

JOSE EDUARDO ZINDEL DEBONI  
Eng. Naval, Escola Polit cnica da USP, 1983

MONITORA O E DETECC O DE FALHAS EM SISTEMAS MECANICOS PELA  
MODELAGEM E ESTIMA O DE ESTADO

Disserta o apresentada    
Escola Polit cnica da USP  
para obten o do t tulo  
de Mestre em Engenharia  
Naval.

Orientador: Prof.Dr. Hernani Luiz Brinati, Depto.Eng. Naval

S o Paulo, 1989

CONSULTA  
FD-1098

FD-1098

MONITORAÇÃO E DETECÇÃO DE FALHAS EM SISTEMAS MECANICOS PELA  
 MODELAGEM E ESTIMAÇÃO DE ESTADO

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	v
RESUMO .....	vi
ABSTRACT .....	vii
NOMENCLATURA DAS VARIÁVEIS .....	viii
LISTA DE FIGURAS .....	xii
LISTA DE TABELAS .....	xiv
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	4
2. REVISÃO TEÓRICA .....	7
2.1 ESTRUTURA DE UM SISTEMA DE MONITORAÇÃO .....	7
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	8
2.2.1 MODELO MATEMÁTICO DE UM SISTEMA MECÂNICO .....	8
2.2.2 MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADO .....	10
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE UMA FALHA .....	12
2.3.1 FALHA NAS VARIÁVEIS DE ESTADO ORIGINAIS .....	13
2.3.2 FALHA NAS FORÇAS DE EXCITAÇÃO .....	14
2.3.3 FALHA NOS PARÂMETROS DE RIGIDEZ OU AMORTECIMENTO .....	15
2.4 OBSERVABILIDADE DA FALHA .....	17
2.5 ESTIMAÇÃO DE ESTADO .....	18
2.5.1 INTRODUÇÃO A ESTIMAÇÃO DE ESTADO .....	18
2.5.2 O FILTRO DE KALMAN .....	19
2.5.3 O FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO-DISCRETO .....	21
2.5.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A OPERAÇÃO DO FILTRO .....	24
2.6 DETECÇÃO DE FALHAS .....	26
2.6.1 VERIFICAÇÃO DE LIMITES E DA TENDÊNCIA .....	27
2.6.2 ANÁLISE DE SINAIS .....	27

2.6.3	TESTE DO QUI-QUADRADO .....	28
2.6.4	TESTES DE HIPÓTESES .....	29
3.	DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE MONITORAÇÃO .....	30
4.	MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA REAL .....	34
4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....	34
4.2	EQUACIONAMENTO DO MODELO .....	36
4.2.1	DESCRIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	39
4.2.2	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO .....	42
4.3	IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO .....	46
4.3.1	RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	46
4.3.1.1	DESCRIÇÃO DO ENSAIO .....	46
4.3.1.2	CURVAS OBTIDAS .....	47
4.3.1.3	MODOS DE VIBRAÇÃO ENCONTRADOS .....	48
4.3.2	PARÂMETROS GEOMÉTRICOS .....	49
4.3.3	AValiação DA RIGIDEZ DOS MANCAIS .....	50
4.3.4	AValiação DA MATRIZ DE MASSA .....	51
4.3.5	AValiação DO AMORTECIMENTO .....	53
4.4	RESULTADO FINAL DO MODELO COMPLETO .....	58
5.	ESTUDO DE UMA FALHA NA FORÇA DE EXCITAÇÃO .....	65
5.1	DESCRIÇÃO E MODELAGEM DA FALHA .....	65
5.2	SIMULAÇÃO DO MODELO COMPLETO .....	67
5.2.1	CASOS SIMULADOS .....	68
5.2.1.1	AUSÊNCIA DE FALHA .....	69
5.2.1.2	FALHA TIPO DEGRAU .....	70
5.3	DESCRIÇÃO DO MODELO SIMPLIFICADO .....	75
5.3.1	O MODELO SIMPLIFICADO .....	75
5.3.2	ANÁLISE DO MODELO SIMPLIFICADO .....	79
5.3.3	VERIFICAÇÃO DA OBSERVABILIDADE .....	81
5.4	RESULTADOS DA MONITORAÇÃO .....	82
5.4.1	SELEÇÃO DOS PARÂMETROS DO FILTRO .....	82
5.4.1.1	INFLUÊNCIA DA MATRIZ DE RUÍDO DINÂMICO, Q .....	85

5.4.1.2 INFLUÊNCIA DO VALOR INICIAL DA COVARIÂNCIA DO ERRO DE ESTIMAÇÃO, PO .....	86
5.4.2 RESULTADOS PARA A FALHA TIPO DEGRAU .....	94
5.4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	102
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	108
6.1 APANHADO GERAL DO TRABALHO .....	108
6.2 CONCLUSÕES .....	109
6.3 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	110
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	112
APÊNDICE A. PREPARAÇÃO DE DADOS E SAÍDA DO PROGRAMA NEWEUL .....	114
APÊNDICE B. DESCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL .....	131
APÊNDICE C. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS CONSERVATIVOS .....	137
APÊNDICE D. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR .....	141

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer às seguintes pessoas e instituições pela inestimável colaboração à execução deste trabalho.

Ao Professor Hernani Luiz Brinati pela orientação e valiosas sugestões à esta pesquisa.

Ao Professor Hans Ingo Weber pelo constante apoio e incentivo.

À COPESP - COORDENADORIA PARA PROJETOS ESPECIAIS em cujas instalações foi desenvolvido o trabalho, especialmente aos colegas do grupo de dinâmica dos sistemas pelas valiosas discussões.

## RESUMO

Este trabalho descreve a aplicação de técnicas de modelagem matemática e estimação de estado na monitoração e detecção de falhas em sistemas mecânicos. A abordagem proposta consiste em estimar o estado do modelo, que é expandido para incluir as variáveis sujeitas à falha. Inicialmente se faz uma revisão da teoria envolvida que será então aplicada em um caso real.

O problema exemplo se refere a um conjunto disco-eixo, apoiado em mancais flexíveis e que gira com rotação constante. Este sistema é montado em uma bancada e através de ensaios, obtem-se um modelo matemático que é analisado em detalhe. A força de desbalanço do disco é considerada como uma falha do sistema. Este enfoque permite o estudo da aplicabilidade do método proposto em um caso simulado em computador digital.

## ABSTRACT

This work describes the application of mathematical modelling and state estimation techniques to the monitoring and fault detection of mechanical systems. In this approach we estimate the model state which is expanded to include the faulty variables. Initially we review the theory that will be applied in a real problem afterwards.

As a sample-problem we take an assembly of a disc-axis setup mounted on flexible bearings, that rotates at constant speed. This system was prepared and tests were carried out in order to obtain the mathematical model which is analysed in detail. The disc unbalance force is considered as a system fault. This approach allow us to study the application of the present method to some simulated cases in a digital computer.

## NOMENCLATURA DAS VARIÁVEIS E SIMBOLOGIA

- A ..... matriz  $(n,n)$  do sistema
- AD ..... matriz do sistema simplificado
- Aa, Ba, Xa .. o índice a indica uma alteração na matriz original
- ai ..... elemento genérico da matriz A
- AV ..... vetor  $(n)$  de autovalores (frequências naturais) de A
- avj ..... autovalor do modo de ordem j
- B ..... matriz  $(n,m)$  de distribuição da entrada no sistema
- BD ..... deslocamento em Z no plano OYZ do extremo do disco ou matriz B correspondente ao modelo reduzido
- bi ..... ângulo genérico de rotação no eixo
- C ..... matriz  $(k,n)$  de saída do sistema
- C1 ..... constante de amortecimento do mancal 1
- C2 ..... constante de amortecimento do mancal 2
- CAAi ..... constante de amortecimento angular no eixo i
- CD ..... movimento em Z no plano OXZ da extremidade do disco ou matriz de saída do modelo simplificado.
- CXAi ..... constante linear-angular de amortecimento no eixo i
- CXXi ..... constante linear de amortecimento no eixo i
- di ..... deslocamento genérico no eixo i
- E ..... módulo de elasticidade do eixo
- Ec ..... módulo de amortecimento do eixo
- EXP(x) .... exponencial de x
- E[.] ..... expectância ou valor esperado
- fi ..... força genérica no eixo i
- F1..FB .... força de restauração em um segmento de eixo
- FBD ..... força externa aplicada na direção de BD
- FCD ..... força externa aplicada na direção de CD
- FX1 ..... força externa aplicada na direção de X1
- FX2 ..... força externa aplicada na direção de X2



FXD	.....	força externa aplicada na direção de Xd
FXM1	.....	força de restauração na direção X do mancal 1
FXM2	.....	força de restauração na direção X do mancal 2
FY1	.....	força externa aplicada na direção de Y1
FY2	.....	força externa aplicada na direção de Y2
FYD	.....	força externa aplicada na direção de YD
FYM1	.....	força de restauração na direção Y do mancal 1
FYM2	.....	força de restauração na direção Y do mancal 2
F(...)	.....	vetor (n) de funções de estado
FDD	.....	força de desbalanceamento no disco
FADD	.....	fase da força de desbalanceamento
FR	.....	componente de FDD proporcional a $\cos(W*t)$
FI	.....	componente de FDD proporcional a $\sin(W*t)$
G1..G8	....	momentos de restauração em um segmento de eixo
G(...)	.....	vetor (k) de funções de saída
Gk(...)	.....	vetor das funções da saída no instante $t=t_k$
gk	.....	valor da função de saída no instante $t=t_k$
H	.....	vetor (m) de forças externas aplicadas ao sistema
I	.....	momento de inércia da seção do eixo
Im	.....	matriz identidade de ordem m
J	.....	funcional, objetivo a ser minimizado
JD	.....	momento de inércia de massa do disco nos eixos X e Y
JPD	.....	momento polar de inércia do disco na direção de Z
k	.....	ordem da saída do sistema ou instante discreto de tempo
K1	.....	constante de mola do mancal 1
K2	.....	constante de mola do mancal 2
KAAi	.....	constante de mola angular do eixo i
Kk	.....	matriz (1,1) de ganhos de Kalman
KXAi	.....	constante de mola linear-angular do eixo i
KXXi	.....	constante linear de mola do eixo i
L1	.....	comprimento do eixo 1

L2 ..... comprimento do eixo 2  
 LD ..... comprimento do disco  
 m ..... número de graus de liberdade, ordem da entrada  
 M1 ..... massa do mancal 1  
 M2 ..... massa do mancal 2  
 MD ..... massa do disco  
 MDD ..... massa de desbalanceamento do disco.  
 n ..... ordem do sistema, número de variáveis de estado  
 Pk(+) ..... covariância do estado após a correção  
 PD ..... matriz de amortecimento do modelo simplificado  
 Pk(-) ..... covariância estimada do estado, antes da correção  
 P(.) ..... função covariância  
 P ..... matriz de covariância do estado (filtro)  
 px ..... componente da matriz P relativo ao deslocamento  
 pxp ..... componente da matriz P relativo à velocidade  
 pxf ..... componente da matriz P relativo à força  
 p(...) ..... função probabilidade  
 Q ..... matriz de covariância do ruído no estado (filtro)  
 qx ..... componente relativa ao deslocamento na matriz Q  
 qxp ..... componente relativa à velocidade na matriz Q  
 qf ..... componente relativa à força na matriz Q  
 Qo ..... matriz de cálculo da observabilidade  
 R ..... matriz de covariância do ruído na saída (filtro)  
 r ..... elemento da diagonal da matriz R  
 RD ..... raio do disco  
 RM ..... matriz (m,m) de massa  
 ROT ..... velocidade de rotação em Hz  
 RP ..... matriz (m,m) de amortecimento  
 RQ ..... matriz (m,m) de rigidez  
 S ..... vetor (m) de deslocamento dos graus de liberdade  
 Sp ..... vetor (m) da velocidade, derivada de S no tempo

- $S_{pp}$  ..... vetor (m) de aceleração, derivada de  $S_p$  no tempo  
 $t$  ..... instante genérico de tempo  
 $t_k$  ..... instante discreto de tempo  
 $U$  ..... vetor (m) de entradas, excitações  
 $VE$  ..... matriz (n,n) de autovetores de  $A$   
 $ve_j$  ..... vetor (n), correspondente ao autovetor do modo  $j$   
 $vk$  ..... vetor (n) do ruído na saída do sistema no instante  $k$   
 $w$  ..... frequência de vibração em Hz  
 $w(t)$  ..... vetor (l) de covariância do ruído no estado  
 $X$  ..... vetor (n) de estado  
 $x$  ..... vetor (n) da estimativa do estado  $X$   
 $X_a$  ..... vetor  $X$  alterado pela inclusão da falha.  
 $X_p$  ..... derivada em relação ao tempo do vetor de estado (\*)  
 $X_1$  ..... deslocamento em  $X$  no mancal 1  
 $X_2$  ..... deslocamento em  $X$  no mancal 2  
 $X_D$  ..... deslocamento em  $X$  do centro do disco  
 $x_k(+)$  ..... vetor (n) de estado estimado após a correção  
 $x_k(-)$  ..... vetor (n) de estado estimado antes da correção  
 $Y$  ..... vetor (l) de saídas  
 $Y_a$  ..... vetor  $Y$  alterado pela inclusão da falha  
 $Y_1, Y_2$  ..... deslocamento em  $Y$  no mancal 1 e 2.  
 $Y_D$  ..... deslocamento em  $Y$  no centro do disco  
 $Y_k$  ..... vetor (l) de saídas medidas no instante  $t=t_k$

(\*) OBS.: A letra  $p$  após a variável indica a derivada desta variável com relação ao tempo. Assim temos que :

$$X_p = \frac{dX}{dt}$$

O superscrito  $t$  aplicado a uma matriz indica sua transposta e o superscrito  $-1$  a sua inversa. O sinal  $\wedge$  indica potenciação, assim

$$2^3 = 2^{\wedge}3$$

## LISTA DE FIGURAS

- 1.1 Fluxo da informação no processo de monitoração.
- 2.1 Esquema da identificação de parâmetros, usado para monitoração do sistema.
- 3.1 Etapas do desenvolvimento de um sistema de monitoração.
- 4.1 Esquema do conjunto montado.
- 4.2 Mancal elástico, caixa do rolamento e suporte.
- 4.3 Disco de balanceamento e elemento de fixação.
- 4.4 Esquema espacial do modelo completo.
- 4.5 Plano  $Oxz$  do modelo completo.
- 4.6 Deslocamentos (graus de liberdade) do modelo completo.
- 4.7 Esforços internos e externos aplicados nos corpos.
  - a) plano  $Oxy$
  - b) plano  $Oyz$
- 4.8 Forças e deslocamentos em um elemento de viga.
- 4.9 Resposta da função de transferência experimental.
- 4.10 Estima de  $E_c$ , pela comparação com o resultado experimental.
- 4.11 Comparação entre curvas para seleção de  $C_1$  e  $C_2$ .
- 4.12 Esquema simplificado do 1o modo de vibração.
- 4.13 Esquema simplificado do 2o modo de vibração.
- 4.14 Esquema simplificado do 3o modo de vibração.
- 4.15 Esquema simplificado do 4o modo de vibração.
- 4.16 Comparação do resultado final para  $X1PP/FX2$ .
- 4.17 Comparação do resultado final para  $X2PP/FX2$ .
- 5.1 Força de desbalanceamento em um disco girante.
- 5.2 Resultado da simulação do repouso até o regime permanente.
- 5.3 Simulação de um segundo de regime permanente com ausência de ruído.
- 5.4 Comparação entre as respostas do sistema com e sem a presença de ruído.
- 5.5 Representação das forças para a falha tipo degrau, caso I.
- 5.6 Sinal simulado com falha tipo degrau (caso I).

- 5.7 Representação das forças para a falha tipo degrau, caso II.
- 5.8 Resultado da simulação para a falha tipo degrau, caso II.
- 5.9 Esquema do modelo simplificado.
- 5.10 Comparação de repostas em frequência dos modelos.
- 5.11 Estimação das forças sem ruído  $q_f=10, 100$  e  $1000$ .
- 5.12 Estimação das forças com ruído para  $q_f = 10, 100$  e  $1000$ .
- 5.13 Análise de  $P(5,5)$  com a variação de  $Q$  (com ruído).
- 5.14 Efeito do valor inicial de  $pf$  sobre a estimação de  $FR$ .
- 5.15 Efeito do valor inicial de  $pf$  sobre  $P(5,5)$ .
- 5.16 Comparação sinal medido, filtrado e real.
- 5.17 Erro de monitoração no sinal sem falhas.
- 5.18 Resultado da monitoração da força tipo degrau, caso I.
- 5.19 Comparação entre o sinal  $XD$  medido e monitorado.
- 5.20 Erro de monitoração para o degrau, caso I.
- 5.21 Resultado da monitoração para a falha no caso II
- 5.22 Comparação entre o sinal medido e o sinal filtrado, caso II.
- 5.23 Erro de monitoração para o caso II
- A.1. Esquema de uso da programa NEWEUL.
- A.2. Esquema do modelo completo.
- A.3. Graus de liberdade no plano  $OXZ$ .
- A.4. Graus de liberdade no plano  $OYZ$ .
- A.5. Corpos isolados com esforços no plano  $OXZ$ .
- A.6. Corpos isolados com esforços no plano  $OYZ$ .
- B.1. Esquema do ensaio

## LISTA DE TABELAS

- 4.1 Frequências e modos de vibração obtidos de ensaio.
- 4.2 Autovalores e autovetores do modelo completo em primeira aproximação.
- 4.3 Autovalores e autovetores finais do modelo completo.
- 5.1 Forças utilizadas para simular as falhas, e vibração resultante em X1.
- 5.2 Efeito de  $q_f$  no tempo de resposta do filtro.
- 5.3 Efeito de  $q_f$  na covariância da força monitorada (pf).
- 5.4 Forças de desbalanceamento simuladas e estimadas no caso I.
- 5.5 Forças de desbalanceamento simuladas e estimadas no caso II.
- 5.6 Amplitudes máximas das falhas no caso I.
- 5.7 Amplitudes máximas das falhas no caso II.
- B.1 Lista de ensaios realizados.

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A sofisticação dos projetos de engenharia tem levado a um aumento nos requisitos de confiabilidade e segurança dos sistemas projetados, e de seus elementos. Um bom projeto de máquinas deve prever uma operação segura e confiável. Paralelamente, os avanços da eletrônica permitiram o uso de microprocessadores em um número cada vez maior de aplicações, muitas delas até então inviáveis técnica ou economicamente. Deste modo, o aumento da segurança e da confiabilidade de um projeto, através do uso de microprocessadores, se torna hoje uma realidade.

Um microprocessador pode realizar o papel de supervisor, verificando automaticamente o bom funcionamento de um processo; e até, indicar a ocorrência de falhas neste processo. Para isto, é necessário que se desenvolvam programas de monitoração automática.

O fluxo da informação em um processo típico de monitoração sugerido por Isermann /1/ encontra-se representado na figura 1.1. A monitoração normalmente se baseia na análise de alguns sinais medidos do sistema a ser supervisionado, passando pelas fases de detecção, diagnose, avaliação e decisão, descritas resumidamente a seguir .

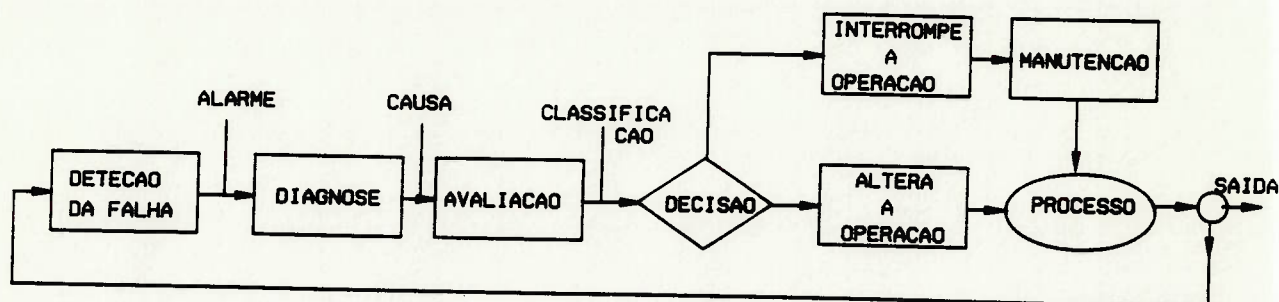


FIG 1.1 Fluxo de informação no processo de monitoração

**DETECCAO :** indica, com base nos sinais medidos, e no comportamento esperado do sistema, se a sua operação está normal ou se ocorre uma falha. Neste caso podemos ter um aviso desta ocorrência, ou seja um alarme. Podemos então definir uma falha, como um desvio não permitido de uma propriedade característica do sistema, que compromete a sua operação normal.

**DIAGNOSE :** localização da falha, determinando sua causa mais provável.

**AVALIACAO :** classificação da falha, segundo critérios de gravidade, do modo em que esta irá alterar a operação do sistema.

**DECISAO :** etapa final do processo de monitoração que, com base no tipo de falha, define a ação a ser tomada; como a de alterar a operação do sistema ou até mesmo interrompê-la para a eliminação da falha, ou seja para a manutenção.

Este trabalho pretende se concentrar apenas na detecção de uma falha, e em alguns casos na sua diagnose. As demais etapas do



processo : avaliação e decisão são bastante particulares para cada problema, e não serão tratadas aqui.

Dos diversos métodos possíveis para se detectar uma falha, estudaremos aqueles que são baseados em um modelo matemático do sistema em estudo, e não apenas nos valores medidos da saída. As falhas no sistema serão descritas pelo desvio dos parâmetros que descrevem o modelo matemático.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A aplicação de técnicas de modelagem e estimação de estado para detecção de falhas em sistemas dinâmicos, tem sido pesquisada desde o final dos anos 60 e início da década de 1970. Willsky /14/ em sua revisão de 1976, já fazia referência a diversos trabalhos sobre o assunto, especialmente na área da engenharia aero-espacial.

Desta fase inicial da pesquisa, destacamos o trabalho de Mehra e Peschon /15/, que em 1971 propõe a detecção estatística de falhas, via teste de hipóteses, sugerindo algumas formulações para o teste. O teste é aplicado sobre os resultados da estimação de estado, feita pelo filtro estendido de Kalman. Destacamos também o trabalho de Kumamaru e outros /13/, como uma aplicação interessante na área médica de análise do eletro-cardiograma (ECG).

Como a maioria dos trabalhos nesta fase, as aplicações ficaram no plano teórico, principalmente pelas limitações dos recursos computacionais da época.

Recentemente, Isermann /1/ (1984) resgatou esta pesquisa de detecção automática de falhas com uma revisão dos trabalhos e

métodos. O seu trabalho sugere uma abordagem mais uniforme do processo de monitoração, classificando os métodos existentes segundo o tipo de variável a ser monitorada. Neste trabalho encontramos, como exemplo de aplicação, a monitoração de uma bomba centrífuga e a tubulação a ela associada. Neste problema o autor desenvolve o modelo matemático, partindo das equações da mecânica dos fluidos que regem o escoamento, e implementa o filtro de detecção da falha em um microprocessador.

Para o desenvolvimento do modelo matemático, usaremos extensivamente métodos e recursos computacionais de auxílio a modelagem e a análise de sistemas mecânicos. Cabe destacar os trabalhos de Kreuzer /7/, Kortuem /10/6/ e Deboni /8/. Estes trabalhos apresentam avanços na automatização de muitas tarefas e procedimentos de cálculo, que agilizam todo o processo de desenvolvimento e análise dos modelos.

### 1-3 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho pretende desenvolver um procedimento para abordagem do problema de monitoração e detecção de falhas em sistemas mecânicos, baseando-se nas medidas da saída do sistema real em operação.

O procedimento de detecção de falhas, consiste em determinar a partir das diferenças observadas entre a saída real do sistema e a saída esperada, qual foi a variação de seus parâmetros que provocou estas diferenças.

A abordagem adotada está ligada à identificação de parâmetros (determinação de seu valor) de um modelo matemático, com base em medidas reais. A identificação de parâmetros será tratada como um problema de estimação pela incorporação dos parâmetros ao estado do sistema.

Utilizando a metodologia proposta em um problema real, este trabalho pretende ainda desenvolver um programa de monitoração para um rotor flexível apoiado em mancais elásticos. Este modelo, ainda que desenvolvido em laboratório, constitui uma primeira aproximação a diversos problemas práticos. Turbinas propulsoras navais ou aeronáuticas, sistemas de geração de energia entre outros, poderiam ser extrapolados a partir deste modelo simplificado. A aplicação na prática dos conceitos teóricos, objetiva verificar a viabilidade do seu uso, determinar suas limitações e prever dificuldades na sua implementação final.

O capítulo 2 faz uma revisão de toda a teoria envolvida no processo de modelagem, monitoração e detecção das falhas. Toda a teoria apresentada é integrada no capítulo 3, nele descrevemos um método unificado para o desenvolvimento de um sistema de monitoração, indicando onde e como aplicamos a teoria resumida anteriormente para atingir o objetivos do trabalho.

A seguir, no capítulo 4, tomamos o exemplo real de um disco girante e desenvolvemos seu modelo matemático, como primeira etapa do processo de monitoração. A modelagem usa os resultados do ensaio descritos no apêndice B e contando com a ajuda do programa de modelagem apresentado no apêndice A. Os itens finais deste capítulo cobrem a identificação dos parâmetros do modelo onde empregamos o método para sistemas conservativos do apêndice C.

De posse do modelo, podemos monitorar alguns casos de falhas, como mostramos no capítulo 5. Inicialmente, descrevemos matematicamente a falha e a incorporamos no modelo, para simular o comportamento do sistema e monitorá-lo. Finalmente, apresentamos as conclusões do trabalho seguidas pelas referências citadas no texto. O apêndice D descreve os programas de computador usados nas diversas fases do trabalho.

## 2. REVISÃO TEÓRICA

### 2.1 ESTRUTURA DE UM SISTEMA DE MONITORAÇÃO

O desenvolvimento de um sistema de monitoração e supervisão é um problema multidisciplinar, implicando na integração de diversas áreas de tecnologia, além de exigir um profundo conhecimento da dinâmica do problema em estudo, seja ele um pequeno motor elétrico ou uma complexa turbina. Nos casos de problemas mecânicos será necessário lançar mão, por exemplo, da teoria de sistemas, da teoria estatística, das leis da mecânica e de técnicas de instrumentação e computação, para efetivamente implantarmos um sistema de monitoração eficiente.

Este trabalho não pretende apresentar uma solução final para todos estes problemas, porém tentaremos formular um procedimento geral para abordar uma ampla classe deles.

A estrutura do sistema de monitoração proposto equivale à identificação de parâmetros e está mostrada na figura 2.1. Observamos que, dado um sistema real e um modelo deste, poderemos comparar sinais medidos do primeiro com os valores calculados pelo segundo para mesmos valores de sinais de entrada, e com base nesta diferença, estimar os parâmetros do modelo. Estes parâmetros servem para realimentar o modelo, tornando-o mais fiel ao sistema real. Também podem ser usados para verificar se o sistema está operando dentro de limites pré-estabelecidos de normalidade, uma vez que eles definem completamente o estado do sistema

Trataremos a seguir com mais detalhes de cada um dos blocos da estrutura do sistema de monitoração exposto. Em cada um

procuraremos focalizar a teoria envolvida e que será aplicada no problema a ser enunciado no capítulo 4.

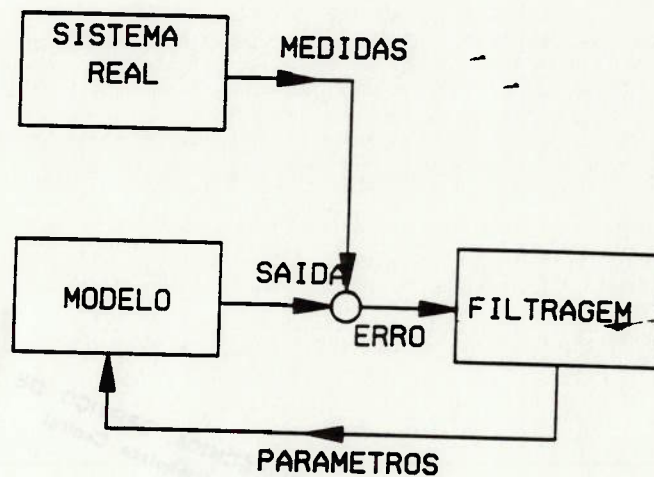


Fig. 2.1 Esquema da identificação de parâmetros usado para monitoração do sistema.

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

### 2.2.1 MODELO MATEMÁTICO DE UM SISTEMA MECÂNICO

Entende-se por modelo matemático a idealização de um sistema real, onde procura-se reproduzir seu comportamento através de equações matemáticas.

O modelo de um sistema mecânico tentará reproduzir pela combinação de parâmetros que representam a sua massa, rigidez e

amortecimento, as relações entre os esforços e o movimento em todos os seus componentes. Estas relações podem ser colocadas na forma de um sistema de equações diferenciais do 2o grau, que quando escrito na forma matricial resulta em :

$$RM * S_{pp} + RP * S_p + RQ * S = H \quad (2.1)$$

onde :

RM é a matriz de massa, onde se encontram os parâmetros inerciais do sistema,

RP é uma matriz, onde estão os parâmetros dissipativos, e por isso conhecida como matriz de amortecimento,

RQ é a matriz de rigidez, e concentra os parâmetros de restauração do movimento que são proporcionais ao deslocamento,

$S, S_p, S_{pp}$  correspondem aos vetores de ordem  $m$  do deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente. A cada uma de suas variáveis está associado um movimento independente, também chamado de grau de liberdade. A ordem das matrizes também é igual ao número de graus de liberdade  $(m, m)$ .

H corresponde ao vetor de esforços externos (entradas) aplicados ao sistema.

Algumas variações nesta estrutura geral podem ocorrer dependendo do sistema estudado, por exemplo, os termos giroscópicos nos problemas da mecânica de rotação, que apesar de

se localizarem na matriz RP, por serem proporcionais a velocidade, não provocam uma dissipação /4/.

Para determinarmos as formulações de cada componente das matrizes, será necessário esquematizar um modelo para o sistema. Isto é feito com a combinação de elementos puros, ou seja, elementos onde predominam isoladamente características de inércia, rigidez ou amortecimento, obtendo os chamados modelos de corpos múltiplos /6/8/. Sobre este esquema serão usadas as leis de Newton, obtendo-se assim as equações diferenciais do movimento.

Atualmente existem programas de computador /6/7/8/, que realizam a manipulação algébrica destes modelos e, através de uma descrição formal dos corpos e forças agentes, é possível obter as equações dos modelos. As principais vantagens em se utilizar estes programas, está na redução dos erros decorrentes da manipulação algébrica, na sistematização do desenvolvimento do modelo e no interfaceamento com outros programas de análise, /8/ facilitando a construção e estudo dinâmico do modelo.

### 2.2.2 MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Uma forma bastante comum de se apresentar as equações do comportamento dinâmico de um sistema é através da equação de estado:

$$\dot{X}_p = F(X, t, U) \quad (2.2)$$

para o caso não linear, e

$$\dot{X}_p = A(t)*X + B(t)*U \quad (2.3)$$



para o caso linear, onde :

X é o vetor das n variáveis de estado, e  $\dot{X}$  sua derivada primeira em relação ao tempo,

F é um vetor de ordem n das funções de estado,

U é o vetor de ordem m das entradas no sistema, e

A, B são as matrizes do sistema (n,n) e da entrada (n,m), respectivamente. Se o sistema original é não linear então:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X} \quad e \quad B = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (2.4)$$

A relação entre a representação por equação diferencial de 2ª ordem (2.1) e o modelo por variáveis de estado (2.3), pode ser obtido facilmente, considerando os seguintes vetores e matrizes compostos :

$$X = \begin{bmatrix} S & \dot{S} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & H \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -RM^{-1} * RQ & -RM^{-1} * RQ \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} RM^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A vantagem da representação por variáveis de estado está no fato dela ser útil nas diversas teorias modernas de sistemas, como a teoria de controle, estabilidade e de observador de estado /2/10/. Esta será então a representação adotada em nosso estudo.

A saída medida do sistema pode ser entendida como uma combinação, linear ou não, das variáveis de estado. As equações abaixo descrevem este fato:

$$Y = G(X,t) \quad (2.9)$$

para o caso não linear, e

$$Y = C(t)*X \quad (2.10)$$

no caso linear, onde :

Y é um vetor de ordem k das saídas do sistema;

G é um vetor das k funções de combinação do estado que geram as saídas;

C é uma matriz de ordem (k,n) que fornece a saída do sistema. No caso de sistemas não lineares temos a linearização :

$$C = \frac{\partial G}{\partial Y} \quad (2.11)$$

### 2.3 MODELO MATEMATICO DE UMA FALHA

Como a evolução do estado de um sistema descreve seu comportamento, podemos considerar uma falha como sendo uma

alteração neste comportamento. Isto equivale a considerar o parâmetro que está sujeito à falha como parte do estado do sistema. Assim, o problema de monitoração se confunde com o problema de observação de estado, e este com a identificação de parâmetros de um sistema /11/.

Agindo deste modo, veremos que a monitoração de um sistema linear /2/ pode se converter na observação do estado de um sistema não linear.

A seguir serão apresentados alguns casos de falhas e o procedimento sugerido para sua modelagem.

### 2.3.1 FALHA NAS VARIÁVEIS DE ESTADO ORIGINAIS

Quando a falha em estudo for traduzida como uma alteração nas variáveis de estado originais ( $X$ ) ou na sua saída ( $Y$ ) (ver equações 2.3 e 2.10), a falha já estará modelada. Isto é, já temos a descrição do comportamento destas variáveis. O estimador de estado deverá apenas, extrair da saída do sistema, o seu estado original. Para isto teremos que comparar a saída do modelo com medidas no sistema real.

As medidas, em um caso prático, serão feitas através de sensores e instrumentos, a serem instalados no sistema real. Na seção 2.4 será examinada a viabilidade de se recuperar o estado do sistema com base nas medidas efetuadas.

Como todas as medidas físicas, a saída do sistema real estará sujeita a erros. A recomposição do estado original depende do conhecimento de estatísticas deste erro, como será visto mais adiante.

### 2.3.2 FALHA NAS FORÇAS DE EXCITAÇÃO

Caso a falha estudada seja representada pela alteração em uma das variáveis de entrada  $u_i$ , podemos incluí-la como parte do modelo do sistema. Estaremos assim modelando a falha.

