

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Rodrigo de Barros Nabholz

**Seleção Ótima de Ativos
Multi-Período com Restrições
Intermediárias Utilizando o
Critério de Média-Variância**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Telecomunicações e
Controle da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de Sistemas

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa - Orientador

São Paulo, 2006

Agradecimentos

A minha querida esposa Márcia que esteve sempre ao meu lado nesta árdua jornada com muito amor, carinho e compreensão, e sem a qual nada disto seria possível. Ao meu filho querido Mateus, que mesmo ainda sem entender tudo que está acontecendo, é uma fonte de inspiração e alegria. Aos meus pais Beto e Teresa e irmãs Paula e Dani pelo carinho e apoio. Aos amigos Edivar, Edésio e Ailton que me acompanharam e me apoiaram desde o início deste trabalho. A minha vó Nelly que vai poder prestigiar esta realização, e ao meu avô Mandi e vó Nizia que, apesar de não poderem estar presentes, tenho certeza que acompanham com orgulho as peripécias do neto. E ao meu caro orientador prof. Oswaldo por ter me dado a oportunidade de estar aqui.

Resumo

Esta tese é dedicada ao estudo de modelos de otimização de carteiras de investimento multi-período. Daremos ênfase a um modelo com restrições intermediárias formulado como um problema de controle ótimo e resolvido utilizando técnicas de programação dinâmica. Serão tratados aspectos teóricos e práticos desta classe de problemas. Primeiramente faremos uma revisão das principais hipóteses dos modelos de otimização de carteiras e o caso uni-período. Analisaremos a seguir as generalizações para o caso multi-período, onde os modelos utilizam apenas restrições para o valor esperado e/ou para a variância da carteira no instante final do período analisado. Apresentaremos então o principal resultado proposto neste trabalho onde consideramos o problema de seleção ótima de ativos multi-período no qual podemos incorporar ao modelo restrições intermediárias para o valor esperado e variância da carteira durante o período de análise. A grande vantagem desta técnica é permitir o controle do valor esperado e/ou da variância da carteira ao longo de todo o horizonte de análise. Faremos uma comparação entre as formulações apresentadas e realizaremos experimentos numéricos com o modelo proposta nesta tese.

Os principais resultados originais desta tese encontram-se no Capítulo 5. No Capítulo 6 apresentamos as simulações numéricas realizadas com o modelo proposto.

Abstract

The subject of this thesis is the study of multi-period portfolio optimization problems. We focus on a model with intermediate constraints formulated as an optimal control problem and solved by using dynamic programming techniques. Both theoretical and practical issues are addressed. Firstly we will analyze the main hypothesis of portfolio optimization models and the single period case. Then we will present the generalization for the multi-period case, where the models use only constraints for the expected value and variance at the final period. The main result proposed in this work considers the multi-period portfolio selection problem with intermediate constraints on the expected value and variance of the portfolio taken into account in the optimization problem. The main advantage of this technique is that it is possible to control the intermediate expected value or variance of the portfolio during the time horizon considered. Comparison between the presented formulations and numerical experiments of the proposed model will be exposed.

The main original results of this thesis can be found in Chapter 5. In Chapter 6 we present numerical simulations with the proposed model.

“A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies. The investor should build toward an integrated portfolio which best suits his needs.”

Harry Max Markowitz - 1959

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Preliminares	1
1.2	Estrutura do Trabalho	4
2	Modelo para Seleção de Ativos	5
2.1	Fundamentos do Modelo	5
2.2	Conjunto Factível	12
3	Modelo Uni-período	16
3.1	Introdução	16
3.2	Fronteira Eficiente e o Modelo de Markowitz	16
3.3	Aprimoramentos do Modelo Original	19
3.3.1	Inclusão de Ativo Livre de Risco	20
3.3.2	Restrições Positivas	21
3.3.3	Alternativas na Estimativa do Risco	23
3.3.4	Rastreamento de <i>Benchmark</i>	24
3.3.5	Otimização Robusta	25
4	Modelos Multi-Período	27
4.1	Introdução	27
4.2	Fundamentos dos Modelos Multi-Período	28
4.2.1	Caso Discreto	30
4.2.2	Caso Contínuo	31
4.3	Modelo Discreto: abordagem via Programação Dinâmica	33
4.3.1	Introdução	33
4.3.2	Formulação dos Problemas	34

4.3.3	Solução Analítica dos Problemas	37
4.3.4	Derivação das Soluções Analíticas	39
4.3.5	Inclusão do Ativo Livre de Risco	43
4.4	Modelo Contínuo: abordagem via Controle Linear Quadrático Estocástico (LQG)	46
4.4.1	Introdução	46
4.4.2	Formulação do Problema	46
4.4.3	Construção de um Problema Auxiliar	48
4.4.4	Solução do Problema LQ Genérico	49
4.4.5	Solução do Problema Auxiliar	51
4.4.6	Solução do Problema Original	53
4.5	Modelo Contínuo: abordagem via Cadeia de Markov com mudança de regimes	55
4.5.1	Introdução	55
4.5.2	Formulação do Problema	56
4.5.3	Análise de Factibilidade	57
4.5.4	Solução Analítica do Problema	60
4.5.5	Determinação da Fronteira Eficiente	62
4.5.6	A relação entre o caso contínuo e o discreto	63
4.6	Outras Abordagens	64
5	Modelo Multi-Período com Restrições	66
5.1	Introdução	66
5.2	Fundamentos do Modelo	67
5.3	Formulação dos Problemas	70
5.4	Solução de um Problema Auxiliar	73
5.5	Soluções dos Problemas	77
5.5.1	Solução Analítica do Problema $PMV(\ell, \rho)$	77
5.5.2	Solução Analítica do Problema $PV(\nu)$	83
5.5.3	Solução Numérica do Problema $PE(\sigma)$	86
6	Simulações Numéricas	91
6.1	Simulação 1	91
6.2	Simulação 2	96

6.3	Simulação 3	104
7	Conclusões e Perspectivas	123
7.1	Conclusões	123
7.2	Perspectivas Futuras	125

Lista de Figuras

3.1	Fronteira Eficiente e a Carteira de Mínimo Risco	17
3.2	Fronteira Eficiente e a Carteira de Máximo Retorno	17
3.3	Fronteira Eficiente para 1 Ativo Livre de Risco e 1 Ativo com Risco	20
3.4	Fronteira Eficiente para 1 Ativo Livre de Risco e n Ativos com Risco	21
6.1	Exemplo 1 - Variância das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha) .	93
6.2	Exemplo 1 - Valor Esperado das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)	94
6.3	Exemplo 2 - Valor Esperado das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)	95
6.4	Exemplo 2 - Variância das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha) .	96
6.5	Exemplo 1 - Variância das Carteiras 1, 2 e 3	99
6.6	Exemplo 1 - Valor Esperado das Carteiras 1, 2 e 3	100
6.7	Exemplo 2 - Variância das Carteiras 1, 2 e 3	102
6.8	Exemplo 2 - Valor Esperado das Carteiras 1, 2 e 3	103
6.9	Exemplo 1 - Desvio Padrão das Carteiras 1, 2 e 3	112
6.10	Exemplo 1 - Valor Observado das Carteiras 1, 2 e 3	113
6.11	Exemplo 2 - Desvio Padrão das Carteiras 1, 2 e 3	119
6.12	Exemplo 2 - Valor Observado das Carteiras 1, 2 e 3	120

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

Há tempos a matemática tornou-se parte integrante e fundamental em diversas áreas das ciências, traduzindo fenômenos naturais em teorias, fórmulas e expressões. Este processo vem sofrendo uma grande evolução ao longo do tempo e a introdução dos computadores, e conseqüentemente de algoritmos numéricos, foi de fundamental importância para que teorias complexas pudessem ser elaboradas e implementadas com o objetivo de modelar os mais diferentes fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Dentre as áreas em que esta evolução é evidente, concentrar-nos-emos nas Ciências Econômicas, mais especificamente no que conhecemos hoje como Finanças. Os modelos de Fronteira Eficiente de Markowitz (prêmio Nobel 1990) e as fórmulas de Black & Scholes (prêmio Nobel 1997) e suas inúmeras adaptações são exemplos claros deste processo, uma vez que ambos requerem algoritmos numéricos para gerar seus resultados de forma viável e de maneira a acompanhar o dinamismo do mercado financeiro.

A constante e dinâmica evolução dos mercados de capitais no mundo inteiro acarreta no surgimento de novos produtos que são desenvolvidos para atender as necessidades dos agentes financeiros. Isto fez com que a necessidade de otimizar a alocação dos ativos de uma instituição, dada a grande variedade dos instrumentos existentes, tenha transformado-se em um tópico amplamente estudado.

Sabemos que, de uma maneira geral, o objetivo principal dos investidores e, em particular das instituições financeiras, é maximizar o retorno de seus recursos. Entretanto, a alocação destes recursos gera uma série de “riscos”. Neste contexto, o grande objetivo dos modelos de seleção de ativos é fornecer informações que auxiliem à tomada de decisão em todos os níveis da instituição, de forma que os riscos e retornos esperados decorrentes dos investimentos sejam conhecidos e, de alguma forma, mensuráveis.

Atualmente, o problema da gestão de ativos deixou de ser apenas uma questão acadêmica e passou a ser uma ferramenta de análise de investimentos fundamental e amplamente utilizada. A seleção ótima de ativos pode ser obtida com a solução do seguinte problema de otimização:

Maximizar o Retorno

Sujeito a:

Risco \leq máximo risco tolerável;

Retorno \geq mínimo retorno aceitável;

Demais restrições próprias de cada instituição.

Ou seja, a política de alocação, que resulta da solução do problema acima, visa maximizar o retorno esperado dos investimentos financeiros dado um nível de risco de mercado e um conjunto de outras restrições, tais como: restrições de crédito, restrições legais, restrições setoriais, entre outras.

Esta modelagem acarreta uma série de questionamentos e desafios. Por exemplo, determinar o nível de risco que a instituição está disposta a correr e qual o mínimo retorno aceitável são escolhas bastante delicadas. Cabe lembrar também que, dependendo das restrições impostas, o problema de otimização acima pode não ter uma solução factível.

Neste contexto, a publicação do modelo matemático proposto por Harry Markowitz em seu primeiro artigo “*Portfolio Selection*” no *Journal of Finance* em 1952, tornou-se o alicerce para o surgimento e o desenvolvimento do que conhecemos atualmente como a Moderna Teoria de Carteiras. E, tal foi e continua sendo a relevância do tema, que, mesmo após mais de 50 anos de sua publicação, inúmeros trabalhos foram e continuam sendo

desenvolvidos a partir da formulação apresentada por Markowitz.

Dentre as principais questões que acabaram surgindo em consequência do trabalho de Markowitz podemos citar:

- função utilidade e a definição das medidas de risco;
- investimentos de longo-prazo e os modelos multi-período;
- otimização robusta e a geração de cenários;
- ALM (*Asset-Liability Management*) e a gestão dos passivos para os sistemas bancário e previdenciário.

Esta tese dedicar-se-á ao estudo de modelos de otimização multi-período. De uma forma geral, a abordagem clássica para este tipo de problema considera apenas o risco e/ou o retorno esperado da carteira no instante final do período de análise como critério de performance para o problema de otimização e, a política ótima de investimentos acaba sendo obtida através de métodos numéricos. Apenas recentemente (veja (Li and Ng, 2000), (Zhou and Li, 2000) e (Zhou and Yin, 2003)) foram apresentadas expressões analíticas explícitas para a solução do problema multi-período clássico, nos casos discreto e contínuo. Desta forma, o grande objetivo deste trabalho é estender a formulação multi-período discreta para o caso onde restrições intermediárias no risco e no retorno esperado da carteira são consideradas na formulação do problema. Apresentaremos uma solução analítica para o caso onde a função objetivo é uma combinação linear convexa do risco e do retorno da carteira ao longo do horizonte de análise. A partir deste resultado, obtemos uma solução analítica explícita para o problema formulado como uma combinação linear da variância da carteira ao longo do tempo com restrições intermediárias no valor esperado. Apresentaremos também uma solução numérica para o caso onde a função objetivo é uma combinação linear do valor esperado da carteira ao longo do tempo com restrições intermediárias na variância. Esta política ótima multi-período fornecerá ao investidor a melhor estratégia a ser seguida em um ambiente dinâmico.

1.2 Estrutura do Trabalho

Incluindo-se esta introdução, esta tese é composta por 7 Capítulos, cujos tópicos abordados são descritos brevemente nesta seção.

No Capítulo 2 estabeleceremos os principais conceitos e aspectos dos modelos para seleção ótima de ativos financeiros em uma carteira de investimento, que é o objeto deste estudo. Introduziremos também alguns conceitos que serão utilizados ao longo de todo este trabalho.

No Capítulo 3 apresentaremos os modelos uni-período, em particular a formulação proposta por Markowitz em seu trabalho (Markowitz, 1952), assim como alguns aprimoramentos do modelo original.

Os modelos para seleção de ativos multi-período serão abordados no Capítulo 4. Apresentaremos as motivações para esta classe de modelos bem como alguns resultados teóricos e práticos.

No Capítulo 5 trataremos do foco principal desta tese, o modelo de seleção ótima de ativos multi-período com restrições intermediárias.

Com base no modelo e resultados do Capítulo anterior, realizaremos simulações numéricas para o modelo proposto e as apresentaremos no Capítulo 6.

O Capítulo 7 é dedicado à apresentação de conclusões sobre o trabalho realizado, além de algumas perspectivas futuras para esta classe de modelos de otimização para o mercado financeiro.

Capítulo 2

Modelo para Seleção de Ativos

2.1 Fundamentos do Modelo

A Moderna Teoria de Carteiras, como é conhecida hoje, surgiu em 1952 com a publicação do artigo “*Portfolio Selection*” de Harry Markowitz (ver (Markowitz, 1952) e (Markowitz, 1959)). Neste trabalho o autor propõe um modelo de programação quadrática para resolver o problema de alocação ótima de ativos numa carteira de investimentos considerando apenas um único período de análise. A idéia deste modelo surgiu quando, durante seu doutoramento na Universidade de Chicago, Markowitz empolgou-se com a idéia sugerida por um corretor de ações sobre a utilização de técnicas de Pesquisa Operacional e Otimização na análise e gestão de investimentos. Desde então, muitas pesquisas foram e estão sendo realizadas no intuito de aprimorar o modelo original, ou até mesmo de elaborar novos modelos matemáticos aplicados ao mercado financeiro.

As principais hipóteses assumidas para a construção do modelo original foram:

Hipótese 1. *Os investidores avaliariam carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno sobre o horizonte de análise;*

Esta é a hipótese mais importante para o modelo proposto por Markowitz em (Markowitz, 1952), pois ela define as duas variáveis de controle para

seleção dos ativos: valor esperado (retorno) e variância (risco). E isto é válido independente do horizonte da análise que está sendo feita.

Hipótese 2. *Os investidores nunca estariam satisfeitos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, sempre escolheriam a de maior retorno;*

Hipótese 3. *Os investidores seriam avessos ao risco. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor risco;*

As duas hipóteses acima determinam, na prática, o critério de otimalidade para seleção dos ativos. Mas é importante ressaltar que as relações só são verdadeiras quando fixamos uma das duas variáveis e comparamos a outra para a tomada de decisão. No caso de termos duas carteiras onde a primeira tem menor risco e menor retorno que a segunda, a decisão sobre a alocação recairá então sobre o investidor. Esta questão, no entanto, acabou motivando diversos estudos que buscavam determinar formas mais simples e/ou imediatas para o problema da escolha da carteira ótima na situação levantada. Um dos trabalhos mais conhecidos foi desenvolvido por William Sharpe, aluno de Markowitz, onde ele propõe que a avaliação dos investimentos seja feita em função da razão entre retorno e risco da carteira, razão esta que acabou ficando conhecida como o *Índice de Sharpe*. Entretanto, este tipo de modelo, como proposto em (Sharpe, 1966), ao mesmo tempo que simplifica a análise das informações, possui algumas limitações que devem ser tratadas em separado. Isto ficará claro quando discutirmos adiante a fronteira eficiente.

Hipótese 4. *Os ativos individuais seriam infinitamente divisíveis, significando que um investidor poderia comprar a fração de ação, se assim o desejasse;*

A hipótese acima é muito mais importante no aspecto teórico do que prático do modelo. Isto porque, geralmente, os ativos financeiros possuem lotes padrões de negociação e só é permitido adquirir múltiplos inteiros destes valores, ou seja, não é possível, por exemplo, comprar 3,2 ações de

uma empresa. No entanto, se Markowitz tivesse imposto tal restrição ao modelo, teríamos que resolver um problema de programação inteira, tornando-o muito mais difícil, tanto em termos teóricos, como no aspecto da implementação computacional dos algoritmos para este tipo de problema.

Hipótese 5. *Existiria uma taxa livre de risco, na qual um investidor poderia, tanto emprestar, quanto tomar emprestado;*

Para o médio e grande investidor, a afirmação acima é bastante razoável na prática. Realmente é possível aplicar ou emprestar dinheiro no mercado financeiro a uma taxa de juros padrão. Já para o pequeno aplicador, o acesso a este mercado é mais complicado e isto acarreta em taxas de juros bastante diferentes para os casos de aplicar ou tomar recursos. E a questão do livre de risco é mais um conceito econômico do que matemático. No caso brasileiro, temos a taxa Selic como referência para esta taxa de juros livre de risco.

Hipótese 6. *Valeria a “Hipótese de Mercado Eficiente”. E, mais ainda, não haveria nenhuma restrição com relação à liquidez dos ativos, ou seja, o investidor é sempre capaz de comprar e/ou vender a quantidade que desejar de um ativo no seu preço justo;*

Hipótese 7. *Custos de transação e impostos seriam irrelevantes;*

Na maioria dos modelos matemáticos propostos inicialmente, as duas hipóteses acima sempre foram utilizadas em suas formulações. Por outro lado, cabe ressaltar questões de cunho prático que são bastante pertinentes, principalmente em mercados emergentes e menos desenvolvidos, e que acabaram motivando diversos estudos e modelos. Em primeiro lugar, queremos obter uma carteira ótima, portanto estamos assumindo que dispomos de um capital inicial a ser investido. Dado que os custos são proporcionais ao valor do investimento, isto não influiria sobre a escolha de alocação para o caso de termos um único período de análise. Mas, na prática, o horizonte de investimentos é mais longo e, portanto, a carteira ótima deve ser recalculada periodicamente no intuito de acompanhar a dinâmica do mercado financeiro. Este aspecto do rebalanceamento da carteira foi fundamental para o estudo e desenvolvimento de modelos multi-período, como em (Mossin, 1968),

(Merton, 1969), (Samuelson, 1969), (Hakansson, 1971), (Dantzig and Infanger, 1993), (Li and Ng, 2000) e (Steinbach, 2001) entre outros. Além disso, quando temos realocações constantes, os custos associados não devem ser desprezados, pois seu impacto na rentabilidade total da carteira pode ser significativo. No caso brasileiro este aspecto ainda é mais complicado, dado os inúmeros impostos e custos existentes. Uma abordagem que contempla a questão dos custos de transação pode ser obtida em (Gulpinar *et al.*, 2003). Um outro ponto importante e controverso refere-se à utilização da Hipótese de Mercado Eficiente. Neste caso, o principal aspecto a ser considerado não se refere à questão da determinação do preço justo pelo mercado, mas sim ao fato que não existiria problemas de liquidez no mercado. Ou seja, uma vez determinado o preço justo de um ativo qualquer, o investidor poderia comprar e/ou vender a quantidade que desejasse deste ativo. Uma vez mais, para os mercados emergentes, esta hipótese é bastante restritiva e pode gerar inconsistência entre a solução do modelo matemático e sua utilização prática. Por exemplo, a solução ótima do problema de seleção de ativos determina que deve-se alocar 60% em um ativo x . Entretanto, pode ocorrer do montante financeiro a ser investido ser maior do que o volume total negociado em bolsa deste ativo nos últimos 60 dias. Ou seja, a resposta fornecida pelo modelo não é viável na prática. E este problema tem motivado uma série de estudos que visam incorporar penalidades para ativos pouco líquidos de forma a evitar casos como o apresentado acima.

Hipótese 8. *Os investidores estariam de acordo quanto à distribuição de probabilidades das taxas de retorno dos ativos, o que asseguraria a existência de um único conjunto de carteiras eficientes.*

Apesar da hipótese acima ser bastante forte, não chega a ser restritiva na prática. Mais ainda, o que acaba ocorrendo é que as decisões de alocação ocorrem utilizando o modelo proposto por Markowitz, associado com as expectativas de mercado do investidor. Isto faz com que os modelos de seleção de ativos sejam bastante sensíveis a alguns parâmetros, tanto no caso de um único ou multi-período. Neste ponto, foram pesquisados modelos robustos cujo objetivo é, dado que as estimativas de risco e retorno não são precisas, reduzir a sensibilidade da solução considerando, para tanto,

diversos cenários, como em (Rustem *et al.*, 1995), (Costa and Paiva, 2002) e (Costa and Nabholz, 2002).

E, por fim, existe ainda um outro aspecto que vale a pena ser mencionado, mas que não é considerado neste tipo de modelo, e ainda é pouco pesquisado: a questão da liquidez dos ativos. Assumimos que é possível comprar ou vender qualquer quantidade dos ativos existentes. No entanto, num mercado ainda pequeno, como é o caso brasileiro, isto nem sempre é verdade, e, assim sendo, o modelo pode fornecer composições que, apesar de serem soluções para o modelo, não são factíveis na prática.

Com base então nas hipóteses acima colocadas, o modelo padrão de seleção de ativos consistiria em determinar frações $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ do capital total do investidor a serem investidas em n diferentes ativos financeiros, no instante de tempo t , tal que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) = 1. \quad (2.1)$$

Esta formulação é mais comum para os modelos uni-período. Para os casos multi-período, como estamos lidando com valores diferentes da carteira a cada instante de tempo, é mais comum que as variáveis de decisão sejam as quantidades de cada ativo em cada instante de tempo, como veremos adiante. Por simplicidade iremos utilizar neste capítulo o modelo padrão acima descrito para obter as frações $\alpha_i(t)$.

Para podermos então determinar as frações $\alpha_i(t)$, precisamos de uma medida dos ativos financeiros que possa ser comparada. Dessa forma, vamos definir retorno financeiro de ativos, que será um conceito que utilizaremos ao longo de toda esta tese.

Definição 1. *Retorno financeiro é a variação do preço de um determinado ativo i entre dois instantes de tempo distintos, t e $t + j$, $j \geq 1$, ou seja*

$$\mathcal{R}_i(t) = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)}. \quad (2.2)$$

Podemos também definir a taxa de retorno como sendo

$$r_i(t) = \frac{S_i(t+j) - S_i(t)}{S_i(t)} = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)} - 1 = \mathcal{R}_i(t) - 1. \quad (2.3)$$

Para variações pequenas de preço podemos utilizar a aproximação de Taylor de primeira ordem para a taxa de retorno, ou seja,

$$r_i(t) = \frac{S_i(t+j)}{S_i(t)} - 1 \approx \ln \left(\frac{S_i(t+j)}{S_i(t)} \right). \quad (2.4)$$

Na prática o retorno logarítmico é amplamente utilizado dada a facilidade de compor os retornos. Isto é, se tivermos uma série de retornos logarítmicos diários, basta somar os termos para calcularmos retornos para qualquer período de tempo.

Pela hipótese 8, temos que as taxas de retorno dos ativos $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$ são variáveis aleatórias com funções densidade de probabilidades e funções de distribuição conjunta conhecidas *a priori*. Assim sendo, a taxa de retorno da carteira para o instante t , $r_H(t)$, é dada por:

$$r_H(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) r_i(t). \quad (2.5)$$

Portanto, o valor esperado de $r_H(t)$ é:

$$E(r_H(t)) = \mu_H(t) = E \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) r_i(t) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \mu_i(t), \quad (2.6)$$

onde $\mu_i(t) = E(r_i(t))$ é a taxa de retorno esperada do ativo i no tempo t . E sua variância é:

$$\begin{aligned} V(r_H(t)) = \sigma_H^2(t) &= E \left[(r_H(t) - \mu_H(t))^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) r_i(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \mu_i(t) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(t) \alpha_j(t) \sigma_{ij}(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde,

$$\sigma_{ij}(t) = E \left[(r_i(t) - \mu_i(t)) (r_j(t) - \mu_j(t)) \right]$$

é a covariância entre as taxas de retorno dos ativos i e j , e

$$\sigma_{ii}(t) = \sigma_i^2(t) = E \left[(r_i(t) - \mu_i(t))^2 \right]$$

é a variância da taxa de retorno do ativo i .

Por conveniência iremos, durante este capítulo e o seguinte, utilizar apenas as taxas de retorno e, por simplicidade, chamaremos-as de retorno.

É importante então estabelecermos aqui uma relação entre os conceitos matemáticos e econômicos, que serão fundamentais para construção e entendimento do modelo:

Relação 1. *A média, ou valor esperado, será utilizada para representar a expectativa de retorno de um ativo financeiro para o próximo período que desejamos analisar. Alguns modelos interpretam esta média como sendo uma tendência da série temporal de retornos.*

Relação 2. *A variância será considerada como uma medida de dispersão futura dos retornos dos ativos financeiros. Na maioria dos modelos, o desvio padrão, ou volatilidade, está diretamente associado com o risco financeiro do ativo.*

Cabe ressaltar que nos modelos de seleção de ativos, tanto a média como a variância serão estimados sempre em função do período de análise que está sendo utilizado, mantendo assim a integridade entre os dados e os objetivos do modelo.

No que foi colocado até agora, estávamos assumindo implicitamente que os n ativos disponíveis possuem algum risco, ou seja, $\sigma_{ii}(t) > 0$, dado que existe incerteza nos retornos esperados. Então, podemos definir que:

Definição 2. *Um ativo livre de risco é um ativo financeiro que possui um retorno determinístico. Ou seja, $\mathcal{R}_f(t)$ e, portanto, $r_f(t)$ são, para cada t , conhecidos a priori ($\sigma_f(t) = 0$). Desta forma a covariância e, conseqüentemente, a correlação do ativo livre de risco com os demais ativos com risco é zero.*

É importante enfatizar que sempre que estamos utilizando modelos matemáticos para descrever a natureza, assumimos que os parâmetros conseguem reproduzir os fenômenos observados. E isto não é diferente no caso particular do mercado financeiro. O modelo de Fronteira Eficiente, proposto em (Markowitz, 1959), é também conhecido como *Modelo de Média-Variância*, pois, como o próprio nome sugere, utiliza a média e a variância da série de retornos dos ativos financeiros como parâmetros para a construção do modelo.

Neste caso, como utilizaremos a série histórica dos retornos para calcular estimativas de rentabilidade e risco, diversos métodos estatísticos têm sido estudados e desenvolvidos na busca de estimadores de melhor qualidade para tais valores. Isto acontece principalmente no cálculo da variância. Existem hoje diversos modelos matemáticos, com diferentes níveis de complexidade, para a obtenção de estimadores para a volatilidade. Entre estes podemos destacar: Média Móvel Simples, Média Móvel Exponencial (EWMA), os modelos do tipo ARCH/GARCH e os modelos de Volatilidade Estocástica. Como referências podemos citar (Bollerslev, 1986), (Bollerslev *et al.*, 1992), (Engle, 1992), (Mills, 1993), (Enders, 1995) e (Jr., 1999).

Vale lembrar que, na prática, nem sempre os modelos mais novos e complexos funcionam melhor em todos os casos, pois, além da metodologia de cálculo, é necessário definir qual o tamanho da amostra de dados que estaremos utilizando para a obtenção das estimativas. Assim sendo, devemos sempre estar atentos, analisando todos os modelos matemáticos e estatísticos utilizados para estimar, principalmente, a medida de risco que será usada no modelo de Fronteira Eficiente.

Em artigo recente, James Engel, do Australian Prudential Regulation Authority, e Marianne Gizycki, do Reserve Bank of Australia (ver (Engel and Gizycki, 1999)), mostraram através de uma série de estudos de caso, utilizando taxas de câmbio do Dólar Australiano, que o modelo de variância histórica funciona tão bem quanto os modelos EWMA (Exponential Weighted Moving Average) e GARCH. Neste artigo, eles comparam estes três métodos quando utilizados para obter a matriz de variância-covariância e posterior análise de sua estabilidade.

2.2 Conjunto Factível

Vamos analisar agora, com base no que foi apresentado na seção anterior, a região factível para o nosso problema. Por simplicidade, iremos utilizar primeiramente apenas ativos com risco.

Podemos considerar também que os n ativos com risco podem ser representados por um vetor de retornos $r \in \mathbb{R}^n$. Por conveniência, denotaremos por $r(t)$ o vetor de retornos para uma certa data t , e por $r_i(t)$ o i -ésimo ele-

mento do vetor $r(t)$. Pelo que foi colocado anteriormente, temos que o vetor de retornos tem vetor de média $\mu \in \mathbb{R}^n$ e matriz de covariância $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Desta forma, podemos escrever r como:

$$r = \mu + \epsilon \quad (2.8)$$

onde ϵ é um vetor aleatório com média zero e matriz de covariância Ω .

Vamos definir mais alguns conceitos importantes que serão utilizados ao longo de todo este trabalho.

Definição 3. *Uma carteira será definida então como um vetor $H(t)$ no qual suas componentes são os montantes dos ativos com risco no instante t , ou seja, o i -ésimo elemento de $H(t)$, $H_i(t)$, é a quantidade do ativo i em t .*

Definição 4. *Uma carteira $H(t)$ é chamada carteira factível se, dado um conjunto de n ativos financeiros, temos:*

$$\sum_{i=1}^n H_i(t) S_i(t) = V(t),$$

com $S_i(t)$ sendo o preço do ativo i e $V(t)$ sendo o valor total da carteira no instante t . $H(t)$ também é dita carteira legítima ou atingível.

Utilizando as hipóteses do modelo original apresentadas anteriormente, vamos definir eficiência e ineficiência de carteiras. Este conceito será a base para a formulação do modelo de Fronteira Eficiente de Markowitz e suas derivações que serão abordadas neste trabalho.

Definição 5. *Uma carteira $H(t)$ é dita eficiente se, dado o instante t , temos:*

- (i) $H(t)$ é uma carteira factível;
- (ii) se qualquer carteira factível tem maior retorno esperado que $H(t)$, então também tem maior variância que $H(t)$;
- (iii) se qualquer carteira factível tem menor variância que $H(t)$, então tem também menor retorno esperado que $H(t)$.

E, portanto:

Definição 6. Uma carteira $H(t)$ é dita ineficiente se, dado o instante t , temos:

- (i) $H(t)$ é uma carteira factível;
- (ii) é possível obter uma outra carteira factível $H'(t)$ com maior retorno esperado que $H(t)$ e a mesma variância que $H(t)$, ou;
- (iii) é possível obter uma outra carteira factível $H'(t)$ com menor variância que $H(t)$ e o mesmo retorno esperado que $H(t)$.

Estas duas definições são obtidas diretamente das hipóteses 2 e 3.

Podemos ainda representar uma carteira de duas formas alternativas. Elas serão convenientes em algumas abordagens para o problema de seleção de ativos. A primeira forma é considerar as componentes do vetor como sendo os pesos investidos nos ativos com risco no instante t , ou seja, o i -ésimo elemento do vetor, $\alpha_i(t)$, é a proporção do valor total da carteira investida no ativo i em t . Temos então, com base na definição apresentada acima, que:

$$\alpha_i(t) = \frac{H_i(t)S_i(t)}{V(t)}. \quad (2.9)$$

Portanto, a condição de factibilidade neste caso é dada por:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) = 1. \quad (2.10)$$

Assim sendo, poderemos reescrever as equações (2.5), (2.6) e (2.7) como:

$$r_H(t) = H(t)'r(t), \quad (2.11)$$

$$\mu_H(t) = H(t)'\mu(t) \quad (2.12)$$

e

$$\sigma_H^2(t) = H(t)'\Omega(t)H(t). \quad (2.13)$$

Esta notação será utilizada para escrevermos os modelos de otimização uni-período na forma matricial.

Desta forma, podemos conseguir estimativas de retorno e risco para a carteira $H(t)$ com base nas equações (2.5), (2.6) e (2.7), ou na forma matricial com as equações (2.11), (2.12) e (2.13).

A segunda abordagem, mais utilizada nos modelos multi-período, define as componentes do vetor como sendo o valor aplicado nos ativos com risco no instante t . Ou seja, o i -ésimo elemento do vetor, $\mathcal{U}_i(t)$, é o valor financeiro investido no ativo i em t . Temos então, com base na definição apresentada acima, que:

$$\mathcal{U}_i(t) = H_i(t)S_i(t). \quad (2.14)$$

E a condição de factibilidade para esta abordagem é dada por:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{U}_i(t) = V(t). \quad (2.15)$$

Mais ainda, temos que a condição de eficiência de uma carteira continua valendo para ambos os casos apresentados acima. Conseguimos assim três formas equivalentes de definirmos a carteira, e a escolha da definição será feita, convenientemente, em função da modelagem e consequente formulação a ser utilizada para o problema de seleção ótima de ativos.

Capítulo 3

Modelo Uni-período

3.1 Introdução

O modelo de Fronteira Eficiente de Markowitz possibilitou o primeiro tratamento sistemático e analítico do dilema do investidor: os objetivos conflitantes de alto retorno versus baixo risco dos investimentos. Ou seja, Markowitz desenvolveu um modelo de otimização que era ao mesmo tempo abrangente o suficiente para inúmeros casos práticos e bastante simples para possibilitar a análise teórica e a implementação prática.

Neste capítulo apresentaremos, utilizando o arcabouço definido no capítulo anterior, o modelo para seleção de ativos proposto por Markowitz em (Markowitz, 1959) considerando um único período de análise.

3.2 Fronteira Eficiente e o Modelo de Markowitz

Com base nos resultados mostrados no capítulo anterior, vamos agora supor que a escolha de uma carteira por um investidor, em um determinado instante de tempo t , esteja restrita aos pontos factíveis numa linha horizontal no plano desvio padrão x média. Portanto, todas as carteiras factíveis nesta linha possuem o mesmo retorno esperado, mas diferentes desvios padrão. Então, de acordo com as hipóteses colocadas anteriormente, os investidores preferirão a carteira correspondente ao ponto factível mais a esquerda nesta linha, ou seja, o ponto com o menor desvio padrão para esta dada média.

