

MARDEL BONGIOVANNI DE CONTI

Engenheiro Naval, Escola Politécnica da USP, 1979
Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da USP, 1983

BALANÇO DE CASCOS TIPO PESQUEIRO
EM MARES DE TRAVÉS

Tese apresentada à Escola
Politécnica da USP para
a obtenção do título de
Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof.Dr. MOYSES SZAJNBOK
Professor Assistente Doutor
da Escola Politécnica da
USP.

São Paulo, 1989

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não teria sido possível se não fosse a disposição, o entusiasmo e o idealismo próprios de um candidato ao prestar o concurso vestibular, e o conhecimento, a paciência e a experiência de um Orientador verdadeiro. Trata-se de características da mesma pessoa: Professor Moyses Szajnbok.

Agradeço à Chefia do Departamento de Engenharia Naval (Profs. Célio Taniguchi e Marco Antônio Brinati) e a todos os demais colegas deste Departamento pelo apoio, estímulo, compreensão e companheirismo, que tornam o viver nesta Escola extremamente agradável e enriquecedor do ponto de vista profissional e humano.

Agradeço a todos os meus Professores pelo conhecimento ofertado altruisticamente, embora nem sempre recebido condignamente; agradeço em particular o Professor Jorge Pinheiro da Costa Veiga, inicialmente Orientador desse programa de Doutorado, pelo privilégio da convivência com sua inteligência e cultura.

Cumprimento a Sr^a. Marlei Silveira de Araújo Silva pelas ótimas ilustrações e o Sr. Francisco Gomes da Silva pela excelente datilografia, bem como a Sr^a. Fernanda Reis Portugal e o Sr. César Jordano pela extenuante datilografia das minutas.

Agradeço à Sr^a. Josefa Naoco Uratsuka pelo apoio na localização de referências bibliográficas e pela revisão meticulosa das citações.

Cumprimento ainda o Sr. Adenilson Mazetti pelo trabalho zeloso de encadernação.

Agradeço finalmente ao Departamento de Engenharia Naval pelo apoio.

R E S U M O

Representa-se o movimento de balanço intenso de monocascos pequenos (pesqueiros, rebocadores, etc.) com velocidade de avanço nula, sob a ação de ondas regulares ou irregulares de través, através de um modelo simples, para ser aplicado nas fases iniciais do seu projeto.

O problema é formulado em termos de uma equação diferencial de segunda ordem, com amortecimento parabólico e restauração cúbica assimétricos.

Estabelecem-se condições suficientes para a existência de soluções estacionárias para excitação regular. Apresentam-se expressões aproximadas para a ressonância principal e para oscilações sub-harnônicas de ordem três, obtidas pelo Método de Krylov e Bogoliubov.

Quanto à excitação irregular, a técnica de Roberts, baseada em resultados da equação de Fokker-Planck, é empregada, porém expressando-se os esforços hidrodinâmicos como função da diferença entre os ângulos de balanço e de declividade de ondas.

A B S T R A C T

The intensive rolling motion of small monohulls (trawlers, tugs, etc.) with zero advance velocity, subjected to regular or irregular beam seas, are represented by a simple model, to be used at the early stages of their design.

The problem is represented by a second order differential equation, with asymmetric parabolic damping and cubic restoring forces.

Sufficient conditions for the existence of stationary solutions are established for regular excitation. Approximate expressions for the main resonance, and for the third order sub-harmonic oscillations, obtained by the method of Krylov and Boboliubov, are presented.

As for the irregular excitation, the method of Roberts, based on the Fokker-Planck equation results, is applied; however, the hydrodynamic forces are expressed as functions of the difference between the rolling angle and the wave steepness.

Í N D I C E

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
Abstract.....	iii
Índice.....	iv
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	I.1
I.1 - Revisão bibliográfica sobre cálculo do balanço de embarcações no mar.....	I.1
I.2 - Objetivos.....	I.6
I.3 - Delineamento do trabalho.....	I.8
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÃO DO BALANÇO DE PEQUENOS CASCOS SUBMETIDOS A MARES REGULARES OU IRREGULARES POR TRAVÉS, A PARTIR DAS FASES INICIAIS DE PROJETO.....	II.1
II.1 - A integridade da embarcação no seu projeto de concepção.....	II.2
II.2 - A hipótese do "desacoplamento" do balanço intenso....	II.6
II.3 - Os momentos excitadores e restauradores do balanço...II.9	
II.4 - Representações para os momentos de amortecimento e de restauração hidrostática.....	II.17
II.5 - O caso de excitação determinística.....	II.22
II.6 - O caso de excitação aleatória.....	II.24

CAPÍTULO III - O PROBLEMA DETERMINÍSTICO.....	III.1
III.1 - Análise da existência, unicidade e estabilidade de soluções	III.3
III.2 - Ressonâncias.....	III.19
III.3 - Ressonância principal. Existência de "saltos".....	III.27
III.4 - Ressonância sub- e ultra-harmônicas.....	III.32
CAPÍTULO IV - O CASO DE EXCITAÇÃO ALEATÓRIA.....	IV.1
IV.1 - Considerações gerais.....	IV.2
IV.2 - A equação de Fokker-Planck.....	IV.5
IV.3 - Uma solução exata da equação de Fokker-Planck.....	IV.10
IV.4 - Aplicação do método de Roberts.....	IV.13
CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	V.1
V.1 - Descrição dos cascos.....	V.2
V.2 - Descrição da excitação por ondas regulares e por ondas irregulares.....	V.10
V.3 - Programas de computador.....	V.12
V.4 - Resultados para ondas regulares.....	V.13
V.5 - Resultados para ondas irregulares.....	V.16
V.6 - Análise dos resultados.....	V.18
APÊNDICE A - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.....	A.1
A.1 - Introdução.....	A.2
A.2 - Embarcação oscilando com seis graus de liberdade.....	A.6
A.3 - Balanço não reduzido.....	A.10

APÊNDICE B - MODELO DE REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO NAVIO NO
MAR.....B.1

B.1 - Considerações gerais.....B.2

B.2 - A formulação do problema no caso de oscilações "peque-
nas".....B.5

B.3 - Os esforços hidrodinâmicos: oscilações "pequenas".....B.22

B.4 - Efeitos viscosos e de sustentação no momento de balan-
ço.....B.36

APÊNDICE C - APLICAÇÃO DE MÉTODOS ANALÍTICOS PARA A OBTENÇÃO DE SO-
LUÇÕES NO CASO DE EXCITAÇÃO DETERMINÍSTICA.....C.1

C.1 - O caso da ressonância principal.....C.2

C.2 - O caso da ressonância sub-harmônica de ordem três.....C.6

APÊNDICE D - MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES NO CASO DE EXCITA-
ÇÃO ALEATÓRIA.....D.1

D.1 - Método de Dunne & Wright.....D.2

D.2 - Método de Roberts.....D.10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - Revisão bibliográfica sobre cálculo do balanço de embarcações
no mar

O estudo de comportamento no mar teve um grande impulso a partir dos trabalhos de St. Denis e Pierson (ref.89) em 1953 e de Korvin-Kroukovsky e Jacobs (ref.50) em 1957. St. Denis e Pierson admitiram a hipótese de que as ondas de mar pudessem ser representadas pela somatória de ondas regulares em diversas frequências, com fases aleatórias. Na hipótese adicional de que as funções de transferência do navio fossem lineares, suas respostas às excitações irregulares de mar real corresponderiam à superposição das respostas a ondas regulares nas diversas frequências. Korvin-Kroukovsky e Jacobs se concentraram no estudo do comportamento de navios em ondas regulares. Aproveitando o fato de a boca e o calado de navios serem, em geral, reduzidos em relação ao comprimento, apresentaram a chamada Teoria das Faixas ("Strip Theory"), permitindo que o problema tri-dimensional ficasse reduzido a problemas bi-dimensionais para as diversas seções transversais.

A Teoria das Faixas apresentadas por Korvin-Kroukovsky e Jacobs se restringia ao cálculo de arfagem e caturro para ondas de proa, e seu equacionamento não considerava as relações de simetria provadas por Timman e Newman (ref.97) em 1962. Outros autores como Tasai, Söding, Grim e Borodai (ref.95,87,35,7) propuseram a partir de então outras versões estendidas para a Teoria das Faixas, satisfazendo as condições de Timman e Newman. Em 1970, Sal

vesen, Tuck e Faltinsen (ref.81) apresentaram uma versão que permitia o cálculo de movimentos e esforços solicitantes em navios com velocidade de avanço não nula, submetidos a ondas regulares incidentes segundo uma direção qualquer.

Na Teoria das Faixas, o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos totais para a embarcação é feito a partir dos coeficientes hidrodinâmicos relativos a cada seção transversal. Estes são obtidos pela resolução de problemas de contorno bi-dimensionais de seções planas submetidas a oscilações. Em 1949 Ursell (ref.98) formulou e resolveu o problema de contorno para seções circulares parcialmente imersas e submetidas a movimentos de arfagem. Diversos autores, como Grim, Tasai, Porter e Ogilvie (ref.32,65,69,94) apresentaram extensões da solução de Ursell. Todas essas versões admitem como válida a Teoria Potencial Linearizada, sendo o potencial de velocidades representado por um conjunto de fontes de intensidade constante satisfazendo a condição de superfície livre linearizada. Em 1967 Frank (ref.30) apresentou uma solução para o problema de contorno de seções simplesmente conexas simétricas em relação a um eixo vertical, parcialmente ou totalmente imersas e submetidas a oscilações de arfagem, deriva e balanço. Passava-se a representar o potencial de velocidades através de fontes de intensidade variável distribuídas ao longo do contorno da seção transversal, também satisfazendo à condição de superfície livre linearizada. Em 1970 Potash (ref.70) apresentou uma extensão do Método de Frank para seções de casco do tipo catamarã.

Os métodos citados para estudo do comportamento do navio no mar, quer sejam aqueles referentes ao cálculo de funções de transferência, quer seja aquele referente à extrapolação de resultados em on

das regulares para mar real, se aplicam, então, na hipótese de linearidade do sistema. Muitas vezes, no entanto, os efeitos não-lineares são importantes. No século passado Froude (ref.31) já observava o comportamento não-linear da restauração hidrostática do navio em balanço.

Na apresentação de sua Teoria das Faixas, Salvesen, Tuck e Faltinsen se referiram ao caráter não-linear do amortecimento em balanço. Nas proximidades da ressonância, tal efeito é o responsável pela grande redução da amplitude de balanço em relação àquela que resultaria se fosse ignorado o amortecimento viscoso. Os autores da quele trabalho, então, propuseram que se utilizasse um coeficiente linearizado de amortecimento, cujo valor dependesse da velocidade de oscilação em balanço, resultando o cálculo iterativo. A expressão para o amortecimento em balanço teria uma parcela referente ao atrito viscoso, tal como proposta por Kato (ref.48) em 1958, e uma parcela referente à geração de vórtices junto ao bojo, tal como proposta por Tanaka (ref.93) em 1960. O procedimento para consideração da não-linearidade em balanço proposto por Salvesen, Tuck e Faltinsen é adequado para oscilações de pequena intensidade.

No caso do balanço intenso, a restauração hidrostática, além do amortecimento, apresenta caráter não-linear. Cardo, Ceschia, Francescutto e Nabergoj (ref.8,9,10,11,12) estudaram entre 1980 e 1985 o balanço do navio representado por uma equação diferencial de segunda ordem na variável ângulo de balanço. O momento excitador foi suposto senoidal, com amplitude conhecida. A restauração e o amortecimento foram representados por termos lineares e cúbicos. Obtiveram-se soluções estacionárias aproximadas para a ressonância principal e sub-harmônica de ordem 3.

Quanto a excitações aleatórias, utilizam-se basicamente quatro procedimentos para análise de sistemas não-lineares:

- Método da Linearização Equivalente;
- Método da Perturbação;
- Técnica da Equação de Fokker-Planck;
- Método da Representação através de Função Descritiva.

No Método da Linearização Equivalente, apresentado por Krylov-Bogoliubov (ref.4) fazia-se com que sistemas não-lineares submetidos a excitações determinísticas fossem substituídos por sistemas lineares, tal que a dissipação de energia permanecesse a mesma. Este método foi estendido para sistemas com excitações aleatórias por Booton (ref.85) em 1953 e por Caughey (ref.15,16,17,18) entre 1959 e 1963. Em 1967, St. Denis (ref.88) aplicou o Método da Linearização Equivalente para determinação da arfagem e do caturro do navio no mar, considerando termos não-lineares somente na restauração hidrostática. Já em 1971, Vassilopoulos (ref.99) utilizou este método para determinação do balanço, considerando não-linearidades no amortecimento e na restauração hidrostática.

O Método da Perturbação consiste em se desenvolver as variáveis do problema em séries de potências de um parâmetro positivo ϵ , também variável do problema, sendo $\epsilon \ll 1$. Simplificam-se as equações do problema, tomando-se somente os primeiros termos das séries. Foi aplicado por Crandall (ref.21) em 1963 para estudo de sistemas não-lineares submetidos a excitações aleatórias. Em 1976 foi aplicado por Flower (ref.28) para o cálculo de balanço do navio, sendo considerado um termo cúbico não-linear na restauração hidrostática. Yamaguchi (ref.109) em 1969 já havia utilizado o Método da Perturbação para cálculo de balanço, considerando o amortecimento não-linear.

A equação diferencial parcial de Fokker-Planck envolve funções densidade de probabilidade de processos estocásticos. Em 1963, Caughey (ref.14) explicitou esta equação para sistemas dinâmicos não-lineares discretos, submetidos a excitação de ruído branco. Em 1974, Haddara (ref.37) aplicou-a ao cálculo do balanço do navio no mar, tendo sido possível estudar o comportamento transitório e em regime permanente. Foram consideradas não-linearidades no amortecimento e na restauração hidrostática. A partir de 1982, Roberts (ref.79) aplicou uma técnica baseada na equação de Fokker-Planck e na hipótese de que a energia total associada ao balanço varia "pouco" com o tempo, com a vantagem de que a excitação não precisa ser necessariamente um ruído branco, podendo ser de forma arbitrária.

A Técnica da Representação através de Função Descritiva foi desenvolvida na área de Controle nos últimos 30 anos para estudo de controle de sistemas não-lineares. Em 1978, Flower e Mackerdichian (ref.29) aplicaram esta técnica à determinação do balanço no mar, supondo haver um termo não-linear cúbico na representação da restauração hidrostática.

Em geral, os resultados da utilização dos métodos mencionados acima não são iguais. A escolha de um particular procedimento de análise depende do caráter das não-linearidades envolvidas e da excitação. Assim, diferentes tipos de embarcações submetidas a diferentes níveis de solicitação em ondas requerem tratamento diversos.

I.2 - Objetivos

No projeto de concepção de uma embarcação, analisa-se um grande número de alternativas, verificando-se qual resultará melhor do ponto de vista econômico para solucionar um problema de transporte ou para realizar alguma missão específica.

A avaliação do ponto de vista econômico nem sempre considera os vários aspectos relativos à "sobrevivência" da embarcação; usualmente requer-se apenas que as alternativas tenham um valor mínimo especificado de altura metacêntrica transversal, ou seja, garante-se a satisfação de um critério de estabilidade estática.

No presente trabalho objetiva-se permitir avaliar um outro aspecto relativo à "sobrevivência" da embarcação, a saber: o balanço intenso que possa levar ao emborcamento de pequenos cascos (pesqueiros, rebocadores, etc.) que tenham velocidade de avanço nula e estejam submetidos a mares regulares ou irregulares de través.

Quer-se tornar operacional uma metodologia para ser utilizada nas fases iniciais do projeto dessas embarcações. Acredita-se que tal metodologia seja útil para avaliar a segurança dessas embarcações já na sua concepção, quando se considera um número muito grande de formas, proporções, dimensões, velocidades, etc. Para tanto, as técnicas de representação do problema e de sua resolução devem ser simples e expeditas, para permitir sua aplicação a todas as alternativas em tempo e a custo razoáveis.

Objetiva-se verificar quais são os possíveis comportamentos das embarcações em ondas regulares: ocorrem ressonâncias, saltos?

Objetiva-se ainda aplicar uma técnica conveniente para o problema de mares irregulares, que permita estimar a probabilidade do ân

gulo de balanço não exceder determinados níveis, diante de uma dada excitação. Na análise bibliográfica, observou-se que a técnica de Roberts atende a este propósito, necessitando entretanto adequação ao problema a ser implementado.

I.3 - Delineamento do trabalho

O capítulo II traz a formulação de um modelo para problema do balanço intenso de embarcações pequenas com velocidade de avanço nula, submetidas a mares regulares ou irregulares por través. No apêndice A explicitam-se os esforços inerciais. No apêndice B apresenta-se o modo clássico de se considerar o problema de comportamento no mar, válido para oscilações de pequena intensidade.

O capítulo III apresenta uma análise das soluções para excitação de ondas regulares. Estabelecem-se condições suficientes para a existência de soluções estacionárias; apresentam-se soluções aproximadas para as condições de ressonância principal e sub-harmônica de ordem três. O apêndice C traz indicações de como as soluções aproximadas são obtidas, aplicando-se o método de Krylov e Bogoliubov (ref.5).

O capítulo IV apresenta a aplicação da técnica de Roberts (ref. 79), detalhada no apêndice D, baseada nos resultados da equação de Fokker-Planck, adequada ao modelo de representação do problema formulado no capítulo II.

No capítulo V para exemplificar as aplicações, utiliza-se a metodologia a um conjunto de pescueiros, cujas formas foram obtidas da Série Ridgely-Nevitt (ref.73).

O capítulo VI traz conclusões e recomendações.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÃO DO BALANÇO INTENSO DE PEQUENOS CASCOS
SUBMETIDOS A MARES REGULARES OU IRREGULARES POR
TRAVÉS A PARTIR DAS FASES INICIAIS DE PROJETO

Este trabalho apresenta uma metodologia, exposta adiante, que viabiliza a avaliação do balanço intenso experimentado por pequenos cascos submetidos a mares regulares ou irregulares por través.

Para que a metodologia pudesse ser aplicada a partir das fases iniciais do projeto de uma embarcação, foram utilizadas as técnicas existentes de representações do casco, da excitação e da resposta, compatíveis com o número reduzido de dados de que se dispõe sobre a embarcação por ocasião de sua concepção.

II.1 - A integridade da embarcação no seu projeto de concepção

O projeto da concepção de uma embarcação conduz basicamente à definição dos chamados requisitos do armador, que se constituem usualmente de tipo, capacidade e velocidade de cruzeiro de uma embarcação para trafegar numa rota especificada e realizar uma determinada missão. Uma vez obtidos os requisitos do armador, inicia-se o projeto preliminar da embarcação.

A determinação dos requisitos do armador é parte fundamental do processo de definição da embarcação, já que o projeto preliminar será desenvolvido a partir desses requisitos. Normalmente considera-se um número muito grande de alternativas, verificando-se qual resultará melhor do ponto de vista econômico para solucionar o problema de transporte ou para realizar alguma missão específica.

Os parâmetros para avaliação de cada alternativa prévia de projeto da embarcação são obtidos a partir do conhecimento, ainda que aproximado, dos seguintes itens:

- peso em aço;
- concepção preliminar da estrutura;
- potência instalada/máquinas/consumo de combustível;
- arranjo preliminar/equipamentos básicos.

Esses itens são obtidos em função da velocidade e capacidade da embarcação, em faixas de variação consideradas admissíveis. Eventualmente, consideram-se também diferentes tipos de embarcações. Chega-se a um grande número de opções, como ilustra a figura II.1. A cada opção estão associados custos de implantação e operacionais e, em contrapartida, benefícios, que são basicamente função do tipo, capacidade e velocidade de cada opção. A partir desses dados pode-

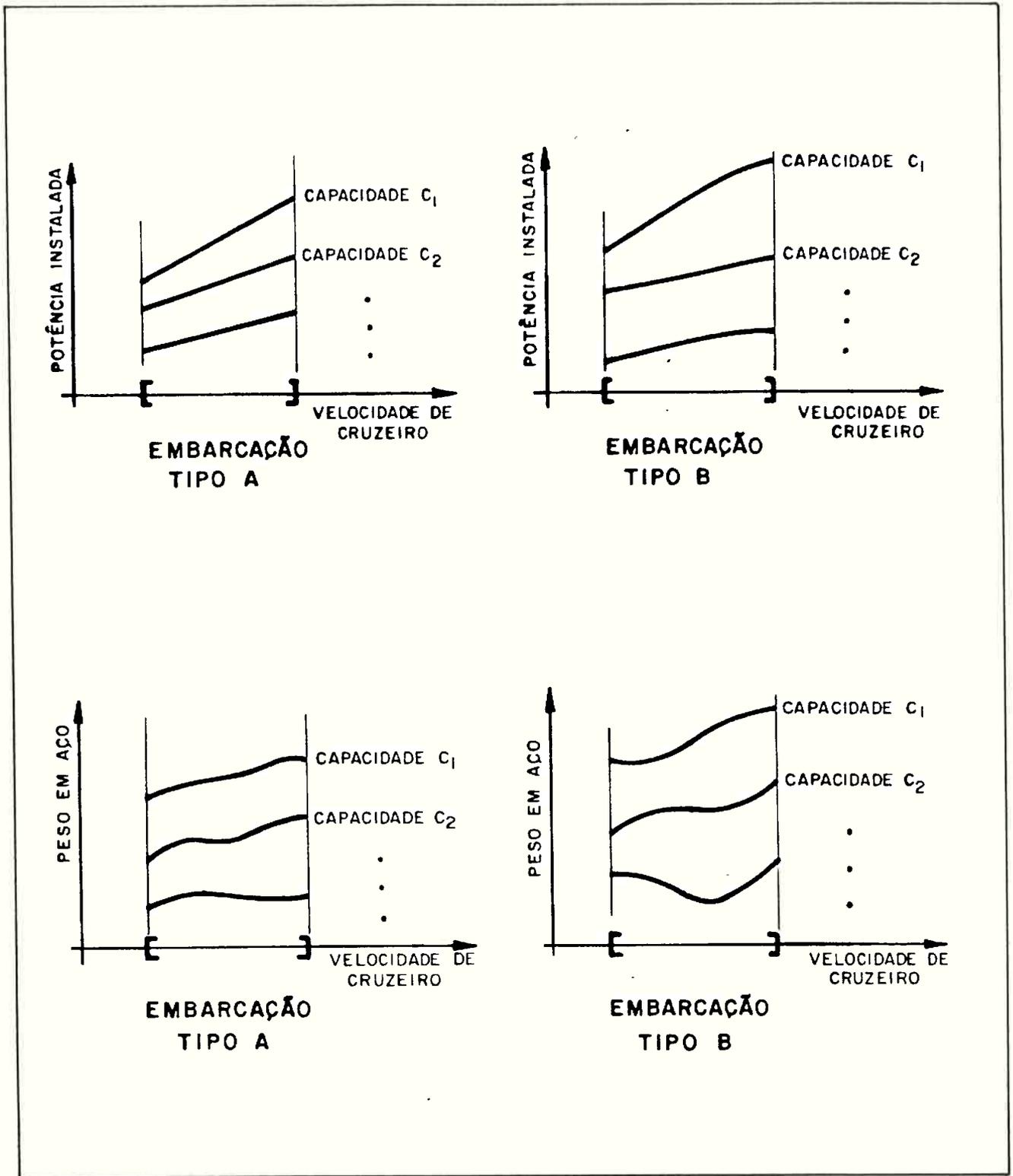


Figura II.1 - Ilustração de itens que são avaliados no projeto de concepção de uma embarcação

se proceder à análise econômica.

Há um item adicional, porém, que nem sempre é incluído na análise econômica, e que diz respeito à viabilidade técnica da embarcação, isto é, à factibilidade "física" de cada opção. Trata-se da avaliação da embarcação quanto à sua "sobrevivência". A maneira usual de tratar esse aspecto é através da aceitação somente das alternativas que tenham um valor mínimo especificado de altura metacêntrica transversal, ou seja, garantindo-se a satisfação de um critério de estabilidade estática. Mais raramente, impõe-se como restrição de projeto o atendimento a algum critério de comportamento no mar (ref. 3), mas com vistas à operação e não à "sobrevivência". Alguns tratamentos mais elaborados relativos à "sobrevivência" começam a ser tomados somente a partir do projeto preliminar.

Diversas situações podem levar à perda da embarcação, como danos estruturais, emborcamento por instabilidade transversal, alagamentos. Seria muito conveniente se pudessem ser identificadas "condições limites de sobrevivência" já nas fases iniciais do projeto, devido aos seguintes motivos:

- algumas das opções tomadas como possíveis podem, na realidade, ser inadequadas para certas condições de mar a serem encontradas na rota;
- mesmo que se possa modificar a solução em fases posteriores, como por exemplo, introduzindo dispositivos estabilizadores, o resultado pode ser economicamente pior que algum relativo a opções descartadas na fase de concepção; daí, o gasto com dispositivos estabilizadores deveria ser considerado já na concepção.

No contexto do entendimento acima estabelecido, apresenta-se, nes

te trabalho, uma contribuição para permitir avaliar um dos aspectos da sobrevivência já nas fases iniciais do projeto das embarcações. Como já foi dito, trata-se de uma metodologia para avaliar o balanço intenso que possa levar ao emborcamento de pequenos cascos que tenham velocidade de avanço nula e estejam submetidos a mares regulares ou irregulares por través.

II.2 - A hipótese de "desacoplamento" do balanço intenso

O movimento de balanço de um casco submetido a ondas está em geral acoplado aos movimentos de avanço, arfagem, deriva, guinada e caturro. Porém, na situação de balanço intenso e demais movimentos reduzidos, o balanço é pouco influenciado pelas outras oscilações. Observe-se que o inverso não é verdadeiro, ou seja, o movimento intenso de balanço influirá significativamente nos demais.

No Apêndice A, explicitam-se os esforços inerciais envolvidos no problema.

Sejam $(-X_0)$, $(-Y_0)$, $(-Z_0)$, ψ , θ e ϕ os deslocamentos de avanço ("surge"), arfagem ("heave"), deriva ("sway"), guinada ("yaw"), caturro ("pitch") e balanço ("roll") sofridos pela embarcação.

Considere-se o sistema OXYZ, fixo à embarcação, com OX correspondendo a um eixo longitudinal e o plano XOY sendo o plano central-longitudinal. Na ausência de ondas, admita-se que o plano XOZ seja a superfície das águas, e que OY seja positivo para cima (ver figura II.2).

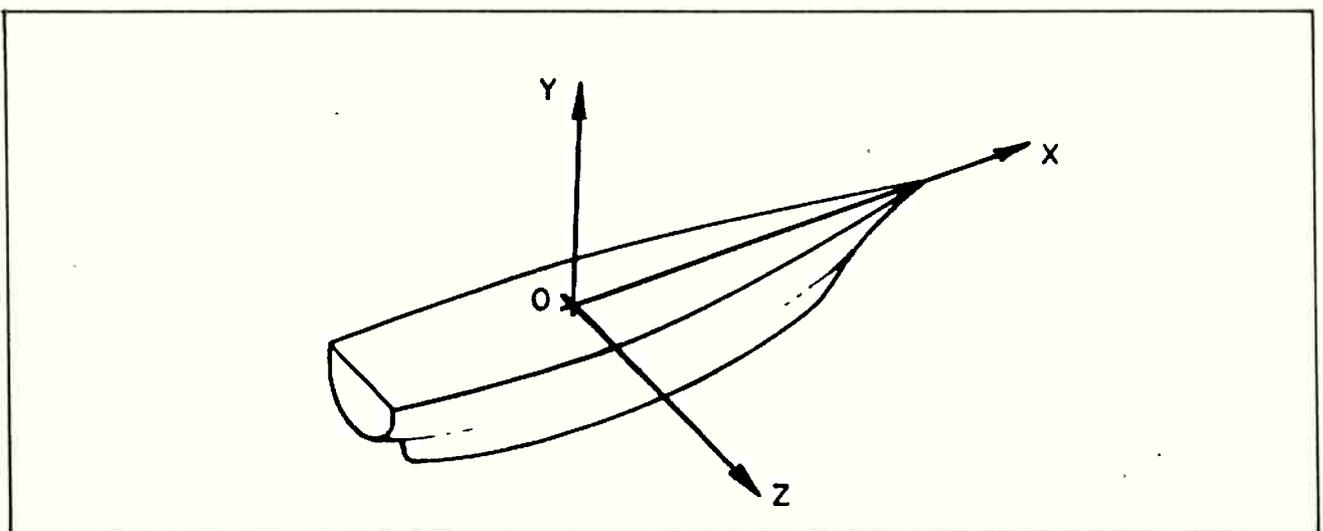


Figura II.2 - Sistema de coordenadas fixo à embarcação

Supõe-se que a embarcação possua simetria bombordo-boreste.

O centro de massa é suposto estar na posição $(0, Y_G, 0)$.

Seja M a massa total da embarcação, e $I_{XX}^0, I_{XY}^0, I_{YY}^0, I_{ZZ}^0$ os seus momentos e produto de inércia não nulos, referidos ao sistema OXYZ.

No Apêndice A apresentam-se aproximações de primeira ordem para os esforços inerciais, válidas para pequenas oscilações (inclusive o balanço).

Admite-se que as variáveis $(-X_0), (-Y_0), (-Z_0), \phi, \psi$ e θ possam ser expandidas em séries de potências de um certo parâmetro adimensional ε , em torno da solução de avanço uniforme. Dado que as oscilações são pequenas, é razoável tomar as aproximações de ordem ε para as oscilações, denotadas aqui por ξ_1 (para $(-X_0)$), ξ_2 (para $(-Y_0)$), ξ_3 (para $(-Z_0)$), ξ_4 (para ϕ), ξ_5 (para ψ) e ξ_6 (para θ).

Seja E_j a aproximação de primeira ordem para o esforço de inércia j ($j=1$: avanço, $j=2$: arfagem, $j=3$: deriva, $j=4$: balanço, $j=5$: guinada, $j=6$: caturro).

Tem-se, para navios com simetria bombordo-boreste (ver no anexo as expressões (A.5.7) a (A.5.9)):

$$E_j = \sum_{i=1}^6 M_{ij} \ddot{\xi}_j \quad (\text{II.2.1})$$

em que M_{ij} são elementos da matriz das inércias, dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & -MY_G \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & MY_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MY_G & I_{XX}^0 & -I_{XY}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{XY}^0 & I_{YY}^0 & 0 \\ -MY_G & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.2})$$

Verifica-se, neste caso, o acoplamento do balanço, pelo menos no que diz respeito aos esforços inerciais, com a deriva e a guinada.

Já no caso de balanço intenso e demais oscilações pequenas, tem-se em primeira aproximação (equação (A.6.7)):

$$I_{XX}^0 \ddot{\phi} \cong (\text{momento externo de balanço}) \quad (\text{II.2.3})$$

Tal equação indica que o balanço intenso pode ser considerado desacoplado das outras oscilações, desde que estas se mantenham pequenas, e desde que o momento externo de balanço possa ser expresso em termos da oscilação neste único grau de liberdade, pelo menos em primeira aproximação.

II.3-Os momentos excitadores e restauradores do balanço

Quando o movimento de balanço é significativamente maior que as demais oscilações da embarcação, sua representação pode ser feita através de uma equação neste único grau de liberdade. Na presente seção, apresenta-se um desenvolvimento que resulta nesta equação (expressão (II.3.12)).

Dois casos de representação do balanço podem ser importantes:

- 1) balanço intenso; ondas incidentes de comprimento bem maior que a boca da embarcação;
- 2) balanço significativo, mas não intenso; comprimentos de ondas pequenos.

Ambas estas situações são vistas pela equação (II.3.12).

Considere-se inicialmente a metodologia simplificada usual para cálculo das oscilações de uma embarcação em avanço num mar com ondas, apresentada no apêndice B. Tal metodologia leva a bons resultados se as oscilações são "pequenas". O problema é subdividido em problema de resistência de ondas, problema de irradiação e problema de difração.

No problema de resistência de ondas, considera-se o casco em avanço sem oscilar, na ausência de ondas incidentes; tem-se a chama da resistência de ondas próprias. A resistência de ondas, juntamente com a resistência viscosa, e com outras componentes menores da resistência, devem ser equilibradas pela força propulsora. Não se comenta aqui a obtenção das componentes da resistência, nem da força propulsora; apenas admite-se que haja equilíbrio dinâmico; tais forças não são então consideradas na avaliação das oscilações.

No problema de irradiação, supõe-se que o casco em avanço seja submetido a oscilações forçadas nos seis graus de liberdade, independentemente, na ausência de ondas incidentes; obtém-se os chamados esforços restauradores, expressos em termos das oscilações e de suas derivadas primeira e segunda, que são incógnitas do problema.

No problema de difração considera-se o casco na presença de ondas incidentes, porém sem oscilar; obtém-se os chamados esforços excitadores.

Os esforços restauradores, obtidos no problema de irradiação, e os esforços excitadores, obtidos no problema de difração, estão ambos presentes quando a embarcação em avanço está livre para oscilar num mar com ondas. Sua soma deve igualar os esforços inerciais; dessa igualdade, torna-se possível o cálculo das oscilações em primeira aproximação. Resultam seis equações nas seguintes incógnitas: avanço, deriva, arfagem, balanço, guinada e caturro. No entanto, se a embarcação possui simetria bombordo-boreste, as equações para os movimentos de deriva, balanço e guinada resultam desacopladas das demais (ver expressão (B.3.34)). Somente tais equações são então consideradas para a avaliação do balanço.

Nas equações citadas acima, há necessidade de inclusões de correções devidas a efeitos viscosos e de sustentação, não considerados nos problemas de difração e de irradiação (ver seção B.6). Tais correções possuem termos não-lineares, que costumam ser "linearizados" quando as oscilações são de pequena intensidade.

As equações para deriva, balanço e guinada ficam:

$$\begin{bmatrix} M+A_{33} & M\bar{y}_G+A_{34} & A_{35} \\ M\bar{y}_G+A_{43} & I_{xx}^0+A_{44} & -I_{xy}^0+A_{45} \\ A_{53} & -I_{xy}^0+A_{54} & I_{yy}^0+A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_3 \\ \ddot{\xi}_4 \\ \ddot{\xi}_5 \end{bmatrix} +$$

(II.3.1)

$$+ \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} & B_{35} \\ B_{43} & B_e & B_{45} \\ B_{53} & B_{54} & B_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3^{FK} + E_3^D \\ E_4^{FK} + E_4^D \\ E_5^{FK} + E_5^D \end{bmatrix},$$

onde

A_{ij} , $i, j=3, 4, 5$, são os coeficientes de inércia adicionada;

B_{ij} , $i, j=3, 4, 5$, são os coeficientes de amortecimento (B_{44} substituído por B_e , que inclui efeitos de sustentação e viscosos);

C_{44} é o coeficiente de restauração hidrostática do balanço;

E_j^{FK} , $j=3, 4, 5$, são os esforços excitadores de Froude-Krylov;

E_j^D , $j=3, 4, 5$, são os esforços excitadores de difração.

Os coeficientes de massa adicionada, amortecimento e os esforços excitadores podem ser obtidos pela Teoria de Faixas de Salvesen, Tuck e Faltinsen (ref.81) associada ao Método de Frank (ref.30).

Obtêm-se, então, os ξ_j , $j=3, 4, 5$, como soluções das equações (II.3.1).

Quando o balanço é marcadamente maior que as demais oscilações,

porém ainda pequeno, pode-se alterar (II.3.1) para:

$$(J_{xx}^0 + A_{44}) \ddot{\xi}_4 + B_e \dot{\xi}_4 + C_{44} \xi_4 = E_4^{FK} + E_4^D \quad (\text{II.3.2})$$

Há casos em que o balanço não pode ser considerado pequeno, embora não necessariamente seja intenso. Deve-se agora representá-lo por ϕ , e não por ξ_4 , que é a sua aproximação de segunda ordem (ordem ϵ). Também os momentos de amortecimento, $B_e \dot{\xi}_4$, e de restauração hidrostática, $C_{44} \xi_4$, devem ser alterados convenientemente para incluir efeitos não-lineares, que passam a ser significativos. A expressão (II.3.2) deve então ser substituída por:

$$(J_{xx}^0 + A_{44}) \ddot{\phi} + F(\dot{\phi}) + G(\phi) = E_4^{FK} + E_4^D, \quad (\text{II.3.3})$$

em que

$F(\dot{\phi})$ é o momento não-linearizado de amortecimento;

$G(\phi)$ é o momento não-linearizado de restauração hidrostática.

Na expressão (II.3.3) ainda se subentende a subdivisão do problema em problema de irradiação e problema de difração. Pelo fato de as equações serem não-lineares, há a possibilidade de resposta estacionária com frequência diferente da frequência da excitação (suposta harmônica). Como no problema de difração supõe-se que o casco não oscila, os esforços E_4^{FK} e E_4^D devem ter a frequência de encontro com as ondas.

Para situações em que o balanço é intenso, também a representação (II.3.3) é inadequada. De fato, não é mais razoável considerar o problema de resistência de ondas e o problema de difração para o casco sem oscilar; no problema de irradiação não é razoável calcu

lar os coeficientes hidrodinâmicos para o casco na sua posição média em águas calmas.

No caso de velocidade da embarcação ser nula, de as ondas serem de través, de seu comprimento ser bem maior que a boca da embarcação (mais que cinco vezes), e de o balanço ser intenso, pode-se alterar (II.3.3), levando em consideração o seguinte:

- 1) os esforços de difração podem ser desprezados, já que são pouco significativos para embarcações com bocas menores que 20% do comprimento de ondas (ref. 3);
- 2) o casco se desloca em arfagem praticamente junto com a onda, e a superfície livre pode ser aproximada ao longo da boca do casco por uma reta com a declividade igual à da onda no centro do casco;
- 3) admita-se inicialmente o casco livre para oscilar em arfagem e deriva, porém restrito quanto ao balanço; a velocidade horizontal das partículas fluidas com relação ao casco, junto ao costado na superfície livre, é anulada pelo movimento de deriva e pela difração; junto ao costado, na superfície livre, a velocidade vertical das partículas fluidas com relação ao casco pode ser dada aproximadamente por (ver figura II.3):

$$\frac{\Delta\alpha \cdot B/2}{\Delta t} \approx \dot{\alpha} \frac{B}{2}, \quad (\text{II.3.4})$$

em que

α é a declividade de onda;

B é a boca da embarcação.

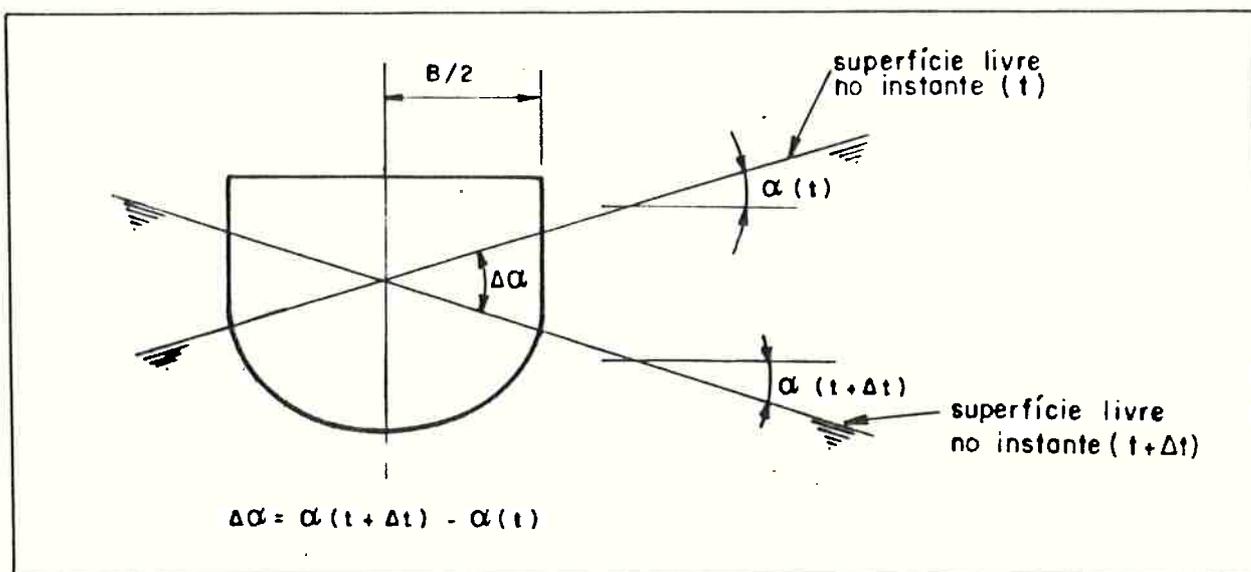


Figura II.3 - A embarcação livre para oscilar em arfagem e deriva, porém restrita com relação ao balanço

- 4) o problema do casco submetido a ondas por través, livre para oscilar em arfagem e deriva, e restrito para oscilar em balanço, pode ser aproximado, diante de (II.3.4) e do fato de que as formas do casco são "arredondadas", pelo problema de oscilação forçada de balanço do casco com velocidade angular $\dot{\alpha}$, na ausência de ondas incidentes, arfagem e deriva; os esforços hidrodinâmicos e hidrostáticos podem ser expressos por:

$$\left[A_{44}^* \ddot{\alpha} + F(\dot{\alpha}) + G(\alpha) \right], \quad (\text{II.3.5})$$

em que A_{44}^* é o coeficiente de massa adicionada medido, por exemplo, em oscilação forçada;

- 5) quando o casco está livre para oscilar em balanço, o problema pode ser interpretado como oscilação forçada com velocidade angular $(\dot{\phi} - \dot{\alpha})$ na ausência de ondas, arfagem e deriva, e os

esforços hidrostáticos e hidrodinâmicos ficam:

$$-\left[A_{44}^* (\ddot{\phi} - \ddot{\alpha}) + F(\dot{\phi} - \dot{\alpha}) + G(\phi - \alpha) \right]; \quad (\text{II.3.6})$$

6) considerando (1) a (5), resulta:

$$I_{xx}^{\circ} \ddot{\phi} = - \left[A_{44}^* (\ddot{\phi} - \ddot{\alpha}) + F(\dot{\phi} - \dot{\alpha}) + G(\phi - \alpha) \right]; \quad (\text{II.3.7})$$

7) subtraindo $I_{xx}^{\circ} \ddot{\alpha}$ do primeiro e segundo membros de (II.3.7) e rearranjando os termos, chega-se a:

$$(I_{xx}^{\circ} + A_{44}^*) (\ddot{\phi} - \ddot{\alpha}) + F(\dot{\phi} - \dot{\alpha}) + G(\phi - \alpha) = -I_{xx}^{\circ} \ddot{\alpha} \quad (\text{II.3.8})$$

Seja $\phi^* = \phi$, quando se trabalha com a representação (II.3.3), válida para balanços significativos mas não intensos, e $\phi^* = (\phi - \alpha)$ quando se trabalha com a representação (II.3.8), válida para balanços intensos e ondas incidentes com comprimentos significativamente maiores que a boca.

Seja I_v a inércia virtual, dada por:

$$I_v = I_{xx}^{\circ} + A_{44} \quad (\text{representação (II.3.2)}),$$

ou

(II.3.9)

$$I_v = I_{xx}^{\circ} + A_{44}^* \quad (\text{representação (II.3.8)})$$

Sejam

$$f(\dot{\phi}^*) = \frac{F(\dot{\phi}^*)}{I_v}; \quad (\text{II.3.10})$$

$$g(\phi^*) = \frac{G(\phi^*)}{I_v}$$

Seja η tal que:

$$\eta = E_4^{FK} + E_4^D \quad (\text{representação (II.3.3)}); \quad (\text{II.3.11})$$

$$\eta = - \frac{I_{xx}^0}{I_v} \ddot{\alpha} \quad (\text{representação (II.3.8)}).$$

Daí, as expressões (II.3.3) e (II.3.8), diante de (II.3.9) a (II.3.11), ficam:

$$\ddot{\phi}^* + f(\dot{\phi}^*) + g(\phi^*) = \eta, \quad (\text{II.3.12})$$

em que ϕ^* pode ser interpretado como ϕ , ou como $(\phi - \alpha)$.

II.4 - Representações para os momentos de amortecimento e de restauração hidrostática

Na análise conduzida a seguir sobre representações para os momentos de amortecimento e de restauração hidrostática, usa-se somente o símbolo ϕ , porém os resultados se aplicam tanto à variável ϕ como à variável $(\phi-\alpha)$.

Encontram-se, basicamente, três formas para a representação do momento de amortecimento, a saber:

a) forma linear, em que:

$$f(\dot{\phi}) = b_e \dot{\phi}, \quad b_e > 0, \quad (\text{II.4.1})$$

usada principalmente quando o amortecimento por irradiação de ondas prevalece sobre aquele devido a efeitos viscosos, ou quando se procede a uma "linearização" do amortecimento;

b) forma parabólica assimétrica, em que:

$$f(\dot{\phi}) = b_1 \dot{\phi} + b_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}|, \quad b_1, b_2 \geq 0 \quad (\text{II.4.2})$$

que é mais usual;

c) forma cúbica, em que:

$$f(\dot{\phi}) = b_1^* \dot{\phi} + b_3 \dot{\phi}^3, \quad b_1^*, b_3 \geq 0 \quad (\text{II.4.3})$$

proposta por Dalzell (ref.24) para substituir a forma parabólica assimétrica, com vantagens do ponto de vista de manipulação algébrica.

No que se segue, a menos de indicação em contrário, será usada

a forma (b), uma vez que a forma (a) pode ser vista como um caso particular de (b), e a forma (c), pela própria proposição de seu autor, é equivalente à forma (b).

Quando não há banda hidrostática, a representação do momento de restauração hidrostática deve ser feita por função ímpar. Considere na figura II.4 as esquematizações de curvas de endireitamento em função de inclinação. Observa-se que a representação

$$g(\phi) = c_2 \phi \quad (\text{II.4.4})$$

é adequada para pequenos ângulos de inclinação. Para ângulos de inclinação não tão reduzidos, mas não atingindo o pico da curva, pode-se usar

$$g(\phi) = c_1 \phi + c_3 \phi^3, \quad c_1, c_3 > 0. \quad (\text{II.4.5})$$

Se se quer representar a curva de momento de endireitamento até o seu pico, usar-se por exemplo

$$g(\phi) = c_1 \phi + c_3 \phi^3, \quad c_1 > 0, \quad c_3 < 0. \quad (\text{II.4.6})$$

Para representações mais acuradas da curva até o seu pico, ou até mesmo para o seu máximo ângulo de estabilidade estática, pode-se usar

$$g(\phi) = c_1^* \phi + c_3^* \phi^3 + c_5 \phi^5. \quad (\text{II.4.7})$$

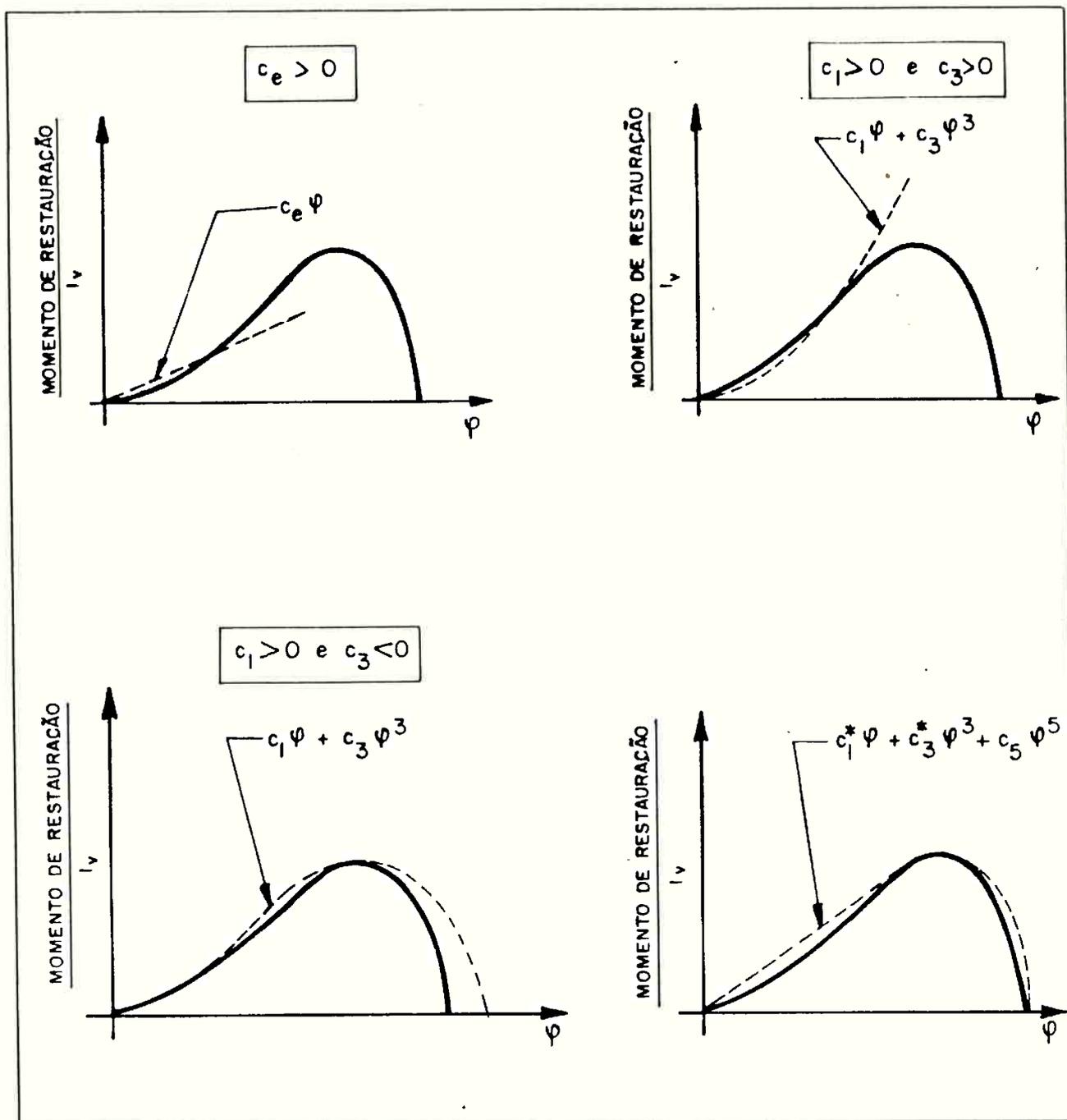


Figura II.4 - Esquematização de curvas de momento de endireitamento em função do ângulo de inclinação

No que se segue, a menos de indicação em contrário, será usada a forma

$$g(\phi) = c_1\phi + c_3\phi^3, \quad c_1 > 0, \quad (\text{II.4.8})$$

com c_3 real. A forma linear pode ser vista como caso particular da forma cúbica. As inclinações que exigissem o uso da forma de quinta potência provavelmente superariam as oscilações-limite aceitáveis para o balanço.

