

Data Apresentação: 08.06.88

PNV

**JAIRO JOÃO MOLA**

**RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
EM MICROCOMPUTADORES DE 8 BITS**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da USP para a obtenção  
do título de Mestre em Engenharia.

CONSULTA  
FD-554

**SÃO PAULO  
1987**

FD-554  
205 páginas

Jairo João Mola  
Engo. Naval, Escola Politécnica da USP, 1978

RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS  
RETICULADAS EM MICRO-  
COMPUTADORES DE 8 BITS

- PROGRAMA LEVI3D/CAVI3D -

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da USP para a obtenção  
do Título de Mestre em Engenharia

Orientador: Dr. Carlos A. Nunes Dias  
Prof. Assistente Doutor do  
Departamento de Engenharia  
Naval da EPUSP

São Paulo, 1986

# INDICE

AGRADECIMENTOS

RESUMO (ABSTRACT)

MOTIVAÇÃO E ESTRUTURA

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

## CAPÍTULO I - Elementos de Computação

- I.1 Histórico e Definições
- I.2 Os microcomputadores
- I.3 A linguagem BASIC
- I.4 Conclusões do Capítulo I  
Bibliografia

## CAPÍTULO II - Matrizes

- II.1 Definições
- II.2 Matrizes Especiais
- II.3 Operações Matriciais
- II.4 Conclusão do Capítulo II  
Bibliografia

## CAPÍTULO III - Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares

- III.1 Definições
- III.2 Soluções Numéricas Clássicas para Sistemas de Equações Lineares
- III.3 Método de Gauss Simplificado
- III.4 Métodos Modernos para Resolução de Sistemas de Equações
- III.5 Os métodos "in-core"
- III.6 Os métodos "out-of-core"
- III.7 Conclusão do capítulo III  
Bibliografia

## CAPÍTULO IV - O Método dos Elementos Finitos: Aspectos Teóricos

- IV.1 Definições
- IV.2 Massa, Mola, Amortecedor - Análise de Sistemas
- IV.3 Esforço/Deslocamento/Deformação/Tensão
- IV.4 A Tensão-deformação e a Teoria da Elasticidade
- IV.5 Princípio dos Trabalhos Virtuais; Teoremas de Energia e obtenção das Matrizes de Rigidez SK, Massa SM e amortecimento SB
- IV.6 Funções de Deslocamento ou de Forma
- IV.7 A Geometria e os Tipos de Elementos
- IV.8 Roteiro Simplificado para obtenção da Matriz de Rigidez
- IV.9 Conclusão do capítulo IV  
Bibliografia

## CAPÍTULO V - O Elemento Viga-Espacial - Programas LEVI3D/CAVI3D

- V.1 Histórico e Definições
- V.2 Leitura e Impressão dos Dados de Entrada - Programa LEVI3D
- V.3 Rotação de Eixos
- V.4 Matriz de Rigidez da Estrutura
- V.5 Entradas de Cargas e Resolução da Equação de Equilíbrio -  
Programa CAVI3D
- V.6 Aspectos Teóricos Especiais
- V.7 Dados Técnicos e Limitações
- V.8 Roteiro de Programação
- V.9 Conclusão do capítulo V  
Bibliografia

## CAPÍTULO VI - CONCLUSÃO GERAL

### ANEXOS

- 1. Programa para Cálculo de Tensões TEVI3D
- 2. Programas para Cálculos de Sistemas de Equações Lineares
- 3. Programas LEVI3D/CAVI3D (listagem)
- 4. Códigos de Erros
- 5. Exemplos de Aplicação

## AGRADECIMENTOS

Meus principais agradecimentos dirigem-se ao meu orientador Dr. Carlos A. Nunes Dias que, de certa forma, pegou meu trabalho em andamento e, de maneira bastante lógica, restringiu um campo extremamente teórico e extenso à uma aplicação simples e prática. Por essa visão e orientação esclarecedoras estarei, sem dúvida, sempre em dívida.

Outros agradecimentos dirigem-se à empresa na qual trabalho, principalmente nas pessoas dos seus gerentes e diretores, Srs. Shinjiro Sasazaki, J.A.Binda, J.Jubileu e B.J.Bilfinger que permitiram minhas saídas para execução de cursos, elaboração de trabalhos e execução das pesquisas necessárias para meu curso de Mestrado, origem desta dissertação. Também o CPD desta Empresa nunca me negou auxílio quando necessário; particularmente os Srs. Angelo J.Primasi, Antonio C.Curimbaba, Jayme S.Clemente Jr. e Mário S.Alves de Jesus.

Muitos amigos, engenheiros como eu, colaboraram com sugestões e incentivo; lembro principalmente dos Srs. Jairo Nogueira, Ariovaldo de Siqueira e J.R.Liberato. Gostaria de agradecer também à Srta. Regina Pereira da Silva que executou, em um micro da linha Apple e com a utilização do software Wordstar, o original deste trabalho.

Finalmente, cumpre lembrar sempre o papel da Escola Politécnica e da USP como um todo que, com sua forma de ensino, desperta nos indivíduos qualidades que eles próprios não imaginam ter. Isso aconteceu comigo quando resolvi escrever esta dissertação; felizmente essas qualidades despertadas me parecem definitivas e isso não tem preço ... e essa é a função da Educação e da Universidade.

## RESUMO

O presente estudo refere-se ao desenvolvimento de um programa de computador aplicável à resolução de treliças e pórticos espaciais pelo método matricial ou de elementos finitos, para computadores APPLE com, no mínimo, 64 K de RAM.

O método FRONTAL foi utilizada para resolver o sistema de equações, pois admite uma melhor utilização da capacidade de armazenagem do disco, permitindo resolver problemas com até 30 nós e 50 elementos.

Este programa permite ainda, facilmente adaptações, mudando-se do tipo de elemento reticulado para outros elementos diferentes.

## ABSTRACT

The present study refers to a computer program development applied to solve space trusses or frames structures through the matrix or finite elements method for APPLE computers with 64 K RAM minimum.

The FRONTAL method was used to solve the equation's system which enable better utilization of the disk driver storage capability, allowing to solve problems with until 30 nodes and 50 elements.

This program enable ones to switch the frames type structures for other different types easilly.

## NOMENCLATURA

Inicialmente é importante ressaltar que a nomenclatura apresentada é apenas a principal de cada capítulo. Índices não serão apresentados pois seu reconhecimento é imediato. Além disso as nomenclaturas serão apresentadas por capítulo; nessas circunstâncias para o capítulo I não há definições de interesse; para o capítulo III, a nomenclatura do programa FRENTE é apresentada dentro do anexo 2, não sendo repetida. Todas as matrizes e vetores são apresentados em negrito

### CAPÍTULO II

-----

**A** = matriz qualquer  
**A<sup>-1</sup>** = matriz inversa de A  
**A<sup>T</sup>** = matriz transposta de A  
**A<sup>S</sup>** = matriz simétrica de A  
**A<sup>AS</sup>** = matriz anti-simétrica de A  
**|A|** = det. A = determinante de A  
**A<sup>TS</sup>** = matriz em banda, triangular superior  
**A<sup>TI</sup>** = matriz em banda, triangular inferior  
**a<sub>ij</sub>** = um valor qualquer da matriz A  
**B** = matriz dos cofatores de A  
**D** = matriz diagonal  
**I** = matriz identidade

### CAPÍTULO III

-----

**A** = matriz qualquer (inclusive vetores, ou matrizes coluna ou linha)  
**a<sub>ij</sub>** = um valor qualquer da matriz A (Da mesma forma para B e b<sub>ij</sub>, C e c<sub>ij</sub>...F e f<sub>ij</sub>,...U e u<sub>ij</sub>,...X e x<sub>ij</sub>, Y e y<sub>ij</sub>, Z e z<sub>ij</sub>)  
**AS** = vetor resposta de um sistema de equações lineares para as rotinas apresentadas no anexo 2  
**D** = matriz diagonal  
**EL** = vetor de carga nas rotinas apresentadas no anexo 2  
**F** = vetor de carga  
**U** = matriz triangular superior  
**U<sup>T</sup>** = matriz triangular inferior  
**X** = vetor resposta de um sistema de equações lineares

### CAPÍTULO IV

-----

É importante observar neste capítulo que, tanto  $\frac{d^2x}{dt^2}$  como  $\ddot{x}$  poderão ser utilizados indistintamente para significar a derivada segunda de x com relação ao tempo

a = aceleração  
 B = matriz de relacionamento entre deslocamento e deformação  
 b = constante de amortecimento  
 be = constante de amortecimento em rotação  
 D = matriz de relacionamento entre tensão e deformação (tensor elástico)  
 E = módulo de elasticidade longitudinal (ou de Young)  
 F = forças externas (sub-índices: m=massa, k=mola, b=amortecedor)  
 f(x) = funções  
 G = módulo de elasticidade transversal  
 I = momento de inércia da massa  
 k = constante de mola  
 k<sub>θ</sub> = constante torcional de mola  
 M = momentos externos (sub-índices: m=massa, k=mola, b=amortecedor)  
 m = massa  
 N = função de forma  
 SB = matriz de amortecimento do sistema  
 SK = matriz de rigidez do sistema  
 SM = matriz de massa do sistema  
 p = vetor de força  
 P = quantidade de movimento  
 r = vetor de posição  
 t = tempo  
 v = velocidade  
 x = espaço  
 Λ = matriz dos cossenos diretores  
 γ = deformação angular  
 ε = deformação linear  
 ν = coeficiente de Poisson  
 ξ, η = coordenadas p/ elementos isoparamétricos (semelhantes à x, y)  
 δ(δ\*, δ, δ̇) = deslocamentos do elemento (de seus pontos, velocidade, aceleração)  
 σ = tensão normal  
 τ = tensão tangencial ou cizalhante

## CAPÍTULO V

---

Neste capítulo, o mais importante é verificar a nomenclatura dos programas LEVI3D/CAVI3D. A ordem de precedência utilizada é a dos programas  
 LEVI3D(LER Viga 3 Dimensões)

---

D\$=CHR\$(4) = carácter nulo do código ASCII  
 XX\$ = nome do programa  
 CW = número do programa  
 SE(I, J) = matriz de rigidez de um elemento escrita nos eixos locais  
 ST(I, J) = Matriz de rigidez de um elemento multiplicada pela matriz de rotação  
 R1(I)..R9(I) = valores da matriz de rigidez para cada elemento  
 LX(I) = comprim. de um determinado elemento  
 CO(I, J) = coordenadas nodais (X, Y, Z)



NO(I) = no. de nó restrito  
 LN(I,J) = no. dos nós que formam um elemento (NO1, NO2 e NO3)  
 IR(I,J) = código de restrições em um determinado nó (0ou1)  
 PR(I,J) = valores dos deslocamentos restritos para um determinado nó  
 E2(25) = Código de erros (veja anexo 4)  
 EE(I),GE(I),XE(I),YE(I),ZE(I),AE(I),WE(I),G1(I,2)= valor dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal, dos momentos de área nas direções X,Y e Z do elemento, da área transversal, da densidade em peso e dos coeficientes de deformação por cisalhamento nas direções Y e Z, para cada um dos materiais envolvidos na análise.  
 E(I),G(I),IX(I),IY(I),IZ(I),A(I),WD(I),AF(I,2)= idem acima, porém para cada elemento  
 FO(I) = vetor auxiliar para determinação da FRENTE  
 N = no. de nós que formam o elemento  
 DI = dimensão espacial  
 NN = graus de liberdade por nó  
 MF = máxima FRENTE admissível  
 NB = graus de liberdade total de um elemento  
 MP = graus de liberdade máximo de toda a estrutura (no. de nós x NN)  
 OP(I) = Códigos de opções  
 D1,D2,D3 = Drives escolhidos para leitura de Dados, Gravação de Dados e Gravação das Matrizes de Rigidez e Rotação  
 Z3,Z4,Z5,Z6,Z7= Índices para selecionar apenas o "modo de edição" de cada bloco de dados  
 NE = no. total de elementos (máximo 50)  
 NP = no. total de nós (máximo 30)  
 NV = no. total de nós alguma restrição (máximo 15)  
 NM = no. total de matrizes diferentes (máximo 10)  
 NC = no. de casos de carga  
 KF = valor passageiro da FRENTE CALCULADA  
 MS = valor calculado para o máximo valor necessário de variáveis da FRENTE na memória ( $MS = (MF * MF - MF) / 2 + MF$ )  
 DAGE = nome do arquivo de dados gerais  
 COORD = nome do arquivo de dados de coordenadas  
 ELEM = nome do arquivo de dados dos nós que formam um elemento  
 REST = nome do arquivo de dados de Restrições  
 FREM = nome do arquivo de dados da FRENTE  
 ROTA = nome do arquivo de dados das matrizes de rotação  
 A1 = nome do arquivo de dados das matrizes de rigidez

### CAVI3D (Carregar Viga em 3 Dimensões)

D\$=CHR\$(4)= caráter nulo do código ASCII  
 SE(I,J) = matriz de rigidez do elemento nos eixos globais da estrutura  
 ST(I,J) = idem LEVI3D  
 CN(I) = vetor de cargas nodais  
 CP(I,J) = matriz de cargas nos elementos (incluindo peso próprio) nos eixos do elemento  
 EL(I,J) = matriz de cargas global, nos eixos da estrutura

CC(10) = vetor indicador dos tipos de cargas p/um elemento  
 FE(12) = vetor das forças para um elemento  
 LN(I,J), A(I), WD(I), AF(I,2) = como em LEVI3D  
 NO(I), PR(I,J), IR(I,J) = como em LEVI3D  
 R1(I)...R9(I), LX(I) = como em LEVI3D  
 L(I), LI(I) = indicadores da existencia ou não de cargas nodais e  
 cargas nos elementos para um determinado nó ou  
 elemento  
 AS(I) = vetor dos deslocamentos nos eixos globais  
 AR(I) = vetor dos deslocamentos nos eixos dos elementos  
 FI(I), FF(I), EQ(I), VE(I), GL(I), GS(I), NA(I), LO(I), ND(I) = conforme  
 indicado no capítulo III para o programa FRENTE  
 OP(I) = código de opções  
 D1, D2, D3 = drives escolhidos p/leitura gravação de dados,  
 gravação de DESL/REAC/FORC e resolução  
 P = carga aplicada em um determinado elemento  
 FP = distancial porcentual da carga em relação ao nó da  
 esquerda (N01)  
 B = distancia da carga em relação ao nó da direita (N02)  
 M0 = momento aplicados em um determinado elemento  
 WL = carga distribuída aplicada em um determinado elemento  
 TE = temperatura de um determinado elemento  
 AL = coeficiente de dilatação térmica de um determinado  
 elemento  
 DESL = nome do arquivo p/gravação dos deslocamentos  
 REAC = nome do arquivo p/gravação das reações  
 FORCA = nome do arquivo p/gravação das forças  
 PE = peso de um elemento  
 PT = peso total da estrutura

## LISTA DE TABELAS E FIGURAS

Cumpra observar que as figuras e tabelas apresentadas no trabalho encontram-se numeradas por capítulos, porém nenhuma tem qualquer denominação especial já que encontram-se intimamente relacionadas com o texto. Dessa forma somente observamos que, os capítulos I, II, e III não apresentam tabelas ou figuras; o capítulo IV apresenta tabelas de no. IV-I à IV-III e figuras IV-I à IV-XXXVI. Finalmente no capítulo V temos as tabelas V-I à V-II e as figuras V-I à V-XXI.

Além disso, figuras não numeradas e listagens são apresentadas nos apêndices.

## "MOTIVAÇÃO E ESTRUTURA"

"... e que, no entanto, a pluralidade das opiniões é uma prova que nada vale para as verdades um pouco difíceis de descobrir, pelo fato de ser bem mais verossímil que um só homem as encontre que todo um povo - não podia escolher ninguém cujas opiniões me parecessem dever ser preferidas às dos outros. Assim, vi-me forçado a procurar conduzir-me a mim mesmo."

(Discurso do Método, Descartes)

As opiniões das pessoas são, de certa forma, sempre arbitrárias. Lembro-me das impressões deixadas por dois filmes exibidos simultaneamente nos cinemas, tempos atrás. Ambos tratavam do problema do Vietnã porê, com enfoques totalmente diversos. O primeiro deles, um documentário intitulado 'Corações e Mentês', abordava o problema mostrando toda a violência e o poderio norte-americano usados contra os 'heróicos' vietcongs; o segundo, uma ficção, 'Franco-atirador', preocupava-se em demonstrar como os 'bondosos' soldados americanos poderiam ser cruelmente descaracterizados pelos 'maus' povos do sudoeste asiático.

As impressões deixadas por uma guerra podem ser as mais variadas, sendo certo que teremos sempre acesso mais fácil a opinião dos vencedores ou daqueles que, em um conflito localizado, tiverem maior poder de divulgação. A guerra do Vietnã foi necessária até que poderosas entidades, dentro e fora dos Estados Unidos, começassem a duvidar de sua validade; surgiram então duas correntes diferentes de pensamento, o que proporcionou uma divisão da imagem desse conflito, cada opositor empenhado em demonstrar passagens e atos que caracterizassem apenas seu ponto de vista, como no caso dos dois filmes antagônicos.

Na ciência o processo se repete. Não existe um consenso geral e imutável sobre a origem do homem ou sobre a mecânica; o que existe são as opiniões de Darwin/Wallace sobre a origem das espécies, ou as proposições de Einstein sobre a dinâmica dos corpos, assim como perdurou por longo tempo a idéia de Ptolomeu de que a Terra era o centro do Universo. Ptolomeu estava incorreto em suas conclusões extremamente elegantes, que foram sustentadas pela Igreja contra todas as evidências, durante a Idade Média.

Porê, diferentemente de opiniões baseadas apenas em critérios subjetivos, tipo 'a favor' ou 'contra', a opinião científica, conforme já proposto durante o Renascimento, deve ser consolidada por fatos, experimentações e teorias de previsão do fenômeno. Isso faz com que seja muito menos amplo o leque de opiniões possíveis para os fenômenos ou conjecturações científicas e, somente inteligências superiores conseguem, em momentos apropriados, modificar opiniões científicas já estabelecidas. Este trabalho é na verdade um resumo das minhas impressões pessoais acerca de determinados fatos científicos. Para isso utilizei-me de conceitos já estabelecidos por outros, ou seja, não sendo cientificamente genial apenas adaptei conhecimentos já existentes de forma a garantir meu próprio credo em determinados fatos.

Neste instante é importante mencionar que, nos últimos cinco anos venho trabalhando como engenheiro projetista de equipamentos pesados como vasos de pressão, caldeiras, trocadores de calor, colunas e estruturas das mais diversas; esses equipamentos, motivados pela crise econômica, tem-se sofisticado dia a dia. Gasta-se muito mais hoje com projeto, controle da qualidade, soldagem, etc. em detrimento de gastos com excesso de material e consequente energia para transformação.

Esse processo de sofisticação de projeto e fabricação segue o caminho aberto pela aplicação de computadores em larga escala, na indústria. Hoje não se pode imaginar uma empresa que não disponha do auxílio de computadores. Desse forma, o trabalho de um

engenheiro de projetos tornou-se impossível sem a aplicação de programas especialmente desenvolvidos para cada cálculo específico pois, sem eles, fatores como preços e prazos tornariam uma empresa pouco competitiva com relação a outras que obtivessem, em tempos muito menores, equipamentos a preços mais baixos e melhor calculados; basta lembrarmos que os computadores podem calcular, em uma fração do tempo gasto por uma equipe de engenheiros, um número maior de possibilidades de construção para um mesmo equipamento.

Resta falar, antes de qualquer conclusão, de uma característica particular de meu caráter. Não é uma característica incomum, visto que muitos a tem, entretanto pesou bastante na execução deste trabalho. Essa particularidade de minha personalidade relaciona-se, de certa forma, ao primeiro item proposto por Descartes em seu 'Discurso do Método' e implica em não aceitar nenhum fato como verdadeiro, a menos que se tenha absoluta certeza disso após uma análise pessoal.

Os fatos expostos são os responsáveis diretos por esta obra pois, meu trabalho como engenheiro de projetos implicou na necessidade de contato com uma grande variedade de programas para cálculo de equipamentos, particularmente com aqueles relacionados ao método dos elementos finitos. Por outro lado, apesar do grande número de programas confiáveis existentes nessa área, a mencionada característica de meu caráter praticamente me conduzia a um completo desassossego toda vez que eu necessitava utilizar um desses programas, verdadeiras 'caixas pretas' nas quais temos uma pequena participação. Preocupe-me então em desenvolver um "software" adequado a computadores pessoais de pequeno porte, linha "APPLE" ou similar, acessíveis a quaisquer profissionais; não encontrei ainda, nos "software" disponíveis no mercado, nada semelhante ao desenvolvido neste trabalho. Os programas mais interessantes neste sentido exigem, no mínimo, um computador da linha "PC" que já necessita, em uma configuração razoável, de investimentos da ordem de Cz\$ 150.000,00 (sem considerar o próprio "software" que implica em custos de aprox. US\$3000 a US\$ 5000).

Finalmente, conforme já exposto, não sendo nenhum genio, não pretendo introduzir modificações em teorias estabelecidas; pretendi, antes de tudo, convencer-me que o método dos elementos finitos implantado em computadores, para nossa utilização, é confiável e, além disso, quais seus limites.

O caminho que segui para me convencer das potencialidades do método em questão pode não servir a todos. No entanto acredito que possa ajudar uma boa parte das pessoas a encontrar caminhos próprios de análise; servirá também, se eu não estiver sendo por demais pretencioso, para auxiliar na elaboração de programas pessoais de elementos finitos para computadores de pequeno porte. Isso poderá ser feito para outros tipos de elementos, por exemplo, elementos planos ou placas.

A estrutura deste trabalho é simples e pode ser, a princípio, subdividida em dois grandes grupos: uma parte matemática composta pelos capítulos I, II e III e uma parte sobre os métodos e suas aplicações, composta pelos capítulos IV e V. Mais especificamente, na parte matemática, os capítulos I e II tratam de informações gerais sobre computadores e matrizes, enquanto que

o capítulo III é mais aplicativo e trata da resolução de sistemas lineares.

Na segunda parte, o capítulo IV trata da teoria do método e o capítulo V estuda um programa para o elemento viga espacial. Existe ainda este prólogo que pretende descrever as motivações que resultaram neste trabalho e, uma conclusão final. Observe-se que cada capítulo tem também uma estrutura interna, começando-se sempre pelas definições e terminando-se com as conclusões do capítulo em questão.

Para facilitar ao leitor interessado, a bibliografia é indicada em cada capítulo. Esse procedimento, acredito, possibilitará a que cada um possa analisar mais facilmente os aspectos nos quais hajam dúvidas pessoais.

CAPÍTULO I - "ELEMENTOS DE COMPUTAÇÃO"

"Eu explico depois, HAL.  
Temos muito tempo

David Bowman, comandante  
da Discovery à HAL-2000,  
computador de bordo"

(Ref.1 - Arthur C. Clarke)



## I-1. HISTÓRICO E DEFINIÇÕES

---

A ficção "2001- Uma Odisséia no Espaço", criou o mito do computador "inteligente" e mentiroso como o HAL-2000. Posteriormente, Arthur Clarke, seu idealizador, redimiu o personagem em "2010 Uma Odisséia no Espaço II", dando-lhe porém, contornos mais humanos e dessa forma a idéia do computador com sentimentos subsistiu.

Na verdade ainda falta muito para isso, porém, a história do computador está apenas em seu começo.

Em relação à máquina (ou "hardware") propriamente dita, um computador baseia-se em sinais elétricos de "ligado e desligado"; esse fato implica em que a linguagem ideal para os computadores seja a binária onde com dois sinais apenas, 0 e 1, podemos escrever quaisquer sinais, sejam números ou caracteres.

Desta forma, a gravação de um caracter qualquer é feita pela passagem ou não, de uma corrente elétrica em determinadas partes do computador. Essa menor parte que pode ser "lida" pela passagem de uma corrente elétrica é chamada "bit" (binary digits). No nascer dos computadores os bits eram constituídos por reles que abertos eram lidos como zeros e, se fechados como um; pode-se imaginar o tamanho de uma CPU naqueles tempos. A IBM foi a pioneira nos computadores montando o MARK-I durante a 2a. Guerra Mundial. Seguiu-se a substituição dos reles por válvulas. O primeiro desses computadores, o ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Calculator) foi construído na Universidade da Pensilvânia em 1946 com 18000 válvulas eletrônicas, 70000 resistores, 10000 capacitores, 6 interruptores e inúmeros problemas como queima constante de válvulas e rompimento de ligações elétricas devido à quantidade incrível de fios envolvida na construção do equipamento.

Pior que tudo isso era a impossibilidade de modificar o programa que estava sendo executado pelo ENIAC, já que ele podia ler dados mas o programa estava pré-determinado pelas ligações das válvulas. O único modo de fazer isso era desligar e religar uma enorme quantidade de fios. A idéia de carregar os "programas", além dos dados, no computador, por meio de cartões, fitas, teclado, etc. foi do matemático húngaro Von Neumann. Começava a nascer o "software".

Uma grande novidade surgiu em 1947 quando os laboratórios Bell dos U.S.A. inventaram o transistor (transfer resistor), um resistor de transferência que, através da passagem de uma corrente diminuta em uma parte do elemento, podiam controlar a passagem de uma corrente bem maior em outro ponto qualquer. O material para esses transistores, eram semi-condutores; no caso inicial o germânio e, posteriormente o silício. Os transistores substituíram com enorme vantagem as válvulas que gastavam muita energia para aquecerem; por causa disso podiam ser aproximados enormemente. Era a 2a. geração de computadores, os transistorizados.

Como um dos grandes inconvenientes da construção de computadores, permaneceu a necessidade de ligação por fios e

soldas. Os fios foram substituídos por circuitos impressos, placas isolantes cobertas com uma camada de condutores onde são desenhados e protegidos os circuitos de ligação, sendo a placa posteriormente atacada com ácido, restando apenas as partes protegidas relativas às ligações.

Faltava, apenas substituir as soldas; essa substituição gerou os computadores da última geração e, sem dúvida, a revolução dos computadores.

No final dos anos 50, Jack Kilby da Texas Instrument e Robert Noyce da Fairchild Semiconductors construíram o primeiro circuito integrado, onde, sobre uma pastilha de silício monocristalino estão contidos inúmeros transistores e suas ligações.

Baseando-se nos circuitos integrados que executavam um único tipo de função, em 1971 a Intel desenvolveu o Micro-processador que é o coração do computador de hoje.

A fabricação de um circuito integrado é complexa, mas à princípio trata-se de desenhar o circuito completo em grande escala, dividir esse desenho em áreas denominadas de "coletor", "base" e "emissor", reduzir esses desenhos ao tamanho do cristal de silício e, por processo semelhante ao da fabricação de um circuito impresso, gravar no silício as áreas coletoras, de base ou emissoras. Normalmente tornam-se as áreas coletoras e emissoras condutivas através da "dopagem" do silício semi-condutor com fósforo ou nitrogênio. A área da "base" é dopada de maneira contrária as coletora e emissora; isso gera as denominações de circuitos "npn" ou "pnp", conforme a ordem de "dopagem". É comum a designação atual de "chip" para o circuito integrado.

Uma vez determinada a maneira de se gravar sinais na CPU é importante verificar-se alguma coisa como está organizada essa memória central; para isso recomendamos as ref. 2 e 3 após a leitura das quais ficará mais clara a organização da CPU.

Finalmente, nos anos 60, aconteceu uma nova revolução nos computadores. Criou-se a APPLE à partir do nada e passou-se a produzir computadores para o homem comum; os computadores deixavam os laboratórios e as indústrias e invadiam os lares; era a revolução dos "MICROS". Hoje qualquer pessoa pode encontrar um microcomputador pessoal que esteja dentro de suas posses e que realize tarefas das mais variadas.

## I-2. MICROCOMPUTADORES

---

Os microcomputadores são, de maneira genérica, semelhantes aos grandes computadores em escala reduzida. No mercado nacional, atualmente, dispõe-se de 5 tipos básicos de micros: os da linha americana da APPLE, dos PC's da IBM, os da linha inglesa TRS-80, os da linha do CP da Prológica e, mais recentemente os da linha japonesa MSX. Mundialmente esses também são os mais tradicionais tipos do mercado, principalmente os PC's que utilizam-se de microprocessadores

tipo 8088 de 16 bits, enquanto os outros utilizam-se de microprocessadores de 8 bits.

A grande vantagem dos micros em relação aos grandes computadores é, evidentemente, seu baixo custo de aquisição e seu sistema totalmente modular; pode-se criar, praticamente dezenas de configurações dependendo das necessidades e posses de cada um.

Parece lógico inferir que um microcomputador não tem a mesma potencia de computadores de grande porte (ditos na terminologia da informática "main frames"); tanto em termos de capacidade de memória quanto em relação ao tempo de execução de cálculos. Porém os computadores da linha PC já podem utilizar discos rígidos de até 70 Mb e coprocessadores numéricos (tipo 8087) que aceleram a velocidade de cálculo em até 30 vezes.

Os computadores da linha APPLE, pioneiros no mercado, são constituídos de microprocessadores de 8 bits tipo 6502. Existem uma série de desvantagens entre os computadores de 8 bits em relação aos de 16 bits; particularmente sua precisão. Entretanto, pode-se, atualmente, conseguir uma configuração completa de um APPLE II e, com dois leitores de disco, monitor e impressora (incluindo-se todas as placas de interligação) por cerca de Cz\$ 43.000,00 enquanto uma configuração completa de um computador da linha PC, não sai por menos de Cz\$ 65.000,00 não se considerando leitores de disco rígido. No caso, comparamos os preços atuais do TK-3000 da Microdigital ou SPECTRUM da Scopus comparáveis aos APPLE de última geração, ao SOLUTION 16 da Prológica.

Dessa forma, optamos por criar um programa de cálculo estrutural que se adaptasse à um dos menores, em termos de capacidade e recursos, micros do mercado; no caso o APPLE II. Isso possibilita sua fácil adaptação à qualquer outro dos microcomputadores existentes.

Em adição a isso, o fato dos computadores tipo APPLE II serem de baixo custo de aquisição, possibilita a utilização do presente programa por estudantes e profissionais liberais que podem, muito mais facilmente, dispor de um computador dessa linha.

O presente programa, existe para utilização em computadores da linha PC, escrito em linguagem de máquina, podendo processar até 200 elementos no espaço e gastando cerca de 14 segundos por elemento. A transformação da linguagem BASIC para linguagem de máquina foi feita, nesse caso, com o auxílio de um "compilador" denominado "QUICKBASIC" e um "linker".

Observamos finalmente que, um "compilador" é um programa destinado à transformar um programa em BASIC, ou linguagem de alto nível qualquer, em linguagem de máquina; isso acelera em muito o tempo de resolução pois não existe a necessidade de se decodificar a linguagem durante o processamento. Um "linker" é um programa que junta ordenadamente as transformações executadas pelo compilador.

### I.3. A LINGUAGEM BASIC

---

Existem um sem número de linguagens ditas de "alto nível" ou seja, linguagens que podem ser facilmente assimiladas por pessoas que não façam parte de um grupo seleto de iniciados, as quais são tratadas pelo computador através de programas específicos e transformadas em linguagem de máquina. Assim, por exemplo, a palavra INPUT é designada em BASIC para significar uma entrada de dados; essa palavra é então transformada em um código binário adequado e "lida" pelo computador como uma "instrução" para realizar determinada "tarefa".

As linguagens de alto nível vão se modernizando e adaptando a novos tipos de máquinas. Isso acarretou uma grande quantidade desses tipos de linguagem: o FORTRAN, o COBOL, o ALGOL, o PASCAL, o LOGO, o MUMPS, o RPG, o LISP, o C, etc..

Devido à sua intensa difusão, linguagens como o FORTRAN e o COBOL, apesar de ultrapassadas, encontram-se ainda em grande utilização. Esse fato implica em modernizações de uma mesma linguagem, por exemplo, o FORTRAN IV e o FORTRAN 77.

O BASIC passa por um processo parecido. Criado em 1964 no Dartmouth College por J.G.Kemeny e T.E.Kurtz, diversas versões de BASIC tem sido constantemente lançadas para os microcomputadores. Aliás o BASIC é a linguagem preferida para esse tipo de máquina.

As versões de maior sucesso são, sem dúvida, o BASIC (BASIC Avançado) da IBM, o MBASIC da CPM e o APPLESOFT BASIC da APPLE. As duas primeiras versões são bastante parecidas e contêm uma série de recursos que a terceira não possui.

Os computadores da linha APPLE aceitam tanto o MBASIC quanto o APPLESOFT, porém no primeiro caso necessita-se de uma placa especial e, além disso, apenas 32 kb da máquina ficam liberados automaticamente para a linguagem de programação, sendo o restante utilizado para carregar o MBASIC, o DOS, etc. No caso do APPLESOFT, a linguagem já é residente e não ocupa espaço reservado para os programas.

É conveniente lembrar que, muito mais importante que o BASIC para um microcomputador, é o "software" relativo à criação do "ambiente" de programação, ou seja o Sistema Operacional.

Esse "software" denomina-se, no caso do APPLE, de DOS 3.3 (Disk Operating System) e é, nesse ambiente, que se carrega o MBASIC ou o APPLESOFT, por exemplo. O DOS 3.3 tem seus próprios comandos e permite, além do BASIC outros tipos de linguagem sendo, a mais comum, a ASSEMBLY que já é muito próxima da linguagem de máquina. Existe, incorporado ao APPLE, um programa dito MONITOR que permite a programação em ASSEMBLY.

O APPLESOFT e o MONITOR ocupam uma parte da memória do APPLE que não se destina ao usuário, dita ROM (Read Only Memory); a parte destinada à programação denomina-se RAM (Random Access Memory).

Porém o DOS ocupa, quando carregado, parte da RAM (cerca de 12 kb), bem como o MBASIC.

Por essa razão, utilizaremos ao longo deste trabalho, o APPLE

SOFT é o programa MOVEDOS que "move" o DOS para uma placa de expansão de 16 kb, liberando os 48 kb originais do APPLE para programação. Esse fato aumenta a capacidade de resolução da máquina.

Em termos do BASIC, alguns comandos e rotinas são muito utilizados ao longo deste trabalho e deverão ser verificados, ainda que superficialmente. Recomenda-se a bibliografia do final do capítulo para maiores esclarecimentos. (principalmente 2e3)

#### - Comandos de ENTRADA/SAIDA

---

- INPUT "texto"; X

entra um dado X qualquer (numérico ou de texto), após escrever o texto entre aspas

- PRINT "texto"; TAB (20); X

imprime na tela (PR#0) ou na impressora (PR#1) um texto e o valor de X na posição tabulada 20

```
- PRINT D$; "OPEN BOLA, D"; D1; ", L50"  
  PRINT D$; "WRITE R"; NE  
  PRINT B(1); PRINT B(2)  
  PRINT D$; "CLOSE BOLA"
```

Abre um arquivo de acesso aleatório chamado BOLA, no disco D1 com comprimento de 50 bytes para escrever uma informação no registro R=NE.

Escreve as informações numéricas como B(1) e B(2) e fecha o arquivo.

```
- PRINT D$; "OPEN BOLA, D"; D1; ", L50"  
  PRINT D$; "READ R"; NE  
  INPUT B(1) : INPUT B(2)  
  PRINT D$; "CLOSE BOLA"
```

Idem ao anterior, porém, neste caso, o arquivo foi aberto para leitura dos dados de B(1) e B(2).

Obs.: É importante lembrar que o APPLESOFT o arquivo de dados numéricos é feito como o de um texto e, por exemplo, o número 4.958348E-06 ocupará 12 bytes. Dessa forma o comprimento L do arquivo deverá prever esse fato. Além disso, D\$=CHR\$(4) é o código de vazio do ASCII.

#### - Comandos de ATRIBUIÇÃO DE VALORES

---

- A\$ = "NÃO/SIM"

\$ é uma terminação de toda variável "string", ou seja, não numérica.

- A = B\*C ^ 3+5/2-B

(\*) multiplicação; (^) exponenciação; (/) divisão; (+) soma;  
(-) subtração

- SE(1,1) =4

Trata-se do valor de uma matriz SE(i,j). Deve-se sempre "dimensionar" uma matriz antes de sua utilização através do comando, DIM SE(100,20), por exemplo.

O dimensionamento pode ser dinâmico em BASIC, porém isso não é permissível em linguagem de máquina; também no BASIC pode-se deixar de dimensionar uma matriz com até 10 elementos.

À fim de preparar nossos programas para uma futura compilação, optamos por dimensionar todas as matrizes inicialmente e com seus valores máximos (em BASIC pode-se por exemplo adotar DIM SE(NB, NB) e se NB=2 ou NB=100, a matriz SE terá menos ou mais elemento.

- Comandos de DECISÃO/DESVIO

---

- IF A=B AND C=D THEN 500

significa que se A=B e C=D o programa será desviado para o endereço 500

- IF A=B OR C=D THEN 500

Significa que se A=B ou C=D o programa será desviado para o endereço 500.

- GOTO 500

O programa será desviado para 500

- GOSUB 500 ..... RETURN

O programa será desviado para a subrotina 500 e retornará ao ponto de partida ao encontrar o comando RETURN

- FOR I=1 TO 21 STEP 2 ..... NEXT I

Executa determinadas instruções para I=1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21

- Comandos do DOS 3.3

---

- LOAD LEVI3D

carrega o LEVI3D do disco para a CPU

- SAVE LEVI3D

carrega o LEVI3D da CPU para o Disco

- RUN LEVI3D

carrega e roda o LEVI3D

maiores detalhes de programação poderão ser encontrados na externa bibliografia existente sobre o assunto, incluindo os manuais que acompanham a máquina.

#### I-4. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO I

Neste capítulo inicial vimos alguma coisa sobre a história recente do computador, sobre os microcomputadores e sobre linguagem de programação; esta última parte será uma ferramenta importante ao longo deste trabalho, principalmente o BASIC e o DOS.

Não foi nossa intenção nos estendermos sobre este assunto pois ele, por si só, seria motivo para muitos trabalhos. Nossa idéia principal, foi tentar mostrar algumas vantagens e desvantagens de cada tipo principal de microcomputador, principalmente os PC e APPLE para justificar nossa escolha sobre o último.

Nesse aspecto, esperamos deixar claro que os programas desenvolvidos (LEVI3D/CAVI3D) existem tanto em BASICA quanto em APPLESOFT, porém, no caso desta dissertação, a idéia foi demonstrar a possibilidade de se executar cálculos para estruturas espaciais em computadores com poucos recursos e baixa capacidade de memória, no caso o APPLE; esses computadores são acessíveis a um público muito grande, incluindo estudantes de engenharia e profissionais liberais. Esses usuários, poderão, à partir do que abordaremos, criar seus próprios programas de acordo com as suas necessidades de aprendizado e trabalho.

## BIBLIOGRAFIA

1. "2001 - Uma Odisséia no Espaço II" - Arthur C. Clarke
2. "APPLE II - Guia do Usuário - APPLE II Plus e APPLE II e", -  
Poole, McNiff & Cook  
Editora: McGraw-Hill do Brasil; 2a. Edição
3. "Manual de Basic" - Herbert Peckham  
Editora: McGraw-Hill do Brasil; Edição 1984
4. "Linguagem de Programação Assembly para o APPLE II-6502" -  
R.Mottola  
Editora: McGraw-Hill do Brasil; Edição 1986
5. "APPLE Assembly 6502" - H.G.Pimentel  
Editora: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.; Edição  
1986
6. "Introduction to Computer Science" - T. Bartee  
Editora: McGraw-Hill do Brasil; Edição 1975
7. "PR#1 to PR#0:" - Walter Keller  
Editora: Timberline Press, Inc; Edição 1985
8. "Introdução aos Microprocessadores" - R.L.Tokheim  
Editora: McGraw-Hill do Brasil; Edição 1985.



## CAPÍTULO II - "MATRIZES"

"... mas Cayley foi também um dos primeiros a estudar matrizes, outro exemplo da preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra".

(História da Matemática, C. B. Boyer)

## II.1 DEFINIÇÕES

A introdução do uso de determinantes na Matemática Ocidental remonta de 1693 quando Leibniz escreveu á L'Hopital sobre a resolução de equações simultaneas. Anos depois, em 1750, MacLaurin e Cramer utilizavam determinantes na resolução de sistemas de equações. Finalmente em 1812, Cauchy formalizou a utilização dos determinantes, mostrando inclusive suas aplicações a problemas físicos.

No entanto, até Arthur Cayley (1821 - 1895), não havia ainda um conceito formalizado de matriz. Cayley foi o primeiro matemático a estudar e propor toda uma nova álgebra baseada no conceito de matriz.

Basicamente, uma matriz é, por natureza, uma disposição numérica retangular de 'm' por 'n' números quaisquer. Essa disposição, nessas condições, é dita matriz A de ordem m x n.

$$\begin{array}{c}
 \text{coluna} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & a_{m-1,4} & . & . & . & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\
 a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & . & . & . & a_{m,n-1} & a_{m,n}
 \end{array} \right] \text{linha}
 \end{array}$$

A =

Uma matriz é definida e numerada de acordo com suas linhas e colunas. Á uma matriz com uma única linha, denomina-se 'matriz linha' e á matriz com uma única coluna, 'matriz coluna'. Essas matrizes também podem ser ditas 'vetores'. Uma matriz onde m é igual a n é denominada de 'matriz quadrada'; para toda matriz quadrada está assossiado um escalar que é seu determinante. Neste instante podemos verificar como o conceito de determinante é particular dentro da teoria das matrizes.

## II.2 MATRIZES ESPECIAIS

Dentre vários tipos de matrizes, algumas serão de interesse ao longo deste trabalho. Particularmente as 3 seguintes:

### II.2.1 Matriz Diagonal

Denomina-se 'matriz diagonal' a matriz quadrada cujos elementos são do tipo,

$$a_{ii} \neq 0 \text{ e } a_{ij} = 0; \quad \begin{matrix} i = 1 \text{ a } m \\ j = 1 \text{ a } n \end{matrix}$$

Por exemplo,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix}$$

### II.2.2 Matriz Definida Positiva

Uma matriz A é dita 'positiva definida' quando for real e simétrica e para todo X uma matriz coluna, ou vetor, real, e não nulo tivermos:

$$X^T * A * X > 0$$

Pode-se distinguir uma matriz que não seja positiva definida verificando-se se os elementos da diagonal principal são menores ou iguais a zero. Em caso afirmativo, a matriz não será positiva definida. Em caso negativo porém, nada se pode afirmar.

### II.3.3 Matriz em Banda e Matriz Triangular

Matriz em banda é aquela que possui uma região próxima à diagonal onde os valores numéricos são eventualmente diferentes de zero e todos os seus demais elementos são nulos fora dessa região. Esse tipo de matriz aparecerá em inúmeras aplicações físicas, o que implica uma grande melhora nos métodos de resolução desses problemas, como veremos.

SB = semi-banda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}$$

Para uma matriz em banda podemos definir o parametro SB conhecido por semi-banda, que é igual ao maior número de elementos diferentes de zero dentro todas as linha da matriz, contados a partir da diagonal principal, exclusive.

É conveniente definir-se também neste instante o que sejam matrizes 'triangular superior' e 'triangular inferior'; uma matriz será triangular superior se todos os seus elementos abaixo da diagonal principal forem nulos e, evidentemente, uma matriz será triangular inferior se todos os elementos acima de sua diagonal principal forem nulos,

TS  
A=

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}$$

TI  
A=

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

### II.3 OPERAÇÕES MATRICIAIS

---

#### II.3.1 Soma e Subtração de Matrizes

Conforme já observado quando da decomposição de uma matriz quadrada em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, a soma e subtração de matrizes são feitos através da soma ou subtração de todos os seus elementos,

$$C = A + B = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

$$D = A - B = a_{ij} - b_{ij} = d_{ij}$$

Dessa forma, evidentemente, não esta definida a soma e subtração de matrizes de ordens diferentes entre si. A adição e subtração de matrizes guardam as seguintes propriedades,

Comutatividade →  $A + B - C = A - B + C$   
 Associatividade →  $A + (B - C) = (A + B) - C$   
 Transposição →  $S = A + B - C$   
 $T \quad T \quad T \quad T$   
 $S = A + B - C$

### II.3.2 Multiplicação de Matrizes

Podemos multiplicar uma matriz por um escalar ou multiplicar matrizes entre si. O primeiro caso é bastante simples e consiste basicamente em multiplicar todos os elementos da matriz pelo escalar,

$$K * A = \begin{bmatrix} K*a_{11} & K*a_{12} & K*a_{13} \\ K*a_{21} & K*a_{22} & K*a_{23} \\ K*a_{31} & K*a_{32} & K*a_{33} \end{bmatrix}$$

O caso da multiplicação de matrizes entre si é mais complexo e, de certa forma, segue uma metodologia definida de maneira a ser útil para o caso de resolução de sistemas lineares, origem dos estudos de matrizes.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & \dots & \dots & b_{2r} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & \dots & \dots & b_{3r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & \dots & \dots & b_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & \dots & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & \dots & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Um elemento qualquer da multiplicação é definido então por,

$$c_{ij} = b_{i1} * a_{1j} + b_{i2} * a_{2j} + \dots + b_{ir} * a_{rj}, \text{ ou}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r b_{ik} * a_{kj}$$

Pela definição de produto entre matrizes, observamos que as mesmas precisam ser de tal forma que o número de colunas da primeira seja idêntico ao número de linhas da segunda, resultando numa matriz com o número de linhas igual ao da primeira e o número de colunas igual ao da segunda. Assim, para o exemplo acima,

$$C = B * A$$

mxn          mxr          rxn

A multiplicação de matrizes guarda as seguintes propriedades,

Não comutatividade -  $A * B \neq B * A$

Distributividade -  $A * (B + C) = A * B + A * C$

Transposição -  $(A * B)^T = B^T * A^T$

Além disso, pode ocorrer,

$A * B = A * C$ , mesmo que  $B \neq C$

$A * B = 0$ , mesmo se  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$

### II.3.3 Partição de Matrizes

Uma matriz completa sempre pode ser repartida em submatrizes; essa possibilidade é importante na inversão e multiplicação de matrizes.

Pode-se verificar que, dados A e B conforme abaixo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

onde,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}; A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}; B_{21} = \begin{bmatrix} b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}$$

então, vale a expressão,

$$A * B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} \\ A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} \end{bmatrix}$$

## II.4 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO II

---

Neste capítulo foram verificadas as principais propriedades e as operações básicas necessárias à manipulação de matrizes. Esses conceitos deverão ser utilizados por todo este trabalho.

Alguns conceitos específicos da álgebra matricial não foram vistos como é o caso das matrizes tridiagonalizadas, de Eigen, Jacobianas, etc.. Nem todos os estudos sobre as matrizes farão parte deste trabalho, apenas as partes mais usuais e necessárias para o bom entendimento de outros conceitos.

Ainda que, como já dito, as definições aqui introduzidas sejam de utilidade na maior parte dos outros capítulos, cumpre ressaltar sua extrema importância no capítulo II que trata especialmente da resolução de sistemas de equações lineares.

Toda bibliografia indicada é de fácil acesso e poderá ser consultada pelo leitor interessado.

## II.5 "BIBLIOGRAFIA"

1. "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics With Applications to Computers" - Ping-Chum Wang  
Editora: John Wiley & Sons - 1a. Edição 1966
2. "Éléments d'histoire des Mathématiques" - Nicolas Bourbaki  
Editora: Hermann, Paris - Edição 1969
3. "História da Matemática" - Carl Benjamin Boyer  
Editora: Edgar Blucher/EDUSP - edição 1974
4. "Mathematics for Engineers and Scientists" - A. Jeffrey  
Editora: Thomas Nelson and Sons Ltd. - 2a. Edição, 1979/  
1980
5. "Análise Matricial de Estruturas" - Domicio F. Moreira  
Editora: EDUSP/Livros Técnicos e Científicos -  
1a. Edição 1977
6. "Programing the Finite Element Method" - I. M. Smith  
Editora: John Wiley & Sons - 1a. Edição 1982



## CAPÍTULO III

" MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES "

" A Matemática é a rainha das ciencias  
e a teoria dos números é a rainha das  
matemáticas "

(Carl Friedrich Gauss - 1777/1855)  
(ref. 1)

### III.1 DEFINIÇÕES

---

Uma série de matemáticos contribuiu e continua contribuindo para a resolução de sistemas de equações lineares de uma forma cada vez mais simples e prática. São pioneiros os trabalhos de Leibnitz, Cramer, Jacobi e Cauchy mas sem dúvida, as maiores honras nesse sentido cabem a Gauss. De seus trabalhos derivam os dois métodos numéricos mais utilizados ainda hoje para a resolução de sistemas de equações lineares:

- os métodos de eliminação, conhecidos como métodos de Gauss, Gauss-Jordan, Cholesky, etc.
- os métodos iterativos ou de Gauss-Seidel, Gauss-Jacobi, etc.

Os métodos computacionais hoje empregados são sofisticações dos métodos de eliminação e iterativo, de maneira a melhor utilizar as limitadas capacidades de armazenagem de dados de cada máquina. Com isso originaram-se dois grandes campos de desenvolvimento para o método da eliminação: a solução em banda, e o método frontal. O método iterativo evoluiu no sentido da utilização de valores de sobrerrelaxação.

É conveniente lembrar que um importante desenvolvimento precedeu a análise de sistemas de equações lineares por computadores; foi a adoção de um tratamento matricial para esses sistemas. Isso ocorreu já em 1801, quando Gauss antecipou alguns dos métodos de análise matricial em seu livro "Disquisitiones arithmeticae" mas, somente em 1858 é que Cayley realmente introduziu na matemática a análise matricial. Outros como Sylvester, Hamilton, Grassmann e os Peirces trataram de desenvolver a nova álgebra proposta por Cayley. (Veja ref. 1 e 2). Dentre todas as classificações possíveis para o estudo dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares, adotaremos aquele do desenvolvimento histórico, que nos parece mais claro.

Um sistema de equações lineares é representado por,

$$\begin{array}{r} a_{11} * X_1 + a_{12} * X_2 \dots\dots\dots a_{1m} * X_m = f_1 \\ a_{21} * X_1 + a_{22} * X_2 \dots\dots\dots a_{2m} * X_m = f_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} * X_1 + a_{m2} * X_2 \dots\dots\dots a_{nm} * X_m = f_m \end{array}$$

Utilizando-se das propriedades matriciais, podemos representar o sistema indicado por,

$$A * X = F$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{bmatrix}$$

A solução mais evidente para um sistema desse tipo, desde que  $m=n$ , seria a obtenção da matriz inversa de  $A$  já que, utilizando-se das regras de operação entre matrizes teremos,

$$\begin{aligned} A^{-1} * A * X &= A^{-1} * F \\ I * X &= A^{-1} * F \\ X &= A^{-1} * F \end{aligned}$$

Dessa forma, uma vez obtida a matriz  $A^{-1}$ , o sistema tem solução. Note-se que, se o sistema for indeterminado, ou seja, não tiver solução única, o determinante de  $A$ , dita singular, é nulo e não existe

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (1/\det A) * B \\ A^{-1} &= (1/\det A) * B^T \end{aligned}$$

onde  $B$  é a matriz dos cofatores de  $A$ .

Essa solução no entanto, é muito trabalhosa e portanto pouco utilizada. Métodos numéricos para a obtenção da inversa de  $A$  são, por exemplo, os métodos de Gauss-Jordan e o da partição; normalmente a resolução de sistemas lineares é feita através de métodos numéricos mais práticos do que os citados, sem a obtenção de  $A^{-1}$ , conforme veremos.