Para incluir uma das variáveis  $u_i$  como estado do sistema, precisamos conhecer a equação da sua derivada primeira. Em muitos casos ela pode ser adotada como nula. Assim, partindo do sistema linear original, temos :

$$\dot{X}_a = A_a * X_a + B_a * U_a \quad (2.12)$$

$$Y_a = C_a * X_a$$

onde o novo vetor de estado inclui agora a variável  $u_i$ , o que faz com que a ordem do sistema passe a ser  $n+1$ , e as novas matrizes e vetores:

$$X_a = \begin{bmatrix} X & u_i \end{bmatrix}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $X_a$  é o vetor de estado  $X$  alterado pela inclusão de  $u_i$ ,  
 $A_a$  é a matriz de estado  $A$  alterada, acomodando a coluna  $i$  da matriz  $B$ .

E, admitindo nula a derivada de  $u_i$ , a matriz  $B$  modificada ( $B_a$ ) ficará então :

$$B_a = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_{i-1} & B_{i+1} & \dots & B_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Devemos notar que, como o sistema anterior, o novo sistema permanece linear, porém de ordem superior ao anterior. Como não foi alterada a ordem das variáveis medidas (Y), a observabilidade do sistema fica comprometida. Detalhes sobre a avaliação da observabilidade serão feitas na seção 2.4.

Temos, então, um procedimento que permite estimar, com base na saída do sistema, a sua excitação, uma vez que esta agora faz parte do estado do sistema.

### 2.3.3 FALHA NOS PARÂMETROS DE RIGIDEZ OU AMORTECIMENTO

Suponhamos, agora, que a característica sujeita a falha é um dos parâmetros das matrizes de massa, rigidez ou amortecimento, do modelo mecânico representado na matriz A conforme (2.7). Seja  $a_i$  este parâmetro. Descreveremos o procedimento a ser tomado para incluir esta variável como estado do sistema a ser monitorado.

Consideremos o sistema linear, representando agora a matriz do sistema A como função do parâmetro sujeito a falha,  $a_i$ :

$$X_p = A(a_i) * X + B * U \quad (2.15)$$

O parâmetro  $a_i$  é incluído no vetor de estado X, resultando no estado modificado  $X_a$ :

$$X_a = \left[ X : a_i \right] \quad (2.16)$$

A nova equação de estado,  $F_a (\cdot)$ , agora é não linear,

$$\dot{X}_{ap} = F_a(X_a, U) \quad (2.17)$$

Deste sistema podemos tirar as matrizes linearizadas :

$$A_a = \frac{\partial F_a}{\partial X_a} \quad B_a = \frac{\partial F_a}{\partial U} \quad (2.18)$$

As falhas nos parâmetros de rigidez e amortecimento, podem ser equacionadas muito mais facilmente que as falhas nos parâmetros inerciais. Isto se deve ao fato de que estas variáveis aparecem diretamente na formação da matriz  $A$ , como mostrou a equação 2.7. No caso da matriz de massa, o equacionamento será mais complexo pois ela sofre uma inversão na formação de  $A$  e  $B$ , o que complica as derivadas de 2.18.

Devemos lembrar, porém, que não existe apenas um modelo correto para um problema real. Diferentes enfoques do problema gerarão diferentes modelos. Podemos procurar, em cada caso, o enfoque que fornece o modelo que mais convenientemente apresenta a característica de interesse, selecionando os melhores graus de liberdade, ou eliminando detalhes pouco significativos. Esta busca,

pelo modelo mais adequado, exige do modelador um íntimo conhecimento do problema em estudo.

#### 2.4 OBSERVABILIDADE DA FALHA

Apesar do vetor de estado descrever completamente a dinâmica do sistema em estudo, devemos considerar o fato de que nem todas as variáveis de estado estarão disponíveis na saída. A saída é uma combinação algébrica de um subconjunto do vetor de estado. Matematicamente podemos descrever o vetor de saída pelas equações (2.9) e (2.10).

Durante o processo de modelagem do sistema e das falhas, devemos assegurar que será possível reproduzir o estado do sistema com base nas medidas efetuadas. A este cálculo chama-se de verificação da observabilidade do sistema.

A observabilidade estará garantida se todas as variáveis de estado contribuem para a composição da saída final. Um método para verificação da observabilidade de sistemas determinísticos, consiste no cálculo do posto de uma matriz  $Q_0$ , resultado da composição das matrizes  $A$  e  $C$  na forma :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C & A * C & \dots & A^{n-1} * C \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Se o posto de  $Q_0$  for  $n$ , o sistema é completamente observável /2/, e será possível estimar o estado  $X$  do sistema, com base na saída  $Y$ . Para modelos não lineares a verificação será efetuada, com base no modelo linearizado correspondente. No caso de sistemas estocásticos, o resultado do sistema determinístico associado não

garante a observabilidade, mas pode indicar, caso  $Q_0 < n$ , uma possível não observabilidade.

Este teste limita a quantidade de falhas que podemos monitorar com um único modelo, uma vez que ao considerar um parâmetro do modelo como estado, aumenta-se a ordem do modelo e reduz a sua observabilidade. A literatura sugere que cada modelo seja responsável por apenas uma falha /14/. E que para monitorar diversas falhas, usemos um conjunto de modelos e estimadores.

## 2.5 ESTIMAÇÃO DE ESTADO

Apesar das técnicas de estimação de estado estarem sendo pesquisadas a quase duas décadas, o crescente avanço na velocidade e precisão dos microprocessadores amplia o seu campo de aplicação, e recupera o interesse nesta área de pesquisa. Aplicar estes métodos em sistemas mecânicos, cuja sofisticação é cada dia maior, se torna então importante e atual.

Estudaremos aqui as técnicas de estimação do estado de um sistema, com base em um modelo matemático e em medidas de sua saída. Para isto será necessário tecer algumas considerações sobre as estatísticas do ruído envolvido no processo.

### 2.5.1 INTRODUÇÃO À ESTIMAÇÃO DE ESTADO

De posse de um modelo matemático que considera a possibilidade de falhas, e de um conjunto de observações da saída do sistema,



procuraremos estimar seu estado. Como o estado inclui a falha esperada, estaremos também monitorando a ocorrência desta falha.

Trataremos aqui do problema de estimação do estado de um sistema não linear, com base em medidas contaminadas por ruído. O sistema também é considerado contínuo, e as observações serão tomadas em instantes discretos de tempo. Agindo assim, procuramos ser o mais fiel possível ao problema real, que é contínuo e também às medidas, que quando tomadas para o tratamento digital, são feitas em intervalos discretos.

Além do conhecimento do modelo do sistema, será necessária também uma descrição dos ruídos, aos quais este sistema está sujeito, para que estatisticamente seja possível alguma previsão de comportamento. Normalmente, estes ruídos são admitidos como ruídos brancos gaussianos, de média nula e variância conhecida /2/.

O problema de estimação do valor atual do estado, com base no histórico de observações, é também chamado de filtragem, e foi estudado por Kalman, resultando na teoria do filtro que leva o seu nome. O desenvolvimento desta teoria não faz parte deste trabalho visto que pode ser facilmente encontrado na bibliografia /2/10/. Entretanto, apresentaremos em seguida, um apanhado geral sobre a formulação do filtro e as hipóteses adotadas, para que possamos entender sua operação, e aplicá-lo ao problema proposto.

### 2.5.2 O FILTRO DE KALMAN

Como foi mencionando anteriormente, procuramos estimar o estado de um sistema, com base nas observações  $Y(T)$ , ( $T=0..t$ ) efetuados até o instante atual. Seja  $x(t)$  este estado "estimado", e  $X(T)$  o

estado real. A solução deste problema requer o conhecimento da evolução da função densidade de probabilidade :

$$P(X(t)/Y(T)) \quad (2.20)$$

e também da média condicional :

$$x(t) = E [ X(t)/Y(T) ] \quad (2.21)$$

Esta solução é bastante complexa no seu caso geral, porém pode ser simplificada para o caso de sistemas lineares, onde basta conhecermos o momento de segunda ordem, isto é, a matriz de covariância condicional:

$$P(t/T) = E [ (X(t) - x(t))^t (X(t) - x(t/T)) / Y(T) ] \quad (2.22)$$

cuja solução é conhecida como filtro de Kalman (ou filtro de Kalman-Bucy) /2/.

A estimativa da covariância condicional  $P(t/T)$  é duplamente importante pois, além de ser usada na própria estimação recursiva do estado  $(x)$ , ela fornece a indicação sobre a qualidade da estimação. Uma estimativa não tem valor se não soubermos quão boa ela é /11/.

O filtro de Kalman produz, neste sentido, uma estimativa de mínima variância, uma vez que a procura da média condicional, equivale a minimizarmos o funcional da variância do erro quadrático:

$$J = \iiint \dots \int (X-x)^t (X-x) p(X/Y) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.23)$$

Apresentaremos agora as equações do filtro seguidas de alguns comentários sobre a seleção da covariância dos ruídos e dos valores iniciais do estado e da sua covariância.

### 2.5.3 O FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO-DISCRETO

Tomemos um sistema descrito pelo conjunto de  $n$  equações diferenciais estocásticas, não lineares :

$$\dot{X}_p = f(X(t), t) + w(t) \quad (2.24)$$

onde

$f(\cdot)$  é um conjunto de  $n$  funções de estado contínuas, não lineares,

$w(t)$  é um ruído branco gaussiano de média nula, cuja matriz de densidade espectral é  $Q(t)$ , ou simplificadaamente :

$$w(t) \cong N(0, Q(t)) \quad (2.25)$$

e  $X(t)$  é o vetor de estado.

Este sistema é medido periodicamente, do qual se extrai o vetor  $Y_k$  de saídas, dado por :

$$Y_k = h_k(X(t)) + v_k \quad (2.26)$$

onde

$h_k$  é um conjunto de  $m$  funções não lineares,

$v_k$  é uma sequência aleatória, gaussiana de média nula e covariância associada  $R_k$ , isto é :

$$v_k \cong N(0, R_k) \quad (2.27)$$

Os ruídos são não correlacionados por definição, ou seja :

$$E [ w(t)v_k ] = 0 \text{ para todo } k \text{ e } t$$

Procuramos a estimativa ótima, no sentido de mínima variância de  $X(t)$ , com  $t=t_k$ , uma vez conhecida as medições  $Y_j (j=1..k)$ . Esta estimativa é feita por um processo recursivo, onde etapas de propagação e correção se alternam para fornecer sequencialmente  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$  e as covariâncias associadas  $P(t_1), P(t_2), \dots, P(t_k)$ .

Admitiremos conhecidos ainda o valor da estimativa inicial do estado  $X(0) = X_0$  e a sua covariância inicial  $P(0)=P_0$ . O estado também é considerado como uma variável aleatória gaussiana.

Conhecido o valor de  $x$  em  $t=t_{k-1}$ , a melhor propagação da estimativa do estado  $x_k(-)$  será dada pela integração das equações não lineares  $X_p$  na forma :

$$X_{pk}(-) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), t) dt \quad (2.29)$$

onde o sinal (-) indica a estimativa anterior à correção, e (+) irá indicar a estimativa corrigida pelo processamento da medida.

Podemos, então, propagar também a covariância do erro, através de :

$$P_p(t) = F(x(t), t)P(t) + P(t)F^t(x(t), t) + Q(t) \quad (2.30)$$

onde  $F(\cdot)$  representa o primeiro termo da expansão de  $f(\cdot)$  através da série de Taylor em torno de  $x(t)$ , isto é :

assim

$$F(x(t), t) = \left( \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x(t)} \right)_{x(t)=x(t)} \quad (2.31)$$

$$P_k(-) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_p(t) dt \quad (2.32)$$

Uma vez efetuada a medida  $Y_k$ , podemos atualizar as propagações calculadas através de:

$$x_k(+) = x_k(-) + K_k (Y_k - h_k(x_k(-))) \quad (2.33)$$

$$P_k(+) = \left[ I - K_k H_k(x_k(-)) \right] P_k(-) \quad (2.34)$$

onde  $H(\cdot)$  é uma linearização de  $h_k(\cdot)$  em torno de  $x_k(-)$ , isto é :

$$H_k(x_k(-)) = \left( \frac{h_k(x(t_k))}{x(t)} \right)_{x(t_k)=x_k(-)} \quad (2.35)$$

e  $K_k$  é a chamada matriz dos ganhos de Kalman, que fornece uma ponderação do erro na atualização. Esta matriz é dada por :

$$K_k = P_k(-) H_k^T(x_k(-)) \left[ H_k(x_k(-)) P_k(-) H_k^T(x_k(-)) + R_k \right]^{-1} \quad (2.36)$$

Como a matriz de ganhos deve ser calculada em tempo real, fazendo parte também do processo recursivo, este filtro é conhecido como filtro estendido de Kalman. Caso o sistema e os ruídos tenham propriedades invariantes no tempo, os ganhos de  $K$ , tendem a um limite que pode ser previamente calculado, reduzindo o filtro ao filtro de Kalman convencional :

$$P_p = 0 = F P + P F^T + Q + P H^T \bar{R}^{-1} H P \quad (2.37)$$

e

$$K = P H^T \bar{R}^{-1} \quad (2.38)$$

Estas relações simplificadas são úteis para entendermos a operação do filtro e as relações da matriz de covariância.

#### 2.5.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A OPERAÇÃO DO FILTRO

Vemos que  $P$ , matriz de covariância do erro de estimação, permite estimar a precisão da estimação, uma vez que quando  $P$  é grande a estimação possui uma grande dispersão e imprecisão. Segundo a equação matricial algébrica (2.37),  $P$  é proporcional à covariância

do ruído do sistema  $Q$ . Isto é, se o ruído do sistema  $w$  é alto, a estimação é fraca.

A expressão (2.38) mostra que os ganhos de correção ( $K$ ) são dados pela razão entre a covariância do erro de estimação e a covariância do ruído de medição  $R$ , ponderados pela matriz  $H$  que apenas estabelece uma relação saída-estado. Assim, se o ruído na saída é alto, não podemos confiar nesta informação e portanto  $K$  será baixo, e vice-versa.

As equações apresentadas exigem, para sua aplicação, a avaliação prévia de diversos valores, entre eles :

- valor inicial do estado,
- covariância inicial do estado,
- covariância do erro do sistema, e
- covariância do erro da medida.

Da escolha correta destes valores depende o bom desempenho do filtro. A estabilidade do filtro, entendida como a tendência do filtro em acompanhar o estado real, está também diretamente ligada a esta seleção.

O valor inicial do estimador e sua covariância devem ser tais que o valor real do estado do sistema se encontre neste limite, garantindo a convergência do filtro. O tempo de convergência aos valores reais do estado e da covariância dependem também da aproximação inicial fornecida.

O ruído do sistema pode incorporar eventuais erros de modelagem e deve principalmente considerar a faixa de variação dos

parâmetros do estado, especialmente aqueles sujeitos a falhas.  $Q$  indica a taxa em que se perde informação a cada estimação. Portanto  $Q$  alto indica uma grande perda de informação a cada estimação, e maiores dificuldades de convergência

O ruído de medida deve refletir a confiança depositada na saída do sistema e de seus sensores. Uma confiança exagerada (baixo  $R$ ) pode resultar em divergências no filtro, quando este tenta acompanhar as variações da saída; porém se  $R$  for excessivamente alto o tempo de resposta do sistema será alto, tornando o filtro insensível à falha.  $R$  mede o ganho de informação que se tem a cada medida, que servirá para corrigir o estado após a estimação.

Vimos, então, que uma série de aspectos devem ser considerados na escolha dos parâmetros do filtro. A simulação da operação do filtro em computador, pode dar a segurança necessária para a escolha correta destes parâmetros.

## 2.6 DETECÇÃO DE FALHAS

Uma vez estimado o estado do sistema, será necessário avaliar se o sistema está dentro de limites considerados normais, ou se ocorreu uma falha. Vários métodos permitem realizar esta avaliação; entre eles temos :

- a) Verificação de limites e de tendências,
- b) Análise de sinais,
- c) Teste do qui-quadrado, ou
- d) Teste de hipótese.



Estes métodos variam em simplicidade de aplicação e sensibilidade. A sensibilidade do método está na sua capacidade de reagir rapidamente a alterações no comportamento do sistema, acusando a falha. Métodos mais complexos são geralmente mais sensíveis e precisos, porém, são de implementação mais difícil.

A seleção incorreta do método de detecção, pode levar a uma grande incidência de alarmes falsos, ou no caso oposto à uma baixa sensibilidade à falha. Descreveremos a seguir algumas características destes métodos.

### 2.6.1 VERIFICAÇÃO DE LIMITES E DA TENDÊNCIA

No caso de uma variável bem conhecida ( $Y$ ), podemos já saber a priori, que seu valor normal não será superior à um máximo  $Y_{max}$  e não deverá ser inferior à um mínimo  $Y_{min}$ . Para verificarmos, neste caso, a ocorrência de falha, basta não ocorrer:

$$Y_{min} < Y < Y_{max} \quad (2.39)$$

Estes limites também podem ser aplicados à derivada no tempo da variável  $Y$ , ( $Y_P$ ) que indicará sua tendência. Se os limites de  $Y_P$  forem selecionados adequadamente, é possível até alguma previsão de comportamento, antes mesmo que a falha realmente comprometa o sistema.

### 2.6.2 ANÁLISE DE SINAIS

Geralmente os sinais medidos tem uma característica periódica, e podem ser decompostos em frequência. A cada fenômeno no sistema associa-se uma certa frequência característica de vibração, e sua amplitude. Analisando os sinais de saída é muitas vezes possível se

verificar a ocorrência de falhas pelas alterações no seu espectro de potência, e assim realizar a monitoração.

A principal desvantagem da análise de sinais reside na necessidade de grandes amostras do sinal para se obter um bom resultado na decomposição em frequência /16/. Também é difícil para a análise de sinais lidar com sistemas não lineares.

Apesar destas dificuldades, a análise de sinais tem sido de grande ajuda na elaboração de sistemas de monitoração e análise de sistemas mecânicos /17/16/.

### 2.6.3 TESTE DO QUI-QUADRADO

Na detecção de desvios nos estados do sistema é possível aplicar uma série de testes estatísticos nestes dados. O teste do qui-quadrado é um destes testes descritos por Willsky /14/. O teste baseia-se no fato de que a saída de um sistema em operação normal pode ser entendida como a composição de  $n$  variáveis aleatórias gaussianas, de média nula e matriz de covariância conhecida  $R$ , isto é,

$$Y_i = C_{1i} * X_1 + \dots + C_{in} * X_n \quad (2.40)$$

que possui uma distribuição qui-quadrado de  $n$  graus de liberdade. Se uma anormalidade ocorre, a estatística de  $Y$  muda. A regra de detecção, se associa a um teste de aderência das medidas à distribuição qui-quadrado, expressa por :

$$l(n) > \epsilon \implies \text{FALHA}$$

$$l(n) < \epsilon \implies \text{NAO FALHOU}$$

onde :

$l(n)$  é o valor da estatística, e

$\epsilon$  é o nível de decisão dado pela distribuição qui-quadrado com um probabilidade pré definida ( $P_f$ ) de alarme falso, tomada para um conjunto de  $k$  medidas.

Uma vantagem deste tipo de abordagem é que temos sempre associado a um resultado, uma probabilidade de acerto na detecção. Entretanto, este método é de difícil implementação por necessitar que o modelo esteja bem adequado para que a hipótese da distribuição se verifique.

#### 2.6.4 TESTES DE HIPÓTESES

Técnicas envolvendo testes de múltiplas hipóteses também podem ser usados na detecção de falhas. As abordagens de Iserman /1/ e Willsky /14/ sugerem que se estabeleça um conjunto de filtros de Kalman, cada um ajustado para uma determinada falha, e que se aplique um teste de hipótese para se decidir sobre qual está mais próximo da realidade. Para isto devemos trabalhar com os parâmetros estatísticos dos filtros (valor esperado e covariância).

Podemos também aplicar os testes de hipóteses para melhorar a performance do filtro, como sugere Kumamaru /13/.

A aplicação prática destes testes fica a dever pela sua complexidade e por demandar uma grande quantidade de processamento, principalmente se considerarmos o fato que a implementação do filtro por si só já requer um grande esforço computacional.

### 3. DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE MONITORAÇÃO

Este capítulo visa descrever as fases necessárias para o desenvolvimento de um sistema de monitoração. A teoria envolvida em cada etapa foi isoladamente revista no capítulo anterior, aqui iremos relacionar estas teorias, objetivando o desenvolvimento do sistema completo. No capítulo seguinte estas fases serão aplicadas em um caso real.

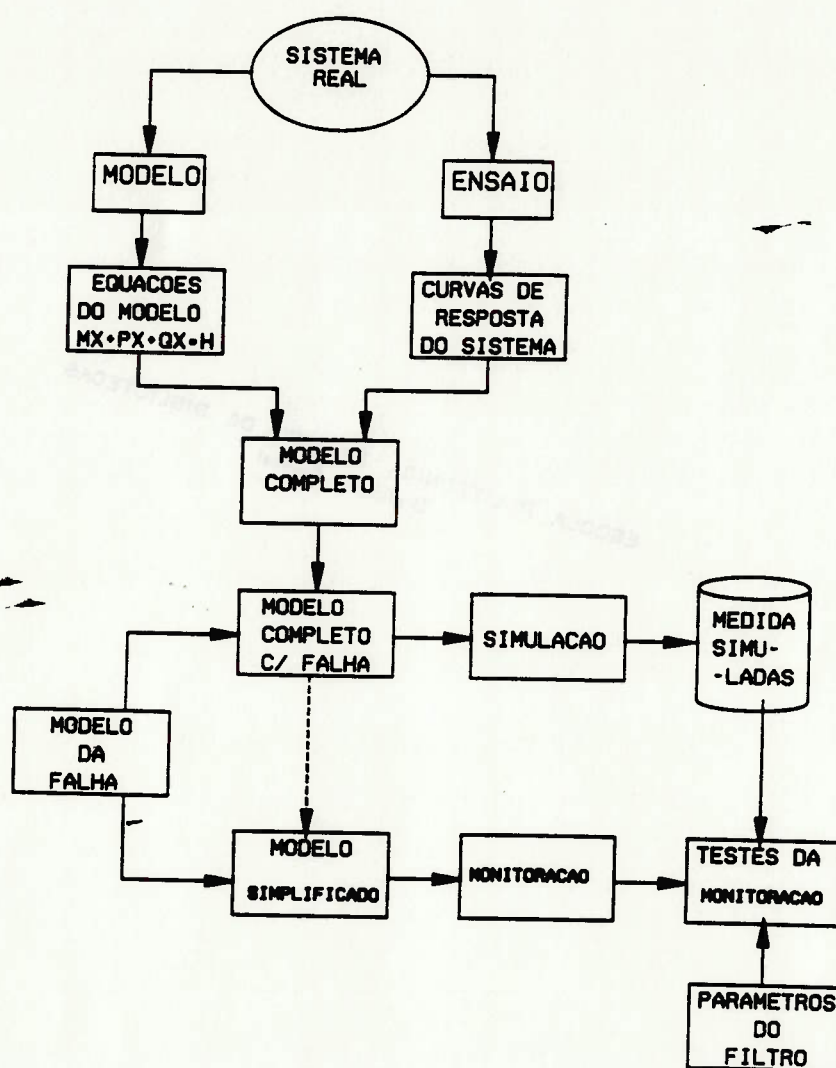


Fig.3.1 Etapas no desenvolvimento de um sistema de monitoração

O desenvolvimento de um sistema de monitoração parte da definição de um sistema real a ser monitorado, suas possíveis falhas; e tem como resultado final os procedimentos, na forma de um programa de computador, que realizam esta monitoração. O diagrama de blocos da figura 3.1 sintetiza as fases que serão seguidas, neste desenvolvimento.

Partindo de um sistema real a ser monitorado, podemos inicialmente tentar elaborar um modelo matemático do problema. Esta modelagem constitui-se, no caso de modelos mecânicos, da identificação das propriedades de inércia, rigidez e amortecimento e suas interrelações com os esforços externos. Estas relações são expressas na equação do movimento. Nesta fase são selecionados também os graus de liberdade deste sistema.

Caso o sistema já esteja construído, será provavelmente possível ensaiá-lo, obtendo assim um registro do seu comportamento dinâmico. Nos ensaios as curvas de resposta do sistema são obtidas pela medição das saídas disponíveis do sistema em função de uma entrada aplicada.

Os ensaios servirão para quantificar os parâmetros desconhecidos do modelo, seguindo um processo conhecido como identificação do modelo, que resulta em um modelo matemático do sistema que possui um comportamento dinâmico semelhante ao ensaiado. Esta fase de modelagem, ensaio e identificação, é muito importante no desenvolvimento de um sistema de monitoração pois é nela em que mais se estuda o sistema, tentando extrair a maior quantidade de informações possível para as etapas posteriores. No final desta

fase, devemos estar aptos a intuir sobre as possíveis falhas do modelo, seu comportamento esperado, e os ruídos que podem influenciar este comportamento.

Também a falha pode ser modelada e muitas vezes até ensaiada, fornecendo o chamado modelo da falha. Como as falhas, em muitos casos, interferem apenas com uma parte do modelo, será possível, simplificar o modelo completo, e tentar obter deste, um modelo reduzido que reproduza satisfatoriamente o efeito da falha. Esta simplificação traz grandes benefícios, quando do desenvolvimento e implementação do módulo de monitoração propriamente dito. Com modelo menores a quantidade de informação a ser manipulada na monitoração se reduz tornando-a mais eficiente, porém mais imprecisa e sujeita a erros de má interpretação. A simplificação no modelo pode provocar que comportamentos não modelados, sejam erroneamente interpretados como falhas.

O compromisso entre a complexidade do modelo e a precisão da monitoração, também, está limitado pela viabilidade de implementação /14/; ou seja, o modelo pode ser tão complexo que o esforço computacional, necessário para manipular a quantidade de informações que realizam a monitoração, a inviabilize para os computadores atuais. Neste caso outras técnicas de monitoração /17/ poderão ser tentadas. Estes problemas poderão ser levantados na verificação da observabilidade do modelo.

O modelo completo será usado para simular as situações de operação normal e das falhas. A simulação se faz impondo uma excitação, e integrando as funções do estado. O sinal é equivalente àquele que será medido do sistema real. O sinal simulado pode ainda receber uma componente correspondente aos ruídos que são esperados

na operação do sistema real, tornando-o ainda mais próximo da realidade.

O modelo simplificado será utilizado na elaboração de um programa de observação de estado, para a monitoração. Este programa seguirá a teoria do filtro estendido de Kalman, descrita na seção 2.5. Alimentando este programa com as curvas simuladas podemos selecionar os parâmetros mais adequados para o filtro, que regulam a monitoração. O teste da monitoração, feito em computador digital, é indispensável. Ele permite um maior controle das variáveis envolvidas, eliminando, nesta fase inicial, alguns efeitos indesejáveis.

Após os teste na computador pode-se passar a fase de implementação do algoritmo definitivo em um computador dedicado, isto é um processador que será usado exclusivamente para a monitoração. Para melhorar a sua performance é aconselhável otimizar o algoritmo, integrá-lo à instrumentação. É essencial tomar ~~cuidado~~ com as velocidade envolvidas e os problemas de quantização do sinal. Este trabalho não tratará de detalhes desta fase de implementação, porem ela é sem dúvida uma das etapas mais importantes para o sucesso do sistema de monitoração.

#### 4. MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA REAL

Apresentaremos, neste capítulo, o sistema real que será objeto de estudo na aplicação do método de monitoração proposto. Aqui serão descritas as equações do movimento do modelo deste sistema, e também serão identificados seus parâmetros, de modo a obter um comportamento semelhante entre modelo e sistema real.

##### 4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Com objetivo de aplicar o procedimento de monitoração proposto no capítulo anterior, verificar suas limitações e validar o seu uso prático, vamos estudar a monitoração de falhas em um sistema mecânico simples.

Optamos por um sistema que foi originalmente construído para estudos de balanceamento /18/, e que permite uma extrapolação para diversos sistemas reais como turbinas propulsoras, rotores de geradores de energia, entre outras máquinas rotativas.

O sistema, montado em uma bancada, é constituído de discos de aço rígidos, unidos de modo a formar um único conjunto, fixados em um eixo também de aço, flexível, e apoiado por rolamentos a suportes elásticos como mostram as figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

Os mancais compostos pelos mancais de rolamento e pela sua caixa de fixação são livres para oscilar nas direções perpendiculares ao eixo, pois sua fixação na base é feita por meio de coxins de borracha que lhes dão flexibilidade e um pequeno amortecimento. O disco também pode oscilar, flexionando o eixo. Todo o conjunto, eixo e disco, pode girar livremente, acionado por um motor



elétrico, que após impor uma rotação ao sistema pode ser desacoplado. Ao se separar o motor do sistema não se nota uma dissipação significativa. O eixo permanece girando em rotação aproximadamente constante, não amortecida.

O sistema de referência adotado tem como origem o centro do eixo no primeiro mancal, sendo a direção positiva de  $x$  para baixo,  $y$  horizontal e  $z$  alinhado com o eixo de rotação do sistema, também mostrados nas figuras.

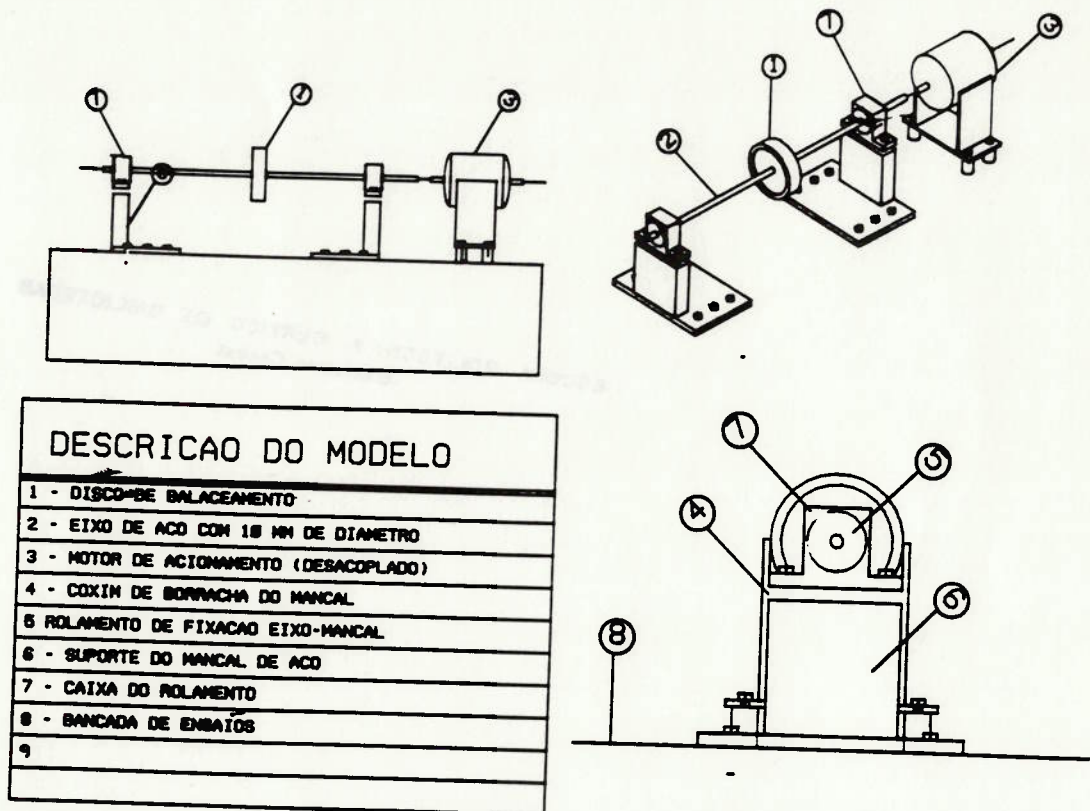


Fig.4.1 Esquema do conjunto montado

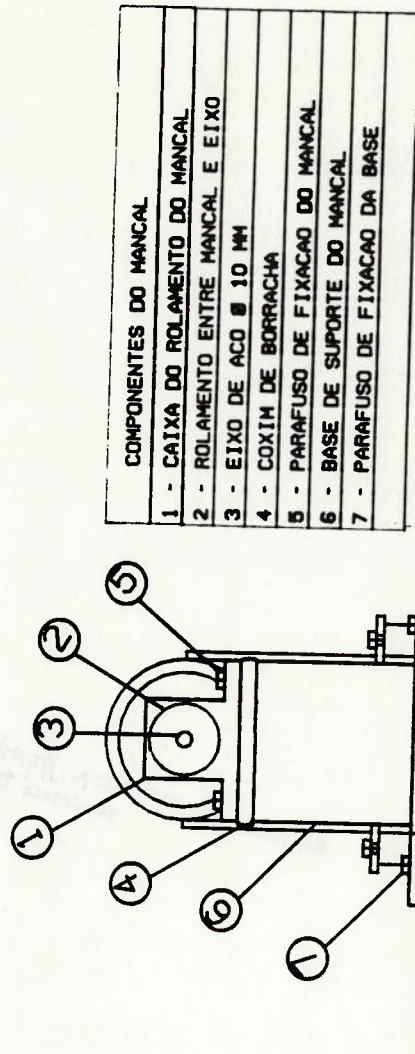
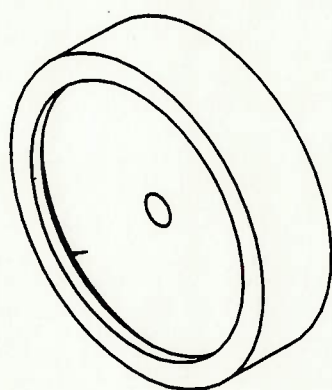
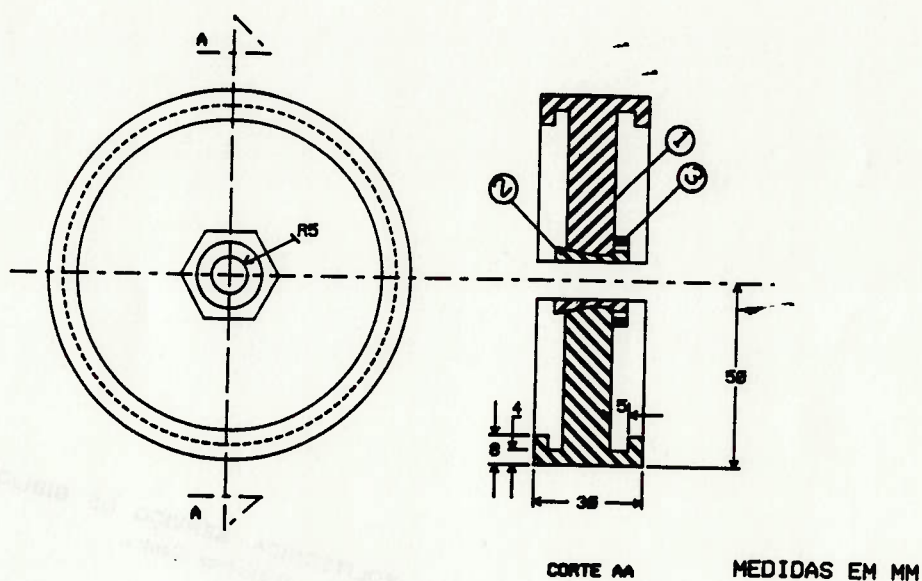


Fig.4.2 Mancal elástico, caixa de rolamento e suporte

#### 4.2 EQUACIONAMENTO DO MODELO

Com base no sistema real proposto, foi desenvolvido um modelo matemático completo, que permitisse entender a dinâmica do problema e analisar o comportamento deste com respeito a falha estudada. Assim inicialmente iremos equacionar e estudar as relações dinâmicas no modelo, para depois desenvolver um sistema para sua monitoração.



