LUCAS FRANCO DA SILVA

Planejamento ótimo de trajetórias para um robô escalador

São Paulo

2018

LUCAS FRANCO DA SILVA

Planejamento ótimo de trajetórias para um robô escalador

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

São Paulo

2018

LUCAS FRANCO DA SILVA

Planejamento ótimo de trajetórias para um robô escalador

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
Prof. Dr. José Jaime da Cruz

São Paulo

2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Silva, Lucas Franco da

Planejamento ótimo de trajetórias para um robô escalador / L. F. Silva --
versão corr. -- São Paulo, 2018.
128 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Robótica 2.Controle ótimo 3.Programação quadrática 4.Eficiência
energética 5.Simulação (Modelagem) I.Universidade de São Paulo. Escola
Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

Dedico este trabalho à minha família, que amo muito.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me concedido esta rica oportunidade em expandir a fronteira dos meus conhecimentos, por, na Sua infinita misericórdia, ter se mostrado socorro bem presente nos momentos de dificuldade, e por ter colocado pessoas muito especiais no meu caminho, as quais merecem também meus agradecimentos.

Aos meus queridos pais, Florisvaldo e Rosangela, e à minha irmã Samara, grandes amigos, por estarem sempre ao meu lado e, com muito amor, carinho e paciência, terem me encorajado a desenvolver este trabalho e me incentivado a não desistir desse sonho.

Ao Professor Doutor José Jaime da Cruz, que, mais que um orientador, se mostrou um verdadeiro amigo, por ter se disposto a me ajudar sempre que precisei, sanando as (muitas) dúvidas que tive, e por ter acreditado que eu pudesse chegar até aqui. Foi uma imensa honra para mim ter sido seu orientado.

Ao Professor Doutor Reinaldo de Bernardi, por ter acreditado no meu trabalho e que eu pudesse dar continuidade às atividades com o KA'I yxo, disponibilizando o robô e muitos outros recursos, e se mostrando pronto a me ajudar e a sanar as minhas dúvidas.

Aos Professores Doutores Alain Potts e Fuad Kassab Junior, pelos valiosos comentários que fizeram na ocasião do meu exame de qualificação, os quais contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor Anselmo Bittar, por ter disponibilizado o acesso a vários equipamentos que precisei utilizar no projeto e por ter me ajudado nas atividades de laboratório.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo importante apoio financeiro à realização do presente trabalho.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, seja durante ou antes do período de desenvolvimento deste trabalho, contribuíram de alguma maneira para que eu pudesse alcançar essa vitória.

*“Feliz o homem que acha sabedoria, e
o homem que adquire conhecimento.”
(Provérbios 3:13)*

RESUMO

Este trabalho trata do planejamento de trajetórias que minimizam as perdas elétricas no KA'I yxo, um robô escalador de árvores que tem por finalidade realizar monitoramento ambiental em florestas através da coleta de diferentes tipos de dados. Como essa aplicação requer que o robô permaneça em ambientes remotos, o estudo de técnicas que reduzam as perdas de energia a fim de que se aumente o tempo em operação do robô se mostra relevante, sendo a minimização das perdas elétricas uma contribuição importante nesse sentido. Estruturalmente, o KA'I yxo consiste em um robô bípede com duas garras e quatro ligamentos interconectados por três juntas rotacionais. Além disso, seu mecanismo de andadura foi biologicamente inspirado na forma de locomoção observada em lagartas mede-palmos, o que permitiu tratar o robô como um manipulador industrial, cuja base é o ligamento associado à garra engastada e cujo efetuator é o ligamento associado à garra livre. Com isso, quando conveniente, o robô foi tratado em dois casos, conforme a garra que se encontra engastada. Inicialmente, realizou-se a modelagem matemática do robô, obtendo-se as equações cinemáticas direta e inversa, e dinâmicas, bem como o modelo das juntas segundo a abordagem do controle independente por junta. Posteriormente, formulou-se um problema de controle ótimo, solucionado através de um método numérico que o transformou em um problema de programação quadrática, que por sua vez foi resolvido iterativamente. Por fim, as trajetórias ótimas planejadas foram implementadas no robô real e, como forma de validação, as novas perdas elétricas foram comparadas com as das trajetórias anteriormente executadas pelo robô, determinando-se a correspondente economia de energia.

Palavras-chave: Robô escalador. Controle ótimo. Planejamento de trajetórias. Programação quadrática. Eficiência energética.

ABSTRACT

This work deals with the minimum-energy trajectory planning, related to the electrical losses, in KA'I yxo, a tree-climbing robot that aims to perform environmental monitoring in forests through the collection of different types of data. As this application requires that the robot remains in remote environments, the study of techniques that reduce energy losses in order to increase the operation time of the robot is shown to be relevant, and the minimization of the electrical losses is an important contribution in this sense. Structurally, KA'I yxo consists of a biped robot with two claws and four links interconnected by three revolute joints. In addition, its gait mechanism was biologically inspired in the form of locomotion observed in caterpillars, allowing to treat the robot as an industrial manipulator, which base is the link associated with the fixed claw and which end-effector is the link associated with the free claw. In consequence, when convenient, the robot was treated in two cases, according to the claw that is fixed. Initially, the mathematical model of the robot was developed, being obtained the forward and inverse kinematic and dynamic equations, as well as the model of the joints according to the independent joint control approach. Subsequently, an optimal control problem was formulated, which was solved through a numerical method that turned it into a quadratic programming problem, which in turn was solved iteratively. Finally, the planned optimal trajectories were implemented in the real robot and, as a form of validation, the new electrical losses were compared with those of the trajectories previously executed by the robot, being determined the corresponding energy saving.

Keywords: Climbing robot. Optimal control. Trajectory planning. Quadratic programming. Energy efficiency.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Primeira versão (esquerda) e terceira versão (centro e direita) da plataforma RiSE.	17
Figura 2 – Quinta versão da série Kamanbaré (esquerda) e terceira versão da série KA'I yxo (direita).	18
Figura 3 – Manipulador PUMA.	22
Figura 4 – Sistemas padrões de um manipulador.	23
Figura 5 – Localização dos sistemas de referência e dos parâmetros de Denavit-Hartenberg em ligamentos vizinhos com juntas rotacionais.	25
Figura 6 – Modelo para uma junta i rotacional segundo o controle independente por junta.	29
Figura 7 – Estrutura do robô KA'I yxo.	34
Figura 8 – Sequência de estados principais do robô KA'I yxo para um passo de subida.	35
Figura 9 – Sistemas de referência para a configuração com G_2 engastada.	37
Figura 10 – Sistemas de referência para a configuração com G_1 engastada.	39
Figura 11 – Esquema para solução geométrica da cinemática inversa com G_2 engastada.	41
Figura 12 – Esquema para solução geométrica da cinemática inversa com G_1 engastada.	43
Figura 13 – Respostas das variáveis de junta θ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG1 e são aplicados torques nas juntas que o mantêm em equilíbrio.	47
Figura 14 – Respostas das variáveis de junta ϕ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG2 e são aplicados torques constantes nas juntas.	48
Figura 15 – Respostas das variáveis de junta ϕ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG2 refletido de forma a simular ponto de equilíbrio estável, sendo aplicados torques nas juntas que equilibram o robô.	49
Figura 16 – Discretização das variáveis de controle.	54
Figura 17 – Controles ótimos para um passo completo de subida.	63
Figura 18 – Variáveis de junta ótimas para um passo completo de subida.	63
Figura 19 – Velocidades angulares ótimas para um passo completo de subida.	64
Figura 20 – Acelerações angulares ótimas para um passo completo de subida.	64
Figura 21 – Torques nas juntas ótimos para um passo completo de subida.	65
Figura 22 – Abscissas ótimas das garras livres para um passo completo de subida.	66
Figura 23 – Ordenadas ótimas das garras livres para um passo completo de subida.	66
Figura 24 – Correntes de armadura ótimas para um passo completo de subida.	67
Figura 25 – Tensões de armadura ótimas para um passo completo de subida.	67

Figura 26 – Potências dissipadas por efeito Joule ótimas para um passo completo de subida.	68
Figura 27 – Perdas de energia totais por efeito Joule ótimas para um passo completo de subida.	68
Figura 28 – Potências dissipadas por atrito viscoso ótimas para um passo completo de subida.	69
Figura 29 – Perdas de energia totais por atrito viscoso ótimas para um passo completo de subida.	69
Figura 30 – Potências dissipadas por atrito seco ótimas para um passo completo de subida.	70
Figura 31 – Perdas de energia totais por atrito seco ótimas para um passo completo de subida.	70
Figura 32 – Ângulos dos atuadores ótimos teóricos (linhas cheias) e implementados no robô (linhas tracejadas) para um passo de subida.	73
Figura 33 – Teste com as trajetórias ótimas planejadas.	74
Figura 34 – Ângulos dos atuadores implementados no robô do caso senoidal para um passo completo de subida.	75
Figura 35 – Variáveis de junta simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	76
Figura 36 – Variáveis de junta simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	76
Figura 37 – Correntes de armadura simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	78
Figura 38 – Correntes de armadura simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	78
Figura 39 – Potências dissipadas por efeito Joule simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	79
Figura 40 – Potências dissipadas por efeito Joule simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	79
Figura 41 – Perdas de energia totais por efeito Joule simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	80
Figura 42 – Perdas de energia totais por efeito Joule simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	80
Figura 43 – Perdas de energia totais por atrito viscoso simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	81
Figura 44 – Perdas de energia totais por atrito viscoso simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	81
Figura 45 – Perdas de energia totais por atrito seco simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.	82

Figura 46 – Perdas de energia totais por atrito seco simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.	82
Figura 47 – Relação entre correntes de armadura e valores lidos dos registradores do atuador AX-12A.	83
Figura 48 – Correntes de armadura reais do caso ótimo para um passo completo de subida.	85
Figura 49 – Correntes de armadura reais do caso senoidal para um passo completo de subida.	85
Figura 50 – Potências dissipadas por efeito Joule reais do caso ótimo para um passo completo de subida.	86
Figura 51 – Potências dissipadas por efeito Joule reais do caso senoidal para um passo completo de subida.	86
Figura 52 – Perda de energia total por efeito Joule real do caso ótimo para um passo completo de subida.	87
Figura 53 – Perda de energia total por efeito Joule real do caso senoidal para um passo completo de subida.	87
Figura 54 – Atuador em malha aberta.	98
Figura 55 – Modelo para o atuador AX-12A em malha aberta.	99
Figura 56 – Circuito para medição da resistência interna de uma fonte de tensão.	99
Figura 57 – Circuito para obtenção do momento de inércia equivalente.	103
Figura 58 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com o gerador HP. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros iniciais do atuador.	105
Figura 59 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com a fonte SP 90. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros iniciais do atuador.	106
Figura 60 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com o gerador HP. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros definitivos do atuador.	109
Figura 61 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com a fonte SP 90. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros definitivos do atuador.	110
Figura 62 – Simulações das respostas das rotações do eixo da carga do atuador a degraus de amplitude de 11,82 V e 4,98 V na fonte SP 90.	111
Figura 63 – Estação base.	121
Figura 64 – Interface Gráfica.	122
Figura 65 – Placa Principal.	122
Figura 66 – Arquitetura de hardware.	123
Figura 67 – Atuador AX-12A.	123

Figura 68 – Ângulo de giro no atuador AX-12A.	124
Figura 69 – Ângulos dos atuadores no robô KA'I yxo.	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para $i = 2, 3$ na configuração com G_2 engastada.	36
Tabela 2 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para a configuração com G_1 engastada.	39
Tabela 3 – Resultados dos testes para escolha de N na configuração com G_2 engastada, com $t_f = 3$ s, $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ N m e $k_{max} = 150$	61
Tabela 4 – Resultados dos testes varrendo-se t_f na configuração com G_2 engastada, com $N = 150$, $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ N m e $k_{max} = 150$	62
Tabela 5 – Perdas de energia ótimas e correspondentes proporções das perdas Joule em relação às perdas totais.	71
Tabela 6 – Perdas simuladas e correspondentes proporções das perdas Joule em relação às totais para os casos ótimo e senoidal, e economias de perda Joule e de perda total do caso ótimo em relação ao senoidal.	77
Tabela 7 – Perdas Joule reais para os casos ótimo e senoidal e correspondente economia.	84
Tabela 8 – Ensaio realizado para obtenção da resistência interna do gerador HP.	100
Tabela 9 – Ensaio realizado para obtenção da resistência interna da fonte SP 90.	100
Tabela 10 – Valores obtidos no ensaio para a determinação da constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz.	101
Tabela 11 – Valores obtidos no ensaio para a determinação dos coeficientes de atrito viscoso e seco equivalentes.	102
Tabela 12 – Ensaio realizado para obtenção do momento de inércia. Os quatro primeiros foram realizados com o gerador HP, e os sete últimos, com a fonte SP 90.	105
Tabela 13 – Parâmetros iniciais do atuador AX-12A identificados em laboratório.	107
Tabela 14 – Parâmetros definitivos do atuador AX-12A obtidos por mínimos quadrados.	108
Tabela 15 – Condições iniciais e finais referentes a um passo completo de subida.	112
Tabela 16 – Especificações principais do atuador AX-12A.	124
Tabela 17 – Parâmetros do modelo do robô KA'I yxo para a configuração com G_2 engastada.	127
Tabela 18 – Parâmetros do modelo do robô KA'I yxo para a configuração com G_1 engastada.	128

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivo e justificativa	16
1.2	Revisão bibliográfica	16
1.3	Metodologia	18
1.4	Estrutura do texto	19
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	21
2.1	Modelagem de robôs manipuladores	21
2.1.1	Conceitos preliminares	21
2.1.2	Cinemática direta	22
2.1.3	Cinemática inversa	25
2.1.4	Dinâmica	26
2.1.5	Modelagem das juntas	28
2.2	Perdas de energia em motores de corrente contínua	30
2.3	Problemas de controle ótimo	31
2.4	Problemas de programação quadrática	32
3	MODELAGEM MATEMÁTICA DO ROBÔ	34
3.1	Preliminares	34
3.2	Cinemática	36
3.2.1	Cinemática direta com a garra superior engastada	36
3.2.2	Cinemática direta com a garra inferior engastada	38
3.2.3	Cinemática inversa com a garra superior engastada	40
3.2.4	Cinemática inversa com a garra inferior engastada	42
3.3	Dinâmica	43
3.3.1	Valores dos parâmetros do modelo robô	45
3.3.2	Simulações	46
3.3.2.1	Simulação com a garra superior engastada	46
3.3.2.2	Simulações com a garra inferior engastada	47
3.4	Modelo das juntas	49
3.4.1	Valores dos parâmetros do modelo dos atuadores	50
4	CONTROLE ÓTIMO: PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS	51
4.1	Formulação do problema de controle ótimo	51
4.2	Solução do problema de controle ótimo	53
4.2.1	Discretização	53

4.2.1.1	Solução das equações de estado	55
4.2.1.2	Problema de Programação Quadrática	55
4.2.2	Algoritmo de otimização	59
4.2.2.1	Valores dos parâmetros e implementação do algoritmo de otimização	60
4.2.3	Resultados	62
5	IMPLEMENTAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS ÓTIMAS E EFICIÊNCIA ENERGÉTICA	72
5.1	Implementação das trajetórias ótimas no robô	72
5.2	Eficiência energética	74
5.2.1	Economia de energia simulada	75
5.2.2	Economia de energia real	83
5.3	Análise crítica	88
6	CONCLUSÕES	90
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A – IDENTIFICAÇÃO DO ATUADOR	97
A.1	Preliminares	97
A.1.1	Modelo do atuador	98
A.1.2	Determinação das resistências internas das fontes utilizadas	99
A.2	Determinação dos parâmetros iniciais	100
A.2.1	Medição da resistência de armadura	100
A.2.2	Determinação da constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz	100
A.2.3	Determinação da constante de torque	101
A.2.4	Determinação dos coeficientes de atrito viscoso e seco equivalentes	101
A.2.5	Determinação do momento de inércia equivalente	102
A.3	Determinação dos parâmetros definitivos	107
	APÊNDICE B – CONDIÇÕES INICIAIS E FINAIS PARA UM PASSO DO ROBÔ	112
	APÊNDICE C – DESENVOLVIMENTO DAS DISCRETIZAÇÕES	113
C.1	Discretização da solução das equações de estado	113
C.2	Discretização do funcional	114
C.3	Discretização das restrições	116
C.3.1	Primeira restrição	116

C.3.2	Segunda restrição	116
C.3.3	Terceira restrição	117
C.3.4	Quarta restrição	117
C.3.5	Quinta restrição	119
C.3.6	Sexta restrição	119
	APÊNDICE D – ARQUITETURA DO ROBÔ	121
D.1	Preliminares	121
D.2	Implementação de trajetórias	125
	ANEXO A – PARÂMETROS DO MODELO DO ROBÔ . . .	127

1 INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo e justificativa

Este trabalho tem por finalidade planejar trajetórias que minimizam as perdas de energia elétrica, ou perdas Joule, no KA'I yxo, um robô projetado por Bernardi (2014) e destinado a realizar monitoramento ambiental em florestas por meio da escalada de árvores.

Tendo-se em vista a aplicação do robô em ambientes remotos, onde necessita passar longos períodos realizando a aquisição de dados do ambiente, como temperatura, umidade, radiação solar e altitude, a economia do consumo energético da bateria de alimentação dos atuadores compreende um fator essencial para que o robô cumpra o seu papel, permitindo maiores períodos em operação. A minimização das perdas elétricas no robô se torna, então, relevante.

1.2 Revisão bibliográfica

O termo *robô* deriva da palavra tcheca *robota*, introduzida em 1920 por Karel Capek em sua peça de teatro *Robôs Universais de Rossum* com o significado de trabalho. Atualmente, um robô designa um sistema que opere com algum grau de autonomia, usualmente controlado por um computador (SPONG; VIDYASAGAR, 1989).

A necessidade de se otimizar a qualidade, os custos, a segurança e o tempo de execução de atividades nos mais diversos tipos de processos tem motivado o desenvolvimento de pesquisas na área de robótica desde a década de 1960, com a introdução de robôs na indústria automotiva (GARCIA et al., 2007).

Um exemplo é o que ocorre na área de monitoramento ambiental, em que a robótica vem sendo vista por pesquisadores como uma ferramenta promissora, pela sua capacidade de melhorar as possibilidades atuais de observação e coleta de dados de processos naturais (CANNELL; STILWELL, 2005; PALEY; ZHANG; LEONARD, 2008). Nesse caso, podem-se citar diversos trabalhos, que envolvem aplicações marítimas (ALLEN et al., 1997), aéreas (RANGO et al., 2006) e terrestres (BARES; WETTERGREEN, 1999; JORDAN; BATALIN; KAISER, 2007; CAI et al., 2009).

Nas aplicações florestais, especificamente, o interesse em pesquisas com robôs escaladores tem aumentado nos últimos anos pelas vantagens que eles proporcionam, como a precisão na coleta de dados e a capacidade de atingirem alturas elevadas que oferecem riscos a humanos (ARMADA; SANTOS, 2004; TOKHI; VIRK; HOSSAIN, 2005; TOSUN et al., 2009).

A título de exemplo, a série RiSE (*Robots in Scansorial Environments*) consiste em várias versões de robôs escaladores inspirados no mecanismo de locomoção de insetos. Eles foram desenvolvidos por uma parceria entre as seguintes instituições: Boston Dynamics e Universidades da Pensilvânia, Lewis & Clark, Carnegie Mellon, Stanford e Berkeley. As duas primeiras versões da plataforma apresentam seis pernas, enquanto a terceira versão, apenas quatro, conforme mostra a Figura 1 (SAUNDERS et al., 2006; HAYNES et al., 2009).

Figura 1 – Primeira versão (esquerda) e terceira versão (centro e direita) da plataforma RiSE.

Fontes: Saunders et al. (2006), Haynes et al. (2009).

Ademais, podem-se citar outros dois exemplos importantes, as plataformas Kamanbaré e KA'I yxo, desenvolvidas na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP). Ao todo, nove versões de robôs foram projetadas, sendo as seis primeiras pertencentes à série Kamanbaré, bioinspiradas em um camaleão, e as três últimas pertencentes à série KA'I yxo, bioinspiradas em uma lagarta mede-palmos, como mostra a Figura 2¹. Essa mudança de versões foi associada aos processos de evolução e seleção natural, segundo os quais as espécies que sobrevivem são aquelas que conseguem se adaptar ou que possuem características favoráveis às modificações das condições físicas do ambiente em que se encontram (BERNARDI; CRUZ, 2007; BERNARDI; CRUZ, 2008; BERNARDI; FORNER-CORDERO; CRUZ, 2011; POTTS; CRUZ, 2011a; BERNARDI, 2014).

No caso da série KA'I yxo, a inspiração biológica foi baseada, especificamente, no mecanismo de locomoção observado na lagarta mede-palmos da espécie *Trichoplusia ni*, em que uma extremidade sempre permanece fixa no substrato enquanto a outra se movimenta livremente. Para a última versão dessa série, a plataforma consiste em um robô bípede com duas garras e quatro ligamentos conectados entre si por três juntas rotacionais, sendo

¹ Em tupi-guarani, *Kamanbaré* e *KA'I yxo* significam, respectivamente, camaleão e lagarta mede-palmos.

desenvolvidos por Bernardi (2014) o modelo matemático e as arquiteturas de controle, software e hardware.

Figura 2 – Quinta versão da série Kamanbaré (esquerda) e terceira versão da série KA'I yxo (direita).

Fonte: Bernardi (2014).

Bernardi (2014) constatou, então, que a plataforma KA'I yxo representa uma solução importante em aplicações de monitoramento ambiental, pelo fato de ser um robô desenvolvido nacionalmente, leve, robusto e de baixo custo, bem como pelas técnicas envolvidas para o controle do robô.

Dada a ampla variedade de formas de locomoção em robôs móveis, as quais estão associadas a diferentes consumos de energia, estudos de eficiência energética em robótica vêm sendo desenvolvidos a fim de contribuir para o aumento do tempo em operação e missão de robôs (ROBERTS; QUACINELLA; KIM, 2017; POTTS, 2011).

Nesse contexto, Potts (2011) desenvolveu um algoritmo para a síntese de trajetórias que minimizam as perdas elétricas, utilizando o modelo matemático obtido para o robô Kamanbaré. Esse algoritmo se baseia na transformação do problema de controle ótimo original em um problema de programação quadrática, que, por sua vez, é resolvido iterativamente (POTTS, 2011; POTTS; CRUZ; BERNARDI, 2008; POTTS; CRUZ, 2011b; POTTS; CRUZ, 2016).

Potts (2011) provou que seu algoritmo é eficiente para o caso do robô Kamanbaré, o que representa uma motivação para a utilização de seu método na minimização das perdas elétricas no robô KA'I yxo, atividade que foi realizada no presente trabalho.

1.3 Metodologia

Para planejar as trajetórias ótimas, este trabalho foi organizado em três partes principais, a saber:

1. Modelagem matemática do robô;

2. Controle ótimo (planejamento de trajetórias);
3. Implementação no robô real.

Na primeira parte foi obtido um modelo matemático para o robô utilizando-se as ferramentas de modelagem de robôs manipuladores, uma vez que, em razão da sua forma de locomoção, o robô se comporta como um manipulador industrial em duas configurações de engastamento de suas garras. Assim, quando conveniente, foram analisados dois casos separadamente, correspondentes a essas duas configurações. Foram determinadas as equações cinemáticas direta e inversa, e dinâmicas, bem como um modelo linear para as juntas do robô, baseado na abordagem do controle independente por junta.

