

KARL PETER BURR

MÉTODO VARIACIONAL APLICADO À TEORIA DE FÓLIOS:
ESTUDO DO EFEITO SOLO

v. 2

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO
1993

KARL PETER BURR

**MÉTODO VARIACIONAL APLICADO À TEORIA DE FÓLIOS:
ESTUDO DO EFEITO SOLO**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

Area de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha

**VOLUME II
ANEXOS e Apêndice A**

**SÃO PAULO
1993**



SUMÁRIO

Lista de figuras

Lista de símbolos

Resumo

"Abstract"

1. INTRODUÇÃO 1

2. ENFOQUE VARIACIONAL 7

3. MÉTODO VARIACIONAL APLICADO A UMA PLACA PLANA
 BIDIMENSIONAL COM "EFEITO SOLO" 22

3.1. FORMULAÇÃO FORTE 27

3.2. FORÇAS GENERALIZADAS 38

3.3. FORMULAÇÃO FRACA 42

3.4. EXPRESSÕES PARA OS COEFICIENTES $T_0(\phi^\pm)$ EM TERMOS DE
 FUNCIONAIS BEM DEFINIDOS 48

3.5. EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS EM TERMOS DOS
 VALORES A_{ij}^\pm 56

3.6. FUNCIONAL $F_{ij}^\pm(\phi; \psi)$ 58

3.7. ENFOQUE VARIACIONAL 60

3.8. MÉTODO VARIACIONAL DE RITZ APLICADO AO FUNCIONAL F_{ij}^\pm .
 65

3.9. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES $R^-(x, y)$ E $q^\pm(x, y)$ 67

3.9.1. FUNÇÃO AUXILIAR $R^-(x, y)$ 68

3.9.2. FUNÇÕES AUXILIARES $q^\pm(x, y)$ 70

3.10.FUNÇÕES TESTES $\chi_{e,n}^{\pm}(x,y)$ PERTENCENTES A $H_2^1(S^+)$	71
3.10.1.SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$	75
3.10.2.SOLUÇÃO ASSINTÓTICA NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$	83
3.10.3.APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES TESTES A SEREM UTILIZADAS..	
.....	86
3.10.3.1.FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA PAR.....	87
3.10.3.2.FUNÇÕES TESTES PARA O PROBLEMA IMPAR.....	90
3.11.APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS	
.....	94
3.12.ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL NOS	
LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$	97
4.RESULTADOS NUMÉRICOS.....	101
5.ANALISE DOS RESULTADOS.....	121
5.1.SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	129
6.CONCLUSÕES.....	131
ANEXO A - EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS.....	134
ANEXO B.....	143
B.1.INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS EQUAÇÕES FRACAS (3.37)...	
.....	143
B.2.INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS VALORES Λ_{ij}^{\pm}	161
ANEXO C - FUNCIONAL F_{ij}^{\pm} ESTACIONÁRIO NO PAR DE FUNÇÕES	
$(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$	166

ANEXO D - FUNCIONAL $G(\phi;\psi)$ RESTRITO A UMA DETERMINADA CLASSE DE FUNÇÕES.....	168
ANEXO E.....	170
E.1.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $R^-(x,y)$ COMO ARGUMENTO.....	170
E.2.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $q^+(x,y)$ COMO ARGUMENTO.....	175
ANEXO F - AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM FUNÇÕES-TESTE COMO ARGUMENTO.....	181
F.1.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $\chi_{e,n}^+$ COMO ARGUMENTO.....	182
F.2.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $\chi_{e,n}^-$ COMO ARGUMENTO.....	206
F.3.SUMÁRIO DE FUNCIONAIS.....	237
F.3.1.VALORES PARA A PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL.....	238
F.3.2.VALORES PARA A SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL..	239
ANEXO G - APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm .	242
G.1.PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm	244
G.1.SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm	250

ANEXO H - ASSÍNTOTAS DAS APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS DAS FORÇAS GENERALIZADAS NOS LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$	253
H.1. ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$...	258
H.2. ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$...	263
ANEXO I - APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA AS FUNÇÕES $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ E $I_5(\lambda)$	269
I.1. APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $H_j(\lambda)$ COM $\lambda \geq 1$..	273
I.2. APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $H_j(\lambda)$ COM $0 \leq \lambda \leq 1$	274
I.3. CONSTRUÇÃO DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DAS FUNÇÕES $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$ E COMPARAÇÃO COM RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $0 \leq \lambda \leq 1$	279
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	301
APÊNDICE A - REFERÊNCIAS PARA OS COEFICIENTES $\lambda \cdot C_L/\alpha$, $\lambda \cdot C_M/\alpha$ E b/c .	

ANEXO A.

EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS.

Neste anexo, serão obtidas as forças generalizadas atuantes sobre a placa plana com "efeito solo" a partir da integração do campo de pressão, fornecido por (3.12), ao longo do contorno do fólio.

A integração do campo de pressão ao longo do contorno do fólio envolve alguns problemas de ordem técnica. O vetor normal à superfície do fólio bidimensional fica indefinido na região do bordo de fuga e ataque, devido a uma mudança abrupta de curvatura nesta região. Este é, justamente, o fato que acarreta dificuldades na integração do campo de pressão ao longo do contorno do corpo. Para contornar estas dificuldades, tanto o bordo de fuga, como o de ataque, serão isolados em um setor circular de raio "a" (o bordo de fuga já foi isolado em um setor circular S_1 para expressar de modo adequado a condição de Kutta). Então, o contorno, a se considerar na integração dos campos de pressão, será o contorno do fólio fora dos setores circulares mais o contorno dos setores circulares que englobam os bordos do fólio. Uma vez avaliados os integrais do campo de pressão ao longo do novo contorno em termos do raio "a", os valores resultantes serão avaliados no limite raio "a" tendendo a

zero ($a \rightarrow 0$). Como as funções ϕ^+ e ϕ_γ são, respectivamente, par e ímpar em relação à variável x , basta avaliar os integrais do campo de pressão ao longo do contorno que pertence a S^+ . As forças generalizadas terão o dobro dos valores obtidos avaliando-se os integrais do campo de pressão ao longo do contorno que engloba o fólio em S^+ . Este contorno será denotado por ∂B e ilustrado pela figura A.1.

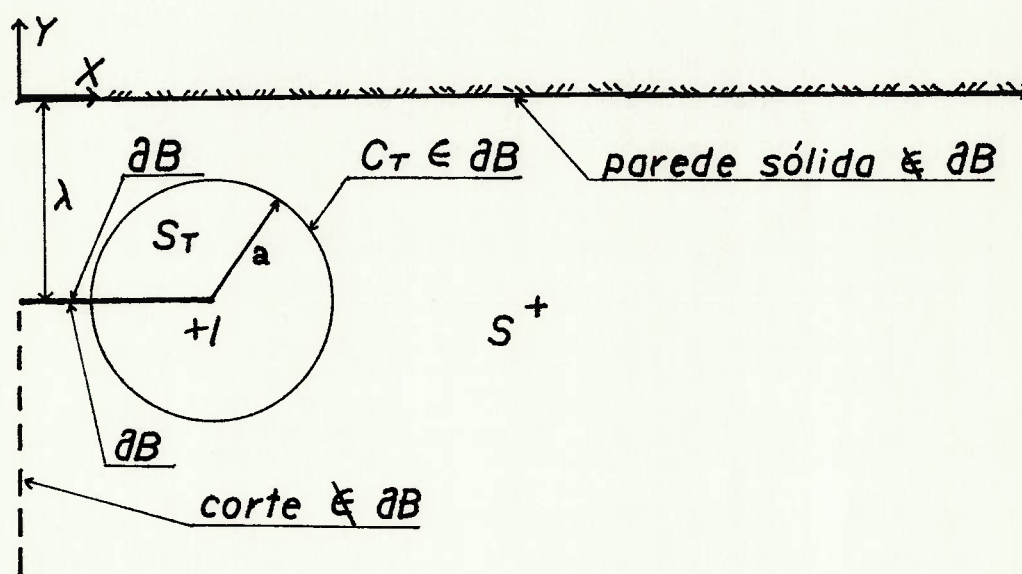


FIG. A.1 - Contorno de integração ∂B ao longo do fólio, restrito à região S^+ .

Multiplicando-se o dobro do integral da pressão adimensional multiplicada pela normal ao contorno ∂B por $\rho \cdot U^2 \cdot (c/2)$, obtém-se a força resultante da ação do fluido sobre o fólio, como mostra a expressão:

$$\vec{R} = \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \int_{\partial B} p(x,y) \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (\text{A.1})$$

O momento resultante da interação entre o corpo e a corrente, é expresso por:

$$\vec{M} = \rho \cdot U^2 \cdot c^2 / 2 \cdot \int_{\partial B} p(x,y) \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \, d\partial B \quad (\text{A.2})$$

onde \vec{n} é o vetor normal ao contorno ∂B e \vec{r} é o vetor posição de um ponto qualquer do contorno ∂B em relação à origem do sistema de coordenadas (x,y) . Substituindo-se (3.12) em (A.1), resulta que \vec{R} é dada por:

$$\vec{R} = - \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \alpha \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \vec{n} \, d\partial B + O(\alpha^2) \quad (\text{A.3})$$

A resultante \vec{R} pode ser desmembrada em duas componentes, uma na direção do eixo x , denotada por \vec{D} (arrasto), e outra na direção do eixo y , denotada por \vec{L} (força de sustentação). Estas componentes são expressas por:

$$\vec{D} = - \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \alpha \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_x \, d\partial B \vec{i} + O(\alpha^2) \quad (\text{A.4- a})$$

e

$$\vec{L} = - \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \alpha \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_y \, d\partial B \vec{j} + O(\alpha^2) \quad (\text{A.4- b})$$

A componente n_x do vetor normal ao longo de ∂B só não

é nula no contorno dos dois setores circulares. Avaliando-se (A.4- a) ao longo do contorno dos dois setores circulares, constata-se que $\vec{D} \sim O(a^{1/2})$, ou seja, vai a zero quando o raio "a" tende a zero. Portanto,

$$\vec{D} = 0 \quad (\text{A.5})$$

A expressão para a força de sustentação será obtida a partir de (A.4- b).

A circulação adimensional do campo de velocidades ao longo de um contorno arbitrário "C", contido no domínio fluido e que engloba o fólio, como ilustrado na figura 3.5, é expressa por:

$$\gamma = \int_C (\nabla\phi \times \vec{n}) \cdot d\vec{C} = \int_C \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot n_y - \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot n_x \right) \cdot d\vec{C} \quad (\text{A.6})$$

Como "C" é um contorno arbitrário, este pode ser transformado no contorno ∂B ao redor do fólio. Então, a circulação adimensional pode ser reescrita como:

$$\gamma = 2 \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\partial B - 2 \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot n_x \cdot d\partial B \quad (\text{A.7})$$

O trecho de ∂B que contribui para o segundo integral de linha em (A.7) é o contorno do setor circular Sr . Em Sr , $\partial\phi/\partial y$ é de ordem $O(a^{-1/2})$, como se constata via (3.7). Como conseqüência, o segundo integral de (A.7) ao longo do

contorno de ST será de $O(a^{1/2})$, ou seja, vai a zero quando o raio "a" tende a zero. Então, a circulação adimensional é dada por:

$$\gamma/2 = \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\partial B + O(a^{1/2}) \quad (\text{A.8})$$

Comparando-se (A.8) com (A.4- b), a força de sustentação \vec{L} é expressa em termos de γ de acordo com a expressão:

$$\vec{L} = \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot (c/2) \cdot \gamma \vec{j} = \rho \cdot U \cdot \Gamma \vec{j} \quad (\text{A.9})$$

onde Γ é a circulação do campo de velocidades ($\Gamma = -U \cdot \alpha \cdot c/2$) no sentido horário.

Substituindo-se (3.12) em (A.2), tem-se:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot (c^2/2) \cdot \alpha \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} (x \cdot n_y - y \cdot n_x) d\partial B \vec{k} + O(\alpha^2) \quad (\text{A.10})$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot (c^2/2) \cdot \left[\int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot x \cdot n_y d\partial B - \int_{\partial B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot y \cdot n_x d\partial B \right] \vec{k} + O(\alpha^2) \quad (\text{A.11})$$

Os integrais na expressão (A.11) serão manipulados no intuito de obter-se uma expressão adequada para o momento. Com este propósito, é considerada a seguinte identidade:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{i})$$

Integrando-se (i) na região S^+ , resulta na identidade:

$$\iint_{S^+} \frac{\partial}{\partial y} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS^+ = \iint_{S^+} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dS^+ - \iint_{S^+} \frac{\partial \phi}{\partial y} dS^+ \quad (ii)$$

Aplicando-se o teorema de Green nos três integrais presentes em (ii), esta identidade pode ser reescrita como:

$$\int_{\partial S^+} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot n_y d\partial S^+ = \int_{\partial S^+} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot n_x d\partial S^+ - \int_{\partial S^+} \phi(x,y) \cdot n_y d\partial S^+ \quad (A.12)$$

Cada um dos três integrais ao longo do contorno de S^+ , ilustrado na figura A.1, será avaliado independentemente e, posteriormente, substituído em (A.12).

O primeiro integral a ser avaliado ao longo do contorno de S^+ , será o integral no lado esquerdo de (A.12).

O resultado da avaliação deste integral é dado por:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^+} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot n_y d\partial S^+ &= \frac{1}{2} \int_{\partial B} \left(x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot n_y d\partial B + x \cdot \phi(x,0) \Big|_0^{-\infty} - \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \phi(x,0) \cdot dx + \lim_{y \rightarrow -\infty} x \cdot \phi(x,y) \Big|_0^{-\infty} - \\ &\quad - \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_0^{+\infty} \phi(x,y) \cdot dx \end{aligned} \quad (A.13)$$

O segundo integral a ser avaliado ao longo do contorno de S^+ , será o primeiro integral do lado direito de (A.12).

O resultado da avaliação deste integral ao longo de ∂S^+ é

dados pela expressão:

$$\int_{\partial S^+} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \cdot n_x \, d\partial S^+ = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \cdot n_x \, d\partial B + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \phi(x, y) \Big|_{-\infty}^0 \quad (\text{A.14})$$

O terceiro integral a ser avaliado ao longo do contorno de S^+ , será o segundo integral do lado direito de (A.12). A expressão final é dada por:

$$\int_{\partial S^+} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial S^+ = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial B + \int_0^{+\infty} \phi(x, 0) \cdot dx - \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_0^{+\infty} \phi(x, y) \cdot dx \quad (\text{A.15})$$

Substituindo-se (A.13), (A.14) e (A.15) em (A.12), resulta na identidade:

$$\int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \cdot n_y \, d\partial B = \int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \cdot n_x \, d\partial B - \int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial B \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-se (A.16) em (A.11), temos uma expressão adequada para o momento:

$$\vec{M} = -\rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \left[\int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot y \right] \cdot n_x \, d\partial B - \int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial B \right] \vec{k} \quad (\text{A.17})$$

Avaliando-se o primeiro integral de (A.17), constata-se que somente o contorno do setor circular S_1 contribui para este integral, de modo que:

$$\int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot y \right] \cdot n_x \, d\partial B = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \lambda + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \cdot \cos \theta \cdot a \cdot d\theta -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \sin \theta \right] \cdot \cos \theta \cdot a^2 \cdot d\theta$$

(iii)

Como $\partial\phi/\partial x$ e $\partial\phi/\partial y$ são de ordem $O(a^{-1/2})$ ao longo do setor circular Sr , conclui-se que os integrais do lado direito de (iii) são, respectivamente, de ordem $O(a^{1/2})$ e de ordem $O(a^{3/2})$, ou seja:

$$\int_{\partial B} \left[x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot y \right] \cdot n_x \, d\partial B \sim O(a^{1/2}) \quad (\text{A.18})$$

que vai a zero, quando o raio "a" tende a zero.

Avaliando-se o segundo integral em (A.17):

$$\int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial B = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} [\phi(x, -\lambda^+) - \phi(x, -\lambda^-)] \cdot dx -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \phi(a, \theta) \cdot \sin \theta \cdot a \cdot d\theta \quad (\text{iv})$$

Como $\phi(a, \theta)$ é de ordem $O(a^{1/2})$, o último integral no lado direito de (iv) é de ordem $O(a^{3/2})$. Conseqüentemente, (iv) pode ser reescrito como:

$$\int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \, d\partial B = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} [\phi(x, -\lambda^+) - \phi(x, -\lambda^-)] \cdot dx + O(a^{3/2})$$

(A.19)

Substituindo-se (A.18) e (A.19) em (A.17), o momento é expresso por:

$$\vec{M} = \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} [\phi(x, -\lambda^+) - \phi(x, -\lambda^-)] \cdot dx + O(\alpha^{1/2}) \right\} \vec{k} \quad (\text{A.20})$$

O coeficiente de massa adicional na direção do eixo y , denotado por m_{yy} , é expresso por:

$$m_{yy} = 2 \cdot \int_{\partial B} \phi(x, y) \cdot n_y \cdot d\partial B \quad (\text{A.21})$$

O integral em (A.21) já foi avaliado. Portanto, pode-se escrever que:

$$m_{yy} = 2 \cdot \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} [\phi(x, -\lambda^+) - \phi(x, -\lambda^-)] \cdot dx + O(\alpha^{3/2}) \right\} \quad (\text{A.22})$$

Comparando-se (A.22) com (A.20), constata-se que o momento depende linearmente do coeficiente de massa adicional m_{yy} :

$$\vec{M} = \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \frac{c^2}{2} \cdot m_{yy} \vec{k} \quad (\text{A.23})$$

Na literatura especializada, (A.23) é conhecido como o momento de Munk.

* * *

ANEXO B.

B.1. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS EQUAÇÕES FRACAS (3.37).

O objetivo deste anexo é fornecer uma interpretação física para (3.37), mostrando-se que o conjunto de equações fracas (3.37), que tem como solução os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$, resulta da condição de estacionariedade da Lagrangiana destes potenciais. Como as equações fracas expressas por (3.37) decorrem da estacionariedade da Lagrangiana para os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$, um princípio variacional associado a essas equações fracas será enunciado. Este princípio variacional nada mais é do que o princípio variacional clássico da mecânica (princípio de mínima ação), expresso de maneira adequada para a presente classe de problemas. Inicialmente, será mostrada a interpretação física das equações fracas que tem os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ e $\phi_{e,0}^{-}$ como solução. Em seguida, será ilustrada a interpretação física da equação fraca cuja solução é o potencial $\phi_{e,0}^{+}$. Finalmente, será enunciada a versão do princípio variacional clássico da mecânica para a classe de problemas em questão.

O primeiro passo será construir a Lagrangiana para a classe de funções potenciais da qual os potenciais $\phi_{e,0}^{-}$ e $\phi_{e,1}^{\pm}$ fazem parte. Em seguida, será mostrado que as

equações fracas para o potencial $\phi_{e,0}^-$ e $\phi_{e,1}^\pm$ decorrem da condição da lagrangiana para estes potenciais ser estacionária.

Considere um potencial de velocidades $E(x,y)$ par ou ímpar em relação a x , definido no domínio fluido S , que é limitado em $y = 0$ por uma parede sólida (ilustrado na figura 3.5). O potencial de velocidades $E(x,y)$ é perturbado pela presença de um fólio sem espessura com linha média paralela à parede sólida. Então, o potencial total $\bar{\Phi}(x,y)$ do campo de velocidades resultante é expresso como a soma de $E(x,y)$ com um potencial perturbado $\phi(x,y)$, par ou ímpar em relação a x :

$$\bar{\Phi}(x,y) = E(x,y) + \phi(x,y) \quad (\text{B.1})$$

O fólio está parado e não há forças externas realizando trabalho sobre o sistema fluido. A excitação é causada pelo escoamento representado pelo potencial $E(x,y)$. Para essa classe de problemas, a Lagrangiana é igual a energia cinética. Para construir a Lagrangiana desejada, necessita-se determinar a expressão para a energia cinética.

A energia cinética para essa classe de sistemas é o integral do quadrado do gradiente do potencial total de velocidades em todo domínio S . Como o potencial total é uma

função par ou ímpar em relação a x , basta considerar, somente, metade do domínio fluido (região $S' = S^+ \cup S^-$) para avaliar a energia cinética:

$$T(\Phi) = \rho \cdot \iint_{S'} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \, ds'$$

Como o potencial total $\Phi(x,y)$ é expresso por (B.1) em termos das funções $E(x,y)$ e $\phi(x,y)$, a energia cinética será expressa como:

$$T(\phi; E) = \rho \cdot \left\{ \iint_{S'} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, ds' + 2 \cdot \iint_{S'} \nabla \phi \cdot \nabla E \, ds' + \iint_{S'} \nabla E \cdot \nabla E \, ds' \right\} \quad (B.2)$$

A energia cinética só está definida para funções potenciais que pertençam à classe de funções gradiente quadrado integrável, ou seja, só está definida para funções $\psi(x,y)$ que verifiquem a desigualdade:

$$\iint_{S'} \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, ds' < \infty \quad (B.3)$$

O conjunto de funções que satisfaz (B.3) forma um espaço linear denotado por $H_2^1(S')$. As funções $E(x,y)$ e $\phi(x,y)$ pertencem a $H_2^1(S')$, de modo que os integrais em (B.2) estão bem definidos.

Uma classe de funções que satisfaz (B.3) são as funções que pertençam a $H_{e,2}^1(S^+) \subset H_2^1(S')$. Os potenciais $\phi_{e,0}^-$ e $\phi_{e,1}^+$ são exemplos de funções que pertençam a

$H_2^1(S^+)$. Considerando-se que o potencial $\phi(x,y)$ esteja restrito a $H_2^1(S^+)$, este será denotado no que segue por $\phi_0(x,y)$. Qualquer função que pertença a $H_2^1(S^+)$, possui extensão contínua para a região S_r , definida por (3.32). A energia cinética em termos do potencial $\phi_0(x,y)$ pode ser reescrita como:

$$T(\phi_0; E) = \rho. [G(\phi_0; \phi_0) + 2.G(\phi_0; E) + Q(E; E)] \quad (B.4)$$

onde as formas bilineares $G(\phi_0; \psi)$ e $Q(\phi; \psi)$ são expressas por:

$$G(\phi_0; \psi) = \iint_{S^+} \nabla \phi_0 \cdot \nabla \psi \, dS^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2.a} \cdot T_n(\phi_0) \cdot T_n(\psi) \quad (B.5)$$

e

$$Q(\phi; \psi) = \iint_{S'} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dS' \quad (B.6)$$

A Lagrangiana para o potencial ϕ_0 pertencente a $H_2^1(S^+)$, igual a energia cinética do sistema fluido, será dada por:

$$\mathcal{L}(\phi_0) = \rho. [G(\phi_0; \phi_0) + 2.G(\phi_0; E) + Q(E; E)] \quad (B.7)$$

Como a função potencial $E(x,y)$ é conhecida a priori, (B.7) nada mais é do que a Lagrangiana para o potencial $\phi_0(x,y)$ não determinado. O potencial $\phi_0(x,y)$ é solução da equação fraca obtida a partir da condição da ação para a

classe de sistemas hidrodinâmicos em questão ser estacionária (sistemas hidrodinâmicos com potencial de velocidades expresso por $E(x,y) + \phi_0(x,y)$), como pode ser constatado no que segue.

A ação para essa classe de sistemas hidrodinâmicos será dada pelo seguinte funcional:

$$A(\phi_0) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\phi_0) dt \quad (\text{B.8})$$

Pelo princípio de "Hamilton", que é o princípio de mínima ação, o movimento de um sistema mecânico arbitrário ocorre de maneira a tornar a ação do sistema estacionária (tornar (B.8) estacionário) para variações possíveis e arbitrárias do sistema mecânico, desde que a configuração inicial e final sejam prescritas. Variações arbitrárias do sistema correspondem, neste caso, à variações $\delta\phi_0(x,y)$ da função potencial $\phi_0(x,y)$. (B.8) ser estacionária em $\phi_0(x,y)$ implica que:

$$\delta\mathcal{L}(\phi_0) = 0 \quad (\text{B.9})$$

onde $\delta\mathcal{L}(\phi_0)$ é expresso por:

$$\delta\mathcal{L}(\phi_0) = \rho \cdot [2 \cdot G(\phi_0; \delta\phi_0) + 2 \cdot G(\delta\phi_0; E)] \quad (\text{B.10})$$

Substituindo-se (B.10) em (B.9), a equação fraca para essa classe de sistemas hidrodinâmicos será dada por:

$$G(\phi_e; \delta\phi_e) = - G(E; \delta\phi_e) \quad (\text{B.11})$$

Como $\delta\phi_e(x,y)$ é arbitrário, a identidade (B.11) permanece válida para qualquer função ψ_e , pertencente a $He_2^1(S^+)$, no lugar de $\delta\phi_e$. Então, (B.11) pode ser reescrita como:

$$G(\phi_e; \psi_e) = - G(E; \psi_e) \quad \text{p/ } \forall \psi_e \in a He_2^1(S^+) \quad (\text{B.12})$$

A equação fraca (B.12) permite determinar para cada função $E(x,y)$ a correspondente função $\phi_e(x,y)$. Portanto, com a função $E(x,y)$ adequada, (B.12) fornece a equação fraca para os potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ e $\phi_{e,0}^-$, como será mostrado adiante.

O primeiro termo na igualdade (B.11) é a variação da energia cinética relacionada ao potencial ϕ_e . O segundo termo de (B.11) é o trabalho virtual realizado, em analogia com um sistema mecânico discreto, por um "deslocamento" interno imposto representado pela função $E(x,y)$. Então, a igualdade (B.11) corresponde à versão da segunda lei de Newton para essa classe de sistemas, ou seja, corresponde ao equilíbrio entre as forças de inércia e as forças internas, resultantes do "deslocamento" interno imposto $E(x,y)$.

Especificando a função $E(x,y)$ como as funções $q^{\pm}(x,y)$

e $R^-(x,y)$ em (B.12), seguem, respectivamente, as equações fracas para os potenciais $\phi_{e,1}^\pm(x,y)$ e $\phi_{e,0}^-(x,y)$:

$$G(\phi_{e,1}^\pm; \psi_e^\pm) = - G(q^\pm; \psi_e^\pm) \quad \rho / \forall \psi_e^\pm \in a H_2^1(S^\pm) \quad (\text{B.12- a})$$

e

$$G(\phi_{e,0}^-; \psi_e^-) = - G(R^-; \psi_e^-) \quad \rho / \forall \psi_e^- \in a H_2^1(S^+) \quad (\text{B.12- b})$$

Como o funcional $- G(q^\pm; \psi_e^\pm)$ foi definido em (3.38) como $V_1^\pm(\psi_e^\pm)$, constata-se que (B.12- a) nada mais é do que a equação fraca (3.37) para $j=1$. (B.12- a) resulta da condição da Lagrangiana (B.7), com $E(x,y) = q^\pm(x,y)$, ser estacionária, ou seja, resulta da condição da seguinte Lagrangiana ser estacionária.

$$\mathcal{L}(\phi_{e,1}^\pm) = \rho \cdot [G(\phi_{e,1}^\pm; \phi_{e,1}^\pm) + 2 \cdot V_1^\pm(\phi_{e,1}^\pm) + Q(q^\pm; q^\pm)] \quad (\text{B.13- a})$$

A interpretação física para (B.12- a) é clara: resulta da condição da Lagrangiana (B.13- a) ser estacionária. O termo excitante (no caso $V_1^\pm(\psi_e) = - G(q^\pm; \psi_e)$) de (B.13- a) resulta do "deslocamento" interno imposto $q^\pm(x,y)$.

Como o funcional $- G(R^-; \psi_e)$ foi definido por (3.27) como $V_0^-(\psi_e)^{1\uparrow}$, a identidade (B.12- b) nada mais é do que a equação fraca (3.37) para o potencial $\phi_{e,0}^-$. (B.12- b)

^{1\uparrow} Como por definição $T_0(\psi_e) = 0$, o funcional $V_0^-(\psi_e)$, definido por (3.27), será expresso, somente, por $- G(R^-; \psi_e)$.

resulta da condição da Lagrangiana (B.7), com $E(x,y) = R^-(x,y)$, ser estacionária, ou seja, resulta da condição da seguinte Lagrangiana ser estacionária.

$$\mathcal{L}(\phi_{e,o}^{\pm}) = \rho.[G(\phi_{e,o}^{-};\phi_{e,o}^{-}) + 2.V_0^{-}(\phi_{e,o}^{-}) + Q(R^{-};R^{-})] \quad (\text{B.13- b})$$

A interpretação física de (B.12- b) é clara: resulta da condição da Lagrangiana (B.13- b) ser estacionária. O termo excitante de (B.13- b) (no caso o funcional $V_0^{-}(\psi_e)$) resulta do "deslocamento" interno imposto $R^-(x,y)$.

Três das equações fracas expressas por (3.37) tiveram sua interpretação física ilustrada. Resta mostrar a interpretação física para a quarta equação fraca, expressa por (3.37), cuja solução é o potencial $\phi_{e,o}^{+}$. Nesse intuito considere o domínio fluido $S \cup St(t)^{2\uparrow}$ (figura B.1), limitado em $y = 0$ por uma parede sólida e sob ação de uma força externa, consequência da translação do fólio na direção positiva do eixo y . O centro de gravidade do fólio possui as coordenadas $y = y_0(t_0) < -\lambda$ e $x = 0$ no instante inicial t_0 , como ilustrado na figura B.1.

^{2†} A região St possui raio "a" e engloba o bordo de fuga. Como o fólio desloca-se na direção vertical, a região St desloca-se junto com o fólio, isolando o bordo de fuga em um círculo de raio "a" durante o movimento do fólio. Conseqüentemente, a região St varia sua posição com o tempo.

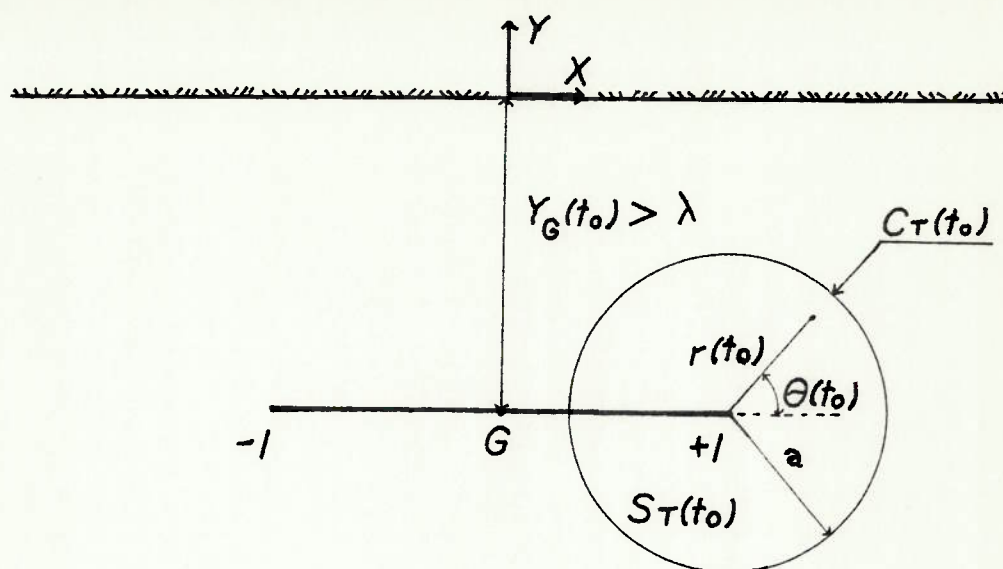


FIG. B.1 - Configuração no instante t_0 .

A translação de qualquer ponto pertencente ao contorno ∂B do fólho na direção positiva do eixo y é conhecida e pode ser expressa em termos de $y_G(t)$ (trajetória do centro de gravidade do fólho). No instante particular t_1 , o centro de gravidade atinge a posição $y = -\lambda$ ($y_G(t_1) = -\lambda$) e $x = 0$ com velocidade unitária ($\dot{y}_G(t_1) = 1\hat{j}$). Como a força externa aplicada ao sistema hidrodinâmico varia com o tempo, conclui-se que o potencial de velocidades ϕ é função do tempo. Conseqüentemente, a lagrangiana, função do potencial $\phi(x, y, t)$, será função implícita do tempo.

A seguir, será construída a lagrangiana para o potencial $\phi(x, y, t)$. Posteriormente, será mostrado que a partir da condição desta lagrangiana ser estacionária,

segue a equação fraca, que no instante particular t_1 , nada mais é do que a equação fraca para o potencial $\phi_{e,0}^+$.

Para construir a lagrangiana desse sistema hidrodinâmico, é necessário determinar expressões para a energia cinética e para o potencial das forças externas (função trabalho). A energia cinética é expressa em termos do potencial $\phi(x,y,t)$ por:

$$T(\phi) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \iint_S \nabla\phi \cdot \nabla\phi \, dS$$

Como as condições de contorno^{3†} em S para o potencial $\phi(x,y,t)$ são simétricas em relação ao eixo y , conclui-se que $\phi(x,y,t)$ é uma função par em relação à variável x (simétrico em relação ao eixo y). Então, basta que o integral acima seja computado, somente, na faixa $x > 0$ ($S^+ \cup S_T$), de forma que a energia cinética é dada por:

^{3†} Não existe fluxo através da parede sólida em $y = 0$ e através do fólio, de modo que o potencial $\phi(x,y,t)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\partial\phi(x,0,t)/\partial y = 0$$

$$\nabla\phi \cdot \vec{n} = - \dot{y}(t) \Big|_{\partial B} \cdot n_y$$

$\dot{y}(t)$ é a velocidade de translação de um ponto do contorno $\partial B(t)$, que pode ser expressa em termos de $\dot{y}_g(t)$. Como o contorno do domínio S é simétrico em relação ao eixo y , as condições de contorno acima também são simétricas em relação ao eixo y . Da simetria das condições de contorno, segue a simetria da função potencial $\phi(x,y,t)$ em relação ao eixo y .

$$T(\phi) = \rho \cdot \iint_{S^+ \cup S_T} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dS \quad (\text{B.14})$$

A energia cinética só está definida para funções potenciais $\psi(x,y,t)$ que pertençam à classe de funções que verifiquem a desigualdade:

$$\iiint_{S_T^+} [\nabla \psi \cdot \nabla \psi] \cdot dS \cdot dt < \infty \quad (\text{B.15})$$

O domínio $S_T^+ = S^+ \cup S_T(t) \times [0, T]$, ou seja, S_T^+ é o produto cartesiano entre o domínio $S^+ \cup S_T(t)$ com o intervalo $0 \leq t \leq T$. Este domínio pode ser visualizado como um cilindro com base $S^+ \cup S_T(t)$ e altura T . As funções que satisfazem (B.15) formam um espaço linear denotado por $H_2^{1,0}(S_T^+)$ (para maiores detalhes sobre este espaço funcional, veja MIJAILOV (1978)). Para que (B.14) esteja bem definida, basta que o gradiente das funções, em seu argumento, seja quadrado integrável em $S^+ \cup S_T(t)$ para qualquer $t \in [0, T]$. A razão para considerar funções pertencentes a $H_2^{1,0}(S_T^+)$ ficará clara após a construção do potencial das forças externas.

