text{B.24})$$

Especialização da desigualdade (B.24) para algumas aplicações do Capítulo 3 e do Apêndice A.

Para a maioria das aplicações que se encontram na tese os limites de integração podem ser tomados, respectivamente, como $a = 0$ e $b = p$. Além disso o quadrado da função f ou a sua derivada primeira podem aparecer multiplicadas por uma função F contínua, integrável segundo Lebesgue e monótona em $[0, p]$. Nestes casos o Teorema do Valor Médio para Integrais, na sua primeira versão, pode ser usado para demonstrar que a desigualdade (B.24) pode ser escrita como:

$$\frac{F(\zeta_1)}{F(\zeta_0)} \int_0^p F(x)(f(x))^2 dx \leq \frac{p^2}{\pi^2} \int_0^p F(x) \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx \quad (\text{B.25})$$

Em virtude da monotonicidade de F no intervalo $[0, p]$, a expressão (B.25) pode ser reescrita, como:

$$\frac{F(\zeta_1)}{F(0)} \int_0^p F(x)(f(x))^2 dx \leq \frac{p^2}{\pi^2} \int_0^p F(x) \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 dx \quad (\text{B.26})$$

onde ζ_0 e ζ_1 são números reais do intervalo $[0, p]$, cuja existência é garantida pelo Teorema do Valor Médio para Integrais.

Teorema 1 *Condição Necessária de Extremo de um Funcional Diferenciável*

Considere um funcional J definido num espaço vetorial V . Se um ponto $x_0 \in V$ é ponto extremo de J , então a diferencial $\delta J(x_0, h) = 0$, para todo $h \in V$.

Teorema 2 *Resultados Fundamentais em Espaços de Banach.*

Em um espaço de Banach E :

- a) todo conjunto fechado é completo e reciprocamente;
- b) todo conjunto compacto é completo;
- c) toda bola fechada é completa.

Teorema 3 *Minimização de Funcionais Convexos*

Se E é um espaço de Banach reflexivo e o funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente, $K \neq \emptyset$ é um subconjunto convexo, fechado de E e K é limitado ou J é coercivo, então o problema P.1, a seguir, tem uma solução. Esta solução é única se J for estritamente convexo.

Problema P.1.

Dado um espaço vetorial E , um funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto $X \subset E$, achar $x_0 \in X$, tal que $J(x_0) = \inf_{x \in X} J(x)$. O ponto x_0 é dito o ponto de mínimo de J em X .

Teorema 4 *Equivalência entre um Problema Variacional e uma Inequação Variacional*

Seja E_H um espaço de Hilbert e $K \subset E_H$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. Se $J : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é um funcional da forma $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$, com J_1 finito, convexo e Gâteaux-diferenciável sobre K e J_2 é convexo e próprio sobre K , então u_0 é solução do problema P.2 se e somente se é solução do problema P.3 (os problemas estão enunciados a seguir). Diz-se então que os problemas P.2 e P.3 são equivalentes.

Problema P.2.

Seja E_H um espaço de Hilbert, $K \subset E_H$ um conjunto fechado, convexo e não vazio e $J : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional da forma $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$, achar $u_0 \in K$, se existir, tal que:

$$J(u_0) \leq J(v) \quad \forall v \in K \quad (\text{B.27})$$

Problema P.3.

Seja E_H um espaço de Hilbert, $K \subset E_H$ um conjunto fechado, convexo e não vazio e $J : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional da forma $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$, com J_1 finito, convexo e Gâteaux-diferenciável sobre K e J_2 convexo e próprio sobre K , achar $u_0 \in K$, se existir, tal que:

$$\delta J_1[u_0; u_0 - v] + J_2(u_0) \leq J_2(v) \quad \forall v \in K \quad (\text{B.28})$$

Teorema 5 *Existência e Unicidade de Solução de Certa Classe de Inequações Variacionais*

Seja H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. b uma forma bilinear simétrica, contínua em H , além disso ou b é coerciva em $K \times K$ ou então K é limitado. J_2 um funcional convexo, próprio e semicontínuo inferiormente. Sob estas condições existe uma e somente uma função $u_0 \in K$ tal que:

$$b(u_0, u_0 - v) + J_2(u_0) \leq J_2(v) \quad \forall v \in K \quad (\text{B.29})$$

Teorema 6 *Operadores Lineares Contínuos*

Sejam A um operador linear contínuo e E e F dois espaços de Banach tais que $A : E \rightarrow F$ e A está definido em todo o conjunto E , ou seja, o domínio de A é o conjunto E . Para que A seja contínuo é necessário e suficiente que A seja limitado.

