

KARL PETER BURR

**MÉTODO VARIACIONAL APLICADO À TEORIA DE FÓLIOS:
ESTUDO DO EFEITO SOLO**

v. 1

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

**SÃO PAULO
1993**

KARL PETER BURR

**MÉTODO VARIACIONAL APLICADO À TEORIA DE FÓLIOS:
ESTUDO DO EFEITO SOLO**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

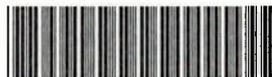
Area de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha

VOLUME I

**SÃO PAULO
1993**

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600009951

**Aos meus pais, pelo apoio e compreensão
durante todos esses anos.**

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. José Augusto Pentead
Aranha, pela dedicação e incentivo.

Aos meus pais, pelo apoio e incansável
compreensão.

Ao CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO
CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO, pelo apoio na forma
de bolsa de estudos, processo Nº.: 830769/91-9.

A todos que, direta ou indiretamente,
colaboraram na execução deste trabalho

SUMÁRIO

Lista de figuras	
Lista de símbolos	
Resumo	
"Abstract"	
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. ENFOQUE VARIACIONAL.....	7
3. MÉTODO VARIACIONAL APLICADO A UMA PLACA PLANA BIDIMENSIONAL COM "EFEITO SOLO".....	22
3.1. FORMULAÇÃO FORTE.....	27
3.2. FORÇAS GENERALIZADAS.....	38
3.3. FORMULAÇÃO FRACA.....	42
3.4. EXPRESSÕES PARA OS COEFICIENTES $T_0(\phi^\pm)$ EM TERMOS DE FUNCIONAIS BEM DEFINIDOS.....	48
3.5. EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS EM TERMOS DOS VALORES Λ_{ij}^\pm	56
3.6. FUNCIONAL $F_{ij}^\pm(\phi; \psi)$	58
3.7. ENFOQUE VARIACIONAL.....	60
3.8. MÉTODO VARIACIONAL DE RITZ APLICADO AO FUNCIONAL F_{ij}^\pm	65
3.9. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES $R^-(x, y)$ E $q^\pm(x, y)$...	67
3.9.1. FUNÇÃO AUXILIAR $R^-(x, y)$	68
3.9.2. FUNÇÕES AUXILIARES $q^\pm(x, y)$	70

3.10.FUNÇÕES TESTES $\chi_{e,n}^{\pm}(x,y)$ PERTENCENTES A $He_2^1(S^+)$	71
3.10.1.SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$	75
3.10.2.SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$	83
3.10.3.APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES TESTES A SEREM UTILIZADAS..	
.....	86
3.10.3.1.FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA PAR.....	87
3.10.3.2.FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA IMPAR.....	90
3.11.APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS	
.....	94
3.12.ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL NOS	
LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$	97
4.RESULTADOS NUMÉRICOS.....	101
5.ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	121
5.1.SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	129
6.CONCLUSÕES.....	131
ANEXO A - EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS.....	134
ANEXO B.....	143
B.1.INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS EQUAÇÕES FRACAS (3.37)...	
.....	143
B.2.INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS VALORES Λ_{ij}^{\pm}	161
ANEXO C - FUNCIONAL F_{ij}^{\pm} ESTACIONÁRIO NO PAR DE FUNÇÕES	
$(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$	166

ANEXO D - FUNCIONAL $G(\phi; \psi)$ RESTRITO A UMA DETERMINADA CLASSE DE FUNÇÕES.....	168
ANEXO E.....	170
E.1.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $R^-(x,y)$ COMO ARGUMENTO.....	170
E.2.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $q^+(x,y)$ COMO ARGUMENTO.....	175
ANEXO F - AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM FUNÇÕES-TESTE COMO ARGUMENTO.....	181
F.1.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $\chi_{e,n}^+$ COMO ARGUMENTO.....	182
F.2.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $\chi_{e,n}^-$ COMO ARGUMENTO.....	206
F.3.SUMÁRIO DE FUNCIONAIS.....	237
F.3.1.VALORES PARA A PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL.....	238
F.3.2.VALORES PARA A SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL..	239
ANEXO G - APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm .	242
G.1.PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm	244
G.1.SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm	250

ANEXO H - ASSÍNTOTAS DAS APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS DAS
FORÇAS GENERALIZADAS NOS LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$.
.....253

H.1.ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL
PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$...258

H.2.ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL
PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$...263

ANEXO I - APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA AS FUNÇÕES $E_1(\lambda)$,
 $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$
E $I_5(\lambda)$269

I.1.APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $H_j(\lambda)$ COM $\lambda \geq 1$..273

I.2.APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $H_j(\lambda)$ COM $0 \leq \lambda \leq 1$.
.....274

I.3.CONSTRUÇÃO DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DAS FUNÇÕES
 $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$ E COMPARAÇÃO COM
RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $0 \leq \lambda \leq 1$279

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....301

APÊNDICE A - REFERÊNCIAS PARA OS COEFICIENTES $\lambda.C_L/\alpha$,
 $\lambda.C_M/\alpha$ E b/c .

Lista de Figuras

- Fig.2.1- Corpo esbelto em domínio fluido sem fronteiras...7
- Fig.3.1- Placa plana bidimensional com "efeito solo".....23
- Fig.3.2- Domínio fluido S com condição de contorno no fólio imposta na geometria não deformada.....28
- Fig.3.3- Domínio fluido S com condição de contorno no fólio imposta na geometria não deformada. (os extremos do fólio estão em $x = -1$ e $x = 1$ em $y = -\lambda$).....30
- Fig.3.4- Setor circular S_T com centro no bordo de fuga...31
- Fig.3.5- Domínio fluido com corte em $x = 0$ e contorno C que engloba o fólio.....36
- Fig.3.6- Subdomínio $S^+ = (x > 0) - S_T$38
- Fig.3.7- Subdomínio S_p e \bar{S}76
- Fig.3.8- Placa plana sob ação de uma corrente unitária na direção do eixo y em domínio fluido infinito....84
- Fig.4.1- Parâmetro $\lambda.C_L/\alpha$ versus parâmetro λ , com λ restrito à faixa $0 < \lambda < 1,5$109
- Fig.4.2- Estudo do comportamento da aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$ em função da potência "n" com $0 < \lambda < 0,4$111
- Fig.4.3- Parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$ versus parâmetro λ com $0 < \lambda < 1,5$116

Fig.A.1- Contorno de integração ∂B ao longo do fólio, restrito à região S^+	135
Fig.B.1- Configuração no instante t_0	151
Fig.F.1- Sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j)	189
Fig.F.2- Corte de χz^- no domínio S^+	216
Fig.H.1- Sistemas de coordenadas polares (ρ_1, γ_1) e (ρ_2, γ_2) para $y = -\lambda$ e $-1 < x < 1$	256
Fig.I.1- Aproximação polinomial versus integração numérica para a função $E1(\lambda)$	291
Fig.I.2- Aproximação polinomial versus integração numérica para a função $E2(\lambda)$	293
Fig.I.3- Aproximação polinomial versus integração numérica para a função $I1(\lambda)$	295
Fig.I.4- Aproximação polinomial versus integração numérica para a função $I2(\lambda)$	297
Fig.I.5- Convergência de $\sum_{n=0}^M D_{s,n} \cdot (2n + 1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi)$ para zero em função do número de polinômios de Chebishev utilizados.....	300

Lista de Símbolos

ALFABETO ROMANO

- A
- a - Raio do contorno circular de Sr .
- A - Parâmetro desconhecido utilizado para compatibilizar os limites $a \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$.
- A1 - Coeficiente do termo de $O(\lambda^{3/2})$ da assíntota para $H_2(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$. A1 foi estimado de acordo com (I.20- a) (anexo I).
- $A(\phi)$ - Funcional que representa a ação do sistema hidrodinâmico em termos do potencial $\phi(x,y)$.
- $A(\phi_e)$ - Funcional que representa a ação sobre o sistema hidrodinâmico, definida por (B.8).
- $A(\phi_e, t)$ - Ação do sistema hidrodinâmico cujo campo de velocidades é o gradiente do potencial $\phi_e(x,y,t)$ (anexo B).
- A_n - Coeficiente da série de Fourier generalizada para $\phi(r,\theta)$ em Sr (veja 3.5- e).
- $A_{k,n}$ - Coeficiente definido por (I.25- a). Permite escrever a função $S(x_k, \lambda)$ em termos de polinômios de Chebishev ímpares.
- $A_{j,n}$ - N-ésimo coeficiente da expansão em série de potências de λ da função $H_j(\lambda)$ (anexo I).

B

- $B(\phi; \psi)$ - Forma bilinear simétrica definida por (2.6).
- $b_{n,j}^{\pm}$ - N-ésimo coeficiente que multiplica a n -
ésima função-teste na combinação linear, que
fornece $\phi_{e,j}^{\pm}$.
- $\{b_{n,k}^{\pm}\}$ - Vetor n dimensional cujos elementos são os
coeficientes $b_{n,k}^{\pm}$.
- $\{b_{n,k}^{\pm}\}^T$ - Vetor transposto de $\{b_{n,k}^{\pm}\}$.
- b/c - Braço do momento em relação ao ponto médio do
fólio normalizado pela corda.
- b/c^A - Aproximação variacional para o parâmetro b/c .
- $B_{j,k,n}$ - Coeficiente definido por (I.13). Permite
expressar as funções $F_j(x_k, \lambda)$ em termos dos
polinômios de Chebishev.
- $B_{k,n}$ - Coeficiente definido por (I.25- a). Permitem
escrever a função $S(x_k, \lambda)$ em termos de
polinômios de Chebishev ímpares.
- $b_{n,m}$ - Coeficiente do termo de $O(\lambda^{(2m+1)})$ do
(2n+1)-ésimo polinômio de Chebishev.
- ## C
- c - Corda da placa plana bidimensional.
- C - Contorno arbitrário que engloba o fólio.
- C_T - Contorno do semicírculo S_T .
- CL/α - Coeficiente usualmente utilizado para

- representar a variação da força de sustentação em função do parâmetro λ .
- C_M/α - Coeficiente usualmente utilizado para representar a variação do momento em função do parâmetro λ .
- $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ - Função do parâmetro λ e da variável x (veja (H.9)).
- $C_{j,n}$ - Coeficiente definido por (I.15). Permite expressar as funções $H_j(\lambda)$ em termos dos polinômios de Chebishev.
- \bar{c}_j - Coeficientes da expansão polinomial da assíntota das funções $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$ em termos dos polinômios de Chebishev.
- $C(x,\lambda)$ - Função do parâmetro λ e da variável x definida por (I.20- b).
- $c_j(x)$ - Funções da variável x definidas na tabela I.1.
- D
- ∂B - Contorno do corpo esbelto ilustrado na figura 2.1 (capítulo 2).
- Contorno da placa plana bidimensional composto pelo contorno circular que engloba o bordo de fuga do fólio mais parte do fólio que pertence a faixa $x > 0$ (capítulo 3 e

anexos A e B, veja figura A.1).

- d - Distância do ponto médio da fôlio à parede sólida.
- ∂S^+ - Contorno da região S^+ .
- \vec{D} - Arrasto (capítulo 3 e anexo A).
- $D_{j,n}$ - Coeficiente definido por (I.27). Permite escrever a função $H_j(\lambda)$ em termos de polinômios de Chebishev ímpares.
- d/a - Parâmetro equivalente a b/c utilizado por TOMOTIKA; IMAI (1937) (veja Apêndice A).
- E
- $E_1(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.17- a).
- $E_2(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.17- b).
- $E_3(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.33- a).
- $E_4(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.33- b).
- $E(x,y)$ - Potencial de velocidades imposto (anexo B).
- F
- \vec{F} - Força que o fluido aplica no corpo (capítulo 2).
- $F_{ij}^{\pm}(\phi_0; \psi_0)$ - Funcional bilinear definido por (3.52).
- $f(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (H.2).
- $F_j(x,\lambda)$ - Função sob o sinal de integração nos integrais presentes nas funções $H_j(\lambda)$ (anexo I).

- $F_{j,n}$ - N-ésimo coeficiente da expansão em série de potências de λ das funções $F_j(x,\lambda)$ (anexo I).
- G**
- $g_n(\theta)$ - Auto funções do problema de Sturm-Liouville em St .
- $G(\phi;\psi)$ - Forma bilinear simétrica definida por (3.23).
- $[G_{nm}^{\pm}]$ - Matriz $N \times N$ cujos elementos são os valores $G(\chi_{e,n}^{\pm};\chi_{e,m}^{\pm})$. (N - número de funções-teste utilizadas para formar a base de $H_{e,A}(S^+)$).
- $G(\chi_{e,n}^{\pm};\chi_{e,m}^{\pm})$ - Valor do funcional $G(\phi;\psi)$ quando as funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$ e $\chi_{e,m}^{\pm}$ fazem parte do argumento.
- H**
- $H(S)$ - Conjunto das classes de equivalência das funções de $W(S)$ que possuem o mesmo gradiente.
- $H_2^1(S)$ - Espaço de Hilbert construído sobre o conjunto $H(S)$ utilizando a forma bilinear $B(\phi;\psi)$ como produto interno.
- $H_A(S)$ - Espaço de aproximações finito dimensional contido em $H_2^1(S)$.
- $H_2^1(S^+)$ - Espaço funcional linear similar a $H_2^1(S)$, mas com a região S^+ como suporte.
- $H_{e,2}^1(S^+)$ - Subespaço de $H_2^1(S^+)$ definido por (3.31).

$He_2^1(S^+) \times He_2^1(S^+) -$ Produto cartesiano de $He_2^1(S^+)$ por $He_2^1(S^+)$.

$He_A(S^+)$ - Espaço de aproximação contido em $He_2^1(S^+)$.
Subespaço de $He_2^1(S^+)$.

$H_2^{1,0}(S_T^+)$ - Espaço funcional cujos elementos satisfazem (B.15) e tem S_T^+ como suporte.

$H_j(\lambda)$ - Funções do parâmetro λ definidas por (H.1) com $j=1, \dots, 5$ (anexo H).

- Funções do parâmetro λ definidas por (I.1) com $j=1, \dots, 11$ (anexo I).

$H_j(\lambda)$ - Expansão polinomial da assíntota da função $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$ (anexo I).

I

$\vec{I}(t)$ - Impulso da força que o corpo em movimento aplica no fluido (capítulo 2 e anexo B).

$I_1(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.67- a).

$I_2(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.67- b).

$I_3(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.67- c).

$I_4(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.84- a).

$I_5(\lambda)$ - Função do parâmetro λ definida por (F.84- b).

$\vec{I}(\phi_e, t)$ - Impulso da força que o fólio aplica sobre o fluido com campo de velocidades gradiente de ϕ_e (anexo B).

J

$J(\psi)$ - Funcional linear, definido por (2.17), que difere da lagrangiana $\mathcal{L}(\psi)$ pelo coeficiente $2 \cdot \rho \cdot U^2(t)$.

K

K_0 - Número de onda ($K_0 = g/U^2$)

L

$\mathcal{L}(\phi, t)$ - Lagrangiana do sistema hidrodinâmico expressa em termos do potencial $\phi(x, y)$ (capítulo 2 e anexo B).

$\mathcal{L}(\phi)$ - Lagrangiana definida por (2.13) no capítulo 2

\uparrow - Força de sustentação (capítulo 3 e anexo A).

$\mathcal{L}_j(\phi_{e, j}^{\pm})$ - Lagrangiana dos potenciais $\phi_{e, j}^{\pm}$.

$\mathcal{L}(\phi_e)$ - Lagrangiana para o potencial $\phi_e(x, y)$ (anexo B).

$\mathcal{L}(\phi_{e, j}^{\pm})$ - Lagrangiana para o potencial $\phi_{e, j}^{\pm}(x, y)$ ($j=0, 1$).

$\mathcal{L}(\phi_e, t)$ - Lagrangiana para o potencial $\phi_e(x, y, t)$ definida por (B.21).

L/Lo - Parâmetro utilizado por TOMOTIKA; IMAI (1937) para representar a variação da força de sustentação em função do parâmetro $2a/H$ (Apêndice A).

- M
- m_{xx} - Coeficiente de massa adicional na direção do eixo x.
- \vec{M} - Momento resultante da ação do fluido sobre o fólio (capítulo 3 e anexo A).
- m_{yy} - Coeficiente de massa adicional na direção do eixo y.
- $m_j(x, y_j)$ - Módulo do número complexo fornecido pela função $z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}$.
- M/Mo - Parâmetro utilizado por TOMOTIKA; IMAI (1937) para representar a variação do momento em relação ao ponto médio da corda em função do parâmetro $2a/H$ (veja Apêndice A).
- M^*/Mo^* - Parâmetro utilizado por TOMOTIKA; IMAI (1937) para representar a variação do momento em relação ao bordo de ataque em função do parâmetro $2a/H$ (veja Apêndice A).
- P
- $p(x, y)$ - Pressão do fluido em termos das coordenadas (x, y) .
- $p'(x', y')$ - Pressão $p(x, y)$ adimensionalizada de acordo com (3.3).
- $p^\pm(x, y)$ - Função definida de acordo com (3.40).
- $p(x_k)$ - Função "peso" das fórmulas de quadratura

(anexo I).

Q

\vec{Q}

- Força que o corpo em movimento aplica no fluido (capítulo 2).
- Força que o fólho aplica ao fluido quando este desloca-se na direção positiva do eixo y (anexo B).

\vec{q}_c

- Vetor que representa o deslocamento do corpo (capítulo 2).
- Deslocamento do centro de gravidade do fólho (anexo B).

$\dot{\vec{q}}_c$

- Velocidade com que o corpo se desloca (capítulo 2).

$q^\pm(x,y)$

- Função auxiliar utilizada para explicitar a dependência dos potenciais $\phi^\pm(x,y)$ em relação aos coeficientes $T_0(\phi^\pm)$.

$Q(\phi;\psi)$

- Forma bilinear simétrica definida por (B.6).
- Lagrangiana associada ao potencial $\phi_0(x,y,t)$ (veja (B.18)).

R

\vec{R}

- Força resultante da ação do fluido sobre a placa plana (anexo A).

$R^-(x,y)$

- Função auxiliar utilizada para representar a descontinuidade do potencial circulatório ϕ_γ .

- S
- S - Domínio fluido sem fronteiras no infinito e limitado pelo contorno do corpo ∂B (capítulo 2).
- Domínio fluido limitado por uma parede sólida em $y = 0$ e pelo contorno ∂B (capítulo 3 e anexos A e B).
- S_T - Região circular de raio a , centrada no bordo de fuga do fólido.
- S^+ - Faixa $x > 0$ menos a região S_T (veja figura 3.6).
- S_p - Canal entre placa plana e parede sólida ($0 \leq -\lambda$ e $0 \leq x \leq 1$).
- \bar{S} - Região $S - \bar{S}_p$ (veja figura 3.7).
- S' - Faixa $x > 0$, $S^+ \cup S_T$ (anexo B).
- S_T^+ - Domínio formado por $(S^+ \cup S_T) \times [0, T]$, onde T é o instante final do movimento do fólido (anexo B).
- $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ - Função do parâmetro λ e da variável x (veja (H.8)).
- $S(x, \lambda)$ - Função do parâmetro λ e da variável x definida por (I.20- a).
- $s_j(x)$ - Funções da variável x definidas na tabela I.1.

T

- $T(\phi)$ - Energia cinética associada ao potencial total $\phi(x,y)$ (capítulo 2).
- Energia cinética devido ao campo de velocidades gerado pelo potencial $\phi(x,y,t)$ (anexo B).
- $T_n(\phi)$ - Funcional linear definido por (3.6).
- $T_0(\phi^\pm)$ - Coeficientes necessários para determinar a circulação adimensional através de (3.29) (condição de Kutta).
- $T(\Phi)$ - Energia cinética, função do potencial total $\Phi(x,y)$ (anexo B).
- $T(\phi;E)$ - Energia cinética, função dos potenciais $\phi(x,y)$ e $E(x,y)$ (veja anexo B).
- $T(\phi_\gamma)$ - Energia cinética associada ao potencial circulatório ϕ_γ (anexo B).
- $\hat{T}_0(\phi^\pm)$ - Aproximação para os coeficientes $T_0(\phi^\pm)$.
- $T_n(\lambda)$ - n -ésimo polinômio de Chebishev na variável λ .
- $T_{2n}(\lambda)$ - $2n$ -ésimo polinômio de Chebishev com λ como variável (anexo I).
- $T_{2n+1}(\lambda)$ - $(2n+1)$ -ésimo polinômio de Chebishev na variável λ . Os polinômios de Chebishev com este índice são funções ímpares em λ (anexo I).

U

$U(t)$ - Intensidade da velocidade do corpo esbelto.

U - Velocidade da corrente fluida (capítulo 2).

V

$V(\phi, t)$ - Potencial da força externa em termos do impulso $\dot{I}(t)$ (capítulo 2 e anexo B).

$V_0(\psi)$ - Funcional linear definido por (2.9).

$V_0^+(\psi)$ - Funcional linear definido por (3.16).

$V_0^-(\psi)$ - Funcional linear definido por (3.27).

$V_1^\pm(\psi_e)$ - Funcional linear com argumento restrito a $H_2^1(S^+)$ e definido por (3.38).

$V_k^\pm(\chi_{e,n}^\pm)$ - Valor do funcional $V_k^\pm(\psi)$, com $k=0,1$, quando a função-teste $\chi_{e,n}^\pm$ é o argumento.

$\{V_k^m^\pm\}$ - Vetor n dimensional cujos elementos são os valores $V_k^\pm(\chi_{e,n}^\pm)$.

W

$W(S)$ - Conjunto das funções definidas em S com gradiente quadrado integrável em S .

$W_D(S)$ - Classe de funções com descontinuidade do tipo (3.11) em S .

$w^+(z)$ - Função de uma variável complexa definida pela expressão (3.84- a).

$w^-(z)$ - Função de uma variável complexa definida pela expressão (3.84- b).

- $w(\lambda)$ - Função "peso" na relação de ortogonalidade dos polinômios de Chebishev (anexo I).
- x
- x' - Variável x adimensionalizada pela meia corda (veja (3.3)).
- x_k - Extremos dos intervalos resultantes da partição do intervalo de integração em N partes (N par no caso da fórmula de Simpson).
- y
- y' - Variável y adimensionalizada pela meia corda (veja (3.3)).
- y_k - Nas fórmulas de integração Gaussianas y_k é a k -ésima raiz do n -ésimo polinômio.

ALFABETO GREGO

- α - Ângulo de ataque.
- α_n - Coeficiente definido por (I.28- b). Permite escrever a função $-\lambda \ln \lambda$ em termos de polinômios de Chebishev ímpares.
- β_n - Coeficiente definido por (I.28- b). Permite escrever a função $\lambda^{3/2}$ em termos de polinômios de Chebishev ímpares.
- $\chi_{e,n}^{\pm}$ - N -ésima função-teste par (+) ou (-) ímpar utilizada para construir a base do espaço de

- aproximação $H_{e,A}(S^+)$.
- χ_n^\pm - Função par (+) ou ímpar (-) utilizada para construir a n-ésima função-teste de acordo com (3.68) ou (3.69).
- $\chi_{e,n}^\pm$ - n-ésima função-teste para o problema par (+) ou ímpar (-).
- δ - Erro da aproximação do potencial $\phi(x,y)$ (capítulo 2).
- Erro da aproximação dos potenciais $\phi_{e,j}^\pm$ (capítulo 3).
- $\delta\mathcal{L}(\phi)$ - Variação primeira da lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$.
- $\delta J(\psi)$ - Variação primeira do funcional $J(\psi)$.
- $\delta\phi_{e,j}^\pm$ - Função definida por (3.56). A norma de $\delta\phi_{e,j}^\pm$ representa o erro com que $\phi_{e,j}^{\Delta,\pm}$ aproxima $\phi_{e,j}^\pm$.
- $\delta\mathcal{L}(\phi_e)$ - Variação primeira da lagrangiana para o potencial $\phi_e(x,y)$.
- $\Phi(x,y,t)$ - Potencial total de velocidades.
- $\phi(x,y)$ - Potencial de velocidades normalizado pela velocidade $U(t)$ (capítulo 2).
- Potencial perturbado adimensional devido a presença da placa plana (capítulo 3).
- Potencial perturbado devido a presença do fólho (anexo B).

- $\phi^A(x,y)$ - Projeção do potencial $\phi(x,y)$ em $H_A(S)$.
- $\Phi(x,y)$ - Potencial total de velocidades (capítulo 3 e anexo B).
- $\phi(x',y')$ - Potencial $\phi(x,y)$ adimensionalizado de acordo com (3.3).
- $\phi(r,\theta)$ - Expressão para o potencial de velocidades na região Sr em termos de uma série de Fourier generalizada (veja (3.7)).
- $\phi^+(x,y)$ - Parcela do potencial perturbado adimensional que satisfaz (3.10- a,b,c e d).
- $\phi_\gamma(x,y)$ - Potencial circulatório adimensional que satisfaz (3.10- a,b,c,d e e).
- $\phi^-(x,y)$ - Parcela contínua do potencial $\phi_\gamma(x,y)$.
- $\phi_e^\pm(x,y)$ - Parcela (projeção) do potencial $\phi^\pm(x,y)$ que pertence a $H_2^1(S^+)$ em $H_{e_2}^1(S^+)$.
- $\phi_{e,j}^\pm$ - Parcelas de $\phi_e^\pm(x,y)$ que satisfazem (3.37) ($j=0,1$).
- $\phi_{e,j}^{A,\pm}$ - Aproximação (projeção) de $\phi_{e,j}^\pm$ em $H_{e_A}^1(S^+)$.
- $\phi(x,y,t)$ - Potencial de velocidades associado ao deslocamento do fólio na direção do eixo y (anexo B).
- γ - Circulação adimensional.
- γ^A - Aproximação para a circulação adimensional.
- Γ - Circulação (veja (3.14))

- $\psi^A(x,y)$ - Projecção de uma função ψ qualquer pertencente a $H_2^1(S)$ em $L_A(S)$.
- ψ_e - Parcela (projecção) de um elemento ψ que pertence $H_2^1(S^+)$ em $He_2^1(S^+)$.
- ψ_e^A - Aproximação (projecção) de um elemento ψ_e pertencente a $He_2^1(S^+)$.
- ψ_j^\pm - Parte imaginária da função complexa $w_j^\pm(z_j)$ ($j=1,2$) (anexo F).
- λ - Parâmetro adimensional definido como a razão entre a distância d e a meia corda ($c/2$).
- λ_n - Auto valores do problema de Sturm-Liouville em St .
- $\lambda \cdot CL/\alpha$ - Coeficiente utilizado neste trabalho para representar a variação da força de sustentação em função do parâmetro λ .
- $\lambda \cdot Cm/\alpha$ - Coeficiente utilizado neste trabalho para representar a variação do momento em relação ao ponto médio da corda em função do parâmetro λ .
- $\lambda \cdot CL/\alpha^A$ - Aproximação para $\lambda \cdot CL/\alpha$.
- $\lambda \cdot CL/\alpha^*$ - Parâmetro $\lambda \cdot CL/\alpha$ obtido através dos dados apresentados pelas referências.
- Λ_{ij}^\pm - Valor que a forma bilinear $G(\phi;\psi)$ assume quando seu argumento for restrito ao par de

- funções $(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$ ($i, j=0,1$).
- Λ_{ij}^{\pm} - Aproximação do valor Λ_{ij}^{\pm} . Veja (3.55) e (3.59).
- Λ_j^{\pm} - Parte real da função complexa $w^{\pm}(z_j)$ ($j=1,2$) (anexo F).
- $\Theta_j(x, y_j)$ - Fase do número complexo fornecido pela função $z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}$.
- ρ - Densidade do fluido.
- $\rho_B(\phi; \psi)$ - Métrica gerada pelo funcional bilinear simétrico $B(\phi; \psi)$.
- $\rho_G(\phi; \psi)$ - Métrica induzida pela forma quadrática $G(\phi; \psi)$.
- $(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$ - Função do parâmetro λ e da variável x (veja (H.5)).
- $\xi(x, y)$ - Função que pertence a $H_2^1(S)$, mas de norma unitária ($\|\xi\|_B = 1$).

OUTROS SÍMBOLOS

- $\|\cdot\|_B$ - Norma gerada pelo funcional bilinear simétrico $B(\phi; \psi)$.
- $\|\cdot\|_G$ - Norma induzida pela forma quadrática $G(\psi; \psi)$.
- (r, θ) - Sistema de coordenadas polares com origem no bordo de fuga do fólio.

RESUMO

No presente trabalho, o método variacional para problemas de difração e radiação de ondas, formulado por ARANHA; PESCE (1989), será estendido para tratar problemas envolvendo superfícies de sustentação, dentro do contexto da teoria do potencial. Este trabalho fica restrito ao problema placa plana bidimensional com "efeito solo".

