

YURI CASSIO CAMPBELL BORGES

**COMPLEXIDADE DE ESTADOS QUÂNTICOS: O
PAPEL DO ENTRELAÇAMENTO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

São Paulo
2011

YURI CASSIO CAMPBELL BORGES

**COMPLEXIDADE DE ESTADOS QUÂNTICOS: O
PAPEL DO ENTRELAÇAMENTO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:
José Roberto Castilho Piqueira

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Borges, Yuri Cassio Campbell
Complexidade de Estados Quânticos: O Papel do Entrelaçamento/
Y. C. C. Borges. São Paulo, 2011.
99 p.

Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Telecomunicações e Controle (PTC).

1. Teoria da complexidade 2. Informação Quântica I. Universidade
de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Telecomunicações
e Controle (PTC). II. t.

A meus mestres e àqueles que sempre acreditaram, vocês sabem quem são.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. José Roberto Castilho Piqueira pelo apoio, visão e convicção.

Aos meus pais pelos incondicional esteio e motivação, e ao meu irmão por sempre ter sido um exemplo na luta por seus sonhos.

“dimidium facti qui coepit habet: sapere aude, incipe”

Horace

RESUMO

O papel das medidas de complexidade tem se tornado cada vez mais claro na extensão da compreensão que se tem sobre sistemas complexos. Todavia, apesar do grande número de medidas propostas para capturar tais características em sistemas clássicos, para sistemas quânticos somente vê-se extensões da complexidade algorítmica de Kolmogorov. Assim, propõe-se neste trabalho a extensão de três medidas de complexidade pelo uso do ferramental da teoria da informação quântica para torná-las capazes de compreender a quantificação da complexidade de estados quânticos. Resultados mostram que alguns fenômenos observados em sistemas complexos clássicos estão presentes em estados *bipartite* e *tripartite* de *qubits* e estão intimamente ligados com a presença de entrelaçamento nos mesmos. Tanto comprovação de conceitos já conhecidos como indícios de novos fenômenos foram observados, ambos com possíveis aplicações tecnológicas.

ABSTRACT

The role of complexity measures has become increasingly clear on the extent of understanding we have of complex systems. However, despite the large number of measures proposed to capture these characteristics in classical systems, to quantum systems there are only extensions of the Kolmogorov's algorithmic complexity. Thus, this work proposes the extension of three measures of complexity by using the tools of quantum information theory to make them able to understand the quantification of the complexity of quantum states. Results show that some phenomena observed in classical complex systems are present in bipartite and tripartite states of qubits and are closely linked with the presence of entanglement in them. Both proof of known concepts as signs of new phenomena were observed, with possible technological applications.

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Algoritmos 10

Lista de Abreviaturas e Siglas 11

Lista de Símbolos 12

1 Introdução 14

2 Medidas de Complexidade 19

2.1 SDL & LMC 19

2.2 Estruturas Interagentes 22

2.3 Mecânica Computacional 29

2.3.1 O algoritmo CSSR 31

3 Informação Quântica 42

3.1 Estados quânticos 42

3.1.1 Notação de Dirac 42

3.1.2 3º postulado e o operador densidade 44

3.2 Entrelaçamento 45

3.3	Medindo estados quânticos	47
3.3.1	Ação à distância	48
4	Extensões via Informação Quântica	53
4.1	Quantificadores Quânticos	53
4.2	Amostragem de Estado Quântico	57
4.2.1	Estruturas interagentes	60
4.2.2	Mecânica computacional	62
5	Resultados	65
5.1	Estados quânticos	65
5.2	Complexidades	69
6	Considerações Finais	86
	Referências	92

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Diagrama de bifurcação do mapa logístico.	22
2	Diagrama de bifurcação do mapa logístico aproximado para a região $3,4 < r < 4$ de dobramento de período.	23
3	Complexidade SDL para o mapa logístico.	23
4	Aproximação via Lempel-Ziv e complexidade LMC para o mapa logístico.	24
5	Exemplo de complexidade de estruturas interagentes, retirado de (KAHLE et al., 2009)	29
6	Processo estocástico <i>Golden-Mean</i>	37
7	ϵ -machine do processo <i>Golden-Mean</i>	39
8	ϵ -machine do mapa logístico com $\alpha = 3,7$	40
9	Exemplo de complexidade via mecânica computacional, retirado de (CRUTCHFIELD; YOUNG, 1989)	41
10	Procedimento de amostragem de estado quântico	59
11	AEQ e medida de complexidade de estruturas interagentes . . .	60
12	AEQ + EI para o estado ρ_{W3}	61
13	AEQ e medida de complexidade via mecânica computacional . .	62
14	AEQ + MC para o estado de Werner	63
15	Complexidade Ξ_{11} para a família ρ_W em função do parâmetro de mistura α	69

16	Complexidade $I^{(3)}$ para a família ρ_{eW} em função do parâmetro de mistura α	71
17	Complexidade $I^{(1,2)}$ para a família ρ_{eW} em função do parâmetro de mistura α	72
18	Complexidade $I^{(1,2,3)}$ para a família ρ_{GHZ} em função do parâmetro de mistura α	74
19	Complexidade C_1 em função do parâmetro F da família ϱ_W (5.1) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados	76
20	Taxa entrópica em função do parâmetro F da família ϱ_W (5.1) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados	77
21	Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ϱ_W (5.1) sob AEQ, em círculo os estados entrelaçados e em triângulos, os separáveis	78
22	Complexidade C_1 em função do parâmetro γ da família ρ_W (5.2) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados	79
23	Taxa entrópica em função do parâmetro γ da família ρ_W (5.2) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados	80
24	Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_W (5.2) sob AEQ, em círculo os estados entrelaçados e em triângulos, os separáveis	81

25	Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_{eW} (5.2) sob AEQ	83
26	Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_{GHZ} (5.2) sob AEQ	84

LISTA DE TABELAS

1	Possíveis comportamentos de $\Gamma_{\alpha\beta}$ em função da entropia.	20
2	Ocorrência das palavras de tamanho até L_{\max}	37
3	Probabilidades condicionais dos sufixos para $L = 1$	38
4	Probabilidades condicionais dos sufixos para $L = 2$	38
5	Tabela de transição de estados do AFND.	38

LISTA DE ALGORITMOS

1	Rotina principal do algoritmo CSSR.	35
2	Sub-rotinas do algoritmo CSSR.	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEQ Amostragem de Estado Quântico

AFND Autômato Finito Não-Determinístico

CSSR Algoritmo *Causal-State Splitting Reconstruction*

EI Estruturas Interagentes

LMC Lòpez-ruiz-Mancini-Calbet

MC Mecânica Computacional

SDL Shiner-Davison-Landsberg

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma_{\alpha\beta}$	Complexidade SDL
\mathcal{X}_v	Espaço de configuração do elemento v
\mathcal{X}_V	Espaço de configuração do conjunto de elementos V
$\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$	Espaço das funções de distribuição de probabilidade de \mathcal{X}_V
$D(\cdot \cdot)$	Entropia relativa, divergência Kullback-Leibler
\mathcal{I}	Sub-espaço de $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$
$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$	Família exponencial do sub-espaço \mathcal{I}
\mathcal{I}_k	Espaço de interações contendo funções de distribuição de probabilidades com até k interações
\mathcal{I}_k	Família exponencial de \mathcal{I}_k
$I^{(k)}(P)$	Componente da complexidade de estruturas interagentes que quantifica o grau das correlações de k interações
$T^{(\gamma)}$	Matriz de transição do símbolo γ
\mathbf{T}	Somatório das matrizes de transição de todos os símbolos γ
\mathcal{S}	Conjunto dos estados do autômato
\mathbf{p}	Vetor de probabilidade assintótica dos estados de \mathcal{S}
C_α	Complexidade de ordem- α da mecânica computacional
L_{\max}	Tamanho máximo da história do algoritmo CSSR
\otimes	Produto tensorial

\mathcal{H}	Espaço de Hilbert
$ \cdot\rangle$	Estado quântico puro
ρ, ϱ	Operador densidade, estado quântico misto
$\langle\phi \psi\rangle$	Produto interno entre $ \phi\rangle$ e $ \psi\rangle$
$ \phi\rangle\langle\phi $	Produto externo entre $ \phi\rangle$ e $ \psi\rangle$
tr	Traço
F, γ, α	Parâmetros de controle de mistura de estados quânticos
S_L	Entropia linear
$\tau(\rho)$	<i>tangle</i> do estado ρ
$\Xi_{\alpha\beta}$	Extensão quântica da complexidade SDL

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas duas décadas viu-se o crescente interesse da comunidade científica em quantificar a complexidade de sistemas (GRASSBERGER, 1986a; LLOYD; PAGELS, 1988; BENNET, 1990; GASPARD; WANG, 1993; SAPARIN et al., 1994; LÓPEZ-RUIZ; MANCINI; CALBET, 1995; PINCUS, 1995; ATMANSPACHER; RATH; WIEDENMANN, 1997; SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999; BANDT; POMPE, 2002; TSALLIS, 2002; LAMBERTI et al., 2004; DAVISON; SHINER, 2005; STOOP et al., 2006; PIASECKI; PLASTINO, 2010; ROSSO et al., 2010).

Grande parte dessas abordagens baseiam-se em métodos estatísticos (MARIN; PLASTINO; ROSSO, 2006; ATMANSPACHER; RATH; WIEDENMANN, 1997; Montgomery Jr; SEN, 2007; FELDMAN; CRUTCHFIELD, 1998; ROSSO et al., 2010; ANGULO; ANTOLIN; SEN, 2008; MARTIN; PLASTINO; ROSSO, 2003; SANUDO; LÓPEZ-RUIZ, 2008; MOUSTAKIDIS et al., 2010; LÓPEZ-RUIZ; MANCINI; CALBET, 1995), como também informacionais (BALL; DIAKONOVA; MACKAY, 2010; PROKOPENKO; BOSCHETTI; RYAN, 2007; HAKEN, 2006; CHATZISAVVAS; MOUSTAKIDIS; PANOS, 2005; BATES; SHEPARD, 1993; ZELEVINSKY; HOROI; BROWN, 1995; GELL-MANN; LLOYD, 1996), ou mesmo computacionais (CRUTCHFIELD, 1994; SHALIZI; CRUTCHFIELD, 2001; ELLISON; MAHONEY; CRUTCHFIELD, 2009; STOOP; STOOP; BUNIMOVICH, 2004; CRUTCHFIELD; SHALIZI, 1999; GRASSBERGER, 1986b) para realizar esta quantificação.

Em especial, estas abordagens têm desempenhado papel importante com

o desenvolvimento da *complex systems science* (PROKOPENKO; BOSCHETTI; RYAN, 2007) ao fornecer um instrumento robusto para quantificar aspectos e termos, ainda hoje, muito confusos dentro da mesma. Isto deve-se a constatação que fenômenos de sistemas complexos aparecem no limiar entre o determinismo e a estocasticidade (GROS, 2008; HAKEN, 2006).

O âmbito de aplicação destas abordagens somente é maior que a sua diversidade: de sistemas biológicos, econômicos e sociais (GROS, 2008; VEDRAL, 2006; TSALLIS, 2002; PIQUEIRA; De Mattos; Vasconcelos Neto, 2009; VEDRAL, 2010; HAKEN, 2006; PROKOPENKO; BOSCHETTI; RYAN, 2007; PIQUEIRA, 2009), à física quântica (ANGULO; ANTOLIN; SEN, 2008; CHATZISAVVAS; MOUSTAKIDIS; PANOS, 2005; LÓPEZ-RUIZ; SANUDO, 2009; NAGY; SEN; Montgomery Jr., 2009). Constatase, assim, a robustez e o poder de análise que a abordagem via quantificação de complexidade detém para proporcionar um melhor entendimento sobre a dinâmica destes sistemas. Muitas vezes aproximando sistemas *a priori* bastante distintos ao mostrar que por trás deles há estruturas equivalentes que geram a dinâmica observada. O que torna possível o uso de conhecimentos de um para aprofundar o que se sabe sobre o outro sob uma nova perspectiva.

Além disso, nos últimos anos, surgiu o interesse de utilizar conceitos advindos da extensão moderna da teoria da informação de Shannon, a teoria quântica da informação (VEDRAL, 2006), para constituir novas medidas de complexidade (MORA; BRIEGEL, 2006; BENATTI, 2006; MORA; BRIEGEL, 2005; BENATTI et al., 2006; BENATTI, 2009; MORA; BRIEGEL; KRAUS, 2007). Aproveitando, dessa maneira, características como superposição e entrelaçamento de estados para gerar uma descrição mais abrangente dos sistemas analisados (De Mattos et al., 2007; PIQUEIRA et al., 2007). Visando não somente um maior poder de descritivo para sistemas usuais, como também a aplicação para descrição

de sistemas em que estas características são intrínsecas e fundamentais para uma boa descrição global dos mesmos, sistemas essencialmente quânticos.

Embora já se veja uma extensão *quantum*-informacional de complexidade (ROGERS; VEDRAL; NAGARAJAN, 2008; MORA; BRIEGEL; KRAUS, 2007), esta não possui a generalidade desejada e presente nas abordagens modernas supracitadas, uma vez que estes trabalhos são todos baseados numa extensão quântica da complexidade algorítmica de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1965), ou seja, inexoravelmente apresentarão a mesma característica que a mesma: monotonicidade crescente da desordem (SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999).

O que é indesejável em qualquer abordagem moderna de complexidade, pois o que deseja-se medir é exatamente o nível de organização presente entre o periódico e o aleatório, entre a ordem e a desordem; e não o quão desordenado um sistema é, pois, para esse fim, há inúmeras entropias (TSALLIS, 2002).

Mostrando, dessa maneira, que uma investigação por sobre a construção de uma medida de complexidade que contenha a generalidade e poder descritivo que das medidas de complexidade modernas e, ainda, conceitos de teoria quântica da informação surge como um caminho pouco trilhado. E, considerando o papel decisivo que uma medida de complexidade pode ter na compreensão de sistemas com dinâmicas não triviais, olhar para estados quânticos através das lentes da complexidade pode trazer um novo discernimento sobre como se dá a dinâmica destes sistemas. O que pode gerar implicações práticas bastante proveitosas para áreas que fazem uso destes sistemas, como a computação e telecomunicações quânticas, nas quais ainda há muito a ser feito tecnologicamente. Assim, não somente se torna este problema de importância científica, como também tecnológica.

Dessa forma, propõe-se, neste trabalho, a união de medidas de complexi-

dade bem estabelecidas às nuances quânticas através do uso de ferramentas da teoria da informação quântica para a construção de uma medida de complexidade mais geral, que seja capaz de analisar que efeitos os fenômenos essencialmente quânticos, como o entrelaçamento, têm na complexidade destes sistemas.

Assim, com este objetivo, três foram as medidas de complexidade escolhidas pela sua proximidade à informação quântica, uma estatística, uma informacional e uma computacional. Para que a elas fossem adicionadas ferramentas de informação quântica para que as mesmas pudessem avaliar a complexidade de estados quânticos, todas estão descritas na Seção 2. A primeira delas, uma medida estatística, a complexidade SDL, de Shiner-Davison-Landsberg (SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999), é uma proposta simplista ao problema da complexidade convexa. Construída exatamente para que fosse uma alternativa prática às outras propostas. Neste trabalho, além de uma proposta para quantificar complexidade em estados quânticos, ela também servirá para melhor compreender o porquê que a complexidade de um sistema há de ser uma função convexa da desordem do mesmo. Então, duas medidas de complexidade mais bem elaboradas e matematicamente bem fundamentadas são descritas, a mecânica computacional (CRUTCHFIELD; YOUNG, 1989) e a estruturas interagentes (KAHLE et al., 2009), que usa conceitos informacionais em sua quantificação.

Na Seção 3 são estabelecidos os rudimentos de teoria da informação quântica e dos efeitos e características que podem estar por trás de um estado quântico, os quais o papel se quer avaliar na complexidade destes sistemas. Como também, nesta seção é estabelecido ferramental utilizado nas extensões propostas para cada uma das medidas de complexidade escolhidas.

Estas extensões são descritas na Seção 4, elas consistem no uso de con-

ceitos e procedimentos da teoria quântica da informação para que os estados pudessem ser avaliados através do uso da estrutura de cada uma das medidas de complexidade. Para a medida SDL, os seus termos canônicos de desordem/ordem são modificados de forma a usarem funções de quantificação de desordem aplicáveis a estados quânticos. Já para as duas outras medidas de complexidade, como ambas têm formas próximas de avaliação da complexidade, somente um procedimento é proposto, a Amostragem de Estado Quântico. O qual, através da inserção do observador no sistema, visa transformar descrições de estados quânticos em funções de distribuição de probabilidades que são classicamente tratáveis pela mecânica computacional e pela estruturas interagentes.

Assim, com estas ferramentas disponíveis, na Seção 5 são descritos os tipos de estados que terão suas complexidades avaliadas por pelo menos uma das extensões propostas, como também nesta estão os resultados obtidos e a interpretação destes.

Por fim, na Seção 6, um apanhado geral do que foi objetivado e alcançado no decorrer deste trabalho é sumarizado. De forma a conter principais resultados sobre a quantificação de complexidade nos sistemas propostos e o que cada resultado pode significar para sistemas práticos, como comunicação com o uso de estados quânticos.

2 MEDIDAS DE COMPLEXIDADE

2.1 SDL & LMC

A complexidade SDL é uma função expressa em termos da desordem do sistema. É sabido (SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999) que a complexidade de um sistema crescer é indesejável como resultado somente do aumento em seu tamanho, ou seja dos possíveis estados alcançáveis por este.

Para evitar sérios problemas de modelagem como a diferença entre a complexidade uma definição mais precisa de que outra menos precisa advinda somente da diferença em seu número de estados, à complexidade é dada a característica das funções físicas termodinâmicas, como temperatura ou pressão.

Assim, na complexidade SDL a desordem é definida como

$$\Delta = \frac{S}{S_{\max}}, \quad (2.1)$$

onde S é a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon, e S_{\max} , seu valor máximo. Devido a não-extensividade de Δ , S pode ser trocada pela entropia de Shannon

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i, \quad (2.2)$$

onde N é o número de possíveis estados, e p_i é a probabilidade de ocorrência do i -ésimo estado. Dada a normalização de Δ para atingir a não-extensividade,

pode-se definir ordem como

$$\Omega = 1 - \Delta. \quad (2.3)$$

Dada estas duas quantidades, refinadas da entropia do sistema (grau de desordem), SHINER; DAVISON; LANDSBERG (1999) define a medida de complexidade SDL como

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Delta^\alpha \Omega^\beta, \quad (2.4)$$

onde α e β são os parâmetros de medida que controlam a importância dada a desordem e a ordem, respectivamente. Conseqüentemente, a medida SDL é capaz de expressar três distintas quantidades, como mostradas na Tabela 1.

Tipo	α	β	$\Gamma_{\alpha\beta} \times \Delta$	Complexidade
<i>I</i>	> 0	$= 0$	monotonicamente crescente	Algorítmica, entrópica
<i>II</i>	$= 0$	> 0	monotonicamente decrescente	Auto-organização
<i>III</i>	> 0	> 0	convexa	Profundidade Termodinâmica e Lógica

Tabela 1: Possíveis comportamentos de $\Gamma_{\alpha\beta}$ em função da entropia.

A complexidade LMC é baseada na composição de duas quantidades, informação H e “desequilíbrio” D . A primeira é proporcional a entropia de Shannon (2.2) por uma constante K . A segunda é a distância no espaço de probabilidades da distribuição de probabilidades observada e o cenário equiprovável como segue

$$D = \sum_{i=1}^N (p_i - 1/N)^2,$$

definindo a medida de complexidade LMC não normalizada como

$$C = HD = - \left(K \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N (p_j - 1/N)^2 \right).$$

Neste ponto, a propriedade convexa da complexidade torna-se clara, a

noção intuitiva que a complexidade deve ser nula tanto para um gás ideal quanto para um cristal, tendo um máximo entre os dois extremos, é mantida pela complexidade LMC como segue.

Para um gás ideal, todos os estados acessíveis seriam igualmente prováveis; portanto, o *desequilíbrio* é mínimo. Assim, mesmo que seu conteúdo informacional H seja máximo, a complexidade do sistema é zero. Também, para um cristal, um pequeno conjunto de estados acessíveis prevalecem sobre os outros, tais que o *desequilíbrio* is alto, mas a informação H é pequena, resultando numa baixa complexidade. Qualquer outro sistema deve permanecer entre estes dois limites.

Para normalizar a medida LMC, deve-se considerar o máximo do conteúdo informacional possível $H_{\max} = -K \log_2 N$, obtendo, assim, a desordem Δ da medida SDL.

Além disso, a relação entre ambas vai além, pode ser mostrado (SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999) que a LMC normalizada ($\bar{C} = \Delta D$) (LÓPEZ-RUIZ; MANCINI; CALBET, 1995) é uma aproximação de primeira ordem de Γ_{11} . Portanto, devem apresentar um comportamento convexo similar.

Uma maneira de vislumbrar os méritos destas abordagens convexas é compará-las com a complexidade algorítmica padrão. Apesar de uma conhecida dificuldade desta ser sua incomputabilidade, uma alternativa muito comum é o uso de métodos de compressão para aproximar o valor da complexidade de Kolmogorov, sendo o algoritmo de Lempel-Ziv (LEMPER; ZIV, 1976) um dos métodos mais reconhecidos.

A maneira mais comum de se testar medidas de complexidade é através do mapa Logístico, $x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$ considerado como um sistema a ter sua complexidade calculada como um função do parâmetro α . Assim, a Fig. 4

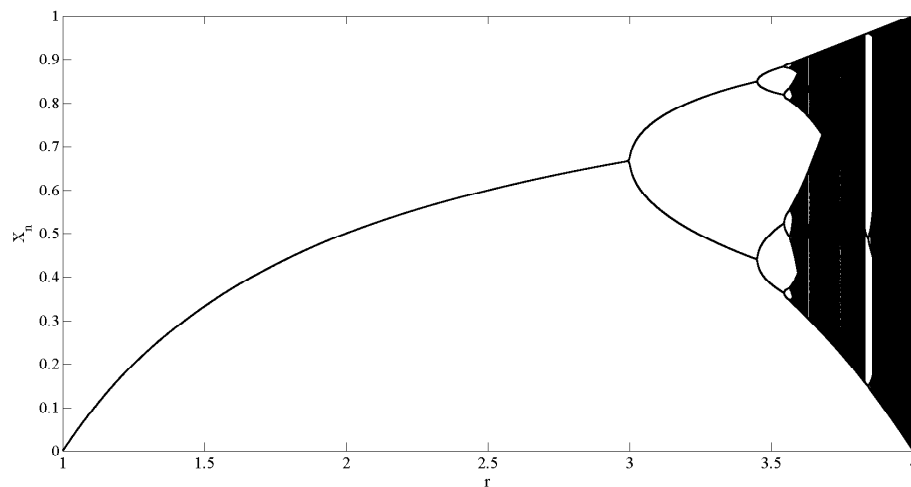


Figura 1: Diagrama de bifurcação do mapa logístico.

mostra os valores destas duas abordagens para complexidade na região de α onde ocorre o dobramento de período.

Fica claro que a aproximação de Lempel-Ziv cresce monotonicamente enquanto o indeterminismo do sistema aumenta. Ao mesmo tempo, a complexidade LMC mostra sua convexidade encontrando um máximo no mesmo intervalo mas sendo nula em ambos extremos, indicando a presença de estrutura na dinâmica do sistema.

2.2 Estruturas Interagentes

Proposta por KAHLE et al. (2009), é uma abordagem essencialmente voltada à quantificação do grau de interação entre distintas partes de um sistema, de forma que quanto mais agentes contribuindo para gerar interações de ordem mais elevada, mais complexo um sistema torna-se.