Teorema 7 *Operadores Hemicontínuos*

Sejam E um espaço de Banach e E^* o seu dual e $A : E \rightarrow E^*$ um operador contínuo em um ponto x_0 , então A é hemicontínuo em x_0 .

Teorema 8 *Um Teorema do Valor Médio para Integrais*
Primeira Versão:

Seja f uma função contínua, definida num intervalo $[a, b]$ da reta e assumindo valores reais, anota-se $f \in C([a, b], R)$, seja também g uma função integrável segundo Lebesgue definida em $[a, b]$, anota-se $g \in L_1([a, b])$ e que seja não negativa em $[a, b]$. Então existe $\xi \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (\text{B.30})$$

Teorema 9 *Um Teorema do Valor Médio para Integrais*
Segunda Versão:

Seja f uma função integrável segundo Lebesgue, definida num intervalo $[a, b]$ da reta e assumindo valores reais, isto é, $f \in L_1([a, b])$, seja também g uma função monótona definida em $[a, b]$. Então existe $\xi \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \quad (\text{B.31})$$

Teorema 10 *Teorema Fundamental das Inequações Variacionais*

Se E é espaço de Hilbert, $\mathcal{V}_a^2 \subset E$ é um conjunto não vazio, fechado e convexo e se $j : E \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ é um funcional próprio (em \mathcal{V}_a^2) e semicontínuo inferiormente. Além disso, se $A : E \rightarrow E^*$ é um operador estritamente monótono hemicontínuo e coercivo, então existe e é única a solução do Problema Fundamental enunciado a seguir.

Problema Fundamental

Achar $\xi^* \in \mathcal{V}_a^2 \subset E$, tal que:

$$\langle A\xi^*, \xi - \xi^* \rangle + j(\xi) \geq j(\xi^*) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}_a^2 \quad (\text{B.32})$$

OBSERVAÇÕES:

1) O Teorema 10 é uma consequência de outro teorema fundamental da teoria das inequações variacionais. Estes teoremas encontram-se enunciados nas páginas 234 e 226, respectivamente, da referência [4]. Nesta referência, estes teoremas não só são demonstrados como são apresentados uma série de comentários e exemplos de aplicação.

2) Para a nossa aplicação do Teorema 10 são pertinentes algumas observações:

a) no enunciado do Teorema 10 estão subentendidas as notações:

$$E = H_2^2(\Omega) \text{ e } A = \beta_f \varepsilon_f \{ F_a^*(x) \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_f \frac{d^4}{dx^4} \};$$

onde β_f , ε_f e α_f são constantes positivas.

b) as hipóteses do Teorema 10, com exceção do fato que $H_2^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert (o que o Teorema 11 a seguir garante) são verificadas através dos Lemas 9, 10 e 11 do Capítulo 3, por sua vez reenunciados e demonstrados no Apêndice A.

c) o Teorema 10 garante então que existe uma função $\xi^* \in \mathcal{V}_a^2$ aludida na Proposição 4 do Capítulo 3. Além disso essa função é única.

Teorema 11 *Espaços de Banach Reflexivos*

Cada um dos seguintes espaços de Banach é reflexivo.

- *Qualquer espaço de dimensão finita.*
- *Qualquer espaço de Hilbert.*
- *Os espaços l_p , $1 < p < \infty$.*
- *Os espaços \mathcal{L}_p , $1 < p < \infty$.*

APÊNDICE C

RESULTADOS SECUNDÁRIOS

C.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste apêndice é fornecer alguns resultados secundários usados ao longo da tese. Os resultados aqui apresentados não são essenciais à leitura da tese, embora façam parte do escopo do problema abordado.

C.2 INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DA CAPA DE CONCRETO NA RIGIDEZ DO TUBO DE AÇO SOB FLEXÃO.

