2. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos básicos relacionados às Desigualdades Matriciais Lineares. Na seção 2.1, apresentamos uma introdução às LMI's; na seção 2.2, as chamadas regiões LMI são definidas e modeladas e, na seção 2.3, é abordada a modelagem de incertezas através de politopos.

2.1. INTRODUÇÃO

Desigualdades Matriciais Lineares (ou *Linear Matrix Inequalities*, ou ainda LMI's) são ferramentas matemáticas amplamente aplicadas em teoria de controle. Seu surgimento provavelmente ocorreu há mais de cem anos atrás, com os trabalhos de Lyapunov. Contudo, até recentemente havia poucos algoritmos para solução numérica das LMI's. Durante os últimos 20 anos, o desenvolvimento de sofisticados algoritmos numéricos tornou possível a solução de LMI's de um modo eficiente (são os chamados algoritmos de pontos interiores). Esses algoritmos exploram a convexidade dos problemas LMI para obter resultados numéricos confiáveis (Skogestad e Postlethwaite, 2005).

Uma das principais vantagens das LMI's é que elas podem ser usadas para resolver problemas que envolvem muitas variáveis matriciais e, além disso, diversas estruturas podem ser impostas a essas variáveis. Outra vantagem das LMI's é que elas constituem um método flexível para resolver problemas relacionados à engenharia de controle, sendo relativamente direto transformar diversos problemas de controle em problemas LMI. Em muitos casos, o uso das LMI's pode eliminar restrições associadas aos métodos convencionais, e ainda auxiliar na generalização de alguns tipos de problemas. Freqüentemente os métodos associados às LMI's podem ser aplicados em casos nos quais os métodos convencionais falham ou não conseguem encontrar uma solução (Skogestad e Postlethwaite, 2005).

Através das LMI's, também pode-se juntar muitos resultados numa estrutura comum. Alguns problemas importantes na área de controle, que podem ser resolvidos utilizando LMI's, são:

projeto de controladores H_∞ , projeto de controladores H_2 , projeto misto de controladores ótimos H_2/H_∞ , alocação de pólos de sistemas no plano complexo, projeto de controladores robustos através de síntese μ, etc.

Uma definição importante para o entendimento das LMI's é o conceito de matrizes positivas definidas. Assim, uma matriz quadrada e real P é dita positiva definida se:

$$x^T.P.x > 0 \ , \ \forall x \neq 0 \ , \ P \in R^{nxn} \ , \ x \in R^n$$

É comum utilizarmos a notação $P > 0$ para indicar que P é positiva definida.

Uma LMI é uma desigualdade da forma (Boyd et al., 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i.F_i > 0 \qquad (2.1)$$

Na equação acima, $x \in R^n$ é a variável vetorial (suas componentes são x_i , i = 1, ..., n), e as matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in R^{mxm}$, i = 0, 1, ..., n, são conhecidas (Boyd et al., 1994). A LMI (2.1) é uma restrição convexa em x, ou seja, o conjunto $\{x \ / \ F(x) > 0\}$ é convexo. A desigualdade (2.1) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x, tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades de norma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle, como a desigualdade de Lyapunov e outras desigualdades matriciais.

Contudo, as LMI's normalmente são escritas de outro modo, no qual as variáveis são matrizes:

$$R + M_1^T.P_1.N_1 + N_1^T.P_1.M_1 + \ldots + M_n^T.P_n.N_n + N_n^T.P_n.M_n < 0 \ , \qquad (2.2)$$

onde M_i, N_i e R, i = 1, 2, ..., n, são as matrizes fixas, e P_i , i = 1, 2, ..., n, são as matrizes variáveis. Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov (Boyd et al., 1994):

$$A^T.P + P.A < 0,$$

onde $A \in R^{nxn}$ é uma matriz dada, e $P = P^T$ é a variável. A LMI (2.2) pode ser posta na forma da LMI (2.1) – ver (Boyd et al., 1994).

