

José Joaquim do A. ^{Amaral} Ferreira.

OTIMIZAÇÃO DE
ENGRENAGENS POR
PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

Dissertação apresenta-
da à Escola Politécni-
ca para a obtenção do
Título de "Mestre em En
genharia"

Orientador: Prof. Dr. Alberto Ricardo von Ellenrieder

São Paulo

Junho de 1975

À
CÉLIA

Ao Prof. Alberto R. v. Ellenrieder,
o nosso agradecimento pela dedica-
ção e incentivo dados durante o de-
correr deste trabalho.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

1.1. INTRODUÇÃO	1
1.2. A PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA	1
1.3. APLICAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA	3
1.4. OTIMIZAÇÃO DE PROJETOS DE ENGENHARIA	4
1.5. O PROBLEMA TRATADO	4

CAPÍTULO 2 - PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA. CONCEITOS BÁSICOS

2.1. A DESIGUALDADE GEOMÉTRICA	6
2.1.1. Posinômios	8
2.1.2. Funções Primal e Dual	9
2.1.3. Grau de Dificuldade	11
2.1.4. A Desigualdade Geométrica e o Problema Geral da Programação Geométrica	14
2.2. PRINCIPAIS TEOREMAS DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA	17
2.2.1. Programa Primal P	17
2.2.2. Programa Dual B	19
2.2.3. A Dualidade em Programação Geométrica	21
2.2.4. Propriedades dos Programas Primal e Dual	24
2.2.5. Programa Dual Transformado B_r	26
2.2.6. Exemplos de Técnicas de Redução de Problemas a Programas Geométricos.	30

2.3. TÉCNICA OPERACIONAL DA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	33
2.4. PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA COMPLEMENTAR.....	37

CAPÍTULO 3 - NOÇÕES DE PROJETO DE ENGRENAGENS

3.1. RELAÇÕES DE PROJETO CINEMÁTICAS E GEOMÉTRICAS	43
3.2. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS E GEOMÉTRICAS ...	48
3.3. RELAÇÕES DE PROJETO DINÂMICAS	54
3.4. FORÇAS DINÂMICAS NOS DENTES	56
3.5. DIMENSIONAMENTO DO DENTE À FLEXÃO	59
3.6. DIMENSIONAMENTO DO DENTE À FADIGA SUPERFICIAL	64

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA PROPOSTA PARA A OTIMIZAÇÃO DE PROJETOS DE ENGRENAGENS

4.1. A METODOLOGIA TRADICIONAL DE PROJETO DE ENGRENAGENS	68
4.2. METODOLOGIA PROPOSTA	72
4.3. CONCLUSÕES	75

CAPÍTULO 5 - OTIMIZAÇÃO DE ENGRENAGENS HELICOIDAIS UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

5.1. DEFINIÇÃO DO SISTEMA EM ESTUDO E SEUS OBJETIVOS	77
5.2. IDENTIFICAÇÃO DAS RESTRIÇÕES	79
5.3. ESCOLHA DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES E COLOCAÇÃO DO MODELO COMO FUNÇÃO DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES	87

5.4. ADAPTAÇÃO DO MODELO À FORMA PADRÃO DA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA	88
5.5. SOLUÇÃO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉ- TRICA	99
5.5.1. Construção de Programas Duais ...	100
5.6. ANÁLISE DOS RESULTADOS	120
5.6.1. Utilização do Modelo	120
5.6.2. Resultados de Aplicação do Modelo	123
5.6.3. Interpretação das Saídas.....	149
5.6.4. Comparação do Método Empregado com o Método de Johnson	150
CAPÍTULO 6 - <u>SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROGRAMAS GEOMÉ- TRICOS</u>	
6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	155
6.2. O ALGORÍTMO DE DINKEL, KOCHENBERGER E McCARTL	157
6.3. ALGORÍTMO PROPOSTO	159
6.4. COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE O ALGORÍTMO PRO POSTO	161
6.4.1. Amortecimento do Passo do Algorít mo	161
6.4.2. Problemas de Viabilidade	163
6.4.3. Identificação de Restrições Pri- mais Inativas	166
6.4.4. Tempo de Processamento	166
6.4.5. Subrotina Newton	168
6.5. CONCLUSÕES	170
CAPÍTULO 7 - <u>CONCLUSÃO</u>	172
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	176
<u>APÊNDICE</u>	180

ABSTRACT

This dissertation shows the application of Geometric Programming to the problem of gearset design.

Some objectives are defined and a model was built for the gearset design. This model was reduced to the standard form of geometric programming to allow the solution of the model by means of this optimization technique.

A modified Newton-Raphson algorithm was implemented for the solution of geometric programming problems.

Some examples of the application of this algorithm to the solution of the gearset design model are included.

At the end a review of publications concerning Geometric Programming and its applications is presented.

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

CAPÍTULO 1

1.1. Introdução

O objetivo básico deste trabalho é mostrar a possibilidade de se aplicar a Programação Geométrica ao problema da otimização do projeto de engrenagens. Além disto, foi selecionado e aprimorado um algoritmo para a solução numérica de problemas de Programação Geométrica.

1.2. A Programação Geométrica

Esta técnica de otimização é relativamente recente. Seu desenvolvimento deve-se principalmente aos trabalhos de Duffin, Peterson e Zener (ver as referências (12), (15), (16), (36), (37) e (38)).

Estes autores utilizaram-se de certas propriedades das desigualdades para o desenvolvimento da técnica. A Programação Geométrica estuda a solução de problemas de otimização do seguinte tipo

$$\text{mínimo } g_0 = \sum_{i=1}^{n_0} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$$

tal que:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \sum_{i=n_0+1}^{n_1} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \leq 1 \\
 &\vdots \\
 g_k &= \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \leq 1
 \end{aligned}$$

com $c_i \geq 0$, $t_j > 0$ e a_{ij} reais

Este problema é transformado no problema (dual):

$$\text{máximo } v(\delta) = \prod_{i=1}^{n_k} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{p=1}^k \lambda_p^{\lambda_p}$$

$$\text{tal que } \sum_{i=1}^{n_0} \delta_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} a_{ij} \delta_i = 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\text{com } \lambda_p = \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} \delta_i \quad p=1, 2, \dots, k$$

Esta transformação utiliza-se de propriedades de ortogonalidade de vetores no espaço euclidiano E_n ; ver referência (16, pag. 77)

1.3. Aplicações da Programação Geométrica

Encontram-se na literatura diversas aplicações da Programação Geométrica. O problema da localização de polos industriais e a sua instalação com o mínimo investimento foi estudada por Nijkamp (25).

Encontramos também aplicações na área de Marketing, onde Dinkel e Kochenberger (8) elaboraram modelos para estudar o efeito da propaganda nas vendas da empresa.

Federowicz e Mazundar (17) estudaram o problema de conseguir a confiabilidade ótima de elementos redundantes em série num sistema simples.

Na referência (16), Duffin, Peterson e Zener desenvolvem aplicações da Programação Geométrica no projeto de um trocador de calor para aproveitar a energia dos oceanos. Este equipamento aproveita-se do fato de haver um gradiente de temperatura entre as camadas de água superiores e inferiores nos oceanos.

Outra aplicação desenvolvida na mesma referência é o projeto de um transformador ótimo dentro de diversos critérios possíveis como, mínima perda no cobre, máxima potência, mínima perda no ferro, mínimo volume de cobre e outros. Duffin, Peterson e Zener (16) estenderam ainda, a aplicação da Programação Geométrica ao problema do equilíbrio de reações químicas.

Sansão estudou o projeto ótimo de trocadores de calor, referência (32), e o projeto de molas helicoidais, referência (33).

O projeto de barras de torsão, incorporando o problema de existirem diversas funções objetivo conflitantes foi

estudado por Pascual e Ben-Israel (27) que propuseram uma ponderação das funções objetivo envolvidas. A função objetivo resultante é a soma ponderada das funções objetivo particulares. O problema foi então resolvido por Programação Geométrica..

1.4. Otimização de Projetos de Engenharia

A otimização de projetos deste tipo envolve certas dificuldades. A formulação de um modelo para a otimização de um problema de engenharia pode vir a ser bastante complexa devido à dificuldade no estabelecimento de objetivos para o sistema, que eventualmente podem ser conflitantes quando colocados simultaneamente.

Uma vez formulado o modelo, é necessário dispor de uma técnica de otimização que permita resolvê-lo, a um custo razoável num tempo relativamente curto.

Na área da engenharia mecânica, segundo Seireg (34), alguns pesquisadores, devido à dificuldade na formulação e solução de modelos para sistemas mecânicos complexos, passaram a estudar a otimização de elementos de máquinas particulares, como por exemplo as engrenagens.

1.5. O Problema Tratado

As engrenagens são elementos de máquina com características de projeto definidas. Isto facilita a utilização de uma técnica de otimização para seu projeto e em particular a aplicação da Programação Geométrica.

Para isso definimos um modelo de otimização de engrenagens que engloba o dimensionamento das engrenagens à potência ou ao torque para cada uma das seguintes funções objetivo: máxima capacidade de transmissão de potência ou torque, mínima distância entre centros e mínimo peso do conjunto.

Este modelo foi colocado sob a forma de um problema de Programação Geométrica. Para solucioná-lo, empregamos, inicialmente, o algoritmo de Newton - Raphson, com a modificação sugerida por Dinkel, Kochenberger e McCarl (9). Esta modificação não se revelou satisfatória e num dos testes efetuados, não conseguimos a convergência do algoritmo após um tempo de processamento de cerca de 300 segundos de CPU no computador Borroughs B 6700 do Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo.

Desenvolvemos então uma modificação alternativa para o algoritmo de Newton - Raphson, a qual resultou satisfatória,

No mesmo computador, com a modificação introduzida, obtivemos tempos de convergência do algoritmo que variaram de 0,6 até 98,5 segundos de CPU no caso mais desfavorável.

Este algoritmo pode ser adaptado para a solução de outros problemas de Programação Geométrica.

PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA: CONCEITOS BÁSICOS

CAPÍTULO 2

Este capítulo tem como finalidade fornecer os conceitos básicos para o entendimento do problema abordado em nosso trabalho. O leitor interessado também encontrará aqui os primeiros subsídios para a utilização da Programação Geométrica como ferramenta matemática.

2.1. A Desigualdade Geométrica

Algumas desigualdades matemáticas podem ser usadas para resolver problemas específicos de otimização. No livro de Bellman e Beckenbach (4) podemos encontrar diversos problemas de otimização resolvidos (com muito bom humor) através de desigualdades geométricas.

A programação geométrica explora algumas propriedades da chamada desigualdade geométrica:

$$\delta_1 U_1 + \delta_2 U_2 + \delta_3 U_3 + \dots + \delta_n U_n \geq U_1^{\delta_1} \cdot U_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot U_n^{\delta_n} \quad (2.1)$$

onde

$$U_1, U_2, \dots, U_n \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 1 \quad (2.4)$$

a prova desta desigualdade pode ser encontrada na referência (16).

A condição (2.4) de normalização dos pesos pode ser relaxada, definindo-se a seguinte extensão da desigualdade geométrica para pesos não normalizados:

Se

$$g_0 = \delta_1 U_1 + \delta_2 U_2 + \dots + \delta_n U_n \quad (2.6)$$

onde

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \delta_i > 0, \quad (2.7)$$

$$\delta_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

De (2.1) temos:

$$g'_0 = \frac{\delta_1}{\lambda} U_1 + \frac{\delta_2}{\lambda} U_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda} U_n$$

$$\geq U_1^{\delta_1/\lambda} U_2^{\delta_2/\lambda} \dots U_n^{\delta_n/\lambda}$$

Seja:

$$\delta_i U_i = u_i \quad (2.9)$$

$$g'_0 = \frac{1}{\lambda} \sum u_i \geq \frac{n}{\pi} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i/\lambda}$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \geq \frac{n}{\pi} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i/\lambda} \cdot \lambda \quad (2.10)$$

2.1.1. Posinômios

Seja a função g definida como soma de n componentes u_i

$$g = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (2.11)$$

onde

$$u_i = c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad (2.12)$$

e a função (2.11) é um polinômio constituído pela soma de n monômios.

$$\begin{aligned} \text{Se } c_i &> 0 \\ t_i &> 0 \quad i=1, 2, \dots, m \\ a_{ij} &\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

a função g é denominada posinômio, na nomenclatura usual da programação geométrica. Este neologismo foi introduzido por Duffin, Peterson e Zener (16) e hoje é adotado por todos os autores que trabalham com programação geométrica. Por esse motivo continuaremos a usar esse nome, sem chegar a discutir a sua propriedade etimológica.

2.1.2. Funções Primal e Dual

A desigualdade geométrica pode ser escrita:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq \left(\frac{u_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{u_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \dots \left(\frac{u_n}{\delta_n}\right)^{\delta_n} \quad (2.16)$$

$$\text{com } u_i = \delta_i U_i$$

$$\sum \delta_i = 1$$

O membro da esquerda da desigualdade geométrica é a função primal g . O membro da direita é denominado

função pré-dual e simbolizado pela letra V. A desigualdade (2.16) pode ser escrita

$$g \geq V \quad (2.17)$$

A função pré-dual V é uma função produto de termos u_i elevados a potência δ_i . Se a função primal é um posinômio, podemos substituir os termos u_i dados pela equação (2.12) no lado direito da relação (2.17) na forma:

$$V(\delta, t) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \dots \left(\frac{c_n}{\delta_n}\right)^{\delta_n} \\ \cdot t_1^{D_1} t_2^{D_2} \dots t_m^{D_m} \quad (2.18)$$

onde os expoentes D_j são as combinações lineares

$$D_j = \sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.19)$$

dos expoentes a_{ij} . Se pudermos escolher os pesos δ_i de maneira que:

$$D_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.20)$$

a função pré-dual V não dependerá das variáveis t_j . Será chamada então de função dual:

$$v(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \dots \left(\frac{c_n}{\delta_n}\right)^{\delta_n} \quad (2.21)$$

Então na desigualdade (2.17) podemos afirmar que g tem um limitante inferior positivo M ,

$$g(t) \geq M \geq v(\delta) \quad (2.22)$$

M é um limitante superior para a função $v(\delta)$. Pode-se provar que:

$$\text{mínimo } g(t) = \text{máximo } v(\delta) = M \quad (2.23)$$

2.1.3. Grau de Dificuldade

O grau de dificuldade de um problema de programação geométrica é definido na referência (16), como:

$$d = n^\circ \text{ de termos} - n^\circ \text{ de variáveis} - 1 \quad (2.24)$$

O número de termos é o número de termos u_i nos posinômios do problema. O número de variáveis é o número de variáveis independentes do problema.

A denominação grau de dificuldade ficou consagrada na nomenclatura usual da programação geométrica e tem sido usada pelos autores até o presente.

Na seção anterior ficou estabelecido que se pudermos escolher os pesos δ_i tal que:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(2.25)

e

$$\sum_{i \in J(0)} \delta_i = 1, \quad J(0) = \{1 \leq i \leq n_0 / g_0(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} u_i\}$$

poderemos construir a função dual $v(\delta)$ que não depende das variáveis t_j com

$$g(t) \geq v(\delta)$$

e

$$\text{mínimo } g(t) = \text{máximo } v(\delta)$$

relação esta que se encontra demonstrada na referência (16, cap. 4).

O sistema (2.25) é um sistema de equações lineares com n incógnitas e $m+1$ equações.

Este sistema tem solução única quando a característica da matriz $n \times m$ dos expoentes a_{ij} é igual a

$$\begin{aligned} & m \\ & e \\ n & = m + 1 \end{aligned}$$

Esta solução única δ^* constitui o vetor "maximizante" do problema dual.

Se

$$n > m + 1$$

e a característica da matriz dos expoentes a_{ij} é m , o sistema (2.25) é indeterminado com um número de graus de liberdade:

$$d = n - m - 1$$

e existe um número infinito de vetores δ^* que satisfazem o sistema (2.25). É necessário então pesquisar qual a combinação de pesos δ_i que irá maximizar a função dual $v(\delta)$.

Quanto maior o número de graus de liberdade do sistema (2.25), mais difícil e trabalhosa é a pesquisa para a determinação do vetor δ^* que maximiza $v(\delta)$.

Daí o nome de grau de dificuldade para o número de graus de liberdade do sistema (2.25).

2.1.4. A Desigualdade Geométrica e o Problema Geral da Programação Geométrica

O problema geral da programação geométrica é encontrar o mínimo valor de um posinômio $g_0(t)$

$$\text{mínimo } g_0(t) = \sum_{i=1}^{n_0} u_i \quad (2.26)$$

Sujeito às restrições

$$g_1(t) = \sum_{i=1}^{n_1} u_i \leq 1 \quad (2.27)$$

$$g_2(t) = \sum_{i=1}^{n_2} u_i \leq 1$$

$$g_p(t) = \sum_{i=1}^{n_p} u_i \leq 1$$

Aplicando a relação (2.10), desigualdade geométrica para pesos não normalizados, temos

$$g_0(t) = \sum_{i=1}^{n_0} u_i \geq \prod_{i=1}^{n_0} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i / \lambda_0} \cdot \lambda_0 \quad (2.28)$$

$$\text{com } \sum_{i=1}^{n_0} \delta_i = \lambda_0$$

e

$$g_k(t) = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_i \geq \prod_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i/\lambda_k} \cdot \lambda_k \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \delta_i = \lambda_k \quad k = 1, 2, \dots, p$$

ou

$$g_0(t)^{\lambda_0} \geq \prod_{i=1}^{n_0} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_0^{\lambda_0} \quad (2.30)$$

$$g_k(t)^{\lambda_k} \geq \prod_{i=n_{k-1}}^{n_k} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_k^{\lambda_k} \quad (2.31)$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Do sistema (2.27) vem

$$1 \geq g_k(t)^{\lambda_k} \geq \prod_{i=n_{k-1}}^{n_k} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_k^{\lambda_k} \quad (2.32)$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Se as restrições (2.32) forem obedecidas podemos multiplicar os extremos das desigualdades (2.32) e (2.30), obtendo:

$$g_0(t)^{\lambda_0} \geq \prod_{i=1}^{n_p} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_0^{\lambda_0} \lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_p^{\lambda_p}$$

ou

$$g_0(t)^{\lambda_0} \geq \left\{ \prod_{i=1}^{n_p} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \lambda_0^{\lambda_0} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k} \quad (2.34)$$

Se escolhermos $\lambda_0 = 1$, com $n_p = n$, vem:

$$g_0(t) \geq \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k} \quad (2.35)$$

Podemos estender o conceito de função dual definido na seção 2.1.2., considerando como função dual:

$$v(\delta) = \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k} \quad (2.36)$$

A relação (2.35) fica então:

$$g_0(t) \geq v(\delta) t_1^{D_1} t_2^{D_2} \dots t_m^{D_m} \quad (2.37)$$

$$\text{com } D_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i \quad j = 1, 2, \dots, m$$

e

$$\sum_{i=1}^{n_0} \delta_i = 1$$

2.2. Principais Teoremas da Programação Geométrica

A programação geométrica lida com o problema de minimização de posinômios e a maximização de funções produto. Os problemas de minimização são chamados programas primais e os problemas de maximização são chamados de programas duais.

2.2.1. Programa Primal P

Encontrar o mínimo valor da função $g_0(t)$.

$$\min g_0(t) = \sum_{i \in J(0)} c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}} \quad (2.38)$$

sujeita às restrições

$$g_k(t) = \sum_{i \in J(k)} c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}} \leq 1$$

$$k = 1, 2, \dots, p \quad (2.39)$$

onde

$$J(k) = \{m_k, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, n_k\}, k=0,1, \dots, p \quad (2.40)$$

e

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \quad (2.41)$$

$$m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 > 0, t_2 > 0, \dots, t_m > 0 \\ c_i > 0 \\ a_{ij} \begin{array}{l} > \\ < \end{array} 0 \end{array} \right\} \quad (2.43)$$

O posinômio a ser minimizado ou seja $g_0(t)$ é denominado função primal e as variáveis t_1, t_2, \dots, t_m são chamadas variáveis primais.

A matriz a_{ij} é denominada matriz de expoentes A. Tem n linhas e m colunas.

O programa dual correspondente ao programa primal P é o seguinte:

2.2.2. Programa Dual B

Encontrar o máximo valor da função produto:

$$v(\delta) = \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \quad (2.44)$$

onde

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J(k)} \delta_i \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.45)$$

$$J(k) = \{m_k, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, n_k\}, \quad k=0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_{0+1}, m_2 = n_{1+1} \dots m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n$$

$$c_i > 0$$

e

$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ está sujeito às restrições

$$\delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \dots, \delta_n \geq 0 \quad (2.46)$$

$$\sum_{i \in J(0)} \delta_i = 1 \quad (2.47)$$

$$e \sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.48)$$

convencionou-se que:

$$x^x = x^{-x} = 1 \text{ para } x = 0$$

Com esta condição a função $v(\delta)$ é contínua sobre seu domínio de definição.

A função produto $v(\delta)$ é denominada função dual e as variáveis $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ são chamadas de variáveis duais. A relação (2.46) é a condição de positividade, a (2.47) é chamada de condição de normalidade e a (2.48) é denominada de condição de ortogonalidade. O conjunto das restrições caracteriza as restrições duais.

Nota-se que os fatores c_i da função dual $v(\delta)$ são os coeficientes dos posinômios $g_k(t)$, sendo $k=0,1,2, \dots, p$. Cada δ_i está associado biunivocamente com o iésimo termo u_i do programa primal P . Cada fator $\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$ vem de uma restrição $g_k(t) \leq 1$. A condição de normalidade $\lambda_0 = 1$ é a única que diferencia a função objetivo $g_0(t)$ das restrições $g_k(t)$. A matriz A de coeficientes a_{ij} , da condição de ortogonalidade, é a matriz de expoentes do programa primal P .

Os teoremas básicos da programação geométrica relacionam as propriedades de cada programa primal com seu correspondente programa dual.

Estas relações são objeto de estudo da teoria da dualidade da programação geométrica. As demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontradas na referência (16).

