

MARDEL BONGIOVANNI DE CONTI

CÁLCULO DE CARREGAMENTO
EM PLATAFORMAS SEMI-SUBMERSÍVEIS
SUBMETIDAS A EXCITAÇÃO DE MAR REAL

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

CONSULTA
FD-16

SÃO PAULO, 1983

MARDEL BONGIOVANNI DE CONTI
Eng. Naval, Escola Politécnica da USP, 1979

CÁLCULO DE CARREGAMENTO EM PLATAFORMAS
SEMI-SUBMERSÍVEIS SUBMETIDAS A
EXCITAÇÃO DE MAR REAL.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. JORGE PINHEIRO DA COSTA VEIGA
Encarregado do Escritório Técnico de
Construção Naval em São Paulo,
Professor Visitante do Departamento
de Engenharia Naval da EPUSP.

São Paulo, 1983

FD-16
12.2

À minha esposa
Estela Maria.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Prof. Dr. *Jorge Pinheiro da Costa Veiga*, Encarregado do do Escritório Técnico de Construção Naval em São Paulo, orientador desta dissertação e que contribuiu decisivamente para a formação acadêmica e profissional do autor.

- Ao Prof. Dr. *Moyses Szajnbock*, cujos ensinamentos transcenderam em muito a programação de seus excelentes cursos de Matemática.

- Ao Prof. Dr. *Alfredo Coaracy Brazil Gandolfo*, Chefe do Departamento de Engenharia Naval da E.P.U.S.P., pelo apoio e incentivo.

- Ao Prof. Dr. *Manuel de Andrade e Silva Reis*, Diretor da Divisão de Engenharia Naval e Oceânica do I.P.T., pela confiança que sempre demonstrou ter em nosso trabalho.

- Ao Prof. Dr. *Tochi-ichi Tachibana*, Chefe do Agrupamento de Hidrodinâmica da Divisão de Engenharia Naval e Oceânica do I.P.T. e aos demais colegas desse agrupamento, pela receptividade com que fomos incluídos no grupo e pelo apoio que nos têm dado.

- Aos colegas do Departamento de Engenharia Naval da E.P.U.S.P. e do Escritório Técnico de Construção Naval em São Paulo, pela colaboração durante nosso período de trabalho junto àquelas instituições.

- A Jane, pela competência e empenho com que realizou o estafante trabalho de datilografia deste texto.

- A Fã, pelo excelente trabalho de apoio que realizou na Biblioteca do Departamento de Engenharia Naval da EPUSP.

- Ao pessoal da Biblioteca da Divisão de Engenharia Naval e Oceânica do I.P.T., pela grande colaboração.

- A Marlei, pelas ótimas ilustrações.

- A minha família, pela compreensão com que suportou minhas injustas ausências e pelo constante estímulo.

- Ao Escritório Técnico de Construção Naval em São Paulo e ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas S/A pelo apoio técnico.

A FAPESP, pelo apoio financeiro.

R E S U M O

A análise estrutural de plataformas semi-submersíveis submetidas a mares reais requer a determinação do carregamento hidrodinâmico aplicado. O trabalho propõe um método para determinação deste carregamento, levando-se em consideração efeitos de difração em ondas e efeitos relacionados à viscosidade.

A B S T R A C T

The structural analysis of semi-submersible platforms subjected to real seas requires the determination of the hydrodynamic loading applied to the structure. This paper proposes a method for the determination of this loading, taking account of wave diffraction and viscous effects.

ÍNDICE

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iii
Índice	iv
Lista de figuras	ix
Lista de símbolos	xii

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1 - Considerações gerais	I.1
I.1.1 - Estruturas oceânicas utilizadas na prospecção e exploração de petróleo	I.1
I.1.2 - Especialização na análise de estruturas oceâ- nicas	I.6
I.1.3 - Objetivos na análise de estruturas oceânicas	I.9
I.1.4 - As plataformas semi-súmersíveis	I.11
I.2 - Resumo histórico	I.13
I.3 - Objetivos	I.19
I.4 - Delineamento do trabalho	I.20

CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

II.1 - Hipóteses e considerações gerais	II.1
II.2 - Desmembramento do problema na região fluida em problema de difração e problema de radiação	II.9
II.3 - Equações do movimento linearizadas para a pla- taforma	II.13
II.4 - Esforços excitantes	II.14
II.5 - Esforços restauradores	II.15
II.6 - Esforços hidrostáticos e gravitacionais	II.17
II.7 - Montagem da matriz de transferência para a pla- taforma	II.21

CAPÍTULO III - O MÉTODO DA SÍNTESE HIDRODINÂMICA

III.1 - Hipóteses e convenções III.2
III.2 - Esforços excitantes em elementos esbeltos cilíndricos. III.3
III.3 - Esforços de restauração em elementos esbeltos cilíndricos III.9
III.4 - Linearização da expressão do arrasto. III.12
III.5 - Elementos "pequenos". III.14
III.6 - Esforços excitantes e restauradores linearizados: elementos esbeltos III.16
III.7 - Esforços excitantes e restauradores linearizados: elementos "pequenos". III.20
III.8 - Coeficientes hidrodinâmicos e esforços excitantes globais para a plataforma. III.22

CAPÍTULO IV - O MÉTODO DA DISTRIBUIÇÃO DE FONTES DE W.FRANK

IV.1 - Notação, hipóteses básicas e formulação do problema. IV.1
IV.2 - Formulação do problema em termos de fontes pulsantes. IV.7
IV.3 - Resolução numérica do problema. IV.9

CAPÍTULO V - PROPOSTA DE ASSOCIAÇÃO DA SÍNTESE HIDRODINÂMICA AO MÉTODO DE W.FRANK PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

V.1 - Importância relativa entre esforços de arrasto e de difração em cilindros submetidos a ondas. V.1
V.2 - Elementos esbeltos: aplicação do método de Frank. V.5
V.2.1 - Esforços excitantes V.7
V.2.2 - Coeficientes hidrodinâmicos V.12
V.3 - A solução das equações de movimento V.15
V.4 - Determinação do carregamento nos elementos da plataforma. V.17

CAPÍTULO VI - CÁLCULO EM MAR REAL

VI.1 - Aplicação da Teoria dos Processos Estocásticos ao

estudo do comportamento de estruturas em mar real	VI.1
VI.2 - Linearização equivalente das equações do movimento para a plataforma submetida a excitação aleatória.	VI.4
VI.3 - Cálculo das funções densidade espectral das respostas	VI.11

CAPÍTULO VII - DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO E EXEMPLO DE APLICAÇÃO

VII.1 - Programas de computador utilizados	VII.1
VII.2 - Descrição da plataforma utilizada como exemplo de aplicação do método	VII.3
VII.3 - Cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos e dos esforços excitantes pelo Método de Frank	VII.6
VII.4 - Estima dos coeficientes hidrodinâmicos dos cascos e das colunas com base experimental.	VII.9
VII.5 - Movimentos em ondas regulares	VII.10
VII.6 - Movimentos em mar irregular	VII.12
VII.7 - Carregamento	VII.13

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

APÊNDICE A - CARACTERIZAÇÃO DE UM PROBLEMA DE ESCOAMENTO POTENCIAL

A.1 - Sistema de coordenadas e convenções	A.1
A.2 - Equações fundamentais do movimento.	A.3
A.3 - Hipótese de escoamento irrotacional. Equação de Laplace. Equação de Bernoulli para escoamento potencial.	A.4
A.4 - Condições de contorno	A.8
A.5 - Escoamento potencial bi-dimensional. Uso de variáveis complexas.	A.11
A.6 - Indicações sobre energia e fluxo de energia	A.13
A.7 - Formulação de um problema de escoamento potencial com superfície livre	A.15

APÊNDICE B - INDICAÇÕES SOBRE TEORIA DE ONDAS DE PEQUENA AMPLITUDE

B.1 - O processo de perturbação	B.1
B.2 - Formulação do problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre.	B.7
B.3 - Hipótese de oscilações harmônicas. Notações usuais.	B.8
B.4 - Comentários sobre a condição de radiação	B.12
B.5 - Ondas progressivas planas em região de profundidade uniforme.	B.13
B.6 - Ondas progressivas planas em região de profundidade infinita.	B.16

APÊNDICE C - ESTABELECIMENTO E LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

C.1 - Sistemas de coordenadas e convenções. Ângulos de Euler de rumo, trim e banda	C.1
C.2 - Expressões de velocidade e aceleração de uma partícula móvel em um referencial não inercial.	C.3
C.3 - Equações do movimento para um sistema rígido.	C.7
C.4 - Comentários sobre a resolução das equações do movimento.	C.11
C.5 - Hipótese de pequenos deslocamentos. Expansões em séries de potência. Equações do movimento linearizadas	C.12

APÊNDICE D - CÁLCULO DE ESFORÇOS EXCITANTES EM CILINDROS

D.1 - Cilindro submetido a escoamento uniforme ao longo: análise qualitativa do problema	D.1
D.2 - Cilindro submetido a escoamento oscilatório: análise qualitativa do problema	D.9
D.3 - Cilindro submetido a ondas: análise qualitativa do problema.	D.12
D.4 - A equação de Morison.	D.14

APÊNDICE E - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FONTE PULSANTE BI-DIMENSIONAL.

E.1 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais	E.1
E.2 - Fonte pulsante bi-dimensional.	E.4
E.3 - Formulação do problema	E.5
E.4 - Resolução do problema.	E.8

APÊNDICE F - CÁLCULO DAS INTEGRAIS DO MÉTODO DE W.FRANK

F.1 - Determinação dos coeficientes de influência . .	F.1
F.2 - Determinação do valor principal da integral imprópria	F.10
F.3 - Determinação do potencial a partir do conhecimento das intensidades das fontes	F.13

APÊNDICE G - FORMULAÇÕES EMPÍRICAS USUAIS PARA ESPECTROS DE MAR REAL

G.1 - A hipótese de Kitaigorodskii e a proposta de Pierson e Moskowitz.	G.1
G.2 - Formulações usuais para espectros unidirecionais a dois parâmetros para mar aberto.	G.2
G.3 - O espectro de Pierson e Moskowitz a dois parâmetros e o espectro de Neumann	G.11

APÊNDICE H - PROGRAMAS DE COMPUTADOR

H.1 - Programa FRANK	H.1
H.2 - Programa DIFRA	H.11
H.3 - Programa SEMISUB	H.14
H.4 - Programa EQMOV	H.28
H.5 - Programa MOVI.	H.31
H.6 - Programa CRUZA	H.34

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LISTA DE FIGURAS

Fig.I.1.1	- Estrutura tipo jaqueta.....	I.2
I.1.2	- Plataforma de gravidade.....	I.3
I.1.3	- Coluna articulada.....	I.3
I.1.4	- Plataforma com pernas tracionadas.....	I.4
I.1.5	- Plataforma auto-elevatória.....	I.4
I.1.6	- Plataforma semi-submersível.....	I.5
I.1.7	- Plataforma semi-submersível tipo poligonal...	I.12
II.1.1	- Movimentos da plataforma.....	II.8
III.1.1	- Sistemas de coordenadas local.....	III.3
III.1.2	- Elemento esbelto cilíndrico - sistema lo- cal de referências.....	III.4
IV.1.1	- Sistema de coordenadas fixo ao cilindro....	IV.2
IV.1.2	- Sistemas de coordenadas.....	IV.3
IV.1.3	- Cilindro em rotação em torno do eixo O'Z'..	IV.4
IV.3.1	- Contorno da seção.....	IV.9
IV.3.2	- Aproximação para o contorno da seção.....	IV.11
V.1.1	- Aproximação de escoamento uniforme ao longo da seção para $D/\lambda < 0,2$	V.4
V.2.1	- Sistemas de coordenadas.....	V.6
VII.2.1	- Plataforma tipo catamarã - características.	VII.5
VII.3.1	- Seção de casco principal na região de meia nau.....	VII.6
VII.3.2	- Coeficientes de massa adicionada seccionais - cascos	VII.7
VII.3.3	- Coeficientes de amortecimento seccionais- cascos.....	VII.7
VII.3.4	- Convenções segundo as quais são apresenta- dos os esforços excitantes.....	VII.8
VII.3.5	- Força excitante de arfagem para ondas de proa em cada casco.....	VII.8

Fig.VII.3.6 - Momento excitante de caturro para ondas de proa em cada casco	VII.9
VII.4.1 - Coeficientes de inércia e de arrasto	VII.10
VII.5.1 - Função de transferência de arfagem - ondas de proa.....	VII.11
VII.5.2 - Função de transferência de caturro - ondas de proa.....	VII.11
VII.6.1 - Gráfico do espectro de Pierson e Moskowitz com $H_{1/3}=2m$ e $T_0 = 10$ seg....	VII.12
VII.6.2 - Densidade espectral - arfagem	VII.13
VII.6.3 - Densidade espectral - caturro.....	VII.13
VII.6.4 - Seção transversal de um dos cascos principais.....	VII.14
VII.6.5 - Carregamento hidrodinâmico ao redor da seção.....	VII.14
B.5.1 - Ondas progressivas planas. Sistema de referências.....	B.13
C.1.2 - Ângulos de rumo(ψ), trim(θ) e banda (ϕ)	C.3
D.1.1 - Cilindro imerso em fluido infinito e submetido a escoamento uniforme ao longe segundo a direção normal a seu eixo.....	D.2
D.1.2 - Distribuição de pressão ao longo do contorno de um cilindro imerso e submetido a escoamento uniforme....	D.3
D.1.3 - Cilindro submetido a escoamento uniforme ao longe: desenvolvimento da camada-limite.....	D.4
D.1.4 - Distribuições de velocidades nas camadas-limite laminar a turbulenta.....	D.5
D.1.5 - Geração de vórtices na esteira.....	D.7
D.1.6 - Número de Strouhal versus número de Reynolds para cilindro de seção circular submetido a escoamento uniforme ao longe [9].....	D.8

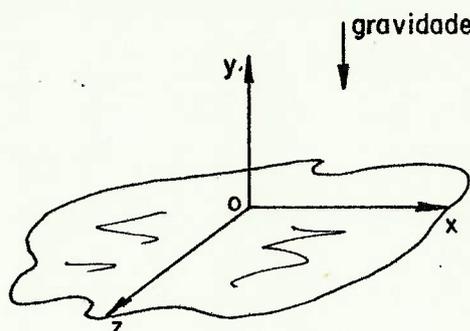
Fig.D.2.1 - Cilindro imerso em fluido infinito e submetido a escoamento oscilatório com velocidade $u = U \cos(\omega t)$ ao longe, em que $U = \text{constante}$, ω é a frequência de oscilação e t o tempo.....	D.10
D.2.2 - Cilindro oscilando harmonicamente com velocidade $u = U \cos(\omega t)$. O sistema OXY é fixo ao cilindro.....	D.10
D.3.1 - Cilindro submetido a ondas.....	D.12
D.4.1 - Cilindro inclinado: sistemas de coordenadas.....	D.16
E.1.1 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais: sistemas de coordenadas.....	E.3
E.1.2 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais: linhas equipotenciais e de corrente.....	E.4
F.1.1 - Trecho do contorno aproximado.....	F.4

LISTA DE SÍMBOLOS

- A : amplitude de onda
- A_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$: massas ($i=1, 2, 3$) e momentos ($j=4, 5, 6$) adicionados globais para a plataforma devidos a movimentos oscilatórios da plataforma segundo seus seis graus de liberdade.
- A : área das seções retas de cada elemento esbelto.
- $(a_e)_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$: massas ($i=1, 2$) e momento ($i=3$) adicionados do elemento devidos a oscilações nas direções de $O_e X_e$ ($j=1$), $O_e Y_e$ ($j=2$) e em torno de $O_e Z_e$ ($j=3$).
- A_x : área projetada de cada elemento "pequeno" no plano $Y_e Z_e$.
- A_y : área projetada de cada elemento "pequeno" no plano $X_e Z_e$.
- A_z : área projetada de cada elemento "pequeno" no plano $X_e Y_e$.
- B_{ij} , $i, j=1, \dots, 6$: amortecimentos globais para a plataforma.
- $(b_e)_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$: amortecimentos devidos a oscilações nas direções de $O_e X_e$ ($j=1$), $O_e Y_e$ ($j=2$) e em torno de $O_e Z_e$ ($j=3$).
- c : velocidade de propagação da onda
- C_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$: coeficientes de restauração hidrostática globais para a plataforma.
- c_x : coeficiente de linearização na direção $O_e X_e$.

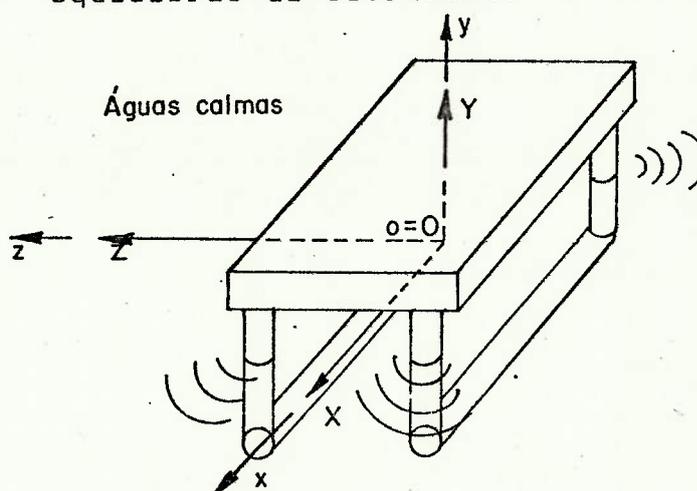
- c_Y : coeficiente de linearização na direção $O_e Y_e$
 c_Z : coeficiente de linearização na direção $O_e Z_e$
 d_x : projeção das seções retas de cada elemento esbelto segundo o eixo $O_e Y_e$.
 d_y : projeção das seções retas de cada elemento esbelto segundo o eixo $O_e X_e$.
 D : dimensão característica de cada seção do elemento esbelto.
 E : energia das ondas em uma dada região.
 $E_j^E, j=1, \dots, 6$: amplitudes dos esforços de excitação em ondas.
 $E_j^I, j=1, \dots, 6$: amplitudes dos esforços de Froude-Krylov.
 $E_j^D, j=1, \dots, 6$: amplitudes dos esforços de difração.
 g : aceleração da gravidade.
 H : espessura da lâmina d'água
 $Im\{ \}$: parte imaginária
 $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$: versores ortonormais associados ao sistema $oxyz$.
 $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$: versores associados ao sistema $OXYZ$.
 $\underline{I}_e, \underline{J}_e, \underline{K}_e$: versores associados ao sistema $O_e X_e Y_e Z_e$.
 k : número de onda
 l_e : comprimento de cada elemento esbelto.
 \underline{n} : normal à superfície do corpo em cada ponto.
 N_k : número de Keulegan-Carpenter.
 $oxyz$: sistema de coordenadas cartesianas direto fixo à Terra, em que o plano oxz coincide com a superfície das águas quando calmas e a aceleração da gravidade age na direção

do eixo oy, sentido negativo.



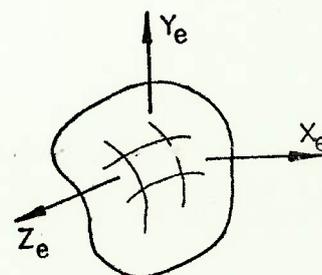
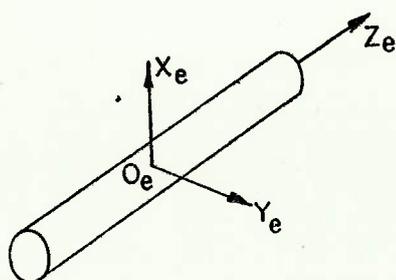
OXYZ

: sistema de coordenadas cartesianas direto não inercial fixo à estrutura e que coincide com o sistema oxyz na posição média de equilíbrio da estrutura.



$O_e X_e Y_e Z_e$

: sistema de coordenadas local fixo a cada elemento e



p

: pressão

P	: valor principal da integral.
$Re\{ \}$: parte real
$S_{v_j v_k}$: função densidade espectral cruzada das variáveis v_j e v_k ($j \neq k$) ou função densidade espectral da variável $v_j = v_k$.
S	: número de Strouhal
u	: componente da velocidade das partículas fluidas na direção do eixo ox (sistema $oxyz$).
\underline{v}	: vetor velocidade das partículas fluidas
v	: componente da velocidade das partículas fluidas na direção do eixo oy (sistema $oxyz$).
v_{X_e}	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção $O_e X_e$.
v_{Y_e}	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção $O_e Y_e$.
v_{Z_e}	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção $O_e Z_e$.
\dot{v}_{X_e}	: componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção $O_e X_e$.
\dot{v}_{Y_e}	: componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção $O_e Y_e$.
\dot{v}_{Z_e}	: componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção $O_e Z_e$.
v_x	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção OX .
v_y	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção OY .
v_z	: componente da velocidade das partículas fluidas segundo a direção OZ .

- \dot{v}_X : componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção de OX.
- \dot{v}_Y : componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção de OY.
- \dot{v}_Z : componente da aceleração das partículas fluidas segundo a direção de OZ.
- $(v_{P_e})_{X_e}$: componente da velocidade de um ponto P_e pertencente a um elemento esbelto segundo a direção do eixo $O_e X_e$.
- $(v_{P_e})_{Y_e}$: componente da velocidade de um ponto P_e pertencente a um elemento esbelto segundo a direção do eixo $O_e Y_e$.
- $(v_{P_e})_{Z_e}$: componente da velocidade de um ponto P_e pertencente a um elemento esbelto segundo a direção do eixo $O_e Z_e$.
- V : volume submerso do elemento "pequeno".
- w : componente da velocidade das partículas fluidas na direção do eixo oz (sistema oxyz).
- ω : frequência de onda
- $[\alpha_e]$: matriz 3 x 3 tal que
$$\begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} = [\alpha_e] \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}$$
- η : elevação da superfície livre em relação ao nível de repouso, e positiva para cima.
- θ : ângulo de aproamento da estrutura em relação às ondas, sendo 0° para mares de popa, $+90^\circ$ para mares de través por boreste, 180° para mares de proa e assim por diante.

θ	: ângulo de trim.
θ_e	: ângulo de Euler de nutação.
λ	: comprimento de onda.
μ	: coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido.
ν	: coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.
$\xi_j, j=1, \dots, 6$: amplitudes de oscilação da plataforma nos seus seis graus de liberdade.
ρ	: densidade do fluido.
ϕ	: ângulo de banda.
Φ	: potencial de velocidades.
Φ_T	: potencial total na região fluida.
Φ_E	: potencial do problema de esforços excitantes.
Φ_D	: potencial de difração.
Φ_R	: potencial do problema de esforços restauradores.
Φ_I	: potencial de ondas incidentes.
$\phi_j, j=1, \dots, 6$: potenciais correspondentes a cada um dos modos de oscilação da plataforma nos seus 6 graus de liberdade com amplitude unitária.
ϕ_e	: ângulo de Euler de rotação própria.
ψ	: ângulo de rumo.
ψ_e	: ângulo de Euler de precessão.

CAPÍTULO I

I. INTRODUÇÃO

I.1 - Considerações gerais

I.1.1 - Estruturas oceânicas utilizadas na prospecção e exploração de petróleo

O súbito aumento do preço do petróleo na década passada motivou o crescimento de sua prospecção e exploração nas plataformas continentais marítimas em profundidades cada vez maiores. Paralelamente iniciaram-se investigações para aproveitamento de outros recursos oceânicos, tais como energia de ondas, de marés e de gradientes térmicos, bem como exploração de minerais em águas profundas. Houve desenvolvimento também de sistemas para medição e controle de poluição no mar, em particular em relação a espalhamento ocasional de óleo na superfície. Considerou-se ainda a implantação de usinas nucleares e aeroportos flutuantes. Tais atividades exigiram o desenvolvimento da área de tecnologia usualmente chamada de Engenharia Oceânica.

Na prospecção e exploração do petróleo distinguem-se as seguintes estruturas, equipamentos e embarcações:

(a) Estruturas fixas, utilizadas principalmente para extração de gás ou petróleo em locais onde já foi constatada a sua existência e a viabilidade econômica de sua explora-

ção, chamadas de plataformas fixas. Dentre estas estruturas ,
citam-se:

- (a.1) Estruturas tipo treliças especiais, chamadas usualmente de jaquetas ("jackets"), que são compostas de elementos tubulares esbeltos soldados entre si, sendo fixadas ao solo através de estacas ou sendo simplesmente apoiadas (fig.I.1.1).

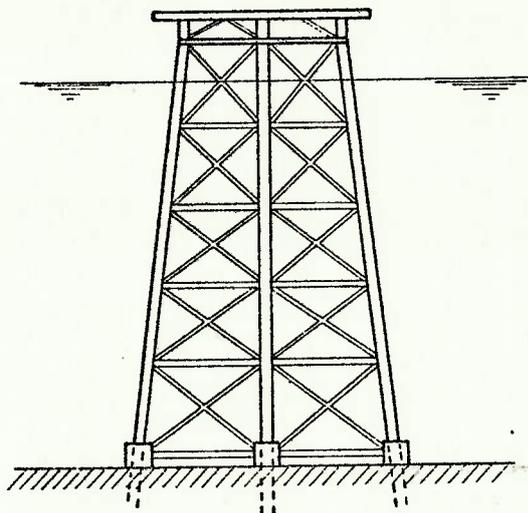


Fig.I.1.1 -Estrutura tipo jaqueta

- (a.2) Estruturas que possuem uma grande base de concreto apoiada ao solo, sobre a qual erguem-se colunas que sustentam o convés de operações (fig.I.1.2). São usualmente chamadas de plataformas de gravidade ("gravity type platforms").

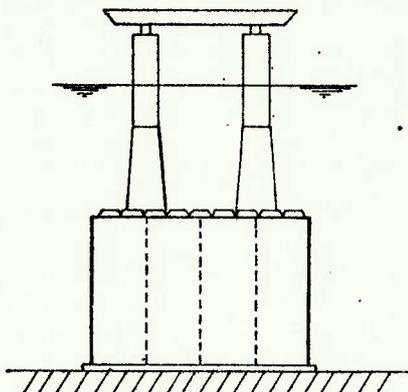


Fig.I.1.2 - Plataforma de gravidade

(b) Estruturas ditas parcialmente vinculadas ("compliant structures"), tais como:

(b.1) Colunas articuladas (fig.I.1.3), usadas para exploração ou como torres de ancoramento.

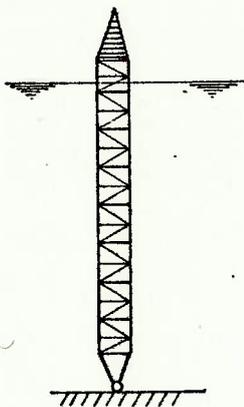


Fig.I.1.3 - Coluna articulada

(b.2) Estruturas flutuantes amarradas ao solo através de cabos permanentemente tracionados (fig. I.1.4), chamadas de plataformas com pernas tracionadas ("tension leg platforms" ou

"tethered platforms"), utilizadas para exploração.

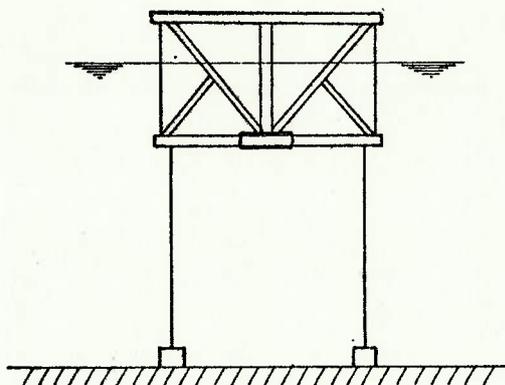


Fig.I.1.4 - Plataforma com pernas tracionadas

(c) Estruturas temporariamente fixas, chamadas plataformas auto-elevatórias ("jack-up platforms"), usadas tanto na prospecção como na exploração de petróleo ou gás. Consistem basicamente em barcaças possuidoras de torres verticais que têm liberdade de movimento (controlado) nesta direção. Quando em navegação tais torres se encontram elevadas. Em operação as torres são baixadas até que atinjam o solo e suspendam a barcaça (fig.I.1.5), que passa a servir de convés de operações.

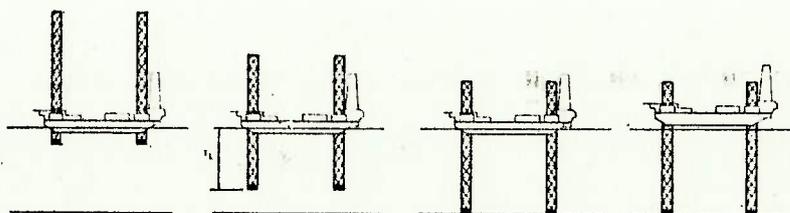


Fig.I.1.5 - Plataforma auto-elevatória

(d) Estruturas flutuantes, como por exemplo:

(d.1) Estruturas cujo volume imerso é maior que o produto da área do plano de flutuação pelo calado (fig.I.1.6), chamadas de semi-submersíveis. Tais estruturas são usadas para transporte e apoio às instalações oceânicas (embarcações semi-submersíveis ou "small water plane area twin hull"), para perfuração na prospecção de petróleo (plataformas semi-submersíveis ou "semi submersible drilling rigs"), como bases de acomodação de pessoal de apoio às atividades oceânicas (hóteis semi-submersíveis), como bases de múltiplas finalidades contendo equipamentos contra incêndio, guindaste, etc. ("multi-purpose semi-submersibles") e como reservatórios de óleo.

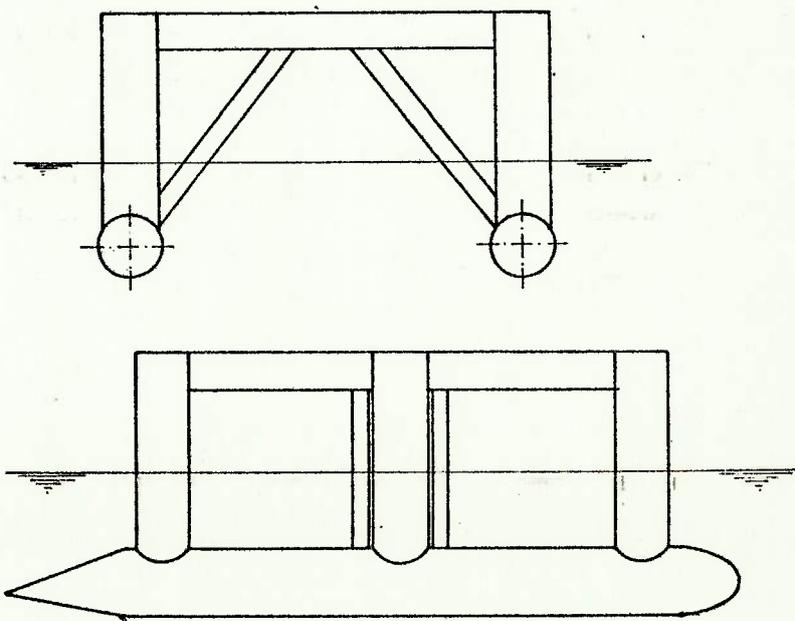


Fig.I.1.6 - Plataforma semi-submersível

(d.2) Barcaças, rebocadores, navios-tanque, navios sonda e outros, destinados a transporte ou reboque de estruturas até o local de operação bem como para seu lançamento e instalação, para sustentação de guindastes, para armazenamento de produtos explorados, como bases de apoio, para perfuração e exploração (caso dos navios-sonda), etc..

(e) Submersíveis, destinados a apoio e manutenção.

I.1.2 - Especialização na análise das estruturas oceânicas

Os requisitos usuais de projeto das estruturas oceânicas destinadas à prospecção e exploração de petróleo se contrastam em muitos aspectos aos dos navios convencionais, como por exemplo:

(1º) Os navios em serviço têm, em geral, velocidade de avanço não nula, enquanto que as plataformas oceânicas operam estacionárias ou com velocidade extremamente reduzida, como é o caso das barcaças lançadoras de tubulação. Assim, a procura da minimização da resistência hidrodinâmica ao avanço conduz a formas esbeltas para os navios. As formas das plataformas ficam condicionadas às finalidades a que se destinam, à minimização dos movimentos em ondas, à estabilidade, etc, resultando muitas vezes em estruturas volumosas em que todas as dimensões principais possuem a mesma ordem de grandeza.

(2º) Os navios não possuem vinculação com o solo, a

menos quando ancorados ou amarrados em áreas restritas (cais, baias, etc.) onde as condições ambientais (ventos, ondas, correntes) são moderadas. As plataformas oceânicas em operação costumam ter algum tipo de vínculo com o solo, seja por estaqueamento, apoio simples, amarração, sonda, ou ao menos por tubos condutores que a ligam ao poço. As condições ambientais a que estão submetidas são as mais diversas, podendo ser, inclusive, bastante severas.

(3º) Os navios possuem propulsão própria e apêndices relativamente simples que devem lhes permitir boa manobrabilidade. A grande maioria das plataformas deve ser rebocada até o local de operação e lá instalada. As plataformas fixas tipo jaqueta são muitas vezes transportadas até o local de operação por meio de barcaças, sendo então lançadas, passando a flutuar em posição horizontal, e finalmente sendo lastreadas e guinchadas até a posição vertical, na operação chamada de verticalização. Em resumo, o transporte e a instalação das plataformas, mesmo que flutuantes, devem ser cuidadosamente planejados e influenciam fortemente a sua concepção.

(4º) A menos de canais, rios e águas restritas, em geral, a lâmina d'água não é uma variável de importância na análise do comportamento de navios. Quanto às plataformas, devido às suas grandes dimensões, à vinculação com o solo e ao fato de os produtos de interesse se encontrarem no fundo do oceano, as lâminas d'água têm caráter decisivo no projeto.

(5º) Devido à sua liberdade de avanço com velocidade controlável em uma certa faixa de rumo, os navios podem es

colher rotas de modo a evitar condições ambientais desfavoráveis, ou mesmo acertar a velocidade e o aproamento de modo a minimizar seus efeitos. As plataformas, no entanto, devido à sua menor manobrabilidade, não podem evitar o mau tempo, ou mesmo tremores de terra, ressacas e gelo (em regiões frias).

(6º) Tanto a casaria como os equipamentos de convés são normalmente muito mais volumosos nas plataformas que em navios, tornando os efeitos dos ventos mais acentuados.

As observações anteriores evidenciam a dificuldade do emprego de métodos já tradicionais de análise e projeto de navios às plataformas oceânicas. Os modelos teóricos tradicionais na Engenharia Naval, bem como as técnicas de ensaios em escala e de extrapolação para navios não se aplicam indiscriminadamente às estruturas oceânicas. Assim, iniciou-se uma fase de intensa pesquisa na área de Engenharia Oceânica, visando a reavaliação de métodos consagrados e desenvolvimento de novas técnicas, tanto teóricas como experimentais, que viabilizassem a análise dos novos projetos. Pode-se destacar, por exemplo, a instalação de novos tanques de provas, com dimensões adequadas à simulação de amarração, com equipamentos para geração de ondas multi-direcionais, para geração de correntes e de ventos, etc.

Os modelos teóricos, os ensaios com modelos em escala reduzida e o levantamento de dados em escala real se complementam na análise das estruturas oceânicas. Em geral, quando efeitos não lineares dominam o comportamento do sistema, recorre-se à experimentação, se bem que já há tentativas de

desenvolvimento de modelos teóricos que incluam não-linearidades, utilizando-se a simulação no domínio do tempo. Os modelos teóricos possuem a vantagem de fornecer respostas mais rápidas por um custo menor. Permitem, ainda, crescente elucidação do funcionamento dos sistemas e da dinâmica dos processos que procuram descrever, à medida em que vão sendo melhor elaborados. Os dados em escala real são necessários para confirmação de processos teóricos e de técnicas de extrapolação de dados de ensaios, como também para levantamento das condições ambientais a serem enfrentadas nos locais de operação. Os modelos teóricos podem ser ainda confirmados por comparação com resultados experimentais obtidos por técnicas consideradas válidas.

I.1.3 - Objetivos na análise de estruturas oceânicas

Há diversos tipos de problemas associados às plataformas oceânicas, como por exemplo:

- determinação de movimentos e esforços em estruturas flutuantes, em estruturas parcialmente vinculadas e nas estruturas fixas, desde que em transporte ou instalação;
- cálculo de esforços de deriva em ondas ("wave drift forces");
- verificação de comportamento de estruturas amarradas;
- estudos de lançamento, transporte e instalação.

Em particular, a determinação do comportamento no mar de estruturas flutuantes ou parcialmente vinculadas tem duas finalidades básicas: verificação de segurança e de operacionalidade. A segurança da estrutura pode ficar comprometida por diversos fatores, tais como:

- colapso estrutural devido a um carregamento excessivo;
- colapso estrutural devido à repetição cíclica de esforços em algum local da estrutura ultrapassando os limites de resistência à fadiga;
- perda de flutuabilidade;
- ultrapassagem dos limites de estabilidade (estática ou dinâmica), resultando em emborcamento.

A operacionalidade pode ficar prejudicada na ocorrência de:

- níveis de acelerações no convés que provoquem desconforto na tripulação, diminuindo sua capacidade de trabalho, ou,
- níveis de movimentos que impeçam o funcionamento adequado de equipamentos como sondas, guindastes, etc.

Para se garantir segurança e operacionalidade adequadas, procede-se a dois tipos de análise, a saber:

(1º) Análise de longo prazo ("long term analysis"), em que se estimam as excitações mais desfavoráveis que poderão ocorrer ao longo da vida útil da plataforma em seu local

de operação, garantindo-se então resistência e estabilidade compatíveis.

(2º) Análise de curto prazo ("short term analysis"); em que se simula o comportamento da estrutura quando submetida a excitações usuais no local de operação, constatando-se a porcentagem do tempo em que os níveis de movimentos não prejudiquem a operacionalidade, e garantindo-se que os limites de resistência à fadiga não sejam ultrapassados.

I.1.4 - As plataformas semi-submersíveis

Os métodos de verificação do comportamento no mar dependem fortemente do tipo de estrutura em questão. A escolha de plataformas semi-submersíveis para objeto de estudo neste trabalho se deve menos à sua importância relativa em comparação com as demais estruturas oceânicas que pelas suas qualidades próprias e crescente utilização. Inicialmente tais plataformas foram introduzidas para prospecção. A possibilidade dos arranjos mais diversos para a parte submersa permitiam a minimização de movimentos em ondas, enquanto a inexistência de membros móveis (como, por exemplo, as torres das plataformas auto-elevatórias) evitavam a concepção e operação de mecanismos complexos para sua movimentação. Análises econômicas indicam haver em alguns casos interesse na imediata exploração de campos recém-descobertos. O prazo exíguo necessário para instalação das plataformas semi-submersíveis permitiu, assim, a sua utilização na chamada produção antecipada.

Quanto à forma submersa, existem basicamente dois tipos de plataformas semi-submersíveis:

(a) Tipo catamarã ("mohole type"), em que dois ou mais cascos paralelos suportam colunas que sustentam o convés (fig. I.1.6).

(b) Tipo poligonal, que consiste de diversas colunas verticais dispostas segundo vértices de um polígono e possuindo "patas" inferiores. As "patas" podem funcionar como tanques de flutuação ou servir de apoios eventuais para a plataforma no solo (fig. I.1.7).

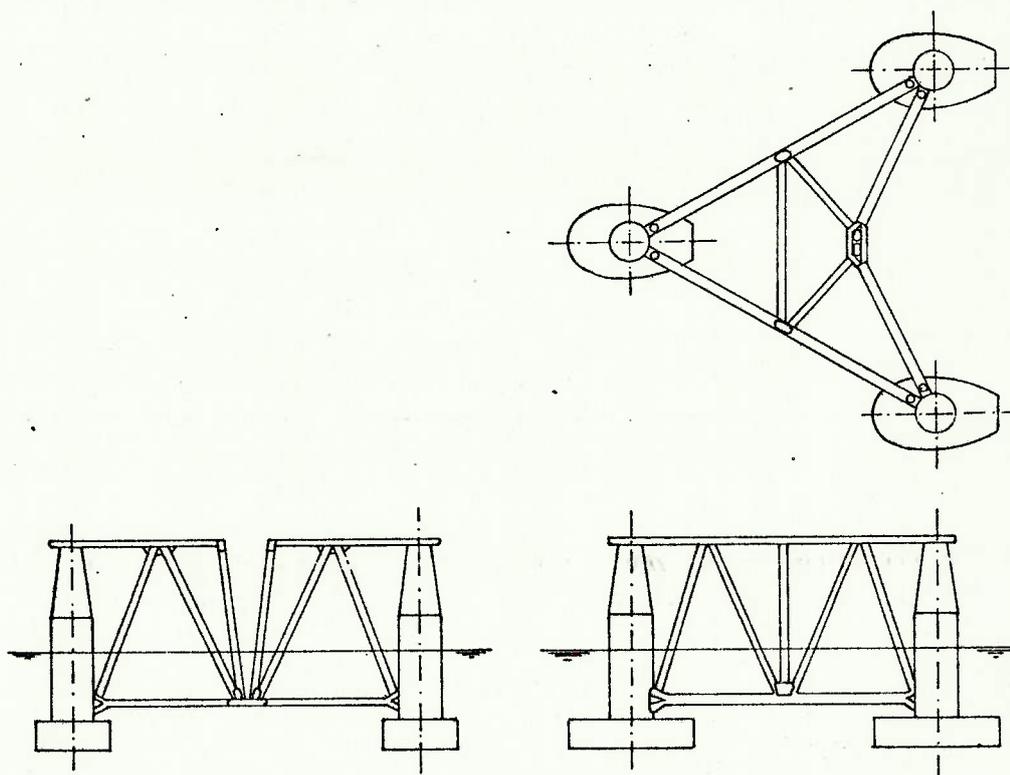


Fig. I.1.7 - Plataforma semi-submersível
tipo poligonal

Nos dois casos existem braços secundários ligando as colunas entre si e ao convés.

Em reboque até o local de operação a linha d'água das plataformas semi-submersíveis é tal que uma parte dos cascos ou das "patas" fica emersa, minimizando a superfície molhada. Em operação, as plataformas são lastreadas e os cascos ou "patas" são submersos de modo a serem submetidos a menor excitação pelas ondas.

As plataformas semi-submersíveis podem ser mantidas estacionárias em seu local de operação através de sistemas de amarras ou de sistemas de posicionamento dinâmico. As amarras são em geral utilizadas em águas pouco profundas. Os sistemas de posicionamento dinâmico são constituídos de propulsores com sistemas de controle projetados para corrigir continuamente os desvios de posição da plataforma devidos aos movimentos em ondas, correntes e ventos.

I.2 - Resumo histórico

Somente nas últimas três décadas os métodos gerais para determinação de comportamento de navios no mar tiveram um desenvolvimento que os tornaram aplicáveis sob o ponto de vista de Engenharia. Anteriormente determinavam-se apenas o desempenho do navio em águas calmas e o máximo momento fletor com o navio equilibrado em uma onda estática de projeto. O interesse no aumento do porte e da velocidade dos navios motivou a procura de minimização de seus movimentos e da solicitação

estrutural em ondas de mar real. Em 1953, St. Denis e Pierson [91] introduziram a hipótese de que as respostas de um navio sob excitações irregulares de mar real corresponderiam à superposição das respostas do navio a ondas regulares de todas as frequências. Tratava-se da aplicação do princípio da superposição, admitindo a hipótese de que o mar real poderia ser representado por uma somatória de ondas regulares em diversas frequências, sendo as funções de transferência do navio lineares. Motivou-se, assim, o desenvolvimento de métodos para previsão do comportamento do navio em ondas regulares. Em 1957 Korvin-Kroukovsky e Jacobs [49] apresentaram a chamada Teoria das Faixas ("Strip Theory") para cálculo de arfagem e caturro de navios submetidos a ondas regulares pela proa. Fazia-se a hipótese de que o navio era um corpo esbelto (a boca e o calado com dimensões reduzidas em relação ao comprimento), resultando como consequência a possibilidade de cálculo dos movimentos do navio com base na solução de problemas bi-dimensionais para as suas diversas seções transversais. O desenvolvimento de métodos para previsão de comportamento de navios no mar processou-se, então, nas seguintes fases:

- evolução na resolução de problemas bi-dimensionais de seções planas submetidas a oscilações;
- desenvolvimento e confirmação experimental da Teoria das Faixas;
- evolução nas tentativas de representação de mar real;
- aperfeiçoamento no cálculo de estatísticas refe -

rentes à excitação e às respostas.

Em 1949 Ursell [100] formulou e resolveu o problema de contorno para seções circulares parcialmente imersas e submetidas a movimentos de arfagem. Admitiu-se válida a Teoria Potencial Linearizada. O potencial de velocidades era representado por um conjunto de fontes de intensidade constante satisfazendo a condição de superfície livre linearizada.

Suas intensidades eram multiplicadas por coeficientes de modo a satisfazer no conjunto à condição de contorno cinemática em um certo número de pontos do contorno da seção. Em 1953 Grim [29] apresentou a extensão da solução de Ursell para as seções com as chamadas formas de Lewis, através de sua transformação conforme em seções circulares. Tasai [95] (1959) e Porter [76] (1960) estenderam a solução de Ursell para os contornos redutíveis a círculos segundo a transformação de Theodorsen. Em 1963 Ogilvie [68] determinou a solução para seções cilíndricas totalmente submersas submetidas a oscilações de arfagem.

Em 1967, porém, W. Frank [26] apresentou a solução para o problema de contorno de seções simplesmente conexas simétricas em relação a um eixo vertical, parcialmente ou totalmente imersas e submetidas a oscilações de arfagem, deriva ou balanço. Passava-se a representar o potencial de velocidade através de fontes de intensidade variável distribuídas ao longo do contorno da seção transversal. Tais fontes também satisfaziam à condição de superfície livre linearizada e suas intensidades podiam ser determinadas através da imposi

ção da condição de contorno em alguns pontos da seção. As pressões hidrodinâmicas podiam ser obtidas através da aplicação da Equação de Bernoulli Linearizada. Em 1970 R.L. Potash [77] apresentou uma extensão do Método de Frank para seções de cascos do tipo catamarã.

A Teoria de Faixas introduzida por Korvin-Kroukovski e Jacobs em 1957 para cálculo de arfagem e caturro em ondas de proa foi estendida em 1958 por Jacobs [41] para cálculo de forças cortantes verticais e momentos fletores. Apesar da concordância relativamente satisfatória das previsões feitas por Korvin-Kroukovski e Jacobs em relação a dados experimentais, houve objeções a esta Teoria, principalmente pelo fato de as equações do movimento não satisfazerem as relações de simetria provadas por Timman e Newman [98] em 1962. Em 1969, no entanto, Söding [87], Tasai e Takaki [97] e Borodai e Netsvetayev [8] apresentaram independentemente novas versões para a Teoria de Faixas para cálculo de arfagem e caturro em navios submetidos a ondas de proa, em que as relações de Timman e Newman eram satisfeitas.

Em 1967 Tasai [96] apresentou uma Teoria de Faixas que permitia a determinação de movimentos de deriva, guinada, e balanço, mas válida somente para velocidade de avanço nula. Em 1969 Grim e Schenzle [30] apresentaram uma Teoria de Faixas que incluía a determinação de movimentos de deriva, guinada e arfagem bem como carregamento horizontal, inclusive para velocidades de avanço não nula. Tal Teoria não satisfazia no entanto as relações de Timman e Newman.

Em 1970 Salvesen, Tuck e Faltisen [83] apresentaram um método para cálculo de movimentos e esforços solicitantes em navios com velocidade de avanço não nula, submetidos a ondas incidentes segundo uma direção qualquer. Tal método utilizava as hipóteses da Teoria das Faixas e os coeficientes das equações do movimento satisfaziam às relações de Timman e Newman. Utilizou-se o Método da Distribuição de Fontes de W. Frank para resolução dos problemas bi-dimensionais.

Quanto à excitação em mar real, Pierson e Moskowitz [74] propuseram em 1964 uma representação baseada na Teoria da Similaridade de Kitaigorodskii [48] apresentada em 1961. Kitaigorodskii propôs que os espectros de mares totalmente desenvolvidos, desde que adimensionalizados de uma determinada maneira, tinham a mesma forma independentemente do local ou da época. Pierson e Moskowitz fizeram uma análise de regressão de dados de elevação de ondas e propuseram uma fórmula para representação de espectros de mares reais, cujas variáveis eram adimensionalizadas pela velocidade do vento no local, a uma certa altura do solo. Desde então, diversas outras formulações foram propostas, igualmente baseadas em análises de regressão de dados, porém possuindo outros parâmetros de adimensionalização, como altura significativa de ondas, períodos médios, extensão da área de atuação do vento, etc..

Atualmente há um consenso de que a aplicação da Teoria de Faixas de Salvesen, Tuck e Faltinsen utilizando-se o Método de Frank é um método confiável para determinação do comportamento de navios convencionais em ondas regulares.

Tendo sido obtidas as respostas em ondas regulares, as respostas em mar irregular podem ser facilmente obtidas desde que se admita válido algum espectro de excitação.

Quanto às plataformas semi-submersíveis, porém, sabe-se que elas não atendem à hipótese de esbeltez da Teoria de Faixas. São constituídas de elementos de diversas geometrias, como cascos, membros tubulares com seções de pequenos diâmetros e elementos em que todas as suas dimensões são reduzidas em relação às dimensões principais da plataforma (caso das "patas"). Naturalmente, a Teoria de Faixas não poderia ser aplicada a plataformas semi-submersíveis quando consideradas integralmente.

Desenvolveu-se, então, o processo chamado de Síntese Hidrodinâmica. Os escoamentos em torno dos diversos elementos da plataforma são calculados independentemente, supondo-se não haver interação entre eles. Assim são também calculados os coeficientes hidrodinâmicos e esforços excitantes parciais. Os coeficientes e esforços totais para a plataforma são então compostos, resolvendo-se as Equações do Movimento. A denominação de Síntese Hidrodinâmica foi introduzida por Paulling [72] em 1970. Entre os pioneiros a utilizarem tal processo estão também Burke [10] em 1969, Paulling e Horton [73] em 1970 e Hooft [35] em 1971. Em particular, Hooft aplicou o método da Síntese Hidrodinâmica para cálculo de movimentos em ondas regulares das plataformas SEDCO 135 (do tipo poligonal) e STAFLO (do tipo de múltiplos cascos paralelos), comparando os resultados obtidos com dados de ensaios em escalas reduzida e obtendo cor

relação satisfatória. Os esforços de excitação em ondas nos elementos esbeltos foram calculados a partir da Equação de Morison linearizada [60]. Os coeficientes de massa adicionada adotados foram aqueles correspondentes a escoamento uniforme ao longe.

I.3 - Objetivos

Neste trabalho desenvolve-se um modelo teórico para cálculo de movimentos e carregamento em plataformas semi-submersíveis submetidas à excitação em mar real. A determinação dos movimentos em ondas regulares é feita basicamente através da Síntese Hidrodinâmica. Acrescentou-se, no entanto, a possibilidade de cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos e dos esforços excitantes em elementos esbeltos através do Método da Distribuição de Fontes de Frank. Justifica-se tal inclusão pelo fato de em muitos casos as dimensões das seções de alguns elementos esbeltos serem tais que se pode desprezar os efeitos relacionados com a viscosidade localmente [34]. A determinação do carregamento, por sua vez, é útil para implementação de programas de análise estrutural.

Deseja-se atingir os seguintes objetivos:

(a) Explicitar as hipóteses e as simplificações teóricas admitidas no processo da Síntese Hidrodinâmica segundo o Método de Hooft, usual para cálculo de movimentos de plataformas semi-submersíveis em ondas regulares.

(b) Contribuir para o cálculo de carregamento em plataformas semi-submersíveis submetidas a mar real.

(c) Motivar a utilização de modelos teóricos para estudos de comportamento no mar.

I.4 - Delimitação do trabalho

No capítulo II apresenta-se a formulação do problema de determinação de movimentos de uma estrutura flutuante no mar. Expõem-se as hipóteses básicas admitidas. Recorre-se a teorias tradicionais, cujos fundamentos estão descritos em apêndices, como a Teoria Potencial (apêndice A), a Teoria de Ondas de Pequena Amplitude (apêndice B) e a Dinâmica de Corpos Oscilando com Pequenas Amplitudes (apêndice C).

O capítulo III trata da solução aproximada do problema para plataformas semi-submersíveis através do processo usual denominado Síntese Hidrodinâmica. Tal processo utiliza a Equação de Morison na determinação dos esforços excitantes e restauradores, apresentando-se comentários a respeito no apêndice D.

O Método de Frank para determinação de coeficientes de massa e momento adicionados e de amortecimentos, bem como da distribuição de pressões em cilindros oscilantes está exposto no capítulo IV. Utiliza-se em seu desenvolvimento a solução para o problema de fonte pulsante bi-dimensional, obtida no apêndice E. O cálculo numérico das integrais do Método de Frank é exposto no apêndice F.

No capítulo V apresenta-se uma proposta de associação da Síntese Hidrodinâmica à Teoria das Faixas, visando o cálculo de carregamento em plataformas semi-submersíveis e utilizando o Método de Frank.

No capítulo VI estabelecem-se as hipóteses que permitem a determinação das respostas em mar real a partir do conhecimento das funções de transferência da plataforma em ondas regulares e da excitação do mar no local de operação. Tais hipóteses permitem a aplicação da Teoria dos Processos Estocásticos ao estudo do comportamento de estruturas em mar real. No apêndice G descrevem-se e comentam-se algumas formulações empíricas usuais para espectros de mar real.

O capítulo VII apresenta o desenvolvimento do método proposto e exemplos de aplicação. As listagens dos programas de computador utilizados estão no apêndice H.

Conclusões e recomendações são estabelecidas no capítulo VIII.

CAPÍTULO II

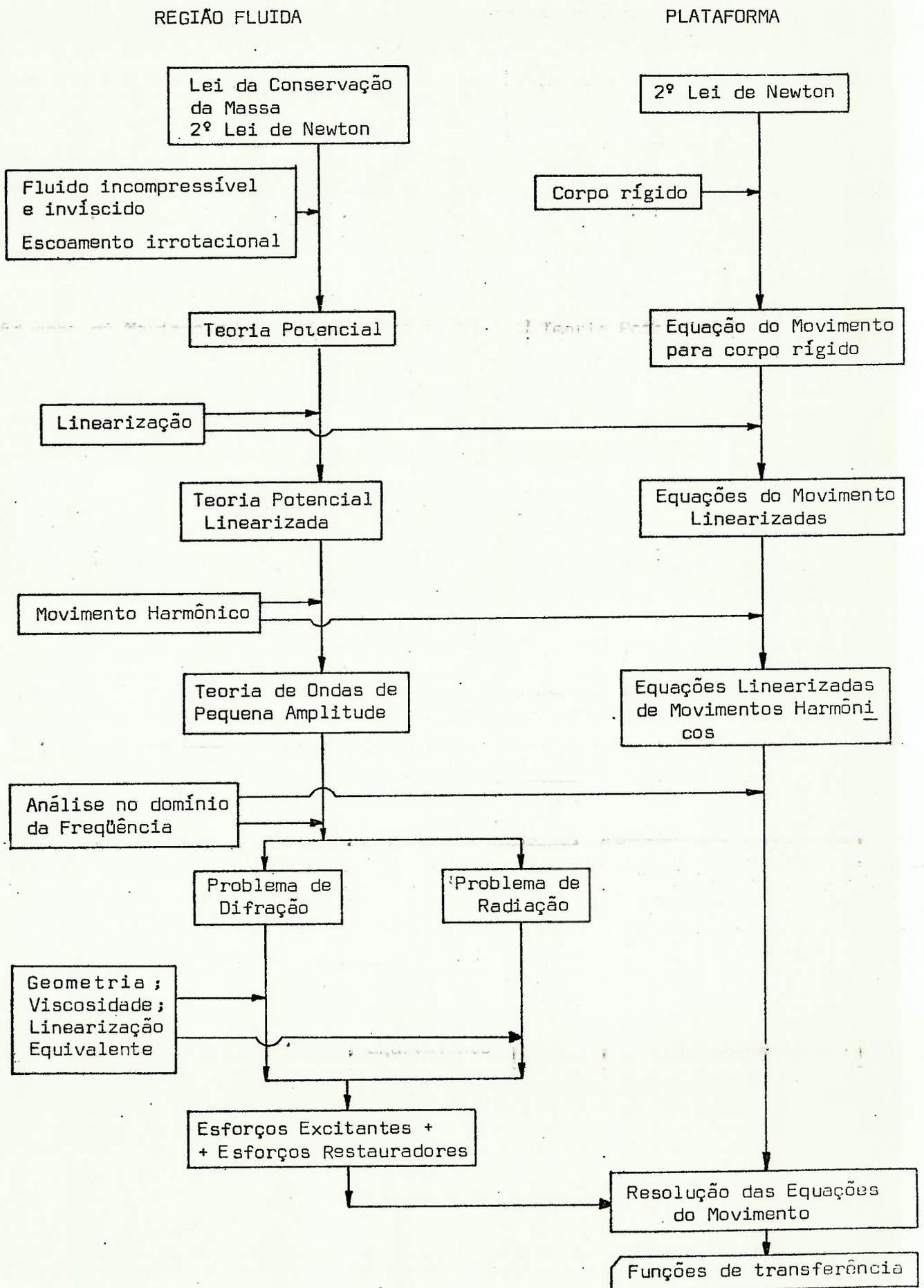
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se uma plataforma semi-submersível submetida à ação das ondas do mar em seu local de operação. A determinação dos movimentos e do carregamento a que a plataforma estará sendo submetida é um problema de previsão estatística, devido ao caráter aleatório da excitação. As equações diferenciais do movimento aplicadas ao meio fluido e à plataforma juntamente com as condições de contorno e iniciais constituem, então, um problema de contorno com condições iniciais em que se desconhecem os limites do meio fluido, bem como uma configuração inicial. Sua formulação não seria, assim, plausível, não fossem admitidas a priori determinadas hipóteses, que são explicitadas neste capítulo.

II.1 - Hipóteses e considerações gerais

Vai-se inicialmente aplicar as equações do movimento ao meio fluido e à plataforma independentemente. O diagrama da página II.2 indica as diversas simplificações que são introduzidas sequencialmente, podendo ser acompanhado à medida em que o texto se desenvolve.

Supõe-se fluido incompressível e newtoniano e se



desprezam os efeitos de tensão superficial. A 2ª Lei de Newton aplicada ao meio fluido resulta nas Equações de Navier-Stokes. Tais equações incluem termos relacionados aos efeitos viscosos. Observa-se existir separação no escoamento ao redor dos membros da plataforma, podendo-se esperar que os esforços de arrasto não serão desprezíveis. No entanto, faz-se a hipótese de que se possa inicialmente ignorar a viscosidade, devendo-se introduzir correções a posteriori. Assim, admitindo-se fluido invíscido, bem como escoamento irrotacional, chega-se à formulação da Teoria Potencial para o meio fluido. O apêndice A traz a caracterização de um problema genérico de escoamento potencial. Os sistemas de coordenadas e convenções são introduzidos no item A.1. No item A.2 são introduzidas as equações de Navier-Stokes e da continuidade. No item A.3 mostra-se que a hipótese de fluido invíscido somente implica em escoamento irrotacional se a totalidade das partículas fluidas esteve com a mesma velocidade, eventualmente em repouso, em algum instante. Admitindo-se que os movimentos da plataforma ocorram devido a perturbações que acontecem a partir de um instante em que o fluido estava em repouso, justifica-se a hipótese de escoamento irrotacional. Apresentam-se ainda neste item as equações de Laplace (A.3.6) e de Bernoulli para escoamento irrotacional (A.3.9). No item A.4 há o desenvolvimento das condições de contorno para superfícies rígidas (A.4.7) e para a superfície livre (A.4.8) e (A.4.10). O item A.7 traz a formulação de um problema potencial com superfície livre, composta da equação de

Laplace (A.7.1), de condições de contorno nas fronteiras e na superfície ((A.7.2) a (A.7.5)), de condições ao longe e de condições iniciais ((A.7.6) e (A.7.7)).

Quanto à plataforma, é considerada como um corpo rígido. A 2ª Lei de Newton se reduz, então, às Equações do Movimento para Corpo Rígido. Não se conhecem, no entanto, os esforços externos hidrostáticos e hidrodinâmicos aplicados à plataforma.

Apesar das simplificações já admitidas, ainda não se possui uma formulação adequada para o problema. De fato, o problema na região fluida possui a dificuldade do desconhecimento das fronteiras, e a resolução das equações para a plataforma esbarra no desconhecimento dos esforços externos a ela aplicados. São assim introduzidas hipóteses adicionais, a saber, pequenas perturbações na região fluida em relação à solução de repouso e pequenas oscilações da plataforma em torno de sua posição de equilíbrio em águas calmas. Na região fluida tal hipótese conduz à formulação da Teoria Potencial Linearizada. Mostra-se que as ondas harmônicas de pequena amplitude são solução deste problema e podem representar adequadamente ondas que ocorrem em mares profundos [92]. Quanto aos movimentos da plataforma, devem ser obrigatoriamente limitados de modo a garantir sua operacionalidade.

O apêndice B trata da linearização das soluções na região fluida em torno da solução de repouso, sendo introduzida a Teoria de Ondas Harmônicas de Pequena Amplitude. No item B.1 há a expansão do potencial de velocidades e da elevação

da superfície livre em série de potências e a formulação do problema potencial em termos dessas séries, apresentando-se a equação de Laplace (B.1.4), as condições de contorno ((B.1.5) a (B.1.8)), condições ao longe e condições iniciais ((B.1.9) e (B.1.10)). No item B.2 desprezam-se os termos não lineares, resultando a formulação do problema linearizado, com a equação de Laplace (B.2.1), as condições de contorno ((B.2.2, (B.2.5) , (B.2.8)), condições ao longe e condições iniciais ((B.2.6) e (B.2.7)). Observa-se que tal formulação não exige mais que se conheça a posição da plataforma em cada instante para a imposição das condições de contorno. As condições são aplicadas na posição média de equilíbrio da plataforma. No item B.3, apresenta-se a formulação do problema admitidas soluções harmônicas simples. São introduzidas as notações de amplitudes complexas (B.3.3) e de componentes harmônicas (B.3.8). O problema é formulado segundo cada uma dessas notações ((B.3.4) a (B.3.7) e (B.3.9) a (B.3.11)), a menos das condições iniciais que não são satisfeitas devido à hipótese de oscilações harmônicas simples. Porém, deve-se satisfazer à condição de radiação, comentada no item B.4.

O apêndice C traz o estabelecimento e linearização das equações do movimento aplicadas à plataforma. Os sistemas de coordenadas e convenções, bem como os ângulos de Euler consagrados de rumo, trim e banda são introduzidos no item C.1. No item C.2 apresentam-se as expressões de velocidade e aceleração de uma partícula móvel em um referencial não inercial. No item C.3 há equações do movimento para um sistema rígido, como está sendo considerada a plataforma. No item

C.4 comenta-se a dificuldade de resolução das equações do movimento conforme estabelecida em C.3. No item C.5 são introduzidas as equações do movimento linearizadas.

Diante da hipótese de linearidade das ondas do mar, torna-se possível sua representação no domínio da frequência. Em águas profundas, os mares plenamente desenvolvidos podem ser representados adequadamente por processos aleatórios estacionários, ergódicos e gaussianos [93], sendo construídos seus espectros de energia. Admitidas em primeira instância funções de transferência lineares para a plataforma, as respostas também resultam processos aleatórios, estacionários, ergódicos e gaussianos. Assim, pode-se inicialmente construir as funções de transferência para a plataforma através da verificação de seu comportamento independentemente a ondas de amplitude unitária e frequências fixadas. Em seguida, constroem-se os espectros das respostas, admitido um certo espectro de excitação.

Admita-se, então, um certo trem de ondas regular incidente segundo uma determinada direção. A presença da plataforma na região bem como os seus movimentos provocam perturbações que se superpõem às das ondas incidentes. Observa-se, assim, que mesmo para o problema determinístico de incidência de um trem de ondas regulares com amplitude unitária e frequência e direção definidas há dificuldade por se desconhecer a perturbação causada pelos movimentos da plataforma, que são ignorados. Devido à linearidade do problema, no entanto, pode-se considerar o problema na região fluida como a superposição de

dois outros, a saber:

- (1º) Problema da onda incidente sobre a plataforma fixada em sua posição média de equilíbrio;
- (2º) Problema de oscilação da plataforma em cada um de seus graus de liberdade e na ausência de ondas incidentes.

O primeiro problema é denominado de problema de difração e conduz ao cálculo dos chamados esforços de excitação em ondas. O segundo problema é denominado de problema de radiação e conduz ao cálculo dos chamados esforços de restauração. Note-se que os esforços de restauração resultam funções das amplitudes desconhecidas com que a plataforma oscilaria livremente. No entanto, o conjunto dos esforços de excitação em ondas e de restauração constituem esforços externos aplicados à plataforma. As amplitudes dos movimentos são então determinadas pela resolução das equações do movimento aplicadas à plataforma.

Neste capítulo formulam-se os problemas de difração e de radiação e estabelecem-se as equações de movimento para a plataforma. As correções devidas aos efeitos viscosos somente são introduzidas no capítulo III.

Suponha-se que o sistema de referência OXYZ, fixo à plataforma, seja tal, que o plano OXY coincida com o plano central-longitudinal da plataforma, o plano OXZ coincida com o plano da superfície da água quando em repouso, e o centro de gravidade G da plataforma esteja na posição $(0, Y_G, 0)$.

Sejam ξ_i , $i = 1, 2, 3$, deslocamentos lineares nas direções dos eixos OX , OY e OZ , respectivamente. Sejam ξ_i , $i = 4, 5, 6$, deslocamentos angulares em torno desses eixos. Observe-se que na nomenclatura Naval são comuns os termos:

avanço ou "surge" para ξ_1 ;

arfagem ou "heave" para ξ_2 ;

deriva ou "sway" para ξ_3 ;

balanço ou "roll" para ξ_4 ;

guinada ou "yaw" para ξ_5 ;

caturro ou "pitch" para ξ_6 .

