

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

NELSON ANTONIO MARTINS PERES

**INFLUÊNCIA DAS VIBRAÇÕES DO CABO NA INSTABILIDADE AEROELÁSTICA
DE UMA VIGA SIMPLES ESTAIADA.**

São Paulo
2005

NELSON ANTONIO MARTINS PERES

**INFLUÊNCIA DAS VIBRAÇÕES DO CABO NA INSTABILIDADE AEROELÁSTICA
DE UMA VIGA SIMPLES ESTAIADA.**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de Concentração: Engenharia de
Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro
Mazzilli

São Paulo
2005

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Peres, Nelson Antonio Martins

Influência das vibrações do cabo na instabilidade aeroelástica de uma viga simples estaiada / N.A.M. Peres. -- São Paulo, 2005. 72 p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas

**1. Dinâmica das estruturas 2. Pontes estaiadas
3. Drapejamento 4. Vibrações I . Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas II. t**

PERES, N. A. M. **Influência das vibrações do cabo na instabilidade aeroelástica de uma viga simples estaiada**. 2005. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

ERRATA

Folha	Linha	Onde se lê	Leia-se
8	14	Penzian	Penzien
9	13	obter as forças aerodinâmicas	obter os esforços aerodinâmicos
10	14 e 15	dobro da do primeiro modo global	dobro da do primeiro modo local
15	5	De acordo com Morandini (2000), e Mazzilli e Rojas (2005), pode	De acordo com Morandini (2000), pode
23	5	As forças modais p_1, p_2 e p_3, decorrentes das forças aplicadas	Os esforços modais p_1, p_2 e p_3, decorrentes dos esforços aplicados
30	11	Forças Aeroelásticas na Viga	Esforços Aeroelásticos na Viga
30	13	forças aerodinâmicas na viga	esforços aerodinâmicos na viga
30	14	As força aerodinâmicas	Os esforços aerodinâmicos
52	11	parece ser desprezável.	é desprezável, como esperado.

Na página 62, após o primeiro parágrafo, inserir a tabela abaixo:

θ_0 (graus)	U_2 (m/s)
20,7	584
22	184
24	97
26	71
28	60
30	55
32	54
34	56
36	62
38	77
40	113
42	281

*A meus pais, pelo apoio e imenso
incentivo para a conclusão do trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, pela paciência e seu inestimável apoio no desenvolvimento dos trabalhos.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

RESUMO

Peres, N. A. M. **Influência das vibrações do cabo na instabilidade aeroelástica de uma viga simples estaiada**. 2005. 72 f – Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2005.

Esse trabalho consiste na determinação das velocidades críticas do vento e das amplitudes das vibrações numa estrutura composta por uma viga engastada suspensa por um estai (cabo), submetida aos efeitos de vento e chuva. Foi considerada a deformação no cabo devido ao carregamento do peso próprio e o acoplamento não-linear das vibrações do cabo e da viga. Três modos de vibração são de especial interesse, chamados de primeiro modo global (flexão da viga e vibração no cabo), primeiro modo local (vibração no cabo, com flexão na viga desprezável) e primeiro modo à torção. O modelo foi reduzido a três graus de liberdade. A modelagem dos carregamentos aerodinâmicos aplicados na viga foi feita segundo procedimentos tradicionais. O carregamento aerodinâmico aplicado ao cabo sob efeito de chuva e vento também foi levado em consideração. Para a redução do modelo matemático, os coeficientes de rigidez e de amortecimento equivalente são definidos e dependem parametricamente da velocidade do vento. Os termos não-lineares são devidos ao acoplamento das vibrações do cabo e da viga à flexão (no plano do cabo) e também aos efeitos aeroelásticos no cabo. Os seguintes regimes instáveis são avaliados: o efeito de galope (*galloping*) no cabo, o drapejamento (*flutter*) unimodal na torção e o drapejamento (*flutter*) do modo de flexão da viga em conjunto com vibrações transversais do cabo.

Palavras-chave: vibração, efeito chuva-vento, drapejamento, viga estaiada, dinâmica não-linear

ABSTRACT

Peres, N. A. M. **Influence of cable vibrations on the aero-elastic instability of a cable-stayed beam.** 2005. 72 f – Dissertation (Master of Engineering) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2005.

This paper is concerned with determining wind critical velocities and post-critical vibration amplitudes in a cable-stayed beam, under wind-rain condition. It is considered the cable sag due to the dead load plus the non-linear coupling between the vibration of both the cable and the beam. Three modes are of special interest, namely the first global mode (beam bending & cable vibration), the first local mode (cable vibration & negligible beam bending) and the first torsion mode. A reduced mathematical model, with three degrees of freedom, is also developed. With regard to the modelling of the aerodynamic loads applied to the beam, it can be performed after extension of classical guidelines. The aerodynamic loads applied to the cable under rain are also taken into account. For the reduced mathematical model, equivalent damping and stiffness coefficients will be defined, which depend parametrically on the wind velocity. Non-linear terms appear due to the coupling between the cable and the beam bending vibrations, and also to the aero-elastic non-linear effects on the cable. Different unstable regimes are surveyed such as the cable galloping, the unimodal flutter in torsion and the unimodal flutter with beam bending and cable vibrations coupled.

Keywords: wind-rain vibration, flutter, cable-stayed beam, non-linear dynamics

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O SISTEMA CONTÍNUO E ANÁLISE MODAL	12
3 REDUÇÃO DO MODELO PARA TRÊS GRAUS DE LIBERDADE	19
4 MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS	36
5 ESTUDO DE CASO	42
6 CONCLUSÕES	68
REFERÊNCIAS	70

1. INTRODUÇÃO

A motivação dessa pesquisa nasceu do interesse em compreender as vibrações transversais de cabos, de grande amplitude (mais de um metro), observadas em pontes estaiadas — por exemplo, na ponte Ben Ahin, na Bélgica —, em condições de vento e chuva moderada. Há evidências de que tais vibrações estão intimamente ligadas aos filetes de água formados pela chuva ao longo dos estais.

Nos projetos de pontes pênséis e estaiadas, a verificação da estrutura levando-se em consideração os efeitos causados por fenômenos aeroelásticos, tais como o drapejamento e o desprendimento cadenciado de vórtices, passou a ser realizada depois do colapso da Ponte de Tacoma Narrows, em 1940, no Estado de Washington.

Um dos precursores do estudo do drapejamento na Engenharia Civil foi Bleich (1948) com a publicação de artigos com o estudo de comportamento de perfis treliçados usando a Teoria do Aerofólio, desenvolvida anteriormente por Theodorsen (1935). Theodorsen havia encontrado uma solução analítica para problemas envolvendo drapejamento em superfícies de controle de aviões.

No Brasil, particularmente em São Paulo, nos últimos anos tem-se observada a execução de alguns projetos de Pontes Estaiadas, como a Ponte sobre o Rio Pinheiros, que faz parte da linha 5 do Metrô de São Paulo, a Ponte Jacu-Pêssego,

em construção sobre o Rio Tietê e a Ponte Água Espreada, que está em projeto, também atravessando o Rio Pinheiros. Outros estados também apresentam vários projetos e pontes estaiadas já executadas, por exemplo, a ponte sobre o rio Guamá, no Pará, a ponte Forte-Redinha, que atravessa o rio Pitangi, em Natal, o projeto da ponte sobre o rio Sergipe, ligando Aracajú a Barra dos Coqueiros, entre outras.



Figura 1.1 – Ponte sobre o rio Guamá, Pará.
(<http://www.setran.pa.gov.br/sip/img/alca1007-04.jpg>)

A análise da resposta dinâmica em estruturas submetidas à ação do vento é fundamental para projetos de pontes estaiadas. Esse trabalho mostra uma versão simplificada do problema de determinar a velocidade crítica do vento e amplitudes de vibração pós-críticas, numa viga engastada com apenas um estai (ver Figura 1.2), submetida à ação combinada de vento e chuva.

A formulação usada para vibrações no plano foi baseada em Morandini (2000), Clough e Penzian (1993), Goldstein (1964), Lanczos (1970) e ainda Rojas (2005).

Foi considerada a deformação do cabo devido ao peso próprio e o acoplamento não-linear das vibrações do cabo e da viga.

A análise modal é apresentada pelas equações linearizadas de movimento sobre a configuração de equilíbrio. Três modos de vibração são de especial interesse, chamados de primeiro modo global (vibração no cabo e na viga), primeiro modo local (vibração no cabo e desprezável vibração na viga) e primeiro modo de torção. Uma redução do modelo matemático para três graus de liberdade foi desenvolvida, seguindo orientações de Rojas (2005) e Gatulli et. al. (2005). O princípio de Hamilton foi usado para permitir a projeção dos deslocamentos da viga e do cabo sobre o espaço definido pelos três modos selecionados. A modelagem do carregamento aerodinâmico aplicado à viga foi feita segundo metodologia clássica descrita na bibliografia — Miranda (1980), Dowell et al (1985), Simiu e Scanlan (1986). Também é necessário obter as forças aerodinâmicas modais associadas aos três graus de liberdade, usando-se as funções modais.

Para a redução do modelo matemático, são definidos coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez aerodinâmica, que dependem parametricamente da velocidade do vento.

Termos não lineares aparecem, tanto devido ao acoplamento entre as vibrações do cabo e da viga (em flexão), como devido aos efeitos aerodinâmicos não-lineares no cabo.

Diversos regimes instáveis são estudados, como o efeito de galope no cabo, o drapejamento unimodal de torção na viga e o drapejamento unimodal devido às vibrações no cabo acopladas às vibrações da viga em flexão.

O objetivo da dissertação é o desenvolvimento de uma metodologia para análise da instabilidade aeroelástica em vigas estaiadas, bem como da determinação das

amplitudes de vibração pós-críticas. O estudo de caso, propositadamente, considera geometria favorável ao aparecimento das instabilidades aeroelásticas descritas. Para tanto, foi adotada uma seção transversal geometricamente semelhante à da ponte de Tacoma Narrows. Como vantagem adicional dessa escolha de geometria da seção transversal, os coeficientes aerodinâmicos de Scanlan e Simiu (1986) resultam conhecidos. Para outras seções transversais da viga estaiada, caso não correspondam a geometrias para as quais se conheçam os coeficientes aeroelásticos, é necessário obtê-los a partir de ensaios em túnel de vento.

Como se sabe — Gattulli et al (2005), Rojas (2005) —, o acoplamento não-linear entre as vibrações transversais do cabo e da viga em flexão fica bastante potencializado quando há ressonância interna entre o primeiro modo global e o primeiro modo local. Devido às não-linearidades quadráticas presentes nas equações de movimento, tal ressonância interna se manifesta quando a frequência do primeiro modo global é aproximadamente igual ao dobro da do primeiro modo local, como se verá.

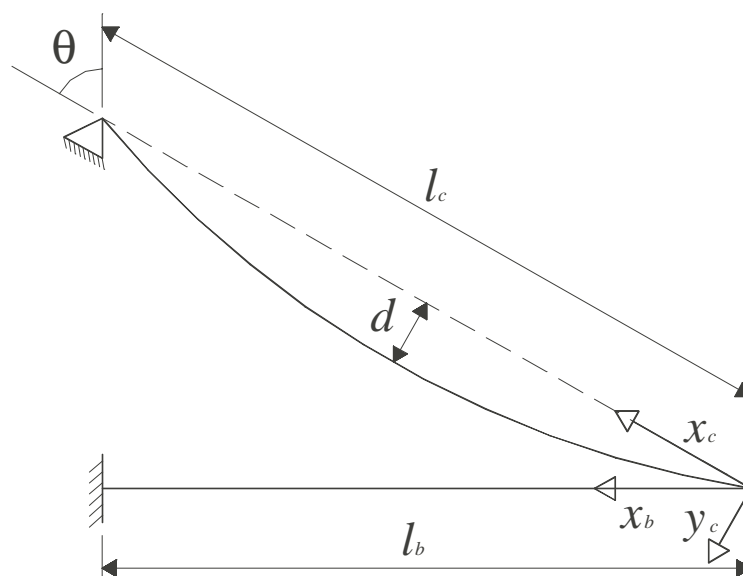


Figura 1.2. Configuração de referência do problema proposto

A Figura 1.2 introduz a seguinte notação: l_b é o comprimento da viga, l_c o comprimento do cabo, x_c a coordenada do cabo e x_b da viga, y_c o deslocamento transversal da configuração de equilíbrio do cabo (catenária), θ o ângulo de inclinação da corda do cabo com respeito à vertical e d a flecha estática máxima do cabo.

O Capítulo 2 mostra a formulação da equação de movimento para o sistema contínuo e sua análise modal. No terceiro capítulo se aborda a redução do modelo para 3 graus de liberdade. É neste capítulo que os efeitos aeroelásticos no cabo e na viga são discutidos. O Capítulo 4 mostra a solução da equação do modelo reduzido pelo método das múltiplas escalas, e um estudo de caso é realizado no Capítulo 5.

2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O SISTEMA CONTÍNUO E ANÁLISE MODAL

A viga estaiada da Figura 2.1 abaixo é considerada, submetida a ações de chuva e vento. O vento é presumido ortogonal ao plano da estrutura.

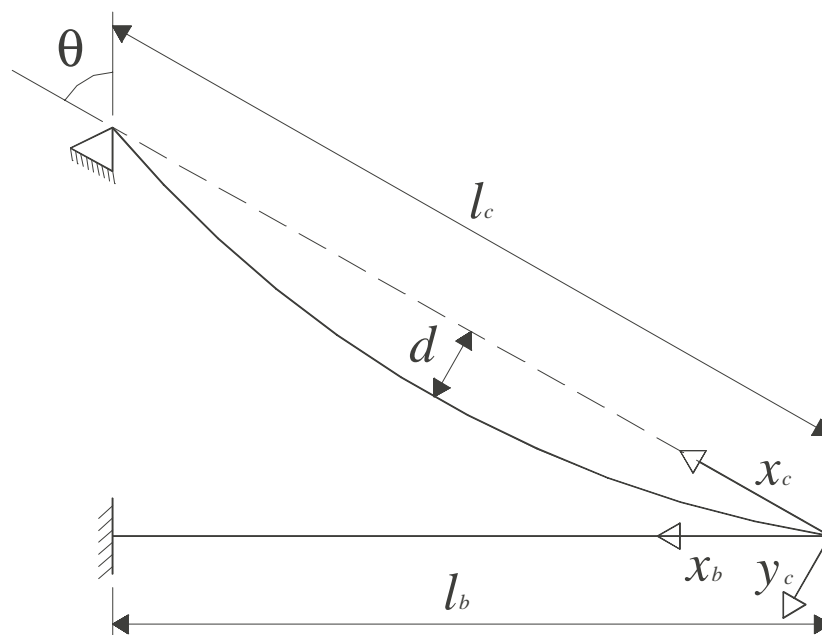


Figura 2.1 Viga simples estaiada, na configuração de referência C^0

Os deslocamentos axiais da viga e do cabo contidos no plano da estrutura são representados na Figura 2.2, a partir da configuração de equilíbrio (referência) C^0 , caracterizando a configuração atual C^1 , a qual já indica as coordenadas

generalizadas modais que serão utilizadas oportunamente, quando se tratar da redução do modelo a três graus de liberdade.

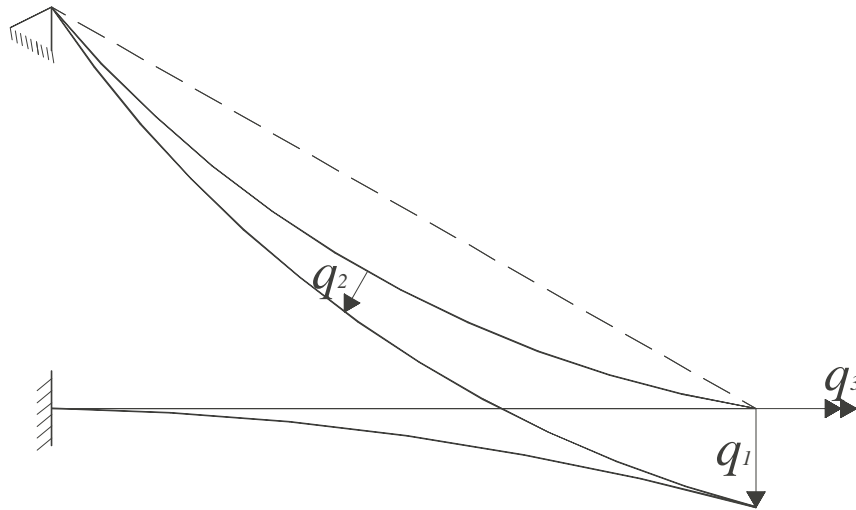


Figura 2.2 - Configuração atual C^1

Além dos parâmetros geométricos já mencionados na Figura 2.1, aqui se acrescentam: D o diâmetro do cabo, B a largura da seção transversal da viga, m_c e m_b as massas por unidade de comprimento, respectivamente para o cabo e para a viga; p_c e p_b são respectivamente os carregamentos transversais do cabo e da viga devidos à chuva e ao vento. $E_c A_c$, $E_b I_b$ e $G_b I_t$ são a rigidez axial do cabo, a rigidez à flexão da viga e a rigidez da viga à torção, respectivamente; e H é o empuxo no cabo, que é a componente, ao longo da corda, da força axial do cabo, na configuração estática de equilíbrio C^0 .

Adota-se, tanto para a viga como para o cabo, uma descrição aproximada da configuração de equilíbrio estático. Portanto, as seguintes suposições são feitas:

- sob a hipótese da pequena relação da flecha-vão do cabo $\left(\frac{d}{l_c} \leq \frac{1}{10}\right)$, assume-se que $ds \cong dx_c$;
- $T_0(s) \cong H$, onde $T_0(s)$ é a força de tração inicial no cabo e H é a componente da tração inicial segundo a corda do cabo;
- a configuração de equilíbrio estático da viga em balanço se confunde com a configuração da estrutura indeformada;
- o cabo e a viga são considerados meios homogêneos e contínuos, que obedecem à relação linear tensão-deformação (lei de Hooke);
- a rigidez à flexão e ao cisalhamento, bem como a força inercial longitudinal do cabo, são desprezáveis;
- o alongamento axial e a não-linearidade geométrica da viga são desprezáveis.

As equações de movimento que governam o sistema serão obtidas obedecendo a essas hipóteses.

A curva da catenária do cabo na configuração de equilíbrio pode ser aproximada pela parábola abaixo, para a coordenada x_c , definida ao longo da corda do cabo.

$$y_c = 4d \left[\frac{x_c}{l_c} - \left(\frac{x_c}{l_c} \right)^2 \right] \quad (2.01)$$

Rojas (2005) mostra que a flecha estática d é dada por:

$$d = \frac{m_c g l_c^2 \text{sen } \theta}{8H} \quad (2.02)$$

A configuração atual C^1 é caracterizada pelos deslocamentos dinâmicos axiais e transversais do cabo $u_c(s,t)$ e $v_c(s,t)$ respectivamente, para a coordenada curvilínea s definida ao longo do cabo num instante de tempo t e pelo deslocamento transversal da viga $v_b(x_b,t)$, para a coordenada x_b definida ao longo do eixo da viga.

De acordo com Morandini (2000), e Mazzilli e Rojas (2005), pode ser mostrado que as equações de movimento para o sistema contínuo são:

Para o cabo:

$$m_c \ddot{u}_c - (E_c A_c e)' = 0 \quad (2.03)$$

$$m_c \ddot{v}_c - [E_c A_c e (y'_c + v'_c) + H v'_c]' = p_c(\dot{v}_c) \quad (2.04)$$

onde as derivadas com relação à abscissa x_c são indicadas por aspas e as derivadas temporais por ponto, e $p_c(\dot{v}_c)$ é a força aeroelástica no cabo e pode ser obtida conforme proposto em Xu e Wang (2003), sendo desenvolvida no Capítulo 3.

