Capítulo 5

AJUSTAMENTO DOS VETORES OBSERVADOS

Como resultado do processamento de fases observadas por $R, R \geq 3$, receptores, em uma mesma sessão, obter-se-ão os valores das componentes de todos os possíveis vetores de serem formados entre as estações, ou seja, $\frac{R \cdot (R-1)}{2}$ vetores, as suas variâncias e os coeficientes de correlação entre eles. Uma vez que o processamento das fases observadas simultaneamente, em uma mesma sessão, é feito aproveitando a condição de fechamento dos polígonos, as coordenadas processadas são compatíveis e somente $R-1$ vetores serão matematicamente independentes. No entanto, entre os vetores de um mesmo polígono, determinados pelo processamento de diferentes sessões, não há dependência matemática nem correlação estatística.

O ajustamento de observações tem como objetivo avaliar a qualidade das observações, detectar e eliminar aquelas com erros grosseiros, estimar um valor único para cada parâmetro, de forma que a soma do quadrado dos resíduos estimados seja mínima, e avaliar a precisão dos parâmetros estimados.

Quando um determinado polígono é observado em mais de uma sessão ou quando uma rede de pontos é observada em partes, com pontos de conexão, o número de vetores independentes, resultantes do processamento, é maior que o número de estações a serem determinadas, ou seja, há observações redundantes, e este fato pode e deve ser aproveitado para detectar e eliminar vetores com erros grosseiros, tornar compatíveis as coordenadas dos diferentes polígonos observados e avaliar a qualidade dessas coordenadas, ou seja, os vetores, agora considerados como observações, devem ser ajustados.

Este capítulo trata da organização dos diversos vetores independentes processados, da formação da matriz dos pesos para estes vetores e do ajustamento deles em rede.

5.1- Organização dos vetores e formação da matriz dos pesos

Para um mesmo polígono com R estações, ocupadas por R receptores, e uma só sessão, há R-1 vetores independentes e não há superabundância. As coordenadas das estações, suas variâncias e covariâncias são aquelas resultantes do processamento.

Se forem realizadas **p** sessões, em um mesmo polígono, elas serão processadas separadamente, cada uma dará origem a R-1 vetores matematicamente independentes e estatisticamente correlacionados. Se as **p** sessões são processadas tendo uma mesma estação como referência, dos vetores observados, apenas os $\mathbf{p} \cdot (R-1)$ independentes devem ser escolhidos para serem ajustados, com 3R coordenadas como incógnitas.

Neste trabalho serão escolhidos para o ajustamento, somente os vetores com origem na estação de referência, como normalmente é feito, a fim de diminuir o esforço computacional no cálculo da matriz das variâncias e covariâncias dos vetores de cada sessão.

Se se altera a estação de referência no processamento de diferentes sessões, haverá diferentes combinações de vetores, compondo o conjunto de $\mathbf{p} \cdot (R-1)$ vetores independentes. Com três receptores e duas sessões, é possível utilizar os três vetores do polígono como observação, processando as sessões com duas diferentes estações de referência.

Se a qualidade das observações em determinada estação não for boa, pode ser impossível processar os dados tendo-a como referência. Vale observar ainda que, as componentes dos vetores e a qualidade delas, variam com a estação de referência escolhida.

Com quatro receptores e duas sessões, numa configuração como a da Figura 5.1 (a), se as sessões são processadas com duas diferentes estações de referência, A e C, por exemplo, ter-se-á representados, no quadrilátero, todos os lados e uma diagonal, sendo esta com dois valores. Na figura 5.1 os vetores independentes que partem da estação A são representados em preto-cheio e os da estação C em vermelho-tracejado.