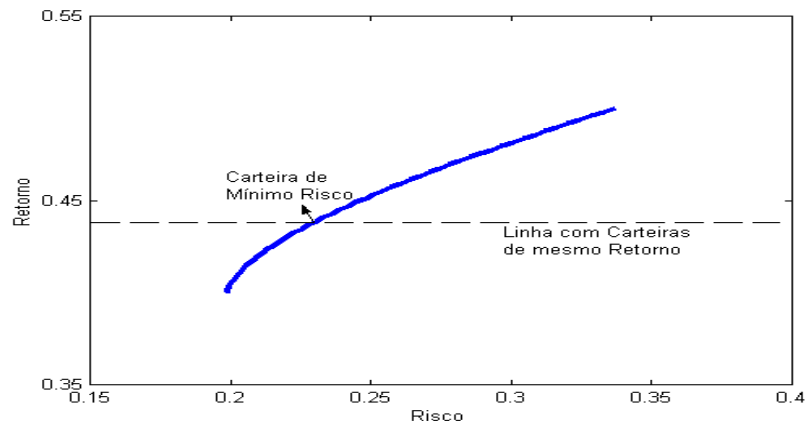


Figura 3.1: Fronteira Eficiente e a Carteira de Mínimo Risco

Podemos também inverter o raciocínio, considerando carteiras correspondentes aos vários pontos em uma linha vertical, isto é, carteiras factíveis com o mesmo desvio padrão e diferentes expectativas de retorno. Mais uma vez utilizando as hipóteses do modelo original, os investidores preferirão a carteira factível associada ao ponto mais alto desta linha, ou seja, o ponto com a maior média para este dado desvio padrão.

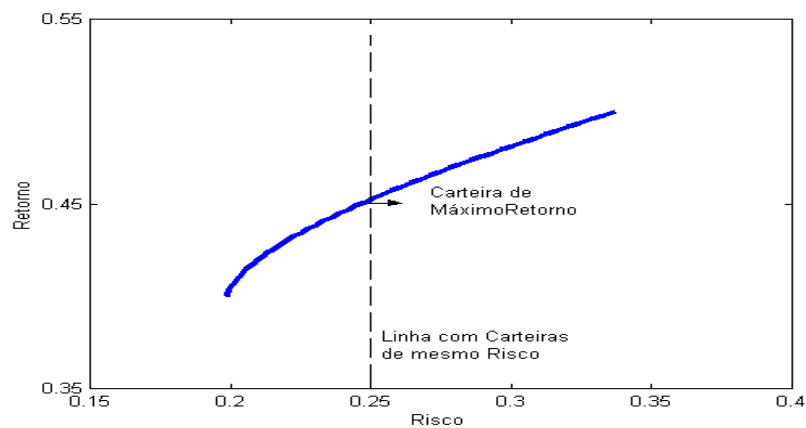


Figura 3.2: Fronteira Eficiente e a Carteira de Máximo Retorno

Estes argumentos implicam que somente a parte superior do conjunto

de pontos factíveis é interessante, ou eficiente, aos investidores. Logo, esta porção superior do conjunto factível é chamada de *Frenteira Eficiente* da região factível, e os pontos são as carteiras eficientes, conforme definidos anteriormente.

Com este ferramental, Harry Markowitz desenvolveu um modelo de otimização para obter o conjunto de carteiras eficientes a partir das expectativas de retorno e risco dos ativos individualmente e da matriz de correlação entre eles.

Vamos assumir que existam n ativos financeiros. As expectativas de retorno são dadas por $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, as estimativas de risco por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ e as correlações por ρ_{ij} , para $i, j = 1, 2, \dots, n$. A carteira será então definida por um conjunto de n pesos α_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, tal que a soma deles seja 1, como colocado em (2.1). Para encontrarmos então a carteira de mínima variância, vamos primeiro definir uma expectativa de retorno \bar{r} desejada. Encontramos então a carteira factível de mínima variância e com retorno dado por \bar{r} . Podemos então, com base nas equações (2.1), (2.6) e (2.7), formalizar o modelo de Markowitz como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i = \bar{r} \\ &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podemos, utilizando as equações (2.12) e (2.13), reescrever a formulação acima na forma matricial como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \frac{1}{2} H' \Omega H \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\quad H' \mu = \bar{r} \\ &\quad H' \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{1}$ representa o vetor n -dimensional formado por 1 em todos os elementos.

Dado que a formulação acima só possui restrições de igualdade, o problema pode ser resolvido diretamente utilizando a função Lagrangeano, que aplicada ao problema fornece o seguinte sistema de equações:

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i - \bar{r} \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1 \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Derivando então o Lagrangeano, igualando-o a zero e mantendo as restrições, temos:

$$\frac{dL(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Temos assim um sistema com $n + 2$ variáveis e $n + 2$ restrições lineares, que possui solução analítica explícita no plano de risco x retorno (para maiores detalhes vide (Costa and Assunção, 2005)). A solução deste sistema fornecerá os valores de α_i para uma carteira eficiente com expectativa de retorno \bar{r} .

3.3 Aprimoramentos do Modelo Original

O problema de seleção de ativos é tão rico que o trabalho original de Markowitz, provavelmente, levantou mais questões do que as respondeu, abrindo assim caminho para o surgimento de diversos trabalhos sobre este tópico, principalmente para estudos com o objetivo de aprimorar o modelo original.

A seguir, apresentaremos alguns dos principais aprimoramentos obtidos a partir do modelo original de Markowitz, já visto.

3.3.1 Inclusão de Ativo Livre de Risco

Vamos considerar agora o caso onde incluiremos um ativo livre de risco na lista dos possíveis ativos disponíveis. Isto porque, geralmente, os investidores têm a oportunidade de aplicar parte de seus recursos a uma taxa livre de risco. Mas, felizmente, a inclusão do ativo livre de risco introduz uma degenerescência matemática no modelo que acaba simplificando bastante a forma da fronteira eficiente.

Para explicar esta condição, analisaremos o caso particular em que temos um ativo livre de risco com retorno r_f , e um outro ativo financeiro com expectativa de retorno r^* e variância σ^2 . Vale lembrar que a covariância entre estes dois ativos é zero.

Vamos então supor que estes dois ativos sejam combinados para formarem uma carteira com peso α para o ativo livre de risco e $(1 - \alpha)$ para o outro ativo, com $\alpha \leq 1$. Portanto, a expectativa de retorno da carteira será dada por:

$$r_H = \alpha r_f + (1 - \alpha)r^*,$$

e sua volatilidade por:

$$\sigma_H = \sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma^2} = (1 - \alpha)\sigma.$$

Assim sendo, tanto o retorno como o risco da carteira variam linearmente com α . Isto significa que a medida que α varia, o ponto que representa a carteira traça uma reta no plano risco x retorno.

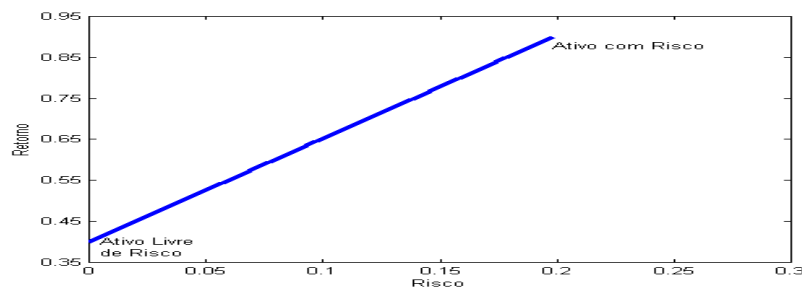


Figura 3.3: Fronteira Eficiente para 1 Ativo Livre de Risco e 1 Ativo com Risco

Suponhamos agora, que existam n ativos, expectativas de retorno r_i^* e covariâncias σ_{ij} . E exista também um ativo livre de risco com retorno r_f . A inclusão deste ativo livre de risco entre os ativos disponíveis tem um efeito profundo na região factível e, conseqüentemente, na fronteira eficiente. Para obter o conjunto de soluções ótimas faremos o procedimento em duas etapas. Primeiro iremos gerar a fronteira eficiente considerando apenas os n ativos com risco, conforme apresentado na seção anterior. A seguir, para cada carteira na fronteira, faremos combinações lineares desta com o ativo livre de risco. Estas composições formam uma reta que tangencia a fronteira eficiente na carteira escolhida e intercepta o eixo dos retornos em r_f .

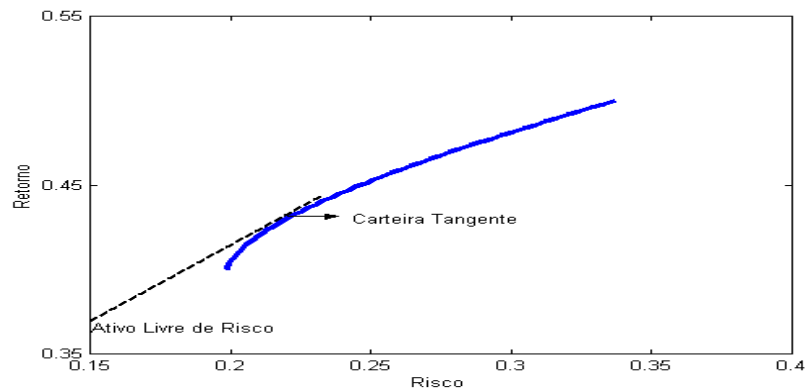


Figura 3.4: Fronteira Eficiente para 1 Ativo Livre de Risco e n Ativos com Risco

3.3.2 Restrições Positivas

Outro ponto a ser considerado, de aspecto mais prático do que teórico, é a inclusão de restrições de não-negatividade nas variáveis de controle, α_i . No modelo original, como formulado em (3.1), estas variáveis eram irrestritas, ou seja, permitia-se a venda descoberta de ativos financeiros (conhecido como *short selling*), o que torna o problema inactível quando adicionamos estas restrições de sinal. Desta forma, temos a seguinte formulação para o

modelo:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E(r_i) = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Ou na forma matricial:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2} H' \Omega H$$

Sujeito a:

$$H' \mu = \bar{r}$$

$$H' \mathbf{1} = 1$$

$$H \geq 0 \quad (3.4)$$

Este é um modelo clássico de programação quadrática, com função objetivo quadrática e restrições de equações e inequações lineares. Contudo, a presença de inequações impossibilita a resolução direta do problema, como apresentado anteriormente. Uma outra diferença significativa entre as duas formulações é que quando o *short selling* é permitido, a maioria das variáveis α_i , senão todas, são não-nulas. Ou seja, a estratégia ótima obtida utiliza a maioria dos ativos disponíveis de alguma maneira. No entanto, quando incorporamos restrições de não-negatividade, a maioria das soluções ótimas apresenta um grande número de variáveis nulas, principalmente quando determinamos níveis altos de retorno.

Uma extensão natural seria canalizarmos as variáveis de controle, ou seja, estabelecer limites inferiores e superiores para as mesmas. Em situações reais, este tipo de restrição é amplamente utilizada por questões legais e políticas dentro das instituições financeiras. Por exemplo, um administrador de um fundo de investimento determina, por algum critério interno, que deseja investir no mínimo 10% e no máximo 30% do patrimônio disponível

num determinado ativo financeiro. Teríamos assim uma restrição do tipo:

$$0,10 \leq \alpha_k \leq 0,30.$$

Neste caso, o modelo ficaria na forma:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E(r_i) = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n; i \neq k$$

$$0,10 \leq \alpha_k \leq 0,30$$

Esta formulação também não pode ser resolvida analiticamente. Entretanto, existem métodos numéricos bastante eficientes para esta classe de problemas de otimização, onde temos função objetivo quadrática, restrições lineares e variáveis canalizadas.

3.3.3 Alternativas na Estimativa do Risco

Um dos aspectos mais importantes do modelo de Fronteira Eficiente apresentado é a determinação da metodologia a ser utilizada para mensurar o risco da carteira. A mais popular, e a que foi primeiramente utilizada por Harry Markowitz (ver (Markowitz, 1959)), é a variância, ou seja, o cálculo do desvio padrão simples da série de retornos. No entanto, o próprio autor e outros pesquisadores observaram que o uso da variância não era apropriado para carteiras com ativos que apresentam retornos assimétricos. No caso de mercados mais voláteis e sujeitos a intervenções governamentais, como o brasileiro, isto é bastante comum. Surgiram assim duas metodologias alternativas para contornar esta limitação: semi-variância e o *down-side risk*. Em artigo recente, Duarte (ver (Jr., 1999)) unificou estas 3 metodologias numa única formulação através da parametrização da função objetivo.

Mas, como colocado até o momento, sempre que nos referimos ao risco de ativos financeiros, estamos associando-o à variância da série de retornos.

No entanto, esta é uma medida probabilística e como tal está associada a um intervalo de confiança. Mais ainda, desta forma, estamos tentando, com base em dados históricos, determinar a variabilidade dos retornos no futuro. Logo, o desenvolvimento de modelos mais elaborados para obtenção desta estimativa de “risco” foi e tem sido objeto de inúmeros estudos, tanto acadêmicos quanto práticos. Surgiram assim, modelos com alisamento exponencial (EWMA), modelos autoregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH/GARCH) e modelos de volatilidade estocástica. Como referência podemos citar (Bollerslev, 1986), (Bollerslev *et al.*, 1992), (Engle, 1992), (Mills, 1993) e (Enders, 1995).

Na última década pudemos observar também o surgimento e o desenvolvimento de diversas metodologias para mensuração do risco de mercado de carteiras de investimento. Dentre os trabalhos, o mais conhecido certamente é o *RiskMetrics* elaborado por um grupo do banco J.P. Morgan que introduziu a metodologia do *VaR - Value at Risk*. Estas métricas chegaram inclusive aos modelos de seleção de ativos, criando modelos conhecidos como *Média-VaR* e outras adaptações.

3.3.4 Rastreamento de *Benchmark*

Uma outra aplicação, bastante comum no mercado financeiro, é a determinar uma carteira cujo rendimento seja o mais próximo possível de um certo índice de referência estabelecido, também chamado de *benchmark*. Este tipo de carteira é chamada de carteira passiva, ou seja, deseja-se obter uma carteira ótima, mas cujo retorno esteja vinculado a um *benchmark*. Neste caso, propõe-se uma alteração na função objetivo, introduzida no modelo original, visando minimizar também o erro de rastreamento, isto é, queremos que a diferença entre o retorno da carteira ótima e o índice de referência seja mínima. Como referências podemos citar (Roll, 1992), (Elton and Gruber, 1995), (Rudolf *et al.*, 1999) e (Costa and Nabholz, 2002).

Vamos considerar então, que temos uma carteira H e que $(1 - H'\mathbf{1})$ é investido num ativo livre de risco cujo retorno é r_f , conhecido *a priori*. Portanto, o retorno total do investimento será dado por:

$$H'r + (1 - H'\mathbf{1})r_f. \quad (3.5)$$

Tomemos também uma carteira fixa H_b conhecida que será o nosso *benchmark* ou carteira de referência. E o retorno do *benchmark* será dado, de forma análoga, por:

$$H_b' r + (1 - H_b' \mathbf{1}) r_f. \quad (3.6)$$

Das equações (3.5) e (3.6) temos que a diferença entre a carteira do investidor e o *benchmark*, o chamado erro de rastreamento ε_H , é:

$$\varepsilon_H = (H - H_b)' r + (H_b - H)' \mathbf{1} r_f. \quad (3.7)$$

O valor esperado do erro de rastreamento ε_H , denotado por ξ_H , será então:

$$\xi_H = (H - H_b)' \mu + (H_b - H)' \mathbf{1} r_f = (H - H_b)' (\mu - \mathbf{1} r_f), \quad (3.8)$$

e a variância (volatilidade), denotada por ς_H^2 , será:

$$\varsigma_H^2 = (H - H_b)' \Omega (H - H_b). \quad (3.9)$$

Assim vamos escrever o modelo para minimização do erro de rastreamento como o seguinte problema de otimização:

Minimizar ξ_H

Sujeito a:

$$\varsigma_H^2 = \bar{\sigma}$$

$$H' \mathbf{1} \leq 1$$

$$H \geq 0$$

(3.10)

3.3.5 Otimização Robusta

Como apontado em (Rustem *et al.*, 1995), para a estratégia ótima do modelo de média-variância ser útil, os retornos esperados dos ativos e a matriz de covariância precisam ser bem estimadas. Pequenas variações nos retornos podem provocar grandes mudanças na decisão de alocação, como pode ser visto em (Black and Litterman, 1991). Esta falta de robustez com relação à imprecisão inerente às estimativas dos retornos e das variâncias motiva o estudo de modelos robustos de otimização. Neste caso, a otimização não é feita para um único caso de média e variância, mas sim considerando um conjunto de valores para estes parâmetros, que chamaremos de cenários.

Em (Dembo, 1991), o autor trabalha com uma formulação baseada num modelo coordenado, considerando diversos cenários possíveis, para a obtenção da carteira ótima. Em (Rustem *et al.*, 1995), são consideradas estratégias robustas para carteiras min-max, onde se deseja obter uma carteira que minimize o valor da função objetivo no pior caso (máximo sob os cenários). Apesar de ser uma solução de pior caso entre todos os cenários utilizados, na prática podemos gerar uma boa estratégia, principalmente se analisarmos períodos de muita volatilidade e mercados emergentes.

Mais detalhes podem ser obtidos em (Dembo, 1991), (Rustem *et al.*, 1995), (Costa and Paiva, 2002) e (Costa and Nabholz, 2002).

Capítulo 4

Modelos Multi-Período

4.1 Introdução

O Modelo de Fronteira Eficiente de Markowitz tornou-se um marco na Moderna Teoria de Finanças ao formalizar matematicamente o problema de determinar a melhor alocação de recursos dado um conjunto de ativos financeiros. Mais ainda, seu trabalho foi o pioneiro em quantificar o risco financeiro de um investimento utilizando a variância, possibilitando assim, ao investidor escolher a carteira de máximo retorno dado um nível de risco preestabelecido e com o qual ele se sinta confortável em fazer seus investimentos. Entretanto, o modelo original, bem como todos os aprimoramentos apresentados no Capítulo 3, consideram apenas um único período de análise.

Dada a dinâmica do mercado financeiro nos dias de hoje, a abordagem uni-período proposta por Markowitz não consegue mais atender a todas as demandas dos gestores de recursos. Neste contexto, existem inúmeros trabalhos que buscam estender o modelo uni-período estático para modelos dinâmicos multi-período discretos ou para modelos dinâmicos a tempo contínuo. Em ambos os casos, o objetivo é formular uma política de investimentos de mais longo prazo, considerando inclusive eventuais realocações na carteira ao longo do tempo. O que diferencia as duas abordagens é o ferramental matemático utilizado na formulação dos problemas e na resolução dos mesmos. Iremos neste capítulo apresentar as duas principais abordagens utilizadas para resolução desta classe de problemas.

4.2 Fundamentos dos Modelos Multi-Período

Trataremos aqui de algumas definições e considerações que serão utilizadas ao longo de todo este capítulo. Elas servirão para construção e resolução dos modelos aqui apresentados.

Vamos definir em primeiro lugar a notação que usaremos neste trabalho:

- A' = transposta da matriz ou vetor A ;
- a_j = j -ésimo elemento do vetor a ;
- $tr(A)$ = traço da matriz quadrada A ;
- $|A| = \sqrt{\left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)}$;
- S^n = espaço vetorial de todas as matrizes simétricas $n \times n$;
- S_+^n = subespaço de S^n das matrizes semi-definidas positivas;
- \tilde{S}_+^n = subespaço de S^n das matrizes definidas positivas;
- $\mathcal{C}([0, T]; X)$ = espaço de Banach das funções contínuas no intervalo $[0, T]$ provida da norma do máximo $\|\cdot\|$ para um dado espaço de Hilbert X ;
- $\mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ = espaço das funções contínuas e com primeira e segunda derivadas contínuas em $[0, T]; \mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{L}^2([0, T]; X)$ = espaço de Hilbert das funções integráveis no intervalo $[0, T]$ provida da norma $\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^2 dt\right)^{1/2}$ para um dado espaço de Hilbert X .

Consideremos um mercado de capitais com $N + 1$ ativos com risco, com retornos e taxas de retorno aleatórias. O investidor, no instante $t = 0$ e com capital inicial v_0 , aloca todos os seus recursos nos ativos disponíveis.

Como definido no Capítulo 2, os retornos dos ativos serão denotados pelo vetor:

$$\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_0(t) \\ \mathcal{R}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{R}_N(t) \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{R}_i(t)$ é o retorno aleatório do ativo i para o período t . As taxas de retornos serão denotadas pelo vetor:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_0(t) \\ r_1(t) \\ \vdots \\ r_N(t) \end{pmatrix}$$

e definido de forma análoga, também como visto no Capítulo 2. Assumiremos ainda, que os vetores $\mathcal{R}(t), t = 0, 1, \dots, T - 1$ e $r(t), t = 0, 1, \dots, T - 1$ são independentes e que possuem médias conhecidas, dadas por:

$$E(\mathcal{R}(t)) = \begin{pmatrix} E(\mathcal{R}_0(t)) \\ E(\mathcal{R}_1(t)) \\ \vdots \\ E(\mathcal{R}_N(t)) \end{pmatrix}, \quad E(r(t)) = \begin{pmatrix} E(r_0(t)) \\ E(r_1(t)) \\ \vdots \\ E(r_N(t)) \end{pmatrix}$$

e matrizes de covariância conhecidas:

$$\begin{aligned} Cov(\mathcal{R}(t)) &= \begin{pmatrix} Cov(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & Cov(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{R}_N(t)) \\ Cov(\mathcal{R}_1(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & Cov(\mathcal{R}_1(t), \mathcal{R}_N(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\mathcal{R}_N(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & Cov(\mathcal{R}_N(t), \mathcal{R}_N(t)) \end{pmatrix} = \\ &= Cov(r(t)) = \begin{pmatrix} Cov(r_0(t), r_0(t)) & \dots & Cov(r_0(t), r_N(t)) \\ Cov(r_1(t), r_0(t)) & \dots & Cov(r_1(t), r_N(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(r_N(t), r_0(t)) & \dots & Cov(r_N(t), r_N(t)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{00}(t) & \sigma_{01}(t) & \dots & \sigma_{0N}(t) \\ \sigma_{10}(t) & \sigma_{11}(t) & \dots & \sigma_{1N}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N0}(t) & \sigma_{N1}(t) & \dots & \sigma_{NN}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um resultado bastante importante em Teoria de Controle, que utilizaremos neste trabalho, é o Complemento de Schur, cuja proposição apresentamos a seguir. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (Saber *et al.*, 1995) - pág 13:

Proposição 1. *Sejam Q, R e S matrizes. Suponha que a matriz R seja simétrica definida-positiva, ou seja $R > 0$. Então*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.1)$$

se e somente se

$$Q - SR^{-1}S' \geq 0. \quad (4.2)$$

4.2.1 Caso Discreto

Para o caso discreto do modelo para seleção de ativos, consideremos que existem $N + 1$ ativos com risco representados pelo vetor de preços aleatórios $S(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Denotemos por \mathcal{F}_t o σ -campo gerado pelos vetores aleatórios $\{S(s); s = 0, \dots, t\}$. Por conveniência vamos escrever

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{pmatrix}.$$

Uma carteira $H(t - 1)$ será, como definido no Capítulo 2, um vetor pertencente a \mathbb{R}^{N+1} tal que seja \mathcal{F}_{t-1} -mensurável, $t = 1, 2, \dots, T$. Denotemos então,

$$H(t - 1) = \begin{pmatrix} H_0(t - 1) \\ H_1(t - 1) \\ H_2(t - 1) \\ \vdots \\ H_N(t - 1) \end{pmatrix}$$

e temos que $H_i(t - 1)$ representa o montante do ativo i na carteira no instante t . Ressaltemos que $H(t - 1)$ é escolhido no início do instante t , e portanto depende de $S(s)$, com $s = 0$ até os valores de fechamento para $s = t - 1$. Seja $V(t)$ o valor da carteira no final do instante t . Segue que

$$V(t) = H(t - 1)'S(t). \quad (4.3)$$

Para termos uma carteira auto-financiável o valor no início do período $t + 1$ deve ser o mesmo, quando então a carteira é rebalanceada, e portanto

$$V(t) = H(t)'S(t). \quad (4.4)$$

Definimos agora, para $i = 0, 1, \dots, N$,

$$\mathcal{U}_i(t) = H_i(t)S_i(t), \mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_N(t) \end{pmatrix}.$$

Segue que,

$$V(t) = \mathcal{U}_0(t) + e'\mathcal{U}(t)$$

onde e é o vetor formado pelo número 1 em todas as suas componentes, e

$$\begin{aligned} V(t+1) &= H_0(t)S_0(t+1) + H(t)'S(t+1) \\ &= H_0(t)S_0(t)\mathcal{R}_0(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)S_i(t)\mathcal{R}_i(t) \\ &= \mathcal{R}_0(t)\mathcal{U}_0(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i(t)\mathcal{U}_i(t) \\ &= \mathcal{R}_0(t)(V(t) - e'\mathcal{U}(t)) + \mathcal{R}(t)'\mathcal{U}(t) \\ &= \mathcal{R}_0(t)V(t) + (\mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)e)'\mathcal{U}(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Definimos ainda

$$V(0) = v_0 > 0.$$

4.2.2 Caso Contínuo

Para os modelos em tempo contínuo iremos adotar, por conveniência, o ativo 0 como sendo o ativo livre de risco. Assim sendo, o preço do mesmo obedece à seguinte equação diferencial ordinária:

$$dS_0(t) = r_0(t)S_0(t)dt, \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (4.6)$$

com a seguinte condição inicial

$$S_0(0) = s_0 > 0, \quad (4.7)$$

onde $r_0(t)$ é a taxa de retorno do ativo livre de risco, também chamada de taxa de juros livre de risco do mercado.

Os demais ativos com risco terão seus processos de preços, $S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t)$, dados pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(r_i(t)dt + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}d\mathcal{W}_j(t) \right), \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (4.8)$$

onde $\mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}_1(t), \mathcal{W}_2(t), \dots, \mathcal{W}_N(t))'$ é um movimento browniano N -dimensional, e com a condição inicial definida como

$$S_i(0) = s_i > 0, \quad (4.9)$$

onde $r_i(t)$ é a taxa de retorno do ativo i e σ_{ij} é a covariância entre as taxas de retornos dos ativos i e j como definimos acima.

Considerando que o investidor possui $H_i(t)$ quantidades do ativo i no instante t , sua riqueza, que será denotada por $V(t)$ para todo $t \geq 0$, é dada por:

$$V(t) = \sum_{i=0}^N H_i(t)S_i(t). \quad (4.10)$$

Podemos ainda definir o valor aplicado no i -ésimo ativo como

$$\mathcal{U}_i(t) = H_i(t)S_i(t), \quad (4.11)$$

de forma a termos

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_N(t) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Temos desta forma que a variação no valor da carteira será dada por:

$$\begin{aligned}
dV(t) &= \sum_{i=0}^N H_i(t) dS_i(t) \\
&= \left(r_0(t) H_0(t) S_0(t) + \sum_{i=1}^N r_i(t) H_i(t) S_i(t) \right) dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^N H_i(t) S_i(t) \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} dW_j(t) \\
&= \left(r_0(t) V(t) + \sum_{i=1}^N [r_i(t) - r_0(t)] \mathcal{U}_i(t) \right) dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} \mathcal{U}_i(t) dW_j(t) \tag{4.13}
\end{aligned}$$

com

$$V(0) = v_0 > 0.$$

4.3 Modelo Discreto: abordagem via Programação Dinâmica

4.3.1 Introdução

O modelo multi-período discreto clássico é formulado de acordo com a seguinte situação: o investidor tem um determinado ponto no futuro (seu horizonte de investimento) no qual ele almeja maximizar o retorno para seus investimentos, ou ainda, como podemos encontrar em diversas referências (vide (Mossin, 1968), (Samuelson, 1969), (Hakansson, 1971), (Grauer and Hakansson, 1993)), ele planeja maximizar uma determinada função utilidade. Entretanto, assume-se agora que o tempo entre hoje e o horizonte de investimento pode ser subdividido em T períodos, sendo que no final de cada um deles o investidor tem a possibilidade de medir o retorno de sua carteira e realizar novas alocações com o capital disponível para o próximo período.

Temos assim que um investidor com um capital inicial v_0 fará uma primeira decisão de alocar seus recursos em diversos ativos, e então esperar

até o final do período quando sua riqueza será então dada por $V(1)$. Ele irá então realocar $V(1)$ e assim sucessivamente.

É possível verificar que para o problema de planejamento multi-período, determinar uma sequência de decisões uni-período, independentes e sucessivas, dificilmente fornecerá a solução ótima. Neste contexto, diversos pesquisadores passaram então a utilizar técnicas de programação dinâmica e programação estocástica para resolver o problema de seleção de ativos multi-período. Apesar dos inúmeros trabalhos publicados, a obtenção de uma solução analítica para o problema foi sempre difícil. Iremos então, nesta seção, apresentar o modelo publicado em (Li and Ng, 2000) que fornece uma solução explícita para o problema, e que, inclusive, servirá de base para o objetivo desta tese, que é apresentar um modelo multi-período com restrições intermediárias.

4.3.2 Formulação dos Problemas

Seja $V(t)$ a riqueza do investidor e $\mathcal{U}_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ o montante financeiro investido no i -ésimo ativo no início do t -ésimo período. Ele deseja então obter a melhor estratégia de investimento

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0(t) \\ \mathcal{U}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_N(t) \end{pmatrix}$$

para $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$ tal que:

(i) o valor esperado da riqueza final $V(T)$, $E(V(T))$, seja maximizado, sujeito à restrição que a variância da riqueza final, $Var(V(T))$, não seja maior que um nível pré-determinado, ou

(ii) a variância da riqueza final, $Var(V(T))$, seja minimizada, sujeita à restrição que o valor esperado da riqueza final, $E(V(T))$, não seja menor que um nível pré-determinado.

Matematicamente, podemos então formular o problema de seleção ótima de ativos multi-período utilizando o critério de média e variância de uma das seguintes formas, com o ativo 0 como referência:

Problema **P1**(σ):

Max $E(V(T))$

sujeito a $Var(V(T)) \leq \sigma^2$

$$\begin{aligned} V(t+1) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i(t) \mathcal{U}_i(t) + \left(V(t) - \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i(t) \right) \mathcal{R}_0(t) \\ &= \mathcal{R}_0(t) V(t) + \mathcal{P}(t)' \mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1.$$

(4.14)

e

Problema **P2**(ν):

Min $Var(V(T))$

sujeito a $E(V(T)) \geq \nu$

$$\begin{aligned} V(t+1) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i(t) \mathcal{U}_i(t) + \left(V(t) - \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i(t) \right) \mathcal{R}_0(t) \\ &= \mathcal{R}_0(t) V(t) + \mathcal{P}(t)' \mathcal{U}(t) \end{aligned}$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1.$$

(4.15)

onde

$$\mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} (\mathcal{R}_1(t) - \mathcal{R}_0(t)) \\ (\mathcal{R}_2(t) - \mathcal{R}_0(t)) \\ \vdots \\ (\mathcal{R}_N(t) - \mathcal{R}_0(t)) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Lembremos que $E(\mathcal{R}(t)\mathcal{R}(t)') = Cov(\mathcal{R}(t)) + E(\mathcal{R}(t))E(\mathcal{R}(t)')$. Vamos assumir que $E(\mathcal{R}(t)\mathcal{R}(t)')$ é definida-positiva, ou seja,

$$E(\mathcal{R}(t)\mathcal{R}(t)') = \begin{pmatrix} E(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & E(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{R}_N(t)) \\ E(\mathcal{R}_1(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & E(\mathcal{R}_1(t), \mathcal{R}_N(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathcal{R}_N(t), \mathcal{R}_0(t)) & \dots & E(\mathcal{R}_N(t), \mathcal{R}_N(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

para qualquer $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Segue então de (4.17) que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E(\mathcal{R}_0(t)^2) & E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)') \\ E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)) & E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e & I \end{pmatrix} E(\mathcal{R}(t)\mathcal{R}(t)') \begin{pmatrix} 1 & -e' \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde e é o vetor formado pelo número 1 em todas as suas componentes, e portanto, de (4.18), temos

$$E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') > 0 \quad (4.19)$$

e, do complemento de Schur definido na Proposição 1, aplicado em (4.18) obtemos

$$E(\mathcal{R}_0(t)^2) - E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)')E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)) > 0. \quad (4.20)$$

Uma das vantagens de adotar as formulações apresentadas (**P1**(σ) e **P2**(ν)) no problema multi-período, quando comparadas com a formulação baseada na função utilidade, é permitir ao investidor especificar o nível de risco que ele está disposto a correr quando estamos maximizando sua riqueza no instante final, ou ainda, estabelecer qual o valor esperado final de seu capital para o caso de estarmos minimizando o risco correspondente. É mais intuitivo e simples determinar tais parâmetros do que construir uma função utilidade em termos da riqueza final.

Definimos então como política multi-período a sequência de investimentos \mathcal{U} ,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}(1) \\ \mathcal{U}(2) \\ \vdots \\ \mathcal{U}(T-1) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde $\mathcal{U}(t)$ é uma estratégia de investimento que depende apenas das informações disponíveis até o instante atual t .

Temos que uma política multi-período \mathcal{U}^* será dita eficiente se não existir nenhuma outra política multi-período \mathcal{U} tal que $E(V(T))|\mathcal{U} \geq E(V(T))|\mathcal{U}^*$ e $Var(V(T))|\mathcal{U} \leq Var(V(T))|\mathcal{U}^*$ com pelo menos uma igualdade estrita.

Variando portanto os valores de σ em $\mathbf{P1}(\sigma)$ ou o valor de ν em $\mathbf{P2}(\nu)$, podemos gerar o conjunto de políticas de alocação multi-período eficientes.

