HIPÓLITO ALAN ARREDONDO CHAMPI

PROJETO E MODELAGEM DE METAMATERIAIS ACÚSTICOS E ELÁSTICOS POR RESSONÂCIAS MIE

São Paulo
2012

HIPÓLITO ALAN ARREDONDO CHAMPI

PROJETO E MODELAGEM DE METAMATERIAIS ACÚSTICOS E ELÁSTICOS POR RESSONÂCIAS MIE

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração:
Microeletrônica

Orientador: Prof. Livre-Docente
Walter Jaimes Salcedo

São Paulo
2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Arredondo Champi, Hipólito Alan
Projeto e modelagem de metamateriais acústicos e elásticos por ressonâncias Mie / H.A. Arredondo Champi. -- São Paulo, 2012.
160 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

1. Espalhamento 2. Materiais compósitos 3. Ondas sísmicas 4. Freqüência do som I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos II. t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu Deus, aos meus pais, Dina e Meliton, as minhas irmãs, Erika e Sthefani, por seu amor e ter confiado sempre em mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por todas as coisas boas e ruins que vivi e por iluminar meu caminho e me dar forças para seguir sempre em frente.

Ao Prof. Dr. Walter Jaimes Salcedo, pela sua orientação, paciência, estímulo, e apoio ao longo desta jornada.

A minha amada esposa Rina, por ter sempre estado ao meu lado me ajudado a superar minhas fraquezas espirituais e acadêmicas.

Aos meus amados pais, Dina e Meliton, e as minhas irmãs Érika e Sthefani por seu amor e ter confiado sempre em mim, mesmo tanto tempo distante e por serem a minha fonte de inspiração.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, Boris, Wilingthon, Victor, Danilo, Mauro, Felipe, Keth, Fátima, Daniel, Claudia, Vicente, Aldo, Renata e Oscar pelos inesquecíveis dias de convivência, o meu querido amigo e irmão de igreja, Fredi, que à distância, sempre mantivemos a nossa amizade, e a todos os professores e funcionários do departamento de Engenharia Elétrica que direta ou indiretamente, ajudaram na execução deste trabalho.

E finalmente ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro deste trabalho.

EPÍGRAFE

"A descoberta consiste em ver o que todo mundo viu e pensar o que ninguém pensou."

A. Szent-Gyorgyi

RESUMO

Os metamateriais acústicos/elásticos são materiais que apresentam características elásticas diferentes dos materiais comuns encontrados na natureza, sendo o índice de refração negativo a principal característica destes novos materiais. A literatura reporta que esta propriedade é atingida para uma faixa muito estreita de frequências, sendo um efeito muito localizado, e, adicionalmente, as estruturas propostas são ideais em extremo, o que dificulta sua aplicação prática em dispositivos acústicos. O objetivo do presente trabalho foi projetar metamateriais acústicos e elásticos tridimensionais com índice de refração negativo numa faixa de frequência mais longa em relação ao reportado na literatura, e utilizando geometrias e materiais que tornem viável sua implementação prática para a fabricação de dispositivos. Com este propósito foi desenvolvido um formalismo da teoria de meio efetivo (TME), no limite de comprimento de onda longa e baixas frações de preenchimento. Com a TME desenvolvida foi estudado o espalhamento de inclusões esféricas simples, revestidas e duplamente revestidas em diferentes matrizes hospedeiras. Os resultados mostraram a existência de bandas ressonantes nos coeficientes da matriz T relacionadas aos modos monopolares, dipolares e quadrupolares. Materiais compósitos constituídos por esferas simples, revestidas ou duplamente revestidas foram analisados utilizando o formalismo TME. Os resultados mostraram que os valores negativos dos parâmetros elásticos nestes materiais estão completamente relacionados aos efeitos ressonantes das inclusões esféricas. Metamateriais elásticos e acústicos foram projetados sobrepondo dois ou mais compósitos diferentes, cada um com diferentes propriedades, de tal forma que o efeito total no metamaterial apresente as características definidas no projeto inicial. O metamaterial elástico foi projetado utilizando a sobreposição de três compósitos de inclusões esféricas diferentes. Este metamaterial apresentou índice de refração negativa na região de 2 kHz, numa faixa de largura igual a 80 Hz. O metamaterial acústico foi projetado sobrepondo dois compósitos de inclusões esféricas diferentes. Este material apresentou índice de refração negativa na região de 7 kHz, numa faixa de 500 Hz. As geometrias e materiais utilizados no projeto destes metamateriais são acessíveis e de fácil manipulação, o que facilitará sua futura fabricação em laboratório. Os resultados obtidos neste trabalho sugerem a possibilidade de fabricar estes metamateriais no laboratório e empregá-los no controle de ondas acústicas, elásticas e sísmicas, assim como também no projeto de um manto de invisibilidade acústica/elástica.

Palavras-chave: Metamateriais Acústicos e Elásticos, Teoria do Meio Efetivo, Índice de Refração Negativo

ABSTRACT

The acoustic/elastic metamaterials are materials that show different elastic features from common materials found in nature and their main characteristics are their negative refractive index. The literature reports that this property is reached for a very narrow range of frequencies, as a very localized phenomenon, and additionally, the proposed structures are extremely ideals, which makes its practical application difficult on acoustic devices. The objective of this work was to design acoustic/elastic three-dimensional Metamaterials with negative refractive index in a wider frequency band than that reported in the literature, and using geometries and materials that make it possible their practical implementation for manufacturing acoustic/elastic devices. With this purpose a formalism of the effective medium theory (EMT) was developed, in the limit of wavelength and low fill fractions. With the developed EMT, the scattering of simple spherical inclusions, coated and doubly coated in different host substrates were studied. The results showed the existence of resonant bands in the coefficients of the T matrix related to monopolar, dipolar and quadrupolar modes. Composite materials consisting of simple, coated or double coated spheres were analyzed using the EMT formalism. The results showed that the negative values of elastic parameters in these materials are completely related to resonant effects of the spheres of inclusion. Elastic and acoustic Metamaterials were designed by overlaying two or more different composites, each with different properties, such that the overall effect on the metamaterial shows the desired features defined in the initial project. The elastic metamaterial was designed by overlapping three different composites of different spherical inclusions. This metamaterial shows negative refractive index in the region of 2 kHz, in a band of width of 80 Hz. The acoustic metamaterial was designed by overlapping two composites of different spherical inclusions. This material shows negative refractive index in the region of 7 kHz, in a band of width of 500 Hz. The geometries and materials used in the design of these Metamaterials are affordable and easy to handle, which will facilitate their future fabrication in the laboratory. The results obtained in this study suggest the possibility to manufacture these metamaterials in the laboratory and use them in the control of acoustic, elastic and seismic waves, as well as in the design of invisible cloak.

Keywords: Metamaterials Acoustic and Elastic, Effective Medium Theory, Negative Refractive Index

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

A	Ar
BA	Bolha de Ar
B1	Banda de Dispersão Positiva
B2	Banda de Dispersão Negativa
APC	Aproximação Potencial Coerente
BGs	Bang Gaps
BLAs	Balões de Água
CFC	Cúbica de Face centrada
CS	Cúbica Simples
CCC	Cúbica de Corpo Centrado
$\mathbf{e}$	Vetor unitário
E	Epóxi
EABAs	Esferas de Água contendo uma Bolha de Ar
EABLAs	Esferas de Água contendo um Balão de Ar
EBMs	Esferas de Borracha Macia
ECBDs	Esferas de Chumbo revestidas com Borracha Dura
EOBDs	Esferas de Ouro revestidas de Borracha Dura
ECBMs	Esferas de Chumbo revestidas com Borracha Macia
EOP	Expansão em Ondas Planas
$\mathbf{f}$	Força Externa
F	Poliestireno
FEBs	Funções Esféricas Base
G	Ouro
H	Borracha Dura
HEV	Harmônicos Esféricos Vetoriais
L	Modo Longitudinal
M	Número de Colunas de uma Matriz
M	Primeira Função de Onda Esféricas Vetorial de Stratton
M	Primeiro Modo Transversal
MAs	Metamateriais Acústicos

MEs	Metamateriais Elásticos
MSLR	Material Sônico Localmente Ressonante
N	Número de Inclusões Esféricas
N	Segunda Função de Onda Esféricas Vetorial de Stratton
N	Segundo Modo Transversal
S	Borracha M
T	Matriz de Transferência
TEM	Teoria do Espalhamento Múltiplo
TME	Teoria do Meio Efetivo
W	Água
2D	Duas Dimensões
3D	Três Dimensões
Γ	Função Gamma

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{lm\sigma}$	Coeficientes de Expansão do Campo Incidente
$b_{lm\sigma}$	Coeficientes de Expansão do Campo Espalhado
$B_{lm\alpha}$	Coeficientes de Expansão efetivos do Campo Espalhado
$\mathbf{A}_l^m, \mathbf{B}_l^m, \mathbf{C}_l^m$	Harmônicos Esféricos Vetoriais
$\mathbf{A}_{l'}^{*m'}, \mathbf{B}_{l'}^{*m'}, \mathbf{C}_{l'}^{*m'}$	Harmônicos Esféricos Vetoriais Conjugados
c_L	Velocidade Longitudinal
c_T	Velocidade Transversal
c_{Lo}	Velocidade da onda Longitudinal no meio Hospedeiro
c_{To}	Velocidade da onda Transversal no meio Hospedeiro
$D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$	Coeficientes de Espalhamento Mie para uma simples Inclusão Esférica
$D_l^{\alpha\alpha'}(1,o)$	Coeficientes de Espalhamento Mie para uma Inclusão Esférica Revestida
$D_{l,e}^{\alpha\alpha'}(e,o)$	Coeficientes de Espalhamento Mie efetivo
E	Constante Elástica
$D_l^{\alpha\alpha'}(k,o)$	Coeficientes de Espalhamento Mie para uma simples com k revestimentos
E_o	Constante Elástica no meio Hospedeiro
E_s	Constante Elástica da Simples Inclusão Esférica
E_e	Constante Elástica Efetiva
ε	Permissividade Elétrica
f	Frequência
K_{eL}	Vetor de onda Longitudinal Efetivo
K_{eT}	Vetor de onda Transversal Efetivo
κ	Módulo Volumétrico
κ_o	Módulo Volumétrico no meio Hospedeiro
κ_s	Módulo Volumétrico da Simples Inclusão Esférica
κ_e	Módulo Volumétrico Efetivo
κ_{ec}	Módulo Volumétrico Efetivo de uma Inclusão Esférica
$k_{0\alpha}$	Vetor de Onda no meio Hospedeiro

$k_{s\alpha}$	Vetor de Onda na inclusão Esférica
l	Canal de espahamento de ordem l
N_i	Número de Inclusões Esféricas
η	Índice de Refração para as ondas Electromagnética
η_E	Índice de Refração para as Ondas Longitudinais
η_μ	Índice de Refração para as Ondas Transversais
η_{eL}	Índice de Refração efetivo para as Ondas Longitudinais
η_{eT}	Índice de Refração efetivo para as Ondas Transversais
p	Fração de Preenchimento
ρ	Densidade de Massa
ρ_s	Densidade de Massa da Simples Inclusão Esférica
ρ_o	Densidade de Massa no meio Hospedeiro
ρ_e	Densidade de Massa Efetiva
ρ_{ec}	Densidade de Massa efetiva de uma Esfera Compósita
$p.s$	Parte Singular
r_s	Raio de uma Inclusao Esferica Simples
r_1	Raio de uma inclusão esférica simples
r_2	Raio externo do Primeiro Revestimento
r_3	Raio externo do Segundo Revestimento
r_e	Raio Efetivo
r_i	Raio as i-ésima Inclusão Esférica
r_{v}	Raio da Esfera efetiva
r_k	Raio externo do k-ésimo Revestimento
r_{ext}	Raio externo de uma inclusão esférica com k revestimentos
μ	Módulo de Cisalha
μ_s	Módulo de Cisalha da Simples Inclusão Esférica
μ_o	Módulo de Cisalha no meio Hospedeiro
μ_e	Módulo de Cisalha Efetivo
u	Permeabilidade Magnética
$t_{ml\sigma m'l'\sigma'}$	Elementos de $\mathbf{t}$
$\mathbf{t}$	Matriz T de Espalhamento Mie
$\mathbf{t}(\mathbf{r})$	Campo de Tração Superficial
$\mathbf{z}$	Matriz de Transmissão

$z_{ml\sigma m'l'\sigma'}$	Elementos de $\mathbf{z}$
$\alpha\alpha'$	Conversão do modo α' em α , com $\alpha = L, M, N$
$\lvert \ldots \rvert$	Valor Absoluto
Δ	Espessura do Balão
λ	Cumprimento de Onda
ε_m	Fator de Normalização: $\varepsilon_0 = 1$ e $\varepsilon_m = 2$ para $m \neq 0$.
$\mathbf{J}_{lm\sigma}^{(q)}$	Função de Onda Esférica Vetorial Regular
$\mathbf{H}_{lm\alpha}^{(q)}$	Função de Onda Esférica Vetorial Singular
$\mathbf{R}_{lm\alpha}^{(q)}$	Conjugado de $\mathbf{J}_{lm\sigma}^{(q)}$
$\mathbf{S}_{lm\alpha}^{(q)}$	Conjugado de $\mathbf{R}_{lm\sigma}^{(q)}$
$\xi_{q\alpha}^{pf}$	Funções de Mow e Pao
ψ_α	Potencia Escalar para $\alpha = L, M, N$
∂_{xy}^{s+t}	Operador diferencial respeito de x e y de ordem s+t
Y_l^m	Harmônicos Esféricos Escalares
$R_{l\alpha}^m$	Função Esférica Base Regular
$S_{l\alpha}^m$	Função Esférica Base Singular
k_L	Módulo do Vetor de Onda Longitudinal
k_T	Módulo do Vetor de Onda Transversal
$R_\alpha(r)$	Componente Radial da Onda Elástica
$\Theta(\theta)$	Componente Angular da Onda Elástica
$\Phi(\phi)$	Componente Azimutal da Onda
j_l	Função de Bessel Esférica de Primeira Espécie
$h_l^{(1)}$	Função de Hankel Esférica de Primeira Espécie
P_l^m	Polinômios Associados de Legendre
ω	Frequência Angular
ρ_1	Densidade de Massa do Revestimento
μ_1	Módulo de Cisalha do Revestimento
E_1	Constante Elástica do Revestimento
$\overleftrightarrow{\sigma}$	Tensor de Tensão
$\overleftrightarrow{\varepsilon}$	Tensor de Deformação
$\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$	Vetor de Deslocamento
σ_{ij}	Componentes de $\overleftrightarrow{\sigma}$
ε_{ij}	Componentes de $\overleftrightarrow{\varepsilon}$

∂_t	Derivada Parcial no Tempo
u_i	Componentes de $\mathbf{u}$
f_i	Componentes de $\mathbf{f}$
$\sigma_{ij,j}$	Derivada Parcial respeito à Coordenada j de σ_{ij}
δ_{ij}	Tensor delta de Kronecker
$u_{j,i}$	Derivada Parcial respeito à Coordenada i de u_i
∇	Operador Gradiente
ϕ_L	Potencial de Deslocamento Longitudinal Escalar
$\vec{\psi}_T$	Potencial de Deslocamento Transversal Vetorial
$\mathbf{u}_L$	Componente Longitudinal do Vetor Deslocamento
$\mathbf{u}_T$	Componente Transversal do Vetor Deslocamento
$\mathbf{r}$	Raio Vetor
ψ_T	Primeiro Potencial de Deslocamento Transversal
φ_T	Segundo Potencial de Deslocamento Transversal
∇^2	Operador Laplaciano

Capítulo 1

Introdução

Os metamateriais óticos ou acústicos devem suas propriedades a processos de interação ressonante entre o material e as ondas eletromagnéticas ou acústicas. O processo ressonante acontece quando o material apresenta características especiais relacionadas com o tamanho das partículas constituintes e sua organização.

Em 1908, Gustav Mie publicou um trabalho intitulado "*Contribuições para a ótica do meio turvo, particularmente de soluções coloidais de metal*" [1]. Nesse trabalho Mie descreve o espalhamento da radiação eletromagnética por uma esfera homogênea. A solução de Mie das equações de Maxwell (conhecida atualmente como "teoria" do espalhamento Mie) permitiu-lhe explicar a coloração de partículas esféricas de ouro em estado coloidal quando submetido à iluminação. Estes resultados deram início ao estudo de fenômenos de absorção de ressonância plasmônica das partículas de ouro. Formulações mais recentes da "teoria" Mie para o problema de espalhamento por uma esfera homogênea foram reportadas por vários autores [2-5].

Usando as ideias de Mie e o formalismo da teoria de espalhamento eletrônico, estudado na física do estado sólido, Modinos e colaboradores [6,7] apresentaram um método computacional para calcular o campo espalhado de ondas electromagnéticas por um plano de esferas metálicas incorporadas num meio dielétrico. Posteriormente, este método foi extendido [8] para o cálculo dos coeficientes de transmissão e absorsão de materiais compósitos com estruturas periódicas, assim como também no cálculo da estrutura de bandas de cristais fotônicos [9-12].

Os modelos e formulações no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas periódicas de esferas metálicas, na década

passada, têm sido extendido ao estudo de ondas acústicas e elásticas em meios compósitos periódicos de inclusões esféricas [13,14]. É importante mencionar que neste tipo de estrutura, as propriedades elásticas de materiais compósitos que são localmente homogêneos e isotrópicos, são completamente caraterizados por sua constante elástica E (esta constante está definida em função do módulo volumétrico, κ, e o módulo de cisalha, μ, através da relação $E = \kappa + 4\mu/3$) e a sua densidade de massa ρ. Já as suas propriedades acústicas são caraterizadas pelo módulo volumétrico e a densidade de massa. Os resultados teóricos no estudo de ondas acústicas em meios periódicos de inclusões esféricas ressonantes, permitiu mostrar a existência dos chamados metamateriais acústicos (MAs) com uma [15] e duas [16] estruturas ressonantes. Os MAs apresentam o seu módulo volumétrico e densidade de massa efetivos simultaneamente negativos. A dupla negatividade acústica está relacionada diretamente com a existência de efeitos ressonantes tal qual o módulo volumétrico negativo e a densidade de massa negativa são induzidas pelas ressonâncias de tipo monopolar e dipolar das inclusões esféricas, respectivamente. A ressonância monopolar cria uma resposta negativa no sentido de que a dilatação do volume da inclusão esférica está fora de fase com o campo de pressão hidrostática. No entanto, a ressonância dipolar cria uma resposta negativa no sentido de que o movimento do centro de massa da inclusão esférica esta fora de fase com o campo de pressão incidente [17]. Os meios acústicos “duplo-negativos”, têm gerado grande interesse devido à possibilidade de fabricar materiais com índice de refração negativa, bem como o no estudo de fenômenos de transparência, invisibilidade e confinamento acústico [18-21].

A história dos metamateriais tem sua origem no trabalho reportado por Veselago [22] que teoricamente sugeriu a possível existência de um material com permissividade (ε) e permeabilidade (u) simultaneamente negativas. É bem conhecido que ε e u determinam a característica da resposta elétrica e magnética de um material sob a ação de um campo eletromagnético. Portanto estes parâmetros coletivamente governam a propagação de ondas eletromagnéticas dentro do material. Em particular, o índice de refração electromagnética de um material está dada por $\eta^2 = \varepsilon u$, onde de acordo com a combinação dos sinais

destes parâmetros podemos esperar quatro possíveis tipos de propagação de ondas eletromagnéticas. Por exemplo, se ε ou u é negativo, então, η se torna imaginário e a onda não se propaga. Se ambos, ε e u, são simultaneamente negativos (metamateriais eletromagnéticos), então, as ondas podem se propagar dentro do material. Os metamateriais eletromagnéticos são caracterizados pelo fenômeno em que as ondas eletromagnéticas se propagam numa direção oposta ao fluxo de energia [23].Tal característica ocasionou certo número de fenômenos peculiares, incluindo o efeito Doppler e a radiação Cherenkov inversa [24]. Materiais com ε negativo podem ser encontrados em materiais naturais (fios metálicos), já materiais com u negativo normalmente são fabricados artificialmente usando unidades estruturais ressonantes sensíveis a campos magnéticos. Foi reportada a fabricação de um material com u negativo usando ressonadores tipo anéis ranhurados [25] e estes materiais são chamados de metamateriais magnéticos. Um metamaterial eletromagnético foi proposto combinando um arranjo de estruturas metálicas de anéis e fios, onde a ressonância dos anéis ranhurados pode induzir permeabilidade efetiva negativa, enquanto a ressonância dos fios metálicos pode induzir permissividade efetiva negativa [26,27].

Portanto, em ambos os casos, tanto para MAs como para metamateriais eletromagnéticos, a "*ressonância dos elementos estruturais"* é o ingrediente chave para obter parâmetros de material com valores negativos.

No caso dos metamateriais elásticos (MEs) com constante elástica e densidade de massa simultaneamente negativos, para alguma faixa de frequência, a refração negativa para ondas elásticas poderia ser esperada de forma semelhante aos metamateriais eletromagnéticos. Neste caso, o índice de refração é dado por: $\eta_X^2 = \rho / X$, onde $X = E$ para ondas longitudinais e $X = \mu$ para ondas transversais. Aqui, os parâmetros E e ρ governam coletivamente a propagação de ondas longitudinais (acústicas). Entretanto, os parâmetros ρ e μ governam a propagação de ondas transversais. Assim, podem ser definidos dois índices de refração: uma para ondas longitudinais, $\eta_E^2 = \rho / E$, e outro para ondas transversais, $\eta_\mu^2 = \rho / \mu$. Considerando a definição destes índices de refração, a combinação de

sinais nos parâmetros elásticos E, ρ e μ pode promover oito possíveis modos de propagação de ondas elásticas em ME.

O termo "metamaterial acústico ou elástico" será usado para aqueles materiais compósitos artificiais cujas propriedades macroscópicas inusuais advenham do comportamento ressonante das suas unidades estruturais que, em nosso caso, serão inclusões esféricas em que pelo menos dois de seus parâmetros efetivos constitutivos sejam negativos.

Recentemente, foram reportados MEs em duas dimensões utilizando inclusões cilíndricas [28] e ressonadores multi-massa [29] como unidades estruturais. No entanto, não foi reportado nenhum trabalho de algum ME em três dimensões com seus três parâmetros elásticos negativos (E, ρ e μ). Isso é devido ao problema de se encontrar unidades estruturais capazes de exibir múltiplas ressonâncias quadrupolares, e assim, induzir módulo de cisalhamento negativo na mesma faixa de frequência onde as outras constantes elásticas são negativas. Deste modo, o desafio do presente trabalho é a proposta de um ME tridimensional com todos seus parâmetros efetivos negativos.

Outro problema a ser abordado é projetar um MA com E e ρ simultaneamente negativos na mesma faixa de frequência, de tal forma que possa ser construido em laboratorio.

Neste contexto, o presente trabalho propõe estruturas tridimensionais de metamateriais que possam ser experimentalmente implementadas. Para tal fim, foram propostas inclusões esféricas simples, revestidas e duplamente revestidas como unidades estruturais, capazes de originar as ressonâncias desejadas.

As contribuições do nosso trabalho visam trazer aplicações na área de materiais avançados, sugerindo a possibilidade de fabricar metamateriais em laboratório e, empregá-los no controle de ondas acústicas, elásticas e sísmicas, bem como no projeto de um manto de invisibilidade acústica/elástica em três dimensões.

1.1 Objetivos

O principal objetivo do trabalho foi propor estruturas tridimensionais localmente ressonantes de dois metamateriais cujas unidades estruturais possam ser fabricadas no laboratório. A primeira estrutura proposta, ME tridimensional, foi projetada para apresentar constante elástica, densidade de massa e módulo de cisalha simultaneamente negativos. A outra estrutura, MA tridimensional, foi projetada para que seus parâmetros acústicos, constante elástica e densidade de massa sejam simultaneamente negativos, no sentido estrito da teoria do meio efetivo (TME). Estes resultados foram obtidos para cumprimentos de onda longa e baixas frações de preenchimento, onde a anisotropia das estruturas periódicas pode ser negligenciada na propagação das ondas elásticas.

1.1.1 Objetivos Específicos

Baseado na teoria de espalhamento Mie para uma simples inclusão esférica num meio homogêneo, este formalismo foi estendido para estruturas com inclusões esféricas multi-revestidas.

Foi desenvolvido um formalismo de TME para metamateriais acústicos e elásticos tridimensionais no limite de comprimento de onda longa e baixas frações de preenchimento (≤30%), onde a anisotropia das estruturas periódicas pode ser negligenciada na propagação das ondas acústicas e elásticas.

Foi projetada uma estrutura tridimensional para um MA “fluido-base” com módulo volumétrico e densidade de massa simultaneamente negativos na faixa de frequência de 1,07 a 1,17 kHz, no sentido estrito da TME e para cumprimentos de onda longa.

1.2 Justificativas

Atualmente, o projeto, fabricação e caracterização de novos materiais é objeto de intensa pesquisa na comunidade científica, isso se deve a que tais materiais apresentam propriedades inusuais não encontradas na natureza, tal como se apresenta no caso dos metamateriais acústicos/elásticos. Estes metamateriais apresentam parâmetros acústicos/elásticos efetivos negativos para alguma faixa de frequência e, consequentemente, eles podem gerar fenômenos não observados em materiais convencionais, tais como, por exemplo, refração negativa, transparência acústica/elástica, invisibilidade acústica/elástica, efeito Doppler invertido, radiação acústica/elástica Cherenkov inversa, super-anisotropia e propriedades de focalização de ondas acústicas/elásticas. Na área tecnológica o estudo de tais metamateriais permitirá aplicações na engenharia que vão desde o projeto de uma superlente capaz de gerar imagens ultra-som no limite da difração que podem ser usadas para diagnóstico médico até a possível fabricação de um dispositivo de invisibilidade acústica/elástica. Neste sentido, existe uma grande necessidade de pesquisa, análise e projeto de tais metamateriais e possam ser implementados no laboratório.

1.3 Contribuições do Trabalho

A primeira contribuição do trabalho foi projetar um ME tridimensional “poliestireno-base” com parâmetros elásticos efetivos simultaneamente negativos na faixa de frequência de 1,96 a 2,04 kHz. Este ME está composto de três arranjos de inclusões esféricas incorporadas numa matriz de poliestireno; um arranjo de esferas de água contendo uma bolha de ar (EABAs) e dois arranjos de balões de água (BLAs) com diferentes parâmetros geométricos no BLA. Nesta estrutura, a negatividade dos parâmetros elásticos efetivos foi derivada das ressonâncias monopolar da EABA, dipolar e quadrupolar do BLA. Adicionalmente foram determinadas as relações de dispersão do ME, em base as seus parâmetros efetivos. As curvas de dispersão mostraram duas ramas de dispersão negativa para os modos longitudinal (L) e transversal (N), relacionadas aos índices de

refração negativos tanto para as ondas longitudinais como transversais, respectivamente.

A segunda contribuição foi projetar um MA tridimensional “epóxi-base” com constante elástica e densidade de massa efetivos negativos simultaneamente na faixa de frequências de 7,26 a 7,76 kHz. Este MA está composto de dois arranjos de inclusões esféricas, esferas de água contendo um balão de ar (EABLAs) e esferas de chumbo revestidas com borracha dura (ECBDs), incorporadas numa matriz de epóxi. A negatividade dos parâmetros acústicos efetivos foi derivada das ressonâncias monopolar da EABLA e dipolar da ECBD, respectivamente. O cálculo das curvas de dispersão para esta estrutura, em base as seus parâmetros efetivos, mostrou uma rama de dispersão negativa para o modo L que está relacionada ao índice de refração negativo para as ondas longitudinais. É importante mencionar que as propriedades inusuais nos parâmetros efetivos constitutivos destes metamateriais foram induzidas pela ressonância Mie localizadas das unidades estruturais.

Outras contribuições do trabalho foram:

Desenvolver uma extensão da metodologia de análise do espalhamento Mie de ondas elásticas (para uma simples inclusão esférica) para uma inclusão esférica multi-revestida. Esta abordagem mostrou que ressonâncias Mie intensas podem ser obtidas a partir de inclusões esféricas revestidas e duplamente revestidas.

Baseado na teoria do espalhamento múltiplo (TEM) de primeira ordem e na teoria de espalhamento Mie por uma inclusão esférica, foi desenvolvido um procedimento do modelo de meio efetivo aplicado a estruturas tridimensionais de inclusões esféricas. Esta aproximação foi realizada no limite de comprimento de onda longa e para baixas frações de preenchimento (≤30%), onde a anisotropia das estruturas periódicas pode ser negligenciada. A teoria desenvolvida predisse propriedades inusuais nos parâmetros elásticos quando aplicado a metamateriais. Os resultados mostram que o módulo volumétrico, densidade de massa e módulo de cisalha, preditos pela TME, tornam-se negativos perto das ressonâncias monopolar, dipolar e quadrupolar, respectivamente.

1.4 Organização do Texto

Este trabalho esta organizado da seguinte forma: O capítulo 2 descreve o estado da arte dos metamateriais acústicos e elásticos, iniciando a discussão com o problema de espalhamento Mie por uma simples inclusão esférica e mostrando as aplicações mais significativas na engenharia. No capítulo 3 são formulados os fundamentos teóricos do trabalho. Neste capítulo, se descreve detalhadamente a solução da equação de onda elástica em estado estacionário usando a construção dos harmônicos esféricos vetoriais (HEV) utilizados no trabalho de Liu e Cai [30]. Utilizando o formalismo dos HEV, no capítulo 4, é descrita a solução do problema de espalhamento Mie por uma inclusão esférica. A metodologia seguida para a construção da matriz T de espalhamento Mie da simples inclusão esférica é similar às reportadas por Doyle e Liu [31,32]. Neste mesmo capítulo, estendemos a metodologia de análise do espalhamento Mie para uma inclusão esférica multi-revestida. No capítulo 5, utilizando a TEM de primeira ordem e a teoria de espalhamento Mie por uma inclusão esférica, foi formulada uma TME para estruturas tridimensionais de inclusões esféricas multi-revestidas no limite de comprimento de onda longa e para baixas frações de preenchimento. Sob tais condições, a anisotropia da estrutura periódica pode ser negligenciada na propagação das ondas elásticas. O capítulo 6 apresenta os resultados numéricos correspondentes à matriz de espalhamento Mie de inclusões esféricas simples, inclusões esféricas revestidas e duplamente revestidas. O capítulo 7 apresenta os resultados numéricos obtidos dos parâmetros elásticos dinâmicos efetivos $\kappa_e(f)$, $\rho_e(f)$ e $\mu_e(f)$ de materiais compósitos homogeneizados. Os resultados deste capítulo baseiam-se nas Equações 5.17a-c e 5.18a-b descritos no capítulo 5. No capitulo 8 são apresentados os resultados do projeto de metamateriais acústicos e elásticos. Na primeira parte é discutido o projeto de um MA “fluido-base” com κ_e e ρ_e negativos na mesma faixa de frequência. Na segunda parte é discutido o projeto de um MA “epóxi-base” com E_e e ρ_e negativos na mesma faixa de frequência. Na última parte deste capítulo é discutido o projeto de um ME “poliestireno-base” com E_e, ρ_e e μ_e negativos na mesma faixa de frequências. No capítulo 9 são apresentadas as conclusões finais e as perspectivas futuras do trabalho. Nos apêndices A, B, C e D são descritos os seguintes tópicos: Funções

gerais de Pao e Mow, Cálculo dos coeficientes de espalhamento Mie $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ para uma simples inclusão esférica, Cálculo dos coeficientes de espalhamento Mie $D_l^{\alpha\alpha'}(1,o)$ para uma inclusão esférica revestida, e Cálculo dos parâmetros efetivos constitutivos dos metamateriais acústicos e elásticos, respectivamente. Por último, são dadas as referências bibliográficas utilizadas nesta dissertação o que dá suporte ao trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresenta-se o estado da arte dos metamateriais acústicos e elásticos com suas aplicações mais importantes na engenharia. Na primeira parte é realizada uma revisão do problema de espalhamento de ondas elásticas por uma simples inclusão esférica e uma inclusão esférica multi-revestida. Em seguida, é apresentada a TEM de um arranjo ordenado de inclusões esféricas e sua aplicação na predição da estrutura de bandas fonónicas de materiais compósitos. Adicionalmente, neste capitulo é descrito a TME ou método de homogeneização para metamateriais acústicos/elásticos. Por último, são apresentadas as aplicações mais importantes dos metamateriais acústicos tais como a fabricação de uma lente perfeita e um dispositivo de invisibilidade acústica.

2.1 Espalhamento por uma Simples Inclusão Esférica

Embora Gustav Mie é reconhecido por ter realizado importantes contribuições na solução do problema de espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esfera homogênea em 1908 (e, portanto, em homenagem a ele foi aceito o termo universal “Espalhamento Mie”), outros cientistas notáveis como Lorentz, Thompson e Debye tiveram importantes contribuições para o problema de espalhamento antes de 1910 [33-35]. Posteriormente, Stratton [36] estabeleceu um formalismo da solução ao problema com o uso de funções de onda esféricas vetoriais **M** e **N**, soluções que atualmente são utilizadas.

No entanto, antes destes trabalhos outros autores reportaram resultados importantes sobre o espalhamento de ondas por corpos sólidos como, por exemplo, Rayleigh que em 1872 reportou um estudo do espalhamento de ondas longitudinais por uma esfera rígida [37]. O tratamento mais geral do espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão foi reportado por Sezawa [38] em 1927. Nesse

trabalho o autor assumiu um meio elástico isotrópico e homogêneo como material hospedeiro contendo uma inclusão cilíndrica, esférica ou elíptica de material rígido ou vazio. O espalhamento de uma onda longitudinal plana por uma esfera elástica foi investigado em 1956 por Ying e Truell [39] utilizando o formalismo escalar na equação de Helmholtz. No entanto que o espalhamento por uma esfera rígida foi estudado em 1963 por Pao e Mow [40]. Neste último caso a solução proposta correspondia a um caso especial no qual a densidade de massa da esfera foi considerada infinita. Por outro lado, o espalhamento de uma onda plana transversal por uma inclusão esférica foi investigado em 1960 por Einspruch, Witterholt e Truell [41] utilizando o formalismo vetorial na equação de Helmholtz. Usando HEV, Norris [42], em 1986, formulou uma solução para o espalhamento de ondas longitudinais e transversais por uma inclusão esférica e, posteriormente, Hinders [43], em 1991, derivou a solução para o espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão esférica, usando harmônicos esféricos escalares.

Para o estudo do espalhamento de ondas acústicas por uma inclusão com formato arbitrário, em 1969 Waterman [44] reportou uma teoria denominada de “matriz de transferência” ou “matriz T”. Esta teoria foi estendida para as ondas elásticas ao redor de 1980 por Varatharajulu e Pao [45], Waterman [46] e Boström [47]. A partir destes trabalhos o formalismo da matriz T tem sido utilizado no estudo do espalhamento das ondas elásticas por uma inclusão esférica como caso particular. Neste modelo é possível determinar a distribuição da onda espalhada conhecendo a onda incidente e os parâmetros elásticos da inclusão esférica.

O espalhamento Mie por uma inclusão esférica pode ser entendido como a interação das ondas elásticas incidentes com a inclusão esférica. Ondas elásticas incidentes e espalhadas (longitudinais e transversais) num meio elástico estão divididas em três modos: o modo L para a onda longitudinal, M e N para os modos transversais. Quando a frequência da onda incidente coincide com um dos modos próprios da inclusão esférica, um regime de espalhamento ressonante ocorre, e a descrição de como a energia elástica é redistribuída entre os diferentes modos (L, M, N) durante o processo de espalhamento está contida na matriz T de espalhamento Mie. Encontrar esta matriz T será um dos objetivos iniciais do

presente trabalho, e representará a base de toda a teoria desenvolvida no decorrer do texto.

2.2 Espalhamento por uma Inclusão Esférica Multi-revestida

Embora, a teoria do espalhamento Mie por uma simples inclusão esférica teve uma contribuição substancial e importante para a ciência dos materiais. O projeto e fabricação de materiais compósitos tais como os cristais fonônicos **3D** sugeriram a possibilidade de projetar novas unidades estruturais (chamadas também de “meta-átomos”) com o objetivo de se obter novas propriedades físicas macroscópicas do material compósito. Neste sentido, as inclusões esféricas multi-revestidas como elementos estruturais destes materiais compósitos estão sendo utilizadas no projeto de novos materiais avançados. Simulações computacionais mostraram que estes materiais apresentam propriedades físicas não encontradas em materiais convencionais, tais como, módulo volumétrico negativo, densidade de massa negativa e módulo de cisalha negativo [16,17,48,49].

No começo da década passada, Lui *et al.* [48] reportaram um material sônico localmente ressonante (MSLR) baseado numa estrutura com inclusões esféricas revestidas como unidades estruturais. Estes autores mostraram que as constantes elásticas efetivas deste MSLR mudam dramaticamente na região de ressonância da inclusão esférica revestida. Em 2002, Liu, Chan e Sheng [50] ao utilizar o formalismo da TEM estudaram as propriedades dos Bang Gaps (BGs) de propagação das ondas elásticas em materiais compósitos com unidades estruturais formadas de esferas revestidas organizadas periodicamente dentro de uma matriz sólida. Estes autores mostraram que as propriedades dos BGs nestes compósitos podiam ser ajustadas continuamente de um BG ressonante para um BG de Bragg, e isto era possível variando apenas as propriedades elásticas do revestimento das esferas. Se o material do revestimento era mole em relação ao núcleo e a matriz, o BG elástico era essencialmente ressonante, mas por outro lado, se o material do revestimento era duro, o BG elástico era essencialmente um BG de Bragg. Neste mesmo trabalho os autores também apresentaram o procedimento para se obter a matriz T de espalhamento Mie de uma esfera revestida, a partir da qual obtiveram

um sistema de 12 equações que relacionavam os coeficientes de reflexão e de transmissão das ondas L, M e N, respectivamente.

Com o advento dos MAs [15,16,18,21] os cálculos da matriz T de espalhamento Mie ressonante de inclusões esféricas simples e revestidas se tornaram o foco principal no estudo e no projeto de tais metamateriais. Em 2007, Ding e colaboradores [16] calcularam a matriz T de espalhamento Mie de uma EABA incorporada numa matriz infinita de epóxi (a razão dos raios da bolha do ar e da esfera de água foi de 2/23). Estes autores reportaram a existência da ressonância monopolar deste sistema, como mostrado na Figura 2.1a, e comprovaram que a ressonância monopolar corresponde a um pico do módulo do elemento de matriz de ordem zero ($l = 0$) para a conversão de modo LL. No entanto, para $l = 1$ nenhuma ressonância foi observada para as outras conversões de modo $\alpha\alpha'$ ($\alpha\alpha' = L, N$) [a unidade da frequência esta normalizada como $2\pi v_t / a$, onde v_t é a velocidade da onda transversal no epóxi e a é o parâmetro de rede de uma estrutura cúbica de face centrada (CFC)].

