

JOÃO LUIZ DE PAIVA MARTINS

UM SISTEMA COMPLETO DE PROCESSAMENTO PARA  
DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE A PARTIR DE  
DADOS OBTIDOS POR ACELERÔMETROS MONTADOS EM  
PLATAFORMA GIRO-ESTABILIZADA EMBARCADA EM UMA  
AERONAVE

Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do título  
de Doutor em Engenharia

São Paulo

2010

JOÃO LUIZ DE PAIVA MARTINS

UM SISTEMA COMPLETO DE PROCESSAMENTO PARA  
DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE A PARTIR DE  
DADOS OBTIDOS POR ACELERÔMETROS MONTADOS EM  
PLATAFORMA GIRO-ESTABILIZADA EMBARCADA EM UMA  
AERONAVE

Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do título  
de Doutor em Engenharia

Área de concentração:  
Engenharia de Sistemas.

Orientador: Prof. Dr.  
Fuad Kassab Jr

São Paulo

2010

*À minha esposa*

## Agradecimentos

Gostaria de deixar meus sinceros agradecimentos àqueles que contribuíram através do apoio pessoal, da orientação, da viabilização das oportunidades tecnológicas, ou da cooperação na realização de testes.

Ao Prof. Dr. Fuad Kassab Jr, orientador, pelo incentivo e auxílio que tornaram possível a realização deste trabalho.

À minha esposa, pelo apoio, e incentivo sem os quais seria impossível a realização deste trabalho, e por ser, junto à minha filha, a razão de todos os meus esforços.

Aos integrantes do Laboratório de Automação e Controle do Departamento de Telecomunicações e Controle da escola Politécnica, pela colaboração com recursos técnicos e de laboratório para estudos que foram fundamentais na elaboração dos sistemas descritos neste trabalho.

A Roberto Viana Batista e Philip Yang, que viabilizaram as oportunidades para a realização deste trabalho.

À AeroGeoPhysica Latinoamérica, pelos recursos e pelo apoio na realização dos testes, em especial a Cláudia de Oliveira Rodriguez pela valiosa ajuda no extenso processamento requerido para os testes.

Aos meus pais, pelas oportunidades que se abrem através de minha formação, sendo este trabalho apenas uma dentre muitas.

*... iremos portanto assumir a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência.*

**Albert Einstein (1907)**

*Once you eliminate the impossible, whatever remains, no matter how improbable, must be the truth.*

**Sir Arthur Conan Doyle**

*Truth is an arrow and the gate is narrow...that it passes through.*

**Bob Dylan**

## Resumo

Martins, J. L. P. (2010). *Um sistema completo de processamento para determinação da aceleração da gravidade a partir de dados obtidos por acelerômetros montados em plataforma giro-estabilizada embarcada em uma aeronave*. Dissertação de Doutorado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

A obtenção do valor do campo gravitacional e apresentação do mesmo em mapas são de fundamental importância para a compreensão da estrutura geológica da sub-superfície terrestre. A medição do campo em áreas abrangentes requer a utilização de aeronaves como meio de transporte. Para isto, um acelerômetro vertical é embarcado em uma plataforma inercial de estabilização. Este trabalho é a construção de um sistema completo de processamento dos dados inerciais para a extração do campo gravitacional. Envolve a utilização de técnicas de identificação de estados de sistemas dinâmicos e de identificação de parâmetros de modelos dinâmicos. O estado do sistema inercial de navegação é identificado com base em comparação entre suas saídas e dados de sistemas de posicionamento não inercial fornecidos por GPS. Descreve-se um sistema que usa dados de ensaios em solo e em voo para a obtenção dos parâmetros dos modelos de erros do sistema de navegação. A influência da utilização destes parâmetros na determinação da aceleração da gravidade é avaliada. Descreve-se também a modelagem e identificação de parâmetros de modelo do sensor usado para a medida de acelerações verticais. São descritas técnicas de precisão para processamento de sinais, tanto para a reamostragem como para a obtenção de derivadas do mesmo. A avaliação da utilidade do uso destas técnicas em comparação com o sistema atualmente em uso demonstra maior robustez de resultados e menor ruído. Para avaliar a possibilidade do uso de sensores cuja comercialização não é controlada por embargos internacionais uma fonte de ruído aleatório é injetada no modelo de giroscópios do sistema inercial. São obtidos resultados para níveis de ruído correspondentes aos de vários sistemas comercialmente disponíveis.

Palavras-chave: Modelagem e Identificação de sistemas, Filtragem digital, Sistemas de navegação inercial.

## Abstract

Martins, J. L. P. (2010). *A complete processing system to extract the gravity acceleration from data generated by accelerometers mounted on an airborne gyro-stabilized platform*. Dissertação de Doutorado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

The mapping of the gravitational field is of great importance for the understanding of the underlying subterranean geology for a given area. Mapping large areas requires the use of an aircraft to carry the acquisition. This requires the mounting of a vertical accelerometer on a stabilization platform. This work describes a system to extract the acceleration of gravity using the information provided by the inertial navigation system to improve results over systems that use only accelerometer and GPS data. The state of the inertial navigation system is obtained by comparison between its outputs and positioning information provided by GPS. A system is described that uses ground and flight data to obtain the parameters of the error model of the navigation system. The influence of the use of these parameters in the determination of the gravity acceleration is evaluated. A procedure is described to identify the parameters of a model for the vertical accelerometer used to measure the gravity acceleration. The work describes precision signal processing techniques for anti-aliasing and obtaining signal derivatives. The improvements obtained by the use of the above techniques is evaluated. A comparison with a currently used system indicates improved robustness and lower noise on the final results. To evaluate the possibility of the use of inertial sensors that can be procured without restrictions from international bans, noise is added to the gyroscope signal of the navigation model to simulate the use of poorer quality inertial sensors. The results are evaluated for noise levels corresponding to those of several commercially available units.

**Keywords:** Modeling and system identification, Digital filters, Inertial navigation systems.

## Sumário

1	Introdução .....	10
1.1	Objeto do estudo e conteúdo .....	10
1.2	Contribuições do trabalho .....	11
1.3	O processo de gravimetria aérea – visão geral.....	13
1.4	Estado da tecnologia.....	17
2	Discussão teórica.....	20
2.1	Navegação inercial.....	20
2.1.1	Símbolos utilizados.....	22
2.1.2	Os sistemas de referência .....	23
2.1.3	O elipsóide terrestre e os raios de curvatura .....	25
2.1.4	Equações de Navegação inercial .....	30
2.1.5	Modelo de erros do sistema inercial .....	32
2.1.6	Aprimoramento da expressão de desalinhamento dos acelerômetros ..	37
2.1.7	Erros de coordenadas e azimute na saída .....	39
2.1.8	Sistemas de equações de eliminação de variáveis .....	39
2.1.9	Equações de estado finais.....	42
	As equações de estado para o modelo de erros de velocidade ficam.....	43
2.1.10	Linearização das equações de estado .....	44
2.1.11	Identificação de estados da plataforma inercial.....	47
2.2	Calibração do sistema inercial .....	52
2.2.1	Introdução.....	52
2.2.2	Objeto da calibração.....	52
2.2.3	Discussão sobre o método .....	54
2.2.4	Condições iniciais .....	56
2.2.5	Influência da filtragem Kalman na determinação de parâmetros .....	58
2.2.6	Inclusão de restrições.....	59

2.3	Processamento .....	61
2.3.1	Introdução aos filtros utilizados.....	62
2.3.2	Filtros casados.....	62
2.3.3	Processamento GPS .....	97
2.3.4	Remoção de falhas do sinal GPS .....	98
2.3.5	Diferenciação dos sinais para obtenção de acelerações.....	98
2.3.6	Identificação do modelo do sistema sensor/GPS .....	99
3	Resultados .....	106
3.1	Condições de voo comuns.....	106
3.2	Tratamento do sinais GPS .....	110
3.3	Identificação do estado do sistema de navegação.....	112
3.4	Modelo do sistema sensor/GPS.....	113
3.5	Pós-processamento .....	115
3.5.1	Calibração .....	115
3.5.2	Resultados do uso de calibração.....	115
3.5.3	Navegação .....	118
3.5.4	Anomalia bruta.....	123
3.5.5	Anomalia filtrada.....	125
3.5.6	Repetibilidade.....	127
3.5.7	Análise usando inversão.....	133
3.5.8	Avaliação influência da qualidade dos sensores inerciais no processo de gravimetria .....	145
4	Conclusões e comentários .....	151
5	Bibliografia .....	153

# 1 Introdução

## 1.1 Objeto do estudo e conteúdo

Gravimetria é a medida da aceleração da gravidade terrestre. O mapeamento do campo gravimétrico ao longo de uma área de interesse tem vários possíveis objetivos. Dentre estes, encontra-se o de aumentar a compreensão das estruturas subterrâneas. O processo de medição gravimétrica envolve a tomada de valores do campo gravitacional usando-se um acelerômetro vertical e comparando-se os resultados com os valores esperados por modelos conhecidos para avaliar anomalias e buscar causas geológicas para as mesmas. Uma das formas mais recentes de gravimetria é a aérea, na qual os acelerômetros são embarcados em uma aeronave, o que implica na necessidade de descontar as acelerações verticais da mesma dos valores medidos.

Neste trabalho, descreve-se um processo de tratamento do sinal de medida das acelerações verticais obtidas por um sistema embarcado em uma aeronave. O resultado do tratamento é a anomalia gravimétrica. Para tanto, devem ser descontados os modelos de aceleração da aeronave e de aceleração da gravidade esperada na posição da aeronave. Desta forma, o posicionamento preciso da aeronave deve ser medido com precisão, utilizando um processo não inercial. No caso em estudo, tal posicionamento é realizado usando-se GPS diferencial.

O trabalho executado cobre todas as etapas de processamento, incluindo correções de alinhamento de sensores, modelagem dos mesmos e processamento de sinais em diversos níveis.

Nas próximas subseções, procura-se posicionar este trabalho nos aspectos de contribuições, objetivo e área científica.

Em seguida, no capítulo 0, prossegue-se a uma discussão teórica mais detalhada dos elementos utilizados e desenvolvidos. Estes são

- as equações de navegação do sistema inercial
- modelo de erros de navegação do sistema inercial

- filtros utilizados no processo de reamostragem e combinação de sinais
- filtragem Kalman e identificação do estado do sistema de navegação inercial
- processo de calibração dos parâmetros do modelo de erros do sistema inercial
- identificação de parâmetros dos sensores de aceleração para gravimetria

No capítulo 3, dispõem-se os resultados obtidos em vários testes buscando avaliar as características do processamento. Estes constituem-se dos seguintes:

- resultados do processo de calibração do modelo de erros de navegação
- avaliação do modelo de navegação inercial
- avaliação da repetibilidade de resultados do processo de obtenção da anomalia
- avaliação da influencia da qualidade dos sensores inerciais de navegação no processo de gravimetria
- análise dos resultados de processamento de uma área completa de levantamento e comparação com o sistema de processamento utilizado atualmente

## **1.2 Contribuições do trabalho**

Os temas de inovação e encontram-se especialmente nas etapas de filtragem anti-aliasing e de modelagem dos sensores. Também foram realizados estudos importantes para a determinação da possibilidade de utilização de sensores inerciais mais acessíveis para o alinhamento dos sensores gravimétricos. Em resumo, as contribuições principais deste estudo são:

- o desenvolvimento de filtros anti-aliasing casados para os sinais de GPS e de acelerômetros
- desenvolvimento de um sistema de modelagem dos acelerômetros gravimétricos

- análise da influência do processo de calibração do modelo de erros do sistema de navegação inercial no desempenho do processamento de gravimetria
- investigação da influência nos parâmetros de desempenho de processamento gravimétrico quando se utilizam sensores inferiores para alinhamento e navegação inercial

A filtragem anti-aliasing é feita de tal forma que a resposta dos filtros usados no sistema GPS e nos sensores gravimétricos seja coincidente até 10 ppm para que a comparação final entre os dois sensores seja possível até os níveis desejados. Foi usada uma técnica não convencional para o projeto destes filtros que garante esta precisão e ao mesmo tempo oferece uma resposta plana a níveis aceitáveis.

A modelagem dos sensores usa técnicas mais padronizadas. Entretanto, foi necessária uma divisão do processo em etapas para que alguns parâmetros possam ser determinados com precisão próxima a 100 ppm para atender às necessidades. A utilização da modelagem é feita de forma essencialmente diferente da utilizada por outras equipes trabalhando em gravimetria (GLENNIE e SCWARZ, 1999)(KWON e JEKELI, 2001)(KREYE, NIEDERMEIER, *et al.*, 2006). Em geral, utiliza-se filtragem de Kalman quando os sensores fazem parte de tríade de sensores inerciais usados para a navegação. Outra abordagem é a de utilizar filtros passa-baixa com a frequência de corte final usada no aerolevanteamento e utilizar métodos lineares de regressão de parâmetros para os sensores de gravimetria.

No sistema desenvolvido, os sensores são modelados e o modelo é aplicado nos sinais antes do filtro passa baixa final. Com isso, o sinal de anomalia pode ser analisado antes da filtragem e as falhas de GPS que passaram despercebidas podem ser removidas.

Utilizando-se dados reais e aplicando-se perturbações aos modelos desenvolvidos, fez-se uma avaliação prévia da possibilidade de utilizar sistemas inerciais de desempenho inferior. Este estudo permite avaliar a possibilidade de construção de um gravímetro aéreo utilizando-se as técnicas de processamento desenvolvidas neste trabalho e sensores inerciais comercialmente disponíveis ou não controlados por restrições internacionais como o MTCR (missile technology control regime) ou restrições individuais de cada país como ocorre com o ITAR (International Traffic in Arms Regulation) para os EUA.

### 1.3 O processo de gravimetria aérea – visão geral

O objeto da gravimetria é o de medir as perturbações do campo gravitacional terrestre ao longo de uma dada área da superfície terrestre, em relação aos valores esperados ou previstos em modelos do campo gravimétrico. Para isto, geralmente utilizam-se acelerômetros cuja sensibilidade seja orientada ao longo de direções conhecidas. Usualmente, a direção escolhida é a vertical local, estimada pela direção do próprio campo gravitacional. Uma discussão geral sobre gravimetria pode ser encontrada em (TELFORD, GELDART e SHERIFF, 2001).

Os modelos do campo gravitacional terrestre são geralmente aproximações de segunda ordem em função do cosseno da latitude terrestre. Modelos precisos podem ser dados em termos de polinômios de Legendre com latitude e longitude como argumentos como é o caso do EGM96 preparado pela NASA (LEMOINE, KENYON, *et al.*, 1998). Para exploração mineral ou de hidrocarbonetos, os modelos mais completos acabam incluindo feições do campo causadas por objetos de interesse na sub-superfície, o que torna tais modelos não desejáveis para comparação com as leituras diretas, visto que estes alvos seriam eliminados como parte do modelo normal.

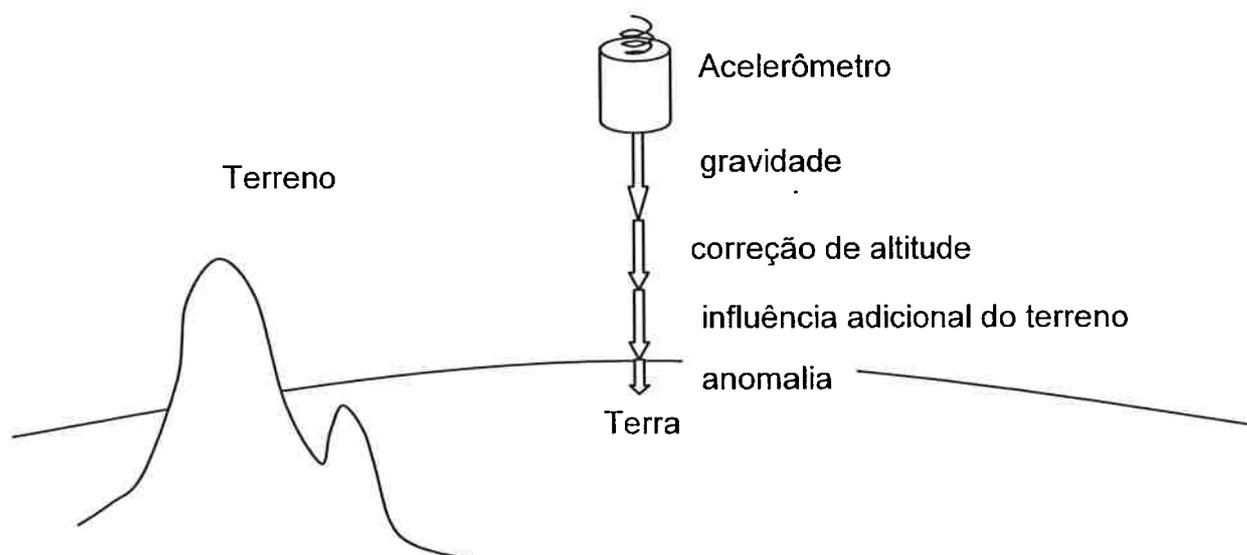


FIGURA 1: ESQUEMÁTICO DE UMA MEDIÇÃO GRAVIMÉTRICA

Além de um modelo de gravidade, influências causadas pelo relevo e pela altitude de medição devem ser descontadas (ou acrescentadas ao modelo normal). Em resumo, todas as componentes previsíveis são descontadas do sinal obtido, restando a chamada anomalia, que se assume ser causada pelas estruturas subterrâneas que diferem do modelo homogêneo da crosta terrestre. Estes valores de diferença estão tipicamente na faixa de dezenas de mGal ( $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ).

O princípio de aero-gravimetria é semelhante ao da gravimetria em solo com a adição de passos para extrair as acelerações causadas pela movimentação da aeronave. Os valores buscados são as diferenças entre os valores de aceleração da gravidade esperados pelos modelos e os medidos com precisão de 1 mGal.

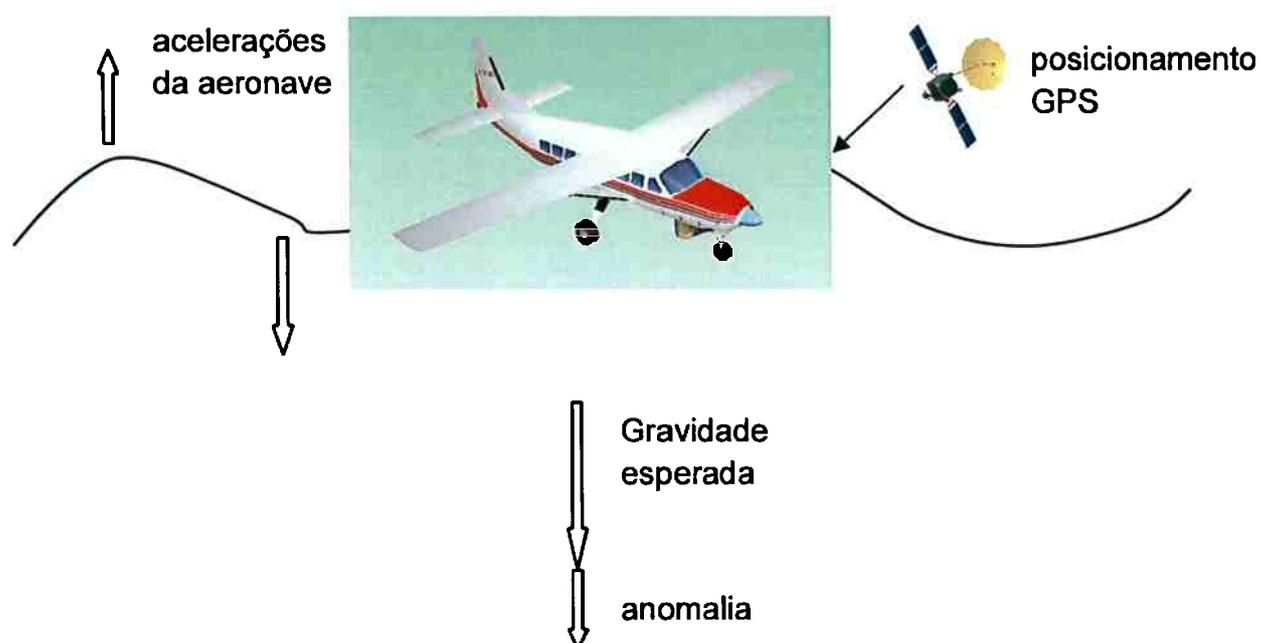


FIGURA 2: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE AEROGRAVIETRIA

A etapa mais difícil em aero-gravimetria é a remoção das acelerações da aeronave. Para tanto, é necessário o uso de sistemas que determinem com precisão a posição da aeronave, para que seja calculado o valor de aceleração cinemática em dado instante que devem ser adicionados ao modelo gravitacional antes da comparação

com os valores medidos pelo(s) acelerômetro(s) para a obtenção da anomalia. Tal posicionamento é determinado usando-se GPS em uma configuração diferencial (DGPS).

Há duas configurações principais de gravímetros, ambas utilizando sistemas de navegação inercial para obter a posição do referencial do sistema de medição. As duas configurações dependem do tipo de estabilização e sistema de navegação inercial disponíveis. Os sistemas de navegação inercial se classificam em dois grandes tipos – o primeiro tipo utiliza-se de uma plataforma estabilizada contendo os sensores de navegação inercial; o segundo tipo, comumente chamado de strap-down ou solidário, utiliza-se de uma matriz de transformação calculada durante o processamento de navegação inercial, e a referência dos sensores acompanha os movimentos da aeronave.

No primeiro tipo, é possível a utilização de um acelerômetro especializado para a medição da aceleração da gravidade, embarcado no sistema de estabilização controlado pelo sistema de navegação inercial. No segundo tipo, a própria tríade de acelerômetros do sistema de navegação inercial é utilizada para realizar a gravimetria, obtendo a componente vertical a partir da transformação de coordenadas. Ambos os tipos requerem a comparação com dados de posicionamento não inercial para a obtenção da gravimetria.

Consideramos neste trabalho o primeiro tipo, para o qual somente a componente vertical de aceleração de gravidade é desejada. Para que as acelerações horizontais não influenciem as medidas gravimétricas, a precisão da estabilização da unidade de navegação inercial deve ser compatível com a requerida para que a gravimetria seja útil.

Após a obtenção das medidas necessárias de aceleração, a obtenção da gravimetria envolve um conjunto bastante completo de técnicas para o processamento de obtenção dos resultados desejados, em especial, o uso de técnicas de processamento digital de sinais, filtragem, identificação e modelagem de sistemas dinâmicos. Em última análise, todas estas técnicas são aplicadas com um objetivo comum de obter uma estimativa precisa de um sinal de erro muito pequeno.

Esta característica da tarefa juntando-se o fato de que tal erro pode ter amplitude correspondente a 1 ppm do sinal total traz desafios incomuns. Entre os desafios maiores está o de combinar os sinais GPS com os sinais dos acelerômetros embarcados usando sistemas casados até a milionésima parte. Outra grande dificuldade está na obtenção do modelo preciso dos acelerômetros usados e do sistema GPS para remoção de efeitos das diferenças entre suas dinâmicas.

O sistema de gravimetria possui desta maneira as seguintes partes principais:

- Tratamento preliminar do sinal GPS (já na forma diferencial) com filtragem anti-aliasing e reamostragem
- Tratamento preliminar do sinal dos acelerômetros gravimétricos com filtragem anti-aliasing e reamostragem
- Filtragem de Kalman do sistema de navegação inercial com obtenção dos sinais de aceleração no referencial dos sensores gravimétricos
- Modelagem do sistema GPS + gravímetro para comparação dos sinais
- Tratamento a posteriori dos sinais de anomalia obtidos

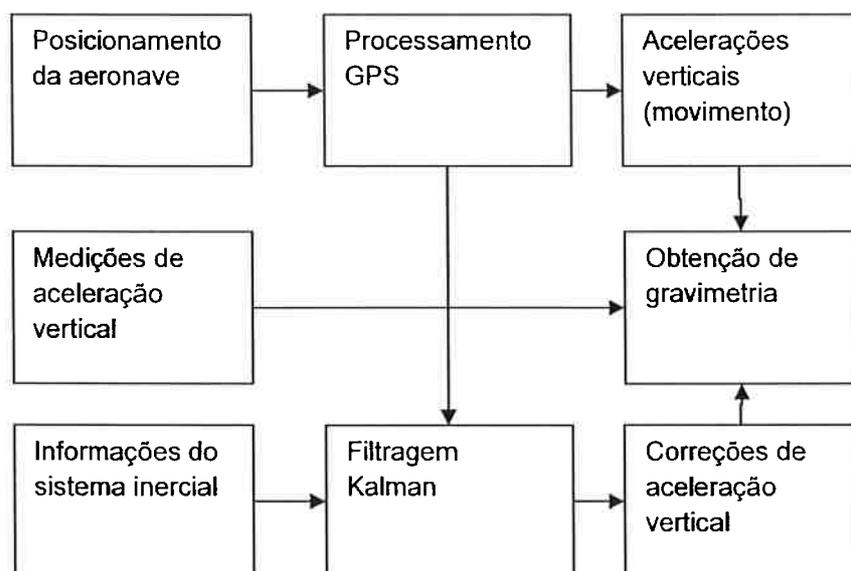


FIGURA 3: AEROGRAVIMETRIA- ETAPAS DE PROCESSAMENTO

## 1.4 Estado da tecnologia

No momento, três grupos principais se dedicam ao desenvolvimento de aerogravimetria. Na universidade de Calgary no Canadá, (GLENNIE e SCWARZ, 1999) do departamento de engenharia geomática, se dedicam ao estudo de sistemas solidários. A abordagem do grupo envolve a identificação do sinal de erro na aceleração vertical com a utilização de filtragem Kalman, ocasionalmente integrada ao sistema de navegação inercial.

Na Alemanha, vários grupos contribuem para o desenvolvimento de sistemas de gravimetria. Entre eles estão a universidade de Munique, a Universidade Técnica de Braunschweig, e a Academia de Ciências da Bavária (KREYE, NIEDERMEIER, *et al.*, 2006). Os trabalhos destes grupos se baseiam nos métodos de regressão para a determinação da anomalia na aceleração vertical. Seus trabalhos procuram verificar a influência das técnicas de processamento nos resultados finais.

Há, por fim, os grupos associados ao instituto Bauman e ao instituto Lomonosov em Moscou, os quais contribuíram para a construção do sistema objeto dos estudos deste trabalho. Na metodologia deste grupo, é usado um sistema de navegação inercial atuando de forma autônoma, sendo o pós-processamento concentrado no tratamento dos sinais GPS e na modelagem dos sensores de aceleração.

Glennie & Schwarz (GLENNIE e SCWARZ, 1999) descrevem trabalhos de pós-processamento em dados obtidos em um levantamento aéreo, feito para comparação de resultados usando-se dois sistemas de navegação inercial tipo solidário. Ambos os sistemas possuem desempenho suficiente para uso em navegação independente de sistemas externos (qualidade inercial), apresentando erros de navegação na faixa de 0.5 a 1.5 milhas náuticas por hora.

Os sistemas descritos usam giroscópios do tipo ring-laser com deriva melhor que 0.003 °/h e ruído melhor que 0.001 °/Hz<sup>1/2</sup>. Os acelerômetros presentes no sistema têm deriva melhor que 25mg e precisão de escala melhor que 25ppm.

Apesar das especificações de elevadíssima precisão, os resultados descritos são piores que os obtidos pelo sistema objeto deste trabalho. A comparação com dados terrestres evidencia erros de 3.5 mGal (equivalente a 10<sup>-5</sup>m/s<sup>2</sup>) e a comparação

entre os dois sistemas estudados mostra discrepâncias de 2.8 a 2.3 mGal de erro RMS para usando filtros passa baixa de processamento com cortes respectivos de 90 s e 120 s para o comprimento de onda.

O sistema em estudo neste trabalho apresenta erro RMS de aproximadamente 1 mGal. O melhor resultado pode ser provavelmente atribuído à etapa de modelagem do acelerômetro usado para medição das acelerações verticais.

O trabalho de Glennie e Schwarz levantou um ponto de extrema importância. Ao comparar os erros em relação ao levantamento terrestre, surge um erro maior que o resultante da comparação entre os dois aerolevantamentos analisados. Os autores sugerem que a fonte seja uma diferença entre os métodos utilizados para o processamento de dados terrestres e aéreos. Isto evidencia a necessidade de que os dados provenientes de fontes diversas devem sofrer tratamento idêntico. A necessidade de igualdade entre as metodologias deve-se aplicar para as partes individuais do processamento, em especial, dados GPS devem passar por processos de filtragem idênticos aos dados inerciais.

Kwon & Jekeli (KWON e JEKELI, 2001) utilizam uma metodologia semelhante à de Glennie e Schwarz, obtendo a perturbação gravimétrica, comparando os sinais de aceleração medidos pelo sistema inercial com os sinais de aceleração obtidos a partir das medidas GPS.

Ainda utilizam filtragem Kalman para identificar o desalinhamento do sistema inercial, os fatores de escala de giroscópios e acelerômetros e suas respectivas derivas. Os resultados descritos mostram forte influência de erros sistemáticos que os autores procuram remover analisando os resíduos obtidos em linhas adjacentes de voo, usando técnicas no domínio da frequência.

Não é possível comparar os resultados obtidos no trabalho de Kwon e Jekeli com os de outros autores, pois não foram apresentados em termos usuais na área de gravimetria, que são tipicamente o erro RMS ou desvio padrão após filtragem passa baixas nos comprimentos padrão de 60, 90 e 120 segundos.

O modelo por Kwon e Jekeli para o filtro de Kalman é o da integração simples dos parâmetros, resultando em um processo de identificação auto-regressiva dos mesmos.

O desalinhamento dos eixos de referência é usualmente considerado através de estados do modelo do sistema de navegação (ROGERS, 2003). No caso de Kwon e Jekeli, um modelo simplificado de desalinhamento foi usado, cujos parâmetros também foram identificados da mesma forma auto-regressiva. Este procedimento é equivalente a determinar o desalinhamento, medindo-se a projeção da aceleração da gravidade nas leituras dos acelerômetros horizontais.

Contrastando com o trabalho de Kwon e Jekeli, a metodologia do presente trabalho prevê a identificação de um número consideravelmente maior de parâmetros. Após vários testes, também ficou clara a necessidade do uso de vários ensaios (voos e testes em solo) e da utilização do modelo completo de navegação para uma determinação confiável dos mesmos. Isto parece dever-se, em parte, à diferença entre os sensores da aceleração vertical destinados à gravimetria e os sensores de aceleração do sistema inercial objeto deste trabalho, requerendo um processo de identificação à parte para os mesmos, e maior precisão na identificação dos desalinhamentos. Estudos preliminares a este trabalho, também deixam clara a superioridade da utilização do modelo completo baseado nas equações de navegação - em particular, a redução do ruído na estimativa de alinhamento permite melhor determinação do desalinhamento do sensor gravimétrico.

Testes com estimação recursiva parecem apresentar dificuldades para preservar o distúrbio gravitacional, que possui uma presença predominante em baixas frequências. O inverso também ocorre, onde o distúrbio gravitacional, que possui característica não gaussiana, perturba a evolução dos valores dos parâmetros identificados. Esta é possivelmente a melhor explicação para as dificuldades com erros sistemáticos encontradas por Kwon e Jekeli.

## 2 Discussão teórica

Nesta seção encontram-se os elementos teóricos do processo de gravimetria utilizado. Na primeira subseção, descrevem-se as equações envolvidas no sistema de navegação inercial. Estas se subdividem em dois grupos principais. No primeiro grupo, encontram-se as equações de navegação para o modelo ideal de sistema de navegação inercial. No segundo, encontram-se as do modelo de erros. Ambos agregados procuram modelar o comportamento do sistema real. Um filtro de Kalman estendido é usado para identificar o estado de erro da plataforma. O modelo ideal prossegue excitado pelas acelerações medidas pelo sistema GPS, sem qualquer correção nas variáveis de estado.

Em seguida, descreve-se a teoria utilizada no processo de calibração do sistema de navegação. Este processo usa dados de ensaios realizados seja em voo, seja em solo para identificar o valor das constantes paramétricas usadas no modelo de erros.

Finalmente chega-se à discussão sobre o processamento gravimétrico. Esta subseção é dividida em duas partes. Na primeira parte, são discutidos os elementos de filtragem dos sinais de GPS e acelerômetro gravimétrico para que seja realizada uma combinação de ambos os tipos de dados sem distorções de frequência. Na segunda parte, a metodologia para a determinação precisa de um modelo linear dinâmico é descrita. Embora baseada em métodos clássicos de modelagem no campo de frequência, o método como um todo foi construído de forma a evitar dificuldades que surgem devido à alta precisão requerida.

### 2.1 Navegação inercial

Esta sessão descreve as equações utilizadas pelo sistema de navegação estudado. A forma final das equações, bem como uma breve discussão teórica é delineada no manual do sistema de navegação. Como parte do trabalho, as equações foram implementadas e estudadas em detalhes para avaliação dos possíveis caminhos para a implementação de um processo de filtragem.

A implementação das equações matemáticas foi realizada através do sistema **Mathematica**. Neste ambiente, foram derivadas as linearizações das equações de estado e obtidas as matrizes para a implementação do filtro de Kalman usado.

As equações e matrizes foram convertidas para ambiente **matlab**, onde os modelos foram testados extensivamente.

O sistema de navegação inercial tem como objetivo obter a posição do sistema no elipsóide terrestre através da integração dos sinais de aceleração. Para tanto, são necessários giroscópios que mantenham os acelerômetros posicionados em alinhamento com os eixos de coordenadas terrestres locais (Local Level, Local North - LLLN), ou que permitam calcular uma matriz de transformações de coordenadas que posicione os eixos dos acelerômetros em relação ao sistema de coordenadas.

De modo geral, há dois tipos de sistemas de navegação inercial. No primeiro tipo, os acelerômetros são posicionados por um sistema mecânico, de tal forma que pelo menos o eixo vertical esteja alinhado com a vertical local. No segundo tipo, o sistema é solidário com o veículo e não há mecanização de posicionamento, utilizando-se transformações de sistemas de coordenadas para efetuar o papel da mecanização de alinhamento de sensores. O primeiro é chamado de sistema mecanizado, enquanto o segundo é chamado de **strap-down**.

A plataforma em estudo é do tipo "**mecanizada**". Este grupo é ainda subdividido conforme a liberdade de alinhamento dos eixos horizontais. A plataforma em estudo é do tipo "azimute semi-livre" ou "wandering azimuth" (SIOURIS, 1993, p. 46), visto que o alinhamento é mantido mandando somente comandos de rotação nos eixos horizontais. O comando de rotação no eixo vertical visa compensar somente a projeção da rotação terrestre.

O sistema de gravimetria em estudo foi construído utilizando-se um sistema de navegação modelo I21 fabricado pela RPZ, o qual foi modificado para que a mesa de sensores inerciais pudesse realizar também a tarefa de alinhamento de sensores.

### 2.1.1 Símbolos utilizados

Abaixo, encontram-se os símbolos utilizados nesta seção.

$h(t)$	altitude de voo (navegação ideal)
$\delta h(t)$	erro em altitude (modelo de erros)
$h_o(t)$	altitude de voo (saída com erros)
$v_i(t)$	velocidades no referencial LLLN
$\delta v_{i,j}(t)$	erros de velocidade
$v_{o,i}(t)$	velocidade LLLN com erros
$\lambda(t)$ ,	longitude (navegação ideal)
$\xi(t)$ ,	azimute (navegação ideal)
$\phi(t)$ ,	latitude (navegação ideal)
$\delta \lambda(t)$ ,	erro em longitude (modelo de erros)
$\delta \xi(t)$ ,	erro azimutal (modelo de erros)
$\delta \phi(t)$ ,	erro em latitude (modelo de erros)
$\lambda_o(t)$ ,	longitude com erros
$\xi_o(t)$ ,	azimute com erros modelados
$\phi_o(t)$ ,	latitude com erros modelados
$b_{i,j}(t)$	componentes da transformação de coordenadas
$a_i(t)$ ,	acelerações no referencial LLLN
$w_i(t)$	velocidades angulares da plataforma LLLN
$\delta w_i(t)$	erro nas velocidades angulares da plataforma LLLN
$r_{i,j}(t)$	vetor de curvatura
$\theta_i(t)$	desalinhamento de coordenadas (computacional)

$\psi_i(t)$	desalinhamento da plataforma (inercial)
$\delta a_{0_i}(t)$	derivas de acelerômetros (referência da plataforma)
$\delta \omega_i(t)$	deriva dos giroscópios LLLN
$\delta \omega_{0_i}(t)$	deriva de giroscópios (referência da plataforma)
$d_{ij}(t)$	constantes de correção dos giroscópios
$k_{ij}(t)$	constantes de correção
$\mu_{ij}(t)$	constantes de desalinhamento de acelerômetros

### 2.1.2 Os sistemas de referência

O sistema de navegação inercial, ao calcular sua localização geográfica, deve posicionar a mesa de sensores (no caso do sistema mecanizado), alinhando o eixo azimutal com a vertical local. Para isto, deve calcular com exatidão os momentos angulares que sofrem os eixos de referência.

Isto é realizado com base nas velocidades integradas a partir dos acelerômetros no sistema referencial LLLN (Local Level, Local North). Para tanto, deve-se conhecer o raio de curvatura terrestre com precisão suficiente para não incorrer em erros de alinhamento do sistema inercial.

As equações usadas no modelo em questão são as mesmas usadas no sistema I21. Estas equações foram estudadas para avaliar as aproximações utilizadas. Os raios de curvatura são obtidos a partir da equação (5) descrevendo uma casca elipsoidal.

A figura 4 mostra o sistema de coordenadas utilizado nas equações do elipsóide e ilustra a situação da direção do raio da terra em um ponto de latitude  $\phi$  e longitude  $\lambda$ . A mesma figura mostra a relação entre os diversos sistemas de coordenadas relevantes à navegação inercial.

A figura 5 mostra os diversos sistemas de coordenadas relevantes às equações de navegação inercial. No ponto O, situado à latitude 0 e longitude 0, encontra-se o

sistema de eixos com direções paralelas ao raio terrestre (direção 1) ao equador (direção 2) e ao eixo de rotação terrestre (direção 3). A este sistema é aplicada uma permutação de eixos e duas rotações  $\lambda$  e  $\phi$  (nesta ordem), chegando-se ao sistema ENU (east-north-up) no ponto P, onde se encontra o sistema de navegação inercial, com longitude  $\lambda$  e latitude  $\phi$ . Este é um sistema de nível local e norte local (LLLN), com direções dos eixos nas direções leste (East), norte (North) e para cima (Up) respectivamente.

Finalmente, aplicando-se a rotação  $\xi$ , chega-se ao sistema 123 no ponto P, que é a referência dos sensores inerciais da plataforma (estabilizada ou não) e possui a direção 3 idealmente alinhada com a direção U, ou seja, em condições ideais estaria alinhado verticalmente.

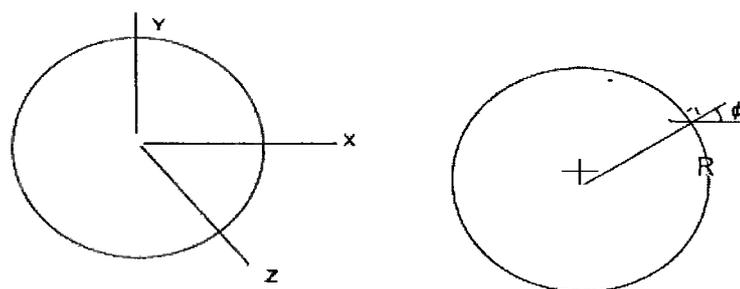


FIGURA 4 ELIPSÓIDE TERRESTRE COM SEÇÃO MERIDIONAL

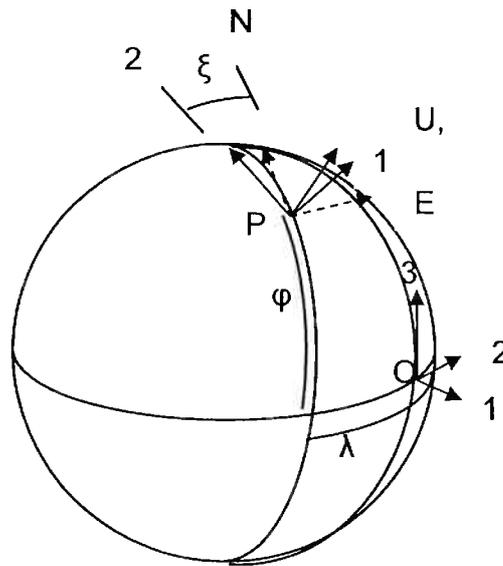


FIGURA 5 SISTEMAS DE COORDENADAS

A primeira transformação pode ser representada pela matriz  $R_\lambda$ , a segunda e  $R_\phi$  e a terceira  $R_\xi$ . Estas matrizes possuem as seguintes formas

$$R_\xi = \begin{pmatrix} \cos(\xi(t)) & \sin(\xi(t)) & 0 \\ -\sin(\xi(t)) & \cos(\xi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda(t)) & \cos(\lambda(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\lambda(t)) & \sin(\lambda(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

### 2.1.3 O elipsóide terrestre e os raios de curvatura

O modelo elipsoidal da superfície terrestre é a referência para todas as medidas de posição em latitude longitude e altitude. As equações de navegação inercial são

integradas ao longo do elipsóide de referência. Além do elipsóide, também se faz necessário calcular o raio de curvatura terrestre para que o sistema possa calcular os momentos angulares e integrar as rotações necessárias nas matrizes de transformação entre os sistemas de referência. Nesta seção, são demonstradas as expressões de cálculo do raio de curvatura utilizados nas equações de navegação.

A equação para casca elipsoidal do globo terrestre tem a forma de uma equação de superfície do tipo

$$G(x,y,z)=0 \quad (4)$$

que assume a forma

$$G(x, y, z) = a^2 - x^2 + \frac{y^2}{(1-f)^2} + z^2 \quad (5)$$

onde  $a$  é o diâmetro maior do elipsóide terrestre e  $f$  a excentricidade do elipsóide (a diferença entre o diâmetro maior e o diâmetro menor, relativa ao diâmetro maior). A matriz Hessiana com relação às variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  é dada por.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1-f)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

O raio de curvatura ao longo da direção  $v$  pode ser obtido a partir da expressão

$$W = \frac{\nabla G}{|\nabla G|^2} \times (H_{\text{plat}} v) \quad (7)$$

Onde  $\nabla G$  é o gradiente de  $G$ , alinhado à vertical do sistema de eixos ENU, e  $|\nabla G|$  é o módulo do gradiente.  $H_{\text{plat}}$  é a expressão da matriz Hessiana  $H$  no sistema de coordenadas da plataforma como mostra a figura 5.

$$H_{\text{plat}} = R_{\xi} R_{\phi} H R_{\phi}^T R_{\xi}^T \quad (8)$$

A projeção de um ponto da superfície da terra na latitude  $\phi$  sobre o plano equatorial é dada por

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{a \cos(\phi)}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi) e_2}} \quad (9)$$

A expressão para a projeção do mesmo ponto no eixo de rotação é dada por

$$y = \frac{a \sin(\phi) (1 - e_2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi) e_2}} \quad (10)$$

onde

$$e_2 = 2f - f^2 \quad (11)$$

sendo  $f$  é a excentricidade da forma elipsoidal da terra.

Calculando o modulo do gradiente de  $G$  em (5) obtemos

$$|\nabla f| = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\phi(t)) e_2}}{2a} \quad (12)$$

Como o gradiente está alinhado com a vertical, o produto vetorial em (7) pode ser representado pela seguinte forma matricial

$$\frac{\hat{\nabla} f}{|\nabla f|} \times \circ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{1 - e_2 \sin^2(\phi(t))}}{2a} & 0 \\ \frac{\sqrt{1 - e_2 \sin^2(\phi(t))}}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Realizando-se as substituições em (8) e (7), obtém-se uma matriz de transformação que dá a velocidade angular em função da velocidade dada no sistema de referencia dos sensores inerciais. Utilizando-se de uma aproximação de primeira ordem em  $e_2$ , obtém-se a matriz  $R_i$ , cujos elementos são

$$R_{i,1} = -Gf \cos^2(\phi(t)) \sin(2\xi(t)) e_2$$

$$R_{i,2} = -2Gf \cos^2(\phi(t)) - 2Gf \cos^2(\xi(t)) e_2 \cos^2(\phi(t)) - 2Gf \sin^2(\phi(t)) - \frac{h(t)}{a^2}$$

$$R_{i,3} = -Gf \cos(\xi(t)) \sin(2\phi(t)) e_2$$

$$\begin{aligned}
R_{i_{2,1}} &= 2 Gf \cos^2(\phi(t)) e_2 \sin^2(\xi(t)) + 2 Gf + \frac{h(t)}{a^2} \\
R_{i_{2,2}} &= Gf \cos^2(\phi(t)) \sin(2\xi(t)) e_2 \\
R_{i_{2,3}} &= Gf \sin(\xi(t)) \sin(2\phi(t)) e_2 \\
R_{i_{3,1}} &= 0 \\
R_{i_{3,2}} &= 0 \\
R_{i_{3,3}} &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Os termos multiplicativos de  $v_3$  estão relacionados com a pressuposição de que a definição do vetor normal obedece a equação (5) para qualquer altitude. Na realidade, uma velocidade vertical não causa rotação neste referencial e portanto os termos correspondentes devem ser zerados.

Com isto obtêm-se as equações de rotação usadas no sistema em estudo

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \left( \frac{h(t)}{a^2} + \left( \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} - \frac{\cos^2(\xi(t)) \cos^2(\phi(t))}{a} \right) e_2 - \frac{1}{a} \right) v_2(t) - \frac{\cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t)) e_2}{a} v_1(t) \\
w_2(t) &= \frac{\cos(\xi(t)) \sin(\xi(t)) e_2 v_2(t) \cos^2(\phi(t))}{a} + \left( -\frac{h(t)}{a^2} + \left( \frac{\cos^2(\phi(t)) \sin^2(\xi(t))}{a} - \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} \right) e_2 + \frac{1}{a} \right) v_1(t) \\
w_3(t) &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

O sistema referencial em que se deseja conhecer o raio da terra não está alinhado na direção norte-sul, mas com a mesa de sensores, posicionada na horizontal a um ângulo azimutal  $\xi$  conforme mostra a figura 5.