Podemos ainda utilizar uma formulação equivalente dada por:

Problema $\mathbf{P3}(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \text{Max } E(V(T)) - \rho \text{Var}(V(T)) \\ & \text{sujeito a } V(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)'U(t) \quad (4.22) \\ & t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

onde, $\rho \in [0, \infty)$, representa a aversão ao risco por parte do investidor. Vale ressaltar que ρ tem relação diretamente proporcional ao risco, ou seja, quanto maior for ρ maior será a aversão ao risco. Analogamente, quanto menor for ρ menor será a aversão ao risco, podendo chegar a zero, representando que o investidor não se afeta, absolutamente, com o risco apresentado.

Notemos também que em situações onde o investidor é capaz de estabelecer o *trade-off* entre a riqueza final esperada e o risco associado, a formulação do problema $\mathbf{P3}(\rho)$ é mais adequada. Além disso, como apresentado em (Li and Ng, 2000), os autores provam que se U^* é solução de $\mathbf{P3}(\rho)$, então U^* é solução de $\mathbf{P1}(\sigma)$ com $\sigma = \text{Var}(V(T))|U^*$, e é também solução de $\mathbf{P2}(\nu)$ com $\nu = E(V(T))|U^*$.

4.3.3 Solução Analítica dos Problemas

Apresentaremos a seguir os principais resultados das soluções analíticas obtidas para os problemas $\mathbf{P1}(\sigma)$, $\mathbf{P2}(\nu)$ e $\mathbf{P3}(\rho)$, bem como a expressão analítica da fronteira eficiente de média-variância.

Definimos

$$\begin{aligned} A_1(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)) - E(\mathcal{P}(t)')E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)), \\ A_2(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)^2) - E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)')E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)), \\ B(t) &= E(\mathcal{P}(t)')E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t)), \\ B_1(t) &= B(t) \frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_1(k)}{2 \prod_{k=t+1}^{T-1} A_2(k)}, \\ B_2(t) &= B(t) \left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_1(k)}{2 \prod_{k=t+1}^{T-1} A_2(k)} \right)^2, \end{aligned}$$

com $\prod_{k=T}^{T-1} A_1(k) = \prod_{k=T}^{T-1} A_2(k) = 1$. Definimos ainda

$$\begin{aligned}\vartheta &= \prod_{t=0}^{T-1} A_1(t), \\ \epsilon &= \sum_{t=0}^{T-1} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} A_1(k) \right) B_1(t), \\ \tau &= \prod_{t=0}^{T-1} A_2(t), \\ a &= \frac{\epsilon}{2} - \epsilon^2, \\ b &= \frac{\vartheta\epsilon}{a}, \\ c &= \tau - \vartheta^2 - ab^2.\end{aligned}$$

A política ótima para o problema **P3**(ρ) é dada então pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*(t) &= -E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t))V(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(bv_0 + \frac{\epsilon}{2\rho a} \right) \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_1(k)}{A_2(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)).\end{aligned}\tag{4.23}$$

para $t = 0, 1, \dots, T-2$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*(T-1) &= -E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{R}_0(T-1)\mathcal{P}(T-1))V(T-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(bv_0 + \frac{\epsilon}{2\rho a} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{P}(T-1)).\end{aligned}\tag{4.24}$$

A política multi-período ótima para os problemas **P1**(σ) e **P2**(ν) é obtida a partir das seguintes expressões analíticas:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*(t) &= -E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t))V(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(bv_0 + \frac{\epsilon}{2\rho^* a} \right) \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_1(k)}{A_2(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t)).\end{aligned}\tag{4.25}$$

para $t = 0, 1, \dots, T-2$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*(T-1) &= -E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{R}_0(T-1)\mathcal{P}(T-1))V(T-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(bv_0 + \frac{\epsilon}{2\rho^* a} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{P}(T-1)).\end{aligned}\tag{4.26}$$

com

$$\rho^* = \frac{\epsilon}{2\sqrt{a(\sigma - cv_0^2)}}$$

quando resolvemos **P1**(σ) e

$$\rho^* = \frac{\epsilon^2}{2a(\nu - (\vartheta + b\epsilon)v_0^2)}$$

quando resolvemos **P2**(ν).

A fronteira eficiente de média-variância para os 3 problemas é dada por:

$$Var(V(T)) = \frac{a}{\epsilon^2} (E(V(T)) - (\vartheta + b\epsilon)v_0)^2 + cv_0^2,$$

para $E(V(T)) \geq (\vartheta + b\epsilon)v_0$.

Com as expressões analíticas fornecidas acima, a implementação da política ótima de alocação de ativos multi-período para os problemas **P1**(σ), **P2**(ν) e **P3**(ρ) é imediata. As soluções encontradas consistem todas de dois termos. O segundo termo de $\mathcal{U}^*(t)$ é função da aversão ao risco de investidor e independente do tamanho de sua riqueza. Assim sendo, ele pode ser calculado *off-line* antes do início do período de investimento. O primeiro termo é dependente da riqueza atual mas independente do grau de aversão ao risco. Neste caso, teremos que calculá-lo *on-line* ao final de cada período de análise a partir da atual riqueza obtida.

4.3.4 Derivação das Soluções Analíticas

A obtenção das soluções analíticas dos problemas **P1**(σ), **P2**(ν) e **P3**(ρ) não é trivial em função dos mesmos não serem separáveis no sentido da programação dinâmica. Sendo que o problema de minimização da variância é um caso notório em controle estocástico.

Apresentaremos a seguir, como demonstrado em (Li and Ng, 2000), a derivação da solução do problema **P3**(ρ) e, a partir da relação entre os três problemas, obteremos as soluções para **P1**(σ) e **P2**(ν). Enunciaremos nesta seção os principais teoremas propostos em (Li and Ng, 2000), mas sem a demonstração dos mesmos, que podem ser encontradas no referido trabalho.

A idéia para obter a solução de **P3**(ρ) é aproximá-lo por um problema auxiliar separável e investigar a relação entre a solução das duas formulações.

Desta forma, resolvendo o problema auxiliar, consegue-se a solução ótima de $\mathbf{P3}(\rho)$. Vamos definir $\mathcal{S}(\mathbf{P3}(\rho))$ como o conjunto de soluções ótimas de $\mathbf{P3}(\rho)$ para um dado ρ , ou seja:

$$\mathcal{S}(\mathbf{P3}(\rho)) = \{\mathcal{U} | \mathcal{U} \text{ é um máximo de } \mathbf{P3}(\rho)\}. \quad (4.27)$$

Definimos também:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(E(V^2(T)), E(V(T))) &= E(V(T)) - \rho \text{Var}(V(T)) \\ &= -\rho E(V^2(T)) + [\rho E^2(V(T)) + E(V(T))]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Podemos ver que $\tilde{\mathcal{U}}$ é uma função convexa de $E(V^2(T))$ e $E(V(T))$. Vamos então formular o seguinte problema auxiliar para $\mathbf{P3}(\rho)$:

Problema $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$:

$$\begin{aligned} \text{Max } E(-\rho V^2(T) + \lambda V(T)) \\ \text{sujeito a } V(t+1) &= \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)\mathcal{U}(t) \\ t &= 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Podemos observar que $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$ possui uma estrutura separável no contexto da programação dinâmica, com função objetivo quadrática com restrições lineares. Consideremos $\mathcal{S}(\mathbf{PAux}(\lambda, \rho))$ o conjunto das soluções ótimas de $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$ para dados λ e ρ , ou seja:

$$\mathcal{S}(\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)) = \{\mathcal{U} | \mathcal{U} \text{ é um máximo de } \mathbf{PAux}(\lambda, \rho)\}. \quad (4.30)$$

Denotemos:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{U}, \rho) &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}(E(V^2(T)), E(V(T)))}{\partial E(V(T))} \\ &= 1 + 2\rho E(V(T))|_{\mathcal{U}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Vamos apresentar assim o primeiro teorema para estabelecer a relação entre as soluções dos problemas $\mathbf{P3}(\rho)$ e $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$:

Teorema 1. Para todo $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(\mathbf{P3}(\rho))$ temos que:

$$\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(\mathbf{PAux}(d(\mathcal{U}^*, \rho), \rho)). \quad (4.32)$$

O teorema acima implica que o conjunto de soluções ótimas de $\mathbf{P3}(\rho)$ é um subconjunto das soluções ótimas de $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$. Apresentaremos agora uma condição suficiente para que uma solução de $\mathbf{PAux}(\lambda, \rho)$ seja uma estratégia ótima multi-período de $\mathbf{P3}(\rho)$:

Teorema 2. *Seja $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(\mathbf{PAux}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}))$. Uma condição necessária para que $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(\mathbf{P3}(\boldsymbol{\rho}))$ é:*

$$\lambda^* = 1 + 2\rho E(V(T))|_{\mathcal{U}^*}. \quad (4.33)$$

A solução ótima do problema auxiliar $\mathbf{PAux}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho})$ pode ser derivada analiticamente utilizando técnicas de programação dinâmica (vide (Li *et al.*, 1998)). Temos desta forma a estratégia ótima para cada instante de tempo t dada por:

$$\mathcal{U}^*(t, V(t), \gamma) = -\mathcal{K}(t)V(t) + \mathcal{D}(t, \gamma), \quad (4.34)$$

com

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\lambda}{\rho}, \\ \mathcal{K}(t) &= E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)), \\ \mathcal{D}(t, \gamma) &= \frac{\gamma}{2} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_1(k)}{A_2(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t)), \\ t &= 0, 1, 2, \dots, T-2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

com a seguinte condição de contorno:

$$\mathcal{D}(T-1, \gamma) = \frac{\gamma}{2} E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{P}(T-1)), \quad (4.36)$$

e com $A_1(k)$ e $A_2(k)$ como definidos na seção anterior. Substituindo a estratégia ótima em (4.34) na equação da riqueza obtemos o seguinte resultado:

$$V(t+1, \gamma) = (\mathcal{R}_0(t) - \mathcal{P}(t)'\mathcal{K}(t))V(t, \gamma) + \mathcal{P}(t)'\mathcal{D}(t, \gamma). \quad (4.37)$$

Tomando o valor esperado em ambos os lados de (4.37) e lembrando da independência estatística entre $(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{P}(t))$ e $V(t)$, obtem-se a expressão recursiva para a riqueza esperada dada a estratégia ótima $\mathcal{U}^*(t, V(t), \gamma)$:

$$E(V(t+1, \gamma)) = A_1(t)E(V(t, \gamma)) + \frac{\gamma}{2} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_1(k)}{A_2(k)} \right) B(t), \quad (4.38)$$

onde $B(t)$ foi definido na seção anterior. Elevando ambos os lados de (4.37)

ao quadrado temos:

$$\begin{aligned}
 V^2(t+1, \gamma) &= [(\mathcal{R}_0(t))^2 - 2\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)'\mathcal{K}(t) + \mathcal{K}(t)'\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)'\mathcal{K}(t)] V^2(t, \gamma) \\
 &\quad + 2(\mathcal{R}_0(t) - \mathcal{P}(t)'\mathcal{K}(t)) V(t, \gamma)\mathcal{P}(t)'\mathcal{D}(t, \gamma) \\
 &\quad + \mathcal{D}(t, \gamma)'\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)'\mathcal{D}(t, \gamma).
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Tomando então o valor esperado da expressão acima e simplificando-a temos a expressão recursiva para o valor esperado da riqueza ao quadrado dada a estratégia ótima $\mathcal{U}^*(t, V(t), \gamma)$:

$$E(V^2(t+1, \gamma)) = A_2(t)E(V^2(t, \gamma)) + \frac{\gamma^2}{4} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_1(k)}{A_2(k)} \right)^2 B(t). \tag{4.40}$$

A partir destas equações podemos determinar explicitamente os valores esperados terminais:

$$\begin{aligned}
 E(V(T, \gamma)) &= \vartheta v_0 + \epsilon \gamma \\
 E(V^2(T, \gamma)) &= \tau v_0^2 + \frac{\epsilon}{2} \gamma^2
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde ϑ , ϵ e τ foram definidos na seção anterior.

Podemos, a partir das duas expressões acima, determinar também a variância terminal como:

$$\begin{aligned}
 Var(V(T, \gamma)) &= E(V^2(T, \gamma)) - E^2(V(T, \gamma)) \\
 &= a(\gamma - bv_0)^2 + cv_0^2
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

onde a , b e c foram também definidos na seção anterior.

É fácil ver que $E(V(T, \gamma))$ é uma função linear crescente de γ e que $Var(V(T, \gamma))$ é uma função quadrática de γ . Partindo destas duas expressões vamos obter $\tilde{\mathcal{U}}(E(V^2(T)), E(V(T)))$ como uma função explícita de γ . E, desta forma, determinar as soluções dos problemas **P1**(σ), **P2**(ν) e **P3**(ρ), que foram apresentadas na seção anterior:

$$\tilde{\mathcal{U}}(E(V^2(T)), E(V(T))) = \vartheta v_0 + \epsilon \gamma - \rho [a(\gamma - bv_0)^2 + cv_0^2]. \tag{4.43}$$

Derivando então $\tilde{\mathcal{U}}$ em relação a γ e igualando a zero, obtemos a condição de otimalidade para γ :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{d\gamma} = \epsilon - 2\rho a(\gamma - bv_0) = 0, \tag{4.44}$$

logo

$$\gamma^* = bv_0 + \frac{\epsilon}{2\rho a}. \quad (4.45)$$

Substituindo γ^* em (4.34) obtemos então a estratégia ótima para $\mathbf{P3}(\rho)$, como visto na seção anterior. E substituindo também γ^* nas expressões de $E(V(T, \gamma))$ e $Var(V(T, \gamma))$ temos:

$$E(V(T)) = (\vartheta + b\epsilon)v_0 + \frac{\epsilon^2}{2\rho a} \quad (4.46)$$

e

$$Var(V(T)) = \frac{\epsilon^2}{4a\rho^2} + cv_0^2. \quad (4.47)$$

Desta forma, para os problemas $\mathbf{P1}(\sigma)$ e $\mathbf{P2}(\nu)$, calcula-se primeiro o ρ associado em termos de σ e ν usando as duas expressões acima, e obtém-se assim γ^* . Substituindo então o γ^* associado em (4.34), determina-se a estratégia ótima para $\mathbf{P1}(\sigma)$ e $\mathbf{P2}(\nu)$, como apresentado na seção anterior.

4.3.5 Inclusão do Ativo Livre de Risco

Analisaremos agora o caso onde um dos ativos disponíveis para investimento é livre de risco, ou seja, o retorno deste ativo é conhecido *a priori* e, portanto, sua variância é zero. Vamos, por simplicidade, tomar o ativo 0 como sendo o livre de risco, desta forma temos que $\mathcal{R}_0(t) = s_0(t)$ constante e $Cov(\mathcal{R}_0(t), \mathcal{R}_i(t)) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, N$ e para todo $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Definimos assim

$$\begin{aligned} A_1(t) &= s_0(t)(1 - B(t)), \\ A_2(t) &= s_0^2(t)(1 - B(t)), \\ B(t) &= E(\mathcal{P}(t)')E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t)), \\ B_1(t) &= \frac{B(t)}{2 \prod_{k=t+1}^{T-1} s_0(k)}, \\ B_2(t) &= \frac{B(t)}{4 \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} s_0(k) \right)^2}, \end{aligned}$$

com $\prod_{k=T}^{T-1} s_0(k) = 1$. Definimos ainda

$$\begin{aligned} \vartheta &= \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)(1 - B(t)), \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \left[1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \right], \\ \tau &= \prod_{t=0}^{T-1} s_0^2(t)(1 - B(t)), \\ a &= \frac{1}{4} \prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \left[1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \right], \\ b &= 2 \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t), \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Temos assim que o parâmetro ótimo γ^* para o problema $\mathbf{P3}(\rho)$ neste caso é dado por:

$$\gamma^* = 2 \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 + \frac{1}{\rho \left(\prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \right)}. \quad (4.48)$$

Portanto, a estratégia ótima é:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(t) &= -s_0(t)E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t))V(t) \\ &+ \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{s_0(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)) \\ &+ \frac{1}{2\rho \left(\prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \right)} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{s_0(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)), \end{aligned} \quad (4.49)$$

para $t = 0, 1, \dots, T - 2$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(T - 1) &= -s_0(T - 1)E^{-1}(\mathcal{P}(T - 1)\mathcal{P}(T - 1)')E(\mathcal{P}(T - 1))V(T - 1) \\ &+ \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)) \\ &+ \frac{1}{2\rho \left(\prod_{t=0}^{T-1} (1 - B(t)) \right)} E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)). \end{aligned} \quad (4.50)$$

O valor esperado e a variância terminais dada a estratégia ótima $\mathcal{U}^*(t)$ e o caso com um ativo livre de risco são:

$$E(V(T)) = \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 + \frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}{2\rho \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)} \quad (4.51)$$

e

$$\text{Var}(V(T)) = \frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}{4\rho^2 \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)} \quad (4.52)$$

Neste contexto, a estratégia ótima para os problemas $\mathbf{P1}(\boldsymbol{\sigma})$ e $\mathbf{P2}(\boldsymbol{\nu})$ é:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(t) = & -s_0(t)E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')E(\mathcal{P}(t))V(t) \\ & + \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{s_0(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)) \\ & + \frac{1}{2\rho^* \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{s_0(k)} \right) E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)), \end{aligned} \quad (4.53)$$

para $t = 0, 1, \dots, T - 2$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(T-1) = & -s_0(T-1)E^{-1}(\mathcal{P}(T-1)\mathcal{P}(T-1)')E(\mathcal{P}(T-1))V(T-1) \\ & + \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0 E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)) \\ & + \frac{1}{2\rho^* \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)} E^{-1}(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)')\mathcal{P}(P(t)). \end{aligned} \quad (4.54)$$

com

$$\rho^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}{\sigma \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}}$$

quando resolvemos $\mathbf{P1}(\boldsymbol{\sigma})$ e

$$\rho^* = \frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}{2 \left(\nu - \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0\right) \left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}$$

quando resolvemos $\mathbf{P2}(\boldsymbol{\nu})$.

A expressão analítica para a fronteira eficiente de média-variância para os 3 problemas é dada por:

$$Var(V(T)) = \frac{\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)}{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B(t))\right)} \left(E(V(T)) - v_0 \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)\right)^2$$

para $E(V(T)) \geq \prod_{t=0}^{T-1} s_0(t)v_0$.

4.4 Modelo Contínuo: abordagem via Controle Linear Quadrático Estocástico (LQG)

4.4.1 Introdução

Apresentaremos nesta seção a formulação e solução do problema de alocação de ativos a tempo contínuo utilizando controle linear quadrático estocástico (Controle LQG). Este tipo de formulação foi primeiramente abordado em (Merton, 1969) e desde então diversos outros trabalhos foram publicados.

Temos aqui, mais uma vez, a situação de um investidor que dispõe de uma riqueza inicial v_0 e, que deseja alocar seus recursos da melhor forma, em $N + 1$ diferentes ativos, durante um período T . Ou seja, um objetivo bastante similar ao caso multi-período discreto. A grande diferença é que nos modelos de tempo contínuo assume-se que os preços dos ativos são regidos por equações diferenciais (4.6) e (4.8) e que os mesmos são negociados ininterruptamente. Mais ainda, consideraremos que os custos de transação são desprezíveis e, portanto, podem ser ignorados.

As demonstrações dos resultados que serão aqui apresentados podem ser encontrados em (Zhou and Li, 2000).

4.4.2 Formulação do Problema

Novamente, seja $V(t)$ a riqueza do investidor e $\mathcal{U}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ o valor financeiro alocado no i -ésimo ativo no instante t . Ele busca então a melhor

estratégia de investimento

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0(t) \\ \mathcal{U}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_N(t) \end{pmatrix}.$$

Faz-se ainda a seguinte definição:

Definição 7. A estratégia $\mathcal{U}(t)$ é dita admissível se $\mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Neste contexto, consideraremos que o objetivo do investidor é maximizar o valor esperado da riqueza final, $E(V(t))$, e, ao mesmo tempo, minimizar sua variância

$$Var(V(t)) = E[V(t) - E(V(t))]^2 = E(V^2(t)) - E^2(V(t)).$$

Temos assim um problema de otimização multi-objetivo com dois critérios de performance distintos e conflitantes. Para formularmos então o nosso problema de seleção de ativos adotaremos uma função objetivo dada pela combinação linear dos dois critério, valor esperado e variância, acima definidos. Portanto o problema é formulado como:

Problema $P(\rho)$:

$$Min - E(V(T)) + \rho Var(V(T))$$

$$\text{sujeito a } \mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$$

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_{i=0}^N H_i(t) dS_i(t) \\ &= \left(r_0(t) H_0(t) S_0(t) + \sum_{i=1}^N r_i(t) H_i(t) S_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N H_i(t) S_i(t) \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} d\mathcal{W}_j(t) \\ &= \left(r_0(t) V(t) + \sum_{i=1}^N [r_i(t) - r_0(t)] \mathcal{U}_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} \mathcal{U}_i(t) d\mathcal{W}_j(t), \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde $\rho > 0$ representa o grau de aversão ao risco do investidor. Ou seja, quanto maior for ρ , maior será sua aversão ao risco.

4.4.3 Construção de um Problema Auxiliar

Podemos ver que $\mathbf{P}(\rho)$ não está na forma padrão de um problema de controle ótimo estocástico dada a presença de um termo não-linear, $E^2(V(t))$, na função custo. Este fato dificulta a resolução direto do mesmo pois torna a função objetivo não-separável no sentido de programação dinâmica. A idéia então será aproximarmos o problema original por um auxiliar colocado na forma de um problema LQ estocástico. Consideremos assim a seguinte formulação:

Problema $\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)$:

$$\text{Min } E(\rho V^2(T) - \lambda V(T))$$

$$\text{sujeito a } \mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$$

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_{i=0}^N H_i(t) dS_i(t) \\ &= \left(r_0(t) H_0(t) S_0(t) + \sum_{i=1}^N r_i(t) H_i(t) S_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N H_i(t) S_i(t) \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} dW_j(t) \\ &= \left(r_0(t) V(t) + \sum_{i=1}^N [r_i(t) - r_0(t)] \mathcal{U}_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} \mathcal{U}_i(t) dW_j(t), \end{aligned} \tag{4.56}$$

com $\rho > 0$.

Definindo

$$\mathcal{S}(\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)) = [\mathcal{U} | \mathcal{U} \text{ é controle ótimo de } \mathbf{AUX}(\rho, \lambda)]$$

e

$$\mathcal{S}(\mathbf{P}(\rho)) = [\mathcal{U} | \mathcal{U} \text{ é controle ótimo de } \mathbf{P}(\rho)].$$

A relação entre os problemas $\mathbf{P}(\rho)$ e $\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)$, como proposto em (Zhou and Li, 2000), é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 3. *Para qualquer $\rho > 0$ temos*

$$\mathcal{S}(\mathbf{P}(\rho)) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathcal{S}(\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)).$$

Mais ainda, se $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{P}(\rho))$, então $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{AUX}(\rho, \lambda))$ com

$$\lambda = 1 + 2\rho E(V_{\mathcal{U}}(t)). \quad (4.57)$$

A implicação do resultado acima é que a solução ótima de $\mathbf{P}(\rho)$, desde que ela exista, pode ser obtida resolvendo o problema $\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)$.

4.4.4 Solução do Problema LQ Genérico

Apresentaremos agora a resolução de um problema de controle LQ estocástico genérico que inclui o problema $\mathbf{AUX}(\rho, \lambda)$ como um caso particular, como demonstrado em (Zhou and Li, 2000). Consideremos então um sistema cujo comportamento é dado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dV(t) = [A(t)V(t) + B(t)U(t) + f(t)]dt + \sum_{j=1}^N D_j(t)U(t)d\mathcal{W}_j(t) \quad (4.58)$$

$$V(0) = v_0$$

onde v_0 é o estado inicial, $\mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}_1(t), \mathcal{W}_2(t), \dots, \mathcal{W}_N(t))'$ é um movimento browniano N -dimensional em $[0, T]$ em um dado espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $U \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$ é um controle admissível. O custo associado é dado por:

$$\mathcal{J}(U) = E \left[\int_0^T \frac{1}{2} (V(t)'Q(t)V(t) + U(t)'R(t)U(t)) dt + \frac{1}{2} V(T)'HV(T) \right]. \quad (4.59)$$

A solução $V(t)$ do sistema (4.58) é chamada de resposta do controle $U(t)$ e $(V(t), U(t))$ é chamado par admissível. O objetivo do problema de controle ótimo é então minimizar a função custo $\mathcal{J}(U)$ sobre $\mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Assumiremos então as seguintes hipóteses sobre os coeficientes de (4.58) e (4.59):

- $A(t) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$
- $B(t), D_j \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^{1 \times N})$

- $f \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$
- $Q(t) \in \mathcal{C}([0, T]; S_+^1)$
- $R(t) \in \mathcal{C}([0, T]; S^N)$
- $H \in S_+^1$

Vamos então considerar a seguinte equação de Riccati estocástica:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & -P(t)A(t) - A(t)'P(t) - Q(t) \\ & + P(t)B(t) \left(R(t) + \sum_{j=1}^N D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'P(t), \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$P(T) = H,$$

$$K(t) \equiv R(t) + \sum_{j=1}^N D_j(t)'P(t)D_j(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

junto com a equação:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) = & -A(t)'g(t) + P(t)B(t) \left(R(t) + \sum_{j=1}^N D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'g(t) \\ & - P(t)f(t), \\ g(T) = & 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Em (Zhou and Li, 2000), os autores estabelecem o seguinte teorema:

Teorema 4. *Se (4.60) e (4.61) admitem soluções $P \in \mathcal{C}([0, T]; S_+^1)$ e $g \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, respectivamente, então o problema LQ estocástico (4.58)-(4.59) possui controle ótimo dado por:*

$$\mathcal{U}^* = - \left(R(t) + \sum_{j=1}^N D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'(P(t)V(t) + g(t)). \quad (4.62)$$

Mais ainda, o valor custo ótimo é:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^* = & \frac{1}{2}v_0'P(0)v_0 + v_0g(0) + \int_0^T f(t)'g(t) - \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \left(g(t)B(t) \left(R(t) + \sum_{j=1}^N D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'g(t) \right) dt. \end{aligned}$$

4.4.5 Solução do Problema Auxiliar

Retomaremos agora a apresentação da resolução do problema $AUX(\rho, \lambda)$, como em (Zhou and Li, 2000), que, como colocado, é um caso particular do modelo genérico resolvido na seção anterior. Seja:

$$\gamma = \frac{\lambda}{2\rho} \quad (4.63)$$

e

$$Y(t) = V(t) - \gamma. \quad (4.64)$$

Desta forma o problema $AUX(\rho, \lambda)$ é equivalente a:

$$\begin{aligned} & \text{Min } E\left(\frac{1}{2}\rho Y^2(T)\right) \\ & \text{sujeito a } dY(t) = [A(t)Y(t) + B(t)V(t) + f(t)] dt \\ & \quad + \sum_{j=1}^N D_j(t)\mathcal{U}(t)d\mathcal{W}_j(t) \\ & Y(0) = V(0) - \gamma. \end{aligned} \quad (4.65)$$

com

$$\begin{aligned} A(t) &= r_0(t) \\ B(t) &= (r_1(t) - r_0(t), r_2(t) - r_0(t), \dots, r_N(t) - r_0(t)) \\ f(t) &= \gamma r_0(t) \\ D_j(t) &= (\sigma_{1j}(t), \sigma_{2j}(t), \dots, \sigma_{Nj}(t)). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Assim sendo, a formulação acima é equivalente a (4.58)-(4.59) com $Q(t) = 0$, $R(t) = 0$ e $H = \rho$.

O fato de $R(t) = 0$ torna o problema de média-variância um problema LQ estocástico inerentemente singular. Uma outra particularidade é que a variável de estado $V(t)$ é unidimensional, da mesma forma que $P(t)$ na equação de Riccati estocástica correspondente. Seja:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= B(t) \left[\sum_{j=1}^N D_j(t)' D_j(t) \right]^{-1} B(t)' \\ &= B(t) [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} B(t)'. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Desta forma a equação (4.60) fica mais fácil de ser resolvida e reduz-se a:

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= (\varrho(t) - 2r_0(t)) P(t) \\ P(T) &= \rho \\ P(t) [\sigma(t)\sigma(t)'] &> 0 \quad t \in [0, T]\end{aligned}\tag{4.68}$$

cuja solução é:

$$P(t) = \rho \exp\left(-\int_t^T (\varrho(s) - 2r_0(s)) ds\right).\tag{4.69}$$

Mais ainda, temos que (4.61) fica na forma:

$$\begin{aligned}\dot{g}(t) &= (\varrho(t) - r(t)) g(t) - \gamma r_0(t) P(t) \\ g(T) &= 0,\end{aligned}\tag{4.70}$$

que admite solução única $g(t) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$.

O controle ótimo neste caso é dado então por:

$$U^*(t, Y(t)) = -[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} B(t)' \left(Y(t) + \frac{g(t)}{P(t)} \right).\tag{4.71}$$

Seja $h(t) = \frac{g(t)}{P(t)}$. Portanto temos:

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \frac{P(t)\dot{g}(t) - \dot{P}(t)g(t)}{P^2(t)} \\ &= \frac{r_0(t)P(t)g(t) - \gamma r_0(t)P^2(t)}{P^2(t)} \\ &= r_0(t)h(t) - \gamma r_0(t).\end{aligned}\tag{4.72}$$

Como $h(T) = 0$ podemos obter

$$\frac{g(t)}{P(t)} = h(t) = \gamma \left(1 - \exp\left(-\int_t^T r_0(s) ds\right) \right).\tag{4.73}$$

Que, substituindo no controle ótimo, fornece:

$$\begin{aligned}U^*(t, V(t)) &= -[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} B(t)' (V(t) - \gamma) \\ &\quad - [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} B(t)' \left(\gamma \left(1 - \exp\left(-\int_t^T r_0(s) ds\right) \right) \right) \\ &= [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} B(t)' \left(\gamma \exp\left(-\int_t^T r_0(s) ds\right) - V(t) \right).\end{aligned}\tag{4.74}$$

4.4.6 Solução do Problema Original

Agora, a partir do controle ótimo obtido para o problema auxiliar, estabeleceremos a estratégia ótima para o problema $\mathbf{P}(\rho)$. Neste contexto o processo de riqueza é dado por:

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left\{ (r_0(t) - \varrho(t))V(t) + \gamma \exp\left(-\int_t^T r_0(s)ds\right) \varrho(t) \right\} dt \\ &\quad + \left\{ B(t) [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} \sigma(t) \left(\gamma \exp\left(-\int_t^T r_0(s)ds\right) - V(t) \right) \right\} d\mathcal{W}(t), \\ V(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Aplicando então a fórmula de Itô em $V^2(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= \left\{ (2r_0(t) - \varrho(t))V^2(t) + \gamma^2 \exp\left(-2\int_t^T r_0(s)ds\right) \varrho(t) \right\} dt \\ &\quad + \left\{ 2V(t)B(t) [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} \sigma(t) \gamma \exp\left(-\int_t^T r_0(s)ds\right) \right\} d\mathcal{W}(t) \\ &\quad - \left\{ 2V(t)B(t) [\sigma(t)\sigma(t)']^{-1} \sigma(t)V(t) \right\} d\mathcal{W}(t), \\ V^2(0) &= v_0^2. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Tomando o valor esperado nos sistemas acima conclui-se que $E(V(t))$ e $E(V^2(t))$ devem satisfazer as seguintes equações diferenciais ordinárias não-homogeneas:

$$\begin{aligned} dE(V(t)) &= \left\{ (r_0(t) - \varrho(t))E(V(t)) + \gamma \exp\left(-\int_t^T r_0(s)ds\right) \varrho(t) \right\} dt, \\ E(V(0)) &= v_0, \end{aligned} \tag{4.77}$$

e:

$$\begin{aligned} dE(V^2(t)) &= \left\{ (2r_0(t) - \varrho(t))E(V^2(t)) + \gamma^2 \exp\left(-2\int_t^T r_0(s)ds\right) \varrho(t) \right\} dt, \\ E(V^2(0)) &= v_0^2. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Cujas soluções são dadas, em função de γ , por:

$$\begin{aligned} E(V(t)) &= \alpha v_0 + \beta \gamma, \\ E(V^2(t)) &= \delta v_0^2 + \beta \gamma^2, \end{aligned} \tag{4.79}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= \exp\left(\int_0^T (r_0(t) - \varrho(t)) dt\right), \\ \beta &= 1 - \exp\left(-\int_0^T \varrho(t) dt\right), \\ \delta &= \exp\left(\int_0^T (2r_0(t) - \varrho(t)) dt\right).\end{aligned}\tag{4.80}$$

Pelo Teorema 3 temos que a solução ótima de $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})$, se existir, pode ser obtida selecionando λ^* tal que:

$$\lambda^* = 1 + 2\rho E(V^*(t)) = 1 + 2\rho\left(\alpha v_0 + \beta \frac{\lambda^*}{2\rho}\right)\tag{4.81}$$

que fornece:

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \frac{1 + 2\rho\alpha v_0}{1 - \beta} \\ &= \exp\left(\int_0^T \varrho(t) dt\right) + 2\rho v_0 \exp\left(\int_0^T r_0(t) dt\right).\end{aligned}\tag{4.82}$$

Portanto a estratégia ótima para $\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho})$ é dada por (4.74) com:

$$\gamma = \gamma^* = \frac{\lambda^*}{2\rho}\tag{4.83}$$

e λ^* dado por (4.82). Neste caso a variância terminal correspondente é:

$$\begin{aligned}Var(V^*(T)) &= E(V^*(T)^2) - E^2(V^*(T)) \\ &= \beta(1 - \beta)(\gamma^*)^2 - 2\alpha\beta v_0\gamma^* + (\delta - \alpha^2)v_0^2 \\ &= \frac{1 - \beta}{\beta} \left[\beta^2(\gamma^*)^2 - \frac{2\alpha\beta^2 v_0\gamma^*}{1 - \beta} + \frac{\beta(\delta - \alpha^2)}{1 - \beta} v_0^2 \right] \\ &= \frac{1 - \beta}{\beta} \left[(\beta\gamma^* + \alpha v_0)^2 - \frac{2\alpha\beta v_0\gamma^*}{1 - \beta} + \frac{\beta\delta - \alpha^2}{1 - \beta} v_0^2 \right].\end{aligned}\tag{4.84}$$

Substituindo $\beta\gamma^* = E(V^*(T)) - \alpha v_0$ na expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned}
Var(V^*(T)) &= \frac{1-\beta}{\beta} \left[E^2(V^*(T)) - \frac{2\alpha v_0 E(V^*(T))}{1-\beta} + \frac{\beta\delta + \alpha^2}{1-\beta} v_0^2 \right] \\
&= \frac{1-\beta}{\beta} \left[E^2(V^*(T)) - 2v_0 E(V^*(T)) \exp\left(\int_0^T r_0(t) dt\right) \right] \\
&\quad + \frac{1-\beta}{\beta} \left[\exp\left(\int_0^T 2r_0(t) dt\right) v_0^2 \right] \\
&= \frac{1-\beta}{\beta} \left[E(V^*(T)) - \exp\left(\int_0^T r_0(t) dt\right) v_0 \right]^2 \\
&= \frac{\exp\left(-\int_0^T \varrho(t) dt\right)}{1 - \exp\left(-\int_0^T \varrho(t) dt\right)} \left[E(V^*(T)) - \exp\left(\int_0^T r_0(t) dt\right) v_0 \right]^2.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Temos conseqüentemente o seguinte resultado, como proposto em (Zhou and Li, 2000):

Teorema 5. *A fronteira eficiente do problema de seleção ótima de ativos $P(\rho)$, se existir, é dada por:*

$$Var(V^*(T)) = \frac{\exp\left(-\int_0^T \varrho(t) dt\right)}{1 - \exp\left(-\int_0^T \varrho(t) dt\right)} \left[E(V^*(T)) - \exp\left(\int_0^T r_0(t) dt\right) v_0 \right]^2. \tag{4.86}$$

4.5 Modelo Contínuo: abordagem via Cadeia de Markov com mudança de regimes

4.5.1 Introdução

Abordaremos nesta seção o modelo de seleção de ativos a tempo contínuo, onde assume-se mudanças aleatórias de regime nas condições de mercado. Desta forma o problema será formulado utilizando um modelo de difusão com cadeias de Markov. E, através de técnicas de controle linear quadrático estocástico, obtem-se soluções explícitas para a fronteira e as carteiras eficientes.