Uma classe de funções que satisfaçam (B.15) são as

funções pertencentes a $H_2^{1,0}(S_T^+)^{4\ddagger}$. Considerando que o potencial $\phi(x,y,t)$ esteja restrito a $H_2^{1,0}(S_T^+)$, este será denotado no que segue por $\phi_e(x,y,t)$. Qualquer função que pertença a $H_2^{1,0}(S_T^+)$ possui extensão contínua para a região $S_T(t)$, definida por (3.32)^{5†}. A energia cinética (expressa por (B.14)) em termos do potencial $\phi_e(x,y,t)$ pode ser reescrita como:

$$T(\phi_e) = \rho \cdot G(\phi_e; \phi_e) \quad (\text{B.14- a})$$

onde a forma bilinear simétrica $G(\phi_e; \phi_e)$ é dada por:

$$G(\phi_e; \psi) = \iint_{S^+(t)} \nabla \phi_e \cdot \nabla \psi \, dS^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\phi_e) \cdot T_n(\psi) \quad (\text{B.14- b})$$

O potencial das forças que atuam no sistema hidrodinâmico decorre do trabalho da força externa sobre o sistema. A força externa \vec{Q} que o fólio aplica sobre o fluido é computada integrando-se a pressão dinâmica ao

^{4‡} As funções que pertencem a $H_2^{1,0}(S_T^+)$, pertencem também a $H_2^{1,0}(S_T^+)$ e satisfazem ainda a seguinte restrição:

$$T_0(\psi) = \int_{C_T(t)} \psi(r, \theta, t) \cdot g_0(\theta) \cdot a \cdot d\theta = 0$$

$C_T(t) \quad (r, \theta) \in C_T(t)$

onde $C_T(t)$ é o contorno de $S_T(t)$.

^{5†} A extensão de qualquer função pertencente a $H_2^{1,0}(S_T^+)$ é dada por (3.7), mas com a diferença de que a posição do sistema de coordenadas polares varia com o tempo, ou seja, $r = f(x,y,t)$ e $\theta = g(x,y,t)$.

longo do contorno do fólho, de acordo com a expressão:

$$\dot{Q} = 2 \cdot \rho \cdot \int_{\partial B} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (\text{B.15})$$

O contorno ∂B está restrito à faixa $x > 0$ e permanecerá restrito a esta faixa, a não ser quando especificado de outro modo.

Como comentado no capítulo 2, em problemas de hidrodinâmica a visão Euleriana é usualmente adotada. Esta permite acesso direto à velocidade das partículas fluidas, embora a "trajetória" seja inacessível. O potencial das forças externas é dado explicitamente em termos da "posição". Conseqüentemente, nesta forma não é adequado à análise hidrodinâmica, mas como será mostrado a seguir, o potencial das forças externas pode ser descrito em termos do impulso das forças externas e, desta forma, torna-se apropriado ao problema em questão.

O potencial das forças externas $V(\phi_e, t)$ pode ser expresso em termos do impulso da força:

$$V(\phi_e, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{q}_0 \cdot \vec{I}(\phi_e, t) \right] - \vec{I}(\phi_e, t) \cdot \dot{\vec{q}}_0 \quad (\text{B.16})$$

onde \vec{q}_G é o ponto do fólho onde passa a linha de ação da força \vec{Q} , e o impulso $\vec{I}(\phi_0, t)$ é expresso por:

$$\vec{I}(\phi_0, t) = 2 \cdot \int_0^t \rho \cdot \left[\int_{\partial B(\tau)} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau}(x, y, \tau) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B \right] \cdot d\tau \quad (\text{B.17})$$

Esta expressão para o impulso $\vec{I}(\phi_0, t)$ não está na forma mais adequada para o propósito deste anexo. Então, considere a relação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(t)} \phi(x, y, t) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B &= \int_{\partial B(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, t) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B + \\ &+ \int_{\partial B(t)} \phi(x, y, t) \cdot (\nabla \cdot \vec{V}(x, y, t)) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B \\ &\qquad\qquad\qquad (x, y) \in \partial B(t) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde $\vec{V}(x, y, t)$ é o vetor velocidade de um ponto qualquer do contorno ∂B . Como ∂B é o contorno de um corpo rígido que somente translada, $\nabla \cdot \vec{V}(x, y, t) = 0$. Conseqüentemente, o último integral na relação acima é nulo, e (B.18) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(t)} \phi(x, y, t) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B = \int_{\partial B(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, t) \cdot \vec{n} \cdot d\partial B \quad (\text{B.18- a})$$

^{6†} O vetor \vec{q}_G é o vetor posição do centro de gravidade do fólho que coincide com o ponto médio deste. Devido a simetria do escoamento em relação ao eixo y, a linha de ação da força \vec{Q} passa sobre o ponto médio da placa plana. Conseqüentemente, o vetor posição do ponto onde passa a linha de ação da força \vec{Q} em (B.18) é igual a \vec{q}_G .

Utilizando-se (B.18- a) em (B.17), a expressão para o impulso $\vec{I}(\phi_e, t)$ pode ser reescrita como:

$$\vec{I}(\phi_e, t) = 2 \cdot \rho \cdot \int_{\partial B(t)} \phi_e(x, y, t) \cdot \vec{n} \, d\partial B \quad (\text{B.19})$$

Conseqüentemente, a partir de (B.19), o potencial das forças externas pode ser expresso como:

$$V(\phi_e, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{q}_g \cdot \vec{I}(\phi_e, t) \right] - \dot{\vec{q}}_g \cdot \left[2 \cdot \rho \cdot \int_{\partial B(t)} \phi_e(x, y, t) \cdot \vec{n} \, d\partial B \right] \quad (\text{B.20})$$

Uma vez determinadas as expressões para a energia cinética e para o potencial das forças externas, a Lagrangiana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_e, t) = & \rho \cdot G(\phi_e; \phi_e) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{q}_g \cdot \vec{I}(\phi_e, t) \right] - \\ & - \dot{\vec{q}}_g \cdot \left[2 \cdot \rho \cdot \int_{\partial B(t)} \phi_e(x, y, t) \cdot \vec{n} \, d\partial B \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

ou escrita como:

$$\mathcal{L}(\phi_e, t) = \mathcal{L}(\phi_e, t) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{q}_g \cdot \vec{I}(\phi_e, t) \right] \quad (\text{B.21- a})$$

A ação para esse sistema hidrodinâmico é dada pelo funcional:

$$\begin{aligned}
 A(\phi_e, t) = & \rho \cdot \int_0^T [G(\phi_e; \phi_e) - \dot{\vec{q}}_G \cdot \left(2 \cdot \int \phi_e(x, y, t) \cdot \vec{n} \, d\partial B \right)] \cdot dt + \\
 & + \dot{\vec{q}}_G(T) \cdot \vec{I}(\phi_e, T) - \dot{\vec{q}}_G(0) \cdot \vec{I}(\phi_e, 0) \quad (B.22)
 \end{aligned}$$

Como já mencionado, o movimento de um sistema mecânico ocorre de modo que a ação do sistema (expressão (B.22)) seja estacionária para variações possíveis e arbitrárias do sistema mecânico (no caso, variações possíveis e arbitrárias da função potencial $\phi_e(x, y, t)$), desde que a configuração final e inicial sejam preescritas. A ação ser estacionária implica que:

$$\int_0^T \delta \mathcal{L}(\phi_e) \cdot dt = \rho \cdot \int_0^T \left[2 \cdot G(\phi_e; \delta \phi_e) - \dot{\vec{q}}_G \cdot \left[2 \cdot \int \delta \phi_e \cdot \vec{n} \, d\partial B \right] \right] \cdot dt = 0$$

Para que esta igualdade seja válida, necessita-se que:

$$G(\phi_e; \delta \phi_e) - \dot{\vec{q}}_G \cdot \int \delta \phi_e(x, y, t) \cdot \vec{n} \, d\partial B = 0 \quad (B.23)$$

Como $\delta \phi_e$ é arbitrário, a relação (B.23) permanece válida para qualquer função $\psi_e(x, y, t)$, que pertença a $H_e^{1,0}(S_T^+)$, no lugar de $\delta \phi_e$. O vetor $\dot{\vec{q}}_G$ representa o vetor velocidade do centro de massa do fólho, dado por $U(t) \vec{j}$. Então, (B.23) leva à equação fraca:

$$G(\phi_e; \psi_e) = U(t) \cdot \int_{\partial B(t)} \psi_e(x, y, t) \cdot n_y \, d\partial B \quad p/ \forall \psi_e \in H_2^{1,0}(S_T^+) \quad (B.24)$$

(B.24) é a equação fraca para o potencial $\phi_e(x, y, t)$ em um instante $0 < t < T$.

No instante t_1 , $U(t_1) = 1$, $\dot{q}_g = -\lambda$ e $\phi_e(x, y, t) = \phi_{e,0}(x, y)$. Particularizando "t", ou seja, impondo $t = t_1$, a equação fraca (B.24) pode ser reescrita como:

$$G(\phi_{e,0^+}; \psi_e) = V_0^+(\psi_e) \quad \text{para } \forall \psi_e \in a H_2^1(S^+) \quad (B.25)$$

onde o funcional $V_0^+(\psi_e)$ foi definido em (3.16).

(B.25) é a equação fraca para o potencial $\phi_{e,0^+}(x, y)$. A interpretação física para a equação fraca (B.25) é clara: resulta da condição da seguinte Lagrangiana ser estacionária:

$$\mathcal{L}(\phi_{e,0^+}) = \rho \cdot [G(\phi_{e,0^+}; \phi_{e,0^+}) - 2 \cdot V_0^+(\phi_{e,0^+})] \quad (B.26)$$

que corresponde a $\mathcal{L}(\phi_e, t)$ quando $t = t_1$.

O termo excitante da Lagrangiana (B.26), no caso o valor $V_0^+(\phi_{e,0^+})$, decorre de uma força externa aplicada ao sistema hidrodinâmico em questão (figura B.1) no instante t_1 . Esta Lagrangiana difere das Lagrangianas para os potenciais $\phi_{e,0^-}$ e $\phi_{e,1^\pm}$ porque o termo excitante destas

Lagrangianas resulta de um "deslocamento" interno imposto, representado, respectivamente, pelas funções $R^-(x,y)$ e $q^\pm(x,y)$.

Considere, agora, o funcional:

$$\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e) = G(\phi_e; \phi_e) - 2.V_j^\pm(\phi_e) \quad (\text{B.27})$$

Este funcional nada mais é do que as Lagrangianas para os potenciais $\phi_{e,j}^\pm$.

A variação primeira do funcional $\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e)$, para uma variação arbitrária $\delta\phi_e$, é expressa por:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e) &= [G(\delta\phi_e; \phi_e) + G(\phi_e; \delta\phi_e)] - 2.V_j^\pm(\phi_e) \\ &= 2.[G(\phi_e; \delta\phi_e) - V_j^\pm(\delta\phi_e)] \end{aligned}$$

O fato da variação primeira de $\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e)$ ser nula, quando $\phi_e = \phi_{e,j}^\pm$ (condição de (B.27) ser estacionário para $\phi_e = \phi_{e,j}^\pm$), implica na equação fraca (3.37) e é implicado por ela. Então, pode-se dizer que:

"Dentre todas as funções ϕ_e pertencentes a $He_2^1(S)$, a solução das equações fracas (3.37) são aquelas que fazem o funcional $\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e)$ estacionário".

Este enunciado nada mais é do que uma versão do princípio de mínima ação para os sistemas hidrodinâmicos em consideração, pois $\mathcal{L}_j^\pm(\phi_e)$ com $\phi_e = \phi_{e,j}^\pm$ nada mais é do

que a Lagrangiana para os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$. A condição destas Lagrangianas serem estacionárias decorre do fato da ação para esse sistema ser estacionária.

Finalizando, as equações fracas (3.37) decorrem de um princípio clássico da mecânica, o princípio de mínima ação.

B.2. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS VALORES Λ_{ij}^{\pm} .

O objetivo deste item é mostrar que alguns valores Λ_{ij}^{\pm} possuem significado físico, ou seja, são quantidades de interesse como os coeficientes de massa adicional ou parcelas das forças generalizadas adimensionais.

A equação fraca para os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ decorre da condição do funcional $\mathcal{L}_j^{\pm}(\psi_e)$ (definido por (B.27)) ser estacionário quando $\psi_e = \phi_{e,j}^{\pm}$, ou seja:

$$\delta \mathcal{L}_j^{\pm}(\phi_{e,j}^{\pm}) = G(\phi_{e,j}^{\pm}; \delta \phi_{e,j}^{\pm}) - V_j^{\pm}(\delta \phi_{e,j}^{\pm}) = 0 \quad (\text{B.28- a})$$

ou

$$G(\phi_{e,j}^{\pm}; \delta \phi_{e,j}^{\pm}) = V_j^{\pm}(\delta \phi_{e,j}^{\pm}) \quad (\text{B.28- b})$$

A identidade (B.28) representa o equilíbrio entre a variação da energia cinética associada ao potencial $\phi_{e,j}^{\pm}$ e

o trabalho virtual da força excitante^{7†}. (B.28- b) nada mais é do que uma forma de expressar a segunda lei de Newton para essa classe de sistemas hidrodinâmicos, ou seja, corresponde ao equilíbrio entre as forças de inércia e as forças excitantes.

Como $\delta\phi_{e,j}^{\pm}$ é um elemento arbitrário de $He_2^1(S^+)$, (B.28- b) permanece válida para qualquer elemento de $He_2^1(S^+)$. Então, (B.28- b) pode ser escrita como:

$$G(\phi_{e,j}^{\pm}; \psi_e) = V_j^{\pm}(\psi_e) \quad (B.29)$$

que nada mais é do que a equação fraca para os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$.

Substituindo-se $\phi_{e,i}^{\pm}$ no lugar de ψ_e em (B.29), ambos os lados da igualdade resultante fornecem os valores Λ_{ij}^{\pm} , de acordo com (3.49).

Fazendo uma analogia com um sistema dinâmico discreto, os potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ podem ser olhados como a "coordenada generalizada" do "grau de liberdade" denotado por j^{\pm} . Analogamente, a equação fraca (B.29) pode ser interpretada como o "conjunto de equações diferenciais" que descrevem o

^{7†} A força excitante pode ser uma força externa, como a força aplicada pelo fôlio no fluido quando este se desloca através do meio fluido (caso do potencial, $\phi_{e,0}^+$ como mostrado no item B.1), ou pode ser uma força interna, devido a um deslocamento interno imposto (caso dos potenciais $\phi_{e,1}^{\pm}$ e $\phi_{e,0}^-$).

movimento do sistema dinâmico discreto, e o funcional $V_j^\pm(\psi_e)$ pode ser olhado como a força generalizada sobre o "grau de liberdade" j^\pm devido a um "deslocamento" imposto ψ_e . Conseqüentemente, o valor $\Lambda_{ij}^\pm = V_j^\pm(\phi_{e,i}^\pm)$ pode ser olhado como a força generalizada sobre o "grau de liberdade" j^\pm devido ao "deslocamento" do "grau de liberdade" i^\pm , representado pela sua "coordenada generalizada" $\phi_{e,i}^\pm$.

Os valores Λ_{00}^+ e Λ_{01}^+ são, realmente, a força generalizada adimensional sobre o fólio devido ao campo de pressão gerado, respectivamente, pelos potenciais $\phi_{e,0}^+$ e $\phi_{e,1}^+$, como mostra a expressão (3.51) para o momento. Através desta expressão, constata-se que os valores Λ_{01}^+ e Λ_{00}^+ são componentes do momento adimensional. O valor Λ_{00}^+ possui outra interpretação física, este satisfaz as condições de contorno (3.10- b, c e d), ou seja, seu gradiente representa o campo de velocidades relacionado à perturbação da corrente fluida devido à presença do fólio. O funcional $V_0^+(\psi)$, por sua vez, fornece o coeficiente de massa adicional na direção do eixo y devido ao potencial de velocidades ψ_e . Conseqüentemente, o valor $V_0^+(\phi_{e,0}^+)$ representa o coeficiente de massa adicional relacionado ao potencial $\phi_{e,0}^+$, ou seja, é o coeficiente de massa adicional relacionado à falta de simetria do escoamento na

direção do eixo y .

Aos valores Λ_{00}^- , Λ_{01}^- e Λ_{11}^+ pode ser associado um significado físico proveniente da analogia descrita, mas dentro do contexto do problema físico enfocado neste trabalho, esses valores não representam quantidades de interesse, como os coeficientes de massa adicional ou parcelas das forças generalizadas. O valor Λ_{00}^- representa uma parcela da energia cinética associada ao campo circulatório de velocidades, como mostrado a seguir.

A energia cinética associada ao campo de velocidades circulatório é dada por:

$$T(\phi_\gamma) = \rho \cdot U^2 \cdot \gamma^2 \cdot \iint_{S^+ \cup S^-} \nabla \phi_\gamma \cdot \nabla \phi_\gamma \, dS \quad (i)$$

Como ϕ_γ é uma função ímpar, basta integrar o campo de velocidades circulatório, somente, na metade do domínio fluido. A expressão (i) pode ser reescrita em termos do funcional $G(\phi; \psi)$ como:

$$T(\phi_\gamma) = \rho \cdot U^2 \cdot \gamma^2 \cdot G(\phi_\gamma; \phi_\gamma) \quad (ii)$$

Lembrando de (3.29), $T(\phi_\gamma)$ é expressa em termos dos valores $G(R^-; R^-)$, $G(R^-; \phi^-)$ e $G(\phi^-; \phi^-)$:

$$T(\phi_\gamma) = \rho \cdot U^2 \cdot \gamma^2 \cdot [G(R^-; R^-) + 2 \cdot G(R^-; \phi^-) + G(\phi^-; \phi^-)] \quad (iii)$$

Como ϕ^- pode ser expressa em termos de $\phi_{e,j}^-$ de acordo com (3.33) e (3.35), e como $T(\phi^-)$ é de $O(a)$, (iii) é reescrita como:

$$T(\phi_\gamma^-) = \rho \cdot U^2 \cdot \gamma^2 \cdot [G(R^-; R^-) - \Lambda_{00}^-] + O(a) \quad (\text{iv})$$

De acordo com (iv), a expressão para a energia cinética do campo circulatório de velocidades é dada em termos do valor Λ_{00}^- , ou seja, o valor Λ_{00}^- está associado a uma parcela da energia cinética do campo circulatório de velocidades.

Os valores Λ_{01}^- e Λ_{11}^\pm aparecem como consequência da necessidade de explicitar a dependência dos potenciais ϕ^\pm em relação aos coeficientes $T_0(\phi^\pm)$ e, portanto, não representam nenhuma quantidade de interesse do ponto de vista físico.

Um resumo da discussão aqui apresentada pode ser encontrada no item 3.6.

* * *

ANEXO C.

ESTACIONARIEDADE DO FUNCIONAL F_{ij}^{\pm} NO PAR DE FUNÇÕES $(\phi_{e,j}^{\pm}; \phi_{e,i}^{\pm})$.

Aqui é demonstrado que o funcional F_{ij}^{\pm} é estacionário no par de funções $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm}) \in H_{e_2}^1(S^+) \times H_{e_2}^1(S^+)$. A demonstração segue de forma análoga à demonstração realizada em PESCE (1988) para o funcional F_{ij} (página 2.15).

Com (3.52- b), a variação primeira do funcional F_{ij}^{\pm} , com $(\delta\phi_e; \delta\psi_e) \in H_{e_2}^1(S^+) \times H_{e_2}^1(S^+)$, pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \delta F_{ij}^{\pm}(\phi_e; \psi_e) \cdot G(\phi_e; \psi_e) + F_{ij}^{\pm}(\phi_e; \psi_e) \cdot \delta G(\phi_e; \psi_e) &= \\ &= V_j^{\pm}(\delta\phi_e) \cdot V_i^{\pm}(\psi_e) + V_j^{\pm}(\phi_e) \cdot V_i^{\pm}(\delta\psi_e) \end{aligned} \quad (C.1)$$

Se o par $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$ for substituído em (C.1) e as identidades (3.53) e (3.48) forem utilizadas:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{\pm} \cdot \{ \delta F_{ij}^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm}; \delta\phi_{e,j}^{\pm}) + G(\phi_{e,i}^{\pm}; \delta\phi_{e,j}^{\pm}) - V_i^{\pm}(\delta\phi_{e,j}^{\pm}) + \\ + G(\phi_{e,j}^{\pm}; \delta\phi_{e,i}^{\pm}) - V_j^{\pm}(\delta\phi_{e,i}^{\pm}) \} = 0 \end{aligned} \quad (C.2)$$

Da arbitrariedade do par $(\delta\phi_{e,i}^{\pm}; \delta\phi_{e,j}^{\pm}) \in H_{e_2}^1(S^+) \times$

$H_2^1(S^+)$, a equação (3.37) se aplica aos potenciais $\phi_{e,j}^{\pm}$ e $\phi_{e,i}^{\pm}$ (basta substituir o índice j pelo índice i em (3.37)) em (C.2). Isto implica que:

$$\delta F_{ij}^{\pm}(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm}) = 0 \quad (C.3)$$

A expressão (C.3) continua válida mesmo que $\Lambda_{ij}^{\pm} = 0$.

Note, via (C.2), que a estacionareidade do funcional F_{ij}^{\pm} no par de funções $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$ decorre da validade das equações fracas (3.37) ou, reciprocamente, que a variação primeira de F_{ij}^{\pm} no par de funções $(\phi_{e,i}^{\pm}; \phi_{e,j}^{\pm})$ ser nula implica na validade das equações fracas (3.37).

* * *

ANEXO D.

FUNCIONAL $G(\phi, \psi)$ RESTRITO A UMA DETERMINADA CLASSE DE FUNÇÕES.

Como mencionado, a função $q^\pm(x, y)$ e algumas funções testes $\chi_{e, n}^\pm$ satisfazem (3.10- a, c e d). Então, será interessante avaliar a forma que o funcional $G(\phi; \psi)$ assume quando uma das funções de seu argumento satisfaz (3.10- a, c e d) e a outra é uma função par (+) ou (-) ímpar pertencente a $H_2^1(S^+)$, contínua em S^+ (se for função par) ou no máximo com uma descontinuidade (3.11) (se for ímpar).

De acordo com (3.23), o funcional $G(\chi^\pm; \psi^\pm)$, onde χ^\pm satisfaz (3.10- a, c e d) e ψ^\pm pertence a $H_2^1(S^+)$, é expresso por:

$$G(\chi^\pm; \psi^\pm) = \iint_{S^+} \nabla \chi^\pm \cdot \nabla \psi^\pm \, dS + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\chi^\pm) \cdot T_n(\psi^\pm) \quad (D.1)$$

Como χ^\pm satisfaz (3.10- a, c ed), e ψ^\pm é uma função contínua (se for par) ou no máximo com uma descontinuidade (3.11) (se for ímpar), a identidade:

$$\nabla \chi^\pm \cdot \nabla \psi^\pm = \nabla(\nabla \chi^\pm \cdot \psi^\pm) \quad (D.2)$$

é válida.

Substituindo-se (D.2) em (D.1), e aplicando-se o

teorema de Green ao integral sobre S^+ , o funcional $G(\chi^\pm; \psi^\pm)$ é dado por:

$$G(\chi^\pm; \psi^\pm) = \int_{\partial S^+} (\nabla \chi^\pm \cdot \vec{n}) \cdot \psi \, d\partial S^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot \text{Tn}(\chi^\pm) \cdot \text{Tn}(\psi^\pm) \quad (\text{D.3})$$

A partir de (3.10- a, c e d), o integral ao longo do contorno ∂S^+ pode ser expresso, simplesmente, em termos do contorno ao longo do corpo, do contorno ao longo da região S^+ e do contorno ao longo do corte:

$$\begin{aligned} G(\chi^\pm; \psi^\pm) = & - \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left[\frac{\partial \chi^\pm}{\partial y}(x, -\lambda^+) \cdot \psi^\pm(x, -\lambda^+) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \chi^\pm}{\partial y}(x, -\lambda^-) \cdot \psi^\pm(x, -\lambda^-) \right] dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi^\pm}{\partial r}(a, \theta) \cdot \psi^\pm(a, \theta) \cdot a \cdot d\theta + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot \text{Tn}(\chi^\pm) \cdot \text{Tn}(\psi^\pm) + \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-\lambda} \left[\frac{\partial \chi^-}{\partial x}(0^-, y) \cdot \psi^-(0^-, y) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \chi^-}{\partial x}(0^+, y) \cdot \psi^-(0^+, y) \right] dy \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

Como é permitido à função χ^- possuir uma descontinuidade do tipo (3.11) ao longo do corte, o último integral em (D.4) está multiplicado pelo fator 1/2 porque, somente, metade do corte faz parte do contorno ∂S^+ .

* * *

ANEXO E.

Neste anexo serão avaliados os funcionais em cujo argumento estão presentes as funções auxiliares $R^-(x,y)$ e $q^\pm(x,y)$. No item E.1, serão avaliados os funcionais onde a função auxiliar $R^-(x,y)$ participa do argumento, e no item E.2, serão avaliados os funcionais onde a função $q^\pm(x,y)$ participa do argumento.

E.1. AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $R^-(x,y)$ COMO ARGUMENTO.

Os valores a serem avaliados neste item são $G(R^-;R^-)$, $V_0^-(R^-)$ e $Tn(R^-)$. Além destes valores, será obtida a expressão para o funcional $G(R^-;\psi^-)$, onde a função ψ^- pertence a $H_2^1(S^+)$ e é contínua ou possui uma descontinuidade do tipo (3.11). As expressões dos funcionais $G(\phi;\psi)$, $V_0^-(\psi)$ e $Tn(\psi)$, necessárias ao cálculo dos valores $G(R^-;R^-)$, $V_0^-(R^-)$ e $Tn(R^-)$ e do funcional $G(R^-;\psi^-)$, são dadas, respectivamente, por (3.23), (3.27) e (3.6).

A função $R^-(x,y)$, definida no item 3.9.1, é expressa por (3.66) e é repetida aqui:

$$R^-(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^n}{2} & \text{em Sp } (0 \leq y \leq -h \text{ e } 0 \leq x \leq 1) \\ -1/2 & \text{em } (S^+ \cup S_T) - \text{Sp} \end{cases} \quad (3.66)$$

O primeiro valor a ser avaliado, envolvendo a função $R^-(x,y)$, é $To(R^-)$. No círculo C_T (contorno de S_T) a função $R^-(x,y)$, desprezando termos de ordem $O(a^2)$ em diante, é dada por:

$$R^-(a,\theta) = \begin{cases} -\frac{(1 + n.a.\cos \theta)}{2} + O(a^2) & \text{p/ } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ -1/2 & \text{p/ } -\pi \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (E.1)$$

Utilizando-se (3.6) e (E.1), o valor $To(R^-)$ é dado por:

$$To(R^-) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta + n.a. \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \cdot \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right\} + O(a^{5/2})$$

Avaliando-se os integrais acima, chega-se à seguinte expressão para o valor $To(R^-)$:

$$To(R^-) = -\frac{n.a}{3} \sqrt{\frac{2.a}{\pi}} \quad (E.2)$$

O valor $Tm(R^-)$ pode ser obtido via (3.6) e (E.1). Como $gm(\theta)$, definida por (3.5- c), é expressa em termos de $\sin (m+1).\theta/2$ para "m" par e em termos de $\cos (m+1).\theta/2$ para

"m" ímpar, o valor $T_m(R^-)$ é dado por:

$$T_{2m}(R^-) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{(m+1)\cdot\theta}{2} d\theta + \right. \\ \left. + 2n\cdot a \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \cdot \sin \frac{(m+1)\cdot\theta}{2} d\theta \right\} + O(a^{5/2}) \quad (\text{E.2- a})$$

e

$$T_{2m+1}(R^-) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{(m+1)\cdot\theta}{2} d\theta + \right. \\ \left. + 2n\cdot a \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \cdot \cos \frac{(m+1)\cdot\theta}{2} d\theta \right\} + O(a^{5/2}) \quad (\text{E.2- b})$$

Avaliando-se os integrais nas expressões (E.2- a e b), chega-se aos seguintes valores:

$$T_{2m}(R^-) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{n\cdot a}{(2m-1)\cdot(2m+3)} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos \frac{(2m-1)\cdot\pi}{4} \right] \quad (\text{E.3- a})$$

e

$$T_{2m+1}(R^-) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{a\cdot n}{2m\cdot(m+2)} \cdot \left[\sin \frac{m\cdot\pi}{2} \right] \quad (\text{E.3- b})$$

A seguir, serão avaliados os valores $G(R^-; R^-)$ e $V_0^-(R^-)$ e o funcional $G(R^-; \psi^-)$ (onde $\psi^-(x, y)$ é uma função contínua ou no máximo com uma descontinuidade do tipo (3.11)). Para que isso seja possível, necessita-se das funções:

$$i) \quad R^-(x, -\lambda^+) - R^-(x, -\lambda^-) = \frac{(1 - x^n)}{2} \quad (\text{E.4- a})$$

$$ii) \quad R^-(0^-, y) - R^-(0^-, y) = 1 \quad \text{em } -\lambda > y > -\infty \quad (\text{E.4- b})$$

$$iii) \quad \nabla R^-(a, \theta) = \begin{cases} -\frac{n \cdot x^{n-1}}{2} & \text{em Sp} \\ 0 & \text{em } (S^+ \cup S_T) - Sp \end{cases} \quad (\text{E.4- c})$$

O funcional $G(R^-; \psi^-)$ pode ser obtido a partir de (E.4- c) e (3.23). A expressão para este funcional é dada por:

$$G(R^-; \psi^-) = -\frac{n}{2} \cdot \int_{-\lambda}^0 \int_0^1 \left[x^{n-1} \cdot \frac{\partial \psi^-}{\partial x}(x, y) \right] dx \cdot dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot T_n(R^-) \cdot T_n(\psi^-) \quad (\text{E.5})$$

Em (E.5), $\psi^-(x, y)$ é uma função contínua ou possui no máximo uma descontinuidade do tipo (3.11). Substituindo-se ψ^- por $R^-(x, y)$ em (E.5) e utilizando-se (E.3) e (E.4- c), o valor $G(R^-; R^-)$ é expresso por:

$$G(R^-; R^-) = \frac{n^2}{4} \cdot \int_{-\lambda}^0 \int_0^1 x^{2 \cdot n-2} dx \cdot dy + O(a^2)$$

Avaliando-se o integral acima, resulta que o valor $G(R^-; R^-)$ é dado por:

$$G(R^-; R^-) = \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{E.6})$$

Com (3.27), o valor $V_0^-(R^-)$ pode ser expresso por:

$$V_o^-(R^-) = G(R^-; R^-) - \frac{1}{2.a} \cdot T_o(R^-) \cdot T_o(R^-)$$

Substituindo-se (E.6) e (E.2) nesta expressão, constata-se que o valor $V_o^-(R^-)$ é dado por:

$$V_o^-(R^-) = - \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} + O(a^2) \quad (E.7)$$

No item E.1 do anexo E, foram obtidos os valores:

$$T_o(R^-) = - \frac{n \cdot a}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \quad (E.2)$$

$$T_{2m}(R^-) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{n \cdot a}{(2m-1) \cdot (2m+3)} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos \frac{(2m-1) \cdot \pi}{4} \right] \quad (F.3- a)$$

$$T_{2m+1}(R^-) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{a \cdot n}{2m \cdot (m+2)} \cdot \left[\sin \frac{m \cdot \pi}{2} \right] \quad (E.3- b)$$

$$G(R^-; \psi^-) = - \frac{n}{2} \int_{-\lambda}^0 \int_0^1 \left[x^{n-1} \cdot \frac{\partial \psi^-}{\partial x}(x, y) \right] dx \cdot dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} T_n(R^-) \cdot T_n(\psi^-) \quad (E.5)$$

$$G(R^-, R^-) = \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (E.6)$$

$$V_o^-(R^-) = - \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (E.7)$$

E.2. AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM A FUNÇÃO $q^\pm(x,y)$ COMO ARGUMENTO.

Aqui serão avaliados os valores dos funcionais onde a função auxiliar $q^\pm(x,y)$ faz parte do argumento, ou seja, serão avaliados os valores $G(q^\pm; q^\pm)$, $G(q^\pm; R^\pm)$, $V_0^\pm(q^\pm)$ e $Tn(q^\pm)$, e será construída a expressão para o funcional $G(q^\pm; \psi^\pm)$. A função $q^\pm(x,y)$ foi definida, no item 3.9.2, pela expressão (3.67).