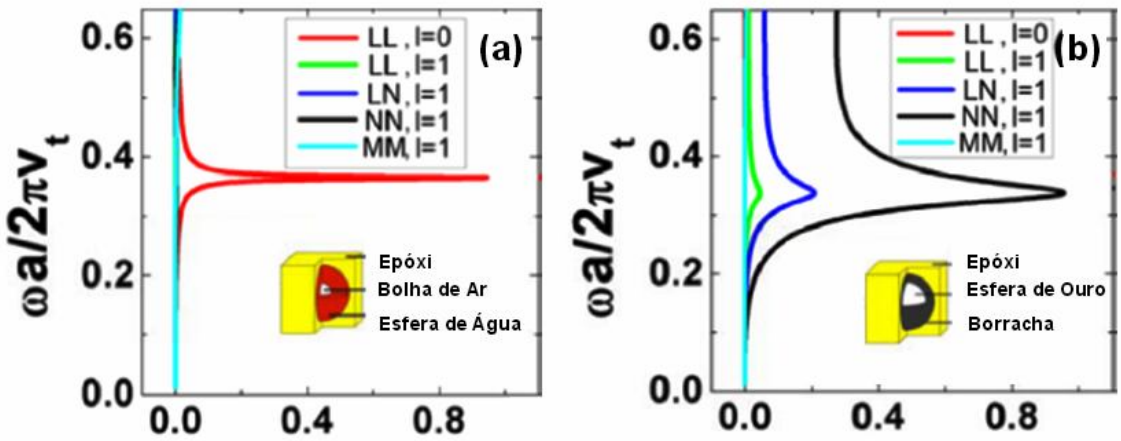

Figura 2.1 Comportamento espectral dos elementos da matriz T de espalhamento Mie para uma estrutura EABA (a), e para uma estrutura EOBD (b) em epóxi. [16]

A parir destes resultados, eles concluíram que a componente monopolar das ondas elásticas é de natureza puramente longitudinal. Portanto a ressonância monopolar pode ser induzida só por ondas longitudinais. Neste mesmo trabalho foi

reportado também o espalhamento Mie de uma esfera de ouro revestida de borracha dura (EOBD) incorporada numa matriz infinita de epóxi (o revestimento da borracha tinha uma razão de raios interno e externo de 15/18). O comportamento espectral dos elementos de matriz desta estrutura, mostrada na Figura 2.1b, evidencia a existência de picos ressonantes só para os elementos de matriz da componente dipolar $l = 1$ correspondente às conversões de modo LL, LN e NN.

É importante salientar que nos sistemas EABA e EOBD não foram observadas ressonâncias de tipo monopolar e dipolar para a conversão do modo MM, nem mesmo na componente de matriz quadrupolar $l = 2$. Neste cenário, surge a necessidade de projetar sistemas de esferas revestidas e duplamente revestidas que induzam ressonâncias quadrupolares e integrem parte de sistemas com ressonâncias monopolar e dipolar. E por isso, parte do desafio de nosso trabalho estará centrado em encontrar sistemas de esferas revestidas e duplamente revestidas que sejam capazes de induzir ressonâncias monopolar, dipolar e quadrupolar na mesma faixa de frequência.

Por outro lado, Zhou e Hu [19] reportaram resultados sobre o estudo do problema de transparência acústica de uma esfera sólida multi-revestida com MAs. A explicação do mecanismo de transparência foi baseada no conceito de “inclusão neutral”, similar ao mecanismo que promove que os elementos da matriz de espalhamento Mie de baixa ordem ($l = 0, 1, 2$) sejam zeros. Posteriormente consideraram o problema de transparência elástica de uma esfera sólida revestida com MEs [51]. Estudos similares foram realizados para o problema de camuflagem acústica por inclusões esféricas multi-revestidas utilizando materiais isotrópicos homogêneos [52].

Uma solução analítica completa do problema do espalhamento acústico por duas esferas concêntricas foi reportado por McNew *et al.* [53]. Considerando os efeitos de contraste de velocidade, densidade, e coeficientes de absorção e no limite quando a esfera externa se torna uma fina casca, estes autores mostraram que os resultados são semelhantes aos obtido para uma esfera simples num fluido.

Recentemente, Cai e colaboradores [54] propuseram um procedimento computacional para a análise do espalhamento acústico por uma inclusão esférica

multi-revestida incorporada num meio acústico. Utilizando este procedimento os autores analisaram o espalhamento de uma inclusão duplamente revestida, na qual o núcleo e a casca eram materiais sólidos e o material do meio era um tipo de fluido “electrorheological” (uma suspensão coloidal de partículas dielétricas num fluido). Em síntese, o objetivo do trabalho de Cai e colaboradores era estudar a influência da primeira camada (fluido electrorheological) nas características de dispersão acústica do espalhador de modo que e que esta camada forneça um mecanismo para ajustar as características físicas de um cristal fonônico localmente ressonante.

Para concluir, na revisão bibliográfica mostramos que o problema de espalhamento Mie para uma inclusão esférica multi-revestida num meio elástico infinito ainda não foi satisfatoriamente solucionado. Cabe destacar também que o procedimento computacional de Cai não resolve este problema na sua forma geral, e é por isso que na última parte do capitulo 4, será apresentado um procedimento geral para obter a T-matriz de espalhamento Mie para uma inclusão esférica multi-revestida.

2.3 Teoria do Espalhamento Múltiplo para Ondas Elásticas

Nas décadas passadas houve um crescente interesse no estudo da propagação de ondas elásticas em materiais compósitos periódicos. O estudo dos cristais fotônicos tem servido como inspiração, analogamente, para o estudo das propriedades dos cristais fonônicos, principalmente aqueles relacionados à previsão teórica e a realização experimental dos BGs fotônicos [55,56].

Antes de 2000, cálculos da estrutura de bandas estavam baseados no enfoque de expansão em ondas planas (EOP) [57-60]. O método de EOP exibia flexibilidade na manipulação de diferentes tipos de estruturas periódicas, mas apresentava problemas de convergência quando se lidava com sistemas de alta ou baixa fração de preenchimento das inclusões esféricas. Este método também era menos eficaz quando se tratava de sistemas desordenados. Por outro lado, a TEM, através de seu sucesso em cálculos da estrutura de bandas eletrônica para

sistemas ordenados e desordenados, se mostrou promissória para complementar a abordagem EOP no estudo do espalhamento de ondas elásticas em meios ordenados e desordenados [61].

Em 2000, Liu *et al.* [13] e Psarobas *et al.* [14] estenderam o formalismo da TEM para ondas elásticas em **3D** levando em conta o caráter vetorial dos campos. Este formalismo permite calcular a estrutura de bandas fonônicas e os coeficientes de reflexão e de transmissão de um cristal fonônico composto de um arranjo periódico de simples inclusões esféricas homogêneas caracterizadas pelas suas constantes elásticas (κ, ρ e μ). O problema de estender este formalismo a inclusões esféricas multi-revestidas ainda não foi resolvido, devido à complexidade dos cálculos e ao custo computacional (memória disponível para o armazenamento de dados gerados durante o cálculo das equações lineares do problema). A TEM está baseada no formalismo da matriz T de maneira que, se a matriz T para um único espalhador é truncada numa matriz de tamanho $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ e o sistema é constituído de N inclusões, o tamanho da matriz T passa a ser igual a $\mathrm{NM}\times\mathrm{NM}$. Por conseguinte, a memória do computador se esgotara rapidamente na medida em que N aumenta. Para contornar essas limitações, uma teoria de matriz de transferência baseada no método de “polimerização por um dispersor abstrato” [62] foi estendida por Liu e Cai [30] e aplicada na análise de espalhamento múltiplo de ondas elásticas por um arranjo de inclusões esféricas em **3D**. Desde então, o formalismo da TEM para ondas elásticas tem sido aplicado na predição da estrutura de bandas fonônicas de vários materiais compósitos, incluindo um MSLR composto de uma estrutura periódica cúbica simples (CS) de esferas de chumbo revestias com borracha mole [48], um cristal coloidal CFC de esferas de poliestireno em água [63], sistemas binários **3D** de estrutura CFC de esferas de aço em poliestireno [64], sistemas compósitos de três componentes com arranjo periódico CFC de esferas de ouro revestidas com chumbo e incorporadas num meio sólido [50], compósito de esferas de borracha macia (EBM) numa estrutura CFC suspendidas na água [15], MSLRs composto de arranjos periódicos CS e cúbica de corpo centrado (CCC) com espessura finita [65], cristais fonônicos com estrutura CFC constituídas de esferas de poliestireno em água, esferas de sílica em ar e esferas de aço em poliestireno [66] etc. Para interpretar a aparição de certas bandas especiais na estrutura de bandas fonônicas dos materiais

compósitos, mais especificamente dos metamateriais acústicos e elásticos, foi necessário construir modelos físicos contínuos sob certas condições do comprimento de onda em relação ao tamanho da unidade estrutural. Estes modelos chamados de meio efetivo estão baseados na aproximação potencial coerente (APC) [67] e será objeto de estúdio na próxima seção.

2.4 Teoria do Meio Efetivo

Nos últimos anos o problema da homogeneização, isto é, a descrição de um sistema compósito por um conjunto único de parâmetros macroscópicos efetivos constitutivos tem atraído muita atenção da comunidade cientifica [68-73]. Em especial os metamateriais acústicos e elásticos estão sendo amplamente estudados usando estas técnicas de homogeneização [29,74-76].

A TME é uma técnica de homogeneização que consiste em um modelo físico que descreve as propriedades macroscópicas de um meio com base nas propriedades e frações relativas de seus componentes elementares. Muitos livros de Física do Estado Sólido e Eletromagnetismo [77-79] dedicam alguma atenção às primeiras tentativas da homogeneização de um material compósito com permissividade elétrica efetiva (relação de Clausius-Mossotti). Outra relação de homogeneização amplamente utilizada é a relação de Maxwell-Garnett [80] que é considerado como a primeira TME tradicional [81].

Em 1980, Berryman [82], utilizando métodos auto-consistentes, determinou os parâmetros elásticos macroscópicos efetivos (κ_e, ρ_e, e μ_e) de materiais compósitos de duas fases, constituídas de inclusões esféricas. É importante mencionar que a aproximação da TME só é possível quando o comprimento de onda é muito maior do que o diâmetro das inclusões esféricas do compósito, condição conhecida como limite de comprimento de onda longa tradicional.

Para partículas sólidas dispersas num fluido, as fórmulas de Berryman para κ_e e ρ_e, no limite de comprimento de onda longa e para baixas frações de preenchimento (p), estão expressas pelas seguintes equações:

$$\frac{1}{\kappa_e} = \frac{p}{\kappa_s} + \frac{1-p}{\kappa_o} \tag{2.1a}$$

$$\frac{\rho_e - \rho_o}{2\rho_e + \rho_o} = p\frac{\rho_s - \rho_o}{2\rho_s + \rho_o} \tag{2.1b}$$

onde os subscritos "s" e "o" denotam as propriedades da esfera e da matriz fluídica, respectivamente. A partir das equações 2.1a e 2.1b pode ser facilmente verificada que κ_e e ρ_e são positivos e estão limitadas pelas condições de Hashin-Shtrikman [83]. As expressões 2.1a e 2.1b junto com as condições de Hashin-Shtrikman não se aplicam se as inclusões esféricas do material compósito apresentam modos de vibração ressonantes na condição de baixas frequências. Efeitos ressonantes de uma esfera elástica no regime ultrassônico foram reportados por Brill and Gaunaurd [84]. O espalhamento de uma onda acústica por uma esfera de poliestireno em água em regime ressonante foi reportado por Psarobas [63]. Utilizando efeitos ressonantes em inclusões esféricas simples, Li e Chan [15] reportaram um meio duplo-negativo formado de EBMs em água, onde tanto κ_e como ρ_e são simultaneamente negativos, no sentido estrito e rigoroso da TME. Para tal fim, estes autores utilizaram o método APC para obter uma solução auto-consistente, garantindo que uma inclusão esférica revestida incorporada dentro de um meio efetivo não gere espalhamento no limite de baixas frequências. Sob tal condição, as equações 2.1a e 2.1b foram generalizadas através das seguintes expressões:

$$-1 + \frac{\kappa_o}{\kappa_e} = \frac{3p}{i\left(k_o r_s\right)^3} D_o^{LL}(s,o) \tag{2.2a}$$

$$\frac{\rho_e - \rho_o}{2\rho_e + \rho_o} = \frac{3p}{i\left(k_o r_s\right)^3} D_1^{LL}(s,o) \tag{2.2b}$$

onde $D_l^{LL}(s,o)$ são os coeficientes de espalhamento Mie de ordem l da esfera de borracha mole com raio r_s, e k_o é o modulo do vetor de onda no meio água. Devido a que um fluido só suporta ondas longitudinais, o símbolo LL significa que uma onda longitudinal incidente é transformada em uma onda longitudinal espalhada.

Nesta formulação, κ_e e ρ_e apresentam valores negativos numa faixa de frequência onde os coeficientes Mie $D_l^{LL}(s,o)$ são ressonantes.

Em 2007, Mei e colaboradores [72] derivaram expressões explícitas para a densidade de massa efetiva de vários materiais compósitos em **2D** utilizando o método APC. Nestas estruturas as unidades estruturais bi-dimensionais apresentam ressonâncias localizadas semelhantes aos reportados por Liu *et al.* [48,49]. Por outro lado, Wu, Lai e Zhang [74] formularam uma metodologia TME (baseado no APC) que podia ser estendido para situações fora da condição quase-estática de modo que com esta abordagem estes autores determinaram os três parâmetros elásticos efetivos (κ_e, ρ_e e μ_e) de certos metamateriais elásticos em **2D**. Os parâmetros efetivos podiam apresentar valores negativos para certa faixa de frequências onde acontecia a excitação ressonante de modos de oscilação das unidades estruturais. Atualmente, esta abordagem tem sido utilizada para predizer a estrutura de bandas de certos metamateriais acústicos e elásticos em **2D** e **3D** apenas utilizando parâmetros elásticos efetivos [16,28,29,75,76].

Na atualidade, poucos trabalhos têm sido reportados relacionados ao desenvolvimento de uma metodologia TME em três dimensões. Dentro deste cenário, no presente trabalho é desenvolvido uma metodologia TME para três dimensões que será discutido mais detalhadamente no capítulo 5.

2.5 Metamateriais Acústicos e Elásticos

O primeiro “metamaterial” com densidade de massa efetiva negativa foi fabricado e caracterizado pelo grupo do professor Sheng [48]. Este tipo de “metamaterial” chamado também de MSLR apresenta uma unidade estrutural simples que consiste de uma ECBM, como mostrado na Figura 2.2a. As esferas revestidas foram organizadas em uma estrutura CS 8x8x8 com uma constante de rede de 1,55 cm (Figura 2.2b), tendo sido fixadas numa matriz de epóxi. Medidas de transmissão sônica para o MSLR, utilizando um tubo de impedância acústica Bruel & Kjaer, mostraram duas quedas na transmissão do som ao redor de 380 e 1350 Hz, com um pico após cada queda (Figura 2.2c). Utilizando o formalismo TME

os autores atribuíram estes picos de absorção à existência de dois BGs absolutos (Figura 2.2d) relacionadas as ressonâncias localizadas nas inclusões esféricas revestidas [48].

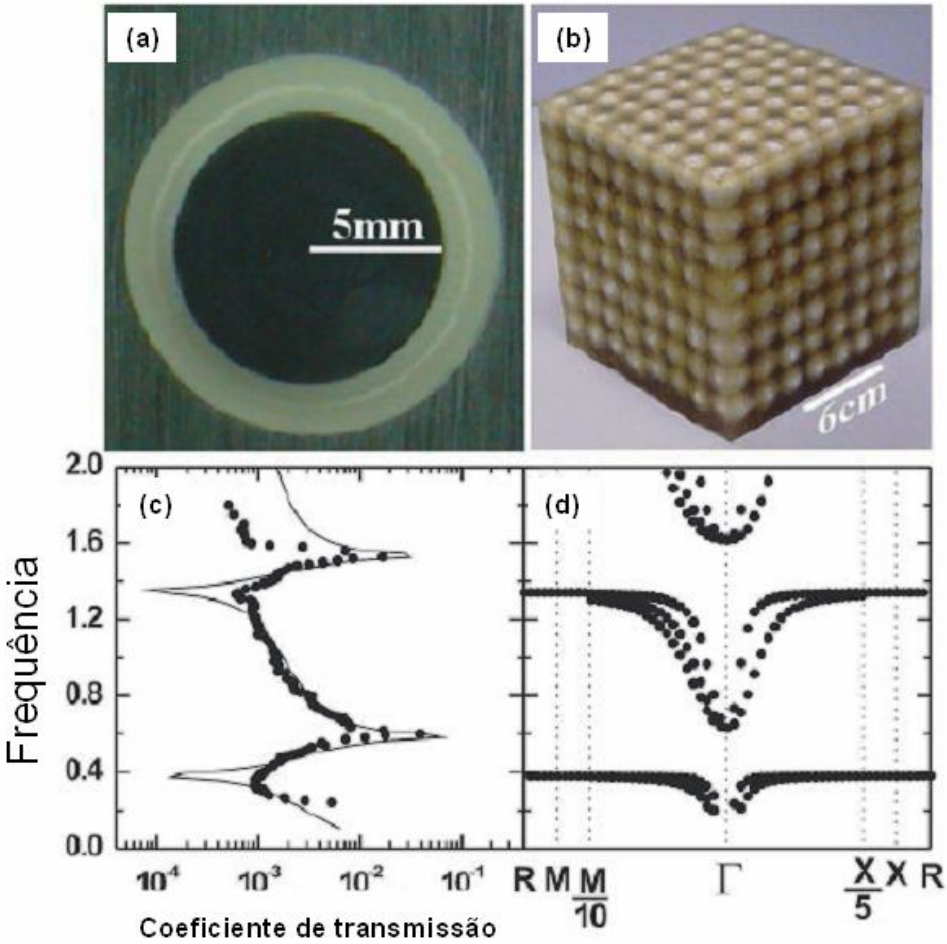

Figura 2.2 (a) Secção transversal da unidade estrutural, (b) MSRL arranjado em CS 8x8x8. (c) Coeficiente de transmissão medido (círculos pretos) e simulado (linha sólida) como função da frequência. (d) Estrutura de bandas do MSRL utilizando a TEM. [48]

Por outro lado, em 2004, Li e Chan [15] reportaram pela primeira vez a existência de um MA composto de EBMs organizados numa rede CFC em água. A Figura 2.3a mostra as curvas de dispersão deste MA “fluido-base” na direção (111) para uma estrutura com fração de preenchimento igual a 0,4. Nesta figura também pode ser observada a existência de uma banda de dispersão negativa na faixa de

2,0 a 2,65 kHz que está relacionada diretamente com os valores negativos dos parâmetros acústicos extraídos da impedância efetiva (Figura 2.3b).

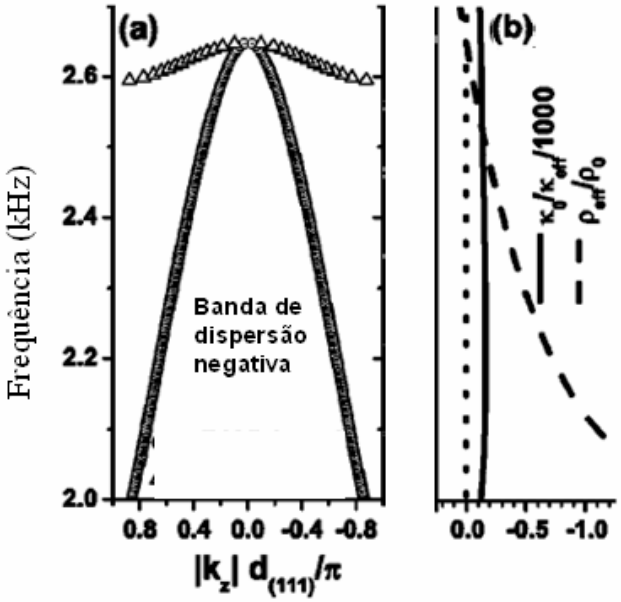

Figura 2.3 (a) Relação de dispersão, e (d) Parâmetros acústicos efetivos extraídos da impedância efetiva. [15]

O comportamento da estrutura acima descrita (duplo-negativo) foi interpretado da seguinte forma: para algumas frequências o sistema se expande sob a ação de uma compressão (modulo volumétrico negativo) e sofre um deslocamento na direção contrária sob ação da pressão (densidade de massa negativa).

O progresso mais significativo no projeto de um MA foi realizado em 2007 [16] quando o grupo do Professor Liu reportou um metamaterial com módulo volumétrico e densidade de massa efetivos negativos na mesma faixa de frequência. Este metamaterial estava composto de dois arranjos de inclusões esféricas revestidas, formando uma estrutura “zinc blende”, como mostrado no interior da Figura 2.4a. As unidades estruturais deste material estavam constituídas de EABAs e EOBDs imersas numa matriz de epóxi. O módulo volumétrico negativo e a densidade de massa negativa deste metamaterial foram correlacionados à coexistência de ressonâncias de tipo monopolar da EABA e dipolar da EOBD. As Figuras 2.4a e 2.4b, obtidas respectivamente pelos métodos TEM e APC, mostram

a estrutura de bandas deste metamaterial onde é possível observar a existência de uma banda permitida dentro do BG entre as frequências normalizadas ($\omega a / 2\pi v_t$) de 0,373 e 0,414. Esta banda apresenta uma velocidade de grupo negativo relacionado com o valor negativo do índice de refração do metamaterial.

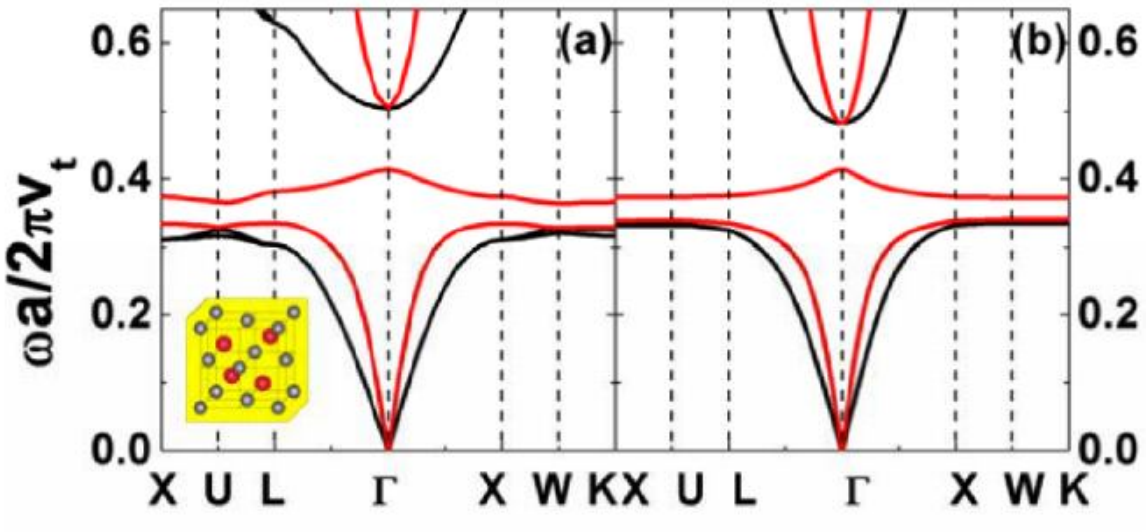

Figura 2.4 (a) Estrutura de bandas para o MA calculado usando a TEM , e (b) Estrutura de bandas do MA utilizando os parâmetros efetivos. [16]

Recentemente, foi reportado um ”ME” bidimensional [29] cuja unidade estrutural está constituída de uma inclusão multi-massa localmente ressonante (Figura 2.5a) e que pode originar ressonâncias monopolar, dipolar e quadrupolar na mesma faixa de frequências. A unidade estrutural foi constituída de cilindros de borracha mole e borracha dura de 4 e 1 cm, peças retangulares de aço de 1,6x2,4cm. Os resultados das simulações, utilizando o método de elementos finitos, mostraram que quando estas unidades estruturais estão organizadas numa estrutura CS com constante de rede de 10 cm, a estrutura de bandas deste metamaterial (Figura 2.5b) apresenta duas bandas de dispersão negativa (pontos vermelhos ”A” e azuis ”B”). Uma das bandas (”A”) existe na região de frequências onde o módulo volumétrico e a densidade de massa são simultaneamente negativos de modo que apenas ondas acústicas podem se propagar enquanto que um decremento exponencial das ondas transversais acontece. A outra banda (”B”) existe na região de frequências onde a densidade de massa e o módulo de cisalha

são simultaneamente negativos e, por conseguinte, apenas as ondas transversais são permitidos.

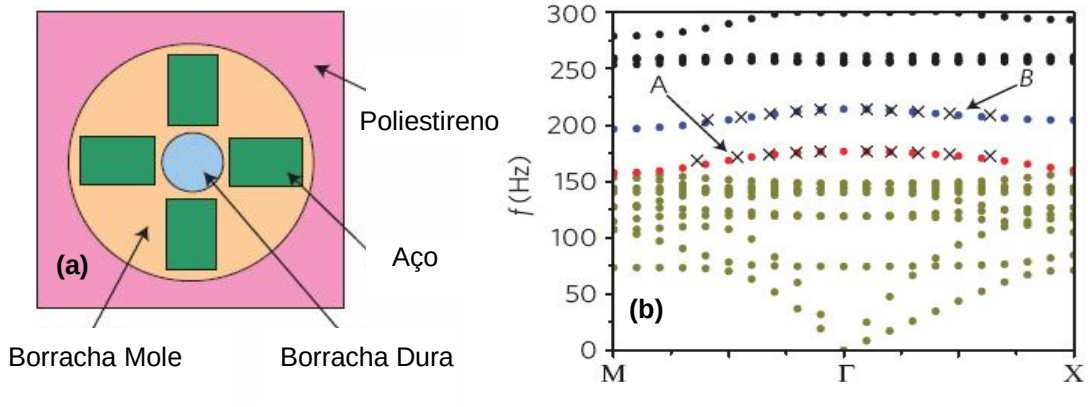

Figura 2.5 (a) Unidade estrutural multi-massa, (b) Estrutura de bandas do ME usando Elementos Finitos. [29]

Estes novos fenômenos são chamados de comportamento “fluido-like” e ”super-anisotropia”, respectivamente. Um trabalho semelhante foi reportado por Wu e colaboradores [28], mais neste caso eles utilizaram um arranjo triangular de inclusões cilíndricas revestidas ”fluido-sólido” como unidades estruturais incorporadas numa matriz de poliestireno. Em ambos os casos, os comprimentos de onda longitudinal e transversal da onda no poliestireno são maiores do que as dimensões da unidade estrutural. Portanto, estas bandas de dispersão negativas não foram induzidas por empalhamento de Bragg e, assim, as bandas de dispersão negativa foram atribuídas a efeitos de hibridação entre os diferentes tipos de ressonâncias da unidade estrutural.

2.6 Aplicações dos Metamateriais Acústicos e Elásticos

Muitas aplicações novas e potenciais dos metamateriais acústicos e elásticos foram propostas e discutidas pela comunidade científica. Aqui apresentamos brevemente algumas das principais aplicações reportadas nos últimos anos.

2.6.1 Lentes e Refletores perfeitos

O índice de refração negativo apresentado pelos MAs oferece a possibilidade de construir lentes acústicas perfeitas (superlentes acústicas) em analogia com as superlentes eletromagnéticas construídas usando metamateriais eletromagnéticos [85]. Uma superlente acústica é uma peça de MA com índice de refração negativo que promove a formação de duas imagens uma delas no interior do MA e a outra na parte externa do MA (Figura 2.6a) [86]. Este fenomeno acontece proque as ondas evanescentes, ao invéz de decair exponencialmente, intensificam os modos radiativos da onda devido ao índice de refração negativo do MA (Figura 2.6b). Isto oferece a possibilidade de recuperar as ondas "evanescentes perdidas" originando uma imagem perfeita (Figura 2.6c), sem aberração ou astigmatismo. Estas previsões teóricas ousadas renovaram as esperanças de superar o limite de difração nos dispositivos ópticos ou acústicos o que melhoraria significativamente a detecção de sonares subaquáticos e de imagens de ultra-som para diagnóstico médico.

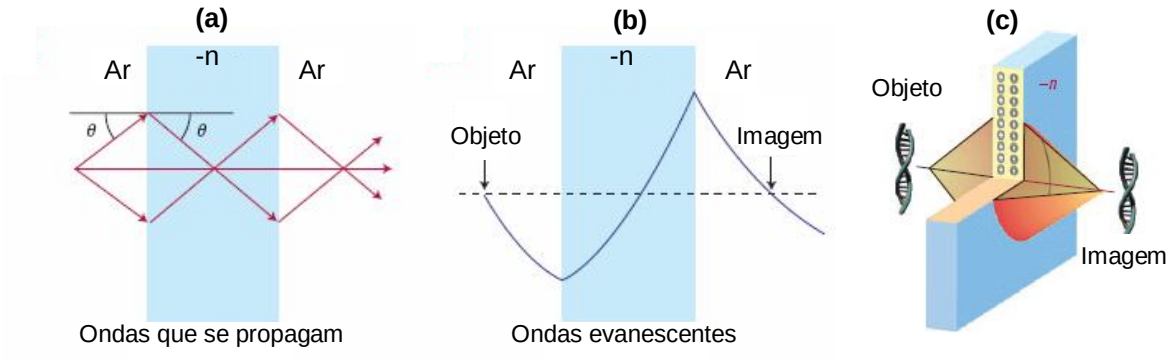

Figura 2.6 Diagrama esquemático de uma peça de MA que atua como lente perfeita, (a) lente que concentra todos os raios divergentes de um objeto em uma imagem focada, (b) lente que reforça as ondas evanescentes, (c) imagem perfeita criada pela superlente. [86]

Os metamateriais acústicos e elásticos também podem ser utilizados na construção de refletores perfeitos (super-refletores) de som ou vibração que podem ser empregados em sistemas de proteção acústica ou elástica, respectivamente [48,87,88]. É conhecido que o módulo volumétrico e a densidade de massa governam a propagação de ondas longitudinais num material, enquanto a

densidade de massa e o módulo de cisalha governam a propagação de ondas transversais. Deste modo, quando o módulo volumétrico ou a densidade de massa efetiva de um MA se torna negativo, o índice de refração para as ondas longitudinais se torna imaginário impossibilitando a propagação de ondas acústicas através do MA. Assim, sob tais condições, uma peça de MA poderia ser utilizada como um espelho acústico. Por outro lado, se a densidade de massa ou módulo de cisalha efetivo torna-se negativo, o índice de refração para as ondas transversais torna-se imaginário impossibilitando a propagação de ondas transversais no ME. Por conseguinte, a possível fabricação de super-refletores permitiria novas aplicações no controle de ondas acústicas, elásticas e sísmicas.

2.6.2 Dispositivos de Invisibilidade

Nos últimos anos vários autores sugeriram aplicações mais exóticas dos MAs como, por exemplo, a fabricação de mantos de invisibilidade acústica. O conceito de camuflagem acústica foi inspirado dos modelos propostos em sistemas ópticos através de procedimentos de transformações conformes e a fabricação de um dispositivo de camuflagem eletromagnético na frequências de microondas [89-92]. No caso de camuflagem acústica, um grande número de publicações tem sido reportado. Milton e colaboradores [93] investigaram as propriedades de transformação das equações elastodinámicas em diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas de tal forma a manter suas propriedades invariantes. A transformação do sistema de coordenadas pode servir de auxílio no projeto de dispositivos de camuflagem elástica e acústica. Cummer e Schurig [94] demonstraram a equivalência entre as equações acústicas num fluido e as equações de Maxwell de polarização simples e aplicado na simulação de camuflagem acústica. Cai e Sanchez-Deheda [95] também reportaram estudos sobre camuflagem acústica em sistemas **2D** concluindo que a camuflagem resulta eficaz quando a onda incidente é uma onda plana. Chen e Chan [96] reportaram que a equação acústica pode ser transformada em equação de fluxo de condutividade de corrente direta em três dimensões, permitindo então projetar um dispositivo de invisibilidade acústica tridimensional usando a técnica de transformação de coordenadas (transformação acústica).

Existem duas abordagens para projetar um manto de invisibilidade: o manto pode possuir parâmetros acústicos/elásticos efetivos anisotrópicos ou o manto pode estar composto de uma, duas o mais camadas feitas de metamateriais isotrópicos. A Figura 2.7a mostra o resultado de simulações computacionais de uma concha de camuflagem esférica (vista transversal) que evita o espalhamento acústico devido ao objeto arbitrário no interior da concha. Utilizando a teoria de espalhamento acústico, Cummer e colaboradores [20] confirmaram que os campos de pressão e velocidade são suavemente deformados e excluídos da região central, para que isto seja possível o manto esférico deve possuir uma densidade massa anisotrópica e um módulo volumétrico radialmente dependente. Por último, a Figura 2.7b mostra uma onda plana incidente sobre um espalhador esférico rígido (de raio r_1) com parâmetros elásticos $\kappa_s,\ \mu_s,\ \rho_s > 0$ revestido por uma concha de camuflagem esférica (de raio externo r_2) com parâmetros elásticos $\kappa_1,\ \mu_1,\ \rho_1$. O meio onde a onda de compressão está se propagando têm parâmetros elásticos $\kappa_o,\ \mu_o,\ \rho_o > 0$. Usando o conceito de inclusão neutral, Zhou e colaboradores [19,51] mostraram que quando os parâmetros elásticos da concha esférica satisfazem as relações, $\kappa_1 = -2\kappa_3$, $\rho_1 = 1{,}8\rho_o$, $r_1 = 2{,}1r_s$ ou $\kappa_s = 0{,}47\kappa_o$, $\rho_s = 0{,}4\rho_o$, $r_1 = 1{,}3r_s$, esta cancela o campo espalhado pelo objeto no interior da concha de camuflagem.

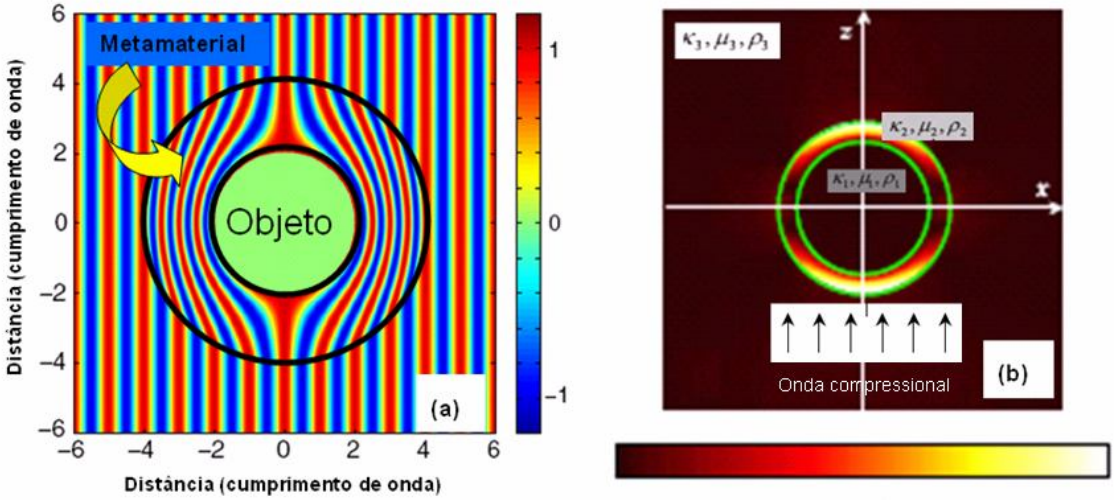

Figura 2.7 Seção transversal do processo de camuflagem acústica, (a) camuflagem com metamateriais anisotrópicos [20], e (b) camuflagem com metamateriais isotrópicos [51]

A revisão bibliográfica sobre metamateriais acústicos ou elásticos nos conduz às seguintes conclusões:

- A “teoria“ do espalhamento Mie por uma simples inclusão esférica num meio infinito está bem entendida e completamente resolvida.
- Uma extensão da “teoria“ do espalhamento Mie que considere inclusões esféricas multi-revestidas é necessária visando à geração de múltiplas ressonâncias Mie.
- Das observações teóricas e experimentais reportadas na literatura percebe-se que o mecanismo da ressonância é inerente a um sistema que apresentam modos de vibração, podendo assim induzir BGs absolutos na condição de baixas frequências contrário aos BGs de Bragg. Neste sentido, uma TME explícita para metamateriais acústicos/elásticos tridimensionais no limite de cumprimento de onda longa, ainda não foi desenvolvido com sucesso.
- Embora fosse teoricamente reportada a existência dos metamateriais acústicos e elásticos em três dimensões, pouco ou nenhum progresso foi alcançado no projeto e fabricação deste tipo de metamateriais. Neste contexto, existe uma forte necessidade na comunidade científica em materializar estes metamateriais e, assim, aplicá-los nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Parte I

Fundamentos Teóricos

Capítulo 3

Equação de Movimento para Ondas Elásticas

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão geral das equações básicas da elastodinámica, conceitos e notações relacionadas ao movimento de ondas elásticas. Usando a construção dos harmônicos esféricos vetoriais dados por Liu e Cai [30], resolvemos satisfatoriamente o problema de espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão esférica numa versão moderna.

3.1 Equações Básicas

Em um meio elástico ideal, as relações tensão-deformação ($\overleftrightarrow{\sigma}-\overleftrightarrow{\varepsilon}$) e deformação-deslocamento ($\overleftrightarrow{\varepsilon}-\mathbf{u}$) na notação de Einstein podem ser escritas como [97]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{3.1a}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3.1b}$$

onde os subscritos i, j percorrem os valores de 1, 2 e 3, denotando os eixos em um sistema de coordenadas generalizadas, σ_{ij} e ε_{ij} são as componentes dos tensores tensão ($\overleftrightarrow{\sigma}$) e deformação ($\overleftrightarrow{\varepsilon}$) sob uma superfície normal ao eixo i e ao longo da direção do eixo j, u_i é a componente do vetor de deslocamento $\mathbf{u}$ ao longo da direção do eixo i, λ e μ são as constantes elásticas de Lamé do material, δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker e $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$ em coordenadas esféricas.

A equação de movimento num meio elástico está dada por [97]:

$$\rho\partial_t^2 u_i = \sigma_{ij,j} + \rho f_i \tag{3.2}$$

onde ρ é a densidade de massa e f_i é uma força externa por unidade de volume aplicada ao corpo ao longo da direção do eixo i. Usando as equações 3.1a e 3.1b, a Equação 3.2 pode ser escrita como:

$$\rho\partial_t^2 u_i = (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i \tag{3.3}$$

ou, em forma vetorial

$$\rho\partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} \tag{3.4}$$

A equação 3.4 pode também ser reescrita como

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \rho\mathbf{f} - \rho\partial_t^2\mathbf{u} = 0 \tag{3.5}$$

No caso de $\mathbf{f} = 0$, a equação 3.5 se reduz na conhecida equação de onda elástica ou equação de Navier para ondas elásticas:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \rho\partial_t^2\mathbf{u} = 0 \tag{3.6}$$

3.2. Equação de Onda Escalar

De acordo com o teorema de Helmholtz da decomposição de um campo vetorial, o vetor deslocamento $\mathbf{u}(t,\mathbf{r})$ pode ser escrito em termos de dois potenciais vetoriais, da forma:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = \nabla\varphi_L + \nabla \times \vec{\psi}_T \tag{3.7}$$

Onde ϕ_L é chamado de potencial de deslocamento longitudinal escalar, e $\vec{\psi}_T$ é chamado de potencial de deslocamento transversal vetorial. O primeiro termo do lado direito da equação 3.7, $\mathbf{u}_L = \nabla\phi_L$, corresponde à componente longitudinal do

vetor deslocamento $\mathbf{u}(t,\mathbf{r})$, e o segundo termo, $\mathbf{u}_T = \nabla \times \vec{\psi}_T$, corresponde à componente transversal do vetor de deslocamento. Existem dois campos de deslocamento transversais mutuamente perpendiculares e independentes um do outro, assim o potencial vetorial $\vec{\psi}_T$ pode ser escrito como:

$$\vec{\psi}_T = \mathbf{r}\psi_T + \nabla \times \mathbf{r}\varphi_T \tag{3.8}$$

onde $\mathbf{r}$ é o raio vetor, e as novas funções escalares ψ_T e φ_T são chamadas de primeiro potencial de deslocamento transversal e segundo potencial de deslocamento transversal, respectivamente. Substituindo a equação 3.8 na equação 3.7 obtemos o campo de deslocamento em temos de três potencias escalares:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = \nabla\varphi_L + \nabla \times \mathbf{r}\psi_T + \nabla \times \nabla \times \mathbf{r}\phi_T \tag{3.9}$$

As ondas longitudinais, $\nabla\phi_L$, são frequentemente chamadas de ondas L. No entanto, as ondas transversais, $\nabla \times \mathbf{r}\psi_T$ e $\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}\varphi_T$, são chamadas de ondas M e N (ondas de cisalhamento), denotando as ondas transversais horizontalmente polarizadas e verticalmente polarizadas, respectivamente.