Simplificadamente, a medida de complexidade de estruturas interagentes (KAHLE et al., 2009), faz a amostragem da função de distribuição P gerada pela dinâmica simbólica do sistema observado, o qual é composto por várias

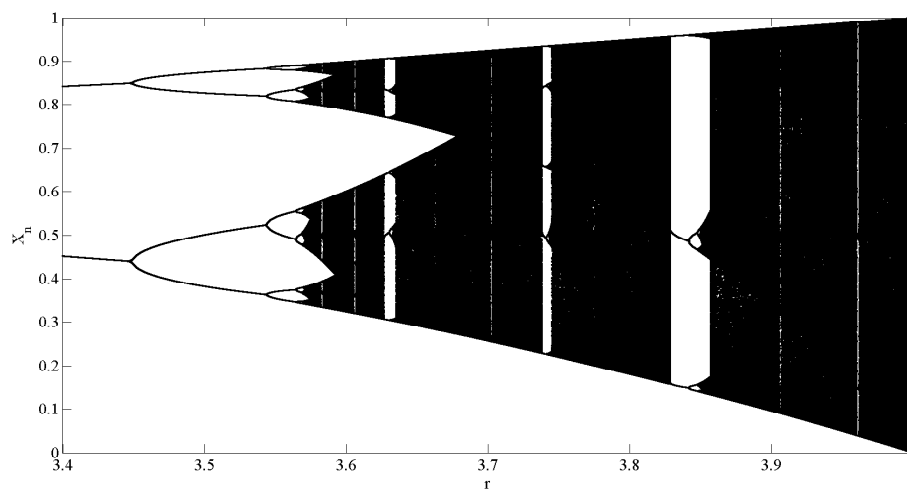


Figura 2: Diagrama de bifurcação do mapa logístico aproximado para a região $3,4 < r < 4$ de dobramento de período.

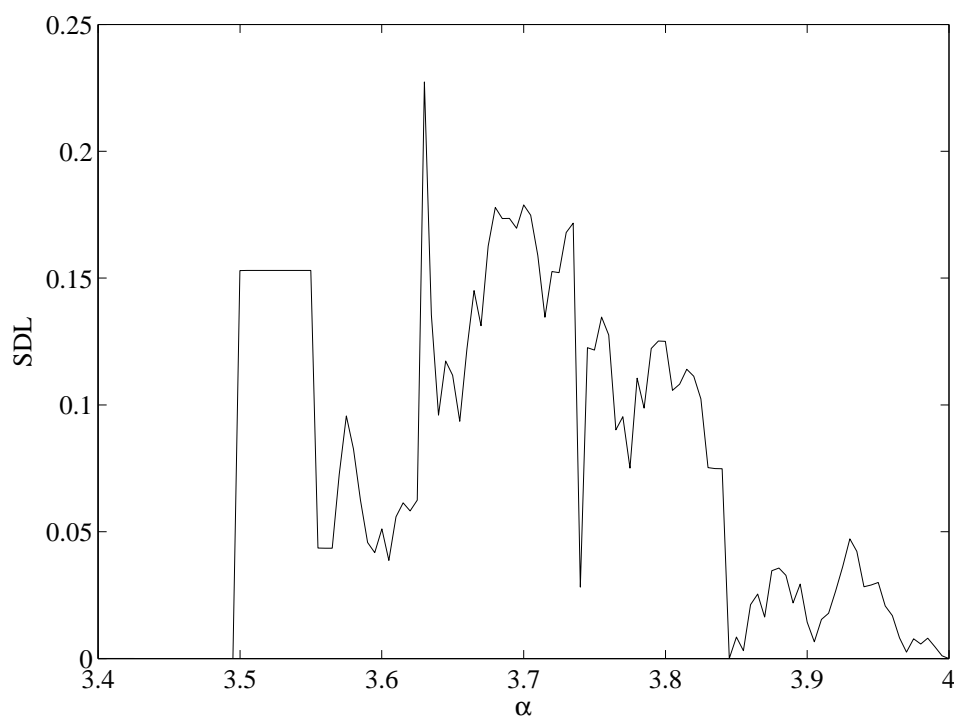


Figura 3: Complexidade SDL para o mapa logístico.

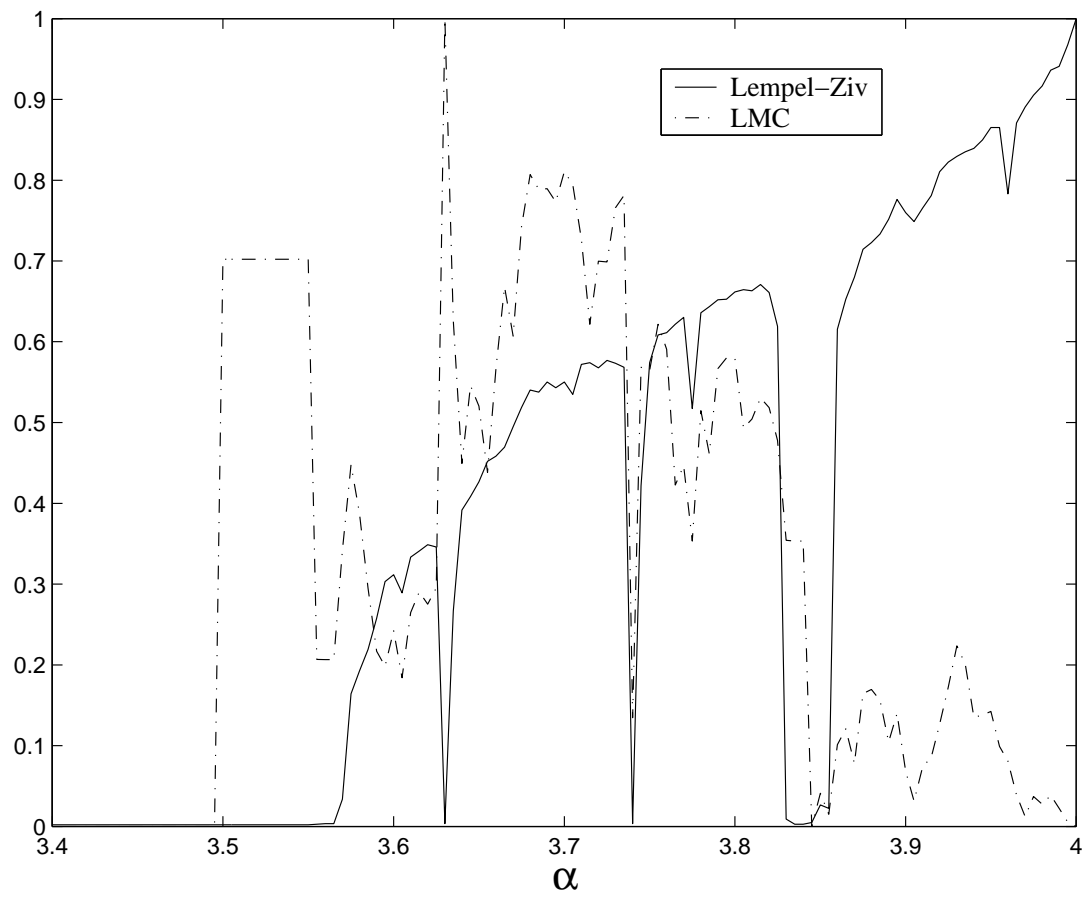


Figura 4: Aproximação via Lempel-Ziv e complexidade LMC para o mapa logístico.

estruturas. Esta função descreve a probabilidade de encontrar o sistema em alguma de suas configurações, por exemplo $(0, 0, 1)$ no caso de um sistema de três estruturas cada uma com uma dinâmica simbólica binária.

Usando alguns conceitos de geometria informacional, pode-se computar a diferença entre a distribuição completa P e alguma Q na qual não há correlação entre as estruturas, ou seja, como se não houvesse acoplamento. Porém é possível fazer o mesmo procedimento de uma forma composicional. Assim, do mesmo jeito, calcula-se a diferença entre P e uma função que somente é construída por interações, ou correlações, dois a dois e etc. Portanto, é possível estimar o quanto há de correlações em cada um dos níveis de interações através de cada uma dessas diferenças.

Para definir formalmente esta abordagem, faz-se necessário introduzir alguns conceitos de geometria informacional necessários para a descrição da mesma, dentre eles, famílias exponenciais e a divergência de Kullback-Leibler (KL).

Seja uma configuração formada por elementos (estruturas), e v o índice nesta configuração pertencente ao conjunto $V := \{1, \dots, N\}$. Para cada índice v , há um espaço de configurações finito \mathcal{X}_v . Então, para obter o espaço de todas as configurações possíveis, constrói-se o espaço produto de forma tal que $\mathcal{X}_V := \times_{v \in V} \mathcal{X}_v$.

Assim é possível enxergar funções reais no conjunto \mathcal{X}_V como elementos de um espaço vetorial $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|} := \{f : \mathcal{X}_V \rightarrow \mathbb{R}\}$. Dessa forma, pode-se considerar distribuições de probabilidade no conjunto \mathcal{X}_V também como elementos de $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|}$. Seja

$$\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)} := \left\{ P \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|} : P(x) \geq 0, \sum_{x \in \mathcal{X}_V} P(x) = 1 \right\}$$

as distribuições de probabilidade no conjunto \mathcal{X}_V .

Para duas distribuições $P, Q \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$, pode-se definir uma espécie de semi-métrica neste espaço de distribuições

$$D(P\|Q) := \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}_V} P(x) \log_2 \frac{P(x)}{Q(x)}, & \text{supp}(P) \subseteq \text{supp}(Q) \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

conhecida como distância *Kullback-Leibler*, ou entropia relativa. É uma semi-métrica pois não é simétrica mas $D(P\|Q) = 0 \Leftrightarrow P \equiv Q$.

Pode-se, ainda, para mais facilmente tratar as funções de distribuição, definir neste espaço famílias de medidas de probabilidade que formam subvariedades em $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$. A mais conhecida abordagem para definir tais medidas são as famílias exponenciais, que surgem a partir da seguinte operação

$$\exp : \mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}_V), f \mapsto \frac{e^f}{\sum_{x \in \mathcal{X}_V} e^f},$$

que mapeia elementos do espaço $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|}$ no conjunto de distribuições de probabilidade através da exponenciação seguida de normalização componente a componente. Com o uso das famílias exponenciais, a mudança de coordenadas trazida pela sua estrutura de subvariedade torna o problema de tratar das funções de distribuição em $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$ mais simples.

Seja \mathcal{I} um sub-espaço linear de $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|}$, define-se a família exponencial $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$ como a imagem do sub-espaço \mathcal{I} através do mapeamento exponencial.

Para quantificar graus de interações entre os elementos da configuração em questão usa-se um sub-espaços lineares em $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{X}_V)}$, os espaços de espaços de interação. Para qualquer $A \subseteq V$, pode-se separar o espaço em duas partes, escrevendo qualquer $x \in \mathcal{X}_V$ como $x = (x_A, x_{V/A})$, ou seja, em função dos pontos que fazem parte de A e dos que não fazem. Assim, o espaço \mathcal{I}_A é definido como o sub-espaço de funções que depende somente das configura-

ções dentro de A

$$\mathcal{I}_A := \left\{ f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}_V|} : f(x_A, x_{V/A}) = f((x_A, x'_{V/A}) \forall x_A \in \mathcal{X}_A, \forall x_{V/A}, x'_{V/A} \in \mathcal{X}_{V/A} \right\}.$$

Com isto estabelecido, pode-se usar esta definição para, ao definir o conjunto A de maneira apropriada, construir espaços em que as funções de distribuição dependam somente de k elementos do arranjo

$$\mathcal{I}_k := \text{span}_{A \subseteq V, |A|=k} \mathcal{I}_A.$$

Associado com cada um dos espaços de interação \mathcal{I}_k , $k = 1, \dots, N$, há uma família exponencial $\mathcal{E}_k = \text{exp}(\mathcal{I}_k)$. Vê-se que os espaços de interação estão incluídos uns nos outros $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{I}_N$, e portanto as famílias exponenciais também $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}_N$.

Famílias exponenciais têm propriedades estatísticas interessantes, além das geométricas, principalmente no que tange a métodos de inferência. Nesta aplicação, dada um função de distribuição de probabilidades \hat{P} inferida de uma série de observações a um sistema físico, deseja-se saber o quão distante esta função de distribuição está de cada uma das \mathcal{E}_k famílias exponenciais, para então quantificar a complexidade de estruturas interagentes. Portanto, deseja-se minimizar a distância $D(\hat{P}||Q)$ para Q numa dada família exponencial \mathcal{E}

$$D(\hat{P}||\mathcal{E}) := \inf_{Q \in \mathcal{E}} D(\hat{P}||Q),$$

pode-se provar que esta minimização é equivalente a estimação *maximum-likelihood* de \hat{P} na família \mathcal{E} .

Para realizar esta estimação *maximum-likelihood* em famílias exponenciais há inúmeros algoritmos, o utilizado neste trabalho foi o mesmo usado por KAHLE et al. (2009), o algoritmo de adequação proporcional iterativa (CSISZÁR; SHIELDS, 2004). Já que o modo de realizar esta minimização não influencia no

resultado da medida de complexidade e como esta escolha pode ser facilmente substituída por outro procedimento para este cálculo de *maximum-likelihood* ou mesmo para minimização direta da entropia relativa, este algoritmo é aqui somente citado, para uma exposição completa vide (CSISZÁR; SHIELDS, 2004).

Então, pode-se definir a complexidade de estruturas interagentes como uma medida de valor vetorial $I(P) := (I^{(1)}(P), \dots, I^{(k)}(P))$ da seguinte forma

$$I^{(k)}(P) := D(P||\mathcal{E}_{k-1}) - D(P||\mathcal{E}_k),$$

para $k = 1, \dots, N$; já que esta distância é contínua para todo $P \in \overline{\mathcal{P}(X_V)}$.

Um exemplo de aplicação desta medida, a qual originalmente foi pensada para aplicação em redes de sistemas dinâmicos, ou sistemas dinâmicos interconectados; vem do trabalho original de KAHLE et al. (2009), um grafo totalmente conectado com 10 nós de mapas da tenda descrito como

$$x_i(t+1) = \epsilon \sum_j \frac{1}{k_i} g_{ij} f(x_j(t)) + (1 - \epsilon) f(x_i(t))$$

onde k_i é o número de vizinhos do nó i , g_{ij} é a conectividade, ϵ o parâmetro de acoplamento e

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & , \text{ se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Considerando a dinâmica simbólica desse sistema construída com $x^* = 1/2$

$$s_i(x_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq x_i \leq 1/2 \\ 1 & , \text{ se } 1/2 \leq x_i \leq 1 \end{cases},$$

surge a distribuição $P(s)$ estacionária de $s = (s_1, s_2, \dots, s_{10})$ após $t \gg 0$.

Então calcula-se $I^{(1 \dots 10)}$. Na Figura 5 encontra-se os valores de $I^{(1)}$ (a), $I^{(2)}$

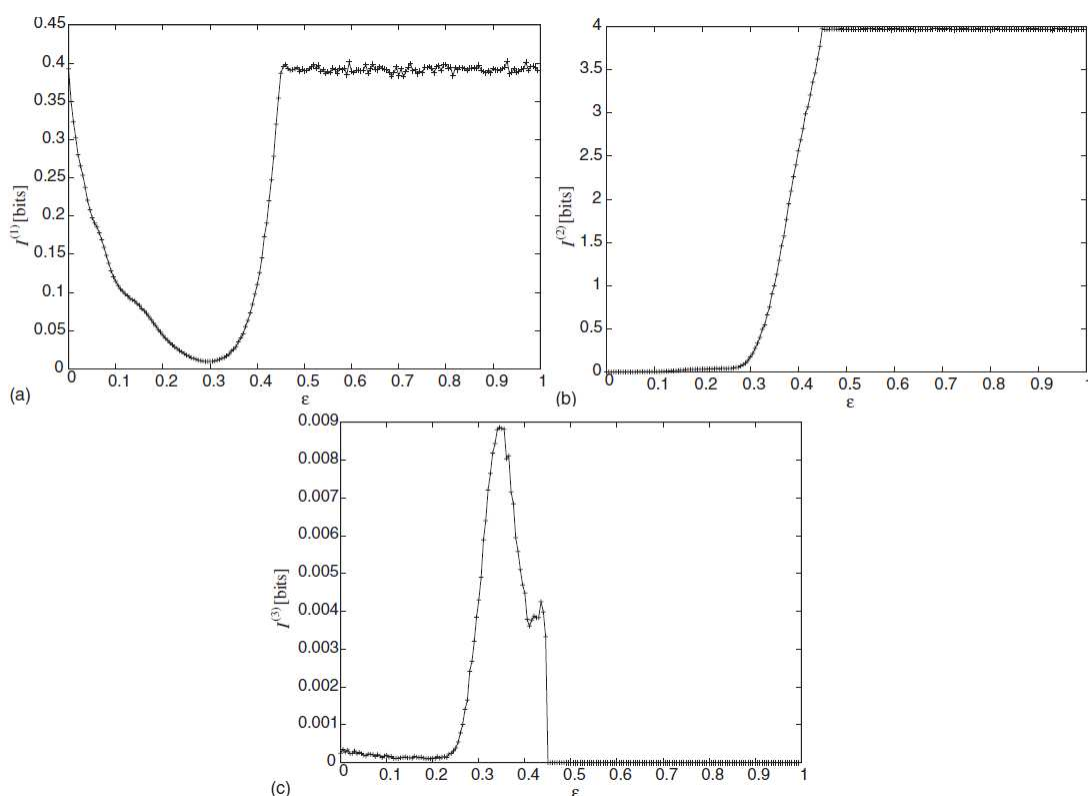


Figura 5: Exemplo de complexidade de estruturas interagentes, retirado de (KAHLE et al., 2009)

(b) e $I^{(3)}$ (c), os demais tem comportamento próximo a $I^{(3)}$ (KAHLE et al., 2009). É possível ver que no limiar na sincronização caótica ocorre um pico nas interações de ordem superior no sistema. E que devido ao caráter caótico, em sincronização completa ainda há $I^{(1)}$, uma aleatoriedade intrínseca. Ainda, que $I^{(2)}$ é crescente devido este ser uma generalização da multi-informação (KAHLE et al., 2009), ou seja, dinâmicas de sincronização são totalmente capturadas por $I^{(2)}$, e isso força $I^{(n)} = 0, n > 2$.

2.3 Mecânica Computacional

Originalmente proposta por CRUTCHFIELD; YOUNG (1989) como uma nova abordagem para medir complexidade de sistemas dinâmicos, e em seguida estendida como um novo campo de pesquisa; a mecânica computacional ba-

seia-se principalmente na construção de um autômato que mimetize o comportamento de um sistema dinâmico, ou seja, que produza *strings* do mesmo *ensemble* que o sistema original, de forma que não é possível distingui-los. Assim, a medida de complexidade também é fruto deste processo.

O primeiro passo para a construção do autômato, é a extração da dinâmica simbólica do sistema dinâmico através da definição de uma partição geradora M_ϵ do espaço de estados, que consiste de células de tamanho ϵ que são amostradas a cada τ unidades de tempo.

Portanto, usando este instrumento $\{M_\epsilon, \tau\}$, uma sequência de estados $\{\mathbf{x}\}$ são mapeados em uma sequência de símbolos $\{\gamma, \gamma \in A\}$, onde $A = \{0, \dots, k - 1\}$ que é o alfabeto para um $k \approx \epsilon^{-m_{bed}}$ número de elementos de partição, no qual m_{bed} é a dimensão embarcada do conjunto de dados.

De fato, desde a proposição do método original, outras abordagens foram propostas com o objetivo de extrair este autômato a partir somente da *string* observada a partir de uma longa medição utilizando o instrumento $\{M_\epsilon, \tau\}$. Uma delas, muito bem estabelecida, é o algoritmo *Causal-State Splitting Reconstruction* proposto por (SHALIZI; KLINKNER, 2004), descrito na seção 2.3.1, pois a partir de seu funcionamento pode-se extrair algumas inferências sobre o que está sendo medido.

Assim, após a extração do autômato, este é descrito por um conjunto de matrizes de transição $\{T^{(\gamma)} : \gamma \in A\}$, uma para cada símbolo do alfabeto. As quais são definidas por

$$T^{(\gamma)} \triangleq \{p_{\gamma, ij}\},$$

onde $p_{\gamma, ij}$ é a probabilidade de, estando no estado i , ir para o estado j emitindo o símbolo γ . É possível, então, definir-se a matriz de conexão probabilística

da seguinte forma

$$\mathbf{T} = \sum_{\{\gamma \in A\}} T^{(\gamma)}$$

. Pode-se provar que o maior auto-valor λ de \mathbf{T} é positivo (CRUTCHFIELD; YOUNG, 1989), e seu auto-vetor associado $\mathbf{p} = \{p_s : s \in \mathcal{S}\}$ tem elementos não negativos e representa as probabilidades assintóticas dos estados, onde \mathcal{S} é o conjunto de estados do autômato.

A seguir, por fim, define-se a complexidade de ordem- α do grafo como a entropia de Renyi de \mathbf{p}

$$C_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s^\alpha, \quad (2.5)$$

a qual se torna a entropia de Shannon de \mathbf{p} quando $\alpha \rightarrow 1$

$$C_1 = - \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \log p_s. \quad (2.6)$$

Dessa maneira, é possível ver que esta complexidade C_α é intensiva (TSALLIS, 2002), ou seja, é invariante a escala, assim, leva em conta somente a flutuação de informação entre os estados do autômato. Porém, para o caso em que a complexidade se à entropia de Shannon, esta quantidade é extensiva e, portanto, o cálculo quantizará a complexidade não somente a partir da flutuação de informação entre estados mas também da quantidade destes. Resultando processos mais complexos em autômatos maiores e mais distribuídos, probabilisticamente.

2.3.1 O algoritmo CSSR

A base deste algoritmo de reconstrução da ϵ -machine (o autômato) é fundamentada em preditores não-lineares ótimos de séries temporais discretas.

Ou seja, dado uma sequência de variáveis aleatórias X_t tiradas de um alfabeto discreto \mathcal{A} ; deseja-se então, dado o passado $X_{-\infty}^t$ extrair deste o máximo

de informação sobre X_{t+1}^∞ . Portanto, o objetivo do preditor é maximizar a informação mútua entre o passado e o futuro. Porém, para tanto deve-se utilizar uma função estatística de previsão η sobre o passado $X_{-\infty}^t$, assim, deve-se maximizar a quantidade $I[\eta(X_{-\infty}^t); X_{t+1}^\infty]$, onde o máximo é $I[X_{-\infty}^t; X_{t+1}^\infty]$, aquelas η que atingem este ótimo são chamadas de suficientes. Pode-se provar (SHALIZI; KLINKNER, 2004) que isso implica que η é suficiente se e somente se $\eta(x^-) = \eta(y^-)$ implica em $P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = x^-) = P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = y^-)$. E, ainda, a teoria de decisão prova que predição ótima requer somente uma função estatística preditiva suficiente conhecida.

Para a definição a seguir, deve-se primeiro introduzir o conceito-chave por trás desta abordagem, que são os *estados causais*. Sejam duas histórias x^- e y^- , estas são equivalentes se $P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = x^-) = P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = y^-)$, a informação preditiva contida em ambas é igual. Portanto, para agrupar histórias equivalentes, constroem-se classes de equivalência, por exemplo x^- e y^- são da mesma classe $[x^-]$, os estados do autômato serão estas classes. Seja, então, uma função ε , a qual leva histórias em suas respectivas classes de equivalência $\varepsilon(x^-) \equiv [x^-]$, com $[x^-] = \{y^- : P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = y^-) = P(X_{t+1}^\infty | X_{-\infty}^t = x^-)\}$. Dessa forma, os possíveis valores para ε são denominados os estados causais, cada um destes corresponde a uma distribuição futura distinta. Assim, os estados do autômato são tanto classes de equivalência como uma função de distribuição condicional para o futuro.

