

IBERÊ MARTINS DA SILVA

**ANÁLISE DA REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS EM VIGAS
DE CONCRETO PROTENDIDO COM SEÇÕES COMPOSTAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr.
Hideki Ishitani

São Paulo
2003

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 27 de outubro de 2003.

Iberê Martins da Silva

Hideki Ishitani

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Iberê Martins da

Análise da redistribuição de esforços em vigas de concreto protendido com seções compostas / I.M. Silva. -- São Paulo, 2003. -- Edição Revisada.

74 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1.Concreto protendido I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

A meus pais, Milton e Celeste, que têm sido a grande razão e o incentivo de meu aperfeiçoamento técnico, os quais, desde minha tenra idade, lutaram, em sua simplicidade, com todos os meios, para garantir minha educação.

“Uma longa viagem começa com um único passo.”

Lao Tsé

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Hideki Ishitani pelas diretrizes seguras e pelo permanente incentivo, em convívio e atenção quase paternais.

A minha esposa Elisete pela compreensão dos momentos familiares que foram revertidos em horas de trabalho.

À Universidade Santa Cecília que, na figura de seus coordenadores e diretores, sempre forneceu estímulo e confiança.

Ao Prof. Dr. José Lourenço Braga Almeida Castanho, pela atenção e pelo auxílio, essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Eng. Rubens Iassoo Shimizu e Eng. Vilson Hollo, pelo apoio e incentivo que marcaram o início da minha carreira profissional e acadêmica.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

RESUMO

No cálculo das perdas progressivas de protensão, decorrentes da retração e da fluência do concreto e da relaxação do aço de protensão, a norma NBR 6118 prescreve dois procedimentos simplificados, indicados para fase única de operação, ou seja, quando se consideram fases únicas de concretagem, de carregamento permanente e de protensão; e o método geral de cálculo, que permite considerar ações permanentes aplicadas em idades diferentes, e tratar a seção transversal constituída de diversas camadas discretas. Neste trabalho será desenvolvido o método dos prismas equivalentes, baseado no conceito das fibras conjugadas, e com a proposta de Trost-Bazant para consideração de fluência e retração dos materiais. Possibilita-se, assim, o cálculo da redistribuição de tensões em qualquer seção, como também da redistribuição de esforços em estruturas hiperestáticas devido a deformações diferidas. Será feita a sistematização do cálculo para o caso usual da seção resultante de laje concretada sobre viga pré-moldada protendida, permitindo considerar as idades diversas de concreto como também as várias camadas de cabos de protensão, e de armaduras passivas. A análise de redistribuição de esforços em estruturas hiperestáticas será baseada nas mudanças de curvatura das seções provocadas pelos efeitos progressivos. Será feita uma aplicação a uma ponte em viga protendida contínua de seção caixão, construída pela anexação de cinco vãos sucessivos.

ABSTRACT

When calculating prestress time-dependent losses, resulting from concrete shrinkage and creep, as well as from the relaxation of prestress steel, the standard NBR 6118 establishes two simple procedures. They are prescribed when operating in single phase, i.e., when considering single steps for concrete pouring, permanent load and prestress. The general method used in calculations allows that permanent actions be applied to different ages, and that the cross-section constituted by several discrete layers be handled. This work will develop the method of equivalent prisms, based on the concept of creep fibers, using the Trost-Bazant proposal when considering material creep and shrinkage. This method allows calculating the redistribution of tensions in any section, as well as the redistribution of straining in statically indeterminate structures, due to time-dependent deformations. The systematic calculation will be developed for a normal case of the resulting section in cast-in-place slab over precast girder. This allows considering the different ages of the concrete, as well as the multiple layers of cables, and non-prestressed reinforcement. An analysis of the strain redistribution in statically indeterminate structures will be based on the curvature changes in sections, which are provoked by time-dependent effects. An application will be made to a bridge of prestressed continuous box girder, formed by the attachment of five successive spans.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Pesquisa bibliográfica	2
2	DEFORMAÇÕES EM PEÇAS DE CONCRETO	7
2.1	Deformações diferidas no tempo	7
2.1.1	Fluência do concreto	7
2.1.2	Retração do concreto	8
2.1.3	Relaxação do aço de protensão	9
2.2	Análise das estruturas sujeitas a deformações diferidas no tempo	10
2.2.1	Método de Trost-Bazant para consideração da fluência	11
2.2.2	Consideração da retração e da relaxação	13
3	ANÁLISE DE TENSÕES EM SEÇÕES COMPOSTAS ISOLADAS	14
3.1	Cálculo pelo processo dos esforços	14
3.1.1	Equacionamento do processo dos esforços	16
3.2	Cálculo pelo método dos prismas equivalentes	20
3.2.1	Conceito de prismas equivalentes	20
3.2.2	Equacionamento do método dos prismas equivalentes	22
3.3	Exemplo numérico (aplicação do método dos prismas equivalentes)	25
3.3.1	Montagem dos prismas equivalentes	27
3.3.2	Determinação dos esforços adicionais	28
3.3.2	Redistribuição de tensão e perdas de protensão	30

4	ANÁLISE DE ESFORÇOS EM ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS	32
4.1	Solução pelo processo dos esforços	32
4.2	Aplicação do método dos prismas equivalentes	33
4.3	Exemplo numérico	36
4.3.1	Situações de cálculo	40
4.3.1.1	Cálculo da 1ª fase	42
4.3.1.2	Cálculo da 2ª fase	43
4.3.1.3	Cálculo da 3ª fase	45
4.3.1.4	Cálculo da 4ª fase	48
4.3.1.5	Cálculo da 5ª fase	52
4.3.1.6	Cálculo da 6ª fase	57
4.3.2	Viga contínua em fase única	60
4.3.3	Perdas de protensão	62
4.3.3	Redistribuição de tensão normal	63
5	CONCLUSÃO	70
	LISTA DE REFERÊNCIAS	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fluência do concreto	8
Figura 2.2 – Deformação total	9
Figura 3.1 – Seção transversal (instante t_0)	15
Figura 3.2 – Esforços adicionais na seção transversal – processo dos esforços ...	15
Figura 3.3 – Convenção das ordenadas na seção transversal	16
Figura 3.4 – Tensões na seção transversal	19
Figura 3.5 – Conceito de prismas equivalentes numa seção transversal plana	20
Figura 3.6 – Esforços adicionais na seção transversal – prismas equivalentes	23
Figura 3.7 – Seção transversal do exemplo numérico	25
Figura 3.8 – Redistribuição de tensão – exemplo numérico	31
Figura 4.1 – Variação do momento fletor numa viga contínua de $(m+1)$ vãos	33
Figura 4.2 – Posição das seções em cada vão (k)	34
Figura 4.3 – Isostática fundamental para viga contínua de $(m+1)$ vãos	34
Figura 4.4 – Seção transversal no meio do vão – exemplo numérico	36
Figura 4.5 – Planta parcial do tabuleiro – exemplo numérico	37
Figura 4.6 – Fases construtivas do exemplo numérico	38
Figura 4.7 – Cabo de protensão equivalente	38
Figura 4.8 – Diagrama de momento fletor $g+P$ na 1ª fase	40
Figura 4.9 – Diagrama de momento fletor $g+P$ na 2ª fase	40
Figura 4.10 – Diagrama de momento fletor $g+P$ na 3ª fase	41
Figura 4.11 – Diagrama de momento fletor $g+P$ na 4ª fase	41
Figura 4.12 – Diagrama de momento fletor $g+P$ na 5ª fase	41
Figura 4.13 – Diagrama de momento fletor g_2 na 6ª fase	41

Figura 4.14 – Diagrama de momento fletor para fase única	61
Figura 4.15 – Gráfico de perdas progressivas nas seções	63
Figura 4.16 – Redistribuição de tensão na seção 5	65
Figura 4.17 – Redistribuição de tensão na seção 10	67
Figura 4.18 – Desenho esquemático das seções transversais 5 e 10	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficiente de envelhecimento $k(t, t_0)$ – Bazant	12
Tabela 3.1 – Ordenadas dos prismas – exemplo numérico	28
Tabela 3.2 – Planilha de cálculo para determinação dos esforços adicionais	29
Tabela 4.1 – Evolução do módulo de elasticidade do concreto	39
Tabela 4.2 – Coeficiente de fluência e retração nas diversas idades	39
Tabela 4.3 – Coeficiente de fluência equivalente para armadura ativa	40
Tabela 4.4 – Momento fletor e tensões iniciais da 1ª fase	42
Tabela 4.5 – Tensões iniciais ponderadas da 1ª fase	42
Tabela 4.6 – Redistribuição de tensão da 1ª fase	43
Tabela 4.7 – Momento fletor e tensões iniciais da 2ª fase	43
Tabela 4.8 – Tensões iniciais ponderadas da 2ª fase	44
Tabela 4.9 – Coeficientes de flexibilidade da 2ª fase	44
Tabela 4.10 – Redistribuição de tensão da 2ª fase	45
Tabela 4.11 – Momento fletor e tensões iniciais da 3ª fase	45
Tabela 4.12 – Tensões iniciais ponderadas da 3ª fase	46
Tabela 4.13 – Coeficientes de flexibilidade da 3ª fase	47
Tabela 4.14 – Redistribuição de tensão da 3ª fase	47
Tabela 4.15 – Momento fletor e tensões iniciais da 4ª fase	48
Tabela 4.16 – Tensões iniciais ponderadas da 4ª fase	49
Tabela 4.17 – Coeficientes de flexibilidade da 4ª fase	50
Tabela 4.18 – Redistribuição de tensão da 4ª fase	51
Tabela 4.19 – Momento fletor e tensões iniciais da 5ª fase	52
Tabela 4.20 – Tensões iniciais ponderadas da 5ª fase	54

Tabela 4.21 – Coeficientes de flexibilidade da 5ª fase	54
Tabela 4.22 – Redistribuição de tensão da 5ª fase	55
Tabela 4.23 – Momento fletor e tensões iniciais da 6ª fase	57
Tabela 4.24 – Tensões iniciais ponderadas da 6ª fase	57
Tabela 4.25 – Coeficientes de flexibilidade da 6ª fase	58
Tabela 4.26 – Redistribuição de tensão da 6ª fase	59
Tabela 4.27 – Resumo de valores de momento fletor	61
Tabela 4.28 – Perdas de protensão progressivas – instante $t = 10000$ dias	62
Tabela 4.29 – Redistribuição de tensão normal – instante $t = 10000$ dias	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	–	American Concrete Institute
ACI 318	–	Building Code Requirements for Structural Concrete – 1999
ARI	–	Alta resistência inicial
CEB	–	Comité Euro–Internacional du beton
CP190RB	–	Aço para concreto protendido de baixa relaxação – $f_{ptk}=1900$ MPa
DIN	–	Deutsches Institut für Normung
EPUSP	–	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
EST	–	Estaca
IBRACON	–	Instituto Brasileiro do Concreto
NBR	–	Norma Brasileira Registrada
NBR 6118	–	Projeto de estruturas de concreto – 2003
NBR 7197	–	Projeto de estruturas de concreto protendido – 1989
PCI	–	Precast and Prestressed Concrete Institute
SAP2000n [®]	–	Structural Analysis Program NonLinear Version
TRANSV	–	Transversina

LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon_{c,tot}$	deformação específica total do concreto
ε_c	deformação específica inicial do concreto
ε_{cc}	deformação específica por fluência do concreto
ε_{cs}	deformação específica por retração do concreto
$\varepsilon_{cs}^{\infty}$	deformação específica por retração do concreto para tempo infinito
$\varepsilon_{o,sup}$	deformação específica na borda superior provocada pela tensão inicial
$\varepsilon_{o,inf}$	deformação específica na borda inferior provocada pela tensão inicial
$\left(\frac{1}{r}\right)$	curvatura da seção transversal
$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$	variação da curvatura da seção transversal
σ_c	tensão normal no concreto
σ_p	tensão normal no aço de protensão
$\sigma_{oi,sup}$	tensão normal inicial na borda superior da peça i
$\sigma_{oi,inf}$	tensão normal inicial na borda inferior da peça i
$\sigma_{i,sup}$	tensão normal no instante t na borda superior da peça i
$\sigma_{i,inf}$	tensão normal no instante t na borda inferior da peça i
σ_i	tensão normal no prisma equivalente i
σ_{oi}	tensão normal inicial no prisma equivalente i
$\Delta\sigma_c$	variação de tensão normal no concreto
$\Delta\sigma_p$	variação de tensão normal no aço de protensão
$\Delta\sigma_{i,sup}$	variação de tensão normal na borda superior da peça i
$\Delta\sigma_{i,inf}$	variação de tensão normal na borda inferior da peça i
N_{poi}	força normal inicial de protensão da camada i de cabos
N_{pfi}	força normal final de protensão da camada i de cabos
N_i	força normal no prisma equivalente i
ΔN_p	variação da força normal de protensão
ΔN_j	esforço normal progressivo na seção j

M	momento fletor
$M_{k,m}$	momento fletor progressivo nos apoios intermediários de viga contínua
ΔM_j	momento fletor progressivo na seção j
X_i	esforços adicionais
P	força de protensão
P_i	força de protensão aplicada pelo equipamento de tração
P_{oi}	força de protensão no instante inicial
g	carregamento permanente devido ao peso próprio
g_2	carregamento permanente devido aos complementos
A_{ci}	área de concreto da seção transversal da peça i
A_{pi}	área de aço de protensão da camada i de cabos
A_i	área do prisma equivalente i
I_{ci}	momento de inércia da seção transversal da peça i
E_c	módulo de elasticidade do concreto
E_{ef}	módulo de elasticidade efetivo
E_p	módulo de elasticidade do aço de protensão
i	raio de giração da seção transversal
$y_{i,sup}$	ordenada da borda superior da peça i
$y_{i,inf}$	ordenada da borda inferior da peça i
y_i	ordenada do centro de gravidade do prisma equivalente i
z_{prot}	ordenada da camada de aço de protensão em relação à borda inferior
$x_j^{(k)}$	abscissa da seção j do tramo k
Δx_j	distância entre seções
ℓ_k	comprimento do tramo k de viga contínua
u	perímetro externo da seção transversal em contato com o ar
f_{ck}	resistência característica à compressão do concreto
U	umidade relativa do ambiente
t	instante de tempo em estudo
t_0	instante de tempo inicial
ψ	índice de relaxação do aço de protensão

ψ_{1000}	índice de relaxação do aço de protensão par t = 1000 horas
q	fator de consideração da fluência e do envelhecimento
F_j	fator para cálculo da curvatura
H_j	fator para cálculo da curvatura
ϕ	coeficiente de fluência
β_s	coeficiente relativo à retração
χ	coeficiente de fluência equivalente
k	coeficiente de envelhecimento
a	coeficiente de deformação longitudinal da seção transversal
b	coeficiente de deformação angular da seção transversal
$f_{bb}^{(k)}$	coeficiente de flexibilidade do tramo k
$f_{aa}^{(k)}$	coeficiente de flexibilidade do tramo k
$f_{ab}^{(k)}$	coeficiente de flexibilidade do tramo k
$f_{oa}^{(k)}$	rotação na extremidade inicial do tramo k
$f_{ob}^{(k)}$	rotação na extremidade final do tramo k
\underline{f}	matriz de flexibilidade
\underline{M}	matriz de momentos fletores progressivos
\underline{f}_o	matriz de rotações

1 INTRODUÇÃO

No cálculo das perdas progressivas de protensão, decorrentes da retração e da fluência do concreto e da relaxação do aço de protensão, são normalmente admitidas as hipóteses de aderência plena entre armadura e fibra de concreto adjacente, de peça em estágio I (peça não fissurada), e de comportamento visco-elástico. A norma NBR 6118 ^[2] prescreve dois procedimentos simplificados e o método geral de cálculo.

Os procedimentos simplificados são indicados para fase única de operação, ou seja, quando se considera fase única de concretagem com a atuação simultânea da carga permanente e da protensão. Esta situação impõe as seguintes condições:

- a concretagem da peça bem como a protensão devem ser executadas em fases suficientemente próximas para que os efeitos recíprocos possam ser desprezados;
- o afastamento dos cabos é suficientemente pequeno em relação à altura da peça, de modo que possam ser tratados como um único cabo equivalente.

O método geral de cálculo permite considerar ações permanentes aplicadas em idades diferentes, e tratar a seção transversal constituída de camadas discretas, com armadura posicionada em várias camadas.

Busemann ^[4] desenvolveu o método das fibras conjugadas que permite desacoplar as equações envolvidas na análise de tensões na seção transversal.

Ferraz ^[12] apresentou o método dos prismas equivalentes, baseado no método das fibras conjugadas, e no método de Trost-Bazant para consideração de fluência e retração dos materiais.

Na análise usual de peças de concreto protendido costuma-se calcular a redistribuição de tensões na seção crítica, onde o posicionamento dos cabos torna mais adequada a simplificação por cabo único equivalente da NBR 6118. O método dos prismas equivalentes abordado neste trabalho possibilita o cálculo da redistribuição de tensões em qualquer seção, assim como já acontece com a verificação do estado limite último à flexão.

A sistematização do cálculo será feita para o caso usual da seção resultante de laje concretada sobre viga pré-moldada protendida, considerando as idades diversas de concreto como também as várias camadas de cabos de protensão, e de armaduras passivas.

Será apresentada, também, a utilização deste método no cálculo da redistribuição de esforços devido a deformações diferidas em estruturas hiperestáticas. As pontes em vigas contínuas protendidas constituem um exemplo típico destas estruturas. Alguns autores apresentam soluções considerando material homogêneo como pode ser visto em Neville ^[5] e Ghali ^[6]. Neste trabalho será desenvolvido o método geral de cálculo de seções, apresentado por Ferraz ^[18], bem como a análise de redistribuição de esforços a partir das mudanças das curvaturas das seções provocadas pelos efeitos progressivos.

Como aplicação, será feita a análise de uma viga protendida contínua de seção caixão, construída pela anexação de cinco vãos sucessivos.

1.2 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Nosso interesse pelo tema de redistribuição de tensões normais tem sua origem no trabalho “Efeito da laje concretada posteriormente sobre viga protendida” apresentado na forma de boletim técnico por Ferraz ^[11], abordando o caso de concretagem posterior de laje sobre viga pré-moldada protendida para criação de um piso ou tabuleiro, freqüente em edifícios e pontes. Em consequência deste acoplamento de materiais, com características, estados de tensão iniciais e idades diferentes, surgem alterações no quadro das tensões ao longo do tempo, determinadas pela retração e fluência do concreto, e pela relaxação do aço. Neste trabalho, Ferraz apresenta o método dos prismas equivalentes como solução alternativa aos métodos vigentes, menos complexa, e sem introduzir nenhuma simplificação.

A aplicabilidade do método dos prismas equivalentes na consideração das perdas progressivas de protensão proposta pela NBR 7197 ^[1], norma brasileira para projeto de estruturas de concreto protendido que vigorava no início da pesquisa e foi substituída em março de 2003 pela NBR 6118 ^[2], norma brasileira para projeto de estruturas de concreto, sem alterações substanciais no item citado, é apresentada em notas de aula por Ishitani ^[10], considerando camadas de concreto com idades diferentes e camadas de armadura em vários níveis, atendendo ao caso geral da norma, e determinando a redistribuição de tensões normais devido à fluência e retração em seções parciais (estruturas isostáticas).