Diante das considerações vistas, vai-se restringir a análise da equação (II.3.3) à forma:

$$\ddot{\phi} + b_1\dot{\phi} + b_2\dot{\phi}|\dot{\phi}| + c_1\phi + c_3\phi^3 = E_4^{FK} + E_4^D \quad (\text{II.4.9})$$

$(b_1, b_2 \geq 0 ; c_1 > 0 ; c_3 \text{ real}),$

e da equação (II.3.8) à forma:

$$\begin{aligned} &(\ddot{\phi} - \ddot{\alpha}) + b_1(\dot{\phi} - \dot{\alpha}) + b_2(\dot{\phi} - \dot{\alpha})|\dot{\phi} - \dot{\alpha}| + \\ &+ c_1(\phi - \alpha) + c_3(\phi - \alpha)^3 = -\frac{I_{xy}^0}{I_v} \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.4.10})$$

$(b_1, b_2 \geq 0 ; c_1 > 0 ; c_3 \text{ real})$

Trata-se de osciladores de segunda ordem com amortecimento parabólico assimétrico e restauração cúbica. As equações (II.4.9) e (II.4.10), por sua semelhança com a equação de Duffing, poderiam ser chamadas de equações generalizadas de Duffing.

O objetivo pretendido é o levantamento de possíveis tipos de

comportamento da resposta em função dos parâmetros do sistema e da excitação, que possam comprometer a segurança da embarcação.

Uma vez estabelecida a representação do fenômeno, deve-se estimar os valores dos coeficientes b_1 , b_2 , c_1 e c_3 para o casco em questão.

Os coeficientes b_1 e b_2 podem ser estimados por exemplo pela metodologia compilada por Himeno (ver seção B.4 ou ref.43).

Os coeficientes c_1 e c_3 podem ser estimados por técnicas de ajuste de um polinômio à curva de braços de endireitamento, obtida por exemplo, conforme ref. 100.

II.5 - O caso de excitação determinística

Considere-se uma embarcação com velocidade de avanço nula, submetida a ondas regulares por través. A excitação de ondas regulares é chamada "determinística".

O potencial de ondas incidentes pode ser dado por (ver expressão (B.3.10), considerando incidência por través ($\beta=90^\circ$)):

$$\Phi_I(y, z, t) = \text{Re} \left\{ \frac{-igH}{2\omega} \exp(ky) \exp(-ikz) \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (\text{II.5.1})$$

sendo que neste caso a frequência de encontro (ω_e) e a frequência de ondas incidentes (ω_o) coincidem:

$$\omega = \omega_e = \omega_o \quad (\text{II.5.2})$$

A elevação da superfície livre não perturbada pela presença e movimentação do casco é (expressão (B.3.11)):

$$\eta_I(z, t) = \frac{H}{2} \cos(kz + \omega t) \quad (\text{II.5.3})$$

A declividade de ondas é dada por:

$$\alpha(z, t) = -\frac{kH}{2} \sin(kz + \omega t) \quad (\text{II.5.4})$$

Na figura II.5 ilustra-se a situação acima.

O problema vai ser representado pela equação (II.4.9) ou pela equação (II.4.10), dependendo da relação e da intensidade do movimento de balanço, como observado nas seções anteriores.

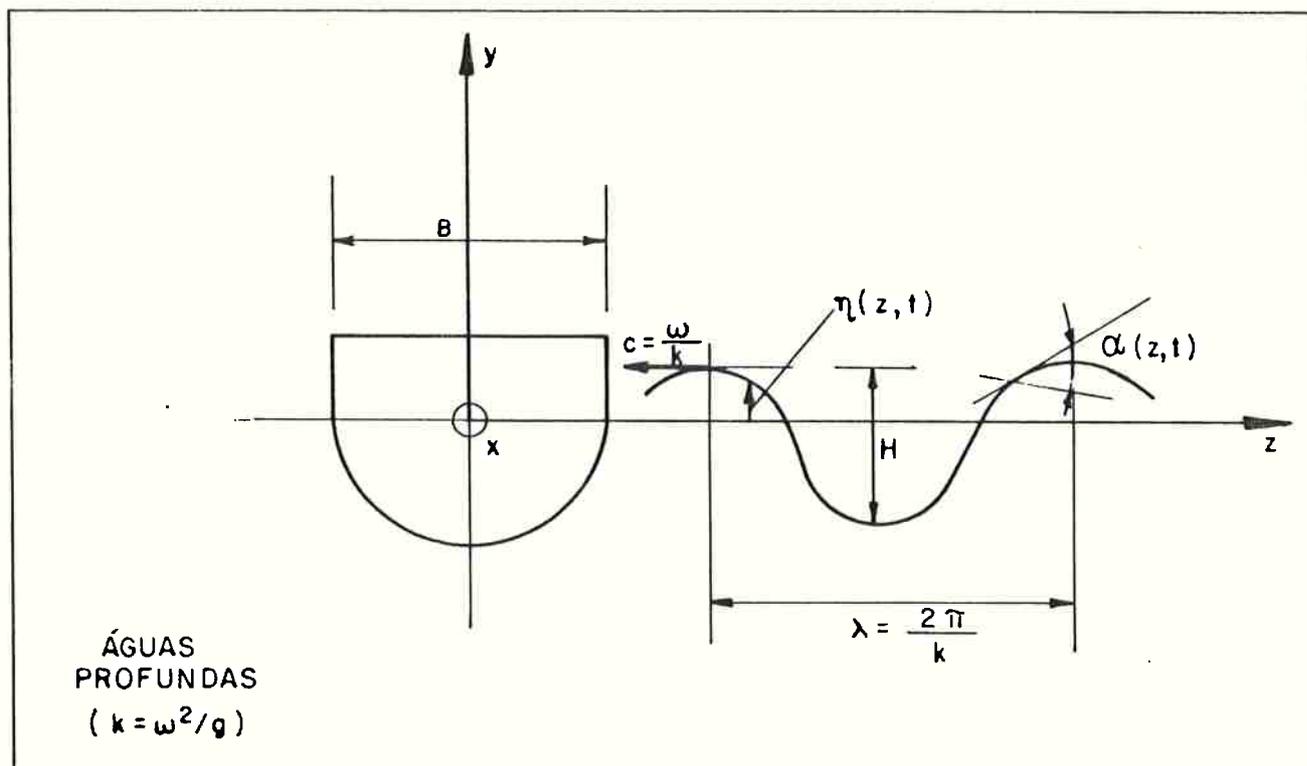


Figura II.5 - Embarcação com velocidade de avanço nula submetida a ondas regulares por travês.

Note-se que (II.4.9) e (II.4.10) têm a mesma forma. No capítulo III analisam-se soluções estacionárias de (II.4.9), porém todas as considerações lá feitas também se aplicam a (II.4.10).

II.6 - O caso de excitação aleatória

Considere-se uma embarcação com velocidade de avanço nula, submetida a ondas irregulares por través. A excitação de ondas irregulares é chamada "aleatória".

Admite-se que as variáveis associadas às ondas irregulares (elevação, velocidade e aceleração das partículas, etc.) possam ser caracterizadas como processos aleatórios estacionários e ergódicos (ref.45).

A densidade espectral de energia das ondas por ser dada por formulações empíricas como por exemplo a da "ITTC" a dois parâmetros (ref.45):

$$S_{55}(\omega) = A\omega^{-5} \exp(-B\omega^{-4}), \quad (\text{II.6.1})$$

onde ω é a frequência de cada componente em rad/seg.

$$A \cong \frac{487,045 H_{1/3}^2}{T_0^4} \quad ; \quad B = \frac{1948,182}{T_0^4}, \quad (\text{II.6.2})$$

onde

T_0 é o período de pico espectral,

$H_{1/3}$ é a altura significativa de ondas, correspondente à média do terço dos maiores picos de elevação de ondas.

Pode-se definir densidade de energia espectral adimensional e frequência adimensional respectivamente por:

$$S_{ad} = \frac{2\pi S_{55}}{H_{1/3}^2 T_0} \quad ; \quad (\text{II.6.3})$$

$$\omega_{ad} = \omega \frac{T_0}{2\pi} \quad (\text{II.6.4})$$

Diante de (II.6.3) e (II.6.4) as relações (II.6.1) - (II.6.2) podem ser reescritas como:

$$S_{ad} = A_{ad} \omega_{ad}^{-5} \exp(-B_{ad} \omega_{ad}^{-4}) \quad (\text{II.6.5})$$

onde:

$$A_{ad} \cong 1,963 \quad ; \quad B_{ad} \cong 7,854 \quad (\text{II.6.6})$$

O comprimento de ondas associado a cada componente espectral pode ser calculado por:

$$\lambda = \frac{2\pi g}{\omega^2} \quad (\text{II.6.7})$$

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DETERMINÍSTICO

Neste capítulo é tratado o balanço de embarcações submetidas à excitação de ondas regulares. Considera-se o sistema como um oscilador de segunda ordem, não-linear, excitado por sinal harmônico. Analisam-se algumas soluções para este problema de Cauchy, inferindo-se possíveis comportamentos de embarcações quanto ao balanço em ondas regulares vindas por través. Estabelecem-se algumas condições suficientes para haver estacionaridade de soluções periódicas.

Os métodos empregados para a obtenção das soluções aproximadas são clássicos, como por exemplo o de Krylov e Bogoliubov (ref. 5). No entanto, apresenta-se como contribuição a explicitação de tais soluções para o caso de amortecimento parabólico e restauração cúbica assimétricos simultâneos, já que tais expressões não foram encontradas na sua forma final para aplicação na literatura consultada.

Trabalha-se com dois modelos para representação do fenômeno do balanço. O primeiro deles pressupõe que as ondas incidentes sejam pouco difratadas pela embarcação, o que é razoável de se admitir nos casos em que o comprimento de ondas seja bem maior que a boca da embarcação (expressão (II.4.10)). Para completar o estudo, no segundo se considera o efeito da difração, sendo válido para comprimentos de ondas não tão grandes (expressão (II.4.9)). Neste segundo modelo, a avaliação do momento excitador é feita desconsiderando-se a movimentação do casco, o que somente é razoável para pequenas oscilações de balanço. Não é necessário considerar-se o caso de grandes amplitudes e pequenos comprimentos de ondas, já que, na prática, as ondas de pequeno comprimento têm pouca energia; mesmo ocor

rendo ressonância sub-harmônica, as respostas resultam significativas, mas não exageradas.

III.1 - Análise da existência, unicidade e estabilidade de soluções

A existência e unicidade de soluções para a equação (II.4.9) (ou para a equação (II.4.10)) pode ser verificada considerando o seguinte teorema (ref.25, teoremas 2 e 3, pág. 149):

TEOREMA T1:

Se $g(\phi)$, $f(\phi)$ e $\eta(t)$ da equação

$$\ddot{\phi} + f(\dot{\phi}) + g(\phi) = \eta(t) \quad (\text{III.1.1})$$

satisfazem às seguintes hipóteses:

- a) $f(\dot{\phi})$ e $g(\phi)$ são contínuas em $(-\infty, +\infty)$;
 $\eta(t)$ é contínua e limitada em $[t_0, +\infty)$;
- b) $f(\dot{\phi})$ e $g(\phi)$ são continuamente diferenciáveis em $(-\infty, +\infty)$, com a possível exceção de um número finito de pontos, em que se supõe existirem derivadas unilaterais;

c)

$$\lim_{\dot{\phi} \rightarrow \pm\infty} f(\dot{\phi}) = \pm\infty;$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} g(\phi) = \pm\infty,$$

então a equação (III.1.1) tem exatamente uma solução satisfazendo as condições iniciais:

$$\phi(t_0) = \phi_0 \quad ; \quad \dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0, \quad (\text{III.1.2})$$

sendo que a solução e sua derivada são limitadas.

Analisa-se a seguir o problema definido por (II.4.9) e (III.1.2).

Neste problema, os coeficientes de amortecimento b_1 e b_2 podem

ser avaliados por exemplo pela metodologia compilada por Himeno (ref.43), como exposto no item B.4. Ambos b_1 e b_2 não podem ser negativos, nem simultaneamente nulos, uma vez que os esforços de amortecimento atuam no sentido oposto ao da velocidade de oscilação, e correspondem sempre a perdas de energia do sistema. O coeficiente b_1 leva em consideração o efeito de atrito, o efeito de geração de ondas e parte do efeito devido à presença de bolinas (parcela referente à modificação do campo de pressões). O coeficiente b_2 inclui o efeito de geração de vórtices e a outra parte do efeito devido à presença de bolinas (parcela viscosa). Os coeficientes c_1 e c_3 resultam do ajuste de um polinômio cúbico à curva de momento de endireitamento, como proposto no item II.4; na prática, c_1 é sempre positivo, e c_3 positivo, negativo ou nulo.

Note-se, inicialmente, que a função $f(\dot{\phi}) = b_1\dot{\phi} + b_2\dot{\phi}|\dot{\phi}|$, $b_1, b_2 > 0$, é contínua e continuamente diferenciável em $(-\infty, +\infty)$, com

$$\lim_{\dot{\phi} \rightarrow -\infty} f(\dot{\phi}) = -\infty ;$$

$$\lim_{\dot{\phi} \rightarrow +\infty} f(\dot{\phi}) = +\infty ,$$

como está ilustrado na figura III.1. Assim, $f(\dot{\phi})$ satisfaz as hipóteses do teorema T1. Também no caso linear ($b_1 > 0, b_2 = 0$) e no caso de amortecimento quadrático ($b_1 = 0, b_2 > 0$) as hipóteses são verificadas.

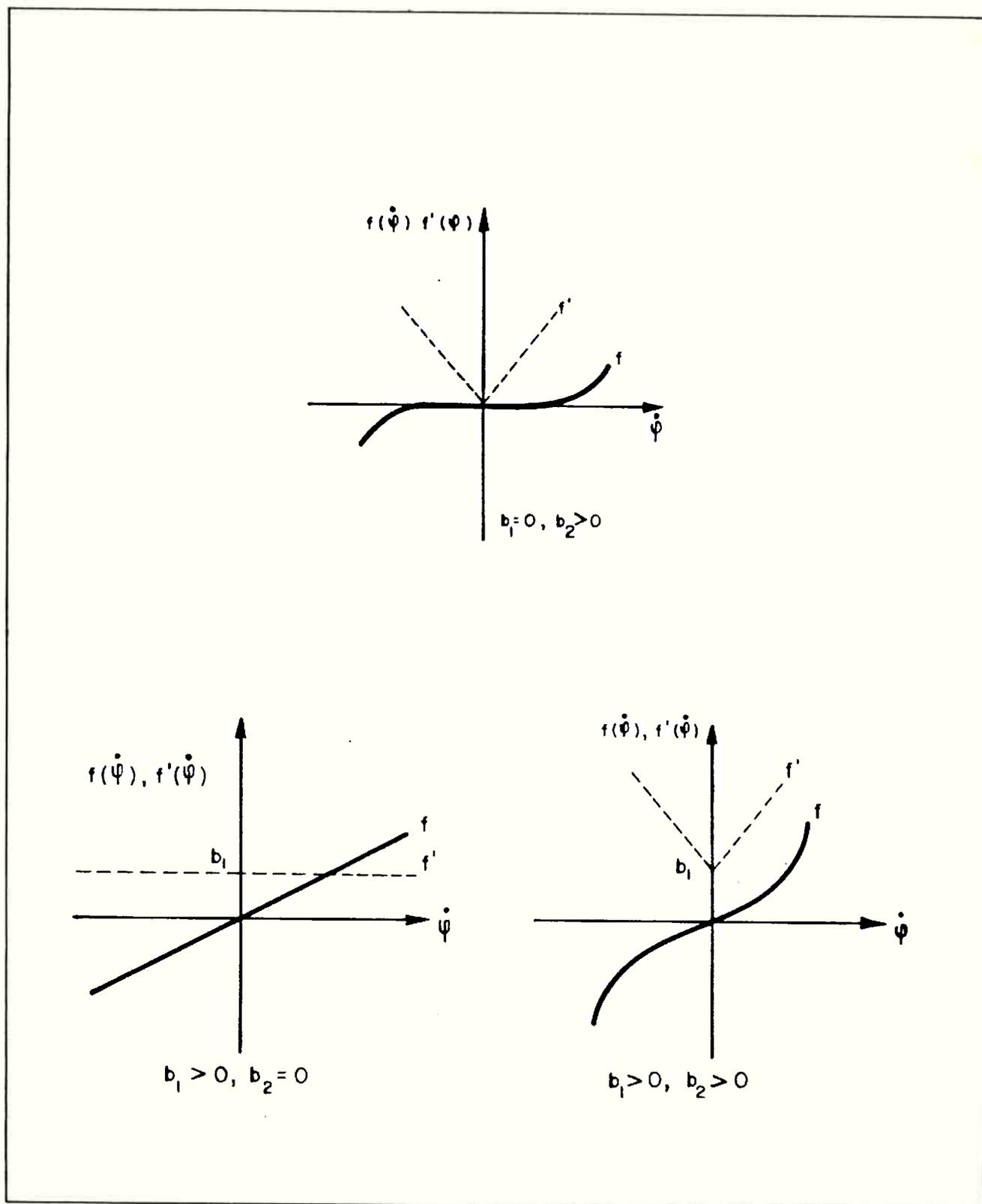


Figura III.1 - Ilustração de $f(\dot{\phi}) = b_1\dot{\phi} + b_2\dot{\phi}|\dot{\phi}|$, $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$,
e de $f'(\dot{\phi}) = b_1 + b_2|\dot{\phi}|$, $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$

Quanto à função $g(\phi) = c_1\phi + c_3\phi^3$, $c_1 > 0$, note-se que é contínua e continuamente diferenciável em $(-\infty, +\infty)$, seja $c_3 < 0$ ou $c_3 > 0$, como está ilustrado na figura III.2a. No entanto, a hipótese

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} g(\phi) = \pm\infty$$

somente é satisfeita para $c_3 > 0$, caso em que $g(\phi)$ verifica todas as hipóteses do teorema T1. No caso $c_3 < 0$ a hipótese (c) de T1 não é satisfeita. Porém, se uma solução limitada de (II.4.9) é conhecida, satisfazendo

$$|\phi(t)| \leq \phi_e \text{ para } t \in [t_0, \infty),$$

com $\phi_e > 0$, daí uma função $g_e(\phi)$, tal que

$$g_e(\phi) = g(\phi) \text{ para } \phi \leq \phi_e,$$

que satisfaça as hipóteses (a), (b) e (c) de T1 pode ser construída (ver figura III.2b). No caso linear ($c_3 = 0$) todas as hipóteses de T1 são satisfeitas.

A $\eta(t) = \frac{\eta}{a} \cos(\omega t)$ é contínua e limitada para todo t , verificando as hipóteses de T1.

Assim, fica assegurada a existência e unicidade do problema (II.4.9) - (III.1.2) no caso $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ (b_1 e b_2 não simultaneamente nulos), $c_1 > 0$ e $c_3 \geq 0$. Uma vez que haja solução limitada e $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ (b_1 e b_2 não simultaneamente nulos), $c_1 > 0$ e $c_3 < 0$, garante-se sua unicidade.

Além da existência e unicidade de soluções, outras questões sobre o problema (II.4.9) - (III.1.2) podem ser suscitadas, como:

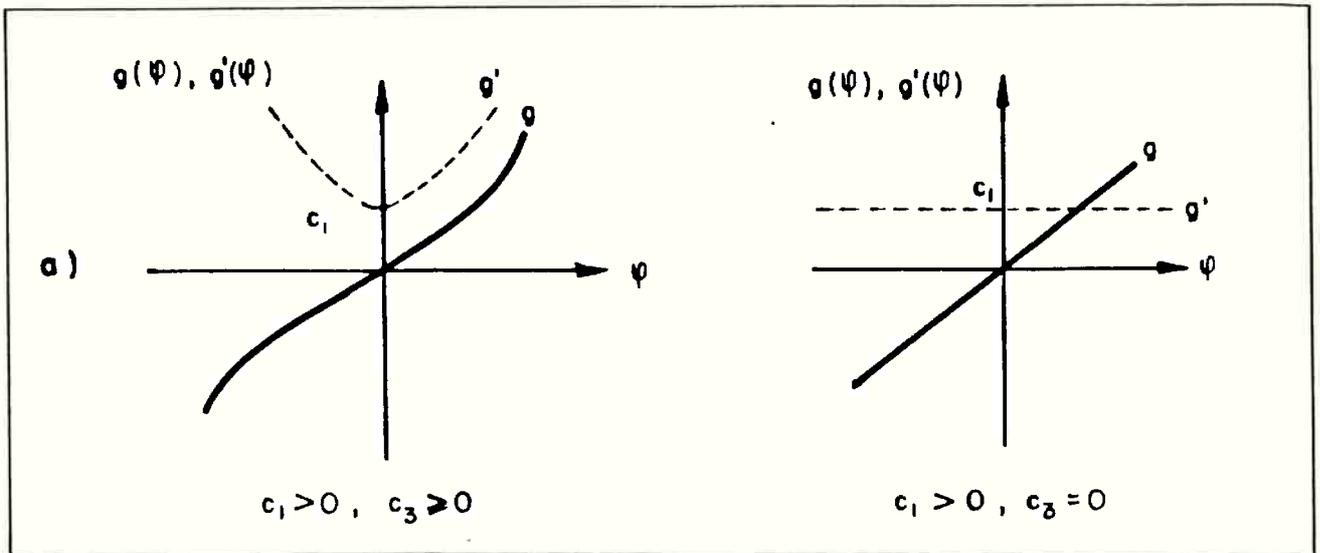


Figura III.2a - Ilustração de $g(\phi) = c_1\phi + c_3\phi^3$, $c_1 > 0$, $c_3 \geq 0$, e de $g'(\phi) = c_1 + 3c_3\phi^2$, $c_1 > 0$, $c_3 \geq 0$

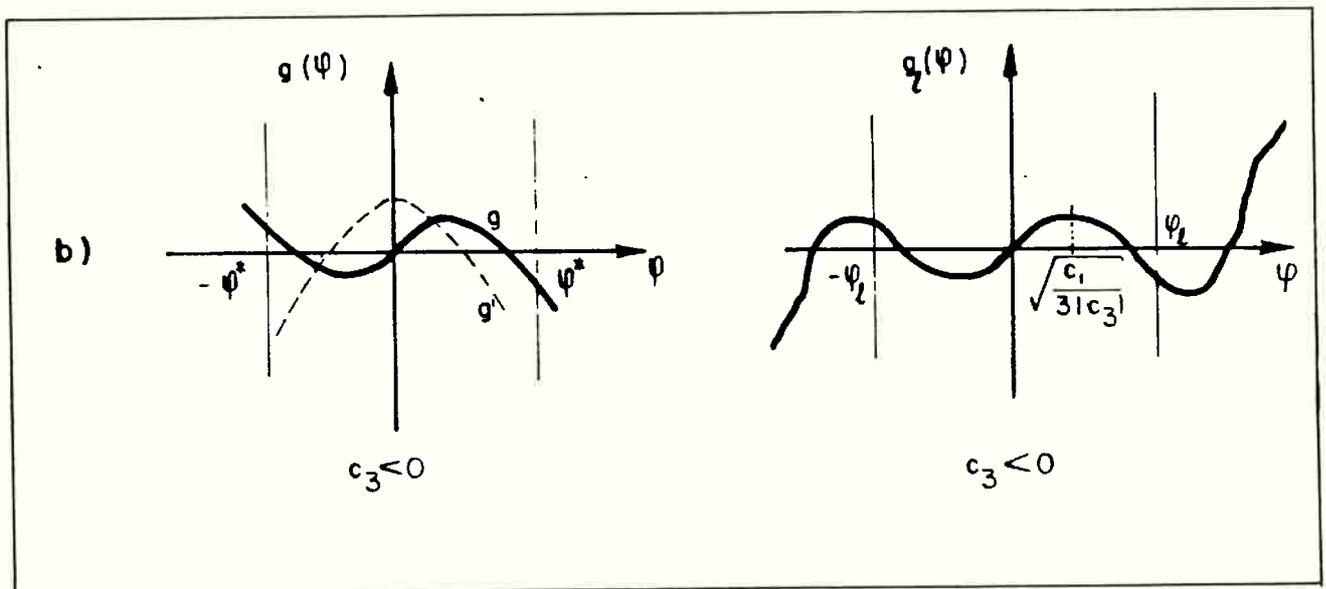


Figura III.2b - Ilustração de $g(\phi) = c_1\phi + c_3\phi^3$, $c_1 > 0$, $c_3 < 0$, e de $g_\ell(\phi) = g(\phi)$, para $|\phi| \leq \phi_\ell$, satisfazendo a hipótese (c) de T1

- Em que casos ocorreria solução periódica para alguma condição inicial?
- Em que casos haveria solução periódica para apenas uma condição inicial?
- Em que casos haveria solução estacionária?

Convém explicitar algumas definições que estão subjacentes nos termos utilizados acima:

DEFINIÇÃO D1:

Uma solução $\phi(t)$ de (II.4.9) definida em $[t^-, \infty)$, é periódica de período $T > 0$ se, para todo $t \in [t^-, \infty)$, verificar-se:

$$\phi(t+T) = \phi(t),$$

e se para algum $\tau_1 \in [t^-, \infty)$ e algum $\tau_2 \in [t^-, \infty)$, tais que $|\tau_1 - \tau_2| < T$, verificar-se:

$$\phi(\tau_1) \neq \phi(\tau_2).$$

DEFINIÇÃO D2:

Uma solução $\bar{\phi}(t)$ de (II.4.9), definida em $[t^-, \infty)$, é dita estável para $t \rightarrow \infty$ se, para quaisquer $t_0 > t^-$ e $\epsilon > 0$, existir um $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que, para qualquer solução $\phi(t)$ de (II.4.9), definida em $[t^-, \infty)$, satisfazendo

$$|\phi(t_0) - \bar{\phi}(t_0)| < \delta, \quad |\dot{\phi}(t_0) - \dot{\bar{\phi}}(t_0)| < \delta,$$

valer:

$$|\phi(t) - \bar{\phi}(t)| < \varepsilon \quad , \quad |\dot{\phi}(t) - \dot{\bar{\phi}}(t)| < \varepsilon$$

para todo $t_0 \leq t < \infty$.

Uma solução não estável é dita instável. Se $\delta(\varepsilon, t_0)$ depender so mente de ε , a solução $\bar{\phi}(t)$ é dita uniformemente estável.

DEFINIÇÃO D3:

Uma solução $\bar{\phi}(t)$ de (II.4.9), definida em $[t^-, \infty)$, é dita assinto ticamente estável para $t \rightarrow \infty$ se fôr estável e se, dado qualquer $t_0 > t^-$, existir um $\delta(t_0) > 0$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t) - \bar{\phi}(t)| = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\phi}(t) - \dot{\bar{\phi}}(t)| = 0$$

para qualquer solução $\phi(t)$ de (II.4.9), definida em $[t^-, \infty)$, satisfa zendo

$$|\phi(t_0) - \bar{\phi}(t_0)| < \delta(t_0) \quad , \quad |\dot{\phi}(t_0) - \dot{\bar{\phi}}(t_0)| < \delta(t_0).$$

Se $\delta(t_0)$ não depender de t_0 , a solução $\bar{\phi}(t)$ é dita uniformemente assintoticamente estável.

DEFINIÇÃO D4:

Uma solução periódica que é assintoticamente estável para $t \rightarrow \infty$ é dita estacionária.

Se a equação do movimento tiver uma solução estacionária, todas as outras soluções são ditas transitórias.

A figura III.3 ilustra algumas possíveis situações para as soluções. Em (a) tem-se a existência de uma solução periódica para uma única condição inicial, porém tal solução não é assintoticamente estável. Em (b) tem-se soluções para mais de uma condição inicial, sendo que obviamente nenhuma delas poderia ser estacionária. Em (c) tem-se uma solução periódica assintoticamente estável, e portanto estacionária, sendo que todas as demais soluções são transitórias.

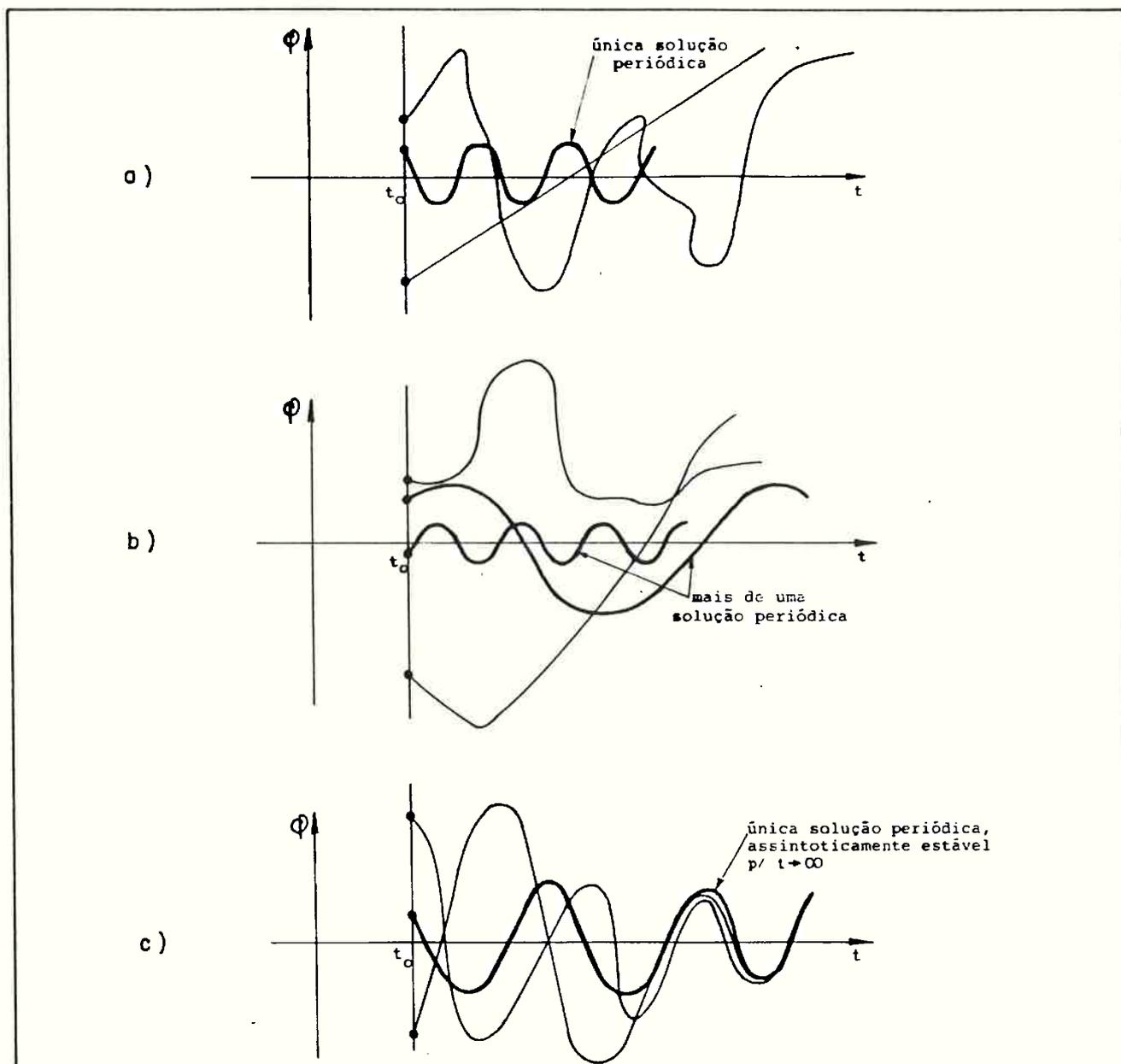


Figura III.3 - Gráficos de $\phi(t)$ para diversas condições iniciais

O interesse da verificação da existência de soluções estacionárias está na redução do número de situações a serem analisadas. De fato, considere-se, por exemplo, uma embarcação sob determinadas condições de ondas (parâmetros b_1 , b_2 , c_1 , c_3 , ω e η_a fixados). A figura II.4(a) ilustra um caso em que não há solução estacionária. A figura II.4(b) ilustra outra situação, em que a solução estacionária existe. No caso (a), diversas soluções devem ser obtidas, para longos intervalos de tempo, para que se tenha alguma clareza sobre o comportamento da embarcação em balanço. No caso (b), uma vez obtida a solução estacionária, as soluções transitórias podem ser estudadas por simulações realizadas em intervalos de tempo reduzidos.

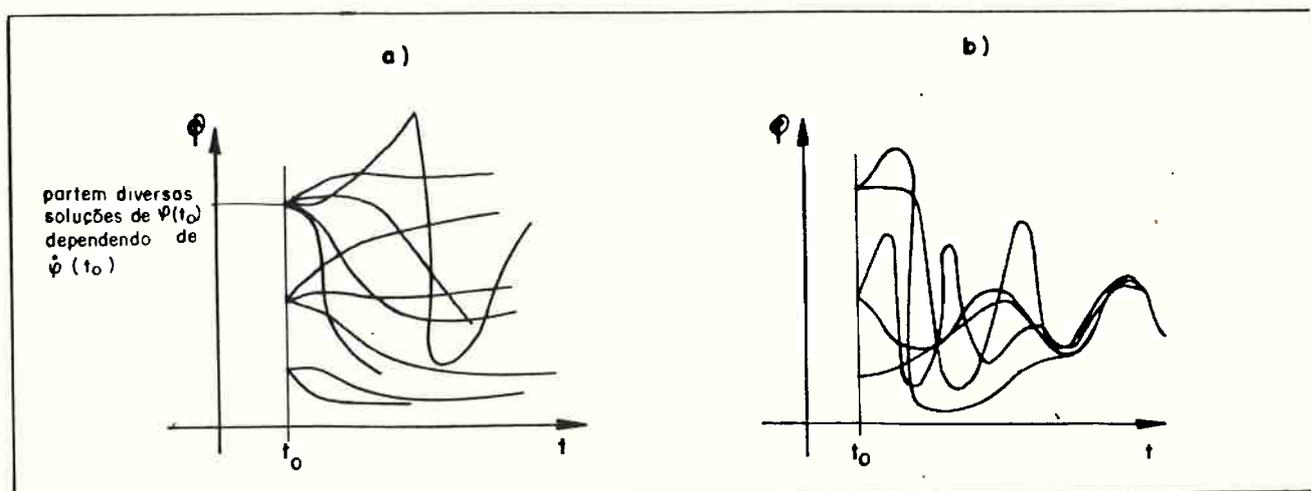


Figura III.4 - Ilustração de situações em que não há(a) e em que há(b) solução estacionária

Respostas às questões colocadas podem ser encontradas considerando alguns teoremas como, por exemplo, o seguinte (ref.25, teorema 9, pág. 154):

TEOREMA T2:

Se $g(\phi)$, $f(\dot{\phi})$ e $\eta(t)$ satisfazem as hipóteses (a) e (c) do teore

ma T1, daí, existem duas constantes positivas, \mathcal{A} e \mathcal{B} , tais que, para toda solução da equação (II.4.9), existe um $T_0 > 0$ tal que

$$|\phi(t)| \leq \mathcal{A} \quad , \quad |\dot{\phi}(t)| \leq \mathcal{B}$$

para $t \geq T_0$.

TEOREMA T3:

Se $g(\phi)$, $f(\dot{\phi})$ e $\eta(t)$ satisfazem as hipóteses do teorema T1, e se as funções $g'(\phi)$, $g''(\phi)$ e $f'(\dot{\phi})$ existem para $|\phi| \leq \mathcal{A}$ e $|\dot{\phi}| \leq \mathcal{B}$ e satisfazem as condições

$$\begin{aligned} g'(\phi) &\geq 0 \quad \text{para } |\phi| \leq \mathcal{A}, \\ f'(\dot{\phi}) &> 0 \quad \text{para } |\dot{\phi}| \leq \mathcal{B}, \\ 2 \inf_{|\dot{\phi}| \leq \mathcal{B}} \frac{f'(\dot{\phi})}{|\dot{\phi}|} &> \sup_{|\phi| < \mathcal{A}} \frac{|g''(\phi)|}{g'(\phi)}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.3})$$

onde \mathcal{A} e \mathcal{B} são tais que

$$|\phi(t)| \leq \mathcal{A} \quad \text{e} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq \mathcal{B},$$

e se $\eta(t)$ é periódica de período T , então a equação (II.4.9) tem exatamente uma solução periódica com período T , e esta solução é asintoticamente estável para $t \rightarrow \infty$.

O teorema T3 refere à existência e unicidade de soluções periódicas asintoticamente estáveis, ou seja, estacionárias.

Há dois casos a considerar: $c_3 \geq 0$ e $c_3 < 0$.

No caso $c_3 \geq 0$, já se verificou que $g(\phi)$, $f(\dot{\phi})$ e $\eta(t) = \eta_a \cos(\omega t)$ da

equação (II.4.9) satisfazem as hipóteses de T1 e portanto, por T2 as soluções e suas derivadas primeiras são limitadas para $t \geq T_0 > 0$ para algum T_0 . Tem-se também:

$$g'(\phi) = c_1 + 3c_3\phi^2 > 0 \text{ para todo } \phi \text{ (já que } c_1 > 0),$$

$$f'(\dot{\phi}) = b_1 + 2b_2|\dot{\phi}| > 0 \text{ para todo } \dot{\phi} \text{ (já que } b_1, b_2 \geq 0,$$

$$\text{e ou } b_1 \neq 0 \text{ ou } b_2 \neq 0),$$

$$\eta_{a \cos}(\omega t) \text{ é periódica de período } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Para $c_3 \geq 0$, assim, resta verificar a inequação (III.1.3). Seu primeiro membro vale:

$$2 \inf_{(\dot{\phi} \text{ real})} \frac{f'(\dot{\phi})}{|\dot{\phi}|} = 2 \inf_{(\dot{\phi} \text{ real})} \frac{b_1 + 2b_2|\dot{\phi}|}{|\dot{\phi}|} = 4b_2 \quad (\text{III.1.4})$$

O gráfico de $f'(\dot{\phi})/|\dot{\phi}|$ está esquematizado na figura III.5a. O segundo membro de (III.1.3) vale (ver figura III.5b).

$$\sup_{(\phi \text{ real})} \frac{|g''(\phi)|}{g'(\phi)} = \sup_{(\phi \text{ real})} \frac{|6c_3\phi|}{c_1 + 3c_3\phi^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3c_3}{c_1}} \quad (\text{III.1.5})$$

Dáí, substituindo (III.1.4) e (III.1.5) em (III.1.3) chega-se à seguinte inequação:

$$4b_2 > \sqrt{\frac{3c_3}{c_1}} \quad (\text{III.1.6})$$

Se (III.1.6) valer, todas as hipóteses de T3 no caso $c_3 \geq 0$ ficam verificadas, e existirá uma solução estacionária de mesmo período da excitação: $T = 2\pi/\omega$.

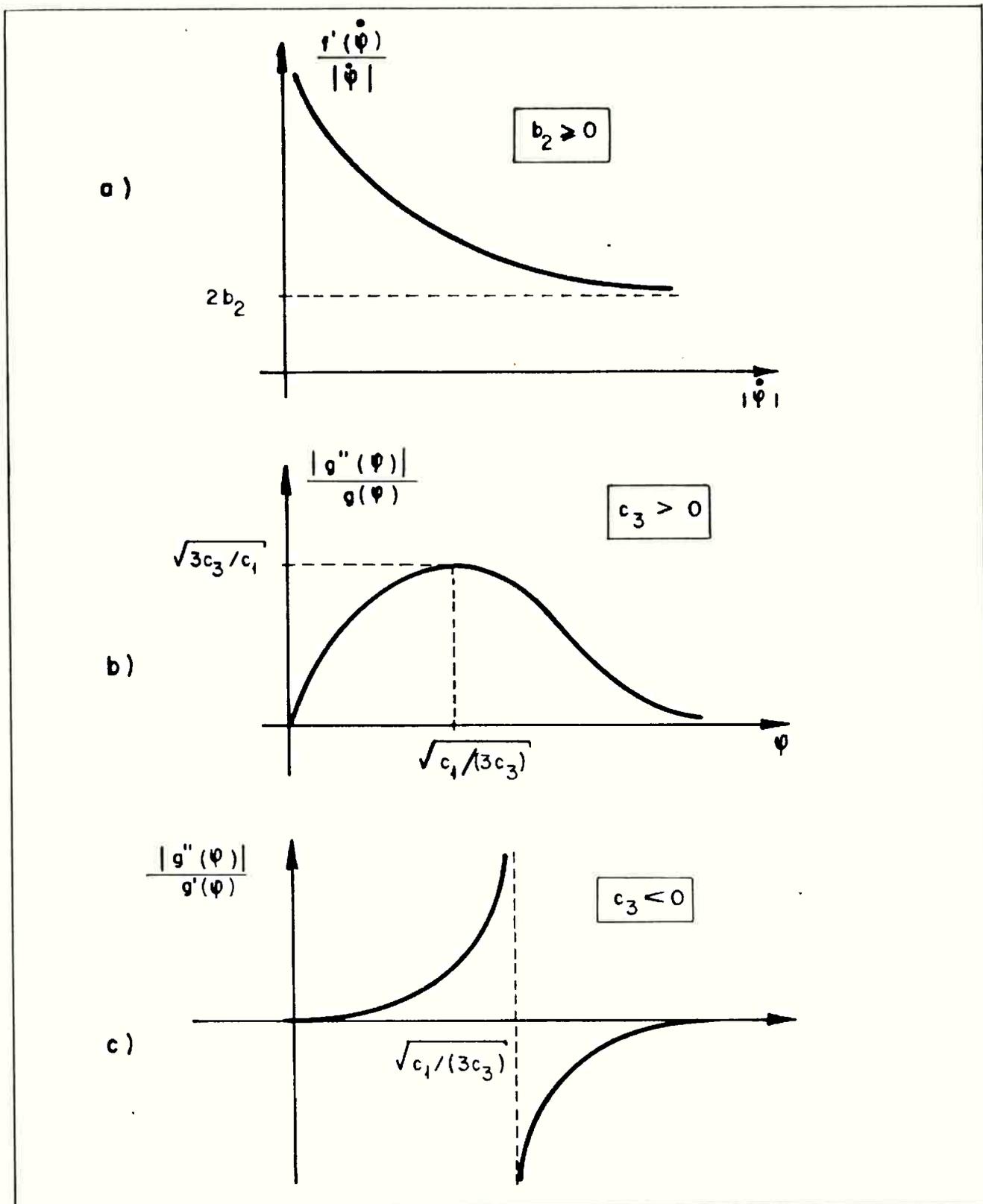


Figura III.5 - Curvas de $f'(\dot{\phi})/|\dot{\phi}|$ versus $|\dot{\phi}|$ e $|g''(\phi)|/g'(\phi)$ versus $|\phi|$

A relação (III.1.6) é uma condição suficiente para existência de solução estacionária no caso $c_3 \geq 0$. No entanto, se já se conhece uma solução periódica de período $2\pi/\omega$, pode-se chegar a condições menos restritivas para verificar sua estacionaridade. De fato, supondo que a solução periódica seja dada por

$$\phi(t) = \phi_a \cos(\omega t + \nu), \quad (\text{III.1.7})$$

onde ϕ_a é sua amplitude e ν a diferença de fase com relação à excitação, verifica-se que:

$$|\phi(t)| \leq \phi_a, \quad \text{e} \quad |\dot{\phi}(t)| \leq \omega \phi_a.$$

Nessas condições, o primeiro membro de (III.1.3) fica (ver figura III.5(a)):

$$2 \inf_{|\phi| \leq \omega \phi_a} \frac{b_1 + 2b_2 |\dot{\phi}|}{|\dot{\phi}|} = \frac{2b_1}{\omega \phi_a} + 4b_2 \quad (\text{III.1.8})$$

O segundo membro de (III.1.3) fica (ver figura III.5(b)):

$$\begin{aligned} & \sup_{|\phi| \leq \phi_a} \frac{6c_3 |\phi|}{c_1 + 3c_3 \phi^2} = \\ & = \begin{cases} \frac{6c_3 \phi_a}{c_1 + 3c_3 \phi_a^2}, & \text{se } \phi_a < \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \\ \frac{3c_3}{c_1}, & \text{se } \phi_a \geq \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \end{cases} \quad (\text{III.1.9}) \end{aligned}$$

Daí, ainda para $c_3 \geq 0$, uma vez conhecida uma solução da forma (III.1.7), ela será estacionária se:

$$\frac{2b_1}{\omega d_a} + 4b_2 > \begin{cases} \frac{6c_3 d_a}{c_1 + 3c_3 d_a^2}, & \text{se } d_a < \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \\ \sqrt{\frac{3c_3}{c_1}}, & \text{se } d_a \geq \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \end{cases} \quad (\text{III.1.10})$$

Considere-se agora o caso $c_3 < 0$. Observe-se o gráfico de $|g''(\phi)|/|g'(\phi)|$ versus $|\phi|$ ilustrado na figura III.5c. Verifica-se que não há supremo para ϕ real. Assim, a relação (III.1.3) nunca é verificada, e não se garantem condições suficientes para existência de soluções estacionárias pelo teorema T3. No entanto, se alguma solução da forma (III.1.7) fôr conhecida, pode-se verificar se é uma solução estacionária. De fato, considere-se inicialmente o sub-caso:

$$d_a > \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}} \quad (\text{III.1.11})$$

O segundo membro de (III.1.3) fica:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{|\phi| \leq d_a \\ d_a > \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}}}} \frac{|6c_3\phi|}{c_1 + 3c_3\phi^2} &= \\ = \frac{6|c_3|d_a}{c_1 + 3c_3d_a^2} / d_a > \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}} &< 0. \end{aligned} \quad (\text{III.1.12})$$

Como o primeiro membro de (III.1.3), dado ainda por (III.1.8), é sempre positivo, conclui-se que se valer (III.1.11), a solução periódica encontrada é sempre estacionária. Verificando agora o sub-caso:

$$d_a < \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}}, \quad (\text{III.1.13})$$

observa-se que o segundo membro de (III.1.3) fica:

$$\begin{aligned} \sup_{|\phi| \leq \phi_a} \frac{|6c_3\phi|}{c_1 + 3c_3\phi^2} &= \\ \phi_a < \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}} & \\ = \frac{6|c_3|\phi_a}{c_1 + 3c_3\phi_a^2} / \phi_a < \sqrt{\frac{c_1}{3|c_3|}} &> 0. \end{aligned} \quad (\text{III.1.14})$$

A relação (III.1.3) fica, neste caso:

$$\frac{2b_1}{\omega\phi_a} + 4b_2 > \frac{6|c_3|\phi_a}{c_1 + 3c_3\phi_a^2} \quad (\text{III.1.15})$$

Nada se pode afirmar para $\phi_a = \sqrt{c_1/(3|c_3|)}$. Em resumo, pode-se a firmar que quando $c_3 < 0$, soluções periódicas da forma (III.1.7) são estacionárias se valer (III.1.11) ou, (III.1.13) e (III.1.15).