No entanto, convém notar que essa representação geométrica pode ser enganosa, se se pensa nela como rigidez de figura ou lados ocupados ou observados. Na realidade, ao representar os vetores cheios que partem de A, não foram desconsiderados, nessa sessão, os vetores CD e CB, pois as três estações foram ocupadas simultaneamente e as coordenadas, ou diferenças de coordenadas, foram ajustadas considerando todos os vetores observados e os valores dessas coordenadas não variam em função do caminho ou composição que se escolha para seu cálculo. Dito de outra maneira: essa configuração não significa que se tenha feito irradiações simples a partir da estação A. O que não se pode é incluir todos os vetores no ajustamento conjunto da rede, por serem matematicamente dependentes, o que levaria a variâncias e covariâncias enganosas.

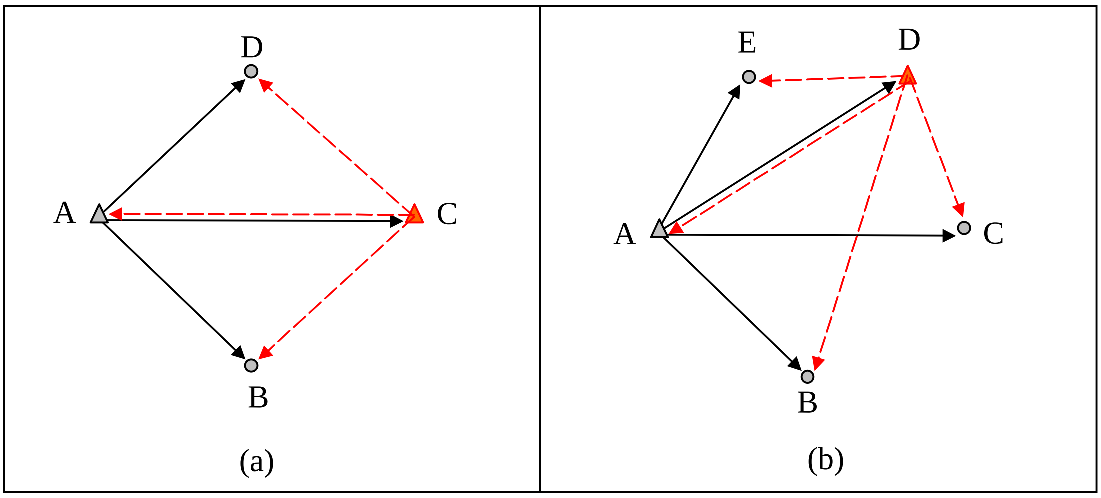

Figura 5.1 – Vetores resultantes do processamento dos dados de duas sessões, com quatro (a) e cinco receptores (b), e duas diferentes estações de referência.

Já a Figura 5.2 (b) mostra que num polígono com cinco estações, cinco receptores e duas sessões, não há como se ter representados todos os vetores adjacentes a partir de duas estações de referência. Pode-se verificar que para polígonos com E estações, não há como obter ou representar todos os vetores adjacentes, a partir da estação de referência, se o número **p** de sessões é menor que o inteiro superior de $\frac{E}{2}$.

Na Rede Minas, foram empregados até dez receptores e normalmente foram realizadas três sessões por polígono. Portanto, em princípio, para cada polígono seria possível processar os dados com até três estações de referência diferentes; porém, algumas sessões não foram possíveis de serem processadas com determinadas estações escolhidas para tal.

Um dos objetivos deste trabalho é analisar a influência da escolha de diferentes estações de referência para um mesmo polígono observado em mais de uma sessão.

Poderia se pensar em utilizar apenas os vetores menores no ajustamento; porém, pode ser que haja vetores menores com precisão pior que a de maiores; por isso serão utilizados todos os vetores independentes de cada sessão, o que aumenta o número de observações e conseqüentemente o grau de liberdade, e a detecção e eliminação de *outliers* serão feitas durante o ajustamento.