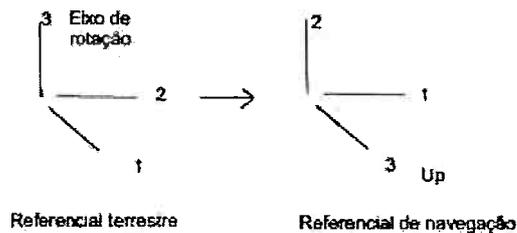


FIGURA 6: PRIMEIRA TRANSPOSIÇÃO DE EIXOS FIXOS À TERRA PARA EIXOS EM COORDENADA LOCAL

A transformação de sistema de coordenadas do referencial terrestre para o referenciada plataforma é dada pela aplicação de três transformações ao longo de latitude, longitude e azimute da forma  $R_\xi \cdot R_\phi \cdot R_\lambda$  que resulta na seguinte matriz de cossenos diretores (MCD):

$$\begin{pmatrix} -\cos(\xi(t)) \sin(\lambda(t)) - \cos(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) \sin(\phi(t)) & \cos(\lambda(t)) \cos(\xi(t)) - \sin(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) \sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \sin(\xi(t)) \\ \sin(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) - \cos(\lambda(t)) \cos(\xi(t)) \sin(\phi(t)) & -\cos(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) - \cos(\xi(t)) \sin(\lambda(t)) \sin(\phi(t)) & \cos(\xi(t)) \cos(\phi(t)) \\ \cos(\lambda(t)) \cos(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \sin(\lambda(t)) & \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (16)$$

esta matriz pode ser usada em lugar dos valores de latitude, longitude e azimute para definir a posição do sistema inercial. Podemos definir variáveis no lugar dos termos da matriz de cossenos diretores. Com isto, obtemos a matriz  $B_{ij}$  contendo as variáveis assim definidas

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{1,1}(t) & b_{1,2}(t) & b_{1,3}(t) \\ b_{2,1}(t) & b_{2,2}(t) & b_{2,3}(t) \\ b_{3,1}(t) & b_{3,2}(t) & b_{3,3}(t) \end{pmatrix} \quad (17)$$

A equivalência entre as matrizes em (16) e (17) leva ao seguinte conjunto de expressões para os elementos  $b_{ij}$  da matriz  $B$

$$\begin{aligned} b_{1,1}(t) &= -\cos(\xi(t)) \sin(\lambda(t)) - \cos(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) \sin(\phi(t)) \\ b_{1,2}(t) &= \cos(\lambda(t)) \cos(\xi(t)) - \sin(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) \sin(\phi(t)) \\ b_{1,3}(t) &= \cos(\phi(t)) \sin(\xi(t)) \\ b_{2,1}(t) &= \sin(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) - \cos(\lambda(t)) \cos(\xi(t)) \sin(\phi(t)) \\ b_{2,2}(t) &= -\cos(\lambda(t)) \sin(\xi(t)) - \cos(\xi(t)) \sin(\lambda(t)) \sin(\phi(t)) \\ b_{2,3}(t) &= \cos(\xi(t)) \cos(\phi(t)) \\ b_{3,1}(t) &= \cos(\lambda(t)) \cos(\phi(t)) \\ b_{3,2}(t) &= \cos(\phi(t)) \sin(\lambda(t)) \\ b_{3,3}(t) &= \sin(\phi(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

Desta forma, dada a matriz  $B$ , os valores das coordenadas podem ser determinados pelas expressões

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sin^{-1}(b_{3,3}(t)) \\ \xi(t) &= \text{atan2}(b_{1,3}(t), b_{2,3}(t)) \\ \lambda(t) &= \sin^{-1}\left(\frac{b_{3,2}(t)}{\sqrt{1-b_{3,3}(t)^2}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Há apenas três graus de liberdade em uma transformação de eixos. O número de termos em uma matriz de cossenos diretores indica que pelo menos 6 de seus elementos podem ser descritos por três outros. Três termos podem ser imediatamente eliminados pela ortogonalidade dos vetores que compõe a MCD.

$$b_3(t) = b_1(t) \times b_2(t) \quad (20)$$

resultando na relação explícita entre os termos da MCD

$$\begin{aligned} b_{3,1}(t) &= b_{1,2}(t)b_{2,3}(t) - b_{1,3}(t)b_{2,2}(t) \\ b_{3,2}(t) &= b_{1,3}(t)b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t)b_{2,3}(t) \\ b_{3,3}(t) &= b_{1,1}(t)b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t)b_{2,1}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

As 3 restrições de modulo unitário dos vetores da MCD resultam na eliminação de mais duas variáveis, havendo redundância entre uma destas restrições e o produto vetorial em 20.

A aceleração medida pelos acelerômetros embarcados na plataforma é influenciada pela aceleração da gravidade local, cuja direção é considerada normal e possui valor conhecido até certo ponto, havendo modelos como o IAG-1967, que dá o valor do modulo como função da latitude

$$g_{\text{norm}} = 9.78032(0.0053024 \sin^2(\phi(t)) - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2(2\phi(t)) + 1) - 3.08 \times 10^{-6} h(t) \quad (22)$$

Ainda se faz necessário exprimir a distância R do ponto de navegação ao eixo de rotação terrestre, normal à superfície do elipsóide de referência. Este vetor é usado no cálculo das acelerações de Coriolis. Vale notar que ele não pode ser usado para o cálculo do raio de curvatura. A expressão deste vetor é

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 b_{3,3}(t)^2}} + h(t) \end{pmatrix} \quad (23)$$

#### 2.1.4 Equações de Navegação inercial

Sistemas de navegação inercial procuram obter sua posição sobre a superfície terrestre de forma autônoma, sem o auxílio de referências externas. Para tanto, utilizam-se dos sinais de acelerômetros e giroscópios. Giroscópios são usados tipicamente para estabilizar a posição horizontal do sistema, seja em uma plataforma virtualizada de um sistema solidário, seja em uma plataforma física sistema mecânico real.

O presente estudo foi realizado sobre um sistema mecanizado, sendo os giros utilizados em uma malha de estabilização analógica. Desta forma, o sistema permanece em uma posição estável em relação a um sistema de referência inercial, a menos dos erros característicos aos giroscópios. A posição do sistema é determinada a partir da integração dos sinais de aceleração considerando os modelos da superfície terrestre e da aceleração da gravidade.

A integração é realizada computacionalmente. Como resultado da alteração da posição sobre a superfície terrestre e da rotação terrestre, o sistema de referência inercial da plataforma deve sofrer uma rotação para manter o alinhamento com o nível local. Para tanto, a referência malha de estabilização que escraviza a plataforma aos giroscópios deve ser atualizada. Tal referência está vinculada à orientação do momento angular de referência interno aos mesmos. Para modificar a referência, atuadores mecânicos aplicam torques às massas girantes dos giroscópios que mudam sua orientação inercial. Esta reorientação é imediatamente replicada através do sistema de estabilização da plataforma.

Em resumo, o sistema de navegação recebe os sinais dos acelerômetros, realiza a integração dos mesmos, atualizando a posição conhecida e, com esta, enviando comandos de mudança de referência giroscópica para o reposicionamento da plataforma realinhando-a com o horizonte local.

Em realidade, o sistema de estabilização não recebe uma posição de referência, mas uma atualização na forma de rotações nos eixos da plataforma ao longo do plano horizontal da mesma. Desta forma, só existe interesse em calcular a velocidade angular do sistema projetada nestes dois eixos.

A equação geral de navegação do sistema inercial, no sistema de referência da plataforma inercial (sensores inerciais), é dada por

$$-A(t) + (w(t) + 2 W(t)) \times V(t) + W(t) \times (W(t) \times H(t)) + V'(t) = 0 \quad (24)$$

sendo  $W(t)$  a rotação terrestre,  $w(t)$  a rotação do sistema de referência da plataforma em relação ao sistema de referência terrestre e  $V(t)$  o vetor de velocidades. Esta equação relaciona o sinal medido pelos acelerômetros com a variação de velocidade no sistema referencial da plataforma, que sofre rotação  $w$  devido ao deslocamento

sobre o elipsóide terrestre e rotação  $W$  da terra ao redor de seu eixo. O vetor  $H(t)$  dado por

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

sendo  $h(t)$  a altitude de voo da aeronave,  $A(t)$  o vetor de acelerações medidas pelos acelerômetros subtraído da gravidade normal

$$A(t) = A_{\text{inercial}}(t) - g_{\text{norm}} \quad (26)$$

com  $g_{\text{norm}}$  dado pela expressão (22), a qual inclui o efeito da aceleração de Coriolis referente à rotação terrestre dada por

$$W(t) \times (W(t) \times R_0(t)) \quad (27)$$

Com  $R_0(t)$  dado pela expressão (23) fazendo  $h(t)$  nulo. Chamando de  $\Omega$  o módulo da rotação angular terrestre, a equação (24) assume a seguinte forma escalar

$$h(t) b_{1,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 + 2 v_3(t) b_{2,3}(t) \Omega - 2 v_2(t) b_{3,3}(t) \Omega - a_1(t) + v_3(t) w_2(t) - v_2(t) w_3(t) + v_1'(t) = 0 \quad (28)$$

$$h(t) b_{2,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 - 2 v_3(t) b_{1,3}(t) \Omega + 2 v_1(t) b_{3,3}(t) \Omega - a_2(t) - v_3(t) w_1(t) + v_1(t) w_3(t) + v_2'(t) = 0 \quad (29)$$

No sistema utilizado, a posição vertical não é utilizada, assumindo-se

$$v_3'(t) = 0 \quad (30)$$

Utilizando a equação (7), cuja forma escalar é dada pela expressão (15), obtém-se os valores de  $w$  para a realização da atualização da malha de estabilização.

### 2.1.5 Modelo de erros do sistema inercial

Os erros dos sensores inerciais devem obrigatoriamente ser considerados para que se obtenha a posição real da plataforma em um dado instante. Em um sistema onde

sinais são recebidos e integrados computacionalmente (equação diferencial de velocidade) e em seguida integrados mecanicamente (modificação incremental da referência inercial), é de se esperar que os erros aumentem com o tempo.

Felizmente, os erros de posicionamento vertical são contidos pela existência da força da gravidade que oferece uma referência externa. A integral dupla intrínseca ao sistema causa o mesmo a oscilar em torno da vertical, com um período distinto de 84,4 minutos, resultante dos valores de aceleração da gravidade e do raio de curvatura terrestre. Este pólo aparece na linearização do modelo e no comportamento do mesmo.

Os erros dos giroscópios podem ser modelados por uma deriva constante  $\delta w_0$  e por um erro de rotação angular pequeno dado por um vetor  $\psi(t)$ . O produto vetorial  $\psi(t) \times$  representa bem a transformação representada por pequenas rotações no sistema de coordenadas. Há ainda um erro  $\delta\omega(t)$  na velocidade angular fornecida à referência de estabilização da plataforma. No referencial rotativo da plataforma, estes se relacionam por:

$$\psi'(t) = -(\omega(t) + W(t)) \times \psi(t) + \delta\omega(t) \quad (31)$$

Tornando explícitas as componentes dos vetores

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\delta\omega(t) = \begin{pmatrix} \delta\omega_1(t) \\ \delta\omega_2(t) \\ \delta\omega_3(t) \end{pmatrix} \quad (34)$$

A expressão (31) assume a seguinte forma escalar:

$$\begin{aligned} -\delta\omega_1(t) - \omega_3(t)\psi_2(t) + \omega_2(t)\psi_3(t) + \Omega\psi_3(t)b_{2,3}(t) - \Omega\psi_2(t)b_{3,3}(t) + \psi_1'(t) &= 0 \\ -\delta\omega_2(t) + \omega_3(t)\psi_1(t) - \omega_1(t)\psi_3(t) - \Omega\psi_3(t)b_{1,3}(t) + \Omega\psi_1(t)b_{3,3}(t) + \psi_2'(t) &= 0 \\ -\delta\omega_3(t) - \omega_2(t)\psi_1(t) + \omega_1(t)\psi_2(t) + \Omega\psi_2(t)b_{1,3}(t) - \Omega\psi_1(t)b_{2,3}(t) + \psi_3'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Além da velocidade angular de deriva dos giroscópios, há erros associados ao acionamento/leitura relacionados às medidas e posicionamento do eixo de rotação dos mesmos. Estes erros podem ser modelados por fatores de escala e desalinhamento dos eixos de sensibilidade, dados pela matriz de parâmetros  $D$ .

Outra característica importante dos giroscópios é a influência das acelerações na posição do eixo de rotação de seus rotores, chamada de desbalanceamento. As acelerações causam um torque que produz uma deriva que é parte importante do valor expresso em  $\delta\omega(t)$ . A influência destas acelerações é dada pela matriz de parâmetros  $K$ .

Com estas duas últimas considerações, é possível formar a expressão que descreve a dinâmica da variável  $\delta\omega(t)$ , dada por:

$$\delta\omega(t) = D(\delta\omega_0 + w(t) + W(t) + \delta\omega_0(t)) + K A(t) + \delta\omega_0(t) \quad (36)$$

Tomando

$$\delta\omega_0 = \begin{pmatrix} \delta\omega_{01} \\ \delta\omega_{02} \\ \delta\omega_{03} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1}(t) & d_{1,2}(t) & d_{1,3}(t) \\ d_{2,1}(t) & d_{2,2}(t) & d_{2,3}(t) \\ d_{3,1}(t) & d_{3,2}(t) & d_{3,3}(t) \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{1,1}(t) & k_{1,2}(t) & k_{1,3}(t) \\ k_{2,1}(t) & k_{2,2}(t) & k_{2,3}(t) \\ k_{3,1}(t) & k_{3,2}(t) & k_{3,3}(t) \end{pmatrix} \quad (39)$$

a equação (36) assume a seguinte forma escalar:

$$\delta\omega_1(t) = \delta\omega_{01}(t) + w_1(t) d_{1,1}(t) + \Omega b_{1,3}(t) d_{1,1}(t) + w_2(t) d_{1,2}(t) + \Omega b_{2,3}(t) d_{1,2}(t) + \Omega(b_{1,1}(t) b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t) b_{2,1}(t)) d_{1,3}(t) + a_1(t) k_{1,1}(t) + a_2(t) k_{1,2}(t) + a_3(t) k_{1,3}(t) \quad (40)$$

$$\delta\omega_2(t) = \delta\omega_{02}(t) + w_1(t) d_{2,1}(t) + \Omega b_{1,3}(t) d_{2,1}(t) + w_2(t) d_{2,2}(t) + \Omega b_{2,3}(t) d_{2,2}(t) + \Omega(b_{1,1}(t) b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t) b_{2,1}(t)) d_{2,3}(t) + a_1(t) k_{2,1}(t) + a_2(t) k_{2,2}(t) + a_3(t) k_{2,3}(t) \quad (41)$$

$$\delta\omega_3(t) = \delta\omega_{03}(t) + w_1(t) d_{3,1}(t) + \Omega b_{1,3}(t) d_{3,1}(t) + w_2(t) d_{3,2}(t) + \Omega b_{2,3}(t) d_{3,2}(t) + \Omega(b_{1,1}(t) b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t) b_{2,1}(t)) d_{3,3}(t) + a_1(t) k_{3,1}(t) + a_2(t) k_{3,2}(t) + a_3(t) k_{3,3}(t) \quad (42)$$

Os acelerômetros sofrem três tipos principais de erro, semelhantes aos ocorrentes em giroscópios. O primeiro tipo é a deriva, modelada por um valor constante  $\delta a_0$ . O segundo é o erro de escala dos sensores. O terceiro, é o erro de desalinhamento dos acelerômetros. Assumindo-se estes erros serem pequenos em magnitude, eles podem ser descritos por uma única matriz de erros de escala e desalinhamento  $M$ . A equação do modelo de erro dos acelerômetros é dada por:

$$\delta a(t) = \delta a_0 + M A(t) \quad (43)$$

Tomando-se

$$\delta a(t) = \begin{pmatrix} \delta a_1(t) \\ \delta a_2(t) \\ \delta a_3(t) \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\delta a_0 = \begin{pmatrix} \delta a_{01} \\ \delta a_{02} \\ \delta a_{03} \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{1,1}(t) & \mu_{1,2}(t) \\ \mu_{2,1}(t) & \mu_{2,2}(t) \end{pmatrix} \quad (46)$$

a equação (43) assume a seguinte forma escalar:

$$\delta a_1(t) = \delta a_{0,1}(t) + a_1(t) \mu_{1,1}(t) + a_2(t) \mu_{1,2}(t) \quad (47)$$

$$\delta a_2(t) = \delta a_{0,2}(t) + a_1(t) \mu_{2,1}(t) + a_2(t) \mu_{2,2}(t) \quad (48)$$

$$\delta a_3(t) = 0 \quad (49)$$

Dos diversos erros, surge um erro computacional de coordenada que pode ser modelado, se o mesmo for pequeno, por uma transformação adicional nos eixos de coordenadas locais dada por uma pequena rotação. Esta rotação é representada por um vetor  $\theta(t)$ , e deve ser usado para corrigir as medidas dos sensores inerciais da mesma forma que o desalinhamento  $\psi(t)$  da plataforma em relação a uma plataforma ideal. O produto vetorial  $\theta(t) \times$  representa bem a transformação representada por rotações desta magnitude no sistema de coordenadas.

Os erros refletem nas variáveis de estado, que se desviam de um modelo ideal. Os desvios das variáveis de estado das equações do modelo ideal são as variáveis de estado restantes do modelo de erros. Estas variáveis são os desvios de velocidades horizontais do sistema  $\delta v(t)$ . Com isto, a equação de erros de navegação é dada por:

$$-(\theta(t) \times W(t)) \times (V(t) + \delta V(t)) + (w(t) + 2W(t)) \times \delta V(t) + W(t) \times (W(t) \times \delta H(t)) + \theta(t) \times (A(t) + G(t)) + \psi(t) \times (A(t) + G(t)) - \delta a(t) - \delta \zeta(t) + \delta V'(t) = 0 \quad (50)$$

que assume a seguinte forma escalar

$$\begin{aligned} & \delta h(t) b_{1,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 - v_2(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega - \delta v_2(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega - v_3(t) \theta_3(t) b_{1,3}(t) \Omega - \\ & \delta v_3(t) \theta_3(t) b_{1,3}(t) \Omega + 2 \delta v_3(t) b_{2,3}(t) \Omega + v_2(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega + \delta v_2(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega - \\ & 2 \delta v_2(t) b_{3,3}(t) \Omega + v_3(t) \theta_1(t) b_{3,3}(t) \Omega + \delta v_3(t) \theta_1(t) b_{3,3}(t) \Omega - \delta a_1(t) - w_3(t) \delta v_2(t) + w_2(t) \delta v_3(t) + \\ & (g_{norm} + a_3(t)) \theta_2(t) - a_2(t) \theta_3(t) + g_{norm} \psi_2(t) + a_3(t) \psi_2(t) - a_2(t) \psi_3(t) + \delta v_1'(t) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \delta h(t) b_{2,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 - 2 \delta v_3(t) b_{1,3}(t) \Omega + v_1(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega + \delta v_1(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega - \\ & v_1(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega - \delta v_1(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega - v_3(t) \theta_3(t) b_{2,3}(t) \Omega - \delta v_3(t) \theta_3(t) b_{2,3}(t) \Omega + \\ & 2 \delta v_1(t) b_{3,3}(t) \Omega + v_3(t) \theta_2(t) b_{3,3}(t) \Omega + \delta v_3(t) \theta_2(t) b_{3,3}(t) \Omega - \delta a_2(t) + w_3(t) \delta v_1(t) - w_1(t) \delta v_3(t) - \\ & (g_{norm} + a_3(t)) \theta_1(t) + a_1(t) \theta_3(t) - g_{norm} \psi_1(t) - a_3(t) \psi_1(t) + a_1(t) \psi_3(t) + \delta v_2'(t) = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Com  $g_{norm}$  definido pela expressão (22). O erro de velocidade incorre em um erro de velocidade angular  $\delta w(t)$  também calculado através da expressão (7) substituindo-se  $V$  por  $\delta V$ , dando:

$$\begin{aligned} \delta w_1(t) &= \left( \frac{h(t)}{a^2} + e2 \left( \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} - \frac{\cos^2(\xi(t)) \cos^2(\phi(t))}{a} \right) - \frac{1}{a} \right) \delta v_2(t) - \frac{e2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t)) \delta v_1(t)}{a} \\ \delta w_2(t) &= \frac{e2 \cos(\xi(t)) \sin(\xi(t)) \delta v_2(t) \cos^2(\phi(t))}{a} + \left( -\frac{h(t)}{a^2} + e2 \left( \frac{\cos^2(\phi(t)) \sin^2(\xi(t))}{a} - \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} \right) + \frac{1}{a} \right) \delta v_1(t) \end{aligned} \quad (53)$$

Com os valores de  $\delta w(t)$ , é possível estabelecer a expressão para o erro de coordenada:

$$\theta'(t) = \delta w(t) - w(t) \times \theta(t) \quad (54)$$

Tomando

$$\begin{aligned} r_{i,1}(t) &= -\frac{e2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t))}{a} \\ r_{i,2}(t) &= \left( \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} - \frac{\cos^2(\xi(t)) \cos^2(\phi(t))}{a} \right) e2 + \frac{h(t)}{a^2} - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{1,1}(t) &= \left( \frac{\cos^2(\phi(t)) \sin^2(\xi(t))}{a} - \frac{\sin^2(\phi(t))}{2a} \right) e_2 + \frac{1}{a} - \frac{h(t)}{a^2} \\ \dot{r}_{1,2}(t) &= \frac{e_2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t))}{a} \end{aligned}$$

podemos reescrever a equação (54) na seguinte forma escalar

$$\begin{aligned} -w_3(t) \theta_2(t) + w_2(t) \theta_3(t) - \delta v_1(t) \dot{r}_{1,1}(t) - \delta v_2(t) \dot{r}_{1,2}(t) + \theta_1'(t) &= 0 \\ w_3(t) \theta_1(t) - w_1(t) \theta_3(t) - \delta v_1(t) \dot{r}_{2,1}(t) - \delta v_2(t) \dot{r}_{2,2}(t) + \theta_2'(t) &= 0 \\ -w_2(t) \theta_1(t) + w_1(t) \theta_2(t) + \theta_3'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

As equações (31), (50) e (23) formam as equações diferenciais de estado do modelo de erros, contendo 8 variáveis:

$$\begin{aligned} &\delta v_1(t) \\ &\delta v_2(t) \\ &\theta_1(t) \\ &\theta_2(t) \\ &\theta_3(t) \\ &\psi_1(t) \\ &\psi_2(t) \\ &\psi_3(t) \end{aligned}$$

### 2.1.6 Aprimoramento da expressão de desalinhamento dos acelerômetros

As rotações descritas pelos vetores  $\psi(t)$  e  $\theta(t)$  são aplicadas a vetores de aceleração ou posição através de um produto vetorial que pode ser convertido em produto matricial usando-se matrizes anti-simétricas. As matrizes respectivas  $\psi_a$  e  $\theta_a$  são

$$\psi_a = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3(t) & \psi_2(t) \\ \psi_3(t) & 0 & -\psi_1(t) \\ -\psi_2(t) & \psi_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$\theta_a = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3(t) & \theta_2(t) \\ \theta_3(t) & 0 & -\theta_1(t) \\ -\theta_2(t) & \theta_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

O produto vetorial é válido para pequenas rotações. A interferência do desalinhamento nos vetores de aceleração dos acelerômetros destas rotações é sempre resultante da soma destas rotações. Para rotações maiores, é possível

calcular a matriz total de desalinhamento  $\text{vec}\theta\psi$  utilizando-se as matrizes  $\psi a$  e  $\theta a$  na expressão:

$$\text{vec}\theta\psi = \left( I_3 + \frac{\theta a + \psi a}{2} \right) \left( I_3 + \frac{1}{2} (-\theta a - \psi a) \right)^{-1} - I_3 \quad (58)$$

Os elementos  $\chi_{i,j}$  da matriz  $\text{vec}\theta\psi$  são dados por:

$$\begin{aligned} \chi_{1,1} &= -\frac{2(\theta_2(t)^2 + 2\psi_2(t)\theta_2(t) + \theta_3(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_3(t)\psi_3(t))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ \chi_{1,2} &= \frac{2(-2\theta_3(t) + \theta_2(t)\psi_1(t) + \psi_1(t)\psi_2(t) + \theta_1(t)(\theta_2(t) + \psi_2(t)) - 2\psi_3(t))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ \chi_{1,3} &= \frac{2(2\theta_2(t) + \theta_3(t)\psi_1(t) + 2\psi_2(t) + \psi_1(t)\psi_3(t) + \theta_1(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t)))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ \chi_{2,1} &= \frac{2(2\theta_3(t) + \theta_2(t)\psi_1(t) + \psi_1(t)\psi_2(t) + \theta_1(t)(\theta_2(t) + \psi_2(t)) + 2\psi_3(t))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ \chi_{2,2} &= -\frac{2(\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_3(t)\psi_3(t))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ \chi_{2,3} &= \frac{2(-2\theta_1(t) - 2\psi_1(t) + \theta_3(t)\psi_2(t) + \psi_2(t)\psi_3(t) + \theta_2(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t)))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \end{aligned} \quad (59)$$

A expressão da aceleração resultante  $A_r$  após a rotação é:

$$A_r(t) = A(t) + \text{vec}\theta\psi^T \cdot (A(t) + G(t)) \quad (60)$$

Que possuem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} a_1(t) &\rightarrow \frac{a_1(t)(\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) - \theta_2(t)^2 - \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 - \psi_2(t)^2 - \psi_3(t)^2 - 2\theta_2(t)\psi_2(t) - 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4) + 2(\theta_2(t)(-2\text{gnorm} - 2a_3(t) + a_2(t)(\theta_1(t) + \psi_1(t))) + a_2(t)(2\theta_3(t) + \theta_1(t)\psi_2(t) + \psi_1(t)\psi_2(t) + 2\psi_3(t)) + (\text{gnorm} + a_3(t))(\theta_3(t)\psi_1(t) + \psi_3(t)\psi_1(t) - 2\psi_2(t) + \theta_1(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t))))}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ a_2(t) &\rightarrow \frac{2(\theta_1(t)(2\text{gnorm} + 2a_3(t) + a_1(t)(\theta_2(t) + \psi_2(t))) + a_1(t)(-2\theta_3(t) + \theta_2(t)\psi_1(t) + \psi_1(t)\psi_2(t) - 2\psi_3(t)) + (\text{gnorm} + a_3(t))(2\psi_1(t) + \theta_2(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t)) + \psi_2(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t))) - a_2(t)(\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) - \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 - \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 - 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) - 4)}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \\ a_3(t) &\rightarrow \frac{2(-\text{gnorm}\theta_1(t)^2 + (a_1(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t)) - 2\text{gnorm}\psi_1(t))\theta_1(t) - \text{gnorm}\theta_2(t)^2 - \text{gnorm}\psi_1(t)^2 - \text{gnorm}\psi_2(t)^2 + 2a_1(t)\theta_2(t) + a_1(t)\theta_3(t)\psi_1(t) + 2a_1(t)\psi_2(t) - 2\text{gnorm}\theta_2(t)\psi_2(t) + a_1(t)\psi_1(t)\psi_3(t) + a_2(t)(-2\theta_1(t) - 2\psi_1(t) + \theta_3(t)\psi_2(t) + \psi_2(t)\psi_3(t) + \theta_2(t)(\theta_3(t) + \psi_3(t))) - a_3(t)(\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 - \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 - \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) - 2\theta_3(t)\psi_3(t) - 4)}{\theta_1(t)^2 + 2\psi_1(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)^2 + \theta_3(t)^2 + \psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 + \psi_3(t)^2 + 2\theta_2(t)\psi_2(t) + 2\theta_3(t)\psi_3(t) + 4} \end{aligned} \quad (61)$$

### 2.1.7 Erros de coordenadas e azimute na saída

Os erros de coordenada devem ser calculados a partir do vetor de rotações. A expressão das

$$\begin{aligned}\xi_0(t) &= \text{atan2}(b_{1,3}(t) + \theta_3(t) b_{2,3}(t) - \theta_2(t) b_{3,3}(t), -\theta_3(t) b_{1,3}(t) + b_{2,3}(t) + \theta_1(t) b_{3,3}(t)) \\ \lambda_0(t) &= \text{atan2}(\theta_2(t) b_{1,2}(t) - \theta_1(t) b_{2,2}(t) + b_{3,2}(t), \theta_2(t) b_{1,1}(t) - \theta_1(t) b_{2,1}(t) + b_{3,1}(t)) \\ \phi_0(t) &= \sin^{-1}(\theta_2(t) b_{1,3}(t) - \theta_1(t) b_{2,3}(t) + b_{3,3}(t))\end{aligned}\quad (62)$$

De modo reverso, O vetor de rotações de coordenadas pode ser obtido pelo seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \sin(\xi(t)) \delta\lambda(t) - \cos(\xi(t)) \delta\phi(t) \\ \cos(\xi(t)) \cos(\phi(t)) \delta\lambda(t) + \sin(\xi(t)) \delta\phi(t) \\ \sin(\phi(t)) \delta\lambda(t) + \delta\xi(t) \end{pmatrix}\quad (63)$$

### 2.1.8 Sistemas de equações de eliminação de variáveis

Das equações anteriormente descritas, é necessário extrair-se um sistema de equações de variáveis de estado próprio para o uso em simulação e processos de identificação de estado. O processo de extração implica em uma eliminação de variáveis redundantes ou obtenção de seus valores antes do uso nas equações de estado. Esta seção descreve o processo de obtenção dos valores destas variáveis a partir das variáveis de estado. As variáveis deste grupo são as seguintes:

$$\begin{aligned}\delta\lambda(t), \delta\xi(t), \delta\phi(t), \lambda(t), \lambda_0(t), \xi(t), \xi_0(t), \phi(t), \phi_0(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \\ \delta a_1(t), \delta a_2(t), \delta a_3(t), \delta v_3(t), \delta\omega_1(t), \delta\omega_2(t), \delta\omega_3(t), \psi_{01}(t), \psi_{02}(t), \psi_{03}(t), \\ b_{3,1}(t), b_{3,2}(t), b_{3,3}(t), r_{i1,1}(t), r_{i1,2}(t), r_{i2,1}(t), r_{i2,2}(t)\end{aligned}$$

A seqüência de equações deve ser tal que os valores sejam atribuídos às variáveis antes que possam ser usadas em atribuições posteriores. A equação da gravidade normal pode ser a primeira a ser avaliada na lista, reescrevendo a expressão (22) na forma

$$\begin{aligned}g_{\text{norm}} = & -0.0000577039 \sin^2(2 \sin^{-1}(b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))) + \\ & 0.0518592 (b_{1,1}(t) b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t) b_{2,1}(t))^2 - 3.08 \times 10^{-6} h(t) + 9.78032\end{aligned}\quad (64)$$

os valores dos erros de coordenadas são determinados da seguinte maneira

$$\delta\lambda(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{1 - (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))^2} \sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} + \frac{\theta_1(t) b_{2,3}(t)}{b_{1,3}(t) \sqrt{1 - (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))^2} \sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} \quad (65)$$

$$\delta\xi(t) = \theta_3(t) + \frac{\theta_2(t) (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))}{\sqrt{1 - (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))^2} \sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} + \frac{\theta_1(t) (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t)) b_{2,3}(t)}{b_{1,3}(t) \sqrt{1 - (b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t))^2} \sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} \quad (66)$$

$$\delta\phi(t) = \frac{\theta_2(t) b_{2,3}(t)}{b_{1,3}(t) \sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} - \frac{\theta_1(t)}{\sqrt{\frac{b_{2,3}(t)^2}{b_{1,3}(t)^2} + 1}} \quad (67)$$

As coordenadas são obtidas a partir dos elementos da matriz de cossenos diretores, e as coordenadas de saída são obtidas acrescentando-se os erros obtidos através das equações acima

$$\lambda(t) = \tan^{-1} \left( \frac{b_{1,2}(t) b_{2,3}(t) - b_{1,3}(t) b_{2,2}(t)}{b_{1,3}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,3}(t)} \right) \quad (68)$$

$$\lambda_o(t) = \delta\lambda(t) + \lambda(t) \quad (69)$$

$$\xi(t) = \tan^{-1} \left( \frac{b_{2,3}(t)}{b_{1,3}(t)} \right) \quad (70)$$

$$\xi_o(t) = \delta\xi(t) + \xi(t) \quad (71)$$

$$\phi(t) = -\sin^{-1}(b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,2}(t)) \quad (72)$$

$$\phi_o(t) = \delta\phi(t) + \phi(t) \quad (73)$$

Os valores de velocidades angulares a partir das velocidades são obtidos através das seguintes expressões

$$w_1(t) = \left( -\frac{e2 \cos^2(\xi(t)) \cos^2(\phi(t))}{a} + \frac{e2 \sin^2(\phi(t))}{2a} + \frac{h(t)}{a^2} - \frac{1}{a} \right) v_2(t) - \frac{e2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t)) v_1(t)}{a} \quad (74)$$

$$w_2(t) = \frac{e2 \cos(\xi(t)) \sin(\xi(t)) v_2(t) \cos^2(\phi(t))}{a} + \left( \frac{e2 \cos^2(\phi(t)) \sin^2(\xi(t))}{a} + \frac{1}{a} - \frac{e2 \sin^2(\phi(t))}{2a} - \frac{h(t)}{a^2} \right) v_1(t) \quad (75)$$

A rotação azimutal é considerada nula

$$w_3(t) = 0 \quad (76)$$

Os desalinhamentos medidos pelos sensores de ângulos também são calculados

$$\psi_{O_1}(t) = \theta_1(t) + \psi_1(t) \quad (77)$$

$$\psi_{O_2}(t) = \theta_2(t) + \psi_2(t) \quad (78)$$

$$\psi_{O_3}(t) = \theta_3(t) + \psi_3(t) \quad (79)$$

Os valores dos componentes redundantes na matriz de cossenos diretores que não são usados como estados dos sistemas são atribuídos nesta etapa seguido as expressões

$$b_{3,1}(t) = b_{1,2}(t) b_{2,3}(t) - b_{1,3}(t) b_{2,2}(t) \quad (80)$$

$$b_{3,2}(t) = b_{1,3}(t) b_{2,1}(t) - b_{1,1}(t) b_{2,3}(t) \quad (81)$$

$$b_{3,3}(t) = b_{1,1}(t) b_{2,2}(t) - b_{1,2}(t) b_{2,1}(t) \quad (82)$$

O raio de curvatura da terra nos eixos da plataforma também deve ser calculado para uso em diversas expressões

$$ri_{1,1}(t) = -\frac{e2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t))}{a} \quad (83)$$

$$ri_{1,2}(t) = -\frac{e2 \cos^2(\xi(t)) \cos^2(\phi(t))}{a} + \frac{e2 \sin^2(\phi(t))}{2a} + \frac{h(t)}{a^2} - \frac{1}{a} \quad (84)$$

$$ri_{2,1}(t) = \frac{e2 \cos^2(\phi(t)) \sin^2(\xi(t))}{a} + \frac{1}{a} - \frac{e2 \sin^2(\phi(t))}{2a} - \frac{h(t)}{a^2} \quad (85)$$

$$ri_{2,2}(t) = \frac{e2 \cos(\xi(t)) \cos^2(\phi(t)) \sin(\xi(t))}{a} \quad (86)$$

As saídas de velocidade são calculadas de forma simples

$$vo_1(t) = v_1(t) + \delta v_1(t) \quad (87)$$

$$vo_2(t) = v_2(t) + \delta v_2(t) \quad (88)$$

### 2.1.9 Equações de estado finais

Para a realização de simulação do sistema, as equações anteriores são reduzidas à forma de equações de estado

$$x'(t) = f(x)$$

onde  $x$  é o conjunto de variáveis de estado:

$$h(t), \delta h(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), \delta v_1(t), \delta v_2(t), \delta w_0_1(t), \delta w_0_2(t), \delta w_0_3(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), b_{1,1}(t), b_{1,2}(t), b_{1,3}(t), b_{2,1}(t), b_{2,2}(t), b_{2,3}(t)$$

Nesta seção, encontram-se as expressões explícitas usadas para os valores da derivada temporal das variáveis de estado. Estas expressões foram obtidas a partir das equações gerais descritas nas seções 2.1.3 a 2.1.6. As variáveis presentes nas equações que não pertencem aos estados mostrados na lista acima são determinadas passo a passo através das expressões descritas na seção 2.1.8. Uma

vez determinados os valores destas últimas a partir das variáveis de estado, elas podem ser usadas programaticamente nas equações descritas a seguir.

As equações de estado de velocidade do modelo ideal são

$$v_1'(t) = -2 h(t) b_{1,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 - \frac{a b_{1,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2}{\sqrt{1 - e^2 b_{3,3}(t)^2}} - 2 v_3(t) b_{2,3}(t) \Omega + 2 v_2(t) b_{3,3}(t) \Omega + a_1(t) - v_3(t) w_2(t) + v_2(t) w_3(t) \quad (89)$$

$$v_2'(t) = -2 h(t) b_{2,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 - \frac{a b_{2,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2}{\sqrt{1 - e^2 b_{3,3}(t)^2}} + 2 v_3(t) b_{1,3}(t) \Omega - 2 v_1(t) b_{3,3}(t) \Omega + a_2(t) + v_3(t) w_1(t) - v_1(t) w_3(t) \quad (90)$$

$$v_3'(t) = 0 \quad (91)$$

As equações de estado para o modelo de erros de velocidade ficam

$$\begin{aligned} \delta v_1'(t) = & -\delta h(t) b_{1,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 + v_2(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega + \\ & \delta v_2(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega + v_3(t) \theta_3(t) b_{1,3}(t) \Omega + \delta v_3(t) \theta_3(t) b_{1,3}(t) \Omega - \\ & 2 \delta v_3(t) b_{2,3}(t) \Omega - v_2(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega - \delta v_2(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega + 2 \delta v_2(t) b_{3,3}(t) \Omega - \\ & v_3(t) \theta_1(t) b_{3,3}(t) \Omega - \delta v_3(t) \theta_1(t) b_{3,3}(t) \Omega + \delta a_1(t) + w_3(t) \delta v_2(t) - w_2(t) \delta v_3(t) - \\ & \text{gnorm} \theta_2(t) - a_3(t) \theta_2(t) + a_2(t) \theta_3(t) - \text{gnorm} \psi_2(t) - a_3(t) \psi_2(t) + a_2(t) \psi_3(t) \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \delta v_2'(t) = & -\delta h(t) b_{2,3}(t) b_{3,3}(t) \Omega^2 + 2 \delta v_3(t) b_{1,3}(t) \Omega - v_1(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega - \\ & \delta v_1(t) \theta_2(t) b_{1,3}(t) \Omega + v_1(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega + \delta v_1(t) \theta_1(t) b_{2,3}(t) \Omega + \\ & v_3(t) \theta_3(t) b_{2,3}(t) \Omega + \delta v_3(t) \theta_3(t) b_{2,3}(t) \Omega - 2 \delta v_1(t) b_{3,3}(t) \Omega - \\ & v_3(t) \theta_2(t) b_{3,3}(t) \Omega - \delta v_3(t) \theta_2(t) b_{3,3}(t) \Omega + \delta a_2(t) - w_3(t) \delta v_1(t) + w_1(t) \delta v_3(t) + \\ & \text{gnorm} \theta_1(t) + a_3(t) \theta_1(t) - a_1(t) \theta_3(t) + \text{gnorm} \psi_1(t) + a_3(t) \psi_1(t) - a_1(t) \psi_3(t) \end{aligned} \quad (93)$$

A variável de altura e suas equações de estado foram incluídas no modelo, muito embora sejam desconsideradas para o sistema em estudo. As alturas para o modelo gravitacional são retiradas das medidas GPS.

$$h'(t) = v_3(t) \quad (94)$$

$$\delta h'(t) = \delta v_3(t) \quad (95)$$

Como resultado do processo de linearização, obtém-se um conjunto de equações de estado na forma:

$$x(k+1) = A(k).x(k) + B(k).u(k)$$

$$y(k+1) = H(k).x(k) \quad (108)$$

mas como os valores de  $x$ ,  $A$ ,  $B$  e  $H$  são em grande parte estimados, o valor de  $y$  gerado nesta equação também é uma estimativa. Desta forma, a equação acima que pode ser re-escrita para os valores estimados

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(k).\hat{x}(k) + \hat{B}(k).u(k) \\ \hat{y}(k+1) &= \hat{H}(k).\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (109)$$

onde  $A(k)$ ,  $B(k)$  e  $H(k)$  são matrizes obtidas a partir do processo de linearização das equações características da planta para o instante  $k$ , e  $u(k)$ ,  $x(k)$  e  $y(k)$  são respectivamente a excitação do sistema (acelerações), o vetor de variáveis de estado e o vetor de saídas no instante  $k$ . As quantidades assinaladas com o sinal (^) são as estimativas no modelo para as mesmas quantidades na planta.

Dada a equação de estado não linearizada da forma:

$$f(\dot{x}, x, u, p, t) = 0 \quad (110)$$

onde se introduz  $p$ , que é o vetor de parâmetros que definem o modelo de erros. A linearização no ponto  $(x_0, p_0, t_0)$  pode ser descrita da seguinte maneira:

$$-\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial p} (p - p_0) + \frac{\partial f}{\partial u} (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) \Bigg|_{x=x_0, t=t_0, u=u_0} \quad (111)$$

definindo

$$-\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = K(t), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \bar{A}(t), \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \bar{B}(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \bar{R}(t) \quad (112)$$

com

$$K_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j}, \quad \bar{A}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \bar{B}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \quad \text{e} \quad \bar{R}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \quad (113)$$

podemos escrever a equação de estado

$$\dot{x}(t) = A(t).(x(t) - x_0) + B(t).(u(t) - u_0) + R(t).(p(t) - p_0) \quad (114)$$

onde

$$A(t) = K(t)^{-1}.\bar{A}(t), \quad B(t) = K(t)^{-1}.\bar{B}(t) \quad \text{e} \quad R(t) = K(t)^{-1}.\bar{R}(t) \quad (115)$$

Para o tempo discreto, realiza-se novamente a aproximação:

$$A(k) = e^{A(t)\delta t} \quad (116)$$

sendo  $\delta t$  o intervalo de amostragem. Quando  $\delta t$  for pequeno, pode-se evitar a exponencial matricial com uma aproximação de primeira ordem

$$A(k) = I + A(t)\delta t \quad (117)$$

Ainda

$$B(k) = B(t) \quad (118)$$

$$R(k) = R(t) \quad (119)$$

A linearização da equação de saída parte da relação

$$g(y, x, p, t) = 0 \quad (120)$$

$$-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial p} (p - p_0) + \frac{\partial g}{\partial u} (u - u_0) + \frac{\partial g}{\partial x} (x - x_0) \Bigg|_{x=x_0, t=t_0, u=u_0} \quad (121)$$

tomando

$$-\frac{\partial g}{\partial y} = M(t), \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \bar{H}(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial p} = \bar{F}(t) \quad (122)$$

sendo

$$M_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}, \quad \bar{H}_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \bar{F}_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \quad (123)$$

obtem-se

$$y(t) - y_0 = F(t) \cdot (p - p_0) + H(t) \cdot (x(t) - x_0) \quad (124)$$

com

$$H(t) = M(t)^{-1} \cdot \bar{H}(t) \text{ e } F(t) = M(t)^{-1} \cdot \bar{F}(t) \quad (125)$$

com a condição de  $M$  não ser singular.

### 2.1.11 Identificação de estados da plataforma inercial

A partir dos ensaios em voo ou em solo, o estado da plataforma inercial deve ser identificado para a obtenção das inclinações em relação à vertical local da mesa de posicionamento da plataforma inercial. Com este objetivo, faz-se necessária a utilização de um filtro de Kalman associado ao modelo de erros expresso nas seções 2.1.5, 2.1.6 e 2.1.7.

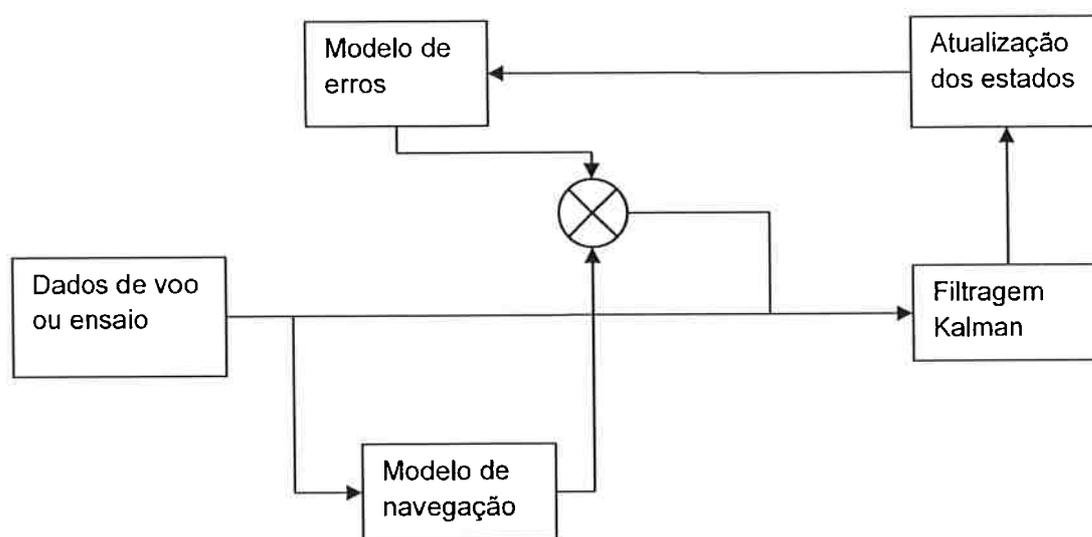


FIGURA 7 IDENTIFICAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA INERCIAL

O vetor de estados estimados da plataforma  $\hat{x}$  é identificado utilizando-se um filtro de Kalman. O filtro de Kalman é aplicado sobre o sistema dinâmico discreto, considerando-se as equações de espaço de estado na forma

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k).x(k) + B(k).u(k) + w(k) \\y(k+1) &= H(k).x(k+1) + v(k)\end{aligned}\tag{126}$$

Onde  $w(k)$  é o ruído de processo com covariância  $Q_x$  e  $v(k)$  é o ruído de observação, com covariância  $R_y$ . Assume-se que os sinais de ruído  $w(k)$  e  $v(k)$  são processos aleatórios estacionários com distribuição normal e média nula. Apesar de possuírem uma definição explícita em termos das grandezas  $w(k)$  e  $v(k)$ , as matrizes  $Q_x$  e  $R_y$  são fundamentais ao comportamento do filtro de Kalman.

A previsão da estimativa do estado no tempo  $k+1$  depende da estimativa no tempo  $k$  e da saída no tempo  $k+1$ . Primeiramente as equações de estado são utilizadas para realizar a estimativa do vetor de estados no tempo  $k+1$  chamada  $\hat{x}(k+1|k)$  com base na previsão obtida para o tempo  $k$ ,  $\hat{x}(k|k)$  utilizando a expressão

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k) &= A(k).\hat{x}(k|k) + B(k).u(k) \\\hat{y}(k+1) &= H(k).\hat{x}(k+1|k)\end{aligned}\tag{127}$$

Na implementação do filtro estima-se a matriz de covariância  $P(k)$  dos erros de estimação das variáveis de estado. A estimativa da matriz  $P(k+1|k)$  de covariância de erro de identificação do estado a partir de seu valor  $P(k|k)$  no tempo  $k$  é dada pela expressão

$$P(k+1|k) = A(k).P(k|k).A(k)^T + Q_x\tag{128}$$

Onde é a matriz de covariância de erros intrínsecos ao processo. De onde o ganho do filtro de Kalman  $K(k)$  é dado pela expressão

$$K[k] = P(k).H(k)^T.(H(k).P(k).H(k)^T + R_y)^{-1}\tag{129}$$

Desta forma encontra-se a estimativa de  $\hat{x}(k+1|k+1)$  com base no erro de predição de saída através da expressão:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = K(k).(y(k+1) - \hat{y}(k+1)) + \hat{x}(k+1|k)\tag{130}$$

Com a correção, aplicando o ganho, a matriz de covariância deve ser corrigida mais uma vez através da expressão

$$P(k+1 | k+1) = (I - K(k).H(k)).P(k+1 | k) \quad (131)$$

Onde  $I$  é a matriz identidade. Combinando (127) e (130), obtém-se a expressão da malha de identificação:

$$\hat{x}(k+1 | k+1) = (A(k) - K(k).H(k)).\hat{x}(k | k) - K(k).\hat{y}(k+1) \quad (132)$$

que é estável se  $(A(k) - K(k).H(k))$  for estável.

Para a determinação das matrizes  $Q_x$  e  $R_y$ , foram consideradas as fontes de erro conhecidas do sistema. Estas são as derivas aleatórias dos giroscópios e dos acelerômetros. Estes afetam as equações (96) a (98) e as equações (92) e (93). A determinação dos erros na saída é dependente dos erros de posicionamento GPS que variam no processamento de cada ensaio. De um modo geral, para a plataforma em questão, o erro relacionado a coordenadas e inclinações do sistema pode ser considerado 40 arco-segundos, que corresponde a uma variância de  $4 \times 10^{-8} \text{ rad}^2$ . Para as velocidades, utilizou-se uma variância de  $8 \times 10^{-5}$ . Desta forma, a matriz  $R_y$  foi assumida diagonal, com os elementos  $e(y_i)$  definidos para cada saída.

Também seguindo este raciocínio, a matriz  $Q_{i_x}$  de covariância de erros do vetor de estados (processo) também é diagonal com valores correspondentes a cada estado e foram finalmente definidos inicialmente em  $4 \times 10^{-7}$ .

Os valores para os erros quadráticos nas variáveis de estado de erro de velocidade foram ajustados por tentativa e erro. Os valores para o erro quadrático das saídas de velocidades também são estimativos. Observa-se que a robustez do filtro depende dos valores escolhidos para estas matrizes. Com isto em vista, ainda foi aplicado um fator  $q_k$  à Matriz  $Q_{i_k}$ , para ajustar o comportamento da malha de identificação de estados.