O alongamento e do cabo é dado por:

$$e(x_c, t) = \bar{e}(t) = \frac{v_b(0, t)}{l_c} \cos \theta + \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \left[y'_c v'_c + \frac{1}{2} v'^2_c \right] dx_c \quad (2.05)$$

Para a viga, considerando a teoria linear de Bernoulli-Euler:

$$m_b \ddot{v}_b + E_b I_{zb} v_b^{IV} = p_b(\vartheta, \dot{v}_b, \dot{\vartheta}) \quad (2.06)$$

onde $p_b(\vartheta, \dot{v}_b, \dot{\vartheta})$ pode ser obtido segundo o procedimento descrito em Miranda (1980), Dowell et al (1985), e Simiu e Scanlan (1986).

As condições de contorno essenciais são:

$$u_c(0, t) \sin \theta + v_c(0, t) \cos \theta = 0 \quad (2.07)$$

$$u_c(0, t) \cos \theta + v_c(0, t) \sin \theta = v_b(0, t) \quad (2.08)$$

$$u_c(l_c, t) = 0 \quad (2.09)$$

$$v_c(l_c, t) = 0 \quad (2.10)$$

$$v_b(l_b, t) = 0 \quad (2.11)$$

$$v'_b(l_b, t) = 0 \quad (2.12)$$

Finalmente, as condições de contorno naturais são:

$$E_b I_{zb} v_b'''(0, t) + E_c A_c e(0, t) \cos \theta - \{E_c A_c e(0, t) [y'_c(0) + v'_c(0, t)] + H v'_c(0, t)\} \sin \theta = 0 \quad (2.13)$$

$$v_b''(0, t) = 0 \quad (2.14)$$

Para a rotação da viga $\vartheta(s, t)$ devido à torção, a equação de movimento linearizada é dada por:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{G}{\rho_b} \vartheta'' = p_\vartheta(\vartheta, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta}) \quad (2.15)$$

onde p_ϑ significa o torque induzido pelo vento, e a condição de contorno essencial é a seguinte:

$$\vartheta(l_b, t) = 0 \quad (2.16)$$

ANÁLISE MODAL

O primeiro modo de vibração global ϕ_{b1} (flexão da viga) e ϕ_{c1} (vibração do cabo), e o primeiro modo local ϕ_{b2} (flexão da viga desprezável) e ϕ_{c2} (vibração do cabo) foram pormenorizadamente discutidos em Gattulli et al (2005) e Mazzilli e Rojas (2005), sendo apenas apresentados aqui os resultados obtidos:

$$\begin{aligned} \phi_{bi}(x) = & \frac{1}{2} \cos(\beta_b x) + \frac{1}{2} \cosh(\beta_b x) - \frac{1 + \cos \beta_b \cosh \beta_b + \sin \beta_b \sinh \beta_b}{2(\cosh \beta_b \sin \beta_b - \cos \beta_b \sinh \beta_b)} \sin(\beta_b x) \\ & + \frac{1 + \cos \beta_b \cosh \beta_b - \sin \beta_b \sinh \beta_b}{2(\cosh \beta_b \sin \beta_b - \cos \beta_b \sinh \beta_b)} \sinh(\beta_b x) \quad i=1,2 \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\phi_{ci}(x) = \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \left(\frac{d}{l_c} \right) \frac{8\tilde{e}}{\beta_c^2} \left[1 - \tan\left(\frac{\beta_c}{2}\right) \sin(\beta_c x) - \cos(\beta_c x) \right], \text{ com } i=1,2 \quad (2.18)$$

$$- \phi_b(0) \sin^2 \theta [\cot(\beta_c) \sin(\beta_c x) - \cos(\beta_c x)]$$

sendo:

$$\tilde{e} = \frac{\phi_b(0) \sin^2 \theta \left\{ \cot \theta - 4 \left(\frac{d}{l_c} \right) \left[1 - \frac{2}{\beta_c} \tan\left(\frac{\beta_c}{2}\right) \right] \right\}}{1 + \frac{\lambda^2}{\beta_c^2} \left[\frac{2}{\beta_c} \tan\left(\frac{\beta_c}{2}\right) - 1 \right]} \quad (2.19)$$

Na equação (2.19), foi introduzido o parâmetro de Irvine λ , igual a:

$$\lambda = \frac{8d}{l_c} \sqrt{\frac{E_c A_c}{H}} \quad (2.20)$$

Nas equações (2.17) e (2.18), $x \in [0,1]$ representa a coordenada axial normalizada com relação ao comprimento da viga ou ao comprimento do cabo e β_b é encontrado resolvendo-se a seguinte equação característica transcendental:

$$\left\{ \cos \theta + 4 \left(\frac{d}{l_c} \right) \sin \theta \left[\frac{2 \sin \theta}{\beta_b^2 \alpha} \tan\left(\frac{\beta_b^2 \alpha}{2 \sin \theta}\right) - 1 \right] \right\} \frac{\tilde{e}}{\phi_b(0)} =$$

$$\left(\frac{E_b I_{zb}}{l_b^2 E_c A_c} \right) \frac{\beta_b^3 [1 + \cos(\beta_b) \cosh(\beta_b)]}{\cos(\beta_b) \sinh(\beta_b) - \sin(\beta_b) \cosh(\beta_b)} - \left(\frac{H}{E_c A_c} \right) \beta_b^2 \alpha \sin^2 \theta \cot\left(\frac{\beta_b^2 \alpha}{\sin \theta}\right) \quad (2.21)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \left(\frac{E_b I_{zb}}{l_b^2 E_c A_c} \right) \left(\frac{m_c}{m_b} \right)} = \sqrt{\left(\frac{E_b I_{zb}}{l_b^2 H} \right) \left(\frac{m_c}{m_b} \right)} \quad (2.22)$$

Uma vez que β_b tenha sido calculado por meio de (2.21), para um certo modo, a frequência natural correspondente ω pode ser determinada e, também, β_c , usado na expressão (2.17) e (2.18).

$$\omega = \beta_b^2 \sqrt{\frac{E_b I_{zb}}{m_b l_b^4}} \quad (2.23)$$

$$\beta_c = \frac{\beta_b^2 \alpha}{\sin \theta} \quad (2.24)$$

O primeiro modo de torção ϕ_{b3} , de acordo com Thomson (1973) é, simplesmente:

$$\phi_{b3} = \sin \frac{\pi(1-x)}{2} \quad x \in [0,1] \quad (2.25)$$

com frequência natural igual a:

$$\omega_3 = \frac{\pi}{2l_b} \sqrt{\frac{G_b}{\rho_b}} \quad (2.26)$$

3. REDUÇÃO DO MODELO PARA TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

O modelo reduzido, desprezando-se a vibração da viga no modo local, é obtido a partir da mudança de variáveis indicada abaixo, usando-se as coordenadas generalizadas modais $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$:

$$v_c(x,t) = \Phi_{c1}(x)q_1(t) + \Phi_{c2}(x)q_2(t) \quad (3.01)$$

$$v_b(x,t) = \Phi_{b1}(x)q_1(t) \quad (3.02)$$

$$\vartheta(x,t) = \Phi_{b3}(x)q_3(t) \quad (3.03)$$

Onde ϕ_{cj} e ϕ_{bj} referem-se ao modo j no domínio do cabo ou da viga, respectivamente, e $q_j(t)$ às correspondentes coordenadas modais. É usual normalizar as funções modais de acordo com:

$$\Phi_{cj}(x) = \frac{\phi_{cj}(x)}{\max|\phi_{bj}(x), \phi_{cj}(x)|} \quad (3.04)$$

$$\Phi_{bj}(x) = \frac{\phi_{bj}(x)}{\max|\phi_{bj}(x), \phi_{cj}(x)|} \quad (3.05)$$

O princípio de Hamilton é usado para se obter a equação de movimento do modelo reduzido:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[T^1 - V_{total}^1] dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_c + \delta W_b) dt = 0 \quad (3.06)$$

Onde T^1 é a energia cinética e V_{total}^1 a energia potencial total na configuração atual C^1 (Figura 2.2)

$$T^1 = \frac{1}{2} \int_{l_c} m_c (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) dx_c + \frac{1}{2} \int_{l_b} m_b \dot{v}_b^2 dx_b + \frac{1}{2} \int_{l_b} \rho_b I_t \dot{\vartheta}^2 dx_b \quad (3.07)$$

$$V_{total}^1 = V_{total}^0 + \int_{l_c} (He + \frac{1}{2} E_c A_c e^2) dx_c + \frac{1}{2} \int_{l_b} E_b I_{zb} v_b''^2 dx_b + \frac{1}{2} \int_{l_b} G_b I_t \vartheta'^2 dx_b - \int_{l_c} m_c g \sin \theta v_c dx_c + \int_{l_c} m_c g \cos \theta u_c dx_c - \int_{l_b} m_b g v_b dx_b - H u_c \quad (3.08)$$

Substituindo as equações (3.01), (3.02) e (3.03) nas equações (3.06), (3.07) e (3.08), chega-se à equação de movimento do modelo, em três graus de liberdade, truncando-se nas não-linearidades de ordem superior às quadráticas, conforme indicado abaixo:

$$\ddot{q}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \gamma_{111} q_1^2 + \gamma_{112} q_1 q_2 + \gamma_{122} q_2^2 = p_1 \quad (3.09)$$

$$\ddot{q}_2 + 2\xi_2 \omega_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \gamma_{211} q_1^2 + \gamma_{212} q_1 q_2 + \gamma_{222} q_2^2 = p_2 \quad (3.10)$$

$$\ddot{q}_3 + 2\xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = p_3 \quad (3.11)$$

Os coeficientes dos termos não-lineares de (3.09) e (3.10) podem ser determinados a partir de Rojas (2005), notando-se que neste trabalho as equações de movimento estavam normalizadas para as variáveis espaciais e também para o tempo. Daí a necessidade de redefinir ditos coeficientes para escrever as equações de movimento na forma não-normalizada, como convém ao presente estudo. Portanto, definem-se:

$$\gamma_{111} = \frac{\omega_1^2}{l_b} c_{12} \quad (3.12)$$

$$\gamma_{112} = \frac{\omega_1^2}{l_c} c_{13} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{122} = \frac{l_b \omega_1^2}{l_c^2} c_{14} \quad (3.14)$$

$$\gamma_{211} = \frac{l_c \omega_1^2}{l_b^2} c_{22} \quad (3.15)$$

$$\gamma_{212} = \frac{\omega_1^2}{l_b} c_{23} \quad (3.16)$$

$$\gamma_{222} = \frac{\omega_1^2}{l_c} c_{24} \quad (3.17)$$

Os coeficientes c_{ij} , de acordo com Rojas (2005), são:

$$c_{12} = \left[\begin{array}{l} \Phi_{b1}(0) \sin \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}^{\prime 2}(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l_c^2} \right) \int_0^1 y'(x) \Phi'_{c1}(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}^{\prime 2}(x) dx \end{array} \right] \frac{3}{2m_1 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.18)$$

$$c_{13} = \left[\begin{array}{l} 2\Phi_{b1}(0) \sin \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi'_{c1}(x) \Phi'_{c2}(x) dx + \\ \Phi_{b2}(0) \sin \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}^{\prime 2}(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l_c^2} \right) \left(\begin{array}{l} 2 \int_0^1 y'(x) \Phi'_{c1}(x) dx \int_0^1 \Phi'_{c1}(x) \Phi'_{c2}(x) dx + \\ \int_0^1 y'(x) \Phi'_{c2}(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}^{\prime 2} dx \end{array} \right) \end{array} \right] \frac{1}{m_1 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.19)$$

$$c_{14} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \Phi_{b1}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c2}'^2(x) dx + \\ \Phi_{b2}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l^2} \right) \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^1 y'(x) \Phi_{c1}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c2}'^2(x) dx + \\ \int_0^1 y'(x) \Phi_{c2}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx \end{array} \right) \end{array} \right] \frac{1}{m_1 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.20)$$

$$c_{22} = \left[\begin{array}{l} \Phi_{b1}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx + \\ \frac{1}{2} \Phi_{b2}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}'^2(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l^2} \right) \left(\begin{array}{l} \int_0^1 y'(x) \Phi_{c1}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx + \\ \frac{1}{2} \int_0^1 y'(x) \Phi_{c2}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}'^2(x) dx \end{array} \right) \end{array} \right] \frac{1}{m_2 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.21)$$

$$c_{23} = \left[\begin{array}{l} \Phi_{b1}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c2}'^2(x) dx + \\ 2 \Phi_{b2}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l^2} \right) \left(\begin{array}{l} \int_0^1 y'(x) \Phi_{c1}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c2}'^2(x) dx + \\ 2 \int_0^1 y'(x) \Phi_{c2}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c1}'(x) \Phi_{c2}'(x) dx \end{array} \right) \end{array} \right] \frac{1}{m_2 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.22)$$

$$c_{24} = \left[\begin{array}{l} \Phi_{b_2}(0) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \int_0^1 \Phi_{c_2}'^2(x) dx + \\ \left(\frac{d}{l_c} \right) \int_0^1 y'(x) \Phi_{c_2}'(x) dx \int_0^1 \Phi_{c_2}'^2(x) dx \end{array} \right] \frac{3}{2m_2 \beta_{c1}^2} \left(\frac{E_c A_c}{H} \right) \quad (3.23)$$

e ainda:

$$m_1 = \int_0^1 \Phi_{c_1}^2 dx + \frac{m_b}{m_c} \operatorname{sen}^3 \theta \int_0^1 \Phi_{b_1}^2 dx \quad (3.24)$$

$$m_2 = \int_0^1 \Phi_{c_2}^2 dx \quad (3.25)$$

As forças modais p_1 , p_2 e p_3 , decorrentes das forças aplicadas no cabo e na viga, podem ser escritas como:

$$p_1 = \frac{l_c}{M_{11}} \int_0^1 p_c \Phi_{c_1} dx + \frac{l_b}{M_{11}} \operatorname{sen} \theta \int_0^1 p_b \Phi_{b_1} dx \quad (3.26)$$

$$p_2 = \frac{l_c}{M_{22}} \int_0^1 p_c \Phi_{c_2} dx \text{ desprezando-se o termo que depende de } \phi_{b_2} \quad (3.27)$$

$$p_3 = \frac{l_b}{M_{33}} \int_0^1 p_b \Phi_{b_3} dx \quad (3.28)$$

As massas modais M_{11} , M_{22} e M_{33} são:

$$M_{11} = \frac{(m_c l_c) m_1}{\operatorname{sen} \theta} \quad (3.29)$$

$$M_{22} = (m_c l_c) m_2 \quad (3.30)$$

$$M_{33} = \rho_b l_b I_t \int_0^1 \Phi_{b_3}^2 dx \quad (3.31)$$

Onde ρ_b é a massa específica do material de que a barra é composta e I_t o momento de inércia à torção da seção transversal da viga.

3.1. Forças Aeroelásticas no cabo

Para a obtenção das forças aerodinâmicas atuantes no estai, decorrentes da condição de vento-chuva, generalizou-se a metodologia proposta por Xu e Wang (2003).

Esses pesquisadores realizaram um estudo analítico para explicar e simular o fenômeno de vibração no cabo induzido pelo efeito vento-chuva, fenômeno este observado em instrumentações de estruturas existentes e simulações em túneis de vento. Baseados em conhecimentos aerodinâmicos, em dinâmica das estruturas e em alguns resultados obtidos de simulações, eles desenvolveram um modelo analítico para o problema, considerando o efeito do vento sobre o filete de água formado no cabo pela chuva, e a influência da movimentação do filete na vibração do cabo.

O modelo analítico foi então aplicado a alguns modelos de cabos testados em túnel de vento, tanto para um filete artificial fixo (segundo uma geratriz do cabo), quanto para um filete de água em movimento, testado em túnel de chuva e vento.

Hikami & Shiraishi [1988] realizaram medições em campo dos cabos estaiados da ponte Meikonishi em Nagoya, no Japão, submetidos a esforços devidos ao vento com e sem chuva. Eles verificaram que, naquela ponte, os cabos apresentavam vibrações com pequenas amplitudes quando submetidos apenas ao vento, mas, na presença de vento e chuva, tinham amplitudes de vibração excessivas. Eles então efetuaram uma série de testes em túnel de vento com efeitos de chuva simulados e concluíram que o filete de água formado ao longo da superfície superior do cabo pelo efeito de chuva com a presença do vento alterava

substancialmente as propriedades aerodinâmicas da seção transversal do cabo, resultando em vibrações excessivas.

Bosdogianni e Oliver [1996] compararam resultados obtidos em túneis de vento para cabos com o filete de água em movimento com os resultados obtidos para o cabo com o filete fixo. Concluíram que era a presença do filete em uma particular posição do cabo, e não o movimento do filete de água que causava as instabilidades no cabo. Portanto, aqui será considerado o filete em posição fixa, ao longo do tempo.

Xu & Wang modelaram o cabo como um cilindro rígido com inclinação uniforme para representar um segmento do cabo estaiado. A inclinação do cilindro é indicada por $(90^\circ - \theta)$. O cilindro é suposto apoiado por molas nas extremidades. A consideração do cabo como um cilindro rígido, ao invés de um cabo real, deve-se ao fato que Xu & Wang usaram, no seu trabalho, estudos e resultados de testes em túneis de vento de vários autores com esta configuração.

Supõe-se que o filete de água se desenvolva segundo uma geratriz do cabo deformado, de forma a ocupar, em todas as seções transversais do cabo, a mesma posição. Efeitos de turbulência e axiais não são considerados.

A posição estática do filete devido ao vento é definida pelo ângulo θ_0 .