### III.2 SOLUÇÕES NUMÉRICAS CLÁSSICAS P/SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

---

#### III.2.1 Resolução numérica pelo método de Gauss

O método de Gauss é o método numérico mais simples e difundido para a resolução de sistemas lineares. a idéia básica desse método é a eliminação de elementos da matriz  $A$ , zerando-a onde necessário e, utilizando-se para isso de permutações de linhas e combinações lineares entre elas.

O método é melhor compreendido através de um exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- a) Zerar os elementos da coluna  $j=1$ , abaixo da diagonal principal. Isso pode ser feito tomando-se as seguintes combinações lineares entre as linhas 1 e 2 e, entre as linhas 1 e 3:

- elemento  $a_{21} \rightarrow (\text{linha } 2) - (a_{21}/a_{11}) * (\text{linha } 1)$
- elemento  $a_{31} \rightarrow (\text{linha } 3) - (a_{31}/a_{11}) * (\text{linha } 1)$

ficamos então com,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- b) Zerar os elementos da coluna 2 abaixo da diagonal principal. Isso pode ser feito através da seguinte combinação linear entre as linhas 2 e 3:

$$-e.l. a_{32} \rightarrow (\text{linha } 3) - (a_{32} - (a_{31} * a_{12}) / a_{11}) * (\text{linha } 2) \\ \text{-----} \\ (a_{22} - (a_{21} * a_{12}) / a_{11})$$

ficamos então com,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- c) Obtenção dos valores de  $X$  através de uma substituição de trás para diante, ou seja, começando-se com a obtenção de  $X_3$  até  $X_1$ . Esse procedimento será sempre dito "substituição atrás" e, seu inverso, com a obtenção inicial de  $X_1$  até  $X_3$ , dito "substituição adiante"; para nosso exemplo teremos,

$$X_3 = 4/3 = 1.3333...$$

$$X_2 = (-2 + 1 * (4/3)) / 2 = -1/3 = -0.3333...$$

$$X_1 = (3 - 2 * (4/3) - 1 * (1/3)) = 2/3 = 0.6666...$$

Uma condição importante nesse método é a de que o valor numérico da diagonal em qualquer linha, não pode ser nulo. Para tanto, costuma-se verificar a cada passo, o maior valor da coluna a ser zerada, levando-o à posição diagonal através de uma permuta entre linhas. Isso garante que ' $a_{ii}$ ' seja diferente de 0 pois se, após esse procedimento, o valor diagonal for nulo, significa que temos uma coluna totalmente nula e o sistema não tem solução única.

De maneira geral, a redução se processa como,

$$\begin{cases}
 s = 1, n - 1 \\
 i = s + 1, n \\
 j = 1, n \\
 a'_{ij} = a_{ij} - a_{is} * a_{sj} / a_{ss} \\
 f'_i = f_i - f_s * a_{is} / a_{ss}
 \end{cases}$$

onde 's' é relativa à linha sendo reduzida

### III.2.2 Resolução numérica através do método de Gauss-Seidel

Este tipo de resolução é iterativa, adotando-se um valor inicial para os  $x_i$  e verificando-se a convergência do processo através da obtenção de novos  $x_i$ .

Seja um sistema genérico, por exemplo,

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= f_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= f_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= f_3
 \end{aligned}$$

Toma-se, para uma iteração  $(n+1)$  qualquer, os valores,

$$x_1^{(n+1)} = (1/a_{11}) * (f_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)})$$

$$x_2^{(n+1)} = (1/a_{22}) * (f_2 - a_{21}x_1^{(n+1)} - a_{23}x_3^{(n)})$$

$$x_3^{(n+1)} = (1/a_{33}) * (f_3 - a_{31}x_1^{(n+1)} - a_{32}x_2^{(n+1)})$$

De forma geral, teremos para uma iteração  $(n+1)$  qualquer,

$$x_i^{(n+1)} = (1/a_{ii}) * (f_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} * x_k^{(n+1)} - \sum_{k=i+1}^m a_{ik} * x_k^{(n)})$$

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}$$

$$\Delta x_i^{(n)} = (1/a_{ii}) * (f_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} * x_k^{(n+1)} - \sum_{k=i}^m a_{ik} * x_k^{(n)})$$

Para acelerar-se a convergência desse tipo de processo, costuma-se adotar um fator, dito sobre-relaxação, de tal forma que  $1 < \beta < 2$ .

Obtem-se então,

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \beta * \Delta x_i^{(n)}$$

Existem sistemas mal condicionados que não convergem. Uma maneira simples, dentre outras, para se verificar a provável convergência do sistema é observar se o mesmo é

"diagonalmente dominante" ou seja, o sistema poderá convergir se,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|, \text{ para todo } i=1,2,3,\dots,n$$

É importante notar que, caso essa condição não ocorra o sistema poderá ainda convergir.

Considerando-se o mesmo exemplo numérico utilizado na resolução pelo método de Gauss, verificamos que o mesmo não é diagonalmente dominante e, no entanto, converge

$$\begin{aligned} 1 * X_1 + 1 * X_2 + 2 * X_3 &= 3 \\ 2 * X_1 + 4 * X_2 + 3 * X_3 &= 4 \\ 1 * X_1 + 3 * X_2 + 4 * X_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$X_1^{(n+1)} = (1/1) * (3 - X_2^{(n)} - 2 * X_3^{(n)})$$

$$X_2^{(n+1)} = (1/4) * (4 - 3 * X_3^{(n)} - 2 * X_1^{(n+1)})$$

$$X_3^{(n+1)} = (1/4) * (5 - 3 * X_2^{(n+1)} - X_1^{(n+1)})$$

- a) Executa-se a 1a. iteração adotando-se valores iniciais quaisquer para os  $X_i$ ; é comum adotar-se  $X_i=0$ . Deve-se observar que a velocidade de convergência é função dos valores iniciais adotados. Para nosso exemplo obtemos,

$$X_1^{(1)} = 3; X_2^{(1)} = (-1/2); X_3^{(1)} = (7/8)$$

- b) Com os valores dos  $X_i$  obtidos anteriormente, executa-se a 2a. iteração; conseguimos então os seguintes valores.

$$X_1^{(2)} = (7/4); X_2^{(2)} = (-3/32); X_3^{(2)} = (113/128)$$

- c) Após dez iterações os valores encontrados encaminham-se para a resposta correta, porém muito lentamente,

$$X_1^{(10)} = 0.6672; X_2^{(10)} = 0.3346; X_3^{(10)} = 1.3341$$

A utilização de valores de sobrerrelaxação acelera o processo de convergência. A dificuldade reside no fato

de ser difícil a determinação do melhor valor de para um conjunto de equações.

Os métodos iterativos deixaram de ser utilizados nos métodos matricial e de elementos finitos pelos motivos expostos e, principalmente, por não permitirem o armazenamento da matriz reduzida, o que facilita em muito a resolução de uma mesma estrutura para diversos tipos de carregamentos. Considerando-se esse fato, não nos aprofundaremos nestes métodos.

### III.3. MÉTODO DE GAUSS SIMPLIFICADO

---

Utilizando-se a teoria exposta no item III.2.1, desenvolvemos uma rotina de computador, em BASIC, para a resolução de uma matriz completa, sem verificação dos valores máximos das colunas.

Nesta rotina a matriz A é indicada por SK e deverá ser dimensionada previamente para cada caso; a matriz, ou vetor, F é indicada como EL e também necessita ser dimensionada. Tanto SK quanto EL tem dimensão N, que é a ordem das matrizes.

O vetor resposta é indicado por AS. Esta rotina foi gravada em disco com o nome de "GAUSS", no sistema DOS 3.3 e encontra-se no Anexo 2.

A rotina apresentada pode não apresentar resultados satisfatórios se na diagonal da matriz SK houverem elementos nulos, ou muito próximos de zero; esse fato pode ser corrigido um artifício simples, o qual apresentamos através da rotina "GAUSSMODIF".

Esse artifício consiste basicamente em verificar o valor de cada elemento diagonal durante a execução da rotina GAUSS, comparando esse valor com uma tolerância qualquer, antecipadamente introduzida na rotina; caso o elemento diagonal seja maior que esse valor limite, a rotina prossegue normalmente; caso contrário, soma-se a linha com o elemento diagonal com a linha abaixo dela e, o valor da soma passa a ser o novo valor da linha com o elemento diagonal.

A operação executada não alterará a matriz, uma vez que se trata de uma combinação linear entre linhas. Observe-se ainda que, se com a soma de duas linhas o elemento diagonal ainda continuar menor que o valor limite, novas linhas serão somadas ao conjunto. A rotina "GAUSSMODIF" também pode ser verificada no Anexo 2.

### III.4 OS MÉTODOS MODERNOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

---

#### III.4.1 Introdução

Os dois métodos numéricos clássicos para a resolução de sistemas lineares, por eliminação ou iterativo, não são necessariamente os mais apropriados para serem utilizados por computadores, devido ao grande número de elementos necessários simultaneamente na memória do computador, durante o processamento.

Particularmente, os métodos da eliminação, aos quais nos restringiremos neste trabalho, originaram dois grandes ramos de solução de sistemas lineares por computador: os métodos "in-core" e os métodos "out-of-core". Os métodos "in-core" resolvem as matrizes utilizando-se apenas da RAM dos computadores, enquanto os métodos "out-of-core" utilizam-se tanto da RAM quanto da memória permanente (discos flexíveis, discos rígidos, etc.).

Apesar das acentuadas diferenças ocasionadas pela adoção de um ou outro método, particularmente na formação das matrizes, na realidade, em ambos os casos, a forma de resolução das equações é similar, buscando-se sempre diminuir a quantidade de números a serem armazenados de uma única vez, aumentando o tamanho dos sistemas que podem ser resolvidos.

Essa diminuição dos elementos a serem armazenados é conseguida utilizando-se das propriedades das matrizes mais comuns em problemas do tipo matricial ou de elementos finitos; essas matrizes são, em geral, simétricas, definidas positivas e possuem uma região próxima à diagonal principal onde os valores numéricos são diferentes de zero e, todos seus demais elementos são nulos.

A simetria e a "banda" das matrizes descritas, podem ser utilizadas para desenvolver uma série de métodos poderosos e eficientes na solução de sistemas lineares.

#### III.4.2 Os métodos "in-core"

Os principais métodos de resolução "in-core" procuram utilizar a banda e a simetria das matrizes, conforme esclarecido anteriormente; nesses métodos destacam-se:

- O método de Gauss em banda.
- O método de Cholesky.
- O método da fatoração de Gauss.
- O método "skyline".

O primeiro desses métodos é apenas uma modificação da rotina GAUSS apresentada anteriormente. O segundo é um método de eliminação um pouco ultrapassado por utilizar-se de equações que implicam em raízes e que, conseqüentemente, perde em precisão com relação a outros métodos; porém ele já incorpora a vantagem de ser constituído em 2 subrotinas, totalmente independentes, permitindo a armazenagem da matriz reduzida. O terceiro



é uma modificação de Cholesky que dispensa a utilização de raízes e, além disso, permite uma eliminação por colunas, que será muito útil para o quarto método, o "skyline". Finalmente, o último dos métodos "in-core" apresentados, o "skyline", é o mais moderno dentro desse tipo por guardar na memória apenas os valores diferentes de zero das matrizes; esse método entretanto, implica em montagens especiais das matrizes e na adoção de uma série de vetores de endereçamento. Nos capítulos seguintes estudaremos mais detalhadamente cada um desses métodos.

### III.4.3 Os métodos "out-of-core"

Por mais eficientes que sejam os métodos "in-core", eles não podem resolver grandes problemas de elementos finitos. Por exemplo, cada um desses problemas pode ter mil ou mais equações para serem resolvidas e a quantidade de números envolvidos poderá ultrapassar em muito a capacidade de armazenamento da RAM de um computador, seja ele grande, mini ou micro. Para esses problemas, a única forma de solução é utilizar-se a memória permanente, particularmente discos rígidos; com isso um computador de 0,5 kb pode atingir alguns Mb. Evidentemente, a utilização dos métodos "out-of-core" requer uma complexidade muito maior na programação, além de ser mais lento pois baseia-se em gravações e leituras de disco, consumindo tempo de entrada/saída.

Os principais métodos "out-of-core" são:

- O método "slide-window", ou "janela móvel".
- O método frontal.
- O método frontal combinado com o "slide-window".

No primeiro desses métodos, uma matriz global é montada no disco do computador; posteriormente essa matriz é trazida, aos pedaços (ditos "janelas"), para a RAM e resolvida. Portanto, em nenhum instante, existe na RAM do computador mais números do que o admissível.

O segundo dos métodos indicados, o frontal, difere do primeiro porque nunca a matriz global esta completamente montada, nem no disco, nem na RAM. Nesse método as matrizes parciais que originam a matriz global são montadas e eliminadas na RAM, sendo que, somente os valores já reduzidos são transferidos para o disco.

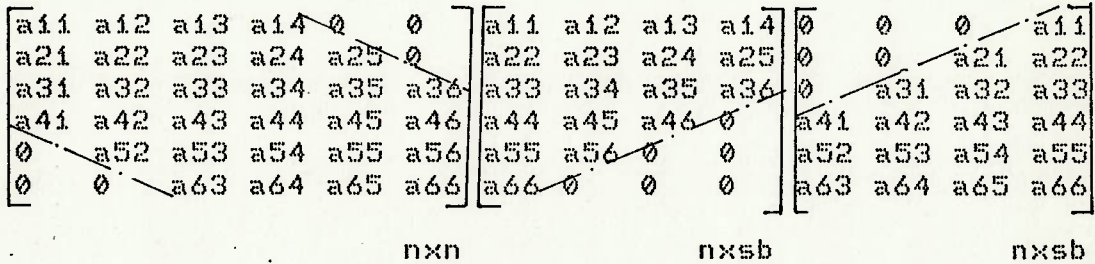
O método mais moderno para resolução de sistemas de equações lineares é o terceiro. Neste caso, uma parte da matriz global é montada no disco, trazida aos pedaços para RAM e reduzida pelo método frontal.

Todos esses métodos são de programação complexa. Optamos por detalhar o método frontal apesar das controvérsias existentes sobre qual seria o melhor método "out-of-core".

### III.5 OS MÉTODOS "IN-CORE"

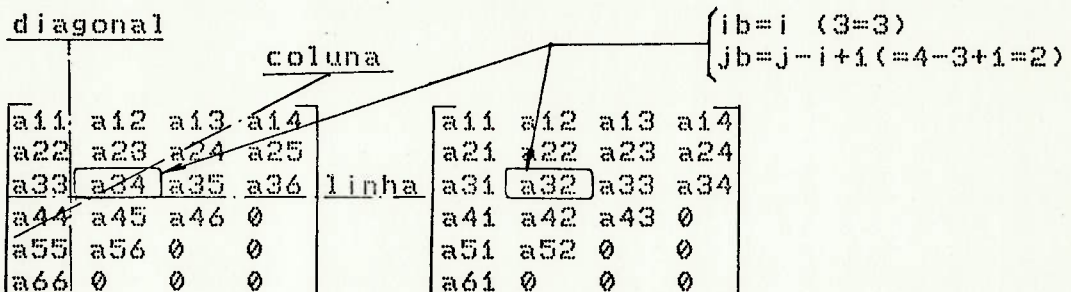
#### III.5.1 Introdução

Matrizes simétricas, em banda, podem ser armazenadas da seguinte forma,



A primeira das matrizes em banda é dita "triangular superior" e, a segunda, "triangular inferior". Utilizando-se desse sistema de armazenamento, o espaço necessário para os dados de uma matriz é reduzido de 'nxn' para 'nxsb', onde sb é a semi-banda da matriz. Além disso, o número total de cálculos necessários para qualquer operação da matriz também diminui, pois os elementos nulos fora da banda não comparecem nessas operações.

Com relação à matriz original, a locação dos elementos altera-se para a matriz em banda,



Para o caso visto de uma matriz triangular superior temos, em geral,

$$ib = i \quad e \quad jb = j - i + 1$$

onde ib e jb são relativos à matriz em banda. Considerando-se o mesmo raciocínio para uma matriz triangular inferior, teríamos,

$$ib = i \quad e \quad jb = i - j + sb$$

### III.5.2 O método de Gauss em banda

Esse método é idêntico ao apresentado para matrizes completas, sendo que, para uma matriz em banda na forma triangular superior, a equação geral de redução modifica-se para,

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{s,i-s+1} * a_{s,j+1-s} / a_{s,i}$$

$$f'_i = f_i - a_{s,i-s+1} * f_s / a_{s,i}$$

onde  $s$  é a linha a ser reduzida, com os seguintes limites,

$$(s+1) < i < (s+sb-1) \quad e \quad 1 < j < (sb-i+s)$$

Para o método em questão desenvolvemos uma rotina denominada GAUSSBAN, gravada no sistema DOS 3.3 e idêntica à rotina GAUSS, respeitando-se os intervalos corretos para  $i_b$  e  $j_b$ , e as equações modificadas de redução; observe-se apenas que foi acrescido o valor de SB nos cálculos. A rotina é apresentada no Anexo 2.

Observe que para esta rotina, a redução de SK processa-se simultaneamente com a de EL, não sendo possível executar-se uma primeiramente com relação à outra. Esse fator limita sobremaneira a rotina, pois não permite a armazenagem de SK reduzida para resolvê-la para diversos vetores de EL diferentes. Isso poderia ser feito se guardássemos os valores de TM para cada redução, o que implicaria em uma nova matriz 'n $\times$ sb' a ser armazenada, com conseqüente perda de espaço na memória.

### III.5.3 O método de Cholesky para matrizes na forma triangular inferior

O desenvolvimento inicial do método de Gauss, visando permitir a armazenagem da matriz SK reduzida, implicou no método de Cholesky.

Este procedimento, ao contrário do anterior, não foi ainda estudado neste trabalho. Seu desenvolvimento deveu-se ao comandante Cholesky, especialista em geodesia, tendo sido publicado pela primeira vez no "Bulletin Géodésique" de 1924 em um artigo de Benoit.

O método em si, ainda que largamente utilizado, tem uma série de limitações impostas pela utilização de raízes; esse fato acarreta, principalmente, perda de precisão nos resultados. Entretanto ela incorpora a facilidade de se poder reduzir inicialmente a matriz SK de maneira simples e só então reduzir o vetor EL. Desse modo podemos reduzir, em problemas de elementos finitos, a matriz SK e resolvê-la para diversos vetores de carga diferentes EL.

Basicamente, Cholesky determinou que toda matriz simétrica pode ser fatorada na seguinte forma,

$$A = U^T U$$

onde,

$$U^T = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & \dots & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

como pode-se notar temos uma matriz "triangular superior" e uma matriz "triangular inferior"; dessa forma não há necessidade de se guardar os valores de redução já que, conhecido U, teremos U<sup>T</sup>

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^i (u_{ki})^2$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i u_{ki} * u_{kj} \quad (i < j)$$

Dessa forma os elementos de U podem ser encontrados rearranjando-se as equações anteriores,

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{ki})^2} \quad (1 \leq i = j)$$

$$u_{ij} = (1/u_{ii}) * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} * u_{kj}) \quad (1 < i < j)$$

$$u_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

Observe-se que a primeira das equações apresentadas contém uma raiz quadrada, implicando em que, necessariamente,

$$a_{ii} > \sum_{k=1}^{i-1} (u_{ki})^2$$

A resolução de um sistema linear qualquer fica, através da fatoração da matriz A pelo método de Cholesky, bastante simplificada uma vez que o sistema a ser resolvido agora tem a forma,

$$A * X = F$$

$${}^T U * U * X = F$$

$${}^T U * Y = F \quad \text{e} \quad U * X = Y$$

Resolve-se inicialmente  ${}^T U * Y = F$ , com  ${}^T U$  triangular superior e, a seguir,  $U * X = Y$ , com  $U$  triangular inferior. Para isso utiliza-se inicialmente uma substituição adiante e, posteriormente, uma substituição atrás. Todo o processo pode ser executado da mesma forma se  $U$  for triangular inferior, o que ocorre na rotina CHOLESKY que apresentaremos no Anexo 2; dessa maneira fica esclarecido que a rotina CHOLESKY é aplicável às matrizes em banda, simétricas, armazenadas na forma triangular inferior. Deve-se considerar apenas o fato de que, para a rotina CHOLESKY, os índices  $i, j$  e  $k$  variam dentro de outros campos, diferentes daqueles apresentados no desenvolvimento teórico do método. Isso ocorre devido ao armazenamento em banda, na forma triangular inferior enquanto que, para o desenvolvimento teórico do método foram consideradas matrizes completas.

#### III.5.4 O método da Fatoração de Gauss

Como visto anteriormente, no método de Cholesky encontram-se envolvidas raízes de quantidades às quais não conhecemos até que o método esteja desenvolvendo-se. Esse aspecto é um poderoso limitante que, aliado às imprecisões introduzidas pela utilização de raízes, praticamente inviabiliza a utilização desse método. Entretanto esses inconvenientes podem ser eliminados bastando para isso que tomemos a matriz a ser reduzida não como o produto de duas outras, mas sim como o produto de três outras matrizes: uma triangular superior, uma triangular inferior e outra diagonal:

$$A = {}^T U * D * U$$

onde,

$${}^T U = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ u_{21} & 1 & & \\ u_{31} & u_{32} & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nestas condições obtemos, através da multiplicação das matrizes, o elemento diagonal representado por,

$$a_{ii} = d_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} * (u_{ki})^2 \quad (1 < i = j)$$

e, os elementos fora da diagonal como,

$$a_{ij} = d_{ii} * u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} * u_{ki} * u_{kj} \quad (1 < i < j)$$

Os elementos "d" e "u" podem ser encontrados rearranjando-se as equações anteriores,

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} * (u_{ki})^2 \quad (1 < i = j)$$

$$u_{ij} = (1/d_{ii}) * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} * u_{ki} * u_{kj}) \quad (1 < i < j)$$

$$u_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

As expressões encontradas pressupõe uma recorrência por linhas, obtendo-se inicialmente  $d_{ii}$  e, a seguir  $u_{ij}$ .

Essa recorrência poderá ser executada por colunas e obteremos inicialmente o valor de  $u_{ij}$  e só então o valor de  $d_{jj}$ .

$$u_{ij} = (1/d_{ii}) * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} * u_{ki} * u_{kj}) \quad (1 < i < j)$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} * (u_{kj})^2 \quad (1 < i = j)$$

Tomando-se  $u_{kj}' = d_{kk} * u_{kj}$ , faz-se então os cálculos para  $u_{ij}$  e  $d_{jj}$ , conforme expressões,

$$u_{ij}' = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{ki} * u_{kj}'$$

$$d_{jj}' = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{kj} * u_{kj}', \text{ onde } u_{kj} = (1/d_{kk}) * u_{kj}'$$

Um sistema linear qualquer pode então ser resolvido por este método utilizando-se para isso, as relações matriciais, .

$$A * X = F \Rightarrow U^T * D * U * X = F$$

Definindo-se  $Z = D * U * X$ , resolve-se  $U^T * Z = F$

e, como a matriz  $U$  é triangular inferior, obtém-se a matriz  $Z$  por substituição à frente,

$$z_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} * z_k \quad (1 \leq i)$$

À seguir, a matriz  $D$  é diagonal e, portanto,  $D * Y = Z$ .

$$y_i = z_i / d_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Finalmente, para  $U$  triangular superior obtemos o valor desejado da matriz  $X$ , já que  $U * X = Y$

$$x_i = y_i - \sum_{k=1+i}^n u_{ik} * x_k \quad (i \leq n)$$

Para a rotina apresentada no Anexo 2, a matriz  $A$  é denominada  $SK$  e armazenada como triangular superior, em banda. Isso evidentemente alterará os índices da matriz, conforme já discutido. É importante ressaltar também a possibilidade de se dividir essa rotina em duas outras, uma que fature a matriz  $SK$  e outra que resolva o sistema reduzido. Novamente, como no caso da CHOLESKY, isto permite a redução de  $SK$  e o seu armazenamento na forma reduzida com economia de espaço. No transcorrer da resolução final, a matriz  $SK$  permanece inalterada, permitindo a modificação apenas de  $EL$  para obter novas respostas para outros sistemas do tipo  $SK * AS = EL$ .

### III.5.5 O método SKYLINE

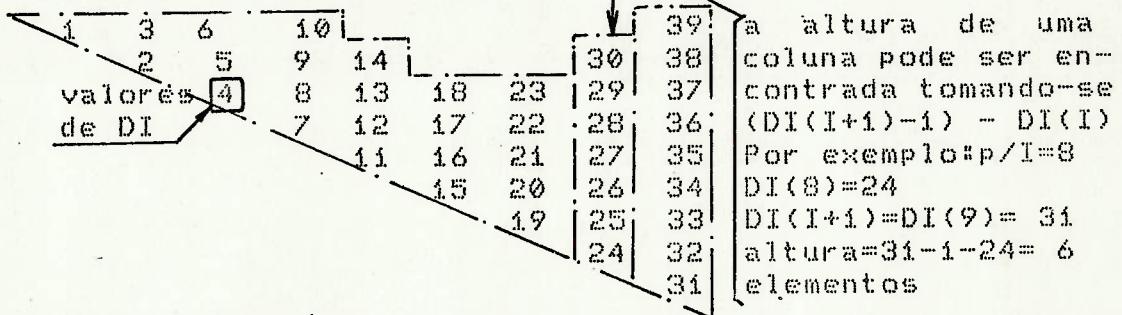
Dos métodos "in core" este é, talvez, o mais apropriado para utilização quando se procura economia de armazenamento de dados. Entretanto este método exige um grande esforço de programação pois necessita de endereçadores e contadores de elementos nas colunas. Os primeiros programas surgidos para elementos finitos, aplicavam o método "skyline", porém hoje em dia, com o advento dos métodos "out-of-core", o método "skyline" caiu em um relativo desuso já que é complexo para problemas simples e pouco efetivo para problemas complexos.

Na realidade, o método "skyline" é idêntico ao método da fatoração, só que, ao contrário deste, utiliza-se apenas dos elementos contidos entre a diagonal principal e a "skyline" da matriz, conforme indicado,

"skyline"

a11	a12	a13	a14	0	0	0	0	a19
a21	a22	a23	a24	a25	0	0	a28	0
a31	a32	a33	a34	a35	a36	a37	0	a39
a41	a42	a43	a44	a45	a46	0	0	0
0	a52	a53	a54	a55	a56	0	0	a59
0	0	a63	a64	a65	a66	a67	a68	0
0	0	a73	0	0	a76	a77	a78	a79
0	a82	0	0	0	a86	a87	a88	a89
a91	0	a93	0	a95	0	a97	a98	a99

Podemos observar que, para este caso por exemplo, a armazenagem em banda implicaria na necessidade de armazenar 45 elementos uma vez que a banda tem a mesma ordem da matriz. Porém a utilização do método "skyline" reduz para 39 os elementos,



A rotina SKYLINE baseia-se neste princípio, sendo importante notar que para este método, a matriz SK é reduzida a um vetor, de tal forma que  $SK(i,i) = SK(9)$ . Além disso é necessário a utilização do vetor DI que contém os endereços das diagonais; em nosso caso, por exemplo,  $DI(1) = 1$  e  $DI(5) = 11$ . Note-se finalmente que o vetor DI deverá conter sempre  $N+1$  elementos, onde  $N$  é a ordem da matriz. Para nosso caso,  $DI(10) = 40$ . Os índices as matrizes completas ou em banda e, as reduções são efetuadas por colunas como no caso da rotina FATORIZAÇÃO. O princípio de resolução também é semelhante ao da rotina FATORIZAÇÃO, considerando-se os limites corretos para as variáveis. Para este caso específico, a rotina está dividida em duas partes; uma que reduz a matriz e outra que resolve o sistema; a rotina completa pode ser verificada no Anexo 2.

### III.6 OS MÉTODOS OUT-OF-CORE

#### III.6.1 Introdução

Entre os métodos "out-of-core", o mais tradicional e utilizado é o método frontal. Permanecem dúvidas quanto à sua eficácia em relação aos métodos tipo "slide-window", porém ainda que seja verdade que o método



frontal é mais lento do que o "slide-window" (veja, por exemplo, a referência 19) também é verdade que o método frontal requer sempre menos capacidade de memória. Além disso, o tamanho do problema a ser resolvido para os métodos matricial ou de elementos finitos é uma função da numeração dos nós no caso dos métodos em banda (in-core ou out-of-core) e uma função da numeração dos elementos no caso do método frontal; é sempre mais fácil, para quaisquer elementos com mais de 2 nós, conseguir-se otimizar a numeração dos elementos ao invés da numeração dos nós. Dessa forma optamos por analisar mais detalhadamente, dentre os métodos "out-of-core", o método frontal.

Este método foi desenvolvido por volta de 1958 em Seattle, pela companhia "Boeing" mantendo-se como quase todo desenvolvimento industrial, secreto até 1961, quando foi publicado em um trabalho de Greene, Strome e Weikel, intitulado "Applications of the Stiffness methods to the analysis of shell structures". Porém somente em 1970 Bruce Irons apresentou uma rotina denominada "MASTER ZIPP" no "Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering" a qual tornou o método conhecido e de larga aplicação.

Basicamente o método frontal consiste na utilização do método da eliminação de Gauss, sem a necessidade de armazenamento simultâneo de todos os valores da matriz na memória do computador já que, as fases de montagem das equações e eliminação das variáveis ocorrem ao mesmo tempo.

A criação e o desenvolvimento desse método foi totalmente orientada para a resolução das equações lineares que ocorrem durante a execução de problemas pelo método dos elementos finitos. Isso implica em montagens especiais das equações envolvidas.

O aspecto mais importante no estudo pelo método dos elementos finitos é o de que um contínuo qualquer pode ser representado por elementos discretos, conectados através de nós. Todo o processo é orientado para a obtenção dos deslocamentos de cada nó. Esses deslocamentos são denominados de "graus de liberdade" do nó. Quando não existe deslocamento numa determinada direção, diz-se que há uma "restrição" a esse deslocamento. Quando o deslocamento em uma direção é fixado em algum valor diz-se que o deslocamento é "prescrito" nessa direção.

Uma matriz, dita "matriz de rigidez do elemento" está relacionada a todos os deslocamentos de todos os nós de um determinado elemento. As matrizes de rigidez de todos os elementos do contínuo somadas, originam a "matriz global de rigidez", designada em geral por SK.

O método frontal difere grandemente dos outros métodos de resolução de sistemas lineares por não montar, em nenhum instante, a matriz global de rigidez.

O número de incógnitas existentes ao mesmo tempo na RAM do computador é denominada "frente"; o tamanho da frente

altera-se durante o transcorrer do método. O máximo tamanho de problema que pode ser resolvido é controlado pelo "tamanho máximo da frente", o qual, para nosso caso, deverá ser pré-estabelecido.

### III.6.2 Teoria do método

No caso estático do método dos elementos finitos a equação matricial a ser resolvida é,

$$SK * AS = EL$$

onde SK é a matriz global de rigidez, AS é o vetor de deslocamentos que deseja-se encontrar e EL é o vetor das cargas. Esse tipo de equação matricial é idêntico ao que temos estudado durante todo este trabalho.

No caso do método frontal, a matriz SK nunca é montada completamente pois, à medida que a matriz de rigidez de cada elemento vai sendo montada, ou lida de um disco como para nosso caso, verifica-se se existem nós os quais apareçam pela última vez no problema; caso existam, esses nós são eliminados; caso não, soma-se a contribuição do novo elemento aos graus de liberdade dos nós ainda eliminados e procede-se a montagem de outro elemento.

A eliminação de um elemento qualquer é feita através do método de Gauss e a grande complicação do programa encontra-se no seu sistema endereçamento.

Deve-se esclarecer que programas para a resolução de sistemas pelo método frontal não são triviais como os programas anteriores, os quais podem ser rapidamente criados e, o desenvolvimento de um tipo particular qualquer, não seria sensato. Dessa forma optamos por adaptar um programa já existente sendo, nesse caso, escolhido o apresentado por Hinton e Owen na referência 10. Pode-se citar também o trabalho original de Irons, referência 14, e o Cheung e Yeo na referência 3 como muito bem apresentados e de fácil assimilação.

Entretanto, no trabalho de Irons, as matrizes dos elementos são montadas dentro da rotina frontal, impedindo sua execução como uma subrotina totalmente à parte. No caso escolhido e na referência 3, a rotina frontal lê as matrizes dos elementos de um disco pois as mesmas foram todas previamente montadas.

No entanto, seja qual for o programa adotado, as linhas básicas do método e suas principais etapas, são sempre seguidas:

- Fase pré-frontal.
- Fase de montagem e eliminação.
- Fase de substituição atrás.

Na fase pré-frontal são criados os endereçadores e o nó que aparece pela última vez na formação de qualquer elemento recebe um sinal negativo, para o elemento em questão.

A fase seguinte, refere-se à montagem da matriz do elemento dentro da matriz global de rigidez seguindo os endereçadores da fase anterior, além disso processa-se a eliminação dos nós com sinal negativo. O método de eliminação é o de Gauss.

Finalmente, após a eliminação de todos os nós, obtém-se os valores incógnitos através de uma substituição atrás. Na realidade, o método frontal é muito intuitivo uma vez que segue um procedimento lógico; por exemplo, no caso de uma estrutura reticulada.

- Toma-se o elemento 1 formado pelos nós 1 e 3
- Toma-se o elemento 2 formado pelos nós 3 e 4
- Verifica-se se nenhum outro elemento chega aos nós 1 e 3 (no caso verifica-se se os nós 1 do elemento 1 e 3 do elemento 2 tem sinal negativo)
- Em caso afirmativo, elimina-se os nós 1 e 3. Caso contrário, as equações relativas aos graus de liberdade de cada nó vão sendo somados à frente.

A frente é a quantidade de equações, ainda não reduzida, existentes no sistema formado pelos elementos já lidos. Evidentemente, para uma viga espacial com 6 graus de liberdade por nó, uma frente de 90 significa que já entramos com 15 nós em nosso processo sem conseguir eliminar nenhum deles. No capítulo V, item V.7, pode-se verificar como obter o valor da frente.

### III.7 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO III

---

O entendimento e a correta aplicação da discussão precedente é fundamental para a execução de qualquer programa que se utilize da álgebra matricial. Nesse sentido tentamos ser bastante prolixos e, talvez, claros. Analisamos uma série de possibilidades para a execução de equações lineares através de métodos numéricos clássicos e as novas maneiras para aplicação em computadores com limitada capacidade de armazenamento.

Toda a teoria desenvolvida aplica-se à resolução de sistemas lineares cujas matrizes sejam simétricas; alguns métodos são específicos para matrizes simétricas e em banda. Além disso outros métodos podem ser aplicados à matrizes não simétricas.

Resumindo-se a aplicabilidade das rotinas expostas, (todas listadas no Anexo 2).

"GAUSS" - Aplica-se tanto à matrizes simétricas quanto à matrizes não simétricas, desde que estejam armazenadas na forma completa e não em banda.

"GAUSSMODIF" - Idem à rotina GAUSS.

- "GAUSSBAN" - Aplica-se apenas a matrizes simétricas, armazenadas em banda na forma triangular superior.
- "CHOLESKY" - Aplica-se a matrizes simétricas, armazenadas em banda na forma triangular inferior.
- "FATORAÇÃO" - Aplica-se a matrizes simétricas armazenadas em banda na forma triangular superior; ao contrário de GAUSSBAN sua eliminação é executada por colunas ao invés de linhas.
- "SKYLINE" - Aplica-se a matrizes simétricas armazenadas por colunas que vão da diagonal principal até a "skyline" da matriz. Além disso a matriz SK, neste caso, é representada por um vetor.
- "FRENTE" - Aplica-se à matrizes de elementos complexas. Para esta rotina não tem sentido falar-se em matriz global.

Uma grande parte deste trabalho foi gasto na verificação da rotina "FRENTE" a qual, deve-se novamente esclarecer, foi adaptada da rotina existente na referencia 10, considerando-se as dificuldades para o desenvolvimento completo de uma rotina desse tipo. Para a introdução da resolução de sistemas lineares pelo método frontal foi necessário verificarmos ligeiramente alguns aspectos à resolução de problemas pelo método dos elementos finitos. No Anexo 2, além da rotina FRENTE, temos a nomenclatura nela utilizada.

A linguagem utilizada para todos os programas foi o "Apple-soft-BASIC" e o sistema operacional foi o "DOS 3.3". As rotinas apresentadas no Anexo 2 são relativas apenas à resolução, sendo necessário, em caso de utilização, adaptar-se rotinas para leitura de dados e impressão de resultados.

Deixamos de estudar apenas os métodos iterativos mais a fundo e os métodos tipo "slide-window", ou as combinações do método frontal com o "slide-window". Esses métodos podem ser estudados na bibliografia e, só não o fizemos, porque os métodos tipo "slide-window" tem sido substituídos com vantagens pelo método frontal.

Esclarecemos também que a subrotina "FRENTE", com algumas modificações, pode ser aplicada a problemas cujas matrizes dos elementos não sejam simétricas conforme indicado na referencia 16. Além disso, as referencias 17 e 18 são relativas a resolução de matrizes não simétricas e não definidas positivas, através da utilização de métodos em banda, respectivamente o método de Gauss e o de Cholesky.

## BIBLIOGRAFIA

1. "História da Matemática" - C.B.Boyer  
Ed. Edgar Blucher/EDUSP - edição 1974
2. "Eléments d'histoire des mathématiques" - N.Bourbaki  
Ed. Hermann, Paris - edição 1969
3. "A Practical Introduction to finite element analysis" -  
Cheung & Yeo - Ed. Pitman Publishing Ltd. - edição 1979
4. "Computer Applications of Numerical Methods" - S.S.Kuo  
Ed. Addison-Wesley P.C. - edição 1972
5. "Numerical Methods in Finite Element Analysis - Bathe &  
Wilson - Ed. Prentice-Hall Inc. - edição 1976
6. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" -  
Bathe - Ed. Prentice-Hall Inc. - edição 1982
7. "Matrix analysis of Framed Structures" - Gere & Weaver  
Ed. Van Nostrand Co. - edição 1980
8. "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics  
with Applications to Computers" - Wang  
Ed. John Wiley & sons - edição 1966
9. "Numerical Analysis of Symmetric Matrices" - Schwarz,  
Stiefel & Rutishauser; tradução para o inglês de  
Hertelendy - Ed. Prentice-Hall Inc. - edição 1973
10. "Finite Element Programming" - Hinton & Owen  
Ed. Academic Press - edição 1980
11. "Programação e Métodos Computacionais" - Pacitti &  
Atkinson - Ed. Livros Técnicos e Científicos S.A.  
Edição 1977
12. "Programming the Finite Element Method" - Smith  
Ed. John Wiley & Sons - edição 1982
13. "Techniques of finite Elements" - Irons & Ahmad  
Ed. Ellis Horwood Ltd. - edição 1980
14. "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis"  
Irons - Pub. International Journal for Numerical Methods  
in Engineering (IJNME) - vol. 2, 1970
15. "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices"  
Hood - Pub. IJNME - vol.10, 1976 e errata vol.11, 1977
16. "Matrizes Esparssas em Redes de Potencia" - Morozowski  
Ed. Livros Técnicos e Científicos/Fundação do Ensaio de

- SC - 1981
17. "Band Algorithm for Unsymmetric Matrices in Finite Element and Semi-Discrete Methods" - Gopalakrishnan & Palaniappan - Pub. IJNME, vol. 18, 1982
  18. "On triangular decomposition of Nonpositive Definite Symmetric Matrices using Complex FORTRAN Programming" - Pao - Pub. IJNME, VOL. 15, 1980
  19. "Computer Programs for the Solution of Systems of Linear Algebraic Equations" - Segui - Pub. IJNME, vol 7, 1973
  20. "Band-schemes vs. Frontal-routines in Nonlinear structural Analysis" - Agrawal & Jaegers  
Pub. IJNME, VOL.15, 1980
  21. "A Frontal Procedure using Skyline Storage" - Thompson & Shimazaki - Pub. IJNME, vol. 15, 1980
  22. "Solution of Linear Equations for Small Computer Systems" - Ida - Pub. IJNME, vol. 20, 1984

## CAPÍTULO IV

### O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: ASPECTOS TEÓRICOS

"Há cerca de 3 milhões de anos, num acampamento no Quênia, perto da costa leste do espetacular lago Turkana, anteriormente chamado lago Rudolf, um ser humano primitivo pegou um seixo, e com alguns golpes habilidosos transformou-o num implemento". (Richard E. Leakey, ref. 1)

#### IV. 1. DEFINIÇÕES

---

Todas as construções do homem tem basicamente uma origem intuitiva, ou seja, na verdade existiam pontes antes mesmo de existirem engenheiros para calculá-las. Entretanto é inegável que somente com o desenvolvimento da Engenharia conseguiu-se o grau atual de sofisticação tecnológica para a fabricação de aviões, foguetes, computadores etc.. Nesse desenvolvimento, quatro ramos de estudo foram fundamentais: a mecânica dos fluidos, o eletro-magnetismo, a transmissão de calor e a resistência dos materiais. Todos esses ramos da engenharia lucraram muito com a utilização do método dos elementos finitos, entretanto, neste trabalho, abordaremos apenas os aspectos relativos à resistência dos materiais mais detalhadamente.

Nesse caso, e também para os outros problemas, podem-se criar sistemáticas de cálculo que, em seus aspectos básicos não variam. Por exemplo, uma maneira lógica de se proceder ao cálculo da resistência de uma estrutura qualquer seria o seguinte:

a. **Determinação das tensões/ deformações admissíveis.**

Para cada tipo específico de estrutura em estudo os valores admissíveis, que são valores de tensão/deformação que podem ser atingidos pela estrutura sem significar, risco de colapso, levam em consideração fatores como o tipo de material envolvido, o tipo de carregamento, condições de fabricação, temperatura de trabalho, e outros parâmetros específicos de cada análise.

A obtenção de valores admissíveis é um processo lógico, podendo ser determinado pelo conhecimento e experiência de cada um, mas também é um processo estatístico, sendo executado através da observação de grandes quantidades de equipamentos semelhantes construídos.

A obtenção de um valor admissível consistente é primordial na análise estrutural.

b. **Obtenção das propriedades geométricas da estrutura em estudo.**

Essas propriedades são fundamentais para o cálculo da resistência do componente e são obtidos através das dimensões gerais da estrutura; tratam-se portanto de valores puramente geométricos como, área, momento de inércia e outros.

c. **Obtenção da distribuição de esforços e/ou deslocamentos na estrutura considerada.**

Essa é uma etapa às vezes muito difícil, sendo necessária a utilização de grandes computadores; depende basicamente do tipo de material em estudo, da carga atuante e dos vínculos da estrutura; é aqui que o método dos elementos finitos tem sua principal área de atuação.



- d. Obtenção das tensões e/ou deformações máximas.  
Com a utilização dos valores obtidos em c e propriedades do material podem-se obter os valores das tensões e/ou deformações atuantes na estrutura. Os conceitos de esforço, deslocamento, tensão e deformação serão vistos dentro de itens futuros, neste capítulo.
- e. Comparação dos valores obtidos em d, com os valores obtidos em a.  
Caso os valores obtidos em d (ou seja, os valores atuantes na estrutura), sejam menores do que os valores considerados em a (ou seja, os valores admissíveis para aquele tipo de estrutura), o problema estará resolvido e a estrutura estará convenientemente dimensionada. Caso contrário, deve-se proceder à nova análise, com a substituição do membro estrutural, ou seja, na maior parte das vezes existe a necessidade de alteração de b para aumentar-se a área ou momento de inércia do elemento. Pode-se também alterar o tipo de material, modificando-se suas propriedades e seus valores admissíveis.

Das etapas descritas, aquela que mais dificuldades apresenta, é a c, obtenção da distribuição de esforços e/ou deslocamentos na estrutura considerada. Enquanto tratamos com problemas isostáticos, para os quais o número de incógnitas é igual ao número de equações de equilíbrio estático do componente, a dificuldade não se apresenta de forma muito acentuada; entretanto basta um pequeno problema hiperestático para complicar extremamente a obtenção da distribuição de esforços e/ou deslocamentos.

O principal objetivo da resistência dos materiais é o de criar meios para obter valores que representam, de maneira muito próxima, os esforços e deslocamentos que realmente estão ocorrendo em determinada estrutura. Para isso foram criadas inúmeras metodologias de cálculo, das quais, a parcela mais recente, baseia-se na Teoria da Elasticidade, nos Teoremas de Energia, esquecidos por longo tempo, e no princípio dos Trabalhos Virtuais. Esses teoremas e princípios mencionados são a base da teoria da elasticidade e do método do elemento finitos.

Nos itens seguintes serão desenvolvidos os conceitos de esforço, tensão, deslocamento e deformação e o inter relacionamento entre essas grandezas, objeto de estudo da Teoria da Elasticidade; veremos também os enunciados dos principais Teoremas de Energia e o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Dessa forma pretendemos obter as bases necessárias para compreensão do método dos elementos finitos que será visto nos últimos itens deste capítulo.

Além dos problemas estáticos que, como vimos, apresentam uma série de dificuldade quanto a distribuição de esforços e deslocamentos, temos problemas dinâmicos nos quais esforços e deslocamentos variam ao longo do tempo; se os problemas estáticos já apresentavam dificuldades, os dinâmicos multiplicam essas dificuldades a ponto de se tornar

praticamente impossível a resolução de alguns sem se recorrer à aproximações grosseiras. O método dos elementos finitos permitiu a resolução muito mais exata desses tipos de problemas.

Para resolução consciente dos problemas relativos à cargas dinâmicas e também para melhor compreensão de toda a sistemática de cálculo de qualquer tipo de problema, seja ele de resistência dos materiais, eletro-magnetismo, mecânica dos fluidos ou transmissão de calor, veremos o comportamento de variáveis que se repetem em cada um dos ramos de ciência citados e que, em resistência dos materiais, são conhecidos por massa, mola e amortecedor. O estudo comparado dos quatro ramos citados utilizando-se conceitos comuns à todos os ramos recebe o nome genérico de análise de sistemas; é por aí que começaremos nosso atual estudo.

#### IV. 2. MASSA, MOLA, AMORTECEDOR-ANÁLISE DE SISTEMAS

---

"CEIIINOSSTTUV" foi o criptograma utilizado por Robert Hooke para enunciar, em latim, sua teoria sobre as molas: "Ut tensio sic vis" ou "A extensão é proporcional à força". A personalidade instável de Hooke, seu medo de estar errado e ao mesmo tempo a possibilidade de perder a primazia em alguma descoberta são as principais causas do criptograma. De qualquer forma ele estava certo e a expressão de sua lei mostrou-se muito mais importante do que o próprio Hooke supunha pois, sua forma genérica, aplica-se à muitos outros problemas físicos já que implica em um inter-relacionamento entre esforço e deslocamento; no caso de uma mola, por exemplo, teremos especificamente:

$$F = k \cdot x$$

onde,  $F$  é o esforço externo aplicado à mola; " $x$ " é o deslocamento sofrido por essa mola e " $k$ " denominada constante de rigidez, sendo uma propriedade de cada tipo de mola, seu material, sua conformação, etc.

Por outro lado, também Newton determinou um inter-relacionamento entre esforço e deslocamento através de seus estudos de dinâmica; só que neste caso não se tratam de partículas estáticas e sim de partículas com movimento, onde o tempo é propriedade importante e onde existe aceleração, que consiste na derivada segunda do deslocamento com relação ao tempo:

$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

agora,  $F$  é novamente um esforço externo à partícula,  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  ou " $a$ " é a aceleração da partícula considerada e " $m$ " é dita massa da partícula, sendo uma propriedade intrínseca da própria partícula como  $k$ .

Pode-se observar agora que existe uma relação definida para o esforço e o deslocamento e outra para o esforço e a derivada segunda do deslocamento com relação ao tempo. Resta descobrir uma relação para o esforço e a derivada primeira do deslocamento com relação ao tempo; essa relação existe e tem o seguinte aspecto:

$$F = b \cdot dx/dt$$

onde  $F$  é um esforço externo qualquer sobre a partícula;  $dx/dt$

ou " $v$ " é a velocidade da partícula considerada e " $b$ ", uma propriedade intrínseca do meio onde se move a partícula, é denominada constante de amortecimento.

O amortecimento pode ser entendido como uma espécie de força de atrito devido ao meio onde se move a partícula, que tenta reduzir ou mesmo terminar com determinado movimento de velocidade  $dx/dt$ ; praticamente todos os movimentos, estão sujeitos a algum tipo de amortecimento. Da mesma forma, que obtivemos relações para esforço e deslocamento lineares, podem ser obtidas relações entre momento e deslocamentos angulares,

$$M = k \cdot \theta, \quad M = I \cdot d^2 \theta / dt^2, \quad M = b \cdot d\theta / dt$$

onde,  $M_k$ ,  $M_m$  e  $M_b$  são momentos externos quaisquer atuando sobre o sistema;  $k$  e  $b$  são semelhantes à constantes de

rigidez e à constante de amortecimento da partícula e do meio, só que agora relacionadas à rotação da partícula;  $I$  é dito momento de inércia e é semelhante à massa, só que  $I$  relaciona-se à dificuldade de se iniciar ou parar determinado movimento de rotação, enquanto  $m$  é relativo à movimentos de translação somente. Finalmente,  $d\theta/dt$  ou " $\dot{\theta}$ " é dita

velocidade rotacional da partícula e  $d^2 \theta / dt^2$  ou " $\ddot{\theta}$ " é dita aceleração rotacional da partícula.

Os sistemas contínuos, tais como aqueles formados pelos átomos de uma estrutura de aço, respondem sob a ação de esforços externos estáticos, como as molas; basta vermos o caso de uma barra submetida à tração dentro do regime elástico.

Sistemas discretos, formados por uma série de partículas também respondem conforme descrito para uma única partícula, só que as grandezas envolvidas adquirem todas dimensões matriciais.

De modo idêntico podemos estender os demais conceitos de massa e amortecimento à sistemas de partículas sob ação de esforços não estáticos, de tal forma que ao invés de uma partícula, teremos um sistema delas e poderemos escrever que a força  $F(t)$  atuante no sistema é igual à soma dos esforços devido à massa, mola e amortecimento, todas as grandezas em forma matricial:

$$SM \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + SB \frac{dx(t)}{dt} + SK x(t) = F(t)$$

onde, SK é conhecida como matriz de rigidez; SM como matriz de massa e SB como matriz de amortecimento. Para sistemas estáticos SM é muito menor que SK. Isso implica em uma simplificação para a equação geral proposta anteriormente.

$$SK * x = F$$

Outro caso típico é o da determinação dos chamados autovalores (ou característicos do sistema), que implicam na obtenção das frequências características do sistema em estudo. Para esse tipo de problema deve-se resolver a seguinte equação matricial,

$$SM \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + SK x(t) = (0) \quad \text{com } F(t) = (0):$$

Este problema pode ser reduzido à forma  $(SK - \lambda SM) * x(0) = 0$ , ou  $|SK - \lambda SM| = 0$

Através do exposto fica claro qual seria uma forma de solução típica para obtenção dos esforços em problemas que envolvessem a análise de estruturas; os itens (c) e (d) do nosso roteiro, originalmente apresentado,

- a) Para a estrutura considerada temos os esforços que atuam sobre essa estrutura, ou seja, conhecemos a matriz F(t).
- b) Determinam-se as matrizes SK, SM e SB para o sistema considerado.
- c) Através das equações propostas determinam-se os deslocamentos x(t).
- d) Com os deslocamentos pode-se determinar as deformações atuantes, que são nosso principal objetivo.