Na segunda parte foi formulado um problema de controle ótimo, resolvido numericamente com base no método proposto por Potts (2011). Esse método permitiu transformar o problema original em um problema de programação quadrática, cuja solução foi obtida de forma iterativa.

Na última parte, as trajetórias obtidas através do método mencionado anteriormente foram implementadas no robô. Além disso, como forma de validação, foi realizada a comparação entre as trajetórias ótimas com as executadas até então pelo robô no que se refere às perdas elétricas, obtendo-se a correspondente economia de energia.

Como recurso auxiliar nessas três partes, o software MATLAB[®] foi utilizado na determinação das expressões analíticas do modelo dinâmico do robô, nas simulações dinâmicas, na implementação do algoritmo de solução do problema de controle ótimo e na obtenção da economia de perdas elétricas².

1.4 Estrutura do texto

O texto do presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- O Capítulo 2 documenta os principais conceitos e procedimentos utilizados no planejamento das trajetórias ótimas para o robô KA'I yxo. Os seguintes temas foram tratados: modelagem de robôs manipuladores, perdas de energia que ocorrem em motores de corrente contínua, problemas de controle ótimo em geral e problemas de programação quadrática.
- O Capítulo 3 descreve a modelagem matemática do robô, apresentando as equações cinemáticas e dinâmicas, simulações, bem como o modelo adotado para as juntas;

² As listagens de programas podem ser acessadas através deste link:
<https://www.dropbox.com/sh/3k3we6drkkt8nkn/AACI4ZPUYRtuSN4etA66cFQSa?dl=0>.

- O Capítulo 4 trata do planejamento das trajetórias ótimas propriamente dito, sendo formulado o problema de controle ótimo e descrita a abordagem empregada para sua solução. As curvas ótimas são mostradas no final desse capítulo.
- O Capítulo 5 descreve a implementação das trajetórias ótimas no robô e avalia sua eficiência energética do ponto de vista das perdas elétricas, comparando-as com as trajetórias executadas anteriormente pelo robô. Diante disso, apresenta-se uma análise crítica dos resultados ao final desse capítulo.
- O Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho e propostas para trabalhos futuros.
- Os Apêndices trazem desenvolvimentos e informações essenciais para o projeto, quais sejam: a identificação dos parâmetros do modelo do atuador utilizado nas juntas do robô; os valores das condições iniciais e finais referentes a um passo de subida do robô; pequenas demonstrações das discretizações que permitiram reescrever o problema de controle ótimo original em um problema de programação quadrática; e a descrição da arquitetura do robô KA'I yxo.
- O Anexo coninua trazendo valores de parâmetros utilizados no decorrer do trabalho.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo reúne os principais conceitos e procedimentos que embasaram o desenvolvimento do presente trabalho. São abordados os seguintes tópicos: modelagem de robôs manipuladores, mostrando como obter as cinemáticas direta e inversa bem como as equações dinâmicas, e apresentando a abordagem utilizada pelo controle independente por junta para a modelagem das juntas de um manipulador; perdas de energia em motores de corrente contínua, trazendo as expressões matemáticas para o cálculo da potência e da energia dissipadas; problemas de controle ótimo, apresentando sua definição geral e as etapas para sua formulação; e problemas de programação quadrática, mostrando sua estrutura geral e discutindo de forma introdutória as estratégias empregadas para sua solução.

2.1 Modelagem de robôs manipuladores

Um robô manipulador consiste em um braço mecânico controlado por computador e normalmente aplicado em ambientes industriais. Apesar de estarem longe dos robôs da ficção científica, os manipuladores são complexos sistemas eletromecânicos que exigem métodos avançados para sua descrição analítica e ainda hoje apresentam muitos desafios em trabalhos de pesquisa. Ademais, o estudo da cinemática, da dinâmica e do controle de manipuladores contribui para estudos mais avançados da disciplina robótica, incluindo áreas como visão computacional, inteligência artificial, sensoreamento e projeto assistido por computador (SPONG; VIDYASAGAR, 1989).

2.1.1 Conceitos preliminares

Define-se um robô manipulador como uma cadeia cinemática aberta formada por $n + 1$ ligamentos, numerados por convenção de 0 até n , conectados entre si por juntas. O primeiro ligamento (0) é fixo e chamado de base, e o último (n) é chamado de efetuador. Assim, existem n juntas, numeradas por convenção de 1 até n . Elas proveem movimentos relativos entre ligamentos vizinhos e podem ser rotacionais, permitindo movimentos angulares, ou prismáticas, permitindo deslocamentos lineares. Esses ângulos ou deslocamentos lineares que variam no tempo são chamados de variáveis de junta, denotadas por q_i , $i = 1, 2, \dots, n$. A quantidade de juntas define o número de graus de liberdade do manipulador (SPONG; VIDYASAGAR, 1989). A Figura 3 traz como exemplo o robô PUMA (*Programmable Universal Machine for Assembly*), um manipulador com seis juntas rotacionais e, portanto, com seis graus de liberdade.

Um conceito importante no estudo de manipuladores é o de transformação homo-

Figura 3 – Manipulador PUMA.

Fonte: PUMA... (2015).

gênea, que permite descrever posições e orientações de objetos matematicamente. Uma transformação homogênea ${}^A_B T$ é uma matriz que exprime a translação e a rotação do sistema de referência $\{B\}$ em relação ao sistema de referência $\{A\}$, da seguinte forma:

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A O_B \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde ${}^A O_B$ é o vetor origem do sistema $\{B\}$ escrito no sistema $\{A\}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

é a matriz de rotação do sistema $\{B\}$ em relação ao sistema $\{A\}$, onde $\hat{X}_i$, $\hat{Y}_i$ e $\hat{Z}_i$ são os versores do sistema $\{i\}$, $i = A, B$ (CRAIG, 2004).

2.1.2 Cinemática direta

De modo geral, a cinemática trata do estudo dos movimentos sem considerar as suas causas. A cinemática direta de um manipulador busca determinar a posição e a orientação do sistema do efetuador em relação ao sistema da base, dadas as variáveis de junta (CRAIG, 2004).

O primeiro passo para a obtenção da cinemática direta é fixar sistemas de referência aos ligamentos do robô. Usualmente, numeram-se esses sistemas a partir da base, que recebe o sistema $\{0\}$, até o efetuador, que recebe o sistema $\{n\}$. Por convenção, escolhem-se

as posições e orientações dos sistemas de referência $\{i\}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, conforme a seguir (CRAIG, 2004)¹:

1. Identificam-se os eixos das juntas, desenhando-se retas ao longo deles.
2. Fixa-se a origem do sistema $\{i\}$ no ponto em que a perpendicular comum entre os eixos das juntas i e $i + 1$ intersectar o eixo da junta i .
3. Escolhe-se o versor $\hat{Z}_i$ com direção coincidente à do eixo da junta i , e com sentido arbitrário.
4. Escolhe-se o versor $\hat{X}_i$ com a mesma direção da perpendicular comum entre os eixos das juntas i e $i + 1$, e orientado no sentido do eixo i para o $i + 1$.
5. Escolhe-se o versor $\hat{Y}_i$ de forma a completar o sistema com orientação positiva.

O sistema $\{0\}$ também é chamado de sistema da base e denotado por $\{B\}$. O sistema $\{n\}$ também é chamado de sistema do efetuador e denotado por $\{W\}$. Existe também o sistema da ferramenta $\{T\}$, localizado entre o término do efetuador e a extremidade da ferramenta carregada pelo robô, se houver (CRAIG, 2004). Esses três sistemas são conhecidos como sistemas padrões de um manipulador. A Figura 4 ilustra a localização deles em um manipulador genérico.

Figura 4 – Sistemas padrões de um manipulador.

Fonte: Craig (2004).

Determinam-se, em seguida, os parâmetros de Denavit-Hartenberg, $i = 1, 2, \dots, n$:

¹ O sistema $\{0\}$ pode ser escolhido de forma arbitrária. Porém, nesse caso, a convenção apresentada aqui posteriormente para a definição dos parâmetros de Denavit-Hartenberg não pode ser utilizada para $i = 1$. Já o sistema $\{n\}$, segundo a convenção apresentada por Craig (2004), é escolhido de forma que: se a junta n for rotacional, a direção de $\hat{X}_n$ coincida com a de $\hat{X}_{n-1}$ quando $\vartheta_n = 0$, e a origem de $\{n\}$ seja tal que $d_n = 0$; se a junta n for prismática, a direção de $\hat{X}_n$ seja tal que $\vartheta_n = 0$, e a origem de $\{n\}$ coincida com a interseção de $\hat{X}_{n-1}$ com o eixo da junta n quando $d_n = 0$. Nesse caso, a convenção para a definição dos parâmetros de Denavit-Hartenberg pode ser utilizada normalmente para $i = n$.

- a_{i-1} : comprimento do ligamento $i - 1$,
- α_{i-1} : ângulo de entortamento do ligamento $i - 1$,
- d_i : *offset* associado ao ligamento i ,
- ϑ_i : ângulo da junta associado ao ligamento i ,

sendo que os dois primeiros descrevem o próprio ligamento $i - 1$, enquanto os dois últimos descrevem a conexão do ligamento i com o $i - 1$. Se a junta i for rotacional, ϑ_i é chamado de variável da junta i . Se a junta i for prismática, d_i é chamado de variável da junta i . Ou seja:

$$\begin{cases} q_i = \vartheta_i, & \text{se a junta } i \text{ é rotacional,} \\ q_i = d_i, & \text{se a junta } i \text{ é prismática.} \end{cases}$$

Se for adotada a convenção apresentada anteriormente para a escolha dos sistemas de referência, então as seguintes definições dos parâmetros de Denavit-Hartenberg são válidas, $i = 2, 3, \dots, n$ (CRAIG, 2004):

1. a_{i-1} : é a distância de $\hat{Z}_{i-1}$ a $\hat{Z}_i$, medida segundo $\hat{X}_{i-1}$.
2. α_{i-1} : é o ângulo entre $\hat{Z}_{i-1}$ e $\hat{Z}_i$, medido em torno de $\hat{X}_{i-1}$.
3. d_i : é a distância de $\hat{X}_{i-1}$ a $\hat{X}_i$, medida segundo $\hat{Z}_i$.
4. ϑ_i : é o ângulo entre $\hat{X}_{i-1}$ e $\hat{X}_i$, medido em torno de $\hat{Z}_i$.

A Figura 5 ilustra a aplicação dos dois algoritmos anteriores para o caso de dois ligamentos vizinhos com juntas rotacionais de um manipulador genérico.

Determinam-se, posteriormente, as transformações homogêneas entre ligamentos ${}^{i-1}_i T$, $i = 2, 3, \dots, n$ (CRAIG, 2004)²:

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\vartheta_i c\alpha_{i-1} & c\vartheta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\vartheta_i s\alpha_{i-1} & c\vartheta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

em que $c(\cdot)$ representa o operador $\cos(\cdot)$ e $s(\cdot)$, o operador $\sin(\cdot)$.

Finalmente, obtém-se ${}^0_n T$ encadeando-se as transformações entre ligamentos (CRAIG, 2004):

$${}^0_n T = {}^0_1 T \cdot {}^1_2 T \cdots {}^{n-1}_n T, \quad (2.3)$$

o que resolve o problema da cinemática direta, uma vez que ${}^0_n T = {}^B_W T$.

² Para $i = 1$, ${}^0_1 T$ pode ser calculada utilizando-se a definição geral (2.1).

Figura 5 – Localização dos sistemas de referência e dos parâmetros de Denavit-Hartenberg em ligamentos vizinhos com juntas rotacionais.

Adaptado de Craig (2004).

2.1.3 Cinemática inversa

A cinemática inversa busca resolver o problema oposto ao da cinemática direta, isto é, dadas a posição e a orientação desejadas para o sistema do efetuador em relação ao sistema da base, determinam-se as variáveis de junta.

Como a matriz ${}^B_W T$, em geral, depende de senos e cossenos de ϑ_i , o problema da cinemática inversa consiste em resolver um conjunto de equações não lineares que pode ter nenhuma, somente uma ou várias soluções. A existência de soluções está associada ao conceito de espaço de trabalho do manipulador, que corresponde ao conjunto de pontos no espaço alcançáveis pelo efetuador, considerando possíveis restrições físicas nas variáveis de junta (CRAIG, 2004).

A(s) solução(ões) do problema da cinemática inversa pode(m) ser obtida(s) nas formas fechada (analítica) ou numérica. Na forma fechada, para o caso particular de um manipulador planar com todas as suas juntas rotacionais, a estratégia que se utiliza, inicialmente, é igualar a matriz ${}^B_W T$ a uma matriz do tipo:

$$\begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & 0 & d \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

em que ρ é a orientação do sistema do efetuador em relação à base, e d e h são as coordenadas da origem do sistema do efetuador em relação à base. Posteriormente, resolvem-se as equações resultantes dessa igualdade algebricamente ou utilizam-se equações auxiliares obtidas geometricamente (CRAIG, 2004).

2.1.4 Dinâmica

De modo geral, a dinâmica trata do estudo dos movimentos considerando as causas que lhes dão origem. A dinâmica de um manipulador relaciona os movimentos de suas juntas (variáveis de junta) com as forças externas e com os esforços nas juntas (forças, no caso de juntas prismáticas, e/ou torques, no caso de juntas rotacionais) (CRAIG, 2004).

As equações dinâmicas de um manipulador podem ser obtidas por meio do algoritmo iterativo de Newton-Euler. Baseado no equilíbrio de forças, esse algoritmo consiste em duas etapas: na primeira, calcula as velocidades e acelerações de cada ligamento, na ordem do primeiro ao último, e aplica em seguida as equações de Newton-Euler; na segunda, obtém as forças e os torques de interação entre ligamentos, bem como os esforços nas juntas, seguindo a ordem do último ao primeiro ligamento (CRAIG, 2004).

No caso de um manipulador com todas as suas juntas rotacionais, o algoritmo de Newton-Euler se resume como a seguir (CRAIG, 2004):

1ª etapa: $i = 0 \rightarrow n - 1$

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}_i R \cdot {}^i\omega_i + \dot{\vartheta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\
 {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_i R \cdot {}^i\dot{\omega}_i + \ddot{\vartheta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_i R \cdot {}^i\omega_i \times \dot{\vartheta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\
 {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}^{i+1}_i R \cdot \left[{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iO_{i+1} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iO_{i+1} \right) + {}^i\dot{v}_i \right] \\
 {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}O_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}O_{C_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \\
 {}^{i+1}F_{i+1} &= m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \\
 {}^{i+1}N_{i+1} &= {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1} \right)
 \end{aligned}$$

2ª etapa: $i = n \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
 {}^if_i &= {}_{i+1}^i R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \\
 {}^in_i &= {}^iN_i + {}_{i+1}^i R \cdot {}^{i+1}n_{i+1} + {}^iO_{C_i} \times {}^iF_i + {}^iO_{i+1} \times {}_{i+1}^i R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} \\
 \tau_i &= {}^in_i^T \cdot {}^i\hat{Z}_i,
 \end{aligned}$$

em que:

n é o número de ligamentos móveis do manipulador;

${}^{i+1}_i R$ é a matriz de rotação do sistema $\{i\}$ com referência ao sistema $\{i+1\}$;

${}^i\hat{Z}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;

${}^iO_{i+1}$ é o vetor origem do sistema $\{i+1\}$ expresso no sistema $\{i\}$;

${}^iO_{C_i}$ é o vetor origem do sistema $\{C_i\}$ (sistema do centro de massa do ligamento i) expresso no sistema $\{i\}$:

$${}^iO_{C_i} = \begin{bmatrix} l_{x_i} & l_{y_i} & l_{z_i} \end{bmatrix}^T,$$

onde l_{x_i} , l_{y_i} e l_{z_i} representam, respectivamente, a abscissa, a ordenada e a cota da origem do sistema $\{C_i\}$ expressas no sistema $\{i\}$;

m_i é a massa do ligamento i ;

ϑ_i é a variável da junta i ;

${}^i\omega_i$ é a velocidade angular do sistema $\{i\}$ em relação ao sistema $\{0\}$, expressa no sistema $\{i\}$;

${}^i v_i$ é a velocidade linear da origem do sistema $\{i\}$ em relação ao sistema $\{0\}$, expressa no sistema $\{i\}$;

${}^i v_{C_i}$ é a velocidade linear da origem do sistema $\{C_i\}$ em relação ao sistema $\{0\}$, expressa no sistema $\{i\}$;

${}^i f_i$ é a força de interação exercida pelo ligamento $i - 1$ sobre o ligamento i , expressa no sistema $\{i\}$ (atua na origem do sistema $\{i\}$);

${}^i n_i$ é o torque de interação exercido pelo ligamento $i - 1$ sobre o ligamento i , expresso no sistema $\{i\}$;

${}^i F_i$ é a força resultante sobre o ligamento i , expressa no sistema $\{i\}$ (atua na origem do sistema $\{C_i\}$);

${}^i N_i$ é o torque resultante sobre o ligamento i em relação à origem do sistema $\{C_i\}$, expresso no sistema $\{i\}$;

${}^{C_i}I_i$ é o tensor de inércia do ligamento i relativo ao sistema $\{C_i\}$:

$${}^{C_i}I_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & -I_{xy_i} & -I_{xz_i} \\ -I_{xy_i} & I_{yy_i} & -I_{yz_i} \\ -I_{xz_i} & -I_{yz_i} & I_{zz_i} \end{bmatrix},$$

onde I_{xx_i} , I_{yy_i} e I_{zz_i} são os momentos de inércia de massa, e I_{xy_i} , I_{xz_i} e I_{yz_i} são os produtos de inércia de massa;

τ_i é o esforço (torque) na junta i .

As equações dinâmicas resultantes apresentam a seguinte estrutura (CRAIG, 2004):

$$\tau(t) = M(\vartheta(t)) \ddot{\vartheta}(t) + V(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) + G(\vartheta(t)), \quad (2.5)$$

em que:

$\vartheta \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de junta, com componentes ϑ_i , $i = 1, 2, \dots, n$;

$\tau \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de esforços (torques) nas juntas, com componentes τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$;

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de massa do robô, $M = M^T > 0$ (simétrica definida positiva);

$V \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques centrífugos e de Coriolis;

$G \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques de gravidade.

As equações dinâmicas de um manipulador formam um complexo sistema não linear, uma vez que envolvem senos e cossenos das variáveis de junta, bem como produtos cruzados envolvendo as variáveis de junta e suas primeiras e segundas derivadas temporais. Além disso, o esforço em uma junta não depende apenas dos movimentos desta, mas também dos movimentos das demais.

2.1.5 Modelagem das juntas

O problema do controle de posição em manipuladores busca determinar sinais de entrada nas juntas tais que o efetuador realize algum movimento desejado. Esses sinais podem ser os próprios esforços nas juntas (forças e/ou torques) ou sinais de comando para os atuadores que as controlam (por exemplo, tensões de armadura, torques ou ângulos, dependendo do modelo de controlador utilizado). O controle independente por junta é uma estratégia de solução desse problema. Nele, as juntas são modeladas como sistemas de uma entrada e uma saída (SISO, *Single-Input, Single-Output*) independentes entre si e as não linearidades inerentes dos acoplamentos entre as juntas são tratadas como perturbações (SPONG; VIDYASAGAR, 1989).

Para tanto, considera-se que cada junta do manipulador seja modelada por um motor de corrente contínua de imã permanente acionando um ligamento através de uma redução por engrenagens³, conforme o modelo representado na Figura 6⁴. Considere-se ainda um manipulador com todas as suas juntas rotacionais e suponha-se que o motor de cada junta gira sempre em um mesmo sentido. Então, as equações que descrevem a dinâmica de cada junta i , $i = 1, 2, \dots, n$, são as seguintes (SPONG; VIDYASAGAR, 1989):

$$J_{m_i} \ddot{\vartheta}_{m_i}(t) + B_{m_i} \dot{\vartheta}_{m_i}(t) = K_{m_i} i_{a_i}(t) - z_i(t) \quad (2.6)$$

$$v_{a_i}(t) = R_{a_i} i_{a_i}(t) + K_{b_i} \dot{\vartheta}_{m_i}(t) \quad (2.7)$$

$$\vartheta_i(t) = r_i \vartheta_{m_i}(t), \quad (2.8)$$

em que:

³ Esta escolha se deve ao fato de tais motores serem cada vez mais comuns nas aplicações de robótica (SPONG; VIDYASAGAR, 1989).

⁴ A indutância de armadura, que seria denotada por L_{a_i} , foi desprezada pois comumente a constante de tempo elétrica L_{a_i}/R_{a_i} é muito menor que a constante de tempo mecânica J_{m_i}/B_{m_i} (SPONG; VIDYASAGAR, 1989).

J_{m_i} é o momento de inércia equivalente do motor (composto pelos momentos de inércia da armadura e da redução);

ϑ_{m_i} é a posição angular do rotor;

B_{m_i} é o coeficiente de atrito viscoso equivalente do motor (composto pelos coeficientes de atrito viscoso da armadura e da redução);

K_{m_i} é a constante de torque do motor;

i_{a_i} é a corrente de armadura do motor;

τ_{m_i} é o torque gerado pelo motor:

$$\tau_{m_i} = K_{m_i} i_{a_i};$$

z_i é o torque de perturbação:

$$z_i(t) = r_i \tau_i(t) + c_{m_i}; \quad (2.9)$$

r_i é a relação de redução por engrenagens;

τ_i é o torque na junta;

c_{m_i} é o torque de atrito seco (ou de Coulomb) equivalente do motor (composto pelos torques de atrito seco da armadura e da redução);

v_{a_i} é a tensão aplicada à armadura do motor;

R_{a_i} é a resistência de armadura do motor;

K_{b_i} é a constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz do motor;

ϑ_i é a posição angular do ligamento (variável de junta).

Figura 6 – Modelo para uma junta i rotacional segundo o controle independente por junta.

Apesar de a redução por engrenagens considerada nesse modelo introduzir alguns problemas, como atrito, elasticidade e folgas, ao mesmo tempo é ela que atenua as não linearidades do acoplamento entre as juntas, pois a relação de redução r_i aparece multiplicando τ_i em (2.9) e, tipicamente, $r_i \ll 1$.

2.2 Perdas de energia em motores de corrente contínua

Considerando-se o modelo apresentado na subseção 2.1.5 para cada junta do manipulador, observa-se a ocorrência de perdas de natureza elétrica e mecânica, em razão da resistência ôhmica dos enrolamentos de cobre na armadura do motor e do atrito em seus mancais (JORDÃO, 2013).

As potências dissipadas associadas a essas perdas em cada junta i , $i = 1, 2, \dots, n$, podem ser calculadas como a seguir (FITZGERALD; KINGSLEY JR.; UMANS, 2006):

$$p_{J_i}(t) = R_{a_i} i_{a_i}(t)^2 \quad (2.10)$$

$$p_{B_i}(t) = B_{m_i} \dot{\vartheta}_{m_i}(t)^2 \quad (2.11)$$

$$p_{c_i}(t) = c_{m_i} \dot{\vartheta}_{m_i}(t), \quad (2.12)$$

onde:

p_{J_i} denota as perdas elétricas (ou perdas Joule);

p_{B_i} denota as perdas mecânicas por atrito viscoso;

p_{c_i} denota as perdas mecânicas por atrito seco (ou de Coulomb).