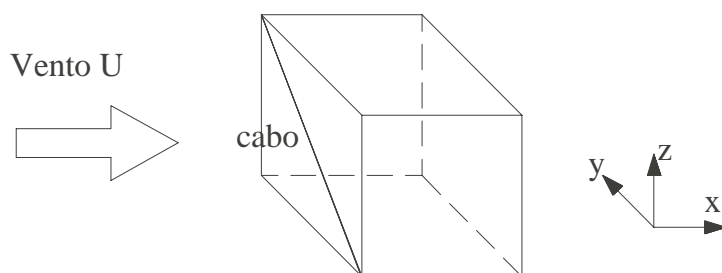


Figura 3.1 – Direção do vento no cabo

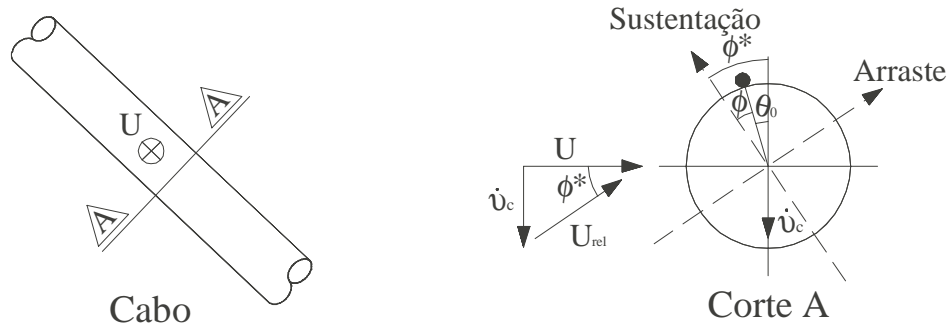


Figura 3.2 – Posição do filete e velocidade do vento, relativa ao filete, quando o cabo está em movimento transversal

A força no cabo, por unidade de comprimento é:

$$p_c = \frac{\rho_a D U_{rel}^2}{2} [C_L(\phi) \cos \phi^* + C_D(\phi) \sin \phi^*] \quad (3.32)$$

onde C_L e C_D são os coeficientes de sustentação e de arrasto do cabo, respectivamente, e ρ_a é a massa específica do ar. Os coeficientes de arrasto e sustentação, medidos em túneis de vento, são geralmente fornecidos em função do ângulo de ataque ϕ , relativamente ao filete, dado pela expressão:

$$\phi = \phi^* - \theta_0 \quad (3.33)$$

O ângulo ϕ^* , que mede a inclinação da velocidade relativa do vento U_{rel} , pode ser escrito como:

$$\phi^* = \frac{\dot{v}_c}{U} \quad (3.34)$$

A velocidade relativa U_{rel} do vento com respeito ao cilindro é:

$$U_{rel} = \sqrt{U^2 + \dot{v}_c^2} = U \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{v}_c}{U}\right)^2} \quad (3.35)$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação foram obtidos por Gu et al (2000), para o cabo de seção circular com filete fixo, conforme indica a Figura 3.3. Esses coeficientes podem ser escritos como expansões da série de Taylor:

$$C_L(\phi) = A_0 + A_1\phi + \frac{A_2}{2}\phi^2 + \frac{A_3}{6}\phi^3 \quad (3.36)$$

$$C_D(\phi) = B_0 + B_1\phi + \frac{B_2}{2}\phi^2 + \frac{B_3}{6}\phi^3 \quad (3.37)$$

onde os coeficientes A_i e B_i são os coeficientes da expansão em séries de Taylor das equações que fornecem os valores dos coeficientes de sustentação e de arrasto respectivamente.

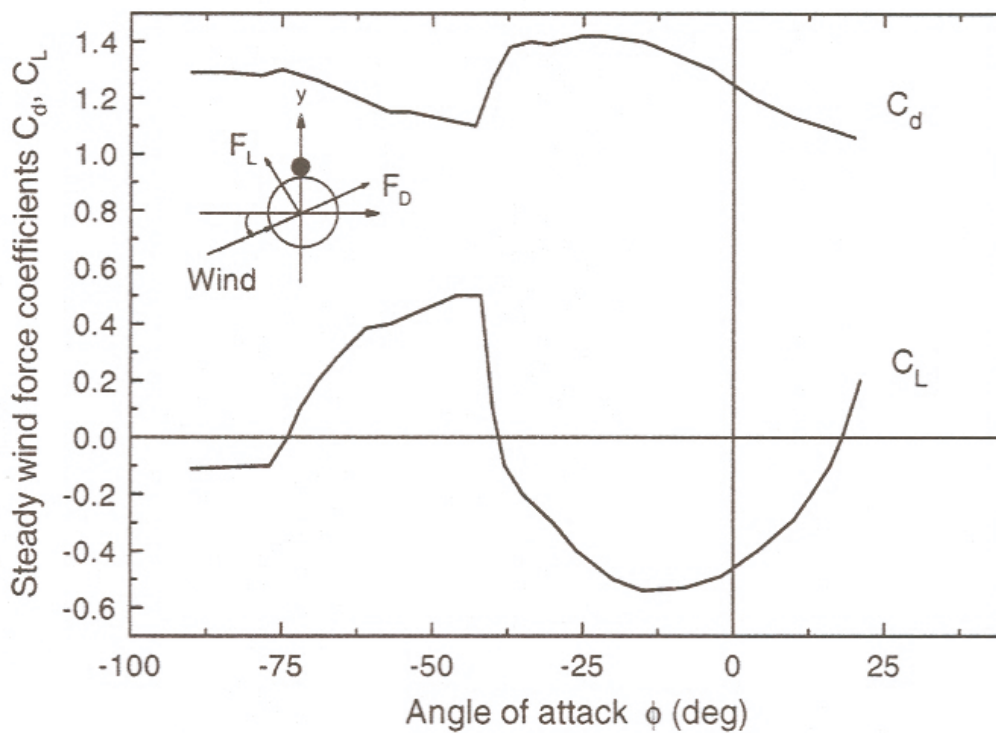


Figura 3.3. Valores dos coeficientes de sustentação e arrasto em função do ângulo de ataque ϕ , Gu et al (2000).

Abaixo segue o gráfico de uma curva “média” ajustada para os coeficientes de sustentação e arrasto ao longo de toda a faixa de variação do ângulo de ataque ϕ .

Curva Ajustada dos Coeficientes de Sustentação (CL) e Arrasto (CD)

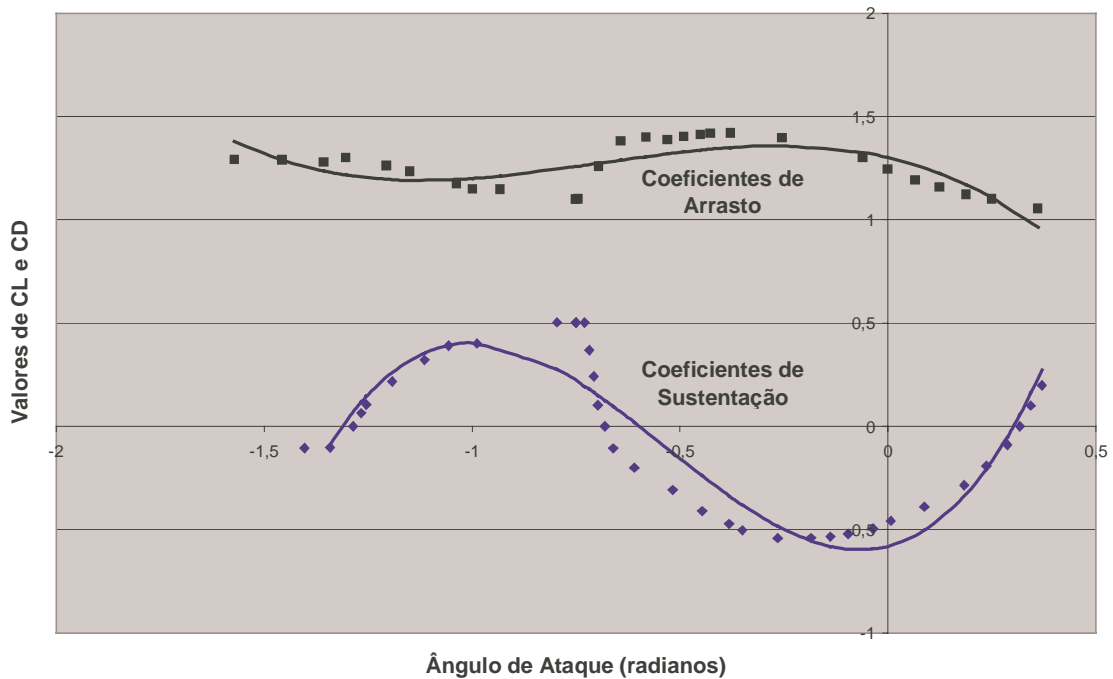


Figura 3.4. Curva de 3º grau melhor ajustada dos coeficientes de sustentação e arrasto

Coeficientes A_i e B_i			
A_0	A_1	A_2	A_3
-0,58	0,51	7,88	14,7
B_0	B_1	B_2	B_3
1,3	-0,47	-2,2	-3,18

Tabela 3.1 - Coeficientes A_i e B_i

A tangente à curva do coeficiente de sustentação muda de sinal ao redor do valor -43° (aproximadamente $-0,75$ radianos) do ângulo de ataque ϕ . Portanto, para melhor ajuste e, conseqüentemente, determinar os valores A_i e B_i , as curvas podem ser separadas, de acordo com a necessidade, em dois trechos.

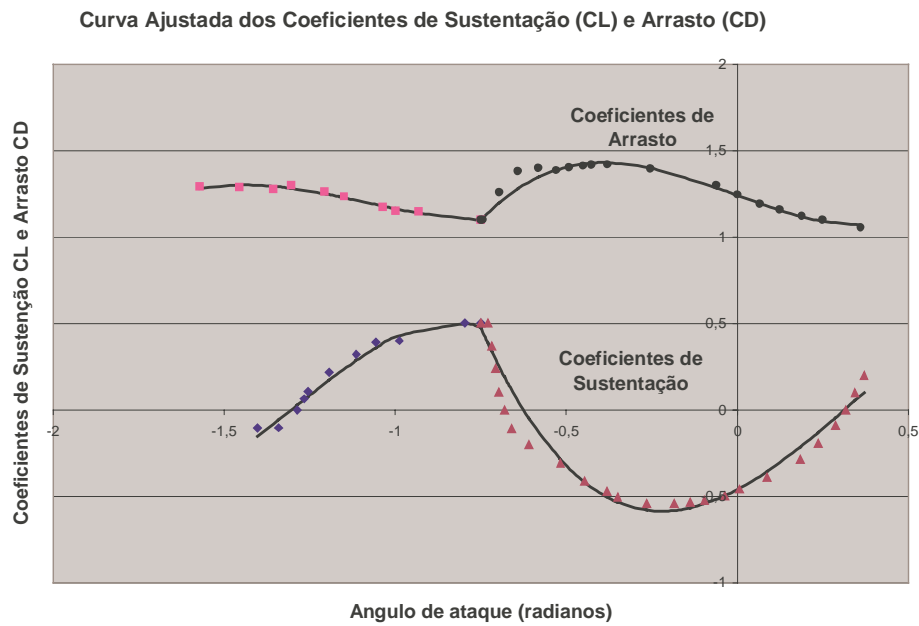


Figura 3.5. Curvas de 3º grau dos coeficientes de sustentação e arrasto, melhor ajustadas, em dois trechos, para ângulo de ataque menor ou maior que $-0,75$ radianos

Os valores dos coeficientes A_i e B_i passam a valer:

Coeficientes A_i e B_i				
$\phi < -0,75\text{rad}$	A_0	A_1	A_2	A_3
	-3,4	-11,14	-19,76	-15,35
	B_0	B_1	B_2	B_3
	2,07	3,27	6,83	6,32
$\phi > -0,75\text{rad}$	A_0	A_1	A_2	A_3
	-0,46	1,05	3,69	-9,80
	B_0	B_1	B_2	B_3
	1,24	-0,72	0,137	10,27

Tabela 3.2 - Coeficientes A_i e B_i para ângulo de ataque menor ou maior que $-0,75$ radianos

Substituindo as equações (3.33) a (3.37) na equação (3.32), e truncando os termos de ordem superior à quadrática, temos:

$$p_c = \frac{\rho_a D U^2 \Gamma_0}{2} + \frac{\rho_a D U \Gamma_1}{2} \dot{v}_c + \frac{\rho_a D \Gamma_2}{2} \dot{v}_c^2 \quad (3.38)$$

Na Figura 3.3, de onde se extraem os valores dos coeficientes C_D e C_L , o sentido do vetor deslocamento do cabo, conforme adotado por Gu et al (2000), está oposto ao adotado neste trabalho. Os coeficientes Γ_i , já contemplando esse acerto de sinais, são:

$$\Gamma_0 = A_0 - A_1 \theta_0 + \frac{1}{2} A_2 \theta_0^2 - \frac{1}{6} A_3 \theta_0^3 \quad (3.39)$$

$$\Gamma_1 = -A_1 + A_2 \theta_0 - \frac{1}{2} A_3 \theta_0^2 - B_0 + B_1 \theta_0 - \frac{1}{2} B_2 \theta_0^2 + \frac{1}{6} B_3 \theta_0^3 \quad (3.40)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{2} A_1 \theta_0 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{4} A_2 \theta_0^2 - \frac{1}{2} A_3 \theta_0 - \frac{1}{12} A_3 \theta_0^3 + B_1 - B_2 \theta_0 + \frac{1}{2} B_3 \theta_0^2 \quad (3.41)$$

3.2. Forças Aeroelásticas na Viga

De acordo com Miranda (2000), Dowell (1985), e Simiu e Scanlan (1986), as forças aerodinâmicas na viga introduzem um acoplamento linear entre a flexão e a torção na viga. As força aerodinâmicas p_b e p_ϑ na viga são:

$$p_b = \frac{\rho_a B U^2}{2} L_3 \vartheta + \frac{\rho_a B U}{2} L_1 \dot{v}_b + \frac{\rho_a B U}{2} L_2 \dot{\vartheta} \quad (3.42)$$

$$p_\vartheta = \frac{\rho_a B U^2}{2} M_3 \vartheta + \frac{\rho_a B U}{2} M_1 \dot{v}_b + \frac{\rho_a B U}{2} M_2 \dot{\vartheta} \quad (3.43)$$

onde os valores de L_1 , L_2 , L_3 , M_1 , M_2 e M_3 , são funções do número de Strouhal κ , com $\kappa = \frac{B\omega}{U}$, e dependem dos coeficientes de drapejamento obtidos em

túnel de vento H_1^* , H_2^* , H_3^* , A_1^* , A_2^* e A_3^* :

$$L_1 = \kappa H_1^* \quad (3.44)$$

$$L_2 = B \kappa H_2^* \quad (3.45)$$

$$L_3 = \kappa^2 H_3^* \quad (3.46)$$

$$M_1 = B \kappa A_1^* \quad (3.47)$$

$$M_2 = B^2 \kappa A_2^* \quad (3.48)$$

$$M_3 = B \kappa^2 A_3^* \quad (3.49)$$

A Figura 3.6 apresenta as propriedades aerodinâmicas para algumas seções transversais de pontes.

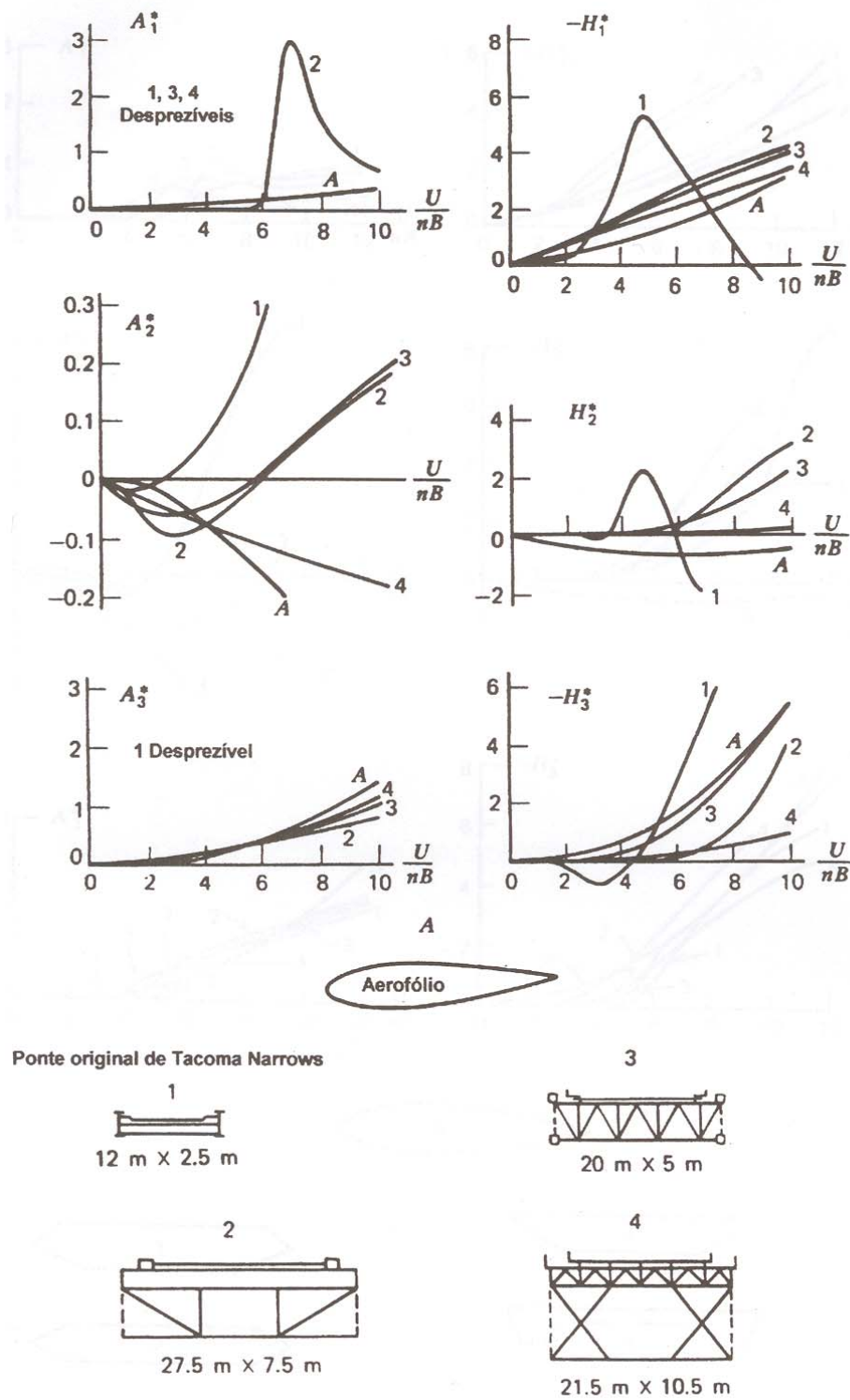


Figura 3.6: Curvas dos coeficientes de drapejamento em função de $\frac{U}{\eta B}$, onde $\eta = \frac{\omega}{2\pi}$, para as seções transversais indicadas acima (Simiu e Scanlan, 1978).

Estes coeficientes devem ser multiplicados por 2 para se adequarem à notação utilizada neste trabalho, conforme observa Butkeraitis (2002).