Escolhidos os vetores independentes, processados em uma sessão i, de um polígono formado pelas estações $1, 2, \cdots, R$; eles podem ser organizados na seguinte estrutura de dados matricial:

$$\vec{\upsilon}^{i} = [\, V_1^i, V_2^i, \cdots, V_{R-1}^i \,]^T , \tag{5.1}$$

$3(R-1)\times 1$, uma vez que cada vetor é representado por suas três componentes. Já suas variâncias e covariâncias podem ser organizadas na seguinte matriz quadrada e simétrica, $3(R-1)$:

$$\sum_{\vec{\upsilon}^i} = \begin{bmatrix} \sum_{V_1^i} & \sum_{V_{1,2}^i} & \cdots & \sum_{V_{1,R}^i} \\ & \sum_{V_2^i} & & \sum_{V_{2,R}^i} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{V_{R-1}^i} \end{bmatrix} . \tag{5.2}$$

Se as coordenadas das estações e suas variâncias e covariâncias, resultantes do processamento da sessão i, são organizadas nas seguintes estruturas matriciais:

$$\vec{\aleph}^{i} = [\, X_1^i,\ Y_1^i,\ Z_1^i,\ X_2^i,\ Y_2^i,\ Z_2^i,\ \cdots,\ X_R^i,\ Y_R^i,\ Z_R^i \,]^T \tag{5.3}$$

e

$$\sum_{\aleph^i} = \begin{bmatrix} \sum_{1^i} & \sum_{1,2^i} & \cdots & \sum_{1,R^i} \\ & \sum_{2^i} & & \sum_{2,R^i} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{R^i} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

onde, por exemplo,

$\sum_{1^i}$ é a matriz 3×3 das variâncias e covariâncias das coordenadas da estação 1 e

$\sum_{1,2^i}$ a matriz 3×3 das covariâncias entre as coordenadas das estações 1 e 2, resultantes do processamento da sessão i;

e se a estação 1 é escolhida como referência; tem-se, da definição de vetor entre duas estações apresentada na Figura 4.1, que:

$$\vec{\upsilon}^{\,i} = \begin{bmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ \vdots \\ V_{R-1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & 0 & I & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -I & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \cdot \vec{\aleph}^{\,i}, \tag{5.5}$$

onde I é uma matriz identidade 3 x 3.

Uma vez fixadas as coordenadas da estação 1, suas variâncias e covariâncias são nulas e tem-se, aplicando a lei de propagação das covariâncias na equação (5.5), que:

$$\sum_{\vec{\upsilon}^i} = \begin{bmatrix} \sum_{V_1^i} & \sum_{V_{1,2}^i} & \cdots & \sum_{V_{1,R}^i} \\ & \sum_{V_2^i} & & \sum_{V_{2,R}^i} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{V_{R-1}^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{2^i} & \sum_{2,3^i} & \cdots & \sum_{2,R^i} \\ & \sum_{3^i} & & \sum_{3,R^i} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{R^i} \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

ou seja, as variâncias e covariâncias dos vetores com origem na estação de referência, são iguais as variâncias e covariâncias das coordenadas das estações para as quais apontam esses vetores.

Cada sessão dará origem a um conjunto $\vec{\upsilon}^{\,i}$ de vetores com MVC igual a $\sum_{\vec{\upsilon}^i}$.

Uma rede de pontos pode ser dividida em polígonos com diferentes números de estações e diferentes polígonos podem ser observados em quantidades diferentes de sessões.

Os **n**[1] vetores de uma rede observada com **ns** sessões, podem ser organizados na seguinte matriz $3n \times 1$:

$$\vec{\upsilon}_{obs} = [\ V_1^1,\ V_2^1,\ V_3^1,\ \cdots,\ V_n^{ns}\ ]^T \tag{5.7}$$

Os vetores de diferentes sessões são independentes matematicamente e não correlacionados, portanto a MVC dos **n** vetores escolhidos para serem ajustados em rede, será uma matriz bloco-diagonal, onde cada bloco será formado por matrizes no formato daquela dada pela equação (5.6).

A matriz dos pesos, utilizada para considerar a diferença de precisão entre os vetores observados, pode ser obtida por:

$$_{3n}P_{3n} = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{\vec{\upsilon}_{obs}}^{-1} \tag{5.8}$$

sendo

σ_0^2 o fator de variância *a priori* e

$\Sigma_{\vec{\upsilon}_{obs}}^{-1}$ 3n x 3n, a inversa da MVC dos **n** vetores, independentes, observados.