Transformações de desigualdades matriciais quadráticas em LMI's são muito úteis em aplicações de controle robusto, conforme veremos mais adiante. Uma propriedade importante das LMI's é a possibilidade de transformação da desigualdade quadrática (2.3) na desigualdade linear (2.4) através do complemento de Schur (Boyd et al., 1994):

$$R > 0 \ , \ Q - S.R^{-1}.S^{T} > 0 \ , \qquad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0, \qquad (2.4)$$

onde Q e R são matrizes simétricas, e S é uma variável matricial. Como exemplo, a restrição da norma matricial (ou valor singular máximo) $\|Z\| < 1$, onde $Z \in R^{pxq}$ e é variável matricial, pode ser escrita como a LMI (2.5), uma vez que $\|Z\| < 1$ é equivalente a $I - Z.Z^{T} > 0$.

$$\begin{bmatrix} I & Z \\ Z^T & I \end{bmatrix} > 0 \qquad (2.5)$$

A restrição $c^T.P^{-1}.c < 1$, $P > 0$, onde $c \in R^{n}$ e $P \in R^{nxn}$ é simétrica e variável, pode ser expressa pela seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} P & c \\ c^T & 1 \end{bmatrix} > 0 \qquad (2.6)$$

Um outro exemplo de aplicação do complemento de Schur é a seguinte desigualdade quadrática, que pode ser transformada numa LMI:

$$A^T.P + P.A + P.B.R^{-1}.B^T.P + Q < 0 \qquad (2.7)$$

Na equação acima, A, B, Q (simétrica) e R (simétrica e positiva definida) são matrizes dadas, e P (simétrica) é a variável. Essa desigualdade matricial quadrática (cujo formato é similar à equação de Riccati) pode ser escrita como uma desigualdade matricial linear da seguinte forma (Boyd et al., 1994):

$$\begin{bmatrix} -A^T.P - P.A - Q & P.B \\ B^T.P & R \end{bmatrix} > 0 \qquad (2.8)$$

Dada uma LMI ((2.2), por exemplo), o problema LMI associado consiste em calcular a variável matricial P tal que a desigualdade é satisfeita, ou então concluir que a LMI é infactível. Esse é um problema de viabilidade convexa (Boyd et al., 1994). Para resolver problemas LMI, há algoritmos adequados feitos para trabalhar com otimização convexa. Um desses conjuntos de algoritmos é o *toolbox* de LMI's do MATLAB (MATLAB 6.5, 2002).

Outro importante tipo de problema de otimização convexa é o problema dos autovalores; ele consiste em minimizar o máximo autovalor de uma matriz, sujeito a restrições na forma de LMI's. O problema dos autovalores pode ser escrito do seguinte modo:

$$\min \ \lambda$$

$$\text{Sujeito a } \lambda.I - A > 0 \ , \ B > 0 \ , \ A = f(B) \ ,$$

onde A e B são matrizes simétricas variáveis. Como exemplo de um problema de autovalores, temos o seguinte (Boyd et al., 1994):

$$\min_{\gamma, P} \ \gamma$$

$$\text{Sujeito a } \begin{bmatrix} -A^T.P - P.A - C^T.C & P.B \\ B^T.P & \gamma.I \end{bmatrix} > 0 \ \text{ e } \ P > 0 \ ,$$

onde as matrizes $A \in R^{nxn}, B \in R^{nxp}, C \in R^{mxn}$ são dadas, e $P = P^T \in R^{nxn}$ e $\gamma \in R$ são as variáveis de otimização. Esse problema pode ainda ser escrito na forma de uma desigualdade matricial quadrática (por complemento de Schur):

$$\min_{\gamma, P} \ \gamma$$

$$\text{Sujeito a } \ A^T P + PA + C^T C + \gamma^{-1} PBB^T P < 0 \ \text{ e } \ P > 0$$

A seguir, veremos como posicionar os pólos de uma dada matriz A numa região LMI do plano complexo. O resultado a ser apresentado será a base para o desenvolvimento de controladores robustos para alocação de autovalores em regiões pré-definidas do plano complexo.