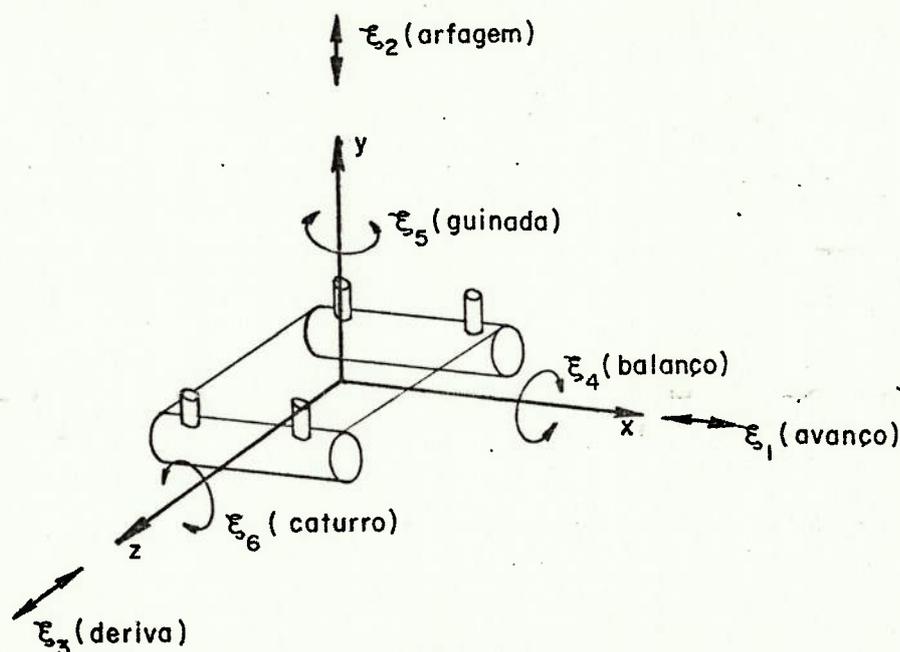


Fig.II.1.1 - Movimentos da plataforma

Seja

$$\underline{n} = n_1 \underline{I} + n_2 \underline{J} + n_3 \underline{K}$$

a normal externa à plataforma fixada em sua posição média (que corresponde à posição de equilíbrio estático), sendo n_1 , n_2 e n_3 as suas componentes nos eixos do referencial fixo à plataforma OXYZ.

Seja

$$\underline{R} \wedge \underline{n} = n_4 \underline{I} + n_5 \underline{J} + n_6 \underline{K} ,$$

onde

$$\underline{R} = X \underline{I} + Y \underline{J} + Z \underline{K} .$$

Isto é:

$$n_4 = Y n_3 - Z n_2 ,$$

$$n_5 = Z n_1 - X n_3 ,$$

$$n_6 = X n_2 - Y n_1$$

O vetor $[n_1, n_2, \dots, n_6]$ é chamado "normal generalizada".

II.2 - Desmembramento do problema na região fluida em problema de difração e problema de radiação.

O potencial total na região fluida, de agora em di-

ante denominado por Φ_T , pode ser encarado como a seguinte soma:

$$(II.2.1) \quad \Phi_T = \Phi_E + \Phi_R,$$

onde Φ_E representa o potencial de esforços excitantes;
e Φ_R representa o potencial de esforços restauradores.

Observe-se também que Φ_E pode ser visto como a soma de duas parcelas:

$$(II.2.2) \quad \Phi_E = \Phi_I + \Phi_D,$$

onde Φ_I representa o potencial de onda harmônica simples de amplitude pequena, incidente na plataforma;
e Φ_D representa o potencial de perturbação (ou de difração) causado pela presença da plataforma.

Também Φ_R pode ser decomposto em:

$$(II.2.3) \quad \Phi_R = \sum_{j=1}^6 \xi_j \Phi_j$$

onde Φ_j , $j=1, \dots, 6$, são potenciais correspondentes a cada um dos movimentos de oscilação da plataforma nos seus 6 graus de liberdade com amplitude unitária;
 ξ_j , $j=1, \dots, 6$, são as amplitudes (incógnitas) com que a plataforma oscilaria livremente.

Utilizando-se a 1ª notação usual, com amplitudes com

plexas, descrita em B.3, pode-se formular o problema de esforços excitantes como abaixo (ver (B.3.4) a (B.3.7)):

(1) Equação de Laplace:

$$\nabla^2(\phi_I + \phi_D) = 0 \text{ na região fluida,}$$

ou, como $\nabla^2\phi_I = 0$ na região fluida,

$$(II.2.4) \quad \nabla^2\phi_D = 0 \text{ na região fluida.}$$

(2) Condição de contorno cinemática a ser satisfeita na superfície da plataforma fixada na posição média:

$$(II.2.5) \quad \frac{\partial}{\partial n}(\phi_I + \phi_D) = 0$$

(3) Condição de contorno na superfície livre:

$$g \frac{\partial(\phi_I + \phi_D)}{\partial y} - w^2(\phi_I + \phi_D) = 0 \text{ para } y = 0,$$

ou, como $g \frac{\partial\phi_I}{\partial y} - w^2\phi_I = 0$ para $y = 0$,

$$(II.2.6) \quad g \frac{\partial\phi_D}{\partial y} - w^2\phi_D = 0 \text{ para } y = 0.$$

(4) Condição de radiação:

(II.2.7) ϕ_D deve ser um potencial de ondas que se afastam do corpo.

Quanto ao problema de esforços restauradores, tem-se a seguinte formulação:

(1) Equação de Laplace

$$(II.2.8) \quad \nabla^2 \phi_j = 0, \quad j=1, \dots, 6, \quad \text{na região fluida.}$$

(2) Condição de contorno cinemática na superfície da plataforma:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega n_j, \quad j = 1, \dots, 6,$$

ou

$$(II.2.9) \quad \nabla \phi_j \cdot \underline{n} = i\omega n_j, \quad j = 1, \dots, 6,$$

que resulta da expressão (B.2.5)

(3) Condição de contorno na superfície livre:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \omega^2 \phi = 0, \quad j = 1, \dots, 6, \quad \text{para } y = 0$$

(4) Condição de radiação:

(II.2.11) ϕ_j , $j = 1, \dots, 6$, devem ser potenciais de ondas que se afastam do corpo.

II.3 - Equações do movimento linearizadas para a plataforma

Seja

$$(II.3.1) \quad \underline{F} = E_1 \underline{I} + E_2 \underline{J} + E_3 \underline{K}$$

a força externa aplicada à plataforma, onde E_1 , E_2 e E_3 são suas componentes ao longo de OX , OY e OZ , respectivamente, e seja:

$$(II.3.2) \quad \underline{m} = E_4 \underline{I} + E_5 \underline{J} + E_6 \underline{K}$$

o momento externo aplicado.

Define-se:

$$(II.3.3) \quad [M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & -MY_G \\ \rho & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & MY_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MY_G & (I_{XX} + MY_G^2) - I_{XY} & -I_{XZ} & \\ 0 & 0 & 0 & -I_{YX} & -I_{YY} & -I_{YZ} \\ -MY_G & 0 & 0 & -I_{ZX} & -I_{ZY} & (I_{ZZ} + MY_G^2) \end{bmatrix}$$

denominada "matriz de massas" da plataforma.

Considerando E_j , $j=1, \dots, 6$ harmônicas resultam ξ_j , $j = 1, \dots, 6$ também harmônicas e pode-se escrever as equações do movimento da plataforma como:

$$(II.3.4) \quad \sum_{j=1}^6 M_{ij} \ddot{\xi}_j = E_i, \quad i = 1, \dots, 6,$$

onde M_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$ são elementos da matriz $[M]$

II.4 - Esforços excitantes

Considere-se o problema de esforços excitantes formulado no item II.2 (eq.(II.2.4) a (II.2.7)).

As forças hidrodinâmicas agentes na plataforma podem ser calculadas a partir da integração da pressão hidrodinâmica, segundo a equação de Bernoulli linearizada. Sendo

$$(II.4.1) \quad \underline{F}^E = E_1^E \underline{I} + E_2^E \underline{J} + E_3^E \underline{K}$$

a força hidrodinâmica harmônica simples dada em termos da 1ª notação usual do item B.3, onde E_1^E , E_2^E e E_3^E são suas componentes em OXYZ, e sendo S a superfície da plataforma, tem-se:

$$(II.4.2) \quad \underline{F}^E = \iint_S p \underline{n} \, d\sigma \quad , \text{ ou,}$$

$$(II.4.3) \quad E_j^E = \iint_S p \, n_j \, d\sigma = -\rho i w \iint_S \Phi_E \, n_j \, d\sigma = \\ = -\rho i w \left[\iint_S \Phi_I \, n_j \, d\sigma + \iint_S \Phi_D \, n_j \, d\sigma \right] \quad , \quad j = 1, 2, 3.$$

Sendo

$$(II.4.4) \quad \underline{m}^E = E_4^E \underline{I} + E_5^E \underline{J} + E_6^E \underline{K}$$

o momento hidrodinâmico harmônico simples dado em termos da 1ª notação usual do item B.3, onde E_4^E , E_5^E e E_6^E são suas componentes em OXYZ, tem-se:

$$(II.4.5) \quad m = \iint_S \underline{r} \wedge p \underline{n} \, d\sigma ,$$

ou,

$$(II.4.6) \quad E_j^E = \iint_S p n_j \, d\sigma \quad , \quad j = 4, 5, 6$$

Comparando-se com (II.4.3) e empregando-se (II.4.6), pode-se ter, em resumo:

$$(II.4.7) \quad E_j^E = -\rho i \omega \left[\iint_S \Phi_I n_j \, d\sigma + \iint_S \Phi_D n_j \, d\sigma \right] , \quad j = 1, \dots, 6,$$

que se denominam esforços excitantes.

As parcelas

$$(II.4.8) \quad E_j^I = -\rho i \omega \iint_S \Phi_I n_j \, d\sigma , \quad j = 1, \dots, 6,$$

são denominadas de esforços de Froude-Krylov, e podem ser calculadas, já que se conhece o potencial Φ_I de onda incidente.

As parcelas

$$(II.4.9) \quad E_j^D = -\rho i \omega \iint_S \Phi_D n_j \, d\sigma , \quad j = 1, \dots, 6,$$

são denominadas esforços de difração, e seu cálculo não é imediato, pois não se conhece Φ_D a priori

II.5 - Esforços restauradores

Considere-se o problema de esforços restauradores

formulados no item II.2 (eq. (II.2.8) a (II.2.11)).

Analogamente aos esforços excitantes, pode-se calcular os esforços restauradores por:

$$(II.5.1) \quad E_j^R = \sum_{i=1}^6 \{-\rho i w \iint_S \xi_i \phi_i n_j d\sigma\} =$$

$$= -\rho i w \iint_S n_j \sum_{i=1}^6 (\xi_i \phi_i) d\sigma, \quad j = 1, \dots, 6,$$

onde

$$(II.5.2) \quad \underline{F}^R = E_1^R \underline{I} + E_2^R \underline{J} + E_3^R \underline{K},$$

$$(II.5.3) \quad \underline{m}^R = E_4^R \underline{I} + E_5^R \underline{J} + E_6^R \underline{K}$$

são, respectivamente, a força e o momento hidrodinâmicos simples dados em termos da 1ª notação usual do item B.3.

Pode-se calcular, também, a componente j -ésima do esforço devido ao deslocamento unitário i -ésimo por:

$$(II.5.4) \quad T_{ij} = -\rho i w \iint_S \phi_i n_j d\sigma, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Assim, (II.5.1) fica :

$$(II.5.5) \quad E_j^R = \sum_{i=1}^6 \xi_i T_{ij}, \quad j = 1, \dots, 6$$

Definem-se também:

$$(II.5.6) \quad A_{ij} = \frac{1}{w^2} \text{Re}\{T_{ij}\}, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

chamados coeficientes de massa adicionada da plataforma, e

$$(II.5.7) \quad B_{ij} = -\frac{1}{iw} \operatorname{Im}\{T_{ij}\}, \quad i, j=1, \dots, 6,$$

chamados coeficientes de amortecimento da plataforma.

Observe-se que:

$$(II.5.8) \quad T_{ij} = w^2 A_{ij} - iw B_{ij}, \quad i, j=1, \dots, 6, \text{ e,}$$

$$(II.5.9) \quad E_j^R = \sum_{i=1}^6 [w^2 A_{ij} - iw B_{ij}] \xi_i, \quad j=1, \dots, 6.$$

Note-se, também, que os coeficientes A_{ij} e B_{ij} dependem estritamente da geometria e de características da plataforma.

II.6 - Esforços hidrostáticos e gravitacionais

A integração da pressão hidrostática ao longo da superfície do casco da plataforma conduz à força hidrostática, dada por:

$$(II.6.1) \quad F^H = -\rho g \iint_{\text{todo } P \in S} y_P \underline{n} \, d\sigma,$$

onde P é ponto da superfície molhada S na posição média de equilíbrio.

O momento hidrostático, por sua vez, pode ser dado por:

$$(II.6.2) \quad m^H = -\rho g \iint_{\text{todo } P \in S} y_P \underline{R}_P \wedge \underline{n} \, d\sigma$$

Sejam

$$(II.6.3) \quad \underline{E}^H = E_1^H \underline{I} + E_2^H \underline{J} + E_3^H \underline{K} ,$$

$$(II.6.4) \quad \underline{m}^H = E_4^H \underline{I} + E_5^H \underline{J} + E_6^H \underline{K}$$

Levando-se, então, em consideração (II.5.1) a (II.5.5),
tem-se:

$$(II.6.5) \quad E_j^H = -\rho g \iiint_{\text{todo P\&S}} y_P n_j d\sigma \quad j = 1, \dots, 6$$

Por outro lado, por (C.2.4) tem-se:

$$(II.6.6) \quad \underline{r}_P = \underline{r}_O + \underline{R}_P ,$$

ou,

$$(II.6.7) \quad x_P \underline{i} + y_P \underline{j} + z_P \underline{k} = x_O \underline{i} + y_O \underline{j} + z_O \underline{k} + \\ + X_P \underline{I} + Y_P \underline{J} + Z_P \underline{K} ,$$

ou, por (C.1.2),

$$(II.6.8) \quad x_P (\alpha_{11} \underline{I} + \alpha_{21} \underline{J} + \alpha_{31} \underline{K}) + y_P (\alpha_{12} \underline{I} + \alpha_{22} \underline{J} + \alpha_{32} \underline{K}) + \\ + z_P (\alpha_{13} \underline{I} + \alpha_{23} \underline{J} + \alpha_{33} \underline{K}) = x_O (\alpha_{11} \underline{I} + \alpha_{21} \underline{J} + \alpha_{31} \underline{K}) + \\ + y_O (\alpha_{12} \underline{I} + \alpha_{22} \underline{J} + \alpha_{32} \underline{K}) + z_O (\alpha_{13} \underline{I} + \alpha_{23} \underline{J} + \alpha_{33} \underline{K}) + \\ + X_P \underline{I} + Y_P \underline{J} + Z_P \underline{K}$$

Assim, tem-se nas direções de \underline{I} , \underline{J} e \underline{K} , respectivamente:

$$(II.6.9) \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_p + \alpha_{12}y_p + \alpha_{13}z_p = \alpha_{11}x_o + \alpha_{12}y_o + \alpha_{13}z_o + X_p \\ \alpha_{21}x_p + \alpha_{22}y_p + \alpha_{23}z_p = \alpha_{21}x_o + \alpha_{22}y_o + \alpha_{23}z_o + Y_p \\ \alpha_{31}x_p + \alpha_{32}y_p + \alpha_{33}z_p = \alpha_{31}x_o + \alpha_{32}y_o + \alpha_{33}z_o + Z_p \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, tem-se para y_p :

$$y_p = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11}x_o + \alpha_{12}y_o + \alpha_{13}z_o + X_p & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21}x_o + \alpha_{22}y_o + \alpha_{23}z_o + Y_p & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31}x_o + \alpha_{32}y_o + \alpha_{33}z_o + Z_p & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Linearizando-se os deslocamentos, tem-se por (C.5.3)

$$y_p = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 + \xi_6 \xi_2 - \xi_5 \xi_3 + X_p & -\xi_5 \\ -\xi_6 & -\xi_6 \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 \xi_3 + Y_p & \xi_4 \\ \xi_5 & \xi_5 \xi_1 - \xi_4 \xi_2 + \xi_3 + Z_p & 1 \end{bmatrix}$$

onde os duplos e triplos produtos dos deslocamentos também são ignorados, resultando:

$$(II.6.12) \quad y_p = \xi_2 + Y_p - \xi_4 Z_p + \xi_6 X_p$$

Os esforços gravitacionais, por sua vez, correspondem aos esforços hidrostáticos para a plataforma em equilíbrio estático, e por analogia a (II.6.5) podem ser dados por:

$$(II.6.13) \quad E_j^G = -\rho g \iint_{\text{todo PeS}} Y_p n_j d\sigma$$

Assim, os esforços hidrostáticos menos os esforços gravitacionais são:

$$(II.6.14) \quad E_j^{HG} = -\rho g \iint_{\text{todo PeS}} (y_P - Y_P) n_j \, d\sigma$$

Por (II.6.12) tem-se:

$$(II.6.15) \quad E_j^{HG} = -\rho g \iint_{\text{todo PeS}} (\xi_2 - \xi_4 Z_P + \xi_6 X_P) n_j \, d\sigma$$

Ou:

$$(II.6.16) \quad E_j^{HG} = -\rho g \xi_2 \iint_S n_j \, d\sigma + \rho g \xi_4 \iint_S Z_P n_j \, d\sigma - \rho g \xi_6 \iint_S X_P n_j \, d\sigma$$

Fazendo:

$$(II.6.17) \quad C_{2j} = -\rho g \iint_S n_j \, d\sigma$$

$$(II.6.18) \quad C_{4j} = \rho g \iint_S Z_P n_j \, d\sigma,$$

$$(II.6.19) \quad C_{6j} = -\rho g \iint_S X_P n_j \, d\sigma, \text{ e,}$$

$$(II.6.20) \quad C_{ij} = 0 \quad \text{para } i = 1, 3, 5, \text{ tem-se:}$$

$$(II.6.21) \quad E_j^{HG} = \sum_{i=1}^6 C_{ij} \xi_j, \quad j = 1, \dots, 6.$$

II.7 - Montagem da matriz de transferência para a plataforma

Seja $[A]$ a matriz das massas e momentos adicionados para a plataforma, $[B]$ a matriz dos amortecimentos e $[C]$ a matriz dos coeficientes de restauração hidrostática. Sejam, ainda, os seguintes vetores-coluna de dimensão seis:

- $[E^I]$: esforços de Froude-Krylov, dados por (II.4.8),
- $[E^D]$: esforços de difração, dados por (II.4.9),
- $[E^R]$: esforços de restauração, dados por (II.5.9),
- $[E^{HG}]$: esforços hidrostáticos menos os de gravidade, dados por (II.6.21).

As equações do movimento linearizadas (II.3.4) em notação matricial ficam:

$$(II.7.1) \quad [E^I] + [E^D] + [E^R] + [E^{HG}] = -w^2 [M] [\xi]$$

Substituindo (II.5.9) e (II.6.21) em (II.7.1), tem-se:

$$(II.7.2) \quad [E^I] + [E^D] = \{-w^2([M] + [A]) + iw[B] + [C]\} [\xi]$$

Define-se a matriz de transferência da plataforma por:

$$(II.7.3) \quad [H] = \{-w^2([M] + [A]) + iw[B] + [C]\}$$

CAPÍTULO III

O MÉTODO DA SÍNTESE HIDRODINÂMICA

A denominação "Síntese Hidrodinâmica" foi aparentemente introduzida por Paulling [72] em 1970 para designar um procedimento para análise de estruturas flutuantes submetidas a ondas. O método se aplica a estruturas cujas obras vivas são compostas de elementos dos seguintes tipos:

- elementos esbeltos cilíndricos, cujos comprimentos são da ordem de grandeza das dimensões principais da estrutura;

- elementos de forma arbitrária, em que suas dimensões principais têm a mesma ordem de grandeza e são reduzidas em relação às dimensões principais da estrutura, chamados genericamente de elementos "pequenos".

As plataformas semi-submersíveis e as plataformas de pernas tracionadas são exemplos de estruturas às quais se aplica o Método da Síntese Hidrodinâmica.

Para o cálculo dos esforços e dos coeficientes hidrodinâmicos recorre-se à Equação de Morison [60], que é apresentada no apêndice D.

Neste capítulo desenvolve-se o método, apresentando-se as hipóteses e simplificações admitidas e as limitações de correntes.

III.1 - Hipóteses e convenções

A resolução do problema potencial conforme formulação do capítulo II seria de extrema complexidade para plataformas semi-submersíveis, se não se admitissem hipóteses simplificadoras, já que, ao contrário do que ocorre para os navios, todas as dimensões principais das plataformas têm a mesma ordem de grandeza. Além disso, os esforços de arrasto não são desprezíveis em relação aos esforços de Froude-Krylov, de difração, de restauração e de inércia, devendo também ser estimados.

Admite-se basicamente que todos os elementos que compõem as obras vivas da plataforma, esbeltos ou "pequenos", possam ser considerados hidrodinamicamente independentes, isto é, desprezam-se os efeitos de interação hidrodinâmica. Calculam-se, então, os coeficientes hidrodinâmicos e os esforços de excitação em ondas para cada elemento considerado isoladamente, compondo-se em seguida os resultados para a plataforma.

A cada elemento associa-se um sistema local de coordenadas cartesianas direto $O_e X_e Y_e Z_e$. Sejam \underline{I}_e , \underline{J}_e e \underline{K}_e os versores ortonormais de $O_e X_e Y_e Z_e$. Os versores do sistema local fixado a cada elemento e os versores do sistema global da plataforma OXYZ se relacionam por:

$$(III.1.1) \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_e \\ \underline{J}_e \\ \underline{K}_e \end{bmatrix} = [\alpha_e] \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{J} \\ \underline{K} \end{bmatrix}$$

onde $[\alpha_e]$ é uma matriz 3×3 dada por:

$$[\alpha_e] = \begin{bmatrix} (\cos\theta_e \cos\psi_e) & (\sin\theta_e) & (-\cos\theta_e \sin\psi_e) \\ (\sin\phi_e \sin\psi_e - \cos\phi_e \sin\theta_e \cos\psi_e) & (\cos\phi_e \cos\theta_e) & (\sin\phi_e \cos\psi_e + \cos\phi_e \sin\theta_e \sin\psi_e) \\ (\cos\phi_e \sin\psi_e + \sin\phi_e \sin\theta_e \cos\psi_e) & (-\sin\phi_e \cos\theta_e) & (\cos\phi_e \cos\psi_e - \sin\phi_e \sin\theta_e \sin\psi_e) \end{bmatrix}$$

com ψ_e , θ_e e ϕ_e sendo os ângulos de Euler de precessão, nutação e rotação própria que posicionam o sistema $O_e X_e Y_e Z_e$ em relação ao sistema OXYZ, conforme indicação da figura III.1.1.

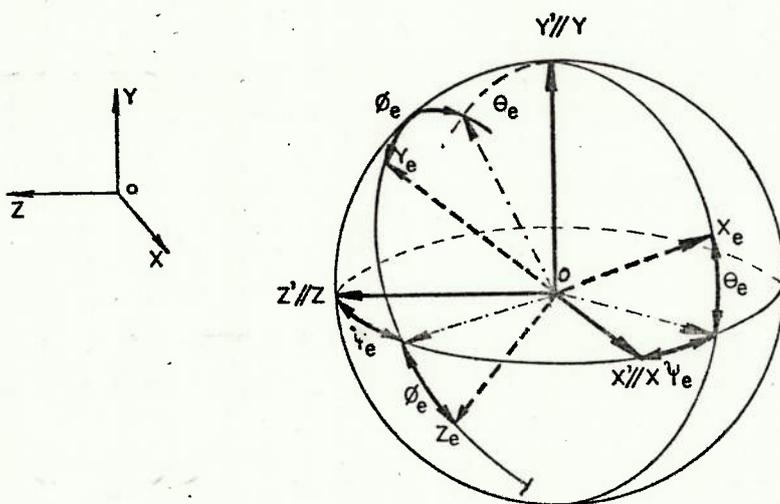


Fig.III.1.1 - Sistema de coordenadas local

III.2 - Esforços excitantes em elementos esbeltos cilíndricos

Considere-se um elemento esbelto cilíndrico da plataforma. Suponha-se, por exemplo, que o sistema local de refe -

rências $O_e X_e Y_e Z_e$ fixo a este elemento seja tal que o eixo $O_e Z_e$ coincida com o eixo do cilindro e em que a origem O_e se encontra na sua seção mediana. Supõe-se também que os eixos $O_e X_e$ e $O_e Y_e$ sejam tais que se conheçam os coeficientes hidrodinâmicos segundo estas direções para as seções do cilindro. Os coeficientes de amortecimento para cada seção segundo as direções de $O_e X_e$ e $O_e Y_e$ são representados por C_{Dx} e C_{Dy} , respectivamente, e os coeficientes de massa adicionada por C_{Mx} e C_{My} .

Considere-se o problema em que o elemento está fixo e isolado em um meio fluido com superfície livre, em que existe um trem de ondas regulares incidindo segundo uma determinada direção.

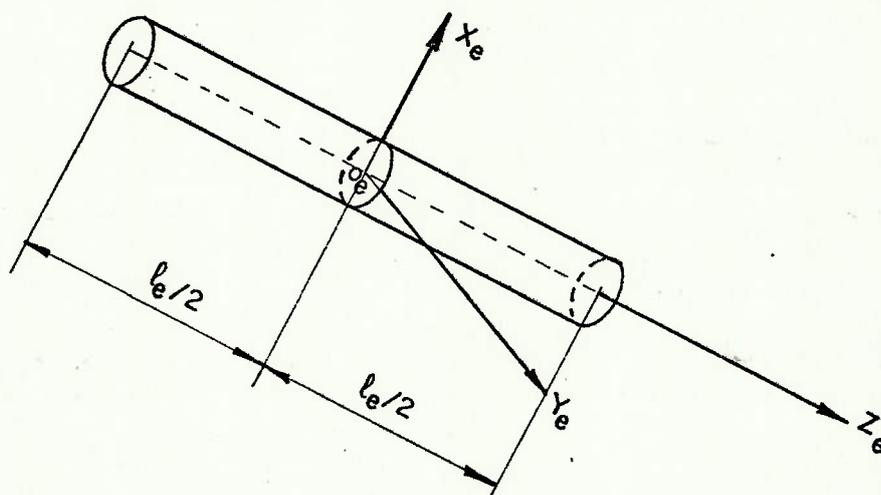


Fig. III.2.1 - Elemento esbelto cilíndrico-sistema local de referências.

As forças de excitação em ondas para o cilindro, dadas em relação ao referencial $O_e X_e Y_e Z_e$, podem ser calculadas

pela Equação de Morison (ver item D.4, equação D.4.3), dada por:

$$(III.2.1) \quad \underline{F}_e^E = \int_{-\ell_e/2}^{\ell_e/2} \left\{ \begin{array}{l} v_{X_e} |v_{X_e}| \\ v_{Y_e} |v_{Y_e}| \\ v_{Z_e} |v_{Z_e}| \end{array} \right\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho d_x C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho d_y C_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \dot{v}_{X_e} \\ \dot{v}_{Y_e} \\ \dot{v}_{Z_e} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \rho A C_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho A C_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} \} dz_e,$$

onde a notação é a mesma utilizada no apêndice D, ou seja:

v_{X_e} , v_{Y_e} e v_{Z_e} são as componentes das velocidades das partículas fluidas segundo as direções de $O_e X_e$, $O_e Y_e$ e $O_e Z_e$, respectivamente, e calculadas no ponto que é a interseção de cada seção com o eixo $O_e Z_e$;

\dot{v}_{X_e} , \dot{v}_{Y_e} e \dot{v}_{Z_e} são as correspondentes acelerações;

ρ é a densidade da água,

d_x e d_y são as projeções da seção reta segundo os eixos $O_e Y_e$ e $O_e X_e$, respectivamente;

A é a área da seção, e

ℓ_e é o comprimento do elemento.

Os momentos de excitação em ondas agentes no cilin -

dro e dados em relação ao referencial $O_e X_e Y_e Z_e$ são (ver item D.4, equação D.4.4):

$$(III.2.2) \quad \underline{m}_e^E = \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \left\{ \begin{array}{c} v_{X_e} \\ v_{Y_e} \\ v_{Z_e} \end{array} \right\}^t \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} \rho d_x C_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho d_y C_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} J_{-e} \\ -I_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{ccc} \dot{v}_{X_e} \\ \dot{v}_{Y_e} \\ \dot{v}_{Z_e} \end{array} \right]^t \left[\begin{array}{ccc} \rho A C_{M_x} & 0 & 0 \\ 0 & \rho A C_{M_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} J_{-e} \\ (-I_{-e}) \\ K_{-e} \end{bmatrix} \} dz_e .$$

As velocidades das partículas fluidas dadas no sistema de referência local se relacionam com aquelas dadas no sistema global por:

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{X_e} \\ v_{Y_e} \\ v_{Z_e} \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1} \begin{bmatrix} I_{-e} \\ J_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{X_e} \\ v_{Y_e} \\ v_{Z_e} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{-e} \\ J_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix} , \text{ ou,}$$

$$\begin{bmatrix} v_{X_e} \\ v_{Y_e} \\ v_{Z_e} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1}$$

ou, ainda, como $([\alpha_e]^{-1})^t = ([\alpha_e]^t)^t = [\alpha_e]$,

$$(III.2.3) \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_{X_e} \\ \dot{v}_{Y_e} \\ \dot{v}_{Z_e} \end{bmatrix} = [\alpha_e] \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix},$$

onde v_X, v_Y e v_Z são as velocidades das partículas fluidas segundo as direções de OX, OY e OZ, respectivamente.

Analogamente, tem-se:

$$(III.2.4) \quad \begin{bmatrix} \ddot{v}_{X_e} \\ \ddot{v}_{Y_e} \\ \ddot{v}_{Z_e} \end{bmatrix} = [\alpha_e] \begin{bmatrix} \dot{v}_X \\ \dot{v}_Y \\ \dot{v}_Z \end{bmatrix},$$

onde \dot{v}_x, \dot{v}_y e \dot{v}_z são as acelerações das partículas fluidas segundo as direções OX, OY e OZ, respectivamente.

Assim, por (III.2.3) e (III.2.4) calculam-se as velocidades e acelerações das partículas fluidas ao longo do eixo do cilindro e por (III.2.1) e (III.2.2) calculam-se os esforços de excitação em ondas.

Considere-se a seguinte notação:

$$(III.2.5) \quad [b_e] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho d_x C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho d_y C_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[a_e] \triangleq \begin{bmatrix} \rho C_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho C_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sejam, também

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2.6)} \quad [v_e^2]_o \stackrel{\Delta}{=} & \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{X_e} |v_{X_e}| dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Y_e} |v_{Y_e}| dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Z_e} |v_{Z_e}| dz_e \end{bmatrix}^t ; [w_e^2]_o \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{X_e} |v_{X_e}| z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Y_e} |v_{Y_e}| z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Z_e} |v_{Z_e}| z_e dz_e \end{bmatrix}^t ; \\
 [\dot{v}_e]_o \stackrel{\Delta}{=} & \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{X_e} dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{Y_e} dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{Z_e} dz_e \end{bmatrix}^t ; [\dot{w}_e]_o \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{X_e} z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{Y_e} z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \dot{v}_{Z_e} z_e dz_e \end{bmatrix}^t .
 \end{aligned}$$

As equações (III.2.1) e (III.2.2) podem então ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 \text{(III.2.7)} \quad \underline{F}_e^E &= ([v_e^2]_o [b_e] + [\dot{v}_e]_o [a_e]) \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} , \\
 \underline{m}_e^E &= ([w_e^2]_o [b_e] + [\dot{w}_e]_o [a_e]) \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ -K_e \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

III.3 - Esforços de restauração em elementos esbeltos cilíndricos.

Considerem-se a mesma notação e convenções do item anterior. Suponha-se também que a plataforma seja submetida a oscilações forçadas ξ_j , $j=1, \dots, 6$, em seus seis graus de liberdade correspondentes aos movimentos de avanço, arfagem, deriva, balanço, guinada e caturro, respectivamente.

Seja P_e um ponto genérico do eixo $O_e Z_e$ do cilindro. Na hipótese de pequenas oscilações, a velocidade de P_e pode ser calculada, como se observa pelas equações (C.2.7), (C.5.3) e (C.5.4) do apêndice C, por:

$$(III.3.1) \quad \underline{v}_{P_e} = \left[\dot{\xi}_1 + (\dot{\xi}_5 Z_{P_e} - \dot{\xi}_6 Y_{P_e}) \right] \underline{I} + \\ \left[\dot{\xi}_2 + (\dot{\xi}_6 X_{P_e} - \dot{\xi}_4 Z_{P_e}) \right] \underline{J} + \\ \left[\dot{\xi}_3 + (\dot{\xi}_4 Y_{P_e} - \dot{\xi}_5 X_{P_e}) \right] \underline{K} .$$

A sua aceleração, tendo em vista as equações (C.2.8), (C.5.3) e (C.5.4) do apêndice C, pode ser calculada por:

$$(III.3.2) \quad \underline{a}_{P_e} = \left[\ddot{\xi}_1 + (\ddot{\xi}_5 Z_{P_e} - \ddot{\xi}_6 Y_{P_e}) \right] \underline{I} + \\ \left[\ddot{\xi}_2 + (\ddot{\xi}_6 X_{P_e} - \ddot{\xi}_4 Z_{P_e}) \right] \underline{J} + \\ \left[\ddot{\xi}_3 + (\ddot{\xi}_4 Y_{P_e} - \ddot{\xi}_5 X_{P_e}) \right] \underline{K} .$$

As equações (III.3.1) e (III.3.2) podem ser reescri-

tas como:

$$(III.3.3) \quad \underline{v}_{P_e} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_6 \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & -Z_{P_e} & Y_{P_e} \\ Z_{P_e} & 0 & -X_{P_e} \\ -Y_{P_e} & X_{P_e} & 0 \end{bmatrix} [\alpha_e]^{-1} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

$$(III.3.4) \quad \underline{a}_{P_e} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & -Z_{P_e} & Y_{P_e} \\ Z_{P_e} & 0 & -X_{P_e} \\ -Y_{P_e} & X_{P_e} & 0 \end{bmatrix} [\alpha_e]^{-1} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

As forças de restauração agentes no cilindro podem ser calculadas pela Equação de Morison, de maneira análoga ao que se fez no item III.2.

Considere-se, agora, a seguinte notação:

$$(III.3.5) \quad [V_e^2] \triangleq \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{X_e} \cdot (v_{P_e})_{X_e} |dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{Y_e} \cdot (v_{P_e})_{Y_e} |dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{Z_e} \cdot (v_{P_e})_{Z_e} |dZ_e \end{bmatrix}^t$$

$$[w_e^2] \triangleq \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{X_e} \cdot |(v_{P_e})_{X_e}| \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{Y_e} \cdot |(v_{P_e})_{Y_e}| \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (v_{P_e})_{Z_e} \cdot |(v_{P_e})_{Z_e}| \cdot Z_e \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

$$[\dot{v}_e] \triangleq \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{X_e} \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{Y_e} \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{Z_e} \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

$$[\dot{w}_e] \triangleq \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{X_e} \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{Y_e} \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} (\dot{v}_{P_e})_{Z_e} \cdot Z_e \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

onde $(v_{P_e})_{X_e}$, $(v_{P_e})_{Y_e}$ e $(v_{P_e})_{Z_e}$ são as componentes da velocidade do ponto P_e segundo as direções de $O_e X_e$, $O_e Y_e$ e $O_e Z_e$, respectiva -

mente $e(\dot{v}_e)_{x_e}$, $(\dot{v}_e)_{y_e}$ e $(\dot{v}_e)_{z_e}$ as correspondentes acelerações. Assim, as forças e momentos de restauração podem ser expressos por:

$$(III.3.6) \quad F_{-e}^R = ([v_e^2][b_e] + [\dot{v}_e][a_e]) \begin{bmatrix} I_{-e} \\ J_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix},$$

$$(III.3.7) \quad m_{-e}^R = ([w_e^2][b_e] + [\dot{w}_e][a_e]) \begin{bmatrix} J_{-e} \\ -I_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix}$$

III.4 - Linearização da expressão do arrasto

Considere-se, agora, o problema da plataforma oscilando livremente em região onde existam ondas regulares incidindo segundo uma determinada direção. Em cada elemento agirão esforços de excitação em ondas e esforços devidos ao movimento da plataforma. No entanto, as expressões (III.2.7) e (III.2.8) para determinação de esforços excitantes para o elemento fixo e as expressões (III.3.6) e (III.3.7) para cálculo de esforços restauradores para o elemento oscilando em águas anteriormente calmas envolvem termos não lineares devidos ao arrasto viscoso. Assim, a hipótese de linearidade admitida no capítulo II não é satisfeita, e os esforços agentes na plataforma livre submetida a ondas não podem ser calculados pelas expressões desenvolvidas em III.2 e III.3. Vai-se porém aplicar a Equação de Morison no elemento e, sendo as velocidades presentes nas equações (D.4.3) e (D.4.4) substituídas pelas velo-

cidas relativas entre os pontos do cilindro e as partículas fluidas.

Sejam:

$$(III.4.1) \quad [v_{rel}^2] = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}| \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}| \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}| \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

$$[w_{rel}^2] = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}| \cdot Z_e dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}| \cdot Z_e dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} \cdot |(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}| \cdot Z_e dZ_e \end{bmatrix}^t$$

A diferença entre os esforços de restauração e excitantes é, então, dada pelas equações abaixo:

$$(III.4.2) \quad F_{-e}^{ER} = \{ [v_{rel}^2] [b_e] + ([\dot{v}_e] - [\dot{v}_e]_o) [a_e] \} \begin{bmatrix} I_{-e} \\ J_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix}$$

e

$$(III.4.3) \quad m_{-e}^{ER} = \{ [w_{rel}^2] [b_e] + ([\dot{w}_e] - [\dot{w}_e]_o) [a_e] \} \begin{bmatrix} J_{-e} \\ -I_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix}$$

Para que se possa resolver as equações do movimento para ondas regulares mantendo o seu caráter linear, procede-se a um cálculo inicial arbitrando-se os valores de $|(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}|$, $|(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}|$ e $|(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}|$ e fazendo-se iterações até que a solução convirja. O caso de excitação aleatória está apresentado no capítulo VI.

Os valores v_{X_e} , v_{Y_e} e v_{Z_e} são sempre conhecidos. Resta arbitrar os valores $(v_{P_e})_{X_e}$, $(v_{P_e})_{Y_e}$ e $(v_{P_e})_{Z_e}$. Ao invés de se arbitrarem tais valores para os pontos dos eixos dos diversos cilindros, basta estimar as velocidades da plataforma como corpo rígido nos seis graus de liberdade, a saber, $\dot{\xi}_j$, $j = 1, \dots, 6$, calculando-se v_{P_e} em cada ponto pela equação (III.3.3).

III.5 - Elementos "pequenos"

Considere-se, agora, um elemento em que suas dimensões características possuam a mesma ordem de grandeza e sejam reduzidas em relação às dimensões principais da plataforma, de modo a se conhecerem os coeficientes de amortecimento e de massa adicionada segundo os eixos $O_e X_e Y_e Z_e$, a saber, C_{Dx} e C_{Mx} , C_{Dy} e C_{My} e C_{Dz} e C_{Mz} , respectivamente. Para esti-

ma desses coeficientes costuma-se aproximar o elemento "pequeno" por uma esfera equivalente que tenha o mesmo volume submerso do corpo original.

Neste caso, a equação (III.4.2) para cálculo da diferença entre forças excitantes e restauradoras continua válida desde que se reconsiderem algumas definições, conforme a seguir:

$$(III.5.1) \quad [b_e] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho A_x C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho A_y C_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \rho A_z C_{Dz} \end{bmatrix},$$

onde A_x , A_y e A_z são as áreas projetadas do elemento nos planos $Y_e Z_e$, $X_e Z_e$ e $X_e Y_e$, respectivamente,

$$(III.5.2) \quad [a_e] \triangleq \begin{bmatrix} \rho V C_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho V C_{My} & 0 \\ 0 & 0 & \rho V C_{Mz} \end{bmatrix},$$

onde V é o volume submerso do elemento,

$$(III.5.3) \quad [v_{rel}^2] \triangleq \begin{bmatrix} \{(v_{0_e})_{X_e} - v_{X_e}\} \cdot |(v_{0_e})_{X_e} - v_{X_e}| \\ \{(v_{0_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} \cdot |(v_{0_e})_{Y_e} - v_{Y_e}| \\ \{(v_{0_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} \cdot |(v_{0_e})_{Z_e} - v_{Z_e}| \end{bmatrix}^t,$$

onde as velocidades das partículas fluidas são avaliadas no

ponto O_e ,

$$(III.5.4) \quad [\dot{V}_e] \triangleq \begin{bmatrix} (\dot{v}_{O_e})_{X_e} \\ (\dot{v}_{O_e})_{Y_e} \\ (\dot{v}_{O_e})_{Z_e} \end{bmatrix}^t \quad e$$

$$[\dot{V}_e]_o \triangleq \begin{bmatrix} \dot{v}_{X_e} | \text{ponto } O_e \\ \dot{v}_{Y_e} | \text{ponto } O_e \\ \dot{v}_{Z_e} | \text{ponto } O_e \end{bmatrix}^t$$

Valem, também, as mesmas observações do item III.4 quanto à linearização da expressão do arrasto.

Os momentos excitantes e restauradores em relação ao sistema $O_e X_e Y_e Z_e$ são considerados nulos. Para que a equação (III.4.3) mantenha-se válida, definem-se ainda para elementos "pequenos":

$$(III.5.5) \quad [w_{rel}^2] \triangleq [0];$$

$$[\dot{w}_e] \triangleq [0];$$

$$[\dot{w}_e]_o \triangleq [0].$$

III.6 - Esforços excitantes e restauradores linearizados: elementos esbeltos cilíndricos.

Sejam c_X , c_Y e c_Z os valores para $|(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}|$, $|(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}|$ e $|(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}|$, respectivamente.

Consideram-se, ainda, as seguintes definições válidas para os elementos esbeltos cilíndricos:

$$(III.6.1) \quad [C] \triangleq \begin{bmatrix} c_X & 0 & 0 \\ 0 & c_Y & 0 \\ 0 & 0 & c_Z \end{bmatrix}; \quad [L] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -Z_{P_e} & Y_{P_e} \\ Z_{P_e} & 0 & -X_{P_e} \\ -Y_{P_e} & X_{P_e} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_I] \triangleq \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [C] dz_e; \quad [C_{IZ}] \triangleq \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [C] z_e dz_e;$$

$$[(LC)_I] \triangleq \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [L] [\alpha_e]^{-1} [C] dz_e; \quad [(LC)_{IZ}] \triangleq \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [L] [\alpha_e]^{-1} [C] z_e dz_e;$$

$$[L_I] \triangleq \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [L] dz_e; \quad [L_{IZ}] = \int_{-l_e/2}^{l_e/2} [L] z_e dz_e; \quad k_e = l_e;$$

$$[C \cdot v_e] = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{X_e} \cdot c_X dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Y_e} \cdot c_Y dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Z_e} \cdot c_Z dz_e \end{bmatrix}^t$$

$$[C \cdot v_e^Z] \Delta = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{X_e} \cdot c_X Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Y_e} \cdot c_Y Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} v_{Z_e} \cdot c_Z Z_e \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

Nessas condições, as expressões (III.4.1) tendo em vista (III.3.3) e (III.6.1) ficam:

$$(III.6.2) \quad [v_{rel}^2] = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1} [C_I] + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [(LC)_I] - [Cv_e]$$

$$[w_{rel}^2] = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1} [C_{IZ}] + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [(LC)_{IZ}] - [C v_e^Z]$$

De (III.3.5) e (III.3.4) tem-se:

$$(III.6.3) \quad [\dot{v}_e] = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t k_e [\alpha_e]^{-1} + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [L_I] [\alpha_e]^{-1}$$

e,

$$[\ddot{w}_e] = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [L_{IZ}] [\alpha_e]^{-1}.$$

Com a linearização do problema, pode-se agora desmembrar os esforços excitantes e restauradores. Indicando-se respectivamente por F_e^{RL} e m_e^{RL} as forças e os momentos restauradores linearizados agentes no elemento e , tem-se observando (III.4.2), (III.4.3), (III.6.2) e (III.6.3):

$$(III.6.4) \quad F_e^{RL} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1} [C_I] [b_e] + \begin{bmatrix} \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [(LC)_I] [b_e] + \\ + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t k_e [\alpha_e]^{-1} [a_e] + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t ([L_I] [\alpha_e]^{-1} [a_e]) \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}, e,$$

$$(III.6.5) \quad m_e^{RL} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix}^t [\alpha_e]^{-1} [C_{IZ}] [b_e] + \begin{bmatrix} \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t [(LC)_{IZ}] [b_e] + \\ + \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \\ \ddot{\xi}_6 \end{bmatrix}^t ([L_{IZ}] [\alpha_e]^{-1} [a_e]) \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

Indicando-se respectivamente por F_e^{EL} e m_e^{EL} as forças e os momentos excitantes linearizados agentes no elemento e , tem-se; observando (III.4.2), (III.4.3), (III.6.2) e (III.6.3):

$$(III.6.6) \quad \underline{F}_e^{EL} = ([Cv_e] [b_e] + [\dot{v}_e]_o [a_e]) \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

$$(III.6.7) \quad \underline{m}_e^{EL} = ([Cv_e^Z] [b_e] + [\dot{w}_e]_o [a_e]) \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

III.7 - Esforços excitantes e restauradores linearizados: elementos pequenos

Sejam, agora c_x , c_y e c_z os valores estimados para $|(v_{o_e})_{y_e} - v_{x_e}|$, $|(v_{o_e})_{y_e} - v_{y_e}|$ e $|(v_{o_e})_{z_e} - v_{z_e}|$, respectivamente, onde as velocidades são avaliadas no ponto O_e , origem do sistema local $O_e X_e Y_e Z_e$ fixado ao elemento "pequeno".

Reconsiderem-se, também, algumas das definições estabelecidas em (III.6.1), referindo-se agora a elementos "pequenos":

$$(III.7.1) \quad [C] \triangleq \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$$

$$[L] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -z_{o_e} & y_{o_e} \\ z_{o_e} & 0 & -x_{o_e} \\ -y_{o_e} & x_{o_e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[c_I] \stackrel{\Delta}{=} [c] ;$$

$$[c_{IZ}] \stackrel{\Delta}{=} [0] ;$$

$$[(LC)_I] \stackrel{\Delta}{=} [L][\alpha_e]^{-1} [C] ;$$

$$[(LC)_{IZ}] \stackrel{\Delta}{=} [0] ;$$

$$[L_I] = [L] ;$$

$$[L_{IZ}] = [0] ;$$

$$k_e = 1 .$$

Considerando as definições anteriores e as definições (III.5.1) e (III.5.2), as expressões (III.6.3) e (III.6.4) continuam válidas para cálculo dos esforços restauradores linearizados para elementos pequenos.

As expressões (III.6.6) e (III.6.7) também continuam válidas para cálculo de esforços excitantes linearizados nos elementos pequenos, desde que se redefinam:

$$[Cv_e] = \begin{bmatrix} c_x & v_{x_e} \\ c_y & v_{y_e} \\ c_z & v_{z_e} \end{bmatrix}^t , e$$

$$[Cv_e^Z]_0 = [0]$$

III.8 - Coefficientes hidrodinâmicos e esforços excitantes globais para a plataforma.

As expressões (III.6.4) e (III.6.5) permitem o cálculo dos esforços restauradores linearizados tanto para elementos esbeltos como para elementos "pequenos", desde que se considerem as definições das matrizes-coeficientes apropriadamente, conforme descrito nos itens III.6 e III.7.

Admitidos excitação harmônica e esforços restauradores lineares, esperam-se movimentos também harmônicos para a plataforma. Pode-se, então, utilizar a notação complexa introduzida no apêndice B (item B.3). Vai-se agora, então, entender ξ_i , $i=1, \dots, 6$ como amplitudes complexas dos deslocamentos. Seja w a frequência de oscilação.

Para o conjunto dos elementos, então, tem-se a seguinte força restauradora referida ao sistema global OXYZ:

$$\begin{aligned}
 \text{(III.8.1)} \quad \underline{F}^{RL} = & \{-iw \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^t \sum_e ([\alpha_e]^{-1} [C_I] [b_e] [\alpha_e]) + \\
 & -iw \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix}^t \sum_e ([LC]_I [b_e] [\alpha_e]) + \\
 & + w^2 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^t \sum_e (k_e [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e]) +
 \end{aligned}$$

$$+ w^2 \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix}^t \sum_e \left([L_I^-] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e] \right) \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} ,$$

O momento restaurador referido ao sistema global pode ser calculado por:

$$(III.8.2) \quad \underline{m}^{RL} = \sum_e \underline{m}_e^{RL} + \sum_e \underline{R}_{0e} \wedge \underline{F}_e^{RL} ,$$

onde

$$\underline{R}_{0e} = X_{0e} \underline{I} + Y_{0e} \underline{J} + Z_{0e} \underline{K}$$

Definindo

$$(III.8.3) \quad [L^-] = \begin{bmatrix} 0 & Z_{0e} & -Y_{0e} \\ -Z_{0e} & 0 & X_{0e} \\ Y_{0e} & -X_{0e} & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\alpha'_e] = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

pode-se verificar que a expressão (III.8.2) tendo em vista (III.8.4), fica:

$$(III.8.4) \quad \underline{m}_e^{RL} = \{-i w \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^t \sum_e \left([\alpha_e]^{-1} [C_{IZ}] [b_e] [\alpha'_e] + [\alpha_e]^{-1} [C_I] [b_e] [\alpha_e] [L^-] \right) + \right. \\ \left. -i w \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix}^t \sum_e \left([(LC)_{IZ}] [b_e] [\alpha'_e] + [(LC)_I] [b_e] [\alpha_e] [L^-] \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + w^2 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^t \sum_e (k_e [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e] [L^-]) + \\
 & + w^2 \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix}^t \sum_e ([L_{IZ}] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha'_e] + [L_I] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e] [L^-]) \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Comparando-se as expressões (III.8.1), (III.8.4) e a expressão (II.5.9) pode-se concluir que as matrizes de massas e momentos adicionados [A] e de amortecimentos [B] globais da estrutura, podem ser construídas através do esquema abaixo:

$$\begin{aligned}
 \text{(III.8.5)} \quad [A] &= \left[\begin{array}{c|c} \sum_e (k_e [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e]) & \sum_e (k_e [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e] [L^-]) \\ \hline \sum_e ([L_I] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e]) & \sum_e ([L_{IZ}] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha'_e] + [L_I] [\alpha_e]^{-1} [a_e] [\alpha_e] [L^-]) \end{array} \right]^t \\
 [B] &= \left[\begin{array}{c|c} \sum_e ([\alpha_e]^{-1} [C_I] [b_e] [\alpha_e]) & \sum_e ([\alpha_e]^{-1} [C_{IZ}] [b_e] [\alpha'_e] + [\alpha_e]^{-1} [C_I] [b_e] [\alpha_e] [L^-]) \\ \hline \sum_e ([LC]_I [b_e] [\alpha_e]) & \sum_e ([LC]_{IZ} [b_e] [\alpha'_e] + [LC]_I [b_e] [\alpha_e] [L^-]) \end{array} \right]^t
 \end{aligned}$$

Os esforços excitantes globais, por sua vez, podem

ser calculados pelas expressões (III.6.6) e (III.6.7).

As forças de excitação em ondas referidas ao sistema global são:

$$(III.8.6) \quad \underline{F}_e^E = \sum_e \left([Cv_e] [b_e] [\alpha_e] + [\dot{v}_e]_o [a_e] [\alpha_e] \right) \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix}$$

Os momentos de excitação em ondas referidos ao sistema global são:

$$\underline{m}_e^E = \sum_e \underline{m}_e^{EL} + \sum_e R_{0e} \wedge \underline{F}_e^{EL}$$

Considerando a definição (III.8.3) pode-se verificar:

$$(III.8.7) \quad \underline{m}_e^E = \sum_e \left\{ ([Cv_e] [b_e] [\alpha_e] + [\dot{v}_e]_o [a_e] [\alpha_e]) [L^-] + \right. \\ \left. + [Cv_e^Z] [b_e] [\alpha'_e] + [\dot{w}_e]_o [a_e] [\alpha'_e] \right\} \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO IV

O MÉTODO DA DISTRIBUIÇÃO DE FONTES DE W.FRANK

Apresenta-se neste capítulo um processo numérico para resolução de problema de contorno bi-dimensional de oscilação de cilindros parcialmente ou totalmente imersos em águas profundas. O potencial de velocidades é representado pela soma de potenciais devidos a fontes pulsantes distribuídas ao longo da seção reta do cilindro. As intensidades das fontes são incógnitas a serem determinadas pela imposição da condição de contorno cinemática à parte imersa do cilindro. As pressões hidrodinâmicas são obtidas através da Equação de Bernoulli linearizada e as forças e momentos hidrodinâmicos são obtidos pela integração dessas pressões ao longo do contorno imerso da seção. Tal método se deve a W.Frank [26], sendo usualmente denominado Método da Distribuição de Fontes de W.Frank.

IV.1 - Notação, hipóteses básicas e formulação do problema

Considerẽ-se um cilindro cuja seção reta é uma região simplesmente conexa, estando parcialmente ou totalmente imerso horizontalmente em águas profundas.

Seja $O'X'Y'Z'$ um sistema de coordenadas cartesianas direto fixo no cilindro, tal que $O'Z'$ seja um eixo longitudinal e $O'Y'Z'$ um plano vertical (Fig.IV.1.1). Em águas calmas o plano $O'X'Z'$ é paralelo à superfície livre.

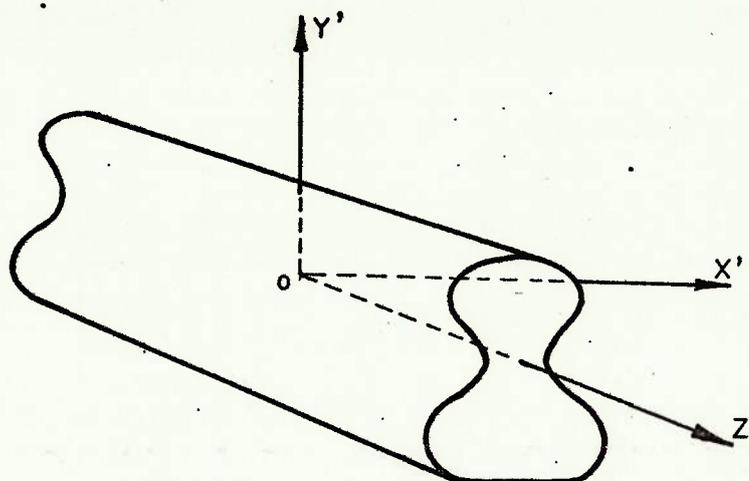


Fig.IV.1.1-Sistema de coordenadas fixo ao cilindro

Seja $OXYZ$ um sistema de coordenadas cartesianas direto fixo ao cilindro, cujos eixos OX, OY e OZ são respectivamente paralelos aos eixos $O'X', O'Y'$ e $O'Z'$ e cuja origem O corresponde a uma translação da origem O' na direção do eixo $O'Y'$ até o plano OXZ coincidir com a superfície das águas quando calmas.

Sejam $o'x'y'z'$ e $oxyz$ sistemas de coordenadas cartesianas diretos fixos à Terra respectivamente coincidentes com os sistemas $O'X'Y'Z'$ e $OXYZ$ em águas calmas.

Vai-se determinar os esforços agentes no cilindro quando este é submetido a oscilações periódicas harmônicas simples nas direções de ox (deriva), oy (arfagem) ou em torno de eixo $o'z'$ (aqui chamada balanço). Pode-se, então, reduzir o problema a duas dimensões, por exemplo no plano $z'=z=Z=0$ (Fig.IV.1.2)...

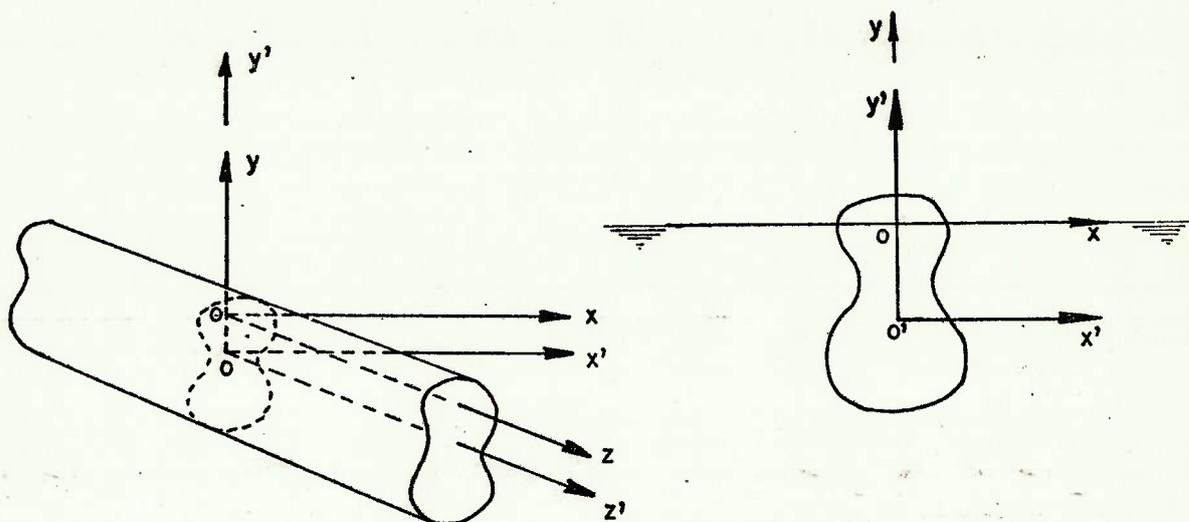


Fig.IV.1.2 -Sistemas de coordenadas

As variáveis associadas ao problema de deriva do cilindro serão identificadas pelo índice (1) colocado superiormente à direita, sendo o índice (2) atribuído às variáveis do problema de arfagem e o índice (3) às do problema de balanço.

Seja:

$$(IV.1.1) \quad S^{(m)}(t) = A^{(m)} \cos(\omega t) \quad , \quad m = 1, 2, 3,$$

a expressão do deslocamento harmônico ao qual o cilindro é forçado independentemente em deriva, arfagem e caturro, respectivamente.

As velocidades de translação da seção em relação ao sistema $oxyz$ nos movimentos de deriva e arfagem e a sua velocidade angular em torno do ponto o no movimento de balanço são:

$$(IV.1.2) \quad v^{(m)}(t) = -\omega A^{(m)} \text{sen}(\omega t) \quad , \quad m = 1, 2, 3,$$

Nos movimentos de deriva e arfagem a velocidade de cada ponto do contorno da seção tem a direção dos eixos ox e oy , respectivamente. No movimento de balanço porém, a velocidade de cada ponto ocorre em cada instante em uma direção tangente à circunferência com centro em O' e à qual pertence o ponto, conforme está esquematizado na figura abaixo.

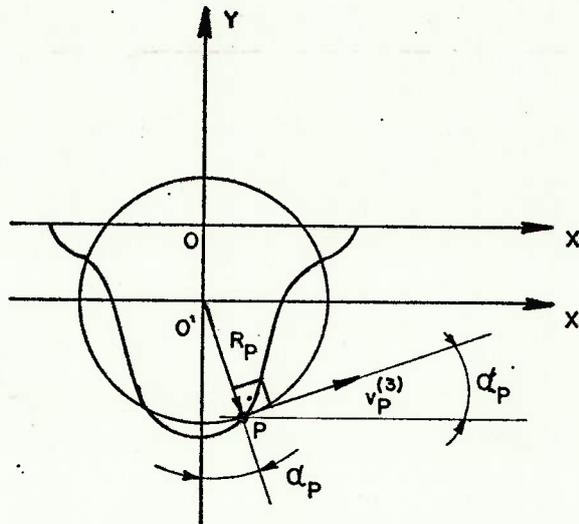


Fig.IV.1.3- Cilindro em rotação em torno do eixo $O'Z'$

A distância de um particular ponto P até a origem O' é dado por:

$$R_p = \sqrt{X_p^2 + (Y_p - Y_{O'})^2}$$

Quando o corpo oscila em balanço com velocidade angular $v^{(3)}$ a velocidade do ponto P acima pode ser aproximada para pequenas oscilações por:

$$\underline{v}_P^{(3)} \approx R_p \cdot v^{(3)} \cdot [\cos \alpha_p \cdot \underline{i} + \sin \alpha_p \cdot \underline{j}] ,$$

ou,

$$\underline{v}_P^{(3)} \approx R_p \cdot [-\omega A^{(3)} \sin(\omega t)] \cdot \left[-\frac{Y_p - Y_{O'}}{R_p} \underline{i} + \frac{X_p}{R_p} \underline{j} \right] ,$$

ou,

$$\underline{v}_P^{(3)} = wA^{(3)} \text{sen}(wt) [(Y_P - Y_0)_i - X_P j]$$

Assim, a velocidade translação de um ponto genérico P do contorno submerso da seção de coordenadas (X_P, Y_P) no sistema OXYZ pode ser expressa para qualquer dos três modos de oscilação, a saber:

$$(IV.1.3) \quad \underline{v}_P^{(1)} = -wA^{(1)} \text{sen}(wt) i \quad \text{para deriva,}$$

$$\underline{v}_P^{(2)} = -wA^{(2)} \text{sen}(wt) j \quad \text{para arfagem,}$$

$$\underline{v}_P^{(3)} = wA^{(3)} \text{sen}(wt) [(Y_P - Y_0)_i - X_P j] \quad \text{para balanço.}$$

Seja \underline{n}_P a normal externa à seção em cada ponto P de seu contorno na posição de equilíbrio em águas calmas. Novamente vai-se admitir que os deslocamentos em balanço sejam pequenos de tal forma a se poder considerar a normal em cada ponto constante e igual a \underline{n}_P .

Assim, a componente da velocidade de translação de P normal ao contorno da seção para cada modo de oscilação é:

$$(IV.1.4) \quad \underline{n}_P \cdot \underline{v}_P^{(m)}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Definem-se:

$$(IV.1.5) \quad N_P^{(m)} = \frac{\underline{n}_P \cdot \underline{v}_P^{(m)}}{wA^{(m)} \text{sen}(wt)}$$

Admitem-se válidas as hipóteses da Teoria de Ondas de Pequena Amplitude, a saber:

- fluido incompressível e invíscido;

- efeitos de tensão superficial desprezíveis;
- escoamento irrotacional;
- oscilações de pequena amplitude em torno de uma posição de equilíbrio.

A formulação do problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre, admitidas soluções harmônicas simples, é apresentada no item B.3 (Apêndice B), sendo transcrita abaixo em termos de amplitudes complexas para o caso bi dimensional:

(1) Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial y^2} = 0 \text{ na região fluida,}$$

$$m = 1, 2, 3;$$

(2) Condição de contorno na superfície livre:

$$g \frac{\partial \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial y} - w^2 \Phi^{(m)}(x,y) = 0 \text{ para } y=0, m = 1, 2, 3;$$

(3) Condição de finitude ao longe:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left[i \frac{\partial \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial x} + j \frac{\partial \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial y} \right] = 0, m = 1, 2, 3;$$

(4) Condição de contorno cinemática no cilindro:

$$\left[i \frac{\partial \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial x} + j \frac{\partial \Phi^{(m)}(x,y)}{\partial y} \right] \cdot \mathbf{n}_p = iwN_p^{(m)}, m=1, 2, 3;$$

(5) Condição de radiação:

Os potenciais de radiação $\Phi^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, tais que afastam do corpo.

IV.2 - Formulação do problema em termos de fontes pulsantes

Apresenta-se no apêndice E a expressão para o potencial complexo devido a uma fonte pulsante de intensidade unitária, que é reproduzida abaixo:

$$(IV.2.1) \quad h_c(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z-z_0) - \text{Log}(z-\bar{z}_0)] + 2P \int_0^\infty \frac{e^{-i\tau(z-\bar{z}_0)}}{k-\tau} d\tau \cdot \cos(wt) - \exp[-ik(z-\bar{z}_0)] \sin(wt)$$

Seja:

$$(IV.2.2) \quad H(z, z_0) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z-z_0) - \text{Log}(z-\bar{z}_0)] + 2P \int_0^\infty \frac{e^{-i\tau(z-\bar{z}_0)}}{k-\tau} d\tau \right\} + i \text{Re} \{ \exp[-ik(z-\bar{z}_0)] \}$$

O potencial real devido à fonte pulsante de intensidade unitária é:

$$(IV.2.3) \quad h(x, y, x_0, y_0; t) = \text{Re} \{ h_c(z, z_0) \} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z-z_0) - \text{Log}(z-\bar{z}_0)] + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau \right\} .$$

$$\cdot \cos(\omega t) - \operatorname{Re}\{\exp[-ik(z-\bar{z}_0)] \sin(\omega t)\}$$

Considerando-se (IV.2.3) e (IV.2.2), verifica-se:

$$(IV.2.4) \quad h(x, y, x_0, y_0; t) = \operatorname{Re}\{H(z, z_0) \cdot \exp(i\omega t)\}, \text{ e,}$$

$$(IV.2.5) \quad h(x, y, x_0, y_0; t + \frac{\pi}{2\omega}) = \operatorname{Re}\{i \cdot H(z, z_0) \cdot \exp(i\omega t)\}$$

Admitindo que haja uma linha de fontes pulsantes ao longo do contorno imerso da seção, o potencial complexo de velocidades na região fluida pode ser dado por:

$$(IV.2.6) \quad \Phi^{(m)}(z, z_0) = \int_{C_0} Q(S) H(z, z_0) \exp(i\omega t) dS$$

onde C_0 é o contorno imerso da seção em águas calmas;

S é uma variável que indica a posição ao longo de C_0 , e,

$Q(S)$ representa a densidade de intensidade complexa ao longo da linha de fontes pulsantes.