O formalismo matemático do método numérico, apresentado por ARANHA; PESCE (1989), foi utilizado para mostrar que as forças generalizadas sobre uma placa plana com "efeito solo" são expressas em termos dos valores estacionários de funcionais bem definidos. Como consequência, as forças generalizadas são avaliadas de maneira direta via um método variacional. Não é necessário determinar o campo de pressão para obter as forças generalizadas, basta aproximar, de maneira grosseira, o potencial de velocidades (erro de $O(\delta)$) para obter uma boa aproximação para as forças generalizadas (erro $O(\delta^2)$).

Para mostrar o poder do método variacional e obter expressões simples para as forças generalizadas, foram construídas duas aproximações variacionais, utilizando duas e três funções-teste respectivamente.

Os objetivos foram satisfatoriamente atingidos. A primeira aproximação variacional forneceu uma expressão simples para o momento, a qual apresentou erro máximo de 0,6 % face à literatura. A segunda aproximação variacional forneceu uma expressão relativamente complexa para a força de sustentação, com erro máximo em torno de 1,0 % quando o "efeito solo" não é muito intenso.

A primeira aproximação variacional da força de sustentação não apresentou bons resultados (erro máximo em torno de 12,5 %) porque os valores estacionários dos quais as aproximações da força de sustentação dependem, não são "pontos" de máximo ou mínimo como acontece com a aproximação do momento, onde os valores estacionários são "pontos" de mínimo. Conseqüentemente, as aproximações da força de sustentação convergem mais lentamente que as aproximações do momento. As aproximações para as forças generalizadas podem ser melhoradas utilizando-se mais funções-teste, mas, por outro lado, perdem em simplicidade, fugindo de um dos objetivos deste trabalho.

ABSTRACT

In the present work the variational method for water wave radiation and diffraction problems, formulated by ARANHA; PESCE (1989), will be extended to treat lifting surfaces problems in the context of the potential theory. This work will be restricted to the problem: two-dimensional thin foil in ground effect.

The mathematical formalism of the numerical method, presented by ARANHA; PESCE (1988), is used in the present work to show that the generalized forces upon a two-dimensional thin foil in ground effect can be written in terms of stationary values of well defined functionals. Therefore, the generalized forces can be evaluated in a direct way using a variational method and, as a consequence, it is not necessary to evaluate the pressure field around the foil. Only a crude approximation for the velocity potential (error of $O(\delta)$) suffices to provide a better approximation for the generalized forces (error of $O(\delta^2)$).

To show the power of the variational method, two variational approximations were built using two and three trial functions respectively.

Aims of this work were achieved. The first variational approximation for the moment and the second approximation for the lift agreed well with the results presented by the literature. The first approximation for the moment presents an error of only 0,6 % and the second approximation for the lift presents an error of 1,0 %, when the ground effect is not so hard.

The first variational approximation for the lift does not agree well with the literature (a maximum error of 12,5 %). The difference between the first approximation for the moment and the first approximation for the lift was, in part, due to the fact that the stationary values on which lift depends are not minimum or maximum values. They are saddle values. As a consequence, the variational approximation for the lift converges slower than the approximation for the moment. The approximation for the generalized forces can be improved using more trial functions, but the resulting expressions for lift and moment will lose their simplicity.

1. INTRODUÇÃO.

A interação entre um corpo esbelto em movimento e o meio fluido circundante pode ser modelada dentro do contexto da teoria do potencial. Os efeitos viscosos relevantes (resistência ao avanço devido ao atrito com o meio fluido e a resistência de forma) podem ser incorporados através de formulações semi empíricas.

Dentro do contexto da teoria do potencial deseja-se geralmente determinar quantidades globais de interesse, como a circulação ao redor do corpo e a matriz de massa adicional. Caso exista superfície livre (superfície que separa dois meios fluidos de densidades díspares), deseja-se também determinar a amplitude da onda gerada, necessária ao cálculo da resistência devido à geração de onda.

A circulação ao redor do corpo, apesar de ser uma consequência da viscosidade do fluido, pode ser modelada dentro do contexto da teoria do potencial. Quando o corpo esbelto apresenta o bordo de fuga agudo, a intensidade da circulação pode ser determinada através da condição de Kutta, que impõe valor finito ao campo de velocidades na região do bordo de fuga. Esta condição resulta da

constatação de que, na prática, o vetor velocidade apresenta valor finito no bordo de fuga, mas o campo de velocidades gradiente de uma função potencial, apresenta uma singularidade na vizinhança do bordo de fuga, devido a uma mudança abrupta de curvatura nessa região. Para que a condição de Kutta seja satisfeita, sobrepõe-se um potencial circulatório de modo que a singularidade de seu gradiente cancele a singularidade do gradiente do potencial original, determinando a circulação.

Como a circulação é obtida através da condição de Kutta, ela depende de detalhes do escoamento, mais especificamente do comportamento dos potenciais circulatório e original no bordo de fuga. Outras quantidades de interesse como o momento, a matriz de massa adicional e a resistência de ondas, caso exista, dependem, levemente, de detalhes do campo de velocidades. Infelizmente, os métodos usuais não tiram proveito deste fato. Ao contrário, a tendência atual parece ser a de construir o campo de pressão e, posteriormente, integrá-lo para obter as quantidades de interesse. Como exemplo, existe o método da função de Green, onde a função potencial é computada na superfície do corpo através da solução de uma equação integral.

Neste trabalho, o equacionamento fraco será utilizado para mostrar que quantidades de interesse como: as forças generalizadas, os coeficientes de massa adicional e, mesmo a circulação, quando a condição de Kutta é formulada de maneira adequada, podem ser escritos como valores estacionários de funcionais bem definidos. Como consequência, as quantidades de interesse podem ser obtidas de maneira direta através de um método variacional, ou seja, basta determinar uma aproximação grosseira para os potenciais (com erro de ordem $O(\delta)$) para obter uma boa aproximação para as quantidades de interesse (com erro de ordem $O(\delta^2)$).

Em todo método variacional, a qualidade dos resultados depende da escolha adequada das funções que formam a base do espaço de aproximações. Para a classe de problemas em questão, as funções-teste (funções que formam a base do espaço de aproximações) podem ser singularidades elementares (pólos, dipolos, vórtices, linhas de vórtices e etc.) instaladas no interior do corpo e capazes de representar aspectos gerais do escoamento. Essas singularidades quando colocadas de forma adequada podem também representar aspectos locais do escoamento, como o

escoamento ao redor de cantos vivos (como o bordo de fuga), fornecendo uma aproximação mais fiel para os potenciais.

Dessa maneira o presente enfoque variacional desemboca em um método numérico onde os potenciais são representados como combinação linear de singularidades elementares instaladas no interior do corpo, similar à maneira como a função potencial é representada no método da função de Green.

O formalismo matemático utilizado neste trabalho é similar ao formalismo encontrado em ARANHA; PESCE (1989) e em PESCE (1988). Esses dois trabalhos apresentam um método numérico, consequência de um enfoque variacional, desenvolvido para tratar problemas de radiação e difração de ondas. O presente trabalho estende a problemas com circulação o método numérico, consequência de um enfoque variacional, apresentado nos dois trabalhos mencionados. Deve ficar bem claro que a novidade deste trabalho reside no fato de que a circulação possa ser escrita como valor estacionário de funcionais bem definidos e, conseqüentemente, computada através de um método variacional.

O capítulo 2 deste trabalho tem como finalidade mostrar a idéia geral do enfoque variacional através de um problema hidrodinâmico simples. No capítulo 3 o enfoque

variacional, ilustrado no capítulo 2, será aplicado ao problema com circulação placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque. Em relação ao capítulo 2, o capítulo 3 apresenta algumas modificações, não em essência, mas em forma. Essas modificações são necessárias para escrever a circulação como valor estacionário de um funcional bem definido.

Na segunda parte do capítulo 3 serão construídas duas aproximações variacionais para o problema placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque no intuito de ilustrar a força do método numérico resultante do enfoque variacional. A primeira aproximação utiliza apenas duas funções-teste. Este fato possibilita alcançar um dos objetivos deste trabalho: obter expressões simples para as quantidades de interesse, no caso, as forças generalizadas (momento e força de sustentação). Caso a primeira aproximação variacional não forneça uma boa aproximação para as forças generalizadas, será construída uma segunda aproximação variacional utilizando três funções-teste.

No capítulo 4, os resultados fornecidos pelas duas aproximações variacionais são mostrados e comparados com os valores fornecidos pelas referências, no caso, TOMOTIKA; IMAI (1937) e WIDNALL; BARROWS (1970).

Os resultados apresentados no capítulo 4 são

comentados no capítulo 5 e, finalmente, no capítulo 6 os objetivos deste trabalho são revistos e as principais conclusões são enunciadas.

* * *

2. O ENFOQUE VARIACIONAL.

A finalidade deste capítulo será ilustrar o enfoque variacional, ou seja, mostrar como idéias relacionadas aos princípios variacionais da mecânica e ao cálculo variacional podem ser empregadas na análise hidrodinâmica da interação entre corpos e o meio fluido circundante. Será mostrado que quantidades de interesse para a análise hidrodinâmica, como os coeficientes de massa adicional, são valores estacionários de funcionais bem definidos, como a Lagrangiana do sistema fluido e, portanto, podem ser determinados diretamente através de um método variacional.

Considere o seguinte problema físico: Um corpo esbelto bidimensional movendo-se através de fluido em repouso. O domínio fluido possui fronteiras no infinito e está ilustrado na figura 2.1.

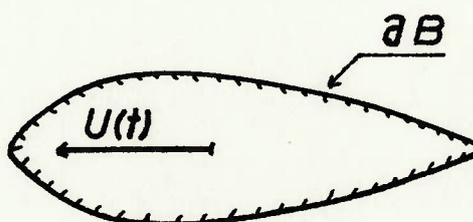


Fig. 2.1 - Corpo esbelto em domínio fluido sem fronteiras.

A velocidade com que o corpo se move através do fluido em repouso é pequena o suficiente, para que o fluido possa ser considerado incompressível. Como o corpo é esbelto e considerando o número de Reynolds suficientemente alto (fluido com pequeno coeficiente de viscosidade cinemática), a vorticidade fica restrita a uma fina camada ao redor do corpo (espessura desprezível face a dimensão principal do corpo) e à esteira de espessura desprezível. Conseqüentemente, o escoamento decorrente do movimento do corpo esbelto através do fluido em repouso pode ser aproximado como irrotacional e o campo de velocidades pode ser representado como o gradiente de um potencial $\Phi(x,y,t)$, onde o sistema de coordenadas (x,y) está fixo ao corpo. O potencial $\Phi(x,y,t)$ pode ser representado em termos do potencial $\phi(x,y)$ como:

$$\Phi(x,y,t) = U(t) \cdot \phi(x,y) \quad (2.1)$$

Esse problema de interação hidrodinâmica pode ser considerado resolvido uma vez conhecida a função potencial $\phi(x,y)$. Integrando-se o campo de pressão ao redor do corpo, obtido a partir da função $\phi(x,y)$ via equação de Bernoulli, determina-se a ação do fluido sobre o corpo, que é o objetivo final da análise desse problema de interação hidrodinâmica.

Neste capítulo, também, será mostrado que não é necessário determinar o campo de pressões para obter-se as forças generalizadas e outras quantidades de interesse. Para que isso seja possível, ao invés da usual formulação forte, será construída a formulação fraca a partir do princípio de mínima ação.

No sistema hidrodinâmico em questão não existem forças restauradoras (ação do campo gravitacional associada à presença de superfície livre, por exemplo) e a Lagrangiana será expressa, somente, como a soma da energia cinética com o potencial das forças externas ("função trabalho"), associado ao trabalho da força que o corpo aplica sobre o meio fluido.

A energia cinética do meio fluido será representada pelo funcional:

$$T(\phi) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U(t)^2 \cdot \iint_S \nabla\phi \cdot \nabla\phi \, dS \quad (2.2)$$

Para determinar-se a Lagrangiana, o potencial das forças externas deve ser obtido. A força exercida pela pressão do fluido no corpo é dada por:

$$\vec{F} = \int_{\partial B} p(x,y,t) \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (2.3)$$

onde $p(x,y,t) = -\rho \cdot \dot{U}(t) \cdot \phi(x,y) - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U(t)^2 \cdot [\partial\phi/\partial x + \nabla\phi \cdot \nabla\phi]$.

A contribuição da segunda parcela da pressão para o

integral em (2.3) é nula. Desse modo, a força exercida pelo corpo no fluido será dada pela seguinte expressão:

$$\vec{Q} = - \vec{F} = \rho \cdot \dot{U}(t) \cdot \int_{\partial B} \phi(x,y) \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (2.4)$$

O potencial das forças externas corresponde ao trabalho das forças externas. Este trabalho é determinado em função do deslocamento do ponto de aplicação dessas forças. Em problemas hidrodinâmicos onde a descrição Euleriana é adotada, existe acesso direto à velocidade das partículas fluidas, embora a "trajetória" seja, em geral, inacessível. Conseqüentemente, o potencial das forças externas dado explicitamente em termos da "posição" não é conveniente para a análise hidrodinâmica. Porém, o potencial das forças externas, como será mostrado a seguir, pode ser descrito em termos do impulso das forças externas e das velocidades. Nesta forma, torna-se apropriado para o problema em questão.

O impulso da força que o corpo exerce no fluido é dado por:

$$\vec{I}(t) = \int_0^t \vec{Q}(\tau) \cdot d\tau = \rho \cdot U(t) \cdot \int_{\partial B} \phi(x,y) \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (2.5)$$

O potencial das forças externas escrito em termos do impulso $\vec{I}(t)$ será expresso por:

$$v(\phi, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{i}(t) \cdot \vec{q}_c] - \vec{i}(t) \cdot \dot{\vec{q}}_c \quad (2.6)$$

onde $\vec{q}_c = q_c \vec{i}$ é o deslocamento do corpo e $\dot{\vec{q}}_c = -U(t) \vec{i}$ é a velocidade com que o corpo se desloca através do fluido em repouso.

Uma vez obtida a expressão para a energia cinética e a expressão para o potencial das forças externas, a Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(\phi, t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U(t)^2 \cdot [B(\phi; \phi) - 2 \cdot V_0(\phi)] + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{i}(t) \cdot \vec{q}_c] \quad (2.7)$$

onde o valor $B(\phi; \phi)$ é o dobro da energia cinética associada ao campo de velocidades gradiente de ϕ , normalizada pela densidade do fluido. O valor $V_0(\phi)$ é o impulso da força que o corpo exerce sobre o fluido normalizado por $\rho \cdot U(t)$. Os funcionais $B(\phi; \psi)$ e $V_0(\psi)$ são dados, respectivamente, por:

$$B(\phi; \psi) = \iint_S \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dS \quad (2.8)$$

$$V_0(\psi) = \int_{\partial B} \psi(x, y) \Big|_{\partial B} \cdot n_x \, d\partial B \quad (2.9)$$

A função $\phi(x, y)$ pertence à classe de funções que possuem "energia finita" no domínio fluido S , ou seja, satisfazem a desigualdade:

de modo que os integrais presentes no funcional $B(\phi;\psi)$ sejam bem definidos. Para maiores detalhes sobre classes de funções que possuem "energia finita", veja LADYZHENSKAYA; URAL'TSEVA (1968) e SOBOLEV (1963). Na classe de funções que satisfaz (2.10), denotada por $W(S)$, o integral em (2.9) também está bem definido. O funcional $V_0(\psi)$, definido por (2.9), é linear e o funcional $B(\phi;\psi)$ é bilinear e simétrico.

Duas funções χ e ψ de $W(S)$ são consideradas equivalentes sob o ponto de vista da relação de equivalência, definida por:

$$\iint_S (\nabla\chi - \nabla\psi)^2 dS = 0 \quad (2.11)$$

se possuem o mesmo gradiente quase sempre em S , o que equivale a dizer que a diferença $\chi(x,y) - \psi(x,y)$ é uma função constante quase sempre em S (essa diferença pode ser uma função não constante em um conjunto de medida nula em relação a S). A relação de equivalência (2.11) define um conjunto de classes de equivalência sobre $W(S)$, denotado por $H(S)$. Então, cada elemento $\varphi(x,y)$ de $H(S)$ será um conjunto de funções que possuem o mesmo gradiente e, portanto, diferem entre si por uma constante.

Os funcionais $B(\phi; \psi)$ e $V_0(\psi)$ estão bem definidos^{2†} quando ϕ e ψ pertencem a $H(S)$. O valor $B(\varphi; \varphi)$ é positivo para qualquer φ que pertence a $H(S)$, exceto para a função nula em $H(S)$, que representa a classe de equivalência que contém todas as funções constante de $W(S)$. Com argumentos restritos a $H(S)$, o funcional $B(\phi; \psi)$ satisfaz as propriedades de produto interno e induz a norma $\|\varphi\|_B = [B(\varphi; \varphi)]^{1/2}$ sobre $H(S)$. A partir da norma induzida $\|\cdot\|_B$ sobre $H(S)$ define-se a métrica $\rho_B(\bar{\phi}; \bar{\varphi}) = \|\bar{\phi} - \bar{\varphi}\|_B$. O espaço linear $H(S)$ com a métrica $\rho_B(\bar{\phi}; \bar{\varphi})$, a norma $\|\cdot\|_B$ e o produto interno $B(\bar{\phi}; \bar{\varphi})$ será denotado por $H_2^1(S)$.

Define-se dois "vetores" $\bar{\phi}$ e $\bar{\varphi}$ pertencentes a $H_2^1(S)$ como ortogonais entre si quando $B(\bar{\phi}; \bar{\varphi}) = 0$. Utilizando-se o funcional $B(\bar{\phi}; \bar{\varphi})$ como produto interno, $\|\varphi\|_B$ como a norma induzida e $\rho_B(\bar{\phi}; \bar{\varphi})$ como a métrica, obtém-se uma estrutura sobre $H_2^1(S)$ que nos permite falar em ortogonalidade e, portanto, em projeções. A utilidade da estrutura introduzida em $H_2^1(S)$ ficará clara no decorrer deste capítulo. No que segue, um elemento $\bar{\varphi}$ de $H_2^1(S)$ será, simplesmente, denotado por ψ .

^{2†} O funcional $V_0(\psi)$ assume valor nulo quando seu argumento é uma função constante. Como os elementos de $\bar{\varphi}$ diferem entre si por uma função constante, o funcional $V_0(\psi)$ assume sempre o mesmo valor para qualquer ψ pertencente a $\bar{\varphi}$ e, portanto, está bem definido em $H(S)$.

A ação para essa classe de problemas hidrodinâmicos é fornecida pelo funcional:

$$A(\phi) = \int_0^T \mathcal{L}(\phi) dt \quad (2.12)$$

que pode ser reescrito, via (2.7), como:

$$A(\phi) = \int_0^T \mathcal{L}(\phi) \cdot dt + \vec{I}(T) \cdot \vec{q}_c(T) - \vec{I}(0) \cdot \vec{q}_c(0) \quad (2.12- a)$$

onde

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U(t)^2 \cdot [B(\phi; \phi) - 2 \cdot V_0(\phi)] \quad (2.13)$$

O instante T é o instante final do movimento do sistema mecânico. Pelo princípio de "Hamilton" (O princípio de mínima ação), o movimento de um sistema mecânico arbitrário ocorre de maneira que a integral $A(\phi)$ torna-se estacionária (variação primeira de $A(\phi)$ é nula) para variações possíveis e arbitrárias do sistema, desde que a configuração inicial e final sejam preescritas, veja LANCZOS (1970). Variações arbitrárias desse sistema hidrodinâmico correspondem à variações $\delta\phi(x,y)$ da função potencial $\phi(x,y)$. O fato da ação ser estacionária implica que:

$$\int_0^T \delta\mathcal{L}(\phi) \cdot dt = 0 \quad (2.14)$$

Para que (2.14) se verifique, a variação primeira da

Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$, dada por:

$$\delta \mathcal{L}(\phi) = \rho \cdot U(t)^2 \cdot [B(\phi; \delta\phi) - V_0(\delta\phi)] \quad (2.15)$$

deve ser nula. Isso corresponde a:

$$B(\phi; \delta\phi) = V_0(\delta\phi)$$

Como $\delta\phi$ é arbitrária, a igualdade acima permanece válida para qualquer função $\psi(x,y)$ pertencente a $H_2^1(S)$, ou seja:

$$B(\phi; \psi) = V_0(\psi) \quad p/ \forall \psi(x,y) \in a H_2^1(S) \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) é a equação fraca para a classe de sistemas hidrodinâmicos em questão. O potencial $\phi(x,y)$ é, portanto, solução da seguinte formulação fraca:

"Determinar $\phi(x,y)$ pertencente a $H_2^1(S)$ tal que (2.16) seja satisfeita para todo $\psi(x,y)$ pertencente a $H_2^1(S)$."

A interpretação física da equação fraca para o sistema hidrodinâmico é clara, ela resulta da condição da Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$ ser estacionária, consequência do princípio de mínima ação.

Outro aspecto relevante é o fato da função $\phi(x,y)$ ser solução unívoca de (2.16) a menos de um termo constante, conseqüentemente, solução unívoca de (2.16) em $H_2^1(S)$. Esse fato justifica procurar a solução de (2.16) em $H_2^1(S)$.

Considere o funcional quadrático $J(\psi)$, definido como:

$$J(\psi) = \frac{1}{2} B(\psi; \psi) - V_0(\psi) \quad (2.17)$$

Para $\psi = \phi(x, y)$, o funcional $J(\psi)$ nada mais é do que a Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$ dividida por $\rho \cdot U(t)^2$. A variação primeira do funcional $J(\psi)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \delta J(\psi) &= \frac{1}{2} [B(\psi; \delta\psi) + B(\delta\psi; \psi)] - V_0(\delta\psi) \\ &= B(\psi; \delta\psi) - V_0(\delta\psi) \end{aligned}$$

onde $\delta\psi$ é um elemento arbitrário de $H_2^1(S)$.

A variação primeira de $J(\psi)$ será nula quando $\psi = \phi(x, y)$, que é a solução da equação fraca (2.16). Então, o funcional $J(\psi)$ ser estacionário quando $\psi = \phi(x, y)$ implica na validade da equação fraca (2.16) e vice versa (a validade de (2.16) implica em $J(\phi)$ ser valor estacionário). Esse resultado mostra que o princípio de mínima ação (um dos princípios variacionais da mecânica) aplicado a essa classe de sistemas hidrodinâmicos se reduz à busca da função pertencente a $H_2^1(S)$ que torna estacionário o funcional quadrático $J(\psi)$. A busca do valor estacionário deste funcional quadrático possibilita obter outro resultado interessante para a análise dessa classe de sistemas hidrodinâmicos. Nesse intuito considere o valor estacionário $J(\phi)$, dado por:

$$J(\phi) = \frac{1}{2} B(\phi; \phi) - V_0(\phi)$$

Lembrando da equação fraca (2.16), o valor $J(\phi)$ pode ser reescrito como:

$$J(\phi) = - \frac{1}{2} B(\phi; \phi) \quad (2.18)$$

O coeficiente de massa adicional (m_{xx}) na direção do eixo x pode ser expresso por:

$$m_{xx} = \int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial B = \iint_S \nabla \phi \cdot \nabla \phi dS$$

onde n é o vetor normal ao contorno ∂B . Esse coeficiente de massa adicional é, também, escrito em termos do valor $B(\phi; \phi)$ como:

$$m_{xx} = B(\phi; \phi) \quad (2.19)$$

O valor $J(\phi)$ nada mais é do que menos a metade do coeficiente de massa adicional m_{xx} . Este fato possui duas implicações importantes, mencionadas a seguir. Em primeiro lugar, o fato do coeficiente de massa adicional m_{xx} (valor $J(\phi)$) ser valor estacionário possibilita que este seja obtido diretamente através de um método variacional, como o método de Ritz ou de Galerkin. Em segundo lugar, basta obter uma aproximação $\phi^A(x, y)$ para o potencial $\phi(x, y)$ com

um erro de ordem $O(\delta)$ para que o coeficiente de massa adicional seja determinado com um erro de ordem $O(\delta^2)$, como mostrado a seguir.

O potencial $\phi(x,y)$ pode ser escrito como:

$$\phi(x,y) = \phi^{\wedge}(x,y) + \delta \cdot \xi(x,y) \quad (2.20)$$

onde $\phi^{\wedge}(x,y)$ é uma aproximação para a função potencial $\phi(x,y)$ e a função $\xi(x,y)$, por conveniência, possui norma unitária ($\|\xi\|_{\mathbb{B}} = 1$) em $H_2^1(S)$. Substituindo-se a expressão acima para o potencial $\phi(x,y)$ no valor $B(\phi;\phi)$, verifica-se que:

$$\begin{aligned} B(\phi;\phi) &= B(\phi^{\wedge};\phi^{\wedge}) + 2 \cdot B(\phi^{\wedge};\delta \cdot \xi) + B(\delta \cdot \xi;\delta \cdot \xi) \\ &= B(\phi^{\wedge};\phi^{\wedge}) + 2 \cdot \delta \cdot B(\phi^{\wedge};\xi) + \delta^2 \cdot B(\xi;\xi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

A equação fraca (2.16) com argumentos restritos a um espaço de aproximações $H_A(S)$, subespaço de $H_2^1(S)$, será expressa por:

$$B(\phi^{\wedge};\psi^{\wedge}) = V_0(\psi^{\wedge}) \quad (2.22)$$

onde ϕ^{\wedge} e ψ^{\wedge} pertencem a $H_A(S)$. $\phi^{\wedge}(x,y)$ é a aproximação de $\phi(x,y)$ em $H_A(S)$. Como ψ^{\wedge} pertence a $H_2^1(S)$, é possível substituir ψ em (2.16) por ψ^{\wedge} , resultando em:

$$B(\phi; \psi^A) = V_0(\psi^A) \quad (2.23)$$

Subtraindo-se (2.22) de (2.23), resulta que:

$$B(\phi - \phi^A; \psi^A) = 0 \quad (2.24)$$

Esta identidade é válida para qualquer função ψ^A que pertence a $H_A(S)$, o que implica em $\phi(x,y) - \phi^A(x,y)$ ser ortogonal ao espaço de aproximações $H_A(S)$. Conseqüentemente, $\phi^A(x,y)$ é uma projeção de $\phi(x,y)$ em $H_A(S)$, e a equação fraca (2.16) pode ser vista como um operador de projeção (a solução de (2.16) em um espaço de aproximações $H_A(S)$ é a projeção da solução de (2.16) em $H_2^1(S)$ sobre $H_A(S)$).

Utilizando-se (2.20):

$$\delta.\xi(x,y) = \phi(x,y) - \phi^A(x,y) \quad (2.20- a)$$

Substituindo-se (2.20- a) em (2.24), chega-se finalmente a:

$$\delta.B(\xi; \psi^A) = 0 \quad (2.25)$$

A identidade (2.25) é válida para qualquer função ψ^A pertencente a $H_A(S)$ e, portanto, permanece válida se $\psi^A = \phi^A$, ou seja:

$$\delta \cdot B(\xi; \phi^A) = 0 \quad (2.25- a)$$

Com (2.25- a), a expressão (2.21) pode ser reescrita como:

$$B(\phi; \phi) = B(\phi^A; \phi^A) + \delta^2 \cdot B(\xi; \xi)$$

Como a função $\xi(x, y)$ possui norma unitária, a expressão acima pode ser simplesmente escrita como:

$$B(\phi; \phi) = B(\phi^A; \phi^A) + \delta^2 \quad (2.26)$$

ou como:

$$J(\phi) = J(\phi^A) + \delta^2 \quad (2.26- a)$$

Através de (2.26) conclui-se que, dada uma aproximação para $\phi(x, y)$ com um erro de ordem $O(\delta)^{2\uparrow}$, o valor $B(\phi; \phi)$ e, portanto, o coeficiente de massa adicional serão aproximados com um erro de ordem $O(\delta^2)$. Isso ocorre porque $J(\phi)$ é valor estacionário, o que implica na validade da equação fraca (2.16).

Como já mencionado, o fato do coeficiente de massa adicional (m_{xx}) ser valor estacionário de um funcional bem

^{2\uparrow} Com a expressão (2.20) mais a desigualdade triangular, válida para a norma de $H_2^1(S)$, conclui-se que $\phi^A(x, y)$ aproxima $\phi(x, y)$ com um erro de ordem $O(\delta)$, como mostrado abaixo:

$$\|\phi\|_B \leq \|\phi^A\|_B + \delta \cdot \|\xi\|_B \rightarrow \|\phi\|_B = \|\phi^A\|_B + O(\delta)$$

definido implica que ele pode ser determinado de maneira direta através da busca do valor estacionário do funcional em questão (no caso o funcional $J(\psi)$), utilizando-se o método de Ritz ou de Galerkin. Não há a necessidade de avaliar o campo de pressão para obter o coeficiente de massa adicional, o que constitui uma vantagem em relação aos métodos usuais de análise hidrodinâmica.