2.2.3. A Dualidade em Programação Geométrica

Um programa primal ou dual é consistente se existe ao menos um ponto t (vetor) que satisfaz suas restrições. O programa primal P é dito superconsistente se há pelo menos um vetor t^* com componentes positivos e a propriedade

$$g_k(t^*) < 1 \quad k=1, 2, \dots, p \quad (2.49)$$

Teorema 1

Se o programa primal P é superconsistente e a função primal $g_0(t)$ atinge seu valor mínimo no ponto t' que satisfaz às restrições, então:

(i) O programa dual correspondente B é consistente e a função dual $v(\delta)$ atinge seu máximo num ponto que satisfaz as restrições duais.

(ii) O valor máximo da função dual é igual ao valor mínimo da função primal.

(iii) Se t' é um ponto minimizante para o programa primal P , existem multiplicadores de Lagrange, positivos, μ'_k , $k=1, 2, \dots, p$, tais que a função de Lagrange:

$$L(t, \mu) = g_0(t) + \sum_{k=1}^p \mu_k \{g_k(t) - 1\} \quad (2.50)$$

tem a propriedade

$$L(t', \mu) \leq g_0(t') = L(t', \mu') \leq L(t, \mu) \quad (2.51)$$

para $t_j > 0$ e $\mu_k \geq 0$

Mais ainda, existe um vetor maximizante δ' para o programa dual B cujos componentes são:

$$\delta'_i = \begin{cases} \frac{c_i t_i^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}}}{g_0(t)} & i \in J(0) \\ \frac{\mu_k c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}}}{g_0(t)} & i \in J(k) \end{cases} \quad (2.52)$$

com $t = t'$ e $\mu = \mu'$ e

$$\lambda_k(\delta') = \frac{\mu'_k}{g_0(t)} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.53)$$

(iiii) Se δ' é um ponto maximizante para o programa dual B, cada ponto minimizante t' do programa primal P satisfaz ao seguinte sistema de equações

$$c_i t_i^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}} = \begin{cases} \delta'_i v(\delta'), & i \in J(0) \\ \frac{\delta'_i}{\lambda_k(\delta')}, & i \in J(k) \end{cases} \quad (2.54)$$

onde k varia nos inteiros positivos para $\lambda_k(\delta') > 0$.

A relação (2.52) fornece uma maneira de calcular o vetor δ' , a partir do vetor minimizante t' e de multiplicadores de Lagrange apropriados μ'_k , $k = 1, 2, \dots, p$

O sistema (2.54) permite encontrar um vetor minimizante t' a partir do vetor maximizante δ' do seguinte modo. O sistema (2.54) pode ser facilmente reduzido a um sistema de equações lineares tomando o logaritmo de ambos os lados de cada equação.

$$\log c_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} \log t_j = \log \delta'_i - v(\delta') \quad i \in J(0) \quad (2.55)$$

$$\log c_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} \log t_j = \log \frac{\delta'_i}{\lambda_k(\delta')} \quad i \in J(k)$$

Uma das hipóteses do primeiro teorema da dualidade é que a função primal $g_0(t)$ atinge seu mínimo num ponto satisfazendo as restrições primais. O segundo teorema da dualidade da programação geométrica complementa o primeiro teorema da dualidade, fornecendo a condição suficiente para que as hipóteses do primeiro teorema sejam satisfeitas.

Teorema 2

Se o programa primal P é consistente e se há um ponto δ^* com componentes positivos que satisfaz as res

trições do programa dual B, a função primal $g_0(t)$ atinge seu mínimo em um ponto t' que satisfaz as restrições do programa primal P.

2.2.4. Propriedades dos Programas Primal e Dual

As restrições do programa primal P são em geral não lineares, enquanto as restrições do programa dual B são restrições lineares. Esta propriedade permite simplificações no tratamento do programa dual B.

As soluções da condição de ortogonalidade

$$\delta / \quad A' \cdot \delta = 0 \quad (2.56)$$

constituem um subespaço vetorial de E_n , chamado espaço dual.

O espaço dual é o complemento ortogonal do espaço primal (formado pelas colunas da matriz de expoentes A).

A condição de normalidade especifica um hiperplano em E_n , chamado de hiperplano da normalidade, e as condições de positividade restringem as variáveis duais ao primeiro octante de E_n .

O conjunto de valores que satisfaz as restrições duais, é a intersecção do espaço dual, do hiperplano de normalidade e do primeiro octante de E_n .

O conjunto de soluções viáveis para um programa com grau de dificuldade igual a zero, consiste em um único ponto.

Para um programa com grau de dificuldade d , podemos construir os vetores básicos $b^{(j)}$, $j=0, 1, 2, \dots, d$ tais que a solução geral das restrições duais seja

$$\delta = b^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b^{(j)} \quad (2.57)$$

onde os r_j são números reais satisfazendo a condição de positividade

$$b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)} \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.58)$$

$b_i^{(j)}$ é o i ésimo componente do vetor $b^{(j)}$.

As variáveis r_j são chamadas variáveis básicas. O vetor $b^{(0)}$ que satisfaz a condição de normalidade e a condição de ortogonalidade é chamado de vetor de normalidade.

Os vetores $b^{(j)}$ $j = 1, 2, \dots, d$ são chamados vetores de nulidade.

A função dual $v(\delta)$ em termos de variáveis básicas é:

$$v = \left(\prod_{i=1}^n c_i \{ b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)} \} \right) \left(\prod_{i=1}^n \delta_i^{-\delta_i} \right) \left(\prod_{k=1}^p \lambda_k^{(\delta)} \lambda_k^{(\delta)} \right) \quad (2.59)$$

Fazendo

$$K_j = \prod_{i=1}^n c_i^{b_i^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (2.60)$$

vem

$$v = K_0 \left(\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \delta_i^{-\delta_i} \right) \left(\prod_{k=1}^p \lambda_k^{(\delta)} \lambda_k^{(\delta)} \right) \quad (2.61)$$

onde K_j são as constantes básicas.

Com esta mudança de variáveis podemos escrever o programa dual transformado.

2.2.5. Programa Dual Transformado B_r

$$\max v(r) = K_0 \left(\prod_{j=1}^d K_j^{r_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \delta_i(r)^{-\delta_i(r)} \right) \left(\prod_{k=1}^p \lambda_k(r)^{\lambda_k(r)} \right) \quad (2.62)$$

onde

$$\delta_i(r) = b_i^{(0)} + \sum_1^d r_j b_i^{(j)} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.63)$$

e

$$\lambda_k^{(r)} = \lambda_k^{(0)} + \sum_1^d r_j \lambda_k^{(j)} \quad k = 1, 2, \dots, p$$

(2.64)

sendo

$$\lambda_k^{(j)} = \sum_{i \in J(k)} b_i^{(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, d$$

(2.65)

e

$$K_j = \prod_{i=1}^n c_i^{b_i^{(j)}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, d$$

(2.66)

com

$$b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(2.67)

$$\sum_{i=1}^{n_0} b_i^{(0)} = 1$$

(2.68)

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} b_i^{(0)} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(2.69)

e os vetores $b^{(j)}$, $j=1,2, \dots, d$ formam uma base do espaço de soluções do sistema linear homogêneo

$$\sum_{i=1}^{n_0} y_i = 0 \quad (2.70)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = 0 \quad j = 1,2, \dots, m \quad (2.71)$$

onde os a_{ij} são elementos da matriz de expoentes A do programa primal P .

As restrições do programa dual transformado B_r são restrições lineares e portanto convexas. Os vetores que satisfazem às restrições de B_r formam então um conjunto convexo. Seria mais simples maximizar a função dual se $v(r)$ fosse côncava, o que não acontece. Demonstra-se na referência (16), que a função $\log(v(r))$ é côncava apesar de $v(r)$ não o ser.

Como a função logarítmica é monotônica crescente, $v(r)$ e $\log(v(r))$ têm o mesmo conjunto de pontos maximizantes.

Então a solução do programa dual transformado B_r pode ser encontrada resolvendo o programa côncavo obtido de B_r , trocando-se a função objetivo $v(r)$ por $\log(v(r))$.

Como consequência, se r é um ponto maximizante então

$$\frac{\partial \log(v(r))}{\partial r_j} = 0 \quad j = 1,2, \dots, d \quad (2.72)$$

ou

$$K_j = \left(\prod_{i=j}^n \delta_i b_i^{(j)} \right) \prod_{K=1}^p \lambda_K^{(\delta) - \lambda_K^{(j)}} ;$$

$$j = 1, 2, \dots, d \quad (2.73)$$

onde

$$K_j = \prod_{i=j}^n c_i b_i^{(j)} ; \quad j = 1, 2, \dots, d$$

e

$$v(\delta) = K_0 \left(\prod_{i=1}^n \delta_i b_i^{(0)} \right) \prod_{K=1}^p \lambda_K^{(\delta) \lambda_K^{(0)}} \quad (2.74)$$

com δ satisfazendo as restrições duais e a relação (2.73).

As equações (2.73) são chamadas equações maximizantes.

Formam um sistema de d equações não lineares nas d variáveis básicas r_j . O ponto maximizante para o programa dual B é encontrado resolvendo esse sistema de equações não lineares.

2.2.6. Exemplos de Técnicas de Redução de Problemas a Programas Geométricos

Após o modelo estar definido ele deve ser adaptado à forma padronizada dos problemas de programação geométrica.

Vamos mostrar alguns procedimentos mais simples propostos na referência (16) e mais adiante será citada uma extensão à programação geométrica que consideramos importante.

Seja o seguinte:

$$\min G(t) = f(t) + (q(t))^a \cdot h(t)$$

onde $f(t)$, $q(t)$ e $h(t)$ são posinômios na variável $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ e $a > 0$. Consideremos o problema

$$\min g(\tau) = f(t) + t_0^a \cdot h(t)$$

$$\text{sujeito a } t_0^{-1} q(t) \leq 1$$

onde t_0 é uma variável artificial independente e $\tau = (t_0, t_1, \dots, t_m)$.

Por construção, o vetor $t' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$ minimiza $G(t)$, se e somente se,

$$\tau = (q(t'), t'_1, \dots, t'_m)$$

minimiza $g(\tau)$ sujeito à restrição dada. Também é claro da construção que o mínimo valor restrito de $g(\tau)$ é igual ao mínimo valor $G(t)$.

Se uma função $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ não é um posinômio, é possível aproximá-la por um posinômio.

Seja:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_m) = g(t_1, t_2, \dots, t_m) + h(t_1, \dots, t_m) \quad (2.75)$$

onde g é um posinômio e a função h não é um posinômio.

Para reduzir esta função a um posinômio, deveremos aproximar h por um posinômio de um único termo.

Para fazer isto é necessário estabelecer aproximadamente o campo de variação de cada variável t_j .

Se t_j^* a média geométrica ou aritmética da faixa de variação de t_j . Então teremos um vetor $t^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_m^*)$ denominado ponto de operação. Supõe-se, é claro, que as coordenadas de t^* são todas positivas.

Seja

$$u(t) = c t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_m^{a_m}$$

então

$$u(t) = u(t^*) \cdot \left(\frac{t_1}{t_1^*}\right)^{a_1} \left(\frac{t_2}{t_2^*}\right)^{a_2} \dots \left(\frac{t_m}{t_m^*}\right)^{a_m}$$

e

$$\frac{t_j}{u(t)} \cdot \frac{\partial u}{\partial t_j} = a_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Podemos aproximar $h(t)$ por

$$h(t) \cong h(t^*) \left(\frac{t_1}{t_1^*}\right)^{a_1} \left(\frac{t_2}{t_2^*}\right)^{a_2} \dots \left(\frac{t_m}{t_m^*}\right)^{a_m}$$

onde

$$a_j = \left(\frac{t_j^*}{h(t^*)} \cdot \frac{\partial h(t^*)}{\partial t_j^*}\right) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(2.76)

Esta aproximação é equivalente à expansão em série de potência de $\log h(t)$ em termos das variáveis $z_j = \log (t_j/t_j^*)$ e desprezando os termos de ordem superior a 1.

Se $h(t^*)$ é positiva, $f(t)$ é aproximada por um posinômio. A aproximação é tal que $f(t)$ e o posinômio têm o mesmo valor e as mesmas derivadas parciais no ponto de operação t^* .

2.3. Técnica Operacional da Programação Geométrica

Para podermos usar as equações maximizantes, devemos determinar os vetores $b^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, d$, tais que

$$\delta_i = b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)}, \delta_i > 0$$

e

$$\sum_{i \in J(0)} \delta_i = 1 \quad \text{condição de normalidade}$$

$$\sum_{i \in J(0)} \delta_i a_{ij} = 0 \quad \text{condição de ortogonalidade}$$

Um procedimento de álgebra linear para obter estes vetores é:

Dada a matriz A, dos expoentes das variáveis t_j do problema, com n linhas e m colunas, construímos a matriz R com n linhas e m colunas.

$$R = \begin{bmatrix} I_m & , & m \\ \hline R_{d+1} & , & m \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

sendo que $I_{m,m}$ é uma sub matriz identidade com m linhas e m colunas, e a matriz $R_{d+1,m}$ é uma sub

matriz com $d+1$ linhas e m colunas resultantes de um processo de diagonalização da matriz original A . Partiu-se da hipótese que a característica da matriz A é m . Caso contrário, simplesmente se eliminam as linhas que forem combinações lineares das outras, reduzindo-se os valores de m e $d+1$.

A diagonalização da matriz A pode ser efetuada através de combinações lineares das colunas ou por um processo numérico de pivotagem:

Escolhemos na linha s , coluna k um elemento $a_{s k} \in A$ tal que $a_{s k} \neq 0$

A matriz A é recalculada para R da seguinte forma:

$$r_{sj} = 0 \quad , \quad j \neq k$$

$$r_{ik} = a_{ik} / a_{sk} \tag{2.78}$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{sj} a_{ik}}{a_{sk}} \quad i \neq s, j \neq k$$

Este procedimento repetido m vezes nos fornecerá a matriz R . Da matriz R determina-se a matriz B

$$B = \begin{bmatrix} -R'_{m, d+1} \\ \hline I_{d+1, d+1} \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

$R'_{m, d+1}$ é a matriz transposta de $R_{d+1, m}$

Os $d+1$ vetores coluna da matriz B b_0, b_1, \dots, b_d são ortogonais aos vetores linha da matriz A , tal que recolocando as linhas de B na ordem original de A , teremos

$$A' \cdot B = 0 \quad (2.80)$$

A condição de ortogonalidade está satisfeita.

A condição de normalidade deve ser também obedecida

$$\sum_{i \in J(0)} \delta_i = 1$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J(0)} \delta_i &= \sum_{i \in J(0)} b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j \sum_{i \in J(0)} b_i^{(j)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

fazendo

$$\sum_{i \in J(0)} b_i^{(j)} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in J(0)} b_i^{(0)} = 1$$

a condição de normalidade está satisfeita independente do valor de r_j .

Isto pode ser conseguido, escolhendo arbitrariamente um dos vetores b_ℓ e dividindo seus com

ponentes $b_{i\ell}$ pela constante

$$c_\ell = \sum_{i \in J(0)} b_{i\ell} \quad c_\ell \neq 0 \quad (2.81)$$

Este vetor b_ℓ assim modificado terá a soma dos primeiros $i \in J(0)$ componentes, igual a 1. Chamaremos este vetor de vetor de normalidade.

Uma combinação linear das colunas da matriz B não altera as propriedades de ortogonalidade.

Para cada um dos d vetores coluna restantes b_q , calcularemos a combinação linear,

$$b^{(j)} = b_q - c_q b^{(0)} \quad (2.82)$$

Os d vetores $b^{(j)}$ assim construídos satisfazem à condição

$$\sum_{i \in J(0)} b_i^{(j)} = 0$$

e são chamados vetores de nulidade.

Deve-se ressaltar que a escolha do vetor de normalidade não é única e que qualquer combinação linear de dois vetores de nulidade é outro vetor de nulidade.

Se a um vetor de normalidade adicionarmos um

vetor de nulidade o vetor resultante continua um vetor de normalidade.

O vetor δ pode ser agora calculado por

$$\delta = b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + \dots + r_d b^{(d)}$$

com os r_j tais que $\delta > 0$

Essa formulação permite o emprego das equações maximizantes para determinar o máximo da função dual $v(\delta)$ e conseqüentemente o mínimo da função primal $g(t)$.

2.4. Programação Geométrica Complementar

A programação geométrica apesar de ser uma técnica poderosa de otimização, pode apresentar algumas dificuldades na sua aplicação em determinados problemas reais.

A mais séria restrição ao seu uso na otimização de projetos de engenharia é o fato da programação geométrica apenas poder trabalhar com termos positivos. Alguns pesquisadores tentaram tornar este problema, estendendo a programação geométrica para quaisquer funções racionais de polinômios. É o caso de Duffin (14), Peterson (29) e Avriel e Willians (3). Estes últimos desenvolveram uma técnica denominada "programação geométrica complementar".

Esta técnica não leva sempre ao mínimo global, mas em muitas situações práticas é, interessante encontrar pelo menos um mínimo local.

O algoritmo da programação geométrica complementar consiste em aproximar sucessivamente funções racionais de posinômios por posinômios. A forma mais geral para um programa geométrico complementar é:

Mínimo de $g_0(t)$

sujeito a

$$\begin{aligned} g_k(t) &\leq 1 & k = 1, 2, \dots, p; \\ t &> 0 \end{aligned} \tag{2.83}$$

onde

$$g_k(t) = \frac{A_k(t) - B_k(t)}{C_k(t) - D_k(t)},$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, p \tag{2.84}$$

onde A, B, C e D são posinômios e possivelmente alguns deles estarão ausentes. Devemos assumir que $g_0(t) > 0$ para todo o campo de definição de t. Isto, em princípio pode ser assegurado, adicionando uma constante suficientemente grande a g_0 .

A primeira providência é introduzir no sistema (2.83) uma nova variável $t_0 > 0$, satisfazendo a $t_0 \geq g_0(t)$, isto é, $g_0(t)/t_0 \leq 1$ tal que o problema possa ser reduzido a minimizar t_0 sujeito às restrições do tipo

$$\frac{A(t) - B(t)}{C(t) - D(t)} \leq 1 \quad (2.85)$$

As restrições somente terão sentido se $C(t) - D(t)$ tiver sinal constante no domínio de t , isto é, se $C(t) - D(t)$ é positivo para algum t viável, deve ser positivo para todos os t viáveis.

Conforme $C(t) - D(t)$ for positivo ou negativo, reescrevemos (2.85)

Como

$$\frac{A(t) + D(t)}{B(t) + C(t)} \leq 1$$

ou

$$\frac{B(t) + C(t)}{A(t) + D(t)} \leq 1 \quad (2.86)$$

Desta forma, o sistema (2.83) será reduzido à forma de programa padrão de programação geométrica.

mínimo de t_0

sujeito a

$$P_k(t) / Q_k(t) \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.87)$$

$$e \quad t > 0 \quad t = (t_0, t_1, \dots, t_m)$$

onde

$P_k(t)$ e $Q_k(t)$ são posinômios da forma

$$P_k(t) = \sum_{i \in J(K)} p_i(t) = \sum_{i \in J(K)} c_i \prod_j t_j^{a_{ij}} \quad (2.88)$$

$$Q_k(t) = \sum_{i \in J(K)} q_i(t) = \sum_{i \in J(K)} d_i \prod_j t_j^{b_{ij}} \quad (2.89)$$

$J(k)$ definido como em (2.40).

O algoritmo é baseado no fato de que com restrições do tipo (2.87), se pudermos aproximar $Q_k(t)$ por um termo posinomial, então teremos as restrições normais da programação geométrica. O problema ficará então reduzido a um problema comum de programação geométrica; seja na equação (2.89).

$$u_i = q_i(t); \quad \delta_i = u_i(\bar{t})/Q(\bar{t}) \quad (2.90)$$

então

$$Q(t) = \sum_i q_i(t) \geq \prod_i \left(\frac{q_i(t)}{q_i(\bar{t})} \right) \cdot Q(\bar{t})^{q_i(\bar{t})/Q(\bar{t})} \quad (2.91)$$

usando novamente (2.89) vem

$$Q(t) \geq \bar{Q}(t, \bar{t}) \equiv Q(\bar{t}) \prod_j \left(\frac{t_j}{\bar{t}_j} \right)^{\sum_i (b_{ij} q_j(\bar{t})/Q(\bar{t}))} \quad (2.92)$$

onde, naturalmente, vale a igualdade se $t_i = \bar{t}_i$. Chamamos a função $\bar{Q}(t, \bar{t})$, a aproximação $Q(t)$ no ponto \bar{t} . Para resolver o problema, inicia-se com um ponto viável $t^{(1)}$. Substituindo-se $Q_k(t)$ em (2.89) pela sua aproximação no ponto $t^{(1)}$, $\bar{Q}_k(t, t^{(1)})$ e resolvemos o problema de programação geométrica normal resultante para obter o ponto seguinte $t^{(2)}$.

Seguindo este procedimento, geraremos uma sequência $\{t^{(\alpha)}\}$, onde $\{t^{(\alpha+1)}\}$ é a solução ótima para o problema normal da programação geométrica:

-(PPG α)

Mínimo t_0

sujeito a

$$\frac{P_k(t)}{\bar{Q}_k(t, t^{(\alpha)})} \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

e

$$t = (t_0, t_1, \dots, t_m) > 0$$

Pode-se provar que cada ponto gerado $t^{(\alpha+1)}$ está contido no domínio de t e que a sequência $\{t^{(\alpha)}\}$ converge para um mínimo local quase sempre. Em alguns casos excepcionais a sequência converge para pontos denominados "pontos de inflexão" que não são mínimos locais. As condições em que isto ocorre estão descritos em maior detalhe na referência (3).

NOÇÕES DE PROJETO DE ENGRENAGENS

CAPÍTULO 3

Para o desenvolvimento do nosso modelo de otimização serão necessários algumas noções de projeto de engrenagens.

Existem diversos métodos para o projeto de engrenagens na literatura especializada, dentre os quais adotaremos o apresentado em Johnson (21). Este método é devido a Dudley (11), sendo bastante conhecido e utilizado na prática, com algumas variações.

Procuramos selecionar as principais relações e restrições que devem ser seguidas pelo projetista, no dimensionamento das engrenagens.

3.1. Relações de Projeto Cinemáticas e Geométricas

A nomenclatura e as unidades utilizadas são as mesmas normalmente encontradas na literatura sobre engrenagens. Isto explica o fato de, por exemplo, a velocidade a ser dada em metros por minuto e dos diâmetros das engrenagens serem dados em centímetros.