Para cada modo de oscilação (arfagem, deriva ou balanço), o potencial dado pelas expressões (IV.2.6) e (IV.2.2) satisfaz a Equação de Laplace e às condições de contorno, a menos da condição de contorno cinemática na superfície do cilindro, qualquer que seja a densidade de intensidade Q da linha de fontes.

A imposição da condição de contorno cinemática conduz a:

$$(IV.2.7) \quad \operatorname{Re}\left\{(\underline{n} \cdot \nabla) \int_{C_0} Q^{(m)}(S) H(z, z_0) dS\right\} = 0,$$

$$(IV.2.8) \quad \text{Im}\{(\underline{n} \cdot \nabla) \int_{C_0} Q^{(m)}(S) H(z, z_0) dS\} = A^{(m)} w_N^{(m)}$$

A determinação das partes real e imaginária de $Q^{(m)}$ é apresentada no item IV.3 através da resolução numérica das equações integrais (IV.2.7) e (IV.2.8).

IV.3 - Resolução numérica do problema

A resolução numérica deste problema de contorno pode ser obtida aproximando-se o contorno submerso da seção por uma linha poligonal, colocando-se uma fonte puntiforme de intensidade finita em cada vértice e impondo-se a condição de contorno cinemática nos pontos médios dos lados.

Considerem-se seções simétricas em relação ao eixo OY. Sejam $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{N+1}, Y_{N+1})$ $(N+1)$ pontos escolhidos ao longo do contorno C_0 , de forma que (X_1, Y_1) esteja no semi-eixo negativo do eixo OY e todos os pontos estejam no IV quadrante, conforme figura abaixo:

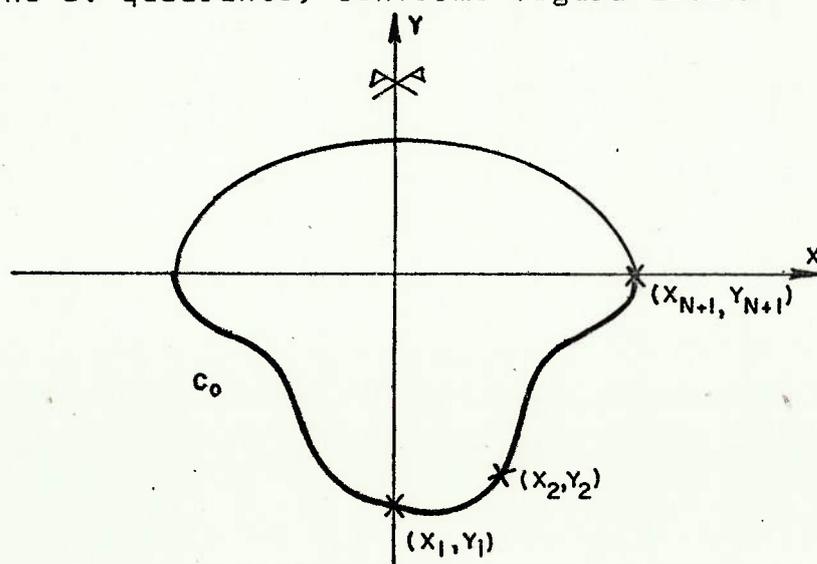


Fig.IV.3.1 - Contorno da seção

Para cilindros parcialmente submersos $Y_{N+1} = 0$ e $X_{N+1} > 0$; para cilindros totalmente submersos $X_{N+1} = 0$ e $Y_{N+1} \leq 0$. Conectando-se estes $(N+1)$ pontos por N segmentos de reta e considerando-se também sua imagem especular em relação ao eixo OY , tem-se uma linha poligonal que aproxima o contorno C_0 . As coordenadas, aos ângulos e a outras grandezas associadas ao IV quadrante são atribuídos os subscritos j (ou i), enquanto que para segmentos refletidos correspondentes no III quadrante são atribuídos os subscritos $-j$ (ou $-i$).

Os pontos médios dos segmentos têm, então coordenadas dadas por:

$$(IV.3.1) \quad X_{jm} = \frac{X_i + X_{i+1}}{2} ; \quad Y_{jm} = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2} \quad e$$

$$X_{-jm} = -X_{jm} ; \quad Y_{-jm} = Y_{jm}, \text{ com } j=i \text{ e } i=1, \dots, N.$$

Os comprimentos dos segmentos são calculados por:

$$(IV.3.2) \quad |s_j| = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2} \quad e$$

$$|s_{-j}| = |s_j|, \text{ com } j=i \text{ e } i=1, \dots, N.$$

Os ângulos de cada segmento com o eixo OX , conforme mostrados na figura IV.3.2, são tais que:

$$(IV.3.3) \quad \text{sen } \alpha_j = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{s_j} ; \quad \text{cos } \alpha_j = \frac{X_{i+1} - X_i}{s_j}, \text{ com } j=i \text{ e } i=1, \dots, N;$$

$$\alpha_{-j} = -\alpha_j, \quad j=1, \dots, N.$$

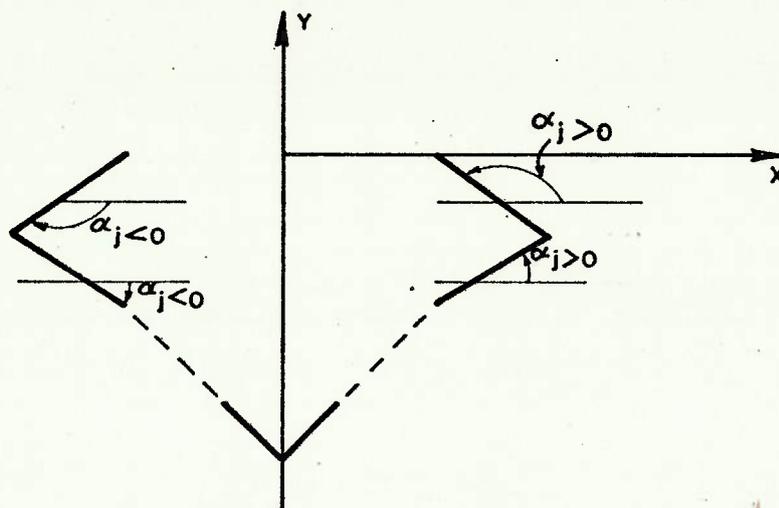


Fig.IV.3.2 - Aproximação para o contorno da seção

As normais aos segmentos j , exteriores à seção, calculam-se por:

$$(IV.3.4) \quad \underline{n}_j = \text{sen}(\alpha_j) \underline{i} - \text{cos}(\alpha_j) \underline{j} ,$$

$$\underline{n}_{-j} = \text{sen}(\alpha_j) \underline{i} - \text{cos}(\alpha_j) \underline{j} , \quad j = 1, \dots, N.$$

As velocidades de translação do ponto médio de cada segmento em cada modo de oscilação são, tendo em vista (IV.1.4):

$$(IV.3.5) \quad \underline{v}_j^{(1)} = -wA^{(1)} \text{sen}(wt) \underline{i} ;$$

$$\underline{v}_j^{(2)} = -wA^{(2)} \text{sen}(wt) \underline{j} ;$$

$$\underline{v}_j^{(3)} = wA^{(3)} \text{sen}(wt) [(Y_j - Y_0) \underline{i} - X_j \underline{j}]$$

Tem-se também, considerando (IV.1.5):

$$(IV.3.6) \quad N_j^{(1)} = -\text{sen}(\alpha_j) ,$$

$$N_j^{(2)} = \text{cos}(\alpha_j) ,$$

$$N_j^{(3)} \equiv (Y_j - Y_0) \text{sen}(\alpha_j) + X_j \text{cos}(\alpha_j) ;$$

$$N_{-j}^{(1)} = - N_j^{(1)} ;$$

$$N_{-j}^{(2)} = N_j^{(2)} ;$$

$$N_{-j}^{(3)} \equiv -(Y_{-j} - Y_0) \text{sen}(\alpha_j) + X_{-j} \text{cos}(\alpha_j).$$

Vai-se aplicar as equações (IV.2.7) e (IV.2.8) aos pontos médios de cada segmento, supondo que a densidade de intensidade seja constante ao longo do segmento.

Sejam

$$(IV.3.7) \quad Q_j^{(m)}(s_j) , \quad m = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, N,$$

as densidades de intensidade em cada segmento j , correspondentes a cada modo de oscilação.

Sejam

$$(IV.3.8) \quad Q_j^{(m)} = \text{Re}\{Q^{(m)}(s_j)\} , \quad m = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, N,$$

$$Q_{N+j}^{(m)} = \text{Im}\{Q^{(m)}(s_j)\} , \quad m = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, N.$$

As equações (IV.2.7) e (IV.2.8) ficam, então:

$$(IV.3.9) \quad \text{Re}\{(\eta_i \cdot \nabla) \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{s_j} [Q_j^{(m)} + iQ_{N+j}^{(m)}] H(z_i, z_j) ds_j + \right. \\ \left. + \int_{s_{-j}} [Q_{-j}^{(m)} + iQ_{-(N+j)}^{(m)}] H(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} = 0; \\ \text{Im}\{(\eta_i \cdot \nabla) \sum_{j=1}^N \left\{ \int [Q_j^{(m)} + iQ_{N+j}^{(m)}] \cdot H(z_i, z_j) ds_j + \right. \\ \left. + \int_{s_{-j}} [Q_{-j}^{(m)} + iQ_{-(N+j)}^{(m)}] \cdot H(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} = A^{(m)} w N_i^{(m)} , \quad i = 1, \dots, N.$$

Das equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.10)} \quad & \sum_{j=1}^N Q_j^{(m)} \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} H(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} H(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} + \\
 & + \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(m)} \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} iH(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} iH(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} = 0; \\
 & - \sum_{j=1}^N Q_j^{(m)} \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} iH(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} iH(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} + \\
 & + \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(m)} \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} H(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} H(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\} = \\
 & = A^{(m)} w N_i^{(m)}, \quad i = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Sejam, por definição:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.11)} \quad & I_{ij}^{(m)} = \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} H(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} H(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\}, \\
 & J_{ij}^{(m)} = \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{s_j} iH(z_i, z_j) ds_j + (-1)^m \int_{s_{-j}} iH(z_i, z_{-j}) ds_{-j} \right\}\}, \\
 & j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

Os coeficientes $I_{ij}^{(m)}$ e $J_{ij}^{(m)}$ são chamados de coeficientes de influência e o seu cálculo é feito no item F.1 (A-pêndice IF). Substituindo-os em (IV.3.10) resulta:

$$\text{(IV.3.12)} \quad \sum_{j=1}^N Q_j^{(m)} \cdot I_{ij}^{(m)} + \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(m)} J_{ij}^{(m)} = 0;$$

$$-\sum_{j=1}^N Q_j^{(m)} \cdot J_{ij}^{(m)} + \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(m)} \cdot I_{ij}^{(m)} = A^{(m)} \omega N_i^{(m)}.$$

Obtêm-se, assim, as partes real e imaginária das intensidades das fontes para cada modo de oscilação. O potencial na região fluida pode, então, ser calculado conforme (IV.2.6), ou seja:

$$(IV.3.13) \quad \phi^{(m)}(z;t) = \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\int_{s_j} (Q_j + iQ_{N+j}) \cdot H(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} (Q_{-j} + iQ_{-(N+j)}) \cdot H(z, z_{-j}) ds_{-j} \right] \right\} \exp(i\omega t).$$

O potencial real fica, então:

$$(IV.3.14) \quad \phi^{(m)}(x,y;t) = \sum_{j=1}^N \{ [Q_j \cos(\omega t) - Q_{N+j} \sin(\omega t)] \cdot \text{Re} \left\{ \int_{s_j} H(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} H(z, z_{-j}) ds_{-j} \right\} + [Q_j \sin(\omega t) + Q_{N+j} \cos(\omega t)] \cdot \text{Re} \left\{ \int_{s_j} iH(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} iH(z, z_{-j}) ds_{-j} \right\} \}.$$

A expressão acima é desenvolvida no item F.3 (Apêndice F).

A partir da expressão potencial (IV.3.14) pode-se calcular facilmente a pressão através da Equação de Bernoulli linearizada:

$$(IV.3.15) \quad p^{(m)}(x,y;t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \phi(x,y;t),$$

resultando:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.16)} \quad p^{(m)}(x,y;t) = & \\
 = \rho w \operatorname{sen}(wt) \sum_{j=1}^N \{ & Q_j \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} H(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} H(z, z_{-j}) ds_{-j} + \right. \\
 & + Q_{N+j} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} iH(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} iH(z, z_{-j}) ds_{-j} \right\} \} + \\
 & + \rho w \cos(wt) \cdot \sum_{j=1}^N \{ Q_{N+j} \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} H(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} H(z, z_{-j}) ds_{-j} \right\} - \\
 & - Q_j \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} iH(z, z_j) ds_j + \int_{s_{-j}} iH(z, z_{-j}) ds_{-j} \right\} \}.
 \end{aligned}$$

Observa-se que o 1º termo da expressão (IV.3.16) está em fase com as velocidades e o 2º termo com os deslocamentos de cada ponto do contorno da seção.

Seja:

$$\text{(IV.3.17)} \quad p^{(m)}(x,y;t) = p_a^{(m)}(x,y;w) \cos(wt) + p_v^{(m)}(x,y;w) \operatorname{sen}(wt),$$

onde $p_a^{(m)}(x,y;t)$ e $p_v^{(m)}(x,y;t)$ resultam imediatamente da comparação entre (IV.3.17) e (IV.3.16).

Os esforços hidrodinâmicos atuantes na seção podem, então, ser calculados pela integral da pressão ao longo do contorno. Supondo que a pressão seja constante em cada um dos segmentos da poligonal que aproxima o contorno da seção, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.18)} \quad a_{mn} &= 2 \sum_{i=1}^N p_a^{(m)}(x_i, y_i; w) \cdot N_i^{(n)} |s_i|, \\
 b_{mn} &= 2 \sum_{i=1}^N p_v^{(m)}(x_i, y_i; w) \cdot N_i^{(n)} |s_i|, \quad m, n=1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

onde a_{mn} se denominam massas ($m=1,2$) e momentos ($m=3$) adicionados e b_{mn} se denominam amortecimentos.

CAPÍTULO V

PROPOSTA DE ASSOCIAÇÃO DA SÍNTESE HIDRODINÂMICA AO MÉTODO DE
W.FRANK PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

No capítulo II apresentou-se a formulação do problema de determinação de movimentos de plataformas semi-submersíveis submetidas a ondas regulares. Utilizou-se a Teoria Potencial e a hipótese de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. As funções de transferência, dadas pela expressão (II.7.3) resultaram, então, lineares. No capítulo III desenvolveu-se um método clássico para análise de plataformas semi-submersíveis, apresentando-se as expressões para determinação dos coeficientes hidrodinâmicos (III.8.5) e dos esforços de excitação em ondas (III.8.6) e (III.8.7) que, substituídos nas equações do movimento linearizadas (II.7.2), permitem a resolução do problema. Observa-se que os esforços de arrasto foram levados em consideração através da formulação de Morison (apêndice D), e a utilização da formulação da Teoria Potencial só se tornou possível devida à linearização da expressão do arrasto (item III.4). Os esforços de difração foram no entanto desprezados, considerando-se apenas os esforços de Froude-Krylov.

No capítulo IV foi apresentado um método para determinação de coeficientes hidrodinâmicos em um cilindro oscilante, em que se consideram os efeitos de difração e a variação

dos coeficientes com a frequência, desprezando-se, no entanto, os efeitos da viscosidade.

Neste capítulo verificam-se as circunstâncias em que se pode utilizar a formulação de Morison e as circunstâncias em que se pode utilizar o Método de W.Frank. Propõe-se modificar o método apresentado no capítulo III, de modo a incluir a alternativa de se utilizar em determinadas casos, conforme será aqui exposto, o Método de W.Frank, ao invés da formulação de Morison.

V.1 - Importância relativa entre esforços de arrasto e de difração em cilindros submetidos a ondas.

No apêndice D analisa-se qualitativamente os problemas de cilindro submetido a escoamento uniforme ao longe (item D.1), cilindro submetido a escoamento oscilatório (item D.2) e cilindro submetido a ondas (item D.3). Considere-se o último caso. Seja λ o comprimento de onda e N_k o número de Keulegan-Carpenter definido por:

$$N_k = \frac{U_M T}{D} ,$$

onde U_M é a amplitude da velocidade das partículas fluidas na cota do eixo do cilindro,

D é a dimensão característica da seção do cilindro ,

$T = \frac{2\pi}{w}$ é o período de onda, sendo w a frequência.

A seguir, transcrevem-se as conclusões estabelecidas em D.3:

- (a) Para $N_k \sim O(1)$ ou menor, pode-se admitir que não há separação e a Teoria Potencial pode ser utilizada na determinação dos coeficientes e esforços hidrodinâmicos;
- (b) Para $N_k > O(1)$, há necessidade de se considerar o arrasto devido à separação.

Tais conclusões foram obtidas através da comparação entre o período de onda e o período típico para as partículas fluidas contornarem a seção do cilindro.

Deve-se observar também que para corpos pequenos em relação ao comprimento de ondas, ou seja, para $\frac{D}{\lambda} < O(1)$, a onda incidente praticamente não se deforma, sendo os efeitos da difração reduzidos.

Na ref. [34] recomenda-se com base experimental o critério de que na faixa $N_k > 5$ os esforços de arrasto devem ser considerados, o que está de acordo com a observação (b) acima. Verifica-se ainda que nesta faixa é razoável supor escoamento uniforme na extensão da seção do cilindro (ver fig.V.1.1) e também considerar esforços de difração desprezíveis. Assim, para grandes comprimentos de ondas (frequências baixas) ou para cilindros com seção de dimensões redu

zidas, vale a formulação de Morison.

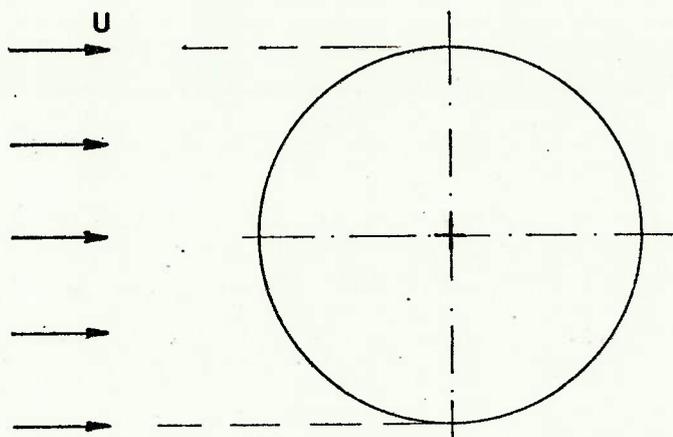


Fig.V.1.I - Aproximação de escoamento uniforme ao longo da seção para $\frac{D}{\lambda} < 0,2$.

Já para $N_k < 5$, a observação (a) anterior confirma que se pode utilizar a formulação da Teoria Potencial. Neste caso, no entanto, não se pode fazer a aproximação de escoamento uniforme ao longo da seção. Pode-se, porém, ignorar a deformação da onda causada pela presença do corpo desde que $\frac{D}{\lambda} < O(1)$. Há possibilidade, então, de se utilizar o método de W.Frank.

Ora, com relação às plataformas semi-submersíveis podem ocorrer as seguintes situações:

(.) existência de elementos esbeltos cujas seções têm dimensões tais que, para qualquer onda de interesse, tem-se $N_k > O(1)$ sempre;

(..) existência de elementos esbeltos cujas seções

têm dimensões tais que para uma certa faixa de frequências das ondas de interesse e para uma certa imersão tem-se $N_k \sim 0(1)$ ou menor.

A avaliação do interesse de se considerar uma determinada onda na análise está associada à probabilidade de sua ocorrência com grau significativo de energia no local de operação, discutindo-se a representação da excitação no capítulo VI.

O grau de imersão, por sua vez, consiste em variável decisória, pois à medida em que a profundidade aumenta, a amplitude da velocidade das partículas fluidas e, conseqüentemente, o número de Keulegan-Carpenter, diminuem exponencialmente.

Julga-se então importante, ao menos em princípio, introduzir-se no método da Síntese Hidrodinâmica descrito no capítulo III a alternativa de cálculo de coeficientes hidrodinâmicos em elementos esbeltos através do Método de Frank descrito no capítulo IV.

V.2 - Elementos esbeltos: aplicação do método de Frank

Considerem-se as mesmas hipóteses e convenções introduzidas no capítulo II. Considere-se também a hipótese introduzida no capítulo III de independência hidrodinâmica entre os escoamentos em torno dos elementos componentes da plataforma. No método da Síntese Hidrodinâmica descrito no capítulo III consideraram-se apenas elementos "pequenos" e elemen

tos cilíndricos esbeltos. O processo apresentado neste item se aplica, no entanto, a elementos esbeltos horizontais em geral, podendo ser aplicado aos cascos de plataformas semi-submersíveis, ainda que não sejam cilíndricos.

Considere-se, então, um elemento esbelto horizontal em que se fixa o sistema de coordenadas local $O_e X_e Y_e Z_e$, estando, por exemplo, $O_e Z_e$ segundo a direção longitudinal do elemento e $O_e Y_e$ na vertical. Suponha-se que $Y_e Z_e$ seja um plano de simetria.

Considere-se que o sistema fixo à Terra $oxyz$ seja tal que os eixos ox , oy e oz sejam respectivamente paralelos aos eixos $O_e X_e$, $O_e Y_e$ e $O_e Z_e$. Ainda, os eixos oy e $O_e Y_e$ estão superpostos sendo y_{O_e} a coordenada da origem O_e no eixo oy , conforme fig. V.2.1.

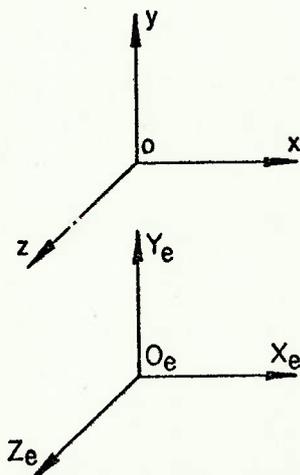


Fig.V.2.1 - Sistemas de coordenadas

Sejam $a_{11}(Z_e)$ e $a_{22}(Z_e)$ os coeficientes de massa ar-dicionada segundo as direções dos eixos OX_e e OY_e , para cada

seção do elemento. Sejam $b_{11}(Z_e)$ e $b_{22}(Z_e)$ os correspondentes coeficientes de amortecimento. Sejam $a_{33}(Z_e)$ e $b_{33}(Z_e)$ os coeficientes de momento adicionado e de amortecimento em torno do eixo $O_e Z_e$ para cada seção. Tais coeficientes podem ser calculados para as seções ao longo do elemento pelo Método da Distribuição de Fontes de W. Frank, descrito no capítulo IV.

Nos sub-itens a seguir mostra-se como os resultados da aplicação do método de Frank às diversas seções do elemento esbelto em consideração podem ser utilizados para determinação dos coeficientes hidrodinâmicos e dos esforços excitantes nele agentes. Trata-se da utilização da Teoria das Faixas tal como formulada por Salvesen, Tuck e Faltinsen [83], porém considerando-se velocidade de avanço nula.

V.2.1 - Esforços excitantes

Seja o problema potencial formulado no capítulo II, porém em que a estrutura se restringe ao elemento esbelto horizontal. Os esforços de difração agentes no elemento podem ser calculados pela expressão (II.4.9), a saber:

$$(V.2.1.1) \quad E_j^D = -\rho i w \iint_S \phi_D n_j d\sigma, \quad j=1, \dots, 6,$$

sendo aqui S a superfície molhada do elemento, e

n_j as componentes da normal generalizada externa ao elemento fixo em sua posição média, conforme definição do item II.1.

A condição de contorno cinemática na superfície do elemento para o problema de radiação pode ser dada por (II.2.9), ou,

$$(V.2.1.2) \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = iw n_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

Substituindo (V.2.1.2) em (V.2.1.1) resulta:

$$E_j^D = -\rho \iint_S \phi_D \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\sigma \quad j = 1, \dots, 6$$

Aplicando a 2ª identidade de Green [83], tem-se:

$$(V.2.1.3) \quad E_j^D = -\rho \iint_S \phi_j \frac{\partial \phi_D}{\partial n} d\sigma, \quad j = 1, \dots, 6$$

A condição de contorno cinemática na superfície do elemento para o problema de difração é dada por (II.2.5), ou

$$(V.2.1.4) \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial n}.$$

Substituindo (V.2.1.4) em (V.2.1.3) tem-se:

$$(V.2.1.5) \quad E_j^D = \rho \iint_S \phi_j \frac{\partial \phi_I}{\partial n} d\sigma, \quad j = 1, \dots, 6$$

O potencial de ondas incidentes ϕ_I em termos das amplitudes complexas pode ser dado pela expressão (B.6.7), a pênndice B, ou seja:

$$(V.2.1.6) \quad \phi_I(x, y, z) = \frac{1A}{k} w \exp(ky) \cdot \exp[-ik(x \cos \theta - z \sin \theta)],$$

onde:

A é a amplitude da onda,

k é o número de onda,

θ é o ângulo de incidência, definido conforme figura B.5.1. (apêndice B).

Tem-se:

$$(V.2.1.7) \quad \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \cdot n_1 + \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \cdot n_2 + \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} n_3 =$$

$$= (-i \cos \theta n_1 + n_2 + i \sin \theta n_3) k \Phi_I$$

Substituindo (V.2.1.7) em (V.2.1.5), resulta:

$$(V.2.1.8) \quad E_j^D = \rho \iint_S \Phi_j (-i \cos \theta n_1 + n_2 + i \sin \theta n_3) k \Phi_I d\sigma, \quad j = 1, \dots, 6$$

Os esforços excitantes no elemento podem ser dados, então, pela soma dos esforços de difração (expressão (V.2.1.8) e dos esforços de Froude Krylov (expressão (II.4.8) ou seja:

$$(V.2.1.9) \quad E_j = -\rho \iint_S \{i\omega n_j - k(i \cos \theta n_1 + n_2 + i \sin \theta n_3) \Phi_j\} \Phi_I d\sigma$$

Substituindo (V.2.1.6) em (V.2.1.9), tem-se:

$$(V.2.1.10) \quad E_j = \rho A \iint_S \exp(ky) \exp(-ik \cos \theta x) \exp(ik \sin \theta z) \{g n_j +$$

$$+ i\omega (-i \cos \theta n_1 + n_2 + i \sin \theta n_3) \Phi_j\} d\sigma$$

Para que se possa estimar os esforços acima, utiliz

za-se o fato de o corpo ser esbelto, admitindo-se as seguintes hipóteses:

(a) Nas proximidades do casco, a variação de qualquer grandeza associada ao problema segundo a direção longitudinal é uma ordem de magnitude menor que sua variação segundo quaisquer das direções transversais.

(b) A componente longitudinal da normal ao corpo em qualquer ponto é uma ordem de magnitude inferior às suas componentes transversais.

Nas condições acima, pode-se efetivar as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned}
 \text{(V.2.1.11)} \quad n_1 &\approx n^{(1)}; \\
 n_2 &\approx n^{(2)}; \\
 n_3 &\approx 0; \\
 n_4 &\approx -n^{(2)} \cdot Z_e; \\
 n_5 &\approx n^{(1)} \cdot Z_e; \\
 n_6 &\approx n^{(3)},
 \end{aligned}$$

sendo $[n^*] = [n^{(1)} \quad n^{(2)} \quad n^{(3)}]$ a normal generalizada no plano de cada seção, conforme definições (IV.3.6) do capítulo IV.

Ainda, sendo $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ e $\phi^{(3)}$ os potenciais de radiação do problema de oscilação de cada seção em seu plano, que podem ser obtidos através do método de Frank descrito no capítulo IV, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &\approx \phi^{(1)}; \\
 \phi_2 &\approx \phi^{(2)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 &\approx 0; \\ \Phi_4 &\approx -\Phi^{(1)} Z_e; \\ \Phi_5 &\approx \Phi^{(2)} Z_e; \\ \Phi_6 &\approx \Phi^{(3)}.\end{aligned}$$

As simplificações anteriores constituem as hipóteses da Teoria das Faixas, assim chamada pois o problema de difração no casco se reduz a problemas de radiação em suas seções transversais, ou seja, como se o corpo fosse subdividido em faixas ou fatias.

Nessas condições, a expressão (V.2.1.10) se reduz a:

$$(V.2.1.13) \quad E_j = \rho a \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} \exp(ik \operatorname{sen} \theta z_e) \int_{\substack{\text{seção} \\ C(Z_e)}} \exp(-ik \cos \theta X_e) \cdot \\ \cdot \exp[k(y_{0_e} + Y_e)] \cdot \{gn_j + w(\ln_2 - \cos \theta n_1) \Phi_j\} d\xi dZ_e,$$

onde $d\xi$ é um elemento de arco ao longo do contorno de cada seção $C(Z_e)$

Pode-se definir:

$$(V.2.1.14) \quad f_j(Z_e) \triangleq g \exp(ik \operatorname{sen} \theta Z_e) \int_{C(Z_e)} n^{(j)} \exp(-ik \cos \theta X_e) \cdot \\ \cdot \exp[k(y_{0_e} + Y_e)] d\xi, \quad j = 1, 2, 3, \text{ e} \\ g_j(Z_e) \triangleq w \exp(ik \operatorname{sen} \theta Z_e) \int (in^{(2)} \cos \theta n^{(1)}) \cdot \exp(-ik \cos \theta X_e) \cdot \\ \cdot \exp[k(Y_{0_e} + Y_e)] \Phi^{(j)} d\xi, \quad j = 1, 2, 3.$$

Considerando as definições (V.2.1.14), a expressão

(V.2.1.13) fica:

$$(V.2.1.15) \quad E_j = \rho A \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} (f_j + g_j) dZ_e, \quad j = 1, 2;$$

$$E_4 = -\rho A \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} (f_2 + g_2) dZ_e,$$

$$E_5 = \rho A \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e (f_1 + g_1) dZ_e,$$

$$E_6 = \rho A \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} (f_3 + g_3) dZ_e$$

V.2.2 - Coeficientes hidrodinâmicos

No item II.5, calculou-se a componente j -ésima do esforço de restauração generalizado devido ao deslocamento \underline{u} unitário i -ésimo, conforme expressão (II.5.4), ou,

$$(V.2.2.1) \quad T_{ij} = -\rho i w \iint_S \Phi_i n_j d\sigma, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Diante das simplificações da Teoria das Faixas introduzidas no sub-item anterior, tem-se:

$$(V.2.2.2) \quad T_{ij} = -\rho i w \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} \int_{C(Z_e)} \Phi_i n_j d\xi dZ_e, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Definindo

$$(V.2.2.3) \quad T_{jj}^* \triangleq -\rho i w \int_{C(Z_e)} \phi_n^{(j)} d\xi, \quad j = 1, 2, 3, e$$

$$T_{13}^* \triangleq -\rho i w \int_{C(Z_e)} \phi_n^{(1)} \phi_n^{(3)} d\xi,$$

pode-se verificar:

$$(V.2.2.4) \quad T_{jj}^* = w^2 a_{jj} - i w b_{jj}, \quad j = 1, 2, 3, e$$

$$T_{13}^* = w^2 a_{13} - i w b_{13},$$

onde os coeficientes a_{jj} , b_{jj} , $j = 1, 2, 3$ e a_{13} , b_{13} podem ser calculados pelo Método de Frank.

Tendo em vista (V.2.2.4) pode-se escrever (V.2.2.1)

como:

$$(V.2.2.5) \quad T_{11} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} T_{11}^* dZ_e;$$

$$T_{15} = T_{51} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e T_{11}^* dZ_e;$$

$$T_{16} = T_{61} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} T_{13}^* dZ_e \quad ;$$

$$T_{22} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} T_{22}^* dZ_e ;$$

$$T_{24} = T_{42} = - \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e T_{22}^* dZ_e ;$$

$$T_{44} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e^2 T_{22}^* dZ_e ;$$

$$T_{55} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e^2 T_{11}^* dZ_e ;$$

$$T_{56} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} Z_e T_{13}^* dZ_e ;$$

$$T_{66} = \int_{\substack{\text{eixo} \\ 0_e Z_e}} T_{33}^* dZ_e$$

Assim, calculados os coeficientes T_{ij} , $i, j=1, \dots, 6$, as massas e momentos adicionados e os amortecimentos para o elemento podem ser calculados pelas expressões (II.5.6) e (II.5.7).

V.3 - Solução da equação do movimento

A equação do movimento em termos de amplitudes complexas e notação matricial para a plataforma em livre oscilação e submetida a ondas é dada pela expressão (II.7.2), reprodutida abaixo:

$$(V.3.1) \quad \{-w^2([M] + [A]) + iw[B] + [C]\} [\xi] = [E^E]$$

ou, tendo em vista a definição (II.7.5) de função de transferência da plataforma:

$$(V.3.2) \quad [H] [\xi] = [E^E]$$

Separando a expressão acima em partes real e imaginária, tem-se:

$$(V.3.3) \quad \text{Re}[H] \cdot \text{Re}[\xi] - \text{Im}[H] \text{Im}[\xi] = \text{Re}[E^E]$$

$$\text{Re}[H] \text{Im}[\xi] + \text{Im}[H] \text{Re}[\xi] = \text{Im}[E^E]$$

Resolvendo o sistema acima, chega-se a:

$$(V.3.4) \quad \text{Re}[\xi] = \{(\text{Im}[H])^{-1} \cdot \text{Re}[H] + (\text{Re}[H])^{-1} \cdot \text{Im}[H]\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \{(\text{Im}[H])^{-1} \cdot \text{Re}[E^E] + (\text{Re}[H])^{-1} \cdot \text{Im}[E^E]\},$$

$$\text{Im}[\xi] = \{(\text{Re}[H])^{-1} \text{Im}[H] + (\text{Im}[H])^{-1} \text{Re}[H]\}^{-1} \cdot$$

$$\{(\text{Im}[H])^{-1} \text{Im}[E^E] - (\text{Re}[H])^{-1} \text{Re}[E^E]\}.$$

Observe-se que

$$(V.3.5) \quad \operatorname{Re}[H] = [C] - \omega^2([M] + [A]), \quad e$$

$$\operatorname{Im}[H] = \omega [B]$$

Na forma co-senoidal, tem-se:

$$(V.3.6) \quad \xi_j = \xi_{ja} \cos(\omega t + \delta_j), \quad j = 1, \dots, 6.$$

onde ξ_{ja} é a amplitude real dada por:

$$(V.3.7) \quad \xi_{ja} = \left[(\operatorname{Re}\{\xi_j\})^2 + (\operatorname{Im}\{\xi_j\})^2 \right]^{1/2}, \quad j = 1, \dots, 6$$

e δ_j é a fase, dada por:

$$(V.3.8) \quad \delta_j = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}\{\xi_j\}}{\operatorname{Re}\{\xi_j\}} \right), \quad j = 1, \dots, 6.$$

Para estruturas simétricas segundo o plano central-longitudinal, muitos dos coeficientes se anulam, e as equações ficam desacopladas em 2 conjuntos, um deles envolvendo avanço, arfagem e caturro e o outro envolvendo deriva, balanço e guinada.

As velocidades e acelerações da estrutura como corpo rígido (no seu centro de gravidade), podem ser obtidas diretamente dos deslocamentos.

V.4 - Determinação do carregamento nos elementos da plataforma.

Obtidos os deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura como corpo rígido, os movimentos em qualquer ponto da estrutura podem ser calculados pelas equações (III.3.3) e (III.3.4).

Os esforços de radiação e inerciais ficam assim definitivamente conhecidos para as "faixas" em que foram subdivididos os elementos esbeltos e para todos os elementos "pequenos". O carregamento, então, pode ser dado pela diferença entre os esforços inerciais e os demais.

No caso de elementos esbeltos em que se aplica a Teoria das Faixas para determinação dos esforços de excitação em ondas, obtém-se para cada "faixa" transversal a distribuição do potencial e das pressões ao longo do contorno para oscilações com amplitude unitária. Já que se admitiu problema linear e como se pode conhecer as amplitudes de oscilação que ocorrem em cada ponto do contorno da "faixa", pode-se lá obter o carregamento hidrodinâmico.

Deve-se ainda observar que, conhecido o carregamento, pode-se avaliar facilmente em navios os esforços solicitantes em cada seção, já que é razoável a aproximação de viga esbelta. As plataformas semi-submersíveis devem ser representadas, no entanto, por estruturas hiper-estáticas, e o cálculo dos esforços solicitantes ao longo dos elementos não é imediato. Deve-se ter a distribuição do carregamento como ponto de partida para que se possa implementar o cálculo estrutural. Nes

se contexto, a determinação da distribuição do carregamento ao longo do contorno das "faixas" nos elementos esbeltos proporcionado pela utilização da Teoria das Faixas associada à Síntese Hidrodinâmica possibilita maior detalhamento na análise estrutural e conseqüente diminuição das incertezas.

CAPÍTULO VI

CÁLCULO EM MAR REAL

Os capítulos anteriores trataram do cálculo das funções de transferência para os movimentos da plataforma quando submetida a ondas regulares. Neste capítulo apresenta-se a representação das ondas de mar real através da Teoria dos Processos Estocásticos. Procede-se a uma linearização da variância do erro entre as equações linearizadas e as originais.

VI.1 - Aplicação da Teoria dos Processos Estocásticos ao estudo do comportamento de estruturas em mar real.

As chamadas ondas de superfície são geradas pela ação dos ventos, possuindo caráter aleatório devido às diversas perturbações a que estão submetidas. Diz-se que as ondas estão plenamente desenvolvidas quando há equilíbrio entre a energia transferida à água pelo vento e a energia dissipada na água. Chama-se de área de geração ("fetch") aquela em que há atuação do vento. As ondas aí observadas constituem o que se chama de mar de ventos ("sea"). As ondas, porém, também se propagam além da área de geração, constituindo o chamado mar de vagas ("swell").

Costuma-se admitir que as ondas de mar de ventos plenamente desenvolvidas em uma determinada área de geração são formadas pelas mesmas componentes periódicas que se justapõem aleatoriamente com fases diferentes mas com uma mesma distribuição de probabilidades. Trata-se da hipótese da "igual-componência".

Admita-se que o local de operação da plataforma em estudo esteja em uma região onde haja ondas de mar de ventos plenamente desenvolvidas. Pode-se associar a esta idealização um processo aleatório, como mostrado a seguir. Sejam:

R : espaço amostral, conjunto de pontos da superfície da região em uma cota de referência;

$T = (-\infty, +\infty)$: conjunto de todos os instantes;

$\eta(r, t)$: valor da elevação da superfície livre no ponto $r \in R$ no instante $t \in T$ em relação à cota de referência;

Λ : conjunto dos possíveis valores para a elevação em qualquer ponto $r \in R$ em qualquer instante $t \in T$.

Assim:

$[\eta(.,.) : R \times T \rightarrow \Lambda]$ é um processo aleatório;

$[\eta(r,.) : T \rightarrow \Lambda, r(\text{fixado}) \in R]$ é uma função amostral;

$[\eta(.,t) : R \rightarrow \Lambda, t(\text{fixado}) \in T]$ é uma variável aleatória.

O fato de para as ondas plenamente desenvolvidas haver equilíbrio dinâmico entre a energia transferida à água pelos ventos e a energia dissipada sugere a adoção da hipóte

se de estacionaridade do processo. Como conseqüência, a média da variável aleatória $\eta(.,t)$ não depende da particular instante t , fixados dois instantes $t_1 \in T$ e $t_2 \in T$, quaisquer, a função de autocorrelação entre as variáveis aleatórias $\eta(.,t_1)$ e $\eta(.,t_2)$ depende da diferença (t_2-t_1) , mas não dos particulares instantes t_1 ou t_2 . Sejam:

$\bar{\eta}(t)$: média da variável aleatória $\eta(.,t)$;

$k_{\eta}(t_1, t_2)$: função de autocorrelação entre as variáveis aleatórias $\eta(.,t_1)$ e $\eta(.,t_2)$.

Com a hipótese de estacionaridade, tem-se:

$\eta(t) = \bar{\eta}$, onde $\bar{\eta}$ é uma constante;

$k_{\eta}(t_1, t_2) = k_{\eta}(\tau)$, com $\tau = t_2 - t_1$.

Admitida a igual-componência das ondas plenamente desenvolvidas decorre a ergodicidade do processo aleatório estacionário. Como conseqüência, a média $\bar{\eta}$ de qualquer variável aleatória $\eta(.,t)$ resulta igual ao valor médio de qualquer função amostral $\eta(r,.)$ do processo. Também a função correlação e demais estatísticas podem ser calculadas a partir da função amostral.

Como são numerosos os fenômenos físicos que contribuem para a ação dos ventos na geração das ondas, admite-se que o processo aleatório que as descreve seja gaussiano.

Nas hipóteses anteriores é possível estimar o espectro de energia das ondas de mar em uma determinada região através do levantamento de registros temporais de elevação de ondas no local [93] .

Em 1961 Kitaigorodskii [48] propôs que se poderia representar o espectro de qualquer mar de ventos plenamente desenvolvido por uma mesma expressão independentemente da região ou da época. Em 1964 Pierson e Moskowitz [74] propuseram com base em regressões de dados de elevação de ondas uma expressão que representasse o espectro de qualquer mar unidirecional plenamente desenvolvido, desde que se conhecesse a velocidade média do vento no local. Desde então, outras formulações empíricas têm sido propostas, levando em consideração outros parâmetros como altura de ondas pseudo-significativa, períodos médios de ondas, etc.. No apêndice G apresentam-se as formulações mais usuais e as recomendações das Conferências Internacionais de Tanques de Provas ("ITTC") a respeito.

No decorrer deste capítulo vai-se admitir que a excitação das ondas a que a plataforma é submetida possa ser representada por um processo aleatório estacionário, ergódico e gaussiano de média nula e que seja válida alguma formulação empírica para estima de seu espectro de energia.

VI.2 - Linearização equivalente das equações do movimento para a plataforma submetida a excitação aleatória

Conforme visto no capítulo III, as equações do movimento da plataforma envolvem termos não-lineares, correspondentes à parcela da Equação de Morison que estima o arrasto nos diversos elementos. Naquele capítulo, item III.4, admitiu-se uma linearização da expressão do arrasto, supondo que se conhe-

cessem deterministicamente as velocidades das partículas fluidas. No entanto, sendo a excitação aleatória, tais velocidades não são conhecidas. Neste item apresenta-se uma forma de linearização do arrasto, admitindo-se conhecidas apenas algumas estatísticas da excitação.

Admitam-se válidas a notação e as convenções do capítulo III, especialmente item III.4. Vai-se denotar o desvio padrão de uma variável v por $\sigma[v]$ e sua variância por $\sigma^2[v]$.

Considerando-se apenas a parcela de arrasto da diferença entre os esforços de restauração e excitantes agentes em um determinado elemento tem-se, conforme expressões (III.4.2) e (III.4.3):

$$(VI.2.1) \quad (F_e^{ER})_{\text{arrasto}} = [v_{\text{rel}}^2] [b_e] \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} \quad e$$

$$(VI.2.2) \quad (m_e^{ER})_{\text{arrasto}} = [w_{\text{rel}}^2] [b_e] \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix} \quad ,$$

onde $[v_{\text{rel}}^2]$ e $[w_{\text{rel}}^2]$ para os elementos esbeltos são dadas por (III.4.1) e para elementos "pequenos" por (III.5.3) e (III.5.5), e

$[b_e]$ para os elementos esbeltos é dada por (III.2.5) e para os elementos "pequenos" por (III.5.1).

Quer se aproximar as expressões (VI.2.1) e (VI.2.2), respectivamente por:

$$(VI.2.3) \quad (F_e^{ER})_{\text{arrasto}} = [v_{\text{rel}}^l] [b_e] \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

$$(m_e^{ER})_{\text{arrasto}} = [v_{\text{rel}}^l] [b_e] \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix}$$

onde $[v_{\text{rel}}^l]$ e $[w_{\text{rel}}^l]$ são lineares e definidas para os elementos esbeltos por:

$$(VI.2.5) \quad [v_{\text{rel}}^l]^\Delta = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} C_X \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} C_Y \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} C_Z \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t, e$$

$$[w_{\text{rel}}^l]^\Delta = \begin{bmatrix} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} C_X \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} C_Y \cdot Z_e \cdot dZ_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} C_Z \cdot Z_e \cdot dZ_e \end{bmatrix}^t$$

onde C_X , C_Y e C_Z são os coeficientes de linearização a determinar.

Tem-se, então os seguintes erros associados aos cálculos aproximados dos esforços de arrasto:

$$(VI.2.6) \quad e_F = ([v_{rel}^2] - [v_{rel}^{\ell}]) [b_e] \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix}, e$$

$$e_m = ([w_{rel}^2] - [w_{rel}^{\ell}]) [b_e] \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix}.$$

Para os elementos esbeltos tem-se:

$$(VI.2.7) \quad [v_{rel}^2] - [v_{rel}^{\ell}] = \left[\begin{array}{l} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} \{|(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}| - C_X\} \cdot dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} \{|(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}| - C_Y\} \cdot dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} \{|(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}| - C_Z\} \cdot dz_e \end{array} \right]^t$$

$$[w_{rel}^2] - [w_{rel}^{\ell}] = \left[\begin{array}{l} \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}\} \{|(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}| - C_X\} \cdot z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}\} \{|(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}| - C_Y\} \cdot z_e dz_e \\ \int_{-l_e/2}^{l_e/2} \{(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}\} \{|(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}| - C_Z\} \cdot z_e dz_e \end{array} \right]^t$$

Os coeficientes C_X , C_Y e C_Z são determinados impondo-se a "minimização" dos erros e_1 e e_2 no sentido especificado a seguir:

$$(VI.2.8) \quad \frac{\partial}{\partial C_X} E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \cdot [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] - C_X \}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial C_Y} E \{ [(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}]^2 \cdot [(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}] - C_Y \}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial C_Z} E \{ [(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}]^2 \cdot [(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}] - C_Z \}^2 = 0.$$

Assim para C_X , por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial C_X} E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] - C_X \}^2 = \\ & = \frac{\partial}{\partial C_X} E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 - 2C_X [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \cdot \\ & \cdot [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] + C_X^2 [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \} = \\ & = \frac{\partial}{\partial C_X} \{ E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \} - 2C_X E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \cdot \\ & \cdot [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] \} + C_X^2 E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \} \} = \\ & = -2E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] \} + 2C_X E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \} \end{aligned}$$

ou, tendo em vista (VI.2.8)

$$(VI.2.9) \quad C_X = \frac{E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}] [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \}}{E \{ [(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]^2 \}}$$

A expressão acima envolve a expectância $E[v^2|v]$, que na hipótese de v ser gaussiano de média nula fica [71]:

$$E[v^2|v] = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} [\sigma(v)]^3$$

Assim, (VI.2.9) se reduz a:

$$C_X = \frac{\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \{\sigma[(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]\}^3}{\{\sigma[(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]\}^2} \quad , \text{ou}$$

$$(VI.2.10) \quad C_X = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sigma[(v_{P_e})_{X_e} - v_{X_e}]$$

Analogamente, tem-se:

$$(VI.2.11) \quad C_Y = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sigma[(v_{P_e})_{Y_e} - v_{Y_e}] \quad , \text{e}$$

$$C_Z = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sigma[(v_{P_e})_{Z_e} - v_{Z_e}] \quad .$$

As expressões (VI.2.9) a (VI.2.11), tendo em vista que os processos da excitação e das respostas são considerados gaussianos de média nula, ficam:

$$(VI.2.12) \quad C_X = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{P_e})_{X_e}]^2\} + E[(v_{X_e})]^2} \quad ,$$

$$C_Y = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{P_e})_{Y_e}]^2\} + E[(v_{Y_e})]^2} \quad ,$$

$$C_Z = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{P_e})_{Z_e}]^2\} + E[(v_{Z_e})]^2} \quad .$$

Ora, o espectro de energia da excitação é conhecido, e em conseqüência são conhecidas as variâncias das velocidades das partículas fluidas $E[(v_{X_e})^2]$, $E[(v_{Y_e})^2]$ e $E[(v_{Z_e})^2]$.

Analogamente ao que se sugeriu no item III.4, para que se possa resolver as equações do movimento para mar irregular mantendo o seu caráter linear, deve-se arbitrar valores para $E\{[(v_{P_e})_{X_e}]^2\}$, $E\{[(v_{P_e})_{Y_e}]^2\}$ e $E\{[(v_{P_e})_{Z_e}]^2\}$ e fazer iterações até que a solução convirja.

De (III.3.3) tem-se:

$$(VI.2.13) \quad \begin{bmatrix} E\{[(v_{P_e})_{X_e}]^2\} \\ E\{[(v_{P_e})_{Y_e}]^2\} \\ E\{[(v_{P_e})_{Z_e}]^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[(\dot{\xi}_1)^2] \\ E[(\dot{\xi}_2)^2] \\ E[(\dot{\xi}_3)^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E[(\dot{\xi}_4)^2] \\ E[(\dot{\xi}_5)^2] \\ E[(\dot{\xi}_6)^2] \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{e13} Y_{P_e} - \alpha_{e12} Z_{P_e})^2 & (\alpha_{e23} Y_{P_e} - \alpha_{e22} Z_{P_e})^2 & (\alpha_{e33} Y_{P_e} - \alpha_{e32} Z_{P_e})^2 \\ (\alpha_{e11} Z_{P_e} - \alpha_{e13} X_{P_e})^2 & (\alpha_{e21} Z_{P_e} - \alpha_{e23} X_{P_e})^2 & (\alpha_{e31} Z_{P_e} - \alpha_{e33} X_{P_e})^2 \\ (\alpha_{e12} X_{P_e} - \alpha_{e11} Y_{P_e})^2 & (\alpha_{e22} X_{P_e} - \alpha_{e21} Y_{P_e})^2 & (\alpha_{e32} X_{P_e} - \alpha_{e31} Y_{P_e})^2 \end{bmatrix}$$

onde α_{eij} , $i, j = 1, 2, 3$ são elementos da matriz $[\alpha_e]$ dada por (III.1.2)

Assim pode-se calcular as variâncias de $(v_{P_e})_{X_e}$, $(v_{P_e})_{Y_e}$ e $(v_{P_e})_{Z_e}$ a partir de valores estimados para as variâncias das velocidades da plataforma como corpo rígido nos seis graus de liberdade, a saber $E[(\dot{\xi}_1)^2]$, $E[(\dot{\xi}_2)^2]$, $E[(\dot{\xi}_3)^2]$,

$$E[(\xi_4)^2], E[(\xi_5)^2] \text{ e } E[(\xi_6)^2].$$

No caso dos elementos "pequenos" pode-se verificar que:

$$(VI.2.14) \quad C_X = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{0_e})_{X_e}]^2\} + E[(v_{X_e})]^2},$$

$$C_Y = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{0_e})_{Y_e}]^2\} + E[(v_{Y_e})]^2},$$

$$C_Z = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{E\{[(v_{0_e})_{Z_e}]^2\} + E[(v_{Z_e})]^2}.$$

e as considerações anteriores continuam válidas.

Assim, as expressões desenvolvidas no capítulo III continuam válidas para cálculo em mar irregular, desde que os coeficientes de linearização sejam estimados por (VI.2.12) e (VI.2.14).

VI.3 Cálculo das funções densidade espectral das respostas

No item V.3, capítulo V, chegou-se às expressões finais para os deslocamentos da plataforma em seus seis graus de liberdade, desde que conhecida a excitação de ondas a que a estrutura é submetida. As equações representativas do comportamento da plataforma foram linearizadas, supondo-se assim sistema linear e também invariante no tempo. Admitiram-se como excitação ondas regulares, resultando a formulação do item III.4, ou mar de ventos, resultando a formulação do item VI.2 anterior. Como resultado da aplicação do processo numérico descrito têm-se, então, gráficos das funções de transferência pa

ra ξ_{ja} , $j=1, \dots, 6$, onde ξ_{ja} é amplitude real do deslocamento da plataforma segundo o modo de oscilação j , conforme expressão (V.3.7). Apenas para efeito de análise vai-se supor conhecidas analiticamente tais funções de transferência, sendo representadas por $\xi_{ja}(\omega)$.

Considere-se, agora, somente o caso de excitação aleatória. Sendo o sistema linear e invariante no tempo, e possuindo múltiplas saídas e uma única entrada, representada pelo espectro de energia das ondas, podem-se calcular as funções densidade espectral das respostas por [81] :

$$(VI.3.1) \quad S_{\xi_j \xi_j}(\omega) = [\xi_{ja}(\omega)]^2 S(\omega) ,$$

onde $S(\omega)$ é a função densidade espectral da excitação, e

$S_{\xi_j \xi_j}(\omega)$ é a função densidade espectral do deslocamento segundo o modo de oscilação j .

Sendo ξ_j a amplitude complexa do deslocamento segundo o modo de oscilação j , $j=1, \dots, 6$, conforme indicado no capítulo V, verifica-se:

$$(VI.3.2) \quad S_{\xi_j \xi_j}(\omega) = |\xi_j(\omega)|^2 \cdot S(\omega) ,$$

ou,

$$(VI.3.3) \quad S_{\xi_j \xi_j}(\omega) = \xi_j(\omega) \cdot \bar{\xi}_j(\omega) \cdot S(\omega) ,$$

onde a barra indica o complexo conjugado.

De (V.3.3) e (VI.3.1) verifica-se facilmente que:

$$(VI.3.4) \quad S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot\cdot}(\omega) = \omega^2 S_{\xi_j \xi_j}(\omega) ,$$

$$S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot\cdot\cdot}(\omega) = \omega^4 S_{\xi_j \xi_j}(\omega) ,$$

$$S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot}(\omega) = \omega S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot}(\omega) ,$$

$$S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot\cdot}(\omega) = \omega^2 S_{\xi_j \xi_j}(\omega) ,$$

$$S_{\xi_j \xi_j}^{\cdot\cdot\cdot}(\omega) = \omega^3 S_{\xi_j \xi_j}(\omega) .$$

Quanto aos movimentos absolutos e relativos com referência à elevação e declividade das ondas em pontos especificados da plataforma e quanto ao carregamento, sabe-se que são combinações lineares dos movimentos da plataforma como corpo rígido e da elevação e declividade das ondas. Para cálculo das funções densidade espectral dessas grandezas, utiliza-se a seguinte propriedade, demonstrada por exemplo na referência [71] :

$$S_{vv}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [a_j a_k S_{v_j v_k}(\omega)] ,$$

sendo $v(t) = \sum_{j=1}^n a_j v_j(t)$, com a_j constante.

As diversas estatísticas associadas a cada resposta de interesse podem ser calculadas a partir das respectivas funções densidade espectral, conforme, por exemplo, indicações da referência [81] .

CAPÍTULO VII

DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO PROPOSTO E EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a implantação da metodologia exposta nos capítulos anteriores e sua aplicação ao problema de comportamento de uma plataforma semi-submersível tipo catamarã no mar.

VII.1 - Programas de computador utilizados

Para a aplicação do Método da Síntese Hidrodinâmica em associação com a Teoria das Faixas ao cálculo de movimentos e carregamento de plataformas semi-submersíveis submetidas à ação de mar real foram desenvolvidos e implementados alguns programas de computador, tendo sido também adaptados programas relacionados com o comportamento de embarcações no mar existentes no DEN-EPUSP. Utilizaram-se os seguintes programas:

FRANK:

- Executa o cálculo dos coeficientes de massa adicionada e de amortecimento em seções bi-dimensionais parcial ou totalmente imersas e oscilando segundo cada um de seus três graus de liberdade. Foi adaptado para fornecer também a distribuição de potencial e de pressões no contorno da seção.

DIFRA:

- Utilizando as distribuições de potencial calculadas pelo programa FRANK para as seções de um casco, calcula os esforços de excitação para o casco estacionário e submetido a um trem de ondas regulares incidindo segundo uma direção qualquer. O cálculo considera efeitos de difração, sendo desprezado o amortecimento viscoso.

SEMISUB:

- Emprega os coeficientes de massa adicionada e de amortecimento calculados pelo programa FRANK para as seções dos cascos principais de um semi-submersível e compõe com os coeficientes estimados para os demais elementos, fornecendo os coeficientes globais para a plataforma.

Calcula os esforços de excitação em ondas globais da plataforma, utilizando resultados do programa DIFRA. Para os cascos principais leva-se em consideração os efeitos de difração, enquanto que para os demais elementos são considerados os efeitos viscosos.

EQMOV:

- Resolve as equações do movimento, utilizando os resultados do programa SEMISUB. Fornece os resultados sob a forma de tabela ou de gráfico.

MOVI:

- Calcula os movimentos em pontos especificados da plataforma utilizando os resultados do programa

EQMOV.

CRUZA:

- Calcula estatísticas relacionadas com os movimentos e o carregamento da estrutura em mar real.

Os programas se inter-relacionam segundo o esquema a apresentado no diagrama da página VII.4.

Em adição aos programas anteriores, há possibilidade de uso dos programas ALEAT e REGIST, conforme se vê no diagrama anterior. Têm-se:

ALEAT:

- Permite a estima do espectro de energia do mar des de que se conheçam registros temporais de elevação de ondas no local de operação;

REGIST:

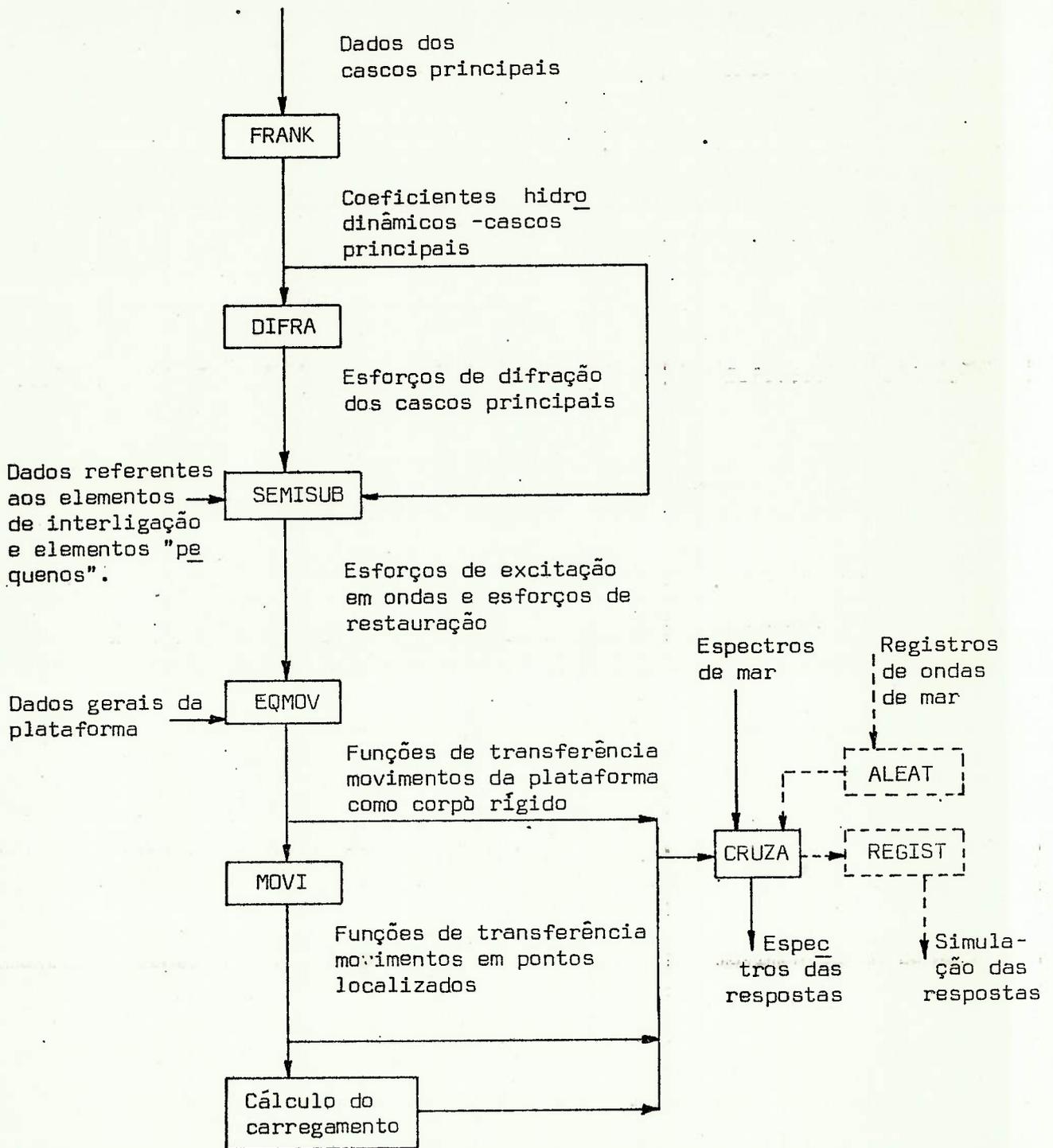
- A partir dos espectros das respostas gera sinais temporais simulados.

Todos os programas foram implementados no computador B-6900 do CCE/USP e suas listagens se encontram no apêndice H.

Para os resultados de um determinado programa se rem utilizados em outro como dados, adotou-se o critério de se compatibilizarem os arquivos de impressão e de leitura, realizando-se sua transferência via disco.

VII.2 - Descrição da plataforma utilizada como exemplo na aplicação do método

Trata-se de uma plataforma semi-submersível tipo ca



tamarã descrita na ref. [28]. Na fig.VII.2.1 apresenta -se o esquema de suas elevações, suas características gerais e o sistema de referências adotado.

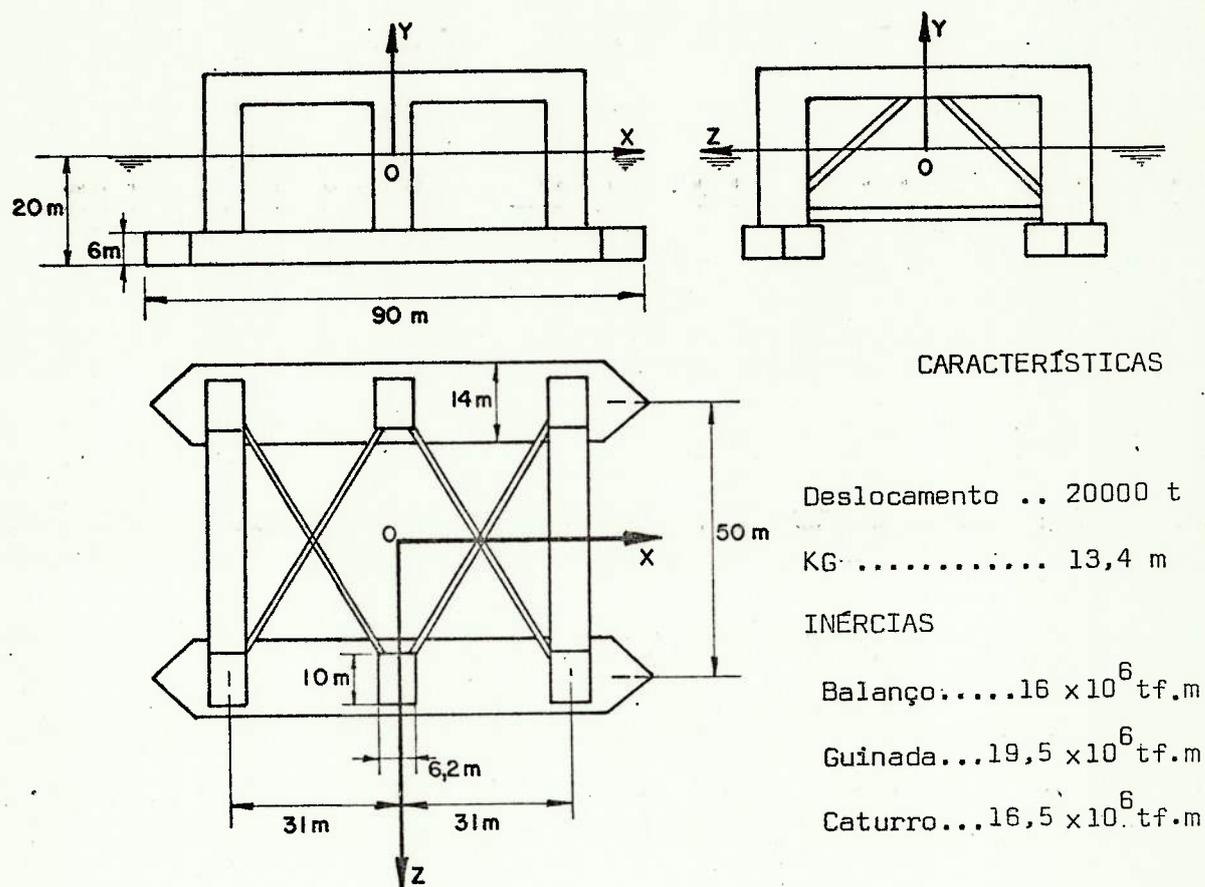


Fig.VIII.2.1 -Plataforma tipo catamarã - características

O modelo considerado nos cálculos consistiu apenas nas seis colunas verticais e nos dois cascos principais, tendo sido ignorados os elementos de interligação.

VII.3 - Cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos e dos esforços excitantes pelo Método de Frank.

Os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicionada e de amortecimento em função das frequências foram calculados para as seções transversais dos cascos principais pelo Método de Frank.

Na figura VII.3.1 apresenta-se o esquema da seção na região de meia nau. A figura VII.3.2 traz os coeficientes de massa adicionada seccionais em arfagem e deriva e a figura VII.3.3 os respectivos coeficientes de amortecimento.