3.3 Equação de Movimento reduzida

Substituindo as equações (3.38), (3.42) e (3.43) nas equações (3.09) a (3.11) e reordenando termos, vem:

$$\ddot{q}_1 + \varepsilon\alpha_{11}\dot{q}_1 + \varepsilon\alpha_{12}\dot{q}_2 + \varepsilon\alpha_{13}\dot{q}_3 + \omega_1^2 q_1 + \varepsilon\beta_{13}q_3 + \gamma_{111}q_1^2 + \gamma_{112}q_1q_2 + \gamma_{122}q_2^2 = \varepsilon p_{10} + \lambda_{111}\dot{q}_1^2 + \lambda_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \lambda_{122}\dot{q}_2^2 \quad (3.50)$$

$$\ddot{q}_2 + \varepsilon\alpha_{21}\dot{q}_1 + \varepsilon\alpha_{22}\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \gamma_{211}q_1^2 + \gamma_{212}q_1q_2 + \gamma_{222}q_2^2 = \varepsilon p_{20} + \lambda_{211}\dot{q}_1^2 + \lambda_{212}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \lambda_{222}\dot{q}_2^2 \quad (3.51)$$

$$\ddot{q}_3 + \varepsilon\alpha_{31}\dot{q}_1 + \varepsilon\alpha_{33}\dot{q}_3 + (\omega_3^2 + \varepsilon\beta_{33})q_3 = 0 \quad (3.52)$$

Note-se que o parâmetro de escala ε , com $0 < \varepsilon < 1$, foi introduzido com o objetivo da análise de perturbação que será realizada no próximo capítulo. Além dos coeficientes já definidos anteriormente – ver (3.12) a (3.25) e (3.29) a (3.31) – temos:

$$p_{10} = \frac{\lambda_{10}}{\varepsilon} \quad (3.53)$$

$$p_{20} = \frac{\lambda_{20}}{\varepsilon} \quad (3.54)$$

$$\varepsilon\alpha_{11} = 2\xi_1\omega_1 - \mu_{11} - \lambda_{11} \quad (3.55)$$

$$\varepsilon\alpha_{12} = -\lambda_{12} \quad (3.56)$$

$$\varepsilon\alpha_{13} = -\mu_{13} \quad (3.57)$$

$$\varepsilon\alpha_{21} = -\lambda_{21} \quad (3.58)$$

$$\varepsilon\alpha_{22} = 2\xi_2\omega_2 - \lambda_{22} \quad (3.59)$$

$$\varepsilon\alpha_{31} = -\mu_{31} \quad (3.60)$$

$$\varepsilon\alpha_{33} = 2\xi_3\omega_3 - \mu_{33} \quad (3.61)$$

onde ξ_j , $j=1,3$, são os amortecimentos estruturais. Ainda:

$$\beta_{13} = \frac{\rho_a l_b BU^2}{2M_{11}} (\text{sen } \theta) L_3 \int_0^1 \Phi_{b1} \Phi_{b3} dx \quad (3.62)$$

$$\mu_{11} = \frac{\rho_a l_b BU}{2M_{11}} (\text{sen } \theta) L_1 \int_0^1 \Phi_{b1}^2 dx \quad (3.63)$$

$$\mu_{13} = \frac{\rho_a l_b BU}{2M_{11}} (\text{sen } \theta) L_2 \int_0^1 \Phi_{b1} \Phi_{b3} dx \quad (3.64)$$

$$\beta_{33} = \frac{\rho_a l_b BU^2}{2M_{33}} M_3 \int_0^1 \Phi_{b3}^2 dx \quad (3.65)$$

$$\mu_{31} = \frac{\rho_a l_b BU}{2M_{33}} M_1 \int_0^1 \Phi_{b1} \Phi_{b3} dx \quad (3.66)$$

$$\mu_{33} = \frac{\rho_a l_b BU}{2M_{33}} M_2 \int_0^1 \Phi_{b3}^2 dx \quad (3.67)$$

$$\lambda_{10} = \frac{\rho_a l_c DU^2 \Gamma_0}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1} dx \quad (3.68)$$

$$\lambda_{11} = \frac{\rho_a l_c DU \Gamma_1}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1}^2 dx \quad (3.69)$$

$$\lambda_{12} = \frac{\rho_a l_c DU \Gamma_1}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2} dx \quad (3.70)$$

$$\lambda_{111} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1}^3 dx \quad (3.71)$$

$$\lambda_{112} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1}^2 \Phi_{c2} dx \quad (3.72)$$

$$\lambda_{122} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2}^2 dx \quad (3.73)$$

$$\lambda_{20} = \frac{\rho_a l_c D U^2 \Gamma_0}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c2} dx \quad (3.74)$$

$$\lambda_{21} = \frac{\rho_a l_c D U \Gamma_1}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2} dx \quad (3.75)$$

$$\lambda_{22} = \frac{\rho_a l_c D U \Gamma_1}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c2}^2 dx \quad (3.76)$$

$$\lambda_{211} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c1}^2 \Phi_{c2} dx = \frac{M_{11}}{M_{22}} \lambda_{112} \quad (3.77)$$

$$\lambda_{212} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2}^2 dx = \frac{M_{11}}{M_{22}} \lambda_{122} \quad (3.78)$$

$$\lambda_{222} = \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c2}^3 dx_c \quad (3.79)$$

4. MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS

Existem muitos métodos analíticos para obtenção de soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais não-lineares, como (3.50)-(3.52), tais como, o método da expansão direta, o método de Lindstedt-Poincaré, o método das múltiplas escalas, o método do balanço harmônico etc.

Para a solução do problema desse trabalho, será utilizado o método das múltiplas escalas por apresentar um procedimento robusto e simples como idéia, embora trabalhoso como implementação. Apresenta a vantagem de garantir convergência uniforme no tempo para sistemas com não-linearidades fracas.

A principal idéia do método é considerar uma expansão assintótica de um parâmetro de perturbação ε , com $0 < \varepsilon < 1$, para representar a resposta do problema como uma função de múltiplas variáveis temporais independentes, ou escalas, ao invés de apenas a variável de tempo real t . Sejam as escalas:

$$T_n = \varepsilon^n t, \text{ onde } n=0, 1, 2, \dots \quad (4.01)$$

As derivadas em relação a t são expansões em termos das derivadas parciais em T_n :

$$\frac{d}{dt}(\) = \frac{\partial}{\partial T_0}(\) \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1}(\) \frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_2}(\) \frac{dT_2}{dt} + \dots \quad (4.02)$$

$$\frac{d}{dt}(\) = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\) = [D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots][D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots] = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^2 \quad (4.03)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\) = D_0^2 + \varepsilon(2D_0 D_1) + \varepsilon^2(2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots$$

com:

$$D_n^k = \frac{\partial^k}{\partial T_n^k}(\), \quad k, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.04)$$

A solução do sistema (3.50)-(3.52) será, pois, pesquisada na forma:

$$q_i = \varepsilon q_{i1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{i2}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 q_{i3}(T_0, T_1, T_2) \quad (4.05)$$

É oportuno lembrar que o problema em questão tem três graus de liberdade, q_1 , q_2 e q_3 , sendo que q_1 se refere ao modo global de flexão da viga e vibração transversal do estai, q_2 ao modo local de vibração transversal do estai e q_3 ao modo de torção da viga, conforme indicado na Figura 1.2.

Fazendo as derivadas em relação a t , vem:

$$\dot{q}_i = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \dots)(\varepsilon q_{i1} + \varepsilon^2 q_{i2} + \varepsilon^3 q_{i3} \dots) \quad (4.06)$$

$$\dot{q}_i = \varepsilon D_0 q_{i1} + \varepsilon^2 D_0 q_{i2} + \varepsilon^3 D_0 q_{i3} + \varepsilon^2 D_1 q_{i1} + \varepsilon^3 D_1 q_{i2} + \varepsilon^3 D_2 q_{i1} \dots$$

Derivando novamente, temos:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= [(D_0^2 + \varepsilon(2D_0 D_1) + \varepsilon^2(2D_0 D_2 + D_1^2) \dots)](\varepsilon q_{i1} + \varepsilon^2 q_{i2} + \varepsilon^3 q_{i3} \dots) \\ \ddot{q}_i &= \varepsilon D_0^2 q_{i1} + \varepsilon^2 D_0^2 q_{i2} + \varepsilon^3 D_0^2 q_{i3} + \varepsilon^2(2D_0 D_1) q_{i1} + \varepsilon^3(2D_0 D_1) q_{i2} + \\ &\varepsilon^3(2D_0 D_2 + D_1^2) q_{i1} \dots \end{aligned} \quad (4.07)$$

Equação de ordem ε :

Substituindo as equações (4.06) e (4.07) em (3.50) a (3.52) e isolando os termos de ordem ε , temos:

$$D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = p_{10} \rightarrow q_{11} = \frac{p_{10}}{\omega_1^2} + A_1 e^{i\omega_1 T_0} + cc \quad (4.08)$$

$$D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = p_{20} \rightarrow q_{21} = \frac{p_{20}}{\omega_2^2} + A_2 e^{i\omega_2 T_0} + cc \quad (4.09)$$

$$D_0^2 q_{31} + \omega_3^2 q_{31} = 0 \rightarrow q_{31} = A_3 e^{i\omega_3 T_0} + cc \quad (4.10)$$

Equação de ordem ε^2 :

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} = & -2D_0 D_1 q_{11} - \alpha_{11} D_0 q_{11} - \alpha_{12} D_0 q_{21} - \alpha_{13} D_0 q_{31} - \beta_{13} q_{31} \\ & - \gamma_{111} q_{11}^2 - \gamma_{112} q_{11} q_{21} - \gamma_{122} q_{21}^2 + \lambda_{111} (D_0 q_{11})^2 + \lambda_{112} (D_0 q_{11})(D_0 q_{21}) + \\ & + \lambda_{122} (D_0 q_{21})^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} = & -2D_0 D_1 q_{21} - \alpha_{21} D_0 q_{11} - \alpha_{22} D_0 q_{21} - \gamma_{211} q_{11}^2 - \gamma_{212} q_{11} q_{21} \\ & - \gamma_{222} q_{21}^2 + \lambda_{211} (D_0 q_{11})^2 + \lambda_{212} (D_0 q_{11})(D_0 q_{21}) + \lambda_{222} (D_0 q_{21})^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$D_0^2 q_{33} + \omega_3^2 q_{33} = -2D_0 D_1 q_{31} - \alpha_{31} D_0 q_{11} - \alpha_{33} D_0 q_{31} - \beta_{33} q_{33} \quad (4.13)$$

Para favorecer o acoplamento dos termos não-lineares quadráticos, será considerado o caso em que a freqüência natural do segundo modo de vibração é aproximadamente duas vezes a freqüência do primeiro modo, e ambos com freqüências bem diferentes da do terceiro modo.

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma \quad (4.14)$$

onde σ é chamado de parâmetro de sintonia (ou inversamente, *de-tuning*).

As equações de solvabilidade, que são responsáveis pela eliminação dos termos seculares, são:

$$\begin{aligned}
& -2i\omega_1(D_1A_1) - i\alpha_{11}\omega_1A_1 - \gamma_{112}\frac{P_{20}}{\omega_2^2}A_1 - \gamma_{112}A_2\bar{A}_1e^{i\sigma T_1} - \lambda_{112}\omega_1\omega_2A_2\bar{A}_1e^{i\sigma T_1} - \\
& 2\gamma_{111}\frac{P_{10}}{\omega_1^2}A_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& -2i\omega_2(D_1A_2) - i\alpha_{22}\omega_2A_2 - \gamma_{211}A_1^2e^{-i\sigma T_1} - \gamma_{212}\frac{P_{10}}{\omega_1^2}A_2 - 2\gamma_{222}\frac{P_{20}}{\omega_2^2}A_2 - \\
& \lambda_{211}\omega_1^2A_1^2e^{-i\sigma T_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$-2i\omega_3(D_1A_3) - i\alpha_{33}\omega_3A_3 - \beta_{33}A_3 = 0 \tag{4.17}$$

Definem-se, por conveniência:

$$A_j = \frac{1}{2}a_j e^{i\theta_j}, \quad a_j, \theta_j \in \Re \tag{4.18}$$

$$\eta = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma T_1 \tag{4.19}$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.15) a (4.17) e separando as partes reais e imaginárias, as seguintes equações diferenciais ordinárias aparecem:

$$\omega_1(D_1a_1) + \frac{\alpha_{11}\omega_1}{2}a_1 + \frac{1}{4}(\gamma_{112} + \omega_1\omega_2\lambda_{112})a_1a_2 \sin \eta = 0 \tag{4.20}$$

$$\omega_1a_1(D_1\theta_1) - \gamma_{111}\frac{P_{10}}{\omega_1^2}a_1 - \frac{1}{4}(\gamma_{112} + \omega_1\omega_2\lambda_{112})a_1a_2 \cos \eta = 0 \tag{4.21}$$

$$\omega_2(D_1a_2) + \frac{\alpha_{22}\omega_2}{2}a_2 + \frac{1}{4}(\gamma_{211} + \omega_1^2\lambda_{211})a_1^2 \sin \eta = 0 \tag{4.22}$$

$$\omega_2a_2(D_1\theta_2) - \frac{1}{4}(\gamma_{211} + \omega_1^2\lambda_{211})a_1^2 \cos \eta - \left(\frac{\gamma_{222}P_{20}}{\omega_2^2} + \frac{\gamma_{212}P_{10}}{2\omega_1^2} \right) a_2 = 0 \tag{4.23}$$

$$\omega_3(D_1a_3) + \frac{\alpha_{33}\omega_3}{2}a_3 = 0 \rightarrow a_3 = a_{30} e^{\frac{-\alpha_{33}}{2}T_1} \tag{4.24}$$

$$\omega_3a_3(D_1\theta_3) - \frac{\beta_{33}}{2}a_3 = 0 \rightarrow \theta_3 = \theta_{30} + \frac{\beta_{33}}{2\omega_3}T_1 \tag{4.25}$$

Aqui, εa_1 é a amplitude do modo global, εa_2 a amplitude do modo local, εa_3 a amplitude do modo de torção na viga e θ_i os respectivos ângulos de fase, variáveis

com o tempo, os quais implicam modificações nas frequências modais no caso de regime não-linear.

Drapejamento (*Flutter*) unimodal por torção

Da equação (4.24) pode-se perceber que, caso o coeficiente aerodinâmico da seção transversal da viga A_2^* seja positivo, e a velocidade do vento seja maior que:

$$U_3^* = \frac{4\xi_3 \omega_3 M_{33}}{\rho_a l_b B M_2(U_3^*) \int_0^1 \Phi_{b3}^2 dx} \quad (4.26)$$

a amplitude εa_3 crescerá indefinidamente, ao menos nesse modelo linear para a torção, pois nesse caso, α_{33} torna-se negativo. Note que (4.26) é uma equação implícita em U_3^* .

Galope do Estai

A solução não trivial $a_2 \neq 0$, com $a_1 = 0$, é possível nas equações (4.20) a (4.23), fazendo $\alpha_{22} = 0$. Neste caso, a velocidade crítica do vento deve ser igual a:

$$U_2^* = \frac{4\xi_2 \omega_2 M_{22}}{\rho_a l_c D \Gamma_1 \int_0^1 \Phi_{c2}^2 dx} \quad (4.27)$$

Note que (4.27) também é uma equação implícita em U_2^* .

Drapejamento (*Flutter*) unimodal com vibração no cabo e na viga por flexão

As soluções não triviais $a_2 \neq 0$ e $a_1 \neq 0$ são possíveis nas equações (4.20) a (4.23), caso o coeficiente aerodinâmico da seção transversal da viga H_1^* seja positivo e a velocidade do vento esteja entre os seguintes valores:

$$\min(U_1^*, U_2^*) < U < \max(U_1^*, U_2^*) \quad (4.28)$$

onde U_2^* foi definido em (4.27) e U_1^* , expresso abaixo, é o valor da velocidade do vento que anula o coeficiente α_{11} :

$$U_1^* = \frac{4\xi_1 \omega_1 M_{11}}{\rho_a \left(l_b B L_1(U_1^*) \int_0^1 \Phi_{b1}^2 dx + l_c D \Gamma_1 \int_0^1 \Phi_{c1}^2 dx \right)} \quad (4.29)$$

Neste caso, as amplitudes modais são:

$$a_1 = a_2 \sqrt{-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}\right)\left(\frac{\gamma_{112} + \omega_1 \omega_2 \lambda_{112}}{\gamma_{211} + \omega_1^2 \lambda_{211}}\right)}$$

$$a_1 = a_2 \sqrt{-\left[\frac{\xi_1 \omega_1^3 \left(1 - \frac{U}{U_1^*}\right)}{\xi_2 \omega_2^2 \left(1 - \frac{U}{U_2^*}\right)}\right] \left[\frac{\frac{l_c}{l_b^2} c_{22} + \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{22}} \int_0^1 \Phi_{c1}^2 \Phi_{c2} dx}{\frac{\omega_1 c_{12}}{l_c} + \omega_2 \frac{\rho_a l_c D \Gamma_2}{2M_{11}} \int_0^1 \Phi_{c1}^2 \Phi_{c2} dx}\right]} \quad (4.30)$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{2\omega_1 \alpha_{11}}{\gamma_{112} + \omega_1 \omega_2 \lambda_{112}}\right)^2 + \left[\frac{\sigma - \frac{2\gamma_{111} P_{10}}{\omega_1^3} + \frac{\gamma_{222} P_{20}}{\omega_2^3} + \frac{\gamma_{212} P_{10}}{2\omega_1^2 \omega_2}}{\frac{1}{2\omega_1} (\gamma_{112} + \omega_1 \omega_2 \lambda_{112}) \left(1 + \frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{11}}\right)}\right]^2} \quad (4.31)$$

5. ESTUDO DE CASO

Este capítulo ocupa-se do estudo do comportamento aeroelástico da viga simples estaiada da Figura 1.2, submetida a ações de vento e chuva, especialmente no que tange à caracterização da velocidade crítica do vento, para cada um dos fenômenos de instabilidade aeroelástica estudados, bem como das amplitudes modais pós-críticas para o caso de drapejamento (*flutter*) por flexão da viga e vibrações do estai. A seção transversal da viga é mostrada na Figura 5.1. Foi escolhida, propositadamente, com forma geometricamente similar à seção da Ponte de Tacoma Narrows, para favorecer as instabilidades dinâmicas e, assim, ensejar a possibilidade de aplicação da análise do Capítulo 4.

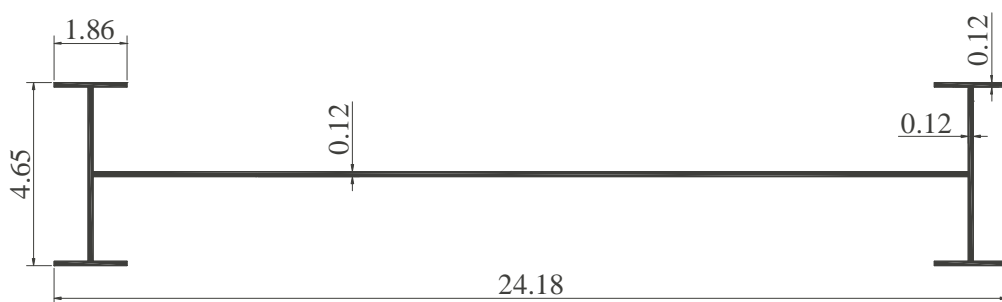


Figura 5.1 – Seção transversal da viga a ser estudada (dimensões em cm)

As demais propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais estão indicadas na Tabela 5.1.

<i>Elemento</i>	<i>Propriedades</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
Cabo	Densidade	ρ_c	7827	Kg/m^3
	Massa por unidade de comprimento	m_c	0,0978	Kg/m
	Módulo de elasticidade	E_c	$2,386.10^{11}$	N/m^2
	Diâmetro	D	$5,06.10^{-04}$	m
	Área da seção transversal	A_c	$2,011.10^{-07}$	m^2
	Comprimento da corda do cabo	l_c	2,061	m
	Empuxo	H	109,952	N
	Ângulo entre a corda e o eixo vertical	θ	1,326	rad
	Flecha da catenária	d	$4,494.10^{-03}$	m
Viga	Densidade equivalente (*)	ρ_b	22431	Kg/m^3
	Massa equivalente por unidade de comprimento	m_b	10,408	Kg/m
	Módulo de elasticidade	E_b	$1,690.10^{11}$	N/m^2
	Módulo de cisalhamento	G_b	$6,76.10^{10}$	N/m^2
	Momento de inércia a flexão	I_{zb}	$3,390.10^{-08}$	m^4
	Momento de inércia a torção	I_t	$2,250.10^{-10}$	m^4
	Área da seção transversal	A_b	$4,640.10^{-04}$	m^2
	Largura da base	B	$2,418.10^{-01}$	m
	Comprimento	l_b	2	m

(*) Levando em consideração massas concentradas ao longo da viga, então $\rho_b = \frac{m_b}{A_b}$

Tabela 5.1 – Parâmetros físicos da viga estaiada

A densidade do ar é $\rho_a = 1,293 \text{ kg} / \text{m}^3$.