C.2.1 Descrição do Problema

Oleodutos são, em geral, guarnecidos com uma capa de concreto com o objetivo principal de servir de lastro para o oleoduto. Como o tubo de aço tem paredes relativamente finas, o peso próprio deste tubo é insuficiente para garantir um peso efetivo (peso no ar - empuxo) conveniente para o oleoduto permanecer assentado sobre o leito marinho, daí a necessidade de dotar o oleoduto de uma quantidade extra de peso, o que é feito, em geral, recobrando o tubo de aço por um tubo de concreto. O processo construtivo adotado para obter o tubo de aço encapado é produzir os tramos de tubo de aço, cerca de 12m de comprimento, já recobertos com um tubo de concreto. Para permitir a soldagem dos tramos de tubo de aço, as suas extremidades são mantidas descobertas, em torno de meio metro em cada extremidade do tramo. Se a capa de concreto é espessa, ao ser submetido a esforços de flexão, a presença da capa de concreto interfere na rigidez à flexão da linha.

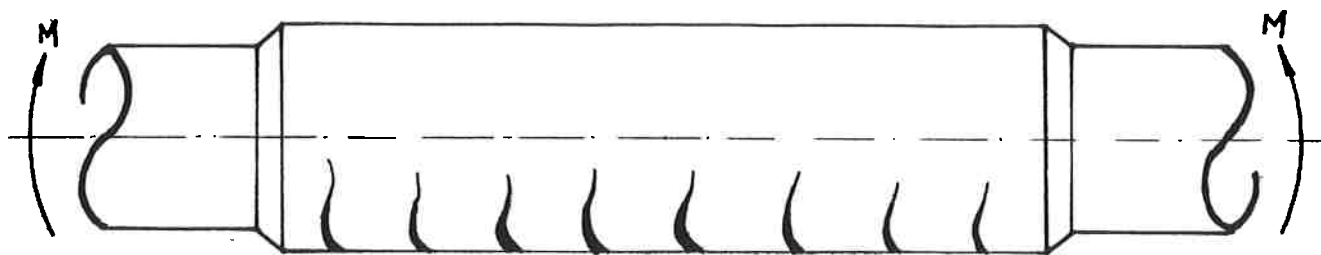


Figura C.1: Tramo de Tubo Sujeito à Flexão com o Fissuramento das "Fibras" Traçionadas.

Com base no conceito de **rigidez efetiva** apresenta-se uma avaliação da influência da rigidez da capa de concreto na rigidez do tubo de aço.

Quando o tubo é fletido, uma parte de cada seção do tubo fica sujeita a uma tensão de tração e a outra parte da seção a uma tensão de compressão. A parte tracionada da seção reduz-se, basicamente à região em que a seção é de aço, pois o concreto oferece resistência à tração desprezível. A parte da seção que é comprimida oferece as contribuições da região da seção de aço e da região de concreto. Sob tensão de tração a capa de concreto se rompe, ver Figura C.1, permanecendo íntegra na parte comprimida.

O que se pode constatar, portanto, é que a rigidez do tubo na parte coberta é maior que a rigidez do tubo de aço, pela influência da capa de concreto que também resiste à tensão de compressão.

Para avaliação desta influência adotam-se as seguintes hipóteses:

- i) a linha neutra (lugar das tensões nulas) do tramo, que inicialmente coincide com o eixo geométrico do tubo, se desloca, ver Figura C.2;
- ii) em cada seção há equilíbrio de forças, isto é, a força de tração aplicada numa seção mais a força de compressão aplicada na seção é igual a zero;
- iii) a capa de concreto atua sobre compressão, acima da linha neutra e não há escorregamento da capa de concreto sobre o tubo de aço, isto é, na região de contato a deformação do aço é igual a deformação do concreto;
- iv) em cada seção há equilíbrio de momento, isto é, o momento externo aplicado é equilibrado pelos momentos desenvolvidos na seção;