As demonstrações dos resultados que apresentaremos ao longo de toda esta seção podem ser encontradas em (Zhou and Yin, 2003).

4.5.2 Formulação do Problema

Consideremos os conceitos apresentados na seção 4.2.1. Seja também $\alpha(t)$ uma cadeia de Markov estacionária contínua e que assume valores em um espaço de estados de dimensão finita $\mathcal{M} = (1, 2, \dots, l)$, tal que $\mathcal{W}(t)$ e $\alpha(t)$ são independentes. Mais ainda, a cadeia de Markov possui um gerador $Q = (q_{ij})_{l \times l}$ e probabilidades de transição estacionárias dadas por:

$$p_{ij}(t) = P(\alpha(t) = j | \alpha(0) = i), \quad t \geq 0; i, j = 1, 2, \dots, l \quad (4.87)$$

Definimos uma filtragem dada por $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{W}(s), \alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Denotemos por $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$ o conjunto de todos os processos estocásticos $f(t)$ mensuráveis em \mathbb{R}^N adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que

$$E \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right) < \infty.$$

Consideremos que o modo inicial do mercado é dado por $\alpha(0) = i_0$, que um investidor possui uma riqueza inicial V_0 e que $V(t)$ é o valor de sua riqueza no instante $t \geq 0$. Assumiremos ainda que as transações dos ativos (compras e vendas) podem ser feitas continuamente e que os custos associados são irrelevantes e, portanto, podem ser desconsiderados. A partir das equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) temos:

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_{i=0}^N H_i(t) dS_i(t) \\ &= \left(r_0(t, \alpha(t)) H_0(t) S_0(t) + \sum_{i=1}^N r_i(t, \alpha(t)) H_i(t) S_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N H_i(t) S_i(t) \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(t, \alpha(t)) d\mathcal{W}_j(t) \\ &= \left(r_0(t, \alpha(t)) V(t) + \sum_{i=1}^N [r_i(t, \alpha(t)) - r_0(t, \alpha(t))] \mathcal{U}_i(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij}(t, \alpha(t)) \mathcal{U}_i(t) d\mathcal{W}_j(t), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$V(0) = v_0 > 0,$$

$$\alpha(0) = i_0.$$

Vale apenas ressaltar que, neste caso, como o comportamento do mercado é modelado como uma cadeia de Markov, temos que os retornos $(r_i(t, \alpha(t)))$ e as covariâncias $(\sigma_{ij}(t, \alpha(t)))$ dos ativos são dadas em função do tempo t e do modo do mercado neste instante de tempo $\alpha(t)$.

Faz-se a seguinte definição:

Definição 8. *A estratégia $\mathcal{U}(t)$ é dita admissível se $\mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$ e a equação diferencial (4.88) possui solução única $V(t)$ associada a $\mathcal{U}(t)$. Neste caso, denotaremos $(V(t), \mathcal{U}(t))$ como o par admissível (riqueza, estratégia).*

Baseado nos conceitos apresentados acima, temos que o objetivo do investidor é obter uma estratégia admissível $\mathcal{U}(t)$, dentre todas as estratégias admissíveis cujo valor terminal da riqueza é $E(V(T)) = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, tal que o risco medido pela variância da riqueza final,

$$\text{Var}(V(T)) \equiv E [V(T) - E(V(T))]^2 = E [V(T) - z]^2, \quad (4.89)$$

seja minimizado. Portanto a formulação matemática do modelo é dada por:

Problema $\mathbf{P}(z)$:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{J}_{MV}(v_0, i_0, \mathcal{U}(t)) &= E [V(T) - z]^2 \\ \text{sujeito a } E(V(T)) &= z \\ (V(t), \mathcal{U}(t)) &\text{ admissível.} \end{aligned} \quad (4.90)$$

O Problema $\mathbf{P}(z)$ é dito factível se existe pelo menos uma estratégia satisfazendo todas as restrições. O problema é chamado finito se, além de factível, o mínimo da função objetivo $\mathcal{J}_{MV}(v_0, i_0, \mathcal{U}(t))$ é finito. Finalmente, a estratégia ótima do problema acima, se existir, é chamada estratégia eficiente correspondente a z . O conjunto de todos os pontos eficientes é chamado de fronteira eficiente. Cabe ressaltar que este modelo é baseado totalmente na formulação original de Markowitz (vide (Markowitz, 1952)).

4.5.3 Análise de Factibilidade

Dado que o problema $\mathbf{P}(z)$ apresenta uma restrição final no valor esperado, dada por $E(V(T)) = z$, apresentaremos a seguir condições sob as quais

garante-se a factibilidade do problema. Em primeiro lugar, consideremos o lema generalizado de Itô para processos markovianos:

Lema 1. *Dado um processo N -dimensional satisfazendo:*

$$dV(t) = r(t, V(t), \alpha(t))dt + \sigma(t, V(t), \alpha(t))d\mathcal{W}(t)$$

e um número de funções $\varphi(\cdot, \cdot, i) \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, para $i = 1, 2, \dots, l$, temos que:

$$\begin{aligned} d\varphi(t, V(t), \alpha(t)) = & \Gamma\varphi(t, V(t), \alpha(t))dt \\ & + \varphi_x(t, V(t), \alpha(t))'\sigma(t, V(t), \alpha(t))d\mathcal{W}(t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma\varphi(t, V, i) = & \varphi_t(t, V, i) + \varphi_x(t, V, i)'r(t, V, i) \\ & + \frac{1}{2}tr [\sigma(t, V, i)'\varphi_{xx}(t, V, i)\sigma(t, V, i)] + \sum_{j=1}^l q_{ij}\varphi(t, V, j). \end{aligned}$$

Consideremos agora o caso trivial em que o investidor aloca a totalidade de seus recursos no ativo livre de risco, onde o preço do mesmo é determinado pela equação diferencial ordinária (4.6) com a condição inicial (4.7). Desta forma, o processo da riqueza do investidor satisfaz:

$$\begin{aligned} dV^0(t) &= r_0(t, \alpha(t))V^0(t)dt, \\ V^0(0) &= v_0 > 0, \\ \alpha(0) &= i_0, \end{aligned} \tag{4.91}$$

com a riqueza final esperada dada por:

$$z^0 = E(V^0(T)) = E \left(\exp \left(\int_0^T r_0(s, \alpha(s))ds \right) v_0 \right). \tag{4.92}$$

Temos portanto a situação totalmente definida em função de $r_0(t, \alpha(t))$.

Passaremos agora a analisar o caso onde temos ativos com risco na estratégia. Nesta situação, como proposto em (Zhou and Yin, 2003), temos o seguinte resultado:

Lema 2. *Sejam $\psi(\cdot, i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, as soluções do seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:*

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t, i) &= -r(t, i)\psi(t, i) - \sum_{j=1}^l q_{ij}\psi(t, j) \\ \psi(T, i) &= 1, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Então o problema de média-variância $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ é factível para todo $z \in \mathbb{R}$ se e somente se

$$\gamma = E \left(\int_0^T |\psi(t, \alpha(t)) \mathcal{P}(t, \alpha(t))|^2 dt \right) > 0, \quad (4.94)$$

onde $\mathcal{P}(t)$ é definido como

$$\mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) - r_0(t) \\ r_2(t) - r_0(t) \\ \vdots \\ r_N(t) - r_0(t) \end{pmatrix}.$$

Como consequência direta do lema acima, os autores (Zhou and Yin, 2003) formulam o seguinte teorema:

Teorema 6. *O problema de média-variância $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ é factível para todo $z \in \mathbb{R}$ se e somente se*

$$\gamma = E \left(\int_0^T |\mathcal{P}(t, \alpha(t))|^2 dt \right) > 0, \quad (4.95)$$

com $\mathcal{P}(t, \alpha(t))$ definido acima.

A partir dos resultados estabelecidos anteriormente, tem-se os seguintes corolários:

Corolário 1. *Se a expressão (4.95) é válida, então para qualquer $z \in \mathbb{R}$, uma estratégia admissível que satisfaz a condição $E(V(T)) = z$ é dada por:*

$$\mathcal{U}(t) = \frac{z - z^0}{\gamma} \mathcal{P}(t, \alpha(t))' \psi(t, \alpha(t)) \quad (4.96)$$

onde z^0 e γ são dados por (4.92) e (4.94) respectivamente.

E

Corolário 2. *Se*

$$\gamma = E \left(\int_0^T |\mathcal{P}(t, \alpha(t))|^2 dt \right) = 0, \quad (4.97)$$

então qualquer estratégia admissível $\mathcal{U}(t)$ resulta em $E(V(T)) = z^0$.

Cabe ressaltar que a condição (4.95) é bastante sutil, dado que ela é válida apenas se existir no mínimo um ativo cujo retorno seja diferente do

retorno do ativo livre de risco em algum modo de mercado. O que é uma hipótese bastante razoável. Caso a condição não seja satisfeita, como no corolário 2, então temos o caso trivial onde aloca-se 100% dos recursos no ativo livre de risco, fornecendo uma riqueza final z^0 . Portanto, os autores assumem a partir deste ponto que a condição (4.95) é sempre válida, ou seja, o problema de média-variância $\mathbf{P}(z)$ é sempre factível para todo z .

4.5.4 Solução Analítica do Problema

Tendo estabelecido as condições para a factibilidade do problema $\mathbf{P}(z)$, vamos agora analisar as condições de otimalidade para o mesmo. O problema de média-variância $\mathbf{P}(z)$ é um problema de otimização dinâmica com uma restrição no instante final $E(V(T)) = z^0$. Para a resolução deste tipo de formulação, como apresentado em (Zhou and Yin, 2003), utiliza-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Definimos assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v_0, i_0, \mathcal{U}(t), \lambda) &= E \left([V(t) - z]^2 + 2\lambda [V(t) - z] \right) \\ &= E [V(t) + \lambda - z]^2 - \lambda^2, \quad \lambda \in R. \end{aligned} \quad (4.98)$$

O objetivo será então resolver o seguinte problema de otimização irrestrito parametrizado pelo multiplicador de Lagrange λ :

Problema $\mathbf{PAux}(z, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{J}(v_0, i_0, \mathcal{U}(t), \lambda) &= E [V(t) + \lambda - z]^2 - \lambda^2 \\ \text{sujeito a } (V(t), \mathcal{U}(t)) &\text{ admissível.} \end{aligned} \quad (4.99)$$

A formulação acima é um problema de controle ótimo LQG (linear quadrático estocástico). Definindo primeiramente:

$$\rho(t, i) = \mathcal{P}(t, i) (\sigma(t, i)\sigma(t, i))^{-1} \mathcal{P}(t, i)', \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (4.100)$$

Consideremos os seguintes dois sistemas de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t, i) &= [\rho(t, i) - 2r(t, i)]P(t, i) - \sum_{j=1}^l q_{ij}P(t, j), \\ P(T, i) &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (4.101)$$

e

$$\dot{H}(t, i) = r(t, i)H(t, i) - \frac{1}{P(t, i)} \sum_{j=1}^l q_{ij} P(t, j) [H(t, j) - H(t, i)], \quad (4.102)$$

$$H(T, i) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

É possível ver existência e unicidade das soluções dos sistemas acima dado que ambos os sistemas são lineares com coeficientes limitados uniformemente. Temos assim a seguinte proposição, apresentada em (Zhou and Yin, 2003):

Proposição 2. *As soluções dos sistemas (4.101) e (4.102) devem satisfazer as condições $P(t, i) > 0$ e $0 < H(t, i) \leq 1, \forall t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, l$. Mais ainda, se, para um i fixo, $r(t, i) > 0$ para algum $t \in [0, T]$, então $H(t, i) < 1$ para todo $t \in [0, T]$.*

Estabelece-se assim o principal resultado a respeito da solução do problema $\mathbf{P}(\mathbf{z}, \lambda)$ através do seguinte teorema, proposto em (Zhou and Yin, 2003):

Teorema 7. *O problema de média-variância $\mathbf{PAux}(\mathbf{z}, \lambda)$ possui um controle ótimo dado por:*

$$\mathcal{U}(t, V(t), i) = -[\sigma(t, i)\sigma(t, i)]^{-1} \mathcal{P}(t, i)' [V(t) + (\lambda - z)H(t, i)]. \quad (4.103)$$

Mais ainda, o correspondente custo ótimo do problema é:

$$\begin{aligned} \inf_{\mathcal{U}(\cdot)} \mathcal{J}(v_0, i_0, \mathcal{U}(\cdot), \lambda) &= [P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta - 1] (\lambda - z)^2 \\ &\quad + 2 [P(0, i_0)H(0, i_0)v_0 - z] (\lambda - z) \\ &\quad + P(0, i_0)v_0^2 - z^2, \end{aligned} \quad (4.104)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= E \left(\int_0^T \sum_{j=1}^l q_{\alpha(t)j} P(t, j) [H(t, j) - H(t, i)]^2 dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \int_0^T P(t, j) p_{i_0 i}(t) q_{ij} [H(t, j) - H(t, i)]^2 dt \geq 0, \end{aligned} \quad (4.105)$$

com probabilidades de transição $p_{i_0 i}(t)$ dadas por (4.87).

4.5.5 Determinação da Fronteira Eficiente

Vamos, nesta seção, apresentar a derivação da fronteira eficiente para o problema original de média-variância $\mathbf{P}(z)$, como em (Zhou and Yin, 2003).

Teorema 8. *Vamos assumir que a condição (4.95) é válida. Temos então que:*

$$P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta - 1 < 0. \quad (4.106)$$

Mais ainda, a estratégia eficiente correspondente a z , como função do instante de tempo t , da riqueza $V(t)$ e do modo de mercado i é:

$$\mathcal{U}(t, V(t), i) = -[\sigma(t, i)\sigma(t, i)]^{-1} \mathcal{P}(t, i)' [V(t) + (\lambda^* - z)H(t, i)], \quad (4.107)$$

onde

$$\lambda^* - z = \frac{z - P(0, i_0)H(0, i_0)v_0}{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta - 1}. \quad (4.108)$$

Nestas condições, o valor ótimo de $\text{Var}(V(T))$, dentre todos os processos de riqueza $V(t)$ que satisfazem $E(V(T)) = z$, é:

$$\begin{aligned} \text{Var}(V^*(T)) = & \frac{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta}{1 - \theta - P(0, i_0)H(0, i_0)^2} \left[z - \frac{P(0, i_0)H(0, i_0)}{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta} v_0 \right]^2 \\ & + \frac{P(0, i_0)\theta}{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta} v_0^2. \end{aligned} \quad (4.109)$$

O resultado obtido em (4.109) apresenta explicitamente o *tradeoff* entre risco e retorno no instante final de análise da estratégia de investimento. Ao contrário do caso sem saltos Markovianos (vide (Zhou and Yin, 2003) e seção 4.4), o resultado não é mais um quadrado perfeito, ou seja, no plano média x desvio padrão, a solução não é mais uma reta. Como consequência imediata, não é mais possível um investimento totalmente livre de risco, uma vez que o processo associado a taxa de juros foi formulado como uma cadeia de Markov. Desta forma, temos que esta taxa de juros não pode ser perfeitamente protegida por nenhuma carteira composta por depósitos bancários e ações (como o caso descrito em (Lim and Zhou, 2002)), uma vez que a cadeia de Markov é independente do movimento browniano das ações.

Entretanto, a expressão (4.109) fornece a *mínima variância*, isto é, a menor variância final possível atingível por uma estratégia admissível, junto

com a estratégia associada. Os autores estabelecem assim o seguinte teorema:

Teorema 9. *A variância terminal mínima é:*

$$\text{Var}(V_{min}^*(T)) = \frac{P(0, i_0)\theta}{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta} v_0^2 \quad (4.110)$$

com a correspondente riqueza esperada terminal dada por:

$$z_{min} = \frac{P(0, i_0)H(0, i_0)}{P(0, i_0)H(0, i_0)^2 + \theta} v_0 \quad (4.111)$$

e o multiplicador de Lagrange ótimo associado $\lambda_{min}^* = 0$. Mais ainda, a estratégia que atinge a variância mínima, como função do instante de tempo t , da riqueza $V(t)$ e do modo de mercado i é:

$$\mathcal{U}_{min}^*(t, V(t), i) = -[\sigma(t, i)\sigma(t, i)]^{-1} \mathcal{P}(t, i)' [V(t) - z_{min}H(t, i)]. \quad (4.112)$$

Como consequência direta do resultado acima, o parâmetro z pode ser restringido de forma que $z \geq z_{min}$ quando define-se a fronteira eficiente para o problema de média-variância $\mathbf{P}(z)$. Os autores apresentam ainda o seguinte resultado:

Teorema 10. *Suponha uma estratégia eficiente $\mathcal{U}_1^*(\cdot)$ dada por (4.107) correspondente a $z = z_1 \geq z_{min}$. Então uma estratégia $\mathcal{U}^*(\cdot)$ é eficiente se e somente se existe um parâmetro $\mu \geq 0$ tal que:*

$$\mathcal{U}^*(t, V(t), i) = (1 - \mu)\mathcal{U}_{min}^*(t, V(t), i) + \mu\mathcal{U}_1^*(t, V(t), i), \quad t \in [0, T] \quad (4.113)$$

onde $\mathcal{U}_{min}^*(\cdot)$ é a estratégia de mínima variância definida no Teorema 9.

O teorema acima implica que qualquer investidor precisa da estratégia de mínima variância e outra estratégia eficiente preestabelecida para obter outras estratégias eficientes.

4.5.6 A relação entre o caso contínuo e o discreto

Em trabalho recente (Yin and Zhou, 2004), os mesmos autores estabelecem uma relação entre a formulação e solução do modelo contínuo, como colocado nesta seção, com a formulação e resolução do caso discreto. Na formulação do caso contínuo proposta os autores utilizam cadeias de Markov

para modelar o comportamento do mercado e, desta forma, determinam uma estratégia ótima. A idéia então é, a partir deste contexto, determinar uma solução ótima para o caso discreto a partir da estratégia obtida para o caso contínuo.

4.6 Outras Abordagens

Em trabalhos recentes, como em (Lim *et al.*, 2002), (Lim and Zhou, 2002), (Gulpinar *et al.*, 2003) e (Leippold *et al.*, 2004), encontramos outras pesquisas em modelos de seleção de ativos multi-período. De forma análoga ao que ocorreu com o modelo uni-período, existe atualmente um grande número de pesquisadores interessados em, a partir das soluções analíticas obtidas em (Li and Ng, 2000), (Zhou and Li, 2000) e (Zhou and Yin, 2003), desenvolver novos modelos e abordagens com o intuito de aprimorar o caso clássico.

Em (Lim *et al.*, 2002), os autores, a partir do modelo de média-variância a tempo contínuo como apresentado em (Zhou and Li, 2000), incorporam restrições de não-negatividade nas variáveis de controle. Ou seja, nesta formulação não é mais permitido o *short selling* dos ativos com risco na política ótima de investimentos. O problema fica assim na forma:

Problema $P^+(\rho)$:

$$\begin{aligned} \text{Min } & -E(V(T)) + \rho \text{Var}(V(T)) \\ \text{sujeito a } & \mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}_+^N) \\ & dV(t) = \left(r_0(t)V(t) + \sum_{i=1}^N [r_i(t) - r_0(t)]\mathcal{U}_i(t) \right) dt \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij}\mathcal{U}_i(t)d\mathcal{W}_j(t). \end{aligned} \tag{4.114}$$

A introdução desta nova restrição dificulta a resolução analítica do problema, como detalhado no trabalho (Lim *et al.*, 2002). Entretanto agrega ao modelo um aspecto prático bastante interessante e importante, dado que a venda à descoberto de ativos não é uma operação trivial de ser realizada.

Uma outra abordagem interessante para o problema contínuo, apresentada em (Lim and Zhou, 2002), considera que os parâmetros de risco e

retorno dos ativos são aleatórios. Ou seja, os valores de média e variância dos ativos são variáveis aleatórias. Neste trabalho os autores, utilizando equações diferenciais estocásticas recursivas, apresentam solução analítica para o problema de seleção de ativos. Cabe ressaltar que este aprimoramento envolve também questões práticas para a formulação e resolução deste tipo de problema. Além da questão teórica, a hipótese de que as médias e variâncias são aleatórias implica que o usuário do modelo terá que fazer uma parametrização adequada destas variáveis, dada a importância das mesmas na estratégia ótima. Portanto, temos aqui uma formulação mais genérica mas, ao mesmo tempo, mais suscetível a definição subjetiva de seus parâmetros.

Considerando o modelo multi-período discreto, como apresentado em (Li and Ng, 2000), o trabalho (Leippold *et al.*, 2004) propõe uma abordagem geométrica para a resolução do problema. Desta forma, os autores obtêm a estratégia ótima de investimentos a partir de um conjunto ortogonal de “estratégias base”. Neste contexto o grande aspecto prático desta abordagem apresentado no artigo é possibilitar a inclusão de passivos no modelo e, desta forma, estabelecer uma política ótima de investimentos que os leva em conta. Vale enfatizar que a questão da gestão de ativos e passivos em instituições financeiras e entidades de previdência é um tema bastante atual.

Em (Gulpinar *et al.*, 2003), os autores, utilizando uma formulação baseada em árvores de cenários para o problema multi-período discreto, incorporam custos de transação ao modelo. Desta forma as compras e vendas dos ativos ao longo do tempo, estabelecidas pela estratégia ótima de investimento, impactarão no resultado total da carteira. Considerando mercados onde tais custos são significativos, como é o caso brasileiro, esta formulação é bastante interessante em termos práticos.

Assim como os trabalhos acima citados, o objetivo desta tese é propor alterações, através da incorporação de novas restrições, ao modelo de seleção de ativos multi-período discreto, visando atender a novas demandas do mercado financeiro, tornando-o mais útil na prática. O capítulo seguinte é dedicado inteiramente a apresentação dos novos resultados obtidos.

Capítulo 5

Modelo Multi-Período com Restrições

5.1 Introdução

Todos os resultados que apresentaremos ao longo deste capítulo são originais, e constituem as principais contribuições desta tese para o estudo dos modelos multi-período de seleção de ativos.

Como mencionamos no capítulo anterior, o modelo multi-período discreto fornece uma estratégia de alocações ao investidor que almeja maximizar o retorno de seus recursos em um determinado ponto no futuro (seu horizonte de investimento), sendo que este horizonte de investimento é dividido em T períodos, e que ao final de cada um deles, o investidor terá a possibilidade de medir o retorno de sua carteira e realizar novas alocações com o capital disponível para o próximo período.

Neste contexto, inúmeros trabalhos foram feitos com o intuito de resolver este problema, cabendo aqui um destaque para (Li and Ng, 2000) que forneceu uma expressão analítica para solução deste problema. No entanto, a abordagem clássica do modelo multi-período utiliza apenas as informações (risco, retorno e/ou função utilidade) relativas ao instante de tempo final, T , tanto no critério de performance como nas restrições do modelo. Desta forma, o grande objetivo deste trabalho, que apresentaremos com mais detalhes neste capítulo, é generalizar o modelo multi-período para o caso onde

valores esperados e variâncias intermediárias da carteira serão também considerados na formulação do problema de seleção de ativos. Teremos assim, que a função objetivo a ser minimizada será a combinação linear da variância e/ou valores esperados da carteira do instante $t = 1$ até o instante $t = T$. A motivação prática desta modelagem é tentar evitar que valores intermediários da variância e/ou do valor esperado da carteira atinjam valores indesejados. Para a resolução do problema proposto iremos utilizar uma formulação auxiliar e técnicas de programação dinâmica.

5.2 Fundamentos do Modelo

Num espaço probabilístico $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ consideremos um modelo para seleção de ativos onde existem $N + 1$ ativos com risco representados pelo vetor de preços aleatórios $\bar{S}(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Denotemos por \mathcal{F}_t o σ -campo gerado pelos vetores aleatórios $\{\bar{S}(s); s = 0, \dots, t\}$. Por conveniência, vamos escrever

$$\bar{S}(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S(t) \end{pmatrix}, S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{pmatrix}.$$

Uma carteira $\bar{H}(t-1)$ será, como definido no Capítulo 2, um vetor pertencente a \mathbb{R}^{N+1} tal que seja \mathcal{F}_{t-1} -mensurável, $t = 1, 2, \dots, T$. Denotemos

$$\bar{H}(t-1) = \begin{pmatrix} H_0(t-1) \\ H(t-1) \end{pmatrix}, H(t-1) = \begin{pmatrix} H_1(t-1) \\ \vdots \\ H_N(t-1) \end{pmatrix}$$

e temos que $H_i(t-1)$ representa a quantidade do ativo i na carteira no instante t . Ressaltamos ainda, que $\bar{H}(t-1)$ é escolhido no início do instante t , e portanto depende de $\bar{S}(s)$, com $s = 0$ até os valores de fechamento para $s = t-1$. Seja $V(t)$ o valor da carteira no final do instante t . Segue que:

$$V(t) = \bar{H}(t-1)' \bar{S}(t). \quad (5.1)$$

Para termos uma carteira auto-financeável, o valor no início do período $t+1$ deve ser o mesmo, quando então a carteira é rebalanceada, e portanto,

$$V(t) = \bar{H}(t)' \bar{S}(t). \quad (5.2)$$

Lembremos então, que o retorno do ativo i no instante t é dado por:

$$\mathcal{R}_i(t) = \frac{S_i(t+1)}{S_i(t)}, \bar{\mathcal{R}}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_0(t) \\ \mathcal{R}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{R}_N(t) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Note que $\mathcal{R}_i(t)$ é \mathcal{F}_{t+1} -mensurável. Dessa forma, temos que $\bar{\mathcal{R}}(t)$ pode ser escrito como,

$$\bar{\mathcal{R}}(t) = \bar{\eta}(t) + \bar{Z}(t),$$

onde $\bar{Z}(t)$ são vetores de média zero e $\bar{\eta}(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ representam o valor esperado de $\bar{\mathcal{R}}(t)$. Assim, escrevemos:

$$\bar{Z}(t) = \begin{pmatrix} Z_0(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}, Z(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_0(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{pmatrix},$$

e assumimos as seguintes hipóteses:

Hipótese 1. $\{\bar{Z}(t); t = 0, \dots, T-1\}$ são vetores aleatórios independentes.

Dado que $\bar{S}(t)$ é uma função de $\{\bar{Z}(s); s = 0, \dots, t-1\}$, temos da Hipótese 1 que $\bar{Z}(t)$, e portanto $\bar{\mathcal{R}}(t)$, é independente do σ -campo \mathcal{F}_t .

Hipótese 2. $E(\bar{\mathcal{R}}(t)\bar{\mathcal{R}}(t)') > 0$, para cada $t = 0, \dots, T-1$.

Definimos agora, para $i = 0, 1, \dots, N$,

$$\mathcal{U}_i(t) = H_i(t)S_i(t), \mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_N(t) \end{pmatrix}.$$

Segue que,

$$V(t) = \mathcal{U}_0(t) + e'\mathcal{U}(t)$$

onde e é o vetor formado pelo número 1 em todas as suas componentes, e:

$$\begin{aligned}
 V(t+1) &= H_0(t)S_0(t+1) + H(t)'S(t+1) \\
 &= H_0(t)S_0(t)\mathcal{R}_0(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)S_i(t)\mathcal{R}_i(t) \\
 &= \mathcal{R}_0(t)\mathcal{U}_0(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i(t)\mathcal{U}_i(t) \\
 &= \mathcal{R}_0(t)(V(t) - e'\mathcal{U}(t)) + \mathcal{R}(t)'\mathcal{U}(t) \\
 &= \mathcal{R}_0(t)V(t) + (\mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)e)'\mathcal{U}(t). \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Definindo,

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)e = \begin{pmatrix} -e & I \end{pmatrix} \bar{\mathcal{R}}(t),$$

segue da Hipótese 2 que:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} E(\mathcal{R}_0(t)^2) & E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)') \\ E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)) & E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') \end{pmatrix} \tag{5.5} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e & I \end{pmatrix} E(\bar{\mathcal{R}}(t)\bar{\mathcal{R}}(t)') \begin{pmatrix} 1 & -e' \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0,
 \end{aligned}$$

e portanto, $E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)') > 0$. Definindo ainda,

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= E(\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)'), \\
 \varphi_0^2(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)^2), \\
 \varphi(t) &= E(\mathcal{R}_0(t)\mathcal{P}(t)), \\
 \chi(t) &= E(\mathcal{P}(t)) = \eta(t) - \eta_0(t)e.
 \end{aligned}$$

Temos, do complemento de Schur definido na Proposição 1, quando aplicado em (5.5), que,

$$\varphi_0^2(t) - \varphi(t)'\phi(t)^{-1}\varphi(t) > 0.$$

Vamos definir também,

$$\begin{aligned}
 A_2(t) &= \varphi_0^2(t) - \varphi(t)'\phi(t)^{-1}\varphi(t) > 0, \\
 A_1(t) &= \eta_0(t) - (\eta(t) - \eta_0(t)e)'\phi(t)^{-1}\varphi(t), \\
 \mathcal{B}(t) &= (\eta(t) - \eta_0(t)e)'\phi(t)^{-1}(\eta(t) - \eta_0(t)e).
 \end{aligned}$$

5.3 Formulação dos Problemas

Consideremos um conjunto de números positivos $\alpha(t), \nu(t)$ e $\sigma^2(t)$ para $t = 1, \dots, T$. O investidor, com uma riqueza inicial v_0 , almeja a melhor estratégia de investimento $(\mathcal{U}_0(t), \mathcal{U}(t))$ para $t = 0, \dots, T-1$, tal que:

(1) A soma dos valores esperados da carteira $E(V(t))$, ponderados pelos pesos $\alpha(t) \geq 0$ no instante t , é maximizada, sujeita às restrições de que a variância da carteira, $Var(V(t))$, é menor ou igual a um limite superior preestabelecido $\sigma^2(t)$ no instante $t \in I_\sigma = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\iota_\sigma}\}, \zeta_{\iota_\sigma} \leq T$.

(2) A soma das variâncias da carteira $Var(V(t))$, ponderadas pelos pesos $\alpha(t) \geq 0$ no instante t , é minimizada, sujeita às restrições de que o valor esperado da carteira, $E(V(t))$, é maior ou igual a um limite inferior preestabelecido $\nu(t)$ no instante $t \in I_\nu = \{\varrho_1, \dots, \varrho_{\iota_\nu}\}, \varrho_{\iota_\nu} \leq T$.

Não há perda de generalidade em assumirmos que $\alpha(T) > 0$, tal que o instante final é sempre considerado no problema de otimização (caso contrário, podemos redefinir T de forma a coincidir com o maior peso $\alpha(t)$ estritamente maior que zero). Por simplicidade, vamos denotar:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(\zeta_1) \\ \vdots \\ \sigma(\zeta_{\iota_\sigma}) \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} \nu(\varrho_1) \\ \vdots \\ \nu(\varrho_{\iota_\nu}) \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(T) \end{pmatrix}.$$

Podemos formalizar os problemas acima, matematicamente, como:

Problema **PE**(σ):

$$\text{Max} \sum_{t=1}^T \alpha(t) E(V(t))$$

$$\text{sujeito a } Var(V(t)) \leq \sigma^2(t), \quad t \in I_\sigma$$

$$V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) + \mathcal{P}(t-1)' \mathcal{U}(t-1)$$

$$v_0 = \mathcal{U}_0(0) + e' \mathcal{U}(0)$$

$$t = 1, \dots, T.$$

Problema $PV(\nu)$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{t=1}^T \alpha(t) \text{Var}(V(t)) \\
 & \text{sujeito a } E(V(t)) \geq \nu(t), \quad t \in I_\nu \\
 & \quad V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) + \mathcal{P}(t-1)' \mathcal{U}(t-1) \\
 & \quad v_0 = \mathcal{U}_0(0) + e' \mathcal{U}(0) \\
 & \quad t = 1, \dots, T.
 \end{aligned}$$

Iremos considerar também, neste trabalho, uma formulação alternativa, onde incorporamos, através de uma combinação linear, tanto o retorno esperado como a variância na função objetivo. Temos, desta forma, um modelo mais genérico onde podemos utilizar ambas as informações, risco e retorno, no critério de performance do modelo. Portanto, para uma sequência de números positivos $\ell(t)$ e $\rho(t)$, tal que $\ell(t) \geq 0, t = 1, \dots, T$ e $\rho(t) \geq 0, t = 1, \dots, T$, temos o seguinte problema

$$\ell = \begin{pmatrix} \ell(1) \\ \vdots \\ \ell(T) \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(T) \end{pmatrix}.$$

Problema $PMV(\ell, \rho)$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\ell(t)E(V(t)) - \rho(t)\text{Var}(V(t))) \\
 & \text{sujeito a } V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) + \mathcal{P}(t-1)' \mathcal{U}(t-1) \\
 & \quad v_0 = \mathcal{U}_0(0) + e' \mathcal{U}(0) \\
 & \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

onde $\rho(t)$ representa o coeficiente de aversão ao risco do investidor, ou seja, à medida que $\rho(t)$ varia de 0 para 1, maior a aversão ao risco do investidor no instante t . No caso onde $\rho(t) = 0$ temos que o investidor se importa apenas com o retorno da carteira e não com risco em t . O parâmetro $\ell(t)$ é definido de forma similar.