Leonhardt ^[4], em seu livro *Concreto protendido*, quinto volume da coleção “Construções de Concreto”, apresenta no capítulo 23, de autoria de H. Schade, os princípios básicos sobre a influência da retração e da fluência. Neste trabalho abordam-se retração e fluência pela norma alemã DIN 4227, sendo que a formulação geral do problema de deformações no concreto sob tensões variáveis adota os estudos desenvolvidos por Dischinger para o cálculo das perdas de protensão, bem como o método de Trost-Bazant (coeficiente de envelhecimento) nos efeitos da deformação diferida para os materiais. Na consideração de seções compostas utiliza-se o método das fibras conjugadas proposto por Busemann, que concentra as partes da seção em dois pontos (pontos conjugados). O caso das estruturas hiperestáticas é analisado pelo método do módulo de elasticidade fictício para seção homogênea, por meio dos processos dos esforços e dos deslocamentos.

As bases da formulação para deformação diferida dos materiais, em especial o método de Trost-Bazant, são divulgadas em várias fontes, tais como:

- Neville ^[5], em seu livro *Creep of plain and structural concrete*, dedica os capítulos 16 a 19 ao estudo dos métodos de análise da fluência em estruturas e suas aplicações. Inicialmente aborda-se a fluência como propriedade do material, apresentando os métodos do módulo efetivo, da razão de fluência, incremental, de Dischinger (melhorado), e de Trost-Bazant, este último é adotado para a seqüência dos estudos, visto que envolve apenas equações lineares mesmo para os casos mais complicados, por intermédio da introdução do coeficiente de envelhecimento. Em seguida, o estudo passa a envolver elementos estruturais, com a introdução da retração do concreto e da relaxação do aço, analisando as perdas de protensão e a redistribuição de tensões. Por fim, aborda os esforços progressivos em estruturas hiperestáticas, considerando inclusive fases construtivas, porém, mediante seção homogeneizada.

A análise de estruturas isostáticas sujeitas a deformações diferidas é abordada em diversos trabalhos:

- Ferraz ^[13], no trabalho “Cálculo das alterações de tensão, ao longo do tempo, nas peças de concreto protendido: procedimentos diretos, simples, alternativos ao CEB”, em forma de boletim técnico, aborda os problemas da determinação das variações dos estados de tensão e de deformação nas peças protendidas, em

virtude das influências recíprocas dos comportamentos dos materiais constitutivos da seção, propiciada pela aderência. Neste trabalho são apresentados os procedimentos do CEB, baseados em cálculo iterativo, e procedimentos diretos, baseados no coeficiente de envelhecimento.

- Ferraz ^[12], no trabalho “O método dos prismas equivalentes aplicado ao cálculo das variações de tensão, ao longo do tempo, nas seções de concreto”, em forma de boletim técnico, aplica o conceito de prismas equivalentes, que consiste na substituição de uma seção plana por um par de prismas nos pontos conjugados, em conjunto com o método de Trost-Bazant para consideração da fluência, para determinação da redistribuição de tensões numa seção composta.
- Ferraz ^[19], no trabalho “Perdas de protensão para carregamentos aplicados por etapas”, publicado no I Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, aborda o método dos prismas equivalentes na determinação das perdas de protensão, como também a tensão em qualquer fibra quando o carregamento se processar por etapas, com o devido cuidado na determinação dos coeficientes envolvidos. Sendo, na maioria dos casos, o que realmente ocorre, pois, por razões técnicas e construtivas, a seção definitiva da viga (com acoplagem da laje e protensão adicional) é feita de forma progressiva.
- Castanho ^[20], no trabalho “Exemplo de aplicação da NBR 7197 no cálculo das variações de tensão no aço e no concreto, devido às perdas diferidas”, publicado no I Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, desenvolve uma aplicação numérica da metodologia proposta por Ferraz ^[19], utilizando o caso de uma laje sobre viga pré-moldada, com duas etapas de protensão em diferentes níveis.

No estudo da redistribuição de esforços em estruturas hiperestáticas, vários autores trataram o assunto por meio de estruturas homogêneas equivalentes aplicando os processos dos esforços e dos deslocamentos, como:

- Ghali ^[6], em seu livro *Concrete Structures: Stresses and Deformations*, apresenta as preocupações atuais com a verificação da estrutura em serviço (deformação e fissuração excessivas), considerando os efeitos de fluência, retração, relaxação, fissuração, deslocamentos impostos, variação de temperatura e mudanças no esquema estático em fases construtivas. Os capítulos 4 e 5 abordam o cálculo dos esforços progressivos em estruturas hiperestáticas, após os capítulos anteriores

estabelecerem as bases da formulação das deformações diferidas nas seções não-fissuradas de concreto estrutural.

- Johansson ^[8], em seu livro *Diseño y calculo de estructuras pretensadas*, dedica o capítulo 20 ao estudo dos efeitos da fluência em estruturas de concreto protendido, descrevendo desde o tratamento matemático do fenômeno físico até metodologias para os casos de camadas com diferentes características, peças que alteram de esquema estático em fases construtivas, e finalmente, a aplicação do método de Cross na obtenção dos esforços progressivos.
- Mangini ^[24], no seu trabalho publicado na revista do Ibracon, “Esforços ao longo do tempo em estruturas de concreto”, apresenta uma metodologia para o cálculo dos esforços progressivos por meio da consideração de estrutura equivalente mediante transformações das rigidezes dos elementos e dos esforços atuantes. No cálculo de tensões em seções transversais compostas sujeitas a solicitações normais, em estado elástico, estas são transformadas (homogeneizadas) em elementos de barra.
- Dilger ^[26], no seu trabalho publicado no *PCI Journal*, “Creep analysis of prestressed concrete structures using creep-transformed section properties”, estuda o efeito da fluência nas estruturas de concreto protendido pelo método de Trost-Bazant e da transformação (homogeneização) da seção transversal. Após exemplos de aplicação no estudo de seções, é sugerida uma abordagem de estruturas hiperestáticas por meio de coeficientes de flexibilidade e compatibilidade de rotações.
- Santos ^[9], em sua dissertação de mestrado “Análise de estruturas aporticadas de concreto armado e protendido com a consideração da deformação lenta”, cujo objetivo é apresentar uma metodologia consistente e eficiente para a análise de estruturas reticuladas de concreto armado e protendido considerando os efeitos da deformação lenta, retração e fissuração do concreto, e eventuais plastificações das armaduras, apresenta uma minuciosa discussão sobre o fenômeno da fluência em estruturas de concreto. Neste trabalho é proposto e analisado um algoritmo de integração de tensões na viscoelasticidade do concreto, que possibilita a integração numericamente estável das tensões normais nas seções transversais da estrutura, sendo demonstrado que algumas classes de funções de fluência

possibilitam a integração de tensões sem a necessidade de se armazenar todo histórico de tensões em um ponto. Exemplifica-se como se calibrar a função geral de fluência proposta com funções empiricamente determinadas ou estabelecidas por normas técnicas. E, finalmente, apresentam-se três exemplos que são analisados utilizando-se de um programa computacional implementado com a metodologia deste trabalho e baseado no Método dos Elementos Finitos.

A consideração de seções compostas no estudo dos efeitos da deformação lenta em estruturas hiperestáticas é obtida através do método dos prismas equivalentes. Ferraz ^[15], no seu trabalho “Alteração do estado de tensão nas estruturas hiperestáticas devida à fluência do aço, do concreto e retração”, apresenta a resolução dos esforços progressivos em estruturas hiperestáticas, com determinação da redistribuição de tensões e perdas de protensão nas seções compostas, utilizando a Analogia de Mohr e o método dos prismas equivalentes no processo dos esforços.

2 DEFORMAÇÕES EM PEÇAS DE CONCRETO

2.1 Deformações diferidas

Num determinado intervalo de tempo as tensões e deformações em peças de concreto estrutural sofrem alterações devido ao desenvolvimento de fenômenos como a fluência e retração do concreto e a relaxação do aço de protensão. O conhecimento destas propriedades dos materiais é elemento indispensável para o estudo do comportamento de estruturas de concreto em estado de serviço.

Os problemas encontrados na consideração destes fenômenos são complexos, uma vez que, além do comportamento não-linear do concreto, deve-se considerar a presença de armaduras, ativas ou passivas, tornando a seção composta.

Numa seção composta, a distribuição de tensões é regida pelas diferentes características mecânicas de suas partes, surgindo então uma redistribuição de tensões na seção ao longo de um intervalo de tempo.

A retração e a deformação lenta podem ocasionar efeitos indesejáveis sobre as estruturas, afetando, por exemplo, a carga de instabilidade em elementos estruturais comprimidos, e provocando perdas de protensão em estruturas de concreto protendido, bem como deformações progressivas em pontes de concreto estrutural. É importante citar que existem efeitos favoráveis, entre os quais alívio de concentração de tensões e de efeitos de recalque de apoio. Na análise destes fenômenos são utilizadas funções temporais compostas por parâmetros das propriedades dos materiais, das condições ambientais e da geometria das peças; não faz parte do escopo deste trabalho a análise desses aspectos. Na resolução das aplicações práticas é utilizada a abordagem da NBR 6118 para a consideração de retração e deformação lenta do concreto, e relaxação da armadura de protensão.

2.1.1 Fluência do concreto

A fluência é o aumento de deformação com o tempo sob ação de tensão constante, podendo esta ser dividida em três parcelas: rápida (que ocorre nas primeiras 24 horas após a aplicação da carga), irreversível e reversível.

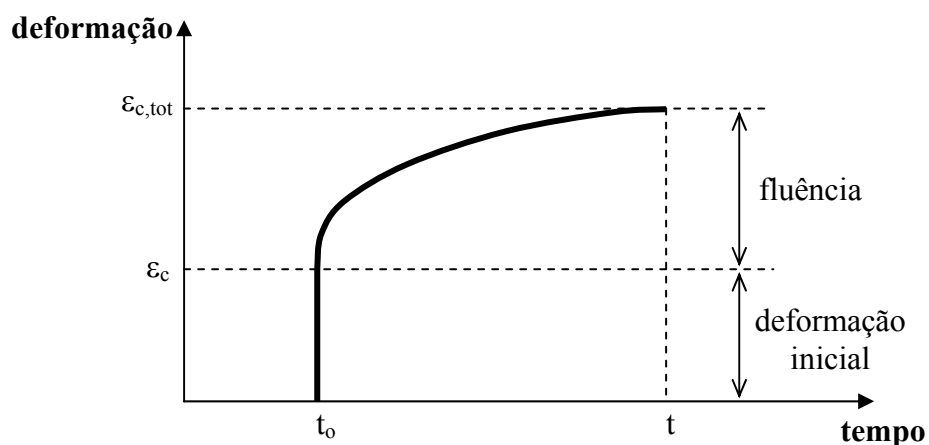


Figura 2.1 – Fluência do concreto

Entre os diversos fatores que influem na fluência, pode-se citar:

- umidade relativa e temperatura ambiente;
- idade do concreto no início do carregamento (maturidade);
- forma e espessura da peça estrutural;
- consistência do concreto no lançamento;
- natureza dos agregados;
- velocidade de endurecimento do cimento.

Na avaliação da deformação por fluência (ϵ_{cc}) é utilizado o coeficiente de fluência (ϕ). Assim,

$$\epsilon_{c,tot} = \epsilon_c + \epsilon_{cc} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_c \cdot \phi \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{c,tot} = \epsilon_c \cdot (1 + \phi) \quad (2.3)$$

2.1.2 Retração do concreto

A retração é a diminuição de volume devido à evaporação de água não consumida na reação química de pega do concreto, sendo uma deformação que independe do carregamento. Assim como a fluência, depende dos seguintes fatores: umidade relativa e temperatura ambiente, forma e espessura da peça estrutural e características dos materiais componentes do concreto.

Para um determinado intervalo de tempo, a deformação por retração do concreto (ε_{cs}) é estimada por uma parcela da retração esperada para um tempo infinito (ε_{cs}^∞).

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}^\infty \cdot (\beta_s(t) - \beta_s(t_0)) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{c,tot} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} + \varepsilon_{cs} \quad (2.5)$$

onde,

$\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ é o coeficiente relativo à retração, no instante t ou t_0 .

Apresenta-se esquematicamente na fig. 1.2 a evolução da deformação considerando os fenômenos de fluência e retração no concreto simples.

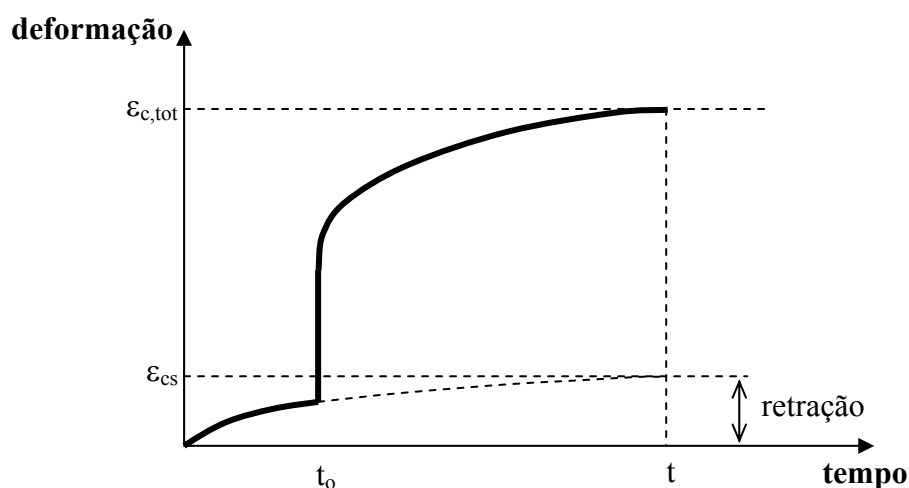


Figura 2.2 – Deformação total

2.1.3 Relaxação do aço de protensão

Entende-se por relaxação, a variação (diminuição) com o tempo da tensão inicial sob deformação constante. A relaxação da armadura de protensão tem seu valor fixado por meio de ensaios de 1.000 dias (a 20°C) sob deformação constante. O índice de relaxação (ψ) é função do nível de tensão inicial e da classe de relaxação do aço, valendo ressaltar que a relaxação cresce rapidamente com o aumento de temperatura.

No cálculo das deformações por relaxação do aço de protensão utiliza-se o coeficiente de fluência equivalente (χ), diretamente relacionado com o índice de relaxação conforme Ferraz (1985).

$$\psi(t, t_o) = \psi_{1000} \cdot \left(\frac{t}{1000} \right)^{0,15}, \quad t \text{ em horas} \quad (2.6)$$

$$\chi(t, t_o) = -\ln(1 - \psi(t, t_o)) \quad (2.7)$$

2.2 Análise das estruturas sujeitas a deformações diferidas

Na análise das estruturas sujeitas a deformações diferidas, o método do Módulo Efetivo propõe a redução do módulo de elasticidade do concreto pelo fator $[1 + \phi(t, t_o)]$.

$$E_{ef} = \frac{E_c(t_o)}{1 + \phi(t, t_o)} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_o)}{E_c(t_o)} \cdot [1 + \phi(t, t_o)] \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_o)}{E_{ef}} \quad (2.10)$$

Ao privar-se de um histórico das tensões, este método apresenta duas condições: a tensão não pode variar significativamente no período considerado e a idade do concreto deve ser desconsiderada (concreto velho).

Nas estruturas de concreto protendido, em muitas situações não se pode considerar a tensão como constante ao longo do tempo, mas variável, inclusive com estágios de carga distintos.

O princípio de superposição pode ser admitido nos efeitos da fluência, ou seja, a deformação num tempo qualquer t devido a um incremento elementar de tensão aplicada num instante τ ($\tau < t$) é independente de qualquer tensão aplicada antes ou depois do instante τ .

$$\varepsilon(t) = \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E(\tau)} \cdot [1 + \phi(t, \tau)] \cdot d\tau \quad (2.11)$$

Considerando as deformações provocadas pela variação contínua de tensão num intervalo de tempo desde o primeiro instante de carregamento t_0 até o instante considerado t , e sobrepondo com a deformação inicial, obtém-se a eq. 2.12 para a deformação total no instante considerado.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \phi(t, t_0)] + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E(\tau)} \cdot [1 + \phi(t, \tau)] \cdot d\tau \quad (2.12)$$

A integral presente na eq. 2.12 torna sua aplicação um tanto complexa, com a necessidade de transformações e métodos numéricos, ou a consideração de um tipo especial de função de fluência que não representa a realidade, por exemplo

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{constante.}$$

2.2.1 Método de Trost-Bazant para consideração da fluência

O método de Trost-Bazant para consideração da fluência baseia-se no método do Módulo Efetivo, corrigindo suas limitações pelo coeficiente de envelhecimento (“aging coefficient”), que é um meio de solucionar a integral presente na eq. 2.12 utilizando o conceito de que a deformação lenta causada pela variação total de tensão ($\Delta\sigma$) ocorrida no intervalo de tempo é igual à deformação causada por uma variação de tensão inferior ($k \cdot \Delta\sigma$) aplicada no instante inicial.

A utilização do coeficiente de envelhecimento (k), adimensional e inferior a 1, simplifica a consideração do histórico de tensões, permitindo a solução dos problemas mediante equações lineares.

$$\Delta\sigma_c(t, t_0) = \sigma_c(t) - \sigma_c(t_0) \quad (2.13)$$

$$k = \frac{E_c(t_0)}{\phi(t, t_0)} \cdot \frac{1}{\Delta\sigma_c(t, t_0)} \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E_c(\tau)} [1 + \phi(t, \tau)] \cdot d\tau - \frac{1}{\phi(t, t_0)} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \phi(t, t_0)] + \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + k \cdot \phi(t, t_0)] \quad (2.15)$$

Este método admite curvas de fluência afins, ou seja, que possuem formas similares e que a relação entre coeficientes de fluência para diferentes idades de carregamento é constante (para um mesmo tempo de carregamento).

Na determinação do coeficiente de envelhecimento, as expressões para módulo de elasticidade e coeficiente de fluência são conhecidas, restando incógnita a função de variação de tensão. Bazant fez uso da função relaxação normalizada para simular a variação de tensão obtendo uma fórmula fechada para o coeficiente de envelhecimento, com uma margem de erro pequena, viabilizando seu uso nos casos práticos.

O coeficiente de envelhecimento varia de 0,6 a 0,9, sendo que para situações usuais de longa duração (idade fictícia do concreto no instante t superior a 180 dias) pode-se adotar $k=0,82$ com boa aproximação.