- DISCO DE BALANCEAMENTO E  
ELEMENTO DE FIXAÇÃO
- 3 - PORCA DE FIXAÇÃO DO DISCO
  - 2 - ELEMENTO DE FIXAÇÃO DO DISCO NO EIXO
  - 1 - DISCO DE BALANCEAMENTO

Fig.4.3. Disco de balanceamento e elemento de fixação

## 4.2.1 DESCRIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A figura 4.4 mostra um esquema espacial do modelo completo e seus componentes; no detalhe da figura 4.5 temos o plano  $Oxz$ . Este modelo se compõe de um disco rígido, de comprimento desprezível e raio  $R_D$  e massa  $M_D$ ; e de 2 massas localizadas nos mancais  $M_1$  e  $M_2$ . Estas massas estão conectadas por um eixo que equivale a uma viga engastada no disco e simplesmente apoiada nos mancais. Não será considerada a massa própria do eixo.

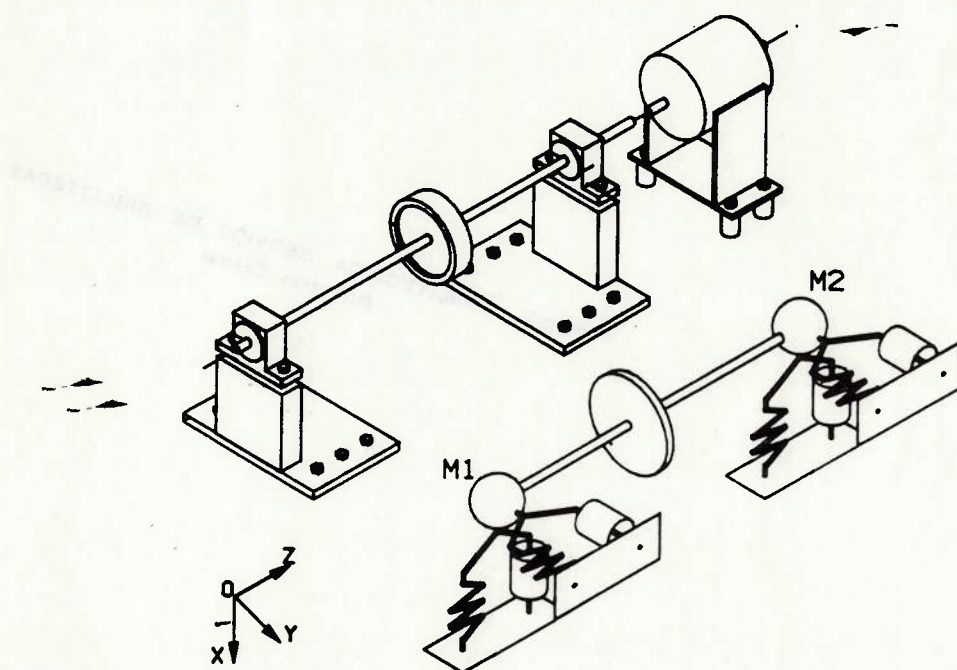


Fig.4.4 Esquema espacial do modelo completo

O modelo está intimamente relacionado com o sistema real, uma vez que o disco concentra a maior parcela da inércia e o eixo fornece a flexibilidade ao sistema. A condição de simples apoio nos mancais é válida, uma vez que os rolamentos não restringem a flexão do eixo. A rigidez e o amortecimento nos mancais, representados no modelo, são dados basicamente pelos coxins de borracha.

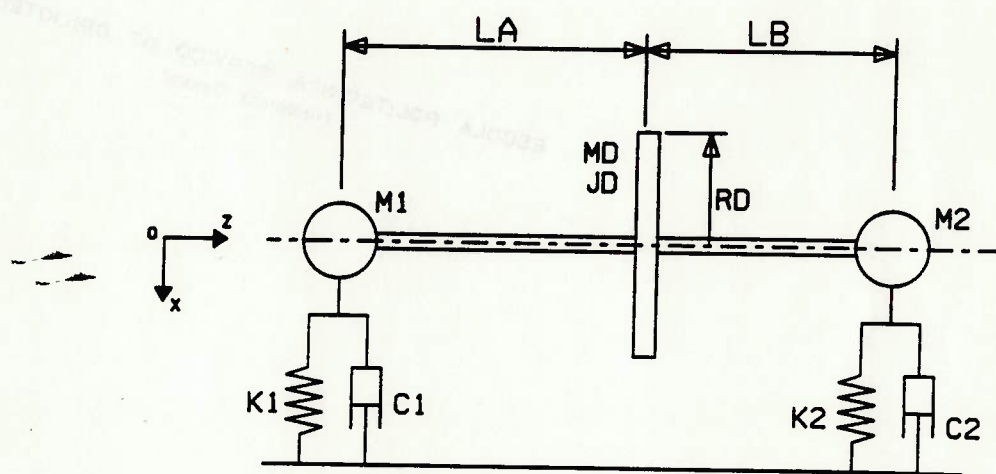


Fig.4.5. Plano OXZ do modelo completo

Este modelo possui 8 graus de liberdade, sendo 4 em cada plano.  
 São eles:

- $X_1, Y_1$  : deslocamentos do mancal 1,
- $X_D, Y_D$  : deslocamentos do centro de disco,
- $X_2, Y_2$  : deslocamentos do mancal 2,
- $CD, BD$  : deslocamentos na direção  $z$  da extremidade do disco, correspondendo a rotações do disco nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente.

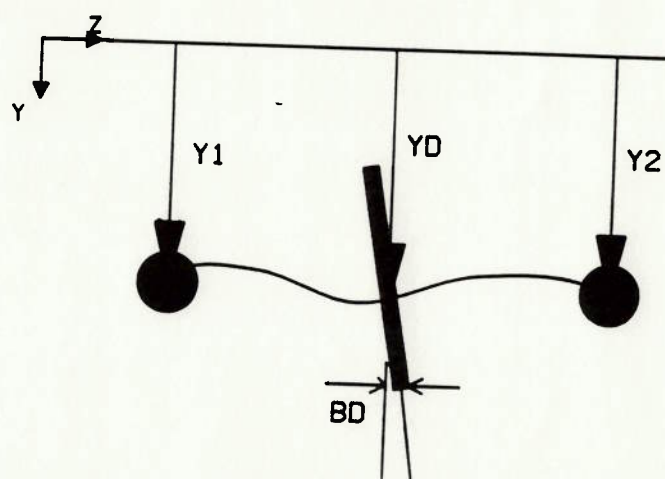
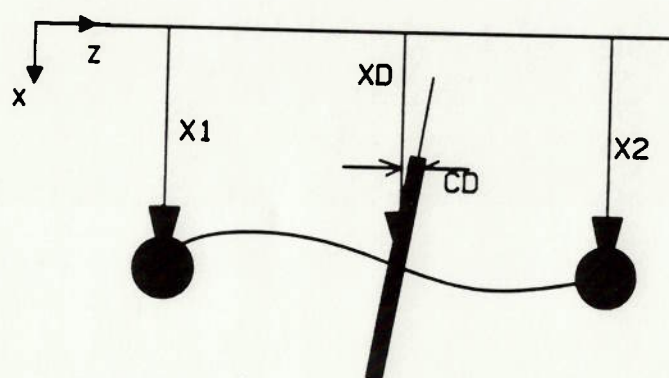


Fig.4.6. Deslocamentos (graus de liberdade) do modelo completo

### 4.2.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para determinarmos as equações do movimento, vamos inicialmente isolar os corpos e aplicar a eles os esforços internos e externos. A figura 4.7 mostra o esquema dos esforços aplicados cuja definição é apresentada a seguir:

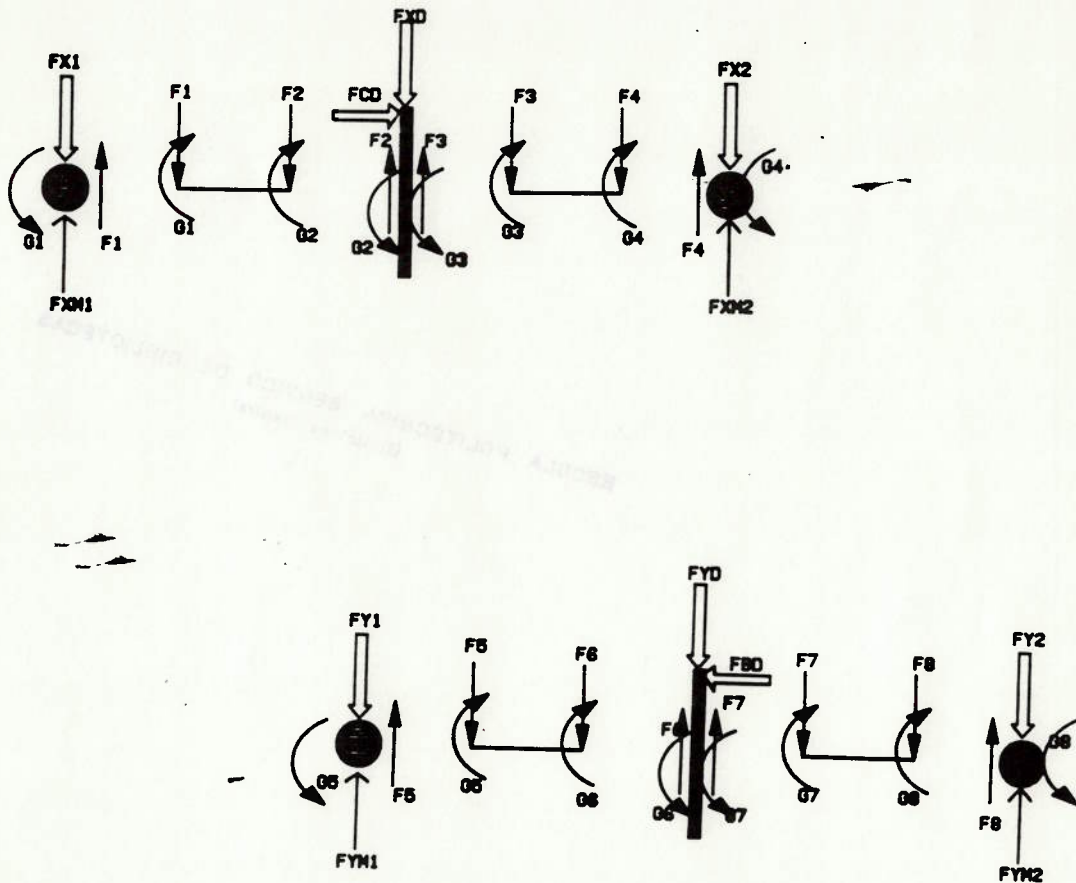


Fig.4.7 Esforços : a) e externos aplicados aos corpos  
 a) plano CXY b) plano CYZ

$F_1..F_8$  são forças de restauração devido à elasticidade do eixo;  
 $G_1..G_8$  são momentos também devidos à elasticidade do eixo;  
 $F_{X1}, F_{Y1}$  são as forças entre o mancal 1 e a base devidas ao coxim elástico, descritas por :

$$F_{X1} = K_1 * X_1 + C_1 * X_1P \quad (4.1)$$

$F_{X2}, F_{Y2}$  são as forças entre o mancal 2 e a base devidas ao coxim elástico, análogas às anteriores;

$F_{X1}, F_{X2}, F_{Y1}, F_{Y2}$  são forças externas aplicadas nos mancais, e

$F_{XD}, F_{YD}, F_{CD}, F_{BD}$  são forças externas aplicadas no disco.

Os eixos são analisados como vigas elásticas representadas na figura 4.8, e para cada um deles serão válidas as seguintes relações /3/:

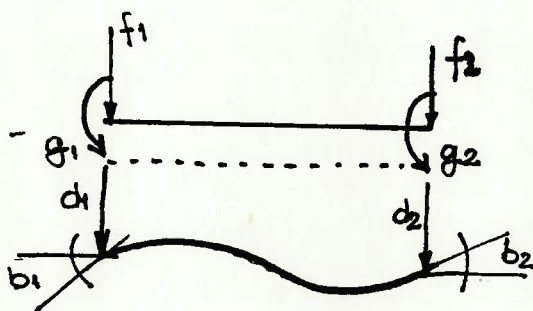


Fig.4.8 Forças e deslocamentos em um elemento de viga.



$$\begin{aligned}
 f_1 &= KXXi*d1 + KXAi*b1 - KXXi*d2 + KXAi*b2 \\
 g_1 &= KXAi*d1 + 2*KAAi*b1 - KXAi*d2 + KAAi*b2 \\
 f_2 &= -KXXi*d1 - KXAi*b1 + KXXi*d2 - KXAi*b2 \\
 g_2 &= KXAi*d1 + KAAi*b1 - KXAi*d2 + 2*KAAi*b2
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

onde  $f_1, f_2$  são forças de restauração e  $g_1, g_2$  são os momentos da viga  $i$ . O apêndice A apresenta os detalhes deste equacionamento para cada segmento de eixo separadamente. As constantes  $KXXi, KXAi$  e  $KAAi$ , são funções do segmento  $i$  de eixo, e são dadas por :

$$KXXi = \frac{12*E*I}{Li^3} \tag{4.3}$$

$$KXAi = \frac{6*E*I}{Li^2} \tag{4.4}$$

$$KAAi = \frac{2*E*I}{Li} \tag{4.5}$$

De posse das forças que atuam em cada corpo, podemos entrar no programa NEW-EUL /7/ para levantar as equações algébricas do movimento, como também está descrito no apêndice A. Este programa impõe o equilíbrio de forças nos corpos, e manipula algebricamente as equações obtendo a equação linearizada do movimento que colocada na forma matricial fica :

$$RM*Spp + RP*Sp + RQ*S = H \tag{2.1}$$

Do modelo completo apresentado no apêndice A podemos extrair, para o plano de estudo OXZ :

$$S = [X1, XD, CD, X2] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} RM(1,1) &= M1 \\ RM(2,2) &= MD \\ RM(3,3) &= JD/RD^2 \\ RM(4,4) &= M2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} Q(1,1) &= K1 + KXX1 - KXA1^2 * I2KAA1 \\ Q(1,2) &= KXA1^2 * I2KAA1 - KXX1 \\ Q(1,3) &= -KAA1 * KXA1 * I2KAA1 / RD + KXA1 / RD \\ Q(2,1) &= -KXX1 + KXA1^2 * I2KAA1 \\ Q(2,2) &= -KXA1^2 * I2KAA1 + KXX1 + KXX2 - KXA2^2 * I2KAA2 \\ Q(2,3) &= KAA1 * KXA1 * I2KAA1 / RD - KXA1 / RD + KXA2 / RD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 / RD \\ Q(2,3) &= Aux1 \\ Q(2,4) &= -KXX2 + KXA2^2 * I2KAA2 \\ Q(3,1) &= KXA1 / RD - KAA1 * KXA1 * I2KAA1 / RD \\ Q(3,2) &= KAA1 * KXA1 * I2KAA1 / RD - KXA1 / RD + KXA2 / RD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 / RD \\ Q(3,3) &= -KAA1^2 * I2KAA1 / RD^2 + 2 * KAA1 / RD^2 + 2 * KAA2 / RD^2 \\ &\quad - KAA2^2 * I2KAA2 / RD^2 \\ Q(3,4) &= -KXA2 / RD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 / RD \\ Q(4,2) &= -KXX2 + KXA2^2 * I2KAA2 \\ Q(4,3) &= -KXA2 / RD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 / RD \\ Q(4,4) &= K2 + KXX2 - KXA2^2 * I2KAA2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} P(1,1) &= C1 \\ P(4,4) &= C2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(1) &= FX1 \\ H(2) &= FXD \\ H(3) &= FCD \\ H(4) &= FX2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Onde por simplificação introduzimos as seguintes constantes derivadas das formulações 4.3 a 4.5 para cada trecho do eixo.

$$\begin{aligned} KXX1 &= 12 * E * I / (L1^3) \\ KXA1 &= 6 * E * I / (L1^2) \\ KAA1 &= 2 * E * I / L1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} KXX2 &= 12 * E * I / (L2^3) \\ KXA2 &= 6 * E * I / (L2^2) \\ KAA2 &= 2 * E * I / L2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} I2KAA1 &= 1.0 / (2 * KAA1) \\ I2KAA2 &= 1.0 / (2 * KAA2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3 INDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Neste item, procuraremos encontrar os valores numéricos para as matrizes do modelo, de modo que este se comporte, o mais fielmente possível, como o sistema real. Alguns parâmetros, como as dimensões geométricas, podem ser medidos diretamente; outros porém, como a rigidez e o amortecimento do mancal precisam ser estimados. A estimação será feita variando-se estes parâmetros e comparando os resultados teóricos obtidos com os resultados experimentais.

#### 4.3.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Inicialmente, procuraremos obter uma descrição do comportamento dinâmico do sistema, através de medições realizadas em ensaios com o modelo físico do sistema.

##### 4.3.1.1 DESCRIÇÃO DO ENSAIO

Os ensaios se compõem da medição da função de transferência em frequência, entre a oscilação medida por um acelerômetro no mancal 2, e as forças de excitação, aplicadas por um martelo em diversos pontos do sistema. Como produto final, o ensaio fornece curvas em frequência de amplitude e fase. A faixa de 0 a 250 Hz de frequência foi escolhida para tentar cobrir os primeiros modos e frequências naturais do sistema, como mostra a figura 4.9.

Detalhes dos equipamentos e dos cuidados tomados para o ensaio estão descritos no apêndice B.

modo	wi (Hz)	wi (Hz)	X1	XD	CD	X2
	ensaio	r e s u l t a d o t e ó r i c o				
1o	18,0	40,2	0,58	1,00	0,01	0,59
2o	51,6	70,9	1,00	-0,09	-0,07	0,54
3o	56,1	56,2	-0,54	-0,03	0,13	1,00
4o	164,0	239,8	0,19	-0,01	1,00	-0,12

Tabela.4.2 Autovalores e autovetores do modelo completo em 1a aproximação

Como vemos nesta tabela, os modos de vibração são bastante coerentes com as observações experimentais. No primeiro modo encontramos a vibração principal no disco, e com amplitude menor nos mancais, como comprovam os valores das colunas XD, X1 e X2. Na linha 2 e 3 o valor máximo ocorre em cada um dos mancais X1 e X2 respectivamente. A linha do 4o modo apresenta apenas a vibração, no sentido lateral do disco (CD). Notamos porém que as frequências teóricas não estão próximas aos valores dos ensaios, apesar de manterem entre si a mesma relação de grandeza.

A discrepância se deve principalmente ao fato de que nos cálculos foram desprezados uma série de fatores como :

- \* influência da massa do eixo,
- \* imprecisão nas condições de contorno adotadas para o eixo,
- \* acoplamentos entre os modos,
- \* fenômenos não modelados, como folgas, atritos etc...

Para que o modelo seja uma reprodução mais fiel do comportamento dinâmico encontrado nos ensaios, podemos recalcular a matriz de massa, levando em conta agora os autovalores experimentais. Para isto vamos usar o procedimento de indentificação de modelos conservativos /17/, do apêndice C.

Neste procedimento as relações entre a matriz de massa, a matriz de rigidez e os autovalores e autovetores são exploradas, de modo a que dada uma matriz de rigidez, e um conjunto de autovalores e autovetores, podemos calcular a matriz de massa. Assim, recalculando a matriz de massa com base na matriz de rigidez calculada (4.20), e nos autovalores (frequências) experimentais e autovetores calculados, temos a seguinte matriz de massa :

$$RM = \begin{bmatrix} 0,69 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 19,0 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,10 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

da qual consideramos apenas os valores da diagonal principal, para manter a coerência com as equações do modelo, desprezando os termos fora desta diagonal.

#### 4.3.5 AVALIAÇÃO DO AMORTECIMENTO

Para representar o amortecimento existente no sistema eixo-mancais, dividimos o amortecimento em duas partes, o amortecimento

estrutural do eixo, e o amortecimento viscoso nos mancais. Deste modo, a matriz de amortecimento tem uma estrutura muito semelhante à estrutura da matriz de rigidez.

Assim podemos representar a matriz de amortecimento RP por :

$$RP(1,1) = C1 + CXX1 - CXA1^2 * I2CAA1 \quad (4.23)$$

$$RP(1,2) = CXA1^2 * I2CAA1 - CXX1$$

$$RP(1,3) = -CAA1 * CXA1 * I2CAA1 / RD + CXA1 / RD$$

$$RP(2,1) = -CXX1 + CXA1^2 * I2CAA1$$

$$RP(2,2) = -CXA1^2 * I2CAA1 + CXX1 + CXX2 - CXA2^2 * I2CAA2$$

$$RP(2,3) = CAA1 * CXA1 * I2CAA1 / RD - CXA1 / RD + CXA2 / RD - CAA2 * CXA2 * I2CAA2 / RD$$

$$RP(2,4) = -CXX2 + CXA2^2 * I2CAA2$$

$$RP(3,1) = CXA1 / RD - CAA1 * CXA1 * I2CAA1 / RD$$

$$RP(3,2) = CAA1 * CXA1 * I2CAA1 / RD - CXA1 / RD + CXA2 / RD - CAA2 * CXA2 * I2CAA2 / RD$$

$$RP(3,3) = -CAA1^2 * I2CAA1 / RD^2 + 2 * CAA1 / RD^2 + 2 * CAA2 / RD^2$$

$$- CAA2^2 * I2CAA2 / RD^2$$

$$RP(3,4) = -CXA2 / RD + CAA2 * CXA2 * I2CAA2 / RD$$

$$RP(4,2) = -CXX2 + CXA2^2 * I2CAA2$$

$$RP(4,3) = -CXA2 / RD + CAA2 * CXA2 * I2CAA2 / RD$$

$$RP(4,4) = C2 + CXX2 - CXA2^2 * I2CAA2$$

onde CXX1, CXA1, CAA1, I2CAA1 são as constantes de amortecimento do eixo 1, e analogamente para o eixo 2 teremos CXX2, CXA2, CAA2 e I2CAA2. Estas constantes correspondem ao amortecimento estrutural. Vamos supor que o amortecimento estrutural do eixo seja proporcional a rigidez, isto é :

$$\begin{aligned} CXX1 &= E_c * KXX1 \\ CXA1 &= E_c * KXA1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$CAA1 = E_c * KAA1$$

$$\begin{aligned} CXX2 &= E_c * KXX2 \\ CXA2 &= E_c * KXA2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$CAA2 = E_c * KAA2$$

$$I2CAA1 = E_c * I2KAA1 \quad (4.26)$$

$$I2CAA2 = E_c * I2KAA2$$

onde a constante de proporcionalidade  $E_c$  será selecionada pela comparação entre as curvas teóricas e experimentais. A figura 4.10 mostra a comparação no primeiro modo de vibração para alguns valores de  $E_c$ , sendo que :

$$E_c = 1,0 * 10^{-5} \quad (4.27)$$

produziu o melhor resultado.

Para estimar os valores de  $C1$  e  $C2$  iremos supor, a proporcionalidade com  $K1$  e  $K2$ . Desta forma, iremos variar  $C1$  e  $C2$  mantendo a válida a relação :

$$\frac{C1}{C2} = \frac{K1}{K2} \quad (4.28)$$

Foram calculadas as curvas de resposta em frequência do mancal ( $X1$ ) para uma excitação unitária no mancal 2 ( $FX2=1$ ) variando  $C1$  e  $C2$  em :

C1 = 4,9	C2 = 4,2
C1 = 49,0	C2 = 42,0
C1 = 98,0	C2 = 84,0
C1 = 490,0	C2 = 420,0

(valores em  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ )

Como se pode observar na figura 4.11 que mostra a comparação com os resultados experimentais a melhor resposta é obtida com :

C1 = 98,0      C2 = 84,0

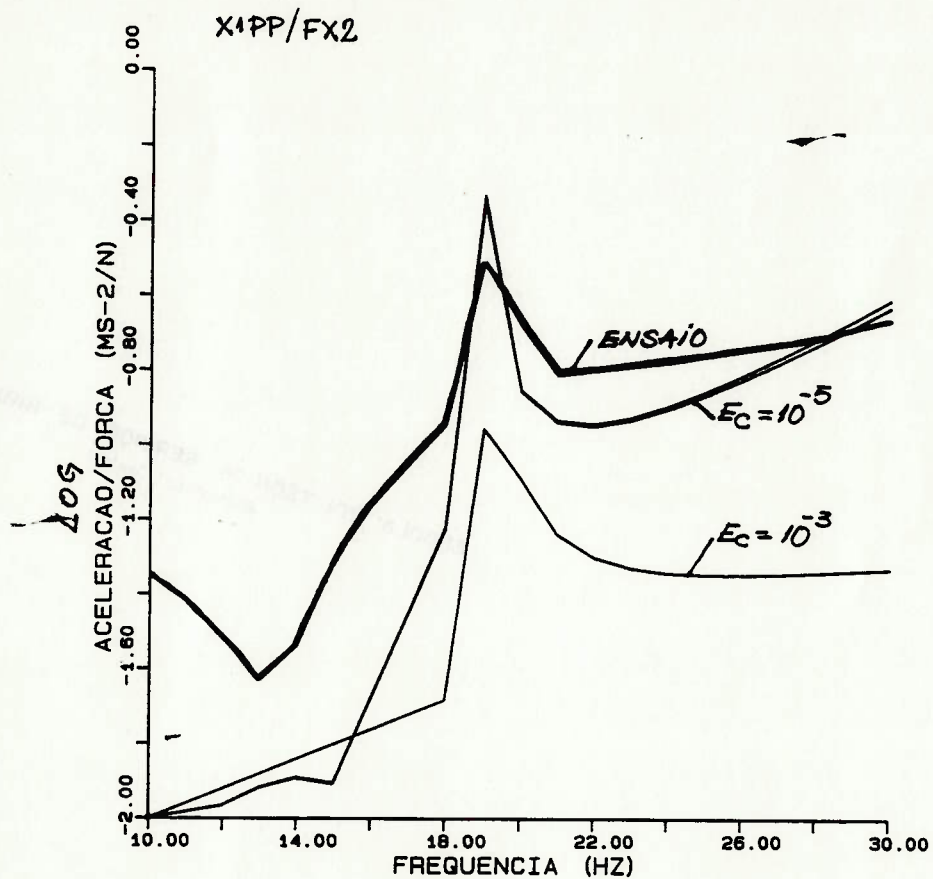


Fig.4.10 Estima de  $E_c$  pela comparação com resultados experimentais



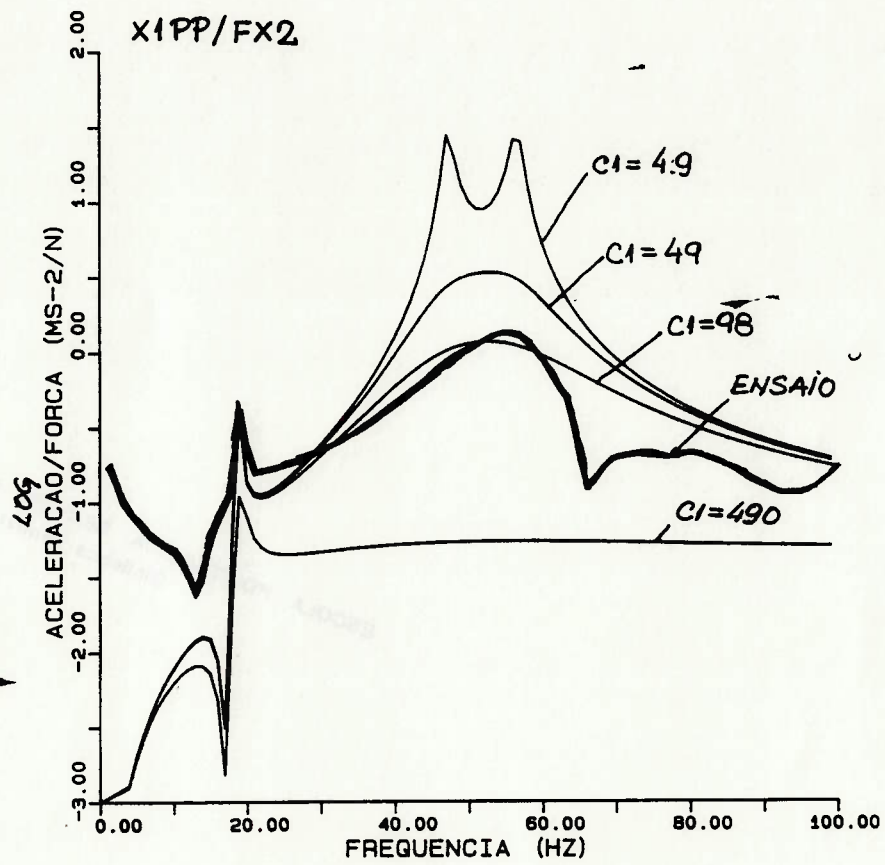


Fig.4.11 Comparação entre as curvas para seleção de C1 e C2.

## 4.4 RESULTADO FINAL DA MODELAGEM COMPLETA

As matrizes finais identificadas do modelos são :

Matriz de massa (RM)

$$\begin{bmatrix} 6,90E-1 & 0,00E0 & 0,00E0 & 0,00E0 \\ 0,00E0 & 1,90E1 & 0,00E0 & 0,00E0 \\ 0,00E0 & 0,00E0 & 1,10E0 & 0,00E0 \\ 0,00E0 & 0,00E0 & 0,00E0 & 5,00E-1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Matriz de amortecimento (RP)

$$\begin{bmatrix} 1,55E0 & -1,55E0 & 3,10E0 & 0,00E0 \\ -1,55E0 & 2,34E0 & -1,12E0 & -7,94E-1 \\ 3,10E0 & -1,12E0 & 1,49E1 & -1,99E0 \\ 0,00E0 & -7,94E-1 & -1,99E0 & 7,94E-1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Matriz de rigidez (RQ)

$$\begin{bmatrix} 8,78E4 & -3,88E4 & 1,55E5 & 0,00E0 \\ -3,88E4 & 2,91E5 & -5,58E4 & -1,99E4 \\ 1,55E5 & -5,58E4 & 1,53E6 & -9,93E4 \\ 0,00E0 & -1,99E4 & -9,93E4 & 6,19E4 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

que permitem, como na equação (2.7) compor a matriz A do sistema que será :

0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	1,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0
0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	1,00E0	0,00E0	0,00E0
0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	1,00E0	0,00E0
0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	0,00E0	1,00E0
-1,27E5	5,62E4	-2,25E5	0,00E0	-2,25E0	2,25E0	-4,50E0	0,00E0
2,04E3	-1,53E4	2,94E3	1,04E3	8,16E-2	-1,23E-1	5,88E-2	4,18E-2
-1,41E5	5,08E4	-1,39E6	9,02E4	-2,82E0	1,02E0	-1,35E1	1,80E0
0,00E0	3,97E4	1,99E5	-1,2E5	0,00E0	1,59E0	3,97E0	-1,59E0

Como uma avaliação final do processo de modelagem, iremos comparar os resultados dos ensaios com os valores teóricos calculados.

As frequências naturais encontradas estão próximas dos resultados experimentais, assim como os modos naturais de vibração, o que levará a um comportamento dinâmico semelhante, como mostram a tabela 4.3 e as figuras 4.12 a 4.15 dos modos de vibração, obtidos pela análise dos autovalores e autovetores da matriz A do modelo. Devemos notar que o modelo não é mais um sistema conservativo o que nos leva a ter autovalores e autovetores complexos. O cálculo foi realizado em um programa de computador /8/ desenvolvido exclusivamente para tratar de modelos de corpos múltiplos. Nos resultados apresentados, como derivam de um estudo teórico temos representada a fase entre as amplitudes dos modos de vibração, assumida nula no ponto de maior amplitude. A fase não foi objeto de estudo detalhado e comparação por falta de resultados experimentais devido à dificuldade em medi-la precisamente neste caso.

modo	wi (Hz) ensaio	wi (Hz) r e s u l t a d o	X1	XD	CD	X2	t e o r i c o
1o	18,0	18,8	0,46	1,00	0,01	0,39	
2o	51,6	47,2	1,00	-0,01	-0,16	0,98	
3o	56,1	56,6	0,70	-0,02	0,01	1,00	
4o	164,0	190,3	0,17	0,00	1,00	-0,15	

Tabela 4.3 Autovalores e autovetores finais do modelo completo

Modo de Vibrar # 1

$\omega_n = 1.878E1\text{Hz}$

Var.	Amplitude	Fase[graus]
X1	0.46747	0.15817
XD	1.00000	0.00000
CD	0.01440	-0.18633
X2	0.38771	0.15331

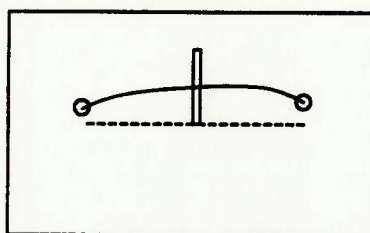


Fig.4.12 Esquema simplificado do 1o modo de vibracao

Modo de Vibrar # 2

$\omega_n = 4.718E1\text{Hz}$

Var.	Amplitude	Fase[graus]
X1	1.00000	0.00000
XD	0.00677	180.04922
CD	0.17675	180.27258
X2	0.98642	180.25473

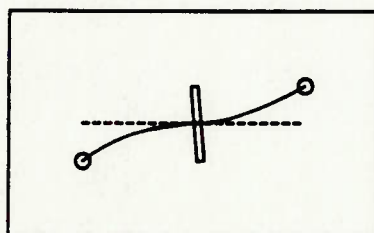


Fig.4.13 Esquema simplificado do 2o modo de vibracao

Modo de Vibrar # 3

$\omega_n = 5.655E1\text{Hz}$

Var.	Amplitude	Fase[graus]
X1	0.70827	0.29287
XD	0.02222	180.62752
CD	0.00851	183.00481
X2	1.00000	0.00000

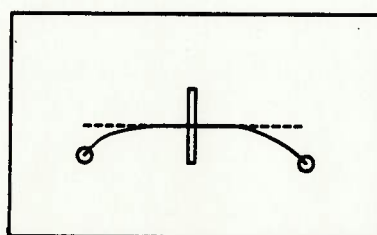


Fig.4.14 Esquema simplificado do 3o modo de vibracao

Modo de Vibrar # 4

$\omega_n = 1.903E2\text{Hz}$

Var.	Amplitude	Fase[graus]
X1	0.17274	0.71666
XD	0.00222	180.80391
CD	1.00000	0.00000
X2	0.15201	180.68100

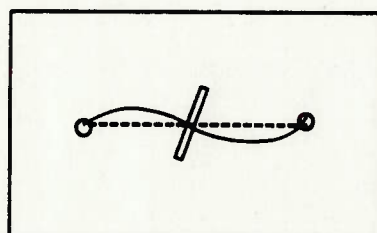


Fig.4.15 Esquema simplificado do 4o modo de vibração

A avaliação final da modelagem pode ser feita comparando-se a curva de resposta obtida teoricamente com o ensaio, como foi feito nas figuras 4.16 e 4.17. Verifica-se que a forma da curva é semelhante, porém, os valores são ligeiramente diferentes. Estas diferenças podem ser atribuídas aos seguintes fatores:

#### a) ERROS DE MEDIDAS

As medidas tomadas para se levantar as curvas estão sujeitas a erros provenientes dos instrumentos e das técnicas de medição. Isto ocorre principalmente na curvas de  $X2PP/FX2$ , onde a excitação, feita por um martelo, e o sensor de aceleração estão muito próximos, provocando, inevitavelmente alguns ruídos que deturpam o resultado.