Para evitar problemas infactíveis em $PV(\nu)$ e $PE(\sigma)$, vamos assumir as seguintes hipóteses:

Hipótese 3. $\prod_{s=1}^t \eta_0(s) \geq \frac{\nu(t)}{\nu_0}$ para $t \in I_\nu$.

A hipótese acima estabelece um limitante superior para o parâmetro ν_t para cada instante $t \in I_\nu$. O limitante é obtido em função do valor inicial da carteira e da composição do retorno esperado do ativo 0 até o instante t . Este é uma informação importante para as restrições do problema $PV(\nu)$.

Hipótese 4. $\left(\prod_{s=0}^{t-1} \varphi_0^2(s) - \prod_{s=0}^{t-1} \eta_0^2(s) \right) \leq \frac{\sigma^2(t)}{\nu_0^2}$ para $t \in I_\sigma$.

Já a Hipótese 4 fornece um limitante inferior para o parâmetro $\sigma^2(t)$ para $t \in I_\sigma$. O valor é obtido como função, novamente, do valor inicial da carteira e da variância dos retornos do ativo 0 até o instante t . Este parâmetro é utilizado nas restrições do problema $PE(\sigma)$.

Destas hipóteses derivam as seguintes proposições:

Proposição 3. *Sob a Hipótese 3, o Problema $PV(\nu)$ é sempre factível.*

Prova. Consideremos a estratégia que sempre investe 100% dos recursos no ativo com risco 0, ou seja, $\mathcal{U}(t) = 0$ para todo $t = 0, \dots, T - 1$. Neste caso temos,

$$V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) \quad (5.6)$$

e tomando o valor esperado obtemos, a partir da Hipótese 1 que (lembrando que $Z_0(t-1)$, e portanto $\mathcal{R}_0(t-1)$, é independente do σ -campo \mathcal{F}_{t-1} , e que $V(t-1)$ é \mathcal{F}_{t-1} -mensurável)

$$\begin{aligned} E(V(t)) &= E(E(\mathcal{R}_0(t-1)V(t-1)|\mathcal{F}_{t-1})) \\ &= E(E(\eta_0(t-1) + Z_0(t-1)|\mathcal{F}_{t-1})V(t-1)) \\ &= \eta_0(t-1)E(V(t-1)) + E(E(Z_0(t-1)|\mathcal{F}_{t-1})V(t-1)) \\ &= \eta_0(t-1)E(V(t-1)) + E(E(Z_0(t-1))V(t-1)) \\ &= \eta_0(t-1)E(V(t-1)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

tal que

$$E(V(t)) = \left(\prod_{s=0}^{t-1} \eta_0(s) \right) v_0$$

e, da Hipótese 3, segue o resultado. ■

Proposição 4. *Sob a Hipótese 4, o Problema $PE(\sigma)$ é sempre factível.*

Prova. Consideremos novamente a estratégia de alocar sempre 100% dos recursos no ativo com risco 0. De (5.6) e (5.7),

$$\begin{aligned} E(V(t)^2) &= E\left(E\left((\mathcal{R}_0(t-1)V(t-1))^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right) \\ &= E\left(E(\mathcal{R}_0(t-1)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) V(t-1)^2\right) \\ &= E\left(E(\mathcal{R}_0(t-1)^2) V(t-1)^2\right) \\ &= \varphi_0^2(s) E(V(t-1)^2) \end{aligned}$$

tal que para todo $t = 1, \dots, T$

$$E(V(t)^2) = \left(\prod_{s=0}^{t-1} \varphi_0^2(s)\right) v_0^2.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} Var(V(t)) &= E(V(t)^2) - E(V(t))^2 \\ &= \left(\prod_{s=0}^{t-1} \varphi_0^2(s) - \prod_{s=0}^{t-1} \eta_0^2(s)\right) v_0^2 \end{aligned}$$

e, a partir da Hipótese 4, segue o resultado. ■

5.4 Solução de um Problema Auxiliar

Definimos

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda(1) \\ \vdots \\ \lambda(T) \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(T) \end{pmatrix}.$$

Para podermos resolver os problemas $PE(\sigma)$, $PV(\nu)$ e $PMV(\ell, \rho)$, iremos considerar o seguinte problema auxiliar:

Problema **AUX**(λ, ξ):

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \alpha(t) (E(\xi(t)V(t)^2 - \lambda(t)V(t)))$$

$$\text{sujeito a } V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) + \mathcal{P}(t-1)' \mathcal{U}(t-1)$$

$$v_0 = \mathcal{U}_0(0) + e' \mathcal{U}(0)$$

$$t = 1, \dots, T$$

onde $\xi(t) \geq 0$ para todo $t = 1, \dots, T-1$, e $\xi(T) > 0$. É conveniente estabelecermos $\xi(0) = 0$ e $\alpha(0) = 0$. Façamos as seguintes definições recursivas:

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha(t)\xi(t) + A_2(t)p(t+1), \\ q(t) &= -\alpha(t)\lambda(t) + A_1(t)q(t+1), \\ w(t) &= -\frac{q(t+1)^2}{4p(t+1)}\mathcal{B}(t) + w(t+1), \end{aligned}$$

para $t = T-1, \dots, 0$, com

$$\begin{aligned} p(T) &= \alpha(T)\xi(T), \\ q(T) &= -\alpha(T)\lambda(T), \\ w(T) &= 0. \end{aligned}$$

Note que $A_2(t) > 0$ e $\alpha(t)\xi(t) \geq 0$ para todo $t = 0, \dots, T$. Dado, por hipótese, que $\alpha(T)\xi(T) > 0$ temos assim que $p(t) > 0$ para todo $t = 0, \dots, T$. Utilizaremos então programação dinâmica para resolver o problema **AUX**(λ, ξ). Desta forma, podemos definir os seguintes problemas intermediários, onde assumimos conhecidos os valores até o instante $t = \tau$

Problema **AUX**($\lambda, \xi, \tau, v_\tau$):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{t=\tau}^T \alpha(t) (E(\xi(t)V(t)^2 - \lambda(t)V(t)|\mathcal{F}_\tau)) \\ \text{sujeito a} \quad & V(t) = \mathcal{R}_0(t-1)V(t-1) + \mathcal{P}(t-1)\mathcal{U}(t-1) \\ & v_\tau = \mathcal{U}_0(\tau) + e'\mathcal{U}(\tau) \\ & t = \tau, \dots, T \end{aligned}$$

Nestes casos, consideraremos $\mathcal{J}(\tau, v_\tau)$ o custo ótimo do problema, dado por:

$$\mathcal{J}(\tau, v_\tau) = \sum_{t=\tau}^T \alpha(t)\xi(t)v_t^2 - \alpha(t)\lambda(t)v_t$$

Teorema 11. *O custo ótimo do problema **AUX**($\lambda, \xi, \tau, v_\tau$) é dado por*

$$\mathcal{J}(\tau, v_\tau) = p(\tau)v_\tau^2 + q(\tau)v_\tau + w(\tau) \quad (5.8)$$

e a estratégia ótima para $t = \tau, \dots, T-1$ é dada por

$$\mathcal{U}(t) = -\phi(t)^{-1}\varphi(t)V(t) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)}\phi(t)^{-1}\chi(t) \quad (5.9)$$

Prova. Vamos provar o resultado por indução em t . Para $\tau = T$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(T, v_T) &= \alpha(T)\xi(T)v_T^2 - \alpha(T)\lambda(T)v_T + 0 \\ &= p(T)v_T^2 + q(T)v_T + w(T),\end{aligned}$$

provando (5.8) para $\tau = T$. Suponhamos que (5.8) vale para $\tau + 1$. Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tau, v_\tau) &= \alpha(\tau)\xi(\tau)v_\tau^2 - \alpha(\tau)\lambda(\tau)v_\tau \\ &\quad + \min_{u_\tau} \{E(\mathcal{J}(\tau + 1, V(\tau + 1)) | \mathcal{F}_\tau)\},\end{aligned}$$

onde

$$V(\tau + 1) = \mathcal{R}_0(\tau)v_\tau + \mathcal{P}(\tau)'u_\tau.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}E(\mathcal{J}(\tau + 1, V(\tau + 1)) | \mathcal{F}_\tau) &= p(\tau + 1)E\left((\mathcal{R}_0(\tau)v_\tau + \mathcal{P}(\tau)'u_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau\right) \\ &\quad + q(\tau + 1)E\left((\mathcal{R}_0(\tau)v_\tau + \mathcal{P}(\tau)'u_\tau) | \mathcal{F}_\tau\right) \\ &\quad + w(\tau + 1).\end{aligned}$$

Notemos que

$$E\left((\mathcal{R}_0(\tau)v_\tau + \mathcal{P}(\tau)'u_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau\right) = \varphi_0^2(\tau)v_\tau^2 + 2\varphi(\tau)u_\tau v_\tau + u_\tau' \phi(\tau)u_\tau$$

e

$$E(\mathcal{R}_0(\tau)v_\tau + \mathcal{P}(\tau)'u_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \eta_0(\tau)v_\tau + \chi(\tau)u_\tau.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tau, v_\tau) &= (\alpha(\tau)\xi(\tau) + p(\tau + 1)\varphi_0^2(\tau))v_\tau^2 \\ &\quad + (q(\tau + 1)\eta_0(\tau) - \alpha(\tau)\lambda(\tau))v_\tau \\ &\quad + w(\tau + 1) + \min_{u_\tau} f(u_\tau),\end{aligned}$$

onde a função $f(u_\tau)$ é dada por:

$$f(u_\tau) = 2p(\tau + 1)\varphi(\tau)'u_\tau v_\tau + p(\tau + 1)u_\tau' \phi(\tau)u_\tau + q(\tau + 1)\chi(\tau)'u_\tau. \quad (5.10)$$

Derivando a expressão acima e igualando a zero temos que a estratégia ótima u_τ^* é dada por

$$u_\tau^* = -\phi(\tau)^{-1}\varphi(\tau)v_\tau - \frac{q(\tau + 1)}{2p(\tau + 1)}\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau),$$

que coincide com a estratégia ótima dada em (5.9). Substituindo em (5.10) obtemos

$$\begin{aligned}
 f(u_\tau^*) &= (2p(\tau+1)\varphi(\tau)'v_\tau + q(\tau+1)\chi(\tau)') u_\tau + p(\tau+1)u_\tau'\phi(\tau)u_\tau \\
 &= -2p(\tau+1)\varphi(\tau)'v_\tau\phi(\tau)^{-1} \left(\varphi(\tau)v_\tau + \frac{q(\tau+1)}{2p(\tau+1)}\chi(\tau) \right) \\
 &\quad - q(\tau+1)\chi(\tau)'\phi(\tau)^{-1} \left(\varphi(\tau)v_\tau + \frac{q(\tau+1)}{2p(\tau+1)}\chi(\tau) \right) \\
 &\quad + p(\tau+1) \left(\varphi(\tau)v_\tau + \frac{q(\tau+1)}{2p(\tau+1)}\chi(\tau) \right)' \phi(\tau)^{-1} \\
 &\quad \quad \left(\varphi(\tau)v_\tau + \frac{q(\tau+1)}{2p(\tau+1)}\chi(\tau) \right) \\
 &= -2p(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\varphi(\tau)v_\tau^2 - 2q(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau)v_\tau \\
 &\quad - \frac{q(\tau+1)^2}{2p(\tau+1)}\chi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau) + p(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\varphi(\tau)v_\tau^2 \\
 &\quad + q(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau)v_\tau + \frac{q(\tau+1)^2}{4p(\tau+1)}\chi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau) \\
 &= -p(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\varphi(\tau)v_\tau^2 - q(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau)v_\tau \\
 &\quad - \frac{q(\tau+1)^2}{4p(\tau+1)}\chi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau).
 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\tau, v_\tau) &= (\alpha(\tau)\xi(\tau) + p(\tau+1)\varphi_0^2(\tau)) v_\tau^2 \\
 &\quad + (q(\tau+1)\eta_0(\tau) - \alpha(\tau)\lambda(\tau)) v_\tau \\
 &\quad + w(\tau+1) - p(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\varphi(\tau)v_\tau^2 \\
 &\quad - q(\tau+1)\varphi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau)v_\tau \\
 &\quad - \frac{q(\tau+1)^2}{4p(\tau+1)}\chi(\tau)'\phi(\tau)^{-1}\chi(\tau) \\
 &= (\alpha(\tau)\xi(\tau) + A_2(\tau)p(\tau+1)) v_\tau^2 \\
 &\quad + (A_1(\tau)q(\tau+1) - \alpha(\tau)\lambda(\tau)) v_\tau \\
 &\quad + w(\tau+1) - \frac{q(\tau+1)^2}{4p(\tau+1)}\mathcal{B}(\tau) \\
 &= p(\tau)v_\tau^2 + q(\tau)v_\tau + w(\tau)
 \end{aligned}$$

provando o resultado. ■

5.5 Soluções dos Problemas

Representaremos o conjunto de soluções ótimas dos problemas

$$AUX(\lambda, \xi), PE(\sigma), PV(\nu) \text{ e } PMV(\ell, \rho)$$

por

$$\mathcal{S}(AUX(\lambda, \xi)), \mathcal{S}(PE(\sigma)), \mathcal{S}(PV(\nu)) \text{ e } \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$$

respectivamente. Denotaremos por $\{V_{\mathcal{U}}(t)\}_{t=0}^T$ o valor da carteira quando utilizamos a estratégia de investimento $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(0), \dots, \mathcal{U}(T-1)\}$. Apresentamos a seguir as soluções dos problemas.

5.5.1 Solução Analítica do Problema $PMV(\ell, \rho)$

Vamos agora apresentar a solução para o problema $PMV(\ell, \rho)$. Temos, primeiramente, a seguinte proposição:

Proposição 5.

$$\mathcal{S}(PMV(\ell, \rho)) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^T} \mathcal{S}(AUX(\lambda, \rho))$$

com

$$\lambda(t) = \ell(t) + 2\rho(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)) \quad (5.11)$$

Prova. Temos que provar que: se,

$$\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$$

então,

$$\mathcal{U} \in \mathcal{S}(AUX(\lambda, \rho))$$

com,

$$\lambda(t) = \ell(t) + 2\rho(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)) \quad (5.12)$$

para $t = 1, \dots, T$. Vamos supor por contradição que $\mathcal{U} \notin \mathcal{S}(AUX(\lambda, \rho))$, tal que para algum $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(AUX(\lambda, \rho))$,

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \alpha(t) (E(\rho(t)V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - \lambda(t)V_{\mathcal{U}^*}(t)) \\ & < \sum_{t=1}^T \alpha(t) (E(\rho(t)V_{\mathcal{U}}(t)^2) - \lambda(t)V_{\mathcal{U}}(t)), \end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - V_{\mathcal{U}}(t)^2) - \lambda(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t) - V_{\mathcal{U}}(t)) < 0. \quad (5.13)$$

Lembremos que, para uma função na forma

$$f(x, y) = ax - ay^2 - by,$$

onde $a \geq 0$, temos para \bar{x}, \bar{y} fixos, que para todo x, y :

$$f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla f(\bar{x}, \bar{y})' \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

onde

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} a \\ -(2a\bar{y} + b) \end{pmatrix}.$$

Tomando $a = \rho(t), b = \ell(t), \bar{x} = E(V_{\mathcal{U}}(t)^2), \bar{y} = E(V_{\mathcal{U}}(t))$ e $x = E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2), y = E(V_{\mathcal{U}^*}(t))$, tal que:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \rho(t)(E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - E(V_{\mathcal{U}^*}(t))^2) - \ell(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) \\ &= \rho(t)Var(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - \ell(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) \end{aligned}$$

e

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \rho(t) \\ -(2\rho(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)) + \ell(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(t) \\ -\lambda(t) \end{pmatrix},$$

concluimos de (5.14) que:

$$\begin{aligned} \rho(t)Var(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - \ell(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) &\leq \rho(t)Var(V_{\mathcal{U}}(t)) - \ell(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)) \quad (5.15) \\ &+ \begin{pmatrix} \rho(t) & -\lambda(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - E(V_{\mathcal{U}}(t)^2) \\ E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - E(V_{\mathcal{U}}(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De (5.13):

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \alpha(t) \left(\begin{pmatrix} \rho(t) & -\lambda(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - E(V_{\mathcal{U}}(t)^2) \\ E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - E(V_{\mathcal{U}}(t)) \end{pmatrix} \right) = \\ \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - V_{\mathcal{U}}(t)^2) - \lambda(t)E(V_{\mathcal{U}^*}(t) - V_{\mathcal{U}}(t)) < 0, \end{aligned}$$

e de (5.15)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t) \text{Var}(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - \ell(t) E(V_{\mathcal{U}^*}(t))) \leq \\
 & \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t) \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)) - \ell(t) E(V_{\mathcal{U}}(t))) \\
 & + \sum_{t=1}^T \alpha(t) \left(\begin{pmatrix} \rho(t) & -\lambda(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(V_{\mathcal{U}^*}(t)^2) - E(V_{\mathcal{U}}(t)^2) \\ E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - E(V_{\mathcal{U}}(t)) \end{pmatrix} \right) \\
 & < \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t) \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)) - \ell(t) E(V_{\mathcal{U}}(t))),
 \end{aligned}$$

o que contradiz o fato que $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{PMV}(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\rho}))$. ■

Da estratégia ótima (5.9), temos que:

$$\begin{aligned}
 V(t+1) &= \mathcal{R}_0(t)V(t) + \mathcal{P}(t)' \mathcal{U}(t) \\
 &= \mathcal{R}_0(t)V(t) - \mathcal{P}(t)' \left(\phi(t)^{-1} \varphi(t) V(t) + \frac{q(t+1)}{2p(t+1)} \phi(t)^{-1} \chi(t) \right) \\
 &= (\mathcal{R}_0(t) - \mathcal{P}(t)' \phi(t)^{-1} \varphi(t)) V(t) \\
 &\quad - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)} \mathcal{P}(t)' \phi(t)^{-1} \chi(t),
 \end{aligned}$$

e, tomando o valor esperado da expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
 E(V(t+1)) &= (\eta_0(t) - \chi(t)' \phi(t)^{-1} \varphi(t)) E(V(t)) \\
 &\quad - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)} \chi(t)' \phi(t)^{-1} \chi(t) \\
 &= A_1(t) E(V(t)) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)} \mathcal{B}(t),
 \end{aligned}$$

onde

$$p(t) = \alpha(t) \rho(t) + A_2(t) p(t+1), \quad (5.16)$$

$$q(t) = -\alpha(t) \lambda(t) + A_1(t) q(t+1),$$

para $t = T-1, \dots, 0$, com

$$p(T) = \alpha(T) \rho(T), \quad (5.17)$$

$$q(T) = -\alpha(T) \lambda(T).$$

Da equação (5.12) podemos ver que para obter $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{PMV}(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\rho}))$ devemos ter $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{AUX}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}))$ com λ tal que

$$\lambda(t) = \ell(t) + 2\rho(t) E(V_{\mathcal{U}}(t)), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (5.18)$$

Note de (5.16),(5.17) que $p(t)$ não depende de $\lambda(t)$ e pode ser obtido diretamente recursivamente das equações (5.16),(5.17). Então, para podermos obter $q(t)$ tal que (5.18) seja satisfeita, apresentaremos o seguinte algoritmo para a resolução de $PMV(\ell, \rho)$:

Algoritmo 1.

Passo 1: *Calcular recursivamente para $t = T - 1, \dots, 1$*

$$\mathcal{G}(t) = -2\alpha(t)\rho(t) + \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t)^2 \mathcal{G}(t+1) \quad (5.19)$$

$$\mathcal{Q}(t) = -\alpha(t)\ell(t) + \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t) \mathcal{Q}(t+1) \quad (5.20)$$

com

$$\mathcal{G}(T) = -2\alpha(T)\rho(T), \quad (5.21)$$

$$\mathcal{Q}(T) = -\alpha(T)\ell(T). \quad (5.22)$$

Passo 2: *Calcular para $t = 0, \dots, T - 1$,*

$$\mathcal{A}(t) = \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t) \quad (5.23)$$

$$\mathcal{D}(t) = -\frac{\mathcal{Q}(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} \mathcal{B}(t). \quad (5.24)$$

Passo 3: *Calcular para $t = 0, \dots, T - 1$*

$$v(t+1) = \mathcal{A}(t)v(t) + \mathcal{D}(t) \quad (5.25)$$

com (lembrando que v_0 é o valor inicial da carteira)

$$v(0) = v_0 \quad (5.26)$$

Passo 4: *Estabelecer a seguinte lei de controle \mathcal{U} :*

$$\mathcal{U}(t) = -\phi(t)^{-1} \varphi(t) V_{\mathcal{U}}(t) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)} \phi(t)^{-1} \chi(t) \quad (5.27)$$

com $p(t)$ dado pelas equações (5.16), (5.17), e $q(t)$ dado por

$$q(t) = \mathcal{Q}(t) + \mathcal{G}(t)v(t) \quad (5.28)$$

para $t = 1, \dots, T$.

Definindo ainda que

$$z(t+1) = A_2(t)z(t) + \frac{(\mathcal{Q}(t+1) + \mathcal{G}(t+1)v(t+1))^2}{4p(t+1)^2} \mathcal{B}(t), \quad (5.29)$$

com

$$z(0) = v_0^2. \quad (5.30)$$

Podemos então, formular o seguinte teorema:

Teorema 12. $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{PMV}(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\rho}))$, solução ótima de $\mathbf{PMV}(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\rho})$, é obtida de

$$\mathcal{U}(t) = -\phi(t)^{-1}\varphi(t)V_{\mathcal{U}}(t) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)}\phi(t)^{-1}\chi(t), \quad (5.31)$$

com $p(t)$, $t = T, \dots, 0$, dado pelas equações (5.16), (5.17), e $q(t)$ dado por

$$q(t) = \mathcal{Q}(t) + \mathcal{G}(t)v(t),$$

para $t = T, \dots, 0$. Para esta estratégia o valor esperado da carteira é dado por

$$E(V_{\mathcal{U}}(t)) = v(t)$$

e a variância dada por

$$\text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)) = z(t) - v(t)^2.$$

Mais ainda, $q(t)$ satisfaz

$$q(t) = -\alpha(t)\lambda(t) + A_1(t)q(t+1),$$

com $q(T) = -\alpha(T)\lambda(T)$ e

$$\lambda(t) = \ell(t) + 2\rho(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)).$$

Prova. Vamos provar este resultado por indução matemática em $t = 0, \dots, T$ que

$$v(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)).$$

Para $t = 0$ é verdade de (5.26). Vamos supor que o resultado seja válido para t . Então

$$\begin{aligned} E(V_{\mathcal{U}}(t+1)) &= A_1(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)}\mathcal{B}(t) \\ &= A_1(t)v(t) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)}\mathcal{B}(t). \end{aligned} \quad (5.32)$$

De (5.25), segue que

$$\begin{aligned} v(t+1) &= \frac{2p(t+1)A_1(t)v(t) - \mathcal{Q}(t+1)\mathcal{B}(t)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} \Rightarrow \\ v(t+1) (2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)) &= \\ 2p(t+1)A_1(t)v(t) - \mathcal{Q}(t+1)\mathcal{B}(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v(t+1) &= A_1(t)v(t) - \frac{(\mathcal{Q}(t+1) + \mathcal{G}(t+1)v(t+1))}{2p(t+1)}\mathcal{B}(t) \\ &= A_1(t)v(t) - \frac{q(t+1)}{2p(t+1)}\mathcal{B}(t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

e, de (5.32) e (5.33) temos que $E(V_{\mathcal{U}}(t+1)) = v(t+1)$. Vamos provar agora que

$$\begin{aligned} q(t) &= -\alpha(t)\lambda(t) + A_1(t)q(t+1), \quad t = T-1, \dots, 0 \\ q(T) &= -\alpha(T)\lambda(T) \\ \lambda(t) &= \ell(t) + 2\rho(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)). \end{aligned}$$

Temos por definição que

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathcal{Q}(t) + \mathcal{G}(t)v(t) \\ &= -\alpha(t)(\ell(t) + 2\rho(t)v(t)) \\ &\quad + \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t) (\mathcal{Q}(t+1) + \mathcal{G}(t+1)A_1(t)v(t)) \end{aligned} \quad (5.34)$$

e

$$A_1(t)v(t) = \frac{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)}{2p(t+1)}v(t+1) + \frac{\mathcal{Q}(t+1)\mathcal{B}(t)}{2p(t+1)}. \quad (5.35)$$

Substituindo (5.35) em (5.34), obtemos

$$\begin{aligned} q(t) &= -\alpha(t)\lambda(t) + A_1(t) (\mathcal{Q}(t+1) + \mathcal{G}(t+1)v(t+1)) \\ &= -\alpha(t)\lambda(t) + A_1(t)q(t+1), \end{aligned}$$

que leva ao resultado desejado. Finalmente, após algumas manipulações algébricas, podemos concluir que:

$$E(V_{\mathcal{U}}(t+1)^2) = A_2(t)E(V_{\mathcal{U}}(t)^2) + \frac{q(t+1)^2}{4p(t+1)^2}, \quad (5.36)$$

tal que $z(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)^2)$, completando assim a prova do Teorema. ■

5.5.2 Solução Analítica do Problema $PV(\nu)$

Apresentaremos nesta seção a solução ótima para o problema $PV(\nu)$. Veremos ainda no Algoritmo 2 que o mesmo resume-se a solução de um sistema de equações lineares. Assumiremos que para $t \in I_\nu$, $\alpha(t) > 0$. Temos assim, a seguinte proposição:

Proposição 6. *Suponha que $\rho(t) = \bar{\rho} > 0$ para $t = 1, \dots, T$, $\ell(t) = 0$ para $t \notin I_\nu$ e $\ell(t) \geq 0$ para $t \in I_\nu$. Se $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$ com*

$$\nu(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)), t \in I_\nu,$$

então $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PV(\nu))$.

Prova. Vamos supor por contradição que $\mathcal{U} \notin \mathcal{S}(PV(\nu))$, tal que para algum $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(PV(\nu))$,

$$E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) \geq \nu(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)), t \in I_\nu$$

e

$$\sum_{t=1}^T \alpha(t) Var(V_{\mathcal{U}^*}(t)) < \sum_{t=1}^T \alpha(t) Var(V_{\mathcal{U}}(t)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\bar{\rho} Var(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - \ell(t) E(V_{\mathcal{U}^*}(t))) \\ & < \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\bar{\rho} Var(V_{\mathcal{U}}(t)) - \ell(t) E(V_{\mathcal{U}}(t))) \end{aligned}$$

em contradição com o fato que $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$. ■

Para resolver $PV(\nu)$ tomemos $\rho(t) = 1$, $t = 1, \dots, T$, e $\ell(t) = 0$ para $t \notin I_\nu$ e portanto, da Proposição 6, devemos encontrar $\ell(t) \geq 0$ tal que para $t \in I_\nu = \{\varrho_1, \dots, \varrho_{\iota_\nu}\}$, $\varrho_{\iota_\nu} = T$

$$\nu(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)) = v(t). \quad (5.37)$$

Temos neste caso ι_ν variáveis $\ell(t)$ e um sistema de ι_ν equações simultâneas que precisa ser resolvido. Apresentaremos a seguir como isto pode ser feito. Primeiramente vamos notar que, desde que $\rho(t) = 1$ para todo $t = 1, \dots, T$,

podemos avaliar recursivamente, a partir de (5.16), (5.17), (5.19), (5.21) e (5.23), as variáveis $p(t)$, $\mathcal{G}(t)$ e $\mathcal{A}(t)$ como segue: para $t = T - 1, \dots, 1$,

$$p(t) = \alpha(t) + A_2(t)p(t+1), \quad (5.38)$$

$$p(T) = \alpha(T), \quad (5.39)$$

$$\mathcal{G}(t) = -2\alpha(t) + \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t)^2 \mathcal{G}(t+1), \quad (5.40)$$

$$\mathcal{G}(T) = -2\alpha(T), \quad (5.41)$$

e para $t = T - 1, \dots, 0$,

$$\mathcal{A}(t) = \frac{2p(t+1)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)} A_1(t). \quad (5.42)$$

Mais ainda, definindo para $t = T - 1, \dots, 0$,

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\mathcal{B}(t)}{2p(t+1) + \mathcal{G}(t+1)\mathcal{B}(t)}, \quad (5.43)$$

temos que

$$\mathcal{D}(t) = -\mathcal{T}(t)\mathcal{Q}(t+1). \quad (5.44)$$

Como $\ell(t) = 0$ para $t \notin I_\nu$ temos de (5.20) que para $t = \varrho_{j-1} + 1, \dots, \varrho_j$,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t+1), \quad (5.45)$$

e para $t \in I_\nu$, $t \neq T$,

$$\mathcal{Q}(t) = -\alpha(t)\ell(t) + \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t+1), \quad (5.46)$$

e de (5.22),

$$\mathcal{Q}(T) = -\alpha(T)\ell(T). \quad (5.47)$$

Definindo para $t \leq s$

$$\Gamma(t, s) = \prod_{k=t}^s \mathcal{A}(k), \quad (5.48)$$

$$\Gamma(t+1, t) = I. \quad (5.49)$$

Das equações (5.45), (5.46), e (5.22), temos, para $\varrho_{j-1} + 1 \leq t \leq \varrho_j$, que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) = & -[\Gamma(t, \varrho_j - 1)\alpha(\varrho_j)\ell(\varrho_j) + \Gamma(t, \varrho_{j+1} - 1)\alpha(\varrho_{j+1})\ell(\varrho_{j+1}) + \dots \\ & + \Gamma(t, \varrho_{i_\nu} - 1)\alpha(\varrho_{i_\nu})\ell(\varrho_{i_\nu})]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

De (5.24), (5.25) e (5.48), segue que

$$\begin{aligned} v(t+1) &= \Gamma(t, s)v(s) + \sum_{k=s}^t \Gamma(k+1, t)\mathcal{D}(k) \\ &= \Gamma(t, s)v(s) - \sum_{k=s}^t \Gamma(k+1, t)\mathcal{T}(k)\mathcal{Q}(k+1). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Vamos definir para $i, j = 1, \dots, i_\nu$, $i \leq j$,

$$a_{ij} = \alpha(\varrho_j) \sum_{k=\varrho_{i-1}}^{\varrho_i-1} \Gamma(k+1, \varrho_i-1)\Gamma(k+1, \varrho_j-1)\mathcal{T}(k) \quad (5.52)$$

e

$$b_i = \Gamma(\varrho_{i-1}, \varrho_i-1). \quad (5.53)$$

Das equações (5.50), (5.51), (5.52) e (5.53) temos que

$$v(\varrho_i) = b_i v(\varrho_{i-1}) + \sum_{j=i}^{i_\nu} a_{ij} \ell(\varrho_j). \quad (5.54)$$

Para resolver o Problema $\mathbf{PV}(\nu)$ precisamos obter $\ell(\varrho_i)$ tal que $v(\varrho_i) = \nu(\varrho_i)$ e portanto, de (5.37) e (5.54), determinar $\ell(\varrho_1), \dots, \ell(\varrho_{i_\nu})$ tal que, para $i = 1, \dots, i_\nu$,

$$\nu(\varrho_i) = b_i \nu(\varrho_{i-1}) + \sum_{j=i}^{i_\nu} a_{ij} \ell(\varrho_j), \quad (5.55)$$

onde estabelecemos $\nu(\varrho_0) = v_0$. A equação (5.55) nos fornece o seguinte algoritmo:

Algoritmo 2.

Passo 1: Calcular recursivamente de (5.39), (5.41), (5.42), (5.43) os valores de $p(t)$, $\mathcal{G}(t)$, $\mathcal{A}(t-1)$ e $\mathcal{T}(t-1)$, para $t = T, \dots, 1$.

Passo 2: Para $i, j = 1, \dots, i_\nu$, $i \leq j$, calcular a partir de (5.52) e (5.53) os valores de a_{ij} e b_i .

Passo 3: Calcular recursivamente $\ell(\varrho_j)$, $j = i_\nu, \dots, 1$, como segue. Calcular $\ell(\varrho_{i_\nu})$ como (vide (5.55))

$$\ell(\varrho_{i_\nu}) = \frac{\nu(\varrho_{i_\nu}) - b_{i_\nu} \nu(\varrho_{i_\nu-1})}{a_{i_\nu i_\nu}}.$$

Após obter $\ell(k)$, $k = i_\nu, \dots, i+1$, calcular $\ell(\varrho_i)$ como (vide (5.55))

$$\ell(\varrho_i) = \frac{\nu(\varrho_i) - b_i \nu(\varrho_{i-1}) - \sum_{j=i+1}^{i_\nu} a_{ij} \ell(\varrho_j)}{a_{ii}}.$$

Passo 4: Estabelecer a seguinte lei de controle \mathcal{U} como em (5.27) com $q(t)$ obtido a partir de (5.28), usando $\ell(\varrho_j)$ calculado no passo anterior.