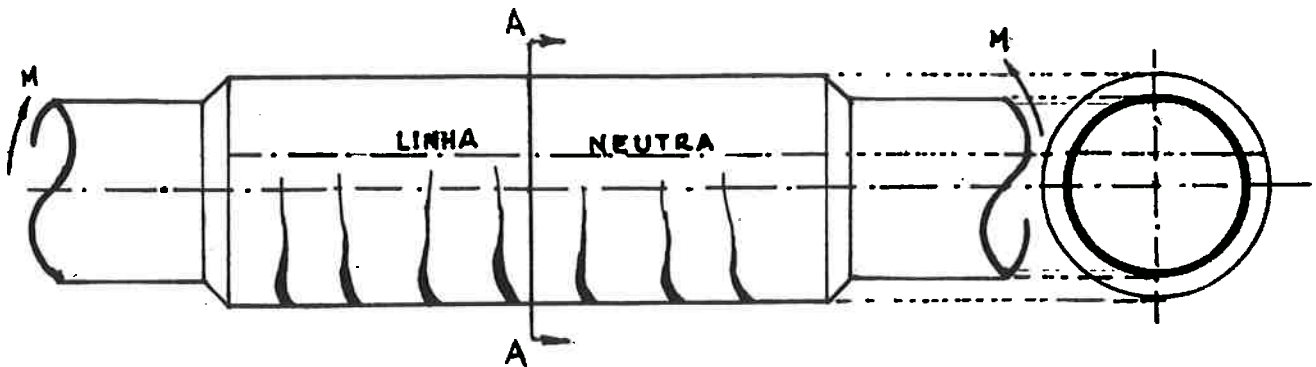


Figura C.2: Posição da Linha Neutra do Tubo Sujeito à Flexão.

A partir da hipótese ii) determina-se o deslocamento da linha neutra. Das hipóteses iii) e iv) determina-se o produto de rigidez para as seções onde o concreto atua.

C.2.2 Determinação da Posição da Linha Neutra.

Sejam:

F_T = força de tração numa dada seção;

F_C = força de compressão na mesma seção;

Da hipótese ii), resulta:

$$F_T + F_C = 0 \quad (C.1)$$

Cálculo de F_T

$$F_T = \int_{S_T} \sigma_T dS = \int_{S_T} \frac{My}{R} dS = \int_{S_T} \frac{E_A}{R} y dS = \frac{E_A}{R} \int_{S_T} y dS \quad (C.2)$$

onde:

S_T = parte da seção do aço que está tracionada;

σ_T = tensão de tração na seção S_T ;

M = momento aplicado na seção S_T ;

R = raio de curvatura da linha neutra na seção;

E_A = módulo de elasticidade do aço.

Da Figura C.3 obtém-se, por inspeção:

$$a = r_c \cos \alpha = r_a \cos(\alpha - \beta); \quad (C.3)$$

$$r_c = r_a \cos \beta + \left(\frac{t_c}{2} + \frac{t_a}{2}\right) \sin \alpha. \quad (C.4)$$

Decorre também da Figura C.3 que:

$$y = r_a \sin \theta + a \quad - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha + \beta \quad (C.5)$$

$$dS = r_a t_a d\theta \quad (C.6)$$

Substituindo (C.5) e (C.6) em (C.2), resulta:

$$F_T = \frac{E_A}{R} \int_{\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\beta} (r_a \sin \theta + a) r_a t_a d\theta \quad (C.7)$$

Procedendo à integração da expressão de F_T , resulta:

$$F_T = \frac{2E_A}{R} r_a t_a [\pi a + (\beta - \alpha)a + r_a \sin(\alpha - \beta)] \quad (C.8)$$

Cálculo de F_C

Considerando o efeito do momento fletor sobre as partes comprimidas das seções, tanto de aço quanto de concreto, tem-se:

$$F_C = \frac{E_A}{R} \int_{S_1} y_1 dS_1 + \frac{E_C}{R} \int_{S_2} y_2 dS_2 \quad (C.9)$$