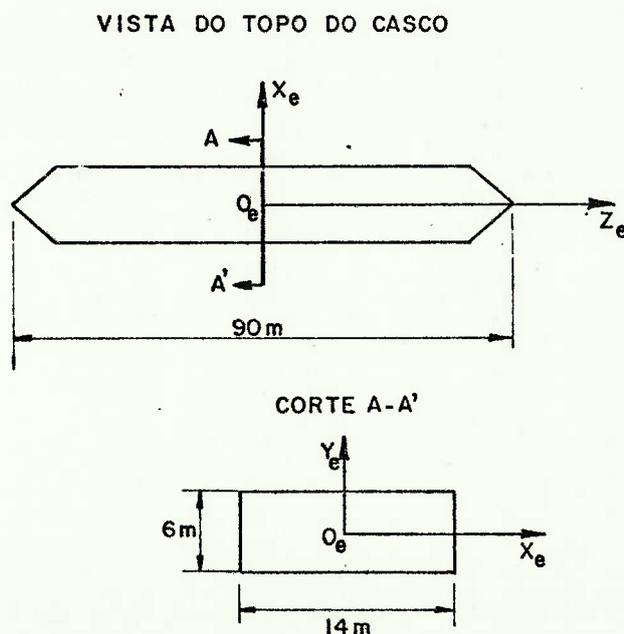


Fig.VII.3.1 - Seção de cada casco principal na região de meia-nau.

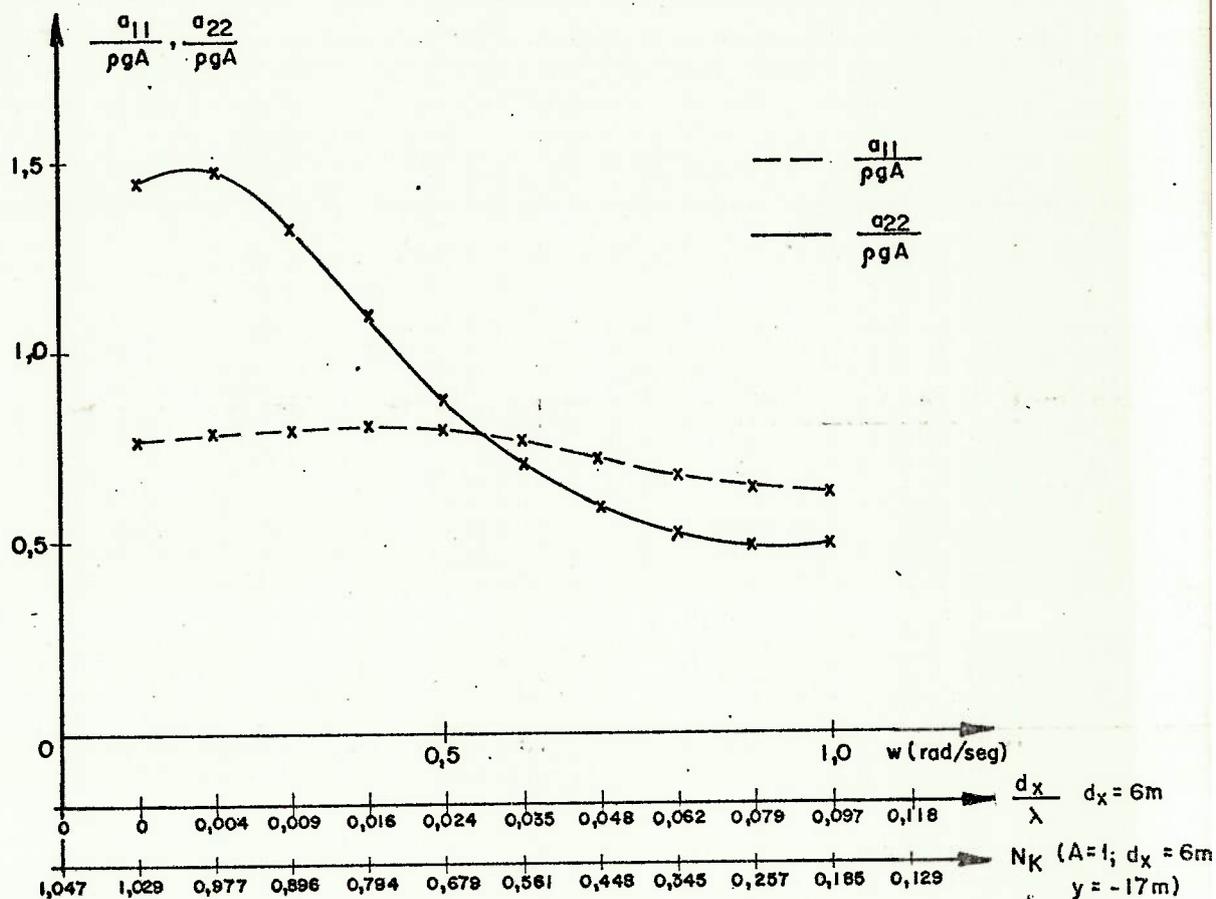


Fig.VII.3.2 - Coeficientes de massa adicionada seccionais - cascos

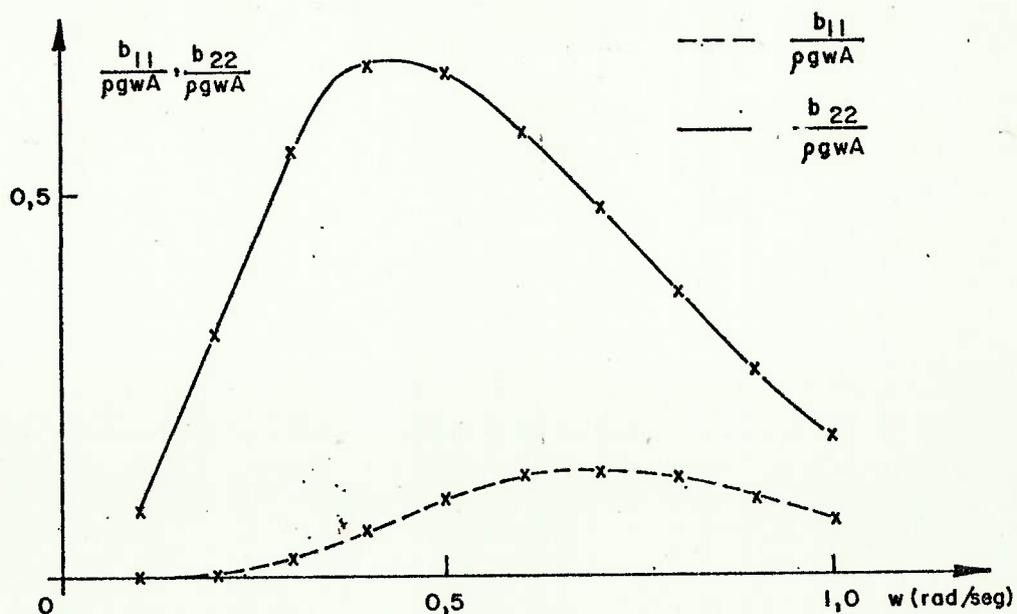


Fig.VII.3.3 - Coeficientes de amortecimento seccionais - cascos

Na figura VII.3.4 apresentam-se convenções segundo as quais serão apresentados os esforços excitantes em cada casco para ondas de proa. A figura VII.3.5 traz a força excitante de arfagem e a figura VII.3.6 o momento excitante de caturro.

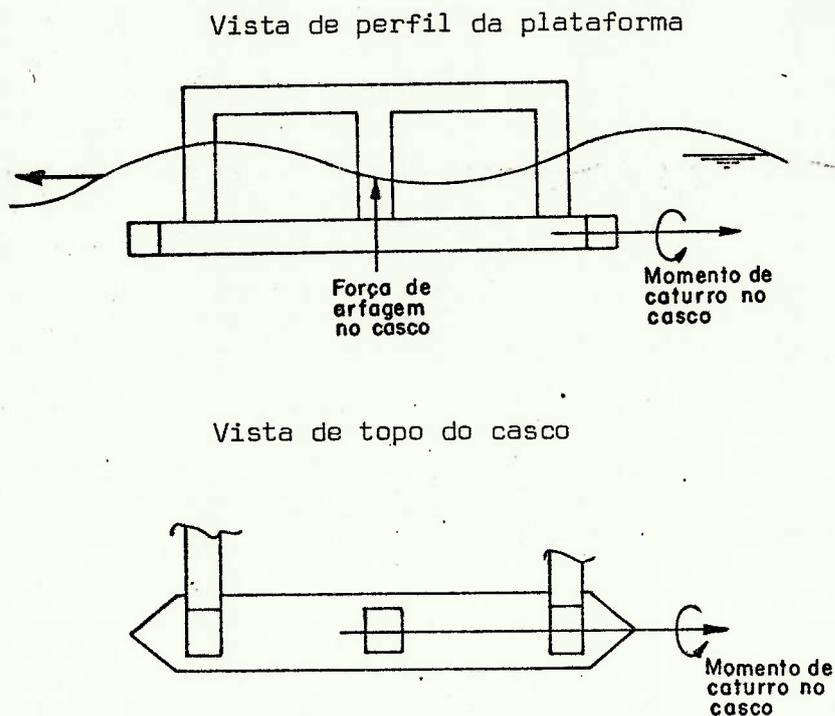


Fig.VII.3.4 - Convenções segundo as quais são apresentados os esforços excitantes.

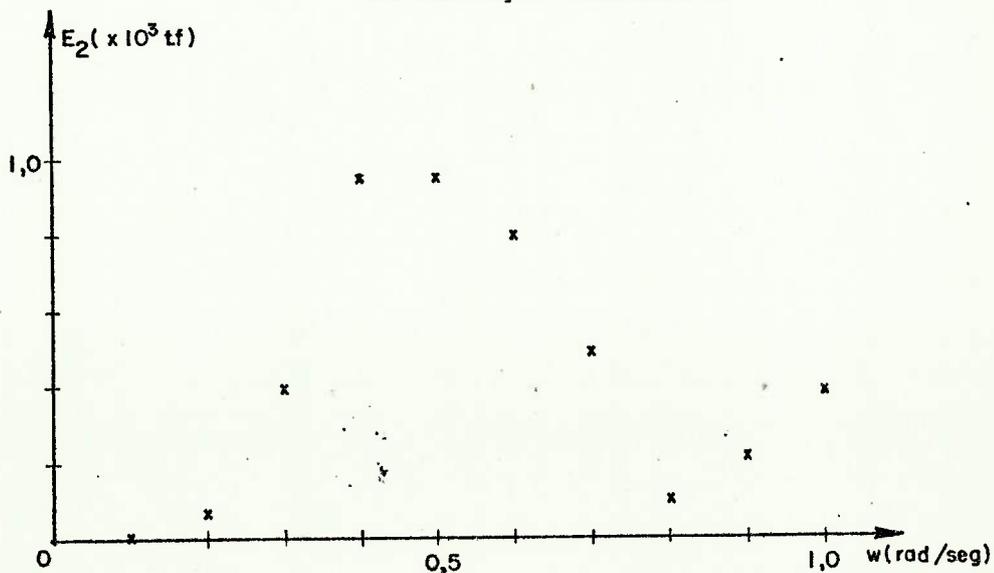


Fig.VII.3.5 - Força excitante de arfagem para ondas de proa em cada casco

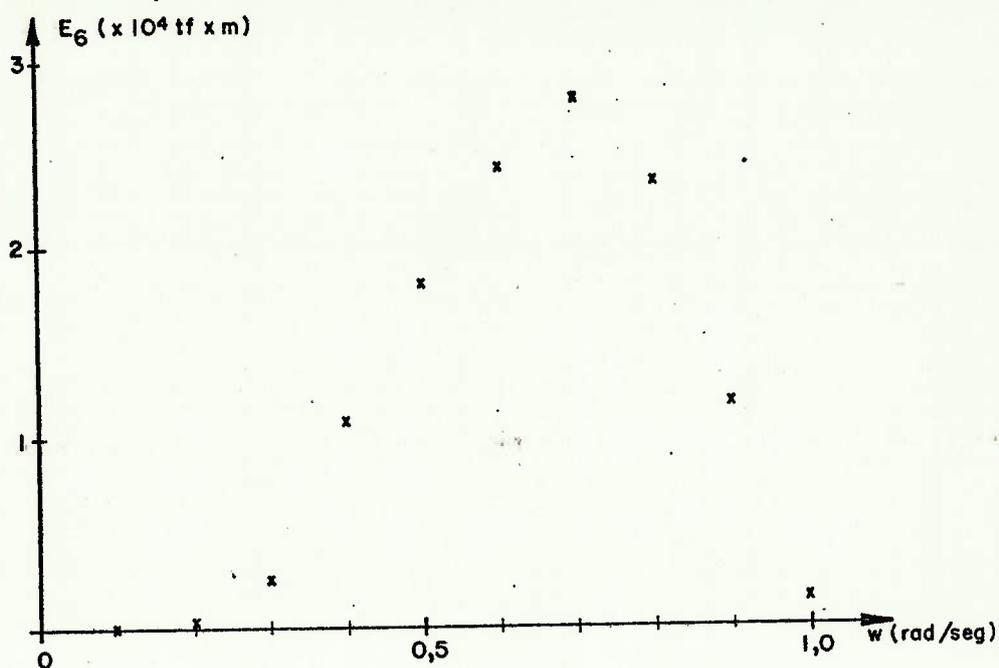


Fig.VII.3.6 - Momento excitante de caturro para ondas de proa em cada casco.

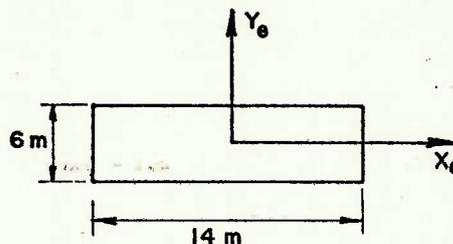
Os coeficientes de momento adicionado e de amortecimento de cada casco ou coluna considerados individualmente foram desprezados.

VII.4 - Estima dos coeficientes hidrodinâmicos dos cascos e das colunas com base experimental

Utilizando as referências [4] , [11], [20] e [34] que trazem sugestões para os coeficientes de inércia e de arrasto com base em ensaios de cilindros submetidos a escoamentos oscilatórios, levantou-se a tabela da figura VII.4.1, onde se encontram os coeficientes hidrodinâmicos das seções dos cascos e das colunas transversalmente à plataforma.

SEÇÃO A MEIA NAU DO CASCO PRINCIPAL

$$\begin{aligned} C_{M_x} &\cong 0,3 \\ C_{M_y} &\cong 1,8 \\ C_{D_x} &\cong 1,9 \\ C_{D_y} &\cong 2,0 \end{aligned}$$



COLUNA

$$\begin{aligned} C_{M_x} &\cong 0,4 \\ C_{M_y} &\cong 0,8 \\ C_{D_x} &\cong 1,5 \\ C_{D_y} &\cong 1,2 \end{aligned}$$

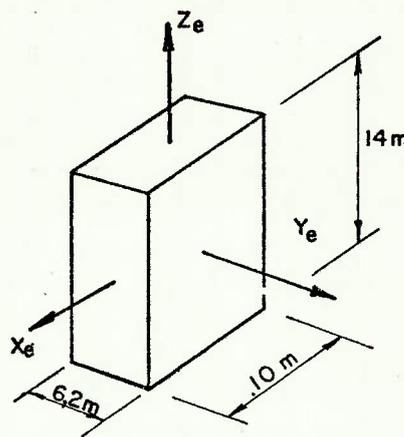


Fig.VII.4.1 - Coeficientes de inércia e de arrasto

VII.5 - Movimentos em ondas regulares

A figura VII.5.1 apresenta a função de transferência de arfagem da plataforma para ondas regulares incidindo pela proa e a figura VII.5.2 a função de transferência de caturro

nas mesmas condições.

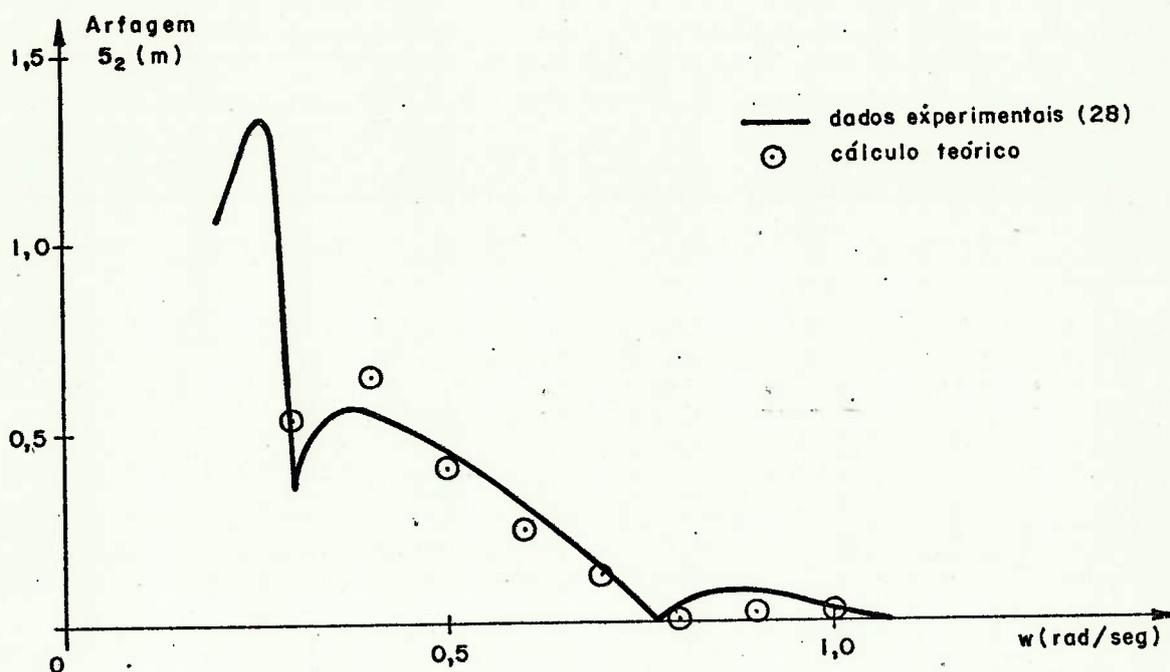


Fig.VII.5.1 - Função de transferência de arfagem - ondas de proa

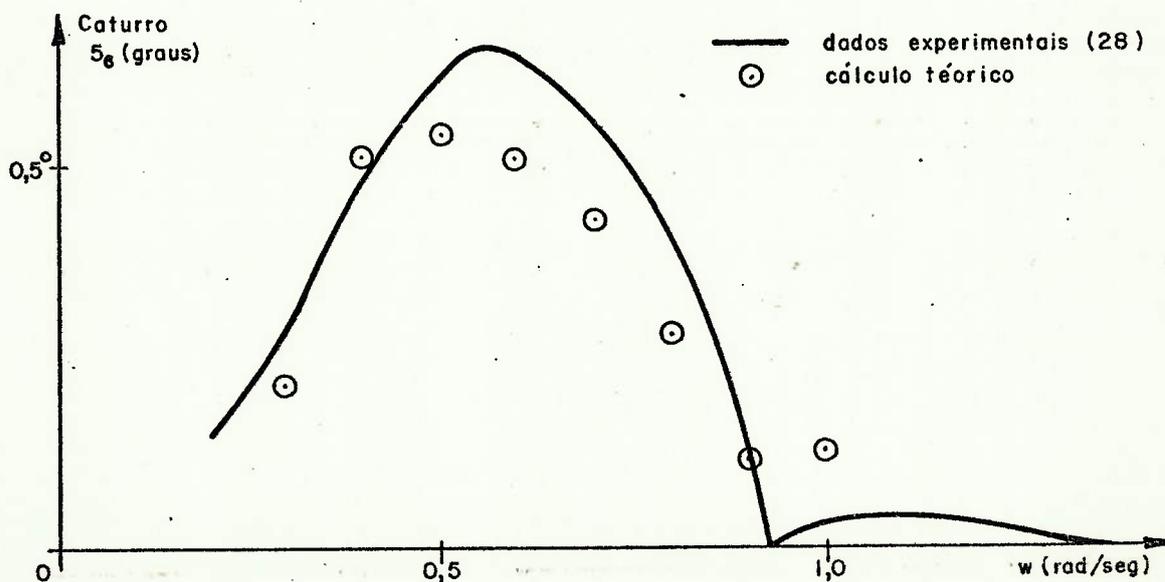


Fig.VII.5.2 - Função de transferência de caturro - ondas de proa

VII.6 - Movimentos em mar irregular

Considerou-se um mar irregular dado pela formulação de Pierson e Moskowitz a dois parâmetros com $H_{1/3} = 2\text{m}$ e $T_0 = 10\text{ seg}$, cujo gráfico está esquematizado na figura VII.6.1

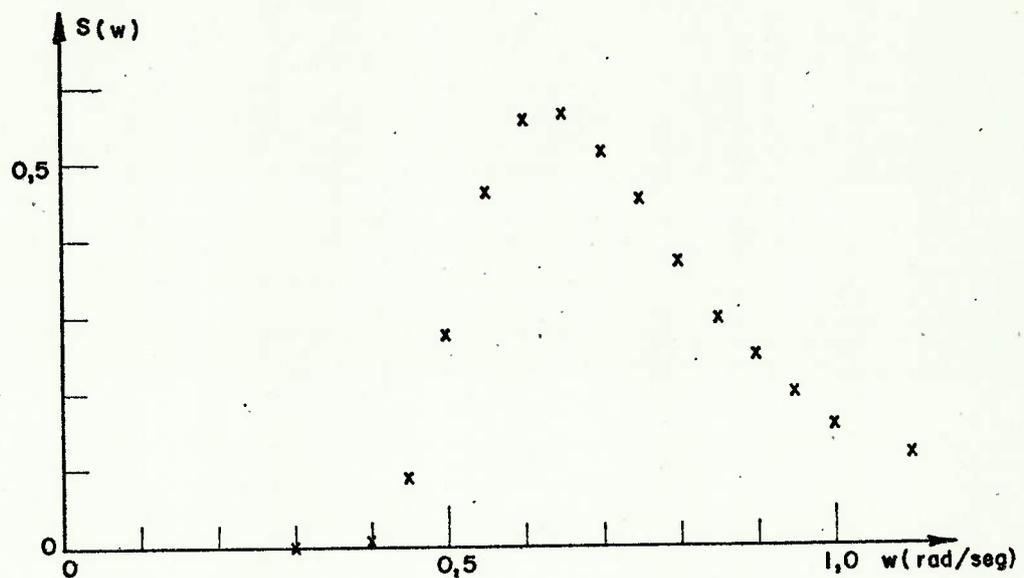


Fig.VII.6.1 - Gráfico do espectro de Pierson e Moskowitz com $H_{1/3} = 2\text{m}$ e $T_0 = 10\text{ seg}$

A função densidade espectral dos movimentos de arfagem e caturro para mar de proa estão nas figuras VII.6.2 e VII.6.3, respectivamente.

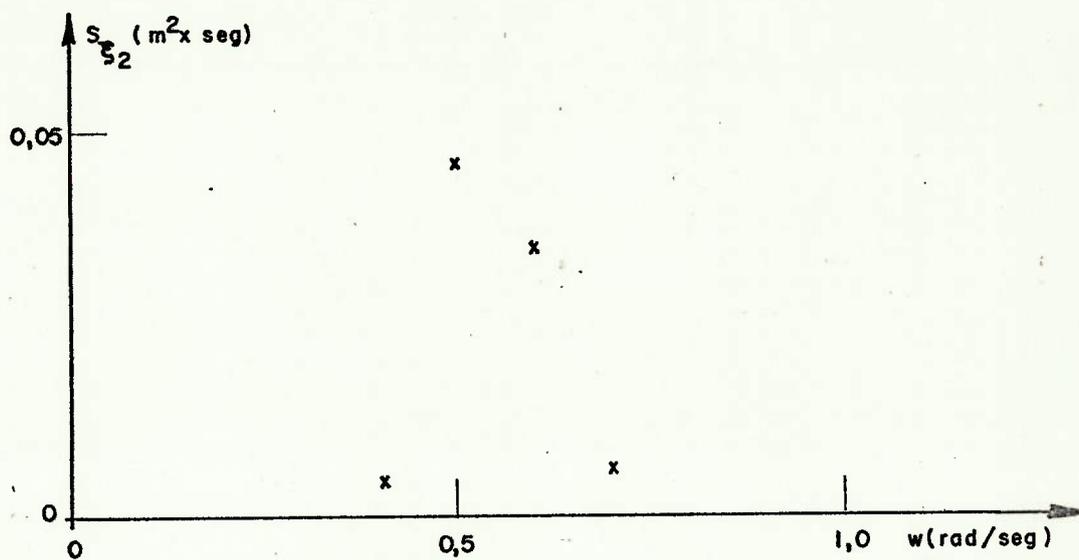


Fig.VII.6.2 - Densidade espectral - arfagem

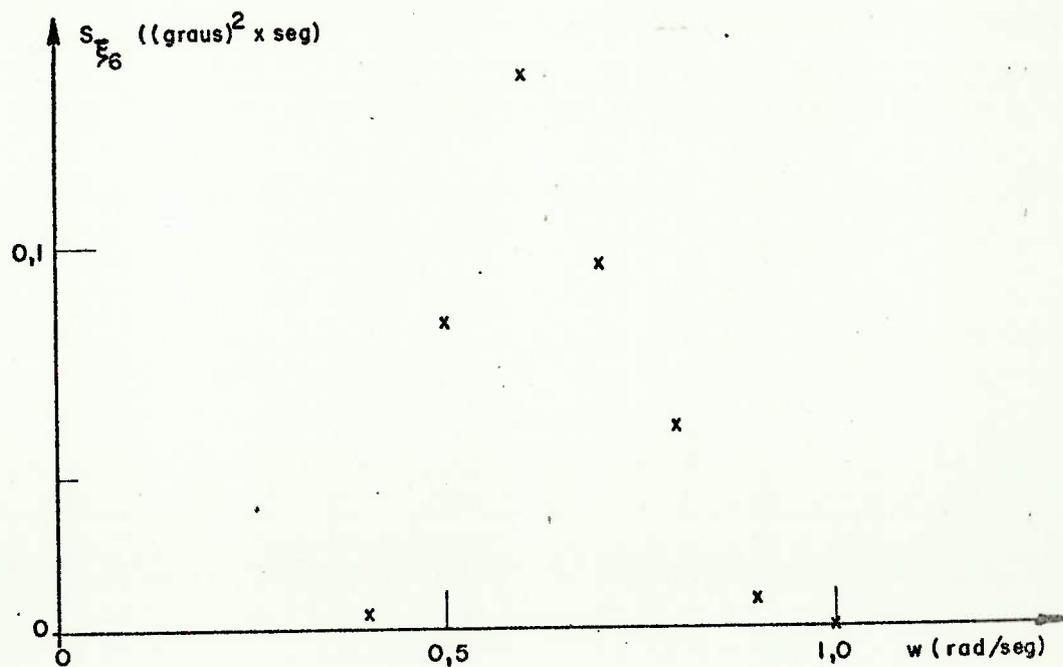


Fig.VII.6.3 - Densidade espectral - caturro

VII.7 - Carregamento

Calculou-se o carregamento hidrodinâmico em torno de uma seção transversal de um dos cascos principais. A figura VII.7.1 traz a especificação da seção e a figura VII.7.2 o gráfico do carregamento.

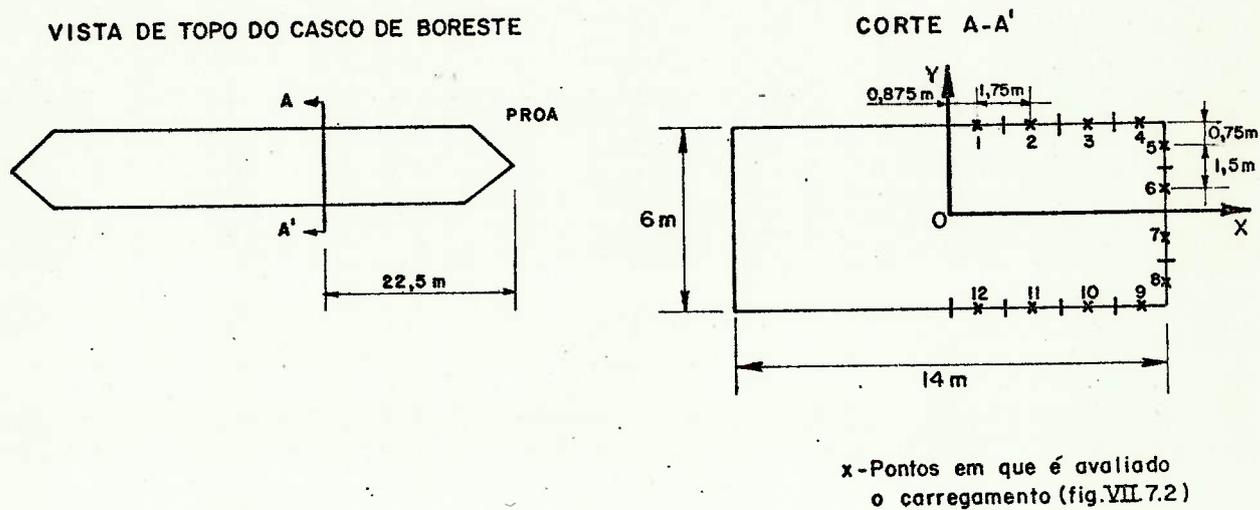


Fig.VII.7.1- Seção transversal de um dos cascos principais

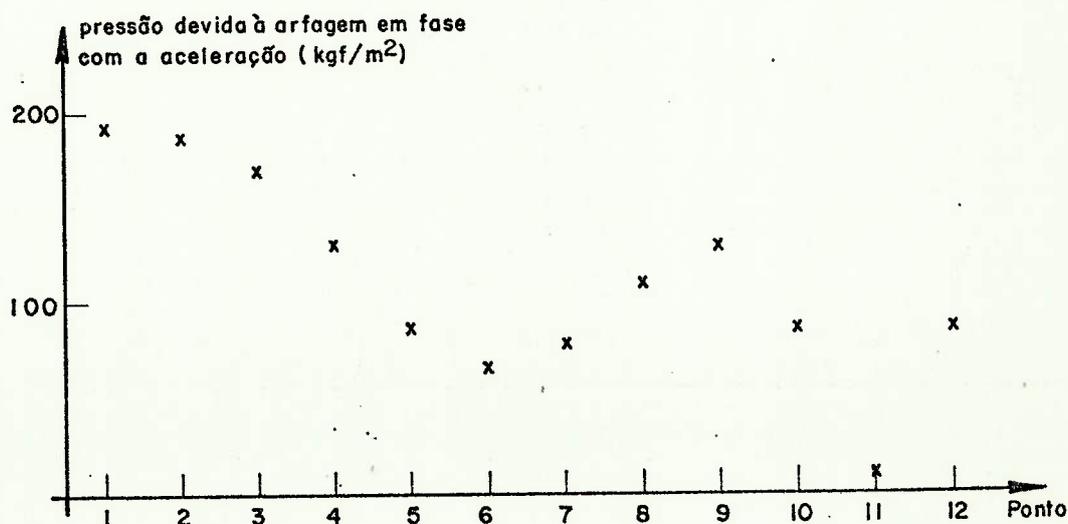


Fig.VII.7.2- Carregamento hidrodinâmico ao redor da seção

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os resultados apresentados no capítulo VII mostram que os esforços hidrodinâmicos em certos membros esbeltos das plataformas semi-submersíveis podem ser calculados pela Teoria Potencial, justificando a metodologia adotada. De fato, os cascos principais da plataforma tomada como exemplo no capítulo VII são tais que se tem $N_k < 1$ para as seções transversais nas frequências de interesse (ver fig.VII.3.2). Recomenda-se utilizar o critério proposto no capítulo V de avaliação do Número de Keulegan-Carpenter na seção para decisão de uso da Teoria da Difração ou da Equação de Morison.

Sugerem-se a seguir alguns trabalhos futuros que permitam aprofundamento das investigações sobre o comportamento de plataformas semi-submersíveis em mar real:

- (1) Avaliação experimental da equação de Morison. Determinação dos coeficientes hidrodinâmicos em ondas em modelos em escala reduzida. Técnicas de extrapolação relacionadas principalmente com os esforços devidos à viscosidade.
- (2) Avaliação teórica e experimental da interação hidrodinâmica entre os diversos elementos da plataforma.
- (3) Inclusão de amarração e de sistemas de posicionamento dinâmico no modelo de análise.
- (4) Verificação do comportamento das plataformas se

mi-submersíveis quando rebocadas em mar real.

- (5) Levantamento de dados em campo para referência de avaliação de métodos teóricos e experimentais.

Conforme se observa no decorrer do texto, as inúmeras hipóteses e simplificações admitidas na concepção do modelo de análise não reproduzem em absoluto a realidade, podendo ser úteis, no entanto, para previsão dos fenômenos de interesse. Julga-se porém imprescindível manter o espírito crítico em relação a todas as afirmações aqui estabelecidas, devendo ser reformuladas na medida em que não mais se mostrarem convincentes.

APÊNDICE A

CARACTERIZAÇÃO DE UM PROBLEMA
DE ESCOAMENTO POTENCIAL

A formulação da Teoria Potencial está exposta em diversos textos clássicos (ver, por exemplo, [92] e [109]). As equações fundamentais são descritas neste apêndice apenas para facilidade de referência e uniformidade de notação.

A.1 - Sistemas de coordenadas e convenções

Considere-se o sistema de coordenadas cartesianas direto $oxyz$ fixo à Terra. Supõe-se existir um fluido numa região R do espaço, delimitada eventualmente por fundo, paredes (fixas ou móveis) e superfície livre, que constituem a superfície S (fechada ou não). Supõe-se que a aceleração da gravidade aja na direção do eixo oy , no sentido negativo. Sejam i , j e k os versores ortonormais associados ao sistema $oxyz$.

O ponto de vista de Euler será normalmente adotado na descrição do movimento do fluido, ou seja, em cada instante t especificam-se o campo de velocidade, de pressão e de densidade do fluido na região por ele ocupada.

As componentes do vetor velocidade \underline{v} no sistema $oxyz$ são denotadas por u , v e w , a pressão por p e a den

sidade do fluido por ρ . O coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido é indicado por μ e o coeficiente de viscosidade de cinemática, μ/ρ , por ν . A aceleração da gravidade é denotada por g .

Pode-se também descrever o movimento do fluido segundo o ponto de vista de Lagrange. Nesse caso descreve-se o movimento de cada partícula fluida individualizada. Se x_0, y_0 e z_0 são as coordenadas de uma partícula P no instante t_0 , objetiva-se determinar as coordenadas $x_p(x_0, y_0, z_0, t)$, $y_p(x_0, y_0, z_0, t)$, $z_p(x_0, y_0, z_0, t)$ da partícula P num instante genérico t . Para se passar do ponto de vista de Lagrange para o de Euler, faz-se:

$$\frac{\partial x_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = u(x_0, y_0, z_0, t);$$

$$\frac{\partial y_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = v(x_0, y_0, z_0, t);$$

$$\frac{\partial z_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = w(x_0, y_0, z_0, t)$$

Deve-se ainda eliminar x_0, y_0 e z_0 dessas expressões. Para se passar do ponto de vista de Euler para o de Lagrange, integram-se as equações abaixo de t_0 a t :

$$\frac{\partial x_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = u(x, y, z, t);$$

$$\frac{\partial y_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = v(x, y, z, t);$$

$$\frac{\partial z_p(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} = w(x, y, z, t)$$

As condições iniciais são $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ e $z(t_0) = z_0$. No instante t têm-se $x(t) = x_p$, $y(t) = y_p$ e $z(t) = z_p$.

Seja $F(x, y, z, t)$ uma grandeza escalar ou vetorial, descrita sob o ponto de vista de Euler, porém associada a cada partícula P, cujo movimento é dado pelas expressões $x = x_p(x_0, y_0, z_0, t)$, $y = y_p(x_0, y_0, z_0, t)$ e $z = z_p(x_0, y_0, z_0, t)$. Sua variação no tempo é então calculada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = (\underline{v} \cdot \nabla) F + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{DF}{Dt},$$

onde o operador $\frac{D}{Dt}$ é chamado de derivada substancial ou material.

A.2 - Equações fundamentais do movimento

Da Lei da Conservação da Massa chega-se à Equação da Continuidade que, para fluidos incompressíveis ($\rho = \text{constante}$) se reduz a:

$$(A.2.1) \quad \text{div } \underline{v} = 0$$

Da 2ª Lei de Newton chega-se às Equações de Euler. Considerando-se fluido incompressível e newtoniano resultam as Equações de Navier Stokes:

$$(A.2.2) \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \underline{v} + \frac{1}{\rho} \underline{f}$$

onde \underline{f} é a resultante das forças externas agentes no interior da região fluída por unidade de volume.

Supondo-se que a única força externa agente seja a aquela devida à gravidade, tem-se:

$$(A.2.3) \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \underline{v} - g \underline{j}$$

Para fluidos considerados invíscidos, a equação acima se reduz a:

$$(A.2.4) \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{j}$$

Admitidas as hipóteses de fluido incompressível e newtoniano, as equações (A.2.1) e (A.2.3), juntamente com condições de contorno e iniciais adequadas, são suficientes para a definição unívoca das componentes u , v e w da velocidade e da pressão p na região fluída em cada instante.

A.3 - Hipótese de escoamento irrotacional. Equação de Laplace. Equação de Bernoulli para escoamento potencial

Diz-se que o escoamento é irrotacional se a seguinte relação for satisfeita na região fluída:

$$(A.3.1) \quad \text{rot } \underline{v} = \underline{0}$$

Por outro lado, define-se a circulação Γ em torno

de um circuito fechado C por:

$$(A.3.2) \quad \Gamma(t) = \oint_C \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds \quad ,$$

onde \underline{t} é um vetor unitário tangente à curva C em cada ponto e ds é um elemento de arco de C .

Pode-se calcular a derivada no tempo da circulação ao longo de qualquer contorno fechado que se mova sempre com o fluido (chamado "contorno material"). Vai-se descrever tal contorno sob o ponto de vista de Lagrange, através da identificação da posição de cada uma de suas partículas em cada instante. Para tanto, será utilizado um vetor posição no referencial $oxyz$, denotado por $\vec{r}(\ell, t)$, onde o parâmetro $\ell (0 \leq \ell \leq 1)$ identifica cada uma das partículas de C e tal que $\vec{r}(0, t) = \vec{r}(1, t)$. Tem-se, assim:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_C \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds = \frac{D}{Dt} \int_0^1 \underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \ell} \, d\ell = \\ &= \int_0^1 \frac{D\underline{v}}{Dt} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \ell} \, d\ell + \int_0^1 \underline{v} \cdot \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \ell} \right) d\ell \end{aligned}$$

Considerando-se o fluido invíscido, tem-se, levando em conta a equação (A.2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\rho} (\text{grad } p \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \ell}) - g \left(\underline{j} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \ell} \right) + \underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial \ell} \right] d\ell = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \ell} - g \frac{\partial y(\ell, t)}{\partial \ell} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ell} (\underline{v} \cdot \underline{v}) \right] d\ell \end{aligned}$$

Como os valores de p , y e \underline{v} coincidem para $\ell=0$ e $\ell=1$, tem-se:

$$(A.3.3) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Conclui-se, assim, o seguinte resultado (chamado de Teorema de Helmholtz):

"Se o fluido é invíscido e se nele somente agem forças conservativas, então a circulação em torno de qualquer circuito fechado composto sempre das mesmas partículas fluidas é constante no tempo".

Em particular, se a totalidade das partículas fluidas estiver com mesma velocidade (eventualmente nula) em algum instante então a circulação é nula para todo t , desde que o fluido seja invíscido.

Aplicando o Teorema de Stokes à definição de circulação, tem-se:

$$(A.3.4) \quad \Gamma(t) = \oint_C \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds = \iint_{S_C} \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, dA,$$

onde S_C é uma superfície contida na região fluida e que tem por contorno a curva C , \underline{n} é a normal a S_C em cada ponto e dA é um elemento de área de S_C .

Se a circulação é nula para todo t e para qualquer curva C , então por (A.3.4) conclui-se que o escoamento é irrotacional para todo t .

Em resumo, admitindo-se fluido invíscido e, adicionalmente, que a totalidade das partículas fluidas esteja em repouso ou com mesma velocidade em algum instante, então o escoamento é irrotacional para todo t .

A hipótese de irrotacionalidade será admitida no restante do trabalho.

Para escoamento irrotacional há uma função potencial de velocidades, denotada por $\Phi(x,y,z,t)$, definida univocamente para qualquer região simplesmente conexa, e tal que:

$$(A.3.5) \quad \underline{v} = \text{grad } \Phi$$

A Equação da Continuidade (A.2.1) para escoamento irrotacional, tendo em vista (A.3.5) se reduz à equação abaixo, denominada Equação de Laplace:

$$(A.3.6) \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

As equações de Navier-Stokes (A.2.4) para escoamento irrotacional podem ser reescritas da seguinte forma:

$$(A.3.7) \quad \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \text{grad}(u^2 + v^2 + w^2) = -\text{grad} \frac{p}{\rho} - \text{grad}(gy)$$

Integrando-se a equação acima, chega-se à Equação de Bernoulli para escoamento irrotacional (ou potencial, como é também chamado):

$$(A.3.8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t) ,$$

onde $C(t)$ é uma variável dependente do tempo, porém que não depende das coordenadas espaciais. Como tal constante não tem influência sobre o movimento do fluido, já que não acarreta modificação no gradiente de pressão em nenhum instante, pode-se fazer $C(t) \equiv 0$ sem perda de generalidade, resultando:

$$(A.3.9) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

A.4 - Condições de contorno

Admita-se a existência de uma superfície S_p , fixa ou móvel, que separe a região fluida de interesse de outro meio, e que possua a propriedade de que qualquer partícula fluida que a ela pertença em alguns instante, continue sempre em S_p . Seja $F(x, y, z, t) = 0$ a equação definidora desta superfície. Supõe-se que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0$$

Considere-se a normal \underline{n} à superfície em cada ponto, dada por:

$$(A.4.1) \quad \underline{n} = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \underline{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \underline{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \underline{k} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Pode-se mostrar que a velocidade do ponto P pertencente à superfície S_p na direção normal à superfície é:

$$(A.4.2) \quad (v_p)_n = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Uma partícula fluida que esteja naquele ponto da su perfície no mesmo instante terá velocidade na direção normal cujo módulo é:

$$(A.4.3) \quad v_n = \underline{v} \cdot \underline{n} = \frac{u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Não deve haver passagem de massa através da superfície, e, portanto, resulta de (A.4.2) e (A.4.3):

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial t}$$

Ou:

$$(A.4.4) \quad \frac{DF}{Dt} = 0$$

A condição (A.4.4) acima, chamada de condição de contorno cinemática deve ser satisfeita tanto na superfície li vre como em contornos sólidos, móveis ou não.

Em particular, para contornos fixos a condição de contorno cinemática se reduz a:

$$(A.4.5) \quad v_n = 0 \quad \text{em contornos fixos}$$

Seja a superfície livre descrita pela expressão $y = \eta(x, z, t)$, onde η é a elevação da superfície livre em relação

à superfície de águas calmas. Assim, tem-se para a superfície livre:

$$F(x,y,z,t) = y - \eta(x,z,t)$$

A condição cinemática (A.4.4) fica reduzida a:

$$(A.4.6) \quad u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v + w \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{na superfície livre}$$

O escoamento é considerado irrotacional, e (A.4.5) e (A.4.6) são reescritas, resultando as expressões abaixo:

$$(A.4.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{em contornos rígidos, e,}$$

$$(A.4.8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{na superfície livre}$$

Na superfície livre faz-se a hipótese de que há continuidade da pressão, ou seja, não se considera o efeito de tensão superficial. Assim, pode-se estabelecer uma relação, dita condição de contorno dinâmica para a superfície livre, dada por:

$$(A.4.9) \quad p(x,y,z,t) = p_0 \text{ (constante) na superfície livre}$$

Através da Equação de Bernouilli (A.3.8), pode-se reduzir a expressão acima a:

$$(A.4.10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gy = 0 \quad \text{para } y = \eta(x,z,t)$$

Supõe-se que a constante $C(t)$ fosse feita igual a $\frac{p_0}{\rho}$, o que não implica, como já foi visto no item A.3 em perda de generalidade.

A.5 - Escoamento potencial bi-dimensional. Uso de variáveis complexas.

Para qualquer escoamento definem-se linhas de corrente como linhas imaginárias tangentes às velocidades das partículas em cada instante. Pode-se demonstrar que as linhas de corrente obedecem às seguintes equações diferenciais:

$$(A.5.1) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Admita-se que se queira estudar um escoamento bidimensional, paralelo ao plano Oxy , não necessariamente irrotacional. A Equação da Continuidade para fluido incompressível (A.2.1) fica reduzida para duas dimensões a:

$$(A.5.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Pode-se observar por (A.5.2) que, mesmo para escoamentos irrotacionais, existe uma função $\psi(x,y,t)$, chamada função corrente, tal que:

$$(A.5.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

Substituindo (A.5.3) em (A.5.1) resulta:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{-dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

ou,

$$(A.5.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{ao longo da linha de corrente}$$

Por (A.5.4) conclui-se que a função corrente é constante ao longo de uma linha de corrente.

Se, adicionalmente, o escoamento for considerado irrotacional, por (A.3.5) e (A.5.3) vê-se que:

$$(A.5.5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Pode-se adotar uma representação complexa para os pontos do plano oxy através, por exemplo, da variável γ , onde

$$(A.5.6) \quad \gamma = x + iy$$

Define-se potencial complexo $f(x,y,t)$ para escoamento irrotacional bi-dimensional por:

$$f(x,y,t) = \Phi(x,y,t) + i\psi(x,y,t)$$

Observa-se que as equações (A.5.5) são as condições de Cauchy-Riemann a que satisfazem as partes real e imaginária de f , que é, portanto, uma função analítica.

A derivada de f em relação a γ pode, então, ser calculada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv$$

Define-se velocidade complexa por: .

$$f' = u - iv$$

A utilização das variáveis complexas para solução de problemas potenciais é feita muitas vezes através do Método Inverso. Tal método consiste em se examinar funções analíticas sob o ponto de vista de potenciais complexos, e em se verificar se elas representam escoamentos de interesse. As linhas de corrente podem ser substituídas por contornos de sólidos fixos, desde que não dependam do tempo.

A.6 - Indicações sobre energia e fluxo de energia

Seja E a energia associada ao fluido existente na região R . Tal energia consiste na energia cinética das partículas e na energia potencial devida à gravidade. Assim, tem-se:

$$(A.6.1) \quad E = \iiint_R \left\{ \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \rho g y \right\} dx dy dz$$

Para fluido incompressível e escoamento irrotacional pela Equação de Bernoulli (A.3.9) a expressão acima se reduz a:

$$(A.6.2) \quad E = - \iiint_R \left[p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dx dy dz$$

A seguir calcula-se o fluxo de energia, dE/dt , através de S . Vai-se usar a seguinte identidade:

$$(A.6.3) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} f(x,y,z,t) d\tau = \iiint_{R(t)} \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} d\tau + \iint_{S(t)} f(x,y,z,t) (v_p)_n d\sigma,$$

onde a função f no 1º termo do segundo membro será substituída segundo (A.6.1) e no 2º termo segundo (A.6.2). Assim, tem-se:

$$(A.6.4) \quad \frac{dE}{dt} = \rho \iiint_{R(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right] dx dy dz + \\ - \iint_{S(t)} \left(p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) (v_p)_n d\sigma.$$

Pela Fórmula de Green [83] e pela Equação de Laplace (A.3.6) tem-se:

$$(A.6.5) \quad \frac{dE}{dt} = \rho \iint_{S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma - \iint_{S(t)} \left(p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) (v_p)_n d\sigma$$

Ou, ainda:

$$(A.6.6) \quad \frac{dE}{dt} = \iint_{S(t)} \left[\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - (v_p)_n \right) - p (v_p)_n \right] d\sigma$$

Seja $S_p(t)$ uma parte da superfície $S(t)$ que tenha a propriedade de conter sempre as mesmas partículas fluidas (por exemplo, a superfície livre). A parcela do fluxo de energia pa

ra $S_p(t)$ é calculada por:

$$(A.6.7) \quad \left. \frac{dE}{dt} \right|_{S_p} = - \iint_{S_p(t)} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma ,$$

já que em S_p a velocidade das partículas na direção normal a S_p , $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, igual a à velocidade da própria superfície na direção normal, $(v_p)_n$. Observa-se que para a superfície livre o fluxo de energia se anula.

Para contornos fixos que contenham sempre as mesmas partículas fluidas (o fundo, por exemplo), o fluxo de energia também se anula, já que $(v_p)_n = 0$.

Seja $S_G(t)$ um contorno geométrico fixo, porém que não contenha necessariamente sempre as mesmas partículas fluidas. Neste caso $(v_p)_n = 0$, porém o fluxo de energia não se anula e é dado por:

$$(A.6.8) \quad \left. \frac{dE}{dt} \right|_{S_G} = \rho \iint_{S_G(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma$$

A.7 - Formulação de um problema potencial com superfície livre

Suponha-se que no instante $t=0$ seja criada uma perturbação sobre uma região D da superfície livre (causada, por exemplo, pelo vento). Admitindo que para $t < 0$ existam âguas calmas, que o fluido seja incompressível e o escoamento irrotacional, estabelece-se a seguir a formulação do problema

de determinação do potencial de velocidade Φ na região fluida e da elevação da superfície livre η .

(1) A Equação de Laplace (A.3.6) deve ser satisfeita em toda a região fluida, ou,

$$(A.7.1) \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{na região fluida}$$

(2) Na superfície dos sólidos fixos deve-se obedecer à condição de contorno cinemática (A.4.7), ou,

$$(A.7.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{na superfície dos sólidos fixos}$$

(3) Na superfície livre deve-se obedecer à condição de contorno cinemática (A.4.8), ou,

$$(A.7.3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{na superfície livre}$$

(4) Na superfície livre também se deve obedecer a uma condição de contorno dinâmica análoga a (A.4.10), dada por

$$(A.7.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + gy = E(x, z, t) \quad \text{na superfície livre,}$$

onde $E(x, z, t)$ é uma função que representa a pressão de perturbação, sendo nula em toda a superfície livre a menos da região D a partir do instante $t=0$, devendo ser, então, especificada.

(5) Devem ser satisfeitas condições de finitude de

Φ e η ao longe.

(6) Nos contornos de sólidos móveis deve-se satisfazer à condição cinemática (A.4.4), ou,

$$(A.7.5) \quad \frac{DF}{Dt} = 0 \quad ,$$

onde $F(x,y,z,t) = 0$ é a equação definidora desses contornos.

(7) Condições iniciais devem ser satisfeitas como:

$$(A.7.6) \quad \eta(x,z,t) = 0 \quad \text{para } t=0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{para } t=0 \text{ na região fluida}$$

Tais condições indicam a situação de águas calmas existente em $t=0$.

Observa-se assim, a dificuldade de resolução do problema, devida à não-linearidade e ao desconhecimento prévio dos contornos da região fluida (em particular, da superfície livre e das posições de sólidos flutuantes).

APÊNDICE B

INDICAÇÕES SOBRE TEORIA DE ONDAS
DE PEQUENA AMPLITUDE

Tal como a Teoria Potencial, a Teoria de Ondas de Pequena Amplitude está exposta em diversos textos clássicos (ver, por exemplo, ref. [92] e [109]). Apresentam-se neste apêndice indicações sobre o seu estabelecimento para que fiquem patentes as simplificações feitas e, conseqüentemente, as limitações para sua aplicação.

Considerem-se válidas a notação e convenções do apêndice A. Admitam-se, adicionalmente, as hipóteses de fluido incompressível e escoamento irrotacional.

Neste apêndice desenvolve-se um processo de perturbação (item B.1), não se discutindo, porém, a natureza da convergência das séries de perturbação, que é analisada na ref. [42].

B.1 - O processo de perturbação

Suponha-se que se conheça uma solução particular exata do problema potencial com superfície livre formulado no item A.7 do apêndice A. Suponha-se também existir um certo parâmetro adimensional ϵ , variável do problema, tal que as so

luções particulares exatas do problema associadas a cada valor de ϵ tendam para a solução conhecida quando ϵ tenda a zero.

Admitam-se existentes as seguintes expansões em séries de potências de ϵ do potencial de velocidades Φ e da elevação da superfície livre η :

$$(B.1.1) \quad \Phi = \Phi^{(0)} + \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \epsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots, \quad e,$$

$$(B.1.2) \quad \eta = \eta^{(0)} + \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \epsilon^3 \eta^{(3)} + \dots$$

Faz-se corresponder à solução particular conhecida para $\epsilon \rightarrow 0$ a solução para o fluido em repouso, ou,

$$\Phi^{(0)}(x,y,z,t) = C_1, \quad e,$$

$$\eta^{(0)}(x,y,z,t) = C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Por conveniência e sem perda de generalidade anula-se C_2 , significando que o plano xoz coincide com a superfície livre do fluido em repouso. Assim, (B.1.2) fica sendo:

$$(B.1.3) \quad \eta = \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \epsilon^3 \eta^{(3)} + \dots$$

A formulação do problema potencial com superfície livre descrita no item A.7 pode ser, então, reescrita em termos das expansões para Φ e η , como se mostra a seguir:

(1) Equação de Laplace a ser satisfeita na região fluida:

$$\nabla^2 [\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots] = 0, \text{ ou}$$

$$\nabla^2 \phi^{(0)} + \epsilon \nabla^2 \phi^{(1)} + \epsilon^2 \nabla^2 \phi^{(2)} + \dots = 0, \text{ ou}$$

$$(B.1.4) \quad \nabla^2 \phi^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots ;$$

(2) Condição de contorno cinemática a ser satisfeita na superfície dos sólidos fixos:

$$\frac{\partial}{\partial n} [\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots] = 0, \text{ ou,}$$

$$\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial n} + \epsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} + \dots = 0, \text{ ou}$$

$$(B.1.5) \quad \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots ;$$

(3) Condição de contorno cinemática a ser satisfeita na superfície livre

$$\frac{\partial}{\partial x} [\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots] \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} [\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots] + \frac{\partial}{\partial z} [\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots] \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots] + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots] = 0, \text{ ou,}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial y} + \epsilon \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right] + \\
& + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} \right] + \\
& + \epsilon^3 \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial y} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(3)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \eta^{(3)}}{\partial z} \right] + \dots = 0,
\end{aligned}$$

ou, como $\Phi^{(0)} = C_1$ (constante),

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} = 0, \\
& \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} = 0, \\
& \text{(B.1.6)} \\
& \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \eta^{(3)}}{\partial t} = 0, \\
& \dots ;
\end{aligned}$$

(4) Condição de contorno dinâmica a ser satisfeita na superfície livre

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Phi^{(0)} + \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots) \right]^2 \right\} + g [\epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots] = E(x, z, t),
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} + \\
& + \epsilon \left\{ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + g \eta^{(1)} \right\} + \\
& + \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + g \eta^{(2)} \right\} + \\
& + \dots = E(x, z, t), \text{ ou, como } \phi^{(0)} = C_1 \text{ (constante),}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(B.1.7)} \quad & \epsilon \left\{ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + g \eta^{(1)} \right\} + \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + g \eta^{(2)} \right\} + \\
& + \dots = E(x, z, t);
\end{aligned}$$

(5) As condições de finitude ao longe devem ser impostas a $\phi^{(k)}$ e $\eta^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$;

(6) Supõe-se que o 1º membro da equação definidora do contorno de sólidos móveis possa também ser expandido em série de potências de ϵ , ou seja,

$$F(x, y, z, t) = F^{(0)}(x, y, z, t) + \epsilon F^{(1)}(x, y, z, t) + \epsilon^2 F^{(2)}(x, y, z, t) + \dots,$$

onde $F^{(0)}(x,y,z,t) = F^{(0)}(x,y,z) = 0$ representa a posição de equilíbrio do sólido quando o fluido está em repouso.

Assim, a condição de contorno cinemática a ser satisfeita na superfície de sólidos móveis fica:

$$\text{grad}[\epsilon\phi^{(1)} + \epsilon^2\phi^{(2)} + \dots] \cdot \text{grad}[F^{(0)} + \epsilon F^{(1)} + \epsilon^2 F^{(2)} + \dots] +$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [F^{(0)} + \epsilon F^{(1)} + \epsilon^2 F^{(2)} + \dots] = 0,$$

ou,

$$\frac{\partial}{\partial t} F^{(0)} + \epsilon [\text{grad } \phi^{(1)} \cdot \text{grad } F^{(0)} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}] +$$

$$\epsilon^2 [\text{grad } \phi^{(2)} \cdot \text{grad } F^{(0)} + \text{grad } \phi^{(1)} \cdot \text{grad } F^{(1)} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}] + \dots = 0,$$

ou, já que $F^{(0)}(x,y,z,t) = F^{(0)}(x,y,z)$,

$$\text{grad } \phi^{(1)} \cdot \text{grad } F^{(0)} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

$$(B.1.8) \quad \text{grad } \phi^{(2)} \cdot \text{grad } F^{(0)} + \text{grad } \phi^{(1)} \cdot \text{grad } F^{(1)} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = 0,$$

...

(7) As condições iniciais se restringem a:

$$(B.1.9) \quad \eta^{(k)}(x,z,t) = 0 \quad \text{para } t = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x} = \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial y} = \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \text{para } t = 0 \text{ na região fluida,}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

B.2 - Formulação do problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre

Na teoria de Ondas de Pequena Amplitude, desprezam-se os termos de ordem igual e superior a 2 nas séries de ϕ e η , resultando equações lineares inclusive para as condições de contorno na superfície livre. Fazendo tais simplificações e indicando daqui por diante $\epsilon\phi^{(1)}$ simplesmente por ϕ e $\epsilon\eta^{(1)}$ simplesmente por η , pode-se escrever a formulação do problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre da seguinte forma:

(1) Equação de Laplace:

$$(B.2.1) \quad \nabla^2\phi = 0 \text{ na região fluida;}$$

(2) Condição de contorno cinemática a ser satisfeita na superfície dos sólidos fixos:

$$(B.2.2) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 ;$$

(3) Condição de contorno cinemática na superfície livre:

$$(B.2.3) \quad -\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \text{ para } y = 0;$$

(4) Condição de contorno dinâmica na superfície livre:

$$(B.2.4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = E(x,z,t) \text{ para } y = 0 ,$$

onde $E(x,z,t)$ representa aqui o termo de 1ª ordem da pressão de perturbação.

(5) Devem-se impor condições de finitude ao longe para $\Phi (= \epsilon \Phi^{(1)})$ e $\eta (= \epsilon \eta^{(1)})$;

(6) A condição de contorno cinemática na superfície de sólidos móveis fica sendo:

$$(B.2.5) \quad \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } F^{(0)} + \epsilon \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad \text{para } F^{(0)}(x,y,z) = 0$$

(7) As condições iniciais são:

$$(B.2.6) \quad \eta(x,z,t) = 0 \quad \text{para } t=0;$$

$$(B.2.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{para } t=0 \quad \text{na região fluida.}$$

As condições cinemática (B.2.3) e dinâmica (B.2.4) para a superfície livre podem ser colocadas sob uma única expressão, onde se elimina a variável η , resultando a seguinte condição de contorno para a superfície livre:

$$(B.2.8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial E(x,z,t)}{\partial t} \quad \text{para } y = 0$$

B.3 - Hipótese de oscilações harmônicas simples. Apresentação de duas notações usuais.

Conforme formulado no item B.2, o problema lineari-

zado de escoamento potencial com superfície livre não admite solução periódica não trivial. Porém, não considerando as condições iniciais (B.2.6) e (B.2.7) e definindo convenientemente a função $E(x,z,t)$, pode-se mostrar que existem soluções harmônicas simples para o problema linearizado.

Neste item, faz-se a hipótese de que as soluções de interesse são harmônicas simples. Apresentam-se duas notações usuais.

Admitindo-se que a frequência de oscilação das soluções seja representada por w , e que as fases para $t = 0$ do potencial de velocidades e da elevação da superfície sejam, respectivamente, σ_ϕ e σ_η , pode-se escrever:

$$(B.3.1) \quad \phi(x,y,z,t) = \bar{\phi}(x,y,z) \cos (wt + \sigma_\phi) ,$$

$$(B.3.2) \quad \eta(x,y,z,t) = \bar{\eta}(x,y,z) \cos (wt + \sigma_\eta) ,$$

onde $\bar{\phi}(x,y,z)$ e $\bar{\eta}(x,y,z)$ representam as amplitudes.

Observa-se que se pode usar a seguinte notação complexa:

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z,t) &= \text{Re}\{\bar{\phi}(x,y,z) e^{i(wt + \sigma_\phi)}\} = \\ &= \text{Re}\{\bar{\phi}(x,y,z) e^{i\sigma_\phi} e^{iwt}\} \end{aligned}$$

Costuma-se empregar a seguinte notação para a amplitude complexa:

$$(B.3.3) \quad \bar{\phi}(x,y,z) = \bar{\phi}(x,y,z) e^{i\sigma_\phi}$$

Procede-se de maneira análoga para a variável η e para as demais variáveis. Assim, sendo a frequência de oscilação igual para todas as variáveis, pode-se formular e resolver o problema em termos de amplitudes complexas, e depois re-tornar à notação real original.

A formulação do problema linearizado do item B.2 em termos de amplitudes complexas (1ª notação usual) fica sendo:

$$(B.3.4) \quad (1) \quad \nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0 \text{ na região fluida;}$$

$$(B.3.5) \quad (2) \quad \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial n} = 0 \text{ na superfície dos sólidos fixos;}$$

$$(B.3.6) \quad (3) \quad g \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} - w^2 \Phi(x, y, z) = iwE(x, z) \text{ para } y = 0 ;$$

$$(B.3.7) \quad (4) \quad \text{grad} \Phi(x, y, z) \cdot \text{grad} F^{(0)}(x, y, z) + \\ + iw \epsilon F^{(1)}(x, y, z) = 0 \text{ para } F^{(0)}(x, y, z) = 0$$

Devido à hipótese de oscilações harmônicas simples, deve-se ainda impor a condição de radiação no infinito, que é discutida no item B.4.

Alternativamente, pode-se usar a seguinte notação:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_1(x, y, z) \cos(wt) + \Phi_2(x, y, z) \text{sen}(wt),$$

sendo as funções Φ_1 e Φ_2 dadas, como se pode verificar, por:

$$\Phi_1(x, y, z) = \bar{\Phi}(x, y, z) \cos(\sigma_\Phi)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = -\bar{\Phi}(x, y, z) \text{sen}(\sigma_\Phi)$$

Inversamente, tem-se:

$$\bar{\Phi}(x,y,z) = \sqrt{\Phi_1^2(x,y,z) + \Phi_2^2(x,y,z)},$$

$$\sigma_{\bar{\Phi}} = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Phi_2(x,y,z)}{\Phi_1(x,y,z)} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\bar{\Phi}} = \frac{\pi}{2}$$

As demais variáveis podem ser escritas analogamente.

A formulação do problema linearizado em termos desta notação (2ª notação usual) fica:

$$(1) \nabla^2 \Phi_k(x,y,z) = 0 \text{ na região fluida, } k = 1,2;$$

$$(2) \frac{\partial \Phi_k(x,y,z)}{\partial n} = 0 \text{ na superfície dos sólidos fixos,}$$

$$k = 1,2;$$

$$(3) g \frac{\partial \Phi_k(x,y,z)}{\partial y} - w^2 \Phi_k(x,y,z) = (-1)^k w E_k(x,z)$$

$$\text{para } y=0, \quad k = 1,2;$$

$$(4) \operatorname{grad} \Phi_k(x,y,z) \cdot \operatorname{grad} F^{(0)}(x,y,z) +$$

$$+ (-1)^k w E_k^{(1)}(x,y,z) = 0 \text{ para } F^{(0)}(x,y,z) = 0,$$

$$k = 1,2.$$

No decorrer do texto usa-se ora uma, ora outra notação, indicando se se trata da 1ª ou da 2ª notação usual, conforme estabelecido neste item.

B.4 - Comentários sobre a condição da radiação

J.J.Stoker em seu livro "Water Waves" [92] comenta que a Mecânica Newtoniana resolve certos problemas de contorno com condições iniciais, sendo então lícita a formulação do problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre, conforme proposta do item B.2 deste trabalho. Porém, na medida em que se supõe a priori, como no item B.3, que a solução é harmônica simples em qualquer tempo, não há mais sentido em se impor condições iniciais. Neste caso, não se pode esperar que a simples imposição das leis da Mecânica Clássica e das condições de contorno garantam a unicidade da solução. Mais natural seria, segundo Stoker, formular um problema de contorno com condições iniciais, em que se impusesse uma excitação harmônica a partir de determinado instante, digamos $t = 0$. Verificar-se-ia, então, o comportamento da solução para $t \rightarrow \infty$, não havendo necessidade de imposição de condições adicionais.

Como se admitiram a priori soluções harmônicas simples (item B.3), há necessidade de garantir que os potenciais causados pela presença e pelos movimentos do corpo sejam tais que as ondas geradas se afastem do corpo.

Prova-se que a imposição da condição de radiação de Sommerfield é suficiente para garantir a unicidade de solução em tal situação [42].

B.5 - Ondas progressivas planas em região de profundidade uniforme.

