

CARLOS ALBERTO NUNES DIAS
Engº Naval, Escola Politécnica da USP, 1975

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO
TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS
ADAPTAÇÃO DO PROGRAMA SAP-IV.

30

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof.Dr.ALFREDO COARACY BRAZIL GANDOLFO
Professor Adjunto do Departamento de
Engenharia Naval da E.P.U.S.P.

São Paulo, 1978.

AGRADECIMENTOS

- *Marinha do Brasil*, pelo apoio financeiro ao projeto 420 possibilitando a realização deste trabalho.
- Aos professores *Alfredo Coaracy Brazil Gandolfo* e *Elcio de Sã Freitas*, pelo incentivo e orientação técnica.
- Aos colegas do Departamento de Engenharia Naval, cujos desempenhos acadêmicos têm servido como exemplo a seguir.
- A Srta. *Jane Rodrigues Vieira* e Sra. *Maria Caprioli Paiotti*, pelo ótimo trabalho de datilografia e edição.
- Ao Sr. *Manoel Robles* a quem devem ser creditados os méritos dos desenhos e gráficos.
- Aos funcionários da gráfica do ETCN-SP, que, como consequência do esforço dedicado à impressão, realizaram um ótimo trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático, dentro da técnica dos elementos finitos, para a análise dinâmica de estruturas com movimentos de corpo rígido. Trata da adaptação das técnicas do programa SAP-IV, [14], visando a referida análise, com o objetivo inicial de estabelecer subsídios para o estudo de vibrações da viga navio.

Adicionalmente, procura relacionar os principais aspectos que devem ser de conhecimento do analista numa análise pelo programa, de modo a capacitá-lo para um estudo eficiente de um problema estrutural dinâmico (em termos de viabilizar tempo de processamento e qualidade dos resultados).

Finaliza-se com alguns comentários gerais e sugestões para trabalhos futuros.

ABSTRACT

This study presents the development of a mathematical model, using the finite element method, for the dynamical analysis of structures with rigid body motions. The program was derived from SAP-IV, [14], and adapted to perform the above mentioned dynamical analysis to study hull girder vibration problems.

In addition, it is tried to point out the main details that the analyst must know in a program analysis, so that he will be able to perform an efficient job when solving a dynamic structural problem.

Some final comments and suggestions are made with the purpose of guiding future studies on this same subject..

I N D I C E

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Indice	iv
Indice de figuras e tabelas	vi
Notação, nomenclatura e simbologia	vii
I. INTRODUÇÃO.	1.1
1.1 - Justificativa do trabalho	1.1
1.2 - A importância do estudo de vibrações do navio	1.2
1.3 - Vibrações da viga navio	1.3
1.4 - Considerações para a análise por elementos finitos.	1.6
II. A TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS VISANDO A ANÁLISE DINÂMICA DE CORPOS LIVRES.	11.1
11.1- Introdução.	11.1
11.2- Equação diferencial matricial para a análise dinâmica . . .	11.2
11.2.1 - Matriz de massa.	11.4
11.2.2 - Matriz de amortecimento	11.7
11.2.3 - Matriz de rigidez.	11.8
11.2.4 - Matriz de carga.	11.12
11.3- O problema estrutural de autovalores e autovetores.	11.13
11.3.1- Método de iteração por subespaço.	11.15
11.3.2- Remoção da singularidade da matriz de rigidez . . .	11.17
11.3.3- A análise de Rayleigh-Ritz	11.21
11.3.4- O método generalizado de Jacobi	11.26
11.3.5- Sumário do método de iteração por subespaço	11.33
11.3.6- Critérios de convergência	11.38
11.4 - Análise da resposta dinâmica	11.41
11.4.1- Integração direta	11.42
11.4.2- Desacoplamento da equação diferencial	11.44

- 11.4.3- Sumário do método de superposição modal 11.52
- 11.4.4- Integração por etapas - "Wilson- θ method" 11.55
- 11.4.5- Integral de Duhamel. Resposta à excitação harmônica 11.69

- III. TESTE DE CONFIABILIDADE PARA O PROGRAMA MODIFICADO III.1
 - III.1- Solução analítica III.2
 - III.3.1-Frequências e modos naturais III.2
 - III.3.2-Cálculo da resposta III.3
 - III.2 - Solução manual III.6
 - III.3.1-Frequências e modos naturais III.6
 - III.3.2-Cálculo da resposta III.13
 - III.3 - Comparação de resultados III.17

- IV. APLICAÇÃO A UM CASO REAL IV.1
 - IV.1 - Apresentação das características do navio IV.2
 - IV.1.1 - Dimensões principais IV.2
 - IV.1.2 - Avaliação dos esforços de excitação IV.4
 - IV.1.3 - Propriedades da viga navio IV.5
 - IV.2 - Frequências naturais por formulações semi-empíricas . . . IV.7
 - IV.2.1 - Vibração vertical IV.8
 - IV.2.2 - Vibração longitudinal IV.10
 - IV.2.3 - Verificação de ressonância IV.10
 - IV.3 - Análise pelo programa. Modelo reticulado IV.15
 - IV.3.1 - Frequências e modos naturais IV.16
 - IV.3.2 - Resposta à excitação do empuxo IV.20
 - IV.3.3 - Conclusões IV.23

- V. COMENTÁRIOS GERAIS E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . V.1
 - V.1 - Quanto ao estado da arte V.1
 - V.2 - Quanto à capacidade atual do programa V.3
 - V.3 - Quanto ao estudo de vibração da viga navio V.5

- VI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS VI.1

- VII. APENDICE: O PROGRAMA MODIFICADO VII.1
 - VII.1 - Um exemplo de listagem de saída de resultados VII.3
 - VII.2 - Comandos significativos VII.17

INDICE DE FIGURAS E TABELAS

FIGURA I.1	I.7
FIGURA II.1	II.18
FIGURA II.2	II.57
FIGURA II.3	II.67
FIGURA II.4	II.67
FIGURA II.5	II.70
FIGURA III.1	III.1
FIGURA III.2	III.5
FIGURA III.3	III.6
FIGURA III.4	III.21
FIGURA III.5	III.22
FIGURA IV.1	IV.1
FIGURA IV.2	IV.12
FIGURA IV.3	IV.13
FIGURA IV.4	IV.14
FIGURA IV.5	IV.17
FIGURA IV.6	IV.18
FIGURA IV.7	IV.19
FIGURA IV.8	IV.27
FIGURA IV.9	IV.28
FIGURA IV.10	IV.29
FIGURA VII.1	VII.2
TABELA II.1	II.77
TABELA III.1	III.3
TABELA III.2	III.13
TABELA III.3	III.20
TABELA III.4	III.23
TABELA IV.1	IV.3

NOTAÇÃO, NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA

Notação

De modo geral reservaremos letras maiúsculas do alfabeto português ou grego para designação de matrizes e vetores, ficando as letras minúsculas para escalares. No entanto, em alguns itens, onde o não cumprimento dessa regra seja irrelevante para um perfeito entendimento do texto, usaremos, indistintamente, letras minúsculas e maiúsculas na designação de escalares.

Sempre que dois ou mais entes possuírem significados correlatos procurar-se-á adotar a mesma letra em suas designações, diferenciando-as pelo acréscimo de um caráter gráfico especial (circunflexo, asterisco, ponto, etc.)

A indicação do cálculo de determinante de matrizes quadradas será feita pelo acréscimo do prefixo det, quando se fizer referência ao nome, ou duas barras (cercando os elementos), quando se fizer referência a matriz por seus elementos.

Matrizes diagonais, quando referenciadas pelos elementos da diagonal, receberão em sua designação o prefixo diag.

Quando se fizer referência a matrizes ou vetores pelos elementos, estes virão cercados por colchetes ou chaves, respectivamente.

Nomenclatura

Os nomes serão escolhidos de modo a que se possa, rapidamente, identificar o assunto nas referências biblio -

gráficas ou seja: para que o presente trabalho e suas referências bibliográficas tenham consistência de nomenclaturas procuramos, na medida do possível, não alterar a essência da simbologia original. Como consequência disso grande parte dos símbolos aqui utilizados encontram justificativa quando considerados seus significados na língua inglesa.

Simbologia

- n : número de graus de liberdade. Deve-se notar que a distinção entre graus de liberdade cinemáticos e dinâmicos fica perceptível no desenvolvimento do texto.
- t : tempo
- $V(t)$: vetor dos deslocamentos nodais. Elementos: $v_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$
- $\dot{V}(t)$: vetor das velocidades nodais: Elementos: $\dot{v}_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$
- $\ddot{V}(t)$: vetor das acelerações nodais: Elementos: $\ddot{v}_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$
- $F_I(t)$: vetor dos esforços de inércia.
- $F_A(t)$: vetor dos esforços de amortecimento.
- $F_R(t)$: vetor dos esforços resistentes.
- $P(t)$: vetor dos esforços externos aplicados.
- M : matriz de massa.
- C : matriz de amortecimento.
- K : matriz de rigidez
- F : matriz de flexibilidade
- Φ : matriz dos autovetores. Elementos: ϕ_i , $i = 1, n$
- $\Phi(k)$: k -ésima aproximação para Φ
- Λ : matriz diagonal dos autovalores. Elementos escalares λ_i , $i = 1, n$

- $\Lambda(k)$: k-ésima aproximação para Λ
 I : matriz identidade
 Ψ : matriz das formas assumidas ψ_i : vetores de Ritz.
 $Y(t), Z(t)$: vetor dos deslocamentos, em coordenadas generalizadas
 Φ_Z : matriz dos autovetores em coordenadas generalizadas ϕ_{Z_i}
 K^* : matriz de rigidez generalizada.
 M^* : matriz de massa generalizada.
 p : número de autovalores procurados
 q : número inteiro positivo tal que, $p < q < n$
 \hat{K} : matriz de rigidez deslocada
 β : constante real para deslocamento. (Coeficiente para inclusão de inércia de rotação).
 $\hat{\Lambda}$: matriz diagonal dos autovalores do problema deslocado.
 $\hat{\Lambda}(k)$: k-ésima aproximação para $\hat{\Lambda}$
 λ_i : autovalor, $i=1,2,\dots$
 $\hat{\lambda}_i$: autovalor do problema deslocado, $i=1,2,\dots$
 w_i : frequência (circular) natural, $i=1,2,\dots$
 \hat{w}_i : frequência (circular) natural do problema deslocado.
 k_i : valor da constante de mola aplicada segundo o i-ésimo grau de liberdade, $i=1,2,\dots$
 m_i : i-ésimo elemento da matriz diagonal de massas discretas.
 k_{ij} : coeficiente de influência de rigidez
 m_{ij} : coeficiente de influência de massa
 k_{ij}^* : coeficiente de influência de rigidez generalizada.
 m_{ij}^* : coeficiente de influência de massa generalizada.
 \hat{k}_{ij} : coeficiente de influência de rigidez do problema deslocado.
 $P(r)$: matriz de transformação de rotação. Método gen. de Jacobi, $r=1,2,\dots,\infty$

$M_{(r)}$: matriz de massa transformada, $r=1,2,\dots,\infty$
$K_{(r)}$: matriz de rigidez transformada, $r=1,2,\dots,\infty$
$m_{ij}^{(r)}$: coeficiente de influência de massa transformada.
$k_{ij}^{(r)}$: coeficiente de influência de rigidez transformada.
$\hat{\lambda}_i^{(r)}$: autovalores do problema deslocado e transformado por rotação.
T	: período
T_i	: período do i -ésimo modo
ξ_i	: grau de amortecimento modal; i -ésimo modo
Δt	: intervalo de tempo para integração numérica ("time step")
θ	: $\theta = 1,4$
\bar{K}	: matriz de rigidez efetiva
$\bar{P}(t)$: vetor do carregamento efetivo.
%AR	: porcentagem de aumento do período.
%QA	: porcentagem de queda de amplitude.
ξ_a	: amortecimento artificial.
w_{D_i}	: frequência natural amortecida i -ésimo modo
$p_i(t)$: carga generalizada.
\bar{w}	: frequência da excitação harmônica.
a	: amplitude da excitação harmônica.
b	: valor médio da excitação harmônica.
δ	: fase da excitação harmônica.
$u_i(t), y_i(t)$: resposta modal i -ésimo modo
EA	: rigidez à compressão-tração
m	: densidade linear de massa
l	: comprimento
c_i	: constante de ortonormalização
$\phi_i(x)$: autofunção. i -ésimo modo
β_i	: relação de frequências (\bar{w}/w_i)

A_i, B_i	:	constantes
$u(x,t)$:	deslocamentos longitudinais
L	:	comprimento total do navio
D	:	pontal
B_m	:	boca máxima
B	:	boca
H	:	calado
Δ	:	deslocamento
$T(t), T_0$:	empuxo
τ	:	coeficiente para inclusão de massa adicional total
α	:	coeficiente para inclusão da rigidez à deformação por cisalhamento.
E	:	módulo de elasticidade
G	:	modulo de elasticidade transversal
g	:	aceleração da gravidade
I	:	momento de inércia à flexão
A_c	:	área de cisalhamento
R	:	raio de giração de massa
C_i	:	coeficientes empíricos

Os símbolos estão relacionados, aproximadamente, na mesma ordem em que aparecem no texto. Procuramos relacionar a qui, apenas, aqueles que receberam definição no texto, de mo do que alguns símbolos auxiliares não estão na relação.

I. Introdução

I.1 Justificativa do trabalho

Para que os aspectos abordados no presente trabalho sejam compreendidos, pelo leitor, como parte de um todo, julgamos necessário apresentar os motivos que nos levaram a confeccioná-lo.

Desde mil novecentos e setenta e quatro (aproximadamente) existe, no Departamento de Engenharia Naval da E.P.U.S.P., a equipe do projeto N.D.P.N.-420 (da qual somos integrantes) formada com a finalidade de prover recursos técnicos, dentro da área de análise estrutural por elementos finitos, em projeto estrutural do navio, ao campo da engenharia naval no Brasil; estabelecendo, desde o início, conhecimento científico adaptado, fundamentalmente, às necessidades e à realidade brasileiras.

Assim sendo, a partir daquela data tratamos da implantação de um sistema para análise de estruturas navais tendo como ponto de partida o conhecimento científico adquirido pela importação do programa S.A.P. (A Structural analysis program for static and dynamic response of linear systems), já em sua quarta versão, S.A.P. IV. Desde então, temos absorvido tais conhecimentos e desenvolvidos outros de modo que hoje podemos nos considerar, em termos de capacidade desenvolvida e implantada, em nível de conhecimento bastante próximo do que há de melhor nesta área da engenharia.

Um aspecto importante a considerar, em nosso trabalho, diz respeito à adaptação do que se dispunha para análise

de estruturas típicas em engenharia civil, tendo em vista a a nálise de estruturas navais. Como foi o caso do estudo de vibrações da viga navio, cujos procedimentos, visando a referida adaptação, serão aqui apresentados.

1.2 *A importância do estudo de vibrações do navio*

Pela própria natureza da estrutura do navio, no seu todo ou em partes, e dada a existência de uma infinidade de fontes de excitação, podem ocorrer vibrações indesejáveis de caráter local ou global.

Por vibrações indesejáveis, queremos classificar aquelas que, ocorrendo, possam vir a comprometer o funcionamento do navio, quer seja pelo aparecimento de ruídos ou acelerações, em compartimentos habitáveis, em níveis não suportáveis pelo organismo humano, quer seja pelo comprometimento a longo prazo da resistência da estrutura quando se tratar da fadiga do material.

É natural que devido à possível ocorrência de vibrações indesejáveis seja importante o conhecimento prévio (ainda na fase de projeto) do comportamento vibratório da referida estrutura. No entanto, em muitos casos na história da construção naval, o problema tem sido enfrentado após sua constatação com o navio em funcionamento, estabelecendo-se o que se pode classificar como cura de vibrações indesejáveis, envolvendo custos para reparo que, acreditamos, muitas vezes maiores daqueles que seriam dispendidos numa tarefa de prevenção, ainda na fase de projeto.

Projetar um navio totalmente livre de vibrações indesejáveis, se viável, é tarefa que implica, não em grandes

custos adicionais, mas sim na necessidade de processos práticos que permitam ao projetista, durante o projeto, conhecer o comportamento vibratório da estrutura.

Assim, com este trabalho, procuramos estabelecer parte de um processo prático, a ser utilizado em fase de projeto, para o cálculo de vibrações de viga navio. Trataremos especificamente da implantação do modelo matemático dentro da técnica dos elementos finitos.

1.3 *Vibrações da viga navio*

Por vibrações da viga navio, queremos classificar as características vibratórias do casco como um todo, isto é, suas diversas frequências naturais e respectivos modos de vibrar, bem como sua resposta à excitação.

O termo "viga" aplica-se pelo fato de estarmos tratando da análise dinâmica da estrutura do navio, prevendo um comportamento que possa ser enquadrado segundo as hipóteses das teorias sobre vibrações de vigas.

A viga navio pode vibrar segundo modos nas direções vertical, horizontal, longitudinal e torcional, sendo que para cada um desses casos massas e rigidez de diferentes formações são postas a trabalhar, no entanto, quase sempre, não existe uma separação definida entre um movimento e outro, de modo que a vibração no plano vertical pode ocorrer acoplada com a vibração longitudinal, assim como, vibração horizontal e torcional também. Na prática, porém, tem-se desprezado os efeitos de acoplamento desse tipo, sem que, no entanto, seja possível generalizar, isto é, a hipótese de considerar-se vibra-

ções globais desacopladas justifica-se, apenas, pelas facilidades de análise daí decorrentes.

Outros fatores também tem influência na análise dinâmica da viga navio, [2], [6], [8], [9], [10], [11], [16], [17], tais como,

- (1) Distribuição longitudinal de massas do navio
- (2) Distribuição longitudinal de massas virtuais, em virtude de o navio vibrar na superfície de separação ar-agua. O estudo semi-empírico desse efeito tem sido utilizado ao longo do tempo na análise de vibrações da viga navio, já que uma consideração mais realista do fenômeno requer grande trabalho computacional com melhora pouco apreciável de resultados. Modernamente tem-se procurado enfrentar o problema pelo emprego da técnica dos elementos finitos, no entanto, são poucos os trabalhos publicados que dão uma idéia realista de como atacar o problema por esse prisma, de modo que se dispõe, atualmente, apenas de notícias referentes à pesquisa e aplicação de tal técnica em centros mais avançados.
- (3) Distribuição longitudinal de rigidez à flexão.
- (4) Distribuição longitudinal de rigidez à deformação por cisalhamento na flexão. De modo geral para vigas que tem dimensões transversais não desprezíveis em relação ao comprimento ou no cálculo de modos de ordem superior (onde a distância entre nós modais não é muito maior que as dimensões transversais) uma boa parcela dos deslocamentos corresponde à deformação por cisalhamento, de modo que os valores das frequências na

turais e modos de vibrar ficam condicionados cada vez mais, à medida que aumenta a ordem, à distribuição de rigidez à deformação por cisalhamento na flexão (no plano horizontal bem como no vertical).

Além desses, outros fatores de menor importância, tem influência:

- (5) Distribuição de momentos de inércia de massa. Associado à vibração no plano vertical e horizontal há o movimento longitudinal de massas colocadas fora do eixo neutro, esse movimento é proporcional à distância do ponto considerado ao eixo neutro vezes a deflexão angular de modo que a eles correspondem esforços de inércia. A influência da distribuição de momentos de inércia aumenta com o aumento da ordem do modo, sendo que em navios essa já é da ordem de dois por cento a partir do primeiro modo com deformação.
- (6) Acoplamento com vibrações locais. Um aumento nos esforço de inércia está associado a acentuações locais de amplitudes de vibração além daquelas amplitudes computadas como sendo de vibração de viga, de modo que vibrações locais podem alterar os valores das frequên - cias da viga navio. Em geral, esse efeito aparece em modos de vibrar de alta ordem de sorte que as caracte rísticas vibratórias do sistema afastam-se do que se convencionou chamar vibrações da viga-navio.
- (7) Dilatações verticais e horizontais, do material resistente longitudinal, associadas com a deformação longi tudinal dadas pelo coeficiente de Poisson.
- (8) Efeito de enrijecimento provocado pela flutuação, no

caso da vibração vertical.

- (9) Largura efetiva em flexão da viga navio. O efeito de "Shear Lag" é responsável por uma redução na rigidez, como conseqüente redução na frequência natural, particularmente nos modos de vibrar com grande número de nós modais, porém, a consideração, fundamentada, desse efeito é extremamente difícil.

Os fatores (7) e (8) afetam os valores das frequências em menos de um por cento, sendo considerados irrelevantes face às incertezas introduzidas na consideração dos cinco primeiros fatores mencionados.

1.4 *Considerações para análise por elementos finitos*

Pretendemos estabelecer com o presente trabalho não um procedimento infalível na análise de vibrações da viga navio, mas sim apresentar uma formulação matemática bastante útil numa análise por elementos finitos, e particularmente volta à utilização do programa SAP-IV, [14]. No entanto, é interessante que se estabeleça uma idéia generalizada de pelo menos um procedimento na análise de vibrações da viga navio. Assim, com essa finalidade apresentamos, como sugestão, o diagrama simplificado da Figura 1.1.

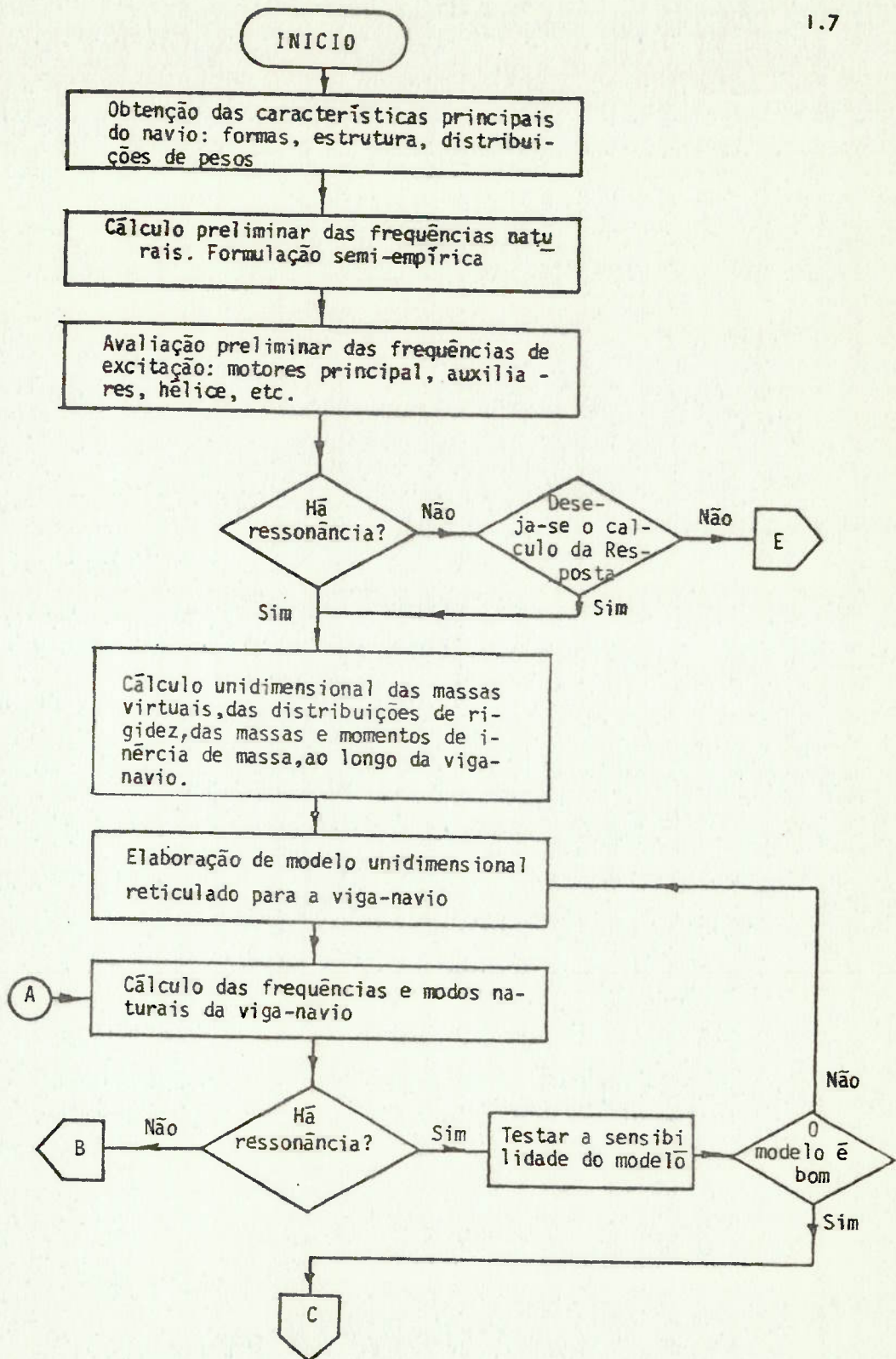


Figura I.1 - Diagrama para análise de vibrações da viga navio

(continuação)

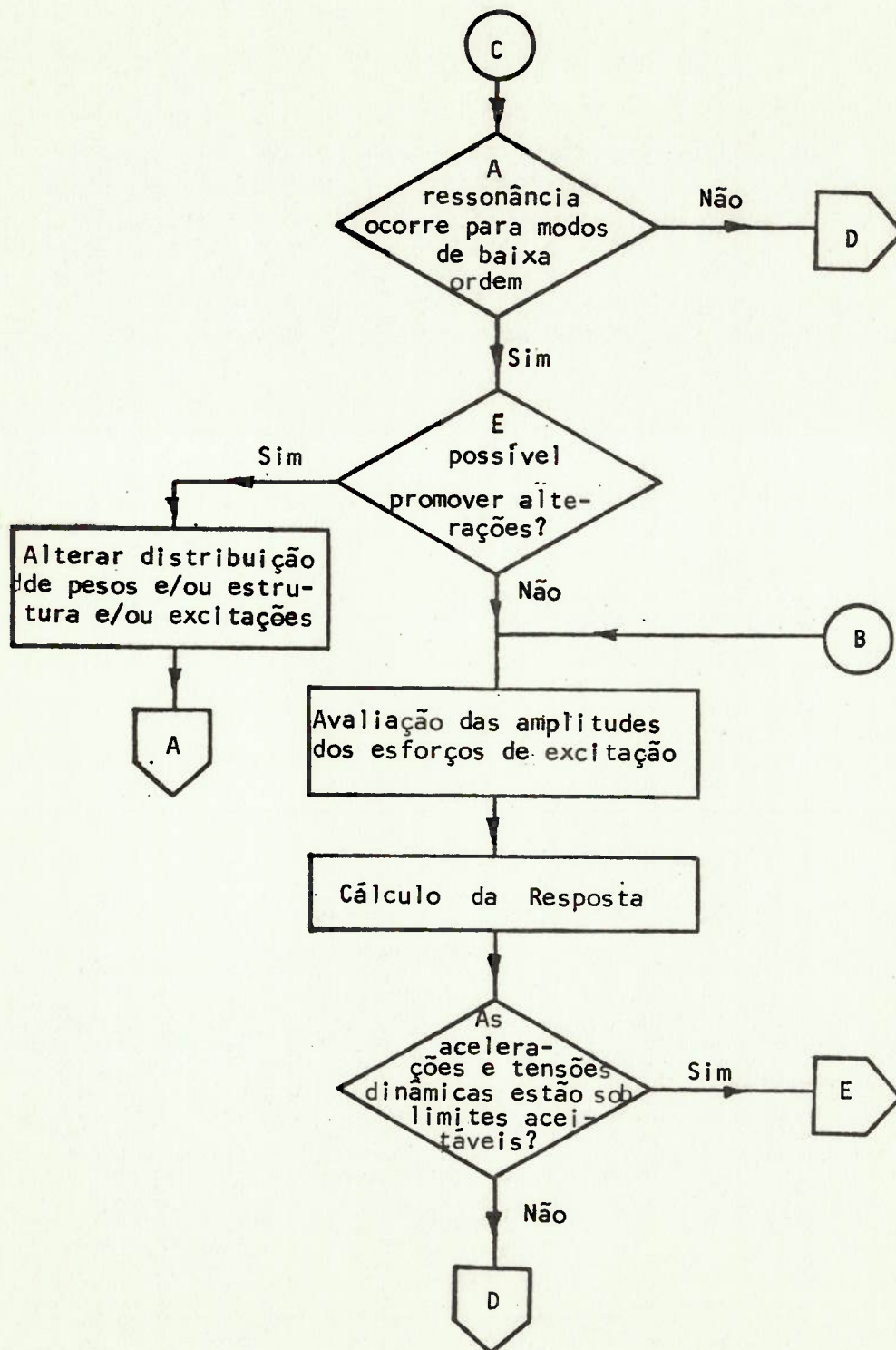


Figura 1.1 - Diagrama para análise de vibrações da viga-navio

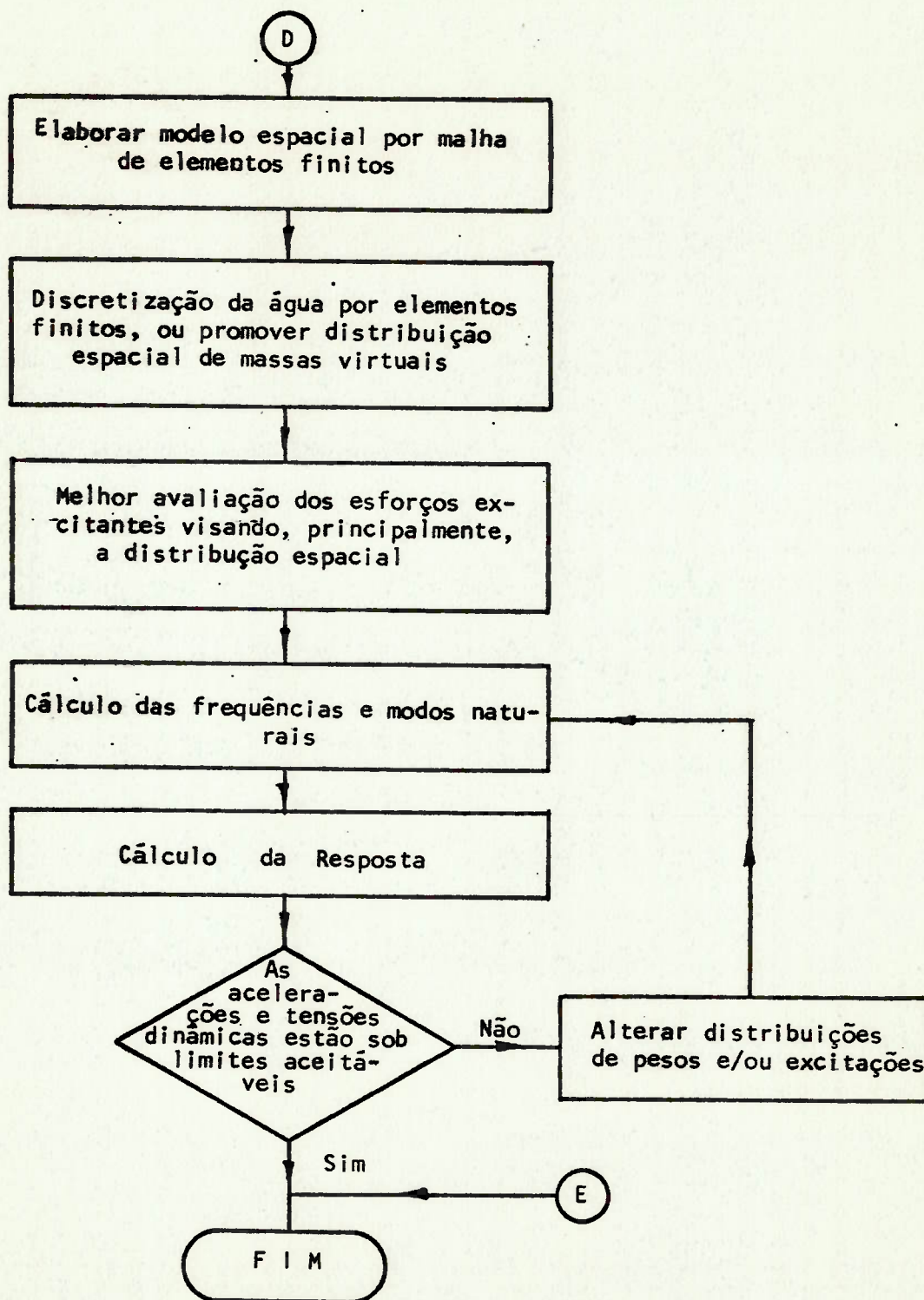


Fig.1.1 - Diagrama para análise de vibrações da viga-navio

11. O Método dos elementos finitos, visando a análise dinâmica de corpos livres

11.1 Introdução

Entendemos por análise dinâmica de corpos livres aquela estendida a estruturas que, embora deformáveis, não possuem vinculação externa de modo a impedir movimentos de corpo rígido (sem deformação).

Como já mencionado no capítulo anterior, a partir do programa SAP-IV houve a necessidade de adaptação a esse tipo de análise, uma vez que sendo possível movimentos de corpo rígido a matriz de rigidez será singular, o que não é aceito pelo referido programa.

Inicialmente procuramos na literatura subsídios que nos auxiliassem a resolver o problema de adaptação, no entanto, de modo geral encontramos, apenas, pequenas referências ao assunto, [5], [12], ou tratamentos matemáticos que exigiriam grandes modificações no programa, [20]. Assim, com base nos conceitos sobre o assunto abordados em [5], [12] e [20] procuramos estabelecer formulação, no cálculo de frequências naturais e resposta a excitação de estruturas com movimentos de corpo rígido, que viesse de encontro as técnicas já utilizadas pelo programa.

Apresentaremos, neste capítulo, algumas das formulações utilizadas pelo programa SAP-IV, bem como, introdução à análise dinâmica dentro da técnica dos elementos finitos.

11.2 Equação diferencial matricial para a análise dinâmica

Trataremos da formulação da equação de movimentos de um sistema com vários graus de liberdade, com parâmetros discretizados. Os graus de liberdade de um sistema com parâmetros discretizados, dentro da técnica dos elementos finitos, são tomados como sendo as amplitudes dos deslocamentos de certos pontos na estrutura [3], [5]. Assim, a deformação da estrutura será definida por um conjunto de n deslocamentos, num número finito de pontos:

$$(11.1) \quad v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$$

onde o t indica a dependência do tempo.

A equação de movimento do sistema é obtida impondo-se o equilíbrio de cada um dos esforços efetivamente associados a cada um de seus graus de liberdade; matricialmente temos:

$$(11.2) \quad F_I(t) + F_A(t) + F_R(t) = P(t)$$

sendo:

$F_I(t)$ - vetor dos esforços de inércia ($n \times 1$),

$F_A(t)$ - vetor dos esforços de amortecimento ($n \times 1$),

$F_R(t)$ - vetor dos esforços resistentes ($n \times 1$),

como esforços que resultam do movimento, e

$P(t)$ - vetor dos esforços externos aplicados ($n \times 1$).

Cada uma das matrizes F_I , F_A e F_R pode ser obtida a partir dos deslocamentos e suas derivadas temporais, tomando

um conjunto apropriado de coeficientes de influência. Assumindo-se, agora, um comportamento linear da estrutura; que o amortecimento é do tipo viscoso e, ainda, observando-se a lei de Newton, (11.2) pode ser posta na forma:

$$(11.3) \quad M.\ddot{V}(t) + C.\dot{V}(t) + K.V(t) = P(t)$$

sendo,

$M = [m_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ — matriz dos coeficientes de influência de massa

m_{ij} — esforço de inércia associado ao grau de liberdade i , proveniente de uma aceleração unitária segundo o grau de liberdade j .

$C = [c_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ — matriz dos coeficientes de influência de amortecimento.

c_{ij} — esforço de amortecimento associado ao grau de liberdade i , proveniente de uma velocidade unitária segundo o grau de liberdade j .

$K = [k_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ — matriz dos coeficientes de influência de rigidez.

k_{ij} — esforço resistente associado ao grau de liberdade i , proveniente de um deslocamento unitário segundo o grau de liberdade j .

ou, simplifadamente:

M - matriz de massa ($n \times n$),

C - matriz de amortecimento ($n \times n$),

K - matriz de rigidez ($n \times n$).

e

$V(t) = \{v_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor dos deslocamentos nodais

$\dot{V}(t) = \{\dot{v}_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das velocidades nodais

$\ddot{V}(t) = \{\ddot{v}_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das acelerações nodais

$P(t) = \{p_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das cargas nodais

portanto, (11.3) agrupa n equações de movimento cuja solução dá a resposta do sistema discretizado de n graus de liberdade.

11.2.1 *Matriz de massa*

No cálculo dos coeficientes de influência de massa dois processos são usualmente empregados. O primeiro processo, e mais simples, consiste em supor que as massas do sistema (massas e momentos de inércia de massa) então concentradas nos nós resultantes da discretização do sistema, ficando a cargo do analista a escolha, conveniente, das mesmas em cada nó e segundo cada grau de liberdade. Constrói-se, assim, o que se convencionou chamar de Matriz de Massas Discretas.

Então, pela própria definição de coeficientes de influência, se segundo cada grau de liberdade só existirão forças de inércia associadas a acelerações (com massa) dadas se

gundo esse mesmo grau de liberdade, a matriz de massa discreta será do tipo diagonal, onde somente elementos da diagonal principal podem ser não nulos:

$$m_{ij} = 0; \quad \forall i, j / i=1, n; j=1, n \text{ e } i \neq j$$

e

$$m_{ij} = m_i; \quad \forall i, j / i=1, n; j=1, n \text{ e } i=j$$

portanto:

$$(11.4) \quad M = \text{diag} [m_i]; \quad i=1, n \quad (\text{Matriz de Massa Discreta})$$

sendo $m_i; i=1, n$ - esforço de inércia associado ao grau i , proveniente de uma aceleração unitária segundo o próprio grau de liberdade i , sendo portanto igual a massa concentrada que atua segundo esse grau de liberdade.

Numa análise pelo programa SAP-IV, que trabalha apenas com matriz de massa discreta, é possível especificar seis massas, não necessariamente iguais, em cada nó do modelo (sistema discretizado dentro da técnica dos elementos finitos). Três delas relativas a deslocamentos lineares (massas propriamente ditas) e outras três relativas a deslocamentos angulares (momentos de inércia de massa), segundo um terno de eixos globais (X,Y,Z) previamente definido. Além disso, quando for especificado massa distribuída sobre elementos, o programa, tomando metade do espaçamento entre nós nas várias direções, calcula e adiciona, à matriz de massa discreta, o valor da mas

sa no nó, aplicando-o, somente , segundo deslocamentos lineares.

No segundo processo, usualmente empregado, utiliza-se o conceito de elementos finitos no cálculo dos coeficientes de influência de massa para cada elemento da estrutura discretizada, por um processo semelhante à obtenção dos coeficientes de influência de rigidez. Constrói-se, assim, o que se convencionou chamar de Matriz de Massa Consistente.