É fácil verificar que a função $q^\pm(x,y)$, dada por (3.67), satisfaz (3.10- a, c e d). Conseqüentemente, o funcional $G(\phi; \psi)$, dado por (3.23), assume a forma (D.4), quando $\phi = q^\pm$ e quando $\psi^\pm(x,y)$ for uma função contínua ($\psi^-(x,y)$ é contínua ou possui uma descontinuidade do tipo (3.11)). O funcional $G(q^\pm; \psi^\pm)$, via (D.4), é expresso por:

$$\begin{aligned}
 G(q^\pm; \psi^\pm) = & - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[\frac{\partial q^\pm}{\partial y}(x, -\lambda^+) \cdot \psi^\pm(x, -\lambda^+) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial q^\pm}{\partial y}(x, -\lambda^-) \cdot \psi^\pm(x, -\lambda^-) \right] dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial q^\pm}{\partial r}(a, \theta) \cdot \psi^\pm(a, \theta) \cdot a \cdot d\theta + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot Tn(q^\pm) \cdot Tn(\psi^\pm) + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-d} \left[\frac{\partial q^-}{\partial x}(0^-, y) \cdot \psi^-(0^-, y) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial q^-}{\partial x}(0^+, y) \cdot \psi^-(0^+, y) \right] dy \quad (E.8)
 \end{aligned}$$

Para obter uma expressão adequada para o funcional $G(q^\pm; \psi^\pm)$, e calcular os valores $G(q^\pm; q^\pm)$, $G(R^-; q^-)$, $V_0^\pm(q^\pm)$ e $T_n(q^\pm)$, necessita-se das funções:

$$i) \quad q^\pm(x, -\lambda^\pm) = \frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left\{ \frac{-2\lambda}{(x-1)^2 + 4\lambda^2} \pm \frac{-2\lambda}{(x+1)^2 + 4\lambda^2} \right\} \quad (\text{E.9- a})$$

$$ii) \quad \frac{\partial q^\pm}{\partial y}(x, -\lambda^\pm) = \frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \pm \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4\lambda^2} \mp \frac{1}{(x+1)^2 + 4\lambda^2} \right\} \quad (\text{E.9- b})$$

$$iii) \quad \frac{\partial q^-}{\partial x}(0, y) = \frac{3}{2} \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left\{ \frac{y + \lambda}{[1 + (y + \lambda)^2]^2} - \frac{y - \lambda}{[1 + (y - \lambda)^2]^2} \right\} \quad (\text{E.9- c})$$

$$iv) \quad q^\pm(x, -\lambda^+) - q^\pm(x, -\lambda^-) = 0 \quad (\text{E.9- d})$$

$$v) \quad q^-(0^-, y) - q^-(0^+, y) = 0 \quad (\text{E.9- e})$$

$$vi) \quad q^\pm(a, \theta) \sim \frac{3}{8} \sqrt{\pi/a} \cdot \sin \theta + O(a^{3/2}) \quad (\text{E.9- f})$$

$$vii) \quad \frac{\partial q^\pm}{\partial r}(a, \theta) \sim -\frac{3}{8} \sqrt{\pi/a} \cdot \frac{\sin \theta}{a} + O(a^{1/2}) \quad (\text{E.9- g})$$

Os valores $T_n(q^\pm)$ para $n \geq 1$ são avaliados a partir de (3.6) e (E.9- f), resultando na expressão:

$$T_n(q^\pm) \sim \frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) \cdot \sin \theta \, d\theta$$

Avaliando-se este integral, com $g_n(\theta)$ dada por (3.5-

c):

$$T_{2n}(q^\pm) = \frac{3 \cdot (-1)^{n+1}}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \quad (\text{E.10- a})$$

e

$$T_{2n+1}(q^\pm) = 0 \quad (\text{E.10- b})$$

Substituindo-se (E.9- b, c e g) e (E.10) em (E.8), resulta na seguinte expressão para o funcional $G(q^\pm; \psi^\pm)$:

$$\begin{aligned} G(q^\pm; \psi^\pm) = & -\frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \pm \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \mp \right. \\ & \left. \mp \frac{1}{(x+1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right\} \cdot [\psi^\pm(x, -\lambda^+) - \psi^\pm(x, -\lambda^-)] dx + \\ & + \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\pi/a} \int_{-\pi}^{\pi} \psi^\pm(a, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot T_{2n}(\psi^\pm)}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \\ & - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-\lambda} \left[\frac{y + \lambda}{[1+(y+\lambda)^2]^2} - \frac{y - \lambda}{[1+(y-\lambda)^2]^2} \right] \cdot \\ & \cdot [\psi^-(0^-, y) - \psi^-(0^+, y)] dy \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Substituindo-se (E.9- d, e e f) e (E.10- a) em (E.11), o valor $G(q^\pm; q^\pm)$ é dado pela expressão:

$$G(q^\pm; q^\pm) = \frac{9\pi^2}{32} \cdot \frac{1}{2 \cdot a} + \frac{9}{2 \cdot a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n-1)^2 \cdot (2n+3)^2} \quad (\text{E.12})$$

A série presente nesta expressão é convergente, e seu valor pode ser avaliado. A soma parcial S_N é dada pelo polinómio em N :

$$S_N = \frac{10 \cdot (4N^2 + 8N + 3)^2 - 18 \cdot (4N^2 + 8N + 5)}{8 \cdot 9 \cdot (2N + 1)^2 \cdot (2N + 3)^2} \quad (\text{E.12- a})$$

Avaliando-se (E.12- a) no limite $N \rightarrow \infty$, o valor para a série presente em (E.12) é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 1}{(2 \cdot n - 1)^2 \cdot (2 \cdot n + 3)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 5/36 \quad (\text{E.12- b})$$

Substituindo-se (E.12- b) em (E.12), obtém-se a seguinte expressão para o valor $G(q^\pm; q^\pm)$:

$$G(q^\pm; q^\pm) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{5}{4} \right] \quad (\text{E.13})$$

Substituindo-se (E.1), (E.4- a) e (E.4- b) em (E.11), o valor $G(q^-; R^-)$ é dado por:

$$\begin{aligned} G(q^-; R^-) = & - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3}{16} \sqrt{\pi \cdot a} \int_0^{1-a} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(x+1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right\} \cdot (1 - x^n) dx - \\ & - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-\lambda} \left[\frac{y + \lambda}{[1 + (y + \lambda)^2]^2} - \frac{y - \lambda}{[1 + (y - \lambda)^2]^2} \right] dy + \\ & + O(a^{1/2}) \end{aligned}$$

Avaliando-se os integrais na expressão para $G(R^-; q^-)$, este valor é dado por:

$$G(q^-; R^-) = - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3 \cdot a}{32} \sqrt{\pi/a} \cdot \ln(a^2/4 \cdot \lambda^2) \sim O(a^{1/2} \ln a) \quad (\text{E.14})$$

Com a expressão (3.16), o valor $V_o^+(q^+)$ é dado por:

$$V_o^+(q^+) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} [q^+(x, -\lambda^+) - q^+(x, -\lambda^-)] dx$$

Substituindo-se (E.9- d) nesta expressão, o valor $V_o^+(q^+)$ é, finalmente, dado por:

$$V_o^+(q^+) = 0 \quad (\text{E.15})$$

Utilizando-se a expressão (3.27), o valor $V_o^-(q^-)$ é expresso por:

$$V_o^-(q^-) = G(R^-; q^-) - \frac{1}{2 \cdot a} \cdot T_o(q^-) \cdot T_o(R^-)$$

Substituindo-se (E.14) e (E.2) nesta expressão, e levando-se em conta o fato de que por definição $T_o(q^\pm) = 1$, o valor $V_o^-(q^-)$ é dado por:

$$V_o^-(q^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{E.16})$$

No item E.2 do anexo E, foram obtidos os seguintes valores e funcionais:

$$\begin{aligned}
G(q^\pm; \psi^\pm) = & -\frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \pm \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \mp \right. \\
& \left. \mp \frac{1}{(x+1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right\} \cdot [\psi^\pm(x, -\lambda^+) - \psi^\pm(x, -\lambda^-)] dx + \\
& + \frac{3}{8} \sqrt{\pi/a} \int_{-\pi}^{\pi} \psi^\pm(a, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot T_{2n}(\psi^\pm)}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \\
& - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-\lambda} \left[\frac{y + \lambda}{[1+(y+\lambda)^2]^2} - \frac{y - \lambda}{[1+(y-\lambda)^2]^2} \right] \cdot \\
& \cdot [\psi^-(0^-, y) - \psi^-(0^+, y)] dy \tag{E.11}
\end{aligned}$$

$$G(q^\pm; q^\pm) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{5}{4} \right] \tag{E.13}$$

$$G(q^-; R^-) \sim O(a^{1/2} \ln a) \tag{E.14}$$

$$v_o^+(q^+) = 0 \tag{E.15}$$

$$v_o^-(q^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \tag{E.16}$$

* * *

ANEXO F.

AVALIAÇÃO DOS VALORES DOS FUNCIONAIS COM FUNÇÕES-TESTE COMO ARGUMENTO.

Neste anexo, serão avaliados os valores dos funcionais cujos argumentos são as funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$, com $n=1,2,3$. O índice "n" assume os valores 1, 2 e 3, a não ser quando especificado de outra forma. As funções-teste $\chi_{e,n}^{\pm}$ foram definidas nos itens 3.10.3.1 e 3.10.3.2 (no item 3.10.3.1, as funções $\chi_{e,n}^{+}$ foram definidas em termos das funções χ_n^{+} . No item 3.10.3.2, as funções $\chi_{e,n}^{-}$ foram definidas em termos das funções χ_n^{-} e da função $R^{-}(x,y)$).

No item F.1, serão avaliados os valores dos funcionais onde as funções $\chi_{e,n}^{+}$ participam do argumento, ou seja, serão determinados os valores $G(\chi_{e,n}^{+};\chi_{e,m}^{+})$ (os índices "n" e "m" assumem os valores 1, 2 e 3), $G(q^{+};\chi_{e,n}^{+})$ e $V_0^{+}(\chi_{e,n}^{+})$. Já no item F.2, serão avaliados os valores dos funcionais onde as funções $\chi_{e,n}^{-}$ participam do argumento, ou seja, serão determinados os valores $G(\chi_{e,n}^{-};\chi_{e,m}^{-})$, $G(q^{-};\chi_{e,n}^{-})$ e $V_0^{-}(\chi_{e,n}^{-})$. No final de cada item, serão listados os valores calculados.

F.1. AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM AS FUNÇÕES $\chi_{e,n}^+$ COMO ARGUMENTO.

Aqui serão avaliados os valores dos funcionais onde as funções-teste $\chi_{e,n}^+(x,y)$ fazem parte do argumento. As funções-teste $\chi_{e,n}^\pm(x,y)$ são construídas em termos das funções χ_n^+ , conforme a expressão (3.68). Portanto, os valores dos funcionais com as funções-teste $\chi_{e,n}^+$ como argumento, dependem dos valores dos funcionais onde as funções χ_n^+ fazem parte do argumento, ou seja, dependem dos valores $T_0(\chi_n^+)$, $G(\chi_n^+; \chi_m^+)$, $G(q^+; \chi_n^+)$ e $V_0^+(\chi_n^+)$.

Para que os valores $G(\chi_{e,n}^+; \chi_{e,m}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,n}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,n}^+)$ possam ser efetivamente avaliados, serão inicialmente calculados os valores $T_n(\chi_m^+)$ com $n=0,1,2,\dots$, $G(\chi_n^+; \chi_m^+)$, $G(q^+; \chi_n^+)$ e $V_0^+(\chi_n^+)$. A estrutura dos funcionais, onde as funções $\chi_n^+(x,y)$ fazem parte do argumento, está definida nos itens 3.1 e 3.3.

Inicialmente, serão avaliados os valores dos funcionais onde a função $\chi_1^+(x,y)$ faz parte do argumento, ou seja, serão avaliados os valores $T_0(\chi_1^+)$, $G(\chi_1^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; \chi_1^+)$ e $V_0^+(\chi_1^+)$. A partir destes valores, serão construídos os valores $G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,1}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,1}^+)$. Posteriormente, serão avaliados os valores dos funcionais envolvendo $\chi_2^+(x,y)$, ou seja, os valores

$T_0(\chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; \chi_2^+)$ e $V_0^+(\chi_2^+)$. A partir destes, serão obtidos os valores $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,2}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,2}^+)$. Finalmente, serão avaliados os valores dos funcionais envolvendo $\chi_3^+(x,y)$, utilizados para obter os valores $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,3}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,3}^+)$.

A função $\chi_1^+(x,y)$ foi definida no item 3.10.3.1 pela expressão (3.88), ilustrada por:

$$\chi_1^+(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{em Sp} \\ 1 & \text{em } (S^+ \cup S_T) - \text{Sp} \end{cases} \quad (3.88)$$

A seguir, serão avaliados os valores dos funcionais com a função χ_1^+ no argumento, mas para que isso seja possível, necessita-se determinar as funções:

$$\text{i) } \nabla \chi_1^+ = \begin{cases} 2.x & \text{em Sp} \\ 0 & \text{em } (S^+ \cup S_T) - \text{Sp} \end{cases} \quad (\text{F.1- a})$$

$$\text{ii) } \chi_1^+(x, -d^+) - \chi_1^+(x, -d^-) = x^2 - 1 \quad (\text{F.1- b})$$

$$\text{iii) } \chi_1^+(a, \theta) \sim \begin{cases} 1 + 2.a.\cos\theta + O(a^2) & ; \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 1 & ; -\pi \leq \theta < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{F.1- c})$$

$$\text{iv) } \frac{\partial \chi_1^+}{\partial r}(a, \theta) \sim \begin{cases} 2.\cos\theta + O(a) & ; \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & ; -\pi \leq \theta < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{F.1- d})$$

Com (3.6) e (F.1- c), conclui-se que $T_n(\chi_1^+)$, com $n=0,1,2,\dots$, é expresso por:

$$T_n(\chi_1^+) = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) \cdot a \cdot d\theta + 2 \cdot a^2 \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \cdot g_n(\theta) \cdot d\theta$$

Substituindo-se $g_n(\theta)$, dado por (3.5- c), nesta expressão:

$$T_0(\chi_1^+) = -\frac{4 \cdot a}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} + O(a^{5/2}) \quad (\text{F.2- a})$$

e

$$T_{2n}(\chi_1^+) = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{4 \cdot a}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \cos \frac{(2n+3) \cdot \pi}{4}} \right] \quad (\text{F.2- b})$$

$$T_{4n-1}(\chi_1^+) = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot a}{(2n-1) \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1 \quad (\text{F.2- c})$$

$$T_{4n+1}(\chi_1^+) = 0, \quad n \geq 1 \quad (\text{F.2- d})$$

Com (3.23) e (3.88), o funcional $G(\chi_1^+; \psi^+)$, onde $\psi^+(x, y)$ é uma função par contínua, é dado por:

$$G(\chi_1^+; \psi^+) = \iint_{Sp} \nabla \chi_1^+ \cdot \nabla \psi^+ ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} \cdot T_n(\chi_1^+) \cdot T_n(\psi^+)$$

Substituindo-se (F.1- a) e (F.2- b, c e d) na expressão acima, resulta que:

$$\begin{aligned}
G(\chi_1^+, \psi^+) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-d}^0 \int_0^{1-\alpha} \left[2x \cdot \frac{\partial \psi^+}{\partial x}(x, y) \right] dx \cdot dy + \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \\
&\cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (2n+2)}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos \frac{(2n+3) \cdot \pi}{4} \right] \cdot T_{2n}(\psi^+) + \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot T_{4n-1}(\psi^+) \right\} \quad (F.3)
\end{aligned}$$

A seguir, serão avaliados os funcionais $G(\chi_1^+; \chi_1^+)$, $G(\chi_1^+; q^+)$ e $V_0^+(\chi_1^+)$.

Substituindo-se (F.1- a) e (F.2- b e c) em (F.3), o valor $G(\chi_1^+; \chi_1^+)$ é dado por:

$$G(\chi_1^+, \chi_1^+) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-d}^0 \int_0^{1-\alpha} 4 \cdot x^2 \cdot \partial x \cdot \partial y + O(a^2)$$

Avaliando-se o integral nesta expressão:

$$G(\chi_1^+; \chi_1^+) = \frac{4 \cdot \lambda}{3} + O(a^2) \quad (F.4)$$

Com $\psi^+ = \chi_1^+(x, y)$ em (E.11) e utilizando-se (F.1- b e c), (F.2- b, c e d), o valor $G(q^+; \chi_1^+)$ pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
G(q^+; \chi_1^+) &= -\frac{3}{8} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \pm \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4 \cdot d^2} \mp \right. \\
&\left. \mp \frac{1}{(x+1)^2 + 4 \cdot d^2} \right\} \cdot (x^2 - 1) dx + O(a^{1/2})
\end{aligned}$$

Avaliando-se os integrais nesta expressão, o valor $G(\chi_1^+; q^+)$ é dado por:

$$G(\chi_1^+; q^+) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.5})$$

O valor $V_0^+(\chi_1^+)$ é dado pela expressão:

$$V_0^+(\chi_1^+) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} [\chi_1^+(x, -d^+) - \chi_1^+(x, -d^-)] dx$$

Utilizando-se (F.1- b) nesta expressão, o valor $V_0^+(\chi_1^+)$ é dado por:

$$V_0^+(\chi_1^+) = -\frac{2}{3} \quad (\text{F.6})$$

Os valores dos funcionais onde a função χ_1^+ participa do argumento, e que foram calculados neste anexo, são listados a seguir:

$$T_0(\chi_1^+) = -\frac{4 \cdot a}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} + O(a^{5/2}) \quad (\text{F.2- a})$$

e

$$T_{2n}(\chi_1^+) = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{4 \cdot a}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \cos \frac{(2n+3) \cdot \pi}{4}} \right] \quad (\text{F.2- b})$$

$$T_{4n-1}(\chi_1^+) = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot a}{(2n-1) \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1 \quad (\text{F.2- c})$$

$$T_{4n+1}(\chi_1^+) = 0, \quad n \geq 1 \quad (\text{F.2- d})$$

$$G(\chi_1^+; \chi_1^+) = \frac{4 \cdot \lambda}{3} + O(a^2) \quad (\text{F.4})$$

$$G(\chi_1^+; q^+) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.5})$$

$$V_0^+(\chi_1^+) = -\frac{2}{3} \quad (\text{F.6})$$

Uma vez determinados os valores $To(\chi_1^+)$, $G(\chi_1^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; \chi_1^+)$ e $V_0^+(\chi_1^+)$, pode-se calcular os valores $G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,1}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,1}^+)$.

O funcional $G(\chi_{e,1}^+; \psi)$, com $\chi_{e,1}^+$ dada por (3.89), é expresso por:

$$G(\chi_{e,1}^+; \psi) = G(\chi_1^+; \psi) - To(\chi_1^+) \cdot G(q^+; \psi) \quad (\text{i})$$

Agora, com $\psi = \chi_{e,1}^+$ em (i), $G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+)$ é dado por:

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+) &= G(\chi_1^+; \chi_1^+) - 2 \cdot To(\chi_1^+) \cdot G(q^+; \chi_1^+) + \\ &\quad + (To(\chi_1^+))^2 \cdot G(q^+; q^+) \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

Substituindo-se os valores $G(\chi_1^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; q^+)$ e $To(\chi_1^+)$ em (ii), $G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+)$ é dada por:

$$G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+) = \frac{4 \cdot \lambda}{3} + O(a^2 \cdot \ln a) \quad (\text{F.7})$$

Com $\psi = q^+(x, y)$ em (i), $G(\chi_{e,1}^+; q^+)$ é dado por:

$$G(\chi_{e,1}^+; q^+) = G(\chi_1^+; q^+) - T_0(\chi_1^+) \cdot G(q^+; q^+) \quad (\text{iii})$$

Substituindo-se os valores $G(\chi_1^+; q^+)$, $G(q^+; q^+)$ e $T_0(\chi_1^+)$ em (iii), resulta para $G(\chi_{e,1}^+; q^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,1}^+; q^+) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 0 \quad (\text{F.8})$$

O funcional $V_0^+(\chi_{e,1}^+)$, com $\chi_{e,1}^+$ dada por (3.89), é expresso por:

$$V_0^+(\chi_{e,1}^+) = V_0^+(\chi_1^+) - T_0(\chi_1^+) \cdot V_0^+(q^+) \quad (\text{iv})$$

Substituindo-se os valores $V_0^+(\chi_1^+)$, $V_0^+(q^+)$ e $T_0(\chi_1^+)$ em (iv), resulta para $V_0^+(\chi_{e,1}^+)$ a expressão:

$$V_0^+(\chi_{e,1}^+) = -2/3 \quad (\text{F.9})$$

Até este ponto, foram avaliados, no anexo F, os valores $G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,1}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,1}^+)$, listados a seguir:

$$G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+) = \frac{4 \cdot \lambda}{3} \quad (\text{F.7})$$

$$G(\chi_{e,1}^+; q^+) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 0 \quad (\text{F.8})$$

$$V_0^+(\chi_{e,1}^+) = -2/3 \quad (\text{F.9})$$

A função $\chi_2^+(x, y)$ foi definida no item 3.10.3.1 pela

expressão (3.90), ou seja:

$$\chi_2^+(x,y) = \text{Real}\{ w^+(z_1) + w^+(z_2) \} \quad (3.90)$$

O plano complexo $z_1(x_1, y_1)$ possui sua origem no ponto médio da placa plana ($x_1 = x$ e $y_1 = y + \lambda$), e o plano complexo $z_2(x_2, y_2)$ possui origem no ponto médio da imagem da placa plana em relação ao eixo $y = 0$ ($x_2 = x$ e $y_2 = -y + \lambda$). O plano complexo z_2 é imagem do plano z_1 em relação a um espelho no eixo $y = 0$. A função $w^+(z_j)$ é dada por:

$$w^+(z_j) = -i [\sqrt{z_j^2 - 1} - z_j] \quad (3.84- b)$$

Na figura F.1, serão ilustrados os sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) .

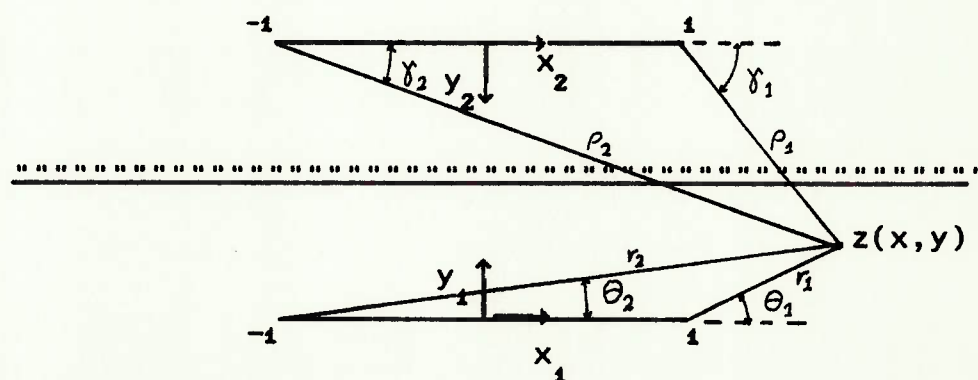


FIG. F.1 - Sistemas de coordenadas polares

(θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) .

Utilizando-se os sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j)

e (γ_j, ρ_j) :

$$z_1 - 1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_1 + 1 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$$

e

$$z_2 - 1 = \rho_1 \cdot e^{i\gamma_1} \quad \text{e} \quad z_2 + 1 = \rho_2 \cdot e^{i\gamma_2}$$

Então, $(z_1^2 - 1)$ e $(z_2^2 - 1)$ podem ser escritos como:

$$(z_1^2 - 1) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

e

$$(z_2^2 - 1) = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

A função $\chi z^+(x, y)$ pode ser expressa como:

$$\chi z^+(x, y) = (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 2 \cdot \lambda \quad (\text{F.10})$$

A função $w^+(z_j)$ pode ser escrita como a soma de sua parte real (Λ_j^+) mais a sua parte imaginária (ψ_j^+) multiplicada por i , como segue:

$$w^+(z_j) = \Lambda_j^+(x_j, y_j) + i \cdot \psi_j^+(x_j, y_j) \quad (\text{v})$$

Utilizando-se as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial w^+}{\partial z_j}(z_j) = \frac{\partial \Lambda_j^+}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial \psi_j^+}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_j^+}{\partial y_j} - i \cdot \frac{\partial \Lambda_j^+}{\partial y_j} \quad (\text{F.11})$$

onde

$$\frac{\partial w^+}{\partial z_j}(z_j) = -i \cdot \left[\frac{z_j}{(z_j^2 - 1)^{1/2}} - 1 \right] \quad (\text{F.12})$$

Da definição de $\chi_2^+(x,y)$:

$$\chi_2^+(x,y) = \Lambda_1^+(x,y) + \Lambda_2^+(x,y) \quad (\text{vi})$$

e

$$\frac{\partial \chi_2^+}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \Lambda_1^+}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_2^+}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} \quad (\text{vii})$$

$$\frac{\partial \chi_2^+}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \Lambda_1^+}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_2^+}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y} \quad (\text{viii})$$

Utilizando-se (F.12) e (F.11) mais as (vii) e (viii),

segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_2^+}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \left[-x \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (y + \lambda) \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[-x \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - (y - \lambda) \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.13- a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_2^+}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \left[(y + \lambda) \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + x \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[(y - \lambda) \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.13- b})$$

A seguir, serão avaliados os valores dos funcionais com a função $\chi_2^+(x,y)$ no argumento, mas antes necessita-se determinar as funções:

$$i) \quad \frac{\partial \chi_2^+}{\partial y}(x, -\lambda^+) = \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \left[-2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \quad (\text{F.14- a})$$

$$ii) \quad \chi_2^+(x, -\lambda^+) - \chi_2^+(x, -\lambda^-) = 2 \cdot (1-x^2)^{1/2} \quad (\text{F.14- b})$$

$$iii) \quad \chi_2^+(a, \theta) \sim \sqrt{2 \cdot a} \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{F.14- c})$$

$$iv) \quad \frac{\partial \chi_2^+}{\partial r}(a, \theta) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{F.14- d})$$

Lembrando de (3.6), resulta que:

$$T_n(\chi_2^+) = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_2^+(a, \theta) \cdot g_n(\theta) \cdot a \cdot d\theta \quad \text{para } n=0, 1, 2, \dots$$

Utilizando-se (3.5- c) e (F.14- c):

$$T_0(\chi_2^+) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot a \quad (\text{F.15- a})$$

e

$$T_n(\chi_2^+) = 0 \quad \text{para } n=1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.15- b})$$

A função $\chi_2^+(x, y)$, como é fácil de constatar, satisfaz (3.10- a, c e d). Conseqüentemente, a expressão do funcional $G(\chi_2^+; \psi^+)$, onde $\psi^+(x, y)$ é uma função par contínua, é dada pela expressão (D.4) como:

$$G(\chi_2^+; \psi^+) = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\partial \chi_2^+}{\partial y}(x, -d^+) \cdot [\psi^+(x, -d^+) - \psi^+(x, -d^-)] \cdot dx \\ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi_2^+}{\partial r}(a, \theta) \cdot \psi^+(a, \theta) \cdot a \cdot d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot T_n(\chi_2^+) \cdot T_n(\psi^+)$$

Utilizando-se (F.14- c,d,e,f) e (F.15- b), resulta que $G(\chi_2^+; \psi^+)$ é expresso por:

$$G(\chi_2^+; \psi^+) = -\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[-2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot [\psi^+(x, -\lambda^+) - \psi^+(x, -\lambda^-)] \right\} dx - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot T_0(\psi^+) \quad (\text{F.16})$$

Definem-se as do parâmetro λ , dadas por:

$$E1(\lambda) = \lim_{a \rightarrow 0} 2 \cdot \int_0^{1-a} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] dx \quad (\text{F.17- a})$$

e

$$E2(\lambda) = - \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \frac{1-x^2}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] dx \quad (\text{F.17- b})$$

Substituindo-se ψ^+ por χ_2^+ em (F.16) e a partir de (F.14- b) e (F.15- a), o valor $G(\chi_2^+, \chi_2^+)$ é expresso em função de $E1(\lambda)$ como:

$$G(\chi_2^+, \chi_2^+) = E1(\lambda) + O(a) \quad (\text{F.18})$$

Substituindo-se ψ^+ por χ_1^+ em (F.16) e a partir de (F.1- b) e (F.2- a), o valor $G(\chi_2^+, \chi_1^+)$ é expresso em função de $E2(\lambda)$ como:

$$G(\chi_1^+; \chi_2^+) = E2(\lambda) + O(a^{3/2}) \quad (\text{F.19})$$

Substituindo-se ψ^+ por q^+ em (F.16) e a partir de (E.9- d) e (3.30), o valor $G(\chi_2^+, q^+)$ é expresso por:

$$G(q^+; \chi_2^+) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{F.20})$$

A partir de (3.21) e (F.14- b), o valor $V_0^+(\chi_2^+)$ é dado por:

$$V_0^+(\chi_2^+) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1-a}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$$

Avaliando-se este integral:

$$V_0^+(\chi_2^+) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.21})$$

Até agora, foram obtidos os valores de funcionais envolvendo a função χ_2^+ , listados a seguir:

$$T_0(\chi_2^+) = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot a} \quad (\text{F.15- a})$$

$$G(\chi_2^+, \chi_2^+) = E1(\lambda) \quad (\text{F.18})$$

$$G(\chi_1^+; \chi_2^+) = E2(\lambda) \quad (\text{F.19})$$

$$G(q^+; \chi_2^+) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{F.20})$$

$$V_0^+(\chi_2^+) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.21})$$

onde as funções $E1(\lambda)$ e $E2(\lambda)$ são dadas por (F.17- a e b).

Uma vez determinados os valores $To(\chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_1^+)$, $G(q^+; \chi_2^+)$ e $V_0^+(\chi_2^+)$, os valores $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,2}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,2}^+)$ podem ser calculados.

O funcional $G(\chi_{e,2}^+; \psi)$, com $\chi_{e,2}^+$ dada por (3.91), é expresso por:

$$G(\chi_{e,2}^+; \psi) = G(\chi_2^+; \psi) - To(\chi_2^+) \cdot G(q^+; \psi) \quad (ix)$$

Substituindo-se ψ por (3.91) em (ix), $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+)$ é dado por:

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+) = G(\chi_2^+; \chi_2^+) - 2 \cdot To(\chi_2^+) \cdot G(q^+; \chi_2^+) + \\ + [To(\chi_2^+)]^2 \cdot G(q^+; q^+) \quad (x)$$

Substituindo-se $To(\chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (x), resulta para $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+) = E1(\lambda) + O(a) \quad (F.22)$$

Substituindo-se ψ por (3.89) em (ix), $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+)$ é dado por:

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+) = G(\chi_2^+; \chi_2^+) - To(\chi_2^+) \cdot G(q^+; \chi_1^+) - \\ - To(\chi_1^+) \cdot G(\chi_2^+; q^+) + To(\chi_2^+) \cdot To(\chi_1^+) \cdot G(q^+; q^+) \quad (xi)$$

Substituindo-se $To(\chi_2^+)$, $To(\chi_1^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; \chi_1^+)$, $G(\chi_2^+; q^+)$, $G(\chi_1^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xi), resulta para $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+) = E_2(\lambda) + O(a) \quad (F.23)$$

Com $\psi = q^+$ em (ix):

$$G(\chi_{e,2}^+; q^+) = G(\chi_2^+; q^+) - To(\chi_2^+) \cdot G(q^+; q^+) \quad (xii)$$

Substituindo-se $To(\chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xii), resulta para $G(\chi_{e,2}^+; q^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,2}^+; q^+) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] \quad (F.24)$$

A partir de (3.91), o valor $V_0^+(\chi_{e,2}^+)$ é expresso por:

$$V_0^+(\chi_{e,2}^+) = V_0^+(\chi_2^+) - To(\chi_2^+) \cdot V_0^+(q^+) \quad (xiii)$$

Substituindo-se $To(\chi_2^+)$, $V_0^+(\chi_2^+)$ e $V_0^+(q^+)$ em (xiii), resulta para $V_0^+(\chi_{e,2}^+)$ a expressão:

$$V_0^+(\chi_{e,2}^+) = \frac{\pi}{2} \quad (F.25)$$

Os valores dos funcionais com a função $\chi_{e,2}^+$ no argumento, ou seja, os valores $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,2}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,2}^+)$, já avaliados,

seguem:

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+) = E1(\lambda) + O(a) \quad (F.22)$$

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+) = E2(\lambda) + O(a) \quad (F.23)$$

$$G(\chi_{e,2}^+; q^+) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (F.24)$$

$$V_0^+(\chi_{e,2}^+) = \frac{\pi}{2} \quad (F.25)$$

onde as funções $E1(\lambda)$ e $E2(\lambda)$ são dadas por (F.17).

Resta avaliar os valores dos funcionais onde $\chi_{e,3}^+$ faz parte do argumento, ou seja, avaliar $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,3}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,3}^+)$, mas para que isso seja possível, será necessário avaliar os valores $Tn(\chi_{s^+}^+)$, $G(\chi_{s^+}^+; \chi_{s^+}^+)$, $G(\chi_{s^+}^+; \chi_1^+)$, $G(\chi_{s^+}^+; \chi_2^+)$, $G(q^+; \chi_{s^+}^+)$ e $V_0^+(\chi_{s^+}^+)$.

A função $\chi_{s^+}^+(x,y)$ foi definida, no item 3.10.3.1, pela expressão (3.92), dada por:

$$\chi_{s^+}^+(x,y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial w^-(z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial w^-(z_2)}{\partial z_2} \right\} \quad (3.92)$$

onde $w^-(z_j) = -\frac{i}{2 \cdot \pi} \cdot \ln [-1 \cdot (z_j + \sqrt{z_j^2 - 1})]$.

Utilizando-se os sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) , ilustrados na figura F.1, a função

$\chi_3^+(x,y)$ pode ser escrita como:

$$\chi_3^+(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right\} \quad (\text{F.26})$$

As funções $w^-(z_1)$ e $w^-(z_2)$ e as suas derivadas, respectivamente, em relação a z_1 e z_2 , são funções analíticas no domínio S^+ . Conseqüentemente, as derivadas primeiras de $\chi_3^+(x,y)$ em relação a x e y são obtidas a partir das derivadas das funções $w^-(z_j)$ através das relações de Cauchy-Riemann como:

$$\frac{\partial \chi_3^+}{\partial x}(x,y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial^2 w^-(z_1)}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w^-(z_2)}{\partial z_2^2} \right\} \quad (\text{F.27- a})$$

e

$$\frac{\partial \chi_3^+}{\partial y}(x,y) = - \text{Imag} \left\{ \frac{\partial^2 w^-(z_1)}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 w^-(z_2)}{\partial z_2^2} \right\} \quad (\text{F.27- b})$$

onde

$$\frac{\partial^2 w^-(z_j)}{\partial z_j^2} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{z_j}{(z_j^2 - 1)^{3/2}} \quad (\text{F.28})$$

A partir de (F.27) e (F.28), obtém-se as expressões das derivadas primeiras de $\chi_3^+(x,y)$ em relação a x e y em termos dos sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_3^+}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{3/2}} \left[x \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} - (y + \lambda) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] + \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[x \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (y - \lambda) \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] \right\} \quad (\text{F.29- a}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_3^+}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{-1}{(r_1 \cdot r_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} + (y + \lambda) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] + \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. - (y - \lambda) \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] \right\} \quad (\text{F.29- b}) \end{aligned}$$

A seguir, os valores envolvendo a função $\chi_3^+(x, y)$ serão avaliados, mas antes necessita-se determinar as funções:

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{\partial \chi_3^+}{\partial y}(x, -\lambda^\pm) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} + 2 \cdot \lambda \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] \right\} \quad (\text{F.30- a}) \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \chi_3^+(x, -\lambda^+) - \chi_3^+(x, -\lambda^-) = -\frac{1}{\pi} \cdot (1 - x^2)^{-1/2} \quad (\text{F.30- b})$$

$$\text{iii) } \chi_3^+(a, \theta) \sim -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (\text{F.30- c})$$

$$\text{iv) } \frac{\partial \chi_3^+}{\partial r}(a, \theta) \sim \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \frac{1}{(2 \cdot a)^{3/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (\text{F.30- d})$$

Lembrando de (3.6) e utilizando-se (3.5- c) e (F.30- c), $T_n(\chi_3^+)$ é expresso por:

$$T_0(\chi_3^+) = - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (\text{F.31- a})$$

e

$$T_n(\chi_3^+) = 0 \text{ para } n=1,2,3,\dots \quad (\text{F.31- b})$$

A função $\chi_3^+(x,y)$, como é fácil constatar, satisfaz a equação de Laplace, a condição de contorno na parede sólida e no infinito. Conseqüentemente, a expressão para o funcional $G(\chi_3^+; \psi^+)$, onde ψ^+ é uma função par contínua, é dada por (D.4), ou seja:

$$G(\chi_3^+; \psi^+) = - \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \frac{\partial \chi_3^+}{\partial y}(x, -d^+) \cdot [\psi^+(x, -d^+) - \psi^+(x, -d^-)] \cdot dx \\ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi_3^+}{\partial r}(a, \theta) \cdot \psi^+(a, \theta) \cdot a \cdot d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot T_n(\chi_3^+) \cdot T_n(\psi^+)$$

Utilizando-se (F.30- a e d) e (F.31- b), resulta que $G(\chi_3^+; \psi^+)$ é expresso por:

$$G(\chi_3^+; \psi^+) = - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \lambda \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] \cdot [\psi^+(x, -\lambda^+) - \psi^+(x, -d^-)] \right\} dx \\ - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot T_0(\psi^+) \quad (\text{F.32})$$

Definem-se as funções do parâmetro λ , dadas por:

$$E3(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{1-x^2}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} + 2\lambda \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] dx$$

(F.33- a)

e

$$E4(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \left[x \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} + 2\lambda \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right] dx$$

(F.33- b)

Substituindo-se ψ^+ por χ_3^+ em (F.32) e a partir de (F.30- b) e (F.31- a), o valor $G(\chi_3^+, \chi_3^+)$ é expresso por:

$$G(\chi_3^+, \chi_3^+) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot a} + O(1)$$

(F.34)

Substituindo-se ψ^+ por χ_1^+ em (F.32) e a partir de (F.1- b) e (F.2- a), o valor $G(\chi_3^+, \chi_1^+)$ é expresso em função de $E3(\lambda)$ como:

$$G(\chi_1^+; \chi_3^+) = E3(\lambda)/2 \cdot \pi + O(a^{1/2})$$

(F.35)

Substituindo-se ψ^+ por χ_2^+ em (F.32) e a partir de (F.14- b) e (F.15- a), o valor $G(\chi_3^+, \chi_2^+)$ é expresso em função de $E4(\lambda)$ como:

$$G(\chi_3^+; \chi_2^+) = -\frac{1}{\pi} \cdot E4(\lambda) - 1/4 + O(a)$$

(F.36)

Substituindo-se ψ^+ por q^+ em (F.32) e a partir de

(E.9- d) e (3.30), o valor $G(\chi_3^+, q^+)$ é expresso por:

$$G(q^+; \chi_3^+) = - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (\text{F.37})$$

A partir de (3.21) e (F.30- b), o valor $V_0^+(\chi_3^+)$ é dado por:

$$V_0^+(\chi_3^+) = - \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} (1-x^2)^{-1/2} dx \quad (\text{xiv})$$

Avaliando-se o integral em (xiv):

$$V_0^+(\chi_3^+) = - \frac{1}{2} \quad (\text{F.38})$$

Até agora, foram obtidos os valores de funcionais envolvendo a função χ_3^+ , listados a seguir:

$$G(\chi_3^+, \chi_3^+) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot a} + O(1) \quad (\text{F.34})$$

$$G(\chi_1^+; \chi_3^+) = E3(\lambda)/2 \cdot \pi + O(a^{1/2}) \quad (\text{F.35})$$

$$G(\chi_3^+; \chi_2^+) = - \frac{1}{\pi} \cdot E4(\lambda) - 1/4 + O(a) \quad (\text{F.36})$$

$$G(q^+; \chi_3^+) = - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (\text{F.37})$$

$$V_0^+(\chi_2^+) = - \frac{1}{2} \quad (\text{F.38})$$

onde as funções $E3(\lambda)$ e $E4(\lambda)$ são dadas por (F.33- a e b).