## b) ERROS DE MODELAGEM

Além dos erros de medida, também podemos atribuir os desvios encontrados à limitação do modelo proposto. As condições de engastamento, apoio, atrito e folga nos mancais não são perfeitas como o modelo supõe, assim como não está garantida a linearidade das equações, especialmente nos casos de grande deslocamento. A limitação do modelo pode então levar a uma razoável discrepância com a realidade do ensaio.

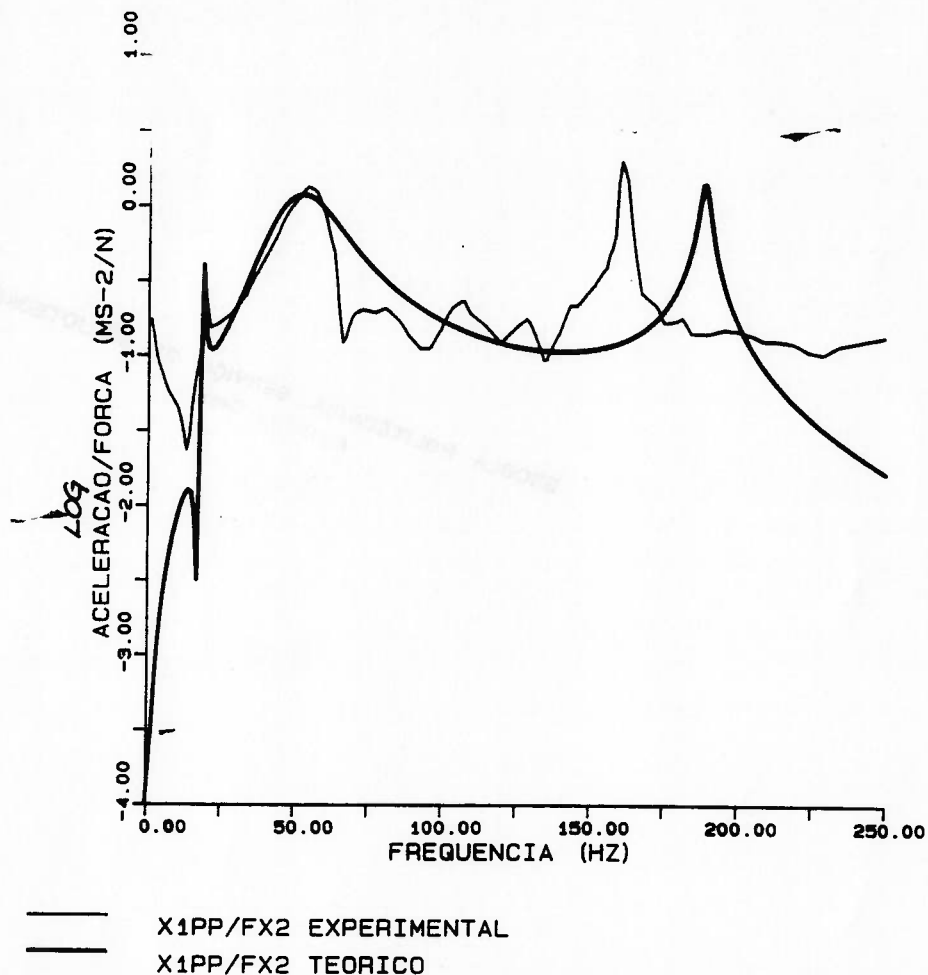


Fig.4.16 Comparação do resultado final para X1PP/FX2

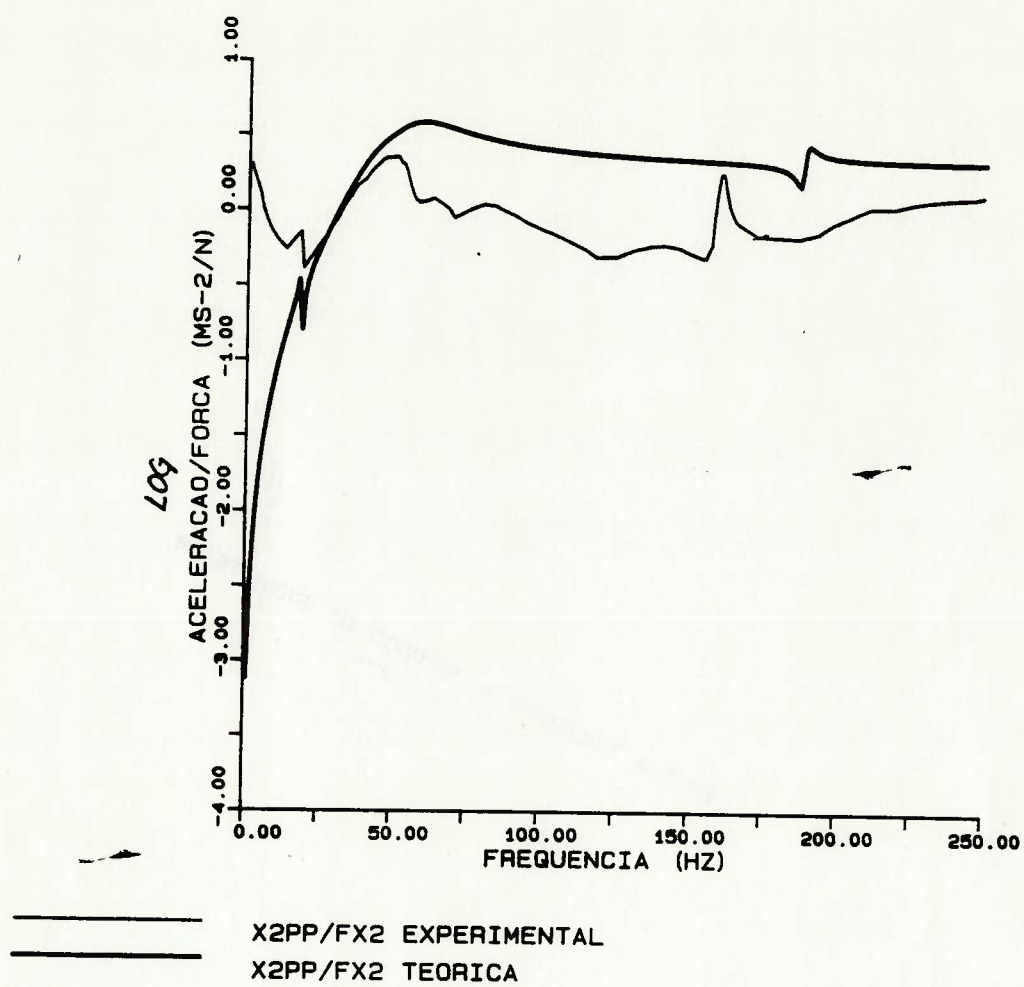


Fig.4.17 Comparação do resultado final para X1PP/FX2



## 5. ESTUDO DE UMA FALHA NA FORÇA DE EXCITAÇÃO

De posse de um modelo matemático do sistema físico, iremos agora aplicar a metodologia proposta para estudar a monitoração de uma possível alteração nas forças de excitação deste modelo.

### 5.1 DESCRIÇÃO E MODELAGEM DA FALHA

O modelo em estudo é essencialmente um rotor e, portanto, em seu movimento de rotação estará sujeito às forças decorrentes da diferença entre o seu eixo geométrico longitudinal e o seu eixo principal de inércia. Esta diferença se deve a possíveis imperfeições construtivas e de material, produzindo forças, comumente chamadas de forças de desbalanceamento.

No caso de um disco plano girante, podemos representar esta força como a força que uma massa excêntrica provoca neste disco. A força  $FDD$ , provocada pela massa  $MDD$ , é mostrada na figura 5.1, onde  $ROT$  é a velocidade de rotação do disco.

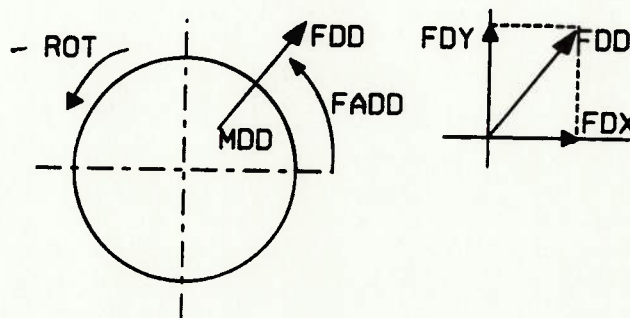


Fig.5.1 Força de desbalanceamento em um disco girante

Podemos decompor FDD nas direções dos eixos x e y usando o ângulo FADD, dado por :

$$FADD(t) = FADD_0 + ROT * 2 * \pi * t \quad (5.1)$$

com

$$FXD = FDD * \cos(FADD) \quad (5.2)$$

$$FYD = FDD * \sin(FADD) \quad (5.3)$$

Tomando :

$$FR = FDD * \cos(FADD_0) \quad (5.4)$$

$$FI = FDD * \sin(FADD_0) \quad (5.5)$$

teremos :

$$FXD = FR * \cos(ROT * 2 * \pi * t) - FI * \sin(ROT * 2 * \pi * t) \quad (5.6)$$

$$FYD = FI * \cos(ROT * 2 * \pi * t) + FR * \sin(ROT * 2 * \pi * t) \quad (5.7)$$

Introduzindo as expressões para FXD e FYD acima nas formulações do modelo completo, verificamos que ele pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} X1P \\ XDP \\ CDP \\ X2P \\ Y1P \\ YDP \\ BDP \\ Y2P \\ X1PP \\ XDPP \\ CDPP \\ X2PP \\ Y1PP \\ YDPP \\ BDPP \\ Y2PP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ XD \\ CD \\ X2 \\ Y1 \\ YD \\ BD \\ Y2 \\ X1P \\ XDP \\ CDP \\ X2P \\ Y1P \\ YDP \\ BDP \\ Y2P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} FX1 \\ FXD \\ FCD \\ FX2 \\ FY1 \\ FYD \\ FBD \\ FY2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

sendo que as matrizes A e B foram obtidas na seção 4.4.

Para medir o comportamento do sistema iremos supor a existência de sensores de deslocamento nas direções X e Y do mancal 1 (X1 e Y1); assim a equação de saída é dada por:

$$\begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X1 \\ XD \\ CD \\ X2 \\ Y1 \\ YD \\ BD \\ Y2 \\ X1P \\ XDP \\ CDP \\ X2P \\ Y1P \\ YDP \\ BDP \\ Y2P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

onde v1 e v2 serão ruídos aleatórios de medida.

Podemos representar simplificadamente o sistema por :

$$\begin{aligned} X_p &= A * X + B * U \\ Y &= C * X + V \end{aligned} \quad (5.10)$$

Este modelo será utilizado para simular o comportamento do sistema.

## 5.2 SIMULAÇÃO DO MODELO COMPLETO

A simulação será realizada em computador digital, onde empregaremos o método de Runge-Kutta de 4a ordem /21/ para integrar o sistema matricial de equações diferenciais do modelo. O sistema mecânico está girando em velocidade constante, com as seguintes características iniciais :

$$\text{ROT} = 30 \text{ Hz} \quad (5.11)$$

$$\text{FR} = 0,1 \text{ N} \quad (5.12)$$

$$\text{FI} = 0,2 \text{ N} \quad (5.13)$$

Para se atingir as condições de regime permanente, o sistema é simulado a partir do repouso ( $X = X_p = 0$ , no instante  $t=0$ ), porém com rotação constante numa condição de ausência de falha, durante 10 segundos, tempo suficiente para que os transitórios se dissipem, como mostra os deslocamentos em  $X_1$  da figura 5.2. No instante  $t=10s$  o vetor de estado obtido foi:

$$\begin{aligned}
 X(1) &= X_1 = 3,7E-4 \text{ m} \\
 X(2) &= X_D = 2,8E-4 \text{ m} \\
 X(3) &= C_D = -1,6E-5 \text{ m} \\
 X(4) &= X_2 = 1,9E-4 \text{ m} \\
 X(5) &= Y_1 = -1,1E-3 \text{ m} \\
 X(6) &= Y_D = -1,3E-3 \text{ m} \\
 X(7) &= B_D = 2,3E-5 \text{ m} \\
 X(8) &= Y_2 = -6,9E-4 \text{ m} \\
 X(9) &= X_{1P} = 2,7E-1 \text{ m} \\
 X(10) &= X_{DP} = 1,1E-1 \text{ m} \\
 X(11) &= C_{DP} = -6,1E-3 \text{ m} \\
 X(12) &= X_{2P} = 1,6E-1 \text{ m} \\
 X(13) &= Y_{1P} = 8,6E-2 \text{ m} \\
 X(14) &= Y_{DP} = -4,4E-2 \text{ m} \\
 X(15) &= B_{DP} = -4,2E-3 \text{ m} \\
 X(16) &= Y_{2P} = 4,4E-2 \text{ m}
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

As falhas em FR e FI, que estudaremos, ocorrerão após os 10 segundos, quando o sistema estará em regime permanente.

### 5.2.1 CASOS SIMULADOS

Descreveremos agora as medidas efetuadas para os casos de falhas simuladas, supondo a existência de ruídos na saída.

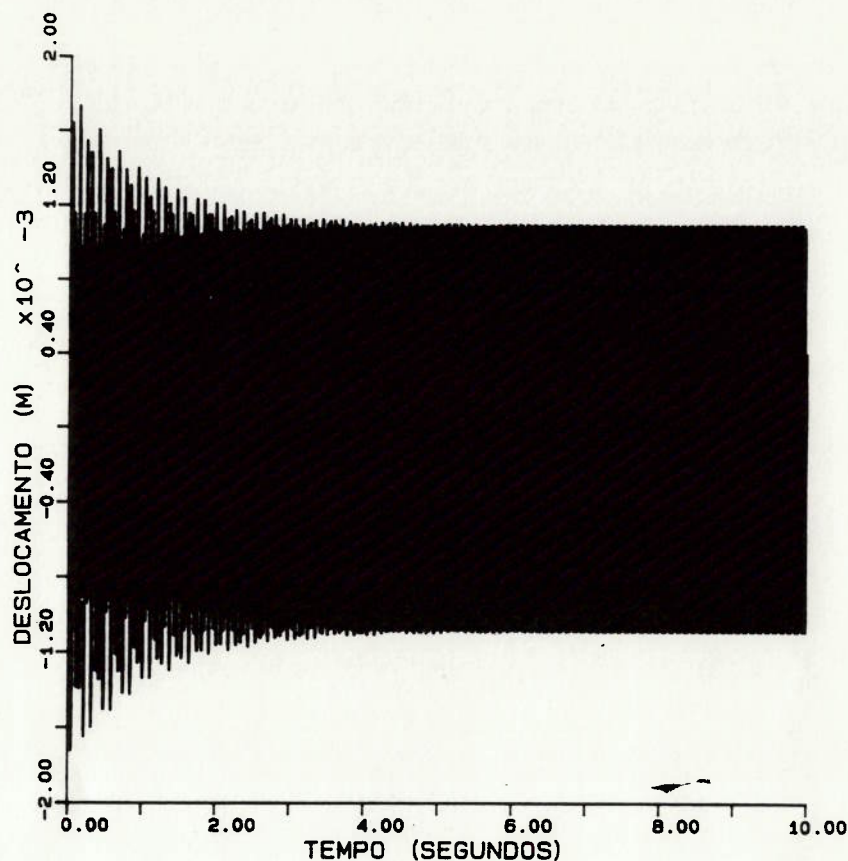


Fig.5.2. Resultado da simulação da condição de repouso até o regime permanente.

#### 5.2.1.1 AUSÊNCIA DE FALHA

Para testar a monitoração na ausência de falhas foi simulado o sistema em regime permanente durante o período de 1 segundo. A figura 5.3 mostra o deslocamento medido na direção X do mancal 1 (X1). Com a finalidade de avaliar o efeito do ruído de medida, um ruído com variância 0,0001 m, correspondente a aproximadamente 10% da amplitude dos sinais de saída, foi adicionado a este sinal. A resposta obtida é mostrada na figura 5.4.

As curvas de simulação em condição de ausência de falha (regime permanente) serão usadas para a seleção e análise dos parâmetros do filtro, na etapa de monitoração.

Notamos que, quando em regime permanente, o sinal no mancal é uma senoide perfeita, ligeiramente corrompida por um sinal aleatório, confirmando observações experimentais.

#### 5.2.1.2 FALHA TIPO DEGRAU

Foi simulada em seguida uma falha, alterando o valor das forças FR e FI durante o teste. Esta alteração se dá instantaneamente, após 0,3 segundos de simulação. A falha deste tipo é denominada tipo degrau representando uma alteração brusca nos valores de FR e FI. A força de desbalanceamento, neste caso, se altera rapidamente, como por exemplo, no caso da quebra de uma pá de uma turbina. A figura 5.5 ilustra este tipo de falha. Os efeitos desta alteração são mostrados na figura 5.6 onde já consideramos o ruído aditivo na medida. Também neste caso, a medida foi efetuada na direção X do mancal 1 (X1).

Para avaliar o efeito da amplitude da falha, um segundo caso deste tipo de falha foi simulado, com uma maior amplitude na falha, conforme o representado pela figura 5.7. A figura 5.8 mostra o efeito desta falha sobre o deslocamento X1.

Vemos que, após a falha, o sistema responde com uma alteração na amplitude de vibração e com o surgimento de uma oscilação transitória que se amortece lentamente. A frequência desta vibração corresponde à oscilação do eixo (1o modo = 18 Hz).

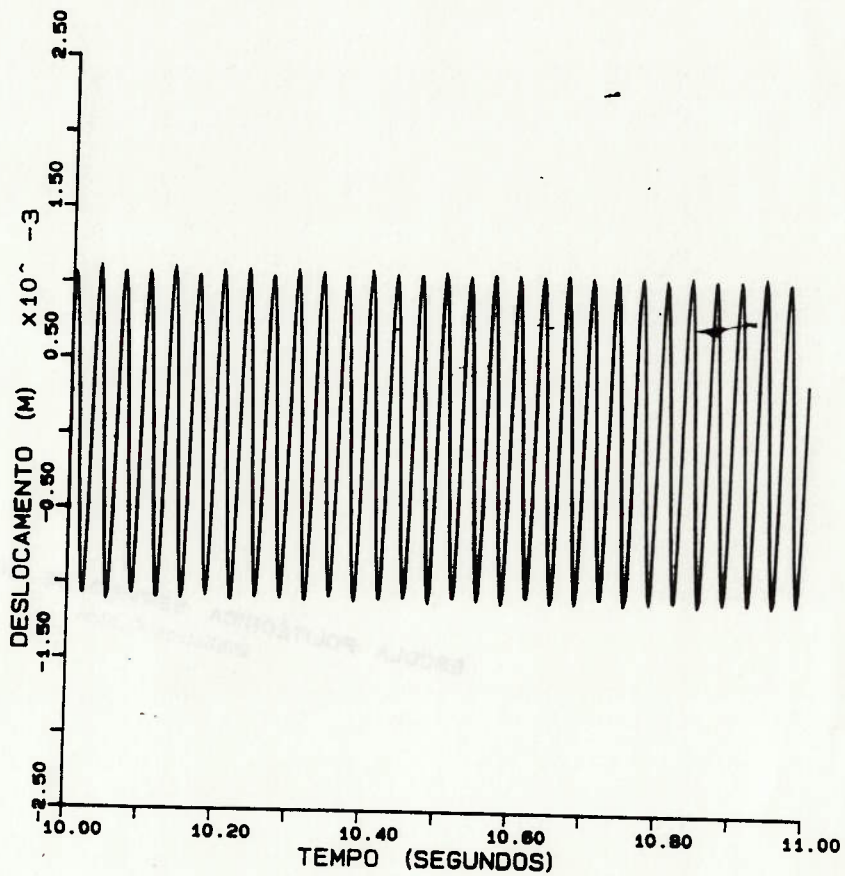


Fig.5.3 Simulação durante um segundo em regime permanente com ausência de ruído.

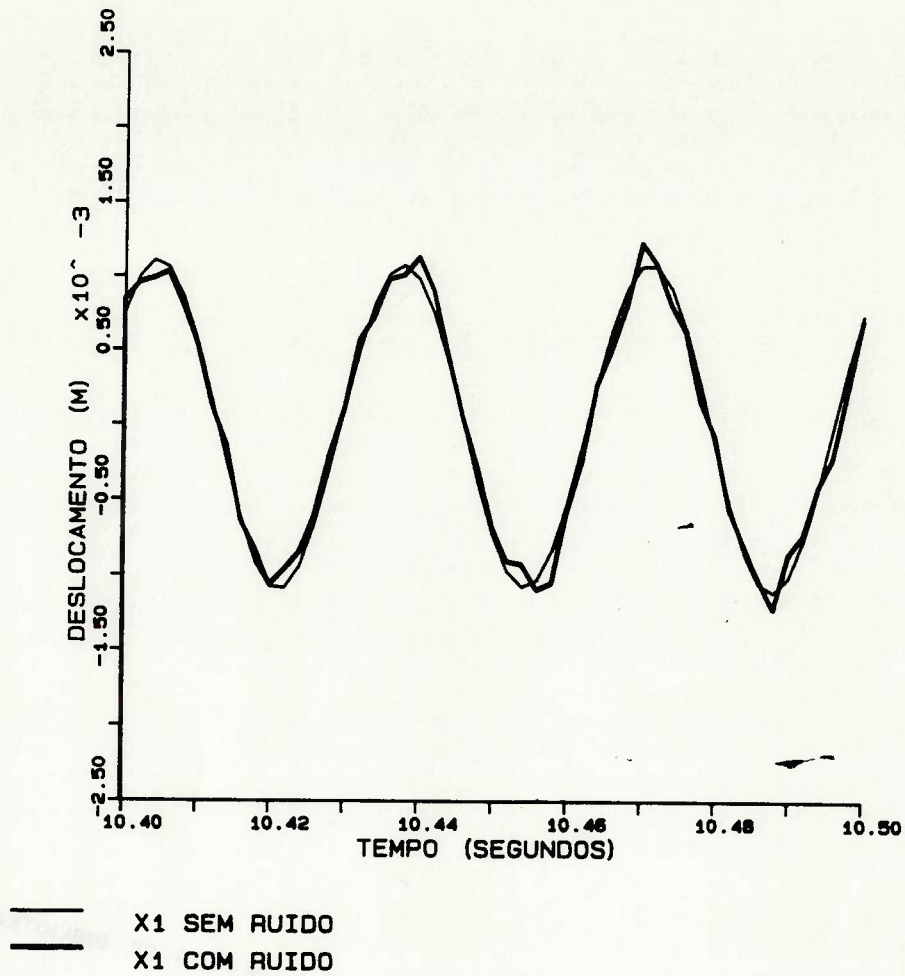


Fig.5.4 Comparação entre as respostas do sistema com e sem ruído.

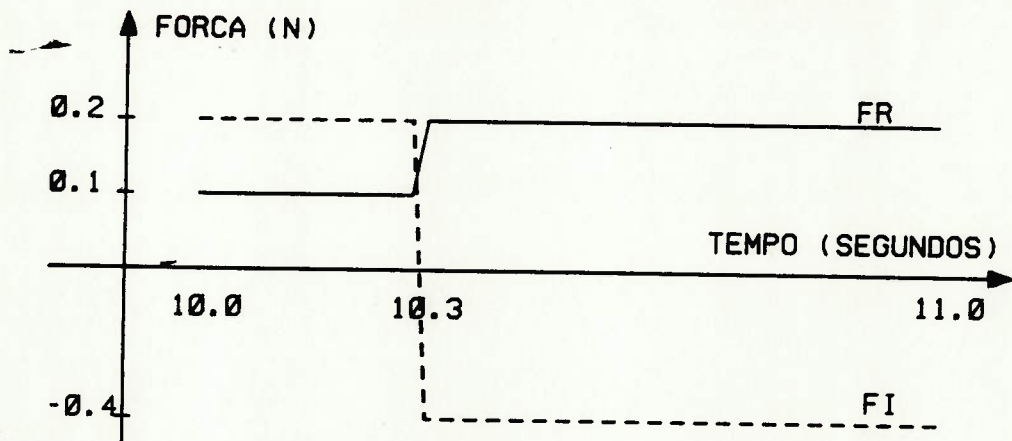


Fig.5.5 Representação das forças para a falha tipo degrau, caso I



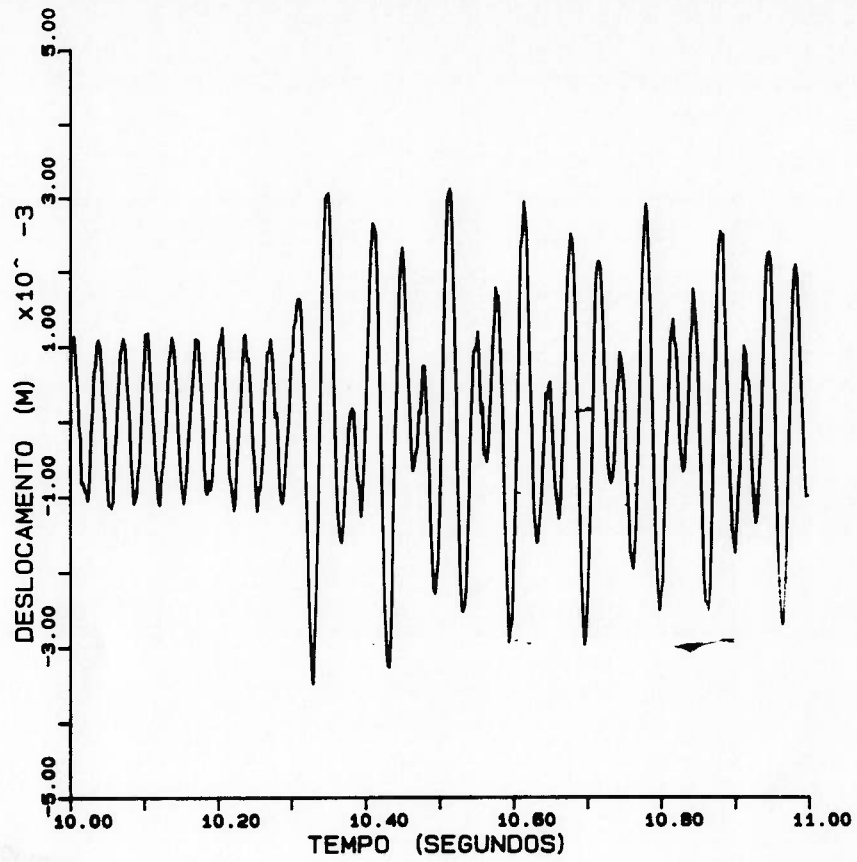


Fig.5.6 Sinal simulado para a falha tipo degrau, caso I

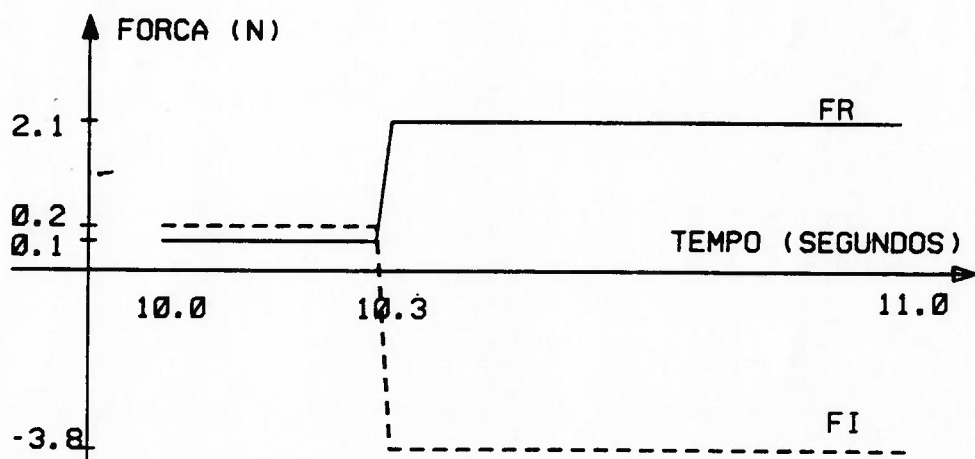


Fig 5.7 Representação das forças da falha tipo degrau, caso II

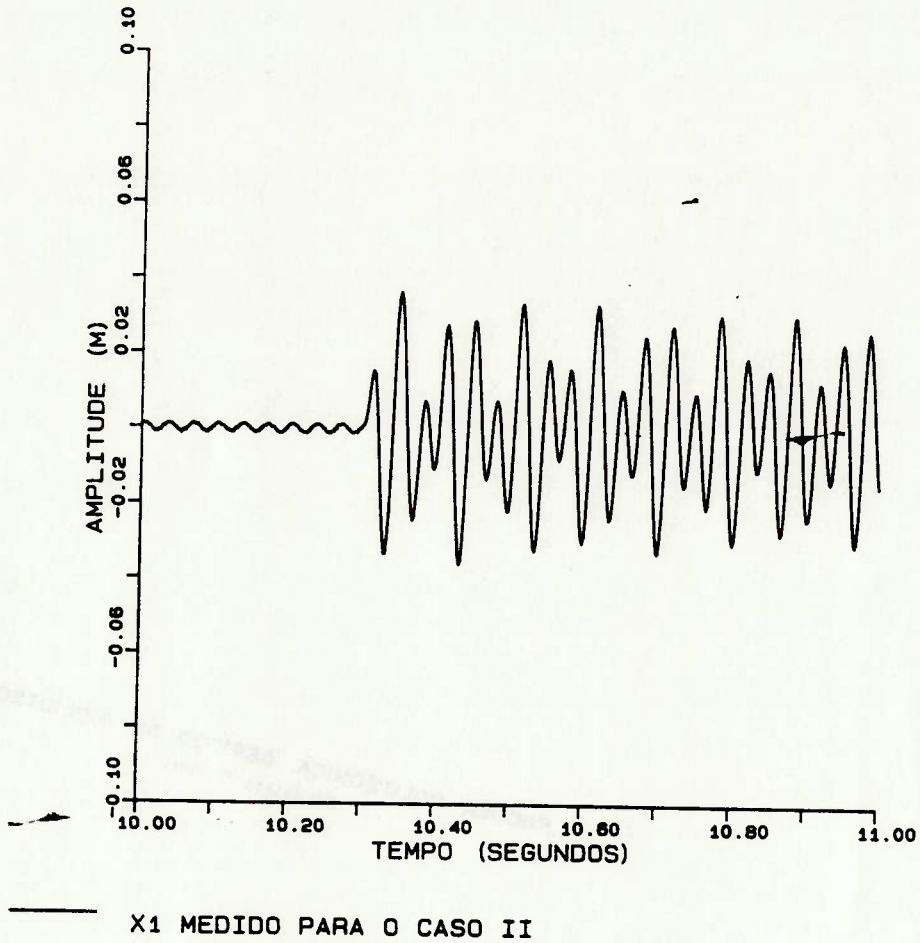


Fig.5.8 Resultado da simulação para a falha tipo degrau, caso II.

A tabela 5.1, resume os resultados da simulação encontrados antes e depois das falhas.

Variável	sem falha	caso I	caso II
Fr (N)	0,1	0,2	2,1
Fi (N)	0,2	-0,4	-3,8
X1 (max) (m)	1,0e-3	3,0E-3	3,5E-2

Tabela 5.1 Forças utilizadas para simular as falhas e amplitude de vibração resultante em X1

### 5.3 DESCRIÇÃO DO MODELO SIMPLIFICADO

A detecção da falha será feita através do filtro de Kalman. Para isto é necessário que se selecione um modelo matemático do sistema, que permita a estimativa do estado do sistema com base nas medidas efetuadas. O modelo adotado para esta finalidade é uma versão simplificada do modelo desenvolvido anteriormente.

#### 5.3.1 O MODELO SIMPLIFICADO

Como podemos observar, a resposta em regime permanente do sistema, quando a força de desbalanceamento é constante, é uma senoide. Mesmo quando ocorre uma falha, a resposta senoidal permanece, e é sobreposta à uma outra senoide no 1o modo (flexão do eixo) de vibração do modelo completo.

Devemos procurar representar, no modelo simplificado, apenas os fenômenos que nos interessam. Assim podemos nos concentrar no primeiro modo de vibração, que é o que surge quando da ocorrência de uma falha do tipo considerado. Para simplificar o modelo completo, reduzindo significativamente a sua ordem, representamos o sistema como um disco girando, apoiado em mancais flexíveis, como mostra a figura 5.9.