A resolução do item (c) é simples e baseia-se na resolução de sistemas de equações vistos anteriormente neste trabalho. Para resolução do item (d) recorreremos à Teoria da Elasticidade ainda neste capítulo.

Resta ainda, como tarefa extremamente importante a obtenção das matrizes SK, SM e SB. Essa obtenção é feita com o auxílio dos teoremas de Energia ou o Princípio dos Trabalhos Virtuais, conforme veremos.

O conceito apresentado para problemas mecânicos sobre massa, mola e amortecedor, pode ser estendido para os problemas elétricos, fluidos e térmicos, através de analogias simples,

MECANICOS	ELÉTRICOS	FLUIDOS	TÉRMICOS
massa (m)	capacitor (C)	capacitancia fluida (Cf1)	capacitancia térmica (Cte)
mola (k)	indutor (I)	inertancia fluida (If1)	-
amortecedor (b)	resistor (R)	resistencia fluida (Rf1)	resistencia térmica (Rte)
força (F) velocidade (v)	corrente (i) voltagem (v)	vazão (Q) pressão (p)	fluxo de calor (q); temperatura (T)

TABELA IV-I

Pela tabela pode-se observar que existem propriedades do sistema que são válidas para quaisquer dos ramos de estudo; essas propriedades são ditas "inerentes ao sistema". Enquanto isso, temos duas outras propriedades não inerentes ao sistema, mas fornecidas a esse sistema; caso da Força e velocidade nos sistemas mecânicos, ou corrente e voltagem nos sistemas elétricos; essas propriedades são ditas "entre" e "através"; por exemplo, corrente 'através' de um condutor e voltagem 'entre' dois pontos, ou ainda, vazão 'através' de um duto e pressão 'entre' dois pontos. As variáveis 'entre' e 'através' são inter-relacionadas pela grandeza "Potência":  $P_m = F \cdot v$ ,  $P_{el} = V \cdot i$ ,  $P_{f1} = p \cdot Q$  e  $P_{te} = q \cdot T$ .

Todas as grandezas descritas acima podem ser relacionadas por equações como a de Hooke ou a de Newton, o que pode ser comprovado por meio de experiências simples. Com esse relacionamento pode-se conseguir uma tabela como a seguinte:

	Armazenagem Capacitiva	Armazenagem Indutiva	Dissipação Resistiva
massa translação	$F = m \frac{dv}{dt}$		
massa rotação	$M = I \frac{d\gamma}{dt}$		
capacitor	$i = C \frac{dv}{dt}$		
cap. fluida	$Q = Cf1 \frac{dp}{dt}$		
cap. térmica	$q = Cte \frac{dT}{dt}$		
mola translação		$v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	
mola rotação		$\gamma = \frac{1}{k_0} \frac{dM}{dt}$	
indutor elétrico		$V = L \frac{di}{dt}$	
inert. fluida		$p = If1 \frac{dQ}{dt}$	
amort. translação			$F = b \cdot v$
amort. rotação			$M = b \cdot \gamma$
resistencia			$i = \frac{1}{R} \cdot V$
resist. fluida			$Q = \frac{1}{Rf1} \cdot p$
resist. térmica			$q = Rte \cdot T$

TADELA IV-II

Observe-se que a equação  $F = m(dv/dt)$  é idêntica à equação de Newton e a equação  $v = (1/k) \cdot (dF/dt)$  é a equação de Hooke escrita de outra forma. Resta observar também o fato da não existência, até o momento, de uma propriedade como a inércia térmica.

Evidentemente, as equações obtidas para os sistemas mecânicos são válidas para os outros sistemas, proporcionando a possibilidade de estudos por analogia, como a obtenção da distribuição de fluxo de fluidos ou distribuição de tensões através do fluxo de correntes elétricas. Esse fator é de imensa importância na análise de sistemas e para o estudo dos problemas de engenharia como um todo; além disso, permite

fazer do método dos elementos finitos, um método generalizante, capaz de se aplicar à qualquer tipo de problema.

Ao término deste item, fica esclarecido o modo de resolução de estruturas pelo método dos elementos finitos e, neste instante já se sabe, a importancia de obterem-se as matrizes SM, SK e SB corretamente para cada tipo de problema em estudo. Além disso fica obtido o inter-relacionamento entre carregamento e deslocamento decorrentes, sendo ainda necessário esclarecer a inter-relação entre deslocamento/ deformação e deformação/tensão, para completarmos nosso esquema geral de cálculo. Esses aspectos serão estudados a seguir.

#### IV. 3. ESFORÇO/DESLOCAMENTO/DEFORMAÇÃO/TENSÃO

---

Segundo Newton, força é a variação temporal da "Quantidade de Movimento" de uma partícula ou de um corpo. Dessa forma, para melhor entender o significado real de força, deve-se primeiro definir a grandeza "Quantidade de Movimento"; isso foi realizado pelo próprio Newton que associou, numa única grandeza, as quantidades "Velocidade" e "Massa":

$$P = m.v \text{ e } F = dP/dt$$

Basicamente, velocidade é a derivada, com relação ao tempo, do espaço e massa é uma medida relativa da inércia do corpo, ou seja, da dificuldade de se iniciar determinado movimento no corpo.

Em nossa maneira cotidiana de sentir os fenomenos físicos, as forças aparecem sempre quando existe contacto entre dois ou mais corpos. Isso não é real e, na verdade, as forças agem sempre à distancia não se sabe bem como, se por meio de partículas ou por deformação do espaço; porém, para efeitos práticos, podemos dividí-las como de "campo", quando a ação se propaga com intensidade por grandes distancias e, de "contacto" ou "superfície" quando os corpos em interação necessitam estar muito próximos para interagirem de forma apreciável.

Quanto à aplicação, as forças de superfície podem ser concentradas quando a área de atuação é muito reduzida; linearmente distribuídas quando a área de atuação é considerável apenas em uma das dimensões e, finalmente, de pressão quando a área de atuação é considerável em duas dimensões. Na realidade, as forças de superfície atuam sempre sobre uma área, sendo sempre de pressão, demais forças constituem-se apenas em aproximações.

As forças de campo são, sempre, distribuídas por todo o volume do corpo, entretanto, por facilidade de cálculo, pode-se representar esse tipo de força como sendo concentrada e atuando no centro de gravidade do corpo.

Além disso, as forças podem ser idealizadas como independentes ou não do tempo. No primeiro caso teremos uma força dita "estática" e, no segundo, uma força dita

"dinâmica".

Tendo-se definido o que é força, pode-se agora definir o que seja "momento de uma força" ou, simplesmente, "momento":

$$M = F * r$$

Enquanto a força dá uma idéia física da translação imprimida à uma determinada partícula, o momento indica a rotação imprimida à essa partícula através de uma força agindo fora dela, a uma distância  $r$ .

É importante observar que as forças e momentos são tensores de primeira ordem, ou vetores e, sua operação é desse modo, simples, já que as operações são bastante conhecidas por todos. Note-se que  $M$  é o produto vetorial de  $F$  por  $r$ .

A utilização de um sistema cartesiano, retangular e dextrógiro (válida a regra da mão direita), para a representação dos vetores de força, é muito comum em qualquer estudo de Engenharia e será adotado neste trabalho.

Dessa forma temos os valores positivos de forças e momentos conforme a figura:

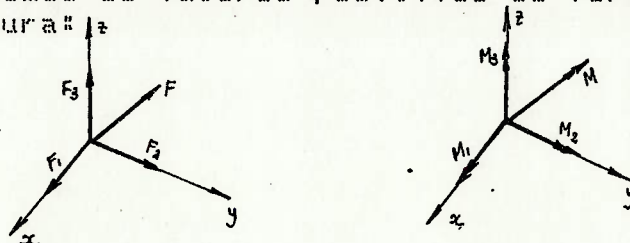


FIG IV-1

As forças e momentos definidos para um determinado conjunto de eixos cartesianos, podem sofrer rotação, de acordo com a álgebra aplicável aos tensores de primeira ordem. O mesmo se aplica aos momentos, obtendo-se a matriz geral de rotação dos esforços de um sistema  $x'y'z'$  para um sistema  $xyz$ , como:

$$\begin{bmatrix} F' \\ M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & \emptyset \\ \emptyset & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}$$

onde  $\Delta$  é a matriz dos cossenos diretores, definida por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} \end{bmatrix}$$

de tal forma que, por exemplo,  $F_2' = F_1.\cos\theta_{21} + F_2.\cos\theta_{22} + F_3.\cos\theta_{23}$  (da mesma forma para  $F_1'$  e  $F_3'$ ).

Os esforços externos são os responsáveis pelas tensões internas nos elementos. Além disso, não existe aplicação de esforços que não impliquem em deslocamentos da estrutura; esses deslocamentos externos podem ser os responsáveis pelas deformações internas dos elementos.

Pode-se então concluir que esforços, deslocamentos, tensões e deformações coexistem sempre, residindo a principal diferença entre essas grandezas no fato de que, esforços e



deslocamentos são agentes que atuam fora da partícula ou do corpo, enquanto tensão e deformação atuam internamente ao corpo, como resposta aos agentes externos. Portanto, podemos encontrar as tensões atuantes em um determinado elemento por qualquer um dos seguintes caminhos:

esforço → tensão  
 esforço → deslocamento → deformação → tensão

O primeiro método é utilizado mais facilmente, porém aplica-se apenas a alguns casos, como por exemplo vigas.

O segundo processo, apesar de parecer muito mais complexo, é aquele mais utilizado pelo método dos elementos finitos.

Tensão pode ser definida grosseiramente como sendo a resposta interna da estrutura, quando submetida a um esforço externo.

Isso ocorre porque a constituição molecular dos corpos é feita sob condições que implicam em esforços; quando o corpo está em equilíbrio, e na ausência de esforços externos, essas forças internas se anulam.

Entretanto, se o corpo sofre a ação de um esforço externo, este corpo se deforma, aproximando ou distanciando suas moléculas alterando seus esforços internos, de tal forma que esses esforços serão idênticos, em magnitude, aos esforços externos aos quais o corpo está submetido, caso ele ainda permaneça em equilíbrio.

A definição matemática de tensão pode ser entendida através da figura seguinte:

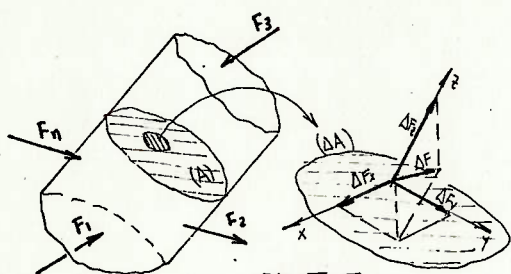


FIG IV-II

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}, \quad z \text{ normal à área } \Delta A$$

$$\tau_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_y = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

$\sigma$  é dita "tensão normal" e  $\tau_x$  e  $\tau_y$  "tensões tangenciais" ou "cizalhantes".

Para uma estrutura infinitesimal, tridimensional, que é o caso mais abrangente, obtém-se, em cada uma das faces do elemento considerado,

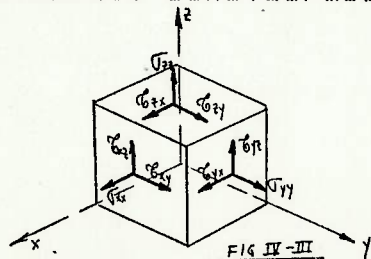


FIG IV-III

plano X -  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$

plano Y -  $\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}$

plano Z -  $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$

formando-se assim "matriz de tensões", que é um tensor de segunda ordem, com propriedades semelhantes às descritas no capítulo relativo às matrizes,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma' = \Lambda \sigma \Lambda^T$$

onde  $\Lambda$  é a matriz dos cossenos diretores, conforme já definido anteriormente.

O tensor de tensões, conforme apresentado, admite valores máximos e mínimos obtidos pela resolução da equação:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

onde,  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são ditos invariantes de tensão e valem,

$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ , soma dos valores da diagonal.

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \text{ soma dos menores principais.}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad I_3 = \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{xx} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} - \sigma_{yy} \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} - \sigma_{zz} \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yx} + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx}$$

pode-se ainda mostrar que a matriz de tensões é simétrica, ou seja,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  e  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Assim, as raízes da equação indicada fornecerão o valor das três principais tensões normais  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Nesses planos as tensões cisalhantes serão nulas; por outro lado, as tensões cisalhantes máximas valem,

$$\tau_{23} = \pm \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}$$

$$\tau_{12} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}$$

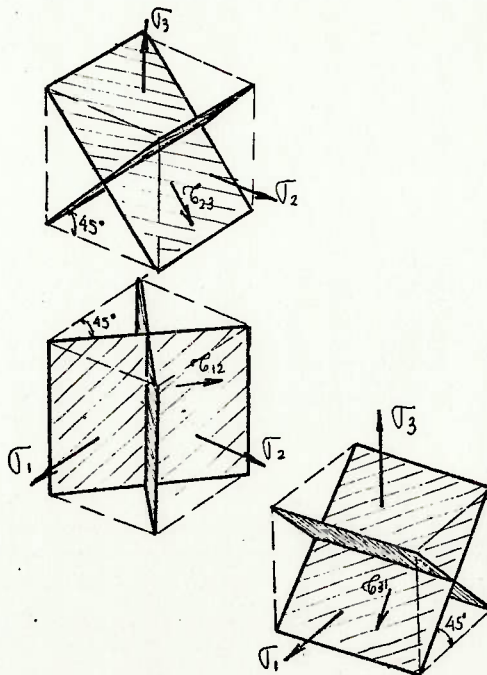


FIG IV-IV

e nestes pontos teremos os seguintes valores para as tensões normais

$$\sigma_{n1} = - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}; \sigma_{n2} = - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} \text{ e } \sigma_{n3} = - \frac{(\sigma_3 + \sigma_1)}{2}$$

As inter-relações entre esforços e tensões podem ser obtidas de maneira relativamente simples, sendo esse fato utilizado pela resistência dos materiais para a resolução quase direta dos problemas de dimensionamento; entretanto existe um aspecto que dificulta todo este raciocínio, que é a necessidade de obtenção da distribuição de esforços ao longo da estrutura para a determinação da tensão em cada ponto desta, e particularmente da tensão máxima atuante. Em geral é muito mais fácil, para estruturas complexas, a obtenção da distribuição de deslocamentos, sendo este fato utilizado pelos métodos mais modernos de resolução dos problemas de dimensionamento. Para ilustração podemos esclarecer que, para estruturas formadas por perfis, são válidas as seguintes formulações:

- esforços de tração e compressão  $F$  (neste último caso, desde que não ocorra flambagem da estrutura), teremos somente tensões normais agindo na estrutura:

$$\sigma_{Tr} \text{ ou } \sigma_{comp} = \frac{F}{A}, \text{ onde } A = \text{área transversal da secção.}$$

- esforços cortantes  $Q$  implicarão em tensões de cisalhamento:

$$\tau_c = \frac{Q}{A}$$

- momentos fletores  $M$  ocasionarão tensões normais e cisalhantes:

$$\sigma_M = \frac{M}{W} \text{ e } \tau_M = \frac{Q \cdot M_{est}}{bI}, \text{ onde}$$

$W$  = módulo de resistência da secção

$b$  = largura da secção no ponto onde se deseja  $\tau_M$

$M_{est}$  = momento estático da figura acima do ponto onde se deseja  $\tau_M$

$I$  = momento da inércia da secção total.

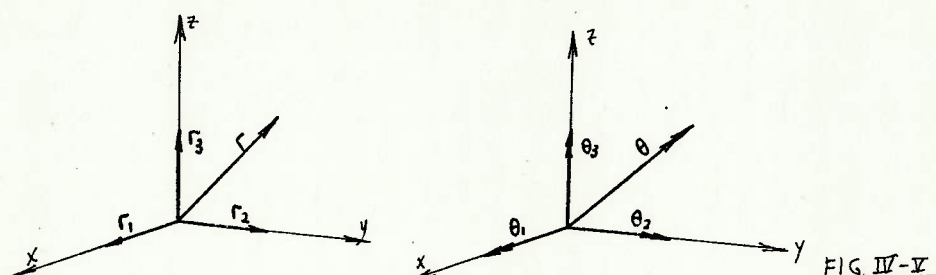
- momentos torçores  $MT$  ocasionarão tensões cisalhantes:

$$\tau_T = \frac{MT}{WT}, \text{ onde } WT \text{ módulo de resistência à torção da secção}$$

A formulação apresentada só se aplica à estruturas constituídas por perfis e não para placas, por exemplo. Além disso não leva em consideração uma série de efeitos posteriormente estudados pela Teoria da Elasticidade; entretanto fornece uma boa aproximação das tensões atuantes em estruturas de perfis que se comportem de forma elástica, e caso fosse fácil a obtenção dos esforços máximos atuantes em cada ponto da estrutura, teríamos sempre um modo rápido de obter as tensões máximas para dimensionamento. Como já esclarecido anteriormente, existe a necessidade de se

obter a distribuição dos deslocamentos por todos os pontos de determinada estrutura, conhecendo-se, para isso, apenas os esforços e/ou deslocamentos externos impostos à essa estrutura. Neste instante torna-se necessário a definição do que seja deslocamento.

Considere-se então um contínuo, com volume e contorno superficial que, num dado instante  $t$ , ocupa uma certa região do espaço. A posição desse contínuo com relação a um conjunto de eixos cartesianos, ortogonais é dita "configuração" do contínuo num tempo  $t$ . Devido a esforços externos aplicados a esse contínuo, sua configuração pode ser alterada. Essa alteração da configuração do contínuo, através da aplicação de esforços, dentro de um tempo  $t$ , é dita "deslocamento". Os deslocamentos de cada ponto, dentro de um contínuo, podem ser especificados de acordo com sua posição inicial, método de Lagrange, ou de acordo com sua posição após a deformação, método de Euler. Ao contrário da mecânica dos fluidos, onde o importante é a determinação de Velocidades e consequentemente a melhor descrição é a Euleriana, na resistência dos materiais o importante são os deslocamentos e a descrição Lagrangiana é mais apropriada. Nestas condições, as alterações de configuração do contínuo podem ser de translação ou de rotação, sendo representadas pelos vetores  $r$  e  $\theta$ . Posteriormente utilizaremos para definição de deslocamento os vetores  $u$ ,  $v$ ,  $w$  também. Os valores positivos de  $r$  e  $\theta$  são conforme a figura



Do mesmo modo que para forças e momentos vale,

$$\begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \theta \\ \theta & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}$$

sendo esta a equação matricial geral para transformação de eixos.

Observe-se que esforços e deslocamentos são interdependentes, pois pela própria definição de deslocamento, este só existe em consequência de esforços aplicados ao contínuo. Além disso já verificou-se, no capítulo anterior, as inter-relações entre esforços e deslocamentos, do tipo

$$SM \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + SB \cdot \frac{dx}{dt} + SK \cdot x = F(t), \text{ finalmente}$$

será visto, em capítulo posterior, uma grandeza dita "trabalho" que associa, em um único valor, as grandezas força e deslocamento.

Da mesma forma que os esforços externos implicam em tensões internas na estrutura, também os deslocamentos implicam nas deformações internas; por sua vez deformações e tensões estão inter-relacionadas.

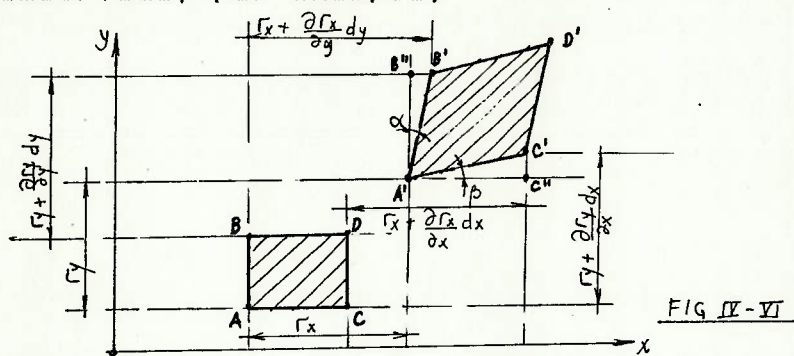
A matriz das deformações assemelha-se à matriz das tensões, sendo também um tensor de segunda ordem no espaço, com nove componentes, 6 dos quais independentes, pois a matriz é simétrica como no caso das tensões e  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$  e  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

onde,  $\epsilon_{xx} = \frac{\partial r_x}{\partial x}$ ;  $\epsilon_{yy} = \frac{\partial r_y}{\partial y}$ ;  $\epsilon_{zz} = \frac{\partial r_z}{\partial z}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial r_x}{\partial y} + \frac{\partial r_y}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial r_y}{\partial z} + \frac{\partial r_z}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial r_z}{\partial x} + \frac{\partial r_x}{\partial z}$$

As relações indicadas entre os deslocamentos e as deformações podem ser obtidas através de relações geométricas, por exemplo,



Então, por definição,  $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L}$  ou

$$\epsilon_{xx} = \left( \frac{A'C'' - AC}{AC} \right) = \left( \frac{(r_x + \frac{\partial r_x}{\partial x} dx + dx - r_x) - dx}{dx} \right)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial r_x}{\partial x}$$

da mesma forma obtém-se  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{zz}$ , por outro lado  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$

$$\text{tg } \beta = \left( \frac{C'C''}{AC'} \right) = \left( \frac{r_y + \frac{\partial r_y}{\partial x} dx - r_y}{r_x + \frac{\partial r_x}{\partial x} dx + dx - r_x} \right) = \left( \frac{\frac{\partial r_y}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial r_x}{\partial x}\right)} \right)$$

Como por hipótese da teoria das pequenas deformações o deslocamento é pequeno,  $1 + \frac{\partial r_x}{\partial x} \approx 1$  e  $\text{tg } \beta \approx \beta$

Portanto teremos  $\beta = \frac{\partial r_y}{\partial x}$  e, da mesma maneira  $\alpha = \frac{\partial r_x}{\partial y}$

Logo  $\gamma_{xy} = \frac{\partial r_x}{\partial y} + \frac{\partial r_y}{\partial x}$

Semelhantemente obtém-se  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$ .

Do mesmo modo que para as tensões, as deformações podem ser transformadas de um sistema de eixos para outro, através da equação matricial:

$$\epsilon' = \Lambda \epsilon \Lambda^T$$

onde a matriz  $\Lambda$  é a matriz dos cossenos diretores. Além disso, também como no caso das tensões, existem planos onde as deformações são máximas e os valores máximos são obtidos da resolução da equação do terceiro grau,

$$\epsilon^3 - I_1 \epsilon^2 + I_2 \epsilon - I_3 = 0$$

onde,

$$I_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

$$I_2 = \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx} \epsilon_{zz} - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_3 = \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - \frac{1}{4} (\epsilon_{xx} \gamma_{yz}^2 + \epsilon_{yy} \gamma_{xz}^2 + \epsilon_{zz} \gamma_{xy}^2) + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}$$

Ao final deste capítulo já se conhece as definições de esforço, deslocamento, tensão e deformação e, mais importante, já se obtiveram as relações de inter-dependência entre deslocamentos e deformações, restando apenas as relações entre tensão e deformação que serão vistas no próximo item deste capítulo.

#### IV 4 A TENSÃO-DEFORMAÇÃO E A TEORIA DA ELASTICIDADE

Se submetermos uma barra cilíndrica de determinado material a esforços de tração e medirmos os deslocamentos provocados por esses esforços, poderemos traçar um gráfico esforçoxdeslocamento.

Tomando-se a seguir a tensão de tração obtida pela divisão do esforço pela área transversal da barra e, a deformação obtida conforme definição do capítulo anterior,  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ , teremos um

gráfico tensãoxdeformação. Este gráfico representa um relacionamento entre tensão e deformação, a última que necessitamos para completar o esquema de cálculo proposto.

Experiências executadas como indicado acima, comprovaram tres comportamentos básicos, bastante distintos, para grupos de materiais. Cada um desses grupos recebeu denominação própria: grupo dos materiais elásticos; grupo dos materiais plásticos;

grupo dos materiais viscosos. Além disso, outros grupos de materiais apresentaram comportamentos combinados e foram denominados como, materiais elasto-plásticos, materiais visco-elásticos, etc.

Para melhor esclarecer, materiais viscosos são aqueles para os quais obteremos muito mais facilmente uma relação entre tensão e velocidade de deformação, do que entre tensão e deformação; mais especialmente podemos dizer que a deformação varia com o tempo para os materiais viscosos submetidos à tensão.

Um gráfico tensão x velocidade de deformação para os materiais viscosos seria do tipo,

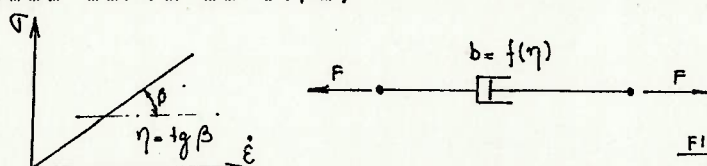


FIG IV - VII

onde podemos observar a existência do coeficiente de inclinação da reta,  $\beta$ , denominado coeficiente de viscosidade. Neste trabalho não consideraremos os materiais viscosos o que, entretanto, não significa que isso não possa ser feito através do método dos elementos finitos; utiliza-se normalmente, como modelo para os materiais viscosos, um amortecedor de constante de amortecimento  $b = f(\eta)$ .

Também os materiais plásticos não serão estudados profundamente neste trabalho uma vez que seria necessário o desenvolvimento de toda teoria da plasticidade, particularmente dos critérios de escoamento como os de Tresca, de Von Mises e de Mohr-Coulomb.

Parece já ter ficado claro que, neste presente trabalho, somente utilizaremos materiais elásticos. Esse fato aparentemente limitante, abrange um grande Universo de materiais, particularmente materiais metálicos dentro de determinados limites de tensão; na verdade grande parte dos metais comporta-se, como materiais elásticos, plásticos ou mesmo viscosos, para cada limite de tensão e temperatura em que se encontram.

Para os materiais elásticos o comportamento do gráfico tensão x deformação é do tipo,

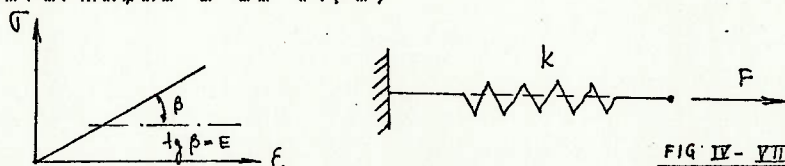


FIG IV - VIII

ou seja, trata-se do mesmo comportamento obtido para uma mola de constante elástica  $K$ , submetida a um esforço  $F$  de tração; neste caso a constante do material é denominada de módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young, e indicado pela letra  $E$ .

Ainda dentro do regime elástico, podemos executar um tipo diferente de experiência na qual aplicaremos momentos torsores, responsáveis por tensões de cisalhamento, a uma barra cilíndrica e verificaremos as deformações angulares; traçando-se o gráfico tensão de cisalhamento x deformação angular, obteremos uma outra reta com coeficiente angular  $G$ ,

denominado módulo de elasticidade transversal do material. Uma última constante importante relativa as deformações dos materiais é a chamada constante de Poisson, representativa da porcentagem de deformação transversal, com relação à deformação longitudinal do elemento e indicada pela letra  $\nu$ . Generalizando-se as experiencias indicadas para as tres direções do espaço, teremos um relacionamento tensãoxdeformação do tipo,

$$\sigma = D \cdot \epsilon$$

onde,

$\sigma$  é o tensor das tensões, com 9 componentes

$\epsilon$  é o tensor das deformações, com 9 componentes

$D$  é o tensor elástico com 81 componentes

Considere-se no entanto que, apenas seis componentes de tensão e seis de deformação são independentes já que ambas as matrizes são simétricas e teremos  $D$  com apenas 36 componentes,

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix}$$

esta matriz, da forma aquí descrita, é genérica e aplicável á materiais quaisquer ditos anisotrópicos; porém muitos materiais possuem simetria de propriedade e, caso  $D_{ij}=D_{ji}$ , o número de constantes independentes na matriz  $D$  já cai para apenas 21. Uma grande gama de materiais possui ainda simetria elástica com relação aos tres planos,  $xy$ ,  $yz$  e  $zx$ , sendo denominados de ortotrópicos. Para esses materiais existem apenas 12 constantes independentes que são  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$ ,  $D_{31}$ ,  $D_{32}$ ,  $D_{33}$ ,  $D_{44}$ ,  $D_{55}$  e  $D_{66}$ .

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & & & \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & & \\ & & & & D_{55} & \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

Finalmente, existe uma classe de materiais, e grande parte dos materiais metálicos encontra-se nessa classe, para os quais as propriedades em um ponto são as mesmas em todas as direções; esses materiais são denominados de isotrópicos e tem apenas tres constantes independentes,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  e  $D_{44}$  que são, na verdade, funções apenas dos valores obtidos para  $E$ ,  $G$  e  $\nu$ . Pode-se mostrar que  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

Conforme já visto para o caso de uma dimensão, generalizando-se o princípio da superposição válido para pequenas deformações teremos então os seguintes valores para as deformações  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ .



$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

No caso dos  $\gamma$ , obteremos,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \text{e} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Considerando-se uma nova constante, dita constante de Lamé e definida como,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

podemos escrever os  $\sigma$  e  $\tau$  em função dos  $\epsilon$  e  $\gamma$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2 \cdot G \cdot \epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2 \cdot G \cdot \epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \end{aligned}$$

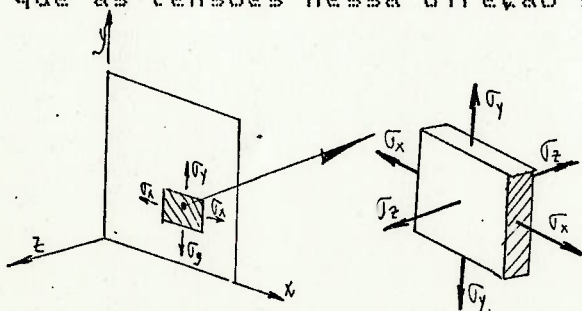
que em forma matricial torna-se,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz D terá os seguintes valores,  $D_{11} = \lambda + 2G$ ,  $D_{12} = \lambda$  e  $D_{44} = G$ , e o aspecto final indicado.

Existem ainda, casos de grande interesse onde podemos simplificar bastante a matriz D. Por exemplo, o caso da "tensão plana" e o caso da "deformação plana".

No caso da tensão plana, teremos uma das dimensões do componente em estudo suficientemente pequena, de tal forma que as tensões nessa direção serão praticamente nulas;



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \text{e ainda,} \\ \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

FIG IV-IX

Dessa forma,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) ; \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) ; \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

e a matriz D torna-se

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Esse é um caso muito comum na prática, no qual podemos estudar estruturas planas submetidas à cargas no plano do elemento, como por exemplo,

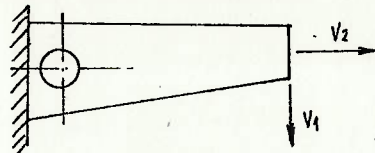


FIG IV-X

O caso da deformação plana, implica em que não haja deformação para uma determinada direção de um espaço tridimensional, ou mais especificamente, em uma determinada direção, a dimensão do elemento seja suficientemente grande de modo que,

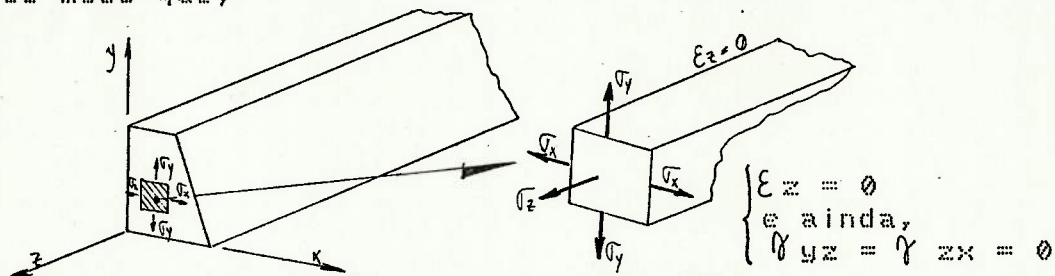


Fig IV-XI

Neste caso teremos então,

$$D = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{bmatrix}$$

Dois outros casos importantes são o das estruturas axissimétricas, submetidas a cargas também axissimétricas e o caso da flexão de placas.

No primeiro caso, as relações de deslocamento x deformação são melhor descritas num sistema de eixos cilíndricos.

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= \frac{\partial r}{\partial R} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial rz}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial rz}{\partial R} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & G & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix}$$

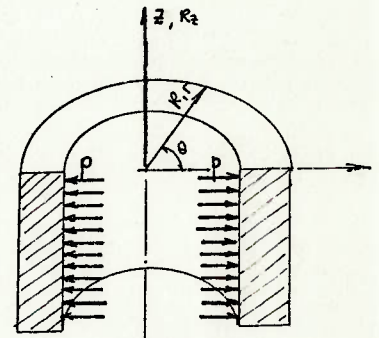


FIG IV-XII

No caso de placa em flexão, teremos deslocamento apenas na direção z e rotação em x e y; isso implica em uma matriz D do tipo,

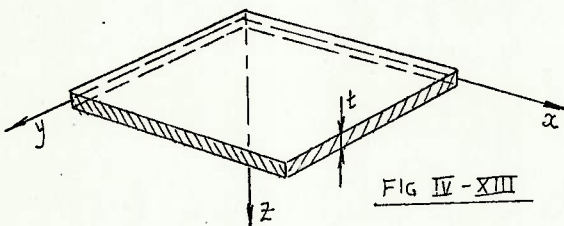


FIG IV-XIII

$$D = \frac{3}{12 \cdot (1-\nu)} \frac{E}{t^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

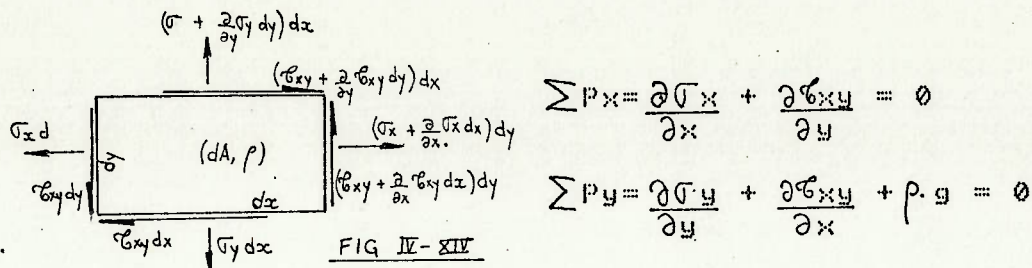
Com a verificação da relação entre tensão e deformação temos agora um esquema completo para obtenção de tensões a partir dos esforços aplicados à estrutura; esse método de estudo é o utilizado pela teoria da elasticidade.

Seja, por exemplo, a análise de uma estrutura que possa ser considerada como funcionando de maneira análoga a uma estrutura plana submetida a esforços no seu plano; ou seja, um caso particular de análise tipo tensão plana. Para este caso teríamos válidas as seguintes equações:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial r_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial r_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial r_x}{\partial y} + \frac{\partial r_y}{\partial x} \quad (\text{relação deslocamento x deformação}).$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{relação tensão x deformação})$$

Como temos seis equações com oito incógnitas ( $r_x$ ,  $r_y$ ,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ), devemos conseguir duas outras equações. Isso é feito considerando-se as equações de equilíbrio para um elemento da estrutura de área,  $dA$  e a densidade  $\rho$



Uma análise desse tipo é limitadíssima se levarmos em conta as enormes dificuldades existentes para resolução do sistema de equações diferenciais, com condições quaisquer de geometria e vínculos. Na realidade somente problemas simples e casos particulares podem ser resolvidos por esse método. Apesar das limitações práticas da teoria da elasticidade, foi ela, somada à teoria das estruturas, que deu origem ao método dos elementos finitos.

IV.5. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS; TEOREMAS DE ENERGIA E  
 OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ SK, MASSA SM E  
 AMORTECIMENTO SB

Do nosso propósito inicial, a obtenção dos inter-relacionamentos entre esforço x deslocamento, deslocamento x deformação e deformação x extensão, já conseguimos verificar praticamente todos; entretanto nada verificamos ainda quanto a obtenção das matrizes SK, SM e SB para estruturas complexas; na maior parte das vezes essas matrizes podem ser obtidas do princípio dos trabalhos virtuais e dos teoremas de energia.

Trabalho mecânico é definido como  $\int F d\delta$ , ou seja, é uma grandeza que associa num único valor força e deslocamento, as duas grandezas principais envolvidas na análise de estruturas.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que, para um sistema qualquer em equilíbrio, o trabalho externo virtual deverá ser igual ao trabalho interno virtual; mais especificamente, o princípio relaciona um sistema de forças em equilíbrio ( $F$ =força externa e  $\sigma$ =tensão interna) real ou virtual, com um sistema de deslocamento geometricamente compatível ( $\delta$ =deslocamento externo e  $\epsilon$ =deformação interna) também real ou virtual; quando os esforços são reais, os deslocamentos são virtuais, e vice-versa. Além disso, o termo virtual, neste caso, tem o mesmo significado de não real, ou seja, utilizado apenas como recurso de cálculo.

Quando adotamos o sistema de esforços virtuais (esforço externo e tensão interna virtuais), o método é utilizado para obtenção de deslocamentos e é conhecido como "Método das cargas Unitárias". Quando, ao contrário, os deslocamento externo e deformação interna é que são virtuais, o método permite a obtenção dos esforços e é conhecido como "Método dos Deslocamentos Unitários". Assim, o trabalho é expresso por:

$$\sum \delta^T \cdot F = \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dV$$

onde  $\delta^*$  representa os deslocamentos nos nós do elemento sendo:

$$\epsilon = B \cdot \delta^* \text{ , já discutido}$$

$$\sigma = D \cdot \epsilon = D \cdot B \cdot \delta^*$$

$$\epsilon^T = B^T \cdot \delta^*$$

portanto:

$$\begin{aligned} \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dV &= \int_V B^T \cdot \delta^* \cdot D \cdot B \cdot \delta^* \cdot dV = \\ &= \delta^{*T} \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \cdot \delta^* \end{aligned}$$

Igualando-se os trabalhos

$$\delta^{*T} \cdot F = \delta^{*T} \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \cdot \delta^*$$

como;  $F = SK \cdot \delta^*$

podemos concluir que;  $SK = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV$

e conseguimos uma expressão para obter a matriz de rigidez já que conhecemos as matrizes  $D$  e  $B$ . Na verdade o conhecimento completo de  $B$  para qualquer tipo de elemento depende ainda de uma função denominada função da forma que será estudada no próximo ítem deste capítulo.

Como visto acima, o Princípio dos Trabalhos Virtuais permite a obtenção da matriz de rigidez dos elementos. Pode-se obter o mesmo resultado através do estudo dos teoremas de Energia, particularmente a da Energia Potencial Total, desenvolvidos no século passado por Maxwell, Menabréa, Castigliano, Rayleigh-Ritz entre outros, e esquecidos por longo tempo.

Basicamente, a energia potencial total de um sistema mecânico é definida como,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dV - \int_V \delta^T \cdot F \cdot dV - \int_A \delta^T \cdot q \cdot dA$$

onde,

$$\int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dV = \text{energia interna do sistema}$$

$$\int_V \delta^T \cdot F \cdot dV = \text{energia devido aos esforços externos de campo}$$

$$\int_A \delta^T \cdot q \cdot dA = \text{energia devido aos esforços externos de superfície.}$$

Pode-se demonstrar que a energia potencial total de um sistema em equilíbrio é estacionária e tem sempre um valor mínimo para estruturas estáveis; a denominação genérica desse fato é "princípio da Energia Potencial Total Mínima". Dessa

forma,

$$\partial \Pi / \partial \delta = 0$$

Então, se tomarmos  
teremos novamente

$$\begin{aligned} \epsilon &= B \cdot \delta^* \\ \sigma &= D \cdot \epsilon = D \cdot B \cdot \delta^* \end{aligned}$$

Assumamos ainda, baseados num processo dito de Rayleigh-Ritz, uma função de deslocamento qualquer que indique os valores do deslocamento do elemento em função dos deslocamentos nodais desse elemento  $\delta = N \cdot \delta^*$  onde  $N$  é dita função de forma, e será vista no próximo capítulo,  $\delta^*$  é relativo aos deslocamentos nos pontos nodais e  $\delta$  é relativo aos deslocamentos em todo o elemento.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V B^T \cdot \delta^* \cdot D \cdot B \cdot dV - \int_V N^T \cdot \delta^* \cdot p \cdot dV - \int_A N^T \cdot \delta^* \cdot q \cdot dA \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta^*} &= \int_V [B^T \cdot D \cdot B] \cdot \delta^* \cdot dV - \int_V N^T \cdot p \cdot dV - \int_A N^T \cdot q \cdot dA = 0 \\ &= \underbrace{\int_V [B^T \cdot D \cdot B] \cdot dV \cdot \delta^*}_{SK \cdot \delta^*} - \underbrace{\left[ \int_V N^T \cdot p \cdot dV + \int_A N^T \cdot q \cdot dA \right]}_{F = 0} = 0 \end{aligned}$$

Esta é expressão geral para uma matriz de rigidez e uma matriz de esforços qualquer.

Quando os deslocamentos de um corpo variam com o tempo, considere-se ainda que, para o caso das forças de campo, ou mássicas, temos

$$p = p' - m \cdot \ddot{\delta} - b \cdot \dot{\delta}$$

onde,

- $p'$  = é a parcela de força constante com o tempo
- $m \cdot \ddot{\delta}$  = é a parcela de força que varia com a aceleração (derivada segunda do deslocamento  $\times$  densidade)
- $b \cdot \dot{\delta}$  = é a parcela de força que varia com a velocidade (derivada primeira do deslocamento  $\times$  coeficiente de amortecimento).

$$\text{é o termo: } - \int_V N^T \cdot p \cdot dV = - \int_V N^T \cdot [p' - m \ddot{\delta} - b \dot{\delta}] \cdot dV$$

$$\text{como } \ddot{\delta} = N \cdot \ddot{\delta}^* ; \quad \dot{\delta} = N \cdot \dot{\delta}^*$$

$$- \int_V N^T \cdot p \cdot dV = - \int_V N^T \cdot p' \cdot dV + \int_V N^T \cdot m \cdot N \cdot \ddot{\delta}^* \cdot dV + \int_V N^T \cdot b \cdot N \cdot \dot{\delta}^* \cdot dV$$

$$\text{ou } \left[ \int_V N^T \cdot m \cdot N \cdot dV \right] \cdot \ddot{\delta}^* = SM \cdot \ddot{\delta}^*$$

$$\left[ \int_V N^T \cdot b \cdot N \cdot dv \right] \cdot \delta^* = SB \cdot \delta^*$$

Através do exposto praticamente já temos condições de determinar SK, SM e SB, pois sabemos os valores de B e D. Entretanto resta ainda a necessidade de se determinar a função de forma N relativa à geometria do elemento que será explicada a seguir.

#### IV.6. FUNÇÕES DE DESLOCAMENTO OU DE FORMA

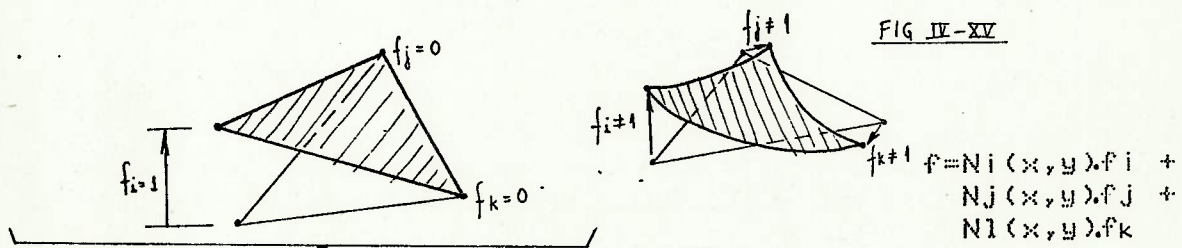
Uma função de deslocamento pode ser dada como um polinômio de coeficientes indeterminados que dependem dos parâmetros de deslocamentos nodais, ou diretamente, em termos de uma função de forma a qual pode ser definida, por exemplo, por funções de Lagrange, funções de Hermitian, funções senodais, etc. Desse modo as funções de deslocamento podem ser dadas por:

1.  $f = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot y + \dots$
- ou
2.  $F = N_1(x,y) \cdot f_1 + N_2(x,y) \cdot f_2 + \dots$

onde,  $A_1, A_2, A_3$ , etc são as constantes indeterminadas do polinômio,  $x, y$ , etc, são os deslocamentos nodais,  $N_1, N_2$ , etc, são as funções de forma e os  $f_1, f_2$ , etc, são os correspondentes parâmetros de deslocamentos nodais.

Matematicamente a representação  $f = \sum_{i=0}^n N_i \cdot f_i$  é necessária para

o método dos elementos finitos. Fisicamente, uma função de forma representa as coordenadas de cada ponto dentro de um determinado elemento, quando aplicamos um deslocamento unitário num ponto qualquer desse elemento.



$$N(x,y) = f = \underbrace{N_i(x,y)}_1 \cdot \underbrace{f_i}_1 + \underbrace{N_j(x,y)}_0 \cdot \underbrace{f_j}_0 + \underbrace{N_k(x,y)}_0 \cdot \underbrace{f_k}_0$$

O conceito geral de função de deslocamento é mais facilmente entendido se utilizarmos polinômios para obtenção dessa função. Por exemplo, um polinômio do tipo,  
 $f = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot y$

aplicado a um elemento triangular, com nós i, j e k e deslocamento u, v para cada nó,

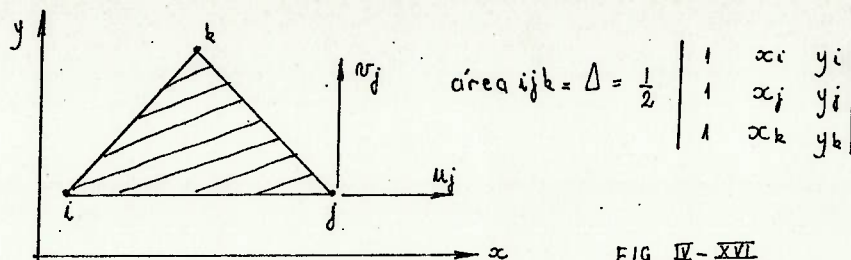


FIG IV-XVI

Determinando-se as incógnitas A1, A2 e A3, teremos

$$\begin{aligned} u_i &= A_1 + x_i \cdot A_2 + y_i \cdot A_3 \\ u_j &= A_1 + x_j \cdot A_2 + y_j \cdot A_3 \\ u_k &= A_1 + x_k \cdot A_2 + y_k \cdot A_3 \end{aligned}$$

Considerando-se que conhecemos os valores de  $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j$  e  $y_k$  podemos obter os valores de A1, A2, A3, em função dos valores de u,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j & x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k & x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ -x_j + x_k & -x_k + x_i & -x_i + x_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

Da mesma forma podemos obter os valores de B1, B2 e B3 em função dos valores v.

Suponhamos então que  $A_1 = B_1, A_2 = B_2$  e  $A_3 = B_3$  e que  $x_i = y_i = 1, x_k = y_k = 2, x_j = 3$  e  $y_j = 1$ ; teremos então:

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 u_i - u_k \\ A_2 &= -1/2 u_i + 1/2 u_j \\ A_3 &= -1/2 u_i - 1/2 u_j + u_k \end{aligned}$$

Portanto,

$$u = (2 \cdot u_i - u_k) + (-1/2 \cdot u_i + 1/2 \cdot u_j) \cdot x + (-1/2 \cdot u_i - 1/2 \cdot u_j + u_k) \cdot y$$

Se aplicássemos um deslocamento unitário em  $u_i = u_j = u_k = 1$  teríamos,  $u=1$  para qualquer valor de x ou y, o que é evidente. Para  $u_i = u_j = 0$  e  $u_k = 1$  teremos, em  $x=2$  e  $y=3/2$ ,  $u = -1 + 3/2 = 1/2$

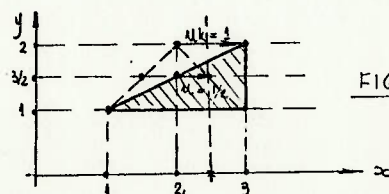
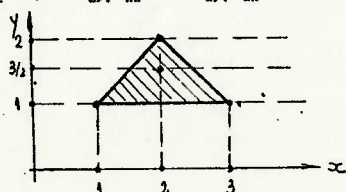
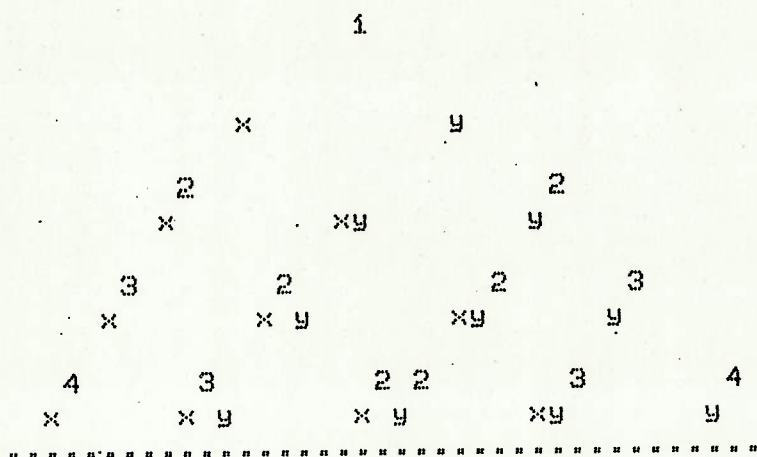


FIG IV-XVII



O mesmo tipo de raciocínio é válido para os valores de  $v$ . Pelo exposto fica claro a utilidade da função de deslocamento; ela permite avaliar os deslocamentos internos de determinado elemento em qualquer ponto  $(x,y)$ , conhecendo-se os valores dos deslocamentos nodais desse elemento. Para funções de deslocamento bidimensionais dadas em termos de polinômios, o triângulo de Pascal é um ótimo auxiliar na determinação dos termos a serem utilizados, para cada tipo de elemento.



Os polinômios representativos dos deslocamentos devem sempre ter um número de termos iguais ao grau de liberdade do elemento. Desse modo deve-se selecionar cuidadosamente esse valor pois, por um lado existe um número mínimo de graus de liberdade que devem ser considerados a fim de representar adequadamente a estrutura real e, por outro, um número excessivo de graus de liberdade leva a gastos excessivos de tempo de computação. O número necessário de termos para um dado polinômio é dado por,

$$m = \frac{(n + s)!}{n!s!}$$

onde,

$n$  é a dimensão espacial (unidimensional, bidimensional, etc.)  
 $s$  é o grau da função selecionada (função linear, quadrática, etc.)

Assim, por exemplo, uma função quadrática num espaço bidimensional terá,

$$m = 4!/2!2! = 6 \text{ termos}$$

$$f = A_1 + A_2.x + A_3.y + A_4.x^2 + A_5.y^2 + A_6.x.y$$

Muitas vezes não é fácil selecionar corretamente os termos necessários para um polinômio tendo em vista seus graus de liberdade. O caso mais conhecido é o do elemento triangular submetido a esforços de flexão, pois esse tipo de elemento possui 9 graus de liberdade ( $v$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  para cada nó do elemento) e, através da formulação apresentada, ou do triângulo de Pascal teríamos,

$m = 5!/3!2! = 10$  termos  
 $n = 3$  pois os deslocamentos são tridimensionais  
 $s = 2$  função quadrática para melhor representar o campo deslocamentos.