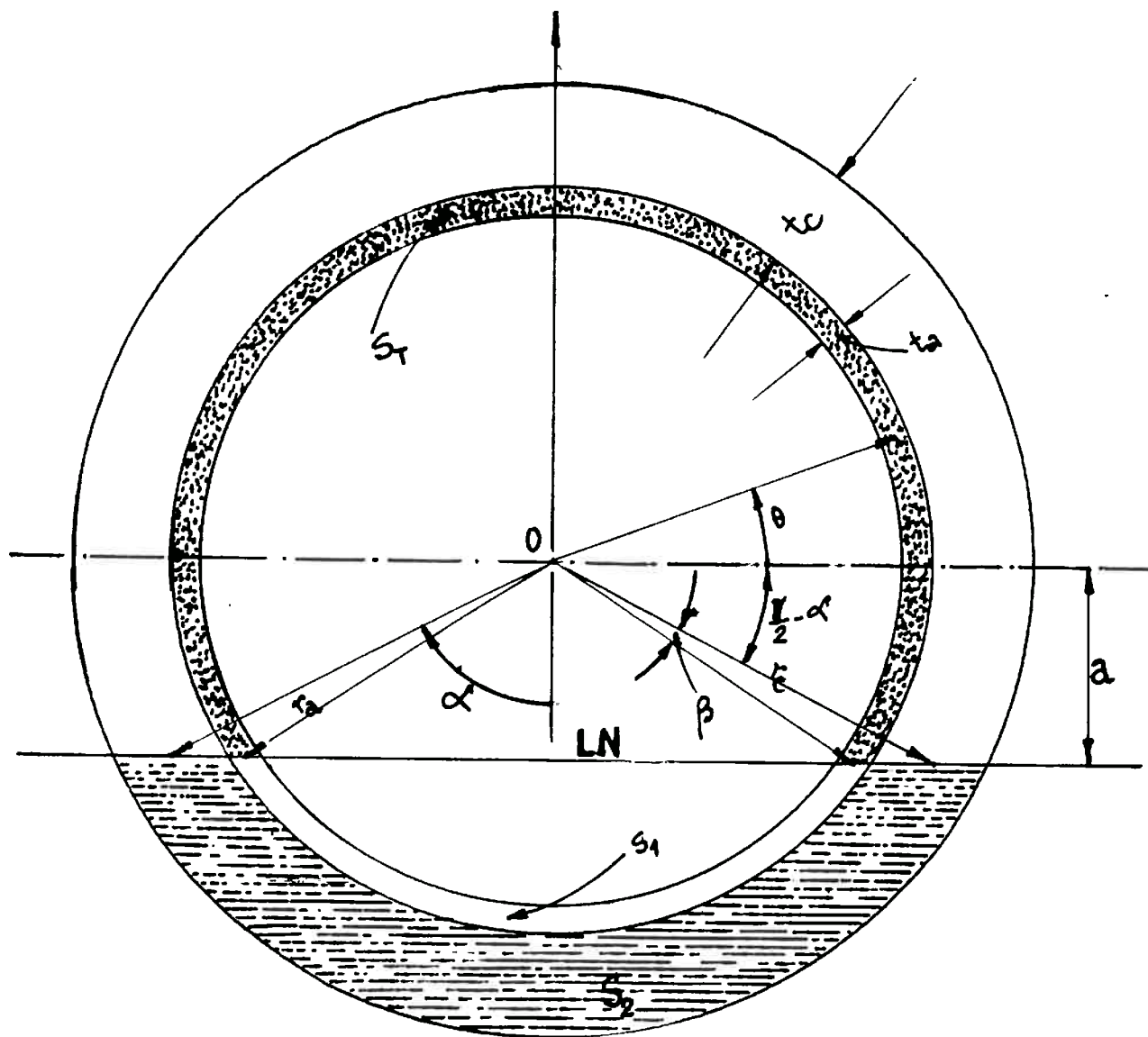


Figura C.3: Parte da Seção que está Tractionada - S_T

Decorre da Figura C.3 que:

$$y_1 = r_a \sin \psi + a \quad \frac{3\pi}{2} - \alpha + \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} + \alpha - \beta \quad (\text{C.10})$$

$$dS_1 = t_a r_a d\psi \quad (\text{C.11})$$

e que

$$y_2 = r_c \sin \phi + a \quad \frac{3\pi}{2} - \alpha \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} + \alpha \quad (\text{C.12})$$

$$dS_2 = t_c r_c d\phi \quad (\text{C.13})$$

Substituindo (C.10), (C.11), (C.12) e (C.13) em (C.9), resulta:

$$F_C = \frac{E_A}{R} \int_{\frac{3\pi}{2}-\alpha+\beta}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha-\beta} (r_a \sin \psi + a) r_a t_a d\psi + \frac{E_C}{R} \int_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha} (r_c \sin \phi + a) r_c t_c d\phi \quad (\text{C.14})$$

Executando as integrações em (C.14), obtém-se:

$$F_C = \frac{2E_A}{R} r_a t_a [(\alpha - \beta)a - r_a \sin(\alpha - \beta)] + \frac{2E_C}{R} r_c t_c [\alpha a - r_c \sin \alpha] \quad (\text{C.15})$$