Para facilidade de entendimento as equações apresentadas neste capítulo estarão sempre relacionadas com a figura 3.1., da página 196* que mostra um típico par de engrenagens. O pinhão que é a engrenagem menor, gira com velocidade angular ω_p e está acoplado à

* A figura 3.1. está colocada em apenso de forma a permitir ao leitor examiná-la enquanto lê este capítulo.

coroa, engrenagem maior, que gira com velocidade angular ω_c . As engrenagens são cilíndricas de dentes helicoidais.

As equações mais importantes do ponto de vista cinemático e geométrico são as seguintes:

- velocidade tangencial

$$V = (\pi/100) (D_p \omega_p) = (\pi/100) (D_g \omega_c) \quad (3.1)$$

V = velocidade tangencial em metros por minuto

D_p, D_g = diâmetro primitivo do pinhão e da coroa respectivamente, em centímetros.

ω_p, ω_c = velocidade angular do pinhão e da coroa em rotações por minuto

- relação de velocidades ou razão de transmissão

É a velocidade angular da engrenagem menor dividida pela velocidade angular da engrenagem maior.

$$a = \frac{\omega_p}{\omega_c} = \frac{D_g}{D_p} = \frac{N_g}{N_p} \quad (3.2)$$

onde

a = razão de transmissão

N_p = número de dentes do pinhão

N_g = número de dentes da coroa

Ainda na figura 3.1., a distância entre centros CD é a distância entre o eixo do pinhão e o eixo da coroa.

$$CD = \frac{D_p + D_g}{2} = \frac{D_p \cdot (a+1)}{2} \quad (3.3)$$

- passo circular e passo diametral

. passo circular P_c

. passo diametral P_d

Por definição o passo circular é a distância entre dois pontos correspondentes, em dois dentes adjacentes, medida no plano diametral sobre o círculo primitivo.

$$P_c = \pi \cdot D_p / N_p = \pi \cdot D_g / N_g \quad (3.4)$$

onde P_c é expresso em centímetro por dente.

Por definição, passo diametral é a razão do número de dentes pelo diâmetro primitivo, ou seja:

$$P_d = N_p / D_p = N_g / D_g \quad (3.5)$$

onde P_d é expresso em número de dentes por centímetros. Das equações (3.4) e (3.5) temos

$$P_c \cdot P_d = \pi \quad (3.6)$$

No projeto de engrenagens helicoidais é comum referir-se tanto ao plano normal como ao plano diametral. O plano normal é perpendicular ao dente, como mostra a figura 3.1.

O índice n será usado daqui por diante para referência ao plano normal.

Se o subscrito n não for usado, o termo refere-se ao plano diametral.

O passo circular, referido ao plano normal, P_{nc} é dado pela equação seguinte que pode ser deduzida da figura 3.1.

$$P_{nc} = P_c \cos \psi \quad (3.7)$$

onde

P_c = passo circular referido ao plano diametral

ψ = ângulo da hélice do engrenamento

O relacionamento entre o passo circular e o passo diametral referidos ao plano normal é o mesmo que quando referidos ao plano diametral.

$$P_{nc} \cdot P_{nd} = \pi \quad (3.8)$$

Das equações (3.6), (3.7) e (3.8) temos:

$$P_{nd} = P_d / \cos \psi \quad (3.9)$$

onde

P_{nd} é o passo diametral com relação ao plano normal e

P_d é o passo diametral com relação ao plano diametral.

Das equações (3.5) e (3.9) obtemos a equação:

$$P_{nd} = \frac{N_p}{D_p \cos \psi} = \frac{N_g}{D_g \cos \psi} \quad (3.10)$$

Podemos definir também

$$D_{np} = \frac{D_p}{\cos^2 \psi} \quad (3.11)$$

$$D_{ng} = \frac{D_g}{\cos^2 \psi} \quad (3.12)$$

onde

D_{np} e D_{ng} são os diâmetros primitivos do pinhão e da coroa respectivamente em relação ao plano normal.

Deve ser ressaltado que D_{np} e D_{ng} não são diâmetros de círculos, mas sim, raios de curvatura das elipses formadas pela intersecção do plano normal e do cilindro primitivo, no ponto O da figura 3.1. Eles representam os "diâmetros" de engrenagens hipotéticas, cilíndricas de dentes retos, no plano normal.

Podemos desenvolver as equações seguintes estendendo a relação (3.5) e usando as equações (3.10), (3.11) e (3.12).

$$P_{nd} = \frac{N_p}{D_p \cos \psi} = \frac{N_p}{D_{np} \cos \psi} = \frac{N_p / \cos^3 \psi}{D_{np}}$$

Então

$$N_{np} = N_p / \cos^3 \psi \quad (3.13)$$

analogamente

$$N_{ng} = N_g / \cos^3 \psi \quad (3.14)$$

Onde

N_{np} e N_{ng} são os números de dentes do pinhão e coroa respectivamente, referidos no plano normal

N_p e N_g são os números de dentes do pinhão e da coroa no plano diametral e

ψ é o ângulo da hélice do engrenamento.

3.2. Restrições Cinemáticas e Geométricas

O projetista, ao projetar um par de engrenagens, deve levar em conta uma série de fatores que limitam a sua liberdade no dimensionamento das engrenagens. Vamos expor as principais restrições do ponto de vista cinemático e geométrico:

- Número mínimo de dentes

Uma consideração importante é com relação à interferência que pode haver entre os dentes das rodas dentadas. Para se evitar interferência no engrenamento, devemos ter:

$$N_{np} \geq \frac{2m}{\text{sen}^2 \phi_n} \quad (3.15)$$

onde m é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de dentes adotado. É conhecida como adendo. Para os sistemas de engrenagens com $14\ 1/2^\circ$ e 20° de ângulo de pressão ϕ_n , m é igual à unidade.

Para o sistema de ângulo de pressão $\phi_n = 20^\circ$, dentes rebaixados, o fator m é igual 0.8. O ângulo ϕ_n é o ângulo de pressão referido ao plano normal ϕ . É dado pela seguinte equação.

$$\tan \phi_n = \cos \psi \tan \phi \quad (3.16)$$

onde ϕ é o ângulo de pressão referido ao plano diametral.

Na fabricação de engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais, existe uma limitação prática com respeito à dimensão da largura da face b , fig. 3.1., para podermos assegurar um bom contato entre os dentes. Esta limitação deve-se a deformações sofridas pelos dentes no tratamento térmico das engrenagens e erros intrínsecos de manufatu

ra e montagem do engrenamento.

Na literatura admite-se que a máxima largura de face permitida é função do passo circular, que é uma medida do tamanho do dente. É claro que, o limite de proporcionalidade entre a largura da face b e o passo circular depende do grau de precisão que pode ser obtido na manufatura.

Formalizaremos a proporcionalidade entre a largura da face e o passo circular através de um fator de largura da face CF definido para engrenagens cilíndricas de dentes retos pela seguinte equação:

$$b = CF P_c \quad (3.17)$$

Na equação (3.17), b é a largura da face, CF é o fator de largura da face e P_c e o passo circular. Tanto b como P_c são expressos em centímetros e CF é adimensional.

Nas engrenagens helicoidais, a largura da face de contato, b_n , é maior que a largura da roda dentada; o relacionamento entre b e b_n é dado por

$$b_n = b / \cos \psi \quad (3.18)$$

Para estudarmos o problema de contato dos dentes em engrenagens helicoidais é conveniente nos referirmos a valores relativos ao plano normal. Estendendo a equação (3.17) podemos definir o fator de largura

da face relativo ao plano normal como:

$$b_n = C_n F P_n c = C_n F \pi / P_n d \quad (3.19)$$

Na equação (3.19), b_n é a largura da face referida ao par de gerador, em centímetros, $C_n F$ é o fator de largura de face referido ao plano normal. O $P_n c$ é o passo circular e P_{nd} é o passo diametral, ambos referidos ao par gerador.

Podemos adotar para limite superior de $C_n F$, o limite comumente aceito para engrenagens cilíndricas de dentes retos. O fator de largura de face $C_n F$ deve ser menor ou igual a quatro nas condições normais de fabricação de engrenagens para assegurar um bom contato dos dentes. O limite exato de $C_n F$ depende da precisão da manufatura, mas na ausência de maiores informações, o valor de quatro para limite superior de $C_n F$ é razoável, se forem usadas as boas práticas de fabricação de engrenagens.

- Grau de recobrimento

O grau de recobrimento m_p é um fator importante para consideração em estudos cinemáticos.

Segundo o professor Gil de Oliveira (26), o grau de recobrimento é o número de pares de dentes em contato em um plano diametral fixado. O grau de recobrimento m_p pode ser

determinado aproximadamente por meio de um gráfico, ou precisamente por cálculos mais complicados. Esses cálculos mostram que m_p é função do ângulo da hélice ψ , do número de dentes do pinhão N_p , da razão de transmissão a , do ângulo de pressão ϕ_n e do adendo que são variáveis independentes com respeito a m_p .

Para procedimentos de projeto, devemos levar em conta que existem apenas alguns valores possíveis de P_{nd} para os sistemas de engrenagens existentes. Como exemplo, no sistema de Dentes Rebaixados e 20° de ângulo de pressão as tabelas 3.1., 3.2. e 3.3. contém os valores calculados de m_p para valores típicos de ψ , N_p e a .

Tabela 3.1.
Valores típicos do grau de recobrimento como função do ângulo da hélice para engrenagens helicoidais. ($N_p = 30$, $a = \omega_p/\omega_g = 3$, $\phi_n = 20^\circ$ dentes rebaixados)

ψ	m_p
0°	1,426
10°	1,394
20°	1,299
30°	1,148
40°	0,955

Fonte: Tabela 12.2a na referência (21)

Tabela 3.2.

Valores típicos do grau de recobrimento m_p como função do número de dentes do pinhão N_p para engrenagens helicoidais

($a = \omega_p / \omega_g = 3$, $\psi = 20^\circ$ ângulo da hélice, $\phi_n = 20^\circ$ dentes rebaixados)

N_p	m_p
10	1.156
20	1.255
30	1.299
40	1.324
50	1.367

Fonte: Tabela 12.2b na referência (21)

Tabela 3.3.

Valores típicos do grau de recobrimento m_p como função da razão da transmissão $a = \omega_p / \omega_g$ para engrenagens helicoidais

($N_p = 30$, $\psi = 20^\circ$ ângulo da hélice, $\phi_n = 20^\circ$ dentes rebaixados)

a	m_p
1	1.247
2	1.284
3	1.299
4	1.307
5	1.312

Fonte : Tabela 12.2c na referência (21)

3.3. Relações de Projeto Dinâmicas

A aplicação normal de um engrenamento em uma máquina é para transmitir um movimento, torque ou potência útil de um eixo a outro.

O relacionamento entre o torque no pinhão M_{tp} e a potência transmitida P_t é dado pela seguinte equação:

$$P_t = \frac{M_{tp} \cdot \omega_p}{71620} \quad (3.20)$$

onde

- P_t = potência transmitida em CV
- M_{tp} = torque no eixo do pinhão em quilogramas força x centímetros
- ω_p = velocidade angular do eixo do pinhão em rpm.

É razoável considerarmos a perda de potência no engrenamento desprezível, pois o rendimento em engrenamentos bem lubrificados é maior ou igual a 99%.

A potência vai ser transmitida de um eixo a outro por forças de contato entre os dentes do pinhão e da coroa.

Para engrenagens bem lubrificadas, a força de contato vai ser normal à superfície do dente e sua linha de ação passa pelo ponto de contato O na figura 3.1. Para engrenagens helicoidais existe um plano de ação da força. Vamos então decom

por a força de contato em três componentes ortogonais no ponto de contato, F_t , F_a e F_r na figura 3.1. As forças F_a e F_r são chamadas de componentes axial e radial, respectivamente, e não transmitem energia de um eixo a outro.

A componente restante, F_t denominada componente tangencial transmite a energia e o seu produto pelo raio primitivo do pinhão $D_p/2$ é o torque no eixo do pinhão. Da mecânica elementar, temos o seguinte relacionamento:

$$F_t = \frac{716 (P_t)}{V} = \frac{2 M_{tp}}{D_p} \quad (3.21)$$

$$F_a = F_t \tan \psi \quad (3.22)$$

$$F_r = F_t \tan \emptyset \quad (3.23)$$

onde

ψ , \emptyset , P_t , V , D_p e M_{tp} já definidos

F_t = componente tangencial em quilogramas força

F_a = componente axial em quilogramas força

F_r = componente radial em quilogramas força

A componente F_t seria a força tangencial suportada pelo dente se as engrenagens fossem perfeitamente fabricadas. Mas existem alguns erros de manufatura no perfil e no espaçamento dos dentes que não podem ser evitados ou não são economi

camente evitáveis. Como a força tangencial tem uma alta sensibilidade aos erros de espaçamento ou perfil dos dentes, a força F_t passa a ser uma força média, podendo a força máxima atingir valores consideravelmente mais altos que F_t .

O valor a ser considerado para a carga nos dentes é então o valor da carga dinâmica que age nos dentes.

3.4. Forças Dinâmicas nos Dentes

As forças dinâmicas são influenciadas pela distribuição de massas e pelas propriedades elásticas do sistema mecânico, aqui entendido como o par de engrenagens. O torque no eixo do pinhão, geralmente fornecido por um motor, também é irregular dentro de uma determinada faixa, devido a características de fabricação do motor. O torque resistente no eixo da coroa também varia. Devido a isto, é impossível prever exatamente as forças dinâmicas que vão atuar no sistema.

Este é um problema de natureza estatística, mas usa-se no projeto de engrenagens, métodos analíticos com altas margens de segurança para a previsão de valores máximos de forças dinâmicas.

Como a precisão da fabricação não pode ser prevista exatamente pelo engenheiro de projeto, definem-se classes de precisão para fabricação. Com base na classe de precisão especificada o engenheiro pode assumir um erro provável de fabricação.

São definidas normalmente três classes de

precisão para engrenagens.

A classe 1 é para engrenagens de uso comercial; a classe 2 é de engrenagens de precisão fresadas com bastante cuidado e com um passe de acabamento; a classe 3 é de engrenagens de altíssima precisão, retificadas e lapidadas depois de uma usinagem cuidadosa. A tabela 3.4. nos dá os erros prováveis considerados normais em cada classe de precisão.

Tabela 3.4			
Erros prováveis de ação resultantes de imperfeições no perfil e/ou no espaçamento dos dentes.			
Passo diametral $P_{nd} \text{ } 2.54 \text{ cm}^{-1}$	Classe 1 $2.54^{\epsilon} \text{ cm}$	Classe 2 $2.54^{\epsilon} \text{ cm}$	Classe 3 $2.54^{\epsilon} \text{ cm}$
1	0.0048	0.0024	0.0012
2	0.0040	0.0020	0.0010
3	0.0032	0.0016	0.0008
4	0.0026	0.0013	0.0007
5	0.0022	0.0011	0.0006
6 ou mais	0.0020	0.0010	0.0005

Fonte : Tabela 12.4 na referência (21)

Muito se tem estudado sobre a determinação do valor das forças dinâmicas nos dentes.

Para cada sistema mecânico teríamos que desenvolver uma expressão para o valor da força dinâmi-

ca num estudo de grande precisão. Entretanto, para aplicações gerais é aceita a seguinte equação para estimar a força dinâmica F_d

$$F_d = F_t + \frac{0.074V (b C_1 \cos^2 \psi + F_t) \cos \psi}{0.050V (b C_1 \cos^2 \psi + F_t)^{1/2}} \quad (3.24)$$

onde

F_d = carga dinâmica do dente em quilogramas força

F_t = componente tangencial em quilogramas força

V = velocidade tangencial em metros por minuto

b = largura da face ativa em centímetros

ψ = ângulo da hélice

C_1 = fator de elasticidade e erro, dado pela equação (3.25)

Esta estimativa para a força dinâmica é conservadora e aceita pela literatura em projeto de máquinas. O fator C_1 usado na equação (3.24) é determinado por

$$C_1 = C_3 \cdot e \quad (3.25)$$

onde

e = erro na ação do dente dado na tabela 3.4 em centímetros

C_3 = constante que é função das propriedades do material e do sistema engrenagens. É dada pela equação (3.26)

$$C_3 = \frac{C_2}{(1/E_p + 1/E_g)} \quad (3.26)$$

onde

E_p, E_g = módulos de elasticidade dos materiais do pinhão e da coroa respectivamente, em quilogramas força por centímetro quadrado

C_2 = constante determinada pelo sistema de engrenagens dada na tabela 3.5

Tabela 3.5. Valor constante C_2 para equação 3.26	
Sistema de engrenagem	C_2
14 ^{1/2} ° dentes normais	0.107
20° dentes normais	0.111
20° dentes rebaixados	0.115

Fonte : Tabela 12.3 na referência (21)

3.5. Dimensionamento do Dente à Flexão

No projeto de engrenagens, usa-se a equação de Lewis para o cálculo da força de ruptura do dente. A equação básica para o esforço de ruptura do dente, deduzida nos livros de projeto de máquinas é:

$$F_b = S.b. (Y_n / P_{nd}) \quad (3.27)$$

Na equação (3.27) F_b é a força de ruptura do dente em quilogramas força e deve ser maior ou igual à carga dinâmica no dente F_d .

No lado direito da equação (3.27), b é largura da face em centímetros e P_{nd} é o passo diametral referido ao plano normal em dentes por centímetros. O termo Y_n é o fator de forma de Lewis, função do sistema de engrenagens e do número de dentes do par gerador. Os valores de Y_n encontram-se na tabela 3.6.

Na equação (3.27) S é uma característica do material em quilogramas força por centímetro quadrado e geralmente é a tensão de ruptura do material.

Para engrenagens helicoidais de precisão que podem suportar altos torques estáticos e transmissão de potência em duas direções de operação, devemos usar a equação de Lewis modificada. Incorpora o fato de termos vários dentes em contato através do grau de recobrimento m_p , a concentração de tensões pelo fator β e a transmissão de potência em dois sentidos pela tensão de fadiga S_e determinada por um ensaio apropriado.

A equação de Lewis modificada é

$$F_b = S_e . b . \beta . m_p (Y_n / P_{nd}) \quad (3.28)$$

onde

- F_b = esforço de ruptura do dente ou capacidade de carga do pinhão ou coroa, relativo ao plano diametral, em quilogramas força
- S_e = tensão de fadiga do material para o número de ciclos desejado em quilogramas força por centímetros quadrado
- b = largura de face, figura 3.1., em centímetros
- m_p = grau de recobrimento
- Y_n = fator de Lewis tabela 3.6
- P_{nd} = passo diametral relativo ao plano normal em número de dentes por centímetro.
- β = fator menor que a unidade, levando em consideração o efeito da concentração de tensões na região de contato dos dentes

Tabela 3.6.

Valores do fator de Forma de Lewis Y_n para dentes de engrenagens helicoidais

Número de dentes N_{np} ou N_{ng}	14 1/2° Perfil nor mal	20° perfil normal	20° dentes rebaixados
10	0.176	0.201	0.261
11	0.192	0.226	0.289
12	0.210	0.245	0.311
13	0.223	0.264	0.324
14	0.236	0.276	0.339
15	0.245	0.289	0.349
16	0.255	0.295	0.360
17	0.264	0.302	0.368
18	0.270	0.308	0.377
19	0.277	0.314	0.386
20	0.283	0.320	0.393
22	0.292	0.330	0.404
24	0.302	0.337	0.411
26	0.308	0.344	0.421
28	0.314	0.352	0.430
30	0.318	0.358	0.437
32	0.322	0.364	0.441
34	0.325	0.370	0.446
36	0.329	0.377	0.450
38	0.332	0.383	0.455
40	0.336	0.389	0.459
45	0.340	0.399	0.468
50	0.346	0.408	0.474
55	0.352	0.415	0.480
60	0.355	0.421	0.484
65	0.358	0.425	0.488
70	0.360	0.429	0.493
75	0.361	0.433	0.496
80	0.363	0.436	0.499
90	0.366	0.442	0.503
100	0.368	0.446	0.506
150	0.375	0.458	0.518
200	0.378	0.463	0.524
300	0.382	0.471	0.534
∞	0.390	0.484	0.550

Fonte : Tabela 12.5 na referência (21)

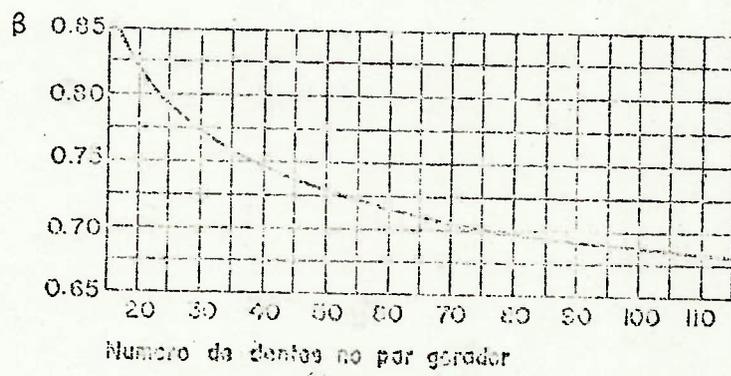


Fig. 3.2.

Fonte : Referência (21, pag. 396)

O fator β na equação (3.28) é função do número de dentes e do raio da ferramenta de corte. Os fabricantes de ferramentas de corte normalmente usam um raio igual a 0.05 vezes o passo circular. Como não temos controle sobre o raio da ferramenta de corte, vamos assumir o uso de uma ferramenta de corte normal, cujo raio é $0.05 P_{nc}$. O fator β fica como função unicamente do número de dentes do pinhão. Na figura 3.2. está o valor de β em função do número de dentes do par gerador.

Para que não haja ruptura do dente por flexão, o esforço dinâmico no dente deve ser menor ou igual à carga de ruptura do dente. A seguinte equação deve ser satisfeita tanto pelo pinhão como pela coroa:

$$F_d \leq F_b \quad (3.29)$$

3.6. Dimensionamento do Dente em Relação à Fadiga Superficial

Em geral o problema da fadiga superficial dos dentes é mais significativo que o da ruptura dos dentes das engrenagens.

No nosso estudo vamos supor que as engrenagens são fabricadas com cuidado, montadas com precisão, bem lubrificadas e protegidas contra a poeira e materiais abrasivos.