Outra consequência de m_{xx} ser valor estacionário reside no fato de que basta determinar $\phi(x,y)$ com uma precisão grosseira para o coeficiente de massa adicional (m_{xx}) ser computado com boa precisão, atingindo, em termos práticos, um dos objetivos da análise hidrodinâmica dessa classe de problemas. Esse fato mostra que um método numérico para determinar o coeficiente de massa adicional, baseado no enfoque variacional, apresenta um trabalho numérico reduzido em relação aos métodos usuais, tornando-o mais atraente.

O enfoque variacional pode ser utilizado para obter outras quantidades de interesse além do coeficiente de massa adicional, como, por exemplo, as forças generalizadas, desde que possam ser escritas como valor estacionário de um funcional bem definido.

* * *

3. MÉTODO VARIACIONAL APLICADO A UMA PLACA PLANA BIDIMENSIONAL COM "EFEITO SOLO".

Neste capítulo, o método numérico, consequência de um enfoque variacional, apresentado em PESCE (1988) e em ARANHA; PESCE (1989) para tratar problemas envolvendo radiação e difração de ondas, será estendido a problemas em hidrodinâmica com presença de circulação.

No capítulo 2 foi mostrado que a massa adicional é valor estacionário de um funcional bem definido. Neste capítulo mostra-se que a circulação também pode ser expressa como valor estacionário de um funcional bem definido e, conseqüentemente, determinada de maneira direta via um método variacional. Ao invés de analisar um problema hidrodinâmico qualquer com circulação, este trabalho ficará restrito ao problema bidimensional placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque. A simplicidade deste problema permite ilustrar, de modo adequado, o método numérico resultante do enfoque variacional empregado. Como consequência do poder do método numérico, resultante do enfoque variacional, aliado a simplicidade do problema físico em questão, expressões analíticas para a massa adicional e circulação serão obtidas. Caso este objetivo

seja alcançado, o momento e a força de sustentação serão dados por expressões analíticas simples.

Esse problema já foi estudado por diversos autores, de maneira que existe material disponível na literatura especializada. Esse material servirá como referência para avaliar os resultados obtidos através do método numérico aqui desenvolvido, decorrente de um enfoque variacional.

O problema físico placa plana bidimensional com "efeito solo", focado neste capítulo, será descrito a seguir. Considere uma placa plana bidimensional (fólio sem espessura e sem curvatura da linha média), de corda " c ", com pequeno ângulo de ataque α em relação a uma corrente com velocidade constante U , que escoia paralelamente a uma parede sólida, como mostra a figura 3.1.

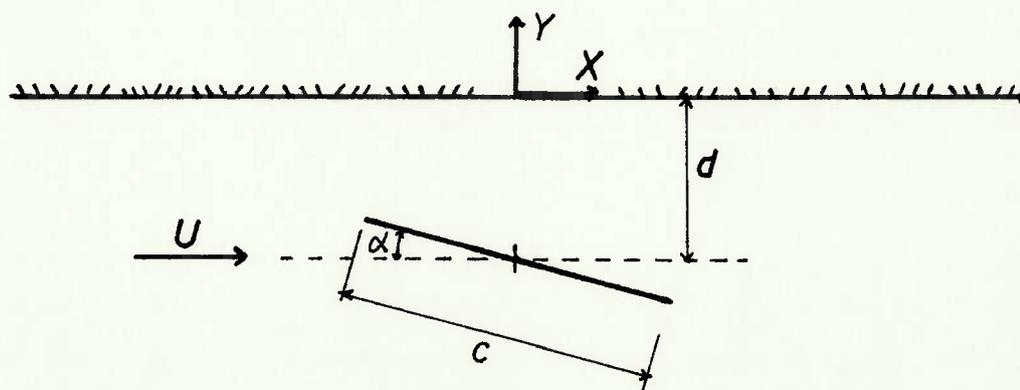


FIG. 3.1 - Placa plana bidimensional com "efeito solo".

O parâmetro "d" é a distância do ponto médio do fólio sem espessura até a parede sólida. O referencial (x,y), fixo em relação ao fólio, está localizado na parede sólida, com os eixos x e y, respectivamente, paralelo e ortogonal à parede, como ilustra a figura 3.1. As hipóteses relativas à velocidade U coincidem com as hipóteses formuladas no capítulo 2 e a placa plana é, obviamente, um corpo esbelto. Então, o escoamento pode ser aproximado como irrotacional, o fluido pode ser considerado incompressível, e o campo de velocidades será representado pelo gradiente de uma função potencial.

O fenômeno físico placa plana com "efeito solo" pode ser visto sob três enfoques diferentes. Em primeiro lugar, quando a distância entre fólio e parede é bem maior que a dimensão característica do fólio, no caso a corda. Nesse regime o "efeito solo" pode ser olhado como uma perturbação no escoamento com fronteiras no infinito. Em segundo lugar, o regime intermediário onde as perturbações decorrentes do "efeito solo" são de ordem $O(1)$ (dimensão característica do fólio é da mesma ordem que a distância do fólio à parede sólida), e o método das imagens pode ser utilizado para simular o "efeito solo" (ver por exemplo, TUCK; NEWMAN (1974)). Finalmente, o terceiro regime, onde a corda é grande comparada com a distância entre fólio e parede.

Nesse regime, quando $\alpha.c \sim O(d)$, o escoamento entre f3lio e parede asemelha-se a um escoamento em canal (o escoamento torna-se unidimensional). WIDNALL; BARROWS (1970) apresenta uma solu33o assint33tica para o problema placa plana com "efeito solo" quando $\alpha.c \sim O(d)$. TUCK (1980), por sua vez, apresenta uma solu33o assint33tica n33o linear para o problema de "efeito solo" nesse regime, v33lida, somente, para pequenos 33ngulos de ataque α , de modo a manter a hip33tese de escoamento unidimensional entre f3lio e parede. Esta teoria leva em conta efeitos n33o lineares devido 33 curvatura da linha m33dia e espessura, n33o computados pela teoria desenvolvida em WIDNALL; BARROWS (1970). A teoria apresentada em TUCK (1980) pode ser considerada como uma extens33o da teoria apresentada em WIDNALL; BARROWS (1970).

TOMOTIKA; IMAI (1937), onde a t33cnica de transforma33es conforme foi utilizada, apresenta uma solu33o para o problema placa plana com "efeito solo" n33o linear no 33ngulo de ataque, v33lida para os tr33s regimes descritos no par33grafo anterior. Al33m da teoria n33o linear, TOMOTIKA; IMAI (1937) tamb33m apresenta uma lineariza33o de sua teoria em rela33o ao 33ngulo de ataque. Como neste trabalho a vers33o linear no 33ngulo de ataque do problema placa plana com "efeito solo" ser33 abordada, TOMOTIKA; IMAI (1937) ser33 uma de nossas refer33ncias. A outra refer33ncia

será WIDNALL; BARROWS (1970).

Na primeira metade deste capítulo, serão obtidas expressões para as forças generalizadas sobre a placa plana com "efeito solo" (item 3.2), a formulação fraca para esse problema (item 3.3) será construída a partir de sua respectiva formulação forte (item 3.1), e a circulação será expressa em termos de valores de funcionais bem definidos (item 3.5). Posteriormente, as forças generalizadas serão escritas em termos de valores de funcionais bem definidos (item 3.6) e, finalmente, será mostrado que os valores dos quais a circulação e as forças generalizadas dependem, são valores estacionários (item 3.7), de modo que o método variacional de Ritz pode ser utilizado para obter aproximações das forças generalizadas.

Na segunda metade deste capítulo, o método numérico, resultado de um enfoque variacional será aplicado ou seja, serão construídas aproximações variacionais para as forças generalizadas. A primeira aproximação variacional utilizará, somente, duas funções-teste. Caso a primeira aproximação variacional não apresente resultados satisfatórios, uma segunda aproximação variacional será construída com três funções-teste. As aproximações variacionais ficarão restritas a poucas funções-teste no intuito de obter expressões analíticas simples para as

forças generalizadas.

3.1. FORMULAÇÃO FORTE.

A formulação fraca para o problema placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque, apresentada neste capítulo, será construída a partir da formulação forte.

De acordo com as hipóteses de fluido incompressível e escoamento irrotacional, o campo de velocidades pode ser representado como o gradiente de uma função potencial. O potencial total $\Phi(x,y)$ para o problema placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque pode ser representado por:

$$\Phi(x,y) = U.[x + \alpha.\phi(x,y)] \quad (3.1)$$

onde $U.x$ é a função potencial que representa a corrente de intensidade U , e $\phi(x,y)$ é o potencial perturbado linear em α , consequência da presença do fôlio. O potencial perturbado linear no ângulo de ataque satisfaz ao seguinte problema de contorno no domínio fluido denotado por S e ilustrado na figura 3.2.

$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0 \quad \text{em } S \quad (3.2- a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = -1 \quad \text{em } y = -d^+ \quad (3.2- b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.2- c)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow \pm \infty \text{ e } y \rightarrow -\infty \quad (3.2- d)$$

$$\text{condição de Kutta} \quad (3.2- e)$$

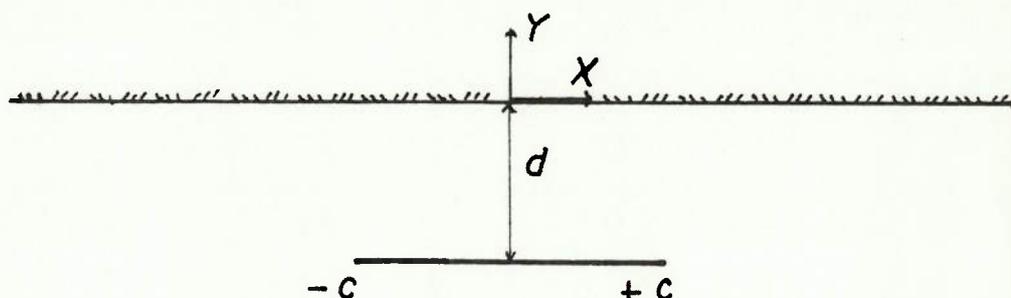


FIG. 3.2 - Domínio fluido S com condição de contorno no fôlio imposta na geometria não deformada.

De acordo com (3.2- a) a função potencial $\phi(x,y)$ é uma função harmônica que satisfaz as condições de contorno (3.2- b e c) e tende a um valor constante quando $x \rightarrow \pm \infty$ e $y \rightarrow -\infty$. A condição de contorno na superfície do fôlio, representada por (3.2- b), foi imposta na geometria não

deformada (fólio sem ângulo de ataque), consequência da linearização em relação ao ângulo de ataque. Em (3.2- b), o sinal + em $y = - d^+$ simboliza o dorso do fólio e o sinal - em $y = - d^-$ simboliza a face do fólio.

Em geral, é desejável trabalhar com variáveis adimensionais. Portanto, ao invés das variáveis usuais, serão definidas a partir destas as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} x' &= x/(c/2) , \\ y' &= y/(c/2) , \\ \phi &= \phi/(c/2) , \\ p' &= p/(\rho \cdot U^2) , \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $c/2$ é a meia corda do fólio. As novas variáveis x' e y' são claramente adimensionais. O potencial ϕ , definido via (3.1), possui dimensão de comprimento. Conseqüentemente, através de (3.3) constata-se que ϕ é adimensional. O potencial total em termos $\phi(x',y')$ será expresso por:

$$\Phi(x',y') = U \cdot (c/2) \cdot [x' + \alpha \cdot \phi(x',y')] \tag{3.1- a}$$

A pressão $p(x,y)$ possui dimensão $m/(l \cdot t^2)$ (m - massa, l - comprimento e t - tempo). Uma vez normalizada por $\rho \cdot U^2$, torna-se adimensional.

Em termos das variáveis adimensionais, com o

sobrescrito ' omitido por questão de simplicidade, o problema de contorno para $\phi(x,y)$ assume a forma:

$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0 \quad \text{em } S \quad (3.4- a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = -1 \quad \text{em } y = -\lambda^{\pm} \quad (3.4- b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.4- c)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \text{ para } x \rightarrow \pm \infty \text{ e } y \rightarrow -\infty \quad (3.4- d)$$

$$\text{condição de Kutta} \quad (3.4- e)$$

Em termos das variáveis adimensionais, a geometria do problema em questão está representada na figura 3.3.

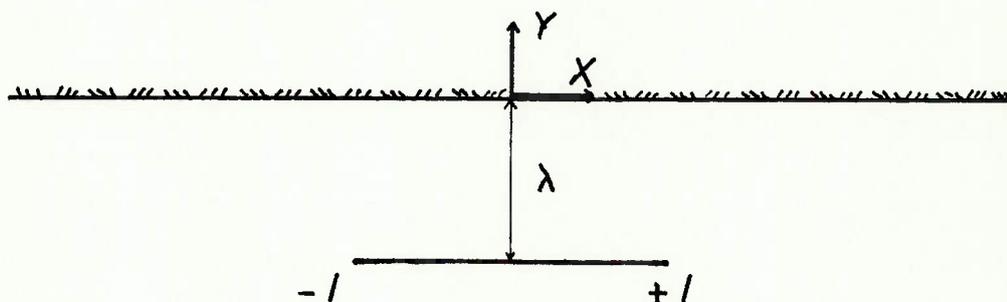


FIG. 3.3 - Domínio fluido S com condição de contorno no fôlio imposta na geometria não deformada.
(os extremos do fôlio estão em $x = -1$, $x = 1$
em $y = -\lambda$)

$\lambda = 2.d/c$ é o parâmetro que denota a distância do fólio à parede sólida.

A condição de Kutta implica no campo de velocidades na região do bordo de fuga ser finito, como observado na prática, mas o gradiente da função harmônica que satisfaz (3.4- a,b,c e d) possui uma singularidade na região do bordo de fuga. Este fato vem à tona, quando a expressão mais geral que satisfaz (3.4- a), é determinada em um pequeno setor circular de raio "a", que engloba o bordo de fuga. A seguir, o bordo de fuga será isolado pelo setor circular de raio "a", denominado S_T , e a expressão mais geral que satisfaz (3.4- a e b) em S_T será obtida.

Considere o setor circular S_T de raio "a" e centro no bordo de fuga, como ilustra a figura 3.4.

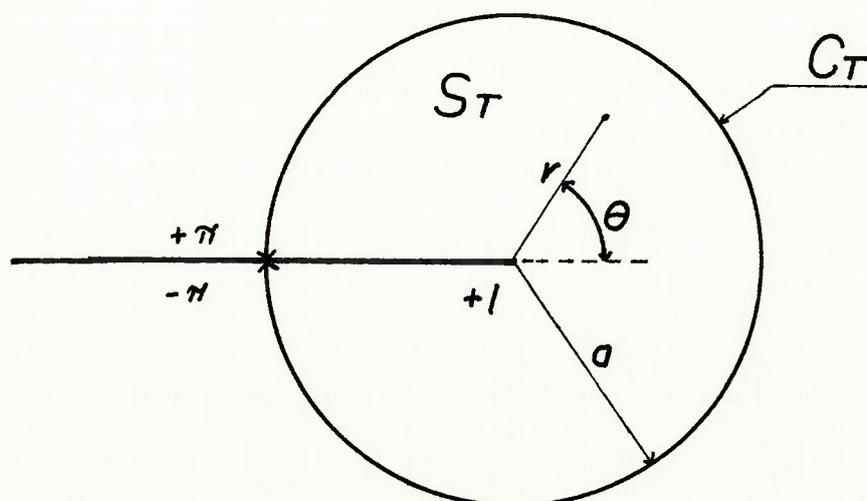


FIG. 3.4 - Setor circular S_T com centro no bordo de fuga.

O sistema de coordenadas polares (r, θ) tem origem no bordo de fuga do fólho, como mostra a figura 3.4. A expressão mais geral para $\phi(r, \theta)$, que satisfaz (3.4- a e b) no setor circular S_r , será expressa em termos de uma série de Fourier generalizada:

$$\phi(r, \theta) = - (y + \lambda) + A_0 \cdot r^{\lambda_0} \cdot g_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot r^{\lambda_n} \cdot g_n(\theta) \quad (3.5- a)$$

Os coeficientes A_n são desconhecidos a priori. λ_n e $g_n(\theta)$ são representados pelas expressões:

$$\lambda_n = \frac{n + 1}{2} \quad \text{com } n=0, 1, 2, \dots \quad (3.5- b)$$

$$g_n(\theta) = \frac{1}{(\pi \cdot a)^{1/2}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot (1 + (-1)^n) \cdot \sin \frac{(n+1)}{2} \cdot \theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot (1 - (-1)^n) \cdot \cos \frac{(n+1)}{2} \cdot \theta \right\} \quad (3.5- c)$$

As funções $g_n(\theta)$ satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) \cdot g_m(\theta) \cdot a \cdot d\theta = \delta_{nm} \quad (3.5- d)$$

onde δ_{nm} é a função δ de Kronecker que vale 0 se $n \neq m$ e 1 se $n = m$.

Supondo que $\phi(r, \theta)$ seja conhecido ao longo do contorno, os coeficientes A_n podem ser determinados a partir da relação de ortogonalidade (3.5- d) e do funcional

$T_n(\psi)$. Este funcional é definido como:

$$T_n(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(a, \theta) \cdot g_n(\theta) \cdot a \cdot d\theta \quad (3.6)$$

Os coeficientes A_n serão expressos em termos do funcional $T_n(\psi)$ como:

$$A_n = \frac{1}{a^{\lambda_n}} \cdot T_n(\phi) \quad (3.5- e)$$

A expressão (3.5- a) pode ser reescrita na forma:

$$\phi(r, \theta) = - (y + \lambda) + T_0(\phi) \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_0} \cdot g_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\phi) \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} \cdot g_n(\theta) \quad (3.7)$$

Através de (3.7), constata-se que o gradiente de $\phi(r, \theta)$ é de ordem $O(r^{\lambda_0-1})$, quando "r" tende a zero. Como λ_0-1 assume um valor negativo ($\lambda_0 = 1/2$), o campo de velocidades (gradiente de $\phi(r, \theta)$) assume valor infinito na vizinhança do bordo de fuga, mas de acordo com a condição de Kutta ou como observado na realidade, o vetor velocidade na região do bordo de fuga é finito e tangente ao fólio. O comportamento do campo de velocidades na região do bordo de fuga, encontrado na prática, decorre da viscosidade do fluido. Entretanto, no contexto da teoria do potencial, a condição de Kutta pode ser modelada superpondo-se um campo de velocidades circulatório, gradiente de uma função

multivalente, de modo que a singularidade deste cancele com a singularidade do gradiente da função potencial, solução de (3.4- a,b,c e d). Deste modo, o potencial perturbado $\phi(x,y)$ será decomposto em duas parcelas. A primeira, denotada por $\phi^+(x,y)$, satisfaz o equacionamento (3.4- a,b,c e d) em S, e a segunda parcela é um ramo de uma função multivalente, denotado por $\phi_\gamma(x,y)$. Portanto, o potencial perturbado pode ser expresso como:

$$\phi(x,y) = \phi^+(x,y) - \gamma \cdot \phi_\gamma(x,y) \quad (3.8)$$

onde γ é a circulação normalizada pela velocidade da corrente multiplicada pelo ângulo de ataque α e pela meia corda ($\gamma = \Gamma/U \cdot \alpha \cdot (c/2)$), de modo a ser adimensional.

Como o potencial perturbado, expresso por (3.8), satisfaz a condição de Kutta, constata-se que o coeficiente do segundo termo de (3.7) é nulo, ou seja:

$$T_o(\phi^+ - \gamma \cdot \phi_\gamma) = 0$$

Esta igualdade fornece uma expressão para γ , dada por:

$$\gamma = \frac{T_o(\phi^+)}{T_o(\phi_\gamma)} \quad (3.9)$$

As funções ϕ^+ e ϕ_γ satisfazem o equacionamento (no

equacionamento abaixo $\phi = \{\phi^+ \text{ e } \phi_\gamma\}$):

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0 \quad \text{em } S \quad (3.10- a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{para } \phi = \phi^+ \\ 0 & \text{para } \phi = \phi_\gamma \end{cases} \quad \text{em } y = -\lambda^{\pm} \quad (3.10- b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.10- c)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow \pm \infty \text{ e } y \rightarrow -\infty \quad (3.10- d)$$

A função multivalente ϕ_γ satisfaz ainda a seguinte identidade:

$$\oint_C \nabla \phi_\gamma \cdot d\vec{l} = \int_C \left[\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial y} \cdot dy \right] = 1 \quad (3.10- e)$$

onde "C" é um contorno qualquer contido em S e que envolve o fólho completamente. $d\vec{l}$ é o versor tangente a curva "C", como mostrado na figura 3.5. A integral de linha ao longo do contorno ao redor do fólho do campo de velocidades multiplicado escalarmente pelo versor tangente ao contorno fornece a circulação adimensional γ . Como γ está explicitada em (3.8), a integral de linha ao longo do contorno "C" em (3.10- e) fornece valor unitário.

Para satisfazer (3.10- a) e (3.10- e) em S a função $\phi_\gamma(x, y)$, além de ser harmônica, possui uma descontinuidade (salto unitário) ao longo de uma linha que vai desde o

fólio até alguma fronteira de S , portanto a função $\phi_\gamma(x,y)$ pertence à classe de funções descontínuas em S , denotada por $Wb(S)$, que satisfaça as condições:

$$\psi \in Wb(S) \text{ se } \begin{cases} \text{i) } \psi(0^-, y) - \psi(0^+, y) = D(y) \\ \text{ii) } \frac{\partial \psi}{\partial x}(0^-, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0^+, y) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\text{onde } D(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \geq y > -\lambda \\ 1 & \text{para } -\lambda > y > -\infty \end{cases}$$

Como a função $\phi_\gamma(x,y)$ satisfaz (3.11), ela possui um corte ("branch-cut") ao longo da linha $x = 0$ e $-\lambda > y > -\infty$, como ilustrado na figura 3.5.

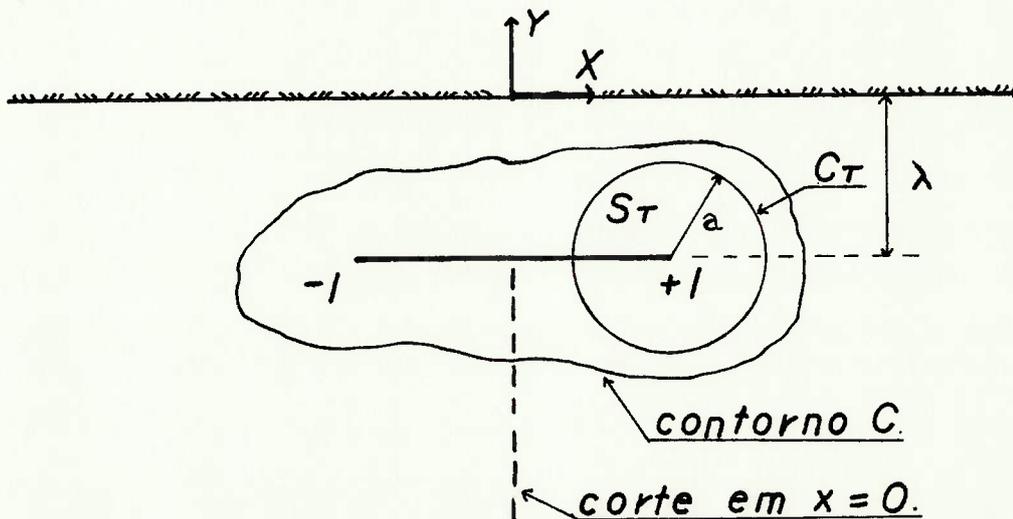


FIG. 3.5 - Domínio fluido S com corte em $x = 0$ e contorno C que engloba o fólio.

A função potencial $\phi^+(x,y)$ satisfaz o equacionamento

(3.10), onde as condições de contorno no fólho e parede são simétricas em relação ao eixo y , portanto a função $\phi^+(x,y)$ é uma função par em relação ao eixo x . Já a função potencial ϕ_γ , além de satisfazer ao problema de contorno (3.10), possui uma descontinuidade definida de acordo com (3.11), ou seja, possui um salto unitário ao longo de $x = 0$ e $-\lambda > y > -\infty$. O valor que ϕ_γ assume ao longo da descontinuidade pode ser fixado de modo a garantir o salto unitário, isto é, $\phi_\gamma(0^-;y) = 1/2$ e $\phi_\gamma(0^+;y) = -1/2$ para $-\lambda > y > -\infty$. A função ϕ_γ , definida desta maneira ao longo do corte em $x = 0$ e que satisfaz (3.10), pode ser considerada função ímpar em relação ao eixo x . Como ϕ^+ e ϕ_γ são, respectivamente, funções par e ímpar em relação a x , basta obter os potenciais ϕ^+ e ϕ_γ , somente, no subdomínio $x > 0$ para que o problema (3.10) seja determinado. As funções ϕ^+ e ϕ_γ , por serem, respectivamente, par e ímpar em relação a x , podem ser estendidas para o subdomínio $x < 0$ uma vez conhecida suas expressões na faixa $x > 0$. A partir deste ponto, o domínio das funções potenciais ϕ^+ e ϕ_γ ficará restrito, somente, ao subdomínio $(x > 0) - S^+$, denotado por S^+ e ilustrado na figura 3.6.

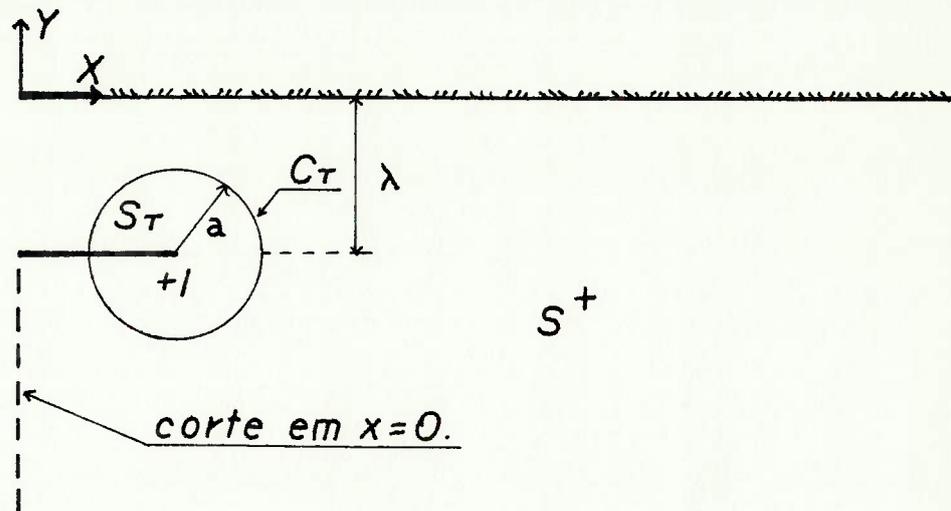


FIG. 3.6 - Subdomínio $S^+ = (x > 0)$ - S_T .

Uma vez determinada as soluções de (3.10), no caso $\phi^+(x,y)$ e $\phi_\gamma(x,y)$, obtém-se γ (circulação adimensional) via (3.9), mas as quantidades de interesse, no caso as forças generalizadas, não foram ainda avaliadas. No próximo item, expressões para as forças generalizadas são construídas.

3.2. FORÇAS GENERALIZADAS.

Supondo os potenciais $\phi^+(x,y)$ e $\phi_\gamma(x,y)$ e, portanto, γ via (3.9) conhecidos, expressões para as forças generalizadas podem ser obtidas integrando o campo de pressão ao longo do contorno do fólio. O campo de pressão adimensional é determinado a partir da equação de Bernoulli, dada por:

$$p(x,y) = -\frac{1}{2} - \alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + O(\alpha^2) \quad (3.12)$$

onde $\phi(x,y)$ é o potencial perturbado dado por (3.8).

A integração do campo de pressão ao longo do contorno do fólho foi realizada no anexo A. As expressões para as forças generalizadas serão apresentadas a seguir.

A resultante \vec{R} , avaliada no anexo A, foi desmembrada em duas componentes, uma na direção do eixo x, denotada por \vec{D} (arrasto), e outra na direção do eixo y, denotada por \vec{L} (força de sustentação). O arrasto \vec{D} , de acordo com (A.5), é dado por:

$$\vec{D} = 0 \vec{i} \quad (3.13)$$

como esperado de acordo com o paradoxo de D'Alembert.