As energias totais associadas às referidas perdas no manipulador podem ser calculadas, portanto, como a seguir:

$$E_J(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t p_{J_i}(t) dt \quad (2.13)$$

$$E_B(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t p_{B_i}(t) dt \quad (2.14)$$

$$E_c(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t p_{c_i}(t) dt, \quad (2.15)$$

em que:

E_J representa a energia total perdida por efeito Joule até o instante t ;

E_B representa a energia total perdida por atrito viscoso até o instante t ;

E_c representa a energia total perdida por atrito seco até o instante t .

Neste trabalho, o termo *perdas* foi utilizado para se referir tanto às potências quanto às energias dissipadas, indistintamente.

2.3 Problemas de controle ótimo

O projeto de sistemas de controle clássicos é, em geral, um processo de tentativa e erro no qual diversos métodos são utilizados iterativamente para determinar parâmetros de um sistema “aceitável”, normalmente definido em termos de critérios nos domínios do tempo e da frequência. No entanto, a crescente demanda da tecnologia moderna tem exigido o projeto de sistemas cada vez mais complexos, em geral multivariáveis, e, com eles, o atendimento de critérios de desempenho igualmente complexos. Uma abordagem nova e direta para o projeto de tais sistemas, chamada de teoria de controle ótimo, tornou-se possível graças ao desenvolvimento dos computadores digitais (KIRK, 2004).

A teoria de controle ótimo busca resolver o seguinte problema (KIRK, 2004):

Problema de controle ótimo. *Encontrar sinais de controle para um processo (planta) de forma a satisfazer restrições físicas e a minimizar (ou maximizar) determinado critério de desempenho.*

A formulação de um problema de controle ótimo envolve três etapas, descritas a seguir (KIRK, 2004).

1. *Descrição matemática da planta.* Obter um modelo em espaço de estados que expresse a dinâmica da planta. Considerando-se um processo de tempo contínuo e a parâmetros concentrados, sua representação é a seguinte (GARCIA, 2013):

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t), \quad (2.16a)$$

$$y(t) = c(x(t), u(t), t), \quad (2.16b)$$

onde:

$x \in \mathbb{R}^\eta$ é o vetor de variáveis de estado (ou vetor de estado);

$u \in \mathbb{R}^\kappa$ é o vetor de entradas (ou vetor de controle);

$y \in \mathbb{R}^\delta$ é o vetor de saídas;

$a : \mathbb{R}^{\eta+\kappa+1} \rightarrow \mathbb{R}^\eta$;

$c : \mathbb{R}^{\eta+\kappa+1} \rightarrow \mathbb{R}^\delta$.

Para o caso particular de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT), as equações de estado e de saída (2.16) tomam a seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

onde $A \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$, $B \in \mathbb{R}^{\eta \times \kappa}$, $C \in \mathbb{R}^{\delta \times \eta}$ e $D \in \mathbb{R}^{\delta \times \kappa}$ são matrizes constantes. Nesse caso, a solução das equações de estado é dada por (OGATA, 2010):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0-\lambda)}Bu(\lambda) d\lambda, \quad (2.17)$$

onde t_0 é o instante inicial.

2. *Definição das restrições.* Realizar um levantamento das restrições físicas nas variáveis de estado e de controle. Uma função de controle $u(t)$ que satisfaça todas as restrições de controle em um intervalo $[t_0, t_f]$ é chamada de controle admissível, em que t_f é o instante final. Analogamente, uma trajetória de estado $x(t)$ que satisfaça todas as restrições de estado em um intervalo $[t_0, t_f]$ é chamada de trajetória admissível.
3. *Escolha do critério de desempenho.* Expressar matematicamente o critério de desempenho, isto é, o que se pretende otimizar. Em geral, ele é representado por um funcional com a seguinte estrutura:

$$J = p(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} w(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.18)$$

onde t_0 é fixo, t_f pode ser fixo ou livre e:

J é chamado de índice de desempenho;

$p : \mathbb{R}^{\eta+1} \rightarrow \mathbb{R}$;

$w : \mathbb{R}^{\eta+\kappa+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Portanto, o problema de controle ótimo busca encontrar um controle admissível u^* tal que o sistema (2.16) siga uma trajetória admissível x^* que minimize (ou maximize) o índice de desempenho (2.18).

As soluções de problemas de controle ótimo podem ser obtidas analítica e/ou numericamente, dependendo da complexidade do problema e dos aspectos práticos de sua aplicação. Soluções analíticas são encontradas, por exemplo, em alguns casos de reguladores lineares quadráticos (RLQs), sistemas com modelo linear para a planta e índice de desempenho quadrático. No entanto, soluções numéricas podem ser mais convenientes, ou as únicas, em problemas mais complexos ou quando o tempo para a obtenção da solução é um quesito importante, como no controle em tempo real (KIRK, 2004).

2.4 Problemas de programação quadrática

Um problema de programação matemática da forma:

$$\min_U f(U) = \frac{1}{2}U^TQU + HU \quad (2.19a)$$

sujeito a

$$A_{eq}U = b_{eq} \quad (2.19b)$$

$$A_{ineq}U \leq b_{ineq} \quad (2.19c)$$

é denominado de problema de programação quadrática (PPQ), onde (LUENBERGER; YE, 2008):

$U \in \mathbb{R}^K$ é o vetor de variáveis de decisão (incógnitas);

$f(U) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo;

$Q \in \mathbb{R}^{K \times K}$ é uma matriz simétrica, associada ao termo quadrático de $f(U)$;

$H^T \in \mathbb{R}^K$ é um vetor associado ao termo linear de $f(U)$;

$A_{eq} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ e $b_{eq} \in \mathbb{R}^L$ estão associados às L restrições de igualdade;

$A_{ineq} \in \mathbb{R}^{M \times K}$ e $b_{ineq} \in \mathbb{R}^M$ estão associados às M restrições de desigualdade.

Nota-se, portanto, que (2.19) se trata de um problema onde a função objetivo é quadrática em U e as restrições são lineares em U .

Para resolver problemas de programação quadrática analiticamente, aplicam-se as condições de primeira (ou de Karush-Kuhn-Tucker) e de segunda ordens para problemas de programação matemática não lineares com restrições de igualdade e desigualdade. Entretanto, dada a dificuldade em se resolver o sistema não linear resultante, principalmente quando os valores de K , L e M são elevados, usualmente se utilizam algoritmos numéricos (LUENBERGER; YE, 2008).

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO ROBÔ

Este capítulo descreve a modelagem matemática para o robô KA'I yxo, mostrando como foram obtidas as cinemáticas direta e inversa, as equações dinâmicas, bem como o modelo das juntas do robô a partir dos conceitos e procedimentos apresentados na seção 2.1.

3.1 Preliminares

O KA'I yxo é um robô constituído por quatro ligamentos, de comprimentos L_A , L_B , L_C e L_D , três juntas rotacionais, J_1 , J_2 e J_3 , e duas garras, G_1 e G_2 , responsáveis por engastar os ligamentos extremos do robô à superfície de andadura (normalmente um tronco), conforme ilustra a Figura 7. Cada garra contém dois dedos de cada lado, aos quais estão associadas juntas rotacionais, responsáveis pelos movimentos de abertura e fechamento das garras e denotadas por $J_{a_{G_1}}$ e $J_{b_{G_1}}$ para a garra G_1 , e $J_{a_{G_2}}$ e $J_{b_{G_2}}$ para a garra G_2 . O robô possui ainda um junta elástica passiva J_E (sem atuador) para prover alívio aos atuadores nos momentos de engaste. Quando uma garra se encontra engastada, o ligamento associado a ela também fica engastado, devendo permanecer perpendicular à superfície de andadura (BERNARDI, 2014).

Figura 7 – Estrutura do robô KA'I yxo.

Adaptado de Bernardi (2014).

Nota-se que o robô apresenta três configurações quanto ao número de garras engastadas: uma em que ambas estão engastadas, outra em que apenas a garra superior, G_2 , está engastada e outra em que apenas a inferior, G_1 , está engastada. A primeira configuração admite dois estados principais: um em que o robô se encontra totalmente estirado, SPR (*spread*), e outro em que se encontra totalmente encolhido, SHR (*shrink*).

A segunda configuração (em que G_1 está livre) admite outros dois estados principais: um em que o robô se encontra totalmente estirado, SPRG1, e outro em que se encontra totalmente encolhido, SHRG1. Analogamente, a terceira configuração (em que G_2 está livre) admite mais dois estados principais, SPRG2 e SHRG2 (SILVA; BERNARDI; CRUZ, 2016). Dessa forma, para executar um passo completo de subida, por exemplo, o robô passa pela seguinte sequência de estados notáveis: SPR, SPRG1, SHRG1, SHR, SHRG2, SPRG2 e SPR, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 – Sequência de estados principais do robô KA'I yxo para um passo de subida.

Adaptado de Bernardi (2014).

Como na configuração em que as duas garras estão engastadas não pode haver mobilidade nas juntas J_i , $i = 1, 2, 3$, o presente trabalho se concentra nas configurações em que apenas uma garra do robô se encontra engastada, doravante chamadas de configurações com G_2 ou G_1 engastadas. Nestas duas configurações, nota-se que o robô se comporta como um manipulador industrial cuja base é o ligamento engastado, com $n = 3$ e todas as suas juntas rotacionais ($q_i = \vartheta_i$, $i = 1, 2, 3$), conforme a subseção 2.1.1. Portanto, o modelo matemático do robô KA'I yxo foi obtido utilizando-se as estratégias de modelagem de manipuladores apresentadas no Capítulo 2 em dois casos: um para a configuração com G_2 engastada e outro para a configuração com G_1 engastada. Nesse sentido, foi conveniente

adotar duas notações para as variáveis de junta:

$$\begin{cases} \vartheta_i = \theta_i, & \text{para a configuração com } G_2 \text{ engastada,} \\ \vartheta_i = \phi_i, & \text{para a configuração com } G_1 \text{ engastada,} \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $i = 1, 2, 3$.

3.2 Cinemática

Baseada nas subseções 2.1.2 e 2.1.3, a presente seção traz os resultados de modelagem cinemática, direta e inversa, para o robô KA'I yxo nas duas configurações de engastamento das garras.

3.2.1 Cinemática direta com a garra superior engastada

Adotando-se a convenção apresentada na subseção 2.1.1, têm-se na presente configuração:

- ligamento 0 (base) = ligamento de comprimento L_A ;
- ligamento 1 = ligamento de comprimento L_B ;
- ligamento 2 = ligamento de comprimento L_C ;
- ligamento 3 (efetuador) = ligamento de comprimento L_D .

O sistema da base $\{0\} = \{B\}$ foi escolhido de forma arbitrária. Já os sistemas $\{i\}$, $i = 1, 2, 3$, foram escolhidos segundo as convenções apresentadas na subseção 2.1.2. Também foi conveniente definir o sistema da ferramenta $\{T\}$, denotado também por $\{4\}$, localizado na extremidade livre do último ligamento e com as direções e sentidos de seus versores sempre coincidentes com as dos versores de $\{3\}$. Assim, a relação entre $\{3\}$ e $\{4\}$ é de apenas uma translação. A Figura 9 mostra os cinco sistemas de referência escolhidos.

Em seguida, foram determinados os parâmetros de Denavit-Hartenberg para $i = 2, 3$ conforme a convenção apresentada na subseção 2.1.2. Esses parâmetros são apresentados na Tabela 1. A Figura 9 ilustra também a definição das variáveis de junta θ_i , $i = 1, 2, 3$.

Tabela 1 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para $i = 2, 3$ na configuração com G_2 engastada.

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
2	L_B	0	0	θ_2
3	L_C	0	0	θ_3

O próximo passo foi determinar as transformações homogêneas entre ligamentos ${}^{i-1}_iT$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Para $i = 1, 4$, essas transformações foram calculadas com base

Figura 9 – Sistemas de referência para a configuração com G_2 engastada.

Adaptado de Bernardi (2014).

em (2.1), uma vez que os sistemas da base e da ferramenta foram escolhidos de forma arbitrária. Assim:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & L_A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_D \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que $c(\cdot)$ e $s(\cdot)$ representam os operadores $\cos(\cdot)$ e $\sin(\cdot)$, respectivamente. Para $i = 2, 3$, as transformações entre ligamentos foram obtidas com base em (2.2), visto que os sistemas

$\{2\}$ e $\{3\}$ foram escolhidos obedecendo-se as convenções. Assim:

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_B \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_C \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Finalmente, obteve-se a transformação homogênea do sistema $\{4\}$ para o sistema $\{0\}$ encadeando-se (3.2), (3.4), (3.5) e (3.3), conforme (2.3):

$${}^0_4T = {}^B_T T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_B c_1 + L_C c_{12} + L_D c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_A + L_B s_1 + L_C s_{12} + L_D s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

em que os índices 12 e 123 denotam $\theta_1 + \theta_2$ e $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, respectivamente. Portanto, o problema da cinemática direta para a presente configuração foi resolvido, uma vez que ${}^B_T T$ inclui ${}^B_W T$, a transformação que representa a cinemática direta propriamente dita, pois ${}^B_T T = {}^B_W T \cdot {}^W_T T$.

3.2.2 Cinemática direta com a garra inferior engastada

Procedimento análogo ao da subseção 3.2.1 foi utilizado para obter a cinemática direta para a configuração com G_1 engastada. Porém, agora:

- ligamento 0 (base) = ligamento de comprimento L_D ;
- ligamento 1 = ligamento de comprimento L_C ;
- ligamento 2 = ligamento de comprimento L_B ;
- ligamento 3 (efetuador) = ligamento de comprimento L_A .

Os sistemas de referência $\{i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, e as variáveis de junta ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, estão representadas na Figura 10. Os parâmetros de Denavit-Hartenberg para $i = 2, 3$ são apresentados na Tabela 2.

Figura 10 – Sistemas de referência para a configuração com G_1 engastada.

Adaptado de Bernardi (2014).

Tabela 2 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg para a configuração com G_1 engastada.

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	ϕ_i
2	L_C	0	0	ϕ_2
3	L_B	0	0	ϕ_3

As transformações homogêneas entre ligamentos para $i = 1, 4$ foram obtidas a partir de (2.1), e para $i = 2, 3$, a partir de (2.2):

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\phi_1 & -s\phi_1 & 0 & 0 \\ s\phi_1 & c\phi_1 & 0 & L_D \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\phi_2 & -s\phi_2 & 0 & L_C \\ s\phi_2 & c\phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\phi_3 & -s\phi_3 & 0 & L_B \\ s\phi_3 & c\phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Finalmente, foram encadeadas as transformações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), com base em (2.3), obtendo-se:

$${}^0_4T = {}^B_TT = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_Cc_1 + L_Bc_{12} + L_Ac_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_D + L-Cs_1 + L_Bs_{12} + L_As_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

em que os índices 12 e 123 denotam, agora, $\phi_1 + \phi_2$ e $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$, respectivamente. Portanto, o problema da cinemática direta para a configuração com G_1 engastada também foi resolvido.

3.2.3 Cinemática inversa com a garra superior engastada

A estratégia adotada para se obter a solução da cinemática inversa do robô KA'I yxo foi analítica (forma fechada), realizada geometricamente.

Com base na subseção 2.1.3, a representação da ferramenta em relação à base pode ser escrita da seguinte forma¹:

$${}^B_TT = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho & 0 & d \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em que d , h e ρ são dados. Comparando-se esta descrição com (3.6), observa-se que:

$$\rho = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (3.12)$$

Para a obtenção da cinemática inversa foram consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras (BERNARDI, 2014):

¹ Agora, d , h e ρ denotam as coordenadas e orientação da ferramenta em relação à base, e não mais do efetuador em relação à base, como na subseção 2.1.3.

- $L_B = L_C = L$;
- O engastamento da garra G_2 é ideal, de modo que o ligamento de comprimento L_A permanece fixo e perpendicular à superfície de andadura;
- O ligamento de comprimento L_D se movimenta perpendicularmente à superfície de andadura, quando esta é regular.

Assim, da terceira hipótese, conclui-se que a orientação da ferramenta em relação à base permanece constante. E, a partir de (3.12), obtém-se:

$$\rho = \frac{7\pi}{2}.$$

A partir da Figura 11, tem-se:

$$l = \sqrt{d^2 + h^2}. \quad (3.13)$$

Figura 11 – Esquema para solução geométrica da cinemática inversa com G_2 engastada.

Adaptado de Bernardi (2014).

Ademais, como o triângulo ABC é isósceles:

$$l = 2L \cos \alpha \quad (3.14)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{d} \right). \quad (3.15)$$

Igualando-se (3.13) e (3.14) e sabendo-se que α sempre pertence ao primeiro quadrante, obtém-se:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{2L} \right). \quad (3.16)$$

Portanto, foram determinadas as variáveis de junta:

$$\theta_1 = \alpha + \gamma, \quad (3.17a)$$

$$\theta_2 = 2\pi - 2\alpha, \quad (3.17b)$$

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{2} + \alpha - \gamma, \quad (3.17c)$$

em que α é dado por (3.16) e γ , por (3.15), resolvendo-se o problema da cinemática inversa para a presente configuração.

3.2.4 Cinemática inversa com a garra inferior engastada

Procedimento análogo ao da subseção 3.2.3 foi utilizado para se obter a cinemática inversa para a configuração com G_1 engastada. A representação da ferramenta em relação à base, neste caso, também pode ser escrita da seguinte forma:

$${}^B_T T = \begin{bmatrix} \cos \rho & -\operatorname{sen} \rho & 0 & d \\ \operatorname{sen} \rho & \cos \rho & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em que d , h e ρ são dados. Comparando-se esta descrição com (3.11), observa-se que:

$$\rho = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3. \quad (3.18)$$

Também foram consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras (BERNARDI, 2014):

- $L_C = L_B = L$;
- O engastamento da garra G_1 é ideal, de modo que o ligamento de comprimento L_D permanece fixo e perpendicular à superfície de andadura;
- O ligamento de comprimento L_A se movimenta perpendicularmente à superfície de andadura, quando esta é regular.

Figura 12 – Esquema para solução geométrica da cinemática inversa com G_1 engastada.

Adaptado de Bernardi (2014).

Da terceira hipótese, conclui-se que a orientação da ferramenta em relação à base permanece constante. E, a partir de (3.18), obtém-se:

$$\rho = \frac{3\pi}{2}.$$

Analisando-se a Figura 12, pôde-se resolver esse problema geometricamente. Os ângulos γ e α , neste caso, também são dados por (3.15) e (3.16), respectivamente. Porém, as variáveis de junta, no caso presente, são as seguintes:

$$\phi_1 = \pi - \alpha - \gamma, \quad (3.19a)$$

$$\phi_2 = 2\alpha, \quad (3.19b)$$

$$\phi_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma, \quad (3.19c)$$

resolvendo-se então o problema da cinemática inversa para a presente configuração.

3.3 Dinâmica

A abordagem utilizada para se determinar as equações dinâmicas do robô KA'I yxo foi o algoritmo iterativo de Newton-Euler para juntas rotacionais, apresentado na

subseção 2.1.4. Esse algoritmo foi implementado em MATLAB, de onde foram obtidas as expressões analíticas dos torques nas juntas, apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & I_{zz_1} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz_2} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz_3} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz_2} \ddot{\vartheta}_2 + I_{zz_3} \ddot{\vartheta}_2 + I_{zz_3} \ddot{\vartheta}_3 + m_1 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_1}^2 \\
& + m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_2}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{x_2}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x_3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x_3}^2 \\
& + m_1 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_1}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_2}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{y_2}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y_3}^2 \\
& + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y_3}^2 + L_1^2 m_2 \ddot{\vartheta}_1 + L_1^2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 + L_2^2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 + L_2^2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 \\
& + L_2 g m_3 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + g m_2 l_{y_2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + g m_2 l_{x_2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\
& + L_1 g m_2 \sin(\vartheta_1) + L_1 g m_3 \sin(\vartheta_1) + g m_1 l_{y_1} \cos(\vartheta_1) + g m_1 l_{x_1} \sin(\vartheta_1) \\
& + g m_3 l_{y_3} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) + g m_3 l_{x_3} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) - L_1 m_3 \dot{\vartheta}_2^2 l_{y_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - L_1 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{y_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) - L_1 m_3 \dot{\vartheta}_2^2 l_{x_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) - L_1 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{x_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - L_1 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2) - L_1 m_2 \dot{\vartheta}_2^2 l_{y_2} \cos(\vartheta_2) - L_2 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{y_3} \cos(\vartheta_3) \\
& - L_1 m_2 \dot{\vartheta}_2^2 l_{x_2} \sin(\vartheta_2) - L_2 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{x_3} \sin(\vartheta_3) + 2 L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) + 2 L_1 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2) \\
& + L_1 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2) - 2 L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) - L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) + 2 L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_2} \cos(\vartheta_2) + L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{x_2} \cos(\vartheta_2) \\
& + 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x_3} \cos(\vartheta_3) + 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x_3} \cos(\vartheta_3) + L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x_3} \cos(\vartheta_3) \\
& - 2 L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_2} \sin(\vartheta_2) - L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{y_2} \sin(\vartheta_2) - 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y_3} \sin(\vartheta_3) \\
& - 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y_3} \sin(\vartheta_3) - L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y_3} \sin(\vartheta_3) - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{y_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{y_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{y_3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{x_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{x_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& - 2 L_1 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{x_3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) - 2 L_1 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2) \\
& - 2 L_1 m_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{y_2} \cos(\vartheta_2) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{y_3} \cos(\vartheta_3) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{y_3} \cos(\vartheta_3) \\
& - 2 L_1 m_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{x_2} \sin(\vartheta_2) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{x_3} \sin(\vartheta_3) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{x_3} \sin(\vartheta_3)
\end{aligned} \tag{3.20a}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & I_{zz2} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz3} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz2} \ddot{\vartheta}_2 + I_{zz3} \ddot{\vartheta}_2 + I_{zz3} \ddot{\vartheta}_3 + m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{x2}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{x2}^2 \\
& + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x3}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{y2}^2 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 l_{y2}^2 \\
& + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y3}^2 + L_2^2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 + L_2^2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 \\
& + L_2 g m_3 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + g m_2 l_{y2} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + g m_2 l_{x2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\
& + g m_3 l_{y3} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) + g m_3 l_{x3} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{y3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{x3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2) + L_1 m_2 \dot{\vartheta}_1^2 l_{y2} \cos(\vartheta_2) \\
& - L_2 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{y3} \cos(\vartheta_3) + L_1 m_2 \dot{\vartheta}_1^2 l_{x2} \sin(\vartheta_2) - L_2 m_3 \dot{\vartheta}_3^2 l_{x3} \sin(\vartheta_3) \\
& + L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2) - L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{x2} \cos(\vartheta_2) + 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3} \cos(\vartheta_3) + 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x3} \cos(\vartheta_3) \\
& + L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x3} \cos(\vartheta_3) - L_1 m_2 \ddot{\vartheta}_1 l_{y2} \sin(\vartheta_2) - 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3} \sin(\vartheta_3) \\
& - 2 L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y3} \sin(\vartheta_3) - L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y3} \sin(\vartheta_3) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{y3} \cos(\vartheta_3) \\
& - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{y3} \cos(\vartheta_3) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3 l_{x3} \sin(\vartheta_3) - 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_3 l_{x3} \sin(\vartheta_3)
\end{aligned} \tag{3.20b}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & I_{zz3} \ddot{\vartheta}_1 + I_{zz3} \ddot{\vartheta}_2 + I_{zz3} \ddot{\vartheta}_3 + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{x3}^2 \\
& + m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y3}^2 + m_3 \ddot{\vartheta}_3 l_{y3}^2 + g m_3 l_{y3} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + g m_3 l_{x3} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{y3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) + L_1 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{x3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{y3} \cos(\vartheta_3) + L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2^2 l_{y3} \cos(\vartheta_3) + L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1^2 l_{x3} \sin(\vartheta_3) \\
& + L_2 m_3 \dot{\vartheta}_2^2 l_{x3} \sin(\vartheta_3) + L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3} \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) - L_1 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3} \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \\
& + L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{x3} \cos(\vartheta_3) + L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{x3} \cos(\vartheta_3) - L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_1 l_{y3} \sin(\vartheta_3) \\
& - L_2 m_3 \ddot{\vartheta}_2 l_{y3} \sin(\vartheta_3) + 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{y3} \cos(\vartheta_3) + 2 L_2 m_3 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 l_{x3} \sin(\vartheta_3)
\end{aligned} \tag{3.20c}$$

Convém ressaltar que estas expressões servem para as duas configurações de engastamento estudadas, bastando apenas adaptar a notação das variáveis de junta conforme (3.1) e considerar que a numeração dos índices se baseia na convenção apresentada na subseção 2.1.1, ou seja, segue a ordem da base para o efetuador. Portanto, os índices 1, 2 e 3 se referem às variáveis associadas aos ligamentos de comprimentos: L_B , L_C e L_D , respectivamente, para a configuração com G_2 engastada, e L_C , L_B e L_A , respectivamente, para a configuração com G_1 engastada. Ou seja, os índices de uma configuração apresentam-se refletidos em relação aos da outra.