5.2 – Ajustamento dos vetores observados, em rede

Considerando que o número **m** de estações da rede é menor que o número **n** de vetores independentes, a serem tratados como observações, a qualidade desses vetores, as coordenadas consistentes das estações, a qualidade dessas coordenadas e uma solução única para rede, podem ser avaliadas ajustando estes vetores. Se a matriz $3m \times 1$ dos parâmetros a serem ajustados, X^a, é

$$X^a = [\,X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ \cdots,\ X_m,\ Y_m,\ Z_m\,]^T \tag{5.9}$$

[1] Vetores observados em sessões diferentes, mesmo que entre as mesmas estações, são distintos no ajustamento.

e o modelo matemático, em que as coordenadas das estações são linearmente relacionadas com os vetores observados, é

$$\vec{\upsilon}_{AB} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

então, o sistema de equações de observação para os vetores observados será:

$$\vec{\upsilon}_{obs} + \nu = \frac{\partial(\vec{\upsilon})}{\partial X^a} \cdot X^a \tag{5.11}$$

onde

$\vec{\upsilon}_{obs}$ é a matriz $3n \times 1$ das componentes dos vetores observados,

ν é a matriz $3n \times 1$ dos resíduos das componentes dos vetores e

$\frac{\partial(\vec{\upsilon})}{\partial X^a}$ é a matriz, $3n \times 3m$, das derivadas parciais da equação (5.10) em relação às coordenadas das estações.

Os elementos da matriz das derivadas parciais da equação (5.10) em relação às coordenadas das estações - matriz design – serão 0, +1 e –1, como na matriz design do ajustamento de diferenças de nível. Cada estação dá origem a três colunas e cada vetor a três linhas desta matriz. Para cada vetor são atribuídos os elementos negativos às colunas da estação em que origina o vetor e positivos para a estação em que ele termina.

De acordo com Gemael (1994), se o modelo matemático é linear, as coordenadas ajustadas das estações da rede podem ser obtidas de:

$$X^a = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot \vec{\upsilon}_{obs} . \tag{5.15}$$

A MVC destas coordenadas é dada pelo produto do fator de variância *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$ pela inversa da matriz $(A^T PA)$, ou seja,

$$\sum_{X^a} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T PA)^{-1} \tag{5.16}$$

sendo

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\nu^T P \nu}{GL} \tag{5.17}$$

e GL o número de graus de liberdade.

As variâncias e covariâncias das observações ajustadas e dos resíduos estimados também podem ser calculadas, respectivamente, por:

$$\sum_{\vec{\upsilon}_{aju}} = \mathbf{A} \cdot \sum_{X^a} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \qquad \text{e} \tag{5.18}$$

$$\sum_{\nu} = \sum_{\vec{\upsilon}_{obs}} + \sum_{\vec{\upsilon}_{aju}} \quad . \tag{5.19}$$

Uma vez que os vetores contêm informações de orientação e escala, a matriz normal $(A^T PA)$ é singular com deficiência de *rank* igual a três.

O ajustamento livre, que envolve o cálculo da pseudo-inversa de $(A^T PA)$, pode ser usado para detectar e eliminar os vetores com erros grosseiros. Um estudo sobre ajustamento livre de redes pode ser encontrado em Cooper (1987) .

Fixando as coordenadas de uma das estações, o que pode ser feito eliminando as colunas da matriz **A** referentes à estação a ser fixada, tem-se o ajustamento com injunções mínimas. Dessa forma obtém-se uma avaliação da precisão interna das coordenadas ajustadas.

Quando mais de uma estação da rede têm coordenadas conhecidas de algum levantamento anterior, com precisão melhor ou igual à que se está determinando, a precisão externa, ou exatidão (acurácia), pode ser avaliada, fixando ou ponderando as coordenadas conhecidas *a priori*. As diferenças entre os valores estimados dessa forma e aqueles estimados com injunções mínimas indicarão a precisão externa. Além disso, a rede ora ajustada, passa a estar conectada à anterior.