$(t - t_0)$	$\phi(t_w, 7)$	Valor de k				$\frac{\phi(t, t_0)}{\phi(t_w, t_0)}$
		$t_0 = 10$	$t_0 = 10^2$	$t_0 = 10^3$	$t_0 = 10^4$	
10 dias	0,5	0,525	0,804	0,811	0,809	0,273
	1,5	0,720	0,826	0,825	0,820	
	2,5	0,774	0,842	0,837	0,830	
	3,5	0,806	0,856	0,848	0,839	
10^2 dias	0,5	0,505	0,888	0,916	0,915	0,608
	1,5	0,739	0,919	0,932	0,928	
	2,5	0,804	0,935	0,943	0,938	
	3,5	0,839	0,946	0,951	0,946	
10^3 dias	0,5	0,511	0,912	0,973	0,981	0,857
	1,5	0,732	0,943	0,981	0,985	
	2,5	0,795	0,956	0,985	0,988	
	3,5	0,830	0,964	0,987	0,990	
10^4 dias	0,5	0,461	0,887	0,956	0,965	0,954
	1,5	0,702	0,924	0,966	0,972	
	2,5	0,770	0,940	0,972	0,976	
	3,5	0,808	0,950	0,977	0,980	
$\frac{\phi(t_w, t_0)}{\phi(t_w, 7)}$		0,960	0,731	0,558	0,425	
$\frac{E_c(t_0)}{E_c(28)}$		0,895	1,060	1,083	1,089	

Tabela 2.1 – Coeficiente de envelhecimento $k(t, t_0)$ – Bazant

2.2.2 Consideração da retração e da relaxação

Admitindo a hipótese de Dischinger, ou seja, a afinidade entre as funções de fluência e de retração, o efeito desta será simplesmente uma parcela adicional à fluência da eq. 2.15.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_o)}{E_c(t_o)} \cdot [1 + \phi(t, t_o)] + \frac{\Delta\sigma_c(t, t_o)}{E_c(t_o)} \cdot [1 + k \cdot \phi(t, t_o)] + \varepsilon_{cs}(t, t_o) \quad (2.16)$$

O efeito da relaxação do aço de protensão é considerado através do coeficiente de fluência equivalente da armadura, com $k = 1$ pelo fato de a armadura não apresentar o fenômeno da maturação. Note-se, também, que a retração do aço é nula.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_p(t_o)}{E_p(t_o)} \cdot [1 + \chi(t, t_o)] + \frac{\Delta\sigma_p(t, t_o)}{E_p(t_o)} \cdot [1 + \chi(t, t_o)] \quad (2.17)$$

3 ANÁLISE DE TENSÕES EM SEÇÕES COMPOSTAS ISOLADAS

No concreto estrutural, a presença de deformações diferidas provoca uma redistribuição de tensões. Na análise da redistribuição de tensões normais no tempo são admitidas as hipóteses da elasticidade linear com a seção solicitada no estágio I (peça não fissurada), e a manutenção da seção plana na configuração deformada, que possibilita admitir uma equação do tipo $\varepsilon = a + b \cdot z$ para a deformação da seção, e o método de Trost-Bazant para determinação das deformações diferidas.

No concreto protendido, o cálculo do encurtamento axial e da curvatura da seção transversal diferidos permite o conhecimento da variação de tensão nas partes que compõem a seção, e por conseguinte a determinação das perdas de protensão nos cabos.

3.1 Cálculo pelo processo dos esforços

A análise da seção composta, pelo processo dos esforços, gera um sistema hiperestático, sendo o grau de indeterminação função do número de camadas de armadura e do número de camadas de concreto com idades diferentes. Admite-se a hipótese da perfeita aderência entre concretos de diferentes idades, como também entre aço e concreto.

Considere-se uma seção de concreto protendido, esquematizada na fig. 3.1, que possui peças concretadas em idades diferentes, viga pré-moldada (peça 1) e laje concretada posteriormente (peça 2), e quatro camadas de cabos de protensão posicionadas de maneira que não é indicada a substituição por um cabo equivalente (afastamento vertical não desprezível), e sujeita a um estado inicial de tensão (instante t_0) atuando somente na seção transversal da peça 1.

Depois de assegurado o trabalho conjunto na seção, e decorrido certo tempo, um novo estado de tensões estabelecer-se-á nas seções das peças 1 e 2, sendo que isto pode ser considerado o resultado de esforços adicionais X (momentos fletores e forças normais nas seções de concreto, e forças normais nas camadas de armadura) atuantes no tempo t , que totalizam as oito incógnitas deste problema.

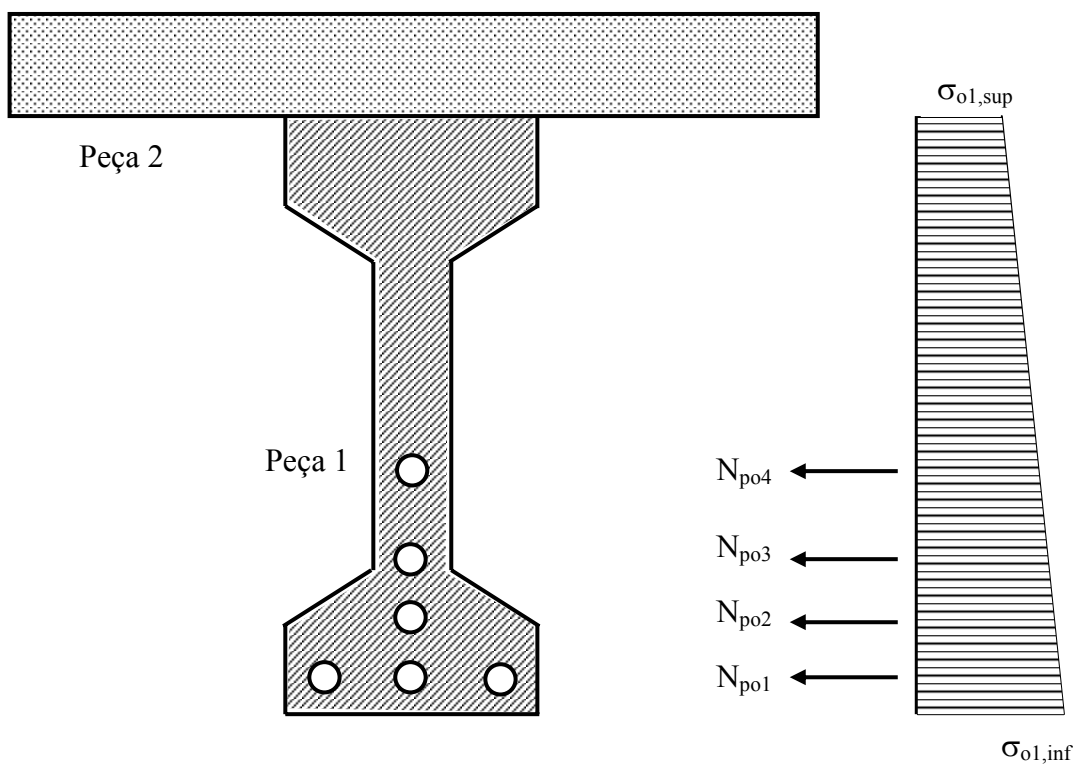


Figura 3.1 – Seção transversal (instante t_0)

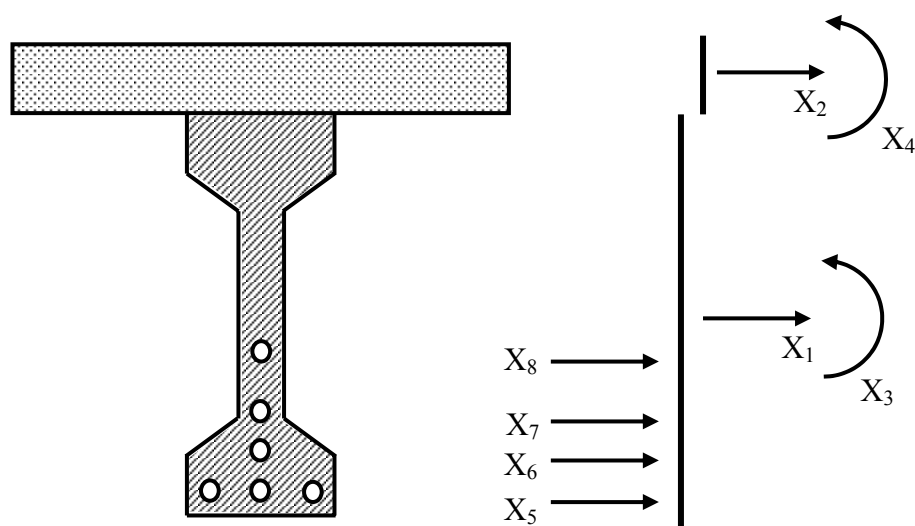


Figura 3.2 – Esforços adicionais na seção transversal – processo dos Esforços

Na determinação dos esforços adicionais X serão utilizadas equações de compatibilidade que, ao longo do tempo t , verificam as seguintes igualdades:

- de variações de deformação na interface comum das peças de concreto (princípio da perfeita aderência) – uma equação;
- de variações de curvatura das duas peças (manutenção da seção plana) – uma equação;
- de variações de deformação das camadas de armadura e das fibras de concreto que as envolvem (princípio da perfeita aderência) – quatro equações.

Percebe-se assim que faltam ainda duas equações para tornar este sistema de equações determinado, o que se resolve considerando as equações de equilíbrio da seção transversal.

Na consideração do efeito da fluência é interessante o uso do fator q , de modo que simplifique o equacionamento.

$$q_i = 1 + k \cdot \phi_i(t, t_{oi}) \quad , \quad \text{para os concretos;} \quad (3.1)$$

$$q_{pi} = 1 + \chi_i(t, t_{oi}) \quad , \quad \text{para as armaduras.} \quad (3.2)$$

3.1.1 Equacionamento do processo dos esforços

Para a equação de compatibilidade (eq. 3.5) aplicada na interface das peças de concreto deve-se determinar a variação de tensão na fibra superior da peça 1 ($\Delta\sigma_{1,sup}$) e a variação de tensão na fibra inferior da peça 2 ($\Delta\sigma_{2,inf}$), utilizando os esforços adicionais na análise de tensões conforme a teoria da resistência dos materiais. Na determinação das deformações inclui-se o efeito da fluência e da retração do concreto.

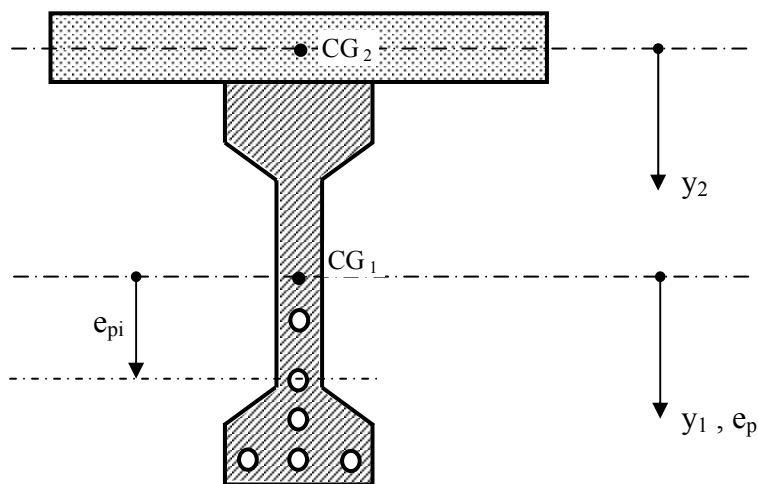


Figura 3.3 – Convenção das ordenadas na seção transversal

$$\Delta\sigma_{1,\text{sup}} = \sigma_{1,\text{sup}} - \sigma_{o1,\text{sup}} = \left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot y_{1,\text{sup}} \right) \quad (3.3)$$

$$\Delta\sigma_{2,\text{inf}} = \sigma_{2,\text{inf}} - \sigma_{o2,\text{inf}} = \left(\frac{X_2}{A_{c2}} + \frac{X_4}{I_{c2}} \cdot y_{2,\text{inf}} \right) \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot y_{1,\text{sup}} \right) \cdot \frac{q_1}{E_{c1}} + \frac{\sigma_{o1,\text{sup}}}{E_{c1}} \cdot \phi_1 + \varepsilon_{cs1} = \left(\frac{X_2}{A_{c2}} + \frac{X_4}{I_{c2}} \cdot y_{2,\text{inf}} \right) \cdot \frac{q_2}{E_{c2}} + \frac{\sigma_{o2,\text{inf}}}{E_{c2}} \cdot \phi_2 + \varepsilon_{cs2} \quad (3.5)$$

sendo,

ϕ_1 = coeficiente de fluência da peça 1;

ϕ_2 = coeficiente de fluência da peça 2;

ε_{cs1} = deformação devido à retração na peça 1;

ε_{cs2} = deformação devido à retração na peça 2;

A_{c1} = área da seção transversal da peça 1;

A_{c2} = área da seção transversal da peça 2;

I_{c1} = momento de inércia da seção transversal da peça 1;

I_{c2} = momento de inércia da seção transversal da peça 2;

$y_{1,\text{sup}}$ = ordenada da borda superior da peça 1;

$y_{2,\text{inf}}$ = ordenada da borda inferior da peça 2.

Para a equação de compatibilidade (eq. 3.9) que impõe a manutenção da seção plana deve-se determinar a variação na curvatura das peças de concreto por efeito dos esforços adicionais, considerando a fluência inclusive sobre a curvatura inicial.

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_3 = \frac{X_3}{E_{c1} \cdot I_{c1}} \quad (3.6)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_4 = \frac{X_4}{E_{c2} \cdot I_{c2}} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \phi = \frac{\varepsilon_{o,\text{inf}} - \varepsilon_{o,\text{sup}}}{y_{\text{inf}} - y_{\text{sup}}} \cdot \phi = \frac{\sigma_{o,\text{inf}} - \sigma_{o,\text{sup}}}{y_{\text{inf}} - y_{\text{sup}}} \cdot \frac{\phi}{E_c} \quad (3.8)$$

$$\frac{X_3}{E_{c1} \cdot I_{c1}} \cdot q_1 + \frac{\sigma_{o1,\text{inf}} - \sigma_{o1,\text{sup}}}{y_{1,\text{inf}} - y_{1,\text{sup}}} \cdot \frac{\phi_1}{E_{c1}} = \frac{X_4}{E_{c2} \cdot I_{c2}} \cdot q_2 + \frac{\sigma_{o2,\text{inf}} - \sigma_{o2,\text{sup}}}{y_{2,\text{inf}} - y_{2,\text{sup}}} \cdot \frac{\phi_2}{E_{c2}} \quad (3.9)$$

Nas equações de compatibilidade (eq. 3.12, com $i = 5$ a 8) de aderência entre armadura e concreto, onde todas as armaduras estão alojadas na peça 1, as variações de tensão no concreto ($\Delta\sigma_{ci}$) devido a esforços adicionais são calculadas segundo a teoria da flexão composta da resistência dos materiais nas ordenadas correspondentes a cada excentricidade de protensão (e_{pi}). Da mesma forma são consideradas as variações de tensão nas camadas de armaduras, tratadas como uma armadura equivalente de área A_{pi} . Na determinação das deformações inclui-se o efeito da relaxação do aço de protensão, como também a fluência e a retração do concreto.

$$\Delta\sigma_{ci} = \left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot e_{pi} \right) \quad (3.10)$$

$$\Delta\sigma_{pi} = \left(\frac{X_i}{A_{pi}} \right) \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot e_{pi} \right) \cdot \frac{q_1}{E_{c1}} + \frac{\sigma_{coi}}{E_{c1}} \cdot \phi_1 + \varepsilon_{cs1} = \left(\frac{X_i}{A_{pi}} \right) \cdot \frac{q_{pi}}{E_{pi}} + \frac{\sigma_{poi}}{E_{pi}} \cdot \chi_i \quad (3.12)$$

sendo,

e_{pi} = excentricidade de protensão da camada i de armadura;

σ_{coi} = tensão normal inicial na fibra de concreto adjacente à camada i de armadura;

σ_{poi} = tensão normal inicial na camada i de armadura;

E_{pi} = módulo de elasticidade da armadura posicionada na camada i .

Considerando que a seção encontra-se em equilíbrio no instante inicial, os esforços adicionais para que este seja mantido devem gerar somatória de esforços horizontais (eq. 3.13) e somatória de momentos polares (eq. 3.14) nulas.

$$X_1 + X_2 + \sum_{i=5}^8 X_i = 0 \quad (3.13)$$

$$X_3 + X_4 + \sum_{i=5}^8 X_i \cdot e_{pi} = 0 \quad (3.14)$$

Desse modo, neste problema específico, tem-se um sistema definido de oito equações – eq. 3.5 , 3.9 , 3.12 (quatro) , 3.13 e 3.14 – cujo resultado nos fornece a partir de X_1 a X_4 a variação no diagrama de tensões que somada ao estado inicial de tensões gera a redistribuição de tensões normais no concreto para o instante t , e a partir de X_5 a X_8 as tensões em cada camada de armadura para o mesmo instante.

$$\sigma_{1,\text{sup}} = \left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot y_{1,\text{sup}} \right) + \sigma_{o1,\text{sup}} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{1,\text{inf}} = \left(\frac{X_1}{A_{c1}} + \frac{X_3}{I_{c1}} \cdot y_{1,\text{inf}} \right) + \sigma_{o1,\text{inf}} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{2,\text{sup}} = \left(\frac{X_2}{A_{c2}} + \frac{X_4}{I_{c2}} \cdot y_{2,\text{sup}} \right) + \sigma_{o2,\text{sup}} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{2,\text{inf}} = \left(\frac{X_2}{A_{c2}} + \frac{X_4}{I_{c2}} \cdot y_{2,\text{inf}} \right) + \sigma_{o2,\text{inf}} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{pfi} = \frac{X_i}{A_{pi}} + \sigma_{poi} \quad (3.17)$$

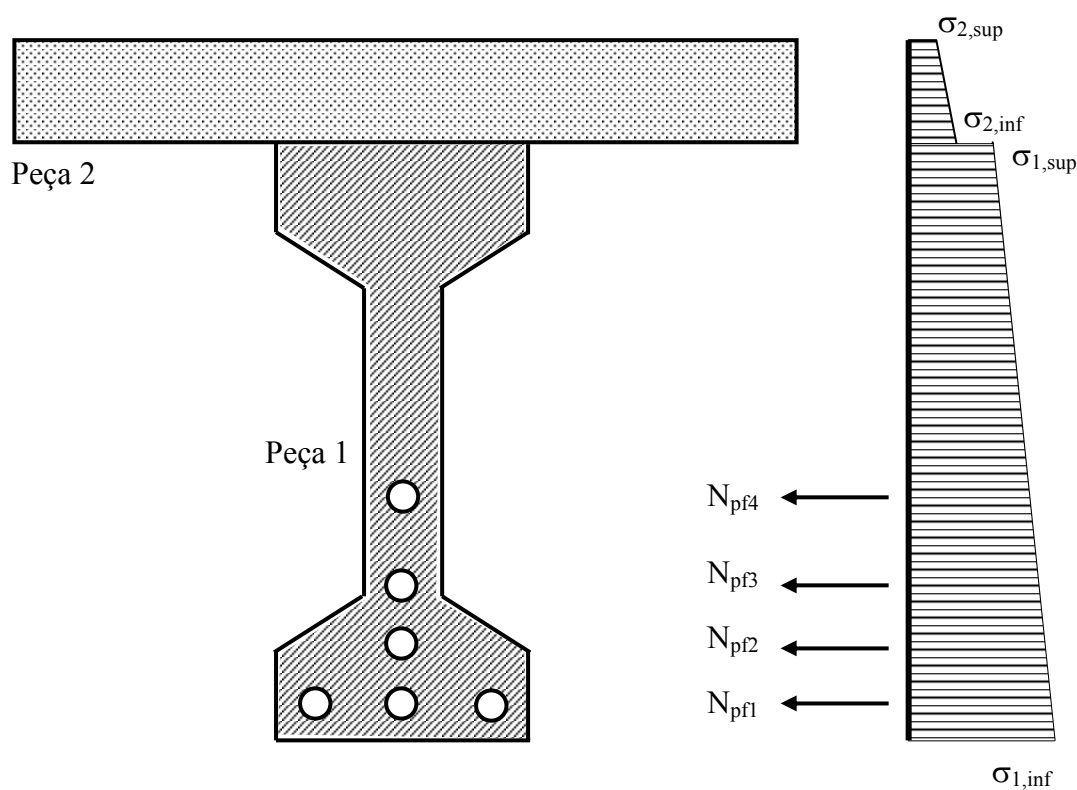


Figura 3.4 – Tensões na seção transversal

Sendo,

N_{pfi} – A força normal de protensão na 1ª camada de armadura no instante t ;

N_{pf2} – A força normal de protensão na 2ª camada de armadura no instante t ;

N_{pf3} – A força normal de protensão na 3ª camada de armadura no instante t ;

N_{pf4} – A força normal de protensão na 4ª camada de armadura no instante t .