A grande vantagem do primeiro processo sobre o segundo é a de implicar em menor esforço computacional, além de permitir a redução do número de graus de liberdade por condensação estática. No entanto, como na grande maioria dos programas existentes, o SAP-IV apela para o emprego da matriz de massa discreta uma vez que ficou provado, [3], [5], sua melhor funcionalidade, tendo em vista: facilidades no tratamento matemático, menor tempo de processamento. A redução do número de graus de liberdade por condensação estática baseia-se no arranjo (linhas e colunas) e particionamento das matrizes envolvidas de modo a eliminar a necessidade de se trabalhar com os zeros da diagonal principal da matriz de massa discreta. Tal procedimento, embora optimize a utilização de memória, implica num aumento do tempo de processamento, assim, se o programa será implantado em computador de grande disponibilidade de memória e rápido não é interessante aplicar a condensação estática, como é o caso do SAP-IV, inicialmente implantado num computador C.D.C. de grande porte.

11.2.2 Matriz de amortecimento

Como veremos adiante, o conhecimento das propriedades de massa e de rigidez do sistema permite o cálculo de frequências e modos naturais de vibração. No entanto, se estamos interessados em conhecer a resposta do sistema à excitação, é necessário que se considere, também, as propriedades de amortecimento do referido sistema.

Na realidade a mudança contínua de energia de potencial para cinética, de modo que a energia mecânica total conserve-se, ocorre apenas em sistemas ideais. Na prática, com a presença de amortecimento, à cada ciclo de vibração uma parcela da energia armazenada é dissipada de modo que, na ausência de esforços externos compensando tal dissipação, a amplitude de vibração reduz-se progressivamente até a parada, no instante em que toda a energia inicialmente introduzida tiver sido dissipada.

Enquanto as propriedades de massa e rigidez podem ser consideradas como características próprias do sistema, as propriedades de amortecimento, na realidade, não podem ser consideradas como tal, a menos que assim sejam idealizadas. As forças de amortecimento dependem tanto das características do sistema bem como de elementos exteriores a ele, [20].

Assim, formulações para introduzir no modelo características de amortecimento, respaldadas nas características do sistema, são ainda hoje, motivo de extensas pesquisas em todo o mundo. Atualmente, na prática, tem-se adotado valores obtidos através de experimentos, ou mais especificamente, o amortecimento (admitido como sendo do tipo viscoso) tem sido expresso em

termos de porcentagens do amortecimento crítico estabelecidas a partir de experiências em estruturas semelhantes.

A natureza do amortecimento, na estrutura do navio, é usualmente classificada segundo os seguintes itens:

1. Amortecimento estrutural, devido ao atrito interno no material ou entre juntas dos elementos do sistema estrutural, sendo que, os esforços de amortecimento resultantes são função da deformação na estrutura;
2. Amortecimento viscoso, devido ao fato de o sistema vibrar em contato com fluidos (água, ar, óleo) gerando formas de dissipação de energia por atrito ou por formação de ondas;
3. Amortecimento por atrito seco, devido ao movimento de corpos em superfícies secas, tais como os itens de carga;

na prática, no entanto, a avaliação das propriedades de amortecimento, considerando-se a natureza do amortecimento, é impraticável.

Teceremos maiores considerações sobre matriz de amortecimento quando do cálculo da resposta à excitação.

11.2.3 *Matriz de rigidez*

Não temos a intenção de apresentar aqui o que é prática corrente no cálculo da matriz de rigidez dentro da técnica dos elementos finitos, uma vez que tanto numa análise estática como numa análise dinâmica esse é efetuada segundo os mesmos moldes. Preocupar-nos-emos apenas em tecer considerações sobre a análise de estruturas com movimentos de corpo rígido.

A forma mais simples de (11.3) que estabelece, apenas, o equilíbrio estático entre forças elásticas resistentes e forças externas, é dada por:

$$(11.5) \quad K.V = P = F_R$$

A matriz inversa da matriz rigidez é a matriz de flexibilidade,

$$(11.6) \quad K^{-1} = F = [f_{ij}] ; i=1,n; j=1,n$$

cujo termo genérico é definido por:

f_{ij} - deslocamento associado ao grau de liberdade de i , proveniente de uma carga unitária segundo o grau de liberdade j , (coeficiente de influência de flexibilidade).

Então, estabelecendo o equilíbrio estático, através dos coeficientes de influência de flexibilidade, temos:

$$(11.7) \quad V = F.P \quad \text{ou} \quad V = F.F_R$$

A energia de deformação, armazenada em qualquer estrutura, pode ser expressa, convenientemente, em termos da matriz de rigidez ou de flexibilidade, sendo igual ao trabalho das forças externas, [3], [5], [12].

$$(11.8) \quad e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i = \frac{1}{2} P^T \cdot V \quad (\text{energia de deformação})$$

Introduzindo (11.7) em (11.8):

$$(11.9) \quad e = \frac{1}{2} P^T \cdot F \cdot P$$

Alternativamente, notando que K é simétrica ($K^T = K$), temos

$$e = \frac{1}{2} P^T \cdot V = \frac{1}{2} F_R^T \cdot V = \frac{1}{2} (K \cdot V)^T \cdot V = \frac{1}{2} V^T \cdot K^T \cdot V = \frac{1}{2} V^T \cdot K \cdot V$$

$$(11.10) \quad e = \frac{1}{2} V^T \cdot K \cdot V$$

Por outro lado, a energia de deformação armazenada numa estrutura estável (sem possibilidade de movimento de corpo rígido) durante qualquer estado de deformação é positiva, daí torna-se evidente que:

$$(11.11) \quad V^T \cdot K \cdot V > 0 \quad \text{e} \quad P^T \cdot F \cdot P > 0$$

Matrizes que satisfaçam (11.11) são ditas positivas definidas, são não singulares e podem ser invertidas. Neste caso, provasse que:

$$(11.12) \quad K^{-1} = F$$

isto é, como inicialmente proposto, a flexibilidade é a inversa da rigidez.

O programa SAP-IV não trabalha diretamente com os coeficientes de influência de flexibilidade, porém, os métodos matemáticos que utiliza na solução de (11.3), quando do cálculo dos modos e frequências naturais, baseiam-se na hipótese inicial de que a matriz de rigidez é positiva definida. Portanto, sistemas com movimentos de corpo rígido (com frequências naturais iguais a zero), não podem ser tratados diretamen

te pelas subrotinas do referido programa.

Então, no caso da análise dinâmica da viga navio, o sistema deve ter suas propriedades de rigidez alteradas de modo a viabilizar a utilização do programa.

O procedimento mais imediato para eliminar a singularidade da matriz de rigidez é adicionar pequenas constantes de mola, segundo graus de liberdade não restritos, de modo a impedir movimentos de corpo rígido. Analiticamente essas constantes de mola são representadas por termos adicionais nos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez. Caso a ordem de grandeza dessas constantes de mola seja pequena quando comparada com os termos originais da diagonal principal, esse procedimento tem efeito provavelmente desprezível no resultado final do cálculo dos modos e frequências naturais, e em adição aparecerá um conjunto de modos de corpo livre (com pequenas deformações) associados a valores de frequências naturais próximas de zero. No SAP-IV a resolução da equação de autovalores e autovetores recai no processo de eliminação de Gauss ou no método generalizado de Jacobi, [4], [14], de modo que qualquer singularidade tendendo a zero na posição da diagonal principal pode acarretar erro na resolução. Fato que torna o procedimento, ora sugerido, nem sempre eficiente.

Um procedimento mais eficiente baseia-se num tratamento matemático conhecido como deslocamento de autovalores ("eigenvalue shift"), [5]. A diferença fundamental entre este procedimento matemático e a aproximação física, mencionada no parágrafo anterior, reside no fato de que, aqui, a cada grau de liberdade (com massa associada) é adicionado uma constante de mola, com valor proporcional à massa, na posição correspon

dente da diagonal principal da matriz de rigidez. A matriz de rigidez assim construída, obviamente, não será singular, mesma que a original o seja. Tal procedimento apresenta a vantagem de não implicar em modificações nas formas normais de vibrar, bem como, permitir uma avaliação perfeita do desvio entre frequências naturais reais e calculadas, sem introdução de erros.

Como mostraremos no capítulo 11.3, foi, este último, o procedimento adotado na adaptação do programa SAP-4 para análise dinâmica de sistemas com movimentos de corpo rígido.

11.2.4 *Matriz de carga. Carregamentos dinâmicos determinísticos*

Qualquer estrutura pode ser submetida, durante sua vida útil, a um carregamento dinâmico. Sob o ponto de vista analítico é conveniente classificar as cargas determinísticas em duas categorias básicas: periódicas e não periódicas. Cargas periódicas caracterizam-se por apresentar aspecto repetitivo num certo número de ciclos; o tipo mais simples desse tipo de carga são as de variação senoidal (harmônicas) que comumente existem como excitação em estruturas de navios.

Cargas não periódicas podem ser cargas impulsivas (de curta duração) ou cargas gerais de longa duração.

O programa SAP-IV emprega método geral de análise dinâmica para carga com variação qualquer (periódica ou não periódica). Método este que, no entanto, apresenta pouca eficiência no caso de excitações harmônicas, quanto comparado com outros possíveis métodos alternativos, e que por essa razão me

receu modificações, como veremos em 11.4.

Em geral a distribuição espacial de cargas pela estrutura é tal que se tem esforços concentrados ou distribuídos. Se os esforços concentrados estão associados a graus de liberdade estabelecidos no sistema discretizado o vetor de carregamento de (11.2) é formado de modo imediato. Porém, no caso de esforços distribuídos ou concentrados fora dos nós é necessário que se realize cálculos intermediários na obtenção do vetor de carregamento, isto é, na transformação do carregamento geral em carregamento nodal efetivo. Dois processos podem ser usados com essa finalidade: a maneira mais direta de achar as forças nodais efetivas, provenientes de cargas concentradas fora dos nós ou distribuídas, é pela aplicação simples da estática, por procedimento semelhante ao cálculo de cargas nodais equivalentes da análise estática. Um segundo processo pode ser usado na avaliação do carregamento nodal efetivo, sendo desenvolvido a partir do conceito de elemento finito, como no caso da determinação da matriz de massa consistente já mencionado em item precedente.

Em grande parte dos casos práticos de análise de vibrações não se justifica o esforço computacional necessário ao cálculo do vetor de carregamento efetivo, de modo que o programa SAP-IV admite somente esforços externos nodais concentrados, embora, possamos relacionar como um dos itens a implantar no referido programa o cálculo de cargas nodais efetivas.

11.3 O problema estrutural de autovalores e autovetores

Na análise dinâmica de sistemas estruturais é extre

mamente importante o conhecimento de seus modos e frequências naturais, seja para posterior verificação de ressonância, seja para o cálculo da resposta a qualquer tipo de excitação. Numa análise de frequências naturais por elementos finitos de um sistema estrutural o seguinte problema de autovalores e autovetores deve ser resolvido, [4], [5]:

$$(11.13) \quad K \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \Lambda \quad (n \text{ graus de liberdade})$$

onde K e M são respectivamente as matrizes de rigidez e de massa do sistema discretizado, e como incógnitas temos:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n] \quad - \text{matriz das autofunções, cu}$$

jas colunas são as formas modais de vibrações, ϕ_i ; $i=1, n$.

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n] \quad - \text{matriz de autovalores. Matriz}$$

diagonal que tem armazenados na diagonal principal, em ordem crescente da primeira para a última linha (ou coluna), os autovalores λ_i , $i=1, n$.

É interessante notar que todas as matrizes de (11.13) são quadradas de ordem n e que ao autovalor λ_i corresponde a autofunção ϕ_i , $\forall i$.

O programa SAP-IV pode utilizar dois algoritmos na solução de (11.13)

- Método de Busca do Determinante ("Determinant Search Method"), aconselhável em problemas que requeiram pouca capacidade de armazenagem de dados.
- Método de Iteração por Subespaço, aconselhável na solução de

problemas maiores, onde haja a necessidade de utilização de memórias auxiliares, em fitas ou discos magnéticos.

Não pretendemos colocar aqui considerações profundas no que diz respeito às vantagens de um método sobre outro. O método de iteração por subespaço tem provado ser um dos mais eficientes algoritmos na análise de frequências onde um número relativamente grande de modos são requeridos, no entanto, sua eficiência não deixa de ser comparável à do método de pesquisa de determinante mesmo em problemas com poucos graus de liberdade.

Para o usuário do programa SAP-IV a diferença básica do segundo método em relação ao primeiro é o fato de que pela aplicação desse não se poder extrair tantas frequências quantos forem os graus de liberdade.

No item seguinte apresentaremos o método de iteração por subespaço já com as adaptações por nós efetuadas, visando a análise de frequência de sistemas com movimentos de corpo rígido pelo SAP-IV. A adaptação do segundo método, com a mesma finalidade, processa-se de modo semelhante tal que julgamos suficiente a apresentação do item 11.3.1.

11.3.1 Método de iteração por subespaço

Sejam

n - número de graus de liberdade

p - número de autovalores (e respectivos autovetores) procurados.

q - um número inteiro positivo tal que, $p < q < n$

Podemos dizer que o método de iteração por subespaço consiste, basicamente, das seguintes etapas:

(1) Remoção da singularidade da matriz de rigidez

$$(11.14) \quad \hat{K} = K + \beta M,$$

β - constante real positiva

\hat{K} - matriz de rigidez deslocada, não singular

(2) Solução do problema de autovalores (e autovetores) para \hat{K} , |4|, |15|

(2.1) Estabelecimento de q vetores de partida (Vetores de "Ritz" para o primeiro passo do processo iterativo)

(2.2) Análise de "Rayleigh-Ritz" para extrair q autovalores (e respectivos autovetores), |3|, |4|, |5|, |18|, |19|, |20|. Redução do problema estrutural de autovalor de ordem n , para um problema de autovalor de ordem q , com precisão pré-especificada para os p mais baixos autovalores encontrados.

(2.3) Após o processo haver convergido utiliza-se (quando solicitado pelo usuário do programa) uma verificação do número de autovalores que foram encontrados, com a precisão prescrita, pela aplicação de "Sturm Sequence Check", |4|.

(3) Cálculo das frequências naturais do sistema estrutural original

$$(11.15) \quad \Lambda = \hat{\Lambda} - \beta, \text{ onde}$$

$\hat{\Lambda}$ - matriz dos autovalores calculados em (2)

O método baseia-se em técnicas (apresentadas, em detalhes, nas referências) que apresentaremos, resumidamente, nos próximos itens.

11.3.2 Remoção da singularidade da matriz de rigidez

Seja um sistema estrutural qualquer, discretizado por elementos finitos, com matriz de massa discreta, tal que as frequências naturais ($w_i = \sqrt{\lambda_i}$), são dadas por, |5|, |20|:

$$(11.16) \quad \lambda_i = w_i^2 = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot \text{diag}[m_i] \cdot \phi_i}; \quad i=1, \dots, n$$

Se a cada grau de liberdade associarmos, em correspondência, um vínculo elástico de valor k_i , as frequências naturais para o novo sistema, assim obtido, serão dadas por:

$$(11.17) \quad \hat{\lambda}_i = \hat{w}_i^2 = \frac{\phi_i^T \cdot [K + \text{diag}[k_i]] \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i + \phi_i^T \cdot \text{diag}[k_i] \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot \text{diag}[m_i] \cdot \phi_i}; \quad i=1, \dots, n$$

onde, implicitamente, admitiu-se a não mudança das formas modais ϕ_i , que como veremos adiante é uma hipótese válida.

Nossa intenção é a de promover uma distribuição de constantes elásticas (k_i) de maneira a poder avaliar os desvios de λ_i para $\hat{\lambda}_i$. Pela observação de (11.17), vê-se que os desvios serão nulos se:

$$(11.18) \quad \phi_i^T \cdot \text{diag}[k_i] \cdot \phi_i = 0 \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

A igualdade de (11.18) será verdadeira se

$k_i = 0$; $\forall i / i=1, 2, \dots, n$ (solução que não nos interessa pois não elimina a singularidade da matriz de rigidez) ou se os vínculos elásticos forem colocados em nós modais.

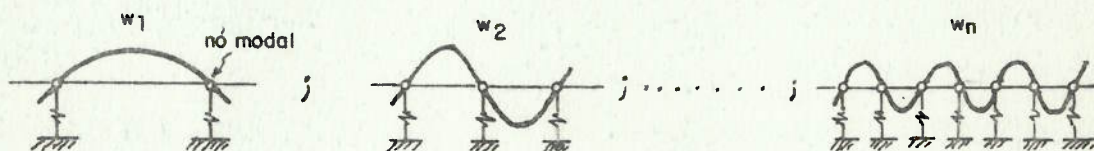


Figura 11.1- Constantes de mola em nós modais

Como se vê, mesmo no caso simples de uma viga livre da figura 11.1, tal solução não apresenta interesse prático quando da utilização de computadores, uma vez que seria necessário o conhecimento prévio e exato das formas modais, e distribuição de constantes de molas distinta no cálculo isolado de cada uma das frequências. Embora as posições dos nós modais, em alguns casos, possam ser previamente estimadas e as constantes elásticas diferentes de zero possam ser re

duzidas em número (colocando-se uma quantidade necessária e suficiente a fim de restringir movimentos de corpo rígido) e em magnitude, será difícil, senão impossível avaliar o desvio.

Admitamos, então, uma constante β (real e positiva), independente do modo de vibrar, tal que,

$$(11.19) \quad k_i = \beta \cdot m_i \quad ; \quad i=1,2,3,\dots,n$$

De (11.19) resulta que,

$$(11.20) \quad \text{diag}[k_i] = \beta \cdot \text{diag}[m_i] = \beta \cdot M$$

isto é, a cada grau de liberdade do modelo estamos associando constantes elásticas de magnitude proporcional à massa, e de mesma natureza.

Introduzindo (11.20) em (11.17), resulta:

$$(11.21) \quad \hat{\lambda}_i = \lambda_i + \beta \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

ou utilizando matrizes diagonais de autovalores

$$(11.22) \quad \hat{\Lambda} = \Lambda + \beta I \quad \text{ou} \quad \Lambda = \hat{\Lambda} - \beta I$$

onde I é a matriz identidade de ordem n .

Portanto, para uma distribuição de constantes elásticas promovida segundo o que estabelece (11.20), é possível avaliar exatamente os desvios de $\hat{\lambda}_i$ para λ_i , sendo todos eles iguais a β . Essa é a transformação conhecida na literatura como "shifting", por nós traduzido como deslocamento.

Substituindo a segunda expressão de (11.22) em (11.13), temos:

$$K \cdot \Phi = M \cdot \Phi [\hat{\Lambda} - \beta I]$$

que rearranjado dá

$$(11.23) \quad [K - \beta M] \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \hat{\Lambda}$$

Por outro lado a matriz de rigidez, após sofrer a transformação proposta, é dada por $\hat{K} = K - \beta \cdot M$, tal que (11.23) reduz-se a:

$$(11.24) \quad \hat{K} \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \hat{\Lambda}$$

A equação (11.24) é inteiramente equivalente a (11.13) de modo que é de se esperar que o sistema, após sofrer a transformação de deslocamento, tenha os mesmos autovetores que o sistema original, [4], [5].

Uma importante observação a ser acrescentada às discussões anteriores é que, em princípio, num programa é necessário, apenas, algoritmos para calcular autovalores e respectivos autovetores do problema $K \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \Lambda$ quando todos os autovalores são maiores do que zero, uma vez que problemas com autovalores nulos podem ser transformados.

A transformação de deslocamento possui, ainda, outras utilidades tais como acelerar os cálculos e evitar problemas de convergência numérica, de modo que uma vez implantada no programa, ela pode ser empregada com qualquer um dos propósitos mencionados.

11.3.3 A análise de "Rayleigh-Ritz"

O método de energia de "Rayleigh" proporciona uma boa aproximação para o primeiro modo de vibração, [3], [4], [5], [18], [20]. Se desejarmos avaliar mais de um modo de vibrar podemos aplicar a extensão de "Ritz" ao método de "Rayleigh", cuja hipótese básica é supor que o vetor de deslocamentos nodais (V) pode ser expresso em termos de um conjunto de formas assumidas (ψ_i - vetores de "Ritz") de amplitude z_i :

$$(11.25) \quad \begin{matrix} V \\ (n \times 1) \end{matrix} = \sum_{i=1}^q \begin{matrix} \psi_i \\ (n \times 1) \end{matrix} \cdot z_i(t)$$

ou, em forma matricial

$$(11.26) \quad \begin{matrix} V \\ (n \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \Psi \\ (n \times q) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} Z(t) \\ (q \times 1) \end{matrix}$$

sendo

$$\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q] \quad \text{- matriz das formas assumidas}$$

e

$$Z(t) = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{Bmatrix} \quad \text{- vetor das amplitudes}$$

O vetor das amplitudes Z costuma ser chamado de vetor das coordenadas generalizadas, enquanto Ψ corresponde a uma função (discreta) de deslocamentos.

Para se obter os melhores resultados a partir do menor número possível de coordenadas generalizadas, cada um dos vetores ψ_i deve ser uma boa aproximação das formas modais ϕ_i

(e portanto Ψ uma boa aproximação de $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q]$), no entanto, para formas quaisquer assumidas (ψ_i), em geral, é aconselhável usar q dessas formas se se desejar obter $q/2$ modos e correspondentes frequências com precisão adequada.

Para avaliar o vetor das coordenadas generalizadas Z usa-se o fato de a análise de Rayleight proporcionar um limite superior para a frequência, tal que, como mostra a referência [5], a equação de equilíbrio do sistema reduz-se à forma:

$$(11.27) \quad \Psi^T \cdot \hat{K} \cdot \Psi \cdot Z - \hat{\lambda} \cdot \Psi^T \cdot M \cdot \Psi \cdot Z = 0$$

donde podemos definir

$$(11.28) \quad \begin{matrix} K^* & = & \Psi^T & \cdot & \hat{K} & \cdot & \Psi & & \\ (q \times q) & & (q \times n) & & (n \times n) & & (n \times q) & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(matriz de rigidez genera} \\ \text{lizada)} \end{matrix}$$

$$(11.29) \quad \begin{matrix} M^* & = & \Psi^T & \cdot & M & \cdot & \Psi & & \\ (q \times q) & & (q \times n) & & (n \times n) & & (n \times q) & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(matriz de massa generali} \\ \text{zada)} \end{matrix}$$

tal que (11.27) é, agora, reescrita na forma

$$(11.30) \quad K^* \cdot Z - \hat{\lambda} \cdot M^* \cdot Z = 0$$

estabelecendo-se o seguinte problema de autovalor

$$(11.31) \quad (K^* - \hat{\lambda} \cdot M^*) \cdot \phi_z = 0$$

sendo ϕ_z um autovetor (em coordenadas generalizadas) do problema (11.31).

Como vemos, a análise de "Rayleight-Ritz" reduz o sis

tema de n graus de liberdade nas coordenadas geométricas V , para q graus de liberdade nas coordenadas generalizadas Z .

Cada elemento das matrizes generalizadas K^* e M^* é dado por:

$$k_{ij}^* = \psi_i^T \cdot \hat{K} \cdot \psi_j$$

$$(11.32) \quad m_{ij}^* = \psi_i^T \cdot M \cdot \psi_j$$

Pode-se provar, como consequência da aplicação do Teorema de Betti, [3], [5], que as formas modais exatas são ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez.

$$(11.33) \quad \phi_m^T \cdot M \cdot \phi_n = 0 \quad , \text{ para } m \neq n$$

$$\phi_m^T \cdot \hat{K} \cdot \phi_n = 0 \quad , \text{ para } m \neq n$$

De forma geral, as formas assumidas (ψ_i) não possuem as propriedades de ortogonalidade (11.33) das formas modais, então, os termos de fora da diagonal principal das matrizes generalizadas (K^* e M^*) não são necessariamente nulos, no entanto, uma boa escolha das formas assumidas tende a tornar pequenos esses mesmos termos.

Os autovalores obtidos de (11.31) representam boas aproximações para as p mais baixas frequências naturais do sistema, desde que $0 < p < q/2$, pois para $p > q/2$ as aproximações são precárias.

Os vetores das formas modais em coordenadas generalizadas (soluções de (11.31)), à semelhança do que é feito para as formas modais em coordenadas geométricas, podem ser agrupados

em forma de matriz,

$$(11.34) \quad \phi_{z_i}; \quad i=1,2,\dots,q \text{ (soluções de (11.31))}$$

$$\Phi_z = [\phi_{z_1}, \phi_{z_2}, \phi_{z_3}, \dots, \phi_{z_p}]$$

e sendo

$$(11.35) \quad \hat{\Lambda} = \text{diag}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_q] \text{ - matriz dos autovalores soluções de (11.31)}$$

temos

$$(11.36) \quad \begin{matrix} K^* \\ (q \times q) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \Phi_z \\ (q \times q) \end{matrix} = \begin{matrix} M^* \\ (q \times q) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \Phi_z \\ (q \times q) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \hat{\Lambda} \\ (q \times q) \end{matrix}$$

$$(11.37) \quad \begin{matrix} \Phi \\ (n \times q) \end{matrix} = \begin{matrix} \Psi \\ (n \times q) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \Phi_z \\ (q \times q) \end{matrix}$$

Como veremos adiante, no cálculo de resposta pelo método de superposição modal é hipótese básica e necessária a verificação das propriedades de ortogonalidade das formas modais, assim, mesmo que aproximações sejam obtidas para as formas modais é de grande importância que sejam ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez do sistema.

As propriedades de ortogonalidade em coordenadas generalizadas, e já que (11.36) é um problema de autovalor, são dadas por:

$$(11.38) \quad \begin{matrix} \phi_{z_i}^T \\ \phi_{z_i}^T \end{matrix} \cdot \begin{matrix} M^* \\ K^* \end{matrix} \cdot \phi_{z_j} = 0 \quad ; \text{ para } i \neq j$$

de (11.37) vem:

$$(11.39) \quad \phi_i = \Psi \cdot \phi_{z_i}$$

donde

$$(11.40) \quad \phi_i^T = \phi_{z_i}^T \cdot \Psi^T$$

Introduzindo as definições de (11.28) e (11.29) em (11.38) chegamos a

$$\phi_{z_i}^T \cdot [\Psi^T \cdot M \cdot \Psi] \phi_{z_j} = 0 \quad \dots \quad [\phi_{z_i}^T \cdot \Psi^T] \cdot M \cdot [\Psi \cdot \phi_{z_j}] = 0; \quad i \neq j$$

$$\phi_{z_i}^T \cdot [\Psi^T \cdot \hat{K} \cdot \Psi] \phi_{z_j} = 0 \quad \dots \quad [\phi_{z_i}^T \cdot \Psi^T] \cdot \hat{K} \cdot [\Psi \cdot \phi_{z_j}] = 0; \quad i \neq j$$

que pela observação de (11.39) e (11.40) reduzem-se a

$$(11.41) \quad \phi_i^T \cdot M \cdot \phi_j = 0; \quad i \neq j$$

$$\phi_i^T \cdot \hat{K} \cdot \phi_j = 0; \quad i \neq j$$

logo as formas modais aproximadas, em coordenadas geométricas, obtidas pela análise de "Rayleigh-Ritz", são ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez do sistema.

É importante notar que um processo de melhora (por analogia ao que é feito no método de energia de "Rayleigh", [3], [5]) pode ser aplicado ao método de "Rayleigh-Ritz". Assim uma boa estimativa para os vetores de "Ritz" é dada por

$$(11.42) \quad \hat{K} \cdot \Psi = M \cdot \Phi$$

As formas assumidas (Ψ), quando assim estabelecidas,

representam uma melhor aproximação das formas modais, de modo que se pode esperar melhor convergência, se a cada iteração (11.42) for imposta. Embora tal procedimento implique na resolução de uma equação matricial, de ordem n (pois \hat{K} é de ordem n) a melhora introduzida, acelerando a convergência, torna-o vantajoso em termos de tempo de processamento.

Do que foi exposto conclui-se que a análise de "Rayleigh-Ritz" proporciona, fundamentalmente, uma redução do número de graus de liberdade (n) do problema $\hat{K}\Phi = M\Phi\Lambda$, em coordenadas geométricas, transformando-o num problema de autovalor, em coordenadas generalizadas, de ordem q , dado por (11.36). Por (11.42) são estimados os vetores de "Ritz", tal que por (11.28) e (11.29) calculam-se as matrizes generalizadas de massa e rigidez; resolvendo (11.36) obtém-se as formas modais aproximadas (Φ_z), em coordenadas generalizadas, e as aproximações para os autovalores do problema real; finalmente por (11.37), a partir de Φ_z , encontramos aproximações para as formas modais em coordenadas geométricas.

Tal sequência de cálculo é a base do método de iteração por subespaço empregado pelo programa SAP-IV, [4], [14], sendo que na solução de (11.36) emprega subprograma de alta eficiência, baseado no "método generalizado de Jacobi" que apresentaremos a seguir.

11.3.4 O método generalizado de Jacobi para solução de problemas de autovalor

O método generalizado de Jacobi dispensa a transfor

$$(11.45) \quad \gamma = \frac{\bar{k}_{ii}^{(r)}}{\chi} \quad ; \quad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(r)}}{\chi}$$

$$\chi = \frac{\bar{k}^{(r)}}{2} + \text{sign}|\bar{k}^{(r)}| \cdot \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(r)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(r)} \cdot \bar{k}_{jj}^{(r)}}$$

$$\bar{k}_{ii}^{(r)} = k_{ii}^{(r)} \cdot m_{ij}^{(r)} - m_{ii}^{(r)} \cdot k_{ij}^{(r)}$$

$$\bar{k}_{jj}^{(r)} = k_{jj}^{(r)} \cdot m_{ij}^{(r)} - m_{jj}^{(r)} \cdot k_{ij}^{(r)}$$

$$\bar{k}^{(r)} = k_{ii}^{(r)} \cdot m_{jj}^{(r)} - k_{jj}^{(r)} \cdot m_{ii}^{(r)}$$

Tais relações são para o caso geral de a matriz de massa ser positiva definida, completamente cheia ou de banda. Como já dito anteriormente, embora a matriz de massa do sistema, para o caso de análise pelo SAP-IV, seja diagonal (massas discretas), a matriz de massa generalizada não o é, de modo que, em geral, os elementos $m_{ij}^{(r)}$ não são nulos.

A transformação, ora apresentada, deve ser aplicada sucessivamente de maneira a reduzir as matrizes $M_{(r)}$ e $K_{(r)}$ à forma diagonal. Assim, quando $r \rightarrow \infty$, prova-se que:

$$K_{(r+1)} \rightarrow \hat{\Lambda} = \text{diag}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_q]$$

$$M_{(r+1)} \rightarrow I$$

$$\Phi_z = P_{(1)} \cdot P_{(2)} \cdot P_{(3)} \cdot \dots \cdot P_{(\infty)}$$

Na prática não é necessário que $M_{(r+1)}$ convirja para I e que $K_{(r+1)}$ para $\hat{\Lambda}$, mas somente que ambas convirjam pa-

ra a forma diagonal. Se ℓ indica a última iteração do processo, temos:

$$(11.46) \quad \hat{\Lambda} = \text{diag} \left[\frac{k_{11}^{(\ell+1)}}{m_{11}^{(\ell+1)}}, \frac{k_{22}^{(\ell+1)}}{m_{22}^{(\ell+1)}}, \dots, \frac{k_{qq}^{(\ell+1)}}{m_{qq}^{(\ell+1)}} \right]$$

$$\Phi_z = P(1) \cdot P(2) \cdot \dots \cdot P(\ell) \cdot \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{m_{11}^{(\ell+1)}}}, \frac{1}{\sqrt{m_{22}^{(\ell+1)}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_{qq}^{(\ell+1)}}} \right]$$

Um importante fato a enfatizar é que pela aplicação sucessiva de (11.44) devemos procurar tornar nulos todos os elementos de fora da diagonal de $M_{(r)}$ e $K_{(r)}$, porém, alguns desses elementos já podem estar suficientemente (segundo precisão pré-estabelecida) próximos de zero. Portanto, para propósitos práticos de análise num algoritmo real, é necessário decidir quais elementos devem ser zerados. Assim, antes de efetuar-se a transformação (11.44) para um determinado elemento de $K_{(r)}$ e $M_{(r)}$, verifica-se sua necessidade. Uma medida para tal fato é dada pelas desigualdades,

$$(11.47) \quad \left| \frac{[m_{ij}^{(r)}]^2}{m_{ii}^{(r)} \cdot m_{jj}^{(r)}} \right|^{1/2} \leq 10^{-2m}$$

$$\left| \frac{[k_{ij}^{(r)}]^2}{k_{ii}^{(r)} \cdot k_{jj}^{(r)}} \right|^{1/2} \leq 10^{-2m}$$

tal que, se tais relações são satisfeitas, a rotação específica da por (11.44), para os elementos (i, j) , não precisa ser efetuada.

Por outro lado, como já exposto, a matriz $K_{(r)}$ tende à matriz dos autovalores à medida que o número de iterações tende a infinito, porém, num processo numérico, é necessário definir uma aproximação para os autovalores e respectivos autovetores. Assim, podemos estabelecer que o processo converge quando

$$(11.48) \quad \frac{|\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)} - \hat{\lambda}_i^{(\ell)}|}{\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}} \leq 10^{-s}; \quad \forall i/i=1,2,3,\dots,q$$

onde

$$\hat{\lambda}_i^{(\ell)} = \frac{k_{ii}^{(\ell)}}{m_{ii}^{(\ell)}} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_i^{(\ell+1)} = \frac{k_{ii}^{(\ell+1)}}{m_{ii}^{(\ell+1)}}$$

e quando

$$(11.49) \quad \left| \frac{|k_{ii}^{(\ell+1)}|^2}{k_{ii}^{(\ell+1)} \cdot k_{jj}^{(\ell+1)}} \right|^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \left| \frac{|m_{ij}^{(\ell+1)}|^2}{m_{ii}^{(\ell+1)} \cdot m_{jj}^{(\ell+1)}} \right|^{1/2} \leq 10^{-s};$$

$$\forall i,j/ i,j=1,2,3,\dots,q \quad \text{e} \quad i < j$$

sendo s a tolerância desejada.

A relação (11.48) deve ser satisfeita porque os valores $\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}$ são as aproximações correntes dos autovalores ($\hat{\lambda}_i$) do problema (11.36) e essa relação estabelece que as aproximações correntes ($\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}$) e últimas ($\hat{\lambda}_i^{(\ell)}$) não diferem dos primeiros dígitos, [4], [23].

As relações de (11.49) asseguram que os termos de fora da diagonal principal de $M_{(\ell+1)}$ e $K_{(\ell+1)}$ sejam realmente pequenos, quando comparados com os termos da diagonal.

Um caminho lógico de execução de rotações sucessivas é percorrer em ordem (linha por linha, ou coluna por coluna) os elementos de fora da diagonal principal, até que se tenha passado por todos eles, efetuando o que se convencionou chamar de varredura. Porém, ao contrário do que se possa imaginar, quando se promove a zeração numa determinada posição, altera-se o valor dos elementos anteriormente zerados, e, além disso, tratando-se de um processo numérico em computador a transformação de rotação fica condicionada à capacidade da máquina. Então, no final de uma varredura dispomos de matrizes $K_{(r)}$ e $M_{(r)}$ com elementos de fora da diagonal principal significativamente menores do que os elementos da diagonal, porém, não absolutamente nulos, de tal maneira que uma nova varredura deve ser iniciada (desde a precisão estabelecida por (11.48) e (11.49) não tenha sido atingida).

Após discutidos todos os principais aspectos do método, podemos sumarizar as etapas em que se desenvolve o mesmo:

- (1) Inicia-se a primeira varredura com $m=1$ (em (11.47)). No SAP-IV para a u -ésima varredura faz-se $m=u$, portanto, m representa o número de ordem da varredura corrente.
- (2) Para todo i , $j/i=1,2,\dots,j-1$ e $j=1,2,3,\dots,q$, verifica-se (11.47) aplicando a rotação (11.44) onde tais relações não forem satisfeitas.
- (3) Terminada a varredura verifica-se se (11.48) é satisfeita; se não, inicia-se nova varredura. Se (11.48) é satisfeita verifica-se se (11.49) o é. Se sim, o processo

convergiu, se não, inicia-se nova varredura.

Recomenda-se, baseado em dados obtidos da prática, no caso de se usar o programa SAP-IV (por nós modificado) implantando no B-6700 do Centro de Computação Eletrônica da USP, que se adote como valor máximo da constante inteira positiva s (vide teste duplo de convergência (11.48), (11.49)) o valor 10.

O método generalizado de Jacobi apresenta uma série de vantagens, em relação a outros métodos, por não requerer a transformação do problema estrutural de autovalor numa forma padrão (com ê o caso dos métodos de triangularização), trabalhando diretamente com as matrizes de massa e rigidez generalizadas. Tal fato é particularmente vantajoso quando os elementos de fora da diagonal principal, das matrizes K^* e M^* , são pequenos ou há um grande número desses elementos com valor nulo, pois, neste caso o problema de autovalor estará, quase praticamente, resolvido, sem a necessidade de novas rotações.

Deve-se notar, ainda, que o método encontra aproximações para todos os autovalores e respectivos autovetores do problema $K^* \cdot \Phi_z = M^* \cdot \Phi_z \cdot \hat{\Lambda}$. Contudo, numa análise por elementos finitos desejamos, na maioria dos casos, obter somente alguns autovaleores e respectivos autovetores (particularmente quando as matrizes de massa e rigidez, em coordenadas geométricas, são de alta ordem) de modo que justifica-se a aplicação do método de Jacobi como parte de um algoritmo que antes promova a redução do número de graus de liberdade, como proposto em 11.3.3.

11.3.5 Sumário do método de iteração por subespaço

O objetivo básico do método é encontrar, com precisão pré-estabelecida, os p mais baixos autovalores e respectivos autovetores do problema

$$(11.50) \quad \begin{matrix} K & \cdot & \Phi & = & M & \cdot & \Phi & \cdot & \Lambda \\ (nxn) & & (nxp) & & (nxn) & & (nxp) & & (pxp) \end{matrix}$$

onde k - matriz de rigidez do sistema discretizado que pode ser singular (sistema com movimento de corpo rígido) ou não

M - matriz de massa discreta

Λ, Φ - armazenagem, respectivamente, os p mais baixos autovalores e respectivos autovetores.

Podemos acrescentar, ainda, que Φ satisfaz as condições de ortogonalidade, em relação as matrizes K e M , [4], tal que:

$$(11.51) \quad \Phi^T \cdot \hat{M} \cdot \Phi = I$$

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \Lambda$$

Desse modo, da transformação de deslocamento (11.14), temos, também:

$$(11.52) \quad \Phi^T \cdot \hat{K} \cdot \Phi = \hat{\Lambda}$$

que pode ser provado a partir de (11.51)

É importante notar que (11.50) é uma condição necessária e suficiente para que Φ seja uma matriz de autovetores,

enquanto (11.51), embora necessária, não é suficiente. Em outras palavras, se temos p vetores que satisfazem a equação de equilíbrio para sistemas livres não amortecidos ($p < n$), tais vetores são, necessariamente, autovetores. Entretanto, se p vetores satisfazem (11.51) não são necessariamente autovetores.