Nestas condições podemos aplicar a equação de dimensionamento do engrenamento à compressão:

$$F_w = m_p \cdot D_p \cdot b \cdot K \cdot Q / \cos^2 \psi \quad (3.30)$$

onde

F_w = carga limite de compressão do dente ou capacidade de carga do engrenamento

m_p = grau de recobrimento

D_p = diâmetro primitivo do pinhão em centímetros

ψ = ângulo da hélice

Q = fator de distribuição de tensões de Hertz

K = fator de material e forma dado pela equação (3.32)

O fator de distribuição Q baseado nas tensões de contato de Hertz é definido por:

$$Q = \frac{2 N_g}{N_g + N_p} = \frac{2 a}{a + 1} = \frac{2 D_g}{D_g + D_p} \quad (3.31)$$

onde

N_g, N_p = número de dentes do pinhão e da coroa, respectivamente

a = razão de transmissão

D_p, D_g = diâmetros primitivos do pinhão e coroa, respectivamente

O fator de material e de forma K é dado pela equação

$$K = \frac{S_c^2 \sin \phi_n}{1.4} \left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_g} \right) \quad (3.32)$$

onde

ϕ_n = ângulo de pressão do dente no plano normal

E_p, E_g = módulo de elasticidade dos materiais do pinhão e da coroa respectivamente em quilogramas força por centímetro quadrado

S_c = tensão de fadiga superficial dos materiais em contato, determinada por um teste adequado; medida em quilogramas força por centímetro quadrado.

O fator K é comumente usado no projeto de engrenagens. Valores do fator de material e forma K para vários materiais e durezas superficiais estão tabelados na tabela 3.7.

Tabela 3.7
Valores de \underline{K} para uso na equação (3.30)

Material do pinhão	Dureza Brinell	Material da Coroa	Dureza Brinell	S_c Kgf/cm ²	K 14 1/2°	K 20°
aço	150	aço	150	3.500	2.11	2.88
aço	200	aço	150	4.200	3.02	4.08
aço	250	aço	150	5.000	4.08	5.56
aço	200	aço	200	5.000	4.08	5.56
aço	250	aço	200	5.600	5.34	7.24
aço	300	aço	200	6.300	6.75	9.21
aço	250	aço	250	6.300	6.75	9.21
aço	300	aço	250	7.000	8.37	11.39
aço	350	aço	250	7.700	10.13	13.78
aço	300	aço	300	7.700	10.13	13.78
aço	350	aço	300	8.500	12.02	16.38
aço	400	aço	300	8.800	13.08	17.86
aço	350	aço	350	9.200	14.13	19.34
aço	400	aço	350	9.900	16.38	22.36
aço	500	aço	350	10.200	17.58	24.05
aço	400	aço	400	10.500	18.85	25.74
aço	500	aço	400	12.300	25.60	34.95
aço	600	aço	400	12.700	27.07	36.99
aço	500	aço	500	13.360	30.24	41.35
aço	600	aço	600	16.200	44.30	60.55
aço	150	FoFo	-	3.500	3.09	4.22
aço	200	FoFo	-	5.000	6.12	8.37
aço	250 ou +	FoFo	-	6.300	10.13	13.78
aço	150	Bronze Fosforoso	-	3.500	3.23	4.36
aço	200	Bronze Fosforoso	-	5.000	6.40	8.72
aço	250 ou +	Bronze Fosforoso	-	6.000	9.49	14.35
FoFo	-	FoFo	-	6.300	13.57	19.97

Fonte : Tabela 12.6 na referência (21)

Para que não haja desgaste ou pipocamento na superfície do dente devemos observar a seguinte condição, tanto para o pinhão como para a coroa:

$$F_d \leq F_w \tag{3.33}$$

METODOLOGIA PROPOSTA PARA A OTIMIZAÇÃO DE PROJETOS DE
ENGRENAGENS

CAPÍTULO 4

A metodologia tradicional de projeto de engrenagens apresenta sérias deficiências. Da análise destas deficiências, pudemos colher subsídios para a definição de uma metodologia a ser utilizada na construção de nosso modelo de otimização. Esta metodologia utiliza os conceitos propostos por Ackoff e Sasieni (2) e Churchman (7), procurando identificar o sistema em estudo, seus objetivos, recursos, restrições e medidas de rendimento com a finalidade de otimizar o sistema e não apenas um de seus componentes.

4.1. A Metodologia Tradicional de Projeto de Engrenagens

O método clássico de projeto de engrenagens produziu um modelo analítico, tratado no capítulo 3, como representação da realidade, que dentro de certas simplificações explica o fenômeno do engrenamento. Existem uma série de relações e restrições geométricas e uma série de relações e restrições dinâmicas que devem ser obedecidas pelo projetista. Poderíamos representar simbolicamente o modelo por três conjuntos: M das relações cinemáticas geométricas e dinâmicas e N das restrições ci

nemáticas, geométricas e dinâmicas e por um conjunto P de relações chamadas "Especificações de Projeto", que são valores ou faixas de variação que o projetista deseja para as variáveis do modelo.

$$M_i (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i=1,2, \dots, p \quad (4.1)$$

$$N_j (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad j=1,2, \dots, q \quad (4.2)$$

$$P_k (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0 \quad k=1,2, \dots, s \quad (4.3)$$

Um par de engrenagens estará univocamente determinado por um vetor $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que seja viável.

Entendemos por vetor viável a um vetor x que satisfaça às restrições M_i e N_j .

Vamos nos referir ao conjunto de vetores x viáveis pelo símbolo Ω .

O conjunto Ω contém infinitos vetores x viáveis que são as soluções do sistema indeterminado M_i , (4.1) e que satisfazem as restrições N_j , (4.2).

Para o sistema (4.1) existem r variáveis independentes e $n-r \leq p$ variáveis dependentes.

O método tradicional de projeto de engrenagens consiste simplesmente em fixar o valor das r variáveis independentes levando em consideração as restrições P_k do sistema (4.3). Com a fixação do valor das r variáveis independentes, o sistema (4.1) passa a ser determinado e tem uma solução única $x^{(1)}$.

Após, o engenheiro verifica se a solução $x^{(1)}$ encontrada satisfaz às restrições do sistema (4.2), ou seja, se $x^{(1)}$ é viável. Se o vetor $x^{(1)}$ é viável, o problema terminou. Se o vetor $x^{(1)}$ não é viável, o projetista altera o valor de alguma das r variáveis independentes, tentando manter as restrições P_k satisfeitas e resolve novamente o sistema (4.1) obtendo o vetor $x^{(2)}$. Verifica se $x^{(2)}$ obedece ao sistema (4.2). Se $x^{(2)}$ é viável o processo termina. Se não é viável, o processo recomeça. Em resumo, é um método tipo tentativa e erro na busca de uma solução, não ótima, mas viável.

O fluxograma seguinte ilustra o método clássico de projeto de engrenagens.

MÉTODO CLÁSSICO DE PROJETO DE ENGRENAGENS

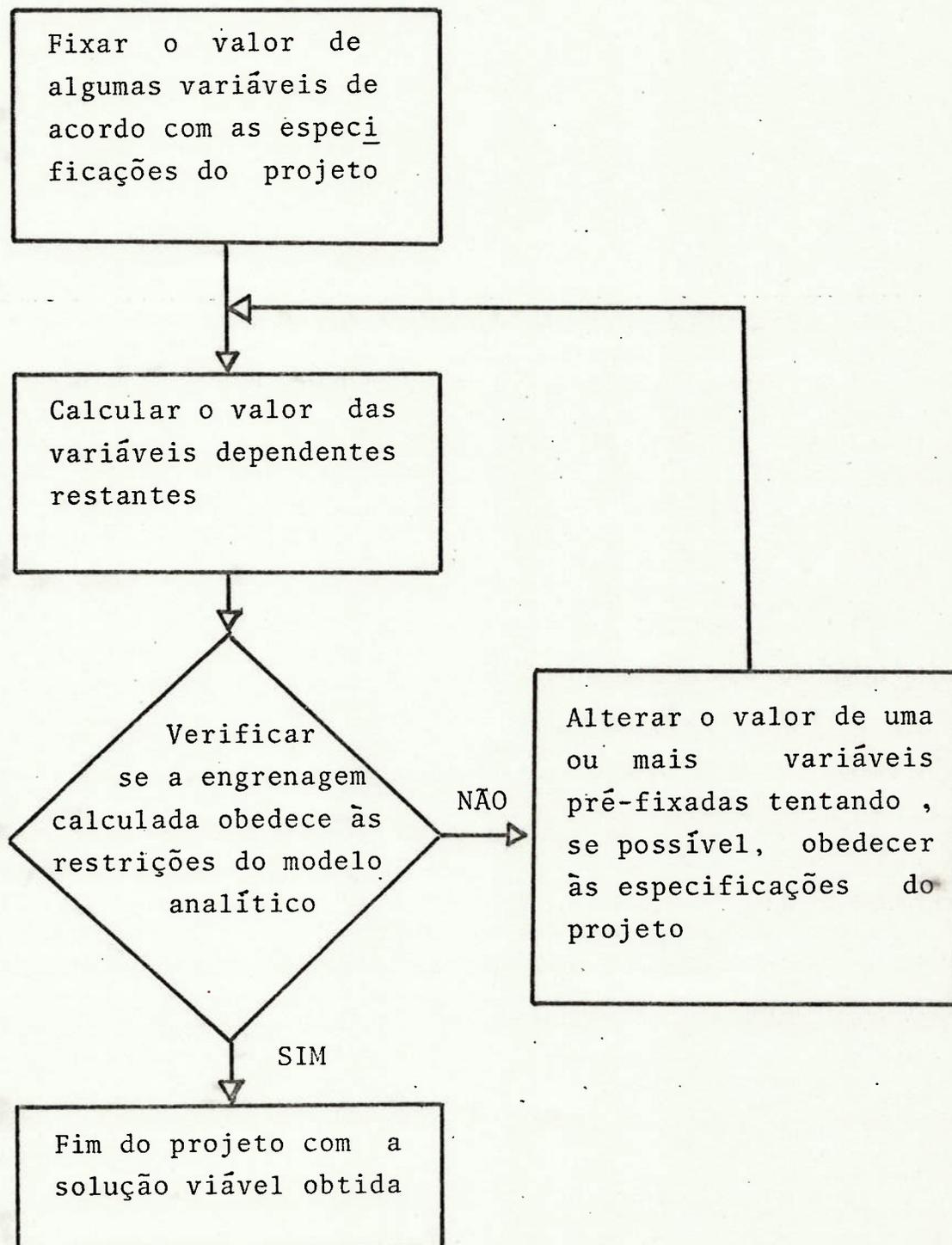


Fig. 4.1.

A falta de uma função objetivo é um dos pontos mais vulneráveis deste método de projeto, apesar de se poder argumentar que a mesma está implícita na pré-fixação das variáveis independentes. Esta pré-fixação é subjetiva e a boa escolha inicial depende muito da experiência do engenheiro projetista. São testados ainda, apenas alguns pontos do conjunto de vetores x que satisfazem aos sistemas (4.1) e (4.3) e a cada vetor $x^{(i)}$ testado, o engenheiro projetista altera o valor das variáveis independentes, sem nenhuma orientação quanto à direção a seguir, a não ser a ditada pela experiência.

Uma vez encontrado um vetor x pertencente ao conjunto Ω dos vetores viáveis o engenheiro dá-se por satisfeito, na maior parte das vezes, sem continuar a busca de uma solução melhor. A definição de uma solução melhor, neste método é muito difícil, baseando-se somente na experiência do projetista devido a já mencionada ausência de uma função objetivo para o modelo.

Às vezes, por falta de prática do projetista, ou por condições muito especiais do projeto, a busca de uma solução viável torna-se difícil e trabalhosa, requerendo muito esforço para a obtenção da primeira solução viável.

4.2. Metodologia Proposta

A construção de um modelo de otimização, utilizando programação geométrica, envolve diversos problemas. O modelo deve ser o mais exato possível e também simples de resolver. É desejável, então, procurar simplificações que facilitem a solução e o

entendimento do modelo pelos usuários, sem uma perda significativa de precisão. Isto nem sempre é possível devido a estes objetivos serem conflitantes.

O primeiro passo no processo de otimização é a definição do sistema a ser estudado e as funções objetivo a serem otimizadas. Para a construção do modelo, necessitamos de uma definição precisa do sistema a ser otimizado e suas medidas de rendimento. A otimização é dificultada pela existência de certas limitações práticas para materiais, parâmetros geométricos, requisitos funcionais e efeitos indesejáveis, nem sempre facilmente quantificáveis.

O segundo passo do processo de otimização é a identificação destas restrições para incorporá-las ao modelo.

O terceiro passo é a identificação das variáveis independentes do modelo, suas interrelações com as variáveis dependentes e a colocação de modelo como função das variáveis independentes.

O quarto passo é a adaptação do modelo, colocando-o numa forma que possibilite a utilização da Programação Geométrica para sua solução.

Nesta etapa entram algumas decisões sobre a simplificação do modelo, de tal forma que seja possível resolvê-lo. Podemos, nesta fase, considerar algumas modificações na natureza das variáveis e na forma de relacionamento funcional entre as variáveis para possibilitar uma solução mais simples para o modelo.

O quinto passo é a solução do modelo de programação geométrica propriamente dito, utilizando-se das técnicas expostas no capítulo 2 e no capítulo 6.

O sexto passo é a avaliação da solução encontrada, verificando se a mesma é compatível com os dados e se satisfaz ao que se pretendia.

A primeira etapa depende do estabelecimento dos objetivos do sistema e de uma medida de rendimento que indique até onde os objetivos estão sendo alcançados.

Uma vez estabelecidos os objetivos e as medidas de rendimento do sistema, poderemos definir o elemento de engenharia que deve ser otimizado, como por exemplo: peso, custo, capacidade de transmissão de torque ou potência e outros.

A segunda etapa estabelece as limitações do sistema. A fixação do valor de uma das variáveis implica numa diminuição dos graus de liberdade do sistema. O campo de soluções possíveis diminuiu ao fixarmos o valor de uma das variáveis. Analogamente ao determinarmos uma faixa de variação para algumas variáveis, estaremos igualmente limitando o resultado que poderemos obter. As restrições podem ou não ser incorporadas ao modelo, em função dos objetivos definidos na etapa anterior.

O terceiro, quarto e quinto passos fazem parte da técnica de solução do problema.

A sexta etapa é importante pois implica num teste do próprio modelo como representação da realidade. O engenheiro ao resolver o modelo deve verificar se a solução encontrada não foi produto de uma imperfeição no modelo. Se o modelo se revelar incorreto a natureza da deficiência deverá ser determinada e corrigida.

4.3. Conclusões

A metodologia proposta apresenta vantagens sobre a metodologia tradicional nos seguintes pontos:

- a) Define claramente uma função objetivo e quantifica uma medida do valor dessa função objetivo em termos dos objetivos do sistema.
- b) Incorpora todas as restrições relevantes ao modelo.
- c) A Programação Geométrica como ferramenta matemática permite a solução do modelo construido.
- d) A solução encontrada não será apenas viável, mas também ótima em termos da função objetivo definida.
- e) Poderemos tirar conclusões sobre a sensibilidade da solução para variações nos parâmetros do modelo.
- f) O tempo gasto na resolução do modelo e a qualidade da solução obtida, não dependerão da experiência do projetista, mas somente das especificações de projeto desejadas.

As vantagens do método proposto não se aplicam somente ao modelo construído como exemplo de aplicação, a ser exposto no próximo capítulo. Acreditamos que esta metodologia deve ser seguida para a otimiza

ção de projetos de engenharia, utilizando-se ou não a Programação Geométrica como técnica matemática para a solução do modelo construído.

OTIMIZAÇÃO DE ENGRENAGENS HELICOIDAIS UTILIZANDO
PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

CAPITULO 5

5.1. Definição do Sistema em Estudo e seus Objetivos

Seguiremos passo a passo a metodologia definida no capítulo anterior.

No capítulo 1, já definimos o sistema a ser estudado, um par de engrenagens helicoidais. Este elemento de máquina tem diversas aplicações, podendo ter como objetivos desde a transmissão de torque ou potência, até o bombeamento de líquidos nas chamadas bombas de engrenagens.

Para a construção do nosso modelo, devemos escolher uma ou mais funções objetivo a serem otimizadas. Sendo que as aplicações mais frequentes de engrenagens são transmissão de potência e torque, o modelo deve permitir ao engenheiro optar por uma das duas aplicações, associando a elas considerações sobre o tamanho e o peso do conjunto, de tal maneira que o rendimento do sistema seja otimizado.

Podemos imediatamente identificar algumas medidas de rendimento a serem incorporadas ao modelo como por exemplo: capacidade de transmissão de potência, capacidade de transmissão de torque, peso do conjunto, distância entre centros das engrenagens, custo total do par de engrenagens e outras.

Para a exemplificação da metodologia proposta, escolheremos algumas das medidas de rendimento citadas, como funções objetivo a serem otimizadas.

A construção de modelos que incluam outras funções objetivo, será deixada ao interessado, não apresentando dificuldades maiores.

Objetivos Globais do Sistema	
Transmissão de Potência	Transmissão de Torque
Funções objetivo a serem otimizadas	
01: capacidade de transmissão de potência	02: capacidade de transmissão de torque
03: peso do conjunto	04: peso do conjunto
05: distância entre os centros das engrenagens	06: distância entre os centros das engrenagens

Justifica-se a distinção das mesmas medidas de rendimento para objetivos globais diferentes por ser o método de cálculo diverso e em consequência, o modelo de otimização diferente.

A função objetivo 01, assim como, a função objetivo 02, têm como finalidade, dadas as limitações existentes, a máxima capacidade de transmissão de potência ou torque, o que depende dos valores das variáveis independentes do modelo.

As funções objetivo 03 e 04 são importantes numa série de aplicações onde o peso é uma variável de

decisão. Na indústria aeronáutica, onde se procura minimizar o peso, as funções objetivos 03 e 04 são extremamente importantes como critério de projeto. Em aplicações onde o material empregado é um fator relevante no custo total, o mínimo peso, ou seja, o máximo aproveitamento do material também é desejado.

Finalmente, as funções objetivos 05 e 06 aplicam-se nos casos em que existem restrições de espaço rígidas e os elementos de máquina devem ocupar o mínimo espaço em uma determinada direção.

Como foi dito anteriormente, o engenheiro interessado pode definir outras funções objetivo pertencentes aos mesmos ou a outros objetivos globais e construir o seu próprio modelo sem grande dificuldade.

A combinação de funções objetivo também é possível, atribuindo-se ponderações adequadas a cada uma delas; técnica adotada por Pascual e Ben-Israel (27).

A etapa dois é a identificação das restrições existentes e a sua incorporação ao modelo.

5.2. Identificação das Restrições

Podemos, de uma maneira geral, separar as restrições de um projeto de engrenagens em três grupos: as restrições relacionadas como objetivo global do sistema ou restrições de desempenho; as restrições de projeto que provêm da teoria das engrenagens e as restrições que chamaremos de especificações de projeto.

a) Restrições de Desempenho

Estas restrições estabelecem padrões de desempenho para o par de engrenagens.

a.1 $P_t \geq P_t \text{ min}$

P_t = capacidade de transmissão de potência
 $P_t \text{ min}$ = potência mínima a ser transmitida pelo par de engrenagens

a.2 $M_{tp} \geq M_{tp} \text{ min}$

M_{tp} = torque admissível no eixo do pinhão
 $M_{tp} \text{ min}$ = torque mínimo admissível no eixo do pinhão

b) Restrições de Projeto

Este grupo foi apresentado no capítulo 3 e podemos destacar dentre eles algumas restrições relevantes num projeto de engrenagens.

b.1. $F_d \leq F_w$

F_d = força dinâmica no dente dada pela equação (3.24)

F_w = capacidade de carga dinâmica do par de engrenagens dada pela equação (3.30)

Esta restrição deve-se à possibilidade de

haver erosão superficial no dente da engrenagem.

$$b.2. \quad F_{dp} \leq F_{bp}$$

F_{dp} = força dinâmica no dente do pinhão dada pela equação (3.24)

F_{bp} = carga admissível à ruptura do dente do pinhão dada pela equação (3.28)

Se esta restrição for satisfeita, estará evitada a ruptura do dente do pinhão.

$$b.3. \quad F_{dc} \leq F_{bc}$$

F_{dc} = força dinâmica no dente da coroa dada pela equação (3.24)

F_{bc} = carga admissível à ruptura do dente da coroa dada pela equação (3.28)

$$b.4. \quad N_{np} \geq \bar{N}$$

N_{np} = número de dentes do pinhão referidos ao plano normal

\bar{N} = valor dado pela equação (3.15), é o limite inferior do número de dentes do pinhão no plano normal para evitar a interferência.

c) Especificações de Projeto

As especificações de projeto devem ser escolhidas de acordo com o objetivo do sistema.

Existem inúmeras combinações possíveis de especificações de projeto para cada caso.

Neste exemplo, selecionaremos algumas consideradas de interesse num projeto de engrenagens, mas deve ficar claro que é possível construir um outro modelo acrescentando e/ou suprimando especificações.

c.1. $0 \leq \psi \leq \psi_{\max}$

ψ = ângulo da hélice das engrenagens
 ψ_{\max} = ângulo máximo admissível da hélice das engrenagens

Esta restrição deve-se à existência de esforço axial nos eixos das engrenagens.

c.2. $0 < C_n F \leq 4$

$C_n F$ = fator de largura da face

O limite superior 4 para $C_n F$ foi assumido, supondo que as engrenagens sejam fabricadas com a precisão normalmente encontrada, assegurando um bom contato dos dentes. Esse limite pode ser aumentado se houver informações sobre o grau de precisão na manufatura.

c.3. $CD \leq CD \text{ max}$

CD = distância entre os centros das engrenagens

CD max = máxima distância permitida entre os centros das engrenagens devido às limitações de espaço.

c.4. $a \leq a \text{ max}$

a = relação de transmissão do par de engrenagens

a max = máxima relação de transmissão permitida para o par de engrenagens.

c.5. $a \geq a \text{ min}$

a = relação de transmissão do par de engrenagens

a min = mínima relação de transmissão permitida para o par de engrenagens

c.6. O sistema de engrenagens adotado é o de ângulo de pressão 20° dentes rebaixados classe 3 de precisão

c.7. O engenheiro escolherá o material do pinhão e da coroa, determinando os valores de:

- S_p = tensão de fadiga do material do pinhão
- S_c = tensão de fadiga do material da coroa
- K = fator de material e forma dada pela equação (3.32) ou pela tabela 3.7.
- P_{ep} = peso específico do material do pinhão
- P_{ec} = peso específico do material da coroa.

c.8. A rotação do eixo do pinhão w_p é dada.