A força de sustentação \vec{L} , de acordo com (A.9), segue abaixo.

$$\vec{L} = \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot (c/2) \cdot \gamma \vec{j} = \rho \cdot U \cdot \Gamma \vec{j} \quad (3.14)$$

γ é a circulação adimensional do campo de velocidades, definida no anexo A pela expressão (A.6), positiva no sentido horário e determinada por (3.9). Γ é a circulação do campo de velocidades ($\Gamma = -U \cdot \alpha \cdot (c/2) \cdot \gamma$) no sentido horário. Através da expressão (3.14), constata-se que o

resultado clássico fornecido pelo teorema de Kutta-Joukowski permanece válido para o problema placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque.

O momento, de acordo com (A.20), pode ser expresso por:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \frac{c^2}{2} \cdot V_0^+(\phi) \vec{k} \quad (3.15)$$

onde $\phi(x,y)$ é o potencial perturbado dado por (3.8), e o funcional $V_0^+(\psi)$ é definido como:

$$V_0^+(\psi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} [\psi(x, -\lambda^+) - \psi(x, -\lambda^-)] \cdot dx \quad (3.16)$$

O potencial perturbado é expresso em termos dos potenciais ϕ^+ e ϕ_γ . Conseqüentemente, o valor $V_0^+(\phi)$ pode ser expresso em termos dos valores $V_0^+(\phi^+)$ e $V_0^+(\phi_\gamma)$. Como ϕ_γ é uma função ímpar em relação a x , é fácil verificar que o valor $V_0^+(\phi_\gamma)$ é nulo. Então, o momento será expresso, somente, por:

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot V_0^+(\phi^+) \vec{k} \quad (3.17)$$

O coeficiente de massa adicional na direção do eixo y e associado ao potencial ϕ^+ , denotado por m_{yy} , é expresso de acordo com (A.22) e (3.16) por:

$$m_{yy} = 2.V_0^+(\phi^+) \quad (3.18)$$

Comparando (3.18) com (3.17), verifica-se que o momento está intimamente relacionado com o coeficiente de massa adicional m_{yy} . Na realidade, o momento atuante sobre a placa plana com "efeito solo" é, simplesmente, o momento de Munk, associado à falta de simetria do escoamento em relação ao plano do fólio na geometria não deformada.

Através das expressões (3.14) e (3.17), constata-se que as forças generalizadas dependem, linearmente, dos coeficientes $To(\phi^+)$ e $To(\phi_\gamma)$ (a circulação adimensional γ depende destes coeficientes via (3.9)) e do valor $V_0^+(\phi^+)$. Se for possível expressar os coeficientes $To(\phi^+)$ e $To(\phi_\gamma)$ em termos de valores estacionários de um funcional bem definido e mostrar que $V_0^+(\phi^+)$ é valor estacionário de um funcional bem definido, as forças generalizadas podem ser determinadas de maneira direta^{1‡} através de um método variacional, como o método de Ritz por exemplo.

Para que os coeficientes $To(\phi^+)$ e $To(\phi_\gamma)$ possam ser expressos em termos de funcionais bem definidos, será útil trabalhar com a formulação fraca do problema placa plana com "efeito solo".

^{1‡} Não há a necessidade de determinar o campo de pressões para, através da integração deste, obter as forças generalizadas.

3.3. FORMULAÇÃO FRACA.

O objetivo deste item será construir a formulação fraca para os potenciais $\phi^+(x,y)$ e $\phi_\gamma(x,y)$ a partir de suas respectivas formulações fortes no domínio S^+ . A formulação forte em S^+ , onde $\phi = \{\phi^+ \text{ e } \phi_\gamma\}$, será expressa pelo equacionamento:

$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0 \quad \text{em } S \quad (3.19- a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{para } \phi = \phi^+ \\ 0 & \text{para } \phi = \phi_\gamma \end{cases} \quad \text{em } y = -\lambda^\pm \quad (3.19- b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.19- c)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow +\infty \text{ e } y \rightarrow -\infty \quad (3.19- d)$$

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} \Big|_{(a,\theta)} = \begin{cases} \sin \theta - \frac{1}{2 \cdot a} \cdot T_0(\phi^+) \cdot g_0(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\phi^+) \cdot g_n(\theta) \\ - \frac{1}{2 \cdot a} \cdot T_0(\phi_\gamma) \cdot g_0(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\phi_\gamma) \cdot g_n(\theta) \end{cases} \quad (3.19- e)$$

$$\phi(0^\pm, y) = \mp \frac{1}{2} \quad \text{para } \phi = \phi_\gamma \quad \text{em } y < -\lambda \quad (3.19- f)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0^-, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0^+, y) \quad \text{em } y < -\lambda \quad (3.19- g)$$

A solução no setor circular S_T , expressa por (3.7), é válida para a função potencial $\phi^+(x,y)$ que satisfaz a

condição de contorno $\partial\phi^+/\partial y = -1$ na superfície do fólio interna à Sr. Já a função potencial $\phi_\gamma(x,y)$ satisfaz a condição $\partial\phi_\gamma/\partial y = 0$ na superfície do fólio interna à Sr. Conseqüentemente, a expressão para ϕ_γ em Sr é fornecida por (3.7) menos o termo $\sin \theta$, resultando em (3.19- e).

A seguir, será construída a formulação fraca para os potenciais ϕ^+ e ϕ_γ na região S^+ a partir de (3.19). Antes considere a função $\psi(x,y)$ com gradiente quadrado integrável em S^+ , ou seja, que satisfaça a desigualdade:

$$\iint_{S^+} \nabla\psi \cdot \nabla\psi \, dS^+ < \infty \quad (3.20)$$

A classe de funções que satisfaz (3.20), forma um espaço linear denotado por $W(S^+)$, como já mencionado no capítulo 2.

Como os potenciais ϕ^+ e ϕ_γ são soluções unívocas de (3.10) a não ser por um termo constante, eles são soluções unívocas de (3.10) em $H_2^1(S^+)$, espaço funcional definido no capítulo 2 (no capítulo 2 o domínio considerado era a região S. Aqui o domínio em consideração é a região S^+). Desse modo, no decorrer deste trabalho serão consideradas funções ψ e ϕ que pertençam a $H_2^1(S^+)$.

Multiplicando-se (3.19- a) por uma função $\psi(x,y)$ contínua que pertence a $H_2^1(S^+)$, integrando-se em S^+ ,

utilizando-se a identidade:

$$\nabla^2 \phi \cdot \psi = \nabla \cdot (\nabla \phi \cdot \psi) - \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

e aplicando-se o teorema de Green, resulta que:

$$\int_{\partial S^+} (\nabla \phi \cdot \vec{n}) \psi \, dS^+ = \iint_{S^+} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dS^+ \quad (i)$$

Avaliando-se o integral de contorno em (i) ao longo de ∂S^+ (contorno de S^+) com as condições de contorno dadas por (3.19), obtém-se, com $\phi = \phi^+(x, y)$, a formulação fraca para ϕ^+ em S^+ , dada por:

$$G(\phi^+; \psi) = -\frac{1}{2 \cdot a} \cdot T_0(\phi^+) \cdot T_0(\psi) + V_0^+(\psi) \quad (3.21)$$

Com $\phi = \phi_\gamma$, obtém-se a formulação fraca para ϕ_γ em S^+ :

$$G(\phi_\gamma; \psi) = -\frac{1}{2 \cdot a} \cdot T_0(\phi_\gamma) \cdot T_0(\psi) \quad (3.22)$$

O funcional $G(\phi; \psi)$ que aparece em (3.21) e em (3.22), é dado por:

$$G(\phi; \psi) = \iint_{S^+} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dS^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\phi) \cdot T_n(\psi) \quad (3.23)$$

e o funcional $V_0^+(\psi)$ já foi definido por (3.16).

Para duas funções que diferem entre si por uma constante, os funcionais $V_0^+(\psi)$ e $T_n(\psi)$ apresentam os

mesmos valores. Então, para qualquer elemento de $H_2^1(S^+)$ os funcionais $V_0^+(\psi)$ e $Tn(\psi)$ assumem um único valor e, portanto, estão bem definidos em $H_2^1(S^+)$.

O funcional $G(\phi; \psi)$, definido por (3.23), também está bem definido em $H_2^1(S^+)$. Este funcional é bilinear e simétrico como pode ser facilmente constatado a partir de (3.23). $G(\psi; \psi) > 0$ para qualquer função ψ que pertença a $H_2^1(S^+)$, exceto para a função nula em $H_2^1(S^+)$. Então, com argumentos restritos a $H_2^1(S^+)$ o funcional $G(\phi; \psi)$ satisfaz as propriedades de produto interno e induz a norma $\|\psi\|_G = [G(\phi; \psi)]^{1/2}$. A partir da norma induzida $\|\psi\|_G$, define-se a métrica $\rho_G(\phi; \psi) = \|\phi - \psi\|_G$. Assim, o funcional $G(\phi; \psi)$ possibilita construir uma estrutura sobre $H_2^1(S^+)$ análoga a estrutura sobre $H_2^1(S)$, obtida através do funcional $B(\phi; \psi)$ no capítulo 2. Através da analogia entre a estrutura sobre $H_2^1(S^+)$ e a estrutura sobre $H_2^1(S)$ (capítulo 2), concluí-se que a estrutura gerada por $G(\phi; \psi)$ sobre $H_2^1(S^+)$ possibilita falar em ortogonalidade e, portanto, em projeções. A estrutura gerada por $G(\phi; \psi)$ será útil na discussão dos resultados obtidos pela aproximação variacional das forças generalizadas.

O potencial ϕ_γ , solução de (3.22), deve ser, basicamente, gradiente quadrado integrável em S^+ . Não há a necessidade de que ϕ_γ satisfaça a equação de Laplace em S^+ ,

o que possibilita procurar ϕ_γ em uma classe de funções mais ampla. Conseqüentemente, a função ϕ_γ pode ser representada como a soma de uma função $R^-(x,y)$ ímpar, que possui descontinuidade do tipo (3.11), mais uma função $\phi^-(x,y)$ ímpar em relação à x e contínua ao longo do corte. A função $R^-(x,y)$ será escolhida de modo a satisfazer as restrições:

- i) descontinuidade do tipo (3.11), mas contínua no restante de S^+ .
- ii) $R^-(0^+,y) = -1/2$ em $-\lambda > y$
 $R^-(0^-,y) = 1/2$ em $-\lambda > y$ (3.24)
- iii) ímpar em relação ao eixo x .
- iv) pertencer a $H^1(S^+)$.

A função potencial $\phi_\gamma(x,y)$ será representada por:

$$\phi_\gamma = R^-(x,y) + \phi^-(x,y) \quad (3.25)$$

A vantagem de tal representação é tornar o problema com circulação formalmente análogo ao problema para o potencial ϕ^+ , e, portanto, utilizar a mesma estratégia de solução em ambos os casos.

Com ϕ_γ representada por (3.25), a equação fraca (3.22) pode ser reescrita como:

$$G(\phi^-; \psi) = - \frac{1}{2.a} . \text{To}(\phi^-) . \text{To}(\psi) + V_0^-(\psi) \quad (3.26)$$

com o funcional $V_0^-(\psi)$ definido por:

$$V_0^-(\psi) = - G(R^-; \psi) - \frac{1}{2.a} . \text{To}(R^-) . \text{To}(\psi) \quad (3.27)$$

O funcional $V_0^-(\psi)$ está bem definido em $H_2^1(S^+)$, pois fornece o mesmo valor para qualquer função que represente um mesmo elemento de $H_2^1(S^+)$.

A função $\phi^-(x,y)$ será a solução da equação fraca (3.26). Uma vez determinada a função $\phi^-(x,y)$, (3.25) fornece a função $\phi_\gamma^-(x,y)$ já que $R^-(x,y)$ é conhecida.

Os potenciais $\phi^+(x,y)$ e $\phi^-(x,y)$ são, portanto, soluções da formulação fraca:

"Determinar os potenciais $\phi^\pm(x,y) \in a H_2^1(S^+)$ tal que:

$$G(\phi^\pm; \psi) = - \frac{1}{2.a} . \text{To}(\phi^\pm) . \text{To}(\psi) + V_0^\pm(\psi) \quad (3.28)$$

seja satisfeita para toda função $\psi(x,y) \in a H_2^1(S^+)$."

Uma vez determinadas as soluções de (3.28), a circulação adimensional será expressa em termos dos potenciais $\phi^\pm(x,y)$ via (3.9). Substituindo-se (3.25) em (3.9), a circulação adimensional será dada em termos dos coeficientes $\text{To}(\phi^\pm)$ por:

$$\gamma = \frac{To(\phi^+)}{To(\phi^-) + To(R^-)} \quad (3.29)$$

onde $To(R^-)$ é conhecido.

Uma vez determinados os potenciais $\phi^\pm(x,y)$, a circulação adimensional é computada via (3.29) e as forças generalizadas são obtidas através das expressões (3.14) e (3.17), atingindo o objetivo da análise hidrodinâmica do problema em questão.

O objetivo deste trabalho é determinar as forças generalizadas de maneira direta através de um método variacional. Isso será possível se $V_0^+(\phi^+)$ for valor estacionário de um funcional bem definido e se a circulação adimensional for escrita em termos de valores estacionários de funcionais bem definidos.

3.4. EXPRESSÕES PARA OS COEFICIENTES $To(\phi^\pm)$ EM TERMOS DE VALORES DE FUNCIONAIS BEM DEFINIDOS.

Para que a circulação adimensional possa ser determinada, de maneira direta, através de um método variacional, será necessário escrever os coeficientes $To(\phi^\pm)$ em termos de valores estacionários de funcionais bem definidos. O objetivo deste item é expressar os coeficientes

$To(\phi^\pm)$ em termos de valores de funcionais bem definidos. Posteriormente, será constatado que estes valores são valores estacionários de funcionais bem definidos.

Como se deseja expressar os coeficientes $To(\phi^\pm)$ em termos de valores de funcionais bem definidos, será necessário explicitar a dependência dos potenciais ϕ^+ e ϕ^- , respectivamente, em relação aos coeficientes $To(\phi^+)$ e $To(\phi^-)$. Neste intuito, serão utilizadas funções auxiliares, denotadas por $q^+(x,y)$ e $q^-(x,y)$, pertencentes a $H_2^1(S^+)$ e que satisfaçam a relação:

$$To(q^\pm) = 1 \quad (3.30)$$

O sobrescrito + (ou -) é utilizado para indicar que uma função é par (ou ímpar).

O subespaço funcional linear $He_2^1(S^+)$, contido em $H_2^1(S^+)$, será definido por:

$$He_2^1(S^+) = \{Toda \text{ função } \psi \in H_2^1(S^+), \text{ tal que } To(\psi) = 0\} \quad (3.31)$$

de maneira que qualquer função $\psi^\pm(x,y)$ (par (+) ou ímpar (-)) que pertença a $H_2^1(S^+)$ possa ser escrita univocamente na forma:

$$\psi^\pm(x,y) = \psi_e^\pm(x,y) + To(\psi).q^\pm(x,y)$$

onde $\psi_e^\pm(x,y)$ pertence a $He_2^1(S^+)$. Os elementos de $He_2^1(S^+)$ são indicados pelo sufixo e e possuem a seguinte extensão contínua para a região Sr:

$$\psi_e^\pm(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\psi_e) \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} \cdot gn(\theta) \quad \text{com } (x,y) \in Sr \quad (3.32)$$

Os potenciais $\phi^\pm(x,y)$ também podem ser expressos em termos de elementos de $He_2^1(S^+)$:

$$\phi^\pm(x,y) = \phi_e^\pm(x,y) + T_0(\phi^\pm) \cdot q^\pm(x,y) \quad (3.33)$$

Substituindo-se $\psi(x,y)$ por ψ_e^\pm e os potenciais ϕ^\pm por (3.33) na equação fraca (3.28), resulta a expressão:

$$G(\phi_e^\pm; \psi_e^\pm) + T_0(\phi^\pm) \cdot G(q^\pm; \psi_e^\pm) = V_0^\pm(\psi_e^\pm) \quad (3.34)$$

O potencial ϕ_e^\pm , projeção de $\phi^\pm(x,y)$ em $He_2^1(S^+)$, pode ser desmembrado em duas componentes de acordo com a expressão:

$$\phi_e^\pm(x,y) = \phi_{e,0}^\pm(x,y) + T_0(\phi^\pm) \cdot \phi_{e,1}^\pm(x,y) \quad (3.35)$$

A partir de (3.35), a identidade (3.34) pode ser reescrita como:

$$G(\phi_{\bullet,0}^{\pm}; \psi_{\bullet}^{\pm}) + T_0(\phi^{\pm}) \cdot [G(\phi_{\bullet,1}^{\pm}; \psi_{\bullet}^{\pm}) - G(q^{\pm}; \psi_{\bullet}^{\pm})] = V_0^{\pm}(\psi_{\bullet}^{\pm}) \quad (3.36)$$

A identidade (3.36) será válida se os potenciais $\phi_{\bullet,0}^{\pm}$ e $\phi_{\bullet,1}^{\pm}$ forem soluções da formulação fraca:

"Determinar os potenciais $\phi_{\bullet,j}^{\pm}$, com $j=0,1$, $\in H_{\bullet,2}^1(S^{\pm})$

tal que:

$$G(\phi_{\bullet,j}^{\pm}; \psi_{\bullet}^{\pm}) = V_j^{\pm}(\psi_{\bullet}^{\pm}) \quad (3.37)$$

para qualquer $\psi_{\bullet}^{\pm}(x,y) \in H_{\bullet,2}^1(S^{\pm})$."

O funcional $V_1^{\pm}(\psi)$ é definido por:

$$V_1^{\pm}(\psi) = -G(q^{\pm}; \psi) \quad (3.38)$$

Os funcionais $V_0^+(\psi)$ e $V_0^-(\psi)$ foram definidos, respectivamente, pelas expressões (3.16) e (3.27).

No que segue, o índice "j" assumirá os valores 0 ou 1, a não ser quando especificado de outra maneira.

O equacionamento fraco (3.37) possui uma interpretação física clara, ele resulta da condição das Lagrangianas para os potenciais $\phi_{\bullet,j}^{\pm}$ serem estacionárias, como mostrado no anexo B. A Lagrangiana para os potenciais $\phi_{\bullet,j}^{\pm}$ é dada em termos de (B.27) (veja anexo B) por:

$$\mathcal{L}_j^{\pm}(\phi_{\bullet,j}^{\pm}) = G(\phi_{\bullet,j}^{\pm}; \phi_{\bullet,j}^{\pm}) - 2 \cdot V_j^{\pm}(\phi_{\bullet,j}^{\pm}) \quad (3.39)$$

O termo excitante da Lagrangiana para o potencial $\phi_{e,0}^+$ é representado pelo funcional $V_0^+(\phi_{e,0}^+)$, que decorre de um esforço externo aplicado pelo fólho sobre o fluido (veja anexo B). No caso da Lagrangiana para os potenciais $\phi_{e,1}^\pm$ e $\phi_{e,0}^-$ o termo excitante, representado, respectivamente, pelos funcionais $V_1^\pm(\psi)$ e $V_0^-(\psi)$, decorre de "deslocamentos internos" impostos (em analogia com um sistema mecânico discreto) representados, respectivamente, pelas funções $q^\pm(x,y)$ e $R^-(x,y)$.

Com relação ao papel dos potenciais $\phi_{e,1}^\pm$, pode-se dizer que eles decorrem da necessidade de se explicitar a dependência dos potenciais $\phi^\pm(x,y)$ em relação aos coeficientes $To(\phi^\pm)$, ou seja, são "respostas" do sistema hidrodinâmico aos "deslocamentos internos" representados pelas funções $q^\pm(x,y)$, utilizadas, justamente, para explicitar a dependência de ϕ^\pm em relação aos coeficientes $To(\phi^\pm)$. Os potenciais $\phi_{e,0}^\pm$, por sua vez, são a "resposta" do sistema hidrodinâmico à excitação representada pelos funcionais $V_0^\pm(\psi)$.

Definindo a função $p^\pm(x,y)$ como:

$$p^\pm(x,y) = q^\pm(x,y) + \phi_{e,1}^\pm(x,y) \quad (3.40)$$

a dependência dos potenciais $\phi^\pm(x,y)$ em relação aos

coeficientes pode ser expressa de maneira mais suscinta:

$$\phi^{\pm}(x,y) = \phi_{e,0}^{\pm}(x,y) + T_0(\phi^{\pm}) \cdot p^{\pm}(x,y) \quad (3.41)$$

As funções $p^{\pm}(x,y)$ serão úteis para determinar as expressões para os coeficientes $T_0(\phi^{\pm})$ em termos de valores de funcionais bem definidos. Antes que as expressões para os coeficientes $T_0(\phi^{\pm})$ sejam efetivamente construídas, algumas identidades úteis serão elaboradas.

Com $j = 1$ em (3.37) e lembrando-se que $V_1^{\pm}(\psi)$ é definido por (3.38), pode-se afirmar que:

$$G(\phi_{e,1}^{\pm} + q^{\pm}; \psi_{e,1}^{\pm}) = 0 \quad \text{para } \forall \psi_{e,1}^{\pm} \in a H_{e,2}^1(S^{\pm}).$$

Recordando (3.40), a identidade acima pode ser reescrita como:

$$G(p^{\pm}; \psi_{e,1}^{\pm}) = 0 \quad \text{para } \forall \psi_{e,1}^{\pm} \in a H_{e,2}^1(S^{\pm}) \quad (3.42)$$

Como o potencial $\phi_{e,1}^{\pm}$ pertence a $H_{e,2}^1(S^{\pm})$, a identidade (3.42) permanece válida se $\psi_{e,1}^{\pm}$ for substituído por $\phi_{e,1}^{\pm}$. Como consequência, $G(p^{\pm}; p^{\pm}) = G(p^{\pm}; q^{\pm}) + G(p^{\pm}; \phi_{e,1}^{\pm})$ pode ser simplesmente reescrita como:

$$G(p^{\pm}; p^{\pm}) = G(p^{\pm}; q^{\pm}) \quad (3.43)$$

Substituindo-se ψ_e^\pm por $\phi_{e,1-j}$ em (3.37), seguem duas identidades:

$$G(\phi_{e,0}^\pm; \phi_{e,1}^\pm) = V_0^\pm(\phi_{e,1}^\pm) \text{ quando } j=0 \quad (3.44- a)$$

e

$$G(\phi_{e,1}^\pm; \phi_{e,0}^\pm) = V_1^\pm(\phi_{e,0}^\pm) \text{ quando } j=1 \quad (3.44- b)$$

Da simetria do funcional $G(\phi; \psi)$, mais as identidades (3.44- a e b) e a expressão (3.38), resulta a identidade:

$$V_0^\pm(\phi_{e,1}^\pm) = G(\phi_{e,1}^\pm; \phi_{e,0}^\pm) = V_1^\pm(\phi_{e,0}^\pm) = -G(q^\pm; \phi_{e,0}^\pm) \quad (3.45)$$

De posse das identidades (3.43) e (3.45), será construída a expressão para os coeficientes $To(\phi^\pm)$ em termos de funcionais bem definidos. Neste intuito, ψ será substituído por q^\pm na equação fraca (3.28), resultando em:

$$G(\phi^\pm; q^\pm) = V_0^\pm(q^\pm) - \frac{1}{2.a} \cdot To(\phi^\pm) \quad (i)$$

Substituindo-se ϕ^\pm por sua expressão (3.41) no lado esquerdo de (i), segue que:

$$G(\phi_{e,0}^\pm; q^\pm) + To(\phi^\pm) \cdot G(p^\pm; q^\pm) = V_0^\pm(q^\pm) - \frac{1}{2.a} \cdot To(\phi^\pm) \quad (ii)$$

Utilizando-se as identidades (3.43) e (3.45), (ii) pode ser reescrita como:

$$\left[G(p^\pm; p^\pm) + \frac{1}{2.a} \right] . To(\phi^\pm) = V_o^\pm(q^\pm) + V_o^\pm(\phi_{e,1}^\pm) \quad (iii)$$

Da definição da função $p^\pm(x,y)$ (expressão (3.40)), o lado direito de (iii) poderá ser expresso de maneira mais sucinta, resultando, finalmente, na expressão:

$$\left[G(p^\pm; p^\pm) + \frac{1}{2.a} \right] . To(\phi^\pm) = V_o^\pm(p^\pm) \quad (3.46)$$

(3.46) permite expressar os coeficientes $To(\phi^\pm)$ em função dos valores $V_o^\pm(p^\pm)$ e $G(p^\pm; p^\pm)$ como:

$$To(\phi^\pm) = \frac{V_o^\pm(p^\pm)}{G(p^\pm; p^\pm) + \frac{1}{2.a}} \quad (3.47)$$

A partir das identidades (3.43) e (3.45), constata-se que os valores $V_o^\pm(p^\pm)$ e $G(p^\pm; p^\pm)$ podem ser expressos em termos dos valores $V_o^\pm(q^\pm)$, $G(\phi_{e,j}^\pm; \phi_{e,1}^\pm)$ e $G(q^\pm; q^\pm)$ como:

$$V_o^\pm(p^\pm) = V_o^\pm(q^\pm) + G(\phi_{e,0}^\pm; \phi_{e,1}^\pm) \quad (3.48- a)$$

e

$$G(p^\pm; p^\pm) = G(q^\pm; q^\pm) - G(\phi_{e,1}^\pm; \phi_{e,1}^\pm) \quad (3.48- b)$$

A partir de (3.46) e (3.47), constata-se que os coeficientes $To(\phi^\pm)$ são funções dos valores $G(\phi_{e,j}^\pm; \phi_{e,1}^\pm)$. Conseqüentemente, para atingir o objetivo de escrever $To(\phi^\pm)$ em termos de valores estacionários de funcionais bem

definidos, basta mostrar que os valores $G(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$ são valores estacionários de um funcional bem definido. Se esse objetivo for alcançado, a circulação e, portanto, a força de sustentação serão escritas em termos de valores estacionários de funcionais bem definidos e, conseqüentemente, determinadas de maneira direta via um método variacional.

Antes de mostrar que os valores $G(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$ são valores estacionários de funcionais bem definidos, as forças generalizadas serão escritas em termos dos valores $G(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$.

3.5. EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS EM TERMOS DOS VALORES Λ_{ij}^{\pm} .

O objetivo deste item é mostrar que as forças generalizadas podem ser expressas em termos dos valores $G(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$, com $j, i = 0, 1$. No que segue os índices "j" e "i" assumirão os valores 0 e 1, a não ser que especificado de outra maneira. Por questão de conveniência, a notação utilizada em PESCE (1988) é adotada:

$$\Lambda_{ij}^{\pm} = G(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm}) = V_j^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm}) \quad (3.49)$$

A seguir, será constatada a dependência da força de sustentação em relação aos valores Λ_{ij}^{\pm} . Neste intuito, os coeficientes $To(\phi^{\pm})$ serão expressos em termos dos valores Λ_{ij}^{\pm} .

Através de (3.47) e (3.48), resulta a seguinte expressão para os coeficientes $To(\phi^{\pm})$ em termos dos valores Λ_{ij}^{\pm} :

$$To(\phi^{\pm}) = \frac{V_o^{\pm}(q^{\pm}) + \Lambda_{10}^{\pm}}{G(q^{\pm}; q^{\pm}) - \Lambda_{11}^{\pm} + \frac{1}{2.a}} \quad (3.50)$$

A circulação adimensional γ pode ser expressa em termos dos coeficientes $To(\phi^{\pm})$ através de (3.29). Então, a circulação adimensional depende dos valores Λ_{ij}^{\pm} . Conseqüentemente, a força de sustentação que depende linearmente da circulação adimensional (veja (3.14)), pode ser escrita em termos dos valores Λ_{ij}^{\pm} .

A seguir, será mostrado que o momento também depende dos valores Λ_{ij}^{\pm} . Substituindo-se a expressão para o potencial ϕ^{\pm} , dada por (3.41), em (3.17), resulta para o momento a expressão:

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot c^2 \cdot \alpha \cdot [\Lambda_{00}^+ + To(\phi^+) \cdot V_o^+(p^+)] \quad (i)$$

Utilizando-se (3.48- a) em (i), chega-se à seguinte expressão para o momento:

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot c^2 \cdot \alpha \cdot \{ \Lambda_{00}^+ + T_0(\phi^+) \cdot [V_0^+(q^+) + \Lambda_{10}^+] \} \quad (3.51)$$

Através de (3.51) e (3.50), constata-se que o momento depende, basicamente, dos valores Λ_{ij}^+ . Como a força de sustentação e o momento, ou seja, as forças generalizadas dependem dos valores Λ_{ij}^+ , elas podem ser obtidas de modo direto, caso os valores Λ_{ij}^+ sejam valores estacionários de um funcional bem definido. Este fato apresenta uma consequência importante. Não há necessidade de se determinar o campo de pressão e, posteriormente, integrá-lo, para obter as forças generalizadas, o que constitui uma vantagem em relação aos métodos usuais.