Utilizando a decomposição do vetor deslocamento $\mathbf{u}(t,\mathbf{r})$ (equação 3.9) na Equação 3.6 obtém-se as equações de onda escalares desacopladas das componentes ϕ_L, ψ_T e φ_T, respectivamente:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_L^2}\partial_t^2\right)\phi_L = 0 \tag{3.10a}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_T^2}\partial_t^2\right)\psi_T = 0 \tag{3.10b}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_T^2}\partial_t^2\right)\varphi_T = 0 \tag{3.10c}$$

As Equações 3.10a-c mostram que as componentes longitudinais e transversais da onda elástica se propagam no sólido independentemente, com velocidades de propagação, $c_L = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ e $c_T = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ respectivamente. Para materiais naturais, ρ, μ e λ são todos os números reais positivos; assim temos que $c_L > \sqrt{2}c_T$.

3.3 Soluções da Equação de Onda em Estado Estacionário

Assumindo ondas harmônicas de uma só frequência $f(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})e^{-iwt}$, as Equações 3.10a-c apresentam a forma de um conjunto de equações de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k_L^2\right)\phi_L = 0 \tag{3.11a}$$

$$\left(\nabla^2 + k_T^2\right)\psi_T = 0 \tag{3.11b}$$

$$\left(\nabla^2 + k_T^2\right)\varphi_T = 0 \tag{3.11c}$$

onde $k_L = \dfrac{\omega}{c_L}$, $k_T = \dfrac{\omega}{c_T}$ são os módulos dos vetores de onda para os modos longitudinal e transversal, respectivamente.

Com o objetivo de obter uma solução unificada para as equações de Helmholtz 3.11a-c, aqui faremos o seguinte convenio: utilizaremos à notação ψ_α para representar cada um dos potenciais ϕ_L, ψ_T, φ_T onde $\alpha = L, M, N$, respectivamente. Esta notação será muito útil no decorrer do texto e permitirá simplificar equações muito extensas.

Com esta notação, as Equações 3.11a-c pode-se escrever de forma compacta como:

$$\left(\nabla^2 + k_\alpha^2\right)\psi_\alpha = 0; \quad \alpha = L, M, N \tag{3.12}$$

onde $k_\alpha = \dfrac{\omega}{c_\alpha}$, $\alpha = L$ representa a onda longitudinal, $\alpha = M$ representa a primeira onda transversal e $\alpha = N$ a segunda onda transversal e $c_M = c_N$.

No presente trabalho os metamateriais serão projetados utilizando inclusões esféricas, assim é conveniente utilizar a equação de Helmholtz (equação 3.12) em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\psi_\alpha\right)+\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial\phi^2}+k_\alpha^2\psi_\alpha=0 \qquad (3.13)$$

Assumindo uma solução dada pelo método de separação de variáveis

$$\psi_\alpha\left(r,\theta,\phi\right)=R_\alpha\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\phi\right) \qquad (3.14)$$

com $r\in[0,\infty>$, $\theta\in[0,\pi]$ e $\varphi\in[0,2\pi]$, a equação 3.13 divide-se em três equações diferenciais fundamentais para $R_\alpha\left(r\right)$, $\Theta\left(\theta\right)$ e $\Phi\left(\phi\right)$ [98]:

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\left(k_\sigma^2 r^2-q\right)\right]R_\alpha\left(r\right)=0 \qquad (3.15a)$$

$$\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\left(q^2-\frac{q'^2}{sen^2\theta}\right)\right]\Theta\left(\theta\right)=0 \qquad (3.15b)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2}+q'^2\right)\Phi\left(\phi\right)=0 \qquad (3.15c)$$

onde q e q' são as constantes de separação.

A solução da equação 3.15a corresponde à componente radial da onda e pode ser expressa pela seguinte equação:

$$R_{l\alpha}\left(r\right)=A_{l\alpha}\,j_l\left(k_\alpha r\right)+B_{l\alpha}h_l^{(1)}\left(k_\alpha r\right),\ l=0,1,2,3,... \qquad (3.16)$$

onde $A_{l\alpha}$ e $B_{l\alpha}$ são constantes determinadas pelas condições de fronteira, $j_l\left(z_\alpha\right)$ e $h_l^{(1)}\left(z_\alpha\right)$ são chamadas de função de Bessel esférica de primeira espécie e função de Hankel esférica de primeira espécie, respectivamente. Nesta solução aparece o parâmetro de quantização "l" que define o limite de quantização do numero quântico "m" derivada a partir da equação 3.15b e 3.15c.

Em efeito considerando a mudança de variável $z = \cos\theta$, para $-1 \le z \le 1$, a Equação 3.15b pode-se escrever como:

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2}{dz^2}\Theta\left(\theta\right) - 2z\frac{d}{dz}\Theta\left(\theta\right) + \left[l\left(l+1\right) - \frac{q'^2}{1-z^2}\right]\Theta\left(\theta\right) = 0 \qquad (3.17)$$

A solução desta equação apresenta a seguinte forma:

$$\Theta_l^m\left(\theta\right) = C_{lm}P_l^m\left(\cos\theta\right), \quad l = 0,1,2,3,... \text{ e } -l \le m \le l \qquad (3.18)$$

onde $P_l^m(\cos\theta)$ são os polinômios associados de Legendre e C_{lm} são as constantes de normalização definidas por:

$$C_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)\Gamma(l-m+1)}{2\Gamma(l+m+1)}} \qquad (3.19)$$

onde Γ e a função gamma.

A solução para a equação 3.15c pode ser expressa através da seguinte equação:

$$\Phi_m\left(\varphi\right) = D_m e^{im\varphi}, \qquad m = 0,\pm1,\pm2,\pm3,...,\pm l \qquad (3.20)$$

onde a constante "m" esta quantizada pela seguinte condição $m = -l,...,0,...,l$, e as constantes D_m ser obtidas da condição de normalização

$$D_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (3.21)$$

Finalmente uma solução completa da Equação de Helmholtz 3.12 em coordenadas esféricas pode ser expressa por uma combinação linear das funções $R_{l\alpha}(r)\Theta_l^m(\theta)\Phi_m(\phi)$:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\left[A_{lm\alpha}\, j_l(k_\alpha r) + B_{lm\alpha} h_l^{(1)}(k_\alpha r)\right] P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{3.22}$$

onde a relação entre os coeficientes estão dados por: $A_{lm\alpha} = A_{l\alpha} C_{lm} D_m$ e $B_{lm\alpha} = B_{l\alpha} C_{lm} D_m$.

Por outro lado, usando a definição dos harmônicos esféricos escalares, $Y_l^m(\theta,\phi) = \breve{C}_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$, a Equação 3.22 pode ser reescrita como:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\left[a_{lm\alpha}\, j_l(k_\alpha r) + b_{lm\alpha} h_l^{(1)}(k_\alpha r)\right] Y_l^m(\theta,\phi) \tag{3.23}$$

com $a_{lm\alpha} = A_{lm\alpha} / \breve{C}_{lm}$ e $b_{lm\alpha} = B_{lm\alpha} / \breve{C}_{lm}$. A constante de normalização $\breve{C}_{lm}$ dos harmônicos esféricos escalares está dada por:

$$\breve{C}_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)\Gamma(l-m+1)}{4\pi\Gamma(l+m+1)}} \tag{3.24}$$

3.4 Construções de Funções Esféricas Base

Os resultados anteriormente descritos, em particular a equação 3.23, mostra que as funções $j_l(k_\alpha r) Y_l^m(\theta,\phi)$, $h_l^{(1)}(k_\alpha r) Y_l^m(\theta,\phi)$ podem ser introduzidas como uma base para representar soluções da equação de Helmholtz esférica. Estas funções conhecidas como funções esféricas base (FEBs) estão definidas como [99]:

$$R_{l\alpha}^m(\mathbf{r}) = j_l(k_\alpha r) Y_l^m(\theta,\phi), \quad l = 0,1,2,3,\ldots \text{ e } m = -l,\ldots,0,\ldots,l \tag{3.25a}$$

$$S_{l\alpha}^m(\mathbf{r}) = h_l^{(1)}(k_\alpha r) Y_l^m(\theta,\phi), \quad l = 0,1,2,3,\ldots \text{ e } m = -l,\ldots,0,\ldots,l \tag{3.25b}$$

As funções $R_{l\alpha}^{m}$ e $S_{l\alpha}^{m}$ às soluções regular e singular em $r=0$. Em analogia com os harmônicos esféricos escalares, o subscrito l é chamado de grau, e o sobrescrito m ordem da FEB, respectivamente. Para estados particulares, estas funções são chamadas de FEBs zonal quando $m \neq l$ e $m=0$, FEBs setorial quando $l=|m|$, e FEBs tesseral quando $0<|m|<l$.

Devido a que as funções $h_l^{(1)}(k_\alpha r)$ aparecerão em todo o texto, será mais conveniente excluir o sobrescrito "1" para simplificar a notação.

Por outro lado, é conhecido que as funções $j_l(k_\alpha r)$ e $h_l(k_\alpha r)$ apresentam propriedades de recorrência similares, assim as funções $R_{l\alpha}^{m}$ e $S_{l\alpha}^{m}$ podem ser representadas por uma notação generalizada para facilitar na escrita de equações que dependem destas funções.

$$F_{l\alpha}^{m}(\mathbf{r}) = f_l(k_\alpha r) Y_l^m(\theta,\phi), \quad f = j,h \quad F = R,S \tag{3.26}$$

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram a parte real das funções $R_{l\alpha}^{m}$ e $S_{l\alpha}^{m}$ Zonal, Tesseral e Setorial, respectivamente.

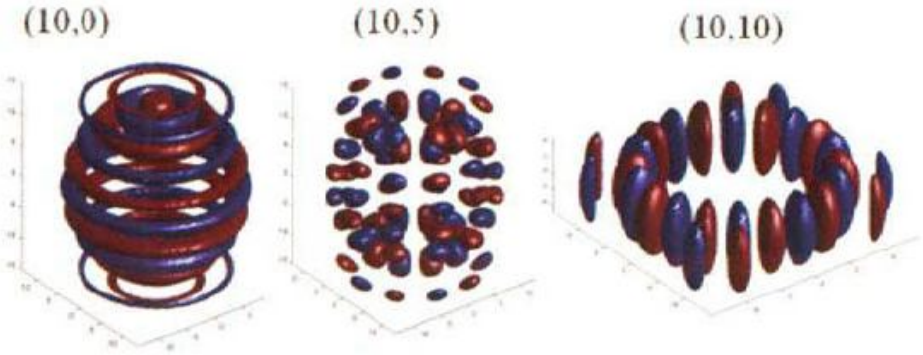

Figura 3.1 Icosuperfícies das FEBs $\mathrm{Re}\{R_{l\alpha}^{m}\} = const$: Zonal, Tesseral e Sectorial.

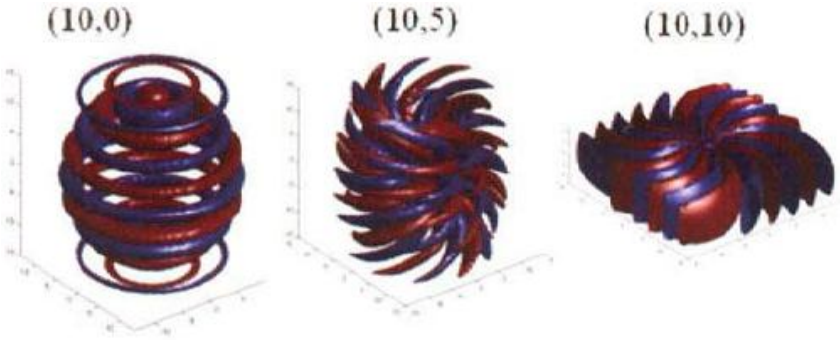

Figura 3.2 Icosuperfícies das FEBs $\mathrm{Re}\left\{S_{l\alpha}^{m}\right\} = const$: Zonal, Tesseral e Sectorial.

Com estas definições, agora podem ser expressas as equações correspondentes à solução geral da equação de Helmholtz esférica em termos das FEBs:

$$\psi_{\alpha}\left(\mathbf{r}\right) = \sum_{lm} a_{lm\alpha} R_{l\alpha}^{m}\left(\mathbf{r}\right) + p.s \tag{3.27}$$

com $p.s$ representando a parte singular da solução, isto é, $p.s = b_{lm\sigma} S_{l\sigma}^{m}\left(\mathbf{r}\right)$.

3.5 Campos em termos de Funções Esféricas Base

Dos itens 3.2 e 3.3, o vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ em termos dos potencias escalares ψ_L, ψ_M, ψ_N foi definido como:

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right) = \nabla\psi_L + \nabla\times\left(r\psi_M\mathbf{e}_r\right) + \nabla\times\nabla\times\left(r\psi_N\mathbf{e}_r\right) \tag{3.28}$$

Por outro lado, o mesmo vetor $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ em coordenadas esféricas, pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi \tag{3.29}$$

Assim, as funções de deslocamento u_r, u_θ e u_φ em função dos potenciais escalares ψ_σ, podem ser expressas como [100]:

$$u_r = \frac{\partial \psi_L}{\partial r} + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi_N) - r\nabla^2 \psi_N \right] \tag{3.30a}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_L}{\partial \theta} + \frac{1}{sen\theta}\frac{\partial \psi_M}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}(r\psi_N) \tag{3.30b}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial \psi_L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_M}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}(r\psi_N) \tag{3.30c}$$

Um parâmetro importante necessário no estudo de ondas mecânicas é o campo de tração sob a superfície esférica que está definida por:

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \tag{3.31}$$

As componentes do campo de tração, σ_{ij}, em função das componentes do campo de deslocamento, u_i, num sistema de coordenadas esféricas, estão dadas pelas seguintes relações:

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta \right) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{3.32a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta \right) + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \tag{3.32b}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta \right) + 2\mu\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta \right) \tag{3.32c}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \tag{3.32d}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{3.32e}$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \mu\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{u_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\cot\theta}{r}u_\varphi\right) \tag{3.32f}$$

A simetria esférica do problema conduz a que: $\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\varphi}$, $\sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\varphi}$.

Substituindo as componentes do campo de deslocamento, equações 3.30a-c, nas relações tensão-deslocamento, equações 3.32a-f, obtemos as relações entre σ_{ij} e ψ_α:

$$\sigma_{rr} = \lambda\nabla^2\psi_L + 2\mu\left\{\frac{\partial^2\psi_L}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial r^2} - r\nabla^2\psi_N\right)\right\} \tag{3.33a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\nabla^2\psi_L + 2\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_L}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_L}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial\psi_M}{\partial\varphi}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3(r\psi_N)}{\partial\theta^2\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial r^2} - \nabla^2\psi_N\right\} \tag{3.33b}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\nabla^2\psi_L + 2\mu\left\{\frac{1}{r^2sen^2\theta}\frac{\partial^2\psi_L}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_L}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\psi_L}{\partial\theta} + \right.$$

$$\frac{1}{rsen\theta}\left[\cot\theta\frac{\partial\psi_M}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\psi_M}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial^3(r\psi_M)}{\partial r\partial\varphi^2}\right] +$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_M)}{\partial r^2} - \nabla^2\psi_M + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial^2(r\psi_M)}{\partial r\partial\theta}\right\} \tag{3.33c}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{\partial^2\psi_L}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_L}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{sen\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_M}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_M}{\partial\varphi\partial r}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial r^2} - r\nabla^2\psi_N\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial\theta\partial r} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial\theta\partial r}\right)\right]\right\} \tag{3.33d}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu\left\{\frac{2}{rsen\theta}\left(\frac{\partial^2\psi_L}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_L}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_M}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_M}{\partial r\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{rsen\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(2\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial r^2} - r\nabla^2\psi_N\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial r\partial\varphi}\right]\right\} \tag{3.33e}$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \mu\left\{\frac{2}{r^2 sen\theta}\left(\frac{\partial^2\psi_L}{\partial\theta\partial\varphi} - \cot\theta\frac{\partial\psi_L}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial\psi_M}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_M}{\partial\theta^2} + \frac{1}{rsen^2\theta}\frac{\partial^2\psi_M}{\partial\varphi^2}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{2}{r^2 sen\theta}\left[\frac{\partial^3(r\psi_N)}{\partial r\partial\theta\partial\varphi} - \cot\theta\frac{\partial^2(r\psi_N)}{\partial\varphi\partial r}\right]\right\} \tag{3.33f}$$

onde $\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{lm} a_{lm\alpha} R_{l\alpha}^m(\mathbf{r}) + p.s$ para $\alpha = L, M, N$.

Portanto, as componentes do campo de deslocamento u_i e tração σ_{ij} em termos das FEBs, podem ser expressas por:

$$u_r = \sum_{lm}\left\{a_{lmL}\partial_r R_{lL}^m + a_{lmN}\frac{l(l+1)}{r}R_{lN}^m\right\} + p.s \tag{3.34a}$$

$$u_\theta = \sum_{lm}\left\{a_{lmL}\frac{1}{r}\partial_\theta R_{lL}^m + a_{lmM}\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi R_{lM}^m + a_{lmN}\frac{1}{r}(r\partial_r + 1)\partial_\theta R_{lN}^m\right\} + p.s \tag{3.34b}$$

$$u_\varphi = \sum_{lm}\left\{a_{lmL}\frac{1}{rsen\theta}\partial_\varphi R_{lL}^m - a_{lmM}\partial_\theta R_{lM}^m + a_{lmN}\frac{1}{r}(r\partial_r + 1)\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi R_{lN}^m\right\} + p.s \tag{3.34c}$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{lm}\left\{a_{lmL}\left[(\lambda + 2\mu)\partial_r^2 + \frac{2\lambda}{r}\partial_r - \lambda\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_{lL}^m + a_{lmN}\left[2\mu\frac{l(l+1)}{r^2}(r\partial_r - 1)\right]R_{lN}^m\right\} + p.s$$

(3.34d)

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{lm}\left\{a_{lmL}\left[\lambda\partial_r^2 + \frac{2}{r}(\lambda + \mu)\partial_r + \frac{1}{r^2}\{2\mu\partial_\theta^2 - \lambda l(l+1)\}\right]R_{lL}^m + \right.$$

$$a_{lmM}\frac{2\mu}{rsen\theta}\left(\partial^2_{\theta\varphi}-\cot\theta\right)R^m_{lM}+a_{lmN}\frac{2\mu}{r^2}\left[\left(r\partial_r+1\right)\partial^2_\theta+l\left(l+1\right)\right]R^m_{lN}\Bigg\}+p.s \tag{3.34e}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sum_{lm}\Bigg\{a_{lmL}\left[\lambda\partial^2_r+\frac{2}{r}\left(\lambda+\mu\right)\partial_r+\frac{1}{r^2}\left\{2\mu\left(\frac{1}{sen^2\theta}\partial^2_\varphi+\cot\theta\partial_\theta\right)-\lambda l\left(l+1\right)\right\}\right]R^m_{lL}$$

$$-a_{lmM}\frac{2\mu}{rsen\theta}\left(\partial^2_{\theta\varphi}-\cot\theta\partial_\varphi\right)R^m_{lM}+$$

$$a_{lmN}\frac{2\mu}{r^2}\left[\left(r\partial_r+1\right)\left(\frac{1}{sen^2\theta}\partial^2_\varphi+\cot\theta\partial_\theta\right)+l\left(l+1\right)\right]R^m_{lN}\Bigg\}+ps \tag{3.34f}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sum_{lm}\Bigg\{a_{lmL}\frac{2\mu}{r^2}\left(r\partial_r-1\right)\partial_\theta R^m_{lL}+a_{lmM}\frac{\mu}{r}\left(r\partial_r-1\right)\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi R^m_{lM}+$$

$$a_{lmN}\frac{\mu}{r^2}\left[r^2\partial^2_r-2+l\left(l+1\right)\right]\partial_\theta R^m_{lN}\Bigg\}+p.s \tag{3.34g}$$

$$\sigma_{r\varphi}=\sum_{lm}\Bigg\{a_{lmL}\frac{2\mu}{r^2}\left(r\partial_r-1\right)\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi R^m_{lL}-a_{lmM}\frac{\mu}{r}\left(r\partial_r-1\right)\partial_\theta R^m_{lM}+$$

$$a_{lmN}\frac{\mu}{r^2}\left[r^2\partial^2_r-2+l\left(l+1\right)\right]\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi R^m_{lN}\Bigg\}+p.s \tag{3.34h}$$

$$\sigma_{\theta\varphi}=\sum_{lm}\Bigg\{a_{lmL}\frac{2\mu}{r^2sen\theta}\left(\partial^2_{\theta\varphi}-\cot\theta\partial_\varphi\right)R^m_{lL}+a_{lmM}\frac{\mu}{r}\left[\frac{1}{sen^2\theta}\partial^2_\varphi-\left(\partial_\theta-\cot\theta\right)\partial_\theta\right]R^m_{lM}+$$

$$a_{lmN}\frac{2\mu}{r^2sen\theta}\left(r\partial_r+1\right)\left(\partial^2_{\theta\varphi}-\cot\theta\partial_\varphi\right)R^m_{lN}\Bigg\}+p.s \tag{3.34i}$$

3.6 Campos em termos de Harmônicos Esféricos Escalares

As definições anteriores sobre os campos de deslocamento e tração em termos de FEBs, equações 3.34a-i, são definições gerais contendo termos com operadores ∂^{s+t}_{xy} atuando sob as FEBs $F^m_{l\sigma}$. Assim, para poder expressar as

equações 3.34a-i em termos dos harmônicos esféricos escalares, as funções $F_{l\sigma}^{m}$ e suas derivadas $\partial_{xy}^{s+t} F_{l\sigma}^{m}$ devem ser expressas em termos de harmônicos esféricos escalares $Y_l^m(\theta,\varphi)$. Com estas relações, as componentes dos campos de deslocamento e tração em termos dos harmônicos esféricos escalares, podem ser expressas como:

$$u_r = \sum_{lm} \left\{ \left[k_L j_l^{(1)}(k_L r) \right] a_{lmL} + \left[\frac{l(l+1)}{r} j_l(k_N r) \right] a_{lmN} \right\} Y_l^m(\theta,\phi) + p.s \tag{3.35a}$$

$$u_\theta = \sum_{lm} \left\{ \left[\frac{j_l(k_L r)}{r} \right] a_{lmL} \partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi) + j_l(k_M r) a_{lmM} \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi) + \right.$$

$$\left. \left[k_N j_l^{(1)}(k_N r) + \frac{j_l(k_N r)}{r} \right] a_{lmN} \partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi) \right\} + p.s \tag{3.35b}$$

$$u_\phi = \sum_{lm} \left\{ \left[\frac{j_l(k_L r)}{r} \right] a_{lmL} \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi) - j_l(k_M r) a_{lmM} \partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi) + \right.$$

$$\left. \left[k_N j_l^{(1)}(k_N r) + \frac{j_l(k_N r)}{r} \right] a_{lmN} \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi) \right\} + p.s \tag{3.35c}$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{lm} \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) k_L^2 j_l^{(2)}(k_L r) + 2\lambda k_L \frac{j_l^{(1)}(k_L r)}{r} - \lambda l(l+1) \frac{j_l(k_L r)}{r^2} \right] a_{lmL} + \right.$$

$$\left. 2\mu l(l+1) \left[k_N j_l^{(1)}(k_N r) - \frac{j_l(k_N r)}{r} \right] a_{lmN} \right\} Y_l^m(\theta,\phi) + p.s \tag{3.35d}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{lm} \left\{ \left[\left(\lambda k_L^2 j_l^{(2)}(k_L r) + 2(\lambda + \mu) k_L \frac{j_l^{(1)}(k_L r)}{r} - \lambda l(l+1) \frac{j_l(k_L r)}{r^2} \right) Y_l^m(\theta,\phi) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{2\mu}{r^2} j_l(k_L r) \partial_\theta^2 Y_l^m(\theta,\phi) \right] a_{lmL} + \frac{2\mu}{r} j_l(k_M r) \frac{1}{sen\theta} \left[\partial_{\theta\phi}^2 Y_l^m(\theta,\phi) - \cot\theta \partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi) \right] a_{lmM} +$$

$$\frac{2\mu}{r}\left[\left(k_N j_l^{(1)}\left(k_N r\right)+\frac{j_l\left(k_N r\right)}{r}\right)\partial_\theta^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+\frac{l\left(l+1\right)}{r}j_l\left(k_N r\right)Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right]a_{lmN}\Bigg\}+p.s \quad (3.35e)$$

$$\sigma_{\phi\phi}=\sum_{lm}\Bigg\{\Bigg[\left(\lambda k_L^2 j_l^{(2)}\left(k_L r\right)+2\left(\lambda+\mu\right)k_L\frac{j_l^{(1)}\left(k_L r\right)}{r}-\lambda l\left(l+1\right)\frac{j_l\left(k_L r\right)}{r^2}\right)Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+$$

$$\frac{2\mu}{r^2}j_l\left(k_L r\right)\left(\frac{1}{sen^2\theta}\partial_\phi^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+\cot\theta\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right)\Bigg]a_{lmL}-$$

$$\frac{2\mu}{r}j_l\left(k_M r\right)\frac{1}{sen\theta}\left[\partial_{\theta\phi}^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)-\cot\theta\partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right]a_{lmM}+$$

$$\frac{2\mu}{r}\Bigg[\left(k_N j_l^{(1)}\left(k_N r\right)+\frac{j_l\left(k_N r\right)}{r}\right)\left(\frac{1}{sen^2\theta}\partial_\phi^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+\cot\theta\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right)+$$

$$\frac{l\left(l+1\right)}{r}j_l\left(k_N r\right)Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\Bigg]a_{lmN}\Bigg\}+p.s \quad (3.35f)$$

$$\sigma_{r\theta}=\sum_{lm}\Bigg\{\frac{2\mu}{r}\left[k_L j_l^{(1)}\left(k_L r\right)-\frac{j_l\left(k_L r\right)}{r}\right]a_{lmL}\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+$$

$$\mu\left[k_M j_l^{(1)}\left(k_M r\right)-\frac{j_l\left(k_M r\right)}{r}\right]a_{lmM}\frac{1}{sen\theta}\partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+$$

$$\mu\left[k_N j_l^{(2)}\left(k_N r\right)+\frac{\left(l^2+l-2\right)}{r^2}j_l\left(k_N r\right)\right]a_{lmN}\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\Bigg\}+p.s \quad (3.35g)$$

$$\sigma_{r\phi}=\sum_{lm}\Bigg\{\frac{2\mu}{r}\left[k_L j_l^{(1)}\left(k_L r\right)-\frac{j_l\left(k_L r\right)}{r}\right]a_{lmL}\frac{1}{sen\theta}\partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)-$$

$$\mu\left[k_M j_l^{(1)}\left(k_M r\right)-\frac{j_l\left(k_M r\right)}{r}\right]a_{lmM}\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+$$

$$\mu\left[k_N j_l^{(2)}\left(k_N r\right)+\frac{\left(l^2+l-2\right)}{r^2} j_l\left(k_N r\right)\right] a_{lmN} \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\Bigg\}+p.s \tag{3.35h}$$

$$\sigma_{\theta\phi}=\sum_{lm}\Bigg\{\frac{2\mu}{r^2} j_l\left(k_L r\right)\frac{1}{sen\theta}\left[\partial_{\theta\phi}^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)-\cot\theta\partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right] a_{lmL}+$$

$$\frac{\mu}{r} j_l\left(k_M r\right)\left[\frac{1}{sen^2\theta}\partial_\phi^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)-\partial_\theta^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)+\cot\theta\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right] a_{lmM}+$$

$$\frac{2\mu}{r}\left[k_N j_l^{(1)}\left(k_N r\right)+\frac{j_l\left(k_N r\right)}{r}\right]\frac{1}{sen\theta}\left[\partial_{\theta\phi}^2 Y_l^m\left(\theta,\phi\right)-\cot\theta\partial_\phi Y_l^m\left(\theta,\phi\right)\right] a_{lmN}\Bigg\}+p.s \tag{3.35i}$$

Nestas equações 3.35a-i resulta uma tarefa difícil determinar as relações entre os coeficientes $a_{lm\sigma}$ e $b_{lm\sigma}$ e o analise das condições de continuidade nas regiões de fronteira entre dois meios, isso é devido porque as funções $\partial_{xy}^{s+t} Y_{l\sigma}^m$ não apresentam propriedades de ortonormalidade.

3.7 Campos em termos de Harmônicos Esféricos Vetoriais

Em 1935, Hansen [101] introduziu as funções chamadas de HEVs que são uma extensão dos harmônicos esféricos escalares.

Alternativamente, as componentes dos campos de deslocamento e tração podem ser escritos em termos dos HEVs. Uma das vantagens de usar os HEVs é que permite manipular facilmente problemas de continuidade dos campos de deslocamento e tração sob superfícies esféricas, e isto é devido às propriedades de ortonormalidade dos HEVs. Adicionalmente, as propriedades de ortonormalidade destas funções, permitem encontrar uma transformação linear entre os coeficientes $a_{lm\sigma}$ e $b_{lm\sigma}$ da equação 3.27.

Com o objetivo de introduzir os HEVs nas equações 3.35a-i, a seguinte notação simplificada para as componentes dos campos de deslocamento e tração são realizadas:

$$u_r = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{1j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{1j} a_{lmN} \right) Y_l^m + p.s \tag{3.36a}$$

$$u_\theta = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{2j} a_{lmL} \partial_\theta Y_l^m + \xi_{qM}^{2j} a_{lmM} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m + \xi_{qN}^{2j} a_{lmN} \partial_\theta Y_l^m \right) + p.s \tag{3.36b}$$

$$u_\varphi = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{3j} a_{lmL} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m + \xi_{qM}^{3j} a_{lmM} \partial_\theta Y_l^m + \xi_{qN}^{3j} a_{lmN} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m \right) + p.s \tag{3.36c}$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{4j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{4j} a_{lmN} \right) Y_l^m + p.s \tag{3.36d}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{5j} a_{lmL} + \xi_{q2}^{5j} a_{lmM} + \xi_{q3}^{5j} a_{lmN} \right) + p.s \tag{3.36e}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{lm} \left(\xi_{\mathrm{qL}}^{\mathrm{6j}} a_{lmL} + \xi_{\mathrm{qM}}^{\mathrm{6j}} a_{lmM} + \xi_{\mathrm{qN}}^{\mathrm{6j}} a_{lmN} \right) + p.s \tag{3.36f}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{7j} a_{lmL} \partial_\theta Y_l^m + \xi_{qM}^{7j} a_{lmM} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m + \xi_{qN}^{7j} a_{lmN} \partial_\theta Y_l^m \right) + p.s \tag{3.36g}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{8j} a_{lmL} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m + \xi_{qM}^{8j} a_{lmM} \partial_\theta Y_l^m + \xi_{qN}^{8j} a_{lmN} \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m \right) + p.s \tag{3.36h}$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \sum_{lm} \left(\xi_{qL}^{9j} a_{lmL} + \xi_{qM}^{9j} a_{lmM} + \xi_{qN}^{9j} a_{lmN} \right) + p.s \tag{3.36i}$$

onde as funções $\xi_{q\alpha}^{pf} = \xi_{q\alpha}^{pf}(\mathbf{r}, l)$ foram introduzidas com o objetivo de construir a matriz de transferência T do espalhamento Mie por uma inclusão esférica. Expressões gerais das funções $\xi_{q\alpha}^{pf}$ são descritas no apêndice A. Estas funções são semelhantes às funções definidas por Mow e Pao [100]. O sobrescrito p que percorre de 1 até 9 é utilizada para designar as componentes do vetor deslocamento e tração. Isto é, $p=1$ para u_r, $p=2$ para u_θ, $p=3$ para u_φ, $p=4$ para σ_{rr}, $p=5$ para $\sigma_{\theta\theta}$, $p=6$ para $\sigma_{\varphi\varphi}$, $p=7$ para $\sigma_{r\theta}$, $p=8$ para $\sigma_{r\varphi}$ e $p=9$ para $\sigma_{\theta\varphi}$, respectivamente. O sobrescrito f denota o tipo de função de Bessel esférica; para $f=j$ representa a função de Bessel esférica de primeira espécie e para $f=h$ representa a função de Hankel esférica de primeira espécie. O

subscrito q refere-se ao meio onde a onda elástica esta-se propagado. Por último o subscrito α, denota o tipo de onda elástica: $\alpha = L$ para à onda longitudinal, $\alpha = M$ para a primeira onda transversal e $\alpha = N$ para a segunda onda transversal.

Por outro lado, estas funções apresentam algumas identidades:

$$\xi_{q1}^{3f} = \xi_{q1}^{2f}, \qquad \xi_{q1}^{8f} = \xi_{q1}^{7f} \tag{3.37a}$$

$$\xi_{q2}^{3f} = -\xi_{q2}^{2f}, \qquad \xi_{q2}^{8f} = -\xi_{q2}^{7f} \tag{3.37b}$$

$$\xi_{q3}^{3f} = \xi_{q3}^{2f}, \qquad \xi_{q3}^{8f} = \xi_{q3}^{7f} \tag{3.37c}$$

Com todas estas notações, agora se pode expressar os campos de deslocamento e tração para uma simetria esférica em função destas funções:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} \left\{ \left(\xi_{qL}^{1j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{1j} a_{lmN} \right) Y_l^m \mathbf{e}_r + \left(\xi_{qL}^{2j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{2j} a_{lmN} \right) \left(\partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m \mathbf{e}_\phi \right) + \right.$$

$$\left. \xi_{qM}^{2j} a_{lmM} \left(\frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m \mathbf{e}_\theta + \partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\varphi \right) \right\} + p.s \tag{3.38a}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \sum_{lm} \left\{ \left(\xi_{qL}^{4j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{41j} a_{lmN} \right) Y_l^m \mathbf{e}_r + \left(\xi_{qL}^{7j} a_{lmL} + \xi_{qN}^{7j} a_{lmN} \right) \left(\partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{sen\theta} \partial_\phi Y_l^m \mathbf{e}_\phi \right) + \right.$$

$$\left. \xi_{qM}^{7j} a_{lmM} \left(\frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m \mathbf{e}_\theta + \partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\varphi \right) \right\} + p.s \tag{3.38b}$$

Nesta dissertação, utilizaremos as definições dos HEVs normalizados reportados por Martin [102]:

$$\mathbf{A}_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \tag{3.39a}$$

$$\mathbf{B}_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\partial_\theta Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{sen\theta} \partial_\varphi Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \right] \tag{3.39b}$$

$$\mathbf{C}_l^m(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\frac{1}{sen\theta}\partial_\varphi Y_l^m(\theta,\varphi)\mathbf{e}_\theta-\partial_\theta Y_l^m(\theta,\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right] \tag{3.39c}$$

Estes HEVs satisfazem as seguintes propriedades de orto-normalização:

$$\int_\Omega \mathbf{A}_l^m\cdot\mathbf{A}_{l'}^{*m'}d\Omega=\int_\Omega \mathbf{B}_l^m\cdot\mathbf{B}_{l'}^{*m'}d\Omega=\int_\Omega \mathbf{C}_l^m\cdot\mathbf{C}_{l'}^{*m'}d\Omega=\frac{2}{\varepsilon_m}\delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{3.40a}$$

$$\int_\Omega \mathbf{A}_l^m\cdot\mathbf{B}_{l'}^{*m'}d\Omega=\int_\Omega \mathbf{A}_l^m\cdot\mathbf{C}_{l'}^{*m'}d\Omega=\int_\Omega \mathbf{B}_l^m\cdot\mathbf{C}_{l'}^{*m'}d\Omega=0 \tag{3.40b}$$

onde ε_m é um fator cujos valores podem ser de $\varepsilon_0=1$ e $\varepsilon_m=2$ para $m\neq 0$.

Por conseguinte, os campos de deslocamento e tração superficial em termos dos HEVs, seguindo os trabalhos de Liu e Cai [30], podem ser expressos por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=\sum_{lm}\left[\left(\xi_{qL}^{1j}\mathbf{A}_l^m+\sqrt{l(l+1)}\xi_{qL}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)a_{lmL}+\left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{qM}^{2j}\mathbf{C}_l^m\right)a_{lmM}+\right.$$

$$\left.\left(\xi_{qN}^{1j}\mathbf{A}_l^m+\sqrt{l(l+1)}\xi_{qN}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)a_{lmN}\right]+p.s \tag{3.41a}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{r})=\sum_{lm}\left[\left(\xi_{qL}^{4j}\mathbf{A}_l^m+\sqrt{l(l+1)}\xi_{qL}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)a_{lmL}+\left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{qM}^{7j}\mathbf{C}_l^m\right)a_{lmM}+\right.$$

$$\left.\left(\xi_{qN}^{4j}\mathbf{A}_l^m+\sqrt{l(l+1)}\xi_{qN}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)a_{lmN}\right]+p.s \tag{3.41b}$$

Observe-se que os campos $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ apresentam parte longitudinal (associado a a_{lmL}), primeira transversal (associado a a_{lmM}) e segunda transversal (associado a a_{lmN}), respectivamente.

Portanto, usando as notações de Liu [13,50] e Sainidou [103], os campos $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ podem ser expressos em forma compacta como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=\sum_{lm\sigma}a_{lm\sigma}\mathbf{J}_{lm\sigma}^{(q)}(\mathbf{r})+p.s \tag{3.42a}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} a_{lm\sigma} \mathbf{R}_{lm\sigma}^{(q)}(\mathbf{r}) + p.s \tag{3.42b}$$

onde $p.s = b_{lm\sigma} \mathbf{H}_{lm\sigma}^{(q)}(\mathbf{r})$ para o campo de deslocamento, e $p.s = b_{lm\sigma} \mathbf{S}_{lm\sigma}^{(q)}(\mathbf{r})$ para o campo de tração superficial, e as funções $\mathbf{J}_{lm\sigma}^{(q)}$ e $\mathbf{R}_{lm\sigma}^{(q)}$ são definidas como:

$$\mathbf{J}_{lmL}^{(q)} = \xi_{qL}^{1j} \mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)} \xi_{qL}^{2j} \mathbf{B}_l^m \tag{3.43a}$$

$$\mathbf{J}_{lmM}^{(q)} = \sqrt{l(l+1)} \xi_{qM}^{2j} \mathbf{C}_l^m \tag{3.43b}$$

$$\mathbf{J}_{lmN}^{(q)} = \xi_{qN}^{1j} \mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)} \xi_{qN}^{2j} \mathbf{B}_l^m \tag{3.43c}$$

e

$$\mathbf{R}_{lmL}^{(q)} = \xi_{qL}^{4j} \mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)} \xi_{qL}^{7j} \mathbf{B}_l^m \tag{3.44a}$$

$$\mathbf{R}_{lmM}^{(q)} = \sqrt{l(l+1)} \xi_{qM}^{7j} \mathbf{C}_l^m \tag{3.44b}$$

$$\mathbf{R}_{lmN}^{(q)} = \xi_{qN}^{4j} \mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)} \xi_{qN}^{7j} \mathbf{B}_l^m \tag{3.44c}$$

É importante mencionar que no desenvolvimento do capítulo 4, utilizaremos as soluções 3.42a e 3.42b para resolver o problema de espalhamento Mie de ondas elásticas por uma inclusão esférica.