Assim, é natural definir que o estado no tempo t é $S_t = \varepsilon(X_{-\infty}^t)$. Portanto, já que $\varepsilon(\cdot)$ mapeia histórias em estados causais que possuem uma distribuição futura, claramente $\varepsilon(\cdot)$ é uma função estatística preditiva suficiente.

Além desta propriedade preditiva gerada pelos estados causais, eles também são responsáveis por alguns resultados interessantes: $\{S_t\}$ é um processo de Markov, existe uma função T tal que $S_{t+1} = T(S_t, X_{t+1})$, e ainda que

se pode representar o processo X como uma função aleatória dos estados causais, portanto, o processo admite representação em termos de cadeias de Markov escondidas. Outro destes, é que entropia de Shannon da distribuição assintótica dos estados $\{S_t\}$ é a quantidade mínima de informação para predição ótima, a qual equivale a quantidade de informação retida pelo processo sobre seu próprio passado (SHALIZI; CRUTCHFIELD, 2001).

O algoritmo CSSR (*Causal-State Splitting Reconstruction*) baseia-se em que η é suficiente para um passo adiante se $I[X_{t+1}; \eta(X_{-\infty}^t)] = I[X_{t+1}; X_{-\infty}^t]$. Ainda, se isto é verdade, é fácil ver que ela é possível calculá-la recursivamente, tornando-a, assim, suficiente para o futuro. Portanto, como ε possui estas características, é suficiente apenas buscá-la entre as funções suficientes um passo a frente e recursivas.

O procedimento CSSR estima o modelo de Markov escondido de um sequência essencialmente começando assumindo que o processo é independente e a sequência é identicamente distribuída, com somente um estado causal. E somente adiciona novos estados quando testes estatísticos mostram que a configuração atual não é suficiente para compreender a dinâmica estocástica do sistema.

Seja uma sequência \bar{x} de tamanho N formada por um alfabeto \mathcal{A} de tamanho k , o objetivo então é realizar uma estimativa $\hat{\varepsilon}$ da função estatística suficiente ε . Esta estimativa é feita através da construção de um conjunto de estados \mathcal{S} no qual cada membro representa um conjunto de *strings*.

Então, a hipótese nula é que o processo é de Markov na base dos estados \mathcal{S} :

$$P(X_t | X_{t-L}^{t-1} = ax_{t-L+1}^{t-1}) = P(X_t | \hat{S} = \hat{\varepsilon}(x_{t-L+1}^{t-1}))$$

isto para todo $a \in \mathcal{A}$. Isto quer dizer que a adição de mais um símbolo a

na história sendo analisada x_{t-L+1}^{t-1} não muda a distribuição de probabilidades para a próxima observação, ou seja, a adição deste símbolo ainda mantém o processo no mesmo estado $\hat{S} = \hat{\varepsilon}(x_{t-L+1}^{t-1})$.

Entretanto, a rejeição desta hipótese pode ainda não implicar na falta de estruturas em \mathcal{S} para compreender a dinâmica, mas sim numa hipótese alternativa restrita

$$P(X_t | X_{t-L}^{t-1} = ax_{t-L+1}^{t-1}) = P(X_t | \hat{S} = s^*)$$

onde s^* é algum estado em $\mathcal{S} - \{\hat{\varepsilon}(x_{t-L+1}^{t-1})\}$. Se esta hipótese passar no teste estatístico, então a história é associada ao estado s^* , se existir mais de um estado para o qual a hipótese é aceita, então escolhe-se aquele em que há a menor diferença entre $\hat{P}(X_t | \hat{S} = s^*)$ e $\hat{P}(X_t | X_{t-L}^{t-1} = ax_{t-L+1}^{t-1})$. Porém, se a hipótese for rejeitada, então um novo estado é criado com o sufixo ax_{t-L+1}^{t-1} .

A rotina principal do algoritmo CSSR consta no Algoritmo 1, e suas sub-rotinas no Algoritmo 2. O CSSR como um todo pode ser compreendido em três fases, a primeira delas é a inicialização de \mathcal{S} com um único estado contendo o sufixo nulo \emptyset , e o tamanho da janela L iniciado em 0.

A segunda etapa do algoritmo, ao final da qual $\hat{\varepsilon}$ já é aproximadamente suficiente um passo a frente, testa iterativamente várias versões da hipótese nula, com o tamanho da palavra L aumentando sucessivamente até L_{\max} . Então, a terceira fase torna $\hat{\varepsilon}$ recursivamente computável, ao tornar o autômato finito não-determinístico em um determinístico. Para tanto, estados transientes são eliminados e os restantes são partidos até que somente existam transições determinísticas.

É possível ver que para manter a característica $\hat{\varepsilon}$ de ser suficiente um passo a frente e, ainda, torná-la recursiva é equivalente a construção de uma função de transição $T(s, b)$ tal que $\hat{\varepsilon}(x^-b) = T(s, b)$, $\forall x^- \in s$, ou seja, que para

```

CSSR( $\mathcal{A}, \bar{x}, L_{\max}, \alpha$ ) início
/* Inicialização
 $\mathcal{S} \leftarrow \{\{\emptyset\}\}$ 
 $L \leftarrow 0$ 

/* Suficiência
enquanto  $L \leq L_{\max}$  faça
  para cada  $s \in \mathcal{S}$  faça
    estime  $\hat{P}(X_t | \hat{S} = s)$ 
    para cada  $x \in s$  faça
      para cada  $a \in \mathcal{A}$  faça
        estime  $p \leftarrow \hat{P}(X_t | X_{t-L}^{t-1} = ax)$ 
        TESTE( $\mathcal{S}, p, ax, s, \alpha$ )
       $L \leftarrow L + 1$ 

/* Recursão
Remove estados transientes de  $\mathcal{S}$ 
recursivo  $\leftarrow$  falso
enquanto  $\neg$ recursivo faça
  recursivo  $\leftarrow$  verdadeiro
  para cada  $s \in \mathcal{S}$  faça
    para cada  $b \in \mathcal{A}$  faça
       $x_0 \leftarrow$  primeira  $x \in s$ 
       $T(s, b) \leftarrow \hat{\varepsilon}(x_0b)$ 
      para cada  $x \in s, x \neq x_0$  faça
        se  $\hat{\varepsilon}(xb) \neq T(s, b)$  então
          crie um novo estado  $s' \in \mathcal{S}$ 
           $T(s', b) \leftarrow \hat{\varepsilon}(xb)$ 
          para cada  $y \in s$  tal que  $\hat{\varepsilon}(yb) = \hat{\varepsilon}(xb)$  faça
            MOVA( $y, s, s'$ )
          recursivo  $\leftarrow$  falso

```

Algoritmo 1: Rotina principal do algoritmo CSSR.


```

TESTE( $\mathcal{S}$ ,  $p$ ,  $ax$ ,  $s$ ,  $\alpha$ )
início
  se Hipótese nula passar no teste então
    |  $s \leftarrow ax \cup s$ 
  senão se Hipótese alternativa restrita passar no teste então
    | MOVA( $ax, s, s^*$ )
  senão
    | crie novo estado  $s' \in \mathcal{S}$ 
    | MOVA( $ax, s, s'$ )

MOVA( $x$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ )
início
  |  $s_1 \leftarrow s_1 - \{x\}$ 
  | re-estime  $\widehat{P}(X_t | \hat{\mathcal{S}} = s_1)$ 
  |  $s_2 \leftarrow s_2 \cup x$ 
  | re-estime  $\widehat{P}(X_t | \hat{\mathcal{S}} = s_2)$ 

```

Algoritmo 2: Sub-rotinas do algoritmo CSSR.

um estado s e um símbolo b haja somente uma transição definida, atingindo assim o determinismo. Portanto, é checado para cada estado s se a condição é válida, se $\hat{\varepsilon}(x^-b)$ é a mesma para todo x^- . Se para algum par estado-símbolo isto não ocorrer, o estado é partido em outros estados em que isto ocorre, então, o procedimento é repetido, pois podem haver transições modificadas. Ao final deste procedimento somente há um conjunto de estados com transições determinísticas entre eles, e nenhum estado transiente.

Seja o processo estocástico *Golden-Mean* (GM), com seu autômato definido na Figura 6. Este processo define uma linguagem de alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, na qual nunca ocorrem dois 0's consecutivos.

Considerando $L_{\max} = 2$ e $\alpha = 0,01$, e simulando o processo GM durante 10^4 passos para gerar a *string* de entrada para o algoritmo CSSR; o fluxo do algoritmo dá-se como segue. Na Tabela 2 estão as frequências relativas levantadas das palavras obtidas com uma janela de tamanho $L_{\max} + 1 = 3$ passada pela *string* de entrada, ainda vê-se que, de fato, não há palavras

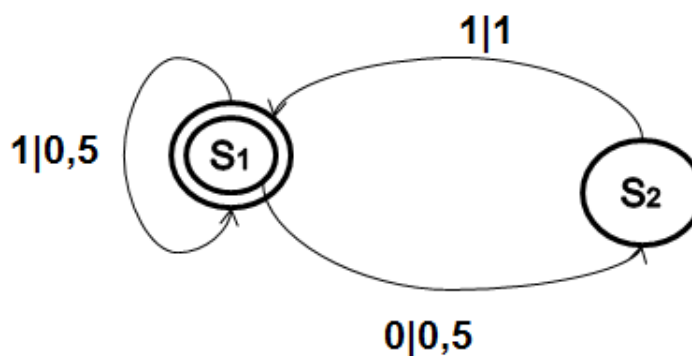


Figura 6: Processo estocástico *Golden-Mean*

$L = 0$	N	$L = 1$	N	$L = 2$	N
0	3319	00	0	000	0
1	6681	01	3319	001	0
		10	3319	010	1634
		11	3361	011	1684
				100	0
				101	3319
				110	1684
				111	1677

Tabela 2: Ocorrência das palavras de tamanho até L_{\max} .

com zeros consecutivos.

No início (*inicialização*) do algoritmo cria-se o primeiro estado $A_{L=0}$ que contém o sufixo nulo $*\sigma$ e que, através das estimativas de palavras, produz 1's com probabilidade $3319/10000 = 0,3319$. Na segunda fase do algoritmo, *suficiência*, vê-se que este sufixo nulo possui dois filhos os sufixos $*0$ e $*1$.

Então, para $L = 1$, a probabilidade de produzir um 1, condicionada ao sufixo $*0$ é $P(1|*0) \approx 3319/3319 = 1$, ou seja, difere estatisticamente das distribuições para o sufixo nulo. Utilizando o mesmo procedimento, vê-se que a probabilidade de produzir um 1 condicionada ao sufixo $*1$ é $P(1|*1) \approx 3361/6681 \approx 0,5031$, novamente diferindo estatisticamente da distribuição para o sufixo nulo.

Dessa maneira, há a necessidade de criar novos estados $B_{L=1}$ e $C_{L=1}$ res-

Estado-pai	* σ	$P(1 *\sigma)$	Adicionado a
$A_{L=0}$	*0	$3319/3319 = 1$	$C_{L=1}$
$= \{*\sigma\}$	*1	$3361/6681 \approx 0,5031$	$B_{L=1}$

Tabela 3: Probabilidades condicionais dos sufixos para $L = 1$.

Estado-pai	* σ	$P(1 *\sigma)$	Adicionado a
$C_{L=1}$	*00	— ^a	—
$= \{\underline{*0}\}$	*10	$1684/3319 \approx 0,5074$	$B_{L=1}$
$B_{L=1}$	*01	$3319/3319 = 1$	$C_{L=1}$
$= \{\underline{*1}\}$	*11	$1677/3361 \approx 0,4990$	$B_{L=1}$

^aParadoxo Borel-KolmogorovTabela 4: Probabilidades condicionais dos sufixos para $L = 2$.

pectivamente contendo o sufixo *1 e o *0, para que esta diferença estatística seja reproduzida no modelo. Procedimento esquematizado na Tabela 3. Agora, com novos estados, a situação de \mathcal{S} é a seguinte: $A_{L=0} = \{*\sigma\}$, $B_{L=1} = \{*1\}$ e $C_{L=1} = \{*0\}$.

A seguir, em $L = 2$, realizando a mesma estimativa de probabilidades condicionais, a Tabela 4 mostra as probabilidades condicionais e, então, dependendo da diferença estatística entre estas e as já existentes, para onde os sufixos foram adicionados. Ao fim deste estágio, tem-se: $A_{L=0} = \{*\sigma\}$, $B_{L=1} = \{*1, *10, *11\}$ e $C_{L=1} = \{*0, *01\}$.

Ao final desta etapa do algoritmo, é possível enxergar \mathcal{S} como um autômato finito não-determinístico (AFND), onde pode-se ver que para chegar em B pode-se partir de A , B ou C com um 1 e, em C , somente de A ou de B com um 0. Entretanto, não se pode chegar ao estado A através dos outros. Estas transições estão resumidas na Tabela 5.

	A	B	C
A	-	1	0
B	-	1	0
C	-	1	-

Tabela 5: Tabela de transição de estados do AFND.

Dessa forma, entra-se na etapa de *recursão* do algoritmo, onde o objetivo é transformar o AFND em um autômato determinístico ao retirar os estados transitientes e partir (*split*) os estados com transições não determinísticas. Através da análise da Tabela 5, vê-se que o estado *A* é transitiente, pois uma vez que se sai dele, não é possível o retorno, logo, este é removido. Os estados restantes, porém, são recursivos e, ainda, somente têm transições determinísticas, assim, não há necessidade de parti-los. Resultando, assim, num autômato final, resultado do algoritmo CSSR apresentado na Figura 7.

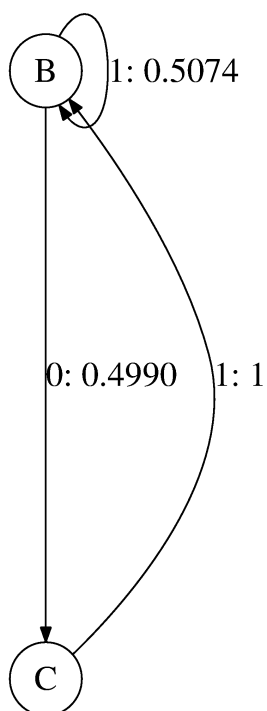


Figura 7: ϵ -machine do processo *Golden-Mean*.

Como exemplo de aplicação considera-se o mapa logístico com dinâmica simbólica

$$s_n(x_n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 1 & , \text{ se } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases} .$$

A Figura 8 mostra a construção do autômato para $\alpha = 3, 7$, e a Figura 9, em função da taxa entrópica do sistema normalizada, de (CRUTCHFIELD; YOUNG, 1989). É possível ver que uma variação suave na desorganização do sistema, sua taxa entrópica, revela um comportamento descontínuo em sua complexidade, interpretado por CRUTCHFIELD; YOUNG (1989) como uma transição de fase devido a semelhança com o fenômeno termodinâmico. E nesta transição ocorre máxima complexidade, neste exemplo, atingida na cascata de dobramento de período do mapa Logístico; uma clara referência às diferenças dinâmicas que ocorrem antes e depois deste limiar.

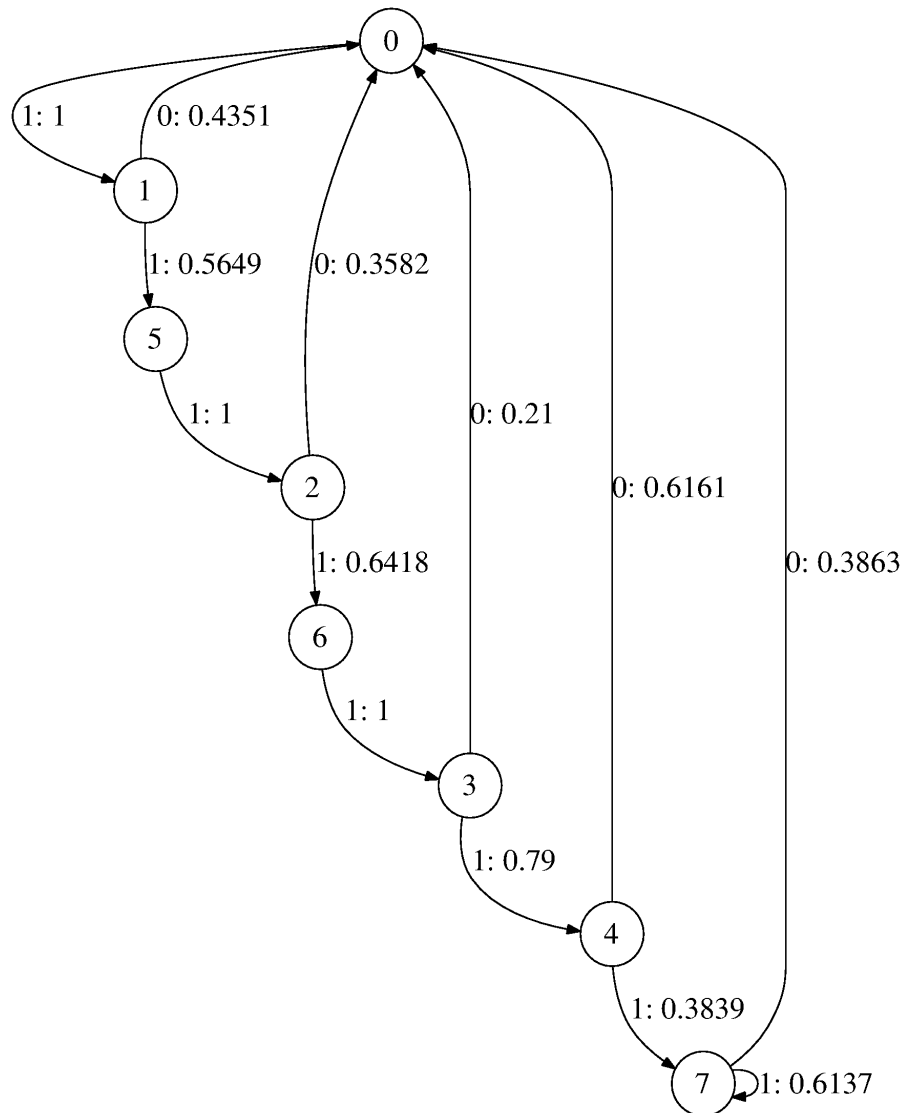


Figura 8: ϵ -machine do mapa logístico com $\alpha = 3, 7$.

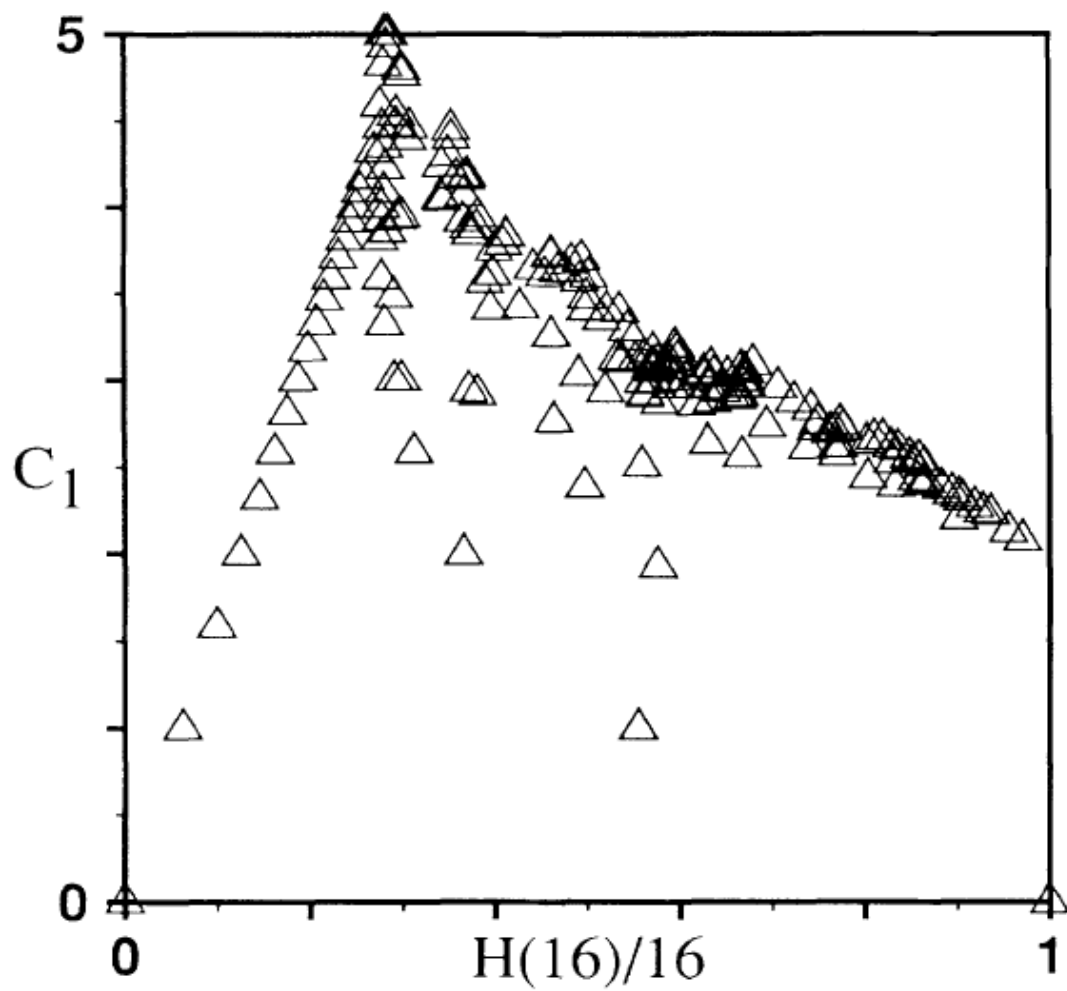


Figura 9: Exemplo de complexidade via mecânica computacional, retirado de (CRUTCHFIELD; YOUNG, 1989)

3 INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Esta seção visa clarificar o ferramental matemático necessário para entender a descrição e operação de estados quânticos em sua abordagem informacional, deixando de lado sempre que possível os detalhes *quantum*-mecânicos.

3.1 Estados quânticos

3.1.1 Notação de Dirac

Para a representação de estados quânticos, uma ferramenta muito utilizada e conveniente é a notação de Dirac, que visa representar sistemas físicos quânticos de forma vetorial.

Na notação de Dirac há *bras* ($\langle \cdot |$) e *kets* ($|\cdot\rangle$), os últimos podem ser representados por vetores-coluna.

Enquanto em uma notação vetorial tem-se $\mathbf{p} = ax + by$, na notação de Dirac o mesmo elemento é descrito como $|p\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$. Em termos cartesianos $x, y \in \mathbb{R}$, porém em mecânica quântica $x, y \in \mathbb{C}$. Dessa forma, um estado quântico pode ser representado sob a forma

$$|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle,$$

onde ambos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; ou mesmo $\psi = (\alpha, \beta)$.

Enquanto que um *ket* pode ser considerado um vetor-coluna, já um *bra* é, por vezes, reconhecido como o complexo conjugado transposto deste vetor-coluna. Logo, se um estado é definido como

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

então o *bra* correspondente $\langle\phi|$ é

$$\psi^\dagger = \left(\alpha^* \quad \beta^* \right),$$

onde α^* denota o complexo conjugado, e ψ^\dagger o conjugado transposto.

É muito comum em informação quântica o uso de produtos internos entre um estado $|\psi\rangle$ e outro complexo conjugado transposto $\langle\phi|$, assim, usando a notação de Dirac, denota-se o produto interno por $\langle\phi|\psi\rangle$. E sua operação é dada da mesma forma vetorial, ou de forma algébrica se a ortogonalidade $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$ e $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$ for considerada. Ainda, se for usada esta notação para um mesmo estado, obtém-se uma quantidade chamada de norma do estado quântico; pois sempre é considerado que o estado já foi normalizado $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ou seja, a probabilidade dos eventos possíveis devem se conservar.