Desta forma, obtém-se

$$Q_k = q_k Q_{i_k} \quad (133)$$

A malha de identificação tende a acumular um erro muito grande quando há um desajuste grande dos parâmetros do modelo de erro, em especial, quando se trata dos parâmetros que participam de integrais ao longo do tempo. Neste caso, usa-se um ganho  $q_k$  mais alto, que em geral aumenta o ganho da malha de identificação de estado. Quando o modelo de erros está bem ajustado, o filtro de Kalman pode ser desligado completamente, fazendo  $q_k = 0$ , porque um modelo bem ajustado prevê corretamente o comportamento do sistema real. Desta forma, o estado previsto não se afasta muito do estado real do sistema e a linearização das equações dinâmicas permanece válida.

Finalmente, a identificação tem por objetivo final auxiliar o processo de gravimetria. Os sinais dos acelerômetros de gravimetria não são levados em conta no processo de filtragem, e são mantidos propositalmente independentes. Os gráficos a seguir mostram dois resultados de anomalia nos acelerômetros, após a aplicação da identificação de estado da plataforma ao mesmo ensaio em solo. Neste teste, o sistema é iniciado com um erro conhecido grande nas condições iniciais, e espera-se que o processo de identificação acompanhe a trajetória corretamente. Para o gráfico na figura 8, o fator  $q_k = 1$  foi utilizado. Para o gráfico na figura 9 foi utilizado  $q_k = 2 \times 10^{-3}$ , com resultados muito melhores na anomalia obtida. A anomalia é a diferença entre a aceleração vertical medida pelos acelerômetros de gravimetria e o valor previsto com base na análise do estado da plataforma.

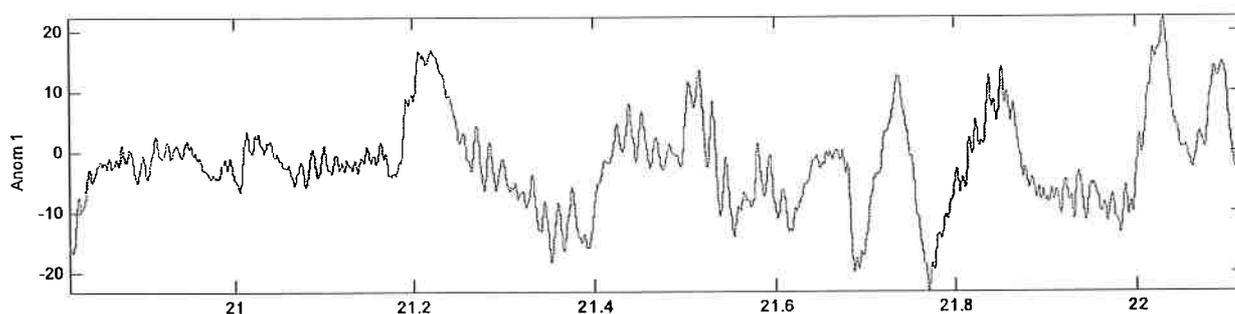


FIGURA 8 IDENTIFICAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA INERCIAL

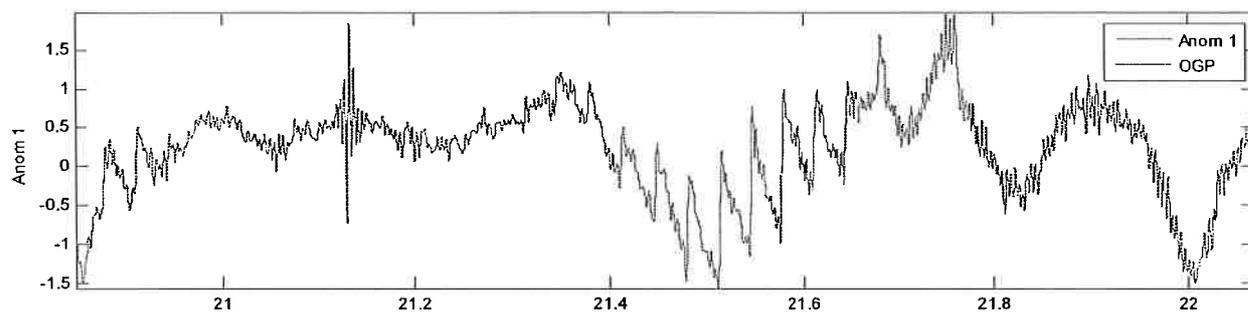


FIGURA 9 IDENTIFICAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA INERCIAL

## **2.2 Calibração do sistema inercial**

### **2.2.1 Introdução**

As equações 31 e 50 do modelo de erros contém constantes que procuram caracterizar o desvio dos sensores inerciais do modelo ideal. Como já visto, tais constantes descrevem discrepâncias nos sensores inerciais como deriva, erros de fator de escala, erros na ortogonalidade dos eixos de referência e influência de acelerações nas derivas dos giroscópios. A determinação destas constantes individualiza o modelo de erros caracterizando a instrumentação usada. O processo de determinação destas constantes é chamado de calibração do sistema de navegação inercial. A calibração é usualmente feita utilizando-se testes em laboratório aplicando movimentos e inclinações ao sistema e observando o comportamento do mesmo.

O bloco de sensores inerciais do sistema de navegação analisado neste estudo, é originalmente calibrado pelo fabricante e posteriormente montado no sistema gravimétrico. Uma vez pronto o sistema, são realizadas calibrações em campo, através de ensaios que utilizam perturbações conhecidas no funcionamento normal do sistema de navegação e observando-se o comportamento do sistema ao longo das equações de navegação.

Este método de calibração pode ser melhorado com a utilização de dados coletados em voo, durante a operação normal do sistema, quando há manobras, acelerações e grandes deslocamentos da aeronave.

Nesta seção, os métodos originais para a determinação em campo dos parâmetros do modelo de erro são discutidos e posteriormente os métodos desenvolvidos são discutidos e os resultados avaliados.

### **2.2.2 Objeto da calibração**

O objeto do modelo de erros é a determinação da discordância entre o comportamento dos sensores inerciais reais e os sensores idealizados. As discordâncias contempladas são as seguintes :

- Os sensores diferem do modelo ideal por possuírem fator de escala não unitário e deriva não nula.
- Os sensores apresentam uma disposição ortogonal imperfeita
- As acelerações causam precessões nos eixos dos giroscópios

O modelo de erros é descrito pelas equações 31 e 50. Os parâmetros utilizados nestas equações que caracterizam o bloco de sensores inerciais são:

$\delta a_{0_i}(t)$	derivas de acelerômetros (referência da plataforma)
$\delta \omega_i(t)$	erro giroscópico LLLN
$\delta \omega_{0_i}(t)$	deriva de giroscópios (referência da plataforma)
$d_{i,j}(t)$	constantes de correção de fator de escala e desalinhamento dos giroscópios
$k_{i,j}(t)$	constantes de correção para compensação do precessão giroscópica causado por acelerações - desbalanceamento
$\mu_{i,j}(t)$	constantes de desalinhamento e de escala de acelerômetros

O objeto da calibração é o de determinar tais parâmetros de maneira a minimizar a discordância entre o comportamento do sistema real e o do previsto pelo modelo. A discordância é quantificada pela seguinte função objetivo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left( y(t) - \hat{y}(t) \right)^T \cdot W \cdot \left( y(t) - \hat{y}(t) \right) dt \quad (134)$$

onde  $y(t)$  é um vetor contendo as saídas de interesse e  $\hat{y}(t)$  o resultado do processo de identificação. O vetor de saída é composto por

$v_i(t)$  velocidades no referencial LLLN

$\delta v_i(t)$  erros de velocidade

$v_{0_i}(t)$  velocidade LLLN com erros

$\lambda(t)$ , longitude (navegação ideal)

$\xi(t)$ , azimute (navegação ideal)

$\phi(t)$ , latitude (navegação ideal)

### 2.2.3 Discussão sobre o método

Estas saídas são coletadas ao longo de ensaios que podem ser testes em solo ou em voo. Idealmente, os testes em solo deveriam ser realizados em bancadas com atuadores e sensores para a realização de movimentos controlados sobre o sistema. Na prática, tais bancadas são muito custosas, especialmente quando o sistema possui dimensões e peso consideráveis. Para o sistema em estudo, é possível realizar dois tipos de testes em solo. No primeiro, escolhe-se uma direção de alinhamento e realiza-se o ensaio de navegação normal com o sistema parado. No segundo, o programa embarcado de navegação adiciona um erro conhecido nas condições iniciais de velocidade que resultam em um comportamento oscilatório de cerca de 7 graus de amplitude. O vetor inicial de velocidade possui sempre a mesma direção em relação ao meridiano, mas é possível variar a posição inicial dos eixos da plataforma escolhendo-se uma orientação para o alinhamento.

O diagrama da figura a seguir dá uma visão geral sobre o processo de calibração:

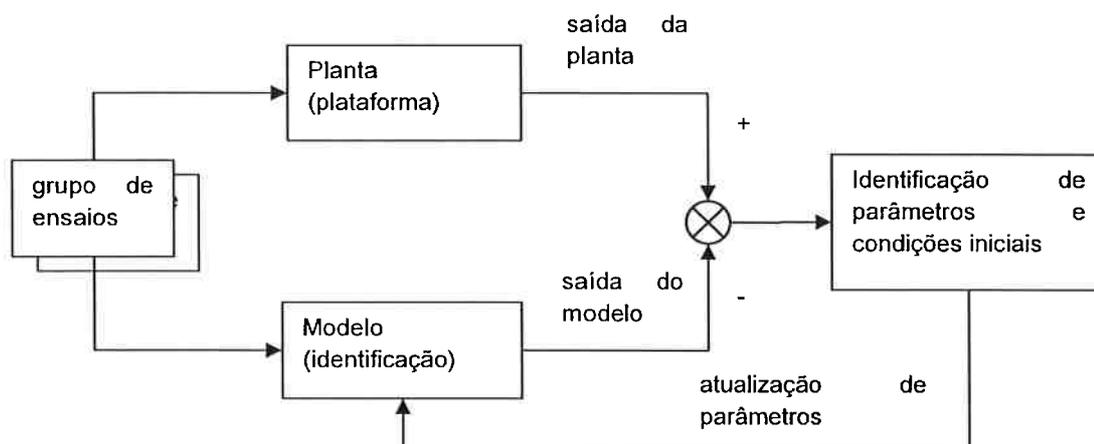


FIGURA 10 PROCESSO DE CALIBRAÇÃO

Após um grupo de ensaios, as saídas geradas pela planta e pelo modelo são comparadas e uma atualização nos parâmetros é gerada. Um novo grupo de ensaios é feito para validar e possivelmente atualizar mais uma vez os parâmetros.

O modelo estimado do sistema de navegação é dado pela expressão 109 e procuramos o valor de  $p-p_0$  na expressão 114 que minimiza o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\chi(t) - \hat{\chi}(t))^T \cdot W^2 \cdot (\chi(t) - \hat{\chi}(t)) dt \quad (135)$$

sendo

$$W = \text{diag}(w) \quad (136)$$

onde  $w$  é um vetor coluna de pesos para as diversas saídas.

A solução é dada por

$$p - p_0 = S(n)^{-1} \cdot h(n) \quad (137)$$

com a matriz de sensibilidades  $S$  e a estimativa  $h$  da projeção dos erros no espaço das variáveis a serem estimadas determinados cumulativamente da seguinte maneira

$$h(k+1) = (\chi(t) - \hat{\chi}(t))^T \cdot W \cdot H(k) \cdot \chi(k) + h(k) \quad (138)$$

$$S(k+1) = v(k)^T \cdot H(k)^T \cdot W^2 \cdot H(k) \cdot v(k) + (S(k)) \quad (139)$$

onde

$$v(k+1) = A(k) \cdot v(k) + R(k) \quad (140)$$

com a sensibilidade  $R(k)$  dos estados em relação aos parâmetros definida pela expressão 115, e com condições iniciais

$$S(0)=0 \text{ e } v(0)=R(0) \quad (141)$$

#### 2.2.4 Condições iniciais

Utilizando o método descrito na seção anterior, obtém-se uma atualização de coeficientes para um conjunto de ensaios. Uma das dificuldades na metodologia é a determinação das condições iniciais para cada um dos ensaios, pois cada um possui suas próprias condições iniciais para as variáveis de estado.

Cada ensaio deve possuir seu conjunto de condições iniciais da forma

$$X_{i0} = \begin{pmatrix} \delta v_1(t) \\ \delta v_2(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} \quad (142)$$

O progresso das variáveis de estado em cada ensaio depende do valor inicial das mesmas. Desta maneira, o funcional  $J$  depende das condições iniciais. Cada ensaio possui um conjunto de condições iniciais.

O funcional  $J$  pode ser desmembrado nas contribuições individuais

$$J = \sum_{i=1}^n J_i \quad (143)$$

A propagação das influência de uma alteração nas condições iniciais na forma linear da equação de estado é dada por

$$\delta X(k+1) = A \cdot \delta X(k) \quad (144)$$

sendo  $\delta X(k)$  a propagação da perturbação das condições iniciais das variáveis de estado no instante  $k$  e  $\delta X(0)$  a perturbação nas condições iniciais . A matrix de sensibilidade  $Q_i$  acumulada no instante  $k$  correspondente ao funcional  $J_i$  é dada por

$$Q_i(k+1) = \delta X_i(k)^T \cdot H(k)^T \cdot W^2 \cdot H(k) \cdot \delta X_i(k) + (Q_i(k)) \quad (145)$$

Torna-se possível construir a matrix de sensibilidade aumentada

$$S_{\text{aug}} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_n \end{pmatrix} \quad (146)$$

sendo  $n$  o número de ensaios e  $Q_i$  os valores finais das seqüências  $Q(k)$  . Da mesma forma, também é possível definir a projeção  $Z_i(k+1)$  acumulada do erro no espaço das variáveis de perturbação das condições iniciais através da seqüência

$$Z_i(k+1) = (\chi(k) - \hat{y}(k)) \cdot W \cdot H(k) \cdot \delta X_i(k) + Z_i(k) \quad (147)$$

analogamente ao caso da matrix de sensibilidade  $S$ , pode-se aumentar o vetor  $R(k)$  da expressão 140 de cálculo das restrições da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} R \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} \quad (148)$$

o vetor

$$\begin{pmatrix} P - P_0 \\ X_{10} \\ X_{20} \\ \dots \\ X_{n0} \end{pmatrix} = S_{\text{aug}}^{-1} M \quad (149)$$

minimiza o funcional  $J$  e contem as atualizações dos parâmetros com as condições iniciais de cada ensaio.

### 2.2.5 Influência da filtragem Kalman na determinação de parâmetros

Em determinadas circunstâncias, as determinações dos parâmetros se torna difícil, em especial, quando o desvio é suficientemente grande para que não seja possível compensar as não linearidades.

Neste caso, o uso de filtragem se faz indispensável para que o estado do modelo esteja suficientemente próximo do estado da planta, e a linearização continue válida.

O filtro de Kalman provê uma realimentação linear a partir dos erros nas predições de saídas providenciando atualizações nas variáveis de estado conforme esquema a seguir:

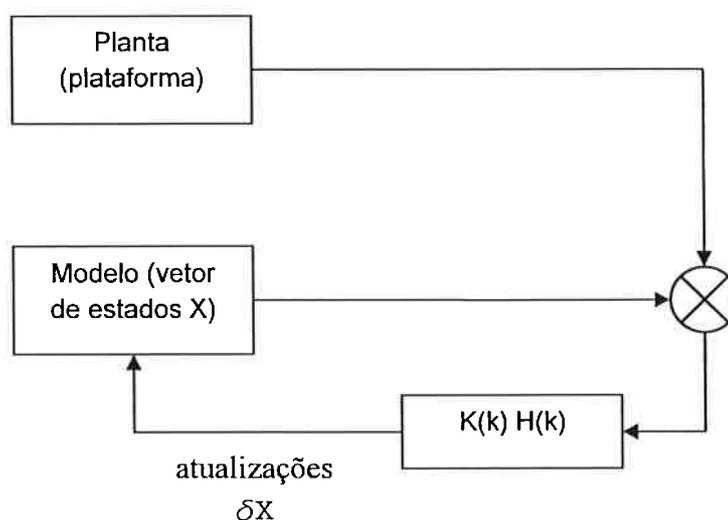


FIGURA 11: DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS E INFLUÊNCIA DO FILTRO DE KALMAN

Onde  $K(k)$  é o ganho do filtro dado pela expressão 129, e  $H(k)$  é a matriz de saída das equações lineares de estado 108. A equação de estado do modelo com o filtro de Kalman acoplado, fica

$$x(k+1) = (A(k) - K(k)H(k))x(k) + K(k)y(k) \quad (150)$$

Desta forma, para realizar a determinação de parâmetros com o modelo sendo atualizado pelo filtro de Kalman, basta fazer a substituição a seguir, nas expressões (140) e (144)

$$A(k) \leftarrow A(k) - K(k)H(k) \quad (151)$$

Foi observado que esta técnica deve ser usada com cuidado, especialmente na determinação de parâmetros cujo efeito se faz sentir mais ao longo de intervalos de tempo maiores, como é o caso de  $\delta w$ , que sofre integração dupla antes de influenciar uma das saídas.

Para que este efeito seja menos importante, faz-se necessário que o conjunto de ensaios leve a um sistema bastante determinado, ou que a influência do filtro de Kalman seja de alguma forma diminuída. Em geral, a última estratégia é preferível, e o modo de implementação usado é o de multiplicar a matriz  $Q_x'$  por um fator  $q_k \geq 0$ , sendo que  $q_k = 0$  desliga a malha de filtragem. Na prática, deve-se escolher um valor que permita um compromisso entre uma melhor determinação destes parâmetros e a validade dos estados determinados pelo filtro.

### 2.2.6 Inclusão de restrições

A determinação dos parâmetros através da equação (149) não contempla restrições que surgem do relacionamento entre alguns dos parâmetros. Estas restrições podem ser expressas na forma de equações não lineares do tipo

$$r(p) = 0 \quad (152)$$

Estas podem ser linearizadas para o vetor de parâmetros  $p$  em torno de  $p_0$

$$r(p) - r(p_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial p_i} (p_i - p_{0i}) \quad (153)$$

As restrições linearizadas podem ser escritas na forma matricial

$$r(p) - r(p_0) = R(p - p_0) \quad (154)$$

A expressão para o resíduo quadrático  $J$  pode ser dada por

$$J = J(\hat{p} - p_0) - (p - \hat{p})^T S(p - \hat{p}) \quad (155)$$

onde  $\hat{p}$  é o valor ótimo de  $p$  para a expressão 137 e  $J(\hat{p} - p_0)$ , é o valor da função objetivo quando  $p = \hat{p}$ .

A minimização de  $J$  dadas as restrições  $r$  pode ser re-escrita para o funcional

$$J_r = \lambda R(p - p_0) + (p - \hat{p})^T S(p - \hat{p}) \quad (156)$$

onde  $\lambda$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange. A obtenção de  $p$  que minimiza  $\min_p \{J_r\}$  é a solução de

$$\frac{\partial J_r}{\partial p} = 0 \quad (157)$$

requerendo que  $p$  satisfaça as expressões

$$\lambda R(p - p_0) + (p - \hat{p})^T S = 0 \quad (158)$$

e

$$R(p - p_0) = 0 \quad (159)$$

A expressão de  $p$  que satisfaz as condições acima é

$$\hat{p}^* = (R S^{-1} R^T)^{-1} R^T (p_0 - \hat{p}) + \hat{p} \quad (160)$$

Considerações:

- Na expressão (160), a matriz  $R S^{-1} R^T$  ser singular indica que não é possível melhorar o funcional  $J$  sem que as restrições sejam violadas.
- Na expressão (160), a matriz  $S$  ser singular indica que a solução não é única
- Em geral, a matriz  $S$  é mal condicionada e é recomendado tomar-se a pseudo-inversa.

## 2.3 Processamento

O processo de gravimetria culmina em uma subtração entre acelerações medidas por sensores inerciais e sensores não inerciais. No caso deste trabalho, os sensores inerciais são acelerômetros de corda e os não inerciais são os sinais de posicionamento GPS.

A Figura 1 abaixo representa esquematicamente o fluxo dos dois tipos de sinais. O processo caracteriza as etapas de alinhamento temporal e de complementação entre os sinais, pertencentes ao nível 1 de fusão multi-sensorial (HALL e LLINAS, 1997).

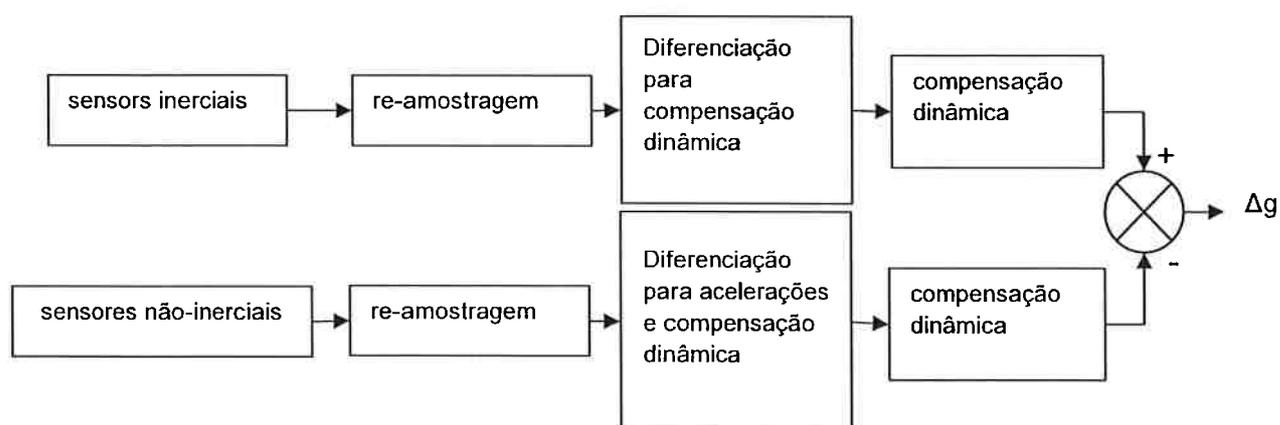


FIGURA 12: FLUXO DOS SINAIS DOS SENSORES DE POSICIONAMENTO INERCIAIS E NÃO-INERCIAIS

A subseção 2.3.1 explica a necessidade de uso intenso de filtros de resposta finita em métodos de gravimetria. A subseção 2.3.2 explica o processo de filtragem casada, no qual dois sinais de amostragem diferentes são reamostrados após passarem por filtros de anti-aliasing com respostas em frequência quase idênticas. A subseção 2.3.3 detalha os passos de processamento GPS, enquanto a subseção 2.3.4 explora o processo usado para a detecção de falhas e remoção das mesmas. A subseção 2.3.5 discute brevemente o processo de diferenciação usado para os sinais. Ao fim, a subseção 2.3.6 expõe o método usado para modelagem dinâmica do sistema sensor/GPS, bem como as razões para a modelagem e suas limitações.

### **2.3.1 Introdução aos filtros utilizados**

Para aero-gravimetria, algumas dificuldades no tratamento de sinais tornam importantes algumas escolhas na estrutura dos filtros utilizados.

Em primeiro lugar está o fato de o resultado final de processamento ser influenciado diretamente por falhas no sinal GPS que possuem característica muito concentrada no tempo como "spikes" e degraus resultantes de erros na solução de ciclos ("cycle-slips").

Outra dificuldade é a presença de trechos nos dados onde o ruído causado pela dinâmica da aeronave é elevado, como manobras e trechos turbulentos.

Os sinais GPS devem estar perfeitamente sincronizados aos sinais dos sensores inerciais.

Por estes fatores, a utilização de filtros de resposta finita (FIR) torna-se muito desejável, pois a influência de falhas nos sinais ficam limitadas a um intervalo limitado, e possuem resposta em fase muito fácil de compensar (processo trivial, no caso de pós-processamento).

### **2.3.2 Filtros casados**

#### ***2.3.2.1 Introdução***

Para que os dados de duas fontes de dados sejam combinados efetivamente, o tratamento individual de cada fonte de dados deve ser idêntico. A comparação entre acelerações medidas por GPS e acelerômetros inerciais deve ser feita com a precisão melhor que  $10^{-6}$  m/s<sup>2</sup> para efetuar a medida da anomalia de aceleração vertical com precisão suficiente para que atinja o nível necessário para mapeamento geofísico. A primeira etapa de processamento é o de reamostragem dos sinais GPS e inerciais para uma taxa de amostragem comum, o que exige a aplicação de filtragem anti-aliasing. Para tanto, as seguintes características foram buscadas para o projeto dos filtros:

- Acurácia condizente com as necessidades aplicação, no caso ao nível de  $10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>
- Harmonização das taxas de amostragem à menor daquelas dos sinais obtidos por GPS e pelos acelerômetros inerciais
- Na banda passante, a ondulação deve ser inferior a 0.02 dB (0.25%)
- Resposta linear em fase

A primeira condição surge diretamente da precisão requerida para a obtenção do sinal de anomalia. O processo de reamostragem a uma taxa comum é necessário para possibilitar a comparação (subtração + modelagem) entre os dados GPS e inerciais. Esta pode ser vista como especificação para rejeição ao ruído de modo comum.

A condição sobre a ondulação no ganho da faixa passante surge da relação entre a precisão requerida e a amplitude total da anomalia, que usualmente fica dentro da faixa de  $2 \times 10^{-3}$ . Esta condição é equivalente a uma especificação de fidelidade de resposta para o modo diferencial entre os sinais de entrada.

A resposta linear em fase simplifica enormemente o pós-processamento, e é satisfeita para os filtros de resposta finita do tipo I, que são simétricos e possuem um número ímpar de coeficientes, resultando em atraso de fase correspondente a um número inteiro de amostras.

Os filtros casados obtidos usando-se a metodologia descrita na seção 2.3.2.3.1 a seguir satisfazem estas condições. Para efeito de comparação, também foram projetados filtros de ordem semelhante utilizando-se aproximação polinomial, o método de Parks-McClellan, e uma simplificação da técnica de casamento.

### **2.3.2.2 Discussão teórica**

Para satisfazer a característica de resposta linear em fase os filtros escolhidos devem ser baseados em janelas de resposta finita do tipo I, que são simétricos em torno de um coeficiente central, que possuem atraso equivalente a um número inteiro de amostras, facilmente corrigível em pós-processamento.

As janelas de Dolph-Chebyshev (Dolph, 1946) possuem características em sua resposta em frequência que podem ser utilizadas para as finalidades propostas acima. A resposta em frequência destes filtros é baseada nos polinômios de Chebychev, construídos de tal forma que o filtro resultante é finito e realiza a função de transferência de forma exata no intervalo contínuo de frequências correspondentes a uma dada taxa de amostragem. Desta forma, dada uma frequência de corte final, é possível construir filtros finitos que apresentarão resposta quase idêntica quando os sinais forem reamostrados para a mesma taxa de amostragem inferior. Para isto, basta que a frequência de corte e o ganho sejam os mesmos, no ponto de vista da taxa de amostragem objetivada.

O uso de filtros de resposta finita tipo I resulta em uma resposta linear fase dos mesmos. Para o caso deste estudo, em que os dados são pós-processados, é possível realizar a suavização sem distorção de fase.

A expressão para a resposta da janela Dolph-Chebyshev em função da frequência normalizada  $\theta$  é dada por (DOLPH, 1946)

$$F(\theta, \theta_c) = \frac{T_n(\cos(\frac{\theta}{2}) \sec(\frac{\theta_c}{2}))}{T_n(\sec(\frac{\theta_c}{2}))} \quad (161)$$

Sendo  $\theta_c$  a frequência de início da banda de atenuação do filtro no sentido Esta expressão resulta em um polinômio com argumento  $\cos(\theta/2)$  que pode ser escrito na forma

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^k \quad (162)$$

Se o comprimento do filtro for tomado em  $n+1$ , ímpar, o polinômio de Chebychev terá ordem  $n$  par e possuindo coeficientes somente nas potências de ordem par, podendo assim a expressão (162) ser reescrita na forma:

$$\sum_{k=-n}^n d_k (e^{i\theta})^k \quad (163)$$

onde  $d_k$  são os coeficientes do filtro de resposta finita implementando  $F(\theta, \theta_c)$ . O uso do argumento  $\text{Cos}(\theta/2)$ , e a utilização de uma função polinomial para descrever a resposta do filtro resultam em um filtro de resposta finita que realiza perfeitamente a função de transferência  $F(\theta, \theta_c)$ . Esta característica desejável da janela Dolph-Chebyshev permite a síntese de filtros com respostas idênticas. Supondo a razão entre as taxas de amostragem de dois filtros ser  $r > 1$ , a função de transferência do filtro de taxa maior é igual à daquele de taxa menor se a frequência de corte  $\theta_{c2}$  do primeiro e  $\theta_{c1}$  do segundo se relacionarem pela expressão

$$\theta_{c1} = r \theta_{c2} \quad (164)$$

O objetivo é o projeto de filtros anti-aliasing para os dois sinais tendo em vista a re-amostragem posterior para a taxa de amostragem mais baixa entre ambos os sinais. Dois fatores importantes impedem que os dois filtros sejam idênticos. O primeiro resulta do fenômeno de "aliasing" que resulta da re-amostragem aplicada ao sinal de taxa mais alta. Este efeito pode ser suficientemente reduzido através da especificação de um ganho suficientemente baixo na faixa de atenuação. O segundo efeito surge da dependência entre fator de atenuação e a ordem do filtro, que é um número inteiro, o que resultará em identidades aproximadas. Para as ordens de filtros consideradas aqui, a aproximação é excelente.

No entanto, a resposta do filtro de Dolph-Chebyshev não é a resposta desejável para a aplicação em questão. Para obter um filtro de resposta plana ao longo de uma faixa de frequências, a resposta espectral da janela protótipo deve passar por uma forma de convolução no domínio de frequências, que pode ser feito de duas maneiras. Na primeira, realiza-se uma soma discreta de cópias da janela espectral modificadas usando-se deslocamento espectral (OPPENHEIMER e SCHAFER, 1989, p. 57) através da seguinte expressão

$$h_s(k) = h(k) e^{-j k \delta\omega} \dots -n \leq k \leq n \quad (165)$$

onde  $h(k)$  representa o coeficiente  $k$  e  $\delta\omega$  é o deslocamento espectral desejado. O deslocamento espectral deve ser calculado com base no número de lóbulos necessários para a cobertura da faixa passante para o filtro desejado e é calculado através da expressão

$$\delta\omega = \frac{\theta_p}{n_b} \quad (166)$$

Onde  $\theta_p$  é a frequência de passagem do filtro e  $n_b$  o número de lóbulos adicionais a serem gerados a partir da janela base. Uma vez gerados os lóbulos necessários, estes são somados para obtenção do filtro passa-baixas final. A relação entre as respostas individuais de cada filtro está esquematizada na figura 13.

Na segunda maneira, realiza-se a convolução do espectro com a função bloqueadora em frequência dada pela expressão

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \theta_p \\ 0, & \theta_p \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (167)$$

A convolução pode ser realizada através da seguinte expressão, conforme exposto em (OPPENHEIMER e SCHAFER, 1989) pp. 447-457

$$\begin{cases} h_w(k) = h(k) \frac{\text{Sinc}(k \theta_p)}{k} & -n \leq k \leq n, k \neq 0 \\ h_w(0) = 1 \end{cases} \quad (168)$$

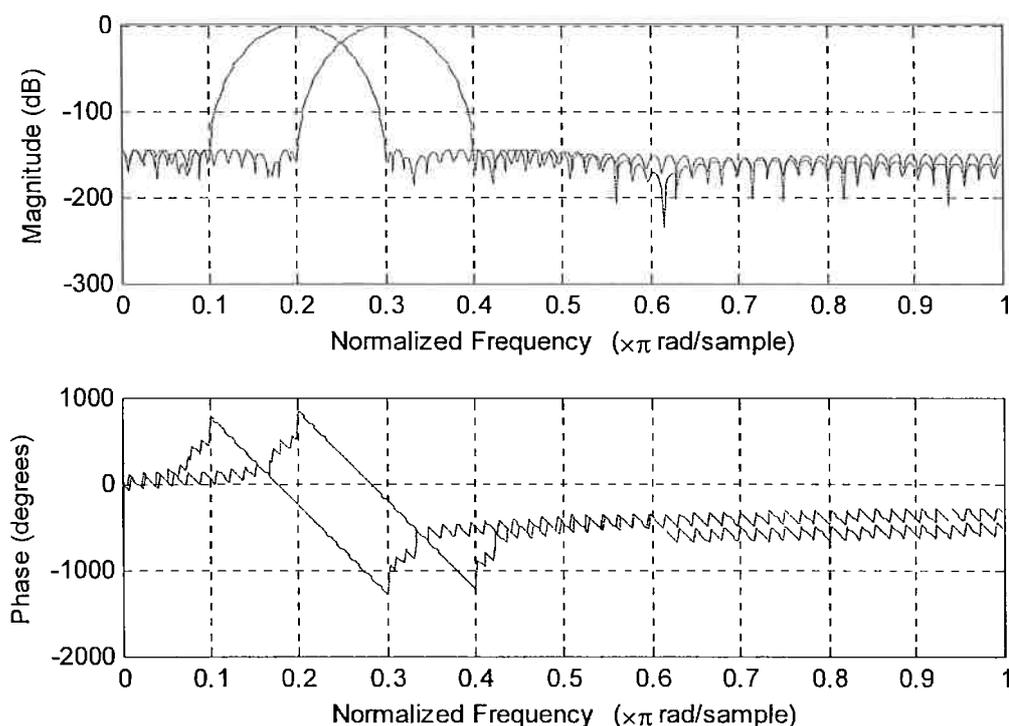


FIGURA 13 COMPOSIÇÃO DO FILTRO PASSA BAIXA

A utilização de ambos os métodos produz resultados semelhantes. Para o método de soma discreta, é possível obter uma resposta suficientemente plana, desde que se gere um número suficientemente grande de janelas com deslocamentos cobrindo toda a banda passante. Ambos os métodos resultam em uma janela finita que guarda as características desejáveis essenciais da janela protótipo. Casando-se as janelas protótipo Dolph-Chebyshev projetadas para os dois sinais originais, aplicando-se sobre ela os métodos de soma discreta ou convolução, temos dois filtros resultantes passa-banda com respostas casadas.

Como acontece com filtros desta natureza, surge um compromisso entre suas diversas características, a saber:

- a planura da resposta em frequência
- a atenuação na faixa de corte
- o comprimento da faixa de transição

- a ordem do filtro

Para a soma discreta, a planura da resposta depende do número de lóbulos usados e da largura individual da faixa passante de cada um deles. Quanto maior a largura da faixa passante e quanto maior o número de lóbulos, mais plana a resposta do filtro.

A atenuação na faixa de corte depende da largura da janela protótipo e da ordem dos filtros individuais. Quanto menor for a largura e maior a ordem, maior a atenuação.

O comprimento da faixa de transição depende da largura da janela protótipo.

A manutenção das características da função de transferência do filtro depende da manutenção das características dos lóbulos individuais.

Desta forma, os fatores cruciais para o projeto individual das janelas que compõem o filtro são o fator de atenuação e a largura do lóbulo, que por sua vez determinam a ordem do filtro.

Da expressão 161 obtém-se que o valor da atenuação  $G$ , da frequência de corte  $\theta_c$  e os comprimentos dos filtros relacionam-se segundo a expressão:

$$n - 1 = R \left( \frac{\text{acosh}(G)}{\cosh^{-1} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} \right)} \right) \quad (169)$$

onde  $R(.)$  é a função de arredondamento.

Como a ordem do filtro é um número inteiro, há uma limitação nas possíveis combinações de atenuação e largura para os lóbulos individuais. Para que duas janelas em amostragens diferentes sejam equivalentes, a seguinte expressão deve ser verdadeira:

$$(n_1 - 1) \cosh^{-1} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_{c1}}{2}\right)} \right) = (n_2 - 1) \cosh^{-1} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_{c2}}{2}\right)} \right) \quad (170)$$

sendo  $n_1$  e  $n_2$  os comprimentos escolhidos a priori usando a expressão (169), e  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$  as larguras dos lóbulos das janelas Dolph-Chebyshev relacionadas pela relação  $r$  entre as taxas de amostragem originais conforme a expressão (164). Buscando uma solução aproximada para (170) e (164), obtêm-se as janelas casadas.

O projeto do filtro começa com uma especificação tentativa para a atenuação  $G$  dos lóbulos e os valores de  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$  escolhidos com base no número de lóbulos necessários para preencher a banda passante conforme a expressão (166). Através da expressão (169), encontram-se os valores de  $n_1$  e  $n_2$ . Devido ao arredondamento, o ganho  $G$  para cada filtro altera-se ligeiramente. Os valores de  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$  são alterados na solução numérica das equações (170) e (164). Se o filtro final não satisfaz a condição de atenuação requerida o processo é repetido para um valor inicial de ganho diferente, levando a comprimentos diferentes dos filtros e a soluções diferentes para as equações (170) e (164).

Uma vez obtida a janela base pelo procedimento descrito acima, as janelas adicionais são geradas utilizando-se deslocamento espectral e somadas para a obtenção do filtro final.

A seguir, dispõem-se resultados e comparações entre filtros obtidos por processos de projeto diferentes, procurando-se as características descritas acima. Uma discussão sobre a metodologia de projeto para cada um dos outros filtros usados é dada no preâmbulo de cada seção.

### 2.3.2.3 Resultados

Para efeito de comparação entre resultados, foram projetados pares de filtros casados de acordo com três metodologias diferentes:

- filtros casados usando-se os procedimentos descritos acima
- filtros aproximadamente casados com os mesmos parâmetros de comprimento e ganho dos lóbulos mas sem a resolução aproximada das equações (170) e (164) para o valor de lóbulos
- filtros projetados por aproximação polinomial (quase ótima por polinômios de Chebychev)
- filtros projetados por aproximação polinomial usando a metodologia de Parks-McClellan (PARKS e MCCLELLAN, 1972)

O ganho procurado para a atenuação foi de 150 dB de atenuação. O desempenho quanto à planura para todos os filtros ficou muito acima da especificação de 0.02 dB do projeto. Todos os filtros nas comparações abaixo foram realizados com aproximadamente a mesma ordem, para que os desempenhos sejam comparados em base de igualdade. A taxa do primeiro filtro foi considerada 9 vezes superior à do segundo filtro. A frequência normalizada de corte para o filtro destinado à taxa alta de amostragem foi de  $0.42/9 \pi$  e para o filtro destinado à baixa amostragem foi de  $0.42 \pi$ . A resposta do primeiro filtro foi reamostrada na taxa do segundo para comparação entre ambos.

Os sinais de entrada fornecidos aos filtros foram impulsos digitais. As saídas dos filtros foram reamostradas usando técnicas no domínio em frequência. Os gráficos mostram as respostas em magnitude e fase dos filtros projetados para cada amostragem e as respostas são comparadas após reamostragem. Quatro valores são mostrados para comparação entre os filtros: a energia do sinal de diferença entre as respostas dos sinais reamostrados, os comprimentos e as atenuações dos dois filtros usados para tratar os dois sinais de entrada. A tabela a seguir mostra a comparação entre os mesmos

TABELA 1 RESULTADOS COMPARATIVOS PARA TÉCNICAS DE PROJETO DE FILTROS CASADOS

	Resíduo	Comprimento do filtro 1	Comprimento do filtro 2	Erro máximo na faixa de passagem	Atenuação
Filtro casado	3.61784e-015	237	2129	2e-8	190 dB
Passa baixas por interpolação	5.61475e-007	237	2129	2e-4	90 dB
Passa baixas por Parks-McClellan Especificação de frequências	2.8679e-008	237	2131	1e-4	85 dB
Passa baixas por Parks-McClellan Especificação de erros	1.57134e-007	237	2129	1e-7	213 dB
Filtro quase casado	4.37805e-010	223	2003		217 dB

A seguir discutem-se os resultados individuais para cada metodologia utilizada.

#### 2.3.2.3.1 Filtro casado

Os resultados para o filtro casado mostram uma atenuação bem superior a 150 dB (1ppm), resultado de experimentação com diversos valores iniciais para os comprimentos dos filtros. As figuras 14 e 15 mostram as respostas em frequência dos filtros projetados.

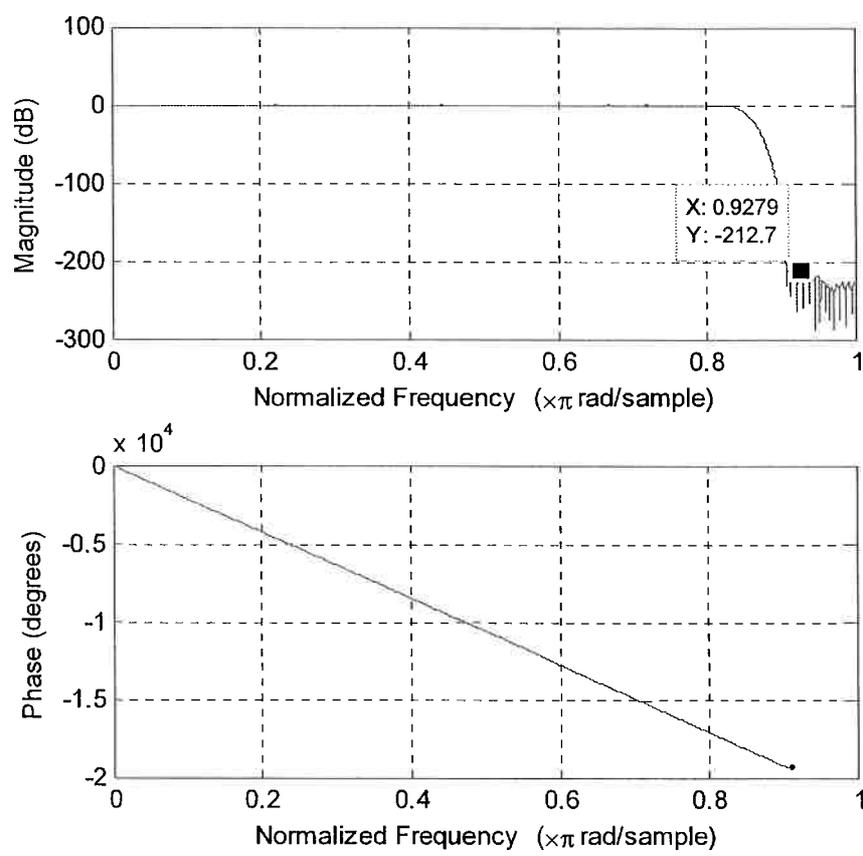


FIGURA 14 FILTRO CASADO PARA SINAL DE BAIXA AMOSTRAGEM

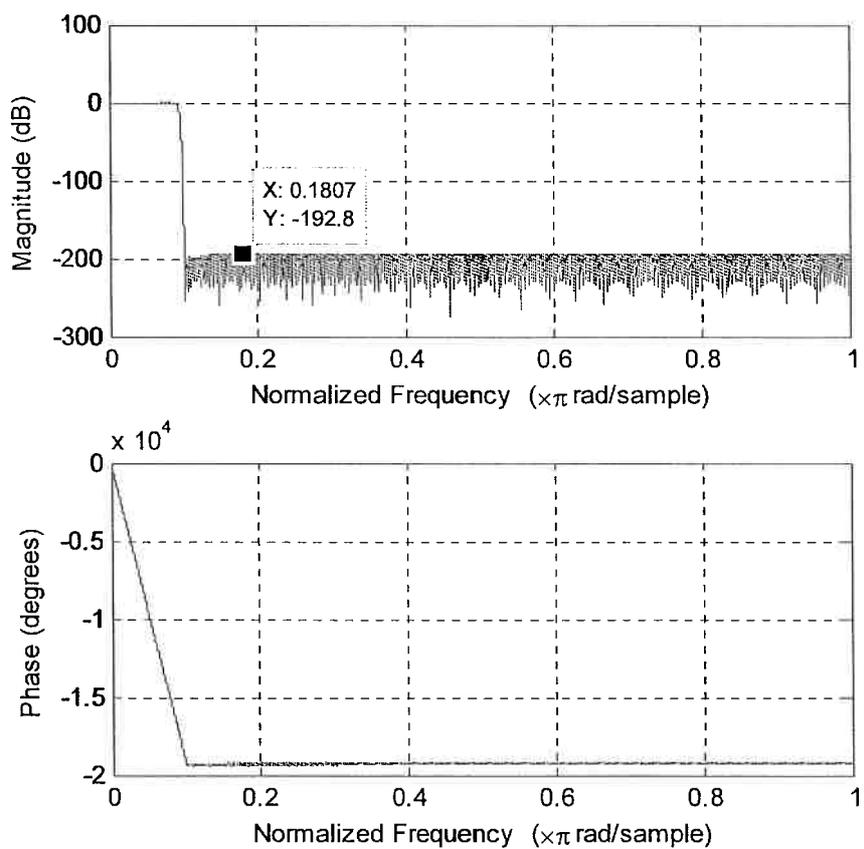


FIGURA 15 FILTRO CASADO PARA SINAL DE ALTA AMOSTRAGEM

As respostas ao impulso foram obtidas, reamostradas e tanto a resposta quanto a diferença entre as respostas podem ser vistas na figura 16.

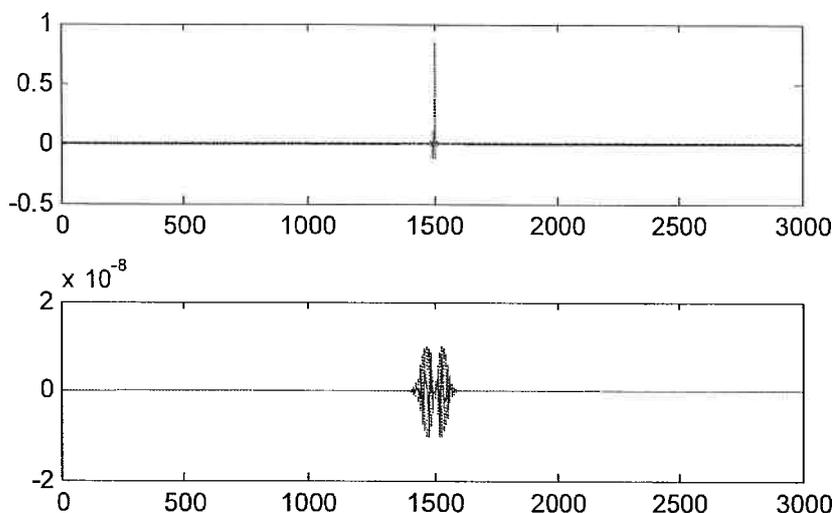


FIGURA 16 DIFERENÇA DE RESPOSTAS DOS FILTROS NA AMOSTRAGEM FINAL (SUPERIOR IMPULSO, INFERIOR DIFERENÇA NO TEMPO)

A figura 17 mostra o espectro do sinal de diferença. Nesta observa-se uma concentração da potência do erro na faixa de transição do filtro. Este fenômeno ocorre não só para este caso como para os demais analisados nesta seção.

Dependendo dos parâmetros de projeto usados, a solução das equações (170) e (164) resultam em filtros que quase não apresentam esta concentração na faixa de transição. Isto sugere que, no caso deste tipo de filtros, o ligeiro descasamento se deve provavelmente aos erros inerentes tanto à solução numérica das equações quanto aos de precisão numérica no cálculo dos filtros.