Considere-se uma região fluida não delimitada em qualquer direção horizontal, porém possuindo um fundo na cota $y=-H$. Suponha-se que em águas calmas a superfície livre coincida com o plano $y=0$. Considere-se o eixo $o\ell$, contido no plano oxz , e que forma um ângulo θ com o eixo ox , conforme indica a figura abaixo:

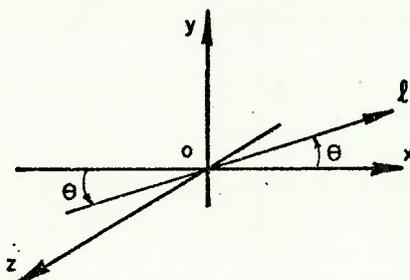


Fig.B.5.1 - Ondas progressivas planas. Sistema de referências

Neste item, apresenta-se uma solução bidimensional (plano $o\ell y$) para problema linearizado com superfície livre, admitindo oscilações harmônicas simples. Sua formulação está apresentada no item B.3. Admite-se que a função $E(x,z)$ de excitação seja dada por:

$$E(x,z) = 0, \quad \forall t$$

A solução apresentada se refere a ondas progressivas planas, pois seu sentido de propagação coincide com o sentido positivo de $o\ell$.

O potencial de velocidades para ondas progressivas

planas em região de profundidade uniforme, é dado por:

$$(B.5.1) \quad \Phi(\ell, y, t) = \frac{Ag}{w} \frac{\cosh[k(y+H)]}{\cosh(kH)} \cos(k\ell - wt + \sigma_\Phi),$$

onde A é a amplitude e k é chamado número de onda, que satisfaz a seguinte relação, dita relação de dispersão:

$$(B.5.2) \quad w^2 = gk \operatorname{tgh}(kH)$$

A velocidade de propagação da onda, c, é dada por:

$$(B.5.3) \quad c = \frac{w}{k}$$

O comprimento de onda, λ , é dado por:

$$(B.5.4) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

A partir das expressões (B.5.3), (B.5.4) e (B.5.2) pode-se obter a seguinte relação entre a velocidade de propagação da onda, o comprimento de onda e a espessura da lâmina d'água:

$$(B.5.5) \quad c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}$$

A expressão da elevação da superfície livre, no caso elevação da onda, pode ser obtida da condição de contorno dinâmica na superfície livre (B.2.4), ou seja,

$$\eta(\ell, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(\ell, y, t)}{\partial t} \Big|_{y=0} =$$

$$= - A \operatorname{sen} (k\ell - wt + \sigma_{\phi})$$

A pressão hidrodinâmica pode ser obtida a partir da Equação de Bernoulli (A.3.9), omitindo-se o termo hidrostático e os termos de 2ª ordem, ou

$$(B.5.6) \quad p(\ell, y, t) = -\rho \frac{\partial \phi(\ell, y, t)}{\partial t} = -\rho Ag \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \operatorname{sen}(k\ell - wt + \sigma_{\phi})$$

Em relação às coordenadas do sistema oxyz, têm-se:

$$(B.5.7) \quad \phi(x, y, z, t) = \frac{Ag}{w} \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \cos [k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt + \sigma_{\phi}],$$

$$(B.5.8) \quad \eta(x, z, t) = - A \operatorname{sen} [k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt + \sigma_{\phi}],$$

$$(B.5.9) \quad p(x, y, z, t) = -\rho Ag \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \operatorname{sen} [k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt + \sigma_{\phi}].$$

Pode-se adotar, sem perda de generalidade, um valor fixado para a fase σ_{ϕ} , pois há interesse somente na diferença de fases das diversas grandezas e não em seu valor absoluto. No que se segue, vai-se admitir sempre:

$$\sigma_{\phi} = - \frac{\pi}{2}$$

Assim (B.5.7), (B.5.8) e (B.5.9) se reduzem a:

$$(B.5.10) \quad \phi(x, y, z, t) = \frac{Ag}{w} \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \operatorname{sen} [k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt],$$

$$(B.5.11) \quad \eta(x,z,t) = A \cos [k(x \cos \theta - z \sin \theta) - \omega t] ,$$

$$(B.5.12) \quad p(x,y,z,t) = \rho A g \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \cos [k(x \cos \theta - z \sin \theta) - \omega t]$$

Em termos de notação complexa:

$$(B.5.13) \quad \phi(x,y,z) = \frac{iAg}{\omega} \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \exp[-ik(x \cos \theta - z \sin \theta)] ,$$

$$(B.5.14) \quad \eta(x,z) = A \exp[-ik(x \cos \theta - z \sin \theta)] ,$$

$$(B.5.15) \quad p(x,y,z) = \rho A g \frac{\cosh [k(y+H)]}{\cosh (kH)} \exp[-ik(x \cos \theta - z \sin \theta)] .$$

B.6 - Ondas progressivas planas em região de profundidade infinita

Considere-se a solução de ondas progressivas planas apresentada no item B.5. Agora vai-se verificar o seu comportamento para $H \rightarrow \infty$.

Observa-se que:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} [\operatorname{tgh}(kH)] = \lim_{H \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} \right] = 1$$

Assim a relação de dispersão (B.5.2) se reduz a:

$$(B.6.1) \quad \omega^2 = gk$$

Ou seja, o número de onda é calculado para profundidade infinita por:

$$(B.6.2) \quad k = \frac{w^2}{g}$$

A solução para profundidade infinita deve satisfazer à seguinte condição:

$$(B.6.3) \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad y \rightarrow -\infty$$

Pode-se mostrar que o potencial de velocidades, neste caso, supondo $\sigma_\Phi = -\pi/2$, é dado por:

$$(B.6.4) \quad \Phi(x,y,z,t) = \frac{Ag}{w} e^{ky} \operatorname{sen}[k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt],$$

onde k é dado por (B.6.2)

A elevação de onda e a pressão ficam:

$$(B.6.5) \quad \eta(x,z,t) = A \cdot \cos[k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt],$$

$$(B.6.6) \quad p(x,y,z,t) = \rho Ag e^{ky} \cos[k(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta) - wt].$$

Em termos de amplitudes complexas:

$$(B.6.7) \quad \Phi(x,y,z) = i \frac{Ag}{w} e^{ky} \exp[ik(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta)],$$

$$(B.6.8) \quad \eta(x,z) = A \cdot \exp[ik(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta)]$$

$$(B.6.9) \quad p(x,y,z) = \rho Ag e^{ky} \exp[ik(x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta)].$$

APÊNDICE C

ESTABELECIMENTO E LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Neste apêndice objetiva-se estabelecer as equações do movimento de um corpo rígido que oscila nos seis graus de liberdade em torno de uma posição de equilíbrio. As oscilações são harmônicas simples, defasadas entre si, e possuem amplitudes pequenas em relação à dimensão característica do corpo, o que justifica sua linearização.

C.1 - Sistemas de coordenadas e convenções. Ângulos de Euler de rumo, trim e banda

Considere-se o sistema de coordenadas cartesianas direto $oxyz$ fixo à Terra, como no Apêndice A (ver item A.1). Sejam i, j e k os versores ortonormais associados ao sistema $oxyz$.

Admita-se que a aceleração da gravidade seja na direção do eixo oy , no seu sentido negativo, sendo que o plano oxz coincide com a superfície das águas quando calmas. Suponha-se que o eixo ox seja segundo a direção N-S, sentido positivo para N.

Considere-se também o sistema de coordenadas cartesianas direto $OXYZ$ fixo a uma embarcação, sendo que OX está segundo sua direção longitudinal e o plano XOY é o seu plano

central-longitudinal. Sejam \underline{I} , \underline{J} e \underline{K} os versores ortonormais associados ao sistema OXYZ.

Seja, ainda, o sistema de coordenadas cartesianas direto $Ox'y'z'$ não inercial, cuja origem O coincide com a do sistema OXYZ, e cujos eixos Ox' , Oy' e Oz' são sempre paralelos aos eixos ox , oy e oz do sistema $oxyz$, respectivamente. Consequentemente, os versores ortonormais associados a $Ox'y'z'$ são \underline{i} , \underline{j} e \underline{k} .

Pode-se posicionar o sistema OXYZ em relação ao sistema $oxyz$ através de ângulos de Euler consagrados no campo de Engenharia Naval, que são os ângulos de rumo, trim e banda .

Tem-se:

ψ : ângulo entre os planos $x'Oy'$ e XOy' , chamado rumo;

(C.1.1) θ : complementar do ângulo entre os eixos Ox e Oy' , chamado trim;

ϕ : ângulo de rotação própria em torno do eixo Ox , chamado banda.

Seja $[\alpha]$ uma matriz 3×3 tal que:

$$(C.1.2) \quad \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{J} \\ \underline{K} \end{bmatrix} = [\alpha] \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{bmatrix}$$

Nas condições acima, pode-se verificar que:

$$(C.1.3) \quad [\alpha] = \begin{bmatrix} (\cos\theta\cos\psi) & (\text{sen}\theta) & (-\cos\theta\text{sen}\psi) \\ (\text{sen}\phi\text{sen}\psi - \cos\phi\text{sen}\theta\cos\psi) & (\cos\phi\cos\theta) & (\text{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\text{sen}\theta\text{sen}\psi) \\ (\cos\phi\text{sen}\psi + \text{sen}\phi\text{sen}\theta\cos\psi) & (-\text{sen}\phi\cos\theta) & (\cos\phi\cos\psi - \text{sen}\phi\text{sen}\theta\text{sen}\psi) \end{bmatrix}$$

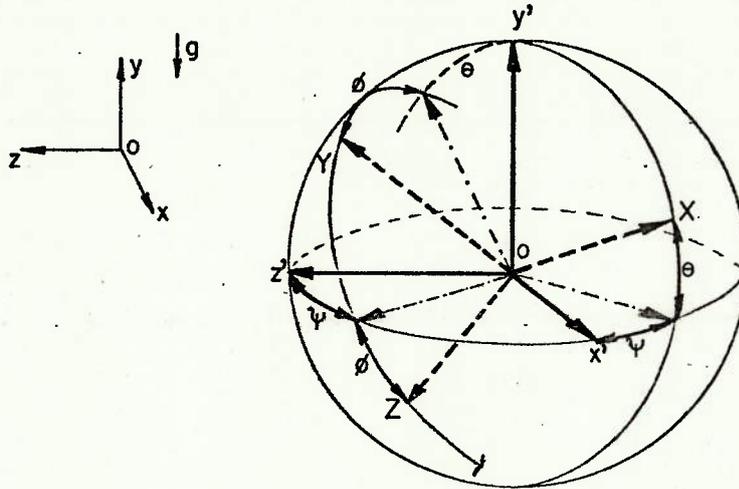


Fig.C.1.1 - Angulos de rumo (ψ), trim (θ) e banda (ϕ).

C.2 - Expressões de velocidade e aceleração de uma partícula móvel em um referencial não inercial.

Seja \underline{w} o vetor velocidade de rotação instantânea do triedro OXYZ em relação ao triedro oxyz. Sejam p, q e r as componentes instantâneas de \underline{w} segundo \underline{I} , \underline{J} e \underline{K} , respectivamente.

Pode-se ver que:

$$(C.2.1) \quad \underline{w} = \dot{\psi}\underline{j} + \dot{\theta}\underline{n} + \dot{\phi}\underline{I}$$

onde \underline{n} é o versor associado ao eixo O_n , intersecção dos planos YOZ com $x'Oz'$, dado por:

$$(C.2.2) \quad \underline{n} = \underline{J} \text{sen}\phi + \underline{K} \cos \phi$$

Tem-se, assim, considerando-se (C.1.3):

$$(C.2.3) \quad \underline{w} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{J} \\ \underline{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \text{sen } \theta \\ \dot{\psi} \text{cos} \phi \text{cos} \theta + \dot{\theta} \text{sen} \phi \\ \dot{\theta} \text{cos} \phi - \text{sen} \phi \cdot \dot{\psi} \text{sen} \phi \end{bmatrix}$$

Seja P um ponto genérico, não necessariamente vinculado ao sistema OXYZ. Vai-se usar a seguinte notação:

(x_p, y_p, z_p) : coordenadas do ponto P no sistema oxyz;

$$\underline{r}_p = x_p \underline{i} + y_p \underline{j} + z_p \underline{k} ;$$

\underline{v}_p : velocidade do ponto P no sistema oxyz;

\underline{a}_p : aceleração do ponto P no sistema oxyz;

(X_p, Y_p, Z_p) : coordenadas do ponto P no sistema OXYZ;

$$\underline{R}_p = X_p \underline{I} + Y_p \underline{J} + Z_p \underline{K} ;$$

\underline{V}_p : velocidade do ponto P no sistema OXYZ;

\underline{A}_p : aceleração do ponto P no sistema OXYZ.

Tem-se, assim:

$$(C.2.4) \quad \underline{r}_p = \underline{r}_0 + \underline{R}_p ;$$

$$(C.2.5) \quad \underline{v}_p = \underline{v}_0 + \underline{w} \wedge \underline{R}_p + \underline{V}_p ;$$

$$(C.2.6) \quad \underline{a}_p = \underline{a}_0 + \dot{\underline{w}} \wedge \underline{R}_p + \underline{w} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{R}_p) + 2\underline{w} \wedge \underline{V}_p + \underline{A}_p .$$

Desenvolvendo-se (C.2.5), tem-se:

$$\underline{v}_p = (\dot{x}_0 \underline{i} + \dot{y}_0 \underline{j} + \dot{z}_0 \underline{k}) + \\ + (p \underline{I} + q \underline{J} + r \underline{K}) \wedge (X_p \underline{I} + Y_p \underline{J} + Z_p \underline{K}) +$$

$$+ (\dot{X}_p \underline{I} + \dot{Y}_p \underline{J} + \dot{Z}_p \underline{K}) , \text{ ou,}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_p &= (\dot{x}_o \underline{i} + \dot{y}_o \underline{j} + \dot{z}_o \underline{k}) + \\ &+ [(qZ_p - rY_p) \underline{I} + (rX_p - pZ_p) \underline{J} + (pY_p - qX_p) \underline{K}] + \\ &+ (\dot{X}_p \underline{I} + \dot{Y}_p \underline{J} + \dot{Z}_p \underline{K}) \end{aligned}$$

Considerando (C.1.2), chega-se a:

$$\begin{aligned} \text{(C.2.7)} \quad \underline{v}_p &= [(\dot{x}_o \alpha_{11} + \dot{y}_o \alpha_{12} + \dot{z}_o \alpha_{13}) + (qZ_p - rY_p) + \dot{X}_p] \underline{I} + \\ &+ [(\dot{x}_o \alpha_{21} + \dot{y}_o \alpha_{22} + \dot{z}_o \alpha_{23}) + (rX_p - pZ_p) + \dot{Y}_p] \underline{J} + \\ &+ [(\dot{x}_o \alpha_{31} + \dot{y}_o \alpha_{32} + \dot{z}_o \alpha_{33}) + (pY_p - qX_p) + \dot{Z}_p] \underline{K} \end{aligned}$$

Calcula-se pela expressão acima a velocidade do ponto P, vinculado ou não ao sistema OXYZ, em relação ao referencial oxyz. As componentes desta velocidade são dadas segundo os versores instantâneos associados ao sistema OXYZ. Os coeficientes α_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) são dados por (C.1.3) e p, q, r por (C.2.3).

Desenvolvendo-se (C.2.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{a}_p &= (\ddot{x}_o \underline{i} + \ddot{y}_o \underline{j} + \ddot{z}_o \underline{k}) + \\ &+ (\dot{p} \underline{I} + \dot{q} \underline{J} + \dot{r} \underline{K}) \wedge (X_p \underline{I} + Y_p \underline{J} + Z_p \underline{K}) + \\ &+ (p \underline{I} + q \underline{J} + r \underline{K}) \wedge [(p \underline{I} + q \underline{J} + r \underline{K}) \wedge (X_p \underline{I} + Y_p \underline{J} + Z_p \underline{K})] + \\ &+ 2(p \underline{I} + q \underline{J} + r \underline{K}) \wedge (\dot{X}_p \underline{I} + \dot{Y}_p \underline{J} + \dot{Z}_p \underline{K}) + \end{aligned}$$

$$+ (\ddot{X}_p \underline{I} + \ddot{Y}_p \underline{J} + \ddot{Z}_p \underline{K}) \quad , \quad \text{ou,}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_p = & (\ddot{x}_o \underline{i} + \ddot{y}_o \underline{j} + \ddot{z}_o \underline{k}) + \\ & + [(\dot{q}\dot{z}_p - \dot{r}\dot{y}_p)\underline{I} + (\dot{r}\dot{x}_p - \dot{p}\dot{z}_p)\underline{J} + (\dot{p}\dot{y}_p - \dot{q}\dot{x}_p)\underline{K}] + \\ & + \{[-(q^2 + r^2)X_p + pqY_p + prZ_p]\underline{I} + \\ & + [pqX_p - (p^2 + r^2)Y_p + qrZ_p]\underline{J} + \\ & + [prX_p + qrY_p - (p^2 + q^2)Z_p]\underline{K}\} + \\ & + 2[(q\dot{z}_p - r\dot{y}_p)\underline{I} + (r\dot{x}_p - p\dot{z}_p)\underline{J} + (p\dot{y}_p - q\dot{x}_p)\underline{K}] + \\ & + (\ddot{X}_p \underline{I} + \ddot{Y}_p \underline{J} + \ddot{Z}_p \underline{K}) \end{aligned}$$

Considerando (C.1.2), chega-se a:

$$\begin{aligned} \text{(C.2.8)} \quad \underline{a}_p = & [(\ddot{x}_o \alpha_{11} + \ddot{y}_o \alpha_{12} + \ddot{z}_o \alpha_{13}) - (q^2 + r^2)X_p + (pq - \dot{r})Y_p + \\ & + (pr + \dot{q})Z_p + 2(q\dot{z}_p - r\dot{y}_p) + \ddot{X}_p] \underline{I} + \\ & + [(\ddot{x}_o \alpha_{21} + \ddot{y}_o \alpha_{22} + \ddot{z}_o \alpha_{23}) + (pq + \dot{r})X_p - (p^2 + r^2)Y_p + \\ & + (qr - \dot{p})Z_p + 2(r\dot{x}_p - p\dot{z}_p) + \ddot{Y}_p] \underline{J} + \\ & + [(\ddot{x}_o \alpha_{31} + \ddot{y}_o \alpha_{32} + \ddot{z}_o \alpha_{33}) + (pr - \dot{q})X_p + (qr + \dot{p})Y_p + \\ & - (p^2 + q^2)Z_p + 2(p\dot{y}_p - q\dot{x}_p) + \ddot{Z}_p] \underline{K} \end{aligned}$$

Calcula-se pela expressão acima a aceleração do ponto P, vinculado ou não ao sistema OXYZ, em relação ao referen

cial $oxyz$. As componentes desta aceleração são dadas segundo os versores instantâneos associados ao sistema $OXYZ$. Os coeficientes α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são calculados por (C.1.3) e p, q, r , por (C.2.3).

C.3 - Equações do movimento para um sistema rígido

Suponha-se haver um conjunto de pontos materiais vinculados ao sistema $OXYZ$. A massa associada a cada ponto material P_i será denotada por m_i . Seja \underline{F} a resultante das forças externas aplicadas ao sistema rígido e \underline{m} o somatório dos momentos externos.

Têm-se, pelas leis de Newton:

$$(C.3.1) \quad \underline{F} = \sum_i m_i \underline{a}_{P_i},$$

$$(C.3.2) \quad \underline{m} = \sum_i \underline{R}_{P_i} \wedge m_i \underline{a}_{P_i}$$

Sendo M a massa total do sistema rígido, ou,

$$M = \sum_i m_i,$$

pode-se definir o centro de gravidade G do sistema rígido como o ponto que tem por coordenadas:

$$(C.3.3) \quad x_G = \frac{\sum_i m_i x_{P_i}}{M}; \quad y_G = \frac{\sum_i m_i y_{P_i}}{M}; \quad z_G = \frac{\sum_i m_i z_{P_i}}{M}$$

Por outro lado, para os pontos P_i vinculados ao sistema $OXYZ$, a expressão (C.2.8) se reduz a:

$$\begin{aligned}
 (C.3.4) \quad a_{P_i} = & [(\ddot{x}_0 \alpha_{11} + \ddot{y}_0 \alpha_{12} + \ddot{z}_0 \alpha_{13}) - (q^2 + r^2) X_{P_i} + \\
 & + (pq - \dot{r}) Y_{P_i} + (pr + \dot{q}) Z_{P_i}] \underline{I} + \\
 & + [(\ddot{x}_0 \alpha_{21} + \ddot{y}_0 \alpha_{22} + \ddot{z}_0 \alpha_{23}) + (pq + \dot{r}) X_{P_i} - \\
 & - (p^2 + r^2) Y_{P_i} + (qr - \dot{p}) Z_{P_i}] \underline{J} + \\
 & + [(\ddot{x}_0 \alpha_{31} + \ddot{y}_0 \alpha_{32} + \ddot{z}_0 \alpha_{33}) + (pr - \dot{q}) X_{P_i} + \\
 & + (qr + \dot{p}) Y_{P_i} - (p^2 + q^2) Z_{P_i}]
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se (C.3.1), levando em consideração (C.3.4) e (C.3.3), tem-se:

$$\begin{aligned}
 (C.3.5) \quad \underline{F} = M \{ & [(\ddot{x}_0 \alpha_{11} + \ddot{y}_0 \alpha_{12} + \ddot{z}_0 \alpha_{13}) - (q^2 + r^2) X_G + \\
 & + (pq - \dot{r}) Y_G + (pr + \dot{q}) Z_G] \underline{I} + \\
 & + [(\ddot{x}_0 \alpha_{21} + \ddot{y}_0 \alpha_{22} + \ddot{z}_0 \alpha_{23}) + (pq + \dot{r}) X_G - \\
 & - (p^2 + r^2) Y_G + (qr - \dot{p}) Z_G] \underline{J} + \\
 & + [(\ddot{x}_0 \alpha_{31} + \ddot{y}_0 \alpha_{32} + \ddot{z}_0 \alpha_{33}) + (pr - \dot{q}) X_G + \\
 & + (qr + \dot{p}) Y_G - (p^2 + q^2) Z_G] \underline{K} \} , \text{ ou,}
 \end{aligned}$$

$$(C.3.6) \quad \underline{F} = M \underline{a}_G$$

Definem-se momentos de inércia do sistema rígido de

pontos materiais P_i em torno do ponto O por

$$(C.3.7) \quad I_{xx}^0 = \sum_i m_i (Y_{P_i}^2 + Z_{P_i}^2) ;$$

$$I_{yy}^0 = \sum_i m_i (X_{P_i}^2 + Z_{P_i}^2) ;$$

$$I_{zz}^0 = \sum_i m_i (X_{P_i}^2 + Y_{P_i}^2) .$$

Definem-se produtos de inércia do sistema rígido em torno do ponto O por:

$$(C.3.8) \quad I_{xy}^0 = I_{yx}^0 = \sum_i m_i X_{P_i} Y_{P_i} ;$$

$$I_{xz}^0 = I_{zx}^0 = \sum_i m_i X_{P_i} Z_{P_i} ;$$

$$I_{yz}^0 = I_{zy}^0 = \sum_i m_i Y_{P_i} Z_{P_i} .$$

Definem-se momentos e produtos de inércia do sistema rígido em torno de seu centro de gravidade G por:

$$(C.3.9) \quad I_{xx} = \sum_i m_i [(Y_{P_i} - Y_G)^2 + (Z_{P_i} - Z_G)^2] ;$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i [(X_{P_i} - X_G)^2 + (Z_{P_i} - Z_G)^2] ;$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i [(X_{P_i} - X_G)^2 + (Y_{P_i} - Y_G)^2] , \text{ e,}$$

$$(C.3.10) \quad I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i (X_{P_i} - X_G)(Y_{P_i} - Y_G) ;$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i (X_{P_i} - X_G)(Z_{P_i} - Z_G) ;$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i (Y_{P_i} - Y_G)(Z_{P_i} - Z_G) .$$

Considerando-se (C.3.3), verifica-se a validade das seguintes relações:

$$(C.3.11) \quad I_{xx}^0 = I_{xx} + M(Y_G^2 + Z_G^2) ;$$

$$I_{yy}^0 = I_{yy} + M(X_G^2 + Z_G^2) ;$$

$$I_{zz}^0 = I_{zz} + M(X_G^2 + Y_G^2) ;$$

$$I_{xy}^0 = I_{xy} + M X_G Y_G ;$$

$$I_{xz}^0 = I_{xz} + M X_G Z_G ;$$

$$I_{yz}^0 = I_{yz} + M Y_G Z_G ;$$

Desenvolvendo (C.3.2), levando em consideração (C.3.4), (C.3.3), (C.3.7) e (C.3.8), chega-se a:

$$(C.3.12) \quad \underline{m} = \{ M [Y_G (\ddot{x}_0 \alpha_{31} + \ddot{y}_0 \alpha_{32} + \ddot{z}_0 \alpha_{33}) - Z_G (\ddot{x}_0 \alpha_{21} + \ddot{y}_0 \alpha_{22} + \ddot{z}_0 \alpha_{23})] + \\ + I_{xx}^0 \dot{p} + (I_{zz}^0 - I_{yy}^0) q \dot{r} + I_{xy}^0 (p \dot{r} - \dot{q}) - I_{xz}^0 (p \dot{q} + \dot{r}) + I_{yz}^0 (r^2 - p^2) \} \underline{i} + \\ + \{ M [Z_G (\ddot{x}_0 \alpha_{11} + \ddot{y}_0 \alpha_{12} + \ddot{z}_0 \alpha_{13}) - X_G (\ddot{x}_0 \alpha_{31} + \ddot{y}_0 \alpha_{32} + \ddot{z}_0 \alpha_{33})] + \\ + I_{yy}^0 \dot{q} + (I_{xx}^0 - I_{zz}^0) p \dot{r} + I_{yz}^0 (q \dot{p} - \dot{r}) - I_{xy}^0 (q \dot{r} + \dot{p}) + I_{xz}^0 (p^2 - r^2) \} \underline{j} + \\ + \{ M [X_G (\ddot{x}_0 \alpha_{21} + \ddot{y}_0 \alpha_{22} + \ddot{z}_0 \alpha_{23}) - Y_G (\ddot{x}_0 \alpha_{11} + \ddot{y}_0 \alpha_{12} + \ddot{z}_0 \alpha_{13})] + \\ + I_{zz}^0 \dot{r} + (I_{yy}^0 - I_{xx}^0) p \dot{q} + I_{xz}^0 (q \dot{r} - \dot{p}) - I_{yz}^0 (p \dot{r} + \dot{q}) + I_{xy}^0 (q^2 - p^2) \} \underline{k} ,$$

onde os momentos e produtos de inércia podem ser calculados

por (C.3.11).

As equações (C.3.5) e (C.3.12) juntamente com as relações (C.1.3) e (C.3.2) constituem as Equações do Movimento do sistema rígido, nas incógnitas $x_0, y_0, z_0, \theta, \psi$ e ϕ e suas derivadas.

C.4 - Comentários sobre a resolução das equações do movimento

As equações do movimento para um sistema rígido, estabelecidas no item C.3, apresentam grande complexidade, mesmo que se suponham conhecidos numericamente os esforços externos em cada instante. Convém observar que tal suposição não é o caso de corpos flutuantes, já que os esforços externos dependem da posição, velocidade e aceleração do corpo em cada instante, tornando o problema ainda mais complexo.

Admitindo-se conhecidos a massa do sistema rígido, seu centro de gravidade, seus momentos e produtos de inércia e os esforços externos, vai-se reescrever a seguir as equações do movimento já estabelecidas, agora sob a forma de relação entre variáveis.

Assim, pode-se reescrever (C.3.5), (C.3.12), (C.1.3) e (C.2.3), respectivamente, como:

$$\underline{F} = f_1(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0, p, q, r, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, (\alpha_{ij}; i, j=1, 2, 3));$$

$$\underline{m} = f_2(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0, p, q, r, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, (\alpha_{ij}; i, j=1, 2, 3));$$

$$\alpha_{ij} = f_3(\theta, \psi, \phi), \quad i, j=1, 2, 3;$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4(\theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) \\ f_5(\theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) \\ f_6(\theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) \end{bmatrix}$$

Além disso, têm-se:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt}, \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}, \quad \text{etc..}$$

Ao todo, são 24 equações a 24 incógnitas, a saber : $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0, p, q, r, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, (\alpha_{ij}; i, j=1, 2, 3), \theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}$, e $\dot{\phi}$. Tais equações, juntamente com as condições iniciais, de finem o problema.

C.5 - Hipótese de pequenos deslocamentos. Expansões em séries de potências. Equações do movimento linearizadas

Analogamente ao que foi feito no item B.1, vai-se admitir existentes as seguintes expansões em séries de potências de um certo parâmetro adimensional ϵ , variável do problema:

$$(C.5.1) \quad x_0 = x_0^{(0)} + \epsilon x_0^{(1)} + \epsilon^2 x_0^{(2)} + \dots ;$$

$$y_0 = y_0^{(0)} + \epsilon y_0^{(1)} + \epsilon^2 y_0^{(2)} + \dots ;$$

$$z_0 = z_0^{(0)} + \epsilon z_0^{(1)} + \epsilon^2 z_0^{(2)} + \dots ;$$

$$\theta = \theta^{(0)} + \epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \dots ;$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \epsilon^2 \psi^{(2)} + \dots ;$$

$$\phi = \phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots ;$$

$$\underline{F} = \underline{F}^{(0)} + \epsilon \underline{F}^{(1)} + \epsilon^2 \underline{F}^{(2)} + \dots ;$$

$$\underline{m} = \underline{m}^{(0)} + \epsilon \underline{m}^{(1)} + \epsilon^2 \underline{m}^{(2)} + \dots .$$

Faz-se corresponder à solução particular conhecida para $\epsilon \rightarrow 0$ uma solução tal que o corpo esteja em repouso e tal que:

$$(C.5.2) \quad x_0^{(0)} = 0 ; \quad y_0^{(0)} = 0 , \quad z_0^{(0)} = 0 ;$$

$$\theta^{(0)} = 0 ; \quad \psi^{(0)} = 0 , \quad \phi^{(0)} = 0 ;$$

$$\underline{F}^{(0)} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{m}^{(0)} = \underline{0}$$

Assim sendo, α_{12} por exemplo fica:

$$\alpha_{12} = \text{sen } \theta = \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right].$$

$$= \left\{ \left[\epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \dots \right] - \frac{\left[\epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \dots \right]^3}{3!} + \dots \right\} =$$

$$= \epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \epsilon^3 \left[\theta^{(3)} + \frac{(\theta^{(1)})^3}{3!} \right] + \dots$$

Admitindo que as soluções de interesse sejam aquelas para as quais ϵ se aproxime de zero, vai-se truncar as séries a partir do termo de 2ª ordem, inclusive, mantendo-se porém a notação anterior.

Pode-se então ver, que (C.1.3) fica:

$$(C.5.3) \quad [\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\psi \\ -\theta & 1 & \phi \\ \psi & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\epsilon\phi^{(1)}$ está indicado simplesmente por ϕ , e assim por diante.

Tem-se, análogamente, para (C.2.3):

$$(C.5.4) \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

A equação (C.3.5) fica:

$$(C.5.5) \quad \underline{F} = M\{\ddot{x}_o - \ddot{\theta}Y_G + \ddot{\psi}Z_G\} \underline{I} + \{\ddot{y}_o + \ddot{\theta}X_G - \ddot{\phi}Z_G\} \underline{J} + \\ + \{\ddot{z}_o - \ddot{\psi}X_G + \ddot{\phi}Y_G\} \underline{K}$$

A equação (C.3.12) fica:

$$(C.5.6) \quad \underline{m} = \{M[Y_G \ddot{z}_o - Z_G \ddot{y}_o] + I_{xx}^o \ddot{\phi} - I_{xy}^o \ddot{\psi} - I_{xz}^o \ddot{\theta}\} \underline{I} + \\ \{M[Z_G \ddot{x}_o - X_G \ddot{z}_o] - I_{xy}^o \ddot{\phi} + I_{yy}^o \ddot{\psi} - I_{yz}^o \ddot{\theta}\} \underline{J} + \\ \{M[X_G \ddot{y}_o - Y_G \ddot{x}_o] - I_{xz}^o \ddot{\phi} - I_{yz}^o \ddot{\psi} + I_{zz}^o \ddot{\theta}\} \underline{K}$$

Em forma matricial (C.5.5) e (C.5.6) ficam:

$$(C.5.7) \quad \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & MZ_G & -MY_G \\ 0 & M & 0 & -MZ_G & 0 & MX_G \\ 0 & 0 & M & MY_G & -MX_G & 0 \\ 0 & -MZ_G & MY_G & I_{xx}^0 & -I_{xy}^0 & -I_{xz}^0 \\ MZ_G & 0 & -MX_G & -I_{xy}^0 & I_{yy}^0 & -I_{yz}^0 \\ -MY_G & MX_G & 0 & -I_{xz}^0 & -I_{yz}^0 & I_{zz}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

onde F_x, F_y e F_z são as projeções de \underline{F} segundo $\underline{I}, \underline{J}$ e \underline{K} , respectivamente, e m_x, m_y e m_z são as componentes de \underline{m} segundo $\underline{I}, \underline{J}$ e \underline{K} , respectivamente.

Define-se a matriz de massa $[M]$ como:

$$(C.5.8) \quad [M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & MZ_G & -MY_G \\ 0 & M & 0 & -MZ_G & 0 & MX_G \\ 0 & 0 & M & MY_G & -MX_G & 0 \\ 0 & -MZ_G & MY_G & I_{xx}^0 & -I_{xy}^0 & -I_{xz}^0 \\ MZ_G & 0 & -MX_G & -I_{xy}^0 & I_{yy}^0 & -I_{yz}^0 \\ -MY_G & MX_G & 0 & -I_{xz}^0 & -I_{yz}^0 & -I_{zz}^0 \end{bmatrix}$$

Definindo-se, ainda:

$$(C.5.9) \quad [E] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\ddot{\xi}] = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{, tem-se:}$$

$$(C.5.10) \quad [E] = [M] [\ddot{\xi}]$$

As equações (C.5.7), ou (C.5.10) em notação concisa, são as equações linearizadas do movimento. Conhecidos os esforços externos em cada instante, elas podem ser resolvidas facilmente nas incógnitas \ddot{x}_0 , \ddot{y}_0 , \ddot{z}_0 , $\ddot{\phi}$, $\ddot{\psi}$ e $\ddot{\theta}$. Obtém-se a velocidade e os deslocamentos por integração.

APÊNDICE D

CÁLCULO DE ESFORÇOS EXCITANTES EM CILINDRO

Em diversas estruturas oceânicas os elementos tubulares constituem componentes frequentes em seu arranjo, como por exemplo nas plataformas fixas tipo jaqueta e nas plataformas semi-submersíveis. A determinação do carregamento em ondas dessas estruturas requer, então, o conhecimento ou a estimativa dos esforços de excitação agentes em seus elementos tubulares. Apresentam-se neste apêndice alguns comentários a respeito das dificuldades associadas à estimativa desses esforços, bem como as simplificações usualmente admitidas.

D.1 - Cilindro submetido a escoamento uniforme ao longe: análise qualitativa do problema

Considere-se um cilindro de seção circular imerso em um fluido sem superfície livre e submetido a um escoamento uniforme ao longe segundo uma direção normal a seu eixo (fig.D.1.1)

Desprezando-se a viscosidade do fluido, pode-se resolver o problema de contorno formado pela Equação de Laplace, pela condição cinemática de contorno na superfície do cilindro e impondo-se distribuição uniforme de velocidades ao longe.

Na fig.D.1.2 apresenta-se a distribuição de pressões

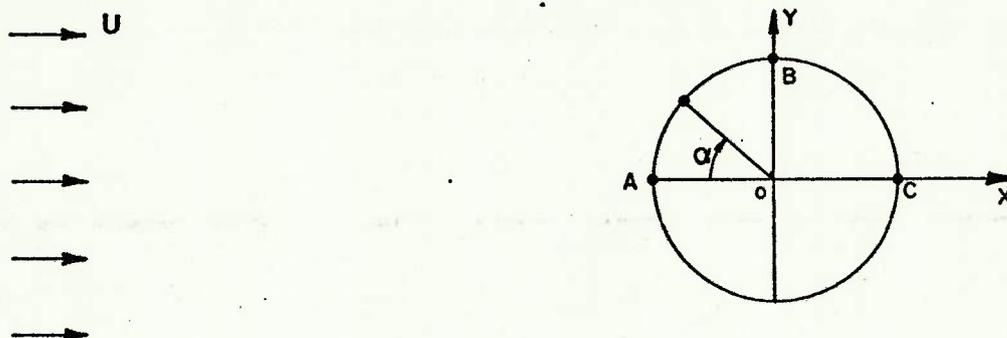


Fig.D.1.1 - Cilindro imerso em fluido infinito e submetido a escoamento uniforme ao longe segundo direção normal a seu eixo.

téorica[84] ao longo do contorno de um cilindro de diâmetro unitário admitindo escoamento potencial. Observe-se que A e C são pontos de estagnação e que o escoamento é simétrico em relação aos eixos OX e OY (fig.D.1.1). Pela Teoria Potencial, então, prevê-se que os esforços resultantes sobre o cilindro são nulos. Tal não é o caso real, no entanto, onde existem os efeitos da viscosidade. Encontram-se também na fig.D.1.2 as distribuições de pressões medidas ao longo do contorno de um cilindro totalmente imerso em translação uniforme. Pode-se observar que, a menos de um pequeno trecho junto à extremidade de montante, as curvas divergem daquela prevista pela Teoria Potencial e dependem do número de Reynolds. Não se pode, então, desprezar neste caso os efeitos devidos à viscosidade.

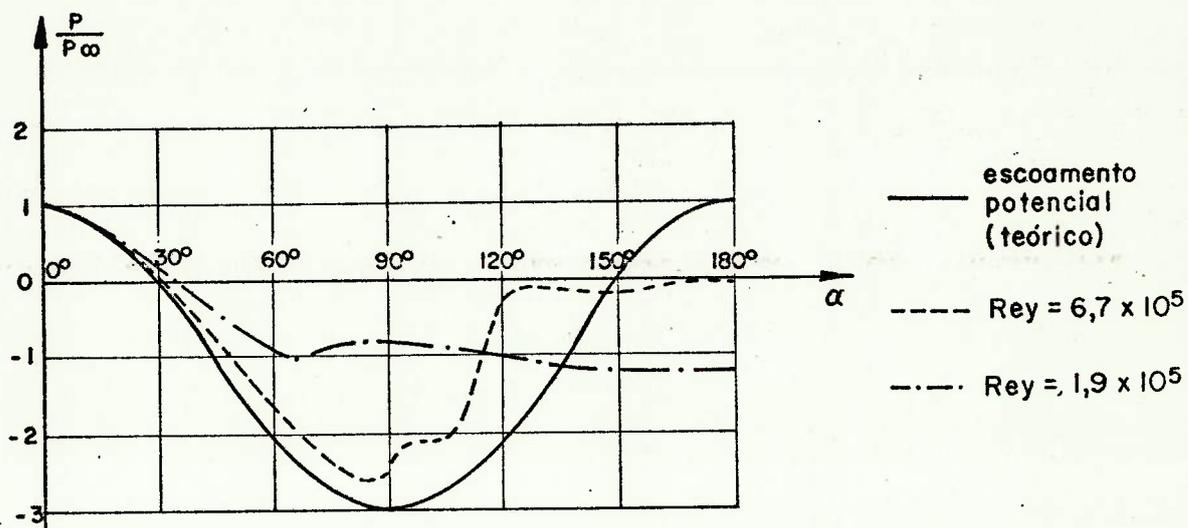


Fig.D.1.2 - Distribuição de pressão ao longo do contorno de um cilindro imerso e submetido a escoamento uniforme.

Qualitativamente, pode-se relacionar os seguintes efeitos associados à viscosidade no escoamento em torno de um cilindro:

- existência de uma camada limite laminar nas proximidades da extremidade de montante (trecho A - B fig.D.1.3),

- existência de uma camada limite turbulenta na região mediana do cilindro (trecho C - D, figura D.1.3);
- existência de uma região de transição entre a camada limite laminar e a turbulenta (trecho B - C, figura D.1.3);
- ocorrência da separação (ponto D, fig.D.1.3);
- geração de vórtices a partir da separação, formando a chamada esteira no escoamento a jusante do cilindro.

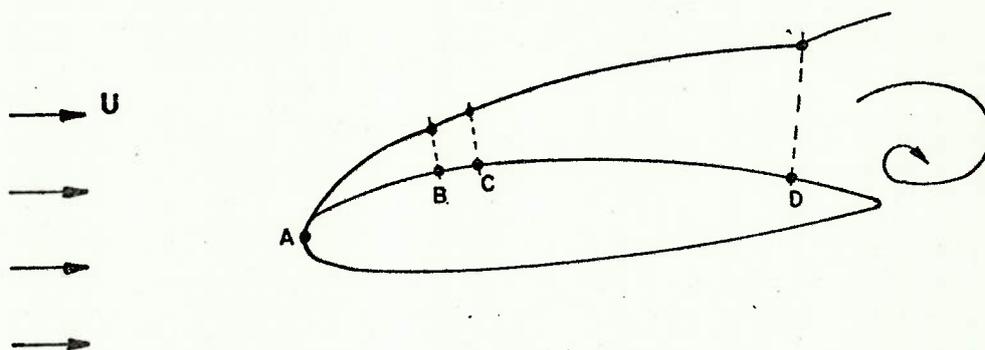


Fig.D.1.3 - Cilindro submetido a escoamento uniforme ao longe: desenvolvimento da camada limite

Na camada limite laminar o campo de velocidades é estável, enquanto que na camada limite turbulenta observam-se dis

tribuições de velocidades médias às quais se sobrepõem perturbações aleatórias. Na fig.D.1.4 tem-se a distribuição típica de velocidades em uma seção da camada limite laminar e de velocidades médias em uma seção da camada limite turbulenta. Verifica-se que o gradiente de velocidades junto ao corpo é mais acentuado para a camada limite turbulenta. A tensão de cisalhamento que surge em cada seção devida à desaceleração do fluido na camada limite é proporcional ao gradiente de velocidades

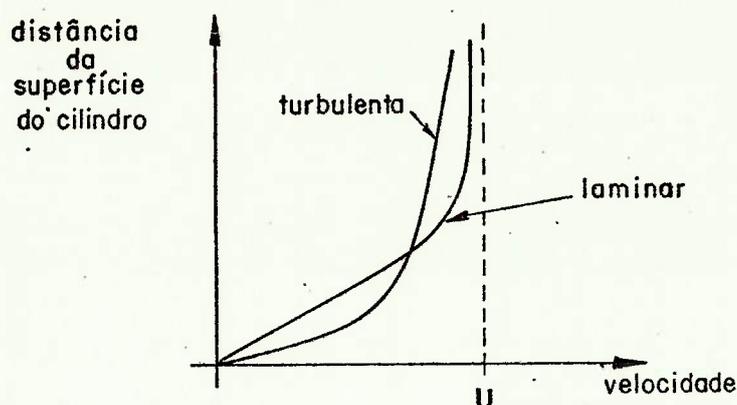


Fig.D.1.4 - Distribuições de velocidades nas camadas-limite laminar e turbulenta

junto ao corpo, sendo então maior para a camada limite turbulenta. A transição, por sua vez, ocorre em uma região de pequenas dimensões quando comparadas com aquelas em que se desenvolvem as camadas limite laminar e turbulenta, e a sua localização depende do número de Reynolds local, do grau de instabilidade do escoamento a montante, da rugosidade da superfície e de outros fatores que nem sempre são passíveis de identificação e medição.

A separação está relacionada à existência de um gradiente de pressões ao longo do corpo, que surge devido à sua curvatura. Observa-se que a distribuição de pressões ao longo do contorno do corpo nas regiões em que se desenvolvem as camadas limites laminar e turbulenta é praticamente a mesma distribuição calculada na hipótese de escoamento potencial. A montante, a pressão junto ao corpo é alta e a energia cinética das partículas é baixa, ocorrendo um ponto de estagnação. À medida em que o escoamento progride em direção à região onde o corpo é mais espesso há um decréscimo da pressão (ver fig.D.1.2) e um aumento da energia cinética das partículas. Se não houvesse dissipação de energia devida às forças viscosas, a pressão voltaria a atingir na extremidade de jusante o mesmo valor que tinha a montante, ocorrendo também um ponto de estagnação, e resultando em arrasto nulo no corpo. Porém, devido à dissipação, a velocidade das partículas se anula antes de atingirem a extremidade de jusante, sendo que a distribuição de pressões do escoamento exterior à camada limite impõe uma reversão na velocidade das partículas, havendo geração de vórtices. O ponto em que a velocidade das partículas junto ao corpo se anula é chamado de ponto de separação. O escoamento a jusante do ponto de separação, onde ocorrem vórtices, é chamado de esteira.

Observa-se experimentalmente na esteira uma seqüência regular de vórtices que têm sentidos de rotação alternados e que se deslocam afastando-se do corpo, conforme esquema da figura D.1.5. Esta seqüência de vórtices é denominada car-

reira de Karman ("Karman-street"), e surge mesmo para corpos simétricos em relação a um eixo paralelo ao escoamento ao longe. Deve-se ao fato de os vórtices serem instáveis para pequenas perturbações transversais. A frequência com que os vórtices são gerados em cilindros de seção circular é caracterizada

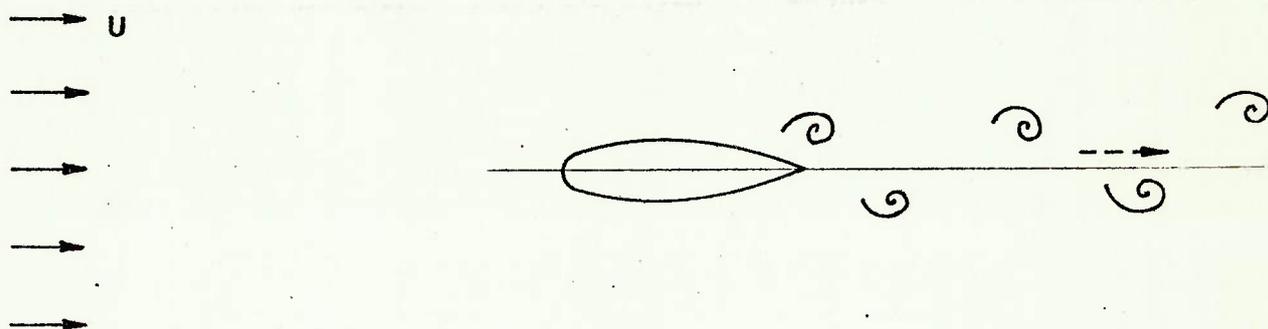


Fig.D.1.5 - Geração de vórtices na esteira

da pelo nº de Strouhal, dado por:

$$S = \frac{nD}{U} ,$$

onde n é a frequência de geração dos vórtices,

D é o diâmetro da seção do cilindro,

U é a velocidade ao longe.

A referência [9] traz um gráfico representando a dependência entre o número de Strouhal e o número de Reynolds para um cilindro de seção circular submetido a escoamento uniforme ao longe, sendo reproduzido na fig.D.1.6. Observa-se que para Reynolds entre 10^3 e 4×10^5 , aproximadamente, o número de Strouhal está em torno de 0,20. Entre $Rey = 4 \times 10^5$ e $Rey = 5 \times 10^7$, apro

ximadamente, não se identifica experimentalmente uma carreira regular de Karman. Por volta de $Rey = 3 \times 10^6$ volta a surgir uma carreira de Karman em que o número de Strouhal fica em torno de 0,27.

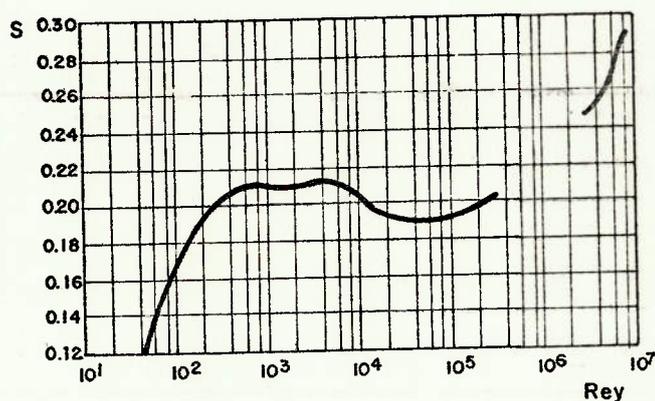


Fig.D.1.6 - Número de Strouhal versus número de Reynolds para cilindro de seção circular submetido a escoamento uniforme ao longo [9] .

Em consequência dos fenômenos descritos pode-se observar os seguintes esforços agentes em um cilindro cuja seção reta é simétrica em relação a um eixo em cuja direção existe um escoamento uniforme ao longo:

- força de arrasto devida ao atrito viscoso nas camadas limites laminar e turbulenta, agindo na direção do escoamento ao longo, sentido contrário, e de intensidade constante;
- força de arrasto devida à queda de pressão entre a

extremidade de montante e de jusante, agindo na direção do escoamento ao longe, sentido contrário, e de intensidade constante;

- forças de arrasto e sustentação devidas à assimetria na geração de vórtices da carreira de Karman, oscilatórias e agindo nas direções paralela e transversal à do escoamento ao longe, respectivamente.

Nos casos em que o corpo não é simétrico ou em que o escoamento ao longe tem uma direção diferente de seu eixo de simetria, deve-se considerar adicionalmente a força de sustentação, determinada pela distribuição de pressões ao longo do contorno, e agindo em direção transversal à do escoamento ao longe.

D.2 - Cilindro submetido a escoamento oscilatório: análise qualitativa do problema

Considere-se um cilindro fixo imerso em um meio sem superfície livre e submetido a um escoamento oscilatório harmônico ao longe segundo uma direção normal a seu eixo (ver fig.D.2.1).

Considere-se também um cilindro imerso em um meio sem superfície livre e em que há estado de repouso ao longe. Supõe-se que o cilindro esteja oscilando harmonicamente em uma direção perpendicular a seu eixo (ver fig.D.2.2).

Prova-se que os potenciais de velocidade que resultam do problema do cilindro fixo submetido a escoamento os

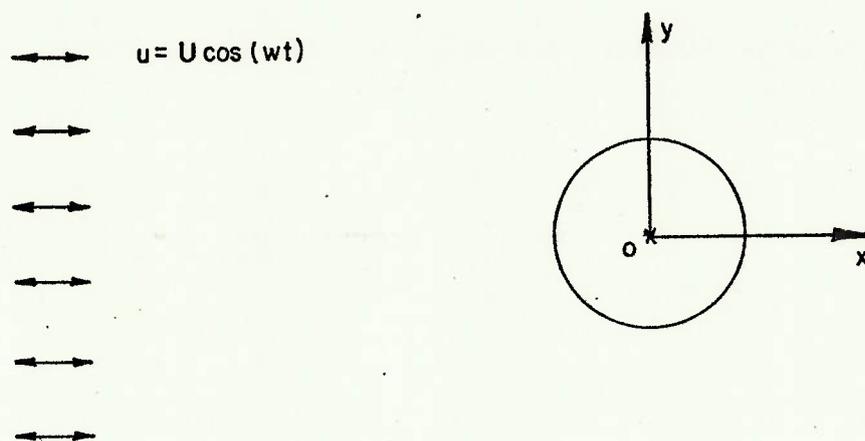


Fig.D.2.1 - Cilindro imerso em fluido infinito e submetido a escoamento oscilatório com velocidade $u = U \cos(\omega t)$ ao longe, em que U = constante, ω é a frequência de oscilação e t o tempo.

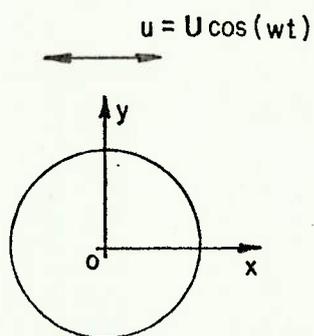


Fig.D.2.2 - Cilindro oscilando harmonicamente com velocidade $u = U \cos(\omega t)$. O sistema OXY é fixo ao cilindro.

cilatório ao longe são equivalentes aos potenciais de velocidade que resultam do problema do cilindro oscilante, desde que referidos ao sistema de coordenadas fixo ao cilindro. A seguir, então, a análise se restringirá ao primeiro problema, podendo porém os resultados serem aplicados ao problema do cilindro oscilante.

O período T do fluxo oscilatório pode ser calculado por:

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Seja D a dimensão característica do cilindro na direção do escoamento ao longe. O intervalo de tempo típico para as partículas fluidas percorrem o contorno do corpo da extremidade de montante até a de jusante, supondo-se que a velocidade ao longe se mantivesse constante e igual a U , teria a seguinte ordem de grandeza:

$$T_t = O\left(\frac{D}{U}\right)$$

No caso de fluxo oscilatório pode-se, então, distinguir os seguintes casos:

(a) $T \ll T_t$, ou seja, o escoamento inverte de sentido antes de as partículas fluidas percorrerem a extensão do corpo. Trata-se de situações em que a frequência de oscilação é "alta", ou em que as dimensões do corpo são "grandes". Nestes casos não ocorre a separação e pode-se utilizar a Teoria Potencial com bons resultados.

(b) $T \gg T_t$, ou seja, há tempo suficiente para que as partículas fluídas percorram a extensão do corpo, formando-se a esteira, antes que haja reversão do escoamento ao longe. São situações em que a frequência é "baixa" ou em que as dimensões do corpo são "reduzidas".

D.3 - Cilindro submetido a ondas. Análise qualitativa do problema

Considere-se, agora, um cilindro fixo imerso em um fluido com superfície livre e submetido a um trem de ondas regulares de pequena amplitude que incide segundo uma direção normal a seu eixo, conforme esquematizado na figura D.3.1.

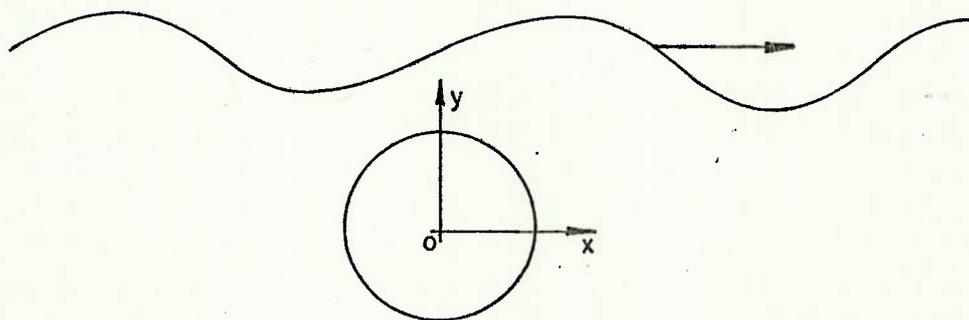


Fig.D.3.1 - Cilindro submetido a ondas

Se T é o período de onda e A a sua amplitude, a velo

cidade das partículas tem a seguinte ordem de grandeza:

$$(D.3.1) \quad U \sim O\left(\frac{A}{T}\right)$$

Sendo D a dimensão característica da seção do cilindro, o período típico para as partículas fluidas contornarem o corpo tem a seguinte ordem de grandeza:

$$T_t \sim O\left(\frac{D}{U}\right) \sim O\left(\frac{D}{A}T\right), \quad \text{ou,}$$

$$(D.3.2) \quad \frac{T_t}{T} \sim O\left(\frac{D}{A}\right)$$

Para ondas de pequena amplitude, vale:

$$(D.3.3) \quad kA \ll 1,$$

em que k é o número de onda.

Valem as mesmas observações do item anterior, a saber:

(a) Para $T \ll T_t$, ou, tendo em vista (D.3.2) e (D.3.3), para $kD \sim O(1)$ ou $kD > O(1)$, a Teoria Potencial é válida e os efeitos de difração podem ser importantes.

(b) Para $T \gg T_t$, ou, tendo em vista (D.3.2) e (D.3.3), para $kD \ll O(1)$, há necessidade de se considerar o arrasto devido à separação. Neste caso, porém, os efeitos de difração são reduzidos, já que o objeto é pequeno em relação ao comprimento de onda, praticamente não a deformando.

Pode-se definir o número de Keulegan-Carpenter por:

$$(D.3.4) \quad N_k = \frac{U_M T}{D}$$

onde U_M é a amplitude da velocidade das partículas. Observa-se então, que:

(.) $T \ll T_t$ corresponde a N_k baixo.

(.) $T \gg T_t$ corresponde a N_k alto.

D.4 - A Equação de Morison

A equação de Morison é uma fórmula semi-empírica introduzida por Morison e outros [60] em 1950 com o objetivo de estimar esforços em uma coluna cilíndrica vertical fixa submetida a ondas. Não se considera a perturbação provocada pela presença da coluna no trem de ondas incidentes, desprezando-se portanto os esforços de difração. Assim, tal fórmula somente se aplica a colunas cujas dimensões da seção transversal são reduzidas em relação ao comprimento de ondas. No entanto, como se observa no item D.3, há necessidade de se considerar nesses casos o arrasto devido à separação, além da força de Froude-Krylov, ou seja:

$$(D.4.1) \quad F = \frac{1}{2} \rho C_D A U^2 + \rho V C_M U$$

onde F é a força transversal agente na coluna vertical fi-

xa,

A é a área da seção transversal,

V é o volume de deslocamento da coluna,

ρ é a densidade da água,

U é a velocidade e \dot{U} é a aceleração das partículas fluidas na direção horizontal,

C_D e C_M são os coeficientes de arrasto e de inércia, respectivamente, estabelecidos empiricamente.

Através da Equação de Morison calcula-se somente a parcela horizontal da força total agente na coluna submetida às ondas, não se considerando o arrasto na direção de seu eixo. Não se consideram também as forças que surgem devido à assimetria na geração de vórtices na esteira (ver item D.1) e a força hidrostática devido à variação da superfície livre.

Costuma-se generalizar a equação (D.4.1) para cilindros com direção qualquer. Considere-se um elemento cilíndrico imerso, ao qual se associa o sistema de coordenadas $O_e X_e Y_e Z_e$, em que $O_e Z_e$ é o seu eixo longitudinal e em que as direções $O_e X_e$ e $O_e Y_e$ são tais que para elas se conhecem os coeficientes de arrasto e de inércia, a saber, C_{Dx} , C_{Dy} e C_{Mx} , C_{My} . Considere-se também o sistema $oxyz$ fixo à Terra, conforme figura D.4.1.

Sejam, ainda:

$\underline{i}_e, \underline{j}_e, \underline{k}_e$: versores ortonormais associados ao sistema $O_e X_e Y_e Z_e$;

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$: versores ortornormais associados ao

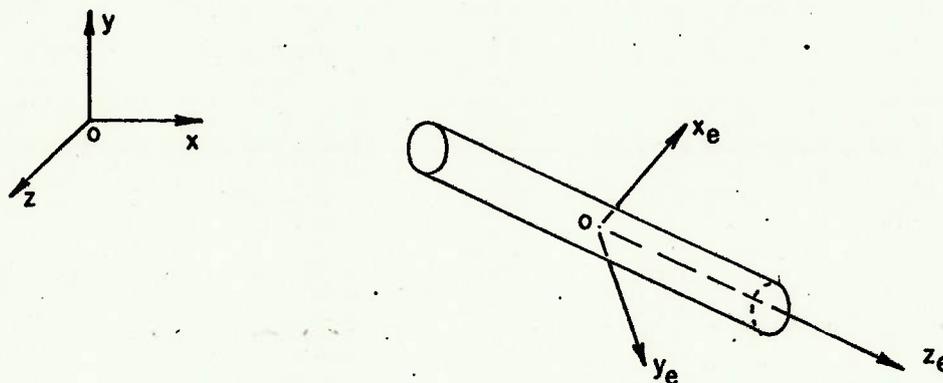


Fig.D.4.1 - Cilindro inclinado: sistemas de coordenadas

· sistema $oxyz$.

· $[\alpha_e]$: matriz de transferência tal que:

$$(D.4.2) \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_e \\ \underline{J}_e \\ \underline{K}_e \end{bmatrix} = |\alpha_e| \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{bmatrix};$$

· d_x, d_y : projeções da seção reta segundo os eixos $O_e Y_e$ e $O_e X_e$, respectivamente:

Tem-se, assim, a seguinte forma generalizada da Equação de Morison para elementos cilíndricos orientados arbitrariamente:

$$(D.4.3) \quad \underline{F} = \int_{\text{eixo } O_e Z_e} \left\{ \begin{array}{l} v_{X_e} \cdot |v_{X_e}| \\ v_{Y_e} \cdot |v_{Y_e}| \\ v_{Z_e} \cdot |v_{Z_e}| \end{array} \right\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho d_x C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho d_y C_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \dot{v}_{X_e} \\ \dot{v}_{Y_e} \\ \dot{v}_{Z_e} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \rho A C_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho A C_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ J_e \\ K_e \end{bmatrix} \} dz_e,$$

onde v_{X_e} , v_{Y_e} e v_{Z_e} são as componentes das velocidades das partículas fluidas segundo as direções de OX_e , OY_e e OZ_e , respectivamente, e calculadas no ponto que é a intersecção de cada seção com o eixo $O_e Z_e$ e \dot{v}_{X_e} , \dot{v}_{Y_e} e \dot{v}_{Z_e} são as correspondentes acelerações.

Observa-se que, além das forças agentes no elemento, deve-se considerar também os momentos devidos a estas forças. Seja \underline{m} o momento das forças de excitação em ondas, dado em relação ao sistema $O_e X_e Y_e Z_e$. Tem-se, assim:

$$(D.4.4) \quad \underline{m} = \int_{\text{eixo } O_e Z_e} \left\{ \begin{array}{l} v_{X_e} |v_{X_e}| z_e \\ v_{Y_e} |v_{Y_e}| z_e \\ v_{Z_e} |v_{Z_e}| z_e \end{array} \right\}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho dx C_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \rho dy C_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_e \\ -I_e \\ K_e \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \dot{v}_{X_e} \cdot Z_e \\ \dot{v}_{Y_e} \cdot Z_e \\ \dot{v}_{Z_e} \cdot Z_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho AC_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho AC_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{-e} \\ -I_{-e} \\ K_{-e} \end{bmatrix} \} dZ_e .$$

A determinação de esforços de excitação em ondas em elementos cilíndricos fixos pode, então, ser feita através das formulações (D.4.3) e (D.4.4), desde que conhecidas as matrizes dos coeficientes de arrasto e de inércia. Se o elemento faz parte de uma estrutura composta, como por exemplo uma jaqueta, deve-se observar que os efeitos de interação entre os diversos elementos não estão sendo considerados, o que é razoável para estruturas reticuladas.

APÊNDICE E

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FONTE PULSANTE BI-DIMENSIONAL

Muitas vezes o Método Inverso mencionado no item A.5 é usado para resolução de problemas de escoamento potencial. Consiste basicamente no exame de funções que satisfaçam à Equação de Laplace em quase todos os pontos de uma região, e na verificação dos escoamentos que elas possam representar. Os pontos em que ocorrem singularidades (onde a Equação de Laplace não é satisfeita) não podem pertencer, no entanto, à região fluida, devendo ficar internos a contornos sólidos, por exemplo. Neste apêndice vai-se aplicar o Método Inverso a um problema bi-dimensional, analisando-se a função que corresponde à chamada fonte pulsante bi-dimensional. Usa-se aqui a notação complexa descrita no item A.5.

E.1 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais

A representação complexa dos pontos do plano xoy será feita através da variável

$$(E.1.1) \quad z = x + iy$$

observando que não há perigo de confusão com a 3ª coordenada do sistema tri-dimensional descrito no apêndice A, já que agora o problema é bi-dimensional.

Seja $f: C - \{z_0\} \rightarrow C$ uma função definida por:

$$(E.1.2) \quad f(z) = m \operatorname{Log}(z-z_0), \quad z \neq z_0,$$

onde m é uma constante real não nula e $z_0 = x_0 + iy_0$ é uma constante complexa.

Tal função é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$. Nestes pontos, calcula-se sua derivada por:

$$(E.1.3) \quad f'(z) = \frac{m}{z-z_0}, \quad z \neq z_0$$

Admita-se uma representação polar centrada em z_0 , onde r é o módulo e α é o argumento, ou seja:

$$(E.1.4) \quad z - z_0 = r e^{i\alpha}$$

Assim:

$$(E.1.5) \quad f(z) = m \ln r + i\alpha; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad r > 0, \quad m \neq 0;$$

$$(E.1.6) \quad f'(z) = \frac{m}{r} e^{-i\alpha}; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad r > 0, \quad m \neq 0$$

Pode-se associar um escoamento potencial bi-dimensional a essa função, onde (E.1.5) representa o potencial complexo e (E.1.6) representa a velocidade complexa. Por (E.1.5) conclui-se que as linhas equipotenciais são circunferências com centro em $z=z_0$, já que por (A.3.7) tem-se:

$$\phi(r, \alpha) = m \ln r,$$

que é constante para r =constante, fixado m .

Também por (E.1.5) conclui-se que as linhas de corrente são

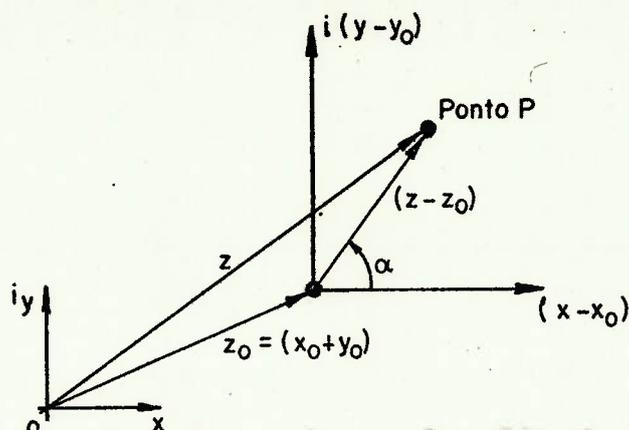


Fig.E.1.1 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais: sistemas de coordenadas

radiais, pois de (A.3.7) tem-se:

$$\psi(r, \alpha) = \alpha,$$

que é constante para $\alpha = \text{constante}$. Por (E.1.6) vê-se que a maiores distâncias do centro os módulos das velocidades são menores (inversamente proporcionais). Também para $m > 0$ o fluxo se dirige para longe de $z = z_0$ e para $m < 0$ o fluxo se dirige para $z = z_0$.