Além de operações vetoriais, também é possível realizar operações matriciais com a notação de Dirac, que serão vistas na seção 3.3.1.

Apesar da notação de um estado quântico de duas dimensões $|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$ ser mais geral. Em informação quântica é mais convencional a escolha de uma base ortogonal e normalizada para a representação destes estados, e a representação de tal base é feita através da chamada base computacional $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$.

Dessa forma, define-se o bloco construtivo da informação quântica, a peça

mais simples de informação que contém efeitos quânticos, um bit quântico, o *qubit*

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

3.1.2 3º postulado e o operador densidade

O 3º postulado da mecânica quântica atesta que um estado quântico pode ser medido através do uso de um conjunto de projetores ortogonais. Se este conjunto coincidir com a base na qual um estado $|\psi\rangle$ é descrito, e.g. computacional, então, ao ser medido, este estado colapsará para o estado $|i\rangle$ com probabilidade $|\langle i|\psi\rangle|^2$.

Surgindo, deste procedimento, uma função de distribuição de probabilidades dependente tanto do estado como do aparato de medida, por isso diz-se que o observador interfere no estado ao medi-lo.

Uma maneira natural de visualizar esta função de distribuição é através do operador densidade de um estado, que é uma forma matricial de utilizar a notação de Dirac. Em uma distribuição de probabilidade em que um estado $|i\rangle$ ocorre com probabilidade p_i esta pode ser escrita por

$$\varrho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|.$$

Assim, seja o estado $|\Psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle$, ao ser medido pelo conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, dará origem à distribuição

$$|\Psi\rangle \langle\Psi| = \varrho_\Psi = \sum_i \alpha_i^2 |i\rangle \langle i|.$$

Ainda, através do operador densidade é possível descrever misturas de estados quânticos, seja qualquer mistura de estados, esta pode ser descrita pelo mesmo operador densidade ϱ . E, neste caso, pode ser interpretado como

uma função de distribuição de probabilidades exatamente como $P(X = i) = p_i$, apesar de uma ser de carácter quântico e outra clássica, é impossível distinguir as duas (VEDRAL, 2006).

E assim como uma função de distribuição de probabilidade, é possível calcular o grau de desordem em um estado misto, ou seja, o quão este estado está distante de um estado puro e mais próximo de um estado formado somente por ruído branco, para tanto, normalmente utiliza-se a entropia de von Neumann (NEUMANN, 1996).

3.2 Entrelaçamento

Entrelaçamento, ou *entanglement*, entre sistemas quânticos é uma característica única em que dois ou mais sistemas quânticos exibem correlações além das possíveis explicar com teorias clássicas.

Segundo o primeiro postulado da mecânica quântica, estados destes sistemas ($|\cdot\rangle$) são representados em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Portanto, quando quer-se analisar o estado conjunto de dois (ou mais) sistemas quânticos deve-se obter o produto tensorial \otimes destes. Assim, obtém-se uma descrição completa do sistema, como um todo.

Portanto, sejam dois estados $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\psi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, o estado composto, em que ambos são representados é

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle),$$

em notação compacta

$$= \alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\delta|11\rangle.$$

Dessa maneira, é normal achar que a partir de quaisquer dois estados

$|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}^2$ é possível descrever um estado composto no espaço $\mathcal{H}^{2 \otimes 2 = 4}$ e vice-versa. Porém, nem todos os estados em \mathcal{H}^4 podem ser representados através de um produto tensorial. É esta dificuldade que representa formalmente o fenômeno do entrelaçamento entre estados quânticos, neste caso, entre *qubits*.

Um exemplo simples desta impossibilidade é se for considerado o estado de Bell $|\phi^+\rangle = |00\rangle + |11\rangle = \alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\delta|11\rangle$, vê-se que para haver dois estados em \mathcal{H}^2 de forma que o produto tensorial destes seja o estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ é necessário $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$ e $\beta\gamma = \alpha\delta = 0$, claramente, uma impossibilidade. Mostrando que este estado não pode ser desmembrado em dois outros em \mathcal{H}^2 .

Tanto para estados puros $|\cdot\rangle$ quanto para estados mistos ρ , esta é a ideia que permeia o fenômeno de entrelaçamento. Contudo, para estados puros, ou é possível escrevê-lo como o produto de dois estados ou não, então, dois estados estão entrelaçados ou não estão. Já para estados mistos, há um grau de entrelaçamento, ou seja, entre um estado em máximo entrelaçamento, como $|\Phi^+\rangle$, e um onde não há entrelaçamento como $|\Phi\rangle \otimes |\Psi\rangle$; há diversas configurações possíveis, que geram graus de entrelaçamento distintos.

É comum definir estados entrelaçados com base nos estados de Bell

$$|\Phi_{AB}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle \pm |1_A 1_B\rangle),$$

$$|\Psi_{AB}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_B\rangle \pm |1_A 0_B\rangle)$$

os quais são estados maximamente entrelaçados, pois são estados puros no espaço-produto $\mathcal{H}^{2 \otimes 2}$ que não podem ser separados.

Para estados mistos, é comum construir uma mistura entre algum(ns) dos estados de Bell com ruído branco. Por exemplo, uma família de estados mis-

tos pode ser representada sob a forma

$$\rho_W = \frac{1-\gamma}{4} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \gamma |\Phi+\rangle \langle \Phi+|,$$

onde $\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2$ equivale a um estado formado por ruído branco, pois sua distribuição de probabilidades é uniforme em sua base, o fator γ controla como se dá a mistura entre este estado e o estado de Bell $|\Phi+\rangle$. Para $\gamma > 1/3$, é um estado entrelaçado (MUNRO et al., 2001), *i.e.* não pode ser separado em um produto de estados no \mathcal{H}^2 . Todavia, somente para $\gamma = 1$ o estado converge para o estado de Bell, assim, para $1/3 < \gamma < 1$ este estado está entrelaçado, porém, não de maneira máxima.

3.3 Medindo estados quânticos

Na seção 3.1.2, foi dito que um estado quântico pode ser medido utilizando um conjunto de projetores ortogonais de modo geral se $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_k\rangle$ é um conjunto de estados ortogonais, estes podem ser usados para medir um outro estado $|\psi\rangle$, e a probabilidade com que $|\psi\rangle$ colapsará em $|\phi_k\rangle$ é $|\langle \phi_k | \psi \rangle|^2$.

Utilizando o mesmo princípio com operadores densidade, pode-se re-escrever este conjunto em forma de operador $P_i = |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$. Se a condição de completude for satisfeita

$$\sum_i P_i^\dagger P_i = \mathbb{I},$$

então esta operação é chamada de CP-map e, ao ser aplicada a um estado $|\Psi\rangle$ obtém-se o resultado i com probabilidade

$$P(i) = \langle \psi | P_i^\dagger P_i | \psi \rangle = \text{tr} \left(P_i | \psi \rangle \langle \psi | P_i^\dagger \right),$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ é a operação de traço. Se i for o resultado da medida, o sistema é

então deixado no estado

$$|\phi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{P(i)}}$$

ou, em notação de operador densidade

$$\rho' = \frac{P_i \rho P_i^\dagger}{\text{tr}(P_i^\dagger P_i \rho)}.$$

De fato, não há a necessidade de ortogonalidade para P_i (VEDRAL, 2006), porém, será suficiente para a presente análise.

3.3.1 Ação à distância

Apesar da não separabilidade caracterizar matematicamente o fenômeno do entrelaçamento, o que de fato observa-se quando se lida com estados entrelaçados é que a medição em um deles afeta irreversivelmente seu irmão de entrelace.

Tecnicamente, o resultado observado quando a operação de medição é feita em um deles afeta a função de distribuição de probabilidades que observar-se-á no(s) outro(s) estado(s), sucessivamente (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Por exemplo, considere o aparato de medida em \mathcal{H}^4 formado pelos operadores

$$P_{0_A} = |0_A\rangle\langle 0_A| \otimes \mathbb{I}_B$$

$$P_{1_A} = |1_A\rangle\langle 1_A| \otimes \mathbb{I}_B$$

$$P_{0_B} = |0_B\rangle\langle 0_B| \otimes \mathbb{I}_A$$

$$P_{1_B} = |1_B\rangle\langle 1_B| \otimes \mathbb{I}_A$$

aplicados sucessivamente aos subsistemas do estado de Bell

$$|\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle),$$

obtém-se, então, como $P(0_A)$

$$\begin{aligned}
 P(0_A) &= \langle \Phi_{AB}^+ | P_{0_A}^\dagger P_{0_A} | \Phi_{AB} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\langle 00 | + \langle 11 |) | 00 \rangle \langle 00 | (| 00 \rangle + | 11 \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} (\langle 00 | 00 \rangle + \langle 00 | 00 \rangle) \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $P(0_A) = 1/2$, como esperado; analogamente, $P(1_A) = P(0_B) = P(1_B) = 1/2$. Isto ocorre pois está-se considerando que a medida realizada não é sucessiva, ou seja, o estado não foi alterado. Porém, se for considerado o efeito da medida e também que o resultado da primeira medida fora $|0_A\rangle$, após esta medida o sistema encontra-se no estado

$$\frac{P_{0_A} | \Phi^+ \rangle}{\sqrt{P(0_A)}} = \frac{1}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} | 00 \rangle \langle 00 | (| 00 \rangle + | 11 \rangle) = | 00 \rangle.$$

Assim, pode-se observar que o sistema foi afetado pela primeira medida de forma a mudar sua distribuição seguinte para $P(1_A) = P(1_B) = 0$ e $P(0_B) = 1$. Dessa maneira, definindo com certeza o resultado da segunda medida, sem mesmo esta precisar ser realizada. Resultado inverso ocorreria se o resultado da primeira medida fosse $|1_A\rangle$, ou seja, a saída da segunda medida seria $|1_B\rangle$ com probabilidade 1.

Dado que este efeito é instantâneo, ou seja, imediatamente após a primeira medida o sistema torna-se o sistema modificado, e ainda que, se após a interação responsável pelo entrelaçamento os dois sistemas sejam separados, o efeito será o mesmo. Por isso, a decisão de Einstein de chamar o efeito de ação fantasmagórica à distância, ou do original *spukhafte Fernwirkung* (EINSTEIN, 1971).

Porém, para estados mistos, representados por operadores densidade, a situação não é tão direta. Medições nestes estados, quando entrelaçados, também têm efeito similar aos estados puros, contudo, o quanto o sis-

tema como um todo está entrelaçado afeta a severidade com que o fenômeno ocorre. Dessa forma, para estes estados, medir um dos subsistemas afetará o outro, mas não de forma a definir completamente o resultado da medida no(s) demais, salvo quando há entrelaçamento máximo, assim como nos estados puros.

Como exemplo, faz-se o mesmo procedimento de medição utilizando o mesmo conjunto de projetores P_* para o estado de Werner (VEDRAL, 2006)

$$\rho_W = \rho_{AB} = F |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + \frac{1-F}{3} (|\Psi^+\rangle \langle \Psi^+| + |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-|),$$

onde F é o parâmetro que controla como se dá a mistura. Define-se, novamente, que o resultado da primeira medida sobre o sistema A é $|0_A\rangle$, então, deve-se calcular o estado do sistema logo após a medição

$$\rho_B^{0_A} = \text{tr}_A (P_{0_A} \rho_{AB} P_{0_A}^\dagger) / \text{tr}_{AB} (P_{0_A} \rho_{AB} P_{0_A}^\dagger).$$

Primeiro calcula-se o resultado do projetor P_{0_A} sobre o sistema conjunto

$$P_{0_A} \rho_{AB} P_{0_A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-F}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2F}{6} & \frac{1-4F}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1-4F}{6} & \frac{1+2F}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-F}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-F}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+2F}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então, este resultado é trazido para a notação padrão de Dirac

$$P_{0_A} \rho_{AB} P_{0_A}^\dagger = \frac{1-F}{3} |0_A\rangle \langle 0_A| \otimes |0_B\rangle \langle 0_B| + \frac{1+2F}{6} |0_A\rangle \langle 0_A| \otimes |1_B\rangle \langle 1_B|,$$

para que a operação de traço parcial $\text{tr}_A(\cdot)$ (traço aplicado somente ao sub-sis-

tema) possa retirar do estado o sistema A , deixando somente o que é relativo ao sistema B

$$\rho_B^{0_A} = \left(\frac{1-F}{3} \text{tr}(|0_A\rangle\langle 0_A|) \otimes |0_B\rangle\langle 0_B| + \frac{1+2F}{6} \text{tr}(|0_A\rangle\langle 0_A|) \otimes |1_B\rangle\langle 1_B| \right) / (1/2),$$

assim, resultando no estado final somente do sistema B após a medição em A com resultado $|0_A\rangle$

$$\rho_B^{0_A} = \frac{2-2F}{3} |0_B\rangle\langle 0_B| + \frac{1+2F}{3} |1_B\rangle\langle 1_B|.$$

Ou seja, gradualmente, com o aumento de F até a unidade, mais definido torna-se o resultado da segunda medida realizada no sistema B . Similarmemente, para um resultado $|1_A\rangle$ na primeira medida o sistema imediatamente depois é

$$\rho_B^{1_A} = \frac{1+2F}{3} |0_B\rangle\langle 0_B| + \frac{2-2F}{3} |1_B\rangle\langle 1_B|,$$

tornando também o resultado da segunda medida sobre o sistema B mais certa conforme $F \rightarrow 1$.

Este é o efeito prático ocasionado pelo entrelaçamento gradual presente somente em estados mistos, a troca de função de distribuição de probabilidade para medidas sucessivas sob estados entrelaçados, favorecendo paulatinamente um determinado resultado até este tornar-se um evento certo.

Todavia, há um limiar para que este efeito de favorecimento de eventos seja de fato advindo de traços unicamente quânticos, ou seja, que esteja ligado a não separabilidade do estado. Como não é o escopo desta abordagem uma discussão sobre quantificação e detecção (testemunha) de entrelaçamento, basta ressaltar que para este estado de Werner, ele somente é inseparável, ou seja, entrelaçado, para $F > 1/2$.

Ainda, é importante ressaltar que esta correlação entre medidas sucessi-

vas é o conceito essencial para a construção de uma medida de complexidade para estados quânticos. Pois, quando há pouca ou nenhuma correlação, um dado sistema está mais próximo da distribuição uniforme, logo, há baixa complexidade, e quando há correlações em demasia, neste há pouca diversidade, levando a uma dinâmica igualmente superficial a do equilíbrio termodinâmico.

4 EXTENSÕES VIA INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Deseja-se, como método de abordagem da quantificação da complexidade de sistemas quânticos, a utilização de extensões de medidas já propostas conhecidas ao enquadramento das particularidades que um sistema quântico possui, como superposição e entrelaçamento. Ou seja, a utilização de alguma estrutura de medida de complexidade já proposta e adicionar a ela ferramental de informação quântica suficiente para a análise de estados quânticos.

Dentre inúmeras medidas já propostas, as que mais se assemelham ao paradigma da teoria da informação quântica são aquelas baseadas em métodos estatísticos e informacional, que operam sobre as funções de distribuição de probabilidade amostradas, e a computacional, que também o faz mas para a criação de um autômato que reproduza o ensemble dinâmico-simbólico amostrado. Assim, as propostas extensões para sistemas quânticos podem dar-se de forma mais intuitiva e, também, tornando a tarefa de unir tais campos mais factível, já que a utilização de técnicas similares de ambos podem ser de valia para alcançar o objetivo proposto.

4.1 Quantificadores Quânticos

Das medidas estatísticas de complexidade, duas são as mais expressivas devido sua popularidade e reconhecimento, em parte pela facilidade de seu cálculo e relação próxima a medidas mais difíceis de computar, são a Shi-

ner–Davison–Langsberg(SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999) (SDL) e a López-Ruiz–Mancini–Calbet(LÓPEZ-RUIZ; MANCINI; CALBET, 1995) (LMC); ambas abordagens construtivistas à noção convexa de complexidade.

Para trazer este conceito construtivista para aplicá-lo a um estado quântico é necessário, primeiramente, analisar estados quânticos mistos sob um olhar estatístico, ou seja, quantificar a desorganização neste tipo de sistema usando quantificadores quânticos.

Para tanto, nas abordagens SDL e LMC a entropia de Shannon é utilizada, porém, para estados quânticos não há como realizar esta aplicação tão diretamente. Portanto, a utilização de uma ferramenta análoga à entropia de Shannon mas com a vantagem de aplicar-se a estados quânticos é imprescindível.

A candidata mais óbvia fornecida pela teoria quântica da informação é justamente a generalização da entropia de Shannon para sistemas quânticos, a entropia de von Neumann(NEUMANN, 1996). Contudo, a entropia de von Neumann necessita que o operador densidade que descreve o estado seja diagonalizado para seu cálculo, dessa forma, uma alternativa mais simples na quantificação da desordem nestes sistemas é o uso da entropia linear(PETERS; WEI; KWIAT, 2004; WEI et al., 2003; MUNRO et al., 2001), que em um espaço de Hilbert \mathcal{H}^4 é definida como

$$S_L = \frac{4}{3} \left(1 - \text{tr}(\rho^2)\right), \quad (4.1)$$

onde ρ é o operador densidade analisado e tr é o traço. A entropia linear é unitária para um estado maximamente misturado, e zero para estados puros, e mesmo assim não há necessidade de normalização. Contudo, é importante ressaltar que ambas entropias, linear e de von Neumann, não têm uma relação um-a-um, ou seja, há estados que têm uma única S_L apesar de diferentes

entropias de von Neumann, e vice-versa(WEI et al., 2003).

De início, já seria possível arranjar este índice de desordem nos mesmos padrões da complexidade SDL e então a aferição da complexidade de um sistema quântico se tornaria possível, todavia, um fato que chama atenção é de que nenhuma destas entropias é sensível à presença de entrelaçamento nestes estados mistos.

Assim, a utilização somente desta quantidade levaria a análises semelhantes sistemas profundamente distintos, um entrelaçado e outro separável, se ambos obtivessem as mesmas entropias lineares.

Logo, opta-se pela utilização não de somente um quantificador de desordem no sistema, mas também pela utilização de um quantificador de entrelaçamento, o qual aja da mesma forma que a entropia linear, gerando um valor unitário para um estado maximamente entrelaçado e zero para um separável.

Entretanto, a escolha de um quantificador de entrelaçamento, *a priori*, não se mostra uma tarefa trivial, mesmo dentro da comunidade científica onde este é tema de estudo não há nem uma preferência nem uma prova de que quaisquer das medidas já propostas para estados *bipartite* (de duas partes) de *qubits* têm vantagens ou desvantagens uma sobre as outras(PLENIO; VIRMANI, 2005).

Dessa forma, a escolha fica a critério da relação entre a quantidade já escolhida para quantificar o grau da mistura e o grau de entrelaçamento. Portanto, dado que a entropia linear fora escolhida, a medida de entrelaçamento que tem comportamento mais suave para este caso em relação à primeira, é o *tangle*

$$\tau(\rho) \equiv C(\rho)^2,$$

onde C é uma conhecida quantidade com a qual pode-se construir formas

fechadas das medidas de entrelaçamento, especialmente para o caso *bipartite* de *qubits*, definida como

$$C(\varrho) = \max \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\},$$

onde $\lambda_{1,\dots,4}$ são os auto-valores da matriz $\varrho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\varrho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ em ordem não-crescente, σ_y é uma matriz de *spin* de Pauli, \otimes é o produto tensorial e $*$, o complexo conjugado.

Logo, constrói-se a abordagem estatística inspirada na complexidade SDL definindo a desordem do sistema como

$$\delta = \sqrt{S_L(\varrho) [1 - \tau(\varrho)]},$$

e então a ordem de forma complementar $\omega = 1 - \delta$, logo, define-se a complexidade proposta como

$$\Xi_{\alpha\beta} = \delta^\alpha \omega^\beta, \quad (4.2)$$

onde α e β são os pesos dado à desordem e a ordem, respectivamente, os quais devem ser sintonizados de acordo com a análise desejada.

A escolha do uso do quantificador de entrelaçamento como um termo complementar na desordem do sistema deve-se ao principal efeito do máximo entrelaçamento, a definição com certeza da segunda medida no sistema após saber o resultado da primeira, ou seja, o entrelaçamento age como uma força de ordem no sistema, evitando a aleatoriedade demasiada. Dessa maneira, é necessário realizar uma ponderação entre ambas quantidades, por isso, como a própria complexidade se estrutura de forma multiplicativa, torna-se uma média geométrica entre a entropia linear e o quantificador complementar de entrelaçamento a escolha mais intuitiva neste caso.

Deve ser notado neste caso que a medida de complexidade proposta $\Xi_{\alpha\beta}$ aplica-se somente a um estado *bipartite* de *qubits* devido a escolha da entropia

linear no espaço \mathcal{H}^4 e também o *tangle* como quantificador de entrelaçamento. Todavia, a entropia linear possui uma forma geral para \mathcal{H}^d , $d \in \mathbb{N}$ (NIELSEN; CHUANG, 2000)

$$S_L = \frac{d}{d-1} (1 - \text{tr}(\rho^2)),$$

mas o *tangle* neste caso aplica-se somente a um estado *bipartite* de *qubits*. Assim, para acessar estados de maior dimensão deve-se utilizar alguma alternativa para quantificar o entrelaçamento, a entropia relativa de entrelaçamento (VEDRAL, 2002) é uma delas e pode ser aplicada em estados com mais sub-sistemas com estados de maior dimensão, *qudits*. Todavia, devido a dificuldade de cálculo da entropia relativa de entrelaçamento, quando houver opção por uma quantidade mais facilmente computável a escolha pela mesma é recomendável.

Portanto, através da troca por um quantificador de entrelaçamento mais geral pode-se adaptar δ e portanto $\Xi_{\alpha\beta}$ para englobar estados mais gerais, *n-partite* de *qudits*.

4.2 Amostragem de Estado Quântico

Para utilizar esta abordagem de complexidade, fez-se necessário utilizar um método análogo ao conhecido Tomografia de Estado Quântico (*Quantum State Tomography*) em informação quântica experimental para levantar as distribuições de probabilidades que governam os resultados de medidas (observações) nos estados quânticos.

Em informação quântica experimental há a produção de um estado conhecido, manipulação, e então medida do estado. Dessa forma inicia-se o processo com um estado conhecido mas perde-se esta descrição quântica durante o experimento. Sendo necessário ao fim medir o estado para verifi-

car suas propriedades, ou para confirmar confirmar previsões teóricas ou para avaliar novos efeitos.

Portanto, como há este componente probabilístico intrínseco à teoria quântica, faz-se necessário uma série de medidas no mesmo sistema para que se possa estimar qual estado que está sendo medido. Pois dessas medidas é que surgirão as funções de distribuição de probabilidades. Todavia, o observador torna-se parte inseparável do sistema neste momento, dado que a escolha da base em que se realiza a medida no estado quântico, ou seja, a escolha de quais operadores serão utilizados para a medida afetará a função de distribuição observada.

Contudo a escolha trivial de uma medida projetiva com operadores ortogonais nos auto-estados do sistema constitui a forma mais eficiente de extrair informação sobre o estado (VEDRAL, 2006). Em outras palavras, o uso deste tipo de medida gera funções de distribuição que contém mais informação sobre a natureza do estado. Tornando-se a maneira clássica mais eficaz de representação destes estados.

Outra característica deste processo que é explorada nesta abordagem é a tratabilidade clássica destas funções de distribuição de probabilidades. Isso quer dizer que é possível aplicar as abordagens já propostas para medir complexidade do sistema em cima desta representação de estados quânticos.