A tabela III.1 resume as conclusões desta seção.

Tabela III.1 - Resultados sobre existência, unicidade e estacionariedade de soluções da equação

$$\ddot{\phi} + b_1 \dot{\phi} + b_2 |\phi| |\dot{\phi}| + c_1 \phi + c_3 \phi^3 = \eta_a \cos(\omega t)$$

com $b_1, b_2 \geq 0$ (ou $b_1 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$) e $c_1 > 0$

CASO	CONCLUSÕES	TEOREMA
$c_3 \geq 0$	Existem soluções únicas, dada a condição inicial.	T1
	As soluções e suas derivadas primeiras são limitadas para $t \geq T_0$, para algum $T_0 > 0$	T2
	Garante-se a existência de soluções estacionárias com mesmo período da excitação se $4b_2 > \sqrt{\frac{3c_3}{c_1}}$	T3
	Se existirem soluções periódicas de forma $\phi = \phi_a \cos(\omega t + \nu)$, garante-se que elas sejam estacionárias se $\frac{2b_1}{\omega \phi_a} + 4b_2 > \begin{cases} \frac{6c_3 \phi_a}{c_1 + 3c_3 \phi_a^2}, & \text{se } \phi_a < \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \\ \sqrt{\frac{3c_3}{c_1}}, & \text{se } \phi_a \geq \sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \end{cases}$	T3
$c_3 < 0$	Uma vez que haja soluções limitadas, dada uma condição inicial, garante-se sua unicidade	T1
	Se existirem soluções periódicas da forma $\phi = \phi_a \cos(\omega t + \nu)$, garante-se que elas sejam estacionárias se $\phi_a > \sqrt{\frac{c_1}{3 c_3 }}$ ou se $\phi_a < \sqrt{\frac{c_1}{3 c_3 }} \quad \text{e} \quad \frac{2b_1}{\omega \phi_a} + 4b_2 > \frac{6 c_3 \phi_a}{c_1 + 3c_3 \phi_a^2}$	T3

III.2 - Ressonâncias

Os valores dos coeficientes de amortecimento, b_1 e b_2 , e do coeficiente não linear de restauração, c_3 , são em geral pequenos. Daí as soluções para o problema de oscilação em balanço costumam ser obtidas por analogia ao caso $b_1=b_2=c_3=0$.

O problema (II.4.9) com condições iniciais (III.1.2) é de um sistema conservativo se $b_1=b_2=0$, nos outros casos é dito dissipativo. Considere-se inicialmente o caso de sistema conservativo com restauração linear ($c_3=0$).

Diz-se que este sistema está em "ressonância" se $\omega=\sqrt{c_1}$. A solução do problema na condição de ressonância é:

$$\phi(t) = \phi_a \cos(\omega t + \nu) + \frac{\eta_a}{2\pi} t \sin(\omega t), \quad (\text{III.2.1})$$

com ϕ_a e ν determinadas pelas condições iniciais (III.1.2). Esta solução é não-periódica e tende a infinito quando $t \rightarrow \infty$.

A solução para o problema do sistema linear conservativo na condição de não-ressonância ($\omega \neq \sqrt{c_1}$) é:

$$\phi(t) = \phi_a \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) + \frac{\eta_a \cos(\omega t)}{(c_1 - \omega^2)}, \quad (\text{III.2.2})$$

com ϕ_a e ν determinadas pelas condições iniciais. Há, neste caso, cinco situações a analisar:

- a) $\phi_a=0$. A solução resulta periódica com mesma frequência da excitação:

$$\phi(t) = \frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t), \quad (\text{III.2.3})$$

sendo chamada de "harmônica". Substituindo (III.2.2) em (II.4.9), pode-se determinar a condição para se ter $\phi_a=0$. Como:

$$\phi_a = \left[\left(\phi_0 - \frac{m/a}{c_1 - \omega^2} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{c_1} \right]^{1/2}, \quad (\text{III.2.4})$$

então ϕ_a somente se anula se:

$$\dot{\phi}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} = \sqrt{1 - \frac{m/a}{c_1 \phi_0}} \quad (\text{III.2.5})$$

As condições (III.2.5) são equivalentes a $\phi_a=0$.

b) $\omega/\sqrt{c_1}=1/n$, com n inteiro maior do que 1, excluindo a eventualidade da satisfação de (III.2.5). A solução resulta periódica, com um termo que oscila na frequência da excitação, e outro que oscila em uma frequência múltipla da frequência de excitação:

$$\phi(t) = \phi_a \cos(n\omega t + \nu) + \frac{m/a \cos(\omega t)}{c_1 - \omega^2} \quad (\text{III.2.6})$$

O termo $m/a \cos(\omega t)/(c_1 - \omega^2)$ é a solução harmônica, e o termo $\phi_a \cos(n\omega t + \nu)$ solução ultra-harmônica.

c) $\omega/\sqrt{c_1}=n$, com n inteiro maior do que 1, excluindo a eventualidade da satisfação de (III.2.5). A solução resulta periódica, com um termo que oscila na frequência da excitação, e outro que oscila em uma frequência sub-múltipla da frequência de excitação:

$$\phi(t) = \phi_a \cos\left(\frac{\omega t}{n} + \nu\right) + \frac{m/a \cos(\omega t)}{c_1 - \omega^2} \quad (\text{III.2.7})$$

O termo $\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t)$ é a solução harmônica, e o termo $\phi_a \cos(\omega t/n + \nu)$ é chamado de solução sub-harmônica.

d) $\omega/\sqrt{c_1} = m/n$, com m e n inteiros maiores do que 1 e primos entre si, excluindo a eventualidade da satisfação de (III.2.5). A solução resulta periódica, com um termo que oscila na frequência da excitação, e outro que oscila com uma frequência que é uma fração racional não inteira, com inverso não inteiro, maior ou menor do que 1, da frequência de excitação:

$$\phi(t) = d_a \cos\left(\frac{n\omega t}{m} + \nu\right) + \frac{\eta_a \cos(\omega t)}{c_1 - \omega^2} \quad (\text{III.2.8})$$

O termo $\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t)$ é a solução harmônica, e o termo $\phi_a \cos(n\omega t/m + \nu)$ é chamado de solução ultra-subharmônica.

e) $\omega/\sqrt{c_1}$ é irracional, a menos do caso em que as condições iniciais satisfaçam (III.2.5). A solução resulta não periódica, embora limitada:

$$\phi(t) = d_a \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) + \frac{\eta_a \cos(\omega t)}{c_1 - \omega^2} \quad (\text{III.2.9})$$

O termo $\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t)$ ainda é a solução harmônica, como nos casos anteriores.

Considere-se agora o caso de sistema dissipativo com restauração linear. A solução é:

$$\phi(t) = \phi_h(t) + \phi_p(t), \quad (\text{III.2.10})$$

onde

$$\phi_p(t) = \frac{m_a}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \nu), \quad (\text{III.2.11})$$

com $\nu \in [-\pi, 0]$ tal que

$$\sin \nu = -\frac{b_1 \omega}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}}, \quad (\text{III.2.12})$$

$$\cos \nu = \frac{c_1 - \omega^2}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}},$$

$$e \quad \phi_h(t) = \begin{cases} k_1 \exp[-\sqrt{c_1} t (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})] + \\ \quad + k_2 \exp[-\sqrt{c_1} t (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})] \text{ para } \zeta > 1, \\ (a_1 + a_2 t) \exp(-\frac{b_1 t}{2}) \text{ para } \zeta = 1, \\ a_0 \exp(-\frac{b_1 t}{2}) \cos(\sqrt{c_1} t \sqrt{1 - \zeta^2} + \gamma) \text{ para } 0 < \zeta < 1, \end{cases} \quad (\text{III.2.13})$$

com $\zeta = b_1 / (2\sqrt{c_1})$, e k_1, k_2, a_1, a_2, a_0 e γ constantes determinadas a partir das condições iniciais:

$$k_1 = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \phi_0 - \frac{m_a \cos \nu}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right\} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \dot{\phi}_0 + \frac{\omega m_a \sin \nu}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right\},$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \phi_0 - \frac{m_a \cos \nu}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right\} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \dot{\phi}_0 + \frac{\omega m_a \sin \nu}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right\},$$

$$a_0 = \left\{ \left[\phi_0 - \frac{m_a \cos \nu}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right]^2 + \right.$$

$$+ \left[-\frac{1}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} \left[\dot{\phi}_0 + \frac{m_a (\omega \xi \sin V - b_1 (\cos V)/2)}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right] \right]^2 \Bigg\}^{1/2},$$

$$\eta = \arctg \frac{-\frac{1}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} \left[\dot{\phi}_0 + \frac{m_a (\omega \xi \sin V - b_1 (\cos V)/2)}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}} \right]}{\phi_0 - \frac{m_a \cos V}{[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}}},$$

$$a_1 = \phi_0, \quad a_2 = \frac{b_1 \phi_0}{2} + \dot{\phi}_0.$$

Somente existe solução periódica quando $\phi_h(t) \equiv 0$. Para qualquer outra solução, correspondendo a outras condições iniciais, vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t) - \phi_p(t)| = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}_p(t)| = 0,$$

e portanto $\phi(t)$ é assintoticamente estável para $t \rightarrow \infty$; a solução $\phi_p(t)$ é estacionária. É interessante notar que, por possuírem sempre solução estacionária com a mesma frequência da excitação, os sistemas dissipativos lineares não podem apresentar soluções sub, ultra- ou ultrasubharmônicas.

Apesar das soluções dos sistemas dissipativos lineares serem sempre limitadas, o termo ressonância também é empregado, e se refere à situação em que, fixando a amplitude de excitação e variando ω , resulte amplitude máxima para a solução estacionária. De (III.2.11)

observa-se que a ressonância ocorre quando $[(c_1 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2]^{1/2}$ for mínimo, o que corresponde a

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{2c_1}} \quad (\text{III.2.14})$$

A tabela III.2 resume as conclusões para os sistemas lineares.

A seguir, vai-se analisar o caso dos sistemas não-lineares. Pela tabela III.1 verifica-se que, se o amortecimento for "grande o suficiente", garante-se a existência de soluções estacionárias com o mesmo período da excitação. Neste caso não é possível ocorrerem soluções não harmônicas. No entanto, se o amortecimento e o termo não linear da restauração forem "pequenos", o sistema se "aproxima" de um sistema linear conservativo, e poderá haver a possibilidade de ocorrência de soluções não harmônicas.

É conveniente conceituar mais precisamente o que seriam as oscilações sub-, ultra- e ultrasubharmônicas para sistemas não-lineares fracamente amortecidos. Para tanto, considere-se a equação

$$\ddot{\phi} + \epsilon \bar{f}(\phi) + c_1 \phi + \epsilon \bar{g}(\phi) = \eta_a \cos(\omega t), \quad (\text{III.2.15})$$

com as condições iniciais

$$\phi(t_0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0, \quad (\text{III.2.16})$$

sendo $0 < \epsilon \ll 1$, indicando que o amortecimento e as não-linearidades na restauração são reduzidos. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, a equação tende para o sistema linear conservativo excitado harmonicamente. Ora, poderão existir valores iniciais (que dependam de ϵ , para os quais haja so

Tabela III.2 - Resultados sobre soluções da equação linear

$$\ddot{\phi} + b_1 \dot{\phi} + c_1 \phi = \frac{\mathcal{M}}{a} \cos(\omega t)$$

CASO	CONCLUSÕES
$b_1 = 0$ (sistema conservativo)	<p>Dada qualquer frequência $\omega \neq \sqrt{c_1}$, há uma condição inicial $\phi_0 = \frac{\mathcal{M}}{a} / (c_1 - \omega^2)$, $\dot{\phi}_0 = 0$ para a qual existe somente solução harmônica;</p> <p>Para quaisquer outras condições iniciais e $\omega \neq \sqrt{c_1}$, além da solução harmônica, há soluções não harmônicas, porém limitadas;</p> <p>A situação $\omega = \sqrt{c_1}$ é dita ressonância, e as soluções não são limitadas;</p> <p>Não há soluções estacionárias</p>
$b_1 \neq 0$ (sistema dissipativo)	<p>Há sempre soluções estacionárias;</p> <p>A situação $\omega = \sqrt{1 - b_1^2 / (2c_1)}$ é dita ressonância e ocorrem máximos (limitados) da solução relativamente à frequência de excitação.</p>

luções periódicas que se aproximem daquelas para o sistema linear conservativo, à medida em que $\varepsilon \rightarrow 0$, quando $\omega/\sqrt{c_1}$ fica próximo de um dos valores $\sqrt{1-\eta_a/(c_1\phi_0)}$, n , $1/n$, m/n . Os valores de $\omega/\sqrt{c_1}$ poderão depender também de ε . Daí:

- diz-se que uma solução periódica da equação (III.2.15) é harmônica ou ultraharmônica (com relação à excitação externa) se a razão $\omega/\sqrt{c_1(\varepsilon)}$ tender a $\sqrt{1-\eta_a/(c_1\phi_0)}$ ou a $1/n$, respectivamente, quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- diz-se que uma solução periódica da equação (III.2.15) é subharmônica ou ultrasubharmônica (com relação à excitação externa) se a razão $\omega/\sqrt{c_1(\varepsilon)}$ tender a n ou m/n , respectivamente, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para estes sistemas não-lineares, emprega-se o termo "ressonância" com vários qualificativos. Sendo m , n inteiros, não nulos, tem-se:

- ressonância principal, quando $\sqrt{c_1} \cong \omega$, para se referir às soluções estacionárias (se existirem) de maior amplitude, para cada η_a fixado;
- ressonância subharmônica, quando $\sqrt{c_1} \cong \omega/n$, para se referir às soluções subharmônicas;
- ressonância ultraharmônica, quando $\sqrt{c_1} \cong n\omega$, para se referir às soluções ultraharmônicas;
- ressonância ultrasubharmônica, quando $\sqrt{c_1} \cong n\omega/m$, para se referir às soluções ultrasubharmônicas.

III.3 - Ressonância principal. Existência de "saltos"

Não se conhecem soluções exatas para a equação (III.2.15) com condições iniciais (III.2.16), a não ser em casos particulares. No entanto, é possível obter-se soluções aproximadas. No apêndice C, seção C.1, descreve-se a aplicação do Método de Krylov e Bogoliubov (ref. 5,25) para obtenção de uma solução aproximada para o caso $\sqrt{c_1} \cong \omega$, ou seja, ressonância principal.

A primeira aproximação para uma solução periódica, com erros da ordem de ϵ^2 , para b_1 e b_2 não negativos, e não concomitantemente nulos, c_1 positivo e c_3 real, é:

$$\phi \cong \phi_a \cos(\omega t + \nu), \quad (\text{III.3.1})$$

com
$$\sin \nu = -\frac{\omega b_1 \phi_a}{m a} - \frac{8}{3\pi} \frac{\omega^2 b_2 \phi_a^2}{m a};$$

e
$$\cos \nu = \frac{\phi_a}{m a} \left(c_1 - \omega^2 + \frac{3}{4} c_3 \phi_a^2 \right)$$

(III.3.2)

A diferença de fase ν entre resposta e excitação pode ser eliminada das equações (III.3.2), resultando:

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 - c_1 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{c_3}{c_1} \phi_a^2 \right) \right]^2 + \\ & + \left[\omega b_1 + \frac{8}{3\pi} \omega^2 b_2 \phi_a \right]^2 = \frac{m a^2}{\phi_a^2} \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

A amplitude ϕ_a pode ser obtida, então de (III.3.3), e a fase ν das equações (III.3.2).

Observe-se que no caso de sistema linear dissipativo ($b_2=c_3=0$), a solução periódica dada por (III.3.1), (III.3.2) e (III.3.3) se torna exata, recaindo nas expressões (III.2.11) e (III.2.12), vistas na seção anterior.

Curvas de ϕ_a versus ω , parametrizadas em η_a , estão ilustradas na figura III.7 para $c_1 > 0$, e:

- | | |
|--|--|
| a) $b_1 > 0$; $b_2=0$ e $c_3 < 0$; | e) $b_1 > 0$; $b_2 > 0$ e $c_3 > 0$; |
| b) $b_1 > 0$; $b_2=0$ e $c_3 > 0$; | f) $b_1 = 0$, $b_2 > 0$ e $c_3 < 0$; |
| c) $b_1 > 0$; $b_2 > 0$ e $c_3 < 0$; | g) $b_1 = 0$, $b_2 > 0$ e $c_3 = 0$; |
| d) $b_1 > 0$; $b_2 > 0$ e $c_3 = 0$; | h) $b_1 = 0$, $b_2 > 0$ e $c_3 > 0$. |

Os itens acima cobrem os casos não lineares encontrados fisicamente, conforme observação na seção III.1.

Em todos os casos em que $c_3 \neq 0$ há a possibilidade de ocorrer, para certos valores de η_a , em determinada faixa de frequências, mais de uma solução harmônica. Não há nesses casos soluções estacionárias.

Observe-se, por exemplo, a figura III.8, ilustrativa dos casos $c_3 > 0$.

Verifica-se na faixa de frequências entre ω_1 e ω_2 que há três soluções possíveis. Partindo-se de ponto A e aumentando-se gradualmente a frequência de excitação, vai-se chegar ao ponto de frequência $\bar{\omega}$ com a amplitude ϕ_{as} . Continuando a aumentar ω , chega-se ao ponto B. A partir daí, novo aumento da frequência implicará em um salto para o ponto C, que fará reduzir drasticamente a amplitude de oscilação. Fisicamente, esse salto ocorre gradualmente, corres

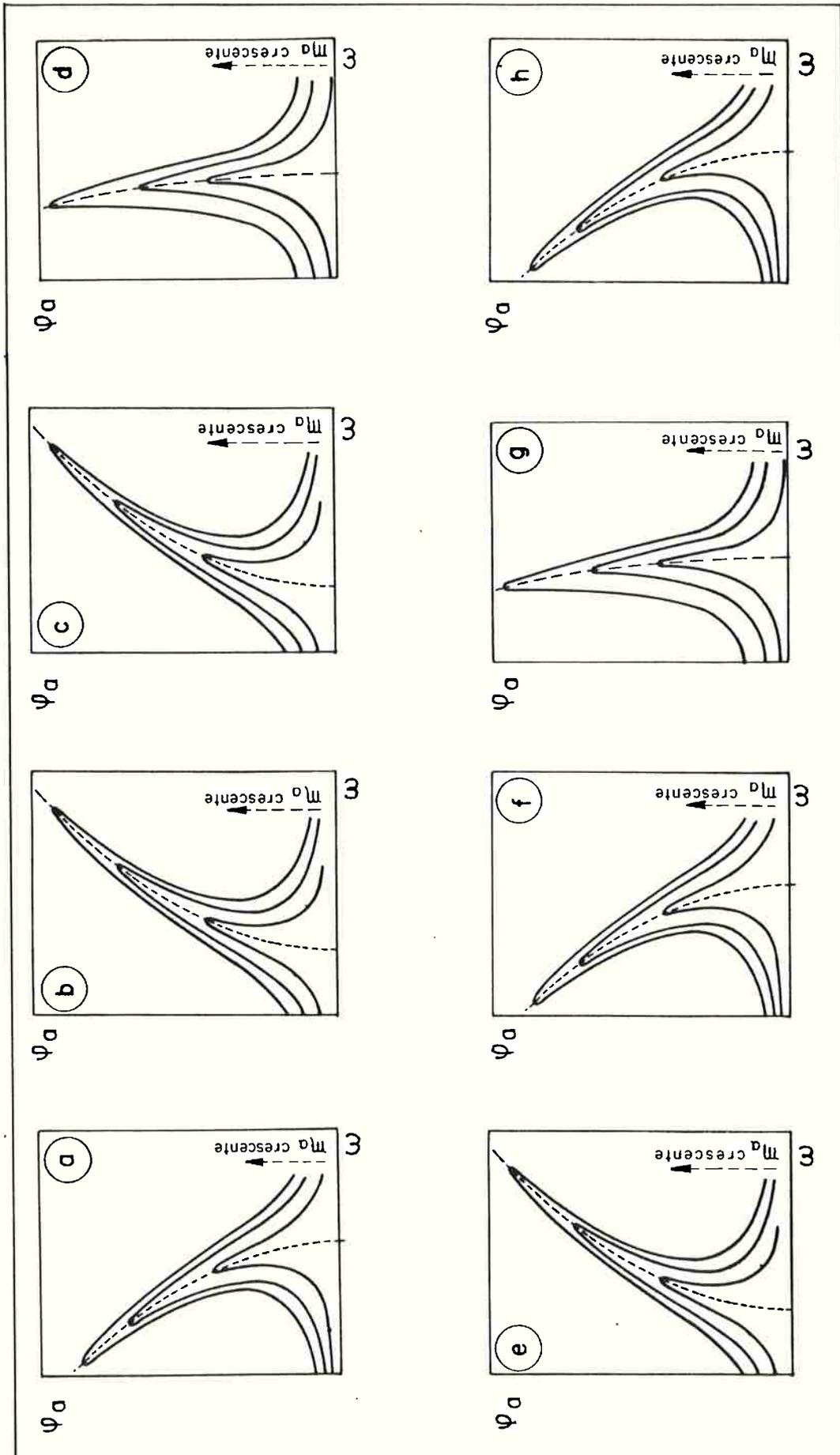


Figura III.7 - Curvas ilustrativas de ϕ_a versus ω

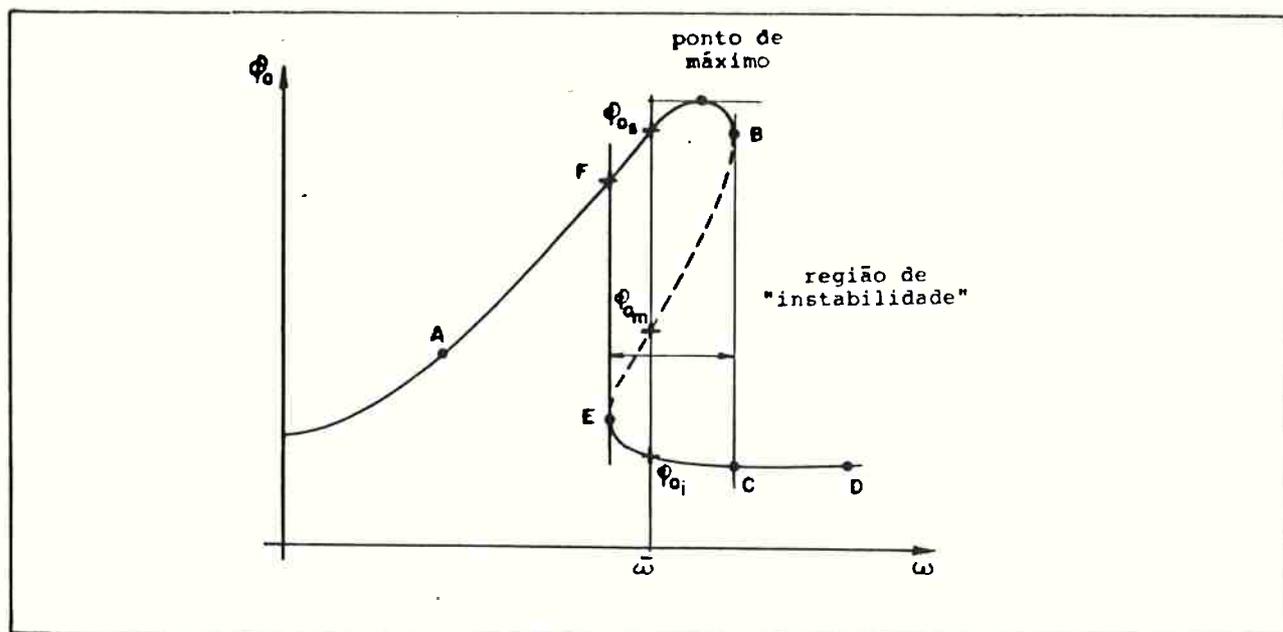


Figura III.8 - Ilustração da curva de η_a versus ω com η_a fixo, para $b_1, c_1, c_3 > 0$ e $b_2 \geq 0$

pondendo a um transitório. Inversamente, partindo do ponto D, e diminuindo gradativamente a frequência de excitação, vai-se chegar à frequência $\bar{\omega}$ com amplitude ϕ_{a_i} . Continuando-se a diminuir a frequência, atinge-se o ponto E. Daí em diante, nova tentativa de diminuição da frequência provoca aumento grande de amplitude, ocorrendo um salto para F. Vê-se que o tramo tracejado da curva é "instável".

Situação análoga pode ocorrer se se fixar ω e variar η_a , como se observa pela figura III.9.

Partindo-se do ponto A, por exemplo, e aumentando-se a amplitude do momento de excitação, chega-se ao ponto B. A partir daí, no vo aumento do momento implicará em um salto para C, com grande aumento de amplitude de oscilação. Inversamente, se se partir, por exemplo, de D, e diminuindo-se gradativamente o momento η_a , vai-se chegar a E. Uma nova tentativa de se diminuir η_a implicará em um salto para F, com redução acentuada da amplitude de oscilação.

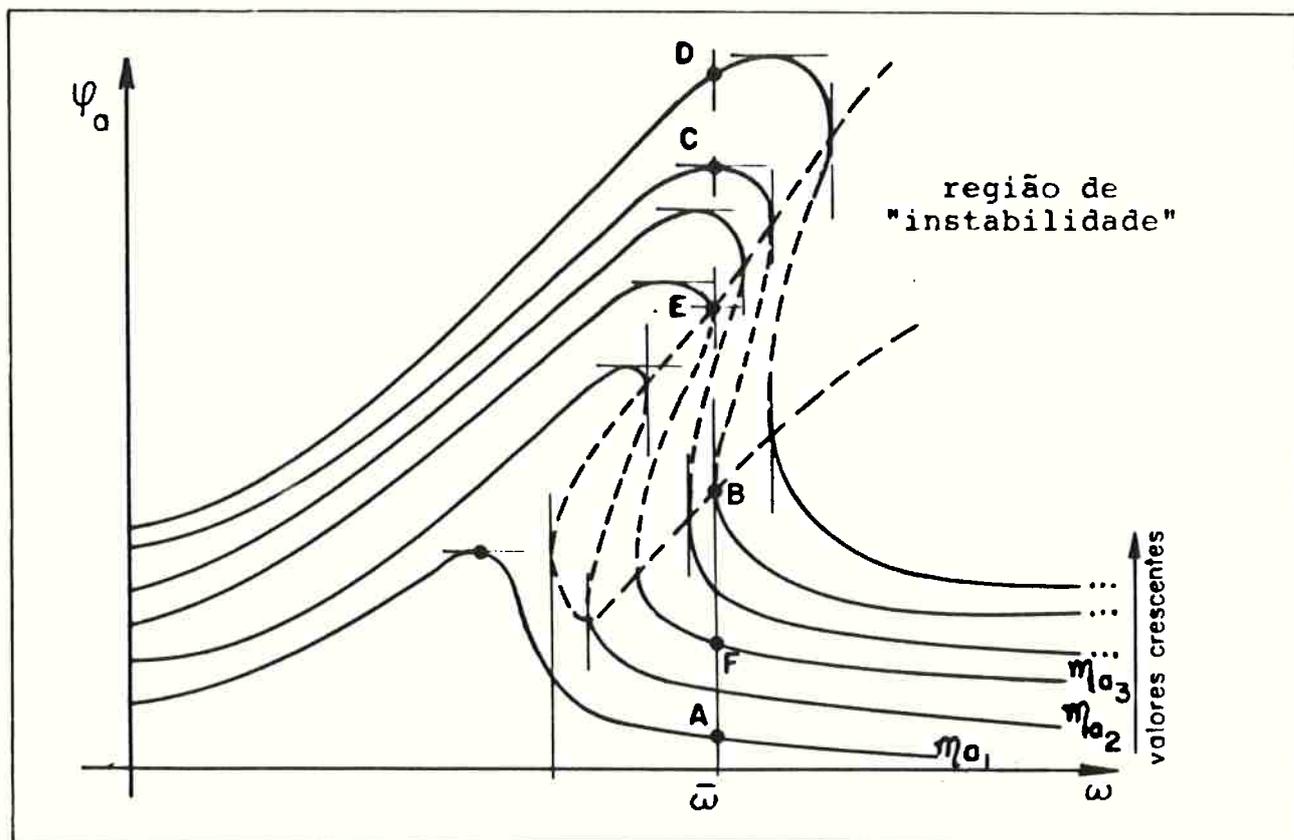


Figura III.9 - Ilustração das curvas de η_a versus ω para $b_1, c_1, c_3 > 0$ e $b_2 \geq 0$ para vários valores de η_a

No caso concreto do balanço de uma embarcação, tal fenômeno pode ocorrer, por exemplo, quando se tem um mar de vagas com energia aumentando ou diminuindo. Para mares de vagas, tem-se de (II.3.10) e (II.5.4):

$$\eta_a = \frac{I_{xx}^0}{I_v} \omega^2 \frac{kH}{2} \quad (\text{III.3.4})$$

Observa-se que um aumento de η_a pode se dever a um aumento da frequência de onda ω , a um aumento na amplitude de onda H , ou a ambos. A identificação das ocasiões em que podem ocorrer saltos, de sua magnitude e efeitos é bastante importante para a segurança da embarcação.

III.4 - Ressonância sub- e ultra-harmônicas.

No caso do sistema com amortecimento parabólico e restauração cúbica, mostra-se a seguir que apenas as ressonâncias ultra- e subharmônicas de ordem 3 podem ocorrer em aproximação de segunda ordem (ε). A afirmação acima pode ser verificada através do seguinte processo recursivo:

- Considera-se a equação:

$$\ddot{\phi} + \varepsilon b_1 \dot{\phi} + \varepsilon b_2 \phi |\dot{\phi}| + c_1 \phi + \varepsilon \bar{c}_3 \phi^3 = \eta_a \cos(\omega t); \quad (\text{III.4.1})$$

- Sabendo-se que para ε "pequeno" e ω afastado de $\sqrt{c_1}$ as soluções devem se aproximar daquelas para o sistema forçado linear não-amortecido, arbitra-se uma solução da forma (ver expressão (III.2.2)):

$$\phi^{(0)}(t) = \phi_a \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) + \frac{\eta_a \cos(\omega t)}{c_1 - \omega^2}; \quad (\text{III.4.2})$$

- Insere-se $\phi^{(0)}(t)$ na equação (III.4.1), desconsiderando-se o amortecimento, supondo-se que toda energia será transferida da excitação para a oscilação livre, "encarando" o termo $-\varepsilon \bar{c}_3 \phi^3$ como uma auto-excitação:

$$\ddot{\phi}^{(0)} + c_1 \phi^{(0)} \cong -\varepsilon \bar{c}_3 (\phi^{(0)})^3 + \eta_a \cos(\omega t); \quad (\text{III.4.3})$$

- Como $\eta_a / (c_1 - \omega^2) \cos(\omega t)$ é solução de:

$$\ddot{\phi} + c_1 \phi = \eta_a \cos(\omega t), \quad (\text{III.4.4})$$

a expressão (III.4.3) fica:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \left(\phi^{(0)} - \frac{m a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t) \right) + c_1 \left(\phi^{(0)} - \frac{m a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t) \right) = \\ & = -E \bar{c}_3 \left(\phi_a \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) + \frac{m a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t) \right)^3 \end{aligned} \quad (\text{III.4.5})$$

- Desenvolvendo o segundo membro de (III.4.5), tem-se:

$$(2^\circ \text{ membro de (III.4.5)}) =$$

$$\begin{aligned} & = -E \bar{c}_3 \left[\phi_a^3 \cos^3(\sqrt{c_1} t + \nu) + 3 \phi_a \frac{m a}{c_1 - \omega^2} \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) \cos^2(\omega t) + \right. \\ & \left. + 3 \phi_a^2 \frac{m a}{c_1 - \omega^2} \cos^2(\sqrt{c_1} t + \nu) \cos(\omega t) + \left(\frac{m a}{c_1 - \omega^2} \right)^3 \cos^3(\omega t) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -E \bar{c}_3 \left\{ \frac{1}{4} \phi_a^3 [3 \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) + \cos(3\sqrt{c_1} t + 3\nu)] + \right. \\ & \quad + \frac{3}{2} \phi_a \left(\frac{m a}{c_1 - \omega^2} \right)^2 \cos(\sqrt{c_1} t + \nu) [1 + \cos(2\omega t)] + \\ & \quad + \frac{3}{2} \phi_a^2 \frac{m a}{c_1 - \omega^2} [1 + \cos(2\sqrt{c_1} t + 2\nu)] \cos(\omega t) + \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{m a}{c_1 - \omega^2} \right)^3 [3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)] \right\} = \end{aligned}$$

$$= -E \bar{c}_3 \left\{ \underbrace{\frac{3}{4} \phi_a^3 \cos(\sqrt{c_1} t + \nu)}_{\text{leva à ressonância}} + \underbrace{\frac{1}{4} \phi_a^3 \cos(3\sqrt{c_1} t + 3\nu)}_{\text{não leva à ressonância}} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\frac{3}{2} \phi_a \left(\frac{m a}{c_1 - \omega^2} \right)^2 \cos(\sqrt{c_1} t + \nu)}_{\text{leva à ressonância}} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\frac{3}{4} \phi_a \left(\frac{m a}{c_1 - \omega^2} \right)^2 \cos[(2\omega + \sqrt{c_1})t + \nu]}_{\text{não leva à ressonância}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{3}{4} \phi_a \left(\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \right)^2 \cos \left[(2\omega - \sqrt{c_1})t - \nu \right]}_{\text{leva à ressonância quando } \omega \approx \sqrt{c_1}} + \\
& + \underbrace{\frac{3}{2} \phi_a^2 \frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos(\omega t)}_{\text{leva à ressonância quando } \omega \approx \sqrt{c_1}} + \\
& + \underbrace{\frac{3}{4} \phi_a^2 \frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos \left[(\omega + 2\sqrt{c_1})t + 2\nu \right]}_{\text{não leva à ressonância}} + \\
& + \underbrace{\frac{3}{4} \phi_a^2 \frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \cos \left[(\omega - 2\sqrt{c_1})t - 2\nu \right]}_{\text{leva à ressonância quando } \omega \approx 3\sqrt{c_1}} + \\
& + \underbrace{\frac{3}{4} \left(\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \right)^3 \cos(\omega t)}_{\text{leva à ressonância quando } \omega \approx \sqrt{c_1}} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{\eta_a}{c_1 - \omega^2} \right)^3 \cos(3\omega t)}_{\text{leva à ressonância quando } \omega \approx \sqrt{c_1}/3} \}; \tag{III.4.6}
\end{aligned}$$

- Como se observa por (III.4.6), nas frequências $\omega \approx \sqrt{c_1}$ ocorre ressonância principal, $\omega \approx \sqrt{c_1}/3$ ocorre ressonância ultra-harmônica de ordem 3, e $\omega \approx 3\sqrt{c_1}$ ocorre ressonância sub-harmônica de ordem 3.

Se, no entanto, considerar-se η_a como de segunda ordem, ou seja, $\eta_a = \epsilon \cdot \eta_a$ observa-se de (III.4.6) que a excitação da ressonância sub-harmônica é na realidade de terceira ordem (ϵ^2), e da ressonância ultra-harmônica de quinta ordem (ϵ^4).

Considera-se aqui então somente as oscilações sub-harmônicas de ordem 3. A amplitude dessas oscilações pode eventualmente comparar-se às amplitudes das correspondentes oscilações harmônicas, constituindo uma fonte de perigo para a segurança da embarcação.

No apêndice C, seção C.2, descreve-se a aplicação do Método de Krylov e Bogoliubov (ref.5,25) para obtenção de uma solução aproximada para o caso $\omega \approx 3\sqrt{c_1}$, ou seja, ressonância sub-harmônica de ordem 3. Obtém-se em primeira aproximação uma solução não periódica da forma:

$$\phi = \phi_a(t) \cos \left(\frac{\omega t}{3} + \nu(t) \right), \quad (\text{III.4.7})$$

onde ϕ_a e ν são funções do tempo, como indicado.

Para obter soluções periódicas é necessária uma aproximação de segunda ordem, chegando-se a uma solução aproximada da forma (ver apêndice C, seção C.2):

$$\begin{aligned} \phi \approx & \phi_a \cos \left(\frac{\omega t}{3} + \nu \right) + \frac{9c_3}{32\omega^2} \phi_a^3 \cos(\omega t + 3\nu) + \\ & + \frac{b_2}{15\pi} \phi_a^2 \sin(\omega t + 3\nu) - \frac{9\pi a \cos(\omega t)}{8\omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{III.4.8})$$

onde a amplitude de oscilação ϕ_a , e a diferença de fase entre excitação e resposta, ν , são constantes a determinar.

A imposição da condição de periodicidade para as soluções aproximadas de segunda ordem implica nas equações:

(A):

$$\begin{aligned} & \frac{-b_1 \phi_a}{2} - \frac{4b_2 \phi_a^2 \omega}{9\pi} + \frac{27b_1 c_3 \phi_a^4}{16\omega^2} + \\ & + \frac{9b_2 c_3 \phi_a^4}{40\pi\omega} - \frac{2b_2 \phi_a^2 (c_1 - \omega^2/9)}{\pi\omega} - \\ & - \frac{3b_2 \phi_a \pi a}{5\pi\omega} \cos(3\nu) - \frac{81}{64} \frac{c_3 \pi a \phi_a^2}{\omega^3} \sin(3\nu) = 0; \end{aligned}$$

(B):

$$\begin{aligned}
& -\frac{405}{256} \frac{\phi_a^4 c_3^2}{\omega^3} - \frac{3b_1^2}{8\omega} - \frac{b_1 b_2 \phi_a}{3\pi} + \\
& + \frac{28}{75\pi^2} b_2^2 \phi_a^2 \omega - \frac{27}{8\omega^3} (c_1 - \omega^2/g)^2 - \\
& - \frac{63}{10\pi} \frac{b_2 \eta_a}{\omega} \sin(3v) - \frac{81}{64} \frac{\phi_a c_3 \eta_a}{\omega^3} \cos(3v) + \\
& + \frac{9c_3 \phi_a^2}{8\omega} + \frac{3(c_1 - \omega^2/g)}{2\omega} - \frac{9c_3}{16\omega^3} (c_1 - \omega^2/g) = 0.
\end{aligned}$$

(III.4.9)

A resolução das equações (A) e (B) de (III.4.9) permite determinar o valor dos parâmetros ϕ_a e v em função de ω , η_a , b_1 , b_2 , c_1 e c_3 .

CAPÍTULO IV
O CASO DE EXCITAÇÃO ALEATÓRIA

No presente capítulo analisa-se o comportamento da embarcação quanto ao balanço excitado por mares de través aleatórios. Como no caso de mares regulares, também neste estudo a embarcação é vista como um oscilador de segunda ordem, com amortecimento parabólico e restauração cúbica assimétricos. As técnicas aqui empregadas para a obtenção de soluções aproximadas do problema se baseiam na utilização de resultados relativos à Equação de Fokker-Planck. Aplica-se uma analogia ao Método de Roberts (ref.79), porém representando-se os esforços hidrodinâmicos como função da diferença entre os ângulos e de declividade de ondas, ao invés de se estimar o momento excitador de balanço com a embarcação fixada na sua posição média de equilíbrio, como é a prática usual (ref.75,80). A nova representação é compatível com o fato de a maior parte da energia dos mares reais se concentrar em componentes de ondas com comprimentos bem maiores que as bocas das embarcações em estudo.

IV.1 - Considerações gerais

No capítulo III apresentaram-se soluções para o problema do balanço da embarcação sob mares de través quando o momento excitador era determinístico.

No presente capítulo considera-se o caso de momento excitador aleatório.

Vai-se considerar a representação (II.4.10) para o balanço que, expressa em termos de $\dot{\phi}^* = \dot{\phi} - \alpha$, fica:

$$\ddot{\phi}^* + b_1 \dot{\phi}^* + b_2 \phi^* |\dot{\phi}^*| + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} = \eta \quad (\text{IV.1.1})$$

($b_1, b_2 \geq 0$, não simultaneamente nulos; $c_1 > 0$; c_3 real)

Admite-se que as características das ondas possam ser representadas por processos aleatórios estacionários e ergódicos (ver seção II.6). Dado o espectro da elevação de ondas, como na forma (II.6.1)-(II.6.2), o espectro do momento excitador pode ser obtido por:

$$S_{\eta\eta} = \left(\frac{I_{XX}^0}{I_V} \omega^2 k \right)^2 S_{SS} \quad (\text{IV.1.2})$$

Vai-se tratar da obtenção de soluções aproximadas de (IV.1.1), com o momento excitador sendo um processo aleatório estacionário, ergódico, com espectro dado por (IV.1.2).

Considere-se um espaço de probabilidades $(\Lambda, \mathcal{K}, P)$ onde Λ é o espaço amostral, \mathcal{K} é uma σ -álgebra de eventos aleatórios e P uma probabilidade definida em \mathcal{K} .

Dada uma embarcação com velocidade de avanço nula, submetida a

um dado mar irregular por través, pode-se interpretar Λ como o conjunto das possíveis realizações do momento excitador do balanço da embarcação, \mathbb{K} o conjunto das partes de Λ e P uma função probabilidade sobre \mathbb{K} .

Seja $T = [t_0, \infty)$ o conjunto dos instantes de interesse, pode-se dizer que o domínio de η é o conjunto $\Lambda \times T$, e sua imagem o intervalo real $[-\eta_{\text{máx}}, \eta_{\text{máx}}]$, que se supõe conter todos os valores possíveis do momento excitador para uma dada embarcação numa determinada rota.

Assim, fixado $t = t^* \in T$, $\lambda(t^*) : \Lambda \rightarrow [-\eta_{\text{máx}}, \eta_{\text{máx}}]$ se reduz a uma variável aleatória.

Fixado $\lambda = \lambda^* \in \Lambda$, $t(\lambda^*) : T \rightarrow [-\eta_{\text{máx}}, \eta_{\text{máx}}]$ se reduz a uma função amostral correspondente a uma realização do momento excitador (ver figura IV.1).

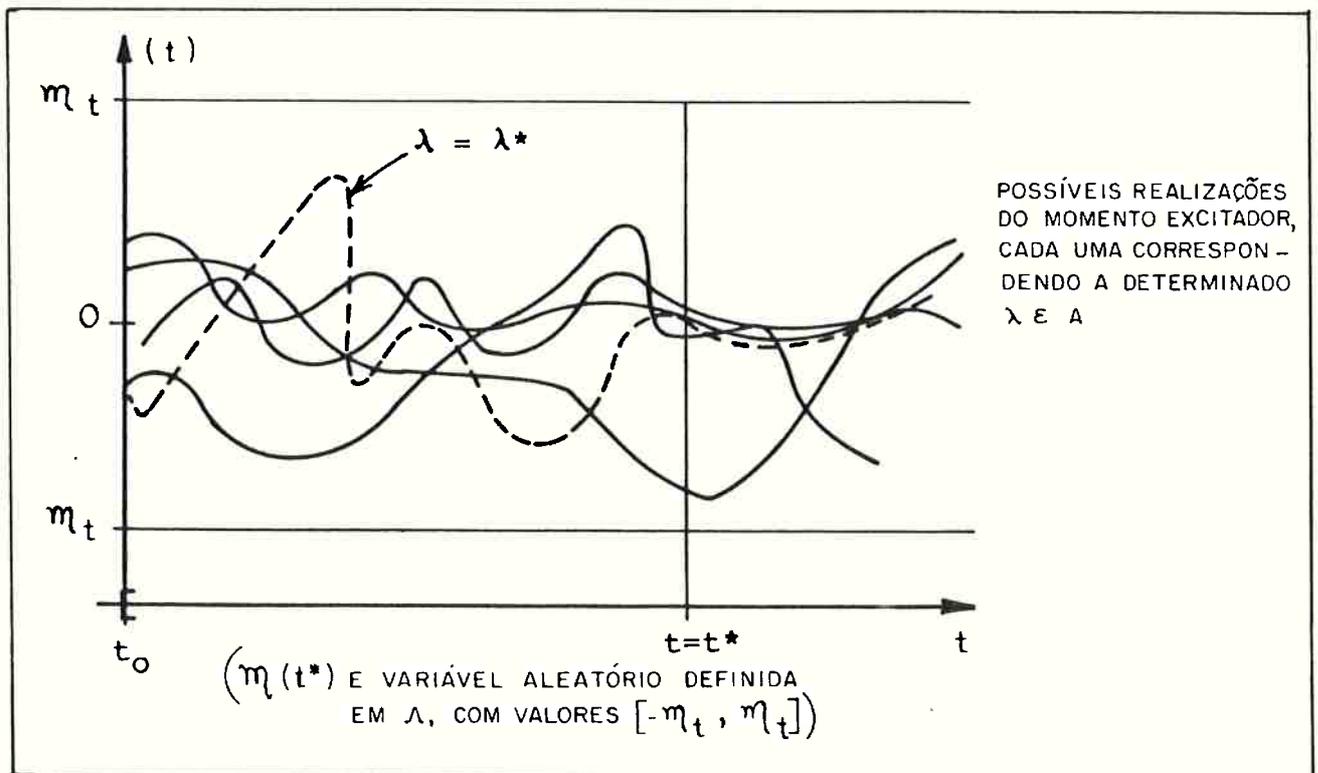


Figura IV.1 - Ilustração da interpretação do momento excitador do balanço (dividido por I_v) como processo aleatório

Se as condições de navegação e o estado de mar se mantiverem inalterados, é de se esperar que as características estatísticas do processo também não variem com o tempo. Em particular, admite-se que sua média não varie com o tempo, e que sua autocorrelação dependa de intervalos de tempo entre os instantes considerados, e não desses instantes específicos; ou seja, admite-se que seja fracamente estacionário.

Soluções ϕ^* de (IV.1.1) - (IV.1.2) também são processos aleatórios.

Objetiva-se no presente capítulo apresentar soluções fracamente estacionárias aproximadas por (IV.1.1) - (IV.1.2).

IV.2 - A equação de Fokker-Planck

Será utilizada adiante a equação de Fokker-Planck que é uma condição de certos processos ditos de Markov. Convém, então, introduzir o conceito de processos de Markov.

Para $t \in T$, vamos supor que $X_\lambda(t)$ é um processo aleatório definido no espaço (Λ, K, P) .

DEFINIÇÃO D4:

Diz-se que um processo aleatório contínuo $X(t)$ é um processo de Markov se a função densidade de probabilidade condicionada possuir a propriedade:

$$f_{t_n | t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = f_{t_n | t_{n-1}}(X_n | X_{n-1}) \quad (\text{IV.2.1})$$

para toda sequência $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$, n inteiro positivo.