Diz-se que para $m > 0$ a singularidade é uma "fonte" e para $m < 0$ é um "sorvedouro".

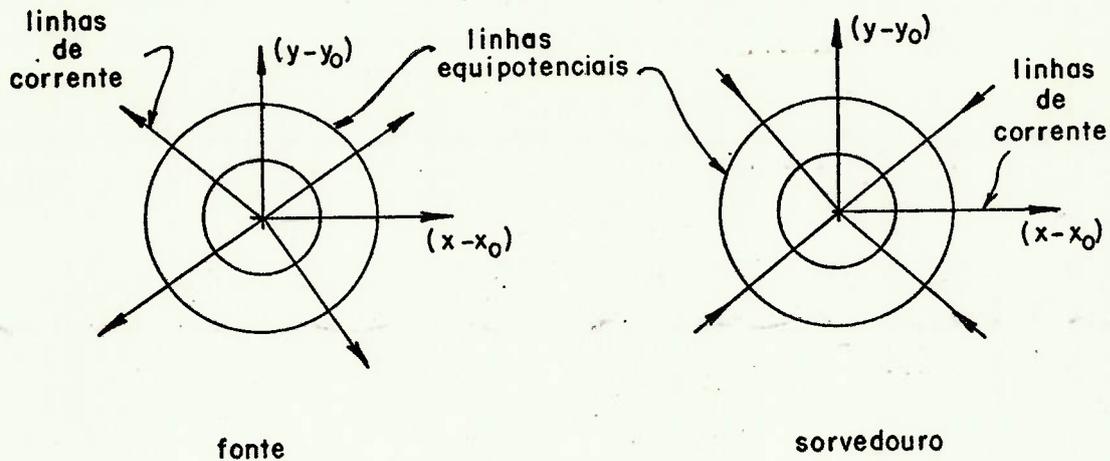


Fig.E.1.2 - Fonte e sorvedouro bi-dimensionais: linhas equipotenciais e de corrente.

E.2 - Fonte pulsante bi-dimensional

Considere-se a expressão (E.1.2), porém com m real dado por:

$$(E.2.1) \quad m = \bar{m} \cos(\omega t + \sigma), \quad \bar{m} \neq 0$$

onde \bar{m} é a sua amplitude, σ é sua fase em relação a um instante inicial fixado e ω é a frequência de oscilação.

Assim, (E.1.5) e (E.1.6) ficam:

$$(E.2.2) \quad f(z) = \bar{m} \cos(\omega t + \sigma) \ln r + i\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad r > 0, \quad \bar{m} \neq 0;$$

$$(E.2.3) \quad f'(z) = \frac{\bar{m} \cos(\omega t + \sigma)}{r} e^{-i\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad r > 0, \quad \bar{m} \neq 0.$$

Vê-se que se pode associar um escoamento potencial bi dimensional a essa função de maneira análoga à apresentada em (E.2.1).

As linhas de corrente continuam radiais e independem do tempo, pois:

$$(E.2.4) \quad \psi(r, \alpha, t) = \alpha,$$

que é constante para $\alpha = \text{constante}$.

As linhas equipotenciais continuam sendo circunferências concêntricas a $z=z_0$, porém têm seu raio variável com o tempo, pois:

$$(E.2.5) \quad \phi(r, \alpha, t) = \bar{m} \cos(\omega t + \sigma) \ln r, \quad e$$

$$\phi(r, \alpha, t) = \text{constante} \implies \ln r \cos(\omega t + \sigma) = \text{constante},$$

o que é verificado para cada t fixado se r é constante.

Por outro lado, se $\bar{m} > 0$, tem-se para k inteiro:

$$(\cdot) \quad \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) < (\omega t + \sigma) < \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right): \text{comportamento de fonte};$$

$$(\cdot\cdot) \quad \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) < (\omega t + \sigma) < \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right): \text{comportamento de sorvedouro}.$$

Para $\bar{m} < 0$, o comportamento é o oposto. Dá-se porém o nome de fonte pulsante a esta singularidade.

E.3 - Formulação do problema

Analogamente ao que foi feito no item B.3, conforme

a segunda notação usual lá apresentada, quer-se formular um problema linearizado de escoamento potencial com superfície livre, admitindo a hipótese de oscilações harmônicas simples. Porém, tem-se agora escoamento bi-dimensional, sendo usada a notação complexa correspondente e admitindo-se a existência de uma fonte pulsante em $z=z_0$. Suponha-se ainda que haja uma profundidade infinita na região, e a inexistência de limitação lateral para o fluido, bem como de sólidos flutuantes. A fonte se encontra no semiplano inferior (ou $y_0 < 0$).

Seja $h(z,t)$ uma função analítica para todo z do semiplano inferior, a menos de $z=z_0$, dada por:

$$h(z,t) = \frac{1}{2\pi} \{ \bar{m} \text{Log}(z-z_0) \cos(\omega t + \sigma) + f_0(z) \cos(\omega t) + f_2(z) \sin(\omega t) \}$$

onde $f_0(z)$ e $f_2(z)$ são funções analíticas no semiplano inferior. Pode-se adotar, sem perda de generalidade, $\sigma=0$, e portanto, representando-se \bar{m} simplesmente por m :

$$(E.3.1) \quad h(z,t) = \frac{1}{2\pi} \{ [m \text{Log}(z-z_0) + f_0(z)] \cos(\omega t) + f_2(z) \sin(\omega t) \}$$

$$\text{Seja } f_1(z) = [m \text{Log}(z-z_0) + f_0(z)]$$

A função $h(z,t)$ nos pontos em que é analítica pode ser interpretada como um potencial complexo, solução do seguinte problema:

$$(E.3.2) \quad (1) \quad \text{Im}\{g f'_\ell(z) + i\omega^2 f_\ell(z)\} = 0, \quad \ell = 1,2, \quad \text{para os pontos } z = x+i0, \text{ que corresponde à condição de contorno}$$

linearizada na superfície livre;

(E.3.3) (2) Fixado $n \in \mathbb{R}$, para todo z onde h é analítica existe $N \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f'_\ell(z)| \leq N \text{ para } |z| \geq n, \ell = 1, 2,$$

ou seja, impõe-se que $f'_\ell(z)$, $\ell = 1, 2$, sejam limitadas;

(E.3.4) (3) $\lim_{y \rightarrow -\infty} |f'_\ell(z)| = 0$, $\ell = 1, 2$,

que corresponde à condição de finitude ao longe.

(E.3.5) (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\operatorname{Re}\{g f'_1(z) + w^2 f_2(z)\}] = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\operatorname{Re}\{g f'_1(z) - w^2 f_2(z)\}] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\operatorname{Re}\{g f'_2(z) - w^2 f_1(z)\}] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\operatorname{Re}\{g f'_2(z) - w^2 f_1(z)\}] = 0,$$

que correspondem às condições de radiação de Sommerfield, suficientes, conforme comentários do item B.4, para garantir que não haja fluxo de energia proveniente do infinito.

A condição (1) também pode ser escrita como:

$$\operatorname{Im}\{f'_\ell(z) + ik f_\ell(z)\} = 0, \ell = 1, 2, \text{ para os pontos } z = x + i0,$$

sendo $k = \frac{w^2}{g}$ (número de onda para profundidade infinita). P_0

de-se proceder analogamente para as condições (4).

E.4 - Resolução do problema

J. Wehausen e E. Laitone [109] apresentam a resolução do problema formulado em E.3. Devido à importância do método de resolução e da própria solução, que é utilizada no Método de Frank descrito no capítulo IV, resolveu-se transcrevê-los neste item.

Sejam as seguintes funções:

$$(E.4.1) \quad A_\ell(z) = f'_\ell(z) + ikf_\ell(z), \quad \ell = 0, 1, 2.$$

Sendo $f_1(z) = [m \operatorname{Log}(z-z_0) + f_0(z)]$, tem-se:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= m \frac{1}{z-z_0} + f'_0(z) + ik[m \operatorname{Log}(z-z_0) + f_0(z)] = \\ &= m \frac{1}{z-z_0} + ikm \operatorname{Log}(z-z_0) + A_0(z) \end{aligned}$$

Ou seja:

$$(E.4.2) \quad A_0(z) = A_1(z) - \frac{m}{z-z_0} - k \operatorname{im} \operatorname{Log}(z-z_0)$$

Observa-se que $A_0(z)$ e $A_2(z)$ são analíticas para todo o semiplano inferior e que $A_1(z)$ é analítica neste semiplano, a menos de $z=z_0$.

A condição (E.3.2) fica:

$$(E.4.3) \quad \operatorname{Im}\{A_\ell\} = 0, \quad \ell = 1, 2 \quad \text{para } z = x + i0$$

Devido a (E.4.3) e devido ao fato de ser analítica no semiplano inferior, a função $A_2(z)$ pode ser estendida para

o semiplano superior através da definição

$$(E.4.4) \quad A(x+iy) = \overline{A(x-iy)}, \quad y > 0$$

Assim definida, a função $A_2(z)$ é analítica em todo o plano complexo.

Aplicando-se agora a condição (E.3.3) conclui-se que, para $|z| \geq n$, tem-se:

$$(E.4.5) \quad |f'_2(z)| \leq N, \text{ ou,}$$

$$(E.4.6) \quad |f_2(z)| < C_1|z| + C_2, \text{ onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são constantes.}$$

Assim sendo, resulta para $|z| > n$:

$$(E.4.7) \quad |A_2(z)| = |f'_2(z) + ikf_2(z)| \leq |f'_2(z)| + k|f_2(z)| < < C_3|z| + C_4, \text{ onde } C_3 \text{ e } C_4 \text{ são constantes.}$$

Como n é arbitrário, através do Teorema de Liouville Generalizado [109] conclui-se que se pode colocar a função $A_2(z)$ sob a forma:

$$(E.4.8) \quad A_2(z) = az + b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

Tem-se:

$$\operatorname{Im}\{A_2(z)\} = \operatorname{Re}\{a\}y + \operatorname{Im}\{a\}x + \operatorname{Im}\{b\}$$

Por (E.4.3) conclui-se:

$$\operatorname{Im}\{a\}x + \operatorname{Im}\{b\} = 0, \text{ para } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ou,}$$

$$(E.4.9) \quad \operatorname{Im}\{a\} = 0 \text{ e } \operatorname{Im}\{b\} = 0$$

Assim sendo, a e b são números reais.

Por outro lado, a equação

$$(E.4.10) \quad f_2'(z) + ik f_2(z) = az + b \quad \text{tem por solução:}$$

$$(E.4.11) \quad f_2(z) = C e^{-ikz} - \frac{ia}{k} z - \frac{ib}{k} + \frac{a}{k^2}$$

A condição (E.3.4) implica em:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} |f_2'(z)| = 0, \quad \text{ou,}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} |-ikC e^{-ikz} - \frac{ia}{k}| = 0, \quad \text{ou,}$$

$$- \frac{ia}{k} = 0, \quad \text{ou,}$$

$$(E.4.12) \quad a = 0$$

Assim tem-se:

$$(E.4.13) \quad f_2(z) = C e^{-ikz} + iB, \quad \text{com } C \text{ e } B \text{ constantes reais.}$$

Pode-se fazer $B = 0$ sem perda de generalidade, resultando:

$$(E.4.14) \quad f_2(z) = C e^{-ikz}$$

A função $A_1(z)$ também pode ser estendida para todo o plano complexo, a menos de $z = z_0$ e de $z = \bar{z}_0$, através da seguinte definição:

$$(E.4.15) \quad A_1(z) = \frac{m}{z-z_0} + k \operatorname{im} \operatorname{Log}(z-z_0) + \frac{m}{z-\bar{z}_0} + \\ - k \operatorname{im} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_0) + A_3(z),$$

onde $A_3(z)$ é uma função analítica em todo o plano.

A função $A_1(z)$ satisfaz a condição (E.4.3) e os seus quatro termos singulares têm parte imaginária nula para $y = 0$. Assim $A_3(z)$ também deve satisfazer (E.4.3).

Sendo $A_3(z)$ analítica em todo o plano e satisfazendo a condição (E.4.3), ela deve ter a mesma forma de $A_2(z)$, ou seja:

$$(E.4.16) \quad A_3(z) = a'z + b', \text{ onde } a' \text{ e } b' \text{ são constantes reais.}$$

De (E.4.1) tem-se:

$$A_1(z) = f_1'(z) + ik f_1(z), \text{ ou,}$$

$$(E.4.17) \quad f_1'(z) + ikf_1(z) = \frac{m}{z-z_0} + kim \operatorname{Log}(z-z_0) + \frac{m}{z-\bar{z}_0} + \\ - kim \operatorname{Log}(z-\bar{z}_0) + a'z + b'$$

A solução para a equação acima é:

$$(E.4.18) \quad f_1(z) = m \operatorname{Log}(z-z_0) - m \operatorname{Log}(z-\bar{z}_0) + \\ + 2 m e^{ikz} \int_{\infty}^z \frac{e^{iku}}{u-\bar{z}_0} du + C' e^{-ikz} + iB',$$

onde B' é real e pode, como em (E.4.14), ser feita nula.

Finalmente C (em E.4.14) e C' (em E.4.18) devem ser escolhidas de modo a satisfazerem a condição de radiação (E.3.5).

Sabe-se que:

$$(E.4.19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iku}}{u-\bar{z}_0} du = 2\pi i e^{ik\bar{z}_0}$$

Utilizando-se de tal identidade pode-se mostrar que:

$$(E.4.20) \quad f_1'(z) + kf_2(z) = -ikC e^{-ikz} + kC' e^{-ikz} + O(z^{-1}) \text{ para } x \rightarrow +\infty;$$

$$(E.4.21) \quad f_1'(z) - kf_2(z) = -4\pi m e^{-ik(z-\bar{z}_0)} - ikC e^{-ikz} - \\ - kC' e^{-ikz} + O(z^{-1}) \text{ para } x \rightarrow -\infty$$

Assim resultam:

$$(E.4.22) \quad C = 2\pi i m e^{ik\bar{z}_0} \quad e \quad C' = -2\pi m e^{ik\bar{z}_0}$$

Fazendo-se a mudança de variáveis

$$(E.4.23) \quad k(u-z) = -\tau(z-\bar{z}_0)$$

no termo integral da equação (E.4.18), tem-se:

$$(E.4.24) \quad -e^{-ikz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iku}}{u - \bar{z}_0} du = P \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau(z-\bar{z}_0)}}{\tau - k} d\tau + \pi i e^{-ik(z-z_0)},$$

onde P indica o valor principal da integral.

Assim, finalmente, por (E.3.1) tem-se:

$$(E.4.25) \quad h(z) = \frac{1}{2\pi} [m \operatorname{Log}(z-z_0) - m \operatorname{Log}(z-\bar{z}_0) + \\ - 2m P \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau(z-\bar{z}_0)}}{\tau - k} d\tau] \cos(\omega t) - m e^{-ik(z-\bar{z}_0)} \sin(\omega t)$$

APÊNDICE F

CÁLCULO DAS INTEGRAIS DO MÉTODO DE W.FRANK

Apresenta-se neste apêndice o desenvolvimento de expressões do Método de W.Frank (Capítulo IV) para cálculo numérico dos coeficientes de influência, do valor principal da integral imprópria e do potencial de velocidades. A notação e as convenções são as mesmas do capítulo IV.

F.1 - Determinação dos coeficientes de influência.

O sistema de equações (IV.3.12) que permite a determinação das partes real e imaginária das intensidades de fonte nos diversos segmentos possui como coeficientes os chamados coeficientes de influência, dados pelas expressões (IV.3.11). Objetiva-se neste item explicitar o seu cálculo numérico.

Substituindo (IV.2.2) em (IV.3.11) resulta:

$$\begin{aligned}
 (F.1.1) \quad I_{ij}^{(m)} = & \operatorname{Re}\{\eta_i \cdot \nabla\} \left\{ \int_{s_j} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_j) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \right. \right. \\
 & + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} + i \operatorname{Re}\{\exp[-ik(z-\bar{z}_j)]\} \left. \right\} ds_j + \\
 & + (-1)^{\dot{m}} \int_{s_j} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_{-j}) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_{-j})] + \right. \right. \\
 & + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_{-j})]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} + i \operatorname{Re}\{\exp[-ik(z-\bar{z}_{-j})]\} \left. \right\} ds_j \left. \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{ij}^{(m)} = & \operatorname{Re}\{(\rho_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{S_j} i \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_j) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \right. \\
& + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} + i \operatorname{Re}\{\exp[-ik(z-\bar{z}_j)]\} \} ds_j + \\
& + (-1)^m \int_{S_{-j}} i \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_j) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \\
& \left. + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_{-j})]}{k-\tau} d\tau \right\} + i \operatorname{Re}\{\exp[-ik(z-\bar{z}_{-j})]\} \} ds_{-j} \},
\end{aligned}$$

$$i, j = 1, \dots, N, \quad z = z_{im}.$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
(F.1.2) \quad I_{ij}^{(m)} = & \operatorname{Re}\{(\rho_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{S_j} \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_j) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \\
& + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} ds_j + \\
& + (-1)^m \int_{S_{-j}} \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z+\bar{z}_j) - \operatorname{Log}(z+z_j)] + \\
& + 2P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z+z_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} ds_{-j} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{ij}^m = & -\operatorname{Re}\{(\rho_i \cdot \nabla) \left\{ \int_{S_j} \exp[-ik(z-\bar{z}_j)] ds_j + \right. \\
& + (-1)^m \int_{S_{-j}} \exp[-ik(z+z_j)] ds_{-j} \} \},
\end{aligned}$$

$$i, j = 1, \dots, N, \quad z = z_{im}.$$

Vai-se calcular cada uma das parcelas que compõem os coeficientes de influência dados por (F.1.2). Para tanto, utiliza-se a propriedade de que, sendo $F(z)$ uma função complexa de variável complexa e derivável, vale:

$$(F.1.3) \quad \operatorname{Re}\{(n_i \nabla) F(z) \Big|_{z=z_{im}}\} =$$

$$= \operatorname{Re}\{-i \exp(i\alpha_i) \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=z_{im}}\},$$

$$\operatorname{Re}(n_i \nabla) F(z) \Big|_{z=z_{im}} =$$

$$= \operatorname{Re}\{i \exp(i\alpha_i) \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=z_{im}}\}.$$

Tal propriedade pode ser facilmente verificada substituindo-se (IV.3.4) em (F.1.3).

Todos os termos que compõem os coeficientes de influência envolvem integrais de linha sobre cada um dos elementos s_j que aproximam trechos do contorno da seção. Os integrandos são funções que, depois de integradas ao longo de s_j , são calculadas no ponto médio z_{im} de cada segmento i (com $i, j = 1, \dots, N$).

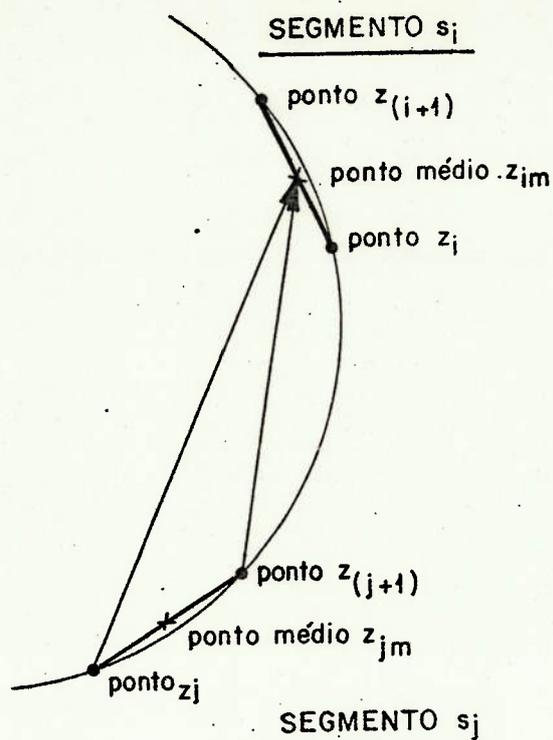


Fig.F.1.1 - Trecho do contorno aproximado

Verifica-se facilmente que:

$$(F.1.4) \quad dz_j = dx_j + idy_j = ds_j \cos \alpha_j + ids_j \sin \alpha_j = ds_j \exp(i\alpha_j), \text{ ou}$$

$$ds_j = \exp(-i\alpha_j) dz_j, \text{ e também}$$

$$ds_j = \exp(i\alpha_j) d\bar{z}_j.$$

Seja, ainda:

$$(F.1.5) \quad \alpha(z_i, z_j) = \text{arc tg} \frac{\text{Im}\{z_j\} - \text{Im}\{z_i\}}{\text{Re}\{z_j\} - \text{Re}\{z_i\}}$$

A seguir calcula-se o termo $\text{Re}\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \nabla \right] \int_{s_j} \text{Log}(z - z_j) ds_j \right\}$ pa

ra $z = z_{im}$. Considere-se inicialmente $i \neq j$. Tem-se, considerando (F.1.3), (F.1.4) e (F.1.5):

$$\begin{aligned}
 (F.1.6) \quad & \operatorname{Re}\left\{(\eta_i \cdot \nabla) \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-z_j) ds_j \Big|_{z=z_{im}}\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{-i \exp(i\alpha_i) \int_{s_j} \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(z-z_j) \exp(-i\alpha_j) dz \Big|_{z=z_{im}}\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{-i \exp[i(\alpha_i - \alpha_j)] \cdot [\log|z_{im} - z_{j+1}| + i\alpha(z_{im}, z_j) + \right. \\
 & \quad \left. - \log|z_i - z_j| - i\alpha(z_i, z_j)]\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{[\cos(\alpha_i - \alpha_j) + i \operatorname{sen}(\alpha_i - \alpha_j)] [(\alpha(z_{im}, z_{j+1}) + \alpha(z_{im}, z_j)) + \right. \\
 & \quad \left. - i \log \left| \frac{z_{im} - z_{j+1}}{z_{im} - z_j} \right|]\right\} = \\
 & = \cos(\alpha_i - \alpha_j) (\alpha(z_{im}, z_{j+1}) - \alpha(z_i, z_j)) + \operatorname{sen}(\alpha_i - \alpha_j) \log \left| \frac{z_{im} - z_{j+1}}{z_{im} - z_j} \right|.
 \end{aligned}$$

Os demais termos cujos integrandos são funções logarítmicas são calculados de maneira análoga, resultando para $i \neq j$

$$\begin{aligned}
 (F.1.7) \quad & \operatorname{Re}\left\{(\eta_i \cdot \nabla) \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j) ds_j \Big|_{z=z_{im}}\right\} = \\
 & = \cos(\alpha_i + \alpha_j) (\alpha(z_i, z_{j+1}) - \alpha(z_i, z_j)) + \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \log \left| \frac{z_i - z_{j+1}}{z_i - z_j} \right|.
 \end{aligned}$$

Para $i=j$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left\{ (n_i \cdot \nabla) \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-z_j) ds_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\left\{ -i \exp(i\alpha_j) \frac{d}{dz} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \operatorname{Log}(z-z_j) \exp(-i\alpha_j) dz_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\left\{ -i \frac{d}{dz} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \operatorname{Log}(z-z_j) dz_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo $z'_j = z - z_j$, a integral acima fica:

$$(F.1.8) \quad \operatorname{Re}\left\{ -i \frac{d}{dz} \int_{z-z_j}^{z-z_{j+1}} \operatorname{Log} z'_j (-dz'_j) \Big|_{z=z_{jm}} \right\} =$$

$$= i [\operatorname{arg}(z_{jm} - z_j) - \operatorname{arg}(z_{jm} - z_{j+1})] = \pi$$

Tem-se também para $x_{i+1} \geq x_i$ e $i=j$:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left\{ (n_i \cdot \nabla) \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j) ds_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\left\{ (n_j \cdot \nabla) \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j) ds_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\left\{ -i \exp(i\alpha_j) \frac{d}{dz} \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j) \exp(i\alpha_j) dz_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\left\{ -i \exp(2i\alpha_j) \frac{d}{dz} \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j) dz_j \Big|_{z=z_{jm}} \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo $\bar{z}'_j = z - \bar{z}_j$, a integral acima fica:

$$\begin{aligned}
 \text{(F.1.9)} \quad & \operatorname{Re}\left\{-i \exp(2i\alpha_j) \frac{d}{dz} \int_{z-\bar{z}_j}^{z-\bar{z}_{j+1}} \operatorname{Log} \bar{z}'_j (-d\bar{z}'_j) \Big|_{z=z_{jm}}\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{-i [\cos(2\alpha_j) + i \operatorname{sen}(2\alpha_j)] [i \arg(z_{jm} - \bar{z}_j) - i \arg(z_{jm} - \bar{z}_{j+1})]\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\{-\pi [\cos(2\alpha_j) + i \operatorname{sen}(2\alpha_j)]\} = -\pi \cos(2\alpha_j).
 \end{aligned}$$

O termo envolvendo o valor principal da integral im
própria fica

$$\begin{aligned}
 \text{(F.1.10)} \quad & \operatorname{Re}\left\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \int_{s_j} \left[P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \right] ds_j \Big|_{z=z_{im}}\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{-i \exp(\alpha_i + \alpha_j) \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \left[\frac{d}{d\bar{z}_j} P \int_0^\infty \frac{\exp[-i(z_{im} - \bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \right] d\bar{z}_j\right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{-i \exp(\alpha_i + \alpha_j) \left[P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z_{im} - \bar{z}_{j+1})]}{k-\tau} d\tau - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z_{im} - \bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \right] \right\} = \\
 & = \operatorname{Re}\left\{[-i \cos(\alpha_i + \alpha_j) + \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j)] \cdot \right. \\
 & \quad \cdot \left[P \int_0^\infty \frac{\exp(y_{im} + y_{j+1}) \cos(x_{im} - x_{j+1})}{k-\tau} d\tau - \right. \\
 & \quad \left. - i P \int_0^\infty \frac{\exp(y_{im} + y_{j+1}) \operatorname{sen}(x_{im} - x_{j+1})}{k-\tau} d\tau - \right. \\
 & \quad \left. - P \int_0^\infty \frac{\exp(y_{im} + y_j) \cos(x_{im} - x_j)}{k-\tau} d\tau + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \int_0^{\infty} \frac{\exp(y_{im} + y_j) \operatorname{sen}(x_{im} - x_j)}{k - \tau} d\tau \Big] = \\
& = \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \left[P \int_0^{\infty} \frac{\exp(y_{im} + y_{j+1}) \cos(x_{im} - x_{j+1})}{k - \tau} d\tau + \right. \\
& \left. - P \int_0^{\infty} \frac{\exp(y_{im} + y_j) \cos(x_{im} - x_j)}{k - \tau} d\tau \right] + \\
& + \cos(\alpha_i + \alpha_j) \left[P \int_0^{\infty} \frac{\exp(y_{im} + y_j) \operatorname{sen}(x_{im} - x_j)}{k - \tau} d\tau + \right. \\
& \left. - P \int_0^{\infty} \frac{\exp(y_{im} + y_{j+1}) \operatorname{sen}(x_{im} - x_{j+1})}{k - \tau} d\tau \right].
\end{aligned}$$

Os valores principais das integrais impróprias acima são calculados conforme indicações do item F.2.

O termo cujo integrando é a função exponencial é calculado conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
(F.1.11) \quad & \operatorname{Re}\{(\underline{n}_i \cdot \nabla) \int_{s_j}^{\infty} \exp[-ik(z - \bar{z}_j)] ds_j \Big|_{z=z_{im}}\} = \\
& = \operatorname{Re}\{-i \exp(i\alpha_i) \frac{d}{d\bar{z}_j} \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_j+1} \exp[-ik(z_{im} - \bar{z}_j)] \cdot \exp(i\alpha_j) d\bar{z}_j\} = \\
& = \operatorname{Re}\{[-i \cos(\alpha_i + \alpha_j) + \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j)] [\exp[-ik(z_{im} - \bar{z}_{j+1})] - \\
& \quad - \exp[-ik(z_{im} - \bar{z}_j)]]\} = \\
& = \operatorname{Re}\{[-i \cos(\alpha_i + \alpha_j) + \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j)]\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \{ \exp[k(y_{im} + y_{j+1})] \cos[k(x_{im} - x_{j+1})] + \\
& -i \exp[k(y_{im} + y_{j+1})] \operatorname{sen}[k(x_{im} - x_{j+1})] + \\
& - \exp[k(y_{im} + y_j)] \cos[k(x_{im} - x_j)] + \\
& + i \exp[k(y_{im} + y_j)] \operatorname{sen}[k(x_{im} - x_j)] \} = \\
& = \operatorname{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \{ \exp[k(y_{im} + y_{j+1})] \cos[k(x_{im} - x_{j+1})] - \\
& - \exp[k(y_{im} - y_j)] \cos[k(x_{im} - x_j)] \} + \\
& + \cos(\alpha_i + \alpha_j) \{ \exp[k(y_{im} + y_j)] \operatorname{sen}[k(x_{im} - x_j)] - \\
& - \exp[k(y_{im} - y_{j+1})] \operatorname{sen}[k(x_{im} - x_{j+1})] \} .
\end{aligned}$$

F.2 - Determinação do valor principal da integral imprópria

Neste item mostra-se o cálculo de:

$$(F.2.1) \quad P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau,$$

que constitui um dos termos dos coeficientes de influência I_{ij} , $i, j=1, \dots, N$, dados por (F.1.2).

Separando-se as partes real e imaginária, obtém-se:

$$(F.2.2) \quad \operatorname{Re}\left\{P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau\right\} = P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y+y_0)] \cos[\tau(x-x_0)]}{k-\tau} d\tau,$$

$$\operatorname{Im}\left\{P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau\right\} = -P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y+y_0)] \operatorname{sen}[\tau(x-x_0)]}{k-\tau} d\tau,$$

que são termos presentes na expressão (F.1.10).

O resíduo do integrando de (F.2.1) em $\tau = k$ é $\exp[-ik(z-\bar{z}_0)]$, de modo que:

$$(F.2.3) \quad P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau = \\ = \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_0)]}{k-\tau} d\tau + i\pi \exp[-ik(z-\bar{z}_0)].$$

Admite-se que sempre $k > 0$, $\text{Im}(z) < 0$ e $\text{Im}(z_0) \leq 0$, o que é compatível com o problema equacionado em V.3. Faz-se a transformação de variáveis

$$\lambda = i(\tau - k)(z - \bar{z}_0), \quad d\tau = \frac{-i}{(z - \bar{z}_0)} d\lambda$$

de modo que

$$\begin{aligned} \text{(F.2.4)} \quad & \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_0)]}{k - \tau} d\tau = \\ & = \int_{-ik(z - \bar{z}_0)}^\infty \exp[-ik(z - \bar{z}_0)] \frac{\exp(-\lambda)}{(k - \lambda)} \cdot \frac{(-i)}{(z - \bar{z}_0)} d\lambda = \\ & = -\exp[-ik(z - \bar{z}_0)] \int_{-ik(z - \bar{z}_0)}^\infty \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que a integral

$$\text{(F.2.5)} \quad E_1(z) = \int_z^\infty \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

corresponde a [3] :

$$\text{(F.2.6)} \quad E_1(z) = -[\gamma + \text{Log}(z)] + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (z)^n}{n \cdot n!},$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni.

Assim:

$$\begin{aligned} \text{(F.2.7)} \quad & \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_0)]}{k - \tau} d\tau = \\ & = \exp[-ik(z - \bar{z}_0)] \{ \gamma + \text{Log}[-ik(z - \bar{z}_0)] + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n [-ik(z - \bar{z}_0)]^n}{n \cdot n!} \}. \end{aligned}$$

Sejam

$$(F.2.8) \quad r = | -ik(z-\bar{z}_0) | \quad e \quad \theta = \text{arc tg} \frac{\text{Im}[-ik(z-\bar{z}_0)]}{\text{Re}[-ik(z-\bar{z}_0)]}$$

Tem-se, então:

$$(F.2.9) \quad P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i(z-\bar{z}_0)\tau]}{k-\tau} d\tau =$$

$$= \exp[k(y+y_0)] [\cos[k(x-x_0)] - i \text{sen}[k(x-x_0)]] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos(n\theta)}{n \cdot n!} \right\} +$$

$$+ i \left\{ \theta + \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \text{sen}(n\theta)}{n \cdot n!} \right\}.$$

Comparando (F.2.2) e (F.2.9), resulta:

$$(F.2.10) \quad P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-(y+y_0)\tau] \cos[\tau(x-x_0)]}{k-\tau} d\tau =$$

$$= \exp[k(y+y_0)] \{ C(r, \theta) \cos[k(x-x_0)] + S(r, \theta) \cdot \text{sen}[k(x-x_0)] \}, e$$

$$P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y+y_0)] \text{sen}[\tau(x-x_0)]}{k-\tau} d\tau =$$

$$= \exp[k(y+y_0)] \{ C(r, \theta) \cdot \text{sen}[k(x-x_0)] - S(r, \theta) \cos[k(x-x_0)] \},$$

Onde

$$C(r, \theta) = \gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos(n\theta)}{n \cdot n!}, \quad e$$

$$S(r, \theta) = \theta + \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \text{sen}(n\theta)}{n \cdot n!}.$$

F.3 - Determinação do potencial a partir do conhecimento das intensidades das fontes

Neste item desenvolve-se a expressão (IV.3.14) do potencial real, a partir do conhecimento das partes real e imaginária das intensidades de fonte para cada modo de oscilação. Substituindo (IV.2.2) em (IV.3.14), resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{(F.3.1)} \quad \phi^{(m)}(x,y;t) &= \sum_{j=1}^N [Q_j \cos(\omega t) - Q_{N+j} \text{sen}(\omega t)] \cdot \\
 &\cdot \text{Re} \left\{ \int_{s_j} \left\{ \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z-z_j) - \text{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \right. \right. \\
 &+ 2P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau + i \text{Re} \{ \exp[-ik(z-\bar{z}_j)] \} \left. \right\} ds_j + \\
 &+ (-1)^m \int_{s_{-j}} \left\{ \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z+\bar{z}_j) - \text{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \right. \\
 &+ 2P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z+\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} + i \text{Re} \{ \exp[-ik(z+\bar{z}_j)] \} \left. \right\} ds_j \left. \right\} + \\
 &+ \sum_{j=1}^N [Q_j \text{sen}(\omega t) + Q_{N+j} \cos(\omega t)] \cdot \\
 &\cdot \text{Re} \left\{ \int_{s_j} \left\{ i \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\text{Log}(z-z_j) - \text{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right. \right. \right. \\
 &+ 2P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \left. \right\} - \text{Re} \{ \exp[-ik(z-\bar{z}_j)] \} \left. \right\} ds_j +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^m \int_{s_j} \left\{ i \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z+\bar{z}_j) - \operatorname{Log}(z+z_j)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z+z_j)]}{k-\tau} d\tau \right\} - \operatorname{Re} \{ \exp[-ik(z+z_j)] \} \right\} ds_{-j} \}.
\end{aligned}$$

A expressão anterior se reduz a:

$$(F.3.2) \quad \phi^{(m)}(x, y; t) = \sum_{j=1}^N [Q_j \cos(\omega t) - Q_{N+j} \operatorname{sen}(\omega t)] .$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z-z_j) - \operatorname{Log}(z-\bar{z}_j)] + \right.$$

$$\left. + 2 \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z-\bar{z}_j)]}{k-\tau} d\tau \right\} ds_j +$$

$$+ (-1)^m \int_{s_{-j}} \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Log}(z+\bar{z}_j) - \operatorname{Log}(z+z_j)] +$$

$$+ 2 \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z+z_j)]}{k-\tau} d\tau \right\} ds_{-j} +$$

$$+ [Q_j \operatorname{sen}(\omega t) + Q_{N+j} \cos(\omega t)] .$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \exp[-ik(z-\bar{z}_j)] ds_j + \int_{s_{-j}} \exp[ik(z+z_j)] ds_{-j} \right\} .$$

A seguir, vai-se calcular cada uma das integrais que fazem parte dos termos que compõe a expressão acima:

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
(F.3.3) \quad & \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \operatorname{Log}(z-z_j) ds_j \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} \operatorname{Log}(z-z_j) \cdot \exp(-i\alpha_j) dz_j \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ \exp(-i\alpha_j) \int_{z-z_j}^{z-z_{j+1}} \operatorname{Log}(z') dz' \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ \exp(-i\alpha_j) \left[z \operatorname{Log} z - z \right] \Big|_{z-z_j}^{z-z_{j+1}} \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ \exp(-i\alpha_j) \left[(z-z_{j+1}) \operatorname{Log}(z-z_{j+1}) - (z-z_{j+1}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (z-z_j) \operatorname{Log}(z-z_j) + (z-z_j) \right] \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ [\cos(\alpha_j) - i \sin(\alpha_j)] \left\{ [(x-x_{j+1}) + i(y-y_{j+1})] [\log|z-z_{j+1}| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i\alpha(z, z_{j+1}) - [(x-x_j) + i(y-y_j)] [\log|z-z_j| + i\alpha(z, z_j) + [(x_{j+1} - x_j) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i(y_{j+1} - y_j)]] \right\} \right\} \\
& = \cos(\alpha_j) [(x-x_{j+1}) \log|z-z_{j+1}| - \alpha(z, z_{j+1})(y-y_{j+1}) + \\
& \quad - (x-x_j) \log|z-z_j| + \alpha(z, z_j)(y-y_j) + (x_{j+1} - x_j)] + \\
& \quad + \sin(\alpha_j) [\alpha(z, z_{j+1})(x-x_{j+1}) + (y-y_{j+1}) \log|z-z_{j+1}| + \\
& \quad - \alpha(z, z_j)(x-x_j) - (y-y_j) \log|z-z_j| + (y_{j+1} - y_j)].
\end{aligned}$$

Analogamente, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
 \text{(F.3.4)} \quad \operatorname{Re} \int_{s_j} \operatorname{Log}(z - \bar{z}_j) ds_j &= \\
 &= \cos(\alpha_j) \left[(x - x_{j+1}) \log |z - \bar{z}_{j+1}| - (z, \bar{z}_{j+1})(y - y_{j+1}) + \right. \\
 &- (x - x_j) \log |z - \bar{z}_j| + \alpha(z, \bar{z}_j)(y + y_j) + (x_{j+1} - x_j) \left. \right] + \\
 &+ \sin(\alpha_j) \left[\alpha(z, \bar{z}_{j+1})(x - x_{j+1}) + (y + y_{j+1}) \log |z - \bar{z}_{j+1}| + \right. \\
 &- \alpha(z, \bar{z}_j)(x - x_j) - (y + y_j) \log |z - \bar{z}_j| + (y_{j+1} + y_j) \left. \right].
 \end{aligned}$$

A integral envolvendo o valor principal da integral imprópria fica:

$$\begin{aligned}
 &\int_{s_j} p \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z - z_j)]}{k - \tau} d\tau ds_j = \\
 &= \int_{z_j}^{\bar{z}_{j+1}} p \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i(z - \bar{z}_j)]}{k - \tau} d\tau \cdot \exp(i\alpha_j) d\bar{z}_j = \\
 &= \exp(i\alpha_j) p \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i\tau z)}{k - \tau} \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \exp(i\tau \bar{z}_j) d\bar{z}_j d\tau = \\
 &= -i \exp(i\alpha_j) p \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i\tau z)}{k - \tau} \left[\frac{\exp(i\tau \bar{z}_{j+1}) - \exp(i\tau \bar{z}_j)}{\tau} \right] d\tau
 \end{aligned}$$

Dividindo-se por k e multiplicando-se por $k - \tau + \tau$, a expressão acima fica:

$$(F.3.5) \quad \frac{-i \exp(i\alpha_j)}{k} \left[\int_0^\infty \exp(-i\tau z) \left[\frac{\exp(i\tau \bar{z}_{j+1}) - \exp(i\tau \bar{z}_j)}{\tau} \right] d\tau + \right. \\ \left. + P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_{j+1})]}{k - \tau} d\tau - P \int_0^\infty \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_j)]}{k - \tau} d\tau \right].$$

O cálculo da integral do 1º termo da expressão acima, ou seja, de

$$(F.3.6) \quad F(z) = \int_0^\infty \frac{\exp(-i\tau z) [\exp(i\tau \bar{z}_{j+1}) - \exp(i\tau \bar{z}_j)]}{\tau} d\tau$$

é feito a seguir.

Diferenciando (F.3.6) em relação a z , tem-se:

$$(F.3.7) \quad F'(z) = -i \left\{ \int_0^\infty \exp[-i\tau(z - \bar{z}_{j+1})] d\tau - \int_0^\infty \exp[-i\tau(z - \bar{z}_j)] d\tau \right\} = \\ = -i \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_{j+1})]}{-i(z - \bar{z}_{j+1})} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_j)]}{-i(z - \bar{z}_j)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \\ = \frac{1}{z - \bar{z}_j} - \frac{1}{z - \bar{z}_{j+1}}.$$

Assim, tem-se:

$$(F.3.8) \quad F(z) = \text{Log}(z - \bar{z}_j) - \text{Log}(z - \bar{z}_{j+1}) + C,$$

onde C é uma constante a ser determinada. Observando-se que $F(z)$ é analítica em todo semi-plano inferior, já que $z = \bar{z}_j$ e $z = \bar{z}_{j+1}$ estão no semi-plano superior, pela equação (F.3.6) tem-se:

$\lim [F(z)] = 0,$
 $|z| \rightarrow 0$ pelo
 eixo imaginário,
 no sentido negativo.

Tomando-se, agora, o mesmo limite na equação (F.3.8),
 conclui-se que:

$$C = 0,$$

e portanto:

$$(F.3.9) \quad F(z) = \text{Log}(z - \bar{z}_j) - \text{Log}(z - \bar{z}_{j+1}).$$

Substituindo, então, (F.3.9) em (F.3.5) e tomando o valor real desta expressão, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \text{Re} \left\{ \int_{s_j}^{\infty} P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_j)]}{k - \tau} d\tau ds_j = \right. \\
 & = \text{Re} \left\{ \frac{-i \exp(i\alpha_j)}{k} [\text{Log}(z - \bar{z}_j) - \text{Log}(z - \bar{z}_{j+1}) + \right. \\
 & \left. + P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_{j+1})]}{k - \tau} d\tau - P \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\tau(z - \bar{z}_j)]}{k - \tau} d\tau \right\} = \\
 & = \left\{ \frac{[-i \cos(\alpha_j) + \text{sen}(\alpha_j)]}{k} \log |z - \bar{z}_j| + i\alpha(z, \bar{z}_j) + \right. \\
 & \left. - \log |z - \bar{z}_{j+1}| - i\alpha(z, \bar{z}_{j+1}) + \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y + y_{j+1})] \cos[\tau(x - x_{j+1})]}{k - \tau} d\tau + \right. \\
 & \left. - iP \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y + y_{j+1})] \text{sen}[\tau(x - x_{j+1})]}{k - \tau} d\tau + \right. \\
 & \left. + iP \int_0^{\infty} \frac{\exp[-\tau(y + y_j)] \text{sen}[\tau(x - x_j)]}{k - \tau} d\tau = \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha_j)}{k} \left\{ \log \left| \frac{z - \bar{z}_j}{z - \bar{z}_{j+1}} \right| + P \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau(y+y_{j+1})] \cos[\tau(x-x_{j+1})]}{k - \tau} d\tau + \right. \\
&\quad \left. - P \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau(y+y_j)] \cos[\tau(x-x_j)]}{k - \tau} d\tau \right\} + \\
&\quad + \frac{\cos(\alpha_j)}{k} \left\{ \alpha(z, \bar{z}_j) - (z, \bar{z}_{j+1}) + P \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau(y+y_j)] \operatorname{sen}[\tau(x-x_j)]}{k - \tau} d\tau + \right. \\
&\quad \left. - P \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau(y+y_{j+1})] \operatorname{sen}[\tau(x-x_{j+1})]}{k - \tau} d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Os valores principais das integrais impróprias presentes na expressão acima são calculados conforme indicado no item F.2.

Resta explicitar o cálculo do termo envolvendo a integral da função exponencial:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \exp[-ik(z - \bar{z}_j)] ds_j \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \exp[-ik(z - \bar{z}_j)] \exp(i\alpha_j) d\bar{z}_j \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\alpha_j) \left[\frac{\exp[-ik(z - \bar{z}_j)]}{ik} \right] \Big|_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\alpha_j) \left[\frac{\exp[-ik(z - \bar{z}_{j+1})] - \exp[-ik(z - \bar{z}_j)]}{ik} \right] \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp[-i[k(z - \bar{z}_{j+1}) - \alpha_j]] - \exp[-i[k(z - \bar{z}_j) - \alpha_j]]}{ik} \right\} = \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \exp[k(y+y_j)] \operatorname{sen}[k(x-x_j) - \alpha_j] - \right. \\
&\quad \left. - \exp[k(y+y_{j+1})] \operatorname{sen}[k(x-x_{j+1}) - \alpha_j] \right\}.
\end{aligned}$$

APÊNDICE G

ESPECTROS DE MAR REAL:
FORMULAÇÕES USUAISG.1 - A hipótese de Kitaigorodskii e a proposta de Pierson e Moskowitz

Pierson e Moskowitz [74] propuseram em 1964 uma expressão que representasse o espectro de um mar completamente desenvolvido, desde que se conhecesse a velocidade do vento no local. Tinha-se:

$$S(w) = \frac{\alpha g^2}{w^5} e^{-\beta \left(\frac{w_0}{w}\right)^4}$$

com $S(w)$: densidade espectral na frequência w ;

w : frequência circular;

w_0 : frequência de pico;

α : constante de Phillip, igual a $8,10 \times 10^{-3}$;

g : aceleração da gravidade;

β : constante igual a 0,74.

Baseava-se tal formulação na hipótese de Kitaigorodskii [48] de que os espectros correspondentes a mares completamente desenvolvidos têm a mesma forma quando apresentados de uma certa maneira adimensional. Pierson e Moskowitz gera

ram a expressão anterior com base em dados de onda e vento de que dispunham.

Tal espectro foi modificado para não mais depender da velocidade do vento, mas sim da altura significativa da onda, tendo sido recomendado pela 12^a ITTC [40].

Outras formulações surgiram com base em outros conjuntos de dados levantados, levando em consideração outros parâmetros, como períodos médios de onda, extensão e duração da ação dos ventos (para mares parcialmente desenvolvidos), etc.

Neste apêndice apresentam-se as formulações mais usuais.

G.2 - Formulações usuais para espectros unidirecionais a dois parâmetros para mar aberto.

As formulações usuais para espectros unidirecionais para mar aberto derivam em geral da seguinte expressão:

$$(G.2.1) \quad S(w) = Aw^{-\ell} \exp(-Bw^{-n}), \quad w \geq 0,$$

onde ℓ , n , A e B são parâmetros,

w é a frequência circular em rad/seg,

$S(w)$ é a densidade espectral de energia para a frequência w .

A frequência de pico, w_0 , pode ser encontrada impondo-se:

$$\left\{ \frac{d}{dw} [S(w)] \right\} \Big|_{w=w_0} = 0,$$

ou,

$$[-lA w^{-l-1} \exp(-Bw^{-n}) +$$

$$+ Aw^{-l} \exp(-Bw^{-n}) \cdot (-B)(-n)w^{-n-1}] \Big|_{w=w_0} = 0,$$

ou,

$$-lw_0^{-l-1} + nBw_0^{-l-1-n} = 0,$$

ou,

$$(G.2.2) \quad w_0 = \left(\frac{nB}{l} \right)^{1/n}$$

Define-se momento espectral de ordem k , $k=0,1,\dots$, por:

$$m_k = \int_0^{\infty} w^k S(w) dw$$

Utilizando-se a função gama, definida por:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} y^{\gamma-1} e^{-y} dy,$$

pode-se expressar o momento espectral de ordem k fazendo-se a mudança de variáveis $y = Bw^{-n}$, ou seja:

$$w = \left(\frac{y}{B} \right)^{-1/n};$$

$$dw = -\frac{1}{n} \left(\frac{y}{B} \right)^{-1/n - 1} \left(\frac{1}{B} \right) dy = -\frac{1}{nB} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{n+1}{n}} dy$$

Assim:

$$\begin{aligned} m_k &= \int_0^{\infty} w^k A w^{-l} \exp(-Bw^{-n}) dw = \\ &= A \int_{\infty}^0 \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{k-l}{n}} \exp(-y) \left(\frac{-1}{nB} \right) \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{n+1}{n}} dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{nB} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{\ell-k-1}{n}-1} \exp(-y) dy \\
 &= \frac{A}{nB \frac{\ell-k-1}{n}} y^{\frac{\ell-k-1}{n}-1} \exp(-y) dy,
 \end{aligned}$$

ou,

$$(G.2.3) \quad m_k = \frac{A}{nB^\gamma} \Gamma(\gamma), \quad \text{onde } \gamma = \frac{\ell-k-1}{n}$$

Define-se altura de onda pseudo significativa, $H_{1/3}$,

por:

$$(G.2.4) \quad H_{1/3} = 4,0 m_0^{1/2}$$

Definem-se, ainda, os seguintes períodos médios:

$$(G.2.5) \quad T_0 = \frac{2\pi}{w_0} : \text{período em que ocorre o pico, ou, período modal;}$$

$$(G.2.6) \quad T_1 = 2\pi \frac{m_0}{m_1};$$

$$(G.2.7) \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}};$$

$$(G.2.8) \quad T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{m_4}};$$

$$(G.2.9) \quad T_{-1} = 2\pi \frac{m_{-1}}{m_0}$$

As relações de definição da altura de onda significativa e dos períodos médios podem ser dadas em função dos parâmetros A, B, ℓ e n do espectro, considerando-se as rela-

ções (G.2.3) e (G.2.2) Assim, as expressões (G.2.4) a (G.2.9) ficam:

$$(G.2.10) \quad H_{1/3} = 4,0 \left[\frac{A}{nB} \cdot \Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right) \right]^{1/2}$$

$$(G.2.11) \quad T_0 = \frac{2\pi}{B^{1/n}} \left(\frac{\ell}{n}\right)^{1/n};$$

$$(G.2.12) \quad T_1 = \frac{2\pi}{B^{1/n}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-2}{n}\right)} \right];$$

$$(G.2.13) \quad T_2 = \frac{2\pi}{B^{1/n}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-3}{n}\right)} \right]^{1/2};$$

$$(G.2.14) \quad T_4 = \frac{2\pi}{B^{1/n}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\ell-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-5}{n}\right)} \right]^{1/2};$$

$$(G.2.15) \quad T_{-1} = \frac{2\pi}{B^{1/n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)}$$

Por outro lado, os parâmetros A e B podem ser expressos em termos da altura de onda significativa e de algum período médio, com base nas relações (G.2.10) a (G.2.15).

Assim, de (G.2.10) tem-se:

$$(G.2.16) \quad A = \frac{H_{1/3}^2}{16,0} \frac{nB \cdot \frac{\ell-1}{n}}{\Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)}$$

Da equação (G.2.11) chega-se à seguinte expressão de B em função de T_0 :

$$(G.2.17) \quad B = \left(\frac{2\pi}{10}\right)^n \frac{\ell}{n}$$

Substituindo-se (G.2.17) em (G.2.16) tem-se a seguinte expressão de A em função de T_0 :

$$(G.2.18) \quad A = \frac{H_{1/3}^2}{16,0} \cdot \frac{n}{\Gamma(\frac{\ell-1}{n})} \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^{\ell-1} \cdot \left(\frac{\ell}{n}\right)^{\frac{\ell-1}{n}}$$

Das equações (G.2.11) e (G.2.12) chega-se à seguinte relação entre T_0 e T_1 :

$$(G.2.19) \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{n}{\ell}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(\frac{\ell-1}{n})}{\Gamma(\frac{\ell-2}{n})}$$

Assim, de (G.2.17) e (G.2.18) têm-se as seguintes expressões de A e B em função de T_1 :

$$A = \frac{H_{1/3}^2}{16,0} \cdot \frac{n}{\Gamma(\frac{\ell-1}{n})} \cdot \frac{(2\pi)^{\ell-1}}{T_1^{\ell-1}} \cdot \left(\frac{n}{\ell}\right)^{\frac{\ell-1}{n}} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{\ell-1}{n})]^{\ell-1}}{[\Gamma(\frac{\ell-2}{n})]^{\ell-1}} \cdot \left(\frac{\ell}{n}\right)^{\frac{\ell-1}{n}}$$

ou,

$$(G.2.20) \quad A = \frac{H_{1/3}^2}{16,0} \cdot n \cdot \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^{\ell-1} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{\ell-1}{n})]^{\ell-2}}{[\Gamma(\frac{\ell-2}{n})]^{\ell-1}}$$

e,

$$B = \left(\frac{2\ell}{T_1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{\ell}\right) \frac{[\Gamma(\frac{\ell-1}{n})]^n}{[\Gamma(\frac{\ell-2}{n})]^n} \cdot \left(\frac{\ell}{n}\right)$$

ou,

$$(G.2.21) \quad B = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n \frac{[\Gamma(\frac{\ell-1}{n})]^n}{[\Gamma(\frac{\ell-2}{n})]^n}$$

Pode-se proceder analogamente em relação aos demais períodos.

Define-se largura de banda espectral, ϵ , por:

$$(G.2.22) \quad \epsilon = \left(1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)^{1/2}$$

Pode-se expressar a largura de banda espectral em termos dos parâmetros A, B e n utilizando-se a relação (G.2.3):

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\left[\frac{A}{nB} \cdot \frac{\ell-3}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{\ell-3}{n}\right)\right]^2}{\left[\frac{A}{nB} \cdot \frac{\ell-1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)\right] \left[\frac{A}{nB} \cdot \frac{\ell-5}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{\ell-5}{n}\right)\right]}\right)^{1/2}$$

$$(G.2.23) \quad \epsilon = \left(1 - \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\ell-3}{n}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{\ell-1}{n}\right)\right] \left[\Gamma\left(\frac{\ell-5}{n}\right)\right]}\right)^{1/2}$$

Como se observa pela equação (G.2.23) a largura de

banda espectral não depende dos parâmetros A e B, mas apenas de ℓ e n .

Pode-se apresentar os espectros sob forma adimensional. Abaixo relacionam-se as dimensões das grandezas envolvidas na formulação do espectro segundo a equação (G.2.1):

S (w)	$L^2 T$
w	T^{-1}
ℓ	adimensional
n	adimensional
A	$L^2 T^{-(\ell-1)}$
B	T^{-n}

Os momentos espectrais de ordem k (ver eq.(G.2.3)) têm a dimensão $L^2 T^{-k}$.

Seja g a aceleração da gravidade (dimensão LT^{-2}) e indiquem-se as variáveis adimensionalizadas pelo símbolo linha acrescentado à variável original. Assim, pode-se definir, por exemplo:

$$(G.2.24) \quad w' = w \cdot \left[\frac{m_0^{1/4}}{g^{1/2}} \right] ;$$

$$(G.2.25) \quad S'(w') = S(w) \cdot \left[\frac{g^{1/2}}{m_0^{5/4}} \right] ;$$

$$(G.2.26) \quad A' = A \cdot \left[\frac{m_0^{(\ell-5)/4}}{g^{(\ell-1)/2}} \right] ;$$

$$(G.2.27) \quad B' = B \cdot \left[\begin{array}{c} -n/2 \\ g \\ -n/4 \\ m_0 \end{array} \right] .$$

Com as definições (G.2.24) a (G.2.27), a expressão geral (G.2.1) se reduz a:

$$(G.2.28) \quad S'(w') = A' w'^{-k} \exp(-B' w'^{-n}), \quad w' \geq 0$$

Pode-se definir outras variáveis adimensionais, tais como:

$$(G.2.29) \quad m'_k = m_k \left[\frac{m_0^{k-4}}{g^{k/2}} \right]$$

$$(G.2.30) \quad T'_0 = T_0 \left[\frac{g^{1/2}}{m_0^{1/4}} \right] , \quad \text{e analogamente para os outros períodos médios;}$$

$$(G.2.31) \quad H'_{1/3} = \frac{H^{1/3}}{m_0^{1/2}}$$

A largura da banda espectral, ϵ , já é um parâmetro adimensional.

Pode-se, ainda, apresentar os espectros, tanto na forma dimensional como adimensional, em função da frequência em Hertz, assim definida:

$$(G.2.32) \quad f = \frac{w}{2\pi} \quad (w \text{ em rad/seg, } f \text{ em Hertz})$$

Assim, a expressão (G.2.1) fica:

$$S(2\pi f) = A(2\pi f)^{-\ell} \exp[-B(2\pi f)^{-n}], \quad f \geq 0$$

Deve-se ter:

$$\int_0^{\infty} S(2\pi f) d(2\pi f) = \int_0^{\infty} S(f) df, \quad \text{ou,}$$

$$2\pi \int_0^{\infty} S(2\pi f) df = \int_0^{\infty} S(f) df, \quad \text{ou,}$$

$$S(f) = 2\pi S(2\pi f)$$

Assim:

$$(G.2.33) \quad S(f) = 2\pi A(2\pi f)^{-\ell} \exp[-B(2\pi f)^{-n}], \quad f \geq 0$$

Definindo-se frequência adimensional como:

$$(G.2.34) \quad f' = f \left[\frac{2\pi m_0^{1/4}}{g^{1/2}} \right]$$

A expressão (G.2.33) fica:

$$(G.2.35) \quad S'(f) = 2\pi A' f'^{-\ell} \exp[-B' f'^{-n}], \quad f' \geq 0$$

G.3 - O espectro de Pierson e Moskowitz a dois parâmetros e o espectro de Neuman.

A formulação de Pierson e Moskowitz a dois parâmetros consiste em se adotar $\ell = 5$ e $n=4$ na expressão (G.2.1), resultando:

$$S(w) = A w^{-5} \exp(-Bw^4), \quad w \geq 0.$$

Os parâmetros A e B, dados em função da altura pseudo-significativa de onda e do período modal resultam das expressões (G.2.17) e (G.2.18):

$$A \cong \frac{487H^2}{T_0^4} ;$$

$$B \cong \frac{1948}{T_0^4} .$$

Convém observar que o momento espectral de ordem 4, m_4 , não é definido para o espectro de Pierson e Moskowitz, já que de (G.2.3) tem-se:

$$m_k = \frac{A}{4B^{(4-k)/4}} \Gamma\left(\frac{4-k}{4}\right),$$

que não é definido para $k=4$.

A formulação de Neumann também é derivada da expressão (G.2.1), sendo $\ell = 6$ e $n=2$. Assim, tem-se:

$$S(w) = A w^{-6} \exp(-Bw^{-2}), \quad w \geq 0.$$

Os parâmetros A e B em função da altura pseudo-significativa de onda e do período modal ficam:

$$A \approx \frac{14354 H_{1/3}^2}{T_0^2} ;$$

$$B \approx \frac{118}{T_0^2}$$

Para o espectro de Neumann os momentos m_0 , m_2 e m_4 são definidos.

A 16ª IITC [40] recomenda que, na ausência de espectros derivados de medidas de onda feitas na região de operação, a formulação de Pierson e Moskowitz baseada em 2 parâmetros deve ser usada para aplicações gerais. O comitê reconhece que tal formulação não permite a representação de espectros multimodais (mais de um pico), como aqueles que ocorrem quando um mar de vagas devido a uma perturbação local ou distante interfere com um mar de ventos em geração. Contudo, enquanto um modelo que permita tal representação não é acoplado a um modelo direcional, recomenda-se manter a formulação baseada em 2 parâmetros para mar aberto.

Para aplicações costeiras ou de áreas de atuação de vento limitadas, recomenda-se ainda a formulação do espectro médio Jonswap [40].

```

COMMON/AA A/M,NUN,OMEGA,UR,10,YBLK5,CBAV
COMMON/EBB/X( 1,30),Y( 1,30),XAC( 1,29),YYC( 1,29),SNEC( 1,29),CSEC( 1,29),ZLC( 1,29)
COMMON/CCC/FRA(29,4),PRV(29,4),FR(29,4)
COMMON /AUX/ CMLK(40),ADONIK(40),PRVFS(40,4),PRVIC(40,4),PRAFS(40,4),PRAVIC(40,4),FRVF(40,29,4),PRAF(40,29,4),PGTV(40,29,4),
*POTAC(40,29,4),AFCT(40,29,4),FPOT(40,29,4)
DIMENSION ALFA(5),BLTA(5)
DATA K/1/
PI=ATAN(1.)*.4.
    
```

```

C
C READ(5,10) NST,CBAV,AD
10 FORMAT(I10,2F10.3)
C
C CALL IMPTII
C
C CALL IMPGER (GM,IV,RC,NST)
C
    
```

```

DO 170 II=1,NST
READ(5,20) NJT,NFR
20 FORMAT(2I5)
READ(5,30) (OMPK(I),J=1,NFR)
30 FORMAT(CEF10.3)

READ(5,30) (X(K,J),J=1,NJT)
READ(5,30) (Y(K,J),J=1,NJT)
READ (5,1000) YPERS,DCARAC,ICHAVE
1000 FORMAT (2F10.0,11)
NUN=NJI-1
DO 50 J=1,NFR
XX(K,J)=.5*(X(K,J)+X(K,J+1))
YY(K,J)=.5*(Y(K,J)+Y(K,J+1))
XINT=X(K,J)-X(K,J+1)
YINT=Y(K,J)-Y(K,J+1)
DCLK(K,J)=SQRT(XINT**2+YINT**2)
SNE(K,J)=YINT/DCLK(K,J)
CSEC(K,J)=XINT/DCLK(K,J)
50 CONTINUE
CALL FINV
    
```

```

C
C CALL IMPCIL (YPERS,DCARAC,NJT,NFR,11)
C
    
```

```

WRITE (6,1001) II
1001 FORMAT(1H1,////,1X,22X,"RESULTADOS PARA O CILINDRO NUMERO ",I2,
*//,1X,22X,36(1H*),//)
C
    
```

```

WRITE (6,1002)
1002 FORMAT(//,1X,14X,"COEFICIENTES DE AMORTUEAMENTO E DE MASSA A")
    
```

```

* "ICIONADA" , // , 1X , 2X , "ADW" , 4X , "ANC(2,2)" , 2X , "AP(3,3)" , 1X , "A(4,4)" ,
* 2X , "A(2,4)" , 2X , "PA(2,2)" , 2X , "MA(3,3)" , 2X , "MA(4,4)" , 1X , "A(2,4)" ,
* /)

```

C

```

DO 160 N=1,NR
OMEGA=OMEN(N)/SQRT(OMAV)
UN=OMEGA**2

```

C

```

ADOMLV(N)=UN*DC/RAC/2.