Na verdade diversos trabalhos demonstraram que não existem soluções satisfatórias para esse elemento através de funções polinomiais, ou seja, não existe um polinômio que represente adequadamente o campo de deslocamentos desse elemento, submetido a esse tipo de esforço. Somente a utilização de coordenados de área proporcionou bons resultados para os elementos triangulares.

O triângulo de Pascal pode ser extendido ao espaço, definindo-se polinômios para elementos tridimensionais,

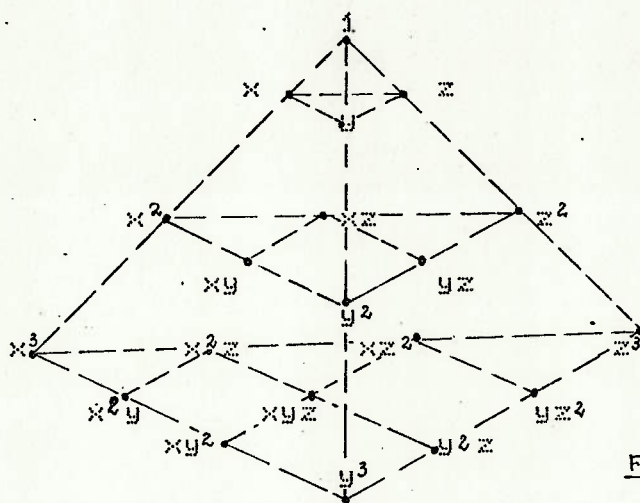


FIG. IV-XVII

No método dos elementos finitos é necessário a utilização de  $N_i$ , funções de forma. Essas funções sempre podem ser obtidas a partir do polinômio escolhido para representar os deslocamentos do elemento. Entretanto isso representa um trabalho adicional, requerendo inclusive, inversão de matrizes. Desse modo quando a função de deslocamento pode ser representada não por polinômios, mas diretamente por funções de forma, existe uma grande economia no tempo de processamento dos elementos mais complexos (para maiores detalhes veja ref. 4 e 5 item 7.2).

As funções de forma mais conhecidas são as de Lagrange e as de Hermitian. No primeiro caso temos uma função  $f(x)$  que concorda com uma dada função que passa por 'n' pontos conhecidos; a forma básica da função de Lagrange, em um sistema simples de coordenadas com n nós é do tipo,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f_i$$

onde  $L_i(x)$  é chamada função multiplicadora de Lagrange e é dada por,

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

e  $f_i$  é o valor da função dada no ponto  $i$ .  
Pode-se verificar facilmente que,

$$L_i(x_a) = 0 \text{ para } a \neq i$$

$$L_i(x_a) = 1 \text{ para } a = i$$

A aplicação das funções de Lagrange pode ser estendida para duas ou tres dimensões,

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m L_i(x) \cdot L_j(y) \cdot f_{ij}$$

$$f(x,y,z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p L_i(x) \cdot L_j(y) \cdot L_k(z) \cdot f_{ijk}$$

sendo  $n$ ,  $m$  e  $p$  o número de pontos na direção considerada.  
Exemplos de elementos obtidos através da formulação indicada são,

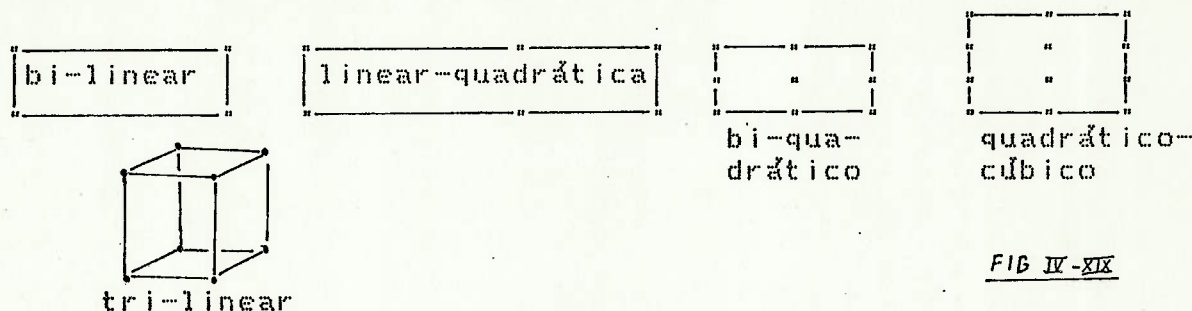


FIG IV-XIX

Apesar da facilidade de geração, as funções de Lagrange tem utilidade limitada devido a seu grande número de pontos interiores.

As funções de Hermitian não somente concordam com uma dada função em um determinado ponto, mas também concordam com a derivada, de qualquer ordem desejada, dessa função, nesse ponto. Uma função Hermitiana de primeira ordem tem a forma,


$$f(x) = \sum_{i=0}^n U_i(x) \cdot f_i + \sum_{i=0}^n V_i(x) \cdot f'_i$$

onde  $f_i$  e  $f'_i$  são os valores da função dada e de sua derivada  $1^a$ , no ponto,

$$U_i = (1 - 2 \cdot \frac{d}{dx} (L_i(x)) \Big|_{x=x_i}) \cdot (L_i(x))^2$$

$$V_i = (L_i(x)) \cdot (x-x_i)$$

Também devido à sua complexidade, as funções de Hermitian, como as de Lagrange, tem utilidade limitada. Sua aplicação mais interessante é a chamada "função de viga", envolvendo apenas dois pontos numa única direção por exemplo  $x$ . Sendo a distância entre os dois pontos considerada dada por "1", teremos,



$$\begin{cases} L_0(x) = 1 - \frac{x}{1} \\ L_1(x) = \frac{x}{1} \end{cases}$$

$$U_0(x) = (1 - 2\frac{x}{1}) \frac{x^2}{1^2} (x - 2\frac{x}{1} + 1) = 1 - \frac{3x^2}{1} + \frac{2x^3}{1^3}$$

$$U_1(x) = \frac{(1 - 2\frac{x}{1} + 2) \frac{x^2}{1^2}}{1} = \frac{3x^2}{1^2} - \frac{2x^3}{1^3}$$

$$V_0(x) = x(1 - 2\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2})$$

$$V_1(x) = x(\frac{x^2}{1^2} - \frac{x}{1})$$

Pelo exposto fica a certeza de que nem as funções de Lagrange, nem as de Hermitian são adequadas ao método dos elementos finitos, pois implicam em polinômios de ordem muito elevada, com número desnecessário de nós internos. Além disso, esses tipos de funções poderiam ser utilizados apenas por elementos quadriláteros (ou retangulares evidentemente) e lineares no plano, e cubos no espaço; de forma nenhuma se aplicariam a elementos triangulares ou prismáticos.

Para resolver o primeiro problema, ou seja, para conseguir elementos com poucos nós internos, foram desenvolvidas novas famílias de funções. Talvez a mais importante delas seja a, dita família "serendípita", onde a função depende basicamente dos nós situados no contorno do elemento; escrevemos essas funções em relação às coordenadas locais do elemento,  $\xi, \eta$ , que será melhor entendido no item seguinte, sobre funções geométricas.

Como curiosidade, a ref. (4), cita que o nome "serendípita" vem do fato dessas funções terem sido obtidas por mera observação e não por análise matemática, sendo sua extensão a elementos de ordem superior muito difícil. Dessa maneira o nome serendípita origina-se do "Príncipe de Serendip", célebre por seus descobrimentos fortuitos.

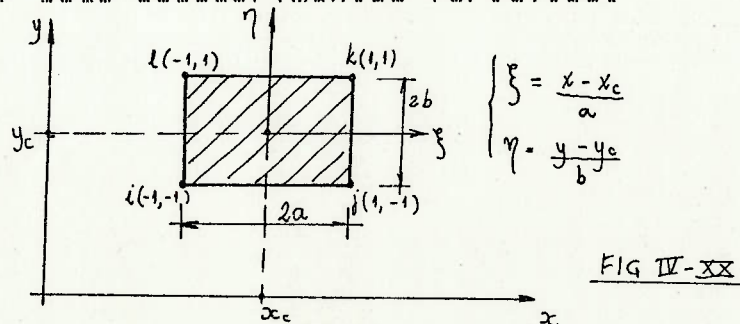


FIG IV-XX

Na família serendípita, ao considerarmos uma variação linear para o retângulo em estudo, verificaremos que o valor de  $N$  é,

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{FIG IV-XXI}$$

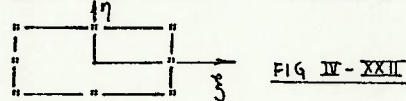
Observe que  $\xi_i$  e  $\eta_i$  variam como  $-1, 0$  ou  $1$ .

Para variações quadráticas estes valores tornam-se,

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \text{ p/os nós dos vértices}$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i), \text{ para os nós laterais com } \xi_i = 0$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2), \text{ para os nós laterais com } \eta_i = 0$$

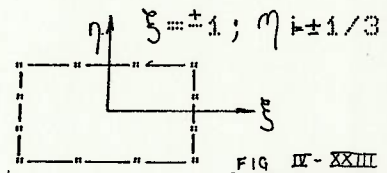


Se a variação for cúbica,

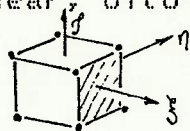
$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta \eta_i) (-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)) \text{ p/os nós dos vértices}$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta \eta_i) \text{ para os nós laterais}$$

Demais valores obtêm-se permutando os valores de  $\eta_i$  e  $\xi_i$



No caso de elementos retangulares no espaço, a família serendípita tem o seguinte aspecto, para elementos com variação linear, oito nós,



$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i)$$

Para elementos com variação quadrática, vinte nós,

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2) \text{ para os nós dos vértices}$$

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \xi^2) \text{ para o nó da aresta onde } \xi_i = 0, \eta_i = \pm 1 \text{ e } \zeta_i = \pm 1$$

Para os elementos triangulares, um sistema de coordenadas paralelo aos lados da figura não é adequado. Utiliza-se então um sistema dito "coordenadas de área", o qual parte das relações entre o triângulo e um sistema qualquer de coordenadas retangulares,  $x, y$ ,

$$\begin{aligned}
 x &= L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 \\
 y &= L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 \\
 L_1 + L_2 + L_3 &= 1
 \end{aligned}$$

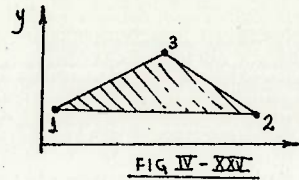


FIG IV-XXV

Substituindo, podemos obter,

$$\begin{aligned}
 L_1 &= ((x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y) / 2\Delta \\
 L_2 &= ((x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1) + (y_1 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_1) \cdot y) / 2\Delta \\
 L_3 &= ((x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2) + (y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y) / 2\Delta
 \end{aligned}$$

onde,  $\Delta$  é a área do triângulo 123. Além disso, pode-se mostrar que,

$$L_1 = \frac{\text{Área P23}}{\text{Área 123}}$$

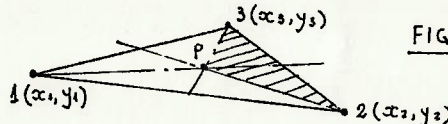


FIG II-XXVI

daí a razão do nome "coordenadas de área".

Pode-se verificar os valores obtidos dessa forma, com os valores obtidos anteriormente ao utilizarmos um polinômio do tipo  $f = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot y$  para aproximar os valores de deslocamento.

Tendo-se obtido os valores de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , para um triângulo do tipo abaixo, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1 \\
 N_2 &= L_2 \\
 N_3 &= L_3
 \end{aligned}$$

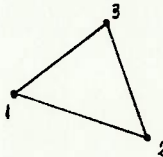


FIG IV-XXVII

Para um elemento triangular quadrático, teremos

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 \\
 N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 \\
 N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 \\
 N_4 &= 4L_1 L_2 \\
 N_5 &= 4L_2 L_3 \\
 N_6 &= 4L_3 L_1
 \end{aligned}$$

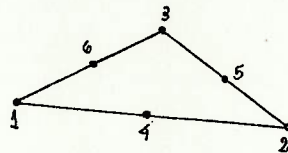


FIG IV-XXVIII

No caso de um triângulo cúbico a figura só será estável, considerando-se um nó interno como já havíamos visto pela aplicação de nossa fórmula  $m = \frac{(n+s)!}{n!s!}$

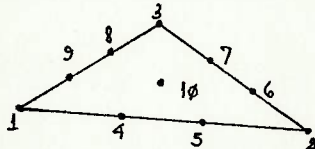


FIG. IV-XXIX

Para o caso tridimensional, os triângulos transformam-se em tetraedros e, as coordenadas de área passam a ser coordenadas de volume,

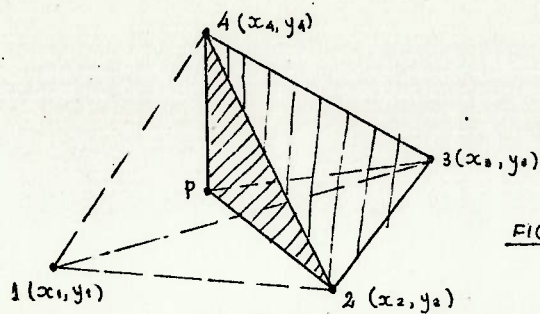


FIG IV-XXX

$$\begin{aligned}
 x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\
 y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\
 z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \\
 L_1 + L_2 + L_3 + L_4 &= 1
 \end{aligned}$$

$$L_i = \frac{\text{volume P234}}{\text{volume 1234}}, \text{ etc.}$$

Nessas condições, uma figura com 4 nós, tetraedro dito linear,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1 \\
 N_2 &= L_2 \\
 N_3 &= L_3
 \end{aligned}$$

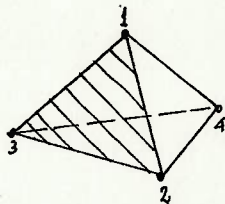


FIG IV-XXXI

Para um tetraedro de 10 nós, dito quadrático

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 \\
 N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 \\
 N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 \\
 N_4 &= (2L_4 - 1)L_4 \\
 N_5 &= 4L_1 L_2 \\
 N_6 &= 4L_1 L_3 \\
 N_7 &= 4L_1 L_4 \\
 N_8 &= 4L_2 L_3 \\
 N_9 &= 4L_3 L_4 \\
 N_{10} &= 4L_4 L_2
 \end{aligned}$$

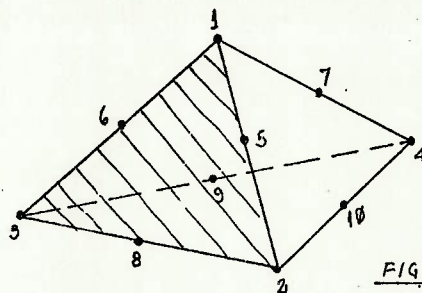


FIG IV-XXXII

Para um tetraedro cúbico, teremos então,

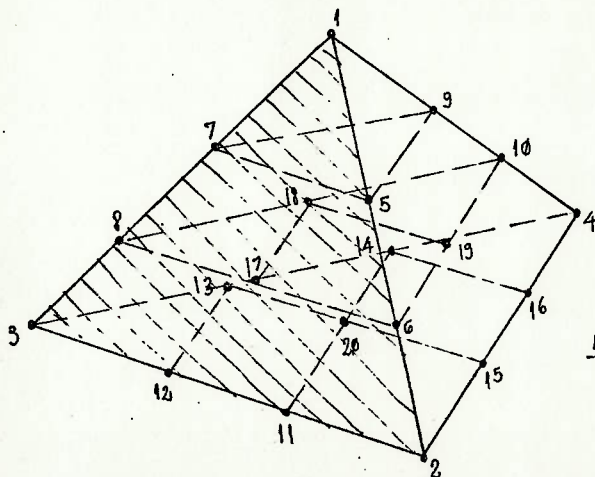


FIG IV-XXXIII

Pode-se verificar que novamente teremos um nó interno, o de no. 20, que era esperado pelo nosso prévio conhecimento do triangulo de Pascal (o nó 20 equivale ao termo xyz do triangulo de Pascal)

Com o conhecimento de N, podemos passar a estudar a geometria dos elementos finitos, os principais tipos de elementos e suas características.

## IV 7 A GEOMETRIA E OS TIPOS DE ELEMENTOS

Ao introduzirmos no item anterior os principais conceitos sobre funções de forma, já adiantamos necessariamente alguns dos aspectos que serão vistos neste item; particularmente quando ao aspecto dos elementos a serem estudados no método dos elementos finitos.

Também no cap III, já adiantamos a idéia principal dos elementos finitos:

- Subdividir uma estrutura completa em elementos simples, interconectados por pontos ditos nós. A forma desses elementos, seu número de nós para interconexão, seus graus de liberdade e seu comportamento, podem ser os mais diversos.

A princípio poderíamos dividir os elementos finitos em lineares, planos e espaciais. Esses elementos podem atuar em espaços bi e tri dimensionais, já que os espaços unidimensionais não tem nenhum interesse prático. Dessa forma, por exemplo, um elemento linear tipo viga, pode ser estudado no plano, quando terá seis graus de liberdade, tres por nó, ou no espaço, quando terá doze graus de liberdade, seis por nó. Além disso, cada tipo de elemento depende também dos graus de liberdade necessários para cada nó. Assim, podemos ter um viga no espaço com apenas dois graus de liberdade por nó, denominada treliça, se a análise a ser efetuada mostrar que não existe necessidade de se considerarem as rotações da viga.

A tabela abaixo pode dar uma idéia aproximada dos tipos de elementos mais comuns:

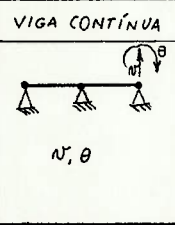
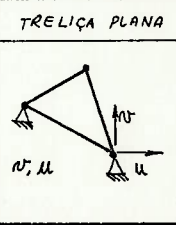
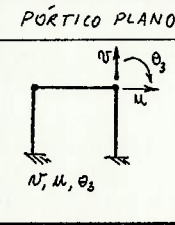
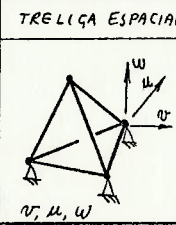
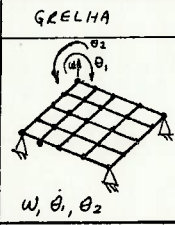
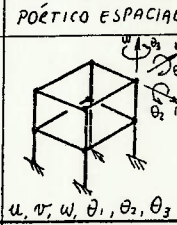
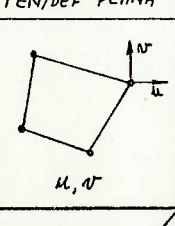
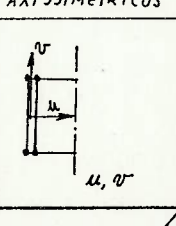
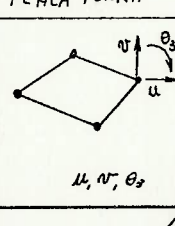

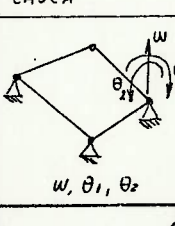
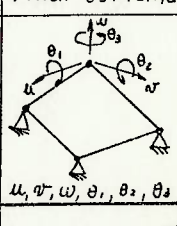
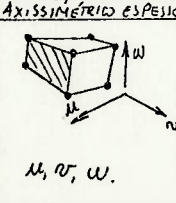
PRINCIPAIS TIPOS DE ESTRUTURAS						
BIDIMENSIONAL			TRIDIMENSIONAL			
	VIGA CONTÍNUA	TRELIÇA PLANA	PÓRTICO PLANO	TRELIÇA ESPACIAL	GRELHA	PÓRTICO ESPACIAL
ELEMENTOS LINEARES	 $u, v, \theta$	 $u, v$	 $u, v, \theta$	 $u, v, w$	 $w, \theta_1, \theta_2$	 $u, v, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3$
ELEMENTOS PLANOS	TEN/DEF PLANA	AXISSIMÉTRICOS	PLACA PLANA	MEMBRANA	CASCA	PLACA ESPACIAL
	 $u, v$	 $u, v$	 $u, v, \theta$	 $u, v, \theta$	 $w, \theta_1, \theta_2$	 $u, v, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3$
ELEMENTOS ESPACIAIS	/			 $u, v, w$	/	

TABELA IV. II



Podemos dividir mais a análise dos elementos finitos, considerando-se que existe ainda a possibilidade de classificação quanto ao aspecto geométrico do elemento; triangular, retangular, quadrilátero de lados retos, quadrilátero de lados curvos, etc.

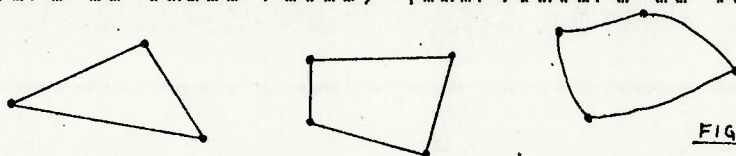


FIG IV- XXXIV

e quanto à sua função de forma  $N$ , que implica diretamente no número de nós de cada elemento; linear, quadrático, cúbico, etc. No caso de uma viga, por exemplo,



viga-linear (2nós)



viga-quadrática (3 nós)

FIG IV- XXXV

É importante expor, ainda que sucintamente o que é um elemento isoparamétrico (este termo pode ser melhor entendido nas ref (4) e (5)).

Basicamente, os elementos paramétricos permitem que utilizemos para representação das estruturas reais, figuras não apenas, lineares, retangulares, cúbicas ou triangulares, mas quadriláteros, planos e espaciais ou triangulos quaisquer, de lados retos ou curvos. Isso é conseguido através de uma parametrização das coordenadas locais dos nós dos elementos com relação às coordenadas globais da estrutura em estudo.

Necessitamos conhecer funções geométricas porque, ao determinarmos a matriz de rigidez de um elemento, precisamos executar uma integração dentro de um domínio definido, seja esse domínio, linear, plano ou espacial,

$$SK = \int_{\lambda}^T B \cdot D \cdot B \cdot d\lambda$$

$\lambda$  - pode ser uma área plana (caso de um quadrilátero)

$\lambda$  - pode ser uma linha (caso de uma viga)

$\lambda$  - pode ser um volume (caso de um tetraedro)  
etc...

Uma função geométrica, como uma função de forma, permite determinar o valor das coordenadas do interior do elemento em função das coordenadas de seus pontos nodais.

Genericamente, um elemento pode ter qualquer função geométrica, por exemplo, funções de Lagrange, Hermitian, séries de Fourier, funções serendípitas, coordenadas de área, etc.. Considere-se ainda que a função geométrica corresponde a escrever as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um elemento em relação as suas coordenadas nodais,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $x_3$ , etc., como visto anteriormente no caso das funções de deslocamento, através de uma parametrização em relação a um novo sistema de eixos de

coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  para quadriláteros espaciais ou L1, L2, L3 e L4 para tetraedros, por exemplo.  
Desse modo, para um quadrilátero no plano, vale:

$$x = R_1(\xi, \eta) \cdot x_1 + R_2(\xi, \eta) \cdot x_2 + \dots + R_n(\xi, \eta) \cdot x_n = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \cdot x_i$$

$$y = R_1(\xi, \eta) \cdot y_1 + R_2(\xi, \eta) \cdot y_2 + \dots + R_n(\xi, \eta) \cdot y_n = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \cdot y_i$$

que podemos escrever matricialmente da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) * \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

ou ainda para elementos triangulares:

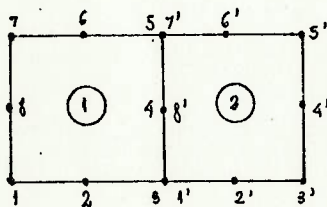
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(L_1, L_2, L_3) * \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Ao escolhermos as funções  $R_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta)$  estamos construindo um elemento "isoparamétrico", pois as funções de forma ou deslocamento e geométrica serão idênticas.

Tanto as funções de forma ou deslocamento como as funções geométricas devem satisfazer alguns requisitos para serem consideradas utilizáveis;

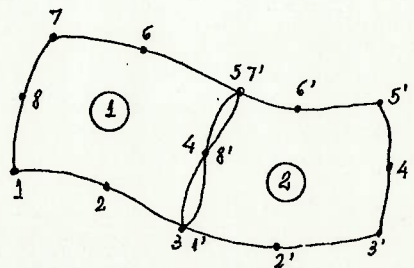
- As funções de deslocamento e geométrica devem permitir o movimento rígido do elemento sem, ao mesmo tempo, causar qualquer deformação interna.
- As funções de deslocamento e geométrica devem ser capazes de representar o estado de deformação constante.
- As funções de deslocamento e geométrica preferencialmente devem satisfazer as condições de compatibilidade ao longo do lado comum entre elementos adjacentes. (Existe a possibilidade de utilização de elementos incompatíveis).

A satisfação dos dois últimos critérios apresentados garantirá a convergência da energia de deformação do sistema e não permitirá vazios entre os elementos contíguos; da mesma forma a parametrização dos elementos deverá ser feita de maneira a atender essas condições,



transformação

FIG IV-XXXVI



É importante lembrar que a equação da matriz de rigidez para atender à mudança de coordenadas executada pela adoção da forma parametrizada da função geométrica deverá sofrer modificações também e a integral anteriormente definida no domínio  $dV=dx \cdot dy \cdot dz$  sofrerá modificações para passar ao domínio  $dV'=d \cdot d \cdot d$ . Essa modificação é feita com o auxílio do Jacobiano e a

integração a ser executada é feita de forma numérica (em geral pelo processo de Gauss); para o que estudaremos não há necessidade de se verificar esses aspectos. Aliás, no caso de uma viga, podemos obter a matriz de rigidez de forma bem simples e toda a análise anterior pretendeu apenas criar uma forma de obtenção de SK genérica, aplicável à outros elementos que se deseje desenvolver.

#### IV. 8. ROTEIRO SIMPLIFICADO PARA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

---

Tentaremos agora juntar todos os aspectos estudados neste capítulo a fim de montar um roteiro para obtenção da matriz de rigidez de um elemento qualquer; evidentemente um roteiro semelhante poderá determinar, quando necessário, as matrizes de massa e amortecimento, bem como os vetores de carga. Basicamente, a montagem das matrizes de massa e amortecimento não serão verificadas.

O roteiro básico, adaptável caso a caso, será:

1. Obtenção das funções de forma ou deslocamento e geométrica ( $N_i$  e  $R_i$ ; para os casos isoparamétricos  $N_i=R_i$ ).
2. Obtenção das relações deslocamento/deformação ( $B = fN_i$ ).
3. Obtenção das relações tensão/deformação ( $D$ )
4. Obtenção da matriz de rigidez - integração numérica (se necessário).

Uma vez obtido o valor de SK para cada elemento é bastante simples obter o valor de SK para a estrutura em estudo. Com essa matriz e o vetor de carga, para os problemas estáticos, pode-se obter por processos numéricos de resolução de sistemas lineares, os valores de deslocamento de cada ponto da estrutura; com os deslocamentos determinam-se as deformações e, com estas, as tensões.

No caso específico de vigas, ao invés de tensões, verificaremos os esforços em cada elemento, principalmente.

#### IV. 9. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO IV

---

Ao término deste capítulo já temos a noção teórica desejável para a execução prática de programas para elementos finitos, particularmente daquele que nos interessa, o caso da viga no espaço.

Começamos por verificar a execução de problemas genéricos de resistencia dos materiais; seguimos verificando quais as necessidades básicas para resolver problemas de resistencia dos materiais, chegando a um roteiro simplificado, do tipo: "esforço - deslocamento - deformação - tensão"

O roteiro encontrado forçou-nos no sentido de descobrir os relacionamentos entre esforço/deslocamento, deslocamento/deformação e deformação/tensão; todos esses aspectos foram verificados.

Concluímos nas verificações acima que o interrelacionamento entre esforço e deslocamento pode ser de tres tipos principais:

$$1. \quad SM \cdot \frac{(d^2 X)}{dt^2} + SB \cdot \frac{(d X)}{dt} + SK \cdot X = F(t)$$

para o caso geral de equilíbrio dinâmico

$$2. \quad SM \cdot \frac{(d^2 X)}{dt^2} + SK \cdot X = 0$$

para o chamado problema de auto-valor, quando nos interessa descobrir as frequencias naturais do sistema

$$3. \quad SK \cdot X = F$$

para os problemas estáticos

Esses tipos diferentes constituem-se em tres classes distintas de resolução de problemas, implicando em níveis diferentes de dificuldades matemáticas, sendo que nos restringimos aos problemas estáticos.

Finalmente, neste capítulo, foram introduzidas as noções de função de deslocamento ou de forma e geométrica, o que implicou num estudo mais apronfundado dos tipos de elementos geralmente utilizados no método dos elementos finitos.

No capítulo seguinte serão aplicados os conhecimentos adquiridos neste capítulo e as ferramentas matemáticas desenvolvidas nos capítulos anteriores para o estudo de estruturas constituídas por vigas espaciais, ditas estruturas reticuladas.

É importante ressaltar que, um elemento de viga pode ser linear, ou quadrático, representado por funções de Hermitian, etc. como visto anteriormente; ou seja, sua função de forma ou polinomial pode variar. No caso adotamos um elemento com funções polinomiais cúbicas para os deslocamentos por flexão e lineares para os deslocamentos por tração e torção. Esse procedimento é tradicional.

Além disso determinamos somente forças no elemento, reações nos vnculos e deslocamentos nos nós; com isso ganhamos tempo e aumentamos o tamanho dos problemas à serem resolvidos. Essas condições são essenciais quando se trabalha com microcomputadores.

A obtenção de tensões, pode ser executada pela análise de cada elemento carregado, de forma relativamente simples, pois temos o valor das cargas em cada nó do elemento. O anexo 1 trás um programa para esse tipo de cálculo.

## BIBLIOGRAFIA

1. "Origens" - Richard E. Leakey  
Editora: Melhoramentos; 4a. Edição 1977
2. "Continuum Mechanics Fundamentals" - S.Valliappan  
Editora: A.A.Balkema (Rotherdam); Edição 1981
3. "Mechanical Metallurgy" - George E. Dieter  
Editora: Mc Graw-Hill/Kogakusha; 2a. Edição
4. "El Método de Los Elementos Finitos" - O.C.Zienkiewicz  
Editora: Editorial Reverté S.A. -Trad.Eugenio O.I., Navarra;  
3a. Edição
5. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" -  
R.D.Cook  
Editora: John Wiley & Sons; 2a. Edição 1981
6. "A Practical Introduction to Finite Element Analysis" -Cheung  
& Yeo  
Editora: Pitman Publishing Limited; Edição 1979
7. "El Metodo de los Elementos Finitos en la Ingenieria de  
Estructuras" - José Maria Frnons  
Editora: Universidad Politecnica de Barcelona/Marcombo;  
Edição 1982
8. "Finite Element Programming" - E.Hinton & D.R.J.Owen  
Editora: Academic Press; Edição 1977
9. "Solution of problems in Structures" - W.T. Marshall  
Editora: Pitman Publishing Limited; 2a. Edição
10. "Structural Analysis and Design" - Ketter, Lee, Prawelur  
Editora: Mc Graw - Hill/Kogakusha; Edição 1978
11. "History of Strength of Materials" - S.P. Timoshenko  
Editora: Dover; Edição 1983
12. "Teoria das Estruturas" - O Gaspar Ricardo  
Editora: Mc Graw- Hill

## CAPITULO V

### O ELEMENTO VIGA ESPACIAL - PROGRAMAS LEVI3D/CAVI3D

"Este livro contém a teoria das tensões elásticas em estruturas explicada de acordo com um novo método baseado em teoremas os quais são novos ou pouco conhecidos..."  
(Ref. 1, Carlo A. P. Castigliano)

## V. 1. HISTÓRICO E DEFINIÇÕES

---

Com o texto indicado, Carlo A. P. Castigliano começou o seu livro "Teoria do Equilíbrio de Sistemas Elásticos e suas Aplicações" publicado em 1879 e que serviu de base para a análise matricial das estruturas e para a teoria da elasticidade. Esses dois ramos de estudo progrediram juntos em direção ao método dos elementos finitos. Posteriormente o método dos elementos finitos generalizou-se matematicamente através da adoção da análise funcional, por exemplo; esse não é nosso caso que é mais simples e obtém a matriz de rigidez utilizando-se dos teoremas de trabalho e energia mínima descritos por Castigliano e já verificados anteriormente no capítulo IV. Na verdade, o elemento a ser estudado ainda representa um meio termo entre a teoria matricial das estruturas, e o método dos elementos finitos.

O estudo atual é relativo ao elemento Viga Espacial, com seis graus de liberdade por nó, sendo três deslocamentos e três rotações; para isso utilizaremos o programa geral denominado LEVI3D/CAVI3D, baseados no programa descrito na referência (3), tendo sido introduzidas as modificações para seguir a linha de subrotinas adotada para este trabalho.

Além disso, o sistema de resolução das equações matriciais envolvidas no problema foi alterado para o tipo "frontal" a fim de possibilitar a utilização de computadores de pequeno porte, mas que possam utilizar discos flexíveis ou rígidos, aumentando a capacidade dos problemas a serem resolvidos.

Deve-se sempre ter em mente que o método dos elementos finitos é um modelo matemático da realidade física; para o caso do elemento de viga o modelo é bem próximo da realidade.

## V. 2. LEITURA E IMPRESSÃO DOS DADOS DE ENTRADA - PROGRAMA "LEVI3D"

---

Os elementos tipo viga espacial são complexos por uma série de razões; as principais delas referem-se ao grande número de graus de liberdade de um elemento e ao seu posicionamento no espaço com relação a um sistema de coordenadas. Esses valores, exigem a leitura de inúmeros dados que se relacionam à coordenadas de pontos e definição de elementos através desses pontos, de maneira a posicionar cada trecho de viga corretamente. Além disso, a rotina "LEVI3D", lê as propriedades de cada material envolvido na análise e relaciona esse material com determinado elemento que se deseja; também nessa rotina definem-se os valores das variáveis de controle.

Pelo exposto pode-se notar a importância da rotina em estudo. Ela inicia-se com um menu de opções. Esse "menu" permite ler dados de um problema já gravado no disco e correções diversas em cada entrada de dados. Segue-se então a leitura, etc. A leitura e impressão do título do problema; a seguir temos a entrada NE (no. de elementos), NP (no. de nós), NV (no. de nós com alguma restrição), NM (no. de materiais) e NC (no. de

casos de carga);etc. Prossegue-se indo até a subrotina "1270" que verifica se nenhum valor de controle está incorreto. Segue-se a leitura dos valores das coordenadas nodais, dos nós formadores de cada elemento, das propriedades dos materiais e dos elementos e das restrições e prescrições dos deslocamentos. Neste instante é conveniente observar que, para determinados casos, dependendo da posição do elemento em estudo, são necessários tres nós para a completa definição desse posicionamento com relação ao sistema geral. Isso pode ser observado através da figura seguinte; no caso, se o angulo da figura for nulo, não é necessário definir-se um valor para LN(IE,3) e essa entrada poderá ser zero.

A subrotina também calcula a máxima frente KF e compara esse valor com o valor máximo adotado para esse parametro MF.

A partir de 1470 a subrotina verifica outra série de possíveis erros (neste instante é que se calcula a frente KF do problema). Todos os dados de entrada são gravados em disco para posterior utilização ou para arquivo.

Uma das facilidades do programa encontra-se nas entradas por "steps" ou seja, caso haja incorreções na entrada de um conjunto de dados, apenas esses deverão ser modificados. Além disso somente a entrada de um NO=0 ou EL=0 paraliza as entradas.

Para computadores pessoais isso é muito importante, pois sem esse recurso, cada erro implicaria na entrada de todos os dados novamente.

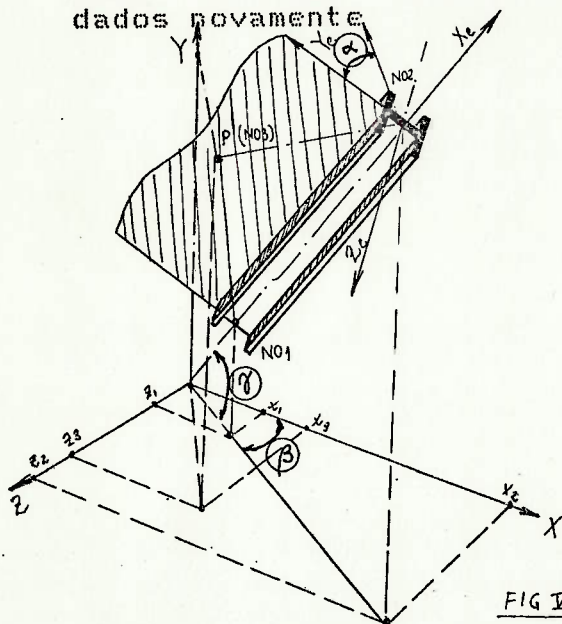


FIG V.I

Nesta figura podemos observar os tres principais angulos de rotação do elemento, que são  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Além disso ficam convenientemente definidas as coordenadas nodais CO(NO,1); CO(NO,2) e CO(NO,3), por exemplo, que demonstram claramente a necessidade de tres pontos para a completa definição do posicionamento da viga.

Maiores detalhes destes aspectos podem ser encontrados principalmente no item 8 desse capítulo; além disso, o anexo 4 trás uma listagem dos erros verificados pelo programa.



### U.3. ROTAÇÃO DE EIXOS

O trecho que se estende de 2400 à 2760 executa as matrizes de rotação de cada um dos elementos da viga transferindo os eixos locais desse elemento para os eixos globais da estrutura. Basicamente a matriz completa de rotação de um elemento é formada pela combinação entre as matrizes de rotação para cada um dos eixos triortogonais que formam um sistema cartesiano qualquer; mais especificamente, a rotina de um sistema de eixos qualquer já foi definida quando estudamos tensão e deformação, e essa rotação era conseguida através da matriz de cossenos diretores

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix}$$

Basicamente, trata-se agora de definir os valores dos cossenos diretores em função de valores conhecidos do elemento. Isso pode ser conseguido, considerando-se que:

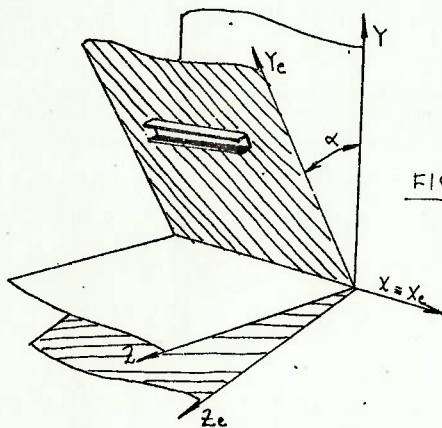


FIG V-II

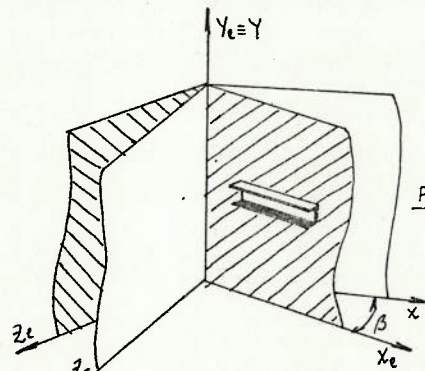


FIG V-IV

Rotação em  $\alpha$ :  $R_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

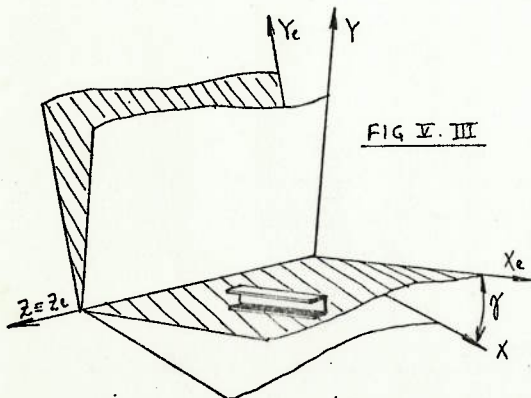


FIG V-III

Rotação em  $\gamma$ :  $R_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen} \gamma & 0 \\ -\text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotação em  $\beta$ :  $R_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$

Dessa forma a matriz completa de rotação para um elemento fora dos tres eixos ortogonais do sistema global seria,

$$R_c = R_\alpha \cdot R_\gamma \cdot R_\beta = \begin{bmatrix} (\cos\beta \cos\gamma) & (\sin\gamma) & (\cos\gamma \sin\beta) \\ (+\sin\beta \sin\alpha - \cos\beta \sin\gamma \cos\alpha) & (\cos\alpha \cos\gamma) & (-\sin\alpha \sin\gamma \cos\beta + \sin\alpha \cos\beta) \\ (\sin\alpha \sin\gamma \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta) & (+\sin\alpha \cos\gamma) & (\sin\alpha \sin\gamma \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) \end{bmatrix}$$

Todos os valores de seno e cosseno dos angulos envolvidos na matriz de rotação podem ser escritos em função de cossenos diretores do elemento e estes, por sua vez, podem ser descritos como funções dos comprimentos desse elemento em cada direção; por exemplo,

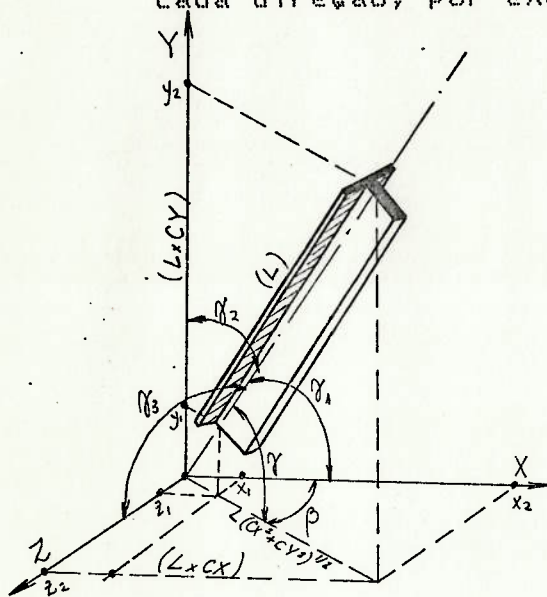


FIG. V-V

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \frac{x(JK) - x(JJ)}{L} = CX \\ \cos \gamma_2 &= \frac{y(JK) - y(JJ)}{L} = CY \\ \cos \gamma_3 &= \frac{z(JK) - z(JJ)}{L} = CZ \end{aligned}$$

Considerando-se ainda que são válidas as seguintes relações geométricas, definidas na figura, teremos

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= CY \\ \cos \gamma &= \sqrt{CX^2 + CZ^2} \\ \sin \beta &= \frac{CZ}{\sqrt{CX^2 + CZ^2}} \\ \cos \beta &= \frac{CX}{\sqrt{CX^2 + CZ^2}} \end{aligned}$$

Substituindo-se  $\sin\alpha$  por SA,  $\cos\alpha$  por CA e  $\sqrt{CX^2 + CZ^2}$  por XZ, teremos finalmente para a matriz de rotação geral,

$$R_c = \begin{bmatrix} CX & CY & CZ \\ -\frac{CX \cdot CY \cdot CA - CZ \cdot SA}{CXZ} & CXZ \cdot CA & \frac{-CY \cdot CZ \cdot CA + CX \cdot SA}{CXZ} \\ \frac{CX \cdot CY \cdot SA - CZ \cdot CA}{CXZ} & CXZ \cdot SA & \frac{CY \cdot CZ \cdot SA + CX \cdot CA}{CXZ} \end{bmatrix}$$

Para definição da rotação é necessária a definição de um novo ponto para o elemento, além daqueles que definem seu início e fim,  $JJ=LN(IE,1)$  e  $JK=LN(IE,2)$ . Este ponto denominado  $JP=LN(IE,3)$  deverá ser selecionado conforme indicado na figura, de maneira a formar um plano na direção  $\alpha$ , em conjunto com os pontos JJ e JK do elemento. Caso não haja rotação do elemento com relação a direção  $\alpha$  basta fazer JP igual a zero.

A obtenção dos valores de SA e CA em função dos angulos  $\alpha$  e  $\beta$  e

as coordenadas do ponto JP pode ser conseguida através de uma análise geométrica e valem,

$$\begin{aligned} SA &= ZG / S\theta \\ CA &= YG / S\theta \end{aligned}$$

onde,

$$YG = -\cos\beta \operatorname{sen}\gamma (x(JP) - x(JJ)) + \cos\gamma (y(JP) - y(JJ)) - \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta (z(JP) - z(JJ))$$

$$ZG = \frac{-\operatorname{sen}\beta (x(JP) - x(JJ)) + \cos\gamma (z(JP) - z(JJ))}{2}$$

$$S\theta = \sqrt{YG^2 + ZG^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ou substituindo } x(JP) - x(JJ) &= XP \\ y(JP) - y(JJ) &= YP \\ z(JP) - z(JJ) &= ZP \end{aligned}$$

e os senos e cossenos de  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$YG = \frac{-CX \cdot CY \cdot XP}{CXZ} + CXZ \cdot YP - \frac{CY \cdot CZ \cdot ZP}{CXZ}$$

$$ZG = \frac{-CZ \cdot XP}{CXZ} + \frac{CX \cdot ZP}{CXZ}$$

Existe um posicionamento especial do membro que facilita bastante o aspecto da matriz de rotação e é muito comum em estruturas; é a posição vertical ou de coluna. Para nosso programa, o elemento será considerado vertical quando  $\cos\gamma$

$< 0.001$  ou  $\sqrt{CX^2 + CZ^2} < 0.001$ . Nessas condições a matriz  $R_\beta$  não existe e a matriz  $R_\gamma$  fica reduzida a,

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de rotação completa é do tipo

$$R_c = R_\alpha \cdot R_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

A rotina "LEVI3D" utiliza os conceitos apresentados acima para definir a matriz de rotação completa de cada elemento. A matriz de rotação deve ser aplicada a todos os graus de liberdade do elemento considerado que, como já visto, são doze. Dessa forma a montagem da matriz de rotação de cada elemento utiliza  $R_c$  quatro vezes, devido a simetria, da seguinte maneira,

$$R = \begin{bmatrix} R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_c \end{bmatrix}$$

#### V. 4. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

---

Grande parte da teoria deste capítulo V, já foi mostrada no capítulo IV. Entretanto naquele capítulo o processo era genérico e, agora, será aplicativo a um elemento particular. Imaginemos inicialmente um segmento de viga no plano, uniforme com comprimento L, área transversal A, momento de inércia I, constituído por material de módulo de elasticidade longitudinal E e submetida a um esforço tipo momento fletor  $M(x)$ . Como já visto, para essa viga pode-se estabelecer uma correspondência entre esforços aplicados e deslocamentos decorrentes; com os deslocamentos determinamos as deformações e, com estas as tensões atuantes na estrutura. A relação entre esforços e deslocamentos denominamos "matriz de rigidez".

A obtenção da matriz de rigidez para uma viga é, de certa forma, trivial, já que a equação para a deformação elástica de uma viga é conhecida em função do esforço aplicado. Essa equação da elástica é a origem da função de forma do elemento.

A título de ilustração e também para verificação do método de obtenção geral das matrizes de rigidez de qualquer elemento, aplicaremos a maneira descrita no capítulo IV para obtenção da matriz de rigidez do elemento de viga indicado inicialmente,

##### a. Obtenção da função de deslocamento

No caso geral  $f = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3$

$$U = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 = A R$$

$$\theta = \frac{dU}{dx} = A_2 + 2A_3 x + 3A_4 x^2$$

$$\text{onde } A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}^T$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

##### b. Substituição das coordenadas do elemento em $U$ e $\theta$ (coordenadas $x=0$ e $x=L$ )

$$U_1 = A_1 + A_2(0) + A_3(0)^2 + A_4(0)^3$$

$$\theta_1 = A_2 + 2A_3(0) + 3A_4(0)^2$$

$$U_2 = A_1 + A_2(L) + A_3(L)^2 + A_4(L)^3$$

$$\theta_2 = A_2 + 2A_3(L) + 3A_4(L)^2$$

ou matricialmente,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L & L \\ 0 & 1 & 2L & 3L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \end{bmatrix} \rightarrow X = C A$$

c. Obtenção das funções de forma ou deslocamento

$$N = R \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N = \left[ \left( \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 \right) \left( 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right) \left( \frac{x}{L} \left( \frac{x-1}{L} \right)^2 \right) \right]$$

ou  $N = (N1 \quad N2 \quad N3 \quad N4)$

Podemos observar que os valores para a função de forma  $N$  podem ser obtidos de maneira mais fácil através da utilização do chamado polinômio de Hermitian de 1a. ordem que resultaria, com uma única aplicação, nos valores obtidos após tres passos, para  $N$ .

d. Relação deslocamento/deformação

Para o caso de uma viga, a deformação corresponde à curvatura da viga:

$$\xi = \left( \frac{-d^2 \sigma}{dx^2} \right) = B \delta, \text{ ou } B = \left( \frac{d^2 N}{dx^2} \right)$$

$$B = \left[ \left( \frac{6}{L^2} \quad \frac{-12x}{L^3} \right) \left( \frac{4}{L} \quad \frac{-6x}{L^2} \right) \left( \frac{-6}{L^2} \quad \frac{+12x}{L^3} \right) \left( \frac{2}{L} \quad \frac{-6x}{L^2} \right) \right]$$

e. Relação tensão/deformação

Para uma viga, a relação tensão/deformação corresponde à relação entre momento e curvatura, no caso a própria equação da elástica, vista anteriormente.

$$\sigma = M = EI \xi = EI \left( \frac{-d^2 \sigma}{dx^2} \right)$$

$$D = EI$$

f. Matriz de Rigidez

Conforme já visto anteriormente, na capítulo IV

$$SK = \int_0^L B^T D B dx$$

$$SK = EI \int_0^L B^T B dx, \text{ para EI constante,}$$

$$= EI \int_0^L \begin{bmatrix} \left( \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right) dx & \left( \frac{16}{L^2} - \frac{48x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \right) dx \\ \left( \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \right) dx & \left( \frac{-24+84x-72x^2}{L^3} \right) dx \\ \left( \frac{-36}{L^4} + \frac{144x}{L^5} - \frac{144x^2}{L^6} \right) dx & \left( \frac{36-144x+144x^2}{L^4} \right) dx \\ \left( \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \right) dx & \left( \frac{8-36x+36x^2}{L^2} \right) dx \\ & \left( \frac{-12+60x-72x^2}{L^3} \right) dx \\ & \left( \frac{4}{L^2} - \frac{24x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \right) dx \end{bmatrix}$$

ou, finalmente,

$$SK = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{3} & \frac{6EI}{2} & -\frac{12EI}{3} & \frac{6EI}{2} \\ L & L & L & L \\ \frac{6EI}{2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{2} & \frac{2EI}{L} \\ L & L & L & L \\ -\frac{12EI}{3} & -\frac{6EI}{2} & \frac{12EI}{3} & -\frac{6EI}{2} \\ L & L & L & L \\ \frac{6EI}{2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{2} & \frac{4EI}{L} \\ L & L & L & L \end{bmatrix}$$

Esse processo, descrito primeiramente no capítulo IV, deverá ser utilizado para a obtenção de matrizes para elementos não triviais. No caso a integração deverá ser realizada através de métodos numéricos e não diretamente como agora.

Observe-se que a matriz de rigidez encontrada leva em consideração somente o efeito de flexão em uma direção da viga. No caso de uma viga espacial, existem ainda os efeitos de forças axiais, forças cortantes e momentos

torçores, além da flexão em outra direção ortogonal à primeira.  
Os efeitos relativos à cargas axiais são facilmente determinados e implicam numa matriz do tipo,

$$SK = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}$$

A matriz encontrada não leva em consideração a possível instabilidade da estrutura.  
Também no caso de momentos torçores, a matriz SK não é complexa e pode ser escrita como,

$$SK = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} \frac{JG}{L} & -\frac{JG}{L} \\ -\frac{JG}{L} & \frac{JG}{L} \end{bmatrix}$$

onde J é o momento de inércia da estrutura na direção do torçor; para nosso sistema de eixos  $J = XI(I)$ .