Logo, para uma formalização deste procedimento, definido acima, de *tradução* de estados quânticos a funções de distribuição, define-se o procedimento Amostragem de Estado Quântico (AEQ) descrito na Figura 10. Nesta figura é representada de maneira sucinta esta mudança de paradigma de análise dos estados quânticos através da adição do observador no sistema de posse de um conjunto de operadores de medidas, que são os observáveis do sistema.

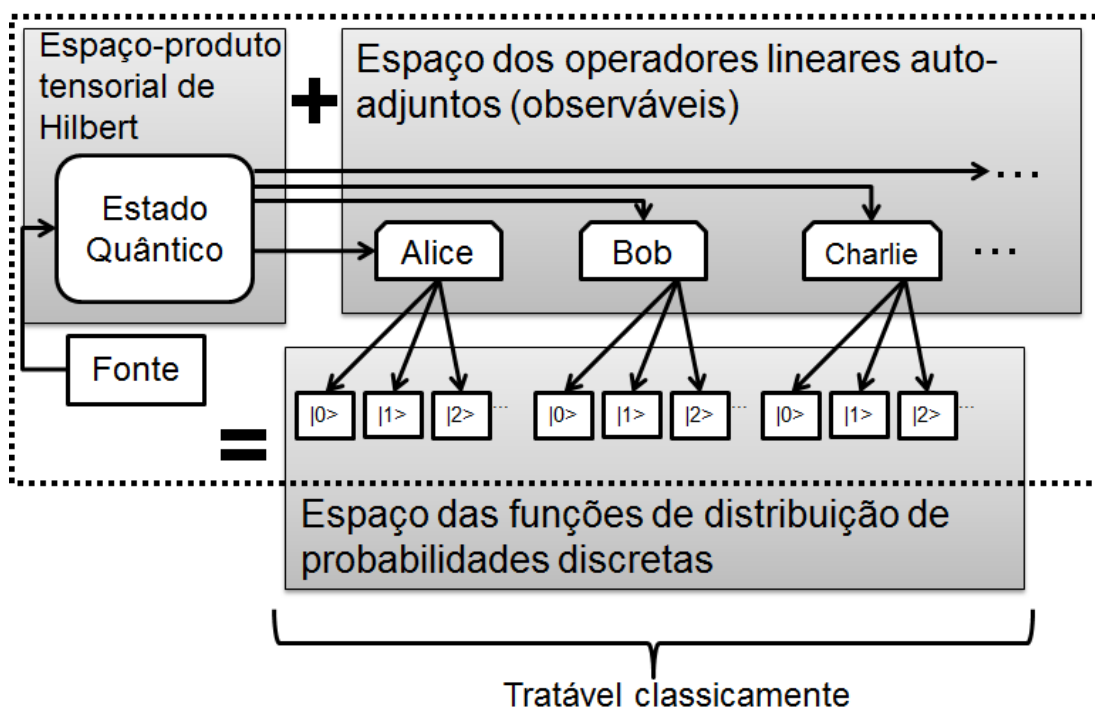


Figura 10: Procedimento de amostragem de estado quântico

Há uma fonte perfeita que é responsável por criar cópias idênticas de um mesmo estado que está sendo analisado. Este estado reside num espaço-produto tensorial de Hilbert pois é um estado n -partite, ou seja, que contém n sub-sistemas, onde cada sub-sistema será medido por um observador (Alice, Bob, Charlie e etc.) de posse de seu operador, o qual está no espaço dos operadores lineares auto-adjuntos. Este operador é um operador de medida projetiva ortogonal nos auto-estados do sub-sistema. Sucessivamente, cada um dos sub-sistemas é medido e o auto-estado para o qual o mesmo colapsou é guardado.

Realizando este procedimento iterativamente (retângulo pontilhado, Figura 10), chega-se à função de distribuição de probabilidades nos auto-estados do estado composto completo. A partir desta função pode-se tratar o sistema (estado quântico + observador) classicamente e usar abordagens clássicas de quantificação de complexidade.

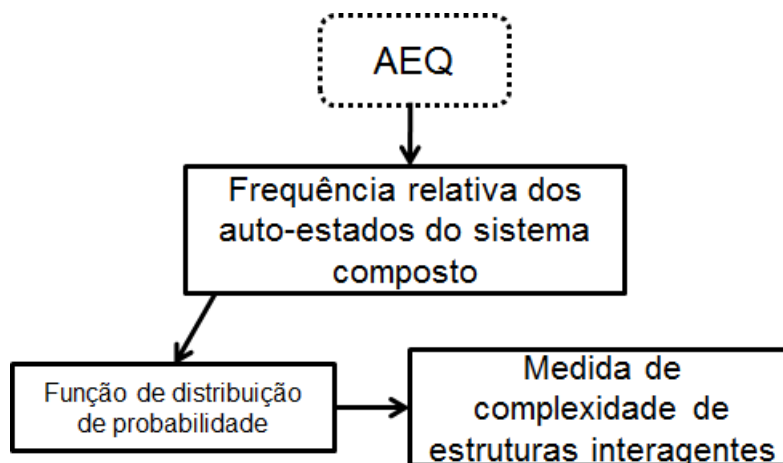


Figura 11: AEQ e medida de complexidade de estruturas interagentes

A AEQ é passível de uso em qualquer estado de dimensão finita, ou seja, composto por n -partes de qudits (d -dimensionais). Já o resultado da AEQ deve ser adaptado adequadamente de acordo com cada abordagem de quantificação de complexidade considerada. No restante desta seção, consta como este resultado é estruturado de forma a adequar-se ao ferramental de cada quantificador de complexidade clássico considerado, o de estruturas interagentes e o de mecânica computacional.

4.2.1 Estruturas interagentes

A abordagem de medida de complexidade via estruturas interagentes utiliza uma função de distribuição de probabilidade inferida da dinâmica do sistema para realizar sua quantificação. Dessa forma, adequa-se a AEQ da forma mostrada na figura 11.

Como exemplo de aplicação adapta-se o procedimento AEQ conforme a Figura 12 ao considerar um estado misto *tripartite*, ou seja, há três *qubits* no sistema como um todo. Este estado é construído a partir de um estado puro *tripartite* maximamente entrelaçado $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ somado com

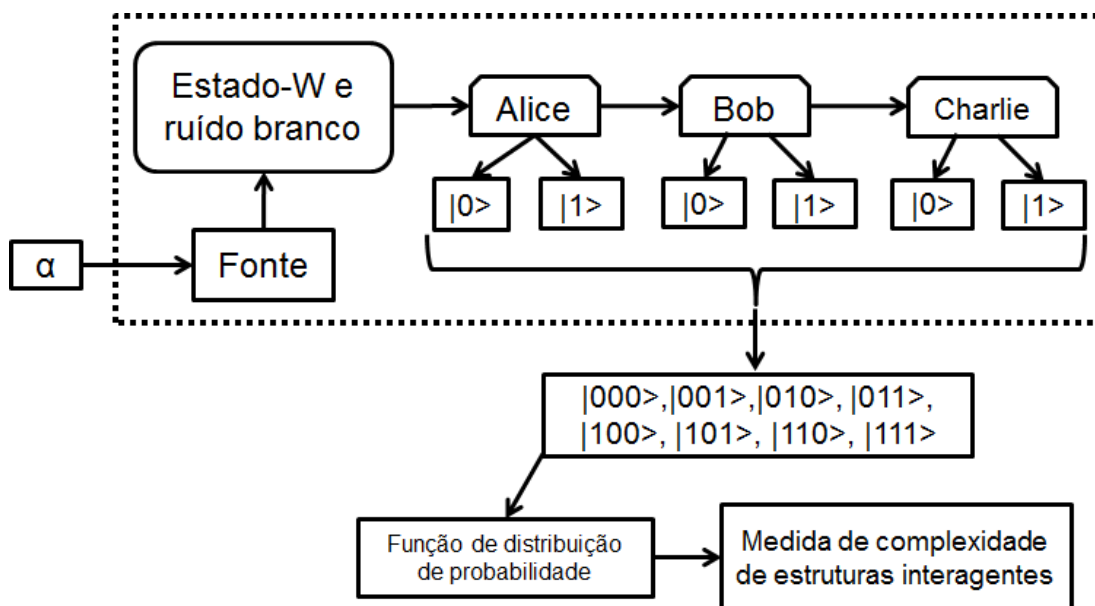


Figura 12: AEQ + EI para o estado ρ_{W3}

ruído branco controlador por um parâmetro α

$$\rho_{W3} = \alpha |W\rangle\langle W| + \frac{1-\alpha}{8} \mathbb{I}^{\otimes 3}.$$

O estado *tripartite* é importante nesta abordagem para que cada uma estrutura interagente seja um *qubit* e que, então, possa-se levantar interações de ordem até $k = 3$. Dessa maneira, observando a dinâmica de ordens elevadas de interação, podendo inferir a complexidade deste processo.

Ao fim das medidas em todos os sub-sistemas para um mesmo estado composto, este que saiu da fonte já não existe mais, foi destruído pelas medições, por essa razão há a necessidade de, para um mesmo α , um número suficientemente grande de estados sejam gerados para que as frequências relativas dos resultados possam ser estimadas.

Ao fim das medidas, cada um dos observadores comunica seu resultado, que é combinado em somente uma entrada ($|000\rangle, |001\rangle, \dots$) e guardado. Ao final das medidas para um mesmo α , tem-se uma estimativa das frequências relativas de cada um dos possíveis resultados, auto-estados do estado com-

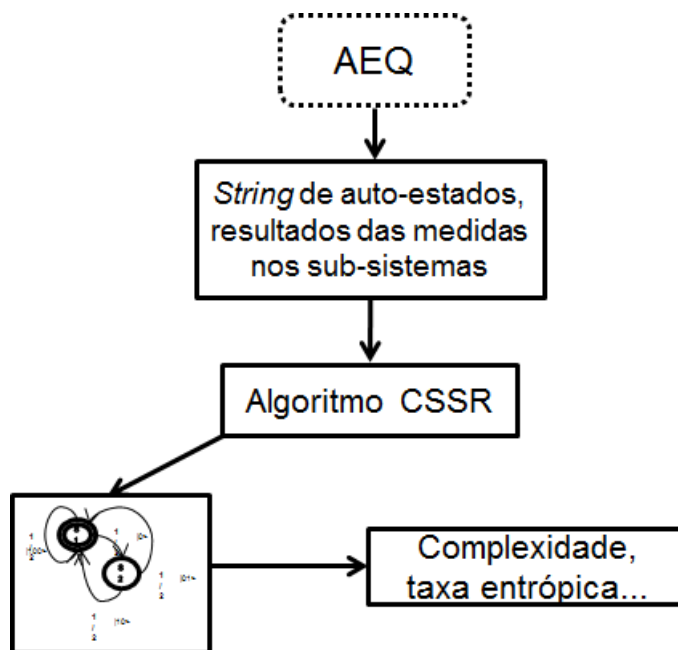


Figura 13: AEQ e medida de complexidade via mecânica computacional

posto Q_{W3} .

Logo, com esta função de distribuição discreta estimada por amostragens, pode-se utilizar o mesmo método descrito na seção 2.2 para quantificar a complexidade para um mesmo parâmetro α .

4.2.2 Mecânica computacional

Na abordagem computacional, o procedimento também é baseado na observação prolongada da saída do sistema, porém para a construção de um autômato finito determinístico através da estimação de funções de distribuição de probabilidades condicionais via análise da sequência simbólica produzida pelo sistema. Então, modifica-se a AEQ conforme a Figura 13 de forma a comunicar as medidas nos sub-sistemas de forma sequencial em iteração de medida, para cada cópia do estado gerado, assim, a saída da AEQ é uma *string* de símbolos representando os auto-estados que foram os resultados das medidas projetivas.

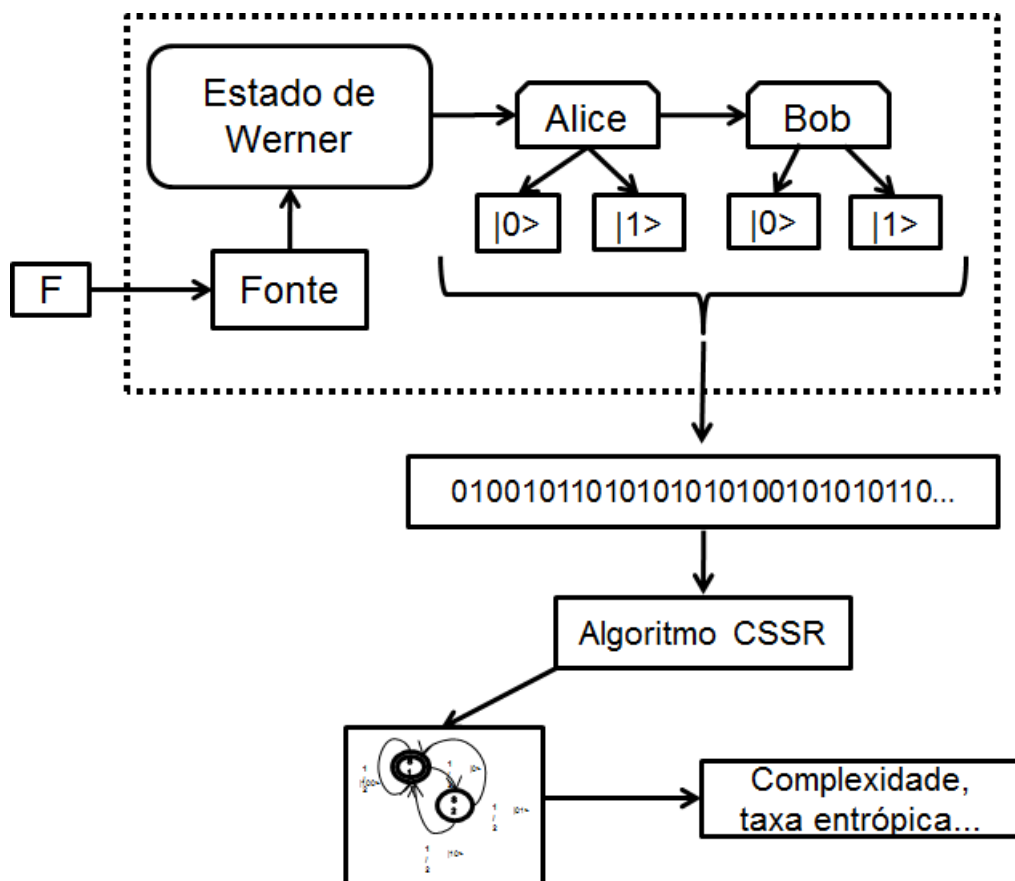


Figura 14: AEQ + MC para o estado de Werner

Isto pois o algoritmo CSSR se encarrega de, através da análise da dinâmica simbólica, inferir as funções de distribuição que necessita.

O exemplo de aplicação, explícito na Figura 14, difere neste caso na quantidade de *qubits* entrelaçados; para esta abordagem utilizou-se um estado de Werner (5.1), ou seja, há somente dois *qubits* entrelaçados, pois o estado de Werner está no espaço $\mathcal{H}^{2 \otimes 2}$. Dessa forma, o procedimento iterativo de medida conta com dois observadores, Alice e Bob, que medem o estado produzido pela fonte em função do parâmetro F do estado de Werner que controla a mistura.

Porém, diferentemente do procedimento anterior, os resultados das medidas são emitidas para fora do sistema de forma sequencial, assim como um autômato. Gerando, portanto, uma *string* de saída contendo o resultado de su-

cessivas medidas realizadas em cópias idênticas do mesmo estado produzido em função do parâmetro F pela fonte.

Então, essa *string* é a entrada para do algoritmo CSSR que vai construir o preditor não-linear ótimo, ou seja, o autômato que mimetiza o processo que gerou esta *string*. Dessa forma, este autômato cria com eficiência *strings* que pertencem ao mesmo ensemble das do sistema original.

Baseada nas características desse autômato criado, a definição de complexidade computacional de ordem 1 de CRUTCHFIELD; YOUNG (1989) (2.6) é então aplicada.

5 RESULTADOS

5.1 Estados quânticos

Normalmente famílias de estados mistos possivelmente entrelaçados são assim chamadas, famílias, pois através da instanciação de algum parâmetro da família pode-se escolher algum estado na dentro desta, ou mesmo varrendo completamente os possíveis valores do parâmetro pode-se reconstruir a família completa.

As mais simples famílias deste tipo possuem somente um parâmetro definido em uma região específica. E se for o caso destas serem famílias as quais possuem estados separáveis e estados entrelaçados, é comum que abaixo de um certo limiar do parâmetro estejam os estados separáveis, e acima deste, os entrelaçados; mais ainda, no extremo valor do parâmetro acima deste limiar, esteja um estado puro maximamente entrelaçado.

Assim, no decorrer da variação do parâmetro de controla esta família, pode-se ter estados separáveis com vários graus de mistura, também estados mistos entrelaçados em distintos graus, como também um maximamente entrelaçado, que impreterivelmente é um estado puro.

Os estados definidos a seguir serão, no decorrer deste capítulo, avaliados quanto sua complexidade através de pelo menos uma das três abordagens propostas para quantificação de complexidade de estados quânticos. Todos

os estados são compostos por sub-sistemas somente de *qubits*, pois crê-se que o uso da peça de informação quântica mais simples foca a análise do resultado no desempenho das técnicas propostas.

Há dois estados mistos *bipartite* muito comuns em informação quântica, que são usados como exemplos clássicos de estados mistos que podem estar entrelaçados em diferentes quantidades.

O primeiro é uma família de estados mistos formada por uma mistura de todos os estados de Bell

$$\rho_W = F |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1-F}{3} (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|), \quad (5.1)$$

neste caso, o parâmetro que define esta família é $0 \leq F \leq 1$, através da escolha deste pode-se construir qualquer estado que pertença a esta família assim como reconstruí-la por completo. Esta família de estados mistos é chamada de estado de Werner.

Pode-se provar que o estado de Werner está entrelaçado para $F > 1/2$ (VEDRAL, 2006), ou seja, a partir desse limiar não existem $\rho_A, \rho_B \in \mathcal{H}^2$ tais que $\rho_W = \rho_A \otimes \rho_B$. Ainda, é importante ressaltar que a máxima mistura, quando todos os auto-estados tem a mesma probabilidade, somente acontece para $F = 1/4$.

O outro compõe um diferente tipo de família de estados mistos *bipartite* de *qubits*. Esta família é construída com uma mistura de um dos estados de Bell em conjunto com ruído branco. Esta família é definida sob a forma

$$\rho_W = \frac{1-\gamma}{4} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \gamma |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \quad (5.2)$$

onde $0 \leq \gamma \leq 1$, e $\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2$ equivale a um estado formado por ruído branco, pois sua distribuição de probabilidades é uniforme em sua base, o fator γ controla como se dá a mistura entre este estado e o estado de Bell $|\Phi^+\rangle$. O estado ρ_W

está entrelaçado para $1/3 < \gamma$ (MUNRO et al., 2001).

Este estado é construído apenas através da junção de um estado puro maximamente entrelaçado no espaço \mathcal{H}_4 com um estado ruído branco neste mesmo espaço. Esta é uma maneira bastante simples de criar famílias de estados mistos, pois entre o estado deixar de ser somente ruído branco $\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2$ e tornar-se um estado puro maximamente entrelaçado $|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|$, há um conjunto de estados mistos entrelaçados; dado que tal transição é suave.

Diferente do espaço $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ onde os estados de Bell definem um único conjunto de estados entrelaçados, ou seja, neste espaço qualquer estado puro entrelaçado pode ser representado através dos estados de Bell, no espaço $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ há dois conjuntos de estados puros maximamente entrelaçados e que não são equivalentes (ACÍN et al., 2001). Isso quer dizer que dado um estado qualquer entrelaçado neste espaço, pode haver tanto um tipo quanto outro tipo de entrelaçamento, assim não se pode reduzir qualquer entrelaçamento puro a somente um deles (DÜR; VIDAL; CIRAC, 2000).

Estes estados são o estado GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger)

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}$$

e o estado-W

$$|\text{W}\rangle = \frac{|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{3}}.$$

Para criar as famílias de estados mistos *tripartite* através do protótipo supracitado, então, basta misturar estes estados puros maximamente entrelaçados com ruído branco no espaço $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$. Assim, cria-se neste espaço duas famílias de estados mistos possivelmente entrelaçados:

$$\rho_{\text{GHZ}} = \alpha |\text{GHZ}\rangle\langle\text{GHZ}| + \frac{1-\alpha}{8} \mathbb{I}_2^{\otimes 3} \quad (5.3)$$

e também

$$\rho_{eW} = \alpha |W\rangle\langle W| + \frac{1-\alpha}{8} \mathbb{I}_2^{\otimes 3}. \quad (5.4)$$

Pode-se generalizar os estados (5.3) e (5.4) para n sub-sistemas de *qubits* através da generalização adequada para $N > 3, N \in \mathbb{N}$, de seus estados puros maximamente entrelaçados

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \frac{|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}},$$

$$|W_N\rangle = \frac{|00\cdots 01\rangle + |00\cdots 10\rangle + \cdots + |10\cdots 00\rangle}{\sqrt{N}}.$$

Ainda, deve-se ressaltar que para $N > 3$ a não equivalência de ambos tipos de entrelaçamento se mantém (DÜR; VIDAL; CIRAC, 2000).

De forma análoga a anterior, constrói-se as famílias de estados mistos

$$\rho_{\text{NGHZ}} = \alpha |\text{GHZ}_N\rangle\langle \text{GHZ}_N| + \frac{1-\alpha}{2^N} \mathbb{I}_2^{\otimes N} \quad (5.5)$$

e também

$$\rho_{\text{NeW}} = \alpha |W_N\rangle\langle W_N| + \frac{1-\alpha}{2^N} \mathbb{I}_2^{\otimes N}. \quad (5.6)$$

Dessa forma, tem-se um número arbitrário de sub-sistemas (*qubits*) num estado quântico composto para análise. Ainda, estes dois estados quânticos representam de forma bastante sucinta configurações muito comuns de sistemas quânticos. Normalmente estes estados quânticos são níveis de excitação de algum campo, ou de sua partícula associada, assim, estes dois estados-base de entrelaçamento, $|W_N\rangle$ e $|\text{GHZ}_N\rangle$, representam duas configurações muito comuns, quando todas as partículas estão excitadas $|1\rangle^{\otimes N}$, ou no nível de energia no estado fundamental $|0\rangle^{\otimes N}$; ou em outro caso somente alguma delas está no estado excitado $|00\cdots 10\rangle$.