Uma vez determinados os valores $T_0(\chi_3^+)$, $G(\chi_3^+; \chi_3^+)$,

$G(\chi_3^+; \chi_1^+)$, $G(\chi_3^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_3^+; q^+)$ e $V_0^+(\chi_3^+)$, os valores $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(\chi_{e,3}^+; q^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,3}^+)$ podem ser avaliados.

O funcional $G(\chi_{e,3}^+; \psi)$ com $\chi_{e,3}^+$ dada por (3.93), é expresso por:

$$G(\chi_{e,3}^+; \psi) = G(\chi_3^+; \psi) - \text{To}(\chi_3^+) \cdot G(q^+; \psi) \quad (\text{xv})$$

Substituindo-se ψ por (3.93) em (xv), $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+)$ é dado por:

$$G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+) = G(\chi_3^+; \chi_3^+) - 2 \cdot \text{To}(\chi_3^+) \cdot G(q^+; \chi_3^+) + [\text{To}(\chi_3^+)]^2 \cdot G(q^+; q^+) \quad (\text{xvi})$$

Substituindo-se $\text{To}(\chi_3^+)$, $G(\chi_3^+; \chi_3^+)$, $G(\chi_3^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xvi), resulta para $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,3}^+) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] + O(1) \quad (\text{F.39})$$

Substituindo-se ψ por (3.89) em (xv), $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+)$ é dado por:

$$G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+) = G(\chi_3^+; \chi_1^+) - \text{To}(\chi_3^+) \cdot G(q^+; \chi_1^+) - \text{To}(\chi_1^+) \cdot G(\chi_3^+; q^+) + \text{To}(\chi_3^+) \cdot \text{To}(\chi_1^+) \cdot G(q^+; q^+) \quad (\text{xvii})$$

Substituindo-se $\text{To}(\chi_3^+)$, $\text{To}(\chi_1^+)$, $G(\chi_3^+; \chi_1^+)$,

$G(\chi_3^+; q^+)$, $G(\chi_1^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xvii), resulta para $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,1}^+) = E3(\lambda)/2.\pi + O(a^{1/2}.\ln a) \quad (\text{F.40})$$

Substituindo-se ψ por (3.91) em (xv), $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+)$ é dado por:

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+) &= G(\chi_3^+; \chi_2^+) - T_0(\chi_3^+).G(q^+; \chi_2^+) - \\ &\quad - T_0(\chi_2^+).G(\chi_3^+; q^+) + T_0(\chi_3^+).T_0(\chi_2^+).G(q^+; q^+) \end{aligned} \quad (\text{xviii})$$

Substituindo-se $T_0(\chi_3^+)$, $T_0(\chi_2^+)$, $G(\chi_3^+; \chi_2^+)$, $G(\chi_3^+; q^+)$, $G(\chi_2^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xviii), resulta para $G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^+; \chi_{e,2}^+) = - E4(\lambda)/\pi - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a) \quad (\text{F.41})$$

Com $\psi = q^+$ em (xv):

$$G(\chi_{e,3}^+; q^+) = G(\chi_2^+; q^+) - T_0(\chi_2^+).G(q^+; q^+) \quad (\text{xix})$$

Substituindo-se $T_0(\chi_2^+)$, $G(\chi_2^+; q^+)$ e $G(q^+; q^+)$ em (xix) expressão acima, resulta para $G(\chi_{e,3}^+; q^+)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^+; q^+) = \frac{1}{4a.(2\pi)^{1/2}} \cdot \left[\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.42})$$

A partir de (3.93), o valor $V_0^+(\chi_{e,3}^+)$ é dado por:

$$V_0^+(\chi_{e,s}^+) = V_0^+(\chi_s^+) - T_0(\chi_s^+) \cdot V_0^+(q^+) \quad (\text{xx})$$

Substituindo-se $T_0(\chi_s^+)$, $V_0^+(\chi_s^+)$ e $V_0^+(q^+)$ em (xx), resulta para $V_0^+(\chi_{e,s}^+)$ a expressão:

$$V_0^+(\chi_{e,s}^+) = -\frac{1}{2} \quad (\text{F.43})$$

O restante dos valores avaliados em F.1, ou seja, os valores $G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,s}^+)$, $G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,1}^+)$, $G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,2}^+)$, $G(q^+; \chi_{e,s}^+)$ e $V_0^+(\chi_{e,s}^+)$, são listados a seguir:

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,s}^+) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] + O(1) \quad (\text{F.39})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,1}^+) = E3(\lambda)/2 \cdot \pi + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.40})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,2}^+) = -E4(\lambda)/\pi - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a) \quad (\text{F.41})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; q^+) = \frac{1}{4a \cdot (2\pi)^{1/2}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.42})$$

$$V_0^+(\chi_{e,s}^+) = -\frac{1}{2} \quad (\text{F.43})$$

onde as funções $E3(\lambda)$ e $E4(\lambda)$ são dadas por (F.33).

F.2.AVALIAÇÃO DOS FUNCIONAIS COM AS FUNÇÕES $\chi_{e,n}^-$ COMO ARGUMENTO.

Aqui serão avaliados os valores dos funcionais onde as funções-teste $\chi_{e,n}^-(x,y)$ fazem parte do argumento. As funções-teste $\chi_{e,n}^-(x,y)$ são construídas em termos das funções χ_n^- , de acordo com a expressão (3.68), caso χ_n^- seja contínua, ou de acordo com a expressão (3.69), caso a função χ_n^- possua uma descontinuidade do tipo (3.11). Portanto, os valores dos funcionais cujo argumento é constituído pelas funções-teste $\chi_{e,n}^-$, dependem dos valores dos funcionais onde as funções χ_n^- fazem parte do argumento, ou seja, dependem dos valores $T_0(\chi_n^-)$, $G(\chi_n^-; \chi_m^-)$, $G(q^-; \chi_n^-)$ e $V_0^-(\chi_n^-)$.

Para que os valores $G(\chi_{e,n}^-; \chi_{e,m}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,n}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,n}^-)$ possam ser efetivamente avaliados, serão inicialmente calculados os valores $T_0(\chi_n^-)$, $G(\chi_n^-; \chi_m^-)$, $G(q^-; \chi_n^-)$ e $V_0^-(\chi_n^-)$. As expressões para os funcionais $G(\phi; \psi)$, $V_0^-(\psi)$ e $T_n(\psi)$ são dadas, respectivamente, pelas expressões (3.23), (3.27) e (3.6).

Inicialmente, serão avaliados os valores dos funcionais onde a função $\chi_1^-(x,y)$ faz parte do argumento, ou seja, serão avaliados os valores $T_n(\chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_1^-)$ e $V_0^-(\chi_1^-)$. A partir destes valores serão

construídos os valores $G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^+; \chi_{e,1}^+)$ e $V_0^-(\chi_{e,1}^-)$. Posteriormente, serão avaliados os valores dos funcionais envolvendo $\chi_2^-(x,y)$, ou seja, os valores $T_0(\chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_2^-)$ e $V_0^-(\chi_2^-)$. A partir destes serão obtidos os valores $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-)$, $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,2}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,2}^-)$. Finalmente, serão avaliados os valores envolvendo a função $\chi_3^-(x,y)$, utilizados para obter os valores $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,3}^-)$, $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,3}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,3}^-)$.

A função $\chi_1^-(x,y)$ é definida no item 3.10.3.1 pela expressão (3.94), ou seja:

$$\chi_1^-(x,y) = \begin{cases} -x/2 & \text{em Sp} \\ -1/2 & \text{em } (S^+ \cup S^-) - \text{Sp} \end{cases} \quad (3.94)$$

A seguir, serão avaliados os valores $T_n(\chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; \chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; R^-)$, $G(\chi_1^-; q^-)$ e $V_0^-(\chi_1^-)$. Para que isso seja possível, necessita-se determinar as funções:

$$i) \quad \nabla \chi_1^- = \begin{cases} -1/2 \uparrow & \text{em Sp} \\ 0 & \text{em } (S \cup S^+) - \text{Sp} \end{cases} \quad (F.44- a)$$

$$ii) \quad \chi_1^-(x, -\lambda^+) - \chi_1^-(x, -\lambda^-) = (1 - x)/2 \quad (F.44- b)$$

$$iii) \quad \chi_1^-(0^-, y) - \chi_1^-(0^+, y) = 1 \quad (F.44- c)$$

$$\text{iv) } \chi_1^-(a, \theta) \sim \begin{cases} -(1 + a \cdot \cos \theta)/2 & \text{para } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ -1/2 & \text{para } -\pi \leq \theta < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{F.44- d})$$

$$\text{v) } \frac{\partial \chi_1^-}{\partial r}(a, \theta) \sim \begin{cases} -(\cos \theta)/2 & \text{para } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{para } -\pi \leq \theta < \pi/2 \end{cases} \quad (\text{F.44- e})$$

O funcional $T_n(\psi)$ é definido por (3.6), e a função $\chi_1^-(x, y)$, no círculo de raio Cr , é definida pela expressão (F.44- d). Então, $T_n(\chi_1^-)$ é dado por:

$$T_n(\chi_1^-) = -\frac{a}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta) \cdot d\theta - \frac{a^2}{2} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} g_n(\theta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta \quad (\text{i})$$

Substituindo-se a expressão para $g_n(\theta)$, dada por (3.5- c), nos integrais em (i) e avaliando-se-os, os valores $T_n(\chi_1^-)$ serão dados por:

$$T_0(\chi_1^-) = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \quad (\text{F.45- a})$$

e

$$T_{2n}(\chi_1^-) = -\sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{a}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \sin \frac{(2n+1) \cdot \pi}{4}} \right] \quad (\text{F.45- b})$$

$$T_{4n-1}(\chi_1^-) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \cdot \frac{a}{(2n-1) \cdot 2n} \cdot \left[\cos n \cdot \pi \right], \quad n \geq 1 \quad (\text{F.45- c})$$

$$T_{4n-3}(\chi_1^-) = 0 \quad (\text{F.45- d})$$

Utilizando-se (3.23), constata-se que o funcional

$G(\chi_1^-; \psi^-)$ é expresso por:

$$G(\chi_1^-; \psi^-) = \iint_{Sp} \nabla \chi_1^- \cdot \nabla \psi^- \, dS + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2 \cdot a} T_n(\chi_1^-) \cdot T_n(\psi^-) \quad (ii)$$

Substituindo-se (F.44- a) e (F.45- b, c e d) em (ii),

segue que:

$$\begin{aligned} G(\chi_1^-, \psi^-) = & -\frac{1}{2} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-d}^0 \int_0^{1-a} \left[\frac{\partial \psi^-}{\partial x}(x, y) \right] \partial x \cdot \partial y + \\ & + \sqrt{\frac{a}{2 \cdot \pi}} \cdot \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot T_{2n}(\psi^-)}{(2n-1) \cdot (2n+3)} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \sin \frac{(2n+1) \cdot \pi}{4} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n \cdot T_{4n-1}(\psi^-)}{(2n-1) \cdot 2n} \cdot \left[\cos n \cdot \pi \right] \right\} \quad (F.46) \end{aligned}$$

Substituindo-se ψ^- por χ_1^- em (F.46) e a partir de (F.44- a) e (F.45- b, c e d), o valor $G(\chi_1^-; \chi_1^-)$ é dado por:

$$G(\chi_1^-; \chi_1^-) = \frac{\lambda}{4} + O(a^2) \quad (F.47)$$

Substituindo-se ψ^- por χ_1^- em (E.11) e a partir de (F.44- b, c e d) e (F.45- b, c e d), o valor $G(q^-; \chi_1^-)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
G(q^-; \chi_1^-) = & -\frac{3}{8} \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \pm \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \mp \right. \\
& \left. \mp \frac{1}{(x+1)^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right\} \cdot (1-x) dx - \\
& -\frac{3}{4} \sqrt{\pi \cdot a} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-d} \left[\frac{y+\lambda}{[1+(y+\lambda)^2]^2} - \frac{y-\lambda}{[1+(y-\lambda)^2]^2} \right] \cdot dx + \\
& + O(a^{1/2})
\end{aligned}$$

Avaliando-se os integrais nesta expressão:

$$G(q^-; \chi_1^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 0 \quad (\text{F.48})$$

Substituindo-se ψ^- por R^- em (F.46) e a partir de (E.4- c) e (E.2- a e b), o valor $G(R^-; \chi_1^-)$ é dado por:

$$G(\chi_1^-; R^-) = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-d}^0 \int_0^{1-a} \left(n \cdot \frac{x^{n-1}}{4} \right) \partial x \cdot \partial y + O(a^2) \quad (\text{iii})$$

Avaliando-se o integral em (iii):

$$G(\chi_1^-; R^-) = \lambda/4 + O(a^2) \quad (\text{F.49})$$

Com (3.27), verifica-se que $V_0^-(\chi_1^-)$ é dado pela expressão:

$$V_0^-(\chi_1^-) = -G(\chi_1^-; R^-) - \frac{1}{2 \cdot a} \text{To}(R^-) \cdot \text{To}(\chi_1^-) \quad (\text{iv})$$

Utilizando-se (F.49), (F.45- a) e (E.2), (iv) reduz-se

a:

$$V_0^-(\chi_1^-) = -\frac{\lambda}{4} + O(a) \quad (\text{F.50})$$

Os valores dos funcionais onde a função χ_1^- faz parte do argumento, e que foram calculados neste anexo, são listados a seguir.

$$T_0(\chi_1^-) = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\pi}} \quad (\text{F.45- a})$$

$$G(\chi_1^-; \chi_1^-) = \frac{\lambda}{4} + O(a^2) \quad (\text{F.47})$$

$$G(q^-; \chi_1^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 0 \quad (\text{F.48})$$

$$G(\chi_1^-; R^-) = \lambda/4 + O(a^2) \quad (\text{F.49})$$

$$V_0^-(\chi_1^-) = -\frac{\lambda}{4} + O(a) \quad (\text{F.50})$$

Uma vez determinados os valores $T_0(\chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_1^-)$, $G(R^-; \chi_1^-)$ e $V_0^-(\chi_1^-)$, os valores $G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,1}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,1}^-)$ podem ser calculados.

O funcional $G(\chi_{e,1}^-; \psi)$, com $\chi_{e,1}^-$ dado por (3.95), é expresso por:

$$G(\chi_{e,1}^-; \psi) = G(\chi_1^-; \psi) - G(R^-; \psi) - [T_0(\chi_1^-) - T_0(R^-)] \cdot G(\psi; q^-) \quad (\text{v})$$

Substituindo-se ψ por $\chi_{e,1}^-$ em (v), $G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-)$ é expresso por:

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-) &= G(\chi_1^-; \chi_1^-) - 2.G(\chi_1^-; R^-) + G(R^-; R^-) - \\ &- 2.[To(\chi_1^-) - To(R^-)].[G(\chi_1^-; q^-) - \\ &- G(R^-; q^-)] + [To(\chi_1^-) - To(R^-)]^2.G(q^-; q^-) \end{aligned} \quad (vi)$$

Substituindo-se $To(\chi_1^-)$, $To(R^-)$, $G(\chi_1^-; \chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; q^-)$, $G(\chi_1^-; R^-)$, $G(R^-; q^-)$ e $G(q^-; q^-)$ em (vi), resulta para $G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda.(n-1)^2}{4.(2.n-1)} + O(a^2.ln a) \quad (F.51)$$

Substituindo-se ψ por q^- em (v):

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,1}^-; q^-) &= G(\chi_1^-; q^-) - G(R^-; q^-) - [To(\chi_1^-) - To(R^-)]. \\ &.G(q^-; q^-) \end{aligned} \quad (vii)$$

Substituindo-se $To(\chi_1^-)$, $To(R^-)$, $G(\chi_1^-; q^-)$, $G(\chi_1^-; R^-)$, $G(R^-; q^-)$ e $G(q^-; q^-)$ em (vii), resulta para $G(\chi_{e,1}^-; q^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,1}^-; q^-) \sim O(a^{1/2}.ln a) \quad (F.52)$$

O funcional $V_0^-(\chi_{e,1}^-)$, com $\chi_{e,1}^-$ dada por (3.95), é

expresso por:

$$V_0^-(\chi_{e,1}^-) = V_0^-(\chi_1^-) - V_0^-(R^-) - [To(\chi_1^-) - To(R^-)].V_0^-(q^-) \quad (\text{viii})$$

Substituindo-se os valores $V_0^-(\chi_1^-)$, $V_0^-(R^-)$, $To(\chi_1^-)$, $To(R^-)$ e $V_0^-(q^-)$ em (viii), resulta para $V_0^-(\chi_{e,1}^-)$ a expressão:

$$V_0^-(\chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda(n-1)^2}{4.(2.n-1)} + O(a^2.\ln a) \quad (\text{F.53})$$

Os valores $G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,1}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,1}^-)$, são listados a seguir:

$$G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda.(n-1)^2}{4.(2.n-1)} \quad (\text{F.51})$$

$$G(\chi_{e,1}^-; q^-) \sim O(a^{1/2}.\ln a) \quad (\text{F.52})$$

$$V_0^-(\chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda.(n-1)^2}{4.(2.n-1)} \quad (\text{F.53})$$

A seguir, os valores dos funcionais onde $\chi_{e,2}^-$ faz parte do argumento, serão avaliados, mas para que isso seja possível, será necessário avaliar os valores $To(\chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_2^-)$ e $V_0^-(\chi_2^-)$.

A função $\chi_2^-(x,y)$ foi definida, no item 3.10.2, pela expressão (3.96), ou seja:

$$\chi z^{-}(x,y) = \text{Real} \{ w^{-}(z_1) + w^{-}(z_2) \} \quad (3.96)$$

Os planos complexos $z_1(x_1, y_1)$ e $z_2(x_2, y_2)$ foram comentados no item F.1 (veja figura F.1). A função $w(z_j)$ é expressa por:

$$w^{-}(z_j) = -\frac{i}{2.\pi} \cdot \ln \{ -i \cdot (z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}) \} \quad (3.84- b)$$

A função $w^{-}(z_j)$ é uma função complexa e pode ser escrita como:

$$w^{-}(z_j) = \Lambda_j^{-}(x_j, y_j) + i \cdot \psi_j^{-}(x_j, y_j)$$

onde $\Lambda_j^{-}(x, y)$ é a parte real, e $\psi_j^{-}(x, y)$ é a parte imaginária.

Utilizando-se os sistemas de coordenadas polares ilustrados pela figura F.1, $\Lambda_1^{-}(x, y)$ pode ser representada por:

$$\Lambda_1^{-}(x, y) = \text{Real} \left\{ -\frac{i}{2.\pi} \cdot \ln \left[y_1 - i \cdot x + (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - i \cdot (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \right\} \quad (F.54- a)$$

Definindo:

$$m_1(x, y_1) = \left\{ \left[y_1 + (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right]^2 + \left[x + (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{F.54- b})$$

e

$$\sin \Theta_1(x, y_1) = \frac{-x - (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{m_1(x, y_1)} \quad (\text{F.54- c})$$

ou

$$\cos \Theta_1(x, y) = \frac{y_1 + (r_1 \cdot r_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{m_1(x, y_1)} \quad (\text{F.54- d})$$

possibilita que $\Lambda_1^-(x, y_1)$ seja expresso em função de $m_1(x, y_1)$ e $\Theta_1(x, y_1)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^-(x, y_1) &= \text{Real} \left\{ -\frac{i}{2 \cdot \pi} \ln (m_1(x, y_1) \cdot e^{i \cdot \Theta_1(x, y_1)}) \right\} \\ &= \frac{\Theta_1(x, y_1)}{2 \cdot \pi} \end{aligned} \quad (\text{F.55})$$

A função $w^-(z_1)$ foi construída de maneira que o corte da função logaritma esteja na linha $x = 0$ e $-\lambda > y > -\infty$, ou seja, na borda de S^+ (o corte da função logaritma em $w^-(z_1)$ coincide com o corte do potencial circulatório ϕ_γ). A função $w^-(z_2)$ também possui um corte, mas forá do domínio fluido (o corte da função $w^-(z_2)$ ocorre ao longo da linha $x = 0$ e $\lambda > y > \infty$. No domínio S^+ esta função é contínua). A seguir, será estudada a descontinuidade da função Λ_1^- na

linha $x = 0$ e $y_1 < 0$ ($y < -\lambda$). Considere a geometria ilustrada na figura F.2 abaixo:

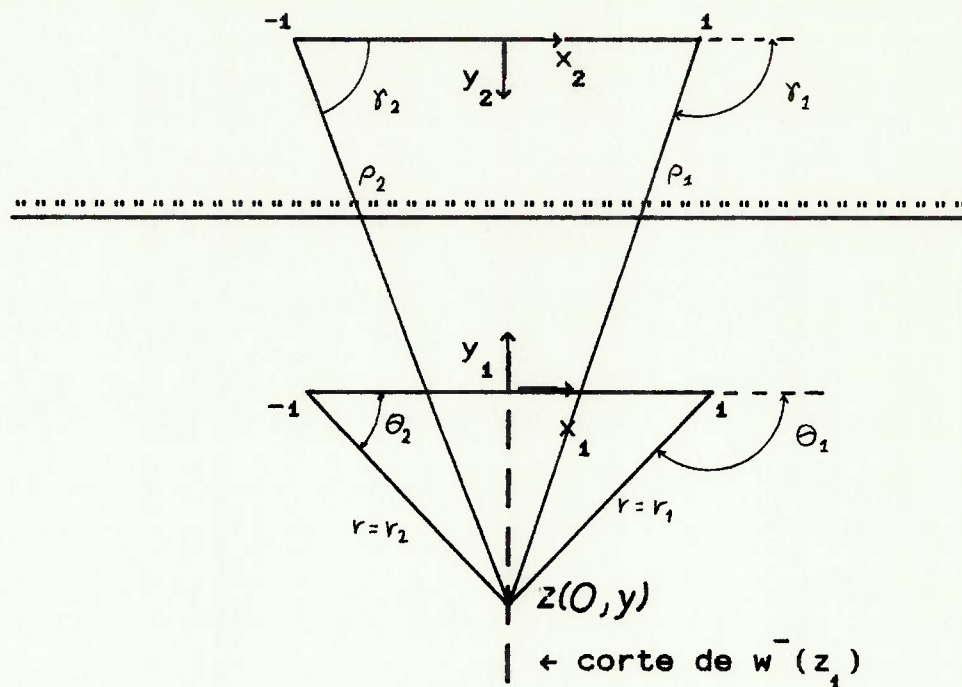


FIG. F.2 - Corte de χz^- no domínio S^+ .

Ao longo da reta $x = 0$, o ângulo $(\theta_1 + \theta_2)/2 = (\pi/2) \cdot (\text{sinal de } y_1)$. Conseqüentemente, $m_1(0, y_1) = |y_1| + r$, onde (r) está indicado na figura F.2. A seguir, as funções (F.54- c e d) serão analisadas ao longo da reta $x = 0$.

a) para $y_1 < 0$

$$\sin \theta_1(x, y_1) \sim - \frac{x}{|y| + r} \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

e

$$\cos \theta_1(x, y_1) \sim -1 \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

Portanto, $\Theta_1(0^-, y_1) \rightarrow \pi$ e $\Theta_1(0^+, y_1) \rightarrow -\pi$ quando $y_1 < 0$.

Desta maneira, pode-se afirmar que:

$$\Theta_1(0^+, y_1) - \Theta_1(0^-, y_1) = 2\pi \quad \text{para } y_1 < 0 \quad (\text{F.56- a})$$

b) para $y_1 > 0$

$$\sin \Theta_1(x, y_1) \sim -\frac{x}{|y| + r} \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

e

$$\cos \Theta_1(x, y_1) \sim +1 \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

Portanto:

$$\Theta_1(0, y_1) = 0 \quad \text{quando } y_1 > 0 \quad (\text{F.56- b})$$

A seguir, a função $\Theta_1(x, y_1)$ será estudada ao longo de $y = -\lambda^\pm$ e $-1 < x < 1$. Em $y = -\lambda^-$ ($y_1 = 0^-$) $(\theta_1 + \theta_2)/2$ vale $\pi/2$, e em $y = -\lambda^+$ ($y_1 = 0^+$) $(\theta_1 + \theta_2)/2$ vale $-\pi/2$. Portanto:

$$(\theta_1 + \theta_2)/2 = (\text{sinal de } y_1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{quando } y \rightarrow -\lambda^\pm \quad (\text{F.57- a})$$

A partir de (F.57- a) e de (F.54- b), constata-se que $m_1(x, 0) = 1$. A partir de (F.54- c e d) e do fato de que $m_1(x, 0) = 1$, constata-se que:

$$\sin \Theta_1(x, y_1) \sim -x \quad \text{quando } y_1 \rightarrow 0^\pm \quad (\text{F.57- b})$$

e

$$\cos \theta_1(x, y_1) \sim \sqrt{1 - x^2} \cdot (\text{sinal de } y_1) \text{ quando } y_1 \rightarrow 0^\pm$$

(F.57- c)

A expressão (F.57) permite concluir que:

$$\theta_1(x, 0^+) - \theta_1(x, 0^-) = 2 \cdot \text{Arcsin} \sqrt{1 - x^2} \quad \text{para } x > 0$$

(F.58- a)

e

$$\theta_1(x, 0^+) - \theta_1(x, 0^-) = -2 \cdot \text{Arcsin} \sqrt{1 - x^2} \quad \text{para } x < 0$$

(F.58- b)

A função $\Lambda_2^-(x, y_2)$ possui expressão similar a expressão para $\Lambda_1^-(x, y_1)$. Utilizando-se os sistemas de coordenadas polares ilustrados na figura F.1, a função $\Lambda_2^-(x, y_2)$ pode ser expressa como:

$$\Lambda_2^-(x, y) = \text{Real} \left\{ - \frac{i}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left[y_2 - i \cdot x + (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - i \cdot (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \right\} \quad (\text{F.59- a})$$

Definindo:

$$m_2(x, y_2) = \left\{ \left[y_2 + (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right]^2 + \left[x + (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{F.59- b})$$

e

$$\sin \Theta_2(x, y_2) = \frac{-x - (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{m_2(x, y_2)} \quad (\text{F.59- c})$$

$$\cos \Theta_2(x, y) = \frac{y_2 + (\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{m_2(x, y_2)} \quad (\text{F.59- d})$$

possibilita que a função $\Lambda_2^-(x, y_2)$ seja escrita de maneira mais simples em termos de $m_2(x, y_2)$ e de $\Theta_2(x, y_2)$ como:

$$\begin{aligned} \Lambda_2^-(x, y_2) &= \text{Real} \left\{ -\frac{i}{2 \cdot \pi} \ln (m_2(x, y_2) \cdot e^{i \cdot \Theta_2(x, y_2)}) \right\} \\ &= \frac{\Theta_2(x, y_2)}{2 \cdot \pi} \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

A função $\Lambda_2^-(x, y_2)$ é contínua ao longo do corte em $x = 0$ e $-\lambda > y > -\infty$ e ao longo do fólio (não apresenta diferença de valores entre o dorso e a face do fólio), como se constata através de (F.59).

A função $\chi_2^-(x, y)$ é definida por (3.96), ou seja, é a soma da parte real das funções $w_j^-(z_j)$. Portanto, χ_2^- é dada por:

$$\chi_2^-(x, y) = \Lambda_1^-(x, y) + \Lambda_2^-(x, y) \quad (\text{F.61- a})$$

Como as funções $\Lambda_j^-(x, y)$ podem ser escritas em termos das funções $\Theta_j(x, y)$, resulta para $\chi_2^-(x, y)$ a expressão:

$$\chi_2^-(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \{ \Theta_1(x, y_1) + \Theta_2(x, y_2) \} \quad (\text{F.61- b})$$

com $\Theta_1(x, y_1)$ dada por (F.54- c ou d) e $\Theta_2(x, y_2)$ dada por (F.59- c ou d).

A derivada de $w^-(z_j)$ é dada por:

$$\frac{\partial w^-(z_j)}{\partial z_j} = - \frac{i}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{(z_j^2 - 1)^{1/2}} \quad (\text{F.62})$$

Como $\chi_2^-(x, y)$ é definido por (F.61- a), segue que:

$$\frac{\partial \chi_2^-(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_2^-}{\partial x_2} \quad (\text{ix})$$

e

$$\frac{\partial \chi_2^-(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Lambda_1^-}{\partial y_1} - \frac{\partial \Lambda_2^-}{\partial y_2} \quad (\text{x})$$

Utilizando-se as condições de Cauchy-Riemann^{1‡}, mais as expressões as (ix) e (x) em função de $\Lambda_j^-(x, y)$:

$$\frac{\partial \chi_2^-(x, y)}{\partial x} = \frac{-1}{2 \cdot \pi} \left\{ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right\} \quad (\text{F.63- a})$$

e

^{1‡} As funções $\Lambda^-(x, y_j)$ e $\psi^-(x, y_j)$ são, respectivamente, a parte real e imaginária de $w^-(z_j)$.

$$\frac{\partial \chi_2^-}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left\{ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right\}$$

(F.63- b)

A seguir, os valores dos funcionais envolvendo a função $\chi_2^-(x, y)$ serão avaliados, mas antes necessita-se determinar as funções:

$$i) \quad \frac{\partial \chi_2^-}{\partial y}(x, -\lambda^\pm) = - \frac{1}{2 \cdot \pi} \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right\} \quad (\text{F.64- a})$$

De (F.58- a) e do fato de que a função $\Theta_2(x, y_2)$ não apresentar salto ao longo de $y = -\lambda^\pm$, segue que:

$$ii) \quad \chi_2^-(x, -\lambda^+) - \chi_2^-(x, -\lambda^-) = \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad \text{em } S^+ \quad (\text{F.64- b})$$

A função $\Theta_2^-(x, y_2)$ é contínua no domínio fluido, mas a função $\Theta_1^-(x, y_1)$ possui uma descontinuidade ao longo de $x = 0$ e $-\lambda > y > -\infty$, de modo que (F.56- a) se verifique. Conseqüentemente, a função $\chi_2^-(x, y)$, dada por (F.61- b), possui o mesmo tipo de descontinuidade que $\Theta_1^-(x, y_1)$, ou seja:

$$iii) \quad \chi_2^-(0^-, y) - \chi_2^-(0^+, y) = 1 \quad \text{com } y < -\lambda \quad (\text{F.64- c})$$

Nas vizinhanças do bordo de fuga constata-se, via

(F.54- b), que $m_1(x, y_1) \sim 1$. Portanto:

$$\cos \Theta_1(x, y_1) \sim \sqrt{2.r} \sin \frac{\theta}{2}$$

e

$$\sin \Theta_1(x, y_1) \sim -1$$

Conseqüentemente, $\Theta_1(r, \theta_1) \sim -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2.r} \sin \frac{\theta}{2}$. A função $\Theta_2(x, y_2)$ na vizinhança do bordo de fuga, via (F.59- c e d), pode ser considerada constante. A partir de (F.61- b) pode-se dizer que:

$$\text{iv) } \chi_2^-(a, \theta) \sim \frac{\sqrt{2.a}}{2.\pi} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \text{cte} \quad (\text{F.64- d})$$

$$\text{v) } \frac{\partial \chi_2^-}{\partial r}(a, \theta) \sim \frac{1}{4.\pi} \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{F.64- e})$$

A partir de (F.63- b), constata-se que:

$$\text{vi) } \frac{\partial \chi_2^-}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{2.\pi} \left\{ \frac{1}{[1 + (y+\lambda)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[1 + (y-\lambda)^2]^{1/2}} \right\} \quad (\text{F.64- f})$$

Utilizando-se (3.6) e (F.64- d), obtém-se que:

$$\text{To}(\chi_2^-) \sim \frac{a}{(2.\pi)^{1/2}} \quad (\text{F.65- a})$$

e

$$\text{Tn}(\chi_2^-) = 0 \text{ para } n=1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.65- b})$$

É fácil verificar que a função $\chi_2^-(x,y)$ satisfaz (3.10- a, c e d). Conseqüentemente, o funcional $G(\chi_2^-; \psi^-)$, com ψ^- ímpar contínua ou com uma descontinuidade do tipo (3.11), é dado por:

$$\begin{aligned}
 G(\chi_2^-; \psi^-) = & - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[\frac{\partial \chi_2^-}{\partial y}(x, -\lambda^+) \cdot \{\psi^-(x, -\lambda^+) - \psi^-(x, -\lambda^-)\} \right] dx - \\
 & - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi_2^-}{\partial r}(a, \theta) \cdot \psi^-(a, \theta) \cdot a \cdot d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2 \cdot a} \cdot T_n(\chi_2^-) \cdot T_n(\psi^-) + \\
 & + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{-h}^{-\lambda} \frac{\partial \chi_2^-}{\partial y}(0, y) \cdot [\psi^-(x, 0^-) - \psi^-(x, 0^+)] dy
 \end{aligned}$$

Utilizando-se (F.64- a, e e f) e (F.65- b), o funcional $G(\chi_2^-; \psi^-)$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 G(\chi_2^-; \psi^-) = & \frac{-1}{2 \cdot \pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot [\psi^-(x, -\lambda^+) - \right. \\
 & \left. - \psi^-(x, -\lambda^-)] \right\} \cdot dx - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot T_0(\psi^-) + \\
 & + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot h} \int_{-h}^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{[1 + (y+\lambda)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[1 + (y-\lambda)^2]^{1/2}} \right\} \cdot \\
 & \cdot [\psi^-(x, 0^-) - \psi^-(x, 0^+)] dy \quad (F.66)
 \end{aligned}$$

Definem-se funções do parâmetro λ , dadas por:

$$\begin{aligned}
 I1(\lambda) &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \ln(\sqrt{1+(2 \cdot \lambda)^2} + 2 \cdot \lambda) + \\
 &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^{1-\alpha} \frac{(1-x)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx
 \end{aligned}
 \tag{F.67- a}$$

$$\begin{aligned}
 I2(\lambda) &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \ln(\sqrt{1+(2 \cdot \lambda)^2} + 2 \cdot \lambda) + \\
 &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \int_0^{1-\alpha} \frac{\arcsin(1-x^2)^{1/2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx
 \end{aligned}
 \tag{F.67- b}$$

$$\begin{aligned}
 I3(\lambda) &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \ln(\sqrt{1+(2 \cdot \lambda)^2} + 2 \cdot \lambda) + \\
 &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^{1-\alpha} \frac{(1-x^n)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx
 \end{aligned}
 \tag{F.67- c}$$

Substituindo-se ψ^- por χz^- em (F.66) e a partir de (F.65- a) e (F.64- b e c), o valor $G(\chi z^-; \chi z^-)$ é dada por:

$$G(\chi z^-; \chi z^-) = I2(\lambda) + O(\alpha) \tag{F.68}$$

Substituindo-se ψ^- por $\chi_1^-(x, y_1)$ em (F.66) e a partir de (F.44- b e c), (F.45- a) e (F.67- a), o valor $G(\chi z^-; \chi_1^-)$ é dada por:

$$G(\chi z^-; \chi_1^-) = I1(\lambda) + O(\alpha^{3/2}) \tag{F.69}$$

Substituindo-se ψ^- por $R^-(x, y)$ em (F.66) e

utilizando-se (F.67- c), (E.4- a e b) e (E.2), o valor $G(\chi_2^-; R^-)$ é expresso por:

$$G(\chi_2^-; R^-) = I3(\lambda) + O(a) \quad (F.70)$$

Substituindo-se ψ^- por $q^-(x,y)$ em (F.66) e a partir de (E.9- d e e) e (3.30):

$$G(\chi_2^-; q^-) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2.\pi)^{1/2}} \quad (F.71)$$

Com (3.27), verifica-se que $V_o^-(\chi_1^-)$ é dado pela expressão:

$$V_o^-(\chi_2^-) = -G(\chi_2^-; R^-) - \frac{1}{2.a} \text{To}(\chi_2^-) \cdot \text{To}(R^-)$$

Utilizando-se (F.70), (E.2) e (F.65- a):

$$V_o^-(\chi_2^-) = -I3(\lambda) + O(a^{3/2}) \quad (F.72)$$

Até agora, foram obtidos os valores de funcionais envolvendo a função χ_2^- , listados a seguir:

$$\text{To}(\chi_2^-) \sim \frac{a}{(2.\pi)^{1/2}} \quad (F.65- a)$$

$$G(\chi_2^-; \chi_2^-) = I2(\lambda) \quad (F.68)$$

$$G(\chi_2^-; \chi_1^-) = I1(\lambda) \quad (F.69)$$

$$G(\chi_2^-; R^-) = I3(\lambda) \quad (F.70)$$

$$G(\chi_2^-; q^-) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \quad (F.71)$$

$$V_0^-(\chi_2^-) = -I3(\lambda) \quad (F.72)$$

Uma vez determinados os valores $To(\chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_2^-)$, $G(R^-; \chi_2^-)$ e $V_0^-(\chi_2^-)$, resta calcular os valores $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-)$, $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,2}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,2}^-)$.