A condição acima expressa que, independentemente do processo ter sido observado várias vezes, o valor da observação atual depende a penas da última observação. Diz-se que se trata de uma "memória de um passo". A densidade de probabilidade que aparece no segundo membro de (IV.2.1) chama-se densidade de transição. Um processo de Markov é completamente especificado conhecendo-se uma das seguintes condições (ref. 85):

$$- f_t(x) \text{ e } f_{t_2 | t_1}(X_2 | X_1);$$

$$- f_{t_1, t_2}(X_1, X_2);$$

$$- f_{t_2 | t_1}(X_2 | X_1) \text{ e o valor inicial do processo.}$$

A função densidade de probabilidade de transição satisfaz as seguintes condições:

- condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{t_k|t_{k-1}}(x_k|x_{k-1}) dx_k = 1; \quad (\text{IV.2.2})$$

- condição de compatibilidade:

$$\begin{aligned} f_{t_k|t_{k-1}}(x_k|x_{k-1}) &= \\ &= \int_{\Lambda} f_{t|t_{k-1}}(x|x_{k-1}) \cdot f_{t_k|t}(x_k|x) dx \end{aligned} \quad (\text{IV.2.3})$$

para $t_k > t > t_{k-1}$

A equação (IV.2.3) é conhecida como equação de Champman-Kolmogorov-Smoluchowski. Uma forma equivalente de se expressar a relação (IV.2.3) é através da chamada equação de Fokker-Planck, cujo desenvolvimento clássico está mostrado a seguir.

A função densidade de probabilidade de qualquer processo aleatório $X_\lambda(t)$, $t \in T$, satisfaz uma equação diferencial, chamada equação cinética, dada por (ref.85):

$$\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\alpha_n(x,t) f_t(x)] = 0, \quad (\text{IV.2.4})$$

sendo

$$\alpha_n(x,t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left\{ [X(t+\Delta t) - X(t)]^n \mid X(t) = x \right\}, \quad (\text{IV.2.5})$$

$n = 1, 2, \dots$

Também a função densidade de probabilidade condicional irá satisfazer (IV.2.4) se $\alpha_n(X,t)$ fôr substituído por $\beta(X,t;X_1,t_1)$, dado por:

$$\beta_n(X,t;X_1,t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left\{ [X(t+\Delta t) - X(t)]^n \mid X(t) = X \text{ e } X(t_1) = X_1 \right\},$$

(IV.2.6)

$$n = 1, 2, \dots, \quad t_1 > t.$$

Se $X(T)$ é um processo de Markov, tem-se:

$$\beta_n(X,t;X_1,t_1) = \alpha_n(X,t)$$

(IV.2.7)

Se $X(t)$ é contínuo, tem-se:

$$\alpha_n(X,t) = 0 \text{ para } n \geq 3$$

(IV.2.8)

Daí, a função densidade de probabilidade de transição satisfaz a condição:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [f_{t|t_0}(X|X_0)] &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial X} [\alpha_1(X,t) f_{t|t_0}(X|X_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [\alpha_2(X,t) f_{t|t_0}(X|X_0)] \end{aligned}$$

(IV.2.9)

A equação (IV.2.9) é chamada de equação de Fokker-Planck, e diz que nenhuma mudança de estado pode ocorrer se o tempo de transição fôr nulo, sendo equivalente à equação de Chapman-Komogorov-Smoluchowski.

Se o processo de Markov é estacionário, a equação (IV.2.9) fica:

$$-\frac{\partial}{\partial x} [\alpha_1(x,t) f_{t|t_0}(x|X_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha_2(x,t) f_{t|t_0}(x|X_0)] = 0.$$

(IV.2.10)

Pode-se também considerar vetores de processos de Markov. Seja por exemplo $[X, Y]$ um vetor bi-dimensional cujas componentes X e Y são processos de Markov. Neste caso, equações correspondentes a (IV.2.9), (IV.2.5) e (IV.2.8) são dadas por (ref.85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] = & \\ = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha_1((x,y),t) f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] - & \\ -\frac{\partial}{\partial y} [\alpha_2((x,y),t) f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha_{11}((x,y),t) f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] + & \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\alpha_{12}((x,y),t) f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\alpha_{22}((x,y),t) f_{t|t_0}((x,y)|(x_0,y_0))] , & \end{aligned}$$

(IV.2.11)

onde

$$\alpha_1((x,y),t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[X(t+\Delta t) - X(t)] | (X(t), Y(t))\},$$

$$\alpha_2((x,y),t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[Y(t+\Delta t) - Y(t)] | (X(t), Y(t))\},$$

$$\alpha_{11}((x, y), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left\{ [X(t+\Delta t) - X(t)]^2 \mid (X(t), Y(t)) \right\},$$

$$\alpha_{12}((x, y), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left\{ [X(t+\Delta t) - X(t)] [Y(t+\Delta t) - Y(t)] \mid (X(t), Y(t)) \right\},$$

$$\alpha_{22}((x, y), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \left\{ [Y(t+\Delta t) - Y(t)]^2 \mid (X(t), Y(t)) \right\}$$

(IV.2.12)

IV.3 - Uma solução exata da equação de Fokker-Planck

Admita-se inicialmente que o balanço possa ser representado pela seguinte equação:

$$\ddot{\phi}^* + b_1 \dot{\phi}^* + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} = \mathcal{N}(t) \quad (\text{IV.3.1})$$

em que o amortecimento foi suposto linear ($b_1 \dot{\phi}^*$), e o momento excitador $\mathcal{N}(t)$ é um ruído branco.

A equação (IV.3.1) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\phi^*) &= \dot{\phi}^* ; \\ \frac{d}{dt} (\dot{\phi}^*) &= -b_1 \dot{\phi}^* - c_1 \phi^* - c_3 \phi^{*3} + \mathcal{N}(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

Considere-se ainda as seguintes condições iniciais para (IV.3.2):

$$\begin{aligned} \phi^*(t_0) &= \phi_0^* ; \\ \dot{\phi}^*(t_0) &= \dot{\phi}_0^* , \end{aligned} \quad (\text{IV.3.3})$$

onde ϕ_0^* e $\dot{\phi}_0^*$ são variáveis aleatórias definidas em Λ .

O ruído branco $\mathcal{N}(t)$ tem densidade espectral de energia constante, e função de auto-correlação impulsiva, ou seja, não é auto-correlacionado:

$$\begin{aligned} S_{NN}(\omega) &= \frac{I_0}{2\pi} ; \\ K_{NN}(t_1, t_2) &= \frac{I_0}{2} \delta(t_2 - t_1) , \end{aligned} \quad (\text{IV.3.4})$$

em que I_0 é a chamada intensidade do processo.

Uma excitação como $N(t)$ pode ser interpretada como uma sequência aleatória de impulsos independentes, cada um imprimindo uma certa quantidade de energia cinética ao sistema, independentemente do seu estado de movimento. O movimento $(\phi^*, \dot{\phi}^*)$ pode ser, então, interpretado como de incrementos independentes, sendo em consequência um processo de Markov:

A equação de Fokker-Planck para o processo markoviano $(\phi^*, \dot{\phi}^*)$ pode ser obtida a partir de (IV.2.11) - (IV.2.12) (ver apêndice D, seção D.1).

Admitindo estacionaridade, resulta:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial \phi^*} [\dot{\phi}^* f_t(\phi^*, \dot{\phi}^*)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^*} [(b_1 \dot{\phi}^* + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3}) f_t(\phi^*, \dot{\phi}^*)] + \\ & + \frac{I_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial \dot{\phi}^{*2}} [f_t(\phi^*, \dot{\phi}^*)] = 0 \end{aligned} \quad (IV.3.5)$$

Na equação (IV.3.5) a densidade de probabilidade condicionada $f_{t/t_0}((\phi^*, \dot{\phi}^*) | (\phi_0^*, \dot{\phi}_0^*))$ foi escrita simplesmente $f_t(\phi^*, \dot{\phi}^*)$, ficando implícita a validade das condições iniciais (IV.3.3).

A solução de (IV.3.5) é:

$$f_t(\phi^*, \dot{\phi}^*) = \frac{1}{2\pi \sigma_{\phi^*} \sigma_{\dot{\phi}^*}} \exp \left\{ -\frac{2b_1}{I_0} \left[\frac{\dot{\phi}^{*2}}{2} + \frac{c_1 \phi^{*2}}{2} + \frac{c_3 \phi^{*4}}{4} \right] \right\} \quad (IV.3.6)$$

com

$$\sigma_{\phi^*}^2 = \frac{I_0}{2b_1c_1},$$

(IV.3.7)

$$\sigma_{\dot{\phi}^*}^2 = c_1 \sigma_{\phi^*}^2$$

Naturalmente, a descrição (IV.3.1) não representa bem o fenômeno do balanço. De fato, na realidade o amortecimento pode não ser linear ($b_2 \neq 0$), e a excitação não é um ruído branco.

Porém há técnicas como a de Dunne & Wright (ref.26), descrita no apêndice D, seção D.1, que permitem a utilização da representação (IV.3.1), tomando-se certos cuidados, como "linearizar" o amortecimento em cada ciclo de oscilação, e "ajustar" a intensidade I_0 do ruído branco para torná-lo mais representativo da excitação real.

No presente trabalho, no entanto, preferiu-se usar uma analogia à técnica de Roberts (ref.79) descrita na seção V.4, justificando-se sua escolha no final daquela seção.

IV.4 - Aplicação do método de Roberts

Roberts (ref.75,79,80) desenvolveu uma técnica que permite aproveitar resultados conhecidos da equação de Fokker-Planck para obter soluções aproximadas para sistemas com amortecimento não-linear. Tal técnica foi aplicada originalmente ao cálculo do balanço de embarcações em mares de través, representado pela equação análoga à (II.4.9), ou seja:

$$\ddot{\phi} + b_1 \dot{\phi} + b_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}| + c_1 \phi + c_3 \phi^3 = \eta(t) \quad (\text{IV.4.1})$$

sendo que se admitia uma dada distribuição espectral para o momento excitador η .

Na presente seção aplica-se a técnica de Roberts à representação (IV.1.1), que é mais adequada quando as bocas das embarcações são pequenas em relação aos comprimentos de ondas. Como se observará no capítulo V, o caso de pesqueiros submetidos a mares típicos por través se enquadra melhor nesta última representação.

A representação (IV.1.1), que é uma equação diferencial de segunda ordem na variável ϕ^* ($\phi^* = \phi - \alpha$: diferença entre o ângulo de balanço e de declividade de ondas), é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis ϕ^* e $\dot{\phi}^*$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\phi^*) = \dot{\phi}^* ; \\ \frac{d}{dt} (\dot{\phi}^*) = -b_1 \dot{\phi}^* - b_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| - c_1 \phi^* - c_3 (\phi^*)^3 + \eta(t). \end{cases} \quad (\text{IV.4.2})$$

As equações (IV.4.2), nas variáveis ϕ^* e $\dot{\phi}^*$, podem ser re-escri

tas nas variáveis V e β , definidas adiante.

A energia total V é dada por:

$$V = E + U, \quad (\text{IV.4.3})$$

em que:

$$E = \frac{(\dot{\phi}^*)^2}{2}, \quad (\text{IV.4.4})$$

e

$$U = \int_0^{\phi^*} (c_1 \phi^* + c_3 (\phi^*)^3) d\phi^* \quad (\text{IV.4.5})$$

são, respectivamente, a energia cinética e a energia potencial.

A fase β é definida por:

$$\cos \beta = \frac{U^{1/2}}{V^{1/2}}; \quad (\text{IV.4.6})$$

$$\sin \beta = - \frac{E^{1/2}}{V^{1/2}}.$$

Pode-se representar num gráfico de $E^{1/2}$ versus $U^{1/2}$ as relações entre U , E , V e β (ver figura IV.2).

Se o amortecimento e a excitação fossem nulos (sistema livre não-amortecido), V seria constante, e a representação de $E^{1/2}$ versus $U^{1/2}$ seria uma circunferência de raio $V^{1/2}$ (ver figura IV.2). Neste caso, a fase β seria dada por (ver expressão D.2.10)):

$$\beta / \begin{array}{l} \text{sistema} \\ \text{livre não} \\ \text{amortecido} \end{array} = \beta_0 (V; c_1, c_3) \quad (\text{IV.4.7})$$

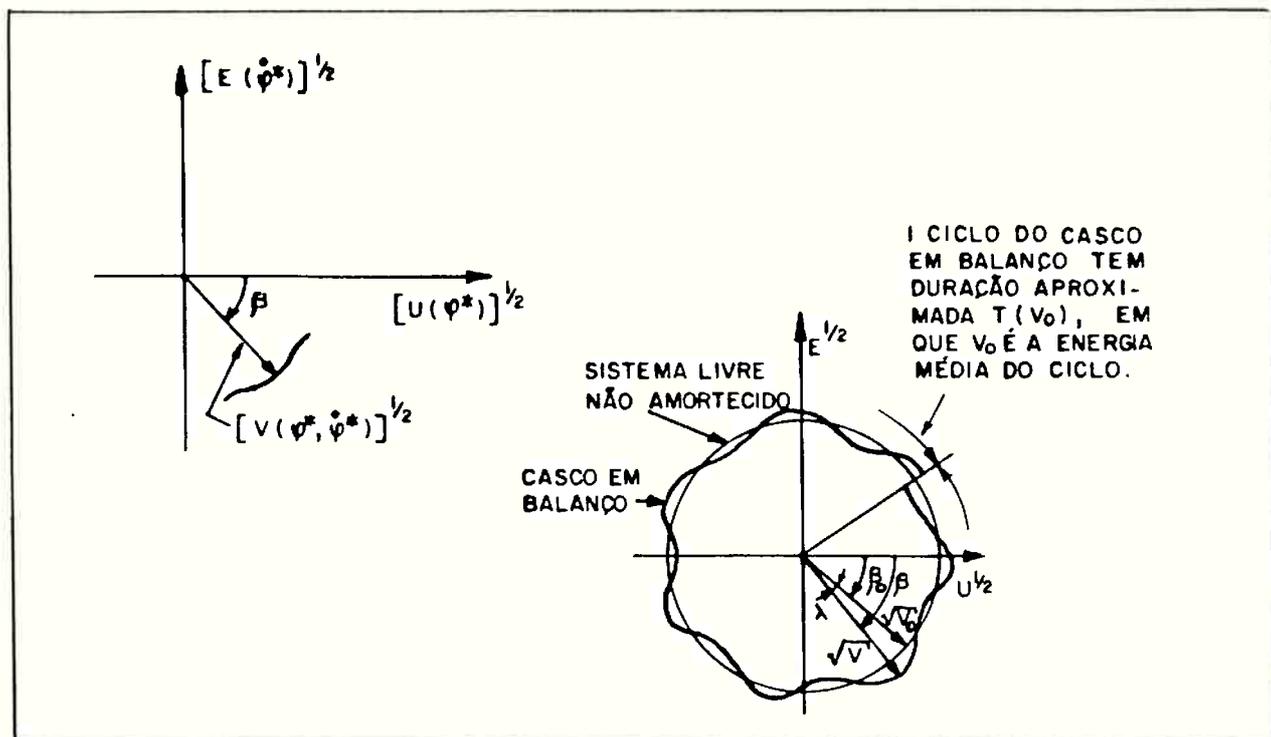


Figura IV.2 - Representação gráfica das relações entre U , E , V e β

Ao invés de se trabalhar com V e β , pode-se trabalhar com V e λ , em que a variável λ é o desvio da fase em relação àquela para o sistema livre não-amortecido, ou seja:

$$\lambda = \beta - \beta_0 \quad (\text{IV.4.8})$$

Pode-se verificar que as equações (IV.4.3) resultam:

$$\begin{cases} dV = h_1(V, \lambda + \beta_0(V; c_1, c_3); b_1, b_2; \eta) dt, \\ d\lambda = h_2(V, \lambda + \beta_0(V; c_1, c_3); b_1, b_2; \eta) dt, \end{cases} \quad (\text{IV.4.9})$$

em que h_1 e h_2 são relações que estão explícitas no apêndice D (ver

expressões (D.2.13)).

A conveniência de se trabalhar com as variáveis V e λ é que, para sistemas com amortecimento e excitação pequenos, V e λ "variam pouco" em cada ciclo de oscilação (ver figura IV.2), o que pode ser utilizado para simplificar o problema, como se mostra adiante.

Fisicamente, pesqueiros submetidos a ondas típicas de través têm coeficientes de amortecimento b_1 , b_2 e excitação η que podem ser considerados pequenos, como se observará no capítulo V.

Admite-se aqui que b_1 , b_2 e η são tais que:

$$\begin{aligned} b_1 &= \varepsilon^2 \bar{b}_1, \\ b_2 &= \varepsilon^2 \bar{b}_2, \\ \eta &= \varepsilon \bar{\eta}, \end{aligned} \tag{IV.4.10}$$

em que ε é um parâmetro positivo tal que $\varepsilon \ll 1$, e $\bar{b}_1 \dot{\phi}^*$, $\bar{b}_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*|$ e $\bar{\eta}$ têm a mesma ordem de grandeza de $\dot{\phi}^*$, $c_1 \phi^*$ e $c_3 \phi^{*3}$.

Além disso, sabe-se por observação experimental que o balanço é um fenômeno cuja densidade espectral de energia tem banda estreita, concentrando-se basicamente nas proximidades da frequência de oscilação livre não amortecida.

Assim, é razoável admitir-se que V e λ sejam aproximadamente constantes em cada ciclo de oscilação; as durações desses ciclos são aproximadamente iguais ao período para o sistema livre não amortecido no nível de energia V : $T(V)$.

Diante dessas simplificações, as equações (IV.4.9) podem ser reescritas na forma:

$$\begin{cases} dV \cong h_3 (V, \sin [\lambda + \beta_0 (V; c_1, c_3)]; b_1, b_2; \eta) dt, \\ d\lambda \cong h_4 (V, \cos [\lambda + \beta_0 (V; c_1, c_3)]; b_1, b_2; \eta) dt, \end{cases} \tag{IV.4.11}$$

em que h_3 e h_4 são relações que estão explícitas no apêndice D (ver expressões (D.2.15)).

O teorema de Stratonovitch-Khasminskii (ref.79) diz que, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a solução de (IV.4.10) converge fracamente para um processo de Markov. Admite-se aqui que, mesmo para $0 < \epsilon \ll 1$, a resposta de (IV.4.11) seja markoviana.

O processo suposto markoviano $[V, \lambda]$ é governado pelas equações de Itô, na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} dV \cong h_5 (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dt + \\ \quad + h_6 (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dW_1 + \\ \quad + h_7 (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dW_2, \\ \\ d\lambda \cong h_8 (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dt + \\ \quad + h_9 (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dW_1 + \\ \quad + h_{10} (V; b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}^0/I_V; H_{y_3}, T_0) dW_2, \end{array} \right. \quad (\text{IV.4.12})$$

em que

$H_{1/3}$ (altura significativa) e T_0 (período de pico espectral) são estatísticas referentes às ondas incidentes que, junto com I_{xx}^0/I_V (relação entre inércia estrutural e inércia virtual em balanço), definem a densidade de energia do momento excitador (ver expressão (II.6.10));

W_1 e W_2 são processos brownianos unitários;

h_5, \dots, h_{10} são relações que estão explícitas no apêndice D (ver expressões (D.2.16)).

Nos segundos membros das expressões (IV.4.12), não aparece a variável λ . Tal variável estava presente nos fatores $\text{sen}[\lambda, \beta_0(V; c_1, c_3)]$

e $\cos[\lambda + \beta_0(V; c_1, c_3)]$ das expressões (IV.4.11). No entanto, quando se constroem as equações de Itô, calculam-se valores médios no decorrer de um período de oscilação livre. Neste período, λ é praticamente constante, e como a escala do tempo é arbitrária, os fatores citados podem ser substituídos por $\sin[\beta_0(V; c_1, c_3)]$ e $\cos[\beta_0(V; c_1, c_3)]$, que dependem só de V , c_1 e c_3 .

A primeira das equações (IV.4.12) não envolve λ , nem no primeiro, nem no segundo membros. A função densidade de probabilidade $f_t(V)$ associada ao processo markoviano V , governado por esta equação, deve satisfazer à equação de Fokker-Planck (ref.79), da forma:

$$\frac{\partial f_t(V)}{\partial t} = h_{11}(V; f_t(V); b_1, b_2, c_1, c_3, I_{xx}/I_V; H_{1/3}, T_0), \quad (\text{IV.4.13})$$

em que a relação h_{11} está explícita no apêndice D (ver expressão (D.2.18)).

A solução estacionária $f(V)$ de (IV.4.13) pode ser obtida impondo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t(V)}{\partial t} &= 0; \\ \int_0^{\infty} f(V) dV &= 1. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.14})$$

O segundo membro da segunda das equações (IV.4.12) não envolve a variável λ , mas somente as variáveis V e t , uma vez que se escolha a embarcação e a onda incidente. Daí decorre que a fase λ em regime estacionário é uniformemente distribuída entre 0 e 2π , para cada valor fixado de V (ref.79). Este fato é utilizado para se obter a den

sidade de probabilidade conjunta entre ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ ($f(\phi^*, \dot{\phi}^*)$) a partir da densidade $f(V)$ e do período de oscilação livre não amortecido $T(V)$ (ver apêndice D).

Em resumo, pode-se seguir o roteiro abaixo:

- 1) para diversos níveis de energia V , calcula-se o período de oscilação livre não-amortecida: $T(V)$;
- 2) para estes níveis de energia V , calcula-se a densidade de probabilidade estacionária associada a V : $f(V)$;
- 3) a partir de $f(V)$ e $T(V)$, calcula-se a densidade de probabilidade conjunta de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$: $f(\phi^*, \dot{\phi}^*)$; quaisquer combinações de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ que resultem no mesmo nível de energia V têm a mesma densidade de probabilidade;
- 4) calcula-se a densidade de probabilidade marginal $f(\phi^*)$ a partir de $f(\phi^*, \dot{\phi}^*)$;
- 5) calcula-se a função de distribuição $F(\phi^*)$ associada ao ângulo diferença entre o balanço e a declividade de ondas, ϕ^* .

Chega-se, assim, a estimativa da probabilidade de que o ângulo diferença entre o balanço e a declividade de ondas não exceda, em valores absolutos, níveis especificados.

Justifica-se a escolha do método acima, em vez da técnica apresentada na seção IV.3, pois:

- 1) não há necessidade de se proceder à linearização do amortecimento; apenas se considera que a energia total "varie pouco" em cada ciclo de oscilação;
- 2) os processos interpretados como de incrementos independentes (markovianos) são os referentes à energia total V e à fase λ , e não ao ângulo ϕ^* e à velocidade $\dot{\phi}^*$; V e λ "variam pouco" em cada ciclo, enquanto ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ "variam muito"; assim, pode-se es

perar que a hipótese (não realística) de incrementos independentes resulte em menores erros, se referida às variáveis V e λ .

CAPÍTULO V

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo apresentam-se aplicações da metodologia a embarcações tipo pesqueiro submetidas a mares regulares e irregulares de través. Consideram-se cascos com e sem bolinas. A velocidade de avanço é suposta nula. As linhas de casco são obtidas a partir da Série Ridgelly-Nevitt (ref.73), destinada a embarcações de pequeno porte. Cabem aqui dois comentários. O primeiro, é que a condição de velocidade de avanço nula é pior, do ponto de vista do balanço em ondas de través, que aquela de velocidade não nula; de fato, nesta última condição o amortecimento em balanço é maior, já que se manifesta o efeito de sustentação. O segundo, é que a escolha da Série Ridgelly-Nevitt não representa nenhuma restrição quanto à verificação da aplicabilidade da metodologia; qualquer outro casco típico de pesqueiros, rebocadores, etc., poderia ter sido considerado.

Os resultados para excitação de ondas aleatórias são obtidos para alturas significativas de ondas de 2 metros, de 3 metros e de 5 metros. Sua apresentação é feita na forma de curvas de probabilidade da não excedência de determinados níveis do ângulo relativo de balanço, parametrizadas nos mares incidentes.

Os valores considerados para os parâmetros dos mares, regulares e irregulares, correspondem a ocorrências não raras na costa brasileira.

Os cálculos são feitos através de programas de computador codificados na linguagem PASCAL.

V.1 - Descrição dos cascos

As linhas de casco são obtidas a partir da Série Ridgelly-Nevitt, destinada a embarcações de pequeno porte.

A série traz as características de forma das embarcações, e também resultados de ensaios de resistência ao reboque.

O modelo inicialmente escolhido como primitivo para a série foi um pesqueiro de arrasto mono-hélice, com coeficiente prismático (C_p) igual a 0,65, razão deslocamento/comprimento ($\Delta/(0,01L)^3$) valendo 300 (em ton/m³) e razão boca/calado (B/H) de 2,30. Estes valores correspondiam em 1951 à prática usual norte-americana para este tipo de embarcação, conforme levantamento feito entre diversos projetistas de pequenos barcos.

Posteriormente, em 1963, foram considerados três outros modelos primitivos, com coeficientes prismáticos de 0,554, 0,597 e 0,700, que demonstraram em ensaios de resistência ao reboque possuírem características de avanço tão favoráveis quanto às do modelo original.

Os quatro modelos possuem o mesmo perfil de popa, mas a inclinação da proa diminui com o aumento do coeficiente prismático. Na figura V.1 mostram-se os perfis dos quatro modelos primitivos.

A razão boca/calado foi mantida em aproximadamente 2,30 para todos os modelos, porém para cada modelo primitivo foram gerados três modelos adicionais com variações da esbeltez, correspondendo a novas razões deslocamento/comprimento de 200, 400 e 500 ton/m³. A obtenção de tais modelos foi feita pela multiplicação de bocas e de calados seccionais por uma constante.

As quilhas de todos os modelos têm um caimento de 3% entre as perpendiculares de vante (PPAV) e de ré (PPAR). Na figura V.1, os

perfis para cada coeficiente prismático são mantidos para todas as relações deslocamento/comprimento, desde que se tomem as escalas a adequadas para o comprimento e o pontal.

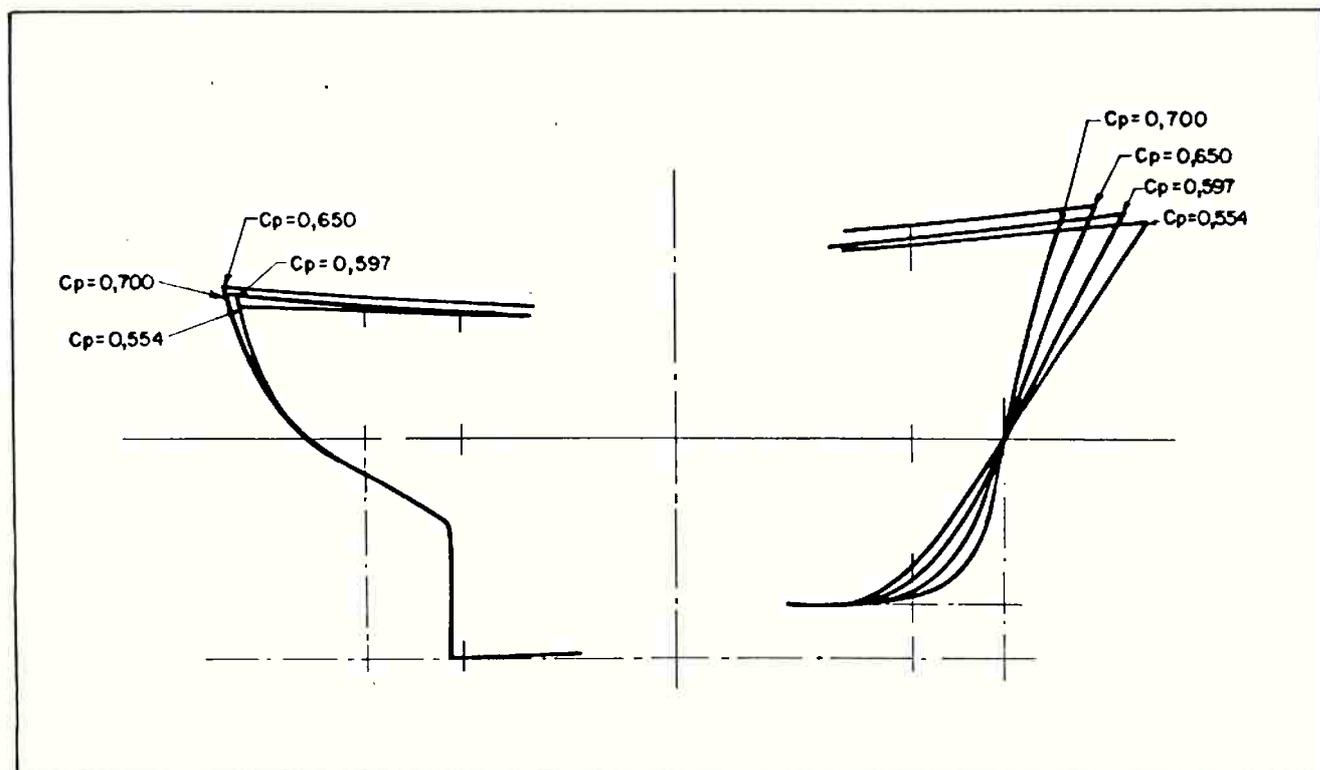
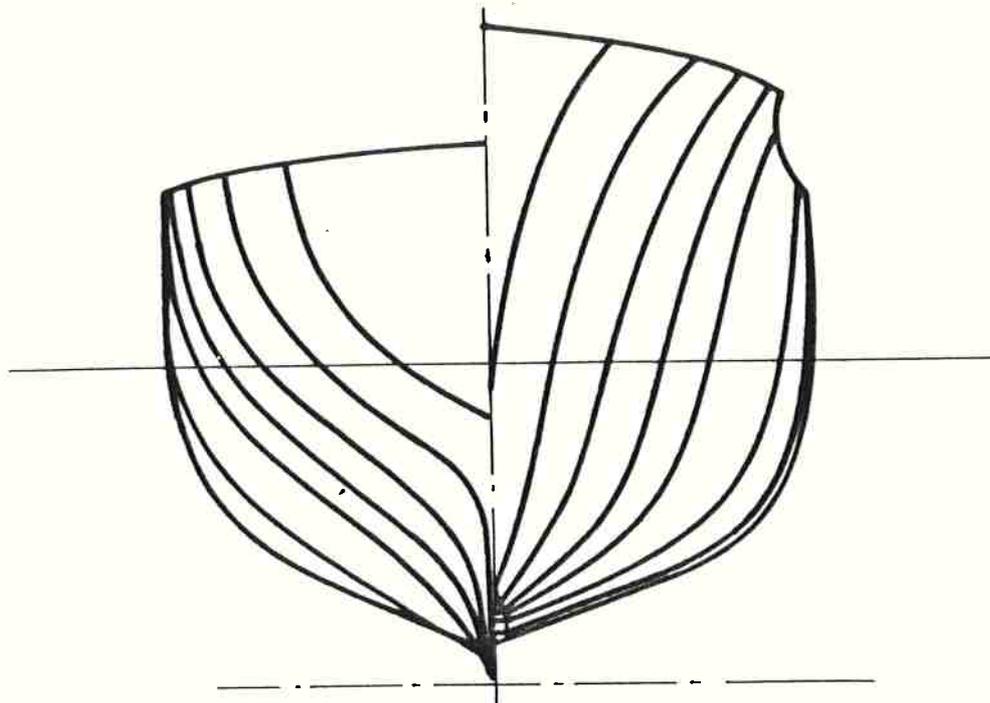


Figura V.1 - Perfis dos cascos primitivos da Série Ridgelly-Nevitt

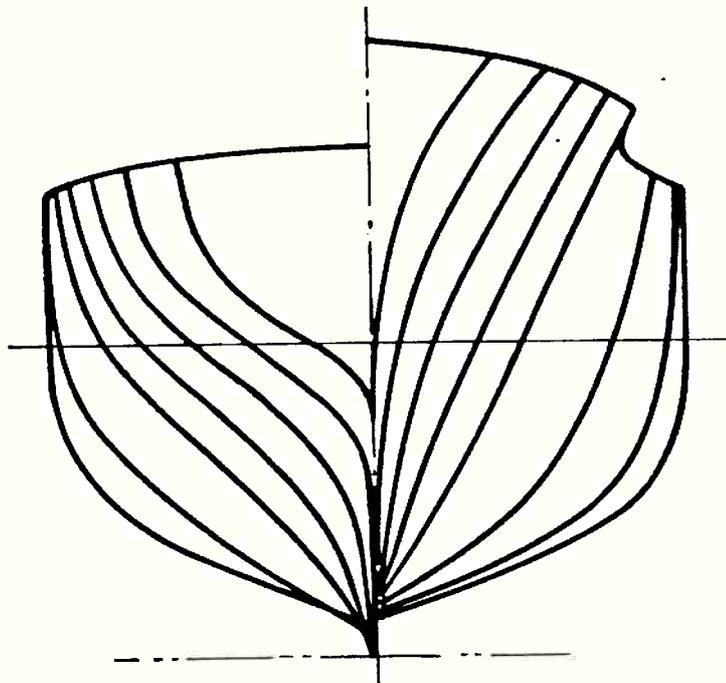
Na figura V.2 apresentam-se os planos de balizas para os quatro coeficientes prismáticos.

Na tabela V.1 apresentam-se os principais parâmetros de forma dos dezesseis modelos considerados na série.

O coeficiente prismático (C_p), a razão deslocamento/comprimento ($\Delta / (0,01L)^3$), a razão boca/calado (B/H), o coeficiente de área transversal na seção de máxima área (C_m), os coeficientes de área do plano de linhas d'água de projeto (C_{WL}) e de convés (C_v) são parâmetros primitivos, isto é, seus valores são fixados independente-



$C_p = 0,650$



$C_p = 0,554$

Figura V.2 - Planos de balizas

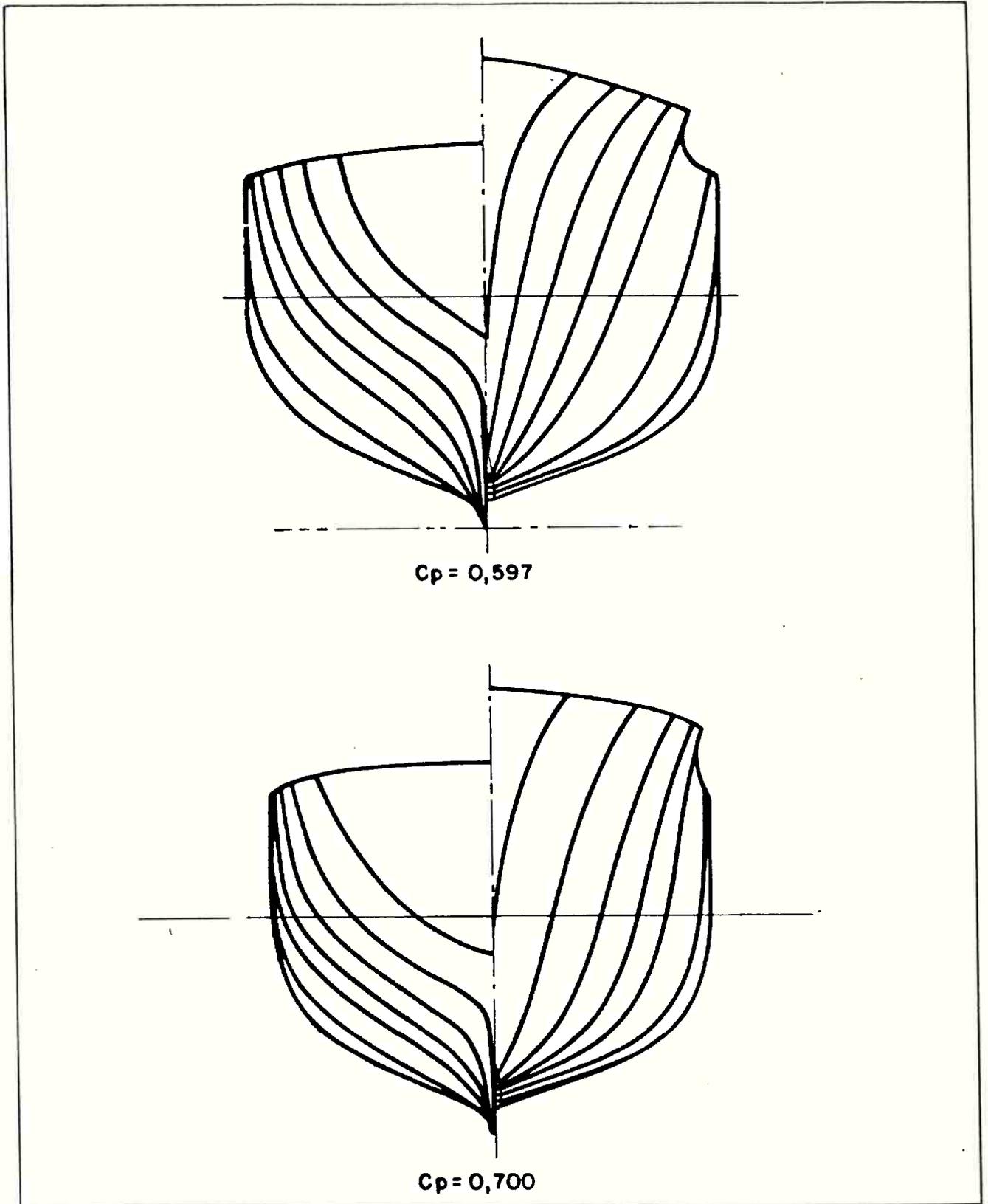


Figura V.2 - Planos de balizas (continuação)

Tabela V.1 - Principais parâmetros de forma dos modelos da Série Ridgelly-Nevitt

PARÂMETRO TRÔ MODELO	C_p	$\frac{\Delta}{(0,01L)^2}$ (ton/ft ²)	B/H	C (na seção de máxima area)	C_b	C_{WL}	L/B	C_{CV}
W-19	0,554	200	2,31	0,758	0,420	0,687	5,10	0,96
W-16	"	300	"	"	"	"	4,16	"
W-22	"	400	"	"	"	"	3,60	"
W-26	"	500	"	"	"	"	3,22	"
W-27	0,597	200	2,30	0,764	0,456	0,731	5,32	"
W-18	"	300	"	"	"	"	4,35	"
W-28	"	400	"	"	"	"	3,76	"
W-29	"	500	"	"	"	"	3,37	"
W-10	0,650	200	2,29	0,760	0,494	0,779	5,55	"
W-8	"	300	"	"	"	"	4,53	"
W-11	"	400	"	"	"	"	3,93	"
W-12	"	500	"	"	"	"	3,51	"
W-23	0,700	200	2,30	0,761	0,533	0,829	5,75	"
W-20	"	300	"	"	"	"	4,70	"
W-24	"	400	"	"	"	"	4,07	"
W-25	"	500	"	"	"	"	3,64	"

mente para cada modelo. O coeficiente de bloco (C_B) e a razão comprimento/boca (L/B) são parâmetros derivados dos anteriores, podendo ser calculados por:

$$C_B = C_p C_{\Delta} ; \tag{V.1.1}$$

$$\frac{L}{B} = 1000 \frac{\gamma C_p C_{\Delta}}{\sqrt{\frac{\Delta}{(0,01L)^3} \cdot B/H}}$$

em que γ é o peso específico da água do mar (em ton/ft³).

A série traz ainda curvas do coeficiente de resistência residual para uma faixa de v/\sqrt{L} de 0,7 até 1,5 (em nós por raiz de pé), o que corresponde a uma faixa de números de Froude de aproximadamente 0,21 até 0,45. Estes dados foram obtidos a partir de ensaios de resistência ao reboque, conduzidos no tanque de provas do "Webb Institute of Naval Architecture". Utilizou-se o método de análise de resultados recomendado pela ITTC de 1957. Foram utilizados excitadores de turbulência nos modelos, e realizadas correções devidas a efeitos de bloqueio.

A série não traz, no entanto, resultados relativos ao comportamento dessas embarcações no mar.

Como exemplos de aplicação da metodologia foram considerados dois conjuntos de pesqueiros de arrasto, cada um composto de 4 cascos.

Os cascos do primeiro conjunto possuem os seguintes parâmetros em comum:

- comprimento: 30,48 metros;
- coeficiente prismático: 0,650;

- razão boca/calado: 2,29;
- coeficiente de área da baliza de maior área: 0,760.

Os cascos desse conjunto diferem pela razão deslocamento/comprimento ($\Delta / (0,01L)^3$), que assume os valores 200, 300, 400 e 500 ton/ft³ para os cascos número 1, 2, 3 e 4, respectivamente. A boca e o calado podem ser obtidos de:

$$B = 0,001L \sqrt{\frac{\Delta}{(0,01L)^3} \cdot \frac{(B/H)^4}{\gamma C_p C}} ; H = \frac{B}{(B/H)} \quad (V.1.2)$$

Na tabela V.2 estão listados o deslocamento, a boca e o calado dos cascos do primeiro conjunto.

Tabela V.2 - Parâmetros do primeiro conjunto

CASCO	1	2	3	4
PARÂ-METRO				
Deslocamento (ton)	200	300	400	500
Boca B (m)	5,49	6,73	7,76	8,68
Calado H (m)	2,40	2,94	3,39	3,79

Os cascos do segundo conjunto possuem os seguintes parâmetros em comum:

- deslocamento: 400 ton;
- coeficiente prismático: 0,650;
- razão boca/calado: 2,29;
- coeficiente de área da baliza de maior área: 0,760.

Os cascos do segundo conjunto também diferem entre si pela razão deslocamento/comprimento, que assume os valores 200, 300, 400 e 500 ton/ft³ para os cascos 5, 6, 7 e 8, respectivamente.

Na tabela V.3 estão listados o comprimento, a boca e o calado dos cascos do segundo conjunto. Note-se que o casco 7 do segundo conjunto é o mesmo casco 3 do primeiro conjunto.

Tabela V.3 - Parâmetro do segundo conjunto

CASCO \ PARÂ-METRO	5	6	7	8
Comprimento L (m)	38,40	33,55	30,48	28,29
Boca B (m)	6,92	7,41	7,76	8,06
Calado H (m)	3,02	3,23	3,39	3,52

Foram consideradas duas versões para o casco 1: sem bolinas (1(a)), e com bolinas (1(b)), colocadas em 60% de seu comprimento. Todos os outros cascos foram supostos sem bolinas.

V.2 - Descrição das excitações por ondas regulares e ondas irregulares

As ondas regulares, também chamadas mares de vagas ("swells"), foram supostas ter alturas de 1 e 2 metros. A frequência de ondas foi variada para que se determinassem as características das respostas nas proximidades das frequências das ressonâncias principal e sub-harmônica de ordem 3. Admitiu-se válida a formulação de Airy de águas profundas para se calcular a declividade de ondas.

Quanto às ondas irregulares, também chamadas de mares de ventos ("seas"), foram consideradas de acordo com o espectro a dois parâmetros da ITTC (ref.4). As alturas significativas e os períodos de pico adotados estão na tabela V.4, num total de três ondas irregulares. As curvas de densidade espectral de energia dessas ondas estão na figura V.3; as correspondente curvas de espectro de declividade de ondas estão na figura V.4.

Tabela V.4 - Mares de ventos considerados

Mar	Altura Significativa $H_{1/3}$ (m)	Período de pico T_0 (seg)
A	2,0	6,05
B	3,0	7,41
C	5,0	9,56

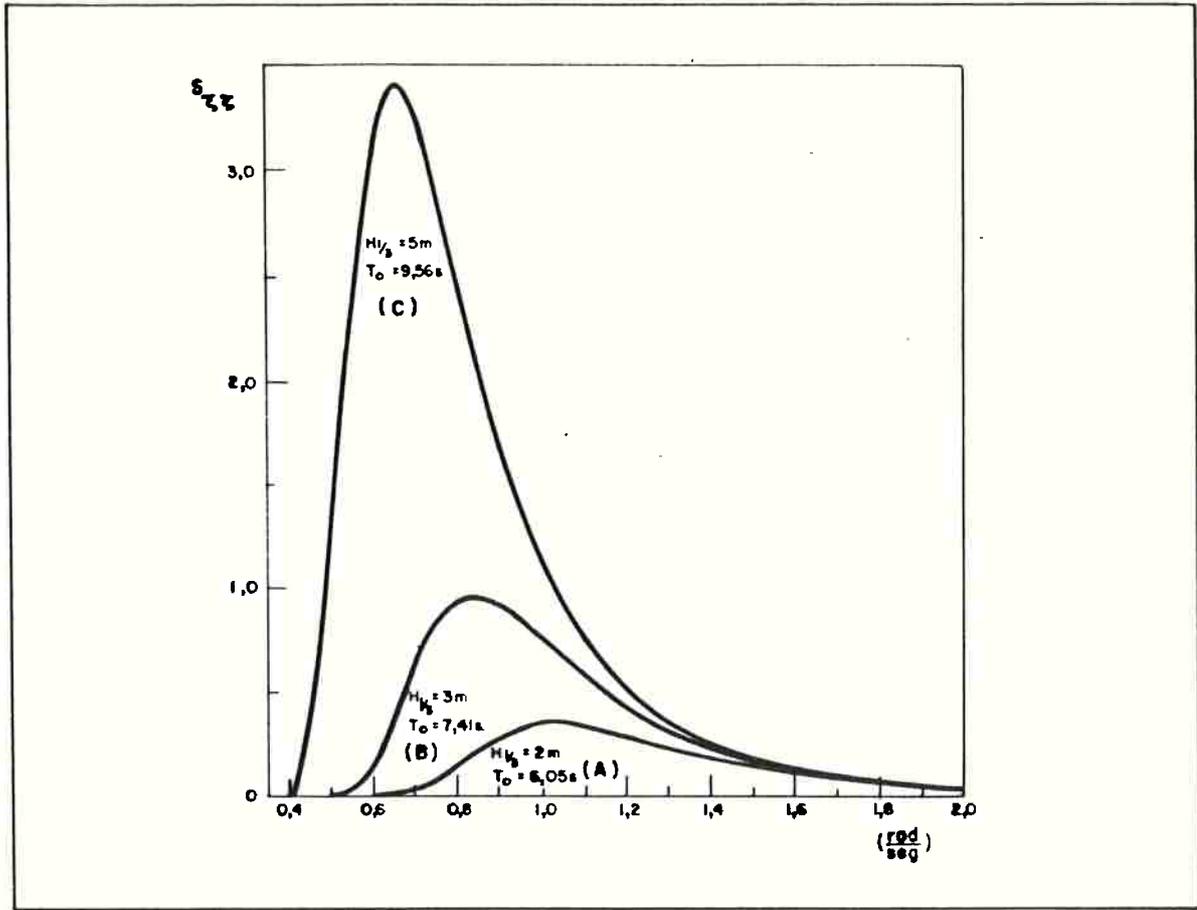


Figura V.3 - Curvas de densidade espectral de energia para os mares A, B e C (características na tabela V.4)

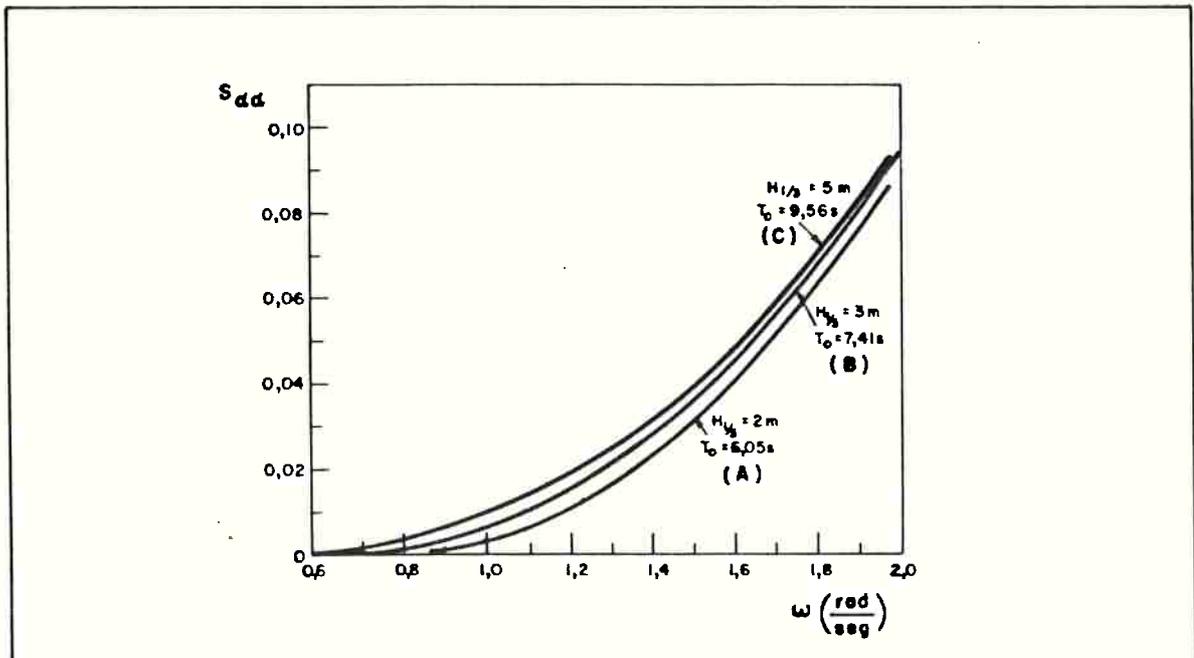


Figura V.4 - Curvas de espectro de declividade de ondas para os mares A, B e C (características na tabela V.4)

V.3 - Programas de computador

A metodologia foi implementada em microcomputador, em linguagem Turbo-Pascal, através dos seguintes programas:

- Programa FRANK : cálculo do coeficiente de amortecimento devido à geração de ondas pela oscilação do casco;
- Programa DIFRA : cálculo do momento excitador do balanço, considerando efeitos de difração;
- Programa DAMPING: cálculo dos coeficientes de amortecimento associados a efeitos viscosos e de sustentação;
- Programa REGPRIN: cálculo das respostas para excitação de ondas regulares, no caso da ressonância principal;
- Programa REGSUB : cálculo das respostas para excitação de ondas regulares, no caso da ressonância sub-harmônica de ordem 3;
- Programa DUNNEWRIGHT: cálculo das respostas para excitação de ondas irregulares, pelo Método de Dunne & Wright;
- Programa ROBERTS: cálculo das respostas para excitação de ondas irregulares, pelo Método de Roberts.