Capítulo 4

Espalhamento por uma Inclusão Esférica: Matriz T

Neste capítulo estendemos, a metodologia de análise do espalhamento Mie de ondas elásticas por uma inclusão esférica simples, para uma inclusão esférica multi-revestida. A metodologia seguida para a construção da matriz T de uma inclusão esférica simples é similar à reportada em [30-32], já a matriz T para a inclusão esférica multi-revestida será uma extensão das reportadas em [16,50].

Para o estudo do espalhamento Mie de uma onda elástica (L, M, N) por uma inclusão esférica simples se considera duas regiões, a região correspondente ao meio hospedeiro (Meio "o") onde a inclusão esférica esta imersa, e a região correspondente à própria inclusão esférica (Meio "s"). A Figura 4.1 mostra uma representação esquemática das diferentes regiões envolvidas no processo de espalhamento.

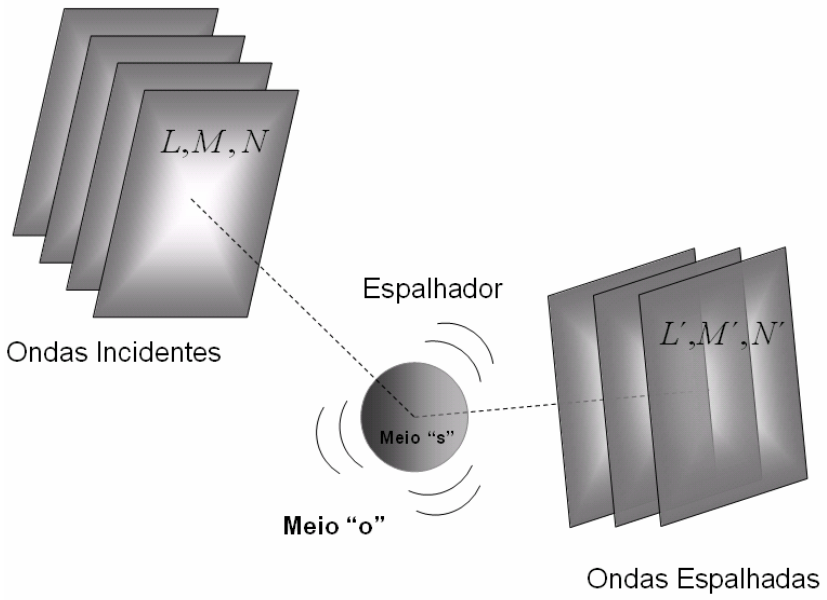

Figura 4.1. Diagrama esquemático do processo de espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão esférica (espalhador).

No capítulo 3 foram definidas as funções $\xi_{q\alpha}^{pf}$ onde o subscrito q indicava o meio onde a onda elástica se propaga. No caso do espalhamento por uma inclusão esférica simples (espalhador), existem dois meios onde à onda elástica se propaga, assim $q = o$ indica o meio hospedeiro ou substrato e $q = s$ indica a região da inclusão esférica. Os parâmetros elásticos que caracterizam cada meio serão denotados por ρ_o, λ_o, μ_o para o meio "o" e ρ_s, λ_s, μ_s para o meio "s". Nos cálculos se considera que a inclusão esférica esta localizada na origem de um sistema de coordenadas esféricas.

Os campos de deslocamento e tração no meio hospedeiro estão dados por

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} a_{lm\alpha} \mathbf{J}_{lm\alpha}^{(o)}(\mathbf{r}) + b_{lm\alpha} \mathbf{H}_{lm\alpha}^{(o)}(\mathbf{r}) \tag{4.1a}$$

$$\mathbf{t}_o(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} a_{lm\alpha} \mathbf{R}_{lm\alpha}^{(o)}(\mathbf{r}) + b_{lm\alpha} \mathbf{S}_{lm\alpha}^{(o)}(\mathbf{r}) \tag{4.1b}$$

e os campos de deslocamento e tração no meio correspondente à inclusão esférica estão dados por:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} c_{lm\alpha} \mathbf{J}_{lm\alpha}^{(s)} \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} c_{lm\alpha} \mathbf{R}_{lm\alpha}^{(s)} \tag{4.2b}$$

onde $a_{lm\alpha}, b_{lm\alpha}$ e $c_{lm\alpha}$ são as constantes a ser determinadas pelas condições de continuidade dos campos $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{t}(\mathbf{r})$. As funções de onda vetoriais $\mathbf{J}_{lm\alpha}^{(q)}$ e $\mathbf{R}_{lm\alpha}^{(q)}$ estão definidas pelas Equações 3.43a-c e 3.44a-c, respectivamente. As funções $\mathbf{H}_{lm\alpha}^{(q)}$ e $\mathbf{S}_{lm\alpha}^{(q)}$ são funções singulares cujas expressões são similares às das equações 3.43a-c e 3.44a-c com a diferença que ao invés das funções de Bessel esféricas de primeira espécie j_l aparecem às funções Hankel esféricas de primeira espécie h_l. As equações 4.1a e 4.1b são interpretadas da seguinte maneira: os termos regulares, $\sum a_{lm\sigma} \mathbf{J}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r})$ e $\sum a_{lm\sigma} \mathbf{R}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r})$, correspondem às ondas de deslocamento e tração incidentes (L, M, N), já os termos singulares, $\sum b_{lm\sigma} \mathbf{H}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r})$

e $\sum b_{lm\sigma}\mathbf{S}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r})$ correspondem às ondas espalhadas (L', M', N'). Por outro lado, devido a que à inclusão esférica esta localizada na origem do sistema de coordenadas, a propagação da onda no meio "s" é expressa somente como contribuição das componentes regulares dos campos, $\sum c_{lm\alpha}\mathbf{J}_{lm\alpha}^{(s)}$ e $\sum d_{lm\alpha}\mathbf{R}_{lm\alpha}^{(s)}$, posto que em $r=0$ a solução deve ser finita.

Assumindo que a inclusão esférica esta perfeitamente ligada ao meio hospedeiro, isto é, a superfície esférica age como uma interface perfeita entre os meios "o" e "s". As condições de continuidade requerem que os campos de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ e tração $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ na superfície esférica, dadas pelas equações 4.1a-b e 4.2a-b sejam continuas na interface $r=r_s$ (raio da inclusão esférica), matematicamente isso pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} = \mathbf{u}_s(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} \tag{4.3a}$$

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} = \mathbf{t}_s(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} \tag{4.3b}$$

4.1 Equações de Continuidade do Campo de Deslocamento

Os campos de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ nos meios "$q=0$" e "$q=s$" em função dos HEVs podem ser escritos utilizando as definições das funções de onda vetoriais $\mathbf{J}_{lm\alpha}^{(q)}$ e $\mathbf{R}_{lm\alpha}^{(q)}$, equações 3.43a-c e 3.44a-c do capítulo 3, e adotam a forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\Big[&\left(\xi_{0L}^{1j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0L}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)A_{lmL} + \left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{0M}^{2j}\mathbf{C}_l^m\right)A_{lmM} + \\ &\left(\xi_{0N}^{1j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0N}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)A_{lmN}\Big] + \Big[\left(\xi_{0L}^{1h}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0L}^{2h}\mathbf{B}_l^m\right)B_{lmL} + \\ &\left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{0M}^{2h}\mathbf{C}_l^m\right)B_{lmM} + \left(\xi_{0N}^{1h}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0N}^{2h}\mathbf{B}_l^m\right)B_{lmN}\Big]\end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\Big[\left(\xi_{sL}^{1j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{sL}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)C_{lmL} + \left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{sM}^{2j}\mathbf{C}_l^m\right)C_{lmM} +$$

$$\left(\xi_{sN}^{1j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{sN}^{2j}\mathbf{B}_l^m\right)C_{lmN}\Big] \tag{4.4b}$$

Aplicando a condição de continuidade para $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ (equação 4.3a) em $r = r_s$, obtém-se:

$$\sum_{lm}\left\{E_{lm}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+l)}F_{lm}\mathbf{B}_l^m + \sqrt{l(l+l)}G_{lm}\mathbf{C}_l^m\right\} = 0 \tag{4.5}$$

Onde:

$$E_{lm} = \xi_{0L}^{1j}a_{lmL} + \xi_{0N}^{1j}a_{lmN} + \xi_{0L}^{1h}b_{lmL} + \xi_{0N}^{1h}b_{lmN} - \xi_{sL}^{1j}c_{lmL} - \xi_{sN}^{1j}c_{lmN} \tag{4.6a}$$

$$F_{lm} = \xi_{0L}^{2j}a_{lmL} + \xi_{0N}^{2j}a_{lmN} + \xi_{0L}^{2h}b_{lmL} + \xi_{0N}^{2h}b_{lmN} - \xi_{sL}^{2j}c_{lmL} - \xi_{sN}^{2j}c_{lmN} \tag{4.6b}$$

$$G_{lm} = \xi_{0M}^{2j}a_{lmM} + \xi_{0M}^{2h}b_{lmM} - \xi_{sM}^{2j}c_{lmM} \tag{4.6c}$$

As funções $\xi_{q\alpha}^{pf}$ são agora avaliadas em $r = r_s$. Multiplicando a equação 4.5 por $\mathbf{A}_{l'}^{*m'}$, $\mathbf{B}_{l'}^{*m'}$ ou $\mathbf{C}_{l'}^{*m'}$ (HEVs conjugados) para formar produtos internos com $\mathbf{A}_l^m$, $\mathbf{B}_l^m$ e $\mathbf{C}_l^m$, logo integrando sobre uma superfície esférica unitária e aplicando as condições de ortonormalização dos HEVs, obtêm-se as seguintes relações reduzidas:

$$E_{lm} = 0 \tag{4.7a}$$

$$F_{lm} = 0 \tag{4.7b}$$

$$G_{lm} = 0 \tag{4.7c}$$

4.2 Equações de Continuidade do Campo de Tração

Os campos de tração $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ nos meios "$q=0$ e "$q=s$" em função dos HEVs são expressos por:

$$\mathbf{t}_o(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\Bigg[\left(\xi_{0L}^{4j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0L}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)A_{lmL} + \left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{0M}^{7j}\mathbf{C}_l^m\right)A_{lmM} +$$

$$\left(\xi_{0N}^{4j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0N}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)A_{lmN}\Bigg] + \Bigg[\left(\xi_{0L}^{4h}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0L}^{7h}\mathbf{B}_l^m\right)B_{lmL} +$$

$$\left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{0M}^{7h}\mathbf{C}_l^m\right)B_{lmM} + \left(\xi_{0N}^{4h}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{0N}^{7h}\mathbf{B}_l^m\right)B_{lmN}\Bigg] \tag{4.8a}$$

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{r}) = \sum_{lm}\Bigg[\left(\xi_{sL}^{4j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{sL}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)C_{lmL} + \left(\sqrt{l(l+1)}\xi_{sM}^{7j}\mathbf{C}_l^m\right)C_{lmM} +$$

$$\left(\xi_{sN}^{4j}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+1)}\xi_{sN}^{7j}\mathbf{B}_l^m\right)C_{lmN}\Bigg] \tag{4.8b}$$

Aplicando as condições de continuidade para $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ em $r=r_s$, obtém-se:

$$\sum_{lm}\left\{\tilde{E}_{lm}\mathbf{A}_l^m + \sqrt{l(l+l)}\tilde{F}_{lm}\mathbf{B}_l^m + \sqrt{l(l+l)}\tilde{G}_{lm}\mathbf{C}_l^m\right\} = 0 \tag{4.9}$$

Onde:

$$\tilde{E}_{lm} = \xi_{0L}^{4j}a_{lmL} + \xi_{0N}^{4j}a_{lmN} + \xi_{0L}^{4h}b_{lmL} + \xi_{0N}^{4h}b_{lmN} - \xi_{sL}^{4j}c_{lmL} - \xi_{sN}^{4j}c_{lmN} \tag{4.10a}$$

$$\tilde{F}_{lm} = \xi_{0L}^{7j}a_{lmL} + \xi_{0N}^{7j}a_{lmN} + \xi_{0L}^{7h}b_{lmL} + \xi_{0N}^{7h}b_{lmN} - \xi_{sL}^{7j}c_{lmL} - \xi_{sN}^{7j}c_{lmN} \tag{4.10b}$$

$$\tilde{G}_{lm} = \xi_{0M}^{7j}a_{lmM} + \xi_{0M}^{7h}a_{lmM} - \xi_{sM}^{7j}c_{lmM} \tag{4.10c}$$

Similarmente, multiplicando pelos conjugados complexos dos HEVs, integrando e aplicando as condições de orto-normalização dos HEVs na equação 4.9, obtém-se as seguintes relações reduzidas:

$$\tilde{E}_{lm} = 0 \tag{4.11a}$$

$$\tilde{F}_{lm} = 0 \tag{4.11b}$$

$$\tilde{G}_{lm} = 0 \tag{4.11c}$$

4.3. Solução das Equações de Continuidade e Conversões de Modo

Os sistemas de equações lineares 4.7a-c e 4.11a-c podem ser reescritas em função dos coeficientes $a_{lm\alpha}, b_{lm\alpha}$ e $c_{lm\alpha}$ resultando no seguinte sistema de equações:

$$\xi_{0L}^{1h} b_{lmL} + \xi_{0N}^{1h} b_{lmN} - \xi_{sL}^{1j} c_{lmL} - \xi_{sN}^{1j} c_{lmN} = -\xi_{0L}^{1j} a_{lmL} - \xi_{0N}^{1j} a_{lmN}$$

$$\xi_{0M}^{2h} b_{lmM} - \xi_{sM}^{2j} c_{lm2} = -\xi_{0M}^{2j} a_{lmM}$$

$$\xi_{0L}^{2h} b_{lmL} + \xi_{0N}^{2h} b_{lmN} - \xi_{sL}^{2j} c_{lmL} - \xi_{sN}^{2j} c_{lmN} = -\xi_{0L}^{2j} a_{lmL} - \xi_{0N}^{2j} a_{lmN}$$

$$\xi_{0L}^{4h} b_{lmL} + \xi_{0N}^{4h} b_{lmN} - \xi_{sL}^{4j} c_{lmL} - \xi_{sN}^{4j} c_{lmN} = -\xi_{0L}^{4j} a_{lmL} - \xi_{0N}^{4j} a_{lmN}$$

$$\xi_{0M}^{7h} b_{lmM} - \xi_{sM}^{7j} c_{lmM} = -\xi_{0M}^{7j} a_{lmM}$$

$$\xi_{0L}^{7h} b_{lmL} + \xi_{0N}^{7h} b_{lmN} - \xi_{sL}^{7j} c_{lmL} - \xi_{sN}^{7j} c_{lmN} = -\xi_{0L}^{7j} a_{lmL} - \xi_{0N}^{7j} a_{lmN} \tag{4.12}$$

Este sistema de equações pode ser reorganizado em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{lmL} \\ b_{lmM} \\ b_{lmN} \\ c_{lmL} \\ c_{lmM} \\ c_{lmN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{0L}^{1j} & 0 & -\xi_{0N}^{1j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{2j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{2j} & 0 & -\xi_{0N}^{2j} \\ -\xi_{0L}^{4j} & 0 & -\xi_{0N}^{4j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{7j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{7j} & 0 & -\xi_{0N}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{lmL} \\ a_{lmM} \\ a_{lmN} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Utilizando as seguintes notações para as matrizes:

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}=\begin{pmatrix} -\xi_{0L}^{1j} & 0 & -\xi_{0N}^{1j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{2j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{2j} & 0 & -\xi_{0N}^{2j} \\ -\xi_{0L}^{4j} & 0 & -\xi_{0N}^{4j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{7j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{7j} & 0 & -\xi_{0N}^{7j} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_{lmL} \\ a_{lmM} \\ a_{lmN} \end{pmatrix}=\{a_{lm\alpha}\}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_{lmL} \\ b_{lmM} \\ b_{lmN} \end{pmatrix}=\{b_{lm\alpha}\}, \quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_{lmL} \\ c_{lmM} \\ c_{lmN} \end{pmatrix}=\{c_{lm\alpha}\}$$

A equação matricial 4.13 adota a forma

$$\mathbf{m}*\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}=\mathbf{n}*\mathbf{a} \tag{4.14}$$

onde o símbolo $*$ representa o produto matricial. Da relação entre os coeficientes $a_{lm\alpha}, b_{lm\alpha}$ e $c_{lm\alpha}$, sintetizada na equação 4.14, é possível determinar as matrizes $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ em função da matriz $\mathbf{a}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}=\mathbf{m}^{-1}*\mathbf{n}*\mathbf{a} \tag{4.15}$$

fazendo $\mathbf{m}^{-1}*\mathbf{n}=\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$, sendo esta uma matriz 6x3, a relação linear entre os coeficientes $b_{lm\alpha}$ e $c_{lm\alpha}$ com $a_{lm\alpha}$ podem ser expressas pelas seguintes equações:

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}*\mathbf{a} \tag{4.16a}$$

$$\mathbf{c}=\mathbf{z}*\mathbf{a} \tag{4.16b}$$

onde às transformações lineares $\mathbf{t}=\{t_{ml\sigma m'l'\sigma'}\}$ e $\mathbf{z}=\{z_{ml\sigma m'l'\sigma'}\}$ são matrizes 3x3, e são chamadas de matrizes de dispersão e transmissão da inclusão esférica, respectivamente.

Para interpretar fisicamente as conversões de modo L, M e N na interface esférica da inclusão, a equação matricial 4.13 deve ser expressa na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \xi_{0L}^{1h} & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & -\xi_{sN}^{1j} & 0 & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & -\xi_{sN}^{2j} & 0 & 0 \\ \xi_{0L}^{4h} & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & -\xi_{sN}^{4j} & 0 & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sl}^{7j} & -\xi_{sN}^{7j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{0M}^{2h} & -\xi_{sM}^{2j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{0M}^{7h} & -\xi_{sM}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{lm1} \\ b_{lm3} \\ c_{lm1} \\ c_{lm3} \\ b_{lm2} \\ c_{lm2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{0L}^{1j} & -\xi_{0N}^{1j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{2j} & -\xi_{0N}^{2j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{4j} & -\xi_{0N}^{4j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{7j} & -\xi_{0N}^{7j} & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{0M}^{2j} \\ 0 & 0 & -\xi_{0M}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{lmL} \\ a_{lmN} \\ a_{lmM} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Assim, esta equação matricial pode ser desdobrada em duas equações matriciais separadas:

$$\begin{pmatrix} \xi_{0L}^{1h} & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & -\xi_{sN}^{1j} \\ \xi_{0L}^{2h} & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sl}^{4j} & -\xi_{sN}^{4j} \\ \xi_{0L}^{7h} & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sl}^{7j} & -\xi_{sN}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{lmL} \\ b_{lmN} \\ c_{lmL} \\ c_{lmN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{0L}^{1j} & -\xi_{0N}^{1j} \\ -\xi_{0L}^{2j} & -\xi_{0N}^{2j} \\ -\xi_{0L}^{4j} & -\xi_{0N}^{4j} \\ -\xi_{0L}^{7j} & -\xi_{0N}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{lmL} \\ a_{lmN} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

e

$$\begin{pmatrix} \xi_{0M}^{2h} & -\xi_{sM}^{2j} \\ \xi_{0M}^{7h} & -\xi_{sM}^{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{lmM} \\ c_{lmM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{0M}^{2j} \\ -\xi_{0M}^{7j} \end{pmatrix} A_{lmM} \quad (4.19)$$

A equação 4.18 mostra que uma onda espalhada L pode ser gerada de uma onda incidente L ou N, assim mesmo uma onda espalhada N pode ser gerada de uma onda incidente L ou N, este fenômeno de conversões de onda $L \leftrightarrow N$ é conhecido como conversão de modo entre as ondas L e N. Se a equação matricial 4.18 não pode ser desacoplada em duas matrizes independentes, tanto para *L* como para *N*, então diremos que os modos *L* e *N* estão acoplados. Por outro lado, a equação matricial 4.19 mostra a conversão do modo *M* em ela mesma, é dizer, não existe conversão do modo *M* a partir dos outros modos, portanto, diremos que este modo esta desacoplado.

4.4. Matriz T para uma Inclusão Esférica Simples.

Para uma inclusão esférica elástica, o campo de deslocamento espalhado, determinado pelos coeficientes $b_{lm\alpha}$, está completamente determinado pelos coeficientes $a_{lm\alpha}$ do campo de deslocamento incidente através da matriz de dispersão $\mathbf{t} = \{t_{ml\alpha m'l'\alpha'}\}$ (equação 4.16a). Portanto, a relação entre os coeficientes de expansão $\{a_{lm\alpha}\}$ e $\{b_{lm\alpha}\}$ esta dada pela relação:

$$b_{lm\alpha} = \sum_{l'm'\alpha'} t_{ml\alpha l'm'\alpha'} a_{l'm'\alpha'} \tag{4.20}$$

aqui $\mathbf{t} = \{t_{ml\alpha m'l'\alpha'}\}$ é chamada de matriz T de espalhamento Mie de uma simples inclusão esférica.

A simetria esférica do problema promove que os elementos de matriz $t_{ml\alpha m'l'\alpha'}$ sejam independentes de m e diagonais em l, com estes requisitos os elementos da matriz de espalhamento Mie para uma inclusão esférica elástica pode ser expressa por:

$$t_{ml\alpha l'm'\alpha'} = D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)\delta_{ll'} \tag{4.21}$$

Neste caso, somente cinco elementos de $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ são diferentes de zero. Por conseguinte, a matriz T reduzida do espalhamento Mie pode ser escrita como:

$$D_l(s,o) = \begin{pmatrix} D_l^{LL} & 0 & D_l^{LN} \\ 0 & D_l^{MM} & 0 \\ D_l^{NL} & 0 & D_l^{NN} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

onde os elementos de matriz $D_l^{\alpha\alpha'}$, obtidas a partir das condições de continuidade dos campos, são funções que dependem do modulo dos vetores de onda no meio hospedeiro ($k_{0\alpha}$) e na inclusão esférica ($k_{s\alpha}$) e também do raio r_s da inclusão esférica. Expressões explícitas de $D_l^{\alpha\alpha'}$ para uma inclusão esférica simples estão dadas no apêndice B.

Os sobrescritos nos coeficientes $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ são interpretados da seguinte forma: o primeiro sobrescrito, α, representa a onda espalhada e o segundo sobrescrito, α', representa a onda incidente. Por exemplo, o elemento D_l^{NL} é o coeficiente de espalhamento Mie correspondente à conversão do modo L para o modo N.

4.5. Matriz T para uma Inclusão Esférica Multi-revestida

Agora formularemos um procedimento geral para obter a matriz T do espalhamento Mie para uma inclusão esférica com n revestimentos, cuja seção transversal é mostrada na Figura 4.2.

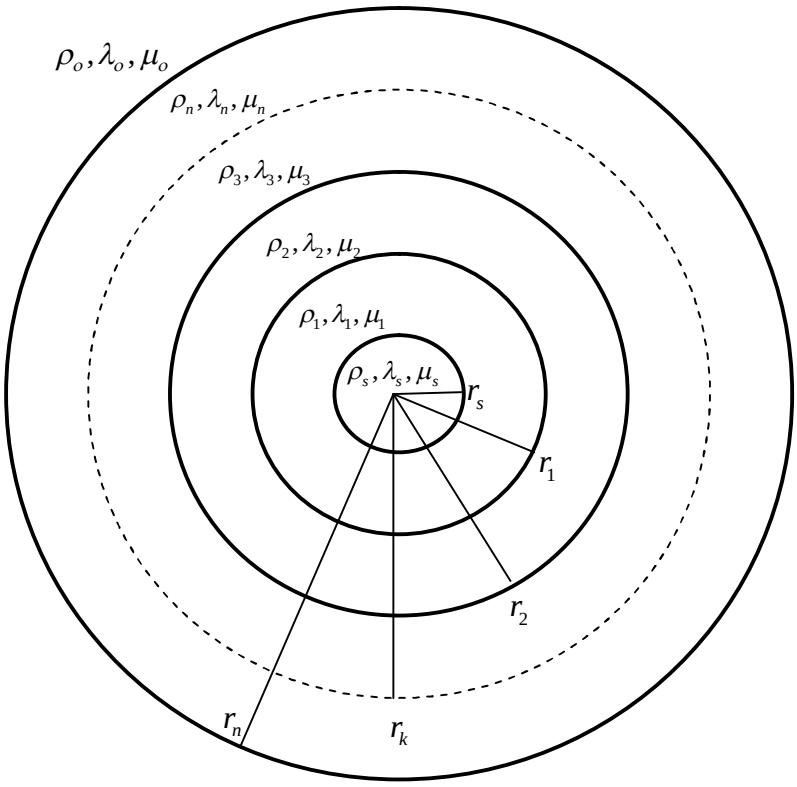

Figura 4.2. Seção transversal da inclusão esférica multi-revestida.

O raio do revestimento concêntrico k-ésimo é denotado por r_k, e cada região da esfera compósita $k = s, 1, 2, ...n$ está caracterizada pelas suas constantes elásticas: as regiões dos revestimentos estão caracterizadas pela sua densidade de massa ρ_k e constantes de Lamé λ_k e μ_k, já para a região do núcleo, os parâmetros elásticos serão representados por λ_s, ρ_s, μ_s. As constantes elásticas para o meio hospedeiro serão representadas por ρ_o, λ_o e μ_o.

Os campos de deslocamento e tração em cada região "k" da inclusão esférica compósita podem ser escritos como:

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} c_{lm\alpha}^k \mathbf{J}_{lm\alpha}^{(k)}(\mathbf{r}) + d_{lm\alpha}^k \mathbf{H}_{lm\alpha}^{(k)}(\mathbf{r}) \tag{4.23a}$$

$$\mathbf{t}_k(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} c_{lm\alpha}^k \mathbf{R}_{lm\alpha}^{(k)}(\mathbf{r}) + d_{lm\alpha}^k \mathbf{S}_{lm\alpha}^{(k)}(\mathbf{r}) \tag{4.23b}$$

e os campos de deslocamento e tração no meio de hospedeiro estão dadas pelas equações 4.1a e 4.1b anteriormente descritas.

Na região do núcleo, onde $k = s$, $d_{lm\alpha}^s = 0$ devido à singularidade das funções $\mathbf{H}_{lm\alpha}^{(s)}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{S}_{lm\alpha}^{(s)}(\mathbf{r})$ no ponto $r = 0$. As condições de continuidade em cada interface esférica $r = r_1, r_2, ..., r_n$ requerem que os campos de deslocamento e tração sejam continuas em cada superfície $r = r_k$. Portanto, para todo $k = 1, 2, ..., n$, devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r})\big|_{r=r_k} = \mathbf{u}_{k+1}(\mathbf{r})\big|_{r=r_k} \tag{4.24a}$$

$$\mathbf{t}_k(\mathbf{r})\big|_{r=r_k} = \mathbf{t}_{k+1}(\mathbf{r})\big|_{r=r_k} \tag{4.24b}$$

Na interface externa da esfera revestida deve ser satisfeita a seguinte condição: $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_o(\mathbf{r})$ e $\mathbf{t}_{n+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_o(\mathbf{r})$, e na interface do núcleo, deve ser satisfeita a seguinte condição: $\mathbf{u}_s(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} = \mathbf{u}_1(\mathbf{r})\big|_{r=r_s}$ e $\mathbf{t}_s(\mathbf{r})\big|_{r=r_s} = \mathbf{t}_1(\mathbf{r})\big|_{r=r_s}$.

As condições de continuidade, equações 4.24a-b, conduzem a um sistema de $6(n+1)$ equações lineares envolvendo os coeficientes $a_{lm\alpha}$, $b_{lm\alpha}$, $c^{s}_{lm\alpha}$, $c^{1}_{lm\alpha}$, $c^{2}_{lm\alpha}$,..., $c^{n}_{lm\alpha}$ e $d^{1}_{lm\alpha}$, $d^{2}_{lm\alpha}$, $d^{3}_{lm\alpha}$,..., $d^{n}_{lm\alpha}$. Após eliminar as constantes $c^{k}_{lm\alpha}$ e $d^{k}_{lm\alpha}$, uma relação linear pode ser encontrada para os coeficientes $a_{lm\alpha}$ e $b_{lm\alpha}$,

$$b_{lm\alpha} = \sum_{l'm'\alpha'} t'_{ml\alpha l'm'\alpha'} a_{l'm'\alpha'} \tag{4.25}$$

onde $\mathbf{t}' = \{t'_{ml\sigma m'l'\sigma'}\}$ é a matriz T do espalhamento Mie para à inclusão esférica multi-revestida. Esta matriz depende do módulo dos vetores de onda no meio hospedeiro, núcleo esférico e regiões de revestimento. De forma semelhante ao problema de espalhamento por uma inclusão esférica simples, a matriz T de espalhamento Mie da inclusão esférica multi-revestida é independente de m, diagonal em l, e somente cinco coeficientes de espalhamento são diferentes de zero, portanto, a matriz T Mie reduzida toma a forma:

$$D_l(k,o) = \begin{pmatrix} D_l^{LL} & 0 & D_l^{LN} \\ 0 & D_l^{MM} & 0 \\ D_l^{NL} & 0 & D_l^{NN} \end{pmatrix}, \text{ para } k = s,1,2,...n \tag{4.26}$$

com $D_l^{\alpha\alpha'} = D_l^{\alpha\alpha'}(k,o)$. Devido à extensão e complexidade matemática destes coeficientes de espalhamento, expressões explícitas só para $D_l^{\sigma\sigma'}(1,o)$ são dados no apêndice C.

Capítulo 5

Teoria do meio Efetivo

A TME em metamateriais acústicos/elásticos é um modelo físico que descreve as propriedades macroscópicas do metamaterial em base às propriedades elásticas (acústicas) e configuração geométrica da sua microestrutura. Baseado na "teoria" do espalhamento Mie para uma inclusão esférica multi-revestida, no presente capítulo é apresentado o desenvolvimento de um formalismo TME em três dimensões para metamateriais elásticos e acústicos no limite de comprimento de onda longa e para baixas frações de preenchimento. Nessa aproximação a anisotropia das estruturas periódicas pode ser negligenciada. Os metamateriais estudados nesta dissertação estão compostos de inclusões esféricas distribuídas randomicamente numa matriz hospedeira. A estrutura da inclusão e da matriz hospedeira é assumida como sendo homogêneos e isotrópicos. Neste sentido, o modelo desenvolvido proporciona os parâmetros efetivos constitutivos dos metamateriais a partir da matriz de espalhamento Mie $D_l^{LL}(k,o)$ da inclusão esférica multi-revestida.

5.1 Campos Incidentes e Espalhados.

Consideremos uma inclusão esférica num meio homogêneo e isotrópico que se estende no infinito. Os campos de deslocamento no meio hospedeiro e na inclusão esférica estão dados pelas equações 4.1a e 4.2a, respectivamente. Quando os coeficientes $b_{lm\alpha}$ do campo espalhado são zeros, o vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ representa uma onda incidente vinda do infinito, mas quando os coeficientes do campo incidente são zeros, $a_{lm\sigma}=0$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ representa uma onda espalhada. Assim, o vetor de deslocamento total no meio hospedeiro infinito está composto de uma onda incidente e uma onda espalhada, expressas por:

$$\mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r}) = \sum_{lm\alpha} a_{lm\alpha} \mathbf{J}_{lm\alpha} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{u}_{esp}(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} b_{lm\sigma} \mathbf{H}_{lm\sigma} \tag{5.2}$$

Uma onda elástica plana que se propaga num meio infinito está bem definida pelo seu número de onda $\mathbf{k}$ e sua amplitude $\mathbf{u}_o(\mathbf{r})$ que em geral e complexa e tem a forma funcional:

$$\mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_o(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{u}_o(\mathbf{k}) = u_o(\mathbf{k})\mathbf{e}$. Aqui $\mathbf{e}$ é um vetor unitário que representa a polarização da onda elástica. Para o caso de uma onda plana longitudinal (acústica) $\mathbf{k} = k_L \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ com $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$, já para o caso de uma onda plana transversal podemos escrever $\mathbf{k} = k_T \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ com $\mathbf{e} \perp \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$. Para a onda plana a equação 5.3 pode ser escrita como

$$\mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_o(\mathbf{k}) \sum_{lm} 4\pi i^l (-1)^m Y_{l-m}(\mathbf{k})\, j_l(kr) Y_{lm}(\mathbf{r}) \tag{5.4}$$

Assim igualando as Equações 5.1 e 5.4, os coeficientes da onda incidente $a_{lm\alpha}$ podem ser expressos como [14]:

$$a_{lm\alpha} = \mathbf{A}_{lm}^{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_o(\mathbf{k}) \tag{5.5}$$

onde

$$\mathbf{A}_{lm}^{L}(\mathbf{k}) = 4\pi i^{l-1} (-1)^m Y_{l-m}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \tag{5.6a}$$

$$\mathbf{A}_{lm}^{M}(\mathbf{k}) = 4\pi i^{l+1} (-1)^{m+1} \Big\{ \Big[\beta_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\mathbf{k}) + m sen\theta Y_l^{-m}(\mathbf{k}) + \beta_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\mathbf{k}) \Big] \mathbf{e}_\theta$$

$$+ i \Big[\beta_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\mathbf{k}) - \beta_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\mathbf{k}) \Big] \mathbf{e}_\varphi \Big\} \tag{5.6b}$$

$$\mathbf{A}_{lm}^{N}(\mathbf{k}) = 4\pi i^l (-1)^{m+1} \Big\{ i \Big[\beta_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\mathbf{k}) - \beta_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\mathbf{k}) \Big] \mathbf{e}_\theta - \Big[\beta_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\mathbf{k})$$

$$+msen\theta Y_l^{-m}\left(\mathbf{k}\right)+\beta_l^{-m}\cos\theta e^{-i\varphi}Y_l^{-m+1}\left(\mathbf{k}\right)\Big]\mathbf{e}_\varphi\Big\} \tag{5.6c}$$

Nestas equações $\beta_l^m=\frac{1}{2}\left[\left(l-m\right)\left(l+m+1\right)\right]^{1/2}$, θ e ϕ denotam as variáveis angulares do vetor $\mathbf{k}$ no sistema de coordenadas esféricas.

Com a presença da inclusão esférica no meio infinito, os coeficientes da onda espalhada $b_{lm\alpha}$ estão agora relacionados linearmente com a matriz de espalhamento Mie através da equação 4.20 do capítulo 4. Portanto, o campo espalhado está completamente determinado pelo campo incidente.

5.2. Teoria do Espalhamento Múltiplo: Aproximação de primeira ordem

Consideremos um material compósito de forma arbitraria composto de $\mathbf{N}$ inclusões esféricas (as inclusões esféricas podem ser multi-revestidas) aleatoriamente distribuídas e situadas nas posições $\mathbf{R}_i$ de uma matriz hospedeira infinita. A Figura 5.1 mostra uma representação esquemática do material compósito onde são indicadas as coordenadas de posição das diferentes esferas em relação à referência do laboratório. Importante mencionar que o raio de cada inclusão esférica é representado por r_i.

No modelo da TEM [13], a onda incidente $\mathbf{u}_o\left(\mathbf{r}_i\right)$ sob a $i-ésima$ inclusão esférica é a contribuição de uma onda plana incidente externa $\mathbf{u}_{inc}\left(\mathbf{r}_i\right)=\sum a_{lm\alpha}\mathbf{J}_{lm\alpha}^{(o)}\left(\mathbf{r}_i\right)$ e das ondas espalhadas pelas outras inclusões esféricas $\sum_{j\neq i}\mathbf{u}_{esp}\left(\mathbf{r}_j\right)$.

Considerando que cada inclusão esférica pode ser vista como uma fonte pontual pulsante secundaria, a onda espalhada pela $j-ésima$ inclusão esférica pode ser expressa por:

$$\mathbf{u}_{esp}\left(\mathbf{r}_j\right)=\sum_{lm\alpha}b_{lm\alpha}^{j}\mathbf{H}_{lm\alpha}^{(o)}\left(\mathbf{r}_j\right) \tag{5.7}$$

onde $b_{lm\alpha}^{j}$ são os coeficientes de espalhamento Mie da $j-ésima$ inclusão esférica.

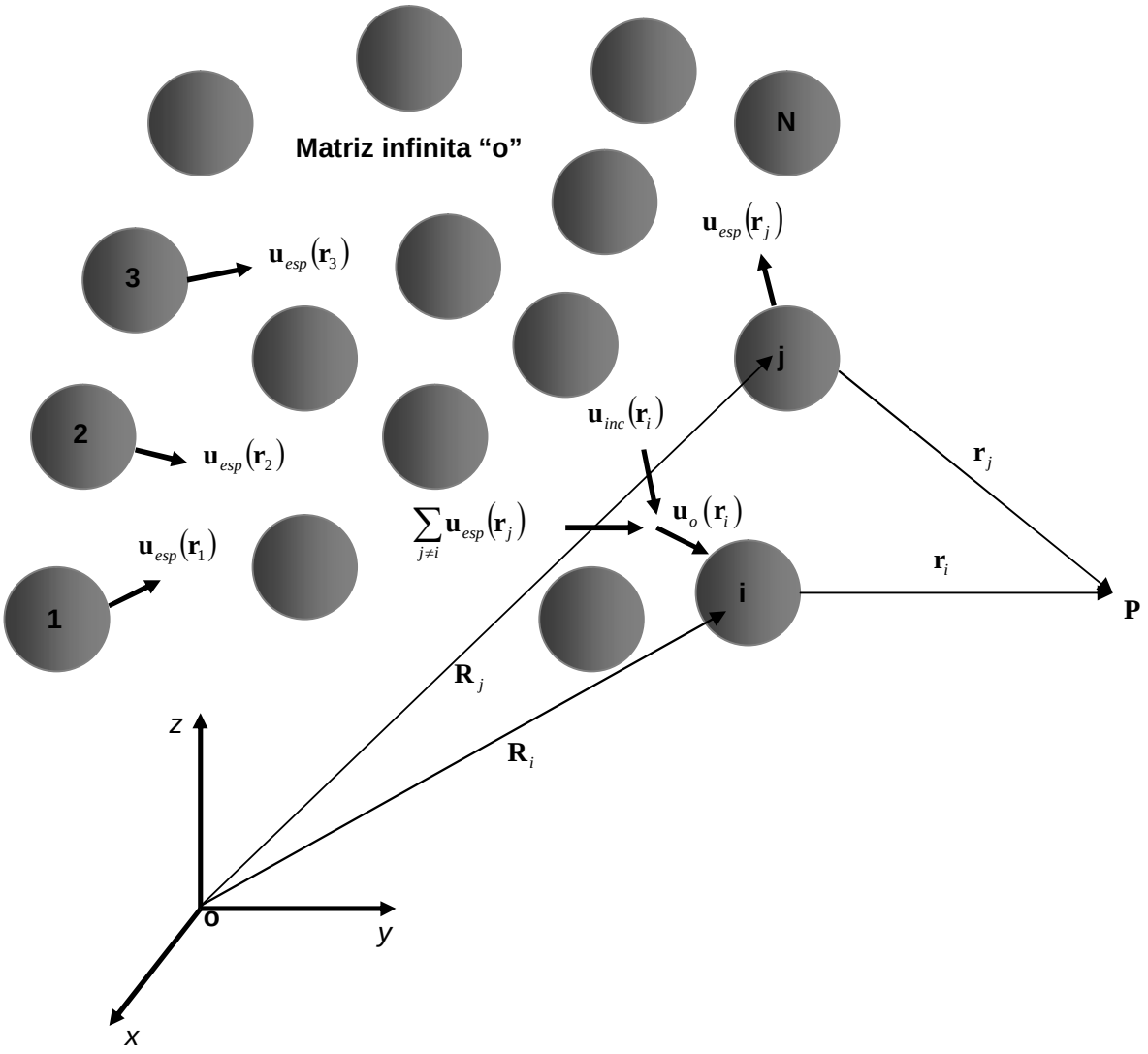

Figura 5.1. Representação esquemática do processo de espalhamento múltiplo.