A restrição c.6 deve-se à necessidade da definição de um sistema de engrenagens para o desenvolvimento do modelo.

As restrições c.7 e c.8 poderiam ser relaxadas definindo-se limites superiores e inferiores para cada um dos parâmetros independentes do conjunto de variáveis S_p , S_c , K , w . Isto tornaria o modelo mais flexível, mas representa uma maior complexidade do modelo e conseqüente maior esforço computacional para obtenção da solução. Quando esta ampliação do modelo for necessária e justificada, ela é plenamente viável.

Com a definição das funções objetivo e das restrições, podemos montar o modelo completo utilizando a notação anterior.

DIMENSIONAMENTO ÓTIMO DE ENGRENAGENS $\phi_n = 20^\circ$ sistema de engrenagens de dentes rebaixados			
Cálculo à Potência		Cálculo ao Torque	
Função Objetivo	Restrições	Função Objetivo	Restrições
Problema 1 max. P_t	R 1:b.1 $F_d \leq F_w$ R 2:b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 3:c.1 $0 \leq \psi \leq \psi_{max}$ R 4:c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 5:c.3 $CD \leq CD_{max}$ R 6:c.4 $a \leq a_{max}$ R 7:c.5 $a \geq a_{min}$ R 8:dados w_p, K	Problema 2 max. M_{tp}	R 1:b.2 $F_{dp} \leq F_{bp}$ R 2:b.3 $F_{dp} \leq F_{bc}$ R 3:b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 4:c.1 $0 \leq \psi < \psi_{max}$ R 5:c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 6:c.3 $CD \leq CD_{max}$ R 7:c.4 $a \leq a_{max}$ R 8:c.5 $a \geq a_{min}$ dados S_p, S_c, w_p
Problema 3 min. peso	R 1: a.1 $P_t \geq P_{t_{min}}$ R 2: b.1 $F_d \leq F_w$ R 3: b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 4: c.1 $0 \leq \psi \leq \psi_{max}$ R 5: c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 6: c.3 $CD \leq CD_{max}$ R 7: c.4 $a \leq a_{max}$ R 8: c.5 $a \geq a_{min}$ dados w_p, K, P_{ep}, P_{ec}	Problema 4 min. peso	R 1: a.2 $M_{tp} \geq M_{tp_{min}}$ R 2: b.2 $F_{dp} \leq F_{bp}$ R 3: b.3 $F_{dc} \leq F_{bc}$ R 4: b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 5: c.1 $0 \leq \psi \leq \phi_{max}$ R 6: c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 7: c.3 $CD \leq CD_{max}$ R 8: c.4 $a \leq a_{max}$ R 9: c.5 $a \geq a_{min}$ dados S_p, S_c, w_p, P_{ep} e P_{ec}

DIMENSIONAMENTO ÓTIMO DE ENGRENAGENS $\phi_n = 20^\circ$ sistema de engrenagens de dentes rebaixados			
Cálculo à Potência		Cálculo ao Torque	
Função Objetivo	Restrições	Função Objetivo	Restrições
Problema 5 min. CD	R 1: a.1 $P_t \geq P_t \text{ min}$ R 2: b.1 $F_d \leq F_w$ R 3: b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 4: c.1 $0 \leq \psi \leq \psi \text{ max}$ R 5: c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 6: c.4 $a \leq a \text{ max}$ R 7: c.5 $a \geq a \text{ min}$ dados w_p, K	Problema 6 min. CD	R 1: a.2 $M_{tp} \geq M_{tp} \text{ min}$ R 2: b.2 $F_{dp} \leq F_{bp}$ R 3: b.3 $F_{dc} \leq F_{bc}$ R 4: b.4 $N_{np} \geq \bar{N}$ R 5: c.1 $0 \leq \psi \leq \psi \text{ max}$ R 6: c.2 $0 < C_n F \leq 4$ R 7: c.4 $a \leq a \text{ max}$ R 8: c.5 $a \geq a \text{ min}$ dados S_p, S_c, w_p

O modelo completo compõe-se de seis problemas básicos. Isto dá uma grande flexibilidade ao projetista para escolher a função objetivo que melhor se adapte ao trabalho que estiver realizando.

Cada problema básico pode desdobrar-se em um número muito grande de problemas, dependendo dos valores particulares fixados para os parâmetros do modelo.

5.3. Escolha das Variáveis Independentes e Colocação do Modelo como Função das Variáveis Independentes

Uma vez definido o modelo, a decisão seguinte é a escolha das variáveis independentes. Esta escolha deve incluir as variáveis que aparecem explicitamente nas restrições definidas anteriormente sempre que possível, pois na colocação das restrições como funções das variáveis independentes o modelo resultará mais simples.

Examinando as restrições, concluímos que seria conveniente colocarmos, se possível, D_p , $C_n F$, ψ , N_{np} , F_t e a como variáveis independentes do nosso modelo.

A especificação do sistema de engrenagens irá determinar o ângulo de pressão ϕ_n e os fatores de proporcionalidade dos dentes como o adendo m na equação (3.15).

O sistema de engrenagens é então uma variável independente do modelo. Como última variável independente, teremos a classe de precisão da engrenagem de acordo com a tabela 3.4.

Resumindo, as variáveis independentes que vão definir univocamente o par de engrenagens são as seguintes: D_p , F_t , $C_n F$, ψ , N_{np} , a , sistema de engrenagens e classe de precisão. Se o modelo nos fornecer valores ótimos para estes parâmetros, o par ótimo de engrenagens estará definido univocamente. Isto pode ser verificado, analisando as interrelações entre as variáveis apresentadas no capítulo 3. A última par-

te do passo 3, colocação do modelo como função das variáveis independentes será apresentada em conjunto com o passo 4 para poupar ao leitor uma série de cansativas transformações algébricas levadas a efeito utilizando as equações do capítulo 3.

5.4. Adaptação do Modelo à Forma Padrão da Programação Geométrica

O modelo deve ser colocado na forma padrão da programação geométrica. Iniciaremos este processo, colocando as funções objetivo e restrições na forma do programa primal P, definido no capítulo 2.

Desenvolvimento das Funções Objetivo

01 - max P_t

A potência transmitida pelo engrenamento em função das variáveis independentes é deduzida das equações (3.20) e (3.21)

$$P_t = \frac{w_p F_t D_p}{143.240}$$

na forma padrão da programação geométrica temos:

$$01: \min 1/P_t = C_1 F_t^{-1} D_p^{-1}$$

$$C_1 = 143.240 \cdot w_p^{-1}$$

02 - max M_{tp}

O torque transmitido pelo engrenamento é da do pela equação (3.21)

$$M_{tp} = \frac{F_t D_p}{2}$$

na forma padrão da programação geométrica temos:

$$02: \min 1/M_{tp} = C_2 F_t^{-1} D_p^{-1}$$

$$C_2 = 2.0$$

03 - min peso W do conjunto

Segundo Johnson (ref. 21, pag. 473) o peso de uma engrenagem sólida pode ser aproximado com boa precisão por

$$W \cong P_e (\pi D^2/4) b$$

P_e = peso específico do material da engrenagem em gramas por centímetro cúbico

D = diâmetro primitivo da engrenagem em centímetros

b = largura da face da engrenagem em centímetros

O peso total do engrenamento será

$$W_t = W \text{ pinhão} + W \text{ coroa}$$

$$W_t = P_{ep} \cdot b (\pi D_p^2 / 4) + P_{ec} \cdot b (\pi D_c^2 / 4)$$

combinando as equações (3.2), (3.18) e (3.19) vem

$$03: \min W_t = C_3 C_n F \cos \psi^{-1} D_p^3 N_n p^{-1} + \\ + C_4 C_n F \cdot \cos \psi^{-1} D_p^3 N_n p^{-1} a^2$$

$$C_3 = \frac{P_{ep} \pi^2}{4}$$

$$C_4 = \frac{P_{ec} \pi^2}{4}$$

A função objetivo 04 é formalmente idêntica à função objetivo 03, apesar de estar relacionada com um objetivo global diverso.

05 - min CD

A distância entre os centros das engrenagens, CD, é dada pela equação (3.3)

$$CD = \frac{D_p + D_g}{2}$$

$$05: \min CD = C_5 D_p + C_6 D_p a$$

$$C_5 = 0.5$$

$$C_6 = 0.5$$

A função objetivo 06 é formalmente idêntica à função objetivo 05, apesar de estar relacionada com um objetivo global diverso.

Desenvolvimento das restrições

a.1. $P_t \geq P_t \text{ min}$

Combinando as equações (3.20) e (3.21), temos na forma padrão do programa primal \underline{P}

$$a:1 \quad C_7 \quad F_t^{-1} \quad D_p^{-1} \leq 1$$

$$C_7 = 143 \ 240 \ \text{wp}^{-1} \cdot \text{HP min}$$

a.2. $M_{tp} \geq M_{tp} \text{ min}$

Da equação (3.21), na forma padrão do programa primal \underline{P} temos

$$a:2 \quad C_8 \quad F_t^{-1} \quad D_p^{-1} \leq 1$$

$$C_8 = 2.0 M_{tp} \text{ min}$$

$$b.1. F_d \leq F_w$$

A força dinâmica F_d nos dentes das engrenagens é dada pela equação (3.24).

Johnson (21 , pag. 405) propõe utilizando - se das técnicas apresentadas na seção 2.2.6 uma aproximação para a equação (3.24)

$$F_d = 2.54 \frac{F_t^{0.795} V^{0.169} b^{0.054} C_3'{}^{0.053} \cos \psi^{0.482}}{P_{nd}^{0.012}}$$

(5.1)

F_d = carga dinâmica no dente em quilogramas força

F_t = força tangencial em quilogramas força

b = largura da face em centímetros

ψ = ângulo da hélice

P_{nd} = passo diametral referido ao plano normal em centímetros⁻¹

$C_3' = C_3 \cdot 10^{-5}$ onde C_3 é a constante dada pela equação (3.26)

V = velocidade tangencial em metros por minuto

Essa aproximação é bastante satisfatória dentro dos limites da tabela 5.1 e mantém uma precisão relativa para valores das variáveis bastante afastados das faixas de variação definidas na tabela 5.1.

T a b e l a 5.1.

Campo de variação das variáveis na equação (5.1)	
Parâmetro	Campo de variação
Força tangencial F_t	$450 \text{ Kgf} \leq F_t \leq 5500 \text{ Kgf}$
Velocidade tangencial V	$150 \text{ m/min} \leq V \leq 1800 \text{ m/min}$
Largura da face b	$1 \text{ cm} \leq b \leq 8 \text{ cm}$
C_3	$0.56 \cdot 10^5 \leq C_3 \leq 1.21 \cdot 10^5$
Erro na ação do dente	$1.27 \cdot 10^{-2} \leq e \leq 3.05 \cdot 10^{-2}$ mm
Passo diametral referido ao plano normal	$0.39 \leq P_{nd} \leq 23.62$ cm ⁻¹
Ângulo da hélice ψ	$0^\circ \leq \psi \leq 45^\circ$

F_w é o limite superior para a força dinâmica para evitar o desgaste nos dentes. É dada pela equação (3.30). Podemos aproximá-la, segundo Johnson (21, pag. 405-415) por:

$$F_w = 13.380 K C_n f D_p^2 \frac{a^{1.032}}{a+1} N_n P^{-0.896} \cos \psi^{-1.184}$$

(5.2)

com a restrição

$$1 \leq a \leq 5 \quad (5.3)$$

Esta aproximação é bastante sensível para valores de a fora desta faixa.

Como os erros consequentes podem afetar de maneira significativa a precisão do modelo, o engenheiro deve desenvolver outra aproximação para F_w se necessitar de valores da relação de transmissão fora da faixa definida por (5.3).

Na forma padrão da programação geométrica, a restrição b.1, em função das variáveis independentes, fica:

$$\begin{aligned} \text{b.1: } & C_9 C_n F^{-0.946} \cos \psi^{1.588} F_t^{0.795} D_p^{-1.765} \\ & \cdot N_{np}^{0.830} a^{-0.032} + C_{10} C_n F^{-0.946} \cos \psi^{1.588} \\ & \cdot F_t^{0.795} D_p^{-1.765} N_{np}^{0.830} a^{-1.032} \leq 1 \\ C_9 &= 0.298 C_3^{0.053} w^{0.169} K^{-1} \\ C_{10} &= 0.298 C_3^{0.053} w^{0.169} K^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{b.2. } F_d \leq F_{bp}$$

Para o desenvolvimento desta restrição, necessitamos modificar a seguinte aproximação de F_b deduzida a partir das expressões desenvol-

vidas por Johnson (21, pags. 411 - 415) .

$$F_b = 2.471 S_e b a^{0.032} N_n^{-0.010} \cos \psi^{1.816} Y_n P_{nd}^{-1}$$

S_e = tensão de fadiga do material em quilogramas força por centímetro quadrado

Y_n = fator de forma de Lewis dado pela tabela 3.6

N_n = número de dentes da engrenagem

as outras variáveis correspondem à notação anterior.

Esta aproximação não pode ser utilizada no modelo de programação geométrica por incluir valores tabelados.

Como Y_n é variável dependente apenas do número de dentes da engrenagem e do sistema de engrenagens escolhido, desenvolvemos para o sistema de ângulo de pressão 20°, dentes rebaixados a seguinte expressão:

$$Y_n = 1 / (1.842 + 18.675 N_n^{-1085}) \quad (5.4)$$

O erro apresentado pela aproximação é inferior a 1,5% em relação aos valores da tabela 3.7, dentro dos limites estabelecidos pela equação (3.15).

Na forma padrão da programação geométrica, repositados os limites da tabela 5.1 e expressão

(5.3) temos:

$$b.2: C_{11} C_n F^{-0.946} \cos \psi^{2.218} F_t^{0.795} D_p^{-1.765} .$$

$$. N_{np}^{1.944} a^{-0.032} + C_{12} C_n F^{-0.946} \cos \psi^{2.218} .$$

$$. F_t^{0.795} D_p^{-1.765} N_{np}^{0.859} a^{-0.032} \leq 1$$

$$C_{11} = 0.949 S_{ep}^{-1} C_3^{0.053} w^{0.169}$$

$$C_{12} = 9.619 S_{ep}^{-1} C_3^{0.053} w^{0.169}$$

$$b.3 - F_d \leq F_{bc}$$

O desenvolvimento da restrição b.3 é análogo ao da restrição b.2 e na forma padrão da programação geométrica:

$$b.3: C_{13} C_n F^{-0.946} \cos \psi^{2.218} F_t^{0.795} D_p^{-1.765} .$$

$$. N_{np}^{1.944} a^{0.082} + C_{14} C_n F^{-0.946} \cos \psi^{2.218} .$$

$$. F_t^{0.795} D_p^{-1.765} N_{np}^{0.859} a^{-1.003} \leq 1$$

$$C_{13} = 0.949 S_{ec}^{-1} C_3^{0.053} w^{0.169}$$

$$C_{14} = 9.619 S_{ec}^{-1} C_3^{0.053} w^{0.169}$$

$$b.4 - N_{np} \geq \bar{N}$$

Para o sistema de engrenagens de $\phi_n = 20^\circ$ dentes rebaixados, o valor de \bar{N} , dado pela equação (3.15) é igual a 13.7

$$b.4: C_{15} N_{np}^{-1} \leq 1$$

$$C_{15} = 13.7$$

$$c.1 - 0 \leq \psi \leq \psi_{max}$$

O máximo ângulo da hélice recomendado é 45° . O projetista deve fixar para o seu problema o valor de ψ_{max} , sempre menor ou igual a 45° . Para maior conveniência, no modelo não trabalharemos com ψ , mas com $\cos \psi$.

$$c.1: C_{16} \cos \psi^{-1} \leq 1$$

$$C_{16} = \cos \psi_{max}$$

$$c.2 - 0 < C_n F \leq 4$$

Na forma padrão da programação geométrica vem

$$c.2: C_{17} C_n^F \leq 1$$

$$C_{17} = 0.25$$

$$c.3 - CD \leq CD \max$$

Da relação (3.3) vem:

$$c.3: C_{18} D_p + D_{19} D_p a \leq 1$$

$$C_{18} = 0.5 CD \max^{-1}$$

$$C_{19} = 0.5 CD \max^{-1}$$

$$c.4 - a \leq a \max$$

Na forma padrão:

$$c.4: C_{20} a \leq 1$$

$$C_{20} = a \max^{-1}$$

$$c.5 - a \geq a \min$$

Na forma padrão:

$$c.5: C_{21} a^{-1} \leq 1$$

$$C_{21} = a \min$$

Para possibilitar a solução do modelo, vamos considerar as variáveis N_p e N_g como contínuas. Este aspecto será novamente analisado no passo 6.

Para completar a definição dos programas primais na forma padrão da programação geométrica, resta acrescentar a restrição de positividade das variáveis independentes.

$$C_n F > 0, \cos \psi > 0, F_t > 0, D_p > 0, N_{np} > 0, a > 0$$

(5.5)

5.5. Solução do Modelo de Programação Geométrica

A solução de um problema de programação geométrica, colocado na forma padrão, passa a ser um problema numérico. Neste passo descreveremos a formulação dos programas duais de cada problema.

A construção dos vetores básicos da solução geral das restrições duais será mostrada como exemplo no problema 1. Para os outros problemas a repetição da técnica é desnecessária.

A solução numérica desenvolvida para o problema dual será descrita no capítulo 6, por julgarmos ser uma ferramenta muito importante para o pesquisador interessado no uso da programação geométrica; merecendo por isso um destaque especial.

5.5.1. Construção dos Programas Duais

O procedimento básico na programação geométrica é substituir o programa primal pelo dual. No programa dual será maximizada a função dual sujeita às condições de normalidade, ortogonalidade e positividade.

O máximo restrito da função dual é igual ao mínimo restrito da função primal.

Conforme o explicado no capítulo 2, obteremos para cada problema os respectivos programas duais.

Problema 1

Os coeficientes dos posinômios no problema 1 são:

$$c_1 = C_1, c_2 = C_9, c_3 = C_{10}, c_4 = C_{15}, c_5 = C_{16},$$

$$c_6 = C_{17}, c_7 = C_{18}, c_8 = C_{19}, c_9 = C_{20}, c_{10} = C_{21}$$

então:

$$v(\delta) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) \delta_i - \sum_{k=1}^7 \lambda_k(\delta) \lambda_k(\delta)$$

O grau de dificuldade do problema é:

$$d = n - m - 1$$

n = número de termos do problema primal

m = número de variáveis independentes

$$d = 10 - 6 - 1 = 3$$

A solução geral que satisfaz as condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\delta = b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_2 b^{(2)} + r_3 b^{(3)}$$

sujeita à condição de positividade.

A construção dos vetores $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ e $b^{(3)}$ está descrita na seção (2.3). Inicia-se pela construção da matriz dos expoentes A

	$C_n F$	$\cos \psi$	F_t	D_p	N_{np}	a
u_1	0	0	-1	-1	0	0
u_2	-0.946	1.588	0.795	-1.765	0.830	-0.032
u_3	-0.946	1.586	0.795	-1.765	0.830	-1.032
u_4	0	0	0	0	-1	0
u_5	0	-1	0	0	0	0
u_6	1	0	0	0	0	0
u_7	0	0	0	1	0	0
u_8	0	0	0	1	0	1
u_9	0	0	0	0	0	1
u_{10}	0	0	0	0	0	-1

A matriz R será construída pelas seguintes

combinações lineares das colunas da matriz A. .

- 1) coluna 2.(-1)
- 2) coluna 3.(-1)
- 3) coluna 3 + coluna 4
- 4) coluna 5.(-1)

Construída a matriz R , podemos obter a matriz B .

MATRIZES R e B

	$C_n F$	$\cos \phi$	F_t	D_p	N_{np}	a	b_1	b_2	b_3	b_4
u_6	1	0	0	0	0	0	0.946	0.946	0	0
u_5	0	1	0	0	0	0	1.588	1.588	0	0
u_1	0	0	1	0	0	0	0.795	0.795	0	0
u_7	0	0	0	1	0	0	2.560	2.560	-1	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0.830	0.830	0	0
u_9	0	0	0	0	0	1	0.032	1.032	-1	1
u_2	-0.946	-1.588	-0.795	-2.560	-0.830	-0.032	1	0	0	0
u_3	-0.946	-1.588	-0.795	-2.560	-0.830	-1.032	0	1	0	0
u_8	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
u_{10}	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1

De acordo com as equações (2.8 1) e (2.8 2) vem:

$$b^{(0)} = (1/0.795) \cdot b_1$$

$$b^{(1)} = b_2 - 0.795 \cdot b^{(0)}$$

$$b^{(2)} = b_3 - 0 \cdot b^{(0)}$$

$$b^{(3)} = b_4 - 0 \cdot b^{(0)}$$

ou rearranjando as linhas para a ordem original.

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1.0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 1.258 & & -1 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ 1.044 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 1.997 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 1.190 & +r_1 & 0 & +r_2 & 0 & +r_3 & 0 \\ 3.220 & & 0 & & -1 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \\ 0.040 & & 1 & & -1 & & 1 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 \end{array}$$

$$\text{com } \delta \geq 0, \delta_i = b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)}$$

$$e \quad \lambda_1 = \delta_2 + \delta_3$$

$$\lambda_2 = \delta_4$$

$$\lambda_3 = \delta_5$$

$$\lambda_4 = \delta_6$$

$$\lambda_5 = \delta_7 + \delta_8$$

$$\lambda_6 = \delta_9$$

$$\lambda_7 = \delta_{10}$$

O problema já pode ser resolvido com a aplicação de uma técnica numérica conveniente e a definição das constantes do problema pelo projetista.