3.3.1 Valores dos parâmetros do modelo robô

Os parâmetros L_i , m_i , l_{x_i} , l_{y_i} e I_{zz_i} , $i = 1, 2, 3$, presentes nas equações dinâmicas (3.20) foram obtidos por Bernardi (2014) para as duas configurações de engastamento estudadas e são apresentados no Anexo A do presente trabalho.

3.3.2 Simulações

Utilizando-se os parâmetros apresentados no Anexo A, foram realizadas simulações para as duas configurações de engastamento estudadas, implementando-se em Simulink[®]/MATLAB a equação da dinâmica do manipulador (2.5) em sua forma inversa:

$$\ddot{\vartheta}(t) = M^{-1}(\vartheta(t)) \left[\tau(t) - V(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) - G(\vartheta(t)) \right],$$

Assim, dados os torques nas juntas, foram determinadas as variáveis de junta em função do tempo. As matrizes M^{-1} , V e G foram obtidas a partir das expressões (3.20).

3.3.2.1 Simulação com a garra superior engastada

Foi realizada uma simulação para verificar o comportamento do robô quando este se encontra inicialmente em repouso no estado SPRG1 e são aplicados torques nas juntas para mantê-lo em equilíbrio. Assim, as condições iniciais são:

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \theta_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \\ \dot{\theta}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e os torques aplicados nas juntas são dados por:

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \tau_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g l_{y_1} + m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ -m_3 g l_{x_3} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_f].$$

onde t_f é o tempo final da simulação.

As curvas das variáveis de junta θ_i , $i = 1, 2, 3$, são mostradas na Figura 13, com $t_f = 8$ s. Percebe-se que, de fato, houve o equilíbrio, pois elas permaneceram constantes durante todo o intervalo de simulação. Isto acontece pois, como a configuração é estável e o robô partiu do repouso, apenas os torques de gravidade foram não nulos, igualando-se aos torques aplicados nas juntas:

$$\tau(t) = G(\theta(t)), \quad t \in [0, t_f].$$

Figura 13 – Respostas das variáveis de junta θ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG1 e são aplicados torques nas juntas que o mantêm em equilíbrio.

3.3.2.2 Simulações com a garra inferior engastada

De forma análoga à simulação apresentada na subseção 3.3.2.1, verificou-se o comportamento do robô quando este se encontra inicialmente em repouso no estado SPRG2, ou seja:

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\phi}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \\ \dot{\phi}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e são aplicados os seguintes torques nas juntas:

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \tau_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g l_{y_1} + m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ -m_3 g l_{x_3} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_f].$$

As curvas das variáveis de junta ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, são mostradas na Figura 14, com $t_f = 8$ s. Observa-se, no entanto, que elas permaneceram constantes somente durante os instantes iniciais da simulação, divergindo posteriormente. Portanto, os torques aplicados não equilibraram o robô. Esse comportamento também está de acordo com o esperado, dada a instabilidade característica da configuração com G_1 engastada, na qual o robô consiste em um pêndulo invertido triplo.

Figura 14 – Respostas das variáveis de junta ϕ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG2 e são aplicados torques constantes nas juntas.

A fim de se obter mais uma evidência de que o modelo obtido para a configuração com G_1 engastada é adequado, foi realizada mais uma simulação, em que o robô também se encontra inicialmente em repouso no estado SPRG2, porém com todos os seus ligamentos refletidos para baixo (mesmo que isto não seja fisicamente realizável devido às limitações de ângulos do robô real), tornando a configuração estável. Nesse caso, as condições iniciais são:

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\phi}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \\ \dot{\phi}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo aplicados os seguintes torques nas juntas para manter o robô em equilíbrio:

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \tau_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 g l_{y_1} - m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ -m_2 g l_{y_2} - m_3 g l_{x_3} \\ -m_3 g l_{x_3} \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_f].$$

Semelhantemente aos resultados da subseção 3.3.2.1, observa-se que agora houve o equilíbrio, pois as variáveis de junta ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, permaneceram constantes, conforme mostra a Figura 15, com $t_f = 8$ s. Isto acontece pois, como a nova configuração é estável e o robô partiu do repouso, apenas os torques de gravidade foram não nulos, igualando-se aos torques aplicados nas juntas.

Figura 15 – Respostas das variáveis de junta ϕ_i quando o robô se encontra inicialmente no estado SPRG2 refletido de forma a simular ponto de equilíbrio estável, sendo aplicados torques nas juntas que equilibram o robô.

3.4 Modelo das juntas

Cada junta J_i , $i = 1, 2, 3$, do robô KA'I yxo foi modelada segundo o esquema ilustrado na Figura 6, isto é, de acordo com abordagem do controle independente por junta, discutida na subseção 2.1.5. Assim, escolhendo-se como vetor de estado:

$$x_{m_i}(t) = \begin{bmatrix} \vartheta_{m_i}(t) \\ \dot{\vartheta}_{m_i}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

como vetor de entrada:

$$u_i(t) = K_{m_i} i_{a_i}(t) - z_i(t), \quad (3.22)$$

em que z_i é dado por (2.9), e como vetor de saída:

$$y_i(t) = \vartheta_{m_i}(t),$$

resulta a seguinte representação em espaço de estados para o sistema da junta J_i :

$$\dot{x}_{m_i}(t) = A_i x_{m_i}(t) + B_i u_i(t), \quad (3.23a)$$

$$y_i(t) = C_i x_{m_i}(t), \quad (3.23b)$$

com:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_{m_i}}{J_{m_i}} \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{J_{m_i}} \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que se trata claramente de um SISO-SLIT, em que, conforme a seção 2.3:

$$\eta = 2,$$

$$\kappa = 1,$$

$$\delta = 1.$$

3.4.1 Valores dos parâmetros do modelo dos atuadores

Os parâmetros R_{a_i} , K_{b_i} , K_{m_i} , B_{m_i} , c_{m_i} e J_{m_i} , $i = 1, 2, 3$, do modelo dos atuadores utilizados nas juntas J_i do robô KA'I yxo foram identificados em laboratório e são apresentados no Apêndice A.

4 CONTROLE ÓTIMO: PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS

Este capítulo descreve como foram planejadas as trajetórias que minimizam as perdas elétricas no robô KA'I yxo. Inicialmente, apresenta-se a formulação do problema de controle ótimo, onde as variáveis de controle foram consideradas incógnitas enquanto os torques de perturbação foram mantidos fixos. Em seguida, descrevem-se as etapas para a determinação da solução ótima, sendo apresentado um método numérico, baseado no proposto por Potts (2011), que trata como incógnitas tanto as variáveis de controle como os torques de perturbação. Ao final do capítulo são apresentadas as curvas ótimas obtidas.

4.1 Formulação do problema de controle ótimo

Uma vez obtido o modelo das juntas do robô (planta), foram determinadas em seguida as restrições físicas e o critério de desempenho para formular o problema de controle ótimo, conforme o procedimento apresentado na seção 2.3. Como o objetivo do presente trabalho é a minimização das perdas elétricas no robô KA'I yxo, definiu-se o critério de desempenho como sendo a soma das perdas Joule nas juntas J_i , $i = 1, 2, 3$. Ademais, observam-se nos sistemas das juntas as seguintes restrições envolvendo os vetores de estado x_{m_i} :

- condições iniciais e finais de posições e velocidades angulares dos rotores das juntas J_i ;
- orientação fixa da garra livre em relação à superfície de andadura regular, visto que o efetuador se move sempre perpendicularmente a esta, por hipótese;
- limitações físicas nas variáveis de junta do robô;
- sinais constantes para as velocidades angulares dos rotores;

e as seguintes restrições envolvendo as variáveis de controle u_i :

- limitações nas correntes de armadura dos motores das juntas J_i ;
- limitações nas tensões de armadura dos motores das juntas J_i .

Com base nessas considerações, escreve-se matematicamente o problema de controle ótimo como se segue:

$$\min_{u_i} J = \sum_{i=1}^3 \int_0^{t_f} p_{J_i}(t) dt \quad (4.1a)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{m_i}(t_f) \\ \dot{\vartheta}_{m_i}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta}_{m_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1b)$$

$$\sum_{i=1}^3 r_i \vartheta_{m_i}(t) = \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \quad (4.1c)$$

$$|i_{a_i}(t)| \leq I_{max_i} \quad (4.1d)$$

$$|v_{a_i}(t)| \leq V_{max_i} \quad (4.1e)$$

$$\check{\vartheta}_{m_i} \leq \vartheta_{m_i}(t) \leq \hat{\vartheta}_{m_i} \quad (4.1f)$$

$$(-1)^i \dot{\vartheta}_{m_i}(t) \leq 0, \quad (4.1g)$$

com $i = 1, 2, 3$ e $0 \leq t \leq t_f$, em que:

t_f , fixo, é o tempo de andadura de meio passo do robô;

$\vartheta_i(0)$ é a condição inicial, dada, para a variável de junta;

$I_{max_i} > 0$ é um limitante para a corrente de armadura do motor;

$V_{max_i} > 0$ é um limitante para a tensão de armadura do motor;

$\check{\vartheta}_{m_i}$ é um limitante inferior para a posição angular do rotor;

$\hat{\vartheta}_{m_i}$ é um limitante superior para a posição angular do rotor;

$\tilde{\vartheta}_{m_i}$ é a posição angular final do rotor.

Considerando os torques de perturbação z_i fixos, esse problema busca encontrar controles ótimos admissíveis u_i , $i = 1, 2, 3$, (ou seja, que satisfaçam as restrições de controle), que minimizem o funcional J e que façam os sistemas das juntas J_i (dados por (3.23)) seguirem trajetórias ótimas admissíveis x_{m_i} (que satisfaçam as restrições de estado).

Para evitar redundâncias, as condições iniciais de posições e velocidades angulares dos rotores não aparecem explicitamente no problema (4.1), pois, como se verá na subseção 4.2.1.2, as restrições de estado foram reescritas de uma forma tal que dependem das condições iniciais $x_{m_i}(0)$.

Convém ressaltar que o problema (4.1) se refere à execução de um meio passo de subida pelo robô e serve para as duas configurações estudadas de engastamento das garras. Assim, com base nas condições iniciais e finais das variáveis de junta ϑ_i apresentadas no Apêndice B, resultam os sinais das velocidades angulares dos rotores $\dot{\vartheta}_{m_i}$ apresentados de forma compacta na restrição (4.1g), ou seja, positivos para os rotores das juntas J_1 e J_3 , uma vez que ϑ_i aumenta em um meio passo de subida nestas juntas, e negativo para o da junta J_2 , visto que ϑ_i diminui em um meio passo de subida nesta junta.

Ademais, considerando-se a definição de espaço de trabalho apresentada na subseção 2.1.3, conclui-se que existem apenas dois pontos de singularidade no robô, um para cada configuração de engastamento estudada: $\theta_2 = 2\pi$ na configuração com G_2 engastada e $\phi_2 = 0$ na configuração com G_1 engastada. Esses pontos ocorrem somente no estado SPR, isto é, na fronteira dos espaços de trabalho correspondentes àquelas configurações. Assim, não existe a possibilidade de o robô perder algum grau de liberdade durante qualquer trajetória para $0 < t \leq t_f$ na configuração com G_2 engastada e para $0 \leq t < t_f$ na configuração com G_1 engastada.

De acordo com a expressão geral do funcional de um problema de controle ótimo (2.18), pode-se mostrar que, no presente caso:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ p &= 0, \\ w &= w(u_i(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}^2} (u_i(t) + z_i(t))^2, \end{aligned}$$

com z_i fixo e dado por (2.9).

4.2 Solução do problema de controle ótimo

As não-linearidades e o elevado número de restrições presentes no problema (4.1) representam dificuldades para resolvê-lo analiticamente. Assim, para encontrar a solução ótima, foi utilizado um método baseado no proposto por Potts (2011), em que, inicialmente, as variáveis do problema são consideradas constantes por trechos, permitindo reescrever o problema original contínuo em um problema discretizado com a forma de um problema de programação quadrática (PPQ). Essa nova descrição do problema de controle ótimo é então utilizada em um algoritmo iterativo, em que, a cada iteração, os torques de perturbação z_i , $i = 1, 2, 3$, considerados fixos no PPQ, são os calculados na iteração anterior através do modelo dinâmico do robô. Ao final desse algoritmo, quando os torques de perturbação de uma iteração são suficientemente próximos dos da iteração anterior, resultam os controles ótimos u_i^* .

4.2.1 Discretização

Considere-se que as variáveis envolvidas no problema de controle ótimo assumam valores constantes a cada dois instantes t_{j-1} e t_j tais que:

$$t_j - t_{j-1} = \frac{t_f}{N} = \Delta t,$$

para $j = 1, \dots, N$, sendo N o número de intervalos de tempo Δt constantes. Assim, por exemplo, conforme a Figura 16, para as variáveis de controle, tem-se:

$$u_i(t) = u_i(t_j), \quad t_{j-1} \leq t < t_j. \quad (4.2)$$

Figura 16 – Discretização das variáveis de controle.

Considerando-se essa hipótese, o problema (4.1) toma a seguinte forma:

$$\min_{u_i(t_j)} J = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N p_{J_i}(t_j) \Delta t \quad (4.3a)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{m_i}(t_N) \\ \dot{\vartheta}_{m_i}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta}_{m_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3b)$$

$$\sum_{i=1}^3 r_i \vartheta_{m_i}(t_j) = \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \quad (4.3c)$$

$$|i_{a_i}(t_j)| \leq I_{max_i} \quad (4.3d)$$

$$|v_{a_i}(t_j)| \leq V_{max_i} \quad (4.3e)$$

$$\check{\vartheta}_{m_i} \leq \vartheta_{m_i}(t_j) \leq \hat{\vartheta}_{m_i} \quad (4.3f)$$

$$(-1)^i \dot{\vartheta}_{m_i}(t_j) \leq 0, \quad (4.3g)$$

com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, \dots, N$.

Com a presente hipótese, nota-se que o problema de controle ótimo resulta discretizado, uma vez que as incógnitas são os valores $u_i(t_j)$, ou seja, passam a ser em número finito ($3N$). Todavia, as variáveis continuam sendo de tempo contínuo, estando nesse caso definidas completamente no tempo ao se conhecer um número finito de pontos.

Analogamente ao problema (4.1), quando os torques de perturbação são fixos, os valores $u_i(t_j)$ obtidos ao se resolver o problema (4.3) são admissíveis, ou seja, obedecem às restrições de controle discretizadas, minimizam o funcional também discretizado, e fazem com que os sistemas das juntas, dados por (3.23), sigam trajetórias constantes por trechos x_{m_i} admissíveis, isto é, que obedecem às restrições de estado discretizadas.

O problema (4.3) pode ainda ser reescrito de maneira a explicitar as variáveis de controle $u_i(t_j)$, tanto no funcional quanto nas restrições, o que é mostrado nas duas subseções seguintes.

4.2.1.1 Solução das equações de estado

Considerando-se (4.2), mostra-se no Apêndice C que a solução das equações de estado para o sistema de uma junta J_i , $i = 1, 2, 3$, dado por (3.23), toma a seguinte forma:

$$x_{m_i}(t_j) = e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i, \quad (4.4)$$

em que:

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i(t_1) & \cdots & u_i(t_N) \end{bmatrix}^T;$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & \cdots & \int_{t_{N-1}}^{t_N} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda \end{bmatrix};$$

$$I_i(t_j) = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_N \end{bmatrix}, \quad \text{com: } e_z = \begin{cases} 1, & 1 \leq z \leq j \\ 0, & j < z \leq N. \end{cases}$$

4.2.1.2 Problema de Programação Quadrática

Considerando-se ainda (4.2), pode-se reescrever o problema (4.3) explicitando-se as incógnitas $u_i(t_j)$ tanto no funcional como nas restrições, como a seguir. O desenvolvimento para se chegar a esse resultado é apresentado no Apêndice C.

$$\min_U J = \frac{1}{2} U^T Q U + H U + S \quad (4.5a)$$

sujeito a

$$A_{eq} U = b_{eq} \quad (4.5b)$$

$$A_{ineq} U \leq b_{ineq} \quad (4.5c)$$

em que:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_N & 0_N \\ 0_N & Q_2 & 0_N \\ 0_N & 0_N & Q_3 \end{bmatrix}, \quad \text{com } Q_i = \frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$H = Z^T Q;$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}, \quad \text{com } Z_i = \begin{bmatrix} z_i(t_1) & \cdots & z_i(t_N) \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$S = \sum_{i=1}^3 \left[Z_i^T \left(\frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) Z_i \right];$$

$$A_{eq} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{eq1} & 0_{2 \times N} & 0_{2 \times N} \\ 0_{2 \times N} & A_{eq2} & 0_{2 \times N} \\ 0_{2 \times N} & 0_{2 \times N} & A_{eq3} \\ A_{eq4} \end{bmatrix}}_{(6+N) \times 3N}, \quad b_{eq} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{eq1} \\ b_{eq2} \\ b_{eq3} \\ b_{eq4} \end{bmatrix}}_{(6+N) \times 1};$$

$$A_{ineq} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{ineq1} & 0_{7N \times N} & 0_{7N \times N} \\ 0_{7N \times N} & A_{ineq2} & 0_{7N \times N} \\ 0_{7N \times N} & 0_{7N \times N} & A_{ineq3} \end{bmatrix}}_{21N \times 3N}, \quad b_{ineq} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{ineq1} \\ b_{ineq2} \\ b_{ineq3} \end{bmatrix}}_{21N \times 1};$$

com (das expressões (C.1) e (C.2) do Apêndice C):

$$A_{eq_i} = \underbrace{e^{A_i t_N} \Gamma_i I_N}_{2 \times N}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$A_{eq4} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_1 t_1} \Gamma_1 I_1(t_1) & r_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_2 t_1} \Gamma_2 I_2(t_1) & r_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_3 t_1} \Gamma_3 I_3(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_1 t_N} \Gamma_1 I_1(t_N) & r_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_2 t_N} \Gamma_2 I_2(t_N) & r_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_3 t_N} \Gamma_3 I_3(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times 3N},$$

$$b_{eq_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{v}_{m_i} \\ 0 \end{bmatrix}}_{2 \times 1} - e^{A_i t_N} x_{m_i}(0), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$b_{eq4} = \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \text{ones}(N, 1) - \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1};$$

e (das expressões (C.3), (C.4), (C.5), (C.6), (C.7), (C.8) e (C.9) do Apêndice C):

$$A_{ineq_i} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \frac{1}{K_{m_i}} I_N \\ \hline -\frac{1}{K_{m_i}} I_N \\ \hline \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} I_N + \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \\ \hline -\frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} I_N - \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \\ \hline - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \\ \hline (-1)^i \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \end{array} \right]}_{7N \times N}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$b_{ineq_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{max_i \text{ ones}}(N, 1) - \frac{1}{K_{m_i}} Z_i \\ \hline I_{max_i \text{ ones}}(N, 1) + \frac{1}{K_{m_i}} Z_i \\ \hline V_{max_i \text{ ones}}(N, 1) - \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} Z_i - \begin{bmatrix} K_{b_i} [0 \ 1] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ K_{b_i} [0 \ 1] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \\ \hline V_{max_i \text{ ones}}(N, 1) + \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} Z_i + \begin{bmatrix} K_{b_i} [0 \ 1] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ K_{b_i} [0 \ 1] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \\ \hline -\check{\vartheta}_{m_i \text{ ones}}(N, 1) + \begin{bmatrix} [1 \ 0] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ [1 \ 0] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \\ \hline \hat{\vartheta}_{m_i \text{ ones}}(N, 1) - \begin{bmatrix} [1 \ 0] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ [1 \ 0] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \\ \hline (-1)^{i+1} \begin{bmatrix} [0 \ 1] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ [0 \ 1] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{7N \times 1}, \quad i = 1, 2, 3;$$

e I_N denota a matriz identidade $N \times N$; 0_N , $0_{2 \times N}$ e $0_{7N \times N}$ denotam as matrizes nulas de ordens $N \times N$, $2 \times N$ e $7N \times N$, respectivamente; e $\text{ones}(N, 1) \in \mathbb{R}^N$ representa um vetor cujas componentes são iguais a 1.

Nota-se, portanto, que, a menos de uma constante S no funcional, a nova descrição para o problema de controle ótimo apresenta a mesma estrutura do problema (2.19), isto é, a de um PPQ com:

$$\begin{aligned} K &= 3N, \\ L &= 6 + N, \\ M &= 21N. \end{aligned}$$

Em (4.5), quando se consideram os torques de perturbação fixos, dados agora pelas componentes do vetor Z , as incógnitas continuam sendo os valores $u_i(t_j)$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, \dots, N$, mas agora se apresentam como componentes do vetor U^1 .

¹ Pode-se mostrar que, se as perdas por atrito viscoso e seco também forem incluídas no funcional, a estrutura resultante para o problema de controle ótimo também é a de um PPQ.

4.2.2 Algoritmo de otimização

Nas subseções anteriores os torques de perturbação z_i foram mantidos fixos, enquanto foram consideradas como incógnitas apenas as variáveis de controle u_i . No entanto, como todas essas variáveis são desconhecidas, propôs-se o algoritmo de otimização apresentado a seguir.