Os valores dos coeficientes aerodinâmicos devidos a vento e chuva no cabo, de acordo com as equações (3.39) a (3.41), são:

	Γ_0	Γ_1	Γ_2
$\varphi < -43^\circ$	0,185711	1,37121	5,061592
$\varphi > -43^\circ$	-0,189290	1,166557	5,28837
Curva Média	-0,0626638	0,286640	0,0663996

Tabela 5.2 – Valores de Γ_i em função do ângulo de ataque do vento φ

Recorda-se que $\varphi = \varphi^* - \theta_0$; mas $\varphi^* = -\frac{\dot{v}_c}{U}$, na convenção da Figura 3.3.

Como a velocidade \dot{v}_c inverte de sinal durante a vibração, para se saber que domínio da Tabela 5.2 utilizar, deve-se verificar se $|\dot{v}_c|$ é maior ou menor que $|U(\theta_0 - 0,750492)|$. Portanto, quando $|\dot{v}_c|$ for menor que $|U(\theta_0 - 0,750492)|$, φ terá valores estritamente maiores que -43° . Nesse caso, usa-se Γ_i para valores $\varphi > -43^\circ$. Para valores de $|\dot{v}_c|$ maiores que $|U(\theta_0 - 0,750492)|$, φ terá valores ora maiores, ora menores que -43° . Nesse caso, de forma simplificada serão usados os valores de Γ_i para a curva média.

Uma vez escolhidos os valores de Γ_i e determinada a resposta dinâmica para o cabo, conforme visto no Capítulo 3, poder-se-á verificar se a escolha feita foi adequada ou não, bastando para isto estimar o módulo da velocidade do cabo no meio do vão, de acordo com a seguinte expressão, que decorre de (3.05):

$$|\dot{v}_c| \approx a_2 \omega_2 \int_0^x \Phi_{c2} dx \Big|_{x=0,5}$$

e verificar se este valor é menor ou maior que $|U(\theta_0 - 0,750492)|$.

Os valores das frequências naturais de vibração, para os dois primeiros modos, conforme Rojas (2005), são:

$$\omega_1 = 26,137 \text{ rad/s} \quad (\beta_{b1} = 2,11095; \beta_{c1} = 1,60693); \text{ e}$$

$$\omega_2 = 51,458 \text{ rad/s} \quad (\beta_{b2} = 2,96194; \beta_{c2} = 3,16370).$$

Os valores de ω_1 e ω_2 estão efetivamente, neste estudo de caso, próximos da condição de ressonância interna 1:2. As funções modais correspondentes a cada frequência são dadas nas expressões (2.17) e (2.18). Além disso, o valor do parâmetro de *de-tuning* é:

$$\sigma = \frac{\omega_2 - 2\omega_1}{\varepsilon} = -8,16, \text{ arbitrando-se } \varepsilon = 0,10.$$

Os gráficos das funções modais são dados abaixo, sendo que as abscissas correspondem aos eixos da viga ou da corda do cabo, sendo tais abscissas normalizadas em relação aos respectivos comprimentos.

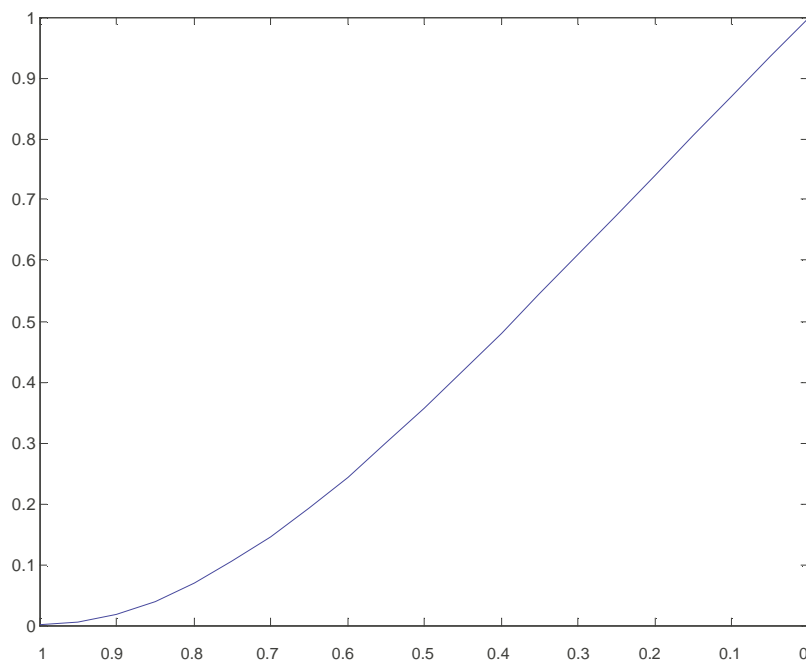


Figura 5.2 – Função modal Φ_{b1}

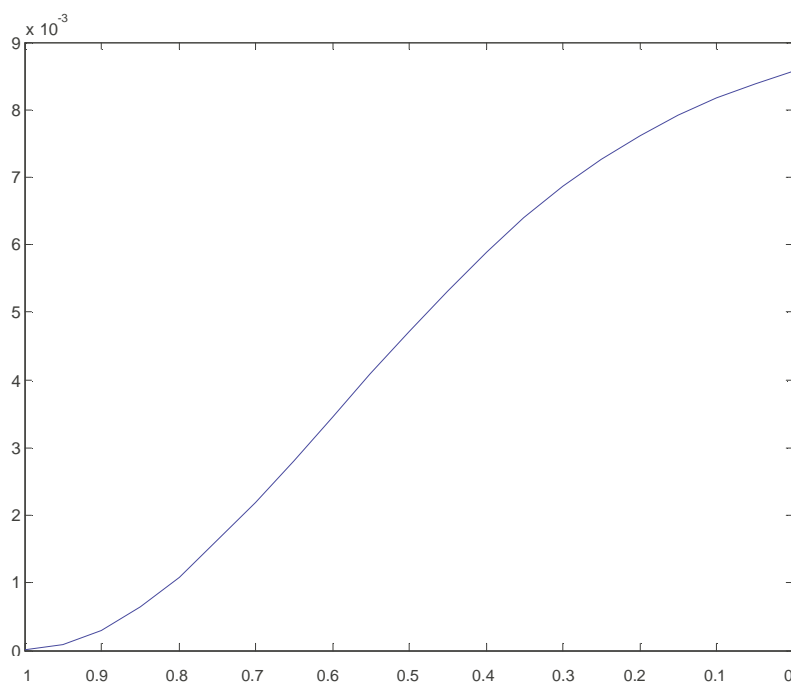


Figura 5.3 – Função modal Φ_{b2}

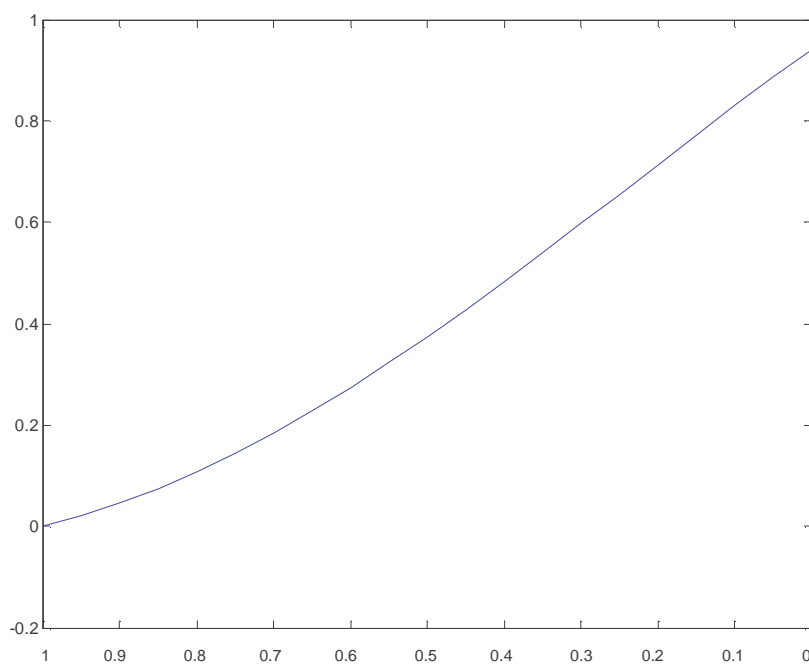
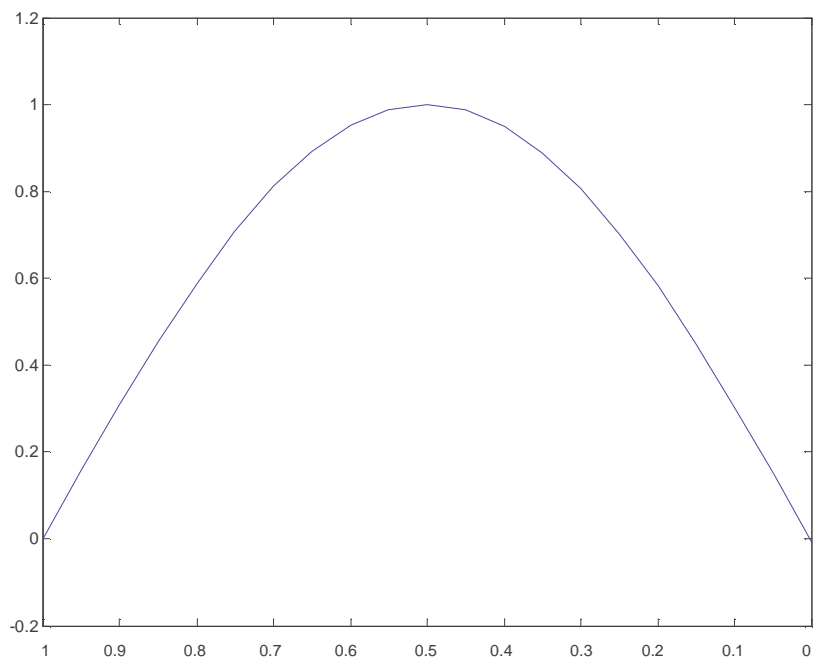
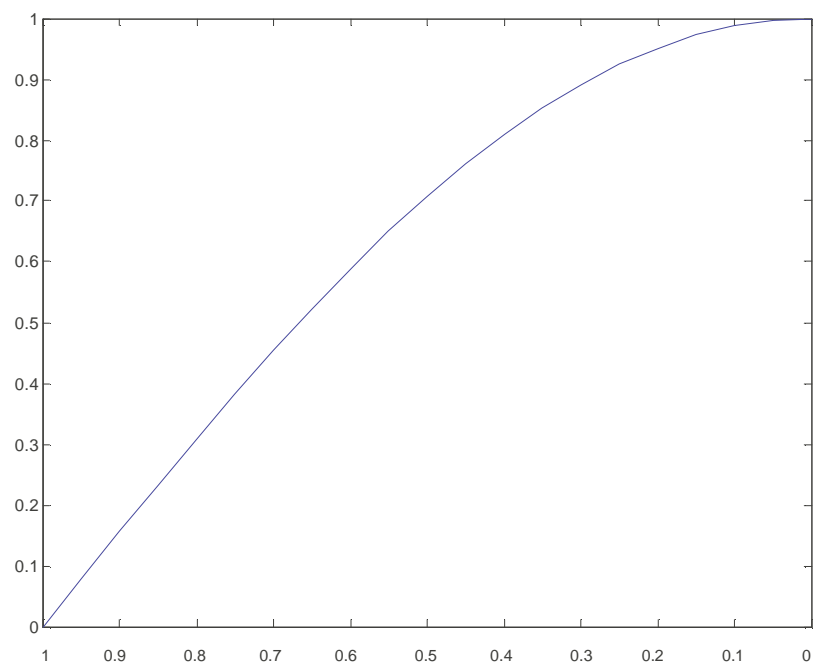


Figura 5.4 – Função modal Φ_{c1}

Figura 5.5 – Função modal Φ_{c2}

Para o modo de torção, a frequência natural é muito maior que ω_1 e ω_2 . A partir de (2.26), $\omega_3 = 1363,45 \text{ rad/s}$. A função modal é dada em (2.25).

Figura 5.6 – Função modal Φ_{b3}

Para esse estudo de caso, todas as taxas modais de amortecimento são arbitradas com $\xi_i = 0,0005$, $i = 1,2,3$. Para os dois primeiros modos, estes valores, bastante baixos, coincidem com os adotados por Gattulli et al (2002) em seu estudo analítico-experimental. Posteriormente, será investigada a influência da taxa de amortecimento nas velocidades críticas do vento e na resposta pós-crítica.

Abaixo seguem os valores das integrais auxiliares que dependem das funções modais:

$$\begin{array}{lll} \int_0^1 \Phi_{b1} dx = 0,402409 & \int_0^1 \Phi_{b1}^2 dx = 0,259834 & \int_0^1 \Phi_{b1} \Phi_{b3} dx = 0,347041 \\ \int_0^1 \Phi_{b2} dx = 0,00445255 & \int_0^1 \Phi_{b2}^2 dx = 2,82782 \cdot 10^{-5} & \int_0^1 \Phi_{b3}^2 dx = 0,5 \\ \int_0^1 \Phi_{c1} dx = 0,406952 & \int_0^1 \Phi_{c1}^2 dx = 0,247279 & \int_0^1 \Phi_{c1}^3 dx = 0,173055 \\ \int_0^1 \Phi_{c2} dx = 0,634680 & \int_0^1 \Phi_{c2}^2 dx = 0,498400 & \int_0^1 \Phi_{c2}^3 dx = 0,423019 \\ \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2} dx = 0,248510 & \int_0^1 \Phi_{c1}^2 \Phi_{c2} dx = 0,127697 & \int_0^1 \Phi_{c1} \Phi_{c2}^2 dx = 0,192272 \end{array}$$

A partir das equações (3.29) a (3.31) e das integrais acima, os valores das massas modais são:

$$M_{11} = 5,29766 \text{ kg} ; M_{22} = 0,100460 \text{ kg} ; M_{33} = 5,04698 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 .$$

A tabela abaixo mostra os valores dos coeficientes aerodinâmicos do cabo, para valores de ângulo de ataque $\varphi < -43^\circ$, $\varphi > -43^\circ$ e para todos os valores de φ (média), supondo-se que o ângulo θ_0 que define a posição do filete de água de chuva vale 32° . Note que alguns coeficientes variam de acordo com a velocidade do vento U ou U^2 .

	$\varphi < -43^\circ$	$\varphi > -43^\circ$	Média
λ_{10}	$9,61822 \cdot 10^{-06} U^2$	$-9,80357 \cdot 10^{-06} U^2$	$-3,24543 \cdot 10^{-06} U^2$
λ_{11}	$4,31523 \cdot 10^{-05} U$	$3,67119 \cdot 10^{-05} U$	$9,02063 \cdot 10^{-06} U$
λ_{12}	$4,33671 \cdot 10^{-05} U$	$3,68946 \cdot 10^{-05} U$	$9,06554 \cdot 10^{-06} U$
λ_{111}	$-1,11477 \cdot 10^{-04}$	$1,16471 \cdot 10^{-04}$	$1,46239 \cdot 10^{-06}$
λ_{112}	$-8,22585 \cdot 10^{-05}$	$8,59439 \cdot 10^{-05}$	$1,07909 \cdot 10^{-06}$
λ_{122}	$-1,23856 \cdot 10^{-04}$	$1,29405 \cdot 10^{-04}$	$1,62478 \cdot 10^{-06}$
λ_{20}	$7,91034 \cdot 10^{-04} U^2$	$-8,06278 \cdot 10^{-04} U^2$	$-2,66915 \cdot 10^{-04} U^2$
λ_{21}	$2,28691 \cdot 10^{-03} U$	$1,94559 \cdot 10^{-03} U$	$4,78061 \cdot 10^{-04} U$
λ_{22}	$4,58653 \cdot 10^{-03} U$	$3,90199 \cdot 10^{-03} U$	$9,58776 \cdot 10^{-04} U$
λ_{211}	$-4,33780 \cdot 10^{-03}$	$4,53215 \cdot 10^{-03}$	$5,69047 \cdot 10^{-05}$
λ_{212}	$-6,53139 \cdot 10^{-03}$	$6,82401 \cdot 10^{-03}$	$8,56808 \cdot 10^{-05}$
λ_{222}	$-1,43697 \cdot 10^{-02}$	$1,50136 \cdot 10^{-02}$	$1,88507 \cdot 10^{-04}$

Tabela 5.3 – Coeficientes aerodinâmicos do cabo, para a condição de vento-chuva

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos na viga, usam-se as curvas da Figura 3.6, adotando-se a seção similar à da ponte de Tacoma Narrows (Figura 5.1).

O gráfico abaixo apresenta as curvas dos coeficientes de drapejamento, com a adequação para este trabalho, isto é, com o valor dos coeficientes multiplicados por 2. As curvas A_1^* e A_3^* não apresentam interesse.

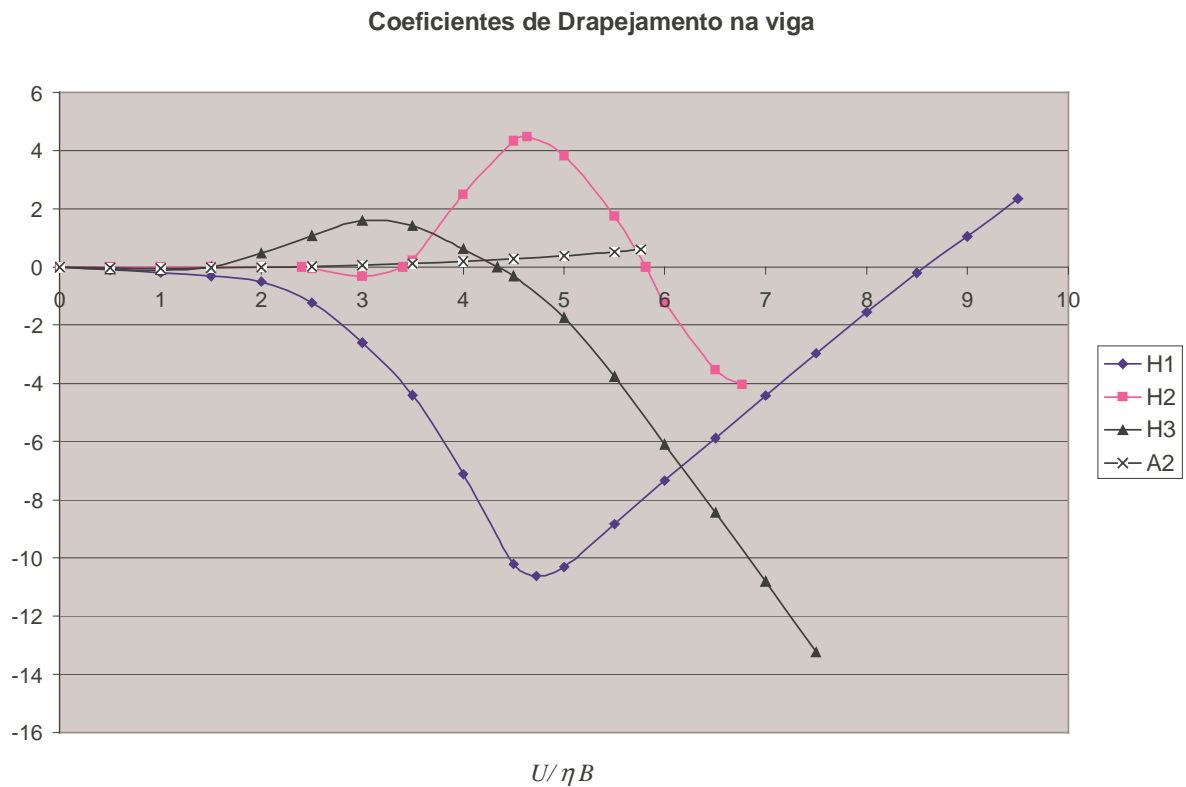


Figura 5.7 – Coeficientes de drapejamento da viga, em função de $\frac{U}{\eta B}$, onde $\eta = \frac{\omega}{2\pi}$, para a seção da Figura 5.1.