Assim a onda incidente total sob a $i-ésima$ inclusão esférica considerando todos os espalhamentos de primeira ordem pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{r}_i) = \mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j\neq i}\sum_{lm\alpha} b_{lm\alpha}^{j}\mathbf{H}_{lm\alpha}^{(o)}(\mathbf{r}_j) \tag{5.8}$$

Os vetores de posição $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_j$ correspondem às posições da $i-ésima$ e $j-ésima$ esferas em relação a um ponto comum de observação. Os vetores $\mathbf{R}_i$ e $\mathbf{R}_j$

denotam as posições das inclusões esféricas i e j com respeito a um sistema de referencia **O.** Na Figura 5.1 pode também ser observado que $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$.

A relação entre os coeficientes $a_{lm\sigma}$ e $b^j_{lm\alpha}$ esta dada pela matriz T de espalhamento Mie de cada inclusão esférica $\mathbf{t}^j = \left\{ t^j_{lm\alpha l'm'\alpha'} \right\}$, através da equação:

$$b^j_{lm\alpha} = \sum_{l'm'\alpha'} t^j_{lm\alpha l'm'\alpha'} a_{l'm'\alpha'} \tag{5.9}$$

com $t^j_{lm\alpha l'm'\alpha'} = D^{\alpha\alpha'}_{l,j}(k,o)\delta_{ll'}$. Neste formalismo as inclusões podem ser esferas multi-revestidas.

5.3. Teoria do meio efetivo no limite do comprimento de onda longa.

Neste formalismo, o material compósito que contem $\mathbf{N}$ inclusões esféricas randomicamente distribuídas é considerado com sendo uma esfera de volume finito $\mathbf{V}$ (com raio $r_{\mathbf{V}}$), como mostrado na Figura 5.2. Considera-se que o centro da esfera macroscópica do material compósito esta situado no ponto $\mathbf{R}$**,** e a fração de preenchimento do compósito é dado por $p = \frac{1}{r_{\mathbf{V}}^3} \sum N_i r_i^3$, sendo N_i o número de inclusões esféricas com raio r_i. É importante mencionar que a simetria esférica de $\mathbf{V}$ foi escolhida com objetivo de utilizar os modelos de espalhamento Mie para uma esfera.

Considerando a esfera maior que contem as inclusões esféricas pequenas como uma inclusão esférica abstrata (ou inclusão esférica efetiva), o campo de deslocamento observado num ponto $\mathbf{P}$ fora do volume $\mathbf{V}$ pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r}) + \sum_{lm\alpha} B_{lm\alpha} \mathbf{H}^{(o)}_{lm\alpha}(\mathbf{r}) \tag{5.10}$$

onde $\mathbf{u}_{inc}(\mathbf{r})$ é a onda incidente sobre a inclusão esférica efetiva e $B_{lm\sigma}$ define os coeficientes de espalhamento Mie da inclusão esférica efetiva que têm as mesmas

propriedades de espalhamento por uma esfera individual formulada nos capítulos anteriores.

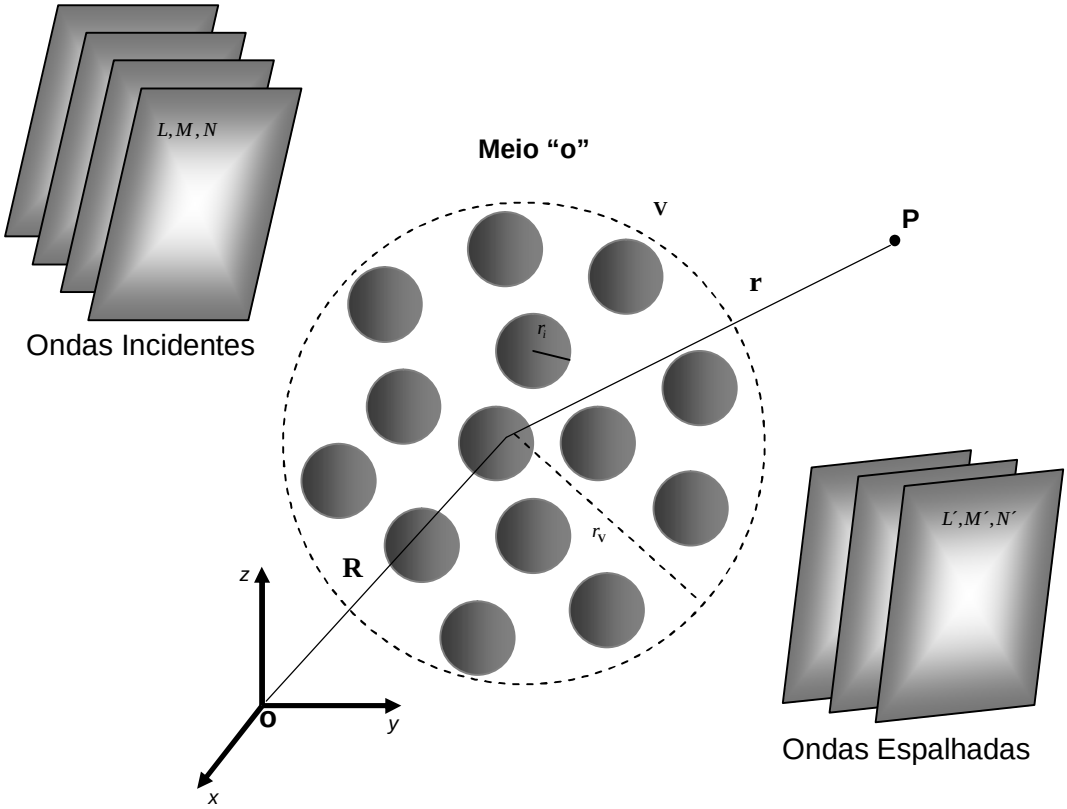

Figura 5.2. Representação esquemática do processo de espalhamento por um conjunto de inclusões esféricas.

Assim a partir das equações 5.8 e 5.10 se verifica que:

$$B_{lm\alpha} \approx \sum_j b_{lm\alpha}^j \tag{5.11}$$

A equação 5.11 indica que os coeficientes de espalhamento Mie da esfera efetiva são obtidos a partir da contribuição dos coeficientes de espalhamento Mie de cada uma das inclusões esférica microscópicas aleatoriamente distribuídas.

Portanto, o conjunto de inclusões esféricas pode ser aproximado por uma esfera efetiva de raio r_V, o que permite que o problema do meio efetivo seja tratado de igual forma do que problema de espalhamento de uma esfera simples. Nesta

aproximação os parâmetros elásticos da esfera efetiva serão denotados por λ_e, ρ_e, μ_e. Com isso, os campos de deslocamento dentro da esfera efetiva $\mathbf{u}_o(\mathbf{r})$ e no meio hospedeiro $\mathbf{u}_e(\mathbf{r})$, podem ser expressos por:

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} a_{lm\sigma} \mathbf{J}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r}) + \sum_{lm\sigma} B_{lm\sigma} \mathbf{H}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r}) \tag{5.12a}$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} C_{lm\sigma} \mathbf{J}_{lm\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}) \tag{5.12b}$$

e os campos de tração são expressos por:

$$\mathbf{t}_o(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} a_{lm\sigma} \mathbf{R}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r}) + \sum_{lm\sigma} B_{lm\sigma} \mathbf{S}_{lm\sigma}^{(o)}(\mathbf{r}) \tag{5.13a}$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} C_{lm\sigma} \mathbf{R}_{lm\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}) \tag{5.13b}$$

A condição de continuidade na interface da inclusão esférica efetiva implica que os campos de deslocamento e tração sejam continuas em $r = r_{\mathrm{V}}$, obtendo assim à relação entre os coeficientes $a_{lm\sigma}$ e $B_{lm\sigma}$, dado pela matriz T efetiva de espalhamento Mie $\mathbf{T}^e = \left\{ T_{lm\sigma l'm'\sigma'}^e \right\}$ para a inclusão esférica abstrata,

$$B_{lm\alpha} \approx \sum_{l'm'\alpha'} T_{lm\alpha l'm'\alpha'}^e a_{l'm'\alpha'} \tag{5.14}$$

A simetria esférica implica que $\mathbf{T}^e$ é independente de m, e diagonal em l, resultando na seguinte expressão para a matriz T:

$$T_{lm\sigma l'm'\sigma'}^e = D_l^{\alpha\alpha'}(e,o)\delta_{ll'} \tag{5.15}$$

onde $D_l^{\alpha\alpha'}(e,o)$ são os coeficientes de espalhamento Mie da esfera efetiva e são semelhantes aos coeficientes $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ para uma inclusão esférica simples. Os elementos de matriz $D_l^{\alpha\alpha'}(e,o)$ podem ser obtidos utilizando-se as mesmas expressões para os $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$, mais neste caso será necessária à substituição dos

parâmetros $\lambda_s, \rho_s, \mu_s, k_{Ls}, k_{Ts}, r_s$ em $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ por os parâmetros $\lambda_e, \rho_e, \mu_e, k_{Le}, k_{Te}$, r_e, respectivamente. Aqui, k_{Le} e k_{Te} são os módulos dos vetores de onda longitudinal e transversal na esfera efetiva cujo raio efetivo é dado por $r_e = r_o / \sqrt[3]{p}$ quando as inclusões esféricas microscópicas apresentam o mesmo raio $r_i = r_o$.

Das equações 5.9, 5.11, 5.14 e 5.15 pode ser demonstrado que a relação entre os coeficientes de espalhamento da T-matriz efetiva, $D_l^{\alpha\alpha'}(e,o)$, e os coeficientes de espalhamento Mie individual da T-matriz das inclusões esféricas está dada por:

$$D_l^{\alpha\alpha'}(e,o) \approx \sum_{j=1}^{\mathbf{N}} D_{l,j}^{\alpha\alpha'}(k,o), \text{ para } k = 1,2,...,n \qquad (5.16)$$

onde o sobrescrito j percorre os todas as inclusões esféricas, e $D_{l,j}^{\alpha\alpha'}(k,o)$ representa os coeficientes de espalhamento Mie da inclusão esférica $j-ésima$ com k revestimentos. Esta última expressão resume o modelo da TME em três dimensões.

Agora faremos duas diferentes aproximações da equação 5.16 para obter dois modelos de TMEs. Antes disso, é necessário diferenciar as duas aproximações: o “limite quase estático” e o “limite de comprimento de onda longa”. Adotando as seguintes definições dadas na referencia [74,104], o limite quase estático requer que os argumentos $k_{\alpha o} r_o$, $k_{\alpha s} r_s$ e $k_{e\alpha} r_e$ sejam muito maiores do que a unidade, no entanto que o limite de comprimento de onda longa requer só requer que $k_{\alpha o} r_o$ e $k_{e\alpha} r_e$ sejam muito maiores do que a unidade. A nova definição desta última aproximação foi devido à característica ressonante das unidades estruturais, isto é, na ressonância, o comprimento de onda dentro da inclusão esférica pode ser comparável ou até menor ao tamanho da inclusão, embora o cumprimento de onda no meio hospedeiro e efetivo permanece muito maior do que a distância média entre as partículas. Portanto, em um metamaterial cujas unidades estruturais são ressonantes será suficiente considerar esta definição de comprimento de onda longa.

Assim, no limite de comprimento de onda longa $\lim_{\lambda>r_e} D_l^{\alpha\alpha'}(e,o)$ as seguintes equações do meio efetivo para metamateriais cujo substrato é sólido (sólido-base) podem ser expressas por:

$$\frac{k_e(f)-k_o}{3k_e(f)+4\mu_o}=\frac{ipD_o^{LL}(k,o)}{(k_{Lo}r_k)^3} \tag{5.17a}$$

$$\frac{\rho_e(f)-\rho_o}{\rho_o}=\frac{9pD_1^{LL}(k,o)}{i(k_{Lo}r_k)^3} \tag{5.17b}$$

$$\frac{4\mu_o[\mu_e(f)-\mu_o]}{6[\mu_e(f)](\kappa_o+2\mu_o)+\mu_o(9\kappa_o+8\mu_o)}=\frac{3ipD_2^{LL}(k,o)}{(k_{Lo}r_k)^3} \tag{5.17c}$$

onde $D_o^{LL}(k,o)$, $D_1^{LL}(k,o)$ e $D_2^{LL}(k,o)$ são os elementos de matriz da conversão de modo LL, correspondentes as ressonâncias monopolar, dipolar e quadrupolar, respectivamente, $\kappa_e=\lambda_e-4\mu_e/3$ é o módulo volumétrico efetivo do ME e p é a fração de preenchimento, esta fração tem que ser pequeno (p<0,3) para que a anisotropia da estrutura periódica seja desprezível [105].

Por outro lado, para metamateriais cujo substrato é um fluido (fluido-base) não viscoso as equações do meio efetivo estão dados por:

$$\frac{k_e(f)-k_o}{3k_e(f)}=\frac{ipD_o^{LL}(k,o)}{(k_{Lo}r_k)^3} \tag{5.18a}$$

$$\frac{\rho_e(f)-\rho_o}{2\rho_e(f)+\rho_o}=\frac{3pD_1^{LL}(k,o)}{i(k_{Lo}r_k)^3} \tag{5.18b}$$

A partir destes parâmetros elásticos (acústicos) efetivos é possível agora calcular os índices de refração efetivos para as ondas longitudinais, η_{eL}, e transversais, η_{eT}, dos metamateriais considerados:

$$\eta_{eL}^2=\frac{E_o}{E_e}\times\frac{\rho_e}{\rho_o} \tag{5.19a}$$

$$\eta_{eT}^{2} = \frac{\mu_o}{\mu_e} \times \frac{\rho_e}{\rho_o} \tag{5.19b}$$

Assim mesmo podem ser determinadas as curvas de dispersão através das seguintes equações:

$$K_{eL} = \frac{2f}{c_{Lo}} \eta_{eL} \tag{5.20a}$$

$$K_{eT} = \frac{2f}{c_{To}} \eta_{eT} \tag{5.20b}$$

onde o parâmetro $E = \kappa + 4\mu/3 = \lambda + 2\mu/3$ representa uma constante que governa a propagação das ondas longitudinais. Nas equações de dispersão 5.20a-b o parâmetro f representa à frequência em unidades de kHz. O procedimento para se obter as equações 5.17a-c e 5.18a-b esta descrita detalhadamente no Apêndice D.

É interessante ressaltar que κ_e, ρ_e e μ_e são independente determinados a partir dos coeficientes $D_l^{LL}(k,o)$ correspondentes às inclusões esféricas quando $l = 0$, 1, e 2, respectivamente. Um ponto que deve ser mencionado é que $D_l^{LL}(k,o)$ em geral é um número complexo e nos caso estudados no presente trabalho, a parte real é muitas ordens de grandeza maior que a parte imaginaria de tal forma que na maioria dos casos a parte imaginaria pode ser negligenciada.

Parte II

Resultados Numéricos e Discussões

Capítulo 6

Ressonâncias Mie das Unidades Estruturais

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos correspondentes à matriz T do espalhamento Mie de inclusões esféricas simples, inclusões esféricas revestidas e duplamente revestidas. Os resultados baseiam-se na solução da equação 4.26. Para interpretar os resultados os elementos de matriz $D_l^{\alpha\alpha'}$ são analisados em função da frequência da onda incidente.

As Figuras 6.1a-c mostram os diagramas esquemáticos das unidades estruturais básicas utilizadas neste trabalho. As letras U, X, Y e Z representam os diversos materiais sólidos e elásticos utilizados nos cálculos numéricos. Por exemplo, a Figura 6.1a mostra uma inclusão esférica simples de material Y incorporada num meio infinito X. Já na Figura 6.1b esta mostrada uma inclusão esférica de material Y revestida com material Z e incorporada num meio infinito X. Por último, a Figura 6.1c mostra uma inclusão esférica U duplamente revestida com materiais Y e Z, incorporada num meio infinito X.

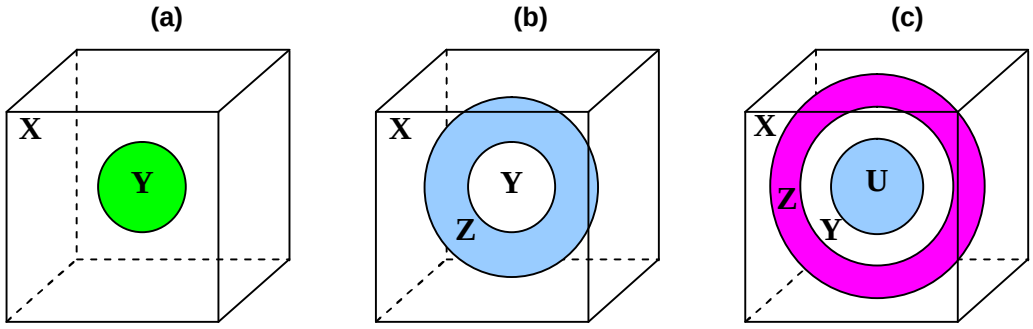

Figura 6.1. Diagramas esquemáticos das unidades estruturais básicas. (a) simples inclusão esférica, (b) inclusão esférica revestida e (c) inclusão esférica duplamente revestida. U, X, Y e Z representam os diversos materiais.

A Tabela 6.1 mostra os parâmetros elásticos (densidade de massa, ρ, e constantes de Lamé, λ e μ) dos materiais utilizados na construção das unidades estruturais, assim como do substrato. É importante mencionar que os materiais utilizados são materiais que podem ser adquiridos comercialmente, é dizer, com estes materiais será possível a fabricação real de metamateriais acústicos ou elásticos. Nesta Tabela, o termo "Borracha D" deve ser entendido como um tipo de Borracha Dura, enquanto que "Borracha M" como um tipo de Borracha Macia.

Tabela 6.1. Parâmetros Elásticos dos Materiais Utilizados

Material (U,X,Y,Z)	$\rho\left(kg/m^3\right)$	$\lambda\left(N/m^2\right)$	$\mu\left(N/m^2\right)$	$c_L\left(m/s\right)$	$c_T\left(m/s\right)$	**Referência**
Platina	$21,45\times10^3$	$1,89\times10^{11}$	$6,1\times10^{10}$	3808	1686	[106]
Ouro	$19,5\times10^3$	$1,6\times10^{11}$	$2,99\times10^{10}$	3357	1238	[16]
Chumbo	$11,6\times10^3$	$4,23\times10^{10}$	$1,49\times10^{10}$	2493	1133	[48]
Aço	$7,84\times10^3$	$10,02\times10^{10}$	$8,29\times10^{10}$	5825	3252	[87]
Epóxi	$1,18\times10^3$	$4,43\times10^9$	$1,59\times10^9$	2540	1160	[16]
Borracha D	$1,3\times10^3$	$2,19\times10^9$	$9,98\times10^6$	1304	88	[16]
Borracha M	$1,3\times10^3$	6×10^5	4×10^4	23	6	[74]
Poliestireno	115	6×10^6	3×10^6	323	162	[28]
Água	$1,0\times10^3$	$2,22\times10^9$	0	1490	0	[17]
Ar	$1,23$	$1,42\times10^5$	0	340	0	[17]

6.1 Inclusão Esférica Simples

Nesta parte do trabalho analisaremos o comportamento de um sistema composto de uma esfera de borracha macia (EBM) incorporada numa matriz infinita de epóxi (sistema mais simples). No texto chamaremos de sistema “sólido-base” ao sistema onde a matriz hospedeira (substrato) seja um sólido.

A borracha M possui velocidades de onda longitudinais e transversais muito pequenas em relação ao epóxi (contraste alto entre materiais), assim o cumprimento de onda dentro da EBM pode ser comparável ou até mesmo muito menor do que o diâmetro da esfera de borracha. Neste caso, a ressonância Mie pode acontecer devido ao alto contraste de velocidade entre a borracha M e o epóxi.

A Figura 6.2a mostra o diagrama esquemático da EBM incorporada em epóxi, onde “**E**” representa o epóxi e “**S**” representa a borracha M. As Figuras 6.2b-d mostram as ressonâncias Mie para a EBM correspondente à conversão do modo LL durante o processo de espalhamento. No projeto desta EBM foi considerado um raio de 10 mm e constantes elásticas de $\rho_1 = 1{,}3\times10^3 kg/m^3$, $\lambda_1 = 6\times10^5 N/m^2$, $\mu_1 = 4\times10^4 N/m^2$ para a borracha M, e $\rho_o = 1{,}18\times10^3 kg/m^3$, $\lambda_o = 4{,}43\times10^9 N/m^2$, $\mu_o = 1{,}59\times10^9 N/m^2$ para o epóxi. Aqui, λ e μ são as constantes de Lamé, os quais estão relacionados com o módulo volumétrico κ através da relação $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ e ρ é a densidade de massa do material. O espectro dos coeficientes D_o^{LL}, D_1^{LL} e D_2^{LL} correspondem aos modos monopolar (figura 6.2b), dipolar (figura 6.2c) e quadrupolar (figura 6.2d), respectivamente. Nestes espectros, as frequências de ressonância estão relacionadas com os picos dos coeficientes $\left|D_l^{LL}\right|$ para $l = 0, 1,$ e 2. Nas Figuras 6.2b-c observa-se que os faixas ressonantes monopolar ($l = 0$), dipolar ($l = 1$) e quadrupolar ($l = 2$) são muito estreitos. É importante mencionar que o comportamento espectral dos coeficientes $D_l^{\alpha\alpha'}$ correspondentes à conversão de modo $\alpha\alpha'$ ($\alpha\alpha' = M, N$) apresentam semelhantes características aos dos espectros das Figuras 6.2b-d, com faixas de frequência ressonantes estreitas, mas estes não são mostrados neste trabalho. WU *et al.* [74] reportaram que a faixa estreita dos picos ressonantes se deve à baixa intensidade

dos modos ressonantes na EBM em meio de epóxi. Portanto, para intensificar estes modos de vibração, será preferível em principio mudar o epóxi por água e/ou a borracha M por ar. A seguir são analisados estes casos.

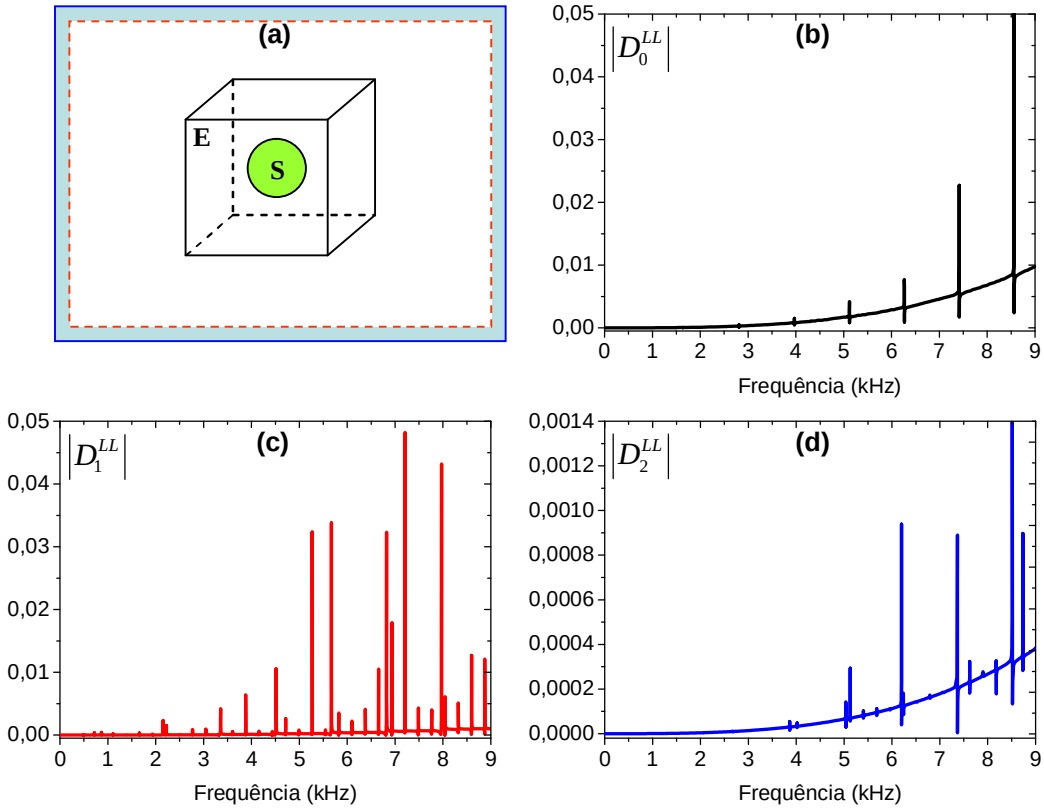

Figura 6.2. Elementos de matriz (LL) para uma simples EBM incorporada em epóxi: (a) Diagrama esquemático da EBM em epóxi, "**E**" representa o epóxi e "**S**" para a borracha M. (b) Ressonâncias Mie monopolar, $l = 0$, (c) Ressonâncias Mie dipolar, $l = 1$, e (c) Ressonâncias Mie quadrupolar, $l = 2$.

Para o projeto do sistema de uma bolha de ar "**A**" (BA) em água "**W**", foram considerados os seguintes parâmetros geométricos e elásticos: raio da BA de 1mm com $\rho_1 = 1{,}23 kg/m^3$, $\lambda_1 = 1{,}42 \times 10^5 N/m^2$, $\mu_1 \approx 0 N/m^2$ para o ar, e $\rho_0 = 1{,}0 \times 10^3 kg/m^3$, $\lambda_0 = 2{,}22 \times 10^9 N/m^2$, $\mu_0 \approx 0 N/m^2$ para a água. O comportamento espectral do coeficiente D_o^{LL} para este sistema é mostrado na figura 6.3a. Nesta figura observa-se que na faixa de frequência de 0 até 9 kHz existe apenas um pico de ressonância situada em 3,3kHz, correspondente à

componente monopolar ($l = 0$) da conversão de modo LL. Este modo ressonante é induzido pelo elevado contraste de velocidade da onda acústica na água e no ar. Nos outros elementos da matriz de espalhamento Mie da componente monopolar, $D_0^{\alpha\alpha'}$, não foram observados picos de ressonâncias para conversões de modo $\alpha\alpha'$ ($\alpha\alpha' = M, N$). Portanto, a água que atua como matriz hospedeira da BA só suporta ondas longitudinais o que esta em concordância com a definição de um "fluido ideal" (fluido com viscosidade zero), onde só propagam-se ondas longitudinais. Em geral, um sistema onde a matriz hospedeira seja um fluido será chamado de sistema "fluido-base" independente do tipo de material da inclusão esférica. Por outro lado, encontrou-se também que os elementos de matriz $D_1^{\alpha\alpha'}$ e $D_2^{\alpha\alpha'}$ para $\alpha\alpha' = L, M, N$ relacionadas às componentes dipolar ($l = 1$) e quadrupolar ($l = 2$) da BA, não apresentaram picos de ressonância, devido à baixa densidade do ar em relação à água e ao módulo de cisalhamento zero da água ($\mu_0 \approx 0$). Em conclusão, a aparição da componente monopolar das ondas elásticas foi devida ao elevado contraste do módulo volumétrico entre a água e o ar (quatro ordens de grandeza diferentes) (Tabela 6.1).

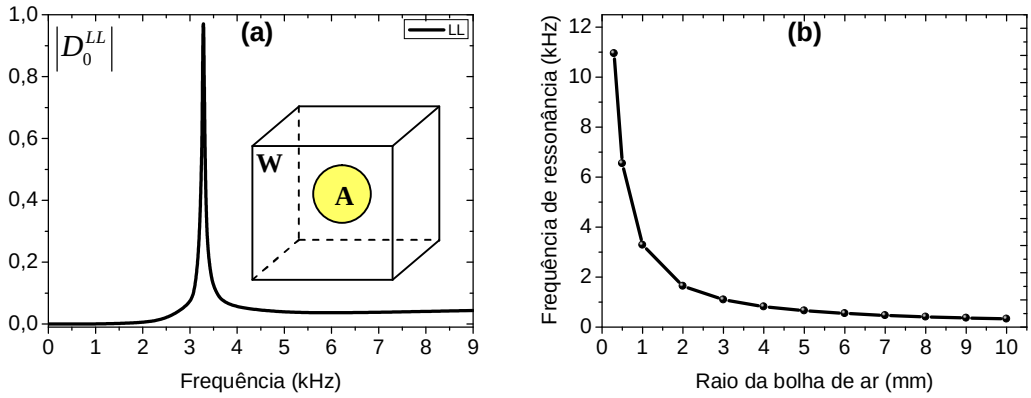

Figure 6.3. (a) Ressonância Mie monopolar $(l = 0)$ para uma BA em água. O interior da Figura mostra esquematicamente a BA em água, "**A**" representa o ar e "**W**" a água. (b) Dependência da frequência de ressonância com o raio da BA.

Adicionalmente foram realizados cálculos do sistema BA em água mudando o raio da esfera de BA. Na Figura 6.3b é mostrada o comportamento da frequência de ressonância em relação ao raio da BA. Nesta Figura observa-se que a

frequência de ressonância decresce em forma exponencial na medida em que o raio da inclusão cresce. O decrescimento da frequência é rápida na região de raios de BA entre 0,5 e 3 nm, e acima de 3 mm o decrescimento é lento mantendo-se o perfil do pico ressonante praticamente invariável.

No segundo caso, analisaremos o sistema constituído por uma esfera de borracha macia (EBM) de 2 mm de raio em água. A Figura 6.4a mostra o espectro do módulo dos coeficientes D_l^{LL} correspondente aos modos monopolar $(l=0)$ e dipolar $(l=1)$ do sistema EBM em água. No interior desta figura mostra-se esquematicamente a EBM no meio água, onde "**S**" denota a esfera de borracha M e "**W**" denota o meio hospedeiro água. O objetivo de estudar este sistema foi com a finalidade de identificar o efeito do aumento da densidade de massa da inclusão esférica (densidade da borracha M e maior do que o ar) nos processo ressonantes dos coeficientes D_l^{LL}. A Figura 6.4a mostra que o sistema apresenta ressonâncias para D_0^{LL} e D_1^{LL} correspondentes aos elementos de matriz das componentes monopolar e dipolar, respectivamente, na conversão de modo LL.

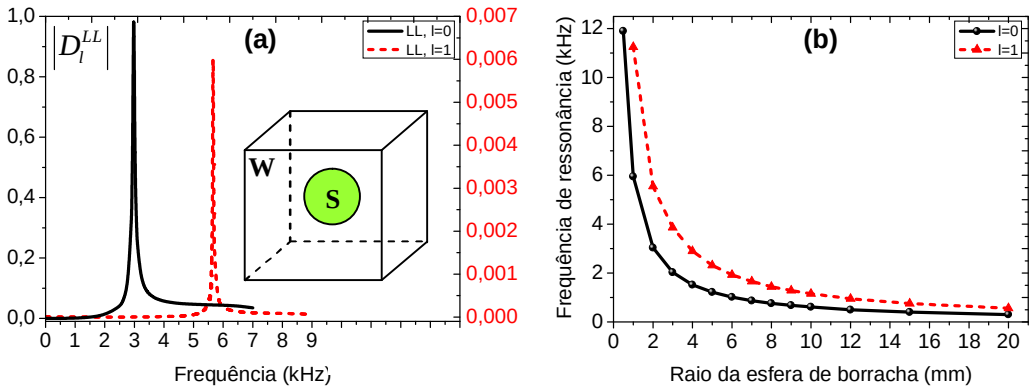

Figure 6.4. (a) Ressonâncias Mie monopolar $(l=0)$ e dipolar $(l=1)$ para uma EBM em água. O interior da Figura mostra esquematicamente a EBM em água, "**W**" representa a água e "**S**" a borracha M. (b) Dependência das frequências de ressonância monopolar e dipolar com o raio da EBM.

Devido a que o sistema da figura 6.4a é um sistema "fluido-base", este também só suporta ondas longitudinais. A presença da ressonância dipolar é devida à maior densidade da borracha M em comparação com o ar, o que intensifica o modo de vibração correspondente ao canal $l=1$. Este modo de

vibração da EBM pode ser entendido como uma oscilação da EBM no meio água, semelhante a um oscilador harmônico simples “massa-mola” onde a esfera de borracha M serve de “massa” e a água serve de mola. Portanto, o resultado da analise de dois tipos de esfera num mesmo meio (água) mostrou que excitação da componente dipolar das ondas elásticas esta relacionada ao aumento da densidade de massa da inclusão esférica. Esta estrutura “fluido-base”, formado de EBMs em água, será utilizada no projeto e modelagem de um MA com módulo volumétrico negativo e densidade de massa negativa (capítulo 8) devido à coexistência de ressonâncias de tipo monopolar e dipolar.

A Figura 6.4b mostra a dependência das frequências de ressonância monopolar (curva preta continua) e dipolar (curva vermelha pontilhada) em relação ao raio da EBM. Pode claramente ser observado que com o aumento do raio da EBM, a frequência de ressonância decresce mais rapidamente para o canal $l = 0$ do que para o canal $l = 1$. A diferença das frequências de ressonância entre os dois canais diminui com o aumento do raio da EBM mostrando-se degenerado para raios grandes (>20 mm).

6.2 Inclusão Esférica Revestida

Nos sistemas discutidos anteriormente, esfera simples de borracha M em epóxi e sistemas “fluido-base”, foi possível observar que a inclusão esférica simples apresenta faixas de ressonância muito estreitas, já os sistemas “fluido-base” são ideais e difíceis de implementar no laboratório. Este último tipo de sistema resulta quase impossível suspender as inclusões esféricas no fluido. Por conseguinte, será necessário utilizar uma combinação de sistemas “solído-base” com inclusões esféricas revestidas como uma solução ao problema de gerar ressonâncias Mie nas unidades estruturais. Nos sistemas “solído-base”, as inclusões esféricas podem ser fixadas na matriz hospedeira facilitando assim sua implementação no laboratório.

Nesta parte do trabalho consideramos inclusões esféricas revestidas como unidades estruturais ressonantes, mostrando assim a influência do revestimento na geração de múltiplas ressonâncias Mie.

No parágrafo 6.1 foi mostrado que uma BA em água pode apresentar forte ressonância monopolar em resposta a ondas longitudinais (Figura 6.3a). Este comportamento pode ser utilizado num sistema “sólido-base” se a esfera unitária é considerada como sendo uma esfera de água contendo uma bolha de ar no seu interior. No texto abaixo será discutido os resultados para um sistema constituído de uma esfera de água contendo uma bolha de ar (EABA) num meio sólido.

A Figura 6.5a mostra os espectros do módulo dos coeficientes D_o^{LL} para uma EABA incorporada numa matriz de epóxi. Os picos de ressonância correspondem às conversões de modo LL e NL da componente monopolar ($l = 0$). No interior desta figura mostra-se esquematicamente o sistema EABA em epóxi, onde “**E**” representa o epóxi, “**W**” a água e “**A**” o ar. Os raios da BA e da esfera de água são de 0,9 e 15 mm, respectivamente, e os parâmetros elásticos do epóxi, do ar e da água estão listados na Tabela 6.1. Os outros elementos de matriz, correspondente às conversões de modo LN, MM e NN para a componente monopolar $(l = 0)$ não apresentaram vestígios de ressonância, assim como também para os elementos de matriz $\alpha\alpha'$ ($\alpha, \alpha' = L, N, M$) das componentes dipolar $(l = 1)$ e quadrupolar $(l = 2)$, respectivamente. Contrariamente ao sistema “fluido-base”, o sistema “sólido-base” (epóxi-base) suporta ambas as ondas longitudinal e transversal, isto é, o sistema com matriz epóxi suporta uma onda longitudinal espalhada (L) e uma onda transversal espalhada (N). Este último caso acontece devido ao processo de conversão de modo NL. Estes resultados mostram que neste sistema a componente monopolar das ondas elásticas são puramente longitudinais, devido a que a ressonância monopolar só pode ser induzida por ondas longitudinais. Zhou *et al.* [17] mostraram que a ressonância do modo monopolar neste tipo de sistemas acontece quando a esfera compósita sofre um aumento/decremento total do seu volume sob a ação de uma deformação compressiva/expansiva e este efeito se da porque o módulo volumétrico da água é maior do que a do ar.

Por outra parte, a Figura 6.5b mostra a dependência da freqüência de ressonância monopolar em relação ao raio externo da esfera de água, r_2, para um raio fixo da BA de 0,9 mm. É importante mencionar que os picos ressonantes correspondentes a os elementos LL e NL aparecem sempre na mesma frequência de ressonância (Figura 6.5a), e percebe-se que com o aumento do raio externo da esfera de água, a freqüência de ressonância decresce lentamente.

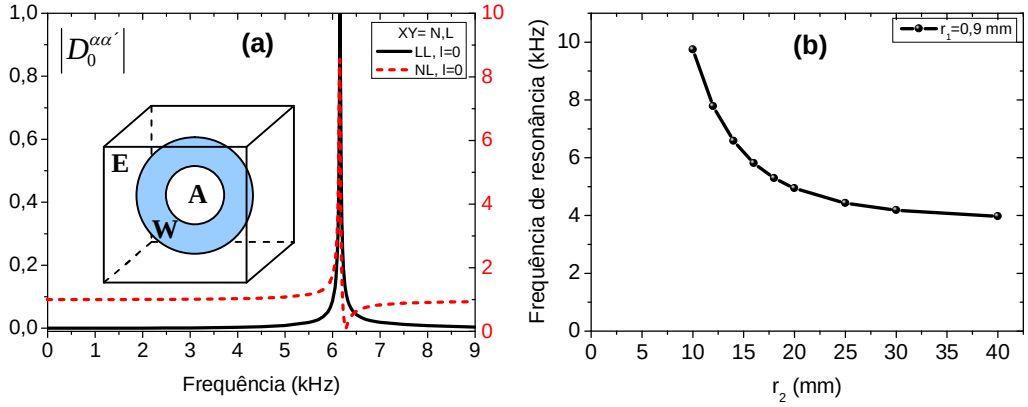

Figure 6.5. (a) Ressonâncias Mie monopolar $(l = 0)$ para uma EABA em epóxi. O interior da Figura mostra esquematicamente a EABA em epóxi, "**E**" representa o epóxi, "**W**" a água e "**A**" o ar. (b) Dependência da freqüência de ressonância monopolar com o raio da esfera de água para um raio fixo da BA de 0,9 mm.

A Figura 6.6a mostra os espectros das ressonâncias Mie monopolar de uma EABA incorporada numa matriz de poliestireno. Neste caso os raios da bolha de ar e da esfera de água foram de 5 e 10 mm, respectivamente. O interior da Figura mostra esquematicamente a estrutura EABA em poliestireno, onde "**F**" denota o substrato de poliestireno, "**W**" à água e "**A**" o ar. Os parâmetros elásticos do poliestireno estão listados na Tabela 6.1. Similarmente ao caso do sistema epóxi-base (Figura 6.5a), o sistema poliestireno-base também apresenta picos ressonantes para os elementos de matriz LL e NL da componente monopolar ($l = 0$). A diferença principal está em que o sistema poliestireno-base apresenta seus picos de ressonâncias deslocadas para baixas frequências, isto acontece devido a que às velocidades das ondas longitudinal e transversal no poliestireno são menores em relação ao substrato de epóxi. Este resultado mostra que é

possível modular a frequência de ressonância do sistema EABA mudando apenas o substrato hospedeiro.

Na Figura 6.6b se mostra a dependência da frequência de ressonância monopolar com o raio externo da esfera de água, r_2, para um raio fixo da BA de 5 mm. Observa-se que a frequência de ressonância decresce mais lentamente com r_2, em comparação com a observada no sistema com substrato de epóxi (Figura 6.5b).