Além dos programas acima, foi utilizado o programa ARQNAV (ref. 100) para obtenção de curvas de momento de endireitamento.

V. 4 - Resultados para ondas regulares

Os resultados para excitação determinística são apresentados nas figuras V.5 a V.7 na forma de amplitude da resposta, ϕ_a , versus frequência de excitação. Na figura V.5 apresentam-se os resultados para os cascos 1(a) e 1(b), na figura V.6 para os cascos 1(a), 2, 3 e 4, com $H=1m$, e na figura V.7 para os cascos 5, 6, 7 e 8, também com $H=1m$.

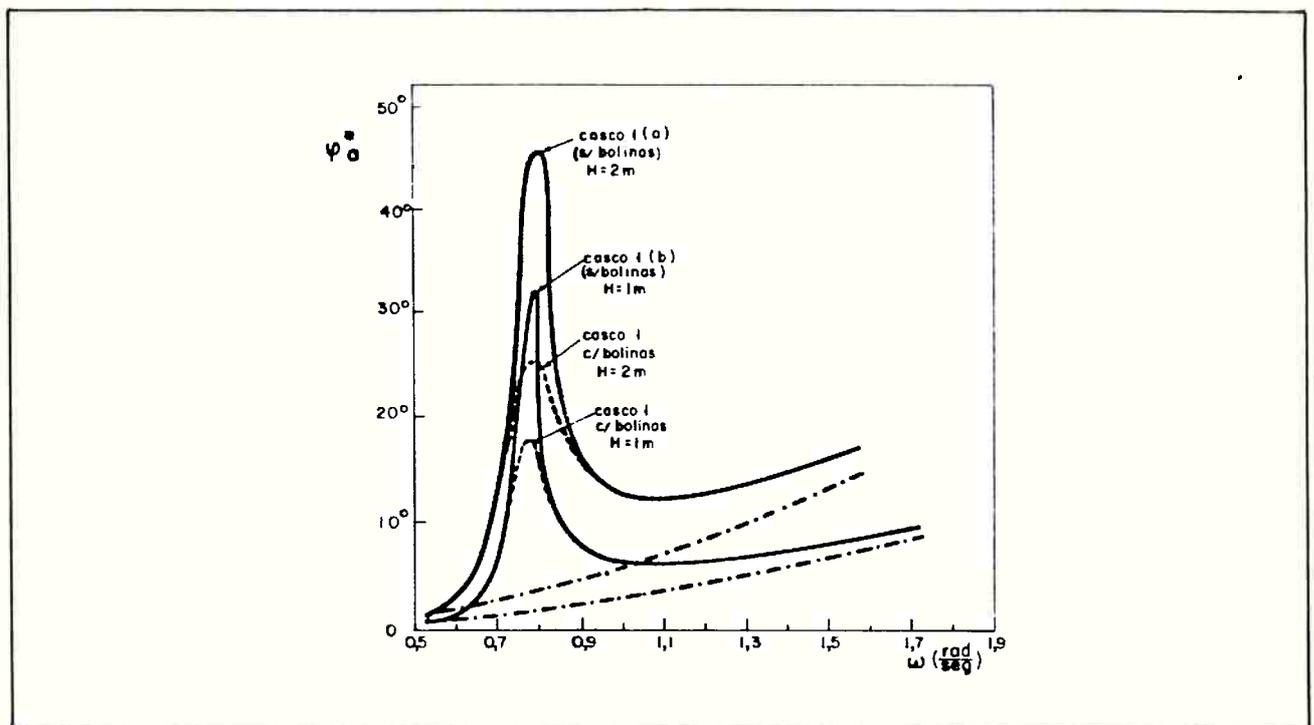


Figura V.5 - Amplitude da resposta versus frequência de excitação para o pesqueiro número 1 sem bolinas (1(a)) e com bolinas (1(b))

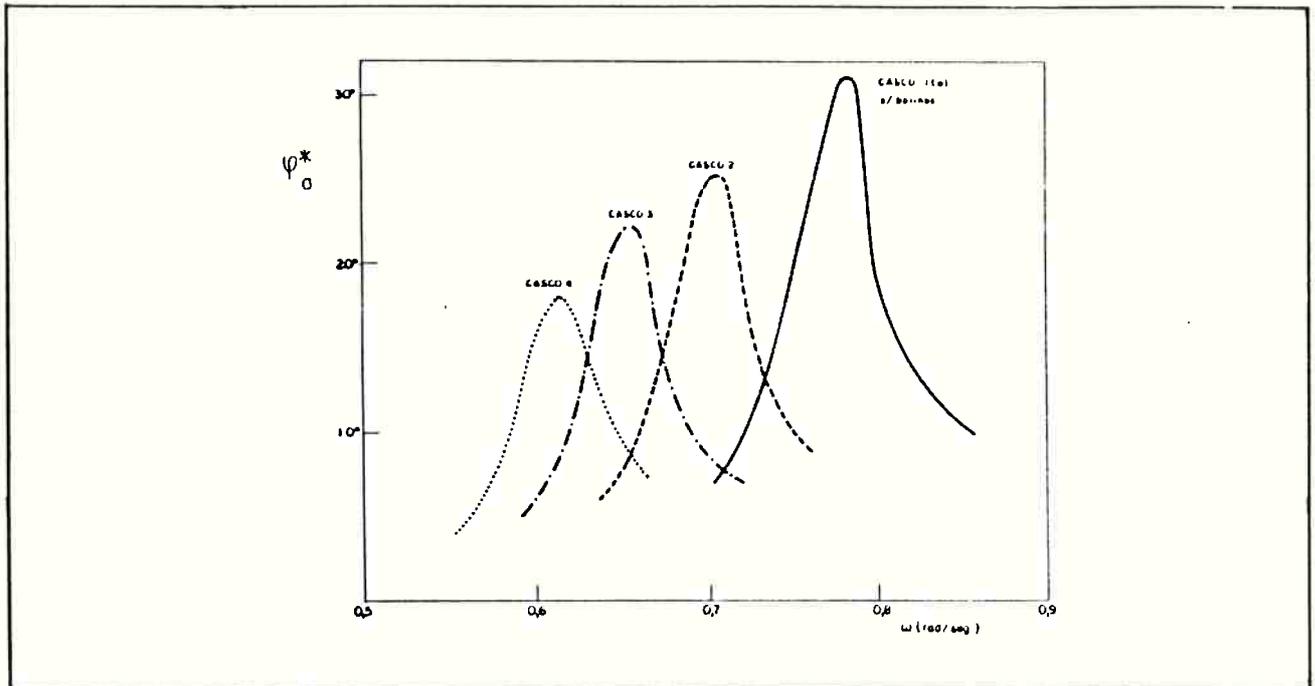


Figura V.6 - Amplitude da resposta versus frequência de excitação para o primeiro conjunto de pes queiros

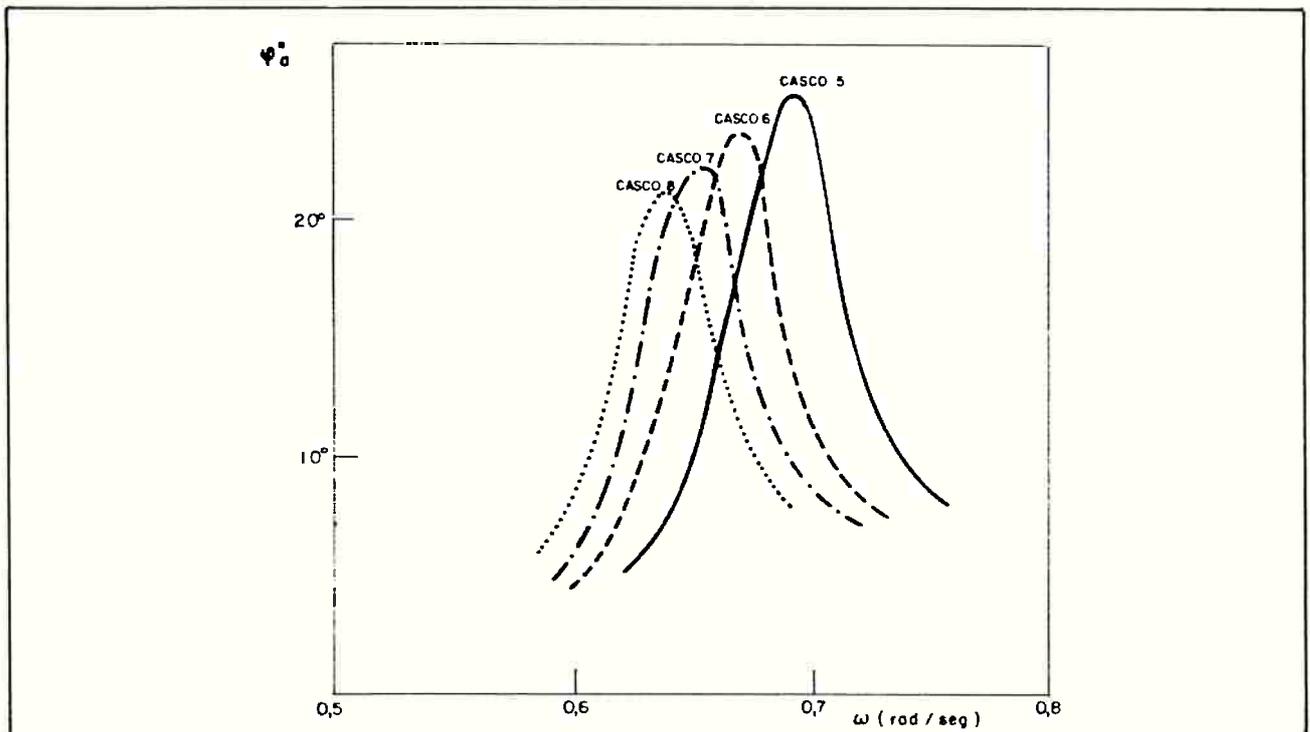


Figura V.7 - Amplitude da resposta versus frequência de excitação para o segundo conjunto de pes queiros

V.5 - Resultados para ondas irregulares

Os resultados para excitação aleatória são apresentados nas figuras V.8 até V.11, na forma de probabilidade de não ultrapassagem de um determinado ângulo-diferença entre balanço e declividade de ondas.

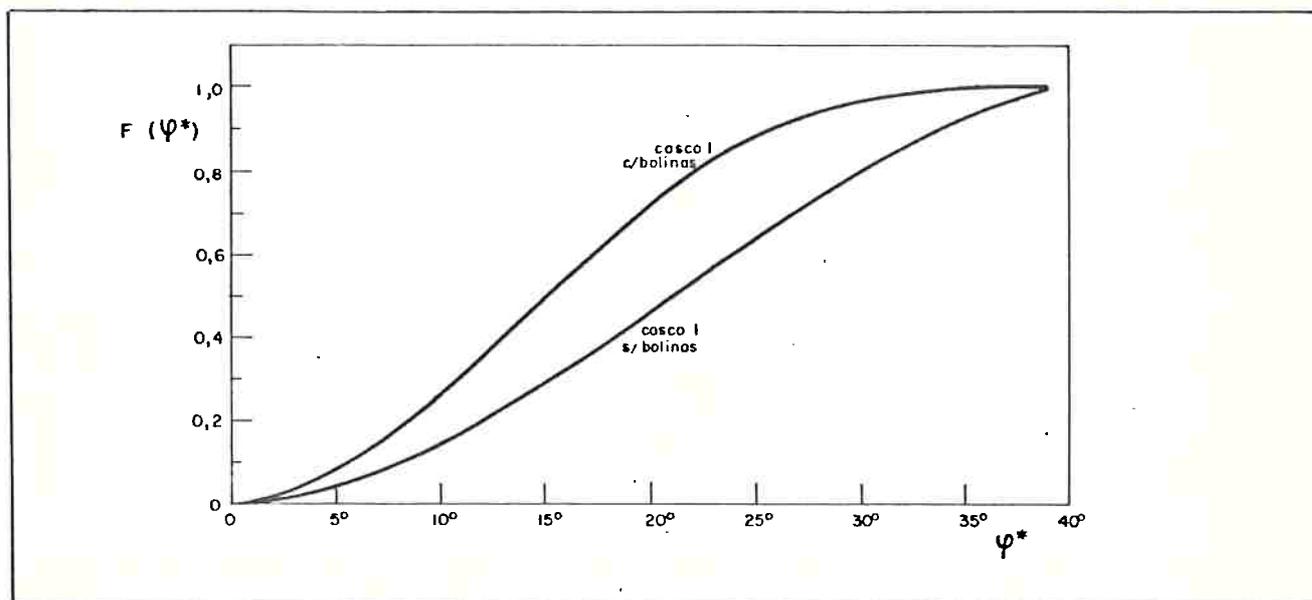


Figura V.8 - Resultados para o casco 1(a), sem bolinas e 1(b), com bolinas, mar B

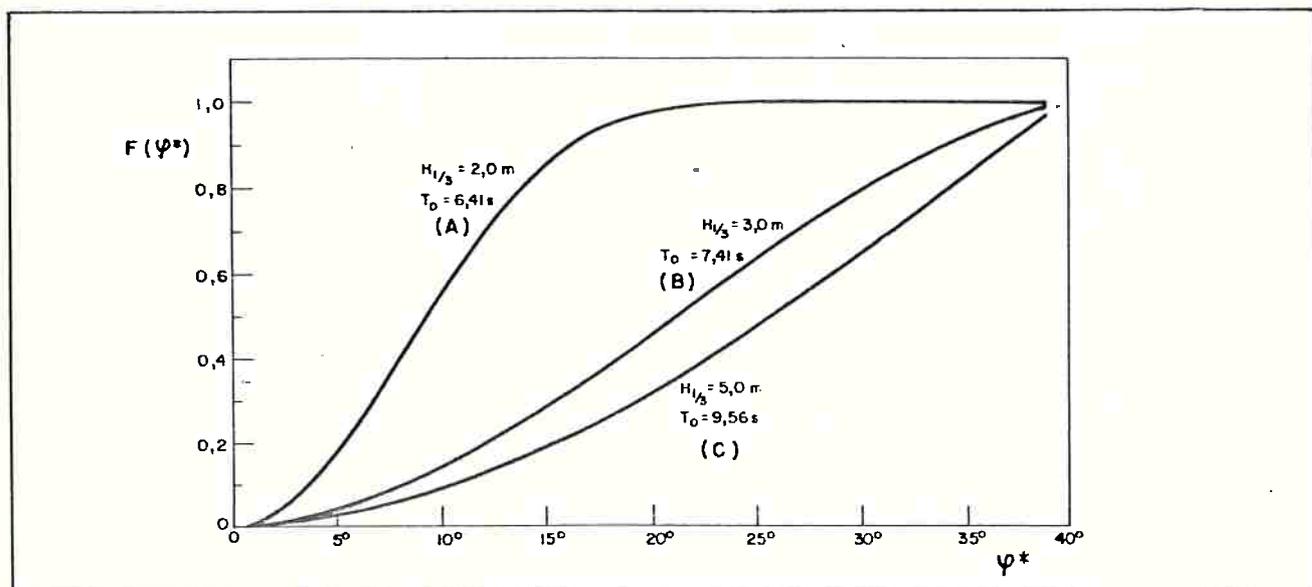


Figura V.9 - Resultados para o casco 1(a), com os mares A, B e C

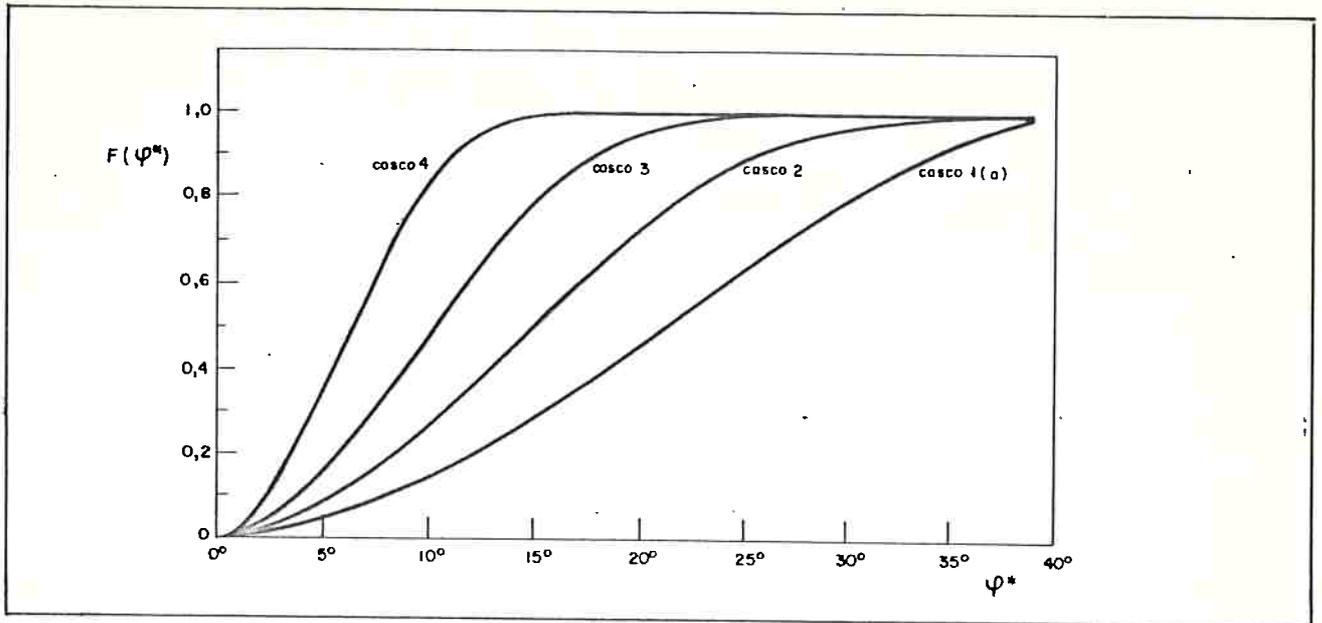


Figura V.10 - Resultados para os cascos 1(a), 2, 3 e 4 com mar B

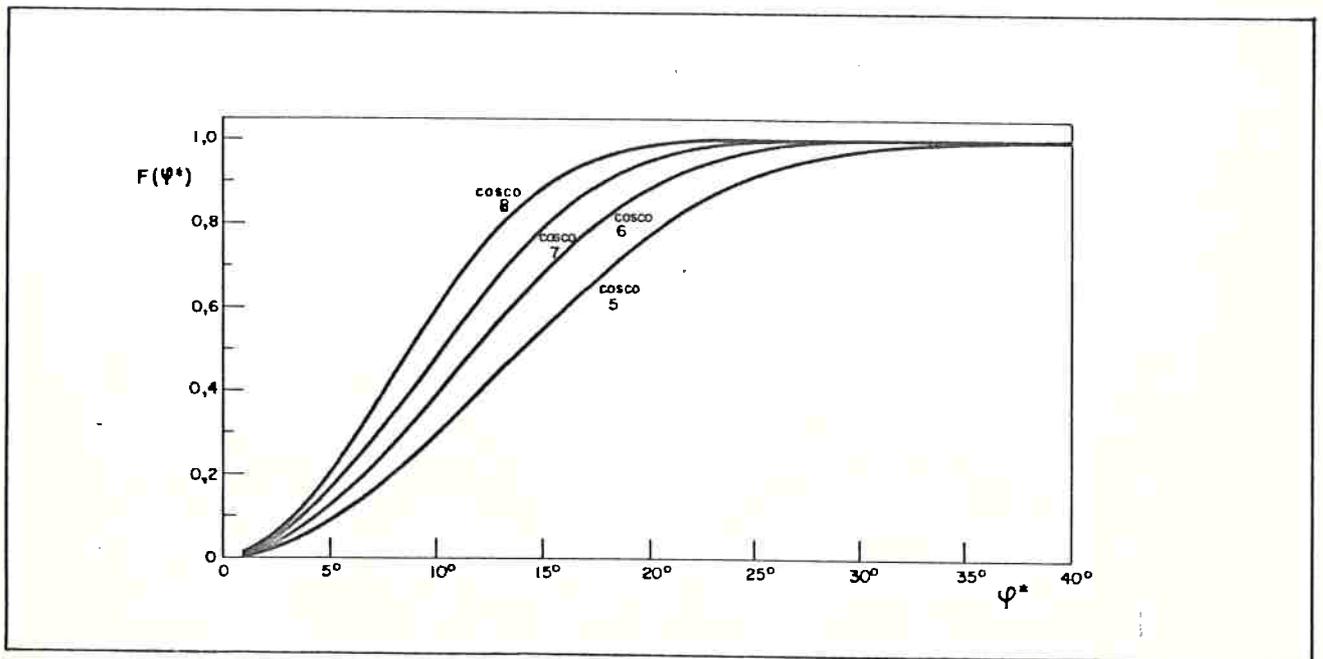


Figura V.11 - Resultados para os cascos 5, 6, 7 e 8 com mar B

V.6 - Análise dos resultados

Note-se que aparentemente são 8 cascos, numerados de 1 a 8; na realidade, 1 são dois: 1(a) e 1(b), sem e com bolinas; em compensação, o 7 é idêntico ao 3.

Na análise vamos falar de

1(a), 1(b), 2, 3, 4, 5, 6 e 8

Como primeira análise, considere-se o papel das bolinas.

Tome-se inicialmente o casco 1 com bolinas (1(b)). A figura V.5 mostra que na região da ressonância principal, a amplitude da resposta chega a 15° para altura de onda regular incidente de 1 m, e a 23° para onda incidente de 2 m.

Na figura V.5 observa-se também que para o casco 1 sem bolinas 1(a) a amplitude da resposta chega a 31° para altura de onda regular incidente de 1 m, e a 45° para altura de onda incidente de 2 m.

Observa-se que a colocação de bolinas reduz as amplitudes máximas de oscilação em ondas regulares.

Quanto à excitação de ondas irregulares, nota-se pela figura V.8 que, fixando-se uma probabilidade, por exemplo 98%, o casco 1(a), sem bolinas, fica com $\phi^* < 38,5^{\circ}$, enquanto que o casco 1(b), com bolinas, fica com $\phi^* < 32^{\circ}$.

Fixando-se um ϕ^* , por exemplo 25° , nota-se que o casco 1(a) não o ultrapassa com probabilidade de 64%, enquanto que o casco 1(b) não o ultrapassa com probabilidade de 87%.

A análise acima permite concluir que do ponto de vista do comportamento em balanço é vantajosa a colocação de bolinas.

Como segunda análise, considere-se a atuação de ondas regulares e irregulares diferentes sobre o casco 1(a), sem bolinas.

Pela figura V.8, observa-se o caráter não-linear no amortecimento, já que na região de ressonância principal a resposta não dobra com o aumento da altura de ondas regulares de 1 m para 2 m.

Quanto à excitação de ondas irregulares, nota-se, pela figura V.9 que, fixando-se uma probabilidade, por exemplo 98%, o casco 1(a) submetido ao mar A fica com $\phi^* < 19,5^\circ$, enquanto que submetido aos mares B e C fica com $\phi^* < 38,5^\circ$ e $\phi^* < 39,5^\circ$, respectivamente.

Fixando-se um ϕ^* , por exemplo 25° , nota-se que o casco 1(a) não o ultrapassa quase nunca com o mar A, não o ultrapassa com 64% de probabilidade com o mar B, e com 49% de probabilidade com o mar C.

A análise acima evidencia a importância de as embarcações somente deverem ser operadas em regiões em que se espera que os mares não ultrapassem aqueles previstos no seu projeto.

Como terceira análise, considere-se a variação da razão deslocamento/comprimento, mantidos os demais parâmetros de forma constantes.

Na figura V.6 apresenta-se uma comparação entre os cascos 1(a), 2, 3 e 4 submetidos a uma onda incidente regular de 1 m. O casco 1 é o mais esbelto, enquanto que o casco 4 é o menos. Nota-se que o casco de maior esbeltez tem a maior amplitude de resposta (cerca de 31°), enquanto que o casco de menor esbeltez apresenta a menor amplitude de resposta (cerca de 18°). Fixados o coeficiente prismático, a relação boca/calado e o comprimento, verifica-se que quanto menor a relação deslocamento/comprimento, mais desfavorável é o comportamento em balanço em ondas regulares. Observa-se a inexistência de saltos em torno da ressonância principal para todos os casos.

Na figura V.7 comparam-se os cascos 5, 6, 7 e 8 quando submetidos a uma onda incidente regular de 1 m. O casco 5 é o mais esbelto, enquanto que o casco 8 é o menos. Nota-se aqui também que o casco de maior esbeltez tem a maior amplitude de resposta (cerca de 27°), enquanto que o casco de menor esbeltez apresenta a menor amplitude de resposta (cerca de 22°). Fixados o coeficiente prismático, a relação boca/calado e o deslocamento, verifica-se que quanto menor a relação deslocamento/comprimento, mais desfavorável é o comportamento em balanço em ondas regulares. Observa-se ainda a inexistência de saltos em torno da ressonância principal para todos os casos. Por último, comparando as figuras V.6 e V.7, nota-se que a variação do deslocamento tem maior influência que a variação do comprimento, no que se refere o balanço da embarcação.

Quanto à excitação de ondas irregulares, nota-se, pela figura V.10, que, fixando-se uma probabilidade, por exemplo 98%, o casco 1(a) fica com $\phi^* < 38,5^{\circ}$, o casco 2 com $\phi^* < 32^{\circ}$, o casco 3 com $\phi^* < 22,5^{\circ}$ e o casco 4 fica com $\phi^* < 14^{\circ}$.

Fixando-se um ϕ^* , por exemplo 25° , nota-se que o casco 1(a) não o ultrapassa com probabilidade de 64%, o casco 2 com probabilidade 88%, o casco 3 com probabilidade 99%, e o casco 4 não o ultrapassa quase nunca.

As considerações acima permitem concluir que, do ponto de vista do comportamento de balanço em ondas irregulares, melhor haver maior razão deslocamento/comprimento, para os demais parâmetros de forma e o comprimento fixados.

Pela figura V.11, fixando-se uma probabilidade, por exemplo 98%, nota-se que o casco 5 fica com $\phi^* < 30^{\circ}$, o casco 6 com $\phi^* < 26^{\circ}$, o casco 7 (mesmo 3) com $\phi^* < 22,5^{\circ}$ e o casco 8 com $\phi^* < 19,5^{\circ}$.

Fixando-se um ϕ^* , por exemplo 25° , nota-se que o casco 5 não o ultrapassa com probabilidade de 91,5%, o casco 6 com 97,5%, o casco 7 (mesmo 3) com 99% e o casco 8 não ultrapassa quase nunca.

A análise acima permite concluir que, também para um deslocamento dado, o comportamento de balanço em ondas irregulares melhora com o aumento da relação deslocamento/comprimento, com os demais parâmetros de forma mantidos constantes.

Por último, analisa-se a possibilidade de existência de saltos na ressonância principal. Não se observou a ocorrência de tais saltos nos exemplos considerados. No entanto, nem sempre as condições de estacionaridade vistas na tabela III.1 são satisfeitas. Por exemplo, para o casco 1(a) a condição III.1.10 não é satisfeita quando a amplitude da resposta excede $26,5\%$. Ocorrerá de fato mais de uma resposta periódica para alturas de onda incidente maiores que as consideradas.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Verificou-se ser possível a aplicação de uma metodologia suficiente simples e expedita para avaliação do balanço intenso de pequenas embarcações com velocidade de avanço nula submetidas a mares regulares ou irregulares por través, já por ocasião de sua concepção. O problema pode ser formulado por uma equação diferencial de segunda ordem numa única variável, com termos não lineares no amortecimento e restauração hidrostática; a estimativa dos coeficientes desta equação pode ser feita com facilidade, conhecendo-se apenas algumas relações de forma, características e dimensões principais das embarcações, o que é compatível com a escassez de informações que se tem nas fases iniciais do projeto.

A metodologia exposta pode também ser aplicada a qualquer outro sistema (físico, mecânico ou elétrico, por exemplo) que tenha as mesmas características de representação, isto é, possa ser modelado por uma equação diferencial de segunda ordem com amortecimento quadrático e restauração cúbica assimétricos.

O aspecto considerado relativo à segurança das embarcações no mar é apenas um dos itens a serem observados a este respeito; recomenda-se a implantação de outras metodologias expeditas que permitam ter uma avaliação mais global da segurança das embarcações na sua concepção, considerando por exemplo o fenômeno do "broaching", da excitação paramétrica, etc.

Mesmo com relação ao cálculo do balanço, a metodologia apresentada é limitada; recomenda-se procurar soluções para o problema de balanço intenso com velocidade de avanço não nula, aproamentos diferentes daqueles de través, trajetórias não retilíneas.

APÊNDICE A

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

APÊNDICE A
EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Neste apêndice apresentam-se as equações do movimento de um cor por rígido, bem como a particularização de tais equações para os se guintes casos:

- embarcação oscilando com seis graus de liberdade em torno de uma posição de equilíbrio, sendo que as oscilações são supotas harmônicas simples, e que as amplitudes de oscilação são supostas "pequenas";
- situação análoga à anterior, com a diferença de que o movimento de balanço ("roll") é suposto "maior" que os movimentos se gundo os demais graus de liberdade.

A.1 - Introdução

Seja o sistema de coordenadas cartesianas direto $oxyz$, inercial, com versores ortonormais \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} .

Seja o sistema de coordenadas cartesianas direto $OXYZ$, fixo à em barcação, com versores ortonormais \hat{I} , \hat{J} e \hat{K} .

Considere-se ainda o sistema de coordenadas cartesianas direto $Ox'y'z'$, cuja origem O coincide com a do sistema $OXYZ$, e cujos eixos Ox' , Oy' e Oz' são sempre paralelos aos eixos ox , oy e oz (sistema $oxyz$), respectivamente (ver figura A.1).

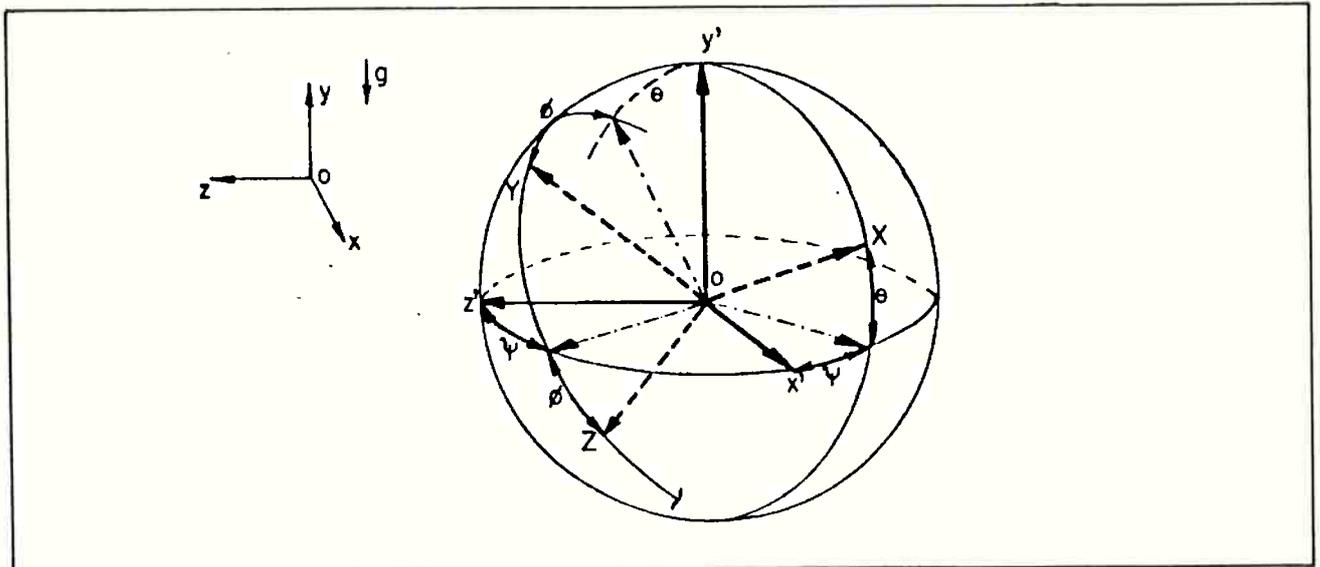


Figura A.1 - Ângulos de Euler de precessão (ψ), nutação (θ) e rotação própria (γ)

Pode-se posicionar o sistema $OXYZ$ em relação ao sistema $oxyz$ através, por exemplo, das seguintes variáveis:

(X_0, Y_0, Z_0) : coordenadas relativas ao sistema $OXYZ$ da origem do sistema $oxyz$;

ψ, θ, γ : ângulos de Euler de precessão, nutação e rotação própria, conforme indicados na figura A.1.

Dadas as bases ortonormais $B_1 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $B_2 = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, seja $[\alpha]$ a matriz de transformação de B_1 em B_2 :

$$\begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = [\alpha] \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

A matriz $[\alpha]$ se exprime por:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} (\cos\theta \cos\psi) & (\sin\theta) & (-\cos\theta \sin\psi) \\ (\sin\theta \sin\psi - \cos\phi \sin\theta \cos\psi) & (\cos\phi \cos\theta) & (\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \\ (\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi) & (-\sin\psi \cos\theta) & (\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\theta \sin\psi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

Como $[\alpha]$ é uma isometria, sua matriz é ortogonal, isto é, sua inversa é igual a sua transposta,

$$[\alpha]^{-1} = [\alpha]^t \quad (\text{A.1.3})$$

Daí

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = [\alpha]^{-1} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = [\alpha]^t \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

A embarcação é suposta um corpo rígido de massa M . Seja G o seu centro de massa, e \vec{R}_G o raio vetor indicando sua posição no siste

ma OXYZ:

$$\vec{R}_G = X_G \vec{I} + Y_G \vec{J} + Z_G \vec{K} \quad (\text{A.1.5})$$

Sejam $I_{xx}^0, I_{yy}^0, I_{zz}^0, I_{xy}^0 = I_{yx}^0, I_{xz}^0 = I_{zx}^0$ e $I_{yz}^0 = I_{zy}^0$ os momentos e produtos de inércia da embarcação, referidos ao sistema OXYZ, com polo 0.

Seja, ainda, $\vec{\omega}$ o vetor rotação do triedro OXYZ em relação ao triedro oxyz:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{j} + \dot{\Theta} \vec{n} + \dot{\phi} \vec{I}, \quad (\text{A.1.6})$$

onde \vec{n} é o versor associado ao eixo on, interseção dos planos YOZ com x'Oz' (ver figura A.1), dado por:

$$\vec{n} = \vec{J} \sin \phi + \vec{K} \cos \phi \quad (\text{A.1.7})$$

Sendo p, q e r as componentes instantâneas de $\vec{\omega}$ segundo OX, OY e OZ, respectivamente, então:

$$\vec{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \dot{\psi} + \dot{\phi} \\ \alpha_{22} \dot{\psi} + \dot{\Theta} \sin \phi \\ \alpha_{32} \dot{\psi} + \dot{\Theta} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

Seja \vec{F} a resultante das forças externas aplicadas ao sistema rígido e \vec{M} a somatória dos momentos das forças externas em relação ao ponto 0. Seja a_0 a aceleração do ponto 0 no sistema oxyz.

Têm-se, das leis de Newton:

$$\vec{F} = M \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (M \vec{R}_G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (M \vec{R}_G)]; \quad (\text{A.1.9})$$

$$\begin{aligned} \vec{m} = M \vec{R}_G \wedge \vec{a}_0 + \\ + [\dot{p} I_{xx}^0 - \dot{q} I_{xy}^0 - \dot{r} I_{xz}^0 + \\ + p r I_{xy}^0 - (q^2 - r^2) I_{yz}^0 + q r (I_{zz}^0 - I_{yy}^0) - p q I_{xz}^0] \vec{I} + \\ + [\dot{q} I_{yy}^0 - \dot{p} I_{xy}^0 - \dot{r} I_{yz}^0 + \\ + p q I_{yz}^0 + (p^2 - r^2) I_{xz}^0 + p r (I_{xx}^0 - I_{zz}^0) - q r I_{xy}^0] \vec{J} + \\ + [\dot{r} I_{zz}^0 - \dot{p} I_{xz}^0 - \dot{q} I_{yz}^0 + \\ + q r I_{xz}^0 - (p^2 - q^2) I_{xy}^0 + p q (I_{yy}^0 - I_{xx}^0) - p r I_{yz}^0] \vec{K} \end{aligned}$$

(A.1.10)

A.2 - Embarcação oscilando com seis graus de liberdade

Considere-se uma embarcação em avanço, com velocidade U . Suponha-se que a embarcação passe a sofrer pequenas oscilações com seis graus de liberdade, em torno da trajetória retilínea inicial, devido à ação das ondas.

Admita-se que o sistema OXYZ, fixo à embarcação, seja tal que o eixo OX esteja segundo sua direção longitudinal, e o plano XOY seja seu plano central-longitudinal.

Admita-se também que o sistema inercial oxyz acompanhe a embarcação com velocidade U , sendo que na ausência da excitação de ondas coincidiria com o sistema OXYZ. Considere-se ainda que o plano oxz seja o plano das águas calmas, e que o eixo oy tenha seu sentido positivo para cima.

Nessas condições, os deslocamentos $(-X_0)$, $(-Y_0)$, $(-Z_0)$, ψ , θ , e ϕ são chamados respectivamente de avanço ("surge"), arfagem ("heave"), deriva ("sway"), guinada ("yaw"), caturro ("pitch") e balanço ("roll").

Admite-se existir as seguintes expansões em séries de potências de um certo parâmetro adimensional ε , variável do problema:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= X_0^{(0)} + \varepsilon X_0^{(1)} + \varepsilon^2 X_0^{(2)} + \dots; \\
 Y_0 &= Y_0^{(0)} + \varepsilon Y_0^{(1)} + \varepsilon^2 Y_0^{(2)} + \dots; \\
 Z_0 &= Z_0^{(0)} + \varepsilon Z_0^{(1)} + \varepsilon^2 Z_0^{(2)} + \dots; \\
 \phi &= \phi^{(0)} + \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots; \\
 \psi &= \psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots; \\
 \theta &= \theta^{(0)} + \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \dots; \\
 \vec{F} &= \vec{F}^{(0)} + \varepsilon \vec{F}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{F}^{(2)} + \dots; \\
 \vec{m} &= \vec{m}^{(0)} + \varepsilon \vec{m}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{m}^{(2)} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.2.1}$$

Admite-se que $\varepsilon=0$ corresponde à situação em que a embarcação está em avanço uniforme, na ausência da perturbação das ondas. Assim:

$$\begin{aligned} X_0^{(0)} &= 0; & Y_0^{(0)} &= 0; & Z_0^{(0)} &= 0; \\ \phi^{(0)} &= 0; & \psi^{(0)} &= 0; & \theta^{(0)} &= 0; \\ \vec{F}^{(0)} &= \vec{0}; & \vec{\eta}^{(0)} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Supondo que as soluções de interesse para o problema da embarcação submetida a ondas sejam aquelas em que ε se aproxima de zero, correspondentes a oscilações "pequenas", vai-se truncar os termos das expressões cinemáticas e dinâmicas a partir do termo em ε^2 .

Assim, a matriz de transferência $[\alpha]$, por exemplo, fica:

$$[\alpha] \cong \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\theta^{(1)} & -\varepsilon\psi^{(1)} \\ -\varepsilon\theta^{(1)} & 1 & \varepsilon\phi^{(1)} \\ \varepsilon\psi^{(1)} & -\varepsilon\phi^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

Quanto às componentes do vetor rotação, tem-se:

$$\vec{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \varepsilon\dot{\phi}^{(1)} \\ \varepsilon\dot{\psi}^{(1)} \\ \varepsilon\dot{\theta}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

As equações do movimento ficam:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cong \varepsilon\vec{F}^{(1)} \cong M \{ & [-\varepsilon\ddot{X}_0^{(1)} + \varepsilon\ddot{\psi}^{(1)}z_G - \varepsilon\ddot{\theta}^{(1)}y_G] \vec{I} + \\ & + [-\varepsilon\ddot{Y}_0^{(1)} + \varepsilon\ddot{\theta}^{(1)}x_G - \varepsilon\ddot{\phi}^{(1)}z_G] \vec{J} + \\ & + [-\varepsilon\ddot{Z}_0^{(1)} + \varepsilon\ddot{\phi}^{(1)}y_G - \varepsilon\ddot{\psi}^{(1)}x_G] \vec{K} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\begin{aligned}
\vec{M} \approx \epsilon \vec{M}^{(1)} = & \left\{ M \left[y_G (-\epsilon \ddot{z}_0^{(1)}) - z_G (-\epsilon \ddot{y}_0^{(1)}) \right] + \right. \\
& \left. + \epsilon \ddot{\phi}^{(1)} I_{xx}^0 - \epsilon \ddot{\psi}^{(1)} I_{xy}^0 - \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} I_{xz}^0 \right\} \vec{I} + \\
& + \left\{ M \left[z_G (-\epsilon \ddot{x}_0^{(1)}) - x_G (-\epsilon \ddot{z}_0^{(1)}) \right] + \right. \\
& \left. + \epsilon \ddot{\psi}^{(1)} I_{yy}^0 - \epsilon \ddot{\phi}^{(1)} I_{xy}^0 - \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} I_{yz}^0 \right\} \vec{J} + \\
& + \left\{ M \left[x_G (-\epsilon \ddot{y}_0^{(1)}) - y_G (-\epsilon \ddot{x}_0^{(1)}) \right] + \right. \\
& \left. + \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} I_{zz}^0 - \epsilon \ddot{\phi}^{(1)} I_{xz}^0 - \epsilon \ddot{\psi}^{(1)} I_{yz}^0 \right\} \vec{K} \quad (\text{A.2.6})
\end{aligned}$$

Definem-se:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^{(1)} & \vec{I} \\ \vec{F}^{(1)} & \vec{J} \\ \vec{F}^{(1)} & \vec{K} \\ \vec{M}^{(1)} & \vec{I} \\ \vec{M}^{(1)} & \vec{J} \\ \vec{M}^{(1)} & \vec{K} \end{bmatrix}$$

: vetor dos esforços externos

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0^{(1)} \\ -y_0^{(1)} \\ -z_0^{(1)} \\ -\phi^{(1)} \\ -\psi^{(1)} \\ -\theta^{(1)} \end{bmatrix}$$

: vetor dos deslocamentos;

Se a embarcação possuir simetria boreste-bombordo, e se a origem 0 do sistema OXYZ for colocada na mesma vertical do centro de gravidade G, tem-se:

$$Y_G = 0 ; Z_G = 0 ; I_{XZ}^0 = I_{ZX}^0 = 0 ; I_{YZ}^0 = I_{ZY}^0 = 0, \quad (\text{A.2.7})$$

e se pode escrever uma matriz de inércias dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & -MY_G \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & MY_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MY_G & I_{xx}^0 & -I_{xy}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xy}^0 & I_{yy}^0 & 0 \\ -MY_G & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.8})$$

Nessas condições, (A.2.5) e (A.2.6) resultam:

$$[E] = [M] [\ddot{\xi}] \quad (\text{A.2.9})$$

A.3 - Balanço não reduzido

Considere-se uma situação análoga à da seção A.2, com a diferença de que o movimento de balanço ("roll") é suposto ser "maior" que os demais movimentos. Não efetuando mais qualquer truncamento relativo à variável ϕ , tem-se:

$$[\alpha] \cong \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon\theta^{(1)} & -\varepsilon\psi^{(1)} \\ \left(\varepsilon\psi^{(1)}\text{sen}\phi - \varepsilon\theta^{(1)}\text{cos}\phi\right) & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi \\ \left(\varepsilon\psi^{(1)}\text{cos}\phi + \varepsilon\theta^{(1)}\text{sen}\phi\right) & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi \end{bmatrix}; \quad (\text{A.3.1})$$

$$\vec{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \varepsilon\dot{\psi}^{(1)}\text{cos}\phi + \varepsilon\ddot{\theta}^{(1)}\text{sen}\phi \\ -\varepsilon\dot{\psi}^{(1)}\text{sen}\phi + \varepsilon\ddot{\theta}^{(1)}\text{cos}\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.2})$$

Tendo em vista as relações (A.2.7), neste caso se tem:

$$\begin{aligned} \varepsilon\vec{F}^{(1)} \cong M \left\{ \right. & \left[-\varepsilon\ddot{x}_0^{(1)} + 2\dot{\phi}(\varepsilon\dot{\psi}^{(1)}\text{cos}\phi + \varepsilon\theta^{(1)}\text{sen}\phi) \right] \gamma_G + \\ & \left. + (\varepsilon\dot{\psi}^{(1)}\text{sen}\phi - \varepsilon\ddot{\theta}^{(1)}\text{cos}\phi) \gamma_G \right] \vec{I} + \\ & \left[-\varepsilon\ddot{y}_0^{(1)} + 2\dot{\phi}\varepsilon\dot{z}_0^{(1)} - (\dot{\phi})^2 \gamma_G + (\dot{\phi})^2 \varepsilon y_0^{(1)} + \ddot{\phi}\varepsilon z_0^{(1)} \right] \vec{J} + \\ & \left. + \left[-\varepsilon\ddot{z}_0^{(1)} - 2\dot{\phi}\varepsilon\dot{y}_0^{(1)} + (\dot{\phi})^2 \varepsilon z_0^{(1)} + \ddot{\phi}\gamma_G - \ddot{\phi}\varepsilon y_0^{(1)} \right] \vec{K} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\begin{aligned}
\epsilon \vec{m}^{(1)} \cong & \left\{ M Y_G (-\epsilon \ddot{z}_0^{(1)} - 2\dot{\phi} \epsilon \dot{y}_0^{(1)} + (\dot{\phi})^2 \epsilon z_0^{(1)} - \dot{\phi} \epsilon y_0^{(1)}) + \right. \\
& \left. + \ddot{\phi} I_{xx}^o - (\epsilon \ddot{\psi}^{(1)} \cos \phi + \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} \sin \phi) I_{xy}^o \right\} \vec{I} + \\
& + \left\{ [\epsilon \ddot{\psi}^{(1)} \cos \phi + \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} \sin \phi + \dot{\phi} (-\epsilon \dot{\psi}^{(1)} \sin \phi + \epsilon \dot{\theta}^{(1)} \cos \phi)] I_{yy}^o - \right. \\
& \left. - \ddot{\phi} I_{xy}^o + \dot{\phi} (-\epsilon \dot{\psi}^{(1)} \sin \phi + \epsilon \dot{\theta}^{(1)} \cos \phi) (I_{xx}^o - I_{zz}^o) \right\} \vec{J} + \\
& + \left\{ -M Y_G (-\epsilon \ddot{x}_0^{(1)}) + [-\epsilon \ddot{\psi}^{(1)} \sin \phi + \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} \cos \phi - \dot{\phi} (\epsilon \dot{\psi}^{(1)} \cos \phi - \right. \\
& \left. - \epsilon \dot{\theta}^{(1)} \sin \phi)] I_{zz}^o - \dot{\phi}^2 I_{xy}^o + \dot{\phi} (\epsilon \dot{\psi}^{(1)} \cos \phi + \epsilon \dot{\theta}^{(1)} \sin \phi) (I_{yy}^o - I_{xx}^o) \right\} \vec{K}
\end{aligned}
\tag{A.3.4}$$

Ao se determinar o ângulo de balanço, pode-se considerar que todos os demais movimentos são reduzidos, e daí

$$\epsilon \vec{m}^{(1)} \cdot \vec{I} \cong I_{xx}^o \ddot{\phi}
\tag{A.3.5}$$

será a única equação a ser considerada.