Problema 2

Os coeficientes dos posinômios no problema 2 são:

$$c_1 = C_2, c_2 = C_{11}, c_3 = C_{12}, c_4 = C_{13}, c_5 = C_{14},$$

$$c_6 = C_{15}, c_7 = C_{16}, c_8 = C_{17}, c_9 = C_{18},$$

$$c_{10} = C_{19}, c_{11} = C_{20}, c_{12} = C_{21}$$

então:

$$v(\delta) = \prod_{i=1}^{12} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^9 \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

O grau de dificuldade do problema é:

$$n = 12$$

$$m = 6$$

$$d = 12 - 6 - 1 = 5$$

A solução geral que satisfaz às condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\delta = b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_3 b^{(3)} + r_4 b^{(4)} + r_5 b^{(5)}$$

sujeita à condição de positividade $\delta \geq 0$, temos:

$$e \quad \lambda_1 = \delta_2 + \delta_3$$

$$\lambda_2 = \delta_4 + \delta_5$$

$$\lambda_3 = \delta_5$$

$$\lambda_4 = \delta_6$$

$$\lambda_5 = \delta_7$$

$$\lambda_6 = \delta_8$$

$$\lambda_7 = \delta_9 + \delta_{10}$$

$$\lambda_8 = \delta_{11}$$

$$\lambda_9 = \delta_{12}$$

Problema 3

Os coeficientes dos posinômios no problema 3 são:

$$c_1 = C_3, c_2 = C_4, c_3 = C_7, c_4 = C_9, c_5 = C_{10},$$

$$c_6 = C_{15}, c_7 = C_{16}, c_8 = C_{17}, c_9 = C_{18}, c_{10} = C_{19},$$

$$c_{11} = C_{20}, c_{12} = C_{21}$$

então

$$v(\delta) = \prod_{i=1}^{12} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^8 \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

o grau de dificuldade do problema é:

$$n = 12$$

$$m = 6$$

$$d = 12 - 6 - 1 = 5$$

a solução geral que satisfaz às condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\delta = b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_2 b^{(2)} + r_3 b^{(3)} + r_4 b^{(4)} + r_5 b^{(5)}$$

sujeita à condição de positividade $\delta \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 e \quad \lambda_1 &= \delta_3 \\
 \lambda_2 &= \delta_4 + \delta_5 \\
 \lambda_3 &= \delta_6 \\
 \lambda_4 &= \delta_7 \\
 \lambda_5 &= \delta_8 \\
 \lambda_6 &= \delta_9 + \delta_{10} \\
 \lambda_7 &= \delta_{11} \\
 \lambda_8 &= \delta_{12}
 \end{aligned}$$

Problema 4

Os coeficientes dos posinômios do problema 4 são:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= C_3, \quad c_2 = C_4, \quad c_3 = C_8, \quad c_4 = C_{11}, \quad c_5 = C_{12}, \\
 c_6 &= C_{13}, \quad c_7 = C_{14}, \quad c_8 = C_{15}, \quad c_9 = C_{16}, \quad c_{10} = C_{17}, \\
 c_{11} &= C_{18}, \quad c_{12} = C_{19}, \quad c_{13} = C_{20}, \quad c_{14} = C_{21}.
 \end{aligned}$$

então:

$$v(\delta) = \prod_{i=1}^{14} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^9 \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

o grau de dificuldade do problema é:

$$n = 14$$

$$m = 6$$

$$d = 14 - 6 - 1 = 7$$

A solução geral que satisfaz às condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\begin{aligned} \delta = & b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_2 b^{(2)} + r_3 b^{(3)} + r_4 b^{(4)} + \\ & + r_5 b^{(5)} + r_6 b^{(6)} + r_7 b^{(7)} \end{aligned}$$

sujeita à condição de positividade $\delta \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 e \quad \lambda_1 &= \delta_3 \\
 \lambda_2 &= \delta_4 + \delta_5 \\
 \lambda_3 &= \delta_6 + \delta_7 \\
 \lambda_4 &= \delta_8 \\
 \lambda_5 &= \delta_9 \\
 \lambda_6 &= \delta_{10} \\
 \lambda_7 &= \delta_{11} + \delta_{12} \\
 \lambda_8 &= \delta_{13} \\
 \lambda_9 &= \delta_{14}
 \end{aligned}$$

Problema 5

Os coeficientes dos posinômios do problema 5 são:

$$c_1 = C_5, c_2 = C_6, c_3 = C_7, c_4 = C_9, c_5 = C_{10},$$

$$c_6 = C_{15}, c_7 = C_{16}, c_8 = C_{17}, c_9 = C_{20}, c_{10} = C_{21}$$

então

$$v(\delta) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^7 \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

o grau de dificuldade do problema é:

$$n = 10$$

$$m = 6$$

$$d = 10 - 6 - 1 = 3$$

A solução geral que satisfaz às condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\delta = b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_2 b^{(2)} + r_3 b^{(3)} + r_4 b^{(4)} + r_5 b^{(5)}$$

sujeita à condição de positividade $\delta \geq 0$, temos:

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & & 0 & & 0 & & -1 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\ 0.311 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0.391 & & -1 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ 0.324 & + r_1 & 0 & + r_2 & 0 & + r_3 & 0 \\ 0.620 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0.370 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0.013 & & 1 & & 1 & & -1 \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

$$e \quad \lambda_1 = \delta_3$$

$$\lambda_2 = \delta_4 + \delta_5$$

$$\lambda_3 = \delta_6$$

$$\lambda_4 = \delta_7$$

$$\lambda_5 = \delta_8$$

$$\lambda_6 = \delta_9$$

$$\lambda_7 = \delta_{10}$$

Problema 6

Os coeficientes dos posinômios no problema 6 são:

$$c_1 = C_5, \quad c_2 = C_6, \quad c_3 = C_8, \quad c_4 = C_{11}, \quad c_5 = C_{12},$$

$$c_6 = C_{13}, \quad c_7 = C_{14}, \quad c_8 = C_{15}, \quad c_9 = C_{16}, \quad c_{10} = C_{17},$$

$$c_{11} = C_{20}, \quad c_{12} = C_{21}.$$

então:

$$v(\delta) = \prod_{i=1}^{12} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^8 \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

o grau de dificuldade do problema é:

$$n = 12$$

$$m = 6$$

$$d = 12 - 6 - 1 = 5$$

A solução geral que satisfaz às condições de normalidade e ortogonalidade é:

$$\begin{aligned} \delta = & b^{(0)} + r_1 b^{(1)} + r_2 b^{(2)} + r_3 b^{(3)} + \\ & + r_4 b^{(4)} + r_5 b^{(5)} \end{aligned}$$

sujeita à condição de positividade $\delta \geq 0$, temos:

$$\delta = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0.311 \\ 0.391 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.759 \\ 0.620 \\ 0.370 \\ 0.013 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} + r_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1.085 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} + r_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.114 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} + r_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1.085 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.971 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} + r_4 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} + r_5 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$e \quad \lambda_1 = \delta_3$$

$$\lambda_2 = \delta_4 + \delta_5$$

$$\lambda_3 = \delta_6 + \delta_7$$

$$\lambda_4 = \delta_8$$

$$\lambda_5 = \delta_9$$

$$\lambda_6 = \delta_{10}$$

$$\lambda_7 = \delta_{11}$$

$$\lambda_8 = \delta_{12}$$

O modelo agora está pronto para a solução nu
mérica.

5.6. Análise dos Resultados

5.6.1. Utilização do Modelo

Os resultados apresentados foram calculados por um programa automático, cuja listagem encontra-se nos apêndices. A utilização deste programa é bastante simples. O usuário necessita de somente cinco cartões com os seguintes dados:

- 1º Cartão: número do problema escolhido, variando de 1 a 6 de acordo com o modelo
- 2º Cartão: w , $M_{tp\ min}$, $P_{t\ min}$, P_{ep} , P_{ec} , S_p , S_c , K
- 3º Cartão: C_3' , $\psi\ max$, $CD\ max$, $a\ min$, $a\ max$.
- 4º Cartão: Material do Pinhão
- 5º Cartão: Material da Coroa

No cartão 1, o número do problema deve ser colocado na 2º coluna.

Os cartões 2 e 3 devem ser preenchidos com cada variável ocupando um campo de 10 colunas conforme o exemplo anexo. Quando o parâmetro não for relevante para o problema em questão, deve ser colocado o valor 9999999999. Isto impedirá a impressão deste valor como dado de entrada.

Os cartões 4 e 5 são cartões de dados alfanuméricos e devem ser preenchidos a partir da coluna 1 do cartão.

5.6.2. Resultados de Aplicação do Modelo

A resolução de um problema de programação geométrica torna-se mais complexa à medida que aumenta o grau de dificuldade. No problema tratado neste trabalho, o grau de dificuldade varia de três a sete. Foi então necessário desenvolver um algoritmo, para ser processado em computador.

Este algoritmo está descrito em detalhes no capítulo 6.

A seguir estão alguns exemplos de problemas resolvidos utilizando o algoritmo proposto.

Para maior facilidade na análise dos resultados, incluiremos dentre os exemplos, um problema proposto e resolvido por Johnson (21, pag 421-442), com a finalidade de fornecer uma base para a comparação dos resultados obtidos. O problema proposto por Johnson é o problema 1 dos exemplos seguintes.

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 1 *****

MATERIAL DO PINHAO	ACO AISI 2340
MATERIAL DA COROA	ACO AISI 2340
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO	NP = 1800,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = ***** QUILOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PM = ***** CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA COROA	PEC = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA COROA	SC = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EGUACAO (3.32)	K = 54,29
CONSTANTE DA EQLACAO (5,1)	C13 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	FI*MAX = 35,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	CD*MAX = 15,24000 CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 3,00 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 3,00 /1

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

DELTA 1#	.1000000E+01	DELTA 2#	.9435000E+00	DELTA 3#	.3145000E+00	DELTA 4#	.1044000E+01
DELTA 5#	.1997000E+01	DELTA 6#	.1190000E+01	DELTA 7#	.8050000E+00	DELTA 8#	.2415000E+01
DELTA 9#	.1040000E+01	DELTA 10#	.3100500E+01	LAMBDA 3#	.1044000E+01	LAMBDA 4#	.1997000E+01
LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.1258000E+01	LAMBDA 7#	.1040000E+01	LAMBDA 8#	.3100500E+01
LAMBDA 5#	.1190000E+01	LAMBDA 6#	.3220000E+01				

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1# .7610062E+22 P 2# .1277148E+15 P 3# .6212277E+12

VALOR DAS VARIAVEIS DUAIS NO PONTO OTIMO

R 1# .3145000E+00 R 2# .2415000E+01 R 3# .3100500E+01

O ALGORITMO CONVERGIU EM 10 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO # 576.13 MS

 * RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

A POTENCIA MAXIMA ADMISSIVEL E = 519,94 CAVALOS VAPOR

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CFN =	4,00
ANGULO DA HELICE	PSI =	35,00 GRAUS
FORCA TANGENCIAL	FT =	5429,83 QUILOGRAMAS FORCA
DIAMETRO DO PINHAO	DP =	7,62 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NNP =	13,70 DENTES
RELACAO DE TRANSMISSAO	A =	3,00 / 1

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 2 *****

MATERIAL DO PINHAO	ACO AISI 1020
MATERIAL DA CORCA	ACO AISI 1020
POTACAO DO EIXO DO PINHAO	HP = 1800,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PH = ***** CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA	PEC = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = 2100,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA	SC = 2100,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3,32)	K = *****
CONSTANTE DA EQUACAO (5,1)	C13 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	F1MAX = 10,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	CDMAX = 8,00000 CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 1,50 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 3,00 /1

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 7 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAS SEGUINTE

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 11 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAS SEGUINTE

O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 4

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 2 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAS SEGUINTE

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 4 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAS SEGUINTE

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 4 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAS SEGUINTE

O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 2

DELTA 1=	.1000000E+01	DELTA 2=	.7913714E+00	DELTA 3=	.4686286E+00	DELTA 4=	.1936538E+01
DELTA 5=	.1997000E+01	DELTA 6=	.1190000E+01	DELTA 7=	.1288000E+01	DELTA 8=	.1932000E+01
DELTA 9=	.1892000E+01						

LAMBDA 1=	.1000000E+01	LAMBDA 2=	.1260000E+01	LAMBDA 3=	.1936538E+01	LAMBDA 4=	.1997000E+01
LAMBDA 5=	.1190000E+01	LAMBDA 6=	.3220000E+01	LAMBDA 7=	.1892000E+01		

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1= -.6847149E-10 P 2= .1598059E-11

VALOR DAS VARIÁVEIS DUAS NO PONTO OTIMO

R 1 = .468628E+00 R 2 = .193200E+01

O ALGORITMO CONVERGIU EM 251 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO = 24748,50 MS

 * RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

O MAXIMO TORQUE TRANSMISSIVEL E = 3813,74 QUILOGRAMAS FORCA*CENTIMETRO

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CAF =	4,00
ANGULO DA HELICE	PSI =	10,00 GRAUS
FORCA TANGENCIAL	FT =	1191,80 QUILOGRAMAS FORCA
DIAMETRO DO PINHAO	DP =	6,40 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NAP =	13,70 DENTES
RELACAO DE TRANSMISSAO	A =	1,50 /1

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 3 *****

MATERIAL DO PINHAO	ACO DUREZA BRINELL 600
MATERIAL DA CORCA	ACO DUREZA BRINELL 600
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO	WP = 3600,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = ***** QUILOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PM = 250,00 CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = 7,83000 GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA	PEC = 7,83000 GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA	SC = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3,32)	K = 60,55
CONSTANTE DA EQUACAO (5.1)	C13 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	FIMAX = 35,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	COMAX = 15,24000 CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 3,00 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 3,00 /1

SOLUCAC DO PROBLEMA DUAL

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 3 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAS SEGUINTES

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 6 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAS SEGUINTES

O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 4

DELTA 1#	.1000000E+00	DELTA 2#	.9000000E+00	DELTA 3#	.9578313E+00	DELTA 4#	.9036145E+00
DELTA 5#	.3012048E+00	DELTA 6#	.9132530E+00	DELTA 7#	.1397590E+00	DELTA 8#	.2108434E-01
DELTA 9#	.6325301E-01	DELTA 10#	.2927999E+00	DELTA 11#	.1816294E+01		

LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.9578313E+00	LAMBDA 3#	.1204819E+01	LAMBDA 4#	.9132530E+00
LAMBDA 5#	.1397590E+00	LAMBDA 6#	.8433735E-01	LAMBDA 7#	.2927999E+00	LAMBDA 8#	.1816294E+01

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1# -.2236463E-09 P 2# -.3727438E-10 P 3# -.3727434E-10 P 4# .9898272E-11

VALOR DAS VARIAVEIS DUAS NO PONTO OTIMO

R 1# .9000000E+00 R 2# .9036145E+00 R 3# .6325301E-01 R 4# .1816294E+01

O ALGORITMO CONVERGIU EM 149 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO = 25357.59 MS

 *
 * RESULTADOS DO PROBLEMA *
 *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

O MINIMO PESO DO CONJUNTO E = 7853,81 GRAMAS

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CMF =	4,00
ANGULO DA HELICE	PSI =	35,00 GRAUS
FORÇA TANGENCIAL	FT =	1305,41 GUILDGRAHAS FORÇA
DIAMETRO DO PINHAO	DP =	7,62 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NMP =	53,14 DENTES
RELAÇAO DE TRANSMISSAO	A =	3,00 / 1

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *
 *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 4 *****

MATERIAL DO PINHAO	ACO AISI 1020
MATERIAL DA CORCA	ACO AISI 1020
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO	WP = 1800,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = 500,00 GUILLOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PM = ***** CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = 7,83000 GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA	PEC = 7,83000 GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = 2100,00 GUILLOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA	SC = 2100,00 GUILLOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3,32)	K = *****
CONSTANTE DA EQUACAO (5,1)	C13 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	FIMAX = 10,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	CDMAX = 8,00000 CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 1,50 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 3,00 /1

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL	8	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEGUINTE							
ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA	13	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTE							
0 GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E	6								
ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL	7	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEGUINTE							
ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA	11	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTE							
ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA	11	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTE							
0 GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E	4								
ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL	3	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEGUINTE							
ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA	6	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTE							
ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA	6	RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTE							
0 GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E	2								
DELTA 1#	.3076923E+00	DELTA 2#	.6923077E+00	DELTA 3#	.9316406E+00	DELTA 4#	.7360225E+00		
DELTA 5#	.4358525E+00	DELTA 6#	.8052250E+00	DELTA 7#	.8609375E+00	DELTA 8#	.1085938E+00		
DELTA 9#	.1347115E+01								
LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.9316406E+00	LAMBDA 3#	.1171875E+01	LAMBDA 4#	.8052250E+00		
LAMBDA 5#	.8609375E+00	LAMBDA 6#	.1085938E+00	LAMBDA 7#	.1347115E+01				

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1= .3443480E+10 P 2= .3541046E+09

VALOR DAS VARIÁVEIS DUAS NO PONTO ÓTIMO

R 1= .6923077E+00 R 2= .7360225E+00

O ALGORITMO CONVERGIU EM 399 ITERAÇÕES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUÇÃO = 58395,44 MS

* RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO CRJETIVO NO PONTO OTIMO

O MINIMO PESO DO CONJUNTO E = 744,36 GRAMAS

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CNF =	4,00
ANGULO DA HELICE	PSI =	10,00 GRAUS
FORCA TANGENCIAL	FT =	292,43 QUILOGRAMAS FORCA
DIAMETRO DO PINHAO	DP =	3,42 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	MNP =	13,70 DENTES
RELACAO DE TRANSMISSAO	A =	1,50 /1

```

*****
*
* OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *
*
*****

```

```

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 5 *****

```

```

MATERIAL DO PINHAO.
MATERIAL DA CORCA
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO
TENSAC ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3,32)
CONSTANTE DA ERLACAO (5,1)
ANGULO DA HELICE MAXIMO
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA

ACO DUREZA BRINELL 600
ACO DUREZA BRINELL 600
WP = 3600,00 RPM
TM = ***** QUILOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
PM = 250,00 CAVALCS VAPOR
PEP = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PEC = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
SP = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
SC = ***** QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
K = 60,55
C13 = 0,11730
FIMAX= 35,00
CDMAX= ***** CENTIMETROS
AMIN = 3,00 /1
AMAX = 3,00 /1

```

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

DELTA 1#	.2500000E+00	DELTA 2#	.7500000E+00	DELTA 3#	.3110000E+00	DELTA 4#	.2932500E+00
DELTA 5#	.9775000E+01	DELTA 6#	.3240000E+00	DELTA 7#	.6200000E+00	DELTA 8#	.3700000E+00
DELTA 9#	.1130000E+00	DELTA 10#	.7522500E+00				
LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.3110000E+00	LAMBDA 3#	.3910000E+00	LAMBDA 4#	.3240000E+00
LAMBDA 5#	.6200000E+00	LAMBDA 6#	.3700000E+00	LAMBDA 7#	.1130000E+00	LAMBDA 8#	.7522500E+00

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1# .2012157E-11 P 2# .4541156E-11 P 3# -.1038004E-10

VALOR DAS VARIAVEIS DUAS NO PONTO OTIMO

R 1# .9775000E-01 R 2# .7522500E+00 R 3# .7500000E+00

O ALGORITMO CONVERGIU EM 10 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO # 588.53 MS

 * RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

A MINIMA DISTANCIA ENTRE CENTROS E * 9.83 CENTIMETROS

VALORES DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CNF =	4.00
ANGULO DA HELICE	PSI =	35.00 GRAUS
FORÇA TANGENCIAL	FT =	2030.68 GUILOGRAMAS FORÇA
DIAMETRO DO PINHAO	OP =	4.92 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NNP =	13.70 DENTES
RELAÇÃO DE TRANSMISSAO	A =	3.00 /1

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 6 *****

MATERIAL DO PINHAO	ACO AISI 1020
MATERIAL DA CORCA	ACO AISI 1020
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO	NP = 1800,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = 2500,00 QUILOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PM = ***** CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA	PEC = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = 2100,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA	SC = 2100,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3.32)	K = *****
CONSTANTE DA EQUACAO (5.1)	C'3 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	FINAX = 10,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	CDMAX = ***** CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 1,50 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 3,00 /1

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 7 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEQUINTES

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 11 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEQUINTES

O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 4

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 3 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEQUINTES

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 6 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEQUINTES

ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 6 RENUMERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEQUINTES

O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 2

DELTA 1#	.4000000E+00	DELTA 2#	.6000000E+00	DELTA 3#	.3110000E+00	DELTA 4#	.2453764E+00
DELTA 5#	.1454236E+00	DELTA 6#	.6012154E+00	DELTA 7#	.6200000E+00	DELTA 8#	.3700000E+00
DELTA 9#	.5870000E+00						

LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.3110000E+00	LAMBDA 3#	.3910000E+00	LAMBDA 4#	.6012154E+00
LAMBDA 5#	.6200000E+00	LAMBDA 6#	.3700000E+00	LAMBDA 7#	.5870000E+00		

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1# -.2339330E+09 P 2# -.1120011E+09

VALOR DAS VARIAVEIS DUAIS NO PONTO OTIMO

R 1= .1454236E+00 R 2= .5870000E+00

O ALGORITMO CONVERGIU EM 234 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO = 23099.16 MS

* RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

A MINHA DISTANCIA ENTRE CENTROS E = 7,04 CENTIMETROS

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CNF =	4,00
ANGULO DA HELICE	PSI =	10,00 GRAUS
FORCA TANGENCIAL	FT =	886,51 QUILOGRAMAS FORCA
DIAPETRO DO PINHAO	DP =	5,64 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NNP =	13,70 DENTES
RELACAO DE TRANSMISSAO	A =	1,50 /1

 * OTIMIZACAO DE ENGENHAGENS POR PROGRAMACAO GEOMETRICA *

***** O PROBLEMA ESCOLHIDO E O NUMERO 6 *****

MATERIAL DO PINHAO.	ACO AISI 1095
MATERIAL DA CORCA	ACO AISI 1020
ROTACAO DO EIXO DO PINHAO	MP = 1800,00 RPM
TORQUE MINIMO NO EIXO DO PINHAO	TM = 7000,00 QUILOGRAMA FORCA*CENTIMETRO
POTENCIA MINIMA ADMISSIVEL	PM = ***** CAVALOS VAPOR
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA PINHAO	PEP = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
PESO ESPECIFICO DO MATERIAL DA CORCA	PEC = ***** GRAMAS/CENTIMETRO CUBICO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DO PINHAO	SP = 3800,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
TENSAO ADMISSIVEL A FADIGA DO MATERIAL DA CORCA	SC = 2100,00 QUILOGRAMA FORCA/CENTIMETRO QUADRADO
FATOR DE MATERIAL E FORMA DADO PELA EQUACAO (3.32)	K = *****
CONSTANTE DA EQUACAO (5.1)	C'3 = 0,11730
ANGULO DA HELICE MAXIMO	FINAX = 15,00
DISTANCIA MAXIMA ENTRE CENTROS	COHAX = ***** CENTIMETROS
RELACAO DE TRANSMISSAO MINIMA	AMIN = 3,00 /1
RELACAO DE TRANSMISSAO MAXIMA	AMAX = 4,00 /1