Algoritmo de otimização

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: Define a condição inicial  $Z^k$ 
3: while  $\|Z^k - Z^{k-1}\|_\infty > \epsilon$  &  $k < k_{max}$  do
4:    $k \leftarrow k + 1$ 
5:   Calcula o PPQ:  $\begin{cases} \min_{U^k} J^k = \frac{1}{2}U^{kT}QU^k + H^kU^k + S^k \\ A_{eq}U^k = b_{eq} \\ A_{ineq}U^k \leq b_{ineq}^k \end{cases}$ 
6:   for  $j \leftarrow 1, N$  do
7:     for  $i \leftarrow 1, 3$  do
8:       Calcula os vetores de estado:  $x_{m_i}^k(t_j) = e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i^k$ 
9:       Calcula as variáveis de junta:  $\begin{cases} \vartheta_i^k(t_j) = r_i \vartheta_{m_i}^k(t_j) \\ \dot{\vartheta}_i^k(t_j) = r_i \dot{\vartheta}_{m_i}^k(t_j) \\ \ddot{\vartheta}_i^k(t_j) = \frac{r_i}{J_{m_i}} u_i^k(t_j) - \frac{r_i B_{m_i}}{J_{m_i}} \dot{\vartheta}_{m_i}^k(t_j) \end{cases}$ 
10:    end for
11:    Calcula a dinâmica:  $\tau^k(t_j) = M(\vartheta^k(t_j)) \ddot{\vartheta}^k(t_j) + V(\vartheta^k(t_j), \dot{\vartheta}^k(t_j)) + G(\vartheta^k(t_j))$ 
12:  end for
13:  Calcula os torques de perturbação:  $Z^k = [\dots r_i \tau_i^k(t_j) + c_{m_i} \text{sign}(\dot{\vartheta}_{m_i}^k(t_j)) \dots]^T$ 
14: end while
15:  $U^* \leftarrow U^k$ 

```

Nesse algoritmo, k é um contador de iterações do *loop* principal **while**, e os parâmetros ϵ e k_{max} estão associados ao critério de parada do algoritmo, sendo o primeiro o erro máximo entre o vetor de torques de perturbação de uma iteração k com o da anterior, e o segundo o número máximo de iterações.

Em suma, a solução ótima U^* é obtida a partir de um procedimento iterativo em que o vetor de torques de perturbação Z utilizado no cálculo do PPQ de uma iteração é o calculado na iteração anterior. As componentes do vetor U^* definem completamente no tempo os controles ótimos $u_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$, pois, por hipótese, eles são constantes por trechos. Ademais, os vetores de estado $x_{m_i}(t_j)$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, \dots, N$, calculados na última iteração definem completamente no tempo as trajetórias ótimas $x_{m_i}^*(t)$, pelas mesmas razões.

4.2.2.1 Valores dos parâmetros e implementação do algoritmo de otimização

O algoritmo de otimização proposto foi implementado em MATLAB. Dada a instabilidade em malha aberta característica da configuração com G_1 engastada, o algoritmo não convergiu para esse caso, sendo que a solução para esse segundo meio passo foi obtida com base em uma reflexão no tempo da solução ótima para a configuração com G_2 engastada, obtida por sua vez através do algoritmo.

Os valores dos parâmetros utilizados no algoritmo de otimização são apresentados conforme a seguir.

- Parâmetros do modelo dinâmico do robô para as duas configurações de engastamento estudadas, L_i , m_i , l_{x_i} , l_{y_i} e I_{zz_i} , para $i = 1, 2, 3$: foram obtidos por Bernardi (2014) e são apresentados no Anexo A.
- Parâmetros do modelo dos atuadores utilizados nas juntas, R_{a_i} , K_{b_i} , K_{m_i} , B_{m_i} , c_{m_i} e J_{m_i} , para $i = 1, 2, 3$: foram identificados em laboratório e são apresentados no Apêndice A.
- Condições iniciais e finais associadas aos vetores de estado para as duas configurações de engastamento estudadas, considerando-se um passo de subida: $\vartheta_i(0)$, $\dot{\vartheta}_i(0)$, $\vartheta_i(t_f)$, $\dot{\vartheta}_i(t_f)$, para $i = 1, 2, 3$: são apresentadas no Apêndice B.
- Restrições físicas associadas às variáveis de junta para as duas configurações de engastamento estudadas, $\check{\vartheta}_{m_i}$ e $\hat{\vartheta}_{m_i}$, para $i = 1, 2, 3$: foram obtidas por Bernardi (2014) e são apresentadas no Anexo A.
- Outros parâmetros referentes aos atuadores e presentes nas restrições do problema de controle ótimo, r_i , I_{max_i} e V_{max_i} , $i = 1, 2, 3$: foram determinados com base em dados do fabricante e são apresentados no Apêndice D.

Para efeitos de comparação entre trajetórias, apresentada no Capítulo 5, o valor de t_f utilizado no algoritmo de otimização foi o mesmo das trajetórias implementadas por Bernardi (2014). Cronometrando-se o tempo de meio passo destas trajetórias, obteve-se:

$$t_f = 3 \text{ s.}$$

Com relação à escolha dos parâmetros do critério de parada, para o número máximo de iterações, escolheu-se arbitrariamente:

$$k_{max} = 150,$$

e, para o erro máximo entre torques de perturbação, considerou-se que ele deveria ser menor que c_{m_i} , escolhendo-se:

$$\epsilon = 5 \times 10^{-6} \text{ N m.}$$

Para a escolha de N , foram realizados diversos testes aumentando-se o valor desse parâmetro até se observar pouca variação nos valores do funcional J calculado no ponto ótimo, conforme mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados dos testes para escolha de N na configuração com G_2 engastada, com $t_f = 3$ s, $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ N m e $k_{max} = 150$.

N	J (J)
40	1,3311
100	1,3140
150	1,3105
300	1,1699
450	1,1233
600	1,1027
800	1,0876
1000	1,0785
1200	1,0725
1500	1,0665

Com esses testes, foi observado que, para valores de N pequenos, a discretização não era suficiente para englobar a dinâmica rápida dos atuadores das juntas, visto que os valores de J_{m_i} são pequenos. Assim, nesse caso, eram geradas trajetórias que alcançavam o objetivo aproximadamente na metade do tempo de meio passo e, ao serem implementadas, muita informação era perdida.

Observou-se também que, ao se aumentar o valor de N , o tempo de execução do algoritmo aumentava razoavelmente, sendo o comando de cálculo do PPQ o que mais demandava tempo de processamento. No caso do presente trabalho, isso não constitui um problema, uma vez que a programação é feita *offline*. No entanto, sabendo-se que um dos fatores de que depende o tempo de execução de um programa de computador é o compilador utilizado (CHANG, 2003), para um eventual controle em tempo real, a implementação do algoritmo de otimização deveria ser realizada em outro ambiente de programação, com velocidade de processamento maior.

Portanto, com base nesses resultados, a escolha final para o parâmetro N foi:

$$N = 1500.$$

Um resultado notável é que, para se obter a solução ótima, em todos os testes, a escolha das condições iniciais para os torques de perturbação Z foi não trivial, tendo que ser baseada em uma rotina de homotopia (LIMA; SALES, 1994), onde o próprio algoritmo foi rodado com $c_{m_i} = 0$. Nesse caso, a convergência ocorreu em aproximadamente 25 iterações. Já para obter a solução ótima, utilizando como condições iniciais esses torques resultantes, o algoritmo convergiu em apenas uma iteração.

Também foram realizados testes quando se varia t_f e se fixam $N = 150$ e os demais parâmetros conforme apresentados anteriormente. Os resultados são mostrados na Tabela 4. Apesar de esse valor de N não ser o escolhido para obter a solução ótima definitiva, os resultados desses testes mostram que o tempo de meio passo poderia ser um pouco menor do que 3 s. Este resultado já era esperado, uma vez que as trajetórias obtidas atingiram o objetivo antes de 3 s, mantendo-se constantes ao término do intervalo de meio passo, como apresentado anteriormente. Dado que este comportamento também se observa para o caso com $N = 1500$, embora em um intervalo menor, poderia-se estender a presente conclusão para esse caso. Além disso, para $t_f \leq 2$ s, observou-se a não convergência do algoritmo, o que também faz sentido dadas as limitações físicas do sistema: por exemplo, os atuadores não permitem que um meio passo do robô seja executado se t_f for muito pequeno.

Tabela 4 – Resultados dos testes varrendo-se t_f na configuração com G_2 engastada, com $N = 150$, $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ N m e $k_{max} = 150$.

t_f (s)	J (J)
2,5	1,0447
3,0	1,3105
3,5	1,5760
4,0	1,8170
4,5	2,0544
5,0	2,2880

4.2.3 Resultados

Com base nas considerações apresentadas na subseção 4.2.2.1, foram obtidos os controles ótimos $u_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$, apresentados na Figura 17 para as duas configurações de engastamento estudadas. As trajetórias ótimas $x_{m_i}^*(t)$ são apresentadas refletidas para os eixos das cargas (ligamentos) nas Figuras 18 e 19, ou seja, apresentam-se as variáveis de junta $\vartheta_i^*(t)$ e as velocidades angulares $\dot{\vartheta}_i^*(t)$ nessas figuras². Também são mostradas as curvas obtidas para as acelerações angulares ótimas $\ddot{\vartheta}_i^*(t)$ na Figura 20 e para os torques nas juntas $\tau_i^*(t)$ na Figura 21.

A partir destas, foram obtidas as seguintes curvas ótimas para as duas configurações de engastamento estudadas: abscissas das garras livres $d^*(t)$ (Figura 22); ordenadas das garras livres $h^*(t)$ (Figura 23); correntes de armadura $i_{a_i}^*(t)$ (Figura 24); tensões de armadura $v_{a_i}^*(t)$ (Figura 25); potências dissipadas por efeito Joule $p_{J_i}^*(t)$ (Figura 26); perdas de energia totais por efeito Joule $E_J^*(t)$ (Figura 27); potências dissipadas por atrito viscoso $p_{B_i}^*(t)$ (Figura 28); perdas de energia totais por atrito viscoso $E_B^*(t)$ (Figura 29);

² As variáveis $\dot{\vartheta}_i$ e $\ddot{\vartheta}_i$ correspondem, respectivamente, apenas às parcelas da velocidade e da aceleração angulares do ligamento i em relação ao ligamento $i - 1$. A velocidade e a aceleração angulares do ligamento i (em relação ao sistema da base e expressas no sistema do próprio ligamento) são denotadas, respectivamente, por ${}^i\omega_i$ e ${}^i\dot{\omega}_i$, conforme a subseção 2.1.4.

Figura 17 – Controles ótimos para um passo completo de subida.

Figura 18 – Variáveis de junta ótimas para um passo completo de subida.

Figura 19 – Velocidades angulares ótimas para um passo completo de subida.

Figura 20 – Acelerações angulares ótimas para um passo completo de subida.

Figura 21 – Torques nas juntas ótimos para um passo completo de subida.

potências dissipadas por atrito seco $p_{c_i}^*(t)$ (Figura 30); e perdas de energia totais por atrito seco $E_c^*(t)$ (Figura 31).

Observa-se que não ocorre o espelhamento entre as configurações G_2 e G_1 engastadas para as seguintes curvas: $u_i^*(t)$, $\tau_i^*(t)$, $i_{a_i}^*(t)$, $v_{a_i}^*(t)$, $p_{J_i}^*(t)$ e $E_J^*(t)$. Isto se deve principalmente ao fato de que estas variáveis dependem de somas envolvendo as variáveis de junta e/ou suas derivadas, as quais apresentam simetrias diferentes entre ambas as configurações: por exemplo, as curvas de $\dot{\theta}_i^*$ e $\dot{\phi}_i^*$ apresentam entre si simetria par em torno de $t = t_f/2$, enquanto as curvas $\ddot{\theta}_i^*$ e $\ddot{\phi}_i^*$ apresentam entre si simetria ímpar em torno do mesmo instante. Outro motivo para o não espelhamento, embora não tão importante quanto o primeiro, é o de que os parâmetros do modelo dinâmico do robô para uma configuração não são iguais aos da outra refletidos, mas sim próximos.

A Tabela 5 resume os valores ótimos das perdas de energia por efeito Joule e por atritos viscoso e seco nos instantes finais³, para cada configuração de engastamento estudada e para um passo completo (três primeiras linhas da Tabela). Também são apresentadas as correspondentes proporções das perdas Joule em relação às totais nesses três casos (última linha da Tabela). Convém salientar que esses dados se referem a um movimento de subida do robô.

³ Por simplicidade, doravante, as perdas de energia no instante final de um meio passo, por efeito Joule, por atrito viscoso e por atrito seco, serão referidas apenas como *perda Joule*, *perda por atrito viscoso* e *perda por atrito seco*, respectivamente.

Figura 22 – Abscissas ótimas das garras livres para um passo completo de subida.

Figura 23 – Ordenadas ótimas das garras livres para um passo completo de subida.

Figura 24 – Correntes de armadura ótimas para um passo completo de subida.

Figura 25 – Tensões de armadura ótimas para um passo completo de subida.

Figura 26 – Potências dissipadas por efeito Joule ótimas para um passo completo de subida.

Figura 27 – Perdas de energia totais por efeito Joule ótimas para um passo completo de subida.

Figura 28 – Potências dissipadas por atrito viscoso ótimas para um passo completo de subida.

Figura 29 – Perdas de energia totais por atrito viscoso ótimas para um passo completo de subida.

Figura 30 – Potências dissipadas por atrito seco ótimas para um passo completo de subida.

Figura 31 – Perdas de energia totais por atrito seco ótimas para um passo completo de subida.

Tabela 5 – Perdas de energia ótimas e correspondentes proporções das perdas Joule em relação às perdas totais.

	G_2 engastada	G_1 engastada	Passo completo
$E_J^*(t_f)$ (J)	1,0730	0,9065	1,9795
$E_B^*(t_f)$ (J)	0,0291	0,0291	0,0582
$E_c^*(t_f)$ (J)	0,1416	0,1416	0,2832
$E_J^*(t_f)$			
$\frac{E_J^*(t_f) + E_B^*(t_f) + E_c^*(t_f)}{E_J^*(t_f) + E_B^*(t_f) + E_c^*(t_f)}$ (%)	86,2748	84,1534	85,2902

Pelos dados da última linha da Tabela 5, conclui-se que as proporções das perdas Joule em relação às perdas totais são significativamente elevadas, o que mostra que a maior parte das perdas que ocorrem nas juntas do robô se manifesta na forma de calor.

5 IMPLEMENTAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS ÓTIMAS E EFICIÊNCIA ENERGÉTICA

Este capítulo descreve a implementação das trajetórias ótimas no robô KA'I yxo e analisa sua eficiência energética com relação às perdas Joule quando comparadas com as trajetórias de Bernardi (2014).

5.1 Implementação das trajetórias ótimas no robô

Os atuadores utilizados nas juntas do robô são servomecanismos do modelo AX-12A da fabricante Robotis[®], que aceitam como sinais de entrada apenas valores de referência angulares. Com base na definição do ângulo de giro desse modelo de atuador e na orientação dos atuadores implementada por Bernardi (2014), mostradas no Apêndice D, os ângulos de giro dos atuadores ψ_i , $i = 1, 2, 3$, do robô podem ser calculados com base nas seguintes expressões:

$$\psi_1(t) = \frac{17\pi}{6} - \theta_3(t), \quad (5.1a)$$

$$\psi_2(t) = \theta_2(t) - \frac{7\pi}{6}, \quad (5.1b)$$

$$\psi_3(t) = \theta_1(t) + \frac{\pi}{3}, \quad (5.1c)$$

para a configuração com G_2 engastada, e:

$$\psi_1(t) = \phi_1(t) + \frac{\pi}{3}, \quad (5.2a)$$

$$\psi_2(t) = \frac{5\pi}{6} - \phi_2(t), \quad (5.2b)$$

$$\psi_3(t) = \frac{5\pi}{6} - \phi_3(t), \quad (5.2c)$$

para a configuração com G_1 engastada. Para o caso da solução ótima, a partir dessas expressões, foram obtidas as curvas dos ângulos dos atuadores ótimos ψ_i^* , mostradas em linhas cheias na Figura 32.

No entanto, conforme descreve a subseção D.2 do Apêndice D, o software implementado por Bernardi (2014) na placa eletrônica do robô lê apenas $M + 1$ valores inteiros do ângulo de giro de cada atuador em cada meio passo, onde $M = 40$. Dessa forma, foi necessário subamostrar (*downsample*) e arredondar para números inteiros as curvas ψ_i^* para se implementar a solução ótima. As curvas resultantes desse processo, denominadas aqui de curvas dos ângulos dos atuadores implementados no robô para o caso ótimo e denotadas por $\tilde{\psi}_i^*$, são agora constantes a cada dois instantes t_{l-1} e t_l tais que:

$$t_l - t_{l-1} = \frac{t_f}{M} = \Delta t_M, \quad (5.3)$$

Figura 32 – Ângulos dos atuadores ótimos teóricos (linhas cheias) e implementados no robô (linhas tracejadas) para um passo de subida.

para $l = 1, \dots, M$, sendo M o número de intervalos de tempo Δt_M constantes. Assim:

$$\tilde{\psi}_i^*(t) = \tilde{\psi}_i^*(t_l), \quad t_{l-1} \leq t < t_l.$$

As novas curvas são mostradas em linhas tracejadas na Figura 32. Com essa abordagem, perde-se informação das curvas originais, pois muitos pontos são descartados. Todavia, como as curvas originais são suaves e não apresentam variações bruscas, observa-se que seus perfis se mantiveram com aproximação considerável nas novas curvas. Além disso, com essa abordagem ganha-se em velocidade de processamento no software embarcado na placa do robô.

Foram, então, realizados diversos testes com o robô operando com as trajetórias ótimas em um tronco real, executando diversos passos de subida e descida de forma satisfatória (Figura 33)¹.

Nos testes com as trajetórias ótimas, foram observados alguns problemas de ordem prática, que também ocorreram com as trajetórias de Bernardi (2014): nos momentos em que as garras são soltas, os parafusos utilizados nas extremidades de seus dedos como mecanismos auxiliares de fixação ao tronco eventualmente se enroscam nele, sendo necessária uma regulagem prévia de seus níveis conforme a dureza do tronco; e, especificamente,

¹ O vídeo de um dos testes realizados pode ser acessado através deste link: <https://youtu.be/IR1HUcErzas>.

Figura 33 – Teste com as trajetórias ótimas planejadas.

Fonte: Silva (2017).

quando o robô solta a garra G_2 , esta apresenta uma ligeira queda, causada principalmente pelas folgas entre os dentes das engrenagens dos atuadores.

5.2 Eficiência energética

Para se avaliar a eficiência energética das trajetórias ótimas implementadas no robô foi realizada a comparação de sua correspondente perda Joule com a das trajetórias de Bernardi (2014), em um passo de subida. Estas últimas se basearam na seguinte expressão analítica para a ordenada da garra livre:

$$\tilde{h}^{sen}(t_l) = h_{max} \sin\left(\frac{\pi}{t_f} t_l\right), \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (5.4)$$

válida para as duas configurações de engastamento estudadas, e na seguinte expressão para a abscissa da garra livre:

$$\tilde{d}^{sen}(t_l) = \begin{cases} -\frac{(d_{max} - d_{min})}{t_f} t_l + d_{max}, & l = 1, 2, \dots, M, \quad \text{para } G_2 \text{ engastada,} \\ -\frac{(d_{max} - d_{min})}{t_f} t_l - d_{min}, & l = 1, 2, \dots, M, \quad \text{para } G_1 \text{ engastada.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Percebe-se que a ordenada da garra livre nesse caso consiste em um semiciclo senoidal. Assim, doravante, o caso das trajetórias implementadas por Bernardi (2014) será referido como *caso senoidal*.

Substituindo-se (5.4) e (5.5) nas expressões (3.15), (3.16), (3.17) e (3.19) da cinemática inversa do robô, e as variáveis de junta resultantes nas expressões (5.1) e (5.2), ao se arredondar os resultados para números inteiros foram obtidas as curvas dos ângulos dos atuadores implementados no robô para o caso senoidal, denotadas por $\tilde{\psi}_i^{sen}$, $i = 1, 2, 3$, e mostradas na Figura 34.

Figura 34 – Ângulos dos atuadores implementados no robô do caso senoidal para um passo completo de subida.

Nas próximas duas subseções, apresentam-se as economias de energia simulada e real estimada². A primeira foi obtida para as duas configurações de engastamento estudadas e para um passo completo, a partir da substituição das curvas simuladas nas expressões analíticas do modelo apresentado no Capítulo 3; enquanto a segunda foi obtida apenas para a configuração com G_2 engastada, a partir de uma estimativa das correntes de armadura reais dos atuadores.

5.2.1 Economia de energia simulada

Substituindo-se as curvas $\tilde{\psi}_i^*$ e $\tilde{\psi}_i^{sen}$ nas equações (5.1) e (5.2), foram obtidas as curvas das variáveis de junta correspondentes, denominadas aqui de curvas das variáveis de junta simuladas, denotadas por $\tilde{\theta}_i^*$ e $\tilde{\phi}_i^*$ para o caso ótimo, e $\tilde{\theta}_i^{sen}$ e $\tilde{\phi}_i^{sen}$ para o caso senoidal, em que $i = 1, 2, 3$. Essas curvas são mostradas nas Figuras 35 e 36.

A partir destas, foram obtidas as seguintes curvas simuladas para os casos ótimo e senoidal, nas duas configurações de engastamento estudadas: correntes de armadura $\tilde{i}_{a_i}^*$ e $\tilde{i}_{a_i}^{sen}$ (Figuras 37 e 38); potências dissipadas por efeito Joule $\tilde{p}_{J_i}^*$ e $\tilde{p}_{J_i}^{sen}$ (Figuras 39 e 40); perdas de energia totais por efeito Joule $\tilde{E}_J^*$ e $\tilde{E}_J^{sen}$ (Figuras 41 e 42); perdas de energia totais por atrito viscoso $\tilde{E}_B^*$ e $\tilde{E}_B^{sen}$ (Figuras 43 e 44); e perdas de energia totais

² Neste trabalho, as estimativas para as grandezas reais foram chamadas, por simplicidade, de *reais*.

Figura 35 – Variáveis de junta simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 36 – Variáveis de junta simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

por atrito seco $\tilde{E}_c^*$ e $\tilde{E}_c^{sen}$ (Figuras 45 e 46). Nota-se que as curvas simuladas ótimas estão bem próximas das suas correspondentes teóricas, apresentadas na subseção 4.2.3.

A Tabela 6 resume os valores das perdas Joule e por atritos viscoso e seco simuladas do caso ótimo (primeira a terceira linhas da Tabela) e do caso senoidal (quinta a sétima linhas), para cada configuração de engastamento estudada e para um passo completo. Também são apresentadas as correspondentes proporções das perdas Joule em relação às totais para ambos os casos (quarta e oitava linhas). Ademais, apresentam-se as correspondentes economias de perda Joule (nona linha) e de perda total (última linha) do caso ótimo em relação ao senoidal. Cabe ressaltar que esses dados se referem a um movimento de subida do robô.

Tabela 6 – Perdas simuladas e correspondentes proporções das perdas Joule em relação às totais para os casos ótimo e senoidal, e economias de perda Joule e de perda total do caso ótimo em relação ao senoidal.

	G_2 engastada	G_1 engastada	Passo completo
$\tilde{E}_J^*(t_f)$ (J)	1,1326	0,9219	2,0545
$\tilde{E}_B^*(t_f)$ (J)	0,0300	0,0300	0,0600
$\tilde{E}_c^*(t_f)$ (J)	0,1416	0,1416	0,2832
$\frac{\tilde{E}_J^*}{\tilde{E}_J^* + \tilde{E}_B^* + \tilde{E}_c^*} \Big _{t_f}$ (%)	86,8425	84,3073	85,6863
$\tilde{E}_J^{sen}(t_f)$ (J)	1,2583	0,9625	2,2208
$\tilde{E}_B^{sen}(t_f)$ (J)	0,0358	0,0358	0,0716
$\tilde{E}_c^{sen}(t_f)$ (J)	0,1475	0,1475	0,2950