```

C

```

CALL KERN

```

C

```

CALCULO DE PRESSES

```

C

```

DO 1003 KON=2,4
PRVFS(N,KON)=PRV(1,KON)*RG
PRVFC(N,KON)=PRV(NON,KON)*RG
PRAFS(N,KON)=PRV(1,KON)*RG
PRAFIC(N,KON)=PRV(NON,KON)*RG
DO 1003 KKA=1,NON
PRVFC(N,KKA,KON)=PRV(KKA,KON)*RG
PRAF(N,KKA,KON)=PRV(KKA,KON)*RG
PDTV(N,KKA,KON)=PRV(KKA,KON)/OMEN(N)
PDTAC(N,KKA,KON)=PRV(KKA,KON)/OMEN(N)
APDT(N,KKA,KON)=SQRT((PDTV(N,KKA,KON))**2+(PDTAC(N,KKA,KON))**2)
FPDT(N,KKA,KON)=ATAN((PDTV(N,KKA,KON))/(PDTAC(N,KKA,KON)))*180./PI

```

```

1003 CONTINUE

```

C

```

GO TO (50,70),IC
70 WRITE(6,30) OMEGA
80 FORMAT(1X,F6.3,' ***MATRIZ SINGULAR***')
GO TO 150

```

C

```

90 DO 140 LK=2,5
GO TO (140,100,100,100,110),LK

```

C

```

100 L=LK
M=LK
GO TO 120

```

C

```

110 L=2
M=4
120 DADS=0.
DDDS=0.
DO 130 J=1,NON
DADS=DADS+DEL(K,J)*FR(J,L)*FR(J,M)
130 DDDS=DDDS+DEL(K,J)*FR(J,L)*FRV(J,M)
AUXILI=GVAV*UN*FI*DCRAC**2*.175
ALFACLK=DADS/AUXILI
ECTACLK=DDDS/AUXILI

```

C

```

140 CONTINUE
WRITE(6,150) ADOMEN(N), (PDTAC(I),I=2,5), (ALFACI),I=1,5)
150 FORMAT(1X,1X,F5.3,3X,F7.4,7(2X,F7.4))

```

C

```

160 CONTINUE

```

C

```

WRITE(6,1998)
1998 FORMAT(//,1H1,22X,"LISTA DE PRESSES (LS)")
DO 1999 N=1,NR
WRITE(6,1999) OMEGA(N)

```

```

1999 FORMAT (//,1X,25X,"EIGENVALUES:",15.3)
WRITE(6,2000)
2000 FORMAT (//,1X,20X,"PONTI",7X,"PRA",10X,"PRV",//)
DO 2001 KON=2,4
WRITE(6,1996) KON
1996 FORMAT (//,1X,30X,"KON=",11)
WRITE(6,2002) (KKK,PRACKKK,KON),PRV(KKK,KON),KKK=1,NON)
2002 FORMAT(1X,21X,1E,2X,3X,E10.4,3X,10.4)
WRITE(3) APCI(N,KKK,KON),IPIB(N,KKK,KON),KKK=1,NLN)
2001 CONTINUE
1997 CONTINUE
C
IF (CICHA.E.EQ.1) CALL IMPRES (II,KFI)
C
170 CONTINUE
CLOSE(3,DISF=CRUNCH)
STOP
END
SUBROUTINE MATIASC(A,NR,N1,B,NC,M1,DETERM,IO,INDEX)
C
EQUIVALENCI (IRJW,IRJW),(ICOLU,ICOLU),(AMAX,I,SWAP)
DIMENSION A(NR,NR),B(NR,NC),INDEX(NR,5)
C
INITIALIZATION
C
N=N1
M=M1
DETERM=0.0
DO 20 J=1,N
20 INDEX(J,3)=0
DO 50 I=1,N
C
SEARCH FOR PIVOT ELEMENT
C
AMAX=0.0
DO 105 J=1,N
IF(INDEX(J,3)-1) 60,105,10
60 DO 100 K=1,N
IF(INDEX(K,3)-1) 80,100,715
80 IF(AMAX-ABS(A(J,K))) 85,100,100
85 IRJW=J
ICOLU=K
AMAX=ABS(A(J,K))
100 CONTINUE
105 CONTINUE
INDEX(ICOLU,3)=INDEX(IRJW,3)+1
INDEX(I,1)=IRJW
INDEX(I,2)=ICOLU
C
INTERCHANGE ROWS TO PUT PIVOT ELEMENT ON DIAGONAL
C
IF(IRJW-ICOLU) 140,310,140
140 DETERM=-DETERM
DO 200 L=1,N
SWAP=A(IRJW,L)
A(IRJW,L)=A(ICOLU,L)
200 A(ICOLU,L)=SWAP
IF(M) 310,310,210
210 DO 250 L=1,N

```

```

      SWAP=B(IROW,L)
      B(IROW,L)=L(COLUMN,L)
250  B(COLUMN,L)=SWAP
C
C      DIVIDE PIVOT ROW BY PIVOT ELEMENT
C
310  PIVOT=A(COLUMN,ICOLUMN)
      DETERM=DETERM*PIVOT
330  A(COLUMN,ICOLUMN)=1.0
      DO 350 L=1,N
350  A(COLUMN,L)=A(COLUMN,L)/PIVOT
      IF(M) 360,360,360
360  DO 370 L=1,N
370  B(COLUMN,L)=B(COLUMN,L)/PIVOT
C
C      REDUCE NON-PIVOT ROWS
C
380  DO 550 LI=1,N
      IF(LI-ICOLUMN) 400,550,400
400  T=A(LI,ICOLUMN)
      A(LI,ICOLUMN)=0.0
      DO 450 L=1,N
450  A(LI,L)=A(LI,L)-A(COLUMN,L)*T
C
C
      IF(M) 550,550,460
460  DO 500 L=1,N
500  B(LI,L)=B(LI,L)-B(COLUMN,L)*T
550  CONTINUE
C
C      INTERCHANGE COLUMNS
C
      DO 710 I=1,N
      L=N+1-I
      IF(INDEX(L,1)-INDEX(L,2)) 630,710,630
630  JROW=INDEX(L,1)
      JCOLUMN=INDEX(L,2)
      DO 705 K=1,N
      SWAP=A(K,JROW)
      A(K,JROW)=A(K,JCOLUMN)
      A(K,JCOLUMN)=SWAP
705  CONTINUE
710  CONTINUE
      DO 730 K=1,N
      IF(INDEX(K,3)-1) 715,720,715
720  CONTINUE
730  CONTINUE
      ID=1
810  RETURN
715  ID=2
      GO TO 810
      END
      SUBROUTINE KERR
C
C
COMMON/AA A/K,ACR,OMEGA,UM,IO,YHENS,ORAV
COMMON/BBB/XC(1,30),YC(1,30),XXC(1,29),YYC(1,29),SHEC(1,29),OSEC(1,29),JELC(1,29)
COMMON/CCC/PRA(29,4),PRV(29,4),PI(29,4)
COMMON/DDD/ELOG(2,29,29),YLOG(2,29,29)

```

DIMENSION CON1(50,2),CON2(50,2),C1(10,1),C2(51,1),SRU(10,2,2)
*,SOUR1(2,2),HAVE1(2,2),WAVE1(2,2),TLOFX(50,3)

C
C

NDE=2*NDI
DJ 1 I=1,NDI
NI=NDI+I
FR(I,2)=-SNECK(I)
FR(I,3)=CSE(K,I)
FR(I,4)=XX(K,I)*CSE(K,I)-(YY(K,I)-YME(S))*F(I,2)
CON1(I,1)=0.0
CON1(I,2)=0.0
CON2(I,1)=0.0
CON2(I,2)=0.0

CON1(NI,2)=CMFGA*FR(I,3)
CON2(NI,1)=CMLECA*FR(I,2)
CON2(NI,2)=CMNEC*FR(I,4)
XR2=UN*(XX(I,I)-X(K,1))
YR2=-UN*(YY(K,I)+Y(K,1))
XL2=UN*(XX(I,I)+X(K,1))
YL2=YR2
CALL DAVID(XR2,YR2,EJ2,CXR2, SXR2, RAR2, RBR2, CE2, S42)
CALL DAVID(XL2,YL2,EJ2,CXL2, SXL2, RAL2, RBL2, CL2, SL2)

DG 1 J=1,NDI
NJ=NDI+J
SIPJ=SNECK(I)*CSE(K,J)+SNECK(J)*CSE(K,I)
CIPJ=CSECK(I)*CSE(K,J)-SNECK(I)*SNECK(J)
SIMJ=SNECK(I)*CSE(K,J)-SNECK(J)*CSE(K,I)
CINJ=CSECK(J)*CSE(K,J)+SNECK(I)*SNECK(J)
XR1=UN*(XX(I,I)-X(K,J+1))
YR1=-UN*(YY(K,I)+Y(K,J+1))
XL1=UN*(XX(I,I)+X(K,J+1))
YL1=YR1
CALL DAVID(XR1,YR1,EJ1,CXR1, SXR1, RAR1, RBR1, CE1, S41)
CALL DAVID(XL1,YL1,EJ1,CXL1, SXL1, RAL1, RBL1, CL1, SL1)
DPR=2.*(SIPJ*(CFL-CR2)-CIPJ*(SRI-SR2))
DPL=2.*(CINJ*(SL1-SL2)-SIMJ*(CL1-CL2))
PPR=2./UN*(SNECK(J)*(RAR1-RAR2)+CSECK(J)*(RBR1-RBR2))
PPL=2./UN*(SNECK(J)*(RAL1-RAL2)+CSECK(J)*(RBL2-RBL1))
DNR=6.2831853*(EJ2*(SXR2*CIPJ-CXR2*SIPJ)-EJ1*(SXR1*CIPJ-CXR1*SIPJ))
DNL=6.2831853*(EJ1*(SXL1*CINJ-CXL1*SIMJ)-EJ2*(SXL2*CINJ-CXL2*SIMJ))
FWR=6.2831853/UN*(EJ1*(SXR1*CSECK(J)-CXR1*SNECK(J))-EJ2*(SXR2*CSECK(K,J)-CXR2*SNECK(K,J)))
FWR=6.2831853/UN*(EJ2*(SXL2*CSECK(K,J)+CXL2*SNECK(K,J))-EJ1*(SXL1*CSECK(K,J)+CXL1*SNECK(K,J)))
CT1(I,J)=BLOG(1,I,J)+DPR+DPL
CT2(I,J)=BLOG(2,I,J)+DPR-DPL
CT1(NI,NJ)=CT1(I,J)
CT2(NI,NJ)=CT2(I,J)
CI1(I,NJ)=DWR+DNL
CI2(I,NJ)=EWR-EYL
CI1(NI,J)=-CT1(I,NJ)
CI2(NI,J)=-CT2(I,NJ)
SOUR1(I,J)=YLOG(1,I,J)+PPR+PPL
SOUR2(I,J)=YLOG(2,I,J)+PPR-DPL
HAVE1(I,J)=FWR+FNL
HAVE2(I,J)=FWR-FNL

```

IF (J-NON) 2,1,1
2 XR2=XR1
  YR2=YR1
  CXR2=CXR1
  SXR2=SXR1
  KAR2=KAR1
  RJR2=RJR1
  CR2=CR1
  SR2=SR1
  XL2=XL1
  YL2=YL1
  EJ2=EJ1
  CXL2=CXL1
  SXL2=SXL1
  RAL2=RAL1
  RBL2=RBL1
  CL2=CL1
  SL2=SL1
1 CONTINUE
  CALL MATINS(CT1,58,NOL,CCN1,2,2,DTL,IO,INOLX)
  CJ TO(3,9),IO
3 CALL MATINS(CT2,58,NOL,CCN2,2,2,DTU,IO,IAOLX)
  GU TO(4,9),IO
4 DO 5 I=1,NON
  DO 6 L=2,4
  FRAC(I,L)=0.0
6 FRV(I,L)=0.0
  DO 7 J=1,NON
  NJ=NON+J
  FRAC(I,2)=FRAC(I,2)+CON2(J,1)*WAVEZ(I,J)-CON1(NJ,1)*SOUR2(I,J)
  FRAC(I,3)=FRAC(I,3)+CON1(J,2)*WAVE1(I,J)-CON1(NJ,2)*SOUR1(I,J)
  FRAC(I,4)=FRAC(I,4)+CON2(J,2)*WAVE2(I,J)-CON2(NJ,2)*SOUR2(I,J)
  FRV(I,2)=FRV(I,2)+CON2(J,1)*SOUR2(I,J)+CON1(NJ,1)*WAVE2(I,J)
  FRV(I,3)=FRV(I,3)+CON1(J,2)*SOUR1(I,J)+CON1(NJ,2)*WAVE1(I,J)
7 FRV(I,4)=FRV(I,4)+CON2(J,2)*SOUR2(I,J)+CON2(NJ,2)*WAVE2(I,J)
  DO 8 L=2,4
  FRAC(I,L)=OMEGA*CRAV*FRAC(I,L)
8 FRV(I,L)=OMEGA*CRAV*FRV(I,L)
5 CONTINUE
9 RETURN
  END

```

SUBROUTINE FINV

C

```

COMMON/AA A/F,NON,OMEGA,UA,IO,YHLRS,CRAV
COMMON/EBB/XC(1,30),YC(1,30),XC(1,29),YC(1,29),SELC(1,29),CSELC(1,29),JELC(1,29)
COMMON/DJE/ELCG(2,29,29),YLOG(2,29,29)

```

C

```

DO 10 I=1,NON
  XM2=XX(K,I)-X(K,I)
  YM2=YY(K,I)-Y(K,I)
  XP2=XX(K,I)*X(K,I)
  YP2=YY(K,I)*Y(K,I)
  IPR2=.5*ALU((XM2**2+YM2**2))
  IPL2=.5*ALU((XP2**2+YP2**2))
  ICR2=.5*ALU((XM2**2+YP2**2))
  ICL2=.5*ALU((XP2**2+YM2**2))
  APR2=ATAN2(YM2,XM2)
  APL2=ATAN2(YP2,XP2)
  ACR2=ATAN2(YP2,XM2)
10

```

```

ACL2=ATAN2(YP2,XP2)
DO 10 J=1,AC1
XM1=XX(K,I)-X(K,J+1)
YM1=YY(K,I)-Y(K,J+1)
XP1=XX(K,I)+X(K,J+1)
YP1=YY(K,I)+Y(K,J+1)
FPR1=.5*ALCG(XP1**2+YM1**2)
FPL1=.5*ALCG(XP1**2+YM1**2)
FCR1=.5*ALCG(XP1**2+YP1**2)
FCL1=.5*ALCG(XP1**2+YP1**2)
APR1=ATAN2(YM1,XM1)
APL1=ATAN2(YM1,XP1)
ACR1=ATAN2(YI1,XP1)
ACL1=ATAN2(YP1,XP1)
SINJ=SNECK(I)*CSECK(J)-SNECK(J)*CSECK(I)
CINJ=CSECK(I)*CSECK(J)+SNECK(I)*SNECK(J)
SIPJ=SNECK(I)*CSECK(J)+SNECK(J)*CSECK(I)
CIPJ=CSECK(I)*CSECK(J)-SNECK(I)*SNECK(J)
DPNR=SINJ*(FPR1-FPR2)+CINJ*(APR1-APR2)
FPR=CSECK(J)*(XP1*FPR1-YM1*APR1-XM1*XP2+YPR2+YM2*APR2+XM2)
SNECK(J)
DPNL=SIPJ*(FPL2-FPL1)+CIPJ*(APL2-APL1)
FPL=CSECK(J)*(XF2*FPL2-YF2*APL2-XP2*XP1+YPL1+YF1*APL1+XP1)
SNECK(J)
DCNR=SIPJ*(FCR1-FCR2)+CIPJ*(ACR1-ACR2)
FCR=CSECK(J)*(XM1*FCR1-YF1*ACR1-XM1*XP2+YF2*ACR2+YF2*ACR2+XM2)
SNECK(J)
DCNL=SINJ*(FCL2-FCL1)+CINJ*(ACL2-ACL1)
FCL=CSECK(J)*(XF2*FCL2-YF2*ACL2-XP2*XP1+FCL1+YF1*ACL1+XP1)
SNECK(J)
FLOG(1,I,J)=DPNR+DPNL-DCNR-DCNL
YLOG(1,I,J)=FPR+FPL-PCR+FCL
FLOG(2,I,J)=DPNR-DPNL-DCNR+DCNL
YLOG(2,I,J)=FPR-FPL-PCR+FCL
IF(J-NON) 475,10,10

```

```

475 XM2=XM1
    YM2=YM1
    XP2=XP1
    YP2=YP1
    FPR2=FPR1
    FPL2=FPL1
    FCR2=FCR1
    FCL2=FCL1
    APR2=APR1
    APL2=APL1
    ACR2=ACR1
    ACL2=ACL1

```

```

10 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DAVID(X,Y,E,C,S,RA,RP,CIN,SON)

```

C
C
C

```

AT=ATAN2(X,Y)
AKC=AT-1.5707963
L=LXP(-Y)
C=COS(X)
S=SIN(X)

```

```

R=X**2+Y**2
TLST=0.0001
IF(R-1.0) 5,10,10
10 TLST=0.1*TLST
IF(R-2.0) 5,20,20
20 TLST=0.1*TLST
IF(R-4.0) 5,30,30
30 TLST=0.1*TLST
IF(R-200.0) 5,31,31
31 TLST=0.0001
AL=0.5*ALOC(R)
Y=-Y
SUMC=Y/SQRT(R)
SUMS=X/SQRT(R)
TC=SUMC
TS=SUMS
DO 33 K=1,15
TO=TC
TL=-(TC*Y-X*TS)*K/R
TS=-(TS*Y+X*TO)*K/R
SUMC=SUMC+TC
SUMS=SUMS+TS
IF(K-15) 34,35,35
34 IF((ABS(TC)+ABS(TS))-TLST) 35,35,33
35 SUMC=SUMC/SQRT(K)*(-1.)
SUMS=SUMS/SQRT(K)*(-1.)
SUN=SUNS+3.141593*E*0
SON=-SON
CIN=SUMC+3.141593*E*0
RA=AL-CIN
RB=ARG+SON
GO TO 4
33 CONTINUE
35 AL=0.5*ALOC(R)
SUMC=0.57721566*AL+Y
SUMS=AT+X
TC=Y
TS=X
DO 1 K=1,500
TO=TC
COX=K
CAY=K+1
FACT=COX/CAY**2
TC=FACT*(Y*TC-X*TS)
TS=FACT*(Y*TS+X*TO)
SUMC=SUMC+TC
SUMS=SUMS+TS
IF(K-500) 40,3,3
40 IF((ABS(TC)+ABS(TS))-TLST) 3,3,1
3 CIN=L*(C*SUMC+S*SUMS)
SON=E*(S*SUMC-C*SUMS)
RA=AL-CIN
RB=ARG+SON
GO TO 4
1 CONTINUE
4 RETURN
END
SUBROUTINE IMPR III
C
C ESTA SUBROTINA IMPRIME TITULO E POSICAO VACILS.

```

```

WRITE (6,1)
1 FORMAT(////,1X,"CALCULO DE PRESSOES EM FASE COM VIBRACOES",",",
*"RESSOES EM FASE COM DESLOCAMENTOS,",",",1X,"COEFICIENTES DE AMPL",
*"ORTECIMENTO E COEFICIENTES DE MASSA ADICIONADA EM CILINDROS",",",
*1X,"MORZ GATAIS PARCIALMENTE OU TOTALMENTE IMERSOS EM FLUIDO DE",
*"E PROFUNDIDADE INFINI",",",1X,"TA, E SOLICITADOS A OSCILACOES DE",
*"DERIVA ( SWAY ), CATUPRU ( HEAVL ) DO BALANCO",",",1X,"( RD",
*"LL ). APLICACAO DO METODO DAS FONTES DISTRIBUIDAS DE W. FRANK.")

```

```

WRITE (6,2)
2 FORMAT(////,1X,34X,"OBSERVACOES",",",1X,34X,11(1H*),",",1X,10X,
*" (1) AS FREQUENCIAS W TEM UNIDADE RAD/SEG.",",",1X,10X,
*" (2) O INDICE (2) SE REFERE A OSCILACOES DE DERIVA ( SWAY ),",",",
*15X," (3) INDICE (3) SE REFERE A OSCILACOES DE CATUPRU ( HEAVL ),",",",
*15X," (4) INDICE (4) SE REFERE A OSCILACOES DE BALANCO ( ROLL )",",",
*//,1X,10X," (5) AS PRESSOES PV(.) E PA(.) TEM UNIDADE ",
*"KGF/M**2.",",",1X,10X," (6) OS ADIMENSIONAIS ADX (DE FREQUENCIA",
*"1A), AM(.,.) (DE A",",",1X,14X,"MORTECIMENTO) E PA(.,.) (DE",
*"E MASSA ADICIONADA) ESTAO DE",",",1X,14X,"FINIDOS NO MANUAL DE",
*" USUARIO DO PROGRAMA.")

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE IMPCEK (GRAV,RL,NST)

```

ESTA SUBROTINA IMPRIME DADOS GERAIS.

```

WRITE (6,1) GRAV,RL,NST
1 FORMAT(////,1X,34X,"DADOS GERAIS",",",1X,34X,12(1H*),",",1X,20X,
*"ACELERACAO DA GRAVIDADE: ",F6.2," M/SEG**2)",",",1X,20X,"DEN",
*"SIDADE DO FLUIDO: ",F6.2," KGF*SEG**2/M**4)",",",1X,20X,"RUMER",
*"U DE CILINDROS: ",I2)

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE IMPCIL (YMERS,DCARAC,NUT,MN,II)

```

ESTA SUBROTINA IMPRIME DADOS PARA CADA CILINDRO.

```

COMMON /BBB/ XC(1,30),YC(1,30),XXC(1,2),YYC(1,29),SNEC(1,29),CSC(
* 1,29),DELC(1,29)

```

```

WRITE (6,1) II, YMERS,DCARAC,NUT
1 FORMAT(1H1,////,1X,24X,"DADOS PARA O CILINDRO NUMERO",I2,/,25X,
* 31(1H*),",",1X,11X,"IMERSAO DO EIXO JOE PASSA PULO CENTRO DE",
*"E GRAVIDADE: ",F7.3," M",",",1X,11X,"DIMENSAO CARACTERISTICA DE",
*"A SECAC: ",F7.3," M",",",1X,11X,"NUMERO DE PONTOS PARA DEFINIC",
*"AO DA SECAC NO IV QUADRANTE: ",I2,/,1X,11X,"COORDENADAS DOS",
*"PONTOS: ",/,1X,18X,"PONTO",4X,"-",3X,"ABSCISSA (M)",3X,"-",3X,
*"ORDENADA (M)",/,/)

```

```

DO 10 I=1,NUT
WRITE (6,2) I,X(1,I),Y(1,I)
2 FORMAT(1X,20X,I2,11X,F7.3,11X,F7.3)
10 CONTINUE

```

```

WRITE (6,3) MN

```

```

3 FORMAT(//,1X,11X,"NUMERO DE FREQUENCIAS PARA CALCULO: ",I2)

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE IMPRES (II,NFI)

```

C
C
C

```

ESTA SUBROTINA IMPRIME AS PRESSOES PARA CADA CILINDRO.

```

```

COMMON /AUX/ OMEC(40), ADOMEN(40), PRVFSC(40,4), PRVFIC(40,4), PRAFSC(40,
*4), PRAVIC(40,4)

```

C

```

WRITE (6,1)
1 FORMAT (1H1)
WRITE (6,2)
2 FORMAT (///,1X,24X,"PRESSOES EM FASE COM VELOCIDADES"/)
WRITE (6,3)
3 FORMAT (1X,22X,"(SEGMENTO MAIS PROXIMO A SUPERFICIE)"/)
WRITE (6,4)
4 FORMAT (1X,15X,"W",6X,"ADM",7X,"PV(2)",8X,"PV(3)",8X,"PV(4)"/)
DO 10 I=1,NFI
WRITE (6,5) OMEC(I),ADOMEN(I),PRVFSC(I,1),PRVFSC(I,3),PRVFSC(I,4)
5 FORMAT (1X,13X,F5.3,3X,F5.3,3(3X,10.4))
10 CONTINUE
WRITE (6,2)
WRITE (6,6)
6 FORMAT (1X,29X,"(SEGMENTO MAIS IMPRESO)"/)
WRITE (6,4)
DO 11 I=1,NFI
WRITE (6,5) OMEC(I),ADOMEN(I),PRVIC(I,2),PRVIC(I,3),PRVIC(I,4)
11 CONTINUE
WRITE (6,7)
7 FORMAT (///,1X,23X,"PRESSOES EM FASE COM DESLOCAMENTOS"/)
WRITE (6,3)
WRITE (6,8)
8 FORMAT (1X,15X,"W",6X,"ADM",7X,"PA(2)",8X,"PA(3)",8X,"PA(4)"/)
DO 12 I=1,NFI
WRITE (6,5) OMEC(I),ADOMEN(I),PRAFSC(I,2),PRAFSC(I,3),PRAFSC(I,4)
12 CONTINUE
WRITE (6,1)
WRITE(6,7)
WRITE(6,5)
WRITE(6,3)
DO 13 I=1,NFI
WRITE (6,5) OMEC(I),ADOMEN(I),PRAVIC(I,2),PRAVIC(I,3),PRAVIC(I,4)
13 CONTINUE
RETURN
END

```

```

      REAL LPP, FI, N, K, IMI, IMJ, IMPSI, IMI
C
      COMMON /BALISA/ NUT, NON, XC(30), YC(30), XX(29), YY(29), FFLC(9),
*RC(4,29), RI(4), RJ(4), IMI(4), IMJ(4), AUXRC(4), AUXI(4), F(6,10),
*FF(6,10), RF(6,10), IMF(5,10)
      COMMON /FR/ NREQ, FREQ(10)
      COMMON /POT/ PSIC(4,29), FPSIC(4,29), RPSIC(4,29), IMPSIC(4,29)
      COMMON /CONST/ FI, RG, G
C
      PI=4.*ATAN(1.)
      RD=104.6
      G=9.806
      FC=PI/18.
C
      READ (5,1) LPP, MI, X0, Y0, Z0, FI, TEL, PSY
1  FORMAT (E10.0)
      READ (5,2) NREQ, NUT
2  FORMAT (S12)
      READ (5,1) (FFLC(I), I=1, NREQ)
      READ (5,1) (XC(I), I=1, NUT)
      READ (5,1) (YC(I), I=1, NUT)
      DO 500 I=1, (NUT-1)
      X(2*NJI-I)=-X(I)
      Y(2*NJI-I)=Y(I)
500 CONTINUE
      NIN=NJI-1
      NON=2*NIN
      WRITE(6,100) LPP, FI, MI, TEL, X0, PSY, Y0, NREQ, Z0, NUT
100  MI=MI*FC
      CMI=COS(MI)
      SMI=SIN(MI)
      DO 10 KCVI=1, NREQ
      WRITE(6,101) KCVI, FREQ(KCVI)
      READ(3) (PSIC(3,I), FPSIC(3,I), I=1, NIN)
      READ(3) (PSIC(2,I), FPSIC(2,I), I=1, NIN)
      READ(3) (PSIC(4,I), FPSIC(4,I), I=1, NIN)
      DO 200 I=1, NIN
      PSIC(2, NON-I+1)=PSIC(2,I)
      PSIC(3, NON-I+1)=-PSIC(3,I)
      PSIC(4, NON-I+1)=-PSIC(4,I)
      DO 200 KJN=2,4
      FPSIC(KJN, NON-I+1)=FPSIC(KJN,I)
200 CONTINUE
      WRITE(6,102)
      WRITE(6,103)
      RI(2)=0.
      RI(3)=0.
      FI(4)=0.
      IMI(2)=0.
      IMI(3)=0.
      IMI(4)=0.
      RJ(2)=0.
      RJ(3)=0.
      RJ(4)=0.
      IMJ(2)=0.
      IMJ(3)=0.
      IMJ(4)=0.

```

```

K=FREQ(KONI)*PI/20
DO 11 I=1,NCL
DO 13 LL=2,4
RPSI(LL,I)=PSI(LL,I)*COS(C*PPSI(LL,I))
IMPSI(LL,I)=PSI(LL,I)*SIN(C*PPSI(LL,I))
13 CONTINUE
XX(I)=(X(I)+X(I+1))/2.
YY(I)=(Y(I)+Y(I+1))/2.
AUX1=X(I)-X(I+1)
AUX2=Y(I)-Y(I+1)
DEL(I)=SQRT(AUX1*AUX1+AUX2*AUX2)
CS=AUX1/DEL(I)
SN=AUX2/DEL(I)
N(2,I)=-CS
N(3,I)=SN
N(4,I)=SN*YY(I)+CS*XX(I)
EY=DEL(I)*EXP(K*YY(I))
LYC=EY*CS*(K*XX(I)+SMI)
LYS=EY*SN*(K*XX(I)+SMI)
WRITE(6,104) I,XX(I),YY(I),PSI(2,I),PPSI(2,I),PSI(3,I),PPSI(3,I),
*PSI(4,I),FPSI(4,I)
DO 12 LL=2,4
RI(LL)=RI(LL)+N(LL,I)*LYC
IMI(LL)=IMI(LL)+N(LL,I)*LYS
RJ(LL)=RJ(LL)-(N(3,I)*SMI*RPSI(LL,I)-N(2,I)*PPSI(LL,I))*
*LYC-(N(2,I)*RPSI(LL,I)+N(3,I)*SMI*IMPSI(LL,I))*LYS
IMJ(LL)=IMJ(LL)-(N(3,I)*SMI*IMPSI(LL,I)+N(2,I)*PPSI(LL,I))*
*LYC-(N(2,I)*IMPSI(LL,I)-N(3,I)*SMI*RPSI(LL,I))*LYS
12 CONTINUE
11 CONTINUE
DO 14 LL=2,4
AUXR(LL)=G*RI(LL)+FREQ(KONI)*RJ(LL)
AUXI(LL)=G*IMI(LL)+FREQ(KONI)*IMJ(LL)
C1=RO*LPI
IF (CMI.NE.C.) C1=2.*RO*SIN(K*LPI*CMI/2.)/(K*C1)
RF(LL,KONI)=C1*AUXR(LL)
IMF(LL,KONI)=C1*AUXI(LL)
14 CONTINUE
C2=0.
IF (CMI.NE.C.) C2=2.*RO*CSIN(K*LPI*CMI/2.)
*-K*LPI*CMI*COS(K*LPI*CMI/2.)/2.)/(K*CMI)/(K+CMI)
RF(5,KONI)=-C2*AUXI(3)
IMF(5,KONI)=C2*AUXR(3)
RF(6,KONI)=C2*AUXI(2)
IMF(6,KONI)=-C2*AUXR(2)
DO 15 LL=2,6
C11=RF(LL,KONI)
C12=IMF(LL,KONI)
F(LL,KONI)=SQRT(C11*C11+C12*C12)
IF (RF(LL,KONI).NE.0.) FF(LL,KONI)=ATAN(C12/RF(LL,KONI))
*/FC
15 CONTINUE
10 CONTINUE
WRITE(6,105)
WRITE(6,106)
WRITE(6,107)
DO 16,KONI=1,NPFI
WRITE(6,108) FREQ(KONI), F(2,KONI), F(3,KONI), F(4,KONI),
*F(5,KONI),F(6,KONI)
16 CONTINUE

```

```

WRITE(6,109)
WRITE(6,110)
DO 17 KON1=1,NFFC
WRITE(6,113) FREQ(KON1),FF(2,KON1),FF(3,KON1),FF(4,KON1),
*FF(5,KON1),FF(6,KON1)
17 CONTINUE
WRITE(6,111)
WRITE(6,107)
DO 18 KON1=1,NFFC
WRITE(6,108) FREQ(KON1),RF(2,KON1),RF(3,KON1),RF(4,KON1),
*RF(5,KON1),RF(6,KON1)
18 CONTINUE
WRITE(6,112)
WRITE(6,107)
DO 19 KON1=1,NFFC
WRITE(6,108) FREQ(KON1),IMF(2,KON1),IMF(3,KON1),IMF(4,KON1),
*IMF(5,KON1),IMF(6,KON1)
19 CONTINUE
100 FORMAT(1H1,T21,"LPP=",F8.3," M",T46,"FI=",F6.1," GRAUS",//
* T21,"MI=",F6.1," GRAUS",T46,"TETA=",F6.1," GRAUS",//
* T21,"X0=",F8.3," M",T46,"PS1=",F6.3," GRAUS",//
* T21,"Y0=",F8.3," M",T46,"MFRU=",I2,//
* T21,"Z0=",F8.3," M",T46,"AUT=",I2)
101 FORMAT(1H1,T27,"FRECUENCIA",I2," : ",F6.3," RAD/SEG")
102 FORMAT(//,1X,"PCNTG",3X,"YY",5X,"ZZ",5X,"PSI2",5X,"PSI3",5X,
* "PSI4",5X,"FPSI3",5X,"PSI4",5X,"FPSI4")
104 FORMAT(1X,1X,I2,2X,F7.3,1X,F7.3,1X,F8.4,3X,F6.1,2(5X,F3.4,3X,
*F6.1))
103 FORMAT(1X,19,"(M)",T17,"(M)",T22,"(M**2/SEG)",T33,"(GRAUS)",
*T42,"(M**2/SLC)",T53,"(GRAUS)",T62,"(M**2/SEG)",T73,"(GRAUS)",//)
105 FORMAT(1H1)
106 FORMAT(//,1X,T11,"FRECUENCIA",T25,"FY",T35,"FZ",T45,"MX",T55,
*"MY",T65,"MZ")
107 FORMAT(1X,T12,"(RAD/SEG)",T24,"(CF)",T34,"(CF)",T44,"(CF*M)",
*T53,"(CF*M)",T63,"(CF*M)",//)
108 FORMAT(1X,13X,F5.3,1X,5(1X,F9.0))
109 FORMAT(//,1X,T11,"FRECUENCIA",T25,"FFY",T35,"FFZ",T45,"FMX",
*T55,"FMY",T65,"FMZ")
110 FORMAT(1X,T12,"(RAD/SEG)",T23,"(GRAUS)",4(3X,"(GRAUS)"),//)
111 FORMAT(//,1X,T11,"FRECUENCIA",T24,"REMY",T34,"REFX",T44,"RPMX",
*T54,"REMY",T64,"RMZ")
112 FORMAT(//,1X,T11,"FRECUENCIA",T24,"IMFY",T34,"IMFX",T44,"IMPMX",
*T54,"IMMY",T64,"IMMZ")
113 FORMAT(1X,T14,F5.3,5(4X,F6.1))
CLOSE(6,DISF=CRUNCH)
STOP
END

```

BURROUGHS LARGE SYSTEMS FORTRAN COMPILATION MARK 3.3.260 TUESDAY, 01/10/84

S E M I S / O B J O N D I S K
= = = = =

C PROGRAMA PRINCIPAL

```

DIMENSION AU(3,3),BU(3,3),AP(3,3),BP(3,3),LL(3,3),VAU1(3,3,10),
*LI(3,3),LIZ(3,3),LCI(3,3),LCIZ(3,3),AW(3,3),AV(3,3),ALCI(3,3),
*ALCIZ(3,3),VAU2(3,3),VAU3(3,3),VAU4(3,3),CXI(20),CYI(20),CZI(20),
*CXIZ(20),CZIZ(20),BW(3,3),BV(3,3),AA(3,3),BA(3,3),
*AX(3,3),BX(3,3),DQID1(3),DQID2(3)
COMMON /FR/ NFREQ,FREQ(20)
COMMON /OND/ MI,H13,T0,ABW(35),S(35)
COMMON /VEL/ RVXE(20),RVYE(20),RVZE(20),IVXE(20),IMVYE(20),
*IMVZE(20)
COMMON /ACE/ RAXE(20),RAYE(20),RAZE(20),IMAXE(20),IMAYE(20),
*IMAZE(20)
COMMON /ESFEX/ RCVX(20),IMCVX(20),RCVY(20),IMCVY(20),RCVZ(20),
*IMCVZ(20),RCVZX(20),IMCVZX(20),RCVZY(20),IMCVZY(20),RCVZZ(20),
*IMCVZZ(20),RVOPX(20),IMVOPX(20),RVOPY(20),IMVOPY(20),RVOPZ(20),
*IMVOPZ(20),RWOPX(20),IMWOPX(20),RWOPY(20),IMWOPY(20),RWOPZ(20),
*IMWOPZ(20)
COMMON /PLAT/ NELEM,NELEF,CSI(6,20),FCSI(6,20),RCSI(6,20),
*IMCSI(6,20),AG(6,6,20),BG(6,6,20),MZCSI(6)
COMMON /LIN/ M2(3,3,11),CX(10,20),CY(10,20),CZ(10,20)
COMMON /ELE/ ALFAC(3,3),LE,AUXI(3,3),M1(3,3),M12(3,3),A(3,3),
*B(3,3),XOE,YOE,ZOE,ITIPO,ALFL(3,3)
COMMON /CONST/ PI,RO,G,FC
COMMON /ESF/ RFE(3),IMFE(3),RME(3),IMME(3),FE(3),FFE(3),ME(3),
*FME(3),RF(3,20),IMF(3,20),RM(3,20),IMM(3,20),F(3,20),FF(3,20),
*M(3,20),FM(3,20)
REAL MI,IMCSI,M2,LE,M1,M12,MZCSI,LL,LY,LIZ,LCI,LCIZ,IMFE,
*IMME,ME,IMF,IMM,IMVPXE,IMVPYE,IMVPZE,IMVXE,IMVYE,IMVZE,M,M2OND,
*IMCVX,IMCVY,IMCVZ,IMCVZX,IMCVZY,IMCVZZ,IMVOPX,IMVOPY,IMVOPZ,
*IMWOPX,IMWOPY,IMWOPZ,IMAXE,IMAYE,IMAZE,IVX,IVY,IVZ,IAX,IAY,IAZ
DATA RO/0.1046/,G/9.806/
PI=4*ATAN(1.)*4.
FC=PI/180.
READ(5,1)NELEM,NELEF,NFREQ,IOPC

1 FORMAT(4I2)
READ(5,2)(FREQ(I),I=1,NFREQ)
2 FORMAT(8F10.0)
READ(5,2) MI,H13,T0
DO 1007 I=1,6
READ(5,2)(CSI(I,J),J=1,NFREQ)
READ(5,2)(FCSI(I,J),J=1,NFREQ)
DO 1007 J=1,NFREQ
FCSI(I,J)=FCSI(I,J)*FC
RCSI(I,J)=CSI(I,J)*COS(FCFSI(I,J))
IMCSI(I,J)=CSI(I,J)*SIN(FCFSI(I,J))
1007 CONTINUE
DO 1212 I=4,6
DO 1212 J=1,NFREQ
CSI(I,J)=CSI(I,J)*FC
RCSI(I,J)=RCSI(I,J)*FC
IMCSI(I,J)=IMCSI(I,J)*FC
1212 CONTINUE

```

```

IF (ICPC.EQ.1) READ(5,2) (M2CSI(I),I=1,6)
MI=MI*FC
IF (NELEM.EQ.0) GO TO 1234
DO 100 KUNTA1=1,NELEM
DO 1001 I=1,3
DO 1001 J=1,3
LI(I,J)=0.
LIZ(I,J)=0.
1001 CONTINUE
READ(5,1) ITIPO
READ(5,2) XOE,YOE,ZOE,PSI,TET,FIH,LE
IF (ITIPO.EQ.1) LE=1.
PSI=PSI*FC
TET=TET*FC
FIH=FIH*FC
ALFA(1,1)=COS(TET)*COS(PSI)
ALFL(2,1)=-ALFA(1,1)
ALFA(1,2)=SIN(TET)
ALFL(2,2)=-ALFA(1,2)
ALFA(1,3)=-COS(TET)*SIN(PSI)
ALFL(2,3)=-ALFA(1,3)
ALFA(2,1)=SIN(FIH)*SIN(PSI)-COS(FIH)*SIN(TET)*COS(PSI)
ALFL(1,1)=ALFA(2,1)
ALFA(2,2)=COS(FIH)*COS(TET)
ALFL(1,2)=ALFA(2,2)
ALFA(2,3)=SIN(FIH)*COS(PSI)+COS(FIH)*SIN(TET)*SIN(PSI)
ALFL(1,3)=ALFA(2,3)
ALFA(3,1)=COS(FIH)*SIN(PSI)+SIN(FIH)*SIN(TET)*COS(PSI)
ALFL(3,1)=ALFA(3,1)
ALFA(3,2)=-SIN(FIH)*COS(TET)
ALFL(3,2)=ALFA(3,2)
ALFA(3,3)=COS(FIH)*COS(PSI)-SIN(FIH)*SIN(TET)*SIN(PSI)
ALFL(3,3)=ALFA(3,3)
AUXI(1,1)=0.
AUXI(1,2)=-ZOE
AUXI(1,3)=YOE
AUXI(2,1)=ZOE
AUXI(2,2)=0.
AUXI(2,3)=-XOE
AUXI(3,1)=-YOE
AUXI(3,2)=XOE
AUXI(3,3)=0.
IF (ICPC.EQ.0) CALL LINREG
IF (ICPC.EQ.1) CALL LINALE
DZE=LE/10.
IF (ITIPO.EQ.1) DZE=1.
ZEPE=-LE*9./20.
IF (ITIPO.EQ.1) ZEPE=0.
LFIM=10
IF (ITIPO.EQ.1) LFIM=1
DO 564 KC1=1,LFIM
LL(2,1)=ZOE+ALFA(3,3)*ZEPE
LL(1,3)=YOE+ALFA(3,2)*ZEPE
LL(3,2)=XOE+ALFA(3,1)*ZEPE
LL(1,2)=-LL(2,1)
LL(3,1)=-LL(1,3)
LL(2,3)=-LL(3,2)
DO 566 I=1,3
DO 566 J=1,3
VAU(I,J,KC1)=LL(I,1)*ALFA(J,1)+LL(I,2)*ALFA(J,2)+

```

```

*LL(I,3)*ALFA(J,3)
LI(I,J)=LI(I,J)+LL(I,J)*DZE
LIZ(I,J)=LIZ(I,J)+LL(I,J)*ZEPE*DZE
566 CONTINUE
ZEPE=ZEPE+DZE
564 CONTINUE
C
READ(5,2) A(1,1),A(1,2),A(1,3),A(2,2),A(2,3),A(3,3)
READ(5,2) B(1,1),B(1,2),B(1,3),B(2,2),B(2,3),B(3,3)
C
DO 102 I=1,3
DO 102 J=1,3
C
A(I,J)=A(J,I)
B(I,J)=B(J,I)
102 CONTINUE
DO 9102 I=1,3
DO 9102 J=1,3
A(I,J)=A(I,J)/1000.
B(I,J)=B(I,J)/1000.
9102 CONTINUE
DO 103 I=1,3
DO 103 J=1,3
C
AU(I,J)=A(I,1)*ALFA(1,J)+A(I,2)*ALFA(2,J)+
*A(I,3)*ALFA(3,J)
AX(I,J)=A(I,1)*ALFL(1,J)+A(I,2)*ALFL(2,J)+
*A(I,3)*ALFL(3,J)
BU(I,J)=B(I,1)*ALFA(1,J)+B(I,2)*ALFA(2,J)+
*B(I,3)*ALFA(3,J)
BX(I,J)=B(I,1)*ALFL(1,J)+B(I,2)*ALFL(2,J)+
*B(I,3)*ALFL(3,J)
C
103 CONTINUE
DO 104 I=1,3
DO 104 J=1,3
C
AP(I,J)=ALFA(1,I)*AU(1,J)+ALFA(2,I)*AU(2,J)+
*ALFA(3,I)*AU(3,J)
AA(I,J)=ALFA(1,I)*AX(1,J)+ALFA(2,I)*AX(2,J)+
*ALFA(3,I)*AX(3,J)
BP(I,J)=ALFA(1,I)*BU(1,J)+ALFA(2,I)*BU(2,J)+
*ALFA(3,I)*BU(3,J)
BA(I,J)=ALFA(1,I)*BX(1,J)+ALFA(2,I)*BX(2,J)+
*ALFA(3,I)*BX(3,J)
C
104 CONTINUE
DO 1235 I=1,3
DO 1235 J=1,3
AW(I,J)=AP(I,1)*AUXI(J,1)+AP(I,2)*AUXI(J,2)+AP(I,3)*AUXI(J,3)
BW(I,J)=BP(I,1)*AUXI(J,1)+BP(I,2)*AUXI(J,2)+BP(I,3)*AUXI(J,3)
VU(I,J)=BU(I,1)*AUXI(J,1)+BU(I,2)*AUXI(J,2)+BU(I,3)*AUXI(J,3)
AV(I,J)=AU(I,1)*AUXI(J,1)+AU(I,2)*AUXI(J,2)+AU(I,3)*AUXI(J,3)
VAU2(I,J)=LI(I,1)*AP(1,J)+LI(I,2)*AP(2,J)+LI(I,3)*AP(3,J)
1235 CONTINUE
KFREQ=1
IF (ICPC.EQ.0) KFREQ=NFREQ
DO 101 KONTA2=1,KFREQ
ZEPE=-LE*9./20.
IF (ITIPD.EQ.1) ZEPE=0.

```

```

CXI(KONTA2)=0.
CYI(KONTA2)=0.
CZI(KONTA2)=0.
CXIZ(KONTA2)=0.
CYIZ(KONTA2)=0.
CZIZ(KONTA2)=0.
DO 1002 I=1,3
DO 1002 J=1,3
LCI(I,J)=0.
LCIZ(I,J)=0.
1002 CONTINUE
DO 568 KC1=1,LFIM
CXI(KONTA2)=CXI(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*DZE
CYI(KONTA2)=CYI(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*DZE
CZI(KONTA2)=CZI(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*DZE
CXIZ(KONTA2)=CXIZ(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
CYIZ(KONTA2)=CYIZ(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
CZIZ(KONTA2)=CZIZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
DO 569 I=1,3
LCI(I,1)=LCI(I,1)+VAU1(I,1,KC1)*CX(KC1,KONTA2)*DZE
LCI(I,2)=LCI(I,2)+VAU1(I,2,KC1)*CY(KC1,KONTA2)*DZE
LCI(I,3)=LCI(I,3)+VAU1(I,3,KC1)*CZ(KC1,KONTA2)*DZE
LCIZ(I,1)=LCIZ(I,1)+VAU1(I,1,KC1)*CX(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
LCIZ(I,2)=LCIZ(I,2)+VAU1(I,2,KC1)*CY(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
LCIZ(I,3)=LCIZ(I,3)+VAU1(I,3,KC1)*CZ(KC1,KONTA2)*ZEPE*DZE
569 CONTINUE
ZEPE=ZEPE+DZE
568 CONTINUE
DO 1003 I=1,3
ALCI(I,1)=ALFA(1,I)*CXI(KONTA2)
ALCI(I,2)=ALFA(2,I)*CYI(KONTA2)
ALCI(I,3)=ALFA(3,I)*CZI(KONTA2)
ALCIZ(I,1)=ALFA(1,I)*CXIZ(KONTA2)
ALCIZ(I,2)=ALFA(2,I)*CYIZ(KONTA2)
ALCIZ(I,3)=ALFA(3,I)*CZIZ(KONTA2)
1003 CONTINUE
DO 570 I=1,3
DO 570 J=1,3
VAU4(I,J)=LCI(I,1)*BU(1,J)+LCI(I,2)*BU(2,J)+LCI(I,3)*BU(3,J)
VAU3(I,J)=ALCI(I,1)*BU(1,J)+ALCI(I,2)*BU(2,J)+ALCI(I,3)*BU(3,J)
570 CONTINUE
DO 571 I=1,3
RF(I,KONTA2)=RF(I,KONTA2)+RCVX(KONTA2)*BU(1,I)+RCVY(KONTA2)*BU(2,I)
+RCVZ(KONTA2)*BU(3,I)+RVDPX(KONTA2)*AU(1,I)+RVOPY(KONTA2)*AU(2,I)
+RVOPZ(KONTA2)*AU(3,I)
IMF(I,KONTA2)=IMF(I,KONTA2)+IMCVX(KONTA2)*BU(1,I)+IMCVY(KONTA2)*BU
(2,I)+IMCVZ(KONTA2)*BU(3,I)+IMVOPX(KONTA2)*AU(1,I)+IMVOPY(KONTA2)*
AU(2,I)+IMVOPZ(KONTA2)*AU(3,I)
RM(I,KONTA2)=RM(I,KONTA2)+RCVX(KONTA2)*BV(1,I)+RCVY(KONTA2)*BV(2,I)
+RCVZ(KONTA2)*BV(3,I)+RVDPX(KONTA2)*AV(1,I)+RVOPY(KONTA2)*AV(2,I)
+RVOPZ(KONTA2)*AV(3,I)+RCVZX(KONTA2)*BX(1,I)+RCVZY(KONTA2)*
BX(2,I)+RCV77(KONTA2)*BX(3,I)+RWOPX(KONTA2)*AX(1,I)+
RWOPY(KONTA2)*AX(2,I)+RWOPZ(KONTA2)*AX(3,I)
IMM(I,KONTA2)=IMM(I,KONTA2)+IMCVX(KONTA2)*BV(1,I)+IMCVY(KONTA2)*BV
(2,I)+IMCVZ(KONTA2)*BV(3,I)+IMVOPX(KONTA2)*AV(1,I)+IMVOPY(KONTA2)*
AV(2,I)+IMVOPZ(KONTA2)*AV(3,I)+IMCV7X(KONTA2)*PX(1,I)+
IMCV7Y(KONTA2)*PX(2,I)+IMCV7Z(KONTA2)*PX(3,I)+IMWOPX(KONTA2)*
AX(1,I)+IMWOPY(KONTA2)*AX(2,I)+IMWOPZ(KONTA2)*AX(3,I)
DO 571 J=1,3
AG(J,I,KONTA2)=AG(J,I,KONTA2)+LE*AP(I,J)

```

```

AG(J+3,I,KONTA2)=AG(J+3,I,KONTA2)+LE*AW(I,J)
AG(J,I+3,KONTA2)=AG(J,I+3,KONTA2)+VAU2(I,J)
AG(J+3,I+3,KONTA2)=AG(J+3,I+3,KONTA2)+LIZ(I,1)*AA(1,J)+
*LIZ(I,2)*AA(2,J)+LIZ(I,3)*AA(3,J)+VAU2(I,1)*AUXI(J,1)+
*VAU2(I,2)*AUXI(J,2)+VAU2(I,3)*AUXI(J,3)
BG(J,I,KONTA2)=BG(J,I,KONTA2)+VAU3(I,J)
BG(J,I+3,KONTA2)=BG(J,I+3,KONTA2)+VAU4(I,J)
BG(J+3,I,KONTA2)=BG(J+3,I,KONTA2)+ALCIZ(I,1)*BX(1,J)+
*ALCIZ(I,2)*BX(2,J)+ALCIZ(I,3)*BX(3,J)+VAU3(I,1)*AUXI(J,1)+
*VAU3(I,2)*AUXI(J,2)+VAU3(I,3)*AUXI(J,3)
BG(J+3,I+3,KONTA2)=BG(J+3,I+3,KONTA2)+LCIZ(I,1)*BX(1,J)+
*LCIZ(I,2)*BX(2,J)+LCIZ(I,3)*BX(3,J)+VAU4(I,1)*AUXI(J,1)+
*VAU4(I,2)*AUXI(J,2)+VAU4(I,3)*AUXI(J,3)

```

571 CONTINUE

101 CONTINUE

IF (ICPC-EQ.0) GO TO 100

DD 1236 KONTA2=2,NFREQ

DD 1236 I=1,3

```

RF(I,KONTA2)=RF(I,KONTA2)+RCVX(KONTA2)*BU(1,I)+RCVY(KONTA2)*BU(2,I)
*+RCVZ(KONTA2)*BU(3,I)+RVOPX(KONTA2)*AU(1,I)+RVOPY(KONTA2)*AU(2,I)
*+RVOPZ(KONTA2)*AU(3,I)

```

```

IMF(I,KONTA2)=IMF(I,KONTA2)+IMCVX(KONTA2)*BU(1,I)+IMCVY(KONTA2)*BU
*(2,I)+IMCVZ(KONTA2)*BU(3,I)+IMVOPX(KONTA2)*AU(1,I)+IMVOPY(KONTA2)*
*AU(2,I)+IMVOPZ(KONTA2)*AU(3,I)

```

```

RM(I,KONTA2)=RM(I,KONTA2)+RCVX(KONTA2)*BV(1,I)+RCVY(KONTA2)*BV(2,I)
*+RCVZ(KONTA2)*BV(3,I)+RVOPX(KONTA2)*AV(1,I)+RVOPY(KONTA2)*AV(2,I)
*+RVOPZ(KONTA2)*AV(3,I)+RCVZX(KONTA2)*BX(1,I)+RCVZY(KONTA2)*

```

```

*BX(2,I)+RCVZZ(KONTA2)*BX(3,I)+RWOPX(KONTA2)*AX(1,I)+

```

```

*RWOPY(KONTA2)*AX(2,I)+RWOPZ(KONTA2)*AX(3,I)

```

```

IMM(I,KONTA2)=IMM(I,KONTA2)+IMCVX(KONTA2)*BV(1,I)+IMCVY(KONTA2)*BV
*(2,I)+IMCVZ(KONTA2)*BV(3,I)+IMVOPX(KONTA2)*AV(1,I)+IMVOPY(KONTA2)*
*AV(2,I)+IMVOPZ(KONTA2)*AV(3,I)+IMCVZX(KONTA2)*BX(1,I)+

```

```

*IMCVZY(KONTA2)*BX(2,I)+IMCVZZ(KONTA2)*BX(3,I)+IMWOPX(KONTA2)*

```

```

*AX(1,I)+IMWOPY(KONTA2)*AX(2,I)+IMWOPZ(KONTA2)*AX(3,I)

```

DD 1236 J=1,3

```

AG(J,I,KONTA2)=AG(J,I,KONTA2)+LE*AP(I,J)

```

```

AG(J+3,I,KONTA2)=AG(J+3,I,KONTA2)+LE*AW(I,J)

```

```

AG(J,I+3,KONTA2)=AG(J,I+3,KONTA2)+VAU2(I,J)

```

```

AG(J+3,I+3,KONTA2)=AG(J+3,I+3,KONTA2)+LIZ(I,1)*AA(1,J)+

```

```

*LIZ(I,2)*AA(2,J)+LIZ(I,3)*AA(3,J)+VAU2(I,1)*AUXI(J,1)+

```

```

*VAU2(I,2)*AUXI(J,2)+VAU2(I,3)*AUXI(J,3)

```

```

BG(J,I,KONTA2)=BG(J,I,KONTA2)+VAU3(I,J)

```

```

BG(J,I+3,KONTA2)=BG(J,I+3,KONTA2)+VAU4(I,J)

```

```

BG(J+3,I,KONTA2)=BG(J+3,I,KONTA2)+ALCIZ(I,1)*BX(1,J)+

```

```

*ALCIZ(I,2)*BX(2,J)+ALCIZ(I,3)*BX(3,J)+VAU3(I,1)*AUXI(J,1)+

```

```

*VAU3(I,2)*AUXI(J,2)+VAU3(I,3)*AUXI(J,3)

```

```

BG(J+3,I+3,KONTA2)=BG(J+3,I+3,KONTA2)+LCIZ(I,1)*BX(1,J)+

```

```

*LCIZ(I,2)*BX(2,J)+LCIZ(I,3)*BX(3,J)+VAU4(I,1)*AUXI(J,1)+

```

```

*VAU4(I,2)*AUXI(J,2)+VAU4(I,3)*AUXI(J,3)

```

1236 CONTINUE

10) CONTINUE

1234 CONTINUE

IF (NELEF-EQ.0) GO TO 1237

DD 5100 KONTA1=1,NELEF

READ(5,2)XOE,YOE,ZOE,PSI,TET,FIH,LE,AREA

PSI=PSI*FC

TET=TET*FC

FIH=FIH*FC

DD 9901 I=1,3

DD 9901 J=1,3

```

LI(I,J)=0.
LIZ(I,J)=0.
9901 CONTINUE
ALFA(1,1)=COS(TET)*COS(PSI)
ALFL(2,1)=-ALFA(1,1)
ALFA(1,2)=SIN(TET)
ALFL(2,2)=-ALFA(1,2)
ALFA(1,3)=-COS(TET)*SIN(PSI)
ALFL(2,3)=-ALFA(1,3)
ALFA(2,1)=SIN(FIH)*SIN(PSI)-COS(FIH)*SIN(TET)*COS(PSI)
ALFL(1,1)=ALFA(2,1)
ALFA(2,2)=COS(FIH)*COS(TET)
ALFL(1,2)=ALFA(2,2)
ALFA(2,3)=SIN(FIH)*COS(PSI)+COS(FIH)*SIN(TET)*SIN(PSI)
ALFL(1,3)=ALFA(2,3)
ALFA(3,1)=COS(FIH)*SIN(PSI)+SIN(FIH)*SIN(TET)*COS(PSI)
ALFL(3,1)=ALFA(3,1)
ALFA(3,2)=-SIN(FIH)*COS(TET)
ALFL(3,2)=ALFA(3,2)
ALFA(3,3)=COS(FIH)*COS(PSI)-SIN(FIH)*SIN(TET)*SIN(PSI)
ALFL(3,3)=ALFA(3,3)
AUXI(1,1)=0.
AUXI(1,2)=-ZOE
AUXI(1,3)=YOE
AUXI(2,1)=ZOE
AUXI(2,2)=0.
AUXI(2,3)=-XOE
AUXI(3,1)=-YOE
AUXI(3,2)=XOE
AUXI(3,3)=0.
DZE=LE/10.
ZEPE=-1E*9./20.
LFIM=10
DO 9902 KC1=1,LFIM
LL(2,1)=ZOE+ALFA(3,3)*ZEPE
LL(1,3)=YOE+ALFA(3,2)*ZEPE
LL(3,2)=XOE+ALFA(3,1)*ZEPE
LL(1,2)=-LL(2,1)
LL(3,1)=-LL(1,3)
LL(2,3)=-LL(3,2)
DO 9903 I=1,3
DO 9903 J=1,3
VU1(I,J,KC1)=LL(I,1)*ALFA(J,1)+LL(I,2)*ALFA(J,2)+
*LL(I,3)*ALFA(J,3)
LI(I,J)=LI(I,J)+LL(I,J)*DZE
LIZ(I,J)=LIZ(I,J)+LL(I,J)*ZEPE*DZE
9903 CONTINUE
ZEPE=ZEPE+DZE
9902 CONTINUE
DO 5100 KONTA2=1,NFREQ
READ(5,2) A(1,1),A(1,2),A(1,3),A(2,2),A(2,3),A(3,3)
READ(5,2) B(1,1),B(1,2),B(1,3),B(2,2),B(2,3),B(3,3)
DO 5102 J=1,3
DO 5102 I=J,3
A(I,J)=A(J,I)
B(I,J)=B(J,I)
5102 CONTINUE
DO 6666 I=1,3
DO 6666 J=1,3
A(I,J)=A(I,J)*AREA*RD

```

```

      B(I,J)=B(I,J)*AREA*RC*FREQ(KONTA2)
6666 CONTINUE
      DO 9904 I=1,3
      DO 9904 J=1,3

```

```

C
      AU(I,J)=A(I,1)*ALFA(1,J)+A(I,2)*ALFA(2,J)+
      *A(I,3)*ALFA(3,J)
      AX(I,J)=A(I,1)*ALFL(1,J)+A(I,2)*ALFL(2,J)+
      *A(I,3)*ALFL(3,J)
      BU(I,J)=B(I,1)*ALFA(1,J)+B(I,2)*ALFA(2,J)+
      *B(I,3)*ALFA(3,J)
      BX(I,J)=B(I,1)*ALFL(1,J)+B(I,2)*ALFL(2,J)+
      *B(I,3)*ALFL(3,J)

```

```

C
9904 CONTINUE
      DO 9905 I=1,3
      DO 9905 J=1,3

```

```

C
      AP(I,J)=ALFA(1,I)*AU(1,J)+ALFA(2,I)*AU(2,J)+
      *ALFA(3,I)*AU(3,J)
      AA(I,J)=ALFA(1,I)*AX(1,J)+ALFA(2,I)*AX(2,J)+
      *ALFA(3,I)*AX(3,J)
      BP(I,J)=ALFA(1,I)*BU(1,J)+ALFA(2,I)*BU(2,J)+
      *ALFA(3,I)*BU(3,J)
      BA(I,J)=ALFA(1,I)*BX(1,J)+ALFA(2,I)*BX(2,J)+
      *ALFA(3,I)*BX(3,J)

```

```

C
9905 CONTINUE
      DO 9906 I=1,3
      DO 9906 J=1,3
      AW(I,J)=AP(I,1)*AUXI(J,1)+AP(I,2)*AUXI(J,2)+AP(I,3)*AUXI(J,3)
      BW(I,J)=BP(I,1)*AUXI(J,1)+BP(I,2)*AUXI(J,2)+BP(I,3)*AUXI(J,3)
      BV(I,J)=BU(I,1)*AUXI(J,1)+BU(I,2)*AUXI(J,2)+BU(I,3)*AUXI(J,3)
      AV(I,J)=AU(I,1)*AUXI(J,1)+AU(I,2)*AUXI(J,2)+AU(I,3)*AUXI(J,3)
      VAU2(I,J)=LI(I,1)*AP(1,J)+LI(I,2)*AP(2,J)+LI(I,3)*AP(3,J)
      VAU3(I,J)=LI(I,1)*BP(1,J)+LI(I,2)*BP(2,J)+LI(I,3)*BP(3,J)

```

```

9906 CONTINUE
      DO 5107 I=1,3
      DO 5107 J=1,3
      AG(J,I,KONTA2)=AG(J,I,KONTA2)+LE*AP(I,J)
      AG(J+3,I,KONTA2)=AG(J+3,I,KONTA2)+LE*AA(I,J)
      AG(J,I+3,KONTA2)=AG(J,I+3,KONTA2)+VAU2(I,J)
      AG(J+3,I+3,KONTA2)=AG(J+3,I+3,KONTA2)+LIZ(I,1)*AA(1,J)+
      *LIZ(I,2)*AA(2,J)+LIZ(I,3)*AA(3,J)+VAU2(I,1)*AUXI(J,1)+
      *VAU2(I,2)*AUXI(J,2)+VAU2(I,3)*AUXI(J,3)
      BG(J,I,KONTA2)=BG(J,I,KONTA2)+LE*BP(I,J)
      BG(J+3,I,KONTA2)=BG(J+3,I,KONTA2)+LE*BA(I,J)
      BG(J,I+3,KONTA2)=BG(J,I+3,KONTA2)+VAU3(I,J)
      BG(J+3,I+3,KONTA2)=BG(J+3,I+3,KONTA2)+LIZ(I,1)*BA(1,J)+
      *LIZ(I,2)*BA(2,J)+LIZ(I,3)*BA(3,J)+VAU3(I,1)*AUXI(J,1)+
      *VAU3(I,2)*AUXI(J,2)+VAU3(I,3)*AUXI(J,3)

```

```

5107 CONTINUE
      READ(5,2)(FE(I),I=1,3),(ME(I),I=1,3)
      READ(5,2)(FFE(I),I=1,3),(FME(I),I=1,3)
      DO 7103 I=1,3
      FFE(I)=FFE(I)*FC
      FME(I)=FME(I)*FC
      RFE(I)=FE(I)*COS(FFE(I))/1000.
      IMF(I)=FE(I)*SIN(FFE(I))/1000.
      RME(I)=ME(I)*COS(FME(I))/1000.