Da Proposição 6 o seguinte resultado é imediato.

Corolário 1. Temos que $\mathcal{U} \in \mathcal{S}((PV(\nu)))$.

5.5.3 Solução Numérica do Problema $PE(\sigma)$

Nesta seção apresentaremos um algoritmo numérico para a solução do problema $PE(\sigma)$. Neste caso, como veremos no Algoritmo 3, iremos resolver um sistema de equações não-lineares. Primeiro temos o seguinte resultado:

Proposição 7. Suponha que $\ell(t) = \bar{\ell} > 0$, $t = 1, \dots, T$, que $\alpha(t) = \rho(t) = 0$ para $t \notin I_\sigma$ e que $\alpha(t) \geq 0$ e $\rho(t) \geq 0$ para $t \in I_\sigma$. Se $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$ com

$$\sigma(t)^2 = \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)), \quad t \in I_\sigma,$$

então $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PE(\sigma))$.

Prova. Vamos supor novamente por contradição que $\mathcal{U} \notin \mathcal{S}(PE(\sigma))$, tal que para algum $\mathcal{U}^* \in \mathcal{S}(PE(\sigma))$,

$$\text{Var}(V_{\mathcal{U}^*}(t)) \leq \sigma(t)^2 = \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)), \quad t \in I_\sigma$$

e

$$\sum_{t=1}^T \alpha(t) E(V_{\mathcal{U}^*}(t)) > \sum_{t=1}^T \alpha(t) E(V_{\mathcal{U}}(t)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t) \text{Var}(V_{\mathcal{U}^*}(t)) - \bar{\ell} E(V_{\mathcal{U}^*}(t))) \\ & < \sum_{t=1}^T \alpha(t) (\rho(t) \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)) - \bar{\ell} E(V_{\mathcal{U}}(t))) \end{aligned}$$

que contradiz o fato que $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(PMV(\ell, \rho))$. ■

A idéia básica é que, para solucionar o problema $\mathbf{PE}(\sigma)$, tomemos $\ell(t) = 1, t = 1, \dots, T$ e $\rho(t) = 0$ para $t \notin I_\sigma$ e portanto, da Proposição 7, precisamos determinar $\rho(t) \geq 0$ tal que, para $t \in I_\sigma = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\iota_\sigma}\}, \zeta_{\iota_\sigma} = T$,

$$\sigma(t)^2 = \text{Var}(V_{\mathcal{U}}(t)) = z(t) - v(t)^2. \quad (5.56)$$

Temos novamente neste caso ι_σ variáveis $\rho(t)$ e um sistema de ι_σ equações simultâneas para ser solucionado. É importante ressaltar que não existem garantias de que este problema terá solução. O que temos é que, se existir solução, então a solução ótima para o problema $\mathbf{PE}(\sigma)$ é obtida a partir de (5.27).

Vamos escrever explicitamente o sistema de equações não-lineares que precisa ser resolvido. Vamos definir para $t \leq s \leq T$,

$$\Gamma_1(t, s) = \prod_{k=t}^s A_1(k), \quad (5.57)$$

$$\Gamma_1(t+1, t) = I, \quad (5.58)$$

$$\Gamma_2(t, s) = \prod_{k=t}^s A_2(k), \quad (5.59)$$

$$\Gamma_2(t+1, t) = I, \quad (5.60)$$

$$h(t) = \alpha(t) + A_1(t)\alpha(t+1) + \dots + \quad (5.61)$$

$$+ \Gamma_1(t, T-2)\alpha(T-1) + \Gamma_1(t, T-1)\alpha(T). \quad (5.62)$$

Como $\ell(t) = 1, t = 1, \dots, T$, e $\rho(t) = 0$ para $t \notin I_\sigma$ obtemos a partir de (5.18) que para $j = 1, \dots, \iota_\sigma$ e $\zeta_{j-1} + 1 \leq t \leq \zeta_j - 1$,

$$\lambda(t) = 1 \quad (5.63)$$

e para $t = \zeta_j$,

$$\lambda(t) = 1 + 2\rho(\zeta_j)E(V_{\mathcal{U}}(\zeta_j)). \quad (5.64)$$

De (5.16), (5.17), (5.63) e (5.64) temos para $\zeta_{j-1} + 1 \leq t \leq \zeta_j$ que

$$p(t) = \Gamma_2(t, \zeta_j - 1)\alpha(\zeta_j)\rho(\zeta_j) + \dots + \Gamma_2(t, \zeta_{\iota_\sigma} - 1)\alpha(\zeta_{\iota_\sigma})\rho(\zeta_{\iota_\sigma}) \quad (5.65)$$

$$q(t) = -[h(t) + \Gamma_1(t, \zeta_j - 1)(2\alpha(\zeta_j)\rho(\zeta_j)E(V_{\mathcal{U}}(\zeta_j))) + \dots + \Gamma_1(t, \zeta_{\iota_\sigma} - 1)(2\alpha(\zeta_{\iota_\sigma})\rho(\zeta_{\iota_\sigma})E(V_{\mathcal{U}}(\zeta_{\iota_\sigma})))]. \quad (5.66)$$

De (2.1) e (5.36), temos que

$$E(V_{\mathcal{U}}(t+1)) = \Gamma_1(s, t)E(V_{\mathcal{U}}(s)) - \sum_{k=s}^t \Gamma_1(k+1, t) \frac{q(k+1)}{2p(k+1)} \mathcal{B}(k) \quad (5.67)$$

$$E(V_{\mathcal{U}}(t+1)^2) = \Gamma_2(s, t)E(V_{\mathcal{U}}(s)^2) + \sum_{k=s}^t \Gamma_2(k+1, t) \left(\frac{q(k+1)}{2p(k+1)} \right)^2 \mathcal{B}(k) \quad (5.68)$$

Vamos definir para $i = 1, \dots, \iota_\sigma$

$$c_i(s) = \Gamma_1(s, \zeta_i - 1), \quad (5.69)$$

$$d_i(s) = \Gamma_2(s, \zeta_i - 1), \quad (5.70)$$

e as variáveis

$$v_i = E(V_{\mathcal{U}}(\zeta_i)), \quad (5.71)$$

$$y_i = 2\alpha(\zeta_i)\rho(\zeta_i). \quad (5.72)$$

Lembrando que queremos impor a condição (5.56), e tomando, por simplicidade, $\sigma_i = \sigma(\zeta_{i-1})$, precisamos determinar, a partir de (5.65), (5.66), (5.67), (5.68), (5.69), (5.70), (5.71) e (5.72), as variáveis v_i e y_i , $i = 1, \dots, \iota_\sigma$, satisfazendo as seguintes $2\iota_\sigma$ equações não-lineares, para $i = 1, \dots, \iota_\sigma$

$$v_i = c_i(\zeta_{i-1})v_{i-1} + \sum_{k=\zeta_{i-1}}^{\zeta_i-1} c_i(k+1) \left(\frac{h(k+1) + c_i(k+1)y_i v_i + \dots + c_{\iota_\sigma}(k+1)y_{\iota_\sigma} v_{\iota_\sigma}}{d_i(k+1)y_i + \dots + d_{\iota_\sigma}(k+1)y_{\iota_\sigma}} \right) \mathcal{B}(k), \quad (5.73)$$

$$v_i^2 = -\sigma_i^2 + d_i(\zeta_{i-1})(\sigma_i^2 + v_{i-1}^2) + r + \sum_{k=\zeta_{i-1}}^{\zeta_i-1} d_i(k+1) \left(\frac{h(k+1) + c_i(k+1)y_i v_i + \dots + c_{\iota_\sigma}(k+1)y_{\iota_\sigma} v_{\iota_\sigma}}{d_i(k+1)y_i + \dots + d_{\iota_\sigma}(k+1)y_{\iota_\sigma}} \right)^2 \mathcal{B}(k), \quad (5.74)$$

$$y_i > 0. \quad (5.75)$$

Temos portanto, o seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.

Passo 1: Calcular v_i e y_i , $i = 1, \dots, \iota_\sigma$, satisfazendo (5.73), (5.74), e (5.75), para $i = 1, \dots, \iota_\sigma$.

Passo 2: Calcular recursivamente $p(k)$ e $q(k)$ a partir de (5.16), (5.17), com $\ell(t) = 1$, $t = 1, \dots, T$, e para $t \neq \zeta_i$ (vide (5.63)), $\lambda(t) = 1$, e para $t = \zeta_i$ (vide (5.64)), $\lambda(\zeta_i) = 1 + y_i$, $i = 1, \dots, \iota_\sigma$.

Passo 3: Estabelecer a lei de controle \mathcal{U} como determinado em (5.27) com $p(k)$ e $q(k)$ obtidos no passo anterior.

Da Proposição 7, temos o seguinte resultado imediato:

Corolário 2. Temos que $\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathbf{PE}(\sigma))$.

Nota 1. Para o caso especial no qual $\iota_\sigma = 1$ (portanto $\zeta_1 = T$) (5.73), (5.74) reduz-se a

$$v_1 = c_1(0)v_0 + \sum_{k=0}^{T-1} c_1(k+1) \left(\frac{h(k+1) + c_1(k+1)y_1v_1}{d_1(k+1)y_1} \right) \mathcal{B}(k), \quad (5.76)$$

$$v_1^2 = -\sigma_1^2 + d_1(0)v_0^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{(h(k+1) + c_1(k+1)y_1v_1)^2}{d_1(k+1)y_1^2} \mathcal{B}(k). \quad (5.77)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_1(k+1)^2}{d_1(k+1)} \mathcal{B}(k), \\ \mathcal{C}_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_1(k+1)h(k+1)}{d_1(k+1)} \mathcal{B}(k), \\ \mathcal{C}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{h(k+1)^2}{d_1(k+1)} \mathcal{B}(k), \end{aligned}$$

temos que a solução para (5.76) e (5.77) é dada por

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\frac{4\mathcal{C}_1^2 + 2\mathcal{C}_2(1 - 2\mathcal{C})}{(1 - 2\mathcal{C})(\sigma_1^2 - d_1(0)v_0^2) + c_1(0)^2v_0^2}}, \\ v_1 &= \frac{c_1(0)v_0 + \frac{2\mathcal{C}_1}{y_1}}{1 - 2\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

Se $\alpha(t) = 0$ para $t = 1, \dots, T - 1$, $\alpha(T) = 1$, temos que $h(t) = c_1(t)$, e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, tal que

$$y_1 = \sqrt{\frac{2\mathcal{C}}{(1 - 2\mathcal{C})(\sigma_1^2 - d_1(0)v_0^2) + c_1(0)^2v_0^2}},$$

$$v_1 = \frac{c_1(0)v_0 + \frac{2\mathcal{C}}{y_1}}{1 - 2\mathcal{C}},$$

que coincide com a solução derivada em (Li and Ng, 2000).

Capítulo 6

Simulações Numéricas

Neste capítulo apresentaremos simulações numéricas utilizando o modelo original proposto nesta tese, que é o foco deste trabalho. O objetivo dos testes, cujos resultados mostraremos a seguir, é apresentar e validar o comportamento do modelo proposto, comparado-o com o modelo multi-período discreto clássico, apresentado em (Li and Ng, 2000).

Dividiremos este capítulo em 3 seções, cada qual com uma simulação diferente. Na seção 6.1, realizaremos a comparação dos modelos utilizando o mesmo conjunto de dados do trabalho de (Li and Ng, 2000). Na seção seguinte, faremos novamente um estudo comparativo entre as metodologias, mas, agora, com dados reais do mercado brasileiro de ações. Na seção 6.3, avaliaremos o modelo proposto considerando, novamente, dados do mercado acionário brasileiro.

6.1 Simulação 1

Como apresentado no Capítulo 5, a principal vantagem do modelo proposto neste trabalho é que ele permite controlar o retorno e/ou a variância da carteira em instantes de tempo intermediários, dentro do período total de análise do problema. Nesta seção, apresentaremos dois exemplos numéricos destas situações. No primeiro exemplo, utilizaremos a formulação $PE(\sigma)$, com a qual desejamos maximizar uma combinação linear dos retornos esperados da carteira, mas considerando limites máximos intermediários para a

variância. No segundo caso, usaremos a formulação $PV(\nu)$, onde queremos minimizar uma combinação linear das variâncias da carteira, mas estabelecendo limites mínimos intermediários para o retorno esperado da mesma.

Em ambos os casos utilizaremos os dados do exemplo apresentado em (Li and Ng, 2000). Aplicaremos então a situação onde temos 3 ativos com risco e um horizonte de investimento de $T = 12$ unidades de tempo. Assumiremos que:

$$E(\bar{Z}(t)\bar{Z}(t)') = \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} 1.162 \\ 1.246 \\ 1.228 \end{pmatrix}, t = 0, \dots, 12.$$

Exemplo 1: Neste primeiro exemplo consideremos duas carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do problema multi-período $P1(\sigma)$, apresentado no Capítulo 4, originalmente proposto por (Li and Ng, 2000). Ou seja, deseja-se maximizar o valor esperado terminal da carteira, $E(V(12))$, com a restrição na variância final dada por: $Var(V(12)) \leq 6.2$. A Carteira 2 foi obtida a partir do problema multi-período $PE(\sigma)$, apresentado no capítulo anterior, com a função objetivo dada pela combinação linear do valor esperado da carteira e com restrições nas variâncias nos períodos $t = 1, 3, 6, 9, 10, 11, 12$, como segue:

- $Var(V(1)) \leq 0.2$,
- $Var(V(3)) \leq 0.5$,
- $Var(V(6)) \leq 1$,
- $Var(V(9)) \leq 2$,
- $Var(V(10)) \leq 3$,
- $Var(V(11)) \leq 4$,
- $Var(V(12)) \leq 6.2$.

Estes valores foram escolhidos para que a variância da Carteira 2 fosse sempre menor do que a da Carteira 1. Para o vetor α consideramos todos os valores iguais a 1. A figura 6.1 apresenta as trajetórias das variâncias das Carteiras 1 e 2. Podemos notar pelo gráfico que realmente a Carteira 2 tem valores menores de variância ao longo do tempo do que a Carteira 1. Os valores esperados das carteiras são apresentados na figura 6.2. E, como previsto, o custo a ser pago pela menor variância está no fato que o valor esperado da Carteira 1 é maior que o da Carteira 2.

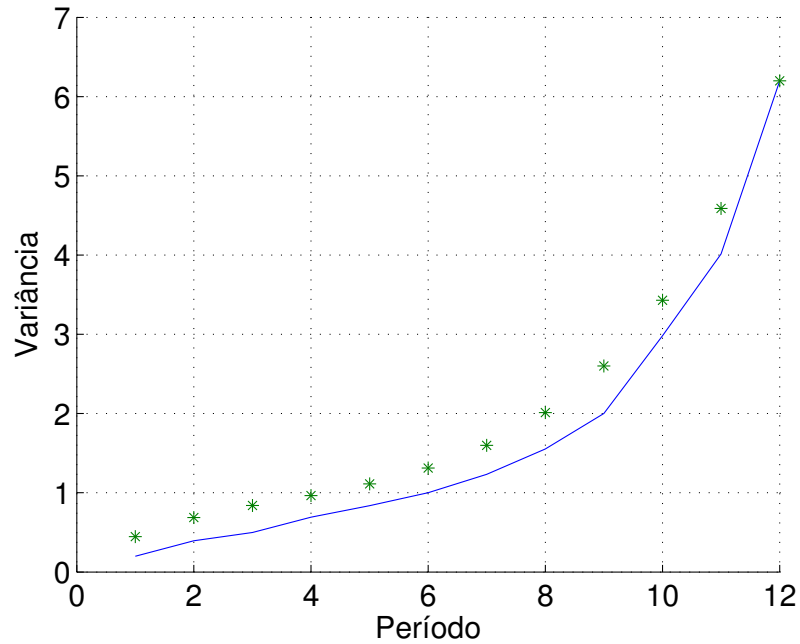


Figura 6.1: Exemplo 1 - Variância das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)

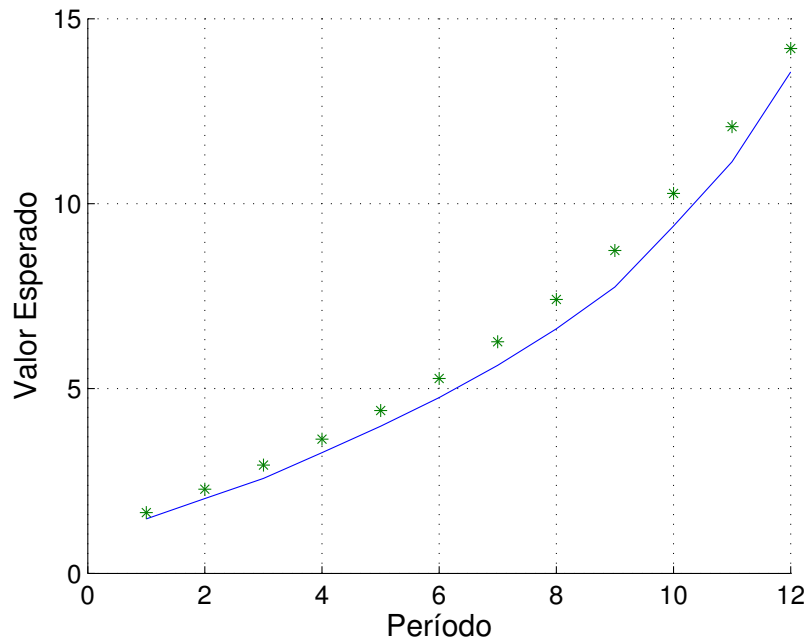


Figura 6.2: Exemplo 1 - Valor Esperado das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)

Exemplo 2: Neste segundo exemplo novamente vamos considerar duas carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{P2}(\nu)$, apresentado no Capítulo 4, originalmente proposto por (Li and Ng, 2000). Ou seja, deseja-se minimizar a variância terminal da carteira, $Var(V(12))$, com a restrição no valor esperado final definida por: $E(V(12)) \geq 14.2$. A Carteira 2 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{PV}(\nu)$, apresentado no capítulo anterior, com a função objetivo dada pela combinação linear da variância da carteira e com restrições nos valores esperados nos períodos $t = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, como segue:

- $E(V(2)) \geq 2.5$,
- $E(V(4)) \geq 4$,
- $E(V(6)) \geq 6$,
- $E(V(8)) \geq 8.2$,

- $E(V(10)) \geq 10.7$,
- $E(V(12)) \geq 14.2$.

Estes valores foram definidos de forma que o valor esperado da Carteira 2 fosse sempre maior do que o da Carteira 1. Consideraremos novamente o vetor α composto por 1 em todas as suas componentes. A figura 6.3 apresenta as trajetórias dos valores esperados das Carteiras 1 e 2. As variâncias das carteiras são apresentados na figura 6.4. Podemos notar por estes gráficos que, como desejado, o valor esperado da Carteira 2 é maior que o da Carteira 1, mas com o custo de um incremento na variância da carteira.

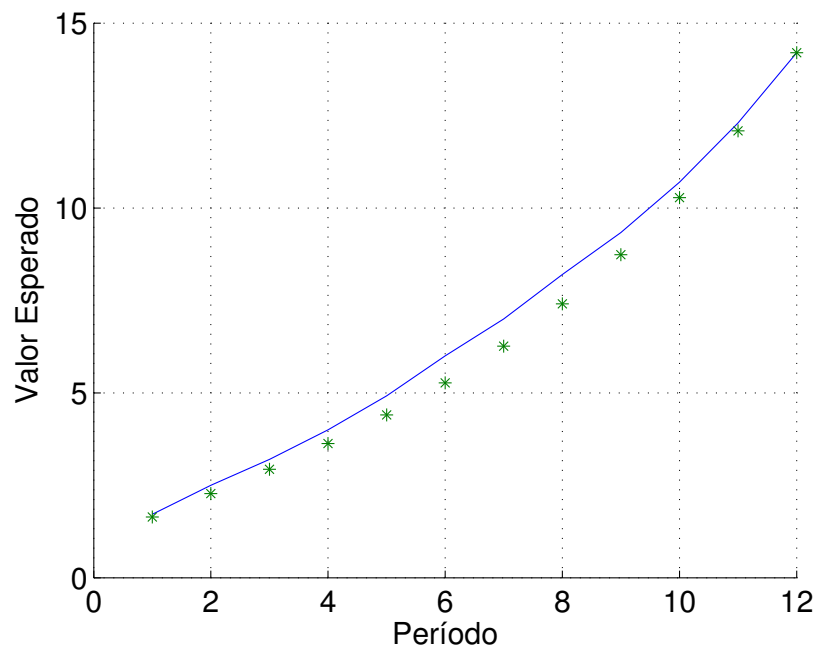


Figura 6.3: Exemplo 2 - Valor Esperado das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)

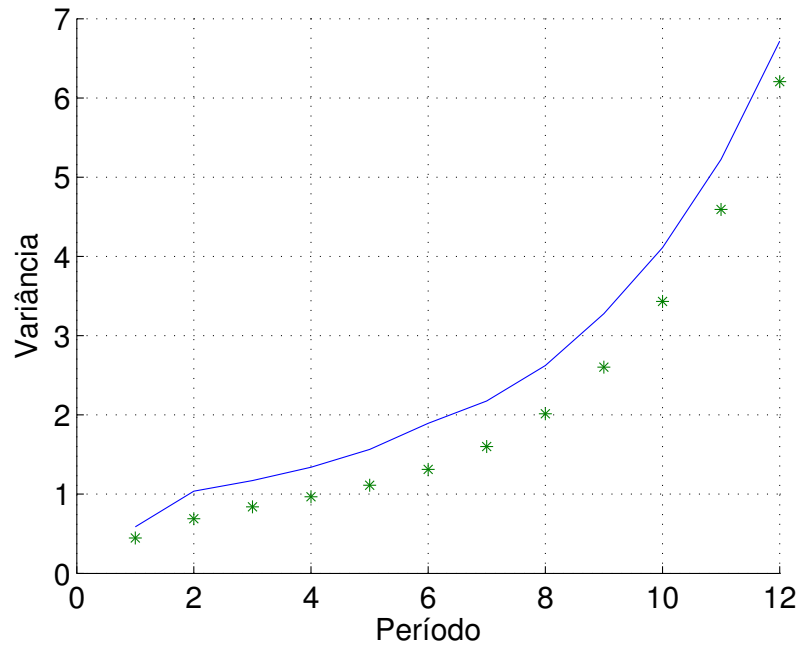


Figura 6.4: Exemplo 2 - Variância das Carteiras 1 (asterisco) e 2 (linha)

6.2 Simulação 2

Realizaremos agora, uma outra análise comparativa dos modelos, nos mesmos moldes da simulação anterior, só que com dados reais de mercado. Isto é, faremos dois exemplos numéricos, um para o caso onde deseja-se maximizar uma combinação linear dos retornos esperados da carteira, mas considerando limites máximos intermediários para a variância, e o outro onde queremos minimizar uma combinação linear das variâncias da carteira, mas estabelecendo limites mínimos intermediários para o retorno esperado da mesma.

Conforme mencionado, utilizaremos nesta simulação dados reais de ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) de Janeiro a Setembro de 2005. Durante este período coletamos retornos mensais de 8 ações, que possuem participação relevante na composição do Índice Bovespa. As ações utilizadas foram:

- Eletrobrás PNB - ELET6
- Cia Vale do Rio Doce PNA - VALE5
- Petrobrás PN - PETR4
- Bradesco PN - BBDC4
- Cia Siderúrgica Nacional ON - CSNA3
- Usiminas PNA - USIM5
- Gerdau PN - GGBR4
- Caemi PN - CMET4

Temos o seguinte conjunto de dados:

$$E(\bar{Z}(t)\bar{Z}(t)') = \frac{1}{100} * \begin{pmatrix} 2.024 & 1.115 & 0.653 & 0.538 & 0.915 & 1.173 & 1.293 & 1.258 \\ 1.115 & 1.233 & 0.688 & 0.445 & 1.172 & 1.279 & 1.260 & 1.449 \\ 0.653 & 0.688 & 0.882 & 0.801 & 0.706 & 1.070 & 1.066 & 0.841 \\ 0.538 & 0.445 & 0.801 & 1.066 & 0.773 & 1.177 & 0.883 & 0.415 \\ 0.915 & 1.172 & 0.706 & 0.773 & 1.807 & 1.921 & 1.364 & 1.172 \\ 1.173 & 1.279 & 1.070 & 1.177 & 1.921 & 2.346 & 1.767 & 1.325 \\ 1.293 & 1.260 & 1.066 & 0.883 & 1.364 & 1.767 & 1.676 & 1.470 \\ 1.258 & 1.449 & 0.841 & 0.415 & 1.172 & 1.325 & 1.470 & 1.814 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} 0.01929 \\ 0.04041 \\ 0.04990 \\ 0.06621 \\ 0.02944 \\ 0.01316 \\ 0.01639 \\ 0.06122 \end{pmatrix}, t = 0, \dots, 9.$$

Exemplo 1: Vamos considerar neste exemplo 3 carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do modelo multi-período $P1(\sigma)$ como apresentado

no Capítulo 4, e originalmente proposto por (Li and Ng, 2000), no qual deseja-se maximizar o valor esperado da carteira $E(V(9))$, com restrição na variância final determinada por $Var(V(9)) \leq 0.30$. Já a Carteira 2 foi obtida a partir do modelo multi-período $PE(\sigma)$, como apresentado no capítulo anterior, mas apenas com uma restrição na variância final, $Var(V(9)) \leq 0.30$. A Carteira 3 foi calculada também a partir do modelo $PE(\sigma)$, mas com restrições nas variâncias dos períodos $t = 2, 4, 6, 9$, como segue:

- $Var(V(2)) \leq 0.16$,
- $Var(V(4)) \leq 0.20$,
- $Var(V(6)) \leq 0.27$,
- $Var(V(9)) \leq 0.30$.

Para o vetor α , para as Carteiras 2 e 3, consideramos:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.00002 \\ 0.00006 \\ 0.00025 \\ 0.00098 \\ 0.00391 \\ 0.01563 \\ 0.06250 \\ 0.25000 \\ 1.00000 \end{pmatrix} .$$

Este vetor foi escolhido de forma a aumentar gradualmente o peso dos valores esperados intermediários da carteira, $E(V(t))$, na função objetivo, dando mais importância aos dados mais recentes, considerando as restrições nas variâncias apresentadas acima. A figura 6.5 apresenta a trajetória das variâncias das Carteiras 1, 2 e 3. Podemos observar que a Carteira 3 possui um comportamento mais suave durante todo o período de análise. Os valores esperados das carteiras são apresentados na figura 6.6, lembrando que o valor inicial delas é igual a 1. Como previsto, o preço pago por termos uma variância menor é que o valor esperado da Carteira 1 é superior aos das Carteiras 2 e 3. Entretanto, a diferença no valor esperado final é pequena se considerarmos o comportamento da variância das carteiras ao longo do tempo.

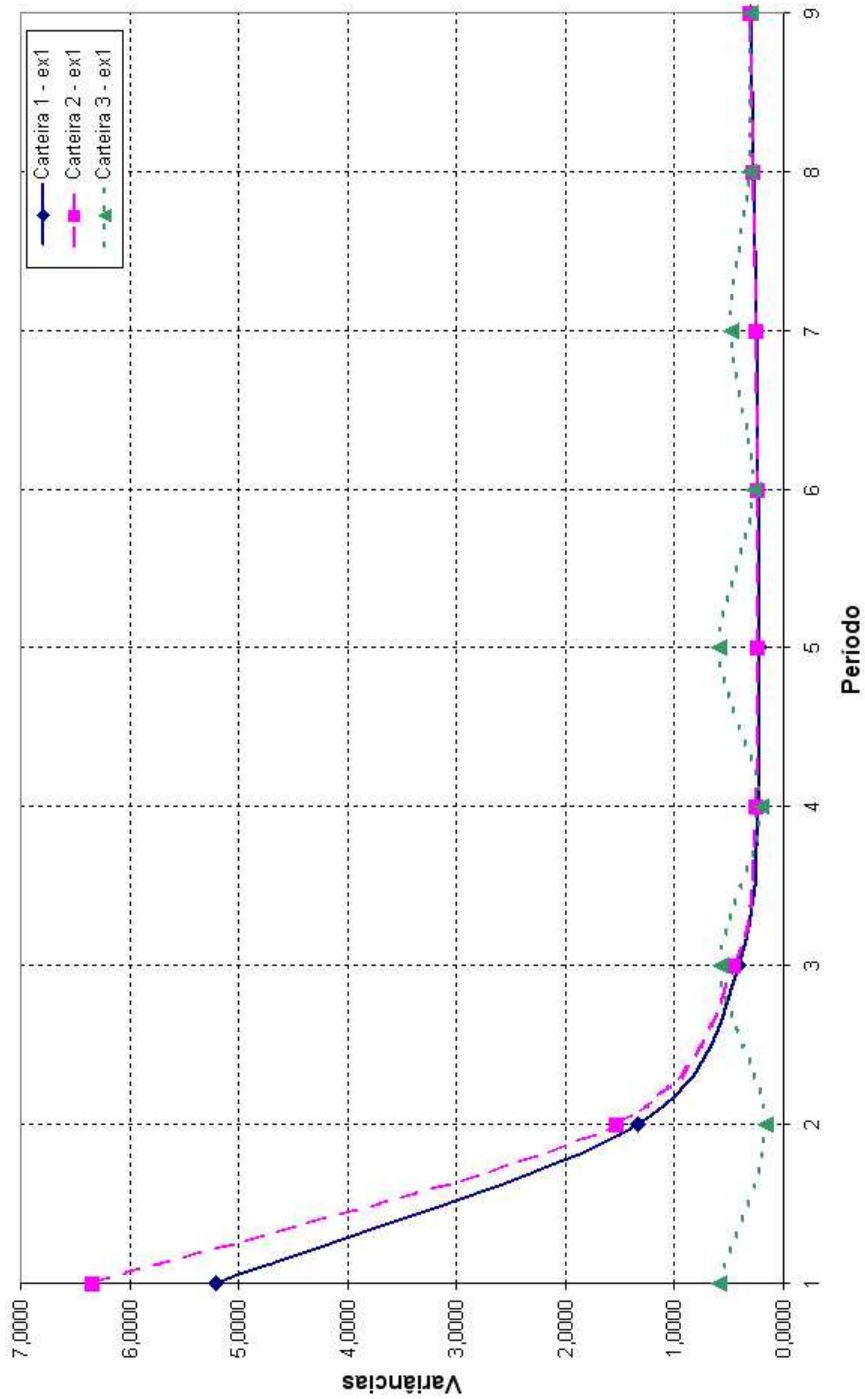


Figura 6.5: Exemplo 1 - Variância das Carteiras 1, 2 e 3

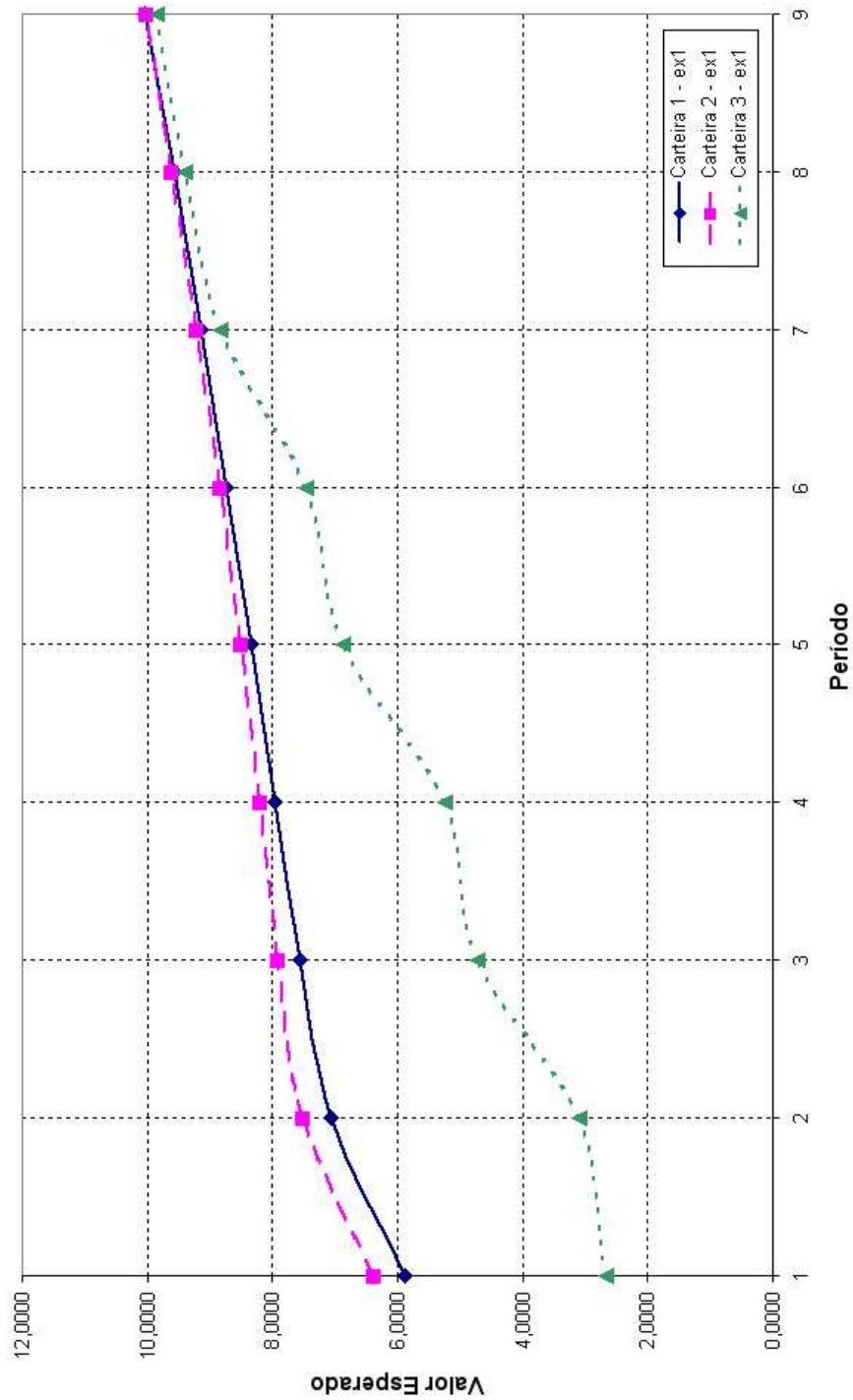


Figura 6.6: Exemplo 1 - Valor Esperado das Carteiras 1, 2 e 3

Exemplo 2: Neste segundo exemplo, analisaremos novamente 3 carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{P2}(\boldsymbol{\nu})$ como apresentado no Capítulo 4, e originalmente proposto por (Li and Ng, 2000), onde deseja-se minimizar a variância da carteira $Var(V(9))$, com restrição no valor esperado final definida por $E(V(9)) \geq 10$. A Carteira 2 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{PV}(\boldsymbol{\nu})$ como apresentado no capítulo anterior, com a função objetivo dada pela combinação linear da variância da carteira, mas apenas com uma restrição no valor esperado final, $E(V(9)) \geq 10$. A Carteira 3 foi calculada também a partir do modelo $\mathbf{PV}(\boldsymbol{\nu})$, mas com restrições nos valores esperados dos períodos $t = 3, 6, 9$, como segue:

- $E(V(3)) \geq 3.50$,
- $E(V(6)) \geq 6.35$,
- $E(V(9)) \geq 10.0$.