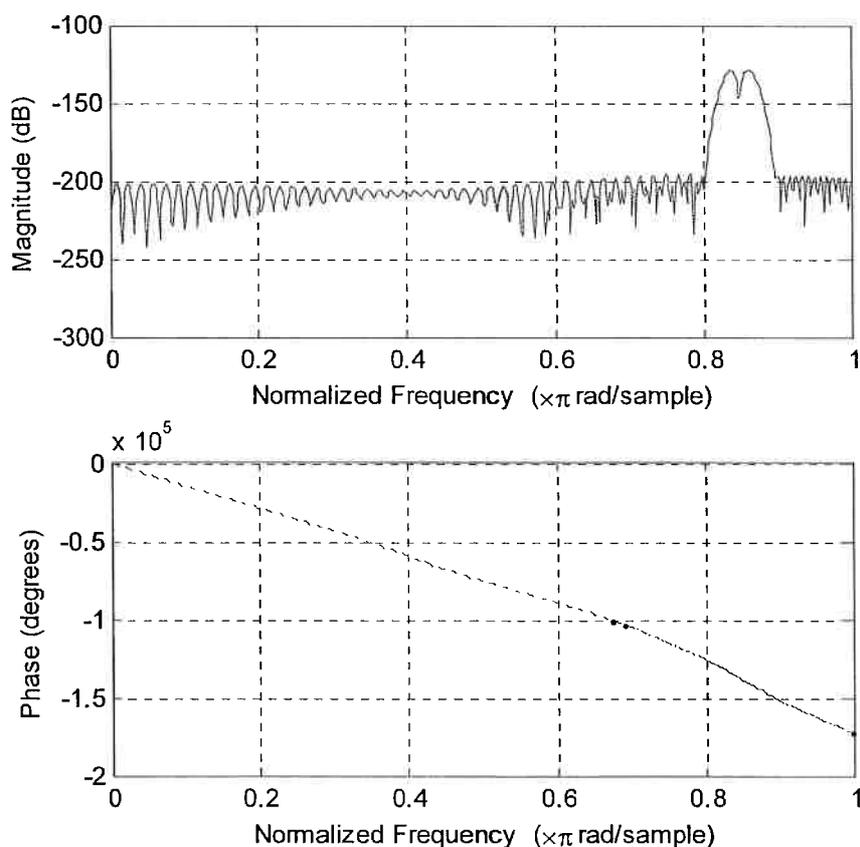


FIGURA 17 FILTROS CASADOS - ESPECTRO DA DIFERENÇA APÓS REAMOSTRAGEM

Nas figuras 18 a 20 a seguir, a resposta na faixa de passagem dos filtros casados projetados para os dois sinais é mostrada em detalhe. Nestas, vê-se uma ondulação de  $3 \times 10^{-7}$  dB, em torno de uma média de  $-1.5 \times 10^{-7}$  dB. Um dos efeitos da escolha da largura lobular de acordo com as equações (170) e (164) aparenta ser o de realização de um filtro de com resposta muito plana, ao contrário do que ocorre na escolha de lóbulos mais largos ou muito estreitos, que acarreta em ondulações elevadas na resposta na faixa passante dos filtros.

Na figura 20, a resposta do filtro para o sinal de amostragem mais alta foi reamostrada para a mesma taxa de amostragem do filtro da figura 18, para melhor realizar a comparação entre os dois filtros. Desta forma, evidencia-se a igualdade da função de sua transferência à do filtro para o sinal de baixa amostragem.

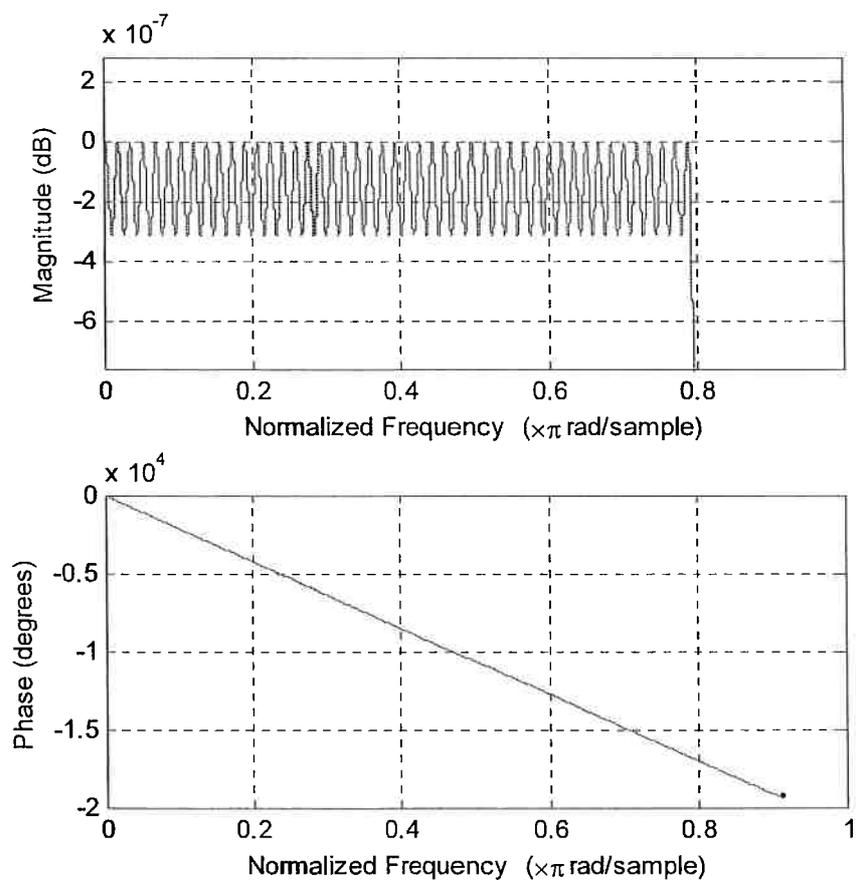


FIGURA 18 FILTRO CASADO PARA BAIXA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO DA FAIXA DE PASSAGEM

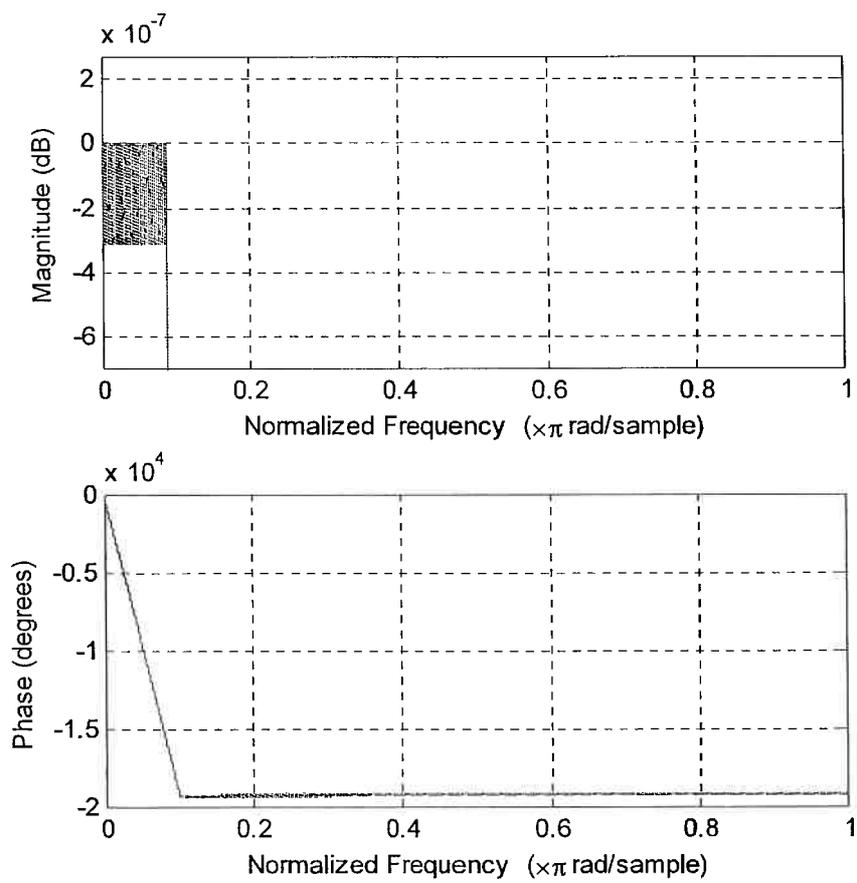


FIGURA 19 FILTRO CASADO PARA ALTA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO DA FAIXA DE PASSAGEM

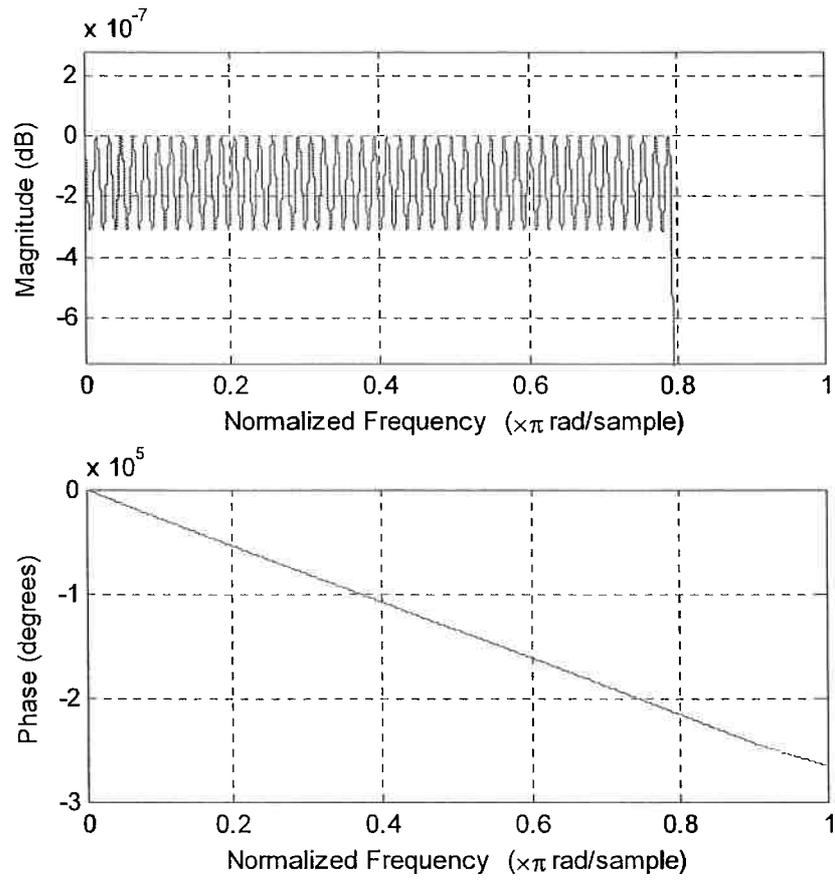


FIGURA 20 FILTRO CASADO PARA ALTA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO FAIXA DE PASSAGEM APÓS REAMOSTRAGEM

### 2.3.2.3.2 Filtro por aproximação polinomial por mínimos quadrados

Para comparação, foram projetados filtros de mesma ordem às dos filtros casados discutidos anteriormente, usando um método de aproximação polinomial. Neste método, foram usados polinômios de Chebychev. A aproximação é realizada ajustando-se os coeficientes do somatório de polinômios para minimizar o erro quadrático em relação à seguinte função objetivo:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \theta_c \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{(\theta - \theta_c)(8\pi)}{\theta_c}\right) + 0.5 & \theta_c < \theta < \theta_c\left(1 + \frac{1}{8}\right) \\ 0 & \theta_c\left(1 + \frac{1}{8}\right) < \theta \end{cases} \quad (171)$$

Esta função define o comprimento da faixa de transição no valor de  $\theta_c/8$ .

Os resultados para esta técnica foram sensivelmente piores, sendo as características originais de projeto nem sempre respeitadas. A utilização da técnica de Parks-McClellan dá resultados semelhantes. Os métodos de aproximação polinomial permitem dois tipos de parametrizações principais:

- a escolha de pesos na função de minimização para as diferentes faixas de frequência que definem os filtros
- a escolha de uma faixa de transição apropriada

Estes parâmetros afetam o desempenho dos filtros projetados e não se traduzem facilmente nas características necessárias ao casamento das respostas dos filtros projetados.

Os pesos foram escolhidos uniformes em toda a faixa de frequência. Os pesos e o comprimento da faixa de transição escolhidos dão valores de ganho e ordem aproximadamente semelhantes aos dos filtros casados projetados.

As figuras 21 a 24 mostram os resultados obtidos para os filtros projetados por aproximação polinomial. As atenuações na faixa de bloqueio diferem para as realizações de alta e baixa frequência de corte, mas ficam em torno de 90 dB como mostram as figuras 21 e 22.

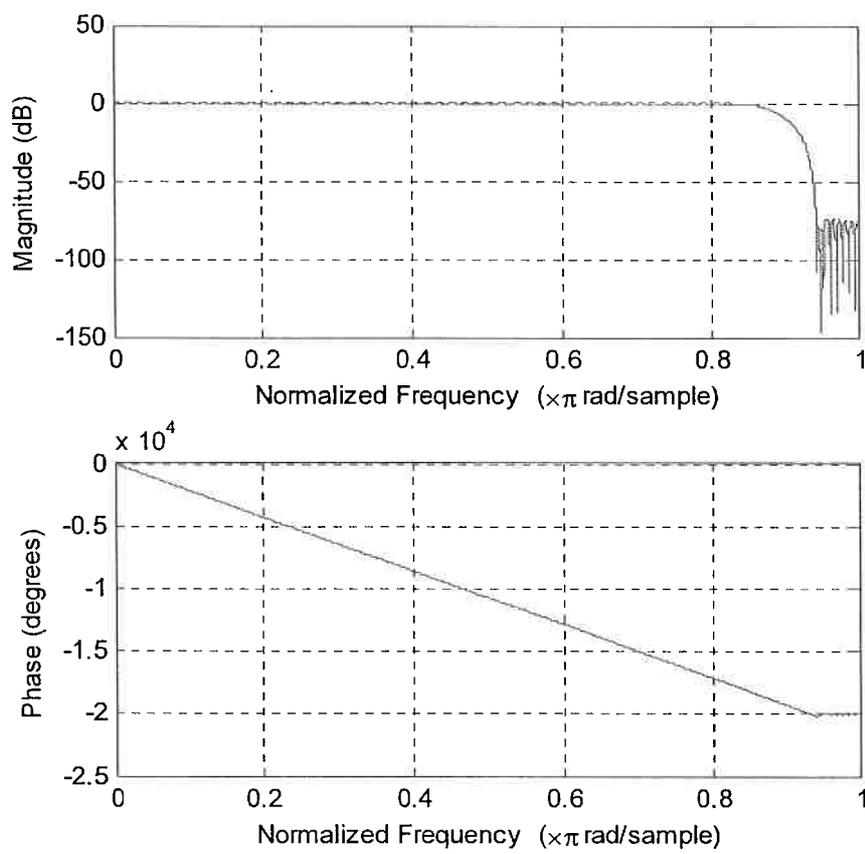


FIGURA 21 FILTRO POR APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA SINAL DE BAIXA AMOSTRAGEM

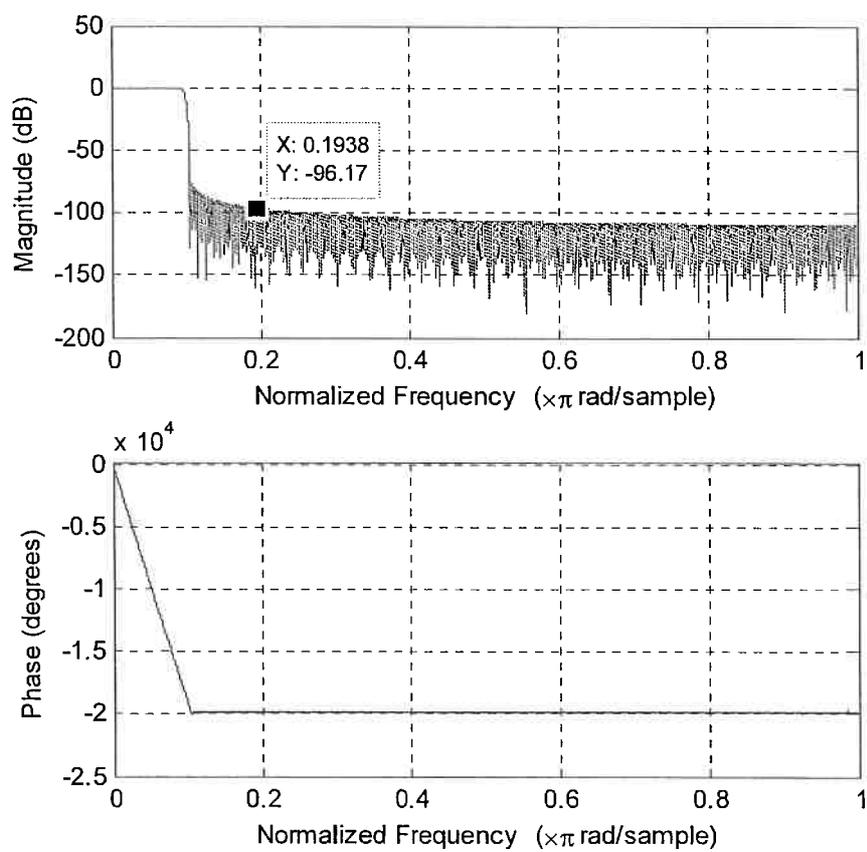


FIGURA 22 FILTRO POR APROXIMAÇÃO POLINOMIAL PARA SINAL DE ALTA AMOSTRAGEM

A figura 23 mostra a resposta ao impulso para ambos os filtros. Na parte superior está a resposta e na parte inferior a diferença entre os filtros após a reamostragem para a taxa de amostragem final. O espectro da diferença pode ser visto na figura 24 e também apresenta uma concentração de energia na faixa de transição.

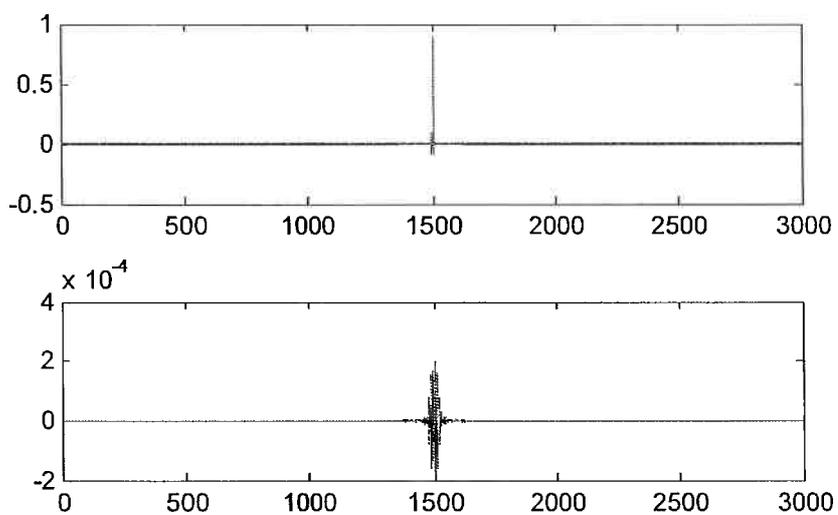


FIGURA 23 DIFERENÇA DE RESPOSTAS DOS FILTROS NA AMOSTRAGEM FINAL (SUPERIOR IMPULSO, INFERIOR DIFERENÇA NO TEMPO)

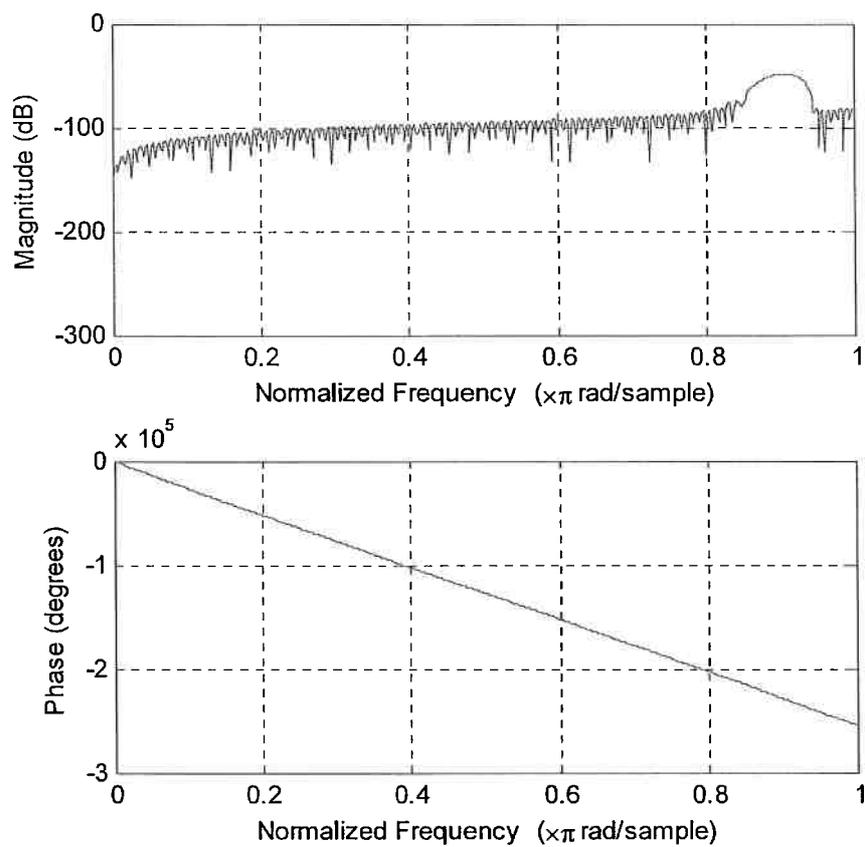


FIGURA 24 FILTROS POR APROXIMAÇÃO POLINOMIAL - ESPECTRO DA DIFERENÇA APÓS REAMOSTRAGEM

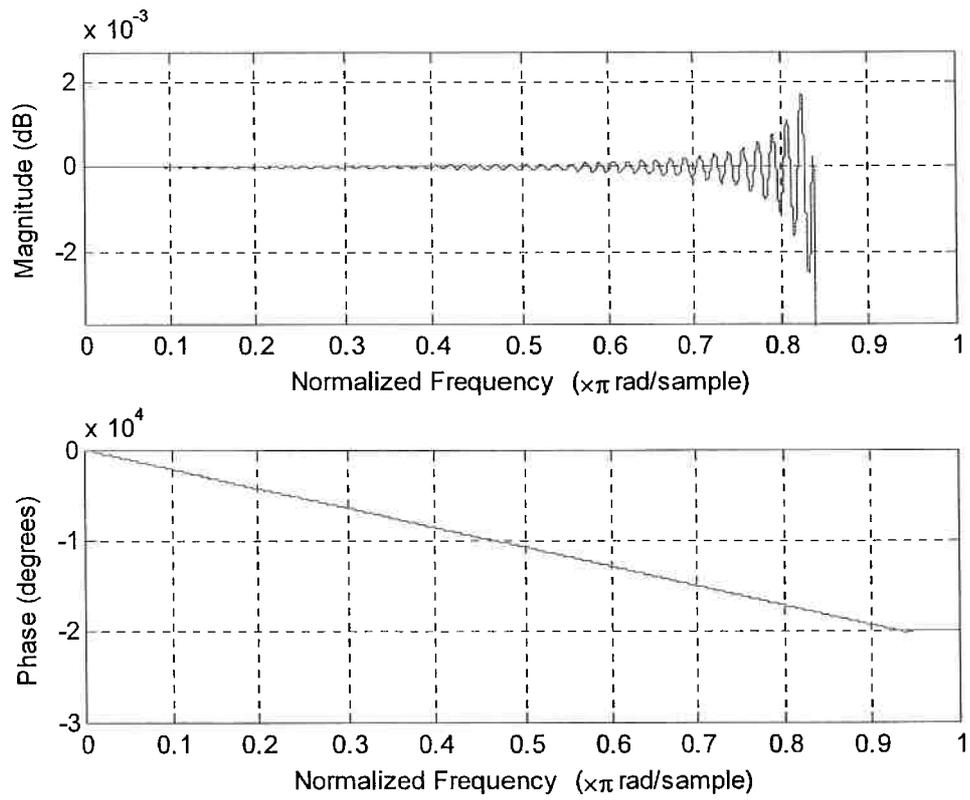


FIGURA 25 FILTROS POR APROXIMAÇÃO POLINOMIAL - ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MAIOR

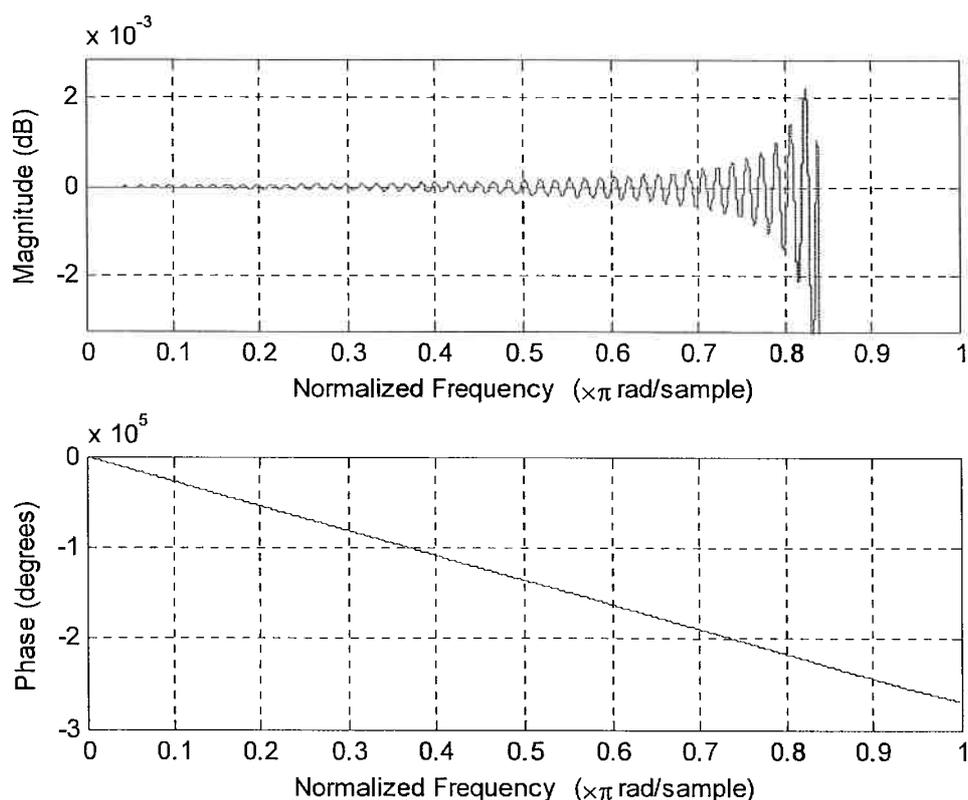


FIGURA 26 FILTROS POR APROXIMAÇÃO POLINOMIAL - ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MENOR

Destes resultados nota-se que muito embora cada filtro atenda as especificações em termos de ganho e frequência de corte, a semelhança entre suas respostas é menor. A teoria de aproximação garante a existência de filtros com resposta semelhante à função objetivo dentro de uma tolerância dada pela ordem dos polinômios usados.

### 2.3.2.3.3 Filtro ótimo por Parks-McClellan

Continuando a comparação, foi usado o método de Parks-McClellan (PARKS e MCCLELLAN, 1972) para projetar um filtro com a mesma ordem que os filtros descritos acima. Os parâmetros foram ajustados para que o algoritmo convergisse a uma solução aceitável e de bom desempenho.

O filtro é projetado de tal forma a obter a função de transferência  $F(\theta)$  que resolve o seguinte problema do tipo min-max

$$\text{Min} \{ \text{Max} \{ |W(\theta) (F(\theta) - f(\theta))| \} \} \quad (172)$$

Com  $W(\theta)$  sendo uma função peso e  $f(\theta)$  definida por

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \theta_p \\ 0, & \theta_s \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (173)$$

onde  $\theta_p$  é a frequência limite da faixa de passagem do filtro e  $\theta_s$  o limite inferior da faixa de atenuação. Duas formas de abordagem foram utilizadas no projeto dos filtros. Na primeira, a função peso  $W(\theta)$  foi tomada uniforme tomando-se valores para  $\theta_p$  e  $\theta_s$  buscando o melhor filtro possível usando a função “firpm” do programa **matlab**. A segunda abordagem foi a da utilização da função e “fireqrip” que permite especificar os erros máximos para as faixas de passagem e atenuação do filtro. Ajustando o intervalo entre a faixa de passagem e de atenuação foi possível obter um casamento razoável na primeira abordagem. Entretanto, os filtros projetados por esta abordagem não atingem a atenuação necessária, e o projeto dificilmente converge. A segunda abordagem resultou em filtros atendendo à maioria dos requerimentos de projeto. O erro máximo especificado para a faixa de atenuação foi escolhido em 213 dB que foi o resultado para o projeto de filtros casados. Somente os resultados para a segunda abordagem são mostrados nesta seção.

As figuras 28 a 34 mostram os resultados obtidos para esta forma de projeto. Nas figuras 28 e 27 podem ser vistas as funções de transferência dos filtros para a alta e baixa taxa de amostragem respectivamente. Ambos apresentam uma atenuação de cerca de -85 dB na faixa de atenuação. A figura 30 mostra a resposta do filtro para alta taxa de amostragem após a reamostragem para a taxa final.

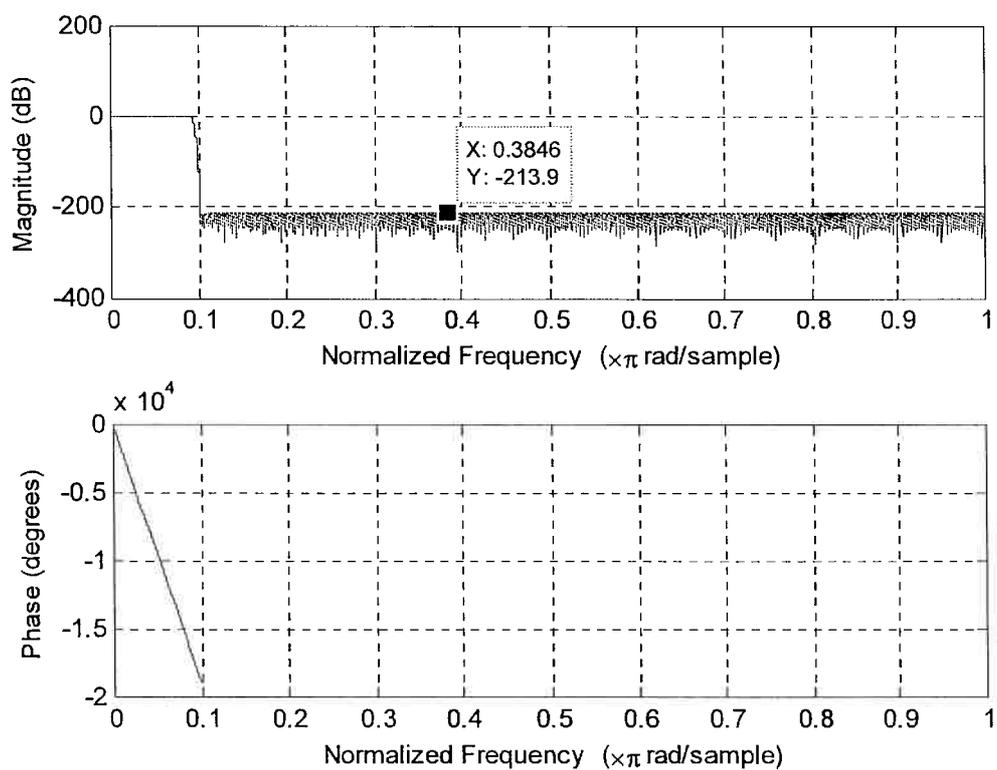


FIGURA 28 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN- ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MAIOR

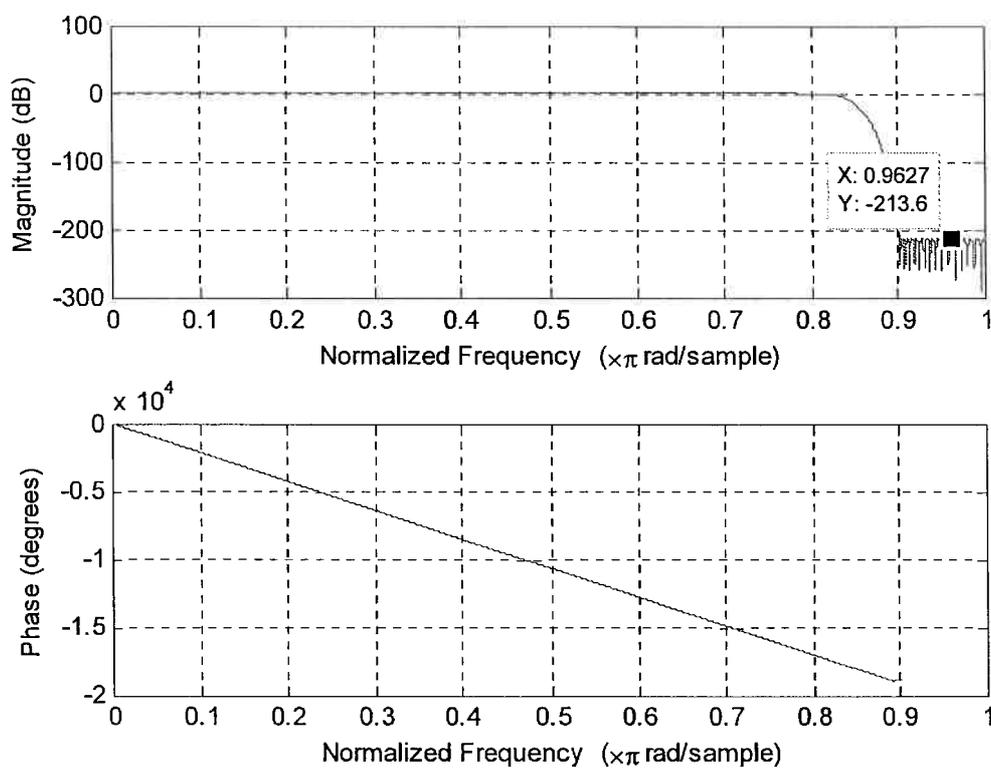


FIGURA 29 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN- ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MAIOR

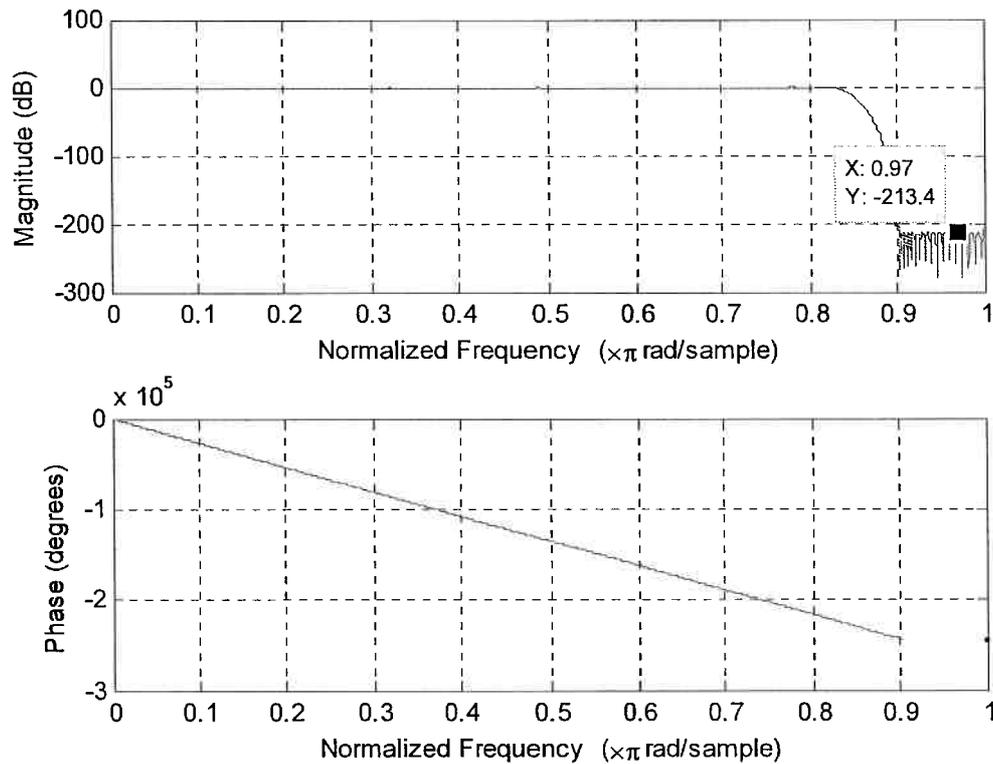


FIGURA 30 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN - ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MENOR

A seguir, são mostrados os resultados da diferença entre as respostas dos filtros após a reamostragem na taxa final. Na figura 31, o espectro da diferença entre as respostas dos filtros é mostrado. Na figura 32, as respostas ao impulso e as diferenças entre são exibidas nos gráficos superior e inferior, respectivamente.

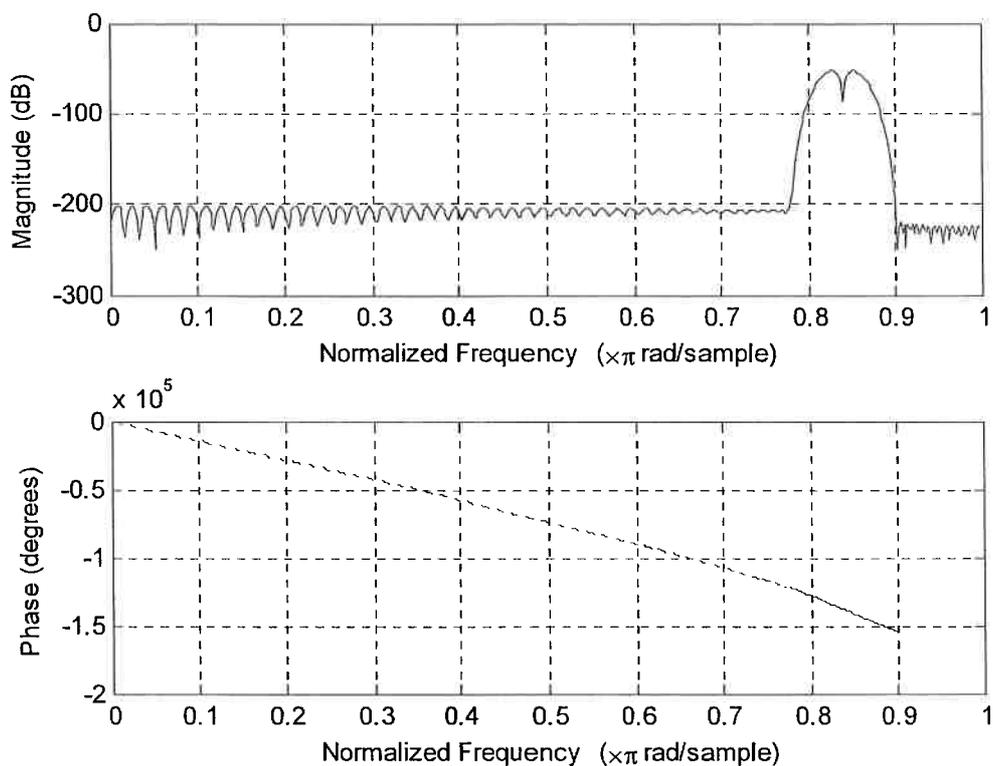


FIGURA 31 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN - ESPECTRO DA DIFERENÇA DE RESPOSTA AO IMPULSO APÓS REAMOSTRAGEM ENTRE OS FILTROS

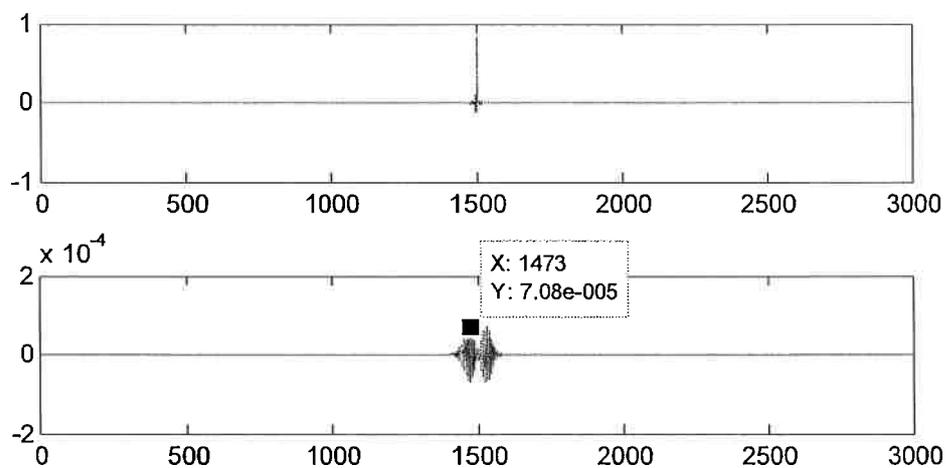


FIGURA 32 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN - RESPOTA AO IMPULSO (ACIMA) E DIFERENÇA ENTRE RESPOSTAS SO IMPULSO (ABAIXO) APÓS REAMOSTRAGEM PARA AMOS OS FILTROS

As próximas duas figuras mostram a faixa passante ampliada para uma apreciação da ondulação no ganho e da semelhança entre as respostas. Nota-se uma ondulação insignificante, da ordem de  $10^{-9}$  dB, mas há uma diferença entre as respostas, que se nota no posicionamento dos picos e vales nas oscilações de amplitude. Há uma diferença na média entre os ganhos dos filtros.

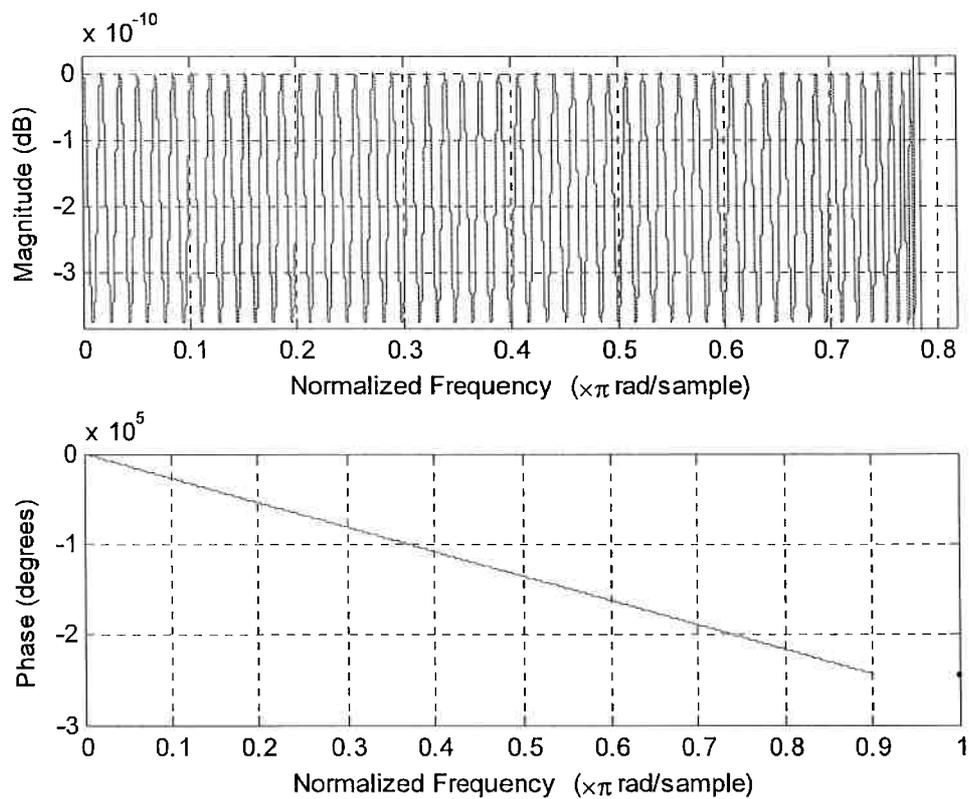


FIGURA 33 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN – DETALHE DO ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MAIOR

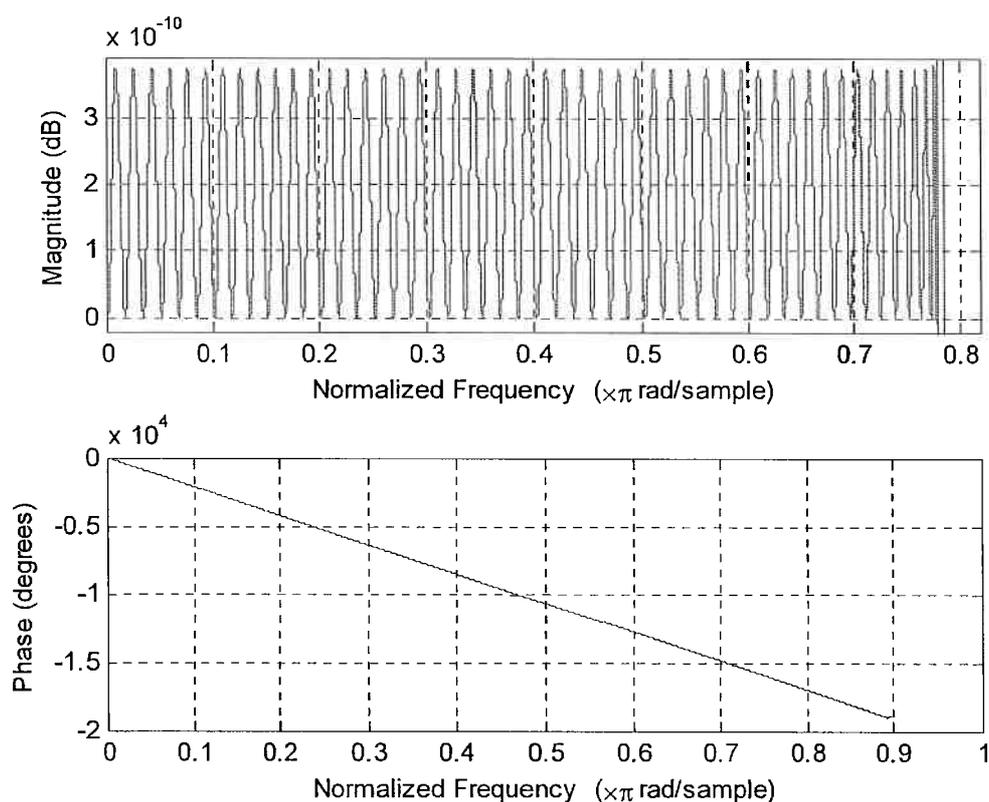


FIGURA 34 FILTROS POR PARKS-MCCLELLAN – DETALHE DO ESPECTRO DA FAIXA PASSANTE APÓS REAMOSTRAGEM PARA FILTRO DESTINADO À AMOSTRAGEM MAIOR

#### 2.3.2.3.4 Filtro aproximadamente casado

Para testar a necessidade da etapa de solução numérica das equações (170) e (164), foram testados filtros em que um valor padrão foi usado para a frequência de corte dos lóbulos individuais. De resto, o mesmo procedimento para a obtenção da ordem dos filtros foi usado.

As figuras 35 a 40 mostram os resultados obtidos para este projeto de filtros. Nas figuras 35 e 36 vêem-se as respostas em frequência dos filtros para baixa e alta taxa de amostragem, respectivamente. Estas mostram a atenuação elevada de aproximadamente 218 dB, para ambos os filtros.