A idéia essencial do método de iteração por subespaço é admitir uma certa coletânea de p vetores, linearmente independente, como uma primeira aproximação de Φ ; promovendo uma iteração inversa de vetores, [4], [5], de todo o subespaço de vetores dados por Φ .

O método de iteração por subespaço, visando a análise de frequências de sistema com possíveis movimentos de corpo rígido, é constituído das seguintes etapas:

- (1) Remoção da singularidade da matriz de rigidez

$$(11.53) \quad \hat{K} = K + \beta M$$

- (2) Solução do problema de autovalor para \hat{K}

(2.1) Estabelecimento de q vetores de partida ($\Phi_{(1)}$)

(2.2) Análise iterativa de "Rayleigh-Ritz" ($k=1,2,3\dots$)

$$(11.54) \quad \hat{K} \cdot \Psi_{(k+1)} = M \cdot \Phi_{(k)}$$

$$(11.55) \quad M_{(k+1)}^* = \Psi_{(k+1)}^T \cdot M \cdot \Psi_{(k+1)}$$

$$(11.56) \quad K_{(k+1)}^* = \Psi_{(k+1)}^T \cdot \hat{K} \cdot \Psi_{(k+1)}$$

$$(11.57) \quad K_{(k+1)}^* \cdot \Phi_{z,(k+1)} = M_{(k+1)}^* \cdot \Phi_{z,(k+1)} \cdot \hat{\Lambda}_{(k+1)}$$

$$(11.58) \quad \Phi_{(k+1)} = \Psi_{(k+1)} \cdot \Phi_{z(k+1)}$$

- (3) Cálculo das aproximações dos autovalores do problema original

$$(11.59) \quad \Lambda = \hat{\Lambda}_{(k+1)} - \beta$$

Uma observação importante, com respeito a primeira etapa do método, diz respeito ao valor que se deve atribuir à constante β . Tal valor, desde que real e positivo, elimina a singularidade da matriz de rigidez, no entanto, é de boa norma, tendo em vista um bom processo de convergência, que se atribua a magnitude da mesma ordem de grandeza dos autovalores procurados.

O primeiro passo da segunda etapa do método consiste na determinação dos vetores de partida para $\Phi_{(1)}$. Pode-se mostrar que, para garantir uma boa convergência, os vetores de partida devem ser construídos de modo a excitar todos os graus de liberdade com os quais grandes massas e pequenos coeficientes de influência de rigidez estejam associados. Baseado nessa observação o seguinte procedimento é utilizado, eficientemente, pelo programa.

A primeira coluna de $M \cdot \Phi_{(1)}$ é, simplesmente, a diagonal da matriz de massa, assegurando, assim, que todas as massas serão excitadas. As outras colunas de $M \cdot \Phi_{(1)}$ (da 2ª até a p-ésima) são vetores unitários (com um elemento unitário e demais nulos) onde coloca-se o valor +1 na posição correspondente à menor relação \hat{k}_{ii}/m_{ii} , sequencialmente. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & \\ & & & 8 \end{vmatrix}$$

para $p=3$ temos

i	k_{ii}/m_{ii}	ordem
1	∞	4º
2	2	3º
3	1,5	2º
4	-1,1	1º

$$\rightarrow M.\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O algoritmo do segundo passo da segunda etapa tem início para $k=1$, tal que de (11.58) retorna-se a (11.54), sempre que não tenha sido satisfeito o critério de convergência exposto no item seguinte. Quando $k \rightarrow \infty$ temos:

$$(11.60) \quad \begin{aligned} \hat{\Phi}_{(k+1)} &\rightarrow \hat{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p] \\ \hat{\Lambda}_{(k+1)} &\rightarrow \hat{\Lambda} = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p] \end{aligned}$$

Admite-se, em (11.60), que os vetores de iteração são ordenados de maneira apropriada, de modo que os vetores armazenados na 1º, 2º, ..., p -ésima colunas de $\hat{\Phi}_{(k+1)}$ convergem, respectivamente, para $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$.

As matrizes generalizadas de (11.55) e (11.56) tendem à forma diagonal à medida que aumenta o número de iterações. Daí segue-se, do item 11.3.4, que o método generalizado de Jacobi pode ser usado eficientemente na solução do problema de autovalor dado por (11.57), tomando-se o cuidado de colocar

as respostas $(\Phi_{z(k+1)})$ e $\hat{\Lambda}_{(k+1)}$ em ordem apropriada, como descrito no parágrafo anterior.

Outro aspecto importante a observar diz respeito à convergência. Se admitirmos que os vetores de iteração $\Phi_{(k+1)}$ estão ordenados de maneira correta (ou seja, o i -ésimo elemento da diagonal de $\hat{\Lambda}_{(k+1)}$ é menor do que o $(i+1)$ -ésimo) então, podemos dizer que a i -ésima coluna de $\Phi_{(k+1)}$ converge linearmente, [4], para ϕ_i com razão de convergência dada por $\hat{\lambda}_i / \hat{\lambda}_{p+1}$; fato que evidencia ser, a convergência, mais rápida para os menores autovalores, e que quanto maior for a magnitude do mais alto autovalor procurado ($\hat{\lambda}_p$) menor será a razão de convergência, de modo que uma convergência mais rápida pode ser obtida usando-se q vetores de iteração, com $p < q < n$. Contudo, à medida que se usa mais vetores de iteração aumenta, também, o trabalho computacional com transferência de dados. Assim, na prática, toma-se o valor q dado por:

$$(11.61) \quad q = \min \{ 2p; p+8 \}$$

que tem mostrado bons resultados.

Tomando-se, então, q vetores de iteração a razão de convergência dada por $\hat{\lambda}_i / \hat{\lambda}_{q+1}$ será menor do que no caso anterior, mas por outro lado, a transformação de deslocamento, como proposto em 11.3.2, (para $\beta > 0$) tende a desacelerar a convergência, pois

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{q+1}} < \frac{\lambda_i + \beta}{\lambda_{q+1} + \beta} \quad \text{se } \beta > 0$$

portanto, não se deve utilizar valores de β muito grandes. En

quanto, valores negativos de β , no caso de análise de sistemas sem movimentos de corpo rígido, podem ser utilizados, criteriosamente, com finalidade de acelerar a convergência.

Finalizando acrescentaremos que sendo o método de i iteração por subespaço, na realidade, uma análise iterativa de Rayleight-Ritz todas as características dessa análise são tam bém características do método, portanto, obtêm-se, sempre, melhores aproximações para os autovalores mais baixos e, ainda, todas as aproximações obtidas para os autovalores representam limites superiores para os autovalores do sistema discretizado.

11.3.6 Critério de convergência

No item 11.3.4 apresentamos os critérios de convergência utilizados na aplicação do método generalizado de Jacobi como algoritmo de solução de (11.57). Colocaremos aqui o critério de convergência para a análise iterativa de Rayleight Ritz, segundo passo da segunda etapa do método de iteração por subespaço.

Admitamos que na $(k-1)$ -ésima e k -ésima iterações $\tilde{\lambda}_i^{(k)}$ e $\hat{\lambda}_i^{(k+1)}$, $i=1,2,\dots,p$, aproximações para os autovalores foram obtidas. Para determinar a convergência exige-se que:

$$(11.62) \quad \frac{|\hat{\lambda}_i^{(k+1)} - \tilde{\lambda}_i^{(k)}|}{\hat{\lambda}_i^{(k+1)}} \leq 10^{-2s} ; i=1,2,3,\dots,p$$

Assim, quando (11.62) for satisfeita, encontraremos autovalores com precisão aproximada de $2s$ dígitos. Como $\hat{\lambda}_p$ é

o mais alto dentre os autovalores procurados, de (11.62) conclui-se que ele é calculado com precisão de 2s dígitos e os demais ($\hat{\lambda}_i < \hat{\lambda}_p$) com precisão maior ou igual a esta.

Por outro lado, pode-se mostrar que as aproximações para os autovetores, decorrentes da imposição de (11.62), tem uma precisão aproximada de s dígitos, |4|.

Deve-se notar que a interação é feita com q vetores ($q > p$), vide (11.61)), mas a convergência só é testada para as aproximações dos p mais baixos autovalores.

Considerando, agora, a transformação de deslocamentos (proposta em (11.3.2)) a desigualdade de (11.62) pode ser rearranjada já que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_i^{(k+1)} &= \lambda_i^{(k+1)} + \beta \\
 \text{e} \\
 |\hat{\lambda}_i^{(k+1)} - \hat{\lambda}_i^{(k)}| &= |(\hat{\lambda}_i^{(k+1)} + \beta) - (\lambda_i^{(k)} + \beta)| = \\
 &= |\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|
 \end{aligned}$$

donde

$$(11.63) \quad \frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)} + \beta} \leq 10^{-2s}; \quad i=1,2,3,\dots,p$$

Pela observação de (11.63) conclui-se que sendo β uma constante arbitrária (embora escolhida com critério) quando diferente de zero pode levar a uma piora no teste de convergência. Assim, é interessante que o critério de convergência, aqui proposto, seja generalizado de modo a eliminar possíveis problemas quando da aplicação da transformação de deslocamento.

Desse modo, como resultado das observações já levantadas, estabelecemos o seguinte critério, implantado no programa SAP-IV por nós modificado:

$$(11.64) \quad \frac{|\hat{\lambda}_i^{(k+1)} - \hat{\lambda}_i^{(k)}|}{\hat{\lambda}_i^{(k+1)} - \beta} \leq 10^{-2s} \quad \dots \quad \frac{|\hat{\lambda}_i^{(k+1)} - \hat{\lambda}_i^{(k)}| + 10^{-2s} \cdot \beta}{\hat{\lambda}_i^{(k+1)}} \leq 10^{-2s}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, p$$

Um outro fato, importante na técnica do método, é a verificação de que se os autovalores (e respectivos autovetores) calculados são os requeridos, já que (11.50) e (11.51) são satisfeitas para quaisquer autovalores (e respectivos autovetores). Essa verificação, opcionalmente, é a terceira etapa no método de iteração por subespaço.

Como já mencionado anteriormente, as iterações do algoritmo de (11.54) a (11.58) convergem, no limite, para os autovetores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, desde que os vetores de partida sejam escolhidos convenientemente. A escolha dos vetores de partida, como proposta em 11.3.5, tem provado, experimentalmente, ser bastante satisfatória, contudo, não há uma prova matemática de que a convergência sempre ocorrerá para $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$. Na prática, desde que o critério de convergência estabelecido seja satisfeito (com $s \geq 3$), podemos garantir que os p mais baixos autovalores (e respectivos autovetores) tiveram suas aproximações calculadas, |4|.

Finalizando, seja ℓ a última iteração, tal que já temos calculadas as aproximações $\lambda_1^{(\ell+1)}, \lambda_2^{(\ell+1)}, \dots, \lambda_p^{(\ell+1)}$. Uma

estimativa conservadora para a faixa na qual devem estar os valores exatos é dada por:

$$(11.65) \quad 0.99 \lambda_i^{(\ell+1)} < \lambda_i < 1.01 \lambda_i^{(\ell+1)}$$

onde somente as p mais baixas aproximações para os autovalores que convergiram para uma tolerância de 10^{-2s} devem ser incluídas. Recomenda-se, tendo em vista as características da mãquina (computador B-6700) e os fatos anteriormente apresentados, que se seja escolhido no conjunto $\{3;4;5\}$, ficando a escolha a cargo do analista segundo suas necessidades e experiência.

11.4 *Análise da resposta dinâmica*

Na análise da resposta dinâmica é necessário que se obtenha a solução da equação (11.3)

$$(11.66) \quad M.\ddot{V}(t) + C.\dot{V}(t) + K.V(t) = P(t) \quad (\text{rep.11.3})$$

onde $P(t)$ é o vetor (conhecido) de cargas com uma variação arbitrária no tempo ou de cargas efetivas resultantes de movimentos de base. Especificamente, no caso de movimento de base, o programa SAP-IV admite que a estrutura é uniformemente submetida ao vetor de acelerações de base $\ddot{V}_g(t)$, |14|, de modo que (11.66) reduz-se à forma:

$$(11.67) \quad M.\ddot{V}_r(t) + C.\dot{V}_r(t) + K.V_r(t) = -M.\ddot{V}_g(t)$$

onde
$$V_r(t) = V(t) - V_g(t)$$

$$\dot{V}_r(t) = \dot{V}(t) - \dot{V}_g(t)$$

$$\ddot{V}_r(t) = \ddot{V}(t) - \ddot{V}_g(t) \quad \text{s\~{a}o, respectivamente,}$$

deslocamentos, velocidades e acelerações relativas, entre estrutura e base.

O programa pode calcular o histórico de resposta resultante da solução de (11.66) ou (11.67) ou, ainda, efetuar uma análise espectral na solução de (11.67). A análise do histórico de resposta pode ser executada por dois métodos: superposição modal ou integração direta, que serão descritos nos itens seguintes. Tanto a análise espectral como a análise de resposta por superposição modal implicam no cálculo prévio das frequências e modos naturais do sistema.

Presentemente, trataremos da solução de (11.66), para a obtenção do histórico de resposta, visando os procedimentos necessários na adaptação do programa à análise de corpos livres. Assim, embora uma análise espectral seja altamente interessante no estudo de vibrações da viga-navio preferimos relacioná-la como sendo um de nossos trabalhos futuros.

11.4.1 Integração direta

O histórico de resposta pode ser obtido pela integração numérica direta da equação de movimento do sistema (11.66), sem transformações preliminares. O método numérico empregado pelo programa será discutido no item 11.4.3.

Uma primeira consideração a ser efetuada diz respei-

to à formulação da matriz de amortecimento. Aqui assume-se o amortecimento de Rayleigh

$$(11.68) \quad C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K$$

onde a_0 e a_1 são fatores arbitrários de proporcionalidade, sendo que, como veremos em item seguinte, podem ser obtidos a partir de graus de amortecimento conhecidos.

Essa forma de introduzir o amortecimento justifica-se pelo fato de facilitar o desenvolvimento da análise em termos de utilização do computador, uma vez que não são necessários espaços de memória para armazenar a matriz de amortecimento.

A análise da resposta dinâmica de corpos livres, por integração direta de (11.66), pode ser efetuada sem que ocorram problemas de natureza numérica pelo fato de a matriz de rigidez ser singular. No entanto, nesse caso, uma parcela dos deslocamentos obtidos será correspondente aos movimentos de corpo rígido de modo que, dependendo da natureza da excitação, o histórico de resposta em deslocamentos não apresentará interesse prático.

O histórico de deslocamentos (ou histórico de resposta em deslocamentos) da estrutura pode ser considerado como medida básica de sua resposta ao carregamento dinâmico. Em geral outros parâmetros de resposta, como tensões ou esforços internos desenvolvidos em vários componentes estruturais, podem ser avaliados diretamente dos deslocamentos. Os deslocamentos de corpo rígido não tem influência no cálculo de tensões (pois não

estão associados a deformações) de modo que histórico de resposta em tensões, avaliado a partir dos deslocamentos obtidos na integração direta, mesmo em sistemas com movimento de corpo rígido, terá interesse prático.

Se considerarmos que o cálculo das frequências naturais de corpos livres realiza-se eficientemente pela aplicação do método exposto em 11.3, e que numa análise de resposta por superposição modal, a partir dessas frequências, é possível eliminar do processo qualquer influência dos movimentos de corpo rígido na histórico de deslocamentos, então, estabelece-se uma das vantagens do método de superposição modal.

Então, sem que sejam tecidas considerações apriorísticas sobre vantagens de um método sobre outro, dedicaremos a exposição do método de superposição modal, com as adaptações julgadas necessárias visando análise de resposta de corpos livres.

11.4.2 Desacoplamento da equação diferencial matricial

A idéia básica do método de superposição modal reside no aproveitamento das propriedades de ortogonalidade, dos modos normais em relação às matrizes de massa e rigidez do sistema, a fim de promover o desacoplamento de (11.3).

Admite-se que a resposta estrutural pode ser descrita, adequadamente, pelos modos normais normalizados correspondente as p mais baixas frequências naturais, através da transformação:

$$(11.69) \quad V(t) = \Phi \cdot Y(t)$$

onde as colunas em Φ são os p autovetores, ortonormalizados em relação à matriz de massa $|3|, |5|$ (isto é, $\Phi^T \cdot M \cdot \Phi = I$, já visto anteriormente) e onde $Y(t)$ é um vetor de amplitudes, que servem como coordenadas generalizadas, tal que (11.69) seja capaz de exprimir qualquer forma de deslocamentos.

$$Y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix}$$

O deslocamento total é, então, obtido como soma das componentes modais,

$$(11.70) \quad V(t) = \phi_1 \cdot y_1(t) + \phi_2 \cdot y_2(t) + \dots + \phi_p \cdot y_p(t) = \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot y_i(t)$$

Em (11.70) é visível que a matriz das formas modais Φ serve para transformar as coordenadas generalizadas Y , nas coordenadas geométricas (deslocamentos nodais) V . Estas coordenadas generalizadas de amplitudes modais são chamadas coordenadas normais da estrutura.

A ortogonalidade dos modos normais pode, então, ser usada para simplificar a equação geral do movimento, tal que introduzindo (11.69), e suas derivadas temporais, em (11.3), teremos:

$$(11.71) \quad M \cdot \ddot{Y}(t) + C \cdot \dot{Y}(t) + K \cdot Y(t) = P(t)$$

Agora, pré-multiplicando, ambos os lados de (11.71)

por Φ^T ,

$$(11.72) \quad [\Phi^T.M.\Phi].\ddot{Y}(t) + [\Phi^T.C.\Phi].\dot{Y}(t) + [\Phi^T.K.\Phi].Y(t) = \Phi^T.P(t)$$

que pela aplicação de (11.51) reduz-se à forma:

$$(11.73) \quad \ddot{Y}(t) + [\Phi^T.C.\Phi].\dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = \Phi^T.P(t)$$

Definindo,

$$(11.74) \quad \Delta = \Phi^T.C.\Phi$$

temos

$$(11.75) \quad \ddot{Y}(t) + \Delta.\dot{Y}(t) + \Lambda.Y(t) = \Phi^T.P(t)$$

Nesta derivação das equações do movimento em coordenadas normais assumir-se-á que as formas modais (ou autovetores) do sistema não amortecido tem, também, a propriedade de ortogonalidade em relação à matriz de amortecimento, isto é:

$$(11.76) \quad \phi_i^T.C.\phi_j = 0 \quad ; \quad i \neq j$$

Sob a luz dessa hipótese torna-se evidente que a matriz Δ , definida em (11.74) é da forma diagonal,

$$(11.76) \quad \Delta = \Phi^T.C.\Phi = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p]$$

onde os escalares δ_i , $i=1,2,\dots,p$, devem expressar, de alguma maneira, as propriedades de amortecimento do sistema discre

tizado.

Então, (11.75) representa uma derivação das equações de movimento, onde p equações desacopladas, em coordenadas normais, foram obtidas:

$$(11.77) \quad \ddot{y}_i(t) + \delta_i \dot{y}_i(t) + \lambda_i y_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t) ; \quad i=1,2,3,\dots,p$$

sendo que, cada uma das equações de (11.77), é correspondente a um sistema de um grau de liberdade e como tal pode ser tratada. Então, por analogia a equação do movimento amortecido de um grau de liberdade, as constantes δ_i são definidas por:

$$(11.78) \quad \delta_i = 2 \cdot \xi_i \cdot w_i$$

onde w_i é a frequência natural não amortecida ($w_i = \sqrt{\lambda_i}$), para o i -ésimo modo, e onde ξ_i representa uma porcentagem do amortecimento crítico em cada modo.

Portanto, (11.77) reduz-se à forma:

$$(11.79) \quad \ddot{y}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot w_i \cdot \dot{y}_i(t) + w_i^2 \cdot y_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t) ; \quad i=1,2,\dots,p$$

que é a forma final das equações, em coordenadas normais, desacopladas do método de superposição modal.

Condições para ortogonalidade do amortecimento

Na derivação das equações do movimento em coordenadas normais admitiu-se que a transformação das referidas coordenadas normais presta-se ao desacoplamento das forças de amorto

tecimento da mesma maneira que para as forças elásticas e de inércia. As formas de vibração no sistema não amortecido serão então, as mesmas que no sistema amortecido. Será útil, portanto, estabelecer as condições para as quais ocorre o desacoplamento do amortecimento.

Rayleight mostrou que uma matriz de amortecimento da forma:

$$(11.80) \quad C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K$$

onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias de proporcionalidade, satisfaz (11.76). Isto é facilmente mostrado aplicando as condições de ortogonalidade (11.51) a ambos os lados de (11.80).

Podemos, então, dizer que uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa ou de rigidez leva ao desacoplamento das equações de movimento. É possível mostrar que uma forma geral da matriz de amortecimento, [5], ortogonal, e proporcional às matrizes de massa e rigidez é dada por

$$(11.81) \quad C = M \cdot \sum_b a_b [M^{-1} \cdot K]^b$$

onde b é uma constante inteira no intervalo $(-\infty, \infty)$, de modo que podem ser incluídas tantas parcelas quanto desejáveis.

A matriz de amortecimento de Rayleight (11.80) é, naturalmente, um caso particular de (11.81) tomando-se $b=0$ e $b=1$.

Demonstra-se, também, que a relação entre graus de amortecimentos modais e as constantes a_b é dada por

$$(11.82) \quad \xi_i = \frac{1}{2w_i} \cdot \sum_b a_b \cdot w_i^{2b}$$

A relação (11.82) proporciona meios de se calcular as constantes a_b a partir de graus de amortecimentos modais em um número especificado de modos qualquer. Toma-se, em geral, um número de parcelas na série igual ao número de graus de amortecimento modais especificados, sendo que, em princípio, os valores de b podem ser quaisquer, mas na prática adotam-se valores próximos de zero.

É interessante notar em (11.82) que quando $b \leq 0$ as porcentagens de amortecimento são inversamente proporcionais às frequências naturais, de maneira que os modos mais altos tem pouco amortecimento. Enquanto para $b \geq 1$ as porcentagens de amortecimento são diretamente proporcionais às frequências naturais, de maneira que os modos mais altos são mais amortecidos.

O interesse de se tomar um número maior de parcelas na somatória de b reside no fato de que incluindo termos adicionais em (11.81) é possível obter um maior grau de controle sobre as porcentagens de amortecimento em cada modo, no entanto, como o programa SAP-IV, quando trabalha diretamente com a matriz de amortecimento, admite a formulação de Rayleigh, o número de parcelas, com propósitos práticos de análise por computador, é igual a 2 (com $b=0$ e $b=1$). Assim, trabalharemos com a seguinte simplificação de (11.82),

$$(11.83) \quad \xi_i = \frac{1}{2w_i} (a_0 + a_1 \cdot w_i^2)$$

Suponhamos que se deseja especificar graus de amortecimento modais, obtidos de experiência em estruturas semelhantes, para os p mais baixos modos, então, pela aplicação de (11.83)

estabelecemos a seguinte equação matricial,

$$(11.84) \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1/w_1 & w_1 \\ 1/w_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1/w_p & w_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

onde a_0 e a_1 são as incógnitas.

Portanto, (11.84), só apresentará solução viável se pelo menos $(p-2)$ graus de amortecimento forem assumidos desprezíveis e tornados nulos.

Neste ponto é interessante comparar sob que circunstâncias é desejável avaliar a matriz de amortecimento explicitamente, no caso de análise pelo SAP-IV, por (11.80). As porcentagens de amortecimento modais são a medida mais efetiva do amortecimento quando a análise é feita pelo processo de superposição modal, uma vez que é possível trabalhar com um número delas tanto quanto for julgado conveniente, a partir de resultados da prática. No caso de análise pelo processo de integração direta a matriz de rigidez é necessária explicitamente de modo que se terá de enfrentar a limitação aludida no parágrafo anterior.

Acoplamento de amortecimento

Nos parágrafos precedentes vimos que, quando a matriz de amortecimento da estrutura tem a forma que satisfaz as condições de ortogonalidade modais, a transformação para coordena-

das normais, das equações de movimento, conduz a um conjunto de equações desacopladas. Como a resposta do sistema pode ser obtida por superposição destas equações (equivalentes, cada uma, a equação de um sistema de um grau de liberdade) este desacoplamento é uma das grandes vantagens do uso de coordenadas normais, que tem outra vantagem, igualmente apreciável, baseada no fato de a resposta dinâmica essencial (de interesse prático) frequentemente estar associada com poucas coordenadas modais de ordem mais baixa, tal que uma boa aproximação (na maioria dos casos práticos) para a resposta pode ser obtido com um número de coordenadas normais drasticamente reduzido.

Quando a resposta dinâmica está toda contida apenas em poucos modos de ordem mais baixa é vantajoso aplicar a transformação para coordenadas modais mesmo quando a matriz de amortecimento não satisfaz à condição de ortogonalidade. Neste caso as equações modais não serão desacopladas, em virtude do acoplamento dos termos correspondentes às forças de amortecimento. Conseqüentemente, a resposta é obtida pela integração dessas equações simultaneamente, em vez de independentemente.

Um processo alternativo seria resolver o problema complexo de autovalor (no caso geral da matriz de amortecimento) e então obter equações desacopladas transformando para coordenadas modais amortecidas. No entanto, o cálculo das formas modais amortecidas requer muito mais trabalho computacional do que o problema de autovalor não amortecido (o problema é de ordem $2n$ para um sistema com n graus de liberdade por que o ângulo de fase tem que ser calculado para cada grau de liberdade, assim como a amplitude ϕ). Por esta razão o uso das for -

mas modais não amortecidas é mais eficiente.

11.4.3 Sumário do método de superposição modal

A transformação para as coordenadas normais, que serve para mudar o conjunto de n equações acopladas num conjunto de n equações desacopladas, é a base do método de superposição modal na análise dinâmica. O método pode ser usado para avaliar a resposta dinâmica de qualquer estrutura, com comportamento linear, para a qual os deslocamentos nodais foram expressos em termos de um conjunto de n coordenadas discretas e onde o \underline{a} amortecimento pode ser expresso por porcentagens (ou graus) de amortecimento modais.

No caso particular da análise da resposta dinâmica de corpos livres o método apresenta particular importância, pois é possível, sem grande esforço computacional, eliminar as contribuições (indesejáveis) de modos correspondentes a movimentos de corpo rígido.

Suponhamos que no sistema discretizado as r frequências mais baixas correspondam a modos que não implicam em deformações (movimentos de corpo rígido), com $1 \leq r \leq 6$, (um corpo livre deve ter no mínimo um movimento de corpo rígido e terá no máximo seis), então,

$$(11.85) \quad \lambda_i = 0 ; \quad i=1,2,\dots,r$$

O método, visando a análise de resposta de corpos livres pelo SAP-IV, consiste nas seguintes etapas:

(1) Análise das frequências e modos normais, para o sistema em vibrações livres não amortecidas, como exposto em 11.3. Como resultados serão obtidas as p mais baixas frequências naturais (incluindo as r frequências nulas) e respectivos modos normais, ortonormalizados em relação à matriz de massa (isto é, $\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i = 1$).

(2) Cálculo do carregamentos generalizados $p_i(t)$

$$(11.86) \quad p_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t); \quad i=r+1, r+2, \dots, p$$

Para $i \leq r$, esse cálculo, embora possa ser efetuado, não apresenta interesse. Obviamente, a análise só tem relevância para $p > r$.

(3) Cálculo das respostas modais $y_i(t)$

$$(11.87) \quad \ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \cdot w_i \cdot \dot{y}_i(t) + w_i^2 \cdot y_i(t) = p_i(t);$$

$$i=r+1, r+2, \dots, p$$

A solução de cada uma das equações de (11.87) é equivalente a solução de um sistema de um grau de liberdade podendo ser obtida por um processo qualquer. Computacionalmente dois processos de solução apresentam interesse; integração por etapas (adotado no programa) e integral de Duhamel, que serão vistos em itens seguintes.

(4) Resposta dos deslocamentos. Quando a resposta modal para ca

da modo $y_i(t)$ foi obtida na solução de (11.87), os deslocamentos são dados pela transformação de coordenadas normais (11.70)

$$(11.88) \quad V(t) = \sum_{i=r}^p \phi_i \cdot y_i(t)$$

sendo que as contribuições dos modos correspondentes a movimentos de corpo rígido são eliminadas. Deve ser notado que para maior parte dos carregamentos da prática as contribuições de modos de ordem superior tem pouca importância, de modo que p não precisa, necessariamente, ser alto. Além do que a idealização de um sistema estrutural complexo tende a representar os modos de ordem superior com pouca precisão.

- (5) Forças elásticas da resposta. O histórico de deslocamento da estrutura pode ser considerado a medida básica de sua resposta ao carregamento dinâmico. No SAP-IV, adicionalmente, a partir do histórico de resposta em deslocamento pode ser avaliado o histórico de resposta em tensões, com cálculo, intermediário, das forças elásticas que resistem à deformação da estrutura, por

$$(11.89) \quad F_R(t) = K \cdot V(t)$$

sendo $V(t)$ dada por (11.88), e K a matriz de rigidez do sistema com movimentos de corpo rígido. Portanto, sendo \hat{K} a matriz montada pelo programa, é necessário que a aplicação de (11.89) seja feita na forma de (11.90),

$$(11.90) \quad F_R(t) = (\hat{K} - \beta M).V(t)$$

Deve ser notado que para o cálculo das forças elásticas resistentes é irrelevante a consideração das contribuições dos modos correspondentes a movimentos de corpo rígido, na composição de $V(t)$, uma vez que esses não estão associados à deformação. No entanto, é computacionalmente mais interessante a aplicação de (11.90), onde são eliminadas tais contribuições.

11.4.4 Integração por etapas - "Wilson- θ method"

Matematicamente, (11.66) e (11.79) representam um sistema de equações diferenciais de segunda ordem (sendo a primeira um sistema matricial de equações acopladas, e a segunda um sistema escalar de equações desacopladas). Então, em princípio, a solução desses sistemas de equações pode ser obtida por procedimentos padronizados para a solução de equações diferenciais a coeficientes constantes. Contudo, a aplicação de tais procedimentos, tem a desvantagem de não usufruir das características especiais de massa, rigidez e amortecimento de um sistema estrutural discretizado segundo a técnica dos elementos finitos, de modo que, por essa razão, a aplicação de técnicas numéricas na solução dos referidos sistemas é essencialmente mais vantajosa, e imprescindível quando se trata do emprego de computadores digitais.

O método de integração por etapas, que ora apresentaremos, no caso de análise pelo SAP-IV, é utilizado tanto na so-

lução de (11.66) - integração direta, como na solução de (11.79) - superposição modal. Admitamos, inicialmente, a aplicação do método na integração direta de (11.66),

$$(11.91) \quad M.\ddot{V}(t) + C.\dot{V}(t) + K.V(t) = P(t)$$

Suponhamos que os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no instante inicial ($t=0$), denotados por V_0 , \dot{V}_0 e \ddot{V}_0 , respectivamente, são conhecidos (condições iniciais) e que a solução de (11.91) seja requerida desde o instante 0 até o instante T . Na obtenção da solução para o intervalo de tempo considerado (T) este é subdividido num número inteiro de intervalos iguais de tempo (Δt), de modo que pela aplicação do algoritmo estabelecer-se-á solução aproximada nos instantes $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$. Então, desde que se trata de um algoritmo, o cálculo da configuração do sistema no instante $t+\Delta t$, genérico, parte da hipótese de que a mesma configuração é conhecida no instante t .

A hipótese básica no método de integração por etapas Wilson- θ é a de admitir uma variação linear da aceleração no intervalo $t + \theta.\Delta t$, de modo que para $\theta \geq 1,37$ o método é incondicionalmente estável, isto é, a convergência da solução ocorre para qualquer intervalo de tempo Δt adotado [4]. Na prática adota-se, usualmente (é o caso do SAP-IV), $\theta = 1,4$.

Consideremos a coordenada τ , tal que $0 \leq \tau \leq \theta.\Delta t$. Então, para o intervalo de tempo que vai de t a $t + \theta.\Delta t$, temos:

$$(11.92) \quad \dot{V}(t+\tau) = \dot{V}(t) + \frac{\tau}{\theta.\Delta t} [\dot{V}(t+\theta.\Delta t) - \dot{V}(t)]$$

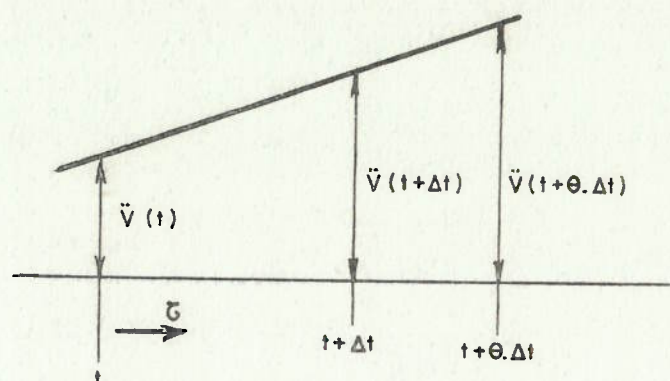


Figura 11.2 - Variação linear da aceleração no método de Wilson- θ

Por integração de (11.92), em τ , obtém-se:

$$(11.93) \quad \dot{V}(t + \tau) = \dot{V}(t) + \ddot{V}(t) \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \cdot \Delta t} [\ddot{V}(t + \theta \Delta t) - \ddot{V}(t)]$$

e

$$(11.94) \quad V(t + \tau) = V(t) + \dot{V}(t) \cdot \tau + \frac{V(t) \cdot \tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6 \cdot \theta \Delta t} [\ddot{V}(t + \theta \cdot \Delta t) - \ddot{V}(t)]$$

então, a partir da hipótese (11.92), (11.93) e (11.94) expressam a variação de velocidade e deslocamento no intervalo $|t; \theta \cdot \Delta t|$, de modo que para $\tau = \theta \cdot \Delta t$, temos:

de (11.93)

$$(11.95) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t + \theta \cdot \Delta t) &= \dot{V}(t) + \ddot{V}(t) \cdot \theta \cdot \Delta t + \frac{(\theta \cdot \Delta t)^2}{2 \cdot \theta \cdot \Delta t} [\ddot{V}(t + \theta \Delta t) - \ddot{V}(t)] = \\ &= \dot{V}(t) + \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} [\ddot{V}(t + \theta \Delta t) + \ddot{V}(t)] \end{aligned}$$

e de (11.94)

$$\begin{aligned}
 (11.96) \quad v(t+\theta.\Delta t) &= v(t) + \dot{v}(t) \cdot \theta.\Delta t + \frac{\ddot{v}(t)(\theta.\Delta t)^2}{2} + \\
 &+ \frac{(\theta.\Delta t)^3}{6.\theta.\Delta t} [\ddot{v}(t+\theta.\Delta t) - \ddot{v}(t)] = \\
 &= v(t) + \theta.\Delta t \dot{v}(t) + \frac{\theta^2.\Delta t^2}{6} [\ddot{v}(t+\theta.\Delta t) + 2\ddot{v}(t)]
 \end{aligned}$$

A aceleração no instante $t+\theta.\Delta t$ pode ser explicitada a partir de (11.96), sendo

$$(11.97) \quad \ddot{v}(t+\theta.\Delta t) = [\dot{v}(t+\theta.\Delta t) - \dot{v}(t)] \frac{6}{\theta^2.\Delta t^2} - \frac{6}{\theta.\Delta t} \dot{v}(t) - 2\ddot{v}(t)$$

Introduzindo (11.97) em (11.95) obtém-se a seguinte expressão para a velocidade no instante $t+\theta.\Delta t$,

$$(11.98) \quad \dot{v}(t+\theta.\Delta t) = [\dot{v}(t+\theta.\Delta t) - \dot{v}(t)] \frac{3}{\theta.\Delta t} - 2\dot{v}(t) - \frac{\theta.\Delta t}{2} \ddot{v}(t)$$

de modo que (11.97) e (11.98) são expressões para os vetores de aceleração e velocidade, respectivamente, no instante $t+\theta.\Delta t$, dadas como função da configuração conhecida do sistema no instante t ($v(t)$, $\dot{v}(t)$ e $\ddot{v}(t)$) e do deslocamento no instante $t+\theta.\Delta t$.

Para se obter a solução para deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$, impõe-se a equação de equilíbrio (11.91) no instante $t+\theta.\Delta t$,

$$(11.99) \quad M.\ddot{v}(t+\theta.\Delta t) + C.\dot{v}(t+\theta.\Delta t) + K.v(t+\theta.\Delta t) = P(t) + \theta [P(t+\Delta t) - P(t)]$$

onde o lado direito da igualdade representa uma projeção line-

ar do vetor de carga.

Introduzindo (11.97) e (11.98) em (11.99) encontra-se a equação para cálculo de $V(t+\theta.\Delta t)$, que rearranjada é,

$$\begin{aligned}
 (11.100) \quad & \left[\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \cdot M + \frac{3}{\theta \Delta t} \cdot C + K \right] \cdot V(t+\theta \Delta t) = \\
 & = P(t) + \theta \cdot [P(t+\Delta t) - P(t)] + M \cdot \left[\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} V(t) + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{V}(t) + 2\ddot{V}(t) \right] + \\
 & + C \cdot \left[\frac{3}{\theta \Delta t} V(t) + 2\dot{V}(t) + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{V}(t) \right]
 \end{aligned}$$

Os termos do lado direito da igualdade em (11.100) são todos conhecidos e podem ser interpretados com um carregamento efetivo $\bar{P}(t+\theta \Delta t)$, enquanto a expressão à esquerda de $V(t+\theta \Delta t)$ em (11.100) pode ser interpretada como rigidez efetiva (também conhecida) \bar{K} de modo que (11.100) reduz-se a:

$$(11.101) \quad \bar{K} \cdot V(t+\theta \Delta t) = \bar{P}(t+\theta \Delta t)$$

donde

$$(11.102) \quad V(t+\theta \Delta t) = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{P}(t+\theta \Delta t)$$

Neste ponto é interessante notar que mesmo que a matriz de rigidez seja singular (como no caso de análise de corpo livre) a matriz de rigidez efetiva, \bar{K} , não o será, de modo que (11.102) é possível e a análise de resposta, por integração direta, de corpos com movimento de corpo rígido não apre-

sentará problemas, ressaltando-se as observações aludidas em 11.4.1.

O algoritmo completo, usado pelo programa SAP-IV no método de integração direta, é resumido a seguir:

(1) Cálculos iniciais

(1.1)-Montagem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento (M, K, C).