β_{13}	$2,04810 \cdot 10^{-02} U^2 L_3$
β_{33}	$3,09737 \cdot 10^{04} U^2 M_3$
μ_{11}	$1,53344 \cdot 10^{-02} U L_1$
μ_{13}	$2,04810 \cdot 10^{-02} U L_2$
μ_{31}	$2,14983 \cdot 10^{04} U M_1$
μ_{33}	$3,09737 \cdot 10^{04} U M_2$

Tabela 5.4 – Coeficientes aerodinâmicos, devidos ao vento, relativos à viga.

Finalmente, os coeficientes de rigidez não-lineares, determinados a partir de Rojas (2005), são indicados abaixo:

C_{12}	2,19
C_{13}	1,47
C_{22}	37,5
C_{23}	389
C_{24}	-23,7
γ_{111}	748
γ_{112}	487
γ_{211}	$1,32 \cdot 10^4$
γ_{212}	$1,33 \cdot 10^5$
γ_{222}	$-7,86 \cdot 10^3$

Tabela 5.5 – Coeficientes não lineares de rigidez

Cálculo da velocidade crítica do vento para o drapejamento (*flutter*) unimodal de torção na viga.

A partir da equação (4.26) e com a ajuda da Figura 5.7, calcula-se o valor da velocidade crítica do vento U_3 , através de iterações:

U	$A_2(\omega_3)$	$\kappa(\omega_3)$	$M_2(\omega_3)$	U_3
105	-0,00976	0,1185	-6,8E-05	-0,65
113	6,05E-05	0,1103	3,91E-07	113
131	0,0231	0,09498	0,000128	0,34

Tabela 5.6 – Cálculo iterativo de U_3

Portanto, resulta $U_3=113$ m/s.

Cálculo da velocidade crítica do vento para o galope do estai:

A partir de (4.27), a velocidade crítica U_2 resulta igual a 55m/s.

Cálculo da velocidade crítica do vento para o drapejamento (*flutter*) unimodal de flexão, com vibrações do cabo

A partir de (4.29), a velocidade crítica U_1 pode ser determinada por iteração.

U	$H_1(\omega_1)$	$\kappa(\omega_1)$	L_1	U_1
8,5	-0,227	0,7435	-0,1688	-10,3
8,7	0,266	0,7271	0,1933	8,7
9	1,053	0,7022	0,7394	2,3

Tabela 5.7 – Cálculo iterativo de U_1

Portanto, resulta $U_1 = 8,7$ m/s.

A influência das vibrações do cabo na velocidade crítica do vento U_1 parece ser desprezável.

No entanto, é muito importante para limitar as amplitudes pós-críticas tanto no cabo quanto na viga, como pode ser visto através das equações (4.31) e (4.32). A tabela abaixo mostra as amplitudes do primeiro e segundo modo, determinadas na zona de velocidades de vento pós-críticas. Para tanto, a curva de H_1^* teve que ser extrapolada para velocidades de vento acima de 9,5 m/s. A Figura 5.8 mostra o gráfico de H_1^* extrapolado. É desejável que esses resultados sejam validados experimentalmente, o que foge ao escopo dessa dissertação.

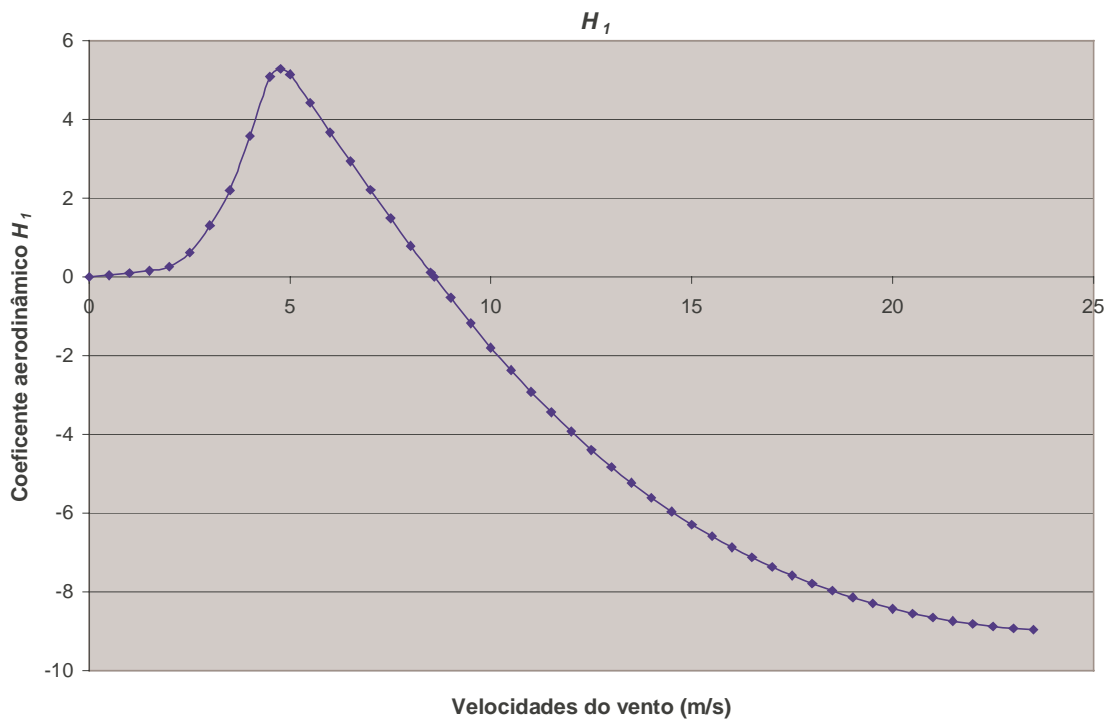


Figura 5.8 – Gráfico da extrapolação dos valores de H_1^*

Coincidentemente, para $\omega_1=26,137$ rad/s, o valor de ηB é aproximadamente 1, portanto o eixo das abscissas pode ser confundido com o da própria velocidade do vento U .

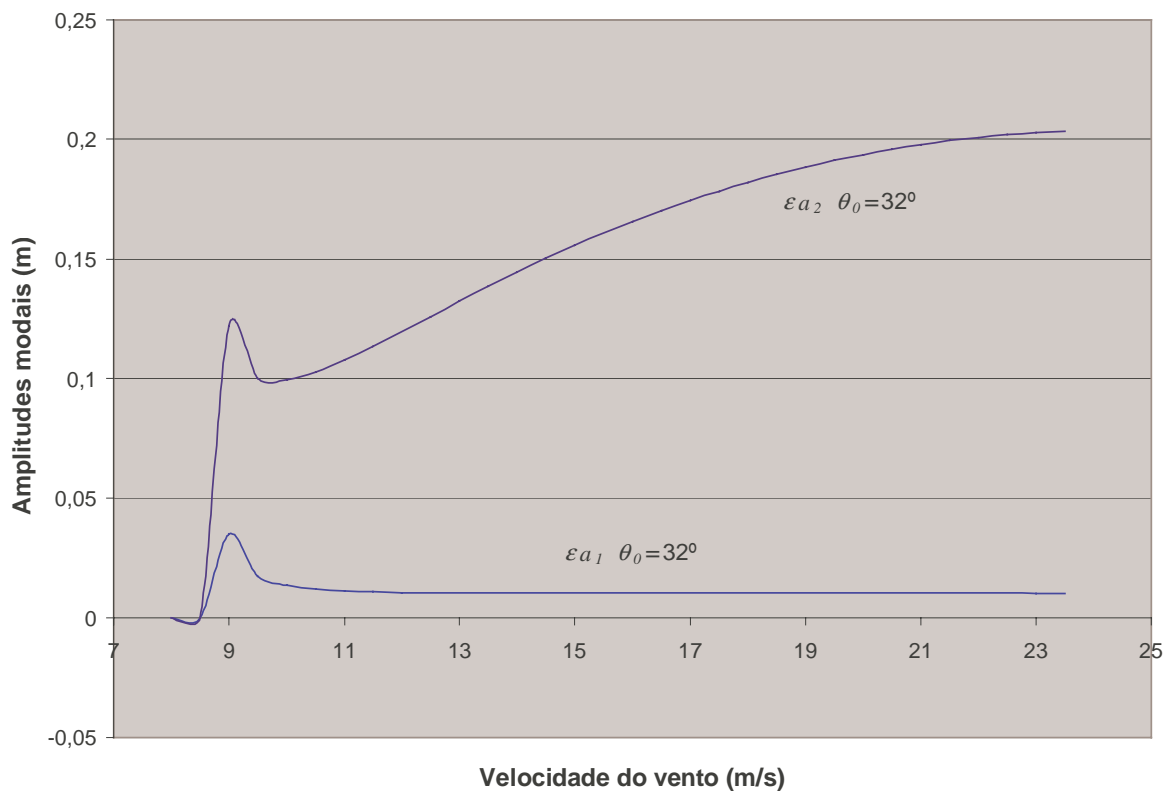
U (m/s)	$H_1^* (\omega_1)$	$A_2 (\omega_3)$	L_1	$M_2 (\omega_3)$	εa_2 (m)	εa_1 (m)
8,7	0,27	-0,01	0,193	-0,020	0,13	0,03
9	1,05	-0,01	0,739	-0,020	0,12	0,03
9,5	2,36	-0,01	1,571	-0,020	0,10	0,02
10	3,59	-0,01	2,271	-0,020	0,10	0,01
10,5	4,75	-0,01	2,861	-0,020	0,10	0,01
11	5,85	-0,01	3,359	-0,020	0,11	0,01
11,5	6,88	-0,01	3,781	-0,020	0,11	0,01
12	7,86	-0,01	4,138	-0,020	0,12	0,01
12,5	8,79	-0,01	4,444	-0,020	0,13	0,01
13	9,66	-0,01	4,698	-0,020	0,13	0,01
13,5	10,48	-0,01	4,904	-0,020	0,14	0,01
14	11,23	-0,01	5,069	-0,020	0,14	0,01
14,5	11,93	-0,02	5,199	-0,020	0,15	0,01
15	12,58	-0,02	5,300	-0,020	0,16	0,01
15,5	13,18	-0,02	5,375	-0,020	0,16	0,01
16	13,74	-0,02	5,428	-0,020	0,17	0,01
16,5	14,26	-0,02	5,462	-0,020	0,17	0,01
17	14,74	-0,02	5,479	-0,020	0,17	0,01

Continua

Continuação

U (m/s)	H_1^* (ω_1)	A_2 (ω_3)	L_1	M_2 (ω_3)	εa_2 (m)	εa_1 (m)
17,5	15,18	-0,02	5,482	-0,020	0,18	0,01
18	15,58	-0,02	5,471	-0,020	0,18	0,01
18,5	15,95	-0,02	5,450	-0,020	0,19	0,01
19	16,29	-0,02	5,418	-0,020	0,19	0,01
19,5	16,59	-0,02	5,377	-0,020	0,19	0,01
20	16,86	-0,02	5,328	-0,020	0,19	0,01
20,5	17,10	-0,02	5,272	-0,020	0,20	0,01
21	17,31	-0,02	5,209	-0,020	0,20	0,01
21,5	17,49	-0,02	5,141	-0,020	0,20	0,01
22	17,64	-0,02	5,067	-0,020	0,20	0,01
22,5	17,76	-0,02	4,988	-0,020	0,20	0,01
23	17,85	-0,02	4,905	-0,020	0,20	0,01
23,5	17,91	-0,02	4,818	-0,020	0,20	0,01

Tabela 5.8 – Amplitudes modais pós-críticas.

Figura 5.9: Amplitudes modais pós-críticas $\varepsilon a_1(U)$ e $\varepsilon a_2(U)$.

Influência do ângulo do filete θ_0 nas amplitudes pós-críticas de vibração.

Até agora, havia sido adotado o ângulo θ_0 de 32° , conforme sugerido no trabalho de Xu e Wang (2003).

Por meio das equações (3.39) a (3.41) os coeficientes Γ_i podem ser calculados para diferentes valores de θ_0 . Verifica-se que, para valores compreendidos entre 20° e 44° , Γ_1 é positivo e, portanto, existem valores de U_2 , isto é, de velocidade crítica para galope do estai.

As tabelas abaixo mostram a variação das amplitudes de vibração segundo a variação do ângulo θ_0 . Note-se que, de posse do valor das amplitudes, pode-se determinar o valor do ângulo de ataque do vento, o qual permite verificar os valores adotados para Γ_i .

U (m/s)	$\theta_0 = 20,7^\circ$ $U_2 = 584\text{m/s}$		$\theta_0 = 22^\circ$ $U_2 = 184\text{ m/s}$		$\theta_0 = 24^\circ$ $U_2 = 97\text{ m/s}$	
	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)
8,5	—	0,057286	—	0,057943	—	0,058827
9	0,0404	0,1309	0,0391	0,1288	0,0374	0,1261
9,5	0,0192	0,1018	0,0188	0,1013	0,0182	0,1008
10	0,0151	0,1005	0,0147	0,1002	0,0143	0,1000
10,5	0,0133	0,1034	0,0130	0,1032	0,0127	0,1030
11	0,0125	0,1080	0,0122	0,1079	0,0118	0,1077
11,5	0,0120	0,1135	0,0118	0,1134	0,0114	0,1133
12	0,0118	0,1195	0,0116	0,1194	0,0112	0,1194
12,5	0,0117	0,1258	0,0115	0,1258	0,0111	0,1257
13	0,0117	0,1321	0,0114	0,1321	0,0111	0,1321
13,5	0,0118	0,1383	0,0115	0,1383	0,0111	0,1383
14	0,0119	0,1442	0,0115	0,1442	0,0111	0,1443
14,5	0,0119	0,1499	0,0116	0,1499	0,0112	0,1500
15	0,0120	0,1553	0,0117	0,1553	0,0112	0,1554
15,5	0,0121	0,1604	0,0118	0,1605	0,0113	0,1605
16	0,0122	0,1652	0,0119	0,1653	0,0113	0,1653
16,5	0,0123	0,1698	0,0119	0,1698	0,0114	0,1698
17	0,0124	0,1740	0,0120	0,1740	0,0115	0,1740
17,5	0,0125	0,1779	0,0121	0,1779	0,0115	0,1780
18	0,0126	0,1815	0,0121	0,1815	0,0115	0,1816
18,5	0,0127	0,1848	0,0122	0,1848	0,0116	0,1849
19	0,0127	0,1878	0,0122	0,1878	0,0116	0,1879
19,5	0,0128	0,1905	0,0123	0,1906	0,0116	0,1907
20	0,0128	0,1930	0,0123	0,1930	0,0116	0,1931
20,5	0,0129	0,1951	0,0124	0,1952	0,0117	0,1953
21	0,0129	0,1970	0,0124	0,1971	0,0117	0,1972
21,5	0,0129	0,1986	0,0124	0,1987	0,0116	0,1988
22	0,0130	0,2000	0,0124	0,2000	0,0116	0,2002
22,5	0,0130	0,2011	0,0124	0,2011	0,0116	0,2013
23	0,0130	0,2019	0,0124	0,2019	0,0116	0,2021
23,5	0,0130	0,2024	0,0124	0,2025	0,0116	0,2026

Continua

Continuação

U (m/s)	$\theta_0 = 26^\circ$ $U_2 = 71\text{m/s}$		$\theta_0 = 28^\circ$ $U_2 = 60\text{m/s}$		$\theta_0 = 30^\circ$ $U_2 = 55\text{m/s}$	
	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)
8,5	—	0,05954	—	0,060068	—	0,060398
9	0,0361	0,1242	0,0352	0,1229	0,0348	0,1222
9,5	0,0178	0,1004	0,0175	0,1001	0,0173	0,1000
10	0,0140	0,0998	0,0137	0,0997	0,0136	0,0996
10,5	0,0124	0,1029	0,0122	0,1029	0,0120	0,1029
11	0,0116	0,1077	0,0114	0,1077	0,0112	0,1077
11,5	0,0111	0,1133	0,0109	0,1133	0,0108	0,1134
12	0,0109	0,1194	0,0107	0,1194	0,0106	0,1195
12,5	0,0108	0,1258	0,0106	0,1258	0,0104	0,1259
13	0,0107	0,1321	0,0105	0,1322	0,0104	0,1322
13,5	0,0107	0,1383	0,0105	0,1384	0,0104	0,1385
14	0,0108	0,1443	0,0105	0,1444	0,0104	0,1444
14,5	0,0108	0,1500	0,0105	0,1501	0,0104	0,1502
15	0,0108	0,1554	0,0106	0,1555	0,0104	0,1556
15,5	0,0109	0,1606	0,0106	0,1606	0,0104	0,1607
16	0,0109	0,1654	0,0106	0,1655	0,0105	0,1656
16,5	0,0110	0,1699	0,0107	0,1700	0,0105	0,1701
17	0,0110	0,1741	0,0107	0,1742	0,0105	0,1743
17,5	0,0110	0,1780	0,0107	0,1781	0,0105	0,1783
18	0,0111	0,1817	0,0107	0,1818	0,0105	0,1819
18,5	0,0111	0,1850	0,0107	0,1851	0,0105	0,1852
19	0,0111	0,1880	0,0107	0,1881	0,0105	0,1883
19,5	0,0111	0,1908	0,0107	0,1909	0,0105	0,1910
20	0,0111	0,1932	0,0107	0,1934	0,0104	0,1935
20,5	0,0111	0,1954	0,0107	0,1956	0,0104	0,1957
21	0,0111	0,1973	0,0106	0,1975	0,0104	0,1976
21,5	0,0110	0,1990	0,0106	0,1991	0,0103	0,1993
22	0,0110	0,2003	0,0105	0,2005	0,0103	0,2006
22,5	0,0110	0,2014	0,0105	0,2016	0,0102	0,2018
23	0,0109	0,2022	0,0104	0,2024	0,0101	0,2026
23,5	0,0109	0,2028	0,0104	0,2030	0,0101	0,2032