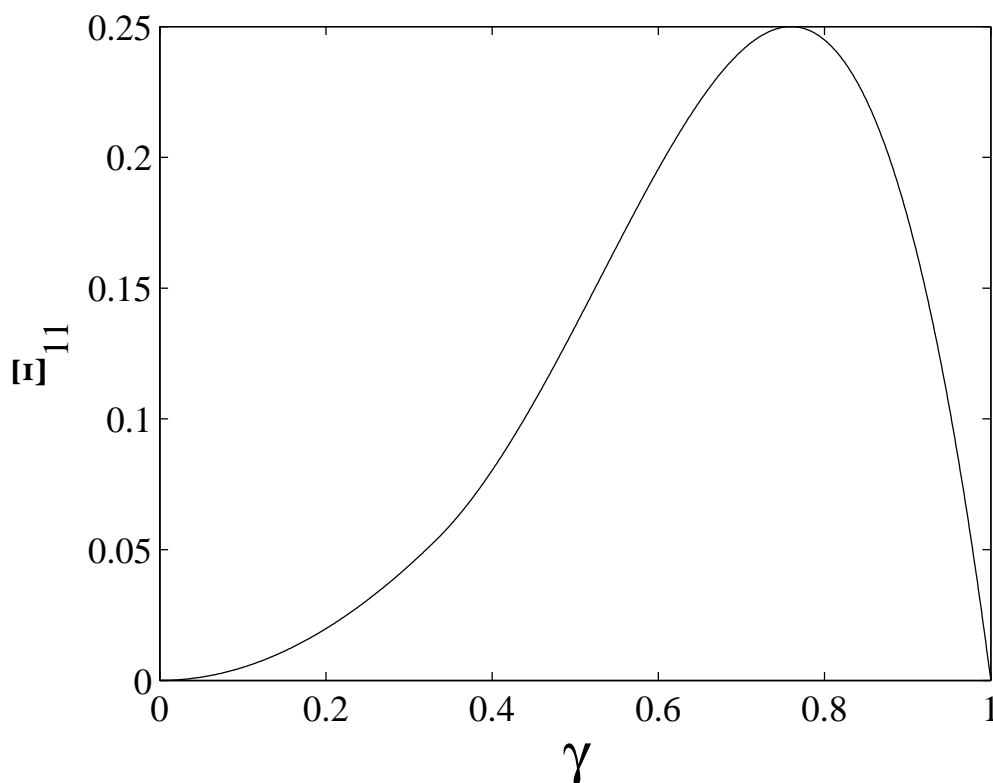


Figura 15: Complexidade Ξ_{11} para a família ρ_W em função do parâmetro de mistura α

5.2 Complexidades

A Figura 15 mostra a aplicação da complexidade Ξ , inspirada na SDL, com uma escolha convexa padrão $\alpha = \beta = 1$ para a família ρ_W (5.2). Esta considera quantificações de entrelaçamento e índice de mistura para compor a complexidade do estado quântico. Destas duas quantidades para o estado ρ_W é destilada a desordem δ do sistema em função do parâmetro γ do estado.

Vê-se que quando dada à ordem e a desordem no sistema a mesma importância, através dos pesos α e β , há um pico na complexidade do sistema na região próxima ao máximo entrelaçamento mas ainda em um estado em mistura.

Dessa maneira, este resultado indica que entre o máximo entrelaçamento

e a máxima mistura há um ponto em que a estrutura por trás da dinâmica do sistema é mais complexa de que quando este está em um destes extremos.

Assim, sugerindo que tanto a variação no grau da mistura quanto no grau de entrelaçamento podem afetar a complexidade do sistema quântico e, ainda, que há um ótimo para a complexidade entre a mistura máxima e o entrelaçamento máximo. Indicando que um estado que contenha mistura e entrelaçamento é um estado que possui uma dinâmica mais complexa e que, portanto, é mais interessante do ponto de vista tecnológico-experimental.

Quanto a abordagem informacional, visto que a medida de complexidade via estruturas interagentes necessita de pelo menos um índice $I^{(n)}$, $n > 2$ para realizar a quantificação de interações de ordem superior que abrigam a dinâmica complexa, que está acima do sincronismo e da aleatoriedade. Então, estados *bipartite* não podem ser efetivamente quantificados com esta abordagem, logo, considera-se os estados *tripartite* ρ_{GHZ} (5.3) e ρ_{eW} (5.4) para a quantificação de sua complexidade em função de seus parâmetros de mistura α .

Dessa maneira, para cada um destes estados os índices $I^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, foram levantados. As Figuras 17 e 16 mostram a quantificação da complexidade para o estado ρ_{eW} . É possível observar na Figura 16 que, similarmente à análise anterior, entre o estado em mistura máxima e o estado maximamente entrelaçado, é convexo o comportamento do índice que define as interações que caracterizam o comportamento complexo de um sistema I_n , $n > 2$ (KAHLE et al., 2009). Ou seja, em algum ponto entre o estado ρ_{eW} deixar de ser um estado em mistura máxima, tornar-se entrelaçado, e então maximamente entrelaçado, houve um pico nas interações de ordem superior.

Isto quer dizer que, por construção da medida de complexidade de estruturas interagentes, a estrutura que deu origem a dinâmica de observação dos

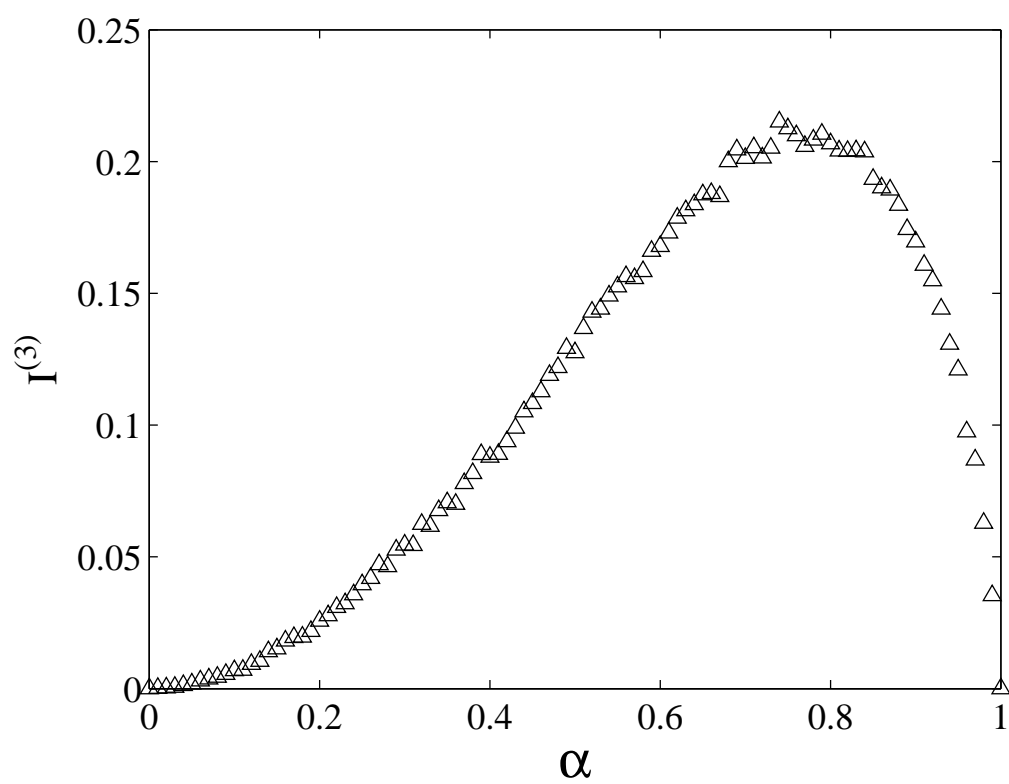


Figura 16: Complexidade $I^{(3)}$ para a família ρ_{eW} em função do parâmetro de mistura α

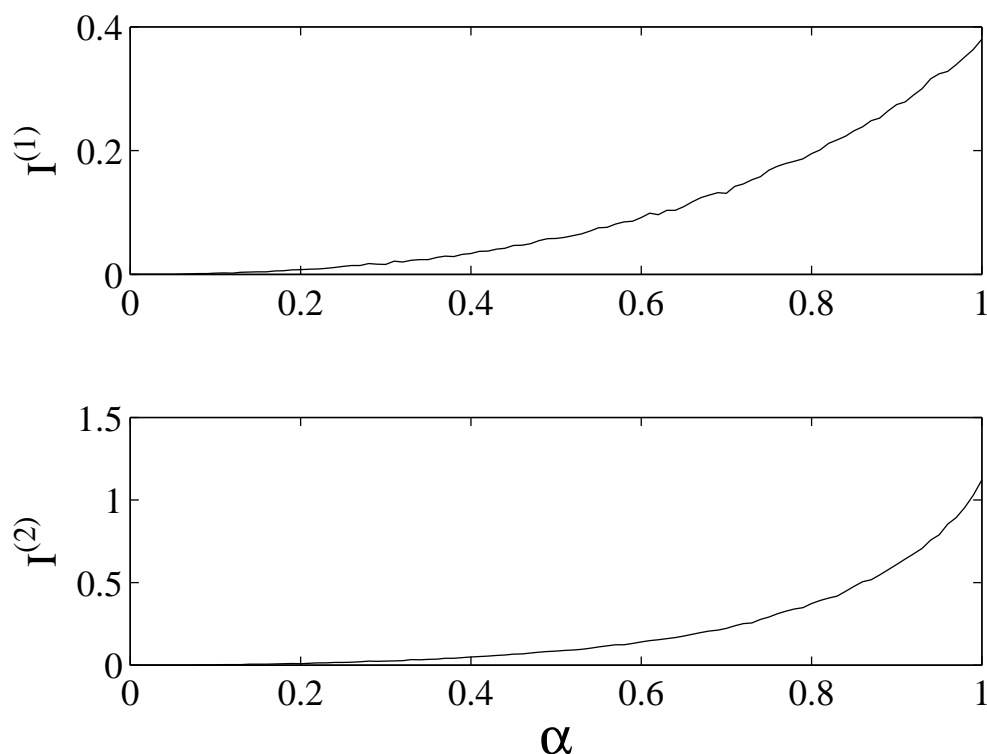


Figura 17: Complexidade $I^{(1,2)}$ para a família ρ_{eW} em função do parâmetro de mistura α

estados logo abaixo do máximo entrelaçamento possui mais interação entre os três *qubits* de que os estados nos extremos. Ou seja, no máximo entrelaçamento do tipo do estado $|W\rangle$ há interações entre os três *qubits* de forma não trivial somente enquanto estes permanecem misturados com ruído mas logo abaixo do máximo entrelaçamento.

Enquanto que as interações de ordem baixa $n = 1, 2$ são monotonicamente crescentes, o que se esperava visto que, similarmente à análise feita por KAHLE et al. (2009) para redes de sistemas dinâmicos entrando em regime de sincronismo, aqui quando há o máximo entrelaçamento, as interações par-a-par são decisivas na descrição do sistema, justamente devido à característica de privilegiar certos resultados de medidas posteriores com certeza, dada a informação do resultado de medidas já realizadas. Dessa forma, em máximo

entrelaçamento os *qubits* comportam-se como se estivessem sincronizados, ou melhor, como se os resultados das medidas sequenciais neles o estivessem.

A Figura 18 mostra o resultado da complexidade de estruturas interagentes juntamente com o procedimento de amostragem de estado quântico para o estado ρ_{GHZ} .

De modo imprevisto, a proposta EI + AEQ conseguiu distinguir entre os diferentes tipos de entrelaçamento em $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$, o do tipo $|\text{GHZ}\rangle$ e do tipo $|\text{W}\rangle$. Ainda, isto mostra que o entrelaçamento $|\text{GHZ}\rangle$ possui características bastante similares quanto a aparente sincronização dos resultados de medidas ($I^{(2)}$), mas que devido a sua construção bastante simétrica em auto-estados, em conjunto com ruído branco, este estado não apresenta complexidade ($I^{(3)}$) relevante. Todavia, talvez este não fosse o caso para o uso de um ruído colorido no lugar do branco, já que isto criaria uma outra simetria nos estados. Também não há aleatoriedade intrínseca ($I^{(1)}$) relevante, ou seja, o sistema é tão simétrico que gera funções de distribuição nas quais as correlações par-a-par são capazes de completamente descrevê-lo em toda região do parâmetro α .

Como também, o resultado de $I^{(1)}$ e $I^{(3)}$ indica que a sincronização das medidas neste caso se dá de forma bastante suave em função do parâmetro α . E não de forma caótica como acontece no estado ρ_{eW} , relativo a sua semelhança com as redes de sistemas caóticos em sincronismo.

Portanto, conclui-se que a correlação presente em ρ_{eW} se mostra mais intrincada do que a de ρ_{GHZ} . O que era esperado dado que construção de ambos é bastante distinta quanto aos estados-base $|\text{GHZ}\rangle$ e $|\text{W}\rangle$, ainda mais para um N elevado em (5.5) e (5.6). Isto mostra que a análise da complexidade de estados quânticos pode também ser uma ferramenta de grande valia para

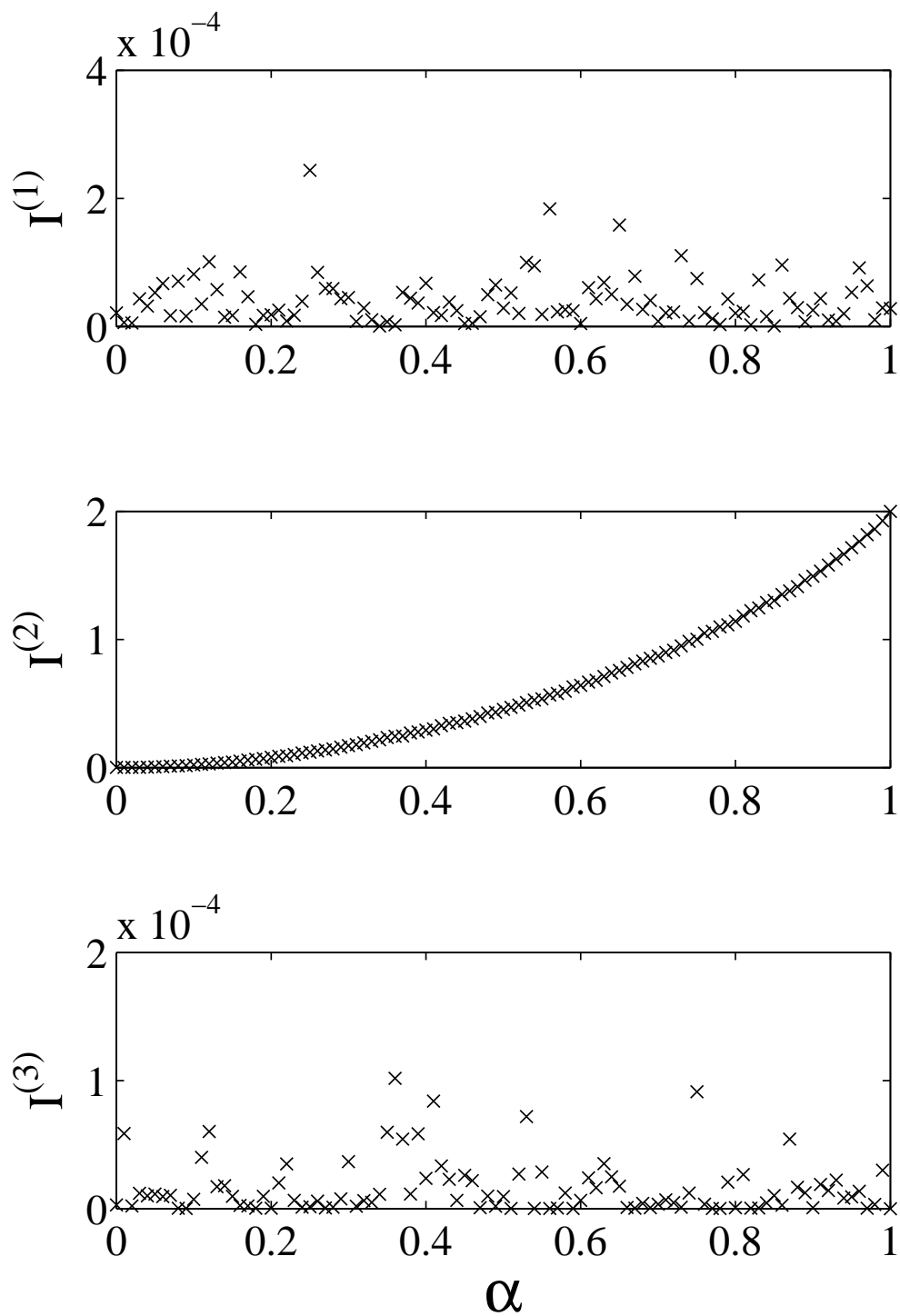


Figura 18: Complexidade $I^{(1,2,3)}$ para a família ρ_{GHZ} em função do parâmetro de mistura α

a compreensão do fenômeno de entrelaçamento por si só.

Mesmo que a medida de complexidade de estruturas interagentes não possua inferência causal, ou seja, somente analisa a configuração final das medidas para cada estado, devido ao comportamento de $I^{(2)}$ pode-se conjecturar que o uso de estados com entrelaçamento $|\text{GHZ}\rangle$ é mais confiável pois sua dinâmica de medida é mais robusta quanto à presença de ruído branco. Ou seja, em qualquer aplicação que utilize estados *tripartite* entrelaçados e que esteja sujeita a ruído branco, pode-se afirmar que é preferível o uso de estados de entrelaçamento $|\text{GHZ}\rangle$ visto que mesmo quando sujeitos a ruído branco a sua dinâmica do tipo de sincronização permanece bastante similar àquela somente com estados puros. Claro, sendo guardadas as devidas proporções do nível de ruído branco.

Diferentemente de estados com entrelaçamento $|\text{W}\rangle$, nos quais com um pouco de ruído branco já se tem dinâmicas bastante distintas daquelas com somente os estados puros $|\text{W}\rangle$ dado o pico em $I^{(3)}$ próximo a $\alpha = 1$. Assim, a perturbação entre os três *qubits*, ou sua correlação, nesse caso, é maior e modifica a dinâmica de observação significativamente. Além disso, há muito mais aleatoriedade intrínseca na para o estado $|\text{W}\rangle$ de que para o $|\text{GHZ}\rangle$, visto que no primeiro $I^{(1)}$ é também monotonicamente crescente como $I^{(2)}$, assemelhando-se a uma sincronização caótica. Vale ressaltar que, devido a manutenção da diferença de entrelaçamento para N elevado em (5.5) e (5.6), a mesma análise é extensível a estes estados.

Quanto à terceira abordagem realizada, a complexidade baseada em mecânica computacional, a Figura 19 mostra a quantificação da complexidade do sistema em função do parâmetro F do estado ρ_{W} . É importante salientar que este estado somente está entrelaçado para $F > 1/2$, e maximamente entrelaçado para $F = 1$.

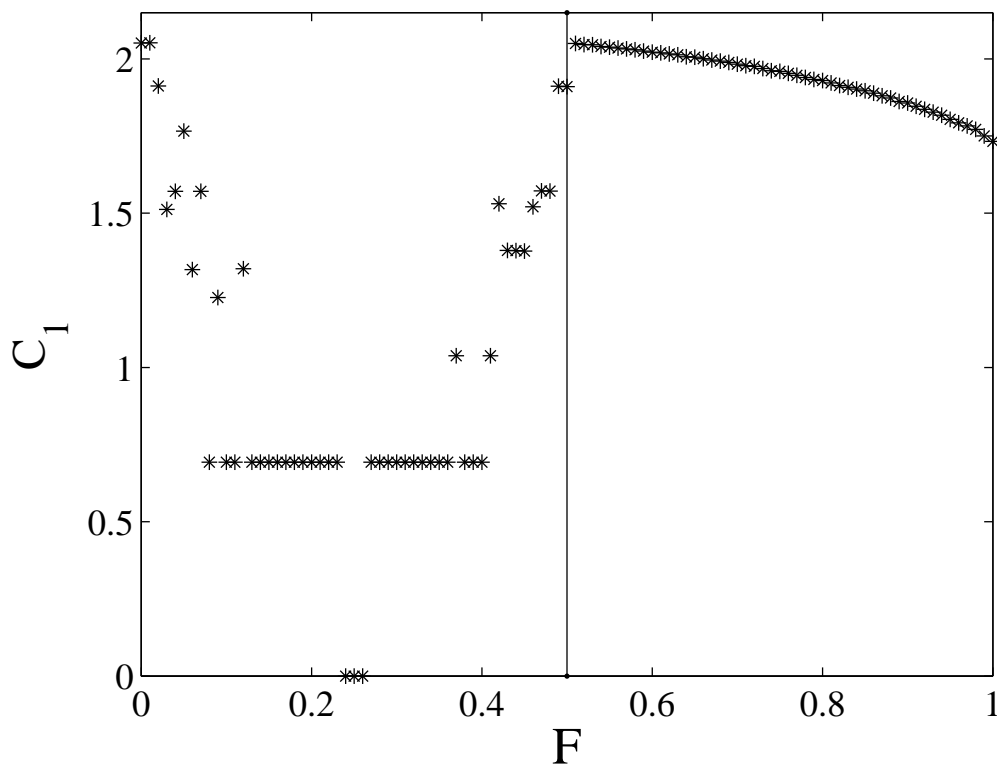


Figura 19: Complexidade C_1 em função do parâmetro F da família ϱ_W (5.1) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados

Portanto, é possível ver claramente o comportamento distinto da complexidade estimada a partir do autômato criado, da região em que o estado é separável, lado esquerdo do gráfico, para a região em que este está entrelaçado, inseparável, lado direito. Reforçando a hipótese que presença de entrelaçamento, um efeito unicamente quântico, altera significativamente a análise de complexidade destes sistemas.

Para entender um pouco melhor o fenômeno, a Figura 20 mostra a taxa entrópica, em *bits/símbolo*, do sistema em função do parâmetro F , pode-se ver que o comportamento da mesma é bastante suave em toda a região analisada. Reafirmando a hipótese da captura do fenômeno quântico de entrelaçamento pelo método proposto de análise de complexidade do sistema.

Ainda, é possível ver que a maior complexidade atingida por este estado

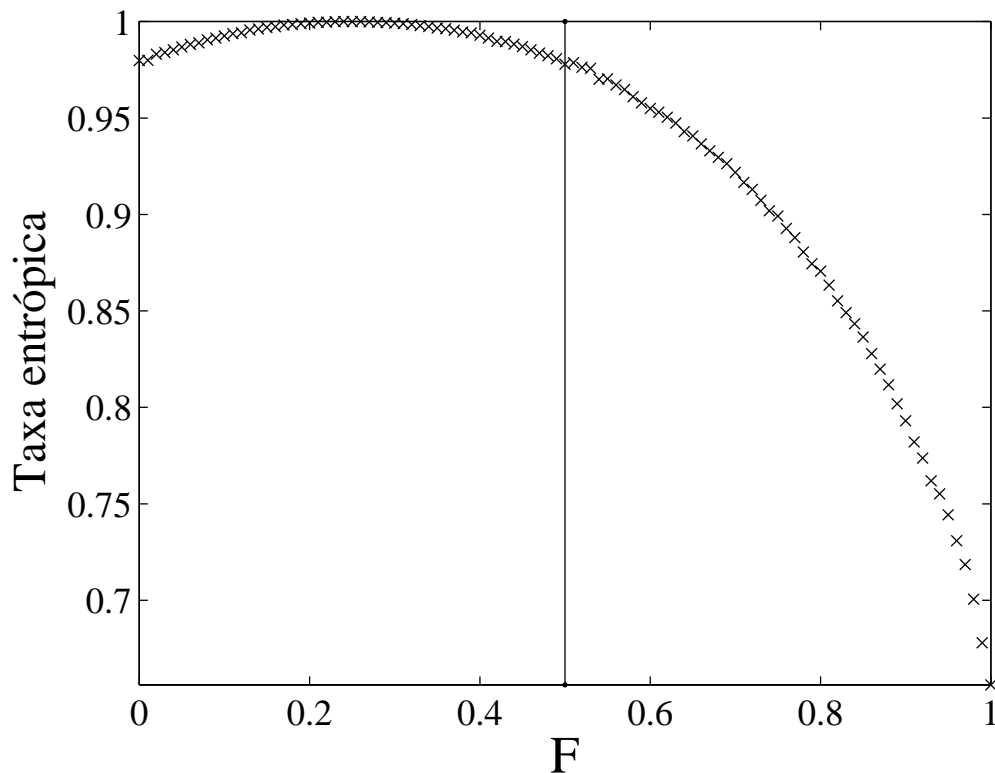


Figura 20: Taxa entrópica em função do parâmetro F da família ρ_w (5.1) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados

está na aproximação pela direita da fronteira entre separável-entrelaçado, ou seja, ainda para o estado entrelaçado, mas o mais próximo possível desta fronteira.