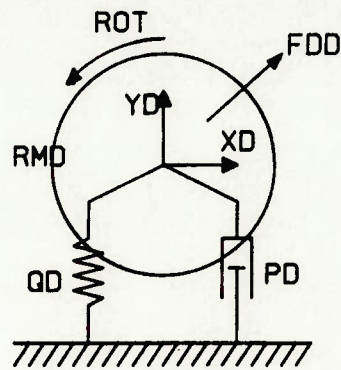


Fig.5.9 Esquema do modelo simplificado

Como este modelo é uma simplificação do modelo completo, podemos extrair sua formulação das equações matriciais para o modelo completo (2.1). Para isto eliminamos os termos em  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $C_D$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $B_D$ , mantendo apenas os termos em  $X_D$  e  $Y_D$ . Obten-se, portanto, as seguintes equações do movimento:

$$RMD \cdot XDPP + PD \cdot XDP + QD \cdot XD = FXD \quad (5.15)$$

$$RMD \cdot YDPP + PD \cdot YDP + QD \cdot YD = FYD$$

onde :

$$RMD = RM(2,2)$$

$$PD = RP(2,2)$$

$$QD = RQ(2,2)$$

(5.16)

A equação (5.15) pode ser colocada na forma matricial :

$$X = \begin{bmatrix} XD & YD & XDP & YDP \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-PD}{RMD} & 0 & \frac{-QD}{RMD} & 0 \\ 0 & \frac{-PD}{RMD} & 0 & \frac{-QD}{RMD} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$BD = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RMD} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RMD} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde FXD e FYD são dados por (5.6) e (5.7).

Como foi descrito no item 2.3.2, a falha considerada se refere a um desvio nas forças de excitação; assim, incluiremos estas forças como estado do sistema, resultando nas matrizes modificadas do modelo :

$$X_a = \begin{bmatrix} XD & YD & XDP & YDP & FR & FI \end{bmatrix}$$

$$A_{Da} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-PD}{RMD} & 0 & \frac{-QD}{RMD} & 0 & \frac{\cos(2\pi \cdot ROT \cdot t)}{RMD} & \frac{-\sin(2\pi \cdot ROT \cdot T)}{RMD} \\ 0 & \frac{-PD}{RMD} & 0 & \frac{-QD}{RMD} & \frac{\sin(2\pi \cdot ROT \cdot T)}{RMD} & \frac{\cos(2\pi \cdot ROT \cdot T)}{RMD} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{Da} = 0 \quad (5.22)$$

$$C_{Da} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\text{onde } X_{aP} = A_{Da} * X_a \quad (5.24)$$

Temos adicionalmente a seguinte equação de medidas :

$$Y_k = C_{Da} * X_a + W_k \quad (5.25)$$

em que  $W_k$  representa o vetor de ruídos aleatórios, e  $Y_k$  são as medidas nos instantes discretos  $t_k$ .

### 5.3.2 ANÁLISE DO MODELO SIMPLIFICADO

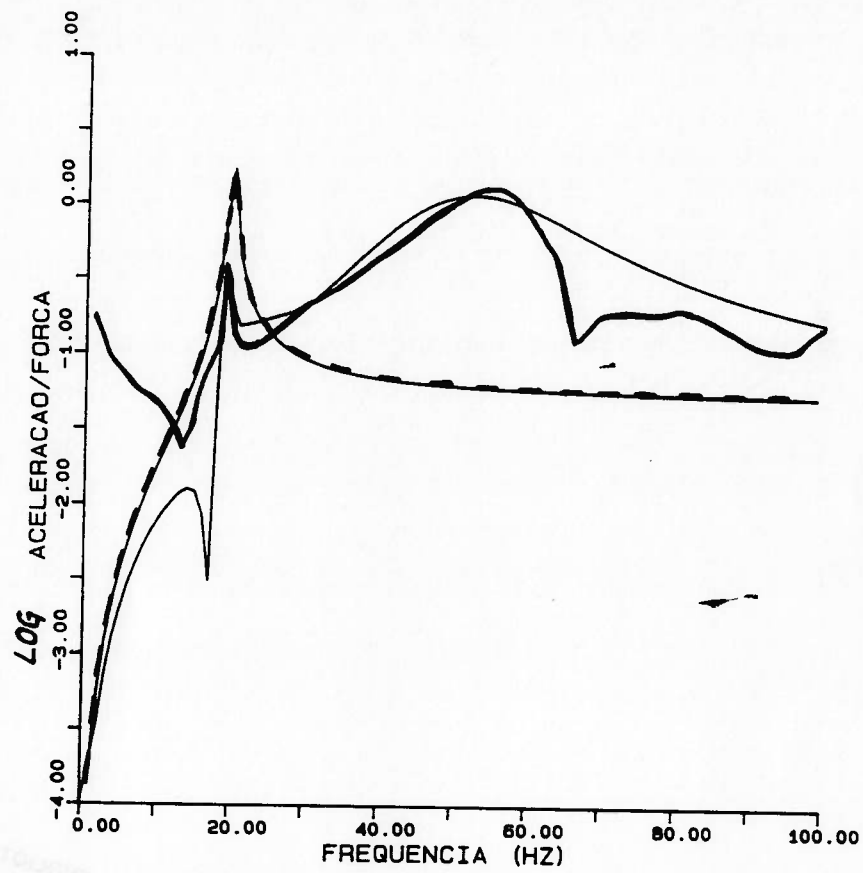
Vamos analisar o comportamento dinâmico do modelo simplificado; para isto adotaremos os mesmos valores numéricos identificados para as matrizes do modelo completo:

$$\begin{aligned} RMD &= 19,0 \text{ Kg} \\ QD &= 2,34 \text{ N/(m/s)} \\ PD &= 2,91 \text{ E5 N/m} \end{aligned} \quad (5.26)$$

como dados nas equações 5.16 e nas matrizes 4.29 a 4.31.

O cálculo de autovalores deste modelo revelou que a frequência natural para este modelo é de 19,7 Hz, que se situa próxima da primeira frequência do modelo completo, com um desvio de 5%.

As respostas em frequência dos dois modelos também são semelhantes, especialmente na faixa do 1o modo, que é a região de interesse, como mostra a figura 5.10. Aí apresentamos novamente a resposta experimental, comparada com a resposta analítica do modelo completo e do modelo simplificado, todas elas medidas no mancal 1, direção X (X1), em relação a uma força aplicada na direção X do mancal 2 (FX2).



--- XD MODELO SIMPLIFICADO  
— X1 EXPERIMENTAL  
— X1 MODELO COMPLETO

Fig.5.10 Comparação de respostas em frequência nos modelos



## 5.3.3. VERIFICAÇÃO DA OBSERVABILIDADE

Podemos efetuar a verificação da observabilidade do sistema simplificado, desprezando no momento, o caráter estocástico do problema, através do critério exposto em 2.4. A matriz A usada neste cálculo foi tomada em um instante genérico ( $t=0,005$ ), obtendo-se :

$$A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,52E4 & 0,0 & -1,2E-1 & 0,0 & 3,2E-2 & -4,2E-2 \\ 0,0 & -1,52E4 & 0,0 & -1,2E-1 & 4,2E-2 & 3,2E-2 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

e a matriz C usada foi :

$$C = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

A matriz de observabilidade resultante é:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,53E+4 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,53E+4 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & -1,23E-1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & -1,23E-1 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3,20E-2 & 4,20E-2 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -4,20E-2 & 3,20E-2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

cujo posto é 6, mostrando que o sistema é totalmente observável. Este critério de observabilidade não pode ser conclusivo em um sistema estocástico. Ele permitiria apenas verificar uma possível não observabilidade, e conseqüente inviabilidade do método, se acaso o sistema determinístico não fosse observável.

#### 5.4 RESULTADOS DA MONITORAÇÃO

Para realizar a monitoração das forças de desbalanceamento, foi desenvolvido um programa (KALMAN) que implementa o filtro descrito no item 2.5.3. Este programa recebe como dados de entrada :

- a) o modelo matemático do problema,
- b) o sinal medido (simulado) em instantes discretos,
- c) a matriz de covariância dos ruídos  $Q$  e  $R$ , e
- d) o estado no instante inicial ( $X_0$ ) e sua covariância  $P_0$ .

Inicialmente é selecionado um conjunto de parâmetros para o filtro através da aplicação do programa para os casos simulados na seção 5.3.

##### 5.4.1 SELEÇÃO DOS PARÂMETROS DO FILTRO

Vamos selecionar um conjunto de parâmetros para o filtro. O filtro deve ser suficientemente robusto para se adaptar a uma condição de falha desconhecida, para ter uma utilidade prática. Nesta fase de seleção de parâmetros, trabalharemos apenas com o sinal simulado para regime permanente (ausência de falhas).

Os parâmetros que devemos estimar para a operação do filtro são:

## 4.3.1.2 CURVAS OBTIDAS

As curvas de amplitude da função de transferência de aceleração obtidas são mostradas na figura 4.9.

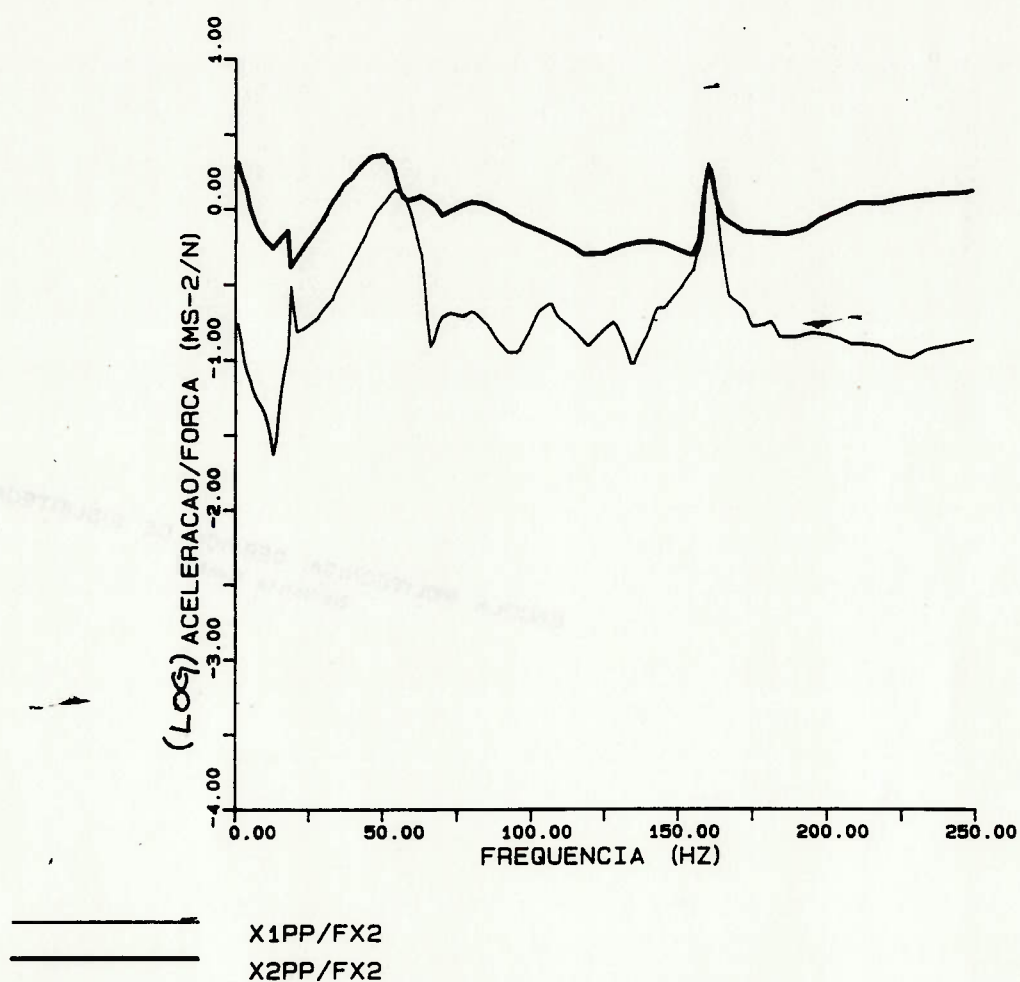


Fig.4.9. Resposta da função de transferência experimental

## 4.3.1.3 MODOS DE VIBRACAO ENCONTRADOS

A análise das curvas mostra que, na faixa de frequências estudada, existem 4 modos principais de vibração. A cada modo temos uma frequência natural associada.

O primeiro modo tem frequência próxima a 18,0 Hz e aparece bem definido nos mancais e principalmente no disco. O segundo e o terceiro modo tem frequências próximas de 51 e 56 Hz e são predominantes nos mancais 1 e 2, respectivamente. O disco não é muito afetado por este modo. O quarto e último modo corresponde à flexão do disco; ele apresenta um frequência de aproximadamente 164 Hz e faz com que o disco oscile em rotação no eixo y, aparecendo com destaque na curva de X2PP/FCD.

A Figura 4.9 também mostra os 4 modos encontrados, e a tabela 4.1 abaixo resume estes resultados:

modo	W(Hz)	X1	XD	CD	X2
1	18,0	baixa	alta	----	baixa
2	51,6	alta	----	----	baixa
3	56,1	baixa	----	----	alta
4	164,0	----	----	alta	----

Tabela 4.1. Frequências e Modos de Vibração Obtidos de Ensaio

Não pudemos levantar numericamente as curvas dos modos de vibração dadas as dificuldades de interpretação dos resultados.

## 4.3.2 PARÂMETROS GEOMÉTRICOS

Algumas grandezas do modelo puderam ser obtidas diretamente por medição, tabelas ou formulações simplificadas. Assim temos que:

$$L1 = 0,20 \text{ m} \qquad L2 = 0,25 \text{ m}$$

$$RD = 0,05 \text{ m}$$

$$E = 2,11E+11 \text{ Kg/m}^2$$

Ainda podemos estimar aproximadamente, com base na figura 4.2 e 4.3, os valores de :

$$M1 = 0,40 \text{ Kg}$$

$$M2 = 0,40 \text{ Kg}$$

$$MD = 4,0 \text{ Kg}$$

$$JD = 1,73E-3 \text{ Kg*m}^2$$

$$I = 4,91E-10 \text{ m}^4$$

Pelas equações 4.11 e 4.12 temos ainda que :

$$KXX1 = 1,554E+5 \text{ N/m} \qquad KXX2 = 7,957E+4 \text{ N/m}$$

$$KXA1 = 1,554E+4 \text{ N/rad} \qquad KXA2 = 9,946E+3 \text{ N/rad}$$

$$KAA1 = 1,036E+3 \text{ N*m/rad} \qquad KAA2 = 8,288E+2 \text{ N*m/rad}$$

Assim, como primeira aproximação, a matriz de massa calculada teoricamente será :

$$RM = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,69 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,40 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

#### 4.3.3 AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DOS MANCAIS

Vamos estimar a rigidez dos mancais 1 e 2 representadas pelas constantes de mola K1 e K2, respectivamente. Como vimos na análise dos resultados experimentais, os dois mancais possuem modos de vibração muito bem definidos, nas frequências de 51,6 Hz e 56,1 Hz. Nestas frequências os mancais vibram como um sistema de um grau de liberdade, praticamente desacoplados dos demais elementos. Admitindo válida esta hipótese de desacoplamento dos graus de liberdade, podemos expressar a frequência natural destes dois modos, como a frequência natural de um sistema de um grau de liberdade, ou seja :

$$w = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.18)$$

deste modo, a constante de mola k pode ser calculada por :

$$k = m*(2\pi*w)^2 \quad (4.19)$$

para o mancal 1 , com

$$M1 = 0,4 \text{ Kg}$$

$$W1 = 51,6 \text{ Hz}$$

resulta

$$K1 = 4,9E+4 \text{ N/m}$$

e para o mancal 2 temos analogamente

$$M2 = 0,4 \text{ Kg}$$

$$W2 = 56,1 \text{ Hz}$$

que resulta

$$K2 = 4,2E+4 \text{ N/m}$$

Estes valores serão usados como uma aproximação da rigidez nos mancais, devida principalmente aos coxins de borracha. A matriz de rigidez do sistema fica então :

$$RQ = \begin{bmatrix} 8,78E4 & -3,89E4 & 1,55E5 & 0,00 \\ -3,89E4 & 2,91E5 & -5,59E4 & -1,99E4 \\ 1,55E5 & -5,59E4 & 1,12E6 & -9,94E4 \\ 0,00 & -1,99E4 & -9,94E4 & 6,19E4 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

#### 4.3.4 AVALIAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

Temos até aqui uma primeira aproximação das matrizes de massa e rigidez. Com estes valores é possível estimar as frequências naturais e os modos naturais de vibração (autovalores e autovetores) do modelo enquanto sistema conservativo, e realizar uma primeira comparação com os valores experimentais. Isto é feito na tabela 4.2, gerada pelo programa ADS, de cálculo de autovalores de sistemas mecânicos/8/.

- X0 .... Estado inicial do modelo,  
 P0 .... Covariância do estado inicial,  
 Q ..... Covariância do ruído do sistema, e  
 R ..... Covariância do ruído na saída do sistema.

Cada termo da diagonal da matriz de covariância pode ser entendido como o quadrado do desvio padrão /19/, e portanto como o quadrado do desvio admitido para as respectivas variáveis.

Como não temos critérios para analisar uma covariância cruzada entre duas variáveis do sistema, e também como é prática corrente no trabalho com o filtro, as matrizes de covariância são supostas diagonais, na forma :

$$Q = \begin{bmatrix} q_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{xp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{xp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{xp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{xp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_f \end{bmatrix} \quad (5.31)$$



onde

$q_x$  é a covariância para o ruído dos deslocamentos (XD e YD);

$q_{xp}$  é a covariância para o ruído das velocidades (XDP e YDP);

$q_f$  é a covariância para o ruído das forças (FR e FI);

$r$  é a covariância para o ruído das saídas (XD e YD);

$p_x$  é o valor inicial da covariância do erro de estimação dos deslocamentos (XD e YD);

$p_{xp}$  é o valor inicial da covariância do erro de estimação das velocidades (XDP e YDP);

$p_f$  é o valor inicial da covariância do erro de estimação das forças (XD e YD).

Durante a descrição do filtro vimos que a covariância do estado (P) é atualizada para acompanhar a estimação do estado (X), através das equações de correção da estimativa (2.33) e (2.34); assim qualquer que seja o valor dado a  $P_0$ , e a  $X_0$ , o próprio filtro irá se encarregar de ajustá-los a valores mais convenientes. Se as estimativas iniciais forem próximas, sem dúvida a convergência será mais rápida. Em nosso estudo, já conhecemos o valor inicial de  $X_0$  para o deslocamento e a velocidade, que são os mesmos do resultado da simulação até o regime permanente. Porém nada sabemos da força de desbalanceamento, assim tomaremos o seguinte estado inicial :

$$\begin{aligned}
 X_0(1) &= XD = 2,8E-4 \text{ m} \\
 X_0(2) &= YD = -1,3E-3 \text{ m} \\
 X_0(3) &= XDP = 1,1E-1 \text{ m} && (5.32) \\
 X_0(4) &= YDP = -4,4E-2 \text{ m} \\
 X_0(5) &= FR = 0,0 \text{ N} \\
 X_0(6) &= FI = 0,0 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Para a covariância, devemos lembrar que ela mede o erro que julgamos ter nos valores estimados de  $X_0$ ; assim tomaremos inicialmente :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1E-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1E-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1E-10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1E-10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & pf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pf \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

A covariância do ruído da saída  $r$  pode ser dada pelo nível de ruído esperada nas medidas. No nosso caso adotamos o valor do ruído adicionado durante a simulação ficando então:

$$R = \begin{bmatrix} 1E-10 & 0 \\ 0 & 1E-10 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Desta forma precisam ser selecionados os valores de dois elementos da matriz  $P_0$  ( $pf$ ) e de todos os termos da matriz  $Q$ . Nesta etapa iremos apenas apresentar os resultados obtidos na monitoração, deixando a seleção para a seção 5.4.3.

#### 5.4.1.1 INFLUÊNCIA DA MATRIZ DE RUÍDO DINÂMICO $Q$

No caso da covariância  $Q$  do sistema, devemos ter um valor baixo para não haver uma grande perda na informação a cada propagação e conseqüentemente divergência no filtro. Porém,  $Q$  deve ser

suficientemente alto para garantir que o filtro acompanhe a variação nos sinais, especialmente na variável da força ( $q_f$ ). Tomaremos então :  $q_x = 1E-8$ , e variaremos  $q_f$  entre 10 e 1000. Nesta fase arbitramos  $pf=1$  e  $qx_p=0$ .

Aplicando o programa KALMAN com estes parâmetros, podemos analisar a monitoração das forças (FR e FI), obtendo os resultados das figuras 5.11 e 5.12, nos casos sem e com ruído, respectivamente. Vemos que o melhor resultado é obtido para o valor de  $q_f=100$ , pois não apresentou uma resposta muito lenta ou rápida a ponto de apresentar oscilações no resultado. As covariâncias destas forças  $P(5,5)$  podem ser analisadas na figura 5.13 onde vemos que os valores se estabilizam em patamares proporcionais aos valores dados à Q.

#### 5.4.1.2 INFLUÊNCIA DO VALOR INICIAL DA COVARIÂNCIA DO ERRO DE ESTIMAÇÃO, $P_0$

Para avaliar o efeito do valor inicial da covariância do estado (P) foi processado um novo caso onde se adotou inicialmente  $pf=10$ . A comparação dos resultados deste caso com aquele em que  $pf=1$  no início, está mostrada na figura 5.14, para a estimação da força, e na figura 5.15 para a evolução da covariância associada à força ( $pf$ ). Vemos que, independentemente do seu valor inicial, a covariância tende ao mesmo valor com o passar do tempo. Desta forma, continuaremos a utilizar  $pf=1$ , que resulta em menor nível de oscilações na estimação da força e, portanto, melhor sensibilidade do filtro.

A figura 5.16 mostra uma comparação entre o sinal medido e o sinal filtrado d deslocamento X1. O sinal filtrado se encaixa rapidamente com o sinal medido, reduzindo o erro de estimativa (monitoração). Este erro está mostrado em detalhes na figura 5.17.

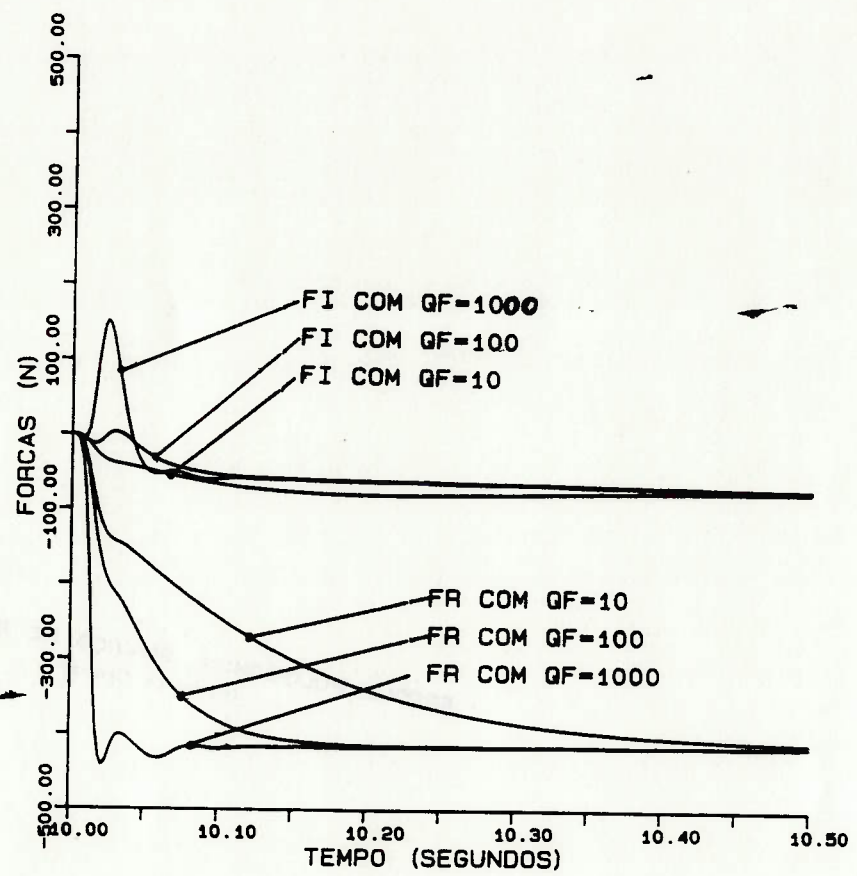


Fig.5.11 Estimação das forças sem ruído com GF = 10, 100 e 1000.

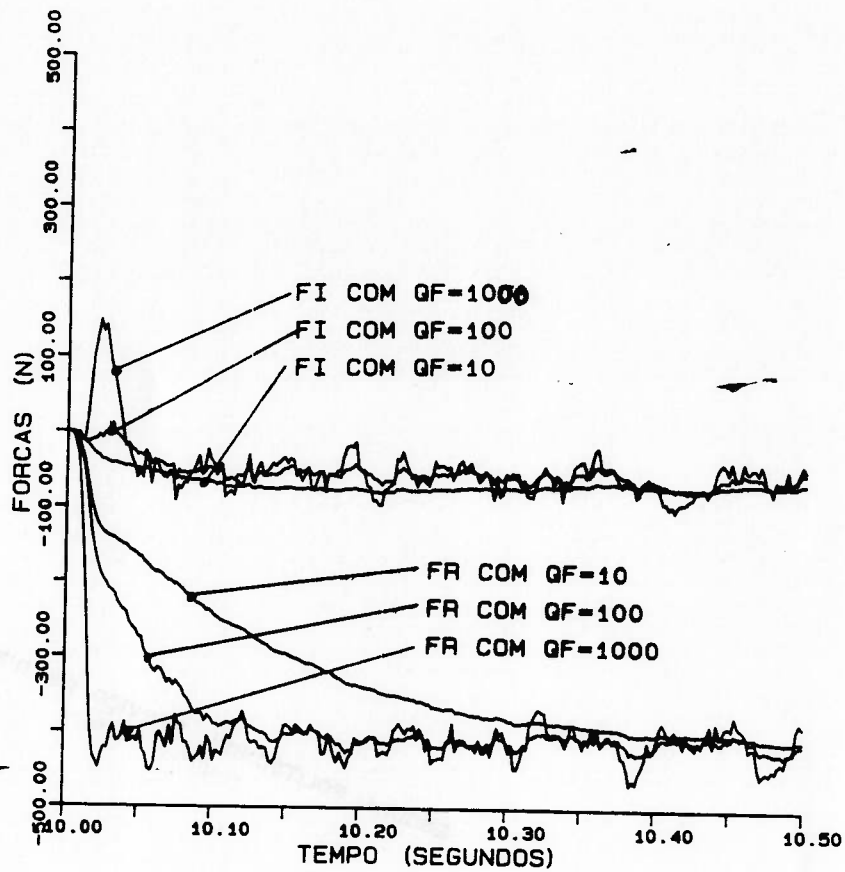


Fig. 5.12 Estimativa: Forças com ruído para  $q_f = 10, 100$  e  $1000$

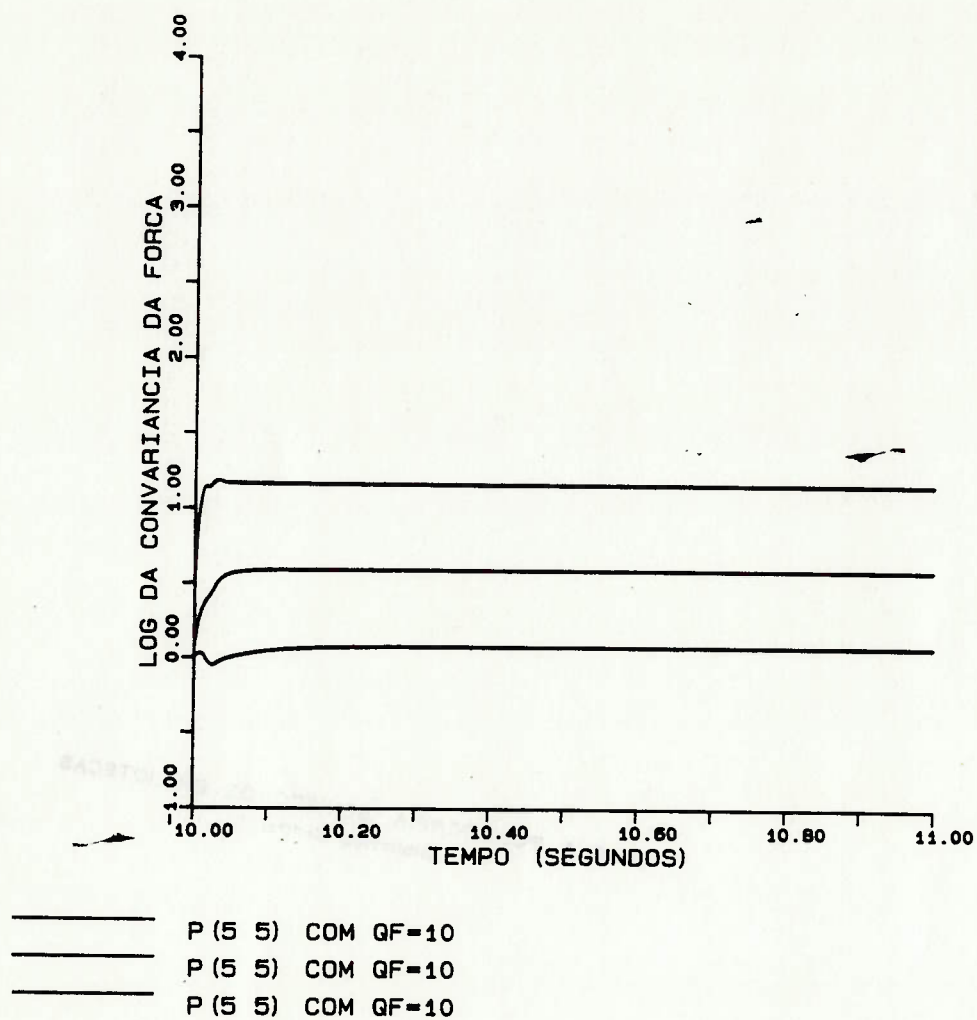
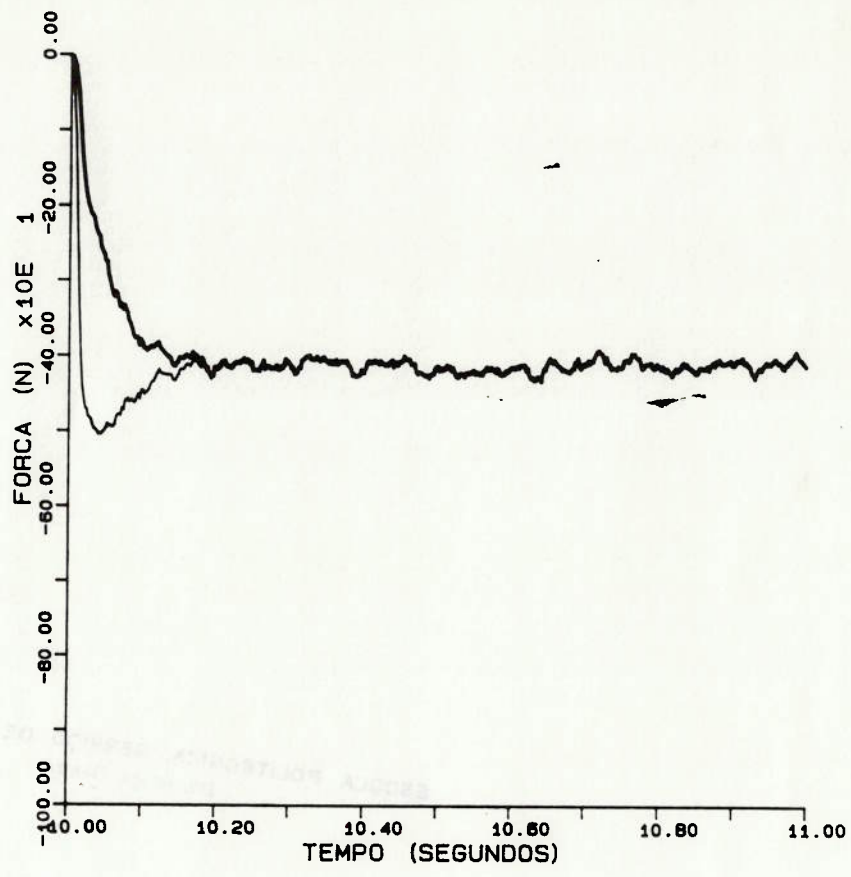