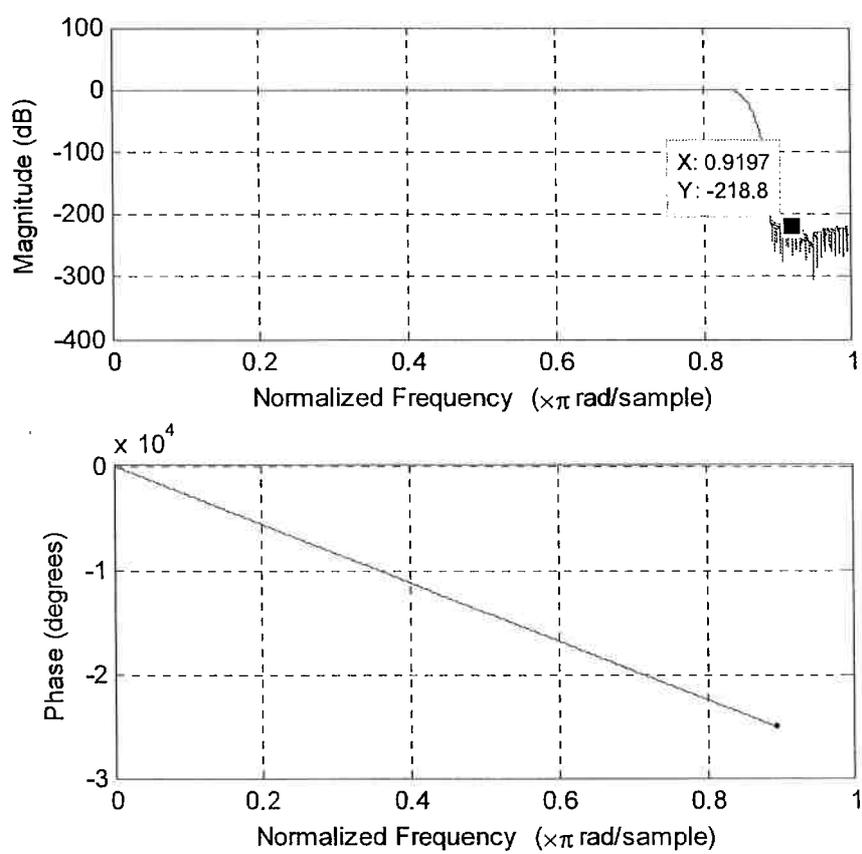


FIGURA 35 FILTRO CASADO PARA SINAL DE BAIXA AMOSTRAGEM

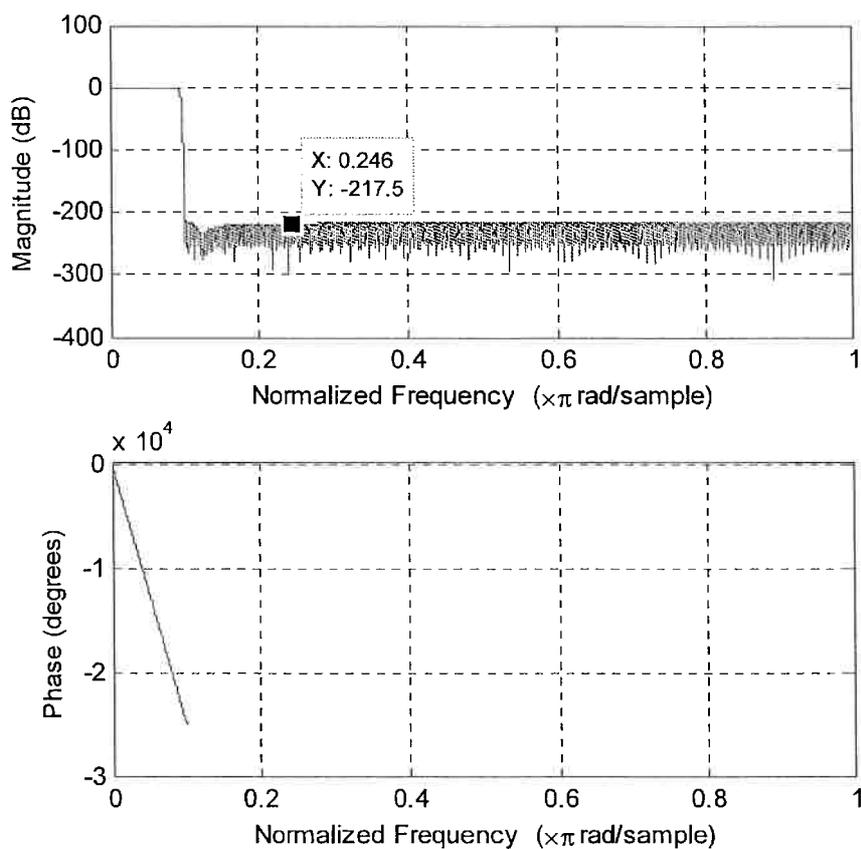


FIGURA 36 FILTRO APROXIMADAMENTE CASADO PARA SINAL DE ALTA AMOSTRAGEM

A figura 37 mostra a resposta ao impulso na parte superior e a diferença entre as respostas ao impulso de ambos os filtro reamostrados na taxa final. A diferença entre as respostas é duas ordens de grandeza menor que para os filtros projetados por aproximação polinomial, mas ainda fica duas ordens de grandeza acima da diferença apresentada para o projeto com a busca numérica pela solução das equações (170) e (164).

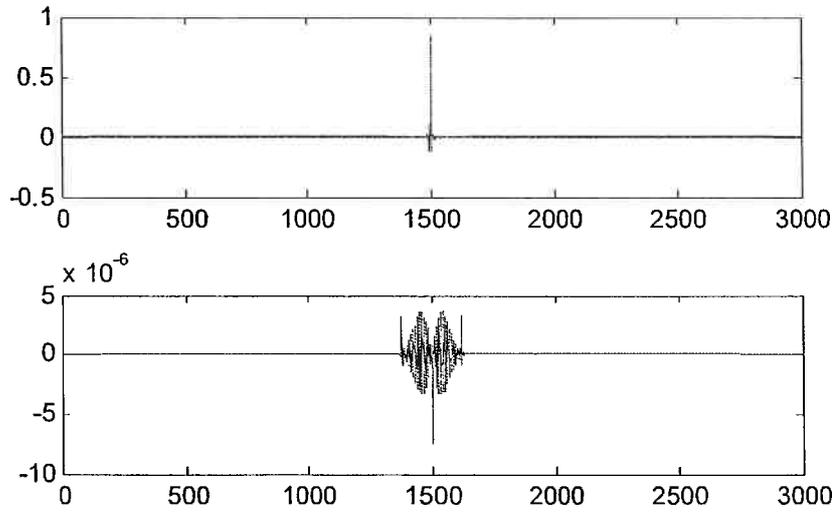


FIGURA 37 DIFERENÇA DE RESPOSTAS DOS FILTROS NA AMOSTRAGEM FINAL (SUPERIOR IMPULSO, INFERIOR DIFERENÇA NO TEMPO)

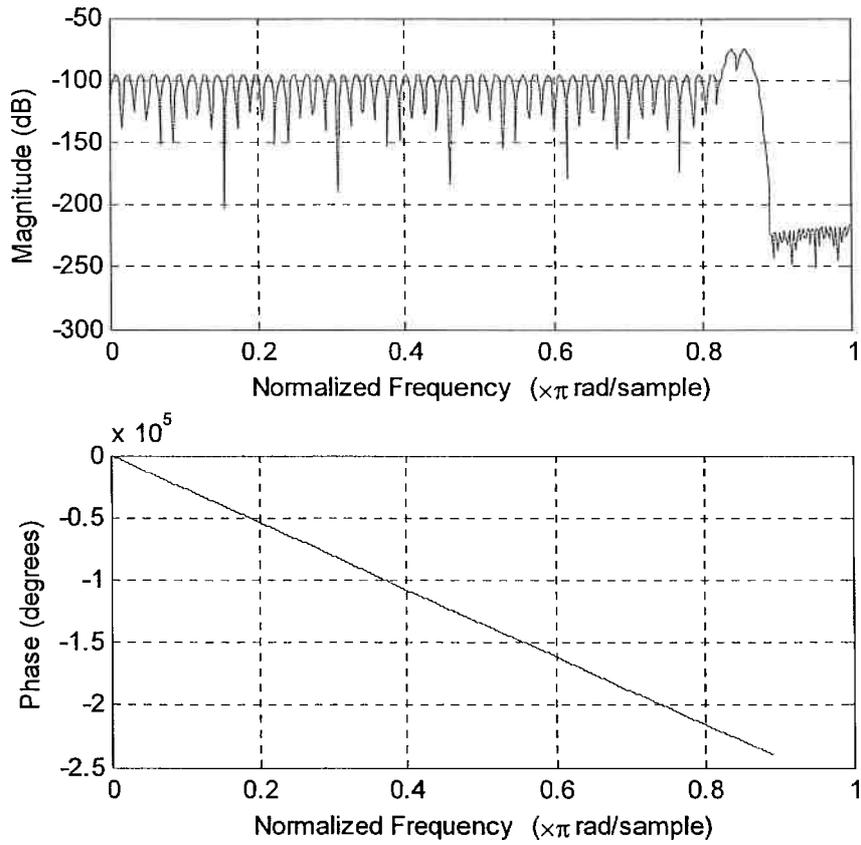


FIGURA 38 FILTROS APROXIMADAMENTE CASADOS - ESPECTRO DA DIFERENÇA APÓS REAMOSTRAGEM

A figura 39 mostra a resposta do filtro para a baixa taxa de amostragem. Observa-se uma ondulação muito mais elevada que para os filtros anteriores. Entretanto, ao comparar-se com figura 41 que mostra a resposta reamostrada do filtro projetado para a taxa de amostragem alta, observa-se o casamento entre ambos os filtros, responsável pela pequena diferença mostrada na figura 37.

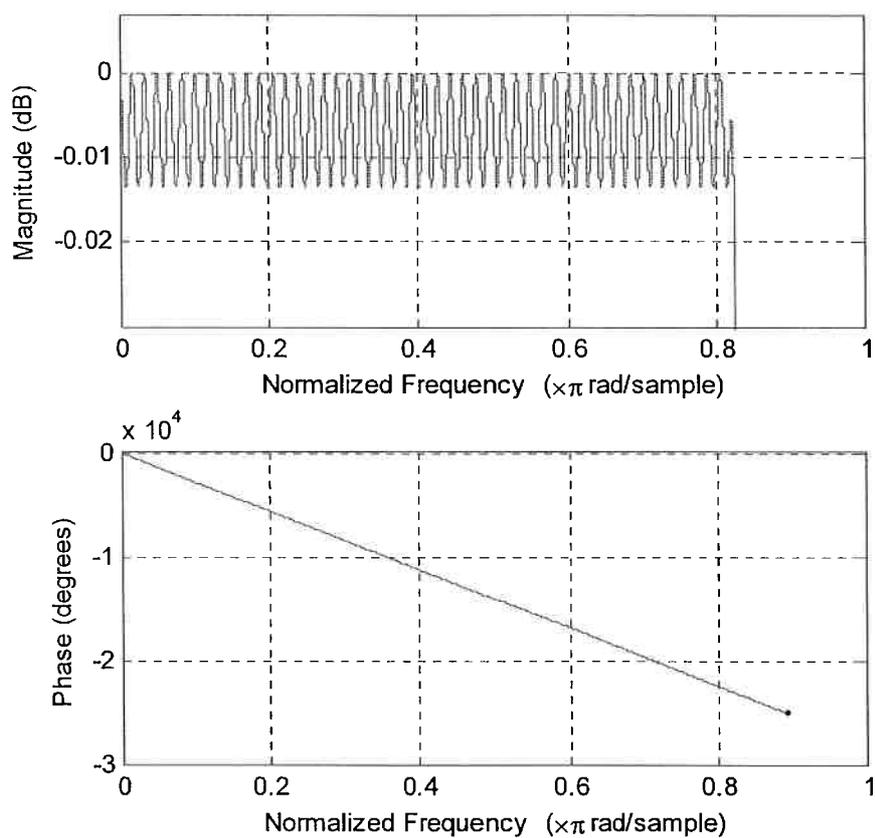


FIGURA 39 FILTRO APROXIMADAMENTE CASADO PARA BAIXA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO DA FAIXA DE PASSAGEM

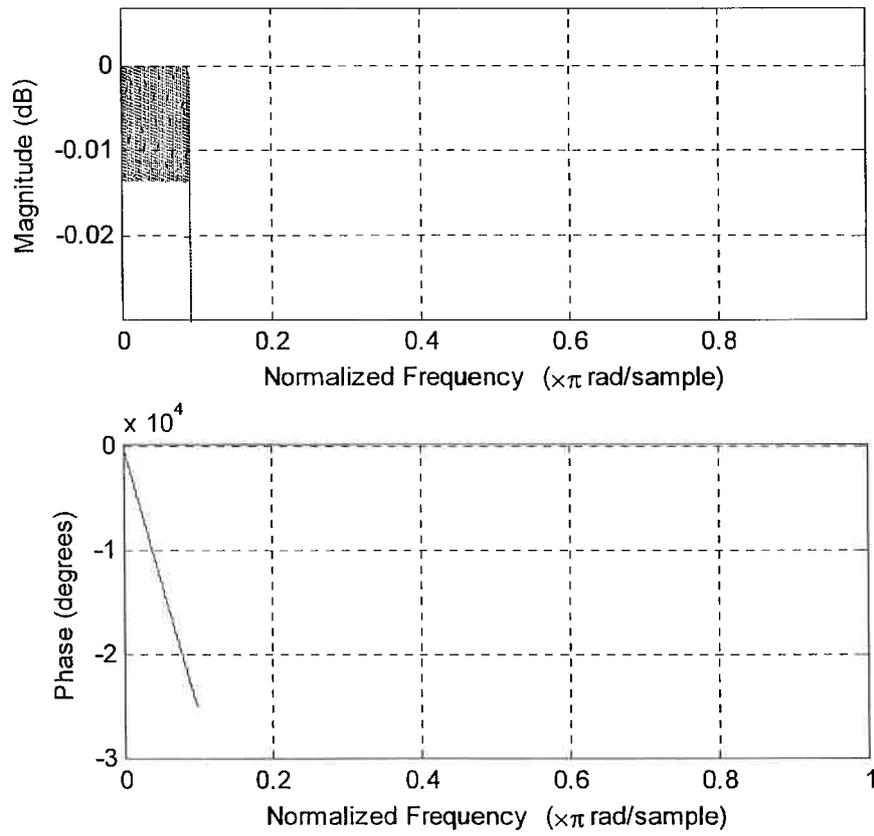


FIGURA 40 FILTRO APROXIMADAMENTE CASADO PARA ALTA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO DA FAIXA DE PASSAGEM

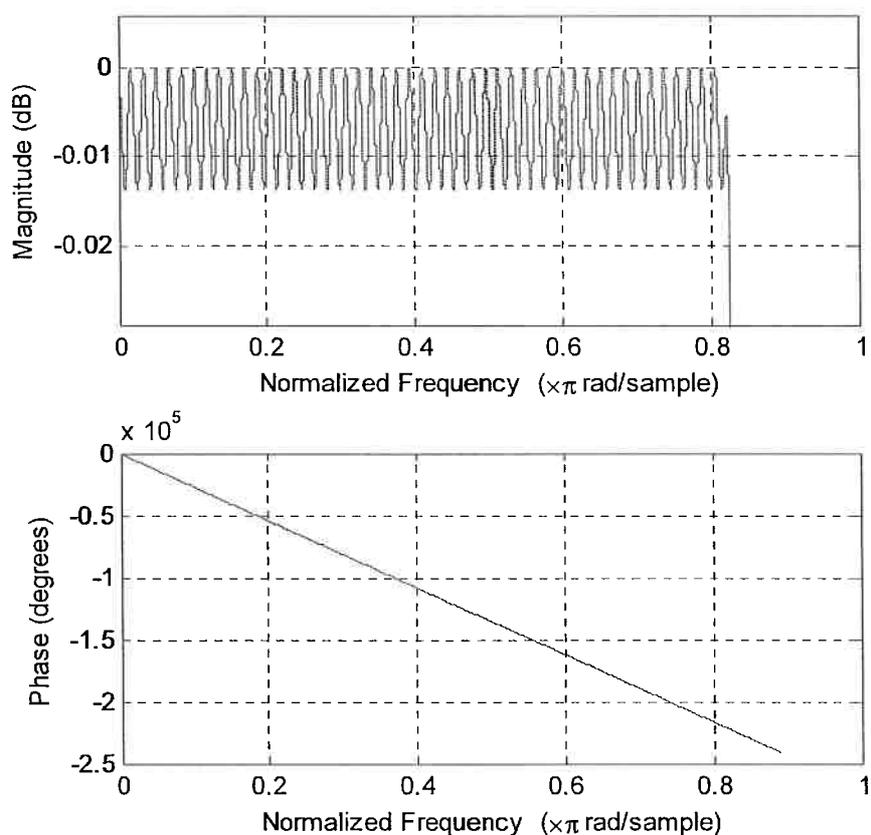


FIGURA 41 FILTRO APROXIMADAMENTE CASADO PARA ALTA TAXA DE AMOSTRAGEM – ESPECTRO FAIXA DE PASSAGEM APÓS REAMOSTRAGEM

### 2.3.2.3.5 Conclusões

Os filtros projetados para o casamento das respostas em frequência satisfazem com elevada precisão o requisito de igualdade. Além disto, a aproximação das equações 170 e 164 parece resultar em uma resposta muito mais plana, em comparação com os filtros usando um valor padrão para a largura dos lóbulos individuais. Os filtros projetados por aproximação polinomial e por Parks-McClellan também atendem as condições de planura necessária.

Quanto ao requisito de igualdade entre as respostas reamostradas na taxa final, os filtros casados e quase casados se mostram bastante superiores que os outros. No aspecto da atenuação atingida, os filtros casados tiveram desempenho excelente, o

que foi atingido também pelo filtro de Parks-McClellan (projetado por especificação de erros máximos). Os filtros casados projetados com vistas a atender as equações 164 e 170 apresentaram desempenho bastante superior aos filtros quase casados. Os filtros projetados usando Parks-McClellan apresentaram desempenho superior aos projetados usando aproximação polinomial apresentaram desempenho no aspecto de diferença entre respostas, mas inferior no aspecto de atenuação. Os filtros quase casados apresentaram ondulação elevada na faixa de passagem em comparação com os demais filtros.

O método desenvolvido nesta seção é bastante interessante para o projeto de filtros em que o casamento entre as respostas seja crucial para o sucesso da aplicação, em particular, no caso em que haja interesse em obter com precisão a diferença entre dois sinais muito semelhantes obtidos de origens diferentes, como é o caso da comparação entre as acelerações obtidas por meio de GPS e de sensores inerciais.

### 2.3.3 Processamento GPS

O sinal de GPS para uso em processamento de gravimetria é obtido através de pós-processamento dos sinais coletados pela aeronave e por sensores instalados em estações posicionadas na área de voo. O processamento resume-se a uma comparação entre os sinais do receptor móvel e o dos receptores estáticos, chamada de correção diferencial ou GPS diferencial (DGPS). Este processamento é feito por software fornecido pelo fabricante dos receptores. O resultado é um sinal com posicionamento preciso, onde cada base é processada separadamente. Uma das etapas deste processo é a solução de ambigüidades na contagem de ciclos que é um problema de números inteiros. As soluções diversas para o posicionamento resultam em um conjunto finito de soluções. Durante o voo, a solução ideal pode mudar para outra vizinha, causando degraus no posicionamento que são inaceitáveis para processamento de gravimetria.

### **2.3.4 Remoção de falhas do sinal GPS**

Para utilização em gravimetria, deve-se incluir um processo de remoção de falhas do tipo degrau realizado pela comparação entre as soluções de posicionamento obtidas para as diversas estações. Os degraus são detectados e substituídos por um valor de diferença entre amostras compatível com as variações medidas pelas bases onde não houve descontinuidade aparente. Este princípio de substituição já era utilizado no sistema fornecido pelo fabricante do equipamento e foi mantido com algumas modificações, que em termos gerais compõem-se de

- Análise estatística dos níveis de ruído
- Análise estatística da distribuição da ocorrência de degraus
- Utilização de máscara de detecção de ocorrências de degraus
- Uma análise e remoção de falhas manuais podem ser feitas no próprio sistema, em particular, quando é ruído excessivo no sinal das estações terrestres

A descrição detalhada das modificações realizadas no processo de detecção de falhas não faz parte do escopo deste trabalho. Alguns resultados deste processo são apresentados na seção 3.2.

### **2.3.5 Diferenciação dos sinais para obtenção de acelerações**

Uma das tarefas mais importantes no processamento de aero-gravimetria é a obtenção dos sinais de aceleração a partir da posição obtida pelo processamento DGPS (GPS diferencial). Vários autores analisam métodos de obtenção dos sinais de aceleração a partir dos sinais de posição. Mais uma vez

Uma discussão sobre os possíveis métodos de diferenciação pode ser obtida em (BRUTON, GLENNIE e SCWARZ, 1999). Em resumo, de acordo com os autores, os métodos estudados de interesse são

- janelas de convolução projetadas por aproximação de Taylor
- janelas de convolução projetadas por métodos de Remez
- janelas de convolução derivadas de aproximação polinomial

- derivadas por transformadas de Fourier

Os autores de (BRUTON, GLENNIE e SCWARZ, 1999) utilizam filtros projetados por aproximação de Taylor. Esta técnica foi experimentada, mas provou ser menos eficaz que a técnica de diferenciação por transformadas de Fourier, no caso do sistema desenvolvido. As razões são a necessidade de manter o casamento dos sinais entre GPS e sensores inerciais em altas frequências, em especial para as derivadas de ordem elevada requeridas no processo de modelagem do sistema GPS/sensores inerciais descrito na seção 2.3.6 a seguir.

### 2.3.6 Identificação do modelo do sistema sensor/GPS

O objetivo final da gravimetria aérea é determinar o sinal de anomalia, que é o erro de predição do valor de aceleração vertical medido

$$\Delta g = a - \ddot{h} - g_0 \quad (174)$$

onde  $h$  é a altitude de voo medida por GPS, e  $a$  é a aceleração vertical medida por acelerômetros e  $g_0$  é o valor composto da aceleração da gravidade  $g_{normal}(\varphi)$ , previsto conforme modelos do campo gravitacional terrestre, dependente da latitude, da anomalia de ar livre, dependente da altitude  $h$ , e da perturbação  $g_r$  causada pela influência do relevo, conforme a expressão

$$g_0 = g_{normal} - 0.308 h + g_r \quad (175)$$

Os acelerômetros usados neste sistema funcionam no princípio da corda vibrante onde a frequência de ressonância está relacionada com a tensão  $T$  na corda pela expressão

$$f^2 = \frac{T}{4 \rho L^2} \quad (176)$$

e a tensão está relacionada com a aceleração da gravidade através da expressão

$$T(j\omega) = m a(j\omega) F_s(j\omega) \quad (177)$$

Onde  $m$  é o valor da massa de prova e  $F_s$  é a função de transferência para o sensor.

Vale notar que no sistema desenvolvido, o sinal de frequência ao quadrado é usado, enquanto no sistema original, uma linearização em torno da frequência média é usada. Isto permite que toda a faixa de operação do acelerômetro seja usada sem receios de distorções ou cruzamentos entre os diversos componentes do sinal de aceleração.

Da mesma forma, o sinal da posição obtida através do GPS relaciona-se com a altura por uma expressão do tipo:

$$h_{GPS}(j\omega) = h(j\omega) F_{GPS}(j\omega) \quad (178)$$

onde  $h$  é a posição real da aeronave,  $h_{GPS}$  é a posição medida pelo sistema GPS e  $F_{GPS}$ , a função de transferência do sistema GPS, que descreve a resposta em frequência do sistema GPS à entrada de posição da aeronave.

A expressão (174) pode ser reescrita como

$$\Delta g = \frac{a(\omega)}{F_s(\omega)} - s^2 \frac{h_{GPS}(\omega)}{F_{GPS}(\omega)} - g_0(\omega) \quad (179)$$

Para a obtenção do  $\Delta g$ , o ideal seria  $F_s$  e  $F_{GPS}$  serem conhecidas, mas isto só é possível com testes dinâmicos de bancada, o que, em termos práticos, não é possível, pois no dia a dia das operações,  $F_s$  e  $F_{GPS}$  mudam com o tempo, e a determinação para as condições de um voo não servem indefinidamente. Uma outra razão para a que testes de bancada sejam ineficientes, são as mudanças que ocorrem nos sistemas com o tempo, devido, entre outros, a amadurecimento mecânico ou movimentação nos ajustes de posição dos sensores e posições dos satélites GPS que influenciam a resposta dinâmica obtida no processamento GPS.

Os dados conhecidos são as saídas dos acelerômetros  $a$  e a posição medida pelo sistema GPS  $h_{GPS}$  e o problema de identificação é determinar  $G_k$ ,  $P(\omega)$  e  $Q(\omega)$  na expressão

$$\Delta g(j\omega) = P(j\omega) A(j\omega) + Q(j\omega) \dot{h}(j\omega) + R(j\omega) z(j\omega) + G_0(j\omega) + G_k \quad (180)$$

de tal maneira que  $\Delta g$  represente a anomalia real.

O sinal  $z$  é composto pelos outros componentes das acelerações determinadas pelos GPS (horizontais) e provavelmente outros sinais que influenciam as leituras dos acelerômetros.

O método utilizado atualmente em programas de gravimetria assume que

$$Q(j\omega) = 1 \quad (181)$$

e

$$P(j\omega) = K \frac{e^{-j\omega \Delta t}}{j\omega + \frac{1}{\tau}} \quad (182)$$

Nesta metodologia devem ser determinados o atraso  $\Delta t$ , a constante de tempo  $\tau$  e a constante de proporcionalidade  $K$ .

O fator  $K$  é determinado inicialmente em testes de bancada e subsequente apurado na regressão linear de modelagem.

A modelagem por atraso é feita realizando-se regressões lineares após deslocamento no tempo para os dados da expressão

$$\dot{h}(t) = K_1 a(t + \Delta t) + K_2 \dot{a}(t + \Delta t) \quad (183)$$

Buscando-se o valor de  $\Delta t$  para o qual o erro quadrático da expressão acima é mínimo, também se obtêm  $K_1$  e  $K_2$ , de onde

$$K = K_1 \quad (184)$$

e

$$\tau = \frac{K}{K_2} \quad (185)$$

Na metodologia escolhida para este trabalho, assume-se  $\Delta t = 0$  e que  $P$  e  $Q$  são polinômios em  $j\omega$ , sendo a ordem de  $P$  menor que a ordem de  $Q$ , refletindo as pressuposições de que  $P$  e  $Q$  contêm zeros e pólos respectivamente da dinâmica dos acelerômetros e de que o sinal GPS representa fielmente a posição da aeronave. Assim

$$P(j\omega) = a_0 + j\omega a_1 + a_2 (j\omega)^2 + \dots \quad (186)$$

$$Q(j\omega) = b_0 + j\omega b_1 + b_2 (j\omega)^2 + \dots \quad (187)$$

Os valores onde a precisão se faz mais necessária são os de  $b_0$ ,  $b_1$  e  $G_k$ .

Assume-se  $a_0 = 1$ , ainda de acordo com a suposição de que o sinal de GPS representa a melhor estimativa possível da aceleração da aeronave em baixas frequências. Em altas frequências surgem distorções não desprezíveis no sinal e estes são levados em conta através dos demais parâmetros.

O método usado para a identificação das constantes  $a_i$  e  $b_i$  possui duas etapas: uma de baixas frequências e outra de altas frequências. A figura 23 abaixo mostra esquematicamente o processo.

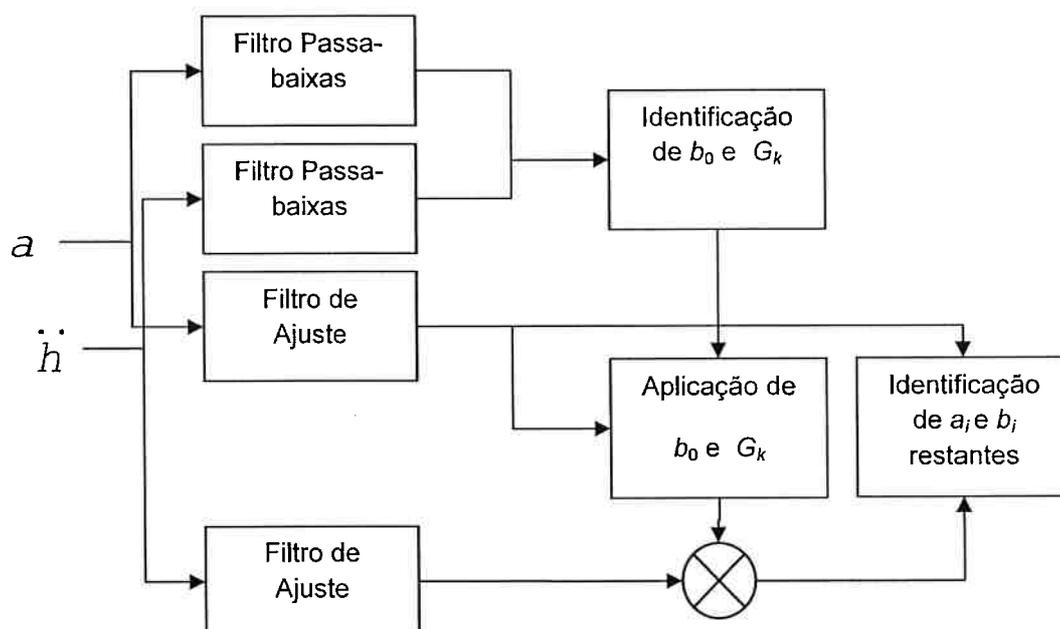


FIGURA 42 ESQUEMÁTICO DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO ACELERÔMETRO

Os sinais do acelerômetro  $a(t)$  e do GPS  $h(t)$  passam por um filtro passa-baixa de comprimento de corte elevado. Os sinais resultantes são usados para identificação dos parâmetros  $b_0$  e  $G_k$ . A determinação destes parâmetros pode ser melhorada com a adição de alguns parâmetros de suporte, como coordenada espacial e  $a'(t)$ . Nesta fase, os parâmetros de suporte são descartados após a identificação.

Uma vez identificados os parâmetros  $b_0$  e  $G_k$ , obtém-se, o erro parcial entre os acelerômetros e o sinal GPS usando-se a expressão

$$y_e(t) = \ddot{h}(t) - b_0 a(t) - G_k \quad (188)$$

Na segunda etapa são extraídos os valores necessários de derivadas implicitamente presentes na expressão (180) acima e formada uma matriz de amostras do seguinte vetor

$$X_e(t) = \left( \frac{\partial \ddot{h}(t)}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial^n \ddot{h}(t)}{\partial t^n} \quad \frac{\partial a(t)}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial^m a(t)}{\partial t^m} \quad z(t) \right) \quad (189)$$

Os sinais  $Y_e(t)$  e  $X_e(t)$  passam por um filtro especial de ajuste, e as constantes  $a_i$  e  $b_i$  restantes são identificadas através de uma regressão linear. Este filtro é projetado com função de transferência com forma semelhante à esperada pelo sinal gravimétrico, que tem a forma geral

$$F(\lambda) = e^{\frac{2\pi(-h)}{\lambda}}$$

onde  $F(\lambda)$  é função de transferência em função do comprimento de onda  $\lambda$ . A figura 43 mostra a resposta em frequência para o primeiro filtro e a figura 44 a resposta em frequência deste último filtro. Vale notar que estes filtros não modificam diretamente o resultado de anomalia apresentado pelo sistema, influenciando somente no processo de identificação do acelerômetro.

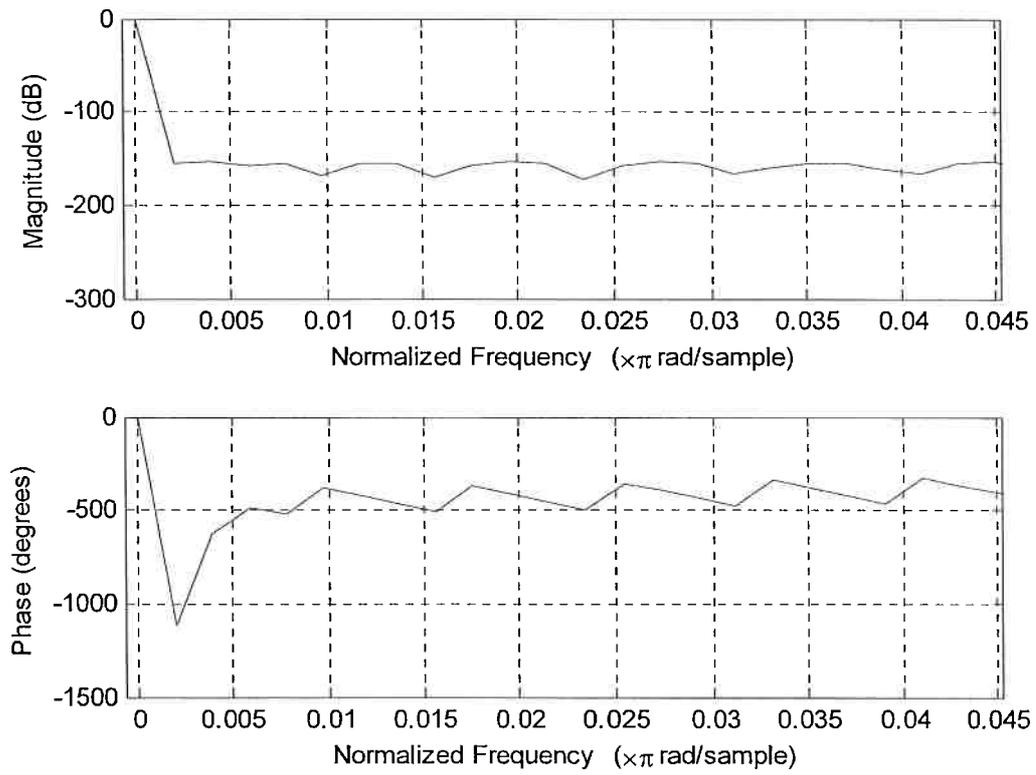


FIGURA 43 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO PASSA-BAIXA

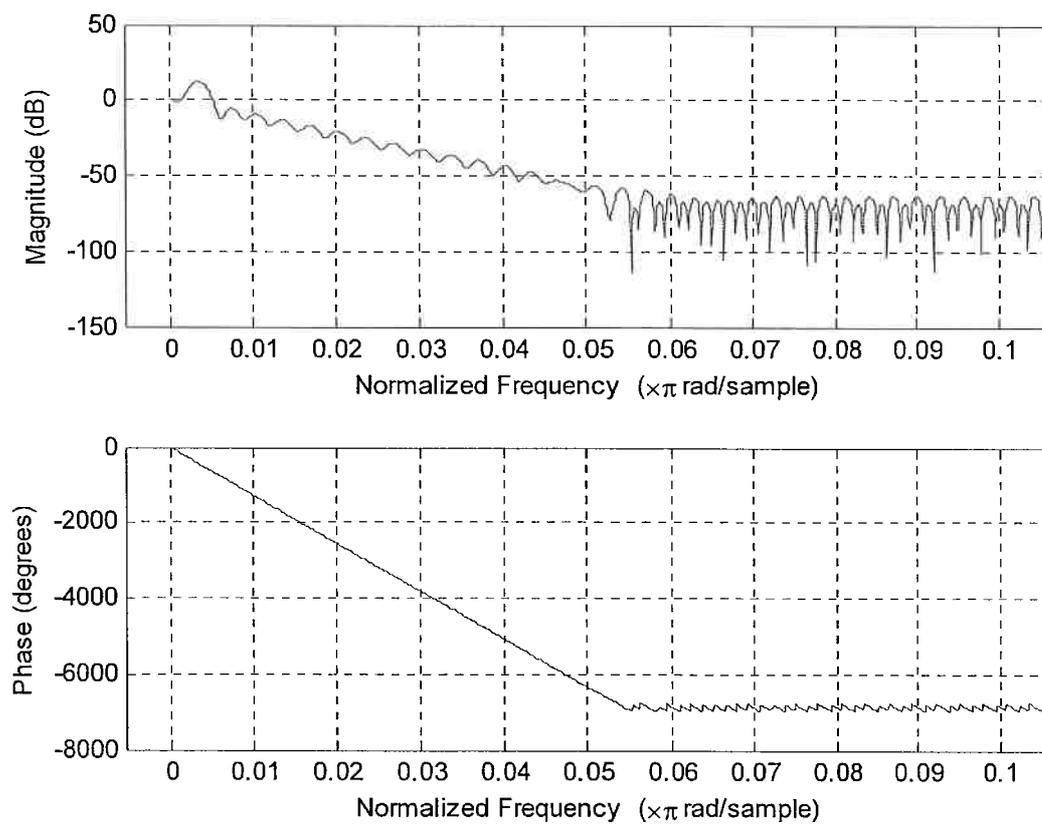


FIGURA 44 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO DE AJUSTE ESPECIAL

### 3 Resultados

Esta seção trata dos resultados obtidos com o sistema e metodologias desenvolvidas. Para realização dos testes, foram utilizados dados de um aerolevanteamento real. A área foi coberta com de 16 voos. Estes foram processados com o sistema em questão e os dados colocados em um mapa de anomalia gravimétrica. A área foi processada duas vezes em condições diferentes de identificação da plataforma. A primeira vez usando os dados sem uma calibração do modelo de erros da plataforma inercial com o filtro de Kalman funcionando a um ganho elevado. A segunda leva de processamento foi feita após a calibração do modelo de erros usando 5 voos numerados como 4, 7, 11, 13, e 18.

Os resultados obtidos com e sem calibração foram comparados em referência a uma linha de repetibilidade (voo 4), cujos gráficos podem ser vistos nesta seção. Os mapas finais gerados pelo sistema descrito e pelo sistema original foram comparados. Ambos os mapas foram analisados quanto a ruído com base em modelagem geofísica.

#### 3.1 Condições de voo comuns

Os voos para gravimetria são realizados em aeronaves que devem oferecer um compromisso entre estabilidade e economia de operação. A aeronave mais usada atualmente em voos de gravimetria é o Cessna Gran Caravan, um monomotor pesando cerca de 3.5 toneladas com elevada capacidade de carga. A configuração aerodinâmica do Caravan lhe dá uma estabilidade surpreendente para uma aeronave seu porte e permite o uso em voos de gravimetria.

A figura 45 mostra o sinal de dois dos acelerômetros verticais usados para medições de gravimetria sem o benefício de filtragem digital. Para este voo, o desvio padrão dos valores de aceleração vertical ficou em torno de  $0.2 \text{ m/s}^2$ . Este valor é considerado aceitável e reduz-se consideravelmente após o sinal passar pela filtragem final, como mostra a figura 46. Nesta última, pode-se observar o efeito da

aceleração de Coriolis, bem destacada alternando entre patamares correspondentes às linhas de voo de direções diferentes

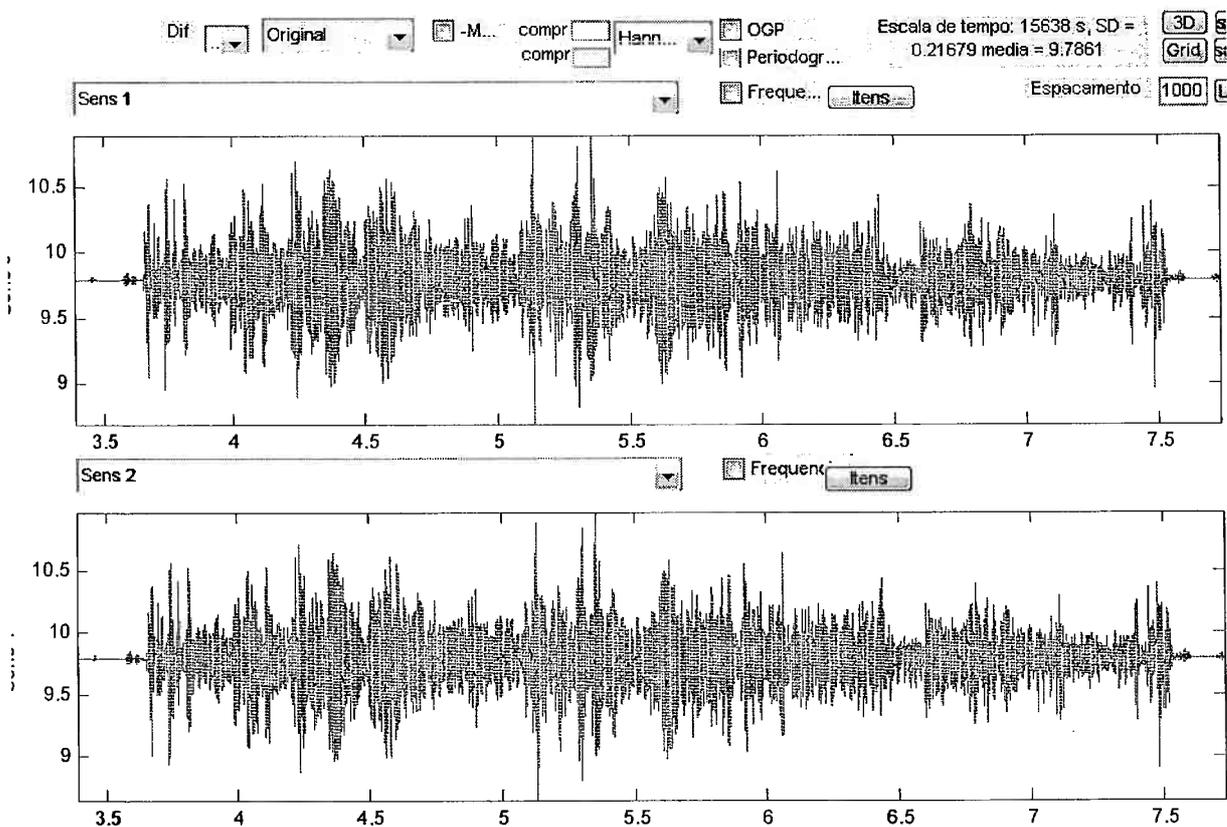


FIGURA 45 SINAIS DE ACELERAÇÃO MEDIDOS POR SENSORES GRAVIMÉTRICOS DURANTE VOO

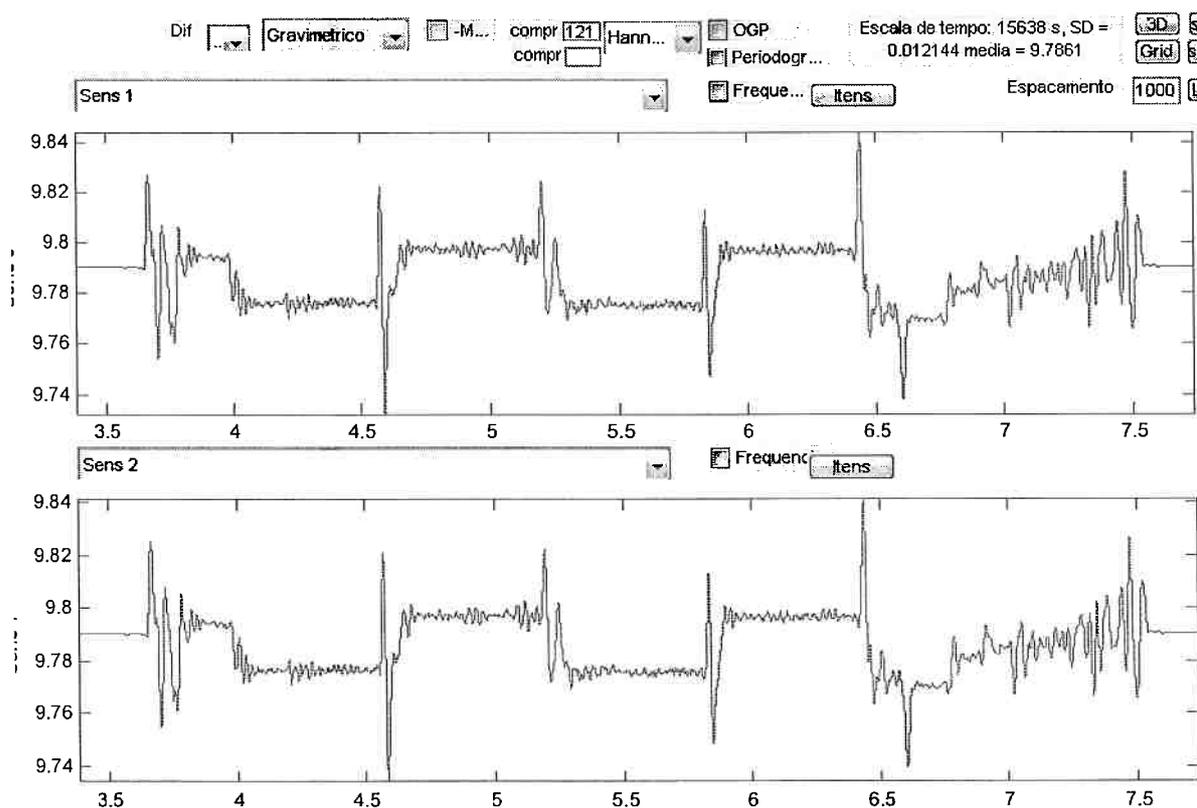


FIGURA 46 SINAIS DE ACELERAÇÃO MEDIDOS POR SENSORES GRAVIMÉTRICOS DURANTE VOO

A figura 47 mostra uma comparação entre os sinais de aceleração medidos pelos acelerômetros verticais e pelo sistema GPS. Há um ruído mais elevado no último, mas observam-se os eventos de turbulência e outras feições nos dois sinais. Após o processo de filtragem (figura 48) fica evidente a correspondência entre os sinais.

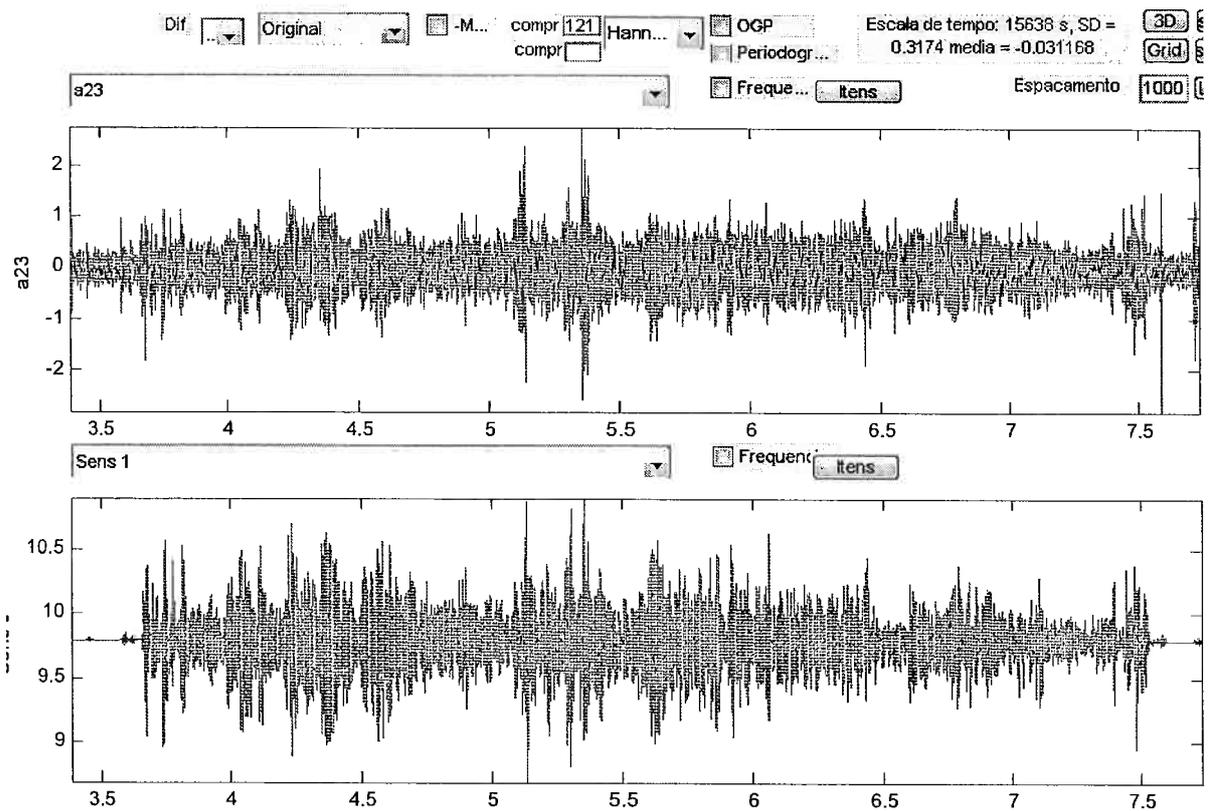


FIGURA 47 SINAIS DE ACELERAÇÃO MEDIDOS POR SENSORES GRAVIMÉTRICOS DURANTE VOO

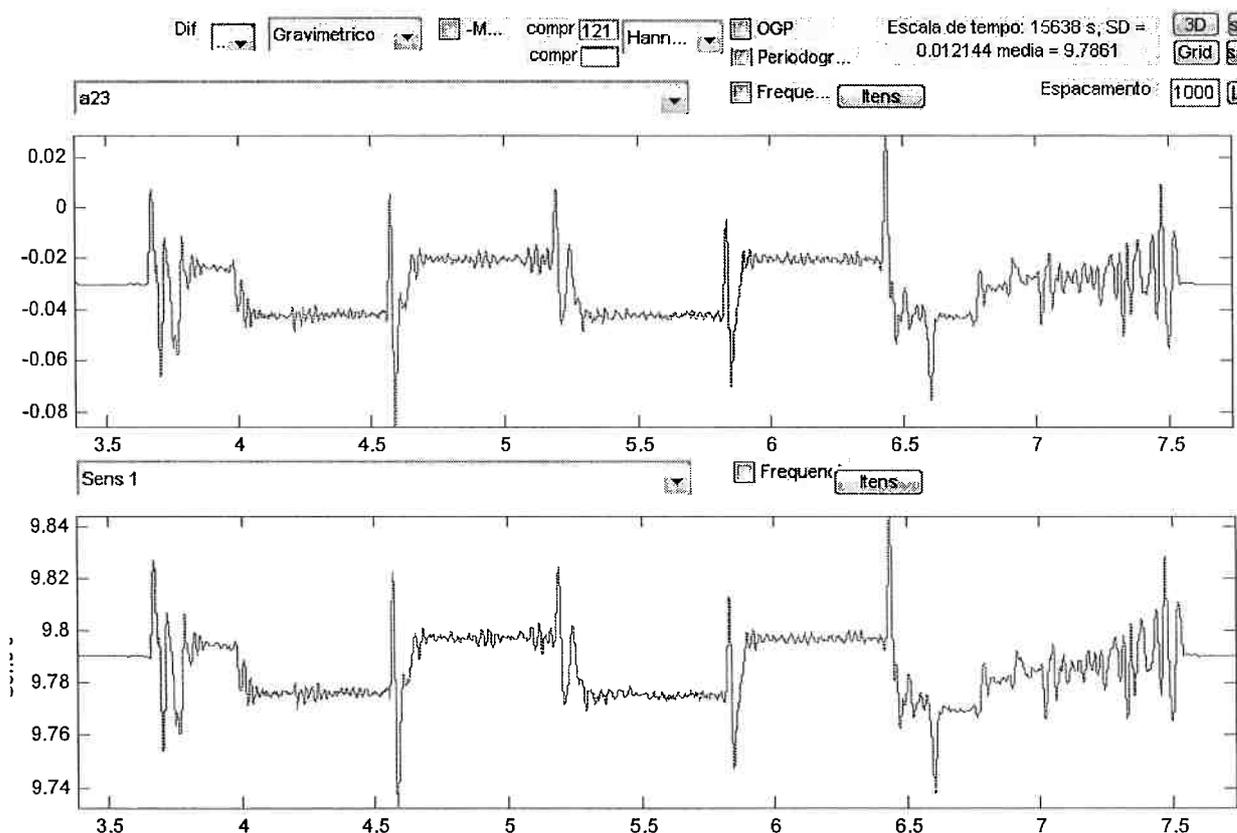


FIGURA 48 SINAIS DE ACELERAÇÃO MEDIDOS POR SENSORES GRAVIMÉTRICOS DURANTE VOO

Durante os voos, procura-se mitigar ao máximo as acelerações verticais e horizontais da aeronave com o uso de piloto automático e treinamento dos pilotos para um estilo suave de acompanhamento do plano de voo.