3.2 Cálculo pelo método dos prismas equivalentes

O método dos prismas equivalentes utiliza a propriedade que permite analisar uma seção sujeita à flexão composta substituindo-a por dois prismas posicionados nos seus pares de pontos conjugados. Dessa forma, a análise de seções do tipo apresentado na fig. 3.1 conduz a um sistema de equações lineares desacopladas entre si, facilitando a obtenção dos resultado finais.

3.2.1 Conceito de prismas equivalentes

Numa seção transversal plana de área A_c e momento de inércia I_c , os pontos conjugados estão posicionados em relação ao centro de gravidade da seção tal que $y_1 \cdot y_2 = -(i^2)$, onde i é o raio de giração dado por $i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}}$.

Nestes pontos conjugados posicionam-se os prismas de áreas A_1 e A_2 , de modo que os torne equivalentes a seção transversal homogênea de área A_c e momento de inércia I_c , que gozam das propriedades apresentadas a seguir.

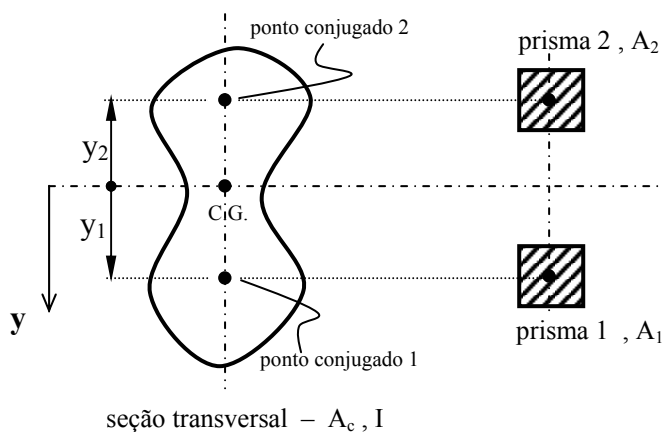


Figura 3.5 – Conceito de prismas equivalentes numa seção transversal plana

Propriedade 1: uma força normal N_1 atuando no ponto conjugado 1 não produz tensão no ponto conjugado 2, e vice-versa, uma força normal N_2 atuando no ponto conjugado 2 não produz tensão no ponto conjugado 1. De fato,

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_c} + \frac{N_1 \cdot y_1}{I} \cdot y_2 = \frac{N_1}{A_c} - \frac{N_1 \cdot i^2}{I} = \frac{N_1}{A_c} - \frac{N_1 \cdot I}{I \cdot A_c} = 0 \quad , \text{ e}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_2}{A_c} + \frac{N_2 \cdot y_2}{I} \cdot y_1 = \frac{N_2}{A_c} - \frac{N_2 \cdot i^2}{I} = \frac{N_2}{A_c} - \frac{N_2 \cdot I}{I \cdot A_c} = 0 \quad .$$

Para a determinação da tensão no ponto conjugado 1 devida à força normal N_1 atuando neste ponto, basta efetuar a divisão de N_1 pela área ponderada A_1 .

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_c} + \frac{N_1 \cdot y_1}{I} \cdot y_1 = N_1 \cdot \left(\frac{1}{A_c} - \frac{y_1 \cdot y_1}{A_c \cdot y_1 \cdot y_2} \right) = \frac{N_1}{A_c} \cdot \left(1 - \frac{y_1}{y_2} \right) = \frac{N_1}{A_c} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2} = \frac{N_1}{A_1} \quad ,$$

$$\text{sendo } A_1 = A_c \cdot \frac{-y_2}{y_1 - y_2} \quad .$$

De maneira análoga, tem-se no ponto conjugado 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_c} + \frac{N_2 \cdot y_2}{I} \cdot y_2 = N_2 \cdot \left(\frac{1}{A_c} - \frac{y_2 \cdot y_2}{A_c \cdot y_1 \cdot y_2} \right) = \frac{N_2}{A_c} \cdot \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{N_2}{A_c} \cdot \frac{y_1 - y_2}{y_1} = \frac{N_2}{A_2} \quad ,$$

$$\text{sendo } A_2 = A_c \cdot \frac{y_1}{y_1 - y_2} \quad .$$

Propriedade 2: uma força normal N atuando no centro de gravidade deve ser dividida conforme os braços de alavanca em relação aos pontos conjugados, ou seja, deve ser ponderada da mesma forma que as áreas dos prismas. De fato,

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_c} = \frac{N \cdot \frac{-y_2}{y_1 - y_2}}{A_c \cdot \frac{-y_2}{y_1 - y_2}} = \frac{N_1}{A_1} \quad \Rightarrow \quad N_1 = N \cdot \frac{A_1}{A_c}$$

e

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_c} = \frac{N \cdot \frac{y_1}{y_1 - y_2}}{A_c \cdot \frac{y_1}{y_1 - y_2}} = \frac{N_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad N_2 = N \cdot \frac{A_2}{A_c} \quad .$$

Propriedade 3: para o cálculo das tensões normais provocadas por um momento fletor M aplicado à seção, basta determinar o binário correspondente ao braço de alavanca z formado pela distância entre os pontos conjugados ($z = y_1 - y_2$). De fato,

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} \cdot y_1 = \frac{M}{-A_c \cdot y_2} = \frac{\frac{M}{y_1 - y_2}}{A_c \cdot \frac{-y_2}{y_1 - y_2}} = \frac{\frac{M}{z}}{A_1} = \frac{N_1}{A_1} \Rightarrow N_1 = \frac{M}{z}$$

e

$$\sigma_2 = \frac{M}{I} \cdot y_2 = \frac{M}{-A_c \cdot y_1} = \frac{\frac{-M}{y_1 - y_2}}{A_c \cdot \frac{y_1}{y_1 - y_2}} = \frac{-\frac{M}{z}}{A_2} = \frac{N_2}{A_2} \Rightarrow N_2 = -\frac{M}{z}$$

Por conveniência pode-se adotar $y_1 = -y_2 = i$, situando assim os pontos de forma simétrica em relação ao centro de gravidade da seção transversal.

3.2.2 Equacionamento do método dos prismas equivalentes

Na aplicação do método dos prismas equivalentes para o cálculo da redistribuição de tensões em seções compostas de concreto estrutural devido à deformações diferidas, cada peça de concreto é substituída por um par de prismas equivalentes conforme visto em 3.2.1, e cada camada de armadura por um prisma adicional. Desse modo, a redistribuição de tensões provoca variações das forças normais X_i correspondentes aos prismas.

A variação total de deformação é dada por

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\sigma_{oi}}{E_i} \cdot \phi_i + \frac{X_i}{E_i \cdot A_i} \cdot q_i + \varepsilon_{csi} \quad (3.18)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_i(t) - \frac{\sigma_{oi}}{E_i} \quad (3.19)$$

sendo,

$\varepsilon_i(t)$ a deformação total no instante t .

Para as armaduras, o coeficiente de fluência (ϕ) é substituído pelo coeficiente de fluência equivalente de armaduras (χ), a retração é tomada igual a zero e $k=1,0$.

Com a hipótese da manutenção da seção plana, as variações de deformação nos prismas i devem obedecer à lei de uma reta, isto é, $\Delta \varepsilon_i = a + b \cdot z_i$, sendo z_i a ordenada do prisma i .

As forças normais X_1 e X_2 são aplicadas nos pontos conjugados da peça 1 (viga pré-moldada) e as forças X_3 e X_4 nos pontos conjugados da peça 2 (laje concretada ‘in-loco’).

Substituindo em 3.18,

$$\frac{\sigma_{oi}}{E_i} \cdot \phi_i + \frac{X_i}{E_i \cdot A_i} \cdot q_i + \varepsilon_{csi} = a + b \cdot z_i \quad (3.20)$$

e

$$X_i = \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot (a + b \cdot z_i) - \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} - \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \quad (3.21)$$

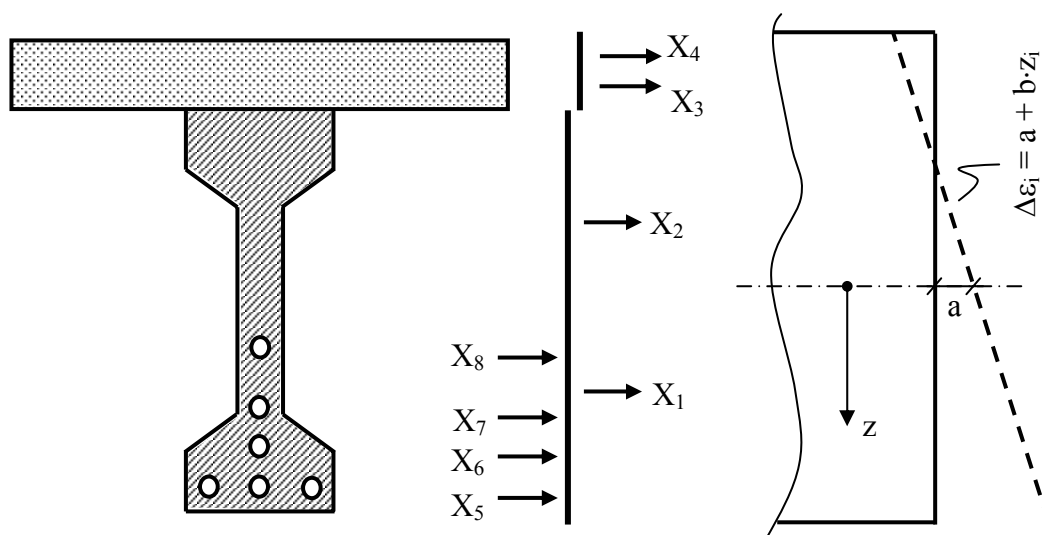


Figura 3.6 – Esforços adicionais na seção transversal – prismas equivalentes

Os coeficientes da reta são determinados pelas equações de equilíbrio das forças X_i na seção transversal. A origem da distância z_i deve ser admitida no centro de gravidade da grandeza $\left(\frac{E_i \cdot A_i}{q_i}\right)$ de modo que garanta que $\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i = 0$.

Do equilíbrio de forças horizontais $\rightarrow \sum_i X_i = 0$, resulta

$$a \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} + b \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i - \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} - \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} = 0 \quad (3.22)$$

ou

$$a = \frac{\sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} + \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i}}{\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i}} \quad (3.23)$$

Do equilíbrio dos momentos em relação a origem das distâncias $z_i \rightarrow \sum_i X_i \cdot z_i = 0$, resulta

$$a \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i + b \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2 - \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} \cdot z_i - \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i = 0 \quad (3.24)$$

ou

$$b = \frac{\sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} \cdot z_i + \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i}{\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2} \quad (3.25)$$

Com as eq. 3.23 e 3.25 consegue-se determinar os coeficientes da reta que exprime a deformada da seção devido à retração e deformação lenta, pela translação axial (a) e pela curvatura (b). Aplicados nas equações (eq. 3.21) têm-se os esforços adicionais em cada prisma, que permitem montar a redistribuição de tensões como também calcular as perdas progressivas nos cabos.

$$\sigma_i = \sigma_{oi} + \frac{X_i}{A_i} \quad (3.26)$$

$$\sigma_{1,\text{inf}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} \cdot (y_{1,\text{inf}} - y_1) + \sigma_1 \quad (3.27)$$

$$\sigma_{1,\text{sup}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} \cdot (y_{1,\text{sup}} - y_2) + \sigma_2 \quad (3.28)$$

$$\sigma_{2,\text{inf}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{y_3 - y_4} \cdot (y_{2,\text{inf}} - y_3) + \sigma_3 \quad (3.29)$$

$$\sigma_{2,\text{sup}} = \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{y_3 - y_4} \cdot (y_{2,\text{sup}} - y_4) + \sigma_4 \quad (3.30)$$

3.3 Exemplo numérico (aplicação do método dos prismas equivalentes)

Considere-se a seção de uma viga pré-moldada protendida de seção constante, já submetida a um estado de tensão prévio, onde é concretada posteriormente uma laje para formar uma seção “T”, fig. 3.7. Os dados da seção transversal, como também do estado inicial de tensão, são fornecidos a seguir.

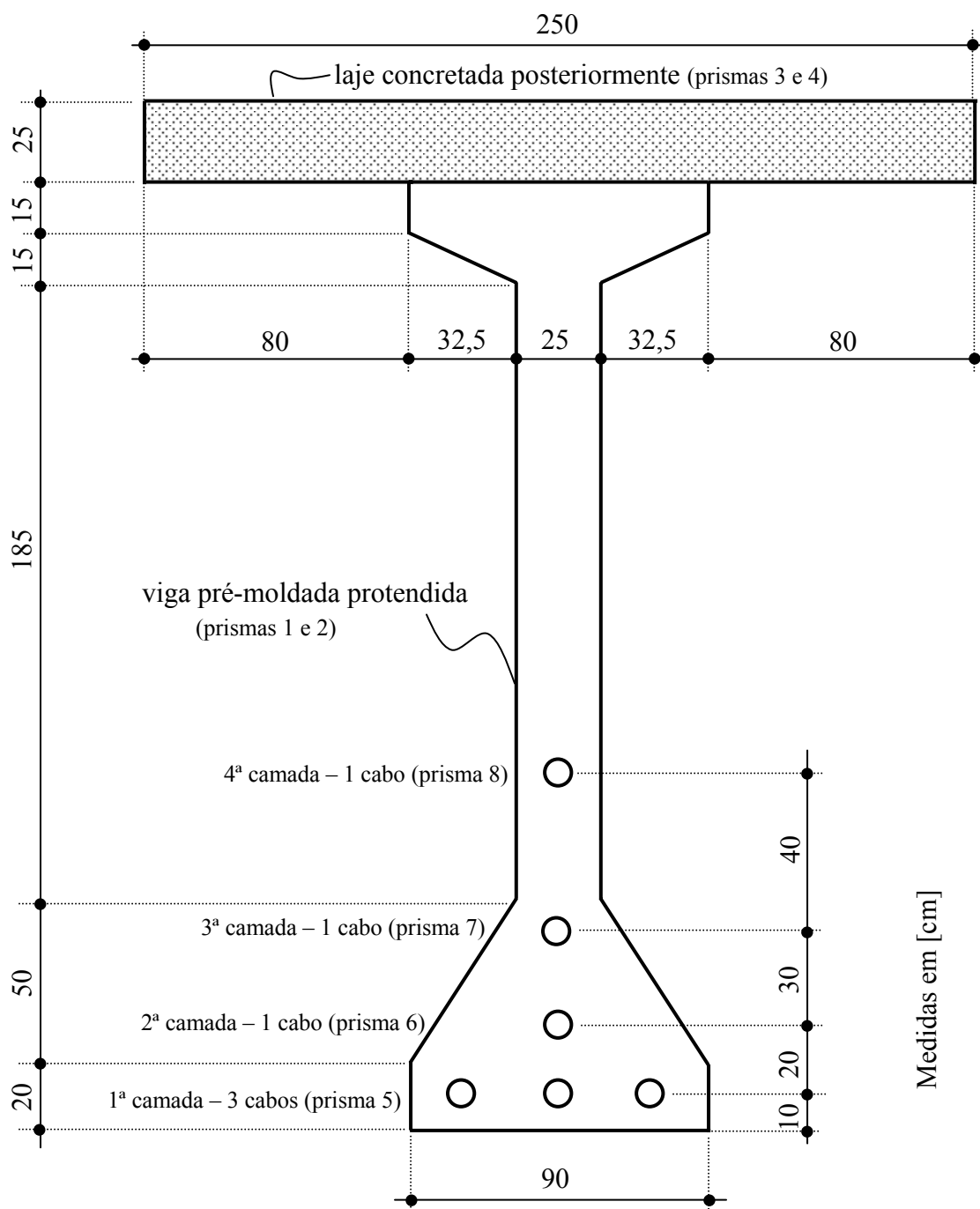


Figura 3.7 – Seção transversal do exemplo numérico

Viga pré-moldada protendida:

- tensão inicial na borda inferior: $\sigma_{co1,inf} = -14$ MPa;
- tensão inicial na borda superior: $\sigma_{co1,sup} = -8$ MPa;
- módulo de elasticidade do concreto: $E_{c1} = 30$ GPa;
- deformação por retração do concreto entre os instantes t_0 e t : $\varepsilon_{cs1} = -0,0001$;
- coeficiente de fluência do concreto entre os instantes t_0 e t : $\phi_1 = 2$;
- área da seção transversal: $A_{c1} = 1,15125$ m²;
- momento de inércia da seção transversal: $I_1 = 1,12484$ m⁴;
- raio de giração da seção transversal: $i_1 = 0,98846$ m;
- distância do centro de gravidade à borda inferior: $y_{1,inf} = 1,2922$ m;
- distância do centro de gravidade à borda superior: $y_{1,sup} = -1,5578$ m.