Das equações (C.1), (C.8) e (C.15), resulta:

$$E_A r_a t_a \pi a + E_C r_c t_c \alpha a - E_C r_c^2 t_c \sin \alpha = 0 \quad (\text{C.16})$$

Definindo:

$$p = \frac{E_A}{E_C} \quad (\text{C.17})$$

obtem-se:

$$r_c^2 t_c \sin \alpha - \alpha a r_c t_c - \pi a p r_a t_a = 0. \quad (\text{C.18})$$

De (C.3), (C.17) e (C.18) pode-se calcular o valor do parâmetro a . A seguir, usando as hipóteses iii) e iv) pode-se calcular a rigidez equivalente do tramo de tubo.

C.2.3 Cálculo da Rigidez Equivalente

Se o momento aplicado numa dada seção é M , então:

$$M = \int_{S_T} \sigma_a y dS + \int_{S_1} \sigma_a y dS + \int_{S_C} \sigma_c y dS \quad (C.19)$$

Pela hipótese iii), numa dada seção a deformação do aço e do concreto são iguais, portanto:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_A} = \frac{\sigma_c}{E_C} = \varepsilon_c \quad (C.20)$$

Considerando o efeito da capa de concreto sobre o anel de aço através da mudança do valor J_a do momento de inércia para o valor J_{eq} , a tensão σ_a num ponto da seção de aço de ordenada y , é dada por:

$$\sigma_a = \frac{M}{J_{eq}} y \quad (C.21)$$

Substituindo (C.20) e (C.21) em (C.19) e considerando uma propriedade da integração, a expressão (C.19) pode ser reescrita como:

$$M = \frac{M}{J_{eq}} \int_{S_T \cup S_1} y^2 dS + \frac{M E_C}{J_{eq} E_A} \int_{S_C} y^2 dS \quad (C.22)$$

Multiplicando a equação (C.22) por $E_A J_{eq}$ e dividindo por M (suposto não nulo), resulta:

$$E_A J_{eq} = E_A J_a + E_C J_C. \quad (C.23)$$

Por definição escrevemos:

$$(EJ)_{eq} = E_A J_{eq} \quad (C.24)$$

onde:

$J_a = J_0 + a^2 S_a$ = momento de inércia da seção de aço, em relação à linha neutra deslocada do centro geométrico do tubo.

J_0 = momento de inércia da seção de aço, em relação ao centro geométrico do tubo.