A seguir, será mostrado que os valores Λ_{ij}^+ são valores de um funcional bem definido.

3.6. FUNCIONAL $F_{ij}^{\pm}(\phi; \psi)$.

Considere o funcional $F_{ij}^{\pm}(\phi_0; \psi_0)$ definido por:

$$F_{ij}^{\pm}(\phi_0; \psi_0) = \frac{V_j^{\pm}(\phi_0) \cdot V_i^{\pm}(\psi_0)}{G(\phi_0; \psi_0)} \quad (3.52- a)$$

onde os índices "i" e "j" assumem os valores 0 e 1. O funcional F_{ij}^{\pm} é a versão do funcional F_{ij} , definido em PESCE (1988), para o presente problema hidrodinâmico. A

expressão para o funcional F_{ij}^{\pm} pode ser reescrita como:

$$F_{ij}^{\pm}(\phi_e; \psi_e) \cdot G(\phi_e; \psi_e) = v_j^{\pm}(\phi_e) \cdot v_i^{\pm}(\psi_e) \quad (3.52- b)$$

Substituindo-se o par $(\phi_e; \psi_e)$ na expressão acima pelo par $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$ e lembrando-se (3.37), constata-se que o funcional $F_{ij}^{\pm}(\phi_e; \psi_e)$ assume os valores $v_j^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm})$.

Recordando de (3.49), nota-se que:

$$\Lambda_{ij}^{\pm} = F_{ij}^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm}) \quad (3.53)$$

Para mostrar que os valores Λ_{ij}^{\pm} são valores estacionários de um funcional bem definido, basta mostrar que o funcional F_{ij}^{\pm} é estacionário no par de funções $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$, mas antes será apresentada uma interpretação física para os valores que o funcional F_{ij}^{\pm} assume no par de funções $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$.

No item B.2 do anexo B, o significado físico dos valores Λ_{ij}^{\pm} foi discutido detalhadamente. Aqui serão apresentadas as conclusões dessa discussão. O valor Λ_{00}^+ é o coeficiente de massa adicional na direção do eixo y, associado ao potencial perturbado. O valor $\Lambda_{01}^+ = \Lambda_{10}^+$ nada mais é do que a componente do momento adimensional devido ao campo de pressão associado ao potencial $\phi_{e,1}^+$. O valor

Λ_{00}^- está associado a uma parcela da energia cinética do campo de velocidades circulatório e, finalmente, os valores $\Lambda_{01}^- = \Lambda_{10}^-$ e Λ_{11}^\pm não estão associados a nenhum aspecto físico do problema em questão. Na verdade, estes valores são consequência da necessidade de se explicitar a dependência de ϕ^\pm em relação aos coeficientes $T_0(\phi^\pm)$.

3.7. ENFOQUE VARIACIONAL.

Finalmente, será constatado que os valores Λ_{ij}^\pm são valores estacionários do funcional $F_{ij}^\pm(\phi_\circ; \psi_\circ)$. Como consequência, será possível mostrar que os valores Λ_{ij}^\pm são computados com um erro de ordem $O(\delta^2)$, caso os potenciais $\phi_{\circ, j}^\pm$ sejam determinados com um erro de ordem $O(\delta)$. Isto implica que basta determinar uma aproximação grosseira para os potenciais $\phi_{\circ, j}^\pm$ para que os valores Λ_{ij}^\pm sejam bem aproximados.

O funcional F_{ij}^\pm assume valores estacionários no par de funções $(\phi_{\circ, i}^\pm; \phi_{\circ, j}^\pm)$ pertencentes a $H_2^1(S^+) \times H_2^1(S^+)$, como demonstrado no anexo C. Esta demonstração é análoga à demonstração realizada em PESCE (1988) para o funcional F_{ij} (página 2.15). O fato de F_{ij}^\pm ser estacionário no par $(\phi_{\circ, i}^\pm; \phi_{\circ, j}^\pm)$ decorre da validade de (3.37) em $H_2^1(S^+)$ ou, reciprocamente, $\delta F_{ij}^\pm(\phi_{\circ, i}^\pm; \phi_{\circ, j}^\pm)$

ser nulo implica na validade das equações fracas (3.37).

Uma aproximação para os valores Λ_{ij}^{\pm} pode ser obtida, diretamente, a partir da busca dos valores estacionários do funcional F_{ij}^{\pm} num espaço finito dimensional $He_A(S^{\pm})$, contido em $He_2^1(S^{\pm})$. É fácil constatar que o funcional F_{ij}^{\pm} é estacionário no par $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$, pertencente a $He_A(S^{\pm}) \times He_A(S^{\pm})$, desde que sejam válidas as equações fracas:

$$G(\phi_{e,i}^{\pm}; \psi_{e,i}^{\pm}) = V_i^{\pm}(\psi_{e,i}^{\pm}) \quad \text{para } \forall \psi_{e,i}^{\pm} \in He_A(S^{\pm}) \subset He_2^1(S^{\pm}) \quad (3.54- a)$$

$$G(\phi_{e,j}^{\pm}; \psi_{e,j}^{\pm}) = V_j^{\pm}(\psi_{e,j}^{\pm}) \quad \text{para } \forall \psi_{e,j}^{\pm} \in He_A(S^{\pm}) \subset He_2^1(S^{\pm}) \quad (3.54- b)$$

A demonstração de F_{ij}^{\pm} , com argumentos restritos a $He_A(S^{\pm})$, ser estacionário no par $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$ é análoga à demonstração de F_{ij}^{\pm} ser estacionário no par $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$, apresentada no anexo C.

A aproximação para os valores Λ_{ij}^{\pm} é denotada por $\hat{\Lambda}_{ij}^{\pm}$ e fornecida pela expressão:

$$\hat{\Lambda}_{ij}^{\pm} = F_{ij}^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm}) \quad (3.55)$$

As soluções exatas $\phi_{e,i}^{\pm}$ e $\phi_{e,j}^{\pm}$ podem ser expressas, respectivamente, em termos das aproximações $\hat{\phi}_{e,i}^{\pm}$ e $\hat{\phi}_{e,j}^{\pm}$

na forma:

$$\phi_{e,i}^{\pm} = \phi_{e,i}^{\Delta,\pm} + \delta\phi_{e,i}^{\pm} \quad \text{e} \quad \phi_{e,j}^{\pm} = \phi_{e,j}^{\Delta,\pm} + \delta\phi_{e,j}^{\pm} \quad (3.56)$$

Definindo δ como:

$$\delta = \max. \{ \|\delta\phi_{e,i}^{\pm}\|_G, \|\delta\phi_{e,j}^{\pm}\|_G \} \quad (3.57)$$

constata-se que δ fornece a estimativa do erro das aproximações $\phi_{e,i}^{\Delta,\pm}$ e $\phi_{e,j}^{\Delta,\pm}$ na norma de $H_{e_2^1}(S^+)$.

Subtraindo-se (3.54- a) e (3.54- b) de (3.37) com $\psi_e^{\pm} = \psi_e^{\Delta,\pm}$ (índice "i" no lugar do índice "j" quando necessário), a identidade abaixo pode ser obtida.

$$G(\delta\phi_{e,i}^{\pm}; \psi_e^{\Delta,\pm}) = G(\delta\phi_{e,j}^{\pm}; \psi_e^{\Delta,\pm}) = 0 \quad \text{p/V } \psi_e^{\Delta,\pm} \in H_{e_A}(S^+) \quad (3.58)$$

Como o espaço $H_{e_A}(S^+)$ é um subespaço de $H_{e_2^1}(S^+)$, ele "herda" a estrutura de $H_{e_2^1}(S^+)$. Então, (3.58) implica que as funções $\delta\phi_{e,i}^{\pm}$ e $\delta\phi_{e,j}^{\pm}$ são ortogonais ao espaço de aproximações $H_{e_A}(S^+)$. Da ortogonalidade destas funções em relação a $H_{e_A}(S^+)$, pode-se afirmar que $\|\phi_{e,j}^{\pm} - \phi_{e,j}^{\Delta,\pm}\|_G$ e $\|\phi_{e,i}^{\pm} - \phi_{e,i}^{\Delta,\pm}\|_G$ são a menor "distância" de elementos de $H_{e_A}(S^+)$, respectivamente, a $\phi_{e,j}^{\pm}$ e $\phi_{e,i}^{\pm}$, ou seja, o par

de funções $(\phi_{\mathbf{e},j}^{\mathbf{A}\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\mathbf{A}\pm})$ é a projeção^{2†} do par $(\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\pm})$ em $\text{He}_{\mathbf{A}}(S^+)$ \times $\text{He}_{\mathbf{A}}(S^+)$. A identidade (3.58) será útil para mostrar que $\Lambda_{ij}^{\mathbf{A}\pm}$ aproxima Λ_{ij}^{\pm} com erro de ordem $O(\delta^2)$ se o par $(\phi_{\mathbf{e},j}^{\mathbf{A}\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\mathbf{A}\pm})$ aproximar o par $(\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\pm})$ com um erro de ordem $O(\delta)$. Substituindo-se (3.56) em (3.48), resulta que:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{\pm} &= G(\phi_{\mathbf{e},j}^{\mathbf{A}\pm} + \delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\mathbf{A}\pm} + \delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm}) \\ &= G(\phi_{\mathbf{e},j}^{\mathbf{A}\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\mathbf{A}\pm}) + G(\delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \phi_{\mathbf{e},i}^{\mathbf{A}\pm}) + G(\phi_{\mathbf{e},j}^{\mathbf{A}\pm}; \delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm}) + \\ &\quad + G(\delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm}) \end{aligned}$$

Lembrando de (3.58) e (3.55), pode-se escrever que:

$$\Lambda_{ij}^{\pm} = \Lambda_{ij}^{\mathbf{A}\pm} + G(\delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm}) \quad (3.59)$$

Utilizando-se a desigualdade de Schwartz para o módulo do valor $G(\delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}; \delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm})$:

$$|\Lambda_{ij}^{\pm} - \Lambda_{ij}^{\mathbf{A}\pm}| \leq \|\delta\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}\|_{\mathbf{G}} \cdot \|\delta\phi_{\mathbf{e},i}^{\pm}\|_{\mathbf{G}} \leq \delta^2 \quad (3.60)$$

^{2†} O fato de F_{ij}^{\pm} , com argumentos restritos a $\text{He}_{\mathbf{A}}(S^+)$, ser estacionário, implica em determinar a função pertencente a $\text{He}_{\mathbf{A}}(S^+)$ mais próxima de $\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}$ sob o ponto de vista da métrica gerada pela norma $\|\cdot\|_{\mathbf{G}}$. Isto nada mais é do que determinar a projeção de $\phi_{\mathbf{e},j}^{\pm}$ em $\text{He}_{\mathbf{A}}(S^+)$. Então, as equações fracas (3.41), que implicam em F_{ij}^{\pm} ser estacionário, podem ser vistas como operadores de projeção.

De acordo com (3.60), se os valores Λ_{ij}^{\pm} forem aproximados por (3.55), um erro de ordem $O(\delta)$ na aproximação dos potenciais $\phi_{e,i}^{\pm}$ e $\phi_{e,j}^{\pm}$ implica em um erro de ordem $O(\delta^2)$ na aproximação dos Λ_{ij}^{\pm} . Em outras palavras, uma aproximação grosseira para os potenciais (erro em torno de 10% por exemplo) leva a uma boa aproximação para os valores Λ_{ij}^{\pm} (erro em torno de 1% por exemplo), se estes forem computados via (3.55). Isto resulta num procedimento mais econômico do ponto de vista numérico.

Outros aspectos importantes devem ser observados. Em primeiro lugar, os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ não necessitam ser computados, basta determinar uma boa aproximação para $\phi_{e,j}^{\pm}$ para que os coeficientes Λ_{ij}^{\pm} sejam obtidos e as forças generalizadas avaliadas.

Em segundo lugar, os valores Λ_{ij}^{\pm} podem ser satisfatória e diretamente aproximados a partir da busca dos valores estacionários do funcional F_{ij}^{\pm} , em um espaço de dimensão finita cuja base é uma combinação linear de funções admissíveis (funções que pertencem a $H_0^1(S^{\pm})$). A busca dos valores estacionários do funcional F_{ij}^{\pm} em um espaço de dimensão finita nada mais é do que a aplicação do método variacional de Ritz à busca dos valores estacionários do funcional F_{ij}^{\pm} .

3.8. MÉTODO VARIACIONAL DE RITZ APLICADO AO FUNCIONAL F_{ij}^{\pm} .

O funcional F_{ij}^{\pm} possui valores estacionários que serão determinados de maneira direta, aplicando-se o método variacional de Ritz. O método consiste, basicamente, em procurar os valores estacionários de um funcional, no caso o funcional F_{ij}^{\pm} , em um espaço finito dimensional contido em $H_{e_2}^1(S^+)$, chamado de espaço de aproximações e denotado, neste caso, por $H_{e_A}^1(S^+)$.

Como o espaço de aproximações é finito dimensional, sua base será representada por um conjunto finito de funções $\{\chi_{e,n}^{\pm} \in H_{e_2}^1(S^+)\}$. Qualquer função ψ_e restrita a $H_{e_A}^1(S^+)$ pode ser representada como combinação linear das funções $\{\chi_{e,n}^{\pm} \in H_{e_2}^1(S^+)\}$, portanto, as aproximações para $\phi_{e,j}^{\pm}$, denotadas por $\phi_{e,j}^{A,\pm}$, podem ser escritas como:

$$\phi_{e,j}^{A,\pm} = \sum_{n=1}^N b_{n,j}^{\pm} \cdot \chi_{e,n}^{\pm}(x,y) \quad (3.61)$$

Como as aproximações $\phi_{e,j}^{A,\pm}$ são representadas como combinação linear do conjunto de funções $\{\chi_{e,n}^{\pm} \in H_{e_2}^1(S^+)\}$, o valor $F_{ij}^{\pm}(\phi_{e,i}^{A,\pm}; \phi_{e,j}^{A,\pm})$ será representado por:

$$F_{ij}^{\pm} = F_{ij}^{\pm}(b_{1,i}^{\pm}; \dots; b_{N,i}^{\pm}; b_{1,j}^{\pm}; \dots; b_{N,j}^{\pm}) \quad (3.62)$$

A busca dos valores estacionários de F_{ij}^{\pm} resume-se em resolver o seguinte sistema linear de equações:

$$\frac{\partial F_{ij}^{\pm}}{\partial b_{n,k}^{\pm}} = 0 \text{ com } n=1, \dots, N \text{ e } k=i, j \quad (3.63 -a)$$

que pode ser representado na forma matricial por:

$$[G_{nm}^{\pm}] \cdot \{b_{n,k}^{\pm}\} = \{V_k^{\pm}\} \text{ com } k=i, j \quad (3.63 -b)$$

onde:

$$G_{nm}^{\pm} = G(\chi_{e,n}^{\pm}; \chi_{e,m}^{\pm})$$

$$V_k^{\pm} = V_k^{\pm}(\chi_{e,m}^{\pm})$$

Os valores Λ_{ij}^{\pm} serão fornecidos de maneira direta por:

$$\Lambda_{ij}^{\pm} = \{b_{n,i}^{\pm}\}^T \cdot \{V_j^{\pm}\} \quad (3.64)$$

Uma vez obtidas as aproximações Λ_{ij}^{\pm} , as aproximações das forças generalizadas são determinadas substituindo-se Λ_{ij}^{\pm} por Λ_{ij}^{\pm} em (3.50) e (3.51), e o problema de interação hidrodinâmica está resolvido.

Uma vez formulado o método numérico sob enfoque variacional para estimar as forças generalizadas atuantes em uma placa plana com "efeito solo", resta aplicá-lo efetivamente. Para isso, necessita-se definir as funções auxiliares $R^-(x,y)$ e $q^{\pm}(x,y)$ e as funções testes $\chi_{e,n}^{\pm}$, que

serão utilizadas para formar a base do espaço de aproximação. Inicialmente, serão definidas as funções auxiliares e, posteriormente, as funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$ serão discutidas e definidas. Na seqüência, os funcionais envolvendo as funções teste e funções auxiliares, serão calculados; os valores estacionários do funcional F_{ij}^{\pm} , com argumento restritos a $H_{\Delta}(S^{\pm})$, serão determinados e, finalmente, as aproximações das forças generalizadas serão computadas.

3.9. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES $R^{\pm}(x,y)$ E $q^{\pm}(x,y)$.

As funções auxiliares devem satisfazer requisitos específicos e, uma vez escolhidas, permanecerão fixas, contrário ao que ocorre com as funções-teste, que podem ser mudadas conforme proporcionem uma melhor ou pior aproximação para os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$.

Com relação ao trabalho numérico, as funções auxiliares devem satisfazer, se possível, o maior número de condições de contorno do problema em questão, de maneira a simplificar o cálculo dos valores dos funcionais com essas funções como argumento.

Um aspecto interessante a ser avaliado é a forma que o funcional $G(\phi;\psi)$, definido por (3.23), assume, quando um de

seus argumentos satisfaz (3.10- a, c e d). A expressão para $G(\chi^{\pm}; \psi^{\pm})$, onde χ^{\pm} satisfaz (3.10- a, c e d) e ψ^{\pm} é uma função contínua (ψ^{-} é uma função contínua ou possui uma descontinuidade do tipo (3.11)), foi avaliada no anexo D e é dada por (D.4). A expressão (D.4) será útil para avaliar os valores $G(q^{\pm}; \psi^{\pm})^{1\uparrow}$ e $G(\chi_n^{\pm}; \psi^{\pm})^{2\uparrow}$.

A seguir, serão definidas as funções $R^{-}(x,y)$ e $q^{\pm}(x,y)$.

3.9.1. FUNÇÃO AUXILIAR $R^{-}(x,y)$.

Como mencionado anteriormente, o principal papel da função $R^{-}(x,y)$ é modelar a descontinuidade do potencial $\phi_{\gamma}(x,y)$. Então, a função $R^{-}(x,y)$ possui uma descontinuidade do tipo (3.11), satisfaz as condições especificadas em (3.24) e é contínua no restante do domínio S^{+} . No intuito de facilitar o trabalho numérico, a função $R^{-}(x,y)$ deverá satisfazer, ainda, a condição de contorno na parede sólida, dada por (3.10- c).

Uma função $R^{-}(x,y)$ que satisfaça todas as condições mencionadas acima, pode ser dada por:

¹ \uparrow A função ψ^{+} é contínua e ψ^{-} é uma função contínua ou possui, no máximo, uma descontinuidade do tipo (3.11).

² \uparrow A função χ_n^{\pm} é utilizadas na construção de funções testes e satisfaz (3.10- a, c e d).

$$R^-(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot g(x) & \text{em } Sp \text{ (} 0 \geq y \geq -\lambda \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \text{)} \\ -\frac{1}{2} & \text{em } (S^+ \cup S\tau) - Sp \end{cases} \quad (3.65)$$

A função (3.65) está definida, somente, na faixa $x > 0$. A extensão da função $R^-(x,y)$, para o restante do domínio fluido (faixa $x < 0$), é realizada de modo que esta seja ímpar em relação ao eixo x . Como a função $R^-(x,y)$ é contínua na faixa $x > 0$, a função $g(x)$ deve ser contínua no intervalo $[0,1]$ e assumir valor unitário em $x = 1$ ($R^-(x,y)$ contínua na linha $x = 1, 0 > y > -\lambda$).

Uma candidata adequada a ser a função $g(x)$ é a função x^n , que satisfaz os requisitos impostos à função $g(x)$. A função $R^-(x,y)$ é definida em termos de x^n como:

$$R^-(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^n}{2} & \text{em } Sp \text{ (} 0 \geq y \geq -\lambda \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \text{)} \\ -\frac{1}{2} & \text{em } (S^+ \cup S\tau) - Sp \end{cases} \quad (3.66)$$

onde "n" é um expoente arbitrário. Quando a função $-x/2$ for utilizada como função teste, a potência "n" não deve assumir valor unitário para evitar combinações lineares. A potência "n" será escolhida de maneira a otimizar as aproximações variacionais para as forças generalizadas. No capítulo 4, será mostrada a influência da potência "n".

Os valores dos funcionais envolvendo a função $R^-(x,y)$, foram avaliados no anexo E.

3.9.2. FUNÇÕES AUXILIARES $q^\pm(x,y)$.

A função auxiliar $q^+(x,y)$ (ou $q^-(x,y)$) deve ser uma função par (ou ímpar) em relação ao eixo x e pertencer a $H_0^1(S^+)$. Como a função $q^+(x,y)$ (ou $q^-(x,y)$) é utilizada para explicitar a dependência de $\phi^+(x,y)$ (ou $\phi^-(x,y)$) em relação ao coeficiente $To(\phi^+)$ (ou $To(\phi^-)$), esta deve satisfazer, obrigatoriamente, a condição (3.30).

Outro aspecto importante, já mencionado, está ligado ao trabalho numérico a ser realizado na avaliação dos funcionais onde a função $q^\pm(x,y)$ participa do argumento. Neste intuito, a função $q^\pm(x,y)$ deve satisfazer (3.10- a, c e d) e ser o mais simples possível. Um par de dipolos em escoamento sem fronteiras com singularidades localizadas nos bordos do fólho (em $y = -\lambda$ e $x = \pm 1$) mais a respectiva imagem em relação ao eixo x forma uma função adequada para representar a função $q^\pm(x,y)$. Esta função satisfaz (3.10- a, c e d) e é representada por:

$$q^\pm(x,y) = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left\{ \frac{y + \lambda}{(x-1)^2 + (y+\lambda)^2} \pm \frac{y + \lambda}{(x+1)^2 + (y+\lambda)^2} - \frac{y - \lambda}{(x-1)^2 + (y-\lambda)^2} \mp \frac{y - \lambda}{(x+1)^2 + (y-\lambda)^2} \right\}$$

(3.67)

onde o termo $3.(\pi.a)^{1/2}/8$ aparece de modo que $To(q^\pm) = 1$, ou seja, de modo que (3.30) seja satisfeita. O valor dos funcionais envolvendo $q^\pm(x,y)$, foram avaliados no anexo E.

3.10. FUNÇÕES TESTES $\chi_{e,n}^\pm(x,y)$ PERTENCENTES A $H_2^1(S^+)$.

Aqui é discutido qual o papel das funções-teste $\chi_{e,n}^\pm$, quais os requisitos que devem satisfazer e como podem ser construídas a partir de funções pares ou ímpares que pertencem a $H_2^1(S^+)$.

Em qualquer método variacional, a convergência da aproximação variacional para a solução depende de uma escolha adequada das funções-teste (funções que formam a base do espaço de aproximações). Então, para o problema em questão, as funções-teste devem pertencer a $H_2^1(S^+)$, devem satisfazer, em geral, algumas condições de contorno, devem ser linearmente independente, devem ser pares (+) ou ímpares (-) (os potenciais $\phi_{e,j}^\pm$ a serem aproximados são funções pares ou ímpares) e, o mais importante, devem conter um mínimo de informações sobre o caráter das funções a serem modeladas (potenciais $\phi_{e,j}^\pm$). Outro aspecto importante a ser realçado, é o trabalho numérico associado às funções-teste escolhidas. Para evitar complicações numéricas, utilizam-se funções o mais simples possível e

que satisfaçam o maior número de condições de contorno.

Como as funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$ devem satisfazer à restrição $To(\chi_{e,n}^{\pm}) = 0$ (as funções $\chi_{e,n}^{\pm} \in H_2^1(S^{\pm})$), qualquer função contínua $\chi_n^{\pm}(x,y)$ pertencente a $H_2^1(S^{\pm})$ pode ser utilizada na construção de funções-teste, desde que se faça uso das expressões:

$$\chi_{e,n}^{\pm} = \chi_n^{\pm}(x,y) - To(\chi_n^{\pm}) \cdot q^{\pm}(x,y) \quad (3.68)$$

ou

$$\chi_{e,n}^{-} = (\chi_n^{-} - R^{-}) - To(\chi_n^{-} - R^{-}) \cdot q^{-}(x,y) \quad (3.69)$$

caso χ_n^{-} possua descontinuidade do tipo (3.11).

Como as funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$ devem satisfazer ao maior número de condições de contorno do problema para reduzir o trabalho numérico e devem conter informações sobre o caráter das funções a serem modeladas, as funções $\chi_n^{\pm}(x,y)$ podem ser, obviamente, construídas a partir da função de Green do problema (pólo) e singularidades superiores a ela relacionada (dipolo, linhas de vórtice, pólos de ordem superior, etc.). Tais funções só não satisfazem à condição de contorno no corpo, são específicas para cada problema e, em geral, são difíceis de serem avaliadas. Ao invés de usar estas funções, é interessante utilizar funções mais

^{3†} Os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ são funções contínuas. Conseqüentemente, as funções $\chi_{e,n}^{\pm}$, utilizadas para aproximar as funções $\phi_{e,j}^{\pm}$, devem ser contínuas.

simples, mas que tragam informações sobre o caráter das funções a serem modeladas.

Os potenciais $\phi_{e,0}^{\pm}$ modelam fenômenos físicos do problema em questão. $\phi_{e,0}^{+}$ é o potencial de velocidades associado à perturbação da corrente de intensidade unitária, devido à presença do fólio. $\phi_{e,0}^{-}$ representa o potencial de velocidades com circulação não nula, superposto ao potencial $\phi_{e,0}^{+}$ de modo a satisfazer a condição de Kutta. Já os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ não representam aspectos físicos. Eles foram gerados em decorrência da necessidade de se explicitar a dependência dos potenciais ϕ^{\pm} em relação aos coeficientes $T_0(\phi^{\pm})$. Como os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ necessitam ser aproximados, as funções χ_n^{\pm} devem ser escolhidas, também, de modo a representar o comportamento destes potenciais.

Levando-se em conta o caráter dos potenciais $\phi_{e,0}^{\pm}$, uma boa escolha para as funções $\chi_n^{\pm 4\uparrow}$ será as soluções para o problema placa plana com "efeito" solo no limite $\lambda \rightarrow 0$, quando o fólio, praticamente, funde-se à parede sólida, e no limite $\lambda \rightarrow \infty$, quando o "efeito solo" é desprezível. Além de conterem informações sobre aspectos físicos do problema modelado, as soluções nesses dois limites são dadas por

^{4\uparrow} Funções pertencentes a $H_2^1(S^{\pm})$, que são utilizadas na construção das funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$.

funções relativamente simples, o que as tornam sérias candidatas como funções testes.

Com relação aos potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$, uma função teste adequada para modelá-los tem seu caráter revelado através do equacionamento fraco para estes potenciais. Aplicando-se o lema fundamental do cálculo variacional (veja ELSGOLTZ (1969) página 302) à equação fraca para $\phi_{e,1}^{\pm}$, conclui-se que estes potenciais devem satisfazer o problema de contorno:

$$\nabla^2 \phi_{e,1}^{\pm} = 0 \quad \text{em } S^+ \quad (i)$$

$$\nabla \phi_{e,1}^{\pm} \cdot \vec{n} = - \nabla q^{\pm} \cdot \vec{n} \quad \text{em } \partial B \quad (ii)$$

$$\frac{\partial \phi_{e,1}^{\pm}}{\partial y}(x,0) = 0 \quad (iii)$$

$$\phi_{e,1}^{\pm}(a,\theta) = q^{\pm}(a,\theta) \quad (iv)$$

As condições (ii) e (iv) implicam que em C_T $\phi_{e,1}^{\pm} \sim O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ ou $\nabla \phi_{e,1}^{\pm} \sim O(a^{-3/2} \cdot \sin \theta)$. Então, uma função adequada para aproximar os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ deve ser de $O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ em C_T e satisfazer (i) e (iii).

3.10.1. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$.

O objetivo deste item será construir a solução assintótica no limite $\lambda \rightarrow 0$, que corresponde ao primeiro termo da solução em série assintótica obtida em WIDNALL; BARROWS (1970). A partir da solução assintótica nesse limite, serão obtidas expressões para as forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$. Estas expressões serão úteis para avaliar a qualidade das assíntotas das aproximações variacionais das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$, primeiro passo na avaliação da qualidade das aproximações variacionais. Porém, a principal motivação deste item é determinar funções que possam ser utilizadas como funções-teste.

O potencial perturbado para o problema placa plana em "efeito solo" deve satisfazer ao equacionamento^{5†}:

^{5†} No equacionamento (3.70) o potencial perturbado $\phi(x,y)$ não é linear no ângulo de ataque, o que pode ser constatado pela condição de contorno no corpo, expressa por (3.70- c). A linearização se processa posteriormente, quando se assume a hipótese de que o ângulo de ataque é pequeno e, portanto, termos de ordem $O(\alpha^2)$ são desprezíveis.