Laje concretada posteriormente:

- tensão inicial na borda inferior: $\sigma_{co2,inf} = 0$;
- tensão inicial na borda superior: $\sigma_{co2,sup} = 0$;
- módulo de elasticidade do concreto: $E_{c2} = 24$ GPa;
- deformação por retração do concreto entre os instantes t_0 e t : $\varepsilon_{cs2} = -0,0002$;
- coeficiente de fluência do concreto entre os instantes t_0 e t : $\phi_2 = 3$;
- área da seção transversal: $A_{c2} = 0,625$ m²;
- momento de inércia da seção transversal: $I_2 = 0,0032552$ m⁴;
- raio de giração da seção transversal: $i_2 = 0,0721688$ m;
- distância do centro de gravidade à borda inferior: $y_{2,inf} = 0,125$ m;
- distância do centro de gravidade à borda superior: $y_{2,sup} = -0,125$ m;

Armaduras de protensão:

- tensão inicial nos cabos: $\sigma_{po} = 1200$ MPa;
- módulo de elasticidade dos cabos: $E_p = 200$ GPa;
- coeficiente de fluência equivalente do aço de protensão (t, t_0): $\chi = 0,05$;
- área de aço de protensão da 1ª camada: $A_{p1} = 35,52$ cm²;
- área de aço de protensão da 2ª, 3ª e 4ª camadas: $A_{p2} = A_{p3} = A_{p4} = 11,84$ cm²;
- excentricidade de protensão da 1ª camada: $e_{p1} = 1,1922$ m;
- excentricidade de protensão da 2ª camada: $e_{p2} = 0,9922$ m;
- excentricidade de protensão da 3ª camada: $e_{p3} = 0,6922$ m;
- excentricidade de protensão da 4ª camada: $e_{p4} = 0,2922$ m.

3.3.1 Montagem dos prismas equivalentes

Para o efeito da deformação lenta é admitido o coeficiente de envelhecimento (k) igual a 0,82 no concreto, e igual a 1,0 nas armaduras.

$$\text{Peça 1} \Rightarrow q_1 = 1 + 0,82 \cdot 2,00 \Rightarrow q_1 = 2,64.$$

$$\text{Peça 2} \Rightarrow q_2 = 1 + 0,82 \cdot 3,00 \Rightarrow q_2 = 3,46.$$

$$\text{Armaduras de protensão} \Rightarrow q_p = 1 + 0,05 \Rightarrow q_p = 1,05.$$

Na análise da viga pré-moldada (peça 1), sua seção transversal é substituída pelos prismas 1 e 2 conforme o item 3.2.1, cujas características são apresentadas a seguir:

- pontos conjugados: $y_1 = 0,98846 \text{ m}$, $y_2 = -0,98846 \text{ m}$;
- área: $A_1 = 0,575625 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,575625 \text{ m}^2$;
- tensão inicial no prisma 1: $\sigma_{o1} = -8 - 6 \cdot \frac{2,54626}{2,85} = -13,36055 \text{ MPa}$;
- tensão inicial no prisma 2: $\sigma_{o2} = -8 - 6 \cdot \frac{0,56934}{2,85} = -9,19861 \text{ MPa}$;
- módulo de elasticidade: $E_1 = E_2 = 30 \text{ GPa}$;
- coeficientes de fluência (t,t₀): $\phi_1 = \phi_2 = 2,00$;
- fator q: $q_1 = q_2 = 2,64$;
- deformação por retração: $\varepsilon_{cs1} = \varepsilon_{cs2} = -0,0001$.

Na análise da laje concretada posteriormente (peça 2), sua seção transversal é substituída pelos prismas 3 e 4, cujas características são apresentadas a seguir:

- pontos conjugados: $y_3 = 0,0721688 \text{ m}$; $y_4 = -0,0721688 \text{ m}$;
- área: $A_3 = 0,3125 \text{ m}^2$; $A_4 = 0,3125 \text{ m}^2$;
- tensão inicial no prisma 3: $\sigma_{o3} = 0$;
- tensão inicial no prisma 4: $\sigma_{o4} = 0$;
- módulo de elasticidade: $E_1 = E_2 = 24 \text{ GPa}$;
- coeficientes de fluência (t,t₀): $\phi_3 = \phi_4 = 3,00$;
- fator q: $q_3 = q_4 = 3,46$;
- deformação por retração: $\varepsilon_{cs3} = \varepsilon_{cs4} = -0,0002$.

Cada camada de armadura de protensão, 1ª a 4ª, equivale a um prisma, respectivamente 5 a 8, cujas características são apresentadas a seguir:

- área do prisma 5: $A_5 = 0,003552 \text{ m}^2$;
- áreas dos prismas 6, 7 e 8: $A_6 = A_7 = A_8 = 0,001184 \text{ m}^2$;
- tensão inicial: $\sigma_{05} = \sigma_{06} = \sigma_{07} = \sigma_{08} = 1200 \text{ MPa}$;
- módulo de elasticidade: $E_5 = E_6 = E_7 = E_8 = 200 \text{ GPa}$;
- coeficiente de fluência (t,t₀): $\phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = \phi_8 = 0,05$;
- fator q: $q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = 1,050$;
- deformação por retração: $\varepsilon_{cs5} = \varepsilon_{cs6} = \varepsilon_{cs7} = \varepsilon_{cs8} = 0$.

3.3.2 Determinação dos esforços adicionais

Conforme item 3.2.2, deve-se encontrar a ordenada do centro de gravidade da grandeza $\left(\frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \right)$. Inicialmente a origem das ordenadas z pode ser tomada como sendo a borda inferior ($z_{i,inf}$). Em seguida, de modo que se prossiga com os cálculos, as ordenadas são consideradas em relação ao centro de gravidade (nova origem - $z_{i,nov}$).

PRISMA	Ordenada Borda Inferior	Ordenada Nova Origem
	$z_{i,inf}$ (m)	$z_{i,nov}$ (m)
1	-0,30374	1,31040
2	-2,28066	-0,66652
3	-2,90283	-1,28869
4	-3,04717	-1,43303
5	-0,10000	1,51414
6	-0,30000	1,31414
7	-0,60000	1,01414
8	-1,00000	0,61414
Nova Origem		-1,61414

Tabela 3.1 – Ordenadas dos prismas – exemplo numérico

Na planilha de cálculo a seguir são utilizadas as eq. 3.23 e 3.25 na determinação dos coeficientes da reta $\Delta\varepsilon_i = a + b \cdot z_i$, e por meio da eq. 3.21 chega-se aos valores dos esforços adicionais X_i .

PRISMA	ÁREA	$q_i = 1 + k \cdot \phi_i$	Tensão Normal	Retração	Elasticidade
	A_i (m ²)		σ_{oi} (MPa)	ε_{csi}	E_i (MPa)
1	0,575625	2,640	-13,361	-0,0001	30.000,00
2	0,575625	2,640	-9,199	-0,0001	30.000,00
3	0,312500	3,460	0,000	-0,0002	24.000,00
4	0,312500	3,460	0,000	-0,0002	24.000,00
5	0,003552	1,050	1.200,000	0,0000	200.000,00
6	0,001184	1,050	1.200,000	0,0000	200.000,00
7	0,001184	1,050	1.200,000	0,0000	200.000,00
8	0,001184	1,050	1.200,000	0,0000	200.000,00

PRISMA	$\left(\frac{E_i \cdot A_i}{q_i}\right)$	$\frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i}$	$\frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i}$	$\frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i \cdot z_i}{q_i}$
1	6.541,193	-5,82626	-0,65412	-7,63471
2	6.541,193	-4,01133	-0,65412	2,67364
3	2.167,630	0,00000	-0,43353	0,00000
4	2.167,630	0,00000	-0,43353	0,00000
5	676,571	0,20297	0,00000	0,30733
6	225,524	0,06766	0,00000	0,08891
7	225,524	0,06766	0,00000	0,06861
8	225,524	0,06766	0,00000	0,04155
Σ	18.770,789	-9,43165	-2,17529	-4,45467

PRISMA	$\frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i$	$\frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2$	Força Normal	coeficiente 'a'
			X_i (MN)	
1	-0,85716	11.232,133	1,139778	-6,18351E-04
2	0,43599	2.905,951	1,279817	
3	0,55868	3.599,859	-0,484521	coeficiente 'b'
4	0,62126	4.451,407	-0,437221	
5	0,00000	1.551,113	-0,776202	
6	0,00000	389,469	-0,251915	
7	0,00000	231,945	-0,241687	
8	0,00000	85,059	-0,228049	
Σ	0,75877	24.446,936	0,000000	-1,51180E-04

Tabela 3.2 – Planilha de cálculo para determinação dos esforços adicionais

3.3.3 Redistribuição de tensão e perdas de protensão

A partir dos esforços adicionais X_i e do estado inicial de tensão, determina-se a tensão no instante t em cada prisma, utilizando a eq. 3.26.

$$\sigma_1 = \frac{1139,778}{0,575625} - 13360,55 = -11382,627 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1279,817}{0,575625} - 9198,61 = -6975,258 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{-484,521}{0,3125} = -1550,467 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_4 = \frac{-437,221}{0,3125} = -1399,107 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_5 = \frac{-776,202}{0,003552} + 1200000 = 981474,66 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_6 = \frac{-251,915}{0,001184} + 1200000 = 987233,95 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_7 = \frac{-241,687}{0,001184} + 1200000 = 995872,47 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_8 = \frac{-228,049}{0,001184} + 1200000 = 1007391,05 \text{ kN/m}^2$$

Nos prismas de 5 a 8, as tensões encontradas (σ_i) são os valores das tensões no instante t em cada camada de cabos de protensão que, comparadas com as tensões (σ_{oi}) no instante t_0 , fornecem os valores da perda de protensão por deformação lenta e retração.

$$1^{\text{a}} \text{ camada : } \sigma_{po} = 1200 \text{ MPa ; } \sigma_{pf} = 981,47 \text{ MPa} \Rightarrow \text{perda de } 18,21 \%$$

$$2^{\text{a}} \text{ camada : } \sigma_{po} = 1200 \text{ MPa ; } \sigma_{pf} = 987,23 \text{ MPa} \Rightarrow \text{perda de } 17,73 \%$$

$$3^{\text{a}} \text{ camada : } \sigma_{po} = 1200 \text{ MPa ; } \sigma_{pf} = 995,87 \text{ MPa} \Rightarrow \text{perda de } 17,01 \%$$

$$4^{\text{a}} \text{ camada : } \sigma_{po} = 1200 \text{ MPa ; } \sigma_{pf} = 1007,39 \text{ MPa} \Rightarrow \text{perda de } 16,05 \%$$

Para as tensões nas bordas das peças de concreto deve-se aplicar uma equação linear (eq. 3.27 a 3.30), resultando:

$$\sigma_{1,\text{inf}} = -\frac{4410,369 \cdot 0,30374}{1,97692} - 11382,627 = -12060,25 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \sigma_{1,\text{inf}} = -12,060 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,\text{sup}} = \frac{4410,369 \cdot 0,56934}{1,97692} - 6975,258 = -5704,97 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \sigma_{1,\text{sup}} = -5,705 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,\text{inf}} = -\frac{151,360 \cdot 0,0528312}{0,1443376} - 1550,467 = -1605,87 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \sigma_{2,\text{inf}} = -1,606 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,\text{sup}} = \frac{151,360 \cdot 0,0528312}{0,1443376} - 1399,107 = -1343,71 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \sigma_{2,\text{sup}} = -1,344 \text{ MPa}$$

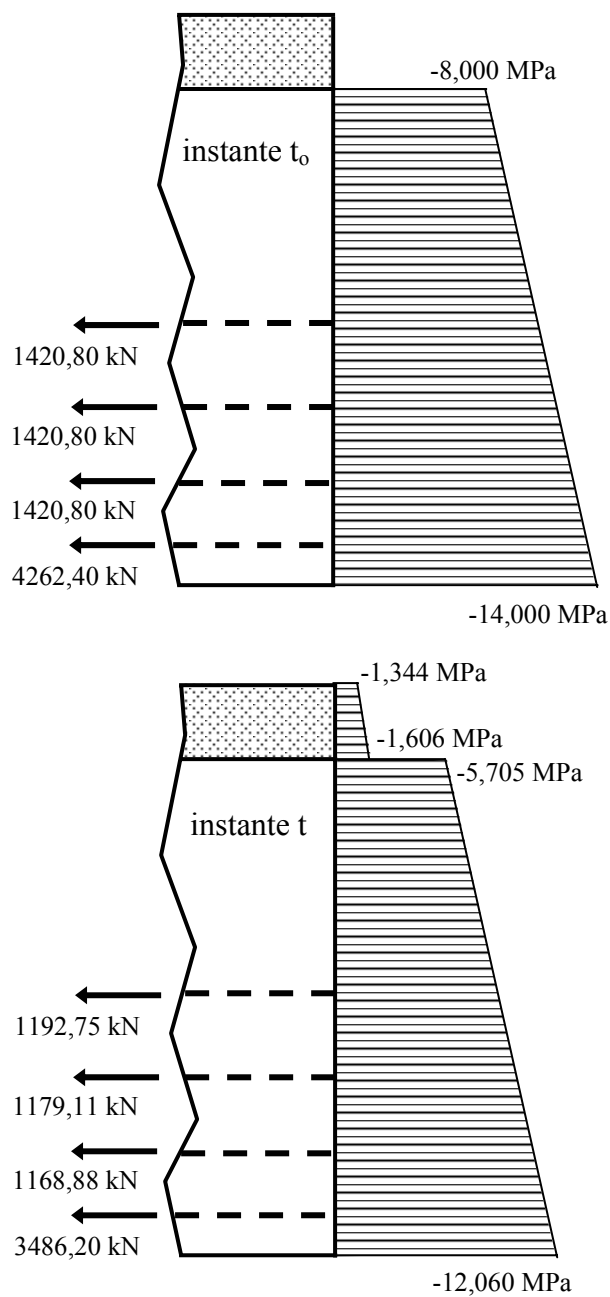


Figura 3.7 – Redistribuição de tensão – exemplo numérico

4 ANÁLISE DE ESFORÇOS EM ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

A análise da redistribuição de tensões numa peça composta desenvolvida no capítulo anterior admite que alongamento e curvatura ocorrem sem impedimento por parte de vínculos dos apoios ou de continuidade com outros elementos da estrutura, ou seja, são consideradas estruturas isostáticas.

A deformação lenta e a retração em estruturas hiperestáticas de concreto, as quais são freqüentemente construídas por partes, com coeficientes de fluência diferentes e possíveis alterações no esquema estático (por exemplo, vigas pré-moldadas isostáticas com ligações concretadas *in loco*, tornando-se uma viga contínua), provocam alteração nos esforços solicitantes com o tempo.

Desenvolve-se a seguir o cálculo de redistribuição de tensões em viga protendida contínua (usual em estruturas de pontes), pelo processo dos esforços combinado com o método dos prismas equivalentes na análise das seções.

4.1 Solução pelo processo dos esforços

A resolução de estruturas hiperestáticas pelo processo dos esforços baseia-se na determinação de um sistema de equações no qual as incógnitas hiperestáticas são esforços (momentos ou forças), sendo que estes correspondem aos vínculos internos ou externos retirados da estrutura original para a definição da isostática fundamental.

A sistematização deste método segue as etapas:

- adoção da isostática fundamental;
- aplicação do carregamento externo e das incógnitas hiperestáticas unitárias na isostática fundamental;
- montagem do sistema de equações de compatibilidade, de modo que os deslocamentos ou rotações estejam de acordo com a estrutura original, que permitem calcular as incógnitas hiperestáticas;
- determinação das reações de apoio e dos esforços internos solicitantes de acordo com as equações da estática.

4.2 Aplicação do método dos prismas equivalentes

As equações de equilíbrio na seção transversal (equações 3.22 e 3.24) que eram igualadas a zero, uma vez que os esforços externos permanecem inalterados em estruturas isostáticas, passam a ser igualadas aos esforços solicitantes ΔN_j e ΔM_j gerados por deformação lenta e retração, em cada seção genérica j .

As constantes a_j e b_j representam, respectivamente, a deformação axial e a curvatura na seção j provenientes da deformação lenta e retração num instante t .

$$a_j \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} + b_j \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i - \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} - \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} = \Delta N_j ,$$

$$\text{com } \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i = 0 ,$$

$$a_j = \frac{\Delta N_j + \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} + \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i}}{\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i}} . \quad (4.1)$$

$$a_j \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i + b_j \cdot \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2 - \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} \cdot z_i - \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i = \Delta M_j ,$$

$$\text{com } \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i = 0 ,$$

$$b_j = \frac{\Delta M_j + \sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} \cdot z_i + \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i}{\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2} . \quad (4.2)$$

Dessa forma, precisa-se determinar os valores de ΔN_j e ΔM_j nas seções da estrutura para viabilizar o cálculo dos coeficientes a_j e b_j , e a redistribuição de tensões em cada seção. Numa viga contínua, tem-se que $\Delta N_j = 0$ e ΔM_j é proporcional à variação do momento fletor nos apoios intermediários ($M_{k,m}$), fig. 4.1.

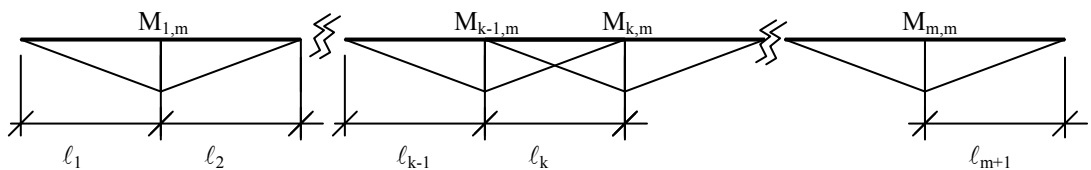


Figura 4.1 – Variação do momento fletor numa viga contínua de $(m+1)$ vãos

vão inicial , $k = 1$:
$$\Delta M_j = M_{1,m} \cdot \frac{x_j^{(1)}}{\ell_1} \quad (4.3)$$

vão interno , $1 < k < m+1$:
$$\Delta M_j = M_{k-1,m} \cdot \frac{\ell_k - x_j^{(k)}}{\ell_k} + M_{k,m} \cdot \frac{x_j^{(k)}}{\ell_k} \quad (4.4)$$

vão final , $k = m+1$:
$$\Delta M_j = M_{m,m} \cdot \frac{\ell_{m+1} - x_j^{(m+1)}}{\ell_{m+1}} \quad (4.5)$$

onde $x_j^{(k)}$ é definida na fig. 4.2.

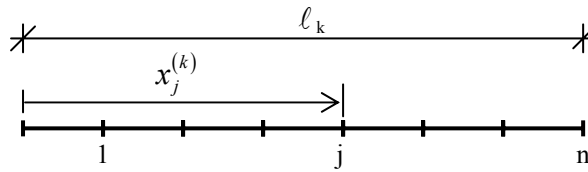


Figura 4.2 – Posição das seções em cada vão (k)

Para resolução admite-se a isostática fundamental resultante da introdução de articulações nos apoios intermediários, de modo que as incógnitas hiperestáticas passam a ser os momentos fletores $M_{k,m}$.