Fig.5.13 Análise de P(5,5) com a variação de  $\theta$



——— FR COM PF=10  
 ——— FR COM PF=1

Fig. 0.14 Efeito do valor inicial de  $\mu$  sobre a estimação de FR

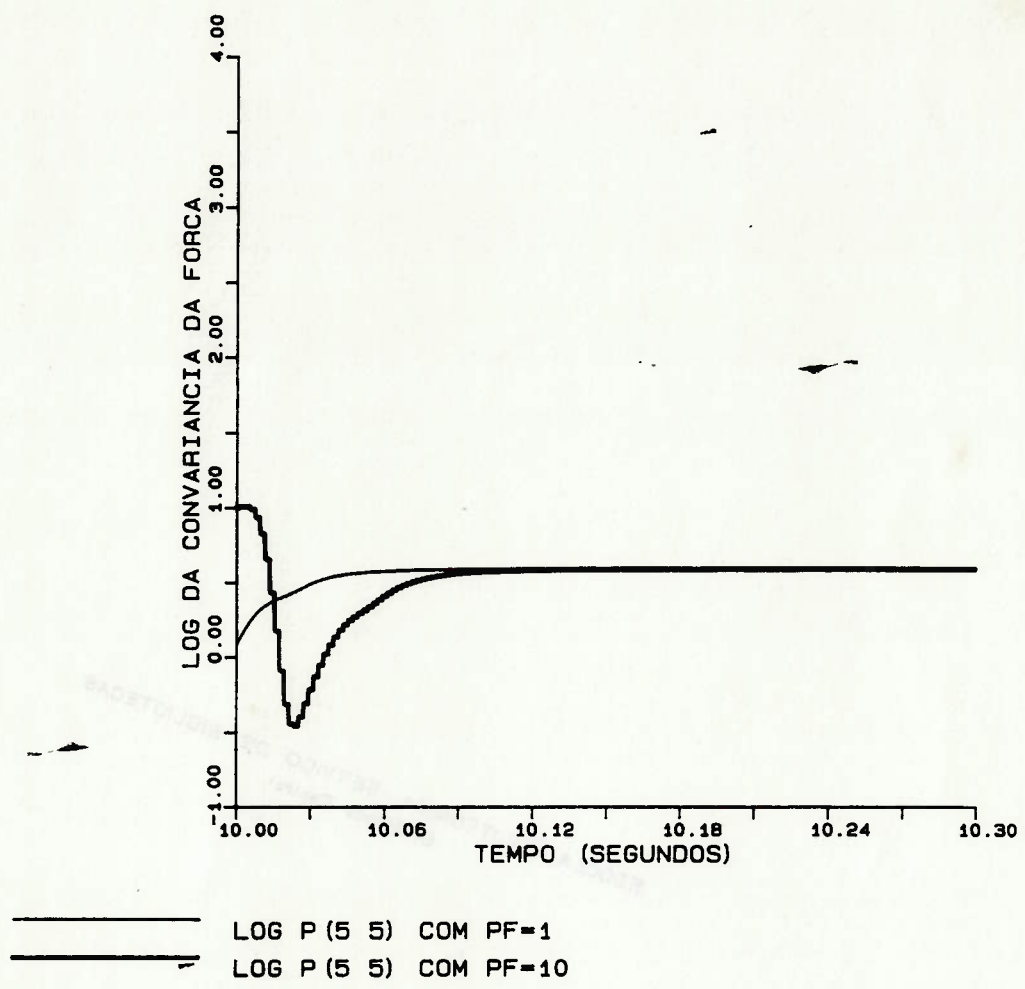
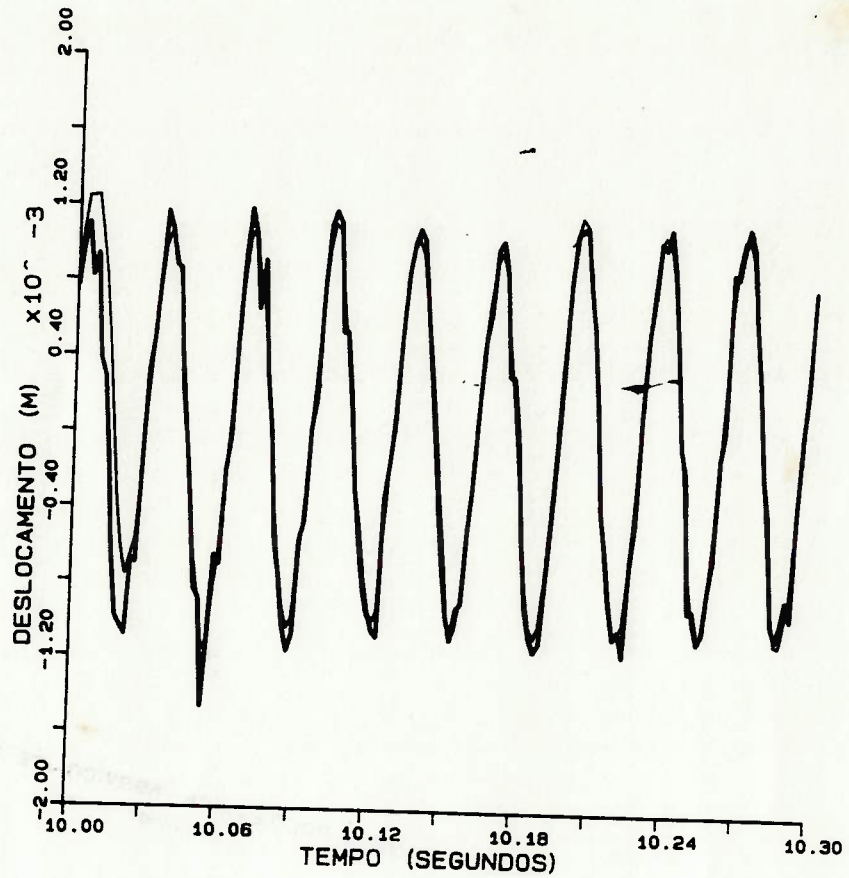


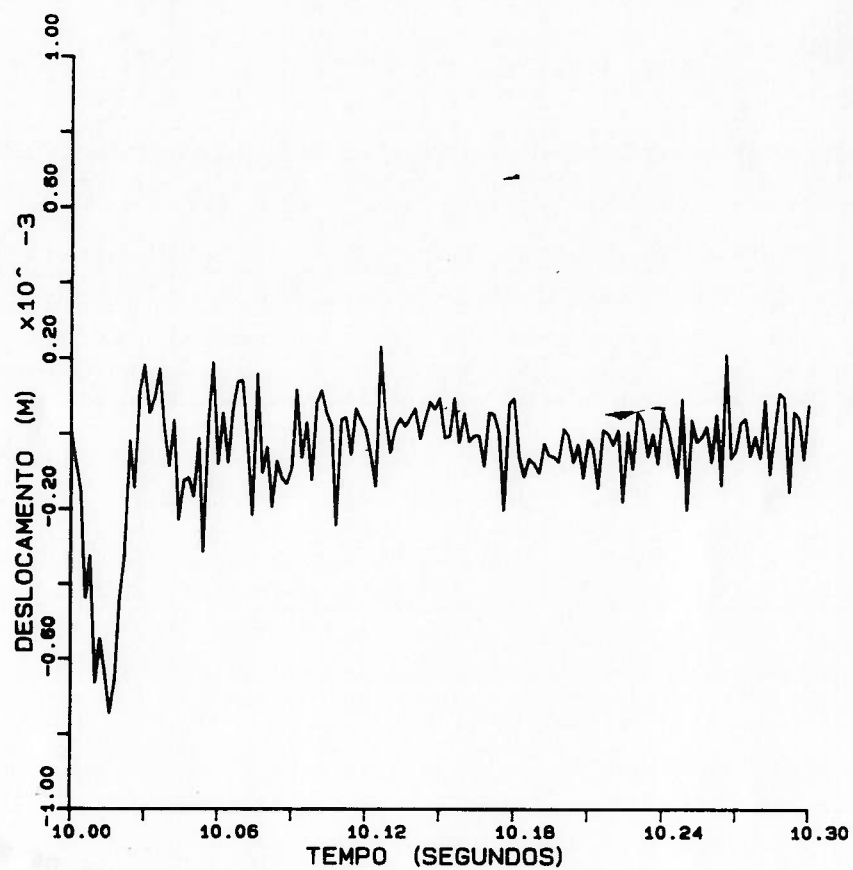
Fig. 4.13 Efeito do valor inicial de pf sobre P(5,5).





==== X1 FILTRADO  
==== X1 MEDIDO

Fig. 5.18 Comparação entre o sinal medido e o sinal filtrado.



ERRO ( $Y_1 - X_1$ )

Fig. 5.17 Erro de estimação do deslocamento.

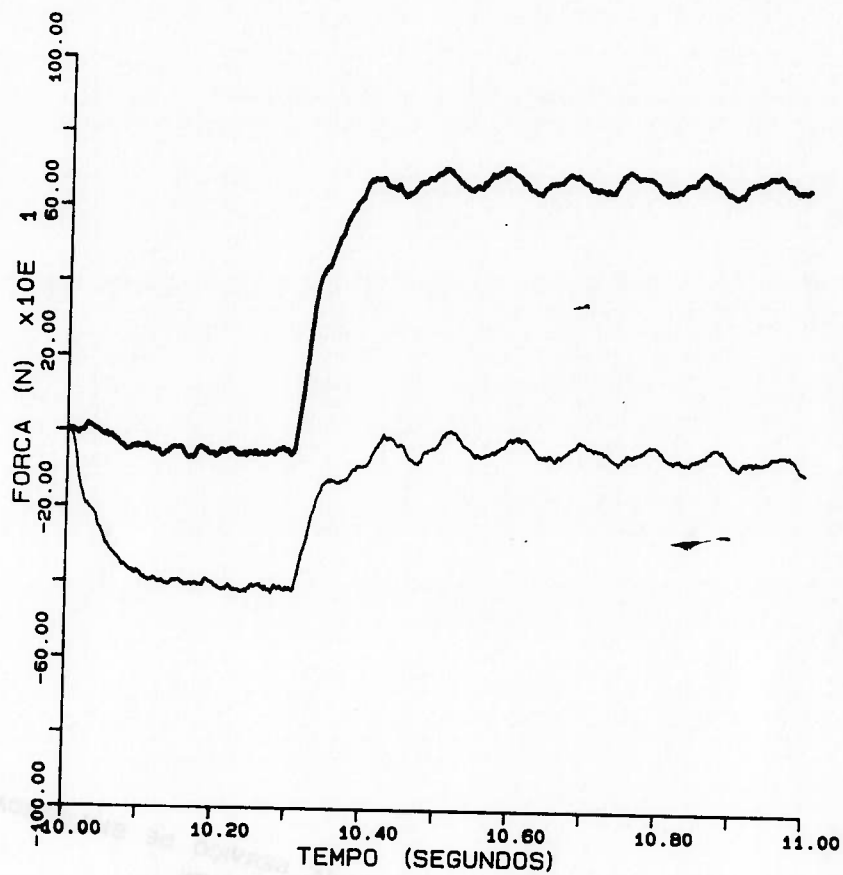
#### 5.4.2 RESULTADOS PARA A FALHA TIPO DEGRAU

Uma vez selecionados os parâmetros do filtro, ele será aplicado para detectar uma falha tipo degrau simulada como mostrada na figura 5.6. A figura 5.18 ilustra o resultado obtido para as estimativas de força FR e FI, indicando a ocorrência de uma alteração brusca no instante  $t=10,3$  seg como era esperado.

A figura 5.19 de comparação entre o deslocamento estimado e o medido, mostra que no instante da ocorrência da falha o sinal estimado se afasta momentaneamente do medido, para voltar a acompanhá-lo logo a seguir. Isto provoca uma alteração no erro de medição, como mostra a figura 5.20.

No instante final da monitoração, a matriz de covariância obtida (P2) foi :

$$\begin{bmatrix} 3,5E-11 & -1,3E-27 & -4,1E-10 & 3,8E-10 & -2,8E-6 & -2,2E-6 \\ 7,0E-28 & 3,5E-11 & -3,8E-10 & -4,1E-10 & 2,2E-6 & -2,8E-6 \\ -4,1E-10 & -3,8E-10 & 5,8E-7 & -9,1E-23 & -1,2E-3 & 3,2E-4 \\ 3,8E-10 & -4,1E-10 & -5,0E-23 & 5,8E-7 & -3,2E-4 & -1,2E-3 \\ -2,8E-6 & 2,2E-6 & -1,2E-3 & -3,2E-4 & 3,9E0 & 1,5E-16 \\ -2,2E-6 & -2,8E-6 & 3,2E-4 & -1,2E-3 & -1,3E-16 & 3,9E0 \end{bmatrix}$$



— FR MONITORADA NO CASO I  
— FI MONITORADA NO CASO I

Fig.5.18 Resultado da estimação da força para a falha tipo degrau,  
caso I

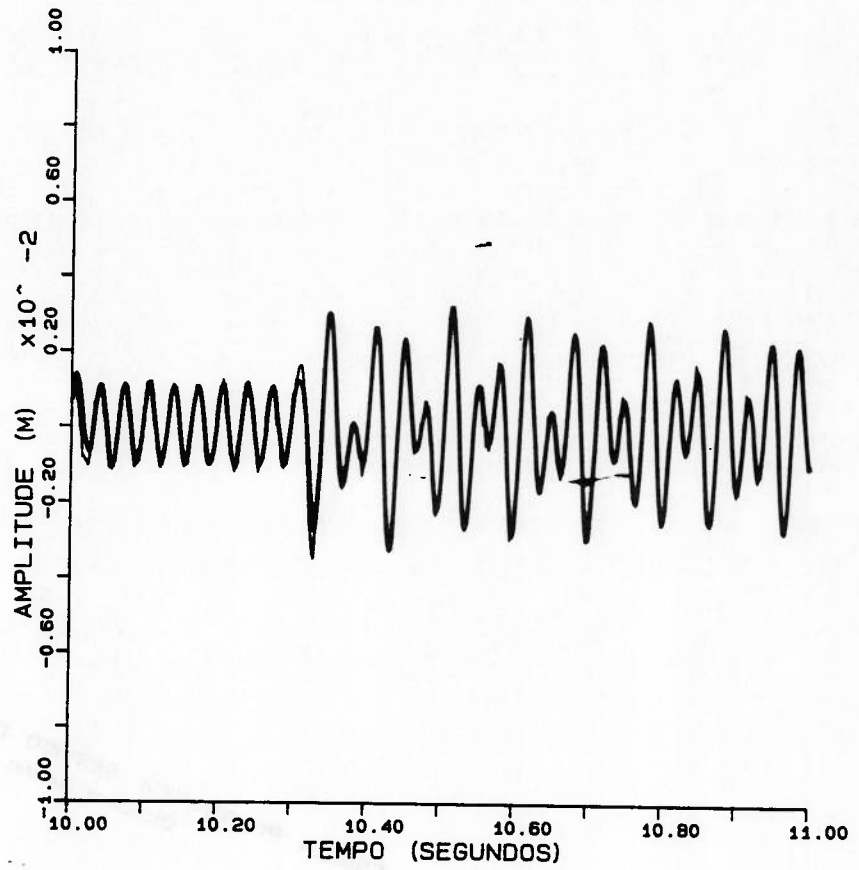
e a matriz de ganhos de Kalman (K) ficou :

$$\begin{bmatrix} 3,5E-1 & -1,3E-17 \\ 7,0E-18 & 3,5E-1 \\ -4,1 & -3,8 \\ 3,8 & -4,1 \\ -2,8E4 & 2,2E4 \\ -2,2E4 & -2,8E4 \end{bmatrix}$$

A estimação das forças indicou no instante exato da ocorrência da falha pela alteração brusca de seus valores (Fig.18). Houve um desvio entre os resultados estimados e os valores fornecidos durante a simulação ao modelo completo. Isto se deve à simplificação sofrida pelo modelo que será analisada em detalhe na sub-seção 5.4.3.

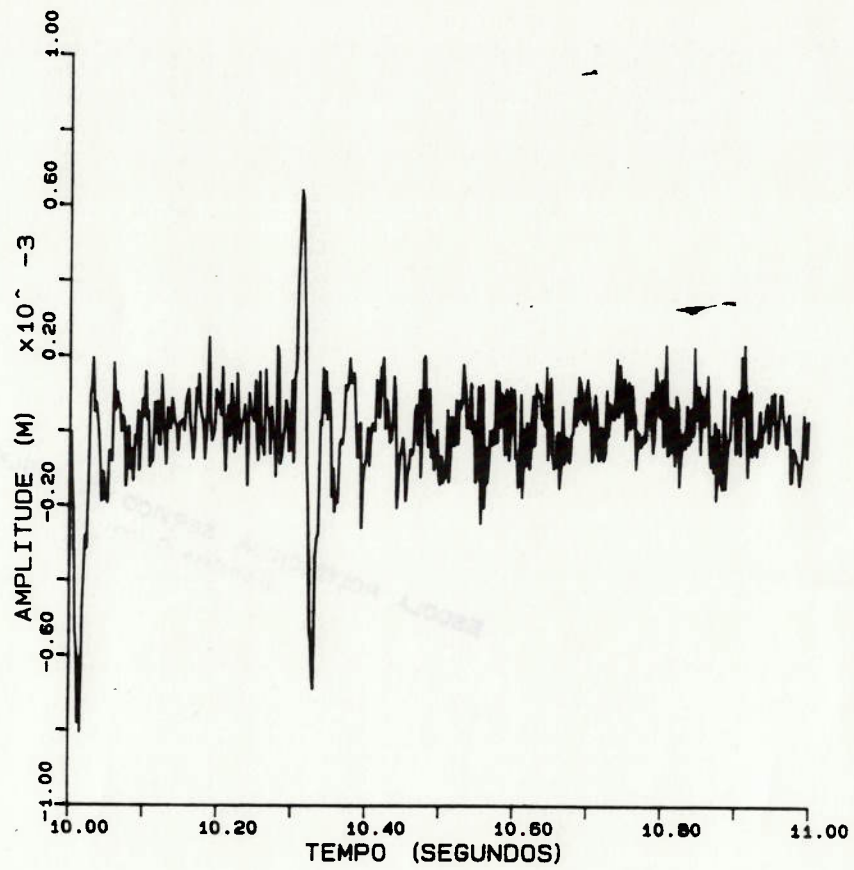
Para se verificar a linearidade do resultado quando da variação do nível da falha foi simulado um novo caso com uma falha de maior magnitude. A figura 5.21 mostra a força estimada. O sinal usado como medida já foi mostrado na figura 5.8 e é o resultado obtido para o mancal 1 na simulação. A comparação entre o sinal medido e o sinal filtrado é apresentado na figura 5.22 e o erro, diferença entre estes sinais na figura 5.23.

A seção seguinte apresenta uma análise em detalhe dos resultados aqui obtidos.



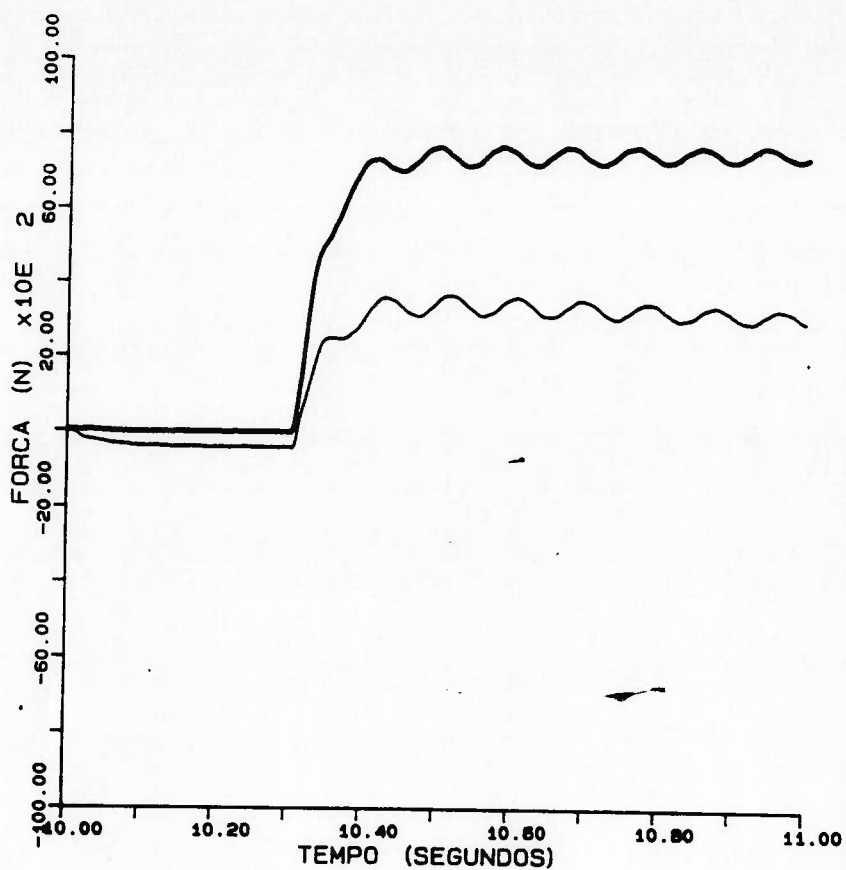
— X1 MEDIDO PARA O CASO I  
- - - XD MONITORADA NO CASO I

Fig.5.19 Comparação entre o sinal XD medido e monitorado.



(Y1-X1) ERRO NO CASO I

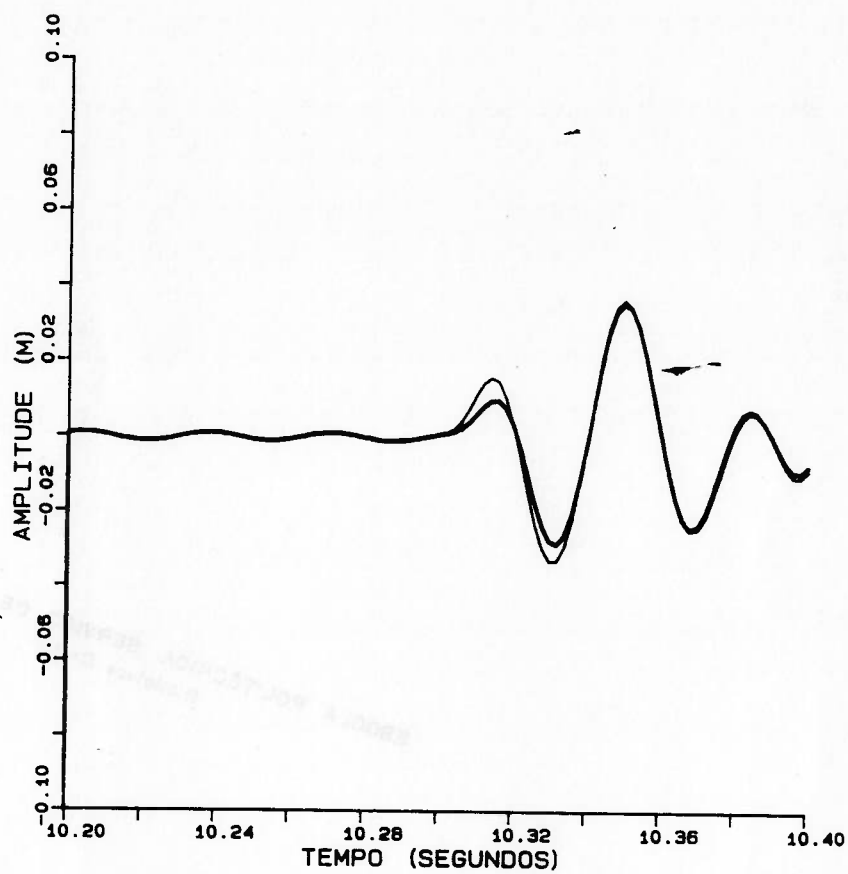
Fig.5.20 Erro de medição para o degrau no caso I



FR MONITORADA NO CASO II  
FI MONITORADA NO CASO II

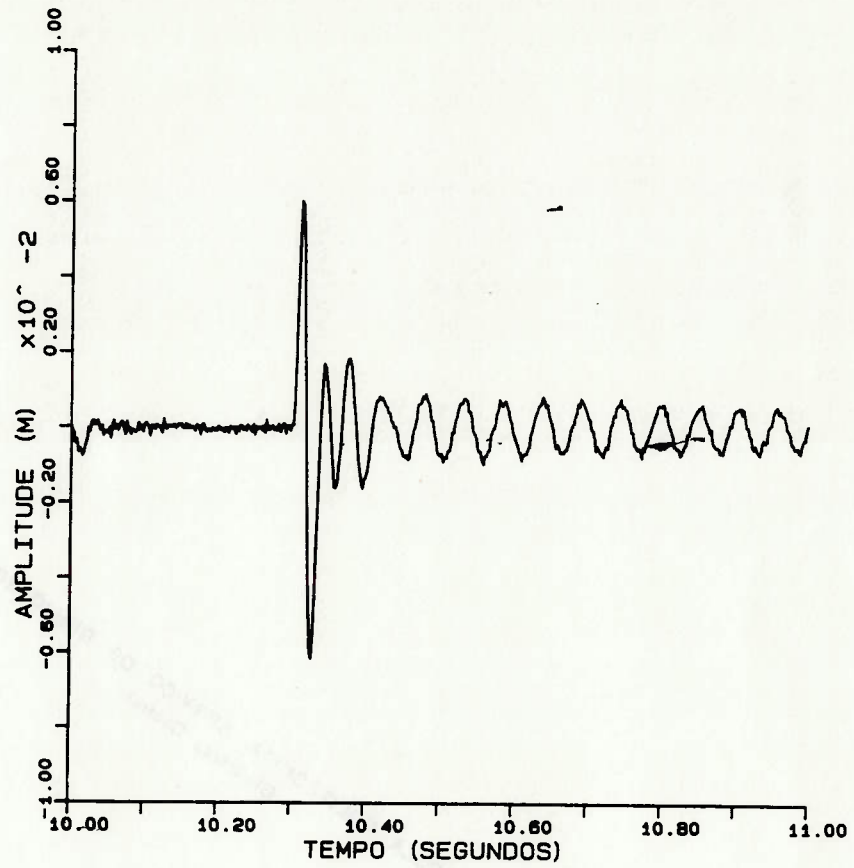
Fig.5.21 Resultado da estimação da força para a falha do caso II





— X1 MEDIDO PARA O CASO II  
- - XD MONITORADA NO CASO II

Fig.5.22 Comparação entre o sinal medido e o sinal estimado



(X1-Y1) PARA O CASO II

Fig.5.23 Erro na estimacão do caso II

### 5.4.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Observando a forma da curva da simulação do modelo completo, notamos que seu comportamento se assemelha ao de um sistema de um grau de liberdade. Em regime permanente (fig.5.2) a medida da oscilação no disco é uma senoide perfeita. Na ocorrência de uma falha, fora de uma situação de regime permanente, (fig.5.6, 5.8), a única componente que deforma a senoide é o primeiro modo de oscilação do eixo (18,0 Hz). O modelo simplificado representa apenas este movimento, indicando que em uma primeira aproximação, ele representa razoavelmente bem os fenômenos estudados, como era esperado.

A falha tipo degrau foi escolhida por ser uma caso de falha bastante desfavorável, onde as variáveis mudam bruscamente de valor, e bem representativa de desbalanceamentos reais, como no caso de turbinas quando perdem alguma das pás.

A quantidade de parâmetros que devemos definir previamente ao processamento do filtro é muito grande (valores iniciais e covariância dos ruídos) e influem grandemente na operação do filtro. Optamos por fixar alguns desses parâmetros e variar os demais, estudando sua influência e selecionando um conjunto que será usado na monitoração da falha. Foram fixados : o estado inicial (eq.5.32) e a matriz R de ruído da saída (eq.5.34) como valores conhecidos. Os valores iniciais dos termos da matriz de covariância correspondentes ao deslocamento e velocidade também foram fixados, em um valor equivalente a 10% do quadrado da sua amplitude esperada (eq.5.33). Procuramos variar apenas os parâmetros relacionados diretamente com o estado monitorado de maior interesse, as forças de desbalanceamento.

O valor da covariância inicial do estado ( $pf$ ) não influencia seu valor final, porém interfere na dinâmica da sua variação, como mostra a figura 5.15. Um valor mais baixo ( $pf = 1$ ) teve uma transição suave até o valor final ( $pf = 3,9$ ). Um valor maior ( $pf = 10$ ) provocou uma pequena oscilação, com uma variação mais brusca na covariância, tendendo ao mesmo valor final. Foi testado um valor ainda maior ( $pf=100$ ) o que provocou uma oscilação também maior e consequente divergência no filtro. Como o filtro se acomodou rapidamente, e atingiu o mesmo valor final, adotamos o valor  $pf=1$ , que produziu o melhor comportamento no transitório.

Outro item examinado foi a covariância do ruído de entrada da força ( $qf$ ). Verificamos que ela se relaciona com o tempo de resposta do filtro, e também com a sua sensibilidade ao ruído, como comprovam as curvas das figuras 5.11 e 5.12. A tabela abaixo resume os resultados para o tempo de acomodação do filtro, medido pelo tempo que o sinal levou para, partindo do valor inicial (nulo), chegar aproximadamente ao seu valor final:

$qf$	$T$ (seg)
10	0,53
100	0,24
1000	0,12

Tabela 5.2 Efeito de  $qf$  sobre o tempo de resposta do filtro

Analisando as figuras 5.11 e 5.12, notamos que o ruído deteriora o valor estimado da força proporcionalmente ao valor da covariância  $qf$ . Podemos explicar este fato observando que uma covariância alta

indica que a entrada é pouco confiável, aumentando relativamente o grau de confiança na medida efetuada. Este fato faz num caso extremo que o filtro tente, inclusive, fazer a força estimada acompanhar as variações provocadas pelo ruído.

A covariância do estado (P) é diretamente proporcional à covariância do ruído da entrada (Q), como comprovam as curvas da figura 5.13, resumida na tabela 5.3.

qf	pf (T = 11seg)
10	1,1
100	3,7
1000	14,1

Tabela 5.3 Efeito de qf sobre a covariância da força monitorada pf

Foram simulados dois casos de falha, onde variamos a amplitude das forças. As tabelas 5.4 e 5.5 mostram os casos simulados e os resultados obtidos pela estimação:

		Caso I	
		valores simulados	valores estimados
t < 10,3 antes da falha	FR	0,1	-411
	FI	0,2	-85,5
t = 11 s após a falha	FR	-0,2	-90,5
	FI	0,3	661

Tabela 5.4 Forças de desbalanceamentos simuladas e estimadas

CASO I

		Caso II	
		valores simulados	valores estimados
t < 10,3 antes da falha	FR	0,1	-411
	FI	0,2	-85,5
t = 11 s após a falha	FR	2,1	2,98E3
	FI	-3,8	7,40E3

Tabela 5.5 Forças de desbalanceamentos simuladas e estimadas no  
CASO II

Como vemos nestas tabelas, os valores simulados não são iguais aos obtidos na estimacão. Esta diferença se deve a que na simulao foi usado o modelo completo, e para a monitorao usamos o modelo reduzido. No modelo completo a força de desbalanceamento está no disco e a medida  feita em um dos mancais. O modelo simplificado não possui mancais e a saida  tomada diretamente no disco. Podemos, no entanto, relacionar linearmente a amplitude máxima destas forças; a partir da equao 5.6 verificamos que o valor máximo da força  dado por :

$$FXD \text{ Max} = \sqrt{FR^2 + FI^2}$$

Seja :

$FX_0$  a amplitude máxima da força antes de ocorrer a falha, e  
 $FX_f$  a amplitude da força após a falha.

Definindo-se ainda  $F_{xf}/F_{Xo}$  como a amplitude adimensional após a falha, podemos comparar os resultados estimados para o caso I e II, eliminando assim o problema da diferença entre os modelos.

	Caso I	
	valor simulado	valor estimado
$F_{Xo}$	0,22	419
$F_{Xf}$	0,36	667
$F_{Xf}/F_{Xo}$	1,64	1,59 (desvio de 3%)

Tabela 5.6 Amplitudes máximas das falhas CASO I

	Caso II	
	valor simulado	valor estimado
$F_{Xo}$	0,22	419
$F_{Xf}$	4,34	7977
$F_{Xf}/F_{Xo}$	19,82	19,04 (desvio de 4%)

Tabela 5.7 Amplitudes máximas das falhas CASO II

Como vemos houve uma boa coincidência entre os valores para  $F_{xf}/F_{Xo}$  simulado e monitorado, em cada caso, com um desvio máximo de 4%.

Analisando agora o sinal filtrado em comparação com o sinal medido (com ruído), vemos que o filtro elimina parte do ruído, como mostra a figura 5.16. A acomodação do sinal filtrado ao sinal

medido é rápida e faz com que o erro de monitoração possua um valor alto no início mas que, rapidamente, se reduz a um ruído aleatório (fig.5.17), atestando a eficiência do filtro.



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 APANHADO GERAL DO TRABALHO

Este trabalho faz uma revisão das técnicas de modelagem matemática e estimação de estado em sistemas mecânicos, aplicadas à monitoração de falhas destes sistemas, e a sua implementação em um caso particular.

Inicialmente foi feita uma revisão da teoria envolvida, incluindo a modelagem matemática da falha e a sua inclusão nas equações de estado, seguida pela estimação do estado através da técnica do filtro estendido de Kalman.

Para avaliar a aplicabilidade da metodologia proposta, um sistema real foi construído e estudado. O sistema é constituído de um conjunto eixo-disco apoiado em mancais flexíveis. A falha estudada foi o desbalanceamento do disco, estimado a partir das oscilações medidas em um dos mancais.

O modelo matemático de variáveis de estado foi desenvolvido a partir de um modelo de corpos múltiplos, que teve sua dinâmica analisada em detalhe. Seus parâmetros foram identificados pela comparação entre os resultados analíticos e aqueles obtidos em ensaio; esta comparação foi feita no domínio da frequência. O método de identificação usado se baseia nas propriedades dos autovalores e autovetores de um sistema conservativo.

De posse do modelo matemático, foram realizadas algumas simulações, onde se procurou reproduzir uma alteração brusca na força de desbalanceamento do disco, registrando-se o seu efeito nas

oscilações do mancal. O sinal simulado alimentou um filtro que estimou a força de desbalanceamento, suposta desconhecida. Alguns parâmetros do filtro foram variados, avaliando-se seu efeito no desempenho global do sistema de monitoração.

Como principal contribuição às ciências mecânicas, o trabalho forneceu uma abordagem geral e uniforme ao problema de monitoração. É possível, com base na metodologia descrita, desenvolver-se um sistema de monitoração análogo para outros sistemas mecânicos. Também no equacionamento e determinação do desbalanceamento, o trabalho veio dar um novo enfoque teórico, considerando o desbalanceamento como uma falha do sistema a ser incluída no estado do sistema estimado.

## 6.2 CONCLUSÕES

A modelagem é uma etapa básica, e muito importante para o desenvolvimento de um sistema de monitoração. É sem dúvida a fase mais trabalhosa, e mais dependente do conhecimento sobre o problema em estudo, especialmente no que se refere à determinação dos valores numéricos dos parâmetros das equações teóricas levantadas. Verificamos que é possível obter-se mais de um modelo representando o mesmo fenômeno, cabendo ao projetista a seleção do mais adequado.

O desenvolvimento analítico do filtro é relativamente simples. Da seleção das matrizes de covariância dos ruídos depende a operação estável do filtro. Também neste caso não há um procedimento genérico a ser seguido e cada caso deve ser estudado

em separado. A simulação em computador é essencial para garantir um bom resultado desta fase.

Finalizando, podemos concluir que é possível monitorar falhas em um sistema mecânico pela estimação de estado. Para isto é necessário um modelo matemático fiel e um bom conhecimento do comportamento do sistema. Não podemos, no entanto, concluir sobre a viabilidade da implementação em tempo real desta técnica, principalmente dada a limitação na velocidade de processamento dos microprocessadores existentes, e das altas frequências de alguns sistemas mecânicos. Acreditamos, porém, que o crescente aumento na capacidade de processamento possa vir a eliminar esta limitação.

### 6.3 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como propostas de continuação dos trabalhos nesta área, podemos sugerir inicialmente a implantação do filtro aqui proposto em um sistema real. Esta implantação necessitaria de uma otimização no algoritmo do filtro, e a sua codificação na linguagem própria do processador, além de desenvolvimentos na área de instrumentação e aquisição de dados. Também podemos sugerir um estudo mais aprofundado nas técnicas de detecção estatística de falhas, mencionadas resumidamente no capítulo 2.

Todo o trabalho baseou-se no desenvolvimento de um modelo matemático. Para a obtenção deste modelo foram necessárias diversas técnicas de modelagem e identificação de parâmetros. O próprio filtro de Kalman é uma destas técnicas. Como sugestão para facilitar o trabalho de modelagem, e permitir a aplicação do método aqui proposto a outros casos, podemos pensar em desenvolver também

ferramentas de "software" que automatizem ainda mais o processo de modelagem, usando por exemplo, os recursos da computação gráfica que vem em constante evolução.