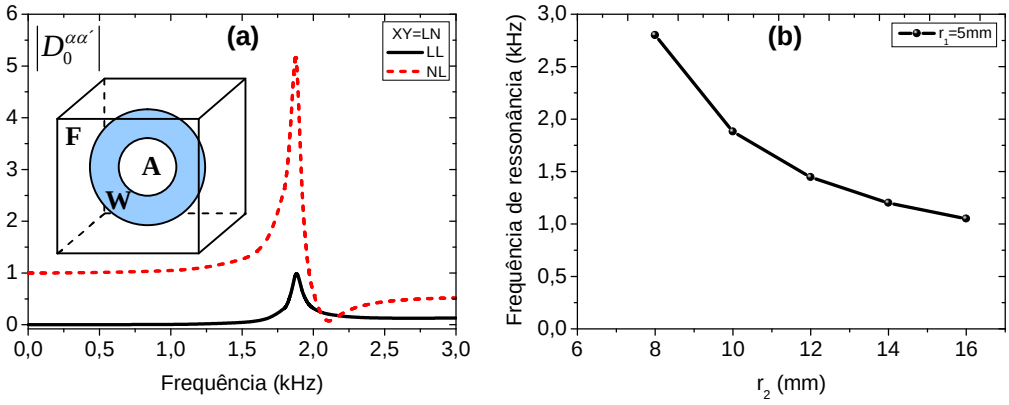

Figure 6.6. (a) Ressonâncias Mie monopolar $(l = 0)$ para uma EABA numa matriz de poliestireno. O interior da Figura mostra esquematicamente a EABA em poliestireno, "**F**" representa o poliestireno, "**W**" a água e "**A**" o ar. (b) Dependência da freqüência de ressonância monopolar com o raio externo da esfera de água para um raio fixo da BA de 5 mm.

Ding *et al.* [16] reportaram que efeitos de ressonância dipolar são mais intensos se o material de revestimento da esfera é mole em comparação com o núcleo e à matriz. Portanto, a seguir analisaremos o caso de núcleos pesados revestidos com um tipo de borracha D incorporados numa matriz de epóxi.

A estrutura analisada para este caso está constituída de uma esfera de ouro revestida com borracha D (EOBD) incorporada em substrato de epóxi. O interior da Figura 6.7a mostra esquematicamente a EOBD em epóxi, onde "**E**" representa o epóxi, "**H**" a borracha D e "**G**" o ouro. Os parâmetros elásticos do ouro, listados na tabela 6.1, foram de $\rho_1 = 19{,}5\times10^3\, kg/m^3$, $\lambda_1 = 1{,}6\times10^{11}\, N/m^2$, $\mu_1 = 2{,}99\times10^{10}\, N/m^2$, para a borracha D foram de $\rho_2 = 1.3\times10^3\, kg/m^3$, $\lambda_2 = 2.19\times10^9\, N/m^2$,

$\mu_2 = 9.98 \times 10^6 N/m^2$ e para o epóxi foram de $\rho_0 = 1{,}18 \times 10^3 kg/m^3$, $\lambda_0 = 4{,}43 \times 10^9 N/m^2$, $\mu_0 = 1{,}59 \times 10^9 N/m^2$. O revestimento da borracha D teve uma razão de raio interno-a-externo de 10/12.

A Figura 6.7a mostra os espectros de ressonância Mie da EOBD em epóxi. Os picos de ressonância, relacionados com as conversões de modo $\alpha\alpha'$ $(\alpha, \alpha' = L, N)$ na componente dipolar $(l = 1)$, estão situadas em torno de 6 kHz.

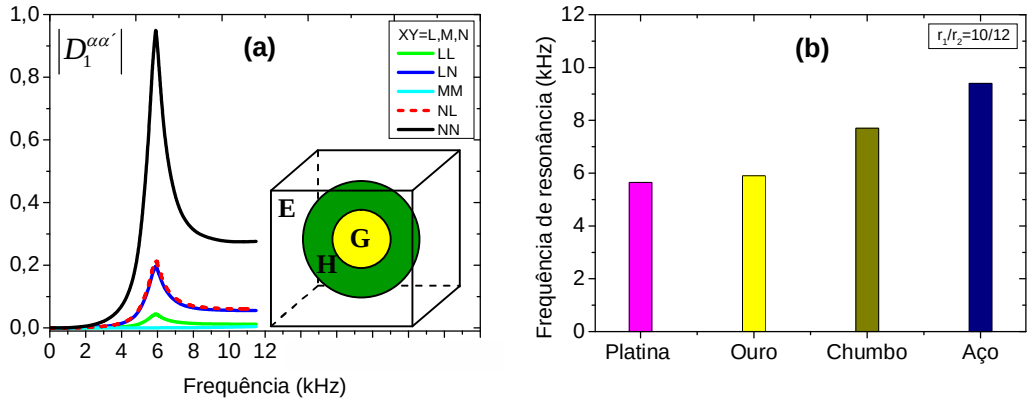

Figure 6.7. (a) Ressonâncias Mie dipolar $(l = 1)$ para uma EOBD em epóxi. O interior da figura mostra esquematicamente da EOBD em epóxi, "**E**" representa o epóxi, "**H**" a borracha dura e "**G**" o ouro. (b) Dependência da frequência de ressonância dipolar com diferentes tipos de metal, a razão do raio da esfera de borracha dura ao raio da esfera de ouro é 10/12.

Observa-se também na Figura 6.7a, que ambas as ondas longitudinal (L) e transversal (N) induzem ressonâncias dipolares durante o processo de espalhamento, enquanto que a onda M não induz nenhuma ressonância na faixa de frequências analisada. Percebe-se também que os picos de ressonância dos coeficientes $|D_1^{\alpha\alpha'}|$ correspondentes aos modos de conversão LN e NL apresentam a mesma frequência de ressonância com o mesmo perfil de banda, indicando a reciprocidade da conversão destes modos dipolares. É importante mencionar também que os elementos de matriz $D_0^{\alpha\alpha'}$ e $D_2^{\alpha\alpha'}$ para $\alpha, \alpha' = L, N, M$ relacionadas às componentes monopolar $(l = 0)$ e quadrupolar $(l = 2)$ da EOBD, respectivamente, não apresentaram ressonâncias, devido à rigidez do núcleo e do epóxi.

A ressonância dipolar pode ser interpretada como uma oscilação fora de fase da esfera compósita em relação a um campo de força direcional, em que o núcleo de ouro fornece a massa pesada e a borracha D fornece a mola [17,48,49].

Para analisar o efeito de núcleos diferentes na esfera revestida foi estudado o comportamento do processo ressonante dipolar para núcleos com diferentes materiais metálicos. A Figura 6.7b mostra um histograma do comportamento da frequência de ressonância dipolar em função dos materiais utilizados no núcleo; nos cálculos foi mantida a razão dos raios das esferas ($r_1 / r_2 = 10/12$), tendo sido utilizados diferentes tipos de metais entre eles platina, chumbo e aço cujos parâmetros elásticos estão listados na Tabela 6.1. Os resultados mostraram que os perfis das bandas de ressonância apresentaram as mesmas características quando o ouro foi substituído com os outros metais. No entanto que a frequência de ressonância deslocou-se para frequências menores quando a massa do núcleo foi mais pesada (platina), como mostrado nos histogramas da Figura 6.7b. É importante mencionar que no caso do aço, massa mais leve, a curva de ressonância mostrou uma banda larga de baixa intensidade sugerindo que o processo é amortecido.

A seguir analisaremos um novo sistema “sólido-base” que exiba dupla ressonância numa faixa de frequências ampla. A importância de considerar esta unidade estrutural ficara mais evidente quando seja discutido e analisado o comportamento de um ME projetado com esta unidade estrutural (capítulo 8). A estrutura é constituída de uma esfera de água revestida com borracha macia (EABM) em meio de poliestireno e está representado esquematicamente no interior da Figura 6.8b, onde “**F**” representa o poliestireno, “**S**” a borracha M e “**W**” a água. O radio da esfera de água é 4,75 mm e o raio externo do revestimento de borracha M é 5 mm. Os parâmetros elásticos utilizados para o poliestireno foram: $\rho_o = 115 kg/m^3$, $\lambda_o = 6\times10^6 N/m^2$, $\mu_o = 3\times10^6 N/m^2$.

As Figuras 6.8a e 6.8b mostram os espectros dos coeficientes $D_1^{\alpha\alpha'}$ e $D_2^{\alpha\alpha'}$, respectivamente, onde é possível observar a existência dos modos ressonante dipolar e quadrupolar. Os espectros ressonantes deste sistema “poliestireno-base”, a diferença dos outros considerados até agora, suporta ambas as ressonâncias

dipolar e quadrupolar, é dizer, o sistema é multi-ressonante. A presença da camada de borracha M revestindo a esfera de água induz a ressonância dipolar, entanto que a esfera de água intensifica a ressonância quadrupolar. Esta ultima é devido a que a água é facilmente deformável por apresentar módulo de cisalhamento zero. Nesta estrutura, o poliestireno foi escolhido por ser um material suficientemente mole de tal maneira que a esfera compósita descreva uma deformação axissimétrica sob um carregamento axissimétrico oposto, contribuindo com a ressonância quadrupolar ($l = 2$), e ao mesmo tempo suficientemente duro para suportar um movimento do centro de massa fora de fase com o campo de pressão incidente direcional, induzindo assim ressonância dipolar ($l = 1$).

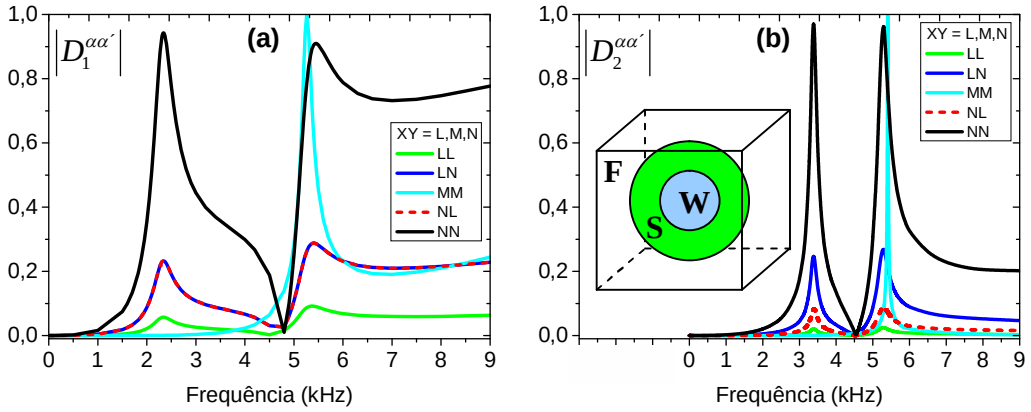

Figure 6.8. Ressonâncias Mie dipolar ($l = 1$) (a) e quadrupolar ($l = 2$) (b) para uma EABM em poliestireno. O interior da figura mostra esquematicamente a EABM em poliestireno, "**F**" representa o poliestireno, "**W**" a água e "**S**" a borracha macia.

Nas Figuras 6.8a e 6.8b observa-se também que as ressonâncias nos elementos de matriz $\left|D_l^{\alpha\alpha'}\right|$ da componente dipolar ($l = 1$) e quadrupolar ($l = 2$) são induzidas pelos três tipos de modos L, M e N. Este resultado é totalmente diferente em relação a aquele obtido com uma EOBD em epóxi (Figura 6.7a), sugerindo assim que o modo M pode induzir ressonância nas unidades estruturais. Por outro lado observa-se que as ressonâncias correspondentes à conversão de modo $\alpha\alpha'$ ($\alpha, \alpha' = L, N$) estão acopladas, enquanto que a ressonância correspondente a conversão do modo MM está desacoplado dos outros modos.

6.3 Inclusão Esférica duplamente Revestida

Nesta parte do trabalho analisaremos e discutiremos as ressonâncias Mie de uma inclusão esférica duplamente revestida numa matriz sólida. No projeto destas inclusões utilizaremos as unidades estruturais anteriormente analisadas como base, adicionando um segundo revestimento.

A figura 6.9a mostra a ressonância monopolar $(l = 0)$ Mie para uma esfera de água que contem um balão de ar (EABLA) incorporado numa matriz de epóxi. Neste sistema foi utilizado um balão (feio de borracha M) contendo ar, diferente do sistema de uma bolha de ar numa esfera de água (Figura 6.5a). Os raios interno e externo do balão foram de 2 e 2,5 mm, respectivamente, e o raio externo do revestimento de água foi de 15 mm. Como é mostrado na figura 6.9a, as características qualitativas dos picos ressonantes e das conversões de modo são semelhantes à estrutura de uma bolha de ar em epóxi, exceto que à adição do revestimento de borracha M deslocou a ressonância a uma frequência mais elevada em torno de 7,25 kHz.

A Figura 6.9b mostra as ressonâncias Mie dipolar $(l = 1)$ de uma esfera de ouro duplamente revestida com uma camada de borracha D "**H**" seguida de outra camada de poliestireno "**F**" incorporada numa matriz de epóxi "**E**". Os raios interno e externo do revestimento da borracha D foram de 10 e 12 mm, respectivamente, e o raio externo do revestimento de poliestireno foi de 13 mm. O espectro correspondente aos coeficientes da matriz T de espalhamento desta estrutura, mostrada na 6.9b, apresenta características qualitativas de ressonância e conversões de modo similares ao observado para a estrutura EOBD (Figura 6.7a). No entanto, nesta nova estrutura o revestimento adicional de poliestireno deslocou a freqüência de ressonância para baixas frequências em torno de 1,55 kHz. Isso foi basicamente devido à oscilação fora de fase do núcleo de "ouro-borracha D" como um todo com o poliestireno atuando como a mola do sistema oscilante. Estes resultados mostram que também é possível modular a posição da frequência de ressonância com a adição de um segundo revestimento na unidade estrutural.

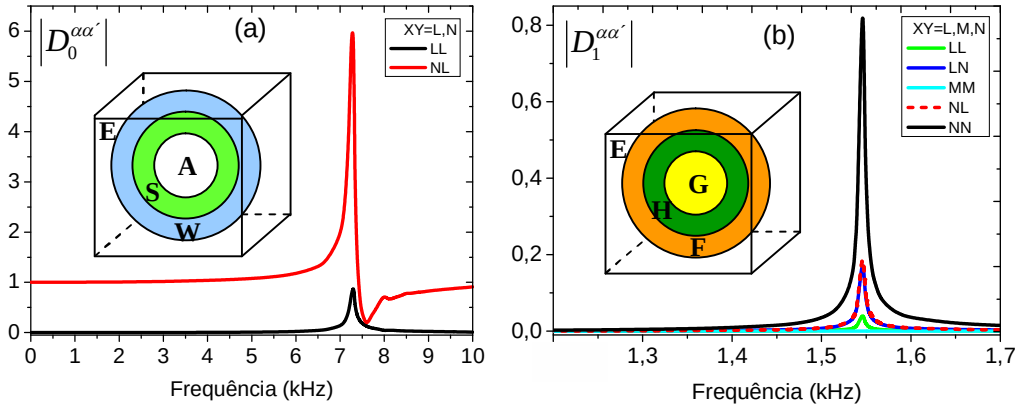

Figure 6.9. (a) Ressonâncias Mie monopolar ($l = 0$) para uma EABLA incorporada em epóxi e (b) Ressonância Mie dipolar ($l = 1$) para uma esfera de ouro duplamente revestida com borracha D e seguidamente de poliestireno incorporada em epóxi. O interior das Figuras mostra esquematicamente as unidades estruturais, "**E**" representa o epóxi, "**W**" a água, "**S**" a borracha M, "**A**" o ar, "**F**" o poliestireno, "**H**" a borracha D e "**G**" o ouro.

A Figura 6.10 mostra as ressonâncias Mie quadrupolares $(l = 2)$ para uma esfera de água duplamente revestida com uma camada de epóxi seguida de outra camada de borracha M (EAEBM) incorporada numa matriz de poliestireno. O revestimento de epóxi tem uma razão de raio interno-a-externo de 3/7 e o revestimento da borracha M tem uma razão de raio interno-a-externo de 7/10. No interior da Figura 6.10a se mostra o diagrama esquemático da estrutura EAEBM incorporada em poliestireno, onde "**F**" denota o poliestireno, "**S**" denota a borracha M, "**E**" denota o epóxi e "**W**" a água. Como se observa na figura 6.10, os picos de ressonância quadrupolar ($l = 2$) correspondem às conversões de modo LL e NL (figura 6.10a), LN (figura 6.10b), MM (figura 6.10c) e NN (figura 6.10d).

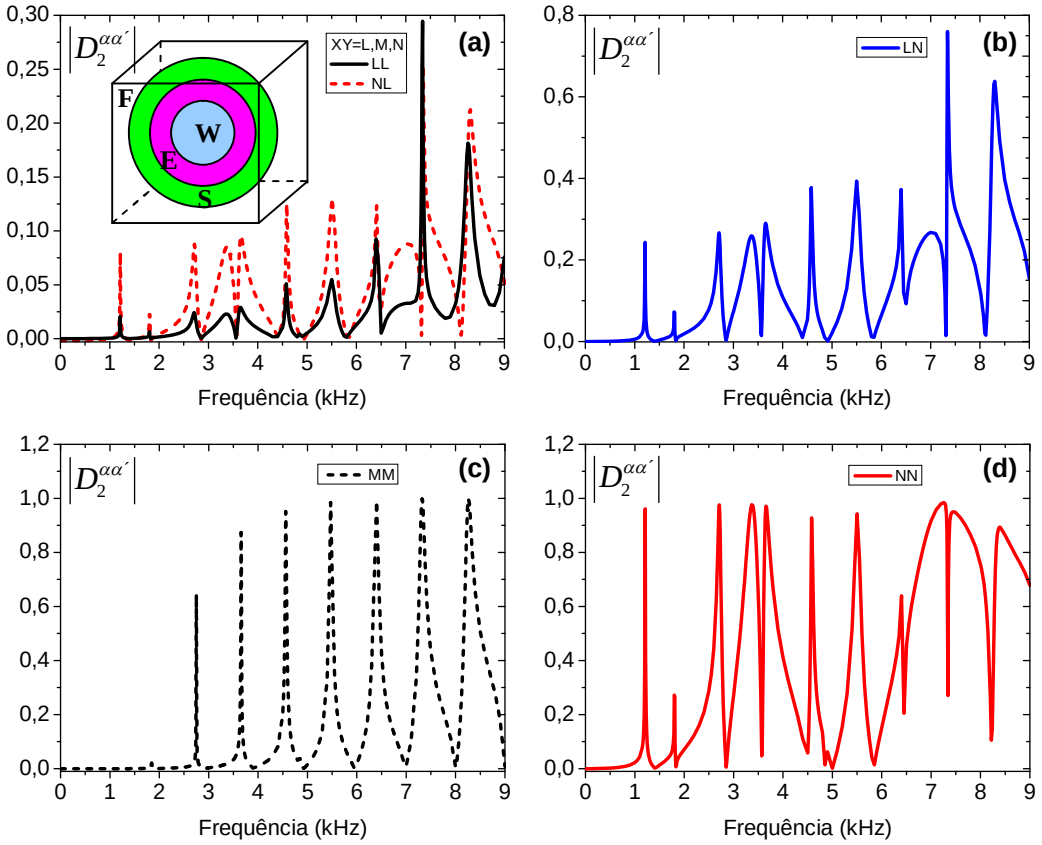

Figure 6.10. Ressonâncias Mie quadrupolar ($l = 2$) para uma EAEBM em poliestireno. (a) Ressonâncias dos elementos *LL* e *NL*. O interior da figura mostra esquematicamente a EAEBM em poliestireno, "**F**" representa o poliestireno, "**S**" a borracha macia, "**E**" o epóxi e "**W**" a água. (b) Ressonâncias do elemento *LN*. (c) Ressonâncias do elemento *MM* e (d) Ressonâncias do elemento *NN*.

A diferença com o sistema EABM em poliestireno (Figura 6.8), o sistema EAEBM em poliestireno apresenta múltiplos picos de ressonância quadrupolar situadas na faixa de freqüência de 0-9 kHz. É importante mencionar também que os elementos de matriz $D_1^{\alpha\alpha'}$, relacionada à componente dipolar $l = 1$, correspondente à conversão de modo $\alpha\alpha'$ ($\alpha, \alpha' = L, N, M$) apresentou dois picos ressonantes na faixa de 0-1,7kHz, similares aos apresentados pelo sistema EABM em poliestireno (Figura 6.8b), por tal motivo não são mostrados nesta parte do texto. Já para os elementos de matriz $D_0^{\alpha\alpha'}$, relacionada à componente monopolar $l = 0$, nenhuma ressonância foi observada no sistema. Por outro lado, as figuras

6.10b-d mostram que as ressonâncias nos elementos de matriz $D_2^{\alpha\alpha'}$ podem ser induzidas pelos três tipos de modos L, M e N, comportamento similar foi observado no sistema da Figura 6.8b. Outra característica importante observada na Figura 6.10c são os picos de ressonância quadrupolar correspondente à conversão de modo MM. Estas ressonâncias aparecem quase eqüidistantes e fortemente intensificadas.

Em conclusão, foi mostrado que ressonâncias Mie intensas podem ser obtidas a partir de inclusões esféricas revestidas e duplamente revestidas, sugerindo assim que com a adição de mais revestimentos seja possível modular e ampliar a largura das bandas de ressonâncias. Um modelo de microestrutura continua para um sistema de dois ressonadores sugeriu a mesma idéia [107]. Adicionalmente, resultados prévios [17] mostraram que os três primeiros canais de espalhamento correspondem à deformação de volume ($l = 0$), oscilação de um corpo rígido ($l = 1$) e deformação axissimétrica a volume constante ($l = 2$), respectivamente. Neste trabalho foi mostrado que estes três canais de espalhamento correspondem às ressonâncias monopolar, dipolar e quadrupolar respectivamente. Neste contexto, os resultados obtidos neste capítulo proporcionam uma ferramenta útil no projeto de unidades estruturais ressonantes tri-dimensionais para obter as ressonâncias Mie desejadas.

Capítulo 7

Parâmetros Elásticos Efetivos

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos correspondentes aos parâmetros elásticos efetivos dinâmicos $\kappa_e(f)$, $\rho_e(f)$ e $\mu_e(f)$ de materiais compósitos homogeneizados. A determinação destes parâmetros efetivos foi obtida no limite de comprimento de onda longa (baixas frequências) e baixas frações de preenchimento. Esta aproximação permite negligenciar o efeito da anisotropia da estrutura periódica e o espalhamento múltiplo acima da segunda ordem. Utilizando esta aproximação, um material compósito composto de inclusões esféricas ressonantes pode ser representado por um material homogêneo com parâmetros elásticos efetivos obtidos da TME.

Os resultados analisados e discutidos neste capítulo baseiam-se nas equações 5.17a-c e 5.18a-b, que permitem analisar o comportamento espectral dos parâmetros efetivos κ_e, ρ_e e μ_e.

A equação principal da TME (equação 5.16 do capítulo 5), junto com a condição no limite de cumprimento de onda longa $\lim_{\lambda > r_e} D_{l,e}^{\alpha\alpha'}$ e fração de preenchimento não maior de 30%, definem a faixa de frequências na qual esta aproximação pode ser aplicada com êxito nas equações 5.17 e 5.18. As estruturas analisadas neste capitulo foram projetadas para ter uma fração de preenchimento de 10% em todos os casos. Com estas exigências, a condição para a frequência da onda incidente cumpre a desigualdade:

$$0 < f < \frac{c_{Lo}\sqrt[3]{p}}{2\pi r_{ext}} \tag{7.1}$$

onde c_{Lo} é a velocidade da onda longitudinal no meio hospedeiro, r_{ext} é o raio externo de uma inclusão esférica com k revestimentos e p é a fração de preenchimento.

.

7.1 Materiais com módulo volumétrico κ_e negativo

Nesta parte do trabalho analisaremos estruturas de materiais compósitos que possam promover valores negativos no seu módulo volumétrico efetivo. Para tal objetivo foram considerados materiais compósitos constituído de BAs e EBMs em água com fator de preenchimento de 10% para cada compósito. No primeiro caso a faixa de frequências onde a aproximação de comprimento de onda longa é valida foi de $0 < f < 119$ kHz, já para o material com EBMs foi de $0 < f < 60$ kHz. Estas condições são satisfeitas se o raios das BAs e EBMs estão na faixa de 0 a 20 mm. Assim, o raio da BA foi escolhido para ser igual a 1 mm e o raio da EBM igual a 2 mm, respectivamente. O módulo volumétrico efetivo $\kappa_e(f)$ destes materiais compósitos foi calculado a partir da equação 5.18a.

As figuras 7.1a e 7.1b mostram a parte real do módulo volumétrico efetivo normalizado ao módulo volumétrico da matriz hospedeira, tanto para o compósito de BAs como para o compósito de EBMs em água, respectivamente.

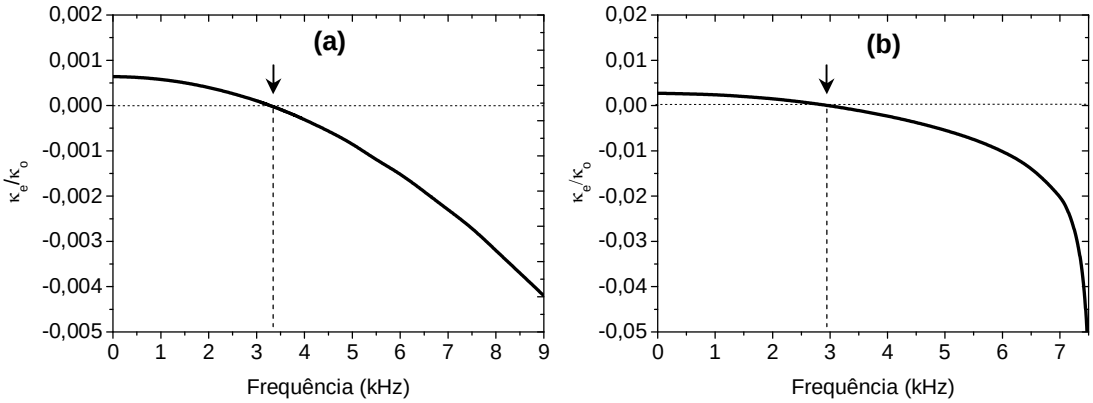

Figura 7.1 Parte real dos módulos volumétricos efetivos obtidos da equação 5.18a para (a) um compósito de BAs e (b) um compósito de EBMs em água.

Nas figuras 7.1a e 7.1b observa-se a existência de uma frequência (em torno de 3 kHz) onde os módulos volumétricos efetivos para ambos os materiais compósitos começam a tornar-se negativos (indicado pelas setas nas figuras). Estas frequências "críticas" estão relacionadas às frequências de ressonância monopolar ($l = 0$) das inclusões esféricas individuais (BA e EBM) mostradas anteriormente nas Figuras 6.3a e 6.4a, respectivamente. Assim o comportamento macroscópico anômalo destes materiais compósitos (revelado em seus módulos volumétricos efetivos negativos) são induzidos pela ressonância monopolar da sua unidade estrutural. A posição destas frequências "críticas" pode ser modulada através do controle dos raios da BA e da EBM como mostrados no comportamento da frequência de ressonância em função do raio da esfera (Figuras 6.3b e 6.4b). Nestas figuras também se observa também que no limite de frequência zero (aproximação quase-estática), os materiais compósitos analisados apresentam κ_e positivo e constante; $\kappa_e / \kappa_o = 0,000639$ e $\kappa_e / \kappa_o = 0,0027$, respectivamente. Neste limite κ_e também pode ser calculado usando a lei de Wood [82,108] utilizando a relação para compósitos de duas fases $1/\kappa_e = p/\kappa_1 + (1-p)/\kappa_o$. Os valores obtidos com a relação de Wood foram totalmente concordantes com os obtido a partir das curvas das Figuras 7.1a e 7.1b no limite de frequência zero, mostrando assim a consistência do formalismo utilizado nos cálculos. Portanto, $\lim_{f \to 0} \kappa_e(f) = \kappa_e$, o que implica que no limite de frequência zero, o módulo volumétrico efetivo dinâmico (Equação 5.19a) recobra sua expressão estática (Lei de Wood).

Kushwaha *et al.* [109] mostraram que estruturas periódicas de BA em água apresentam BGs absolutos independente do tipo de rede da estrutura. Por outro lado, Leroy *et al.* [110] reportaram experimentalmente a existência de um BG absoluto num sistema constituído de uma camada de BAs em água, e este comportamento está relacionado com o módulo volumétrico negativo, por tal motivo este BG tem sido chamado de BG ressonante [15]. Assim, as estruturas acima analisadas certamente apresentam BGs ressonantes na mesma região onde o κ_e é negativo. Por conseguinte, nesta região, as ondas longitudinais não se propagam dentro material compósito. Apesar de que estes materiais apresentam κ_e negativo, a sua construção em laboratório resulta numa tarefa complicada. Por tal motivo

resulta mais interessante o estudo de materiais com substrato sólido denotados por sistemas “sólido-base”.

Materiais compósitos “sólido-base” que apresentam κ_e negativo são uma alternativa interessante para o projeto e fabricação de metamateriais acústicos e elásticos. Estes sistemas, como foi mencionado anteriormente, podem ser realmente implementados no laboratório; no entanto deve-se prestar atenção nas restrições na faixa de frequência onde κ_e torna-se negativo.

A figura 7.2a mostra o comportamento espectral da parte real do módulo volumétrico normalizado em relação ao meio hospedeiro para um compósito de EABAs incorporadas numa matriz de epóxi. As dimensões geométricas da EABA foram consideradas como 0,9 mm para o raio da bolha de ar e 15 mm para o raio externo da camada de água. Já para a figura 7.2b se mostra o espectro da parte real do módulo volumétrico normalizado para um material composto de EABA incorporadas numa matriz de poliestireno. Nesta estrutura as dimensões da EABA foram de 5 mm para o raio da bolha de ar e 10 mm para o raio externo da camada de água.

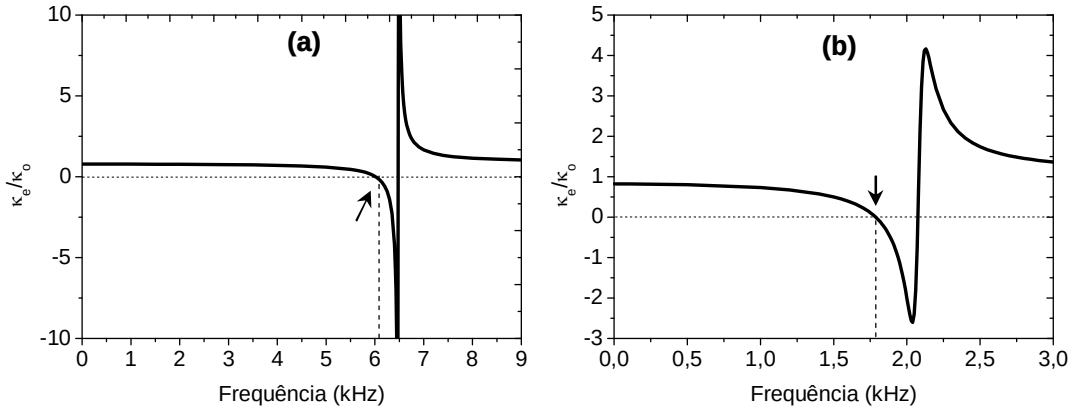

Figura 7.2 Parte real dos módulos volumétricos efetivos calculados da Equação 5.17a. (a) um compósito de EABAs em epóxi e (b) um compósito de EABAs e poliestireno.

É importante mencionar que os parâmetros geométricos dos materiais acima descritos foram escolhidos com a finalidade de otimizar a faixa de frequências onde κ_e torna-se negativo. O módulo volumétrico efetivo $\kappa_e(f)$ em função da frequência

foi calculado da Equação 5.17a. Para estes casos, as condições de baixas frequências foram: $0 < f < 13$ kHz e $0 < f < 3$ kHz, respectivamente. As frequências "críticas", onde os módulos volumétricos efetivos destes materiais tornam-se negativos, estão apontadas pelas setas nas figuras 7.2a e 7.2b. Similar aos sistemas "fluido-base", as frequências críticas nestes casos também estão diretamente relacionadas com a frequência de ressonância monopolar $(l = 0)$ das inclusões esféricas individuais dos compósitos. Na Figura 7.2a observa-se que o compósito de EABAs em epóxi apresenta uma faixa de frequência de 420 Hz (de 6,05 kHz até 6,47 kHz) onde seu módulo volumétrico é negativo. Nesta mesma faixa de frequência a densidade de massa do compósito é positiva; portanto este material com índice de refração imaginário se comporta como um espelho acústico impedindo a transmissão de ondas longitudinais, mais não impedirá a transmissão de ondas transversais. A mesma explicação vale para a interpretação dos resultados da Figura 7.2b correspondente ao compósito de EABAs em poliestireno, mas neste caso a faixa de frequência com κ_e negativo é de 280 Hz que se estende de 1,79 kHz até 2,07 kHz. Importante mencionar que fora destes limites de frequências os materiais compósitos apresentam propriedades de materiais comuns, devido a que κ_e é positivo. Em resumo, as ressonâncias monopolares induzem módulo volumétrico efetivo negativo e a posição das frequências "críticas" ressonantes seguem uma dependência em relação ao raio da esfera, similar aos resultados mostrados nas Figuras 6.5b e 6.6b do capítulo 6. Isto sugere que é possível modular a posição destas frequências de ressonância apenas mudando o raio da esfera compósita r_2.

Por outra parte, a literatura [16] reportou cálculos da estrutura de bandas do mesmo tipo de compósito cuja analise foi apresentada na figura 7.2a. Neste trabalho os autores mostraram que a região negativa de $E_e = \kappa_e + 4\mu_e / 3$, com μ_e positivo, coincide com a região do BG dos modos longitudinais no compósito. Portanto, a faixa finita de frequência onde κ_e torna-se negativo, no caso das estruturas estudadas aqui (figuras 7.2a e 7.2b), está relacionada à faixa de frequência corresponde à região dos BGs dos materiais utilizados.

Por ultimo, consideremos um material compósito composto de inclusões esféricas duplamente revestidas e analisemos a influência da adição de mais um revestimento na faixa de frequência onde κ_e tona-se negativa. A Figura 7.3 mostra o espectro da parte real do módulo volumétrico normalizado em relação ao meio hospedeiro de um compósito de EABLAs em epóxi. As dimensões geométricas da EABLA foi de 2 e 2,5 mm para o raio interno e externo do balão de ar, respectivamente, e de 15 mm para o raio externo da camada de água. Similar ao caso do compósito de EABAs em epóxi, a condição para baixas frequências foi de $0 < f < 13$ kHz.

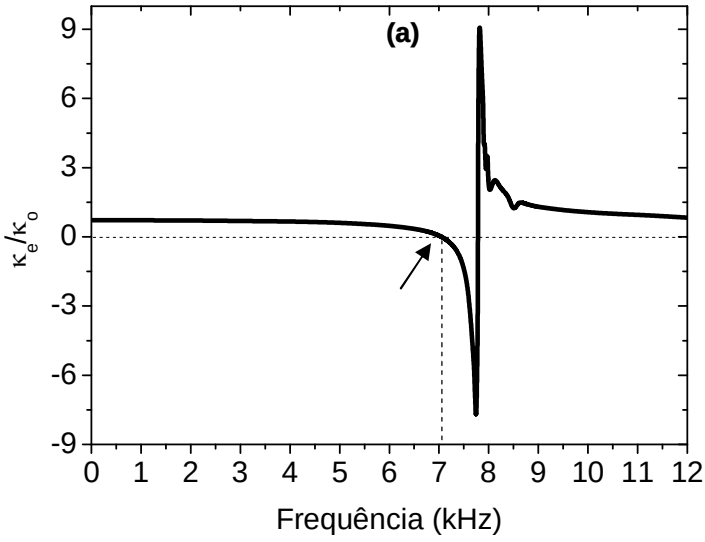

Figura 7.3 Parte real do módulo volumétrico efetivo normalizado obtido da Equação 5.17a para um compósito de EABLAs em epóxi.

A diferença fundamental do compósito EABAs em epóxi (figura 7.2a) com aquele compósito da figura 7.3, está na faixa de frequência onde κ_e é negativo. Para este último caso foi encontrado uma faixa de frequência de 780 Hz, que se estende de 7 kHz até 7,78 kHz, e é quase duas vezes maior do que para o compósito EABAs em epóxi. A principal vantagem desta estrutura em relação às estruturas analisadas anteriormente reside em que a bolha de ar foi substituído por um balão de ar fato que possibilita sua fabricação em laboratório.

Os resultados acima discutidos, relacionados aos compósitos “sólido-base” (figuras 7.2 e 7.3), mostram que no limite de frequência zero da equação 5.17a, esta tende à mesma expressão da Lei de Wood generalizada [111]:

$$\frac{\kappa_e - \kappa_o}{3\kappa_e + 4\mu_o} = p\frac{\kappa_{ec} - \kappa_o}{3\kappa_{ec} + 4\mu_o} \tag{7.2}$$

onde κ_o é o módulo volumétrico do epóxi (poliestireno), κ_{ec} é o módulo volumétrico efetivo da inclusão esférica compósita e $p = 10\%$.

Em conclusão, os resultados indicam que os modos monopolares das unidades estruturais dos compósitos induzem que o valor do módulo volumétrico efetivo se torne negativo numa faixa de frequências que pode ser facilmente modulado através do controle dos parâmetros geométricos e estruturais das unidades constitutivas do material compósito.

7.2 Materiais com densidade de massa ρ_e negativa

A Figura 7.4 mostra o espectro da parte real da densidade de massa efetiva normalizada para um material compósito de EBMs em água, esta estrutura é a mesma que foi utilizada para analisar o parâmetro κ_e, isto é, o raio das EBMs são de 2 mm e tem a mesma condição de validade da TME para baixas frequências mostrada em 7.1b ($0 < f < 60$ kHz). A densidade de massa efetiva $\rho_e(f)$ em função da frequência foi calculada utilizando a equação 5.18b aplicado a metamateriais “fluido-base”.

O espectro da figura 7.4 mostra que existe uma singularidade (indicado pela seta) onde efetivamente acontece a mudança do sinal de ρ_e, de valores positivos para negativos. Esta singularidade acontece na frequência de ressonância dipolar $(l = 1)$ da EBM individual (Figura 6.4a do capitulo 6). Este resultado mostra que o valor negativo de ρ_e depende completamente da existência de processo ressonantes do modo dipolar nas unidades estruturais do compósito. Neste caso, a

ressonância dipolar promove que ρ_e assuma valores negativos numa faixa de frequências de largura igual a 460 Hz, que se estende de 5,36 kHz até 5,82 kHz. A posição desta faixa pode ser modulada apenas modulando o raio das EBMs, já que a frequência de ressonância dipolar depende do raio da EBM (figura 6.4b). A negatividade do parâmetro ρ_e foi interpretado por muitos autores [15,72,112] como devido ao movimento fora de fase (180°C) das EBMs em relação ao campo de excitação, e isso acontece porque a borracha M tem uma densidade maior do que a água (substrato). Assim o momentum do compósito é oposto ao campo de pressão incidente.