SOLUCAO DO PROBLEMA DUAL

ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 2 REMUNERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEGUINTES
 ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 4 REMUNERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTES
 ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 4 REMUNERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTES
 O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 3
 ELIMINADA A RESTRICAO PRIMAL 6 REMUNERADAS TODAS AS RESTRICOES PRIMAIS SEGUINTES
 ELIMINADA A RESTRICAO DUAL DELTA 9 REMUNERADAS TODAS AS RESTRICOES DUAIS SEGUINTES
 O GRAU DE DIFICULDADE DO PROBLEMA E 2

DELTA 1#	.2500000E+00	DELTA 2#	.7500000E+00	DELTA 3#	.3110000E+00	DELTA 4#	.3314142E+00
DELTA 5#	.5958533E-01	DELTA 6#	.6943494E+00	DELTA 7#	.6200000E+00	DELTA 8#	.3700000E+00
DELTA 9#	.7169234E+00						
LAMBDA 1#	.1000000E+01	LAMBDA 2#	.3110000E+00	LAMBDA 3#	.3910000E+00	LAMBDA 4#	.6943494E+00
LAMBDA 5#	.6200000E+00	LAMBDA 6#	.3700000E+00	LAMBDA 7#	.7169234E+00		

VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PONTO OTIMO

P 1# .3167943E+09 P 2# .1704198E+12

VALOR DAS VARIAVEIS DUAIS NO PONTO OTIMO

R 1= .3314142E+00 R 2= .7169234E+00

O ALGORITMO CONVERGIU EM 82 ITERACOES

TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO = 7303.94 MS

* RESULTADOS DO PROBLEMA *

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO NO PONTO OTIMO

A MINIMA DISTANCIA ENTRE CENTROS E # 14.20 CENTIMETROS

VALORES DAS VARIAVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO

FATOR DE LARGURA DE FACE NO PLANO NORMAL	CNF =	4.00
ANGULO DA HELICE	PSI =	15.00 GRAUS
FORÇA TANGENCIAL	FT =	1970.71 GUILCGRAMAS FORÇA
DIAMETRO DO PINHAO	DP =	7.10 CENTIMETROS
NUMERO DE DENTES DO PINHAO NO PLANO NORMAL	NNP =	13.70 DENTES
RELACAO DE TRANSMISSAO	A =	3.00 / 1

5.6.3. Interpretação das Saídas

O computador imprime como saídas os seguintes resultados:

- . a primeira página corresponde aos dados do problema. Serve para conferência das entradas e identificação do problema.
- . a segunda página e eventualmente a terceira tem como título: "Solução do Dual". Após, poderemos encontrar mensagens do seguinte tipo: "Eliminada a restrição primal k renumeradas todas as restrições primais seguintes". Isto significa que a k-ésima restrição primal é inativa. O problema foi reformulado, eliminando-se aquela restrição. Automaticamente o programa renumera as restrições, de ordem superior, se houver,

Então a restrição $k + 1$ passa a ser identificada por restrição k , a restrição $k + 2$ passa a ser identificada por restrição $k + 1$ e assim por diante.

O usuário deve reportar-se ao modelo original e ir seguindo as mensagens do programa. Para cada mensagem, o usuário deve renumerar as restrições do programa primal e em consequência as do programa dual. No final restará o problema reduzido com todas as restrições ativas. A combinação ótima de pesos $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ vem impressa, com os índices referentes ao pro -

grama dual reduzido. Todas as restrições primais inativas foram eliminadas e as restrições duais ativas também. Os pesos δ_i correspondentes a restrições duais ativas são iguais a zero.

Como a solução δ corresponde a um ponto maximizante, o programa imprime os valores das derivadas parciais da função objetivo no ponto ótimo, com relação às variáveis r_j do problema dual transformado. O valor P_1 corresponde a

$\frac{\partial}{\partial r_1} (\log v(r))$ analogamente P_2 corres-

ponde a $\frac{\partial}{\partial r_2} (\log v(r))$ e assim por

diante.

Os valores das variáveis duais r_j no ponto ótimo são impressas a seguir e depois vem o tempo gasto pelo algoritmo para encontrar a solução e o número de iterações utilizadas. Este tempo é dado em milisegundos e inclui os tempos de impressão das mensagens.

Na última página estão os valores das variáveis independentes no ponto ótimo.

5.6.4. Comparação do Método Empregado com o Método de Johnson

O problema 1 escolhido como um dos exemplos da seção 5.6.2 é equivalente ao problema resolvido por Johnson na referência (21).

No quadro a seguir estão apresentados os resultados obtidos por Johnson e os obtidos neste trabalho.

Método Variável	Johnson	Proposto
Máxima potência admissível	521 HP	513 HP
$C_n F$	4.00	4.00
	35°	35°
D_p	3.00 polegadas	3.00 polegadas
N_{np}	13.7	13.7

A engrenagem ideal calculada pelos dois métodos é a mesma. O valor da função objetivo no ponto ótimo difere de 1,5% de um método para o outro. Isto deve-se a que Johnson utiliza-se da força dinâmica F_d como variável independente em seu método e no nosso trabalho utilizamos como variável independente a força tangencial F_t . Apesar da aproximação para o valor da força dinâmica F_d em função da força tangencial F_t ser a mesma nos dois métodos, Johnson calcula depois a função inversa, F_t em função de F_d , o que introduz um certo erro numérico adicional nesta

função. Daí a razão da diferença, sendo que o método proposto está mais a favor da segurança.

O método utilizado por Johnson está detalhado na referência (21) e consiste em analisar separadamente, quando possível, a contribuição de cada variável independente à função objetivo, fixando seu valor de acordo com as restrições ativas existentes. As restrições supostas, "a priori", inativas são submetidas a uma verificação, quando já se possui o resultado, para identificar se a solução encontrada é consistente. Quanto maior o número de restrições inativas existentes, que não possam ser identificadas com facilidade, mais difícil se torna a aplicação do método de Johnson. A existência de restrições constituídas por uma soma de monômios como as que temos nos problemas 2, 3, 4, 5 e 6, torna necessária a aproximação dessas somas por monômios de um único termo.

Essas decisões são de difícil programação, não sendo possível automatizar os procedimentos. A Programação Geométrica é mais flexível, pois permite a inclusão de restrições inativas. O próprio algoritmo de solução identifica as restrições realmente inativas fornecendo esta informação ao projetista, não sendo necessária nenhuma estimativa das restrições que "devem" ser inativas. A Programação Geométrica também fornece resultados mais precisos, por necessitar de um número menor de aproximações, pois admite funções do tipo somas de monômios positivos.

A Programação Geométrica é sem dúvida um método mais poderoso para o tipo de problema de otimização aqui tratado que o método proposto por Johnson.

Os valores das variáveis independentes no ponto ótimo nos permitem calcular as engrenagens ideais. Este par de engrenagens ideal pode não ser necessariamente constituído de engrenagens reais. No passo 4 foram feitas algumas simplificações na natureza das variáveis para tornar possível a solução do modelo.

A simplificação mais importante foi o fato de considerarmos o número de dentes da engrenagem variando continuamente no campo dos números reais positivos. O número de dentes do pinhão no par de engrenagens ideal para o problema 1 do exemplo é:

$$N = N_{np} (\cos^3 \psi) = 13.7.0.819^3 = 7.54$$

Como o número de dentes não pode ser fracionário, o pinhão ideal calculado não é real.

Outra simplificação empregada foi a de não considerar a variação descontínua do passo diametral P_{nd} .

$$P_{nd} = \frac{N_{np} \cos^2 \psi}{D_p} = \frac{13.7.0.819^2}{3} = 3.06$$

O valor mais próximo recomendado é 3.00.

Estes fatos não permitem a aplicação direta dos resultados obtidos, mas a engrenagem ideal e o valor da função objetivo para a engrenagem ideal fornecem informações importantes para o projetista.

O algoritmo empregado identifica as restrições ativas para cada problema permitindo ao engenheiro uma maior compreensão do projeto. Por exemplo, existe uma regra prática de projeto que sugere ao projetista utilizar sempre o menor número de dentes possível para o pinhão nos projetos. Analisando os problemas resolvidos, podemos observar que esta regra é válida para as funções objetivo máxima potência ou torque e mínima distância entre centros. Para a função objetivo mínimo peso do conjunto, essa regra levará o projetista a um ponto distante do ótimo. Inúmeras outras conclusões desse gênero podem ser tiradas da análise dos resultados do modelo. O valor da função objetivo no ponto ótimo também é útil para o projetista, como um referencial para que o mesmo situe o seu projeto em relação ao ótimo.

Dada uma engrenagem ideal, Johnson (21, pag 425-439) propõe um procedimento, visando a determinar a engrenagem real nos casos em que a função objetivo é máxima capacidade de transmissão de potência.

Poderiam ser desenvolvidos métodos para o cálculo das engrenagens reais com outras funções objetivo a partir das engrenagens ideais.

Um outro enfoque é procurar introduzir no problema de Programação Geométrica as restrições de integridade para o número de dentes do pinhão e da coroa e a condição de variação discreta do passo diametral.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROGRAMAS GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO 6

6.1. Considerações Gerais

A solução de programas geométricos torna-se mais complexa à medida que cresce o grau de dificuldade do problema. Para grau de dificuldade zero, a solução é encontrada resolvendo um sistema linear de n equações a n incógnitas. Para grau de dificuldade um, Duffin, Peterson e Zener (16) sugerem um método gráfico de solução. Para grau de dificuldade de dois, Sansão (32) apresenta um método de busca direta para a obtenção do ponto otimizante. Mas à medida que cresce o grau de dificuldade, torna-se impraticável a utilização dos métodos citados. Surgem os problemas de canonicidade e degeneração, tratados na referência (16, cap.6), restrições inativas e dificuldade no tratamento numérico do programa geométrico.

A solução do programa geométrico pode ser tentada a partir do programa primal ou do programa dual. A solução do programa geométrico primal é muito difícil, por ser a minimização de uma função não linear, e não convexa sujeita à restrições não lineares e não convexas. É mais simples a solução do programa geométrico, se trabalharmos com o programa dual transformado B_r definido na seção 2.2.5, pelas seguintes razões:

- . as únicas restrições do programa dual transformado são as provenientes da condição de positividade (2.67) ;
- . as restrições do programa dual são lineares contra as restrições não lineares do programa primal;
- . como consequência da terceira conclusão do teorema 1 do capítulo 2, as restrições duais são inativas quando as restrições primais correspondentes são ativas. Isto simplifica bastante o tratamento numérico dos problemas;
- . os vetores que satisfazem às restrições do programa dual transformado B_r , formam um conjunto convexo, pois as restrições do programa B_r são lineares e portanto convexas. Apesar da função dual transformada $v(r)$ não ser côncava, a função $\log(v(r))$ é côncava, obedecendo a restrição $\delta > 0$. Nestas condições, $v(r)$ e $\log(v(r))$ têm o mesmo conjunto de pontos maximizantes;
- . o número de variáveis no programa dual B_r é d , sendo m no programa primal P .

Para que o mínimo do programa primal P coincida com o máximo do programa dual B_r , os teoremas 1 e 2 do capítulo 2 estabelecem que o programa primal P deve ser superconsistente e canônico.

O programa dual B_r e também o programa primal A são canônicas se houver um ponto δ que satisfaça estritamente às condições de positividade (2.67). Este fato implica em que o programa dual B_r é consistente, podendo, ainda assim, o programa primal P ser inconsistente.

Recomendamos, então, que problemas 3, 4, 5, 6, do capítulo anterior sejam testados quanto à consistência das restrições primais, sempre que houver dúvida, por meio dos problemas 1 e 2.

No caso do programa dual consistente e programa primal inconsistente, o valor da função dual $v(\delta)$, vai crescer indefinidamente.

Os problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6 do modelo foram testados quanto à canonicidade, determinando-se um ponto interior às restrições duais, satisfazendo, pois, ao teste de canonicidade.

Se os problemas não fossem canônicos, poderiam ser reformulados de acordo com a referência (16, cap.6).

6.2. O Algoritmo de Dinkel, Kochenberger e Mc Carl (9)

Um vetor r é maximizante se:

$$\frac{\partial \log(v(r))}{\partial r_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, d$$

$$\text{com } \delta_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Estas condições podem ser desenvolvidas até a forma das equações maximizantes (2.73).

$$K_q = \prod_{i=1}^n \delta_i^{b_i(q)} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{(\delta) - \lambda_k(q)}$$

$$q = 1, 2, \dots, d$$

$$\text{com } K_q = \prod_{i=1}^n c_i^{b_i(q)}$$

$$q = 1, 2, \dots, d$$

colocando os termos δ_i e λ_k em função de r , temos:

$$\prod_{i=1}^n (b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^d r_j b_i^{(j)})^{b_i^{(q)}} \prod_{k=1}^p (\lambda_k^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^d r_j \lambda_k^{(j)} - \lambda_k^{(q)} - \prod_{i=1}^n c_i^{b_i^{(q)}} = 0$$

$$q = 1, 2, \dots, d \quad (6.1)$$

O sistema 6.1 é um sistema de d equações não lineares a d incógnitas. Encontram-se na literatura diversas referências sobre a solução de um sistema deste tipo pelo método de Newton-Raphson, entre elas, Berezin (5), Fröberg (19) e Rall (30). Dinkel, Kochenberger e MacCarl (9) desenvolveram um algoritmo de Newton-Raphson modificado para solução de programas geométricos.

De acordo com sua proposta, os pontos são gerados pelo seguinte esquema:

$$r^{k+1} = r^k - \alpha H^{-1} (r^k) \nabla \log(v(r)) \quad (6.2)$$

com $H^{-1} (r^k) \equiv I$ se $H (r^k)$ é singular, sendo H matriz hessiana $dx dx$ do $\log (v(r))$

e $\alpha = \min \{1; 95\% \text{ da distância à restrição mais próxima (2.67)} \}$

sendo que $\nabla \log(v(r))$ é definido apenas para $\delta_i(r) > 0$.

Este esquema não se revelou plenamente satisfatório na solução de nosso modelo, pois o fator α de amortecimento é inversamente proporcional à distância à restrição mais próxima, o que implica em tempos de computação bastante grandes em alguns problemas particulares.

6.3. Algoritmo Proposto

Este fato nos levou a propor uma modificação alternativa para o algoritmo de Newton-Raphson, que resultou satisfatória em todos os testes realizados.

No algoritmo proposto, os pontos são gerados segundo o esquema:

$$r^{k+1} = r^k - H^{-1} (r^k) \nabla \log (v(r^k)) \quad (6.3)$$

Se

$$\delta_i(r^{k+1}) > \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.4)$$

com

$$H^{-1}(r^k) \equiv I \quad \text{se } H \text{ é singular}$$

Se

$$\delta_i(r^{k+1}) \leq \varepsilon \quad \text{para pelo menos um } i;$$
$$i = 1, 2, \dots, n \quad (6.5)$$

o algoritmo recalcula r^{k+1} pelo seguinte esquema:

$$r^{k+1} = r^k - \beta H^{-1}(r^k) \nabla \log(v(r^k)) \quad (6.6)$$

onde

$$\beta = \min \{ 1; \min_i \{ \alpha d_i \left(\frac{\nabla \delta_i(r)}{|\nabla \delta_i(r)|} \cdot H^{-1}(r^k) \nabla \log(v(r^k)) \right)^{-1} \} \} \quad (6.7)$$

onde

$$d_i = \text{distância do ponto } r^k \text{ a restrição}$$

$$\delta_i(r) \text{ tal que } \delta_i(r^{k+1}) \leq \epsilon$$

Desta maneira, podemos garantir que os gradientes $\nabla \log(v(r^k))$ estarão sempre definidos.

6.4. Comentários Gerais sobre o Algoritmo Proposto

6.4.1. Amortecimento do Passo do Algoritmo

Este esquema oferece algumas vantagens sobre o proposto na referência (9). O passo do algoritmo de Newton Raphson somente é amortecido quando:

- a. o ponto gerado r^{k+1} situa-se na "faixa de amortecimento" delimitada pela restrição $\delta_i \geq 0$ e pela "pseudo restrição" $\delta_i \leq \epsilon$. Na região $\delta_i > \epsilon$, o passo do algoritmo não é amortecido evitando-se o aumento do tempo de computação.
- b. a projeção do vetor $\Delta r = (r^{k+1} - r^k)$ na direção do vetor z , de módulo unitário e normal à restrição δ_i^* , deve ser maior que 100.0% da distância d_i , do ponto r^k à restrição δ_i^* . A restrição δ_i^* é escolhida como sendo a que apresenta o menor quociente

$$\frac{d_i}{|z \cdot \Delta r|}$$

Este critério permite selecionar a primeira restrição que seria alcançada, caminhando na direção do vetor Δr .

O amortecimento do passo do algoritmo, pode ser controlado, estudando-se a combinação dos fatores α e ϵ para se obter o amortecimento adequado. Na solução do nosso modelo foi preciso determinar valores para os parâmetros α e ϵ .

Na falta de mais dados, fixamos arbitrariamente os valores de α e ϵ .

$$\alpha = 0.95 \text{ e } \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$$

Na referência (9) encontramos a recomendação para que haja amortecimento no passo do algoritmo sempre que houver a possibilidade da identificação prematura de restrições primais inativas.

Como $\lambda_k = 0$ implica em que a k -ésima restrição primal é inativa, usamos o critério $\lambda_k < 10^{-10}$, para identificar e eliminar a k -ésima restrição primal.

Em alguns problemas, a solução do problema dual pode estar num ponto muito próximo das restrições duais, tal que, alguns λ_k tenham valores em torno de 10^{-10} . O algoritmo de Newton Raphson sem as modificações poderia, nestes casos, gerar alguns pontos r próximos da solução que impliquem em valores de $\lambda_k < 10^{-10}$. As restrições primais correspondentes a estes λ_k seriam eliminadas sem serem efetivamente inativas. O amortecimento do passo do algoritmo, segundo Dinkel, Kochenberger e

McCarl (9) evita este problema.

No nosso problema, os valores de α e ϵ adotados representam um amortecimento muito fraco no passo do algoritmo. Baseados nas pesquisas numéricas efetuadas não julgamos ser o nosso modelo passível de identificações prematuras de restrições primais inativas.

6.4.2. Problemas de Viabilidade

Outro problema enfrentado foi o fato de que algoritmo de Newton Raphson, sem as modificações introduzidas, gera em alguns casos particulares, pontos inviáveis a partir de pontos viáveis.

Nos pontos inviáveis, temos $\delta_i < 0$ e não está definida a função objetivo $v(r)$.

É necessário nestes casos, reiniciar o processo iterativo a partir de um novo ponto situado dentro do espaço das restrições.

Utiliza-se o mesmo esquema empregado no amortecimento do passo do algoritmo, para determinar o ponto onde o processo deveria reiniciar-se.

A figura 6.1 ilustra, num esquema geométrico, em duas dimensões, o funcionamento desse processo de reinício do algoritmo.

O algoritmo calcula o ponto r^{k+1} inviável a partir do ponto r^k . A primeira restrição desobedecida é δ_1 , a qual pode ser identificada pelo menor quociente

$$\frac{d_i}{|z_i - \Delta r|}$$

O ponto de reinício das iterações R é determinado de acordo com o esquema geométrico da figura 6.1.

O segmento $\overline{Rr^k}$ é igual a $\alpha \cdot \overline{Ar^k}$ onde A é ponto onde o vetor $(r^{k+1} - r^k)$ intercepta a restrição δ_1 . Esta construção garante que todas as outras restrições estarão obedecidas e portanto o ponto R é viável.

6.4.3. Identificação de Restrições Primais Inativas

Quando uma restrição primal é inativa, a restrição dual associada é nula. A subrotina Newton do programa elaborado para a execução do algoritmo de Newton Raphson modificado, testa as restrições duais, verificando se $\lambda_k \leq 10^{-10}$. Se λ_k for menor que o erro especificado, concluímos seu valor é zero e a restrição primal correspondente é inativa.

A subrotina Newton restringe, então a otimização as linhas $\delta_i = 0$, $i \in J(k)$ tal que $\lambda_k \leq 10^{-10}$.

Isto é feito, escolhendo-se uma variável dual r_p a ser eliminada, tal que:

$$r_p = - \frac{1}{b_i^{(p)}} (b_i^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^d r_j b_i^{(j)}) \text{ com } \begin{matrix} i \in J(k) \\ 1 \leq p \leq d \\ b_i^{(p)} \neq 0 \end{matrix}$$

Após, substitui-se o valor de r_p nas outras restrições duais.

6.4.4. Tempo de Processamento

Obtivemos experimentalmente alguns resultados para os tempos de processamento da subrotina Newton num computador Burroughs B 6700 pertencente ao centro de computação eletrônica da Universidade de São Paulo.

Vamos apresentar alguns tempos de processamento, a título de ilustração obtidos para os problemas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, das páginas 124-148 do capítulo 5.

<u>Problema</u>	<u>Grau de Dificuldade</u>	<u>Tempo de Processamento (segundos de CPU)</u>
1	3	0.58
2	5	24.75
3	5	25.36
4	7	58.40
5	3	0.59
6	5	23.01
6	5	7.30

Obviamente estes tempos de processamento dependem de:

a. Variáveis externas ao programa

- . Forma da função objetivo
- . Ponto de partida
- . Grau de dificuldade
- . Número de restrições primais inativas
- . Valor dos parâmetros do modelo que está sendo resolvido

b. Variáveis internas ao programa

- . Tempo de inversão da matriz H
- . Valor dos parâmetros α e ϵ .