### 3.2 Tratamento do sinais GPS

Os resultados do tratamento automático de sinais GPS podem ser demonstrados nas duas figuras a seguir, referentes ao sobrevoo de uma linha de coleta de dados. A primeira figura apresenta dois gráficos: o primeiro mostra a quarta diferença  $((z-1)^4)$  dos sinais GPS obtidos com a correção diferencial referente a 5 estações base. A quarta diferença mostra um sinal relativamente limpo necessitando talvez uma correção manual para um ou outro acidente. O segundo gráfico mostra a quarta

diferença do sinal de correção aplicado, onde se vêem claramente os pontos onde houve correção do tipo degrau.

A segunda figura mostra um trecho menor no tempo sem aplicação da quarta diferença, para observação mais detalhada dos sinais. O primeiro gráfico da figura mostra a altura corrigida. O segundo gráfico mostra as correções aplicadas nos sinais GPS. Os degraus mostrados nas correções estavam presentes no sinal original e exemplificam claramente o efeito dos erros causados por ambigüidade na solução de fase.

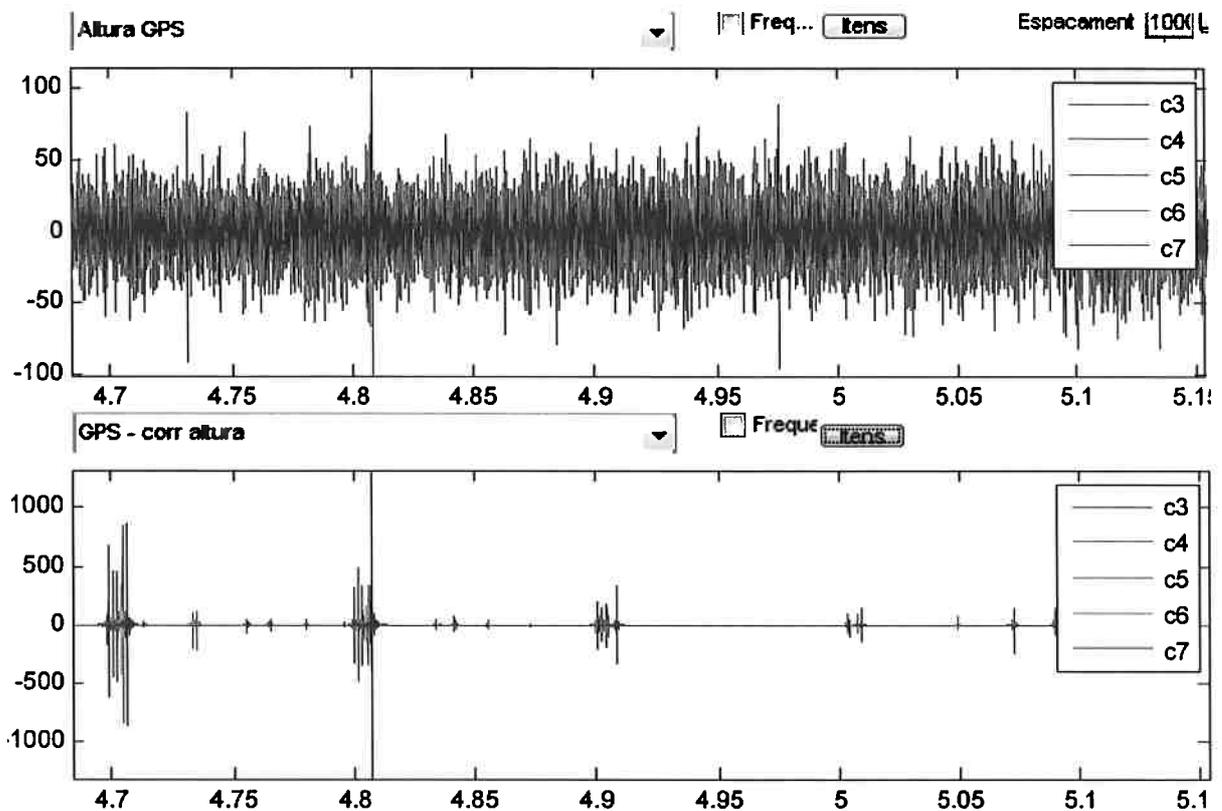


FIGURA 49 QUARTA DIFERENÇA DO SINAL GPS (ACIMA) E DAS CORREÇÕES (ABAIXO)

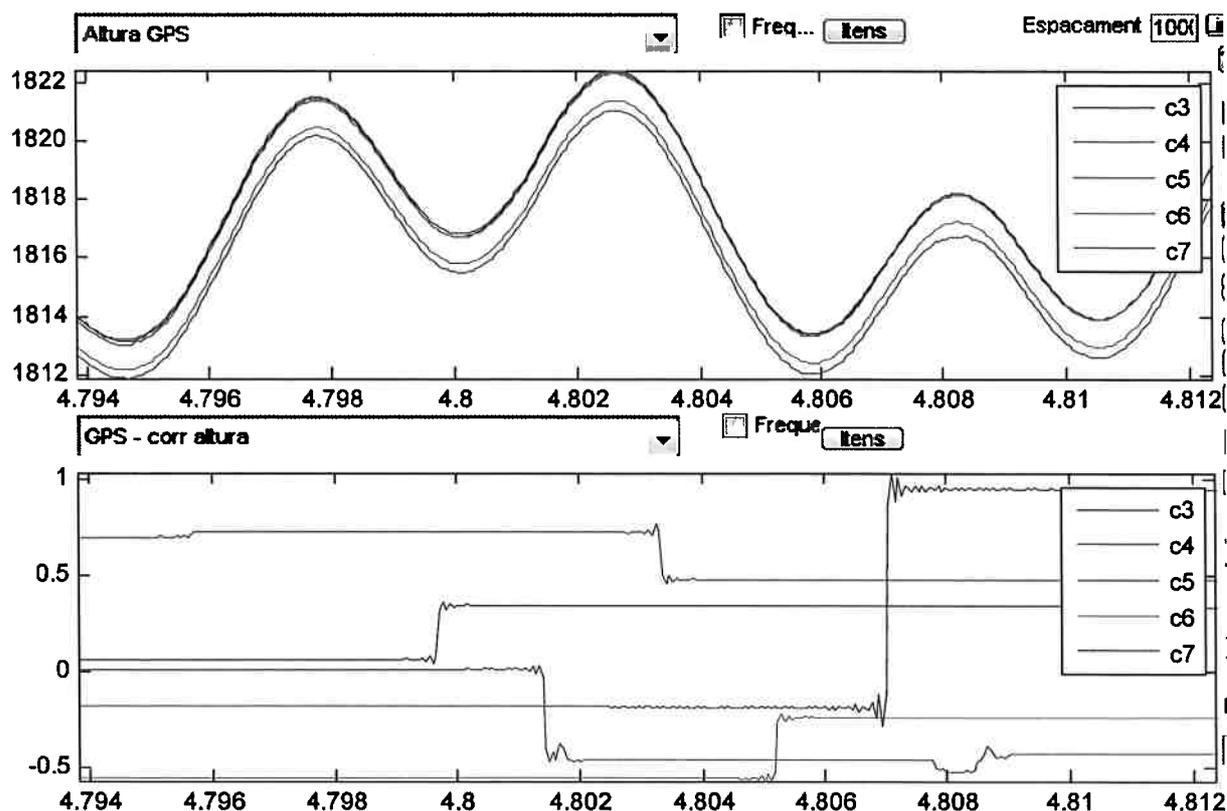


FIGURA 50 SINAL GPS CORIGIDO (ACIMA) E CORREÇÕES DE DEGRAUS APLICADAS (ABAIXO)

### 3.3 Identificação do estado do sistema de navegação

Para validação do modelo de erros e de navegação, foi usado um teste em solo, chamado controle. Este teste é normalmente usado para a determinação dos parâmetros do modelo de erros de navegação. Consiste em iniciar a navegação do sistema com um erro inicial grande de velocidade (cerca de 600 km/h) que coloca o sistema em um regime oscilatório com o período de Schuler, resultando em inclinações da ordem de 7 graus de amplitude. Este teste permite a validação do modelo com o uso das leituras dos acelerômetros verticais, os quais são modelados separadamente.

A figura 51 mostra os valores nominais de aceleração vertical e o cálculo da anomalia para um dos sensores sob este regime. No caso deste tipo de teste, os valores de anomalia representam a diferença entre as medidas do sensor de aceleração vertical e o valor previsto dada a inclinação atual da plataforma inercial.

Para este teste, os valores de rolagem foram de -4 a 3.5 graus e os de arfagem de -2.5 a 5 graus.

O valor de desvio padrão de 0.5 mGal é o padrão para os acelerômetros usados no sistema para medição de aceleração da gravidade.

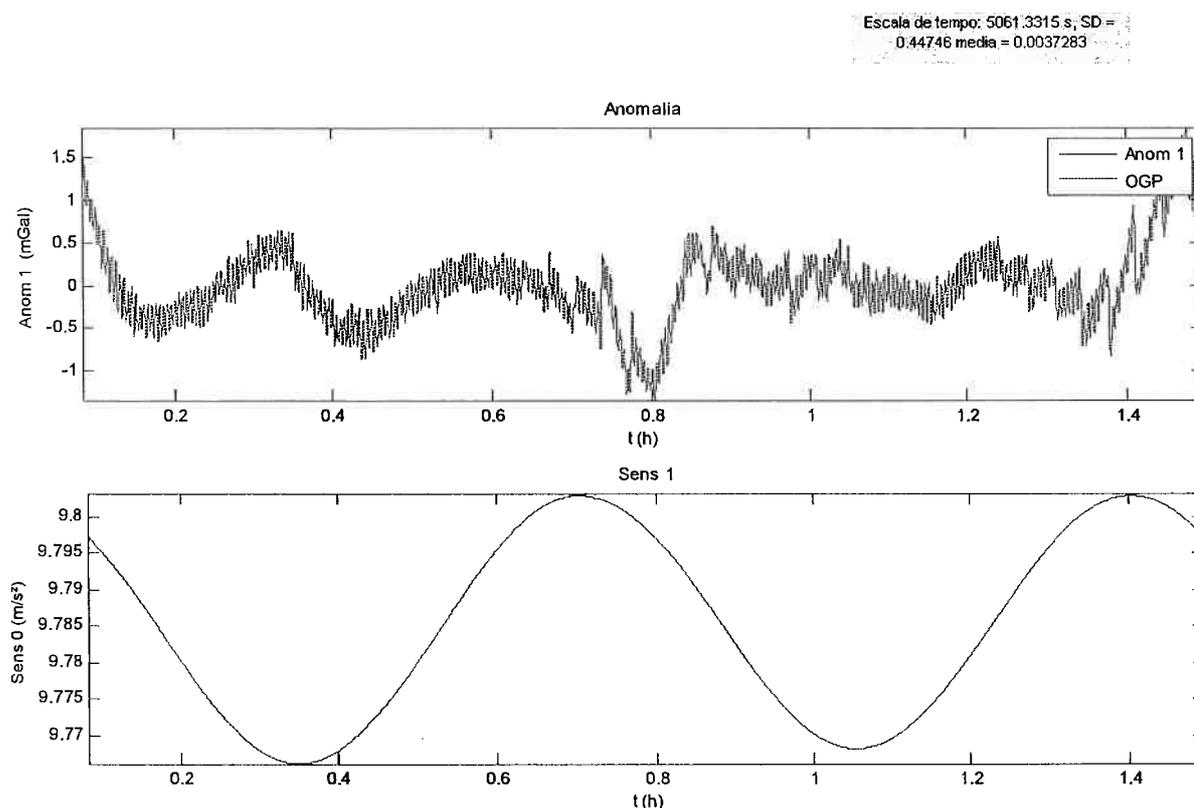


FIGURA 51 SINAL GPS CORIGIDO (ACIMA) E CORREÇÕES DE DEGRAUS APLICADAS (ABAIXO)

### 3.4 Modelo do sistema sensor/GPS

O voo 4 resulta em um modelo de sensor gravimétrico conforme a seção 2.3.4. A curva de magnitude é mostrada na figura 52 abaixo. O gráfico de decomposição espectral da anomalia obtida por um dos acelerômetros pode ser visto na figura 53. O processo de modelagem usado não verifica a estabilidade do modelo, visto que este não será usado em simulação mas em processo de ajuste espectral entre os sinais GPS e dos acelerômetros verticais. A preocupação mais importante é a de que a resposta do sensor seja razoavelmente plana nos comprimentos de onda de interesse, que se encontram acima dos 80 segundos (normalmente traduzidos para cerca de 6 km, dependendo da velocidade da aeronave).

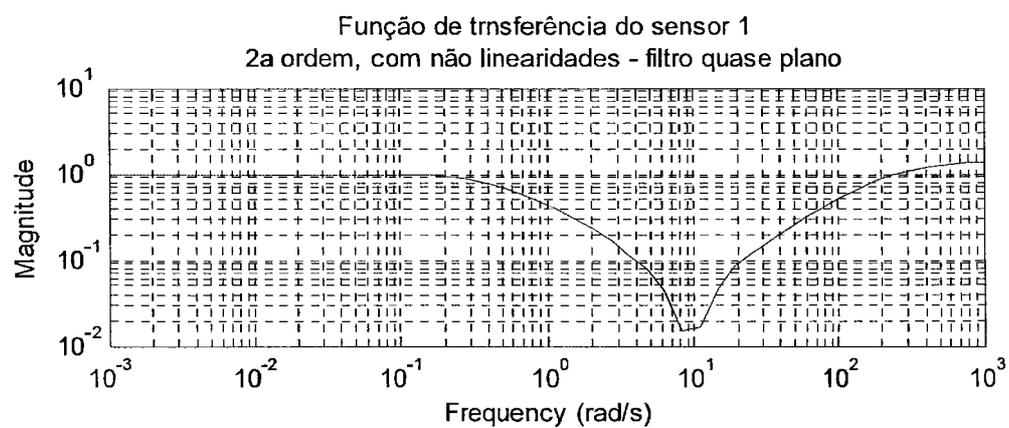


FIGURA 52 RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO MODELO OBTIDO PARA UM DOS ACCELERÔMETROS

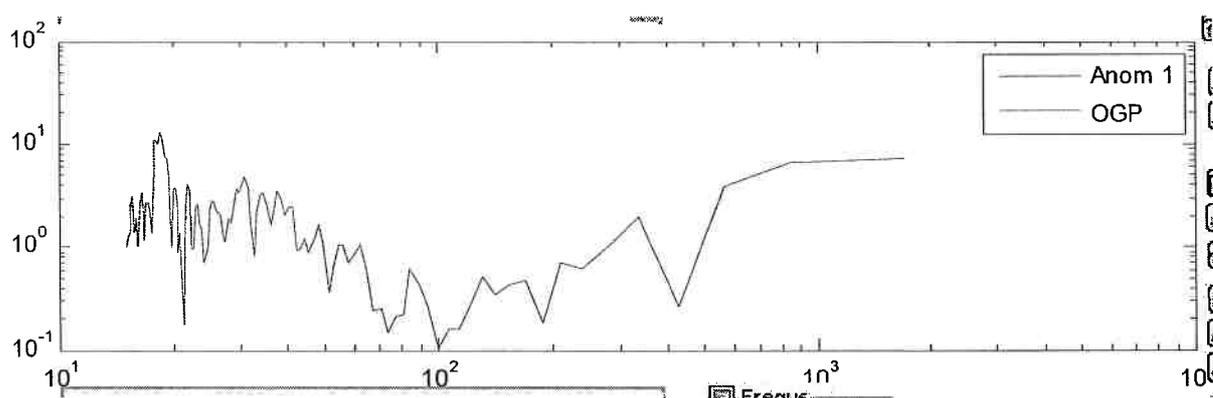


FIGURA 53 ESPECTRO EM FREQUÊNCIA DA ANOMALIA MEDIDA POR UM DOS ACCELERÔMETROS

## **3.5 Pós-processamento**

### **3.5.1 Calibração**

Para os testes desta seção foi realizado o processo de calibração a posteriori, para obter parâmetros do modelo de erros. Foram escolhidos 5 voos numerados como 4, 7, 11, 13, e 18, e o processo de calibração escrito na seção foi aplicado, obtendo-se um conjunto de parâmetros para o modelo de erros. Com estes parâmetros, o filtro de Kalman pode ser aplicado com um ganho menor (ver equação 133), resultando em uma estimativa mais suave do estado da plataforma. Os voos foram reprocessados usando-se os coeficientes obtidos e os desvios padrão recalculados.

### **3.5.2 Resultados do uso de calibração**

Catorze voos foram processados com e sem o uso de pós-calibração do sistema inercial. Para cada um dos voos, foi obtido o desvio padrão das medidas de gravimetria, comparando-se valores obtidos em agrupamentos de pontos espacialmente próximos ao longo de linhas adjacentes de voo. Os valores durante as manobras foram ignorados para efeitos de cálculos de estatísticas.

Vale notar que os voos com valores mais elevados correspondem àqueles em que as estatísticas são realizadas usando-se pontos de linhas mais distantes, causando a inclusão de um desvio mais elevado de anomalia devido à distância espacial entre as linhas. O único voo realizado especificamente para teste de repetibilidade foi o de número 4.

Este voo foi realizado com o objetivo averiguar o sistema de gravimetria. Uma linha de aproximadamente 80 km foi escolhida para ser sobrevoada repetidas vezes durante o mesmo voo. Desta forma, a aeronave passa repetidamente pelo mesmo ponto, ora no sentido de ida, ora no sentido de retorno sobre a linha. Para a realização da estatística, são tomados pontos ao longo da primeira passagem sobre a linha, para os quais são selecionados os pontos de aquisição mais próximos obtidos durante cada uma das outras passagens. Cada um dos pontos escolhidos

na trajetória possuirá uma estatística composta um número de valores equivalente ao número de passagens. Ao final, as estatísticas de todos os pontos são então reunidas em uma única para o voo inteiro. No caso dos outros voos, a estatística é feita tomando-se os pontos mais próximos de linhas adjacentes.

Os resultados encontram-se na tabela (2) abaixo. Para 7 dos voos, os resultados foram melhores com o uso dos coeficientes, outros 7 voos não apresentaram diferença significativa e dois voos foram piorados significativamente. É interessante notar que o voo 13 faz parte do grupo que sofreu piora, mesmo estando no pacote de calibração, indicando alguma diferença de comportamento fundamental não modelada da plataforma inercial. Nos itens a seguir, são mostrados os sinais obtidos no sistema de processamento para os casos com e sem calibração. Todos são gráficos obtidos a partir do voo teste de repetibilidade (voo 4). Cada gráfico do processamento sem calibração é seguido por seu correspondente com calibração.

Os ângulos de inclinação da plataforma causam um erro na componente vertical devido à componente que surge das acelerações horizontais no eixo vertical. Os valores desta influência são normalmente menores que 1 mGal. Este valor pequeno se deve ao valor pequeno dos ângulos de inclinação e ao comprimento elevado do filtro passa-baixas usado na obtenção da anomalia. Isto sugere que a necessidade de correção e calibração do sistema inercial é pequena. Todavia, há uma influência considerável do uso da identificação do estado da plataforma na determinação das constantes do modelo do sensor de aceleração vertical. Sem uma identificação do estado da plataforma, o modelo do sensor fica pobre, muitas vezes resultando em resultados inferiores ao aceitável. Com a identificação do estado da plataforma sem os parâmetros de calibração, já se torna possível realizar gravimetria. Quando se usam os parâmetros de calibração do modelo de erros, as inclinações da plataforma são determinados de modo ainda mais preciso e os dados obtidos sob a influência de acelerações horizontais maiores podem ser usados..

TABELA 2 COMPARAÇÃO DOS ERROS DE REPETIBILIDADE COM E SEM USO DE PARÂMETROS PARA O MODELO DE ERROS

Voo	SD Sem Calibração	SD Com Calibração
4	2.04	1.97
7	5.25	4.93
11	23.45	12.57
12	88.03	84.8
13	2.96	8.12
15	4.49	4.89
16	5.89	3.24
17	12.33	13.46
18	6.62	6.86
19	4.17	4.24
20	4.43	3.06
21	15.73	5.93
22	5.1	4.82
23	4.49	3.98
24	6.89	4.91
25	6.08	13.02

### 3.5.3 Navegação

Os valores de  $\Delta\theta_x$  e  $\Delta\theta_y$  são de extrema importância para gravimetria, pois indicam as inclinações em relação à vertical local do eixo da plataforma e determinam os erros de cruzamento entre as acelerações horizontais e verticais. As figuras 54 e 55 mostram as inclinações determinadas sem o uso dos parâmetros do modelo de erros. Na primeira, um ganho baixo ( $q_k < 10^{-3}$ ) foi usado na realimentação de identificação de estados. Na segunda, foi usado um valor unitário  $q_k$ . O uso do modelo de erros e um ganho menor no filtro de Kalman geram sinais com menor ruído e maior detalhamento, como pode ser visto na figura 56. A utilização dos parâmetros de calibração permite que o ganho empregado no filtro de Kalman seja pequeno, resultando em estimativas menos ruidosas para os estados da plataforma. De certa forma, o menor valor do ganho pode ser substituído por uma expectativa menor para a matriz de correlação de erros de estimativa de estados.

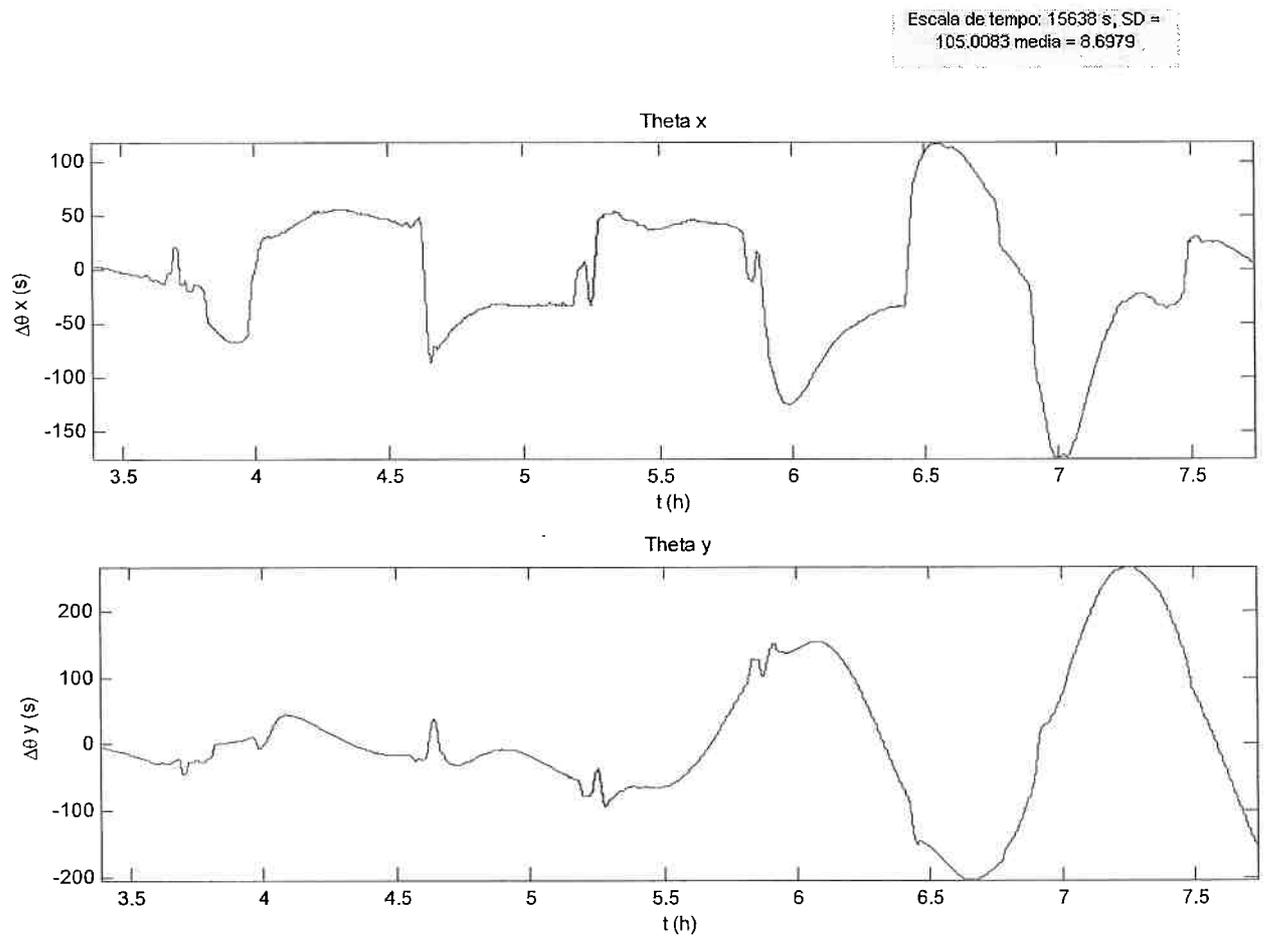


FIGURA 54 ERROS DE ALINHAMENTO VERTICAL (SEM USO DE PARÂMETROS DO MODELO DE ERROS)  $Q_k < 10^{-2}$

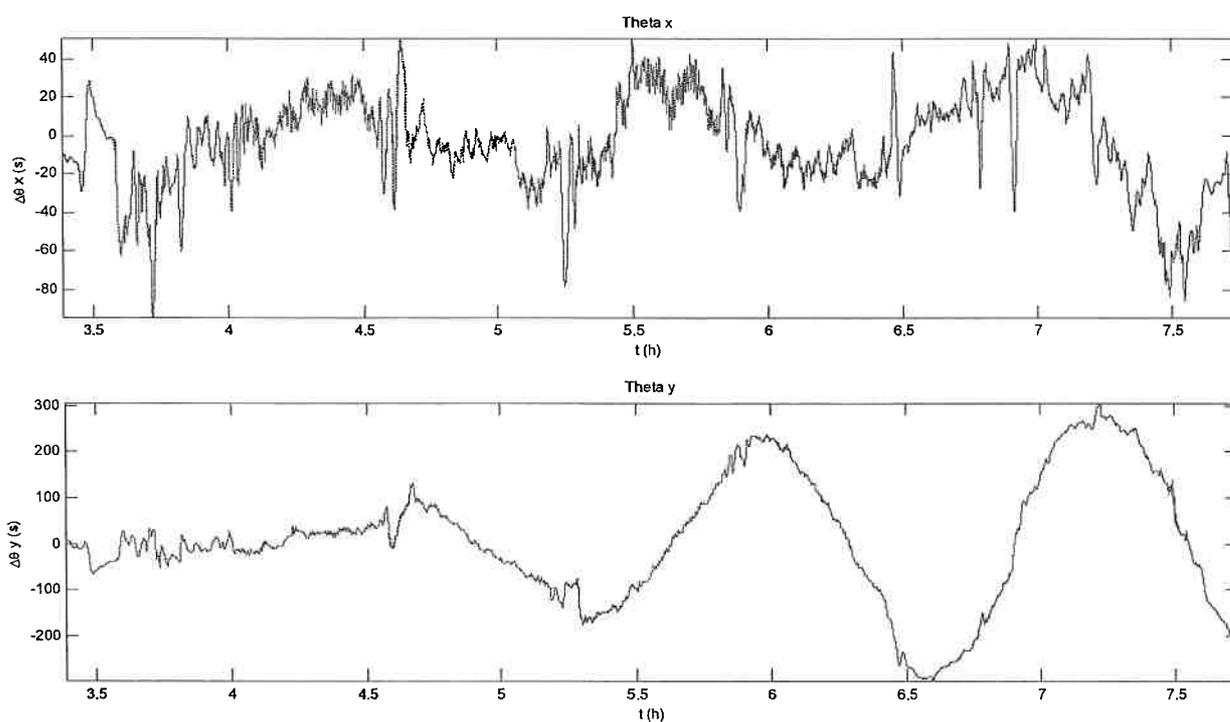


FIGURA 55 ERROS DE ALINHAMENTO VERTICAL (SEM USO DE PARÂMETROS DO MODELO DE ERROS)  $Q_K = 1$

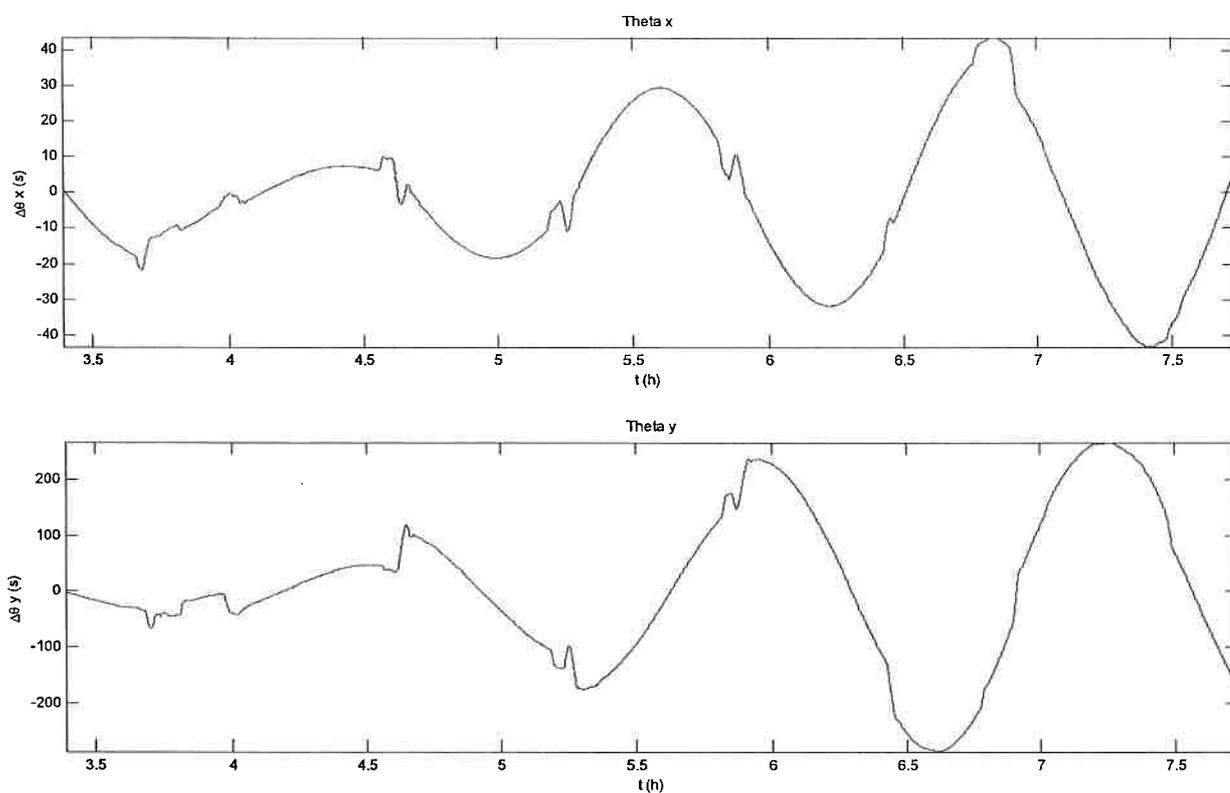


FIGURA 56 ERROS DE ALINHAMENTO VERTICAL (COM USO DE PARÂMETROS DO MODELO DE ERROS)

O erro de azimute  $\Delta\theta_z$  não influencia diretamente o sinal de aceleração vertical, mas com o tempo, o erro de posicionamento decorrente causa o aumento dos erros de alinhamento  $\Delta\theta_x$  e  $\Delta\theta_y$ . A estimativa deste erro também está sujeita a grandes incertezas no que diz respeito a condições iniciais e aos valores dos parâmetros do modelo de erros associados à deriva azimutal. Os dois ensaios mostrados nas figuras 57 e 58 mostram grandes diferenças nos valores estimados. Nestas mesmas figuras, podem ser vistos os gráficos do erro de estimativa do filtro de Kalman como explicado na seção 3.3.10. O ganho menor do filtro ( $q_k$  na expressão 133) acarreta em erros maiores, que aumentam gradativamente ao longo do voo. Entretanto, sem os parâmetros do modelo de erros, tais erros alcançariam a ordem de  $10^3$ .

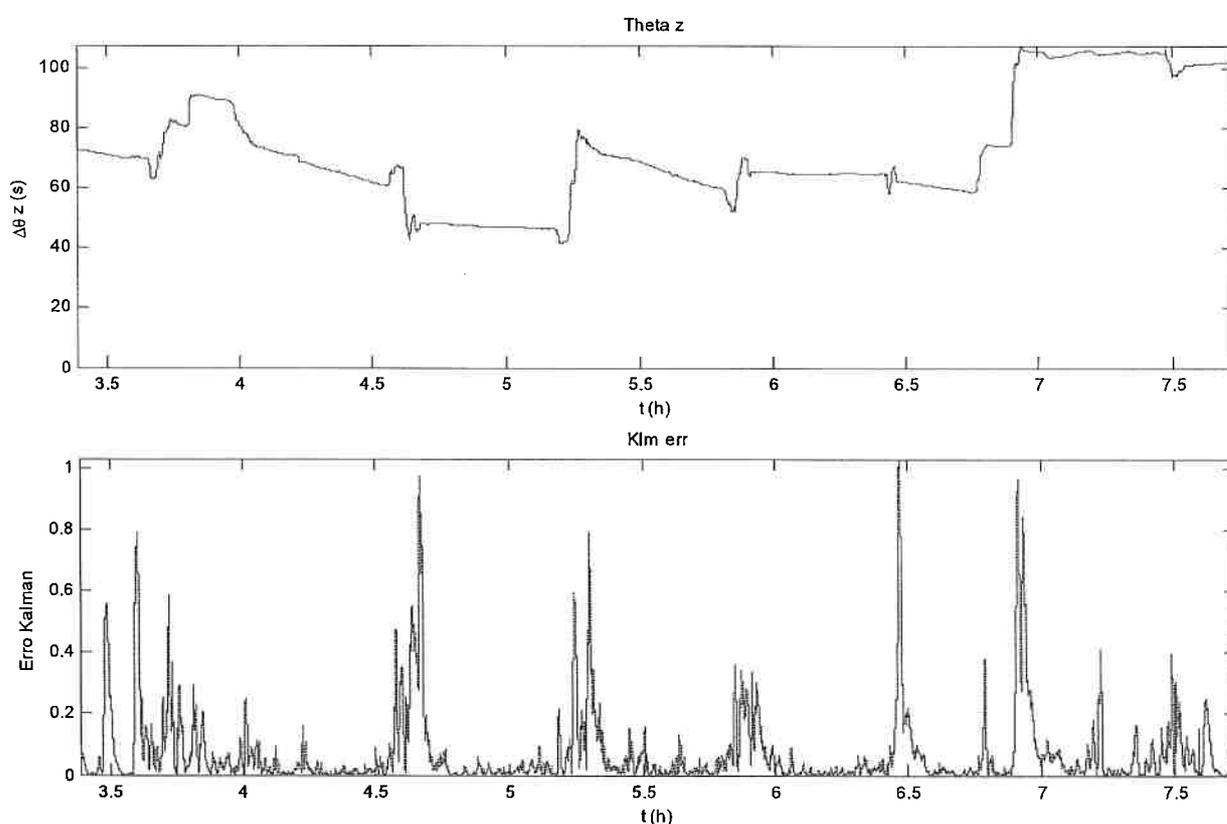


FIGURA 57 ERRO AZIMUTAL (ACIMA) E ERRO DE ESTIMAÇÃO (ABAIXO)

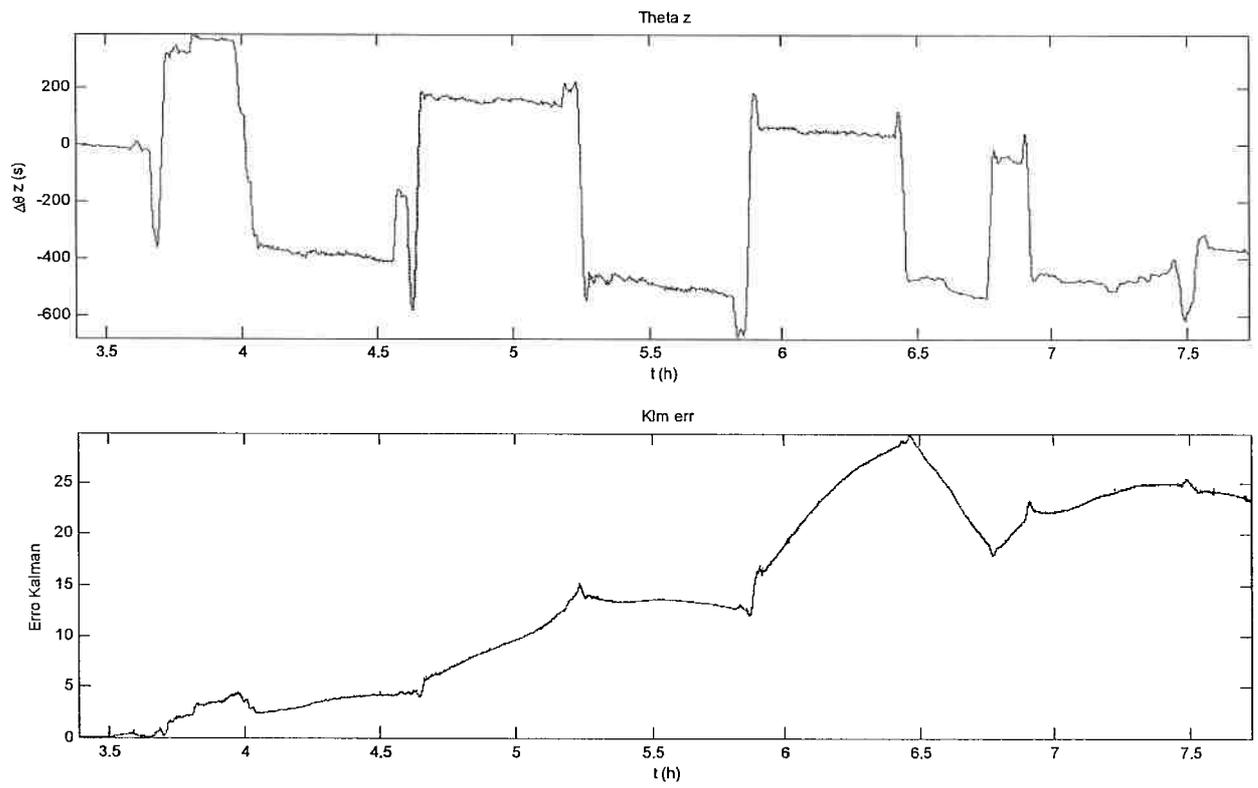


FIGURA 58 ERRO AZIMUTAL (ACIMA) E ERRO DE ESTIMAÇÃO (ABAIXO)

### 3.5.4 Anomalia bruta

Uma das características particulares do processo de estimação do modelo dos sensores desenvolvido é o da estimação do sinal de anomalia antes da aplicação do filtro passa-baixa final. Com isto, podemos analisar o sinal bruto de anomalia e buscar indícios de erros e eventos ruidosos nos sinais de GPS, nos sinais dos sensores de aceleração vertical e no sistema de navegação inercial.

Também é possível analisar o espectro deste sinal e fazer escolhas dos filtros de saída. Os espectros dos sinais de anomalia nos gráficos inferiores das figuras 59 e 60, indicam que a taxa sinal ruído se torna favorável a partir de um comprimento de onda próximo dos 100s. Esta seria, portanto a escolha mais correta para o comprimento de corte usado na filtragem final, não fosse a necessidade de comparação com os resultados do sistema original de processamento, onde se utiliza 120s.

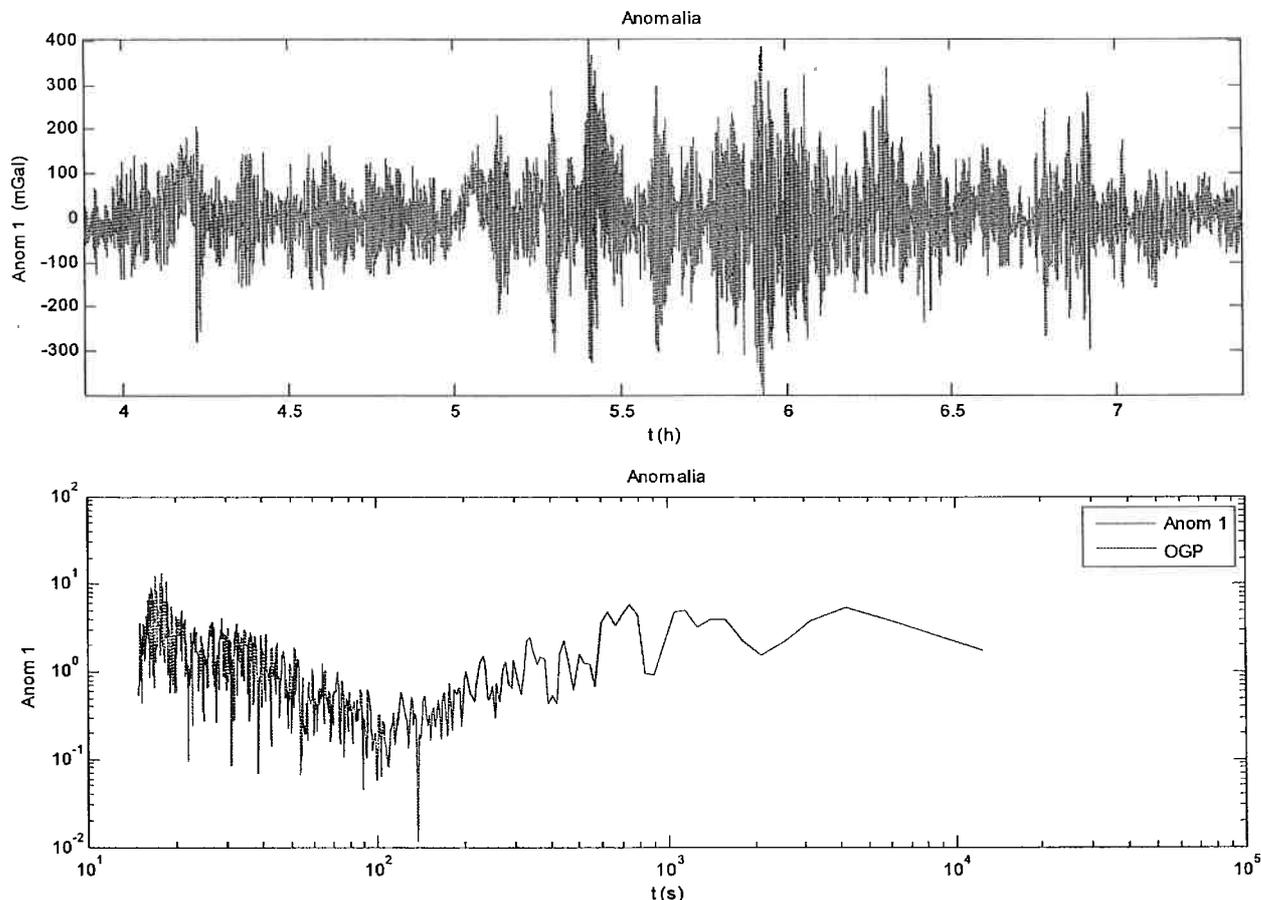


FIGURA 59 SINAL DE ANOMALIA BRUTO

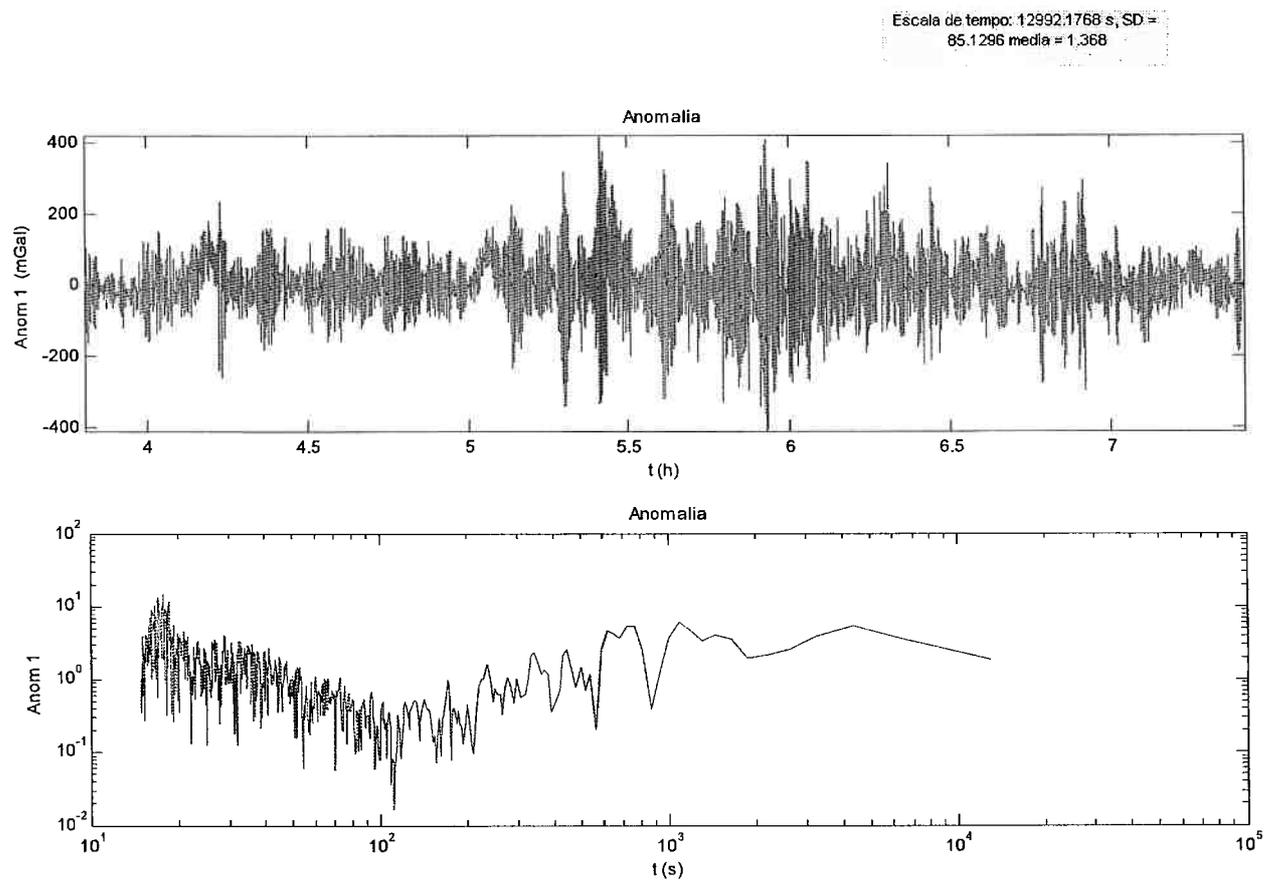


FIGURA 60 SINAL DE ANOMALIA BRUTO COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

### 3.5.5 Anomalia filtrada

Após a filtragem final dos dados de anomalia obtidos, obtêm-se os gráficos mostrados nas figuras 61 e 62. Uma diferença pequena pode ser observada entre os valores obtidos com e sem os parâmetros obtidos para o modelo de erros. A diferença mais notável surge na comparação entre os valores de anomalia obtidos durante as manobras, que são os momentos onde o sistema sofre as maiores acelerações horizontais. Alguns destes instantes estão assinalados em ambas as figuras. Os valores menores obtidos com os parâmetros do modelo de erros são muito provavelmente mais corretos. Idealmente, as acelerações durante as manobras não deveriam aparecer no sinal de anomalia, se a inclinação da plataforma for estimada sem erros.