(1.2)- São assumidas condições iniciais nulas, de modo que $V(0)=V_0=0$; $\dot{V}(0)=\dot{V}_0=0$; $\ddot{V}(0)=\ddot{V}_0=0$

(1.3)- Cálculo das constantes de integração para o intervalo Δt especificado pelo usuário e para $\theta=1.4$

$$(11.103) \quad a_0 = \frac{6}{(\theta \cdot \Delta t)^2}; \quad a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; \quad a_2 = 2 \cdot a_1; \quad a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}; \quad a_5 = -\frac{a_2}{\theta}; \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2}$$

$$a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

(1.4) - Montagem da matriz de rigidez efetiva \bar{K}

$$(11.104) \quad \bar{K} = K + a_0 \cdot M + a_1 \cdot C$$

(1.5) - Triangularização de \bar{K}

(2) Para cada intervalo Δt

(2.1) - Cálculo do vetor de carga efetivo

$$(11.105) \quad \bar{P}(t+\theta\Delta t) = P(t) + \theta [P(t+\theta\Delta t) - P(t)] + M [a_0 \cdot V(t) + a_2 \dot{V}(t) + 2 \cdot \ddot{V}(t)] + C \cdot [a_1 \cdot V(t) + 2 \cdot \dot{V}(t) + a_3 \cdot \ddot{V}(t)]$$

(2.2) - Cálculo do vetor de deslocamentos no instante
 $t + \theta \cdot \Delta t$

$$(11.106) \quad V(t+\theta\Delta t) = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{P}(t+\theta\Delta t)$$

(2.3) - Cálculo dos vetores de deslocamentos, velocidades
e acelerações no instante $t + \Delta t$

$$(11.107) \quad \ddot{V}(t+\Delta t) = a_4 [V(t+\theta\Delta t) - V(t)] + a_5 \cdot \dot{V}(t) + a_6 \cdot \ddot{V}(t)$$

$$(11.108) \quad \dot{V}(t+\Delta t) = \dot{V}(t) + a_7 [\ddot{V}(t+\Delta t) + \ddot{V}(t)]$$

$$(11.109) \quad V(t+\Delta t) = V(t) + \Delta t \cdot \dot{V}(t) + a_8 [\ddot{V}(t+\Delta t) + 2\ddot{V}(t)]$$

Na segunda etapa do método uma grande quantidade de dados deve ser trabalhada, de modo que, considerando-se os aspectos repetitivo dos cálculos, é de se esperar, em geral, uma pouca eficiência, em termos de custos, numa análise onde um número grande de intervalos de tempo Δt for especificado. Nesse caso torna-se bem mais eficiente desacoplar, inicialmente, a equação de movimento antes de se promover a integração por etapas.

O desenvolvimento do método Wilson- θ para a integração das equações (11.79) faz-se de modo análogo ao dos parágrafos precedentes. Então, para o intervalo $|t; t + \theta \Delta t|$, temos

$$(11.110) \quad \ddot{y}_i(t+\tau) = \ddot{y}_i(t) + \frac{\tau}{\Delta t} [\ddot{y}_i(t + \Delta t) - \ddot{y}_i(t)]$$

$$(11.111) \quad \dot{y}_i(t+\tau) = \dot{y}_i(t) + \ddot{y}_i(t)\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t} [\ddot{y}_i(t + \Delta t) - \ddot{y}_i(t)]$$

$$(11.112) \quad y_i(t+\tau) = y_i(t) + \dot{y}_i(t)\tau + \ddot{y}_i(t) \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t} [\ddot{y}_i(t+\Delta t) - \ddot{y}_i(t)]$$

Para o instante $t+\Delta t$, temos

$$(11.113) \quad \dot{y}_i(t+\Delta t) = \dot{y}_i(t) + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{y}_i(t+\Delta t) + \ddot{y}_i(t)]$$

$$(11.114) \quad \ddot{y}_i(t+\Delta t) = \ddot{y}_i(t) + \Delta t \ddot{\ddot{y}}_i(t) + \frac{\Delta t}{6} [\ddot{\ddot{y}}_i(t+\Delta t) + 2\ddot{\ddot{y}}_i(t)]$$

Considerando a equação de equilíbrio no instante $t+\Delta t$ (vide (11.97)), vem:

$$(11.115) \quad \ddot{y}_i(t+\theta\Delta t) + 2\xi_i w_i \dot{y}_i(t+\theta\Delta t) + w_i^2 y_i(t+\theta\Delta t) = p_i(t) + \theta [p_i(t+\Delta t) - p_i(t)]$$

Usando (11.110), (11.111) e (11.112) no instante $\tau = \theta\Delta t$ e substituindo em (11.115), obtêm-se uma equação na incógnita $\ddot{y}_i(t+\Delta t)$. Resolvendo para $\ddot{y}_i(t+\Delta t)$ e substituindo em (11.113) e (11.114), chega-se à seguinte relação:

$$(11.116) \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}(t+\Delta t) \\ \ddot{y}(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + L [p(t) + \theta [p_i(t+\Delta t) - p_i(t)]]$$

onde

$$(11.117) \quad A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \gamma\theta; & \frac{1}{\Delta t} (-\alpha\theta - 2\gamma); & \frac{1}{\Delta t^2} (-\alpha) \\ \Delta t (1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\alpha\theta^2}{6} - \frac{\gamma\theta}{2}); & 1 - \frac{\alpha\theta}{2} - \gamma; & \frac{1}{\Delta t} (-\frac{\alpha}{2}) \\ \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\alpha\theta^2}{18} - \frac{\gamma\theta}{6}); & \Delta t (1 - \frac{\alpha\theta}{6} - \frac{\gamma}{3}); & 1 - \frac{\alpha}{6} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \left(\frac{\theta}{w_i^2 \cdot \Delta t^2} + \frac{\xi_i \cdot \theta^2}{w_i \cdot \Delta t} + \frac{\theta^3}{6} \right)^{-1}; \quad \gamma = \frac{\xi_i \cdot \alpha}{w_i \cdot \Delta t}$$

e

$$(11.118) \quad L = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{w_i^2 \Delta t^2} \\ \frac{\alpha}{2w_i^2 \Delta t} \\ \frac{\alpha}{6w_i^2} \end{pmatrix}$$

Desse modo a terceira etapa do método de superposição modal, sumarizado em 11.4.3, é efetuada como a seguir:

(3) Cálculo das respostas modais; $i = r+1, r+2, \dots, p$

(3.1) - São assumidas condições iniciais nulas, de modo que:

$$y_i(0) = \dot{y}_i(0) = \ddot{y}_i(0) = 0$$

(3.2) - Cálculo das matrizes das constantes de integração, A e L por (11.117) e (11.118), com Δt especificado pelo usuário e $\theta = 1,4$

(3.3) - Para cada intervalo de tempo Δt , efetuam-se os cálculos de (11.116). Convém notar que neste caso o carregamento generalizado $p_i(t)$ já foi avaliado em cada instante, $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$, na segunda etapa do método.

As condições iniciais, em coordenadas generalizadas, $Y(0)$, podem ser obtidas, usando (11.69) e a matriz das formas modais, a partir das condições iniciais, conhecidas, em coordenadas geométricas, isto é, no instante $t=0$ temos:

$$(11.119) \quad \gamma(0) = \Phi^T \cdot M \cdot v(0); \quad \dot{\gamma}(0) = \Phi^T \cdot M \cdot \dot{v}(0)$$

de modo que para $v(0) = \dot{v}(0) = 0$, resulta o que se usa no primeiro passo da terceira etapa. Condições iniciais não nulas podem, por (11.119), ser introduzidas, porém, na prática raros são os casos onde isso é necessário, de modo que o programa não está capacitado a aceitar condições iniciais não homogêneas.

Performance na integração por etapas

O principal objetivo na integração numérica da equação de equilíbrio de um sistema discretizado é calcular com boa eficiência uma aproximação para a resposta dinâmica real da estrutura. Então, para que a resposta dinâmica da estrutura seja prevista com precisão, a equação de equilíbrio para o sistema discretizado (11.91) precisa ser integrada exatamente, e daí decorre que o sistema de equações desacopladas (11.87) igualmente o necessita.

A primeira vista, quanto se pensa em precisão da resposta, os dois métodos de solução apresentados: integração direta e superposição modal, podem parecer substancialmente diferentes, no entanto as características de um método e do outro são determinados unicamente por sua eficiência numérica que por sua vez é função da característica de uma integração por etapas.

A magnitude do erro introduzido na integração numérica é função das características do carregamento dinâmico e do tamanho do intervalo de tempo, Δt , tomado. De modo geral,

uma estima para Δt , de modo que os cálculos sejam efetuados com boa precisão, corresponde aproximadamente a 10% do menor período natural do sistema discretizado ($\Delta T = T_n/10$), no entanto, como já citado em parágrafos precedentes, apenas poucos modos de ordem mais baixa terão influência significativa na resposta e por esta razão nem todos as formas modais precisam ser consideradas no método de superposição. Fortalecendo tal afirmativa existe o fato de em muitas análises não se justificar o emprego dos modos de ordem mais alta, já que frequências e formas modais de alta ordem, numa discretização por elementos finitos, são aproximações ruins das quantidades exatas. Assim, se p aproximações para as mais baixas frequências naturais do sistema são calculada a análise da resposta será bem mais efetiva para $\Delta t = T_p/10$. Contudo, numa integração direta com $\Delta t = T_p/10$, também a contribuição dos modos de ordem mais alta é automaticamente incluída, como resultado da integração implícita de modos para os quais a relação $\Delta t/T$ é maior do que 10%, embora, pelas razões expostas, essa integração implícita não se justifique e nem melhore a qualidade da resposta.

Daí decorre a importância da integração por etapas pelo método Wilson- θ , que sendo incondicionalmente estável, [4], [5], garante que a influência de modos para os quais a relação $\Delta t/T_i$ é grande (e que, explícita (superposição modal) ou implicitamente (integração direta) foram levadas a contribuir na resposta) seja computada a níveis que não comprometam a precisão.

A natureza dos erros computacionais introduzidos ,

na integração por etapas, para um dado intervalo Δt , pode ser expressa em termos de um aumento no período e de uma queda na amplitude. Tais efeitos, computados para o método Wilson- θ , simplificadaamente, na análise de um sistema de um grau de liberdade, são mostrados nas figuras 11.3 e 11.4, onde a magnitude do erro é plotada como função da relação: intervalo de tempo de integração Δt sobre o período natural.

A queda de amplitude pode ser entendida como sendo provocada por um amortecimento artificial, que se adiciona ao amortecimento real; desse modo a relação entre porcentagem de queda de amplitude (%QA) e grau de amortecimento artificial (ξ_a) é dada por:

$$(11.120) \quad \%QA = 100 \times (e^{2\pi\xi_a} - 1) \quad \text{ou} \quad \xi_a = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\%QA}{100} + 1\right)$$

De (11.120) conclui-se que numa integração numérica por etapas uma queda porcentual de amplitude de 6% corresponde à introdução de um amortecimento artificial de 1%, de modo que, pela observação da figura 11.4, no caso genérico de grau de amortecimento estrutural maior do que 5% o grau de amortecimento artificial introduzido para $\Delta t/T < 0,1$ é desprezível. Por outro lado, numa análise geral de um sistema de n graus de liberdade grandes relações $\Delta t/T$, levam ao completo anulamento das contribuições de modos de alta ordem por amortecimento artificial.

A análise do aumento de amplitude não apresenta mesma relevância, no entanto, pela observação da figura 11.3, conclui-se que sendo $\Delta t/T < 0,1$ o erro introduzido na resposta é irrelevante.

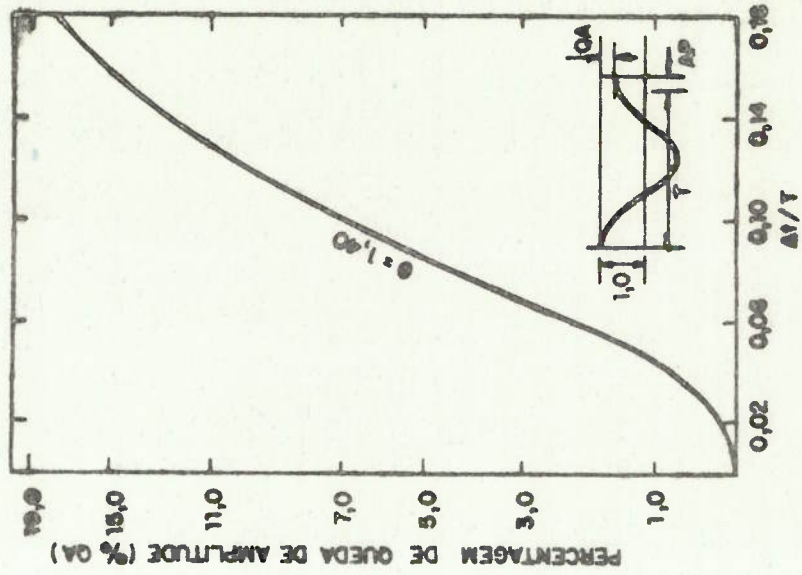


FIG. II. 4 - PERCENTAGEM DE QUEDA DE AMPLITUDE. MÉTODO WILSON - ζ .

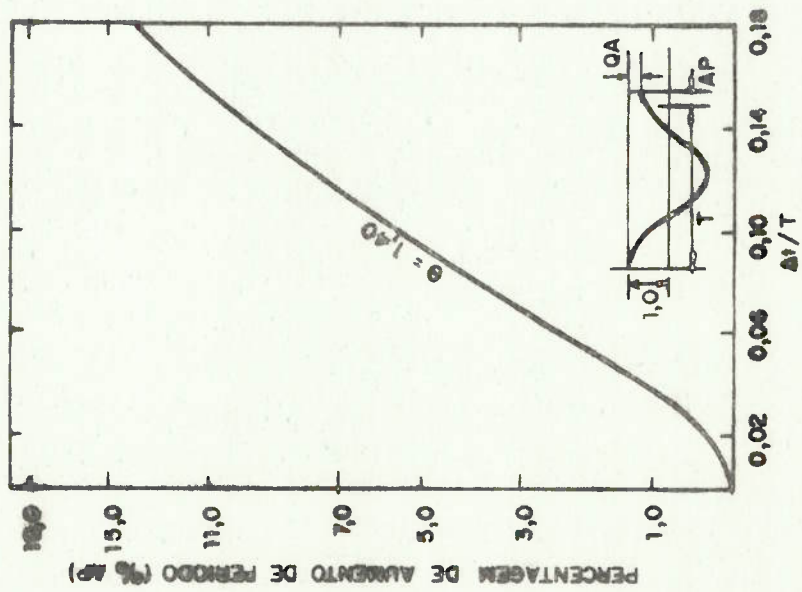


FIG. II. 3 - PERCENTAGEM DE AUMENTO DE PERÍODO. MÉTODO WILSON - ζ .

Superposição modal versus integração direta

Para aplicação de uma análise eficiente de histórico de resposta o usuário do programa precisa decidir, apropriadamente, se usa integração direta ou superposição modal. Uma integração direta é equivalente a uma análise por superposição modal na qual todos os autovalores (e respectivos autovetores) foram anteriormente calculados e as n equações desacopladas do movimento são integradas com o mesmo intervalo de tempo Δt . Pelos motivos já expostos em parágrafos anteriores, a integração de cada uma das equações desacopladas apresentará precisão somente para os modos para os quais o intervalo de tempo Δt for uma pequena fração do período natural.

Como o programa usa o método Wilson- θ , na integração por etapas, os erros de integração retêm as respostas relativas a modos de alta ordem, para os quais a relação $\Delta t/T$ é grande, fazendo com que tais respostas, por amortecimento artificial, não participem da solução. Sendo que essa última conclusão é válida para ambos os métodos, embora, no método de superposição modal seja possível controlar a integração de modo que não sejam efetuadas integrações desnecessárias.

A vantagem principal do método de superposição modal é que frequências e formas modais são obtidas e, com isso, os históricos de resposta podem ser obtidos com custo adicional relativamente baixo. No entanto, o método de integração direta é mais eficiente quando muitos modos precisam ser incluídos na análise e de modo que um pequeno intervalo de integração Δt é necessário.

11.4.5 Integral de Duhamel. Resposta à excitação harmônica

A integração por etapas no método de superposição modal, como exposto nos itens anteriores, presta-se, fundamentalmente, à análise de resposta para um carregamento dinâmico genérico (de qualquer natureza: impulsivo, harmônico, periódico, não periódico). No entanto, como cada uma das equações do movimento em coordenadas generalizadas, (11.87), é equivalente a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, a solução pode ser obtida por qualquer método aplicável a tal sistema.

Um método alternativo, para sistemas subcriticamente amortecidos ($0 \leq \xi_i < 1$) e para condições iniciais nulas, pode ser obtido pela solução da integral de Duhamel, [3], [5], [19], em cada modo,

$$(11.121) \quad y_i(t) = \frac{1}{w_{D_i}} \int_0^t p_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i w_i(t-\tau)} \text{sen}[w_{D_i}(t-\tau)] d\tau$$

que é uma integral de convolução, paramétrica na variável tempo, t , e onde

$$(11.122) \quad w_{D_i} = w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (\text{frequência natural amortecida})$$

$$(11.123) \quad p_i(\tau) = \phi_i^T \cdot P(\tau) \quad (\text{rep. (11.86)})$$

e sendo os modos normais, ϕ_i , ortonormalizados em relação à matriz de massa do sistema, M , como anteriormente estabelecido.

Para um carregamento dinâmico genérico a solução da

da integral de convolução (11.121) deve ser obtida numericamente num algoritmo de eficiência inteiramente equivalente à da integração por etapas, [5], de sorte que não se justifica o desenvolvimento do mesmo. No entanto, no caso especial de carregamentos harmônicos, um algoritmo bem mais eficiente pode ser desenvolvido, o que, para análise de sistemas onde grande parte das excitações de importância são harmônicas (como no navio), é vantajoso.

Apresentaremos neste item um método de solução para as equações (11.87), no caso de excitação harmônica, por nós implantado no programa SAP-IV.

Consideremos o caso simplificado de um único esforço nodal variando harmonicamente, de modo que o vetor de cargas é dado por:

$$(11.124) \quad P(t) = \bar{P}[a \sin(\bar{\omega}t + \delta) + b]$$

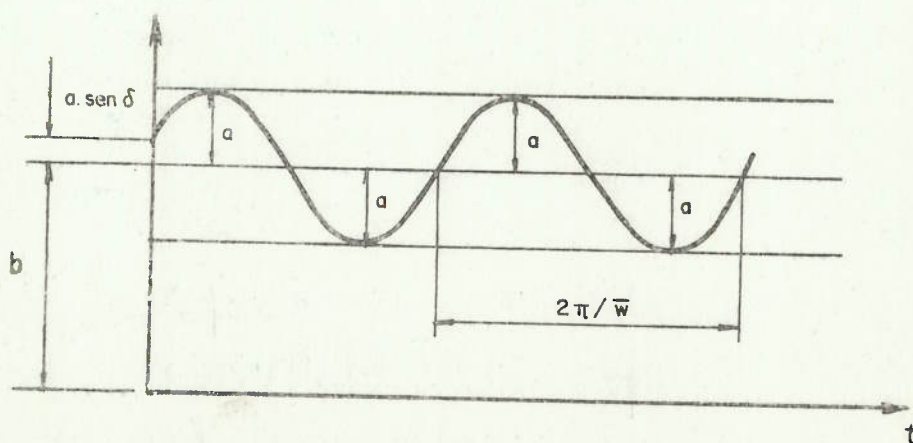


Fig.11.5- Lei de variação para o esforço harmônico

onde

- \bar{w} - frequência do esforço de excitação
- a - amplitude do esforço de excitação
- b - valor médio do esforço de excitação
- \bar{P} - vetor ($n \times 1$) com todos os elementos nulos, exceto o elemento unitário correspondente ao grau de liberdade segundo o qual está sendo aplicada a excitação.

Então, a carga generalizada, dada por (11.123), pela aplicação de (11.124) é dada por,

$$(11.125) \quad p_i(\tau) = d_1 [a \cdot \text{sen}(\bar{w}\tau + \delta) + b]$$

onde

$$(11.126) \quad d_1 = \phi^T \cdot \bar{P}$$

Introduzindo (11.125) em (11.121), após algumas transformações algébricas, chegamos a,

$$(11.127) \quad \frac{y(t)}{d_1} = \frac{a \cdot e^{-\xi w t}}{w_D} \cdot \left\{ [\cos \delta \cdot h_1(t) + \text{sen} \delta \cdot h_2(t)] \cdot \text{sen } w_D t - \right. \\ \left. - [\cos \delta \cdot h_3(t) + \text{sen} \delta \cdot h_4(t)] \cdot \cos w_D t \right\} + \\ + \frac{b}{w^2} \left\{ 1 - e^{-\xi w t} \cdot (d_{10} \cdot \text{sen } w_D t + \cos w_D t) \right\}$$

onde os índices i foram omitidos a fim de evitar superposição de símbolos nos próximos desenvolvimentos, e,

$$\begin{aligned}
 (11.128) \quad h_1(t) &= \int_0^t e^{\xi w \tau} \cdot \text{sen } \bar{w} \tau \cdot \cos w_D \tau \, d\tau \\
 h_2(t) &= \int_0^t e^{\xi w \tau} \cdot \cos \bar{w} \tau \cdot \cos w_D \tau \, d\tau \\
 h_3(t) &= \int_0^t e^{\xi w \tau} \cdot \text{sen } \bar{w} \tau \cdot \text{sen } w_D \tau \, d\tau \\
 h_4(t) &= \int_0^t e^{\xi w \tau} \cdot \cos \bar{w} \tau \cdot \text{sen } w_D \tau \, d\tau \\
 d_{10} &= \xi / \sqrt{1 - \xi^2}
 \end{aligned}$$

Agora, (11.127) pode ser posta em forma matricial mais compacta, tal que,

$$(11.129) \quad y(t) = d_1 \left\{ \frac{a \cdot e^{-\xi w t}}{w_D} \cdot E^T \cdot H + \frac{b}{w^2} [1 - e^{-\xi w t} \cdot (d_{10} \text{sen } w_D t + \right.$$

$$\left. + \cos w_D t)] \right\}$$

sendo

$$(11.130) \quad E(t) = \begin{pmatrix} \cos \delta \cdot \text{sen } w_D t \\ \text{sen } \delta \cdot \text{sen } w_D t \\ \cos \delta \cdot \cos w_D t \\ \text{sen } \delta \cdot \cos w_D t \end{pmatrix} \quad e \quad H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix}$$

As integrais de (11.128) podem ser determinadas analiticamente de modo que teremos expressões já integradas para cada um dos elementos do vetor H. O fato de termos partido, na presente dedução, da integral de Duhamel justifica-se, tão somente, por facilidades decorrentes no tratamento matricial, já que é possível atingir os mesmos objetivos por outro caminho,

porém, acreditamos ser o escolhido mais conveniente em termos de adaptação dos resultados para uma programação eficiente.

Desse modo, após efetuadas as integrações de (11.123), o vetor H será dado por:

$$(11.131) \quad H(t) = e^{\xi \omega t} \cdot D \cdot S(t) + D_0 + (e^{\xi \omega t} - 1) \cdot L$$

sendo

$$(11.132) \quad D = \begin{pmatrix} d_8 & d_9 & -d_6 & -d_7 \\ d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \\ -d_6 & d_7 & -d_8 & d_9 \\ d_8 & -d_9 & -d_6 & d_7 \end{pmatrix} \quad D_0 = \begin{pmatrix} (d_6 + d_7) \\ -(d_8 + d_9) \\ (d_8 + d_9) \\ (d_6 - d_7) \end{pmatrix} ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrizes que não dependem da variável tempo. E ainda,

$$(11.133) \quad S(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } d_2 t \\ \text{sen } d_3 t \\ \text{cos } d_2 t \\ \text{cos } d_3 t \end{pmatrix}$$

vetor dependente do tempo.

Os coeficientes d_j e α estão definidos na tabela 11.1, sendo funções da frequência de excitação, da frequência natural, do grau de amortecimento e da condição de ressonância.

Introduzindo (11.131) em (11.129), temos a seguinte expressão para a resposta modal

$$(11.134) \quad y(t) = d_1 \left\{ \frac{a}{\omega_D} [E^T \cdot D \cdot S + e^{-\xi \omega t} \cdot E^T \cdot D_0 + (1 - e^{-\xi \omega t}) \cdot E^T \cdot L] + \right. \\ \left. + \frac{b}{\omega^2} [1 - e^{-\xi \omega t} \cdot (d_{10} \cdot \text{sen } \omega_D t + \text{cos } \omega_D t)] \right\}$$

Os produtos matriciais, $E^T \cdot D \cdot S$, $E^T \cdot D_0$ e $E^T \cdot L$ dão como resultados valores escalares de modo que, lembrando as definições das matrizes envolvidas, podem ser postos nas formas seguintes,

$$(11.135) \quad \begin{aligned} E^T \cdot D \cdot S &= d_{15} \cdot \text{sen } w_D t + d_{16} \cdot \text{cos } w_D t \\ E^T \cdot D_0 &= d_{17} \cdot \text{sen } w_D t + d_{18} \cdot \text{cos } w_D t \\ E^T \cdot L &= \text{sen } \delta \cdot \text{sen } w_D t - \text{cos } \delta \cdot \text{cos } w_D t \end{aligned}$$

sendo os coeficientes d_{15} , d_{16} , d_{17} e d_{18} dependentes do tempo e dados na tabela 11.1.

Substituindo as igualdades de (11.135) em (11.134) e rearranjando de modo a obter parcelas distintas para as respostas permanente e transitória, $y(t)$ será dado por,

$$(11.136) \quad \begin{aligned} y(t) = d_1 \left\{ \frac{b}{w^2} + \frac{a}{w_D} (d_{19} \cdot \text{sen } w_D t + d_{20} \cdot \text{cos } w_D t) + \right. \\ \left. + e^{-\xi w t} \cdot (d_{23} \cdot \text{sen } w_D t + d_{24} \cdot \text{cos } w_D t) \right\} \end{aligned}$$

onde a primeira parcela é o deslocamento estático causado pelo valor médio do esforço de excitação; a segunda parcela é a resposta permanente, e a terceira é o transiente. Os coeficientes d_{19} e d_{20} , dependentes do tempo, d_{23} e d_{24} , não dependentes do tempo, encontram-se definidos na tabela 11.1.

Expressões para a velocidade ($\dot{y}(t)$) e aceleração ($\ddot{y}(t)$) são obtidas por derivação, em relação ao tempo, de (11.136), resultando,

$$(11.137) \quad \dot{y}(t) = d_1 \left\{ \frac{a}{w_D} (d_{27} \cdot \text{sen } w_D t + d_{28} \cdot \text{cos } w_D t) + \right. \\ \left. + e^{-\xi w t} \cdot (d_{31} \cdot \text{sen } w_D t + d_{32} \cdot \text{cos } w_D t) \right\}$$

$$(11.138) \quad \ddot{y}(t) = d_1 \left\{ \frac{a}{w_D} (d_{29} \cdot \text{sen } w_D t + d_{30} \cdot \text{cos } w_D t) + \right. \\ \left. + e^{-\xi w t} (d_{33} \cdot \text{sen } w_D t + d_{34} \cdot \text{cos } w_D t) \right\}$$

onde os coeficientes, d_{27} , d_{28} , d_{29} , d_{30} , dependentes do tempo; d_{31} , d_{32} , d_{33} e d_{34} , não dependentes do tempo, encontram-se definidos na tabela 11.1.

Assim, a terceira etapa do método de superposição modal, sumarizado em 11.43, é efetuada, para excitação harmônica conforme aqui admitida e condições iniciais nulas, como a seguir:

(3) Cálculo das respostas modais; $i=r+1, r+2, \dots, p$

(3.1) - Cálculo da amplitude do esforço generalizado, d_1 , por (11.126).

(3.2) - Cálculo da frequência natural amortecida, w_{Di} , por (11.122)

- (3.3) - Cálculo dos coeficientes de integração que não dependem do tempo, vide tabela 11.1
- (3.4) - Para cada instante $t=j.\Delta t$ ($j=0,1,2,\dots,J$), com J e Δt fornecido pelo usuário, cálculo dos coeficientes de integração que dependem do tempo (tabela 11.1) e do deslocamento, velocidade e aceleração modais por (11.136), (11.137) e (11.138), respectivamente.

Finalizando é importante acrescentar que,

- i- o método é numericamente preciso, sem apresentar os problemas aludidos no caso de uma integração por etapas. Aqui o intervalo de tempo Δt não tem influência alguma na precisão da resposta, ao contrário do que ocorre na integração por etapas.
- ii- como estamos tratando da análise de sistemas estruturais com comportamento linear vale o princípio da superposição de modo que a limitação inicialmente imposta (um único esforço nodal harmônico) pode ser facilmente contornada, no caso de várias excitações harmônicas com diferentes parâmetros (frequências, amplitudes, etc.), por superposição de efeitos.

TABELA 11.1 - Coeficientes de integração no
caso de excitação harmônica

Coeficientes que não dependem do tempo			
d_2	$w + w_D$		
d_3	$w - w_D$		
condições de ressonância e amortecimento			
		sem ressonância ($d_3 \neq 0$)	com ressonância ($d_3 = 0$)
		sem amortecimento ($\xi = 0$)	com amortecimento ($\xi \neq 0$)
d_4		0	$\xi w / d_2$
d_5		0	$\xi w / d_3$
d_6		$1 / (2 \cdot d_2)$	$1 / (2 \cdot d_2 (d_4^2 + 1))$
d_7		$1 / (2 \cdot d_3)$	$1 / (2 \cdot d_3 (d_5^2 + 1))$
d_8		0	$d_4 \cdot d_6$
d_9		0	$d_5 \cdot d_7$
α		0	$1 / (2 \xi w)$
$\xi \sqrt{1 - \xi^2}$			
d_{10}	d_{11}		$d_6 \text{ sen} \delta + d_8 \text{ cos} \delta$
d_{12}		$d_7 \text{ sen} \delta + d_9 \text{ cos} \delta$	
	d_{13}		$d_8 \text{ sen} \delta - d_6 \text{ cos} \delta$
d_{14}		$d_9 \text{ sen} \delta - d_7 \text{ cos} \delta$	
	d_{17}		$-(d_{13} + d_{14})$
d_{18}		$d_{12} - d_{11}$	
	d_{21}		$d_{17} - \alpha \cdot \text{sen} \delta$
d_{22}		$d_{18} + \alpha \cdot \text{cos} \delta$	
	d_{23}		$-b/w^2 \cdot d_{10} + a/w_D \cdot d_{21}$
d_{24}		$-b/w^2 + a/w_D \cdot d_{22}$	
	d_{31}		$-\xi w \cdot d_{23} - w_D \cdot d_{24}$
d_{32}		$-\xi w \cdot d_{24} + w_D \cdot d_{23}$	
	d_{33}		$-\xi w \cdot d_{31} - w_D \cdot d_{32}$
d_{34}		$-\xi w \cdot d_{32} + w_D \cdot d_{31}$	

TABELA 11.1- (Continuação)

Coeficientes que dependem do tempo		
\bar{d}_{11}	$d_{11} \text{ sen } d_2 t + d_{13} \text{ cos } d_2 t$	
\bar{d}_{12}		$d_{12} \text{ sen } d_3 t + d_{14} \text{ cos } d_3 t$
\bar{d}_{13}	$-d_{13} \text{ sen } d_2 t + d_{11} \text{ cos } d_2 t$	
\bar{d}_{14}		$-d_{14} \text{ sen } d_3 t + d_{12} \text{ cos } d_3 t$
d_{15}	$\bar{d}_{11} + \bar{d}_{12}$	
d_{16}		$\bar{d}_{13} - \bar{d}_{14}$
d_{19}	$d_{15} + \alpha \text{ sen } \delta$	
d_{20}		$d_{16} - \alpha \cdot \text{cos } \delta$
d_{25}	$d_2 \bar{d}_{13} + d_3 \bar{d}_{14}$	
d_{26}		$-d_2 \bar{d}_{11} + d_3 \bar{d}_{12}$
d_{27}	$d_{25} - w_D d_{20}$	
d_{28}		$d_{26} + w_D d_{19}$
d_{29}	$- d_2^2 \bar{d}_{11} + d_3^2 \bar{d}_{12} + w_D (d_{26} + d_{29}) $	
d_{30}		$- d_2^2 \bar{d}_{13} - d_3^2 \bar{d}_{14} - w_D (d_{25} + d_{27}) $

III. Teste de confiabilidade para o programa modificado

Para que as modificações introduzidas no programa SAP-IV, e apresentadas no capítulo II, fossem verificadas (antes da análise num problema real) analisaremos um caso simples de solução analítica conhecida.

Consideremos a barra da figura III.1 sob as seguintes hipóteses:

- i. barra de seção constante e perfeitamente reta.
- ii. distribuição uniforme de massa.
- iii. amortecimento estrutural do tipo viscoso.
- iv. considerar-se-á, apenas, deformações por compressão-tração.
- v. sem vinculação (corpo livre).

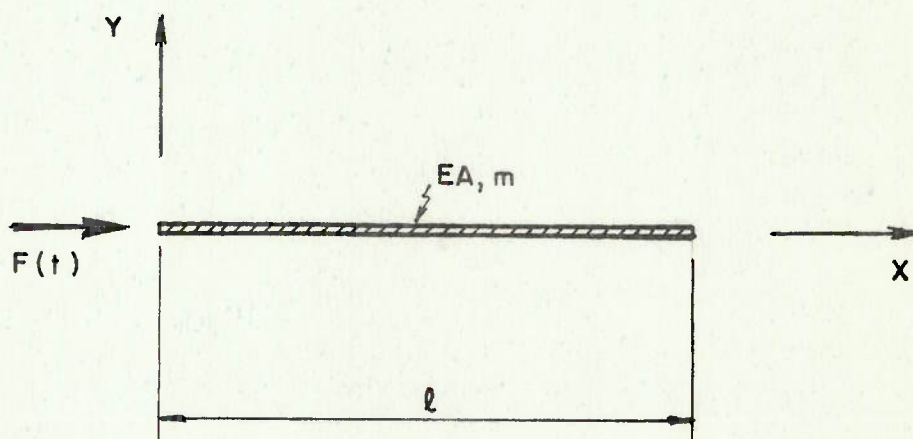


FIGURA III.1 - Análise de vibrações de uma barra livre.

sendo,

- EA - rigidez à compressão-tração ($EA=6,084 \times 10^4$ ton)
 m - densidade linear de massa ($m=0,4$ ton. s^2/m^2)
 l - distância entre extremos ($l=6$ m)

III.1 Solução analítica

Os resultados foram retirados da referência [19], e adaptados às nossas necessidades atuais.

III.1.1 Freqüências e modos naturais

Freqüências naturais

$$(III.1) \quad \omega_i^2 = \left[\frac{(i-1) \cdot \pi}{l} \right]^2 \cdot \frac{EA}{m} \quad (\text{rad/s}^2); \quad i=1,2,3,\dots,\infty$$

Modos naturais ortonormalizados em relação à massa

$$(III.2) \quad \phi_i(x) = c_i \cdot \cos \left[\frac{(i-1) \cdot \pi}{l} \cdot x \right]; \quad i=1,2,3,\dots,\infty$$

sendo

$$c_1^2 = \frac{1}{m \cdot l} \quad \text{e} \quad c_i^2 = \frac{2}{m \cdot l}; \quad i=2,3,\dots,\infty$$

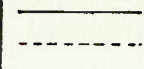
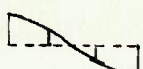
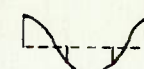
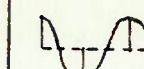
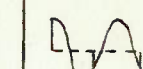
Introduzindo os dados do problema em (III.1) e (III.2)

temos:

$$(III.3) \quad \omega_i = (i-1) \cdot \pi \cdot 65 \quad (\text{rad/s}) \quad i = 1,2,\dots,\infty$$

$$(III.4) \quad \phi_1 = \sqrt{\frac{5}{12}}; \quad \phi_i = \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \cos \left[\frac{(i-1) \cdot \pi}{6} x \right] \quad i=2,3,\dots,\infty$$

Tabela III.1 Frequências e modos naturais para a barra da Figura III.1 . Solução analítica

i=		1	2	3	4	5
w_i^2	(rad/s ²)	0	41.699,079	166.796,31	375.291,71	667.185,26
w_i	(rad/s)	0	204,20	408,41	612,61	816,81
$\phi_i(x)$	$x = 0$	0,6455	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,9129
	$x = 2$	0,6455	+ 0,4564	- 0,4564	- 0,9129	- 0,4564
	$x = 4$	0,6455	- 0,4564	- 0,4564	+ 0,9129	- 0,4564
	$x = 6$	0,6455	- 0,9129	+ 0,9129	- 0,9129	+ 0,9129
						

III.1.2 Cálculo da Resposta

Os deslocamentos longitudinais (na direção do eixo X) para $F(t) = 10 \cdot \text{sen}(80 \cdot \pi \cdot t)$, vide Figura III.1, obtidos por su perposição modal, [19], são dados por

$$(III.5.a) \quad u(x,t) = \sum_{i=2}^{\infty} \phi_i(x) \cdot u_i(t) \quad (\text{já excluído o movimento de corpo rígido})$$

onde

$$(III.5.b) \quad u_i(t) = e^{-\xi_i \cdot w_i \cdot t} \cdot [A_i \cdot \text{sen } w_{D_i} t + B_i \cdot \text{cos } w_{D_i} t] + B_i \left[\frac{(1-\beta_i^2)}{2 \cdot \xi_i \cdot \beta_i} \cdot \text{sen } 80\pi t - \text{cos } 80\pi t \right]$$

com

$$(111.5.c) \quad \beta_i = 80\pi/w_i \quad (\text{relação de frequências})$$

$$B_i = \frac{10 \cdot \phi_i(0)}{w_i^2} \cdot \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \beta_i}{(1-\beta_i^2)^2 + (2 \cdot \xi_i \cdot \beta_i)^2}$$

$$A_i = \frac{B_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \cdot \left[\xi_i - \frac{1}{2 \cdot \xi_i} \cdot \frac{(1-\beta_i^2)}{(1-\beta_i^2)^2 + (2 \cdot \xi_i \cdot \beta_i)^2} \right]$$

$$w_{D_i} = w_i \cdot \sqrt{1-\xi_i^2} \quad (\text{frequência natural amortecida})$$

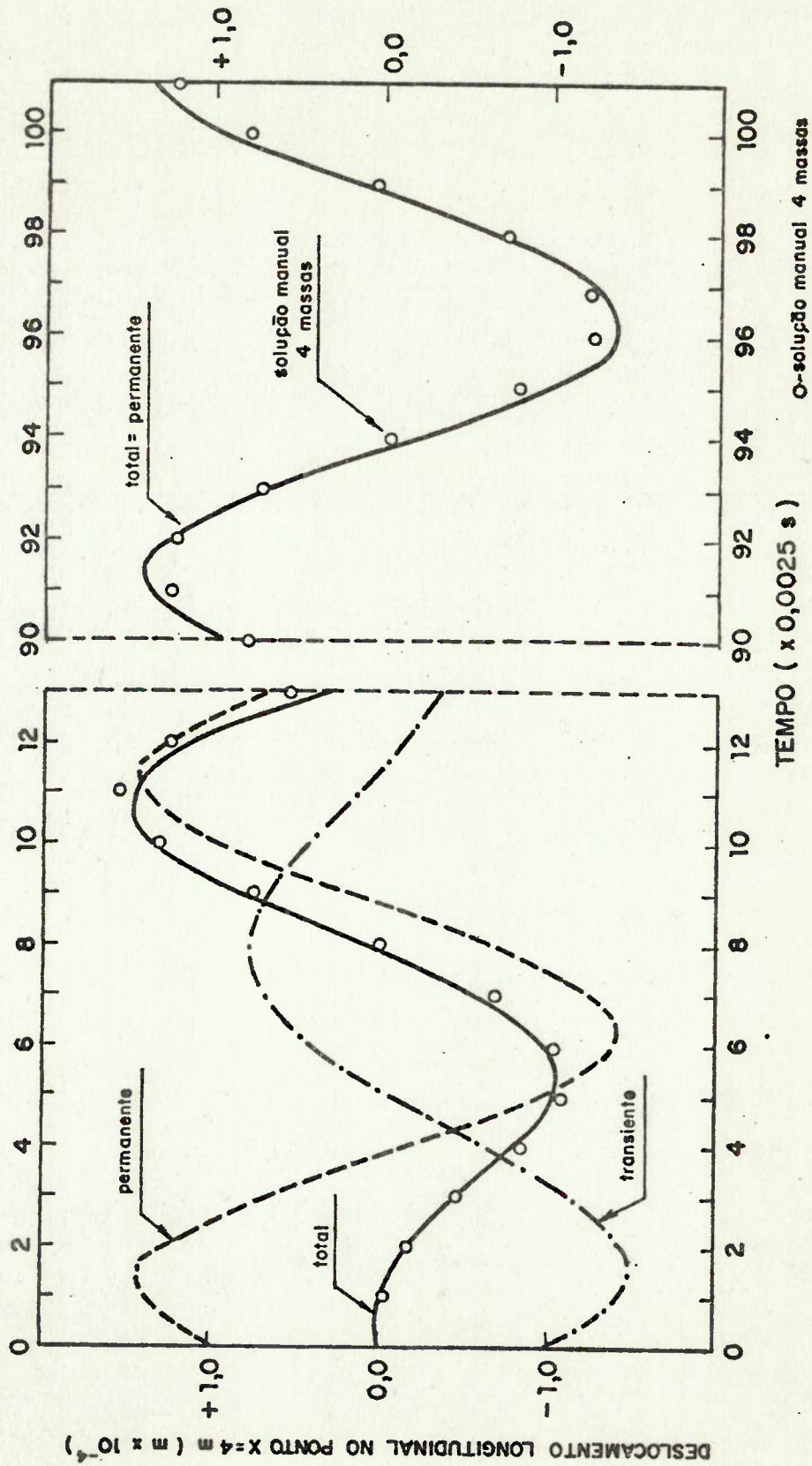
e onde foram assumidas condições iniciais nulas.