Uma vez determinado o ângulo de balanço, deve-se utilizar as equações (A.3.3) e (A.3.4) para se calcular as demais oscilações, sendo que ϕ é suposto conhecido. A equação

$$\begin{aligned}
\epsilon \vec{m}^{(1)} \cdot \vec{I} \cong & M Y_G (-\epsilon \ddot{z}_0^{(1)} - 2\dot{\phi} \epsilon \dot{y}_0^{(1)} + (\dot{\phi})^2 \epsilon z_0^{(1)} - \dot{\phi} \epsilon y_0^{(1)}) + \\
& + \ddot{\phi} I_{xx}^o - (\epsilon \ddot{\psi}^{(1)} \cos \phi + \epsilon \ddot{\theta}^{(1)} \sin \phi) I_{xy}^o
\end{aligned}
\tag{A.3.6}$$

pode ser utilizada para se recalculer ϕ , procedendo-se assim a um processo iterativo.

As equações resultaram lineares, mas devem ser resolvidas no domínio do tempo, pois há coeficientes variáveis. Uma vez que os esforços externos resultem desacoplados, à semelhança dos esforços inerciais, os movimentos de arfagem e deriva podem ser resolvidos independentemente do avanço, guinada e caturro.

APÊNDICE B

MODELO DE REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO

DO NAVIO NO MAR

APÊNDICE B
MODELO DE REPRESENTAÇÃO DO
COMPORTAMENTO DO NAVIO NO MAR

Neste apêndice apresenta-se um modelo de representação do comportamento do navio no mar, válido para oscilações de pequena amplitude e cascos esbeltos.

O problema é formulado inicialmente em termos da Teoria Potencial Linearizada. Observa-se que, para cascos com simetria boreste-bombordo, os movimentos de avanço, arfagem e caturro resultam desacoplados dos movimentos de deriva, balanço e guinada.

Os esforços hidrodinâmicos são explicitados em termos de esforços seccionais, através da chamada Teoria das Faixas, de acordo com a concepção de Salvesen, Tuck e Faltinsen (ref.81).

Correções devidas a efeitos viscosos são introduzidas nos momentos de balanço, de acordo com a metodologia compilada por Himeno (ref.43).

B.1 - Considerações gerais

A determinação de oscilações de cascos com velocidade média de avanço U , submetidos a ondas, quando os movimentos são de pequena amplitude, costuma ser feita através de equações linearizadas envolvendo seis graus de liberdade da embarcação. Havendo simetria bom bordo-boreste, as equações ficam desacopladas três a três. Um dos conjuntos envolve os movimentos de avanço ("surge"), arfagem ("heave") e caturro ("pitch"). O outro conjunto envolve os movimentos de deriva ("sway"), balanço ("roll") e guinada ("yaw"). No movimento de balanço, a consideração dos efeitos viscosos é importante para modelagem do amortecimento, que é representado através de termos o riginalmente não lineares, porém que são linearizados impondo-se manutenção da energia dissipada por ciclo de oscilação. O cálculo do momento excitador do balanço é feito supondo que a embarcação fique fixada na sua posição média de equilíbrio, e seja excitada por um trem de ondas regulares ou aleatórias. Pode-se levar em consideração ou não a perturbação causada no trem de ondas pela presença da embarcação, isto é, o efeito de difração. Costuma-se equacionar o problema de comportamento no mar, admitindo-se inicialmente a validade da Teoria Potencial. Os efeitos devidos à viscosidade são considerados por meio de correções introduzidas a posteriori.

Seja \vec{v} o vetor velocidade do escoamento (descrição de Euler) e Φ o seu potencial:

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi \quad (\text{B.1.1})$$

Seja $oxyz$ um sistema inercial, com oxz sendo o plano das águas

quando calmas, e oy um eixo vertical orientado para cima (ver figura B.1).

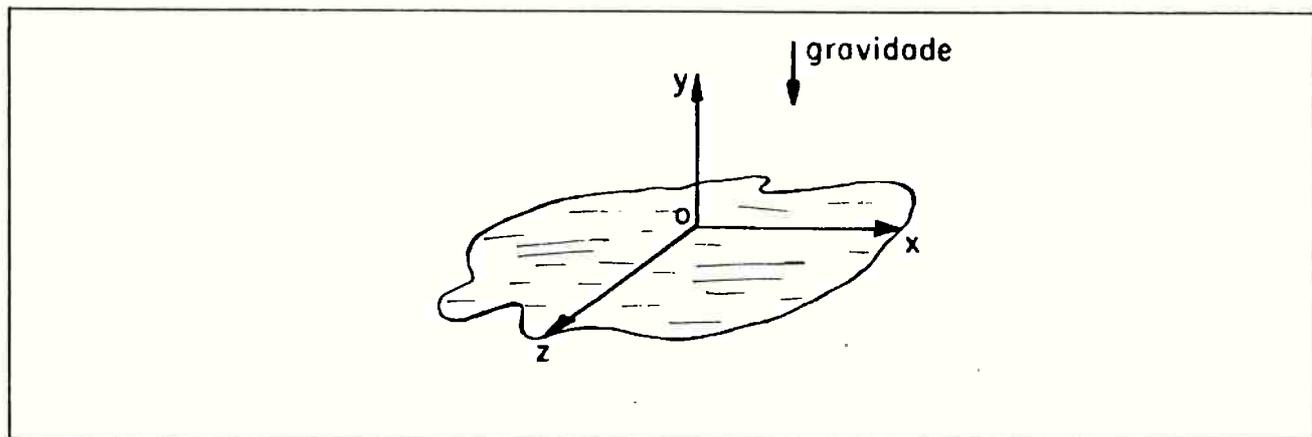


Figura B.1 - Sistema inercial $oxyz$

Tem-se:

1) Equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{na região fluida;} \quad (\text{B.1.2})$$

2) Condição de contorno na superfície livre:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right\} + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left\{ g + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \right\} + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{na superfície livre} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

3) Condição de contorno na superfície do casco:

$$\frac{DF}{Dt} = 0, \quad (\text{B.1.4})$$

em que a superfície do casco é descrita por:

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{B.1.5})$$

4) Condições iniciais.

Admite-se que não haja outros contornos sólidos além do casco, sendo a região fluida de profundidade infinita e ilimitada lateralmente.

Com relação a condições iniciais, serão desconsideradas, uma vez que se tem interesse somente em soluções estacionárias. Neste caso, basta impor que as ondas de perturbação devidas à presença e ao movimento do casco se desenvolvam no sentido de se afastarem da embarcação (condição de irradiação).

A pressão pode ser obtida de:

$$p = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho (U^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) - \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gy \right) \quad (\text{B.1.6})$$

A elevação da superfície livre pode ser calculada por:

$$\eta = \frac{1}{g} \left[U^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \right) \right] / \text{superfície livre} \quad (\text{B.1.7})$$

Nas seções seguintes, apresentam-se simplificações para o problema acima formulado, razoáveis para algumas situações específicas.

B.2 - A formulação do problema no caso de oscilações "pequenas"

Considere-se uma embarcação em avanço com velocidade média U , oscilando com seis graus de liberdade, em torno da trajetória média a vante, devido à ação das ondas do mar.

Objetiva-se determinar as oscilações da embarcação, sendo necessário então o conhecimento dos esforços hidrodinâmicos nela atuantes.

Na presente seção formula-se o problema de determinação do escoamento em torno da embarcação; na seção B.3 formula-se o problema de determinação dos esforços, a partir do conhecimento do escoamento.

As ondas do mar e as oscilações da embarcação são supostas de pequena amplitude. Daí, pode-se admitir, em primeira aproximação, que:

- 1) a formação de ondas próprias pelo avanço da embarcação não seja praticamente influenciada pelas ondas do mar, nem pelas oscilações da embarcação;
- 2) a difração das ondas incidentes do mar não seja praticamente influenciada pelas oscilações da embarcação;
- 3) a irradiação de ondas pela oscilação da embarcação não seja praticamente influenciada pela presença de ondas próprias devidas ao avanço da embarcação, ou pela presença das ondas do mar.

Admita-se ainda que os efeitos viscosos possam ser considerados a posteriori, e que o problema possa ser visto inicialmente como de fluido invíscido e escoamento irrotacional (Teoria Potencial).

O potencial de velocidades total, associado ao escoamento em tor

no do casco, de ser expresso por:

$$\Phi_{\text{total}} \approx -Ux + \Phi_S + \Phi_I + \Phi_D + \Phi_R, \quad (\text{B.2.1})$$

onde

$-Ux$ é o potencial do escoamento uniforme visto do sistema $oxyz$, que acompanha a embarcação com velocidade U (ver apêndice A);

Φ_S é o potencial associado à perturbação do escoamento uniforme pela presença do casco;

Φ_I é o potencial das ondas incidentes não deformadas pela presença do casco;

Φ_D é o potencial de difração, associado à perturbação das ondas incidentes pela presença da embarcação;

Φ_R é o potencial de irradiação, associado à criação de ondas que se afastam do corpo quando a embarcação oscila.

Sendo as ondas incidentes do mar e as oscilações da embarcação de pequena amplitude, tanto Φ_S como Φ_D podem ser estimados supondo que a embarcação esteja se movimentando com velocidade U a vante, sem oscilar. Além disso, Φ_R pode ser entendido nesse caso como a superposição de potenciais associados cada um dos movimentos da embarcação:

$$\Phi_R \approx \sum_{j=1}^6 \Phi_j, \quad (\text{B.2.2})$$

onde Φ_j é o potencial associado à oscilação j ($j=1$:avanço; $j=2$:arfagem; $j=3$:deriva; $j=4$:balanço; $j=5$:guinada; $j=6$:caturro) .

A formulação do problema pode, então, ser subdividida nas seguintes quatro etapas, a saber:

- 1ª etapa

Navio avançando com velocidade U na ausência de ondas e sem oscilar, denominada "Problema de Resistência de Ondas";

- 2ª etapa

Navio avançando com velocidade U na presença de ondas, porém sem oscilar, denominada "Problema de Difração";

- 3ª etapa

São na realidade seis casos; em cada um o navio avança com velocidade U na ausência de ondas, e oscila com cada um dos movimentos considerados (avanço, arfagem, deriva, balanço, guinada ou caturro); denominam-se "Problemas de Irradiação";

- 4ª etapa

Problema completo, correspondendo ao navio em avanço com velocidade U na presença de ondas e oscilando concomitantemente com seis graus de liberdade.

Tal subdivisão permite a avaliação por etapas da resistência de ondas e dos esforços decorrentes da difração e da irradiação, sendo razoável somente se as oscilações forem pequenas.

A seguir, procede-se à formulação do problema para cada etapa.

1ª ETAPA: PROBLEMA DE RESISTÊNCIA DE ONDAS (navio avançando com velocidade U na ausência de ondas e sem oscilar)

Nesta etapa, torna-se possível uma determinação aproximada de ϕ_s . Tem-se:

$$\Phi \left(\begin{array}{l} \text{problema de} \\ \text{resistência} \\ \text{de ondas} \end{array} \right) = -Ux + \Phi_s(x, y, z) \quad (\text{B.2.3})$$

Se o casco é esbelto, ϕ_s resulta "pequeno". Pode-se expandir ϕ_s em série de potências de um parâmetro $\varepsilon > 0$ representativo da esbeltez do casco (quanto maior a esbeltez, menor ε). Desprezam-se nas equações do problema, os termos em ε^2 ou de ordem superior. A elevação da superfície livre também resulta "pequena", podendo ser expandida em série de potências de ε . A região fluida, para efeito de aplicação da equação de Laplace, pode ser suposta contida no semi-espaço $y < 0$. Na aplicação da condição de contorno na superfície livre, esta é suposta contida no plano $y=0$. Entendendo ϕ_s agora como a aproximação de ordem ε , a formulação do problema se reduz a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_s &= 0 \text{ na região fluida para } y \leq 0, \\ U^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + g \frac{\partial \phi_s}{\partial y} &\cong 0 \text{ na superfície livre para } y \cong 0, \\ \frac{\partial (-Ux + \phi_s)}{\partial n} &\cong 0 \text{ na superfície de casco.} \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

Sendo η entendida como a aproximação de ordem ε para a superfície livre, tem-se:

$$\eta \left(\begin{array}{l} \text{problema de} \\ \text{resistência} \\ \text{de ondas} \end{array} \right) (x, z) \cong \frac{U}{g} \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \Big|_{y \cong 0} \quad (\text{B.2.5})$$

2ª ETAPA: PROBLEMA DE DIFRAÇÃO (navio avançando com velocidade U na presença de ondas, porém sem oscilar)

Supõe-se que o potencial de ondas incidentes ϕ_I seja conhecido, e a incógnita do problema fica sendo exclusivamente o potencial de

difração ϕ_D , uma vez que ϕ_S foi estimado na primeira etapa. Tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{(problema de)}}^{\text{difração}} &= -Ux + \Phi_S(x, y, z) + \\ &+ \Phi_I(x, y, z, t) + \Phi_D(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

É suposto que o potencial ϕ_I varie senoidalmente com o tempo, de acordo com a Teoria de Ondas de Airy. A mesma hipótese é admitida para ϕ_D . Costuma-se utilizar a notação complexa:

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \text{Re} \left\{ \Phi_{I0} \exp(i\sigma_{\Phi_I}) \exp(-i\omega t) \right\}, \\ \Phi_D &= \text{Re} \left\{ \Phi_{D0} \exp(i\sigma_{\Phi_D}) \exp(-i\omega t) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2.7})$$

em que

ω é a frequência de oscilação;

ϕ_{I0} e ϕ_{D0} são as amplitudes de ϕ_I e ϕ_D , respectivamente;

σ_{ϕ} e σ_{ϕ_D} são as fases de ϕ_I e ϕ_D com relação a alguma referência.

As amplitudes complexas de ϕ_I e ϕ_D são:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_I &= \Phi_{I0} \exp(i\sigma_{\bar{\Phi}_I}), \\ \bar{\Phi}_D &= \Phi_{D0} \exp(i\sigma_{\bar{\Phi}_D}). \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

A equação (B.2.5) fica:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{(problema de)}}^{\text{difração}} &= -Ux + \Phi_S(x, y, z) + \\ &+ \text{Re} \left\{ [\bar{\Phi}_I(x, y, z) + \bar{\Phi}_D(x, y, z)] \exp(-i\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

Supondo ϕ_I e ϕ_D "pequenos", valem as mesmas considerações feitas para ϕ_s , chegando-se, em termos de amplitudes complexas, a

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\phi}_D &\cong 0 \text{ na região fluida para } y \neq 0, \\ U^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_D}{\partial x^2} + 2i\omega U \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial x} - \omega^2 \bar{\phi}_D + g \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial y} &\cong 0 \\ &\text{na superfície livre para } y \cong 0, \\ \frac{\partial (\bar{\phi}_I + \bar{\phi}_D)}{\partial n} &\cong 0 \text{ na superfície do casco.} \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

A elevação da superfície livre fica:

$$\begin{aligned} \eta \text{ (problema de difração)} (x, z, t) &\cong \\ &\cong \left\{ \text{Re} \left\{ -\frac{1}{g} [-i\omega (\bar{\phi}_I + \bar{\phi}_D) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - U \frac{\partial (\bar{\phi}_I + \bar{\phi}_D)}{\partial x}] \exp(-i\omega t) \right\} + \frac{U}{g} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right\} \Bigg|_{y \cong 0} \end{aligned} \quad (\text{B.2.11})$$

3ª ETAPA: PROBLEMAS DE IRRADIAÇÃO (navio avançando com velocidade de U na ausência de ondas, e oscilando com cada um dos seis movimentos considerados 'avanço, arfagem, deriva, balanço, guinada ou caturro')

Trata-se, na realidade, de seis problemas, cada um correspondendo a um grau de liberdade. Já que ϕ_s é estimado na primeira etapa, a incôgnita na terceira etapa é o potencial de irradiação ϕ_j em questão.

Tem-se:

$$\Phi(\text{problema de irradiação } j) = -Ux + \Phi_s(x, y, z) + \Phi_j(x, y, z, t), \quad j=1, \dots, 6. \quad (\text{B.2.12})$$

Supõe-se que os potenciais ϕ_j variem senoidalmente no tempo:

$$\Phi_j = \text{Re} \left\{ \phi_{j0} \exp(i\sigma_{\Phi_j}) \exp(-i\omega t) \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{\Phi}_j \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (\text{B.2.13})$$

em que

ϕ_{j0} são as amplitudes;

σ_{ϕ_j} são as fases com relação a uma das referências;

$\bar{\Phi}_j = \phi_{j0} \exp(i\sigma_{\phi_j})$ são as amplitudes complexas.

Sejam ξ_j , $j=1, \dots, 6$, as aproximações de ordem ϵ para o avanço (X_0), a arfagem (Y_0), a deriva (Z_0), o balanço (ϕ), a guinada (ψ) e o caturro (θ), respectivamente (ver apêndice A).

Sejam:

$$\begin{aligned} \xi_j &= \text{Re} \left\{ \xi_{j0} \exp(i\sigma_{\xi_j}) \exp(-i\omega t) \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{\xi}_j \exp(-i\omega t) \right\}, \\ \Phi_j^1 &= \text{Re} \left\{ \Phi_{j0}^1 \exp(i\sigma_{\Phi_j^1}) \exp(-i\omega t) \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{\Phi}_j^1 \exp(-i\omega t) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{\Phi_{j0}^1}{\xi_{j0}} \exp[i(\sigma_{\Phi_j^1} - \sigma_{\xi_j})] \exp(-i\omega t) \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{\bar{\Phi}_j^1}{\bar{\xi}_j} \exp(-i\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2.14})$$

A equação (B.2.12) fica:

$$\Phi_{\text{(problema de irradiação } j)} = -Ux + \phi_s(x, y, z) + \operatorname{Re} \left\{ \bar{\xi}_j \bar{\Phi}_j^1 \exp(-i\omega t) \right\}, j=1, \dots, 6. \quad (\text{B.2.15})$$

Na hipótese de pequenas oscilações, a condição de contorno na superfície do casco pode ser simplificada.

A expressão que representa a superfície do casco em cada instante, pode ser re-escrita como:

$$F(x, y, z, t) = \tilde{F}(X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)) = 0, \quad (\text{B.2.16})$$

em que \tilde{F} é referida ao sistema OXYZ fixo na embarcação.

Sendo $[\alpha]$ a matriz de transformação do sistema oxyz para OXYZ (ver apêndice A), tem-se (ver figura B.2):

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} (x-X_0) & (y-Y_0) & (z-Z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} [\alpha]^t \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.17})$$

Na hipótese de pequenas oscilações, tem-se (ver equação (A.2.3)):

$$[\alpha] \cong \begin{bmatrix} 1 & \xi_6 & -\xi_5 \\ -\xi_6 & 1 & \xi_4 \\ \xi_5 & -\xi_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.18})$$

e também:

$$\begin{aligned} -X_0 &\cong \xi_1; \\ -Y_0 &\cong \xi_2; \\ -Z_0 &\cong \xi_3. \end{aligned} \quad (\text{B.2.19})$$

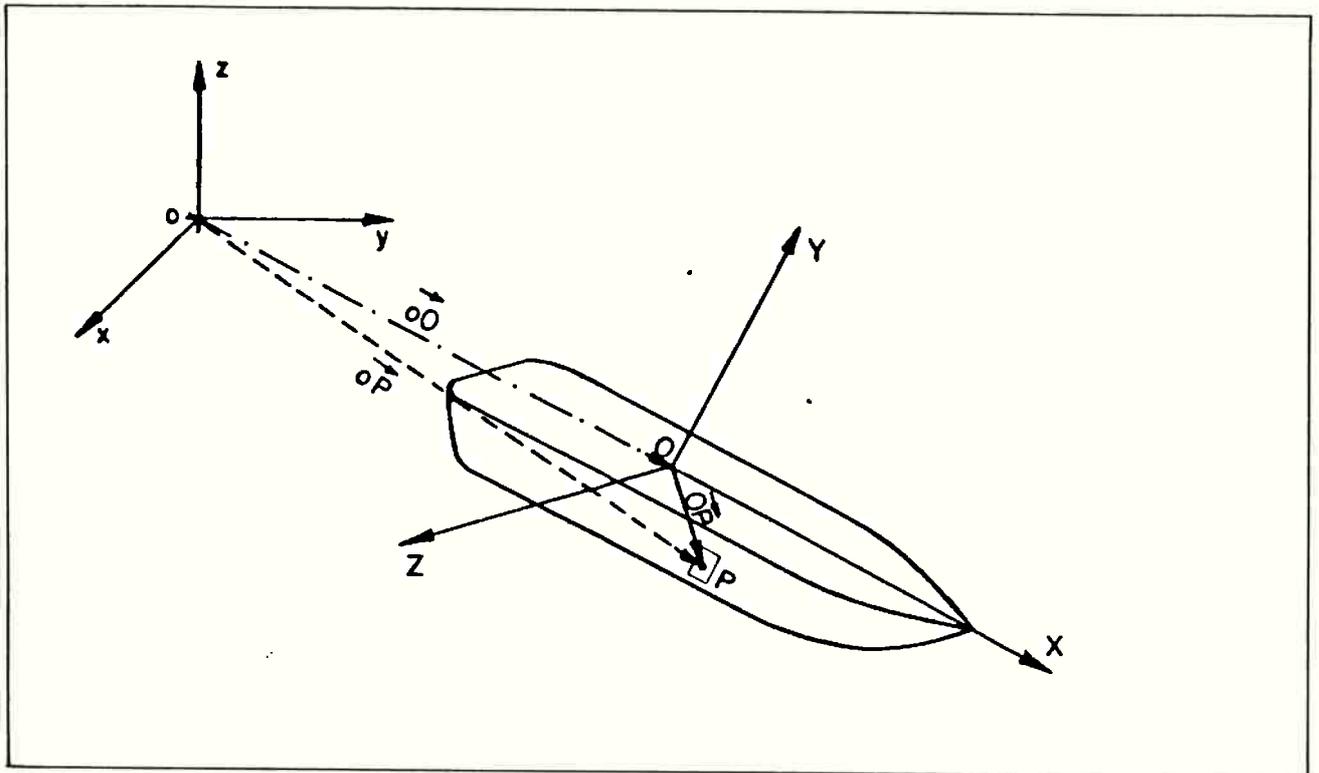


Figura B.2 - O ponto P da superfície do casco, visto dos sistemas $oxyz$ (inercial) e $OXYZ$ (fixo na embarcação)

Tendo em vista (B.2.17) a (B.2.19), a expressão (B.2.16) fica:

$$F(x, y, z, t) \cong \tilde{F} \left(\begin{aligned} &(-\xi_1 + x + \xi_6 y - \xi_5 z, -\xi_2 - \xi_6 x + y + \xi_4 z, \\ &-\xi_3 + \xi_5 x - \xi_4 y + z) \cong 0 \end{aligned} \right) \quad (\text{B.2.29})$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\vec{k}}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} = \\
&= \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z}\right)\vec{i} + (\dots)\vec{j} + (\dots)\vec{k}}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2\right]^{1/2}} = \\
&\stackrel{112}{=} \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \xi_6 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \xi_5\right)\vec{i} + (\dots)\vec{j} + (\dots)\vec{k}}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \xi_6 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \xi_5\right)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2\right]^{1/2}} = \\
&\stackrel{112}{=} \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \xi_6 + \frac{\partial F}{\partial z} \xi_5\right)\vec{i} + (\dots)\vec{j} + (\dots)\vec{k}}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} = \\
&= (N_1 - N_2 \xi_6 + N_3 \xi_5)\vec{i} + (N_1 \xi_6 + N_2 - N_3 \xi_4)\vec{j} + \\
&\quad + (-N_1 \xi_5 + N_2 \xi_4 + N_3)\vec{k}
\end{aligned}$$

(B.2.21)

em que $N = (\vec{N}_1 \vec{i} + N_2 \vec{j} + N_3 \vec{k})$ é a normal à superfície do casco, dada no sistema OXYZ.

Considerando (B.2.21) e (B.2.15), tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} \cong & \left(-U + \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) (N_1 - N_2 \xi_6 + N_3 \xi_5) + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) (N_1 \xi_6 + N_2 - N_3 \xi_4) + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) (-N_1 \xi_5 + N_2 \xi_4 + N_3). \end{aligned} \quad (\text{B.2.22})$$

Uma vez que ϕ_s pode ser estimado aproximadamente na primeira etapa, tem-se, pela terceira das equações (B.2.4):

$$\left(-U + \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \right) N_1 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} N_2 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} N_3 = 0, \quad (\text{B.2.23})$$

uma vez que no caso de determinação de ϕ_s o casco estava fixo com relação a $oxyz$.

Daí, (B.2.22) fica, desprezando termos de ordem igual ou superior a ξ :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \cong \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} N_1 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + U \xi_6 \right) N_2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - U \xi_5 \right) N_3 \quad (\text{B.2.24})$$

Supõe-se que $\partial \Phi_j / \partial x$, $\partial \Phi_j / \partial y$ e $\partial \Phi_j / \partial z$ possam ser calculados sobre o casco fixado em sua posição média.

Por outro lado, para cada um dos movimentos considerados, a velocidade do casco na direção normal à sua superfície, em cada ponto, fica (ver figura B.3):

$$\bullet j=1 \text{ (avanço)} : v_1 = \text{Re} \left\{ -i\omega N_1 \xi_1 \exp(-i\omega t) \right\};$$

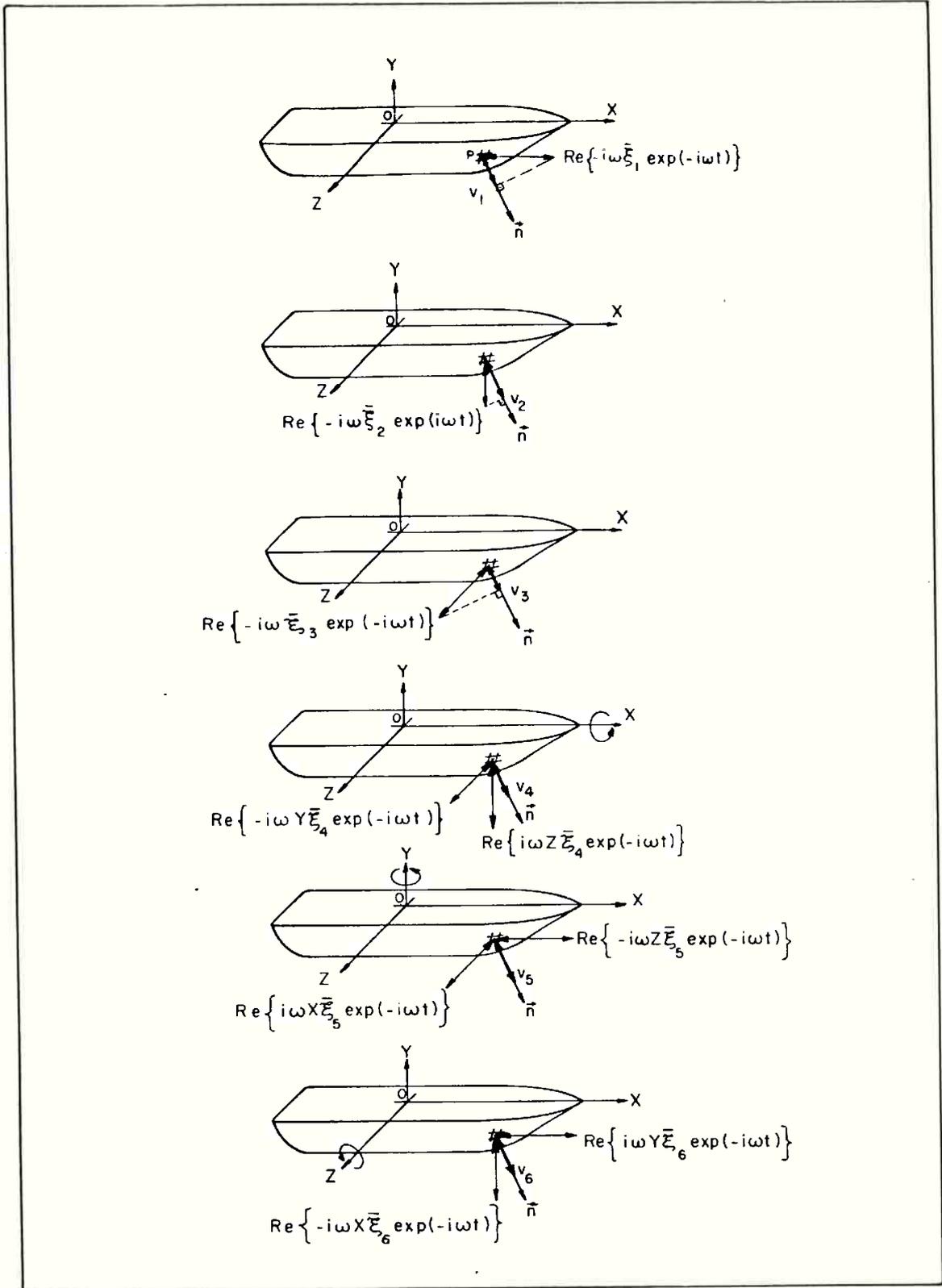


Figura B.3 - Movimento oscilatório isolado em cada grau de liberdade

- $j=2$ (deriva): $U_2 = \text{Re} \left\{ -i\omega N_2 \bar{\xi}_2 \exp(-i\omega t) \right\};$
- $j=3$ (arfagem): $U_3 = \text{Re} \left\{ -i\omega N_3 \bar{\xi}_3 \exp(-i\omega t) \right\};$
- $j=4$ (balanço): $U_4 = \text{Re} \left\{ -i\omega (YN_3 - ZN_2) \bar{\xi}_4 \exp(-i\omega t) \right\} =$
 $= \text{Re} \left\{ -i\omega N_4 \bar{\xi}_4 \exp(-i\omega t) \right\};$
- $j=5$ (guimada): $U_5 = \text{Re} \left\{ -i\omega (ZN_1 - XN_3) \bar{\xi}_5 \exp(-i\omega t) \right\} =$
 $= \text{Re} \left\{ -i\omega N_5 \bar{\xi}_5 \exp(-i\omega t) \right\};$
- $j=6$ (caturo): $U_6 = \text{Re} \left\{ -i\omega (XN_2 - YN_1) \bar{\xi}_6 \exp(-i\omega t) \right\} =$
 $= \text{Re} \left\{ -i\omega N_6 \bar{\xi}_6 \exp(-i\omega t) \right\};$

(B.2.25)

sendo que

$$\begin{bmatrix} N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \vec{N}_\perp \left(\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \right), \quad (\text{B.2.26})$$

e N_j , $j=1, \dots, 6$ são as componentes da chamada normal generalizada à superfície do corpo em cada ponto.

Diante de (B.2.24) e (B.2.25), a condição de contorno na superfície do corpo para pequenas oscilações fica, em termos das amplitudes complexas para os potenciais devidos a oscilações de amplitude unitária:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial n_j} / \text{casco fixado na sua posição média} \cong (-i\omega N_j), \quad j=1, \dots, 4;$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial n_j} / \text{casco fixado na sua posição média} \cong (-i\omega N_j + Um_j), \quad j=5, 6,$$

(B.2.27)

com $m_5=N_3$ e $m_6=N_2$.

Assim sendo, a formulação dos problemas para pequenas oscilações (equações (B.1.2), (B.1.7), (B.2.27)) fica:

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_j^1 \cong 0 \text{ na região fluida para } y \geq 0, \quad j=1, \dots, 6,$$

$$U^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_j^1}{\partial x^2} + 2i\omega U \frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial x} -$$

$$-\omega^2 \bar{\Phi}_j^1 + g \frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial y} \cong 0 \text{ na superfície livre para } y \cong 0, \quad j=1, \dots, 6,$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial n_j} / \text{casco fixado na posição média} \cong (-i\omega N_j), \quad j=1, \dots, 4,$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial n_j} / \text{casco fixado na posição média} \cong (-i\omega N_j + Um_j), \quad j=5, 6.$$

(B.2.28)

A região fluida é delimitada pela superfície livre e pelo casco colocado na sua posição média.

Cada potencial $\bar{\Phi}_j^1$ pode ser escrito:

$$\bar{\Phi}_j^1 = \bar{\Phi}_j^{10} - \frac{U}{i\omega} \bar{\Phi}_j^{1U} \quad (\text{B.2.29})$$

desde que para $\bar{\Phi}_j^{10}$ valha:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi}_j^{10} &\cong 0 \text{ na região fluida para } y \lesssim 0, j=1, \dots, 6, \\ U^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_j^{10}}{\partial x^2} + 2i\omega U \frac{\partial \bar{\Phi}_j^{10}}{\partial x} - \\ -\omega^2 \bar{\Phi}_j^{10} + g \frac{\partial \bar{\Phi}_j^{10}}{\partial y} &\cong 0 \text{ na superfície livre} \\ &\text{para } y \cong 0, j=1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^{10}}{\partial n} \Big/_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} \cong (-i\omega N_j), j=1, \dots, 6, \quad (\text{B.2.30})$$

e para $\bar{\Phi}_j^{1U}$ valha:

$$\bar{\Phi}_j^{1U} = 0, j=1, \dots, 4,$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi}_j^{1U} &\cong 0 \text{ na região fluida para } y \lesssim 0, j=5, 6, \\ U^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_j^{1U}}{\partial x^2} + 2i\omega U \frac{\partial \bar{\Phi}_j^{1U}}{\partial x} - \\ -\omega^2 \bar{\Phi}_j^{1U} + g \frac{\partial \bar{\Phi}_j^{1U}}{\partial y} &\cong 0 \text{ na superfície livre} \\ &\text{para } y \cong 0, j=5, 6, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j^{1U}}{\partial n} \Big/_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} \cong (-i\omega m_j), j=5, 6. \quad (\text{B.2.31})$$

De (B.2.30) e (B.2.31) verifica-se que:

$$\bar{\Phi}_5^{1U} = \bar{\Phi}_3^{10} \quad ; \quad \bar{\Phi}_6^{1U} = -\bar{\Phi}_2^{10}, \quad (\text{B.2.32})$$

e daí os problemas se restringem ao cálculo dos $\bar{\phi}_j^{10}$, $j=1, \dots, 6$, segundo a formulação (B.2.30).

A elevação da superfície livre fica:

$$\begin{aligned} \text{? problema de irradiação } j \quad (x, z, t) \cong & \left\{ \text{Re} \left\{ -\frac{1}{g} [-i\omega \bar{\xi}_j \bar{\phi}_j' - \right. \right. \\ & \left. \left. - U \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\xi}_j \bar{\phi}_j') \right] \exp(-i\omega t) \right\} + \frac{U}{g} \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right\} /_{y=0} \quad (\text{B.2.33}) \end{aligned}$$

4ª ETAPA: PROBLEMA COMPLETO (navio avançando com velocidade U na presença de ondas, e oscilando concomitantemente com seis graus de liberdade)

Tem-se:

$$\Phi_{\text{total}} = -Ux + \phi_s + \text{Re} \left\{ [\bar{\phi}_I + \bar{\phi}_D + \sum_{j=1}^6 \bar{\xi}_j \bar{\phi}_j'] \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (\text{B.2.34})$$

em que se supõe que ϕ_s seja aproximadamente aquele correspondente à primeira etapa, ϕ_D aquele da segunda etapa e ϕ_j , $j=1, \dots, 6$, aqueles da terceira etapa.

A formulação simplificada para o problema fica, em termos de amplitudes complexas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi}_{\text{total}} & \cong 0 \text{ na região fluida para } y \geq 0, \\ U^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{\text{total}}}{\partial x^2} + 2i\omega U \frac{\partial \bar{\Phi}_{\text{total}}}{\partial x} - \end{aligned}$$

$$-\omega^2 \bar{\Phi}_{total} + g \frac{\partial \bar{\Phi}_{total}}{\partial y} \text{ na superfície livre para } y \approx 0, \quad \text{B.21}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_{total}}{\partial n} \Big|_{\text{caso fixado na posição média}} \approx \sum_{j=1}^6 [-i\omega N_j + U m_j] \bar{\xi}_j,$$

$$\text{com } m_j=0, \quad j=1, \dots, 4, \quad m_5=N_3, \quad m_6=-N_2. \quad \text{(B.2.35)}$$

As aproximações são razoáveis, tendo em vista que:

- as oscilações da embarcação e a deformação da superfície livre são pequenas, e as condições de contorno podem ser aplicadas nos contornos fixados com relação ao sistema $oxyz$, em todas as etapas;
- a equação de Laplace, a condição de contorno no casco e a condição de contorno na superfície livre somadas, cada uma, para as três primeiras etapas (expressões (B.2.4), (B.2.10) e (B.2.28) multiplicadas por $\bar{\xi}_j$) equivalem à formulação para o problema completo (expressões (B.2.35)).

A elevação da superfície livre fica

$$\begin{aligned} \eta_{total}(x, z, t) \approx & \left\{ \text{Re} \left\{ \left[\sum_{j=1}^6 \frac{1}{g} [i\omega \bar{\xi}_j \bar{\Phi}_j' + U \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\xi}_j \bar{\Phi}_j')] \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{g} [i\omega (\bar{\Phi}_I + \bar{\Phi}_D) + U \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\Phi}_I + \bar{\Phi}_D)] \right\} \exp(-i\omega t) \right\} + \\ & + \frac{U}{g} \frac{\partial \bar{\Phi}_s}{\partial x} \Big|_{y \approx 0} \end{aligned} \quad \text{(B.2.36)}$$

B.3 - Os esforços hidrodinâmicos: oscilações "pequenas"

O cálculo dos esforços é feito pela integração da pressão ao longo do casco.

Diante da hipótese de pequenas oscilações, a superfície tomada para integração corresponderá ao casco fixo em relação ao sistema $oxyz$, na sua posição média, sendo que a linha d'água na superfície livre, é suposta estar em $y=0$.

Tem-se, para o problema completo:

$$p(x, y, z, t) \cong p_{atm} + \frac{1}{2} \rho (U^2 - \nabla \Phi_{total} \cdot \nabla \Phi_{total}) - \rho \left(\frac{\partial \Phi_{total}}{\partial t} + gy \right). \quad (B.3.1)$$

Considerando (B.2.34), e desprezando em (B.3.1) os termos de ordem igual ou superior a dois, tem-se:

$$p(x, y, z, t) \cong p_{atm} - \rho gy + \rho U \frac{\partial \Phi_{total}}{\partial x} - \operatorname{Re} \left\{ \rho \left[-i\omega \bar{\Phi}_I - U \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial x} \right] \exp(-i\omega t) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \rho \left[-i\omega \bar{\Phi}_D - U \frac{\partial \bar{\Phi}_D}{\partial x} \right] \exp(-i\omega t) \right\} - \sum_{j=1}^6 \operatorname{Re} \left\{ \rho \bar{\xi}_j \left[-i\omega \bar{\Phi}_j^1 - U \frac{\partial \bar{\Phi}_j^1}{\partial x} \right] \exp(-i\omega t) \right\} \quad (B.3.2)$$

Considere-se um trem de ondas regulares unidirecional incidindo sobre o casco com um ângulo de aproamento β , sendo $\beta=0^\circ$ incidência pela popa (ver figura B.4).

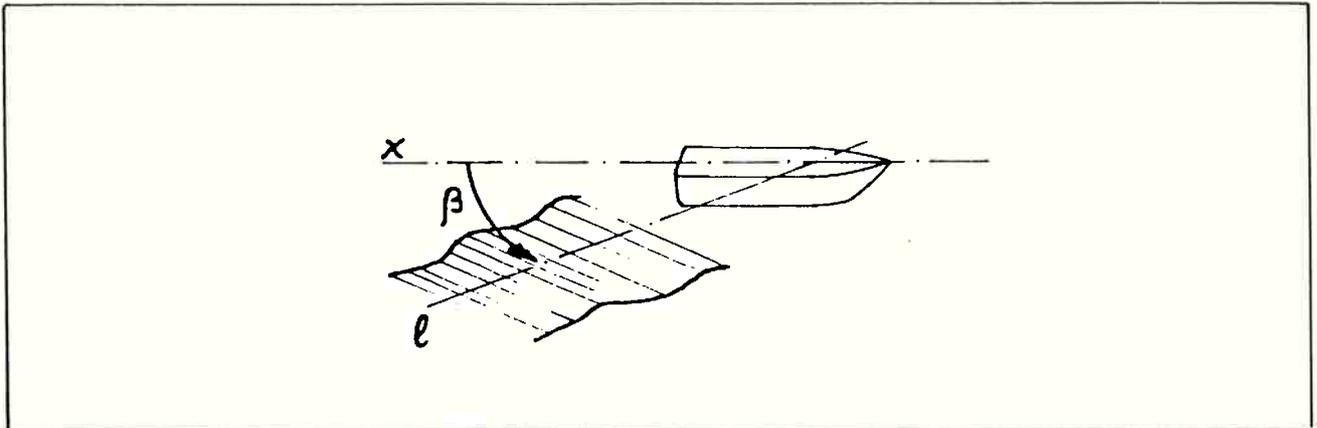


Figura B.4 - Incidência do trem de ondas regulares unidirecional sobre o casco

Sejam H a altura de ondas, λ o comprimento de ondas, $k=2\pi/\lambda$ o número de onda, c a velocidade de ondas e, ω_0 a frequência de ondas. Segundo a Teoria Linear de Airy para águas profundas, tem-se:

$$\phi_1 = \text{Re} \left\{ \frac{-igH}{2\omega_0} \exp(ky) \exp(ikl') \exp(-i\omega_0 t) \right\}, \quad (\text{B.3.3})$$

em que l' é um eixo fixo no espaço, na direção de propagação das ondas, e em que se arbitrou $\sigma_{\phi_1} = -90^\circ$ ($\exp(i\sigma_{\phi_1}) = -i$). Tem-se também:

$$k = \frac{\omega_0^2}{g} \quad (\text{águas profundas}) \quad (\text{B.3.4})$$

A elevação de ondas incidentes é dada por (expressão (B.1.11)):

$$\begin{aligned} \eta_1(x, z, t) &\approx -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{H}{2} \exp(ikl') \exp(-i\omega_0 t) \right\} = \\ &= \frac{H}{2} \cos(kl' - \omega_0 t). \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

Tomando-se um eixo l , paralelo a l' , mas que acompanha o sistema $oxyz$ com velocidade U , tem-se

$$\Phi_I = \text{Re} \left\{ -\frac{i\omega H}{2\omega_0} \exp(ky) \exp(ikl) \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad (\text{B.3.6})$$

em que ω_e é a chamada frequência de encontro, com que as ondas são "percebidas" no referencial $oxyz$. A velocidade relativa entre trem de ondas e navio na direção de propagação das ondas é:

$$c_e = c - U \cos \beta \quad (\text{B.3.7})$$

Tem-se $c_e = \omega_e / k$ e $c = \omega_0 / k$, e daí:

$$\omega_e = \omega_0 - k U \cos \beta, \quad (\text{B.3.8})$$

ou, tendo em vista (B.3.28):

$$\omega_e = \omega_0 - \frac{\omega_0^2 U \cos \beta}{g} \quad (\text{B.3.9})$$

Observe-se que $\omega_e > 0$ corresponde a $c_e > 0$ e $\omega_e < 0$ corresponde a $c_e < 0$.

Observe-se também que Φ_I expresso por (B.3.6) verifica a aproximação de ordem ϵ para (B.1.7). De fato, sendo $l = x \cos \beta - z \sin \beta$, tem-se:

$$\Phi_I = \text{Re} \left\{ -\frac{igtl}{2\omega_0} \exp(ky) \exp [ik(x \cos \beta - z \sin \beta)] \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad (\text{B.3.10})$$

e:

$$\begin{aligned}
& \left[U^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_I}{\partial x^2} - 2i\omega_e U \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial x} - \omega_e^2 \bar{\Phi}_I + g \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial y} \right]_{y=0} = \\
& = \left[U^2 (ik \cos \beta)^2 \bar{\Phi}_I - 2i\omega_e U (-ik \cos \beta) \bar{\Phi}_I - \right. \\
& \quad \left. - \omega_e^2 \bar{\Phi}_I + gk \bar{\Phi}_I \right]_{y=0} = \\
& = \left[-k^2 U^2 \cos^2 \beta - 2kU \cos \beta (\omega_e - kU \cos \beta) - \right. \\
& \quad \left. - (\omega_e - kU \cos \beta)^2 + g \frac{\omega_e^2}{g} \right] \bar{\Phi}_I /_{y=0} = 0.
\end{aligned}$$

A elevação da superfície livre, "vista" do sistema $oxyz$, fica (ver expressão (B.1.11)):

$$\begin{aligned}
\eta_1(x, z, t) &= \text{Re} \left\{ -\frac{1}{g} (-i\omega_e \bar{\Phi}_I - U \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial x}) \exp(-i\omega_e t) \right\} /_{y=0} = \\
&= \text{Re} \left\{ \frac{(i\omega_e + Uik \cos \beta)}{g} \bar{\Phi}_I \exp(-i\omega_e t) \right\} /_{y=0} = \\
&= \frac{H}{2} \cos(kx - \omega_e t)
\end{aligned} \tag{B.3.11}$$

Na figura B.5, esboçam-se os gráficos de $|\omega_e|$ versus ω_o , de acordo com (B.3.33), para $0 < \beta < 90^\circ$, e para $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Para ondas de través ($\beta = 90^\circ$), tem-se $\omega_e = \omega_o$. Se as ondas são de bochecha ou de proa, a frequência de encontro sempre aumenta com o aumento da frequência das ondas incidentes. Se as ondas são de alheta ou de proa, elas são vistas se dirigindo ao encontro da embarcação ($c_e > 0$) se $0 < \omega_o < g/(U \cos \beta)$, paradas em relação à embarcação se $\omega_o = g/(U \cos \beta)$, e se afastando da embarcação se $\omega_o > g/(U \cos \beta)$.