Para o vetor α , para as Carteiras 2 e 3, consideramos:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}.$$

O objetivo da escolha deste vetor α é o de incorporar a variância da carteira, $Var(V(t))$, em todos os instantes de tempo na função objetivo, dando o mesmo peso a todos os valores, considerando ainda as restrições nos valores esperados apresentadas acima. A figura 6.7 apresenta a trajetória das variâncias das Carteiras 1, 2 e 3. Podemos ver neste gráfico que a variância das Carteiras 2 e 3 possuem um comportamento mais suave durante o período de análise. Os valores esperados das carteiras são apresentados na figura 6.8, lembrando que o valor inicial delas é igual a 1.

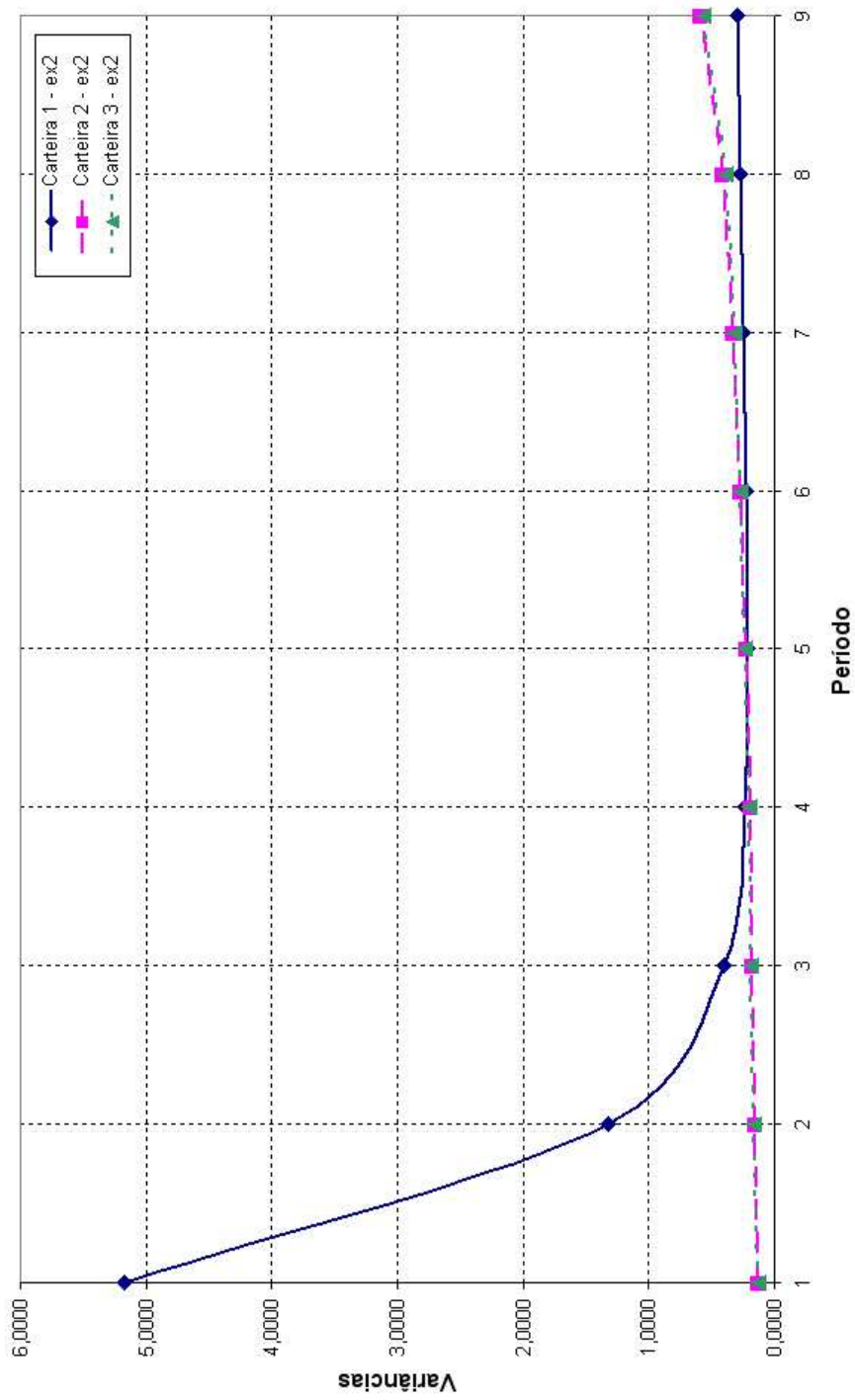


Figura 6.7: Exemplo 2 - Variância das Carteiras 1, 2 e 3

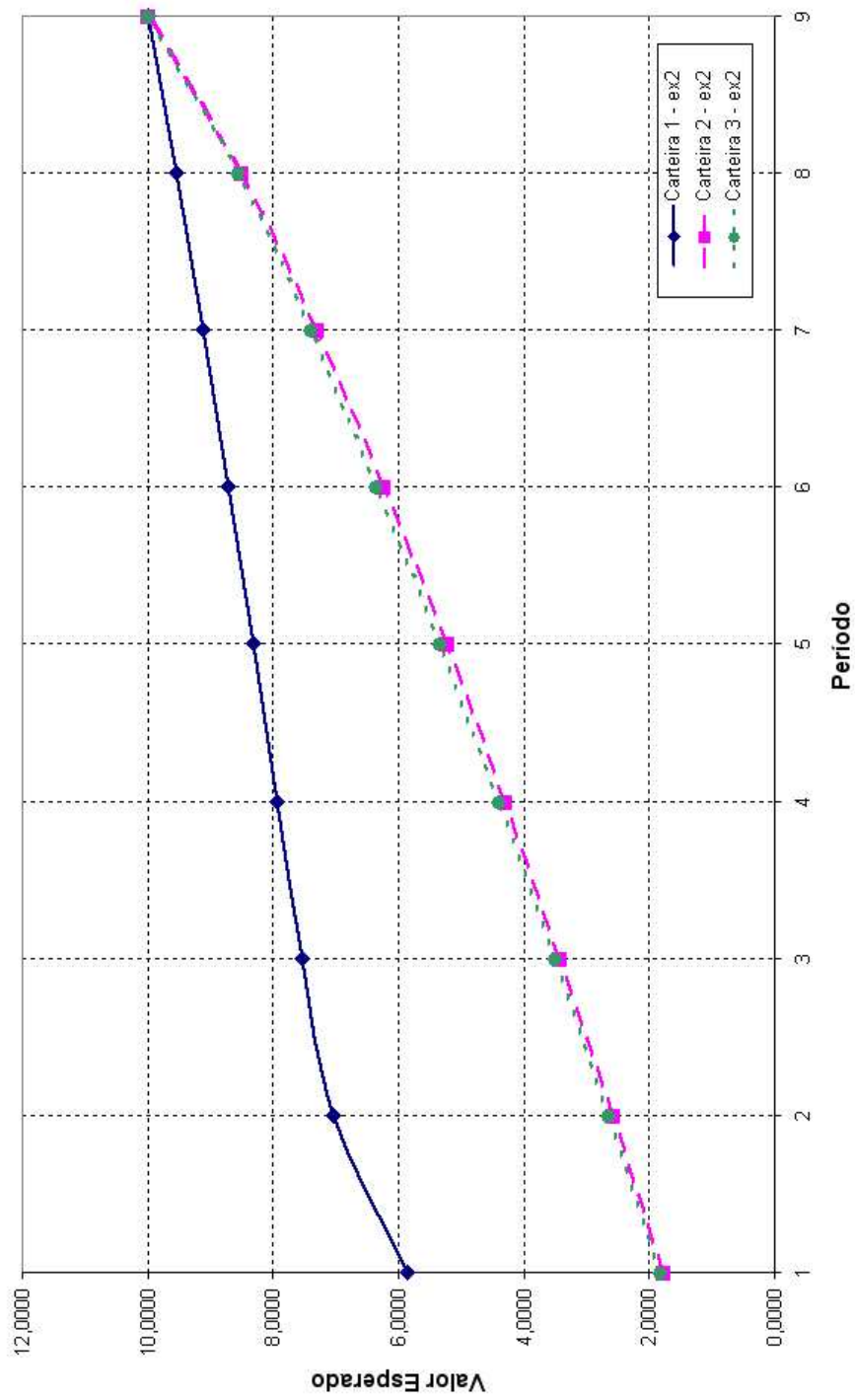


Figura 6.8: Exemplo 2 - Valor Esperado das Carteiras 1, 2 e 3

6.3 Simulação 3

Nesta terceira simulação, faremos uma aplicação real do modelo proposto no mercado acionário brasileiro. Calcularemos os parâmetros de média e covariância para alimentar o modelo com as informações dos retornos dos ativos no primeiro semestre de 2005. Em seguida, avaliaremos a estratégia ótima utilizando os preços de mercado dos mesmos ativos observados no segundo semestre do ano.

Conforme mencionado, utilizaremos nesta simulação dados reais de 10 ações, negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) de Janeiro a Dezembro de 2005 e que possuem participação relevante na composição do Índice Bovespa. As ações utilizadas foram:

- Bradesco PN - BBDC4
- CEMIG PN - CMIG4
- Copel PNB - CPLE6
- Eletropaulo PN - ELPL4
- Banco Itaú PN - ITAU4
- Itaúsa PN - ITSA4
- NET Cabo PN - NETC4
- Petrobrás ON - PETR3
- Petrobrás PN - PETR4
- Unibanco Holding PN - UBBR11

Utilizando retornos quinzenais destes ativos de Janeiro a Junho de 2005

temos o seguinte conjunto de dados:

$$E(\bar{Z}(t)\bar{Z}(t)') = \frac{1}{1000} * \begin{pmatrix} 7.61 & 4.32 & 2.61 & 2.83 & 4.43 & 4.27 & 2.51 & 2.71 & 2.78 & 6.54 \\ 4.32 & 7.16 & 3.40 & 1.80 & 2.61 & 2.48 & -0.49 & 1.13 & 1.41 & 4.14 \\ 2.61 & 3.40 & 4.11 & 0.53 & 1.27 & 1.01 & 3.03 & 1.70 & 1.83 & 2.58 \\ 2.83 & 1.80 & 0.53 & 4.83 & 1.92 & 1.59 & 0.10 & 1.17 & 1.47 & 2.18 \\ 4.43 & 2.61 & 1.27 & 1.92 & 4.07 & 3.76 & 1.47 & 1.79 & 1.58 & 4.03 \\ 4.27 & 2.48 & 1.01 & 1.59 & 3.76 & 3.79 & 0.88 & 1.59 & 1.41 & 3.89 \\ 2.51 & -0.49 & 3.03 & 0.10 & 1.47 & 0.88 & 12.75 & 2.95 & 2.80 & 2.67 \\ 2.71 & 1.13 & 1.70 & 1.17 & 1.79 & 1.59 & 2.95 & 1.82 & 1.86 & 2.67 \\ 2.78 & 1.41 & 1.83 & 1.47 & 1.58 & 1.41 & 2.80 & 1.86 & 2.04 & 2.75 \\ 6.54 & 4.14 & 2.58 & 2.18 & 4.03 & 3.89 & 2.67 & 2.67 & 2.75 & 6.19 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} 0.02590 \\ 0.01486 \\ 0.01359 \\ 0.01975 \\ 0.00852 \\ 0.01007 \\ 0.00919 \\ 0.01180 \\ 0.00932 \\ 0.00576 \end{pmatrix}, t = 0, \dots, 12.$$

Os dois exemplos que apresentaremos a seguir utilizarão os dados acima para obtenção das soluções ótimas. A partir então destas estratégias, calcularemos o valor, e conseqüentemente o resultado, real das carteiras utilizando os preços de fechamento destas ações na Bolsa de Valores de São Paulo no período de Julho a Dezembro de 2005. Para garantir a integridade da análise, faremos as reavaliações das carteiras quinzenalmente, dado que as mesmas foram geradas nesta periodicidade.

Exemplo 1: Vamos considerar neste exemplo 3 carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do modelo multi-período $P1(\sigma)$ como apresentado no Capítulo 4, e originalmente proposto por (Li and Ng, 2000), no qual deseja-se maximizar o valor esperado da carteira $E(V(12))$, com restrição na variância

final determinada por $Var(V(12)) \leq 0.30\%$. Já a Carteira 2 foi obtida a partir do modelo multi-período $PE(\sigma)$, como apresentado no capítulo anterior, mas apenas com uma restrição na variância final, $Var(V(12)) \leq 0.30\%$. E a Carteira 3 foi calculada também a partir do modelo $PE(\sigma)$, mas com restrições nas variâncias dos períodos $t = 2, 4, 7, 9, 11, 12$, como segue:

- $Var(V(2)) \leq 0.15\%$,
- $Var(V(4)) \leq 0.22\%$,
- $Var(V(7)) \leq 0.26\%$,
- $Var(V(9)) \leq 0.27\%$,
- $Var(V(11)) \leq 0.29\%$,
- $Var(V(12)) \leq 0.30\%$.

Para o vetor α , para as Carteiras 2 e 3, consideramos:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.00004 \\ 0.00010 \\ 0.00026 \\ 0.00066 \\ 0.00164 \\ 0.00410 \\ 0.01024 \\ 0.02560 \\ 0.06400 \\ 0.16000 \\ 0.40000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}.$$

A escolha deste vetor foi feita de forma a aumentar gradualmente o peso dos valores esperados intermediários da carteira, $E(V(t))$, na função objetivo, dando mais importância para os dados mais recentes, considerando as restrições nas variâncias apresentadas acima. Considerando que a solução ótima está na forma $\mathcal{U}(t) = -K(t)V(t) + D(t)$, temos então as estratégias dadas por:

Carteira 1

$$\begin{aligned}K(t) &= \left(6.3 \quad -6.5 \quad -0.7 \quad -10.7 \quad -1.4 \quad -0.7 \quad 49.2 \quad -35.3 \quad -20.1\right)', \\D(1) &= \left(7.6 \quad -7.6 \quad -0.6 \quad -12.8 \quad -1.0 \quad -0.8 \quad 58.8 \quad -41.3 \quad -23.4\right)', \\D(2) &= \left(7.8 \quad -7.8 \quad -0.7 \quad -13.2 \quad -1.0 \quad -0.8 \quad 60.3 \quad -42.3 \quad -24.0\right)', \\D(3) &= \left(8.0 \quad -8.0 \quad -0.7 \quad -13.5 \quad -1.0 \quad -0.9 \quad 61.8 \quad -43.4 \quad -24.6\right)', \\D(4) &= \left(8.2 \quad -8.2 \quad -0.7 \quad -13.8 \quad -1.1 \quad -0.9 \quad 63.4 \quad -44.5 \quad -25.2\right)', \\D(5) &= \left(8.4 \quad -8.4 \quad -0.7 \quad -14.2 \quad -1.1 \quad -0.9 \quad 65.1 \quad -45.7 \quad -25.9\right)', \\D(6) &= \left(8.6 \quad -8.7 \quad -0.7 \quad -14.6 \quad -1.1 \quad -0.9 \quad 66.8 \quad -46.9 \quad -26.5\right)', \\D(7) &= \left(8.9 \quad -8.9 \quad -0.7 \quad -14.9 \quad -1.2 \quad -1.0 \quad 68.5 \quad -48.1 \quad -27.2\right)', \\D(8) &= \left(9.1 \quad -9.1 \quad -0.8 \quad -15.3 \quad -1.2 \quad -1.0 \quad 70.3 \quad -49.3 \quad -27.9\right)', \\D(9) &= \left(9.3 \quad -9.4 \quad -0.8 \quad -15.7 \quad -1.2 \quad -1.0 \quad 72.1 \quad -50.6 \quad -28.6\right)', \\D(10) &= \left(9.6 \quad -9.6 \quad -0.8 \quad -16.1 \quad -1.2 \quad -1.0 \quad 73.9 \quad -51.9 \quad -29.4\right)', \\D(11) &= \left(9.8 \quad -9.8 \quad -0.8 \quad -16.6 \quad -1.3 \quad -1.1 \quad 75.9 \quad -53.3 \quad -30.1\right)', \\D(12) &= \left(10.1 \quad -10.1 \quad -0.8 \quad -17 \quad -1.3 \quad -1.1 \quad 77.8 \quad -54.6 \quad -30.9\right)'. \end{aligned}$$

Carteira 2

$$\begin{aligned}K(t) &= \begin{pmatrix} 6.3 & -6.5 & -0.7 & -10.7 & -1.4 & -0.7 & 49.2 & -35.3 & -20.1 \end{pmatrix}', \\D(1) &= \begin{pmatrix} 7.6 & -7.6 & -0.6 & -12.9 & -1.0 & -0.8 & 58.9 & -41.4 & -23.4 \end{pmatrix}', \\D(2) &= \begin{pmatrix} 7.8 & -7.8 & -0.7 & -13.2 & -1.0 & -0.8 & 60.4 & -42.4 & -24.0 \end{pmatrix}', \\D(3) &= \begin{pmatrix} 8.0 & -8.0 & -0.7 & -13.5 & -1.0 & -0.9 & 62.0 & -43.5 & -24.6 \end{pmatrix}', \\D(4) &= \begin{pmatrix} 8.2 & -8.3 & -0.7 & -13.9 & -1.1 & -0.9 & 63.6 & -44.7 & -25.3 \end{pmatrix}', \\D(5) &= \begin{pmatrix} 8.4 & -8.5 & -0.7 & -14.2 & -1.1 & -0.9 & 65.2 & -45.8 & -25.9 \end{pmatrix}', \\D(6) &= \begin{pmatrix} 8.7 & -8.7 & -0.7 & -14.6 & -1.1 & -0.9 & 66.9 & -47.0 & -26.6 \end{pmatrix}', \\D(7) &= \begin{pmatrix} 8.9 & -8.9 & -0.7 & -15.0 & -1.2 & -1.0 & 68.6 & -48.2 & -27.3 \end{pmatrix}', \\D(8) &= \begin{pmatrix} 9.1 & -9.1 & -0.8 & -15.4 & -1.2 & -1.0 & 70.4 & -49.4 & -28.0 \end{pmatrix}', \\D(9) &= \begin{pmatrix} 9.3 & -9.4 & -0.8 & -15.7 & -1.2 & -1.0 & 72.2 & -50.7 & -28.7 \end{pmatrix}', \\D(10) &= \begin{pmatrix} 9.6 & -9.6 & -0.8 & -16.1 & -1.2 & -1.0 & 74.0 & -52.0 & -29.4 \end{pmatrix}', \\D(11) &= \begin{pmatrix} 9.8 & -9.8 & -0.8 & -16.6 & -1.3 & -1.1 & 75.9 & -53.3 & -30.2 \end{pmatrix}', \\D(12) &= \begin{pmatrix} 10.1 & -10.1 & -0.8 & -17 & -1.3 & -1.1 & 77.8 & -54.6 & -30.9 \end{pmatrix}' .\end{aligned}$$

Carteira 3

$$\begin{aligned}K(t) &= \begin{pmatrix} 6.3 & -6.5 & -0.7 & -10.7 & -1.4 & -0.7 & 49.2 & -35.3 & -20.1 \end{pmatrix}', \\D(1) &= \begin{pmatrix} 7.2 & -7.2 & -0.6 & -12.1 & -0.9 & -0.8 & 55.6 & -39.0 & -22.1 \end{pmatrix}', \\D(2) &= \begin{pmatrix} 7.4 & -7.4 & -0.6 & -12.4 & -1.0 & -0.8 & 57.0 & -40.0 & -22.7 \end{pmatrix}', \\D(3) &= \begin{pmatrix} 7.7 & -7.7 & -0.6 & -12.9 & -1.0 & -0.8 & 59.3 & -41.7 & -23.6 \end{pmatrix}', \\D(4) &= \begin{pmatrix} 7.9 & -7.9 & -0.7 & -13.3 & -1.0 & -0.8 & 60.9 & -42.7 & -24.2 \end{pmatrix}', \\D(5) &= \begin{pmatrix} 8.1 & -8.1 & -0.7 & -13.6 & -1.1 & -0.9 & 62.4 & -43.8 & -24.8 \end{pmatrix}', \\D(6) &= \begin{pmatrix} 8.3 & -8.3 & -0.7 & -14.0 & -1.1 & -0.9 & 64.0 & -45.0 & -25.4 \end{pmatrix}', \\D(7) &= \begin{pmatrix} 8.5 & -8.5 & -0.7 & -14.3 & -1.1 & -0.9 & 65.7 & -46.1 & -26.1 \end{pmatrix}', \\D(8) &= \begin{pmatrix} 8.7 & -8.7 & -0.7 & -14.7 & -1.1 & -0.9 & 67.4 & -47.3 & -26.8 \end{pmatrix}', \\D(9) &= \begin{pmatrix} 8.9 & -9.0 & -0.8 & -15.1 & -1.2 & -1.0 & 69.1 & -48.5 & -27.5 \end{pmatrix}', \\D(10) &= \begin{pmatrix} 9.2 & -9.2 & -0.8 & -15.5 & -1.2 & -1.0 & 70.8 & -49.7 & -28.1 \end{pmatrix}', \\D(11) &= \begin{pmatrix} 9.4 & -9.4 & -0.8 & -15.8 & -1.2 & -1.0 & 72.6 & -51.0 & -28.9 \end{pmatrix}', \\D(12) &= \begin{pmatrix} 9.6 & -9.7 & -0.8 & -16.2 & -1.3 & -1.0 & 74.5 & -52.3 & -29.6 \end{pmatrix}' .\end{aligned}$$

A partir destes resultados e dos valores para as ações no segundo semestre de 2005, calculamos os seguintes valores observados para as carteiras, que encontram-se na figura 6.10:

<i>Tempo</i>	<i>Carteira1</i>	<i>Carteira2</i>	<i>Carteira3</i>
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9703	0.9701	0.9729
3	1.3587	1.3630	1.2722
4	1.4923	1.4974	1.3836
5	1.1568	1.1589	1.1366
6	1.1531	1.1545	1.1620
7	0.7398	0.7377	0.8960
8	-0.2517	-0.2604	0.1896
9	0.4479	0.4439	0.6733
10	0.3519	0.3475	0.6006
11	-0.4551	-0.4640	0.0331
12	2.1735	2.1770	1.9369
13	2.4700	2.4748	2.1768

Para efeito de mensurar o risco, calculamos o desvio padrão dos valores observados desde o instante 1, ou seja, o risco apresentado para o instante t , $t = 2, 3, \dots, 13$, é calculado como:

$$DesvioPadrao(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (valor_i - \overline{valor(t)})^2},$$

onde $valor_i$ é o valor da carteira observado no instante i e $\overline{valor(t)}$ é a média dos valores observados do instante 1 até o instante t .

Os resultados obtidos, apresentados na figura 6.9, foram:

<i>Tempo</i>	<i>Carteira1</i>	<i>Carteira2</i>	<i>Carteira3</i>
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0149	0.0150	0.0135
3	0.1765	0.1786	0.1351
4	0.2254	0.2278	0.1755
5	0.2026	0.2047	0.1572
6	0.1856	0.1876	0.1435
7	0.2328	0.2351	0.1607
8	0.5045	0.5085	0.3418
9	0.5014	0.5054	0.3383
10	0.5029	0.5069	0.3391
11	0.6074	0.6119	0.4133
12	0.7062	0.7105	0.4973
13	0.8049	0.8092	0.5807

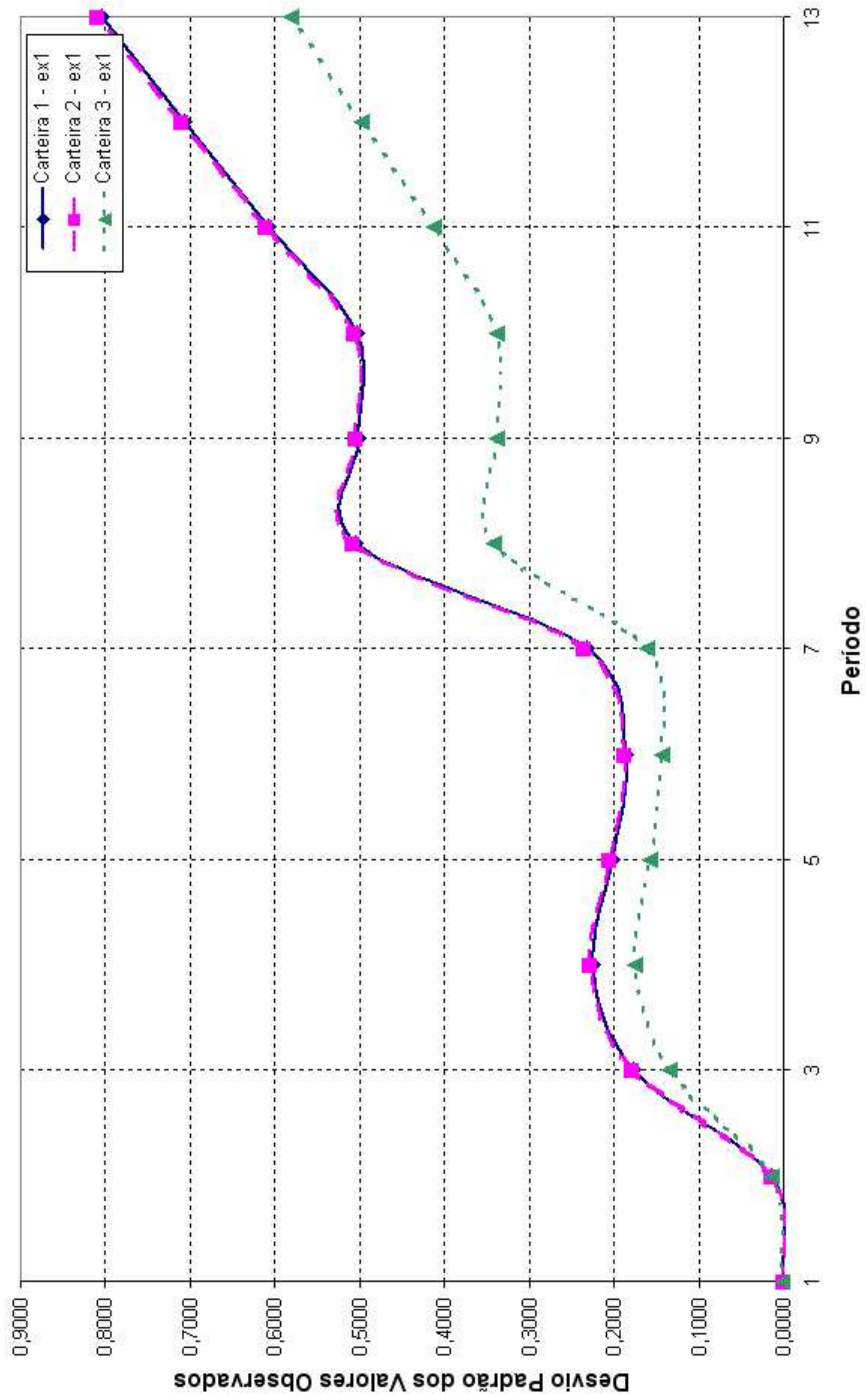


Figura 6.9: Exemplo 1 - Desvio Padrão das Carteiras 1, 2 e 3

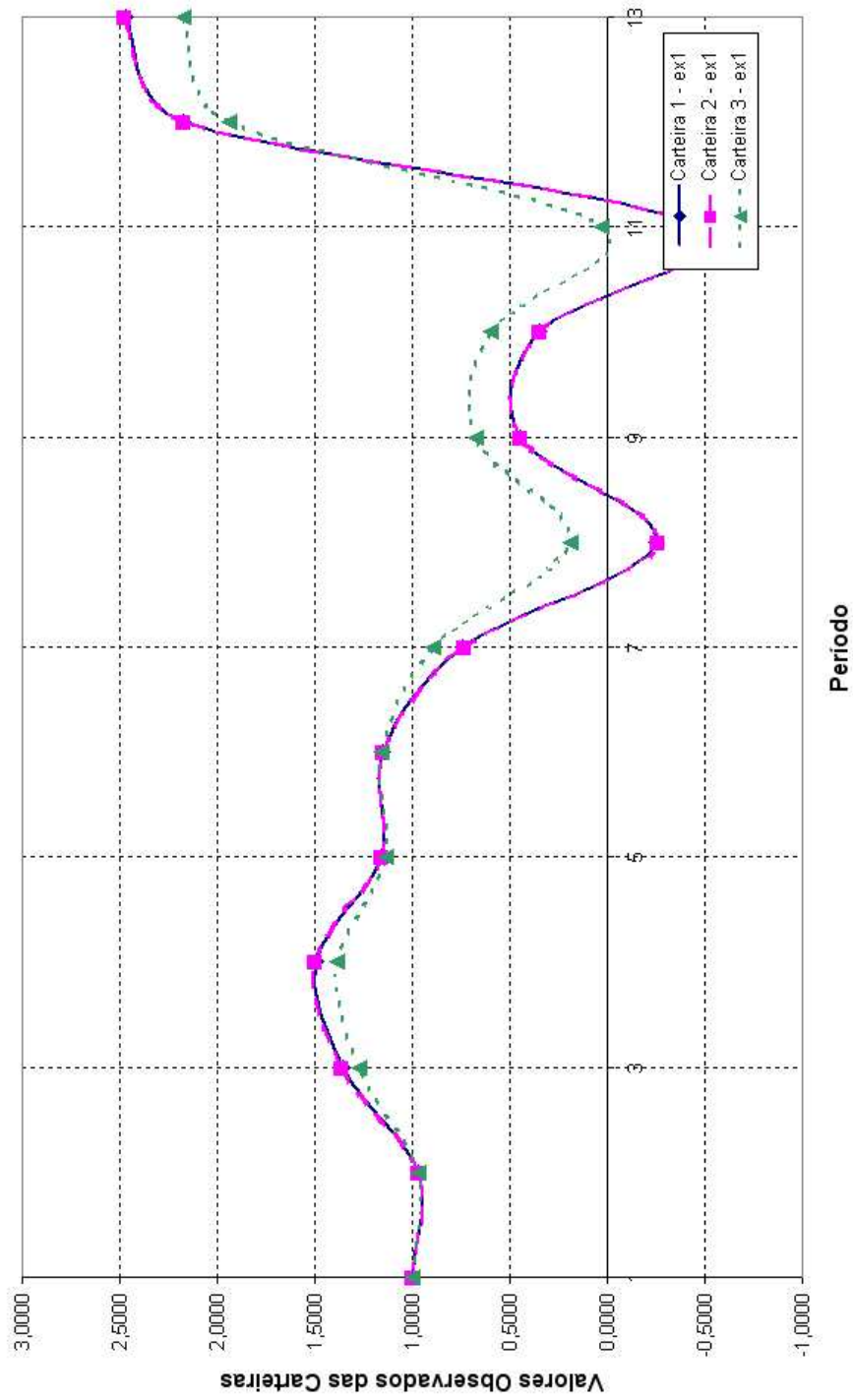


Figura 6.10: Exemplo 1 - Valor Observado das Carteiras 1, 2 e 3

Podemos observar do gráfico 6.9 que a Carteira 3 possui um comportamento mais suave durante todo o período de análise. Como esperado, o preço pago por termos uma variância menor é que o valor esperado da Carteira 1 é superior aos das Carteiras 2 e 3, como observado no gráfico 6.10.

Exemplo 2: Neste segundo exemplo, analisaremos novamente 3 carteiras. A Carteira 1 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{P2}(\boldsymbol{\nu})$ como apresentado no Capítulo 4, e originalmente proposto por (Li and Ng, 2000), onde deseja-se minimizar a variância da carteira $Var(V(12))$, com restrição no valor esperado final definida por $E(V(12)) \geq 1.5$. A Carteira 2 foi obtida a partir do problema multi-período $\mathbf{PV}(\boldsymbol{\nu})$ como apresentado no capítulo anterior, com a função objetivo dada pela combinação linear da variância da carteira, mas apenas com uma restrição no valor esperado final, $E(V(12)) \geq 1.5$. A Carteira 3 foi calculada também a partir do modelo $\mathbf{PV}(\boldsymbol{\nu})$, mas com restrições nos valores esperados dos períodos $t = 3, 5, 8, 10, 11, 12$, como segue:

- $E(V(3)) \geq 1.10$,
- $E(V(5)) \geq 1.20$,
- $E(V(8)) \geq 1.33$,
- $E(V(10)) \geq 1.40$,
- $E(V(11)) \geq 1.45$,
- $E(V(12)) \geq 1.50$.