O funcional $G(\chi_{e,2}^-; \psi)$, com $\chi_{e,2}^-$ dada por (3.97), é expresso por:

$$G(\chi_{e,2}^-; \psi) = G(\chi_2^-; \psi) - G(R^-; \psi) - [To(\chi_2^-) - To(R^-)] \cdot G(q^-; \psi) \quad (xi)$$

Substituindo-se ψ por (3.96) em (xi), resulta que $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-)$ é expresso por:

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-) &= G(\chi_2^-; \chi_2^-) - G(R^-; \chi_2^-) - G(R^-; R^-) - \\ &- 2 \cdot [To(\chi_2^-) - To(R^-)] \cdot [G(\chi_2^-; q^-) - \\ &- G(R^-; q^-)] + [To(\chi_2^-) - To(R^-)]^2 \cdot G(q^-; q^-) \end{aligned} \quad (xii)$$

Substituindo-se os valores $To(\chi_2^-)$, $To(R^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_2^-; q^-)$, $G(\chi_2^-; R^-)$, $G(R^-; q^-)$, $G(R^-; R^-)$ e

$G(q^-; q^-)$ em (xii), resulta para $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-) = I_2(\lambda) - 2.I_3(\lambda) - \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2n-1)} + O(a) \quad (F.73)$$

Substituindo-se ψ por (3.95) em (xi), resulta que $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-)$ é expresso por:

$$\begin{aligned} G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-) &= G(\chi_2^-; \chi_1^-) - G(R^-; \chi_1^-) - G(\chi_2^-; R^-) - \\ &- [To(\chi_2^-) - To(R^-)].[G(\chi_1^-; q^-) - G(R^-; q^-)] + \\ &- [To(\chi_1^-) - To(R^-)].[G(\chi_2^-; q^-) - G(R^-; q^-)] + \\ &+ [To(\chi_2^-) - To(R^-)].[T(\chi_1^-) - To(R^-)]. \\ &\cdot G(q^-; q^-) \quad (xiii) \end{aligned}$$

Substituindo-se em (xiii) os valores $To(\chi_2^-)$, $To(R^-)$, $To(\chi_1^-)$, $G(\chi_2^-; \chi_1^-)$, $G(\chi_2^-; q^-)$, $G(\chi_2^-; R^-)$, $G(\chi_1^-; q^-)$, $G(\chi_1^-; R^-)$, $G(R^-; q^-)$, $G(R^-; R^-)$ e $G(q^-; q^-)$, resulta para $G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-) = I_1(\lambda) - I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot (n-1)^2}{4 \cdot (2n-1)} + O(a^{3/2} \cdot \ln a) \quad (F.74)$$

pois, os termos de $O(a^{3/2} \cdot \ln a)$ em diante foram desprezados face a termos de $O(1)$.

Substituindo-se ψ por $q^-(x,y)$ em (xi), $G(\chi_{e,2}^-; q^-)$ é expresso por:

$$G(\chi_{e,z}^-; q^-) = G(\chi_{z^-}; q^-) - G(R^-; q^-) - [To(\chi_{z^-}) - To(R^-)]. \\ \cdot G(q^-; q^-) \quad (xiv)$$

Substituindo-se os valores $To(\chi_{z^-})$, $To(R^-)$, $G(\chi_{z^-}; q^-)$, $G(\chi_{z^-}; R^-)$, $G(R^-; q^-)$, $G(R^-; R^-)$ e $G(q^-; q^-)$ em (xiv), resulta para $G(\chi_{e,z}^-; q^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,z}^-; q^-) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (F.75)$$

O valor $V_o^-(\chi_{e,z})$, com $\chi_{e,z}^-$ dado por (3.97), é expresso por:

$$V_o^-(\chi_{e,z}^-) = V_o^-(\chi_{z^-}) - V_o^-(R^-) - [To(\chi_{z^-}) - To(R^-)] \cdot V_o^-(q^-) \quad (xv)$$

Substituindo-se os valores $To(\chi_{z^-})$, $To(R^-)$, $Vo^-(\chi_{z^-})$, $V_o^-(R^-)$ e $V_o^-(q^-)$ em (xv), resulta para $V_o^-(\chi_{e,z}^-)$ a expressão:

$$V_o^-(\chi_{e,z}^-) = -I3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (F.76)$$

Os valores $G(\chi_{e,z}^-; \chi_{e,z}^-)$, $G(\chi_{e,z}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,z}^-)$ e $V_o^-(\chi_{e,z}^-)$ serão listados a seguir:

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-) = I_2(\lambda) - 2 \cdot I_3(\lambda) - \frac{1}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{F.73})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-) = I_1(\lambda) - I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot (1-n)}{2 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{F.74})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; q^-) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.75})$$

$$V_0^-(\chi_{e,2}^-) = -I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{F.76})$$

onde as funções $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ são dadas por (F.67).

Resta agora avaliar os valores dos funcionais com $\chi_{e,3}^-$ no argumento, ou seja, resta avaliar os valores $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-)$, $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,3}^-)$, $G(\chi_{e,3}^-; q^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,3}^-)$. Para que isso seja possível, é necessário avaliar os valores $T_n(\chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_1^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; q^-)$ e $V_0^-(\chi_3^-)$. A função $\chi_3^-(x, y)$ foi definida, no item 3.10.3.2, de acordo com a expressão (3.98), ou seja:

$$\chi_3^-(x, y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial w^+(z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial w^+(z_2)}{\partial z_2} \right\} \quad (3.98)$$

onde $\partial w^+(z_j)/\partial z_j$ é dada por (F.12).

Utilizando-se os sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) , a função $\chi_3^-(x, y)$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \chi^{\bar{3}}(x,y) = & \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{1/2}} \cdot \left[-x \cdot \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (y + \lambda) \cdot \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[-x \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - (y - \lambda) \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.77})$$

A função $w^+(z_j)$ e suas derivadas são funções analíticas no domínio S^+ . Conseqüentemente, as derivadas parciais de primeira ordem de $\chi^{\bar{3}}(x,y)$ podem ser obtidas a partir da derivada segunda de $w^+(z_j)$ em relação a z_j , utilizando-se as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \chi^{\bar{3}}}{\partial x}(x,y) = \text{Real} \left\{ \frac{\partial^2 w^+(z_1)}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w^+(z_2)}{\partial z_2^2} \right\} \quad (\text{F.78- a})$$

e

$$\frac{\partial \chi^{\bar{3}}}{\partial y}(x,y) = - \text{Imag} \left\{ \frac{\partial^2 w^+(z_1)}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 w^+(z_2)}{\partial z_2^2} \right\} \quad (\text{F.78- b})$$

onde

$$\frac{\partial^2 w^-(z_j)}{\partial z_j^2} = \frac{1}{(z_j^2 - 1)^{3/2}} \quad (\text{F.79})$$

A partir de (F.78) e (F.79), obtém-se as expressões das derivadas primeiras de $\chi^{\bar{3}}(x,y)$ em relação a x e y em termos dos sistemas de coordenadas polares (θ_j, r_j) e (γ_j, ρ_j) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_3^-}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{(r_1 \cdot r_2)^{3/2}} \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \\ &+ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \sin 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \end{aligned} \quad (\text{F.80- a})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_3^-}{\partial y}(x, y) &= \frac{-1}{(r_1 \cdot r_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \\ &+ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \end{aligned} \quad (\text{F.80- b})$$

A seguir, os valores envolvendo a função $\chi_3^+(x, y)$ serão avaliados, mas antes necessita-se determinar as funções:

$$\text{i) } \frac{\partial \chi_3^-}{\partial y}(x, -\lambda^{\pm}) = \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \quad (\text{F.81- a})$$

$$\text{ii) } \chi_3^-(x, -\lambda^+) - \chi_3^-(x, -\lambda^-) = - \frac{2 \cdot x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{F.81- b})$$

$$\text{iii) } \chi_3^-(a, \theta) \sim - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{F.81- c})$$

$$\text{iv) } \frac{\partial \chi_3^-}{\partial r}(a, \theta) \sim (2 \cdot a)^{-3/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{F.81- d})$$

$$\text{v) } \frac{\partial \chi_3^-}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{[1 + (y + \lambda)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[1 + (y - \lambda)^2]^{3/2}} \quad (\text{F.81- e})$$

$$\text{vi) } \chi_3^-(x, 0^-) - \chi_3^-(x, 0^+) = 0 \quad (\text{F.81- f})$$

Com (3.6), (3.5- c) e (F.81- c), constata-se que:

$$T_0(\chi_3^-) = -\sqrt{\pi/2} \quad (\text{F.82- a})$$

$$T_n(\chi_3^-) = 0 \text{ com } n=1,2,3,\dots \quad (\text{F.82- b})$$

A função $\chi_3^-(x,y)$ satisfaz (3.10- a, c e d), de modo que a expressão para o funcional $G(\chi_3^-; \psi^-)$, onde $\psi^-(x,y)$ é uma função ímpar contínua ou, no máximo, com uma descontinuidade do tipo (3.11), é dada pela expressão (D.4). Utilizando-se (F.81- a, d e e) e (F.82- b) em (D.4), $G(\chi_3^-; \psi^-)$ é dado por:

$$\begin{aligned} G(\chi_3^-; \psi^-) = & - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right. \\ & \left. \cdot [\psi^+(x, -\lambda^+) - \psi^+(x, -d^-)] \right\} dx - \frac{a}{(2 \cdot a)^{3/2}} \\ & \cdot \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \psi^-(a, \theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{-\lambda} \left[\frac{1}{[1+(y+\lambda)^2]^{3/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{[1+(y-\lambda)^2]^{3/2}} \right] \cdot [\psi^-(x, 0^-) - \psi^-(x, 0^+)] dx \end{aligned} \quad (\text{F.83})$$

Definem-se funções do parâmetro λ , dadas por:

$$I4(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\arcsin(1-x^2)^{1/2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} dx \quad (\text{F.84- a})$$

$$I5(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{(1-x)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \cos 3 \cdot \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} dx \quad (\text{F.84- b})$$

Substituindo-se ψ^- por χ_2^- em (F.83) e a partir de (F.81- b, c e f), o valor $G(\chi_3^-; \chi_3^-)$ é dada por:

$$G(\chi_3^-; \chi_3^-) = \pi/4 \cdot a + O(1) \quad (\text{F.85})$$

Substituindo-se ψ^- por χ_2^- em (F.83) e a partir de (F.64- b, c, d e f), o valor $G(\chi_2^-; \chi_2^-)$ é dado por:

$$G(\chi_3^-; \chi_2^-) = - I5(\lambda)/\pi + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4 \cdot \lambda^2}} - \frac{1}{4} + O(a) \quad (\text{F.86})$$

Substituindo-se ψ^- por $\chi_1^-(x,y)$ em (F.83) e a partir de (F.44- b e c), (F.45- a) e (F.67- a), o valor $G(\chi_3^-; \chi_1^-)$ é dada por:

$$G(\chi_3^-; \chi_1^-) = - I6(\lambda)/2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4 \cdot \lambda^2}} + O(a^{1/2}) \quad (\text{F.87})$$

Substituindo-se ψ^- por $q^-(x,y)$ em (F.83) e a partir de (E.9- d e e) e (3.59):

$$G(\chi_3^-; q^-) = - \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{\pi/2} \quad (\text{F.88})$$

Com de (3.31) e levando em conta o fato de que na segunda aproximação variacional a função $R^-(x,y)$ coincide com a função $\chi_1^-(x,y)$, verifica-se que $V_0^-(\chi_3^-)$ é dado pela expressão:

$$V_0^-(\chi_3^-) = -G(\chi_3^-; \chi_1^-) - \frac{1}{2.a} \text{To}(\chi_3^-) \cdot \text{To}(\chi_1^-) \quad (\text{xvi})$$

Utilizando-se (F.87), (F.45- a) e (F.82- a) em (xvi), segue que:

$$V_0^-(\chi_3^-) = I6(\lambda)/2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} + O(a^{1/2}) \quad (\text{F.89})$$

Os valores dos funcionais envolvendo a função $\chi_3^-(x,y)$ serão listados a seguir:

$$G(\chi_3^-; \chi_3^-) = \frac{\pi}{4.a} + O(1) \quad (\text{F.85})$$

$$G(\chi_3^-; \chi_2^-) = -I5(\lambda)/\pi + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} - \frac{1}{4} + O(a) \quad (\text{F.86})$$

$$G(\chi_3^-; \chi_1^-) = -I6(\lambda)/2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} + O(a^{1/2}) \quad (\text{F.87})$$

$$G(\chi_3^-; q^-) = -\frac{1}{2.a} \cdot \sqrt{\pi/2} \quad (\text{F.88})$$

$$V_0^-(\chi_3^-) = I6(\lambda)/2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} + O(a^{1/2}) \quad (\text{F.89})$$

onde as funções $I4(\lambda)$ e $I5(\lambda)$ são dadas por (F.84).

Uma vez determinados os valores $\text{To}(\chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_1^-)$, $G(q^-; \chi_3^-)$, $G(R^-; \chi_3^-)$ e $V_0^-(\chi_3^-)$, resta calcular os valores $G(\chi_{e,s}^-; \chi_{e,s}^-)$, $G(\chi_{e,s}^-; \chi_{e,2}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,s}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,s}^-)$.

A função teste $\chi_{e,3}^{-}(x,y)$ é usada, somente, na segunda aproximação variacional onde $R^{-}(x,y) = \chi_{1}^{-}(x,y)$. A função teste $\chi_{e,1}^{-}(x,y)$ não é usada na segunda aproximação variacional, pois $\chi_{1}^{-}(x,y)$ coincide com $R^{-}(x,y)$, e deseja-se evitar combinações lineares.

O funcional $G(\chi_{e,3}^{-};\psi)$, com $\chi_{e,3}^{-}$ dada por (3.99), é expresso por:

$$G(\chi_{e,3}^{-};\psi) = G(\chi_{3}^{-};\psi) - T_0(\chi_{3}^{-}).G(q^{-};\psi) \quad (\text{xvii})$$

Substituindo-se ψ por (3.99) em (xvii), resulta que $G(\chi_{e,3}^{-};\chi_{e,3}^{-})$ é expresso por:

$$G(\chi_{e,3}^{-};\chi_{e,3}^{-}) = G(\chi_{3}^{-};\chi_{3}^{-}) - 2.T_0(\chi_{3}^{-}).G(\chi_{3}^{-};q^{-}) + \\ + [T_0(\chi_{3}^{-})]^2.G(q^{-};q^{-}) \quad (\text{xviii})$$

Substituindo-se os valores $T_0(\chi_{3}^{-})$, $G(\chi_{3}^{-};\chi_{3}^{-})$, $G(\chi_{3}^{-};q^{-})$ e $G(q^{-};q^{-})$ em (xviii), resulta para $G(\chi_{e,3}^{-};\chi_{e,3}^{-})$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^{-};\chi_{e,3}^{-}) = \frac{\pi}{4.a} \cdot \left[\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.90})$$

Substituindo-se ψ por (3.97) em (xvii), resulta que $G(\chi_{e,3}^{-};\chi_{e,2}^{-})$ é expresso por:

$$\begin{aligned}
G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-) &= G(\chi_3^-; \chi_2^-) - G(\chi_1^-; \chi_3^-) - [To(\chi_2^-) - \\
&- To(\chi_1^-)].G(\chi_3^-; q^-) - To(\chi_3^-).[G(\chi_2^-; q^-) - \\
&- G(\chi_1^-; q^-)] + To(\chi_2^-).To(\chi_3^-).G(q^-; q^-)
\end{aligned}$$

(xix)

Substituindo-se os valores $To(\chi_2^-)$, $To(\chi_1^-)$, $To(\chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_2^-)$, $G(\chi_3^-; q^-)$, $G(\chi_3^-; \chi_1^-)$, $G(\chi_1^-; q^-)$, $G(\chi_2^-; q^-)$ e $G(q^-; q^-)$ em (xix), resulta para $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-) = -I4(\lambda)/\pi + I5(\lambda)/2 - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right]$$

(F.91)

Substituindo-se ψ por $q^-(x,y)$ em (xvii), $G(\chi_{e,3}^-; q^-)$ é expresso por:

$$G(\chi_{e,3}^-; q^-) = G(\chi_3^-; q^-) - To(\chi_3^-).G(q^-; q^-) \quad (xx)$$

Substituindo-se os valores $To(\chi_3^-)$, $G(\chi_3^-; q^-)$ e $G(q^-; q^-)$ em (xx), resulta para $G(\chi_{e,3}^-; q^-)$ a expressão:

$$G(\chi_{e,3}^-; q^-) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (F.92)$$

O valor $V_o^-(\chi_{e,3})$, com $\chi_{e,3}^-$ dado por (3.99), é expresso por:

$$V_o^-(\chi_{e,3}^-) = V_o^-(\chi_3^-) - To(\chi_3^-).V_o^-(q^-) \quad (xxi)$$

Substituindo-se os valores $To(\chi_3^-)$, $V_o^-(\chi_3^-)$ e $V_o^-(q^-)$

em (xxi), resulta que:

$$V_0^-(\chi_{e,3}^-) = I5(\lambda)/2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} \quad (\text{F.93})$$

Os valores $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,3}^-)$, $G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,1}^-)$, $G(q^-; \chi_{e,3}^-)$ e $V_0^-(\chi_{e,3}^-)$ serão listados a seguir:

$$G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,3}^-) = \frac{\pi}{4.a} \cdot \left(\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right) \quad (\text{F.90})$$

$$G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-) = -\frac{I4(\lambda)}{\pi} + \frac{I5(\lambda)}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (\text{F.91})$$

$$G(\chi_{e,3}^-; q^-) = \frac{1}{2.a} \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \left(\frac{9.\pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right) \quad (\text{F.92})$$

$$V_0^-(\chi_{e,3}^-) = I5(\lambda)/2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4.\lambda^2}} \quad (\text{F.93})$$

F.3. SUMÁRIO DE FUNCIONAIS.

Os valores dos funcionais necessários ao cálculo das aproximações variacionais foram avaliados ao longo dos itens F.1 e F.2 do anexo F. A seguir, os funcionais necessários à construção da primeira e da segunda aproximação variacional serão listados por uma questão de conveniência para o leitor, no sentido de agilizar o trabalho de consulta. Inicialmente, serão listados, no item F.3.1, os valores que participam na primeira aproximação

variacional e, posteriormente, serão listados, no item F.3.2, os funcionais que participam na segunda aproximação variacional.

F.3.1. VALORES PARA A PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL.

Os valores utilizados na primeira aproximação variacional serão listados a seguir:

$$G(q^{\pm}; q^{\pm}) = \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \quad (\text{E.13})$$

$$V_0^+(q^+) = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$V_0^-(q^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ no limite } a \rightarrow 0 \quad (\text{E.16})$$

$$G(\chi_{e,1}^+; \chi_{e,1}^+) = \frac{4 \cdot \lambda}{3} \quad (\text{F.7})$$

$$G(\chi_{e,1}^+; q^+) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \rightarrow 0 \text{ quando } a \rightarrow 0 \quad (\text{F.8})$$

$$V_0^+(\chi_{e,1}^+) = -2/3 \quad (\text{F.9})$$

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,2}^+) = E1(\lambda) \quad (\text{F.22})$$

$$G(\chi_{e,2}^+; \chi_{e,1}^+) = E2(\lambda) \quad (\text{F.23})$$

$$G(\chi_{e,2}^+; q^+) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] \quad (\text{F.24})$$

$$V_0^+(\chi_{e,2}^+) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{F.25})$$

$$G(\chi_{e,1}^-; \chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda \cdot (n-1)^2}{4 \cdot (2n-1)} \quad (\text{F.51})$$

$$G(\chi_{e,1}^-; q^-) \sim O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.52})$$

$$V_0^-(\chi_{e,1}^-) = \frac{\lambda \cdot (n-1)^2}{4 \cdot (2n-1)} \quad (\text{F.53})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-) = I_2(\lambda) - 2 \cdot I_3(\lambda) - \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2n-1)} \quad (\text{F.73})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,1}^-) = I_1(\lambda) - I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot (1-n)}{2 \cdot (2n-1)} \quad (\text{F.74})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; q^-) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \left[\frac{9\pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.75})$$

$$V_0^-(\chi_{e,2}^-) = -I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2n-1)} \quad (\text{F.76})$$

onde as funções $E_1(\lambda)$ e $E_2(\lambda)$ são dadas por (F.17) e as funções $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ são dadas por (F.67).

F.3.2. VALORES PARA A SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL.

A segunda aproximação variacional para o problema par (potenciais $\phi_{e,j}^+$) utiliza as mesmas funções-teste que a primeira aproximação variacional mais a função-teste $\chi_{e,3}^+(x,y)$. Conseqüentemente, os valores utilizados na primeira aproximação variacional serão utilizados também na segunda aproximação variacional e não serão listados neste

item. A seguir, serão listados os valores utilizados, somente, na segunda aproximação variacional para o problema par, ou seja, valores dos funcionais com a função $\chi_{e,s}^+$ no argumento.

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,s}^+) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] + O(1) \quad (\text{F.39})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,1}^+) = E3(\lambda)/2 \cdot \pi + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.40})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; \chi_{e,2}^+) = - E4(\lambda)/\pi - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a) \quad (\text{F.41})$$

$$G(\chi_{e,s}^+; q^+) = \frac{1}{4a \cdot (2\pi)^{1/2}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.42})$$

$$V_0^+(\chi_{e,s}^+) = - \frac{1}{2} \quad (\text{F.43})$$

onde as funções $E3(\lambda)$ e $E4(\lambda)$ são dadas por (F.33).

A segunda aproximação variacional para o problema ímpar (potenciais $\phi_{e,j}^-$) difere bastante da primeira aproximação variacional. Na segunda aproximação variacional para o problema ímpar, a função $\chi_{e,1}^-$ não toma parte, pois a função χ_{1}^- passa a fazer o papel da função $R^-(x,y)$ e existe uma nova função teste, a função $\chi_{e,s}^-$. A seguir, serão listados os valores necessários à segunda aproximação variacional.

$$G(\chi_{e,2}^-; \chi_{e,2}^-) = I_2(\lambda) - 2 \cdot I_1(\lambda) - \frac{\lambda}{4} \quad (\text{F.73})$$

$$G(\chi_{e,2}^-; q^-) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] + O(a^{1/2} \cdot \ln a) \quad (\text{F.75})$$

$$V_0^-(\chi_{e,2}^-) = -I_1(\lambda) + \frac{\lambda}{4} \quad (\text{F.76})$$

$$G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,3}^-) = \frac{\pi}{4 \cdot a} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.90})$$

$$G(\chi_{e,3}^-; \chi_{e,2}^-) = -I_4(\lambda)/\pi + I_5(\lambda)/2 - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right] \quad (\text{F.91})$$

$$G(\chi_{e,3}^-; q^-) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \quad (\text{F.92})$$

$$V_0^-(\chi_{e,3}^-) = I_5(\lambda)/2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4 \cdot \lambda^2}} \quad (\text{F.93})$$

onde as funções $I_1(\lambda)$ e $I_2(\lambda)$ são dadas por (F.67) e as funções $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ são dadas por (F.84).

Na segunda aproximação variacional a potência "n" assume valor constante 1, de modo que $R^-(x,y)$ coincide com $\chi_1^-(x,y)$. Isso implica que os valores dados por (F.73) e (F.76) não sejam mais funções da potência "n", resultando, respectivamente, nas expressões (F.73- a) e (F.76- a).

* * *

ANEXO G.

APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS PARA OS VALORES Λ_{ij}^{\pm} .

Nos itens 3.10.3.1 e 3.10.3.2, foram definidas as funções-teste que formam a base do espaço de aproximação $H_{e_A}(S^+)$. As funções-teste $\chi_{e,n}^+$ formam uma base par de $H_{e_A}(S^+)$, e as funções-teste $\chi_{e,n}^-$ formam uma base ímpar de $H_{e_A}(S^+)$. Na realidade, as funções-teste $\chi_{e,n}^+$ e $\chi_{e,n}^-$ formam bases de subespaços de $H_{e_A}(S^+)$ (subespaço das funções pares e subespaço das funções ímpares).

O objetivo deste anexo é determinar os valores Λ_{ij}^{\pm} e as aproximações das forças generalizadas. Para determinar os valores Λ_{ij}^{\pm} será necessário obter as projeções $\phi_{e,j}^{\pm}$ em $H_{e_A}(S^+)$. Como mostrado no item 3.8 expressão (3.61), os potenciais $\phi_{e,j}^+$ ($\phi_{e,j}^-$) são combinações lineares das funções-teste pares (ímpares). Conseqüentemente, uma vez determinados os coeficientes $b_{n,j}^+$ ($b_{n,j}^-$) através de (3.63), os valores Λ_{ij}^+ (Λ_{ij}^-) são determinados a partir destes via (3.64).

Com os valores Λ_{ij}^{\pm} , as aproximações variacionais das forças generalizadas serão obtidas como descrito a seguir.

A partir de (3.48), constata-se que as aproximações para os funcionais $G(p^{\pm}; p^{\pm})$ e $V_0^{\pm}(p^{\pm})$ são dadas por:

$$G(p^{\pm}; p^{\pm}) = G(q^{\pm}; p^{\pm}) - \Lambda_{01}^{\pm} \quad (\text{G.1- a})$$

e

$$V_o^{\pm}(p^{\pm}) = V_o^{\pm}(q^{\pm}) + \Lambda_{01}^{\pm} \quad (\text{G.1- b})$$

As funções $q^{\pm}(x, y)$ são fixas e conhecidas, portanto, os valores $G(q^{\pm}; q^{\pm})$ e $V_o^{\pm}(q^{\pm})$ são conhecidos.

Os coeficientes $To(\phi^{\pm})$ são expressos em termos dos valores $G(p^{\pm}; p^{\pm})$ e $V_o^{\pm}(p^{\pm})$, de acordo com a expressão (3.47). A partir de (G.1) e (3.47), obtém-se a aproximação variacional para os coeficientes $To(\phi^{\pm})$, dada por:

$$T_o^{\pm}(\phi^{\pm}) = \frac{V_o^{\pm}(q^{\pm}) + \Lambda_{10}^{\pm}}{G(q^{\pm}; q^{\pm}) - \Lambda_{11}^{\pm} + \frac{1}{2.a}} \quad (\text{G.2})$$

A partir da aproximação variacional dos coeficientes $To(\phi^{\pm})$ e da expressão (3.29), determina-se a aproximação variacional da circulação adimensional, dada por:

$$\gamma^{\pm} = \frac{T_o^{\pm}(\phi^{\pm})}{T_o^{\pm}(\phi^{\pm}) + To(R^{\pm})} \quad (\text{G.3})$$

Como a força de sustentação depende linearmente da circulação adimensional, a aproximação variacional da força de sustentação é expressa em termos dos valores Λ_{11}^{\pm} e Λ_{01}^{\pm} via (G.2), (G.3) e (3.14).

A aproximação variacional para o momento \vec{M} pode ser obtida, diretamente, como função dos valores Λ_{00}^{\pm} e Λ_{10}^{\pm} e

da aproximação do coeficiente $T_0(\phi^+)$, resultando na expressão:

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot \{ \Lambda_{00}^A + T_0^A(\phi^+) \cdot [V_0^+(q^+) + \Lambda_{10}^A] \} \vec{k} \quad (G.4)$$

Uma vez determinada as aproximações variacionais para a força de sustentação \vec{L} e para o momento \vec{M} , a aproximação variacional para o braço do momento em relação ao ponto médio da corda normalizado pela corda é determinada como a razão entre a aproximação do momento e a aproximação da força de sustentação. A aproximação variacional de b/c é expressa por:

$$b/c^A = \frac{\Lambda_{00}^A + T_0^A(\phi^+) \cdot [V_0^+(q^+) + \Lambda_{10}^A]}{\gamma^A} \quad (G.5)$$

A seguir, serão apresentadas duas aproximações variacionais para os valores Λ_{ij}^\pm e para as forças generalizadas.

G.1. PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^\pm .

O espaço de aproximações para a primeira aproximação variacional possui uma base com quatro funções-teste, duas para aproximar o problema par e duas funções-teste para

aproximar o problema ímpar. As funções $\chi_{e,1}^+$ e $\chi_{e,2}^+$ ($\chi_{e,1}^-$ e $\chi_{e,2}^-$) são utilizadas para aproximar o problema par (ímpar). A condição de $F_{ij}^\pm(\phi_e; \psi_e)$ ser estacionário no par $(\phi_{e,j}^\pm; \phi_{e,i}^\pm)$, projeções do par $(\phi_{e,j}^\pm; \phi_{e,i}^\pm)$ em $H_{e,A}(S^\pm)$ com base composta pelas funções $\chi_{e,1}^\pm$ e $\chi_{e,2}^\pm$, gera quatro sistemas bidimensionais de equações cuja solução são os coeficientes $\{b_{n,j}^\pm$ com $n=1,2$ e $j=0,1\}$. Estes coeficientes podem ser expressos na forma matricial:

$$\{b_{n,j}^\pm\} = [G_{nm}^\pm]^{-1} \cdot \{V_j^\pm\}_m \quad (G.6)$$

onde $(n,m=1,2)$ e a matriz $[G_{nm}^\pm]^{-1}$ é dada por:

$$[G_{nm}^\pm]^{-1} = \frac{1}{G(\chi_{e,1}^\pm; \chi_{e,1}^\pm) \cdot G(\chi_{e,2}^\pm; \chi_{e,2}^\pm) - G^2(\chi_{e,1}^\pm; \chi_{e,2}^\pm)} \cdot \begin{bmatrix} G(\chi_{e,2}^\pm; \chi_{e,2}^\pm) & -G(\chi_{e,2}^\pm; \chi_{e,1}^\pm) \\ -G(\chi_{e,2}^\pm; \chi_{e,1}^\pm) & G(\chi_{e,1}^\pm; \chi_{e,1}^\pm) \end{bmatrix} \quad (G.7)$$

Os vetores $\{V_0^\pm\}_m$ e $\{V_1^\pm\}_m$ são expressos pela matriz:

$$\{V_j^\pm\}_m = \begin{bmatrix} V_0^\pm(\chi_{e,1}^\pm) & -G(\chi_{e,1}^\pm; q^\pm) \\ V_0^\pm(\chi_{e,2}^\pm) & -G(\chi_{e,2}^\pm; q^\pm) \end{bmatrix} \quad (G.8)$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \{V_0^\pm\}_m \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow \\ \{V_1^\pm\}_m \end{matrix}$$

Utilizando-se o sumário de funcionais (item F.3.1 do anexo F), obtém-se a aproximação para o problema par (coeficientes $b_{n,j}^+$), dada por:

$$b_{1,0}^+ = \frac{-\frac{\pi}{2} \cdot E_2(\lambda) - \frac{2}{3} \cdot E_1(\lambda)}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \quad (\text{G.9})$$

$$b_{2,0}^+ = \frac{\frac{2}{3} \cdot E_2(\lambda) + \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda}{3}}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \quad (\text{G.10})$$

$$b_{1,1}^+ = \frac{-E_2(\lambda)}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (\text{G.11})$$

$$b_{2,1}^+ = \frac{\frac{4 \cdot \lambda}{3}}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (\text{G.12})$$

e para o problema ímpar (coeficientes $b_{n,j}^-$) segue que:

$$b_{1,0}^- = \frac{B \cdot A - C \cdot D}{A \cdot B - C^2} \quad (\text{G.13})$$

$$b_{2,0}^- = \frac{A \cdot (D - C)}{A \cdot B - C^2} \quad (\text{G.14})$$

$$b_{1,1}^- = \frac{-C}{A \cdot B - C^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (\text{G.15})$$

$$b_{2,1}^- = \frac{A}{A \cdot B - C^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \quad (\text{G.16})$$

onde os parâmetros A, B, C e D são definidos pelas expressões listadas a seguir:

$$A = \frac{\lambda \cdot (1-n)^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{G.17- a})$$

$$B = I_2(\lambda) - 2 \cdot I_3(\lambda) - \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{G.17- b})$$

$$C = I_1(\lambda) - I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot (1-n)^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{G.17- c})$$

$$D = - I_3(\lambda) + \frac{\lambda \cdot n^2}{4 \cdot (2 \cdot n - 1)} \quad (\text{G.17- d})$$

Com os coeficientes $b_{n,j}^{\pm}$ determinados, os valores Λ_{ij}^{\pm} serão construídos a partir de (3.64), resultando nas expressões:

$$\Lambda_{00}^{\text{A}+} = \frac{\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot E_2(\lambda) + \frac{4}{9} \cdot E_1(\lambda) + \frac{\pi^2}{3} \cdot \lambda}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \quad (\text{G.18})$$

$$\Lambda_{01}^{\text{A}+} = \Lambda_{10}^{\text{A}+} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot E_2(\lambda) + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \lambda \right)}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \quad (\text{G.19})$$

$$\Lambda_{11}^{\text{A}+} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda}{3} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right)^2}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - (E_2(\lambda))^2} \quad (\text{G.20})$$

$$\Lambda_{00}^{\text{A}-} = \frac{A^2 \cdot B - 2 \cdot A \cdot C \cdot D + A \cdot D^2}{A \cdot B - C^2} \quad (\text{G.21})$$

$$\Lambda_{01}^{\text{A}-} = \Lambda_{10}^{\text{A}-} = \frac{\frac{A \cdot (D - C)}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right)}{A \cdot B - C^2} \quad (\text{G.22})$$

$$\Lambda_{11}^{\text{A}-} = \frac{\frac{A}{8 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{9}{4} \right)^2}{A \cdot B - C^2} \quad (\text{G.23})$$

onde os parâmetros A, B, C e D são definidos por (G.17).