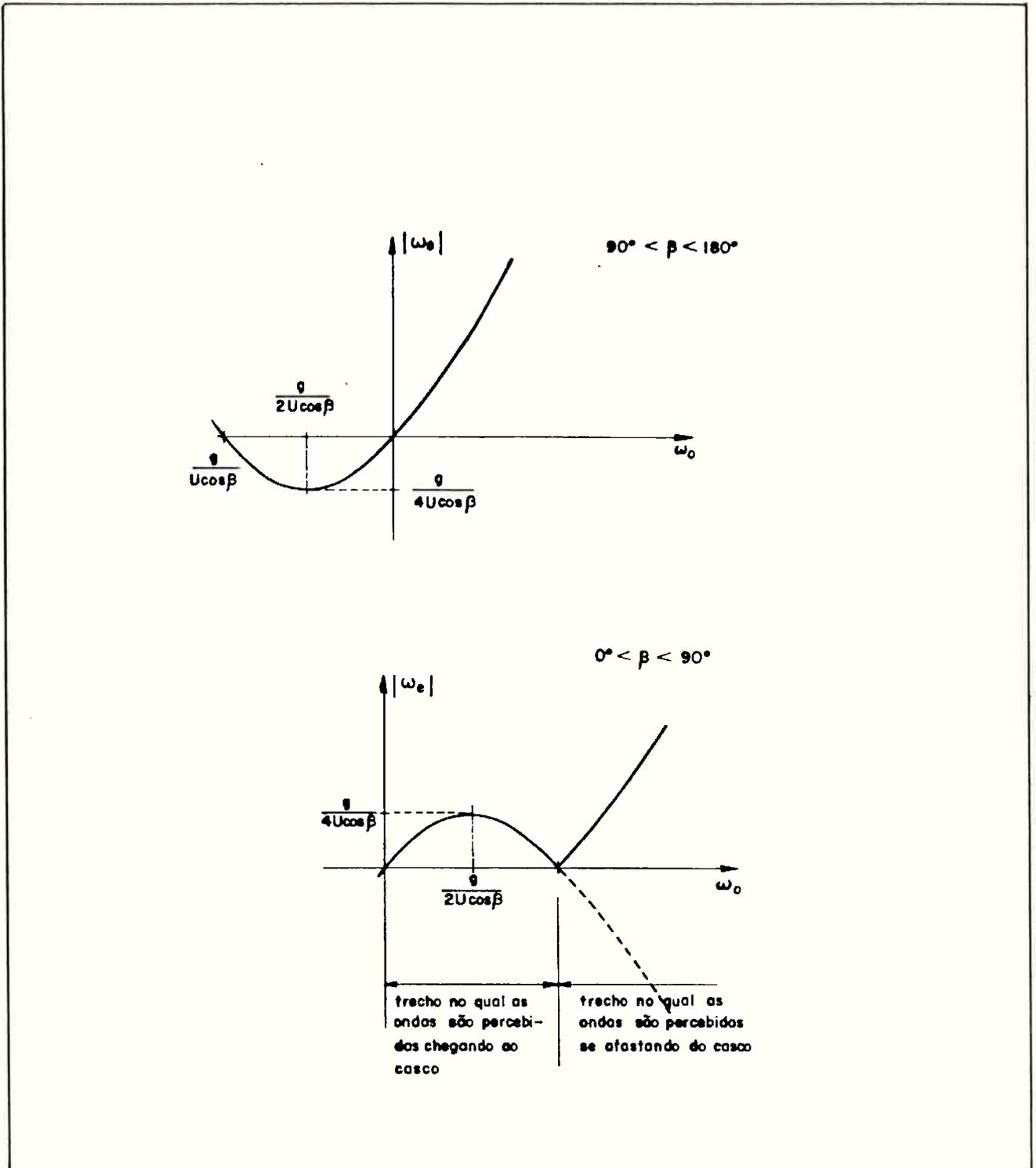


Figura B.5 - Relação entre a frequência de encontro, ω_e , e a frequência de ondas incidentes, ω_o

Na expressão (B.3.2), deve-se interpretar a frequência ω do fator $\exp(-i\omega t)$ como sendo a frequência de encontro ω_e e ϕ_1 deve ser dado de acordo com (B.3.10).

A parcela $(p_{atm} - \rho g y)$, integrada ao longo da superfície molhada do casco, conduz aos chamados esforços de restauração hidrostática.

A integração da parcela $\rho U \partial \phi_s / \partial x$ leva à chamada resistência de ondas, que, junto com o restante da resistência ao avanço deve ser vencida pela força propulsora.

A integração da parcela $\text{Re}\{\rho [i\omega \bar{\phi}_j + U \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial x}] \exp(-i\omega t)\}$ leva aos chamados esforços de Froude-Krylov.

A integração da parcela $\text{Re}\{\rho [i\omega \bar{\phi}_D + U \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial x}] \exp(-i\omega t)\}$ leva aos chamados esforços de difração.

A integração das parcelas $\text{Re}\{\rho [i\omega \bar{\phi}_j^1 + U \frac{\partial \bar{\phi}_j^1}{\partial x}] \exp(-i\omega t)\}$ leva aos chamados esforços de restauração hidrodinâmica.

A seguir, considera-se cada parcela separadamente.

● ESFORÇOS DE RESTAURAÇÃO HIDROSTÁTICA:

No caso da parcela $(p_{atm} - \rho g y)$, a variável y se refere à componente segundo oy do vetor posição \vec{OP} , onde P é ponto do casco oscilando. Note-se que é necessária a consideração da oscilação do casco quando se expressa o integrando, mas não quando se expressa a superfície de integração. Sendo $OXYZ$ o sistema fixo na embarcação e $[\alpha]$ a matriz de transformação do sistema $oxyz$ para $OXYZ$ (ver apêndice A), tem-se (ver figura B.1):

$$x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k} = [(-x_0 + x_p) \quad (-y_0 + y_p) \quad (-z_0 + z_p)] [\alpha] \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.12})$$

Daí, tem-se para y_P :

$$y_P = \alpha_{12} (-X_0 + X_P) + \alpha_{22} (-Y_0 + Y_P) + \alpha_{23} (-Z_0 + Z_P) \quad (\text{B.3.13})$$

Na hipótese de movimentos pequenos, tem-se (ver equação (B.2.18)):

$$\begin{aligned} \alpha'_{12} &\cong \xi_6; \\ \alpha_{22} &\cong 1, \\ \alpha_{23} &\cong -\xi_4 \end{aligned} \quad (\text{B.3.14})$$

e daí, considerando também que $X_0 \xi_6$ e $Z_0 \xi_4$ podem ser desprezados, tem-se:

$$y_P - Y_P \cong \xi_6 X_P + \xi_2 - \xi_4 Z_P \quad (\text{B.3.15})$$

Tem-se, então, os seguintes esforços de restauração hidrostática:

$$\begin{aligned} E_j^{RH} &\cong \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} (p_{atm} - pgy) n_j dS \cong \\ &\cong \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} pg(y-y) n_j dS \cong \\ &\cong - \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} pg (\xi_6 X_P + \xi_2 - \xi_4 Z_P) n_j dS \end{aligned} \quad (\text{B.3.16})$$

Pode-se verificar que

$$E_j^{RH} \approx 0, \quad j=1,3,5. \quad (\text{B.3.17})$$

Pode-se definir

$$C_{2j} = \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_j dS, \quad j=1, \dots, 6,$$

$$C_{4j} = -\rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} z_p n_j dS, \quad j=1, \dots, 6,$$

$$C_{6j} = \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} x_p n_j dS, \quad j=1, \dots, 6,$$

$$C_{1j} = C_{3j} = C_{5j} = 0, \quad j=1, \dots, 6. \quad (\text{B.3.18})$$

Pode-se verificar que os únicos dos coeficientes C_{2j} não-nulos são:

$$\begin{aligned} C_{22} &= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_2 dS = \\ &= \rho g A_{WL}, \end{aligned} \quad (\text{B.3.19})$$

onde A_{WL} é a área do plano de flutuação, e

$$C_{26} = \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_6 dS =$$

$$= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} (x_p n_2 - y_p n_1) dS =$$

(B.3.20)

$$= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} (x_p n_2) dS$$

Quanto aos coeficientes C_{4j} , o único não-nulo é:

$$C_{44} = -\rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} z_p n_4 dS =$$

$$= -\rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} z_p (x_p n_3 - z_p n_2) dS =$$

$$= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} z_p^2 n_2 dS = \rho g I_{WL}^x,$$

(B.3.21)

onde I_{WL}^x é o momento de área do plano de flutuação em torno de OX.

Os coeficientes C_{6j} não-nulos são:

$$C_{62} = \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} x_p n_2 dS = C_{26}; \quad (B.3.22)$$

$$C_{66} = \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} x_p n_6 dS =$$

$$= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} x_p (x_p n_2 - y_p n_1) dS =$$

$$= \rho g \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} x_p^2 n_2 dS = \rho g I_{WL}^z, \quad (B.3.23)$$

chamados coeficientes de inércia adicionada, e

$$B_{jk} = \frac{1}{\omega_e} \operatorname{Im} \left\{ \rho \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_j \left[i\omega_e \bar{\Phi}_R^1 + U \frac{\partial \bar{\Phi}_R^1}{\partial x} \right] dS \right\},$$

$$j = 1, \dots, 6 \quad , \quad k = 1, \dots, 6, \quad (\text{B.3.27})$$

chamados coeficientes de amortecimento.

Os coeficientes A_{jk} e B_{jk} podem ser obtidos resolvendo o problema de irradiação, e determinando os potenciais $\bar{\phi}_k^1$.

Para navios com simetria bombordo-boreste, pode-se mostrar que (ref.):

$$\begin{aligned} A_{13} &= B_{13} = A_{14} = B_{14} = A_{15} = B_{15} = \\ &= A_{23} = B_{23} = A_{24} = B_{24} = A_{25} = B_{25} = \\ &= A_{31} = B_{31} = A_{32} = B_{32} = A_{36} = B_{36} = \\ &= A_{41} = B_{41} = A_{42} = B_{42} = A_{46} = B_{46} = \\ &= A_{51} = B_{51} = A_{52} = B_{52} = A_{56} = B_{56} = \\ &= A_{63} = B_{63} = A_{64} = B_{64} = A_{65} = B_{65} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.28})$$

Considerando (B.3.17) e (B.3.18), a expressão (B.3.16) fica:

$$E_j^R \approx \sum_{k=1}^6 \operatorname{Re} \left\{ -\bar{E}_k \left[-\omega_e^2 A_{jk} - i\omega_e B_{jk} \right] \cdot \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.3.29})$$

chamados coeficientes de inércia adicionada, e

$$B_{jk} = \frac{1}{\omega_e} \operatorname{Im} \left\{ \rho \int_{\text{caso fixado na posição média}} \eta_j \left[i\omega_e \bar{\Phi}_R^1 + U \frac{\partial \bar{\Phi}_R^1}{\partial x} \right] dS \right\},$$

$$j = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (\text{B.3.27})$$

chamados coeficientes de amortecimento.

Os coeficientes A_{jk} e B_{jk} podem ser obtidos resolvendo o problema de irradiação, e determinando os potenciais $\bar{\Phi}_k^1$.

Para navios com simetria bombordo-boreste, pode-se mostrar que (ref.):

$$\begin{aligned} A_{13} &= B_{13} = A_{14} = B_{14} = A_{15} = B_{15} = \\ &= A_{23} = B_{23} = A_{24} = B_{24} = A_{25} = B_{25} = \\ &= A_{31} = B_{31} = A_{32} = B_{32} = A_{36} = B_{36} = \\ &= A_{41} = B_{41} = A_{42} = B_{42} = A_{46} = B_{46} = \\ &= A_{51} = B_{51} = A_{52} = B_{52} = A_{56} = B_{56} = \\ &= A_{63} = B_{63} = A_{64} = B_{64} = A_{65} = B_{65} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.28})$$

Considerando (B.3.17) e (B.3.18), a expressão (B.3.16) fica:

$$F_j^R \approx \sum_{k=1}^6 \operatorname{Re} \left\{ -\bar{\xi}_k \left[-\omega_e^2 A_{jk} - i\omega_e B_{jk} \right] \cdot \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad j = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.3.29})$$

● ESFORÇOS DE FROUDE-KRYLOV:

A integração da parcela $\text{Re}\{\rho[i\omega_e \bar{\Phi}_I + U \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial x}] \exp(-i\omega_e t)\}$ da pressão leva a:

$$E_j^{FK} \cong \text{Re} \left\{ \rho \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_j \left[i\omega_e \bar{\Phi}_I + U \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial x} \right] dS \cdot \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad j=1, \dots, 6, \quad (\text{B.3.30})$$

que podem ser calculados, uma vez que se admita que o potencial de ondas incidentes seja conhecido.

Levando em conta (B.3.8) e (B.3.10) a expressão (B.3.30) pode ser re-escrita como:

$$E_j^{FK} \cong \text{Re} \left\{ \rho \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} i n_j \omega_e \bar{\Phi}_I dS \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad (\text{B.3.31})$$

correspondendo aos chamados esforços de Froude-Krylov.

● ESFORÇOS DE DIFRAÇÃO:

Tem-se:

$$E_j^D \cong \text{Re} \left\{ \rho \int_{\substack{\text{casco fixado} \\ \text{na posição média}}} n_j \left[i\omega_e \bar{\Phi}_D + U \frac{\partial \bar{\Phi}_D}{\partial x} \right] dS \cdot \exp(-i\omega_e t) \right\}, \quad j=1, \dots, 6. \quad (\text{B.3.32})$$

● ESFORÇOS TOTAIS:

Desconsiderando a resistência de ondas e a força propulsora, tem-se que os esforços inerciais, dados por (A.5.8), devem ser iguais à soma dos esforços externos, dados por (B.3.24), (B.3.29), (B.3.31), e (B.3.32). Em termos de amplitudes complexas, fica-se com:

$$\sum_{k=1}^6 \left[-\omega_e^2 (M_{jk} + A_{jk}) - i\omega_e B_{jk} + C_{jk} \right] \bar{u}_k = \\ = \bar{E}_j^{FK} + \bar{E}_j^{DK}, \quad j=1, \dots, 6. \quad (\text{B.3.33})$$

Se há simetria boreste/bombordo, observa-se que, tendo em vista (A.5.7) com (A.5.9), (B.3.24) e (B.3.28), a expressão (B.3.33) pode ser desmembrada em dois conjuntos de equações independentes, um delas envolvendo somente avanço, arfagem e caturro, e o outro envolvendo deriva, balanço e guinada:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M+A_{11} & A_{12} & -MY_G+A_{16} \\ A_{21} & M+A_{22} & A_{26} \\ -MY_G+A_{61} & A_{62} & I_{zz}^0+A_{66} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1^{FK} + \bar{E}_1^{DK} \\ \bar{E}_2^{FK} + \bar{E}_2^{DK} \\ \bar{E}_6^{FK} + \bar{E}_6^{DK} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3.34})$$

$$(-\omega^2 \begin{bmatrix} M + A_{33} & MY_G + A_{34} & A_{55} \\ MY_G + A_{43} & I_{XX}^0 + A_{44} & -I_{XY}^0 + A_{65} \\ A_{53} & -I_{XY}^0 + A_{54} & I_{YY}^0 + A_{55} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} & B_{35} \\ B_{43} & B_{44} & B_{45} \\ B_{53} & B_{54} & B_{55} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_3^{FK} + \bar{E}_3^D \\ \bar{E}_4^{FK} + \bar{E}_4^D \\ \bar{E}_5 + \bar{E}_5^D \end{bmatrix}$$

(B.3.35)

B.4 - Efeitos viscosos e de sustentação no momento de balanço

Nas seções B.2 e B.3 apresentou-se uma metodologia para previsão do comportamento do navio no mar, admitindo válida a Teoria Potencial. Porém, observa-se na prática que a consideração de efeitos viscosos no momento de amortecimento em balanço é importante.

Além disso, deve-se também considerar um momento devido à sustentação que se desenvolve quando o casco avança com balanço. Tal efeito também não está previsto na formulação apresentada em B.2, já que as oscilações foram ignoradas no problema de resistência de ondas.

Normalmente os efeitos viscosos e de sustentação somente são significativos no momento de balanço (ref.81).

Na seção B.3 obteve-se um conjunto de equações lineares (expressões (B.3.35)) envolvendo a deriva, o balanço e a guinada.

Tal conjunto de equações pode ser resolvido, uma vez que se calculem os coeficientes hidrodinâmicos e os esforços de excitação, através, por exemplo, da Teoria de Faixas (ref.81) associada ao Método de Frank (ref.30).

No entanto, o termo $B_{44}\dot{\phi}$ não representa adequadamente o momento restaurador de amortecimento, pois não inclui os efeitos viscosos e de sustentação. Na presente seção, descreve-se a metodologia compilada por Himeno (ref.43), que permite levar tais efeitos em consideração.

O momento restaurador de amortecimento em balanço (E_4^R /amortecimento) pode ser entendido como composto pelas seguintes parcelas:

- momento devido à geração de ondas pela oscilação de balanço ($B_{44}\dot{\phi}$);

- momento de sustentação gerada no avanço com balanço (E_{4L}^R);
- momento devido ao atrito entre fluido e superfície do casco com balanço (E_{4F}^R);
- momento devido à geração de vórtices nos bojos (E_{4E}^R);
- momento que se desenvolve nas bolinas, quando houver (E_{4BK}^R).

A seguir, passa-se a tratar de cada parcela isoladamente e, por fim, a inclusão desses efeitos no cálculo dos movimentos.

● Momento de sustentação (E_{4L}^R)

Para sua estimativa, pode-se usar a fórmula de Yumuro et alii, modificada por Ikeda et alii (ref.):

$$E_{4L}^R = \left\{ \frac{1}{2} \rho U L H k_n b_0 l_R \left[1 - \frac{1,4(-Y_G)}{l_R} + \frac{0,7(-Y_G)^2}{b_0 l_R} \right] \right\} \dot{\phi}, \quad (\text{B.4.1})$$

com

$$k_n = 2\pi \frac{H}{L} + \mathcal{H} \left(4,1 \frac{B}{L} - 0,045 \right),$$

onde

$$\mathcal{H} = \begin{cases} 0, & \text{para } C_{\mathcal{H}} \leq 0,92, \\ 0,1 & , \text{ para } 0,92 < C_{\mathcal{H}} \leq 0,97, \\ 0,3 & , \text{ para } 0,97 < C_{\mathcal{H}} \leq 0,99, \end{cases}$$

sendo

L o comprimento do casco,

B a boca,

H o calado,

C_D o coeficiente de seção mestra,

$$l_O = 0,3 \text{ H},$$

$$l_R = 0,5 \text{ H}.$$

Tal fórmula foi obtida a partir de resultados da área de Manobrabilidade do Navio. A resolução do problema de resistência de ondas considerando o balanço seria extremamente complexa.

Observa-se que a expressão de E_{4L}^R é linear com relação a $\dot{\phi}$ e também a U. Pode-se definir o coeficiente B_{4L} por:

$$E_{4L}^R = B_{4L} \dot{\phi} \quad (\text{B.4.2})$$

Sua consideração somente é importante para altas velocidades de avanço ou pequenas frequências de oscilações, já que nos outros casos o amortecimento viscoso é comparativamente bem maior.

● Momento de atrito (E_{4F}^R)

O momento de atrito pode ser estimado pela formulação de Kato-Tamiya (ref.):

$$E_{4L}^R = \frac{1}{2} \rho S \kappa_S^3 C_f \left(1 + 4,1 \frac{U}{\omega L}\right) \dot{\phi}, \quad (\text{B.4.3})$$

com

$$S = L (1,7H + C_B \cdot B),$$

$$\kappa_S = \frac{1}{\pi} \left\{ (0,887 + 0,145 C_B) \frac{S}{L} - 2 \left(-\frac{1}{6}\right) \right\},$$

$$C_f = 1,328 \left[\frac{3,22 \kappa_S^2}{2\pi \nu \omega} \right]^{-1/2},$$

sendo

C_B o coeficiente de bloco,

ν a viscosidade cinemática do fluido,

ω a frequência de oscilação.

A fórmula é baseada no cálculo do atrito na camada limite tridimensional de um corpo axissimétrico "equivalente" ao casco original, com um movimento de balanço.

Tem-se E_{4F}^R linear com relação a U e a $\dot{\phi}$ para uma dada frequência de oscilação.

Define-se o coeficiente B_{4F} por:

$$E_{4F}^R = B_{4F} \ddot{\phi} \quad (\text{B.4.4})$$

• Momento de vórtices (E_{4E}^R)

O momento de vórtices pode ser estimado pela fórmula de Ikeda et alii (ref.)::

$$E_{4E}^R = B_{4E} \ddot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (\text{B.4.5})$$

em que

$$B_{4E} = B_{4E0} \frac{(0,04\omega L/U)^2}{1 + (0,04\omega L/U)^2}, \quad (\text{B.4.6})$$

e

$$B_{4E0} = \int_{\text{comprimento do casco}} \left\{ \frac{1}{2} \rho H^4 \left(\frac{r_{\text{máx}}}{H_x} \right)^2 F \left(\frac{R}{H}, \frac{B}{2H}, C_x, \frac{-y/G}{H} \right) c_p \right\} dL \quad (\text{B.4.7})$$

onde

$r_{\text{máx}}$ é a máxima distância do ponto G à superfície livre,

H_x é o calado seccional

C_x é o coeficiente de área seccional.

R é o raio do bojo, estimado por

$$R = \begin{cases} 2H_x \sqrt{\frac{B/2H (C_x - 1)}{\pi 4}} & (R < H_x, R < \frac{B_x}{2}), \\ H_x & (R \geq \frac{B_x}{2}, R \geq H_x), \\ \frac{B_x}{2} & (R < H_x, R \geq \frac{B_x}{2}) \end{cases}$$

F e c_p são funções definidas adiante.

Sejam:

$$H_0 = \frac{B/2H}{1 - (-Y_G)/H};$$

$$\sigma = \frac{C_x - (-Y_G)/H}{1 - (-Y_G)/H};$$

$$a = \frac{4\sigma}{\pi} \left[1 - \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1} \right)^2 \right] + \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1} \right)^2;$$

$$a_3 = -\frac{a}{a+3} + \sqrt{\left(\frac{-a}{a+3} \right)^2 - \frac{a-1}{a+3}};$$

$$a_1 = \frac{H_0 - 1}{H_0 + 1} (1 + a_3);$$

$$\psi^* = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{a_1 (1 + a_3)}{4a_3} \right];$$

$$H^*(\psi^*) = 1 + a_1^2 + 9a_3^2 + 2a_1(1 - a_3) \cos(2\psi^*) - 6a_3 \cos(4\psi^*);$$

$$A^*(\psi^*) = -2a_3 \cos(5\psi^*) + a_1(1 - a_3) \cos(3\psi^*) + \left\{ (6 - 3a_1)a_3^2 + (a_1^2 - 3a_1)a_3 + a_1^2 \right\} \cos \psi^*;$$

$$B^*(\psi^*) = -2a_3 \sin(5\psi^*) + a_1(1 - a_3) \sin(3\psi^*) + \left\{ (6 + 3a_1)a_3^2 + (3a_1 + a_1^2)a_3 + a_1^2 \right\} \sin \psi^*;$$

$$\mu = \frac{B_x}{2(1 + a_1 + a_3)};$$

$$r(\psi^*) = \left\{ \sqrt{ \left[(1+a_1) \operatorname{sen} \psi^* - a_3 \operatorname{sen}(3\psi^*) \right]^2 + \left[(1-a_1) \operatorname{cos} \psi^* + a_3 \operatorname{cos}(3\psi^*) \right]^2 } \right\};$$

$r_{\max} = r(0)$ ou $r(\psi^*)$, o que for maior;

$$U = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{(A^*)^2 + (B^*)^2}}{H^*}, \text{ com } H^*(0), A^*(0),$$

e $B^*(0)$, ou $H^*(\psi^*)$, $A^*(\psi^*)$ e $B^*(\psi^*)$, de acordo com r_{\max} ;

$$f_3 = 1 + 4 \exp \left\{ -1,65 \times 10^5 (1-\sigma)^2 \right\};$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{tgh} \left[20(C_x - 0,7) \right] \right\};$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{cos}(\pi C_x) \right] - \frac{3}{2} \left\{ 1 - \exp[-5(1-C_x)] \right\}.$$

$$\cdot \operatorname{sen}^2(\pi C_x);$$

$$y = \frac{\sqrt{\pi} f_3}{2 H_{ox} \left[1 - \frac{(-Y_G)}{H} \right] \sqrt{H_{ox}}} (r_{\max} + U); \quad (\text{B.4.8})$$

Nessas condições, c_p e $F\left(\frac{R}{H}, \frac{B}{2H}, C_x, \frac{-Y_G}{H}\right)$ de (B.4.7) são dadas por:

$$c_p = \frac{1}{2} \left[0,87 \exp(-\eta) - 4 \exp(-0,187\eta) + 3 \right];$$

$$F\left(\frac{R}{H}, \frac{B}{2H}, C_x, \frac{-Y_G}{H}\right) = \left(1 - f_1(C_x) \frac{R}{H}\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{-Y_G}{H}\right) - f_1(C_x) \frac{R}{H}\right) + f_2(C_x) \left(\frac{B}{2H} - f_1(C_x) \frac{R}{H}\right)^2 \quad (\text{B.4.9})$$

Normalmente, o momento de vórtices somente é significativo para baixas velocidades de avanço.

A formulação foi derivada de formulações para navios em avanço uniforme, em que ocorre queda de pressão junto à região de geração de vórtices na popa.

Note-se que a parcela do momento de amortecimento de balanço de vida à geração de vórtices não é linear com $\dot{\phi}$, variando com $\dot{\phi}|\dot{\phi}|$.

● Momento de bolinas (E_{4BK}^R)

Costuma-se subdividir o momento de amortecimento gerado nas bolinas em três parcelas:

- momento devido à força de arrasto que surge na direção normal à superfície das bolinas (E_{4BKN}^R);
- momento devido à modificação na distribuição de pressões em torno do casco pela presença das bolinas (E_{4BKH}^R);
- momento de geração de ondas pela movimentação das bolinas solidariamente ao casco.

A última parcela é normalmente pouco significativa, e não será

considerada neste trabalho.

Nessas condições (E_{4BK}^R) pode ser dado pela formulação de Ikeda et alii (ref.).

Sejam:

$$\mu_1 = \frac{R}{H};$$

em que R é o raio do bojo, estimado como em (B.4.8);

$$\mu_2 = -\frac{Y_G}{H};$$

$$\mu_3 = 1 - \mu_1 - \mu_2;$$

$$\mu_4 = \frac{B}{2H} - \mu_1;$$

$$\mu_5 = \frac{0,414B/(2H) + 0,0651\mu_1^2 - (0,382B/(2H) + 0,0106)\mu_1}{(B/(2H) - 0,215\mu_1)(1 - 0,215\mu_1)};$$

$$\mu_6 = \frac{0,414B/(2H) + 0,0651\mu_1^2 - (0,382 + 0,0106B/(2H))\mu_1}{(B/(2H) - 0,215\mu_1)(1 - 0,215\mu_1)};$$

$$f = 1 + 0,3 \exp \left\{ -160 (1 - G_a) \right\};$$

$$r_{BK} = H \left\{ \left[\frac{B}{2H} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{R}{H} \right]^2 + \left[1 - \frac{(-Y_G)}{H} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{R}{H} \right]^2 \right\}^{1/2};$$

$$S_0 = 0,3(\pi f r_{BK} \phi_a) + 1,95 b_{BK},$$

em que b_{BK} é a largura da bolina;

$$\mu_7 = \begin{cases} \frac{S_0}{H} - \frac{\pi}{4} \mu_1, & S_0 > \frac{\pi}{4} R; \\ 0, & S_0 \leq \frac{\pi}{4} R; \end{cases}$$

$$\mu_8 = \begin{cases} \mu_7 + 0,414 \mu_1, & S_0 > \frac{\pi}{4} R; \\ \mu_7 + \sqrt{2} \left[1 - \cos\left(\frac{S_0}{R}\right) \right] \mu_1, & S_0 \leq \frac{\pi}{4} R; \end{cases}$$

$$A^{**} = (\mu_3 + \mu_4) \mu_8 - \mu_7^2;$$

$$B^{**} = \frac{\mu_4^3}{3\left(\frac{B}{2H} - 0,215\mu_1\right)} + \frac{(1-\mu_1)^2 (2\mu_3 - \mu_2)}{6(1-0,215\mu_1)} + \mu_1 (\mu_3 \mu_5 + \mu_4 \mu_6);$$

$$C_p^+ = 1,2;$$

$$C_p^- = -22,5 \frac{b_{BK}}{\pi r_{BK} f d_a} - 1,2;$$

$$I = -A^{**} C_p^- + B^{**} C_p^+$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 E_{4BK}^R = & \left\{ \int_{\text{comprimento de casco}} \rho r_{BK}^2 \int \frac{22,5 b_{BK}^2}{\pi} dL \right\} \omega \dot{\phi} + \\
 & + \left\{ \int_{\text{comprimento de casco}} \rho r_{BK}^2 f^2 \left[b_{BK} r_{BK} 2,4 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} H_x^2 I \right] dL \right\} \dot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (B.4.11)
 \end{aligned}$$

em que ω é a frequência de oscilação.

Definem-se B_{4BK1} e B_{4BK2} por:

$$E_{4BK}^R = B_{4BK1} \dot{\phi} + B_{4BK2} \dot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (B.4.12)$$

A variação de E_{4BK} com a velocidade de avanço é considerada pouco significativa.

O momento de amortecimento devido a bolinas tem um termo linear e um termo quadrático assimétrico com relação a $\dot{\phi}$, dada uma frequência de oscilação.

- O cálculo dos movimentos considerando os efeitos viscosos e de sustentação no momento restaurador de balanço

O momento restaurador de amortecimento em balanço, considerando (B.4.2), (B.4.4), (B.4.5) e (B.4.12) fica:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_4^R}{\text{amortecimento}} = & (B_{4A} + B_{4L} + B_{4F} + B_{4BK1}) \dot{\phi} + \\
 & + (B_{4E} + B_{4BK2}) \dot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (B.4.13)
 \end{aligned}$$

Pode-se escrever:

$$\frac{E_4^R}{\text{amortecimento}} = b_1 \dot{\phi} + b_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}| \quad (\text{B.4.14})$$

em que b_1 é o chamado coeficiente linear de amortecimento, sendo dado por:

$$b_1 = B_{44} + B_{4L} + B_{4F} + B_{4BK1} \quad (\text{B.4.15})$$

e b_2 é o chamado coeficiente quadrático de amortecimento, sendo da do por:

$$b_2 = B_{4E} + B_{4BK2} \quad (\text{B.4.16})$$

Costuma-se fazer a aproximação:

$$\frac{E_4^R}{\text{amortecimento}} \cong b_e \dot{\phi}, \quad (\text{B.4.17})$$

em que b_e , o coeficiente de amortecimento "linearizado" é obtido pela técnica da "linearização equivalente". Esta técnica consiste em se calcular a energia dissipada por ciclo de oscilação para E_4^R /amortecimento dado por (B.4.14) e por (B.4.17); obtém-se b_e igualando as duas expressões obtidas para a energia dissipada.

No caso de oscilações regulares, chega-se a:

$$b_e = b_1 + \frac{8}{3\pi} b_2 \omega \phi_a, \quad (\text{B.4.18})$$

em que ϕ_a é a amplitude da oscilação.

As equações (B.3.35) podem então ser resolvidas iterativamente, arbitrando-se valores iniciais para ϕ_a .

APÊNDICE C

APLICAÇÃO DE MÉTODOS ANALÍTICOS PARA A OBTENÇÃO
DE SOLUÇÕES NO CASO DE EXCITAÇÃO DETERMINÍSTICA

APÊNDICE C

APLICAÇÃO DE MÉTODOS ANALÍTICOS PARA A OBTENÇÃO DE
SOLUÇÕES NO CASO DE EXCITAÇÃO DETERMINÍSTICA

Neste apêndice analisam-se propriedades de soluções e buscam-se soluções aproximadas para o oscilador de 2ª ordem com amortecimento parabólico e restauração cúbica assimétricos submetidos a excitação regular. Aplica-se basicamente o método de Krylov e Bogoliubov (ref. 5,25) para obtenção de soluções aproximadas em torno das ressonâncias principal e sub-harmônica de ordem 3.

Considere-se a equação abaixo:

$$\ddot{\phi} + c_1 \dot{\phi} = -\varepsilon [b_1 \dot{\phi} + b_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}| + \bar{c}_3 \phi^3 + \bar{m}_a \cos(\omega t)], \quad (\text{C.0.1})$$

onde ε é um parâmetro real tal que $0 < \varepsilon \ll 1$.

Para $\varepsilon=0$, a equação (C.0.1) tem a solução estacionária

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_a \cos \alpha, \\ \text{com } \dot{\phi}_a &= 0 \text{ e } \dot{\alpha} = \sqrt{c_1}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

ou seja,

$$\phi = \phi_a \cos(\sqrt{c_1} t), \quad (\text{C.0.3})$$

com ϕ_a constante.

Nas próximas seções vai-se considerar os casos em que $\varepsilon \neq 0$.

C.1 - O caso da ressonância principal

Nesta seção considera-se o caso em que

$$\omega \cong \sqrt{c_1} \quad (\text{C.1.1})$$

chamado "ressonância principal".

Seja

$$c_1 - \omega^2 = \varepsilon \Delta \quad (\text{C.1.2})$$

A equação (C.0.1) pode ser reescrita como:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = -\varepsilon \left[\Delta \phi + b_1 \dot{\phi} + b_2 \phi |\dot{\phi}| + \bar{c}_3 \phi^3 + \bar{\eta}_a \cos(\omega t) \right] \quad (\text{C.1.3})$$

Vai-se tentar uma solução do tipo:

$$\phi = \phi_a \cos \alpha + \varepsilon u_1(\phi_a, \alpha, \tau) + \dots + \varepsilon^m u_m(\phi_a, \alpha, \tau) + \dots \quad (\text{C.1.4})$$

onde

$\tau = \omega t$ é a fase da excitação,

$u_m(\phi_a, \alpha, \tau)$ funções periódicas de período 2π com relação a α e τ ,

ϕ_a é a amplitude do termo de ordem zero da resposta,

α é a fase do termo de ordem ε^0 da resposta.

Como neste caso, de ressonância principal, a diferença de fase entre resposta e excitação tem forte influência na amplitude e frequência da solução, vai-se considerar também a variável:

$$\dot{\gamma} = \alpha - \bar{\sigma} \quad (\text{C.1.5})$$

Supõe-se que a amplitude e a fase da resposta satisfazem às seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a &= \varepsilon A_1(\phi_a, \psi) + \dots + \varepsilon^m A_m(\phi_a, \psi) + \dots; \\ \dot{\alpha} &= \omega + \varepsilon B_1(\phi_a, \psi) + \dots + \varepsilon^m B_m(\phi_a, \psi) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

Substituindo (C.1.5) na segunda das equações (C.1.6), e levando em consideração que $\dot{\alpha} = \omega$, tem-se:

$$\dot{\gamma} = \varepsilon B_1(\phi_a, \psi) + \dots + \varepsilon^m B_m(\phi_a, \psi) + \dots \quad (\text{C.1.7})$$

Substituindo (C.1.4) em (C.1.3), e levando em consideração (C.1.6), chega-se, considerando os termos em ε , a:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \alpha^2} + 2\omega^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \alpha \partial \bar{\sigma}} + \omega^2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \bar{\sigma}^2} + \omega^2 \mu_1 \cong \\ & \cong \left[b_1 \phi_a \omega + b_2 \phi_a^2 \omega^2 \frac{8}{3\pi} + 2\omega A_1(\phi_a, \psi) \right] \text{sen} \alpha + \\ & + \left[2\omega \phi_a B_1(\phi_a, \psi) - \frac{3\bar{c}_3 \phi_a^3}{4} - \phi_a \Delta \right] \text{cos} \alpha + \\ & - \left[b_2 \phi_a^2 \omega^2 \frac{8}{15\pi} \right] \text{sen}(3\alpha) - \left[\bar{c}_3 \phi_a^3 \frac{1}{4} \right] \text{cos}(3\alpha) + \dots + \\ & + \bar{m}_a \text{cos} \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

Tendo em vista que α e τ estão ligadas pela relação (C.1.5), o termo da excitação possui componentes em $\text{sen}\alpha$ e $\text{cos}\alpha$:

$$\begin{aligned}\bar{m}_a \cos \bar{\zeta} &= \bar{m}_a \cos(\alpha - \nu) = \\ &= \bar{m}_a \cos \nu \cos \alpha + \bar{m}_a \text{sen} \nu \text{sen} \alpha\end{aligned}\quad (\text{C.1.9})$$

Como u_1 deve ser periódica com relação a α , os termos do segundo membro de (C.1.8) envolvendo $\text{sen}\alpha$ e $\text{cos}\alpha$ devem se anular, caso contrário u_1 teria termos seculares. Daí:

$$\begin{aligned}A_1(\bar{d}_a, \nu) &= -\frac{b_1 \bar{d}_a}{2} - \frac{4b_2 \bar{d}_a^2 \omega}{3\pi} - \frac{\bar{m}_a \text{sen} \nu}{2\omega}; \\ B_1(\bar{d}_a, \nu) &= \frac{3c_3 \bar{d}_a^2}{8\omega} + \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{\bar{m}_a \cos \nu}{2\omega \bar{d}_a}\end{aligned}\quad (\text{C.1.10})$$

A primeira aproximação para a solução fica, então:

$$\bar{d} \approx \bar{d}_a \cos(\bar{\zeta} + \nu),\quad (\text{C.1.11})$$

com

$$\dot{\bar{d}}_a = -\frac{b_1 \bar{d}_a}{2} - \frac{4b_2 \bar{d}_a^2 \omega}{3\pi} - \frac{\bar{m}_a \text{sen} \nu}{2\omega};\quad (\text{C.1.12})$$

e

$$\ddot{\nu} = \frac{3c_3 \bar{d}_a^2}{8\omega} + \frac{(c_1 - \omega^2)}{2\omega} - \frac{\bar{m}_a \cos \nu}{2\omega \bar{d}_a}.\quad (\text{C.1.13})$$

Para se buscar soluções periódicas, deve-se impor:

$$\dot{\phi}_a = 0 \quad ; \quad \dot{\nu} = 0 \quad (\text{C.1.14})$$

Neste caso, considerando-se (C.1.12), (C.1.13) e (C.1.14) tem-se:

$$\begin{aligned} \sin \nu &= \frac{\phi_a}{m a} \left[-\omega b_1 - \frac{8}{3\pi} \omega^2 b_2 \phi_a \right]; \\ \cos \nu &= \frac{\phi_a}{m a} \left[c_1 - \omega^2 + \frac{3}{4} c_3 \phi_a^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1.15})$$

A diferença de fase entre resposta e excitação, ν , pode ser eliminada das equações (C.1.15), resultando:

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 - c_1 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{c_3}{c_1} \phi_a^2 \right) \right]^2 + \\ & + \left[\omega b_1 + \frac{8}{3\pi} \omega^2 b_2 \phi_a \right]^2 = \frac{m a^2}{\phi_a^2} \end{aligned} \quad (\text{C.1.16})$$

C.2 - O caso da ressonância sub-harmônica de ordem três

Nesta seção considera-se o caso em que

$$\omega \cong 3\sqrt{g} \quad (\text{C.2.1})$$

chamado "ressonância sub-harmônica de ordem 3".

O desenvolvimento é análogo ao da seção C.1, fazendo

$$c_1 - \frac{\omega^2}{g} = \varepsilon \Delta \quad (\text{C.2.2})$$

A equação (C.0.1) fica

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{\omega^2}{g} \phi &= \\ &= -\varepsilon \left[\Delta \phi + b_1 \dot{\phi} + b_2 \dot{\phi} |\dot{\phi}| + c_3 \phi^3 + \frac{\eta_a}{g} \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.3})$$

As variáveis ϕ_a e v continuam satisfazendo as equações (C.1.6)₁ e (C.1.7), respectivamente. Porém, a variável α passa agora a satisfazer:

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega}{3} + \varepsilon B_1(\phi_a, v) + \dots + \varepsilon^m B_m(\phi_a, v) + \dots \quad (\text{C.2.4})$$

Tem-se:

$$v = \alpha - \frac{\omega}{3} \quad (\text{C.2.5})$$

Substituindo (C.1.4) em (C.2.3), de maneira análoga ao que foi

feito na seção C.1, e levando em consideração (C.1.6), e (C.2.4), chega-se, considerando os termos em ε , a:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega^2}{9} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} + \frac{2\omega^2}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \zeta} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2}{9} u_1 \approx \\
 & \approx \left[b_1 \phi_a \frac{\omega}{3} + b_2 \phi_a^2 \frac{\omega^2}{9} \frac{8}{3\pi} + \frac{2\omega}{3} A_1(\phi_a, \nu) \right] \sin \nu + \\
 & + \left[\frac{2\omega}{3} \phi_a B_1(\phi_a, \nu) - \frac{3\bar{c}_3 \phi_a^3}{4} - \phi_a \Delta \right] \cos \alpha + \\
 & - \left[b_2 \phi_a^2 \frac{\omega^2}{9} \frac{8}{15\pi} \right] \sin(3\alpha) - \left[\bar{c}_3 \phi_a^3 \frac{1}{4} \right] \cos(3\alpha) + \dots + \\
 & + \bar{m}_a \cos \zeta
 \end{aligned} \tag{C.2.6}$$

Por (C.2.5), verifica-se que $\bar{m}_a \cos \zeta$ não tem componentes em $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, já que:

$$\bar{m}_a \cos \zeta = \bar{m}_a \cos [3(\alpha - \nu)] \tag{C.2.7}$$

Anulando-se os termos envolvendo $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ do 2º membro da equação (C.2.6) chega-se a:

$$\begin{aligned}
 A_1(\phi_a, \nu) &= -\frac{b_1 \phi_a}{2} - \frac{4b_2 \phi_a^2 \omega}{9\pi}, \\
 B_1(\phi_a, \nu) &= \frac{9\bar{c}_3 \phi_a^2}{8\pi} + \frac{3\Delta}{2\omega}
 \end{aligned} \tag{C.2.8}$$

A primeira aproximação para a solução fica, então:

$$\phi \approx \phi_a \cos \left(\frac{\omega}{3} + \nu \right), \tag{C.2.9}$$

com

$$\dot{\phi}_a = \frac{-b_1 \phi_a}{2} - \frac{4b_2 \phi_a^2 \omega}{9\pi}, \quad (\text{C.2.10})$$

e

$$\dot{\nu} = \frac{9c_3 \phi_a^2}{8\pi} + \frac{3(c_1 - \omega^2/g)}{2\omega} \quad (\text{C.2.11})$$

Observa-se que no caso da ressonância sub-harmônica de ordem 3 a solução em primeira aproximação não apresenta termos envolvendo a amplitude da excitação, porém a sua frequência está explícita na solução.

Não há, pelo que se observa, solução periódica em primeira aproximação.

Para se buscar solução periódica no caso de ressonância sub-harmônica de ordem 3, deve-se analisar a solução em segunda aproximação.

A solução em segunda aproximação é dada por (ver (C.1.4), (C.1.6), (C.2.10), (C.2.4) e (C.2.11)):

$$\phi \cong \phi_a \cos \alpha + \epsilon u_1(\phi_a, \alpha, \nu). \quad (\text{C.2.12})$$

com

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a &\cong -\frac{b_1 \phi_a}{2} - \frac{4b_2 \phi_a^2 \omega}{9\pi} + \epsilon^2 A_2(\phi_a, \nu), \\ \dot{\alpha} &= \frac{\omega}{3} + \frac{9c_3 \phi_a^2}{8\pi} + \frac{3(c_1 - \omega^2/g)}{2\omega} + \epsilon^2 B_2(\phi_a, \nu) \end{aligned} \quad (\text{C.2.13})$$

Considerando (C.2.26) e (C.2.8), tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^2}{9} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \alpha^2} + \frac{2\omega^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \alpha \partial \bar{z}} + \omega^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\omega^2}{9} \bar{u}_1 \approx \\ & \approx - \left[\bar{b}_2 \bar{d}_a^2 \frac{\omega^2}{9} \frac{8}{15\pi} \right] \text{sen}(3\alpha) - \left[\bar{c}_3 \bar{d}_a^2 \frac{1}{4} \right] \text{cos}(3\alpha) + \\ & + \dots + \bar{m}_a \text{cos} \bar{z} \end{aligned} \quad (\text{C.2.14})$$

Como o segundo membro de (C.2.14) é composto por uma parcela que depende só de ϕ_a e α e por outra que depende só de τ , vai-se tentar a seguinte solução:

$$\bar{u}_1(\bar{d}_a, \alpha, \bar{z}) = \bar{u}_1(\bar{d}_a, \alpha) + \tilde{u}_1(\bar{z}) \quad (\text{C.2.15})$$

Nessas condições, (C.2.14) pode ser desmembrada em:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^2}{9} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\omega^2}{9} \bar{u}_1 \approx \\ & \approx - \left[\bar{b}_2 \bar{d}_a^2 \frac{\omega^2}{9} \frac{8}{15\pi} \right] \text{sen}(3\alpha) - \left[\bar{c}_3 \bar{d}_a^2 \frac{1}{4} \right] \text{cos}(3\alpha) + \dots ; \\ & \omega^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\omega^2}{9} \tilde{u}_1 \approx \bar{m}_a \text{cos} \bar{z} \end{aligned} \quad (\text{C.2.16})$$

Têm-se as seguintes soluções particulares para (C.2.16):

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\bar{d}_a, \alpha) &= \frac{9\bar{c}_3}{32\omega^2} \bar{d}_a^3 \text{cos}(3\alpha) + \frac{\bar{b}_2}{15\pi} \bar{d}_a^2 \text{sen}(3\alpha); \\ \tilde{u}_1(\bar{z}) &\approx \frac{\bar{m}_a}{-8\omega^2} \text{cos} \bar{z} \end{aligned} \quad (\text{C.2.17})$$

Considerando (C.2.15), (C.2.17) e (C.2.7), tem-se, em termos de ϕ_a , α e ν :

$$\begin{aligned} u_1(\phi_a, \alpha, \nu) = & \left[\frac{g c_3}{32 \omega^2} \phi_a^3 - \frac{g m_a}{8 \omega^2} \cos(3\nu) \right] \cos(3\alpha) + \\ & + \left[\frac{b_2}{15\pi} \phi_a^2 - \frac{g m_a}{8 \omega^2} \sin(3\nu) \right] \sin(3\alpha) \quad (C.2.18) \end{aligned}$$

A solução em segunda aproximação (C.2.12) fica, então, diante de (C.2.5) e (C.2.18):

$$\begin{aligned} \phi \approx & \phi_a \cos\left(\frac{\tau}{3} + \nu\right) + \\ & + \left[\frac{g c_3}{32 \omega^2} \phi_a^3 - \frac{g m_a}{8 \omega^2} \cos(3\nu) \right] \cos(\tau + 3\nu) + \\ & + \left[\frac{b_2}{15\pi} \phi_a^2 - \frac{g m_a}{8 \omega^2} \sin(3\nu) \right] \sin(\tau + 3\nu) \quad (C.2.19) \end{aligned}$$

O termo $\phi_a \cos(\tau/3 + \nu)$, que oscila com um submúltiplo de ordem 3 da frequência de excitação, é chamado de solução sub-harmônica de ordem 3, desde que se tenha ϕ_a e ν constantes. Para pesquisar a possibilidade de haver solução deste tipo em segunda aproximação, é necessário obter expressões análogas a (C.2.10) e (C.2.11).