$\frac{\tilde{E}_J^{sen}}{\tilde{E}_J^{sen} + \tilde{E}_B^{sen} + \tilde{E}_c^{sen}} \Big _{t_f}$ (%)	87,2850	84,0024	85,8313
$\frac{\tilde{E}_J^{sen} - \tilde{E}_J^*}{\tilde{E}_J^{sen}} \Big _{t_f}$ (%)	9,9897	4,2182	7,4883
$\frac{(\tilde{E}_J^{sen} + \tilde{E}_B^{sen} + \tilde{E}_c^{sen}) - (\tilde{E}_J^* + \tilde{E}_B^* + \tilde{E}_c^*)}{\tilde{E}_J^{sen} + \tilde{E}_B^{sen} + \tilde{E}_c^{sen}} \Big _{t_f}$ (%)	9,5311	4,5645	7,3317

Com relação ao caso ótimo, as perdas energéticas resultaram ligeiramente maiores ou iguais às teóricas apresentadas na Tabela 5, conforme esperado. Além disso, percebe-se que mesmo a maior economia de perda Joule, de aproximadamente 10% na configuração com G_2 engastada, não foi tão significativa, o que revela que as trajetórias implementadas por Bernardi (2014) são relativamente próximas das ótimas no tocante às perdas Joule.

Nota-se também que as proporções das perdas Joule em relação às perdas totais se mantiveram significativas, em torno de 85%, em ambos os casos, fazendo com que as economias de perda total resultassem bastante próximas das economias de perda Joule.

Figura 37 – Correntes de armadura simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 38 – Correntes de armadura simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 39 – Potências dissipadas por efeito Joule simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 40 – Potências dissipadas por efeito Joule simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 41 – Perdas de energia totais por efeito Joule simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 42 – Perdas de energia totais por efeito Joule simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 43 – Perdas de energia totais por atrito viscoso simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 44 – Perdas de energia totais por atrito viscoso simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 45 – Perdas de energia totais por atrito seco simuladas do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 46 – Perdas de energia totais por atrito seco simuladas do caso senoidal para um passo completo de subida.

5.2.2 Economia de energia real

Dada a dificuldade em se medir diretamente as correntes de armadura dos motores internos dos atuadores durante o movimento do robô, as correntes de armadura reais para os casos ótimo e senoidal foram estimadas com base no experimento realizado por Bernardi (2015).

Nesse experimento, diversos pesos foram acoplados, através de um braço mecânico, ao eixo de um atuador AX-12A isolado e com sua estrutura externa alterada para se ter acesso às conexões elétricas do motor interno. Foram, então, obtidas as correntes de armadura, através de um multímetro, e os valores lidos dos registradores da placa interna, através de um computador, tais que compensassem os torques aplicados. Para o conjunto de pontos obtidos, constatou-se que correntes de armadura e valores lidos se relacionam aproximadamente por meio de uma reta com coeficiente angular $1,03125 \times 10^{-3}$ e intercepto no eixo das ordenadas em $-2,9 \times 10^{-2}$ A, conforme mostra a Figura 47. Dessa forma, a partir da leitura dos valores dos registradores dos atuadores do robô, realizada pelo software embarcado em sua placa, consegue-se estimar as correntes de armadura por meio da equação dessa reta (BERNARDI, 2015).

Figura 47 – Relação entre correntes de armadura e valores lidos dos registradores do atuador AX-12A.

Adaptado de Bernardi (2015).

Assim, foram realizados cinco experimentos com movimentos de subida do robô para os casos ótimo e senoidal, obtendo-se 41 valores lidos dos registradores de cada atuador na configuração com G_2 engastada. Dada a ocorrência de quedas da garra G_2 quando é solta do tronco, o que distancia as condições reais das consideradas no modelo teórico para a configuração com G_1 engastada, não foram estimadas as correntes de armadura reais nessa configuração.

Tomando-se a média dos valores lidos e substituindo-os na equação da reta mostrada na Figura 47, foram estimadas as curvas das correntes de armadura reais para ambos os casos estudados, denotadas por $\hat{i}_{a_i}^*$ e $\hat{i}_{a_i}^{sen}$, $i = 1, 2, 3$, e mostradas nas Figuras 48 e 49, respectivamente.

A partir das equações (2.10), foram obtidas as correspondentes curvas das potências dissipadas por efeito Joule reais para os casos ótimo e senoidal, denotadas por $\hat{p}_{J_i}^*$ e $\hat{p}_{J_i}^{sen}$, $i = 1, 2, 3$, e mostradas nas Figuras 50 e 51, respectivamente. E a partir das equações (2.13), foram obtidas as correspondentes curvas das perdas de energia totais por efeito Joule reais para ambos os casos, denotadas por $\hat{E}_J^*$ e $\hat{E}_J^{sen}$ e mostradas nas Figuras 52 e 53, respectivamente. Dada a dificuldade em se medir as rotações dos atuadores, as curvas das perdas de energia por atritos viscoso e seco reais não foram obtidas. Percebe-se que as curvas reais ótimas estão próximas das suas correspondentes simuladas e teóricas para a configuração com G_2 engastada.

A Tabela 7 resume os valores das perdas Joule reais dos casos ótimo e senoidal, e a correspondente economia de perda Joule, para a configuração com G_2 engastada. Novamente, esses dados se referem a um movimento de subida do robô.

Tabela 7 – Perdas Joule reais para os casos ótimo e senoidal e correspondente economia.

G_2 engastada	
$\hat{E}_J^*(t_f)$ (J)	1,1361
$\hat{E}_J^{sen}(t_f)$ (J)	1,2791
$\frac{\hat{E}_J^{sen}(t_f) - \hat{E}_J^*(t_f)}{\hat{E}_J^{sen}(t_f)}$ (%)	11,1797

Pela Tabela 7, observa-se que as perdas Joule reais dos casos ótimo e senoidal e a correspondente economia de perda Joule são maiores, mas consideravelmente próximas, que as suas correspondentes simuladas para a configuração com G_2 engastada, apresentadas na Tabela 6.

Figura 48 – Correntes de armadura reais do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 49 – Correntes de armadura reais do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 50 – Potências dissipadas por efeito Joule reais do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 51 – Potências dissipadas por efeito Joule reais do caso senoidal para um passo completo de subida.

Figura 52 – Perda de energia total por efeito Joule real do caso ótimo para um passo completo de subida.

Figura 53 – Perda de energia total por efeito Joule real do caso senoidal para um passo completo de subida.

5.3 Análise crítica

Nota-se que, para se implementar as trajetórias ótimas no robô e se obter a economia de perda Joule em relação às trajetórias de Bernardi (2014), foi necessário adotar algumas hipóteses e utilizar algumas adaptações.

Como foi visto, as variáveis de fato implementadas não foram os controles ótimos, mas transformações das variáveis de junta ótimas (ângulos dos atuadores ótimos), que foram impostas como referências para os atuadores, dada a dificuldade de acessibilidade às suas armaduras. Considerou-se, dessa forma, que o sistema em malha fechada de um atuador consegue acompanhar com boa precisão a referência e que os controles correspondentes são suficientemente próximos dos ótimos teóricos.

Ademais, os ângulos dos atuadores ótimos passaram pelos processos de subamostragem e arredondamento para serem implementados. Uma observação importante é a de que, mesmo se fosse $M = N = 1500$, haveria a necessidade de se arredondar os valores dos ângulos dos atuadores, uma vez que a biblioteca do atuador trabalha apenas com valores inteiros e em graus para esses ângulos. Assim, resultariam muitos pontos repetidos, sendo também conveniente realizar uma subamostragem para reduzir essas redundâncias e diminuir o tempo de processamento nesse caso.

Contudo, a proximidade observada entre as perdas de energia ótimas simuladas, apresentadas na subseção 5.2.1, e as teóricas, apresentadas no Capítulo 4, revelou que as trajetórias ótimas implementadas no robô não estão tão distantes das teóricas, sugerindo que as hipóteses adotadas são válidas e que as adaptações utilizadas consistem em aproximações adequadas. Além disso, com a determinação das economias simuladas de perda Joule, foi constatado que as perdas Joule ótimas são realmente menores que as do caso senoidal para ambas as configurações de engastamento e, conseqüentemente, para um passo completo.

O método utilizado para se estimar as correntes de armadura na subseção 5.2.2 também conteve imprecisões, porquanto envolveu a medição dos valores lidos dos registradores via software, os quais apresentaram comportamento oscilatório, e uma interpolação linear baseada no experimento de Bernardi (2015), cuja reta foi estimada com não muitos pontos. Todavia, na tentativa de se reduzir essas imprecisões, foi realizada a aquisição de dados de mais de um experimento, tanto para o caso ótimo quanto para o senoidal, e tomada as suas médias.

Além disso, quando da estimativa das perdas Joule reais, atentou-se em se utilizar dados em que as condições reais do robô fossem suficientemente próximas das do modelo do Capítulo 3, a fim de se realizar uma comparação mais fidedigna com as perdas Joule simuladas. Ao contrário da configuração com G_2 engastada, que apresentou essa característica satisfatoriamente, a configuração com G_1 engastada apresentou o problema de queda da garra superior logo que é solta, o que altera as condições iniciais do meio passo

correspondente e faz com que essa garra realize um percurso maior na prática, ocasionando perdas Joule maiores que as simuladas. Esse comportamento se distancia das condições do modelo e, por isso, foram estimadas somente as perdas Joule reais para a primeira configuração.

Por conseguinte, as proximidades entre as perdas Joule reais e simuladas para os casos ótimo e senoidal na configuração com G_2 engastada, bem como entre suas correspondentes economias, apontam para a eficiência do método de estimativa das correntes de armadura reais apresentado na subseção 5.2.2, e revelam que as trajetórias de Bernardi (2014) são relativamente próximas das ótimas, no que concerne às perdas elétricas.

6 CONCLUSÕES

O planejamento de trajetórias que minimizam as perdas Joule nas juntas do robô KA'I yxo foi iniciado com a modelagem matemática, em que esse robô, com aplicações em monitoramento ambiental, foi modelado como um manipulador industrial em duas configurações, conforme a garra que se encontra engastada. Dessa forma, quando conveniente, a modelagem foi separada em dois casos, como, por exemplo, na obtenção das equações das cinemáticas direta e inversa.

Com relação à dinâmica, por outro lado, foram obtidas equações que valem para ambas as configurações, sendo distinguidas quando se substituem os parâmetros do modelo do robô para cada configuração a fim de se obter os valores numéricos dos torques nas juntas ou das variáveis de junta e de suas derivadas. Verificou-se nos casos simples analisados nas simulações que o comportamento do modelo condissse com o esperado para o robô real nas duas configurações de engastamento estudadas. Os torques do modelo dinâmico do robô, que trazem não linearidades e acoplamento entre as juntas, fizeram parte das perturbações no modelo linear utilizado para elas, sendo esses efeitos atenuados graças à relação de redução dos atuadores.

Dado o elevado número de restrições e não linearidades no problema de controle ótimo formulado, sua solução foi obtida numericamente. O método utilizado para tanto considera que as variáveis são constantes por trechos, permitindo reescrever o problema original contínuo em um problema discreto, mais especificamente em um PPQ, mais simples de se resolver que o primeiro. Como as incógnitas desse problema eram tanto as variáveis de controle quanto os torques de perturbação, a solução ótima foi obtida iterativamente, em que os torques de perturbação, mantidos fixos no PPQ de uma iteração, corresponderam aos calculados na iteração anterior através do modelo dinâmico do robô.

Com a implementação do algoritmo de otimização, foi obtida a solução ótima para a configuração com a garra superior engastada. Por outro lado, dada a instabilidade característica da configuração com a garra inferior engastada, sua solução foi determinada a partir do espelhamento da primeira.

Em virtude de limitações no software da placa do robô, as trajetórias ótimas originais passaram por adaptações ao serem implementadas, sendo a mais notável a redução significativa do número de pontos. Apesar de que, na prática, essas adaptações geraram mais restrições no sistema, percebeu-se que elas consistiram em aproximações adequadas e que os erros introduzidos não foram expressivos, pelo fato de as perdas Joule, simuladas e reais, correspondentes às trajetórias ótimas implementadas resultarem consideravelmente próximas das teóricas.

Com a implementação das trajetórias ótimas, os resultados mostraram uma redução real de cerca de 11% das perdas Joule para a configuração com a garra superior engastada, e uma redução simulada de aproximadamente 7,5% das perdas Joule para um passo completo, em relação às trajetórias implementadas por Bernardi (2014). Ademais, constatou-se que as perdas elétricas são majoritárias dentre as perdas totais no robô, correspondendo a uma proporção em torno de 85%, o que permitiu que as perdas totais também fossem reduzidas, de aproximadamente 7,3% nas simulações, quando se comparam as trajetórias ótimas com as de Bernardi (2014).

Como essas reduções não foram elevadas, conclui-se que as trajetórias implementadas por Bernardi (2014) são relativamente próximas das ótimas, tanto no que se refere às perdas elétricas quanto às perdas totais.

Sugerem-se como propostas para trabalhos futuros: a implementação do algoritmo de otimização em um ambiente de programação que reduza de maneira significativa o tempo de execução, para um eventual controle do robô em tempo real; a atenuação da queda da garra superior do robô, que ocorre logo que é solta da superfície de andadura, através da substituição dos atuadores por modelos que possuem menos folgas nas engrenagens, o que geraria a necessidade de se identificar novos parâmetros; a melhoria dos mecanismos de fixação presentes nas garras, de modo que se adaptem a qualquer tipo de dureza de troncos.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, B. et al. REMUS: a small low cost AUV; system description, field trials and performance results. In: OCEANS CONFERENCE, 1997, Halifax, NS. *Proceedings...* EUA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1997. v. 2, p. 994–1000.
- ARMADA, M.; SANTOS, P. G. de (Ed.). *Climbing and Walking Robots*: Proceedings of the Seventh International Conference CLAWAR 2004. Madrid: Springer, 2004. 1194 p.
- BARES, J. E.; WETTERGREEN, D. S. Dante II: technical description, results, and lessons learned. *The International Journal of Robotics Research*, v. 18, n. 7, p. 621–649, 1999.
- BERNARDI, R. de. *KA'I yxo*: uma plataforma robótica bioinspirada para aplicações em monitoramento ambiental. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- BERNARDI, R. de. *Experimento para estimativa das correntes de armadura no atuador AX-12A*. 2015. Comunicação pessoal.
- BERNARDI, R. de; CRUZ, J. J. da. Kamanbaré: A tree-climbing biomimetic robotic platform for environmental research. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS IN CONTROL, AUTOMATION AND ROBOTICS, 4., 2007, Angers. *Proceedings...* Setúbal: INSTICC Press, 2007.
- _____. A tree-climbing robot platform: Mechanical concept, control software and electronic architectures. In: ARAMBURO, J; TREVINO, A. R. *Advances in Robotics, Automation and Control*. Rijeka: InTech, 2008. cap. 12, p. 221–236.
- BERNARDI, R. de; FORNER-CORDERO, A.; CRUZ, J. J. da. Biologically inspired locomotion control of a climbing robot. In: CAVRAK, M. *Biomimetic Based Applications*. Rijeka: InTech, 2011. cap. 20, p. 553–572.
- CAI, C. et al. A biologically inspired miniature biped climbing robot. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHATRONICS AND AUTOMATION, 2009, Changchun. *Proceedings...* EUA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. p. 2653–2658.
- CANNELL, C. J.; STILWELL, D. J. A comparison of two approaches for adaptive sampling of environmental processes using autonomous underwater vehicles. In: OCEANS CONFERENCE, 2005, Washington, DC. *Proceedings...* EUA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2005. v. 2, p. 1514–1521.
- CHANG, S. *Data Structures and Algorithms*. Singapura: World Scientific, 2003. (Series on software engineering and knowledge engineering).
- CRAIG, J. J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2004.
- FALCONE, A. G. *Eletromecânica*: Transformadores e transdutores, conversão eletromecânica de energia, máquinas elétricas. São Paulo: Edgard Blücher, 1979. v. 1.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY JR., C.; UMANS, S. D. *Máquinas elétricas: Com introdução à eletrônica de potência*. Tradução por Anatólio Laschuk. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. 648 p.

GARCIA, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

_____. *Controle de processos industriais*. 2014. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Apostila da disciplina PTC2514.

_____. *Identificação de sistemas*. 2016. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Apostila da disciplina PTC5719.

GARCIA, E. et al. The evolution of robotics research: From industrial robotics to field and service robotics. *IEEE Robotics Automation Magazine*, v. 14, n. 1, p. 90–103, 2007.

HAYNES, G. C. et al. Rapid pole climbing with a quadrupedal robot. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2009, Kobe. *Proceedings...* EUA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. p. 1050–1059.

JORDAN, B. L.; BATALLIN, M. A.; KAISER, W. J. NIMS RD: a rapidly deployable cable based robot. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2007, Roma. *Proceedings...* EUA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2007. p. 144–150.

JORDÃO, R. G. *Máquinas síncronas*. Organização por Lucas Blattner Martinho. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KIRK, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. Mineola, NY: Dover, 2004.

LIMA, A. C. de; SALES, R. M. Numerical investigation of algorithms for H_2/H_∞ controllers synthesis. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1994, Baltimore, MD. *Proceedings...* EUA: American Automatic Control Council, 1994. v. 3, p. 2401–2405.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. 3. ed. Stanford, CA: Springer, 2008.

MARQUES, R. P. *Hardware & software: Acesso ao módulo Lynx AC1160-VA*. São Paulo, 2010. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/267348/mod_resource/content/1/Acesso%20ao%20Modulo%20Lynx%20AC1160-VA.pdf. Acesso em: 27 nov. 2017.

NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. Tradução e revisão técnica por Jackson Paul Matsuura. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.

ORSINI, L. de Q.; CONSONNI, D. *Curso de circuitos elétricos*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.

PALEY, D. A.; ZHANG, F.; LEONARD, N. E. Cooperative control for ocean sampling: the glider coordinated control system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 16, n. 4, p. 735–744, 2008.

POTTS, A. S. *Modelagem e controle ótimo de um robô quadrúpede*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

POTTS, A. S.; CRUZ, J. J. da. A kinematical and dynamical analysis of a quadruped robot. In: GACOVSKI, Z. *Mobile Robots - Current Trends*. Rijeka: InTech, 2011. cap. 12, p. 239–262.

_____. An optimal energy control algorithm for a moving platform. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL WORLD CONGRESS, 18., 2011, Milão. *Proceedings...* Milão: IFAC, 2011. v. 44.

_____. Optimal power loss motion planning in legged robots. *Robotica*, Cambridge University Press, v. 34, n. 2, p. 423–448, 2016.

POTTS, A. S.; CRUZ, J. J. da; BERNARDI, R. de. A quadratic programming approach to the minimum energy problem of a mobile robot. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS IN CONTROL, AUTOMATION AND ROBOTICS, 5., 2008, Funchal, Madeira. *Proceedings...* Setúbal: INSTICC Press, 2008.

PUMA 500. 2015. Projects in CS225A: Experimental Robotics, Stanford University. Disponível em: <<https://cs.stanford.edu/groups/manips/teaching/cs225a/projects.html>>. Acesso em: 17 nov. 2017.

RANGO, A. et al. Using unmanned aerial vehicles for rangelands: current applications and future potentials. *Environmental Practice*, v. 8, n. 3, p. 159–168, 2006.

ROBERTS, D.; QUACINELLA, J.; KIM, J. H. Energy expenditure of a biped walking robot: Instantaneous and degree-of-freedom-based instrumentation with human gait implications. *Robotica*, Cambridge University Press, v. 35, n. 5, p. 1054–1071, 2017.

ROBOTIS INC. *AX-12/ AX-12+/ AX-12A*. Seul, Coreia do Sul, 2010. ROBOTIS e-Manual v1.29.00, Dynamixel Actuators. Disponível em: <http://support.robotis.com/en/product/actuator/dynamixel/ax_series/dxl_ax_actuator.htm>. Acesso em: 27 nov. 2017.

SAUNDERS, A. et al. The RiSE climbing robot: Body and leg design. In: DEFENSE AND SECURITY SYMPOSIUM, 2006, Orlando, FL. *Proceedings...*: Unmanned systems technology VIII. EUA: The International Society for Optics and Photonics, 2006. v. 6230.

SILVA, L. F. da. *Teste com as trajetórias ótimas em um robô escalador*. 2017. Vídeo de um dos testes realizados com as trajetórias de mínima perda Joule no robô KA'I yxo. Disponível em: <<https://youtu.be/lR1HUcErzas>>. Acesso em: 19 jan. 2018.