A Figura 21 mostra a relação entre a complexidade e a taxa entrópica do sistema, ou seja, a relação entre o quão aleatório este é e o nível de sua complexidade. É fácil ver que, assim como na análise feita por CRUTCHFIELD; YOUNG (1989) para o mapa Logístico, o sistema quântico também passa por uma transição de fase e esta ocorre exatamente na fronteira de entrelaçamento, ou seja, quando o sistema passa de uma região para a outra sua complexidade comporta-se de forma distinta, atingindo seu máximo nesta transição.

Há, portanto, uma quebra de simetria no sistema, uma mudança estrutu-

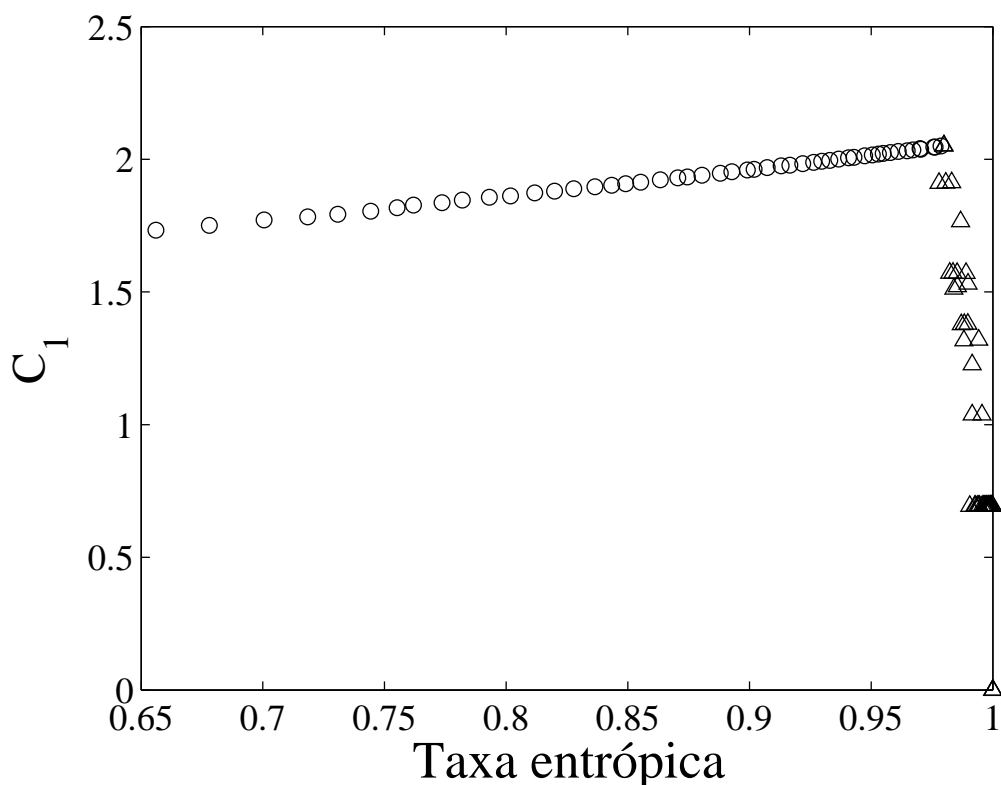


Figura 21: Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_W (5.1) sob AEQ, em círculo os estados entrelaçados e em triângulos, os separáveis

ral em sua dinâmica estocástica que é capturada pela quantificação de sua complexidade. E essa mudança é ocasionada pelo fenômeno quântico de entrelaçamento.

Para verificar a extensão destes resultados, avalia-se o estado ρ_W (5.2) sob a mesma perspectiva. Ou seja, com o uso da mecânica computacional em conjunto com a amostragem de estado quântico.

A Figura 22 mostra o comportamento da complexidade deste estado em função do seu parâmetro de mistura γ . É possível ver um comportamento bastante similar a análise para o estado anterior, já que ambos são *bipartite*. Ou seja, há explícita distinção entre as regiões entrelaçada e separável, no caso deste estado a fronteira de entrelaçamento é $\gamma > 1/3$.

Na região entrelaçada a complexidade do sistema mostra-se muito mais

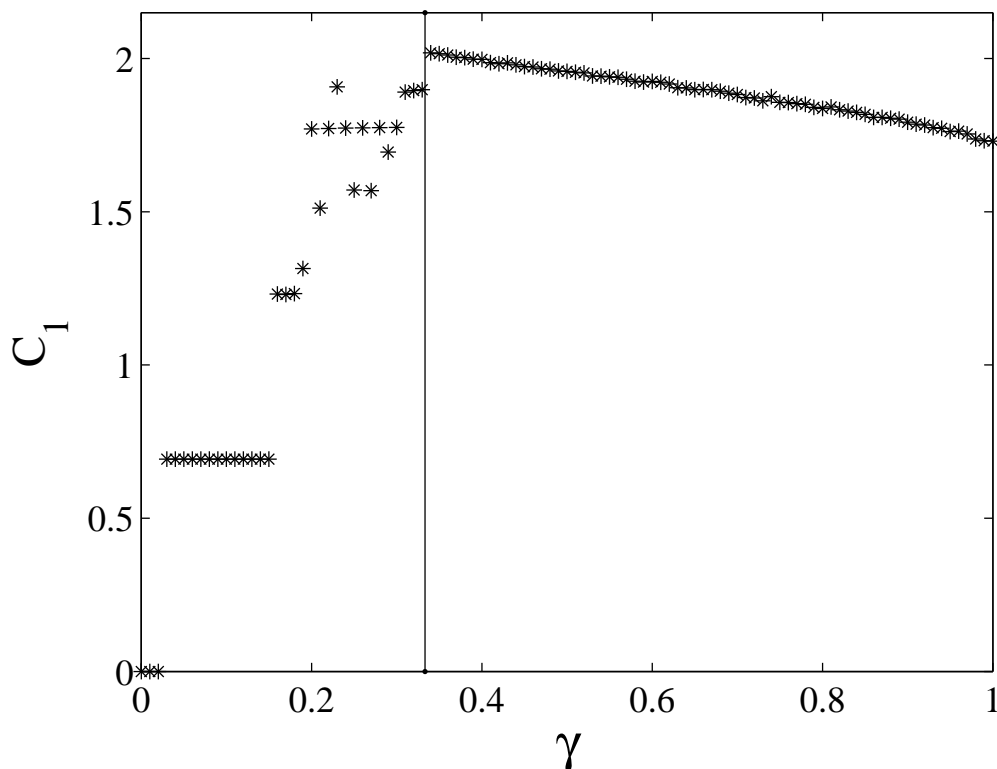


Figura 22: Complexidade C_1 em função do parâmetro γ da família ρ_W (5.2) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados

robusta e superior à região separável. Ainda, os maiores níveis de complexidade são alcançados por estados entrelaçados mas ainda mistos e não puros, como para $\gamma = 1$. O pico da complexidade é justamente alcançada na fronteira entre separável e entrelaçado na aproximação através da região entrelaçada.

Ainda, somente não se vê o mesmo comportamento inicial para a complexidade que no estado ρ_W pois este último, para $F < 1/4$, não está em máxima mistura, situação somente alcançada em $F = 1/4$, acima deste valor, então, o comportamento de ambos estados é bem similar no que diz respeito à complexidade em função de seu parâmetro de mistura.

Da mesma forma que anteriormente, analisa-se o comportamento da taxa entrópica do sistema em função do parâmetro de mistura γ , Figura 23. Novamente, o comportamento desta quantidade é bastante suave e por si só não

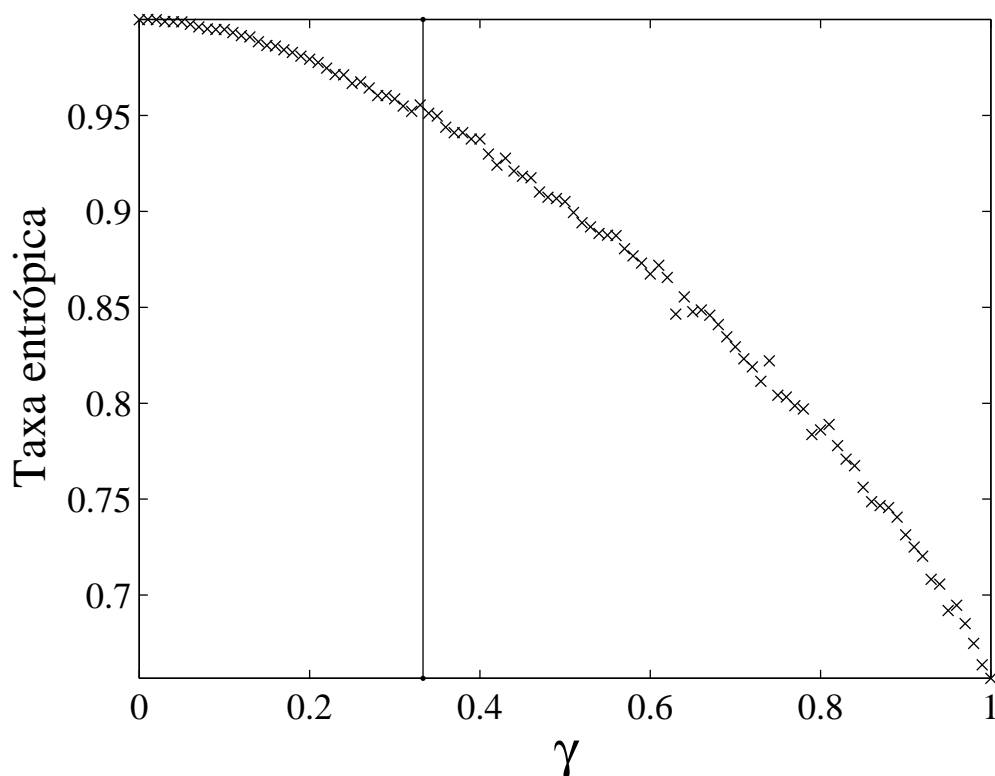


Figura 23: Taxa entrópica em função do parâmetro γ da família ρ_W (5.2) sob AEQ, à esquerda os estados separáveis e à direita os entrelaçados

explica a diferença no comportamento da complexidade do sistema, assim, indica que a estrutura do autômato, seus estados e conectividade dos mesmos, sofreu mudança na fronteira de entrelaçamento.

A Figura 24 mostra a complexidade do estado ρ_W sob AEQ em função de seu nível de desorganização, a sua taxa entrópica. Novamente o fenômeno da transição de fase ocorre na análise deste estado justamente na fronteira de entrelaçamento. Isso significa que para uma mudança suave em uma característica do sistema, a taxa entrópica, outra de suas quantidades, a complexidade, sofre variação brusca e não suave. E, ainda, o pico da complexidade do sistema ocorre exatamente neste ponto de transição, por isso a relação com transições de fase termodinâmicas e suas quebras de simetria.

Agora, analisa-se o comportamento da complexidade C_1 da mecânica com-

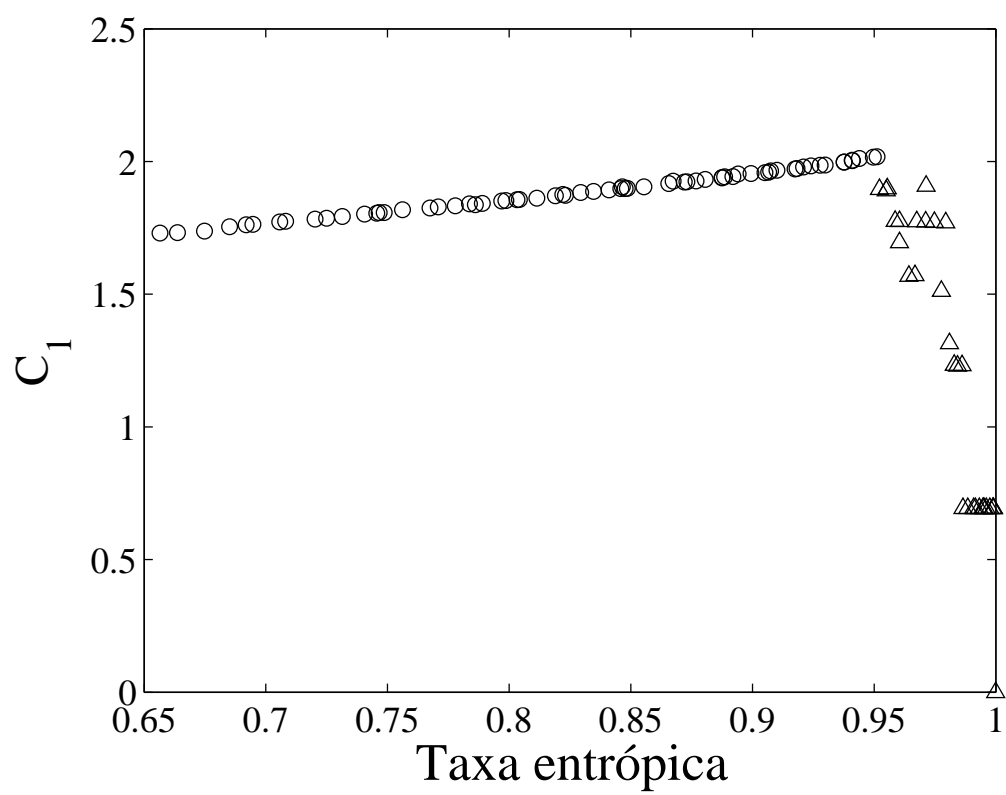


Figura 24: Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_W (5.2) sob AEQ, em círculo os estados entrelaçados e em triângulos, os separáveis

putacional para estados *tripartite* sob AEQ, para os dois tipos distintos de entrelaçamento $|\text{GHZ}\rangle$ e $|\text{W}\rangle$.

A Figura 25 mostra o comportamento da complexidade do sistema estado ρ_{eW} (5.4) sob AEQ em função de sua taxa entrópica. É visível o comportamento distinto entre as três regiões I, II e III para o mesmo estado.

Sabe-se que para o caso de entrelaçamento *tripartite* pode haver entrelaçamento chamado de *tripartite* genuíno, no qual seja um estado $\sigma \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ não há $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathcal{H}_2$ tais que $\sigma = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3$ e também não há $\rho_a \in \mathcal{H}_2$ e $\rho_{bc} \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ tais que $\sigma = \rho_a \otimes \rho_{bc}$. Todavia, há um tipo de entrelaçamento mais fraco que somente atende à primeira restrição, este é chamado de *tripartite* bi-separável.

Assim, analisados as famílias construídas e os valores do parâmetro de mistura α nos quais ocorrem as fronteiras entre as regiões, o resultado da análise de complexidade via mecânica computacional em conjunto com AEQ detecta transições do tipo separável e *tripartite* bi-separável (I \Rightarrow II), como também as de *tripartite* bi-separável e *tripartite* genuíno (II \Rightarrow III).

De modo análogo, fez-se a análise da complexidade para o estado ρ_{GHZ} (5.3). Da mesma maneira, percebe-se três regiões distintas e transições de fase entre elas. Ainda, também neste caso, os valores do parâmetro de mistura α nestas transições indica a captura da transição entre as três distintas configurações, separável (I), *tripartite* bi-separável (II) e *tripartite* genuíno (III).

Em cada uma das fronteiras entre regiões em ambos os casos analisados é possível observar descontinuidade e/ou não suavidade, que são características fundamentais das transições de fase. Dessa forma, a abordagem da mecânica computacional foi capaz de indicar diferentes tipos de entrelaçamento através das transições de fase ocorridas entre eles. E próximo destas regiões

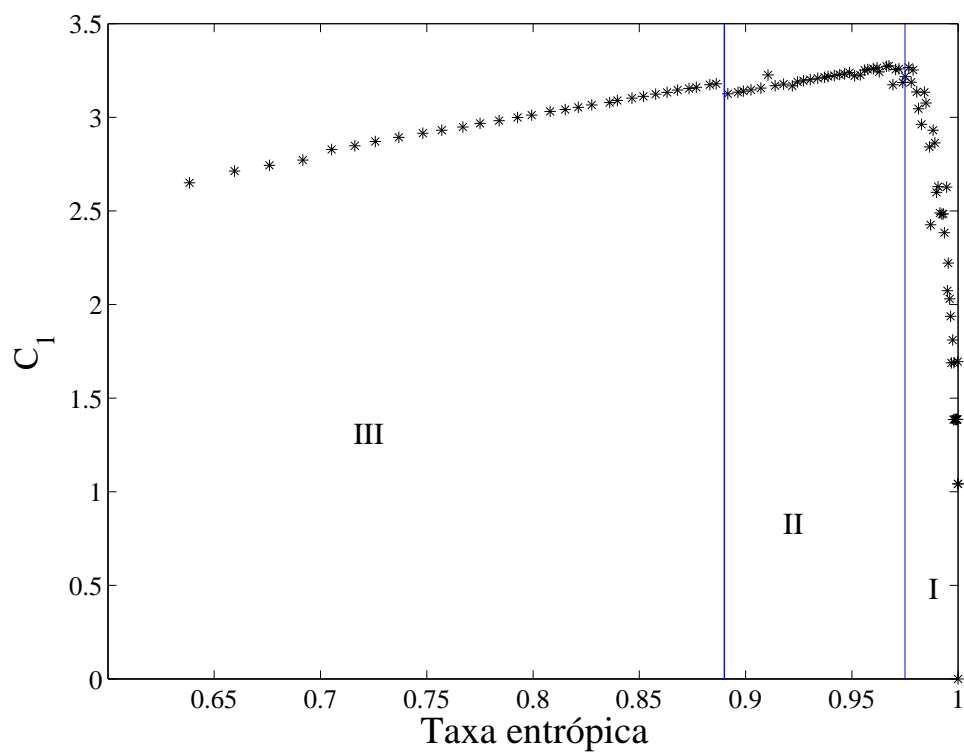


Figura 25: Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_{eW} (5.2) sob AEQ

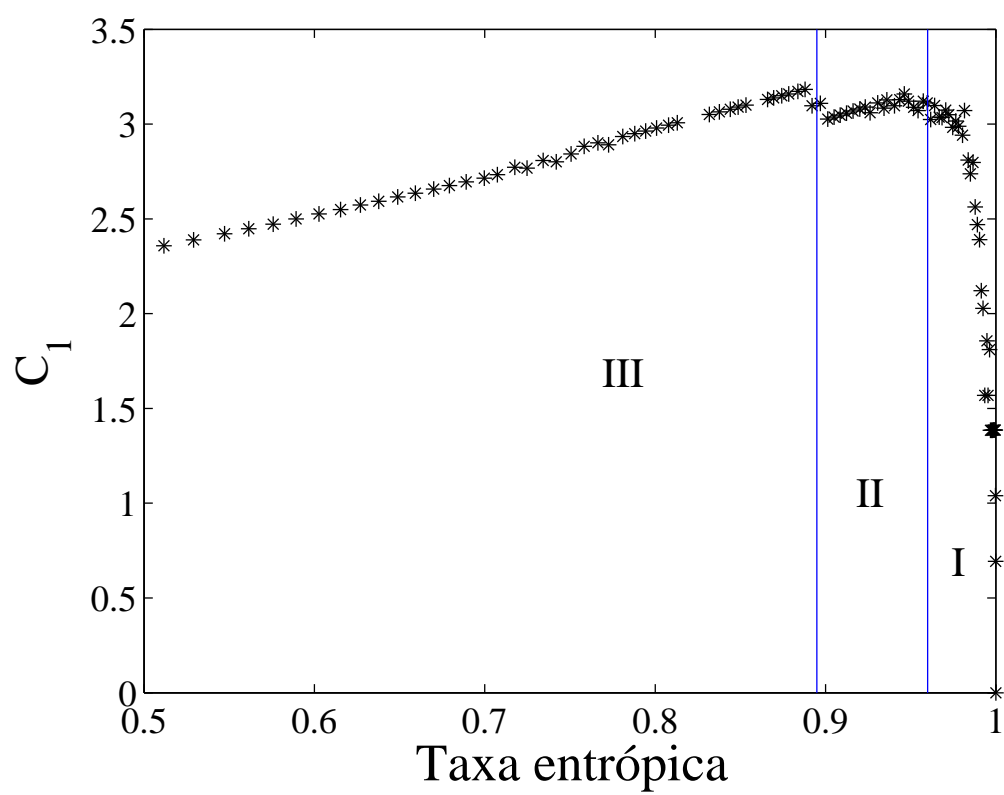


Figura 26: Complexidade C_1 em função da taxa entrópica da família ρ_{GHZ} (5.2) sob AEQ

ocorrem picos na complexidade do sistema, que é outra característica das transições de fase.

Novamente, como na análise dos casos *bipartite*, os maiores níveis de complexidade foram alcançados por estados entrelaçados mas ainda em mistura, não-puros.

Apesar de na abordagem por estruturas interagentes não levar em conta a causalidade da amostragem de estado quântico, ou seja, a ordem com que os resultados são produzidos. Ainda é possível ver que tanto nesta quanto na abordagem com mecânica computacional, as maiores complexidades são atingidas pelo estado ρ_{eW} em detrimento do outro ρ_{GHZ} . O que reflete a a estrutura mais complexa de entrelaçamento presente em ρ_{eW} , enquanto que para ρ_{GHZ} sua estrutura de entrelaçamento é bem mais simples, onde somente dois auto-estados são prevalecidos durante o caminho ao estado puro maximamente entrelaçado, no qual o resultado da primeira medida define completamente os seguintes.

Outro resultado de possível importância tecnológica é, dada das características dos estados causais, a complexidade de ordem-1 de CRUTCHFIELD; YOUNG (1989) do autômato criado representa a memória média que o estado guarda sobre o seu passado ou, equivalentemente, a quantidade de informação necessária para prever otimamente sua dinâmica estocástica. Assim, conclui-se que na média os estados mistos entrelaçados, em conjunto com o processo de medida AEQ, têm mais memória que seus primos puros. Assim, estes seriam estados mais úteis tecnologicamente para fins que envolvam armazenagem e medida frequentes, como registradores quânticos; pois na média, com o uso iterativo, apresentariam mais memória.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, objetivou-se a criação de uma medida de complexidade para estados quânticos que obtivesse as características das medidas modernas de complexidade de sistemas clássicos, ou seja, nulas tanto para um sistema desordenado quanto e também para um sistema bastante ordenado.

Isto pois não há até o momento abordagem moderna de complexidade para estados quânticos, somente extensões da complexidade algorítmica de Kolmogorov, a qual é conhecidamente uma função monotônica crescente da desordem. Portanto, suas extensões quânticas apresentarão também esta característica fundamental da primeira.

Para atingir o objetivo, fora proposta a junção de medidas de complexidade modernas em conjunto com o ferramental da teoria da informação quântica. Isto deve-se ao fato de que boa parte das medidas de complexidade modernas baseia-se em conceitos informacionais, computacionais e/ou estatísticos para realizar sua quantificação. Assim, nada mais natural que o uso de informação quântica, concomitantemente criada para a análise de estados quânticos e com características computacionais, estatísticas e, claro, informacionais.

Dessa maneira, foram escolhidas três medidas de complexidade para entender sua aplicabilidade a estados quânticos. A primeira considerada fora a complexidade Shiner-Davison-Landsberg (SDL), uma simplificação da medida

LMC, que é uma abordagem construtivista bastante simples para o problema de complexidade convexa. Todavia, sua popularidade é fruto da semelhança que mantém com outras medidas de difícil computabilidade. Ela baseia-se em somente um quantificador de desordem sobre o sistema e então é construída de forma a ser convexa. Para aumentar a aplicabilidade, pesos são criados para que o observador construa a análise mais adequada ao seu sistema baseado em algum outro conhecido.

A extensão proposta tomou como base toda a estrutura da SDL, somente modificando seu termo de desordem ao utilizar uma média geométrica entre um quantificador de desordem para estados quânticos, a entropia linear, e um quantificador de entrelaçamento, o *tangle*. Este quantificador fora considerado como um termo complementar na desordem pois o aumento de entrelaçamento insere mais ordem no sistema.