Na eq. 4.2 podem-se separar os efeitos de ΔM_j (função das incógnitas hiperestáticas) e da deformação lenta (carregamento) em cada seção da isostática fundamental.

$$F_j = \frac{\sum_i \frac{\sigma_{oi} \cdot A_i \cdot \phi_i}{q_i} \cdot z_i + \sum_i \frac{\varepsilon_{csi} \cdot E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i}{\sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2} \quad (4.6)$$

$$H_j = \sum_i \frac{E_i \cdot A_i}{q_i} \cdot z_i^2 \quad (4.7)$$

$$b_j = \frac{\Delta M_j}{H_j} + F_j \quad (4.8)$$

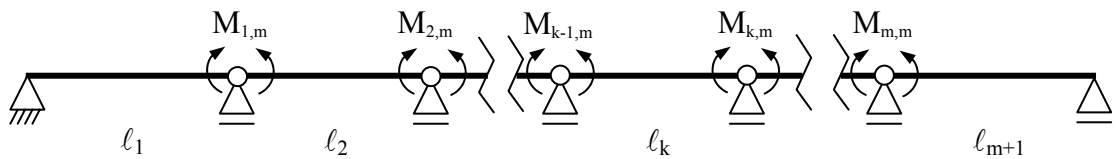


Figura 4.3 – Isostática fundamental para viga contínua de $(m+1)$ vãos

Pela Analogia de Mohr, obtém-se a rotação nas extremidades de cada vão k devido ao carregamento.

$$\text{– extremidade inicial: } f_{oa}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left(F_j \cdot \Delta x_j \cdot \frac{\ell - x_j}{\ell} \right)^{(k)} ; \quad (4.9)$$

$$\text{– extremidade final: } f_{ob}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left(F_j \cdot \Delta x_j \cdot \frac{x_j}{\ell} \right)^{(k)} . \quad (4.10)$$

Considerando momentos fletores unitários aplicados nas extremidades dos vãos ($M_{k,m} = 1$), e as equações 4.3 a 4.5, obtém-se os coeficientes de flexibilidade.

$$f_{bb}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\Delta x_j}{H_j} \cdot \left(\frac{x_j}{\ell} \right)^2 \right]^{(k)} \quad (4.11)$$

$$f_{aa}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\Delta x_j}{H_j} \cdot \left(\frac{\ell - x_j}{\ell} \right)^2 \right]^{(k)} \quad (4.12)$$

$$f_{ab}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\Delta x_j}{H_j} \cdot \left(\frac{x_j}{\ell} \right) \cdot \left(\frac{\ell - x_j}{\ell} \right) \right]^{(k)} \quad (4.13)$$

Com estes coeficientes pode-se montar a matriz de flexibilidade que permite determinar os momentos hiperestáticos progressivos ($M_{k,m}$) de maneira análoga à solução de vigas contínuas pela Equação dos Três Momentos.

$$\underline{M} = \underline{f}^{-1} \cdot \underline{f}_o \quad (4.14)$$

Onde,

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_{bb}^{(1)} + f_{aa}^{(2)} & f_{ab}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{ab}^{(2)} & f_{bb}^{(2)} + f_{aa}^{(3)} & f_{ab}^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{ab}^{(3)} & f_{bb}^{(3)} + f_{aa}^{(4)} & f_{ab}^{(4)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_{ab}^{(4)} & f_{bb}^{(4)} + f_{aa}^{(5)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f_{ab}^{(m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{ab}^{(m)} & f_{bb}^{(m)} + f_{aa}^{(m+1)} \end{bmatrix} ,$$

$$f_{ii} = f_{bb}^{(i)} + f_{aa}^{(i+1)} , \text{ com } 1 \leq i \leq m$$

$$f_{ij} = f_{ji} = f_{ab}^{(i)} , \text{ se } i - j = 1 , \text{ com } i > j$$

$$f_{ij} = f_{ji} = 0 , \text{ se } i - j > 1 , \text{ com } i > j$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_{1,m} \\ M_{2,m} \\ M_{3,m} \\ M_{4,m} \\ \vdots \\ M_{m,m} \end{bmatrix}, \quad M_i = M_{i,m}, \quad \underline{f_o} = - \begin{bmatrix} f_{ob}^{(1)} + f_{oa}^{(2)} \\ f_{ob}^{(2)} + f_{oa}^{(3)} \\ f_{ob}^{(3)} + f_{oa}^{(4)} \\ f_{ob}^{(4)} + f_{oa}^{(5)} \\ \vdots \\ f_{ob}^{(m)} + f_{oa}^{(m+1)} \end{bmatrix}, \quad f_{oi} = - \left(f_{ob}^{(i)} + f_{oa}^{(i+1)} \right).$$

Os valores dos momentos hiperestáticos progressivos permitem determinar a alteração dos esforços devido à deformação lenta e, substituindo-se os valores nas equações 4.1 a 4.5, obtêm-se os coeficientes a_j e b_j para cada seção, permitindo definir a redistribuição de tensões e as perdas progressivas de protensão.

4.4 Exemplo numérico

A aplicação desenvolvida a seguir é baseada na ponte do Canal Laranjeiras localizada na Baixada Santista, que faz parte da segunda pista da Rodovia dos Imigrantes.

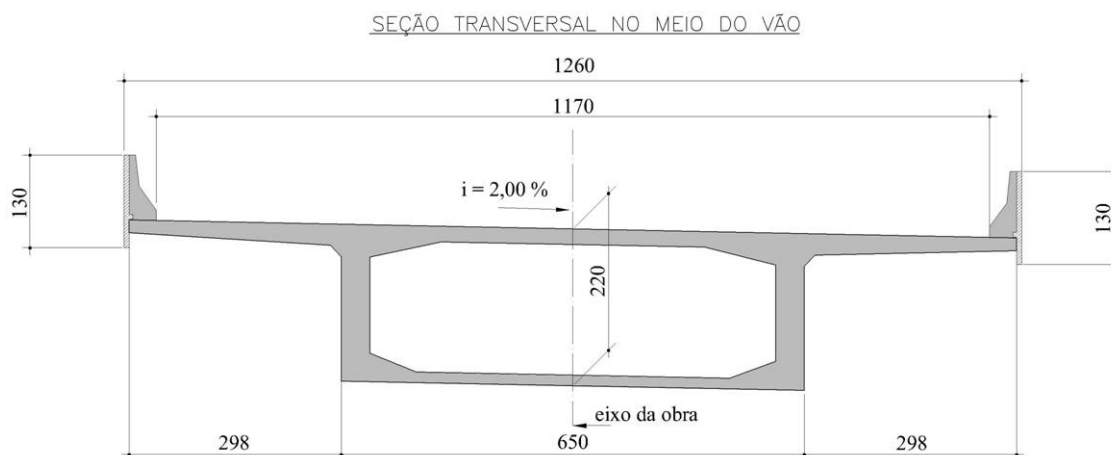


Figura 4.4 – Seção transversal no meio do vão – exemplo numérico

Características da seção transversal no meio do vão:

- área , $A_c = 5,59\text{m}^2$;
- inércia , $I_c = 3,85\text{m}^4$;
- concreto , $f_{ck} = 45 \text{ MPa}$, Cimento ARI ;
- umidade ambiente , $U = 70\%$.

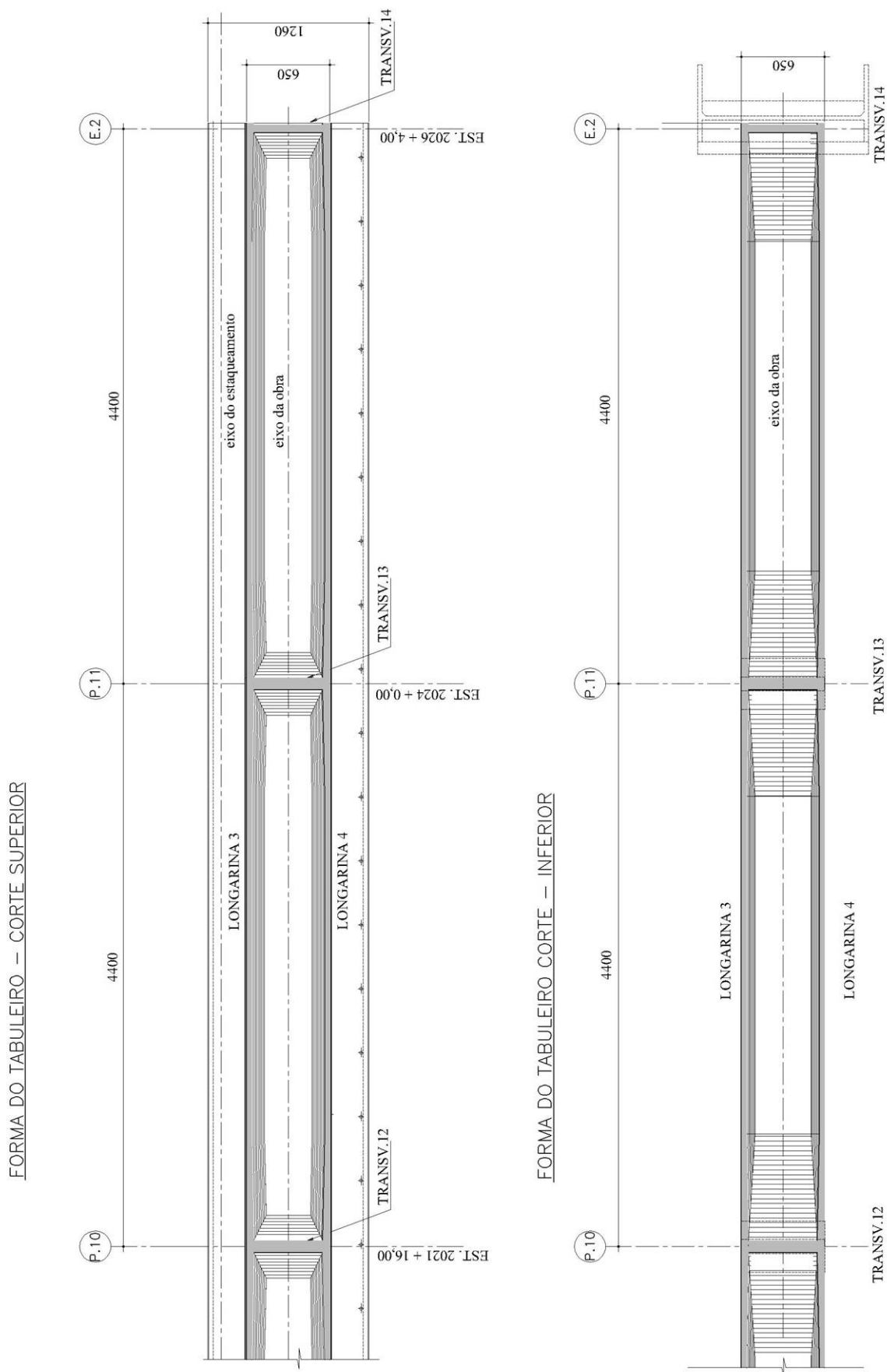


Figura 4.5 – Planta parcial do tabuleiro – exemplo numérico

A ponte em estudo é constituída de cinco vãos, sendo que a seqüência de construção é apresentada esquematicamente na fig. 4.6. Nesta aplicação admitiu-se um ciclo de construção com Δt de 21 dias, e a protensão junto com o peso próprio (P+g) sendo aplicados com a idade t_0 de sete dias do trecho concretado. Os vãos foram admitidos iguais com $\ell = 44$ m, e os balanços construtivos com comprimentos iguais de 8,8 m.

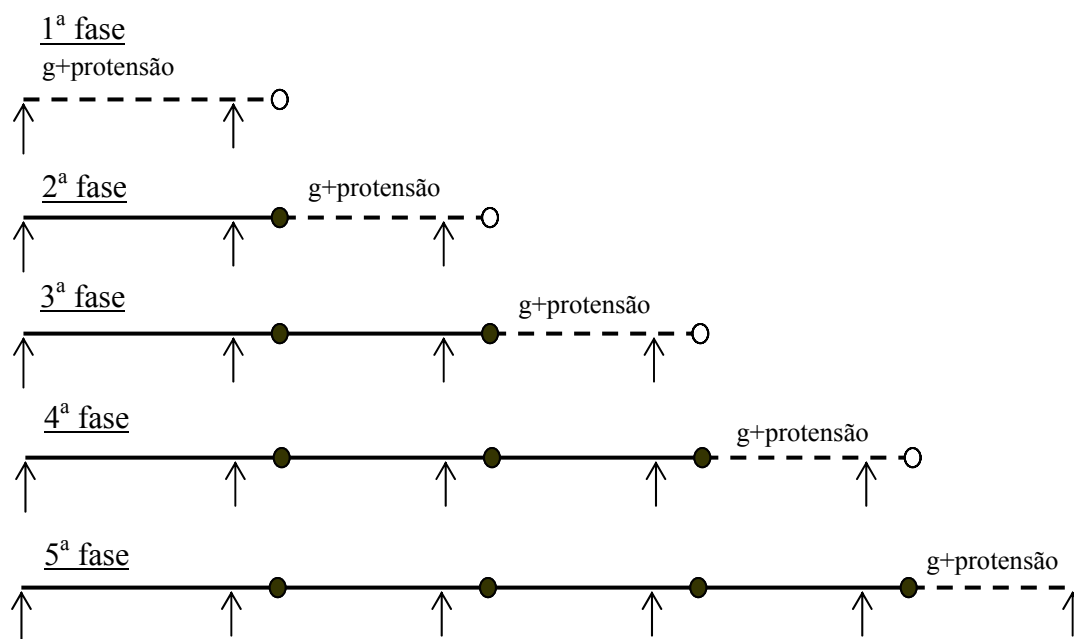


Figura 4.6 – Fases construtivas do exemplo numérico

A cablagem da protensão varia levemente de vão para vão; nesta análise admitiu-se um cabo médio único (fig. 4.7) equivalente a 10 cabos de 19 $\phi 15,2$ mm de aço CP190RB, com curvas do 2º grau exceto nos trechos BC e GH que são retos, e com força inicial de protensão $P_0 = 35000$ kN em todas as seções, estas posicionadas a cada décimo de vão. Os cabos são emendados nas junções das diversas fases construtivas (seções tipos F e K).

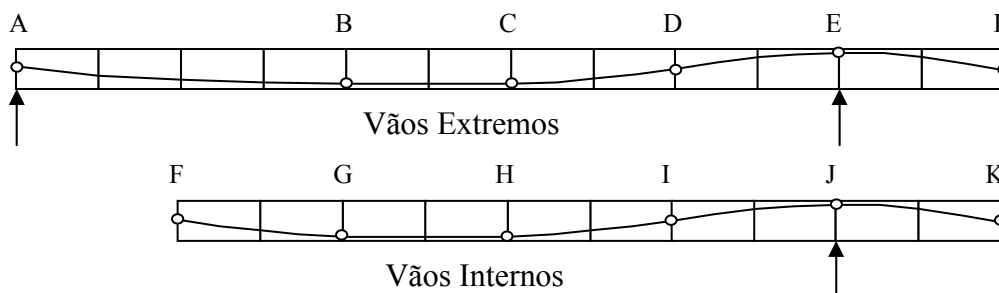


Figura 4.7 – Cabo de protensão equivalente

A maturidade do concreto é considerada pela variação do módulo de elasticidade (E_c) de acordo com a idade de carregamento (t_0), tab. 4.11

t_0 (dias)	E_c (MPa)
7	33,300
28	41,400
49	43,700
70	45,000
91	45,800
112	46,400

Tabela 4.1 – Evolução do módulo de elasticidade do concreto

O coeficiente de fluência e a retração do concreto foram determinados para as diversas idades de carregamento e estudo, tab. 4.2, conforme a NBR 6118, sendo considerado abatimento de 8 cm, perímetro em contato com a atmosfera $u = 16,10$ m, temperatura de 20 °C, e cimento de endurecimento rápido, ARI.

dias	dias		$E10^{-5}$
t	t_0	$\Phi(t, t_0)$	$\epsilon_{cs}(t, t_0)$
28	7	0,784	-0,36766
49	7	0,939	-0,65703
70	7	1,044	-0,90972
91	7	1,126	-1,14204
112	7	1,196	-1,36170
1,00E+04	7	2,376	-22,58649
49	28	0,495	-0,28937
70	28	0,624	-0,54206
91	28	0,716	-0,77439
112	28	0,790	-0,99404
1,00E+04	28	1,981	-22,21883
70	49	0,424	-0,25269
91	49	0,540	-0,48501
112	49	0,624	-0,70467
1,00E+04	49	1,830	-21,92946
91	70	0,389	-0,23232
112	70	0,496	-0,45198
1,00E+04	70	1,727	-21,67677
112	91	0,366	-0,21965
1,00E+04	91	1,646	-21,44444
1,00E+04	112	1,577	-21,22479

Tabela 4.2 – Coeficiente de fluência e retração nas diversas idades

Conforme a mesma Norma, foram determinados os coeficientes de fluência equivalente para a armadura ativa (equações 2.6 e 2.7), admitindo $\psi_{1000} = 2,5\%$, para as diversas idades de estudo.

dias		
t	Ψ	χ
28	0,0226	0,0228
49	0,0250	0,0253
70	0,0266	0,0270
91	0,0278	0,0282
112	0,0287	0,0291
1.00E+04	0,0569	0,0586

Tabela 4.3 – Coeficiente de fluência equivalente para armadura ativa

4.3.1 Situações de cálculo

Para cada fase construtiva foi determinado o diagrama de momentos fletores devidos aos efeitos das cargas permanentes $g = 139,75 \text{ kN/m}$ e $g_2 = 44,00 \text{ kN/m}$ e da protensão, utilizando-se o programa de análise estrutural SAP2000n[®], admitindo-se seção constante em todos os tramos. Os valores estão anotados a cada quinto de vão em [kN·m]

1ª fase – situação de um vão ($t_0 = 7$ dias).

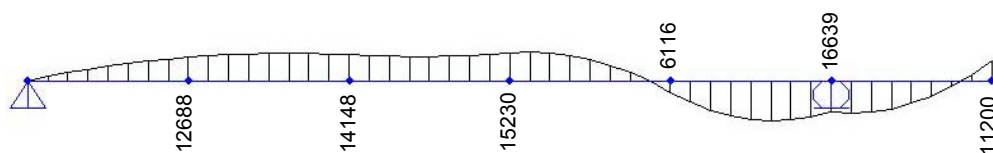


Figura 4.8 – Diagrama de momento fletor g+P na 1ª fase

2ª fase – situação de dois vãos ($t_0 = 28$ dias).

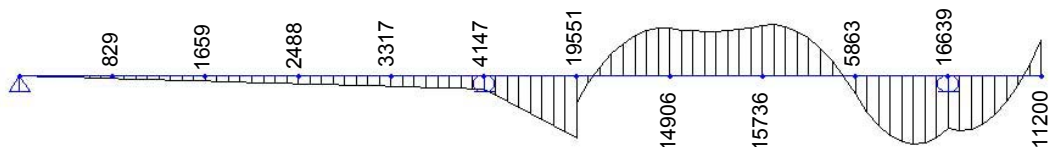


Figura 4.9 – Diagrama de momento fletor g+P na 2ª fase

3ª fase – situação de três vãos ($t_0 = 49$ dias).