## 7.REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- /1/ Isermann, R., "Process Fault Detection Based on Modeling and Estimation Methods - A Survey", Automatica, vol20,1984.
- /2/ Gelb,A (editor) "Applied Optimal Estimation", The MIT Press, Cambridge (Mass), 1974.
- /3/ Venâncio Filho, F.; "Análise Matricial de Estruturas", Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1975.
- /4/ Mueller,P.C. "Stabilitat und Matrizen", Spinger Verlag, Berlin, Hildelberg, New York, 1977.
- /5/ Magnus, K. "Vibration". Blackie & Sons LD.; London 1965.
- /6/ Kortuem, W. & Schiehlen,W. General purpose vehicle system dynamics software based on multibody formalisms. Vehicle System Dynamics, 14: 229-263, 1985 Swets & Zeitlinger B.V.Lisse.
- /7/ Kreuzer,E., Schmoll,K.P., Schramm,D., Programmpaket NEWEUL'85, Universidade de Stuttgart, 1986.
- /8/ Deboni,J.E.Z., A computer package for the modelling and analysis of multibody systems, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas. Vol.IX no 1:33-46, 1987 Rio de Janeiro.
- /9/ Schultz, D.G. & Melsa, J.L.; "State Functions and Linear Control Systems". McGraw Hill Ed, 1967.
- /10/ Kotuen,W., "Computational Techniques in Optimal State-Estimation - A Tutorial Review" Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control", Vol 101, 1979
- /11/ Brinati,H.L., "Investigacao Sobre o Emprego do Filtro Estendido de Kalman para Identificacao da Manobrabilidade do Navio", Tese de doutoramento, Escola Politecnica, USP, 1976.
- /12/ Deboni,J.E.Z., "Análise do trabalho : Recognition -Identification of non linear systems with ..." Exame de

qualificação apresentado à EPUSP, 1987

- /13/ Kumamaru, K e outros "Recognition-Identification of nonlinear systems with unknown variations in the dynamics pattern and its application to EEG analysis"
- /14/ Willsky, A.S., "A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems", Automatica, Vol12, 1976
- /15/ Mehra, R.K. & Peschon, J., "An Innovations Approach to Fault Detection on Diagnosis in Dynamic Systems", Automatica, Vol 7, 1971.
- /16/ Kay, S.M. & Marple Jr., S.L. "Spectrum Analysis - A Modern Perspective " Proceedings IEEE Vol.69 No 11 November 1981.
- /17/ Natke, H.G. (editor) "Identification of Vibrating Structures", Springer-Verlag, Wien, New York, 1982.
- /18/ VARIOS, "Bancada para estudos de balanceamento" COPESP Relatório Interno, São Paulo 1985.
- /19/ Costa Neto, P.L.O; "Estatística" Edgard Blucher São Paulo 1977
- /20/ Astrom, k.j. Modelling and Simulation techniques. AGARD lecture series n 128, 1983.
- /21/ Carnahan, e outros, "Applied Numerical Methods" John Willey & Sons.

## APÊNDICE A. PREPARAÇÃO DE DADOS E SAÍDAS DO PROGRAMA NEWEUL

### A.1 INTRODUÇÃO

Este apêndice visa apresentar detalhadamente o uso do programa NEWEUL /7/, para a formulação das equações algébricas do movimento, durante a etapa de modelagem.

O programa desenvolvido pela Universidade de Stuttgart trabalha com uma descrição algébrica do modelo, sua geometria, e carregamento. Manipulando esta descrição, o programa fornece as equações do movimento, linearizadas na forma das equações matriciais do tipo:

$$RM*YPP + P*YP + Q*Y = H \quad (A.1)$$

onde usando a nomenclatura própria do programa teremos que:

$RM, P$  e  $Q$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez;

$Y, YP$  e  $YPP$  são os vetores de posição e suas derivadas primeira e segunda; e

$H$  é o vetor de esforços externos.

Verifica-se, com base em um modelo de corpos múltiplos, que podemos isolar estes corpos e aplicar a cada um deles os esforços internos e externos, obtendo também uma descrição da posição do centro de gravidade de cada corpo, em função dos graus de liberdade, ou variáveis de posição. A descrição pode ser simplificada usando sistemas auxiliares de coordenadas e variáveis auxiliares, aceitas pelo programa.

A figura A.1 abaixo resume, esquematicamente o uso do programa.

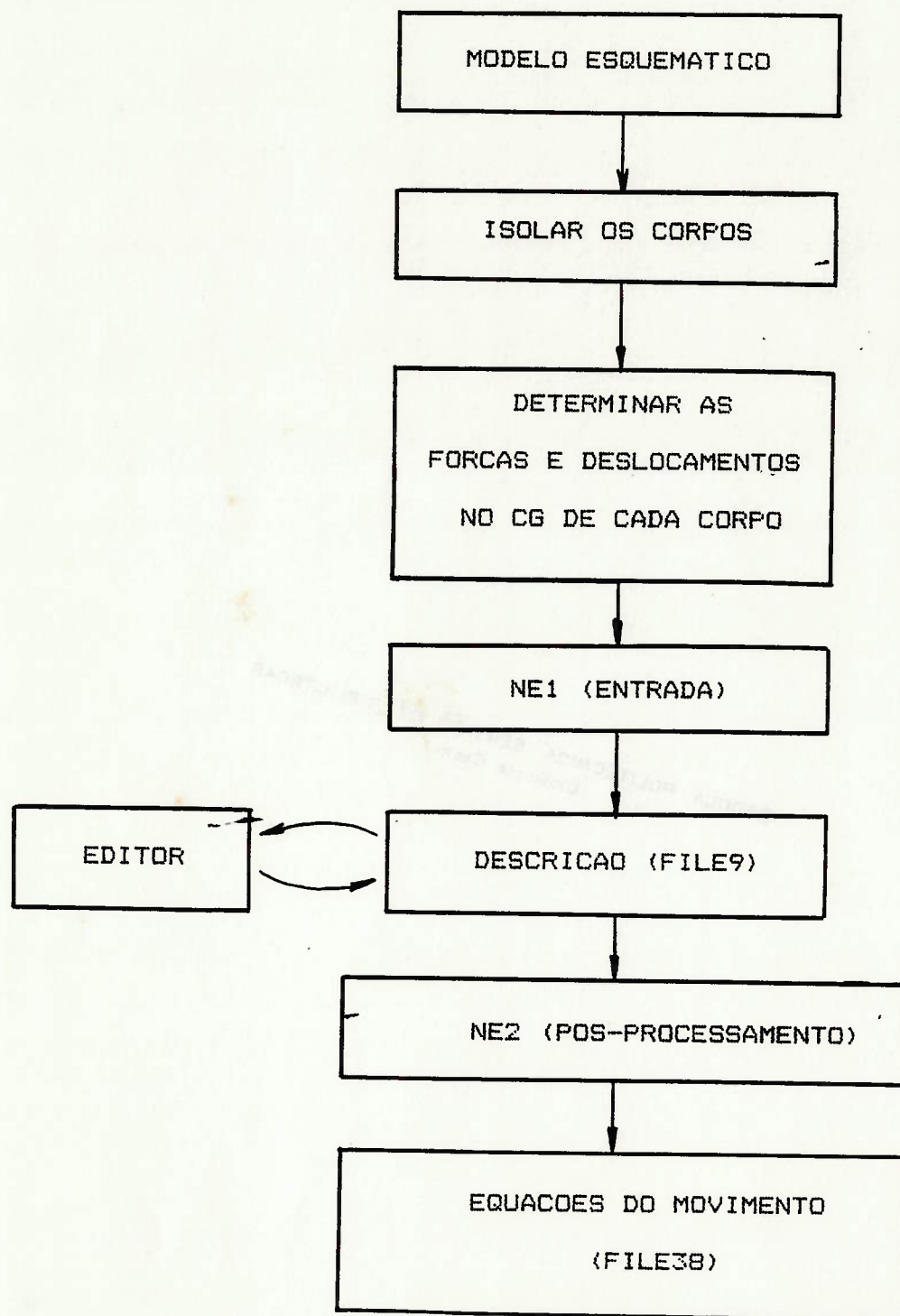


Fig.A.1 Esquema de uso do programa NEWEUL.



Esta descrição será a fornecida ao programa NE1, de pré-processamento interativo que organiza a entrada, através de perguntas ao usuário. O programa NE1 arquiva a sua saída em disco com o nome de FILE9. Este arquivo poderá ser modificado ou corrigido por um editor de texto, se houver necessidade.

O FILE9 será a entrada para o pós-processador NE2, que irá operá-lo algebricamente, derivando a posição do CG, e formulando as equações do movimento, como função dos graus de liberdade previamente selecionados.

A seguir iremos aplicar este programa ao modelo em estudo, apresentado no capítulo 4.

## A.2 DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo da figura A.2 possui 3 corpos, sendo 2 deles massas pontuais, e um corpo rígido. As massas possuem 2 graus de liberdade cada, (translações nas direções X e Y) e o corpo possui 4 graus de liberdade (2 translações e 2 rotações), como mostrados nas figuras A.3 e A.4. Estamos também admitindo que a rotação imposta ao sistema é constante e, portanto, não será considerada como um grau de liberdade. Assim, os 4 graus de liberdade são :

X1 XD CD X2 Y1 YD BD Y2

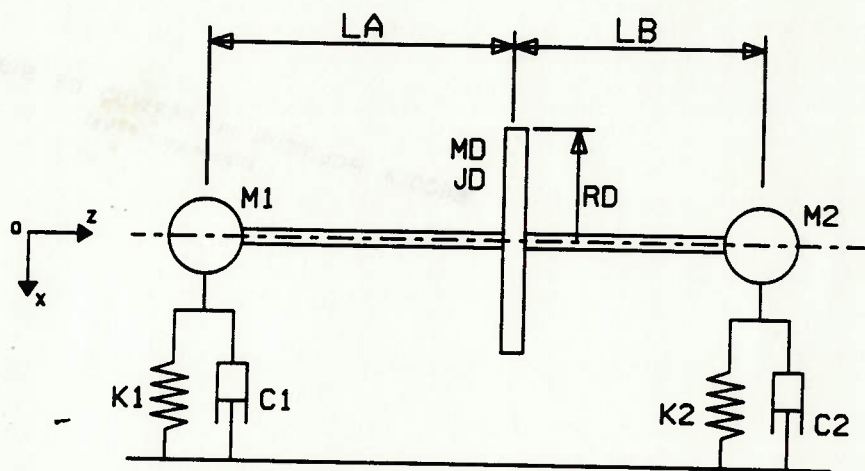
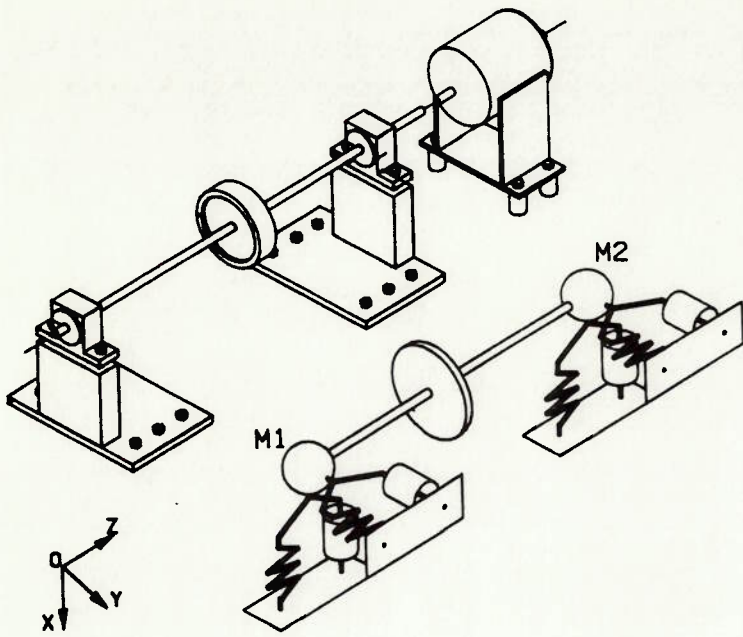


Fig. A.2 Esquema do modelo

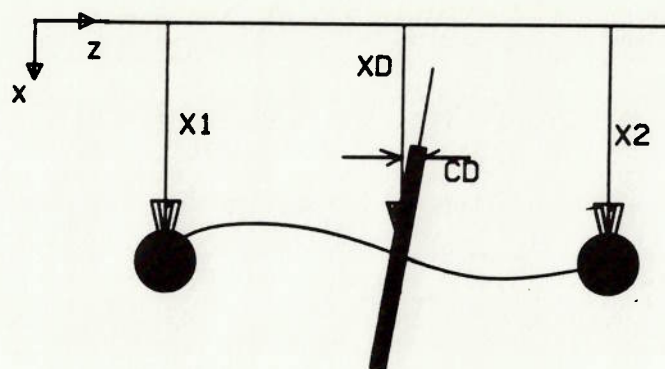


Fig.A.3 Graus de Liberdade no plano  $OXZ$

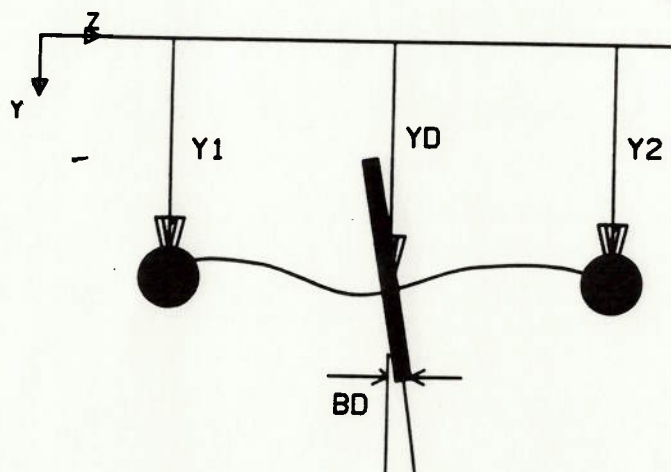


Fig.A.4 Graus de Liberdade no plano  $OYZ$

Isolam-se os corpos e aplicam-se as forças e momentos internos e externos, como mostram as figuras A.5 e A.6, onde :

$F_1 \dots F_8$  ..... são forças internas

$G_1 \dots G_8$  ..... são momentos internos

$F_{X1}, F_{XD}, F_{CD}, F_{X2}$  .. são forças externas na direção de X

$F_{Y1}, F_{YD}, F_{BD}, F_{Y2}$  .. são forças externas na direção de Y

$F_{XM1}, F_{YM1}$  ..... são forças de reação do mancal 1

$F_{XM2}, F_{YM2}$  ..... são forças de reação do mancal 2

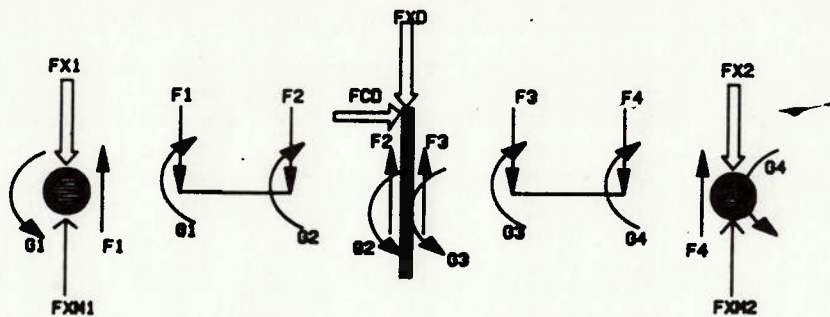


Fig.A.5 Corpos isolados com forças do plano OXZ

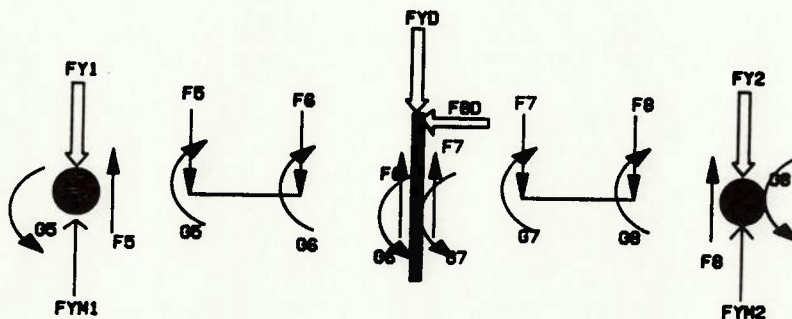


Fig.A.6 Corpos isolados com forças do plano OYZ

Temos 2 segmentos de eixo de comprimento L1 e L2, que possuem as características de vigas elásticas, engastadas no disco e apoiada nos mancais. Tomando a equação geral de uma viga (4.2), verificamos que as forças e os momentos são função dos deslocamentos e rotações dos eixos. E podemos escrever as seguintes equações matriciais :

$$\begin{aligned} F1 &= KXX1*X1 + KXA1*b1 - KXX1*XD + KXA1*b2 \\ G1 &= KXA1*X1 + 2*KAA1*b1 - KXA1*XD + KAA1*b2 \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} F2 &= -KXX1*X1 - KXA1*b1 + KXX1*XD - KXA1*b2 \\ G2 &= KXA1*X1 + KAA1*b1 - KXA1*XD + 2*KAA1*b2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F3 &= KXX2*XD + KXA2*b3 - KXX2*X2 + KXA2*b4 \\ G3 &= KXA2*XD + 2*KAA2*b3 - KXA2*X2 + KAA2*b4 \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} F4 &= -KXX2*XD - KXA2*b3 + KXX2*X2 - KXA2*b4 \\ G4 &= KXA2*XD + KAA2*b3 - KXA2*X2 + 2*KAA2*b4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F5 &= KXX1*Y1 + KXA1*b5 - KXX1*YD + KXA1*b6 \\ G5 &= KXA1*Y1 + 2*KAA1*b5 - KXA1*YD + KAA1*b6 \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} F6 &= -KXX1*Y1 - KXA1*b5 + KXX1*YD - KXA1*b6 \\ G6 &= KXA1*Y1 + KAA1*b5 - KXA1*YD + 2*KAA1*b6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F7 &= KXX2*YD + KXA2*b7 - KXX2*Y2 + KXA2*b8 \\ G7 &= KXA2*YD + 2*KAA2*b7 - KXA2*Y2 + KAA2*b8 \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} F8 &= -KXX2*YD - KXA2*b7 + KXX2*Y2 - KXA2*b8 \\ G8 &= KXA2*YD + KAA2*b7 - KXA2*Y2 + 2*KAA2*b8 \end{aligned}$$

ONDE :

$$\begin{aligned} b2 &= CD/RD \\ b3 &= CD/RD \\ b6 &= -BD/RD \end{aligned}$$

$$b7 = -BD/RD \quad (A.6)$$

$$KXX1 = \frac{12 * E * I}{L1^3}$$

$$KXA1 = \frac{6 * E * I}{L1^2}$$

$$KAA1 = \frac{2 * E * I}{L1}$$

$$KXX2 = \frac{12 * E * I}{L2^3}$$

$$KXA2 = \frac{6 * E * I}{L2^2}$$

$$KAA2 = \frac{2 * E * I}{L2}$$

Nos mancais o momento de restauração é nulo, uma vez que estes não resistem à deformação angular ( $b1, b4, b5$  e  $b8$ ) ou seja:

$$G1 = 0,0$$

$$G4 = 0,0$$

$$G5 = 0,0$$

$$G8 = 0,0$$

(A.7)

o que permite simplificar as equações para  $b1, b4, b5$  e  $b8$  :

$$b1 = \frac{1}{2 * KAA1} * (-KXA1 * X1 + KXA1 * XD - KAA1 * b2)$$

$$b4 = \frac{1}{2 * KAA2} * (-KXA2 * XD - KAA2 * b3 + KXA2 * X2)$$

$$b5 = \frac{1}{2 * KAA1} * (-KXA1 * Y1 + KXA1 * YD - KAA1 * b6)$$

$$b8 = \frac{1}{2 * KAA2} * (-KXA2 * YD - KAA2 * b7 + KXA2 * Y2)$$

Podemos ainda ver que o disco impõe um deslocamento angular ao eixo, onde ele está engastado, ou seja:

$$b2 = b3 = CD/RD$$

$$b6 = b7 = -BD/RD$$

Estes valores podem ser substituídos nas equações matriciais, eliminando os valores de  $b_1, b_4, b_5$  e  $b_8$ . No programa NEWEUL as entradas podem ser simplificadas usando "variáveis de substituição", assim temos:

$$\begin{aligned}
 (b2) \text{ SU1} &= \text{CD} * \text{IRD} \\
 (b6) \text{ SU2} &= -\text{BD} * \text{IRD} \\
 (b1) \text{ SU3} &= \text{I2KAA1} * (-\text{KXA1} * \text{X1} + \text{KXA1} * \text{XD} - \text{KAA1} * \text{SU1}) \\
 (b4) \text{ SU4} &= \text{I2KAA2} * (-\text{KXA2} * \text{XD} - \text{KAA2} * \text{SU1} + \text{KXA2} * \text{X2}) \\
 (b5) \text{ SU5} &= \text{I2KAA1} * (-\text{KXA1} * \text{Y1} + \text{KXA1} * \text{YD} - \text{KAA1} * \text{SU2}) \\
 (b6) \text{ SU6} &= \text{I2KAA2} * (-\text{KXA2} * \text{YD} - \text{KAA2} * \text{SU2} + \text{KXA2} * \text{Y2}) \\
 (F1) \text{ SU7} &= \text{KXX1} * \text{X1} + \text{KXA1} * \text{SU3} - \text{KXX1} * \text{XD} + \text{KXA1} * \text{SU1} \\
 (F2) \text{ SU8} &= -\text{KXX1} * \text{X1} - \text{KXA1} * \text{SU3} + \text{KXX1} * \text{XD} - \text{KXA1} * \text{SU1} \\
 (F3) \text{ SU9} &= \text{KXX2} * \text{XD} + \text{KXA2} * \text{SU1} - \text{KXX2} * \text{X2} + \text{KXA2} * \text{SU4} \\
 (F4) \text{ SU10} &= -\text{KXX2} * \text{XD} - \text{KXA2} * \text{SU1} + \text{KXX2} * \text{X2} - \text{KXA2} * \text{SU4} \\
 (F5) \text{ SU11} &= \text{KXX1} * \text{Y1} + \text{KXA1} * \text{SU5} - \text{KXX1} * \text{YD} + \text{KXA1} * \text{SU2} \\
 (F6) \text{ SU12} &= -\text{KXX1} * \text{Y1} - \text{KXA1} * \text{SU5} + \text{KXX1} * \text{YD} - \text{KXA1} * \text{SU2} \\
 (F7) \text{ SU13} &= \text{KXX2} * \text{YD} + \text{KXA2} * \text{SU2} - \text{KXX2} * \text{Y2} + \text{KXA2} * \text{SU6} \\
 (F8) \text{ SU14} &= -\text{KXX2} * \text{YD} - \text{KXA2} * \text{SU2} + \text{KXX2} * \text{Y2} - \text{KXA2} * \text{SU6} \\
 (G2) \text{ SU15} &= \text{KXA1} * \text{X1} + \text{KAA1} * \text{SU3} - \text{KXA1} * \text{XD} + 2 * \text{KAA1} * \text{SU1} \\
 (G3) \text{ SU16} &= \text{KXA2} * \text{XD} + 2 * \text{KAA2} * \text{SU1} - \text{KXA2} * \text{X2} + \text{KAA2} * \text{SU4} \\
 (G6) \text{ SU17} &= \text{KXA1} * \text{Y1} + \text{KAA1} * \text{SU5} - \text{KXA1} * \text{YD} + 2 * \text{KAA1} * \text{SU2} \\
 (G7) \text{ SU18} &= \text{KXA2} * \text{YD} + 2 * \text{KAA2} * \text{SU2} - \text{KXA2} * \text{Y2} + \text{KAA2} * \text{SU6} \\
 (\text{FXM1}) \text{ SU19} &= \text{K1} * \text{X1} + \text{C1} * \text{X1P} \\
 (\text{FXM2}) \text{ SU20} &= \text{K2} * \text{X2} + \text{C2} * \text{X2P} \\
 (\text{FYM1}) \text{ SU21} &= \text{K1} * \text{Y1} + \text{C1} * \text{Y1P} \\
 (\text{FYM2}) \text{ SU22} &= \text{K2} * \text{Y2} + \text{C2} * \text{Y2P}
 \end{aligned}$$

onde criamos as seguintes variáveis auxiliares, porque o programa não aceita a operação de dividir:

$$\text{IRD} = \frac{1}{\text{RD}}$$

$$\text{I2KAA1} = \frac{1}{2 * \text{KAA1}}$$

$$\text{I2KKA2} = \frac{1}{2 * \text{KAA2}}$$

## A.3 ARQUIVO DE ENTRADA

Os dados preparados acima são organizados pelo programa NE1, que gera o arquivo FILE9. A seguir temos resumidos os dados a serem apresentados ao NE1:

## CORPO 1 : MANCAL 1

Massa M1, posição do CG : X1,Y1

Forças Resultantes em x : FX1-SU19-SU7

em y : FY1-SU21-SU11

## CORPO 2 : DISCO

Massa MD, posição do CG : XD,YD

Tensor de Inércia :

$$\begin{bmatrix} JD & 0 & 0 \\ 0 & JD & 0 \\ 0 & 0 & JPD \end{bmatrix}$$

Forças Resultantes em x : FXD-SU8-SU9

em y : FYD-SU12-SU13

Momentos Resultantes em x : FBD\*RD+SU17+SU18

em y : FCD\*RD-SU15-SU16



CORPO 3 : MANCAL 2

Massa M2, posição do CG : X2, Y2

Forças Resultantes

em x : FX2-SU20-SU10

em y : FY2-SU22-SU14

#### A.4 ARQUIVO DE SAIDA

Com base na descrição arquivada no FILE9, podemos processar o programa NE2 que irá fornecer a seguinte saída; arquivada no FILE38 (compatível com FORTRAN77).

$Y(1)=X1$   
 $Y(2)=XD$   
 $Y(3)=CD$   
 $Y(4)=X2$   
 $Y(5)=Y1$   
 $Y(6)=YD$   
 $Y(7)=BD$   
 $Y(8)=Y2$   
 $Y1(1)=X1P$   
 $Y1(2)=XDP$   
 $Y1(3)=CDP$   
 $Y1(4)=X2P$   
 $Y1(5)=Y1P$   
 $Y1(6)=YDP$   
 $Y1(7)=BDP$   
 $Y1(8)=Y2P$   
 $Y2(1)=X1PP$   
 $Y2(2)=XDPP$   
 $Y2(3)=CDPP$   
 $Y2(4)=X2PP$   
 $Y2(5)=Y1PP$   
 $Y2(6)=YDPP$   
 $Y2(7)=BDPP$   
 $Y2(8)=Y2PP$   
 $SU1=IRD*CD$   
 $SU2=-IRD*BD$   
 $SU3=-KXA1*I2KAA1*X1+KXA1*I2KAA1*XD-KAA1*I2KAA1*IRD*CD$   
 $SU4=-KXA2*I2KAA2*XD-KAA2*I2KAA2*IRD*CD+KXA2*I2KAA2*X2$

equações A.16

```

SU5=-KXA1*I2KAA1*Y1+KXA1*I2KAA1*YD+KAA1*I2KAA1*IRD*BD
SU6=-KXA2*I2KAA2*YD+KAA2*I2KAA2*IRD*BD+KXA2*I2KAA2*Y2
SU7=KXX1*X1-KXA1**2*I2KAA1*X1+KXA1**2*I2KAA1*XD-KAA1*
*   KXA1*I2KAA1*IRD*CD-KXX1*XD+KXA1*IRD*CD
SUB=-KXX1*X1+KXA1**2*I2KAA1*X1-KXA1**2*I2KAA1*XD+KAA1*
*   KXA1*I2KAA1*IRD*CD+KXX1*XD-KXA1*IRD*CD
SU9=KXX2*XD+KXA2*IRD*CD-KXX2*X2-KXA2**2*I2KAA2*XD-KAA2*
*   KXA2*I2KAA2*IRD*CD+KXA2**2*I2KAA2*X2
SU10=-KXX2*XD-KXA2*IRD*CD+KXX2*X2+KXA2**2*I2KAA2*XD+
+   KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD*CD-KXA2**2*I2KAA2*X2
SU11=KXX1*Y1-KXA1**2*I2KAA1*Y1+KXA1**2*I2KAA1*YD+KAA1*
*   KXA1*I2KAA1*IRD*BD-KXX1*YD-KXA1*IRD*BD
SU12=-KXX1*Y1+KXA1**2*I2KAA1*Y1-KXA1**2*I2KAA1*YD-KAA1*
*   KXA1*I2KAA1*IRD*BD+KXX1*YD+KXA1*IRD*BD
SU13=KXX2*YD-KXA2*IRD*BD-KXX2*Y2-KXA2**2*I2KAA2*YD+KAA2*
*   KXA2*I2KAA2*IRD*BD+KXA2**2*I2KAA2*Y2
SU14=-KXX2*YD+KXA2*IRD*BD+KXX2*Y2+KXA2**2*I2KAA2*YD-
-   KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD*BD-KXA2**2*I2KAA2*Y2
SU15=KXA1*X1-KAA1*KXA1*I2KAA1*X1+KAA1*KXA1*I2KAA1*XD-
-   KAA1**2*I2KAA1*IRD*CD-KXA1*XD+2.*KAA1*IRD*CD
SU16=KXA2*XD+2.*KAA2*IRD*CD-KXA2*X2-KAA2*KXA2*I2KAA2*
*   XD-KAA2**2*I2KAA2*IRD*CD+KAA2*KXA2*I2KAA2*X2
SU17=KXA1*Y1-KAA1*KXA1*I2KAA1*Y1+KAA1*KXA1*I2KAA1*YD+
+   KAA1**2*I2KAA1*IRD*BD-KXA1*YD-2.*KAA1*IRD*BD
SU18=KXA2*YD-2.*KAA2*IRD*BD-KXA2*Y2-KAA2*KXA2*I2KAA2*
*   YD+KAA2**2*I2KAA2*IRD*BD+KAA2*KXA2*I2KAA2*Y2
SU19=K1*X1+C1*X1F
SU20=K2*X2+C2*X2F
SU21=K1*Y1+C1*Y1F
SU22=K2*Y2+C2*Y2F
MAP1=M1
RP1(1)=X1
RF1(2)=Y1
RP1(3)=0.
FEP1(1)=FX1-K1*X1-C1*X1F-KXX1*X1+KXA1**2*I2KAA1*X1-KXA1**2*
*   I2KAA1*XD+KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD*CD+KXX1*XD-KXA1*
*   IRD*CD
FEP1(2)=FY1-K1*Y1-C1*Y1F-KXX1*Y1+KXA1**2*I2KAA1*Y1-KXA1**2*
*   I2KAA1*YD-KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD*BD+KXX1*YD+KXA1*
*   IRD*BD
FEP1(3)=0.
MA1=MD
R1(1)=XD
R1(2)=YD
R1(3)=0.
FE1(1)=FXD+KXX1*X1-KXA1**2*I2KAA1*X1+KXA1**2*I2KAA1*XD-
-   KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD*CD-KXX1*XD+KXA1*IRD*CD-KXX2*
*   XD-KXA2*IRD*CD+KXX2*X2+KXA2**2*I2KAA2*XD+KAA2*
*   KXA2*I2KAA2*IRD*CD-KXA2**2*I2KAA2*X2
FE1(2)=FYD+KXX1*Y1-KXA1**2*I2KAA1*Y1+KXA1**2*I2KAA1*YD+
+   KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD*BD-KXX1*YD-KXA1*IRD*BD-KXX2*
*   YD+KXA2*IRD*BD+KXX2*Y2+KXA2**2*I2KAA2*YD-KAA2*
*   KXA2*I2KAA2*IRD*BD-KXA2**2*I2KAA2*Y2
FE1(3)=0.
S1(1,1)=COS(ROT*T)
S1(1,2)=-SIN(ROT*T)
S1(1,3)=IRD*CD
S1(2,1)=-IRD**2*BD*CD*COS(ROT*T)+SIN(ROT*T)
S1(2,2)=IRD**2*BD*CD*SIN(ROT*T)+COS(ROT*T)
S1(2,3)=IRD*BD
S1(3,1)=-IRD*CD*COS(ROT*T)-IRD*BD*SIN(ROT*T)

```

```

S1(3,2)=IRD*CD*SIN(ROT*T)-IRD*BD*COS(ROT*T)
S1(3,3)=1.
I1(1,1)=JD
I1(1,2)=0.
I1(1,3)=0.
I1(2,1)=0.
I1(2,2)=JD
I1(2,3)=0.
I1(3,1)=0.
I1(3,2)=0.
I1(3,3)=JPD
I1(1,1)=JD
I1(1,2)=0.
I1(1,3)=JPD*IRD*CD-JD*IRD*CD
I1(2,1)=0.
I1(2,2)=JD
I1(2,3)=JPD*IRD*BD-JD*IRD*BD
I1(3,1)=JPD*IRD*CD-JD*IRD*CD
I1(3,2)=JPD*IRD*BD-JD*IRD*BD
I1(3,3)=JPD
LE1(1)=RD*FBD+KXA1*Y1-KAA1*KXA1*I2KAA1*Y1+KAA1*KXA1*I2KAA1*
*   YD+KAA1**2*I2KAA1*IRD*BD-KXA1*YD-2.*KAA1*IRD*BD+
+   KXA2*YD-2.*KAA2*IRD*BD-KXA2*Y2-KAA2*KXA2*I2KAA2*
*   YD+KAA2**2*I2KAA2*IRD*BD+KAA2*KXA2*I2KAA2*Y2
LE1(2)=FCD*RD-KXA1*X1+KAA1*KXA1*I2KAA1*X1-KAA1*KXA1*I2KAA1*
*   XD+KAA1**2*I2KAA1*IRD*CD+KXA1*XD-2.*KAA1*IRD*CD-
-   KXA2*XD-2.*KAA2*IRD*CD+KXA2*X2+KAA2*KXA2*I2KAA2*
*   XD+KAA2**2*I2KAA2*IRD*CD-KAA2*KXA2*I2KAA2*X2
LE1(3)=0.
MAP2=M2
RF2(1)=X2
RF2(2)=Y2
RF2(3)=0.
FEP2(1)=FX2-K2*X2-C2*X2P+KXX2*XD+KXA2*IRD*CD-KXX2*X2-
-   KXA2**2*I2KAA2*XD-KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD*CD+KXA2**2*
*   I2KAA2*X2
FEP2(2)=FY2-K2*Y2-C2*Y2P+KXX2*YD-KXA2*IRD*BD-KXX2*Y2-
-   KXA2**2*I2KAA2*YD+KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD*BD+KXA2**2*
*   I2KAA2*Y2
FEP2(3)=0.
RM(1,1)=M1
RM(1,2)=0.
RM(1,3)=0.
RM(1,4)=0.
RM(1,5)=0.
RM(1,6)=0.
RM(1,7)=0.
RM(1,8)=0.
RM(2,2)=MD
RM(2,3)=0.
RM(2,4)=0.
RM(2,5)=0.
RM(2,6)=0.
RM(2,7)=0.
RM(2,8)=0.
RM(3,3)=JD*IRD**2
RM(3,4)=0.
RM(3,5)=0.
RM(3,6)=0.
RM(3,7)=0.
RM(3,8)=0.