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0 \quad \text{em } S^\infty \quad (3.70 -a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.70 -b)$$

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} = -n_x \quad \text{em } \partial B \quad (3.70 -c)$$

$$\text{condição de Kutta} \quad (3.70 -d)$$

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow \pm \infty \quad (3.70 -e)$$

O domínio fluido S será separado em dois subdomínios: a região do canal, denotada por S_p , e o restante do domínio fluido, denotado por \bar{S} , como ilustrado pela figura 3.7.

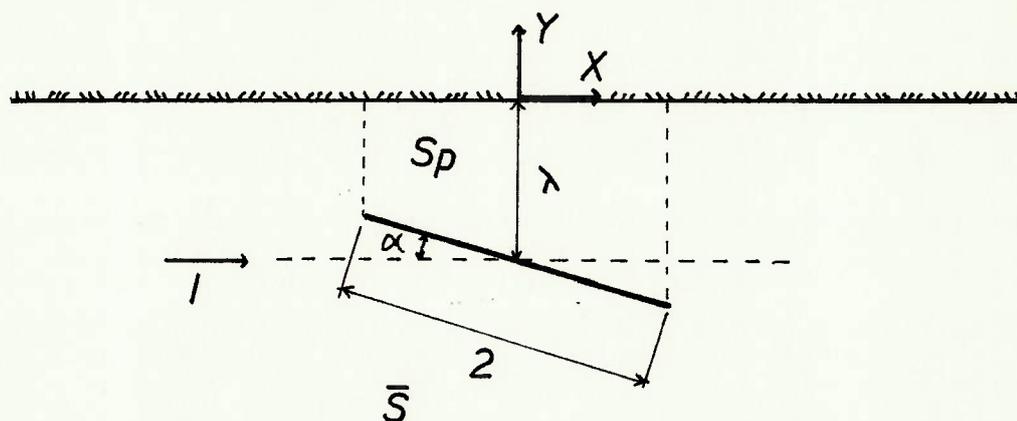


Fig. 3.7 - Subdomínios S_p e \bar{S} .

O vetor normal ao fôlho sem espessura será expresso em termos do ângulo de ataque, ou seja, $\vec{n} = \mp (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$ (+ refere-se à face do fôlho e - ao dorso do fôlho).

Quando α assume pequenos valores, $\cos \alpha$ é de $O(1)$ e $\sin \alpha$ é de ordem $O(\alpha)$. Conseqüentemente, n_x é de $O(\alpha)$ e n_y é de $O(1)$ ($\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$). Desprezando-se termos de ordem $O(\alpha^2)$, resulta que a condição de contorno no fólho será, simplesmente, dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -n_x \sim O(\alpha) \quad \text{em } y = -\lambda^{\pm} \quad (3.71)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$, é correto afirmar que $\alpha \sim O(\lambda)$, portanto, o equacionamento (3.70) neste limite, restrito ao domínio \bar{S} , pode ser reescrito como:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0 \quad \text{em } \bar{S} \quad (3.72 -a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.72 -b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{em } y = 0^- \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+ \quad (3.72 -c)$$

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow \pm \infty \quad (3.72 -d)$$

O problema de contorno (3.72) é homogêneo e possui,

^{6†} A condição de contorno no corpo (3.70- c) pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot n_y = -n_x$$

Como $(\partial \phi / \partial x) \cdot n_x$ é de $O(\alpha^2)$ e $(\partial \phi / \partial y) \cdot n_y$ é de $O(\alpha)$ (potencial $\phi(x, y) \sim (\alpha)$), a condição de contorno (3.70- c) reduz-se a (3.71), desde que termos de ordem $O(\alpha^2)$ sejam desprezados face a termos de ordem $O(\alpha)$.

portanto, uma função constante como solução.

$$\phi(x,y) = \text{CTE} \quad \text{em } \bar{S} \text{ no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (3.73)$$

O potencial perturbado na região do canal (subdomínio S_p) satisfaz ao equacionamento:

$$\nabla^2 \phi(x,y) = 0 \quad \text{em } S_p \quad (3.74 -a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.74 -b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\alpha \quad \text{em } y = -\lambda^+ \quad (3.74 -c)$$

$$\text{condição de Kutta no bordo de fuga} \quad (3.74 -d)$$

$$\phi(-1,y) = \text{cte} \quad (\text{função potencial deve ser contínua no bordo de ataque}) \quad (3.74- e)$$

Como decorrência da linearização no ângulo de ataque, a condição de contorno em ∂B é imposta na geometria não deformada, como mostra (3.74 -c). Expandindo-se a função potencial em série de Taylor em torno de $y = 0$:

$$\phi(x,y) = \phi(x,0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) \cdot y + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x,0) \cdot \frac{y^2}{2} + \dots \quad (3.75)$$

Utilizando-se (3.74- b) e a equação de Laplace, (3.75) pode ser escrita como:

$$\phi(x,y) = \phi(x,0) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,0) \cdot \frac{y^2}{2} + O(\lambda^3) \quad (3.76)$$

Substituindo-se (3.76) em (3.74- c) e desprezando-se termos de ordem $O(\lambda^3)$ em diante:

$$\left[-y \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,0) \right] \Big|_{y=-\lambda} = -\alpha$$

A expressão acima leva à seguinte equação de campo na variável x (a variação do campo de velocidades em y é de $O(\lambda^3)$ e foi desprezada):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x) = -\frac{\alpha}{\lambda} \quad (3.77 -a)$$

restrita às condições:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1) = 0 \quad (3.77 -b)$$

$$\phi(-1) = 0 \quad (3.77- c)$$

(3.77 -b) é a condição de Kutta no bordo de fuga, e (3.77 -c) decorre da continuidade da função potencial na região do bordo de ataque. A solução do equacionamento (3.77) é a função:

$$\phi(x) = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} \right] + \text{cte} \quad (3.78)$$

A expressão (3.78) é a solução para o potencial

perturbado na região do "canal" (subdomínio S_p) no limite $\lambda \rightarrow 0$. Neste limite, o potencial perturbado no domínio fluido S é dado por:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \text{cte} & \text{para } (x,y) \in \bar{S} \\ -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} \right) + \text{cte} & \text{para } (x,y) \in S_p(\text{"canal"}) \end{cases} \quad (3.79)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$, onde $\alpha \sim O(\lambda)$, constata-se que o potencial perturbado de ordem $O(\alpha/\lambda)$, expresso por (3.79), não desaparece na região do canal (subdomínio S_p), pois torna-se de ordem $O(1)$. Quando a placa plana aproxima-se bastante da parede sólida, um observador distante percebe um sorvedouro^{7†} de $O(\alpha/\lambda)$ concentrado no bordo de ataque, efeito do potencial perturbado de $O(\alpha/\lambda)$ em S_p . A presença deste sorvedouro decorre da necessidade de satisfazer o desbalanceamento de massa, consequência da distribuição de fontes de $O(\alpha)$ ao longo da face do fólio (condição de contorno (3.74) em $y = -\lambda^-$). No limite $\lambda \rightarrow 0$, a intensidade da distribuição de fontes tende a zero, conduzindo a (3.72-c). Em S_p , $\phi(x,y)$ é de $O(1)$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Isto implica que o sorvedouro no bordo de ataque permanece com intensidade finita nesse limite. As razões que levam a este resultado serão expostas a seguir. O volume de massa que escoia entre

^{7†} Caso o ângulo de ataque fosse negativo, existiria uma fonte no bordo de ataque.

fólio e parede no bordo de ataque e a distância entre o bordo de ataque e a parede tendem ambos linearmente a zero, quando $\lambda \rightarrow 0$. Conseqüentemente, o quociente entre ambos (volume de massa que escoia entre bordo de ataque e parede e a distância entre fólio e parede) tende a um valor finito no limite $\lambda \rightarrow 0$. Este quociente nada mais é do que a vazão no bordo de ataque, ou seja, a intensidade do sorvedouro no bordo de ataque.

Uma vez obtida a solução do problema placa plana com "efeito solo" no limite $\lambda \rightarrow 0$, as expressões para as forças decorrentes da ação do fluido sobre o fólio são obtidas. A força de sustentação \vec{L} no limite $\lambda \rightarrow 0$ pode ser obtida em termos do potencial perturbado, dado por (3.79), através da expressão:

$$\vec{L} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c/2) \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_y \, d\partial B \quad \vec{j}$$

Como ∂B é o contorno não deformado ($y = -\lambda$ e $-1 < x < 1$), esta expressão pode ser reescrita como:

$$\vec{L} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c/2) \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} (x-1) \, dx \quad \vec{j}$$

Avaliando-se o integral acima, temos:

$$\vec{L} = \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \frac{\alpha}{\lambda} = \rho \cdot U \cdot \Gamma \quad (3.80)$$

onde a circulação Γ é dada por $(U.c.\alpha)/\lambda$.

O momento linear em relação ao ângulo de ataque, avaliado em relação ao ponto médio do fôlio, é dado pela expressão:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c/2)^2 \int_{\partial B} x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_y \, d\partial B \vec{k} + O(\alpha^2)$$

onde $\phi(x,y)$ é o potencial perturbado (3.79) e ∂B é o contorno do fôlio na geometria não deformada. Esta expressão pode ser reescrita como:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c/2)^2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} x \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, -d^-) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, -d^+) \right] dx \vec{k} \right\}$$

Substituindo-se (3.79) nesta expressão, conclui-se que o momento será dado por:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c/2)^2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} x \cdot (x-1) dx \vec{k} = -\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot c^2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \vec{k} \quad (3.81)$$

O braço do momento normalizado pela corda, em relação ao ponto médio do fôlio, é dado pela razão entre o momento e a força de sustentação:

$$b/c = \frac{\vec{M}}{\vec{L} \cdot c} = -\frac{1}{6} \quad (3.82)$$

De acordo com (3.82), conclui-se que a linha de ação

da força de sustentação passa $1/6$ da corda à frente do ponto médio do fólio no limite $\lambda \rightarrow 0$.

Os valores aqui obtidos para as forças generalizadas serão usados como referência para os valores assintóticos das aproximações variacionais das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$.

A parte par não constante de (3.79) pode ser usada para construir uma função-teste para aproximar os potenciais $\phi_{e,j}^+$, e a parte ímpar de (3.79) pode ser usada para construir uma função-teste para aproximar os potenciais $\phi_{e,j}^-$.

3.10.2. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$.

No limite $\lambda \rightarrow \infty$, o problema definido pelo equacionamento (3.10) é equivalente ao problema placa plana sob ação de uma corrente unitária na direção do eixo y e domínio fluido sem fronteiras, como ilustrado pela figura 3.8. A solução deste problema é bastante conhecida e, facilmente, encontrada na literatura.

O objetivo deste item é mostrar a solução do problema (3.10) no limite $\lambda \rightarrow \infty$ e avaliar as forças generalizadas neste limite. A solução no limite $\lambda \rightarrow \infty$ será utilizada na construção de funções-teste, pois é dada por expressões

analíticas simples.

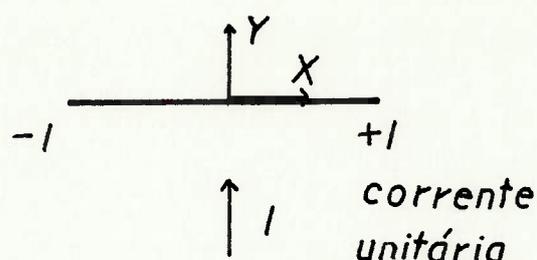


Fig. 3.8 - Placa plana sob ação de uma corrente unitária na direção do eixo y em domínio fluido infinito.

A função potencial que satisfaz ao equacionamento (3.10) no limite $\lambda \rightarrow \infty$, é expressa em termos das funções $w^{\pm}(z)$:

$$\phi(x,y) = \text{Real}\{w^+(z)\} - \Gamma \cdot \text{Real}\{w^-(z)\} \quad (3.83)$$

onde Γ é a circulação do campo de velocidades resultante.

As funções $w^{\pm}(z)$ são dadas por:

$$w^+(z) = -i [\sqrt{z^2 - 1} - z] \quad (3.84 -a)$$

e

$$w^-(z) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \ln \{ -i (z + \sqrt{z^2 - 1}) \} \quad (3.84 -b)$$

onde $z = x + i.y$. A origem do sistema de coordenadas (x,y)

está localizada no ponto médio do fólio.

A função Real $\{w^+(z)\}$ nada mais é do que o potencial de perturbação da corrente de intensidade unitária na direção do eixo y , devido à presença de um círculo com raio unitário, mapeado conformalmente na geometria da placa plana^{8†}. A função $w^-(z)$, por sua vez, nada mais é do que um vórtice de circulação unitária, com singularidade na origem, mapeado conformalmente na geometria da placa plana.

Uma vez determinada a solução para o problema placa plana com "efeito solo" no limite $\lambda \rightarrow \infty$, as forças generalizadas podem ser avaliadas, utilizando-se as expressões (A.4 -b) e (A.10). Substituindo-se (3.83) em (A.4 -b) e em (A.10) ou consultando-se a literatura (ver THWAITES (1960), pág. 116 ou MILNE-THOMSON (1966)), chega-se às seguintes expressões para a força de sustentação e momento. Para a força de sustentação a expressão é a seguinte:

$$\vec{L} = \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \pi \cdot \alpha \vec{j} = \rho \cdot U \cdot \Gamma \vec{j} \quad (3.85)$$

com $\Gamma = c \cdot \pi \cdot U \cdot \alpha$. Para o momento M a expressão é a seguinte:

$$\vec{M} = -\frac{1}{4} \rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot c^2 \cdot \alpha \vec{k} \quad (3.86)$$

^{8†} A transformada conforme de Joukowski mapeia o domínio exterior ao círculo unitário, centrado na origem, no domínio exterior à placa plana.

A partir de (3.85) e (3.86), avalia-se o braço do momento normalizado pela corda em relação ao ponto médio do fólio:

$$b/c = \frac{\vec{M}}{\vec{L}.c} = -\frac{1}{4} \quad (3.87)$$

No limite $\lambda \rightarrow \infty$, a linha de ação da força de sustentação está a 25% da corda à frente do fólio, como constatado.

As expressões para as forças generalizadas, no limite $\lambda \rightarrow \infty$, serão usadas como referência para as assíntotas das aproximações variacionais das forças generalizadas.

Como as funções $\text{Real}\{w^{\pm}(z)\}$ representam a solução no limite $\lambda \rightarrow \infty$, estas serão utilizadas na construção de funções-teste. A função $\text{Real}\{w^{+}(z)\}$ será utilizada na construção de funções-teste para aproximar os potenciais $\phi_{e,j}^{+}$, e a função $\text{Real}\{w^{-}(z)\}$ fará parte de funções-teste utilizadas para aproximar os potenciais ímpares $\phi_{e,j}^{-}$.

3.10.3. APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES TESTES A SEREM UTILIZADAS.

A seguir, serão definidas três funções-teste para aproximar os potenciais pares $\phi_{e,j}^{+}$ e três funções-teste para aproximar os potenciais ímpares $\phi_{e,j}^{-}$ (no total serão

definidas seis funções-teste). A primeira função-teste para representar os potenciais pares (ímpares) será construída com a parte par (parte ímpar) da solução no limite $\lambda \rightarrow 0$, obtida no item 3.10.1. A segunda função-teste será construída com a parte par (parte ímpar) da solução no limite $\lambda \rightarrow \infty$, ilustrada no item 3.10.2. A terceira função-teste par (ímpar) será construída a partir de uma função de $H_2^1(S^+)$ que seja de $O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ ao longo de C_T , de modo que o potencial $\phi_{e,1}^+$ (potencial $\phi_{e,1}^-$) seja adequadamente aproximado.

3.10.3.1. FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA PAR.

Neste item, serão apresentadas três funções-teste que podem ser utilizadas para construir aproximações para os potenciais $\phi_{e,j}^+$ (problema par). Inicialmente, serão construídas as funções χ_n^+ pertencentes a $H_2^1(S^+)$ e, posteriormente, constrói-se $\chi_{e,n}^+$ via (3.68).

A primeira função-teste par, denotada por $\chi_{e,1}^+$, será construída a partir da função χ_1^+ , que é a parte par de (3.79). Então, χ_1^+ em S_p será a função x^2 , e em \bar{S} χ_1^+ assumirá um valor constante. Na borda entre S_p e \bar{S} (em $x = 1$), a função χ_1^+ assume valor unitário (para $x = 1$ segue que $x^2 = 1$). Como χ_1^+ deve ser contínua em S^+ , esta terá

valor unitário em \bar{S} . A função χ_1^+ será expressa por:

$$\chi_1^+(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{em } Sp \\ 1 & \text{em } (S^+ \cup \Sigma) - Sp \end{cases} \quad (3.88)$$

Como $\chi_{e,1}^+$ pertence a $H_{e,2}^1(S^+)$, esta será construída a partir de χ_1^+ , utilizando-se a expressão (3.68):

$$\chi_{e,1}^+(x,y) = \chi_1^+(x,y) - T_0(\chi_1^+) \cdot q^+(x,y) \quad (3.89)$$

Uma vez definida a função teste $\chi_{e,1}^+$, funcionais onde esta função faz parte do argumento serão avaliadas no anexo F.

A seguir, será construída a segunda função teste $\chi_{e,2}^+$ que utiliza a função χ_2^+ pertencente a $H_2^1(S^+)$. A função χ_2^+ , por sua vez, será construída utilizando-se a função $\text{Real}\{w^+(z)\}$, que é a parte par da solução para o potencial perturbado no limite $\lambda \rightarrow \infty$. Deseja-se, para facilitar o trabalho numérico, que $\chi_2^+(x,y)$, além de satisfazer (3.10- a e d), satisfaça (3.10- c). Então, a função $\chi_2^+(x,y)$ é definida como:

$$\chi_2^+(x,y) = \text{Real} \{ w^+(z_1) + w^+(z_2) \} \quad (3.90)$$

onde $w^+(z_j)$ é dada por (3.84- b). Esta função satisfaz (3.10- a, c e d). O plano complexo z_1 ($z_1 = x + i.(y - \lambda)$)

possui origem no ponto médio do fólio e o plano complexo z_2 ($z_2 = x + i.(-y + \lambda)$) possui origem no ponto médio da imagem do fólio em relação ao eixo x. Para maiores detalhes consulte o anexo F. A função χ_{e,z^+} será construída a partir de χ_{z^+} de acordo com a expressão (3.68):

$$\chi_{e,z^+}(x,y) = \chi_{z^+}(x,y) - T_0(\chi_{z^+}).q^+(x,y) \quad (3.91)$$

No anexo F, serão avaliados os valores dos funcionais onde a função χ_{e,z^+} faz parte do argumento.

A terceira função teste par, denotada por χ_{e,s^+} , será construída a partir da função χ_{s^+} de acordo com a expressão (3.68). Como observado no final do item 3.10, o potencial $\phi_{e,1^+}$ deve ser de $O(a^{-1/2}.\sin \theta)$ ao longo de C_T . A função χ_{s^+} é construída no intuito de aproximar de maneira adequada o potencial $\phi_{e,1^+}$. Conseqüentemente, a função χ_{s^+} deve ser de $O(a^{-1/2}.\sin \theta)$ ao longo de C_T . A derivada em relação a x da função $\text{Real}\{w^-(z_1)\}$ ($z_1 = x + i.(y - \lambda)$) é uma boa candidata, pois, além de ser par em relação a variável x, ela é de $O(a^{-1/2}.\sin \theta)$ ao longo de C_T e satisfaz (3.10- a e d). Porém, essa função não satisfaz (3.10- c).

A função definida como:

$$\chi^s_+(x,y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial w^-(z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial w^-(z_2)}{\partial z_2} \right\} \quad (3.92)$$

onde $w^-(z)$ é dada por (3.84- b), satisfaz (3.10- a, c e d) e, o mais importante, é de $O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ ao longo de Cr . Para maiores detalhes sobre (3.92), consulte o anexo F. De acordo com (3.86), a função $\chi_{e,s}^+$, em termos de χ^s_+ , é dada por:

$$\chi_{e,s}^+(x,y) = \chi^s_+(x,y) - T_0(\chi^s_+) \cdot q^+(x,y) \quad (3.93)$$

No anexo F, serão avaliados os valores dos funcionais onde a função $\chi_{e,s}^+$ aparece no argumento.

3.10.3.2. FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA IMPAR.

O objetivo deste item é construir as três funções-teste que podem ser utilizadas na aproximação variacional dos potenciais $\phi_{e,j}^-$. As funções-teste $\chi_{e,n}^-$ serão construídas a partir de funções χ_n^- pertencentes a $H_2^1(S^+)$ de acordo com a expressão (3.68) ou (3.69), caso χ_n^- possua uma descontinuidade do tipo (3.11).

A primeira função-teste ímpar $\chi_{e,1}^-$ será construída

utilizando-se a função χ_1^- pertencente a $H_2^1(S^+)$ ^{9†}. A função χ_1^- é definida como a parte ímpar de (3.79) na região do "canal" (Sp), ou seja, $\chi_1^- = -x/2$ em Sp. A função χ_1^- atinge valor $-1/2$ em $x = 1$ e $1/2$ em $x = -1$, deve ser ímpar em relação à variável x e pode possuir, no máximo, uma descontinuidade do tipo (3.11) ou ser contínua. Como a função χ_1^- deve ser contínua na fronteira entre Sp e \bar{S} , χ_1^- será definida como $-1/2$ na faixa $x > 0$ e $1/2$ na faixa $x \leq 0$. Desse modo, a função χ_1^- possui uma descontinuidade do tipo (3.11) e será expressa por:

$$\chi_1^-(x, y) = \begin{cases} -x/2 & \text{em Sp} \\ -1/2 & \text{em } (S^+_{UST}) - Sp \end{cases} \quad (3.94)$$

Como a função χ_1^- possui descontinuidade do tipo (3.11), a função $\chi_{e,1}^-$ será construída a partir da expressão (3.69).

$$\chi_{e,1}^-(x, y) = \chi_1^-(x, y) - R^-(x, y) - T_0(\chi_1^- - R^-) \cdot q^-(x, y) \quad (3.95)$$

No anexo F, serão avaliados os valores dos funcionais

^{9†} A função χ_1^- está definida em S e é uma função ímpar em relação ao eixo x . Conseqüentemente, se χ_1^- for quadrado integrável na faixa $x > 0$, esta será quadrado integrável em S. Então, ao invés de dizermos que χ_1^- pertence a $H_2^1(S)$, basta dizer que pertence a $H_2^1(S^+)$.

onde a função $\chi_{e,1}^-$ aparece no argumento.

A segunda função teste $\chi_{e,2}^-$ será construída a partir da função χ_{z^-} pertencente a $H_2^1(S^+)$. A função χ_{z^-} deve satisfazer a condição de contorno em $y = 0$ ($\partial\chi_{z^-}/\partial y = 0$ em $y = 0$). Portanto, será construída como a soma da função ímpar $\text{Real}\{w^-(z_1)\}$ ($z_1 = x + i.(y - \lambda)$) mais a sua imagem em relação ao eixo x , denotada por $\text{Real}\{w^-(z_2)\}$ ($z_2 = x + i.(-y + \lambda)$). Para maiores detalhes sobre os planos complexos z_1 e z_2 , consulte o anexo F. A função χ_{z^-} é expressa por:

$$\chi_{z^-}(x,y) = \text{Real}\{w^-(z_1) + w^-(z_2)\} \quad (3.96)$$

onde $w^-(z)$ é dada por (3.84- b).

A função $\chi_{e,2}^-$ é construída a partir da função χ_{z^-} de acordo com (3.69), pois χ_{z^-} possui uma descontinuidade do tipo (3.11). A expressão resultante para $\chi_{e,2}^-$ é dada por:

$$\chi_{e,2}^-(x,y) = \chi_{z^-}(x,y) - R^-(x,y) - T_0(\chi_{z^-} - R^-).q^-(x,y) \quad (3.97)$$

Uma vez definida a função $\chi_{e,2}^-$, valores dos funcionais onde esta função faz parte do argumento serão avaliados no anexo F.

A terceira função teste ímpar, denotada por $\chi_{e,3}^-$,

será construída a partir da função χ_s^- de acordo com a expressão (3.68) (como será constatado, a função χ_s^- é contínua ao longo do corte). Essa função teste será construída no intuito de fornecer uma aproximação adequada para o potencial $\phi_{e,1}^-$. Conseqüentemente, como observado no final do item 3.10, a função χ_s^- deve ser de ordem $O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ ao longo de C_T . Além deste comportamento ao longo de C_T , será interessante que χ_s^- satisfaça (3.10- a, c e d). Uma boa candidata é a derivada da função χ_2^+ em relação a variável x . Como χ_2^+ é uma função par em relação a variável x , sua derivada em relação a x resulta numa função ímpar em relação a esta variável, além de satisfazer (3.10- a, c e d) e ser de $O(a^{-1/2} \cdot \sin \theta)$ ao longo de C_T .

A função χ_s^- é expressa por:

$$\chi_s^-(x,y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial w^+(z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial w^+(z_2)}{\partial z_2} \right\} \quad (3.98)$$

Para maiores detalhes sobre a função $\chi_s^-(x,y)$, consulte o anexo F. A função $\chi_{e,s}^-$, como já mencionado, é construída a partir da função χ_s^- de acordo com (3.68). A expressão para $\chi_{e,s}^-$ é dada por:

$$\chi_{e,s}^-(x,y) = \chi_s^-(x,y) - T_0(\chi_s^-) \cdot q^-(x,y) \quad (3.99)$$

Funcionais com a função $\chi_{e,s}^-(x,y)$ no argumento serão

avaliados no anexo F.

3.11. APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS.

Uma vez definidas as funções-teste, as aproximações variacionais para as forças generalizadas serão construídas.

Inicialmente, será construída uma primeira aproximação variacional utilizando-se apenas duas funções-teste para representar os potenciais $\phi_{e,j}^+$ e apenas duas funções para representar os potenciais $\phi_{e,j}^-$ (quatro funções ao todo). O número inicial de funções-teste ficará restrito a duas funções no intuito de mostrar a força do método e de obter expressões simples para as forças generalizadas.

Caso a primeira aproximação variacional não forneça uma aproximação adequada para as forças generalizadas, uma segunda aproximação variacional será construída utilizando-se uma terceira função-teste na representação dos potenciais $\phi_{e,j}^+$.

A seguir, será descrito como as duas aproximações variacionais são construídas, ou seja, quais funções-teste serão utilizadas na primeira e na segunda aproximação. Posteriormente, será indicado como essas aproximações são obtidas através da condição do funcional F_{ij}^+ , com

argumentos restritos a $He_{\Delta}(S^+) \times He_{\Delta}(S^+)$, ser estacionário.

A primeira aproximação variacional, como mostrado no anexo G, utiliza, somente, duas funções-teste no problema par e duas funções-teste no problema ímpar. As funções-teste utilizadas nesta primeira aproximação variacional do problema par (ímpar) são as funções $\chi_{e,1}^+$ e $\chi_{e,2}^+$ ($\chi_{e,1}^-$ e $\chi_{e,2}^-$). Estas funções devem fornecer uma aproximação adequada para os potenciais $\phi_{e,0}^{\pm}$, pois modelam aspectos físicos do problema em questão. Já os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ não devem ser adequadamente aproximados pela combinação linear das funções $\chi_{e,1}^{\pm}$ e $\chi_{e,2}^{\pm}$, mas, provavelmente, esta aproximação deve fornecer uma aproximação variacional adequada das forças generalizadas.

Como já mencionado, caso a primeira aproximação não forneça resultados adequados, uma segunda aproximação será construída. Nesta aproximação serão usadas as três funções-teste $\chi_{e,1}^+$, $\chi_{e,2}^+$ e $\chi_{e,3}^+$ para compor o problema par (potenciais $\phi_{e,j}^+$). Para o problema ímpar, serão utilizadas as funções $\chi_{e,2}^-$ e $\chi_{e,3}^-$. A função $\chi_{e,1}^-$ será a função $R^-(x,y)$ na segunda aproximação. Como consequência, a função $\chi_{e,1}^-$ não será utilizada como função-teste na segunda aproximação variacional do problema ímpar para evitar combinação linear com a função $R^-(x,y)$. O conjunto de funções-teste utilizado na segunda aproximação deverá

aproximar de maneira adequada tanto os potenciais $\phi_{e,0}^{\pm}$ como os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$, de modo a obter uma boa aproximação variacional das forças generalizadas.

Como as funções que formam a base do espaço $H_{e_A}(S^+)$ na primeira e segunda aproximações já foram definidas, será possível determinar as projeções dos potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ em $H_{e_A}(S^+)$ através da condição do funcional $F_{ij}^{\pm}(\phi;\psi)$, com argumentos restritos a $H_{e_A}(S^+) \times H_{e_A}(S^+)$, ser estacionário. De posse das projeções $\phi_{e,j}^{\pm}$ será possível obter as aproximações Λ_{ij}^{\pm} , que são os valores estacionários do funcional $F_{ij}^{\pm}(\phi;\psi)$, quando seu argumento está restrito a $H_{e_A}(S^+) \times H_{e_A}(S^+)$. As aproximações Λ_{ij}^{\pm} possibilitam obter aproximações para as forças generalizadas via (3.14), (3.29), (3.50) e (3.51).