Utilizando-se a expressão (G.2), os valores $V_0^\pm(q^\pm)$, $G(q^\pm; q^\pm)$ (item F.3.1 do anexo F) e as aproximações para os valores Λ_{01}^\pm e Λ_{11}^\pm (no caso, os valores Λ_{01}^A e Λ_{11}^A), obtém-se as aproximações para os coeficientes $To(\phi^\pm)$, dadas por:

$$To^A(\phi^+) = \sqrt{2.\pi} . a. \left[\frac{\frac{2}{3} . (E2(\lambda) + \frac{2.\pi}{3} . \lambda)}{\frac{4.\lambda}{3} . E1(\lambda) - (E2(\lambda))^2} \right] \quad (G.24- a)$$

e

$$To^A(\phi^-) = a. \sqrt{\frac{1}{2.\pi}} . \frac{A.(D - C)}{A.B - C^2} \quad (G.24- b)$$

A aproximação variacional da circulação adimensional γ é expressa em termos dos coeficientes $To^A(\phi^+)$ e $To(R^-)$ por (G.3). Conseqüentemente, a aproximação variacional da circulação adimensional, γ^A , é dada por:

$$\gamma^A = 2.\pi . \frac{A.B - C^2}{A.(D - C)} . \left[\frac{\frac{2}{3} . E2(\lambda) + \frac{2.\pi}{3} . \lambda}{\frac{4.\lambda}{3} . E1(\lambda) - (E2(\lambda))^2} \right] \quad (G.25- a)$$

ou

$$\gamma^A = \frac{\Lambda_{01}^A +}{\Lambda_{01}^A -} \quad (G.25- b)$$

A aproximação variacional para a força de sustentação é obtida utilizando-se a expressão (3.14) (força de sustentação em função da circulação adimensional) e a aproximação da circulação adimensional γ^A , dada por (G.25).

A aproximação para o momento, por sua vez, é obtida utilizando-se (G.4) e as aproximações para os valores Λ_{ij}^{\pm} . A expressão para a aproximação variacional do momento é dada por:

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot \Lambda_{00}^{\pm} \vec{k} \quad (\text{G.26})$$

onde o valor Λ_{00}^{\pm} é dado por (G.18).

O valor Λ_{00}^{\pm} nada mais é do que a aproximação variacional do coeficiente de massa adicional[†] na direção do eixo y, associado à perturbação da corrente devido ao pequeno ângulo (ângulo de ataque) que o fólio perfaz em relação à corrente.

A aproximação variacional para o braço do momento normalizado pela corda é fornecido por (G.5):

$$b/c^A = \frac{1}{8 \cdot \pi} \cdot \frac{A \cdot (D - C)}{A \cdot B - C^2} \cdot \left[\frac{\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot E2(\lambda) + \frac{4}{9} \cdot E1(\lambda) + \frac{\pi^2}{3} \cdot \lambda}{\frac{2}{3} \cdot E2(\lambda) + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \lambda} \right] \quad (\text{G.27})$$

A seguir, é construída a segunda aproximação variacional para os valores Λ_{ij}^{\pm} e para as forças generalizadas.

[†] Veja anexo B, item B.2, onde os valores Λ_{ij}^{\pm} são interpretados sob o ponto de vista físico.

G.1. SEGUNDA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA OS VALORES Λ_{ij}^{\pm} .

O espaço de aproximações para a segunda aproximação variacional possui uma base com cinco funções-teste, três para aproximar o problema par, e duas funções-teste para aproximar o problema ímpar. As funções $\chi_{e,1}^+$, $\chi_{e,2}^+$ e $\chi_{e,3}^+$ ($\chi_{e,2}^-$ e $\chi_{e,3}^-$) são utilizadas para aproximar o problema par (ímpar). A condição de $F_{ij}^+(\phi_e; \psi_e)$ ser estacionário no par $(\phi_{e,j}^+; \phi_{e,i}^+)$, projeções do par $(\phi_{e,j}^+; \phi_{e,i}^+)$ no subespaço das funções pares de $H_{e,A}(S^+)$ com base composta pelas funções $\chi_{e,1}^+$, $\chi_{e,2}^+$ e $\chi_{e,3}^+$, gera dois sistemas de equações 3×3 , cuja solução são os coeficientes $\{b_{n,j}^+$ com $n=1,2,3$ e $j=0,1\}$. A base do subespaço das funções ímpares de $H_{e,A}(S^+)$ na segunda aproximação variacional é constituída pelas funções $\chi_{e,2}^-$ e $\chi_{e,3}^-$. Então, $F_{ij}^-(\phi_e; \psi_e)$ ser estacionário no par $(\phi_{e,j}^-; \phi_{e,i}^-)$, contido no subespaço das funções ímpares de $H_{e,A}(S^+)$, gera dois sistemas de equações 2×2 cuja solução são os coeficientes $\{b_{n,j}^-$ com $n=1,2$ e $j=0,1\}$. Uma vez determinados os coeficientes $b_{n,j}^{\pm}$, os valores Λ_{ij}^{\pm} são obtidos via (3.64). Os valores utilizados para obter os coeficientes $b_{n,j}^{\pm}$ e os valores Λ_{ij}^{\pm} estão listados no item F.3.2 do anexo F. A seguir, serão listados os valores Λ_{ij}^{\pm} obtidos na segunda aproximação variacional.

O valor Λ_{00}^+ é dado pela mesma expressão nas duas

aproximações variacionais. Portanto, o valor Λ_{00}^+ na segunda aproximação variacional é dado pela expressão (G.18).

$$\Lambda_{01}^+ = \Lambda_{10}^+ = \frac{-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2/\pi} \cdot [A + 2 \cdot B] + 2 \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot [C - D/2 - E_2(\lambda)^2]}{\frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot E_1(\lambda) - E_2(\lambda)^2} \quad (\text{G.28})$$

onde

$$A = E_1(\lambda) \cdot E_3(\lambda) \quad (\text{G.28- a})$$

$$B = E_2(\lambda) \cdot E_4(\lambda) \quad (\text{G.28- b})$$

$$C = \frac{4 \cdot \lambda}{3} \cdot [E_1(\lambda) - E_4(\lambda)] \quad (\text{G.28- c})$$

$$D = \frac{E_2(\lambda) \cdot E_3(\lambda)}{2} \quad (\text{G.28- d})$$

$$\Lambda_{11}^\pm = \left[\frac{9 \cdot \pi^2}{32} + \frac{1}{4} \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \quad (\text{G.29})$$

$$\Lambda_{00}^- = \frac{\left[\frac{\lambda}{4} - I_1(\lambda) \right]^2}{I_2(\lambda) - 2 \cdot I_1(\lambda) + \lambda/4} \quad (\text{G.30})$$

$$\Lambda_{01}^- = \Lambda_{10}^- = \sqrt{2/\pi} \cdot \left\{ \frac{-I_4(\lambda) + I_5(\lambda)/2}{I_2(\lambda) - 2 \cdot I_1(\lambda) + \frac{\lambda}{4}} \cdot \left[\frac{\lambda}{4} - I_1(\lambda) \right] - \frac{I_5(\lambda)}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4 \cdot \lambda^2}} \right\} \quad (\text{G.31})$$

Utilizando-se a expressão (G.2), os valores $v_0^\pm(q^\pm)$, $G(q^\pm; q^\pm)$ (item F.3.1 do anexo F) e as aproximações para os valores Λ_{01}^\pm e Λ_{11}^\pm (no caso, os valores $\Lambda_{01}^{\Delta \pm}$ e $\Lambda_{11}^{\Delta \pm}$ dados por (G.28), (G.29) e (G.31)), obtém-se as aproximações para

os coeficientes $To(\phi^\pm)$, dadas por:

$$To(\phi^+) = a.\Lambda_{01}^A{}^+ \quad (G.32- a)$$

e

$$To(\phi^-) = a.\Lambda_{01}^A{}^- \quad (G.32- b)$$

A circulação adimensional pode ser obtida a partir de (G.32) via (G.3), resultando na expressão:

$$\gamma^A = \frac{\Lambda_{01}^A{}^+}{\Lambda_{01}^A{}^-} \quad (G.33)$$

onde os valores $\Lambda_{01}^A{}^\pm$ são dados por (G.28) e (G.31).

A segunda aproximação variacional para a força de sustentação é obtida utilizando-se a expressão (3.14) e a segunda aproximação da circulação adimensional γ^A , dada por (G.33). A segunda aproximação para o momento coincide com (G.26), pois o valor $\Lambda_{00}^A{}^+$ é o mesmo nas duas aproximações variacionais.

A aproximação variacional para o braço do momento normalizado pela corda é fornecido por (G.5) como:

$$b/c^A = \frac{\Lambda_{00}^A{}^+ . \Lambda_{01}^A{}^-}{\Lambda_{01}^A{}^+} \quad (G.34)$$

onde os valores $\Lambda_{00}^A{}^+$, $\Lambda_{01}^A{}^+$ e $\Lambda_{01}^A{}^-$ são dados, respectivamente, por (G.18), (G.28) e (G.31).

* * *

ANEXO H.

ASSÍNTOTAS DAS APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS DAS FORÇAS GENERALIZADAS NOS LIMITES $\lambda \rightarrow 0$ E $\lambda \rightarrow \infty$.

Neste anexo é avaliado o comportamento assintótico da primeira aproximação variacional das forças generalizadas nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, mas para que isso seja possível, será necessário avaliar as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ nos limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$. No item H.1, será avaliado, inicialmente, o comportamento assintótico das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$ e, posteriormente, serão obtidas as assíntota da primeira aproximação variacional das forças generalizadas neste limite. No item H.2, serão avaliadas as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, de maneira a ser possível construir as assíntotas da primeira aproximação variacional das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$.

As funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ são dadas, respectivamente, pelas expressões (F.17- a), (F.17- b), (F.67- a), (F.67- b) e (F.67- c). Estas funções podem ser escritas em termos das funções $H_j(\lambda)$ com $j=1, \dots, 5$ (No que segue o índice "j" assume valores de 1 a 5) e da função

$f(\lambda)$. As funções $H_j(\lambda)$ e a função $f(\lambda)$ são definidas como:

$$H1(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \left[2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{H.1- a})$$

$$H2(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{(1-x)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx \quad (\text{H.1- b})$$

$$H3(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{1-x}{(\rho \cdot \rho)^{1/2}} \cdot \left[2 \cdot \lambda \cdot (1+x) \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - (1-x) \cdot (2+x) \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{H.1- c})$$

$$H4(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\arcsin(1-x^2)^{1/2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx \quad (\text{H.1- d})$$

$$H5(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{(1-x^n)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} dx \quad (\text{H.1- e})$$

e

$$f(\lambda) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \ln \left(\sqrt{1 + (2 \cdot \lambda)^2} + 2 \cdot \lambda \right) \quad (\text{H.2})$$

As funções $E1(\lambda)$, $E2(\lambda)$, $I1(\lambda)$, $I2(\lambda)$ e $I3(\lambda)$ são expressas em termos das funções $H_j(\lambda)$ e $f(\lambda)$ como:

$$E1(\lambda) = 2 \cdot H1(\lambda) \quad (\text{H.3- a})$$

$$E2(\lambda) = - 2 \cdot H2(\lambda) - H3(\lambda) \quad (\text{H.3- b})$$

$$I1(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{4.\pi} .H2(\lambda) \quad (H.3- c)$$

$$I2(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{2.\pi^2} .H4(\lambda) \quad (H.3- d)$$

$$I3(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{4.\pi} .H5(\lambda) \quad (H.3- e)$$

As funções $H_j(\lambda)$ são expressas em termos de integrais envolvendo as funções $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $1/(\rho_1 . \rho_2)^{1/2}$. Estas funções estão definidas somente ao longo do fólio^{2†} ($y = -\lambda$ e $-1 < x < 1$) e, portanto, são funções de x e λ . Então, para que o comportamento assintótico das funções $E1(\lambda)$, $E2(\lambda)$, $I1(\lambda)$, $I2(\lambda)$ e $I3(\lambda)$ possa ser avaliado, é necessário obter as assíntotas das funções $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $1/(\rho_1 . \rho_2)^{1/2}$ nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$. Porém, é necessário escrever estas funções em termos de x e λ .

Considere a geometria indicada na figura H.1:

^{2†} As funções $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $1/(\rho_1 . \rho_2)^{1/2}$ estão definidas em todo o domínio S^+ e são funções das variáveis x e y . Mas quando estas funções participam do argumento dos integrais presentes nas funções $K_j(\lambda)$, a variável y assume o valor $-\lambda$ e $x \in$ ao intervalo $[-1, 1]$. Portanto, em (C.1) $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $1/(\rho_1 . \rho_2)^{1/2}$ são funções somente de x e λ .

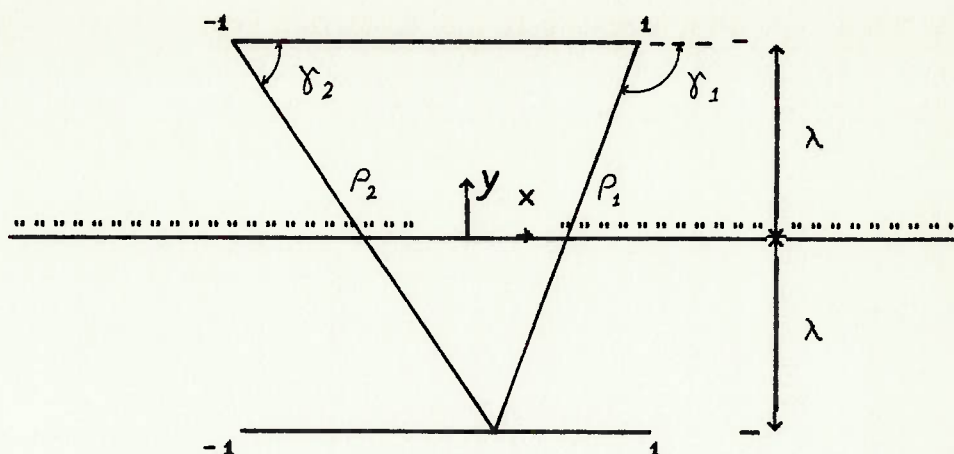


FIG. H.1 - Sistema de coordenadas polares (ρ_1, γ_1) e (ρ_2, γ_2) para $y = -\lambda$ e $-1 < x < 1$.

Os raios ρ_1 e ρ_2 para pontos ao longo do fólho, como ilustrados na figura H.1, podem ser expressos em termos de x e λ de acordo com as expressões:

$$\rho_1 = \sqrt{(1-x)^2 + (2\lambda)^2} \quad (\text{H.4- a})$$

$$\rho_2 = \sqrt{(1+x)^2 + (2\lambda)^2} \quad (\text{H.4- b})$$

A função $1/(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$ pode ser escrita em termos de x e λ com o auxílio das expressões (H.4) como:

$$1/(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} = [(1-x^2)^2 + (1+x^2) \cdot 8\lambda^2 + 16\lambda^4]^{-1/4} \quad (\text{H.5})$$

Com as expressões $\sin \theta/2 = \{1/2 \cdot (1 - \cos \theta)\}^{1/2}$ e $\cos \theta/2 = \{1/2 \cdot (1 + \cos \theta)\}^{1/2}$ mais as fórmulas de adição

para funções trigonométricas, as funções $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ podem ser expressas como:

$$\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2) \right\}^{1/2} \quad (\text{H.6- a})$$

e

$$\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2) \right\}^{1/2} \quad (\text{H.6- b})$$

As funções $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ foram expressas em termos das funções $\sin \gamma_i(x,y)$ e $\cos \gamma_i(x,y)$ (com $i=1,2$). Para pontos (x,y) pertencentes ao contorno do fólio ($y = -\lambda$ e $-1 < x < 1$), estas funções podem ser escritas em termos de x e λ (veja figura H.1), como:

$$\sin \gamma_1 = \frac{2 \cdot \lambda}{\sqrt{(1 - x^2) + (2 \cdot \lambda)^2}} \quad (\text{H.7- a})$$

e

$$\sin \gamma_2 = \frac{2 \cdot \lambda}{\sqrt{(1 + x^2) + (2 \cdot \lambda)^2}} \quad (\text{H.7- b})$$

e

$$\cos \gamma_1 = - \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x^2) + (2 \cdot \lambda)^2}} \quad (\text{H.7- c})$$

e

$$\cos \gamma_2 = \frac{1 + x}{\sqrt{(1 - x^2) + (2 \cdot \lambda)^2}} \quad (\text{H.7- d})$$

Com (H.6) e (H.7), $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ podem ser, finalmente, expressas por:

$$\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \frac{(1 - x^2) + 4.\lambda^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 8.\lambda^2.(1 + x^2) + 16.\lambda^4}} \right]^{1/2}$$

(H.8)

$$\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 - \frac{(1 - x^2) + 4.\lambda^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 8.\lambda^2.(1 + x^2) + 16.\lambda^4}} \right]^{1/2}$$

(H.9)

Uma vez construídas as expressões para as funções $1/(\rho_1.\rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ em termos de x e λ , suas assíntotas nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ serão determinadas. Nos itens H.1 e H.2, serão avaliadas as assíntota das funções $1/(\rho_1.\rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, respectivamente, nos limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$. A partir destas, as assíntotas das funções $H_j(\lambda)$ e, conseqüentemente, as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ serão avaliadas nos limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$.

H.1. ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL PARA AS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow \infty$.

A seguir, o comportamento assintótico das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$ será determinado a partir das assíntotas das funções $1/(\rho_1.\rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ neste limite, mas antes

as assíntotas destas funções no limite $\lambda \rightarrow \infty$ devem ser construídas.

As expressões para $1/(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ podem ser reescritas como:

$$\frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{[(1-x^2)^2/16 \cdot \lambda^4 + (1+x^2)/2 \cdot \lambda^2 + 1]^{1/4}}$$

$$\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{(1-x^2)/4 \cdot \lambda^2 + 1}{\sqrt{(1-x^2)^2/16 \cdot \lambda^4 + (1+x^2)/2 \cdot \lambda^2 + 1}} \right]^{1/2}$$

$$\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{(1-x^2)/4 \cdot \lambda^2 + 1}{\sqrt{(1-x^2)^2/16 \cdot \lambda^4 + (1+x^2)/2 \cdot \lambda^2 + 1}} \right]^{1/2}$$

No limite $\lambda \rightarrow \infty$, as assíntotas destas expressões são, simplesmente, dadas por:

$$\frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \sim \frac{1}{2 \cdot \lambda} \quad (\text{H.5- a})$$

$$\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \sim 1 \quad (\text{H.8- a})$$

$$\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \sim 0 \quad (\text{H.9- a})$$

pois, termos de ordem $O(1/\lambda^n)$, para $n > 1$, são desprezíveis face termos de ordem $O(1/\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$.

Substituindo-se (H.5- a), (H.8- a) e (H.9- a) nas funções $H_j(\lambda)$ (expressões (H.1)), resultam os integrais:

$$H1(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \sqrt{1-x^2} . dx \sim \pi/4 \quad (\text{H.10- a})$$

$$H2(\lambda) \sim 0 \quad (\text{H.10- b})$$

$$H3(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} (1-x^2) . dx \sim 2/3 \quad (\text{H.10- c})$$

$$H4(\lambda) \sim 0 \quad (\text{H.10- d})$$

$$H5(\lambda) \sim 0 \quad (\text{H.10- e})$$

O comportamento assintótico da função $f(\lambda)$, dada por (H.2), no limite $\lambda \rightarrow \infty$ é representado por:

$$f(\lambda) \sim \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \ln 4 \cdot \lambda \quad (\text{H.11})$$

pois $\sqrt{1 + (2 \cdot \lambda)^2} \sim 2 \cdot \lambda$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Substituindo-se (H.10) e (H.11) em (H.3), obtém-se as seguintes assíntotas para as funções $E1(\lambda)$, $E2(\lambda)$, $I1(\lambda)$, $I2(\lambda)$ e $I3(\lambda)$, dadas por:

$$E1(\lambda) \sim \pi/2 \quad (\text{H.12- a})$$

$$E2(\lambda) \sim - 2/3 \quad (\text{H.12- b})$$

$$I1(\lambda) \sim \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \ln 4 \cdot \lambda \quad (\text{H.12- c})$$

$$I2(\lambda) \sim \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \ln 4 \cdot \lambda \quad (\text{H.12- d})$$

$$I3(\lambda) \sim \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \ln 4 \cdot \lambda \quad (\text{H.12- e})$$

As assíntotas para as funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$, no limite $\lambda \rightarrow \infty$, são dadas por (H.12).

Para obter as assíntotas da primeira aproximação variacional das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow \infty$, basta substituir as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ neste limite nas expressões (G.17), (G.18), (G.25) e (G.27).

Substituindo-se (H.12) em (G.25) resulta para a aproximação variacional da circulação adimensional a assíntota:

$$\gamma^A \sim 2\pi \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{H.13})$$

Uma vez obtida a assíntota da aproximação variacional para a circulação adimensional, a assíntota para a força de sustentação, via (3.14), é dada por:

$$\bar{L} \sim \rho \cdot U^2 \cdot a \cdot \pi \cdot c \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{H.14})$$

Substituindo-se (H.12- a e b) em (G.18), resulta para o valor Λ_{00}^A a assíntota:

$$\Lambda_{00}^A \sim \pi \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{H.15})$$

A partir de (H.14) e (G.26), conclui-se que a assíntota para o momento é dada por:

$$\vec{M} \sim -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot c^2 \vec{k} \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{H.16})$$

A assíntota do braço normalizado pela corda pode ser obtida como o quociente entre a assíntota da aproximação para o momento e a assíntota da aproximação da força de sustentação multiplicada pela corda, ou através das expressões (G.27) e (H.12). A assíntota para b/c é dada por:

$$b/c = 0,25 \quad (\text{H.17})$$

Portanto, no limite $\lambda \rightarrow \infty$, de acordo com a assíntota de b/c , a linha de ação da força de sustentação \vec{L} passa a um quarto da corda atrás do bordo de ataque, ou a um quarto da corda à frente do ponto médio do fólio. Este é o resultado clássico para a posição da linha de ação da força de sustentação agente em um fólio sem espessura com pequeno ângulo de ataque em relação a uma corrente uniforme em domínio fluido sem fronteiras. A assíntota da aproximação variacional das forças generalizadas no limite $\lambda \rightarrow 0$ será obtida no próximo item.

H.2. ASSÍNTOTAS DA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL DAS FORÇAS GENERALIZADAS NO LIMITE $\lambda \rightarrow 0$.

Para avaliar o comportamento assintótico das funções $E1(\lambda)$, $E2(\lambda)$, $I1(\lambda)$, $I2(\lambda)$ e $I3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, necessita-se determinar as assíntotas das funções $1/(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ neste limite.

Expandindo as funções $1/(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$, $\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ e $\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ em série de potências em λ^2 :

$$\frac{1}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{2 \cdot (1+x^2)}{(1-x^2)^{5/2}} \cdot \lambda^2 + \frac{6+28x^2+6x^4}{(1-x^2)^{9/2}} \cdot \lambda^4 + O(\lambda^6) \quad (\text{H.5- b})$$

$$\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \sim 1 - \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \cdot \lambda^2 + \frac{16x^2 + 6x^4}{(1-x^2)^4} \cdot \lambda^4 + O(\lambda^6) \quad (\text{H.8- b})$$

$$\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \sim \frac{2x}{(1-x^2)} \cdot \lambda - \frac{8x + 16x^3}{(1-x^2)^3} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \quad (\text{H.9- b})$$

Substituindo-se (H.5- b), (H.8- b) e (H.9- b) nos integrais presentes nas funções $H_j(\lambda)$:

$$H1(\lambda) \sim \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{1-a} \left[\frac{2 \cdot \lambda}{(1-x^2)} - \frac{4 + 16x^2}{(1-x^2)^3} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \right] \cdot dx \quad (\text{H.18- a})$$

$$H_2(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[\frac{(2x-2x^2) \cdot \lambda}{(1-x^2)^{1/2}} - \frac{12x+12x^2+8x^3-8x^4}{(1-x^2)^{5/2}} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \right] \cdot dx$$

(H.18- b)

$$H_3(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[(1-x^2)^{3/2} \cdot \lambda + \frac{4+8x-12x^2-8x^4-8x^6}{(1-x^2)^{7/2}} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \right] \cdot dx$$

(H.18- c)

$$H_4(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[\arcsin \sqrt{1-x^2} \cdot \left(\frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} \cdot \lambda - \frac{12x+8x^3}{(1-x^2)^{7/2}} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \right) \right] \cdot dx$$

(H.18- d)

$$H_5(\lambda) \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \left[(1-x)^n \cdot \left(\frac{2x \cdot \lambda}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{12x+8x^3}{(1-x^2)^{7/2}} \cdot \lambda^3 + O(\lambda^5) \right) \right] \cdot dx$$

(H.18- e)

A função $H_5(\lambda)$ depende do valor da potência "n". Serão atribuídos dois valores^{3*} a "n" de modo que a assíntota para $H_5(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$ possa ser avaliada. Os valores adotados para "n" são 3/2 e 3.

Os integrandos em (H.18) são dados por séries no parâmetro λ cujos coeficientes são funções da variável x . O raio de convergência destas séries depende do parâmetro λ e da variável x . É fácil constatar que essas séries convergem para valores de x e λ que satisfazem uma desigualdade do

^{3*} A potência "n" pode assumir qualquer valor, mas para reduzir o trabalho de avaliação das assíntotas da função $H_5(\lambda)$, adotou-se, somente, dois valores para "n".

tipo $x < 1 - A.\lambda^2$, onde A é uma constante a se determinar. Como consequência, ao invés de avaliar os integrais definidos em (H.18) para o intervalo $[0, 1-a]$ com $a \rightarrow 0$, os integrais definidos em (H.18) serão avaliados para o intervalo $[0, 1-A.\lambda]$ com $\lambda \rightarrow 0$. Este é o procedimento utilizado para avaliar os integrais em (H.18), pois deseja-se as assíntotas das funções $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$.

Avaliando-se os integrais em (H.18), obtém-se as assíntotas para as funções $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, dadas por:

$$H_1(\lambda) \sim -\lambda \cdot \ln \lambda + O(\lambda) \quad (\text{H.19- a})$$

$$H_2(\lambda) \sim (\pi - 2) \cdot \lambda + O(\lambda^{3/2}) \quad (\text{H.19- b})$$

$$H_3(\lambda) \sim (4 - \pi) \cdot \lambda + O(\lambda^{5/2}) \quad (\text{H.19- c})$$

$$H_4(\lambda) \sim -2\lambda \cdot \ln \lambda + O(\lambda) \quad (\text{H.19- d})$$

$$H_5(\lambda) \sim \begin{cases} -(3\pi/2 + 2) \cdot \lambda + O(\lambda^{3/2}) & \text{para } n = 3 \\ B \cdot \lambda + O(\lambda^{3/2}) & \text{para } n = 3/2 \end{cases} \quad (\text{H.19- e})$$

$$\text{onde } B = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(2m-1)!]^2}{(2m)! \cdot [2^{m-1} \cdot (m-1)!]^2}$$

A assíntota da função $f(\lambda)$, definida por (H.2), é obtida expandindo a função $f(\lambda)$ em série de Taylor em torno de $\lambda = 0$, resultando em:

$$f(\lambda) \sim \lambda/2\pi - \lambda^3/3\pi - \lambda^5/3\pi + O(\lambda^7) \quad (\text{H.20})$$

Substituindo-se as assíntotas das funções $H_j(\lambda)$ e da função $f(\lambda)$ nas expressões (H.3), obtém-se as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, dadas por:

$$E_1(\lambda) \sim -2\lambda \cdot \ln \lambda + O(\lambda) \quad (\text{H.21- a})$$

$$E_2(\lambda) \sim -\pi \cdot \lambda + O(\lambda^{3/2}) \quad (\text{H.21- b})$$

$$I_1(\lambda) \sim \lambda/4 + O(\lambda^{3/2}) \quad (\text{H.21- c})$$

$$I_2(\lambda) \sim -(\lambda \cdot \ln \lambda)/2\pi^2 + O(\lambda) \quad (\text{H.21- d})$$

$$I_3(\lambda) \sim \begin{cases} -(3/2\pi + 3/4) \cdot \lambda + O(\lambda^{3/2}) & \text{para } n = 3 \\ (1 + 2\pi) \cdot \lambda/2\pi + O(\lambda^{3/2}) & \text{para } n = 3/2 \end{cases} \quad (\text{H.21- e})$$

Substituindo-se as assíntotas das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ e $I_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$ em (G.25), resulta numa indeterminação do tipo 0/0 para a aproximação variacional da circulação adimensional. Para contornar esta situação, será necessário determinar as assíntotas de $E_2(\lambda)$ e $I_1(\lambda)$ até termos de ordem superior em λ , o que implica em determinar a assíntota de $H_2(\lambda)$ até termos de $O(\lambda^{3/2})$ (as funções $E_2(\lambda)$ e $I_1(\lambda)$ são escritas em termos da função $H_2(\lambda)$). A assíntota para a função $H_2(\lambda)$ pode ser reescrita como:

$$H_2(\lambda) \sim \pi \cdot \lambda + A_1 \cdot \lambda^{3/2} + O(\lambda^{5/2}) \quad (\text{H.19- b.1})$$

onde A_1 depende de A (constante desconhecida utilizada para avaliar os integrais em (H.18) nos limites $\lambda \rightarrow 0$) e é, portanto, desconhecida.

Não é necessário determinar o valor da constante A_1 para obter a assíntota da primeira aproximação variacional da circulação adimensional. Isto é consequência da maneira como as funções $H_j(\lambda)$ foram definidas.

Substituindo-se a expansão (H.19- b.1) da função $H_2(\lambda)$ nas expressões (H.1- b e c), obtém-se as assíntotas das funções $E_2(\lambda)$ e $I_1(\lambda)$ até termos de $O(\lambda^{3/2})$:

$$E_2(\lambda) \sim -\pi \cdot \lambda - 2 \cdot A_1 \cdot \lambda^{3/2} + O(\lambda^{5/2}) \quad (\text{H.21- b.1})$$

e

$$I_1(\lambda) \sim \lambda/4 + \frac{A_1}{4\pi} \cdot \lambda^{3/2} + O(\lambda^{5/2}) \quad (\text{H.21- c.1})$$

Com as expressões (H.18- a, b.1, c.1, d e e) em (G.25), a assíntota da primeira aproximação variacional da circulação adimensional é dada por:

$$\gamma^A \sim 2/\lambda \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{H.22})$$

Com (H.26) e (3.14), a assíntota da primeira aproximação variacional da força de sustentação no limite $\lambda \rightarrow 0$ é dado por:

$$\zeta = \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{H.23})$$

A assíntota da aproximação para o momento, via (G.18), (G.26) e (H.21 -a e b.1), é dada por:

$$\vec{M} = - \rho \cdot U^2 \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot \frac{1}{6 \cdot \lambda} \vec{k} \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{H.24})$$

A assíntota da aproximação variacional do braço normalizado pela corda, no limite $\lambda \rightarrow 0$, pode ser obtida através das expressões (H.21) e (G.27). A assíntota da primeira aproximação variacional de b/c é dada por:

$$b/c = 0,16 \quad \text{no limite } \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{H.25})$$

Portanto, no limite $\lambda \rightarrow 0$, a linha de ação da força de sustentação \vec{L} está a um terço da corda atrás do bordo de ataque, ou a um sexto da corda à frente do ponto médio da corda do fólio, que é o resultado obtido no tópico 3.10.1.

As assíntotas, no limite $\lambda \rightarrow 0$, para as aproximações variacionais das forças generalizadas (\vec{L} e \vec{M}) e de b/c recuperam os resultados obtidos no tópico 3.10.1 e apresentados pela literatura.

* * *

ANEXO I

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA AS FUNÇÕES $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ E $I_5(\lambda)$.

Neste anexo, serão ilustrados dois procedimentos que permitem explicitar a dependência dos integrais presentes nas funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ em relação ao parâmetro λ , de modo que estes integrais possam ser avaliados independentemente de λ . O resultado final destes procedimentos será aproximações polinomiais em λ dos integrais presentes nessas funções, o que é uma vantagem, pois o cálculo dessas funções para um dado valor de λ torna-se muito mais simples e imediato.

Os dois procedimentos a serem utilizados são complementares. O primeiro e mais simples procedimento, utilizado quando $\lambda > 1$, será expandir a função a ser integrada em série de Taylor no parâmetro λ em torno de $\lambda = 1$. Conseqüentemente, o integral passa a ser representado por uma série de potências em λ cujos coeficientes são integrais em x de funções que dependem somente desta variável. O segundo procedimento, utilizado quando $0 \leq \lambda \leq 1$, faz uso de uma família de polinômios ortogonais no intervalo de integração. Como exemplo, temos os "polinômios de Chebyshev", que formam um conjunto de funções

enumeráveis ortogonais no intervalo $[0,1]$.