SILVA, L. F. da; BERNARDI, R. de; CRUZ, J. J. da. Planejamento de trajetórias de mínimo consumo de energia para o robô KA'I yxo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 21., 2016, Vitória. *Anais...* Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, 2016. p. 1301–1306. Disponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2016-0392.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2017.

SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M. *Robot dynamics and control*. USA: John Wiley & Sons, 1989.

TOKHI, M.; VIRK, G.; HOSSAIN, M. (Ed.). *Climbing and Walking Robots*: Proceedings of the Eighth International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines (CLAWAR 2005). London: Springer, 2005. 1111 p.

TOSUN, O. et al. (Ed.). *Mobile Robotics*: Solutions and challenges. Proceedings of the Twelfth International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines (CLAWAR 2009). Istanbul: World Scientific, 2009. 1173 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – IDENTIFICAÇÃO DO ATUADOR

Este Apêndice descreve o procedimento adotado para identificar os parâmetros do modelo do atuador Dynamixel AX-12A da fabricante Robotis®, utilizado nas juntas do robô KA'I yxo. A princípio, foram realizados ensaios em laboratório para determinar estimativas iniciais desses parâmetros, utilizadas, posteriormente, como condições de partida para a solução numérica de um problema de mínimos quadrados, de onde foram obtidos os parâmetros definitivos.

A.1 Preliminares

Dado que os atuadores utilizados nas juntas J_i , $i = 1, 2, 3$, do robô KA'I yxo são do mesmo modelo, considerou-se que os seus parâmetros são iguais entre si, ou seja:

$R_{a_i} = R_a$, resistência de armadura do motor;

$K_{b_i} = K_b$, constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz do motor;

$K_{m_i} = K_m$, constante de torque do motor;

$B_{m_i} = B_m$, coeficiente de atrito viscoso equivalente do motor (composto pelos coeficientes de atrito viscoso da armadura e da redução);

$c_{m_i} = c_m$, torque de atrito seco (ou de Coulomb) equivalente do motor (composto pelos torques de atrito seco da armadura e da redução);

$J_{m_i} = J_m$, momento de inércia equivalente do motor (composto pelos momentos de inércia da armadura e da redução).

Para identificar esses parâmetros, o motor interno do atuador foi operado em malha aberta, isto é, desconectado da placa que contém o microprocessador (Figura 54). Os ensaios para a identificação foram realizados nas instalações do Laboratório de Automação e Controle (LAC) da EPUSP. Foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Multímetro digital Minipa® ET-2042A;
- Gerador de funções HP® Agilent 33220A;
- Fonte de tensão contínua L. J. Electronics® System Power 90;
- Módulo de aquisição de dados Lynx® AC1160-VA;
- Desktop Positivo com Windows® XP e processador Intel® Core 2 Duo.

Figura 54 – Atuador em malha aberta.

A.1.1 Modelo do atuador

Considere-se o modelo apresentado na Figura 55 para o atuador AX-12A em malha aberta, que consiste em um motor de corrente contínua de imã permanente com redução por engrenagens. Aplicando-se as equações de balanço de tensões e de torques, obtêm-se, respectivamente (NISE, 2013):

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + K_b \omega_m(t), \quad (\text{A.1})$$

$$K_m i_a(t) = J_m \dot{\omega}_m(t) + B_m \omega_m(t) + c_m \text{sign}(\omega_m(t)), \quad (\text{A.2})$$

com:

$$\omega_m(t) = \frac{1}{r} \omega(t), \quad (\text{A.3})$$

em que¹:

v_a é a tensão aplicada à armadura do motor;

i_a é a corrente de armadura;

ω_m é a rotação apresentada pelo eixo do motor;

ω é a rotação apresentada pelo eixo da carga (após a redução);

r é a relação de redução por engrenagens.

¹ $\text{sign}(t)$ representa a função sinal de t :

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Figura 55 – Modelo para o atuador AX-12A em malha aberta.

A.1.2 Determinação das resistências internas das fontes utilizadas

Considere-se o circuito em corrente contínua mostrado na Figura 56, em que:

V denota a força eletromotriz de uma fonte de tensão contínua;

R_0 denota a resistência interna dessa fonte;

R_c denota uma carga resistiva;

V_c denota a queda de tensão sobre essa carga.

Como se trata de um divisor de tensão, então (ORSINI; CONSONNI, 2002):

$$V_c = \frac{R_c}{R_0 + R_c} V,$$

de onde resulta a seguinte expressão para o cálculo da resistência interna da fonte:

$$R_0 = \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right) R_c. \quad (\text{A.4})$$

Figura 56 – Circuito para medição da resistência interna de uma fonte de tensão.

Com base no circuito da Figura 56, foram realizados dois ensaios para a obtenção da resistência interna do gerador de funções HP, e outros dois para a da fonte System Power 90 (SP 90), cujos resultados são apresentados nas Tabelas 8 e 9, respectivamente, onde o índice k , $k = 1, 2, 3, 4$, foi utilizado para designar o valor de uma grandeza no

k -ésimo ensaio. Os valores de V_k , V_{c_k} e R_{c_k} foram medidos utilizando-se o multímetro digital. Porém, V_k foi medido com as fontes em vazio; V_{c_k} , com o circuito em operação; e R_{c_k} , com o circuito desligado. Os valores de R_{0_k} foram calculados com base em (A.4).

Tabela 8 – Ensaios realizados para obtenção da resistência interna do gerador HP.

Ensaio k	V_k	V_{c_k}	R_{c_k}	R_{0_k}
1	5,00 V	1,43 V	20,2 Ω	50,4294 Ω
2	6,00 V	1,71 V	20,2 Ω	50,6772 Ω

Tabela 9 – Ensaios realizados para obtenção da resistência interna da fonte SP 90.

Ensaio k	V_k	V_{c_k}	R_{c_k}	R_{0_k}
3	5,06 V	5,02 V	61,0 Ω	0,4861 Ω
4	11,82 V	11,77 V	79,2 Ω	0,3364 Ω

Tomando-se a média dos valores obtidos para R_{0_k} na Tabela 8, obteve-se a resistência interna do gerador HP, isto é:

$$R_{0_{HP}} = 50,5533 \Omega, \quad (\text{A.5})$$

Analogamente, porém utilizando-se os valores de R_{0_k} da Tabela 9, obteve-se a resistência interna da fonte SP 90, isto é:

$$R_{0_{SP}} = 0,4113 \Omega. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Determinação dos parâmetros iniciais

Esta seção descreve como foram obtidas as estimativas iniciais para os parâmetros do modelo do atuador AX-12A, denotadas com o índice sobrescrito 0. Assim, nas equações (A.1) e (A.2) do modelo do atuador, as grandezas definitivas R_a , K_b , K_m , B_m , c_m e J_m foram substituídas, respectivamente, por R_a^0 , K_b^0 , K_m^0 , B_m^0 , c_m^0 e J_m^0 .

A.2.1 Medição da resistência de armadura

Para identificar a resistência de armadura, o multímetro digital foi conectado diretamente aos terminais do motor desligado, na função ohmímetro, obtendo-se:

$$R_a^0 = 8,5 \Omega.$$

A.2.2 Determinação da constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz

Considerando-se a Figura 55, ao se aplicar um valor de tensão constante $\bar{v}_{a_1} > 0$ à armadura do motor, a expressão (A.1) toma a seguinte forma no regime estacionário:

$$\bar{v}_{a_1} = R_a^0 \bar{i}_{a_1} + K_b^0 \bar{\omega}_{m_1},$$

em que $\bar{i}_{a_1}$ e $\bar{\omega}_{m_1}$ denotam os valores em regime estacionário das grandezas $i_a(t)$ e $\omega_m(t)$, respectivamente. Dessa equação resulta:

$$K_b^0 = \frac{\bar{v}_{a_1} - R_a^0 \bar{i}_{a_1}}{\bar{\omega}_{m_1}}, \quad (\text{A.7})$$

Nessas condições, foi realizado um ensaio em laboratório utilizando-se a fonte SP 90 para fornecer um valor de tensão constante à armadura do motor. A Tabela 10 apresenta os valores obtidos nesse ensaio: as grandezas $\bar{v}_{a_1}$ e $\bar{i}_{a_1}$ foram medidas utilizando-se o multímetro; $\bar{\omega}_1$, contando-se o número de rotações executadas pelo eixo da carga por minuto; e $\bar{\omega}_{m_1}$ foi calculada com base em (A.3), em que, no caso do atuador AX-12A (ROBOTIS INC., 2010):

$$r = \frac{1}{254}.$$

Tabela 10 – Valores obtidos no ensaio para a determinação da constante de proporcionalidade da força contraeletromotriz.

Grandeza	Valor	Unidade
$\bar{v}_{a_1}$	11,82	V
$\bar{i}_{a_1}$	64,2	mA
$\bar{\omega}_1$	61	rpm
$\bar{\omega}_{m_1}$	15494	rpm

Substituindo-se os valores da Tabela 10 em (A.7), obteve-se finalmente:

$$K_b^0 = 6,9486 \times 10^{-3} \text{ V s/rad.}$$

A.2.3 Determinação da constante de torque

No Sistema Internacional de Unidades (SI), sabe-se que (NISE, 2013):

$$K_m^0 = K_b^0.$$

Portanto:

$$K_m^0 = 6,9486 \times 10^{-3} \text{ N m/A.}$$

A.2.4 Determinação dos coeficientes de atrito viscoso e seco equivalentes

Realizando-se mais um ensaio aplicando-se à armadura do motor um valor de tensão constante $\bar{v}_{a_2} > 0$, $\bar{v}_{a_2} \neq \bar{v}_{a_1}$, foram obtidos os novos valores em regime estacionário para corrente de armadura e rotações apresentados na Tabela 11.

Aplicando-se o balanço de potências para os dois ensaios, resulta o seguinte sistema linear de equações (FALCONE, 1979):

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{m_1}^2 B_m^0 + \bar{\omega}_{m_1} c_m^0 = \bar{v}_{a_1} \bar{i}_{a_1} - R_a^0 \bar{i}_{a_1}^2 \\ \bar{\omega}_{m_2}^2 B_m^0 + \bar{\omega}_{m_2} c_m^0 = \bar{v}_{a_2} \bar{i}_{a_2} - R_a^0 \bar{i}_{a_2}^2, \end{cases}$$

Tabela 11 – Valores obtidos no ensaio para a determinação dos coeficientes de atrito viscoso e seco equivalentes.

Grandeza	Valor	Unidade
$\bar{v}_{a2}$	4,98	V
$\bar{i}_{a2}$	30,0	mA
$\bar{\omega}_2$	26	rpm
$\bar{\omega}_{m2}$	6604	rpm

de onde foram obtidos:

$$B_m^0 = 2,5901 \times 10^{-7} \text{ N m s/rad},$$

$$c_m^0 = 2,5842 \times 10^{-5} \text{ N m}.$$

A.2.5 Determinação do momento de inércia equivalente

Ainda de acordo com o circuito da Figura 55, isolando-se a grandeza $i_a(t)$ em (A.2) e substituindo-a em (A.1), resulta:

$$v_a(t) = \frac{R_a^0 J_m^0}{K_m^0} \dot{\omega}_m(t) + \left(\frac{R_a^0 B_m^0}{K_m^0} + K_b^0 \right) \omega_m(t) + \frac{R_a^0 c_m^0}{K_m^0} \text{sign}(\omega_m(t)).$$

Assim, se²:

$$v_a(t) = V_a \text{H}(t - t_D), \quad (\text{A.8})$$

isto é, um degrau de amplitude V_a aplicado no instante t_D , então resulta a seguinte equação diferencial:

$$\frac{R_a^0 J_m^0}{K_m^0} \dot{\omega}_m(t) + \left(\frac{R_a^0 B_m^0}{K_m^0} + K_b^0 \right) \omega_m(t) = V_a \text{H}(t - t_D) - \frac{R_a^0 c_m^0}{K_m^0} \text{sign}(\omega_m(t)),$$

de onde se obtém a constante de tempo do transitório de ω_m , a saber:

$$\nu = \frac{R_a^0 J_m^0}{R_a^0 B_m^0 + K_b^0 K_m^0}. \quad (\text{A.9})$$

Dessa forma, aplicando-se um degrau de tensão à armadura do motor conforme (A.8) e medindo-se a constante de tempo ν do transitório de ω_m , pode-se encontrar J_m^0 isolando-o em (A.9). No entanto, dada a dificuldade de se registrar valores de rotações, foi realizada uma modificação no circuito de alimentação do atuador, conforme mostra a Figura 57, onde v denota a força eletromotriz de uma fonte de tensão e R , a resistência

² $\text{H}(t)$ denota o degrau de Heaviside:

$$\text{H}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

interna dessa fonte ou a associação série desta com um resistor. Aplicando-se o balanço de tensões à malha interna esquerda desse circuito, resultam:

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= v(t) - v_R(t) \Rightarrow \\
 v_a(t) &= v(t) - Ri_a(t) \Rightarrow \\
 v_a(t) &= v(t) - R \left(\frac{v_a(t) - K_b^0 \omega_m(t)}{R_a^0} \right) \Rightarrow \\
 v_a(t) \left(1 + \frac{R}{R_a^0} \right) &= v(t) + \frac{RK_b^0}{R_a^0} \omega_m(t) \Rightarrow \\
 v_a(t) &= \frac{R_a^0}{R_a^0 + R} v(t) + \frac{RK_b^0}{R_a^0 + R} \omega_m(t).
 \end{aligned}$$

Figura 57 – Circuito para obtenção do momento de inércia equivalente.

Se:

$$v(t) = V H(t - t_D), \quad (\text{A.10})$$

isto é, um degrau de amplitude V aplicado no instante t_D , então:

$$v_a(t) = \frac{R_a^0 V}{R_a^0 + R} H(t - t_D) + \frac{RK_b^0}{R_a^0 + R} \omega_m(t), \quad (\text{A.11})$$

com ω_m dado pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}
 \frac{(R_a^0 + R) J_m^0}{K_m^0} \dot{\omega}_m(t) + \left[\frac{(R_a^0 + R) B_m^0}{K_m^0} + K_b^0 \right] \omega_m(t) &= \\
 = V H(t - t_D) - \frac{(R_a^0 + R) c_m^0}{K_m^0} \text{sign}(\omega_m(t)), & \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

ou seja, v_a deixa de ser um degrau como no caso anterior e passa a ter um transitório com constante de tempo igual à nova constante de tempo de ω_m , a saber:

$$\nu' = \frac{(R_a^0 + R) J_m^0}{(R_a^0 + R) B_m^0 + K_b^0 K_m^0}. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, medindo-se ν' a partir do transitório de v_a , pode-se obter J_m^0 isolando-o em (A.13), ou seja:

$$J_m^0 = \frac{(R_a^0 + R) B_m^0 + K_b^0 K_m^0}{R_a^0 + R} \nu'. \quad (\text{A.14})$$

Seguindo-se então o esquema do circuito mostrado na Figura 57, foram realizados onze ensaios em laboratório, onde foi feita a aquisição das curvas das tensões de armadura pelo módulo Lynx, denotadas aqui por $\hat{v}_{a_k}$, $k = 1, 2, \dots, 11$. Dada a limitação deste instrumento em realizar a leitura de tensões na faixa de -10 V a 10 V (MARQUES, 2010), as tensões de armadura foram reguladas de forma que pertencessem a esse intervalo através do ajuste de tensões adequadas nas fontes utilizadas e da inserção de um resistor em série quando necessário.

Foram realizados quatro ensaios com o gerador de funções HP, que possui resistência interna significativa quando comparada com a resistência de armadura do motor. Nesse caso, considerou-se portanto, de (A.5):

$$R = R_{0\text{HP}} = 50,5533 \, \Omega, \quad (\text{A.15})$$

não sendo necessária a inserção de um resistor em série ao gerador.

Foram realizados ainda sete ensaios com a fonte SP 90, que, por outro lado, possui resistência interna pequena quando comparada à resistência de armadura do motor. Como a tensão de saída dessa fonte é fixa em aproximadamente 12 V e existe a limitação do módulo de aquisição discutida anteriormente, foi utilizado um resistor em série à fonte, medido em $55,1 \, \Omega$. Desse modo, de (A.6), considerou-se nesse caso que:

$$R = R_{0\text{SP}} + 55,1 = 55,5113 \, \Omega. \quad (\text{A.16})$$

As Figuras 58 e 59 mostram em azul as curvas das tensões de armadura lidas pelo módulo de aquisição, $\hat{v}_{a_k}$, nos ensaios com o gerador HP e com a fonte SP 90, respectivamente. A partir de (A.11), a constante de tempo de um ensaio k , denotada aqui por ν'_k , foi obtida sabendo-se que ela é o instante tal que (GARCIA, 2014):

$$\hat{v}_{a_k}(\nu'_k + t_{D_k}) \approx 0,632 \left(\bar{v}_{a_k} - \frac{R_a^0 V_k}{R_a^0 + R_k} \right) + \frac{R_a^0 V_k}{R_a^0 + R_k}, \quad (\text{A.17})$$

onde $\bar{v}_{a_k}$ denota o valor em regime estacionário da curva $\hat{v}_{a_k}$; e t_{D_k} , V_k e R_k representam, respectivamente, os valores de t_D , V e R utilizados no k -ésimo ensaio, $k = 1, 2, \dots, 11$.

A Tabela 12 resume os valores obtidos nos onze ensaios. Os valores de V_k foram medidos com o multímetro e com as fontes em vazio; os de t_{D_k} e $\bar{v}_{a_k}$, com auxílio do MATLAB®; os de R_k , de acordo com (A.15) e (A.16); e os de ν'_k foram calculados com base em (A.17).

Figura 58 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com o gerador HP. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros iniciais do atuador.

Tabela 12 – Ensaios realizados para obtenção do momento de inércia. Os quatro primeiros foram realizados com o gerador HP, e os sete últimos, com a fonte SP 90.

Ensaio k	V_k (V)	t_{D_k} (s)	R_k (Ω)	$\bar{v}_{a_k}$ (V)	ν'_k (s)
1	10,00	2,21	50,5533	8,0242	0,1626
2	10,00	2,22	50,5533	8,0102	0,1610
3	5,00	3,53	50,5533	3,5875	0,1579
4	5,00	3,53	50,5533	3,5669	0,1668
5	11,81	2,93	55,5113	9,4134	0,1677
6	11,81	3,94	55,5113	9,3679	0,1699
7	11,81	3,99	55,5113	9,4208	0,1671
8	11,81	6,92	55,5113	9,4082	0,1835
9	11,81	6,69	55,5113	9,4396	0,1772
10	11,81	3,35	55,5113	9,4590	0,1638
11	11,81	3,70	55,5113	9,4268	0,1641

Figura 59 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com a fonte SP 90. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros iniciais do atuador.

Tomando-se a média dos quatro primeiros valores de ν'_k apresentados na Tabela 12 e substituindo-a em (A.14), obteve-se o momento de inércia referente aos ensaios com o gerador HP, a saber:

$$J_{m_{HP}}^0 = 1,7449 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2, \quad (\text{A.18})$$

e tomando-se a média dos sete últimos valores de ν'_k apresentados na Tabela 12 e substituindo-a em (A.14), obteve-se o momento de inércia referente aos ensaios com a fonte SP 90, a saber:

$$J_{m_{SP}}^0 = 1,7274 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2. \quad (\text{A.19})$$

Tomando-se a média entre (A.18) e (A.19), resulta:

$$J_m^0 = 1,7362 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2.$$

A Tabela 13 resume os parâmetros iniciais obtidos para o atuador.

Tabela 13 – Parâmetros iniciais do atuador AX-12A identificados em laboratório.

Parâmetro	Valor	Unidade
R_a^0	8,5	Ω
K_b^0	$6,9486 \times 10^{-3}$	V s/rad
K_m^0	$6,9486 \times 10^{-3}$	N m/A
B_m^0	$2,5901 \times 10^{-7}$	N m s/rad
c_m^0	$2,5842 \times 10^{-5}$	N m
J_m^0	$1,7362 \times 10^{-7}$	kg m ²

De posse desses parâmetros, as equações (A.11) e (A.12) foram implementadas em Simulink[®]/MATLAB, de onde foram obtidas as respostas simuladas para as tensões de armadura, denotadas por $\tilde{v}_{a_k}$, correspondentes aos onze ensaios. Elas são mostradas em vermelho nas Figuras 58 e 59. Observa-se, entretanto, que os valores estacionários das curvas simuladas estão ligeiramente acima ou abaixo das curvas lidas pelo módulo de aquisição, refletindo a necessidade de um ajuste de ganho. Portanto, foi realizado o procedimento descrito na seção seguinte para a obtenção dos parâmetros definitivos do modelo do atuador, corrigindo-se então o referido problema.

A.3 Determinação dos parâmetros definitivos

Considerando-se os resultados da seção anterior, foram obtidos os parâmetros definitivos R_a , K_b , K_m , B_m , c_m e J_m para o atuador utilizando-se o método dos mínimos quadrados. Dada a boa precisão dos ensaios realizados para a determinação de R_a^0 , K_b^0 e K_m^0 , considerou-se que estes três parâmetros já são os definitivos, ou seja:

$$R_a = R_a^0,$$

$$K_b = K_b^0,$$

$$K_m = K_m^0.$$

Ademais, B_m^0 , c_m^0 e J_m^0 serviram de condições iniciais para obter B_m , c_m e J_m através da solução do seguinte problema de mínimos quadrados (GARCIA, 2016):

$$\min_{B_m, c_m, J_m} \sum_{k=1}^{11} \sum_{l=1}^{N_p} [\hat{v}_{a_k}(t_l) - \tilde{v}_{a_k}(t_l, B_m, c_m, J_m)]^2,$$

em que N_p é o número de pontos coletados para uma curva lida $\hat{v}_{a_k}$, $k = 1, 2, \dots, 11$; e t_l , $l = 1, 2, \dots, N_p$, são os instantes de coleta. Esse problema foi resolvido numericamente através do MATLAB, de onde foram obtidos os parâmetros definitivos apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Parâmetros definitivos do atuador AX-12A obtidos por mínimos quadrados.

Parâmetro	Valor	Unidade
R_a	8,5	Ω
K_b	$6,9486 \times 10^{-3}$	V s/rad
K_m	$6,9486 \times 10^{-3}$	N m/A
B_m	$1,2991 \times 10^{-7}$	N m s/rad
c_m	$1,3305 \times 10^{-4}$	N m
J_m	$1,5040 \times 10^{-7}$	kg m ²

Pelas Figuras 60 e 61, nota-se que as novas curvas simuladas $\tilde{v}_{a_k}$, obtidas a partir dos parâmetros definitivos, agora se ajustam melhor às curvas $\hat{v}_{a_k}$, lidas pelo módulo de aquisição.

Ademais, para verificar o comportamento da rotação, foram realizadas duas simulações correspondentes aos ensaios realizados para obtenção de K_b^0 e de B_m^0 e c_m^0 , uma vez que neles foi realizada a medição de valores da rotação ω . A Figura 62 mostra as curvas obtidas para esta grandeza nas duas simulações. Do MATLAB, os valores em regime estacionário dessas curvas foram medidos em 61,55 rpm para a primeira simulação e 25,41 rpm para a segunda, bem próximos, portanto, dos valores obtidos naqueles ensaios, que foram de 61 rpm e 26 rpm. Dessa forma, conclui-se que os novos parâmetros obtidos ajustam relativamente bem tanto as tensões de armadura, que foram as grandezas envolvidas no problema de mínimos quadrados, quanto as rotações.

Figura 60 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com o gerador HP. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros definitivos do atuador.

Figura 61 – Em azul, curvas das tensões de armadura lidas nos ensaios com a fonte SP 90. Em vermelho, curvas das tensões de armadura simuladas com base nos parâmetros definitivos do atuador.

Figura 62 – Simulações das respostas das rotações do eixo da carga do atuador a degraus de amplitude de 11,82 V e 4,98 V na fonte SP 90.

APÊNDICE B – CONDIÇÕES INICIAIS E FINAIS PARA UM PASSO DO ROBÔ

A Tabela 15 traz as condições iniciais e finais das variáveis de junta e de suas primeiras derivadas temporais referentes a um passo de subida do robô, com $r_i = 1/254$, para $i = 1, 2, 3$. As condições iniciais e finais referentes a um passo de descida podem ser obtidas substituindo-se o instante 0 por t_f e vice-versa.

Tabela 15 – Condições iniciais e finais referentes a um passo completo de subida.

Condição	G_2 engastada	G_1 engastada
$\vartheta_1(0) = r_1\vartheta_{m_1}(0)$	0°	120°
$\vartheta_2(0) = r_2\vartheta_{m_2}(0)$	360°	120°
$\vartheta_3(0) = r_3\vartheta_{m_3}(0)$	270°	30°
$\dot{\vartheta}_1(0) = r_1\dot{\vartheta}_{m_1}(0)$	0	0
$\dot{\vartheta}_2(0) = r_2\dot{\vartheta}_{m_2}(0)$	0	0
$\dot{\vartheta}_3(0) = r_3\dot{\vartheta}_{m_3}(0)$	0	0
$\vartheta_1(t_f) = r_1\vartheta_{m_1}(t_f) = r_1\tilde{\vartheta}_{m_1}$	60°	180°
$\vartheta_2(t_f) = r_2\vartheta_{m_2}(t_f) = r_2\tilde{\vartheta}_{m_2}$	240°	0°
$\vartheta_3(t_f) = r_3\vartheta_{m_3}(t_f) = r_3\tilde{\vartheta}_{m_3}$	330°	90°
$\dot{\vartheta}_1(t_f) = r_1\dot{\vartheta}_{m_1}(t_f)$	0	0
$\dot{\vartheta}_2(t_f) = r_2\dot{\vartheta}_{m_2}(t_f)$	0	0
$\dot{\vartheta}_3(t_f) = r_3\dot{\vartheta}_{m_3}(t_f)$	0	0

APÊNDICE C – DESENVOLVIMENTO DAS DISCRETIZAÇÕES

Este Apêndice apresenta o desenvolvimento das discretizações das equações de estado, do funcional e das restrições do problema de controle ótimo original proposto neste trabalho, permitindo reescrevê-lo como um problema de programação quadrática (PPQ).

C.1 Discretização da solução das equações de estado