A avaliação das funções $\phi_{e,j}^{\pm}$, que tornam o funcional $F_{ij}^{\pm}(\phi;\psi)$ estacionário em $H_{e_A}(S^+) \times H_{e_A}(S^+)$, resume-se em resolver o sistema (3.67) restrito a duas funções testes, no caso da primeira aproximação variacional (funções $\chi_{e,1}^{\pm}$ e $\chi_{e,2}^{\pm}$ já definidas). No caso da segunda aproximação variacional, (3.67) implica em resolver um sistema 3x3 para o problema par e um sistema 2x2 para o problema ímpar. Uma vez determinadas as aproximações $\phi_{e,j}^{\pm}$, no caso os

coeficientes $^{10†} b_{n,j}^{\pm}$, os valores Λ_{ij}^{\pm} serão obtidos de maneira direta de acordo com (3.68). Os valores Λ_{ij}^{\pm} para ambas as aproximações foram determinados no anexo G. Neste anexo, as duas aproximações para as forças generalizadas foram construídas. No item G.1, temos a primeira aproximação das forças generalizadas e, no item G.2, temos a segunda aproximação variacional das forças generalizadas.

3.12. ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL NOS LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$.

O comportamento assintótico da primeira aproximação variacional das forças generalizadas nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ foi avaliado no anexo H. O comportamento assintótico da segunda aproximação variacional nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ não foi avaliado, pois a segunda aproximação variacional foi elaborada, somente, para melhorar os resultados numéricos fornecidos pela primeira aproximação variacional. O objetivo deste item é mostrar que o comportamento assintótico da primeira aproximação das forças

^{10†} Qualquer elemento de $H_{e_A}(S^+)$ é dado com combinação linear das funções que formam a base de $H_{e_A}(S^+)$. Como $\phi_{e,j}^{\pm}$ pertence a $H_{e_A}(S^+)$, os $b_{n,j}^{\pm}$ são os coeficientes que multiplicam as funções testes de modo a formar as projeções $\phi_{e,j}^{\pm}$.

generalizadas nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ coincide com os valores fornecidos pela literatura ou obtidos nos itens 3.10.1 e 3.10.2.

As assíntotas da primeira aproximação variacional das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow \infty$, avaliadas no anexo H, são comparadas com os resultados fornecidos pela literatura ou obtidos na item 3.10.2, como ilustra a tabela 1.

TABELA 1 - Assíntotas para \dot{L} , \dot{M} e b/c versus Referências no limite $\lambda \rightarrow \infty$ (Literatura ou item 3.10.2).

	ASSÍNTOTAS no limite $\lambda \rightarrow \infty$	REFERÊNCIAS Literatura ou item 3.10.2
\dot{L}	$\rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot c \cdot \alpha \dot{J}$	$\rho \cdot U^2 \cdot \pi \cdot c \cdot \alpha \dot{J}$
\dot{M}	$-\frac{1}{4} \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot c^2 \dot{K}$	$-\frac{1}{4} \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot c^2 \dot{K}$
b/c	0.25	0.25

O parâmetro b/c representa o braço do momento em relação ao ponto médio do fólio normalizado pela corda.

A seguir, será apresentada a tabela 2, onde as assíntotas da primeira aproximação variacional das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$, avaliadas no anexo H, são comparadas com os resultados fornecidos pela literatura ou obtidos no item 3.10.1.

TABELA 2 - Assíntotas para \vec{L} , \vec{M} e b/c versus Referências no limite $\lambda \rightarrow 0$ (Literatura ou item 3.10.1).

	ASSÍNTOTAS	REFERENCIA
	no limite $\lambda \rightarrow 0$	Literatura e item 3.10.1
\vec{R}	$\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c / \lambda \vec{j}$	$\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c / \lambda \vec{j}$
\vec{M}	$-\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot \frac{1}{6 \cdot \lambda} \vec{k}$	$-\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot \frac{1}{6 \cdot \lambda} \vec{k}$
b/c	1/6	1/6

Para maiores detalhes com relação ao comportamento assintótico da primeira aproximação variacional das forças generalizadas, consulte o anexo H.

De acordo com as tabelas 1 e 2, constata-se que as assíntotas da aproximação variacional das forças generalizadas recuperam os valores fornecidos pela literatura. Estes bons resultados encorajam a continuidade deste trabalho cujo próximo passo será avaliar, numericamente, as aproximações variacionais.

Consultando-se o anexo G, constata-se que as aproximações variacionais das forças generalizadas dependem de funções do parâmetro λ , expressas por integrais na variável x com λ como parâmetro (veja sumário de funcionais, item F.3 do anexo F, onde são apresentadas as expressões das funções $E1(\lambda)$, $E2(\lambda)$, $E3(\lambda)$, $E4(\lambda)$, $I1(\lambda)$

, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$). Estas funções podem ser avaliadas numericamente ou aproximadas por polinômios no parâmetro λ . Aproximações polinomiais para essas funções permitem obter expressões polinomiais para as aproximações variacionais das forças generalizadas, que são um dos objetivos deste trabalho. O procedimento para a construção das aproximações polinomiais das funções do parâmetro λ será apresentado no anexo I.

* * *

4.RESULTADOS NUMÉRICOS.

Neste capítulo os valores da primeira e da segunda aproximação variacional das forças generalizadas, calculados numericamente, são apresentados e comparados com os valores fornecidos pelas referências (TOMOTIKA; IMAI (1937) e WIDNALL; BARROWS (1970)). Ambas aproximações variacionais das forças generalizadas foram avaliadas numericamente em função de valores do parâmetro λ utilizados em WIDNALL; BARROWS (1970) e em TOMOTIKA; IMAI (1937). Para que isso fosse possível, os integrais presentes nas funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ foram determinados numericamente, utilizando-se uma versão adequada das fórmulas de quadratura de Gauss (veja ABRAMOWITZ; STEGUM, página 887). As fórmulas de quadratura de Gauss permitem avaliar numericamente integrais sem utilizar os extremos do intervalo de integração. Esta característica possibilita integrar uma classe mais ampla de funções do que os algoritmos baseados nas regras de Newton-Cotes.

Através das expressões (3.14) e (3.17), constata-se que os únicos parâmetros funções de λ são, respectivamente, a circulação adimensional e o valor Λ_{00}^+ . A densidade do

fluido ρ , a velocidade da corrente U , a corda " c " e o ângulo de ataque α são conhecidos a priori e não dependem de λ . Portanto, uma maneira mais adequada de representar a variação das forças generalizadas em função do parâmetro λ será utilizar os coeficientes C_L/α e C_M/α , definidos por:

$$C_L/\alpha = \frac{|\vec{L}|}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c} \quad (4.1- a)$$

e

$$C_M/\alpha = \frac{|\vec{M}|}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2} \quad (4.1- b)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$, a assíntota para a força de sustentação é dada por (3.80), e a assíntota para o momento é dada por (3.81). Substituindo-se estas assíntotas nas expressões (4.1):

$$C_L/\alpha \sim 2/\lambda \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (4.2- a)$$

e

$$C_M/\alpha \sim \frac{1}{3 \cdot \lambda} \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (4.2- b)$$

De acordo com as expressões (4.2), constata-se que a aproximação variacional de C_L/α e de C_M/α assume valores muito grandes para pequenos valores de λ . Isto ocasiona uma representação inadequada da variação das forças generalizadas em termos do parâmetro λ . Para remediar esta situação, adotou-se o coeficiente $\lambda \cdot C_L/\alpha$ (utilizado em

WIDNALL; BARROWS (1970)) para representar a variação da força de sustentação em termos de λ . Para o momento adota-se o coeficiente $\lambda.C_M/\alpha$. As expressões para os coeficientes $\lambda.C_L/\alpha$ e $\lambda.C_M/\alpha$, respectivamente, em termos da força de sustentação e do momento são:

$$\lambda.C_L/\alpha = \frac{\lambda.|\vec{L}|}{\frac{1}{2}.\rho.U^2.\alpha.c} \quad (4.3- a)$$

e

$$\lambda.C_M/\alpha = \frac{\lambda.|\vec{M}|}{\frac{1}{2}.\rho.U^2.\alpha.c^2} \quad (4.3- b)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$, os coeficientes $\lambda.C_L/\alpha$ e $\lambda.C_M/\alpha$ assumem valores constantes, como pode ser constatado via (4.3- a e b) e (4.2- a e b). No limite $\lambda \rightarrow \infty$, a assíntota da força de sustentação é dada por (3.85), e a assíntota do momento é dada por (3.86). Substituindo-se estas assíntotas em (4.3):

$$\lambda.C_L/\alpha \sim 2\pi.\lambda \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (4.4- a)$$

e

$$\lambda.C_M/\alpha \sim \frac{\pi}{2}.\lambda \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (4.4- b)$$

Em função do comportamento assintótico dos coeficientes $\lambda.C_L/\alpha$ e $\lambda.C_M/\alpha$ nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, constata-se que estes coeficientes são adequados para representar a variação das aproximações das forças

generalizadas, em função do parâmetro λ .

O comportamento assintótico de b/c nos limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$ foi apresentado, respectivamente, nas tabelas 1 e 2. De acordo com esse comportamento assintótico, constatou-se que b/c é um parâmetro adequado para representar a variação do braço do momento em termos do parâmetro λ .

As aproximações variacionais dos parâmetros $\lambda.C_L/\alpha$ e $\lambda.C_M/\alpha$ são expressas, respectivamente, em termos da circulação adimensional e da aproximação variacional do valor Λ_{00}^+ , como pode ser constatado através do anexo G. As expressões para a aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$ e $\lambda.C_M/\alpha$ são dadas por:

$$\lambda.C_L/\alpha^A = \lambda.\gamma^A \quad (4.5- a)$$

e

$$\lambda.C_M/\alpha^A = \lambda.\Lambda_{00}^+ \quad (4.5- b)$$

Os resultados numéricos serão apresentados por gráficos e tabelas dos parâmetros $\lambda.C_L/\alpha$, $\lambda.C_M/\alpha$ e b/c em função do parâmetro λ . Nas tabelas e gráficos, além dos valores da primeira e da segunda aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$, $\lambda.C_M/\alpha$ e b/c , serão apresentados os valores destes parâmetros fornecidos pela literatura disponível, no intuito de avaliar a qualidade das aproximações variacionais.

As principais referências são WIDNALL; BARROWS (1970) e TOMOTIKA; IMAI (1937). No apêndice A, será discutido como as referências para os parâmetros $\lambda.C_L/\alpha$, $\lambda.C_M/\alpha$ e b/c foram obtidas a partir dos dados fornecidos por WIDNALL; BARROWS (1970) e TOMOTIKA; IMAI (1937).

Como já mencionado, a primeira e a segunda aproximação variacional do parâmetro $\lambda.C_L/\alpha$ serão avaliadas numericamente para valores de λ presentes na literatura. A tabela 3 apresenta a avaliação numérica da primeira aproximação variacional do parâmetro $\lambda.C_L/\alpha$ com $n = 3/2$ e $n = 3$ (valores adotados para a potência "n" que aparece em $I_3(\lambda)$), a avaliação numérica da segunda aproximação variacional para $\lambda.C_L/\alpha$ e os valores de $\lambda.C_L/\alpha$ fornecidos pela literatura. A tabela 3 será descrita a seguir: Na primeira coluna, da esquerda para a direita, são apresentados os valores do parâmetro λ utilizados nas referências. A segunda e a terceira colunas apresentam os valores da primeira aproximação variacional para $\lambda.C_L/\alpha$, respectivamente, para $n = 3/2$ e $n = 3$ em função dos valores do parâmetro λ mostrados na primeira coluna. A quarta coluna apresenta os valores de $\lambda.C_L/\alpha$ fornecidos pela segunda aproximação variacional. Já a quinta e sexta colunas apresentam os valores $\lambda.C_L/\alpha$ fornecidos, respectivamente, por WIDNALL; BARROWS (1970) e TOMOTIKA;

IMAI (1937). Os espaços em branco na quinta e sexta colunas aparecem porque a referência (WIDNALL; BARROWS (1970) ou TOMOTIKA; IMAI (1937)) não proporcionou o valor de $\lambda \cdot CL/\alpha$ para o correspondente valor do parâmetro λ . As três últimas colunas ilustram o erro das aproximações variacionais de $\lambda \cdot CL/\alpha$ face aos resultados apresentados pela literatura.

VALOR DE λ	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA			WIDNALL & BARROWS	TOMOTIKA & IMAI
	PRIMEIRA APROX. VAR. N = 3/2	SEGUNDA APROX. VAR. N = 3	SEGUNDA APROX. VAR.		
12,492	78,5524	78,5524	78,6151		78,6151
4,975	31,4170	31,4170	31,5700		31,5714
2,4509	15,7166	15,7166	16,0039		16,0046
1,59477	10,4936	10,4936	10,8867		10,8848
1,1569	7,8938	7,8936	8,3590		8,3610
1,0	6,9850	6,9848	7,4747	7,45	
0,8	5,8547	5,8544	6,3660	6,34	
0,7035	5,3238	5,3232	5,8367		5,8592
0,6	4,7684	4,7672	5,2717	5,32	
0,4654	4,0716	4,0686	4,5342		4,5957
0,4	3,7456	3,741	4,1716	4,25	
0,3164	3,3426	3,3334	3,7006		3,8143
0,2	2,809	2,7792	3,0268	3,17	
0,1	2,3726	2,2704	2,4521	2,64	
0,09	2,3294	2,2122	2,3984	2,58	
0,05	2,1586	1,9486	2,2041	2,35	
0,01	1,9996	1,6386	2,0739	2,09	

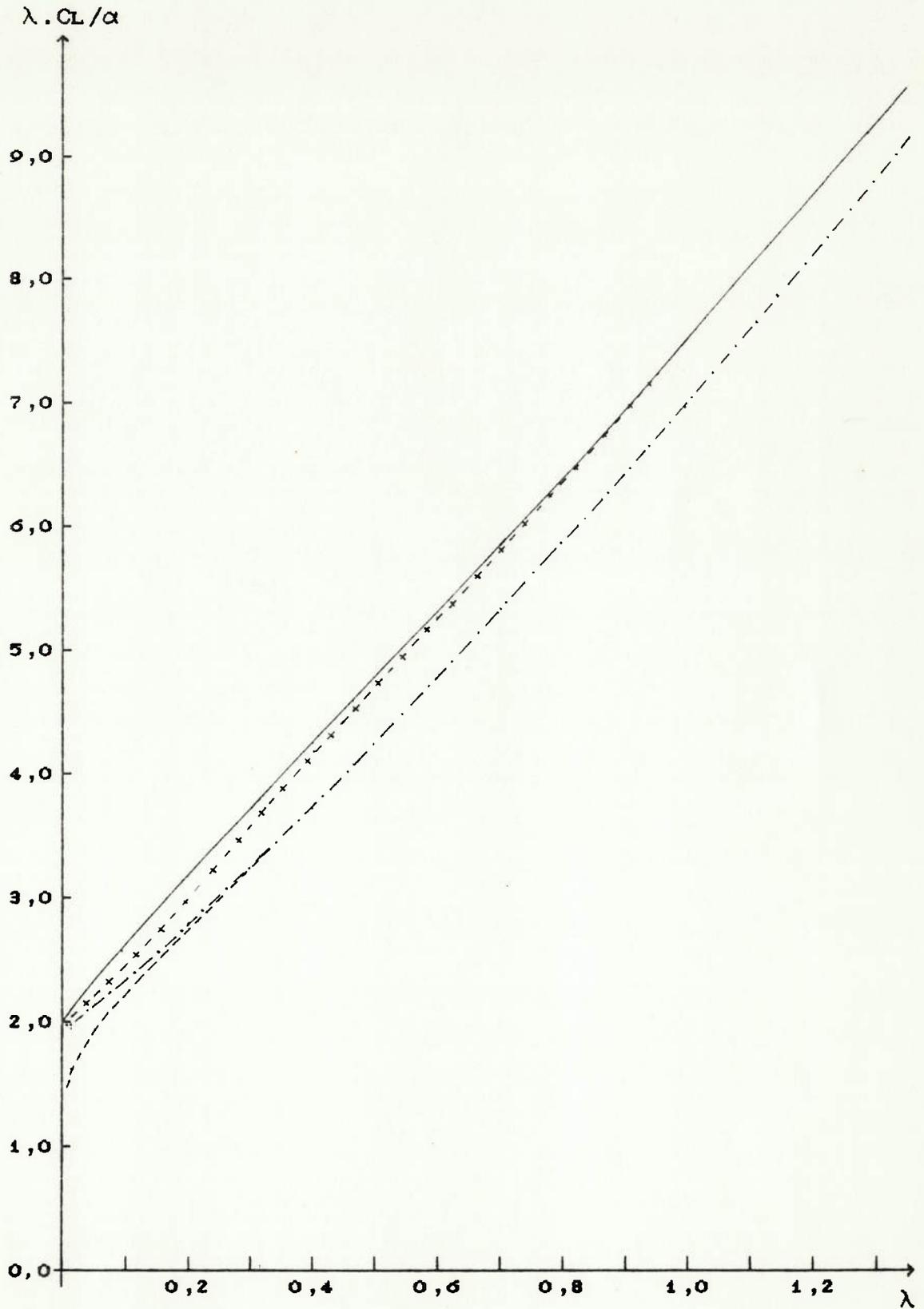
VALOR DE λ	ERRO NA APROX. VAR. (%)		
	PRIMEIRA N=3/2	SEGUNDA N = 3	
12,492	0,08	0,08	0,00
4,975	0,489	0,491	0,00
2,4509	1,8	1,832	0,00
1,59477	3,62	3,62	0,02
1,1569	5,58	5,59	0,02
1,0	5,24	6,24	0,33
0,8	7,65	7,65	0,40
0,7035	9,138	9,148	0,39
0,6	10,37	10,39	0,9
0,4654	11,4	11,46	1,32
0,4	11,86	11,97	1,84
0,3164	12,37	12,61	2,98
0,2	11,39	12,32	4,5
0,1	10,13	14,00	7,11
0,09	9,71	14,26	7,04
0,05	8,14	17,08	6,2
0,01	4,33	21,59	0,77

O erro da aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$, dado em porcentagem na tabela 3, foi calculado de acordo com a expressão:

$$\text{Erro}(\lambda) = \frac{|\lambda \cdot CL/\alpha^A - \lambda \cdot CL/\alpha^*|}{A} \cdot 100 \quad (\%) \quad (4.6)$$

onde $A = \max. \{\lambda \cdot CL/\alpha^A \text{ e } \lambda \cdot CL/\alpha^*\}$. $\lambda \cdot CL/\alpha^A$ e $\lambda \cdot CL/\alpha^*$ são, respectivamente, a aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$ avaliada numericamente e o valor de $\lambda \cdot CL/\alpha$ fornecido pelas referências.

Além da tabela 3, será apresentado um gráfico para ilustrar as aproximações variacionais de $\lambda \cdot CL/\alpha$ face aos valores apresentados pela literatura em função de λ . Neste gráfico, ilustrado pela figura 4.1, o parâmetro λ ficará restrito à faixa $0 < \lambda < 1,5$. No gráfico em questão, serão apresentadas a curva para $\lambda \cdot CL/\alpha$ fornecida pelas referências, uma curva relativa a segunda aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$ e duas curvas representando a primeira aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$. Para a primeira aproximação variacional, a figura 4.1 apresenta uma curva onde $n = 3/2$ e outra onde $n = 3$.



- · - · - primeira aproximação variacional com $n = 3/2$;
 - - - - primeira aproximação variacional com $n = 3$;
 - + - + segunda aproximação variacional;
 ————— referência.

De acordo com a tabela 3 e a figura 4.1, constata-se que a primeira aproximação variacional apresenta um erro considerável face aos resultados fornecidos pela literatura para pequenos valores de λ , não recupera o comportamento assintótico no limite $\lambda \rightarrow 0$ e demonstra uma dependência considerável da potência "n".

A aparente discrepância entre os resultados numéricos e o comportamento assintótico no limite $\lambda \rightarrow 0$ ocorre porque as assíntotas das funções $E1(\lambda)$ e $I2(\lambda)$, utilizadas na primeira aproximação variacional de $\lambda.CL/\alpha$ (veja anexo G), nesse limite são de ordem $O(\lambda.\ln \lambda)$. Termos de ordem $O(\lambda.\ln \lambda)$ predominam sobre termos de ordem $O(\lambda)$ somente para valores de $\lambda < 10^{-5}$ (com $\lambda = 10^{-5}$ constata-se que $\lambda.\ln \lambda \sim O(10^{-4})$). Conseqüentemente, os valores da primeira aproximação variacional obtidos numericamente devem convergir, de maneira geral, para o comportamento assintótico no limite $\lambda \rightarrow 0$, somente para valores de $\lambda < 10^{-5}$, o que explica a aparente não convergência da avaliação numérica da primeira aproximação variacional de $\lambda.CL/\alpha$ para a sua assíntota no limite $\lambda \rightarrow 0$.

A potência "n" influencia consideravelmente a primeira aproximação variacional do parâmetro $\lambda.CL/\alpha$ para pequenos valores de λ ($\lambda < 0,5$), como ilustrado pela figura 4.1. Com a variação da potência "n", observa-se uma melhor ou pior

convergência da primeira aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$ para os valores apresentados pela literatura, como mostra a figura 4.2.

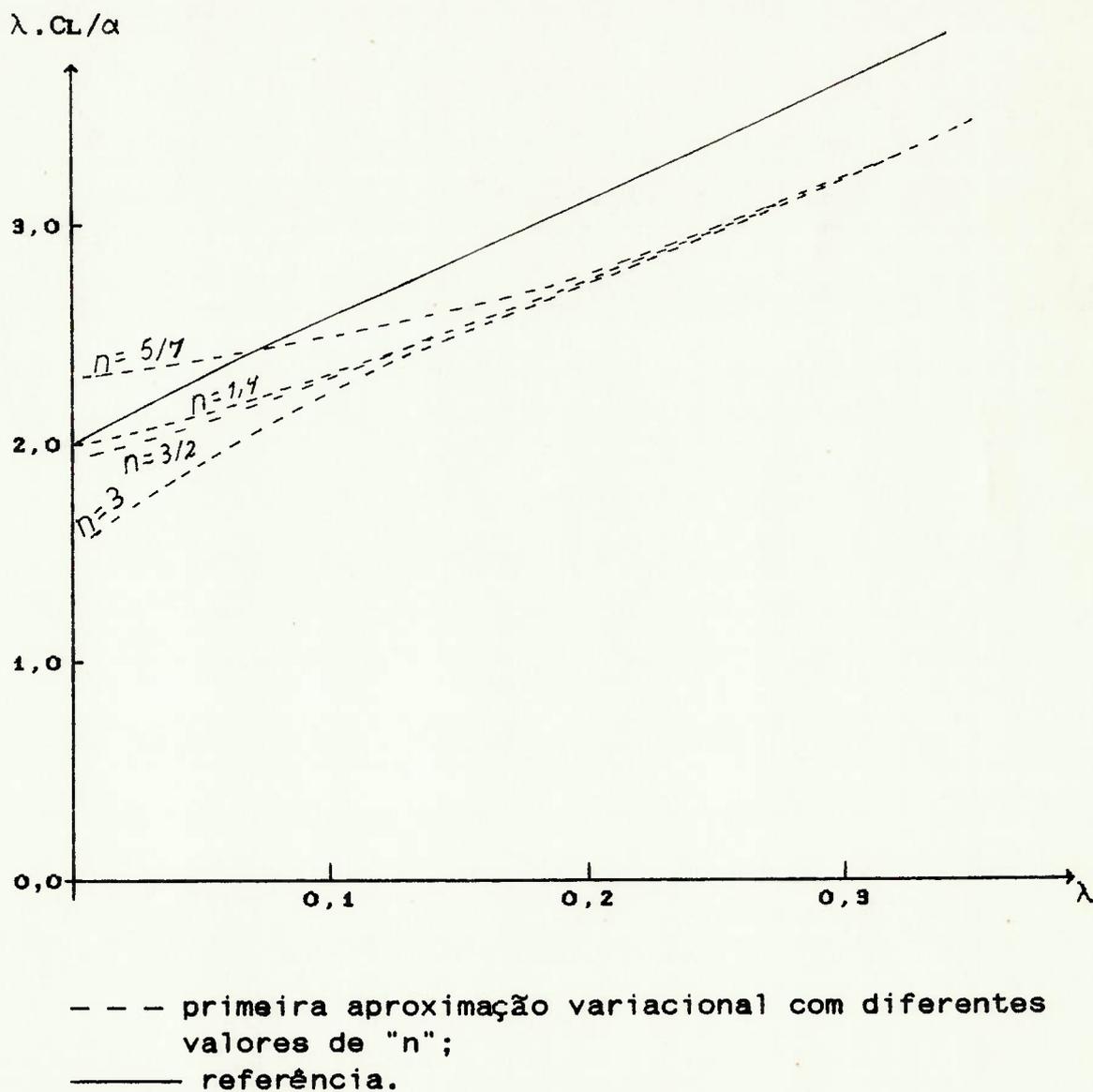


Fig. 4.2 - Estudo do comportamento da aproximação variacional de $\lambda \cdot CL/\alpha$ em função da potência n com $0 < \lambda < 0,4$.

Através da figura 4.2, constata-se que valores da potência "n" próximos de um levam a uma melhor aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$. Este fato motivou fixar em um o valor da potência "n" na segunda aproximação variacional, de modo que, na segunda aproximação variacional, $R^-(x,y) = \chi_1^-(x,y)$.

Os resultados apresentados pela segunda aproximação variacional do parâmetro $\lambda.C_L/\alpha$ foram superiores aos resultados apresentados pela primeira aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$. O erro da segunda aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$, face aos resultados fornecidos pela literatura, foi inferior a 7,0 %, como mostra a tabela 3 e a figura 4.1.

A referência para o parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$ (momento) é TOMOTIKA; IMAI (1937). WIDNALL; BARROWS (1970) não fornece referências para o momento. Para verificar como as referências do parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$ foram obtidos a partir dos resultados fornecidos por TOMOTIKA; IMAI (1937), consulte o apêndice A.

A tabela 4 apresenta os valores da avaliação numérica da primeira e da segunda aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ e os valores de $\lambda.C_M/\alpha$ fornecido pela referência. Como a primeira e a segunda aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ (momento) são idênticas (veja o anexo G), a aproximação

variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ será representada por uma única coluna na tabela 4.

A seguir, será descrita a tabela 4. A primeira coluna da tabela 4, da esquerda para a direita, apresenta os valores do parâmetro λ em função dos quais a aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ foi obtida. Os valores de λ , mostrados na tabela 4, são, basicamente, os mesmo utilizados na tabela 3. A segunda coluna mostra os valores da aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ avaliada numericamente em função dos valores do parâmetro λ mostrados na primeira coluna. A terceira coluna traz os valores de $\lambda.C_M/\alpha$ fornecidos pela referência. Os espaços em branco na terceira coluna ocorrem porque a referência não fornece os valores de $\lambda.C_M/\alpha$ para esses correspondentes valores de λ . Finalmente, a quarta coluna fornece o erro em porcentagem da aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ face aos resultados fornecidos pela referência. A aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ foi avaliada numericamente para pequenos valores de λ no intuito de mostrar a convergência da aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ para o comportamento assintótico no limite $\lambda \rightarrow 0$ (veja 4.2- b).

tabela 4 - Comportamento da aproximação variacional de $\lambda.CM/\alpha$ face à referência e assíntotas.

VALOR DE λ	PARÂMETRO $\lambda.CM/\alpha$		
	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA APROX. VAR.	TOMOTIKA & IMAI	ERRO DA APROX. VAR.(%)
12,492	19,638	19,6382	0,0072
4,975	7,85377	7,8533	0,0051
2,4509	3,9269	3,9268	0,0025
1,5947	2,61789	2,61804	0,006
1,1562	1,9631	1,9628	0,0203
1,0	1,7328		
0,8	1,444		
0,70348	1,3068	1,3072	0,027
0,6	1,1616		
0,4654	0,9754	0,9772	0,1872
0,4	0,8859		
0,3164	0,7718	0,7764	0,586
0,2	0,6117		
0,1	0,4689		
0,09	0,4542		
0,07	0,4246		
0,05	0,3952		
0,03	0,3666		
0,01	0,3416		
0,005	0,3367		
0,001	0,3338		
0,0005	0,3335		
0,0001	0,3334		

O erro da aproximação variacional de $\lambda.CM/\alpha$, dado em porcentagem na tabela 4, foi avaliado de maneira análoga ao erro da aproximação variacional do parâmetro $\lambda.CL/\alpha$.