A expansão em série de Taylor no parâmetro λ dos integrais presentes nas funções $E_1(\lambda), E_2(\lambda), E_3(\lambda), E_4(\lambda), I_1(\lambda), I_2(\lambda), I_3(\lambda), I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ poderia ser realizada em torno de $\lambda = 0$, mas isto resultaria em integrais divergentes ou difíceis de serem avaliados, como constatado no decorrer da avaliação das assíntotas no limite $\lambda \rightarrow 0$. Conseqüentemente, a expansão em série de Taylor no parâmetro λ será realizada em torno de $\lambda = 1$, ou seja, esta será utilizada, somente, para obter aproximações polinomiais quando $\lambda \geq 1$. Para a faixa $0 \leq \lambda \leq 1$, serão utilizadas famílias de polinômios ortogonais (por exemplo, os "polinômios de Chebyshev") para construir as aproximações polinomiais dos integrais presentes em $E_1(\lambda), E_2(\lambda), E_3(\lambda), E_4(\lambda), I_1(\lambda), I_2(\lambda), I_3(\lambda), I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$. Os dois procedimentos, a serem utilizados, serão ilustrados e discutidos a seguir.

Antes de ilustrar os procedimentos para obter as aproximações polinomiais, definem-se funções do parâmetro λ :

$$H_1(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + x \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (I.1- a)$$

$$H_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{1-x}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot dx \quad (\text{I.1- b})$$

$$H_3(\lambda) = \int_0^1 \frac{1-x}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \left[2 \cdot \lambda \cdot (1+x) \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - (1-x) \cdot (2+x) \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- c})$$

$$H_4(\lambda) = \int_0^1 \frac{\arcsin(1-x^2)^{1/2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot dx \quad (\text{I.1- d})$$

$$H_5(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1-x^n)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot dx \quad (\text{I.1- e})$$

$$H_6(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1-x)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[4 \cdot \left(\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 - 3 \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- f})$$

$$H_7(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1-x^2)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[4 \cdot \left(\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 - 3 \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- g})$$

$$H_8(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1-x^2)}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[3 \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 4 \cdot \left(\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- h})$$

$$H_9(\lambda) = \int_0^1 \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[4 \cdot \left(\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 - 3 \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- i})$$

$$H_{10}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[3 \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 4 \cdot \left(\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- j})$$

$$H_{11}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{1-x^2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{3/2}} \cdot \left[4 \cdot \left(\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)^3 - 3 \cdot \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right] \cdot dx \quad (\text{I.1- k})$$

em função das quais as funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$ podem ser expressas como:

$$E_1(\lambda) = 2 \cdot H_1(\lambda) \quad (\text{I.2- a})$$

$$E_2(\lambda) = - 2 \cdot H_2(\lambda) - H_3(\lambda) \quad (\text{I.2- b})$$

$$E_3(\lambda) = H_7(\lambda) + 2 \cdot \lambda \cdot H_8(\lambda) \quad (\text{I.2- c})$$

$$E_4(\lambda) = H_9(\lambda) + 2 \cdot \lambda \cdot H_{10}(\lambda) \quad (\text{I.2- d})$$

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot f(\lambda) + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot H_2(\lambda) \quad (\text{I.2- e})$$

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot f(\lambda) + \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot H_4(\lambda) \quad (\text{I.2- f})$$

$$I_3(\lambda) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot f(\lambda) + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot H_5(\lambda) \quad (\text{I.2- g})$$

$$I_4(\lambda) = H_{11}(\lambda) \quad (\text{I.2- h})$$

$$I_5(\lambda) = H_6(\lambda) \quad (\text{I.2- i})$$

onde $f(\lambda)$ foi definida por (H.2).

Ao invés de obter diretamente as aproximações polinomiais de $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$,

$I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$, serão obtidas as aproximações polinomiais em λ das funções $H_j(\lambda)$ com $j=1, \dots, 11$. No decorrer deste anexo, o índice "j" assume valores de 1 a 11. Posteriormente, a partir de (I.2- a,b,c,d,e,f,g,h e i), obtém-se as aproximações polinomiais em λ de $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$, $E_4(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$, $I_4(\lambda)$ e $I_5(\lambda)$. Os procedimentos serão ilustrados a seguir.

I.1. APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $H_j(\lambda)$ COM $\lambda \geq 1$.

Para $\lambda \geq 1$, os integrandos em (I.1), funções de x e λ , podem ser desenvolvidos em série de potências em $1/\lambda^2$, pois os radicais em (I.1) podem ser expressos como funções de $1/\lambda^2$. Então:

$$H_j(\lambda) = \int_0^1 F_j(x, \lambda) dx \quad (\text{I.3})$$

onde $F_j(x, \lambda)$ pode ser expresso como função de $1/\lambda^2$ e pode, portanto, ser expandido em série de potências em $1/\lambda^2$ como:

$$F_j(x, \lambda) = F_{j,0}(x) + F_{j,1}(x) \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots + F_{j,2}(x) \cdot \frac{1}{\lambda^{2n}} \quad (\text{I.4})$$

Os $F_{j,n}(x)$ são funções, somente, de x . Substituindo-se (I.4) em (I.3), $H_j(\lambda)$ é expresso em termos de potências de $1/\lambda^2$ como:

$$H_j(\lambda) = A_{j,0} + A_{j,1} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots + A_{j,n} \cdot \frac{1}{\lambda^{2n}} + O(A_{j,n+1}) \quad (I.5)$$

onde os coeficientes $A_{j,n}$ são definidos por:

$$A_{j,n} = \int_0^1 F_{j,n}(x) dx \quad (I.6)$$

O coeficiente $A_{j,n}$ não depende de λ , dependem, somente, do integral em (I.6). Caso a função $F_{j,n}(x)$ seja suficientemente simples, o integral pode ser avaliado analiticamente. Caso contrário, o integral em (I.6) será avaliado numericamente. Uma vez que (I.6) foi determinado, as aproximações polinomiais para as funções $H_j(\lambda)$ estão determinadas para qualquer $\lambda \geq 1$.

Caso (I.5) seja utilizada para aproximar $H_j(\lambda)$ no intervalo $\lambda \geq 1$, o erro desta aproximação é de ordem do coeficiente desprezado $A_{j,n+1}$. Este erro pode ser aferido diretamente, comparando (I.5) com a integral numérica que fornece $H_j(1)$.

H.2. APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA $H_j(\lambda)$ COM $0 \leq \lambda \leq 1$.

Como discutido anteriormente, expandir os $F_j(x, \lambda)$ em série de Taylor em $\lambda = 0$ resulta em funções $F_{j,n}(x, 0)$ cujo integral em "x" no intervalo $[0, 1]$ é difícil de ser

avaliado. Portanto, para $0 \leq \lambda \leq 1$, será utilizado outro procedimento para obter as aproximações polinomiais.

As funções $H_j(\lambda)$ podem ser avaliadas numericamente, somando-se os valores das funções $F_j(x, \lambda)$ em pontos igualmente espaçados e discretos x_k do intervalo $[0, 1]$, ou seja:

$$H_j(\lambda) \cong \sum_{k=1}^M F_j(x_k, \lambda) \cdot p(x_k) \quad \text{com } x_k \in [0, 1] \quad (\text{I.7})$$

onde $x_k = k \cdot \Delta x$ ($\Delta x = (1-0)/M$), e $p(x_k)$ é o "peso" da fórmula de integração utilizada (ABRAMOWITZ; STEGUM (1970), seção 25). Os $F_j(x_k, \lambda)$ são funções de λ somente, e é possível escrevê-los em termos de polinômios em λ ditos ortogonais. Como exemplo, pode-se citar os "polinômios de Chebishev" $\{T_n(\lambda)$ com $n=0, 1, 2, 3, \dots\}$, definidos no intervalo $[-1, 1]$ e que satisfazem a relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 T_n(\lambda) \cdot T_m(\lambda) \cdot w(\lambda) \, d\lambda = h_n \cdot \delta_{nm} \quad (\text{I.8})$$

A função $w(\lambda) = 1/(1 - \lambda^2)^{1/2}$ é a função "peso" relacionada aos polinômios $T_n(\lambda)$ (ver ABRAMOWITZ; STEGUM (1970), páginas 773-774). $h_0 = \pi$, $h_n = \pi/2$ para $n=1, 2, \dots$, e δ_{nm} é a função δ de Kronecker. Estes polinômios

satisfazem a relação de simetria:

$$T_n(-\lambda) = (-1)^n \cdot T_n(\lambda) \quad (\text{I.9})$$

e em particular:

$$T_1(\lambda) = \lambda \quad (\text{I.10- a})$$

$$T_{2n}(\lambda) = n \cdot \sum_{m=0}^n (-1)^m \cdot 2^{2n-2m} \cdot \frac{(2n-m-1)!}{m! \cdot (2n-2m)!} \cdot \lambda^{2n-2m} \quad (\text{I.10- b})$$

$$T_{2n+1}(\lambda) = (2n+1) \cdot \sum_{m=0}^n (-1)^m \cdot 2^{2(n-m)} \cdot \frac{(2n-m)!}{m! \cdot (2n-2m+1)!} \cdot \lambda \cdot \lambda^{2(n-m)} \quad (\text{I.10- c})$$

De acordo com a relação de simetria (I.9), os polinômios com índice par são funções pares, e os polinômios com índice ímpar são funções ímpares. Conseqüentemente, a relação de ortogonalidade^{1†} pode ser reescrita, considerando-se, somente, o intervalo [0,1]:

$$\int_0^1 T_n(\lambda) \cdot T_m(\lambda) \cdot w(\lambda) \, d\lambda = \frac{h_n}{2} \cdot \delta_{nm} \quad (\text{I.11})$$

As funções $F_j(x_k, \lambda)$ podem ser escritas como combinação linear dos N primeiros polinômios de Chebishev:

$$F_j(x_k, \lambda) \cong \sum_{n=1}^N B_{j,k,n} \cdot T_n(\lambda) \quad (\text{I.12})$$

^{1†} Como os "polinômios de Chebishev" são funções pares ou ímpares, o valor do integral (I.11) no intervalo [0,1] é metade do valor deste integral no intervalo [-1,1].

Os coeficientes $B_{j,k,n}$ podem ser obtidos da maneira descrita a seguir. Em primeiro lugar, ambos os lados da identidade (I.12) são multiplicados pela função $T_n(\lambda).w(\lambda)^{2\uparrow}$. Em seguida, ambos os lados da identidade resultante são integrados no intervalo $[0,1]$. Finalmente, a relação de ortogonalidade (I.11) é utilizada, e a expressão para os coeficientes $B_{j,k,n}$ é dada por:

$$B_{j,k,n} = \frac{2}{h_n} \int_0^1 F_j(x_k, \lambda) \cdot T_n(\lambda) \cdot w(\lambda) \, d\lambda \quad (\text{I.13})$$

Uma vez conhecidos os $B_{j,k,n}$ e a partir de (I.12), a expressão (I.7) pode ser rescrita em termos destes coeficientes. A expressão para $H_j(\lambda)$ em termos dos $B_{j,k,n}$ é dada por:

$$H_j(\lambda) \cong \sum_{k=1}^M \left(\sum_{n=1}^N B_{j,k,n} \cdot T_n(\lambda) \right) \quad (\text{I.14})$$

Definindo-se os coeficientes $C_{j,n}$ como:

$$C_{j,n} = \sum_{k=1}^M B_{j,k,n} \quad (\text{I.15})$$

a última expressão para $H_j(\lambda)$, dada por (I.14), pode ser reescrita como:

$$H_j(\lambda) \cong \sum_{n=1}^N C_{j,n} \cdot T_n(\lambda) \quad (\text{I.16})$$

^{2\uparrow} M-ésimo polinômio de Chebishev multiplicado pela função "peso".

A expressão (I.16) é uma aproximação polinomial para $H_j(\lambda)$, válida para valores de λ pertencentes ao intervalo $[0,1]$.

No limite $\lambda \rightarrow 0$, a aproximação polinomial para a função $H_j(\lambda)$ deve recuperar a assíntota da função $H_j(\lambda)$ neste limite. Neste intuito, será incorporado na aproximação polinomial para $H_j(\lambda)$ a assíntota de $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, denotada por $\bar{H}_j(\lambda)$. Para que isso seja possível, a aproximação polinomial de $\bar{H}_j(\lambda)$ será expressa como:

$$\bar{H}(\lambda) \cong \sum_{n=1}^M \bar{C}_{j,n} \cdot T_n(\lambda) \quad (\text{I.17})$$

onde os coeficientes $\bar{C}_{j,n}$ são definidos por:

$$\bar{C}_{j,n} = \frac{2}{h_n} \int_0^1 \bar{H}_j(\lambda) \cdot T_n(\lambda) \cdot w(\lambda) \, d\lambda \quad (\text{I.18})$$

A aproximação polinomial para $H_j(\lambda)$, que recupera o comportamento assintótico de $H_j(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$, será expressa em termos dos coeficientes $C_{j,n}$ e $\bar{C}_{j,n}$ e em termos da função $\bar{H}_{j,n}$, como ilustra a expressão:

$$H_j(\lambda) = \bar{H}_j(\lambda) + \sum_{n=1}^N [C_{j,n} - \bar{C}_{j,n}] \cdot T_n(\lambda) \quad (\text{I.19})$$

A expressão (I.19), que é o resultado desejado, fornece uma aproximação polinomial para os $H_j(\lambda)$ que incorpora o termo principal (assíntota) no limite $\lambda \rightarrow 0$.

I.3. CONSTRUÇÃO DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DAS FUNÇÕES $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$ E $I_2(\lambda)$ E COMPARAÇÃO COM RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $0 \leq \lambda \leq 1$.

A título de ilustração do procedimento descrito no item I.2, as aproximações polinomiais das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$ e $I_2(\lambda)$, válida na faixa $0 < \lambda < 1$, serão construídas e comparadas com os resultados da avaliação numérica. Como estas funções são expressas por (H.1) em termos das funções $H_j(\lambda)$ ^{3†}, o procedimento descrito em I.2 será aplicado, na realidade, às funções $H_j(\lambda)$. A partir das aproximações polinomiais destas funções, serão construídas as aproximações polinômiais das funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$ e $I_2(\lambda)$ via (H.3). Com o aumento do grau da aproximação polinomial destas funções, será constatada a convergência das aproximações polinômiais dessas funções para os valores fornecidos pela avaliação numérica.

A família dos polinômios de Chebishev será utilizada para obter a aproximação polinomial das funções $H_j(\lambda)$ na faixa $0 < \lambda < 1,0$.

O primeiro passo neste sentido, será expressar os $F_j(x_k, \lambda)$ de modo adequado. Considere, então, as funções:

^{3†} O índice "j" assume, neste item, valores de 1 a 4.

$$S(x, \lambda) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \quad (\text{I.20- a})$$

e

$$C(x, \lambda) = \frac{\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}} \quad (\text{I.20- b})$$

que permitem expressar os $F_j(x, \lambda)$, das respectivas $H_j(\lambda)$, como:

$$F_j(x, \lambda) = s_j(x) \cdot S(x, \lambda) + c_j(x) \cdot C(x, \lambda) \quad (\text{I.21})$$

As funções $s_j(x)$ e $c_j(x)$ são funções contínuas da variável x e estão definidas na tabela I.1.

TABELA I.1 - Funções $s_j(x)$ e $c_j(x)$.

j	$s_j(x)$	$c_j(x)$
1	$\sqrt{1 - x^2}$	$x \cdot \sqrt{1 - x^2}$
2	—	$(1 - x)$
3	$(1 - x^2)$	$-(1 - x)^2 \cdot (2 + x)$
4	—	$\arcsin \sqrt{1 - x^2}$

Substituindo-se (I.21) em (I.3), as funções $H_j(\lambda)$ são reescritas como:

$$H_j(\lambda) = \int_0^1 [s_j(x) \cdot S(x, \lambda) + c_j(x) \cdot C(x, \lambda)] dx \quad (\text{I.22})$$

A integral em (I.22) pode ser avaliada numericamente, utilizando-se alguma regra ou algoritmo de quadratura. A partir de alguma regra de quadratura numérica, (I.22) pode ser reescrita como:

$$H_j(\lambda) \sim \sum_{k=0}^N [s_j(x_k) \cdot S(x_k, \lambda) + c_j(x_k) \cdot C(x_k, \lambda)] \cdot p(x_k) \quad (\text{I.23})$$

No caso da regra de quadratura utilizada ser a regra trapezoidal, o índice N é o número de partições do intervalo de integração, $x_k = k \cdot \Delta x$ ($\Delta x =$ intervalo de integração dividido por N), e $p(x_k)$ é a função "peso", definida por:

$$p(x_k) = \begin{cases} \Delta x/2 & \text{para } x_k = x_0 \text{ e } x_N \\ \Delta x & \text{para } 0 < x < N \end{cases} \quad (\text{I.24- a})$$

Quando a regra de quadratura utilizada é a regra de Simpson, o número N de partições do intervalo de integração deve ser par. Nesta regra de quadratura, $x_k = k \cdot \Delta x$ (Δx é o intervalo de integração dividido por N par), e $p(x_k)$ será definida por:

$$p(x_k) = \begin{cases} \Delta x/3 & \text{para } k = 0 \text{ e } 2N \\ 4 \cdot \Delta x/3 & \text{para } k = 1, 3, \dots, 2N-1 \\ 2 \cdot \Delta x/3 & \text{para } k = 2, 4, \dots, 2N-2 \end{cases} \quad (\text{I.24- b})$$

Conforme a estrutura das funções $s_j(x)$ e $c_j(x)$, pode ser interessante utilizar fórmulas de integração gaussianas, as quais utilizam famílias de polinômios ortogonais. Existem diversas fórmulas de integração gaussianas (veja ABRAMOWITZ; STEGUM (1970), seção 22), algumas válidas para intervalos de integração específicos e outras válidas para intervalos de integração arbitrários. Como exemplo, as funções $H_j(\lambda)$ podem ser escritas na forma (I.23), utilizando-se uma fórmula de integração gaussiana para intervalos de integração arbitrários, baseada nos polinômios de Chebishev. Com esta regra de quadratura, N , em (I.23), será a maior potência do polinômio de Chebishev de maior grau utilizado, $x_k = 1/2 + \frac{1}{2} \cdot y_k$, e y_k é a k -ésima raiz do polinômio de Chebishev de grau N . A função $p(x_k)$, neste caso, será dada por:

$$p(x_k) = \begin{cases} \sqrt{x_k \cdot (1 - x_k)} \cdot \frac{\pi}{N} & \text{para } x_k \neq x_0 \\ 0 & \text{para } x_0 \end{cases} \quad (\text{I.24- c})$$

As fórmulas de integração Gaussianas apresentam vantagens sobre as fórmulas de integração trapezoidal composta e simpson composta, pois não utilizam os extremos

do intervalo de integração. Conseqüentemente, podem ser usadas para avaliar integrais de funções que possuem singularidades nos extremos do intervalo de integração. Além disso, os algoritmos que utilizam as fórmulas de integração Gaussianas exigem um trabalho numérico reduzido em comparação com as regras trapezoidal composta ou Simpson composta.

Utilizando-se a regra trapezoidal composta, ou a regra de Simpson composta, ou ainda a fórmula de quadratura baseada nos polinômios de Chebishev, as funções $H_j(\lambda)$ serão expressas na forma (I.23). Em (I.23), o integrando $F_j(x, \lambda)$ passou a ser função, somente, de λ , pois a variável x assume valores fixos x_k . Os $F_j(x_k, \lambda)$ serão aproximados por polinômios em λ , no intuito de obter uma aproximação polinomial para $H_j(\lambda)$.

A seguir, será ilustrado como obter uma aproximação polinomial para os $F_j(x_k, \lambda)$. A partir de (I.21), os $F(x_k, \lambda)$ serão expressos por:

$$F_j(x_k, \lambda) = s_j(x_k) \cdot S(x_k, \lambda) + c_j(x_k) \cdot C(x_k, \lambda) \quad (\text{I.30})$$

Os polinômios de Chebishev $\{T_n(\lambda)$ com $n=0,1,2,\dots\}$ serão utilizados para obter aproximações polinomiais em λ dos $F_j(x_k, \lambda)$. Isto corresponde a obter aproximações polinomiais para as funções $S(x_k, \lambda)$ e $C(x_k, \lambda)$ de acordo com

(I.11).

As funções $S(x_k, \lambda)$ e $C(x_k, \lambda)$, definidas em (I.20), são funções ímpares em λ . Portanto, é natural expandí-las em termos dos polinômios $\{T_{2n+1}(\lambda)$ com $n=0,1,2,\dots\}$, que são funções ímpares em λ (veja expansão (I.10- c).

Introduzindo-se os coeficientes:

$$A_{k,n} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot S(x_k, \lambda) \cdot T_{2n+1}(\lambda) \cdot d\lambda \quad \text{com } n=0,1,\dots$$

e (I.25- a)

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot C(x_k, \lambda) \cdot T_{2n+1}(\lambda) \cdot d\lambda \quad \text{com } n=0,1,\dots$$

as funções $S(x_k, \lambda)$ e $C(x_k, \lambda)$ podem ser expressas como:

$$S(x_k, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,n} \cdot T_{2n+1}(\lambda) \sim \sum_{n=0}^M A_{k,n} \cdot T_{2n+1}(\lambda)$$

e (I.25- b)

$$C(x_k, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} \cdot T_{2n+1}(\lambda) \sim \sum_{n=0}^M B_{k,n} \cdot T_{2n+1}(\lambda)$$

Os coeficientes $\{A_{k,n}$ e $B_{k,n}$ com $n=0,1,2,\dots,M\}$ podem ser determinados, numericamente, a partir de (I.31- a).

Utilizando-se (I.25- b) em (I.23):

$$H_j(\lambda) \sim \sum_{n=0}^M D_{j,n} \cdot T_{2n+1}(\lambda) \quad (I.26)$$

onde

$$D_{j,n} = \sum_{k=0}^N p(x_k) \cdot [A_{k,n} \cdot s_j(x_k) + B_{k,n} \cdot C_j(x_k)] \quad (I.27)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$, é interessante que as aproximações polinômiais recuperem as assíntotas das funções $H_j(\lambda)$, dadas por (H.19).

Como as assíntotas das funções $H_j(\lambda)$ são nulas em $\lambda = 0$, é natural expandí-las em termos dos polinômios ímpares de Chebyshev $\{ T_{2n+1}(\lambda) \text{ com } n=0,1,2,\dots \}$. Introduzindo-se as expansões:

$$-\lambda \cdot \ln \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot T_{2n+1}(\lambda) \cong \sum_{n=0}^M \alpha_n \cdot T_{2n+1}(\lambda)$$

e (I.28- a)

$$\lambda^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot T_{2n+1}(\lambda) \cong \sum_{n=0}^M \beta_n \cdot T_{2n+1}(\lambda)$$

com

$$\alpha_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot T_{2n+1}(\lambda) \, d\lambda$$

e (I.28- b)

$$\beta_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot T_{2n+1}(\lambda) \, d\lambda$$

as aproximações polinômiais para as funções $H_j(\lambda)$ são:

$$H_1(\lambda) \sim -\lambda \cdot \ln \lambda + \sum_{n=0}^M (D_{1,n} - \alpha_n) \cdot T_{2n+1}(\lambda) \quad (\text{I.29- a})$$

$$H_2(\lambda) \sim (\pi-2) \cdot \lambda + A_1 \cdot \lambda^{3/2} + \sum_{n=0}^M [D_{2,n} - (\pi-2) \cdot \delta_{0,n} - A \cdot \beta_n] \cdot T_{2n+1}(\lambda) \quad (\text{I.29- b})$$

$$H_3(\lambda) \sim (4 - \pi) \cdot \lambda + \sum_{n=0}^M [D_{3,n} - (4 - \pi) \cdot \delta_{0,n}] \cdot T_{2n+1}(\lambda) \quad (\text{I.29- c})$$

$$H_4(\lambda) \sim -2\lambda \cdot \ln \lambda + \sum_{n=0}^M (D_{4,n} - 2 \cdot \alpha_n) \cdot T_{2n+1}(\lambda) \quad (\text{I.29- d})$$

A partir de (I.10- c), os polinômios de Chebishev podem ser reescritos como:

$$T_{2n+1}(\lambda) = (-1)^n \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot \lambda + \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} \cdot \lambda^{2 \cdot m+1} \quad (\text{I.30- a})$$

$$\text{onde } b_{n,m} = (2 \cdot n + 1) \cdot (-1)^m \frac{2^{2 \cdot (n-m)} \cdot (2 \cdot n - m)!}{m! \cdot (2 \cdot n - 2 \cdot m + 1)} \quad \text{com } m=1, \dots, n \quad (\text{I.30- b})$$

Utilizando-se (I.30), as aproximações polinomiais das funções $H_j(\lambda)$ podem ser escritas em termos das potências de λ (na forma $a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^3 + a_3 \cdot \lambda^5 + \dots$), ao invés de serem expressas em termos dos polinômios de Chebyshev, como em (I.17). As aproximações polinomiais para as funções $H_j(\lambda)$ serão expressas em termos de potências de λ como:

$$H_1(\lambda) \sim -\lambda \cdot \ln \lambda + \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{1,m} - \alpha_m) \cdot (-1)^m \cdot (2m+1) \right\} \cdot \lambda + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{1,m} - \alpha_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n+1} \quad (\text{I.31- a})$$

$$\begin{aligned}
 H_2(\lambda) \sim (\pi-2) \cdot \lambda + A_1 \cdot \lambda^{3/2} \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{2,m} - A_1 \cdot \beta_m) \cdot (-1)^m \cdot (2 \cdot m + 1) \right. \\
 \left. - (\pi - 2) \right\} \cdot \lambda + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{2,m} - A_1 \cdot \beta_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \\
 \text{(I.31- b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_3(\lambda) \sim (4 - \pi) \cdot \lambda + \left\{ \sum_{m=0}^M [D_{3,m} \cdot (-1)^m \cdot (2 \cdot m + 1) - (4 - \pi)] \right\} \cdot \lambda \\
 + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M D_{3,m} \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \text{ (I.31- c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_4(\lambda) \sim -2\lambda \cdot \ln \lambda + \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{4,m} - 2 \cdot \alpha_m) \cdot (-1)^m \cdot (2 \cdot m + 1) \right\} \cdot \lambda + \\
 + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{4,m} - 2 \cdot \alpha_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \\
 \text{(I.31- d)}
 \end{aligned}$$

Para que a aproximação polinomial (I.31- b) seja assintoticamente equivalente a (H.19- b), é necessário que o termo linear no somatório se anule. A partir deste fato, conclui-se que a constante A_1 será dada por:

$$A_1 = \frac{\sum_{n=0}^M \{ D_{2,n} \cdot (-1)^n \cdot (2 \cdot n + 1) \} - (\pi - 2)}{\sum_{n=0}^M \beta_n \cdot (-1)^n \cdot (2 \cdot n + 1)} \text{ (I.32- a)}$$

A convergência em M da expressão (I.32- a) permite estimar o erro na aproximação para o parâmetro A_1 . Conforme o valor de M aumenta, a constante A_1 deve tender para um

determinado valor. A diferença entre dois valores consecutivos da constante A_1 , ou seja, a diferença entre A_1 para $m-1$ e para m proporciona uma estimativa do erro da aproximação da constante A_1 .

O somatório que multiplica λ em (I.31- c) deve ser nulo, de forma que o termo linear em λ seja representado pelo comportamento assintótico de $H_3(\lambda)$ no limite $\lambda \rightarrow 0$. Esta condição implica na identidade:

$$\sum_{n=0}^M D_{\theta,n} \cdot (-1)^n \cdot (2n + 1) = 4 - \pi \quad (\text{I.32- b})$$

O erro em (I.32- b) pode ser visto como medida do erro da aproximação polinomial aqui construída. Uma vez estimado este erro, o somatório que multiplica λ em (I.31- b) pode ser omitido, e as aproximações polinomiais para as funções $H_j(\lambda)$ podem ser reescritas como:

$$H_1(\lambda) \sim -\lambda \cdot \ln \lambda + \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{1,m} - \alpha_m) \cdot (-1)^m \cdot (2m + 1) \right\} \cdot \lambda + \\ + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{1,m} - \alpha_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \quad (\text{I.33- a})$$

$$H_2(\lambda) \sim (\pi - 2) \cdot \lambda + A_1 \cdot \lambda^{3/2} \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{2,m} - A_1 \cdot \beta_m) \cdot (-1)^m \cdot (2m + 1) \right. \\ \left. - (\pi - 2) \right\} \cdot \lambda + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{2,m} - A_1 \cdot \beta_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \quad (\text{I.33- b})$$

$$H_3(\lambda) \sim (4 - \pi) \cdot \lambda + \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M D_{3,m} \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \quad (\text{I.33- c})$$

$$H_4(\lambda) \sim -2\lambda \cdot \ln \lambda + \left\{ \sum_{m=0}^M (D_{4,m} - 2 \cdot \alpha_m) \cdot (-1)^m \cdot (2m + 1) \right\} \cdot \lambda +$$

$$+ \sum_{n=1}^M \left[\sum_{m=n}^M (D_{4,m} - 2 \cdot \alpha_m) \cdot b_{m,n} \right] \cdot \lambda^{2 \cdot n + 1} \quad (\text{I.33- d})$$

A seguir, serão apresentados gráficos e tabelas mostrando como se processa a convergência das aproximações polinômiais face aos resultados obtidos via integração numérica. As funções $H_j(\lambda)$ não foram avaliadas numericamente, mas as funções $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$ e $I_2(\lambda)$ foram. A partir das aproximações polinômiais das funções $H_j(\lambda)$, constrói-se aproximações polinômiais para $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $I_1(\lambda)$ e $I_2(\lambda)$. Estas serão comparadas com os resultados obtidos via integração numérica.

Nas tabelas, a primeira coluna apresenta o valor do parâmetro λ . Na segunda coluna está o resultado da integração numérica, e, nas colunas seguintes, são mostrados os valores das aproximações polinômiais conforme aumenta o grau do polinômio em λ . Para a função $E_1(\lambda)$ temos a tabela I.2, onde são apresentados valores de $E_1(\lambda)$ até a terceira casa decimal.

TABELA I.2 - CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE $E_1(\lambda)$.

λ	INT. NUMÉR.	APROXIMAÇÕES POLINÔMIAS						
		1ºGR.	3ºGR.	5ºGR.	7ºGR.	9ºGR.	11ºGR.	13ºGR.
1.0	1.4239	1.303	1.437	1.421	1.424	1.423	1.424	1.423
0.9	1.3986	1.362	1.391	1.401	1.397	1.398	1.398	1.398
0.8	1.3669	1.399	1.352	1.368	1.367	1.366	1.366	1.367
0.7	1.3266	1.411	1.314	1.324	1.327	1.326	1.326	1.326
0.6	1.2745	1.394	1.269	1.270	1.274	1.274	1.274	1.274
0.5	1.2060	1.344	1.211	1.203	1.204	1.206	1.206	1.206
0.4	1.1144	1.254	1.128	1.114	1.113	1.113	1.114	1.114
0.3	0.9887	1.113	1.007	0.991	0.988	0.988	0.988	0.988
0.2	0.8102	0.904	0.828	0.815	0.811	0.810	0.810	0.810
0.1	0.5396	0.590	0.551	0.543	0.541	0.540	0.540	0.539
0,05	0.3385	0.364	0.344	0.340	0.339	0.339	0.338	0.338
0,01	0.0998	0.105	0.101	0.100	0.100	0.099	0.099	0.099

O polinômio de 13º grau converge para os valores numéricos até a 3ª casa decimal. Na prática, bastaria convergência até a 2ª casa decimal, obtida a partir do polinômio de 9º grau. A seguir, será apresentado um gráfico (Figura I.1) mostrando a convergência das aproximações polinomiais de $E_1(\lambda)$ para os valores obtidos via integração numérica. Na figura I.1, serão apresentadas curvas para as aproximações polinomiais de 1º, 3º e 5º grau e uma curva para a integração numérica. Para as aproximações de 7º e 9º grau, não serão apresentadas as curvas, somente mostra-se os pontos listados na tabela I.2.

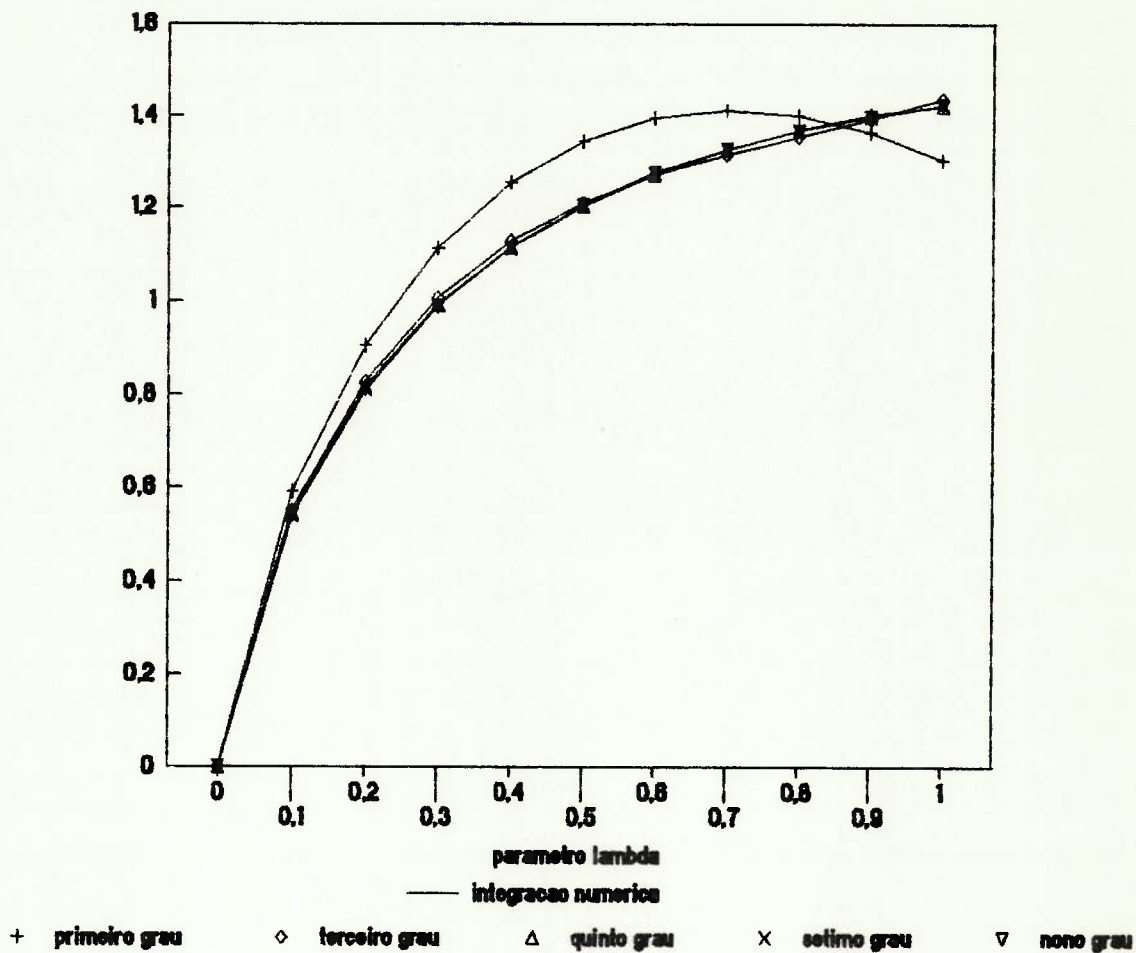


FIG. I.1 - Aproximações polinomiais versus interação numérica da função $E1(\lambda)$.