Os efeitos de deformação por cisalhamento são considerados na matriz de rigidez conforme a referencia (3) e poderão ser melhor entendidas através do ítem 8.2.n deste capítulo.

Finalmente é importante lembrar que os efeitos de flambagem e empenamento por torção ("warping") não são considerados neste trabalho pois, o primeiro caso, implica em problemas iterativos ou de auto-valores e o segundo em matrizes de rigidez de  $14 \times 14$  que representa um aumento considerável na área de armazenagem não sendo interessante para microcomputadores. É importante lembrar que, caso a torção seja significativa deve-se utilizar perfis apropriados para esse tipo de esforço (no caso, perfis "fechados").

## 5. ENTRADA DE CARGAS E RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO - PROGRAMA "CAVI3D"

Os tipos de carregamento podem ser os mais variados para um elemento; no caso estudado temos tres grandes divisões de carregamentos:

- as cargas nodais
- as cargas de peso próprio
- as cargas nos elementos

As cargas nodais são simples e não necessitam de maiores explicações. Porém as cargas nos elementos são de tratamento complexo e merecem ser estudadas com atenção. Para o programa CAVI3D existem as seguintes divisões de tipos de cargas:

- cargas concentradas em Y ou Z
- momentos concentrados em Y ou Z
- cargas concentradas em X
- momento torçor
- carga distribuída em Y ou Z
- carga distribuída triangular
- carga térmica
- outros tipos

O procedimento adotado normalmente para se tratar das cargas nos elementos é transformá-las em cargas nodais equivalentes, ou seja, para determinadas cargas atuantes ao longo do elemento, existe um conjunto de cargas nodais que tem o mesmo efeito sobre os deslocamentos desse elemento. A tabela a seguir mostra as cargas equivalentes para os esforços relacionados anteriormente

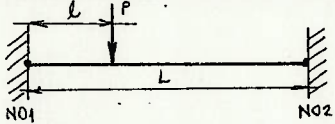
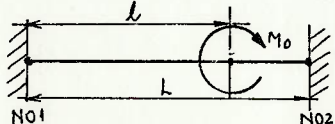
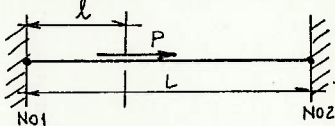
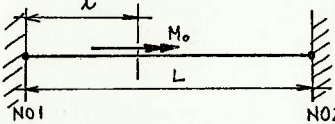
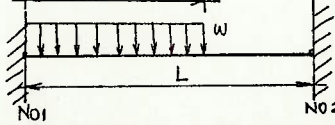
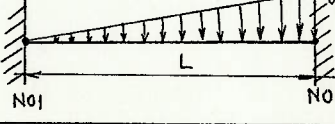
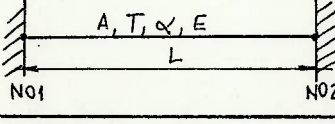
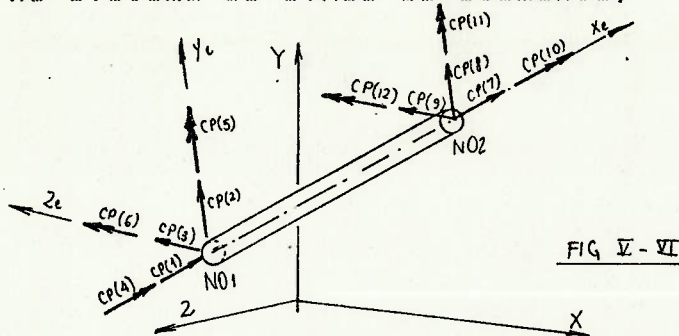
NO' DA ESQUERDA	MODELO	NO' DA DIREITA
$R_y = R_z = -\frac{P(L-l)^2(3L+(L-l))}{L^3}$ $M_y = -M_z = P \cdot l(L-l)^2/L^2$		$R_y = R_z = -\frac{P L^2 (3(L-l) + l)}{L^3}$ $M_y = -M_z = -P(L-l)l^2/L^2$
$R_y = R_z = 6 M_0 l(L-l)/L^3$ $M_y = -M_z = \frac{M_0(L-l)(2l-(L-l))}{L^2}$		$R_y = R_z = -6 M_0 l(L-l)/L^3$ $M_y = -M_z = \frac{M_0 l(2(L-l) - l)}{L^2}$
$R_x = -P(L-l)/L$		$R_x = P l/L$
$M_x = -M_0(L-l)/L$		$M_x = -M_0 l/L$
$R_y = R_z = \frac{-w l(2L^2 - 2l^2L + l^3)}{2L^3}$ $M_y = -M_z = \frac{w l^2(6L^2 - 8lL + 3l^2)}{12L^2}$		$R_y = R_z = -\frac{w l^3(2L-l)}{2L^3}$ $M_y = -M_z = -\frac{w l^3(4L-3l)}{12L^2}$
$R_y = R_z = -3wL/20$ $M_y = -M_z = wL^2/30$		$R_y = R_z = -7wL/20$ $M_y = -M_z = -wL^2/20$
$R_x = E A \alpha T$		$R_x = -E A \alpha T$

TABELA V-I



As cargas de peso próprio são tratadas de maneira semelhante considerando-se que tratam-se de cargas distribuídas ao longo do elemento.

Outro aspecto importante no caso das cargas no elemento é que, contrariamente às cargas nodais que são mais facilmente aplicáveis considerando-se o sistema de coordenadas geral da estrutura, as cargas nos elementos são, normalmente, adotadas no sistema de eixos do elemento,



Assim, existe a necessidade de se transformar as cargas nos elementos do sistema de eixo local, para o sistema de eixos global. Essa transformação pode ser obtida fazendo-se,

$$CE_i = - RT \cdot CP_i$$

onde CE é o vetor global das cargas nos elementos e CP é o vetor local das cargas em um elemento.

As cargas de peso próprio são um caso especial de cargas nos elementos pois podem estar de tal forma posicionadas que nem o sistema de eixos local, nem o global, são indicados para sua descrição; evidentemente as cargas de gravidade estão posicionadas de acordo com o eixo da gravidade.

Para o programa CAVI3D convencionou-se adotar, quando se deseja aproveitar as facilidades de entrada automática de peso próprio, sempre o eixo Y do sistema global na mesma direção do eixo de gravidade, com sentido oposto a esse. Dessa forma fica definido um sistema de eixos para as cargas de gravidade e estas podem ser obtidas automaticamente no programa. Caso não se adote o eixo Y global da forma indicada, as cargas de gravidade deverão ser entradas como cargas equivalentes para cada elemento.

Após a entrada das cargas, o programa CAVI3D resolve a equação de equilíbrio utilizando-se do método "frontal" descrito no capítulo III. As respostas obtidas são os 6 deslocamentos de cada nó, os esforços nos nós formadores de cada elemento e as reações em todos os nós restritos.

Uma melhor análise das saídas pode ser visto no item 8.3.d deste capítulo.

## V. 6. ASPECTOS TEÓRICOS ESPECIAIS

---

Um roteiro teórico aplicável à qualquer tipo de análise estrutural seria, conforme já visto no capítulo IV:

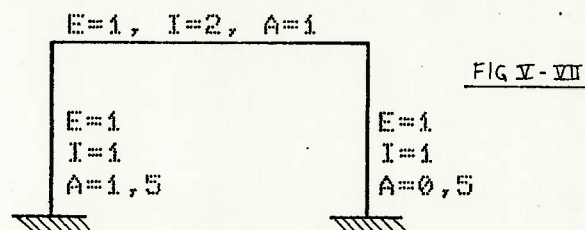
- Obtenção das propriedades dos perfis (A, I, etc.)
- Obtenção da distribuição de cargas na estrutura
- Obtenção das tensões principais atuantes em cada membro
- Obtenção das tensões admissíveis por alguma norma de cálculo
- Comparação dos valores atuantes com os valores admissíveis

Alguns desses aspectos teóricos tem importância especial para a utilização dos programas LEVI3D/CAVI3D.

O principal deles está relacionado ao fato de que, um programa para cálculo estrutural na verdade apenas "verifica" os dados adotados para a estrutura em estudo. A necessidade de se entrar com os valores de A, I, etc., antes de se conhecer completamente a distribuição de cargas faz com que se precise estimar os tipos de perfis.

Para evitar que essa "estimativa" esteja muito longe dos valores corretos, deve-se proceder da seguinte forma:

- Entrar inicialmente com todos os dados do problema, porém utilizando-se apenas E, I e A relativos (ou seja, um perfil duas vezes mais resistente à flexão do que outro, terá  $I=2$  enquanto para o primeiro  $I=1$ ; deve-se fazer o mesmo com as áreas, o módulo de elasticidade, etc.).



- Resolver o problema obtendo os esforços em cada elemento. Lembra-se que os esforços dependem apenas da rigidez relativa de cada elemento (por exemplo, para uma viga bi-empastada carregada em seu centro com uma carga concentrada  $P$  temos,  $R= P/2$  e  $M=PL/8$ , independentes de  $I$  ou  $A$ ). Os únicos esforços que deverão ter suas entradas modificadas são o peso próprio e a carga térmica, pois dependem da área das figuras.
- Os valores resultantes de deslocamento (que dependem de  $I$  ou  $A$ ) deverão ser desconsiderados, pois estarão incorretos.
- Com as cargas em cada elemento, escolha numa tabela de vigas ou através de normas, os perfis mais adequados para resistir aos esforços (estamos evidentemente utilizando o método dos valores admissíveis).
- Entre novamente no programa, com os perfis escolhidos e os valores agora corretos de  $E$ ,  $I$ ,  $A$ , etc, para cada perfil e obtenha os dados corretos finais para deslocamentos e esforços.

Esse tipo de procedimento garante um ciclo menor para se chegar à melhor estrutura. Além disso deve sempre ser lembrado que, valores admissíveis já comportam segurança e devem ser atingidos, ou seja, caso se obtenha uma estrutura para a qual os valores atuantes estejam muito abaixo dos admissíveis, deve-se tentar novamente. Isso evita a construção de estruturas com excesso de peso.

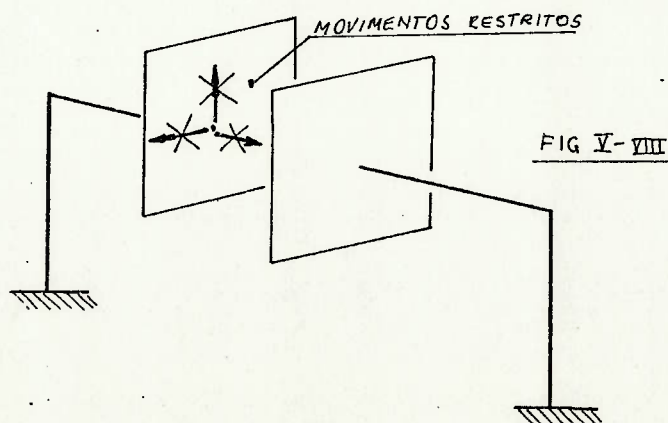
Outro aspecto interessante à ser comentado refere-se ao fato de que apesar dos programas LEVI3D/CAVI3D aplicarem-se tanto à pórticos quanto à treliças essas últimas, na verdade e para efeitos práticos, inexistem.

Na realidade todos os engastamentos das treliças reais, por facilidade de montagem e fabricação, ou são soldados ou recebem mais que um parafuso para fixação; esse tipo de engastamento caracteriza em geral, engastamentos rígidos ou pórticos com transferencia de cargas e momentos entre membros. Evidentemente, como para treliças os membros secundários são pequenos em relação aos membros principais, os efeitos de momento nesses elementos são pequenos e, para aproximações manuais, pode-se calcular determinados pórticos como treliças.

Os programas LEVI3D/CAVI3D empregam uma matriz de rigidez adaptada para treliças, para a qual, I deve ser feito muito pequeno, porém diferente de zero; este procedimento é mais próximo da realidade do que a utilização de matrizes de treliça simplesmente.

Além desse aspecto é importante lembrar que as treliças são aplicadas com segurança apenas para carregamentos nodais (o AISC, por exemplo, restringe a utilização de treliças, particularmente exigindo sua resistencia ao peso próprio e cargas de vento que ocasionam sempre momentos). Nessas circunstancias deve-se evitar carregamentos entre nós.

Estruturas Simétricas também podem ser analisadas de maneira mais simples pelos programas LEVI3D/CAVI3D; basta analisar-se meia estrutura com relação ao plano de simetria. Evidentemente também as cargas deverão ser simétricas. Deve-se, nesse caso, garantir-se a deformação simétrica da estrutura e, para isso, as restrições aplicadas no plano de simetria devem ser tomadas de maneira à garantir-se esse aspecto. Por exemplo,



Os casos de suportes não tradicionais podem ser analisados de diversas formas. Os recalques, por exemplo, podem ser considerados impondo-se, em cada restrição, o valor do deslocamento pretendido ou esperado. Suportes oblíquos podem ser considerados colocando-se um elemento de pórtico (com  $A \rightarrow \infty$  e  $I_x \rightarrow 0$ ,  $I_y \rightarrow 0$ ,  $I_z \rightarrow 0$ ) ou de treliças ( $A \rightarrow \infty$ ,  $I_z \rightarrow 0$ ,  $I_y \rightarrow 0$  e  $I_x \rightarrow 0$ ) na direção do suporte oblíquo. Tome o comprimento do elemento fictício igual à aproximadamente a média dos comprimentos dos elementos envolvidos na análise.

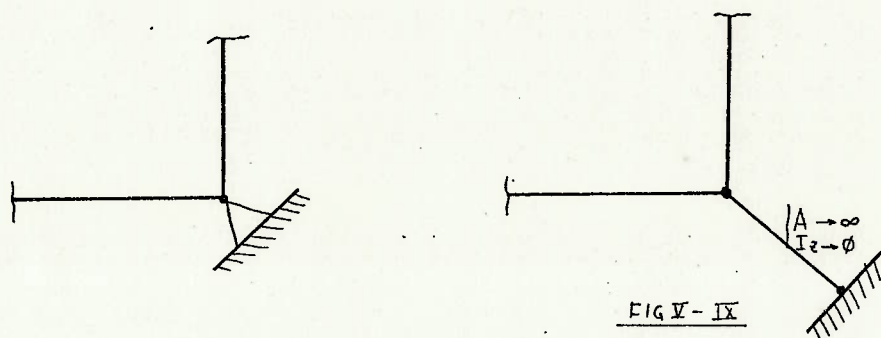


FIG V-IX

Os esforços axiais obtidos para esse elemento fictício, serão iguais (com sinais contrários) às reações existentes no vínculo inclinado.

Outro tipo de vinculação são os suportes elásticos. Nesses casos, a substituição dos vínculos por elementos equivalente também proporciona bons resultados e de maneira prática. Imagine a estrutura abaixo, com os vínculos elásticos indicados,

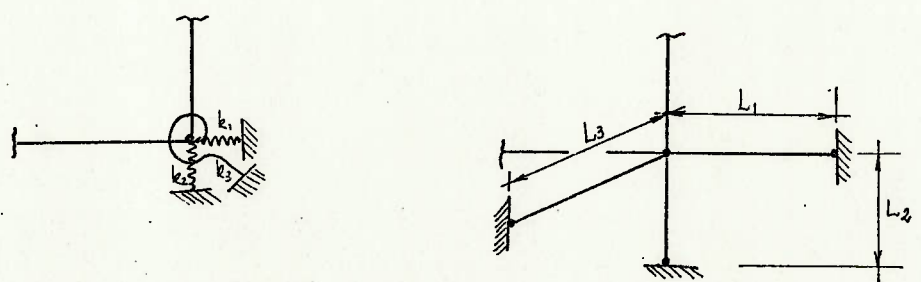


FIG V-X

As molas 1 e 2 podem ser substituídas por elementos com  $I_{x1} = I_{y1} = I_{z1} \rightarrow 0$  (porém  $\neq 0$ ) e  $A_1 = \frac{L_1 \cdot k_1}{E}$  e  $A_2 = \frac{L_2 \cdot k_2}{E}$ , onde

$k_1$  e  $k_2$  são as constantes das molas. A mola de torção 3, poderá ser substituída por um elemento com  $I_{x3} = \frac{L_3 \cdot k_3}{G}$  ( $A_3 = I_{y3} = I_{z3} \rightarrow 0$ ), onde  $k_3$  é a constante torcional da mola,

Convém lembrar que L1, L2 e L3 deverão ser tomados equivalentes aos comprimentos envolvidos na análise da estrutura (aproximadamente como a média dos comprimentos). Finalmente é importante lembrar que para o uso do programa no cálculo de concreto armado, que não é mais uma estrutura homogênea, a única diferença adotada deverá ser a utilização das propriedades corretas dos materiais. Normalmente, mesmo no cálculo tradicional de vigas-colunas de concreto, é comum adotarem-se propriedades equivalentes para evitar a falta de homogeneidade. Por exemplo, a área total da viga ou coluna é tomada como:

$$A_t = A_g + (n-1) A_s$$

onde:  $A_g$  = área original real ( $A_g = A_s + A_c$ , ou seja, a área do concreto mais a área do aço)

$A_s$  = área do aço (ou ferro)

$$n = \frac{E_s}{E_c}, \begin{cases} E_s = \text{módulo de elasticidade do aço e} \\ E_c = \text{módulo de elasticidade do concreto} \end{cases}$$

O caso dos momentos de inércia relativos é mais complexo e depende do tipo de viga construída. No caso de vigas simplesmente reforçadas, pode-se adotar,

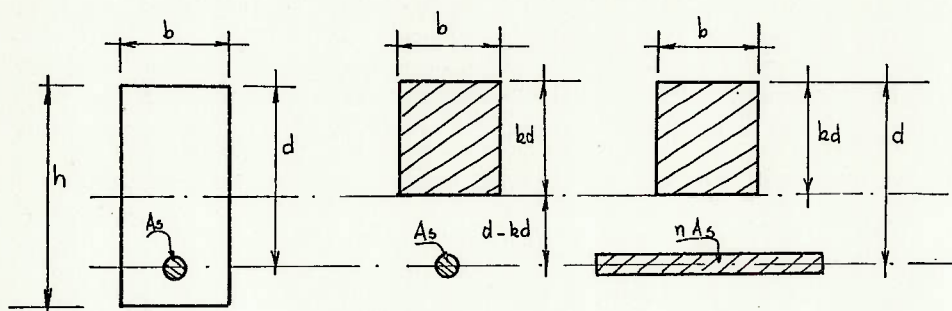


FIG V-XI

Dessa forma,

$$I_z = b \frac{(kd)^3}{3} + n \cdot A_s (d-kd)^2$$

$$\text{onde } k = \sqrt[3]{2 \left( \frac{A_s}{A_g} \right) n + \left( \frac{A_s \cdot n}{A_g} \right)^2} - \frac{A_s}{A_g} n$$

Para outros tipos de viga, sugerimos verificar a referência 8

## V. 7. DADOS TÉCNICOS E LIMITAÇÕES

Em termos de "hardware" necessita-se para rodar o LEVI3D/CAVI3D:

- Computador com memória central tipo APPLE (08 bits) e 48 kb no mínimo
- placa de expansão de 16 Kbytes no mínimo
- Sistema operacional tipo "DOS 3.3"
- 2 Leitoras/gravadores de Discos (flexíveis ou rígidos)
- Impressora com acionamento remoto.

Em termos de "software" é desejável o programa:

- MOVEDOS (Da "Unitron")

As limitações para resolução são definidas, principalmente, pelos tamanhos dos discos utilizados. Caso se utilizem um disco com 128 kb para resolução, pode-se processar problemas com cerca de 30 nós e 50 elementos.

O sistema de dimensionamento poderá ser variável, ou seja, problemas com variáveis números de nós com relação ao número de elementos (se diminuem os nós, pode-se aumentar os elementos e vice-versa). Entretanto, visando preparar o programa para uma futura compilação (transformação do BASIC em linguagem de máquina), optou-se por um dimensionamento fixo que é exigido nesses casos.

Outro fator importante no tamanho do problema que pode ser resolvido e, no tempo gasto para isso, é o valor da FRENTE obtida; o programa LEVI3D calcula automaticamente a FRENTE e indica a quantidade necessária, em bytes, para a memória do disco de Resolução. Cabe ao projetista tentar minimizar essa FRENTE quando isso se fizer necessário. O valor máximo admitido para a FRENTE é de 54.

Uma maneira de se encontrar a FRENTE é a seguinte:

- Tabele todos os elementos e seus dois nós formadores principais (o N01 e o N02); não é preciso utilizar o N03 que é apenas auxiliar.
- Marque os nós que aparecem pela última vez na formação dos elementos
- Marque, de outra forma, os nós que aparecem pela primeira vez na formação dos elementos
- Para cada nó que aparece pela primeira vez na formação dos elementos aumente 6 na FRENTE
- Para cada nó que aparece pela última vez na formação dos elementos, diminua 6 da FRENTE
- O maior valor encontrado é o valor da FRENTE

Por exemplo,  primeira vez;  última vez;  frente máxima

EL	N01	N02	FRENTE
1	①	②	<del>12</del> x 6
2	2	③	12
3	②	④	<del>18</del> x 12
4	4	⑥	18
5	3	6	18
6	⑥	⑤	<del>24</del> x 12
7	④	⑩	<del>18</del> x 12
8	10	⑨	18
9	⑩	⑪	<del>24</del> x 18
10	9	⑫	24
11	12	11	24
12	⑪	⑧	<input type="checkbox"/> 24 x 18
13	⑨	⑦	<del>24</del> x 12
14	⑫	⑬	<del>18</del> x 12
15	⑬	③	<del>12</del> x 0

TABELA V-II

Dessa forma podemos observar que o tamanho da FRENTE depende da numeração correta dos elementos; ou seja, quando conseguimos fazer com que todos os primeiros elementos cheguem num mesmo nó, esse nó pode ser rapidamente eliminado e não aumenta a FRENTE.

Em termos de tempo, o programa "CAVI3D", que realmente resolve a estrutura, demora, aproximadamente, 1,4 minutos por elemento (para FRENTEs de até 54).

Na forma compilada (em linguagem de máquina) pode-se conseguir redução desse tempo para até 0,5 minutos por elemento.

## V.8. ROTEIRO DE PROGRAMAÇÃO

---

### V.8.1 Preliminar e Procedimentos Úteis

- Crie formulários para facilitar a entrada de dados; isso diminui os erros (veja, por exemplo, anexo II).
- Escolha, sempre que possível, um conjunto de eixos globais tal que o eixo Y esteja na mesma direção do eixo da gravidade e em sentido oposto (para "cima"); isso permite a utilização automática de peso próprio.
- Numere os elementos de maneira que, num mesmo nó, cheguem os elementos de numeração mais próxima; isso diminui a FRENTE.
- Deixe a impressora ligada no remoto pois cada fase de entrada de dados é imediatamente impressa. Esse procedimento permite a checagem dos dados passo à passo, e o gasto adicional de papel é pequeno comparado à imprimir tudo no final.

### V.8.2 Roteiro de como entrar no programa LEVI3D

- a. Inserir o disco no Drive A do computador e acioná-lo. Programa LEVI3D rodará com qualquer sistema compatível com o "DOS 3.3".
- b. Ligar o vídeo (40 colunas) e a impressora no remoto
- c. Quando o computador indicar           entre com o programa "MOVE DOS"  
  
        BRUN MOVEDOS (enter)  
  
à seguir entre com        RUN LEVI3D (enter)  
  
e o programa rodará automaticamente.  
O "software" MOVEDOS "move" o DOS 3.3 (cerca de 12 Kbytes) para a placa de 16 Kbytes onde se encontra o INTERGER BASIC que é colocado para cima. Nesse processo 12 kb são liberados para a programação.
- d. O programa indicará então:

\*\* PROGRAMA LEVI3D \*\*



e. A sequencia normal é a seguinte:

NO. DO PROBLEMA = ? -

NOME DO PROBLEMA = ? -

Essa sequencia de entradas imprimirá no papel:

(Nome escolhido)  
(Problema no.= no.)

f. Na tela, temos então o MENU deste módulo:

MENU DO MODULO DE ENTRADA (SIM=1/NAO=2)

---

ENTRAR COM DADOS DE UM NOVO PROBLEMA .....:;  
LER OS DADOS DE UM NOVO PROBLEMA DO DISCO .....:;  
ALTERAR DADOS GERAIS .....:;  
ALTERAR DADOS DE COORDENADAS .....:;  
ALTERAR DADOS DE ELEMENTOS .....:;  
ALTERAR DADOS DE RESTRICOES .....:;  
ALTERAR DADOS DE MATERIAIS .....:;  
VERIFICAR DADOS DE ENTRADA (P/UM NOVO PROBLEMA):;  
CALCULAR MATRIZES DE RIGIDEZ/ROTACAO .....:;  
IMPRIMIR MATRIZES DE ROTACAO .....:;  
GRAVAR DADOS EM DISCO .....:;

g. Segue-se agora a escolha de Drives. Estes poderão ser o 1, ou o 2 dependendo de cada tipo de equipamento.

ESCOLHA DE DRIVES (1 OU 2)

DRIVE PARA LEITURA DE DADOS = -  
DRIVE PARA GRAVAÇÃO DE DADOS = -  
DRIVE DE GRAV. DAS MAT. RIG/ROT = -

h. Se a opção do MENU foi entrar com dados novos (a opção mais geral) teremos então, na tela:

NO. TOTAL DE ELEMENTOS = ? -  
NO. TOTAL DE NOS = ? -  
NO. DE NOS COM ALGUMA RESTRICAO = ? -  
NO. DE MATERIAIS DIFERENTES = ? -  
NO. DE CASOS DE CARGA = ? -

Começou agora a entrada dos dados gerais, o computador imprime no papel

LER/IMPRIMIR DADOS

NO. TOTAL DE ELEMENTOS = NE  
 NO. TOTAL DE NOS = NP  
 NO. DE NOS COM ALGUMA RESTRICAO = NV  
 NO. DE MATERIAIS DIFERENTES = NM  
 NO. DE CASOS DE CARGAS = NC

NE =            NP=            NV =            NM =            NC =

As entradas são auto explicativas porém convém lembrar que o número de nós com alguma restrição refere-se aos vínculos da estrutura. Por exemplo,

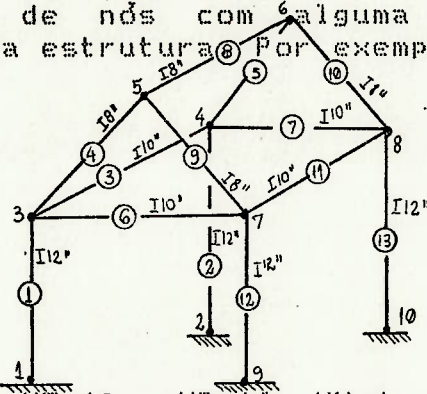


FIG V - XII

Neste caso  $NE=13$ ,  $NP=10$ ,  $NV=4$ ,  $NM=3$ ,  $NC=1$ . Convém lembrar também que, o no. de materiais diferentes não se refere só à aço, alumínio, etc., mas também à  $I8''$ ,  $I10''$ ,  $I12''$ , etc.

No exemplo da página anterior, temos todas as vigas de aço, porém em 3 perfis diferentes. O no. de casos de carga varia de acordo com as análises que se pretendam efetuar. Cada tipo de carregamento é um caso de carga. Por exemplo:

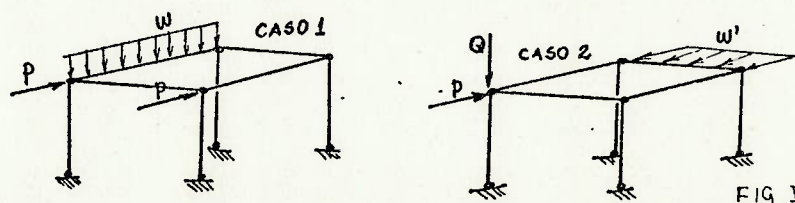


FIG V - XIII

Após cada etapa de entrada de dados, o programa perguntará:

**OS DADOS GERAIS ESTAO CORRETOS? SIM= 1/ NAO= 2**

Verifique as entradas listadas no vídeo ou impressas e entre com 1 ou 2 conforme o caso. Esse procedimento evita ter que entrar com dados novamente. Além disso, caso se entre com valores diferentes de 1 ou 2, o programa indicará o erro e voltará ao local necessário.

- i. Os dados de coordenadas são simples, o sistema geral de eixos da estrutura pode ser qualquer; entretanto somente se poderá utilizar as facilidades de entrada para peso próprio caso se coloque o eixo Y na direção do eixo de gravidade e com sentido contrário à esse eixo. Por exemplo.

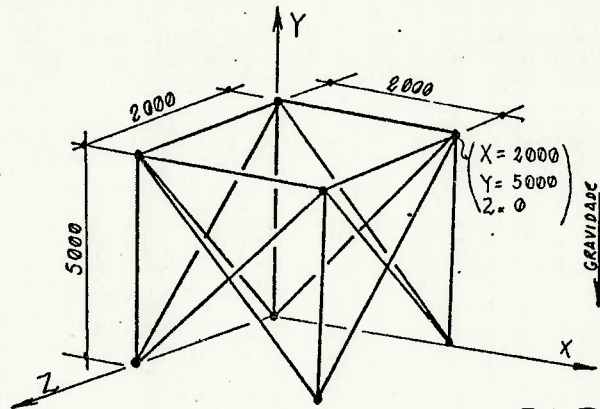


FIG V- XIV

Além disso o sistema de eixos deverá ser dextrógiro ou seja,

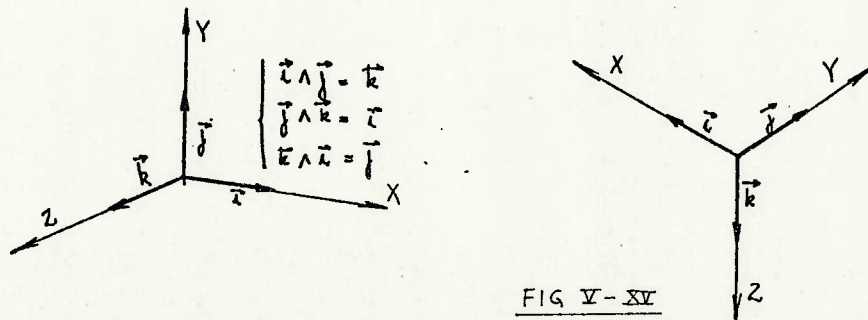
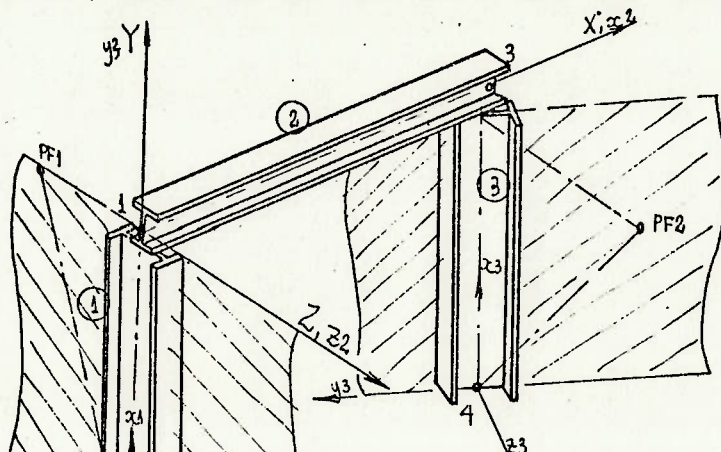


FIG V- XV

Os dados de coordenadas acabam quando se faz NO = 0. Isso permite que, caso se erre as coordenadas de algum nó, essas coordenadas passam ser recolocadas digitando-se novamente o nó incorreto.

j. A definição de elementos no espaço como já visto, é difícil.

Dessa forma existe a necessidade de 3 pontos para a completa definição de um elemento tipo pórtico. Os elementos tipo "pórtico" são aqueles que transferem, além das cargas, momentos e, os tipo "treliça" são aqueles que só transferem cargas axiais ou cortantes. Devemos então definir cada elemento por seus nós formadores, além de um terceiro nó. Por exemplo,



Para definir-se corretamente os elementos teríamos

EL	N01	N02	N03
1	2	2	PF1
2	1	3	0
3	4	3	PF2

onde PF1 e PF2 são dois nós fictícios que servem para definir a correta posição do plano dos elementos. Esses pontos em geral são pontos da própria estrutura.

0 indicado serve apenas para elementos de pórtico; para treliças pode-se entrar sempre com N03 = 0

Novamente, para facilitar as correções, termine entrando EL=0.

No caso de se analisar "treliças" entre com  $I_x=I_y=I_z=1E-15$ . Esse procedimento garante que não hajam transferências de momentos entre os membros da estrutura.

1. Os dados de restrições são simples. Caso o elemento esteja engastado existe facilidade na entrada, pois o programa pergunta:

SE TODOS OS GL FOREM RESTRITOS E OS DESLOCAMENTOS NULOS ENTRE COM 1; CASO CONTRARIO ENTRE COM 2

Portanto se entrarmos com 1 teremos um vínculo perfeito caso entrarmos com 2, deveremos definir cada restrição e cada valor de deslocamento prescrito para o vínculo. Por exemplo,

NO RESTRITO = ? -

CODIGO DE RESTRICAO =? - ( $\emptyset$ =livre; 1= fixo)

VALOR DO DESLOCAMENTO=? - (indicar o valor; 0 para deslocamento desejados nulo)

- m. Os dados de materiais também são simples.  
Entre inicialmente com o no. de material indicado.  
A seguir defina:

E = Mod. de Elasticidade Longitudinal

G = Mod. de Elasticidade Transversal

Peso Especifico =

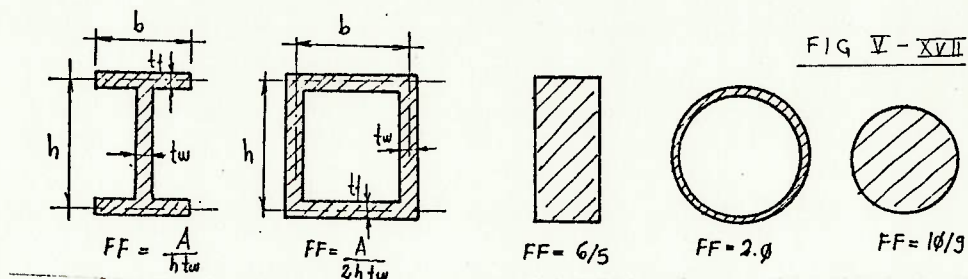
A = Area transversal

IX= Momento Torçor

IY= Momento no Eixo Y do Elemento

IZ= Momento no Eixo Z do Elemento

FFZ e FFY são propriedades relativas à deformação. Por cortante. Para perfis em que o comprimento seja muito maior que a altura, esses parametros são de pouca influencia e podem ser tomados como zero. Porém caso se deseje considerar esses fatores temos:



Como já indicado, para treliças pode-se fazer IX= IY= IZ= 1E - 15 e FFZ= FFY=0

Entra-se então com cada material para cada elemento

EL = 1

MAT= 1

EL = 2

MAT= 1

EL = 3

MAT= 2

etc.

Para terminar faça EL=0

- n. O programa verifica então, caso se tenha optado por isso no Menu principal, os dados de entrada imprimindo mensagem de erro caso encontre dados inconsistentes (veja listagem de erros em anexo). No caso de erros, o programa será paralisado e deve-se proceder à nova entrada.
- o. Após os dados estarem corretos e verificados, o programa gravará, caso se tenha optado por isso, os dados no Drive escolhido, para utilização posterior.
- p. Caso se haja optado por verificação, o programa imprimirá ainda o valor encontrado para a FRENTE e o valor necessário em Kbytes para o Drive de resolução e os Drives de Gravação de Dados e das Matrizes de Rigidez/Rotação. Caso não se haja optado pela verificação dos dados, deve-se entrar com o valor assumido para a FRENTE.
- q. No passo seguinte o programa calculará as matrizes de Rotação e de Rigidez dos elementos. Existe a possibilidade de imprimir a matriz de rotação, em casos de interesse e conforme o MENU.
- r. Caso se haja optado apenas por correções o programa irá apenas no ponto de interesse.

#### V.8.3 Roteiro para entrar no Programa CAVI3D

- a. Para resolver o problema deve-se agora inicializar o programa "CAVI3D"

#### RUN CAVI3D

O início é em tudo semelhante ao LEVI3D, com entrada de código, Menu, etc.

- b. No caso mais geral, o programa irá então, inicialmente, para os carregamentos nodais:

N0 = ? -

CN(1) = ? - (FX)

CN(2) = ? - (FY)

CN(3) = ? - (FZ) sempre nos eixos gerais da estrutura

CN(4) = ? - (MX)

CN(5) = ? - (MY)

CN(6) = ? - (MZ)

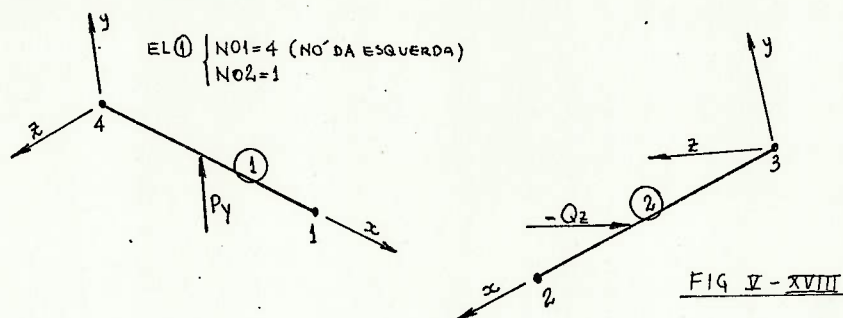
Entre com N0 = 0 para terminar

c. As cargas nos elementos são mais complicadas e podem ser dos seguintes tipos:

- Peso próprio
- CCYZ - carga concentrada em Y ou Z
- MYZ - Momento concentrado em Y ou Z
- CCX - carga concentrada em X
- MX - momento torçor concentrado
- CDYZ - carga distribuída em Y ou Z
- CDT - carga distribuída triangular
- CT - carga térmica em alguns elemento
- Outras - outros tipos

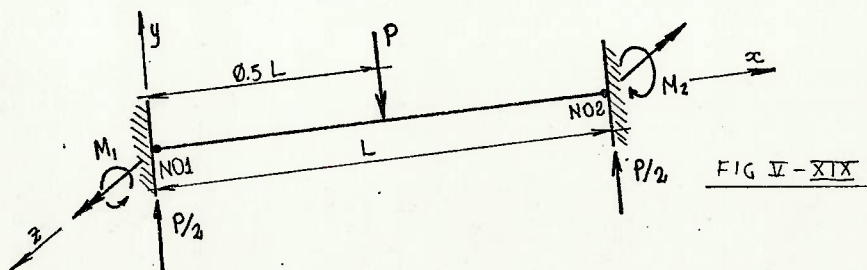
Os elementos aceitam mais do que um mesmo tipo de carga, somando os efeitos.

É importante observar que essas cargas deverão estar no sistema de eixos do elemento e, quando nos referimos ao nó da esquerda significa o nó. nº que forma o elemento (o N01). Por exemplo,



Além disso a distancia é em porcentagem decimal (50%=0.5)

Para o caso de "outras cargas" (por exemplo cargas parabólicas ou senoidais) deve-se entrar com o valor das reações nos nós. Por exemplo:



Deve-se entrar então com,

```

CP(elemento,1 )= FX NO NO 1 = 0
CP(elemento,2 )= FY NO NO 1 = p/2
CP(elemento,3 )= FZ NO NO 1 = 0
CP(elemento,4 )= MX NO NO 1 = 0
CP(elemento,5 )= MY NO NO 1 = 0
CP(elemento,6 )= MZ NO NO 1 = +M1
CP(elemento,7 )= FX NO NO 2 = 0
CP(elemento,8 )= FY NO NO 2 = p/2
CP(elemento,9 )= FZ NO NO 2 = 0
CP(elemento,10)= MX NO NO 2 = 0
CP(elemento,11)= MY NO NO 2 = 0
CP(elemento,12)= MZ NO NO 2 = -M2
    
```

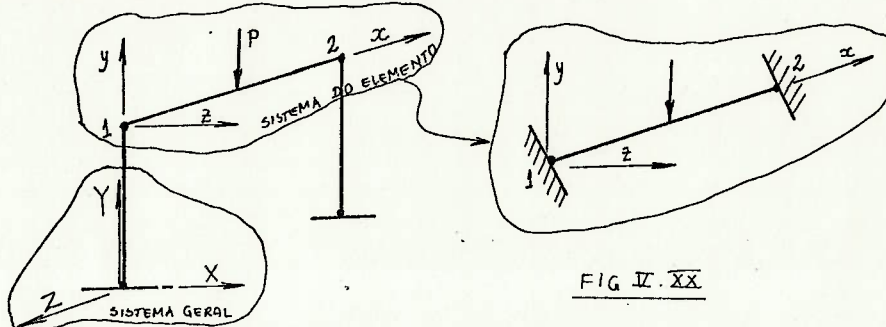


FIG. V. XX

d. Análise das Saídas

d.1 As saídas são os deslocamentos de cada nó (3 deslocamentos em x, y e z e 3 rotações em x, y, z). As rotações são sempre em radianos (para converter para graus multiplique por 180 e divida por  $\pi$ ). Deve-se observar que as unidades de entrada podem ser quaisquer porém compatíveis (sugerimos medidas em cm e esforços em kg ou t).

d.2 Os esforços nos elementos devem ser analisados da seguinte forma: por exemplo,

EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
2	1	5.0	6.0	0
		1.0	0	500.0
	3	-5.0	-6.0	0
		-1.0	0	-100.0

os esforços, neste caso, são sempre no eixo do elemento

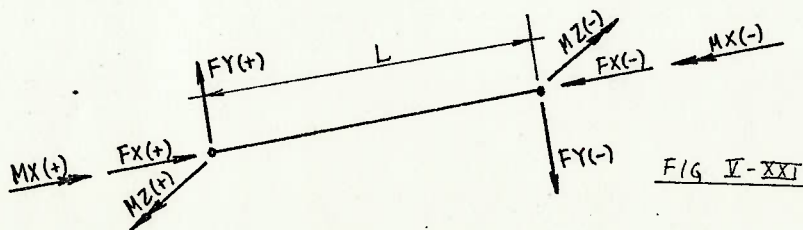


FIG. V-XXI



Observe que para o momento em Z temos as forças FY produzindo um momento  $FY \times L = -600 (6 \times 100)$ . Esse valor mais o valor de MZ em 1, produz MZ = -100 em 3.

Em resumo, o elemento deverá estar equilibrado no espaço. A análise de cada elemento pode ser feita então de modo simples e tradicional.

Quase que, para todos os casos, os valores máximos de momentos e cortantes ocorrem nos nós. Tome então os valores máximos de cada nó e obtenha as tensões máximas atuantes (em caso de dúvida, trace os gráficos de cortante e momento para o elemento).

- d.3 As reações nos apoios já estão no eixo da estrutura facilitando a análise.
- e. O programa permite ainda o cálculo de pesos por elemento e para toda a estrutura.
- f. Finalmente os valores de deslocamentos, forças nos elementos e reações, podem ser gravados. Porém cada caso de carga deverá ser alocado em um disco diferente.
- g. É importante lembrar que o MENU deste módulo permite que as cargas sejam colocadas por teclado ou lidas de um disco onde tenham sido anteriormente gravadas.

## V.9. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO V

---

Neste capítulo vimos finalmente a aplicação dos capítulos anteriores. Criamos um programa em APPLESOFT BASIC que resolve estruturas no espaço para até 30 nós e 50 elementos. É importante lembrar que existe em comercialização no mercado programas nesta linha porém apenas para o plano e com um máximo de 100 elementos. Nosso programa, se adaptado para o plano, poderia ultrapassar os 150 elementos. Evidentemente o tempo de resolução envolvido ainda é excessivo (cerca de 1,4 minutos por elemento ou, para 50 elementos, cerca de 70 minutos somente no módulo de resolução); porém o programa foi criado de maneira à ser facilmente compilado ou seja, escrito em linguagem de máquina. Nessa forma acreditamos que o tempo de resolução caia à 1/3 ou 1/4 do tempo anterior. Para fazer estas previsões baseamo-nos no mesmo programa, LEVI3D/CAVI3D, que foi escrito para um computador da linha PC e que, na forma compilada, caiu de 1 minuto por elemento para 14 segundos em FRENTE de até 90. Não criamos ainda os programas LEVI3D/CAVI3D na forma compilada para o APPLE, porém já estamos providenciando isso com o auxílio do compilador LISA. Em termos de evolução, é importante lembrar as limitações descritas neste capítulo, particularmente quanto à matriz de rigidez não ser apropriada para estudo do "empenamento" e de

"flambagem"; estes fatores poderiam ser considerados, o primeiro até facilmente porém com aumento da matriz de rigidez do elemento de 144 para 196 valores.

Além disso, o principal limitante para as dimensões do problema a ser resolvido é a CPU do computador já que, alguns dados devem permanecer memória sob pena de tornar o programa extremamente lento caso se optasse por acesso contínuo ao disco. Deve-se sempre lembrar que, mesmo a compilação, não acelera a leitura em disco.

Existem programas no mercado que permitem a utilização de placas de memórias adicionais como expansão de RAM ou pseudo-disco.

Citamos principalmente os programas RAMEXPANDE e PSEUDO-DISCO da UNITRON que são fornecidos em conjunto com o MOVEDOS.

Entretanto a utilização destes, ao contrário do MOVEDOS, necessita de alterações na lógica do programa e limitaria sua utilização; dessa forma optamos por não utilizá-los.

Uma forma de evolução seria a aplicação desse softwares. É conveniente esclarecer que discos podem ser formatados já com o MOVEDOS incluso e, a única necessidade neste caso, é uma placa de expansão de 16 kb instalada no computador não sendo necessárias quaisquer alterações na lógica do LEVI3D/CAVI3D.

Finalmente, esclarecemos que o LEVI3D/CAVI3D foram adaptados para o PC e, nessa forma, podem resolver até 200 elementos e 100 nós no espaço ou 400 elementos e 200 nós no plano.

## BIBLIOGRAFIA

1. "Theory of Elastic Systems Equilibrium and its Applications" - Carlo A.P. Castigliano  
Editora: Dover
2. "A Practical Introduction to Finite Element Analysis" - Cheung e Yeo  
Editora: Pitman Publishing Limited; Edição 1979
3. "Matrix Analysis of Framed Structures" - W.Weaver Jr. e J.M. Gere  
Editora: D.Van Nostrand Company; 2a. Edição
4. "Elementary Structural Analysis" - Norris, Wilbur e Utku  
Editora: Mc Graw-Hill; 3a. Edição
5. "Introduction to Computer Science" - T. Bartee  
Editora: Mc Graw-Hill; Edição 1975
6. "Manual do Basic" - H. Peckham  
Editora: Mc Graw-Hill do Brasil Ltda; Edição 1984
7. "Steel Framed Structures - Stability and Strength" - R. Narayanan  
Editora: Elsevier Applied Science Publishers Ltd; Edição 1985
8. "Structural Analysis and Design" - Ketter, Lee, Prawel  
Editora: Mc Graw-Hill; Edição 1979
9. "Apple II" - Guia do Usuário - Apple II Plus e Apple IIe" - Poole, Mc Niff e Code  
Editora: Mc Graw-Hill do Brasil Ltda; 2a. Edição
10. "Apple II - Guia do Operador - Apple II Plus e Apple IIe" - Gifford  
Editora: Mc Graw-Hill do Brasil Ltda; 2a. Edição

## CAPITULO VI - "CONCLUSÃO GERAL"

"...Dizem a curiosidade mata o gato; digo a curiosidade faz o cientista!

E com estas palavras o professor desejou boa noite ao Sr. Tompkins".

(O Incrível Mundo da Física Moderna - George Gamow).

Ao longo de todo este trabalho procuramos estudar o método dos elementos finitos, particularmente o elemento dito pórtico espacial. Procuramos também criar um programa para microcomputadores de 8 bits a fim de desfazer o grande abismo existente entre a teoria e a aplicação prática. Os resultados obtidos foram satisfatórios.

Como objetivo final, executamos realmente o programa pretendido e o aplicamos a casos reais, como fica demonstrado através do anexo 5, "Exemplos de Aplicação".

Cada capítulo apresentado é, isoladamente, completo em sua estrutura e contém uma conclusão parcial que complementa esta; dessa forma é recomendada a leitura desses itens para um melhor acompanhamento dos objetivos e conclusão do trabalho.

Verificamos aspectos computacionais e matemáticos nos capítulos I, II e III. O capítulo III especialmente é muito importante e trata de uma série de métodos de resolução de sistemas de equações lineares. No capítulo IV abordamos a teoria dos elementos finitos de maneira bastante geral ou seja, não só para o elemento viga espacial ou problemas estáticos, mas também para tipos gerais de elementos e casos dinâmicos. Finalmente o capítulo V é relativo a execução prática dos programas que denominamos LEVI3D e CAVI3D.

Em relação aos programas citados, podemos considerá-los relativamente completos dentro da finalidade à qual se destinam. Eles resolvem vigas no espaço considerando os efeitos de flexão, torção, axial e cisalhamento para a montagem da matriz de rigidez. Como carregamento admitem-se cargas nodais e nos elementos (cargas concentradas, distribuídas inclusive triangular e de temperatura); além disso admite-se deslocamentos impostos nos nós.

As maiores limitações dos programas são nas rotinas de pré e pós-processamento. Não existe rotina para desenho, entretanto procuramos criar sistemas para edição que podem ser usados para alterações nos dados de entrada sendo facilmente utilizadas através do MENU DE ENTRADA.

Outro cuidado adotado foi o de criar vários níveis de checagem para cada conjunto de dados. Assim, pode-se entrar várias vezes com o valor de um parâmetro em casos de erro de digitação; além disso, no final de cada conjunto de dados, pode-se retornar ao início do trecho para correções.

A maior limitação, evidentemente, relaciona-se ao tamanho do problema que pode ser resolvido. Para tentar maximizar esse aspecto utilizamos o método de resolução FRONTAL para o sistema de equações. Esse fato elevou bastante o tempo de resolução dos problemas devido ao intenso acesso a disco.