Com base em (2.17) e (4.2), a solução das equações de estado para o sistema de uma junta J_i , $i = 1, 2, 3$, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 x_{m_i}(t_j) &= e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + \int_0^{t_j} e^{A_i(t_j-\lambda)} B_i u_i(\lambda) d\lambda = \\
 &= e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \left(\int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i u_i(t_1) d\lambda + \dots + \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_i \lambda} B_i u_i(t_j) d\lambda \right) = \\
 &= e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & \dots & \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda \end{bmatrix}}_{2 \times j} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_j) \end{bmatrix}}_{j \times 1} = \\
 &= e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & \dots & \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{2 \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_j) \\ u_i(t_{j+1}) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times 1}.
 \end{aligned}$$

Definindo-se:

$$I_i(t_j) = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_N \end{bmatrix},$$

com:

$$e_z = \begin{cases} 1, & 1 \leq z \leq j \\ 0, & j < z \leq N, \end{cases}$$

então:

$$x_{m_i}(t_j) = e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & \cdots & \int_{t_{N-1}}^{t_N} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda \end{bmatrix}}_{2 \times N} \underbrace{I_i(t_j)}_{N \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times 1}.$$

Sejam ainda:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda & \cdots & \int_{t_{N-1}}^{t_N} e^{-A_i \lambda} B_i d\lambda \end{bmatrix}$$

e:

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i(t_1) & \cdots & u_i(t_N) \end{bmatrix}^T,$$

então, finalmente, obtém-se, para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, \dots, N$:

$$x_{m_i}(t_j) = e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i.$$

C.2 Discretização do funcional

Considerando-se (4.2) e substituindo-se (2.10) na equação do funcional dado em (4.3a), obtém-se:

$$J = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N p_{J_i}(t_j) \Delta t = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N R_{a_i} i_{a_i}(t_j)^2 \Delta t.$$

Isolando-se $i_{a_i}(t_j)$ em (3.22) e substituindo-o na equação acima, resultam:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N R_{a_i} \left(\frac{1}{K_{m_i}} u_i(t_j) + \frac{1}{K_{m_i}} z_i(t_j) \right)^2 \Delta t = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^N \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} u_i(t_j)^2 + \sum_{j=1}^N \frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} z_i(t_j) u_i(t_j) + \sum_{j=1}^N \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} z_i(t_j)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} u_i(t_1) & \cdots & u_i(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} z_i(t_1) & \cdots & z_i(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} z_i(t_1) & \cdots & z_i(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i(t_1) \\ \vdots \\ z_i(t_N) \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Definindo-se:

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i(t_1) & \cdots & u_i(t_N) \end{bmatrix}^T, \\ Z_i = \begin{bmatrix} z_i(t_1) & \cdots & z_i(t_N) \end{bmatrix}^T,$$

vem:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} U_i^T \left(\frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) U_i \right] + \sum_{i=1}^3 \left[Z_i^T \left(\frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) U_i \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[Z_i^T \left(\frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) Z_i \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T & U_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2R_{a_1} \Delta t}{K_{m_1}^2} I_N & 0_N & 0_N \\ 0_N & \frac{2R_{a_2} \Delta t}{K_{m_2}^2} I_N & 0_N \\ 0_N & 0_N & \frac{2R_{a_3} \Delta t}{K_{m_3}^2} I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} Z_1^T & Z_2^T & Z_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2R_{a_1} \Delta t}{K_{m_1}^2} I_N & 0_N & 0_N \\ 0_N & \frac{2R_{a_2} \Delta t}{K_{m_2}^2} I_N & 0_N \\ 0_N & 0_N & \frac{2R_{a_3} \Delta t}{K_{m_3}^2} I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[Z_i^T \left(\frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) Z_i \right], \end{aligned}$$

onde I_N denota a matriz identidade $N \times N$, e 0_N , a matriz nula $N \times N$.

Definindo-se ainda:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}, \\ Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_N & 0_N \\ 0_N & Q_2 & 0_N \\ 0_N & 0_N & Q_3 \end{bmatrix},$$

com:

$$Q_i = \frac{2R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$H = Z^T Q,$$

$$S = \sum_{i=1}^3 \left[Z_i^T \left(\frac{R_{a_i} \Delta t}{K_{m_i}^2} I_N \right) Z_i \right],$$

resulta:

$$J = \frac{1}{2} U^T Q U + H U + S.$$

C.3 Discretização das restrições

C.3.1 Primeira restrição

Utiliza-se (4.4):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vartheta_{m_i}(t_N) \\ \dot{\vartheta}_{m_i}(t_N) \end{bmatrix} &= x_{m_i}(t_N) = e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_N} \Gamma_i I_{N \times N} U_i = \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta}_{m_i} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \underbrace{e^{A_i t_N} \Gamma_i I_{N \times N}}_{2 \times N} U_i &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\vartheta}_{m_i} \\ 0 \end{bmatrix} - e^{A_i t_N} x_{m_i}(0)}_{2 \times 1}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

para $i = 1, 2, 3$.

C.3.2 Segunda restrição

Utilizam-se (3.21) e (4.4):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 r_i \vartheta_{m_i}(t_j) &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{m_i}(t_j) &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i \right) &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) - \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) \Rightarrow \\ \left[r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_1 t_j} \Gamma_1 I_1(t_j) \mid r_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_2 t_j} \Gamma_2 I_2(t_j) \mid r_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_3 t_j} \Gamma_3 I_3(t_j) \right] &\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \\ \sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) - \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0). \end{aligned}$$

Generalizando-se para todos os instantes $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, vem:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_1 t_1} \Gamma_1 I_1(t_1) \mid r_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_2 t_1} \Gamma_2 I_2(t_1) \mid r_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_3 t_1} \Gamma_3 I_3(t_1) \right.}_{N \times 3N} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \\ \underbrace{\sum_{i=1}^3 \vartheta_i(0) \text{ones}(N, 1) - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 r_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1} & \end{aligned} \quad (C.2)$$

para $i = 1, 2, 3$, em que $\text{ones}(N, 1)$ representa o vetor $[1 \ \cdots \ 1]^T$, de N posições.

C.3.3 Terceira restrição

Esta é composta por duas partes: $i_{a_i}(t_j) \leq I_{max_i}$ e $i_{a_i}(t_j) \geq -I_{max_i}$. Utiliza-se (3.22), isolando-se $i_{a_i}(t)$.

Para a primeira parte, tem-se:

$$\begin{aligned} i_{a_i}(t_j) &\leq I_{max_i} \Rightarrow \\ \frac{1}{K_{m_i}} u_i(t_j) + \frac{1}{K_{m_i}} z_i(t_j) &\leq I_{max_i} \Rightarrow \\ \frac{1}{K_{m_i}} u_i(t_j) &\leq I_{max_i} - \frac{1}{K_{m_i}} z_i(t_j). \end{aligned}$$

Generalizando-se para todos os instantes $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, vem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{m_i}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{K_{m_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} I_{max_i} \\ \vdots \\ I_{max_i} \end{bmatrix} - \frac{1}{K_{m_i}} \begin{bmatrix} z_i(t_1) \\ \vdots \\ z_i(t_N) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \underbrace{\frac{1}{K_{m_i}} I_N}_{N \times N} U_i &\leq \underbrace{I_{max_i} \text{ones}(N, 1)}_{N \times 1} - \frac{1}{K_{m_i}} Z_i, \end{aligned} \quad (C.3)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Analogamente, para a segunda parte da restrição, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K_{m_i}} I_N U_i &\leq \underbrace{I_{max_i} \text{ones}(N, 1)}_{N \times 1} + \frac{1}{K_{m_i}} Z_i, \end{aligned} \quad (C.4)$$

para $i = 1, 2, 3$.

C.3.4 Quarta restrição

Esta é composta por duas partes: $v_{a_i}(t_j) \leq V_{max_i}$ e $v_{a_i}(t_j) \geq -V_{max_i}$. Utilizam-se (2.7), (3.21), (3.22) e (4.4).

Para a primeira parte, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{a_i} i_{a_i}(t_j) + K_{b_i} \dot{\vartheta}_{m_i}(t_j) &\leq V_{max_i} \Rightarrow \\ \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} u_i(t_j) + \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} z_i(t_j) + K_{b_i} [0 \ 1] x_{m_i}(t_j) &\leq V_{max_i} \Rightarrow \\ \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} u_i(t_j) + \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} z_i(t_j) + K_{b_i} [0 \ 1] &\left(e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i \right) \leq V_{max_i} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} u_i(t_j) + K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i \leq V_{max_i} - \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} z_i(t_j) - K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0).$$

Generalizando-se para todos os instantes $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, vem:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{bmatrix} \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_i(t_1) \\ \vdots \\ u_i(t_N) \end{bmatrix} \leq \\ & \begin{bmatrix} V_{max_i} \\ \vdots \\ V_{max_i} \end{bmatrix} - \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} \begin{bmatrix} z_i(t_1) \\ \vdots \\ z_i(t_N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \underbrace{\left[\frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} I_N + \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \right]}_{N \times N} U_i \leq \\ & \underbrace{V_{max_i \text{ ones}}(N, 1) - \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} Z_i - \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1}, \end{aligned} \quad (C.5)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Analogamente, para a segunda parte da restrição, tem-se:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[-\frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} I_N - \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix} \right]}_{N \times N} U_i \leq \\ & \underbrace{V_{max_i \text{ ones}}(N, 1) + \frac{R_{a_i}}{K_{m_i}} Z_i + \begin{bmatrix} K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ K_{b_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1}, \end{aligned} \quad (C.6)$$

para $i = 1, 2, 3$.

C.3.5 Quinta restrição

Esta é composta por duas partes: $\vartheta_{m_i}(t_j) \geq \check{\vartheta}_{m_i}$ e $\vartheta_{m_i}(t_j) \leq \hat{\vartheta}_{m_i}$. Utilizam-se (3.21) e (4.4).

Para a primeira parte, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{m_i}(t_j) &\geq \check{\vartheta}_{m_i} \Rightarrow \\
 -\vartheta_{m_i}(t_j) &\leq -\check{\vartheta}_{m_i} \Rightarrow \\
 -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{m_i}(t_j) &\leq -\check{\vartheta}_{m_i} \Rightarrow \\
 -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i \right) &\leq -\check{\vartheta}_{m_i} \Rightarrow \\
 -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i &\leq -\check{\vartheta}_{m_i} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0).
 \end{aligned}$$

Generalizando-se para todos os instantes $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, vem:

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times N} U_i \leq \underbrace{-\check{\vartheta}_{m_i} \text{ones}(N, 1) + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1}, \quad (\text{C.7})$$

para $i = 1, 2, 3$.

Analogamente, para a segunda parte da restrição, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times N} U_i \leq \underbrace{\hat{\vartheta}_{m_i} \text{ones}(N, 1) - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1}, \quad (\text{C.8})$$

para $i = 1, 2, 3$.

C.3.6 Sexta restrição

Utilizam-se (3.21) e (4.4):

$$\begin{aligned}
 (-1)^i \dot{\vartheta}_{m_i}(t_j) &\leq 0 \Rightarrow \\
 (-1)^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_{m_i}(t_j) &\leq 0 \Rightarrow \\
 (-1)^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) + e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i \right) &\leq 0 \Rightarrow \\
 (-1)^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i &\leq -(-1)^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0) \Rightarrow \\
 (-1)^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} \Gamma_i I_i(t_j) U_i &\leq (-1)^{i+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{A_i t_j} x_{m_i}(0).
 \end{aligned}$$

Generalizando-se para todos os instantes $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, vem:

$$\underbrace{(-1)^i \begin{bmatrix} [0 \quad 1] e^{A_i t_1} \Gamma_i I_i(t_1) \\ \vdots \\ [0 \quad 1] e^{A_i t_N} \Gamma_i I_i(t_N) \end{bmatrix}}_{N \times N} U_i \leq \underbrace{(-1)^{i+1} \begin{bmatrix} [0 \quad 1] e^{A_i t_1} x_{m_i}(0) \\ \vdots \\ [0 \quad 1] e^{A_i t_N} x_{m_i}(0) \end{bmatrix}}_{N \times 1}, \quad (\text{C.9})$$

para $i = 1, 2, 3$.

APÊNDICE D – ARQUITETURA DO ROBÔ

Este Apêndice descreve a arquitetura do robô KA'I yxo, apresentando suas plataformas de software e hardware, bem como a forma de implementação de trajetórias a partir do software da placa eletrônica.

D.1 Preliminares

O robô KA'I yxo possui uma arquitetura de controle em dois níveis (BERNARDI, 2014):

Nível de operação: É o que possibilita tomadas de decisão e ações pelo operador. É executado pela Estação Base, que controla a missão, enviando e recebendo dados do robô por meio de comunicação Bluetooth (Figura 63). Algumas funções desse nível são: inícios e finalizações de missões, envios de comandos específicos, e tomadas de decisão quando da ocorrência de problemas durante o trajeto do robô. Esse nível possui interface gráfica com o operador conforme mostra a Figura 64.

Nível de execução: É o que se encontra embarcado no robô. É executado por uma plataforma Mbed[®] NXP LPC1768, chamada de Placa Principal (Figura 65).

Figura 63 – Estação base.

Fonte: Bernardi (2014).

A Figura 66 mostra a arquitetura completa de hardware do robô.

A bateria utilizada no robô tem tecnologia de fabricação baseada em polímero de lítio (mais leve e com maior densidade de energia em relação a outras baterias disponíveis no mercado). Ela também possui circuitos internos para proteção contra sobretensão e sobrecorrente (BERNARDI, 2014).

Figura 64 – Interface Gráfica.

Fonte: Bernardi (2014).

Figura 65 – Placa Principal.

Fonte: Bernardi (2014).

Figura 66 – Arquitetura de hardware.

Fonte: Bernardi (2014).

Os atuadores utilizados nas juntas do robô KA'I yxo são do modelo AX-12A, da fabricante Robotis® (Figura 67). A Tabela 16 mostra as principais especificações desse atuador, indicando alguns parâmetros de seu modelo e das restrições adotadas neste trabalho ($i = 1, 2, 3$).

Figura 67 – Atuador AX-12A.

Fonte: ROBOTIS INC. (2010).

O AX-12A possui uma eletrônica embarcada com a implementação de um sistema de controle completo, com um controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) para controle de posição e uma interface de comunicação serial (ROBOTIS INC., 2010).

O ângulo de giro do atuador é medido conforme mostra a Figura 68. A partir disso, definem-se os ângulos ψ_i , $i = 1, 2, 3$, no robô, conforme a Figura 69.

Tabela 16 – Especificações principais do atuador AX-12A.

Grandeza	Valor	Observação
Massa	54,6 g	—
Dimensões	$32 \times 50 \times 40$ mm	—
Resolução	$0,29^\circ$	—
Relação de redução	254:1	$1/r_i$
Torque de bloqueio	1,5 N·m	Em 12,0 V e $I_{max_i} = 1,5$ A.
Rotação em vazio	59 rpm	Em 12,0 V.
Tensão	9 a 12 V	Recomendada: $V_{max_i} = 11,1$ V.

Fonte: ROBOTIS INC. (2010).

Figura 68 – Ângulo de giro no atuador AX-12A.

Fonte: Bernardi (2014).

Figura 69 – Ângulos dos atuadores no robô KA'I yxo.

Fonte: Bernardi (2014).

D.2 Implementação de trajetórias

Para a implementação de trajetórias no robô KA'I yxo utiliza-se uma matriz de andadura **walk** de ordem $(2M + 1) \times 3$ no software da placa Mbed desenvolvido por Bernardi (2014). Essa matriz é estruturada conforme a seguir:

$$\mathbf{walk} = \left[\begin{array}{ccc} \tilde{\psi}_{1_{G_2}}(t_0) & \tilde{\psi}_{2_{G_2}}(t_0) & \tilde{\psi}_{3_{G_2}}(t_0) \\ \tilde{\psi}_{1_{G_2}}(t_1) & \tilde{\psi}_{2_{G_2}}(t_1) & \tilde{\psi}_{3_{G_2}}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{1_{G_2}}(t_M) = \tilde{\psi}_{1_{G_1}}(t_0) & \tilde{\psi}_{2_{G_2}}(t_M) = \tilde{\psi}_{2_{G_1}}(t_0) & \tilde{\psi}_{3_{G_2}}(t_M) = \tilde{\psi}_{3_{G_1}}(t_0) \\ \tilde{\psi}_{1_{G_1}}(t_1) & \tilde{\psi}_{2_{G_1}}(t_1) & \tilde{\psi}_{3_{G_1}}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{1_{G_1}}(t_M) & \tilde{\psi}_{2_{G_1}}(t_M) & \tilde{\psi}_{3_{G_1}}(t_M) \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{(SPR)} \\ \\ \text{(SHR)} \\ \\ \text{(SPR)}, \end{array}$$

em que $\tilde{\psi}_i(t_l)$ são valores inteiros e dados em graus (restrições impostas pela biblioteca do atuador utilizada no software da placa Mbed) para os ângulos dos atuadores das juntas i , $i = 1, 2, 3$, amostrados nos instantes t_l , $l = 0, 1, \dots, M = 40$, com intervalos de amostragem constantes (conforme (5.3)). Os índices subscritos G_2 e G_1 se referem à garra que se encontra engastada, sendo que a matriz **walk** representa um passo completo de subida com condição inicial correspondente ao estado *spread* (SPR). Nota-se que a linha central da matriz, correspondente ao estado *shrink* (SHR), é comum para ambas as configurações de engastamento, justificando o número ímpar de linhas.

ANEXOS

ANEXO A – PARÂMETROS DO MODELO DO ROBÔ

As Tabelas 17 e 18 apresentam os parâmetros do modelo do robô KA'I yxo para as duas configurações de engastamento das garras.

Tabela 17 – Parâmetros do modelo do robô KA'I yxo para a configuração com G_2 engastada.

Descrição	Notação	Valor	Unidade
Comprimento do ligamento 0	$L_0 = L_A$	0,0840	m
Comprimento do ligamento 1	$L_1 = L_B$	0,0925	m
Comprimento do ligamento 2	$L_2 = L_C$	0,0925	m
Comprimento do ligamento 3	$L_3 = L_D$	0,0840	m
Massa do ligamento 1	m_1	0,1873	kg
Massa do ligamento 2	m_2	0,3264	kg
Massa do ligamento 3	m_3	0,1899	kg
Abscissa do centro de massa do ligamento 1 em {1}	l_{x_1}	0,024983	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 1 em {1}	l_{y_1}	0,015520	m
Abscissa do centro de massa do ligamento 2 em {2}	l_{x_2}	0,073029	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 2 em {2}	l_{y_2}	0,024644	m
Abscissa do centro de massa do ligamento 3 em {3}	l_{x_3}	0,060397	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 3 em {3}	l_{y_3}	-0,000468	m
Momento de inércia de massa z do ligamento 1	I_{zz_1}	0,000311	kg·m ²
Momento de inércia de massa z do ligamento 2	I_{zz_2}	0,003170	kg·m ²
Momento de inércia de massa z do ligamento 3	I_{zz_3}	0,000819	kg·m ²
Ângulo mínimo entre os ligamentos 0 e 1	$r_1\hat{\theta}_{m_1}$	0	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 0 e 1	$r_1\hat{\theta}_{m_1}$	90	°
Ângulo mínimo entre os ligamentos 1 e 2	$r_2\hat{\theta}_{m_2}$	220	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 1 e 2	$r_2\hat{\theta}_{m_2}$	360	°
Ângulo mínimo entre os ligamentos 2 e 3	$r_3\hat{\theta}_{m_3}$	270	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 2 e 3	$r_3\hat{\theta}_{m_3}$	360	°
Distância mínima entre garras	d_{min}	0,0925	m
Distância máxima entre garras	d_{max}	0,1850	m
Distância máxima entre garra em movimento e superfície de andadura	h_{max}	0,0420	m

Fonte: Bernardi (2014).

Tabela 18 – Parâmetros do modelo do robô KA'I yxo para a configuração com G_1 engastada.

Descrição	Notação	Valor	Unidade
Comprimento do ligamento 0	$L_0 = L_D$	0,0840	m
Comprimento do ligamento 1	$L_1 = L_C$	0,0925	m
Comprimento do ligamento 2	$L_2 = L_B$	0,0925	m
Comprimento do ligamento 3	$L_3 = L_A$	0,0840	m
Massa do ligamento 1	m_1	0,3264	kg
Massa do ligamento 2	m_2	0,1873	kg
Massa do ligamento 3	m_3	0,1899	kg
Abcissa do centro de massa do ligamento 1 em {1}	l_{x_1}	0,019471	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 1 em {1}	l_{y_1}	-0,024644	m
Abcissa do centro de massa do ligamento 2 em {2}	l_{x_2}	0,067517	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 2 em {2}	l_{y_2}	-0,015520	m
Abcissa do centro de massa do ligamento 3 em {3}	l_{x_3}	0,060397	m
Ordenada do centro de massa do ligamento 3 em {3}	l_{y_3}	-0,000468	m
Momento de inércia de massa z do ligamento 1	I_{zz_1}	0,001553	kg·m ²
Momento de inércia de massa z do ligamento 2	I_{zz_2}	0,001048	kg·m ²
Momento de inércia de massa z do ligamento 3	I_{zz_3}	0,000819	kg·m ²
Ângulo mínimo entre os ligamentos 0 e 1	$r_1 \check{\phi}_{m_1}$	90	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 0 e 1	$r_1 \hat{\phi}_{m_1}$	180	°
Ângulo mínimo entre os ligamentos 1 e 2	$r_2 \check{\phi}_{m_2}$	0	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 1 e 2	$r_2 \hat{\phi}_{m_2}$	140	°
Ângulo mínimo entre os ligamentos 2 e 3	$r_3 \check{\phi}_{m_3}$	0	°
Ângulo máximo entre os ligamentos 2 e 3	$r_3 \hat{\phi}_{m_3}$	90	°
Distância mínima entre garras	d_{min}	0,0925	m
Distância máxima entre garras	d_{max}	0,1850	m
Distância máxima entre garra em movimento e superfície de andadura	h_{max}	0,0420	m

Fonte: Bernardi (2014).