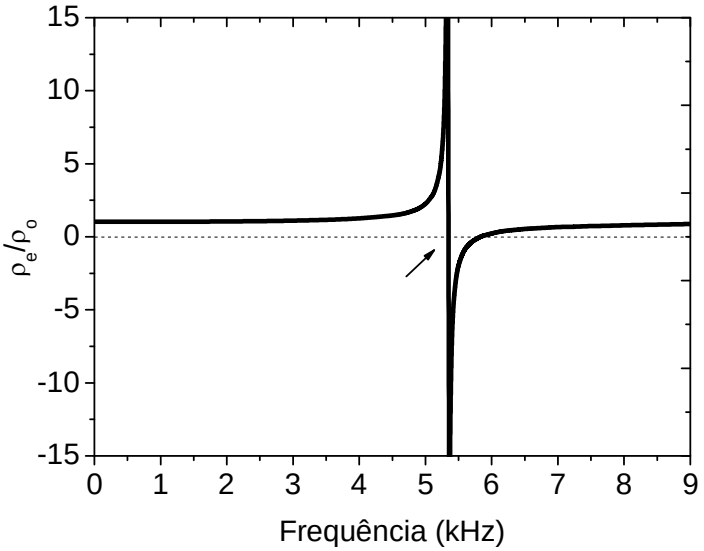

Figura 7.4 Parte real da densidade de massa efetiva normalizada obtida a partir da equação 5.18b para um compósito de EBMs em água.

Por outra parte, no limite de frequência zero, a densidade de massa estática efetiva para materiais compósitos “fluido-base” de duas fases pode ser obtida usando a fórmula de Berryman [82]:

$$\frac{\rho_e - \rho_o}{2\rho_e + \rho_o} = p\frac{\rho_1 - \rho_o}{2\rho_1 + \rho_o} \tag{7.3}$$

onde $p = 10\%$, ρ_o é a densidade da água e ρ_1 é a densidade da borracha M.

Os valores numéricos de ρ_e obtidas a partir da formula de Berryman e do $\lim_{f\to 0}\rho_e(f)=\rho_e$ para a equação 5.18b foram concordantes mostrando a consistência do modelo de meio efetivo utilizado no presente trabalho.

Vários autores reportaram propostas de diferentes estruturas compósitas "sólido-base" com a propriedade de ρ_e negativo [16,17,28,29,48,49,87]. Neste contexto, no seguinte parágrafo serão estudados materiais compósitos constituídos de diferentes tipos de esferas revestidas em material sólido. A Figura 7.5 mostra os espectros da parte real das densidades de massa normalizada para materiais compósitos compostos de esferas de metal revestidas com borracha D (EMBDs) incorporadas numa matriz de epóxi. Os núcleos metálicos utilizados nos cálculos foram esferas de platina, ouro, chumbo e aço, respectivamente. Importante mencionar que a relação de densidade de massa entre estes metais segue ordem; platina > ouro > chumbo > aço. O raio interno e externo do revestimento de borracha D foi de 10 e 12 mm, respectivamente, em todos os casos, e a condição da TME para baixas frequência é $0<f<17$ kHz.

As posições das quedas nas curvas $\rho_e(f)$ observada na Figura 7.5 correspondem aos picos de ressonância dipolar ($l=1$) das inclusões metálicas revestidas individuais (Figura 6.7b do capítulo 6). Nesta figura se observa também que o amortecimento das curvas $\rho_e(f)$ depende fortemente da densidade de massa da esfera metálica, com regiões negativas maiores de ρ_e para núcleos metálicos mais densos. Portanto, num material compósito "epóxi-base" composto de esferas metálicas pesadas revestidas com borracha D, a densidade de massa efetiva negativa é induzida pela ressonância dipolar da sua unidade estrutural. Por outro lado, a largura da faixa de frequência onde $\rho_e(f)$ torna-se negativa apresenta uma forte dependência com a densidade do núcleo metálico da esfera revestida, assim para o núcleo de platina a largura da faixa foi de 1900 Hz, para o ouro foi de 1860 Hz e para a esfera com núcleo de chumbo foi de 900 Hz. No caso do compósito de esferas de aço revestidas, as fracas ressonâncias dipolares [curva $\rho_e(f)$ fortemente amortecida] não foram suficientes para promover valores

negativos de $\rho_e(f)$, isto é devido ao baixo contraste de densidade entre o aço e a borracha D.

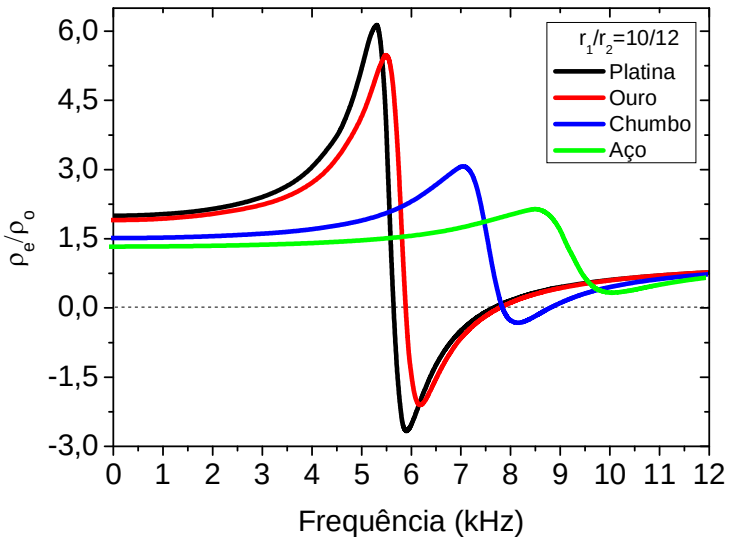

Figura 7.5 Parte real da densidade de massa efetiva normalizada obtida a partir da equação 5.17b para compósitos de EMBDs em epóxi, cada uma das curvas representa um metal diferente.

É importante mencionar que o resultado da figura 7.5, para as esferas de ouro revestidas, foi reportado na literatura [16] utilizando métodos de APC. A similaridade com os nossos resultados mostram a consistência do formalismo TME. Por tanto, os nossos resultados confirmam que para um arranjo aleatório de esferas metálicas pesadas revestidas, a ressonância dipolar destas inclusões é o principal mecanismo de formação de BGs absolutos neste tipo de materiais, desde que a literatura reporta experimentalmente que a faixa de frequências onde ρ_e apresenta valores negativos corresponde à região de BG de um compósito com arranjo periódico [48,87,113]. Uma vez que ambas as ondas longitudinais (L) e transversais (L) podem induzir ressonâncias dipolares, o BG ressonante é comum para ambos os modos, é dizer, estes materiais que apresentam índice de refração imaginário, impedindo a transmissão de ondas longitudinais e transversais. Estes resultados motivam o estudo do controle de ondas sísmicas, utilizando estes novos materiais como refletores perfeitos.

A seguir analisaremos e discutiremos os resultados relacionados a um novo tipo de material compósito com densidade de massa negativa. O material é um compósito constituído de balões contendo água no seu interior, e estes balões estarão imersas num substrato de poliestireno. As Figura 7.6a e 7.6b mostram às partes reais da densidade de massa efetiva normalizada como função da frequência para um material compósito composto de balões de água (BLAs) em poliestireno. Os balões estão feitos de um tipo de borracha M e os parâmetros geométricos do BLA foram ajustados de tal maneira que a aproximação da TME para baixas frequências seja válida ($0 < f < 5,24$ kHz). O raio externo do balão foi fixado num valor de r_2=5 mm, entretanto o raio da esfera de água (raio interno do balão - r_1) foi variável na faixa de 3,7 até 4,9 mm. Nas Figuras 7.6a e 7.6b cada curva $\rho_e(f)$ corresponde a um raio especifico da esfera de água, como indicado na legenda interior destas figuras. É importante mencionar que neste tipo de material compósito, as unidades estruturais apresentaram dois picos de ressonâncias dipolares separadas uma da outra (Figura 6.8a do capítulo 6) e cada pico ressonante induze uma densidade de massa negativa. Assim, a figura 7.6a apresenta os espectros de $\rho_e(f)$ associado ao primeiro pico da ressonância dipolar, já a figura 7.6b apresenta os espectros de $\rho_e(f)$ correspondente ao segundo pico da ressonância dipolar.

As curvas $\rho_e(f)$ da figura 7.6a revelam materiais compósitos com faixas de frequência onde a densidade de massa torna-se negativa, exceto para o compósito cujos balões apresentam uma diferença de raio interno-externo de $\Delta = 0,1$ mm (curva r_1=4,9 mm). A curva $\rho_e(f)$ deste último apresenta um perfil muito amortecido. Estas curvas também mostram que na medida em que a espessura da parede do balão de borracha cresce a intensidade nas quedas de $\rho_e(f)$ aumenta, sendo mais intensa quando $\Delta = 0,4$ mm, mas a largura da faixa de frequência mais extensa (480 Hz), onde $\rho_e(f)$ torna-se negativo, acontece para $\Delta = 0,3$ mm. Por conseguinte, estas densidades de massa efetivas negativas induzidas pelo primeiro pico das ressonâncias dipolares está relacionado à existência de BGs absolutos tanto para as ondas longitudinais (L) como transversais (N).

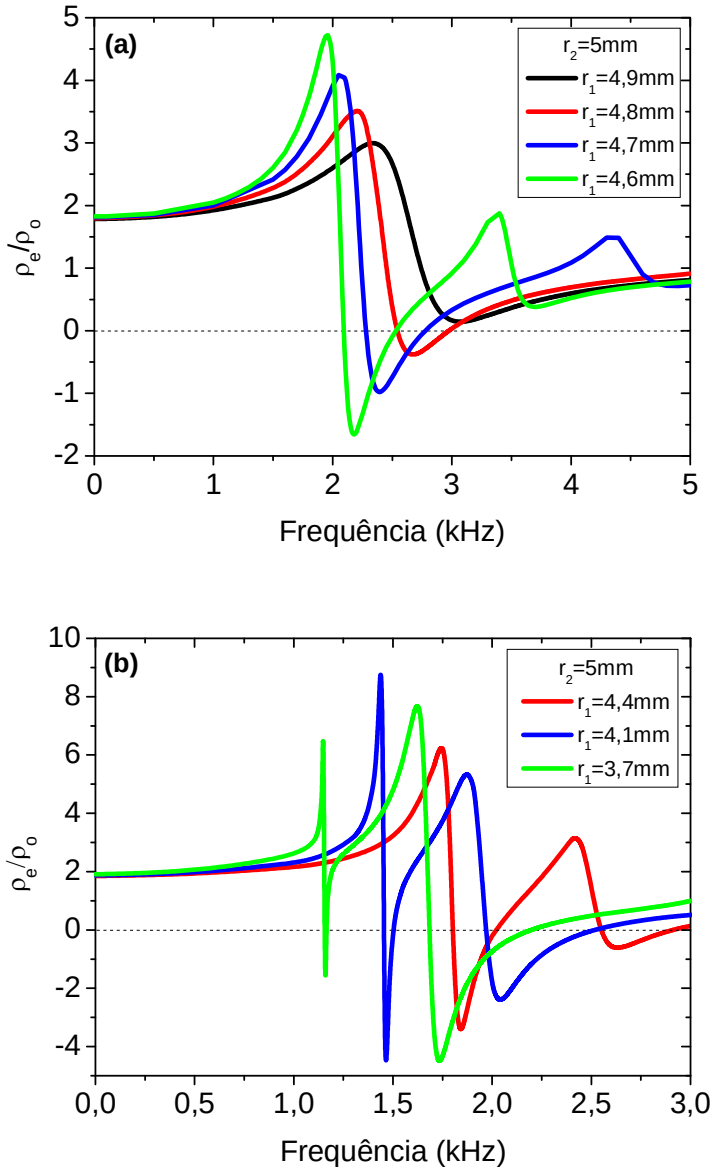

Figura 7.6. Parte real da densidade de massa efetiva normalizada obtida da equação 5.17b para um compósito de BLAs em poliestireno, para diferentes raios da esfera de água.

Nas estruturas da figura 7.6a o segundo pico de ressonâncias dipolares não promove valores negativos de $\rho_e(f)$; no entanto nas estruturas com $\Delta = 0{,}3$ mm e $\Delta = 0{,}4$ mm o segundo pico de ressonância promove uma região de inflexão na curva $\rho_e(f)$, mas com seu mínimo na região positiva, isto sugere que aumentando a espessura da parede do balão de borracha M pode ser induzida uma outra região negativa de $\rho_e(f)$, e isto, será considerado a seguir.

A Figura 7.6b mostra os espectros de $\rho_e(f)$ para outros compósitos com valores de Δ maiores do que os compósitos analisados na Figura 7.6a. Nestes compósitos efetivamente podem ser observados a existência de duas regiões negativas de $\rho_e(f)$ relacionados com os dois picos de ressonâncias dipolares. Esta figura também mostra que o compósito com $\Delta = 0{,}6$ mm (curva r_1=4,4 mm) apresenta duas regiões com ρ_e negativo com faixas de frequências de 340 e 200 Hz, respectivamente. Já para o compósito com $\Delta = 0{,}9$ mm (curva r_1=4,1 mm), este apresenta uma região estreita de frequência (40 Hz) e uma segunda região ampla de frequência (520 Hz), onde ρ_e é negativo. No compósito com $\Delta = 1{,}3$ mm observa-se também a existência de duas bandas com ρ_e negativo, sendo que a largura da banda na região de baixa frequência tende a zero e a largura da banda na região de alta frequência é igual a 520 Hz. Estes resultados mostram que o segundo pico de ressonâncias dipolares (região de alta frequência) começa a predominar no compósito na medida em que a espessura do balão de borracha M aumenta.

Em resumo, um outro material compósito com ρ_e negativo, para uma geometria da inclusão esférica de $\Delta = 1{,}3$ mm, pode ser projetado utilizando a segunda ressonância dipolar na região de alta frequência.

Para entender o significado físico da aparição das duas regiões de frequência onde ρ_e tornou-se negativo, nos explicamos a segui: A banda na região de baixa frequência acontece devido à oscilação fora de fase onde o núcleo da esfera do compósito atua como a massa pesada e a casca esférica de borracha M atua como a mola do sistema oscilante, na segunda banda, o núcleo permanece fixo e a casca esférica de borracha sofre um deslocamento na direção contraria ao movimento total da esfera do compósito [17, 48,49].

Por último, para demonstrar a validade da equação 5.17b (densidade de massa efetiva para metamateriais “sólido-base”), esta deve convergir à fórmula de Berryman para materiais de três fases no limite de frequência zero [82,111]:

$$\rho_e - \rho_o = p(\rho_{ec} - \rho_o) \tag{7.4}$$

onde $p = 10\%$, ρ_o é a densidade de massa da matriz e ρ_{ec} é a densidade de massa efetiva da esfera compósita. Portanto, no $\lim_{f \to 0} \rho_e(f) = \rho_e$ para a equação 5.17b, a densidade de massa efetiva dinâmica recobra a sua expressão estática.

7.3 Materiais com módulo de cisalhamento μ_e Negativo

Nesta parte do trabalho analisamos o comportamento espectral do módulo de cisalhamento de compósitos compostos de BLA em substrato de poliestireno similares às estruturas anteriormente analisadas. A Figura 7.7 mostra os espectros da parte real dos módulos de cisalhamento efetivos normalizado para materiais compósitos de BLAs em poliestireno. Os parâmetros geométricos do BLA foram definidos como: o raio externo do balão foi fixado no valor de r_2=5 mm e o raio da esfera de água foi variável de 3,5 até 4,9 mm. Estes parâmetros geométricos foram escolhidos de tal maneira que as ressonâncias quadrupolares sejam o suficientemente intensas como para induzir módulos de cisalhamento negativo na estrutura proposta. A condição da TME para baixas frequência foi de $0 < f < 5,24$ kHz similar ao das estruturas cujos resultados foram mostrados na Figura 7.6.

A Figura 7.7a mostra materiais compósitos (curvas r_1=4,8 e 4,7 mm) com bandas de frequência onde μ_e tornam-se negativo, cujas larguras de bandas são de 145 e 140 Hz, respectivamente. As quedas nas curvas $\mu_e(f)$ mostraram uma total correspondência com a posição dos picos de ressonâncias quadrupolares ($l = 2$) mostrados na Figura 6.8b. A curva $\mu_e(f)$ do compósito com r_1=4,7 mm mostra outro ponto de inflexão com seu mínimo na região positiva de μ_e. Esta banda também é resultado de uma ressonância quadrupolar menos intensa do que a primeira onde foi observado um valor negativo de μ_e. No caso do compósito com r_1=4,9 mm, a intensidade da primeira ressonância quadrupolar não foi suficiente para induzir valores negativos de μ_e.

É importante mencionar que até o presente momento não foi reportado nenhum trabalho reportando compósitos **3D** com μ_e negativo numa faixa de

frequência maior do que os reportados nesta dissertação. Os trabalhos que reportaram estruturas com μ_e negativo simplesmente correspondem a estruturas **2D** [28,72,74].

A Figura 7.7b mostra as curvas $\mu_e(f)$ de materiais compósitos de BLAs cujos raios da esfera de água foram de r_1=4,2; 4,0; 3,7 e 3,5 mm. Nestas estruturas apenas a primeira ressonância quadrupolar induz bandas com μ_e negativos na região de frequência onde a TME é valida. Nestes compósitos, a largura das bandas de frequência onde μ_e torna-se negativo foram de 125, 105, 65 e 50 Hz, respectivamente, mostrando, assim, faixas mais estreitas para a região com μ_e negativo na medida em que a espessura do balão de borracha M aumenta ou equivalentemente diminuição do raio da esfera de água.

A partir dos resultados mostrados nas Figuras 7.7a e 7.7b podemos identificar dois limites para espessura Δ dos balões da borracha M, cujo raio externo está fixado em 5 mm. Para $\Delta < 0{,}2$ mm as fracas ressonâncias quadrupolares não são suficientes para induzir μ_e negativo, já para $\Delta > 1{,}5$ mm os picos ressonantes quadrupolares são muito estreitos induzindo μ_e negativo numa faixa de frequência também muito estreita. A faixa de espessuras entre $0{,}2 \leq \Delta \leq 1{,}5$ mm foi à região bem mais sucedida para a obtenção de bandas de frequências com μ_e negativos de significativa largura e intensidade.

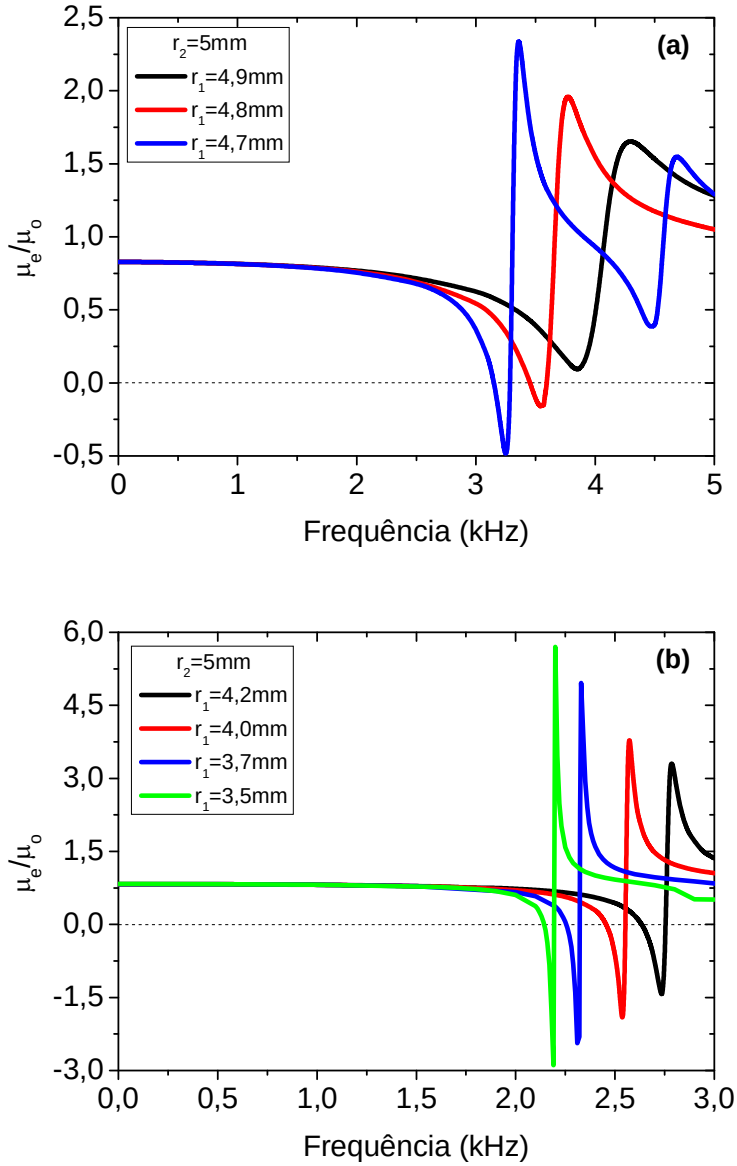

Figure 7.7 Parte real do módulo de cisalhamento efetivo obtido a partir da equação 5.19c para um compósitos de BLAs em poliestireno, com r_2=5mm e para vários raios de esfera de agua.

A seguir analisamos os resultados obtido de compósitos de BLAs em poliestireno aumentando neste caso o raio externo do balão de borracha M para 7 mm com o propósito de deslocar as bandas de μ_e negativo para regiões de menor frequência. A Figura 7.8 mostra o espectro de três curvas $\mu_e(f)$ para materiais compósitos cujos parâmetros geométricos dos BLAs foram: o raio externo do balão foi fixado num valor de r_2=7 mm para todas as estruturas e os raios das esferas de

água de cada um dos compósitos propostos foram de 5,6 mm, 6,0 mm e 6,3 mm, respectivamente, conforme explicitado na legenda interna da Figura 7.8.

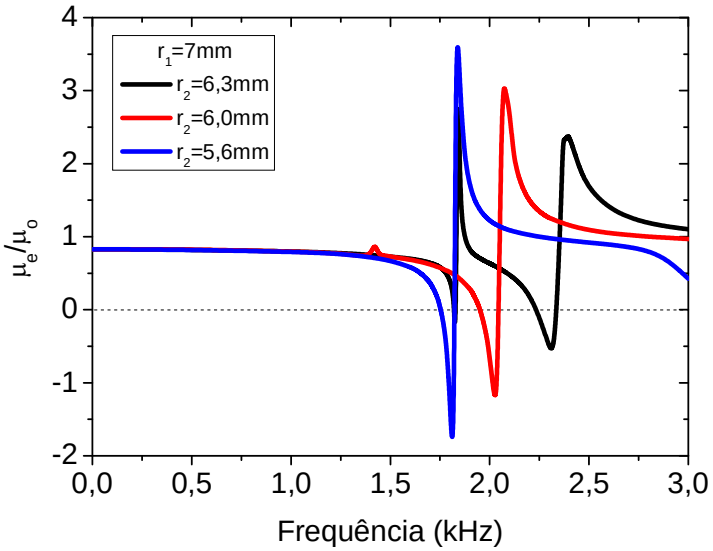

Figure 7.8 Parte real do módulo de cisalhamento efetivo obtido a partir da equação 5.17c para um compósitos de BLAs em poliestireno, com r_2=7mm e para vários raios de esfera de água.

A Figura 7.8 efetivamente mostra que as bandas de frequência com μ_e negativo foram significativamente deslocadas para regiões de baixas frequências em relação a aquelas das estruturas cujo raio externo da borracha M foi de 5 mm (figura 7.7). É notado que as larguras destas bandas foram de 95, 90 e 70 Hz para as estruturas com r_1=6,3 mm, r_1=6,0 mm e r_1=5,6 mm, respectivamente. Estas larguras são aproximadamente iguais aos observados para as estruturas cujas curvas foram mostradas na Figura 7.7b. Mas estes últimos resultados serão muito úteis por apresentarem bandas de μ_e negativos na região de baixas frequências.

Capítulo 8

Metamateriais Acústicos e Elásticos

Neste capítulo se apresenta os resultados obtidos em relação ao projeto de metamateriais acústicos e elásticos utilizando à aproximação TME em três dimensões, desenvolvido no capítulo 5. Na primeira parte será discutido e projetado um MA "fluido-base" com κ_e e ρ_e negativos na mesma faixa de frequências. Este compósito é constituído de inclusões esféricas simples. A negatividade dos parâmetros acústicos efetivos κ_e e ρ_e foi induzida pelo comportamento ressonante da inclusão esférica simples. Na segunda parte deste capitulo será projetado um MA "epóxi-base" com E_e e ρ_e negativos na mesma faixa de frequências. Este MA é constituído de duas unidades estruturais esféricas tal que cada inclusão esférica contribui com uma particular característica ressonante diferente que contribuem com E_e negativo e ρ_e negativo, separadamente. A última parte deste capítulo será dedicada ao projeto de um ME "poliestireno-base" com E_e, ρ_e e μ_e negativos na mesma faixa de frequência. Este ME é constituído da superposição de três materiais compósitos diferentes cada um contribuindo com E_e negativo, ρ_e negativo e μ_e negativo, separadamente. O objetivo da superposição destes materiais compósitos com parâmetros efetivos negativos foi sobrepor os parâmetros E_e, ρ_e e μ_e na mesma faixa de frequência.

8.1 Metamaterial Acústico com κ_e e ρ_e Negativos com uma Unidade Estrutural

As figuras 8.1a-d mostram os resultados para um MA "fluido-base" que apresenta κ_e e ρ_e negativos numa mesma faixa de frequências. Os cálculos foram realizados utilizando à aproximação TME e no limite de comprimento de onda

longa. A condição da TME para este metamaterial é valido na faixa de frequência $0 < f < 60\,\text{kHz}$. Este MA está composto de EBMs (de raio igual a 10 mm) incorporadas numa matriz de água e com uma fração de preenchimento de 10%. A Figura 8.1a mostra uma representação esquemática do MA, cujas unidades estruturais estão representadas por EBM. A Figura 8.1b mostra as curvas espectrais dos parâmetros acústicos efetivos κ_e e ρ_e do metamaterial considerado e observa-se a existência de uma região de frequências onde κ_e e ρ_e apresentam simultaneamente valores negativos (área hachurada).

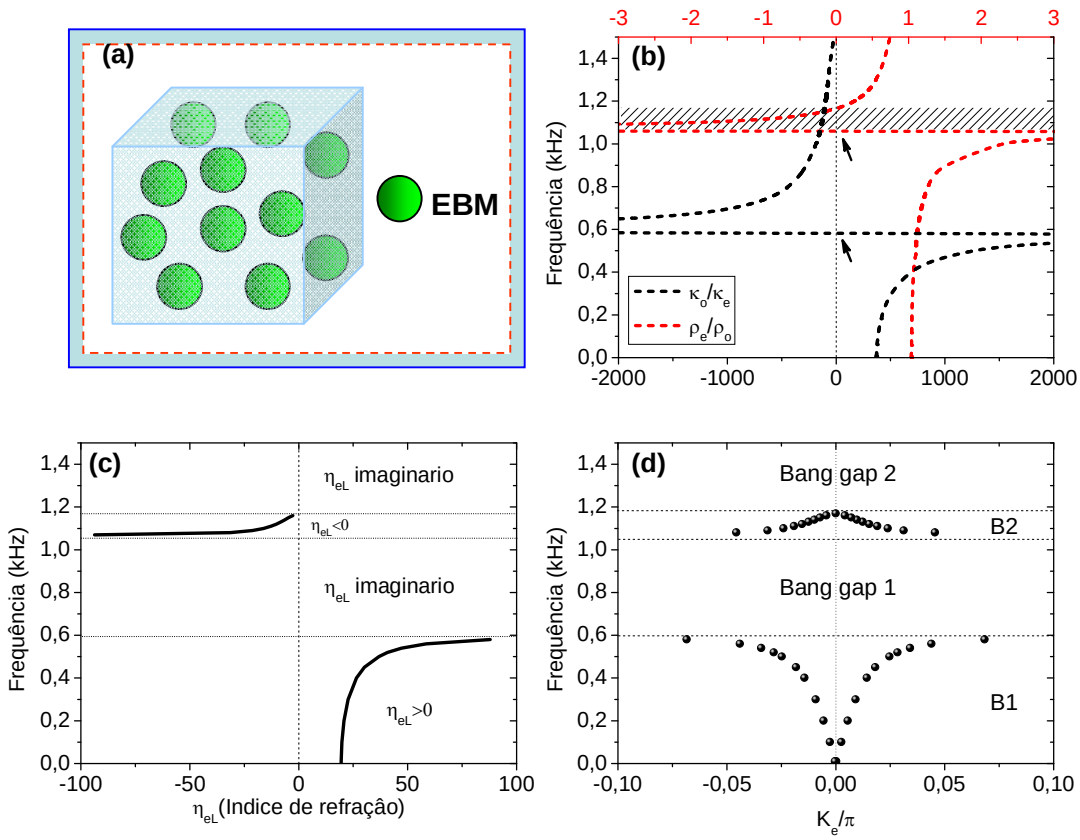

Figure 8.1. (a) Diagrama esquemático do MA "fluido-base", (b) superposição dos parâmetros acústicos efetivos, (c) índice de refração efetivo negativo, e (d) relação de dispersão usando os parâmetros efetivos.

A Figura 8.1c mostra o comportamento espectral do índice de refração efetivo do MA, que foi calculado a partir da equação 5.19a do capítulo 5. Observa-se que na faixa de frequência entre 0 e 0,6 kHz, o metamaterial apresenta um índice de refração positivo $(\eta_{eL} > 0)$, isto é devido a que κ_e e ρ_e são positivos nesta faixa de

frequências (Figura 8.1b). Nesta faixa de frequência o metamaterial apresenta o comportamento de um fluido “natural”. Na região de frequência entre 0,6 e 1,07 kHz o metamaterial apresenta um índice de refração imaginário, por apresentar κ_e negativo e ρ_e positivo (Figura 8.1b). Nesta faixa de frequência a onda acústica dentro do metamaterial se atenua exponencialmente, podendo-se comportar como um espelho acústico refletindo toda onda incidente longitudinal. Na faixa de frequência entre 1,07 a 1,17 kHz, o metamaterial se comporta como um MA “propriamente dito”, é dizer, um material com índice de refração negativo para as ondas longitudinais. Este comportamento está correlacionado com o fato de que κ_e e ρ_e apresentam valores negativos simultaneamente neste faixa de frequências. Este tipo de “metafluido”, onde as ondas longitudinais podem-se propagar, até hoje não foi encontrado na natureza.

A figura 8.1d mostra as curvas de dispersão do MA que foram calculados utilizando os parâmetros acústicos efetivos (equação 5.20a). Observa-se nesta figura que os BGs 1 e 2 correspondem as faixas de frequência onde κ_e apresenta valores negativos e ρ_e apresenta valores positivos, este mesmo comportamento foi reportado em [15]. Por outro lado, na mesma figura observa-se a existência de uma banda de dispersão negativa (B2), correlacionado com a faixa onde o índice de refração do MA apresenta valores negativos. É importante mencionar também que uma banda clássica ou banda de dispersão positiva (B1) surge como conseqüência de um índice de refração positivo.

8.2 Metamaterial Acústico com E_e e ρ_e negativos com duas Unidades Estruturais

As figuras 8.2a-d mostram os resultados do comportamento de um MA “epóxi-base” com E_e e ρ_e simultaneamente negativos. Os cálculos foram realizados utilizando o formalismo da TME no limite de comprimento de onda longa. A condição da TME para este MA é válido na faixa de freqüência $0 < f < 13$kHz. O MA “epóxi-base” projetado está constituído de uma superposição de dois materiais

compósitos onde um deles que possui E_e negativo (compósito de EABLAs em epóxi) e outro que possui ρ_e negativo (compósito de ECBDs em epóxi). As dimensões geométricas das EABLA foram definidas por: o raio da esfera de ar r_1=2 mm, o raio externo do revestimento da borracha M r_2=2,5 mm e o raio externo do revestimento de água r_3=15 mm. No caso das ECBDs os parâmetros geométricos foram definidos por: o raio da esfera de chumbo r_1=9,5 mm e o raio externo do revestimento da borracha D r_2=12 mm. Estes parâmetros geométricos promoveram a superposição das regiões negativas dos parâmetros elásticos efetivos.

A Figura 8.2a mostra o diagrama esquemático do MA “epóxi-base”; cada unidade estrutural esta representada por uma esfera diferente, a esfera maior representa uma EABLA e a esfera menor uma ECBD. A fração de preenchimento de cada unidade estrutural foi de 10%. A Figura 8.2b mostra as curvas espectrais superpostas dos parâmetros elásticos efetivos κ_e, ρ_e, μ_e e E_e do MA. Como é observado, os parâmetros efetivos E_e e ρ_e tornam-se negativos exatamente nas frequências de ressonância monopolar $(l = 0)$ das EABLAs e dipolar $(l = 1)$ das ECBDs, respectivamente. No caso deste MA “epóxi-base”, constituída pela mistura destas estruturas (EABLAs e ECBDs), cada tipo de estrutura esférica contribui independentemente com os efeitos ressonantes. Na Figura 8.2b também é observado que κ_e torna-se negativo antes do que E_e, devido a que o parâmetro μ_e é positivo em toda a faixa de frequência considerada. Observa-se também que a interseção das regiões negativas de E_e e ρ_e (área hachurada na Figura 8.2b) induz um índice de refração efetivo negativo para as ondas longitudinais ($\eta_{eL} < 0$) (figura 8.2c). A região do índice de refração efetivo imaginário para as ondas transversais (η_{eT}) corresponde à região onde μ_e assume valores positivos e ρ_e valores negativos. Nota-se que nas faixas de frequência em que $\eta_{eL}, \eta_{eT} > 0$ a propagação clássica de ondas longitudinais e transversais são permitidas (Figura 8.2c). Na faixa de frequência de 7,26 a 7,76 kHz ($\eta_{eL} < 0$) somente as ondas longitudinais podem-se propagar no MA com a característica de que a direção de propagação da onda é oposta ao fluxo de energia que transporta a onda.

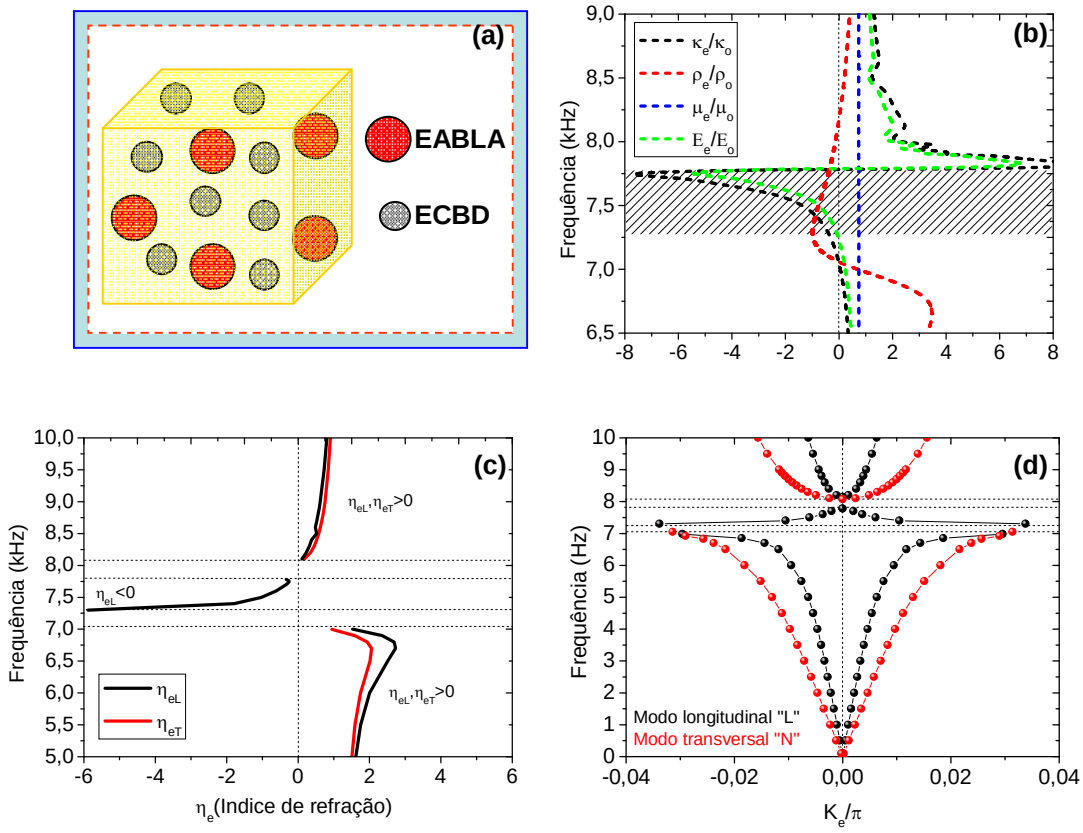

Figure 8.2. (a) Diagrama esquemático do MA “epóxi-base”, (b) superposição dos parâmetros efetivos, (c) índice de refração efetivo negativo, e (d) relação de dispersão usando os parâmetros efetivos.

Nas faixas de frequência 7,1-7,26 kHz e 7,76-8,1 kHz, onde η_{eL} e η_{eT} são imaginários, o MA apresenta dois BGs ressonantes, impedindo a transmissão simultânea das ondas longitudinais e transversais e comportando-se como um espelho elástico para os modos L e N, é isso pode ser observado na figura 8.2c.

As curvas de dispersão, calculadas utilizando os parâmetros efetivos, são mostradas na Figura 8.2d. Esta figura mostra duas bandas clássicas relacionadas com $\eta_{eL},\eta_{eT} > 0$, que suporta ambos os modos L e N. Observa-se também a existência de uma banda de dispersão negativa relacionada com $\eta_{eL} < 0$ de largura de 500 Hz e que suporta apenas o modo L. Esta banda de dispersão negativa para as ondas longitudinais é típica de um MA “fluido-base” e tal característica

permite aplicações no controle de ondas acústicas, assim como também no projeto e fabricação de um dispositivo de camuflagem acústico.

Recentemente, estudos teóricos e experimentais reportaram que, para baixas frequências e quaisquer tipo de arranjo das unidades estruturais ressonantes, os processos ressonantes localizados originam a formação de BGs [16,48,49,50,87,107,114,115]. Portanto, os BGs e a bandas de dispersão negativa para o MA “epóxi-base” são BGs absolutos (Figura 8.2d).

8.3 Metamaterial Elástico com E_e, ρ_e e μ_e Negativos com três Unidades Estruturais.

As figuras 8.3a-d mostram os resultados para o ME “poliestireno-base” com E_e, ρ_e e μ_e negativos na mesma faixa de frequências. Os cálculos foram realizados utilizando o formalismo da TME no limite de comprimento de onda longa. A condição da TME para baixas frequência foi: $0 < f < 3$kHz. O ME “poliestireno-base” projetado está constituído de uma superposição de três materiais compósitos diferentes, onde um deles apresenta E_e negativo (compósito de EABAs em poliestireno) e os outros dois apresentam simultaneamente ρ_e e μ_e negativos (compósito de BLAs em poliestireno) em diferentes faixas de frequência. É importante mencionar que estes dois últimos compósitos apresentam a mesma unidade estrutural (BLA), pero com diferentes parâmetros geométricos no BLA com objetivo de sobrepor as regiões negativas dos parâmetros efetivos ρ_e e μ_e. Os parâmetros geométricos das EABA foram definidos por: o raio da esfera de ar r_1=5 mm e o raio externo do revestimento de água r_2=10 mm. No compósito com ρ_e negativo, os parâmetros geométricos dos BLAs foram definidos por: o raio da esfera de água r_1=3,7 mm e o raio externo do revestimento da borracha M r_2=5 mm. No compósito com μ_e negativo, os parâmetros geométricos dos BLAs foram definidos por: raio da esfera de água r_1=6 mm e raio externo do revestimento de borracha r_2=7 mm. Todos estes parâmetros geométricos foram escolhidos de tal

maneira que as regiões negativas dos parâmetros elásticos κ_e, E_e, ρ_e e μ_e do ME se superponham numa faixa comum de frequências.