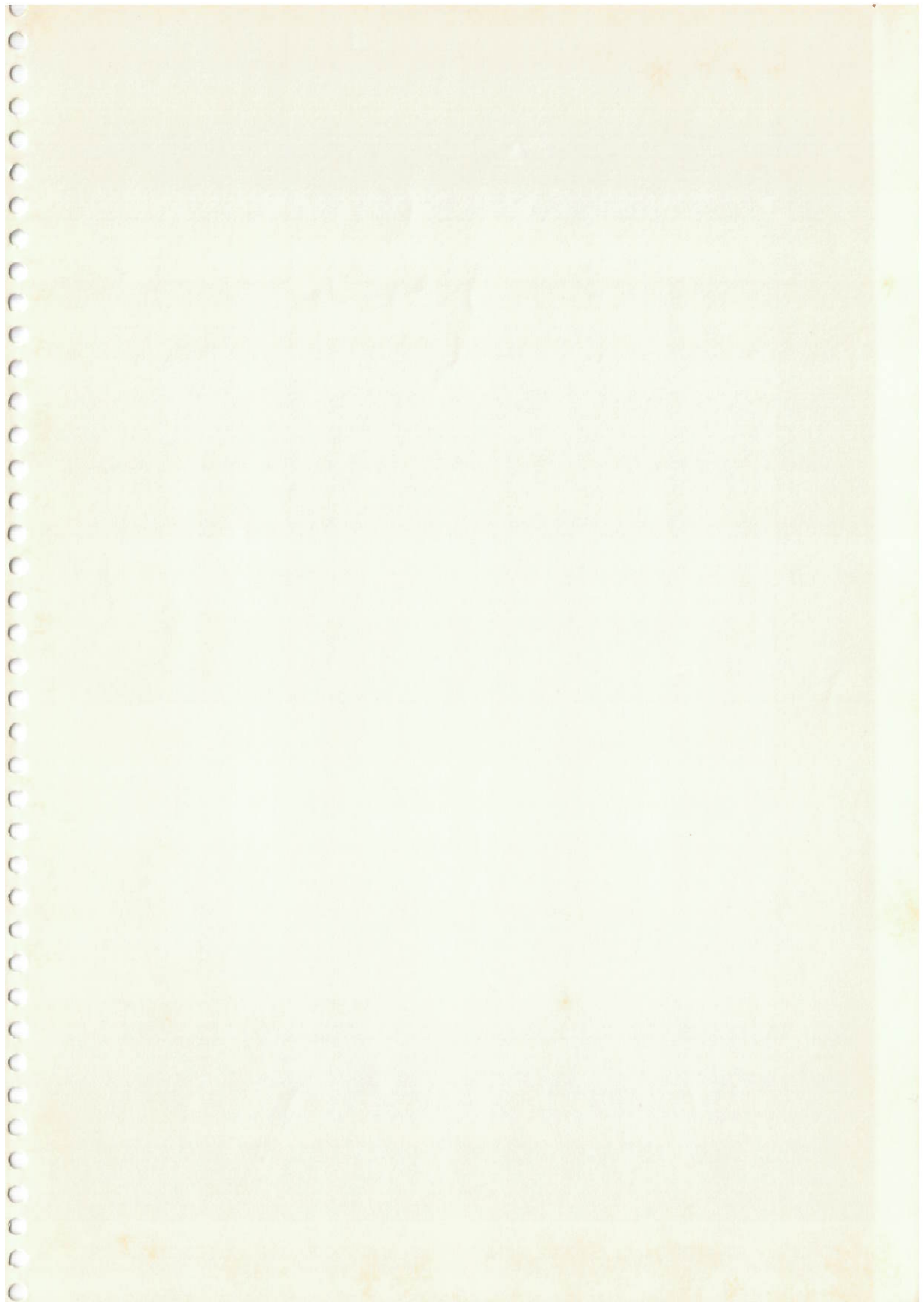
As rotinas de pós-processamento podem ser criadas de maneira relativamente simples. No anexo 1, inclusive, apresentamos um exemplo dessas rotinas para cálculo das tensões resultantes nos nós de determinadas vigas. Outras rotinas para desenhar a estrutura deformada ou linhas de isotensões são complexas, porém poderão ser criadas.

Para desenvolvimentos futuros ficam as sugestões dos aperfeiçoamento das rotinas de pré e pós-processamento e a análise de outros modos de resolução tipos "out-of-core", na tentativa de diminuir o tempo de resolução. É conveniente lembrar nesta conclusão que estamos compilando os programas LEVI3D/CAVI3D, o que deverá ajudar nesse sentido.

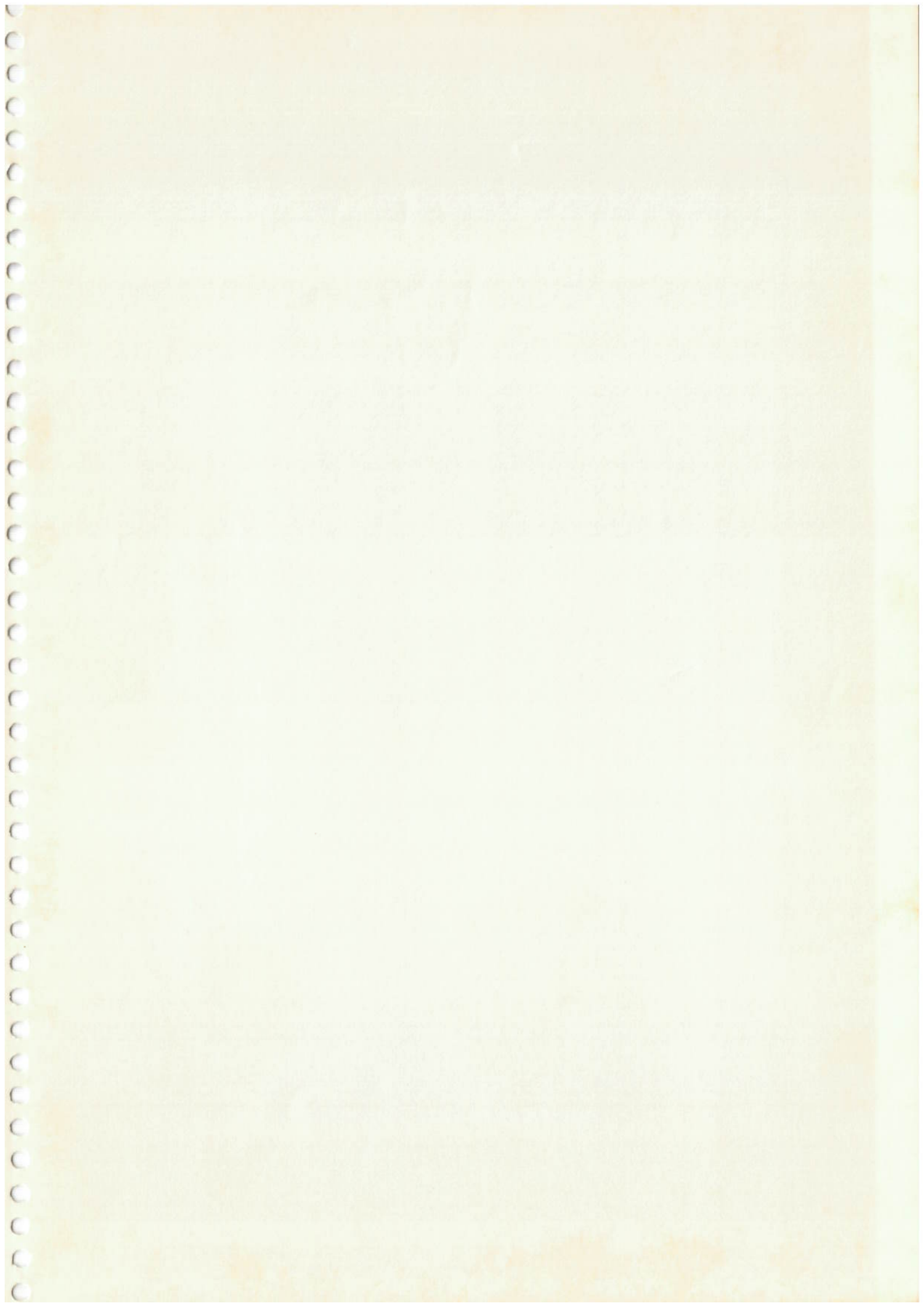
Finalmente, sem nenhuma pretensão, tentei saciar minha curiosidade ao escrever este trabalho. Dessa forma, certos trechos podem as vezes parecer exageradamente minuciosos, entretanto aprendi com eles; o objetivo final que espero alcançar é o de que outras pessoas aproveitem este trabalho da mesma forma que eu o fiz.

ANEXO 1 -

PROGRAMA PARA CÁLCULO DE TENSÕES







ANEXO 2 - PROGRAMAS P/ CÁLCULO DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES  
LINEARES

```

5010 REM RESOLUCAO POR GAUSS
5020 M = N - 1
5030 FOR I = 1 TO M
5040 II = 1 + I
5050 FOR K = II TO N
5060 TM = SK(K,I) / SK(I,I)
5070 FOR J = II TO N
5080 SK(K,J) = SK(K,J) - TM * SK(
I,J)
5090 NEXT J
5100 SK(K,I) = 0
5110 EL(K) = EL(K) - TM * EL(I)
5120 NEXT K
5130 NEXT I
5133 REM TRECHO QUE IMPRIME A M
ATRIZ REDUZIDA
5135 GOSUB 100
5140 REM FASE DE SUBSTITUICAO A
TRAS
5150 FOR I = 1 TO N
5160 II = N - I + 1
5170 PI = SK(II,II)
5180 SK(II,II) = 0
5190 FOR J = II TO N
5200 EL(II) = EL(II) - SK(II,J) *
AS(J)
5210 NEXT J
5220 AS(II) = EL(II) / PI
5230 NEXT I
5235 RETURN
5240 END

```

```

5010  REM  RESOLUCAO POR GAUSS MO
      DIFICADO
5020  M = N - 1
5030  FOR I = 1 TO M
5031  KK = I
5032  A = ABS (SK(I,I))
5033  IF A < = EP THEN 5040
5034  KK = KK + 1
5035  EL(I) = EL(I) + EL(KK)
5036  FOR JJ = 1 TO N
5037  SK(I,JJ) = SK(I,JJ) + SK(KK,
      JJ)
5038  NEXT JJ
5039  GOTO 5032
5040  II = 1 + I
5050  FOR K = II TO N
5060  TM = SK(K,I) / SK(I,I)
5070  FOR K = II TO N
5080  SK(K,J) = SK(K,J) - TM * SK(
      I,J)
5090  NEXT J
5100  SK(K,I) = 0
5110  EL(K) = EL(K) - TM * EL(I)
5120  NEXT K
5130  NEXT I
5140  REM  FASE DE SUBSTITUICAO A
      TRAS
5150  FOR I = 1 TO N
5160  II = N - I + 1
5170  PI = SK(II,II)
5180  SK(II,II) = 0
5190  FOR J = II TO N
5200  EL(II) = EL(II) - SK(II,J) *
      AS(J)
5210  NEXT J
5220  AS(II) = EL(II) / PI
5230  NEXT I
5235  RETURN
5240  END

```

```

5610 REM METODO DE CHOLESKY
5620 FOR I = 1 TO N
5630 X = 0
5640 FOR J = 1 TO SB - 1
5650 X = X + SK(I,J) * SK(I,J)
5660 NEXT J
5670 SK(I,SB) = SQR (SK(I,SB) -
X)
5680 FOR K = 1 TO SB - 1
5690 X = 0
5700 IF I + K > N THEN 5790
5710 IF K = SB - 1 THEN 5760
5720 L = SB - 1 - K
5730 X = X + SK(I + K,L) * SK(I,L
+ K)
5740 L = L - 1
5750 IF L < 0 THEN 5730
5760 C = I + K
5770 B = SB - K
5780 SK(C,B) = (SK(C,B) - X) / SK
(I,SB)
5790 NEXT K
5800 NEXT I
5810 REM FASE DE SUBSTITUICAO A
DIANTE
5820 EL(1) = EL(1) / SK(1,SB)
5830 FOR I = 2 TO N
5840 X = 0
5850 K = 1
5860 IF I < = SB THEN K = SB -
I + 1
5870 FOR J = K TO SB - 1
5880 X = X + SK(I,J) * EL(I + J -
SB)
5890 NEXT J
5900 EL(I) = (EL(I) - X) / SK(I,S
B)
5910 NEXT I
5920 REM FASE DE SUBSTITUICAO A
TRAS
5930 EL(N) = EL(N) / SK(N,SB)
5940 I = N - 1
5950 X = 0
5960 L = I + SB - 1
5970 IF I > N - SB + 1 THEN L =
N
5980 M = I + 1
5990 FOR J = M TO L
6000 X = X + SK(J,SB + I - J) * E
L(J)
6002 NEXT J
6004 EL(I) = (EL(I) - X) / SK(I,S
B)
6006 I = I - 1
6008 IF I < 0 THEN 5950
6010 RETURN
6015 END

```

```

7015 IF SK(1,1) < = 0 THEN 7260
7020 FOR J = 2 TO N
7030 J1 = J - 1
7040 J2 = J - SB + 1
7050 IF J2 < 1 THEN J2 = 1
7060 IF J1 = 1 THEN 7160
7070 FOR II = 2 TO J1
7080 I1 = II - 1
7090 IF I1 < J2 THEN 7150
7100 SUM = SK(II,J - II + 1)
7110 FOR K = J2 TO I1
7120 SUM = SUM - SK(K,II - K + 1)
      * SK(K,J - K + 1)
7130 NEXT K
7140 SK(II,J - II + 1) = SUM
7150 NEXT II
7160 SUM = SK(J,1)
7170 FOR K = J2 TO J1
7180 TM = SK(K,J - K + 1) / SK(K,
      1)
7190 SUM = SUM - TM * SK(K,J - K +
      1)
7200 SK(K,J - K + 1) = TM
7210 NEXT K
7220 IF SUM < = 0 THEN 7260
7230 SK(J,1) = SUM
7240 NEXT J
7250 GOTO 7300
7260 PR# 1: PRINT : PRINT "*****
      *** MATRIZ NAO DEFINIDA POSI
      TIVA *****": PRINT
7270 GOTO 7590
7300 REM FASE DE SUBSTITUICAO A
      TRAS
7305 FOR I = 1 TO N
7310 J = I - SB + 1
7320 IF I < = SB THEN J = 1
7330 SUM = EL(I)
7340 K1 = I - 1
7350 IF J > K1 THEN 7390
7360 FOR K = J TO K1
7370 SUM = SUM - SK(K,I - K + 1) *
      AS(K)
7380 NEXT K
7390 AS(I) = SUM
7400 NEXT I
7410 FOR I = 1 TO N
7420 AS(I) = AS(I) / SK(I,1)
7430 NEXT I
7440 FOR I = 1 TO N
7450 I1 = N - I + 1
7460 J1 = I1 + SB - 1
7470 IF J1 > N THEN J1 = N
7480 SUM = AS(I1)
7490 K2 = I1 + 1
7500 IF K2 > J1 THEN 7540
7510 FOR K = K2 TO J1
7520 SUM = SUM - SK(I1,K - I1 + 1
      ) * AS(K)
7530 NEXT K
7540 AS(I1) = SUM
7550 NEXT I
7560 RETURN
7570 END

```

```

6020 FOR I = 1 TO NN
6030 KN = DI(I)
6040 KL = KN + 1
6050 KU = DI(I + 1) - 1
6060 KH = KU - KL
6070 IF KH < 0 THEN 6340
6080 IF KH = 0 THEN 6250
6090 K = I - KH
6100 IC = 0
6110 KT = KU
6120 FOR J = 1 TO KH
6130 IC = IC + 1
6140 KT = KT - 1
6150 KI = DI(K)
6160 ND = DI(K + 1) - KI - 1
6170 IF ND < = 0 THEN 6240
6180 KK = IC
6190 IF ND < IC THEN KK = ND
6200 C = 0
6210 FOR L = 1 TO KK
6220 C = C + SK(KI + L) * SK(KT +
L)
6225 NEXT L
6230 SK(KT) = SK(KT) - C
6240 K = K + 1
6245 NEXT J
6250 K = I
6260 B = 0
6270 FOR KK = KL TO KU
6280 K = K - 1
6290 KI = DI(K)
6300 C = SK(KK) / SK(KI)
6310 B = B + C * SK(KK)
6320 SK(KK) = C
6325 NEXT KK
6330 SK(KN) = SK(KN) - B
6340 IF SK(KN) > 0 THEN 6350
6342 PRINT : PRINT : PRINT "MATR
IZ NAO DEFINIDA POSITIVA": PRINT
6345 GOTO 6360
6350 NEXT I
6360 RETURN
6370 REM FASE DE REDUCAO DO VET
OR EL(I)
6400 FOR I = 1 TO NN
6410 KL = DI(I) + 1
6420 KU = DI(I + 1) - 1
6430 IF KU < KL THEN 6510
6440 K = I
6450 C = 0
6460 FOR KK = KL TO KU
6470 K = K - 1
6480 C = C + SK(KK) * EL(K)
6490 NEXT KK
6500 EL(I) = EL(I) - C
6510 NEXT I
6515 REM FASE DE SUBSTITUICAO
6520 FOR I = 1 TO NN
6530 K = DI(I)
6540 EL(I) = EL(I) / SK(K)
6545 NEXT I
6550 IF NN = 1 THEN 6670
6560 I = NN
6570 FOR L = 2 TO NN
6580 KL = DI(I) + 1
6590 KU = DI(I + 1) - 1
6600 IF KU < KL THEN 6660
6610 K = I
6620 FOR KK = KL TO KU
6630 K = K - 1
6640 EL(K) = EL(K) - SK(KK) * EL(
I)
6645 NEXT KK
6650 I = I - 1
6660 NEXT L
6670 RETURN

```

MÉTODO SKYLINE

## NOMENCLATURA E LISTAGEM DO PROGRAMA FRENTE :

IO, JF, LF .....	Índices para a frente
NF, MF .....	Número e máxima frente
IS, MS .....	Índice e máximo comprimento de vetor de rigidez
IT, MP .....	Índ. e núm. do total de variáveis do prob.
IP, NP .....	Índ. e núm. de nós do problema
ID, NN .....	Índ. e núm. dos graus de lib. por nó
IV, NV .....	Índ. e núm. dos nós rest. ou prescritos
NO(IV) .....	Vetor dos ptos. nodais fixos (rest. ou presc.)
IR(IV, ID) .....	Matriz dos códigos das restrições; 0 ou 1 dependendo se o GL é ou não restrito
PR(IV, ID) .....	Valor dos deslocamentos prescritos
FF(IT) .....	Valor do código das restrições
FI(IT) .....	Vetor do valor dos desl. prescritos
IE, NE .....	Índ. e núm. de elementos do problema
IN, N .....	Índ. e núm. de nós por elemento
LN(IE, IN) .....	Matriz dos números dos nós que formam 1 elemento
GS(IK) .....	Vetor global de rig.
GL(IF) .....	Vetor global de carga
EQ(IF) .....	Vetor onde são escritas preliminarmente as equações reduzidas, antes de serem escritas no disco
VE(IF) .....	Vetor no qual os desl. resolvidos são armazenados
NA(IF) .....	Vetor contendo os números das variáveis ativas na frente
KE .....	Contador do número de variáveis eliminadas
KB .....	Contador do número de variáveis do elemento
SE(IE, JE), ST(IE, JE) .....	Matriz dos elementos



LO(IE) .....	Vetor que localiza a posição global de cada variável do elemento
NK .....	Núm. de uma variável em particular - "nickname"
ND(IE) .....	Vetor de destinação para cada elemento
ER .....	Termo de vetor de carga, já reduzido e armazenado em disco
PI .....	Pivot da eliminação
AS(NK) .....	Vetor dos elementos nodais.

Demais variáveis que aparecem no programa são auto-explicativas pois seu uso é local (caso de índices, contadores, etc.). É importante ainda ressaltar dois pontos: o primeiro sobre a origem de duas denominações diferentes para a matriz de rigidez dos elementos e o segundo, de como gravar e ler de um disco para o sistema DOS 3.3. (Veja também cap. I).

No caso da denominação das matrizes de rigidez dos elementos, a matriz armazenada em disco é a matriz ST a qual, inclusive, não é simétrica e encontra-se portanto armazenada em sua forma completa. A matriz a ser realmente utilizada pela rotina FRENTE é a matriz SE. Esse fato ocorre porque o programa FRENTE foi utilizado neste trabalho para resolver problemas estáticos de vigas espaciais pelo método dos elementos finitos. Para estes problemas, em particular, é interessante guardar-se em disco os valores da matriz ST visto que a mesma será utilizada também em outros pontos do programa. A matriz SE é obtida pela rotina FRENTE através do endereço 6614, com a instrução GOSUB 5900.

Sobre o procedimento de armazenagem e leitura de discos no sistema operacional DOS 3.3 recomenda-se a leitura do manual de algum fabricante de computadores que utilizem o sistema (caso de todos os computadores da linha "Apple") porém para uma breve verificação veja na rotina FRENTE os trechos 6535 à 6610 e 7150 à 7196. Observe-se que a variável D\$ foi definida em outro trecho do programa como D\$=CHR\$(4) que é o caráter "vazio" do código ASCII.

A rotina "FRENTE" é complexa e seria melhor entendida dentro de um contexto mais amplo, no caso, aplicada a um exemplo que utilizasse o método dos elementos finitos. Não procederemos dessa forma e talvez restem pontos duvidosos. Para maiores informações recomendamos ao leitor interessado, as referências 10, 3, 14 e 13.

MÉTODO FRONTAL

```
6050 MP = NP * 6
6055 FOR IT = 1 TO MP
6060 FF(IT) = 0
6080 FI(IT) = 0
6090 NEXT IT
6100 FOR IV = 1 TO NV
6110 NL = (NO(IV) - 1) * NN
6120 FOR ID = 1 TO NN
6130 NG = NL + ID
6140 FF(NG) = IR(IV, ID)
6150 FI(NG) = PR(IV, ID)
6160 NEXT ID
6170 NEXT IV
6180 FOR IP = 1 TO NP
6190 KL = 0
6200 FOR IE = 1 TO NE
6210 FOR IN = 1 TO N
6220 IF LN(IE, IN) < > IP THEN 6
      250
6230 KL = IE
6240 NL = IN
6250 NEXT IN
6260 NEXT IE
6270 IF KL < > 0 THEN LN(KL, NL)
      = - IP
6280 NEXT IP
6290 FOR IS = 1 TO MS
6300 GS(IS) = 0
6310 NEXT IS
6320 FOR IO = 1 TO MF
6330 GL(IO) = 0
6340 EQ(IO) = 0
6350 VE(IO) = 0
6360 NA(IO) = 0
6370 NEXT IO
6500 NF = 0:KE = 0
6520 FOR IE = 1 TO NE
6530 KB = 0
6535 PRINT : PRINT "LENDO A1,R="
      ;IE
6540 PRINT D$;"OPEN A1,D";D1;"",L
      2000"
6550 PRINT D$;"READ A1,R";IE
6560 FOR I = 1 TO NB
6570 FOR J = 1 TO NB
6580 INPUT ST(I, J)
6590 NEXT J
6600 NEXT I
6610 PRINT D$;"CLOSE A1"
6614 GOSUB 5900
6616 FOR IN = 1 TO N
6620 FOR ID = 1 TO NN
6625 NS = (IN - 1) * NN + ID
6630 LC = LN(IE, IN)
6640 IF LC > 0 THEN LO(NS) = (LC
      - 1) * NN + ID
6650 IF LC < 0 THEN LO(NS) = (LC
```

```

+ 1) * NN - ID
6660 NEXT ID
6670 NEXT IN
6680 FOR IB = 1 TO NB
6690 NK = ABS (LO(IB))
6700 KX = 0
6710 FOR IO = 1 TO NF
6720 IF NK < > NA(IO) THEN 6760

6730 KB = KB + 1
6740 KX = 1
6750 ND(KB) = IO
6760 NEXT IO
6770 IF KX < > 0 THEN 6860
6780 FOR IO = 1 TO MF
6790 IF NA(IO) < > 0 THEN 6840
6800 NA(IO) = NK
6810 KB = KB + 1
6820 ND(KB) = IO
6830 GOTO 6850
6840 NEXT IO
6850 IF ND(KB) > NF THEN NF = ND
(KB)
6860 NEXT IB
6870 FOR IB = 1 TO NB
6880 TT = ND(IB)
6890 GL(TT) = GL(TT) + EL(IE,IB)
6910 FOR JB = 1 TO IB
6920 JT = ND(JB)
6930 NG = (JT * JT - JT) / 2 + TT

6940 NH = (TT * TT - TT) / 2 + JT

6950 IF JT > = TT THEN GS(NG) =
GS(NG) + SE(IE,JB)
6960 IF JT < TT THEN GS(NH) = GS
(NH) + SE(IE,JB)
6970 NEXT JB
6980 NEXT IB
6990 FOR IB = 1 TO NB
7000 NK = - LO(IB)
7010 IF NK < = 0 THEN 7540
7020 FOR IO = 1 TO NF
7030 IF NA(IO) < > NK THEN 7500

7050 FOR JF = 1 TO MF
7060 IF IO < JF THEN NL = (JF *
JF - JF) / 2 + IO
7070 IF IO > = JF THEN NL = (IO
* IO - IO) / 2 + JF
7080 EQ(JF) = GS(NL)
7090 GS(NL) = 0
7100 NEXT JF
7110 ER = GL(IO)
7120 GL(IO) = 0
7130 KE = KE + 1
7145 PRINT : PRINT "GRAVANDO A2,
R=";KE
7146 PRINT : PRINT "ER=";ER
7150 PRINT D$;"OPEN A2,D";D3;"L
";FM
7160 PRINT D$;"WRITE A2,R";KE
7170 PRINT ER: PRINT IO: PRINT N
K
7180 FOR I = 1 TO MF
7190 PRINT EQ(I)

```

```

7195 NEXT I
7196 PRINT D$;"CLOSE A2"
7310 PI = EQ(IO)
7315 PRINT : PRINT PI: PRINT
7320 EQ(IO) = 0
7330 IF FF(NK) = 0 THEN 7370
7340 FOR JF = 1 TO NF
7350 GL(JF) = GL(JF) - FI(NK) * E
      Q(JF)
7355 NEXT JF
7360 GOTO 7470
7370 FOR JF = 1 TO NF
7380 GL(JF) = GL(JF) - EQ(JF) * E
      R / PI
7400 IF EQ(JF) = 0 THEN 7460
7410 NL = (JF * JF - JF) / 2
7420 FOR LF = 1 TO JF
7430 NG = LF + NL
7440 GS(NG) = GS(NG) - EQ(JF) * E
      Q(LF) / PI
7450 NEXT LF
7460 NEXT JF
7470 EQ(IO) = PI
7480 NA(IO) = 0
7490 GOTO 7510
7500 NEXT IO
7510 IF NA(NF) < > 0 THEN 7540
7520 NF = NF - 1
7530 IF NF > 0 THEN 7510
7540 NEXT IB
7550 NEXT IE
7555 PRINT : PRINT "LEND0 A2,R="
      ;KE
7560 PRINT D$;"OPEN A2,D";D3;" ,L
      ";FM
7570 PRINT D$;"READ A2,R";KE
7580 INPUT ER,IO,NK
7590 FOR I = 1 TO MF
7600 INPUT EQ(I)
7610 NEXT I
7615 PRINT D$;"CLOSE A2"
7648 PRINT : PRINT "ER=";ER
7650 PI = EQ(IO)
7660 IF FF(NK) = 1 THEN VE(IO) =
      FI(NK)
7670 IF FF(NK) = 0 THEN EQ(IO) =
      0
7680 FOR JF = 1 TO MF
7690 ER = ER - VE(JF) * EQ(JF)
7700 NEXT JF
7710 IF FF(NK) = 0 THEN VE(IO) =
      ER / PI
7720 IF FF(NK) = 1 THEN FI(NK) =
      INT ( - ER * 100 + 0.5) / .1
      00
7730 AS(NK) = VE(IO)
7740 KE = KE - 1
7750 IF KE > 0 THEN 7555
7760 FOR IE = 1 TO NE
7770 FOR IN = 1 TO N
7780 LN(IE,IN) = ABS (LN(IE,IN))

7790 NEXT IN
7800 NEXT IE

```

ANEXO 3 - PROGRAMAS LEVI3D/CAVI3D

LIST

```

5  CLEAR : HOME
10  PRINT "      MODULO DE LEITU
    RA DE DADOS"
30  PRINT "      **PROGRAMA L
    EVI3D**"
60  PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
    : PRINT
80  INPUT "NO.DO PROBLEMA=";CW
100 PRINT : PRINT : PRINT
120 LET D$ = CHR$(4)
220 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
    : PRINT : PRINT : PRINT : PRINT

230 PR# 0: INPUT "      NOME DO P
    ROBLEMA=";XX$
235 PR# 1: PRINT "
    ";XX$
236 PRINT "      (
    PROBLEMA NO.=";CW;"")"
237 DIM SE(12,12),ST(12,12)
238 DIM R1(60),R2(60),R3(60),R4(
    60),R5(60),R6(60),R7(60),R8(
    60),R9(60),L(60),LX(60)
239 DIM CO(30,3),LN(60,3)
240 DIM NO(15),IR(15,6),PR(15,6)

241 DIM EE(10),GE(10),XE(10),YE(
    10),ZE(10),AE(10),WE(10),G1(
    10,2)
242 DIM E(60),G(60),IX(60),IY(60
    ),IZ(60),A(60),WD(60),AF(60,
    2)
243 DIM FO(60),E2(25),OP(12)
245 N = 2:DI = 3:NN = 6:MF = 60:N
    B = 12:MP = 180
250 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT

254 PR# 0
255 PRINT : PRINT : PRINT "PRESS
    IONE QUALQUER TECLA PARA OBT
    ER O MENU"
256 GET LS$
257 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
    : PRINT
258 PRINT "MENU DO MODULO DE ENT
    RADA (SIM=1/NAO=2)"
259 PRINT "-----
    -----"

260 PRINT : PRINT : PRINT "ENTRA
    R C/ DADOS DE UM NOVO PROBLE
    MA:"
261 PRINT "LER DADOS DE UM PROBL
    EMA DO DISCO.:"
262 PRINT "ALTERAR DADOS DEBATE

```

```

202 PRINT "ALTERAR DADOS DE COOR
.....:"
263 PRINT "ALTERAR DADOS DE COOR
DENADAS.....:"
264 PRINT "ALTERAR DADOS DE ELEM
ENTOS.....:"
265 PRINT "ALTERAR DADOS DE REST
RICOES.....:"
266 PRINT "ALTERAR DADOS DE MATE
RIAS.....:"
267 PRINT "VERIFICAR DADOS DE EN
TRADA.....:"
268 PRINT "CALCULAR MATRIZES DE
RIGIDEZ/ROTACA:"
269 PRINT "IMPRIMIR MATRIZES DE
ROTACAO.....:"
270 PRINT "GRAVAR DADOS EM DISCO
.....:"
271 FOR I = 1 TO 11
272 HTAB (37)
273 VTAB (I + 8): INPUT OP(I)
274 NEXT I
275 PRINT : INPUT " DESEJA M
UDAR?(SIM=1/ NAO=2)=";SN
276 IF SN = 1 OR SN = 2 THEN 278

277 PRINT " TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 275
278 IF SN = 1 THEN 255
279 HOME : PRINT : PRINT
280 PRINT " ESCOLHA DE DRIVE
S (1 OU 2)": PRINT
281 INPUT " DRIVE DE LEITURA
DE DADOS=";D1
282 IF D1 = 1 OR D1 = 2 THEN 284

283 PRINT " TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 281
284 INPUT " DRIVE DE GRAVACA
O DE DADOS=";D2
285 IF D2 = 1 OR D2 = 2 THEN 287

286 PRINT " TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 284
287 INPUT " DRIVE GRAV. MAT.
RIG./ROT.=";D3
288 IF D3 = 1 OR D3 = 2 THEN 290

289 PRINT " TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 287
290 Z3 = 0:Z4 = 0:Z5 = 0:Z6 = 0:Z
7 = 0
292 IF OP(1) = 1 THEN GOSUB 460

294 IF OP(2) = 1 THEN GOSUB 410
0
296 IF OP(3) = 2 THEN 300
298 Z3 = 1: GOTO 460
300 IF OP(4) = 2 THEN 304
302 Z4 = 1: GOTO 715
304 IF OP(5) = 2 THEN 308
306 Z5 = 1: GOTO 805
308 IF OP(6) = 2 THEN 312
310 Z6 = 1: GOTO 877
312 IF OP(7) = 2 THEN 316
314 Z7 = 1: GOTO 967
316 IF OP(8) = 1 THEN 310

```

```

310 IF VP(0) = 1 THEN 317
317 PRINT : PRINT : INPUT "ENTRE
    COM O VALOR DA FRENTE=";MF:
    PRINT : PRINT
318 MS = (MF * MF - MF) / 2 + MF:
    GOTO 325
319 GOSUB 1270
320 IF QQ = 0 THEN 325
322 PRINT "    ERRO DE ENTRADA.
    TENTE NOVAMENTE"
324 GOTO 255
325 IF OP(9) = 1 THEN GOSUB 240
    0
326 IF OP(11) = 1 THEN GOSUB 11
    69
327 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
    : PRINT : PRINT : PRINT "DES
    EJA VOLTAR AO MENU?": INPUT
    "S(SIM=1/NAO=2)=";VM
328 IF VM = 1 OR VM = 2 THEN 330

329 PRINT "    TENTE NOVAMENTE"
    : GOTO 327
330 IF VM = 1 THEN 255
332 END
460 HOME : PRINT : PRINT : PRINT

490 PR# 1
500 PRINT "                LER/IMPRIMI
    R DADOS"
510 PRINT "                -----
    -----"
520 PRINT : PRINT : PRINT
530 PR# 1: PRINT "NO.TOTAL DE EL
    EMENTOS=NE"
535 PR# 0: INPUT NE
540 PR# 1: PRINT "NO.TOTAL DE NO
    S=NP"
545 PR# 0: INPUT NP
550 PR# 1: PRINT "NO.DE NOS COM
    ALGUMA RESTRICAO=NV"
555 PR# 0: INPUT NV
580 PR# 1: PRINT "NO.DE MATERIAI
    S DIFERENTES=NM"
585 PR# 0: INPUT NM
590 PR# 1: PRINT "NO.DE CASOS DE
    CARGA=NC"
595 PR# 0: INPUT NC
606 PR# 1: PRINT
610 PR# 1: PRINT "NE=";NE;" " ";"
    NP=";NP;" " ";"NV=";NV;" " ";"
    NM=";NM;" " ";"NC=";NC
612 PR# 0: PRINT : PRINT "OS DAD
    OS GERAIS ESTAO CORRETOS? SI
    M=1/NAO=2"
613 INPUT B1
614 IF B1 = 1 OR B1 = 2 THEN 616

615 PRINT "    TENTE NOVAMENTE"
    : GOTO 612
616 IF B1 < > 1 THEN 520
617 PR# 1
642 IF Z3 = 1 THEN 300
660 PRINT : PRINT : PRINT
715 HOME : PRINT : PRINT : PRINT

```



```

720 PRINT "      COORDENADAS NODA
IS": PRINT
730 PRINT "NO      X      Y
      Z"
735 PR# 0
740 INPUT "NO=";P
745 IF P = 0 THEN 773
750 IF P < = NP THEN 760
755 PRINT "      NO>NP. TENTE NOV
AMENTE": GOTO 740
760 INPUT "X=";CO(P,1): INPUT "Y
=";CO(P,2): INPUT "Z=";CO(P,
3)
765 PR# 1
770 PRINT P; TAB( 6);CO(P,1); TAB(
14);CO(P,2); TAB( 22);CO(P,3
)
772 GOTO 735
773 PR# 0: PRINT : PRINT "OS DAD
OS DE COORDENADAS ESTAO CORR
ETOS? SIM=1/NAO=2"
774 INPUT B2
775 IF B2 = 1 OR B2 = 2 THEN 777

776 PRINT "      TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 773
777 IF B2 = 2 THEN 660
780 IF Z4 = 1 THEN 304
805 HOME : PRINT : PRINT : PRINT

806 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

807 PRINT "      FORMACAO DOS ELE
MENTOS": PRINT
814 PRINT "EL      NO1      NO2
      NO3"
815 PR# 0
825 INPUT "EL=";A
826 IF A = 0 THEN 871
827 IF A < > NE THEN 830
828 PRINT "      A>NE.TENTE NOVAM
ENTE": GOTO 825
830 FOR IN = 1 TO DI
835 PR# 0
840 INPUT "NO=";LN(A,IN)
850 NEXT IN
855 PR# 1
860 PRINT A; TAB( 7);LN(A,1); TAB(
15);LN(A,2); TAB( 23);LN(A,3
)
870 GOTO 815
871 PR# 0: PRINT : PRINT "OS NOS
QUE FORMAM OS ELEMENTOS EST
AO CORRETOS? SIM=1/NAO=2"
872 INPUT B3
873 IF B3 = 1 OR B3 = 2 THEN 875

874 PRINT "      TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 871
875 IF B3 = 2 THEN 805
876 IF Z5 = 1 THEN 308
877 HOME : PRINT : PRINT : PRINT

878 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

```

```

000  PRINT "RESTRITOS E VUL
ORES DE DESLOCAMENTO": PRINT

892  PR# 1: PRINT "NO COD.RES
      DX  DY  DZ  DDX  DDY
      DDZ"
900  FOR IV = 1 TO NV
910  PR# 0
915  INPUT "NO RESTRITO=";NO(IV)
916  PRINT "SE TODOS OS GL FOREM
RESTRITOS E OS DESL. NULOS E
NTRE COM 1; CASO CONTRARIO E
NTRE COM 2"
917  PR# 0: INPUT AQ
918  IF AQ < > 1 THEN 924
919  FOR ID = 1 TO NN
920  IR(IV,ID) = 1:PR(IV,ID) = 0
922  NEXT ID
923  GOTO 936
924  FOR ID = 1 TO NN
925  PR# 0
930  INPUT "CODIGO DE RESTRICAO="
;IR(IV,ID)
932  INPUT "VALOR DO DESLOCAMENTO
=";PR(IV,ID)
934  NEXT ID
936  PR# 1
938  PRINT NO(IV); TAB( 5);IR(IV,
1);IR(IV,2);IR(IV,3);IR(IV,4
);IR(IV,5);IR(IV,6); TAB( 15
);PR(IV,1); TAB( 20);PR(IV,2
); TAB( 25);PR(IV,3); TAB( 3
0);PR(IV,4); TAB( 36);PR(IV,
5); TAB( 42);PR(IV,6)
939  NEXT IV
940  PR# 0: PRINT : PRINT "OS DAD
OS DE DESL/REST. ESTAO CORRE
TOS? SIM=1/NAO=2"
941  INPUT B4
942  IF B4 = 1 OR B4 = 2 THEN 944

943  PRINT " TENTE NOVAMENTE"
: GOTO 940
944  IF B4 = 2 THEN 875
945  IF Z6 = 1 THEN 312
967  HOME : PRINT : PRINT : PRINT

968  PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

970  PRINT " PROPRIEDADES DOS
MATERIAIS": PRINT
980  PRINT "MAT E
G W"
985  FOR I = 1 TO NM
990  PR# 0
1000  INPUT "MAT=";MT: INPUT "E="
;EE(MT): INPUT "G=";GE(MT): INPUT
"PESO ESPECIFICO=";WE(MT)
1005  INPUT "IX=";XE(MT): INPUT "
IY=";YE(MT): INPUT "IZ=";ZE(
MT): INPUT "A=";AE(MT)
1006  INPUT "FFY=";G1(MT,1): PRINT
: INPUT "FFZ=";G1(MT,2)
1010  PR# 1
1020  PRINT MT; TAB( 10);EE(MT); TAB(
21);GE(MT); TAB( 33);WE(MT)
1020  NEXT T

```

```

1050 PRINT : PRINT : PRINT
1060 PRINT "      PROPRIEDADES DO
S ELEMENTOS": PRINT
1070 PRINT "EL      IX/A      IY/FFY
      IZ/FFZ      MAT"
1100 PR# 0: INPUT "EL=";JE
1102 IF JE = 0 THEN 1162
1104 IF JE < = NE THEN 1110
1106 PRINT : PRINT : PRINT "EL>N
E. TENTE NOVAMENTE": GOTO 11
00
1110 INPUT "MAT=";MT
1115 IF MT = 0 THEN MT = 1
1120 E(JE) = EE(MT)
1125 G(JE) = GE(MT)
1126 IX(JE) = XE(MT)
1127 IY(JE) = YE(MT)
1128 IZ(JE) = ZE(MT)
1129 A(JE) = AE(MT)
1130 WD(JE) = WE(MT)
1131 AF(JE,1) = G1(MT,1):AF(JE,2)
      = G1(MT,2)
1133 PR# 1
1150 PRINT JE; TAB( 6);IX(JE); TAB(
14);IY(JE); TAB( 24);IZ(JE);
      TAB( 34);MT
1155 PRINT TAB( 6);A(JE); TAB(
14);AF(JE,1); TAB( 24);AF(JE
,2)
1160 GOTO 1100
1162 PR# 0: PRINT : PRINT "OS DA
DOS DE MATERIAL/ELEMENTOS ES
TAO CORRETOS? SIM=1/NAO=2"
1163 INPUT B5
1164 IF B5 = 1 OR B5 = 2 THEN 11
66
1165 PRINT "      TENTE NOVAMENTE
": GOTO 1162
1166 IF B5 = 2 THEN 967
1167 IF Z7 = 1 THEN 316
1168 RETURN
1169 GOSUB 4400
1170 PRINT D$;"OPEN DAGE,D";D2;"
,L50"
1172 PRINT D$;"WRITE DAGE,R1"
1173 PRINT NE: PRINT NP: PRINT N
V
1174 PRINT NM: PRINT NC: PRINT M
P
1176 PRINT NN: PRINT DI: PRINT N
B
1178 PRINT D$;"CLOSE DAGE"
1180 FOR IP = 1 TO NP
1182 PRINT D$;"OPEN COORD,D";D2;
",L15"
1184 PRINT D$;"WRITE COORD,R";IP
1185 PRINT CO(IP,1): PRINT CO(IP
,2): PRINT CO(IP,3)
1188 PRINT D$;"CLOSE COORD"
1190 NEXT IP
1192 FOR IE = 1 TO NE
1194 PRINT D$;"OPEN ELEM,D";D2;"
,L30"
1196 PRINT D$;"WRITE ELEM,R";IE
4400 PRINT IN/TE 44: PRINT IN/TE

```

```

1170 PRINT LN(IE,1); PRINT LN(IE
,2); PRINT LN(IE,3); PRINT W
D(IE); PRINT A(IE); PRINT AF
(IE,1); PRINT AF(IE,2)
1200 PRINT D$;"CLOSE ELEM"
1202 NEXT IE
1204 FOR IV = 1 TO NV
1205 PRINT D$;"OPEN REST,D";D2;"
,L65"
1206 PRINT D$;"WRITE REST,R";IV
1208 PRINT NO(IV)
1210 FOR IN = 1 TO NN
1212 PRINT IR(IV,IN); PRINT PR(I
V,IN)
1214 NEXT IN
1216 PRINT D$;"CLOSE REST"
1218 NEXT IV
1219 PRINT D$;"OPEN FREN,D";D2;"
,L10"
1220 PRINT D$;"WRITE FREN,R1"
1221 PRINT MF; PRINT MS
1222 PRINT D$;"CLOSE FREN"
1230 RETURN
1270 FOR I = 1 TO 25
1272 E2(I) = 0
1274 NEXT I
1279 IF NP < 0 THEN E2(1) = 1
1280 IF NE * N < NP THEN E2(2) =
1
1290 IF NV < 1 THEN E2(3) = 1
1300 IF NV > NP THEN E2(4) = 1
1310 IF NC < = 0 THEN E2(5) = 1

1320 IF NP > 30 THEN E2(6) = 1
1330 IF NV > 15 THEN E2(7) = 1
1340 IF NM > 10 THEN E2(8) = 1
1360 IF NM < 1 THEN E2(10) = 1
1370 IF NM > NE THEN E2(11) = 1
1400 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

1405 QQ = 0
1410 FOR I = 1 TO 13
1420 IF E2(I) = 0 THEN 1450
1425 QQ = 1
1430 PR# 1: PRINT "ERRO OCORRIDO
NO.=";I
1440 PRINT "*****"
": PRINT : PRINT
1441 GOTO 1450
1224 F0(I) = 0
1450 NEXT I
1470 FOR I = 1 TO NE
1480 F0(I) = 0
1490 NEXT I
1500 FOR IP = 2 TO NP
1510 KP = IP - 1
1520 FOR JP = 1 TO KP
1530 FOR DE = 1 TO DI
1540 IF CO(IP,DE) < > CO(JP,DE)
THEN 1570
1550 NEXT DE
1560 E2(14) = E2(14) + 1
1570 NEXT JP
1580 NEXT IP
1590 FOR IE = 1 TO NE
1600 FOR IN = 1 TO N + 1
1620 IF IN(IE,IN) < 0 THEN E2(15)

```

```

1620 IF LN(IE,IN) > NP THEN E2(15) = E2(15) + 1
1630 IF LN(IE,IN) > NP THEN E2(16) = E2(16) + 1
1640 NEXT IN
1650 NEXT IE
1660 FOR IP = 1 TO NP
1670 KS = 0
1680 FOR IE = 1 TO NE
1690 KZ = 0
1700 FOR IN = 1 TO N
1710 IF LN(IE,IN) < > IP THEN 1790
1720 KZ = KZ + 1
1725 IF 1 < KZ THEN E2(17) = E2(17) + 1
1730 IF KS < > 0 THEN 1770
1750 KS = IE
1760 FO(IE) = FO(IE) + NN
1770 KL = IE
1780 KM = IN
1790 NEXT IN
1800 NEXT IE
1810 IF KS = 0 THEN 1850
1820 IF KL < NE THEN FO(KL + 1) = FO(KL + 1) - NN
1830 LN(KL,KM) = - IP
1840 GOTO 1960
1850 FOR IE = 1 TO NE
1851 IF LN(IE,3) = IP THEN 1960
1854 NEXT IE
1855 PR# 1: PRINT : PRINT
1860 PR# 1: PRINT "CHEQUE PORQUE O NO NO.":IP;" NUNCA APAREC E"
1870 PR# 1: PRINT "*****"
*****"

1875 E2(18) = E2(18) + 1
1880 PRINT
1890 GM = 0
1900 FOR DE = 1 TO DI
1910 GM = GM + ABS(CO(IP,DE))
1915 NEXT DE
1920 IF GM < > 0 THEN E2(19) = E2(19) + 1
1930 FOR IV = 1 TO NV
1940 IF NO(IV) = IP THEN E2(20) = E2(20) + 1
1950 NEXT IV
1960 NEXT IP
1970 NF = 0
1980 KF = 0
1990 FOR IE = 1 TO NE
2000 NF = NF + FO(IE)
2010 IF NF > KF THEN KF = NF
2015 NEXT IE
2020 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

2030 PR# 1: PRINT "FRENTE ENCONT RADA=":KF
2040 PR# 1: PRINT "*****"
*****"

2050 PRINT : PRINT : PRINT
2055 IF KF > MF THEN E2(21) = 1
2056 IF KF < MF THEN MF = KF
2057 MC = (MF * ME) / (ME * MD)

```

```

2058 BY = INT ((12 * MF + 30) *
6 * NP / 10.24) / 100
2059 PRINT : PRINT : PRINT "DRIV
E DE RESOLUCAO=" ; BY ; " KB" : PRINT
: PRINT
2060 FOR IV = 1 TO NV
2070 IF NO(IV) < 0 THEN E2(22) =
E2(22) + 1
2080 IF NO(IV) > NP THEN E2(23) =
E2(23) + 1
2090 CT = 0
2100 FOR ID = 1 TO NN
2110 IF IR(IV, ID) > 0 THEN CT =
1
2115 NEXT ID
2120 IF CT = 0 THEN E2(24) = E2(
24) + 1
2130 KV = IV - 1
2140 FOR JV = 1 TO KV
2150 IF IV = 1 THEN 2170
2160 IF NO(IV) = NO(JV) THEN E2(
25) = E2(25) + 1
2170 NEXT JV
2180 NEXT IV
2190 QQ = 0
2200 FOR I = 13 TO 25
2210 IF E2(I) = 0 THEN 2250
2220 QQ = 1
2230 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
2240 PR# 1: PRINT "ERRO OCORRIDO
NO.=" ; I
2243 PR# 1: PRINT "*****
*****"
2245 PR# 1: PRINT "NO. DE VEZES Q
UE ESTE ERRO OCORREU=" ; E2(I)
: PRINT
2250 NEXT I
2270 FOR IE = 1 TO NE
2280 FOR IN = 1 TO N
2290 LN(IE, IN) = ABS (LN(IE, IN))
2300 NEXT IN
2310 NEXT IE
2320 RETURN
2400 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
2410 PRINT "          MATRIZES D
E ROTACAO/RIGIDEZ DOS ELEMEN
TOS"
2420 PRINT "          -----
-----"
2430 PR# 0: PRINT : PRINT
2432 PRINT "POSICIONE O DISQUETE
PARA GRAV. DAS MAT. RIG/ROT
E ENTRE COM UM NUMERO QUALQ
UER"
2434 INPUT MM
2436 PRINT D$ ; "OPEN ROTA, D" ; D3 ; "
, L150"
2437 PRINT D$ ; "DELETE ROTA"
2438 PRINT D$ ; "CLOSE ROTA"
2439 PRINT D$ ; "OPEN A1, D" ; D3 ; " , L
"

```

```

      *****
2440 PRINT D$;"DELETE A1"
2442 PRINT D$;"CLOSE A1"
2450 FOR IE = 1 TO NE
2460 XC = CO(LN(IE,2),1) - CO(LN(
      IE,1),1)
2470 YC = CO(LN(IE,2),2) - CO(LN(
      IE,1),2)
2480 ZC = CO(LN(IE,2),3) - CO(LN(
      IE,1),3)
2490 LE = SQR (XC * XC + YC * YC
      + ZC * ZC)
2491 LX(IE) = LE
2500 CX = XC / LE:CY = YC / LE:CZ
      = ZC / LE
2510 XZ = SQR (CX * CX + CZ * CZ
      )
2520 IF LN(IE,3) = 0 THEN 2580
2550 XP = CO(LN(IE,3),1) - CO(LN(
      IE,1),1)
2560 YP = CO(LN(IE,3),2) + CO(LN(
      IE,1),2)
2570 ZP = CO(LN(IE,3),3) - CO(LN(
      IE,1),3)
2580 IF XZ > 0.001 THEN 2650
2590 R2(IE) = CY
2591 R4(IE) = - CY
2592 R9(IE) = 1
2593 R1(IE) = 0
2594 R3(IE) = 0
2595 R5(IE) = 0
2596 R6(IE) = 0
2597 R7(IE) = 0
2598 R8(IE) = 0
2600 IF LN(IE,3) = 0 THEN 2880
2610 SQ = SQR (XP * XP + ZP * ZP
      )
2620 CA = - XP * CY / SQ:SA = ZP
      / SQ
2630 R4(IE) = - CY * CA:R6(IE) =
      SA
2635 R7(IE) = CY * SA:R9(IE) = CA

2640 GOTO 2880
2650 R1(IE) = CX
2651 R2(IE) = CY
2652 R3(IE) = CZ
2653 R4(IE) = - CX * CY / XZ
2654 R5(IE) = XZ
2655 R6(IE) = - CY * CZ / XZ
2656 R7(IE) = - CZ
2657 R8(IE) = 0
2658 R9(IE) = CX / XZ
2660 IF LN(IE,3) = 0 THEN 2880
2670 YG = R4(IE) * XP + R5(IE) *
      YP + R6(IE) * ZP
2680 ZG = R7(IE) * XP + R8(IE) *
      YP + R9(IE) * ZP
2690 SQ = SQR (YG * YG + ZG * ZG
      )
2700 CA = YG / SQ:SA = ZG / SQ
2710 R4(IE) = ( - CX * CY * CA -
      CZ * SA) / XZ
2720 R5(IE) = XZ * CA
2730 R6(IE) = ( - CY * CZ * CA +
      CX * SA) / XZ
2740 R7(IE) = (CY * CY * CA - CZ *