2.2. REGIÕES LMI

Uma região LMI é qualquer subconjunto D do plano complexo que pode ser definido como (Chilali, Gahinet e Apkarian, 1999):

$$D = \{ z \in C \,/\, L + z.M + \bar{z}.M^T < 0 \}, \qquad (2.9)$$

onde z é um elemento qualquer do plano complexo, $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z, L e M são matrizes reais quadradas, e $L^T = L$. Algumas características fundamentais das regiões LMI são (Chilali, Gahinet e Apkarian, 1999):

1. Interseções de regiões LMI são regiões LMI;

2. Uma matriz real A é D-estável, isto é, tem todos os seus autovalores na região LMI D se e somente se existir uma matriz simétrica Q tal que:

$$\begin{array}{c} L \otimes Q + M \otimes (A.Q) + M^T \otimes (Q.A^T) < 0 \\ Q > 0 \end{array} \qquad (2.10)$$

Na desigualdade (2.10), ⊗ denota o produto de Kronecker. As principais regiões LMI utilizadas em aplicações de controle para alocação de pólos são as seguintes (Chilali, Gahinet e Apkarian, 1999):

1. Semiplano Re(z) < – α :

$$L = 2.\alpha \text{ e } M = 1;$$

2. Disco centrado na origem do plano complexo com raio r:

$$L = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3. Setor cônico com o ápice na origem do plano complexo e ângulo interno de 2θ, situado no semi-plano real negativo:

$$L = 0 \text{ e } M = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

Posicionando-se os pólos de um sistema na intersecção das 3 regiões acima mencionadas (o que também é uma região LMI), pode-se garantir para a resposta transitória do sistema em malha fechada uma taxa de decaimento mínima igual a α, uma taxa de amortecimento mínima igual a $\xi = \cos\ \theta$, e uma freqüência natural amortecida máxima igual a $\omega_d = r.\sin\ \theta$, além de uma freqüência natural não amortecida $\omega_n \leq r$. Isso, por sua vez, limita o sobressinal máximo, a freqüência dos modos oscilatórios, o tempo de atraso, o tempo de subida e o tempo de acomodação do sistema. Desse modo, alocar os pólos do sistema em malha fechada nessa região assegura um desempenho de resposta transitória adequado para o sistema. A região do plano complexo citada acima pode ser vista na figura 2.1.

2.3. MODELAGEM DE INCERTEZAS ATRAVÉS DE POLITOPOS

Seja um sistema para o qual queremos definir um modelo contendo incertezas. Desse modo, sua representação no espaço de estados varia, podendo assumir m modelos diferentes. Assim, (A_i , B_i , C_i) será a representação do i-ésimo modelo dinâmico de um sistema qualquer no espaço de estados; então, as matrizes que definem o sistema no espaço de estados podem assumir qualquer valor dentro de um conjunto limitado e definido de matrizes. Consideraremos aqui que há variações apenas na matriz A do sistema nominal, sendo as matrizes B e C sempre as mesmas (em outras palavras, as incertezas estão presentes apenas em A); assim, a representação do i-ésimo modelo do sistema será simplesmente (A_i , B , C). Um politopo é o conjunto Ω definido abaixo (Boyd et al., 1994):

$$\Omega = \{ A \,/\, A \in R^{nxn}, A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . A_i , \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \} , \qquad (2.11)$$

onde n é a dimensão das matrizes A_i e m é o número de modelos do sistema. As matrizes A_i são chamadas vértices do politopo.

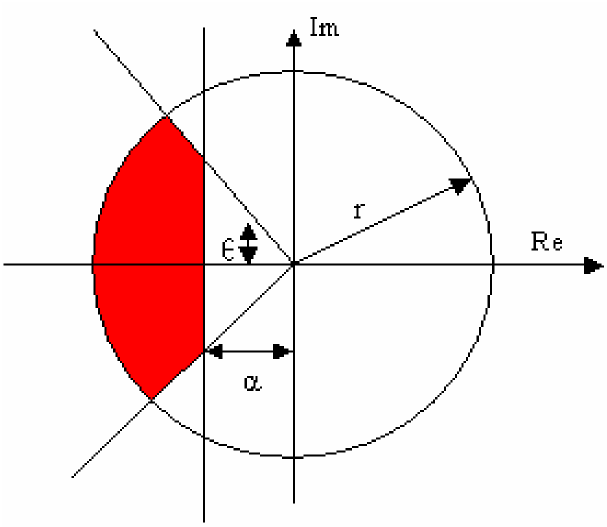

Figura 2.1 – Região do plano complexo para alocação de pólos em malha fechada