Continua

Continuação

U (m/s)	$\theta_0 = 32^\circ$ $U_2 = 54$ m/s		$\theta_0 = 34^\circ$ $U_2 = 56$ m/s		$\theta_0 = 36^\circ$ $U_2 = 62$ m/s	
	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)
8,5	—	0,06052	—	0,060431	—	0,060132
9	0,0346	0,1220	0,0349	0,1225	0,0356	0,1236
9,5	0,0173	0,1000	0,0174	0,1002	0,0176	0,1006
10	0,0136	0,0997	0,0137	0,0998	0,0139	0,1001
10,5	0,0120	0,1030	0,0121	0,1031	0,0123	0,1033
11	0,0112	0,1078	0,0113	0,1079	0,0114	0,1081
11,5	0,0108	0,1134	0,0108	0,1136	0,0110	0,1137
12	0,0105	0,1196	0,0106	0,1197	0,0108	0,1198
12,5	0,0104	0,1259	0,0105	0,1261	0,0107	0,1262
13	0,0104	0,1323	0,0104	0,1325	0,0106	0,1326
13,5	0,0103	0,1386	0,0104	0,1387	0,0106	0,1388
14	0,0103	0,1446	0,0104	0,1447	0,0106	0,1448
14,5	0,0104	0,1503	0,0104	0,1504	0,0106	0,1506
15	0,0104	0,1557	0,0105	0,1558	0,0107	0,1560
15,5	0,0104	0,1609	0,0105	0,1610	0,0107	0,1611
16	0,0104	0,1657	0,0105	0,1658	0,0107	0,1660
16,5	0,0104	0,1702	0,0105	0,1704	0,0108	0,1705
17	0,0104	0,1745	0,0105	0,1746	0,0108	0,1748
17,5	0,0105	0,1784	0,0106	0,1786	0,0108	0,1787
18	0,0104	0,1820	0,0106	0,1822	0,0108	0,1824
18,5	0,0104	0,1854	0,0106	0,1855	0,0108	0,1857
19	0,0104	0,1884	0,0105	0,1886	0,0108	0,1888
19,5	0,0104	0,1912	0,0105	0,1914	0,0108	0,1916
20	0,0104	0,1937	0,0105	0,1939	0,0108	0,1940
20,5	0,0103	0,1959	0,0105	0,1961	0,0108	0,1963
21	0,0103	0,1978	0,0104	0,1980	0,0108	0,1982
21,5	0,0103	0,1995	0,0104	0,1997	0,0107	0,1999
22	0,0102	0,2008	0,0103	0,2010	0,0107	0,2013
22,5	0,0101	0,2020	0,0103	0,2022	0,0107	0,2024
23	0,0101	0,2028	0,0102	0,2030	0,0106	0,2032
23,5	0,0100	0,2034	0,0102	0,2036	0,0106	0,2038

Continua

Continuação

U (m/s)	$\theta_0 = 38^\circ$ $U_2 = 77$ m/s		$\theta_0 = 40^\circ$ $U_2 = 113$ m/s		$\theta_0 = 42^\circ$ $U_2 = 281$ m/s	
	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)
8,5	—	0,059626	—	0,058924	—	0,058037
9	0,0366	0,1253	0,0381	0,1277	0,0401	0,1309
9,5	0,0180	0,1010	0,0185	0,1017	0,0192	0,1025
10	0,0141	0,1004	0,0145	0,1008	0,0150	0,1013
10,5	0,0125	0,1035	0,0129	0,1039	0,0133	0,1042
11	0,0117	0,1083	0,0120	0,1086	0,0125	0,1089
11,5	0,0113	0,1139	0,0116	0,1142	0,0120	0,1144
12	0,0110	0,1200	0,0114	0,1202	0,0118	0,1205
12,5	0,0109	0,1264	0,0113	0,1266	0,0117	0,1268
13	0,0109	0,1328	0,0112	0,1330	0,0117	0,1332
13,5	0,0109	0,1390	0,0113	0,1392	0,0117	0,1394
14	0,0109	0,1450	0,0113	0,1452	0,0118	0,1454
14,5	0,0110	0,1507	0,0114	0,1509	0,0119	0,1511
15	0,0110	0,1562	0,0114	0,1563	0,0120	0,1565
15,5	0,0110	0,1613	0,0115	0,1615	0,0121	0,1617
16	0,0111	0,1662	0,0116	0,1663	0,0121	0,1665
16,5	0,0111	0,1707	0,0116	0,1709	0,0122	0,1711
17	0,0112	0,1749	0,0117	0,1751	0,0123	0,1753
17,5	0,0112	0,1789	0,0117	0,1791	0,0124	0,1793
18	0,0112	0,1825	0,0118	0,1827	0,0125	0,1829
18,5	0,0113	0,1859	0,0118	0,1861	0,0125	0,1863
19	0,0113	0,1890	0,0119	0,1892	0,0126	0,1894
719,5	0,0113	0,1917	0,0119	0,1919	0,0126	0,1922
20	0,0113	0,1942	0,0119	0,1945	0,0127	0,1947
20,5	0,0113	0,1965	0,0119	0,1967	0,0127	0,1969
21	0,0113	0,1984	0,0120	0,1986	0,0128	0,1989
21,5	0,0113	0,2001	0,0120	0,2003	0,0128	0,2005
22	0,0112	0,2015	0,0120	0,2017	0,0128	0,2020
22,5	0,0112	0,2026	0,0120	0,2029	0,0128	0,2031
23	0,0112	0,2035	0,0119	0,2037	0,0128	0,2040
23,5	0,0111	0,2041	0,0119	0,2043	0,0128	0,2046

Tabela 5.9 – Valores das amplitudes modais com a variação do ângulo θ_0

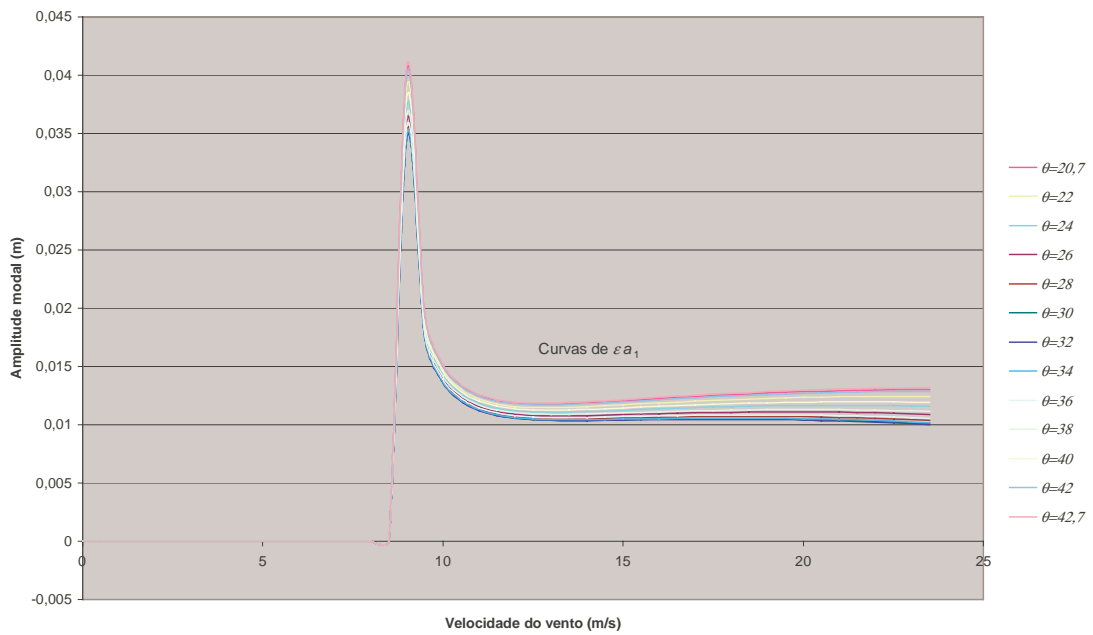


Figura 5.10 - Valores das amplitudes modais εa_1 com a variação do ângulo θ_0

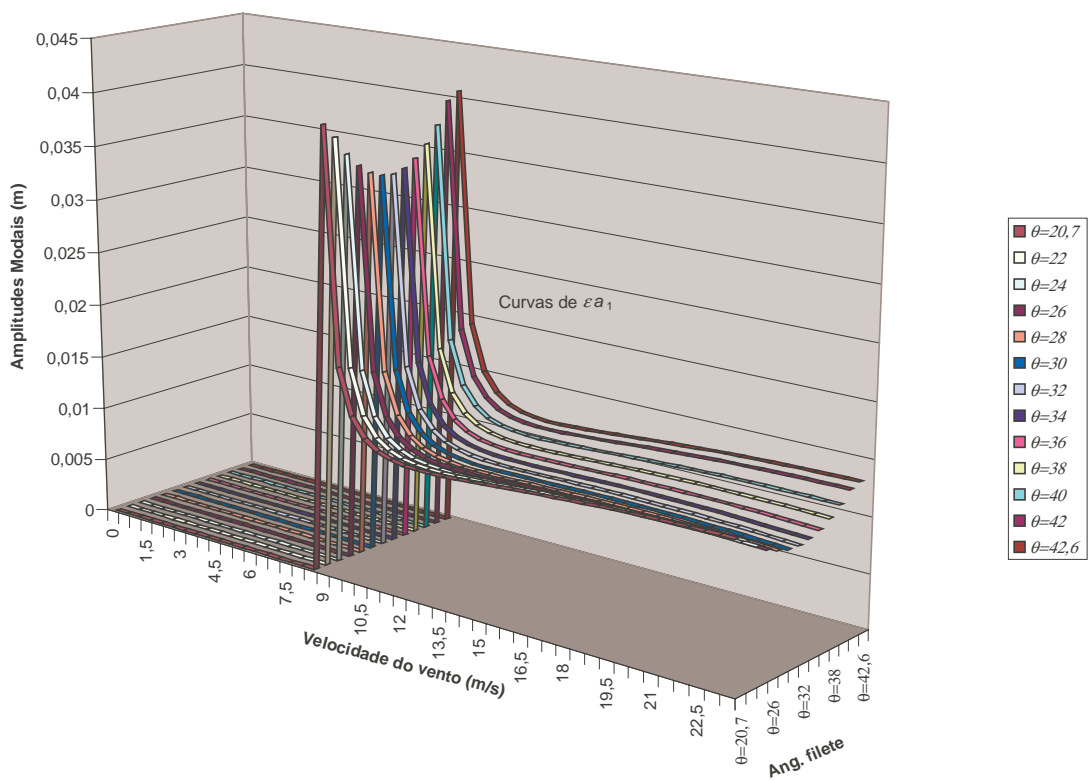


Figura 5.11 - Valores das amplitudes modais εa_1 com a variação da velocidade do vento e do ângulo θ_0

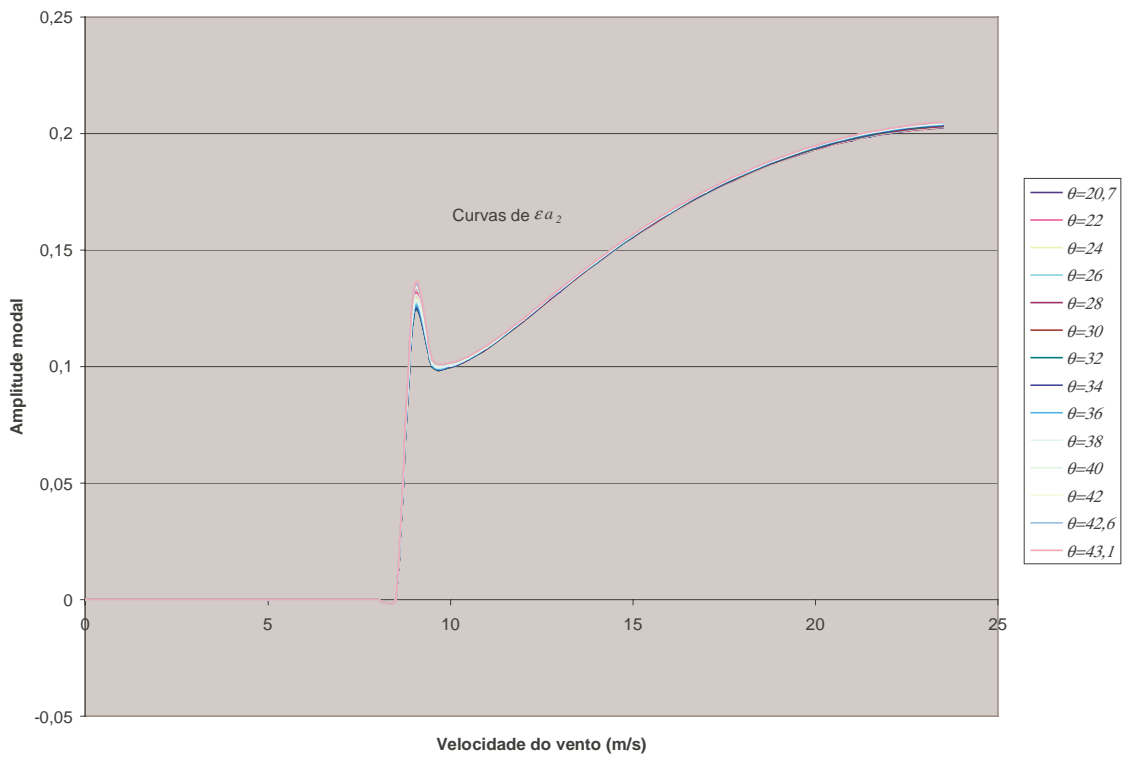


Figura 5.12 - Valores das amplitudes modais εa_2 com a variação do ângulo θ_0

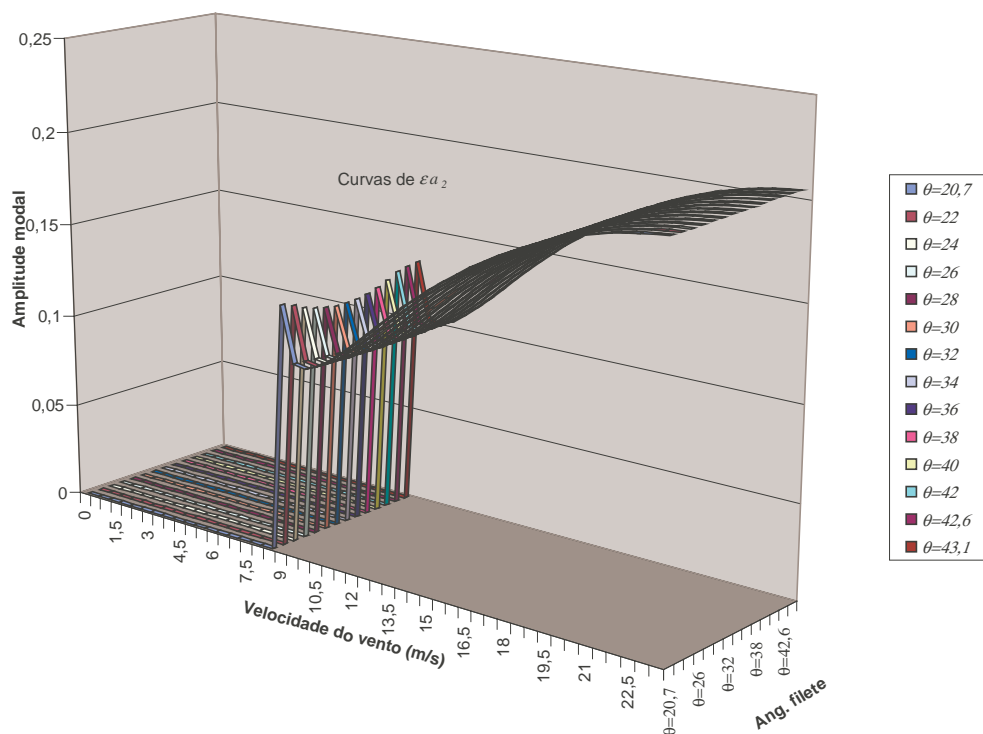


Figura 5.13 - Valores das amplitudes modais εa_2 com a variação da velocidade do vento e do ângulo θ_0

Os valores da amplitude εa_2 não se alteram significativamente com a mudança do ângulo do filete. Note-se que a variação do ângulo do filete altera também muito pouco o valor de εa_1 . Entretanto, quando θ_0 vale 32° , temos o menor valor para a velocidade crítica do galope do estai (U_2), justificando a adoção deste ângulo para problemas sujeitos a ação de vento e chuva, conforme sugerido por Xu e Wang (2003).

Sensibilidade da resposta em função da variação das taxas de amortecimento.

Variando-se o amortecimento do primeiro modo global (ξ_1), a tabela abaixo mostra os valores da velocidade crítica U_1 e das amplitudes modais em função da velocidade de vento U .

U (m/s)	$\xi_1 = 0,0005$ $U_1 = 8,7$ m/s		$\xi_1 = 0,001$ $U_1 = 8,8$ m/s		$\xi_1 = 0,005$ $U_1 = 9,63$ m/s		$\xi_1 = 0,01$ $U_1 = 10,8$ m/s	
	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)	εa_1 (m)	εa_2 (m)
8	-	-	-	-	-	-	-	-
9	0,0346	0,122	0,0538	0,153	-	-	-	-
10	0,0136	0,100	0,0141	0,099	0,0303	0,116	-	-
11	0,0112	0,108	0,0114	0,106	0,0137	0,099	0,0598	0,164
12	0,0105	0,120	0,0106	0,118	0,0113	0,106	0,0153	0,099
13	0,0104	0,132	0,0103	0,130	0,0105	0,116	0,0118	0,102
14	0,0103	0,145	0,0103	0,142	0,0102	0,126	0,0107	0,109
15	0,0104	0,156	0,0103	0,153	0,0101	0,136	0,0102	0,117
16	0,0104	0,166	0,0104	0,163	0,0101	0,145	0,0099	0,125
17	0,0104	0,174	0,0104	0,172	0,0101	0,153	0,0098	0,132
18	0,0104	0,182	0,0104	0,180	0,0100	0,161	0,0097	0,138
19	0,0104	0,188	0,0104	0,186	0,0100	0,167	0,0096	0,144
20	0,0104	0,194	0,0103	0,191	0,0100	0,172	0,0096	0,148

Tabela 5.10 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do primeiro modo

Nota-se que a resposta dinâmica é sensível às variações do amortecimento do primeiro modo. Tanto os valores das amplitudes modais, quanto a velocidade crítica se alteraram com a mudança da taxa de amortecimento. As Figuras 5.14 e 5.15 ilustram melhor, qualitativamente, estas diferenças.