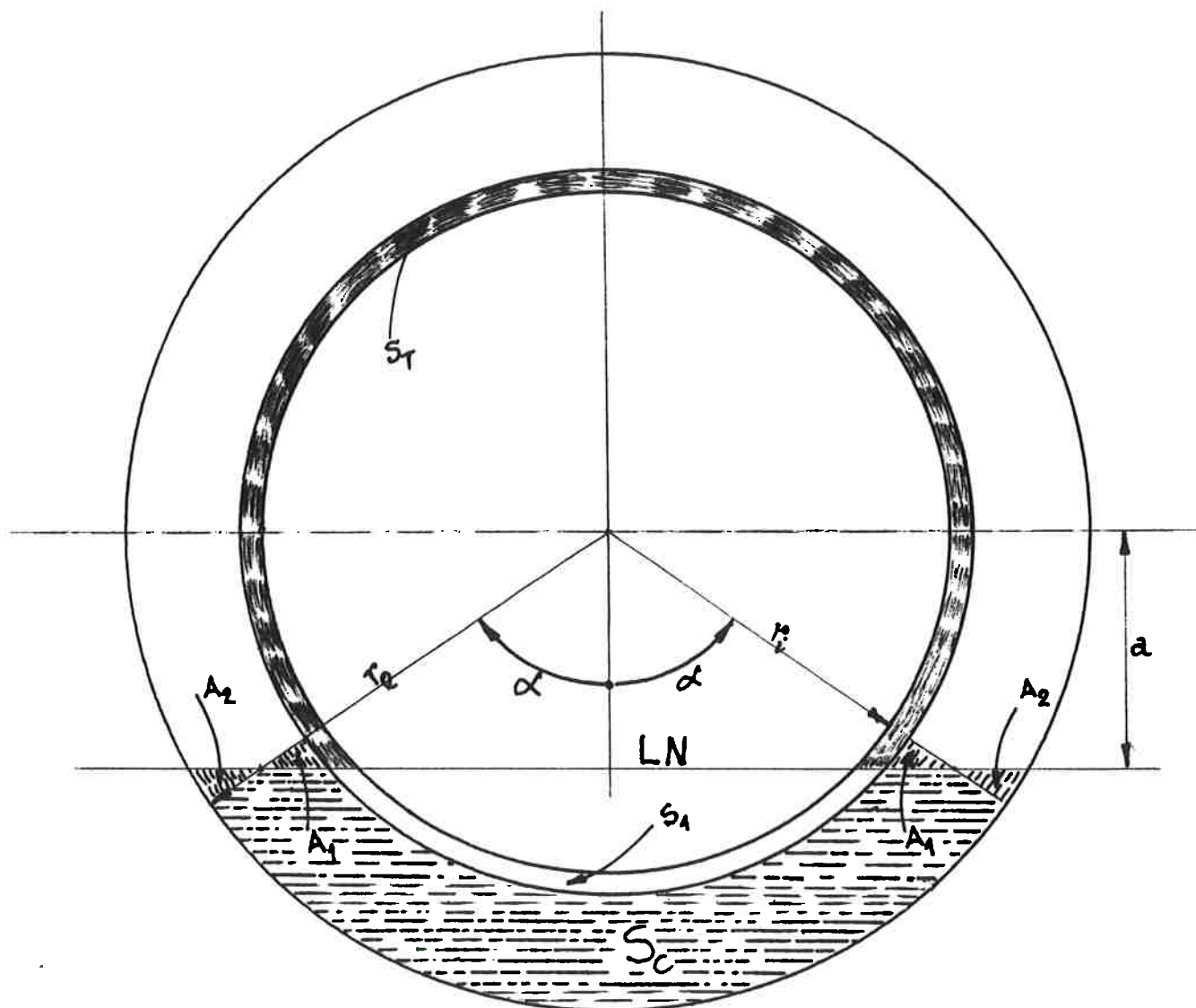


Figura C.4: Momento de Inércia da Área S_c em Relação à LN.

J_C = momento da parte da seção de concreto que é comprimida, em relação á linha neutra deslocada.

S_a = área da seção de aço.

Resta ainda calcular o valor de J_C , o que é feito a seguir:

$$J_C = \int_{S_c} y_2^2 dS \quad (C.25)$$

Da Figura C.4 pode-se verificar que $y_2 = y - a$, substituindo esta expressão em (C.25), resulta:

$$J_C = \int_{S_c} (y - a)^2 dS \quad (C.26)$$

Desenvolvendo a expressão quadrática de (C.26) e usando propriedades da integral, obtêm-se as seguintes três parcelas, que devem ser calculadas.

$$\int_{S_c} (y)^2 dS = \frac{\alpha}{4}(r_e^4 - r_i^4) + \frac{(r_e^4 - r_i^4)}{8} \sin 2\alpha. \quad (C.27)$$

Supondo que o momento de inércia da região A_1 seja igual ao momento de inércia da região A_2 , tem-se:

$$\int_{S_c} y dS = \frac{2}{3}(r_e^3 - r_i^3) \sin \alpha; \quad (C.28)$$

$$\int_{S_c} dS = \alpha(r_e^2 - r_i^2). \quad (C.29)$$

Substituindo as expressões (C.27), (C.28) e (C.29) no desenvolvimento da (C.26), obtêm-se:

$$J_C = \frac{\alpha}{4}(r_e^4 - r_i^4) + \frac{(r_e^4 - r_i^4)}{8} \sin 2\alpha + \frac{4}{3}(r_e^3 - r_i^3) \sin \alpha + \alpha(r_e^2 - r_i^2) \quad (C.30)$$

Uma vez calculada a posição da linha neutra (LN) e a rigidez equivalente a flexão pode-se, para uma dada configuração do oleoduto, então determinar a linha elástica e os correspondentes esforços.