A Figura 8.3a mostra o diagrama esquemático do ME “poliestireno-base”, onde cada unidade estrutural esta representada por uma esfera diferente: a esfera maior representa a **EABA** e a esfera menor representa o **BLA**. Note que **BLA-1** representa a unidade estrutural do compósito com ρ_e negativo e **BLA-2** representa a unidade estrutural do compósito com μ_e negativo. As frações de preenchimento de cada compósito foram escolhidas para serem iguais a 10%.

A Figura 8.3b mostra as curvas espectrais superpostas dos parâmetros elásticos efetivos do ME, onde a região hachura em cor azul corresponde à faixa de frequência onde E_e, μ_e e ρ_e apresentam valores simultaneamente negativos. A interseção das regiões negativas de E_e com ρ_e (região hachurada em preto) define a região onde o índice de refração apresenta valores negativos para as ondas longitudinais (η_{eL}), permitindo assim a propagação do modo L. A interseção das regiões negativas de ρ_e com μ_e (região hachurada em azul) definem a região onde o índice de refração apresenta valores negativos para as ondas transversais (η_{eT}), permitindo a propagação do modo L. Na figura 8.3c observa-se que o ME “poliestireno-base” apresenta uma região onde η_{eL} e η_{eT} apresentam simultaneamente valores negativos ou equivalentemente apresenta valores simultaneamente negativos de E_e, ρ_e e μ_e, respectivamente. A faixa de frequência onde acontece este comportamento esta situada entre 1,96 e 2,04 kHz (região hachurada). Nesta faixa de frequência tanto o modo L como o modo N podem-se propagar dentro do ME numa direção oposta ao fluxo de energia transportada pela onda elástica. Observa-se também na Figura 8.3c, a existência de duas regiões onde o índice de refração assume valores imaginários. Nesta região nenhuma onda elástica incidente pode ser transmitida. A região onde o índice de refração é imaginário está correlacionada com a região onde ρ_e é negativo e os parâmetros E_e e μ_e são positivos (Figura 8.3b).

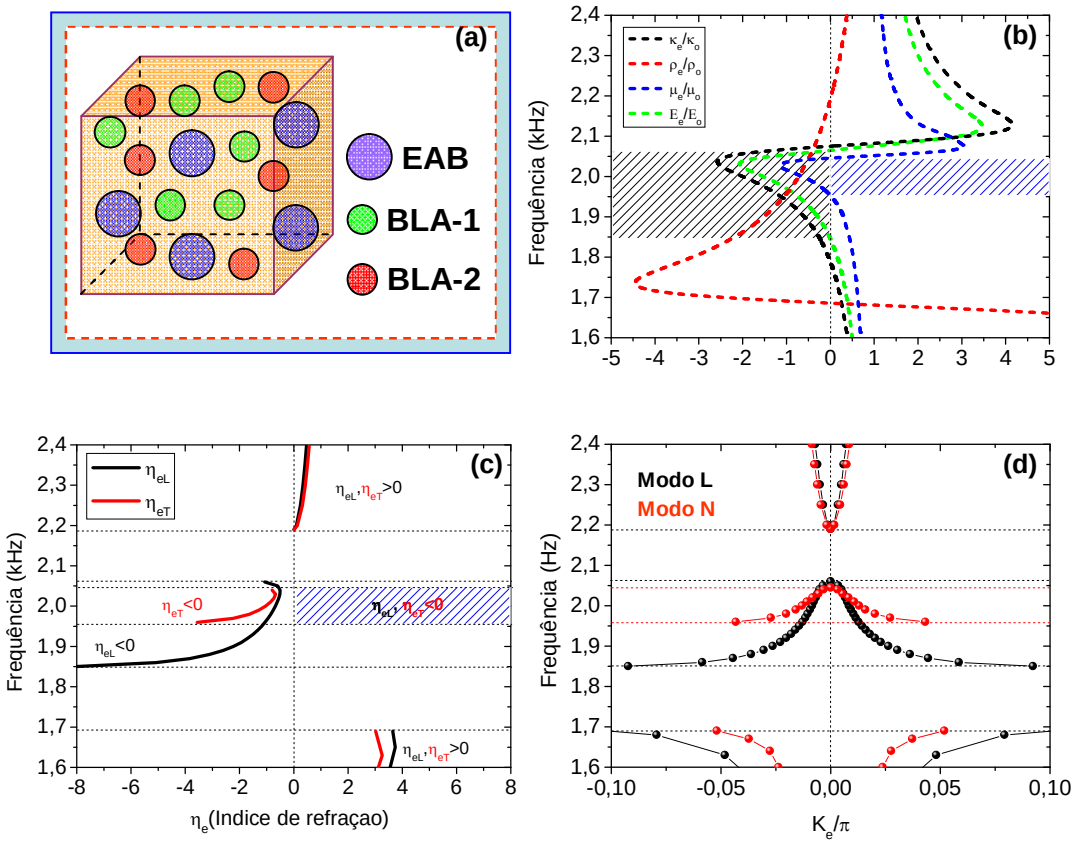

Figure 8.3. (a) Diagrama esquemático do ME "poliestireno-base", (b) superposição dos parâmetros efetivos, (c) índice de refração negativo, e (d) relação de dispersão usando os parâmetros efetivos.

A figura 8.3d mostra as curvas de dispersão do ME calculadas usando as equações 5.20a e 5.20b. Nesta figura se observa a existência de duas bandas de dispersão negativa correspondentes aos índices de refração negativos para os modos longitudinal $(\eta_{eL} < 0)$ e transversal $(\eta_{eT} < 0)$, respectivamente. Estas bandas de dispersão negativas surgidas a baixas frequências, apresentam larguras de banda de 210 Hz para o modo L e 80 Hz para o modo N. A existência de uma faixa comum destas bandas negativas (com largura de banda de 80 Hz) sugere que este efeito acontece devido à hibridização entre os diferentes tipos de ressonâncias coexistentes (monopolar, dipolar e quadrupolar) das unidades estruturais. A banda passante negativa para o modo L do ME "poliestireno-base" apresenta as mesmas características qualitativas do que para o MA "epóxi-base", já a banda passante negativa para o modo N apresenta uma propriedade única onde apenas às ondas transversais podem se propagar com dispersão negativa.

Tais características incomuns em nosso ME não tem análogo comparável com sólidos convencionais e pode permitir novas aplicações baseadas no controle de ondas acústicas, elásticas e sísmicas, assim como também no projeto de dispositivos de transparência e invisibilidade elástica.

Em conclusão, projetamos três metamateriais os quais apresentavam características não usuais em seus parâmetros efetivos:

Um MA “fluido-base”, composto de EBMs incorporados em água, apresentou valores negativos de κ_e e ρ_e numa mesma faixa de frequência de largura de 100 Hz, e a negatividade destes parâmetros efetivos foram induzidas pela coexistência das ressonâncias monopolar $(l=0)$ e dipolar $(l=0)$ das EBMs. Nesta estrutura foi observada uma banda passante de dispersão negativa para as ondas longitudinais como conseqüência da negatividade simultânea dos parâmetros efetivos κ_e e ρ_e. Estas propriedades dotam a este metamaterial propriedades totalmente diferentes aos dos fluidos convencionais.

Um MA “epóxi-base”, composto de uma superposição de dois matérias compósitos, EABLAs em epóxi com E_e negativo e ECBDs em epóxi com ρ_e negativo. Este MA apresentou uma faixa de frequências de largura de 500 Hz onde E_e e ρ_e possuíam valores simultaneamente negativos. A negatividade dos parâmetros efetivos foi induzida pela coexistência dos efeitos ressonantes monopolar $(l=0)$ das EABLAs e dipolar $(l=1)$ das ECBDs. A banda de dispersão negativa para o modo L do MA considerado foi observada como resultado da negatividade simultânea de E_e e ρ_e, e o BG observado nesta estrutura para o modo N foi induzida pela positividade de μ_e e negatividade de κ_e.

Por último, foi projetado um ME “poliestireno-base” com E_e, ρ_e e μ_e negativos simultaneamente numa faixa de frequência de largura de 80 Hz. Este ME foi composto de três materiais compósitos: um compósito de EABAs em poliestireno com E_e negativo e dois compósitos de BLAs em poliestireno com ρ_e e μ_e negativos, respectivamente. A negatividade dos parâmetros E_e, ρ_e e μ_e foi induzida pela coexistência de modos ressonantes monopolar $(l=0)$, dipolar $(l=1)$

e quadrupolar $(l = 2)$ das unidades estruturais correspondentes. As curvas de dispersão do ME “poliestireno-base” mostraram duas bandas de dispersão negativas correspondentes aos modos L (E_e e ρ_e negativos) e N (ρ_e e μ_e negativos) com larguras de banda de 210 e 80 Hz, respectivamente. A superposição destas bandas negativas dota de características incomuns ao nosso ME e não tem análogo comparável com sólidos convencionais.

Capítulo 9

Considerações Finais

9.1 Conclusões

Os resultados obtidos no presente trabalho nos conduzem a formular as seguintes conclusões:

- Materiais com inclusões esféricas revestidas e duplamente revestidas mostraram ressonâncias Mie mais intensas do que os materiais com inclusões de esferas simples. Adicionalmente, foi mostrado que a ressonância Mie nas esferas revestidas tem contribuição significativa dos três primeiros canais de espalhamento $l = 0, 1, 2$ que correspondem às ressonâncias Mie monopolar, dipolar e quadrupolar, respectivamente.
- O formalismo da TME tridimensional, desenvolvido em nosso trabalho, mostrou ser robusto para o cálculo das propriedades de uma grande variedade de metamateriais acústicos e elásticos localmente ressonantes com parâmetros elásticos efetivos negativos. E em base à natureza intrínseca do comportamento ressonante das inclusões esféricas, mostramos que a negatividade destes parâmetros elásticos efetivos origina-se das ressonâncias Mie monopolar, dipolar e quadrupolar respectivamente.
- Combinando duas ou três estruturas de materiais localmente ressonantes com diferentes propriedades elásticas foram projetados com sucesso dois metamateriais com índice refração negativo numa faixa de frequências significativamente larga. O projeto do MA tridimensional “epóxi-base” mostrou a existência de uma faixa de frequência entre 7,26 e 7,76 kHz onde sua constante elástica e densidade de massa efetiva apresentaram valores simultaneamente negativos. O projeto de um ME tridimensional “poliestireno-base” mostrou a existência de uma faixa de frequências entre 1,96 e 2,04 kHz onde seus três parâmetros elásticos efetivos são simultaneamente

negativos. A negatividade simultânea destes parâmetros acústicos/elásticos induziu a formação de novas bandas de dispersão (bandas de dispersão negativa), uma dos quais suporta apenas o modo L (MA) e a outra banda suporta ambos os modos L e N (ME). Estas bandas estão correlacionadas ao índice de refração negativo. A diferença dos metamateriais acústicos e elásticos reportados na literatura, os metamateriais projetados neste trabalho apresentam uma vantagem importante já que estes podem ser facilmente fabricados no laboratório, devido à escolha de materiais e geometrias facilmente manipuláveis. Os metamateriais projetados neste trabalho podem ser aplicados no controle da propagação das ondas acústicas e elásticas de tal forma que possam ser aplicados em dispositivos de invisibilidade acústica/elástica, efeito Doppler invertido e super-anisotropia.

9.2 Perspectivas Futuras

Neste trabalho tem sido claramente mostrado que um metamaterial acústico/elástico tridimensional pode ser projetado com sucesso utilizando o formalismo da TME e tendo sido observado que metamateriais constituídos de esferas com um ou dois revestimento apresentaram melhor desempenho em relação aos materiais com uma inclusão de esferas simples. Neste contexto, os resultados da análise da matriz T de espalhamento Mie para esferas revestidas e duplamente revestidas sugere que com a adição de mais revestimentos, pode-se modular e ampliar a largura das bandas ressonantes, otimizando assim a performance dos metamateriais. Um outro desafio que pode melhorar as condições de projeto de metamateriais seria a de estender à ”teoria” de espalhamento Mie para inclusões não esféricas o que permitiria o projeto de metamateriais cujas propriedades dependam da polarização da onda.

Outros desafios são:

Estender os resultados para ondas eletromagnéticas, e integrá-los no estudo da interação elástico-ótico com aplicações em metamateriais foxônicos.

Estender os resultados ao estudo de metamateriais acústicos/elásticos tridimensionais anisotrópicos.

Por último, inspirado pela existência de constantes elásticas negativas, estender o domínio a outras constantes físicas, químicas e biológicas.

Apêndice A – Funções gerais de Pao e Mow

Neste apêndice, as funções $\xi_{q\sigma}^{pf} = \xi_{q\sigma}^{pf}(\mathbf{r}, l)$ têm as seguintes expressões:

$$\xi_{qL}^{1f} = k_{Lq} f_l^{(1)}(k_{Lq} r)$$

$$\xi_{qN}^{1f} = \frac{l(l+1)}{r} f_l(k_{Tq} r)$$

$$\xi_{qM}^{2f} = f_l(k_{Tq} r)$$

$$\xi_{qL}^{2f} = \frac{1}{r} f_l(k_{Lq} r)$$

$$\xi_{qN}^{2f} = k_{Tq} f_l^{(1)}(k_{Tq} r) + \frac{1}{r} f_l(k_{Tq} r)$$

$$\xi_{qL}^{4f} = (\lambda_q + 2\mu_q) k_{Lq}^2 f_l^{(2)}(k_{Lq} r) + \frac{2\lambda_q k_{Lq}}{r} f_l^{(1)}(k_{Lq} r) - \frac{\lambda_q l(l+1)}{r^2} f_l(k_{Lq} r)$$

$$\xi_{qN}^{4f} = \frac{2\mu_q l(l+1)}{r} \left\{ k_{Tq} f_l^{(1)}(k_{Tq} r) - \frac{1}{r} f_l(k_{Tq} r) \right\}$$

$$\xi_{qL}^{7f} = \frac{2\mu_q}{r} \left\{ k_{Lq} f_l^{(1)}(k_{Lq} r) - \frac{1}{r} f_l(k_{Lq} r) \right\}$$

$$\xi_{qM}^{7f} = \mu_q \left\{ k_{Tq} f_l^{(1)}(k_{Tq} r) - \frac{1}{r} f_l(k_{Tq} r) \right\}$$

$$\xi_{qN}^{7f} = \mu_q \left\{ k_{Tq} f_l^{(2)}(k_{Tq} r) + \frac{(l^2 + l - 2)}{r^2} f_l(k_{Tq} r) \right\}$$

O subscrito q ($o \le q \le n$) denota o meio onde a onda elástica esta-se propagando: "$q = o$" para o meio hospedeiro, e "$q = k$" para à $k - ésima$ região da inclusão esférica. O sobrescrito f indica o tipo de função de Bessel esférica: j ou $h^{(1)}$. Os

símbolos *L*, *M* e *N* denotam os modos longitudinal, primeira e segunda transversa, respectivamente. Quando $q = o$ ou n, então $r = r_n$, caso contrário $r = r_k$.

Apêndice B – Cálculo dos coeficientes de espalhamento Mie $D_l^{\alpha\alpha'}(s,o)$ para uma simples inclusão esférica

Os cinco coeficientes de espalhamento $D_l^{\sigma\sigma'}(s,o)$, determinados pelas condições de continuidade, que liga o campo espalhado com o campo incidente de uma simples inclusão esférica têm as seguintes expressões explícitas:

$$D_l^{LL}(s,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix} -\xi_{0L}^{1j} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{2j} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ -\xi_{0L}^{4j} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ -\xi_{0L}^{7j} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

$$D_l^{LN}(s,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix} -\xi_{0N}^{1j} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ -\xi_{0N}^{2j} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ -\xi_{0N}^{4j} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{11}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ -\xi_{0N}^{7j} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

$$D_l^{MM}(s,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & -\xi_{0M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

$$D_l^{NL}(s,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & -\xi_{0L}^{1j} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & -\xi_{0L}^{2j} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & -\xi_{0L}^{4j} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & -\xi_{0L}^{7j} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

e

$$D_l^{NN}(s,o) = \frac{1}{M_l}\begin{vmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & -\xi_{0N}^{1j} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & -\xi_{0N}^{2j} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & -\xi_{0N}^{4j} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & -\xi_{0N}^{7j} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

onde

$$M_l = \begin{vmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \end{vmatrix}$$

Apêndice C – Cálculo dos coeficientes de espalhamento Mie $D_l^{\alpha\alpha'}(1,o)$ para uma inclusão esférica revestida

Os cinco coeficientes de espalhamento $D_l^{\alpha\alpha'}(1,o)$ que liga o campo espalhado com o campo incidente de uma inclusão esférica revestida têm as seguintes expressões explícitas:

$$D_l^{LL}(1,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix}
-\xi_{0L}^{1j} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\xi_{0L}^{2j} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \\
-\xi_{0L}^{4j} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\xi_{0L}^{7j} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$D_l^{LN}(1,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix}
-\xi_{0N}^{1j} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\xi_{0N}^{2j} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \\
-\xi_{0N}^{4j} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\xi_{0N}^{7j} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$D_l^{MM}(1,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix}
\xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0\\
0 & -\xi_{0M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j}\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j}\\
\xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0\\
0 & -\xi_{0M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$D_l^{NL}(1,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix}
\xi_{0L}^{1h} & 0 & -\xi_{0L}^{1j} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0\\
0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{2h} & 0 & -\xi_{0L}^{2j} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j}\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j}\\
\xi_{0L}^{4h} & 0 & -\xi_{0L}^{4j} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0\\
0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{7h} & 0 & -\xi_{0L}^{7j} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

e

$$D_l^{NN}(1,o)=\frac{1}{M_l}\begin{vmatrix}
\xi_{0L}^{1h} & 0 & -\xi_{0N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0\\
0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{2h} & 0 & -\xi_{0N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j}\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j}\\
\xi_{0L}^{4h} & 0 & -\xi_{0N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0\\
0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\xi_{0L}^{7h} & 0 & -\xi_{0N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

onde

$$M_l = \begin{vmatrix} \xi_{0L}^{1h} & 0 & \xi_{0N}^{1h} & -\xi_{2L}^{1j} & 0 & -\xi_{2N}^{1j} & -\xi_{2L}^{1h} & 0 & -\xi_{2N}^{1h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{0M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{0L}^{2h} & 0 & \xi_{0N}^{2h} & -\xi_{2L}^{2j} & 0 & -\xi_{2N}^{2j} & -\xi_{2L}^{2h} & 0 & -\xi_{2N}^{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{1j} & 0 & \xi_{2N}^{1j} & \xi_{2L}^{1h} & 0 & \xi_{2N}^{1h} & -\xi_{sL}^{1j} & 0 & -\xi_{sN}^{1j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{2h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{2j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2j} & \xi_{2L}^{2j} & 0 & \xi_{2N}^{2h} & -\xi_{sL}^{2j} & 0 & -\xi_{sN}^{2j} \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{4j} & 0 & \xi_{2N}^{4j} & \xi_{2L}^{4h} & 0 & \xi_{2N}^{4h} & -\xi_{sL}^{4j} & 0 & -\xi_{sN}^{4j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & \xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{sM}^{7j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{2L}^{7j} & 0 & \xi_{2N}^{7j} & \xi_{2L}^{7h} & 0 & \xi_{2N}^{7h} & -\xi_{sL}^{7j} & 0 & -\xi_{sN}^{7j} \\ \xi_{0L}^{4h} & 0 & \xi_{0N}^{4h} & -\xi_{2L}^{4j} & 0 & -\xi_{2N}^{4j} & -\xi_{2L}^{4h} & 0 & -\xi_{2N}^{4h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{0M}^{7h} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7j} & 0 & 0 & -\xi_{2M}^{7h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{0L}^{7h} & 0 & \xi_{0N}^{7h} & -\xi_{2L}^{7j} & 0 & -\xi_{2N}^{7j} & -\xi_{2L}^{7h} & 0 & -\xi_{2N}^{7h} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Apêndice D – Cálculo dos parâmetros efetivos constitutivos dos metamateriais

Para o cálculo dos parâmetros efetivos dos metamateriais acústicos e elásticos as seguintes aproximações (baixas freqüências ou cumprimentos de onda longa: $x = k_{\sigma e} r_e, k_{\sigma o} r_o < 0,5$) das funções esféricas de Bessel e Hankel de primeira espécie são consideradas:

(a) $j_o(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $\quad h_o(x) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{i}{x}$

(b) $j_1(x) = \frac{x}{3}$, $\quad h_1(x) = \frac{x}{3} - \frac{i}{x^2}$

(c) $j_2(x) = \frac{x^2}{6}$, $\quad h_2(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{3i}{x^3}$

(d) $j_3(x) = \frac{x^3}{105}$, $\quad h_3(x) = \frac{x^3}{105} - \frac{15i}{x^4}$

<u>Metamateriais sólido-base:</u> $\lambda_o > 0,\ \rho_o > 0,\ \mu_o > 0$

Substituindo estas aproximações para $x = k_{\sigma e} r_e, k_{\sigma o} r_o$ em $D_o^{\alpha\alpha'}(e,o)$, $D_1^{\alpha\alpha'}(e,o)$ e $D_2^{\alpha\alpha'}(e,o)$, e considerando os termos x de baixa ordem, obtemos as seguintes identidades:

$$D_o^{LL}(e,o) \approx \frac{(k_{Lo} r_e)^3 (k_e - k_o)}{i(3k_e + 4\mu_o)}$$

$$D_1^{LL}(e,o) \approx \frac{i(k_{Lo} r_e)^3 (\rho_e - \rho_o)}{9\rho_o}$$

$$D_2^{LL}(e,o) \approx \frac{4\mu_o (k_{Lo} r_e)^3 (\mu_e - \mu_o)}{3i\left[6\mu_e(\kappa_o + 2\mu_o) + \mu_o(9\kappa_o + 8\mu_o)\right]}$$

<u>Metamateriais fluido-base:</u> $\lambda_o > 0,\ \rho_o > 0,\ \mu_o = 0$

Substituindo estas aproximações para $x = k_{\sigma e} r_e, k_{\sigma o} r_o$ em $D_o^{\alpha\alpha'}(e,o)$, $D_1^{\alpha\alpha'}(e,o)$ e $D_2^{\alpha\alpha'}(e,o)$, e considerando os termos x de baixa ordem, obtemos as seguintes identidades:

$$D_o^{LL}(e,o) \approx \frac{(k_{Lo} r_e)^3 (k_e - k_o)}{3ik_e}$$

$$D_1^{LL}(e,o) \approx \frac{i(k_{Lo} r_e)^3 (\rho_e - \rho_o)}{3(2\rho_e + \rho_o)}$$

$$D_2^{LL}(e,o) \approx 0$$

Referências Bibliográficas

[1] MIE, G., Bitrage zur Opik truber Medien, speziell kolloidaler Metallosungen, Contributions to the Optics of turbid media, particularly of colloidal Metal solutions, **Ann. Phys.** 25, 377, 1908.

[2] ISHIMARU A., **Wave Propagation and Scattering in Random Media**: Single Scattering and Transport Theory, Vol 1, Academic Press, Inc. pp. 27-30, 1978.

[3] BOHREN C. F., HUFFMAN D. R. **Absorption and Scattering of Light by Small Particles**, John Wiley & Sons, Inc., Cap. 4, 1998.

[4] BRINGI V. N., and CHANDRASEKAR V., **Polarimetric Doppler Weather Radar: Principles and applications**, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK, pp. 75-79, 2004.

[5] ZHAO Q. et al., Mie resonant-based dielectric metamaterials, **Materials Today** 12, 60, 2009.

[6] MODINOS A., Scattering of Electromagnetic waves by a plane of Spheres-Formalism, **Physica A**, 141, 575, 1987.

[7] STEFANOU N., and MODINOS A., Scattering of light from a two-dimensional array of spherical particles on a substrate, **J. Phys. Condens. Matter** 3, 8135, 1991.

[8] STEFANOU N., et al., Heterostructures of photonic crystals: frequency bands and transmission coefficients, **Comput. Phys. Commun.** 113, 49, 1998.

[9] YANNOPAPAS V., MODINOS A. and STEFANOU N., Optical properties of metallodielectric photonic crystals, **Phys. Rev. B** 60, 5359, 1999.

[10] GANTZOUNIS G. and STEFANOU N., Theoretical analysis of three-dimensional polaritonic photonic crystals, **Phys. Rev. B** 72, 075107, 2005.

[11] TSERKEZIS C., PAPANIKOLAOU N., GANTZOUNIS G., and STEFANOU N., Understanding artificial optical magnetism of periodic metal-dielectric-metal layered structures, **Phys. Rev. B** 78, 165114, 2008.

[12] CHRISTOFI A., STEFANOU N., and GANTZOUNIS G., Photonic eigenmodes and light Propagation in periodic structures of chiral nanoparticles, **Phys. Rev. B** 83, 245126, 2011.

[13] LIU Z., CHAN C. T., and SHENG P., Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: Theory and experiment, **Phys. Rev. B** 62, 2446, 2000.

[14] PSAROBAS I. E., et al., Scattering of elastic waves by periodic arrays of spherical bodies, **Phys. Rev. B** 62, 278, 2000.

[15] LI J., and Chan C. T., Double-negative acoustic metamaterial, **Phys. Rev. E** 70, 055602, 2004.

[16] DING, Y., et al., Metamaterial with Simultaneously Negative Bulk Modulus and Mass Density, **Phys. Rev. Lett.** 99, 093904, 2007.

[17] ZHOU, X., and HU G., Analytic model of elastic metamaterials with local resonances**, Phys. Rev. B** 79, 195109, 2009.

[18] BUROV V. A. et al., Acoustic Double Negative Media, **Acoust. Phys.** 55, 298, 2009.

[19] ZHOU, X., and HU G., Acoustic wave transparency for a multilayered sphere with acoustic metamaterials**, Phys. Rev. E** 75, 046606, 2007.

[20] CUMMER S. A. et al., Scattering Theory Derivation of a 3D Acoustic Cloaking Shell, **Phys. Rev. Lett.** 100, 024301, 2008.

[21] DENG K. et al., Theoretical study of subwavelength imaging by acoustic metamaterial slabs, **J. Appl. Phys.** 105, 124909, 2009.

[22] VESELAGO, V. G., The Electrodynamics of Substances with simultaneously negative values of ε and μ, **Sov. Phys. Usp.** 10, 509, 1968.

[23] PENDRY, J. B., and SMITH D.R., **Physics Today** 57, 37-43, 2004.

[24] MAKAROV, V. P. and RUKHADZE, A. A., Inverted (negative) refraction of an electromagnetic wave in an anisotropic medium, **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, 103, 354-359, 2006.

[25] PENDRY J. B., et al., Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena, **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.** 47, 2075, 1999.

[26] SMITH, D. R., PADILLA W. J., VIER D. C., NEMAT-NASSER S. C., and SCHULTZ S., Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity, **Phys. Rev. Lett.** 84, 4184, 2000.

[27] SHELBY, R. A., SMITH, D. R., and SCHULTZ, S., Experimental Verification of a Negative Index of Refraction, **Science** 292, 77, 2001.

[28] WU, Y., LAI Y., and ZHANG Z. Q., Elastic Metamaterials with Simultaneously Negative Effective Shear Modulus and Mass Density, **Phys. Rev. Lett**. 107, 105506, 2011.

[29] LAI Y., Wu Y., SHENG P., and ZHANG Z.-Q., Hybrid elastic solids, **Nature Mat.** 10, 620, 2011.

[30] LIU, Z., and CAI L. W. Three-Dimensional Multiple Scattering of Elastic Waves by Spherical inclusion, **Journal of Vibrations and Acoustics** 131, 061005-1, 2009.

[31] DOYLE, T. E., Iterative Simulation of Elastic Wave Scattering in Arbitrary Dispersions of Spherical Particles, **J. Acoust. Soc. Am.**, 119, 2599, 2006.

[32] LIU, Z., Three-Dimensional Multiple Scattering of Elastic Waves by Spherical inclusion, **Tese de doutorado** , 2007.

[33] LORENZ, L. Sur la lumière réfléchie et refractée par une sphère transparente, **Vidensk. Selsk. Skrifter** 6, 1, 1890.

[34] THOMSON, J. J., **On the scattering of electromagnetic waves by metallic spheres, Recent Researches in Electricity and Magnetism**., (University Press, Oxford, England) pp. 437-451, 1893.

[35] DEBYE, P., Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem Material, **Annalen der Physik** 30, 57, 1909.

[36] STRATTON, J. A., **Electromagnetic Theory**, McGraw-Hill, New York, pp. 567-573, 1941.

[37] STRUTT, J. W., Investigation of the disturbance produced by a spherical obstacle on the waves of sound, **Proc. London Math. Soc.** 4, 253, 1872.

[38] SEZAWA, K., Scattering of elastic waves and some allied problems, **Bull. Earth-quake Res. Inst., Tokyo Imperial University, Japan** 3, 19, 1927.

[39] YING, C. F., and TRUELL R., Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, **Journal of Applied Physics** 27, 1086, 1956.

[40] PAO, Y. H., and MOW C. C., Scattering of plane compressional waves by a spherical obstacle, **Journal of Applied Physics** 34, 493, 1963.

[41] EINSPRUCH, N. G.; WITTERHOLT, E. J.; and TRUELL R., Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, **Journal of Applied Physics** 31, 806, 1960.

[42] NORRIS, A. N., Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites, **International Journal of Engineering Science** 24, 1271, 1986.

[43] HINDERS, M. K., Plane-elastic-wave scattering from an elastic sphere, **Il Nuovo Climento** 106 B, 799, 1991.

[44] WATERMAN, P. C., New formulation of acoustic scattering, **The Journal of the Acoustic Society of America** 45, 1417, 1969.

[45] VARATHARAJULU, V., and PAO, Y. H., Scattering matrix for elastic waves I. Theory, **The Journal of the Acoustic Society of America** 60, 556, 1976.

[46] WATERMAN, P. C., Matrix theory of elastic wave scattering, **The Journal of the Acoustic Society of America** 60, 567, 1976.

[47] BOSTRÖM, A., Multiple Scattering of Elastic Waves by Bounded Obstacles, J. **Acoust. Soc. Am**., 67, 399, 1980.

[48] LIU, Z., et al., Locally Resonant Sonic Materials, **Science** 289, 1734, 2000.

[49] LIU Z. et al., Analytic model of phononic crystals with local resonances, **Phys. Rev. B** 71, 014103, 2005.

[50] LIU Z., CHAN C. T. and SHENG P., Three-component elastic wave band-gap material, **Phys. Rev. B** 65, 165116, 2002.

[51] ZHOU X. et al., Elastic wave transparency of a solid sphere coated with metamaterials**, Phys. Rev. B** 77, 024101, 2008.

[52] CHENG Y. and LIU X. J., Resonance effects in broadband acoustic cloak with multilayered homogeneous isotropic materials, **Appl. Phys. Lett.** 93, 071903, 2008.

[53] MCNEW J., et al., Sound scattering from two concentric fluid spheres (L), **J. Acoust. Soc. Am.** 125, 1, 2009.

[54] CAI L. W. et al., Acoustical scattering by multilayer spherical elastic scatterer containing electrorheological layer, **J. Acoust. Soc. Am.** 129 (1), 2011.

[55] YABLONOVITCH E., Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics, **Phys. Rev. Lett.** 58, 2059, 1987.

[56] YABLONOVITCH E., and GMITTER T. J., Photonic Band Structure: The Face-Center-Cubic Case, **Phys. Rev. Lett**. 63, 1950, 1989.

[57] KUSHWAHA M. S., et al., Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites, **Phys. Rev. B** 49, 2313, 1994.

[58] ECONOMOU E. N., and SIGALAS M., Stop bands for elastic waves in periodic composite materials, **J. Acoust. Soc. Am.** 95, 1734, 1994.

[59] SIGALAS M. M., and ECONOMOU E. N., Attenuation of multiple-scattered sound, **Europhys. Lett.** 36, 241, 1996.

[60] KLIRONOMOS A. D., and ECONOMOU E. N., Elastic wave band gaps and single scattering, **Solid State Commun.** 105, 327, 1998.

[61] BUTLER W. H., et al., Multiple-scattering theory for space-filling cell potentials, **Phys. Rev. B** 45, 11 527, 1992.

[62] CAI, L. W., and WILLIAMS, J. H., Large Scale Multiple Scattering Problems, **Ultrasonics**, 37, 453, 1999.

[63] PSAROBAS I. E., et al., Acoustic Properties of Colloidal Crystals, **Phys. Rev. B**, 65 064307, 2002.

[64] SAINIDOU R., et al., Formation of absolute frequency gaps in three-dimensional solid phononic crystals, **Phys. Rev. B** 66, 212301, 2002.

[65] FUNG, K. H., et al., Transmission properties of locally resonant sonic materials with finite slab thickness, **Z. Kristallogr.** 220 871, 2005.

[66] SAINIDOU, R., et al., The layer multiple-scattering method applied to phononic crystals, **Z. Kristallogr.** 220,848, 2005.

[67] SHENG P., **Introduction to Wave Scattering**, Academic, New York, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.

[68] KROKHIN A. A., ARRIAGA J., and GUMEN L. N., Speed of Sound in Periodic Elastic Composites, **Phys. Rev. Lett.** 91, 264302, 2003.

[69] HOU Z., et al., Effective elastic parameters of the two-dimensional phononic crystal, **Phys. Rev. E** 71, 037604, 2005.

[70] TORRENT D., and SANCHEZ-DEHESA J., Effective parameters of clusters of cylinders embedded in a nonviscous fluid or gas, **Phys. Rev. B** 74, 224305, 2006.

[71] TORRENT D. et al., Homogenization of Two-Dimensional Clusters of Rigid Rods in Air, **Phys. Rev. Lett.** 96, 204302, 2006.

[72] MEI, J. Effective dynamic mass density of composites, **Phys. Rev. B** 76, 134205, 2007.

[73] HU X., and HO K.-M., Homogenization of acoustic metamaterials of Helmholtz resonators in fluid, **Phys. Rev. B** 77, 172301 2008.

[74] WU Y., LAI Y., and ZHANG Z. Q., Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions, **Phys. Rev. B** 76, 205313, 2007.

[75] WU Y., and ZHANG Z. Q., Dispersion relations and their symmetry properties of electromagnetic and elastic metamaterials in two dimensions, **Phys. Rev. B** 79, 195111, 2009.

[76] AO X., and CHAN C. T., Complex band structures and effective medium descriptions of periodic acoustic composite systems, **Phys. Rev. B** 80, 235118, 2009.

[77] KITTEL C., **Introduction to Solid State Physics**, Wiley, New York, 1996.

[78] ASHCROFT N. W., and MERMIN N. D., **Solid State Physics**, Thomson Learning, 1976.

[79] JACKSON J. D., **Classical Electrodynamics**, John Wiley & Sons, Inc. ed. 3, 1999.

[80] GARNETT J. C. M., "Colours in Metal Glasses and in Metallic Films," **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. Series A, Containing Papers of a Math. or Phys. Character (1896-1934), **203**, 385, 1904.

[81] CHOY T. C., **Effective medium theory: principles and applications**, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[82] BERRYMAN J. G., Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions, **J. Acoust. Soc. Am.** 68, 1809, 1980.

[83] HASHIN Z., and SHTRIKMAN S., A Variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, **J. Mech. Phys. Solids** 11, 127, 1963.

[84] BRILL D., and GAUNAURD G., Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere, **J. Acoust. Soc. Am.** 81, 1, 1987.

[85] LIU, H. et al., High Aspect Subdiffraction-Limit Photolithography via a Silver Superlens, **Nano Lett.**, 12 (3), pp 1549–1554, 2012.

[86] ZHANG, X., and LIU Z., Superlenses to overcome the diffraction limit, **Nature Materials**, Vol. 7, 435, 2008.

[87] ZHAO H., WEN J., YU D., and WEN X., Low-frequency acoustic absorption of localized resonances: Experiment and Theory, **Journal of Applied Physics** 107, 023519, 2010.

[88] MEI, J., et al., Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound, **Nature Communications** 3, 756, 2012.

[89] LEONHARDT, U., et al., Optical Conformal Mapping, **Science** 312, 1777, 2006.

[90] PENDRY, J. B., et al., Controlling Electromagnetic Fields, **Science** 312, 1780, 2006.

[91] SCHURIG, D. et al., Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies , **Science** 314, 977, 2006.

[92] CHEN H., CHAN C. T., and SHENG P., Transformation optics and metamaterials, **Nature Materials** 9, 387, 2010.

[93] MILTON G. W., BRIANE M., and WILLIS J. R. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form, **New J. Phys.** 8, 248, 2006.

[94] CUMMER S. A., and SCHURIG D., One path to acoustic cloaking, **New J. Phys.** 9, 45, 2007.

[95] CAI L. W., and SANCHEZ-DEHESA J., Analysis of cummer-schurig acoustic cloaking, **New J. Phys.,** 9, 450, 2007.

[96] CHEN, H., and CHANG, C. T., Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials, **Applied Physics letters** 91, 183518, 2007.

[97] GRAFF, K. F., **Wave Motion in Elastic Solid**, Dover Publications, INC New York, p. 592, 1975.

[98] MORSE, P. M., FESHBACH, H., **Methods of Theoretical Physics**, Part II, McGraw-Hill Book Company, INC, p.1462, 1953.

[99] GUMEROV, N. A., **Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions**, Elsevier Series in Electromagnetic, p.61, 2004.

[100] MOW, C.-C., and PAO, Y. H., **Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations**, United States Air Force Project Rand, p.603, 1971.

[101] HANSEN, W. W., A new type of expansion in radiation problems. **Phys. Rev.** 47, 139, 1935.

[102] MARTIN P. A., **Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles**, first ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications 107, Cambridge, p. 106, 2006.

[103] SAINIDOU, R., STEFANOU, N., PSAROBAS, I. E., and MODINOS A., A layer-multiple-scattering method for phononic crystals and heterostructures of Shuch, **Computer Physics Communications** 166, 197, 2005.

[104] WU, Y., LI, J. ZHANG, Z.-Q., CHANG C. T., Effective medium theory for magnetodielectric composites: Beyond the long-wavelength limit, **Phys. Rev. B** 74, 085111, 2006.

[105] NI Q., and CHENG J. C., long wavelength propagation of elastic waves in three-dimensional periodic solid-solid media, **J. Appl. Phys.** 101, 073515, 2007.

[106] Physical Properties and Miscellanea and Platinum:
http://en.wikipedia.org/wiki/Platinum

[107] HUANG G. L. and SUN C. T., Band Gaps in a Multiresonator Acoustic Metamaterial, **Journal of Vibration and Acoustics** 132, 031003-1, 2010.

[108] WOOD A. B., Textbook of Sound, Macmillan, New York, 1941.

[109] KUSHWAHA M. S., DJAFARY-ROUHANI B., DOBRZYNSKI L., Sound isolation from cubic arrays of air bubbles in water, Physics Letters A, 248, 252, 1998.

[110] LEROY V., STRYBULEVYCH A., SCANLON M. G., and PAGE J. H., Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles, Eur. Phys. J. E 29, 123, 2009.

[111] MILTON G. W., The Theory of Composites, Cambridge University Press, 2004.

[112] FOKIN V., AMBATI M., Sun C., and Zhang X., Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials, **Phys. Rev. B 76**, 144302, 2007.

[113] CALIUS E. P., BREMAUD X., SMITH B., and HALL A., Negative mass sound shielding structures: Early results, **Phys. Status Solidi B** 246, No. 9, 2089, 2009.

[114] HUANG G. L. and SUN C. T., Continuum modeling of a composite material with internal resonators, **Mechanics of Materials** 46, 1-10, 2012.

[115] LIU L., and HUSSEIN M. I., Wave Motion in Periodic Flexural Beams and Characterization of the Transition Between Bragg Scattering and Local Resonance, Journal of Applied Mechanics 79, 011003, 2012.