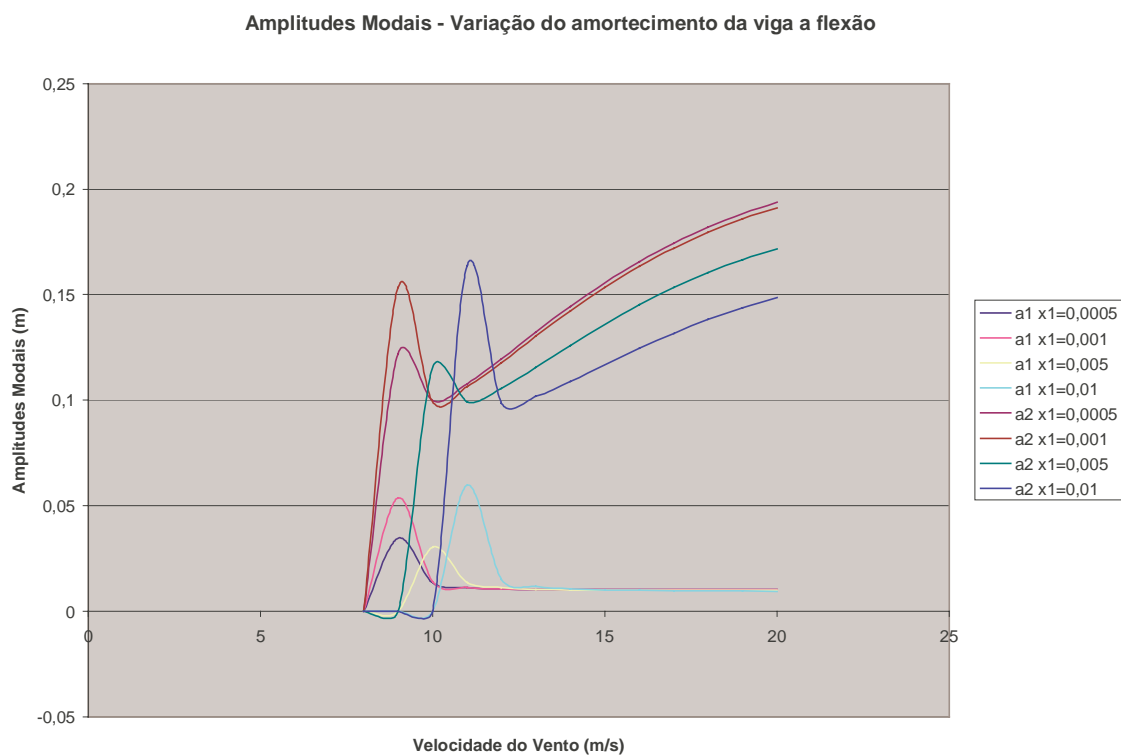


Figura 5.14 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do primeiro modo

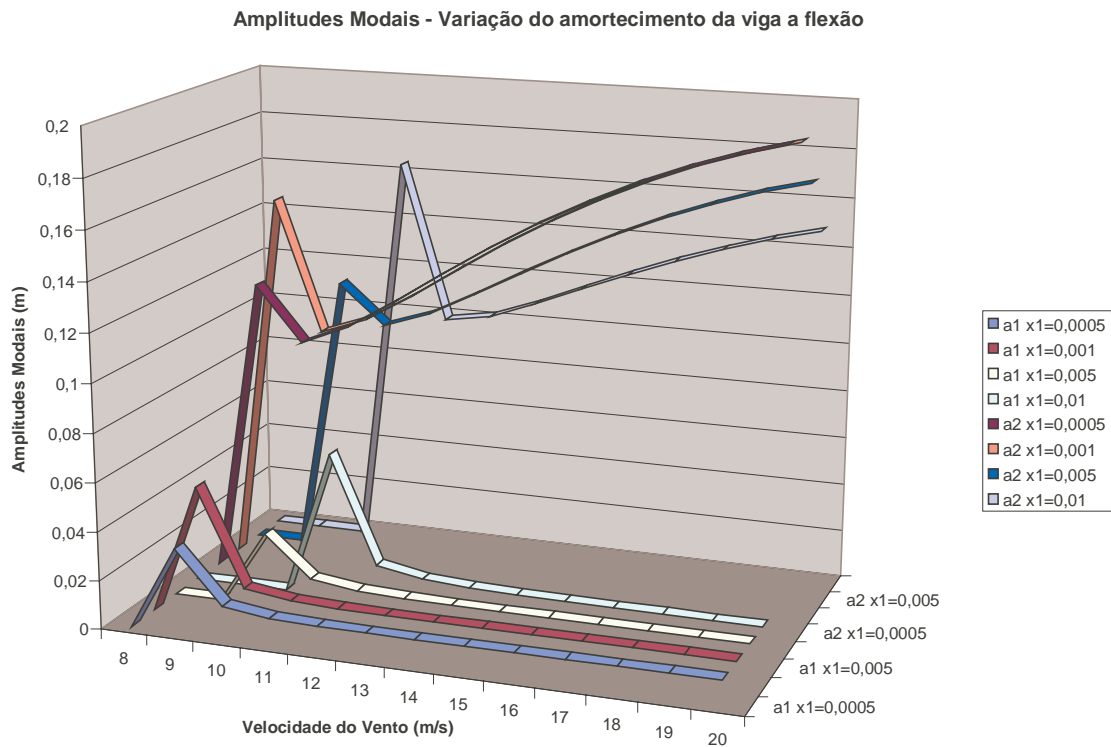


Figura 5.15 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do primeiro modo

Variando-se o amortecimento do segundo modo, a tabela abaixo mostra os valores da velocidade crítica U_2 e das amplitudes modais em função da velocidade de vento U .

U (m/s)	$\xi_2 = 0,0005$		$\xi_2 = 0,001$		$\xi_2 = 0,005$		$\xi_2 = 0,01$	
	ϵa_1 (m)	ϵa_2 (m)	ϵa_1 (m)	ϵa_2 (m)	ϵa_1 (m)	ϵa_2 (m)	ϵa_1 (m)	ϵa_2 (m)
8	0	0,000	0,0000	0,000	0,0000	0,000	0,0000	0,000
9	0,0346	0,122	0,0971	0,231	0,0000	0,000	0,0000	0,000
10	0,0136	0,100	0,0220	0,108	0,1920	0,406	0,0000	0,000
11	0,0112	0,108	0,0175	0,112	0,0634	0,174	0,7871	1,516
12	0,0105	0,120	0,0163	0,122	0,0483	0,154	0,1309	0,294
13	0,0104	0,132	0,0160	0,134	0,0436	0,155	0,0881	0,221
14	0,0103	0,145	0,0160	0,146	0,0419	0,161	0,0749	0,202

Continua

Continuação

U (m/s)	$\xi_2 = 0,0005$		$\xi_2 = 0,001$		$\xi_2 = 0,005$		$\xi_2 = 0,01$	
	$U_2 = 54 \text{ m/s}$		$U_2 = 107 \text{ m/s}$		$U_1 = 537 \text{ m/s}$		$U_1 = 1070 \text{ m/s}$	
	$\varepsilon a_1(\text{m})$	$\varepsilon a_2(\text{m})$	$\varepsilon a_1(\text{m})$	$\varepsilon a_2(\text{m})$	$\varepsilon a_1(\text{m})$	$\varepsilon a_2(\text{m})$	$\varepsilon a_1(\text{m})$	$\varepsilon a_2(\text{m})$
15	0,0104	0,156	0,0162	0,157	0,0414	0,169	0,0693	0,199
16	0,0104	0,166	0,0163	0,167	0,0413	0,177	0,0666	0,200
17	0,0104	0,174	0,0165	0,175	0,0415	0,184	0,0653	0,203
18	0,0104	0,182	0,0166	0,183	0,0417	0,191	0,0646	0,207
19	0,0104	0,188	0,0167	0,189	0,0420	0,196	0,0643	0,211
20	0,0104	0,194	0,0168	0,194	0,0422	0,201	0,0642	0,214

Tabela 5.11 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do segundo modo

Neste caso, os valores das amplitudes modais se alteraram mais significativamente com a mudança do amortecimento do segundo modo. Portanto, deve-se tomar particular cuidado na definição desse parâmetro. Os gráficos abaixo ilustram a Tabela 5.11.

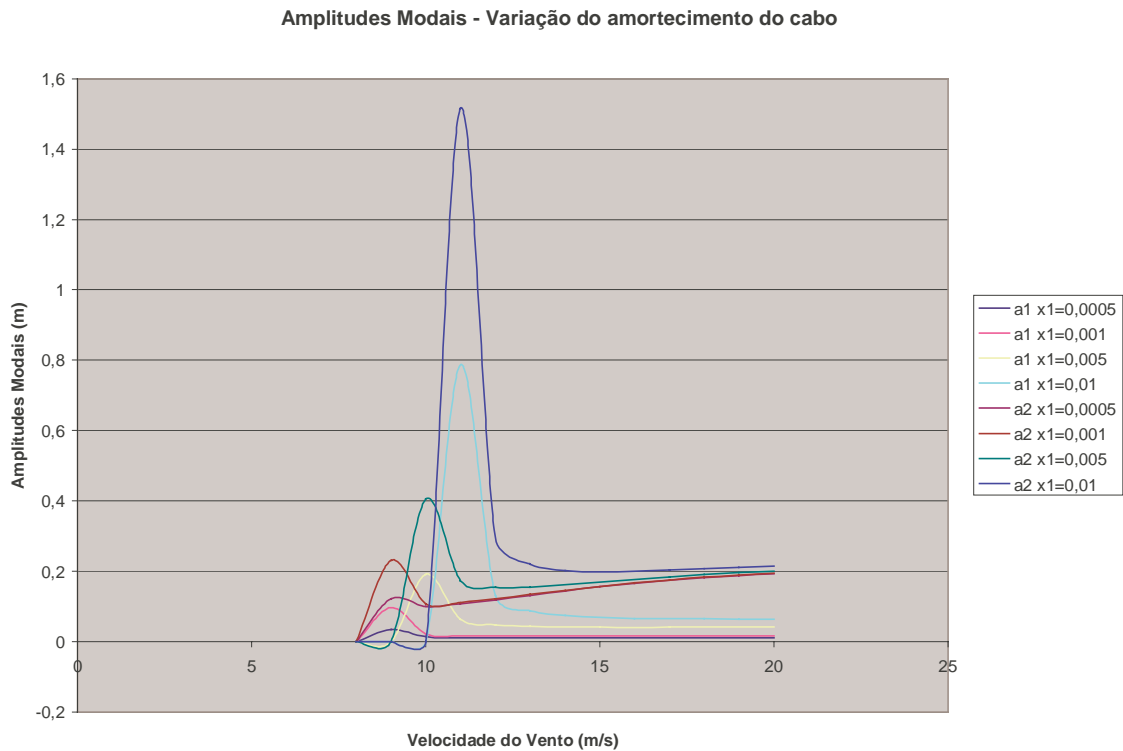


Figura 5.16 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do segundo modo

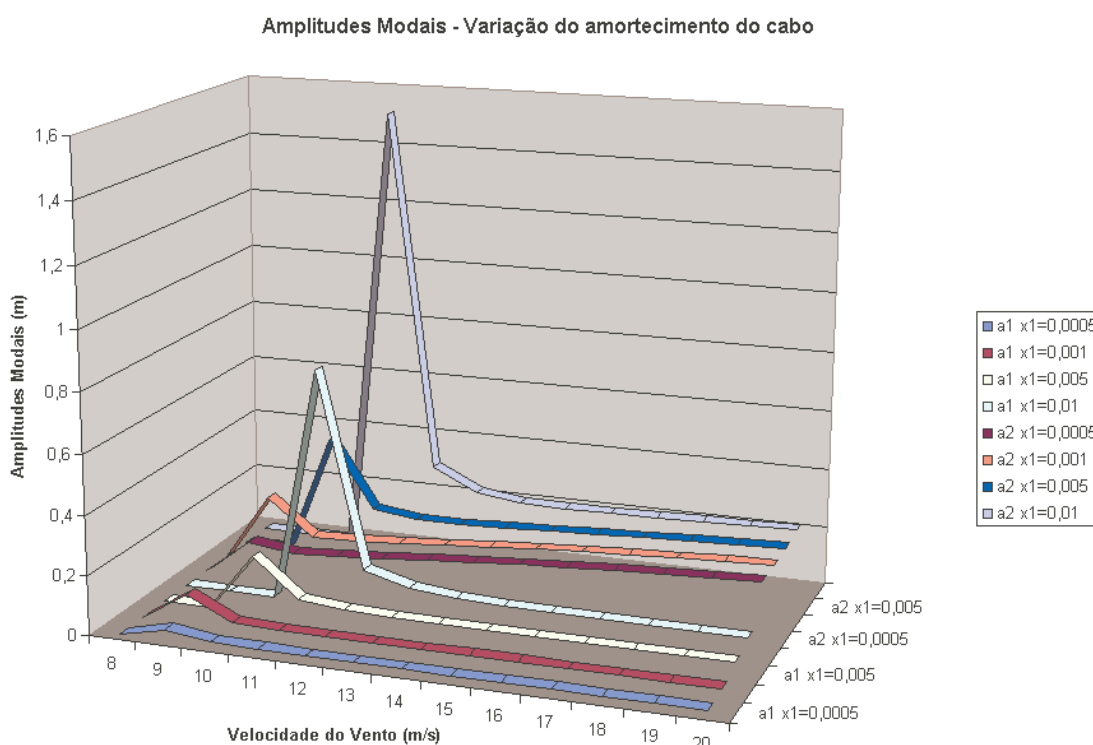


Figura 5.17 – Amplitudes modais, variando-se o amortecimento do segundo modo

A velocidade crítica U_3 (drapejamento unimodal por torção) foi pouco modificada pela variação da taxa de amortecimento ξ_3 , como mostra a tabela abaixo.

ξ_3	U_3 (m/s)
0,0005	112,8
0,001	112,8
0,005	113,2
0,01	113,7

Tabela 5.12 – Velocidade crítica U_3 em função de ξ_3

Cálculo numérico usando-se a implementação no programa Matlab 6.05, do método numérico de Runge-Kuta de 4ª ordem.

Dos resultados obtidos a partir do programa Matlab, usando-se o método de Runge-Kuta de 4ª ordem, conseguiu-se apenas extrair que, a partir de uma certa

velocidade de vento, de 8,8 m/s, o sistema não se estabilizou, confirmando a velocidade crítica U_1 , para o ângulo do filete de água no cabo igual a 32° , calculado por meio do método das múltiplas escalas. Será necessária uma investigação mais cuidadosa usando-se, eventualmente, outros métodos numéricos para a determinação dos valores das amplitudes modais pós-críticas, o que não é escopo desse trabalho.

6. CONCLUSÕES

Esse texto faz uma síntese dos trabalhos de Butkeraitis (2002), que trata dos carregamentos aeroelásticos na viga, de Rojas (2005), sobre o acoplamento entre cabo e viga, com dois graus de liberdade, e de Xu e Wang (2003), que trata dos carregamentos aerodinâmicos no cabo, além de adicionar um grau de liberdade, referente à torção da viga.

Na modelagem dos carregamentos aerodinâmicos do cabo, devido à chuva e vento, Xu e Wang (2003) utilizaram um cilíndrico rígido reto. No presente trabalho, a formulação foi estendida para um cabo de configuração inicial parabólica.

A respeito do acoplamento estai-viga, pode-se observar que o cabo, submetido a esforços oriundos de vento e chuva, ao vibrar “rouba” energia cinética da viga, ajudando a mesma a atenuar suas vibrações, devido ao acoplamento não linear.

O método das múltiplas escalas, apesar das fortes não linearidades constatadas, foi utilizado e foram obtidas respostas aparentemente satisfatórias, a julgar por evidências encontradas na literatura. Teria sido interessante realizar uma comparação com outros métodos, por exemplo, métodos numéricos, o que poderá ser realizado em trabalhos futuros.

A determinação das amplitudes e velocidades críticas, variando-se o ângulo do filete de água na seção do cabo, confirmou o ângulo de 32° , que estava sugerido, mas não explicado em Xu e Wang.

A variação das taxas de amortecimento estruturais indica uma forte sensibilidade na resposta dinâmica, principalmente na determinação da velocidade crítica do vento e amplitudes modais pós-críticas no cabo.

A escolha do perfil aerodinamicamente desfavorável foi feita propositadamente para intensificar a resposta dinâmica da viga estaiada. O perfil se assemelha ao da ponte de Tacoma Narrows, por esse motivo foi possível a utilização dos coeficientes aerodinâmicos determinados por Simiu e Scanlan (1986), porém, devido à ordem de grandeza das velocidades de vento relevantes, foi necessário efetuar a extrapolação do gráfico de H_1^* . É evidente que esta extrapolação carece de verificação experimental, o que também fica como sugestão para trabalhos futuros.

As dimensões da seção foram definidas de tal forma que puderam ser utilizados os mesmos valores dos coeficientes dos termos não-lineares do trabalho de Rojas (2005), para simplificação do trabalho ora realizado. Propõe-se, também, para trabalhos futuros, variar a geometria da estrutura de forma mais livre, ficando implícito o recálculo dos coeficientes dos termos não lineares e novos coeficientes aerodinâmicos.

Outra sugestão para continuidade da pesquisa é a análise de uma viga com dois planos de estaiamento, favorecendo o acoplamento total entre as vibrações do cabo e da viga, tanto em flexão quanto em torção.

REFERÊNCIAS

- Bleich F., **Dynamic instability of truss-stiffened suspension bridges under wind action**. American Society of Civil Engineers, v.74, n.8, p. 1269-314, 1948.
- Bosdogianni, A.; Oliver, D., **Wind and rain induced oscillations of cables of stayed bridges**. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 64, pp. 171-185, 1996.
- Butkeraitis, R., **Controle Passivo de Vibrações Induzidas pelo Drapejamento em Pontes Estaiadas**. 2002,143p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Clough, R. W.; Penzian, J., **Dynamics of Structural**. 2ed. New York, McGraw-Hill, 1993.
- Dowell, E. et al., **A modern course in aeroelasticity**. 3ed. Kluwer Academic Publishers, Leyden, 1985.
- Fujino, Y., **Vibration, Control and Monitoring of Long-Span Bridges – Recent Research**. *Developments and Practice in Japan. Journal of Constructional Steel Research*, n.º 58, pp.71-97, 1993.
- Gattulli, V.; Lepidi, M., **Nonlinear interactions in the planar dynamics of a cable-stayed beam**. *International Journal of Solids and Structures*, 40(18), pp. 4729-4748, 2003.
- Gattulli, V.; Lepidi, M.; Macdonald, J.; Taylor, C., **One-to-two global local interaction in a cable stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(4), pp. 571-588, 2005.
- Gatulli, V.; Morandini, M.; Paolone, A., **A parametric analytical model for nonlinear dynamics in cable-stayed beam**. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, pp. 1281-1300, 2002
- Goldstein, H., **Classical Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, 1964

Gu, M.; Du, X., **Experimental investigation of rain –wind-induced vibration of cables in cable-stayed bridges and its mitigation.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 93. pp 79-95, 2005.

Gu, M.; Xu, Y. L.; Liu, C. J., Xiang, H. F., **Wind tunnel study of response characteristics of cables with artificial rivulet.** *Proceedings of the International Conference on Advances in Structural Dynamics*, Elsevier Science, Vol. 2, pp. 1479-1486, 2000.

Hikami, Y.; Shiraishi, N., **Rain-wind induced vibration of cables of cables-stayed bridges.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 41-44, pp. 2011-2022, 1992.

Lanczos, C., **The variational principles of mechanics.** 4 ed., New York : Dover Publications, 1970

Matsumoto, M.; Taniwaki, Y.; Shijo, R., **Frequency characteristics in various flutter instabilities of bridge girders.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 90. pp 1973-1980, 2002.

Morandini, M., **Dinamica e controllo di una trave strallata.** Tesi di laurea, Università di L'Aquila, 2000.

Miranda, M., **I ponti stralatti di grande luce.** Edizione Scientifiche A. Cremonese, Roma, 1980.

Nayfeh, A. H.; Mook, D. T., **Nonlinear Oscillations.** John Wiley, New York, 1979.

Ramos I. B., **Modelos matemáticos simples para análise aeroelástica de pontes estaiadas e de pontes pênséis: desprendimento de vórtices e drapejamento.** 1999. 133p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Rojas, F. R. V., **Estudo do Modelo Dinâmico Não Linear de uma Viga Estaiada.** 2005. 87p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Simiu, E.; Scanlan, R. H., **Wind effects on structures: an introduction to wind engineering.** New York: Wiley, 458 p., 1978.

Simiu, E.; Scanlan, R. H., **Wind effects on structures: fundamentals and applications to design.** 3.ed. New York: Wiley, 688p., 1996

Theodorsen, T., **General theory of aerodynamic instability and mechanism of flutter.** National Advisory Committee for Aeronautics, n.496, 1935.

Thomson, W. T., **Theory of vibration with applications.** Prentice Hall, New Jersey, 1992.

Virlogeux, M., **Cable-stayed bridges. Past, present and future.** Proceedings IABSE Conference, Malmö, 1999.

Wilde, K.; Witkowski, W., **Simple model of rain-wind-induced vibrations of stayed cables.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 91. pp 873-891, 2003.

Xu, Y. L.; Wang, L. Y., **Analytical study of wind-rain-induced cable vibration: SDOF model.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 91. pp 27-40, 2003.