Além da tabela 4, será apresentado um gráfico, ilustrado pela figura 4.3, mostrando a variação do

parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$ em termos de λ . A figura 4.3 apresenta três curvas com $0 < \lambda < 1,5$. A primeira curva representa a avaliação numérica da aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$. A segunda representa os valores de $\lambda.C_M/\alpha$ fornecidos pela referência. A terceira curva representa a assíntota de $\lambda.C_M/\alpha$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$, expressa por (4.4- b). O problema placa plana com "efeito solo" no limite $\lambda \rightarrow \infty$ é equivalente ao problema placa plana em domínio fluido sem fronteiras. Essa terceira curva, em comparação com as outras, permite ilustrar a faixa de influência do "efeito solo".

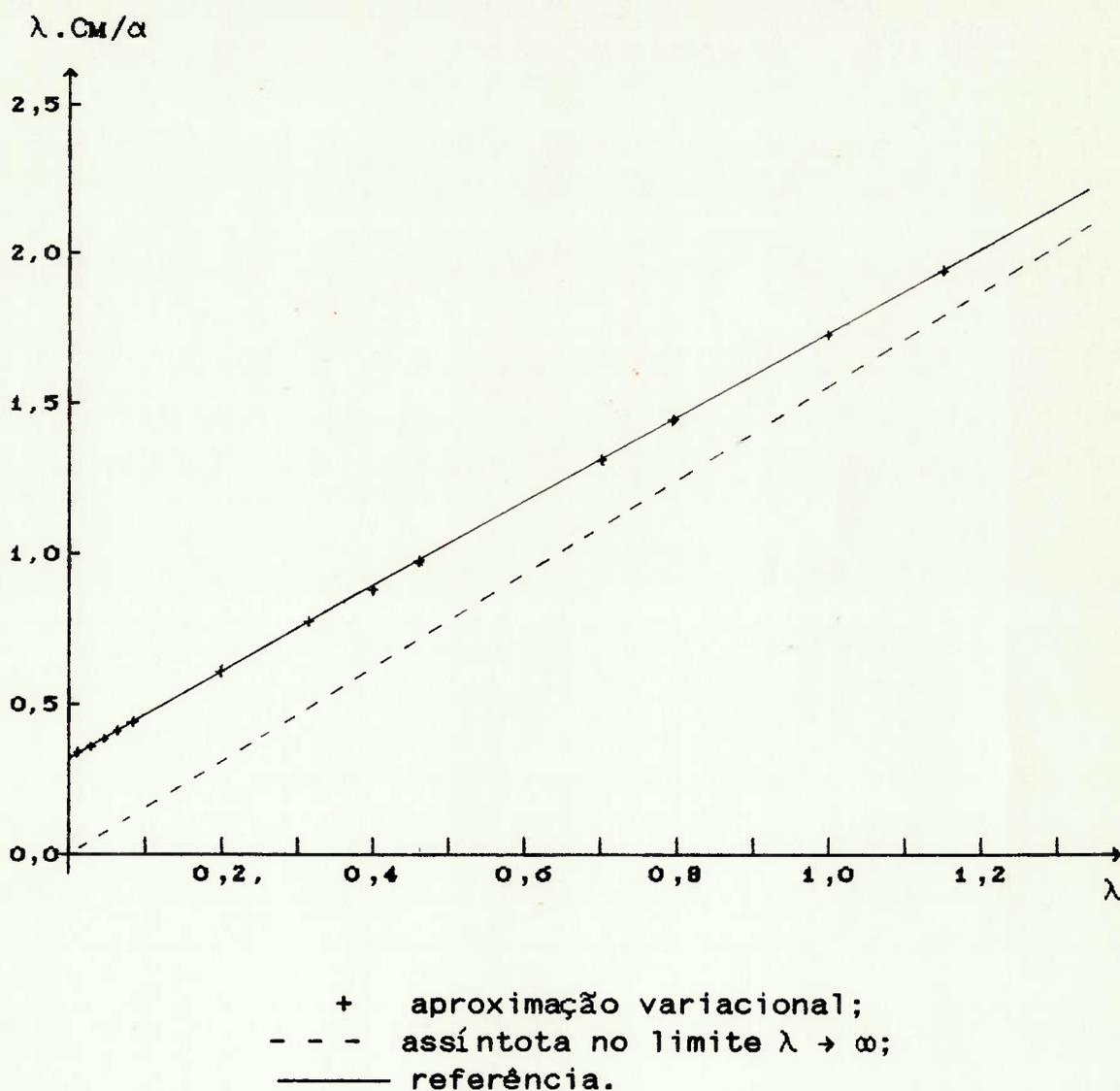


Fig. 4.3 - Parâmetro $\lambda.CM/\alpha$ versus parâmetro λ
 com $0 < \lambda < 1,5$.

De acordo com a tabela 4, constata-se que o erro da aproximação variacional do parâmetro $\lambda.CM/\alpha$ face aos resultados apresentados pela referência, foi inferior a 0.6%. Constata-se, também, que os valores numéricos tendem a convergir para os valores assintóticos no limite $\lambda \rightarrow 0$.

Comparando-se a assíntota de $\lambda.C_M/\alpha$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$, dada por (4.4- b), com os valores da tabela 4, constata-se que os valores numéricos também convergem para a assíntota no limite $\lambda \rightarrow \infty$. Em termos práticos, a aproximação variacional de $\lambda.C_M/\alpha$ mostrou-se adequada, pois apresenta um erro inferior a 0,6% para toda faixa de variação do parâmetro λ .

Para o parâmetro b/c , a principal referência ainda é o trabalho de TOMOTIKA; IMAI (1937). A tabela 5 apresenta a referência para b/c , os valores obtidos através da avaliação numérica da primeira e da segunda aproximação variacional de b/c e o erro de ambas aproximações variacionais de b/c face aos valores fornecidos pela referência. A primeira aproximação variacional de b/c foi avaliada numericamente para dois valores da potência "n", como mostram a segunda e terceira coluna da tabela 5. Os valores apresentados na tabela 5 apresentam sinal negativo, o que significa que a linha de ação da força de sustentação está entre o ponto médio do fólio e o bordo de fuga.

A tabela 5 será estruturada da maneira descrita a seguir: Na primeira coluna constam os valores do parâmetro λ utilizados na avaliação numérica das aproximações variacionais de b/c . A segunda e terceira colunas apresentam a avaliação numérica da primeira aproximação variacional, respectivamente, para $n = 3/2$ e $n = 3$. A

quarta coluna apresenta a avaliação numérica da segunda aproximação variacional de b/c . A quinta coluna apresenta os valores fornecidos pela referência. Os espaços em branco na quinta coluna decorrem do fato da referência não fornecer valor de b/c para esses valores do parâmetro λ . Finalmente, nas últimas três colunas o erro das aproximações variacionais, face aos resultados da literatura, será apresentado.

tabela 5 - Comportamento da aproximação variacional
do parâmetro b/c face à referência.

VALOR DE λ	PARÂMETRO b/c			
	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA			TOMOTIKA & IMAI
	PRIMEIRA APROX. VAR. N = 3/2 N = 3		SEGUNDA APROX. VAR.	
12,492	-0,24999	-0,24999	-0,24999	-0.25
4.975	-0.24998	-0.24998	-0,24877	-0.2498
2.4509	-0.24985	-0.24985	-0,24537	-0.24875
1.5947	-0.24947	-0.24947	-0,24046	-0.24045
1.1569	-0.24869	-0.24869	-0,24046	-0.23475
1.0	-0.24807	-0.24808	-0,23485	
0.8	-0.24664	-0.24665	-0,23182	
0.7034	-0.24547	-0.2455	-0,22389	-0.2231
0.6	-0.24361	-0.24367	-0,22035	
0.4654	-0.23957	-0.23974	-0,21513	-0.21265
0.4	-0.23651	-0.23681	-0,21236	
0.3164	-0.23090	-0.23154	-0,20857	-0.20355
0.2	-0.21776	-0.22008	-0,20208	
0,1	-0,19763	-0,20652	-0,19122	

VALOR DE λ	PARÂMETRO b/c		
	ERRO NA APROX. VAR. (%)		
	PRIMEIRA N = 3/2 N = 3		SEGUNDA
12,492	0,00	0,00	0,00
4.975	0.072	0.072	0,4
2.4509	0.44	0.44	1,3
1.5947	3.615	3.615	0,004
1.1569	5.605	5.605	0,004
1.0			
0.8			
0.7034	9.113	9.124	0,354
0.6			
0.4654	11.23	11.3	1,166
0.4			
0.3164	11.84	12.08	2,466
0.2			
0.1			

O erro da aproximação variacional de b/c , dado em porcentagem na tabela 5, foi avaliado de maneira análoga ao erro da aproximação variacional do parâmetro $\lambda.CL/\alpha$.

A partir da tabela 5, o erro apresentado pela aproximação variacional de b/c , face aos resultados fornecidos pela literatura, comporta-se de maneira semelhante ao erro observado na aproximação variacional de $\lambda.CL/\alpha$. Isso ocorre porque o parâmetro b/c também depende da circulação adimensional.

No próximo capítulo, fatores que levaram aos resultados aqui apresentados, serão apontados e discutidos.

* * *

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS.

De acordo com os resultados apresentados no capítulo 4, os objetivos deste trabalho foram satisfatoriamente alcançados.

A aproximação variacional para o momento (parâmetro $\lambda \cdot C_M/\alpha$) apresentou um erro inferior a 0,6 % para toda faixa de variação do parâmetro λ (veja tabela 4), muito bom em termos práticos. A segunda aproximação variacional da força de sustentação (parâmetro $\lambda \cdot C_L/\alpha$) apresentou um erro máximo em torno de 7,0 %, inferior ao erro máximo da primeira aproximação variacional, que ficou em torno de 12,5 % (veja tabela 3). Apesar da segunda aproximação variacional da força de sustentação apresentar resultados superiores em relação aos resultados da primeira aproximação variacional, um erro máximo em torno de 7,0 % ainda é um erro considerável em termos práticos. Por outro lado, para valores de $\lambda > 0,5$ o erro é inferior a 1,0 %. Então, a segunda aproximação variacional da força de sustentação oferece bons resultados, quando o efeito solo não é muito intenso. Portanto, a segunda aproximação variacional atingiu seu objetivo, a não ser quando $\lambda < 0,5$.

De acordo com os resultados apresentados no capítulo 4 e resumidos na introdução deste capítulo, a aproximação variacional do momento foi mais eficiente que a aproximação variacional da força de sustentação. O objetivo deste capítulo é levantar os fatos que levaram a essa diferença de qualidade entre a aproximação variacional da força de sustentação e a aproximação variacional do momento.

A aproximação variacional do momento depende, basicamente, da aproximação variacional do valor Λ_{00}^{\pm} (veja anexo G, expressão (G.26)), e as duas aproximações variacionais da circulação adimensional (força de sustentação) dependem, basicamente, da aproximação variacional dos valores Λ_{01}^{\pm} (veja (G.25- b) e (G.33)). Conseqüentemente, discutir os fatos que levaram a uma diferença de qualidade entre a aproximação variacional do momento e a aproximação variacional da força de sustentação implica em discutir o porquê da diferença de qualidade entre a aproximação de Λ_{01}^{\pm} e a aproximação de Λ_{00}^{\pm} . As razões que justificam a diferença apontada serão levantadas a seguir.

O valor Λ_{ij}^{\pm} e sua aproximação Λ_{ij}^{\pm} estão relacionados através de:

$$\Lambda_{ij}^{\pm} = \Lambda_{ij}^{\pm} + G(\delta\phi_{\bullet, i}^{\pm}; \delta\phi_{\bullet, j}^{\pm}) \quad (3.59)$$

onde $\delta\phi_{e,i}^+$ e $\delta\phi_{e,j}^+$ são definidos por (3.56). Portanto, entre Λ_{00}^+ e $\Lambda_{00}^{\wedge+}$ existe a seguinte relação:

$$\Lambda_{00}^+ = \Lambda_{00}^{\wedge+} + G(\delta\phi_{e,0}^+; \delta\phi_{e,0}^+) \quad (i)$$

O funcional $G(\phi; \psi)$ em $H_2^1(S^+)$ satisfaz as propriedades de produto interno, de modo que $G(\delta\phi_{e,0}^+; \delta\phi_{e,0}^+) > 0$, a não ser que $\delta\phi_{e,0}^+$ seja a função nula em $H_2^1(S^+)$. Então, através de (i) conclui-se que:

$$\Lambda_{00}^+ > \Lambda_{00}^{\wedge+} > 0 \quad (5.1)$$

De acordo com (5.1), o valor Λ_{00}^+ é sempre positivo e aproximado por falta por sua aproximação $\Lambda_{00}^{\wedge+}$. Isto ocorre por que o funcional F_{00}^+ atinge um valor mínimo no par $(\phi_{e,0}^+; \phi_{e,0}^+)$, ou seja, o valor Λ_{00}^+ , além de ser valor estacionário, é valor mínimo do funcional F_{00}^+ em $H_2^1(S^+)$.

A expressão (i) possibilita ainda a seguinte identidade:

$$\Lambda_{00}^+ - \Lambda_{00}^{\wedge+} = (\|\phi_{e,0}^+ - \phi_{e,0}^{\wedge+}\|_G)^2 \quad (5.2)$$

De acordo com (5.2), se $\phi_{e,0}^+$ for aproximado na norma $\|\cdot\|_G$ com um erro de ordem $O(\delta)$ por $\phi_{e,0}^{\wedge+}$, o valor Λ_{00}^+ será aproximado por $\Lambda_{00}^{\wedge+}$ com um erro de ordem $O(\delta^2)$. Em outras palavras, uma aproximação razoável para $\phi_{e,0}^+$ leva a uma

ótima aproximação para o valor Λ_{00}^+ (por exemplo, se $\delta \sim 10$ %, o erro na aproximação de Λ_{00}^+ será ~ 1 %).

Com relação aos valores Λ_{01}^\pm , a expressão (3.59) fornece uma relação entre o valor Λ_{01}^\pm e sua aproximação, dada por:

$$\Lambda_{01}^\pm = \Lambda_{01}^{\Lambda \pm} + G(\delta\phi_{e,0}^\pm; \delta\phi_{e,1}^\pm) \quad (ii)$$

Como o funcional $G(\phi; \psi)$ satisfaz as propriedades do produto interno em $H_{e,2}^1(S^+)$, o valor $G(\delta\phi_{e,0}^\pm; \delta\phi_{e,1}^\pm)$ pode ser positivo, negativo ou mesmo nulo. $G(\delta\phi_{e,0}^\pm; \delta\phi_{e,1}^\pm)$ será nulo somente se $\delta\phi_{e,1}^\pm$ for ortogonal a $\delta\phi_{e,0}^\pm$ ou se $\delta\phi_{e,1}^\pm$ ou $\delta\phi_{e,0}^\pm$ for nulo. Então, de acordo com (ii) não podemos afirmar se $\Lambda_{01}^{\Lambda \pm}$ aproxima Λ_{01}^\pm por falta ou por excesso, ou melhor, não podemos afirmar como é a convergência das aproximações $\Lambda_{01}^{\Lambda \pm}$ para o valor Λ_{01}^\pm . Isto ocorre por que o funcional $F_{01}^\pm = F_{10}^\pm$ não atinge um valor mínimo ou máximo no par $(\phi_{e,0}^\pm; \phi_{e,1}^\pm)$, ou seja, o valor $\Lambda_{01}^\pm = \Lambda_{10}^\pm$ é somente valor estacionário, não é valor mínimo nem máximo do funcional $F_{01}^\pm = F_{10}^\pm$ em $H_{e,2}^1(S^+)$. A desigualdade (3.60) nos permite afirmar que:

$$|\Lambda_{01}^\pm - \Lambda_{01}^{\Lambda \pm}| \leq \|\delta\phi_{e,0}^\pm\|_G \cdot \|\delta\phi_{e,1}^\pm\|_G \quad (iii)$$

Lembrando-se (3.56), a desigualdade (iii) pode ser

reescrita como:

$$|\Lambda_{01}^{\pm} - \Lambda_{01}^{\Delta \pm}| \leq \|\phi_{e,0}^{\pm} - \phi_{e,0}^{\Delta \pm}\|_G \cdot \|\phi_{e,1}^{\pm} - \phi_{e,1}^{\Delta \pm}\|_G \quad (5.4)$$

A expressão (5.4) garante a convergência das aproximações $\Lambda_{01}^{\Delta \pm}$ para Λ_{01}^{\pm} em termos da convergência de $\phi_{e,j}^{\Delta \pm}$ para $\phi_{e,j}^{\pm}$ na norma $\|\cdot\|_G$. Algumas conclusões com relação à convergência de $\Lambda_{01}^{\Delta \pm}$ para Λ_{01}^{\pm} , em função das aproximações $\phi_{e,j}^{\Delta \pm}$, podem ser obtidas a partir de (5.4).

Em primeiro lugar, caso $\phi_{e,0}^{\Delta \pm}$ (ou $\phi_{e,1}^{\Delta \pm}$) convirja para $\phi_{e,0}^{\pm}$ (ou $\phi_{e,1}^{\pm}$) na norma $\|\cdot\|_G$ independente de $\phi_{e,1}^{\Delta \pm}$ (ou $\phi_{e,0}^{\Delta \pm}$) convergir ou não para $\phi_{e,1}^{\pm}$ (ou $\phi_{e,0}^{\pm}$) na norma $\|\cdot\|_G$, o valor $\Lambda_{01}^{\Delta \pm}$ coincide com Λ_{01}^{\pm} de acordo com (5.4). Este fato justifica o sucesso apresentado pela primeira aproximação variacional nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$. Nestes limites, a aproximação $\phi_{e,0}^{\Delta \pm}$ converge na norma $\|\cdot\|_G$ para $\phi_{e,0}^{\pm}$ e, portanto, de acordo com (5.4), a aproximação $\Lambda_{01}^{\Delta \pm}$ coincide com o valor Λ_{01}^{\pm} , independente do fato das aproximações $\phi_{e,1}^{\Delta \pm}$ convergirem ou não para as funções $\phi_{e,1}^{\pm}$ na norma $\|\cdot\|_G$. Isto ocorre por que as funções-teste utilizadas na primeira aproximação são construídas a partir da solução do problema placa plana com "efeito solo" nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ (veja item 3.10.1 e 3.10.2).

Em segundo lugar, não basta somente que $\phi_{e,0}^{\Delta \pm}$ ou $\phi_{e,1}^{\Delta \pm}$

seja bem aproximado, necessita-se que ambas funções $\phi_{e,0}^{\pm}$ e $\phi_{e,1}^{\pm}$ estejam bem aproximadas para que Λ_{01}^{\pm} seja uma boa aproximação para Λ_{01}^{\pm} . Isto faz com que a convergência de Λ_{01}^{\pm} para Λ_{01}^{\pm} seja mais lenta que a convergência de Λ_{00}^{\pm} para Λ_{00}^{\pm} (Compare (5.4) com (5.2)).

A necessidade de que ambas funções $\phi_{e,0}^{\pm}$ e $\phi_{e,1}^{\pm}$ estejam bem aproximadas, para que Λ_{01}^{\pm} seja bem aproximado, justifica a diferença entre o erro da primeira aproximação variacional do momento e o erro da primeira aproximação variacional da circulação adimensional (força de sustentação). Na primeira aproximação variacional preocupou-se em construir uma boa aproximação para os potenciais $\phi_{e,0}^{\pm}$, ou seja, utilizou-se funções-teste que modelassem aspectos físicos do problema par e ímpar. Conseqüentemente, os valores Λ_{00}^{\pm} foram bem aproximados (erro inferior a 0,6 % para Λ_{00}^{\pm} , veja (G.27)), mas os valores Λ_{01}^{\pm} não, pois a primeira aproximação variacional não modela de forma adequada os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$, ocasionando um erro considerável na aproximação dos valores Λ_{01}^{\pm} de acordo com (5.4). A segunda aproximação variacional foi construída, justamente, com o propósito de corrigir a deficiência da primeira aproximação variacional, ou seja, acrescentou-se uma função-teste (função $\chi_{e,1}^{\pm}$) que modele o

potencial $\phi_{e,1}^+$ e outra (função $\chi_{e,3}^-$) que modele o potencial $\phi_{e,1}^-$.

A segunda aproximação variacional, que fornece uma boa representação para os potenciais $\phi_{e,0}^\pm$ e $\phi_{e,1}^\pm$, atingiu, satisfatoriamente, seu objetivo, pois reduziu o erro da aproximação variacional de $\lambda.C_L/\alpha$ de 12,5 % para no máximo 7,0 %. Este resultado não foi tão bom como o resultado obtido para o momento, mas mostra a necessidade de representar adequadamente ambos os potenciais $\phi_{e,0}^\pm$ e $\phi_{e,1}^\pm$ para que os valores $\Lambda\omega_1^\pm$ e, portanto, a circulação, sejam bem aproximados.

Os potenciais $\phi_{e,1}^\pm$ são soluções de um problema de contorno auxiliar, decorrente do uso das funções $q^\pm(x,y)$ para explicitar a dependência dos potenciais ϕ^\pm em relação aos coeficientes $T_0(\phi^\pm)$ (veja item 3.4 para um melhor esclarecimento). Os potenciais $\phi_{e,1}^\pm$ não representam nenhum aspecto físico do problema em questão. Na realidade, estes potenciais são uma particularidade do método numérico desenvolvido neste trabalho. De acordo com o item 3.10, o comportamento dos potenciais $\phi_{e,1}^\pm$ ao longo de ∂S^\pm depende das funções $q^\pm(x,y)$. O aspecto fundamental de $\phi_{e,1}^\pm$ é o seu comportamento ao longo de C_T . Este aspecto determinou como as funções $\chi_{e,3}^\pm$ deveriam ser para modelar os potenciais

$\phi_{e,1}^{\pm}$.

Ao invés de serem utilizadas mais duas funções-teste (funções $\chi_{e,s}^{\pm}$), as funções $q^{\pm}(x,y)$ poderiam ser alteradas de modo que a primeira aproximação variacional (construída com as funções $\chi_{e,1}^{\pm}$ e $\chi_{e,2}^{\pm}$) seja adequada para modelar os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$, ou seja, seria adotada outra função par $q^{+}(x,y)$ (ímpar $q^{-}(x,y)$) pertencente a $H_2^1(S^+)$ que satisfizesse (3.30), (3.10- c), (3.10- d) e se comportasse como $\chi_{e,2}^{+}$ ou como $\chi_{e,1}^{+}$ ($\chi_{e,2}^{-}$ ou como $\chi_{e,1}^{-}$) em Ω . Com $q^{\pm}(x,y)$ definido dessa maneira, a combinação linear formada pelas funções $\chi_{e,1}^{\pm}$ e $\chi_{e,2}^{\pm}$ pode aproximar $\phi_{e,1}^{\pm}$ adequadamente. Se a nova q^{\pm} for de mesma ordem que $\chi_{e,1}^{\pm}$ ou $\chi_{e,2}^{\pm}$ em Ω , (3.30) não é satisfeita ($To(\chi_{e,1}) \sim O(a^{3/2})$ e $To(\chi_{e,2}^{\pm}) \sim O(a)$). Para que (3.30) seja satisfeita, a função $q^{\pm}(x,y)$ deve ser de ordem $O(a^{-1/2})$, o que não é possível utilizando-se funções que se comportem como $\chi_{e,1}^{\pm}$ ou como $\chi_{e,2}^{\pm}$ em Ω . Portanto, esta alternativa mostra-se inadequada.

Para melhorar a aproximação dos valores λ_{01}^{\pm} , será necessário adicionar mais alguma função-teste à base de $H_{0A}(S^+)$. Como as funções-teste devem modelar aspectos dos potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$, uma adicional função-teste poderia ser construída a partir de um par de vórtices, cada um

localizado em um dos bordos do fólho, mais a respectiva imagem em relação ao eixo x . Esta função modela o comportamento do problema par quando $\lambda < O(1)$, justamente a faixa de valores de λ onde a segunda aproximação variacional de $\lambda.CL/\alpha$ apresenta um erro em torno de 7,0 %. A aproximação com essa adicional função-teste não foi levada a cabo, pois forneceria expressões bastante complexas para a força de sustentação, fugindo do objetivo de obter expressões simples para as forças generalizadas.

5.1.SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.

Algumas sugestões para futuros trabalhos, envolvendo o tema aqui abordado, são enunciadas. Estas sugestões foram baseadas em parte nas conclusões alcançadas durante a discussão dos resultados apresentados no capítulo 4.

Construir um programa, baseado no enfoque variacional utilizado neste trabalho, que possibilite o uso de uma gama variada de funções-teste e a análise hidrodinâmica de fólhos bidimensionais de diversas geometrias.

Utilizar o presente enfoque variacional para determinar as forças generalizadas atuantes em um hidrofólho bidimensional em função da distância deste à

superfície livre. As funções-teste para este problema seriam construídas a partir das funções utilizadas no problema placa plana com "efeito solo" com o operador $1 + \frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial y}$, onde $K_0 = g/U^2$ (K_0 é o número da onda gerada pelo hidrofólio).

Aplicar o presente enfoque variacional em problemas tridimensionais com presença de circulação, ou seja, formular a condição de Kutta para geometrias tridimensionais de modo que seja possível escrever a circulação em termos de valores estacionários de funcionais bem definidos.

No próximo capítulo, os objetivos deste trabalho serão revisitados, comparados com os resultados alcançados, e as principais conclusões serão tecidas.

* * *

6. CONCLUSÕES.

O presente trabalho tem como objetivo principal obter de maneira direta as forças generalizadas, em especial a força de sustentação, atuantes em um fólio bidimensional sem espessura com "efeito solo" a partir de um enfoque variacional. Em segundo plano, deseja-se obter expressões analíticas simples para as forças generalizadas.

O objetivo principal foi alcançado. A primeira aproximação variacional do momento coincide com os resultados fornecidos pelas referências (erro inferior a 0,6 %) e a segunda aproximação variacional da força de sustentação forneceu bons resultados face aos valores apresentados pela literatura (erro inferior a 1,0 % quando $\lambda > 0,5$ e erro máximo em torno de 7,0 % quando $\lambda < 0,5$).

O momento foi adequadamente aproximado utilizando-se apenas duas funções-teste na modelagem dos problemas par e ímpar. A força de sustentação, por sua vez, foi razoavelmente estimada pela segunda aproximação variacional, onde utilizaram-se duas funções-teste para modelar o problema ímpar e três funções-teste para modelar o problema par. Então, um número reduzido de funções-teste

é suficiente para obter uma boa aproximação das forças generalizadas, fato que ilustra o poder do método variacional desenvolvido neste trabalho.

Um ponto importante a ser notado, reside no fato de que a novidade deste trabalho consiste em mostrar que a circulação (força de sustentação) pode ser obtida de maneira direta via um método variacional. Este objetivo foi efetivamente atingido através da segunda aproximação variacional, como ilustrado pelos resultados apresentados no capítulo 4.

A primeira aproximação variacional do momento é dada por uma expressão simples das funções $E_1(\lambda)$ e $E_2(\lambda)$ (veja anexo G, expressões (G.19) e (G.27)). Estas funções podem ser aproximadas por polinômios em λ de acordo com procedimento descrito no anexo I. A aproximação polinomial das funções $E_1(\lambda)$ e $E_2(\lambda)$ converge para os valores obtidos através da avaliação numérica destas funções. Como consequência, uma aproximação polinomial do momento, obtida a partir de (G.18), (G.26) e da aproximação polinomial das funções $E_1(\lambda)$ e $E_2(\lambda)$, converge para os valores fornecidos pela avaliação numérica, ou seja, converge com um erro máximo de 0,6 % para os valores apresentados pela literatura. Portanto, é possível construir-se uma expressão

analítica simples (aproximação polinomial) para o momento.

A segunda aproximação variacional da força de sustentação apresenta bons resultados face à literatura e é expressa em termos das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$. Estas funções podem ser aproximadas por polinômios em λ de acordo com procedimento descrito no anexo I, fornecendo, portanto, uma aproximação polinomial para a força de sustentação que apresente erro idêntico ao observado na avaliação numérica. Apesar dos bons resultados desta aproximação polinomial para a força de sustentação, ela é uma expressão complexa do parâmetro λ . Devido a este fato, a expressão polinomial para a força de sustentação, obtida a partir das aproximações polinomiais das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ e de (G.28), (G.31) e (G.33), não é muito atraente em termos práticos. Então, o objetivo secundário deste trabalho foi parcialmente atingido: uma expressão polinomial simples pode ser construída para o momento.

* * *