Introduzindo os dados do problema e computando, somente, a contribuição do segundo modo, com $\xi_2 = 0,20$, a resposta em deslocamento, para o ponto $x = 4m$, será dada por

$$(111.5.d) \quad u(4,t) = -0,9696 \times 10^{-4} \cdot \{ e^{-40,841 \cdot t} \cdot [1,5177 \cdot \text{sen}(200,08 \cdot t) + \text{cos}(200,08 \cdot t)] - [1,0457 \cdot \text{sen}(80\pi \cdot t) + \text{cos}(80\pi \cdot t)] \}$$

Na Figura 111.2 aparece a curva da resposta, assim selecionada, para os tempos iniciais (quando o transiente ainda existe) e para tempos onde já não existe a influência do transiente.

FIG. III.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA - BARRA DA FIG. III.1
 SUPERPOSIÇÃO MODAL - APENAS 2º MODO



III.2 Solução manual

Para a barra da Figura III.1, discretizada como indica a Figura III.3, faremos o cálculo manual, na análise dinâmica, através do emprego das técnicas apresentadas no capítulo II.

III.2.1 Frequências e modos naturais

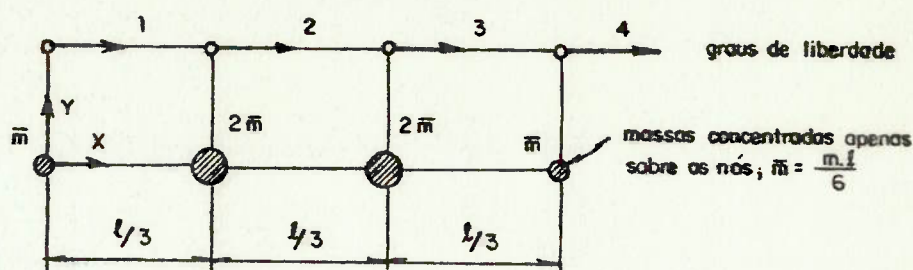


Figura III.3 - Barra livre discretizada

As matrizes de rigidez, $|12|$, $|13|$ e de massas discretas são dadas por;

$$(III.6) \quad K = \frac{3EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(III.7) \quad M = \frac{m \cdot l}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicaremos, agora, o método de iteração por subespaço, resumido em II.3.5.

(1) Remoção da singularidade da matriz de rigidez

$$\hat{K} = K + \beta.M \quad (11.53) \text{ rep.})$$

(1.a) - Verificação da singularidade de K

$$\frac{\det[K]}{\left(\frac{3EA}{l}\right)^4} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(4) - (2+1)] + 1 \cdot [(-2) - (-1)] = 1 - 1 = 0$$

portanto $\det[K] = 0 \therefore K$ é singular

(1.b) - Escolha da constante β .

Se tomarmos

$$(111.8) \quad \beta = 18 \cdot \frac{EA}{m l^2}$$

$$\hat{k}_{11} = k_{11} + \beta \cdot m_{11} = \frac{3EA}{l} \cdot 1 + 18 \cdot \frac{EA}{m l^2} \cdot \frac{m l}{6} = 2 \cdot \left(\frac{3EA}{l}\right)$$

$$\hat{k}_{22} = k_{22} + \beta \cdot m_{22} = \frac{3EA}{l} \cdot 2 + 18 \cdot \frac{EA}{m l^2} \cdot \frac{m l}{6} \cdot 2 = 4 \cdot \left(\frac{3EA}{l}\right)$$

$$\hat{k}_{33} = k_{33} + \beta \cdot m_{33} = \frac{3EA}{l} \cdot 2 + 18 \cdot \frac{EA}{m l^2} \cdot \frac{m l}{6} \cdot 2 = 4 \cdot \left(\frac{3EA}{l}\right)$$

$$\hat{k}_{44} = k_{44} + \beta \cdot m_{44} = \frac{3EA}{l} \cdot 1 + 18 \cdot \frac{EA}{m l^2} \cdot \frac{m l}{6} \cdot 1 = 2 \cdot \left(\frac{3EA}{l}\right)$$

então,

$$(111.8) \quad \hat{K} = \frac{3EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1.c) - Verificação da não singularidade de \hat{K} .

$$\begin{aligned} \frac{\det[\hat{K}]}{\left(\frac{3EA}{l}\right)^4} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot [(32) - (4+2)] + 1 \cdot [(-8) - (-1)] = 45 \end{aligned}$$

portanto $\det[\hat{K}] = 45 \cdot \left(\frac{3EA}{l}\right)^4 \neq 0$.∴ existe \hat{K}^{-1} , sendo

$$(111.9) \quad \hat{K}^{-1} = \frac{1}{45} \cdot \frac{l}{3EA} \cdot \begin{bmatrix} 26 & 7 & 2 & 1 \\ 7 & 14 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 26 \end{bmatrix}$$

(2) Solução do problema de autovalor para \hat{K} .

(2.1) Estabelecimento de q vetores de partida ($\phi_{(1)}$)

Para que os dois primeiros autovalores (w_1^2 e w_2^2) sejam calculados com precisão pré-estabelecida, devemos tomar,

$$q = \min \{2 \times 2 ; 2+8\} = 4$$

Como já conhecemos as formas modais exatas, item - 777.1.1, uma excelente aproximação para os vetores das formas modais, e assumida como partida é dada por

$$(111.10) \quad \Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

que pré-multiplicada por (111.7) fornece,

$$(111.11) \quad M \cdot \Phi_{(1)} = \frac{m\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(2.2) Análise de "Rayleight-Ritz"

De (11.54) as formas assumidas serão dadas por:

$$(111.12) \quad \Psi_{(2)} = \hat{K}^{-1} \cdot M \cdot \Phi_{(1)}$$

assim introduzindo (111.7), (111.9) e (111.10) em (111.12) e efetuando as multiplicações resulta

$$(111.13) \quad \Psi_{(2)} = \frac{6}{45} \cdot \frac{\ell}{3EA} \cdot \frac{m\ell}{6} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 10 & 6 & 5 \\ 15 & 5 & -3 & -5 \\ 15 & -5 & -3 & 5 \\ 15 & -10 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Agora, por (11.55) e (11.56) podemos calcular as matrizes generalizadas de massa e rigidez.

$$(III.14) \quad M^*_{(2)} = \Psi^T_{(2)} \cdot M \cdot \Psi_{(2)}$$

$$(III.15) \quad K^*_{(2)} = \Psi^T_{(2)} \cdot \hat{K} \cdot \Psi_{(2)}$$

assim, premultiplicando (III.7) pela transposta de $\Psi_{(2)}$ e pós-multiplicando por $\Psi_{(2)}$, e analogamente para \hat{K} , resulta

$$(III.16) \quad M^*_{(2)} = \left[\frac{6}{45} \cdot \frac{l}{3EA} \right]^2 \cdot \left[\frac{ml}{6} \right]^3 \cdot \begin{bmatrix} 1350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

$$(III.17) \quad K^*_{(2)} = \left[\frac{6}{45} \cdot \frac{ml^2}{6} \right]^2 \cdot \frac{l}{3EA} \cdot 90 \cdot \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

As matrizes generalizadas de (III.16) e (III.17) são da forma diagonal como decorrência do fato de termos tomado formas assumidas, $\Psi_{(2)}$, a partir das formas modais exatas (exatas a menos de normalização) por (III.12). Desse modo o processo converge na primeira iteração, sendo que por (11.46) calculam-se os autovalores e respectivos autovetores em coordenadas generalizadas,

$$\tilde{\lambda}_1 = k_{11}^*/m_{11}^* = \frac{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{m\ell}{6}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{3EA} \cdot 90 \cdot 15}{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{\ell}{3EA}\right)^2 \cdot \left(\frac{m\ell}{6}\right)^3 \cdot 1350} = 18 \frac{EA}{m\ell^2}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = k_{22}^*/m_{22}^* = \frac{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{m\ell}{6}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{3EA} \cdot 90 \cdot 5}{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{\ell}{3EA}\right)^2 \cdot \left(\frac{m\ell}{6}\right)^3 \cdot 300} = 27 \frac{EA}{m\ell^2}$$

$$\tilde{\lambda}_3 = k_{33}^*/m_{33}^* = \frac{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{m\ell}{6}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{3EA} \cdot 90 \cdot 3}{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{\ell}{3EA}\right)^2 \cdot \left(\frac{m\ell}{6}\right)^3 \cdot 108} = 45 \frac{EA}{m\ell^2}$$

$$\tilde{\lambda}_4 = k_{44}^*/m_{44}^* = \frac{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{m\ell}{6}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{3EA} \cdot 90 \cdot 5}{\left(\frac{6}{45} \cdot \frac{\ell}{3EA}\right)^2 \cdot \left(\frac{m\ell}{6}\right)^3 \cdot 150} = 54 \frac{EA}{m\ell^2}$$

logo

$$(111.18) \quad \tilde{\Lambda} = \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \text{diag} [18; 27; 45; 54]$$

e, após simplificado

$$1/\sqrt{m_{11}^*} = 135\sqrt{6} \cdot \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \cdot 1/\sqrt{1350}$$

$$1/\sqrt{m_{22}^*} = 135\sqrt{6} \cdot \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \cdot 1/\sqrt{300}$$

$$1/\sqrt{m_{33}^*} = 135\sqrt{6} \cdot \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \cdot 1/\sqrt{108}$$

$$1/\sqrt{m_{44}^*} = 135\sqrt{6} \cdot \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \cdot 1/\sqrt{150}$$

portanto,

$$(III.19) \quad \Phi_Z = 135\sqrt{6} \cdot \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \cdot \text{diag} \left[1/\sqrt{1350}; 1/\sqrt{300}; 1/\sqrt{108}; 1/\sqrt{150} \right]$$

Agora, por (II.57), transforma-se as formas modais para coordenadas geométricas

$$(III.20) \quad \Phi = \Psi_{(2)} \cdot \Phi_Z$$

sendo $\Psi_{(2)}$ dada por (III.13) e Φ_Z por (III.19), de (III.20) resulta,

$$(III.21) \quad \Phi = \frac{\sqrt{6}}{m\ell} \cdot \begin{bmatrix} 15/\sqrt{1350} & 10/\sqrt{300} & 6/\sqrt{108} & 5/\sqrt{150} \\ 15/\sqrt{1350} & 5/\sqrt{300} & -3/\sqrt{108} & -5/\sqrt{150} \\ 15/\sqrt{1350} & -5/\sqrt{300} & -3/\sqrt{108} & 5/\sqrt{150} \\ 15/\sqrt{1350} & -10/\sqrt{300} & 6/\sqrt{108} & -5/\sqrt{150} \end{bmatrix}$$

(3) Cálculo das aproximações dos autovalores do problema original.

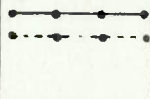
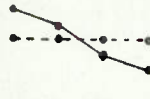

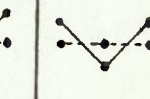
$$\Lambda = \hat{\Lambda} - \beta \quad ((III.59) \text{ rep})$$

sendo $\hat{\Lambda}$ dado em (III.18) e β em (III.8), resulta

$$(III.22) \quad \Lambda = \frac{EA}{m\ell^2} \cdot \text{diag} [0; 9; 27; 36]$$

Introduzindo os dados do problema temos os resultados apresentados na tabela III.2

TABELA III.2 - Frequências e modos naturais para a barra da Figura III.1, discretizada como indica a Figura III.3 (4-Massas). Técnica dos elementos finitos.

Modo		1	2	3	4
λ_i	(rad/s ²)	0	38.025,000	114.075,00	152.100,00
w_i	(rad/s)	0	195,00	337,75	390,00
ϕ_i	x = 0	0,6455	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,6455
	x = 2	0,6455	+ 0,4564	- 0,4564	- 0,6455
	x = 4	0,6455	- 0,4564	- 0,4564	+ 0,6455
	x = 6	0,6455	- 0,9129	+ 0,9129	- 0,6455
					

III.2.2 Cálculo da Resposta

Seja a excitação $F(t)$, vide Figura III.1, dada por

$$(III.23) \quad F(t) = 10 \cdot \text{sen} (80\pi \cdot t) \quad (\text{ton})$$

Consideremos a resposta obtida pela inclusão, apenas do segundo modo, subcriticamente amortecido (com $\xi_2 = 0,2$). Então,

Cálculo do carregamento generalizado

$$p_i(t) = \phi_i^T \cdot F(t) \quad ((11.86) \text{ rep.})$$

onde, no caso

$$(111.24) \quad F(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10 \cdot \text{sen}(80\pi t)$$

e ϕ_i é dado na tabela 111.2. Portanto, para o segundo modo,

$$(111.25) \quad p_2(t) = \begin{Bmatrix} +0,9129 \\ +0,4564 \\ -0,4564 \\ -0,9129 \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10 \cdot \text{sen}(80\pi t) =$$

$$= 9,129 \cdot \text{sen}(80\pi t)$$

Cálculo da resposta modal (apenas segundo modo)

Aplicando o método de II.4.5 (tabela 11.1), temos:

$$d_1 = 0,9129 ; \quad a = 10 ; \quad \bar{w} = 80\pi , \quad \delta = 0 ; \quad b=0$$

$$w = 195 ; \quad w_D \cong 191,06 ;$$

$$d_2 \cong 442,39 ; \quad d_3 \cong 60,27 (\neq 0, \text{ portanto não há ressonância}).$$

Os cálculos intermediários, por não apresentarem interesse, serão omitidos de modo que, após efetuá-los, chegamos a

seguinte expressão para a resposta modal do segundo modo

$$(III.26) \quad u_2(t) \cong 1,76 \times 10^4 \cdot \{ 271,36 \cdot [d_{19} \cdot \text{sen}(191,06.t) + \\ + d_{20} \cdot \text{cos}(191,06.t)] + \\ + e^{-39.t} \cdot [1,89 \cdot \text{sen}(191,06.t) + \\ + 1,00 \cdot \text{cos}(191,06.t)] \}$$

onde

$$(III.27) \quad d_{19} = d_{15} = \bar{d}_{11} + \bar{d}_{12} \\ d_{20} = d_{16} = \bar{d}_{13} - \bar{d}_{14} \\ \bar{d}_{11} = 10^{-4} \cdot [0,99 \cdot \text{sen}(442,39.t) - 11,22 \cdot \text{cos}(442,39.t)] \\ \bar{d}_{12} = 10^{-4} \cdot [37,84 \cdot \text{sen}(60,27.t) - 58,48 \cdot \text{cos}(60,27.t)] \\ \bar{d}_{13} = 10^{-4} \cdot [11,22 \cdot \text{sen}(442,39.t) + 0,99 \cdot \text{cos}(442,39.t)] \\ \bar{d}_{14} = 10^{-4} \cdot [58,48 \cdot \text{sen}(60,27.t) + 37,84 \cdot \text{cos}(60,27.t)]$$

Finalmente, para o ponto de abscissa $X = 4$, temos

$$(III.28) \quad u(4,t) \cong \phi_2 \Big|_{x=4} \cdot u_2(t) = -0,4564 \cdot u_2(t)$$

Os resultados obtidos pela aplicação de (III.26), (III.27) e (III.28) foram colocados na Figura III.2. Nessa Figura observa-se que as diferenças entre a solução analítica e a solução apresentada neste ítem, se consideradas razões de ordem prática, não comprometem a viabilidade de emprego do método proposto, sendo perfeitamente aceitáveis. No entanto, a resposta total do sis

tema deve ser obtida pela inclusão de um maior número de modos (respostas modais) e nesse aspecto o modelo de 4 massas não fornecerá uma boa aproximação, já que frequências de ordem superior a dois são aproximações precárias para as frequências naturais do sistema (vide tabela III.3), além de não se poder incluir modos superiores a 4.

No caso particular estudado neste capítulo, as diferenças entre respostas obtidas analiticamente e pelo método de II.4.5 são decorrentes, unicamente, do erro cometido na avaliação de frequências naturais. Assim, uma vez que apenas o transiente depende das frequências naturais, seria esperada a ocorrência de erros de aproximação apenas enquanto este fosse parcela significativa no computo da resposta. No entanto, como observa-se na Figura III.2, o erro persiste mesmo após ter desaparecido o transiente. Justifica-se tal fato já que, na formulação do método de II.4.5, a parcela da resposta correspondente ao regime permanente depende apenas indiretamente da frequência de excitação e é calculada via frequência natural, de modo que os mesmos erros estender-se-ão até o regime permanente.

Embora, pelo motivo exposto no parágrafo anterior, possamos estabelecer uma limitação do método, o seu emprego é plenamente aceitável uma vez que numa análise, em primeiro lugar, deve-se minimizar os erros cometidos no cálculo das aproximações das frequências naturais, discretizando o sistema original de modo adequado, e como consequência disso a aproximação obtida para a resposta será, na prática, plenamente satisfatória (vide figura III.4).

III.3 Comparação de resultados

Submetemos à análise pelo programa SAP-IV modificado o sistema da Figura III.1, segundo as seguintes discretizações:

- 1 - Modelo da Figura III.3 (4 massas).
- 2 - Modelo com treze massas (concentradas) equiespaçadas, com mesma lei de formação do modelo da Figura III.3 (13-massas).
- 3 - Modelo com vinte e cinco massas (concentradas) equiespaçadas, com mesma lei de formação do modelo da Figura III.3 (25-massas).

Na Tabela III.3 apresentamos os resultados obtidos no cálculo das aproximações para as frequências naturais. É importante notar que os erros relativos (em relação à solução analítica) são sempre negativos de modo que obtivemos, sempre, aproximações inferiores para os valores do sistema não discretizado. De modo geral, numa análise por elementos finitos obtêm-se limites superiores para as frequências do sistema discretizado e, dependendo da discretização efetuada, obtêm-se aproximações superiores ou inferiores para as frequências do sistema original (não discretizado). Deve-se notar, também, que os resultados obtidos pelo programa, no modelo de 4 massas, foram exatamente iguais aos da solução manual (frequências e modos), fato que atesta o acerto dos comandos introduzidos no programa.

Os mesmos modelos foram submetidos à excitação harmônica, empregada no cálculo da resposta dos ítems III.1.2

(resposta analítica) e III.2.2 (resposta do sistema discretizado-4 massas - solução manual), e analisados pelo programa.

Na Figura III.4 mostramos os resultados obtidos (quando considerada apenas a influência do segundo modo na resposta) sendo que as soluções para o modelo 4-massas, manual e pelo programa, são exatamente as mesmas, enquanto as soluções para os modelos 13-massas e 25-massas coincidem, tendo em vista a precisão do gráfico. Se, como já mencionado em parágrafo precedente, a resposta do modelo 4-massas pode ser considerada satisfatória, para o modelo 13-massas (e 25-massas), dentro da precisão do gráfico, pode ser considerada exata, por coincidir com a solução analítica. Porém, uma melhor aproximação para a resposta do sistema pode ser obtida pela inclusão, na superposição modal, de modos de ordem superior a dois.

A Figura III.5 apresenta as respostas dos modelos, sendo que agora estão incluídas as influências de modos superiores (respeitada a limitação de incluir respostas modais para as quais frequências e modos foram calculados com precisão pré-estabelecida).

Finalizando, é importante que se faça uma análise comparativa dos tempos de processamento envolvidos. Pela observação da tabela III.4 verifica-se que é a etapa de extração de autovalores a responsável pelo maior consumo de tempo, de modo que se torna irrelevante o tempo consumido no cálculo da resposta quando o número de graus de liberdade é, comparativamente, elevado. Já observamos em parágrafo anterior que, tendo em vista a precisão obtida na análise do problema, os modelos de 13 e 25 massas são inteiramente equivalentes, assim, conclui-se que o grau de refinamento para o sistema discretizado deve

ser estabelecido de modo a compatibilizar precisão necessária para a resposta e custos de processamento. Portanto, no presente caso, o modelo de 13 massas supera os demais.

As conclusões ora apresentadas podem ser úteis numa análise, pelo programa, de outros sistemas e devem ser consideradas, principalmente, no caso em que se tenha um grande número de graus de liberdade, de modo a tornar possível o alcance dos objetivos pretendidos. Ou seja, na preparação do modelo é necessário, também, que se considere o aspecto computacional de modo a não tornar inviável, em termos de custos e capacidade do computador, a análise do modelo pelo emprego do programa.

TABELA III.3 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - FREQUÊNCIAS NATURAIS

$$\text{erro (\%)} = \frac{w - w_{\text{analítica}}}{w_{\text{analítica}}} \cdot 100 (**)$$

SOLUÇÃO	modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Analítica	valor (rad/s)	0,00	204,20	408,41	612,61	816,81	1021,0	1225,2	1429,4	1633,6	1837,8	2042,0	2246,2
	erro (%)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Manual (***)	valor (rad/s)	0,00	195,00	337,75	390,00	-	-	-	-	-	-	-	-
	erro (%)	0,00	-4,51	-17,30	-36,34	-	-	-	-	-	-	-	-
programa (***)	valor (rad/s)	0,00	195,00	337,75	390,00	-	-	-	-	-	-	-	-
	erro (%)	0,00	-4,51	-17,30	-36,34	-	-	-	-	-	-	-	-
programa	valor (rad/s)	0,00	203,62	403,76	597,00	780,00	949,67	1103,2	1237,7	1350,9	1446,4	1507,0	1560,1
	erro (%)	0,00	-0,28	-1,14	-2,55	-4,51	-6,99	-9,96	-13,41	-17,31	-21,30	-26,20	-30,55
programa	valor (rad/s)	0,00	204,05	407,24	608,68	807,52	1002,9	1194,0	1380,0	1560,0	1733,4	1899,3	2057,2
	erro (%)	0,00	-0,07	-0,29	-0,64	-1,14	-1,77	-2,55	-3,46	-4,51	-5,68	-6,99	-8,41

(*) No método de iteração por subespaço apenas p frequências (p=max{n/2 ; n-8} podem ser calculadas com precisão pré-especificada.

(**) Os erros foram calculados em relação ao sistema não discretizado, solução analítica exata, Item III.1.

(***) Mesmos resultados

FIG. III. 4 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - ANALÍTICO x PROGRAMA
 SUPERPOSIÇÃO MODAL - APENAS 2º MODO

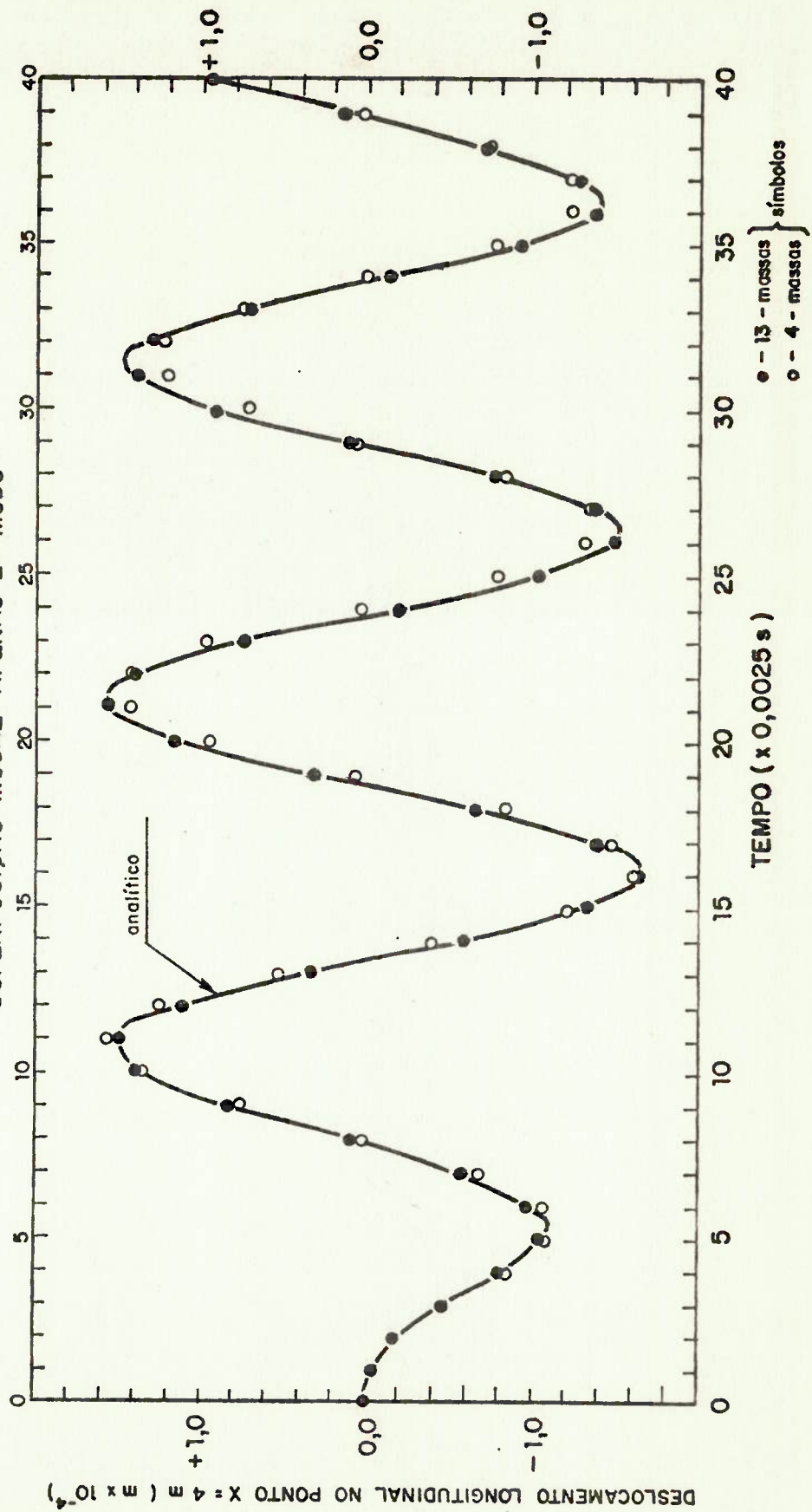


FIG. III. 5 - RESULTADOS DO PROGRAMA
SUPERPOSIÇÃO MODAL

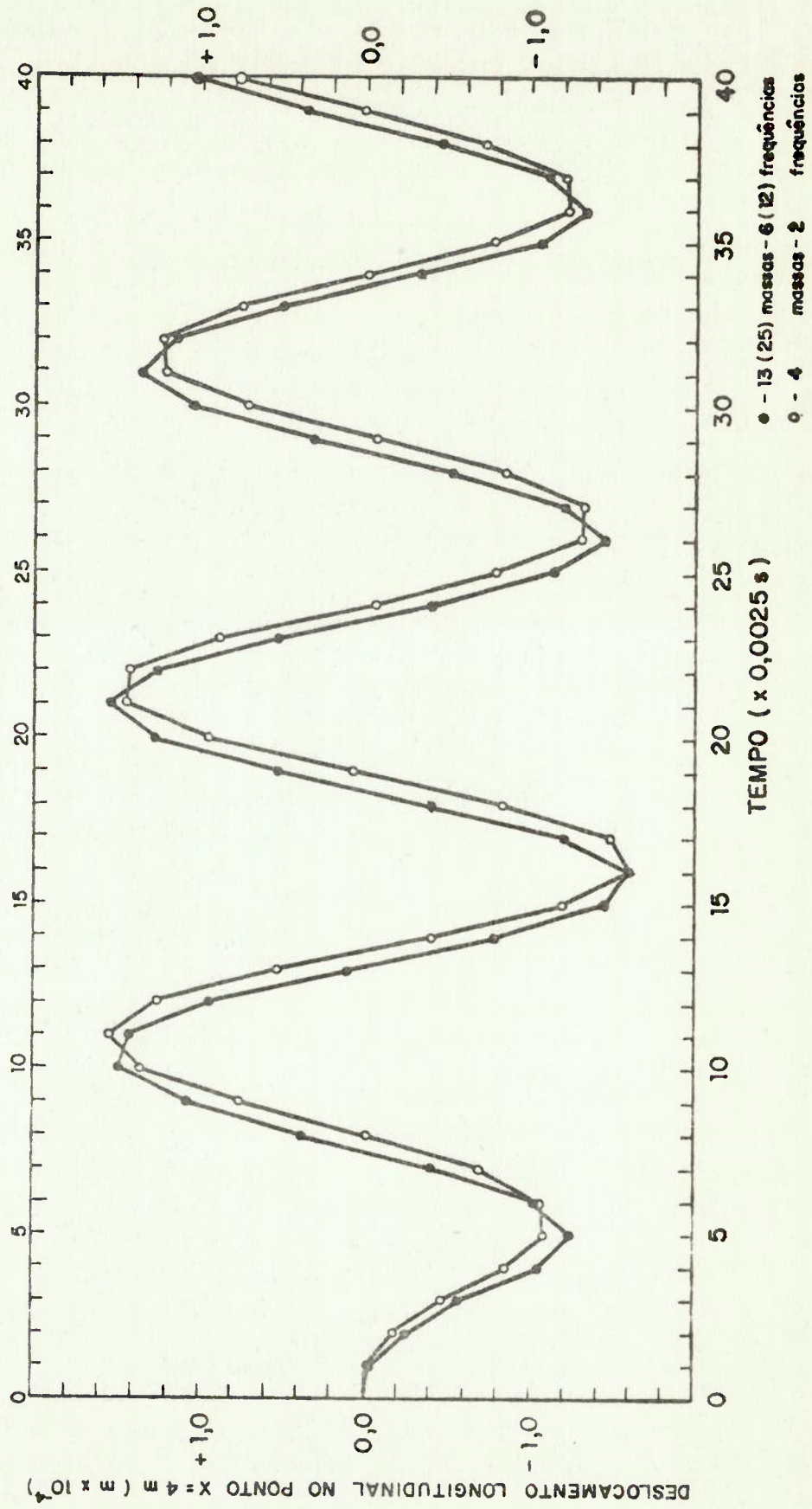


TABELA 111.4 - TEMPOS DE PROCESSAMENTO
(em segundos)

①	②	③	④	⑤	Formação da matriz de rigidez	extração de autovalores	Cálculo da resposta-superposição modal
4	4	4	2	1	0,5	5,0	5,6
13	13	12	2	1	0,9	52,0	5,6
13	13	12	6	5	0,9	52,0	6,9
25	25	12	12	11	1,4	196,0	9,1

- ① Número de graus de liberdade (cinemáticos). É igual à somatória, ao longo dos nós do modelo, da quantidade de movimentos possíveis, com ou sem massa associada. O tempo consumido na formação, armazenagem e transferências das matrizes de rigidez e de massa é linearmente proporcional à esse número.
- ② Número de graus de liberdade dinâmicos. É obtido de maneira análoga ao anterior, computando-se apenas os movimentos possíveis que tenham massa associada. O número de autovalores do modelo é igual a esse número, (Incluindo os autovalores nulos correspondentes a modos de corpo rígido). A dimensão das matrizes de massa e rigidez generalizadas, do método de iteração por subespaço, é no máximo igual a esse número.
- ③ Dimensão (número de linhas ou colunas) das matrizes generalizadas de massa e rigidez no método de iteração por subespaço. O tempo consumido na extração de autovalores varia exponencialmente com esse número.
- ④ Número de autovalores extraídos com precisão pré-especificada. A relação entre os valores da coluna 3 e da coluna 4 pode ser dada, empiricamente, por (11.61).

- ⑤ Número de modos incluídos no cálculo da resposta por superposição modal. De modo geral são excluídos os modos de corpo rígido, sendo os valores da coluna 5, necessariamente, menores ou iguais aos valores da coluna 4. O tempo consumido no cálculo da resposta, especificamente, varia linearmente com esse número.

IV. Aplicação a um caso real

Consideremos o caso do estudo de vibrações do casco de um navio patrulha rápido, cujo perfil longitudinal encontra-se esquematizado na Figura IV.1.

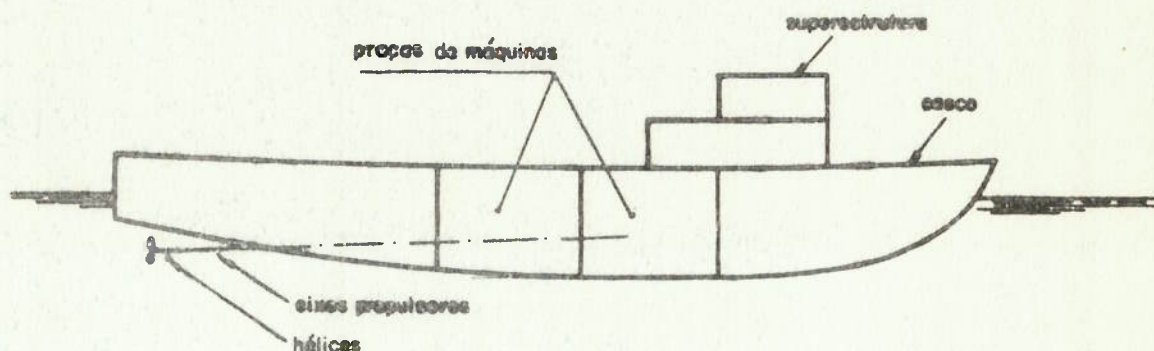


Figura IV.1 - Perfil esquemático longitudinal de uma navio patrulha rápido.

O navio possui quatro motores de combustão principal, dois em cada praça de máquinas, e um sistema redutor-eixo propulsor-hélice acoplado independentemente à cada motor. Os esforços de desbalanceamento dos motores podem ser considerados irrelevantes, [2], de modo que a priori assumem importância os esforços excitantes provenientes da ação dos hélices : efeito da variação de pressão na região de popa e empuxo diretamente transmitido aos mancais de escora.

Os esforços causados pela variação de pressão, mencionada no parágrafo anterior, são de pequena magnitude, assim como para outras fontes de excitação (motores auxiliares, bombas, ondas, etc), tendo importância apriorística, apenas, no

estudo de vibrações locais.

Assim, pelo que se estabeleceu nos parágrafos anteriores, interessar-nos-emos pelas vibrações do casco, como um todo, induzidas pela ação do empuxo. Como decorrência disso, assume importância o estudo de vibrações de viga navio segundo modos nas direções vertical e longitudinal.

IV.1 Apresentação das características do navio

IV.1.1 Dimensões Principais

As dimensões principais do navio são as seguintes:

comprimento total -----	L	≅ 55,0 m
pontal -----	D	≅ 4,95 m
boca máxima -----	B _m	≅ 7,00 m

e, como dimensões que dependem do deslocamento peso (Δ),

Boca na linha d'água-----	B
Calado -----	H

relacionados na Tabela IV.1, para as várias condições de carregamento possíveis.

TABELA IV.1 - DIMENSÕES PRINCIPAIS QUE DEPENDEM DO
DESLOCAMENTO. Navio Patrulha Rápido.

Nº da condição de carregamento.	Δ	H	B	B/H
	t.m/s ² x 9,8	m	m	-
1	203,26	1,89	6,67	3,53
2	275,89	2,17	6,92	3,19
3	356,26	2,46	7,05	2,87
4	292,03	2,23	6,95	3,12
5	350,22	2,44	7,04	2,89
6	290,89	2,22	6,95	3,13
7	352,70	2,44	7,05	2,89
8	373,24	2,52	7,08	2,81
9	289,38	2,22	6,95	3,13
10	366,92	2,49	7,07	2,84

IV.1.2 Avaliação dos esforços de excitação

O valor médio, por hélice, do empuxo é dado por,

$$(IV.1) \quad T_o = 1,267 \cdot \frac{EHP \cdot 75}{V \cdot (1-t) \cdot Z}$$

sendo

EHP - potência ao reboque ($EHP(V_{\text{cruzeiro}}) = 814$; $EHP(V_{\text{máxima}}) = 8276$)

V - velocidade (m/s) ($V_{\text{cruzeiro}} = 16$ nós ; $V_{\text{máxima}} = 39$ nós)

Z - número de hélices ($Z = 4$)

t - coeficiente de redução da força propulsora ($t = 0,02$)

Para as velocidades de cruzeiro e máxima as condições de operação são:

cruzeiro → dois motores a 12,33 ciclos/segundo

máxima → quatro motores a 24,66 ciclos/segundo

Considerando-se que: para a análise de vibrações são essas duas condições as mais importantes (já que para outras velocidades, caso ocorram vibrações indesejáveis, é viável a alteração das mesmas), que a redução é de 2:5 e que cada hélice possui três pás; temos as seguintes frequências de excitação:

$$f_{\text{cruzeiro}} = 60 \times 12,33 \times \frac{3}{2,5} \cong 888 \text{ rpm}$$

(IV.2)

$$f_{\text{máxima}} = 60 \times 24,66 \times \frac{3}{2,5} \cong 1776 \text{ rpm}$$

Se admitirmos uma variação senoidal do empuxo, de amplitude igual à aproximadamente 5% do valor médio, os esforços de excitação, calculados a partir de (IV.1) e (IV.2), serão dados por,

1. na velocidade de cruzeiro

$$(IV.3) \quad T(t) = 0,48 \cdot \text{sen}(92,97 \cdot t) + 9,59 \quad (\text{t.m/s}^2 \times 9,8)$$

aplicado na posição dos mancais de escora da praça de máquinas de ré ou da praça de máquinas de vante.