Os resultados obtidos com escolha dos pesos de uma medida convexa padrão desta abordagem para os estados analisados mostrou que estados que contém entrelaçamento, mas que ainda são estados mistos, possuem complexidade superior a dos estados em máximo entrelaçamento, que são estados puros.

Esta proposta fica, assim como a SDL, como uma opção mais simples e direta para o problema de complexidade de estados quânticos. Porém, também deve-se utilizar um estado conhecido para fazer a sintonia dos pesos de modo a enxergar a característica desejada, e então aplicá-la a outros estados desconhecidos.

As duas seguintes medidas que foram propostas de fato constituem a aplicação direta destas, porém, para que isto pudesse ser possível em estados quânticos, fora proposto um procedimento de medidas iterativo-sequencial no estado analisado, chamado de Amostragem de Estado Quântico. Através do

uso deste procedimento, ao adicionar o observador no sistema analisado, pôde-se transformar estados quânticos em funções de distribuição de probabilidades. E em cima destas aplicar a medida de complexidade de estruturas interagentes e a via mecânica computacional, pois ambas usam algum tipo de medida de probabilidade para fazer sua quantificação.

Então a extensão de estruturas interagentes com a amostragem de estados quânticos fora utilizada para avaliar a complexidade de duas famílias de estados mistos, (5.4) e (5.3), contendo os dois possíveis tipos diferentes de entrelaçamento *tripartite*. Os estados *tripartite* foram os escolhidos para que cada um *qubit* fosse uma das **estruturas** consideradas na quantificação da interação entre elas e também já que o primeiro índice de complexidade é o de interações de ordem superior $I^{(3)}$.

Os resultados obtidos para o entrelaçamento do tipo $|W\rangle$ mostram a similaridade do quantificador $I^{(3)}$ com a abordagem direta anterior, reafirmando sua validade como opção simples. Assim, neste caso, $I^{(3)}$ também indica que estados entrelaçados deste tipo mas ainda mistos têm maior complexidade.

A similaridade da complexidade de estruturas interagentes $I^{(1,2,3)}$ deste estado com as redes de sistemas dinâmicos caóticos entrando em sincronização do trabalho original é notável. Isso mostra que próximo do máximo entrelaçamento $|W\rangle$, quando este é misturado com ruído branco, a dinâmica de medidas (fruto da AEQ) é similar a destas redes de sincronização caótica, com a máxima complexidade sendo atingida pouco antes da sincronização completa, ou neste caso do máximo entrelaçamento.

O outro estado escolhido fora o que contém entrelaçamento $|GHZ\rangle$. É singular a diferença entre a complexidade deste em relação ao anterior, o que reforça a diferença entre tipos de entrelaçamento. Neste caso, não ouve sequer significantes $I^{(1,3)}$. Somente a dinâmica de observação ligada à sincro-

nização $I^{(2)}$ teve qualquer papel na complexidade deste estado. Isto muito devido à simetria que o entrelaçamento $|GHZ\rangle$ possui. Ou seja, a descrição de sua dinâmica de observação está completamente ligada a sincronização das medidas mesmo com a presença de ruído branco.

Dessa forma, com ambos resultados de estruturas interagentes, pode-se afirmar que o entrelaçamento $|GHZ\rangle$, apesar de mais simples, é mais confiável para uso em aplicações que envolvam distribuição de estados entrelaçados e subsequente medida, isso em relação ao seu irmão $|W\rangle$. Pois a distribuição pode ter adicionado ruído branco ao estado, se este estado for do tipo $|W\rangle$, então a dinâmica observada deve se mostrar bem mais complexa do que aquela se considerado o entrelaçamento $|GHZ\rangle$, tornando a correção de erros uma tarefa mais árdua.

Ainda, como as diferenças entre o entrelaçamento $|W\rangle$ e o $|GHZ\rangle$ se mantêm para os estados generalizados $|W_N\rangle$ e $|GHZ_N\rangle$, conjectura-se que para as famílias $\rho_{N|W}$ (5.6) e $\rho_{N|GHZ}$ (5.5) a mesma análise é mantida.

Para a extensão da mecânica computacional a estados quânticos através da AEQ vários estados foram analisados. De modo distinto as demais, este a complexidade via mecânica computacional analisa o sistema através de uma estrutura causal, ou seja, faz uso de probabilidades condicionais. Dessa forma, não somente são abordadas funções de distribuição dos auto-estados na amostragem de estado quântico, mas também de que forma o processo sequencial de medidas deu origem àquele auto-estado final. Sendo que esta medida de complexidade é equivalente à quantidade média de informação retida pelo processo sobre seu passado, e neste caso, isto está ligado às correlações de medidas entre *qubits* entrelaçados.

Foram considerados duas famílias de estados *bipartite*, (5.1) e (5.2), e duas *tripartite*, (5.4) e (5.3). Em todos estados analisados, a complexidade

teve valores mais elevados para estados entrelaçados mas com maior grau de mistura, e não para os estados puros maximamente entrelaçados. Assim, a implicação tecnológica para estes estados em conjunto com um processo iterativo e sequencial de medida é óbvia. Numa aplicação de estados entrelaçados com este conjunto de medições, na média há mais memória no processo de medida dos estados entrelaçados mistos que em seus irmãos puros. Portanto, possivelmente em registradores quânticos isto pode ser utilizado de forma a otimizar sua eficiência.

Outro fenômeno de grande importância observado nesta abordagem é a detecção de estados entrelaçados por meio da aferição da complexidade do mesmo por meio de AEQ. Esta detecção é feita por meio de transições de fase que ocorrem nas fronteiras de entrelaçamento para um certo valor do parâmetro de mistura das famílias de estados. Nos estados *bipartite* houve somente uma transição de fase entre a região de estados separáveis e dos entrelaçados, já para os estados *tripartite*, as duas formas distintas de entrelaçamento foram detectadas via transições de fase, tanto a transição *tripartite* genuíno e *tripartite* bi-separável como também a entre os últimos e os separáveis. Tal relação entre as transições de fase quânticas e entrelaçamento já haviam sido conjecturadas(ZANDER; PLASTINO; PLASTINO, 2009).

Outro importante resultado é a constatação de que em todos os estados analisados nesta abordagem, a complexidade é mais robusta para um estado entrelaçado, pois há uma mudança pequena e suave entre os pontos dentro desta região, em contraste com as regiões separáveis. Tal fato pode ser um forte indício sobre um recorrente questionamento em sistemas quânticos complexos, se o nível de complexidade de um sistema quântico pode ser responsável pela robustez no entrelaçamento deste sistema(MORA; BRIEGEL; KRAUS, 2007; MORA; BRIEGEL, 2005; MORA; BRIEGEL, 2006). O que poderia ser osten-

sivamente utilizado para potencializar o desenvolvimento de computadores quânticos mais facilmente protegidos da de-coerência.

Em suma, através destes vários sugestivos resultados das três abordagens propostas, vê-se que uma medida de complexidade moderna para estados quânticos tem muito a oferecer tanto como forma de reafirmar fatos antigos como lançar luzes sobre fenômenos novos. Logo, as abordagens aqui propostas para sanar esta deficiência afirmam-se através de seus resultados como uma importante ferramenta de análise de estados e fenômenos quânticos, dessa forma cumprindo seu papel de medida de complexidade. Além disso, fomentando novos olhares sobre o problema de complexidade em estados e sistemas quânticos, e suas implicações sobre tecnologias vindouras.

REFERÊNCIAS

ACÍN, A. et al. Classification of Mixed Three-Qubit States. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 4, jul. 2001. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://prl.aps.org/abstract/PRL/v87/i4/e040401>.

ANGULO, J. C.; ANTOLIN, J.; SEN, K. D. Fisher-Shannon plane and statistical complexity of atoms. *Physics Letters A*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 372, n. 5, p. 670–674, jan. 2008. ISSN 03759601. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=34&doc=336&colname=WOS.

ATMANSPACHER, H.; RATH, C.; WIEDENMANN, G. Statistics and meta-statistics in the concept of complexity. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, v. 234, n. 3-4, p. 819–829, jan. 1997. ISSN 03784371. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(96\)00293-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(96)00293-2).

BALL, R. C.; DIAKONOVA, M.; MACKAY, R. S. Quantifying emergence in terms of persistent mutual information. *Advances in Complex Systems*, WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD, v. 13, n. 03, p. 327, 2010. ISSN 0219-5259. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?&colname=WOS&search_mode=CitingArticles&qid=35&page=1&product=UA&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&doc=1.

BANDT, C.; POMPE, B. Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 17, abr. 2002. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://prl.aps.org/abstract/PRL/v88/i17/e174102>.

BATES, J. E.; SHEPARD, H. K. Measuring complexity using information fluctuation. *Physics Letters A*, v. 172, n. 6, p. 416–425, jan. 1993. ISSN 03759601. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90232-0](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(93)90232-0).

BENATTI, F. Entropy and algorithmic complexity in quantum information theory. *Natural Computing*, v. 6, n. 2, p. 133–150, dez. 2006. ISSN 1567-7818. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/c6211258t5341246>.

_____. *Dynamics, information and complexity in quantum systems*. Springer, 2009. 535 p. ISBN 1402093055. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=zTFiCm4Yq1cC&pgis=1>.

BENATTI, F. et al. Entropy and Quantum Kolmogorov Complexity: A Quantum Brudno's Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, v. 265, n. 2, p. 437–461, maio 2006. ISSN 0010-3616. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0506080>.

BENNET, C. H. How to define complexity in physics, and why. In: _____. *Complexity, entropy, and the physics of information*. Addison-Wesley Pub. Co., 1990. p. 137–148. ISBN 0201515067. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=mdjs0eTgatsC&pgis=1>.

CHATZISAVVAS, K. C.; MOUSTAKIDIS, C. C.; PANOS, C. P. Information entropy, information distances, and complexity in atoms. *The Journal of chemical physics*, AMER INST PHYSICS, v. 123, n. 17, p. 174111, nov. 2005. ISSN 0021-9606. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=12&doc=113&colname=WOS.

CRUTCHFIELD, J.; YOUNG, K. Inferring statistical complexity. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 63, n. 2, p. 105–108, jul. 1989. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.63.105>.

CRUTCHFIELD, J. P. The calculi of emergence: computation, dynamics and induction. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 75, n. 1-3, p. 11–54, ago. 1994. ISSN 01672789. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90273-9](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(94)90273-9).

CRUTCHFIELD, J. P.; SHALIZI, C. R. Thermodynamic depth of causal states: Objective complexity via minimal representations. *Physical Review E*, AMERICAN PHYSICAL SOC, v. 59, n. 1, p. 275–283, 1999. ISSN 1063-651X. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=17&doc=166&colname=WOS.

CSISZÁR, I.; SHIELDS, P. *Information Theory and Statistics: A Tutorial (Foundations and Trends in Communications and Information The)*. Now Publishers Inc, 2004. 124 p. ISBN 1933019050. Disponível em: <http://www.amazon.com/Information-Theory-Statistics-Foundations-Communications/dp/1933019050>.

DAVISON, M.; SHINER, J. S. Extended entropies and disorder. *Advances In Complex Systems*, WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD, v. 8, n. 1, p. 125–158, 2005. ISSN 0219-5259. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=57&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=8&doc=78&colname=WOS.

De Mattos, S. et al. Measuring q-bits in three-trophic level systems. *Ecological Modelling*, v. 200, n. 1-2, p. 183–188, jan. 2007. ISSN 03043800. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.07.006>.

DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 62, n. 6, p. 062314, nov. 2000. ISSN 1050-2947. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062314>.

EINSTEIN, A. Letter from Einstein to Max Born, 3 March 1947. In: _____. *The Born-Einstein Letters; Correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955*. New York, NY, USA: Walker, 1971.

ELLISON, C. J.; MAHONEY, J. R.; CRUTCHFIELD, J. P. Prediction, Retrodiction, and the Amount of Information Stored in the Present. *Journal of Statistical Physics*, v. 136, n. 6, p. 1005–1034, set. 2009. ISSN 0022-4715. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/6224161305172273>.

FELDMAN, D. P.; CRUTCHFIELD, J. P. Measures of statistical complexity: Why? *Physics Letters A*, v. 238, n. 4-5, p. 244–252, fev. 1998. ISSN 03759601. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00855-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00855-4).

GASPARD, P.; WANG, X.-J. Noise, chaos, and (e, τ) -entropy per unit time. *Physics Reports*, v. 235, n. 6, p. 291–343, dez. 1993. ISSN 03701573. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(93\)90012-3](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(93)90012-3).

GELL-MANN, M.; LLOYD, S. Information measures, effective complexity, and total information. *Complexity*, v. 2, n. 1, p. 44–52, set. 1996. ISSN 1076-2787. Disponível em: [http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1099-0526\(199609/10\)2:1<44::AID-CPLX10>3.0.CO;2-X/abstract](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1099-0526(199609/10)2:1<44::AID-CPLX10>3.0.CO;2-X/abstract).

GRASSBERGER, P. How to measure self-generated complexity. *Physica A*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 140, n. 1-2, p. 319–325, 1986. ISSN 0378-4371. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=40&doc=400&colname=WOS.

_____. Toward a quantitative theory of self-generated complexity. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer Netherlands, v. 25, n. 9, p. 907–938, set. 1986. ISSN 0020-7748. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/125007637531552j/>.

GROS, C. *Complex and adaptive dynamical systems: a primer*. Springer, 2008. 250 p. ISBN 3540718737. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=PyFpDYaJZ8MC&pgis=1>.

HAKEN, H. *Information and self-organization: a macroscopic approach to complex systems*. Springer, 2006. 257 p. ISBN 3540330216. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=tAfj4-xzyGwC&pgis=1>.

KAHLE, T. et al. Complexity measures from interaction structures. *Physical Review E*, v. 79, n. 2, fev. 2009. ISSN 1539-3755. Disponível em: <http://pre.aps.org/abstract/PRE/v79/i2/e026201>.

KOLMOGOROV, A. Three approaches to the definition of the concept “quantity of information”. *Problemy Peredachi Informatsii*, Russian Academy of Sciences, Branch of Informatics, Computer Equipment and Automatization, v. 1, n. 1, p. 3–11, 1965. Disponível em: <http://www.mathnet.ru/eng/ppi68>.

LAMBERTI, P. W. et al. Intensive entropic non-triviality measure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 334, n. 1-2, p. 119–131, mar. 2004. ISSN 03784371. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=13&doc=121&colname=WOS.

LEMPER, A.; ZIV, J. On the Complexity of Finite Sequences. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 22, n. 1, p. 75–81, jan. 1976. ISSN 0018-9448. Disponível em: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=1055501.

LLOYD, S.; PAGELS, H. Complexity as thermodynamic depth. *Annals of Physics*, ACADEMIC PRESS INC JNL-COMP SUBSCRIPTIONS, v. 188, n. 1, p. 186–213, 1988. ISSN 0003-4916. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=GeneralSearch&qid=2&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=1&doc=1&colname=WOS.

LÓPEZ-RUIZ, R.; MANCINI, H. L.; CALBET, X. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A*, v. 209, n. 5-6, p. 321–326, dez. 1995. ISSN 03759601. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00867-5](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(95)00867-5).

LÓPEZ-RUIZ, R.; SANUDO, J. Complexity Invariance by Replication in the Quantum Square Well. *Open Systems & Information Dynamics*, SPRINGER, v. 16, n. 04, p. 423, 2009. ISSN 1230-1612. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=78&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=3&doc=27&colname=WOS.

MARIN, M.; PLASTINO, A.; ROSSO, O. A. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 369, n. 2, p. 439–462, set. 2006. ISSN 03784371. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2005.11.053>.

MARTIN, M. T.; PLASTINO, A.; ROSSO, O. A. Statistical complexity and disequilibrium. *Physics Letters A*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 311, n. 2-3, p. 126–132, maio 2003. ISSN 03759601. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=14&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=13&doc=122&colname=WOS.

Montgomery Jr, H.; SEN, K. Statistical complexity and Fisher-Shannon information measure of $H+2$. *Physics Letters A*, v. 372, n. 13, p. 2, nov. 2007.

ISSN 03759601. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.11.041>.

MORA, C. E.; BRIEGEL, H. J. Algorithmic complexity and entanglement of quantum states. *Physical review letters*, v. 95, n. 20, p. 200503, nov. 2005. ISSN 0031-9007. Disponível em: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/16384044>.

_____. Algorithmic complexity of quantum states. *International Journal of Quantum Information*, v. 4, n. 4, p. 715–737, 2006. Disponível em: <http://www.worldscinet.com/abstract?id=pii:S0219749906002043>.

MORA, C. E.; BRIEGEL, H. J.; KRAUS, B. Quantum Kolmogorov complexity and its applications. *International Journal of Quantum Information*, WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD, v. 5, n. 5, p. 729–750, 2007. ISSN 0219-7499. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=65&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=1&doc=6&colname=WOS.

MOUSTAKIDIS, C. et al. Statistical measure of complexity of hard-sphere gas: applications to nuclear matter. *Arxiv preprint arXiv:1002.2515*, 2010. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1002.2515>.

MUNRO, W. et al. Maximizing the entanglement of two mixed qubits. *Physical Review A*, v. 64, n. 3, ago. 2001. ISSN 1050-2947. Disponível em: <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v64/i3/e030302>.

NAGY, A.; SEN, K.; Montgomery Jr., H. LMC complexity for the ground states of different quantum systems. *Physics Letters A*, ELSEVIER SCIENCE BV, v. 373, n. 30, p. 2552–2555, jul. 2009. ISSN 03759601. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=78&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=2&doc=19&colname=WOS.

NEUMANN, J. V. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1996. 262 p. ISBN 3540592075. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=HFHjkEjJyKIC&pgis=1>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2000. 676 p. ISBN 0521635039. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=65FqEKQ0fP8C&pgis=1>.

PETERS, N.; WEI, T.-C.; KWIAT, P. Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks. *Physical Review A*, v. 70, n. 5, nov. 2004. ISSN 1050-2947. Disponível em: <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v70/i5/e052309>.

PIASECKI, R.; PLASTINO, A. Entropic descriptor of a complex behaviour. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 389, n. 3, p. 397–407, fev. 2010. ISSN 03784371. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2009.10.013>.

PINCUS, S. Approximate entropy (ApEn) as a complexity measure. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, v. 5, n. 1, p. 110–117, mar. 1995. ISSN 1089-7682. Disponível em: http://chaos.aip.org/chaoeh/v5/i1/p110_s1.

PIQUEIRA, J. R. C. A mathematical view of biological complexity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 6, p. 2581–2586, jun. 2009. ISSN 10075704. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.10.003>.

PIQUEIRA, J. R. C.; De Mattos, S.; Vasconcelos Neto, J. Measuring complexity in three-trophic level systems. *Ecological Modelling*, v. 220, n. 3, p. 266–271, fev. 2009. ISSN 03043800. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2008.10.013>.

PIQUEIRA, J. R. C. et al. Bits and q-bits in a psychiatric ward. *Journal of theoretical biology*, v. 247, n. 1, p. 182–5, jul. 2007. ISSN 0022-5193. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.02.011>.

PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. An introduction to entanglement measures. p. 25, abr. 2005. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0504163>.

PROKOPENKO, M.; BOSCHETTI, F.; RYAN, A. An information-theoretic primer on complexity, self-organization, and emergence. In: *Understanding Complex Systems'07*. Urbana-Champaign: [s.n.], 2007. Disponível em: <http://www3.interscience.wiley.com/journal/121495010/abstract>.

ROGERS, C.; VEDRAL, V.; NAGARAJAN, R. Second quantized Kolmogorov complexity. *International Journal of Quantum Information*, WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD, v. 6, n. 4, p. 907–928, 2008. ISSN 0219-7499. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=GeneralSearch&qid=73&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=1&doc=1&colname=WOS.

ROSSO, O. A. et al. Generalized Statistical Complexity Measure. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD, v. 20, n. 03, p. 775, 2010. ISSN 0218-1274. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?&colname=WOS&search_mode=CitingArticles&qid=29&page=1&product=UA&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&doc=1.

SANUDO, J.; LÓPEZ-RUIZ, R. Some features of the statistical complexity, Fisher-Shannon information and Bohr-like orbits in the quantum isotropic harmonic oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP PUBLISHING LTD, v. 41, n. 26, p. 265303, jul. 2008. ISSN 1751-8113. Disponível em: http://apps.isiknowledge.com/full_record.do?product=UA&search_mode=Refine&qid=70&SID=4Ad8o8BfMFlad@cenJG&page=1&doc=7&colname=WOS.

SAPARIN, P. et al. The renormalized entropy - an appropriate complexity measure? *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 4, n. 10, p. 1907–1916, out.

1994. ISSN 09600779. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)90006-X](http://dx.doi.org/10.1016/0960-0779(94)90006-X).

SHALIZI, C. R.; CRUTCHFIELD, J. P. Computational Mechanics: Pattern and Prediction, Structure and Simplicity. *Journal of Statistical Physics*, Springer Netherlands, v. 104, n. 3, p. 817–879–879, 2001. ISSN 0022-4715. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/w21421233n715040/>.

SHALIZI, C. R.; KLINKNER, K. L. Blind Construction of Optimal Nonlinear Recursive Predictors for Discrete Sequences. In: *Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Twentieth Conference (UAI 2004)*. Arlington, Virginia, USA: AUAI Press, 2004. p. 504—511. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/cs.LG/0406011>.

SHINER, J.; DAVISON, M.; LANDSBERG, P. Simple measure for complexity. *Physical Review E*, v. 59, n. 2, p. 1459–1464, fev. 1999. ISSN 1063-651X. Disponível em: http://pre.aps.org/abstract/PRE/v59/i2/p1459_1.

STOOP, R. et al. Comment on the Shiner-Davison-Landsberg Measure. *Nonlinear Dynamics*, v. 44, n. 1-4, p. 213–218, jun. 2006. ISSN 0924-090X. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/yr76655346gwx22>.

STOOP, R.; STOOP, N.; BUNIMOVICH, L. Complexity of Dynamics as Variability of Predictability. *Journal of Statistical Physics*, Springer Netherlands, v. 114, n. 3/4, p. 1127–1137, fev. 2004. ISSN 0022-4715. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/j653q76048070267/>.

TSALLIS, C. Entropic nonextensivity: a possible measure of complexity. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 13, n. 3, p. 371–391, mar. 2002. ISSN 09600779. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779\(01\)00019-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00019-4).

VEDRAL, V. The role of relative entropy in quantum information theory. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 1, p. 197–234, mar. 2002. ISSN 0034-6861. Disponível em: http://rmp.aps.org/abstract/RMP/v74/i1/p197_1.

_____. *Introduction to quantum information science*. Oxford University Press, 2006. 183 p. ISBN 0199215707. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=ffHdd60VhGMC&pgis=1>.

_____. *Decoding Reality: The Universe as Quantum Information*. Oxford University Press, 2010. 256 p. ISBN 0199237697. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=kRnpp2HI7YIC&pgis=1>.

WEI, T.-C. et al. Maximal entanglement versus entropy for mixed quantum states. *Physical Review A*, v. 67, n. 2, fev. 2003. ISSN 1050-2947. Disponível em: <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v67/i2/e022110>.

ZANDER, C.; PLASTINO, A.; PLASTINO, A. R. Quantum entanglement in a many-body system exhibiting multiple quantum phase transitions. *Brazilian Journal of Physics*, v. 39, n. 2A, p. 464–467, 2009.

ZELEVINSKY, V.; HOROI, M.; BROWN, B. A. Information entropy, chaos and complexity of the shell model eigenvectors. *Physics Letters B*, v. 350, n. 2, p. 141–146, maio 1995. ISSN 03702693. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)00324-E](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(95)00324-E).