A tabela I.3 mostra como se processa a convergência da aproximação polinomial da função $E2(\lambda)$ para os valores obtidos via integração numérica.

TABELA I.3 - CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE $E_2(\lambda)$.

VALOR DE λ	INTEGR. NUMER.	APROXIMAÇÕES POLINÔMIAS				
		1ºGRAU	3ºGRAU	5ºGRAU	7ºGRAU	9ºGRAU
1,0	0,6028	0,5100	0,6186	0,5980	0,6047	0,6019
0,9	0,5916	0,5690	0,5827	0,5966	0,5899	0,5916
0,8	0,5774	0,6091	0,5600	0,5799	0,5789	0,5764
0,7	0,5592	0,6293	0,5447	0,5562	0,5614	0,5597
0,6	0,5356	0,6281	0,5307	0,5292	0,5334	0,5368
0,5	0,5043	0,6037	0,5113	0,4990	0,5015	0,5043
0,4	0,4621	0,5541	0,4791	0,4616	0,4592	0,4604
0,3	0,4040	0,4761	0,4259	0,4094	0,4039	0,4026
0,2	0,3318	0,3653	0,3414	0,3308	0,3254	0,3229
0,1	0,2006	0,2138	0,2106	0,2076	0,2052	0,2034
0,05	0,1159	0,1179	0,1199	0,1196	0,1188	0,1180
0,01	0,0276	0,0265	0,0279	0,0282	0,0282	0,0281

VALOR DE λ	INTEGR. NUMER.	APROX. POL.	
		11ºGRAU	13ºGRAU
1,0	0,6028	0,6033	0,6025
0,9	0,5916	0,5919	0,5913
0,8	0,5774	0,5773	0,5777
0,7	0,5592	0,5586	0,5591
0,6	0,5356	0,5359	0,5352
0,5	0,5043	0,5050	0,5046
0,4	0,4621	0,4618	0,4624
0,3	0,4040	0,4028	0,4034
0,2	0,3318	0,3218	0,3214
0,1	0,2006	0,2023	0,2017
0,05	0,1159	0,1175	0,1171
0,01	0,0276	0,0280	0,0279

Para $E_2(\lambda)$, a convergência das aproximações polinomiais é um pouco mais lenta que para $E_1(\lambda)$, mas a aproximação polinomial de 13º grau já mostra, em geral,

convergência até a terceira casa decimal e, garantidamente, até a segunda casa decimal. A partir do polinômio de 9º grau, a convergência até a 2ª casa decimal já é verificada.

Na figura I.2, a convergência da aproximação polinomial da função $E2(\lambda)$ está ilustrada. Serão apresentadas curvas para os valores obtidos via integração numérica e para os polinômios de 1º, 3º e 5º grau. Os polinômios de 7º e 9º grau serão representados, somente, por pontos equivalentes aos valores da tabela I.3.

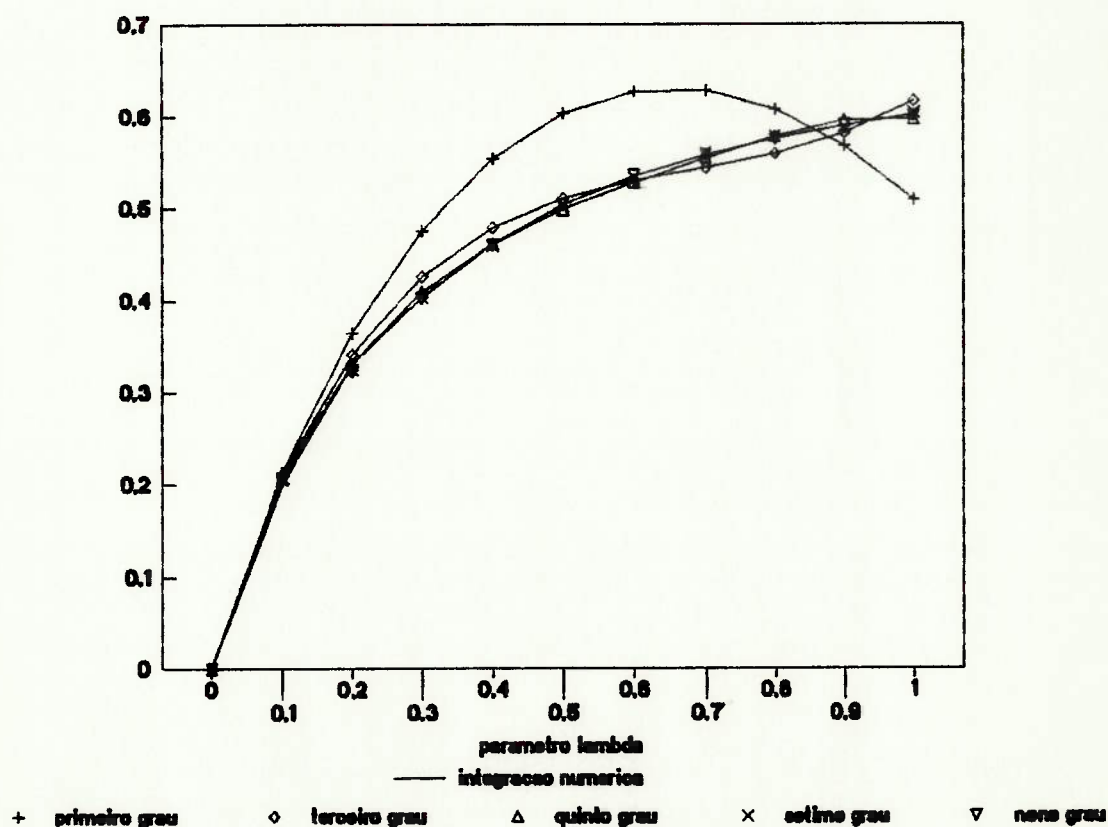


FIG. I.2 - Aproximações polinomiais versus integração numérica da função $E2(\lambda)$.

A tabela I.4 mostra como se processa a convergência das aproximações polinomiais da função $I_1(\lambda)$ para os valores obtidos via integração numérica, mas considerando valores até a quinta casa decimal.

TABELA I.4 - CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE $I_1(\lambda)$.

VALOR DE λ	INTEGR. NUMÉR.	APROXIMAÇÕES POLINÔMIAS				
		1ºGRAU	3ºGRAU	5ºGRAU	7ºGRAU	9ºGRAU
1,0	0,11718	0,11097	0,11825	0,11692	0,11725	0,11715
0,9	0,11011	0,10832	0,10951	0,11038	0,11006	0,11011
0,8	0,10246	0,10247	0,10127	0,10257	0,10252	0,10244
0,7	0,09412	0,09865	0,09314	0,09394	0,09419	0,09414
0,6	0,08498	0,09132	0,08467	0,08466	0,08496	0,08501
0,5	0,07491	0,08206	0,07542	0,07468	0,07481	0,07490
0,4	0,06371	0,07067	0,06489	0,06375	0,06363	0,06367
0,3	0,05114	0,05695	0,05261	0,05144	0,05117	0,05113
0,2	0,03686	0,04073	0,03810	0,03725	0,03697	0,03689
0,1	0,02030	0,02189	0,02089	0,02053	0,02039	0,02034
0,05	0,01083	0,01143	0,01106	0,01093	0,01087	0,01085
0,01	0,00235	0,00240	0,00240	0,00235	0,00235	0,00235

VALOR DE λ	INTEGR. NUMÉR.	APROX. POL.	
		11ºGRAU	13ºGRAU
1,0	0,11718	0,11718	0,11718
0,9	0,11011	0,11012	0,11011
0,8	0,10246	0,10246	0,10246
0,7	0,09412	0,09411	0,09412
0,6	0,08498	0,08499	0,08498
0,5	0,07491	0,07492	0,07491
0,4	0,06371	0,06378	0,06371
0,3	0,05114	0,05113	0,05114
0,2	0,03686	0,03686	0,03686
0,1	0,02030	0,02032	0,02031
0,05	0,01083	0,01084	0,01084
0,01	0,00235	0,00235	0,00235

A aproximação polinomial para $I_1(\lambda)$ converge para os resultados numéricos do mesmo modo que a aproximação polinomial da função $E_2(\lambda)$.

A figura I.3 ilustra a convergência da aproximação polinomial da função $I_1(\lambda)$ para os valores fornecidos pela integração numérica. Nesta figura, os resultados foram apresentados de forma análoga ao realizado nas figuras I.1 e I.2.

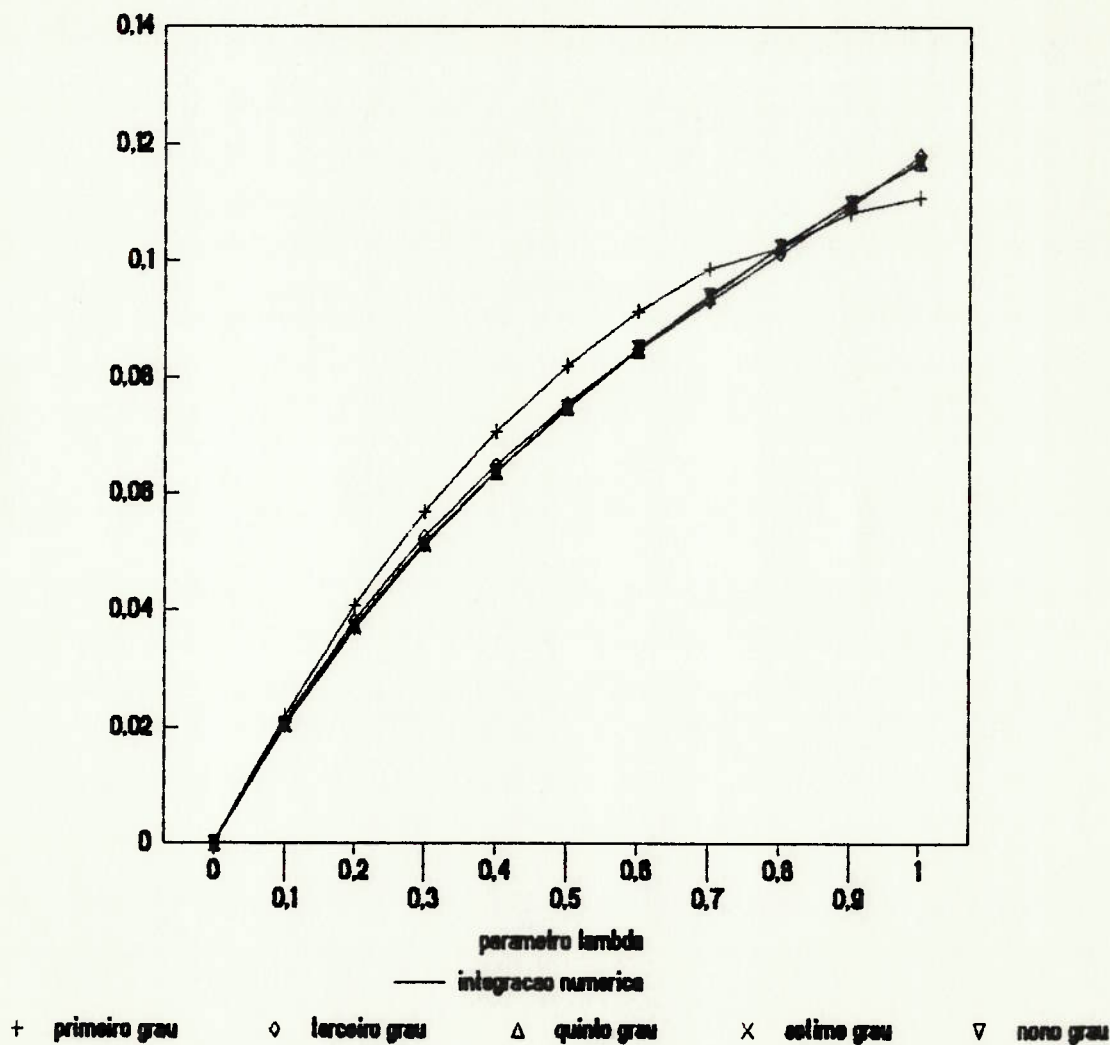


FIG. I.3 - Aproximações polinomiais versus interação numérica da função $I_1(\lambda)$.

A seguir, será apresentada a tabela I.5, equivalente à tabela I.4, mas para a função $I_2(\lambda)$, considerando valores até a quinta casa decimal.

TABELA I.5 - CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE $I_2(\lambda)$.

VALOR DE λ	INTEGR. NUMÉR.	APROXIMAÇÕES POLINÔMIAS				
		1ºGRAU	3ºGRAU	5ºGRAU	7ºGRAU	9ºGRAU
1,0	0,11830	0,11129	0,11494	0,11805	0,11837	0,11828
0,9	0,11141	0,10903	0,11079	0,11167	0,11136	0,11141
0,8	0,10396	0,10556	0,10269	0,1040880	0,10401	0,10394
0,7	0,09587	0,10069	0,09476	0,09569	0,09593	0,09588
0,6	0,08703	0,09422	0,08659	0,08669	0,08701	0,08705
0,5	0,07730	0,08590	0,07775	0,07705	0,07721	0,07729
0,4	0,06650	0,07543	0,06774	0,06651	0,06643	0,06647
0,3	0,05435	0,06248	0,05603	0,05464	0,05437	0,05434
0,2	0,04041	0,04663	0,04194	0,04082	0,04051	0,04043
0,1	0,02374	0,02712	0,02470	0,02404	0,02383	0,02376
0,05	0,01363	0,01535	0,01413	0,01379	0,01368	0,01364
0,01	0,00354	0,00388	0,00364	0,00357	0,00355	0,00354

VALOR DE λ	INTEGR. NUMÉR.	APROX. POL.	
		11ºGRAU	13ºGRAU
1,0	0,11830	0,11831	0,11830
0,9	0,11141	0,11141	0,11141
0,8	0,10396	0,10396	0,10396
0,7	0,09587	0,09586	0,09587
0,6	0,08703	0,08703	0,08703
0,5	0,07730	0,07730	0,07730
0,4	0,06650	0,06649	0,06650
0,3	0,05435	0,05434	0,05435
0,2	0,04041	0,04041	0,04041
0,1	0,02374	0,02374	0,02374
0,05	0,01363	0,01363	0,01363
0,01	0,00354	0,00354	0,00354

A figura I.4 ilustra a convergência da aproximação polinomial da função $I_2(\lambda)$ para os valores fornecidos pela integração numérica. Nesta figura, os resultados foram apresentados de forma análoga ao realizado na figura I.3.

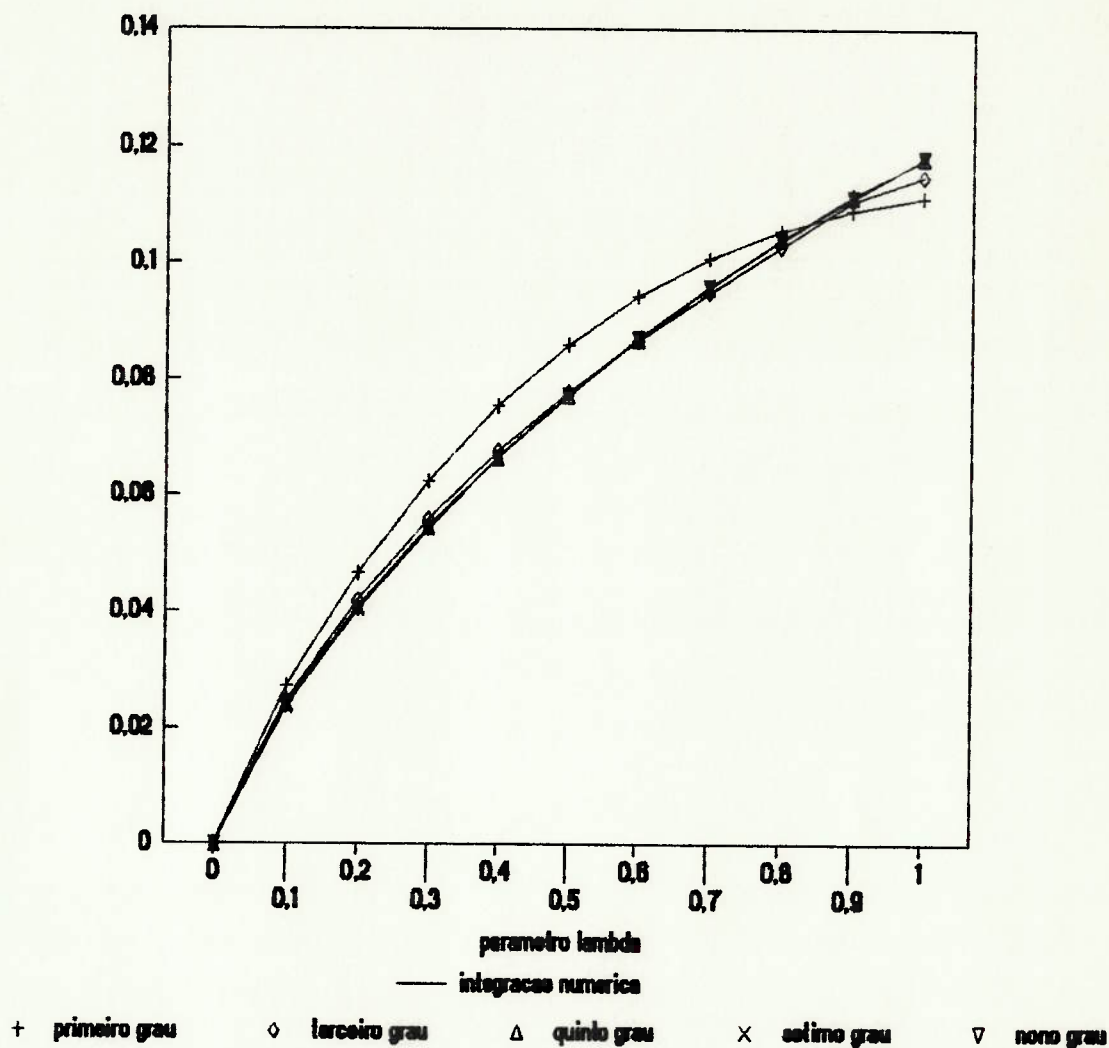


FIG. I.4 - Aproximações polinomiais versus interação numérica da função $I_2(\lambda)$.

Através das tabelas I.2, I.3, I.4 e I.5 e das figuras I.1, I.2, I.3 e I.4, verifica-se a convergência das aproximações polinomiais para os resultados obtidos via

integração numérica. Basta uma aproximação polinomial de 13º grau para recuperar, praticamente, os resultados da integração numérica até a quarta casa decimal. Em termos práticos, o polinômio de 9º grau é suficiente (convergência até a segunda casa decimal).

Para estudar a convergência da aproximação polinomial para a constante $(4 - \pi)$ e para determinar qual o valor da constante A_2 , a aproximação polinomial foi levada até o 51º grau (utilizou-se até o vigésimo quinto polinômio de Chebishev $\{T_{2n+1}(\lambda); n=0,1,\dots,25\}$). Na tabela I.6, serão apresentados o valor da constante A_2 e o valor $\sum_{n=0}^M D_{a,n} \cdot (2n + 1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi)$ (denotada como DIFERENÇA na tabela I.6).

TABELA I.6 - Valor da constante A1 e convergência de

$$\sum_{n=0}^M D_{3,n} \cdot (2n + 1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi) \text{ para zero.}$$

Nº DE POLINÔMIOS UTILIZADOS	VALOR DE A1	DIFERENÇA	MODULO DA DIFERENÇA EM % FACE A (4 - π)
1	-1.19065	-0,25025	28,15
2	-1,60563	-0,02723	3,17
3	-1,76484	0,03705	4,32
4	-1,82930	0,04807	5,8
5	-1,85594	0,04390	5,11
6	-1,86736	0,03684	4,29
7	-1,87261	0,03036	3,54
8	-1,87528	0,02515	2,88
9	-1,87684	0,02109	2,46
10	-1,87788	0,01796	2,08
11	-1,87866	0,01549	1,8
12	-1,87528	0,01354	1,58
13	-1,87981	0,01196	1,39
14	-1,88026	0,01065	1,24
15	-1,88066	0,00957	1,11
16	-1,88098	0,00867	1,01
17	-1,88138	0,00788	0,92
18	-1,88172	0,00722	0,84
19	-1,88203	0,00642	0,75
20	-1,88350	0,00614	0,72
21	-1,88266	0,00569	0,68
22	-1,88298	0,00529	0,62
23	-1,88331	0,00494	0,58
24	-1,88364	0,00463	0,54
25	-1,88399	0,00434	0,51

A figura I.5 apresenta a convergência de $\sum_{n=0}^M D_{3,n} \cdot (2n + 1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi)$ para zero em função do número de polinômios de Chebishev utilizados.

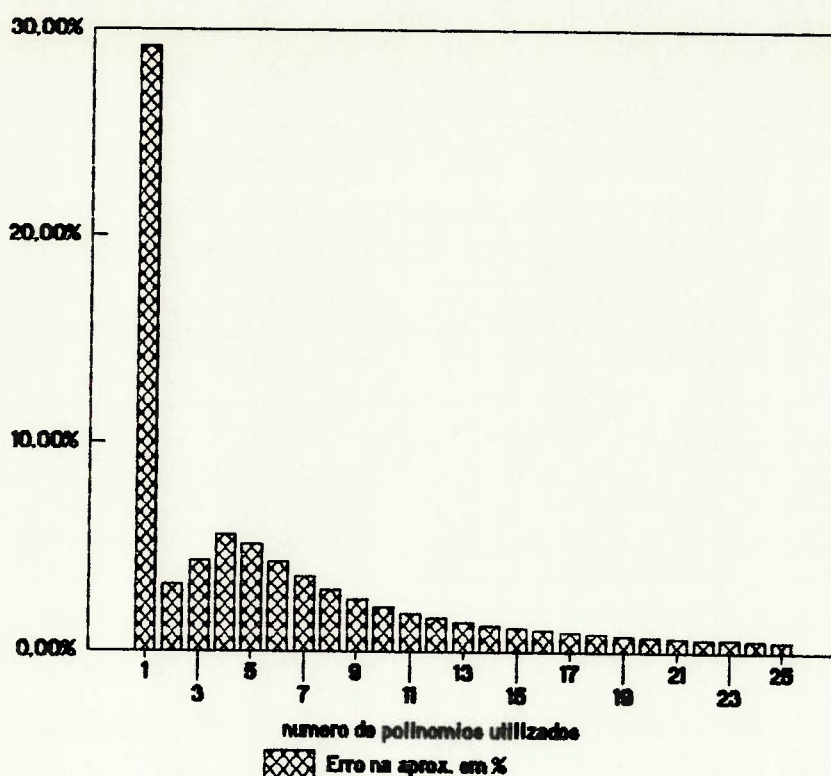


FIG. I.5 - Convergência de $\sum_{n=0}^M D_{3,n} \cdot (2n+1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi)$ para zero em função do número de polinômios de Chebishev utilizados.

A constante A_1 , aparentemente, converge para $-1,884$ e $\sum_{n=0}^M D_{3,n} \cdot (2n+1) \cdot (-1)^n - (4 - \pi)$ vai lentamente a zero.

Truncando a aproximação polinomial no sétimo ($T_{19}(\lambda)$) polinômio (desprezando do oitavo em diante) de Chebishev, verifica-se que o termo linear em λ na aproximação polinomial para $H_3(\lambda)$ pode ser desprezado com erro de 3%, conforme a TABELA I.6. Então, (I.21), com $M = 7$, fornece as funções $H_j(\lambda)$ com no máximo um erro de 3% para $0 \leq \lambda \leq 1$.

* * *

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A., ed. Handbook of Mathematical functions: with formulas, graph and mathematical tables. 9. print. New York, Dover, 1970.
- ARANHA, J. P. A.; PESCE, C. P. A variational method for water waves radiation and diffraction problems. Journal of Fluid Mechanics, v.204, p.135-57, July 1989.
- LADYZHENSKAYA, O. A.; URAL'TSEVA, N. Linear and quasilinear elliptic equations. New York, Academic Press, 1968. (Mathematics in science and engineering, 46)
- LANCZOS, C. The variational principles of mechanics. 4. ed. New York, Dover, 1986.
- MIJAILOV, V. P. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Moscou, Editorial Mir, 1978.
- MILNE-THOMSON, L. M. Theoretical aerodynamics. 4. ed. New York, Dover, 1973.
- PESCE, C. P. Estudos do comportamento de corpos flutuantes em ondas: um enfoque variacional e aplicações da teoria do corpo esbelto. São Paulo, 1988. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- SOBOLEV, S. L. Applications of functional analysis in mathematical physics. Providence, American Mathematical Society, 1963. (Translations of mathematical monographs, 7)
- THWAITES, B., ed. Incompressible aerodynamics. New York, Dover, 1987.

TOMOTIKA, S.; IMAI, I. The moment of the fluid pressure acting on a flat plate in a semi-infinite stream bounded by a plane wall: II, case of upper boundary. Report Aeron. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., n.153, p.475-517, June 1937.

Tuck, E. O. A nonlinear unsteady one-dimensional theory for wings in extreme ground effect. Journal of Fluid Mechanics, v.98, p.33-47, 1980.

TUCK, E. O.; NEWMAN, J. N. Hydrodynamics interaction between ships. In: SYMPOSIUM ON NAVAL HYDRODYNAMICS, 10., Cambridge, 1974. Proceedings. Washington, National Academy of Sciences, 1974, p.28-51.

WIDNALL, S. E.; BARROWS, T. M. An analytic solution for two and three-dimensional wings in ground effect. Journal of Fluid Mechanics, v.41, p.769-92, 1970.

* * *

APÊNDICE A

REFERÊNCIAS PARA OS PARÂMETROS $\lambda.CL/\alpha$, $\lambda.CM/\alpha$ E b/c .

As referências a serem utilizadas são WIDNALL; BARROWS (1970) e TOMOTIKA; IMAI (1937). A figura 8 de WIDNALL; BARROWS, reproduzida a seguir, é a principal referência para $\lambda.CL/\alpha$ quando $0 < \lambda < 1,0$. Para valores de $\lambda > 1,0$, a referência para $\lambda.CL/\alpha$ é a tabela VI de TOMOTIKA; IMAI (1937). Esta tabela fornece também a referência para $\lambda.CM/\alpha$ e b/c . O objetivo deste apêndice é expressar os parâmetros $\lambda.CL/\alpha$, $\lambda.CM/\alpha$ e b/c em termos dos parâmetros utilizados em WIDNALL; BARROWS (1970) e em TOMOTIKA; IMAI (1937), de modo a obter os valores referência para os parâmetros $\lambda.CL/\alpha$, $\lambda.CM/\alpha$ e b/c .

Inicialmente, serão obtidas as expressões para $\lambda.CL/\alpha$ em termos dos parâmetros utilizados em WIDNALL; BARROWS (1970) e em TOMOTIKA; IMAI (1937). Em WIDNALL; BARROWS (1970), o parâmetro utilizado para representar a força de sustentação é o próprio parâmetro $\lambda.CL/\alpha$, em função do parâmetro ε , que corresponde ao parâmetro λ aqui utilizado (na realidade, $\lambda = 2.\varepsilon$). O coeficiente $\lambda.CL/\alpha$ está representado graficamente para $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$ (corresponde a $0 \leq \lambda \leq 1,0$) na figura 8^{1‡} de WIDNALL; BARROWS (1970).

^{1‡} O que realmente interessa na figura 8 de WIDNALL; BARROWS (1970) é a curva que representa a solução numérica via teoria de superfície de sustentação ("Lifting Surface Theory").

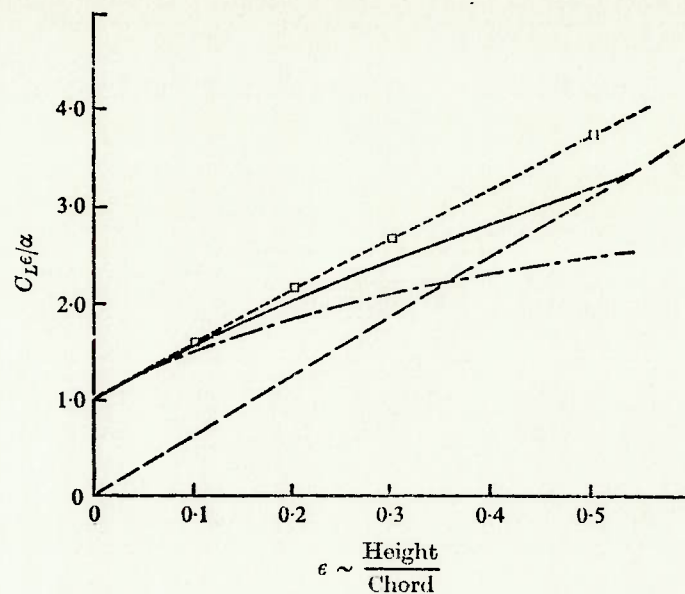


FIGURE 8. Lift coefficient for a two-dimensional flat plate airfoil in ground effect. ---□-- numerical solution; — · —, solution to $O(1)$; —, solution to $O(c \ln \epsilon)$; ····, free stream limit $C_{Le}/\alpha \rightarrow 2\pi\epsilon$.

Infelizmente, WIDNALL; BARROWS (1970) não apresenta resultados para o momento. Por essa razão, recorreu-se à tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937), que fornece o momento normalizado pelo momento para o problema sem fronteiras^{2†} (denotado por M/M_0) em função de uma quantidade discreta de valores de λ . A tabela IV mais a expressão (139) de TOMOTIKA & IMAI (1937) serão reproduzidos a seguir:

$$\frac{M^*}{M_0^*} = 2 \cdot \frac{L}{L_0} - \frac{M}{M_0} \quad (139)^{3†}$$

^{2†} O problema sem fronteiras é a placa plana sob ação de uma corrente em domínio fluido sem fronteiras.

^{3†} Expressão (139) de TOMOTIKA; IMAI (1937)

TABLE IV. ($\beta \rightarrow 0^\circ$)

q	$\frac{2a}{H}$	$\frac{d}{a}$	$\frac{M}{M_0}$	$\frac{M^*}{M_0^*}$
0	0	0.5	1	1
0.02	0.1601	0.4996	1.0008	1.0024
0.05	0.4020	0.4975	1.0050	1.0150
0.10	0.8160	0.4907	1.0200	1.0586
0.15	1.2541	0.4809	1.0451	1.1281
0.20	1.7287	0.4695	1.0803	1.2207
0.30	• 2.8430	0.4462	1.1830	1.4682
0.40	• 4.2972	0.4253	1.3367	1.8065
0.50	• 6.3192	0.4071	1.5622	2.2752

A tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937) apresenta os parâmetros M/M_0 ^{4‡}, M^*/M_0^* ^{5‡} e d/a (braço do momento d normalizado pela meia corda a) para o problema placa plana com "efeito solo" linear no ângulo de ataque (limite $\alpha \rightarrow 0$ da solução não linear no ângulo de ataque^{6†}) em função de uma quantidade discreta de valores do parâmetro $2a/H$. A relação entre o parâmetro $2a/H$ e o parâmetro λ é dada por:

$$\lambda = 2 \cdot \left(\frac{1}{2a/H} \right) \quad (\text{A.i})$$

O parâmetro M/M_0 é a principal referência para o

^{4‡} Momento (M) em relação ao ponto médio da corda normalizado pelo momento no limite $\lambda \rightarrow \infty$ (M_0) (quando o domínio fluido pode ser considerado sem fronteiras) em relação ao ponto médio da corda.

^{5‡} Momento (M^*) em relação ao bordo de ataque do fólio normalizado pelo momento no limite $\lambda \rightarrow \infty$ (M_0^*) (domínio fluido sem fronteiras) em relação ao bordo de ataque do fólio.

^{6†} Em TOMOTIKA; IMAI (1937) o ângulo de ataque é denotado por β .

momento. TOMOTIKA; IMAI (1937) não apresenta resultados para a força de sustentação, mas a partir dos parâmetros M/M_0 e M^*/M_0^* mais a expressão (139) de TOMOTIKA; IMAI (1937), obtém-se o parâmetro L/L_0 , que nada mais é do que a força de sustentação normalizada pela mesma, mas no limite $\lambda \rightarrow \infty$ (domínio fluido sem fronteiras). O parâmetro L/L_0 é usado para obter a referência para o parâmetro $\lambda \cdot CL/\alpha$ e pode ser expresso em termos de M/M_0 e M^*/M_0^* como:

$$L/L_0 = \frac{1}{2} \cdot (M^*/M_0^* + M/M_0) \quad (A.ii)$$

A força de sustentação \vec{L} , em termos de M/M_0 e M^*/M_0^* , é dada por:

$$\vec{L} = \rho \cdot U^2 \cdot c \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{M^*}{M_0^*} + \frac{M}{M_0} \right] \vec{j} \quad (A.iii)$$

Conseqüentemente, o parâmetro $\lambda \cdot CL/\alpha$ em termos de M/M_0 e M^*/M_0^* é dado por:

$$\lambda \cdot CL/\alpha = \lambda \cdot \pi \cdot \left[\frac{M^*}{M_0^*} + \frac{M}{M_0} \right] \quad (A.iv- a)$$

ou

$$\lambda \cdot CL/\alpha = \frac{2\pi}{(2a/H)} \cdot \left[\frac{M^*}{M_0^*} + \frac{M}{M_0} \right] \quad (A.iv- b)$$

A figura 8 de WIDNALL; BARROWS (1970) mais a tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937), junto com as expressões (A.i) e (A.iv), serão utilizados como referência para a aproximação variacional do parâmetro $\lambda \cdot CL/\alpha$.

A tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937) apresenta o parâmetro M/M_0 para o problema placa plana com "efeito

solo" linear no ângulo de ataque (limite $\alpha \rightarrow 0$ da soluçãõ nãõ linear obtida em TOMOTIKA; IMAI (1937)) em funçãõ de $H/2a$ (distânciã do ponto mÃdio da corda à parede normalizada pela meia corda).

O parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$ pode ser expresso em termos de M/M_0 como:

$$\lambda.C_M/\alpha = \frac{M}{M_0} \cdot \frac{\pi \cdot \lambda}{2} \quad (\text{A.v})$$

A partir da tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937) e das expressões (A.i) e (A.v), é gerada a referÃncia para o parâmetro $\lambda.C_M/\alpha$.

O parâmetro d/a nada mais é do que o braço do momento em relaçãõ ao ponto mÃdio da corda normalizado pela meia corda. A relaçãõ entre os parâmetros b/c e d/a é dada por:

$$b/c = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{a} \quad (\text{A.vi})$$

Utilizando-se (A.i), (A.vi) e a tabela IV de TOMOTIKA; IMAI (1937), obtém-se uma referÃncia para o parâmetro b/c .

* * *