2. na velocidade máxima

$$(IV.4) \quad T(t) = 0,5 \cdot [2,05 \cdot \text{sen}(185,93 t) + 41,05] \quad (\text{t.m/s}^2 \times 9,8)$$

aplicado, simultaneamente, nas posições dos mancais de escora de ambas as praças de máquinas.

Admitimos, implicitamente, que todos os esforços de excitação tem fase inicial nula.

IV.1.3 *Propriedades da viga navio*

Baseados no que se expos no capítulo I, e nos parágrafos iniciais deste capítulo, consideraremos na presente análise de vibrações as seguintes propriedades:

1. momentos de inércia à flexão, segundo plano vertical (material resistente longitudinal). Curva 1 da Figura IV.2.
2. rigidez à deformação por cisalhamento, para flexão segun-

do o plano vertical. As áreas de cisalhamento, curva 2 da Figura IV.2, foram computadas através da formulação apresentada na referência [9], formulação esta obtida pelo estabelecimento da igualdade de energias de deformação por cisalhamento (por unidade de comprimento), calculado a partir de valores médios de tensão e deformação e calculada a partir da distribuição de tensões dentro da teoria de vigas.

3. Área da secção transversal do material resistente longitudinal, curva 3 da Figura IV.2.
4. Massas adicionais em "heave". Admitindo escoamento bidimensional nos planos perpendiculares à direção longitudinal. Método de "Lewis", [2], [6]. Curva 4 da Figura IV.2.

Tais propriedades, estando condicionadas às formas do casco, foram calculadas para uma série de secções transversais ao longo do comprimento, e a partir desses resultados levantamos as curvas da Figura IV.2.

Adicionalmente, mais duas propriedades de importância foram computadas: pesos e momentos de inércia de peso em torno do eixo neutro da viga navio. Estas propriedades, embora também dependam das formas do casco, estão mais diretamente associadas ao arranjo de pesos, que por sua vez é função do arranjo geral do navio.

As distribuições de pesos e momentos de inércia de peso variam, para o mesmo navio, em forma e magnitude de uma condição de carregamento para outra, fato que tem relevância no cálculo de frequências e modos naturais. Assim, a rigor, para cada condição de carregamento deve-se efetuar a análise de vibrações, no entanto, em virtude das incertezas resultantes da ava

liação de propriedades, não se justifica a consideração desse aspecto antes de uma análise preliminar de frequências. A Figura IV.3 apresenta as distribuições aproximadas das propriedades ora mencionadas, para a condição de carregamento de número 3 (tabela IV.1).

IV.2 - Frequências naturais por formulações semi-empíricas

Um grande número de formulações semi-empíricas tem sido apresentado por diversos autores, [1], [2], [7], [8]. A característica natural do estabelecimento de uma formulação deste tipo é sua dependência de experimentos em verdadeira grandeza de modo que, em princípio, uma determinada formulação apresenta bons resultados quando empregada no cálculo de frequências naturais de navios semelhantes àqueles a partir dos quais teve seus coeficientes determinados experimentalmente.

Tais formulações são obtidas através do emprego de teoria para vibrações de vigas simples, adicionando hipóteses que simplificam de modo dirigido as distribuições de propriedades de rigidez e massa da viga navio. A grosso modo podemos estabelecer que basta admitir distribuições de propriedades com mesma lei de formação (por exemplo $EI(x) = EI_0 \cdot F(x)$ e $m(x) = m_0 \cdot F(x)$) para que se encontre uma formulação, razoavelmente simples, correspondente às de cálculo de frequências naturais de vigas com distribuições uniformes de propriedades (isso pode ser visualizado através do quociente de Rayleigh). Assim, os coeficientes (constantes) acrescentados às formulações semi-empíricas devem ser entendidos como fatores ou par-

celas de ajuste dos resultados tendo em vista as incertezas cometidas nas avaliações de propriedades, bem como em virtude da admissão da hipótese anteriormente mencionada.

IV.2.1 Vibração vertical.

Formulação de KUMAI, |8|

$$(IV.5) \quad w_i = c_i \cdot i^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E \cdot I}{\Delta \cdot L^3 \cdot (1+\tau) \cdot [1+(\alpha+\beta) \cdot i^2 \cdot \pi^2]}}$$

onde

- i - número de nós modais
- g - aceleração da gravidade.
- E - módulo de elasticidade do material resistente
- τ - coeficiente para inclusão da massa adicional total,

$$(IV.6) \quad \tau = [0,3 - 0,033 \cdot (B/H)] \cdot (B/H) \quad (\text{adimensional})$$

α - coeficiente para inclusão da rigidez à deformação por cisalhamento,

$$(IV.7) \quad \alpha = \frac{E \cdot I}{A_c \cdot G \cdot L^2} \quad (\text{adimensional})$$

G - módulo de elasticidade transversal.

β - coeficiente para inclusão da inércia de rotação,

$$(IV.8) \quad \beta = \frac{R^2}{L^2} \quad (\text{adimensional})$$

Sendo Δ , B/H e L como em IV.1.1 e

I - momento de inércia à flexão.

A_c - área de cisalhamento

R - raio de giração de massa.

avaliados, todos na posição da secção mestra.

E, ainda

C_i - coeficiente adimensional para ajuste de resultados. Deve ser determinado empiricamente por ensaios com navios semelhantes. Adotaremos um valor médio provável, $C_i=0,67$, para os quatro primeiros modos.

A expressão (IV.6) é empírica e foi determinada em ensaios de tanque com modelos de navios cargueiros. Apresenta resultados satisfatórios, embora, em princípio, não seja aplicável ao caso do navio patrulha rápido. Da tabela (IV.1) pode-se obter um polinômio do primeiro grau relacionando a razão boca / calado (B/H) com o deslocamento,

$$(IV.9) \quad (B/H) \cong 4,27 - 3,90 \times 10^{-3} \cdot \Delta$$

que, para valores do deslocamento do navio em estudo, apresenta bons resultados.

Substituindo (IV.9) em (IV.6) temos,

$$(IV.10) \quad \tau \cong 0,68 - 7,10 \times 10^{-5} \cdot \Delta - 5,03 \times 10^{-7} \cdot \Delta^2$$

Então, para o navio patrulha rápido, aproximações para as frequências naturais são dadas por:

$$(IV.11) \quad w_i = \frac{171,94 \cdot i^2 \cdot \pi^2}{\sqrt{(16,8 - 7,10 \times 10^{-5} \cdot \Delta - 5,03 \times 10^{-3} \cdot \Delta^2) \cdot \Delta \cdot (1 + 3,29 \times 10^{-2} \cdot i^2 \cdot \pi^2)}} \quad (\text{rad/s})$$

para $i = 2,3,4,5$ (Para $i > 4$ os resultados não são confiáveis).

IV.2.2 Vibração Longitudinal.

Adotaremos a seguinte formulação semi-empírica apresentada pela referência [2].

$$(IV.12) \quad w_i = C_i \cdot i \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E \cdot A_t}{\Delta \cdot L}}$$

onde i , g , E , Δ e L já foram definidos anteriormente, e,

A_t - área da secção transversal do material resistente longitudinal, avaliada na posição da secção mestra.

C_i - coeficiente adimensional para ajuste de resultados. Segundo o que recomenda a referência, adotaremos $C_1 = 1.00$ e $C_2 = 0,87$, sendo que para modos de ordem superior os resultados, obtidos por (IV.12), não são confiáveis.

Então, para o navio patrulha rápido temos,

$$(IV.13) \quad w_i = C_i \cdot \frac{7678,3 \pi \cdot i}{(\Delta)^{0,5}} \quad (\text{rad/s})$$

com $C_1 = 1,00$ e $C_2 = 0,87$.

IV.2.3 Verificação de ressonância

Para verificar a proximidade da ressonância estabeleceremos o critério da Figura IV.4, onde sobre os valores das frequências naturais, dados por (IV.11) e (IV.13), admitimos uma variação de 20%. Assim, definem-se faixas de ressonância com limite superior igual ao máximo valor da frequência natural - (menor deslocamento) vezes 1,2 e com limite inferior igual ao

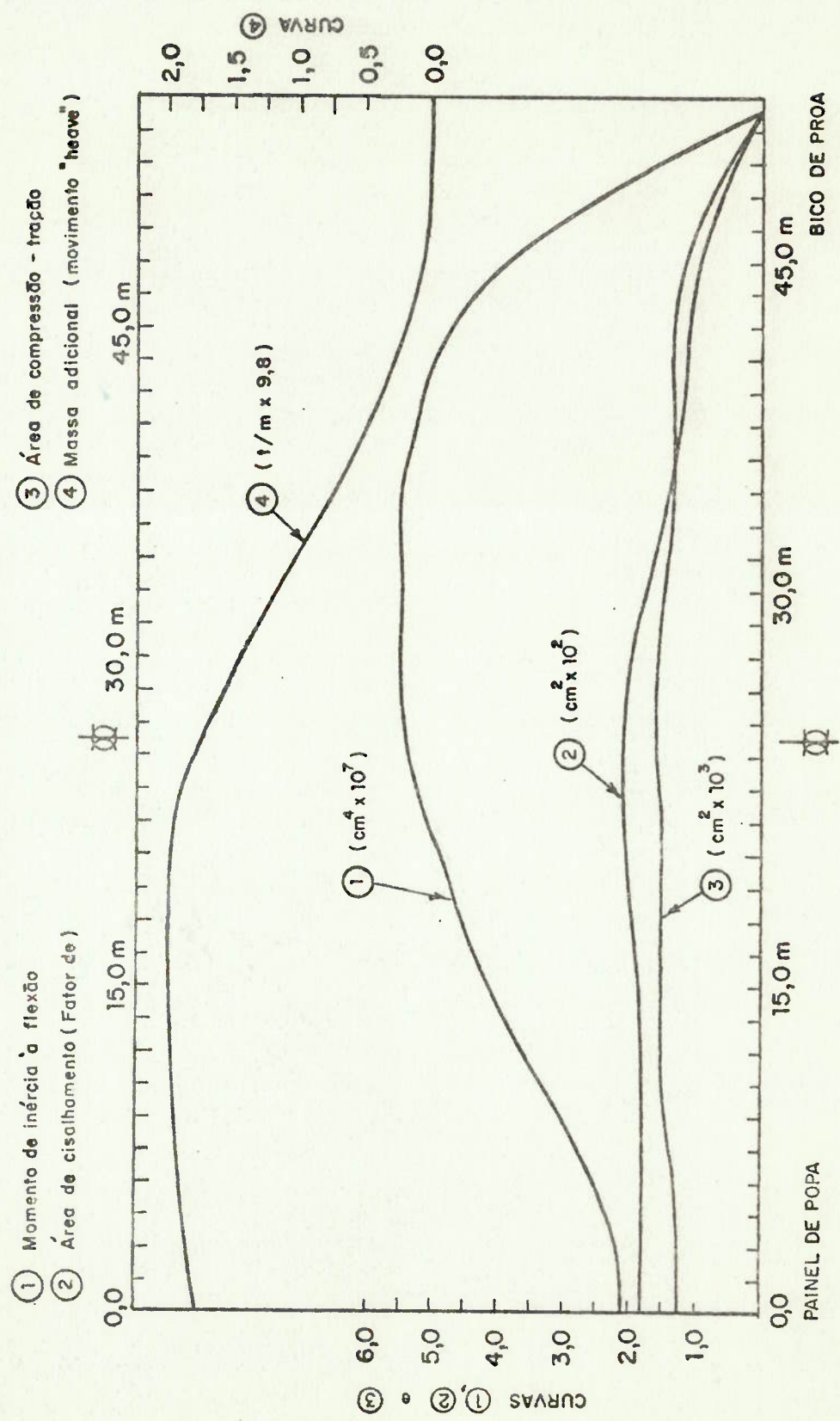
mínimo valor (maior deslocamento) vezes 0,8, para cada modo.- Note-se que as curvas resultantes são aproximadas por retas como resultado do que se obtém parametricamente na variável deslocamento.

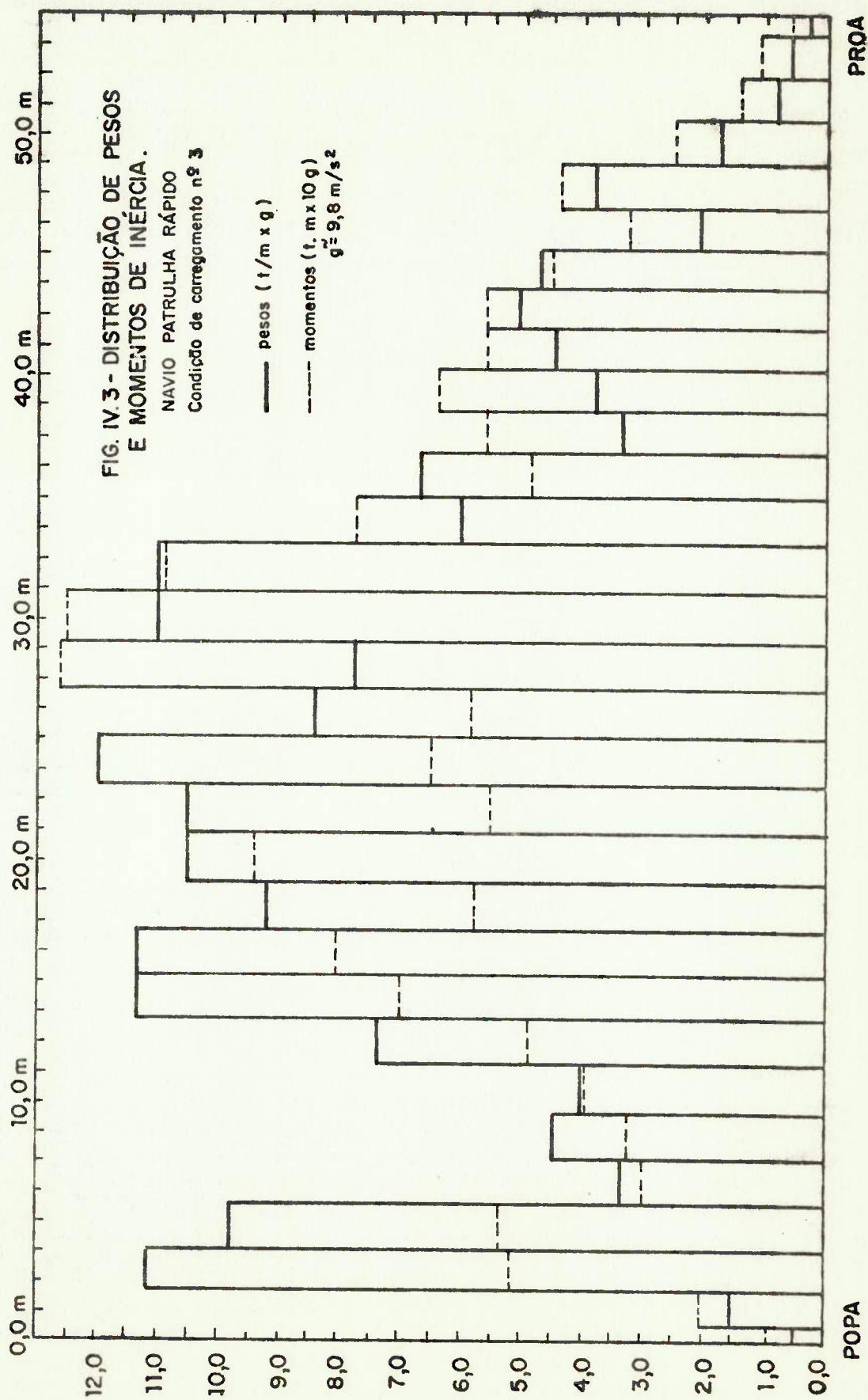
O valor 20% justifica-se tendo em vista as incertezas introduzidas no cálculo das frequências naturais, decorrentes da avaliação de propriedades da viga navio (principalmente massa adicional) bem como pela utilização dos coeficientes em p_íricos adotados. Assim, se considerarmos uma melhor avaliação de massas adicionais, e as distribuições de propriedades da Figura IV.2, num cálculo pelo método proposto no capítulo II, o critério do parágrafo anterior poderá ser menos drástico (reduzindo-se o valor mencionado para aproximadamente 5%), além do que será possível avaliar a resposta do sistema.

Podemos, então, estabelecer os procedimentos para análise por elementos finitos:

1. Cálculo das frequências naturais para vibração longitudinal e vertical da viga navio.
2. Comparação de resultados: formulação semi-empírica X resultados da análise por elementos finitos.
3. Análise da resposta. Pela observação da Figura IV.4 conclui-se que duas situações devem ser verificadas: análise da resposta para a vibração vertical e empuxo na velocidade de cruzeiro; análise da resposta para vibração longitudinal e empuxo na velocidade máxima. Teoricamente, a resposta para vibração vertical e empuxo na velocidade máxima pode ser relevante (considerando-se a proximidade de ressonância com modos verticais de ordem superior), porém, na prática, por efeitos de vibrações locais, a vibração do casco nessa situação afasta-se do que se considera como sendo vibrações de viga; assim, também assume importância o estudo de vibrações de natureza local que, no entanto, não pertence ao escôpo do presente trabalho.

FIG. IV. 2 - DISTRIBUIÇÃO DE PROPRIEDADES VIGA - NAVIO
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO

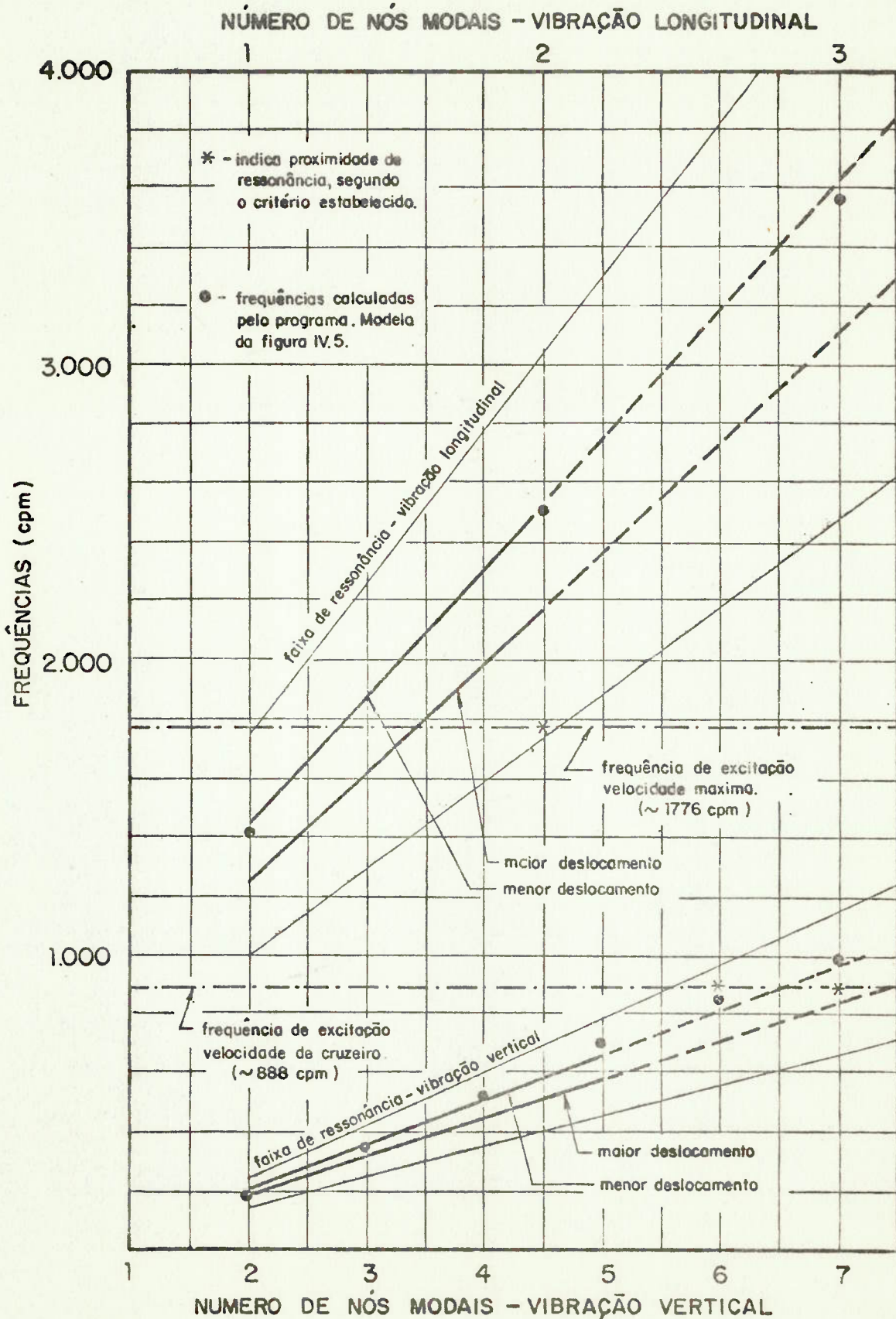




POPA

PROA

FIG. IV.4 - FREQUÊNCIAS NATURAIS x FREQUÊNCIAS DE EXCITAÇÃO
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO



IV.3 Análise pelo programa, Modelo reticulado

Na análise de vibrações do casco como viga, justifica-se a adoção do modelo unidimensional de elementos de viga da Figura IV.5. O número de nós e o espaçamento entre eles foram escolhidos de modo a propiciar boas aproximações, no sistema discretizado, para as distribuições de massas (concentradas nos nós) e rigidez. As massas em cada nó foram calculadas tomando-se meio espaçamento para cada lado (com centro na abscissa do nó) e computando-se as áreas sob a curva 4 da Figura IV.2 e curvas da Figura IV.3. As propriedades de rigidez foram tomadas a partir da abscissa do ponto médio de cada elemento de viga do modelo nas curvas correspondentes da Figura IV.2.

Assim, obtivemos uma idealização do sistema real que representa o eixo neutro da viga navio, discretizado por trinta trechos de modo que as propriedades de rigidez são constantes em cada trecho; e com massas (massas e momentos de inércia de massa) distribuídas pelos nós de modo a idealizar as distribuições de esforços de inércia.

Consideraremos, também, a análise para uma única condição de carregamento (número 3) já que, como observado anteriormente, não se justifica a consideração apriorística de todas as condições de carga tendo em vista as simplificações e incertezas introduzidas.

A título de comparação colocamos as frequências calculadas pelo programa na Figura IV.4. Verifica-se que ambos os resultados (Formulação semi-empírica e análise pelo programa) podem ser, dentro do nível esperado de incerteza, con-

siderados satisfatórios e conseqüentemente representativos. Assim, para a vibração vertical, espera-se substancial contribuição dos sétimo e oitavo harmônicos (respectivamente, seis e sete nós modais) na resposta do sistema, enquanto, para a vibração longitudinal assumem importância os dois primeiros modos com deformação (um e dois nós modais).

IV.3.1 *Frequências e modos naturais*

Nas Figuras IV.6 e IV.7 estão desenhados os modos (ortonormalizados em relação à matriz de massa), respectivamente para vibração vertical e longitudinal, obtidos pelo programa. As seguintes observações são de importância:

- nota-se que os modos de corpo rígido não apresentam deformação, sendo nulas as correspondentes frequências naturais.
- os máximos deslocamentos modais em todos os modos, ocorrem na posição do nó 31, assim, podemos esperar que as maiores amplitudes de vibração, para qualquer excitação, ocorram na proa.
- as curvas foram levantadas considerando, apenas, deslocamentos lineares, sendo os pontos ligados por segmentos de reta. No caso da vibração vertical obter-se-ia melhores curvas se tomassemos, também, os deslocamentos angulares fornecidos pelo programa, traçando curvas com derivadas contínuas. No entanto, julgamos mais útil o procedimento adotado já que com ele podemos visualizar, comparativamente, o nível de precisão em cada modo obtido pela análise do programa segundo o modelo da Figura IV.5. Com esse propósito nota-se, então, que o formato das curvas torna-se menos aceitável à medida que aumenta a ordem, perdendo-se precisão.

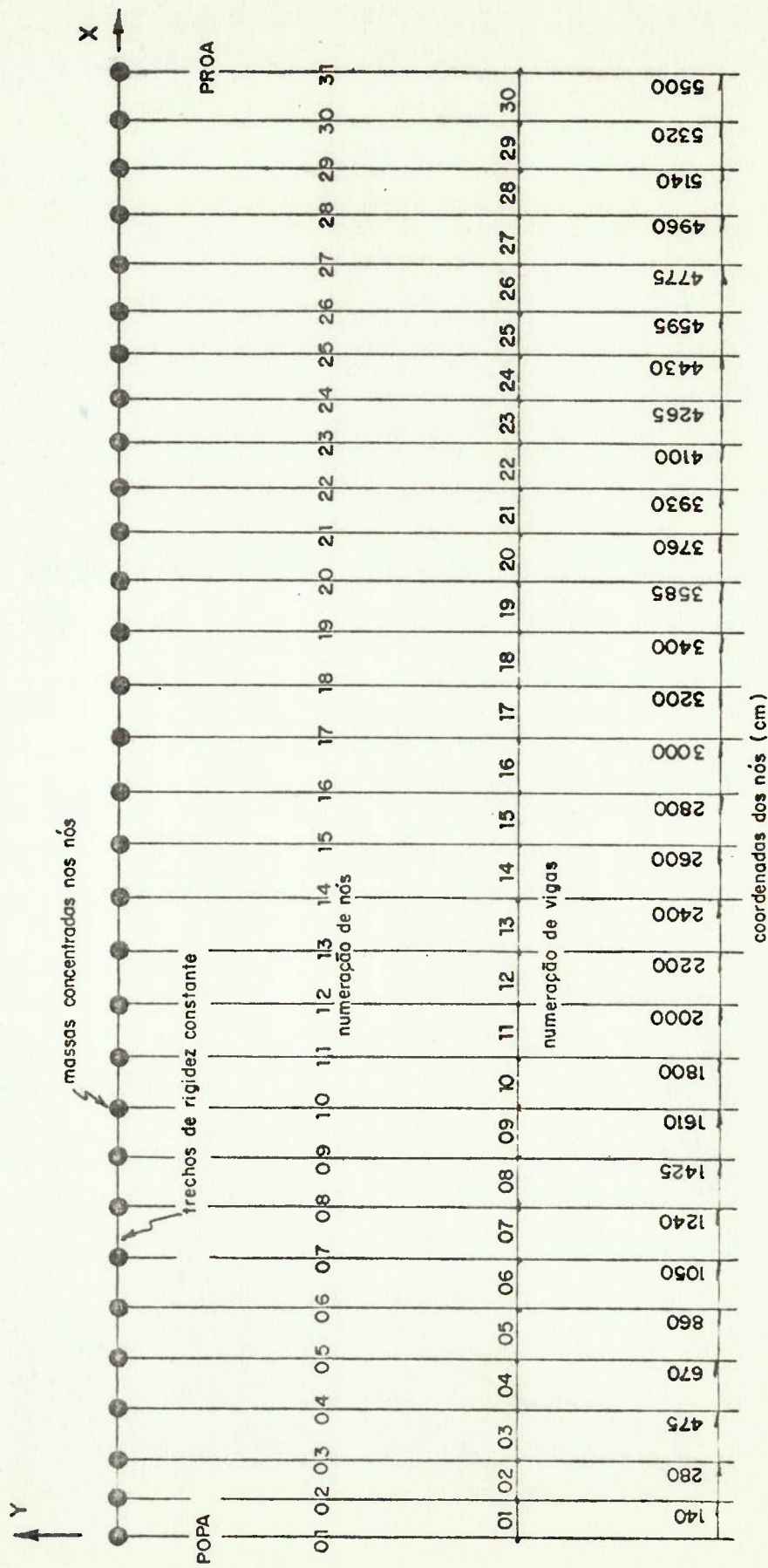


FIG. IV. 5 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO

NAVIO PATRULHA RÁPIDO

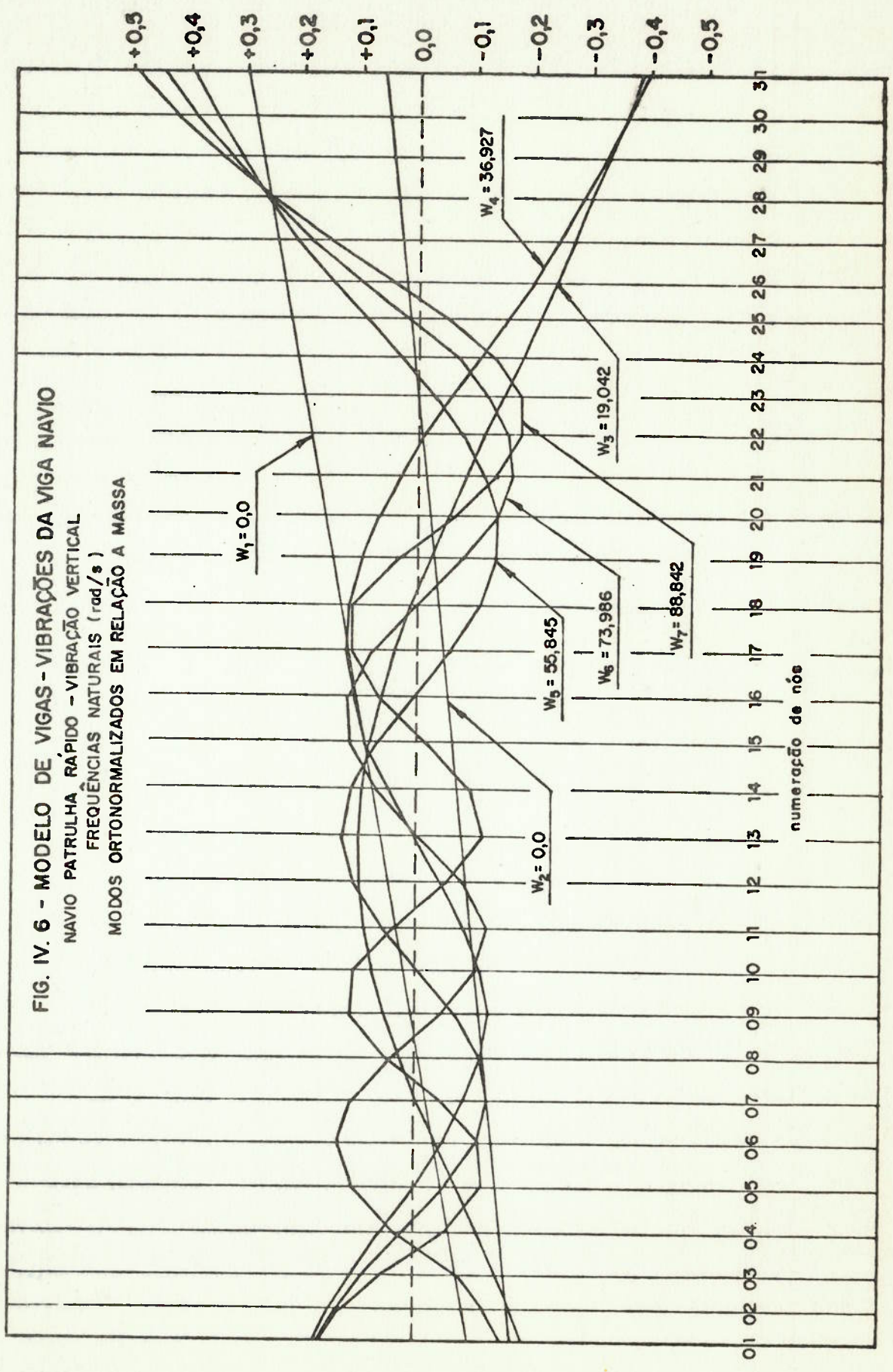
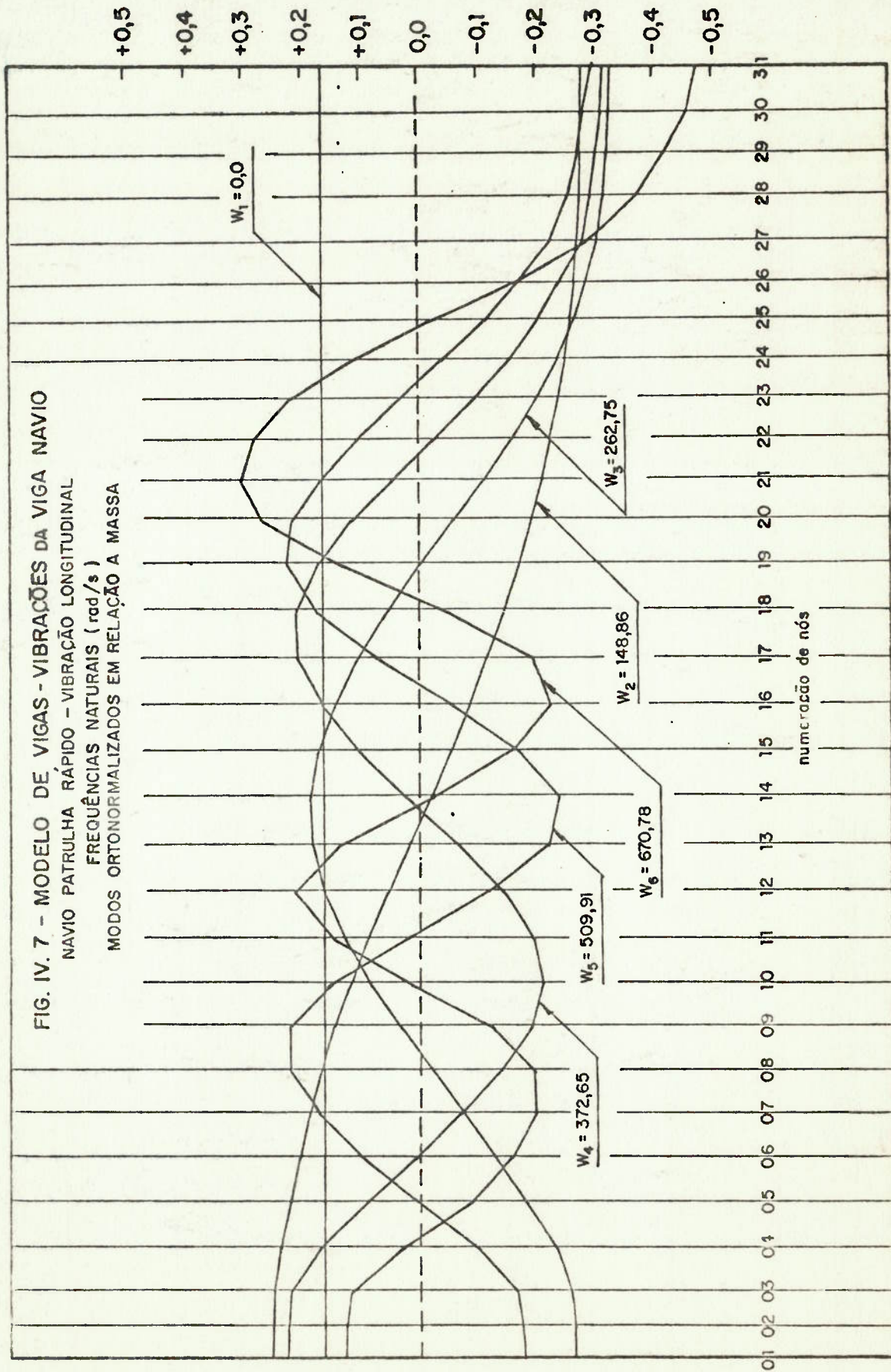


FIG. IV. 7 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO - VIBRAÇÃO LONGITUDINAL
 FREQUÊNCIAS NATURAIS (rad/s)
 MODOS ORTONORMALIZADOS EM RELAÇÃO A MASSA



IV.3.2 Resposta à excitação do empuxo

Na análise da resposta do sistema discretizado, pelo programa, foram computados os dez primeiros modos (método superposição modal), excluindo os modos de corpo rígido pelos motivos expostos no Capítulo II. Nas Figuras IV.8, IV.9 e IV.10 apresentamos as respostas em deslocamento, para vibração vertical e longitudinal, nos instantes iniciais quando a influência do transiente não é irrelevante (como o amortecimento é baixo, aproximadamente 5%, não o consideramos no cálculo para os instantes iniciais).

Tanto para a vibração vertical como para a longitudinal o modo de maior influência na resposta foi o terceiro (dois nós modais), como demonstra o esquema na Figura IV.8. Assim, a deformação do eixo neutro da viga navio (e sua variação no tempo) apresenta como característica predominante a forma e o período (pseudo-período) próximos aos do terceiro modo.

Para a vibração vertical (Figura IV.9) nota-se que houve significativa influência do sétimo modo (seis nós modais) na resposta, devido à proximidade de frequência de excitação e sétima frequência natural.

No caso da vibração longitudinal devemos considerar também, a maneira pela qual os esforços são aplicados. A magnitude da resposta modal é proporcional à magnitude do esforço generalizado em cada modo, assim, como o empuxo foi aplicado nos nós 11 e 16 do modelo, (em parcelas iguais e com mesma fase inicial) o esforço generalizado correspondente a modos com amplitudes, nas posições dos referidos nós, aproximadamente simétricas (iguais em módulo e de sinais contrários)

será de pequena magnitude e como consequência disso a resposta modal igualmente o será. Portanto, considerando-se apenas os modos da Figura IV.7, torna-se evidente a predominância do terceiro modo, e a irrelevância dos demais. Na Figura IV.10, além da influência do terceiro modo, nota-se, também, a contribuição do décimo modo decorrente da forma pela qual foram aplicadas as parcelas do empuxo.