A substituição de (C.1.4) em (C.2.3), levando em consideração (C.1.6)₁ e (C.2.4), fica, para os termos em ε^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{9} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \frac{2\omega^2}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \tau} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \frac{\omega^2}{9} u_2 \approx \\ \approx \left[2 \frac{\omega}{3} A_2(\phi_a, \nu) + 2 A_1(\phi_a, \nu) B_1(\phi_a, \nu) + \phi_a A_1(\phi_a, \nu) \frac{\partial B_1(\phi_a, \nu)}{\partial \phi_a} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{L}_2 B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial B_1(\mathcal{L}_2, \nu)}{\partial \nu} \Big] \text{sen} \alpha + \\
& + \left[2 \frac{\omega}{3} \mathcal{L}_2 B_2(\mathcal{L}_2, \nu) + \mathcal{L}_2 [B_1(\mathcal{L}_2, \nu)]^2 - A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial A_1(\mathcal{L}_2, \nu)}{\partial \mathcal{L}_2} - \right. \\
& \left. - B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial A_1(\mathcal{L}_2, \nu)}{\partial \nu} \right] \text{cos} \alpha - \\
& - 2 \left[\frac{\omega}{3} A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \mathcal{L}_2} + \frac{\omega}{3} B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} + \right. \\
& \left. + \omega A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathcal{L}_2 \partial \mathcal{G}} + \omega B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathcal{G} \partial \alpha} \right] - \\
& - \tau_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \frac{\omega}{3} + \frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{G}} \omega + A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \text{cos} \alpha - \mathcal{L}_2 B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \text{sen} \alpha \right] - \\
& - \tau_2 2 \left| - \mathcal{L}_2 \frac{\omega}{3} \text{sen} \alpha \right| \left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \frac{\omega}{3} + \frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{G}} \omega + \right. \\
& \left. + A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \text{cos} \alpha - \mathcal{L}_2 B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \text{sen} \alpha \right] - \\
& - \tau_3 3 \mathcal{L}_2^2 \text{cos}^2 \alpha u_1,
\end{aligned}$$

(C.2.20)

Para que u_2 seja periódica com relação a α , os termos em $\text{sen} \alpha$ e $\text{cos} \alpha$ do segundo membro de (C.2.20) devem se anular. Considerando que u_1 não tem termo constante, nem em $\text{sen} \alpha$, nem em $\text{cos} \alpha$ (ver (C.2.18)), resulta:

$$\begin{aligned}
A_2(\mathcal{L}_2, \nu) & \cong -\frac{3}{2\omega} \left\{ 2 A_1(\mathcal{L}_2, \nu) B_1(\mathcal{L}_2, \nu) + \mathcal{L}_2 A_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial B_1(\mathcal{L}_2, \nu)}{\partial \mathcal{L}_2} + \right. \\
& \left. + \mathcal{L}_2 B_1(\mathcal{L}_2, \nu) \frac{\partial B_1(\mathcal{L}_2, \nu)}{\partial \nu} + \tau_1 \mathcal{L}_2 B_1(\mathcal{L}_2, \nu) - \tau_2 2 \mathcal{L}_2 \frac{\omega^2}{g} \right. \\
& \left. \cdot \left[\left(-\frac{27 \bar{c}_3}{32 \omega^2} \mathcal{L}_2^3 + \frac{9 \bar{m}_2}{8 \omega^2} \text{cos}(3\nu) \right) \left(-\frac{8}{15\pi} \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ b_2 2 d_a^2 \frac{\omega}{3} B_1(d_a, \nu) \frac{8}{3\pi} - \tau_3^3 d_a^2 \left(\frac{b_2 d_a^2}{15\pi} - \frac{9\overline{m}_a}{8\omega^2} \sin(3\nu) \right) \frac{1}{4} \Big] ; \quad \text{C.12}$$

$$B_2(d_a, \nu) \approx -\frac{3}{2\omega d_a} \left[d_a (B_1(d_a, \nu))^2 - A_1(d_a, \nu) \frac{\partial A_1(d_a, \nu)}{\partial d_a} - b_1 A_1(d_a, \nu) - b_2 \frac{2\omega^2}{9} d_a \left(\frac{3b_2 d_a^2}{15\pi} - \frac{9\overline{m}_a}{8\omega} \sin(3\nu) \right) \frac{28}{5\pi} - b_2 2 d_a \frac{\omega}{3} A_1(d_a, \nu) \frac{4}{3\pi} - \tau_3^3 d_a^2 \frac{1}{4} \left(\frac{9\tau_3 d_a^3}{32\omega^2} - \frac{9\overline{m}_a}{8\omega^2} \cos(3\nu) \right) \right] \quad \text{(C.2.21)}$$

Considerando (C.2.8), resulta:

$$A_2(d_a, \nu) \approx \frac{27}{16} \frac{d_a^3 b_1 \tau_3}{\omega^2} + \frac{9}{40\pi} \frac{d_a^4 b_2 \tau_3}{\omega} - \frac{2}{\pi} \frac{b_2 d_a^2}{\omega} \left(c_1 - \frac{\omega^2}{9} \right) - \frac{3}{5\pi} \frac{b_2 d_a \overline{m}_a \cos(3\nu)}{\omega} - \frac{81}{64} \frac{\tau_3 \overline{m}_a d_a^2 \sin(3\nu)}{\omega} ;$$

$$B_2(d_a, \nu) \approx -\frac{405 \tau_3^2 d_a^4}{256 \omega^3} - \frac{3b_1^2}{8\omega} + \frac{28\omega b_2^2 d_a^2}{75\pi^2} - \frac{b_1 b_2 d_a}{3\pi} - \frac{27}{8\omega^3} \left(c_1 - \frac{\omega^2}{9} \right)^2 - \frac{9\tau_3}{16\omega^3} \left(c_1 - \frac{\omega^2}{9} \right) - \frac{63}{10\pi} \frac{b_2 \overline{m}_a \sin(3\nu)}{\omega} - \frac{81}{64} \frac{d_a \tau_3 \overline{m}_a \cos(3\nu)}{\omega^3} \quad \text{(C.2.22)}$$

Levando em consideração (C.1.6)₁ e (C.1.7), tem-se, para soluções periódicas:

$$\dot{d}_a \approx \varepsilon A_1(d_a, \nu) + \varepsilon^2 A_2(d_a, \nu) = 0 ;$$

$$\dot{\nu} \approx \varepsilon B_1(d_a, \nu) + \varepsilon^2 B_2(d_a, \nu) = 0 \quad \text{(C.2.23)}$$

Considerando (C.2.8) e (C.2.22), as expressões (C.2.23) ficam:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{b_1 \dot{\phi}_a}{2} - \frac{4b_2 \dot{\phi}_a^2}{9\pi} + \frac{27b_1 c_3 \dot{\phi}_a^3}{16\omega^2} + \frac{9b_2 c_3 \dot{\phi}_a^4}{40\pi\omega} - \\
 & -\frac{2b_2 \dot{\phi}_a^2 (c_1 - \omega^2/g)}{\pi\omega} - \frac{3b_2 \dot{\phi}_a m_a \cos(3V)}{5\pi\omega} - \\
 & -\frac{81}{64} \frac{c_3 m_a \dot{\phi}_a^2}{\omega} \sin(3V) = 0; \\
 & -\frac{405}{256} \frac{\dot{\phi}_a^4 c_3^2}{\omega^3} - \frac{3b_1^2}{8\omega} - \frac{b_1 b_2 \dot{\phi}_a}{3\pi} + \frac{28b_2^2 \dot{\phi}_a^2}{75\pi^2} - \\
 & -\frac{27}{8\omega^3} (c_1 - \frac{\omega^2}{g})^2 - \frac{9c_3}{16\omega^3} (c_1 - \frac{\omega^2}{g}) - \\
 & -\frac{63}{10\pi} \frac{b_2 m_a}{\omega} \sin(3V) - \frac{81}{64} \frac{\dot{\phi}_a c_3 m_a \cos(3V)}{\omega^3} + \\
 & + \frac{9c_3 \dot{\phi}_a^2}{8\omega} + \frac{3}{2\omega} (c_1 - \frac{\omega^2}{g}) = 0 \tag{C.2.24}
 \end{aligned}$$

As expressões (C.2.19) e (C.2.24) se constituem na segunda aproximação para a solução periódica de (C.2.3), no caso de ressonância sub-harmônica. Observe-se que estão presentes conjuntamente termos que oscilam em $\tau = \omega t$ e com termo que oscila em $\tau/3 = \omega t/3$.

APÊNDICE D

MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES
NO CASO DE EXCITAÇÃO ALEATÓRIA

APÊNDICE D
MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES
NO CASO DE EXCITAÇÃO ALEATÓRIA

Neste apêndice apresentam-se soluções aproximadas para o oscilador de 2ª ordem com amortecimento parabólico e restauração cúbica assimétricos, submetido a excitação aleatória.

A equação considerada é a (IV.1.1), reproduzida abaixo:

$$\ddot{\phi}^* + b_1 \dot{\phi}^* + b_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} = \eta \quad (\text{D.0.1})$$

($b_1, b_2 \geq 0$, não simultaneamente nulos; $c_1 > 0$; c_3 real)

O espectro do momento excitador ($S_{\eta\eta}$) pode ser obtido a partir do espectro da elevação de ondas ($S_{\zeta\zeta}$) por (IV.1.2), ou seja:

$$S_{\eta\eta} = \left(\frac{J_{xx}^0}{I_v} \omega^2 k \right)^2 S_{\zeta\zeta} \quad (\text{D.0.2})$$

Na seção D.1 apresenta-se um método para obtenção de soluções aproximadas para (D.0.1)-(D.0.2), devido a Dunne & Wright (ref.26), baseado na utilização de resultados conhecidos para a equação de Fokker-Planck associada a (D.0.1), que são exatos para amortecimento linear e excitação ruído branco.

Na seção D.2 detalha-se outro método para obtenção de soluções aproximadas para (D.0.1)-(D.0.2), devido a Roberts (ref.75,79,80). Este método também é baseado na utilização de resultados conhecidos para uma equação de Fokker-Planck, porém não associada à representação (D.0.1), mas sim a uma descrição do sistema em termos de sua energia total e de uma certa fase.

D.1 - Método de Dunne & Wright

O sistema é descrito pela equação (D.0.1). Pode-se proceder à sua linearização, de tal forma que

$$E[(e(t))^2] \quad (D.1.1)$$

seja mínimo, sendo

$$e(t) = b_1 \dot{\phi}^* + b_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| - b_e \dot{\phi}^* + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} - c_e \phi^* \quad (D.1.2)$$

Sendo b_e e c_e variáveis, o mínimo de $E[(e(t))^2]$ satisfaz as condições:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \{E[(e(t))^2]\}}{\partial b_e} &= 0, \\ \frac{\partial \{E[(e(t))^2]\}}{\partial c_e} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (D.1.3)$$

As expressões acima equivalem a:

$$\left. \begin{aligned} E\{2e(t)(-\dot{\phi}^*)\} &= 0, \\ E\{2e(t)(-\phi^*)\} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ou, mais simplificadamente:

$$E[\dot{\phi}^* e(t)] = E[\phi^* e(t)] = 0 \quad (D.1.4)$$

Quanto ao sinal das derivadas-segundas:

$$\frac{\partial^2 \{E[(e(t))^2]\}}{\partial b_e^2} = E\{-2\dot{\phi}^* (-\dot{\phi}^*)\} = E\{2\dot{\phi}^{*2}\} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \{E[(e(t))^2]\}}{\partial c_e^2} = E\{-2\phi^* (-\phi^*)\} = E\{2\phi^{*2}\} > 0;$$

trata-se, portanto, de ponto de mínimo.

Tem-se, de (D.1.4):

$$E\{\dot{\phi}^* e(t)\} = E\{b_1 \dot{\phi}^{*2} + b_2 \dot{\phi}^{*2} |\dot{\phi}^*| - b_e \dot{\phi}^{*2} + c_1 \phi^* \dot{\phi}^* + c_3 \phi^{*3} \dot{\phi}^* - c_e \phi^* \dot{\phi}^*\} = 0;$$

$$E\{\phi^* e(t)\} = E\{b_1 \dot{\phi}^* \phi^* + b_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| \phi^* - b_e \dot{\phi}^* \phi^* + c_1 \phi^{*2} + c_3 \phi^{*4} - c_e \phi^{*2}\} = 0, \quad (D.1.5)$$

o que requer que se conheçam as seguintes médias:

$$E(\phi^{*2});$$

$$E(\dot{\phi}^{*2});$$

$$E(\phi^* \dot{\phi}^*);$$

$$E(\phi^{*4});$$

$$E(\dot{\phi}^{*2} |\dot{\phi}^*|);$$

$$E(\dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| \phi^*);$$

$$E(\phi^{*3} \dot{\phi}^*).$$

Eventualmente, algumas das médias acima são pequenas em relação às demais, podendo ser ignoradas.

De (D.1.5) resulta:

$$\begin{aligned}
 b_e = & \frac{1}{E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*) - \frac{E(\dot{\phi}^{*2}) E(\dot{\phi}^{*2})}{E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*)}} \cdot \left\{ b_1 E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*) + \right. \\
 & + b_2 E(\dot{\phi}^* | \dot{\phi}^* | \dot{\phi}^*) + c_1 E(\dot{\phi}^{*2}) + c_3 E(\dot{\phi}^{*4}) - \\
 & - \frac{E(\dot{\phi}^{*2})}{E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*)} [b_1 E(\dot{\phi}^{*2}) + b_2 E(\dot{\phi}^{*2} | \dot{\phi}^*)] + \\
 & \left. + c_1 E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*) + c_3 E(\dot{\phi}^{*3} \dot{\phi}^*) \right\}, \\
 c_e = & \frac{1}{E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*)} [b_1 E(\dot{\phi}^{*2}) + b_2 E(\dot{\phi}^{*2} | \dot{\phi}^*)] + \\
 & + c_1 E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*) + c_3 E(\dot{\phi}^{*3} \dot{\phi}^*) - E(\dot{\phi}^{*2}) b_e \quad (D.1.6)
 \end{aligned}$$

Nos casos em que se puder admitir:

$$E(\dot{\phi}^* \dot{\phi}^*) \cong 0 \quad (D.1.7)$$

as expressões (D.1.6) se reduzem a:

$$\begin{aligned}
 b_e \cong & b_1 + b_2 \frac{E(\dot{\phi}^{*2} | \dot{\phi}^*)}{E(\dot{\phi}^{*2})} + c_3 \frac{E(\dot{\phi}^{*3} \dot{\phi}^*)}{E(\dot{\phi}^{*2})}, \\
 c_e \cong & b_2 \frac{E(\dot{\phi}^* | \dot{\phi}^* | \dot{\phi}^*)}{E(\dot{\phi}^{*2})} + c_1 + c_3 \frac{E(\dot{\phi}^{*4})}{E(\dot{\phi}^{*2})} \quad (D.1.8)
 \end{aligned}$$

Uma vez calculados os coeficientes b_e e c_e , o que na primeira iteração requer arbitrar valores para as estatísticas $E(\dot{\phi})$, $E(\dot{\phi}^2)$,

etc., tem-se o sistema linear "equivalente":

$$\ddot{\phi}^* + b_e \dot{\phi}^* + c_e \phi^* = \eta \quad (\text{D.1.9})$$

O número de cruzamentos para cima de um nível ϕ^* por unidade de tempo pode ser calculado por:

$$N_c(\phi^*) = \int_0^{\infty} \dot{\phi}^* f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\dot{\phi}^* \quad (\text{D.1.10})$$

onde $f(\phi^*, \dot{\phi}^*)$ é a função densidade de probabilidade conjunta de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$. Como não há assimetria com relação à banda, por hipótese, o número de cruzamentos para baixo de um nível $-\phi^*$ é igual a $N_c(\phi^*)$.

Para o sistema linearizado (D.1.9), tem-se:

$$S_{\phi\phi}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega), \quad (\text{D.1.11})$$

$$\begin{aligned} S_{\dot{\phi}\dot{\phi}}(\omega) &= \omega^2 S_{\phi\phi}(\omega) = \\ &= \omega^2 |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega), \end{aligned}$$

em que

$S_{\phi\phi}(\omega)$ é o espectro da variável ϕ^* ,

$S_{\dot{\phi}\dot{\phi}}(\omega)$ é o espectro da variável $\dot{\phi}^*$,

$H(\omega)$ é a função de transferência do sistema.

Admitindo-se que a excitação corresponde a um processo estocástico estacionário, sabe-se que ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ corresponderão a proces

scs com estas mesmas características. Ainda mais, se a excitação for um ruído branco, a função densidade de probabilidade de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ será gaussiana, dado que o sistema é linear.

Assim, tem-se:

$$f(\phi^*, \dot{\phi}^*) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\phi^*}\sigma_{\dot{\phi}^*}} \exp\left\{-\frac{1}{c_e\sigma_{\phi^*}^2} \left[\frac{c_e\phi^{*2}}{2} + \frac{\dot{\phi}^{*2}}{2}\right]\right\}, \quad (\text{D.1.12})$$

em que

$$\sigma_{\phi^*}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \text{ é a variância de } \phi^*,$$

$$\sigma_{\dot{\phi}^*}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \text{ é a variância de } \dot{\phi}^*.$$

Assim, (D.1.10) fica:

$$\begin{aligned} N_c(\phi^*) &= \int_0^{\infty} \dot{\phi}^* f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\dot{\phi}^* = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_{\phi^*}\sigma_{\dot{\phi}^*}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (-2c_e\sigma_{\phi^*}^2) \left\{ 2\dot{\phi}^* \left(\frac{-1}{2c_e\sigma_{\phi^*}^2} \exp\left[-\frac{1}{c_e\sigma_{\phi^*}^2} \left(\frac{c_e\phi^{*2}}{2} + \frac{\dot{\phi}^{*2}}{2} \right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\dot{\phi}^{*2}}{2} \right) \right\} d\dot{\phi}^* = \frac{\sigma_{\dot{\phi}^*}}{2\pi\sigma_{\phi^*}} \exp\left[-\frac{\phi^{*2}}{2\sigma_{\phi^*}^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.13})$$

O intervalo de tempo médio entre cruzamentos, quer sejam para cima de $+\phi^*$ ou para baixo de $-\phi^*$, é dado por:

$$\begin{aligned} \mu(\phi^*) &= \frac{1}{2N_c(\phi^*)} = \\ &= \pi \frac{\sigma_{\phi^*}}{\sigma_{\dot{\phi}^*}} \exp\left[\frac{\phi^{*2}}{2\sigma_{\phi^*}^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.14})$$

A expressão (D.1.14) é utilizada para substituir a excitação real por uma excitação de ruído branco, com critério de que deve ser mínimo para um dado limite $\phi^*_{\text{máx}}$:

$$h = \int_0^{\phi^*_{\text{máx}}} \left[\underbrace{\mu}_{\text{espectro real}}(\phi^*) - \underbrace{\mu}_{\text{ruído branco de intensidade } I_0}(\phi^*) \right]^2 d\phi^* \quad (\text{D.1.15})$$

Tem-se:

$$h = \int_0^{\phi^*_{\text{máx}}} \pi \left\{ \frac{\sigma_{\phi^*,r}^*}{\sigma_{\phi^*,r}^*} \exp \left[\frac{\phi^{*2}}{2\sigma_{\phi^*,r}^*} \right] - \frac{\sigma_{\phi^*,I_0}^*}{\sigma_{\phi^*,I_0}^*} \exp \left[\frac{\phi^{*2}}{2\sigma_{\phi^*,I_0}^*} \right] \right\} d\phi^*, \quad (\text{D.1.16})$$

sendo

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi^*,r}^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\omega)]^2 S(\omega) d\omega, \\ \sigma_{\dot{\phi}^*,r}^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 [H(\omega)]^2 S(\omega) d\omega, \\ \sigma_{\phi^*,I_0}^* &= I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\omega)]^2 d\omega, \\ \sigma_{\dot{\phi}^*,I_0}^* &= I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 [H(\omega)]^2 d\omega, \end{aligned} \quad (\text{D.1.17})$$

e o valor de I_0 para o qual h se torna mínimo pode ser determinado numericamente.

O método prevê, em seguida, a recuperação do sistema com restauração cúbica, impondo excitação na forma de ruído branco com a intensidade I_0 determinada pelo critério exposto. Tem-se:

$$\ddot{\phi}^* + b_e \dot{\phi}^* + c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} = N(t), \quad (\text{D.1.18})$$

onde \mathcal{N} é ruído branco com intensidade I_0 . Neste caso, existe solução exata para $f(\phi, \dot{\phi})$, dada por:

$$f(\phi^*, \dot{\phi}^*) = C \exp \left\{ -\frac{2b_e}{I_0} \left[\frac{G\phi^{*2}}{2} + \frac{G\phi^{*4}}{4} + \frac{\dot{\phi}^{*2}}{2} \right] \right\}, \quad (\text{D.1.19})$$

onde C é uma constante tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* = 1 \quad (\text{D.1.20})$$

Com tal função densidade de probabilidade, pode-se recalculer as seguintes estatísticas:

$$E(\phi^{*2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{*2} f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\dot{\phi}^{*2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}^{*2} f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\phi^* \dot{\phi}^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^* \dot{\phi}^* f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\dot{\phi}^{*2} | \phi^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}^{*2} | \phi^* | f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\dot{\phi}^* | \dot{\phi}^{*2} | \phi^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}^* | \dot{\phi}^{*2} | \phi^* f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\phi^{*3} \dot{\phi}^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{*3} \dot{\phi}^* f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* ;$$

$$E(\phi^{*4}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{*4} f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\phi^* d\dot{\phi}^* \quad (\text{D.1.21})$$

As estatísticas acima são então comparadas com os valores utilizados no cálculo de b_e e c_e (fórmulas (D.1.6)). Caso haja diferenças significativas, procede-se a uma nova iteração. Uma vez que as diferenças tenham sido consideradas aceitáveis, isto é suficientemente pequenas, toma-se a correspondente função $f(\phi, \dot{\phi})$ como solução aproximada do problema.

D.2 - Método de Roberts

A energia total associada a (D.0.1) é:

$$V = E + U, \quad (\text{D.2.1})$$

em que

$$E = \frac{\dot{\Phi}^{*2}}{2}, \quad (\text{D.2.2})$$

e

$$U = \int_0^{\Phi^*} (c_1 \Phi^* + c_3 \Phi^{*3}) d\Phi^* \quad (\text{D.2.3})$$

são, respectivamente, a energia cinética e a energia potencial.

A fase β é definida por:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{U^{1/2}}{V^{1/2}}; \\ \sin \beta &= - \frac{E^{1/2}}{V^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.4})$$

A equação (D.0.1) pode ser substituída por um sistema de duas equações de primeira ordem nas variáveis V e β :

$$\begin{cases} \dot{V} = \tilde{f}(V, \beta) (2V)^{1/2} \sin \beta - (2V)^{1/2} \sin \beta \eta(t); \\ \dot{\beta} = \frac{\tilde{f}(V, \beta)}{(2V)^{1/2}} \cos \beta - \frac{\cos \beta}{(2V)^{1/2}} \eta(t) + \frac{\tilde{g}(V, \beta)}{(2V)^{1/2} \cos \beta} \end{cases} \quad (\text{D.2.5})$$

sendo

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v, \beta) &= b_1 \dot{\phi}^* + b_2 \dot{\phi}^* |\dot{\phi}^*| = F(\dot{\phi}^*), \\ \tilde{g}(v, \beta) &= c_1 \phi^* + c_3 \phi^{*3} = G(\phi^*)\end{aligned}\quad (\text{D.2.6})$$

Para sistemas livres não amortecidos V é constante. Admite-se aqui que o amortecimento e a excitação sejam "pequenos" e, em conseqüência, que V varie "pouco" durante uma oscilação.

Seja $0 < \varepsilon \ll 1$. Supõe-se:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v, \beta) &= \varepsilon^2 \bar{f}(v, \beta) = \varepsilon^2 \bar{F}(\dot{\phi}^*), \\ \eta(t) &= \varepsilon \bar{\eta}(t)\end{aligned}\quad (\text{D.2.7})$$

sendo $\bar{f}(v, \beta)$ e $\bar{\eta}(t)$ da mesma ordem de grande que $\dot{\phi}^*$, $c_1 \phi^*$ e $c_3 \phi^{*3}$.

As equações (D.2.5) ficam:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\varepsilon^2 \tilde{\alpha}_1(v, \beta) - \varepsilon \tilde{b}_1(v, \beta, \bar{\eta}); \\ \dot{\beta} = -\varepsilon^2 \tilde{\alpha}_2(v, \beta) - \varepsilon \tilde{b}_2(v, \beta, \bar{\eta}) + \tilde{c}(v, \beta) \end{cases} \quad (\text{D.2.8})$$

em que:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1(v, \beta) &= -\bar{f}(v, \beta) (2v)^{1/2} \sin \beta; \\ \tilde{b}_1(v, \beta, \bar{\eta}) &= (2v)^{1/2} \sin \beta \bar{\eta}(t); \\ \tilde{\alpha}_2(v, \beta) &= -\frac{\bar{f}(v, \beta) \cos \beta}{(2v)^{1/2}}; \\ \tilde{b}_2(v, \beta, \bar{\eta}) &= \frac{\cos \beta \bar{\eta}(t)}{(2v)^{1/2}}; \\ \tilde{c}(v, \beta) &= \frac{\tilde{g}(v, \beta)}{(2v)^{1/2} \cos \beta}.\end{aligned}\quad (\text{D.2.9})$$

A fase β , quando o amortecimento e a excitação são nulos, fica (ver a segunda das equações (D.2.8)):

$$\beta_0(t) = \int \tilde{c}(v, \beta) dt, \quad (\text{D.2.10})$$

que é solução para o sistema não linear livre não amortecido.

Definindo

$$\dot{\lambda} = -\varepsilon^2 \tilde{a}_2(v, \beta) - \varepsilon \tilde{b}_2(v, \beta, \overline{m}), \quad (\text{D.2.11})$$

a fase β pode ser escrita como:

$$\beta = \lambda + \beta_0(t) \quad (\text{D.2.12})$$

De (D.2.11), observa-se que λ também varia "pouco" durante uma oscilação.

Considerando as variáveis v e λ , o sistema (D.2.8) fica:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\varepsilon^2 \tilde{a}_1(v, \lambda) - \varepsilon \tilde{b}_1(v, \lambda, \overline{m}); \\ \dot{\lambda} = -\varepsilon^2 \tilde{a}_2(v, \lambda) - \varepsilon \tilde{b}_2(v, \lambda, \overline{m}) \end{cases} \quad (\text{D.2.13})$$

Diante da hipótese de que o amortecimento seja "pequeno", os coeficientes \tilde{a}_1 e \tilde{a}_2 de (D.2.13) são substituídos por seus valores médios no decorrer de um período de oscilação livre não amortecida $T(v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(v, \beta) &\xrightarrow{\text{valor médio em } T(v)} A_1(v), \\ \tilde{a}_2(v, \beta) &\xrightarrow{\text{valor médio em } T(v)} A_2(v). \end{aligned} \quad (\text{D.2.14})$$

Assim, o sistema (D.2.13) fica:

$$\begin{cases} \dot{V} \cong -\varepsilon^2 A_1(V) - \varepsilon \tilde{b}_1(V, \lambda, \overline{\eta}) \\ \dot{\lambda} \cong -\varepsilon^2 A_2(V) - \varepsilon \tilde{b}_2(V, \lambda, \overline{\eta}) \end{cases} \quad (\text{D.2.15})$$

O teorema de Stratonovitch-Khasminskii (ref.79) diz que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a solução de (D.2.15) converge fracamente para um processo de Markov. Admite-se aqui que, mesmo para $0 < \varepsilon \ll 1$, a resposta de (D.2.15) seja markoviana. Assim sendo, tal resposta fica completamente caracterizada pela função densidade de probabilidade $f([V, \lambda] | [V_0, \lambda_0]; t, t_0)$, sendo que $\int f([V, \lambda] | [V_0, \lambda_0]; t, t_0) d[V, \lambda]$ é a probabilidade de que a resposta fique entre $[V, \lambda]$ e $[V, \lambda] + d[V, \lambda]$, dado que estava em $[V_0, \lambda_0]$ no instante t_0 .

O processo suposto markoviano $[V, \lambda]$ é governado pelas equações de Itô (ref.79):

$$\begin{aligned} dV = & \varepsilon^2 \left\{ -A_1(V) - \int_{-\infty}^0 \left\langle E \left\{ \frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial V}(t) \tilde{b}_1(t+\tau) + \frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial \lambda}(t) \tilde{b}_2(t+\tau) \right\} \right\rangle d\tau \right\} dt + \\ & + \varepsilon \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle E \left\{ \tilde{b}_1(t) \tilde{b}_1(t+\tau) \right\} \right\rangle d\tau dW_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle E \left\{ \tilde{b}_1(t) \tilde{b}_2(t+\tau) \right\} \right\rangle d\tau dW_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\lambda = & \varepsilon^2 \left\{ -A_2(V) - \int_{-\infty}^0 \left\langle E \left\{ \frac{\partial \tilde{b}_2}{\partial V}(t) \tilde{b}_1(t+\tau) + \frac{\partial \tilde{b}_2}{\partial \lambda}(t) \tilde{b}_2(t+\tau) \right\} \right\rangle d\tau \right\} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E \{ \tilde{b}_2(t) \tilde{b}_1(t+\tau) \} \rangle d\tau dW_1 + \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E \{ \tilde{b}_2(t) \tilde{b}_2(t+\tau) \} \rangle d\tau dW_2 \right\},
\end{aligned}$$

(D.2.16)

sendo que os símbolos $\langle \dots \rangle$ indicam valor médio no tempo, calculado em $T(V)$; que a esperança estatística $E\{\dots\}$ é calculada na hipótese de V e λ constantes; que W_1 e W_2 são supostos processos brownianos unitários.

Na equação (D.2.16) os coeficientes \tilde{b}_1 e \tilde{b}_2 são funções de V , $\text{sen}\beta = \text{sen}(\lambda + \beta_0)$, $\text{cos}\beta = \text{cos}(\lambda + \beta_0)$ e $\bar{\eta}$.

No cálculo dos valores médios em $T(V)$, supõe-se que V e λ sejam constantes. Além disso, admite-se que $\text{sen}[\lambda + \beta_0(t)]$ e $\text{cos}[\lambda + \beta_0(t)]$ possam ser expandidos em séries de Fourier:

$$\begin{aligned}
\text{sen} [\lambda + \beta_0(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \text{sen} \frac{2\pi n t}{T(V)}, \\
\text{cos} [\lambda + \beta_0(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos} \frac{2\pi n t}{T(V)},
\end{aligned}
\tag{D.2.17}$$

em que os coeficientes s_n e c_n são função do nível de energia V . Como λ é suposto fixo, e a origem do tempo é arbitrária, os coeficientes s_n e c_n podem ser avaliados pela expansão de $\text{sen}[\beta_0(t)]$ e $\text{cos}[\beta_0(t)]$.

Assim, os coeficientes \tilde{b}_1 e \tilde{b}_2 resultam função de V e $\bar{\eta}$, apenas.

Daí, uma vez definida a excitação η , os segundos membros das equações (D.2.16) são independentes de λ . Em particular, a primeira equação independe totalmente de λ . Então, à tal equação está associada uma densidade de probabilidade $f(V|V_0; t, t_0)$, ou simplesmente $f_t(V)$.

A função de probabilidade $f_t(V)$ associada ao processo markoviano no V governado pela primeira das equações de Itô (D.2.16) deve satisfazer a equação de Fokker-Planck (ref.79), dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t(V)}{\partial t} = & -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \left\{ -A_1(V) - \int_{-\infty}^{\infty} \langle E \left\{ \frac{\partial \tilde{b}_1^{\nu}}{\partial V}(t) \tilde{b}_1^{\nu}(t+\tau) + \frac{\partial \tilde{b}_1^{\nu}}{\partial \lambda}(t) b_2(t+\tau) \right\} \rangle d\tau \cdot f_t(V) \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial V^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \langle E \left\{ \tilde{b}_1^{\nu}(t) \tilde{b}_1^{\nu}(t+\tau) \right\} \rangle d\tau \cdot f_t(V) \right\} \right\} \quad (D.2.18) \end{aligned}$$

A solução estacionária $f(V)$ da equação (D.2.18) pode ser obtida impondo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t(V)}{\partial t} &= 0; \\ \int_0^{\infty} f_t(V) dV &= 1 \end{aligned} \quad (D.2.19)$$

Pelo fato do segundo membro da segunda das equações (D.2.16) não envolver a variável λ , mas somente V e t , resulta que em regime estacionário a fase λ é uniformemente distribuída entre 0 e 2π para cada valor fixado de V . Daí, num dado nível de energia V , a distribuição da fase $\beta = \lambda + \beta_0$ é idêntica à distribuição da fase β_0 do sistema livre não amortecido. A probabilidade do ângulo diferen

ça entre o balanço e a declividade de ondas ficar na faixa $d\phi^*$ num nível de energia V é igual à proporção do tempo que o ângulo fica ria nesta faixa em oscilação livre. Tem-se:

$$f(\phi^*|V) d\phi^* = \frac{dt}{T(V)}, \quad (\text{D.2.20})$$

em que $f(\phi^*|V)$ é a densidade de probabilidade condicional para ϕ^* , dado um nível de energia V , e dt é o tempo correspondente a $d\phi^*$ em oscilação livre.

Tem-se que:

$$f(\phi^*|V) = \frac{f(V, \phi^*)}{f(V)} \quad (\text{D.2.21})$$

sendo $f(V, \phi^*)$ a densidade de probabilidade conjunta de V e ϕ^* .

Fixado ϕ^* , a variação da energia V é devida à variação da velo cidade $\dot{\phi}^*$, e resulta:

$$f(V, \phi^*) dV = f(V, \phi^*) 2\dot{\phi}^* d\dot{\phi}^* \quad (\text{D.2.22})$$

Tem-se também que:

$$f(V, \phi^*) dV = f(\phi^*, \dot{\phi}^*) d\dot{\phi}^* \quad (\text{D.2.23})$$

De (D.22) e (D.2.23) tem-se:

$$f(V, \phi^*) = \frac{f(\phi^*, \dot{\phi}^*)}{2\dot{\phi}^*} \quad (\text{D.2.24})$$

Substituindo (D.2.24) em (D.2.21), e o resultado de (D.2.20),

chega-se a:

$$f(\phi^*, \dot{\phi}^*) = \frac{2f(V)}{T(V)} \quad (\text{D.2.25})$$

A equação (D.2.25) dá a densidade de probabilidade conjunta de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$. Nota-se que quaisquer combinações de ϕ^* e $\dot{\phi}^*$ que resultem no mesmo nível de energia V (ver expressão (D.2.1)), têm a mesma densidade de probabilidade.

O período de oscilação livre $T(V)$ pode ser calculado por:

$$T(V) = 4 \int_0^{\phi_0^*} \frac{d\phi^*}{\dot{\phi}^*} = 2\sqrt{2} \int_0^{\phi_0^*} \frac{d\phi^*}{\sqrt{V - U(\phi^*)}} \quad (\text{D.2.26})$$

em que ϕ_0^* é solução de

$$U(\phi_0^*) = V, \quad (\text{D.2.27})$$

e U é calculada pela equação (D.2.3)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A., ed. Handbook of mathematical functions. New York, Dover, 1965, 1046p.
2. BISHOP, R.E.D.; PRICE, W.G.; TEMAREL, P. On the role of encounter frequency in the capsizing of ships. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STABILITY OF SHIPS AND OCEAN VEHICLES STABILITY, 2, Tokyo, 1982. Proceedings. Tokyo, Society of Naval Architects of Japan, 1983, p.103-12.
3. BHATTACHARYYA, R. Dynamics of marine vehicles. Wiley, New York, 1978.
4. BOGOLIUBOV, N.N.; KRYLOV, N.M. Introduction to non-linear mechanics. Princeton University Press, New York, 1943.
5. ____; MITROPOLSKY, Y.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillation. Hindustan Corp., New Delhi, 1961.
6. BORISOV, R.V. Simplified methods for calculation of damping coefficients using records of free nonlinear rolling with large amplitude decay. Ann Arbor, University of Michigan, 1970. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 050).
7. BORODAI, J.K.; NETSVETAYEV, Y.A. Ship motions in ocean waves. Sudostorenie, Leningrado, 1969.
8. CARDO, A. et alii. Effects of the angle-dependent damping on the rolling motion of ships in regular beam seas. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 27(310): 135-8, June 1980.
9. ____; FRANCESCUTTO, A.; NABERGOJ, R. Nonlinear rolling response in a regular sea. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 31(360): 204-8, Aug.1984.

10. CARDO, A.; FRANCESCUTTO, A.; NABERGOJ, R. On the maximum amplitudes in nonlinear rolling. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STABILITY OF SHIPS AND OCEAN VEHICLES STABILITY, 2., Tokyo, 1982. Proceedings. Tokyo, Society of Naval Architects of Japan, 1983. p.93-102.
11. ____; ____; _____. The excitation threshold and the onset of subharmonic oscillations in nonlinear rolling. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 32(373): 210-4, Sept. 1985.
12. ____; ____; _____. Ultraharmonics and subharmonics in the rolling motion of a ship: steady-state solution. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 28(326): 234-51, Oct.1981.
13. ____; MICHELLACCI, G.A. Stochastic model for the effect of wind on the roll of a ship. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 29(334): 161-3, June 1982.
14. CAUGHEY, T.K. Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white noise random excitation. Journal of the Acoustical Society of America, New York, 35(11): 1681-92, Nov.1963.
15. _____. Equivalent linearization techniques. Journal of the Acoustical Society of America, New York, 35 : 1706-11, Nov.1963.
16. _____. Random excitation of a loaded nonlinear string. Journal of Applied Mechanics: 575-578, 1960.
17. _____. Random excitation of a system with bilinear hysteresis. Journal of Applied Mechanics: 649-52, 1960.
18. _____. Response of a nonlinear string to random loading. Journal of Applied Mechanics: 341-44, 1959.

19. CAUGHEY, T.K. The existence and stability of ultraharmonics and subharmonics in forced nonlinear oscillations. Journal of Applied Mechanics: 327-35, 1959.
20. COMPARISON of predicted and measured roll damping. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 16, Leningrado, 1981. Proceedings. Leningrado, Krilow Shipbuilding Research Institute, 1981. v.1: Report of the Seakeeping Committee. p.210-6.
21. CRANDALL, S.H. Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems. Journal of the Acoustical Society of America, 35 : 1700-05, Nov.1963.
22. DALZELL, J.F. Estimation of the spectrum of nonlinear ship rolling: the functional series approach. Hoboken, Stevens Institute of Technology, 1976. (Report n^o SIT-DL-76-1894).
23. _____. A note on the distribution of maxima of ship rolling. Journal of Ship Research, New York, 17(4): 217-26, Dec.1973.
24. _____. A note on the form of ship roll damping. Journal of Ship Research, New York, 22(3): 178-85, Sept.1978.
25. DINCĂ, F.; THEODOSIU, C. Nonlinear and random vibrations. Bucuresti, Editura Academiei, 1973. 413p.
26. DUNNE, J.F.; WRIGHT, J.H. Predicting the frequency of occurrence of large roll angles in irregular seas. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, London, 127: 233-45, 1985.
27. FLOWER, J.O. Approximate analytical solutions to nonlinear differential equations governing the behaviour of some oscillating marine systems using the Beecham-Titchener method. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 32(373): 215-24, Sept.1985.

28. FLOWER, J.O. A perturbational approach to non-linear rolling in a stochastic sea. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 23(263): 209-12, July 1976.
29. ____; MACKERDICHIAN, S.K. Application of the describing function technique to nonlinear rolling in random waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 25(281): 14-18, Jan.1978.
30. FRANK. W. On the oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Bethesda, Naval Ship Research and Development Center, 1967. (NSRDC Report 2375).
31. FROUDE, W. The papers of W. Froude. Institution of Naval Architects, London, 1955.
32. GRIM, O. Berechnung der durch Schwingungen eines Schiffeskörpers Erzeugten Hydrodynamische Kräfte. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 47: 277-99, 1957.
33. ____ . Hydrodynamische Kräfte, verursacht durch Rollchwingungen mit grosser Amplitude. Schiffstechnik, Hamburg, 24: 143-60, 1977.
34. ____ . Non-linear phenomena in the behaviour of a ship in a seaway. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 12., Roma, 1969. Proceedings. Rome, De Rossi, 1971. p.688-93.
35. ____; SCHENZLE, P. Berechnung der Torsionsbelastung eines Schiffes in Seegang. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Hamburg, 236, 1969.
36. HADDARA, M.R. Analysis of coupled nonlinear pitchroll motions in random waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 29(333): 136-9, May 1982.

37. HADDARA, M.R. A modified approach for the application of Fokker-Planck equation to the nonlinear ship motions in random waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 21(292): 283-8, Oct.1974.
38. _____. A note on the effect of damping moment form on rolling response. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 31(363): 285-90, Nov.1984.
39. _____. A note on the power spectrum of nonlinear rolling motion. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 30(342): 41-4, Feb.1983.
40. _____. A study of the extreme variance of rolling motion in random oblique waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 23(267): 386-90, Nov.1976.
41. _____; NASSAR, M.A. A stochastic model for the analysis of rolling motion in a realistic seaway. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 33(384): 144-50, Aug.1986.
42. HAKEN, H. Synergetics: an introduction. 2^a ed. Berlin, Springer, 1978. 355p.
43. HIMENO, Y. Prediction of ship roll damping: state of the art. Ann Arbor, University of Michigan, 1981. 75p. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 239).
44. IKEDA, Y.; ISHIKAWA, M.; TANAKA, N. Viscous effect on damping forces of ship in sway and roll coupled motion. Journal of the Kansai Society of Naval Architects, 178: 44-53, 1980.
45. INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCES. Proceedings.

46. JACOBSEN, L.S.; AYRE, R.S. Engineering vibrations. New York, McGraw-Hill, 1958. 564p.
47. KASTNER, S. Simulation and assessment of roll motion stability. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STABILITY OF SHIPS AND OCEAN VEHICLES STABILITY, 2., Tokyo, 1982. Proceedings. Tokyo, Society of Naval Architects of Japan, 1983. p.255-70.
48. KATO, H. On the frictional resistance to the rolling of ships. Journal of Zozen Kiokay, 102: 115-22, 1958.
49. KLINE, M. Calculus: an intuitive and physical approach. 2^a ed., New York, Wiley, 1977. 943p.
50. KORVIN-KROUKOVSKY, B.V.; JACOBS, W.R. Pitching and heaving motions of a ship in regular waves. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers. New York, 65: 590-632, 1957.
51. KRÖGER, H.P. Rollsimulation von Schiffen im Seegang. Schiffs technik, Hamburg, 33: 187-216, 1986.
52. LEHNIGK, S.H. Stability theorems for linear motions. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1966. 251p.
53. MATHISEN, J.B.; PRICE, W.G. Estimation of ship roll damping coefficients. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, London, 127: 295-307, 1985.
54. MICHELACCI, G. A stochastic model for rolling motion due to poisson-distributed wind crests of random amplitude. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 29(340): 343-6, Dec.1982.
55. _____. Stochastic rolling due to modulated wind impulses with an arbitrary poisson non-uniform distribution. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 31(364): 292-5, Dec.1984.

56. MUHURI, P.K. A study of the stability of the rolling motion of a ship in an irregular seaway. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 27(310): 139-42, June 1980.
57. MYRHAUG, D. A note on the effect of roughness on the frictional roll damping. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 28(322): 128-35, 1981.
58. NAYFEH, A.H.; KHDEIR, A.A. Nonlinear rolling of ships in regular beam seas. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 33(379): 40-9, Mar.1986.
59. ____; ____ . Nonlinear rolling of based ships in regular beam waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 33(381): 84-93, May 1986.
60. NUNES, D. Seminário sobre a equações de difusão. IPT/DINAV, São Paulo, 1986 (Publicação Técnica, 76).
61. OBRASTSOV, W.B. Experimental investigation of influence of ship's speed on its transverse stability. S.l., University of Michigan, 1970. 7p. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 056).
62. ____ . Method of calculation the restoring moment of a moving ship. S.l., University of Michigan, 1970. 3p. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 056).
63. ODABASI, A.Y. Ultimate stability of ships. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, London, 119: 237- , 1977.
64. ____; VINCE, J. Roll responde of a ship under the action of a sudden excitation. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 29(339): 327-33, Dec.1982.

65. OGILVIE, T.F. First and second order forces on a cylinder submerged under a free surface. Journal of Fluid Mechanics, 16(3): 451-72, 1963.
66. PAPOULIS, A. Probability, random variables and stochastic processes. McGraw Hill, Tokyo, 1981.
67. PESCE, C.P. Cálculo dos coeficientes de amortecimento devido a efeitos viscosos: fórmulas empíricas. In: _____. Cálculo da força de deriva sobre corpos cilíndricos flutuantes sujeitos à ação de ondas aleatórias: os efeitos dos potenciais de primeira e segunda-ordem em lâmina d'água de profundidade finita. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Sao Paulo, Escola Politécnica, São Paulo, 1984. p.IX.1-29.
68. PONTRYAGIN, L.S. Ordinary differential equations. Library of the Congress, 1968.
69. PORTER, W.R. Pressure distributions, added-mass and damping coefficients for cylinders oscillating in a free surface. University of California, Artigo 82-16, 1960.
70. POTASH, R.L. Second order theory of oscillating cylinders. University of California, Berkeley, Report NA 70-3, 1970.
71. PREDICTION of ship roll motion. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 15., The Hague, 1978. Proceedings. The Hague, Netherlands Ship Model Basin, 1978. v.1: Report of the Seakeeping Committee. p.73-8.
72. RIDGELY-NEVITT, C. The development of parent hulls for a high displacement-length series of trawler forms. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York, 71: 5-30, 1963.

73. RIDGELY-NEVITT, C. The resistance of a high displacement-length ratio trawler series. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York, 75: 51-78, 1967.
74. RISKEN, H. The Fokker-Planck equations. Berlin, Springer, 1984. 454p.
75. ROBERTS, J.B. Comparison between simulation results and theoretical predictions for a ship rolling in random beam waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 31(359):168-80, July 1984.
76. _____. Effect of parametric excitation on ship rolling motion in random waves. Journal of Ship Research, New York, 26(4): 246-53, Dec.1982.
77. _____. Estimation of nonlinear ship roll damping from free-decay data. Journal of Ship Research, New York, 29(2): 127-38, June 1985.
78. _____. Probability of first passage failure for lightly damped oscillators. In: CLARKSON, B.L. et alii, ed. Stochastic problems in dynamics. London, Pitman, 1977. p.256-82.
79. _____. A stochastic theory for nonlinear ship rolling in irregular seas. Journal of Ship Research, New York, 26(4): 229-45, Dec.1982.
80. _____; DACUNHA, N.M.C. Roll motion of a ship in random beam waves: comparison between theory and experiment. Journal of Ship Research, New York, 29(2): 112-26, June 1985.
81. SALVESEN, N.; TUCK, E.O.; FALTINSEN, O. Ship motions and sea loads. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York, 78: 250-87, 1970.

82. SCHETZEN, M. Nonlinear system modeling based on the Wiener theory. Proceedings of the IEEE, New York, 69(12): 1557-72, Dec.1981.
83. SEMENOV-TJAN-SHANSKI, V.V. Modeling of rolling. S.l., University of Michigan, 1970. 7p. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 059).
84. SKOMEDAL, N.G. Parametric excitation of roll motion and its influence on stability. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STABILITY OF SHIPS AND OCEAN VEHICLES STABILITY, 2., Tokyo, 1982. Proceedings. Tokyo, Society of Naval Architects of Japan, 1983. p.113-25.
85. SMITH, E. On nonlinear random vibration. Trondheim, University of Trondheim, 1978. (Report, 78-3).
86. SOBOLEV, G.V.; OBRASTSOV, W.B. The calculation of the righting moment for a moving ship with an initial angle of heel. S.l., University of Michigan, 1970. 9p. (University of Michigan. College of Engineering. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 056).
87. SÖDING, H. Eine Modification der Streifenmethode. Schiffstechnik, Hamburg, 16(80): 15-18, 1969.
88. St. DENNIS, M. On a problem in the theory of nonlinear oscillations of ships. Schiffstechnik, Hamburg, 14(70): 11-4, 1987.
89. _____; PIERSON, W.J. On the motion of ships in confused seas. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York, 61: 280-357, 1953.
90. STARZHINSKII, V.M. Applied methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow, Mir, 1980. 263p.

91. STOKER, J.J. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. Interscience, New York, 1966. 273p.
92. TAMIYA, S. A calculation of non-linear non-symmetric rolling of ships. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 12., Roma, 1969. Proceedings. Rome, De Rossi, 1971. p.766-8.
93. TANAKA, N. A study on the bilge keel: part 1 to 4. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol. 101, 103, 105, 109, de 1957, 1958, 1959 e 1961.
94. TASAI, F. On the damping force and added mass of ships heaving and pitching. Journal of Zozen Kiokay, Tokio, 105: 47-56, 1959.
95. _____. On the swaying yawing and rolling motions of ships in oblique waves. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 14(153): 216-28, May 1967.
96. _____. The state of the art of calculations for lateral motions. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 13., Berlin, 1972. Proceedings. Hamburg, s.ed., s.d. v.2, p.918-42
97. TIMMAN, R.; NEWMAN, J.N. The coupled damping coefficients of symmetric ships. Journal of Ship Research, New York, 5(4): 1-7, Mar.1962.
98. URSELL, F. On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2: 218-31, 1949.
99. VASSILOPULOS, L. Ship rolling at zero speed in random beam seas with nonlinear damping and restoration. Journal of Ship Research, New York, 15(4): 289-94, Dec.1971.
100. VEIGA, J.P.C. Programa ARQNAV.

101. VEIGA, J.P.C. Proposta de método para projeto de aletas estabilizadoras. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, São Paulo, 1982, 1ºv.
102. VINJE, T.; SKJØRDAL, S.O. On the calculation of the statistical distribution of maxima of slightly non-linear, quadratic, stationary stochastic variables. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, 22(252): 265-74, Aug.1975.
103. VUGTS, J.H. The coupled roll-sway-yaw performance in oblique waves. In: INTERNATIONAL TOWING TANK CONFERENCE, 12., Roma, 1969. Proceedings. Rome, De Rossi, 1971. p.758-63.
104. WIENER, N. Nonlinear problems in random theory. Cambridge, Mass., MIT Press, 1958. 131p.
105. WRIGHT, J.H.H.; MARSHFIELD, W.B. Ship roll response and cap size behaviour in beam seas. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, London, 122: 129-48, 1980.
106. YAMANOUCI, Y. Nonlinear response of ships on the sea. In: CLARKSON, B.L. et alii, ed. Stochastic problems in dynamics. London, Pitman, 1977. p.540-50.
107. _____. On the considerations on the statistical analysis of ships response in waves. Select papers from the Journal of Society of Naval Architects of Japan, 3, 1969.