Além do desvio da vertical incorrido pelos erros de identificação dos estados de navegação, a interferência entre acelerações horizontais e verticais tem outras origens, como:

- desalinhamento vertical dos próprios acelerômetros em relação ao eixo vertical da plataforma
- efeitos não lineares intrínsecos aos acelerômetros verticais, como a movimentação do líquido de amortecimento e interferência de apoios mecânicos internos.

Destes, somente o primeiro é contemplado explicitamente pela identificação sensor - GPS descrita na seção 2.3.6. A segunda causa é contemplada parcialmente com termos de não-linearidade no modelo de acelerômetro.

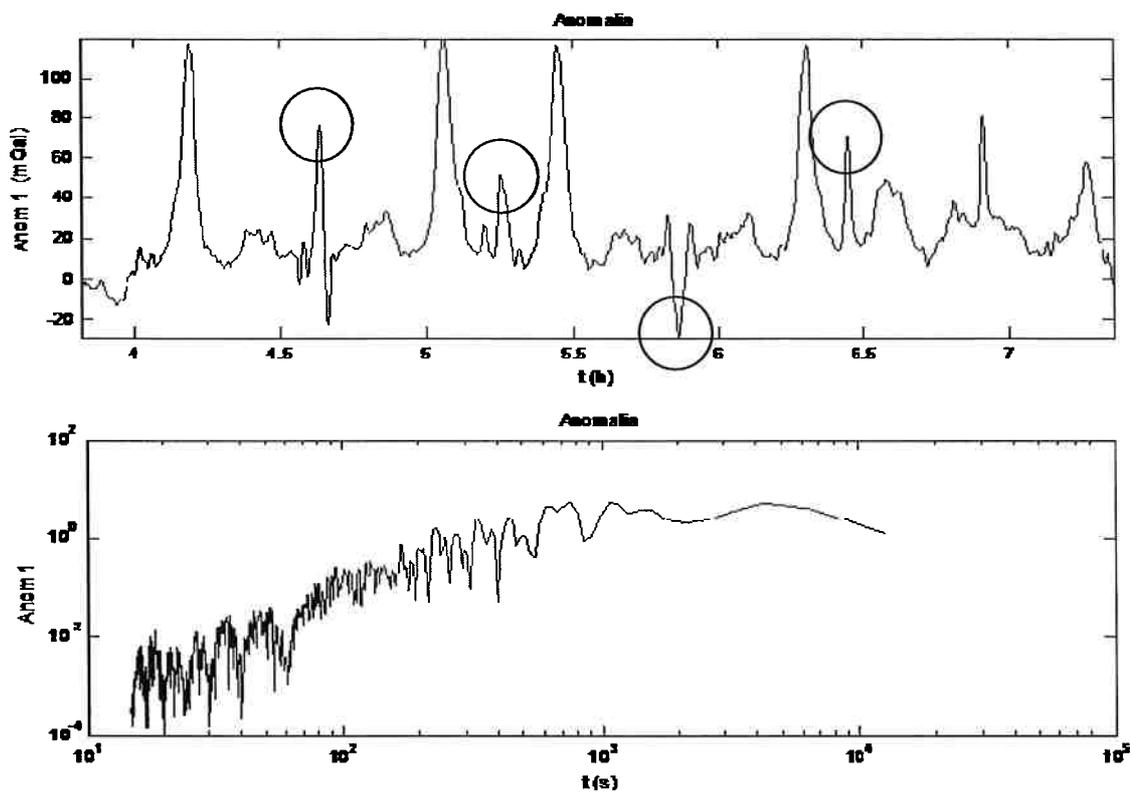


FIGURA 61 ANOMALIA FILTRADA SEM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERRO

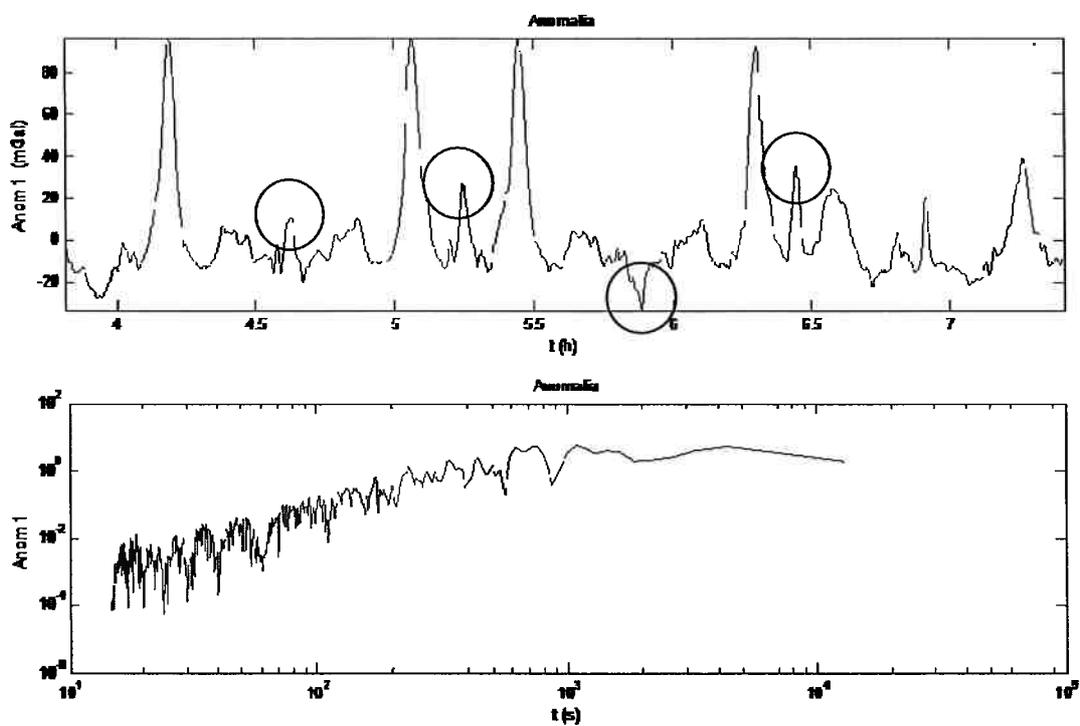


FIGURA 62 ANOMALIA FILTRADA COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERRO

### 3.5.6 Repetibilidade

O teste de repetibilidade é o que revela mais detalhes das melhorias obtidas pela obtenção de modelo do parâmetro de erros. Neste teste, uma linha é revoada nos dois sentidos repetidamente e os valores de anomalia obtidos para um determinado ponto são comparados estatisticamente. A estatística obtida para um número grande de pontos é combinada e resumida em uma única estatística. As figuras 63 e 64 mostram a disposição espacial dos valores de anomalia para o voo 4. Os eixos horizontais mostram coordenadas (alteradas para manter o sigilo dos dados) e o vertical mostra o valor em mGal da anomalia de ar-livre.

Na figura 64, é possível notar a redução no ruído obtida pela utilização dos parâmetros do modelo de erros. Vale notar que a linha mais afastada do grupo não foi voada com a mesma precisão das demais, havendo um deslocamento real para os pontos de coleta da mesma.

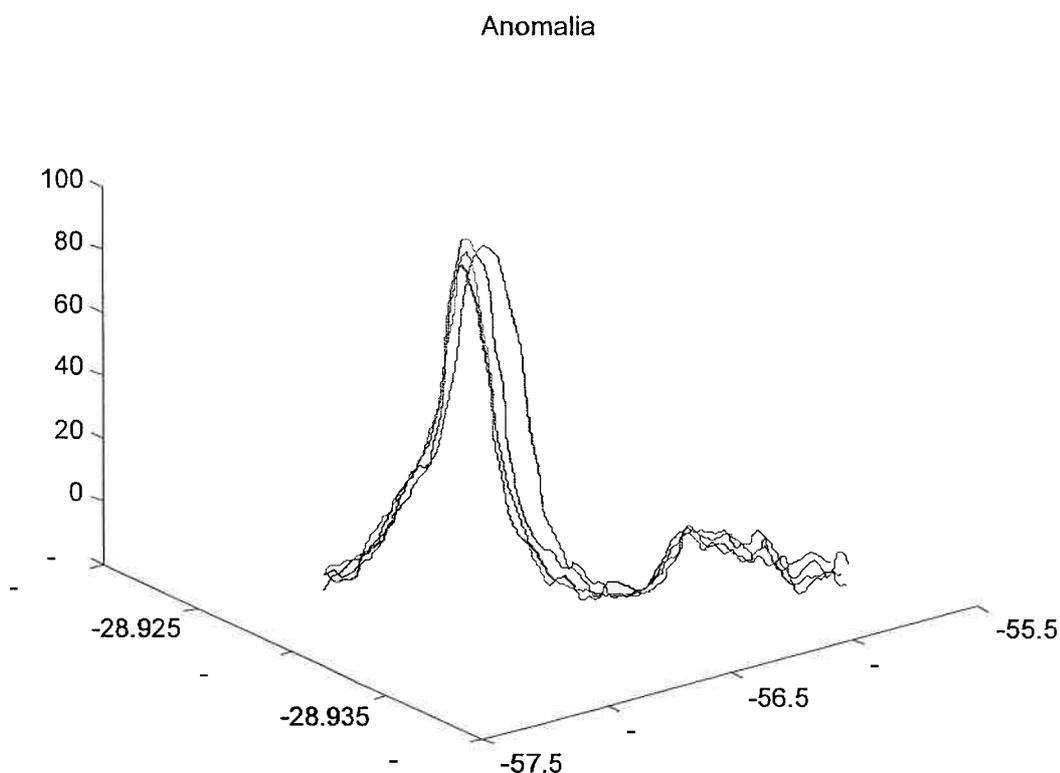


FIGURA 63 ANOMALIA FILTRADA SEM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERRO

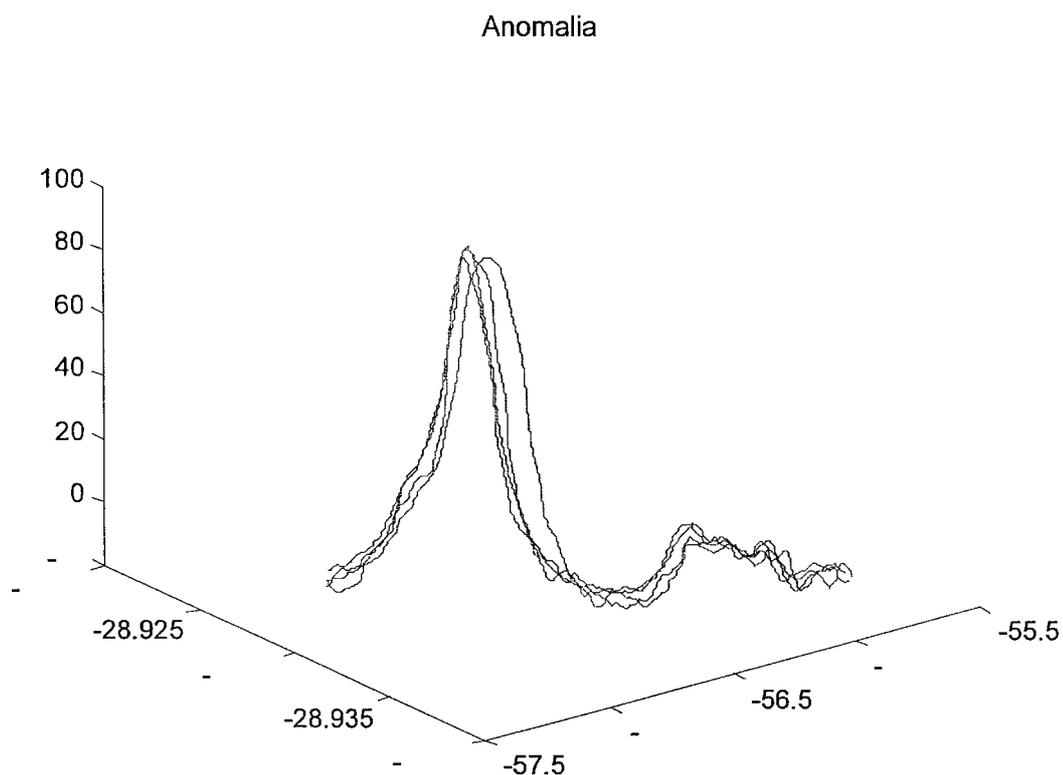


FIGURA 64 ANOMALIA FILTRADA COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERRO

As figuras 65 e 66 a seguir, mostram nos gráficos inferiores os valores da diferença de cada ponto medido em relação à média espacial obtida. Para comparação, as anomalias obtidas usando o modelo de erros com e sem o uso dos parâmetros de calibração. Como se pode ver nas figuras a seguir, o uso dos parâmetros de erros reduz substancialmente os picos que ocorrem em trechos de manobra devido ao desalinhamento maior do eixo de coordenadas da plataforma quando a posição do mesmo é identificada sem o uso dos parâmetros de calibração. Estes desvios durante as manobras ficam evidentes nas figuras XXX (com uso de parâmetros) e XXX (sem uso de parâmetros), que mostram em terceira dimensão o voo de repetibilidade.

TABELA 3 COMPARAÇÃO DOS ERROS PARA LINHA DE REPETIBILIDADE COM E SEM USO DE PARÂMETROS PARA O MODELO DE ERROS

	<i>Sem parâmetros</i>	<i>Com parâmetros</i>
Desvio padrão	2.06	1.94
Mínimo	-7.33	-6.23
Máximo	9.57	7.26
Número de pontos	3411	3411

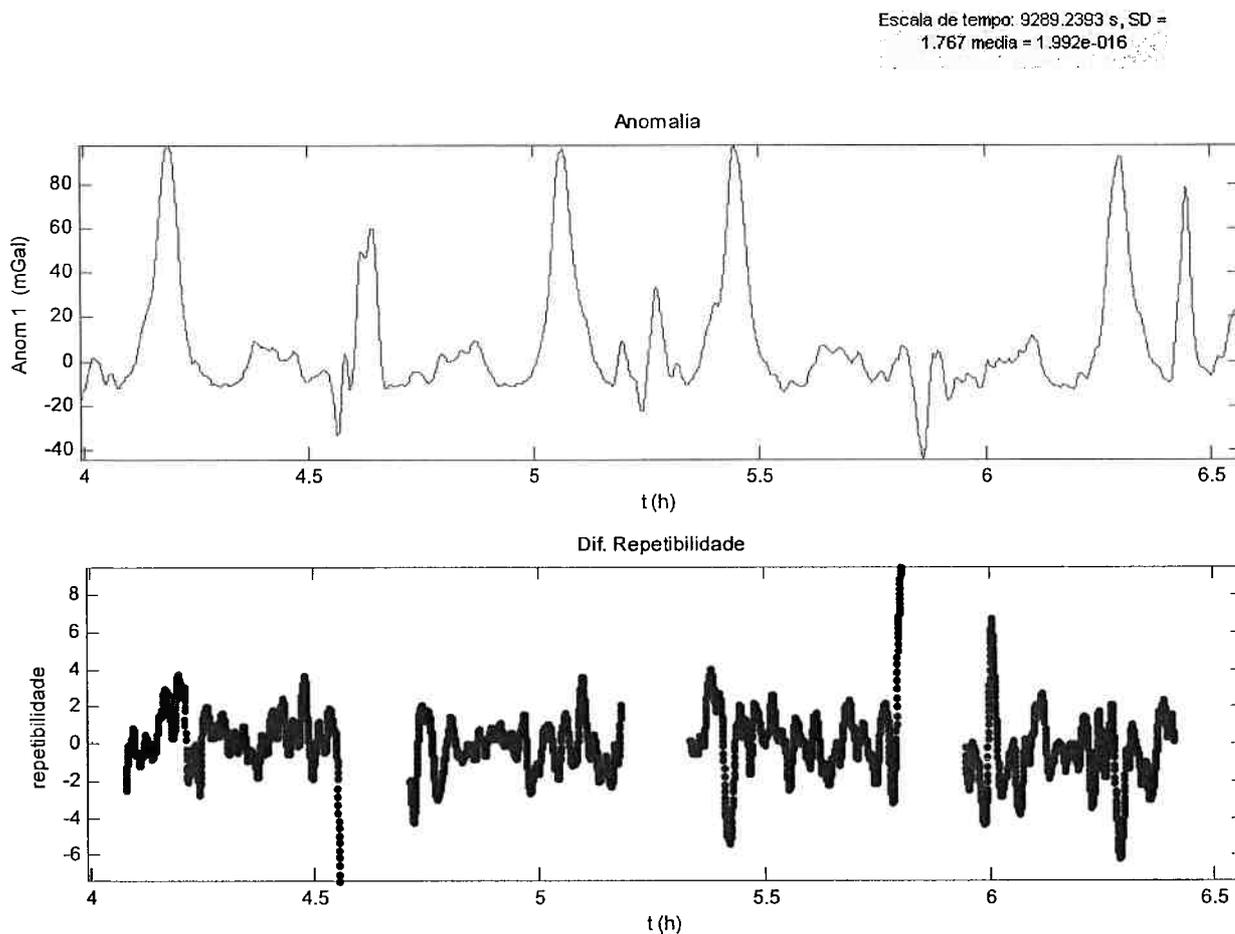


FIGURA 65 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE SEM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

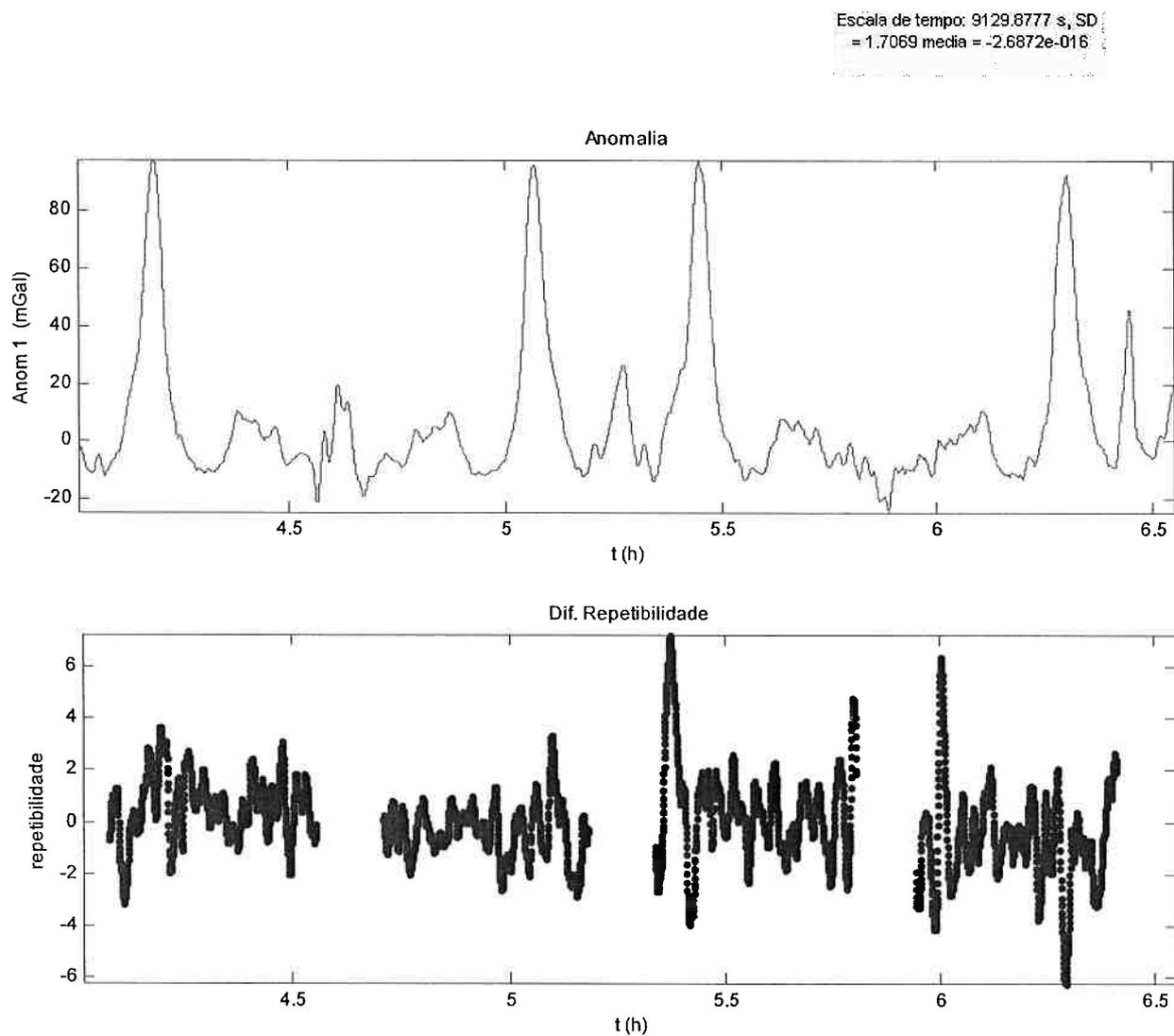


FIGURA 66 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

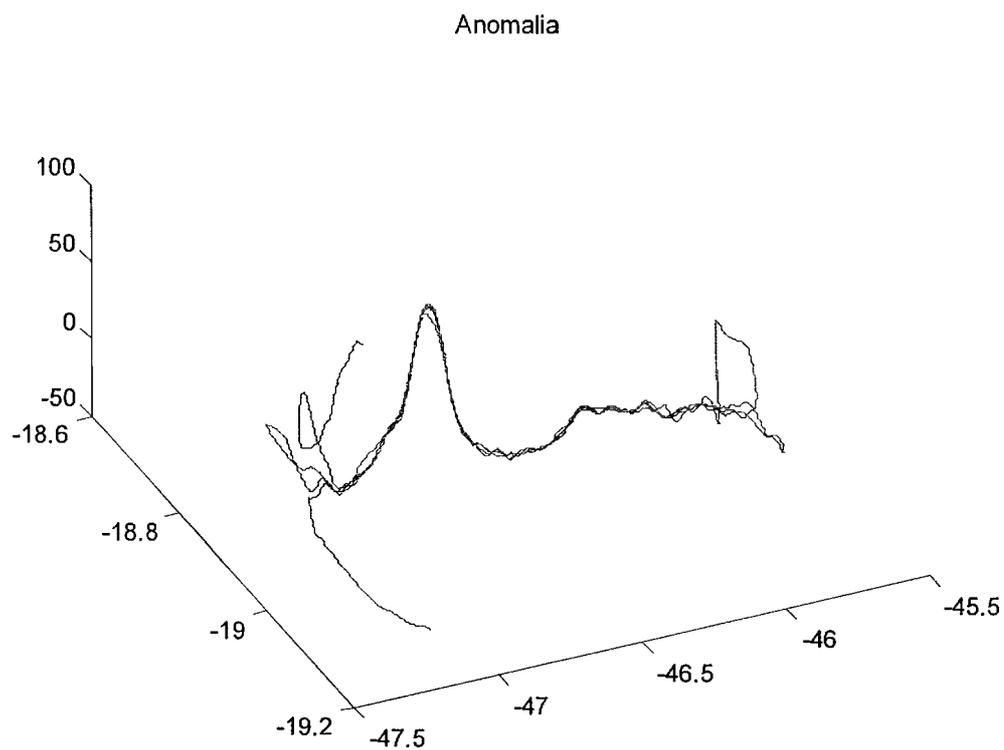


FIGURA 67 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

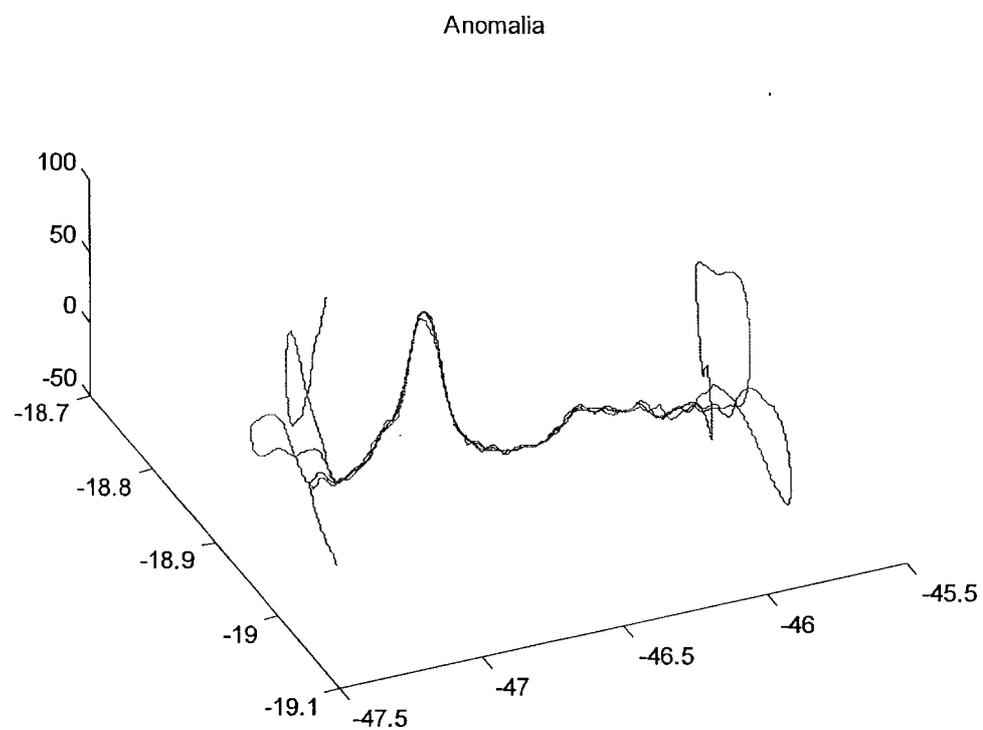


FIGURA 68 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE SEM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS (DISTURBIOS MAIORES DURANTE ASS MANOBRAS)

Nas figuras 69 e 70 a seguir, os valores de anomalia e diferença em relação à média são mostrados para uma das passagens sobre a linha de produção sem o uso e com o uso de parâmetros de calibração respectivamente. No canto superior direito de cada figura, a estatística para os valores de diferença em relação à média obtidas pelo programa podem ser vistas. Os desvios padrão obtidos são respectivamente 1.31 e 1.06, indicando melhora significativa na qualidade com a utilização dos parâmetros.

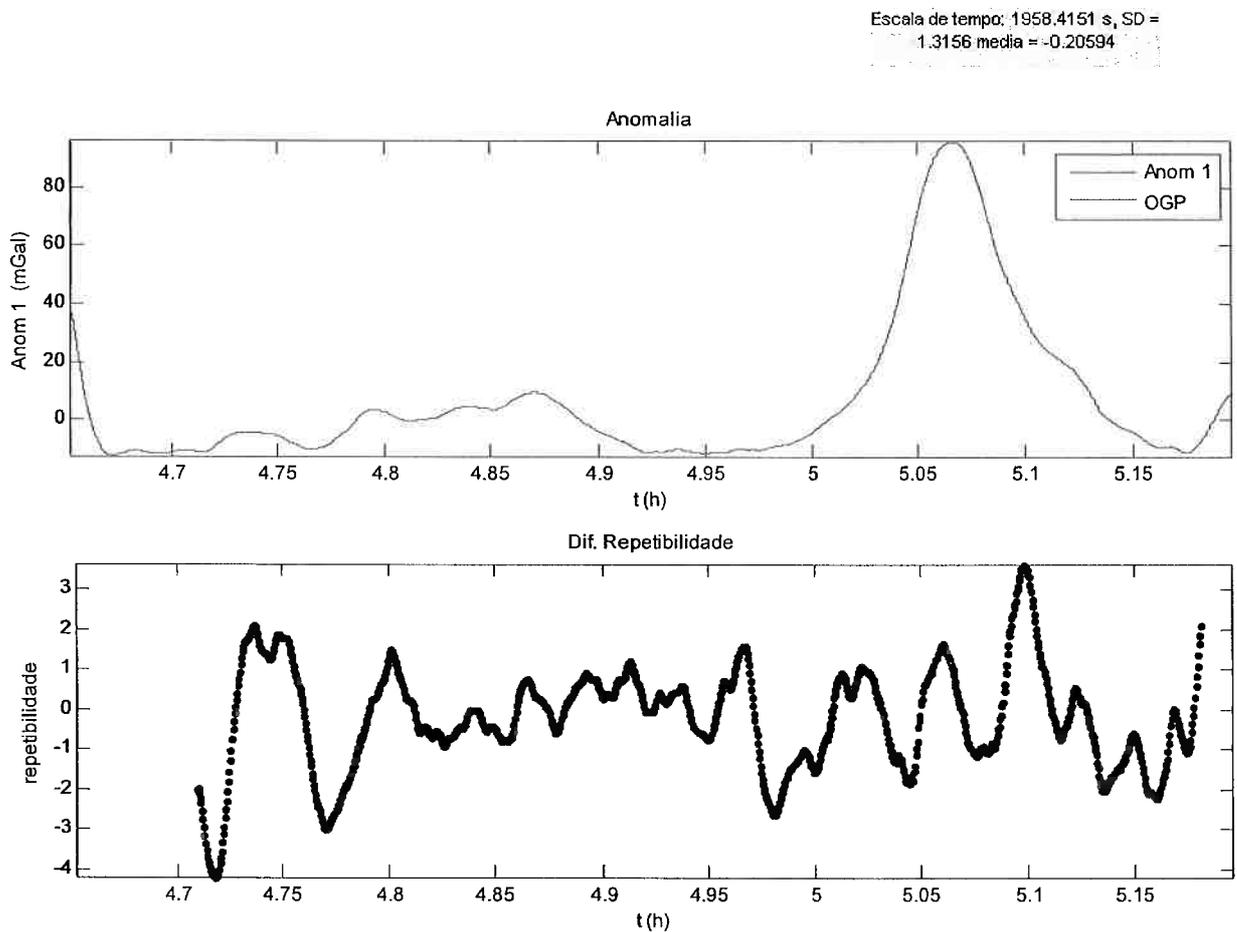


FIGURA 69 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE DE UMA PASSAGEM SEM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

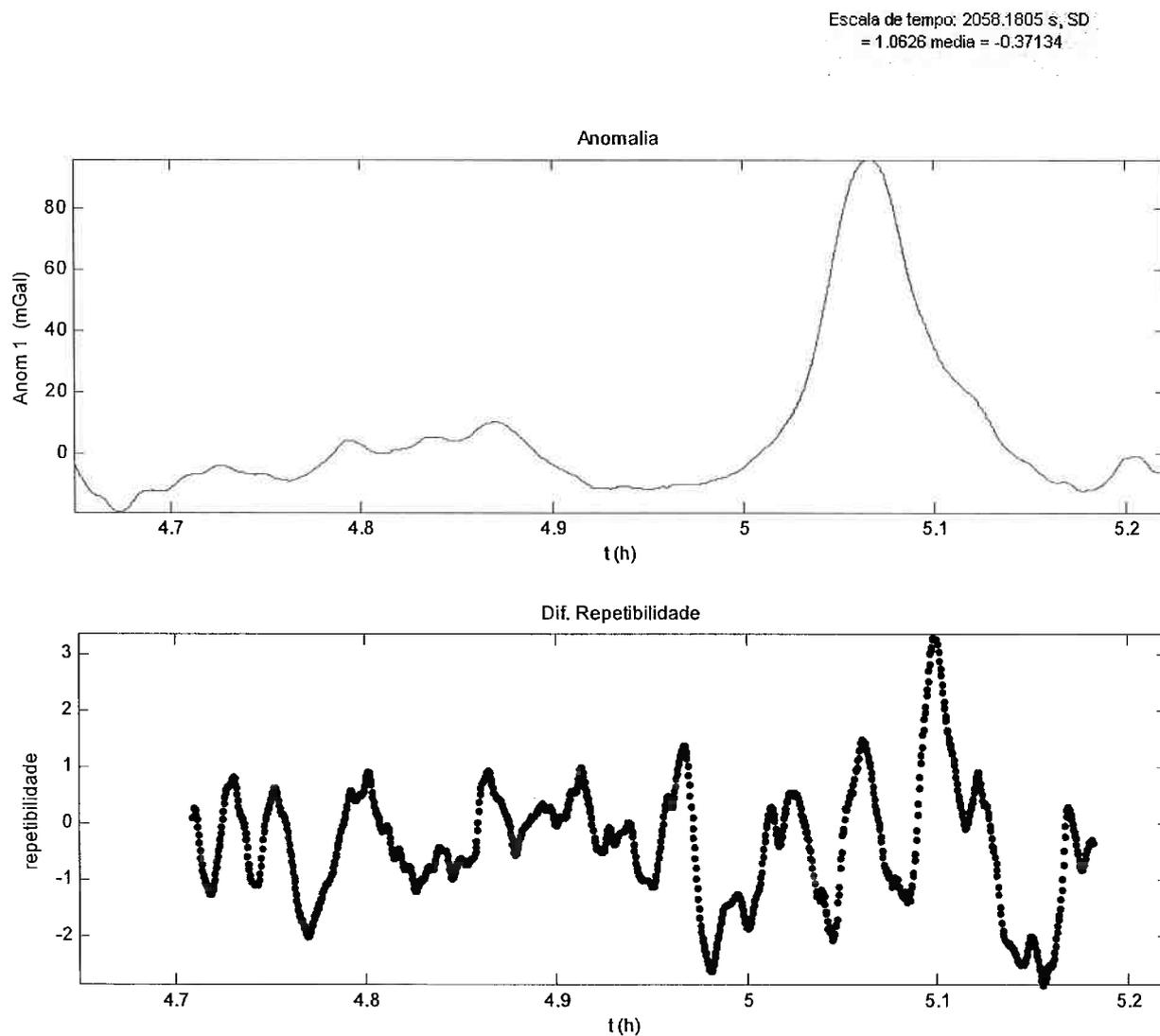


FIGURA 70: ANÁLISE DE REPETIBILIDADE DE UMA PASSAGEM COM USO DE COEFICIENTES DO MODELO DE ERROS

### 3.5.7 Análise usando inversão

O campo anômalo tem origem em uma configuração geológica sob a superfície terrestre respeitando a seguinte equação de campo potencial

$$\delta U = G \int \frac{\Delta \rho}{R} dV$$

onde  $\delta U$  é a anomalia do campo potencial e  $\Delta\rho$  é a anomalia na distribuição de massa sob a superfície terrestre. Esta equação, impõe limitações nas possíveis configurações do campo anômalo.

Para obter uma estimativa do ruído no sinal obtido, foi realizado um processo de inversão, no qual se encontra um modelo para a distribuição  $\Delta\rho$  que explique a o campo anômalo medido na superfície. A diferença entre o campo gerado pelo modelo e o campo coletado é uma estimativa do ruído de medida. A figura 71 mostra um diagrama do modelo utilizado.

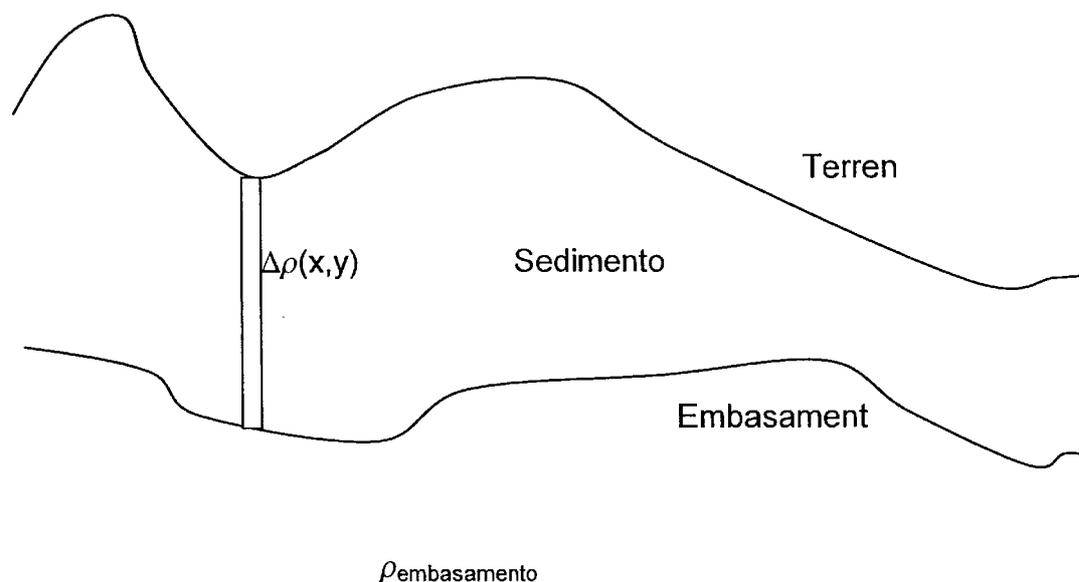


FIGURA 71 DIAGRAMA DO MODELO DE SUB-SUPERFÍCIE UTILIZADO

Neste modelo, uma camada entre a superfície e o embasamento é formada por prismas verticais de densidade e espessura variáveis.

As figuras a seguir mostram os resultados obtidos. As figura 72 e 73 mostram os campos anômalos obtidos pelo sistema novo e pelo sistema original respectivamente. A tabela 4 apresenta alguns dados estatísticos sobre os campos obtidos. Comparando as figuras o resultado obtido pelo sistema novo aparenta ser mais suave, mas ao comparar a estatística do campo, o maior desvio padrão parece indicar maior conteúdo no sinal obtido pelo sistema novo. Entretanto, amplitude do sinal obtido pelo sistema novo é cerca de 5% menor, sendo esta relacionada ao tamanho do pico presente no quadrante sudoeste da área.

TABELA 4 ESTATÍSTICA DA ANOMALIA OBTIDA PELOS SISTEMAS DE PROCESSAMENTO

	<i>Sistema novo</i>	<i>Sistema original</i>
Desvio padrão	10.18459	9.71547
Média	-92.74362	-85.67726
Valor Mínimo	-117.86761	-113.33956
Valor Máximo	-20.14720	-10.73106

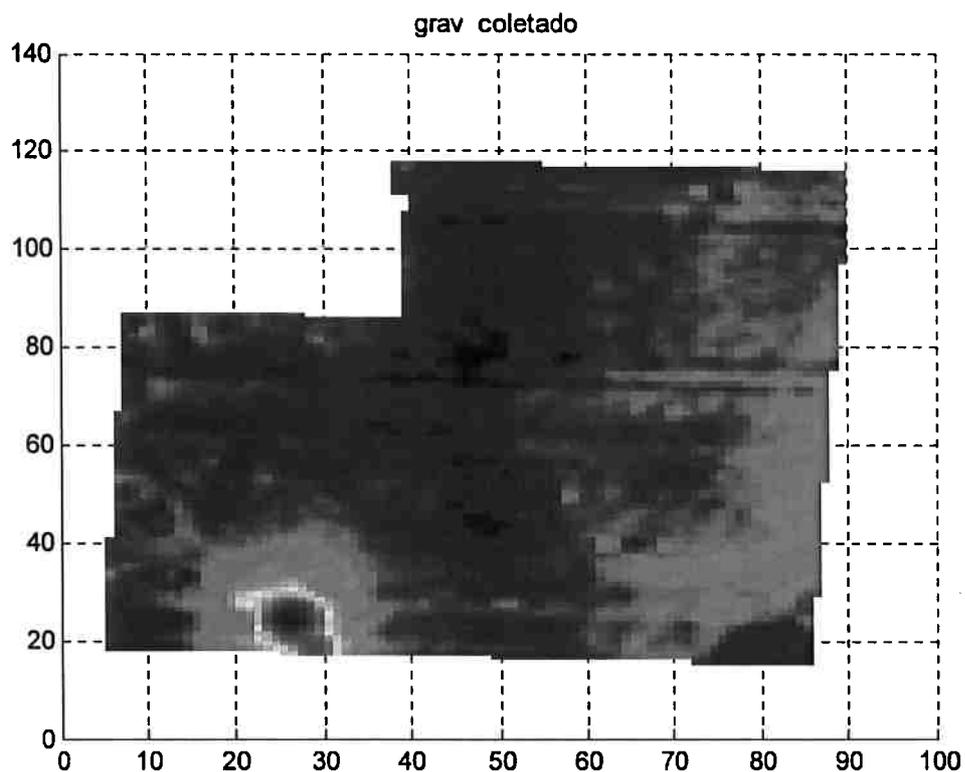


FIGURA 72 GRADE DO CAMPO OBTIDO (MGAL) PELO SISTEMA NOVO

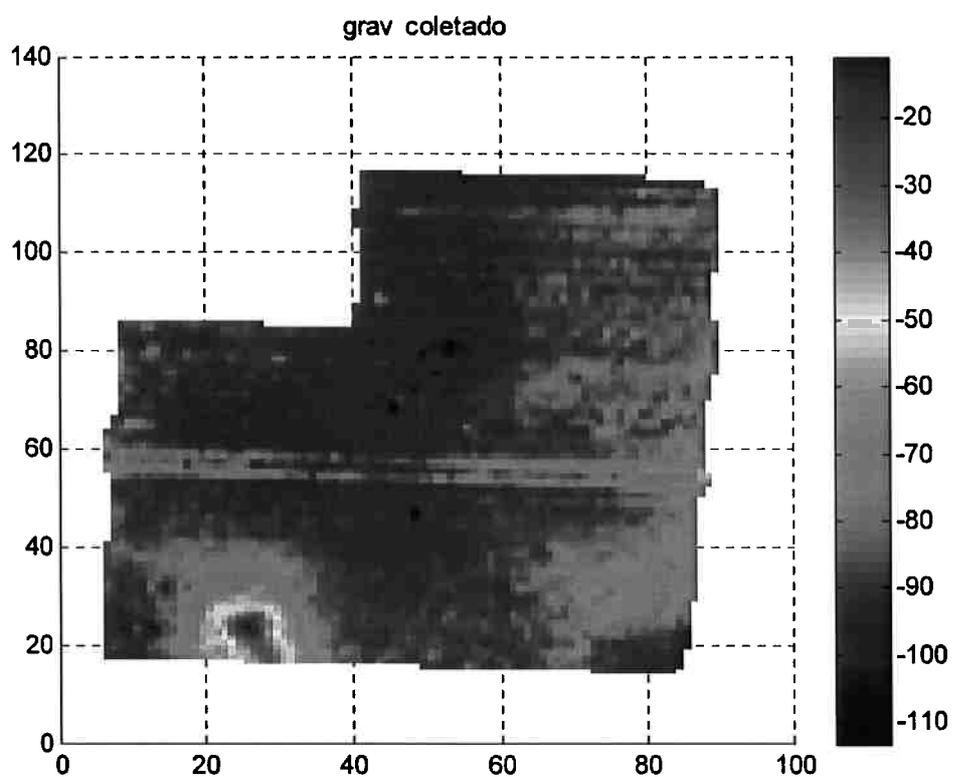


FIGURA 73 GRADE DO CAMPO OBTIDO (MGAL) PELO SISTEMA ORIGINAL

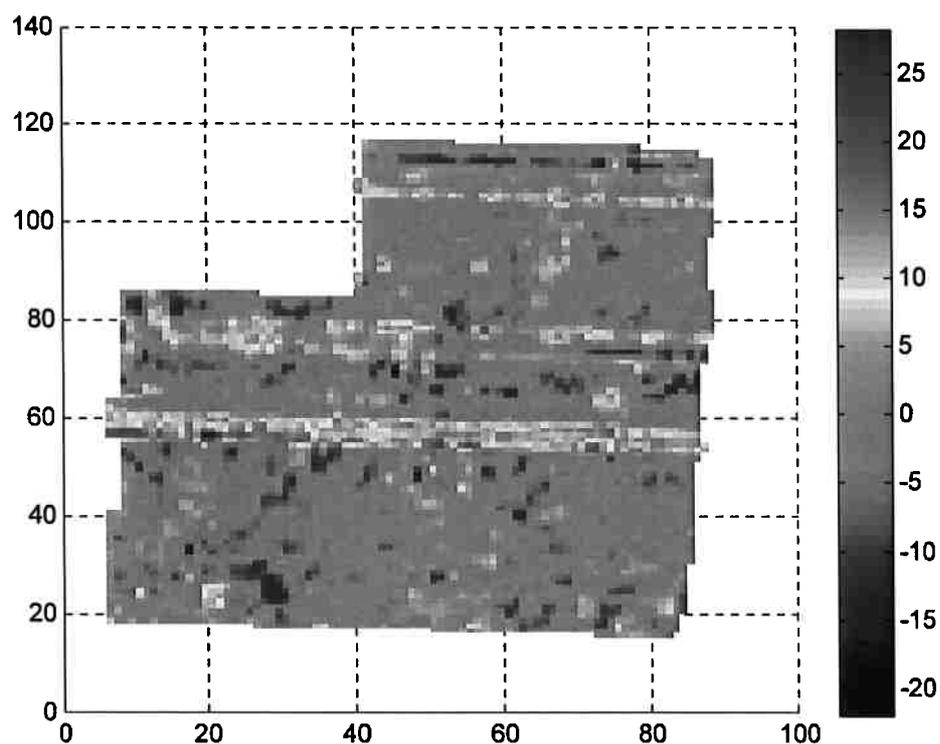


FIGURA 74 GRADE DA DIFERENÇA ENTRE OS CAMPOS CALCULADOS: ORIGINAL - NOVO

As figuras 78 e 79 mostram os resíduos de modelagem para o sistema novo e para o sistema antigo respectivamente. A tabela 5 mostra a estatística do resíduo para ambos os sistemas. O resíduo para o sistema novo foi consideravelmente menor tanto em conteúdo de sinal quanto em valores extremos. A figura 74 mostra a diferença dos campos calculados por ambos os sistemas, ou seja, os valores da figura 73 menos o da figura 72 (com a subtração de 7 mGal para ajuste entre valores médios).