Para o vetor α , para as Carteiras 2 e 3, consideramos:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}.$$

O objetivo da escolha deste vetor α é o de incorporar a variância da carteira, $Var(V(t))$, em todos os instantes de tempo na função objetivo, dando o mesmo peso a todos os valores, considerando ainda as restrições nos valores esperados apresentadas acima. Considerando que a solução ótima está na forma $U(t) = -K(t)V(t) + D(t)$, temos então as estratégias dadas por:

Carteira 1

$$\begin{aligned} K(t) &= \begin{pmatrix} 6.3 & -6.5 & -0.7 & -10.7 & -1.4 & -0.7 & 49.2 & -35.3 & -20.1 \end{pmatrix}', \\ D(1) &= \begin{pmatrix} 7.5 & -7.5 & -0.6 & -12.7 & -1.0 & -0.8 & 58.0 & -40.7 & -23.1 \end{pmatrix}', \\ D(2) &= \begin{pmatrix} 7.7 & -7.7 & -0.6 & -13.0 & -1.0 & -0.8 & 59.5 & -41.8 & -23.6 \end{pmatrix}', \\ D(3) &= \begin{pmatrix} 7.9 & -7.9 & -0.7 & -13.3 & -1.0 & -0.8 & 61.0 & -42.9 & -24.3 \end{pmatrix}', \\ D(4) &= \begin{pmatrix} 8.1 & -8.1 & -0.7 & -13.7 & -1.1 & -0.9 & 62.6 & -44.0 & -24.9 \end{pmatrix}', \\ D(5) &= \begin{pmatrix} 8.3 & -8.3 & -0.7 & -14.0 & -1.1 & -0.9 & 64.2 & -45.1 & -25.5 \end{pmatrix}', \\ D(6) &= \begin{pmatrix} 8.5 & -8.6 & -0.7 & -14.4 & -1.1 & -0.9 & 65.9 & -46.3 & -26.2 \end{pmatrix}', \\ D(7) &= \begin{pmatrix} 8.8 & -8.8 & -0.7 & -14.8 & -1.1 & -0.9 & 67.6 & -47.5 & -26.9 \end{pmatrix}', \\ D(8) &= \begin{pmatrix} 9.0 & -9.0 & -0.8 & -15.1 & -1.2 & -1.0 & 69.4 & -48.7 & -27.6 \end{pmatrix}', \\ D(9) &= \begin{pmatrix} 9.2 & -9.2 & -0.8 & -15.5 & -1.2 & -1.0 & 71.2 & -50.0 & -28.3 \end{pmatrix}', \\ D(10) &= \begin{pmatrix} 9.5 & -9.5 & -0.8 & -15.9 & -1.2 & -1.0 & 73.0 & -51.2 & -29.0 \end{pmatrix}', \\ D(11) &= \begin{pmatrix} 9.7 & -9.7 & -0.8 & -16.3 & -1.3 & -1.0 & 74.9 & -52.6 & -29.8 \end{pmatrix}', \\ D(12) &= \begin{pmatrix} 9.9 & -10 & -0.8 & -16.8 & -1.3 & -1.1 & 76.8 & -53.9 & -30.5 \end{pmatrix}'. \end{aligned}$$

Carteira 2

$$\begin{aligned}K(t) &= \begin{pmatrix} 6.3 & -6.5 & -0.7 & -10.7 & -1.4 & -0.7 & 49.2 & -35.3 & -20.1 \end{pmatrix}', \\D(1) &= \begin{pmatrix} 6.9 & -6.9 & -0.6 & -11.6 & -0.9 & -0.7 & 53.1 & -37.3 & -21.1 \end{pmatrix}', \\D(2) &= \begin{pmatrix} 7.1 & -7.1 & -0.6 & -12.0 & -0.9 & -0.8 & 54.8 & -38.5 & -21.8 \end{pmatrix}', \\D(3) &= \begin{pmatrix} 7.3 & -7.3 & -0.6 & -12.4 & -1.0 & -0.8 & 56.6 & -39.8 & -22.5 \end{pmatrix}', \\D(4) &= \begin{pmatrix} 7.6 & -7.6 & -0.6 & -12.8 & -1.0 & -0.8 & 58.5 & -41.1 & -23.2 \end{pmatrix}', \\D(5) &= \begin{pmatrix} 7.8 & -7.8 & -0.7 & -13.2 & -1.0 & -0.8 & 60.4 & -42.4 & -24.0 \end{pmatrix}', \\D(6) &= \begin{pmatrix} 8.1 & -8.1 & -0.7 & -13.6 & -1.1 & -0.9 & 62.5 & -43.8 & -24.8 \end{pmatrix}', \\D(7) &= \begin{pmatrix} 8.4 & -8.4 & -0.7 & -14.1 & -1.1 & -0.9 & 64.6 & -45.3 & -25.7 \end{pmatrix}', \\D(8) &= \begin{pmatrix} 8.6 & -8.7 & -0.7 & -14.6 & -1.1 & -0.9 & 66.8 & -46.9 & -26.5 \end{pmatrix}', \\D(9) &= \begin{pmatrix} 8.9 & -9.0 & -0.8 & -15.1 & -1.2 & -1.0 & 69.1 & -48.5 & -27.5 \end{pmatrix}', \\D(10) &= \begin{pmatrix} 9.3 & -9.3 & -0.8 & -15.6 & -1.2 & -1.0 & 71.6 & -50.3 & -28.5 \end{pmatrix}', \\D(11) &= \begin{pmatrix} 9.6 & -9.7 & -0.8 & -16.2 & -1.3 & -1.0 & 74.4 & -52.2 & -29.6 \end{pmatrix}', \\D(12) &= \begin{pmatrix} 10.1 & -10.1 & -0.8 & -17 & -1.3 & -1.1 & 78.0 & -54.8 & -31.0 \end{pmatrix}' .\end{aligned}$$

Carteira 3

$$\begin{aligned}K(t) &= \begin{pmatrix} 6.3 & -6.5 & -0.7 & -10.7 & -1.4 & -0.7 & 49.2 & -35.3 & -20.1 \end{pmatrix}', \\D(1) &= \begin{pmatrix} 6.9 & -6.9 & -0.6 & -11.6 & -0.9 & -0.7 & 53.1 & -37.3 & -21.1 \end{pmatrix}', \\D(2) &= \begin{pmatrix} 7.1 & -7.1 & -0.6 & -12.0 & -0.9 & -0.8 & 54.9 & -38.5 & -21.8 \end{pmatrix}', \\D(3) &= \begin{pmatrix} 7.3 & -7.4 & -0.6 & -12.4 & -1.0 & -0.8 & 56.7 & -39.8 & -22.5 \end{pmatrix}', \\D(4) &= \begin{pmatrix} 7.7 & -7.8 & -0.7 & -13.1 & -1.0 & -0.8 & 59.9 & -42.0 & -23.8 \end{pmatrix}', \\D(5) &= \begin{pmatrix} 8.1 & -8.1 & -0.7 & -13.6 & -1.1 & -0.9 & 62.5 & -43.9 & -24.8 \end{pmatrix}', \\D(6) &= \begin{pmatrix} 8.3 & -8.3 & -0.7 & -14.0 & -1.1 & -0.9 & 64.1 & -45.0 & -25.5 \end{pmatrix}', \\D(7) &= \begin{pmatrix} 8.6 & -8.6 & -0.7 & -14.5 & -1.1 & -0.9 & 66.3 & -46.6 & -26.4 \end{pmatrix}', \\D(8) &= \begin{pmatrix} 8.9 & -8.9 & -0.7 & -15.0 & -1.2 & -1.0 & 68.7 & -48.2 & -27.3 \end{pmatrix}', \\D(9) &= \begin{pmatrix} 9.0 & -9.1 & -0.8 & -15.2 & -1.2 & -1.0 & 69.8 & -49.0 & -27.8 \end{pmatrix}', \\D(10) &= \begin{pmatrix} 9.3 & -9.3 & -0.8 & -15.7 & -1.2 & -1.0 & 71.7 & -50.4 & -28.5 \end{pmatrix}', \\D(11) &= \begin{pmatrix} 9.7 & -9.7 & -0.8 & -16.3 & -1.3 & -1.0 & 74.9 & -52.6 & -29.8 \end{pmatrix}', \\D(12) &= \begin{pmatrix} 10.0 & -10 & -0.8 & -16.9 & -1.3 & -1.1 & 77.4 & -54.4 & -30.8 \end{pmatrix}' .\end{aligned}$$

A partir então destes resultados e dos valores para as ações no segundo semestre de 2005, calculamos os seguintes valores observados para as carteiras, que encontram-se na figura 6.12:

<i>Tempo</i>	<i>Carteira1</i>	<i>Carteira2</i>	<i>Carteira3</i>
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9709	0.9751	0.9750
3	1.3381	1.2138	1.2149
4	1.4683	1.3200	1.3213
5	1.1446	1.0974	1.1395
6	1.1438	1.1190	1.1673
7	0.7485	0.8266	0.9115
8	-0.2063	0.0614	0.2065
9	0.4659	0.5958	0.6940
10	0.3731	0.5169	0.6215
11	-0.4035	-0.1271	0.0574
12	2.1314	2.0332	1.9909
13	2.4198	2.2857	2.2331

Para efeito de medir o risco, calculamos o desvio padrão dos valores observados de forma análoga ao exemplo anterior. Os resultados, apresentados na figura 6.11, foram:

<i>Tempo</i>	<i>Carteira1</i>	<i>Carteira2</i>	<i>Carteira3</i>
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0146	0.0125	0.0125
3	0.1667	0.1071	0.1077
4	0.2141	0.1449	0.1455
5	0.1926	0.1301	0.1302
6	0.1764	0.1188	0.1197
7	0.2219	0.1507	0.1359
8	0.4842	0.3648	0.3230
9	0.4813	0.3617	0.3186
10	0.4829	0.3630	0.3187
11	0.5837	0.4499	0.3932
12	0.6798	0.5524	0.4917
13	0.7759	0.6487	0.5845

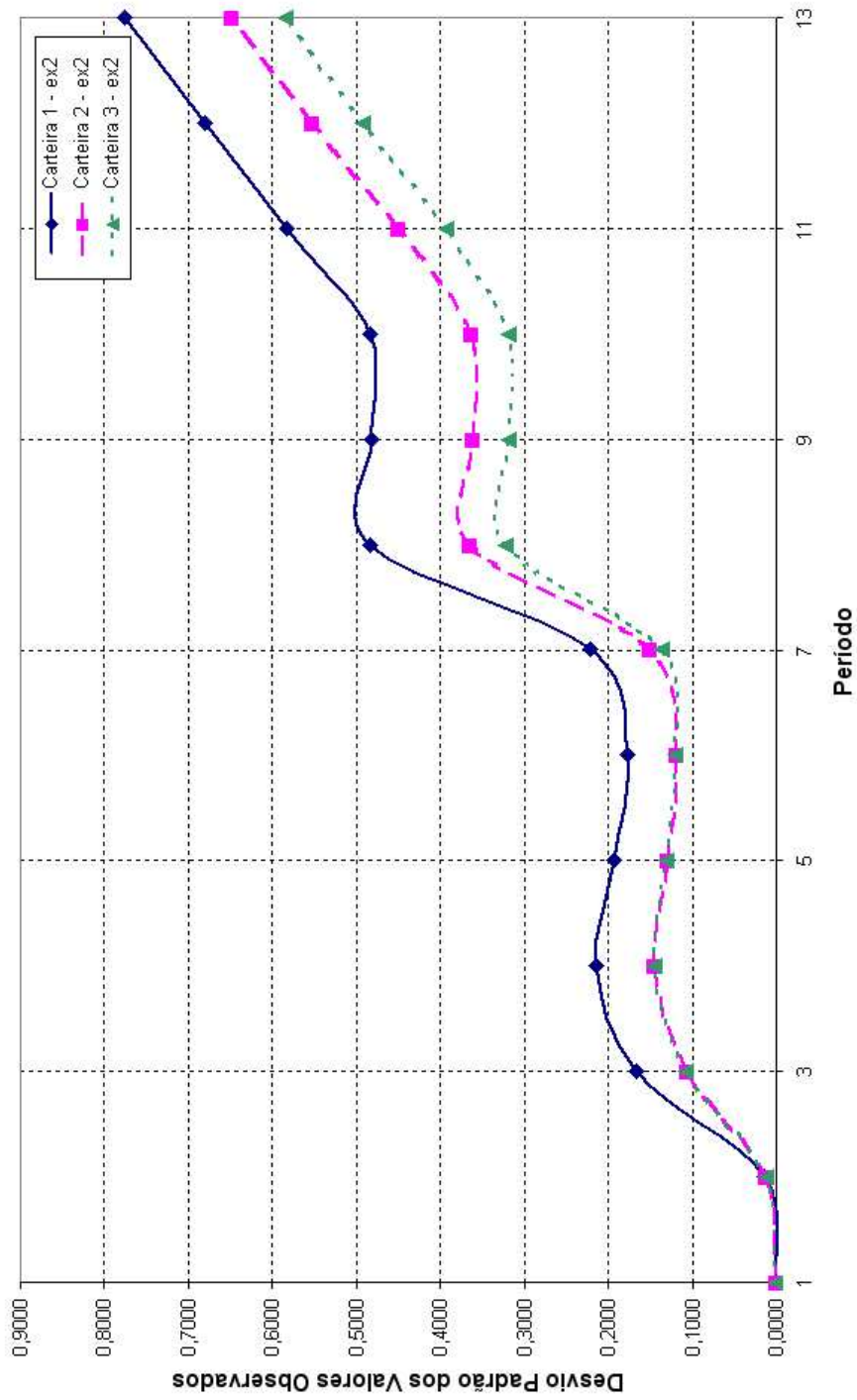


Figura 6.11: Exemplo 2 - Desvio Padrão das Carteiras 1, 2 e 3

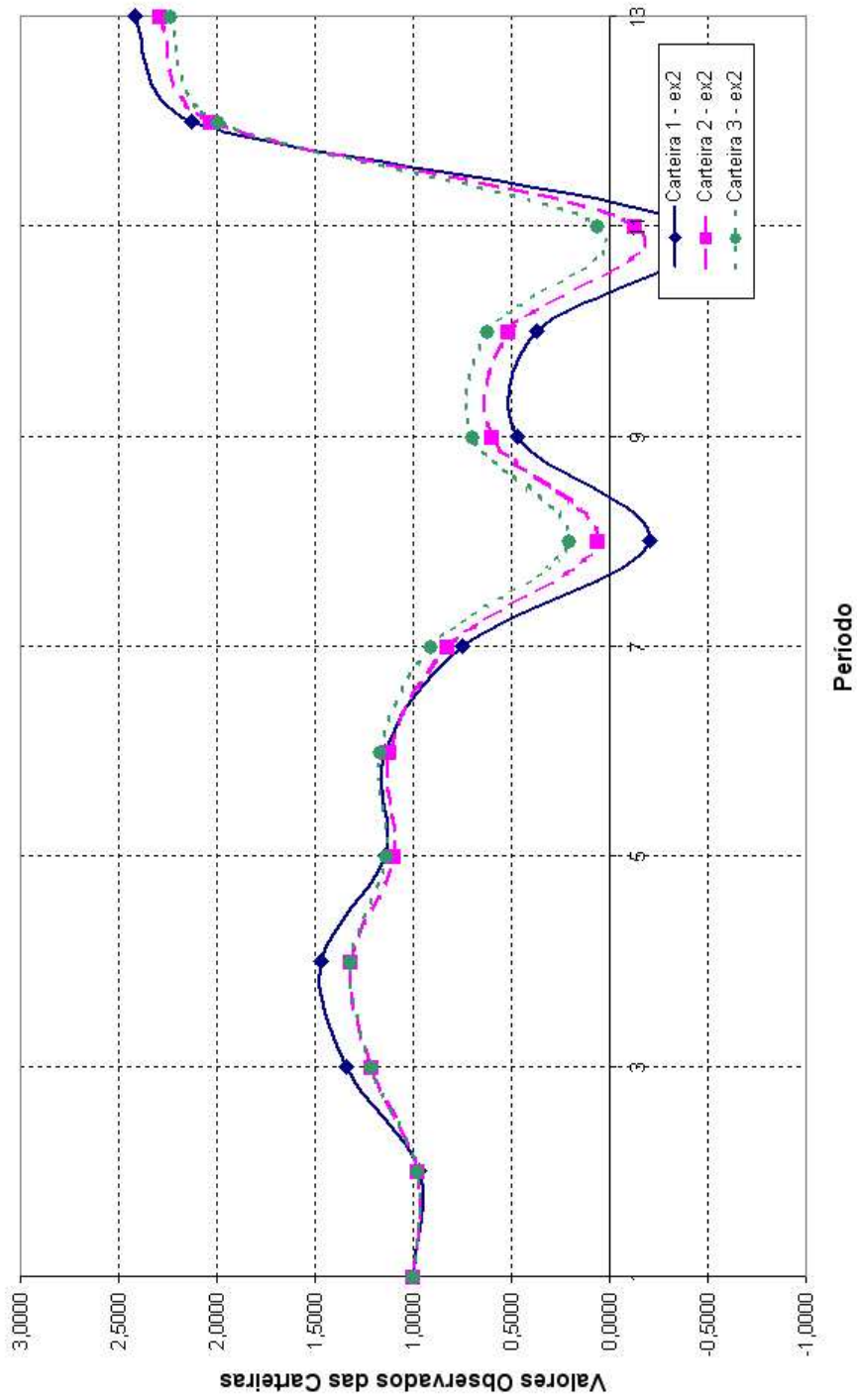


Figura 6.12: Exemplo 2 - Valor Observado das Carteiras 1, 2 e 3

Podemos ver no gráfico 6.11 que a variância das Carteiras 2 e 3 possuem um comportamento mais suave durante o período de análise.

Com base nos resultados obtidos nas Simulações 2 e 3 (vide gráficos 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12), é possível observar:

- nos casos onde analisamos o problema de maximizar o valor esperado com restrições na variância (modelos $P1(\sigma)$ e $PE(\sigma)$), a alteração da função objetivo, com a inclusão de termos intermediários dos valores esperados (Carteiras 1 e 2), não gera diferença significativa na solução dos problemas $P1(\sigma)$ e $PE(\sigma)$ nas Simulações 2 e 3. Entretanto ao adicionarmos restrições intermediárias nas variâncias (Carteira 3), conseguimos, na Simulação 2, uma redução significativa da variância da carteira nos instantes iniciais de período de análise e um comportamento mais homogêneo ao longo de todo o tempo. Podemos, inclusive, confirmar este comportamento ao observarmos a evolução do valor esperado desta carteira. Na Simulação 3 podemos constatar este comportamento na prática. Mais ainda, a estratégia seguida pela Carteira 3 acabou por evitar valores negativos ao longo do tempo, o que, na prática, pode ser uma vantagem significativa.
- quando analisamos o problema de minimizar a variância com restrições nos valores esperados (modelos $P2(\nu)$ e $PV(\nu)$) já é possível perceber que, mesmo sem considerarmos restrições intermediárias nos valores esperados, a alteração da função objetivo já produz resultados bastante significativos. Ou seja, a inclusão das variâncias intermediárias no critério de performance do problema já é suficiente para produzir estratégias multi-período menos agressivas. Na Simulação 2, as Carteiras 2 e 3 apresentam um crescimento do valor esperado mais suave e contínuo, enquanto a Carteira 1 mostra um salto grande no período período e variações menores daí em diante. A consequência disto é que a variância inicial da Carteira 1 é significativamente maior que das Carteiras 2 e 3 e esta diferença vai reduzindo ao longo do tempo. Analisando o resultado real das estratégias, na Simulação 3, vemos também variações menos bruscas no valor das Carteiras 2 e 3, principalmente na Carteira 3 onde impussemos restrições intermediárias nos

valores esperados. Mais ainda, constatamos novamente que a Carteira 3 não possui valores negativos ao longo do tempo.

Desta forma temos que a aplicação prática do modelo proposto neste trabalho, em comparação ao modelo proposto em (Li and Ng, 2000), apresenta resultados bastante interessantes e motivam ainda mais a aplicação do modelo e até mesmo a pesquisa de novos aprimoramentos.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Neste último capítulo, colocaremos algumas considerações finais e conclusões a respeito do trabalho aqui apresentado. Na verdade, consideramos que esta tese não teve a pretensão de esgotar as possibilidades deste tipo de modelagem. Ao contrário, apesar dos resultados obtidos, acreditamos que ainda existe espaço para novas análises, ou ainda, novas formulações e aprimoramentos para o problema de seleção de ativos multi-período.

7.1 Conclusões

Esta tese dedicou-se ao estudo de modelos de otimização de carteiras multi-período, com ênfase em um modelo com restrições intermediárias, onde as médias e as variâncias da carteira, para $t = 1, 2, \dots, T$, são consideradas na formulação do problema. Em trabalho recente, (Li and Ng, 2000) obtiveram uma expressão analítica para a solução do problema multi-período discreto, mas levando em consideração apenas o risco e o retorno da carteira no instante final do período de análise. A principal contribuição apresentada neste trabalho foi o de estender este resultado para o caso onde os riscos e os retornos intermediários também são considerados no problema de otimização.

Primeiro consideramos o problema onde o critério de performance foi escrito como uma combinação linear dos valores esperados $E(V(t))$ e das variâncias $Var(V(t))$, para $t = 1, \dots, T$ (Problema $PMV(\ell, \rho)$). A solução

deste problema é derivada no Teorema 12, com base em equações de recorrência e técnicas de programação dinâmica. Elaboramos assim um algoritmo (Algoritmo 1) para implementação direta do modelo para obtenção da estratégia ótima de investimento.

A partir desta solução, derivamos, também de forma analítica, a solução para o problema com critério de performance dado pela combinação linear das variâncias $Var(V(t))$ e restrições nos valores esperados $E(V(t))$, para $t \in I_\nu$ (Problema $PV(\nu)$). Para resolvermos este problema temos que achar $\ell(t) \geq 0$ tal que para todo $t \in I_\nu$, $\nu(t) = E(V_{\mathcal{U}}(t)) = v(t)$, fornecendo ι_ν variáveis $\ell(t)$ e ι_ν equações lineares simultâneas que precisam ser resolvidas. O Algoritmo 2 detalha a implementação da resolução deste modelo.

Para o problema com critério de performance escrito como combinação linear do valor esperado $E(V(t))$ e restrições nas variâncias $Var(V(t))$, para $t \in I_\sigma$ (Problema $PE(\sigma)$) apresentamos um algoritmo numérico para a resolução do mesmo (Algoritmo 3). Neste caso, para resolvermos o problema $PE(\sigma)$, precisamos obter $\rho(t) \geq 0$, tal que, para todo $t \in I_\sigma$, $\sigma(t)^2 = Var(V_{\mathcal{U}}(t))$, temos assim ι_σ variáveis $\rho(t)$ e ι_σ equações não-lineares simultâneas para serem resolvidas. Para esta formulação não obtivemos uma solução analítica explícita para a estratégia ótima.

O principal diferencial do modelo apresentado nesta tese é que ele permite que controle-se o retorno e/ou a variância da carteira em instantes de tempo intermediários num problema de seleção de ativos multi-período discreto. No Capítulo 6, apresentamos três simulações que ilustram este diferencial, sempre considerando duas ou mais carteiras a fim de compararmos a formulação proposta com o modelo original de (Li and Ng, 2000). Analisamos ainda, para o conjunto de carteiras, em cada simulação, duas situações: a primeira cujo objetivo era maximizar uma combinação linear dos retornos esperados com restrições nas variâncias da carteira (formulações $PE(\sigma)$ e $P1(\sigma)$); e a segunda onde o critério de performance foi minimizar uma combinação linear das variâncias com restrições nos valores esperados da carteira (formulações $PV(\nu)$ e $P2(\nu)$).

A primeira simulação foi realizada com dados fictícios, extraídos do artigo (Li and Ng, 2000), apenas para analisar o comportamento comparativo do modelo proposto nesta tese com a formulação original. Os resultados,

apesar deste ser um exemplo bastante simples, foram positivos e ilustram o potencial prático da técnica apresentada para aplicação em caso reais.

Nas outras duas simulações utilizamos dados do mercado acionário brasileiro. O objetivo era avaliar o modelo, tanto o resultado teórico como a aplicação da estratégia ótima, em condições reais e, uma vez mais, compará-lo com a formulação original apresentada em (Li and Ng, 2000).

Na Simulação 2 analisamos os resultado da variância e do valor esperado das carteiras com base nas estratégias ótimas obtidas e no conjunto de dados utilizados no cálculo. Nestas condições pudemos observar que, quando não impomos nenhuma restrição aos valores alocados nos ativos, as políticas de alocação tendem a ser bastante arrojadas, sempre com o intuito de maximizar o retorno esperado da carteira. Assim sendo, a possibilidade de aplicarmos restrições intermediárias para o risco ou para o retorno esperado da carteira, ao longo do horizonte de análise, torna o modelo proposto uma ferramenta bastante prática e útil para a obtenção de uma política ótima de alocação de recursos.

Na Simulação 3 fizemos realmente a aplicação prática do modelo, calculando primeiramente a estratégia ótima com médias e covariâncias estimadas a partir de dados históricos, e, posteriormente, avaliando a performance das carteiras obtidas com base em preços reais dos ativos observados no mercado. Constatamos aqui também que a inclusão das restrições intermediárias no modelo reduz a variabilidade do valor da carteira ao longo do tempo, ou seja, obtivemos uma política de alocação multi-período menos arriscada. Mas é possível ver também que o custo deste menor risco é, como esperado, um menor retorno total. Isto reforça a aplicabilidade do modelo, visto que a nossa proposta era estabelecer uma estratégia ótima que pudesse ser mais “controlável”, em termos de risco de e retorno, ao longo do tempo.

7.2 Perspectivas Futuras

Tendo em vista as publicações recentes envolvendo modelos multi-período, mais os resultados teóricos aqui apresentados junto como as primeiras simulações numéricas realizadas, acreditamos que ainda existe espaço para novas e diversas pesquisas na área. Seguem alguns pontos que consideramos

interessantes de se destacar:

1. **a inclusão de restrições de não-negatividade nas variáveis de controle no caso discreto.** De forma análoga ao apresentado em (Lim *et al.*, 2002) para o caso contínuo, incorporar este tipo de restrição no caso discreto é bastante interessante do ponto de vista prático. Entretanto, este aprimoramento dificulta muito a obtenção de soluções analíticas explícitas para o modelo de seleção de ativos. De qualquer forma, mesmo que o problema só possa ser resolvido numericamente, é um tópico relevante na pesquisa desta classe de problemas.
2. **incorporar neste tipo de formulação, tal qual foi feito em (Gulpinar *et al.*, 2003), os custos de transação.** Como estamos trabalhando com um período de tempo mais longo e dividindo-o em intervalos menores, onde são tomadas as decisões quanto às alocações e realocações dos ativos na carteira, os custos de transação envolvidos podem ser significativos, alterando assim a estratégia ótima de investimento. Um bom exemplo disso é o caso brasileiro, pois, em função da nossa realidade tributária, os custos envolvidos com a compra e venda de ativos não são desprezíveis e, portanto, influenciam diretamente na tomada de decisões de investimento.
3. **considerar no modelo os passivos do investidor, como apresentado em (Leippold *et al.*, 2003) e (Leippold *et al.*, 2004).** Ou seja, estabelecer uma política ótima de alocação dos ativos considerando que existem passivos ao longo do tempo que precisam ser honrados. Este, inclusive, é um tema bastante atual no mercado brasileiro tanto em instituições financeiras, quanto em entidades de previdência complementar.

Referências Bibliográficas

- Alexander, A. J. and W. F. Sharpe (1989). *Fundamentals of Investment*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Black, F. and R. Litterman (1991). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium. *Journal of Fixed Income* **1**, 7–18.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* **31**, 307–327.
- Bollerslev, T., R. Y. Chou and K. F. Kroner (1992). Arch modelling in finance: A review of theory and empirical evidences. *Journal of Econometrics* **52**, 5–59.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Chen, S., X. Li and X. Y. Zhou (1998). Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. *SIAM Journal on Control and Optimization* **36**, 1685–1702.
- Chen, S., X. Li and X. Y. Zhou (2000). Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs ii. *SIAM Journal on Control and Optimization* **39**, 1065–1081.
- Costa, O. L. V. and A. C. Paiva (2002). Robust portfolio selection using linear matrix inequalities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **26**, 889–909.
- Costa, O. L. V. and H. G. V. Assunção (2005). *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*. Ed. Manole.

- Costa, O. L. V. and R. B. Nabolz (2002). A linear matrix inequalities approach to robust mean semi-variance portfolio optimization. In: *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance* (Erriocos John Kontoghiorghes, Berc Rustem and Stavros Siokos, Eds.). Vol. 74. pp. 87–105. Kluwer Applied Optimization Series.
- Costa, O. L. V. and R. B. Nabolz (2005). A multi-period mean-variance portfolio selection problema. *Revista Brasileira de Finanças* **3**, 101–121.
- Dantzig, G. B. and G. Infanger (1993). Multi-stage stochastic linear programs from portfolio optimization. *Annals of Operations Research* **45**, 59–76.
- David, A. (1997). Fluctuating confidence in stock markets: Implication for returns and volatility. *Journal of Finance and Quantitative Analysis* **32**, 427–462.
- David, A. and P. Veronesi (1999). Option prices with uncertain fundamentals: Theory and evidence of the dynamics of implied volatilities. *Federal Reserve Board Working Paper*.
- Dembo, R. S. (1991). Scenario optimization. *Annals of Operations Research* **30**, 63–80.
- Draviam, T. and T. Chellathurai (2002). Generalized markowitz mean-variance principles for multi-period portfolio selection problems. *Proceeding of Royal Society of London - Series A* **458**, 2571–2607.
- Elton, E. J. and M. J. Gruber (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York.
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series*. John Wiley, New York.
- Engel, J. and M. Gizycki (1999). Value at risk : On the stability and forecasting of the variance-covariance matrix. *Research Discussion Paper 1999-04, Reserve Bank of Australia*.

- Engle, R. F. (1992). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica* **50**, 987–1007.
- Geromel, J. C., P. L. D. Peres and J. Bernussou (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* **29**, 381–402.
- Grauer, R. R. and N. H. Hakansson (1993). On the use of mean-variance and quadratic approximations in implementing dynamic investment strategies: A comparison of returns and investment policies. *Management Science* **39**, 856–874.
- Gulpinar, N., B. Rustem and R. Settergren (2003). Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction costs. In: *Innovations in Financial and Economic Networks* (A. Nagurney, Ed.). Edward Elgar Publishing.
- Hakansson, N. H. (1971). Multi-period mean-variance analysis: Toward a general theory of portfolio choice. *Journal of Finance* **26**, 857–884.
- Hanza, F. and J. Janssen (1995). Portfolio optimization model using asymmetric risk function. *Proc.5th AFIR, Brussels, Belgium* **3**, 3–32.
- Hanza, F. and J. Janssen (1998). The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transactions costs. *Applied Stochastics Models and Data Analysis* **14**, 275–283.
- Hembold, D. P., R. E. Schapire, Y. Singer and M. K. Warmuth (1998). On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance* **8**, 325–347.
- Howe, M.A. and B. Rustem (1997). A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1065–1092.
- Howe, M.A., B. Rustem and M.J.P. Selby (1996). Multi-period minimax hedging strategies. *European Journal of Operational Research* **93**, 185–204.

- Jorion, P. (1992). Portfolio optimization in practice. *Financial Analysts Journal* **1**, 68–74.
- Jr., A. M. Duarte (1999). Fast computation of efficient portfolios. *The Journal of Risk* **4**, 71–94.
- Leippold, M., F. Trojani and P. Vanini (2003). Efficient portfolios with endogenous liabilities. *Working Paper* **28**, 1079–1113.
- Leippold, M., F. Trojani and P. Vanini (2004). A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities. *Journal of Economic Dynamics and Control* **28**, 1079–1113.
- Li, D. and W.-L. Ng (2000). Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Mathematical Finance* **10**, 387–406.
- Li, D., T. F. Chan and W.-L. Ng (1998). Safety-first dynamic portfolio selection. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* **4**, 585–600.
- Lim, A. E. B. and X. Y. Zhou (2002). Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market. *Mathematics of Operations Research* **27**, 101–120.
- Lim, A. E. B., X. Li and X. Y. Zhou (2002). Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization* **40**, 1540–1555.
- Luenberger, D. G. (1997). *Investment Science*. Oxford University Press.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance* **7**, 77–91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley, New York.
- Markowitz, H. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics* **51**, 247–257.

- Mills, T. C. (1993). *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Cambridge University Press.
- Morgan, J.P. and Reuters (1996). *RiskMetrics Technical Document, 4th edition*. Available at <http://www.riskmetrics.com>.
- Mossin, J. (1968). Optimal multiperiod portfolio policies. *Journal of Business* **41**, 215–229.
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management* **18**, 13–22.
- Rudolf, M., H.-J. Wolter and H. Zimmermann (1999). A linear model for tracking error minimization. *The Journal of Banking & Finance* **23**, 85–103.
- Rustem, B., R. G. Becker and W. Marty (1995). Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios. *Journal of Economic Dynamics and Control* **24**, 1591–1621.
- Saberi, A., P. Sannuti and M. B. Chen (1995). *H₂-Optimal Control*. Prentice Hall.
- Samuelson, P. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics* **51**, 239–246.
- Securato, J. R. (1996). *Decisões Financeiras em Condições de Risco*. Ed. Atlas.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *Journal of Business* **39**, 119–138.
- Sharpe, W. F. (1975). Adjusting for risk in portfolio performance measurement. *The Journal of Portfolio Management* **1**, 29–34.
- Sharpe, W. F. (1992). Asset allocation: Management style and performance measurement. *The Journal of Portfolio Management* **18**, 7–19.
- Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management* **20**, 49–58.

- Steinbach, M. C. (2001). Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis. *Siam Review* **43**, 31–85.
- Yin, G. and X. Y. Zhou (2004). Markowitz’s mean-variance portfolio selection with regime switching: From discrete-time models to their continuous-time limits. *IEEE Trans. Automatic Control* **49**, 349–360.
- Zenios, S. A. (1993). *Financial Optimization*. Cambridge University Press.
- Zhou, X. Y. and D. Li (2000). Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework. *Applied Mathematical Optimization* **42**, 19–33.
- Zhou, X. Y. and G. Yin (2003). Markowitz’s mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model. *SIAM Journal on Control and Optimization* **42**, 1466–1482.