A parcela da resposta total do sistema que vibra com a frequência de excitação pode ser equacionada facilmente se considerarmos a somatória das respostas permanentes correspondentes a cada modo. Assim, pela aplicação das hipóteses do método de superposição modal no presente caso, chegamos a:

$$(IV.14) \quad d_j(t) = \frac{a}{\bar{w}^2} \cdot \left[\sum_{i=3}^{10} \frac{\psi_{ij} \cdot \phi_i^T \cdot \bar{P}}{(1/\beta_i^2 - 1)} \right] \cdot \text{sen } \bar{w}t + \\ + b \cdot \left[\sum_{i=3}^{10} \frac{\psi_{ij} \cdot \phi_i^T \cdot \bar{P}}{w_i^2} \right]$$

onde

$d_j(t)$ - deslocamento no j -ésimo nó do modelo.

ψ_{ij} - amplitude do i -ésimo modo na posição do j -ésimo nó

ϕ_i - i -ésimo modo

\bar{P} - como definido em II.4.5

e, ainda, para vibração vertical

$$a = 0,480(x9,8 \text{ t.m/s}^2); \quad b = 9,590(x9,8 \text{ t.m/s}^2); \quad \bar{w} = 92,97 \text{ rad/s}$$

para vibração longitudinal

$$a = 1,025 \text{ (x}9,8 \text{ t.m/s}^2\text{)}; b=20,525 \text{ (x}9,8\text{t.m/s}^2\text{)}; \bar{\omega} = 185,93 \text{ rad/s}$$

Então, como os valores de modos e frequências naturais fornecidos pelo programa substituídos em (IV.14), resulta:

- para vibração vertical

$$(IV.15) \quad d_{11}(t) \cong [-1,126 \times 10^{-5} + 3,635 \times 10^{-8} \cdot \text{sen}(92,97t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

$$d_{13}(t) \cong [1,244 \times 10^{-5} - 2,923 \times 10^{-7} \cdot \text{sen}(92,97t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

$$d_{31}(t) \cong [-2,558 \times 10^{-5} + 2,087 \times 10^{-6} \cdot \text{sen}(92,97t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

- para vibração longitudinal

$$(IV.16) \quad d_{11}(t) \cong [-2,131 \times 10^{-5} - 2,266 \times 10^{-6} \cdot \text{sen}(185,93t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

$$d_{15}(t) \cong [1,540 \times 10^{-5} - 1,350 \times 10^{-6} \cdot \text{sen}(185,93t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

$$d_{31}(t) \cong [-2,665 \times 10^{-5} - 2,408 \times 10^{-6} \cdot \text{sen}(185,93t)] \cdot 9,8 \quad (m)$$

As equações (IV.15) e (IV.16) são as respostas permanentes do sistema, na popa, meia nau e proa, para a vibração vertical e longitudinal, respectivamente. Nos instantes iniciais a parcela oscilatória do movimento permanente é substancialmente menor do que as parcelas do movimento tran-

sitório, de modo que sua influência na resposta é irrelevante; como decorrência disso os valores máximos de deslocamento, velocidade e aceleração ocorrem nos instantes iniciais do movimento, diminuindo progressivamente até os limites da resposta permanente pela dissipação do transiente (embora o amortecimento seja baixo, e por isso não tenha sido considerado nos cálculos, vale a afirmativa).

IV.3.3 Conclusões

Limites permissíveis

A análise dos resultados deve ser feita considerando os seguintes aspectos, |2|, :

- (1) Limite permissível sob o ponto de vista da sensibilidade humana. Aceleração máxima permissível como função do tempo de exposição.
- (2) Limite permissível sob o ponto de vista de fratura por fadiga. A experiência tem demonstrado que o estudo desse aspecto apresenta importância quando do estudo de vibrações de natureza local, |2|.
- (3) Limite permissível sob o ponto de vista da performance de máquinas e instrumentos. Valendo a mesma observação do aspecto (2).

Portanto, no presente caso, preocupar-nos-emos em verificar as máximas acelerações tendo em vista o limite de exposição humana. No entanto, um outro aspecto de importância e de

natureza estrutural deve ser considerado; trata-se da verificação das tensões primárias na viga navio resultantes do movimento oscilatório que se somarão às tensões primárias do projeto estático.

Aproximações para os valores máximos das acelerações nos instantes iniciais podem ser obtidas tomando o pseudo-período (Figuras IV.9 e IV.10) e o valor máximo (em módulo) do deslocamento (excluído o valor médio) em cada nó, assim temos:

- vibração vertical, máximas acelerações

$$(IV.17) \quad \text{nó 1 (popa)} \quad a_1 \cong (3,80-1,13) \cdot 9,8 \times 10^{-5} \cdot (19)^2 \cong 9,5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{nó 13 (meia nau)} \quad a_{13} \cong (2,30-1,24) \cdot 9,8 \times 10^{-5} \cdot (19)^2 \cong 3,8 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$\text{nó 31 (proa)} \quad a_{31} \cong (6,80-2,56) \cdot 9,8 \times 10^{-5} \cdot (19)^2 \cong 15,0 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

- vibração longitudinal, máximas acelerações:

$$(IV.18) \quad \text{nó 31 (proa)} \quad a_{31} \cong (5,60-2,56) \cdot 9,8 \times 10^{-5} \cdot (263)^2 \cong 20,6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{nó 15 (meia nau)} \quad a_{15} \cong (3,20-1,54) \cdot 9,8 \times 10^{-5} \cdot (263)^2 \cong 11,3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{nó 1 (popa)} \quad a_1 \cong a_{31} \cong 20,6 \text{ m/s}^2$$

As acelerações máximas de (IV.17) e (IV.18) devem ser entendidas como representativas do comportamento vibratório do navio nos instantes iniciais do movimento sob a ação do empuxo e sua aceitabilidade definida considerando-se, também, o intervalo de tempo (tempo de exposição) durante o qual tais

picos ocorrerão.

Segundo a norma ISO/SC4 ("International Standard Organization/sub-committee 4: Human Sensitivity") as acelerações máximas (IV.17) da vibração vertical estão sob níveis aceitáveis mesmo para tempo de exposição superior a 24 horas, enquanto (se considerarmos que o grau de amortecimento é da ordem de 5%) a ocorrência de tais picos de aceleração não ultrapassa 15 segundos. Para a vibração longitudinal, embora os picos de aceleração sejam elevados, a ocorrência não ultrapassa 1 segundo de modo que são aceitáveis.

No regime permanente, tanto para a vibração vertical como longitudinal, os picos de aceleração (as acelerações podem ser obtidas pela derivação dupla das equações (IV.15) e (IV.16)) não chegam a 10% da aceleração da gravidade, sendo portanto aceitáveis segundo a norma ISO/SC4.

As tensões primárias resultantes do movimento oscilatório têm como valor máximo (que ocorre nos instantes iniciais) aproximadamente 3% da tensão primária do projeto estático, sendo portanto aceitáveis.

Portanto, os resultados mostram que os efeitos da vibração da viga navio induzida pela ação do empuxo são irrelevantes e que não haverá substancial mudança, nesse aspecto, se não for mudada substancialmente a hipótese inicial referente à magnitude (5% do valor médio) dos esforços de excitação.

Por outro lado, as características vibratórias do casco como um todo indicam a importância dos efeitos de esforços aplicados na proa de modo que o estudo do "slaming" (batimento da roda de proa em caturro) como fonte de excitação deve ser considerado. Entretanto, (similar ao caso do estudo de vi

braços locais) tal estudo foge ao escopo deste trabalho por de
pende de capacidade de análise espectral ainda não implantada
e objeto de trabalho futuro.

FIG. IV. 8 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÕES DA VIGA
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO
 ESQUEMA DA VARIAÇÃO DE DEFORMAÇÕES AO LONGO DO TEMPO

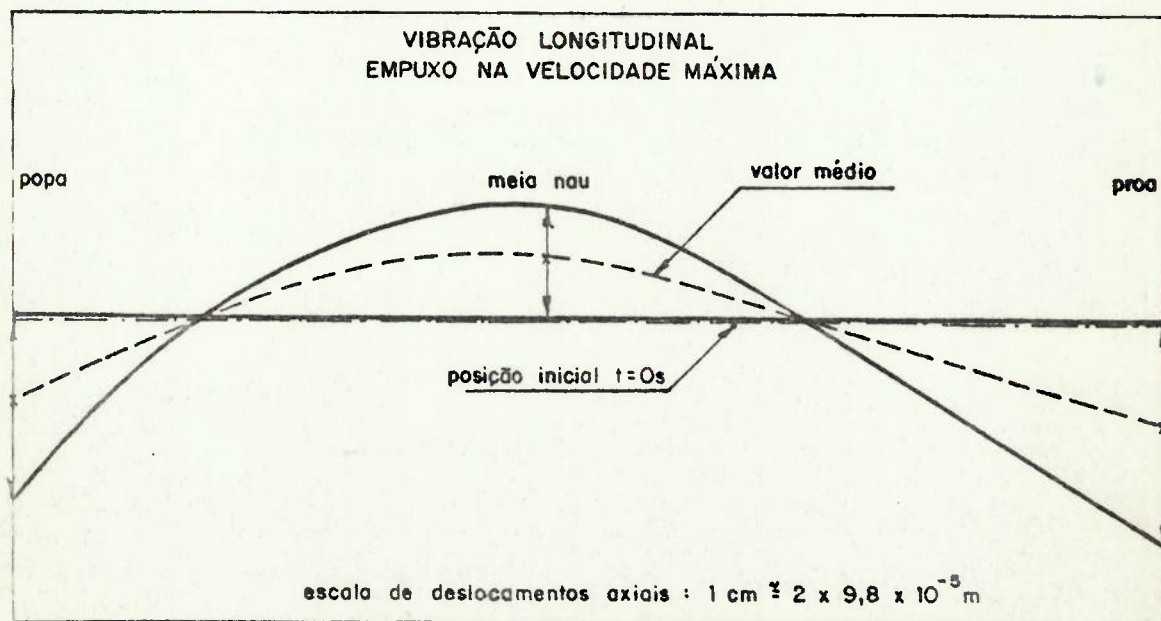
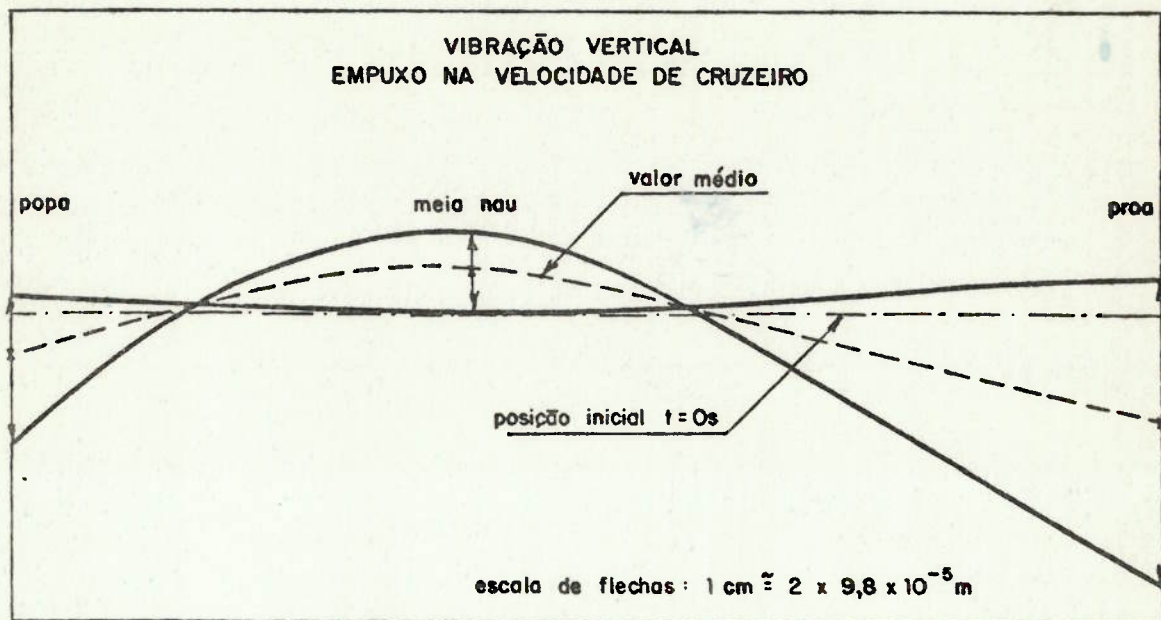


FIG. IV. 9 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO - VIBRAÇÃO VERTICAL
 HISTÓRICO DE RESPOSTA EM DESLOCAMENTO
 EXCITAÇÃO EMPUXO NA VELOCIDADE DE CRUZEIRO

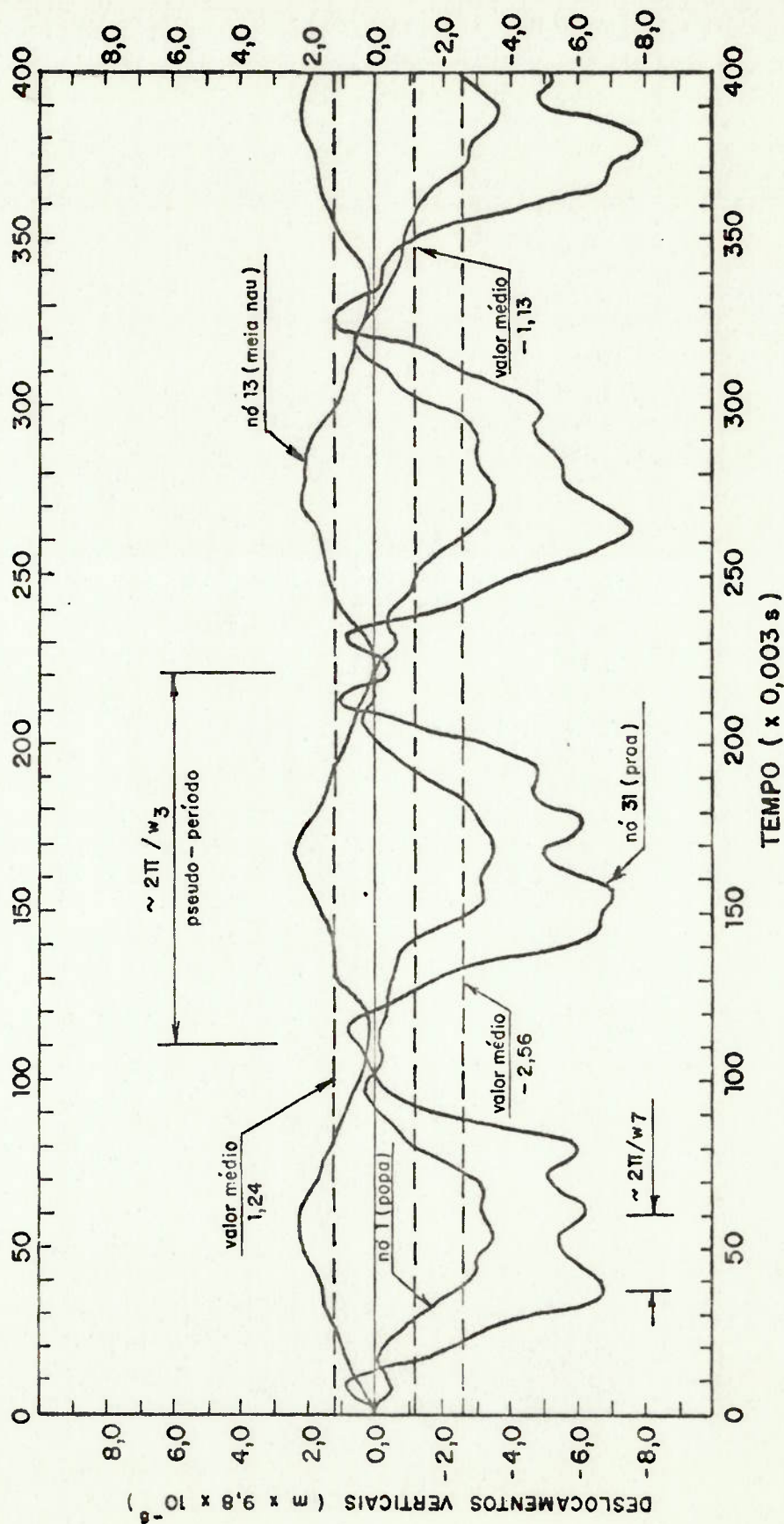
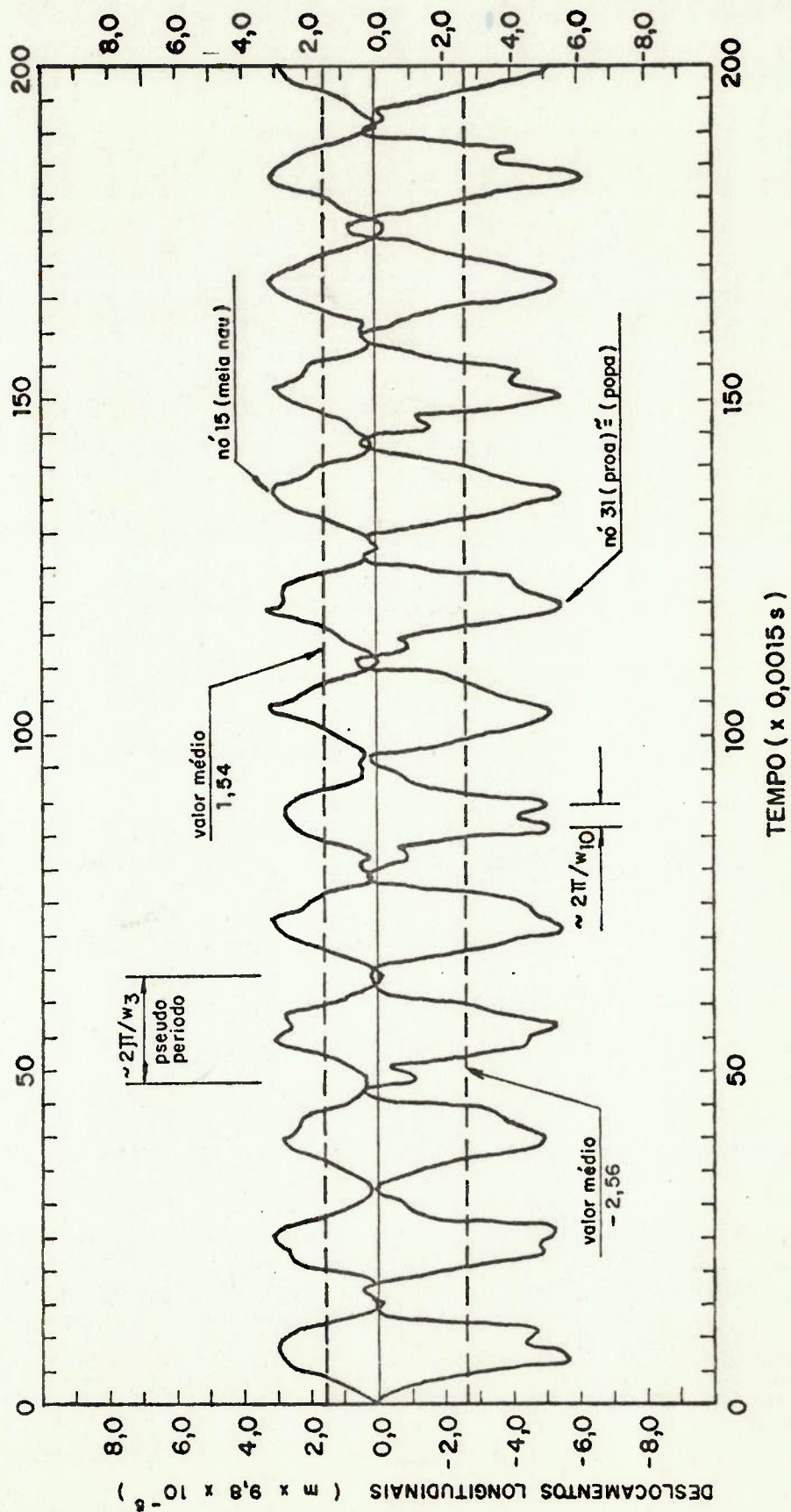


FIG. IV.10 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO
 NAVIO PATRULHA RÁPIDO - VIBRAÇÃO LONGITUDINAL
 HISTÓRICO DE RESPOSTA EM DESLOCAMENTO
 EXCITAÇÃO EMPUXO NA VELOCIDADE MÁXIMA



V. *Comentários gerais e recomendações para trabalhos futuros*

Com o intuito de relacionar os tópicos abordados no presente trabalho, que requerem comentários ou necessitam estudos adicionais, dividimos a apresentação deste capítulo nos itens que se seguem.

V.1 *Quanto ao estado da arte.*

O estudo racional de um determinado problema dinâmico recai, na maioria das vezes, em problemas matemáticos de difícil solução. Como consequência, às hipóteses empregadas no estabelecimento do modelo físico adicionam-se hipóteses necessárias na solução matemática; por esta razão só alguns casos simples possuem solução analítica que represente, com razoável fidedignidade, o comportamento vibratório do sistema. Como exemplo pode-se citar o caso de obtenção de solução analítica para a vibração da viga navio considerando-se os aspectos de importância (tais como: rigidez variável ao longo do vão), pois, embora seja possível estabelecer a equação diferencial representativa do fenômeno, esta não será passível de solução se hipóteses adicionais não forem formuladas e mesmo assim, somente através de um processo numérico chegar-se-á a algum resultado.

Do exposto no parágrafo anterior depreende-se a importância da análise matricial por elementos finitos que, partindo da discretização inicial do sistema, pode fornecer soluções satisfatórias tanto nos casos onde seria possível encontrar solução analítica aproximada, como nos que, por sua complexibilidade, não tem solução analítica; ampliando, desse mo-

do, a gama de problemas dinâmicos que podem ser resolvidos.

No estado atual da arte, especificamente dentro do campo de análise de vibrações em navios, existem muitas perguntas em aberto consumindo o esforço de muitos centros de pesquisa na procura de suas respostas. Não se atingiu, ainda, o ponto desejado de poder prever e evitar vibrações indesejáveis já na fase de projeto, tal que grande trabalho é dispendido na cura de vibrações indesejáveis com o navio já em operação.

Não é necessária nossa referência pessoal para reforçar a importância crescente do método dos elementos finitos, para isto basta verificar sua larga aceitação e emprego em todo o mundo. Apesar de exigir material técnico sofisticado (computadores de grande porte, sistemas gráficos, especialistas, etc), com conseqüente custo elevado, justifica-se plenamente o seu emprego tendo em vista que qualquer outro processo utilizado na solução de determinado problema dinâmico, razoavelmente complexo, envolverá recurso econômico, no mínimo, igualmente elevado. Deve-se, porém, considerar os seguintes aspectos quanto ao emprego do método:

- (1) é uma ferramenta sofisticada que deve ser operada por um especialista com o máximo de conhecimento possível a respeito das limitações que terá de enfrentar, de modo a poder utilizá-la com eficiência. A tendência inicial de um analista não familiarizado com o método é de promover uma discretização com grau de refinamento muitas vezes maior do que o necessário para a obtenção de resultados satisfatórios. Com esse procedimento estará ele, certamente, estabelecendo condições para uma boa análise em termos de resultados numéricos, porém,

terá grande probabilidade de esbarrar em problemas econômicos (custo do processamento) e de capacidade do computador que podem vir a impedir o andamento da referida análise. Um exemplo, que ilustra o comentário, pode ser observado na análise da barra do capítulo III deste trabalho, onde percebe-se a não necessidade de um refinamento superior ao do modelo de 13-massas, pois o modelo de 25-massas, apesar de custar 50% mais caro (em termos de tempo de processamento), não forneceu uma melhora sensível na qualidade dos resultados (vide Figura III.5).

- (2) a existência do método não reduz a importância da análise experimental, uma vez que esta última continuará sendo útil na avaliação dos efeitos das hipóteses introduzidas no modelo físico. É extremamente importante que se possa dispor do estudo experimental de modo a promover a calibragem dos modelos de análise; pois as discrepâncias entre resultados, de um e de outro, fornecem subsídios para a orientação de linhas de pesquisa que visem estabelecer requisitos com o intuito de minimizar os efeitos indesejáveis decorrentes das hipóteses assumidas, bem como da discretização do sistema.

V.2 *Quanto à capacidade atual do programa.*

Dispomos atualmente de um sistema de análise apto ao cálculo das respostas dinâmicas de sistemas discretizados sob a ação de excitações determinísticas. Adicionalmente, o potencial existente permite que se visualize alguns trabalhos futuros:

- (1) no cálculo da resposta por superposição modal a maior parcela do custo deve-se ao tempo gasto na

extração de autovalores. Se, a priori, são conhecidas formas modais aproximadas, o número de iterações do método, até a convergência, pode ser substancialmente reduzido com conseqüente redução no tempo de processamento. Por outro lado, no cálculo específico da resposta (se já são conhecidos os modos e frequências naturais) o tempo de processamento consumido é irrelevante quando comparado ao tempo gasto no cálculo de autovalores e respectivos autovetores. Assim, os custos da análise podem ser substancialmente reduzidos caso se disponha de um sistema operacional capaz de armazenar resultados de execuções anteriores do programa, utilizando-os em novas execuções quer seja no cálculo de modos e frequências naturais (no caso de se alterar a discretização ou algumas propriedades da estrutura) quer seja no cálculo de respostas adicionais que completem os resultados anteriormente obtidos.

- (2) no estudo de determinados problemas estruturais dinâmicos pode apresentar interesse o estabelecimento de condições iniciais não homogêneas (não nulas). Então, para que esse tipo de problema possa ser enquadrado no rol dos analisáveis pelo programa, basta que se desenvolva o potencial já existente.
- (3) a natureza de determinados esforços de excitação indica que a análise vibratória do sistema será mais eficiente se for encaminhada considerando o caráter aleatório (não determinístico) desses mesmos esforços (caso da análise de vibrações decorrentes do movimento do navio em mar irregular). Então, é interessante que se disponha de um sistema de programas visando a análise espectral no estudo de vibrações aleatórias. Com tal finalidade dois programas devem compor o sistema de análise: o primeiro que se encarregaria da determinação das propriedades dos espectros de sollicitação e

dos esforços internos na estrutura devido aos movimentos de corpo rígido e o segundo que a partir do referido espectro de solicitação determine os esforços internos devidos às deformações, compondo os resultados com os anteriores e tendo como saída o espectro de resposta. Atualmente o N.D.P.N. (Núcleo de Desenvolvimento e Pesquisa do Navio) dispõe de potencial que permite a implantação desse sistema através dos programas, já implantados, SEAKEEPING e SAP-IV.

V.3 *Quanto ao estudo de vibrações da viga navio.*

A primeira tarefa do analista numa análise do comportamento vibratório de uma determinada estrutura consiste na avaliação das propriedades do sistema que tenham relevância para a referida análise. Essa avaliação, a partir das características geométricas e de arranjo do sistema, deve ser feita considerando-se, também, as limitações do modelo matemático que se irá utilizar. Assim, assumem importância: a experiência obtida em análises de estruturas semelhantes; os métodos que serão utilizados na avaliação das referidas propriedades.

No estudo de vibrações da viga navio é interessante que estabeleçamos as seguintes considerações:

- (1) o cálculo de massas adicionais, até a presente data, tem sido feito pelo emprego de técnicas que, quase sempre, apresentam resultados não inteiramente satisfatórios. Como o parâmetro massa é extremamente importante numa análise de vibrações e a massa adicional é grande parcela da massa total (na vibração vertical da viga navio a massa adicional chega a 40% da massa total, sendo ainda maior para a vibração horizontal), um cálculo não satisfatório de massa adicional pode comprometer os resultados da análise. Atual

mente, pelo menos três procedimentos distintos tem sido empregados com o intuito de contornar o problema:

- comparação dos resultados obtidos na análise com resultados experimentais, estabelecendo coeficientes de correção de modo a tornar mais exato o estudo do comportamento vibratório para estruturas com formas geométricas semelhantes.
- refinamento da teoria para cálculo de massas adicionais, considerando-se, também, o efeito do escoamento tri-dimensional da água pelas linhas do casco, e tomando-se as formas exatas sob o plano de flutuação (no método de Lewis, empregado no estudo do capítulo IV deste trabalho, as formas das secções transversais foram idealizadas à semelhança das formas propostas por Lewis, e não foi considerado o efeito do escoamento tri-dimensional).
- discretizar, incluindo no modelo de análise, uma região do líquido em torno do navio por malha de elementos finitos. Desse modo torna-se o modelo capaz de desenvolver por si só os efeitos do escoamento da água; sem que seja necessário o emprego do conceito de massa adicional.

O primeiro procedimento procura avaliar o erro cometido no cálculo da massa adicional, apresentando, porém, o inconveniente de condicionar o estudo à necessidade da análise experimental ou aos resultados do estudo em navios semelhantes. No segundo procura-se minimizar as incertezas cometidas sem contudo eliminá-las, de modo que, dependendo do caso, pode persistir o comprometimento dos resultados. Finalmente, o terceiro procedimento é o que nos parece mais aceitável por levar a um menor grau de simplificação, contudo, ainda hoje, é

objeto de pesquisa em todo o mundo sendo seus resultados de acesso restrito às entidades patrocinadoras da pesquisa; acreditamos, porém, que em futuro próximo seja possível desenvolvê-lo e implantá-lo.

(2) A importância da inclusão da rigidez à deformação por cisalhamento na flexão na análise de vibrações da viga navio é demonstrada nas referências [9], [16] e [19]. Contudo podemos estabelecer restrições no cálculo dos fatores para inclusão do referido efeito:

- o método empregado na obtenção da formulação baseia-se no cálculo de energia de deformação segundo a teoria simples de viga, de modo que, como é sábio, pode-se obter resultados que se afastam substancialmente da realidade. Assim, sem que se faça uma comparação entre resultados teóricos e obtidos experimentalmente, neste particular aspecto, não é possível estabelecer suas limitações. Entretanto, como a formulação desenvolvida tem sido empregada sem ser apontada como responsável pela introdução de erros inaceitáveis nos resultados, acreditamos ser desnecessário um aprofundamento teórico mais acentuado antes que outros aspectos de maior importância tenham soluções satisfatórias.
- o cálculo numérico do fator de cisalhamento apresenta, também, o inconveniente de se tornar laborioso quando se trata de secções transversais de for-

mas complexas (como no caso das secções transversais da viga navio) tal que se tem apelado para simplificações de modo a permitir a utilização de gráficos, [9], levantados para secções típicas com formas semelhantes às reais; fato que introduz mais um fator de incerteza. Esse problema pode ser contornado pela elaboração de uma rotina em programa de computador que se encarregue dos cálculos formulados segundo as hipóteses da teoria de modo que seja viável a obtenção do fator de cisalhamento considerando-se a geometria real da secção.

- (3) Como já mencionado no capítulo I, outro aspecto de real importância diz respeito ao acoplamento de vibrações. Para o caso real de excitação da viga navio, está vibrará em movimentos resultantes da composição de modos verticais, horizontais e de torção, assim, a hipótese de se considerar desacopladas essas vibrações justifica-se, tão somente, pelas facilidades resultantes no tratamento do problema. O efeito da referida hipótese (na qualidade dos resultados) deixa de ser irrelevante quando entra em jôgo a flexo-torção no caso de vibrações no plano horizontal, de modo que a não coincidência entre centro de esforços cortantes e centro de gravidade leva ao comprometimento dos resultados obtidos à luz da hipótese de desacoplamento. Então, pa-

ra a análise por modelos unidimensionais de elementos de viga (como o da Figura IV.5) é necessário que tais elementos sejam implementados de modo a tornar possível a idealização da flexo-torção. Atualmente, já dispomos de elemento de viga assim implementado (elemento de viga excêntrica, [24]), já suficientemente testado para análise estática, restando sua adaptação para a análise de vibrações da viga navio.

No capítulo IV apresentamos um estudo bastante simplificado de vibrações da viga navio que não teve a intenção de esgotar o assunto; representando, tão somente, um exemplo de aplicação do método exposto no capítulo II.

VI. *Referências bibliográficas*

- | 1 | BRINATI, H.L. Análise dos métodos de cálculo de frequências naturais para vibração vertical do navio. /Dissertação de Mestrado/. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1970.
- | 2 | OCHI, Y.. Notas de aula do curso "PNV-711 Vibrações". São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1977.
- | 3 | VENANCIO Fº, F.. Notas de aula do curso "PEF-768 Dinâmica das estruturas" São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1976.
- | 4 | WILSON, E.L. & BATHE; K.J.. Numerical methods in finite analysis. 1ed., Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall, 1976.
- | 5 | CLOUGH, R.W. & PENZIEWN, J.. Dynamics of structures. 1ed., New York, Mc.Graw-Hill, 1975.
- | 6 | LEWIS, F.M.. Hull vibration of ships - Principles of naval Architecture. S.N.A.M.E. New York, 75, cap.10, 1967.
- | 7 | TODD, F.H. Ship hull vibration. 1ed. Belfast, E.Arnold, 1961
- | 8 | KUMAI, T... On the estimation of natural frequencies of vertical vibrations of ships. Reports of Research Institute for Applied Mechanics, 16 (54), 1968.

- | 9 | KUMAI, T.. Shearing vibration of ships. Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, 4(15), 1956.
- | 10 | KUMAI, T.. Added mass moment of inertia induced by torsional vibrations of ships. Reports of Research Institute of Applied Mechanics, Kyushu University, 7(28), 1959.
- | 11 | Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Naval Architecture College of Engineering, University of California. Berkeley. Report 2375, 1967.
- | 12 | ZIENKIEWSCZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2ed. London, Mc-Graw-Hill, 1971.
- | 13 | GERE, J.M & WEAVER Jr., W.. Analysis of framed structures. 1ed., Princeton, New Jersey, 1965.
- | 14 | WILSON, E.L. et alii. SAP-IV - A structural analysis program for static and dynamics response of linear systems. Berkeley, University of California, 1974.
- | 15 | DIAS, C.A.N. & SALVAGNI, R.B., Métodos para cálculo de frequências naturais e modos de vibração de sistemas estruturais. /Seminário apresentado no curso "PEF-768 Dinâmica das Estruturas/. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1977.
- | 16 | TRAILL-NASH, R.W. & COLLAR, A.R.. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. Quar. Journ. Mech. and Applied Math. Bristol, 7, Pt2, 1951.

- | 17 | KUMAI, T., On the three-dimensional entrained water in vibration of Lewis' section cylinder with finite length Transactions of W.J.S.N.A, Japão (50), 1975.
- | 18 | DEN HERTOOG, J.P. Vibrações nos sistemas mecânicos. Tradução de Amorelli, M.O.C., Editora da USP, McGraw-Hill, 1956.
- | 19 | TIMOSHENKO, S & YOUNG, D.H. & WEAVER, Jr., W.. Vibrations Problems in Engineering. 4 ed. JOHN WILEY & SONS, New York, 1972.
- | 20 | HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Dynamics of Structures . New Jersey, Prentice-Hall, 1964.
- | 21 | FUSCO, P.B.. Tensões nos elementos construtivos do navio. /Apostila do Deptº de Engenharia Naval/ EPUSP.
- | 22 | RICARDO, O.G.S.. Alguns problemas de análise de tensões para estruturas de chapas finas. /Apostila do Departamento de Engenharia Naval/. EPUSP.
- | 23 | HILDEBRAND, F.B. Introduction to numerical analysis. 1ed. New York, Mc Graw-Hill, 1956.
- | 24 | BUELTA, M.A.M.. Um modelo de placas e vigas excêntricas para a análise de chapeamentos reforçados. /Dissertação de Mestrado/. EPUSP, 1977.

VII. *Apêndice. O programa modificado*

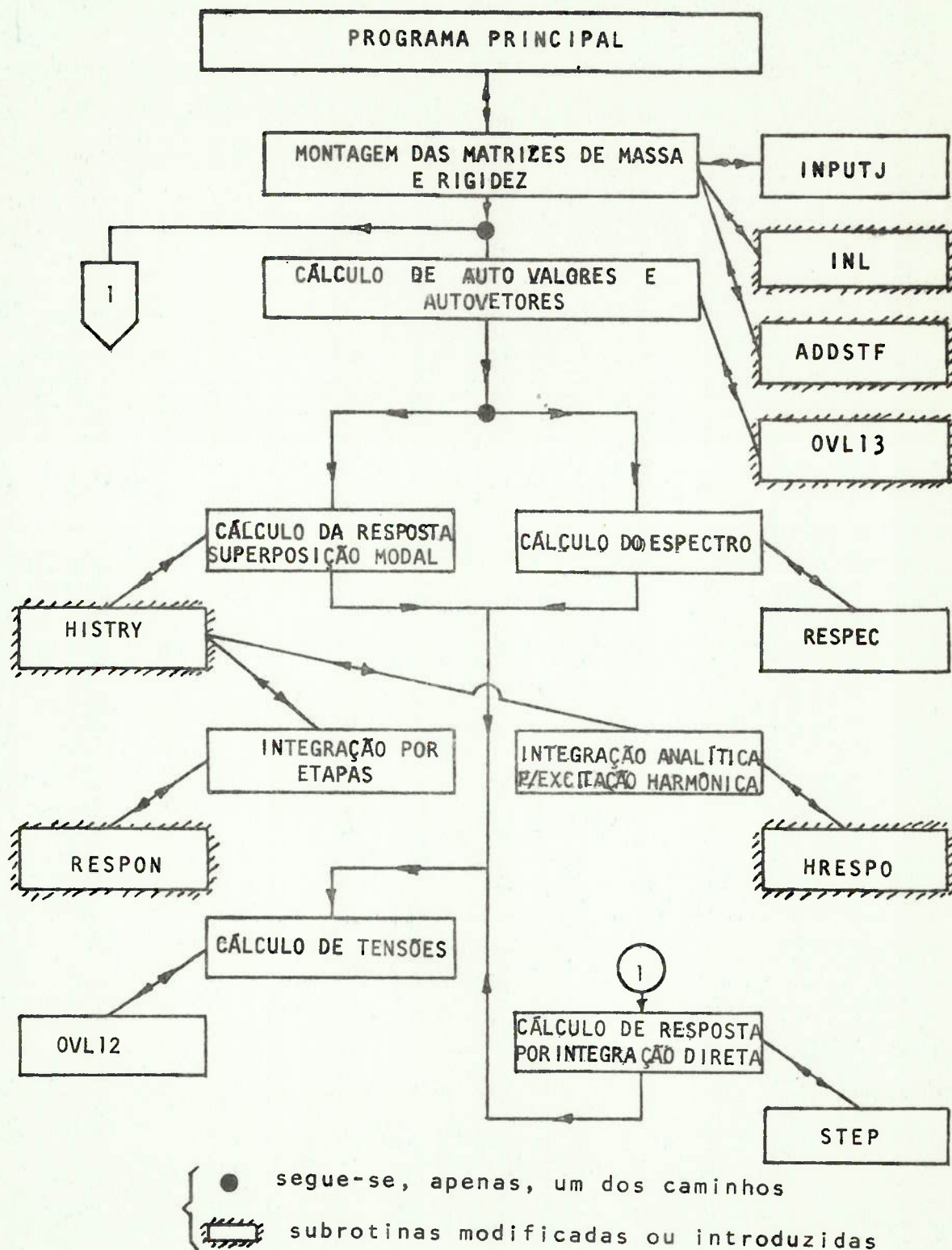
O programa é formado, aproximadamente, por 16.000 comandos FORTRAN de modo que é impraticável sua apresentação completa. Restringir-nos-emos, neste capítulo, à apresentação dos comandos por nós introduzidos no programa SAP-IV original, e que tiveram a finalidade de adaptá-lo para a análise dinâmica de corpos livres, conforme foi exposto neste trabalho.