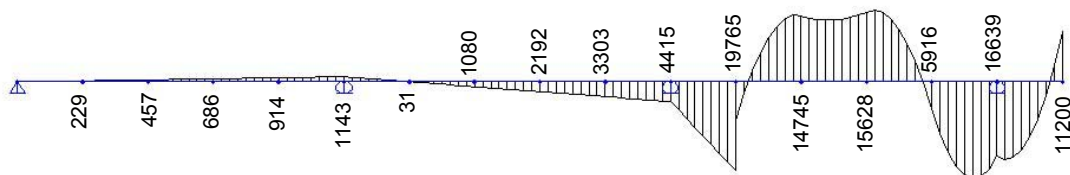


Figura 4.10 – Diagrama de momento fletor g+P na 3ª fase

4ª fase – situação de quatro vãos ($t_0 = 70$ dias).

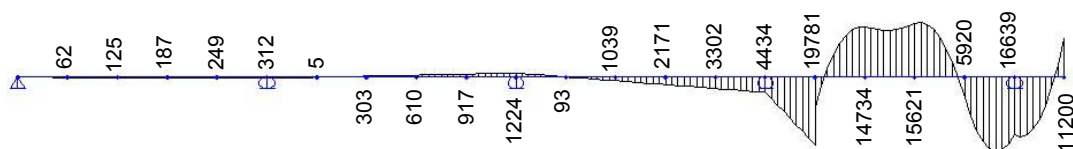


Figura 4.11 – Diagrama de momento fletor g+P na 4ª fase

5ª fase – situação de cinco vãos ($t_0 = 91$ dias).

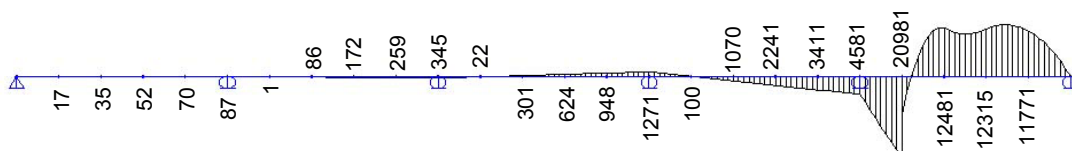


Figura 4.12 – Diagrama de momento fletor g+P na 5ª fase

6ª fase – situação de carga g_2 atuando nos cinco vãos ($t_0 = 112$ dias).

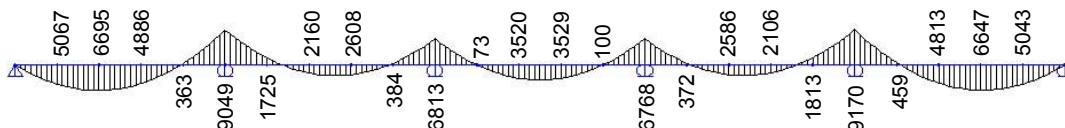


Figura 4.13 – Diagrama de momento fletor g_2 na 6ª fase

Para considerar a influência de todas as fases em cada período de estudo, a tensão inicial será definida por uma média ponderada em função do coeficiente de fluência e módulo de elasticidade, conforme a eq. 4.17.

$$\Delta \varepsilon_i = \sum_k \frac{\sigma_{oi}^k}{E_i^k} \cdot \phi_i^k + \frac{X_i}{E_i \cdot A_i} \cdot q_i + \varepsilon_{csi} \quad (4.15)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\sigma_{oi}^*}{E_i} \cdot \phi_i + \frac{X_i}{E_i \cdot A_i} \cdot q_i + \varepsilon_{csi} \quad (4.16)$$

Onde,

$$\sigma_{oi}^* = \frac{E_i}{\phi_i} \cdot \sum_k \frac{\sigma_{oi}^k}{E_i^k} \cdot \phi_i^k \quad (4.17)$$

4.3.1.1 Cálculo da 1ª fase

seção	m	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	Z_{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0	1,420	0	-6,26	-6,26
1	4,4	0,864	-7966	-4,65	-9,20
2	8,8	0,468	-12688	-3,69	-10,94
3	13,2	0,229	-14865	-3,25	-11,74
4	17,6	0,150	-14148	-3,39	-11,48
5	22,0	0,150	-13336	-3,56	-11,18
6	26,4	0,150	-15230	-3,18	-11,88
7	30,8	0,388	-11429	-3,95	-10,48
8	35,2	1,100	6116	-7,50	-4,01
9	39,6	1,612	20955	-10,51	1,47
10	44,0	1,850	16639	-9,63	-0,12
11	48,4	1,612	12297	-8,75	-1,73
12	52,8	1,100	-11200	-3,99	-10,39

Tabela 4.4 – Momento fletor e tensões iniciais da 1ª fase

σ_{11i} [MPa]		
$\varepsilon_{csi} = -3.677E-06$, $\chi_i = 0.0228$		
$E_{ci} = 33300$ MPa , $\phi_i = 0.784$		
seção	sup	inf
0	-6,26	-6,26
1	-4,65	-9,20
2	-3,69	-10,94
3	-3,25	-11,74
4	-3,39	-11,48
5	-3,56	-11,18
6	-3,18	-11,88
7	-3,95	-10,48
8	-7,50	-4,01
9	-10,51	1,47
10	-9,63	-0,12
11	-8,75	-1,73
12	-3,99	-10,39

Tabela 4.5 – Tensões iniciais ponderadas da 1ª fase

Observação: na primeira fase as tensões ponderadas são as próprias tensões iniciais, e sendo a estrutura isostática, não há redistribuição de esforços.

seção	σ_{11i} [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	inicial		t = 28 dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-6,26	-6,26	-6,00	-6,00	-55,68
1	-4,65	-9,20	-4,54	-8,59	-59,49
2	-3,69	-10,94	-3,72	-10,02	-65,48
3	-3,25	-11,74	-3,37	-10,60	-69,33
4	-3,39	-11,48	-3,54	-10,29	-68,84
5	-3,56	-11,18	-3,70	-10,01	-67,79
6	-3,18	-11,88	-3,32	-10,67	-70,23
7	-3,95	-10,48	-4,00	-9,52	-64,58
8	-7,50	-4,01	-7,34	-3,59	-53,16
9	-10,51	1,47	-10,16	1,64	-60,03
10	-9,63	-0,12	-9,19	-0,09	-62,94
11	-8,75	-1,73	-8,42	-1,56	-58,18
12	-3,99	-10,39	-3,81	-9,92	-59,31

Tabela 4.6 – Redistribuição de tensão da 1ª fase

4.3.1.3 Cálculo da 2ª fase

seção	m	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	Z_{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0		0	0,00	0,00
1	4,4		415	-0,08	0,15
2	8,8		829	-0,17	0,31
3	13,2		1244	-0,25	0,46
4	17,6		1659	-0,34	0,61
5	22,0		2073	-0,42	0,76
6	26,4		2488	-0,50	0,92
7	30,8		2903	-0,59	1,07
8	35,2		3317	-0,67	1,22
9	39,6		3732	-0,76	1,38
10	44,0		4147	-0,84	1,53
11	48,4		11849	-2,40	4,37
12	52,8		19551	-3,96	7,21
12	52,8	1,100	8351	-7,95	-3,18
13	57,2	0,388	-10150	-4,20	-10,01
14	61,6	0,150	-14906	-3,24	-11,76
15	66,0	0,150	-13968	-3,43	-11,41
16	70,4	0,150	-15736	-3,07	-12,07
17	74,8	0,388	-11809	-3,87	-10,62
18	79,2	1,100	5863	-7,45	-4,10
19	83,6	1,612	20829	-10,48	1,42
20	88,0	1,850	16639	-9,63	-0,12
21	92,4	1,612	12297	-8,75	-1,73
22	96,8	1,100	-11200	-3,99	-10,39

Tabela 4.7 – Momento fletor e tensões iniciais da 2ª fase

σ_{12i}^* [MPa]			σ_{22i} [MPa]		
$\varepsilon_{csi} = -2,894E-06$, $\chi_i = 0,0025$ $E_{ci} = 41400$ MPa , $\phi_i = 0,495$			$\varepsilon_{csi} = -3,677E-06$, $\chi_i = 0,0228$ $E_{ci} = 33300$ MPa , $\phi_i = 0,784$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf
0	-2,43	-2,43	12	-7,95	-3,18
1	-1,88	-3,41	13	-4,20	-10,01
2	-1,60	-3,93	14	-3,24	-11,76
3	-1,51	-4,09	15	-3,43	-11,41
4	-1,65	-3,84	16	-3,07	-12,07
5	-1,80	-3,57	17	-3,87	-10,62
6	-1,73	-3,68	18	-7,45	-4,10
7	-2,12	-2,99	19	-10,48	1,42
8	-3,58	-0,33	20	-9,63	-0,12
9	-4,83	1,95	21	-8,75	-1,73
10	-4,57	1,48	22	-3,99	-10,39
11	-5,79	3,70			
12	-5,51	3,19			

Tabela 4.8 – Tensões iniciais ponderadas da 2ª fase

Δx	x	TRAMO 1		TRAMO 2	
		F	H	F	H
0	0,0	-1,30222E-09	1,13256E+05	3,17299E-05	1,14186E+05
4,4	4,4	-7,00213E-06	1,14804E+05	5,11358E-05	1,13442E+05
4,4	8,8	-1,02248E-05	1,17797E+05	4,77615E-05	1,13768E+05
4,4	13,2	-1,07725E-05	1,20364E+05	-3,98731E-05	8,31204E+04
4,4	17,6	-8,51682E-06	1,21339E+05	-6,09778E-05	8,57784E+04
4,4	22,0	-6,40159E-06	1,21339E+05	-5,57608E-05	8,57784E+04
4,4	26,4	-7,32709E-06	1,21339E+05	-6,55898E-05	8,57784E+04
4,4	30,8	-2,38897E-06	1,18592E+05	-4,93919E-05	8,31204E+04
4,4	35,2	1,82857E-05	1,13768E+05	4,16791E-05	7,84520E+04
4,4	39,6	3,63554E-05	1,13442E+05	1,23514E-04	7,81369E+04
4,4	44,0	3,17299E-05	1,14186E+05	9,25716E-05	7,88568E+04

f_{ob}	2,65871E-04	f_{ob}	4,99761E-04
f_{oa}	-1,17428E-04	f_{oa}	-1,25458E-04
f_{bb}	1,45971E-04	f_{bb}	2,09439E-04
f_{aa}	1,06058E-04	f_{aa}	1,29175E-04
f_{ab}	6,10439E-05	f_{ab}	8,33986E-05

Tabela 4.9 – Coeficientes de flexibilidade da 2ª fase

De acordo com a equação matricial 4.14, obtém-se o momento hiperestático progressivo $M_{1,1}$.

$$M_{1,1} = -\frac{1,40413E-04}{2,75146E-04} = -0,51032 \text{ MN} \cdot \text{m} = -510 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

seção	σ_{12i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 28$ dias		$t = 49$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-2,43	-2,43	-2,38	-2,38	-9,24
1	-1,88	-3,41	-1,86	-3,33	-10,02
2	-1,60	-3,93	-1,58	-3,81	-11,23
3	-1,51	-4,09	-1,50	-3,95	-11,95
4	-1,65	-3,84	-1,63	-3,71	-11,68
5	-1,80	-3,57	-1,77	-3,47	-11,28
6	-1,73	-3,68	-1,70	-3,60	-11,60
7	-2,12	-2,99	-2,05	-2,97	-10,29
8	-3,58	-0,33	-3,47	-0,41	-8,35
9	-4,83	1,95	-4,67	1,81	-10,41
10	-4,57	1,48	-4,39	1,30	-11,45
11	-5,79	3,70	-5,63	3,56	-10,94
12	-5,51	3,19	-5,40	3,09	-6,57

seção	σ_{22i} [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 28$ dias		$t = 49$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
12	-7,95	-3,18	-7,71	-2,92	-52,67
13	-4,20	-10,01	-4,18	-9,18	-64,00
14	-3,24	-11,76	-3,33	-10,66	-70,64
15	-3,43	-11,41	-3,52	-10,31	-69,30
16	-3,07	-12,07	-3,18	-10,91	-71,44
17	-3,87	-10,62	-3,89	-9,70	-65,33
18	-7,45	-4,10	-7,27	-3,72	-53,32
19	-10,48	1,42	-10,12	1,58	-59,98
20	-9,63	-0,12	-9,19	-0,09	-62,94
21	-8,75	-1,73	-8,42	-1,56	-58,18
22	-3,99	-10,39	-3,81	-9,92	-59,31

Tabela 4.10 – Redistribuição de tensão da 2ª fase

4.3.1.3 Cálculo da 3ª fase

seção	m	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	z_{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0		0	0,00	0,00
1	4,4		-114	0,02	-0,04
2	8,8		-229	0,05	-0,08
3	13,2		-343	0,07	-0,13
4	17,6		-457	0,09	-0,17
5	22,0		-571	0,12	-0,21
6	26,4		-686	0,14	-0,25
7	30,8		-800	0,16	-0,30
8	35,2		-914	0,19	-0,34
9	39,6		-1028	0,21	-0,38
10	44,0		-1143	0,23	-0,42
11	48,4		-587	0,12	-0,22
12	52,8		-31	0,01	-0,01

	m	m	kN.m	MPa	MPa
seção	distância	Z _{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
12	52,8		-31	0,01	-0,01
13	57,2		525	-0,11	0,19
14	61,6		1080	-0,22	0,40
15	66,0		1636	-0,33	0,60
16	70,4		2192	-0,44	0,81
17	74,8		2748	-0,56	1,01
18	79,2		3303	-0,67	1,22
19	83,6		3859	-0,78	1,42
20	88,0		4415	-0,89	1,63
21	92,4		12090	-2,45	4,46
22	96,8		19765	-4,00	7,29
22	96,8	1,100	8565	-8,00	-3,10
23	101,2	0,388	-9962	-4,24	-9,94
24	105,6	0,150	-14745	-3,27	-11,70
25	110,0	0,150	-13834	-3,46	-11,36
26	114,4	0,150	-15628	-3,09	-12,03
27	118,8	0,388	-11728	-3,89	-10,59
28	123,2	1,100	5916	-7,46	-4,08
29	127,6	1,612	20855	-10,49	1,43
30	132,0	1,850	16639	-9,63	-0,12
31	136,4	1,612	12297	-8,75	-1,73
32	140,8	1,100	-11200	-3,99	-10,39

Tabela 4.11 – Momento fletor e tensões iniciais da 3ª fase

σ_{13i}^* [MPa]			σ_{23i}^* [MPa]			σ_{33i} [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,527E-06$, $\chi_i = 0,0016$ $E_{ci} = 43700$ MPa , $\phi_i = 0,424$			$\epsilon_{csi} = -2,894E-06$, $\chi_i = 0,0025$ $E_{ci} = 41400$ MPa , $\phi_i = 0,495$			$\epsilon_{csi} = -3,677E-06$, $\chi_i = 0,0228$ $E_{ci} = 33300$ MPa , $\phi_i = 0,784$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf	seção	sup	inf
0	-2,03	-2,03	12	-3,07	-1,24	22	-8,00	-3,10
1	-1,51	-2,98	13	-1,74	-3,68	23	-4,24	-9,94
2	-1,20	-3,53	14	-1,47	-4,16	24	-3,27	-11,70
3	-1,06	-3,79	15	-1,66	-3,82	25	-3,46	-11,36
4	-1,12	-3,70	16	-1,63	-3,87	26	-3,09	-12,03
5	-1,17	-3,59	17	-2,06	-3,10	27	-3,89	-10,59
6	-1,05	-3,81	18	-3,55	-0,37	28	-7,46	-4,08
7	-1,31	-3,35	19	-4,84	1,97	29	-10,49	1,43
8	-2,46	-1,25	20	-4,63	1,58	30	-9,63	-0,12
9	-3,44	0,54	21	-5,84	3,79	31	-8,75	-1,73
10	-3,16	0,03	22	-5,55	3,26	32	-3,99	-10,39
11	-3,49	0,62						
12	-2,55	-1,08						

Tabela 4.12 – Tensões iniciais ponderadas da 3ª fase

Δx	x	TRAMO 1		TRAMO 2		TRAMO 3	
		F	H	F	H	F	H
0	0,0	-8,015E-10	1,247E+05	1,338E-05	1,257E+05	3,256E-05	1,142E+05
4,4	4,4	-5,652E-06	1,263E+05	1,782E-05	1,249E+05	5,189E-05	1,134E+05
4,4	8,8	-8,689E-06	1,293E+05	6,902E-06	1,253E+05	4,843E-05	1,138E+05
4,4	13,2	-9,856E-06	1,319E+05	-7,977E-06	1,186E+05	-3,879E-05	8,312E+04
4,4	17,6	-9,091E-06	1,329E+05	-1,105E-05	1,213E+05	-6,008E-05	8,578E+04
4,4	22,0	-8,426E-06	1,329E+05	-8,381E-06	1,213E+05	-5,501E-05	8,578E+04
4,4	26,4	-9,836E-06	1,329E+05	-8,755E-06	1,213E+05	-6,499E-05	8,578E+04
4,4	30,8	-7,327E-06	1,301E+05	-3,285E-06	1,186E+05	-4,893E-05	8,312E+04
4,4	35,2	5,767E-06	1,253E+05	1,794E-05	1,138E+05	4,201E-05	7,845E+04
4,4	39,6	1,725E-05	1,249E+05	3,660E-05	1,134E+05	1,237E-04	7,814E+04
4,4	44,0	1,338E-05	1,257E+05	3,256E-05	1,142E+05	9,257E-05	7,886E+04

f_{ob}	4,128E-05	f_{ob}	2,836E-04	f_{ob}	5,101E-04
f_{oa}	-1,402E-04	f_{oa}	3,485E-05	f_{oa}	-1,108E-04
f_{bb}	1,328E-04	f_{bb}	1,459E-04	f_{bb}	2,094E-04
f_{aa}	9,665E-05	f_{aa}	1,024E-04	f_{aa}	1,292E-04
f_{ab}	5,566E-05	f_{ab}	6,052E-05	f_{ab}	8,340E-05

Tabela 4.13 – Coeficientes de flexibilidade da 3ª fase

Aplicando a equação matricial 4.14, obtêm-se os momentos hiperestáticos progressivos $M_{1,2}$ e $M_{2,2}$.

$$\begin{bmatrix} 2,35189E-04 & 6,05229E-05 \\ 6,05229E-05 & 2,75076E-04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,61283E-05 \\ -1,72803E-04 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,2} = -0,17175 \text{ MN} \cdot \text{m} = -172 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{2,2} = -0,59041 \text{ MN} \cdot \text{m} = -590 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

seção	σ_{13i} * [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 49$ dias		$t = 70$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-2,03	-2,03	-2,00	-2,00	-6,26
1	-1,51	-2,98	-1,50	-2,91	-6,87
2	-1,20	-3,53	-1,20	-3,44	-6,87
3	-1,06	-3,79	-1,07	-3,67	-8,57
4	-1,12	-3,70	-1,12	-3,57	-8,57
5	-1,17	-3,59	-1,17	-3,48	-8,45
6	-1,05	-3,81	-1,05	-3,70	-8,82
7	-1,31	-3,35	-1,29	-3,28	-7,88
8	-2,46	-1,25	-2,42	-1,25	-5,98
9	-3,44	0,54	-3,37	0,50	-6,85
10	-3,16	0,03	-3,07	-0,03	-7,24
11	-3,49	0,62	-3,40	0,56	-6,85
12	-2,55	-1,08	-2,48	-1,13	-5,97