```

```

IMME(I)=ME(I)*SIN(FME(I))/1000.
7103 CONTINUE
DO 7104 I=1,3
AU1=RFE(1)*ALFA(1,I)+RFE(2)*ALFA(2,I)+RFE(3)*ALFA(3,I)
AU2=IMFE(1)*ALFA(1,I)+IMFE(2)*ALFA(2,I)+IMFE(3)*ALFA(3,I)
RF(I,KONTA2)=RF(I,KONTA2)+AU1
IMF(I,KONTA2)=IMF(I,KONTA2)+AU2
DOID1(I)=AU1
DOID2(I)=AU2
7104 CONTINUE
DO 9909 I=1,3
AU3=RME(1)*ALFA(1,I)+RME(2)*ALFA(2,I)+RME(3)*ALFA(3,I)+
*AUXI(I,1)*DOID1(1)+AUXI(I,2)*DOID1(2)+
*AUXI(I,3)*DOID1(3)
AU4=IMME(1)*ALFA(1,I)+IMME(2)*ALFA(2,I)+IMME(3)*ALFA(3,I)+
*AUXI(I,1)*DOID2(1)+AUXI(I,2)*DOID2(2)+
*AUXI(I,3)*DOID2(3)
RM(I,KONTA2)=RM(I,KONTA2)+AU3
IMM(I,KONTA2)=IMM(I,KONTA2)+AU4
9909 CONTINUE
5100 CONTINUE
1237 CONTINUE
DO 1111 KONTA2=1,NFREQ
WRITE(6,20)

WRITE(6,12) FREQ(KONTA2)
WRITE(6,21)
DO 116 I=1,6
WRITE(6,23)(AG(I,J,KONTA2),J=1,6)
116 CONTINUE
WRITE(6,22)
DO 117 I=1,6
WRITE(6,24)(BG(I,J,KONTA2),J=1,6)
117 CONTINUE
1111 CONTINUE
WRITE(4)I((AG(I,J,L),I=1,6),J=1,6),L=1,NFREQ)

002:07F4:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00038120
WRITE(4)((BG(I,J,L),I=1,6),J=1,6),L=1,NFREQ) 00038130 C 002:07F4:2
002:080D:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00038130
WRITE(6,920)
WRITE(6,917)
DO 4105 KONTA2=1,NFREQ
DO 4106 I=1,3
F(I,KONTA2)=SQRT(RF(I,KONTA2)**2+IMF(I,KONTA2)**2)
IF (ABS(RF(I,KONTA2)).GT.1.E-3)
*FF(I,KONTA2)=ATAN(RF(I,KONTA2)/IMF(I,KONTA2))/FC
M(I,KONTA2)=SQRT(RM(I,KONTA2)**2+IMM(I,KONTA2)**2)
IF (ABS(RM(I,KONTA2)).GT.1.E-3)
*FM(I,KONTA2)=ATAN(RM(I,KONTA2)/IMM(I,KONTA2))/FC
4106 CONTINUE
WRITE(6,922) FREQ(KONTA2),(F(I,KONTA2),I=1,3),(M(I,KONTA2),I=1,3)
4105 CONTINUE
WRITE(4)((RF(I,L),I=1,3),(RM(I,L),I=1,3),L=1,NFREQ)
002:087D:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00039450
WRITE(6,921)
WRITE(6,919)
DO 4107 KONTA2=1,NFREQ
WRITE(6,923)FREQ(KONTA2),(FF(I,KONTA2),I=1,3),(FM(I,KONTA2),I=1,3)
4107 CONTINUE

```

```

WRITE(4)((IMF(I,L),I=1,3),(IMM(I,L),I=1,3),L=1,NFREQ)
002:0000:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00039950
3000 FORMAT(1H1,"ELEMENTO NUMERO ",I2,"(TIPO = ",I2,")")
10 FORMAT(1H1,31X,"ELEMENTO NUMERO ",I2)
11 FORMAT(//,1X,11X,"XOE=",F8.3," M; YOE=",F8.3," M; ZOE=",
*F8.3," M; //,1X,12X,"PSI=",F7.2," GRAUS; FI=",F7.2,
*" GRAUS; TETA=",F7.2," GRAUS; LE=",F8.3," M.")
12 FORMAT(//,1X,29X,"FRECUENCIA:",F4.1," RAD/SEG")
13 FORMAT(//,1X,17X,"A(I,J)",T58,"B(I,J)",//)
14 FORMAT(1X,1X,3E12.5,4X,3E12.5)
15 FORMAT(//,1X,15X,"ALFA (I,J)",T56,"AUXI (I,J)",//)
16 FORMAT(//,1X,16X,"AU (I,J)",T57,"BU (I,J)",//)
17 FORMAT(//,1X,15X,"AV (I,J)",T57,"BV (I,J)",//)
18 FORMAT(//,1X,16X,"AW (I,J)",T57,"BW (I,J)",//)
19 FORMAT(//,1X,16X,"AP (I,J)",T57,"BP (I,J)",//)
20 FORMAT(1H1,31X,"RESULTADOS GERATS")
21 FORMAT(//,1X,36X,"AG (I,J)",//)
22 FORMAT(//,1X,36X,"BG (I,J)",//)
23 FORMAT(//,1X,3X,6E12.5)
24 FORMAT(//,1X,3X,6E12.5)
916 FORMAT(//,1X,T6,"FRECUENCIA",4X,"FXE",7X,"FYE",7X,"FZE",7X,
*"FXE",7X,"MYE",7X,"PZE")
917 FORMAT(//,1X,T7,"(RAD/SEG)",3X,"(TF)",6X,"(TF)",6X,"(TF)",5X,
*" (TF*M)",4X,"(TF*M)",4X,"(TF*M)",//)
918 FORMAT(//,1X,T6,"FRECUENCIA",3X,"FFXE",6X,"FFYE",6X,"FFZE",
*6X,"FFXE",6X,"FFYE",6X,"FFZE")
519 FORMAT(//,1X,T7,"(RAD/SEG)",2X,"(GRAUS)",5(3X,"(GRAUS)"),//)
920 FORMAT(//,1X,T6,"FRECUENCIA",4X,"FX",8X,"FY",8X,"FZ",8X,"FX",
*8X,"MY",8X,"M7")
921 FORMAT(//,1X,T6,"FRECUENCIA",4X,"FFX",7X,"FFY",7X,"FFZ",7X,
*"FMX",7X,"FMY",7X,"FMZ")
922 FORMAT(1X,T8,F6.3,1X,6(1X,F9.0))
923 FORMAT(1X,T8,F6.3,6(4X,F6.1))
CLOSE(4,DISP=CRUNCH)
STOP
END

```

```

=====
SUBROUTINE LINREG
COMMON /FR/ NFREQ,FREQ(20)
COMMON /OND/ MI,H13,T0,A9(35),S(35)
COMMON /PLAT/ NELEN,NELEF,CSI(6,20),FCSI(6,20),RCSI(6,20),
*IMCSI(6,20),AG(6,6,20),BG(6,6,20),M2CSI(6)
COMMON /LIN/ M2(3,3,11),CX(10,20),CY(10,20),CZ(10,20)
COMMON /ELE/ ALFA(3,3),LE,AUXI(3,3),M1(3,3),M12(3,3),A(3,3),
*B(3,3),XOE,YOE,ZOE,ITIPO,ALFL(3,3)
COMMON /CONST/ PI,R0,G,FC
COMMON /VEL/ RVXE(20),RVYE(20),RVZE(20),IMVXE(20),IMVYE(20),
*IMVZE(20)
COMMON /ACE/ RAXE(20),RAYE(20),RAZE(20),IMAXE(20),IMAYE(20),
*IMAZE(20)
COMMON /ESFEX/ RCVX(20),IMCVX(20),RCVY(20),IMCVY(20),RCVZ(20),
*IMCVZ(20),RCVZX(20),IMCVZX(20),RCVZY(20),IMCVZY(20),RCVZZ(20),
*IMCVZZ(20),RVOPX(20),IMVOPX(20),RVOPY(20),IMVOPY(20),RVOPZ(20),
*IMVOPZ(20),RWOPX(20),IMWOPX(20),RWOPY(20),IMWOPY(20),RWOPZ(20),
*IMWOPZ(20)

```

```

DIMENSION RVPXE(20),RVPYE(20),RVPZE(20),IMVPXE(20),IMVPYE(20),
*IMVPZE(20)
REAL M1,IMCSI,M2,LE,M1,M12,M2CSI,LL,LI,LIZ,LCI,LCIZ,IMFE,
*IMPE,PE,IMF,IMM,IMVPXE,IMVPYE,IMVPZE,IMVXE,IMVYE,IMVZE,M,MZOND,
*IMCVX,IMCVY,IMCVZ,IMCVZX,IMCVZY,IMCVZZ,IMVOPX,IMVOPY,IMVOPZ,
*IMWOPX,IMWOPY,IMWOPZ,IMAXE,IMAYE,IMAZE,IVX,IVY,IVZ,IAX,IAY,IAZ
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
M(I,J)=AUX(I,J)
10 CONTINUE
ZEPE=-LE*9./20.
IF (ITIPO.EQ.1) ZEPE=0.
DZE=LE/10.
IF (ITIPO.EQ.1) DZE=1.
IFIM=10
IF (ITIPO.EQ.1) IFIM=1
DO 2000 I=1,NFREQ
RCVX(I)=0.
RCVY(I)=0.
RCVZ(I)=0.
IMCVX(I)=0.
IMCVY(I)=0.
IMCVZ(I)=0.
IMCVZX(I)=0.
IMCVZY(I)=0.
IMCVZZ(I)=0.
RCVZX(I)=0.
RCVZY(I)=0.
RCVZZ(I)=0.
RVOPX(I)=0.
RVOPY(I)=0.
RVOPZ(I)=0.
IMVOPX(I)=0.
IMVOPY(I)=0.
IMVOPZ(I)=0.
IMWOPX(I)=0.
IMWOPY(I)=0.
IMWOPZ(I)=0.
RWOPX(I)=0.
RWOPY(I)=0.
RWOPZ(I)=0.
2000 CONTINUE
DO 11 KC1=1,IFIM
M2(1,1,KC1)=0.
M2(1,2,KC1)=-ALFA(3,3)*ZEPE
M2(1,3,KC1)=ALFA(3,2)*ZEPE
M2(2,1,KC1)=ALFA(3,3)*ZEPE
M2(2,2,KC1)=0.
M2(2,3,KC1)=-ALFA(3,1)*ZEPE
M2(3,1,KC1)=-ALFA(3,2)*ZEPE
M2(3,2,KC1)=ALFA(3,1)*ZEPE
M2(3,3,KC1)=0.
XPE=XCE+ZEPE*ALFA(3,1)
YPE=YCE+ZEPE*ALFA(3,2)
ZPE=ZCE+ZEPE*ALFA(3,3)
DO 13 KONTA2=1,NFREQ
RVPXE(KONTA2)=-FREQ(KONTA2)*IMCSI(1,KONTA2)
RVPYE(KONTA2)=-FREQ(KONTA2)*IMCSI(2,KONTA2)
RVPZE(KONTA2)=-FREQ(KONTA2)*IMCSI(3,KONTA2)
IMVPXE(KONTA2)=FREQ(KONTA2)*RCSI(1,KONTA2)

```

```

IMVPYE(KONTA2)=FREQ(KONTA2)*RCSI(2,KONTA2)
IMVPZE(KONTA2)=FREQ(KONTA2)*RCSI(3,KONTA2)
DO 14 I=1,3
RVPXE(KONTA2)=RVPXE(KONTA2)-FREQ(KONTA2)*IMCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,1)+M2(I,1,KC1))
RVPYE(KONTA2)=RVPYE(KONTA2)-FREQ(KONTA2)*IMCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,2)+M2(I,2,KC1))
RVPZE(KONTA2)=RVPZE(KONTA2)-FREQ(KONTA2)*IMCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,3)+M2(I,3,KC1))
IMVPXE(KONTA2)=IMVPXE(KONTA2)+FREQ(KONTA2)*RCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,1)+M2(I,1,KC1))
IMVPYE(KONTA2)=IMVPYE(KONTA2)+FREQ(KONTA2)*RCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,2)+M2(I,2,KC1))
IMVPZE(KONTA2)=IMVPZE(KONTA2)+FREQ(KONTA2)*RCSI(I+3,KONTA2)*
*(M1(I,3)+M2(I,3,KC1))
14 CONTINUE
ADE1=RVPXE(KONTA2)*ALFA(1,1)+RVPYE(KONTA2)*ALFA(1,2)+
*RVPZE(KONTA2)*ALFA(1,3)
ADE2=RVPXE(KONTA2)*ALFA(2,1)+RVPYE(KONTA2)*ALFA(2,2)+
*RVPZE(KONTA2)*ALFA(2,3)
ADE3=RVPXE(KONTA2)*ALFA(3,1)+RVPYE(KONTA2)*ALFA(3,2)+
*RVPZE(KONTA2)*ALFA(3,3)
RVPXE(KONTA2)=ADE1
RVPYE(KONTA2)=ADE2
RVPZE(KONTA2)=ADE3
ADE1=IMVPXE(KONTA2)*ALFA(1,1)+IMVPYE(KONTA2)*ALFA(1,2)+
*IMVPZE(KONTA2)*ALFA(1,3)
ADE2=IMVPXE(KONTA2)*ALFA(2,1)+IMVPYE(KONTA2)*ALFA(2,2)+
*IMVPZE(KONTA2)*ALFA(2,3)
ADE3=IMVPXE(KONTA2)*ALFA(3,1)+IMVPYE(KONTA2)*ALFA(3,2)+
*IMVPZE(KONTA2)*ALFA(3,3)
IMVPXE(KONTA2)=ADE1
IMVPYE(KONTA2)=ADE2
IMVPZE(KONTA2)=ADE3
13 CONTINUE
CALL CNDA(XPE,YPE,ZPE)
DO 16 KONTA2=1,NFREQ
CX(KC1,KONTA2)=8./3./PI*SQRT((RVPXE(KONTA2)-RVXE(KONTA2))**2+
*(IMVPXE(KONTA2)-IMVXE(KONTA2))**2)
CY(KC1,KONTA2)=8./3./PI*SQRT((RVPYE(KONTA2)-RVYE(KONTA2))**2+
*(IMVPYE(KONTA2)-IMVYE(KONTA2))**2)
CZ(KC1,KONTA2)=8./3./PI*SQRT((RVPZE(KONTA2)-RVZE(KONTA2))**2+
*(IMVPZE(KONTA2)-IMVZE(KONTA2))**2)
RCVX(KONTA2)=RCVX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*RVXE(KONTA2)*DZE
RCVY(KONTA2)=RCVY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*RVYE(KONTA2)*DZE
RCVZ(KONTA2)=RCVZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*RVZE(KONTA2)*DZE
IMCVX(KONTA2)=IMCVX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*IMVXE(KONTA2)*DZE
IMCVY(KONTA2)=IMCVY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*IMVYE(KONTA2)*DZE
IMCVZ(KONTA2)=IMCVZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*IMVZE(KONTA2)*DZE
IMCVZX(KONTA2)=IMCVZX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*IMVXE(KONTA2)*DZE*
*ZEPE
IMCVZY(KONTA2)=IMCVZY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*IMVYE(KONTA2)*DZE*
*ZEPE
IMCVZZ(KONTA2)=IMCVZZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*IMVZE(KONTA2)*DZE*
*ZEPE
RCVZX(KONTA2)=RCVZX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*RVXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RCVZY(KONTA2)=RCVZY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*RVYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RCVZZ(KONTA2)=RCVZZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*RVZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RVOPX(KONTA2)=RVOPX(KONTA2)+RAXE(KONTA2)*DZE
RVOPY(KONTA2)=RVOPY(KONTA2)+RAYE(KONTA2)*DZE

```

```

RVOPZ(KONTA2)=RVOPZ(KONTA2)+RAZE(KONTA2)*DZE
IMVOPX(KONTA2)=IMVOPX(KONTA2)+IMAXE(KONTA2)*DZE
IMVOPY(KONTA2)=IMVOPY(KONTA2)+IMAYE(KONTA2)*DZE
IMWOPX(KONTA2)=IMWOPX(KONTA2)+IMAXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
IMWOPY(KONTA2)=IMWOPY(KONTA2)+IMAYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
IMWOPZ(KONTA2)=IMWOPZ(KONTA2)+IMAZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPX(KONTA2)=RWOPX(KONTA2)+RAXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPY(KONTA2)=RWOPY(KONTA2)+RAYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPZ(KONTA2)=RWOPZ(KONTA2)+RAZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
16 CONTINUE
ZEPE=ZEPE+DZE
11 CONTINUE
3001 FORMAT(//,1X,"FREQ",4X,"RVPXE",6X,"RVPYE",6X,"RVPZE",5X,
* "INVPE",5X,"INVPYE",5X,"INVPE",/)
3002 FORMAT(1X,1X,I2,1X,9(1X,E10.3))
3003 FORMAT(//,1X,"FREQ",5X,"CX",9X,"CY",8X,"RVOPX",6X,
* "RVOPY",6X,"RVOPZ",5X,"INVOPX",5X,"INVOPY",5X,"INVOPZ",/)
3004 FORMAT(1X,1X,I2,1X,9(1X,E10.3))
3005 FORMAT(//,1X,"FREQ",4X,"RWOPX",6X,"RWOPY",6X,"RWOPZ",5X,
* "IMWOPX",5X,"IMWOPY",5X,"IMWOPZ",6X,"RCVX",7X,"RCVY",7X,"RCVZ",/)
3006 FORMAT(1X,1X,I2,1X,9(1X,E10.3))
3007 FORMAT(//,1X,"FREQ",4X,"IMCVX",6X,"IMCVY",6X,"IMCVZ",6X,
* "RCVZX",6X,"RCVZY",6X,"RCVZZ",5X,"IMCVZX",5X,"IMCVZY",5X,
* "IMCVZZ",/)
3008 FORMAT(1X,1X,I2,1X,9(1X,E10.3))
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE ONDA(X,Y,Z)
DIMENSION VXI(20),VYI(20),VZI(20),AXI(20),AYI(20),AZI(20),
*FVXI(20),FVYI(20),FVZI(20),FAXI(20),FAYI(20),FAZI(20)
COMMON /FR/ AFREQ,FREQ(20)
COMMON /CONST/ PI,RO,G,FC
COMMON /OND/ HI,H13,T0,ABK(35),S(35)
COMMON /VEL/ RVXE(20),RVYE(20),RVZE(20),IMVXE(20),IMVYE(20),
*IMVZE(20)
COMMON /ACE/ RAXE(20),RAYE(20),RAZE(20),IMAXE(20),IMAYE(20),
*IMAZE(20)
COMMON /ELE/ ALFA(3,3),LE,AUXI(3,3),M1(3,3),M12(3,3),A(3,3),
*B(3,3),XOE,YOE,ZOE,ITIP0
REAL MI,IMCSI,M2,LE,M1,M12,M2CSI,LL,LI,LIZ,LCI,LCIZ,IMFE,
*IMME,ME,IMF,IMM,IMVPE,IMVYE,IMVZE,IMVXE,IMVYE,IMVZE,M,M2ONC,
*IMCVX,IMCVY,IMCVZ,IMCVZX,IMCVZY,IMCVZZ,IMVOPX,IMVOPY,IMVOPZ,
*IMWOPX,IMWOPY,IMWOPZ,IMAXE,IMAYE,IMAZE,IVX,IVY,IVZ,IAX,IAZ,IAZ
SH=SIN(MI)
CM=COS(MI)
DO 1 I=1,NFREQ
F=FREQ(I)
K=F*F/G
ANG=-PI*(Z*SH-X*CM)
E=EXP(K*Y)
VXI(I)=F*E*CM
FVXI(I)=ANG
VYI(I)=F*E
FVYI(I)=ANG-PI/2.

```

```

VZICI)=F*F*SM
FVZICI)=ANG*PI
AXICI)=F*VXI(I)
FAXICI)=ANG-PI/2.
AYICI)=F*F*E
FAYICI)=ANG*PI
AZICI)=F*VZI(I)
FAZICI)=ANG-1.5*PI
RVX=VXICI)*COS(FVXICI))
RVY=VYICI)*COS(FVYICI))
RVZ=VZICI)*COS(FVZICI))
IVX=VXICI)*SIN(FVXICI))
IVY=VYICI)*SIN(FVYICI))
IVZ=VZICI)*SIN(FVZICI))
IAX=AXICI)*SIN(FAXICI))
IAY=AYICI)*SIN(FAYICI))
IAZ=AZICI)*SIN(FAZICI))
RAX=AXICI)*COS(FAXICI))
RAY=AYICI)*COS(FAYICI))
RAZ=AZICI)*COS(FAZICI))
RVXE(I)=ALFAC(1,1)*RVX+ALFAC(1,2)*RVY+ALFAC(1,3)*RVZ
RVYE(I)=ALFAC(2,1)*RVX+ALFAC(2,2)*RVY+ALFAC(2,3)*RVZ
RVZE(I)=ALFAC(3,1)*RVX+ALFAC(3,2)*RVY+ALFAC(3,3)*RVZ
IMVXE(I)=ALFAC(1,1)*IVX+ALFAC(1,2)*IVY+ALFAC(1,3)*IVZ
IMVYE(I)=ALFAC(2,1)*IVX+ALFAC(2,2)*IVY+ALFAC(2,3)*IVZ
IMVZE(I)=ALFAC(3,1)*IVX+ALFAC(3,2)*IVY+ALFAC(3,3)*IVZ
IMAXE(I)=ALFAC(1,1)*IAX+ALFAC(1,2)*IAY+ALFAC(1,3)*IAZ
IMAYE(I)=ALFAC(2,1)*IAX+ALFAC(2,2)*IAY+ALFAC(2,3)*IAZ
IMAZE(I)=ALFAC(3,1)*IAX+ALFAC(3,2)*IAY+ALFAC(3,3)*IAZ
RAXE(I)=ALFAC(1,1)*RAX+ALFAC(1,2)*RAY+ALFAC(1,3)*RAZ
RAYE(I)=ALFAC(2,1)*RAX+ALFAC(2,2)*RAY+ALFAC(2,3)*RAZ
RAZE(I)=ALFAC(3,1)*RAX+ALFAC(3,2)*RAY+ALFAC(3,3)*RAZ
1 CONTINUE
RETURN
END

```

=====

SUBROUTINE LINALE

```

COMMON /FR/ AFREQ, FREQ(20)
COMMON /OND/ MI, H13, T0, ABW(35), S(35)
COMMON /PLAT/ NELEN, NELEF, CSI(6,20), FCSI(6,20), RCSI(6,20),
*IMCSI(6,20), AG(6,6,20), RG(6,6,20), P2CSI(6)
COMMON /LIN/ M2(3,3,11), CX(10,20), CY(10,20), CZ(10,20)
COMMON /ELE/ ALFAC(3,3), LE, AUXI(3,3), M1(3,3), M12(3,3), A(3,3),
*B(3,3), XOE, YOE, ZOE, ITIP0
COMMON /CONST/ PI, R0, G, FC
COMMON /VEL/ RVXE(20), RVYE(20), RVZE(20), IMVXE(20), IMVYE(20),
*IMVZE(20)
COMMON /ACE/ RAXE(20), RAYE(20), RAZE(20), IMAXE(20), IMAYE(20),
*IMAZE(20)
COMMON /ESFEX/ RCVX(20), IMCVX(20), RCVY(20), IMCVY(20), RCVZ(20),
*IMCVZ(20), RCVZX(20), IMCVZX(20), RCVZY(20), IMCVZY(20), RCVZZ(20),
*IMCVZZ(20), RVOPX(20), IMVOPX(20), RVOPY(20), IMVOPY(20), RVOPZ(20),
*IMVOPZ(20), RWOPX(20), IMWOPX(20), RWOPY(20), IMWOPY(20), RWOPZ(20),
*IMWOPZ(20)
DIMENSION RVPXE(20), RVPYE(20), RVPZE(20), IMVPXE(20), IMVPYE(20),
*IMVPZE(20)

```

```

REAL M1,IMCSI,M2,LE,M1,M12,M2CSI,LL,LI,LIZ,LCI,LCIZ,IMFE,
*IMME,ME,IMF,IMM,IMVPXE,IMVPE,IMVPZE,IMVXE,IMVYE,IMVZE,M,M2CNC,
*IMCVX,IMCVY,IMCVZ,IMCVZX,IMCVZY,IMCVZ7,IMVOPX,IMVOPY,IMVOPZ,
*IMWOPX,IMWOPY,IMWOPZ,IMAXE,IMAYE,IMAZE,IVX,IVY,IVZ,IAZ,IAZ
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
M1(I,J)=AUXI(I,1)*ALFA(J,1)+AUXI(I,2)*ALFA(J,2)+
*AUXI(I,3)*ALFA(J,3)
M1(I,J)=(M1(I,J))**2
10 CONTINUE
ZEPE=-LE*9./20.
IF (ITIPO.EQ.1) ZEPE=0.
DZE=LE/10.
IF (ITIPO.EQ.1) DZE=1.
IFIM=10
IF (ITIPO.EQ.1) IFIM=1
DO 2000 I=1,NFREG
RCVX(I)=0.
RCVY(I)=0.
RCVZ(I)=0.
IMCVY(I)=0.
IMCVZ(I)=0.
IMCVZX(I)=0.
IMCVZY(I)=0.
IMCVZ7(I)=0.
RCVZX(I)=0.
RCVZY(I)=0.
RCVZZ(I)=0.
RVOPX(I)=0.
RVOPY(I)=0.
RVOPZ(I)=0.
IMVOPX(I)=0.
IMVOPY(I)=0.
IMVOPZ(I)=0.
IMWOPX(I)=0.
IMWOPY(I)=0.
IMWOPZ(I)=0.
RWOPX(I)=0.
RWOPY(I)=0.
RWOPZ(I)=0.
2000 CONTINUE
DO 11 KC1=1,IFIM
DO 12 I=1,3
M2(I,1,KC1)=ALFA(2,I)*ZEPE
M2(I,2,KC1)=-ALFA(1,I)*ZEPE
M2(I,3,KC1)=0.
12 CONTINUE
DO 5000 I=1,3
DO 5000 J=1,3
M2(I,J,KC1)=M2(I,J,KC1)
5000 CONTINUE
XPE=XCE+ZEPE*ALFA(3,1)
YPE=YCE+ZEPE*ALFA(3,2)
ZPE=ZCE+ZEPE*ALFA(3,3)
CALL MREAL(YPE,EVXE,EVYE,EVZE)
EVPXE=M2CSI(1)+M2CSI(4)*(M1(1,1)+M2(1,1,KC1))+M2CSI(5)*
*(M1(2,1)+M2(2,1,KC1))+M2CSI(6)*(M1(3,1)+M2(3,1,KC1))
EVPYE=M2CSI(2)+M2CSI(4)*(M1(1,2)+M2(1,2,KC1))+M2CSI(5)*
*(M1(2,2)+M2(2,2,KC1))+M2CSI(6)*(M1(3,2)+M2(3,2,KC1))
EVPZE=M2CSI(3)+M2CSI(4)*(M1(1,3)+M2(1,3,KC1))+M2CSI(5)*

```

```

*(M1(2,3)+M2(2,3)*KC1))+M2COS(6))*(M1(3,3)+M2(3,3)*KC1))
CX(KC1,1)=SQRT(B./PI*(EVPXE+EVXE))
CY(KC1,1)=SQRT(B./PI*(EVPYE+EVYE))
CZ(KC1,1)=SQRT(B./PI*(EVPZE+EVZE))
CALL CND4(XPE,YPE,ZPE)
DO 16 KONTA2=1,NFREQ
CX(KC1,KONTA2)=CX(KC1,1)
CY(KC1,KONTA2)=CY(KC1,1)
CZ(KC1,KONTA2)=CZ(KC1,1)
RCVX(KONTA2)=RCVX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*RVXE(KONTA2)*DZE
RCVY(KONTA2)=RCVY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*RVYE(KONTA2)*DZE
RCVZ(KONTA2)=RCVZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*RVZE(KONTA2)*DZE
IMCVX(KONTA2)=IMCVX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*IMVXE(KONTA2)*DZE
IMCVY(KONTA2)=IMCVY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*IMVYE(KONTA2)*DZE
IMCVZ(KONTA2)=IMCVZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*IMVZE(KONTA2)*DZE
IMCVZX(KONTA2)=IMCVZX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*IMVXE(KONTA2)*DZE*
ZEPE
IMCVZY(KONTA2)=IMCVZY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*IMVYE(KONTA2)*DZE*
ZEPE
IMCVZZ(KONTA2)=IMCVZZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*IMVZE(KONTA2)*DZE*
ZEPE
RCVZX(KONTA2)=RCVZX(KONTA2)+CX(KC1,KONTA2)*RVXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RCVZY(KONTA2)=RCVZY(KONTA2)+CY(KC1,KONTA2)*RVYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RCVZZ(KONTA2)=RCVZZ(KONTA2)+CZ(KC1,KONTA2)*RVZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RVOPX(KONTA2)=RVOPX(KONTA2)+RAXE(KONTA2)*DZE
RVOPY(KONTA2)=RVOPY(KONTA2)+RAYE(KONTA2)*DZE
RVOPZ(KONTA2)=RVOPZ(KONTA2)+RAZE(KONTA2)*DZE
IMVOPX(KONTA2)=IMVOPX(KONTA2)+IMAXE(KONTA2)*DZE
IMVOPY(KONTA2)=IMVOPY(KONTA2)+IMAYE(KONTA2)*DZE
IMVOPZ(KONTA2)=IMVOPZ(KONTA2)+IMAZE(KONTA2)*DZE
IMWOPX(KONTA2)=IMWOPX(KONTA2)+IMAXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
IMWOPY(KONTA2)=IMWOPY(KONTA2)+IMAYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
IMWOPZ(KONTA2)=IMWOPZ(KONTA2)+IMAZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPX(KONTA2)=RWOPX(KONTA2)+RAXE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPY(KONTA2)=RWOPY(KONTA2)+RAYE(KONTA2)*DZE*ZEPE
RWOPZ(KONTA2)=RWOPZ(KONTA2)+RAZE(KONTA2)*DZE*ZEPE
16 CONTINUE
ZEPE=ZEPE+DZE
11 CONTINUE
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE MREAL(YPE,EVXE,EVYE,EVZE)
COMMON /OND/ MI,H13,T0,ABH(35),S(35)
COMMON /CONST/ PI,RO,G,FC
REAL MI
ABH(1)=0.
WO=2.*PI/T0
OW=WO/10.
EVXE=0.
EVYE=0.
EVZE=0.
A=487.*H13**2/T0**4
B=1948./T0**4
CM=COS(MI)
SM=SIN(MI)

```

```
DO 1 I=1,35  
A9W(I)=ABW(I)+D W  
W=ABW(I)  
W2=W*W  
W4=W2*W2  
W5=W*W4  
VAU=(EXP(W2*YPE/G))**2  
S(I)=A*EXP(-B/W4)/W5  
EVXE=EVXE+S(I)*W2*VAU*CM**2  
EVZE=EVZE+S(I)*W2*VAU*SM**2  
EVYE=EVYE+S(I)*W2*VAU  
CONTINUE  
RETURN  
END
```

FORMAT SEGMENT IS 005F LONG
START OF SEGMENT 013
SEGMENT 013 IS 009D LONG

NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF CARDS = 877.
COMPILATION TIME = 53 SECONDS ELAPSED. 9.08 SECONDS PROCESSING(5800 CPM).
D2 STACK SIZE = 83 WORDS. FILESIZE = 218 WORDS. ESTIMATED CORE STORAGE REQUIREMENT = 7605 WORDS.
TOTAL PROGRAM CODE = 3628 WORDS. ARRAY STORAGE = 3631 WORDS.
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 22. NUMBER OF DISK SEGMENTS = 189.
PROGRAM CODE FILE = (EDK000)SEMIS/08J ON CCE005.

E C M U V D C A D I S K
= = = = =

FILE 6=FILES
SSET AUTOBIND
SBINC=FROM BIB/IPSL/1,EIB/IPSL/2,LIB/IPSL/3,EIR/INSL/4

DIMENSION FREQ(20),X(6,20),ITITLE(7),IXLALL(36),IYLASL(36),
*RANCE(4),ICHAR(2),YX(6,20),YUC(20,2),KKAFFA(54),YAS(6,6)
DIMENSION ACC(6,6,20),SC(6,6,20),CC(6,6),PL(6,20),IME(6,20),
*KX(6,20),IM(6,20),ALFA(3,3),DLTAC(3,3),K1(3,3),K2(6),E(6,20),
*FE(6,20),AUX1(6),AUX2(3,3),AINV(3,3),SINV(3,3),KIINV(3,3),NKI(3)
REAL IME,IMX,K1,K2,KIINV,NAS
DATA RANCE/4*0.,ICHAR/'T','E'/
PI=4.*ATAN(1.)
FC=PI/120.
READ (5,1110) N REC

READ (5,1111) (FREQ(I),I=1,NFREQ)
1110 FORMAT(I2)
1111 FORMAT(EP10.0)
READ (4) ((ACC(I,J,L),I=1,6),J=1,6),L=1,NFREQ)

002:0030:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00001050
READ (4) ((CG(I,J,L),I=1,6),J=1,6),L=1,NFREQ 00001100 C 002:0030:2
002:0049:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00001100
READ (5,1)((NAS(I,J),I=1,6),J=1,6)
READ (5,1)((CC(I,J),I=1,6),J=1,6)

1 FORMAT(EP10.0)
READ(4) ((RE(I,L),I=1,6),L=1,NFREQ)
002:0051:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00001400
READ(4) ((PE(I,L),I=1,6),L=1,NFREQ) 00001500 C 002:0051:2
002:0075:1 IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 00001500

DO 93 L=1,NFREQ
DO 94 I=1,6
E(I,L)=SQRT(RE(I,L)**2+IME(I,L)**2)

94 CONTINUE
93 CCONTINUE
DO 95 L=1,NFREQ
DO 96 I=1,6
IF (ABS(PL(I,L)).GT.1.E-3)
*FE(I,L)=ATAN(IME(I,L)/RE(I,L))/IC

96 CONTINUE
95 CONTINUE
DO 10 L=1,NFREQ
W=FREQ(L)
WZ=W*6
DO 11 NUMER=1,2
NKI(1)=1
NKI(2)=2
NKI(3)=6
IF (NUMER.EQ.1) GO TO 52
NKI(1)=3
NKI(2)=4
NKI(3)=5
52 CONTINUE

```

DO 999 I=1,3
DO 999 J=1,3
ALFA(I,J)=-K2*(CAC(NK1(I),NK1(J),L)+MAC(NK1(I),NK1(J)))+
*(C(NK1(I),NK1(J))
BETA(I,J)=-K3*(C(NK1(I),NK1(J),L)
999 CONTINUE
IDGT=3
CALL LINVZF (ALFA,3,3,AINV,TDGI,WRKAREA,IER)
IDGT=3
CALL LINVZF (BETA,3,3,BINV,TDGT,WRKAREA,IER)
DO 12 I=1,3
DO 13 J=1,3
K1(I,J)=0.
AUX2(I,J)=0.
DO 14 K=1,3
AUX2(I,J)=AUX2(I,J)+BINV(I,K)*ALFA(K,J)
K1(I,J)=K1(I,J)+AINV(I,K)*BETA(K,J)
14 CONTINUE
K1(I,J)=K1(I,J)+AUX2(I,J)
13 CONTINUE
AUX1(I)=0.
K2(I)=0.
DO 15 K=1,3
AUX1(I)=AUX1(I)+BINV(I,K)*IMEC(NK1(K),L)
K2(I)=K2(I)+AINV(I,K)*MEC(NK1(K),L)
15 CONTINUE
K2(I)=AUX1(I)+K2(I)
12 CONTINUE
IDGT=3
CALL LINVZF (K1,3,3,K1INV,ICGT,WRKAREA,IER)
DO 16 I=1,5
IMX(NK1(I),L)=0.
DO 17 K=1,5
IMX(NK1(I),L)=IMX(NK1(I),L)+K1INV(I,K)*K2(K)
17 CONTINUE
16 CONTINUE
DO 18 I=1,5
RX(NK1(I),L)=0.
DO 18 K=1,3
RX(NK1(I),L)=RX(NK1(I),L)+ALX2(I,K)*IMX(NK1(K),L)
18 CONTINUE
RX(NK1(I),L)=AUX1(I)+RX(NK1(I),L)
IF (ABS(RX(NK1(I),L)).GT.1.E-5)
*(FX(NK1(I),L)=ATAN(IMX(NK1(I),L)/RX(NK1(I),L))/PI
X(NK1(I),L)=SIGN(FX(NK1(I),L)**2+IMX(NK1(I),L)**2)
IF (NK1(I).GE.4) X(NK1(I),L)=X(NK1(I),L)/PI
19 CONTINUE
11 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 79 I=1,6
WRITE (6,1000) I,I
DO 80 L=1,NFREQ
WRITE(6,1001) FREQ(L),X(I,L),FX(I,L)
XU(L,I)=X(I,L)
80 CONTINUE
IF (I.EQ.1)
*CALL USFLC (FREQ,XU,2,10,2,1,32)FREQ(C) DE TRANSFERENCIA - AVANCO,
*32,20)FREQ(C) (RAD/SEG),20,1)FREQ(C) (M),10,ANCE,ICFAR,1,IER)
IF (I.EQ.2)
*CALL USFLC (FREQ,XU,2,10,2,1,33)FREQ(C) DE TRANSFERENCIA - ARFAGEM,

```


BURROUGHS LARGE SYSTEMS PROGRAM BINDER - VERSION 33.260.034, WEDNESDAY, 12/14/83, 14:54.

E C M D V D C N D I S K
= = = = =

```

BIND=FROM BIB/IMSL/1,EIB/IMSL/2,BIB/IMSL/3,BIE/IMSL/4
BEGIN BINDING LINVZF OF .OUT FROM BIB/IMSL/2
  LINVZF      (02,0002) CHANGED TO (02,0015)
  201C      (01,0004) CHANGED TO (01,000A)
  UERTST     (02,0006) CHANGED TO (02,0026)
  LEGT2F     (02,0005) CHANGED TO (02,0027)
  ONE       (02,0003) CHANGED TO (02,0028)
  ZERO      (02,0004) CHANGED TO (02,0029)
  <SEG DICT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,000E) = 03 000002900013
  <SEG DICT ITEM> (01,0003) CHANGED TO (01,0011) = 05 000001400015

```

```

END OF BINDING LINVZF
BEGIN BINDING USPL3 OF .OUT FROM BIB/IMSL/4
  USPL3      (02,0002) CHANGED TO (02,0023)
  201C      (01,0008) CHANGED TO (01,000A)
  UERTST     (02,0012) CHANGED TO (02,0026)
  095       (01,0004) CHANGED TO (01,0008)
  USPKD     (02,0007) CHANGED TO (02,002A)
  UGETIO    (02,0008) CHANGED TO (02,0028)
  MP2       (02,0004) CHANGED TO (02,002D)
  IYS       (02,0005) CHANGED TO (02,002E)
  IXS       (02,0006) CHANGED TO (02,002F)
  STAR      (02,0007) CHANGED TO (02,0030)
  PLUS      (02,0008) CHANGED TO (02,0031)
  BLANK4    (02,0009) CHANGED TO (02,0032)
  HTRY      (02,000A) CHANGED TO (02,0033)
  JTITLE    (02,000C) CHANGED TO (02,0034)
  SYM4     (02,000E) CHANGED TO (02,0035)
  IWORK     (02,0010) CHANGED TO (02,0036)
  XNCT      (02,0011) CHANGED TO (02,0037)
  <SEG DICT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,000F) = 03 000023700027
  <SEG DICT ITEM> (01,0003) CHANGED TO (01,0016) = 05 070000000004
  <SEG DICT ITEM> (01,0005) CHANGED TO (01,0015) = 05 0700000000016
  <SEG DICT ITEM> (01,0006) CHANGED TO (01,0014) = 05 0700000000011
  <SEG DICT ITEM> (01,0007) CHANGED TO (01,0012) = 05 080000140034
  <SEG DICT ITEM> (01,000A) CHANGED TO (01,0017) = 05 08000384003C

```

```

END OF BINDING USPL3
BEGIN BINDING UERTST OF .OUT FROM BIB/IMSL/4
  UERTST     (02,0002) CHANGED TO (02,0026)
  2010      (01,0006) CHANGED TO (01,000A)
  095       (01,0004) CHANGED TO (01,0008)
  004       (01,0003) CHANGED TO (01,0016)
  UGETIO    (02,0008) CHANGED TO (02,0028)
  USPKD     (02,0009) CHANGED TO (02,002A)
  NAMSET    (02,0004) CHANGED TO (02,0038)
  NAMEG     (02,0005) CHANGED TO (02,0039)
  LEVEL     (02,0006) CHANGED TO (02,003A)
  ILQDR     (02,0007) CHANGED TO (02,003B)
  IEG       (02,0008) CHANGED TO (02,003C)
  NAPUPK    (02,000A) CHANGED TO (02,003D)
  <SEG DICT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0018) = 03 000000A0004F
  <SEG DICT ITEM> (01,0007) CHANGED TO (01,001A) = 05 080005040059

```

```

END OF BINDING UERTST
BEGIN BINDING LEGT2F OF .OUT FROM BIB/IMSL/2

```

```

LEGT2F          (02,CC02) CHANGED TO (02,0027)
?010           (01,0104) CHANGED TO (01,000A)
UERTST         (02,CC06) CHANGED TO (02,CC26)
LUREFN        (02,CC05) CHANGED TO (02,CC3E)
LULEMN         (02,CC04) CHANGED TO (02,003F)
LUDATA         (02,CC03) CHANGED TO (02,0040)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,0018) = 03 000006000064
<SEG DICT ITEM> (01,CC03) CHANGED TO (01,001C) = 05 00000140068
END OF BINDING LEGT2F
BEGIN BINDING USPKD OF .OUT FROM B1B/IMS1/4
USPKD          (02,CC02) CHANGED TO (02,002A)
?010           (01,CC05) CHANGED TO (01,000A)
142            (01,CC03) CHANGED TO (01,0004)
IBLANK         (02,CC04) CHANGED TO (02,0041)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,001D) = 03 00000290006E
<SEG DICT ITEM> (01,CC06) CHANGED TO (01,001F) = 05 00000340070
END OF BINDING USPKD
BEGIN BINDING UGETIC OF .OUT FROM B1B/IMS1/4
UGETIC         (02,CC02) CHANGED TO (02,002B)
?010           (01,CC04) CHANGED TO (01,000A)
NIND           (02,CC03) CHANGED TO (02,0042)
NDUTD         (02,CC04) CHANGED TO (02,0043)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,0020) = 03 000001100074
END OF BINDING UGETIC
BEGIN BINDING LUREFN OF .OUT FROM B1B/IMS1/2
LUREFN        (02,CC02) CHANGED TO (02,003E)
?010           (01,CC05) CHANGED TO (01,000A)
UERTST         (02,CC06) CHANGED TO (02,0026)
022            (01,CC03) CHANGED TO (01,0015)
LULEMN         (02,CC05) CHANGED TO (02,003F)
ITMAX         (02,CC03) CHANGED TO (02,0044)
ZERO           (02,CC04) CHANGED TO (02,0045)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,0021) = 03 000005500078
<SEG DICT ITEM> (01,CC04) CHANGED TO (01,0022) = 05 00000014007E
END OF BINDING LUREFN
BEGIN BINDING LULEMN OF .OUT FROM B1B/IMS1/2
LULEMN         (02,CC02) CHANGED TO (02,003F)
?010           (01,CC04) CHANGED TO (01,000A)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,0023) = 03 000004400085
END OF BINDING LULEMN
BEGIN BINDING LUDATA OF .OUT FROM B1B/IMS1/2
LUDATA         (02,CC02) CHANGED TO (02,0040)
?010           (01,CC05) CHANGED TO (01,000A)
UERTST         (02,CC06) CHANGED TO (02,0026)
017            (01,CC03) CHANGED TO (01,0014)
ZERO           (02,CC03) CHANGED TO (02,0046)
ONE            (02,CC04) CHANGED TO (02,0047)
FOUR           (02,CC05) CHANGED TO (02,0048)
SIXTH         (02,CC06) CHANGED TO (02,0049)
SIXTH         (02,CC07) CHANGED TO (02,004A)
<SEG DICT ITEM> (01,CC02) CHANGED TO (01,0024) = 03 00000E800092
<SEG DICT ITEM> (01,CC04) CHANGED TO (01,0025) = 05 00000C14009A
END OF BINDING LUDATA

```

```

=====
NUMBER OF ERRORS DETECTED = 0.
HOST FILE = *B1B/IMS1/1 ON PACK.
SEGMENT DICTIONARY LENGTH = 3E. GLOBAL STACK SIZE = 75. STACK ESTIMATE = 512.
CORE ESTIMATE = 3653 WORDS. CODE FILE LENGTH = 224 DISK SEGMENTS.

```

BINDING TIME = 441 SECONDS ELAPSED, 7.02 SECONDS PROCESSOR, 81.05 SECONDS I/O.

```

I=INTENT(1), F1=CC(1), X0(1), Y0(1), Z0(1), F1H(1), F1T(1), F1X(1), F1Y(1), F1Z(1),
*F1H(1), F1T(1), F1X(1), F1Y(1), F1Z(1), F1H(1), F1T(1), F1X(1), F1Y(1), F1Z(1),
*SPST(1), STT(1), XPC(1), YPC(1), ZPC(1), F1H(1), F1T(1), F1X(1), F1Y(1), F1Z(1),
*CFY0(1), SFY0(1), CFZ0(1), SFZ0(1), XPC(1), YPC(1), ZPC(1), F1H(1), F1T(1), F1X(1), F1Y(1), F1Z(1),
*FRYP(1), RYF(1), FRYP(1), CF1H(1), CPST(1), C1T(1)

```

```

IC=ATAN(1.)/45.
READ(5,1) NIFEL, NIFEL
1 FORMAT(2I2)
READ(5,2) (CF1H(I), I=1, NIFEL)
2 FORMAT(3F10.0)
READ(5,2) (X0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (Y0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (Z0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (F1H(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (F1T(I), I=1, NIFEL)
DO 100 I=1, NIFEL
READ(5,2) XPC(I), YPC(I), ZPC(I)

```

```

100 CONTINUE
READ(5,2) (FX0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (FY0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (FZ0(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (FF1H(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (FFST(I), I=1, NIFEL)
READ(5,2) (FT1T(I), I=1, NIFEL)

```

```

DO 101 I=1, NIFEL
F1H(I)=F1H(I)*FC
F1T(I)=F1T(I)*FC
F1X(I)=FX0(I)*FC
F1Y(I)=FY0(I)*FC
F1Z(I)=FZ0(I)*FC
FF1H(I)=FF1H(I)*IC
FFST(I)=FFST(I)*IC
FT1T(I)=FT1T(I)*IC
SF1H(I)=SIN(FF1H(I))
CF1H(I)=COS(FF1H(I))
CPST(I)=SIN(FFST(I))
CPSI(I)=COS(FFST(I))
ST1T(I)=SIN(FT1T(I))
CT1T(I)=COS(FT1T(I))
CFX0(I)=COS(FX0(I))
SFX0(I)=SIN(FX0(I))
CFY0(I)=COS(FY0(I))
SFY0(I)=SIN(FY0(I))
CFZ0(I)=COS(FZ0(I))
SFZ0(I)=SIN(FZ0(I))

```

```

101 CONTINUE
WRITE(6,11)
WRITE(6,12)
WRITE(6,14)
WRITE(6,15)
DO 104 I=1, NIFEL
WRITE(6,32) F1H(I), X0(I), Y0(I), Z0(I), F1H(I), F1T(I), F1X(I), F1Y(I), F1Z(I)
104 CONTINUE
WRITE(6,13)

```

```

WRITE(6,14)
WRITE(6,16)
DO 105 I=1,NFLEG
WRITE(6,36) F FEG(I),FX(I),FY(I),FZ(I),FTH(I),FPH(I),FTH(I)
105 CONTINUE
WRITE(6,17)
WRITE(6,18)
DO 107 I=1,NPCNT
WRITE(6,33) I,XP(I),YP(I),ZP(I)
107 CONTINUE
DO 102 J=1,NPGAT
WRITE(6,31) J
ICHAVE=0
DO 103 I=1,NFLEG
AUX1=XO(I)*CXO(I)-TET(I)*CTET(I)*YP(J)+SI(I)*CPSI(I)*Z(J)
AUX2=XO(I)*SFYO(I)-TET(I)*STET(I)*YP(J)+PSI(I)*SPSI(I)*Z(J)
AUX3=YO(I)*CFYO(I)+TET(I)*CTET(I)*XF(J)-FTH(I)*CFTH(I)*Z(J)
AUX4=YO(I)*SFYO(I)+TET(I)*STET(I)*XF(J)-FTH(I)*SFTH(I)*Z(J)
AUX5=ZO(I)*CFZO(I)+FTH(I)*CFTH(I)*YP(J)-PSI(I)*CPSI(I)*X(J)
AUX6=ZO(I)*SFZO(I)+FTH(I)*SFTH(I)*YP(J)-PSI(I)*SPSI(I)*X(J)
C
RXPC(I)=SQRT(AUX1**2.+AUX2**2.)
FRXP(I)=ATAN(ALX2/AUX1)
RYP(I)=SQRT(AUX3**2.+AUX4**2.)
FRYP(I)=ATAN(AUX4/AUX3)
RZP(I)=SQRT(AUX5**2.+AUX6**2.)
FRZP(I)=ATAN(ALX6/AUX5)
C
103 CONTINUE
C
WRITE(6,19)
WRITE(6,20)
WRITE(6,22)
WRITE(6,23)
DO 108 I=1,NFLEG
WRITE(6,34) F FEG(I),RXPC(I),RYP(I),RZP(I)
108 CONTINUE
WRITE(6,13)
WRITE(6,22)
WRITE(6,26)
DO 109 I=1,NFLEG
FRXP(I)=FRXP(I)/FC
FRYP(I)=FRYP(I)/FC
FRZP(I)=FRZP(I)/FC
WRITE(6,35) F FEG(I),FRXP(I),FRYP(I),FRZP(I)
109 CONTINUE
WRITE(6,20)
WRITE(6,12)
WRITE(6,22)
WRITE(6,24)
201 DO 110 I=1,NFLEG
FXP(I)=F FEG(I)*FXP(I)
FYP(I)=F FEG(I)*FYP(I)
FZP(I)=F FEG(I)*FZP(I)
WRITE(6,34) F FEG(I),FXP(I),FYP(I),FZP(I)
110 CONTINUE
IF(ICHAVE.EG.1) GO TO 200
WRITE(6,21)
WRITE(6,12)
WRITE(6,22)

```

```

WRITE(6,15)
ICHAVE=1
CONTINUE
100 CONTINUE
102 CONTINUE

11 FORMAT(1H1,1X,"BASES DE PARTIDAS")
12 FORMAT(//,1X,35X,"AMPLITUDES")
13 FORMAT(//,1X,35X,"FASES")
14 FORMAT(//,1X,3X,"FRECUENCIA",5X,"AVANCE",4X,"AMPLITUD",3X,
* "OLRIVA",4X,"CALANCOS",4X,"GUIADA",4X,"DIRECCION")
15 FORMAT(//,1X,4X,"(RAD/SEG)",4X,"(M)",5X,"(M)",//)
16 FORMAT(//,1X,4X,"(RAD/SEG)",2X,"(SI ABS)",14X,"(C. ABS)",//)
17 FORMAT(//,1X,29X,"COORDENADAS DEL FONTO")
18 FORMAT(//,1X,21X,"PUNTO",5X,"X (M)",4X,"Y (M)",4X,"X (M)",//)
19 FORMAT(//,1X,34X,"DESLOCACIONES")
20 FORMAT(//,1X,35X,"VELOCIDADES")
21 FORMAT(1H1,35X,"ACELERACIONES")
22 FORMAT(//,1X,17X,"FRECUENCIA",4X,"DIRECCION",5X,"DIRECCION",
* "DIRECCION",1X,25X,"LONGITUDINAL",3X,"RELATIVO",
* "TRANSVERSAL")
23 FORMAT(//,1X,18X,"(RAD/SEG)",6X,"(M)",10X,"(M)")
24 FORMAT(//,1X,18X,"(RAD/SEG)",4X,"(M/SEG)",10X,"(M/SEG)")
25 FORMAT(//,1X,18X,"(RAD/SEG)",1X,5(1X,"(1850**")
26 FORMAT(//,1X,18X,"(RAD/SEG)",3(5X,"(C. ABS)")
31 FORMAT(1H1,27X,"RESULTADOS PARA UTILIDAD")
32 FORMAT(1X,7(3X,F0.4))
33 FORMAT(1X,22X,12,3X,5(3X,F0.5))
34 FORMAT(1X,17X,10,4,1X,5(4X,F0.5))
35 FORMAT(1X,17X,10,4,5(5X,F0.1))
36 FORMAT(1X,5X,18,4,7(4X,F0.2))
STOP
END

```

```

DIMENSION FREQ(50),F(50),S(50),SF(50)
REAL M0SF,M2SF
PI=ATAN(1.)*4.
READ(5,2)H13,TC
2 FORMAT (3F10.0)
READ(5,3)NCASCS,NFREQ
3 FORMAT (2I2)
A=487.*H13**2/TC**4
B=1948./TC**4
W0=2.*PI/TC
READ(5,2)(FREQ(I),I=1,NFREQ)
DO 1 K=1,NCASCS
M0SF=0.
M2SF=0.
READ(5,2)(F(I),I=1,NFREQ)
DW=FREQ(I)
DO 10 I=1,NFREQ
W=FREQ(I)
W2=W**2
W4=W2**2
W0=W4**W
S(I)=A*EXP(-B/W4)/W0
SF(I)=F(I)*S(I)
M0SF=M0SF+SF(I)*DW
M2SF=M2SF+SF(I)*DW**2
10 CONTINUE
WRITE(6,20)F
WRITE(6,21)
WRITE(6,22)(FREQ(I),F(I),S(I),SF(I),I=1,NFREQ)
WRITE(6,23)M0SF,M2SF
1 CONTINUE
20 FORMAT (1H1,37X,"CASO",I2)
21 FORMAT (/ /,1X,6X,"FREQ (I)",T29,"F(I)",T49,"S(I)",T59,"SF(I)",//)
22 FORMAT (1X,7X,F7.3,T25,E12.4,2(8X,E12.4))
23 FORMAT (/ /,1X,T28,"M0SF=",E12.4,""; M2SF=","E12.4)
STOP
END

```

BIBLIOGRAFIA

- 1 ABKOWITZ, M.A.. The interim standard sea spectral formula-
tion of the 11th ITTC - A review and evaluation of its
use. In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session, apêndice
V: 712-715, setembro 1969.
- 2 ——— On the axis systems in seakeeping and manoeuvring.
In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session, apêndice IX: 734
737, setembro 1969.
- 3 ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, L.A.. Handbook of mathematical
functions. New York, Dover, 1972.
- 4 A.B.S. Rules for building and classing mobile offshore
drilling units. New York, American Bureau Shipping, 1980.
- 5 ALBRECHT, H.G. et alii. Non-linear dynamic analysis of
tension-leg platforms for medium and greater depths. In :
Offshore Technology Conference, Houston, Texas, Artigo
3044, maio 1978.
- 6 BIEWER, F.N.. Aspects of ocean engineering relevant to the
ITTC. In: 15th ITTC, The Hague.(1): 405-408, setembro 1978.
- 7 BISHOP, R.E.D. & PRICE, W.G.. On the truncation of spectra.
International Shipbuilding Progress. 25(281): 3-6, ja-
neiro 1978.
- 8 BORODAI, J.K. & NETSVETAYEV, Y.A.. Ship motions in ocean
waves. Sudostorenje, Leningrado. 1969.
- 9 BREBBIA, C.A. & WALKER, S.. Dynamic analysis of offshore
structures. Londres, Newnes - Butlerworths, 1979.
- 10 BURKE, B.G.. The analysis of motions of semisubmersible
drilling vessels in waves. Offshore Technology Conference,
Dallas. Artigo 1024, maio 1969.
- 11 B.V.. Rules and regulations for the construction and classi-
fication of offshore platforms. Paris, Bureau Veritas, 1975.

- 12 CARTWRIGHT, D.E. & LONGUET-HIGGINS, M.S.. The statistical distribution of maxima of a random function. In: Proceedings of the Royal Society of London, London. 237 : 212-232, 1956.
- 13 CHUNG, J.Š.. A note on the two force equations for a floating platform. Journal of hydronautics. 9(4): 170-171, outubro 1975.
- 14 ——— Motion of a floating structure in water of uniform depth. Journal of Hydronautics. 10(3):65-72, julho 1976.
- 15 de CONTI, M.B. & VEIGA, J.P.C.. Testes do programa Frank. São Paulo. Escritório Técnico de Construção Naval. Estudo técnico nº 222, 1980.
- 16 ——— Verificação da estrutura do programa Frank e de sua compatibilização com o Método de W.Frank. São Paulo. Escritório Técnico de Construção Naval. Estudo Técnico nº 261, 1981.
- 17 DALZELL, J.F.. A note on the application of multiple input spectrum theory to combined wave induced stresses. International Shipbuilding Progress. 21(236): 100-108, abril 1974.
- 18 DEAN, R.G.. Relative validities of water wave theories. Journal of the Waterways and Harbors Division. 105-119, fevereiro 1970.
- 19 DEMOULINS, J.F. & HENRY, J.. La prévision des états de mer extrêmes. Quelle confiance lui accorder? Bulletin Technique du Bureau Veritas, Paris. 59 (2):36-41, fevereiro 1977.
- 20 D.N.V. Rules for the construction and classification of Mobile Offshore Units. Oslo, Det Norske Veritas, 1975.
- 21 EATOCK TAYLOR, R. & ZIETSMAN, J.. Hydrodynamic Loading on Multi-Component Loads. In: Proceedings of the Third International Conference on Behaviour of Off-Shore Structures, Cambridge (USA). 1: 424-443, agosto 1982.

- 22 EWING, J.A.. Some results from the joint north sea wave project of interest to engineers. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 5: 41-46, abril 1974.
- 23 FALTINSEN, O. et alii. Theoretical and experimental investigations of tension leg platform behaviour. In: Proceedings of the Third International Conference on Behaviour of Off-Shore Structures, Cambridge (USA). 1: 411-423, agosto 1982.
- 24 FERDINANDE, V. On the representation of normalized wave spectra. International Shipbuilding Progress. 24(269): 306-318, janeiro 1977.
- 25 FRANCO, A.S.. Análise de ondas. São Paulo. Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, 1983, [a publicar].
- 26 FRANK, W.. Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Washington D.C.. Naval Ship Research and Development Center. Publicação R2375, outubro 1967.
- 27 ——— The heave damping coefficients of bulbous cylinders, partially immersed in deep water. Journal of Ship Research, SNAME, New York, setembro 1967.
- 28 FUZHONG, S.. Analysis of motions of semi-submersible in sea waves. In: Offshore Technology Conference. Houston, Texas. Artigo 3899, maio 1980.
- 29 GRIM, O.. Berechnung der durch Schwingungen eines Schiffeskörpers Erzeugten Hydrodynamische Kräfte. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. 47:277-299, 1953.
- 30 GRIM, O. & SCHENZLE, P.. Berechnung der Torsionsbelastung eines Schiffes in seegang. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg. 236 (237), 1969.
- 31 HOFFMAN, D.. Analysis of measured and calculated spectra. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 2: 8-18, abril 1974.

- 32 HOGBEN,N.. Comments on wave spectra. In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session: 781-782, setembro 1969.
- 33 ——— Comments on "A proposal on the use of multi-parameter standard wave spectra" by W.E. Cummins. In : 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session: 782-783, setembro 1969.
- 34 HOGBEN,N. et alii. Estimation of fluid loading on off-shore structures. National Maritime Institute, Middlesex. Publicação R11, abril 1977.
- 35 HOOFT,J.P.. A mathematical method of determining hydrodynamically induced forces on a semisubmersible. In: Transactions of the SNAME. New York, 79: 28-70,1971.
- 36 ——— Advanced dynamics of marine structures. New York, John Wiley & Sons, 1982.
- 37 ——— Distribution of wave forces on structural parts of ocean structures. In: Symposium on "Offshore Hydrodynamics", Wageningen. Agosto 1971.
- 38 ——— Designing platforms for minimum motion. Ocean Industry, Houston 5(12): 27-30, dezembro 1970.
- 39 ——— Motions of stationary structures. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 9: 68-79, abril 1974.
- 40 ITTC. Proceedings of the International Towing Tank Conference. 1969(12^a),1972(13^a),1975(14^a),1978(15^a),1981(16^a).
- 41 JACOBS,W.R.. The analytical calculation of ship bending moments in regular waves. Journal of Ship Research, New York. 2(1): 20-29, 1958.
- 42 JOHN,F.. On the motion of floating bodies: II-Simple Harmonic Motions. Communications on Pure and Applied Mathematics, New York. 3: 45-101, 1950.
- 43 KAPLAN,P. et alii. Force coefficient evaluation for off-shore structure inclined members. In: Proceedings of

- the Third International Conference on Behaviour of Off-Shore Structures, Cambridge (USA). 1: 373-386, agosto 1982.
- 44 KAPLAN, P. & SARGENT, T.. The application and extension of ship motion theory to prediction of motions and loads of various types of offshore platforms . In: Offshore Technology Conference, Dallas, Texas. Artigo 2284, maio 1975.
- 45 KARPPINEN, T.. Wave induced motions of semisubmersible drilling rigs. Helsinki University of Technology, 1975.
- 46 KAY, S.M.. Spectrum analysis: a modern perspective. In: Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers. 69(11): 1380-1419, novembro 1981.
- 47 KIM, C.H. & CHOU, F.. Motions of a semi-submersible drilling platform in head seas. Marine Technology, New York. 10(2): 112-123, abril 1973.
- 48 KITAIGORODSKII, S.A.. Application of the theory of similarity... Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz., Moscou. 1:105-117, 1961 | English Translation. 1: 73-80, 1961 |.
- 49 KORVIN-KROUKOVSKY, B.V. & JACOBS, W.R.. Pitching and heaving motions of a ship in regular waves. In: Transactions of the SNAME, New York. 65: 590-632, 1957.
- 50 LAMB, H.. Hydrodynamics. New York, Dover, 1945.
- 51 LOUKAKIS, A.. On the proper application of random processes techniques for seakeeping tests. In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session: 751-755, setembro 1969.
- 52 MAEDA, H.. Hydrodynamical forces on a cross-section of a stationary structure. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 10: 80-90, abril 1974.
- 53 MAGNUS, W.. Über Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe von $\Delta u + k^2 u = 0$. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. 52: 177-188, 1942.

- 54 MARQUES NETO, J. & COSTA, N.R. Scope of the Brazilian effort in the exploration and production of hydrocarbons. In: Proceedings of the International Symposium of Off-shore Structures. Rio de Janeiro. 1: 3-36, outubro 1979.
- 55 MARSHALL, F.J.. Design problem in hydrodynamics. Journal of Hydronautics. 4(4): 136-139, outubro 1970.
- 56 MATHISEN, J. & CARLSEN, C.A.. A comparison of calculation methods for wave loads on twin pontoon semisubmersibles. In: SSPA International Ocean Engineering Ship Handling Symposium, Gothemburg . Setembro 1980.
- 57 MENDES DE CARVALHO, M. et alii. Spectral computations on pressure wave gauge records. Lisboa. Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Memória nº 391, 1971.
- 58 MOE, G.. Hydrodynamic damping of offshore structures in waves and currents. In: Offshore Technology Conference, Houston, Texas. Artigo 3798, maio 1980.
- 59 MOOD, A.M. et alii. Introduction to the theory of statistics. Tokyo, McGraw-Hill/Kogakusha, Ltd., 1974.
- 60 MORISON, J.R. et alii. The force exerted by surface waves on piles. In: Petroleum Transactions, AIME. 189:149-154, 1950.
- 61 MURDEY, D.C.. Sea spectra recommended for ship performance predictions. In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session: 775-779, setembro 1969.
- 62 NATVIG, B.J. & PENDERED, J.W.. Motion response of floating structures to regular waves. In: Proceedings of the International Symposium on Offshore Structures, Rio de Janeiro. 2: 151-173, outubro 1979.
- 63 NORDENSTROM, N.. A method to predict long-term distributions of waves and wave-induced motions and loads on ships and other floating structures. Det Norske Veritas, Oslo. Publicação 81, abril 1973.

- 64 OCHI, M.K. & BOLTON, W.E.. Statistics for prediction of ship performance in a seaway (Part I). International Shipbuilding Progress. 20 (222): 27-54, fevereiro 1973.
- 65 ——— Statistics for prediction of ship performance in a seaway (Part II). International Shipbuilding Progress. 20(224): 89-121, abril 1973.
- 66 ——— Statistics for prediction of ship performance in a seaway (Part III). International Shipbuilding Progress. 20(229): 346-373, setembro 1973.
- 67 OCHI, M.K. & VUOLO, R.M.. Seakeeping characteristics of a multi-unit ocean platform. In: Spring Meeting of the SNAME. Hawaii. Artigo 2: 1-22, maio 1971.
- 68 OGILVIE, T.F. First and second order forces on a cylinder submerged under a free surface. Journal of Fluid Mechanics. 16(3): 451-472, 1963.
- 69 OHKUSU, M.. Hydrodynamic forces on multiple cylinders in waves. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 12: 107-112, abril 1974.
- 70 van OORTMESSEN, G.. Aspects of ocean engineering which are relevant to the ITTC. In: 15th ITTC, The Hague. (1): 411-424, setembro 1978.
- 71 PAPOULIS, A.. Probability, random variables and stochastic processes. Auckland, McGraw-Hill, 1981.
- 72 PAULLING, J.R.. Wave induced forces and motions of tubular structures. In: 8th Symposium on Naval Hydrodynamics. Pasadena. Agosto 1970.
- 73 PAULLING, J.R. & HORTON, E.E.. Analysis of the tension leg stabel platform. Offshore Technology Conference, Dallas. Artigo 1263, abril 1970.

- 74 PIERSON Jr., W.J. & MOSKOWITZ, L.. A proposed spectral form for a fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii. Journal of Geophysical Research. 69(24): 5181-5190, dezembro 1964.
- 75 PINCEMIN, M. et alii. Classification et calcul des plates-formes, en particulier semi-submersibles. Bulletin Technique du Bureau Veritas, Paris. 55(12): 286-292, dezembro 1973.
- 76 PORTER, W.R. Pressure distributions, added-mass and damping coefficients for cylinders oscillating in a free surface. University of California. Artigo 82-16, 1960.
- 77 POTASH, R.L.. Second-order theory of oscillating cylinders. University of California, Berkeley. Report n° NA 70-3, junho 1970.
- 78 PRICE, W.G. & BISHOP, R.E.D.. Probabilistic theory of ship dynamics. Londres, Chapman and Hall, 1974.
- 79 REDDY, D.V. et alii. Dynamic response of moored semisubmersible to bergy bit impact, irregular wave, wind and current forces. In: Offshore Technology Conference, Houston, Texas. Artigo 4425, maio 1982.
- 80 RELICH, F.. Über das asymptotische Verhalten von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. 53: 57-64, 1943.
- 81 RIBEIRO, C.R.. Previsão do comportamento do navio em mar realístico. São Paulo. Dissertação de mestrado, EPUSP, 1979.
- 82 RIBEIRO, C.R.; VEIGA, J.P.C. & SZAJNBOK, M.. Aplicação dos Métodos dos processos estocásticos às estruturas flutuantes antes no mar. In: VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro 3: 441-451, dezembro 1981.
- 83 SALVESEN, N.; TUCK, E.O.; FALTINSEN, O.. Ship motions and sea loads. In: Transactions of the SNAME. New York. 78: 250-287, 1970.

- 84 SCHLICHTING, H.. Boundary-layer theory. New York, McGraw-Hill, 1979.
- 85 van SLUIJS, M.F. & MINKENBERG, H.L.. Ocean platforms. In: 14th ITTC, Ottawa. Seakeeping Session: 253-275, setembro 1975.
- 86 SÖDING, H.. Calculation of long-term extreme loads and fatigue loads of marine structures. In: International Symposium on the Dynamics of marine vehicles and Structures in Waves. Artigo 35: 369-378, abril 1974.
- 87 SÖDING, H.. Eine Modifikation der Streifenmethode. Schiffstechnik, Hamburg. 16(80): 15-18, 1969.
- 88 SOMMERFELD, A.. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. 21: 309-353, 1912.
- 89 SPHAIER, S.H. & NEVES, M.A.S.. Waves and other fluid induced loads. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Structures Engineering. Rio de Janeiro. 187-215, setembro 1977.
- 90 St.DENIS, M.. On the motions of oceanic platforms. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 13: 113-134, abril 1974.
- 91 St.DENIS, M. e PIERSON, W.J.. On the motion of ships in confused seas. In: Transactions of the SNAME, New York. 61: 280-357, 1953.
- 92 STOKER, J.J.. Water waves. New York, Interscience Publishers, 1975.
- 93 SZAJNBOK, M.; de CONTI, M.B. & VEIGA, J.P.C.. Cálculo de alguns parâmetros de estruturas flutuantes. In: VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro. 3: 453-462, dezembro 1981.

- 94 SZAJNBOK, M.. Processos estocásticos aplicados à engenharia mecânica. Notas de aula da disciplina PMC-738, São Paulo, EPUSP, 1980. (não publicado).
- 95 TASAI, F. On the damping force and added mass of ships heaving and pitching. Journal of Zozen Kiokay, Tokio . 105: 47-56, 1959.
- 96 TASAI, F.. On the swaying, yawing and rolling motions of ships in oblique waves. International Shipbuilding Progress. 14(153): 216-228, maio 1967.
- 97 TASAI, F. & TAKAKI, M.. Theory and calculation of ship responses in regular waves. In: Symposium on Seaworthiness of Ships. Japan Society of Naval Architects, 1969.
- 98 TIMMAN, R. & NEWMAN, J.N.. The coupled damping coefficients of symmetric ships. Journal of Ship Research, SNAME, New York. 5(4): 1-7, março 1962.
- 99 TRIANTAFYLLOU, Michael. A consistent hydrodynamic theory for moored and positioned vessels. Journal of ship Research, SNAME, New York. 26(2): 97-105, junho 1982.
- 100 URSELL, F.. On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2: 218-231, 1949.
- 101 VEIGA, J.P.C. Hidrodinâmica aplicada ao navio. Notas de aula da disciplina PNV-751, São Paulo, EPUSP, 1979.
- 102 ——— Proposta de método para projeto de aletas estabilizadoras. Tese de Doutorado, São Paulo, EPUSP, 1982.
- 103 VUGTS, J.H.. The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface. International Shipbuilding Progress. 15(167): 251-276, julho 1962.
- 104 YAMANOUCI, Y.. Application of the multiple input spectrum analysis and the higher-order spectrum to the

- analysis of ship response in waves. In: 12th ITTC, Roma. Seakeeping Session, apêndice IV: 694-711, setembro 1969.
- 105 YAMANOUCI, Y.. Aspects of ocean engineering which are relevant to the ITTC. In: 15th ITTC, The Hague. (1): 433-445, setembro 1978.
- 106 ——— Ship's behaviour on ocean waves as a stochastic process. In: International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. Artigo 18: 167-181, abril 1974.
- 107 YOSHIDA, K. et alii. Periodic response analysis of floating framed structures. In: J.S.N.A. Japan, Tokyo. 136: 105-113, dezembro 1974.
- 108 YOSHIDA, K. & ISHIKAWA, K.. Periodic response analysis of floating framed structures. In: J.S.N.A. Japan, Tokyo. 138: 56-67, dezembro 1975.
- 109 WEHAUSEN, J. & LAITONE, E.V.. Surface waves. In: Encyclopedia of Physics. Berlin. 446-749, 1960.
- 110 WHEELER, R.D. & MASKELL, S.J.. A note on the motion of a floating body. Schiffstechnik. Hamburg. 25: 101-111, 1978.