```

RM(4,4)=M2  
 RM(4,5)=0.  
 RM(4,6)=0.  
 RM(4,7)=0.  
 RM(4,8)=0.  
 RM(5,5)=M1  
 RM(5,6)=0.  
 RM(5,7)=0.  
 RM(5,8)=0.  
 RM(6,6)=MD  
 RM(6,7)=0.  
 RM(6,8)=0.  
 RM(7,7)=JD\*IRD\*\*2  
 RM(7,8)=0.  
 RM(8,8)=M2  
 K(3)=JPD\*ROT\*IRD\*\*2\*BDF  
 K(7)=-JPD\*ROT\*IRD\*\*2\*CDP  
 Q(1)=FX1-K1\*X1-C1\*X1P-KXX1\*X1+KXA1\*\*2\*I2KAA1\*X1-KXA1\*\*2\*  
 \* I2KAA1\*XD+KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*CD+KXX1\*XD-KXA1\*IRD\*  
 \* CD  
 Q(2)=FXD+KXX1\*X1-KXA1\*\*2\*I2KAA1\*X1+KXA1\*\*2\*I2KAA1\*XD-  
 - KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*CD-KXX1\*XD+KXA1\*IRD\*CD-KXX2\*  
 \* XD-KXA2\*IRD\*CD+KXX2\*X2+KXA2\*\*2\*I2KAA2\*XD+KAA2\*KXA2\*  
 \* I2KAA2\*IRD\*CD-KXA2\*\*2\*I2KAA2\*X2  
 Q(3)=FCD\*RD\*IRD-KXA1\*IRD\*X1+KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*X1-  
 - KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*XD+KAA1\*\*2\*I2KAA1\*IRD\*\*2\*CD+  
 + KXA1\*IRD\*XD-2.\*KAA1\*IRD\*\*2\*CD-KXA2\*IRD\*XD-2.\*KAA2\*  
 \* IRD\*\*2\*CD+KXA2\*IRD\*X2+KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*XD+KAA2\*\*2\*  
 \* I2KAA2\*IRD\*\*2\*CD-KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*X2  
 Q(4)=FX2-K2\*X2-C2\*X2P+KXX2\*XD+KXA2\*IRD\*CD-KXX2\*X2-KXA2\*\*2\*  
 \* I2KAA2\*XD-KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*CD+KXA2\*\*2\*I2KAA2\*  
 \* X2  
 Q(5)=FY1-K1\*Y1-C1\*Y1P-KXX1\*Y1+KXA1\*\*2\*I2KAA1\*Y1-KXA1\*\*2\*  
 \* I2KAA1\*YD-KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*BD+KXX1\*YD+KXA1\*IRD\*  
 \* BD  
 Q(6)=FYD+KXX1\*Y1-KXA1\*\*2\*I2KAA1\*Y1+KXA1\*\*2\*I2KAA1\*YD+  
 + KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*BD-KXX1\*YD-KXA1\*IRD\*BD-KXX2\*  
 \* YD+KXA2\*IRD\*BD+KXX2\*Y2+KXA2\*\*2\*I2KAA2\*YD-KAA2\*KXA2\*  
 \* I2KAA2\*IRD\*BD-KXA2\*\*2\*I2KAA2\*Y2  
 Q(7)=-RD\*FBD\*IRD-KXA1\*IRD\*Y1+KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*Y1-  
 - KAA1\*KXA1\*I2KAA1\*IRD\*YD-KAA1\*\*2\*I2KAA1\*IRD\*\*2\*BD+  
 + KXA1\*IRD\*YD+2.\*KAA1\*IRD\*\*2\*BD-KXA2\*IRD\*YD+2.\*KAA2\*  
 \* IRD\*\*2\*BD+KXA2\*IRD\*Y2+KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*YD-KAA2\*\*2\*  
 \* I2KAA2\*IRD\*\*2\*BD-KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*Y2  
 Q(8)=FY2-K2\*Y2-C2\*Y2P+KXX2\*YD-KXA2\*IRD\*BD-KXX2\*Y2-KXA2\*\*2\*  
 \* I2KAA2\*YD+KAA2\*KXA2\*I2KAA2\*IRD\*BD+KXA2\*\*2\*I2KAA2\*  
 \* Y2  
 P(1,1)=C1  
 P(3,7)=JPD\*ROT\*IRD\*\*2  
 P(4,4)=C2  
 P(5,5)=C1  
 P(7,3)=-JPD\*ROT\*IRD\*\*2  
 P(8,8)=C2  
 2\*D(1,1)=2.\*C1  
 2\*D(4,4)=2.\*C2  
 2\*D(5,5)=2.\*C1  
 2\*D(8,8)=2.\*C2  
 2\*G(3,7)=2.\*JPD\*ROT\*IRD\*\*2  
 2\*G(7,3)=-2.\*JPD\*ROT\*IRD\*\*2  
 Q(1,1)=K1+KXX1-KXA1\*\*2\*I2KAA1  
 Q(1,2)=KXA1\*\*2\*I2KAA1-KXX1

$Q(1,3) = -KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD + KXA1 * IRD$   
 $Q(2,1) = -KXX1 + KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $Q(2,2) = -KXA1 ** 2 * I2KAA1 + KXX1 + KXX2 - KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(2,3) = KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - KXA1 * IRD + KXA2 * IRD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(2,4) = -KXX2 + KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(3,1) = KXA1 * IRD - KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD$   
 $Q(3,2) = KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - KXA1 * IRD + KXA2 * IRD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(3,3) = -KAA1 ** 2 * I2KAA1 * IRD ** 2 + 2 * KAA1 * IRD ** 2 + 2 * KAA2 * IRD ** 2 - KAA2 ** 2 * I2KAA2 * IRD ** 2$   
 $Q(3,4) = -KXA2 * IRD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(4,2) = -KXX2 + KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(4,3) = -KXA2 * IRD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(4,4) = K2 + KXX2 - KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(5,5) = K1 + KXX1 - KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $Q(5,6) = KXA1 ** 2 * I2KAA1 - KXX1$   
 $Q(5,7) = KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - KXA1 * IRD$   
 $Q(6,5) = -KXX1 + KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $Q(6,6) = -KXA1 ** 2 * I2KAA1 + KXX1 + KXX2 - KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(6,7) = -KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD + KXA1 * IRD - KXA2 * IRD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(6,8) = -KXX2 + KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(7,5) = KXA1 * IRD - KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD$   
 $Q(7,6) = KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - KXA1 * IRD + KXA2 * IRD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(7,7) = KAA1 ** 2 * I2KAA1 * IRD ** 2 - 2 * KAA1 * IRD ** 2 - 2 * KAA2 * IRD ** 2 + KAA2 ** 2 * I2KAA2 * IRD ** 2$   
 $Q(7,8) = -KXA2 * IRD + KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(8,6) = -KXX2 + KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $Q(8,7) = KXA2 * IRD - KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $Q(8,8) = K2 + KXX2 - KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(1,1) = 2 * K1 + 2 * KXX1 - 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $2 * K(1,2) = 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1 - 2 * KXX1$   
 $2 * K(1,3) = -2 * KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD + 2 * KXA1 * IRD$   
 $2 * K(2,1) = -2 * KXX1 + 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $2 * K(2,2) = -2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1 + 2 * KXX1 + 2 * KXX2 - 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(2,3) = 2 * KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - 2 * KXA1 * IRD + 2 * KXA2 * IRD - 2 * KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $2 * K(2,4) = -2 * KXX2 + 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(3,1) = 2 * KXA1 * IRD - 2 * KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD$   
 $2 * K(3,2) = 2 * KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - 2 * KXA1 * IRD + 2 * KXA2 * IRD - 2 * KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $2 * K(3,3) = -2 * KAA1 ** 2 * I2KAA1 * IRD ** 2 + 4 * KAA1 * IRD ** 2 + 4 * KAA2 * IRD ** 2 - 2 * KAA2 ** 2 * I2KAA2 * IRD ** 2$   
 $2 * K(3,4) = -2 * KXA2 * IRD + 2 * KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $2 * K(4,2) = -2 * KXX2 + 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(4,3) = -2 * KXA2 * IRD + 2 * KAA2 * KXA2 * I2KAA2 * IRD$   
 $2 * K(4,4) = 2 * K2 + 2 * KXX2 - 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(5,5) = 2 * K1 + 2 * KXX1 - 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $2 * K(5,6) = 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1 - 2 * KXX1$   
 $2 * K(6,5) = -2 * KXX1 + 2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1$   
 $2 * K(6,6) = -2 * KXA1 ** 2 * I2KAA1 + 2 * KXX1 + 2 * KXX2 - 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(6,8) = -2 * KXX2 + 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(7,7) = 2 * KAA1 ** 2 * I2KAA1 * IRD ** 2 - 4 * KAA1 * IRD ** 2 - 4 * KAA2 * IRD ** 2 + 2 * KAA2 ** 2 * I2KAA2 * IRD ** 2$   
 $2 * K(8,6) = -2 * KXX2 + 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * K(8,8) = 2 * K2 + 2 * KXX2 - 2 * KXA2 ** 2 * I2KAA2$   
 $2 * N(5,7) = 2 * KAA1 * KXA1 * I2KAA1 * IRD - 2 * KXA1 * IRD$

```

2*N(6,7)=-2.*KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD+2.*KXA1*IRD-2.*KXA2*
*
  IRD+2.*KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD
2*N(7,5)=2.*KXA1*IRD-2.*KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD
2*N(7,6)=2.*KAA1*KXA1*I2KAA1*IRD-2.*KXA1*IRD+2.*KXA2*
*
  IRD-2.*KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD
2*N(7,8)=-2.*KXA2*IRD+2.*KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD
2*N(8,7)=2.*KXA2*IRD-2.*KAA2*KXA2*I2KAA2*IRD
H(1)=FX1
H(2)=FXD
H(3)=FCD*RD*IRD
H(4)=FX2
H(5)=FY1
H(6)=FYD
H(7)=-RD*FBD*IRD
H(8)=FY2

```

### A.5 CONCLUSÃO

Na saída do programa encontramos organizadas as equações para cada elemento das matrizes da equação do movimento, que na nomenclatura do programa são escritas na forma da equação A.1.

Destas equações, podemos notar que a matriz de massa é diagonal, e que o acoplamento entre os planos X e Y se dá apenas na matriz de amortecimento, e pelo termo giroscópico proporcional a rotação (ROT).

$$P(3,7)=JPD*ROT*IRD**2$$

$$P(7,3)=-JFD*ROT*IRD**2$$

A identificação dos parâmetros do modelo é feita com o sistema parado (ROT=0,0), então, podemos desprezar este termo durante esta fase e desacoplar os planos OXZ e OYZ, tomando apenas as matrizes com índices (i,j) com i=1 à 4 e j=1 à 4.

Sobre a técnica de modelagem podemos concluir que o programa NEWEUL é uma boa ferramenta para o equacionamento, principalmente por reduzir os erros decorrentes da álgebra. Porém, ele necessita de muita atenção na preparação de dados, para que o modelo não venha a ser descrito incorretamente.

Como a saída é automática podemos usá-la diretamente em um programa de análise. O programa ADS usado permite a leitura direta do FILE38.

A automatização do processo de modelagem permitirá que para um mesmo problema diversos modelos possam ser rapidamente desenvolvidos, e analisados para se escolher o mais adequado para cada aplicação.

## APENDICE B. DESCRICAO DO APARATO EXPERIMENTAL

## B.1 OBJETIVOS

Este apêndice objetiva descrever o ensaio realizado para levantar o comportamento dinâmico do sistema em estudo. Como principais metas do ensaio temos :

- \* localizar as frequências naturais,
- \* estimar os modos de vibração,
- \* levantar o comportamento típico do modelo em operação

## B.2 ESQUEMA DE ENSAIO

O ensaio foi realizado em um modelo do sistema construído sobre uma bancada de testes, como mostra a figura B.1. O modelo foi instrumentado, com acelerômetros, condicionadores de sinal, um analisador espectral e um registrador gráfico, também presentes na figura.

## B.3 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

A seguir temos com mais detalhe os equipamentos usados nos ensaios :



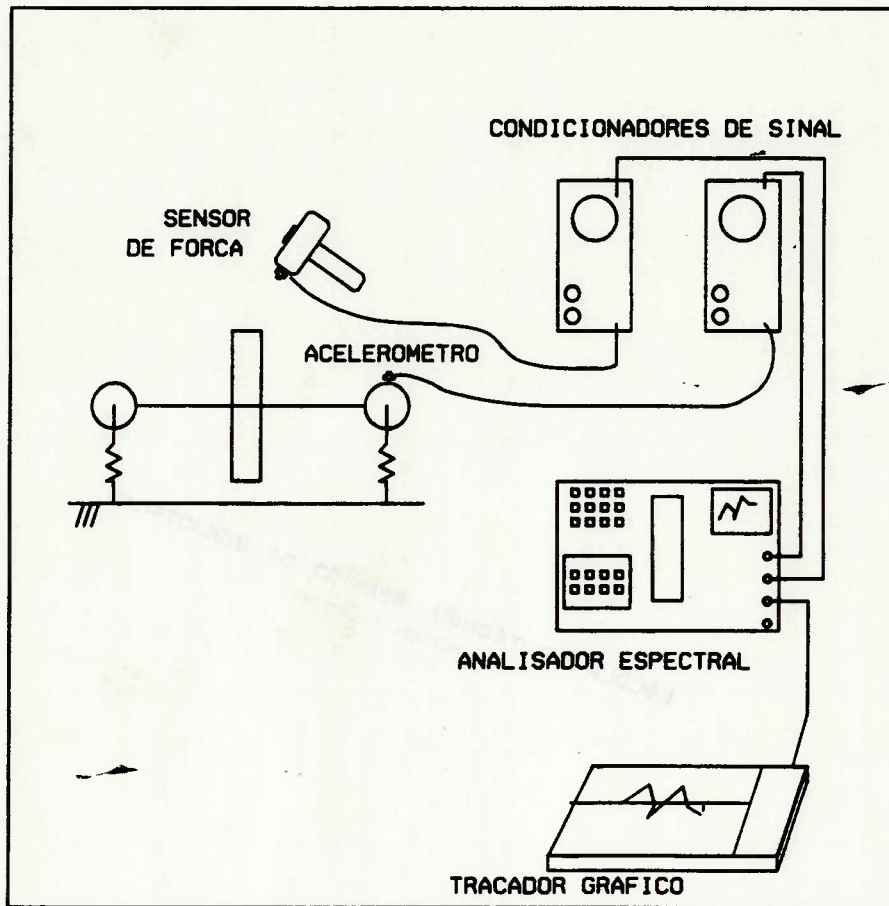


Fig.B.1. Esquema do ensaio

## ACCELEROMETRO

FINALIDADE : medir a aceleração, fornecendo um sinal de tensão proporcional a aceleração do corpo onde ele é fixado.

OPERACAO : o acelerômetro usado opera com uma massa sobre um cristal piezoelétrico, de modo que a força que a massa provoca no cristal e convertida em uma tensão elétrica.

MARCA : Bruel & Kjaer

## SENSOR DE FORÇA

FINALIDADE : fornecer um sinal de tensão proporcional a força sobre ele aplicada.

OPERACAO : o sensor também é um cristal piezo-elétrico

MARCA : Bruel e Kjaer

## CONDICIONADOR DE SINAL

FINALIDADE : amplificar e deixar o sinal de tensão com valores compatíveis com a medida. Ele se aplica tanto no sinal de força como para o acelerômetro, podendo ser calibrado para cada equipamento.

MARCA : Bruel e Kjaer

## ANALISADOR ESPECTRAL

FINALIDADE : Aquisitar os dados dos sensores e analisá-los em frequência, obtendo espectros de potência e funções de transferência.

MÉTODO : O analisador usa a FFT (Transformada Rápida de Fourier) sendo programado para filtrar o sinal, caso haja necessidade.

MARCA : Hewlett Packard

CALIBRACAO : Para o ensaio foram escolhidos os seguintes parametros, próprios do equipamento e método:

MEDIDA : FUNCAO DE TRANSFERENCIA

NUMERO DE PONTOS = 256 POR MEDIDA

NUMERO DE MEDIDAS = 10 POR CURVA

SINAL (FILTRO) = TRANSIENTE

TRIGER INTERNO NO CANAL 1 (SENSOR DE FORCA)

FREQUENCIA CENTRAL = 0.0

BANDA DE FREQUENCIA = 256 Hz

RESOLUCAO DE FREQUENCIA = 1 Hz

PERIODO DE AMOSTRAGEM = 1 SEG

INTERVALO DE AMOSTRAGEM = 0.976 SEG

#### B.4 PROCEDIMENTOS DE ENSAIO

O ensaio consiste em se excitar com um martelo, instrumentado por um sensor de força, um determinado ponto do sistema e medir a aceleração provocada em outro ponto. O analisador espectral amostra estes sinais, e obtém a função de transferência em frequência. Para eliminar possíveis ruídos são feitas 10 medidas e a curva final é a média destas medidas.

Os testes foram realizados em 2 faixas de frequências, ajustadas no analisador.

1a faixa : de 0 a 100 Hz (resolução de 0,5 Hz)

2a faixa : de 0 a 250 Hz (resolução de 1,0 Hz)

Devemos notar que a medida da função de transferência em sistemas lineares independe da força aplicada no martelo, desde que sejam mantidos os limites da linearidade. Assim durante os ensaios foram respeitados os limites da saturação dos equipamentos e de pequenos deslocamentos.

Após cada teste, as curvas foram transferidas para um traçador gráfico, para registro e daí transferidas digitalmente para um computador para tratamento posterior.

#### B.5 EXEMPLO DOS RESULTADOS

Foram realizados diversos ensaios conforme a tabela que segue :

ENSAIO	ENTRADA (martelo)	SAIDA (acelerom.)	FREQUENCIA (Hz)		
			MINIMA	MAXIMA	RESOLUCAO
61	1	4	0	100	0.5
62	2	4	0	100	0.5
63	3	4	0	100	0.5
64	4	4	0	100	0.5
65	1	4	0	250	1.0
66	2	4	0	250	1.0
67	3	4	0	250	1.0
68	4	4	0	250	1.0
69	1	1	0	250	1.0
610	2	1	0	250	1.0
611	3	1	0	250	1.0
612	4	1	0	250	1.0

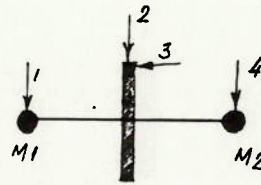


Tabela B.1 Lista dos ensaios realizados.

A figura B.2 mostra um exemplo do resultado obtido no traçador gráfico para o ensaio X2/FXD.

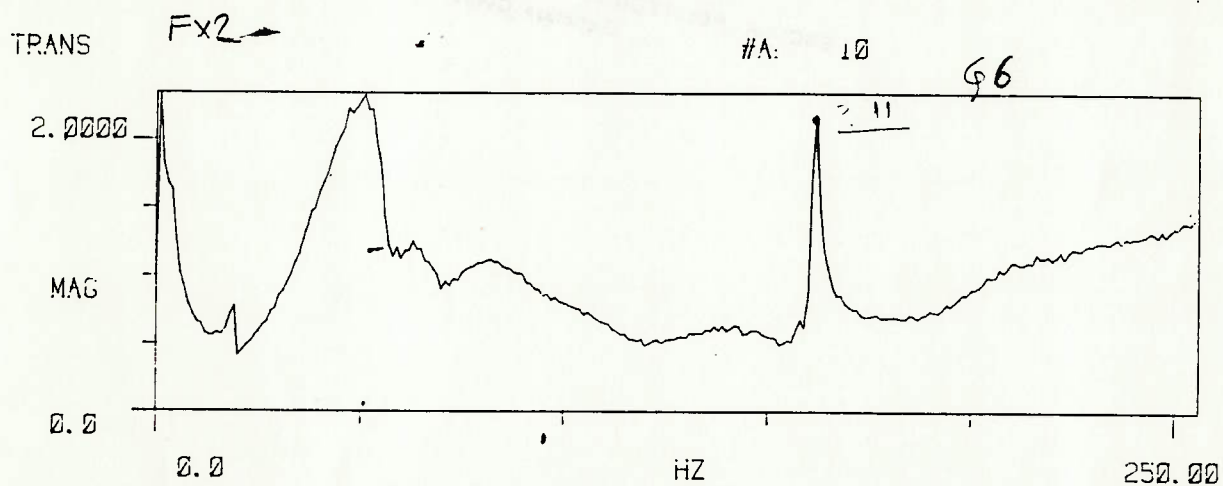


Fig.B.2 Exemplos de curva experimental

## APÊNDICE C. SOBRE A IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS CONSERVATIVOS

### C.1 OBJETIVOS

Este apêndice apresenta um procedimento simples para identificar a matriz de massa ou rigidez de um sistema conservativo, sugerido por Natke /17/. O método se baseia nas equações básicas dos sistemas conservativos e nas propriedades de ortogonalidade dos autovetores. Podemos dividir o método em dois casos :

1. Cálculo da matriz de rigidez,
2. Cálculo da matriz de massa.

No final do apêndice algumas considerações gerais sobre a aplicação prática do método são traçadas.

### C.2 PROPRIEDADES DOS SISTEMAS CONSERVATIVOS

Os sistemas mecânicos conservativos, podem ser representados simplificadaamente pela equação diferencial matricial do segundo grau:

$$RM \cdot \ddot{X} + RQ \cdot \dot{X} = H \quad (C.1)$$

onde  $H$  é o vetor de excitações externas, que pode ser decomposto em frequências,  $H = H(\omega)$ . O que faz com que o sistema admita uma solução periódica do tipo :

$$X = X_0 * e^{(j \cdot \omega_0 * t)} \quad (C.2)$$

onde

- $j$  é a unidade imaginária,
- $X_0$  é o valor inicial de  $X$ , e
- $\omega_0$  é a frequência de oscilação.

No caso de oscilação não forçada ( $H=0$ ), a solução recai em um problema de autovalores :

$$(-\omega^2 * RM + RQ) * X_0 = 0 \quad (C.3)$$

onde a solução  $\omega = \omega_{oi}$  que anula  $(-\omega^2 * RM + RQ)$  é um autovalor deste sistema. As seguintes propriedades são atribuídas a estes autovalores:

\* woi são reais;

\* para cada woi existe um autovetor Xoi real associado;

\* as seguintes relações de ortogonalidade são verificadas :

$$X_{oi} * R M * X_{ok} = m_{gi} * \delta_{ik} , m_{gi} > 0 \quad (C.4)$$

$$X_{oi} * Q * X_{ok} = k_{gi} * \delta_{ik} , k_{gi} = w_{oi}^2 * m_{gi} \quad (C.5)$$

onde

Xoi, Xok são dois autovetores distintos quaisquer;

mgi é a massa generalizada;

kgi é a rigidez generalizada; e

$\delta_{ik}$  é o delta de Kroeneker, isto é

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= 0 \text{ se } i \neq k \\ &= 1 \text{ se } i = k \end{aligned}$$

### C.3 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO

Um sistema de n graus de liberdade poderá ter n autovetores e n autovalores, assim, podemos colocar as relações (c.1) e (c.2) na forma matricial introduzindo as matrizes Xo e Wo como sendo :

$$X_o = [X_{o1} \quad X_{o2} \quad \dots \quad X_{on}] \quad (C.6)$$

$$W_o = \text{Diagonal} ( w_{oi}^2 ) \quad (C.7)$$

deste modo as relações ficam :

$$-R M * X_o * W_o + R Q * X_o = 0 \quad (C.8)$$

$$M_g = X_o^t * R M * X_o = \text{diag}(m_{gi}) \quad (C.9)$$

$$K_g = X_o^t * R Q * X_o = \text{diag}(k_{gi}) = M_g * W_o \quad (C.10)$$

Vamos então propor um método para que, dadas as matrizes Xo e Wo e uma das matrizes RM ou RQ, possamos obter a outra matriz.

### C.3.1 CASO I : CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Para obtermos a matriz de rigidez RQ, conhecidas as matrizes RM, Xo e Wo, aplicamos o seguinte procedimento :

a) Normalizar os autovetores, com RM obtendo inicialmente Mg :

$$Mg = I = X_n^t * RM * X_n \quad (C.11)$$

onde Xn são os autovetores normalizados.

$$\text{Diag}(m_{gi}) = X_0^t * RM * X_0 \quad (C.12)$$

$$X_{ni} = \frac{X_{oi}}{m_{gi}} \quad (C.13)$$

b) da equação (C.10) temos então :

$$X_n^t * RQ * X_n = X_n^t * RM * X_n * W_n = W_n \quad (C.14)$$

$$RQ = (X_n^t)^{-1} * W_n * (X_n)^{-1} \quad (C.15)$$

### C.3.2 CASO II : CALCULO DA MATRIZ DE MASSA

Analogamente para obtermos RM, aplica-se o seguinte procedimento

a) Normalizar em Q os autovetores obtendo :

$$Kg = I = X_n^t * RM * X_n \quad (C.16)$$

$$\text{Diag}(k_{gi}) = X_0^t * RQ * X_0 \quad (C.17)$$

$$X_{ni} = \frac{X_{oi}}{k_{gi}} \quad (C.18)$$

b) substituindo em (C.10) obtemos :

$$X_n^t * RQ * X_n = I = X_n^t * RM * X_n * W_n \quad (C.19)$$

$$RM = (X_0^t)^{-1} * W_n^{-1} * (X_0)^{-1} \quad (C.20)$$



#### C.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação prática deste procedimento requer o conhecimento tanto das frequências naturais como dos autovalores do sistema em estudo. Podemos obter uma estimativa destes, analisando um conjunto de  $n$  funções de transferência, medidas nos pontos do sistema onde se identificam os graus de liberdade, com a excitação fixa em um único ponto, do tipo :

$$\frac{X_i}{F_k}(w) \quad \text{com } i=1..k..n \quad (C.21)$$

Se nestas curvas escolhermos  $n$  frequências naturais ( $w_{oj}$ ), como sendo as frequências de ressonância, podemos estimar os autovetores escolhendo para a mesma excitação  $F_k$  os valores de :

$$x_{oj} = \frac{X_i}{F_k}(w_{oj}) \quad (C.22)$$

Devemos, porém, lembrar que os procedimentos experimentais de obtenção /16/ das funções de transferências introduzem erros de medida, especialmente nos extremos das curvas, isto é, a confiabilidade nas curvas experimentais é baixa especialmente quando as frequências são muito altas ou muito baixas. É importante lembrar também que a hipótese de sistema conservativo nem sempre pode ser verificada, uma vez que o amortecimento, ainda que baixo, sempre estará presente.

O programa IDMK foi desenvolvido para executar este procedimento (ver o apêndice D).

## APÊNDICE D. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR

## D.1 OBJETIVOS

Este apêndice descreve os programas de computador utilizados para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente temos um diagrama da estrutura dos programas e suas inter-relações, seguido de uma breve descrição da entrada e da saída de cada programa.

## D.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS

\* Os programas foram desenvolvidos para uma grande interação com o operador, o que dispensa um manual de operação detalhado.

\* Os programas foram desenvolvidos e executados em um minicomputador VAX-11/785.

\* A linguagem de programação adotada foi o Pascal. Isto permitiu uma grande padronização das rotinas, o que facilitará o transporte destes programas para outros computadores se necessário.

\* Os programas trocam informações entre si através de arquivos em disco, cujo formato de gravação foi padronizado. Estes arquivos são identificados pela extensão de seu nome: (.MAT, .IDE, .PLT).

\* Os programas KALMAN e SIMULA foram desenvolvidos de modo a poderem utilizar a mesma descrição do modelo, feito pela PROCEDURE MODELO. Este subprograma pode ser substituído por outras descrições de modelos, em outros casos, aproveitando-se o mesmo programa principal.

D.3 ESTRUTURA DOS PROGRAMAS

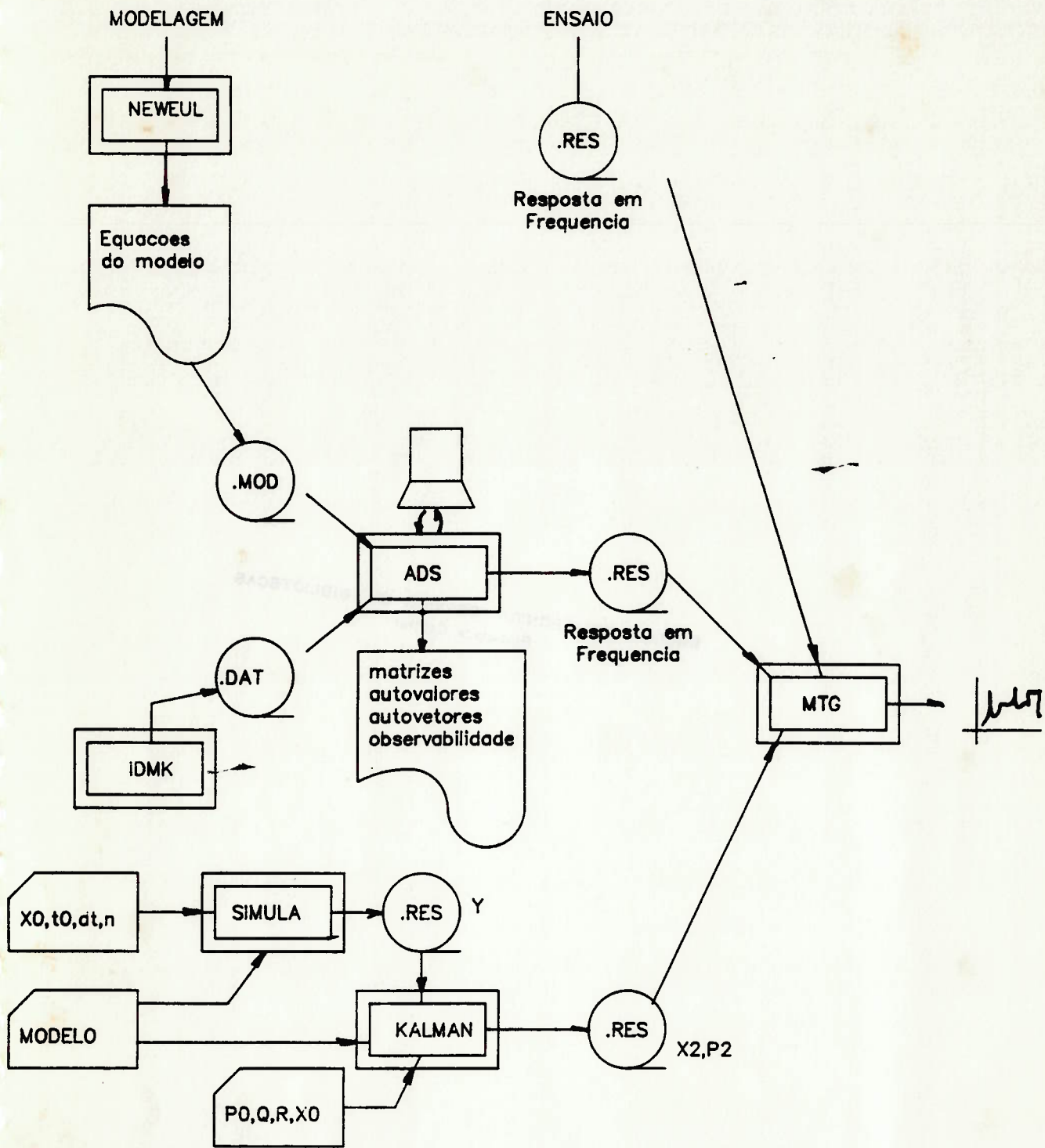


Figura D.1 Estrutura dos programas e suas inter-relações.

## D.4 DESCRIÇÃO RESUMIDA DOS PROGRAMAS

NEWEUL : Fornece as equações algébricas do modelo com base na descrição deste modelo.

ENTRADA : Vide apêndice A.

SAÍDA : Vide apêndice A.

ADS : Permite analisar a dinâmica de um sistema mecânico, descrito pelo sistema de equações na forma  $RM \cdot XPP + RP \cdot XP + RQ \cdot X = H$ .

ENTRADA : \* equações do modelo no formato .MOD,  
\* valores numéricos dos parâmetros das equações no formato .DAT.

SAÍDA : \* relatórios com as matrizes RM, RQ e RP numéricas,  
\* relatórios dos autovalores e autovetores associados,  
\* cálculo do índice de observabilidade,  
\* cálculo a resposta em frequência arquivando-a no formato .RES.

IDMK : Pressupondo um sistema conservativo  $RM \cdot XPP + RQ \cdot X = 0$  calcula a matriz de massa (RM) ou a matriz de rigidez (RQ) se conhecidos: os autovetores, os autovalores e uma das matrizes.

ENTRADA : Vide anexo C.

SAÍDA : Vide anexo C.

SIMULA : Objetiva integrar as equações de estado simulando a operação do sistema segundo condições iniciais pré-estabelecidas.

ENTRADA : \* TO, DT, N valor inicial, incremento e numero de instantes de simulação,

\* XO, valor inicial do estado no instante  $t=TO$ ,  
\* modelo a ser integrado na forma de um subprograma.

SAÍDA : \* sinais obtidos para X e Y para cada instante de simulação, gravado em formato .RES.

KALMAN : Executa a estimação do estado de um sistema real, com base em uma medida da saída deste sistema.

ENTRADA : \* Modelo matemático do sistema em estudo, fornecido com um subprograma,  
\* Vetor de estado inicial, XO (estimado) e sua matriz de covariância (PO),  
\* Matriz de covariância do ruído esperado nas medidas (R),

\* Matriz de covariância do ruído esperado no estado do sistema (Q).

SAÍDA : \* Estado estimado para cada instante de medida (X2),  
\* Covariância do estado estimado (P2), ambos gravados em arquivos no formato (.RES).

MTG : Programa gráfico que traça curvas arquivadas no formato .RES.

ENTRADA : \* Curva arquivada em formato .RES, e  
\* Dados adicionais como escala, título, legendas, etc...

SAÍDA : \* Traçado do gráfico em terminais gráficos ou plotter de pena.