```

```

2770 R8(IE) = (CA * CZ * SA + CX *
CA) / XZ
2750 R8(IE) = - XZ * SA
2760 R9(IE) = (CY * CZ * SA + CX *
CA) / XZ
2880 FOR II = 1 TO NB
2890 FOR JJ = 1 TO NB
2900 SE(II, JJ) = 0
2905 ST(II, JJ) = 0
2910 NEXT JJ
2920 NEXT II
2925 GY = 6 * AF(IE, 1) * E(IE) *
IZ(IE) / (G(IE) * A(IE) * LE
* LE)
2928 GZ = 6 * AF(IE, 2) * E(IE) *
IY(IE) / (G(IE) * A(IE) * LE
* LE)
2930 S1 = E(IE) * A(IE) / LE: S2 =
G(IE) * IX(IE) / LE: S3 = 4 *
E(IE) * IY(IE) / (LE * (1 +
2 * GY))
2933 S4 = 1.5 * S3 / LE: S5 = 2 *
S4 / LE: S6 = 4 * E(IE) * IZ(
IE) / (LE * (1 + 2 * GZ))
2936 S7 = 1.5 * S6 / LE: S8 = 2 *
S7 / LE
2940 SE(1, 1) = S1: SE(1, 7) = - S1
: SE(2, 2) = S8
2945 SE(2, 6) = S7: SE(2, 8) = - S8
: SE(2, 12) = S7
2950 SE(3, 3) = S5: SE(3, 5) = - S4
: SE(3, 9) = - S5
2955 SE(3, 11) = - S4: SE(4, 4) = S
2: SE(4, 10) = - S2
2960 SE(5, 5) = S3 * (1 + GY / 2):
SE(5, 9) = S4: SE(5, 11) = S3 *
(1 - GY) / 2
2965 SE(6, 6) = S6 * (1 + GZ / 2):
SE(6, 8) = - S7: SE(6, 12) = S
6 * (1 - GZ) / 2
2970 SE(7, 7) = S1: SE(8, 8) = S8: SE
(8, 12) = - S7
2975 SE(9, 9) = S5: SE(9, 11) = S4: S
E(10, 10) = S2
2980 SE(11, 11) = S3 * (1 + GY / 2
): SE(12, 12) = S6 * (1 + GZ /
2)
2985 FOR II = 1 TO NB - 1
2987 FOR JJ = II + 1 TO NB
2990 SE(JJ, II) = SE(II, JJ)
3000 NEXT JJ
3010 NEXT II
3020 FOR K = 1 TO 4
3030 K1 = 3 * K - 2: K2 = 3 * K -
1: K3 = 3 * K
3040 FOR J = 1 TO NB
3050 ST(J, K1) = SE(J, K1) * R1(IE)
+ SE(J, K2) * R4(IE) + SE(J,
K3) * R7(IE)
3060 ST(J, K2) = SE(J, K1) * R2(IE)
+ SE(J, K2) * R5(IE) + SE(J,
K3) * R8(IE)
3070 ST(J, K3) = SE(J, K1) * R3(IE)
+ SE(J, K2) * R6(IE) + SE(J,
K3) * R9(IE)
3080 NEXT J
3090 NEXT K

```



```

3070 READ N
3100 PRINT D$;"OPEN A1,D";D3;"",L
2000"
3110 PRINT D$;"WRITE A1,R";IE
3120 FOR I = 1 TO NB
3130 FOR J = 1 TO NB
3140 PRINT ST(I,J)
3150 NEXT J
3160 NEXT I
3170 PRINT D$;"CLOSE A1"
3180 PRINT D$;"OPEN ROTA,D";D3;"
,L150"
3190 PRINT D$;"WRITE ROTA,R";IE
3200 PRINT R1(IE): PRINT R2(IE):
PRINT R3(IE)
3210 PRINT R4(IE): PRINT R5(IE):
PRINT R6(IE)
3220 PRINT R7(IE): PRINT R8(IE):
PRINT R9(IE): PRINT LX(IE)
3230 PRINT D$;"CLOSE ROTA"
3245 NEXT IE
3246 IF OP(10) < > 1 THEN 3258
3247 FOR IE = 1 TO NE
3248 PR# 1: PRINT : PRINT "ELEME
NTO=";IE: PRINT
3249 PRINT R1(IE); TAB( 18);R2(I
E); TAB( 36);R3(IE)
3250 PRINT R4(IE); TAB( 18);R5(I
E); TAB( 36);R6(IE)
3251 PRINT R7(IE); TAB( 18);R8(I
E); TAB( 36);R9(IE)
3252 PRINT : PRINT : PRINT "COMP
.DO EL.=";LX(IE): PRINT : PRINT
: PRINT
3253 NEXT IE
3258 RETURN
4100 HOME : PR# 0: PRINT : PRINT
: PRINT : PRINT : PRINT
4102 PRINT "POSICIONE O DISQUETE
DE LEITURA E ENTRE COM QUAL
QUER NUMERO"
4104 INPUT TT
4106 PRINT D$;"OPEN DAGE,D";D1;"
,L50"
4110 PRINT D$;"READ DAGE,R1"
4120 INPUT NE,NP,NV,NM,NC,MP,NN,
DI,NB
4130 PRINT D$;"CLOSE DAGE"
4140 FOR IP = 1 TO NP
4150 PRINT D$;"OPEN COORD,D";D1;"
",L15"
4160 PRINT D$;"READ COORD,R";IP
4170 INPUT CO(IP,1),CO(IP,2),CO(
IP,3)
4180 PRINT D$;"CLOSE COORD"
4190 NEXT IP
4200 FOR IE = 1 TO NE
4210 PRINT D$;"OPEN ELEM,D";D1;"
,L30"
4220 PRINT D$;"READ ELEM,R";IE
4230 INPUT LN(IE,1),LN(IE,2),LN(
IE,3),WD(IE),A(IE),AF(IE,1),
AF(IE,2)
4240 PRINT D$;"CLOSE ELEM"
4250 NEXT IE
4251 FOR IV = 1 TO NV
4252 PRINT D$;"OPEN DECT D";D1;"

```

```

4252 PRINT D$;"OPEN REST,D";D1;"
,L65"
4253 PRINT D$;"READ REST,R";IV
4254 INPUT NO(IV)
4255 FOR IN = 1 TO NN
4256 INPUT IR(IV,IN): INPUT PR(I
V,IN)
4257 NEXT IN
4258 PRINT D$;"CLOSE REST"
4259 NEXT IV
4260 PRINT D$;"OPEN FREN,D";D1;"
,L10"
4261 PRINT D$;"READ FREN,R1"
4262 INPUT MF: INPUT MS
4263 PRINT D$;"CLOSE FREN"
4350 RETURN
4400 HOME
4401 PR# 0: PRINT : PRINT : PRINT

4402 PRINT "POSICIONE O DISQUETE
P/ GRAVACAO E ENTRE COM UM
NUMERO QUALQUER"
4404 PRINT "CUIDADO! OS DADOS DE
STE DISQUETE SERAO": PRINT "
APAGADOS ANTES DA GRAVACAO"
4406 INPUT UD
4408 PRINT D$;"OPEN DAGE,D";D2;"
,L50"
4410 PRINT D$;"DELETE DAGE"
4420 PRINT D$;"CLOSE DAGE"
4430 PRINT D$;"OPEN COORD,D";D2;"
,L15"
4440 PRINT D$;"DELETE COORD"
4450 PRINT D$;"CLOSE COORD"
4460 PRINT D$;"OPEN ELEM,D";D2;"
,L30"
4470 PRINT D$;"DELETE ELEM"
4480 PRINT D$;"CLOSE ELEM"
4490 PRINT D$;"OPEN REST,D";D2;"
,L65"
4500 PRINT D$;"DELETE REST"
4510 PRINT D$;"CLOSE REST"
4520 PRINT D$;"OPEN FREN,D";D2;"
,L10"
4530 PRINT D$;"DELETE FREN"
4540 PRINT D$;"CLOSE FREN"
4580 RETURN

```

LIST

```

4000 CLEAR : HOME : PRINT : PRINT
      : PRINT
4010 PRINT "** PROGRAMA CAVI3D *
      *"
4011 LET D$ = CHR$ (4):N = 2
4012 DIM SE(12,12),ST(12,12)
4014 DIM CN(12),CP(50,12),EL(50,
      12),CC(10),FE(12),F(12)
4016 DIM LN(50,3),A(50),WD(50)
4018 DIM NO(15),IR(15,6),PR(15,6
      )
4020 DIM R1(50),R2(50),R3(50),R4
      (50),R5(50),R6(50),R7(50),R8
      (50),R9(50),LX(50),L(50),LI(
      50)
4022 DIM AS(180),AR(12)
4024 DIM FI(180),FF(180),EQ(60),
      VE(60),GL(60),GS(1485),NA(60
      ),LO(12),ND(12)
4025 PR# 0
4026 IC = 1
4027 OT$ = "NP"
4028 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
      "PRESSIONE QUALQUER TECLA PA
      RA OBTER O MENU"
4030 GET ME$
4032 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
      : PRINT
4034 PRINT "MENU DE RESOLUCAO (S
      IM=1/NAO=2)"
4036 PRINT "-----
      -----": PRINT : PRINT
4038 PRINT "LER DADOS DE ENTRADA
      .....:"
4040 PRINT "ENTRAR COM CARREGAME
      NTOS.....:"
4042 PRINT "RESOLVER PARA DESLOC
      AMENTOS.....:"
4044 PRINT "OBTER FORCAS E REACO
      ES.....:"
4046 PRINT "OBTER PESOS.....
      .....:"
4048 PRINT "GRAVAR DESL/REAC/FOR
      CA.....:"
4050 FOR I = 1 TO 6
4052 HTAB 35
4054 VTAB (I + 8): INPUT OP(I)
4056 NEXT I
4060 PRINT : PRINT : INPUT "
      DESEJA MUDAR (SIM=1/NAO=2)=
      ":SN
4062 IF SN = 1 OR SN = 2 THEN 40
      66
4064 PRINT : PRINT " TENTE N
      OVAMENTE": GOTO 4060
4066 IF SN = 1 THEN 4028
4068 HOME : PRINT : PRINT : PRINT

```

```

4070 PRINT "      ESCOLHA DE DRIV
ES (1 OU 2)": PRINT
4072 INPUT "      DRIVE DE LEITUR
A DE DADOS=";D1
4074 IF D1 = 1 OR D1 = 2 THEN 40
78
4076 PRINT : PRINT "      TENTE N
OVAMENTE": GOTO 4072
4078 INPUT "      DRIVE DE GRAVAC
AO DE RES.=";D2
4080 IF D2 = 1 OR D2 = 2 THEN 40
84
4082 PRINT : PRINT "      TENTE N
OVAMENTE": GOTO 4078
4084 INPUT "      DRIVE DE RESOLU
CAO      =";D3
4086 IF D3 = 1 OR D3 = 2 THEN 40
90
4088 PRINT : PRINT "      TENTE N
OVAMENTE": GOTO 4084
4089 IF OT$ = "P" THEN 4092
4090 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT : PRINT : PRINT
4091 PRINT "***** CASO DE C
ARGA NO. = ";IC;" *****"

4092 PRINT : PRINT : PRINT : PR#
0
4093 IF OP(1) = 1 THEN GOSUB 41
10
4094 IF OP(2) = 1 THEN GOSUB 45
00
4095 IF OP(3) = 1 THEN GOSUB 60
50
4096 IF OP(4) = 1 THEN GOSUB 86
12
4097 IF OP(5) = 1 THEN GOSUB 95
00
4099 PRINT : PRINT : INPUT "
DESEJA MUDAR (SIM=1/NAO=2)=
";DM: PRINT : PRINT
4100 IF DM = 1 OR DM = 2 THEN 41
02
4101 PRINT "      TENTE NOVAMENTE
": GOTO 4099
4102 IF DM < > 1 THEN 4105
4103 OT$ = "P": GOTO 4028
4105 IC = IC + 1
4106 IF IC > NC THEN 4108
4107 OT$ = "NP": GOTO 4028
4108 END
4110 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT
4111 INPUT "POSICIONE OS DISQUET
ES PARA LEITURA DE DADOS E E
NTRE COM QUALQUER NO.":QN: PRINT
: PRINT
4112 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT "      LENDO DADOS GE
RAIS..."
4113 PRINT D$;"OPEN DAGE,D";D1;"
,L50"
4114 PRINT D$;"READ DAGE,R1"
4120 INPUT NE,NP,NV,NM,NC,MP,NN,
DI,NB
4130 PRINT D$;"CLOSE DAGE"

```

```

4140 PRINT : PRINT NE,NP,NV
4142 PRINT NM,NC,NN
4144 PRINT DI,NB,MP: PRINT
4200 FOR IE = 1 TO NE
4210 PRINT D$;"OPEN ELEM,D";D1;"
,L30"
4220 PRINT D$;"READ ELEM,R";IE
4230 INPUT LN(IE,1),LN(IE,2),LN(
IE,3),WD(IE),A(IE),AF(IE,1),
AF(IE,2)
4240 PRINT D$;"CLOSE ELEM"
4241 NEXT IE
4251 FOR IV = 1 TO NV
4252 PRINT D$;"OPEN REST,D";D1;"
,L65"
4253 PRINT D$;"READ REST,R";IV
4254 INPUT NO(IV)
4255 FOR IN = 1 TO NN
4256 INPUT IR(IV,IN): INPUT PR(I
V,IN)
4257 NEXT IN
4258 PRINT D$;"CLOSE REST"
4259 NEXT IV
4260 PRINT D$;"OPEN FREN,D";D1;"
,L10"
4261 PRINT D$;"READ FREN,R1"
4262 INPUT MF: INPUT MS
4263 PRINT D$;"CLOSE FREN"
4265 PRINT : PRINT MF,MS
4266 FM = 12 * MF + 30
4267 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT : PRINT "POSICIONE O
DISQUETE PARA LEITURA DAS M
AT. DE ROT. E ENTRE COM QUAL
QUER NO.":QN
4268 HOME : PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT : PRINT " LENDO
MATRIZES DE ROTACAO..."
4269 FOR IE = 1 TO NE
4270 PRINT D$;"OPEN ROTA,D";D1;"
,L150"
4271 PRINT D$;"READ ROTA,R";IE
4272 INPUT R1(IE),R2(IE),R3(IE)
4273 INPUT R4(IE),R5(IE),R6(IE)
4274 INPUT R7(IE),R8(IE),R9(IE),
LX(IE)
4275 PRINT D$;"CLOSE ROTA"
4276 NEXT IE
4279 RETURN
4500 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
: PRINT
4510 PR# 1: PRINT " VET
OR DE CARGA"
4520 PR# 1: PRINT " ----
-----"
4530 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
4540 FOR I = 1 TO NE
4545 L(I) = 0:LI(I) = 0
4547 FOR J = 1 TO NB
4550 CN(J) = 0:CP(I,J) = 0:EL(I,J
) = 0
4560 NEXT J
4570 NEXT I
4580 PR# 1: PRINT " CARGAS N
ODAIS (SIST.COORD.GERAL)": PRINT

```

```

4590 GOSUB 4700
4605 PR# 0: PRINT : PRINT "AS CA
      RGAS NODAIS ESTAO CORRETAS?
      SIM=1/ NAO=2"
4606 INPUT B8
4607 PRINT : PRINT : IF B8 = 1 OR
      B8 = 2 THEN 4609
4608 PRINT "      TENTE NOVAMENTE
      ": GOTO 4605
4609 IF B8 = 2 THEN 4530
4610 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
      "      CARGAS NOS ELEMENTOS (
      SIST.COORD.DO ELEMENTO)": PRINT

4612 FOR I = 1 TO NE
4614 FOR J = 1 TO NB
4616 CP(I,J) = 0
4617 NEXT J
4618 NEXT I
4620 GOSUB 5100
4635 PR# 0: PRINT : PRINT "AS CA
      RGAS NOS ELEMENTOS ESTAO COR
      RETAS? SIM=1/ NAO=2"
4636 INPUT B9: IF B9 = 1 OR B9 =
      2 THEN 4638
4637 PRINT : PRINT : PRINT "
      TENTE NOVAMENTE": GOTO 4635

4638 IF B9 = 2 THEN 4610
4639 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
      "      CARGAS TOTAIS (SIST.CO
      ORD.GERAL)": PRINT
4640 PRINT "EL      FX      FY
      FZ      MX      MY      MZ"
4642 FOR IE = 1 TO NE
4645 IF L(IE) < > 0 THEN 4650
4646 IF LI(IE) = 0 THEN 4680
4650 FOR IB = 1 TO NB
4665 EL(IE,IB) = INT (EL(IE,IB) *
      10 + .5) / 10
4670 NEXT IB
4671 PR# 1
4672 PRINT IE; TAB( 4);EL(IE,1);
      TAB( 11);EL(IE,2); TAB( 18)
      ;EL(IE,3); TAB( 25);EL(IE,4)
      ; TAB( 32);EL(IE,5); TAB( 39)
      );EL(IE,6)
4674 PRINT TAB( 4);EL(IE,7); TAB(
      11);EL(IE,8); TAB( 18);EL(IE
      ,9); TAB( 25);EL(IE,10); TAB(
      32);EL(IE,11); TAB( 39);EL(I
      E,12)
4680 NEXT IE
4681 PR# 0: PRINT "OS VALORES DE
      CARGA TOTAIS ESTAO CORRETOS
      ? SIM=1/ NAO=2"
4682 INPUT QC
4683 IF QC = 1 OR QC = 2 THEN 46
      85
4684 PRINT : PRINT : PRINT "
      TENTE NOVAMENTE": GOTO 4681

4685 IF QC = 2 THEN 4500
4690 RETURN
4700 PR# 1: PRINT "NO      FX

```

```

FY      FZ      MX      MY
MZ"
4710 PR# 0: INPUT "NO=";H
4720 IF H = 0 THEN 4880
4730 FOR ID = 1 TO NN
4740 PR# 0: PRINT "CN(";ID;")="
4750 INPUT CN(ID)
4760 NEXT ID
4770 PR# 1: PRINT H; TAB( 4);CN(
1); TAB( 11);CN(2); TAB( 18)
;CN(3); TAB( 25);CN(4); TAB(
32);CN(5); TAB( 39);CN(6)
4780 FOR IE = 1 TO NE
4790 FOR IN = 1 TO N
4800 NL = LN(IE,IN)
4810 IF H = NL THEN 4835
4820 NEXT IN
4830 NEXT IE
4835 L(IE) = 1
4840 FOR ID = 1 TO NN
4850 NG = (IN - 1) * NN + ID
4860 EL(IE,NG) = CN(ID)
4870 NEXT ID
4875 GOTO 4710
4880 RETURN
5100 PR# 1: PRINT "EL      FX
FY      FZ      MX      MY
MZ"
5101 PR# 0: PRINT "DEVE-SE CONSI
DERAR O PESO PROPRIO DE TODA
A ESTRUTURA? SIM=1/ NAO=2"
5102 INPUT L1
5103 IF L1 ( ) 1 THEN 5117
5105 FOR O = 1 TO NE
5109 LE = LX(O)
5110 WL = A(O) * WD(O)
5111 CP(O,2) = CP(O,2) + WL * LE *
R5(O) / 2:CP(O,1) = CP(O,1) +
WL * LE * R2(O) / 2
5112 CP(O,6) = CP(O,6) + WL * LE *
R5(O) * LE / 12:CP(O,7) = CP
(O,7) + WL * LE * R2(O) / 2
5113 CP(O,8) = CP(O,8) + WL * LE *
R5(O) / 2:CP(O,12) = CP(O,12
) - WL * LE * LE * R5(O) / 1
2
5115 LI(O) = 1
5116 NEXT O
5117 PR# 0: PRINT : PRINT "DEVE-
SE CONSIDERAR CARGA TERMICA
PARA TODA A ESTRUTURA (SOMEN
TE SE A TEMPERATURA E O COEF
. DIL. TERMICA FOREM CONSTAN
TES)? SIM=1/ NAO=2"
5118 INPUT L2
5119 IF L2 ( ) 1 THEN 5130
5120 INPUT "TEMPERATURA=";TE: INPUT
"COEF.DIL. TERMICA=";AL
5121 FOR O = 1 TO NE
5125 LE = LX(O)
5126 CP(O,1) = CP(O,1) + E(O) * A
(O) * AL * TE
5127 CP(O,7) = CP(O,7) - E(O) * A
(O) * AL * TE
5128 LI(O) = 1
5129 NEXT O

```

```

5130 PR# 0: PRINT "EXISTEM OUTRA
S CARGAS NOS ELEMENTOS? SIM=
1/ NAO=2"
5132 INPUT L3
5133 IF L3 = 1 THEN GOSUB 5630
5140 FOR O = 1 TO NE
5150 IF LI(O) = 0 THEN 5190
5152 FOR ID = 1 TO 12
5154 CP(O, ID) = INT (CP(O, ID) *
10 + 0.5) / 10
5156 NEXT ID
5170 PR# 1: PRINT O; TAB( 4); CP(
O, 1); TAB( 11); CP(O, 2); TAB(
18); CP(O, 3); TAB( 25); CP(O, 4
); TAB( 32); CP(O, 5); TAB( 39
); CP(O, 6)
5180 PR# 1: PRINT TAB( 4); CP(O,
7); TAB( 11); CP(O, 8); TAB( 1
8); CP(O, 9); TAB( 25); CP(O, 10
); TAB( 32); CP(O, 11); TAB( 3
9); CP(O, 12)
5190 NEXT O
5210 FOR IE = 1 TO NE
5220 IF LI(IE) = 0 THEN 5290
5230 FOR J = 1 TO 4
5240 J1 = 3 * J - 2; J2 = 3 * J -
1; J3 = 3 * J
5250 EL(IE, J1) = EL(IE, J1) - R1(I
E) * CP(IE, J1) - R4(IE) * CP
(IE, J2) - R7(IE) * CP(IE, J3)
5260 EL(IE, J2) = EL(IE, J2) - R2(I
E) * CP(IE, J1) - R5(IE) * CP
(IE, J2) - R8(IE) * CP(IE, J3)
5270 EL(IE, J3) = EL(IE, J3) - R3(I
E) * CP(IE, J1) - R6(IE) * CP
(IE, J2) - R9(IE) * CP(IE, J3)
5280 NEXT J
5290 NEXT IE
5300 RETURN
5630 PR# 0: PRINT : INPUT "ELEME
NTO COM CARGA="; O
5631 IF O = 0 THEN 5800
5632 IF O < = NP THEN 5635
5633 PRINT : PRINT : PRINT "
NO.DO EL>NP. TENTE NOVAMENT
E": GOTO 5630
5635 LE = LX(O)
5636 PRINT : PRINT "CARGA CONCEN
TRADA NAS DIRECOES Y OU Z? S
IM=1/ NAO=2"
5638 INPUT CC(1)
5640 PRINT : PRINT "MOMENTO CONC
ENTRADO NAS DIRECOES Y OU Z?
SIM=1/ NAO=2"
5642 INPUT CC(2)
5644 PRINT : PRINT "CARGA CONCEN
TRADA NA DIRECAO X? SIM=1/ N
AO=2"
5646 INPUT CC(3)
5648 PRINT : PRINT "MOMENTO TORC
OR (EM X)?SIM=1/ NAO=2"
5649 INPUT CC(4)
5654 PRINT : PRINT "CARGA DISTRI

```



```

BUIDA? SIM=1/ NAO=2"
5656 INPUT CC(6)
5658 PRINT : PRINT "CARGA DISTRI
BUIDA TRIANGULAR? SIM=1/ NAO
=2"
5660 INPUT CC(7)
5662 PRINT : PRINT "CARGA TERMIC
A? SIM=1/ NAO=2"
5664 INPUT CC(8)
5666 PRINT : PRINT "OUTROS TIPOS
DE CARGA?SIM=1/NAO=2"
5667 INPUT CC(9): PRINT : PRINT
: INPUT " DESEJA MUDAR O
PCOES.(SIM=1/NAO=2)=";SM
5668 IF SM = 1 THEN 5636
5669 IF CC(1) < > 1 THEN 5688
5670 PRINT : INPUT "DIRECAO DA C
ARGA: Y=2/ Z=3";S
5671 PRINT
5672 INPUT "VALOR DA CARGA (C/ S
INAL)";P
5673 PRINT
5674 INPUT "DIST.DA CARGA EM REL
ACAO AO NO DA ESQ.(EM PORCEN
TAGEM)=";FP
5675 F = FP * LE
5676 B = LE - F
5677 SS = 4: IF S = 3 THEN SS = 2

5678 CP(0,S) = CP(0,S) - P * B *
B * (3 * F + B) / (LE ^ 3)
5680 CP(0,S + SS) = CP(0,S + SS) -
P * F * B * B / (LE * LE)
5682 CP(0,S + 6) = CP(0,S + 6) -
P * F * F * (3 * B + F) / (L
E ^ 3)
5684 CP(0,S + SS + 6) = CP(0,S +
SS + 6) + P * B * F * F / (L
E * LE)
5685 IF S = 2 THEN 5686:CP(0,S +
SS) = - CP(0,S + SS):CP(0,S
+ SS + 6) = - CP(0,S + SS +
6)
5686 PRINT : PRINT : INPUT "EXIS
TE OUTRA CARGA CONCENTRADA.(
SIM=1/NAO=2)=";L3
5687 IF L3 = 1 THEN 5670
5688 IF CC(2) < > 1 THEN 5707
5689 INPUT "DIRECAO DO MOMENTO:
Y=2/ Z=3";S
5690 INPUT "VALOR DO MOMENTO (C/
SINAL)";MO
5692 INPUT "DIST. DO MOM. EM REL
AO NO DA ESQ.(EM PORCENTAG
EM)=";FP
5693 SI = 3: IF S = 3 THEN SI = 2

5694 B = LE - F:JC = 6 * MO * F *
B / (LE ^ 3)
5695 SS = 4: IF S = 3 THEN SS = 2

5696 CP(0,SI) = CP(0,SI) + JC
5698 CP(0,SI + SS) = CP(0,SI + SS
) + MO * B * (2 * F - B) / (
LE * LE)
5700 CP(0,SI + 6) = CP(0,SI + 6) -

```

```

JC
5702 CP(0,SI + SS + 6) = CP(0,SI +
SS + 6) + MO * F * (2 * B -
F) / (LE * LE)
5703 IF S = 3 THEN CP(0,SI) = -
CP(0,SI)
5704 IF S = 3 THEN CP(0,SI + 6) =
- CP(0,SI + 6)
5705 INPUT L4
5706 IF L4 = 1 THEN 5689
5707 IF CC(3) < > 1 THEN 5719
5708 INPUT "VALOR DA CARGA CONCE
NTRADA NA DIR.X (C/ SINAL)="
;P
5709 PRINT : INPUT "DIST. DA CAR
GA EM REL.AO NO DA ESQ.(EM P
ORCENTAGEM)=";FP
5710 F = FP * LE;B = LE - F
5712 CP(0,1) = CP(0,1) - P * B /
LE
5714 CP(0,7) = CP(0,7) + P * F /
LE
5716 PRINT : PRINT "EXISTE OUTRA
CARGA EM X? SIM=1/ NAO=2"
5717 INPUT L5
5718 IF L5 = 1 THEN 5708
5719 IF CC(4) < > 1 THEN 5740
5720 PRINT : INPUT "VALOR DO TOR
COR (C/ SINAL)";MO
5721 PRINT : INPUT "DIST.DO TORC
OR EM REL.AO NO DA ESQ.(EM P
ORCENTAGEM)=";FP
5722 F = FP * LE;B = LE - F
5724 CP(0,4) = CP(0,4) - MO * B /
LE
5726 CP(0,10) = CP(0,10) - MO * F
/ LE
5728 PRINT : PRINT "EXISTE OUTRO
MOMENTO TORCOR? SIM=1/ NAO=
2"
5729 INPUT L6
5730 IF L6 = 1 THEN 5720
5740 IF CC(6) < > 1 THEN 5761
5742 PRINT : INPUT "VALOR DA CAR
GA DISTRIBUIDA POR UNIDADE D
E COMP.(C/ SINAL)=";WL
5744 INPUT "DIRECAO DA CARGA; Y=
2/ Z=3";S
5746 PRINT : INPUT "LARGURA DO T
RECHO COM CARGA (EM PORC. E
INICIANDO JUNTO AO NO DA ESQ
.)=";FP
5748 F = FP * LE;B = LE - F
5749 SS = 4: IF S = 3 THEN SS = 2

5750 CP(0,S) = CP(0,S) - WL * F *
(2 * LE ^ 3 - 2 * F * F * LE
+ F ^ 3) / (2 * LE ^ 3)
5752 CP(0,S + SS) = CP(0,S + SS) -
WL * F * F * (6 * LE * LE -
8 * F * LE + 3 * F * F) / (1
2 * LE * LE)
5754 CP(0,S + 6) = CP(0,S + 6) -
WL * F ^ 3 * (2 * LE - F) /
(2 * LE ^ 3)
5755 CP(0,S + SS + 6) = CP(0,S +

```

```

SS + 6) + WL * F * F * F * (
4 * LE - 3 * F) / (12 * LE *
LE)
5756 IF S = 3 THEN CP(0,S + SS) =
- CP(0,S + SS)
5757 IF S = 3 THEN CP(0,S + SS +
6) = - CP(0,S + SS + 6)
5758 PRINT : PRINT "EXISTE OUTRA
CARGA DISTRIBUIDA? SIM=1/ N
AO=2"
5759 INPUT L7
5760 IF L7 = 1 THEN 5742
5761 IF CC(7) < > 1 THEN 5775
5762 PRINT : INPUT "DIRECAO DA C
ARGA;Y=2 /Z=3";S
5763 PRINT : INPUT "VALOR MAX. D
A CARGA DIST. TRIAN.(C/ SINA
L)=";WL
5764 SS = 4: IF S = 3 THEN SS = 2
5765 CP(0,S) = CP(0,S) - 3 * WL *
LE / 20
5766 CP(0,S + SS) = CP(0,S + SS) -
WL * LE * LE / 30
5767 CP(0,S + 6) = CP(0,S + 6) -
WL * 7 * LE / 20
5769 CP(0,S + SS + 6) = CP(0,S +
SS + 6) + WL * LE * LE / 20
5770 IF S = 3 THEN CP(0,S + SS) =
- CP(0,S + SS)
5771 IF S = 3 THEN CP(0,S + SS +
6) = - CP(0,S + SS + 6)
5772 PRINT : PRINT "EXISTE OUTRA
CARGA DISTRIBUIDA TRIANGULA
R? SIM=1/ NAO=2"
5773 INPUT L8
5774 IF L8 = 1 THEN 5762
5775 IF CC(8) < > 1 THEN 5782
5776 PRINT : INPUT "COEF. DE DIL
ATACAO TERMICA DO MATERIAL D
O EL.";AL
5777 INPUT "TEMPERATURA DO ELEME
NTO";TE
5778 CP(0,1) = CP(0,1) + E(0) * A
(0) * AL * TE
5780 CP(0,7) = CP(0,7) - E(0) * A
(0) * AL * TE
5782 IF CC(9) < > 1 THEN 5790
5783 FOR IB = 1 TO NB
5784 PRINT : PRINT "CP(";0;",";I
B;")="
5786 INPUT ZZ
5787 CP(0,IB) = CP(0,IB) + ZZ
5788 NEXT IB
5790 LI(0) = 1
5795 GOTO 5630
5800 RETURN
5900 FOR J = 1 TO 4
5910 J1 = 3 * J - 2:J2 = 3 * J -
1:J3 = 3 * J
5920 FOR K = J1 TO NB
5930 SE(J1,K) = R1(IE) * ST(J1,K)
+ R4(IE) * ST(J2,K) + R7(IE
) * ST(J3,K)
5940 SE(J2,K) = R2(IE) * ST(J1,K)
+ R5(IE) * ST(J2,K) + R8(IE

```

```

) * ST(J3,K)
5950 SE(J3,K) = R3(IE) * ST(J1,K)
      + R6(IE) * ST(J2,K) + R9(IE
) * ST(J3,K)
5960 NEXT K
5970 NEXT J
5980 FOR II = 1 TO NB - 1
5990 FOR JJ = II TO NB
6000 SE(JJ,II) = SE(II,JJ)
6010 NEXT JJ
6020 NEXT II
6030 RETURN
6050 MP = NP * 6
6055 FOR IT = 1 TO MP
6060 FF(IT) = 0
6080 FI(IT) = 0
6090 NEXT IT
6100 FOR IV = 1 TO NV
6110 NL = (NO(IV) - 1) * NN
6120 FOR ID = 1 TO NN
6130 NG = NL + ID
6140 FF(NG) = IR(IV,ID)
6150 FI(NG) = PR(IV,ID)
6160 NEXT ID
6170 NEXT IV
6180 FOR IP = 1 TO NP
6190 KL = 0
6200 FOR IE = 1 TO NE
6210 FOR IN = 1 TO N
6220 IF LN(IE,IN) < > IP THEN 6
250
6230 KL = IE
6240 NL = IN
6250 NEXT IN
6260 NEXT IE
6270 IF KL < > 0 THEN LN(KL,NL)
= - IP
6280 NEXT IP
6290 FOR IS = 1 TO MS
6300 GS(IS) = 0
6310 NEXT IS
6320 FOR IO = 1 TO MF
6330 GL(IO) = 0
6340 EQ(IO) = 0
6350 VE(IO) = 0
6360 NA(IO) = 0
6370 NEXT IO
6500 NF = 0:KE = 0
6520 FOR IE = 1 TO NE
6530 KB = 0
6535 PRINT : PRINT "LENDO A1,R="
;IE
6540 PRINT D$;"OPEN A1,D";D1;"",L
2000"
6550 PRINT D$;"READ A1,R";IE
6560 FOR I = 1 TO NB
6570 FOR J = 1 TO NB
6580 INPUT ST(I,J)
6590 NEXT J
6600 NEXT I
6610 PRINT D$;"CLOSE A1"
6614 GOSUB 5900
6616 FOR IN = 1 TO N
6620 FOR ID = 1 TO NN
6625 NS = (IN - 1) * NN + ID
6630 LC = LN(IE,IN)

```

```

6640 IF LC > 0 THEN LO(NS) = (LC
- 1) * NN + ID
6650 IF LC < 0 THEN LO(NS) = (LC
+ 1) * NN - ID
6660 NEXT ID
6670 NEXT IN
6680 FOR IB = 1 TO NB
6690 NK = ABS (LO(IB))
6700 KX = 0
6710 FOR IO = 1 TO NF
6720 IF NK < > NA(IO) THEN 6760

6730 KB = KB + 1
6740 KX = 1
6750 ND(KB) = IO
6760 NEXT IO
6770 IF KX < > 0 THEN 6860
6780 FOR IO = 1 TO MF
6790 IF NA(IO) < > 0 THEN 6840
6800 NA(IO) = NK
6810 KB = KB + 1
6820 ND(KB) = IO
6830 GOTO 6850
6840 NEXT IO
6850 IF ND(KB) > NF THEN NF = ND
(KB)
6860 NEXT IB
6870 FOR IB = 1 TO NB
6880 TT = ND(IB)
6890 GL(TT) = GL(TT) + EL(IE, IB)
6910 FOR JB = 1 TO IB
6920 JT = ND(JB)
6930 NG = (JT * JT - JT) / 2 + TT

6940 NH = (TT * TT - TT) / 2 + JT

6950 IF JT > = TT THEN GS(NG) =
GS(NG) + SE(IB, JB)
6960 IF JT < TT THEN GS(NH) = GS
(NH) + SE(IB, JB)
6970 NEXT JB
6980 NEXT IB
6990 FOR IB = 1 TO NB
7000 NK = - LO(IB)
7010 IF NK < = 0 THEN 7540
7020 FOR IO = 1 TO NF
7030 IF NA(IO) < > NK THEN 7500

7050 FOR JF = 1 TO MF
7060 IF IO < JF THEN NL = (JF *
JF - JF) / 2 + IO
7070 IF IO > = JF THEN NL = (IO
* IO - IO) / 2 + JF
7080 EQ(JF) = GS(NL)
7090 GS(NL) = 0
7100 NEXT JF
7110 ER = GL(IO)
7120 GL(IO) = 0
7130 KE = KE + 1
7145 PRINT : PRINT "GRAVANDO A2,
R="; KE
7146 PRINT : PRINT "ER="; ER
7150 PRINT D$; "OPEN A2, D"; D3; ", L
"; FM
7160 PRINT D$; "WRITE A2, R"; KE
7170 PRINT ER: PRINT IO: PRINT N

```

```

K
7180 FOR I = 1 TO MF
7190 PRINT EQ(I)
7195 NEXT I
7196 PRINT D$;"CLOSE A2"
7310 PI = EQ(I0)
7315 PRINT : PRINT PI: PRINT
7320 EQ(I0) = 0
7330 IF FF(NK) = 0 THEN 7370
7340 FOR JF = 1 TO NF
7350 GL(JF) = GL(JF) - FI(NK) * E
      Q(JF)
7355 NEXT JF
7360 GOTO 7470
7370 FOR JF = 1 TO NF
7380 GL(JF) = GL(JF) - EQ(JF) * E
      R / PI
7400 IF EQ(JF) = 0 THEN 7460
7410 NL = (JF * JF - JF) / 2
7420 FOR LF = 1 TO JF
7430 NG = LF + NL
7440 GS(NG) = GS(NG) - EQ(JF) * E
      Q(LF) / PI
7450 NEXT LF
7460 NEXT JF
7470 EQ(I0) = PI
7480 NA(I0) = 0
7490 GOTO 7510
7500 NEXT I0
7510 IF NA(NF) < > 0 THEN 7540
7520 NF = NF - 1
7530 IF NF > 0 THEN 7510
7540 NEXT IB
7550 NEXT IE
7555 PRINT : PRINT "LEND0 A2,R="
      ;KE
7560 PRINT D$;"OPEN A2,D";D3;" ,L
      ";FM
7570 PRINT D$;"READ A2,R";KE
7580 INPUT ER,I0,NK
7590 FOR I = 1 TO MF
7600 INPUT EQ(I)
7610 NEXT I
7615 PRINT D$;"CLOSE A2"
7648 PRINT : PRINT "ER=";ER
7650 PI = EQ(I0)
7660 IF FF(NK) = 1 THEN VE(I0) =
      FI(NK)
7670 IF FF(NK) = 0 THEN EQ(I0) =
      0
7680 FOR JF = 1 TO MF
7690 ER = ER - VE(JF) * EQ(JF)
7700 NEXT JF
7710 IF FF(NK) = 0 THEN VE(I0) =
      ER / PI
7720 IF FF(NK) = 1 THEN FI(NK) =
      INT ( - ER * 100 + 0.5) / 1
      00
7730 AS(NK) = VE(I0)
7740 KE = KE - 1
7750 IF KE > 0 THEN 7555
7760 FOR IE = 1 TO NE
7770 FOR IN = 1 TO N
7780 LN(IE,IN) = ABS (LN(IE,IN))
7790 NEXT IN

```

```

7800 NEXT IE
8500 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
      : PRINT
8510 PR# 1: PRINT "          DES
      LOCAMENTOS NODAIS"
8520 PR# 1: PRINT "          ---
      -----"
8530 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT

8540 IF DI = 3 THEN PRINT "NO
      DESL.X/ROT.X          DESL.
      Y/ROT.Y          DESL.Z/ROT.Z"

8560 FOR IP = 1 TO NP
8570 NH = (IP - 1) * NN + 1
8580 PR# 1
8584 PRINT IP; TAB( 5);AS(NH); TAB(
      25);AS(NH + 1); TAB( 45);AS(
      NH + 2)
8586 PRINT TAB( 5);AS(NH + 3); TAB(
      25);AS(NH + 4); TAB( 45);AS(
      NH + 5)
8587 PR# 0
8590 NEXT IP
8600 RETURN
8612 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
      : PR# 0
8614 PR# 1: PRINT "          ESF
      ORCOS NOS ELEMENTOS E REACOE
      S NOS VINCULOS": PR# 0
8616 PR# 1: PRINT "          ---
      -----"
      -----": PR# 0
8618 PR# 1: PRINT : PRINT : PR#
      0
8620 HOME : PR# 0: PRINT : PRINT
      : PRINT : PRINT : PRINT
8625 PR# 1: PRINT : PRINT "
      ESFORCOS NOS ELEMENTOS(SIST.
      COORD.DO ELEM.): PRINT
8627 PRINT "EL NO          FX/MX
      FY/MY          FZ/M
      Z"
8630 PR# 0: PRINT "POSICIONE OS
      DISQUETES DE GRAVACAO DE DES
      L/REAC/FORCA": INPUT "E DE L
      EITURA DAS MAT. RIG./ROT.E E
      NTRE COM QUALQUER NO.":QN
8655 FOR IE = 1 TO NE
8725 PRINT D$;"OPEN A1,D";D1;"",L
      2000"
8730 PRINT D$;"READ A1,R";IE
8740 FOR I = 1 TO NB
8750 FOR J = 1 TO NB
8760 INPUT ST(I,J)
8770 NEXT J
8780 NEXT I
8790 PRINT D$;"CLOSE A1"
8795 IQ = 0
8800 FOR IT = 1 TO N
8805 FOR IL = 1 TO NN
8810 IQ = IQ + 1
8815 NQ = (LN(IE,IT) - 1) * NN +
      IL
8820 AR(IQ) = AS(NQ)
8825 NEXT IL

```

```

8830 NEXT IT
8835 FOR JJ = 1 TO NB
8840 FE(JJ) = 0
8845 FOR KK = 1 TO NB
8850 FE(JJ) = FE(JJ) + ST(JJ, KK) *
      AR(KK)
8855 NEXT KK
8856 F(JJ) = INT (FE(JJ) * 100 +
      .5) / 100
8857 NEXT JJ
8870 PR# 1: PRINT IE; TAB( 5);LN
      (IE,1); TAB( 11);F(1); TAB(
      25);F(2); TAB( 39);F(3)
8875 PRINT TAB( 11);F(4); TAB(
      25);F(5); TAB( 39);F(6)
8880 PRINT TAB( 5);LN(IE,2); TAB(
      11);F(7); TAB( 25);F(8); TAB(
      39);F(9)
8881 PRINT TAB( 11);F(10); TAB(
      25);F(11); TAB( 39);F(12)
8882 PR# 0: INPUT "PARA CADA NOV
      O ELEMENTO ENTRE COM UM NO.0
      QUALQUER";N0
8886 IF OP(6) < > 1 THEN 8985
8887 PRINT D$;"OPEN FORCA,D";D2;
      ",L240"
8888 PRINT D$;"WRITE FORCA,R";IE

8889 FOR KK = 1 TO NB
8890 PRINT F(KK)
8892 NEXT KK
8894 PRINT D$;"CLOSE FORCA"
8905 NEXT IE
8906 IF OP(6) = 1 THEN GOSUB 91
      00
8990 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
      " REACOES NOS VINCULOS (
      SIST.COORD.GERAL)"
9000 PR# 1: PRINT : PRINT "NO
      FX/MX          FY/MY
      FZ/MZ": PR# 0
9010 NB = 0
9020 FOR IP = 1 TO NP
9030 NB = FF(NN * IP - 5) + FF(NN
      * IP - 4) + FF(NN * IP - 3)
      + FF(NN * IP - 2) + FF(NN *
      IP - 1) + FF(NN * IP)
9040 IF NB = 0 THEN 9060
9050 PR# 1: PRINT IP; TAB( 4);FI
      (NN * IP - 5); TAB( 18);FI(N
      N * IP - 4); TAB( 32);FI(NN *
      IP - 3)
9060 PRINT TAB( 4);FI(NN * IP -
      2); TAB( 18);FI(NN * IP - 1)
      ; TAB( 32);FI(NN * IP); PR#
      0
9070 NEXT IP
9080 RETURN
9100 PRINT : PRINT
9106 FOR IE = 1 TO NE
9110 IQ = 0
9120 FOR IT = 1 TO N
9130 FOR IL = 1 TO NN
9140 IQ = IQ + 1
9150 NQ = (LN(IE,IT) - 1) * NN +
      IL

```



```

9160 AR(IQ) = AS(NQ)
9170 NEXT IL
9180 NEXT IT
9190 PRINT D$;"OPEN DESL,D";D2;"
,L240"
9200 PRINT D$;"WRITE DESL,R";IE
9210 FOR KK = 1 TO NB
9220 PRINT AR(KK)
9230 NEXT KK
9240 PRINT D$;"CLOSE DESL"
9310 NEXT IE
9320 NB = 0
9330 FOR IP = 1 TO NP
9340 NB = FF(NN * IP - 5) + FF(NN
* IP - 4) + FF(NN * IP - 3)
+ FF(NN * IP - 2) + FF(NN *
IP - 1) + FF(NN * IP)
9350 IF NB = 0 THEN 942I
9360 PRINT D$;"OPEN REAC,D";D2;"
,L120"
9370 PRINT D$;"WRITE REAC,R";IP
9380 PRINT IP
9390 PRINT FI(NN * IP - 5): PRINT
FI(NN * IP - 4): PRINT FI(NN
* IP - 3)
9400 PRINT FI(NN * IP - 2): PRINT
FI(NN * IP - 1): PRINT FI(NN
* IP)
9410 PRINT D$;"CLOSE REAC"
9420 NEXT IP
9430 RETURN
9500 PR# 1: RESTORE : PRINT : PRINT
" PESOS E COMPRIMENTOS D
OS ELEMENTOS": PRINT
9510 PRINT "EL PESO COMP.
AREA"
9515 PT = 0
9520 FOR IE = 1 TO NE
9530 PE = INT (A(IE) * WD(IE) *
LX(IE) * 100 + 0.5) / 100
9540 PT = PT + PE
9550 PR# 1: PRINT IE; TAB( 4);PE
; TAB( 14);LX(IE); TAB( 23);
A(IE)
9560 NEXT IE
9570 PR# 1: PRINT : PRINT : PRINT
"PESO TOTAL DA ESTRUTURA= "
;PT
9580 RETURN

```

## ANEXO 4 - CÓDIGO DE ERROS

- ERRO 1 - Número de pontos menor ou igual à 0
- ERRO 2 - Número de nós maior que o número de elementos vezes o número de nós por elemento
- ERRO 3 - Número de nós restritos menor que 1
- ERRO 4 - Número de nós restritos maior que o número de nós da estrutura
- ERRO 5 - Número de casos de carga  $\leq 0$
- ERRO 6 - Número de nós maior que 30
- ERRO 7 - Número de nós restritos maior que 15
- ERRO 8 - Número de materiais diferentes maior que 10
- ERRO 10 - Número de materiais diferentes menor que 1
- ERRO 11 - Número de materiais diferentes maior que o número de elementos
- ERRO 14 - Existem nós diferentes com as mesmas coordenadas
- ERRO 15 - Os nós que formam um elemento são menores que 0
- ERRO 16 - Os nós que formam um elemento são maiores que o número máximo de nós
- ERRO 17 - Um mesmo nó aparece mais de uma vez em um determinado elemento
- ERRO 18 - Um determinado número de nó não aparece nenhuma vez na formação dos elementos
- ERRO 19 - Existem coordenadas para os nós que não aparecem na formação dos elementos
- ERRO 20 - O nó que não aparece na formação dos elementos é restrito
- ERRO 21 - A FRENTE é maior que MF
- ERRO 22 - Um nó restrito tem número negativo
- ERRO 23 - Um nó restrito tem número maior que o número máximo de nós da estrutura
- ERRO 24 - Um nó restrito tem todos os seus códigos da restrição iguais à 0

ERRO 25 - Existem nós restritos com a mesma numeração

**ANEXO 5 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO**

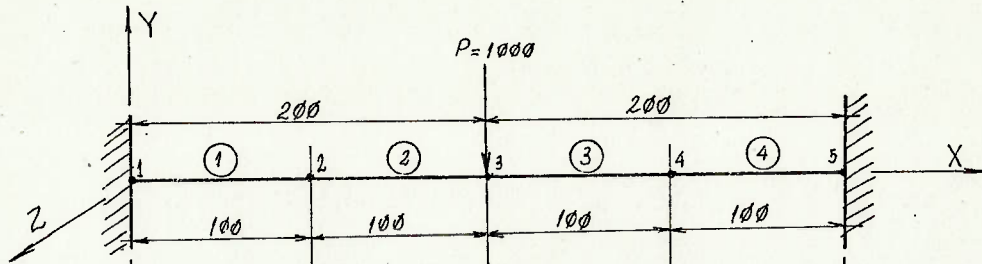
## OBSERVAÇÕES SOBRE OS EXEMPLOS APRESENTADOS:

Todos os exemplos apresentados foram cálculos estruturais executados para a empresa na qual trabalho; somente o exemplo 1 encontra-se aqui colocado para demonstrar a precisão do método em um caso simples.

No exemplo 2, tratamos de uma estrutura para levantamento de grelha num projeto de saneamento.

O exemplo 3 é uma estrutura para desaerador e finalmente, o exemplo 4 é uma ponte de decantação de efluentes.

EXEMPLO 1



	VE	VT	VE	VT	VE	VT	VE	VT	VE	VT
M	50000	50000	0	0	50000	50000	0	0	-50000	-50000
Q	500	500	500	500	500	500	-500	-500	-500	-500
$\delta$	0	0	-0.03307	-0.03307	-0.06614	-0.06614	-0.03307	-0.03307	0	0

VE = Valor encontrado pelo programa  
VT = Valor teórico.

TESTE  
(PROBLEMA NO. = 1)

LER/IMPRIMIR DADOS

NO. TOTAL DE ELEMENTOS=NE.  
NO. TOTAL DE NOS=NP  
NO. DE NOS COM ALGUNA RESTRICAO=NV  
NO. DE MATERIAIS DIFERENTES=NM  
NO. DE CASOS DE CARGA=NC

NE=4 NP=5 NV=2 NM=1 NC=1

COORDENADAS NODAIS

NO	X	Y	Z
1	0	0	0
2	100	0	0
3	200	0	0
4	300	0	0
5	400	0	0

FORMACAO DOS ELEMENTOS

EL	N01	N02	N03
1	1	2	0
2	2	3	0
3	3	4	0
4	4	5	0

RESTRICOES E VALORES DE DESLOCAMENTO

NO	COD.RES	DX	DY	DZ	DDX	DDY	DDZ
1	111111	0	0	0	0	0	0
5	111111	0	0	0	0	0	0

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	E	G	W
1	2100000	800000	7.85E-03

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

EL	IX/A	IY/FFY	IZ/FFZ	MAT
1	1	1	2400	1
	30	0	0	
2	1	1	2400	1
	30	0	0	
3	1	1	2400	1
	30	0	0	
4	1	1	2400	1
	30	0	0	

FRENTE ENCONTRADA=12  
 \*\*\*\*\*

MATRIZES DE ROTACAO/RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

---

ELEMENTO=1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

COMP.DO EL.=100

ELEMENTO=2

1	0	0
0	1	0
0	0	1

COMP.DO EL.=100

ELEMENTO=3

1	0	0
0	1	0
0	0	1

COMP.DO EL.=100

ELEMENTO=4

1	0	0
0	1	0
0	0	1

COMP.DO EL.=100



TESTE DE EDICAO  
(PROBLEMA NO.=1)

RESTRICOES E VALORES DE DESLOCAMENTO

NO.	COD.RES	DX	DY	DZ	DDX	DDY	DDZ
1	111111	0	0	0	0	0	0
5	111111	0	0	0	0	0	0

]

\*\*\*\*\* CASO DE CARGA NO. = 1 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

CARGAS NODAIS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
3 0		-1000 0	0	0	0	0

CARGAS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
----	----	----	----	----	----	----

CARGAS TOTAIS (SIST.COORD.GERAL)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
2 0		0 0	0	0	0	0
0		-1000 0	0	0	0	0

DESLOCAMENTOS NODAIS

---

NO	DESL.X/ROT.X	DESL.Y/ROT.Y	DESL.Z/ROT.Z
1	0	0	0
	0	0	0
2	0	-.0330687831	0
	0	0	-4.96031748E-04
3	0	-.0661375663	0
	0	0	3.04952154E-13
4	0	-.0330687832	0
	0	0	4.96031747E-04
5	0	0	0
	0	0	0

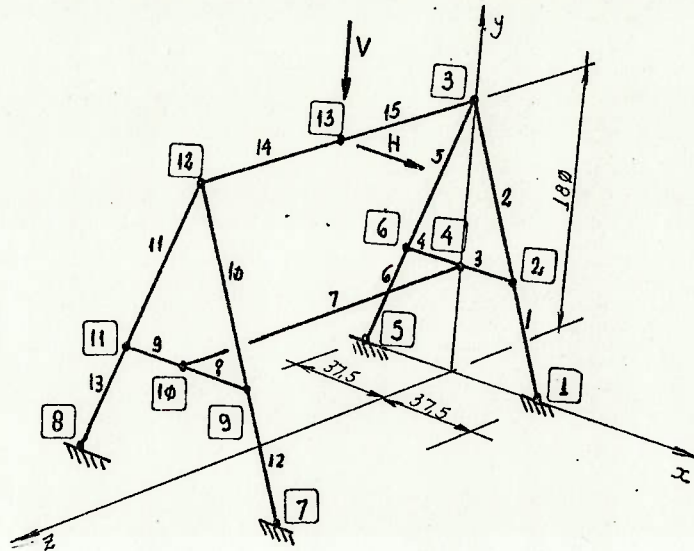
ESFORÇOS NOS ELEMENTOS E REACOES NOS VINCULOS

---

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS(SIST.COORD.DO ELEM.)

EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	1	0	500	0
		0	0	50000
	2	0	-500	0
		0	0	0
2	2	0	500	0
		0	0	0
	3	0	-500	0
		0	0	50000
3	3	0	-500	0
		0	0	-50000
	4	0	500	0
		0	0	0
4	4	0	-500	0
		0	0	0
	5	0	500	0
		0	0	-50000

EXEMPLO 2



PORTICO PARA LEVANTAMENTO  
(PROBLEMA NO.=1)

LER/IMPRIMIR DADOS

NO.TOTAL DE ELEMENTOS=NE  
 NO.TOTAL DE NOS=NP  
 NO.DE NOS COM ALGUMA RESTRICAM=NV  
 NO.DE MATERIAIS DIFERENTES=NM  
 NO.DE CASOS DE CARGA=NC

NE=15 NP=13 NV=4 NM=3 NC=1

COORDENADAS NODAIS

NO	X	Y	Z
1	37.5	0	0
2	12.5	120	0
3	0	180	0
4	0	120	0
5	-37.5	0	0

6	-12.5	120	0
7	37.5	0	350
8	-37.5	0	350
9	12.5	120	350
10	0	120	350
11	-12.5	120	350
12	0	180	350
13	0	180	175

FORMACAO DOS ELEMENTOS

EL	N01	N02	N03
1	1	2	0
2	2	3	0
3	2	4	0
4	4	6	0
5	3	6	0
6	6	5	0
7	4	10	0
8	10	9	0
9	10	11	0
10	9	12	0
11	12	11	0
13	11	8	0
12	9	7	0
14	12	13	0
15	13	3	0

RESTRICOES E VALORES DE DESLOCAMENTO

NO	COD.RES	DX	DY	DZ	DDX	DDY	DDZ
1	111111	0	0	0	0	0	0
5	111111	0	0	0	0	0	0
7	111111	0	0	0	0	0	0
8	111111	0	0	0	0	0	0

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	E	G	W
1	2100000	800000	1
2	2100000	800000	1
3	2100000	800000	1

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

EL	IX/A	IY/FFA	IZ/W	MAT
1	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
2	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
3	602	301	301	3
	21	2	1	
4	602	301	301	3
	21	2	1	
5	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
6	2344	1172	1172	1
	36	2	1	

7	602	301	301	3
	21	2	1	
8	602	301	301	3
	21	2	1	
9	602	301	301	3
	21	2	1	
10	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
11	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
12	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
13	2344	1172	1172	1
	36	2	1	
14	13372	6686	6686	2
	77	2	1	
15	13372	6686	6686	2
	77	2	1	

FRENTE ENCONTRADA=30  
 \*\*\*\*\*

MATRIZES DE ROTACAO/RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

---

ELEMENTO=1

-.203954254	.978980419	0
.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=122.576507

ELEMENTO=2

-.203954254	.978980419	0
.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=61.2882534

ELEMENTO=3

-1	0	0
0	1	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=12.5

ELEMENTO=4

-1	0	0
0	1	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=12.5

ELEMENTO=5

-.203954254	-.978980419	0
-.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=61.2882534

ELEMENTO=6

-.203954254	-.978980419	0
-.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=122.576507

ELEMENTO=7

0	0	.999999999
0	.999999999	0
-.999999999	0	0

COMP.DO EL.=350

ELEMENTO=8

1	0	0
0	1	0
0	0	1

COMP.DO EL.=12.5

ELEMENTO=9

-1	0	0
0	1	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=12.5

ELEMENTO=10

-.203954254	.978980419	0
.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=61.2882534

ELEMENTO=11

-.203954254	-.978980419	0
-.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=61.2882534

ELEMENTO=12

.203954254	-.978980419	0
.978980419	.203954254	0
0	0	1

COMP.DO EL.=122.576507

ELEMENTO=13

-.203954254	-.978980419	0
-.978980419	.203954254	0
0	0	-1

COMP.DO EL.=122.576507

ELEMENTO=14

0	0	-1
0	1	0
1	0	0



COMP.DO EL.=175

ELEMENTO=15

0	0	-1
0	1	0
1	0	0

COMP.DO EL.=175

DESEJA ENTRAR COM CARGAS? SIM=1/ NAO=2  
?

\*\*\*\*\* CASO DE CARGA NO.= 1 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

CARGAS NODAIS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
13	3450	-5900	0	0	0	0

CARGAS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
14	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

CARGAS TOTAIS (SIST.COORD.GERAL)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
14	0	0	0	0	0	0
	3450	-5900	0	0	0	0

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESL.X/ROT.X	DESL.Y/ROT.Y	DESL.Z/ROT.Z
1	0	0	0
	0	0	0
2	.0218	-4.58E-03	-.02163
	-1.8E-04	8.3E-04	-2.8E-04

3	.04542	-3.74E-03	2.88E-03
	1.09E-03	1.42E-03	-4.2E-04
4	.0218	-2.52E-03	-9.66E-03
	-6E-05	7.8E-04	-2.1E-04
5	0	0	0
	0	0	0
6	.0218	-4.1E-04	-1.95E-03
	6E-05	8.3E-04	-2.9E-04
7	0	0	0
	0	0	0
8	0	0	0
	0	0	0
9	.0218	-4.58E-03	.02163
	1.8E-04	-8.3E-04	-2.9E-04
10	.0218	-2.52E-03	9.66E-03
	6E-05	-7.8E-04	-2.1E-04
11	.0218	-4.1E-04	1.95E-03
	-6E-05	-8.3E-04	-2.9E-04
12	.04542	-3.74E-03	-2.88E-03
	-1.09E-03	-1.42E-03	-4.2E-04
13	.23393	-.20928	0
	0	0	-4.2E-04

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS E REAÇÕES NOS VINCULOS

---

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

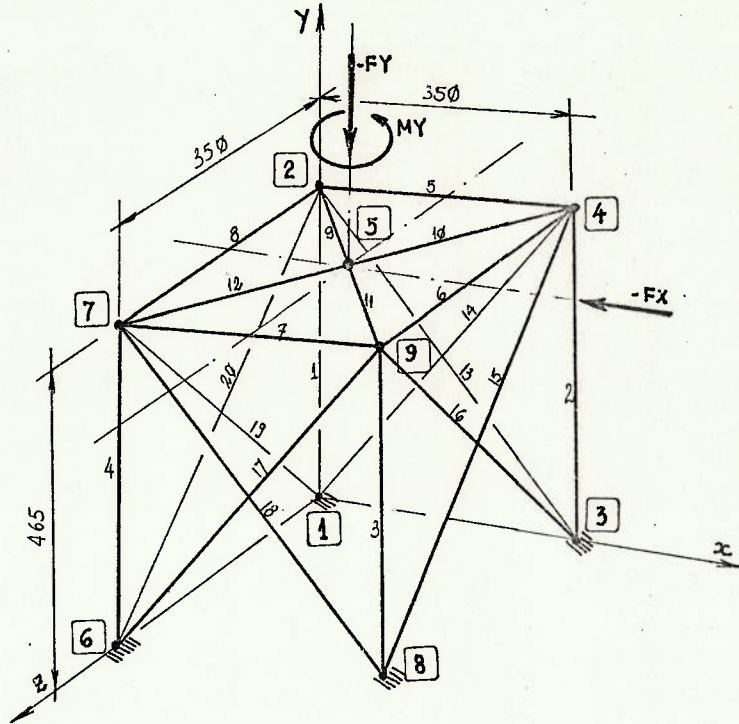
EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	1	5507.6	-45.82	-299.21
		-12992.23	18477.16	-8430.03
	2	-5507.6	45.82	299.21
		12992.23	18198.69	2814.15
2	2	4927.96	-153.01	-1398.44
		-9747.3	-11906.62	-10311.05
	3	-4927.96	153.01	1398.44
		9747.3	97614.74	933.13
3	2	0	574.31	1092.76
		4623.36	-4301.32	7129.17
	4	0	-574.31	-1092.76
		-4623.36	-9358.12	49.65
4	4	0	581.47	-1347.68
		4623.36	5894.63	-411.28
	6	0	-581.47	1347.68
		-4623.36	10951.43	7679.6
5	3	-1921.07	-169.73	1295.13
		-24099.91	-75348.94	19.4
	6	1921.07	169.73	-1295.13
		24099.91	-4027.38	-10421.62
6	6	-2494.67	-51.53	-68.08
		-12617.82	6392.21	2664.83
	5	2494.67	51.53	68.08
		12617.82	1953.04	-8980.93
7	4	-2434.32	0	0
		0	2817.36	216.72
	10	2434.32	0	0
		0	-2817.36	-216.72
8	10	0	-574.31	-1092.76
		-4623.36	9358.12	-49.65
	9	0	574.31	1092.76
		4623.36	4301.32	-7129.17
9	10	0	581.47	1347.68
		-4623.36	-5894.63	-411.28

11	0	-581.47	-1347.68
	4623.36	-10951.43	7679.6
10	9	4927.96	-153.01
	9747.3	11906.62	1398.44
	12	-4927.96	-10311.05
	-9747.3	153.01	-1398.44
11	12	-97614.74	933.13
	-1921.07	-169.73	-1295.13
	24099.91	75348.94	19.4
	11	169.73	1295.13
	-24099.91	4027.38	-10421.62
12	9	5507.6	45.82
	12992.23	-18198.69	299.21
	7	-5507.6	-2814.15
	-12992.23	-45.82	-299.21
13	11	-18477.16	8430.03
	-2494.67	-51.53	68.08
	12617.82	-6392.21	2664.83
	8	51.53	-68.08
	-12617.82	-1953.04	-8980.93
14	12	2661.12	2938.47
	0	36048.1	-1714.03
	13	-2661.12	169663.14
	0	-2938.47	1714.03
15	13	2661.12	263906.98
	0	-2938.47	344568.9
	0	-263906.98	1714.03
	3	-2661.12	-344568.9
	0	2938.47	-1714.03
	0	-36048.1	-169663.14

REACOES NOS VICULOS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	-1166.39	5384.55	297.08
	20659.92	-8968.87	8347.87
5	-558.61	-2434.55	-67
	-4437.54	-11932.69	8935.87
7	-1166.39	5384.55	-297.08
	-20659.91	8968.87	8347.87
8	-558.61	-2434.55	67
	4437.54	11932.69	8935.87

EXEMPLO 3



ESTRUTURA SUPORTE DO AERADOR  
(PROBLEMA NO. 1)

LER/IMPRIMIR DADOS

NO. TOTAL DE ELEMENTOS=NE  
NO. TOTAL DE NOS=NP  
NO. DE NOS COM ALGUMA RESTRICAM=NV  
NO. DE MATERIAIS DIFERENTES=NM  
NO. DE CASOS DE CARGA=NC

NE=20 NP=9 NV=4 NM=3 NC=1

COORDENADAS NODAIS

NO X Y Z

3	350	0	0
4	350	465	0
5	175	465	175
6	0	0	350
7	0	465	350
8	350	0	350
9	350	465	350

FORMACAO DOS ELEMENTOS

EL	N01	N02	N03
1	1	2	7
2	3	4	9
3	8	9	4
4	6	7	2
5	2	4	1
6	4	9	8
7	9	7	6
8	7	2	6
9	2	5	1
10	4	5	3
11	9	5	8
12	7	5	6
13	2	3	4
14	1	4	2
15	4	8	9
16	3	9	8
17	9	6	7
18	8	7	9
19	1	7	2
20	2	6	7

RESTRICOES E VALORES DE DESLOCAMENTO

NO	COD.RES	DX	DY	DZ	DDX	DDY	DDZ
1	111111	0	0	0	0	0	0
3	111111	0	0	0	0	0	0
6	111111	0	0	0	0	0	0
8	111111	0	0	0	0	0	0

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	E	G	W
1	2100000	800000	1
2	2100000	800000	1
3	2100000	800000	1

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

EL	IX/A	IY/FFA	IZ/W	MAT
1	20	621	1958	1
	47.3	0	1	
2	20	621	1958	1
	47.3	0	1	
3	20	621	1958	1
	47.3	0	1	

4	20	621	1758	1
	47.3	0	1	
5	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
6	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
7	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
9	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
9	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
10	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
11	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
12	5.3	76	919	2
	23.6	0	1	
13	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
14	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
15	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
16	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
17	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
18	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
19	5.8	183	183	3
	18.5	0	1	
20	5.3	183	183	3
	18.5	0	1	

FRENTE ENCONTRADA=54

\*\*\*\*\*

MATRIZES DE ROTACAO/RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

ELEMENTO=1

0	1	0
0	0	.9999999999
.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=465

ELEMENTO=2

0	1	0
0	0	.9999999999
.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=465

ELEMENTO=3

0	1	0
0	0	-.9999999999
-.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=465

ELEMENTO=4

0	1	0
0	0	-.9999999999
-.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=465

ELEMENTO=5

.9999999999	0	0
0	.9999999999	0
0	0	.9999999999

COMP.DO EL.=350

ELEMENTO=6

0	0	.9999999999
0	.9999999999	0
-.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=350

ELEMENTO=7

-.9999999999	0	0
0	.9999999999	0
0	0	-.9999999999

COMP.DO EL.=350

ELEMENTO=8

0	0	-.9999999999
0	.9999999999	0
.9999999999	0	0

COMP.DO EL.=350

ELEMENTO=9

.707106781	0	.707106781
0	.9999999999	0
-.707106781	0	.707106781

COMP.DO EL.=247.487373

ELEMENTO=10

-.707106781	0	.707106781
0	.9999999999	0
-.707106781	0	-.707106781

COMP.DO EL.=247.487373

ELEMENTO=11

-.707106781	0	-.707106781
0	.9999999999	0
.707106781	0	-.707106781

COMP.DO EL.=247.487373

ELEMENTO=12

.707106781	0	-.707106781
0	.9999999999	0
.707106781	0	.707106781

COMP.DO EL.=247.487373

ELEMENTO=13

.601373682	-.798967892	0
.798967891	.601373682	0
0	0	.9999999999



COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=14

.601373682	.798967892	0
-.798967892	.601373682	0
0	0	.999999999

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=15

0	-.798967892	.601373682
0	.601373682	.798967891
-.999999999	0	0

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=16

0	.798967892	.601373682
0	-.601373682	.798967892
.999999999	0	0

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=17

-.601373682	-.798967892	0
-.798967891	.601373682	0
0	0	-.999999999

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=18

-.601373682	.798967892	0
.798967892	.601373682	0
0	0	-.999999999

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=19

0	.798967892	.601373682
0	.601373682	-.798967892
-.999999999	0	0

COMP.DO EL.=582.00086

ELEMENTO=20

0	-.798967892	.601373682
0	.601373682	.798967892
-.999999999	0	0

COMP.DO EL.=582.00086

DESEJA ENTRAR COM CARGAS? SIM=1/ NAO=2  
?

\*\*\*\*\* CASO DE CARGA NO.= 1 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

CARGAS NODAIS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
5	-440	-1646 0	0	0	89000 0	0

CARGAS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
9	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

CARGAS TOTAIS (SIST.COORD.GERAL)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
9	0	0	0	0	0	0
	-440	-1646 0	0	0	89000 0	0

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESL.X/ROT.X	DESL.Y/ROT.Y	DESL.Z/ROT.Z
1	0	0	0
2	-8.11E-03 6E-04	-1.97E-03 -1.08E-03	2.41E-03 -1.07E-03
3	0	0	0
4	-8.11E-03 5.5E-04	-7.2E-04 -1.29E-03	-2.26E-03 1.15E-03
5	-6.87E-03 0	-.4185 9.24E-03	0 0
6	0	0	0
7	-2.6E-03 -5.5E-04	-1.96E-03 -1.29E-03	3.11E-03 -1.14E-03
8	0	0	0
9	-2.6E-03 -6E-04	-7.3E-04 -1.07E-03	-3.26E-03 1.09E-03

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS E REACOES NOS VINCULOS

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ (MAIOR J)
1	1	420.82 37.16	67.28 -6295.14	39.98 10236.12
2	2	-420.82 -37.16	-67.28 -12296.81	-39.98 20947.22
2	3	153.8 44.39	63.86 6156.91	-40.35 9984.7
	4	-153.8 -44.39	-63.86 12607.3	40.35 19711.54
3	8	155.94 36.82	66.86 -6019.76	39.04 10239.14
	9	-155.94 -36.82	-66.86 -12133.6	-39.04 20850.23
4	6	418.68 44.39	64.28 6488.38	-41.66 10091.68
	7	-418.68 -44.39	-64.28 12882.68	41.66 19808.52
5	2	0 .61	6.89 -3182.91	18.74 -11035.88
	4	0 -.61	-6.89 -3374.43	-18.74 13446.28
6	4	141.6 .73	4.73 -3371.87	18.69 -5513.05
	9	-141.6 -.73	-4.73 -3171.23	-18.69 7169.15
7	9	0 .61	5.39 -3177.96	18.73 -11352.85
	7	0 -.61	-5.39 -3378.6	-18.73 13239.59
8	7	-99.12 .85	4.73 -3380.99	18.77 -5513.05
	2	99.12 -.85	-4.73 -3189.47	-18.77 7169.15
9	2	165.67 -5.69	413.12 9091.17	-127.25 41912.07
	5	-165.67 5.69	-413.12 22401.52	127.25 60328.83
10	4	-144.43	411.91	-123.98

		7.27	8551.13	41486.71
	5	144.43	-411.01	123.98
		-7.27	22132.33	60234.31
11	9	-143.02	412.34	-127.06
		-5.94	9074.07	41705.38
	5	143.02	-412.34	127.06
		5.94	22371.52	60342.7
12	7	164.26	410.46	-123.63
		7.15	8508.23	41472.84
	5	-164.26	-410.46	123.63
		-7.15	22089.44	60110.16
13	2	-220.5	-7.46	1.21
		9.76	-465.69	-2878.29
	3	220.5	7.46	-1.21
		-9.76	-241.05	-1465.23
14	1	363.96	7.69	8.33
		5.58	-1620.2	1477.55
	4	-363.96	-7.69	-8.33
		-5.58	-3225.02	2996.26
15	4	-52.32	-3.8	-.78
		13.73	322.6	-1467.92
	8	52.32	3.8	.78
		-13.73	133.7	-741.58
16	3	169.8	-4.03	-10.25
		1.59	1982.17	-777.63
	9	-169.8	4.03	10.25
		-1.59	3982.04	-1570
17	9	143.31	-7.38	1.19
		9.69	-455.59	-2867.79
	6	-143.31	7.38	-1.19
		-9.69	-238.89	-1428.32
18	8	.16	7.84	8.35
		5.58	-1625.99	1527.67
	7	-.16	-7.84	-8.35
		-5.58	-3230.81	3033.17
19	1	-20.31	3.83	-.98
		13.68	196.05	751.28
	7	20.31	-3.83	.98
		-13.68	374.4	1477.62
20	2	201.81	-4.07	10.43
		1.75	-4028.62	-1579.7
	6	-201.81	4.07	-10.43
		-1.75	-2041.92	-787.33

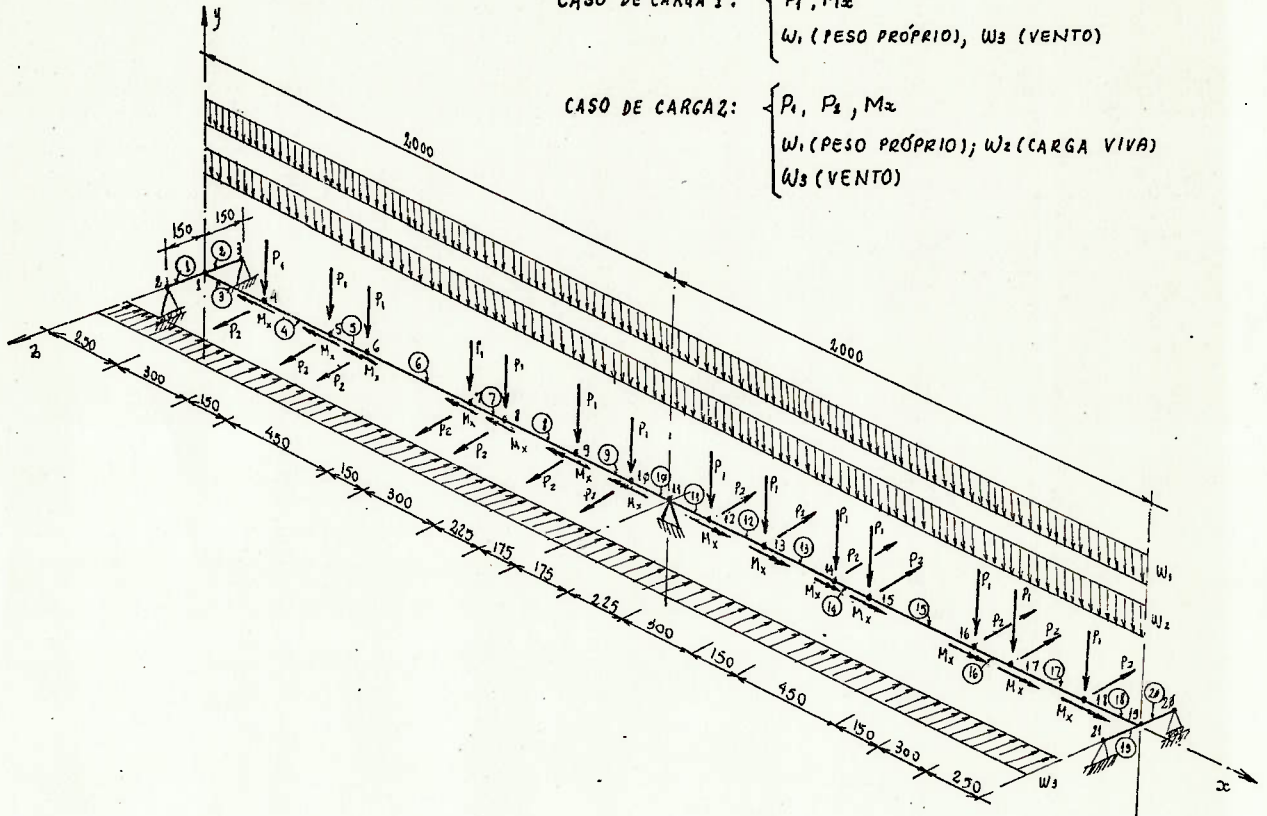
REACOES NOS VICULOS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	253.75	703.28	60.93
	10946.13	-805.01	-4983.06
3	87.86	119.72	161.56
	9031.88	-1279.11	6272.81
6	132.14	701.97	-181.48
	-9109.31	-1317.48	-6677.82
8	-33.75	121.03	-41.01
	-10868.7	-843.38	4578.05

## EXEMPLO 4

CASO DE CARGA 1:  $\left\{ \begin{array}{l} P_1, M_x \\ W_1 \text{ (PESO PRÓPRIO)}, W_3 \text{ (VENTO)} \end{array} \right.$

CASO DE CARGA 2:  $\left\{ \begin{array}{l} P_1, P_2, M_x \\ W_1 \text{ (PESO PRÓPRIO)}; W_2 \text{ (CARGA VIVA)} \\ W_3 \text{ (VENTO)} \end{array} \right.$



PONTE ESMIL 40 M  
(PROBLEMA NO. = 1)

LER/IMPRIMIR DADOS

NO. TOTAL DE ELEMENTOS=NE  
 NO. TOTAL DE NOS=NP  
 NO. DE NOS COM ALGUMA RESTRICAO=NV  
 NO. DE MATERIAIS DIFERENTES=NM  
 NO. DE CASOS DE CARGA=NC

NE=20 NP=23 NV=5 NM=2 NC=3

COORDENADAS NODAIS

NO	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0	0	150
3	0	0	-150
4	250	0	0
5	550	0	0
6	700	0	0
7	1150	0	0
8	1300	0	0
9	1600	0	0
10	1825	0	0
11	2000	0	0
12	2175	0	0
13	2400	0	0
14	2700	0	0
15	2850	0	0
16	3300	0	0
17	3450	0	0
18	3750	0	0
19	4000	0	0
20	4000	0	150
21	4000	0	-150
22	0	100	0
23	4000	100	0

FORMACAO DOS ELEMENTOS

EL	NO1	NO2	NO3
1	1	2	22
2	1	3	22
3	1	4	0
4	4	5	0
5	5	6	0
6	6	7	0
7	7	8	0
8	8	9	0
9	9	10	0
10	10	11	0
11	11	12	0
12	12	13	0
13	13	14	0
14	14	15	0
15	15	16	0
16	16	17	0
17	17	18	0
18	18	19	0
19	19	20	23
20	19	21	23

RESTRICOES E VALORES DE DESLOCAMENTO

NO	COD.RES	DX	DY	DZ	DDX	DDY	DDZ
2	010000	0	0	0	0	0	0
3	011000	0	0	0	0	0	0
11	111000	0	0	0	0	0	0
20	011000	0	0	0	0	0	0
21	010000	0	0	0	0	0	0

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	E	G	W
1	2100	800	7.85E-06
2	2100	800	7.85E-06

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

EL	IX/A	IY/FFY	IZ/FFZ	MAT
1	28	324	10740	1
	80	1.9	1.7	
2	28	324	10740	1
	80	1.9	1.7	
3	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
4	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
5	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
6	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
7	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
8	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
9	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
10	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
11	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
12	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
13	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
14	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
15	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
16	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
17	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
18	257600	128800	128800	2
	209	2	2	
19	28	324	10740	1
	80	1.9	1.7	
20	28	324	10740	1
	80	1.9	1.7	

FRENTE ENCONTRADA=12  
 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

CARGAS NODAIS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
4	0	-.165	0	-16.5	0	0
5	0	-.165	0	-16.5	0	0
6	0	-.165	0	-16.5	0	0
7	0	-.165	0	-16.5	0	0
8	0	-.165	0	-16.5	0	0
9	0	-.165	0	-16.5	0	0
10	0	-.4	0	0	0	0
12	0	-.4	0	0	0	0
13	0	-.165	0	16.5	0	0
14	0	-.165	0	16.5	0	0
15	0	-.165	0	16.5	0	0
16	0	-.165	0	16.5	0	0
17	0	-.165	0	16.5	0	0
18	0	-.165	0	16.5	0	0

CARGAS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	0	0	0	0	0	1.2
	0	0	0	0	0	-1.2
2	0	0	0	0	0	1.2
	0	0	0	0	0	-1.2
3	0	.2	-.1	0	3.3	8.5
	0	.2	-.1	0	-3.3	-8.5
4	0	.2	-.1	0	4.7	12.3
	0	.2	-.1	0	-4.7	-12.3
5	0	.1	0	0	1.2	3.1
	0	.1	0	0	-1.2	-3.1
6	0	.4	-.1	0	10.6	27.7
	0	.4	-.1	0	-10.6	-27.7
7	0	.1	0	0	1.2	3.1
	0	.1	0	0	-1.2	-3.1
8	0	.2	-.1	0	4.7	12.3
	0	.2	-.1	0	-4.7	-12.3
9	0	.2	-.1	0	2.7	6.9
	0	.2	-.1	0	-2.7	-6.9
10	0	.1	-.1	0	1.6	4.2
	0	.1	-.1	0	-1.6	-4.2
11	0	.1	-.1	0	1.6	4.2
	0	.1	-.1	0	-1.6	-4.2
12	0	.2	-.1	0	2.7	6.9
	0	.2	-.1	0	-2.7	-6.9
13	0	.2	-.1	0	4.7	12.3
	0	.2	-.1	0	-4.7	-12.3
14	0	.1	0	0	1.2	3.1
	0	.1	0	0	-1.2	-3.1
15	0	.4	-.1	0	10.6	27.7
	0	.4	-.1	0	-10.6	-27.7
16	0	.4	-.1	0	10.6	27.7
	0	.4	-.1	0	-10.6	-27.7



16	0	.1	0	0	-1.2	-3.1
17	0	.2	-.1	0	4.7	12.3
	0	.2	-.1	0	-4.7	-12.3
18	0	.2	-.1	0	3.3	8.5
	0	.2	-.1	0	-3.3	-8.5
19	0	0	0	0	0	1.2
	0	0	0	0	0	-1.2
20	0	0	0	0	0	1.2
	0	0	0	0	0	-1.2

CARGAS TOTAIS (SIST.COORD.GERAL)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	0	0	0	1.2	0	0
	0	0	0	-1.2	0	0
2	0	0	0	-1.2	0	0
	0	0	0	1.2	0	0
3	0	-.2	.1	0	-3.3	-8.5
	0	-.4	.1	-16.5	3.3	8.5
4	0	-.2	.1	0	-4.7	-12.3
	0	-.4	.1	-16.5	4.7	12.3
5	0	-.1	0	0	-1.2	-3.1
	0	-.3	0	-16.5	1.2	3.1
6	0	-.4	.1	0	-10.6	-27.7
	0	-.6	.1	-16.5	10.6	27.7
7	0	-.1	0	0	-1.2	-3.1
	0	-.3	0	-16.5	1.2	3.1
8	0	-.2	.1	0	-4.7	-12.3
	0	-.4	.1	-16.5	4.7	12.3
9	0	-.2	.1	0	-2.7	-6.9
	0	-.6	.1	0	2.7	6.9
10	0	-.1	.1	0	-1.6	-4.2
	0	-.1	.1	0	1.6	4.2
11	0	-.1	.1	0	-1.6	-4.2
	0	-.5	.1	0	1.6	4.2
12	0	-.2	.1	0	-2.7	-6.9
	0	-.4	.1	16.5	2.7	6.9
13	0	-.2	.1	0	-4.7	-12.3
	0	-.4	.1	16.5	4.7	12.3
14	0	-.1	0	0	-1.2	-3.1
	0	-.3	0	16.5	1.2	3.1
15	0	-.4	.1	0	-10.6	-27.7
	0	-.6	.1	16.5	10.6	27.7
16	0	-.1	0	0	-1.2	-3.1
	0	-.3	0	16.5	1.2	3.1
17	0	-.2	.1	0	-4.7	-12.3
	0	-.4	.1	16.5	4.7	12.3
18	0	-.2	.1	0	-3.3	-8.5
	0	-.2	.1	0	3.3	8.5
19	0	0	0	1.2	0	0
	0	0	0	-1.2	0	0
20	0	0	0	-1.2	0	0
	0	0	0	1.2	0	0

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESL.X/ROT.X	DESL.Y/ROT.Y	DESL.Z/ROT.Z	A5-29
1	0	-.04081	3.8E-04	
	FE-05	02 DE-04	01 00E-02	

2	-.04323	0	3.8E-04
	-3.8E-04	-2.9E-04	-1.38E-03
3	.04323	0	0
	4.4E-04	-2.9E-04	-1.38E-03
4	0	-.37423	.06991
	-1.1E-04	-2.5E-04	-1.2E-03
5	0	-.66439	.12853
	-1.6E-04	-1.3E-04	-6.7E-04
6	0	-.73932	.14358
	-1.7E-04	-7E-05	-3.2E-04
7	0	-.65363	.12854
	-1.6E-04	1.2E-04	6.4E-04
8	0	-.53786	.1067
	-1.5E-04	1.6E-04	8.6E-04
9	0	-.2491	.05108
	-1E-04	1.9E-04	9.4E-04
10	0	-.06283	.01331
	-4E-05	1.2E-04	5.9E-04
11	0	0	0
	0	0	0
12	0	-.06283	.01331
	4E-05	-1.2E-04	-5.9E-04
13	0	-.2491	.05108
	1E-04	-1.9E-04	-9.4E-04
14	0	-.53786	.1067
	1.5E-04	-1.6E-04	-8.6E-04
15	0	-.65363	.12854
	1.6E-04	-1.2E-04	-6.4E-04
16	0	-.73932	.14358
	1.7E-04	7E-05	3.2E-04
17	0	-.66439	.12853
	1.6E-04	1.3E-04	6.7E-04
18	0	-.37423	.06991
	1.1E-04	2.5E-04	1.2E-03
19	0	-.04081	3.8E-04
	5E-05	2.9E-04	1.38E-03
20	.04323	0	0
	-4.4E-04	2.9E-04	1.38E-03
21	-.04323	0	3.8E-04
	3.8E-04	2.9E-04	1.38E-03
22	0	0	0
	0	0	0
23	0	0	0
	0	0	0

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS E REACOES NOS VINCULOS

---

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS (SISTEMA DE COORD. DO ELEMENTO)

EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	1	0	-.68	0
		0	-.04	-100.61
	2	0	.68	0
		0	-.04	-1.37
2	1	-.43	-.92	0
		0	-.04	-142.54
	3	.43	.92	0
		0	-.04	4.81
3	1	0	1.4	-.26
		49.46	-10.76	-19.84
	4	0	-1.4	.26
		-49.46	10.76	19.84

4	4	0	.81	-.14
		34.35	-87.78	-356.16
	5	0	-.81	.14
		-34.35	128.6	599.54
5	5	0	.24	-.02
		13.74	-106.87	-613.12
	6	0	-.24	.02
		-13.74	109.52	649.12
6	6	0	-.41	.11
		-4.58	-139.69	-669.09
	7	0	.41	-.11
		4.58	88.72	484.96
7	7	0	-1.15	.3
		-13.74	-94.36	-483.24
	8	0	1.15	-.3
		13.74	49.9	310.17
8	8	0	-1.58	.26
		-34.35	-66.35	-308.46
	9	0	1.58	-.26
		34.35	-12.26	-164.2
9	9	0	-2.28	.47
		-54.95	31.63	164.12
	10	0	2.28	-.47
		54.95	-136.67	-677.38
10	10	0	-2.99	.75
		-47.1	119.81	650.07
	11	0	2.99	-.75
		47.1	-251.14	-1173.74
11	11	0	2.99	-.75
		-47.1	251.14	1173.74
	12	0	-2.99	.75
		47.1	-119.81	-650.07
12	12	0	2.28	-.47
		-54.95	136.67	677.38
	13	0	-2.28	.47
		54.95	-31.63	-164.12
13	13	0	1.58	-.26
		-34.35	12.26	164.2
	14	0	-1.58	.26
		34.35	66.35	308.46
14	14	0	1.15	-.3
		-13.74	-49.9	-310.17
	15	0	-1.15	.3
		13.74	94.36	483.24
15	15	0	.41	-.11
		-4.58	-88.72	-484.96
	16	0	-.41	.11
		4.58	139.69	669.09
16	16	0	-.24	.02
		13.74	-109.52	-649.12
	17	0	.24	-.02
		-13.74	106.87	613.12
17	17	0	-.81	.14
		34.35	-128.6	-599.54
	18	0	.81	-.14
		-34.35	87.78	356.16
18	18	0	-1.4	.26
		49.46	-75.79	-369.65
	19	0	1.4	-.26
		-49.46	10.76	19.84
19	19	.43	-.92	0
		0	.04	-142.54
	20	-.43	.92	0
		0	.04	4.81
20	19	0	-.68	0
		0	.04	-100.24

21	0	.68	0
	0	.04	-1.37

REAÇÕES NOS VINCULOS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
2	0	.65	0
	0	0	0
3	0	.96	-.42
	0	0	0
11	0	5.98	-1.56
	0	0	0
20	0	.96	-.42
	0	0	0
21	0	.65	0
	0	0	0

PESOS E COMPRIMENTOS DOS ELEMENTOS

EL	PESO	COMP.	AREA
1	.09	150	80
2	.09	150	80
3	.41	250	209
4	.49	300	209
5	.25	150	209
6	.74	450	209
7	.25	150	209
8	.49	300	209
9	.37	225	209
10	.29	175	209
11	.29	175	209
12	.37	225	209
13	.49	300	209
14	.25	150	209
15	.74	450	209
16	.25	150	209
17	.49	300	209
18	.41	250	209
19	.09	150	80
20	.09	150	80

PESO TOTAL DA ESTRUTURA= 6.94

\*\*\*\*\* CASO DE CARGA NO.= 2 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

-----

CARGAS NODAIS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
4	0	-.165	.165	-16.5	0	0
5	0	-.165	.165	-16.5	0	0
4	0	-.165	.165	-16.5	0	0

7	0	-.165	.165	-16.5	0	0
8	0	-.165	.165	-16.5	0	0
9	0	-.165	.165	-16.5	0	0
10	0	-.4	0	0	0	0
12	0	-.4	0	0	0	0
13	0	-.165	-.165	16.5	0	0
14	0	-.165	-.165	16.5	0	0
15	0	-.165	-.165	16.5	0	0
16	0	-.165	-.165	16.5	0	0
17	0	-.165	-.165	16.5	0	0
18	0	-.165	-.165	16.5	0	0

CARGAS NOS ELEMENTOS (SIST.COORD.DO ELEMENTO)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	0	0	0	0	0	1.2
0	0	0	0	0	0	-1.2
2	0	0	0	0	0	1.2
0	0	0	0	0	0	-1.2
3	0	.4	-.1	0	3.3	.7
0	0	.4	-.1	0	-3.3	-.7
4	0	.5	-.1	0	4.7	1.1
0	0	.5	-.1	0	-4.7	-1.1
5	0	.2	0	0	1.2	.3
0	0	.2	0	0	-1.2	-.3
6	0	.7	-.1	0	10.6	2.4
0	0	.7	-.1	0	-10.6	-2.4
7	0	.2	0	0	1.2	.3
0	0	.2	0	0	-1.2	-.3
8	0	.5	-.1	0	4.7	1.1
0	0	.5	-.1	0	-4.7	-1.1
9	0	.2	0	0	0	6.9
0	0	.2	0	0	0	-6.9
10	0	.3	-.1	0	1.6	.4
0	0	.3	-.1	0	-1.6	-.4
11	0	.3	-.1	0	1.6	.4
0	0	.3	-.1	0	-1.6	-.4
12	0	.4	-.1	0	2.7	.6
0	0	.4	-.1	0	-2.7	-.6
13	0	.5	-.1	0	4.7	1.1
0	0	.5	-.1	0	-4.7	-1.1
14	0	.2	0	0	1.2	.3
0	0	.2	0	0	-1.2	-.3
15	0	.7	-.1	0	10.6	2.4
0	0	.7	-.1	0	-10.6	-2.4
16	0	.2	0	0	1.2	.3
0	0	.2	0	0	-1.2	-.3
17	0	.5	-.1	0	4.7	1.1
0	0	.5	-.1	0	-4.7	-1.1
18	0	.4	-.1	0	3.3	.7
0	0	.4	-.1	0	-3.3	-.7
19	0	0	0	0	0	1.2
0	0	0	0	0	0	-1.2
20	0	0	0	0	0	1.2
0	0	0	0	0	0	-1.2

CARGAS TOTAIS (SIST.COORD.GERAL)

EL	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	0	0	0	1.2	0	0
0	0	0	0	-1.2	0	0
2	0	0	0	-1.2	0	0
0	0	0	0	1.2	0	0
3	0	0	0	0	0	0

3	0	-1.6	.3	-16.5	3.3	.7
4	0	-1.5	.1	0	-4.7	-1.1
	0	-1.7	.3	-16.5	4.7	1.1
5	0	-1.2	0	0	-1.2	-.3
	0	-1.4	.2	-16.5	1.2	.3
6	0	-1.7	.1	0	-10.6	-2.4
	0	-1.9	.3	-16.5	10.6	2.4
7	0	-1.2	0	0	-1.2	-.3
	0	-1.4	.2	-16.5	1.2	.3
8	0	-1.5	.1	0	-4.7	-1.1
	0	-1.7	.3	-16.5	4.7	1.1
9	0	-1.2	0	0	0	-6.9
	0	-1.6	0	0	0	6.9
10	0	-1.3	.1	0	-1.6	-.4
	0	-1.3	.1	0	1.6	.4
11	0	-1.3	.1	0	-1.6	-.4
	0	-1.7	.1	0	1.6	.4
12	0	-1.4	.1	0	-2.7	-.6
	0	-1.6	-.1	16.5	2.7	.6
13	0	-1.5	.1	0	-4.7	-1.1
	0	-1.7	-.1	16.5	4.7	1.1
14	0	-1.2	0	0	-1.2	-.3
	0	-1.4	-.2	16.5	1.2	.3
15	0	-1.7	.1	0	-10.6	-2.4
	0	-1.9	-.1	16.5	10.6	2.4
16	0	-1.2	0	0	-1.2	-.3
	0	-1.4	-.2	16.5	1.2	.3
17	0	-1.5	.1	0	-4.7	-1.1
	0	-1.7	-.1	16.5	4.7	1.1
18	0	-1.4	.1	0	-3.3	-.7
	0	-1.4	.1	0	3.3	.7
19	0	0	0	1.2	0	0
	0	0	0	-1.2	0	0
20	0	0	0	-1.2	0	0
	0	0	0	1.2	0	0

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESL.X/ROT.X	DESL.Y/ROT.Y	DESL.Z/ROT.Z
1	0	-.07093	9.4E-04
	-5E-05	-1.12E-03	-2.2E-03
2	-.16795	0	9.4E-04
	-6.8E-04	-1.12E-03	-2.2E-03
3	.16795	0	0
	7.4E-04	-1.12E-03	-2.2E-03
4	0	-.60487	.27417
	-1.1E-04	-1.01E-03	-1.92E-03
5	0	-1.06339	.52882
	-1.6E-04	-6.5E-04	-1.03E-03
6	0	-1.17657	.60903
	-1.7E-04	-4.1E-04	-4.6E-04
7	0	-1.02173	.62896
	-1.6E-04	3.2E-04	1.05E-03
8	0	-.8339	.56414
	-1.5E-04	5.3E-04	1.39E-03
9	0	-.37177	.35102
	-1E-04	8.4E-04	1.48E-03
10	0	-.08436	.15144
	-4E-05	8.9E-04	8.8E-04
11	0	0	0

11	0	8E-04	-1.1E-04
12	0	-.1213	-.12712
	4E-05	6.6E-04	-1.07E-03
13	0	-.44674	-.25557
	1E-04	4.8E-04	-1.61E-03
14	0	-.93516	-.36063
	1.5E-04	2.1E-04	-1.43E-03
15	0	-1.12645	-.38231
	1.6E-04	7E-05	-1.05E-03
16	0	-1.26152	-.33051
	1.7E-04	-2.9E-04	5.5E-04
17	0	-1.1341	-.27895
	1.6E-04	-3.9E-04	1.14E-03
18	0	-.63992	-.13787
	1.1E-04	-5.2E-04	2.05E-03
19	0	-.07236	-1.9E-04
	5E-05	-5.6E-04	2.34E-03
20	-.08362	0	0
	-7.5E-04	-5.6E-04	2.34E-03
21	.08362	0	-1.9E-04
	7E-04	-5.6E-04	2.34E-03
22	0	0	0
	0	0	0
23	0	0	0
	0	0	0

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS E REAÇÕES NOS VINCULOS

---

ESFORÇOS NOS ELEMENTOS (SISTEMA DE COORD. DO ELEMENTO)

EL	NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
1	1	0	-1.29	0
		0	-.01	-191.11
	2	0	1.29	0
		0	-.01	-1.66
2	1	-1.05	-1.52	0
		0	-.01	-233.04
	3	1.05	1.52	0
		0	-.01	4.53
3	1	0	2.43	-.89
		49.46	-7.22	.42
	4	0	-2.43	.89
		-49.46	230.81	606.29
4	4	0	1.35	-.47
		34.35	-253.4	-600.61
	5	0	-1.35	.47
		-34.35	395.75	1004.24
5	5	0	.5	-.25
		13.74	-413.98	-989.98
	6	0	-.5	.25
		-13.74	451.56	1065.67
6	6	0	-.66	.01
		-4.58	-440.93	-1056.16
	7	0	.66	-.01
		4.58	436.63	759.06
7	7	0	-1.7	.38
		-13.74	-406.99	-740.91
	8	0	1.7	-.38
		13.74	350.36	485.27
8	8	0	-2.66	.64
		-34.35	-375.49	-479.61
	0	0	0	0

		34.35	183.5	-317.32
9	9	0	-3.53	.8
		-54.95	-150	323.77
	10	0	3.53	-.8
		54.95	-29.79	-1118.79
10	10	0	-4.54	.95
		-47.1	55.8	1133.24
	11	0	4.54	-.95
		47.1	-222.41	-1927.04
11	11	0	4.82	-.17
		-47.1	231.11	1905.56
	12	0	-4.82	.17
		47.1	-201.66	-1061.99
12	12	0	3.86	.03
		-54.95	212.76	1083.49
	13	0	-3.86	-.03
		54.95	-220.01	-214.81
13	13	0	2.72	.13
		-34.35	223.78	246.13
	14	0	-2.72	-.13
		34.35	-263.08	570.7
14	14	0	1.87	.24
		-13.74	234.45	-545.22
	15	0	-1.87	-.24
		13.74	-270.44	825.21
15	15	0	.67	-.07
		-4.58	231.85	-809.93
	16	0	-.67	.07
		4.58	-200.92	1113.49
16	16	0	-.24	-.2
		13.74	195.14	-1081.62
	17	0	.24	.2
		-13.74	-165.5	1046.16
17	17	0	-1.32	-.38
		34.35	174.9	-1017.99
	18	0	1.32	.38
		-34.35	-59.51	622.93
18	18	0	-2.41	-.34
		49.46	86.2	-615.03
	19	0	2.41	.34
		-49.46	-.35	12.48
19	19	-.21	-1.58	0
		0	-.05	-238.59
	20	.21	1.58	0
		0	-.05	1.98
20	19	0	-1.28	0
		0	-.05	-193.7
	21	0	1.28	0
		0	-.05	1.77

REACOES NOS VINCULOS (SIST.COORD.GERAL)

NO	FX/MX	FY/MY	FZ/MZ
2	0	1.25	0
	0	0	0
3	0	1.57	-1.05
	0	0	0
11	0	9.92	-1.36
	0	0	0
20	0	1.59	.21
	0	0	0
21	0	1.28	0
	0	0	0



\*\*\*\*\* CASO DE CARGA NO. 3 \*\*\*\*\*

VETOR DE CARGA

CARGAS NODAIS (SIST. COORD. GERAL)

NO	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
----	----	----	----	----	----	----

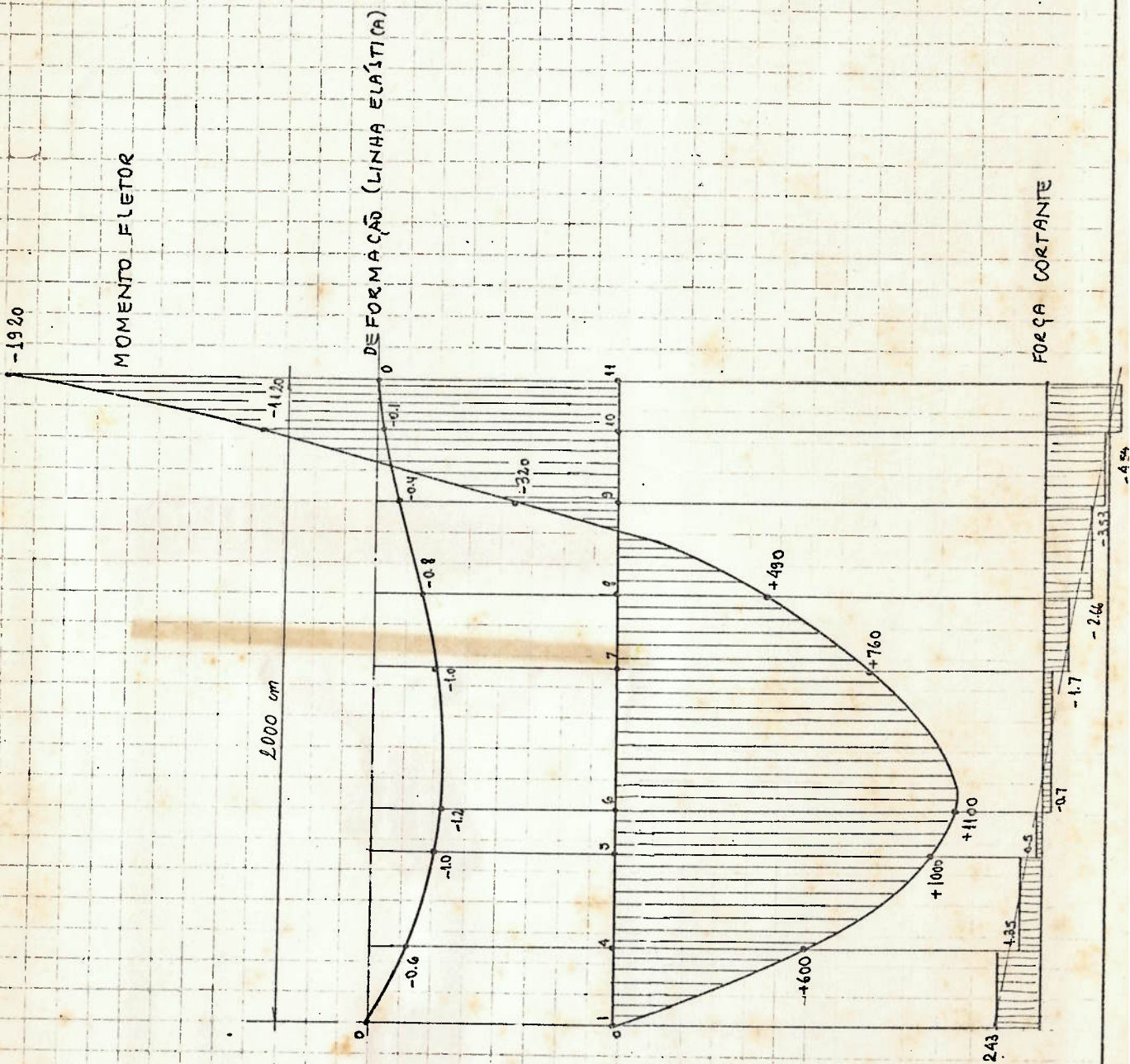
RESULTADOS OBTIDOS (REPRESENTAÇÃO GRÁFICA) NO PLANO YZ

MOMENTO EM t·cm

DEFORMAÇÃO EM cm

FORÇA CORTANTE EM t

CASO DE CARGA Nº 2



emitente

distribuição

vistos