Na Figura VII.1 encontra-se o diagrama de blocos simplificado que esquematiza as opções possíveis e a sequência de chamadas de sub-rotinas numa análise pelo programa. No referido diagrama faz-se referência a nomes de sub-rotinas chaves, responsáveis pelo comando específico de cada tarefa.

No ítem VII.1 apresentamos os resultados (listagem de saída) fornecidos pelo programa quando da análise da barra livre do capítulo III (modelo - 4 massas).

Finalizando, no ítem VII.2 relacionamos os comandos significativos introduzidos no programa SAP-IV, como já mencionado no parágrafo primeiro.

FIGURA VII.1 - DIAGRAMA DE BLOCOS SIMPLIFICADO PROGRAMA SAP-IV MODIFICADO.



VII.1 - *Um exemplo de listagem de saída de resultados*

Apresentamos a seguir a listagem de saída, fornecida pelo programa modificado, na análise da barra do capítulo III (modelo 4-massas). Para um perfeito entendimento do que se segue recomendamos que se tenha à mão a referência [14] e que se consulte o capítulo III deste trabalho.

BARRA * 4 MASSAS * INTEGRACAO ANALITICA

C O N T R O L I N F O R M A T I O N

NUMBER OF NODAL POINTS = 5
 NUMBER OF ELEMENT TYPES = 1
 NUMBER OF LOAD CASES = 0
 NUMBER OF FREQUENCIES = 2
 ANALYSIS CODE (NDYN) = 2
 EQ.0, STATIC
 EQ.1, MODAL EXTRACTION
 EQ.2, FORCED RESPONSE
 EQ.3, RESPONSE SPECTRUM
 EQ.4, DIRECT INTEGRATION
 SOLUTION MODE (MODEX) = 0
 EQ.0, EXECUTION
 EQ.1, DATA CHECK
 NUMBER OF SUBSPACE
 ITERATION VECTORS (NAD) = 4
 EQUATIONS PER BLOCK = 2
 TAPE10 SAVE FLAG (N10SV) = 0

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1

NODAL POINT COORDINATES

X	Y	Z
0.000	0.000	0.000
6.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000

GENERATED NUDAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION			COPIES			NODAL POINT COORDINATES		
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ	X	Y	Z
1	0	1	1	1	1	1	0.000	0.000	0.000
2	0	1	1	1	1	1	2.000	0.000	0.000
3	0	1	1	1	1	1	4.000	0.000	0.000
4	0	1	1	1	1	1	6.000	0.000	0.000
5	1	1	1	1	1	1	0.000	1.000	0.000

EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	1	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0
4	4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

3 / 0 B E A M E L E M E N T S

NUMBER OF BEAMS = 3
 NUMBER OF GEOMETRIC PROPERTY SETS = 1
 NUMBER OF FIXED END FORCE SETS = 0
 NUMBER OF MATERIALS = 1

MATERIAL PROPERTIES

MATERIAL NUMBER	YOUNG'S MODULUS	POISSON'S RATIO	MASS DENSITY	WEIGHT DENSITY
1	.6084E+05	0.3000	0.	0.

BEAM GEOMETRIC PROPERTIES

SECTION NUMBER	AXIAL AREA A(1)	SHEAR AREA A(2)	SHEAR AREA A(3)	TORSION J(1)	INERTIA I(2)	INERTIA I(3)
1	.1000E+01	0.	0.	.1000E+01	.1000E+01	.1000E+01

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

	A	B	C	D
X-DIR	0.	0.	0.	0.
Y-DIR	0.	0.	0.	0.
Z-DIR	0.	0.	0.	0.

E I G E N V A L U E A N A L Y S I S

SUBSPACE ITERATION SOLUTION IS CARRIED OUT

SOLUTION IS SOUGHT FOR FOLLOWING EIGENPROBLEM

CONTROL INFORMATION

CONSTANTE(COBETA) PARA
 ALTERACAO(PROPORCIONAL A MASSA)
 NA DIAGONAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ = .7605E+05

FLAG FOR ADDITIONAL PRINTING = 1
 EQ.0, SUPPRESS
 EQ.1, PRINT

STURM SEQUENCE CHECK FLAG (*) = 0
 EQ.0, PERFORM CHECK
 EQ.1, PASS

MAXIMUM ITERATION CYCLES (*) = 30

CONVERGENCE TOLERANCE (*) = .1000E-04

CUT-OFF FREQUENCY (CPS) = .1000E+09

NUMBER OF STARTING ITERATION
 VECTORS TO BE READ FROM
 TAPE10 (*) = 0

NUMBER OF EQUATIONS = 4
 HALF BANDWIDTH OF STIFFNESS MATRIX = 2
 NUMBER OF EQUATION BLOCKS = 2
 NUMBER OF EQUATIONS PER BLOCK = 2
 NUMBER OF EIGENVALUES REQUIRED = 2

PRINT OF VECTOR IEQ

1 2 3

TIME FOR GENERATION OF INITIAL TR-VECTORS 0.33

(*) APPLICABLE TO SUBSPACE
 ITERATION SOLUTIONS ONLY

TIME FOR STIFFNESS FACTORIZATION 0.13

ITERATION NUMBER (*SSPACE***) = 1

MATRIX AR
 .3156E-04 .1315E-04 .1315E-04 .1315E-04
 .1315E-04 .1899E-04 .5114E-05 .1461E-05
 .1315E-04 .5114E-05 .1023E-04 .2922E-05
 .1315E-04 .1461E-05 .2922E-05 .1023E-04

MATRIX BR
 .4150E-09 .1729E-09 .1729E-09 .1729E-09
 .1729E-09 .1071E-09 .8453E-10 .5650E-10
 .1729E-09 .8453E-10 .1018E-09 .5379E-10
 .1729E-09 .5650E-10 .5379E-10 .1018E-09

AR AND BR AFTER JACOBI DIAGONALIZATION

MATRIX AR
 .3156E-04 -.1985E-37 -.6390E-29 0.
 -.1985E-37 .1573E-04 -.2995E-26 .8440E-27
 -.6390E-29 -.2995E-26 .1713E-04 -.2658E-18
 0. .8440E-27 -.2658E-18 .4121E-05

MATRIX BR
 .4150E-09 .1423E-42 -.1245E-34 0.
 .1423E-42 .1379E-04 .2652E-32 .4439E-32
 -.1245E-34 .2652E-32 .6379E-10 -.5179E-24
 0. .4439E-32 -.5179E-24 .1806E-10

RELATIVE TOLERANCE REACHED ON EIGENVALUES IS NOW
 .1000E+01 .1000E+01 .1000E+01 .1000E+01

TIME USED IN ITERATION STEP 1.45

TIME FOR EIGENVALUE SOLUTION 0.90

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 1

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1142E+06 .1901E+06 .2281E+06

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 2

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1141E+06 .1901E+06 .2281E+06

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 3

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1141E+06 .1901E+06 .2281E+06

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 4

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1141E+06 .1901E+06 .2281E+06

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 5

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1141E+06 .1901E+06 .2281E+06

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 6

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05 .1141E+06 .1901E+06 .2281E+06

TIME FOR JACOBI ITERATION 0.2167

ITERATION NUMBER (*SSPACEB*) = 3

MATRIX AR

.1315E-04	0.	-.1388E-16	-.1110E-15
0.	.8766E-05	.8327E-16	-.3469E-16
-.1388E-16	.8327E-16	.5260E-05	.2082E-16
-.1110E-15	-.3469E-16	.2082E-16	.4383E-05

MATRIX BR

.1729E-09	-.4235E-21	-.4235E-21	-.1059E-20
-.4235E-21	.7685E-10	.1006E-20	-.1059E-21
-.4235E-21	.1006E-20	.2766E-10	.5294E-22
-.1059E-20	-.1059E-21	.5294E-22	.1921E-10

AR AND BR AFTER JACOBI DIAGONALIZATION

MATRIX AR

.1315E-04	-.8458E-27	.2173E-27	.2822E-38
-.8458E-27	.8766E-05	.2148E-27	.1785E-38
.2173E-27	.2148E-27	.5260E-05	0.
.2822E-38	.1785E-38	0.	.4383E-05

MATRIX BR

.1729E-09	-.6948E-32	.5526E-33	.1294E-43
-.6948E-32	.7685E-10	.5463E-33	.4538E-44
.5526E-33	.5463E-33	.2766E-10	0.
.1294E-43	.4538E-44	0.	.1921E-10

RELATIVE TOLERANCE REACHED ON EIGENVALUES IS NOW

.1000E-04	.6667E-05	.4000E-05	.3333E-05
-----------	-----------	-----------	-----------

CONVERGENCE ACHIEVED IN *EIGSOL*

NUMBER OF EIGENVALUES = 2

RELATIVE TOLERANCE = .1000E-04

TIME FOR EIGENVALUE SOLN 0.67

TIME USED IN ITERN STEP 1.12

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 1

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 2

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 3

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 4

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 5

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = 6

CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE

.7605E+05	.1141E+06	.1901E+06	.2282E+06
-----------	-----------	-----------	-----------

TIME FOR JACOBI ITERATION 0.1667

WE SOLVED FOR THE FOLLOWING EIGENVALUES

.7605000000000E+05 .1140750000000E+06

UPPER BOUNDS ON EIGENVALUE CLUSTERS

.76810499999200E+05

NO OF EIGENVALUES IN EACH CLUSTER

1

NO OF EIGENVALUES LESS THAN UPPER BOUNDS

1

CHECK APPLIED AT SHIFT .76810499999200E+05

WE FOUND THE LOWEST 1 EIGENVALUES

TIME FOR STORM SEQUENCE CHECK 0.40

PRINT OF FREQUENCIES

MODE NUMBER	CIRCULAR FREQUENCY (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/MIN)	PERIOD (SEC)	TOLERANCE
1	.0	.0	.0	.10000E-04
2	.195000E+03	.186211E+04	.537024E-03	.666667E-05

PRINT OF EIGENVECTORS

N O D E D I S P L A C E M E N T S / R O T A T I O N S

NODE NUMBER	EIGEN-VECTOR	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
5	1	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	2	0.	0.	0.	0.	0.	0.
4	1	.64550E+00	0.	0.	0.	0.	0.
	2	-.91287E+00	0.	0.	0.	0.	0.
3	1	.64550E+00	0.	0.	0.	0.	0.
	2	-.45644E+00	0.	0.	0.	0.	0.
2	1	.64550E+00	0.	0.	0.	0.	0.
	2	.45644E+00	0.	0.	0.	0.	0.
1	1	.64550E+00	0.	0.	0.	0.	0.
	2	.91287E+00	0.	0.	0.	0.	0.

E I G E N S O L U T I O N T I M E L O G

EIGENSOLUTION = 4.77
 PRINTING = 0.42

F O R C E D R E S P O N S E A N A L Y S I S

C O N T R O L I N F O R M A T I O N

NUMBER OF TIME FUNCTIONS = 0
 GROUND MOTION INDICATOR = 0
 NUMBER OF HARMONIC FUNCTIONS = 1
 EQ.0, NONE
 EQ.1, GROUND INPUT
 NUMBER OF ARRIVAL TIMES = 1
 NUMBER OF TIME STEPS = 100
 OUTPUT PRINT INTERVAL = 1
 TIME STEP = 0.00250
 DAMPING FACTOR = 0.20000
 GE.0 ? APPLIED TO ALL OF NODES

E X C I T A C I O N E S H A R M O N I C A S

NO	GRAU	AMPLITUDE	FRECUENCIA	FASE	VALOR MEDIO
1	1	1.000E+01	2.513E+02	0.	0.

DISPLACEMENT TIME HISTORY

OUTPUT SET = 1

TIME	*NODE NUMBER* - (COMPONENT NUMBER)			
	1-(1)	2-(1)	3-(1)	4-(1)
0.00250	5.035E-06	2.518E-06	-2.518E-06	-5.035E-06
0.00500	3.486E-05	1.743E-05	-1.743E-05	-3.486E-05
0.00750	9.484E-05	4.742E-05	-4.742E-05	-9.484E-05
0.01000	1.666E-04	8.332E-05	-8.332E-05	-1.666E-04
0.01250	2.164E-04	1.082E-04	-1.082E-04	-2.164E-04
0.01500	2.111E-04	1.056E-04	-1.056E-04	-2.111E-04
0.01750	1.353E-04	6.766E-05	-6.766E-05	-1.353E-04
0.02000	1.490E-06	7.452E-07	-7.452E-07	-1.490E-06
0.02250	-1.515E-04	-7.574E-05	7.574E-05	1.515E-04
0.02500	-2.713E-04	-1.356E-04	1.356E-04	2.713E-04
0.02750	-3.120E-04	-1.500E-04	1.500E-04	3.120E-04
0.03000	-2.526E-04	-1.263E-04	1.263E-04	2.526E-04
0.03250	-1.076E-04	-5.378E-05	5.378E-05	1.076E-04
0.03500	7.713E-05	3.857E-05	-3.857E-05	-7.713E-05
0.03750	2.388E-04	1.194E-04	-1.194E-04	-2.388E-04
0.04000	3.207E-04	1.604E-04	-1.604E-04	-3.207E-04
0.04250	2.936E-04	1.468E-04	-1.468E-04	-2.936E-04
0.04500	1.662E-04	8.312E-05	-8.312E-05	-1.662E-04
0.04750	-1.624E-05	-8.120E-06	8.120E-06	1.624E-05
0.05000	-1.889E-04	-9.447E-05	9.447E-05	1.889E-04
0.05250	-2.906E-04	-1.453E-04	1.453E-04	2.906E-04
0.05500	-2.860E-04	-1.430E-04	1.430E-04	2.860E-04
0.05750	-1.788E-04	-8.941E-05	8.941E-05	1.788E-04
0.06000	-1.027E-05	-5.136E-06	5.136E-06	1.027E-05
0.06250	1.566E-04	7.829E-05	-7.829E-05	-1.566E-04
0.06500	2.603E-04	1.301E-04	-1.301E-04	-2.603E-04
0.06750	2.637E-04	1.319E-04	-1.319E-04	-2.637E-04
0.07000	1.679E-04	8.397E-05	-8.397E-05	-1.679E-04
0.07250	1.106E-05	5.529E-06	-5.529E-06	-1.106E-05
0.07500	-1.464E-04	-7.319E-05	7.319E-05	1.464E-04
0.07750	-2.445E-04	-1.222E-04	1.222E-04	2.445E-04
0.08000	-2.467E-04	-1.233E-04	1.233E-04	2.467E-04
0.08250	-1.535E-04	-7.673E-05	7.673E-05	1.535E-04
0.08500	-1.761E-06	-8.807E-07	8.807E-07	1.761E-06
0.08750	1.494E-04	7.472E-05	-7.472E-05	-1.494E-04
0.09000	2.417E-04	1.209E-04	-1.209E-04	-2.417E-04
0.09250	2.398E-04	1.199E-04	-1.199E-04	-2.398E-04
0.09500	1.446E-04	7.230E-05	-7.230E-05	-1.446E-04
0.09750	-6.864E-06	-3.432E-06	3.432E-06	6.864E-06
0.10000	-1.560E-04	-7.801E-05	7.801E-05	1.560E-04
0.10250	-2.453E-04	-1.226E-04	1.226E-04	2.453E-04
0.10500	-2.400E-04	-1.200E-04	1.200E-04	2.400E-04
0.10750	-1.421E-04	-7.105E-05	7.105E-05	1.421E-04
0.11000	1.108E-05	5.542E-06	-5.542E-06	-1.108E-05
0.11250	1.608E-04	8.039E-05	-8.039E-05	-1.608E-04

TIME	1-(1)	2-(1)	3-(1)	4-(1)
0.13750	1.023E-04	8.117E-05	-8.117E-05	-1.623E-04
0.14000	2.525E-04	1.202E-04	-1.262E-04	-2.525E-04
0.14250	2.464E-04	1.232E-04	-1.232E-04	-2.464E-04
0.14500	1.465E-04	7.324E-05	-7.324E-05	-1.465E-04
0.14750	-9.293E-06	-4.647E-06	4.647E-06	9.293E-06
0.15000	-1.615E-04	-8.075E-05	8.075E-05	1.615E-04
0.15250	-2.521E-04	-1.260E-04	1.260E-04	2.521E-04
0.15500	-2.465E-04	-1.233E-04	1.233E-04	2.465E-04
0.15750	-1.469E-04	-7.346E-05	7.346E-05	1.469E-04
0.16000	8.639E-06	4.319E-06	-4.319E-06	-8.639E-06
0.16250	1.608E-04	8.040E-05	-8.040E-05	-1.608E-04
0.16500	2.515E-04	1.258E-04	-1.258E-04	-2.515E-04
0.16750	2.462E-04	1.231E-04	-1.231E-04	-2.462E-04
0.17000	1.468E-04	7.342E-05	-7.342E-05	-1.468E-04
0.17250	-8.505E-06	-4.253E-06	4.253E-06	8.505E-06
0.17500	-1.605E-04	-8.026E-05	8.026E-05	1.605E-04
0.17750	-2.511E-04	-1.256E-04	1.256E-04	2.511E-04
0.18000	-2.458E-04	-1.229E-04	1.229E-04	2.458E-04
0.18250	-1.466E-04	-7.329E-05	7.329E-05	1.466E-04
0.18500	8.633E-06	4.316E-06	-4.316E-06	-8.633E-06
0.18750	1.605E-04	8.026E-05	-8.026E-05	-1.605E-04
0.19000	2.510E-04	1.255E-04	-1.255E-04	-2.510E-04
0.19250	2.456E-04	1.228E-04	-1.228E-04	-2.456E-04
0.19500	1.464E-04	7.319E-05	-7.319E-05	-1.464E-04
0.19750	-8.797E-06	-4.399E-06	4.399E-06	8.797E-06
0.20000	-1.606E-04	-8.031E-05	8.031E-05	1.606E-04
0.20250	-2.511E-04	-1.255E-04	1.255E-04	2.511E-04
0.20500	-2.456E-04	-1.228E-04	1.228E-04	2.456E-04
0.20750	-1.463E-04	-7.315E-05	7.315E-05	1.463E-04
0.21000	8.897E-06	4.448E-06	-4.448E-06	-8.897E-06
0.21250	1.607E-04	8.036E-05	-8.036E-05	-1.607E-04
0.21500	2.511E-04	1.256E-04	-1.256E-04	-2.511E-04
0.21750	2.457E-04	1.228E-04	-1.228E-04	-2.457E-04
0.22000	1.463E-04	7.316E-05	-7.316E-05	-1.463E-04
0.22250	-8.924E-06	-4.462E-06	4.462E-06	8.924E-06
0.22500	-1.608E-04	-8.038E-05	8.038E-05	1.608E-04
0.22750	-2.512E-04	-1.256E-04	1.256E-04	2.512E-04
0.23000	-2.457E-04	-1.228E-04	1.228E-04	2.457E-04
0.23250	-1.463E-04	-7.317E-05	7.317E-05	1.463E-04
0.23500	8.910E-06	4.455E-06	-4.455E-06	-8.910E-06
0.23750	1.608E-04	8.038E-05	-8.038E-05	-1.608E-04
0.24000	2.512E-04	1.256E-04	-1.256E-04	-2.512E-04
0.24250	2.457E-04	1.229E-04	-1.229E-04	-2.457E-04
0.24500	1.464E-04	7.319E-05	-7.319E-05	-1.464E-04
0.24750	-8.888E-06	-4.444E-06	4.444E-06	8.888E-06

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

MAXIMUM	3.207E-04	1.604E-04	1.604E-04	3.207E-04
TIME	4.000E-02	4.000E-02	4.000E-02	4.000E-02

ELEMENT STRESS COMPONENT

ELEMENT TYPE NUMBER = 2
OUTPUT SET NUMBER = 1

ELEMENT NUMBER	STRESS COMPONENT	MAXIMUM VALUE	TIME AT MAXIMUM
1	1	4.8785E+00	4.0000E-02
2	1	9.7571E+00	4.0000E-02
3	1	4.8785E+00	4.0000E-02
3	7	4.8785E+00	4.0000E-02

O V E R A L L T I M E L O G

NODAL POINT INPUT	=	0.87
ELEMENT STIFFNESS FORMATION	=	0.97
NODAL LOAD INPUT	=	0.10
TOTAL STIFFNESS FORMATION	=	0.48
STATIC ANALYSIS	=	0.00
EIGENVALUE EXTRACTION	=	5.27
FORCED RESPONSE ANALYSIS	=	5.35
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS	=	0.00
STEP-BY-STEP INTEGRATION	=	0.00
TOTAL SOLUTION TIME	=	13.03

VII.2 Comandos significativos

Com o presente Ítem temos a intenção de possibilitar a montagem do programa modificado (a partir do programa SAP-IV original) a quem o desejar. Comprometemo-nos, também, em emprestar nossa assistência técnica, bem como o programa por nós já montado.

A preparação de dados de entrada segue, basicamente, o que é especificado pelo manual de usuário do programa SAP-IV (referência [14]). Adicionalmente, as seguintes variáveis do programa modificado devem ter seus valores definidos:

- (1) COBETA - Constante real a ser utilizado no deslocamento da matriz de rigidez (vide Ítem 11.3.2). Deve, necessariamente, ser não nula no caso de análise de vibrações de corpos livres.
- (2) IBETA - constante inteira positiva que especifica a ordem do primeiro modo a ser incluído na resposta por superposição modal. Embora o programa encarregue-se de excluir modos com frequências naturais nulas é importante que se garanta tal exclusão pelo emprego de IBETA (a fim de evitar problemas decorrentes dos erros de arredondamento do cálculo de frequências naturais). Assim, como regra prática, deve-se atribuir a IBETA um valor inteiro positivo igual ao número de modos de corpo rígido mais um.
- (3) JBETA - constante inteira positiva que especifica a ordem do último modo a ser incluído na resposta por superposição modal. Deve ser menor ou igual ao número de frequências naturais extraídas.

- (4) AMPL - amplitude do esforço de excitação harmônica.
- (5) FREQ - frequência do esforço de excitação harmônica.
- (6) FASE - fase inicial do esforço de excitação harmônica.
- (7) VMED - valor médio do esforço de excitação harmônica (vide ítem 11.4.5).
- (8) NHE - número de esforços de excitação harmônica. É possível aplicar esforços de excitação harmônica segundo cada grau de liberdade, sendo que NHE especifica a quantidade desses esforços. As variáveis de (4), (5), (6) e (7) devem ser definidas para cada um dos esforços. Esforços não harmônicas podem, também, ser aplicados com dados de entrada preparados como específica a referência [14]. As respostas do sistema discretizado serão computadas pela soma dos efeitos de cada um dos esforços aplicados (de qualquer natureza: harmônicos ou não harmônicos).

Os formatos de entrada dos dados ora relacionados, bem como suas ordens de colocação, podem ser vistos na listagem parcial do programa fonte que vem a seguir; sendo que o perfeito entendimento da lógica do programa só acontecerá quanto da visualização da listagem completa.

R6700 F O R T R A N C O M P I L A T I O N M A R K 2.9.003 TUES

N D P N 4 2 0 / C O U D E / S A P D I N
= = = = =

```

$ SET LINEINFO STACK LIST EPRLIST
FILE 1=FILE1,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,AREA=21*100,LINKWORD 00000005 T
                                00005000 I
FILE 2=FILE2,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,ARFA=21*100,LINKWORD 00005100 T
FILE 3=FILE3,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,AREA=21*150,LINKWORD 00005200 I
FILE 4=FILE4,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,ARFA=21*150,LINKWORD 00005300 T
FILE 7=FILE7,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,AREA=21*100,LINKWORD 00005400 T
FILE 8=FILE8,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,AREA=21*100,LINKWORD 00005500 I
FILE 9=FILE9,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,ARFA=21*100,LINKWORD 00005600 I
FILE 10=FILE10,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,AREA=21*100,LINKWORD 00005700 I
FILE 17=FILE17,UNIT=DISK,RECORD=220,BLOCKING=3,ARFA=21*100,LINKWORD 00005705 C
$RESET OWN OWNARRAYS 00005800 T
C****DECK OVLZER 00010000 I
C****OVERLAY 00010100 I
C****DECK SAP4 00010200 I
C****PROGRAM SAP4 00010300 I

```

ST
00046204 I
00125900 T

ST
FORMAT
00126000 T
00126100 T
00126200 T
00126300 T
00126400 T
00126500 T

00126600 T
00126605 P
00126700 T
00129500 I
00129600 T
00129700 T
00129800 P
00129805 I
00129900 T
00130000 T
00131700 T
00131800 T
00131900 T
00132000 P
00132100 T
00132200 T
00132300 T

C*** BLOCK DATA
DECK INL

SUBROUTINE INL(ID,B,IR,IMASS,NUMNP,NEQB,LL)

INPUT NODAL LOADS AND MASSES

DIMENSION ID(NUMNP,6),R(NEQB,LL),IR(6,LL),IMASS(NEQB)
COMMON / JUNK / R(6),IXM(6)

COMMON /EXTRA/ MDEX,INT8
COMMON/ZERO/COBETA,IBETA,JBETA

WRITE(6,2001) R,L,R
GO TO 150

C 400 COBETA=R(1) ; IBETA=R(2) ; JBETA=R(3)
IF(MDEX.FQ.1) GO TO 900
DO 800 J=1,6
II=ID(NM,J)-KSHF
WRITE (NT) B,IMASS

C RETURN
1001 FORMAT(2I5,7F10.0)
2001 FORMAT (2(3X,I4),6E15.5)
2002 FORMAT (47HIN U D A L L O A D S (S T A T I C) O R
A 29HM A S S E S (D Y N A M I C), ///

```

C*** DECK ADJUSTF                                00133400  I  S
                                                    FORMA
SUBROUTINE ADJUSTF (A,B,STR,IMASS,NUMEL,NBLOCK,NE2B,LL,MHAND,ANORM,
INVV)                                00133500  I
00133600  I
00133700  I
00133800  I
00133900  I
00134000  I
00134100  I

FORMS GLOBAL EQUILIBRIUM EQUATIONS IN BLOCKS

DIMENSION A(NE2B,MHAND),B(NE2B,LL),STR(4,LL),TMASS(NE2B),SS(1)

COMMON /DYN/ DT,NDT,ALFA,DTI,BETA,DFN,NGH,NAI,NDYN
COMMON /EM/ LRD,ND,LM(1)
COMMON /EXTRA/ MODEX,NTB
COMMON /ZEROF/COMETA

EQUIVALENC (SS,ND)

THE EQUATION DIAGONAL COEFFICIENTS

DO 714 I=1,NEQB
714 A(I,1)=A(I,1)+(A0+COMETA)*TMASS(I)
IF (NDYN.NE.4) GO TO 716
WRITE (4) ((A(I,J),I=1,NEQB),J=1,MHAND)
GO TO 718
716 WRITE (4) ((A(I,J),I=1,NEQB),J=1,MHAND),((B(I,L),I=1,NEQB),L=1,LL)
718 WRITE (9) (TMASS(I),I=1,NEQB)

```

```

00134200  I
00134300  I
00134400  I
00134405  I
00134500  I
00134600  I
00134700  I

00146000  I
00146100  I
00146200  I
00146300  I
00146400  I
00146405  I
00146500  I
00146600  I
00146700  I
00146800  I
00146900  I

```

C


```

C*** DECK PRINTD
C
SUBROUTINE PRINTD (ID,D,R,NEQB,NUMNP,LL,NBLOCK,NEG,NT,MQ)
C
DIMENSION ID(NUMNP,6),B(NEQB,LL),D(6,LL)
REWIND 17
REWIND 8
READ (8) ID
M=NEG
NN=NEQB*NHLUCK
C
DO 500 KK=1,NUMNP
C
I=6
DO 250 II=1,6
DO 100 L=1,LL
100 D(I,L)=0.
IF (M.GT.NN) GO TO 150
IF (M.EQ.0) GO TO 150
READ (NT) B
NN=NN-NEQB
150 IF (ID(N,I).LT.1) GO TO 250
K=M-NN
M=M-1
C
DO 200 L=1,LL
200 D(I,L)=B(K,L)
250 I=I-1
C
WRITE (6,2004) N,(L,(D(I,L),I=1,6),L=1,LL)
IF (MQ.EQ.2) WRITE (17) N,((D(I,L),I=1,6),L=1,LL)
C
500 N=N-1
C

```

```

00151900 I S
00152000 T
00152100 T
00152200 T
00152300 T
00152305 C
00152400 T
00152500 T
00152600 T
00152700 T
00152800 T
00154500 T
00154600 T
00154700 T
00154800 T
00154900 T
00155000 T
00155100 T
00155200 T
00155300 T
00155400 T
00155500 T
00155600 T
00155700 T
00155800 T
00155900 T
00156000 T
00156100 T
00156200 T
00156300 T
00156400 T
00156405 C
00156500 T
00156600 T
00156700 T

```



```

1010 FORMAT (1H1,20HPRIET OF FREQUENCIES //
1          CIRCULAR /
2          50H NUMBER      FREQUENCY      PERIOD      TOL
3          /
4          49H            (RAD/SEC)  (CYCLES/MIN)  (SEC) )
1020 FORMAT(1H0,10,6X,4(L11.6,1X))
1030 FORMAT (/// 22H PRINT OF EIGENVECTORS, // 1X)
2000 FORMAT (/// 49H T I G F R S O L U T I O N   T I M E   L O G,
//5X,15HEIGENVECTORS =, F8.2 /
5X,15HPKINGING =, F8.2 //)
3000 FORMAT(1H1////// ATRACAO ',15,-ESTIMO AUTOVALOR-L1.CORRETA//
1          ' ULTRAPASSANDO A TOLERANCIA = 10*RIOTI ' //
2          ' AUTOVALOR MENOS CORRETA .....=',F12.4)
C
RETURN
END

C
1000 FORMAT (1H0 // 20H CONTROL INFORMATION, //
*          2X,'CONSTANTE(CORRETA)          PARA//
*          2X,'ALTERACAO(FORNECIDA A PASSA)//
*          2X,'MA DIAGONAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ =',E10.4//
1          5X,'1HFLAG FOR ADDITIONAL PRINTING =, 15 /
2          7X,14HE0,0, SUPPRESS, /
3          7X,11HE5,1, PRINT, //
4          5X,'1HSTORE SEQUENCE CHECK FLAG (*) =, 15 /
5          7X,19HE0,0, PERFORM CHECK, /
6          7X,10HE4,1, PASS, //
7          5X,'1HMAXIMUM ITERATION, CYCLES (*) =, 15 //
8          5X,'1HCONVERGENCE TOLERANCE (*) =, E14.4 //
9          5X,'1HCUT-OFF FREQUENCY (CPS) =, E14.4 //
*          5X,'1HNUMBER OF STARTING ITERATION, /
*          5X,'1HVECTORS TO BE READ FROM, /
*          5X,'1HITAP10 (*) =, 15 ///
A          5X,'27H(*) APPLICATION TO SUBSPACE, /
B          5X,'29H ITERATION SOLUTIONS ONLY, 1X)

```

```

01006900
01007000
01007100
01007200
01007300
01007400
01007500
01007600
01007700
01007800
01007805
01007900
01008000
01008100
01004600
01004700
01004705
01004800
01004900
01005000
01005100
01005200
01005300
01005400
01005500
01005600
01005700
01005800
01005900
01006000
01006100

```



```

SUBROUTINE EIGSOL (DL,RTOLV,AR,BR,VEC,VL,VR,D,XM,NF,NV,NMI DCK,
1NEUR,NITE,IFPR,NITEM,RTOL,IFSS,COFQ)
C
COMMON /TAPES/INSTIF,NFED,NE,NR,NI,NMASS
COMMON/ZEROF/COBETA
DIMENSION AR(NV,NV),BR(NV,NV),VEC(DV,NV),VL(NEUR,NV),VR(NEUR,NV)
DIMENSION D(NV),DL(NV),RTOLV(NV),XM(NEUR)
TOLJ=1.0E-12
REWIND NMASS
REWIND NI
REWIND NR
C
C
C CHECK FOR CONVERGENCE
DO 300 I=1,NV
IF (D(I).GT.0.) GO TO 302
WRITE (6,1090)
STOP
302 DIF=ABS(D(I)-D(I))
300 RTOLV(I)=(DIF+CONETA*RTOL)/D(I)
IF (IFPR.EQ.0) GO TO 304
WRITE (6,1040)
WRITE (6,1000) (RTOLV(I),I=1,NV)
304 CONTINUE
DO 305 L=1,NF
IF (D(L).LT.COFC) GO TO 305
IF (RTOLV(L).GT.RTOL) GO TO 306
NF=L

```

FURMA

```

01142200 I
01142300 I
01142400 I
01142500 I
01142505 C
01142600 I
01142700 I
01142800 I
01142900 I
01143000 I
01143100 I
01143200 I
01143300 I
01152300 I
01152400 I
01152500 I
01152600 I
01152700 I
01152800 I
01152900 I
01153000 P
01153100 I
01153200 I
01153300 I
01153400 I
01153500 I
01153600 I
01153700 I
01153800 I

```



```

C DAMPING FACTOR FOR EACH MODE
C
DAMP=0.
DO 5 I=1,20
  ZETA(I)=0
  5 ZETA(I)=0.
  WRITE(6,2050)
  KMP=-5
  10 KMP=KMP+6
  KPM=KMP+6
  READ(5,1005)(ZETA(I),ZETA(I),I=KMP,KPM)
  WRITE(6,2100)(ZETA(I),ZETA(I),I=KMP,KPM)
  METAP=ZETA(1)*ZETA(2)*ZETA(3)*ZETA(4)*ZETA(5)*ZETA(6)
  IF(ZETA(DEF,0) GO TO 10
  30 CONTINUE
C
C DYNAMIC LOADS
C
IF(DEF,0) GO TO 310
N2=01+0*NUMGP
N3=02+0*NUMGB
N4=03+0*NUMG
IF(04,01,0101) CALL FREQR(MI01-N4)
CALL LOAD1 (A(N1),A(N2),A(N3),NUMGP,NUMGB,NUMG)
IF(06,0,0) GO TO 300
C
C ADD GROUND MOTION EFFECTS
C
01188510
01188600
01188700
01188800
01188905
01188900
01189000
01189100
01189200
01189300
01189400
01189500
01189600
01189700

```



```

C*** DECK RESPON
C
SUBROUTINE RESPON(W,P,X,NF,NT,NDS)
DIMENSION W(NF),P(NT),X(NF,NDS)
COMMON /DYN/MT,NOT,DAMP,DT
COMMON /DAMOD/ZETA(20),NETA(20)
COMMON /JUNK/ BET,KAP,A(3,3),B(3),U(3),UO(3)
COMMON/HARM/NHE,NFN
COMMON/ZEROF/COBETA,IBETA,JBETA
COMMON/EXTRA/MODEX,NT8
REAL KAP
EVALUATION OF NORMAL RESPONSE
DU 2 IF=1,NF
DU 2 IS=1,NDS
2 X(IF,IS)=0.
IF( (IBETA.LE.0.OR.IBETA.GT.NF) .AND. (JBETA.LE.0.OR.JBETA.GT.NF) ) JBETA=NF
REWIND 7
REWIND 4
READ (7) W
IF(NFN.EQ.0.OR.MODEX.EQ.1) GO TO 270
TH=1.4
KMP=IBETA
DO 260 N=IRETA,JBETA
WB=W(N)*W(N)-COBETA
IF(WB.LE.0.) GO TO 260
W(N)=SQRT(WB)
COMPUTE DAMPING FACTOR FOR EACH MODE
C
01226800 T S
01226900 T
01227000 T
01227100 T
01227200 T
01227210 T
01227300 T
01227305 C
01227400 C
01227500 C
01227600 C
01227700 T
01227705 C
01227800 C
01227900 T
01228000 T
01228005 C
01228100 T
01228200 T
01228205 P
01228300 P
01228301 C
01228304 C
01228305 T

```

```

C
XSI=DAMP
IF(META(KMP).NE.N) GO TO 10
XSI=ZETA(KMP)
KMP=KMP+1
10 CONTINUE
READ (4) P
K=1
NOUF=NOI+1
MET = 1. / (TH/(W(N)*N)*DT) + XSI*TH*TH/(W(N)*DT) + TH*TH*TH/
16 )
KAP=XSI*MET/(W(N)*DT)
A(1,1)=1. - MET*TH*TH/3. - 1./TH - KAP*TH
A(2,1)=DT*(1. - 1./(2.*TH) - MET*TH*TH/6. - KAP*TH/2.)
A(3,1)=DT*(0.5 - 1./(6.*TH) - MET*TH*TH/18. - KAP*TH/6.)
A(1,2)=(-BET*TH - 2.*KAP)/DT
A(2,2)=1. - MET*TH/2. - KAP
A(3,2)=DT*(1. - MET*TH/6. - KAP/3.)
A(1,3)=-MET/(DT*DT)
A(2,3)=-BET/(2.*DT)
A(3,3)=1. - BET/6.
B(1)=MET/(W(N)*N)*DT*DT
B(2)=BET/(2.*W(N)*W(N)*DT)
B(3)=BET/(6.*W(N)*W(N))
DO 230 J=1,3
UU(J)=0.
230 U(J)=0.
UU(1)=P(1)
01228310
01228400
01228500
01228600
01228700
01228800
01228900
01229000
01229100
01229200
01229300
01229400
01229500
01229600
01229700
01229800
01229900
01230000
01230100
01230200
01230300
01230400
01230500
01230600

```



```

DU 260 I=2,NT
DO 240 L=1,3
U(L)=B(L)*P(I)
DU 240 LL=1,3
240 U(L)=U(L) + A(L,LL)*UU(LL)
DU 245 L=1,3
UU(L)=U(LL)
IF(NOUT=I) 260,250,260
250 X(N,K)=U(3)
K=K+1
NOUT=NOUT+NOT
260 CONTINUE
C
270 IF(NHE.GT.0) CALL HRESPO(W,X,NF,NI,NDS)
IF(NFN.LE.0.AND.NHF.LE.0) GO TO 280
REWIND 4
WRITE (4) X
C
RETURN
280 WRITE(6,2000)
2000 FORMAT('///' NAQ HA EXCITACAO')
IF(MODEX.EQ.1) RETURN
WRITE(6,2100)
2100 FORMAT('/// EXECUCAO INTERROMPIDA')
CALL EXIT
C
      FINE

```

```

01230700 T
01230800 T
01230900 T
01231000 T
01231100 T
01231200 T
01231300 T
01231400 T
01231500 T
01231600 T
01231700 T
01231800 T
01231900 T
01231905 C
          C
01232000 T
01232100 T
01232200 T

01232300 T
01232305 C
          C
          C
          C
          C
          C
          C
01232400 T
01232500 T

```