Para as situações práticas permanecem duas questões pendentes. A primeira delas está relacionada a descontinuidade da capa de concreto, portanto há trechos de duto em que a rigidez a flexão é a rigidez equivalente (presença da capa) em outros trechos a rigidez é aquela do tubo de aço desencapado (ausência da capa). A segunda questão refere-se a uniformidade estrutural da capa de concreto, ao longo do tramo encapado mas, resultados experimentais demonstram que, de fato, a uniformidade não ocorre, pois ao ser fletido o tubo encapado, a capa de concreto não sofre apenas fissura na região tracionada mas ocorre deslizamento de partes da capa de concreto sobre o cilindro de aço, reduzindo assim a tensão de compressão no concreto. Este escorregamento é causado por forças de cisalhamento na interface entre os dois materiais. O trecho do tramo onde ocorre escorregamento depende da espessura e resistência do concreto e dos valores da tensão de cisalhamento na interface. Devido a esse escorregamento, a rigidez a flexão ao longo do tramo varia. Para se considerar efetivamente os casos reais, são necessárias hipóteses simplificadoras adicionais ou informações extras, a serem obtidas via ensaios em laboratório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PANAGIOTOPOULOS, P.D. *A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact and Friction-Boundary Value Problem in the Theory of Elasticity*. Ingenieur Archiv 44. S. 421-432. Springer Verlag, 1975.
- [2] MANCINI, O.G., STAMPACCHIA, G. *Convex Programming and Variational Inequalities*. Journal of Optimization Theory and Applications. v. 9. n^o 1. 1972.
- [3] BRUCH, J.C. *A Survey of Free Boundary Value Problems in the Theory of Fluid Flow through Porous Media: Variational Inequality Approach - Part I*. Advances in Water Resources, v. 3. sept. 1980.
- [4] BAIOCCHI, C., Capelo A. *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems*. John Wiley, 1984.
- [5] ODEN, J.T., Pires, E.B. *Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity*. Journal of Applied Mechanics. v. 50. march 1983.
- [6] MOURA, C.A. *Análise Funcional e Aplicações*. I Escola de Matemática Aplicada. Laboratório de Cálculo do CBPF, 1978. 317p.
- [7] EKELAND, I., TEMAN, R. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnelles*. Études Mathématiques. Dunod, 1974.
- [8] TRÉNOGUINE, V. *Analyse Fonctionnelle*. Moscou: Éditions Mir, 1985. 528p.
- [9] GLOWINSKI, R., Lions, J.L., Trémolières, R. *Numerical Analyses of Variational Inequalities*. Studies in Mathematics and its Applications, v. 8. North-Holland, 1976.
- [10] REKTORYS, K. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. 2. ed. Dordrecht-Boston: Reidel, 1979.
- [11] STROMBERG, K.R. *An Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth International Group, 1981. 575p.
- [12] DO, C. *Inéquations Variationnelles en Mécaniques des Milieux Continus*. I Escola de Matemática Aplicada. Laboratório de Cálculo do CBPF, 1978.
- [13] BOUVIER, A. *Théorie Élémentaire des Séries*. Paris: Hermann, 1971. 228p.
- [14] BERTRANDIAS, J.P. *Analyse Fonctionnelle*. Armand Colin, 1970. 230p.

- [15] MOUSSELLI, A. H. *Offshore Pipeline Design Analysis, and Methods*. Tulsa: Penn Well Books, 1981. 193p.
- [16] PORTER, W. A. *Modern Foundations of Systems Engineering*. New York: Macmillan Company, 1968. 493p.
- [17] LUENBERGER, D. G. *Optimization by Vector Space Methods*. New York: John Wiley, 1969. 326p.
- [18] SMITH, D. R. *Variational Methods In Optimization*. New Jersey: Prentice-Hall, 1974. 378p.
- [19] KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, S. V. *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*. Moscou: Editorial Mir, 1972. 535p.
- [20] CÉA J. *Optimisation - Théorie et Algorithmes*. Paris: Dunod, 1971. 227p.
- [21] INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO S.A.. Divisão de Engenharia Naval e Oceânica. *Modelagem Matemática Estática e Dinâmica de um Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano*. São Paulo, 1983. 97p. (Relatório Técnico 18.858).
- [22] _____ . *Modelo Matemático Estático das Operações de Abandono e Resgate Lateral de Oleodutos*. São Paulo, 1983. 178p. (Relatório Técnico 18.520).
- [23] _____ . *Modelagem Matemática de um Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano sob Ação de Forças Estáticas*. São Paulo, 1986. 92p. (Relatório Técnico 24.745).