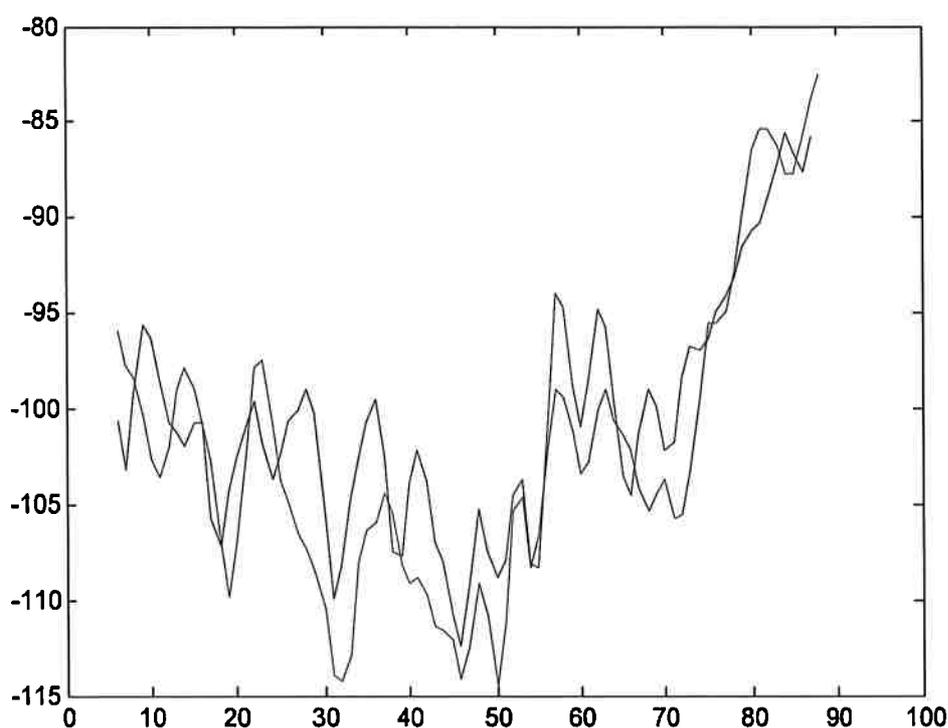


FIGURA 75 SISTEMA NOVO: DOIS PERFIS ADJACENTES DISTANTES 6 KM

A figura 74 mostra que a diferença entre as duas anomalias calculadas pelos sistemas é fortemente influenciada pelos desníveis apresentados em algumas das linhas, claramente artefatos não condizentes com anomalias gravimétricas. Nas figuras 75 e 76, dois perfis afastados de 6 km foram dispostos para os dados calculados pelos sistemas novo e original respectivamente. Estas figuras mostram haver maior conteúdo de sinal no sistema novo do que no sistema antigo. As feições adicionais mostradas no sistema novo não parecem ser efeitos de ruído por estarem relacionadas entre os perfis adjacentes. Esta quantidade maior de feições parece ser o causador de maior desvio padrão mostrado na tabela 4.

Uma das diferenças fundamentais entre os sistemas é a utilização no sistema novo da frequência ao quadrado em lugar de uma linearização desta em torno do ponto médio de frequências, como é feito no sistema antigo. Isto pode causar mudanças na identificação de constantes e um efeito de não linearidade perceptível para valores elevados de anomalia. É possível que seja este o efeito observado na figura 77, que mostra o espalhamento entre os valores dados pelo sistema original

(abscissas) marcados no gráfico contra o sistema novo (ordenadas). O gráfico mostra uma curvatura em relação ao eixo da nuvem de pontos que pode ser causada pela diferença entre os dados linearizados e não linearizados.

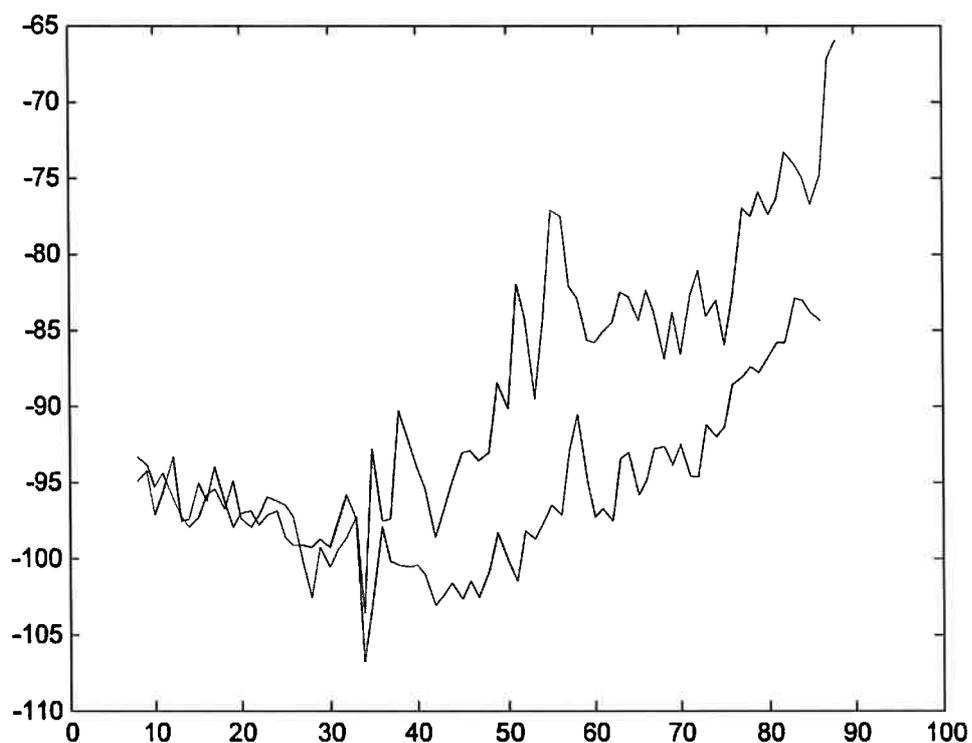


FIGURA 76 SISTEMA ORIGINAL: DOIS PERFIS ADJACENTES DISTANTES 6 KM

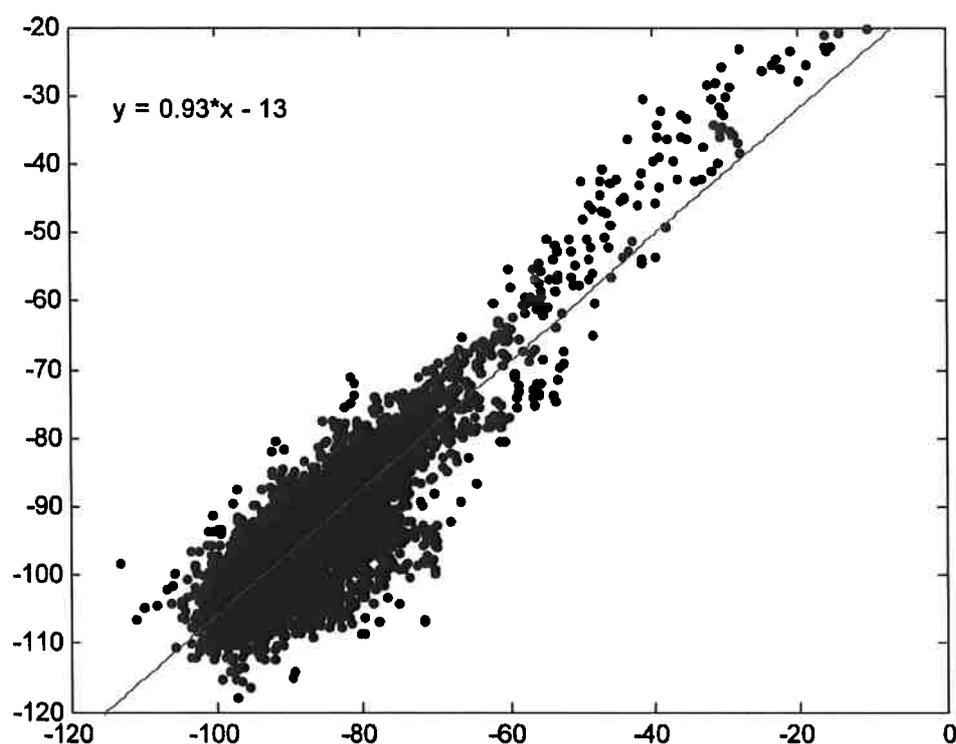


FIGURA 77 COMPARAÇÃO ENTRE VALORES DO SISTEMA NOVO (ABSCISSA) E ORIGINAL (ORDENADA)

Tabela 5 Estatística dos resíduos de inversão obtidos pelos sistemas de processamento

	<i>Sistema novo</i>	<i>Sistema original</i>
Desvio padrão	0.37201	0.55706
Média	-0.05638	-0.02122
Valor Mínimo	-2.25932	-3.58865
Valor Máximo	3.38334	5.06670

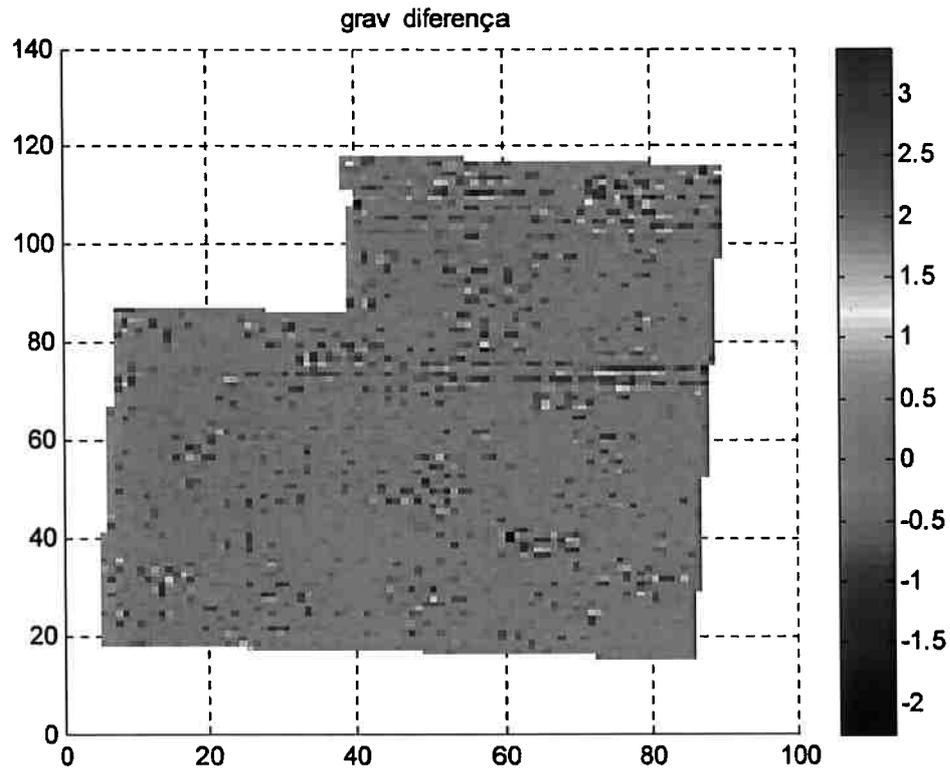


FIGURA 78 RESÍDUO (MGAL) PARA O SISTEMA NOVO

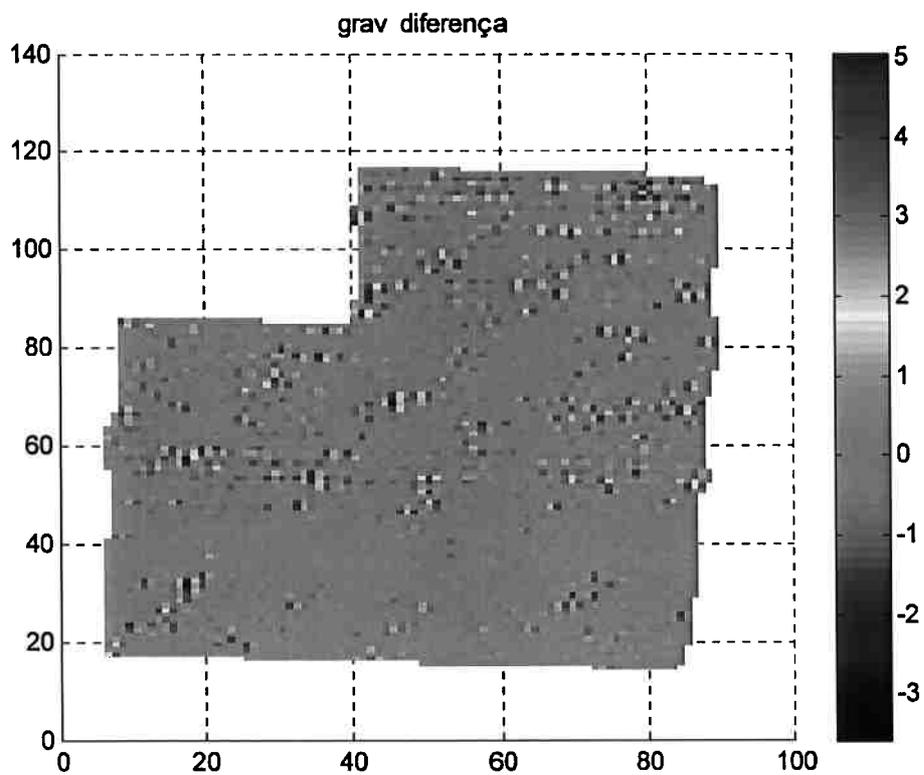


FIGURA 79 RESÍDUO DE MODELAGEM (MGAL) PARA O SISTEMA ORIGINAL

As figuras 80, 81, 82 e 83 abaixo mostram os modelos de sub-superfície obtidos que foram utilizados para obter os campos para comparação e obtenção dos resíduos de modelagem dispostos nas figuras 78 e 79. Nas figuras 80 e 81, encontram-se as grades de densidades na camada superior (sedimento) conforme disposto na figura 71. Nas figuras 82 e 83, encontram-se as grades de profundidades da separação entre camada superior (sedimento) e a camada inferior conforme disposto na figura 71.

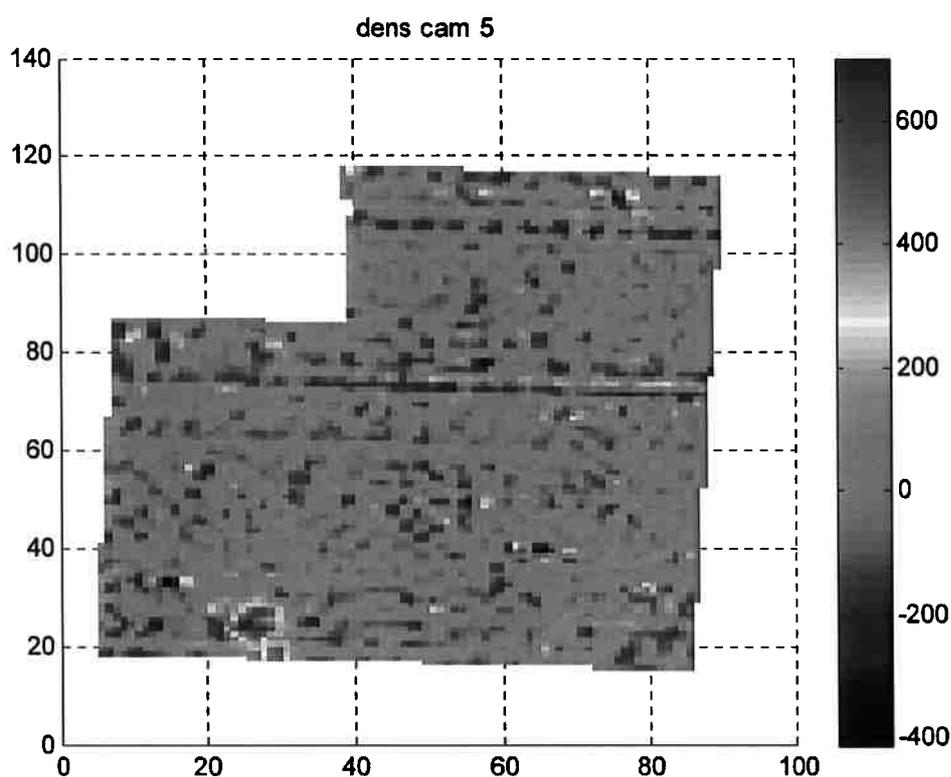


FIGURA 80 CONTRASTE DE DENSIDADE DO SEDIMENTO ( $\text{KG}/\text{M}^3$ ) PARA O SISTEMA NOVO

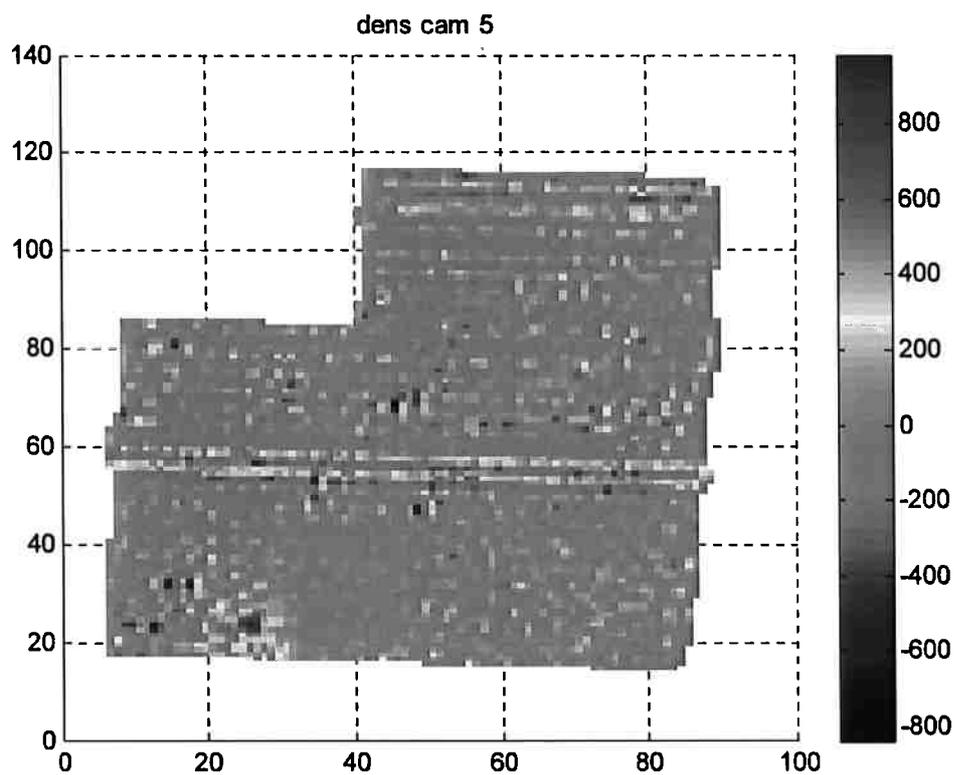


FIGURA 81 CONTRASTE DE DENSIDADE DO SEDIMENTO (KG/M<sup>3</sup>) PARA O SISTEMA ORIGINAL

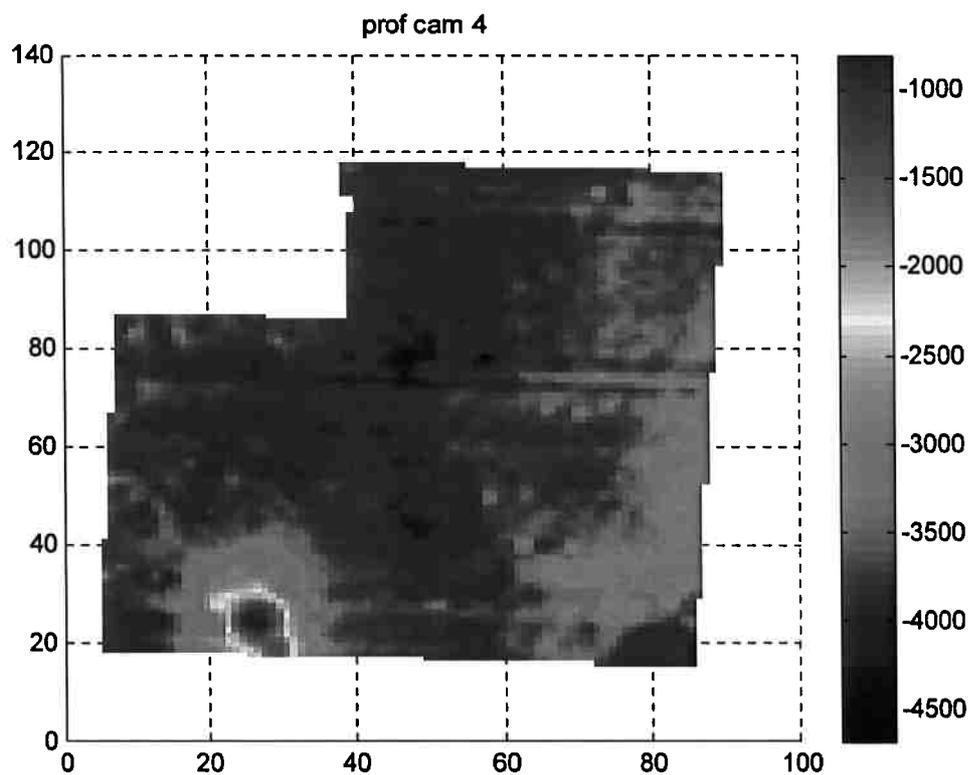


FIGURA 82 PROFUNDIDADE DO EMBASAMENTO PARA O SISTEMA NOVO

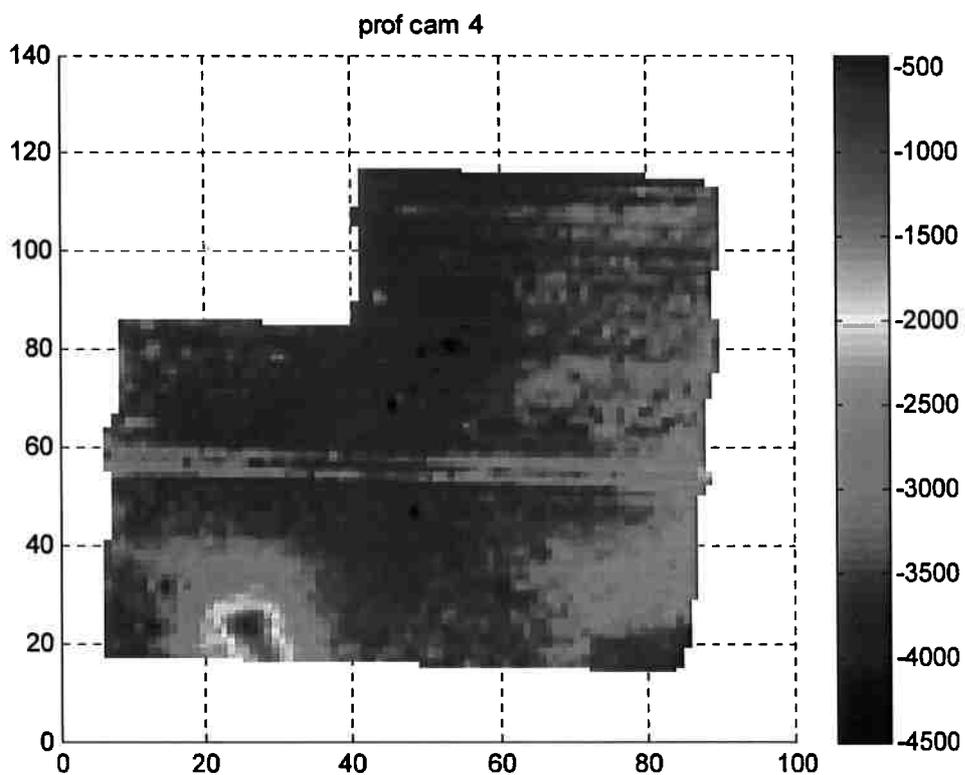


FIGURA 83 PROFUNDIDADE DO EMBASAMENTO PARA O SISTEMA ORIGINAL

### **3.5.8 Avaliação influência da qualidade dos sensores inerciais no processo de gravimetria**

Uma das questões mais importantes a serem respondidas com a utilização do modelo desenvolvido é a da influência nos resultados de gravimetria pelos parâmetros de desempenho dos sensores inerciais usados no sistema de navegação inercial. O objetivo desta seção é o de responder algumas destas questões. Em particular, é interessante saber se é possível a realização de gravimetria com a utilização de sistemas disponíveis no mercado e sem restrições de importação.

#### ***3.5.8.1 Perturbação do modelo de erros dos sensores inerciais***

Para a avaliação da influência dos parâmetros de desempenho dos sensores inerciais foram utilizados os mesmos dados do voo de repetibilidade usados na seção 3.5.6. O modelo de erros dos giroscópios e acelerômetros foi modificado com a inclusão de perturbações que buscam interferir na identificação do estado da plataforma. O diagrama da figura é uma modificação do diagrama da figura 7 mostrando a inclusão da perturbação.

Os dados de gravimetria são analisados e as estatísticas de repetibilidade obtidas. Utilizando-se os parâmetros de ruído de um sistema comercialmente disponível, busca-se avaliar a possibilidade de uso do mesmo para gravimetria.

Vale observar que o voo de repetibilidade foi realizado com um sistema real que possui suas próprias características de desempenho. Os erros dos sensores do sistema original adicionam-se às perturbações aplicadas, sendo os resultados obtidos influenciados pela combinação de ambos. Entretanto, os sistemas analisados nesta seção possuem erros muito maiores que os originais e a influência dos erros dos sensores originais pode ser desprezada.

Outra observação importante deve ser feita ao fato de o ruído de deriva aleatória ser gerado a cada iteração do modelo da plataforma. Desta forma, procura-se modelar a incerteza da deriva aleatória e não seus valores no tempo. Para um voo já

realizado, a influência dos valores aleatórios já se encontra nos valores das saídas gravadas.

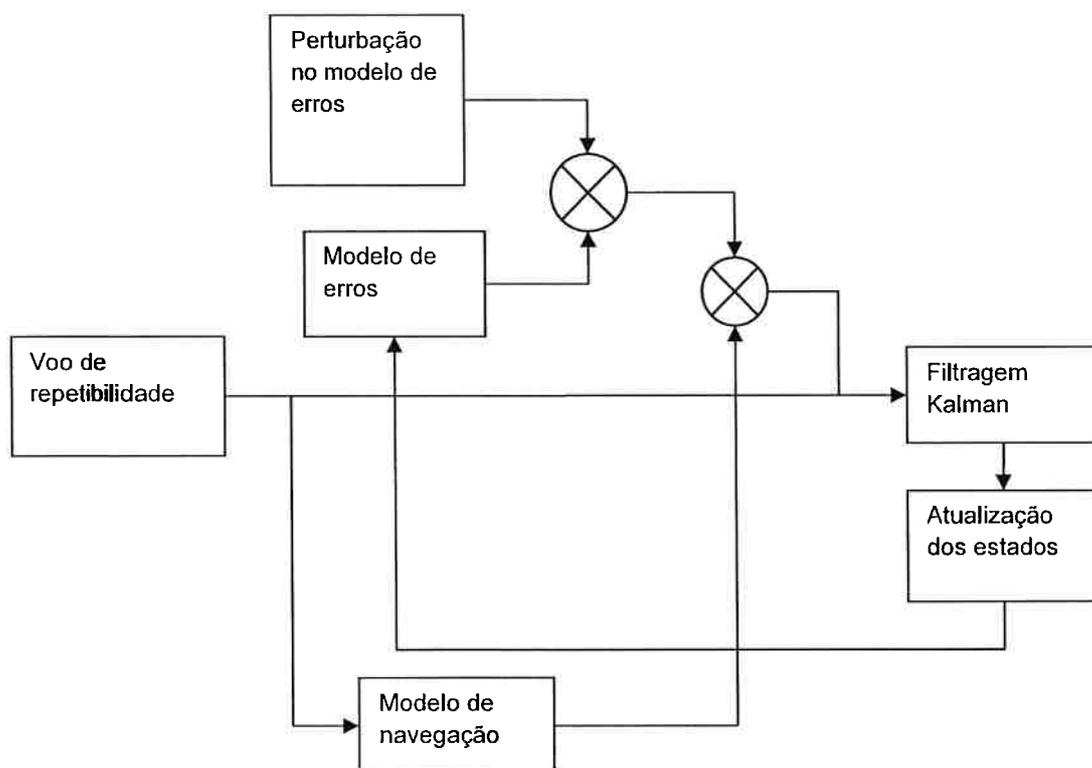


FIGURA 84 ESQUEMATICO DO SISTEMA DE PERTURBAÇÃO DO MODELO DE NAVEGAÇÃO

### 3.5.8.2 Resultados

Testes foram realizados para diversas configurações de perturbação no sistema, tentando emular as características de sistemas disponíveis no mercado. O mesmo voo de repetibilidade (voo número 4) foi usado para a avaliação dos resultados. Para cada teste foram obtidos os valores de desvio padrão das diferenças em relação à média das passagens pela aeronave pela linha de aquisição de dados. A tabela 6 mostra os resultados para cada um dos sensores de aceleração vertical embarcados. Cada sensor possui uma estatística para o voo ao lado das estatísticas para cada linha. As características usadas em cada teste para a perturbação do sistema de navegação estão dispostas na tabela 7.

Na tabela 6, a estatística de cada linha não leva em conta os valores que ultrapassam 2 desvios padrão, na tentativa de retirar o efeito das manobras de entrada e saída de linha que normalmente causam grandes desvios. A estatística

de desvio padrão individual de cada linha não leva em conta valores médios de desvios. Estes podem ser retirados através de técnicas de nivelamento comumente usadas em aerolevantamentos. Os valores obtidos para o voo todo sofrem a influência de erros nos valores médios de cada linha. Estes erros devem-se geralmente ao resíduo de compensação da aceleração de Coriolis. Este resíduo surge no cálculo da anomalia que por força das equações descritas na seção 2.3.6 busca, a grosso modo, minimizar a correlação entre o sinal de anomalia e as acelerações verticais, o que pode envolver a re-inclusão de parte da aceleração de Coriolis.

O teste de número 7 indica que é possível fazer gravimetria quando a deriva aleatória do giro é da ordem de  $0.1 \text{ }^\circ/\text{h}$ . Neste teste, a plataforma se comportou de forma semelhantemente ao teste de referência. Para este teste, também foi incluída na perturbação uma deriva giroscópica constante. Por este motivo, foi feito um teste à parte para a verificação da influência na gravimetria do processo de identificação de parâmetros descritos na seção 2.2. Os resultados obtidos na tabela 8 referem-se aos valores obtidos após um número de iterações de atualização do parâmetro de erro em questão (deriva giroscópica). O gráfico 85 mostra a boa convergência do parâmetro de erros para o valor das perturbações injetadas. A figura 87 mostra um detalhe do gráfico de repetibilidade para o teste 7 após 10 iterações de identificação das derivas.

A identificação dos valores de deriva constante é bastante aceitável, como mostra o gráfico da figura 85. Apesar disto, a tabela 8 mostra que a identificação causa uma melhoria nos resultados de gravimetria mas não muito grande. Isto provavelmente se deve ao fato de estas derivas causarem erros de integração de baixa frequência que podem ter sido eliminados no modelo de erros do processo de identificação de estados. Também vale notar que o gerador de erros aleatórios continua funcionando a cada iteração, tornando a identificação de parâmetros mais difícil. No caso de pós-processamento de um voo, a influência de deriva aleatória já estaria incluída nas saídas observadas e o resultado seria possivelmente melhor.

TABELA 6 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS INERCIAIS COMERCIALMANTE DISPONÍVEIS

Teste	Sensor														
	1					2					3				
	Voo	1	2	3	4	Voo	1	2	3	4	Voo	1	2	3	4
Referência	1.4	1.0	1.0	1.3	1.4	2.1	1.2	1.0	1.3	1.3	2.3	1.0	1.6	1.3	1.6
1	6.8	3.9	7.2	7.0	8.3	7.9	3.7	7.1	7.2	8.8	8.1	5.1	8.5	7.7	8.5
2	3.5	4.1	2.9	3.2	2.8	4.5	4.6	3.8	3.9	3.2	4.9	4.2	3.5	3.4	3.4
3	3.2	3.5	2.3	3.7	2.2	3.4	3.6	3.2	3.5	2.6	4.0	3.7	3.4	4.4	2.9
4	3.8	3.2	2.7	4.3	2.9	3.9	3.0	3.2	4.5	3.0	4.3	3.3	2.6	5.0	3.2
5	2.3	1.4	2.5	1.7	2.0	2.6	2.0	2.1	2.2	2.2	2.3	1.6	2.5	2.0	2.1
6	11.2	9.7	11.0	14.9	10.0	11.7	10.2	11.2	14.9	9.4	11.6	8.8	10.9	14.2	11.3
7	1.5	1.2	1.5	1.6	1.6	2.0	1.5	1.5	1.7	1.7	2.0	1.1	1.6	1.7	2.0

TABELA 7 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS INERCIAIS COMERCIALMANTE DISPONÍVEIS

Teste	Random walk °/√h	Modelo	Tipo
1	2	Analog Devices - ADIS16400/ADIS16405	Giro
2	0.6	Gladiator Technologies - LandMark 30 IMU	IMU
3	0.75	Imar Navigation - iIMU-FSAS	IMU
4	0.5	Silicon Sensing - DMU02	Giro
5	0.3	Exemplo 0.3/h	
6	3	Systron Donner - QRS14	IMU
7	0.1		IMU

TABELA 8 INFLUÊNCIA DA IDENTIFICAÇÃO DAS DERIVAS NA GRAVIMETRIA

Iterações	Sensor														
	1					2					3				
	Voo	1	2	3	4	Voo	1	2	3	4	Voo	1	2	3	4
1	1.9	1.1	1.7	1.6	1.3	1.9	1.3	1.9	2.0	1.5	2.0	1.3	1.8	1.5	1.7
2	1.7	1.5	1.4	1.6	1.6	2.2	1.7	1.5	1.5	1.7	2.7	1.7	2.0	1.8	2.3
3	1.8	1.4	2.0	1.4	1.6	2.1	2.2	2.4	1.6	1.5	2.4	1.4	1.9	2.0	1.9
4	1.6	1.5	1.4	1.5	1.8	2.1	1.9	1.8	1.6	1.6	2.2	1.0	2.1	1.4	2.0
5	2.0	1.7	1.7	2.0	2.0	2.2	2.2	1.6	2.3	2.0	2.1	1.5	1.5	1.9	2.1
6	1.5	1.2	1.4	1.7	1.0	1.9	1.8	2.0	1.8	1.3	1.9	1.0	2.0	1.5	1.5
7	1.7	1.1	1.1	1.5	2.2	2.2	2.0	1.5	1.6	2.4	2.3	1.3	1.4	1.6	2.7
8	1.8	1.4	1.5	1.7	1.5	2.1	2.2	1.5	1.9	1.5	2.0	1.4	1.3	1.8	1.7
9	1.6	1.4	1.4	1.4	1.6	2.0	1.7	1.9	1.1	2.0	2.1	1.3	1.9	1.5	2.1
10	1.6	1.2	1.1	1.8	1.6	2.3	1.8	1.2	2.1	1.8	2.5	1.4	1.7	1.4	1.8

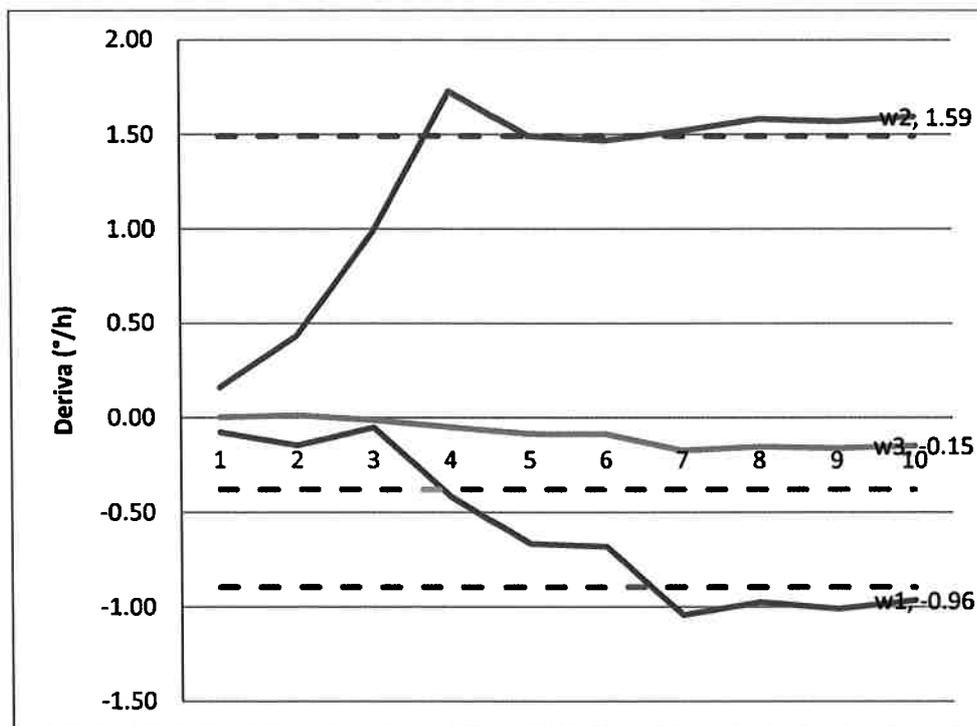


FIGURA 85 PROGRESSÃO DA IDENTIFICAÇÃO DAS DERIVAS GIROSCÓPICAS

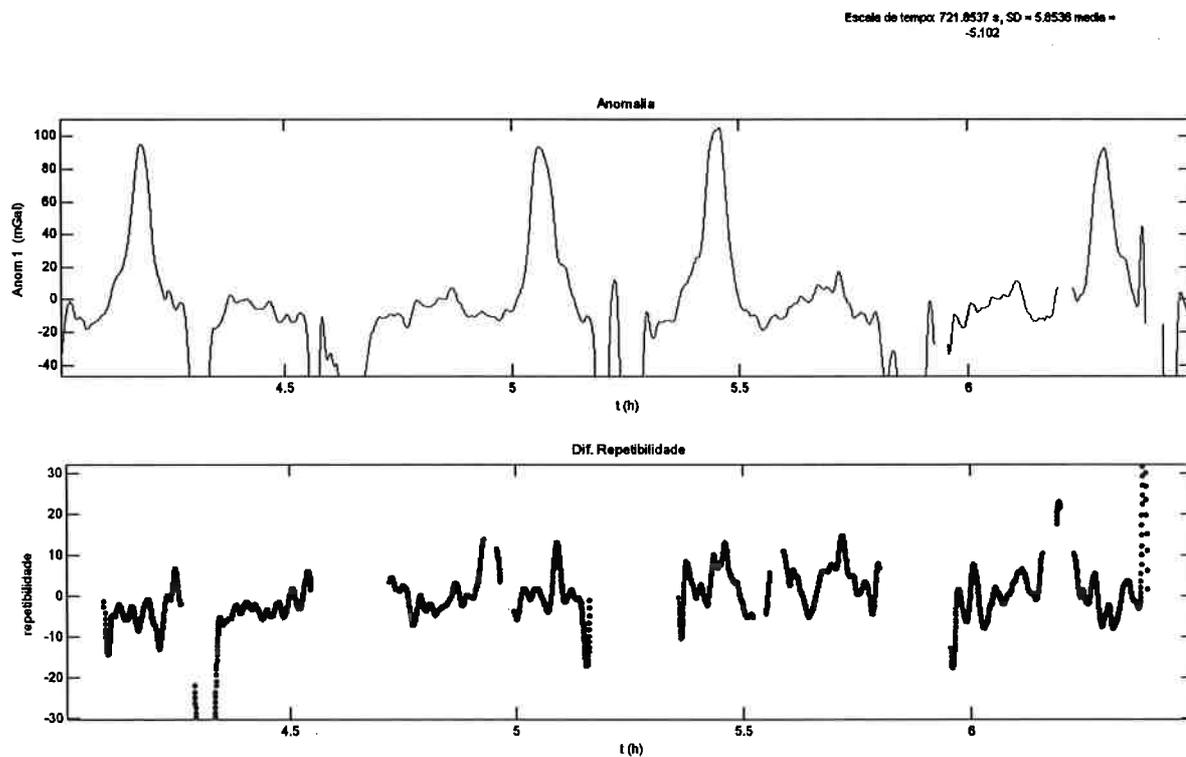


FIGURA 86 VOO DE REPETIBILIDADE COM DESVIO ALEATÓRIO GIROSCÓPICO SIGMA 0.5/ $\sqrt{h}$

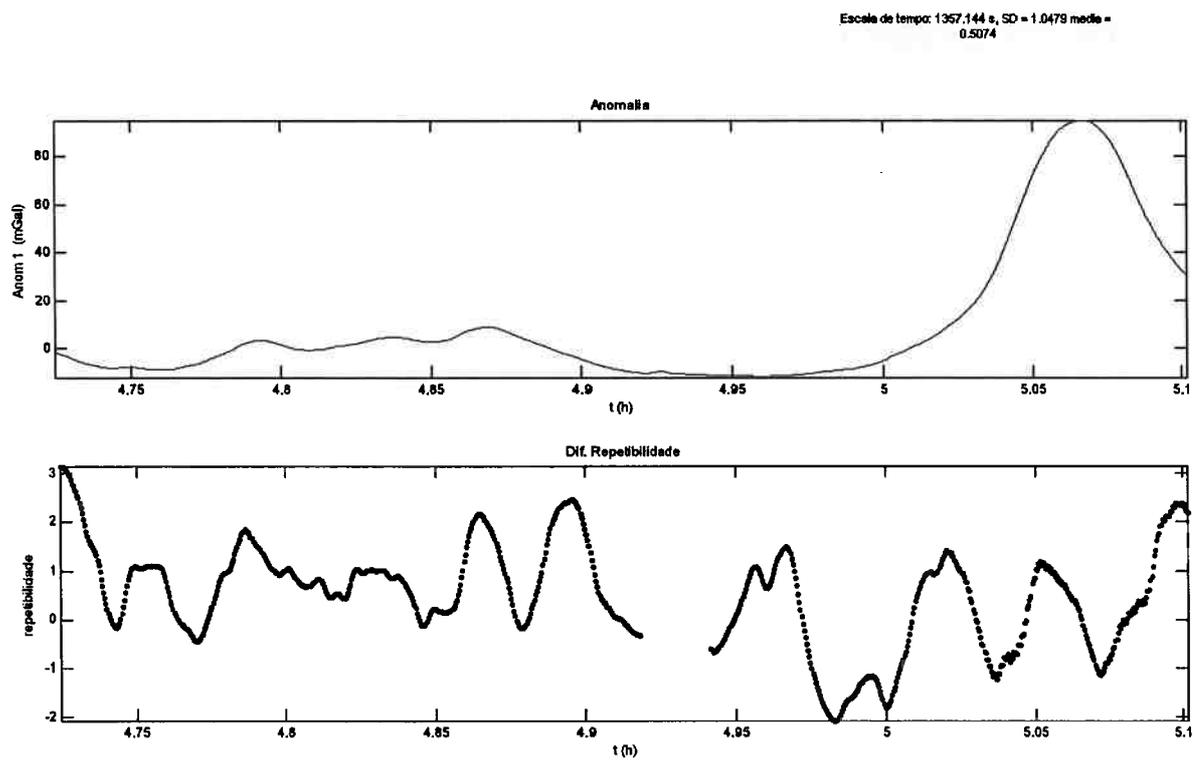


FIGURA 87 DETALHE DE REPETIBILIDADE PARA O TESTE 7 APÓS IDENTIFICAÇÃO DE DERIVAS

## 4 Conclusões e comentários

O sistema apresentado neste trabalho para a realização de extração da aceleração da gravidade com precisão de 1 mGal de erro sob as seguintes condições:

- filtragem por janela de Hann a 120s
- condições de voo semelhantes às encontradas no voo de repetibilidade usado para os testes de desempenho descritas na seção 3.1

A identificação correta dos estados da plataforma é essencial à correta identificação do sistema acelerômetro/GPS, que por sua vez permite a realização da extração do sinal de aceleração da gravidade. O resultado do teste de controle descrito na seção 3.3 provê validação para a identificação do estado do sistema de navegação.

Também é fundamental para a correta obtenção deste modelo que o sinal GPS esteja suficientemente limpo dos erros de perda de ciclos e dos pulsos.

A identificação dos parâmetros do modelo de erros obtidos pelos métodos da seção 2.2 pode melhorar os resultados de medição da aceleração da gravidade, em particular, quando tal identificação permitir o desligamento do filtro de Kalman. A influência maior parece ser na identificação dos parâmetros do sistema acelerômetro /GPS.

A dificuldade maior para o processo de identificação é geralmente a ausência de excitação de todos os possíveis modos do sistema, ou seja, a dificuldade de executar testes suficientemente ricos nas condições normais de operação. Todavia, os parâmetros quando usados no modelo de erros do próprio sistema permitem o correto funcionamento da plataforma com desvios inferiores a 40 segundos, em concordância com as especificações do fabricante.

A utilização dos filtros casados permite isolar completamente a tarefa de filtragem para reamostragem. Desta forma, o projeto de filtros usados para a identificação do sistema acelerômetro/GPS fica bastante simplificado.

Outra técnica que permite um bom resultado é a de separação em duas etapas para a identificação do sistema acelerômetro/GPS. A identificação das constantes de proporcionalidade é crucial e muito dificultada pela existência de sinais de elevada

amplitude e baixa frequência como o caso das acelerações de Coriolis, que se confundem com o sinal a ser extraído. Desta forma, parte do sinal de interesse é incluída como sinal de aceleração e parte das acelerações é entregue como sinal anômalo.

Quando a ordem do modelo é maior que unitária, é essencial que os procedimentos de obtenção de derivadas sejam adequados e que não criem distorções no sinal estudado. Neste sentido, as técnicas descritas na seção 2.3.5 contribuem sobremaneira para a redução de ruído no sinal extraído. Estas extraem as derivadas do sinal sem grandes distorções em frequência como no caso do uso de diferenças discretas.

A dificuldade de ajustar com precisão a aceleração da gravidade extraída nos trechos de manobras indica haver dificuldades com o sinal GPS quando a aeronave está sob a influência de acelerações mais elevadas. A solução ou melhoria de desempenho do processamento GPS para a obtenção mais robusta das acelerações da aeronave parece ser o melhor alvo para melhoria do processo como um todo. O baixo nível de ruído no teste estático de controle descrito na seção 3.3 indica que os sensores de aceleração não são os maiores contribuintes para o ruído de detecção, embora uma melhoria no nível de ruído dos sensores ajudaria em uma segunda etapa de desenvolvimento.

Outra indicação de que os sistemas inerciais não sejam os maiores contribuintes para o ruído de aquisição no resultado final é a possibilidade da utilização de giroscópios piores apresentada na seção 3.5.8. Os giroscópios indicados como adequados possuem ruído aleatório cinco vezes maior que os atualmente usados e não estão sob embargo de comercialização pelo regime de controle de tecnologia de mísseis. Isto abre a possibilidade de fabricação de um sistema aero-embarcado de medição do campo gravitacional com tecnologia não controlada por tratados internacionais e possivelmente disponíveis nos centros de pesquisa brasileiros. Tal sistema possuiria a capacidade de realização do levantamento do campo gravitacional de maneira relevante para os propósitos de exploração dos recursos do sub-solo.

## 5 Bibliografia

BRUTON, A. M.; GLENNIE, C. L.; SCWARZ, K. P. Differentiation for high precision GPS velocity and acceleration determination. **GPS Solutions Vol 2**, p. 7-21, 1999.

DOLPH, C. L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and side-lobe level. **Proc. IRE 34**, p. 335–348, 1946.

GLENNIE, C.; SCWARZ, P. A comparison and analysis of airborne gravimetry results from two strapdown inertial/DGPS systems. **Journal of Geodesy**, p. 311-321, 1999.

HALL, D. L.; LLINAS, J. An Introduction to Multisensor Data Fusion. **PROCEEDINGS OF THE IEEE**, January 1997. 6-23.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Transactions of the ASME - Journal of basic engineering**, p. 35-45, 1960.

KREYE, C. et al. Galileo and the Earth's Gravity Field, Using GNSS for Airborne Gravimetry — An Overview. **InsideGNSS**, November/December 2006. 53-65.

KREYE, C. et al. Galileo and the Earth's Gravity Field: Using GNSS for Airborne Gravimetry - An Overview. **InsideGNSS**, p. 53-65, Nov/Dec 2006.

KWON, J. H.; JEKELI, C. A new approach for airborne vector gravimetry using GPS/INS. **Journal of Geodesy**, p. 690-700, 2001.

LEMOINE, F. G. et al. EGM96 - The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model, July 1998. Disponivel em: <<http://cddis.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>>. Acesso em: 4 December 2009.

OPPENHEIMER, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time Signal Processing**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

PARKS, T.; MCCLELLAN, J. Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase. **IEEE Transactions on Circuit Theory**, p. 189 - 194, 1972.

ROGERS, R. M. **Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems**. 2nd Edition. ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2003.

SIOURIS, G. M. **Aerospace Avionics Systems: a modern Synthesis**. San Diego: Academic Press Limited, 1993.

TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E. **Applied Geophysics - Second Edition**. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 2001.

Раменский Приборостроительный Завод. **И-21, Руководство по Технической Эсплуатации**. Moscou: [s.n.], 1990.