6.4.5. Subrotina Newton

A subrotina Newton tem características:

ENTRADAS	<u>Variáveis</u>
	N = número de termos u_i
	D_1 = número de colunas da matriz B
	P = número de restrições primais
	D = grau de dificuldade do problema
	B = matriz (N x D_1) (2.82)
	L = matriz (P x D_1) de elementos $L(i,j) = \lambda_i^{(j)}$
	C = matriz dos coeficientes c_i dos termos u_i
	A = matriz dos expoentes do problema
	DELAM = matriz que relaciona cada restrição primal às restrições duais δ_i . correspondentes. Nesta matriz cada linha corresponde a uma restrição primal k. Se o elemento DELAM (k,j) = 1, o índice j pertence a J(k). Se o elemento DELAM (k,j) = 0, o índice j não pertence a J(k).
SAIDAS	(já eliminadas as restrições primais inativas)
	N = número de termos u_i do problema resultante.

- D_1 = número de colunas da matriz B para o problema resultante
- P = número de restrições primais ativas
- D = grau de dificuldade do problema resultante
- B = matriz B para o problema resultante
- L = matriz L para o problema resultante
- C = matriz C para o problema resultante
- X = matriz cujos elementos são as variáveis duais r_j , $j = 1, \dots, D$ soluções do programa dual.
- DELTA = matriz cujos elementos são:

$$\delta_i = b_i + \sum_j r_j b_i^{(j)}, i=1, \dots, N$$
- LAMB = matriz cujos elementos são:

$$\lambda_k = \lambda_k^{(0)} + \sum_j r_j \lambda_k^{(j)}, k = 1, \dots, P$$
- A = matriz dos expoentes para o problema resultante
- DELAM = matriz DELAM para o problema resultante

SUBROTINAS UTILIZADAS:

- VOLTA = Esta subrotina executa os procedimentos explicados nas seções

6.3.1 e 6.3.2.

DELETE = Esta subrotina executa o procedimento explicado na seção 6.4.3.

DERIV. = Esta subrotina calcula a matriz H no ponto r .

ARRAY e
MINV = Estas subrotinas fazem parte do SSP (Scientific Subroutine Package) da IBM e são utilizadas para a inversão da matriz H .

6.5. Conclusões

O algoritmo desenvolvido foi testado com êxito, na solução de problemas de programação geométrica com grau de dificuldade até 7. Seria necessário testá-lo para problemas ainda maiores para verificar a sua eficiência em problemas de grande porte.

Provavelmente, será necessário fazer a inversão da matriz H , que é uma matriz simétrica, por meio de um procedimento específico para a inversão de matrizes simétricas e portanto mais rápido que as subrotinas "ARRAY e MINV" para melhorar os tempos de processamento.

Fica ainda a questão de determinar um ponto de partida o mais próximo possível da solução, o que contribuirá para redução do tempo de processamento.

O problema dual transformado B_r é um problema

de otimização irrestrita de uma função côncava, quando não há restrições primais inativas.

Segundo Mangasrian (24) os métodos das Dirções Conjugadas e o método de Fletcher e Powel são adequados a problemas de otimização irrestrita, constituindo a sua utilização nos problemas de programação geométrica, um campo de pesquisa para os interessados no assunto.

CONCLUSÃO

CAPÍTULO 7

O modelo desenvolvido foi testado com sucesso em diversos problemas de cálculo de engrenagens. Alguns dos testes foram realizados com combinações de materiais para o pinhão e a coroa de uso pouco comum na prática, para testar o comportamento do modelo em condições extremas.

Os tempos de processamento para obtenção dos resultados são relativamente curtos. Em consequência o modelo é economicamente viável para a determinação do par de engrenagens ideal.

Existem diversas possibilidades de ampliação do modelo apresentado. Uma das opções é aumentar o número de variáveis independentes, incluindo o material do pinhão e o material da coroa como novas variáveis. Incluindo no modelo as restrições apropriadas, é possível limitar a faixa de variação de alguns parâmetros dos materiais, como a tensão de fadiga dos mesmos.

O modelo selecionaria a combinação ótima dos materiais do pinhão e da coroa para função objetivo e o conjunto de restrições considerado.

Outra possibilidade é a utilização do modelo apresentado neste trabalho como base para a resolução do problema da otimização do projeto de redutores.

A Programação Geométrica pode ser aplicada à otimização do cálculo de uma série de elementos de máquinas como barras de torsão, vigas metálicas, eixos, mancais, breques, molas e outros. As aplicações podem ser estendidas a todos os ramos da Engenharia, à Economia e outras áreas da ciência aplicada onde existam problemas de otimização.

A Programação Geométrica, por ser um campo recente da Pesquisa Operacional, oferece ao pesquisador, além da possibilidade da aplicação a problemas reais, a chance de poder contribuir na pesquisa de diversos tópicos que ainda não possuem uma solução consagrada.

A pesquisa de algoritmos eficientes para a solução de programas geométricos é um desses tópicos. Kochenberger, Woolsey e McCarl (23) apresentam uma solução baseada em uma propriedade da função dual; Shaftel, Smeers e Thompson (35) desenvolveram um algoritmo do tipo simplex para a solução de um tipo especial de programas geométricos; Dinkel, Kochenberger e MacCarl (9) utilizam-se de uma modificação no algoritmo de Newton Raphson como método iterativo de solução; em nosso trabalho propomos uma modificação alternativa para o método de Newton Raphson na solução de programas geométricos; Nijkamp (25, pag. 40) elaborou um algoritmo baseado num método de gradiente e Sansão (32) propõe um método de busca direta para problemas de pequeno porte.

Outro tópico a ser pesquisado é a solução de problemas de otimização de posinômios, eliminando-se a restrição imposta aos coeficientes c_i , de serem sempre positivos ou nulos. Um posinômio com os coeficientes c_i reais é chamado de "signômio" por Peterson (29, pag. 46). Essas funções são um pouco mais gerais que os posinômios e seu estudo permitirá estender a aplicabilidade da Programação Geométrica.

Os primeiros a estudarem este problema foram Passy e Wilde (28) que generalizaram alguns conceitos e teoremas válidos para os posinômios; Avriel e Williams (3) estudaram o problema e desenvolveram a "Programação Geométrica Complementar"; Dinkel e Kochenberger (8) apresentam exemplos de solução de problemas envolvendo "signômios", utilizando-se do enfoque apresentado por Duffin na referência (14).

Uma classe de problemas que tem merecido a atenção dos pesquisadores é:

$$\begin{aligned} \text{mínimo} \quad & g_0(t) \\ \text{sujeito a} \quad & g_p(t) \leq 1 \quad p = 1, 2, \dots, n_p \\ & g_k(t) \geq 1 \quad k = 1, 2, \dots, n_k \\ & \sum n_i = n \end{aligned}$$

e as funções g_0 , g_p , g_k são posinômios.

Estes problemas são chamados na literatura de "programas geométricos reversos" (ver Peterson (29, pag. 48)).

Não existe até agora uma solução que permita determinar diretamente o ótimo global para os programas geométricos reversos. Abrams e Bunting (1) apresentaram recentemente um trabalho nesta área; a "Programação Geométrica Complementar", referência (3), também é aplicável a este tipo de problema; Duffin (13) utiliza-se de propriedades da média harmônica para transformar programas geométricos reversos em programas geométricos propriamente ditos; Peterson (29, pag. 45-56) faz um apanhado geral da solução de

programas geométricos reversos.

Algoritmos para a solução de problemas de Programação Geométrica que levassem em conta a natureza discreta de algumas variáveis, seriam de grande utilidade prática. Não encontramos na literatura nenhuma referência a algoritmos desse tipo, sendo pois um assunto novo para pesquisa.

Concluindo, a pesquisa e a aplicação da Programação Geométrica que desponta como uma promissora técnica de otimização de funções não lineares é um assunto fascinante e atual, merecendo a atenção dos que trabalham e utilizam-se da Pesquisa Operacional.

BIBLIOGRAFIA

1. ABRAMS, R. and Bunting, M., "Reducing Reversed Posynomial Programs", SIAM J. Appl. Math., vol. 27, n° 4, 1974
2. ACKOFF, R. L. e SASIENI, M. W., "Pesquisa Operacional" Coleção Universitária de Administração. Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
3. AVRIEL, M. and WILLIAMS, A. C., "Complementary Geometric Programming", Siam J. Appl. Math., vol. 19, n° 1, 1970.
4. BELLMAN, R. and BECKENBACH, E., "An Introduction to Inequalities", The L. W. Singer Company, 1961.
5. BEREZIN, I. S. and ZHIDKOV, N. P., "Computing Methods", Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
6. CAIRNS, E. J., "Mathematics for Applied Engineering", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1967.
7. CHURCHMAN, C. W., "Introdução à Teoria dos Sistemas", Editora Vozes Ltda., 1971.
8. DINKEL, J. and KOCHENBERGER, G., "Applications of Geometric Programming to Marketing Decisions", Publication of the Department of Management Science and Organization Behavior, The Pennsylvania State University, 1972.
9. DINKEL, J.J., KOCHENBERGER, G. A. and McCARL, B., "An Approach to the Numerical Solutions of Geometric Programs" Mathematical Programming, n° 7, North-Holland Publishing Co., 1974.
10. DOBROVOLSKY, V., "Machine Elements", Peace Publishers, Moscow.
11. DUDLEY, D. W., "Practical Gear Design", McGraw-Hill Book Co., New York, 1954.

12. DUFFIN, R. J., "Dual Programs and Minimum Cost", J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 10, n° 1, 1962.
13. _____ "Harmonized Geometric Programs", paper presented at XIX TIMS Meeting, Houston, April, 1972.
14. _____ "Linearizing Geometric Programs", SIAM Review, Vol. 12, n° 2, 1970.
15. DUFFIN, R. J. and PETERSON, E.L., "Duality Theory for Geometric Programming", J. Soc. Ind. Appl. Math., vol 14, 1966.
16. DUFFIN, R.J., PETERSON, E.L. and ZENER, C., "Geometric Programming", John Wiley & Sons, Inc., 1967
17. FEDEROWICZ, A. J. and MAZUNDAR, M., "Use of Geometric Programming to Maximize Reliability achieved by Redundancy", Operations Research, vol. 16, n° 5, 1968.
18. FERREIRA, A. R. S. e ALMEIDA, N., "Projeto de Engrenagens por Computador", Divisão de Engenharia Mecânica, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1972.
19. FRÖBERG, C. E., "Introduction to Numerical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
20. GOULD, F. J. and TOLLE, J. W., "A Necessary and Sufficient Qualification for Constrained Optimization", SIAM J. Appl. Math., vol. 20, n° 2, 1971.
21. JOHNSON, R. C., "Optimum Design of Mechanical Elements", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
22. JONES, F.D. and RYFFEL, H., "Gear Design Simplified", The Industrial Press, New York, 1961.
23. KOCHENBERGER, G. A., WOOLSEY, R. E. D. and McCARL, B. A., "On the Solution of Geometric Programs via Separable Programming", Operational Research Quarterly, Vol. 24, n° 2, 1973.

24. MANGASRIAN, O. L., "Techniques of Optimization", Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 94, 1972.
25. NIJKAMP, P., "Planning of Industrial Complexes by Means of Geometric Programming", Rotterdam University Press, 1972.
26. OLIVEIRA, N. C. G., "Engrenagens", Departamento de Livros e Publicações do Gremio Politécnico, São Paulo.
27. PASCUAL, L. D. and BEN-ISRAEL, A., "Vetor-Valued Criteria in Geometric Programming", Operations Research, vol. 19, nº 1, 1971.
28. PASSY, V. and WILDE, D. J., "Generalized Polynomial Optimization", SIAM J. Appl. Math, vol. 15, nº 5, 1967
29. PETERSON, E. L., "The Scope of Geometric Programming", Discussion Paper nº 36, The Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, Illinois, 1973.
30. RALL, L. B., "Computational Solution of Nonlinear Operator Equations", Mathematics Research Center, University of Wisconsin, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
31. ROSEN, J. B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming I", J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 8, nº 1, 1960.
32. SANSÃO, A. L., "Projeto de Trocadores de Calor pelo Método da Programação Geométrica", Tese de Mestrado apresentada ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1971.
33. _____ "Otimização de Projetos pelo Método da Programação Geométrica", ITA Engenharia, vol. 3, nº 11, 1972.
34. SEIREG, A., "A Survey of Optimization of Mechanical

Design", Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, vol. 94, 1972.

35. SHAFTEL, T. L., SMEERS, Y. and THOMPSON, G. L., "A Simplex-Like Approach to a Class of Geometric Programming Problems", Management Sciences Research Report , n° 282, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pennsylvania, 1972.
36. ZENER, C., "A Further Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs", Proc. Nat. Acad. Sc. n° 48, 1962
37. _____ "A Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs", Proc. Nat. Acad. Sc., n° 47, 1961.
38. _____ "Minimization of System Costs in Terms of Subsystem Costs", Proc. Nat. Acad. Sc., n° 51, 1964.

A P Ê N D I C E

LISTAGEM DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR UTILIZADOS NESTE TRABALHO

START OF SEGMENT 008

```

C SUBROUTINE PRIMAL(AX,CX,VARIAB,UNID,XC,DET,IS)
C
C ESTÁ SUBROTINA CALCULA O VALOR DAS VARIÁVEIS PRIMÁIS
C
DIMENSION XC(6),CX(6),VARIAB(6,9),UNID(6,3)
DOUBLE PRECISION AX,DET
CALL ARRAY (2,6,6,6,6,AX,AX)
CALL MRY(AX,6,DET,LM,MM)
IF ( DABS(DET) > 1.E-10) 2,1
1 CALL ARRAY(1,6,6,6,6,AX,AX)
DO 3 I=1,6
  SGM/A=0.
DO 4 J=1,6
  SGM/A = SGM/A + CX(J) * AX(I,J)
4 CONTINUE
3 XC(1) = EXP(SGM/A)
XC(2)=ARCCOS(XC(2))
WRITE(15,103)
DO 5 I=1,6
  GC=TO 6
5 WRITE(15,100) (VARIAB(I,J),J=1,9),XC(I),(UNID(I,J),J=1,3)
2 WRITE(15,101)
100 FORMAT(14X,9A6,F12,2,1X,3A6,/)
101 FORMAT(14X,'0 DETERMINANTE DA MATRIZ DE EXPONENTES E NULO')
103 FORMAT(34X,'VALORES DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES DO PONTO OTIMO',
1/,34X,50(1H*)//)
104 FORMAT(1X,///)
6 RETURN.
END

```

FORMAT SFGMENT 009 IS 000C LONG.
FORMAT SFGMENT 008 IS 001F LONG.
SEGMENT 008 IS 007I LONG


```

C      CALCULO DOS VALORES DE P(X)
C
C      DO 6 I1=1,D
C      SKI=1.
C      DO 8 I=1,N
C      SKI=SKI*DELTA(I)**B(I,I1+1)
C      CONTINUE
C      SLI=1.
C      DO 9 P=1,P
C      Z=-L(K,I1+1)
C      SLI=SLI*XLAMB(K)**Z
C      VK(J11)=SKI*SLI
C      PI(I1)=VF(J11)-VKO(I1)
C      CONTINUE
C      IF(ITER/ITER=NO)333,333,331
C
C      IMPRESSAO DAS SAIDAS
C
C      331 WRITE(IS,520)(DEL,I,DELTA(I),I=1,N)
C      WRITE(IS,522)
C      WRITE(IS,530) (AP,I, XLAMB(I), I=1,P)
C      WRITE(IS,550)
C      WRITE(IS,9LE)
C      WRITE(IS,552)
C      WRITE(IS,966) (AP,I,PI(I), I=1,D)
C      WRITE(IS,550)
C      WRITE(IS,969)
C      WRITE(IS,552)
C      WRITE(IS,967) (AP,I,X(I), I=1,D)
C      NG=NO+1
C      IF(ITER=ITER) 919,919,999
C      919 IF (CCV) 999, 920, 900
C      920 IF(CIV) 999,333,999
C
C      VERIFICACAO DA CONVERGENCIA
C      333 XX=PI(1)
C      DO 110 I1=2,D
C      IF(ABS(XX)-ABS(PI(I1))) 111,110,110
C      111 XX=PI(I1)
C      110 CONTINUE
C      112 IF(ABS(XX)-TOLL) 112,112,116
C      CCV=1.
C      GO TO 331
C      116 CALL DERIV(VK,J,B,DELTA, XLAMB,L,XJACOB,N,D,P)
C      CALL ARRAY(2,D,D,10,10,XJACOB,XJACOB)
C      CALL PIV(XJACOB,D,DET,LW,PW)
C      CALL ARRAY(1,D,D,10,10,XJACOB,XJACOB)
C      IF(DET)210,891,210
C
C      HESSIANO SINGULAR IGUAL A MATRIZ IDENTIDADE
C
C      200 DO 250 I=1,L
C      DO 250 J=1,L
C      IF(I=J) 250,255,250
C      255 XIRV(I,J)=1.
C      250 XIRV(I,J)=0.
C      GO TO 127
C      210 DO 222 I=1,D
C      DO 222 JJ=1,D

```

```

C      017:006A:5
C      017:006A:5
C      017:006A:5
C      017:006C:0
C      017:006C:5
C      017:006E:0
C      017:0074:2
C      017:0076:3
C      017:0077:2
C      017:0078:0
C      017:007E:3
C      017:0081:4
C      017:0083:5
C      017:0087:5
C      017:008A:0
C      017:008C:2
C      017:008C:2
C      017:008C:2
C      017:008C:2
C      017:00A4:2
C      017:00C1:2
C      017:00C8:2
C      017:00D4:2
C      017:00EC:2
C      017:00EC:2
C      017:0103:2
C      017:010F:2
C      017:011E:2
C      017:0127:2
C      017:013E:2
C      017:013F:4
C      017:0141:0
C      017:0143:2
C      017:0145:0
C      017:0145:0
C      017:0145:0
C      017:0146:1
C      017:0147:0
C      017:0149:5
C      017:014F:3
C      017:016C:4
C      017:016F:2
C      017:0150:0
C      017:015C:3
C      017:0157:2
C      017:015E:2
C      017:015F:1
C      017:0163:0
C      017:0164:4
C      017:0164:4
C      017:0164:4
C      017:0164:4
C      017:0166:0
C      017:0167:0
C      017:0168:2
C      017:0168:1
C      017:0172:2
C      017:0172:5
C      017:0174:0

```



```

988 FORMAT(14X,31X,'VALOR DAS DERIVADAS DA FUNCAO OBJETIVO DUAL NO PON
1TO OTIMO',/,45X,50(1H*))
989 FORMAT(14X,36X,'VALOR DAS VARIAVEIS DUAIS NO PONTO OTIMO',/,
150X,40(1H*))
1099 FORMAT(14X,'TEMPO GASTO PELO ALGORITMO PARA ENCONTRAR A SOLUCAO',
1',',F10.2,1X,'MS')
998 CALL DELETE(D,L,C,DELTA,X,A,N,P,U,D1,K)
999 IF(CD)99,99,9,500
999 FINAL=TIME(2)*1000/60
DIF=FINAL-TEMPC
WRITE(15,1099) DIF
WRITE(15,555)
RETURN
END

```

```

C 017:020E:5
C 017:020E:5
C 017:020E:5
C 017:020E:5
C 017:020E:5
C 017:020E:5
C 017:0217:0
C 017:0218:1
C 017:021A:5
C 017:021B:5
C 017:022A:2
C 017:0236:2
C 017:0236:5

```

```

FORMAT SFGMENT 018 IS 0019 LONG*
FCRMT SFGMENT 016 IS 004E LONG*
SEGMENT 017 IS 0268 LONG

```

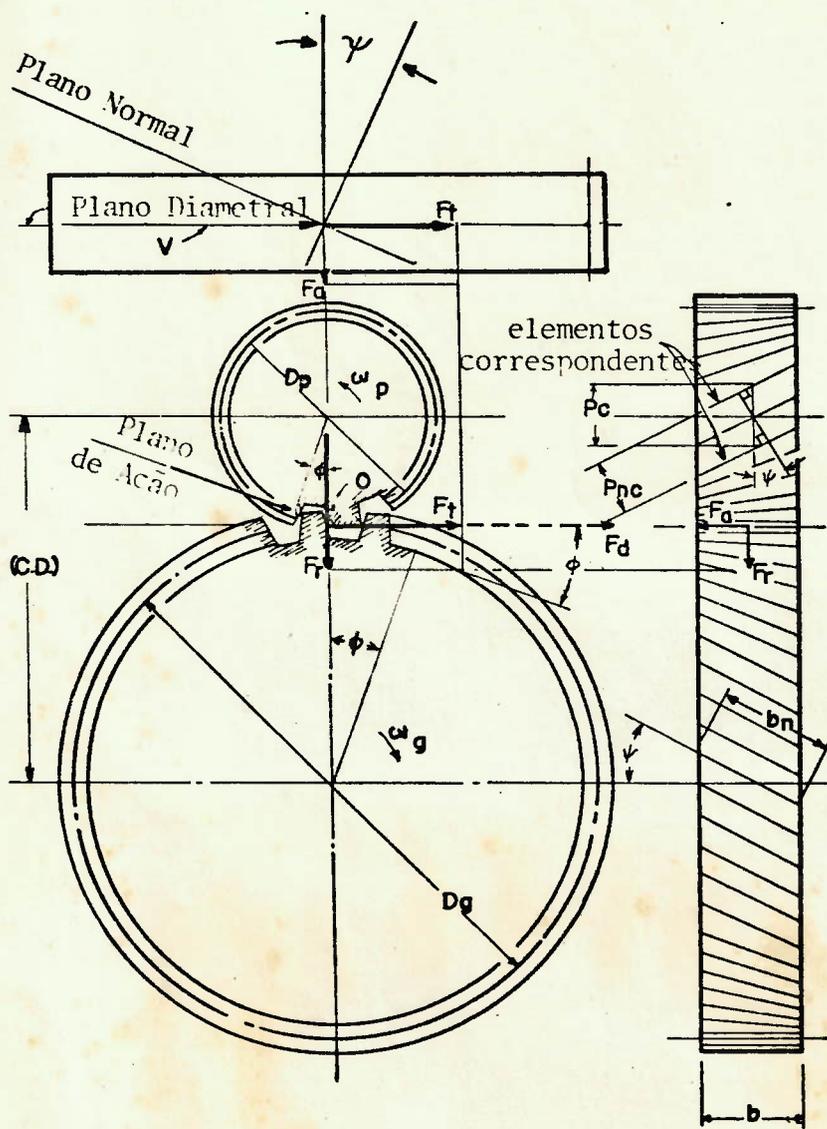


Fig. 3.1.

Par de engrenagens típico

Fonte : Referência (21, pag. 379)