Tabela 4.14a – Redistribuição de tensão da 3ª fase

seção	σ_{23i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 49$ dias		$t = 70$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
12	-3,07	-1,24	-3,00	-1,27	-8,74
13	-1,74	-3,68	-1,68	-3,62	-11,28
14	-1,47	-4,16	-1,43	-4,07	-12,56
15	-1,66	-3,82	-1,61	-3,75	-12,00
16	-1,63	-3,87	-1,57	-3,81	-12,17
17	-2,06	-3,10	-1,97	-3,11	-10,64
18	-3,55	-0,37	-3,43	-0,49	-8,43
19	-4,84	1,97	-4,67	1,80	-10,39
20	-4,63	1,58	-4,42	1,37	-11,46
21	-5,84	3,79	-5,67	3,63	-10,95
22	-5,55	3,26	-5,44	3,14	-6,57

seção	σ_{33i} [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 49$ dias		$t = 70$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
22	-8,00	-3,10	-7,74	-2,86	-52,64
23	-4,24	-9,94	-4,21	-9,14	-63,93
24	-3,27	-11,70	-3,35	-10,62	-70,57
25	-3,46	-11,36	-3,54	-10,28	-69,23
26	-3,09	-12,03	-3,20	-10,88	-71,39
27	-3,89	-10,59	-3,90	-9,68	-65,30
28	-7,46	-4,08	-7,27	-3,70	-53,32
29	-10,49	1,43	-10,13	1,58	-59,99
30	-9,63	-0,12	-9,19	-0,09	-62,94
31	-8,75	-1,73	-8,42	-1,56	-58,18
32	-3,99	-10,39	-3,81	-9,92	-59,31

Tabela 4.14b – Redistribuição de tensão da 3ª fase

4.3.1.4 Cálculo da 4ª fase

seção	m	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	Z_{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0		0	0,00	0,00
1	4,4		31	-0,01	0,01
2	8,8		62	-0,01	0,02
3	13,2		94	-0,02	0,03
4	17,6		125	-0,03	0,05
5	22,0		156	-0,03	0,06
6	26,4		187	-0,04	0,07
7	30,8		218	-0,04	0,08
8	35,2		249	-0,05	0,09
9	39,6		281	-0,06	0,10
10	44,0		312	-0,06	0,12
11	48,4		158	-0,03	0,06
12	52,8		5	0,00	0,00
12	52,8		5	0,00	0,00
13	57,2		-149	0,03	-0,05
14	61,6		-303	0,06	-0,11

seção	m distância	m Z_{prot}	kN.m M	MPa σ_{sup}	MPa σ_{inf}
15	66,0		-456	0,09	-0,17
16	70,4		-610	0,12	-0,22
17	74,8		-764	0,15	-0,28
18	79,2		-917	0,19	-0,34
19	83,6		-1071	0,22	-0,39
20	88,0		-1224	0,25	-0,45
21	92,4		-659	0,13	-0,24
22	96,8		-93	0,02	-0,03
22	96,8		-93	0,02	-0,03
23	101,2		473	-0,10	0,17
24	105,6		1039	-0,21	0,38
25	110,0		1605	-0,33	0,59
26	114,4		2171	-0,44	0,80
27	118,8		2737	-0,55	1,01
28	123,2		3302	-0,67	1,22
29	127,6		3868	-0,78	1,43
30	132,0		4434	-0,90	1,64
31	136,4		12107	-2,45	4,47
32	140,8		19781	-4,01	7,30
32	140,8	1,100	8581	-8,00	-3,10
33	145,2	0,388	-9949	-4,25	-9,93
34	149,6	0,150	-14734	-3,28	-11,70
35	154,0	0,150	-13825	-3,46	-11,36
36	158,4	0,150	-15621	-3,10	-12,02
37	162,8	0,388	-11723	-3,89	-10,59
38	167,2	1,100	5920	-7,46	-4,08
39	171,6	1,612	20857	-10,49	1,43
40	176,0	1,850	16639	-9,63	-0,12
41	180,4	1,612	12297	-8,75	-1,73
42	184,8	1,100	-11200	-3,99	-10,39

Tabela 4.15 – Momento fletor e tensões iniciais da 4ª fase

σ_{14i}^* [MPa]			σ_{24i}^* [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,323E-06$, $\chi_i = 0,0012$ $E_{ci} = 45000$ MPa , $\phi_i = 0,389$			$\epsilon_{csi} = -2,253E-06$, $\chi_i = 0,0016$ $E_{ci} = 43700$ MPa , $\phi_i = 0,424$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf
0	-1,80	-1,80	12	-2,58	-1,03
1	-1,36	-2,60	13	-1,37	-3,24
2	-1,10	-3,06	14	-1,06	-3,80
3	-1,00	-3,26	15	-1,13	-3,68
4	-1,06	-3,14	16	-1,01	-3,88
5	-1,13	-3,02	17	-1,28	-3,40
6	-1,04	-3,18	18	-2,44	-1,28
7	-1,28	-2,74	19	-3,43	0,52
8	-2,32	-0,85	20	-3,16	0,03
9	-3,20	0,76	21	-3,49	0,62
10	-2,97	0,34	22	-2,55	-1,08
11	-3,13	0,62			
12	-2,17	-1,12			

Tabela 4.16a – Tensões iniciais ponderadas da 4ª fase

σ_{34i}^* [MPa]			σ_{44i} [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,894E-06$, $\chi_i = 0,0025$ $E_{ci} = 41400$ MPa , $\phi_i = 0,495$			$\epsilon_{csi} = -3,677E-06$, $\chi_i = 0,0228$ $E_{ci} = 33300$ MPa , $\phi_i = 0,784$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf
22	-3,08	-1,24	32	-8,00	-3,10
23	-1,74	-3,67	33	-4,25	-9,93
24	-1,48	-4,15	34	-3,28	-11,70
25	-1,66	-3,81	35	-3,46	-11,36
26	-1,64	-3,86	36	-3,10	-12,02
27	-2,06	-3,09	37	-3,89	-10,59
28	-3,56	-0,36	38	-7,46	-4,08
29	-4,85	1,98	39	-10,49	1,43
30	-4,63	1,59	40	-9,63	-0,12
31	-5,84	3,80	41	-8,75	-1,73
32	-5,55	3,27	42	-3,99	-10,39

Tabela 4.16b – Tensões iniciais ponderadas da 4ª fase

Δx	x	TRAMO 1		TRAMO 2		TRAMO 3	
		F	H	F	H	F	H
0	0,0	-5,989E-10	1,313E+05	1,251E-05	1,322E+05	1,339E-05	1,257E+05
4,4	4,4	-4,293E-06	1,328E+05	1,452E-05	1,315E+05	1,784E-05	1,249E+05
4,4	8,8	-6,530E-06	1,358E+05	4,396E-06	1,318E+05	6,920E-06	1,253E+05
4,4	13,2	-7,292E-06	1,384E+05	-6,588E-06	1,301E+05	-7,914E-06	1,186E+05
4,4	17,6	-6,514E-06	1,394E+05	-9,745E-06	1,329E+05	-1,099E-05	1,213E+05
4,4	22,0	-5,804E-06	1,394E+05	-8,969E-06	1,329E+05	-8,320E-06	1,213E+05
4,4	26,4	-6,735E-06	1,394E+05	-1,027E-05	1,329E+05	-8,695E-06	1,213E+05
4,4	30,8	-4,526E-06	1,366E+05	-7,656E-06	1,301E+05	-3,226E-06	1,186E+05
4,4	35,2	6,084E-06	1,318E+05	5,542E-06	1,253E+05	1,800E-05	1,138E+05
4,4	39,6	1,536E-05	1,315E+05	1,715E-05	1,249E+05	3,666E-05	1,134E+05
4,4	44,0	1,251E-05	1,322E+05	1,339E-05	1,257E+05	3,262E-05	1,142E+05

f_{ob}	6,407E-05	f_{ob}	6,031E-05	f_{ob}	2,850E-04
f_{oa}	-9,813E-05	f_{oa}	-8,553E-06	f_{oa}	3,572E-05
f_{bb}	1,263E-04	f_{bb}	1,328E-04	f_{bb}	1,459E-04
f_{aa}	9,200E-05	f_{aa}	9,535E-05	f_{aa}	1,024E-04
f_{ab}	5,299E-05	f_{ab}	5,552E-05	f_{ab}	6,052E-05

TRAMO 4				TRAMO 4			
Δx	x	F	H	Δx	x		
0	0,0	3,262E-05	1,142E+05	4,4	26,4	-6,495E-05	8,578E+04
4,4	4,4	5,194E-05	1,134E+05	4,4	30,8	-4,890E-05	8,312E+04
4,4	8,8	4,847E-05	1,138E+05	4,4	35,2	4,203E-05	7,845E+04
4,4	13,2	-3,872E-05	8,312E+04	4,4	39,6	1,237E-04	7,814E+04
4,4	17,6	-6,002E-05	8,578E+04	4,4	44,0	9,257E-05	7,886E+04
4,4	22,0	-5,496E-05	8,578E+04				

f_{ob}	5,109E-04
f_{oa}	-1,098E-04
f_{bb}	2,094E-04
f_{aa}	1,292E-04
f_{ab}	8,340E-05

Tabela 4.17 – Coeficientes de flexibilidade da 4ª fase

Aplicando a equação matricial 4.14, obtêm-se os momentos hiperestáticos progressivos $M_{1,3}$, $M_{2,3}$ e $M_{3,3}$.

$$\begin{bmatrix} 2,21668\text{E-}04 & 5,55243\text{E-}05 & 0 \\ 5,55243\text{E-}05 & 2,35191\text{E-}04 & 6,05229\text{E-}05 \\ 0 & 6,05229\text{E-}05 & 2,75076\text{E-}04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{1,3} \\ M_{2,3} \\ M_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,55162\text{E-}05 \\ -9,60258\text{E-}05 \\ -1,75246\text{E-}04 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,3} = -0,19798 \text{ MN} \cdot \text{m} = -198 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{2,3} = -0,20947 \text{ MN} \cdot \text{m} = -209 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{3,3} = -0,59099 \text{ MN} \cdot \text{m} = -591 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

seção	σ_{14i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 70$ dias		$t = 91$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-1,80	-1,80	-1,77	-1,77	-4,93
1	-1,36	-2,60	-1,34	-2,56	-5,39
2	-1,10	-3,06	-1,10	-2,99	-6,16
3	-1,00	-3,26	-0,99	-3,17	-6,67
4	-1,06	-3,14	-1,06	-3,06	-6,63
5	-1,13	-3,02	-1,12	-2,94	-6,50
6	-1,04	-3,18	-1,03	-3,11	-6,75
7	-1,28	-2,74	-1,26	-2,70	-6,01
8	-2,32	-0,85	-2,27	-0,87	-4,63
9	-3,20	0,76	-3,14	0,71	-5,44
10	-2,97	0,34	-2,89	0,28	-5,82
11	-3,13	0,62	-3,06	0,57	-5,40
12	-2,17	-1,12	-2,11	-1,16	-4,75

seção	σ_{24i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 70$ dias		$t = 91$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
12	-2,58	-1,03	-2,52	-1,06	-5,92
13	-1,37	-3,24	-1,33	-3,20	-7,85
14	-1,06	-3,80	-1,04	-3,72	-8,97
15	-1,13	-3,68	-1,10	-3,60	-8,79
16	-1,01	-3,88	-0,99	-3,80	-9,10
17	-1,28	-3,40	-1,24	-3,36	-8,07
18	-2,44	-1,28	-2,38	-1,31	-6,03
19	-3,43	0,52	-3,35	0,46	-6,83
20	-3,16	0,03	-3,07	-0,05	-7,22
21	-3,49	0,62	-3,40	0,55	-6,84
22	-2,55	-1,08	-2,48	-1,13	-5,98

Tabela 4.18a – Redistribuição de tensão da 4ª fase

seção	σ_{34i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 70$ dias		$t = 91$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
22	-3,08	-1,24	-2,99	-1,27	-8,75
23	-1,74	-3,67	-1,68	-3,63	-11,31
24	-1,48	-4,15	-1,43	-4,07	-12,59
25	-1,66	-3,81	-1,61	-3,75	-12,02
26	-1,64	-3,86	-1,58	-3,81	-12,19
27	-2,06	-3,09	-1,97	-3,11	-10,65
28	-3,56	-0,36	-3,43	-0,49	-8,43
29	-4,85	1,98	-4,67	1,81	-10,39
30	-4,63	1,59	-4,43	1,38	-11,46
31	-5,84	3,80	-5,67	3,63	-10,95
32	-5,55	3,27	-5,44	3,15	-6,57

seção	σ_{44i} [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 70$ dias		$t = 91$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
32	-8,00	-3,10	-7,74	-2,86	-52,63
33	-4,25	-9,93	-4,21	-9,13	-63,91
34	-3,28	-11,70	-3,35	-10,61	-70,55
35	-3,46	-11,36	-3,55	-10,28	-69,22
36	-3,10	-12,02	-3,20	-10,88	-71,38
37	-3,89	-10,59	-3,90	-9,68	-65,29
38	-7,46	-4,08	-7,27	-3,70	-53,32
39	-10,49	1,43	-10,13	1,58	-59,99
40	-9,63	-0,12	-9,19	-0,09	-62,94
41	-8,75	-1,73	-8,42	-1,56	-58,18
42	-3,99	-10,39	-3,81	-9,92	-59,31

Tabela 4.18b – Redistribuição de tensão da 4ª fase

4.3.1.5 Cálculo da 5ª fase

seção	m	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	Z_{prot}	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0		0	0,00	0,00
1	4,4		-9	0,00	0,00
2	8,8		-17	0,00	-0,01
3	13,2		-26	0,01	-0,01
4	17,6		-35	0,01	-0,01
5	22,0		-44	0,01	-0,02
6	26,4		-52	0,01	-0,02
7	30,8		-61	0,01	-0,02
8	35,2		-70	0,01	-0,03
9	39,6		-79	0,02	-0,03
10	44,0		-87	0,02	-0,03
11	48,4		-44	0,01	-0,02
12	52,8		-1	0,00	0,00
12	52,8		-1	0,00	0,00
13	57,2		42	-0,01	0,02

seção	m distância	m Z_{prot}	kN.m M	MPa σ_{sup}	MPa σ_{inf}
14	61,6		86	-0,02	0,03
15	66,0		129	-0,03	0,05
16	70,4		172	-0,03	0,06
17	74,8		215	-0,04	0,08
18	79,2		259	-0,05	0,10
19	83,6		302	-0,06	0,11
20	88,0		345	-0,07	0,13
21	92,4		184	-0,04	0,07
22	96,8		22	0,00	0,01
22	96,8		22	0,00	0,01
23	101,2		-140	0,03	-0,05
24	105,6		-301	0,06	-0,11
25	110,0		-463	0,09	-0,17
26	114,4		-624	0,13	-0,23
27	118,8		-786	0,16	-0,29
28	123,2		-948	0,19	-0,35
29	127,6		-1109	0,22	-0,41
30	132,0		-1271	0,26	-0,47
31	136,4		-686	0,14	-0,25
32	140,8		-100	0,02	-0,04
32	140,8		-100	0,02	-0,04
33	145,2		485	-0,10	0,18
34	149,6		1070	-0,22	0,39
35	154,0		1655	-0,34	0,61
36	158,4		2241	-0,45	0,83
37	162,8		2826	-0,57	1,04
38	167,2		3411	-0,69	1,26
39	171,6		3996	-0,81	1,47
40	176,0		4581	-0,93	1,69
41	180,4		12781	-2,59	4,71
42	184,8		20981	-4,25	7,74
42	184,8	1,100	9781	-8,24	-2,65
43	189,2	0,388	-8222	-4,60	-9,29
44	193,6	0,150	-12481	-3,73	-10,87
45	198,0	0,150	-11045	-4,02	-10,34
46	202,4	0,150	-12315	-3,77	-10,80
47	206,8	0,229	-13491	-3,53	-11,24
48	211,2	0,468	-11771	-3,88	-10,60
49	215,6	0,864	-7508	-4,74	-9,03
50	220,0	1,420	0	-6,26	-6,26

Tabela 4.19 – Momento fletor e tensões iniciais da 5ª fase

σ_{15i}^* [MPa]			σ_{25i}^* [MPa]			σ_{35i}^* [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,197E-06$, $\chi_i = 0,0010$ $E_{ci} = 45800$ MPa , $\phi_i = 0,366$			$\epsilon_{csi} = -2,323E-06$, $\chi_i = 0,0012$ $E_{ci} = 45000$ MPa , $\phi_i = 0,389$			$\epsilon_{csi} = -2,527E-06$, $\chi_i = 0,0016$ $E_{ci} = 43700$ MPa , $\phi_i = 0,424$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf	seção	sup	inf
0	-1,63	-1,63	12	-2,28	-0,92	22	-2,59	-1,01
1	-1,22	-2,37	13	-1,23	-2,82	23	-1,38	-3,22
2	-0,99	-2,80	14	-0,99	-3,28	24	-1,07	-3,78
3	-0,89	-2,99	15	-1,07	-3,13	25	-1,13	-3,67
4	-0,94	-2,89	16	-0,99	-3,26	26	-1,02	-3,87
5	-0,99	-2,79	17	-1,25	-2,79	27	-1,28	-3,40
6	-0,91	-2,95	18	-2,31	-0,87	28	-2,44	-1,28
7	-1,12	-2,56	19	-3,21	0,77	29	-3,43	0,51
8	-2,06	-0,85	20	-2,99	0,37	30	-3,15	0,01
9	-2,86	0,60	21	-3,14	0,65	31	-3,48	0,61
10	-2,64	0,21	22	-2,18	-1,10	32	-2,55	-1,08
11	-2,79	0,48						
12	-1,93	-1,09						

σ_{45i}^* [MPa]			σ_{55i} [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,894E-06$, $\chi_i = 0,0025$ $E_{ci} = 41400$ MPa , $\phi_i = 0,495$			$\epsilon_{csi} = -3,677E-06$, $\chi_i = 0,0228$ $E_{ci} = 33300$ MPa , $\phi_i = 0,784$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf
32	-3,08	-1,24	42	-8,24	-2,65
33	-1,74	-3,67	43	-4,60	-9,29
34	-1,49	-4,14	44	-3,73	-10,87
35	-1,68	-3,79	45	-4,02	-10,34
36	-1,65	-3,83	46	-3,77	-10,80
37	-2,08	-3,06	47	-3,53	-11,24
38	-3,58	-0,32	48	-3,88	-10,60
39	-4,87	2,03	49	-4,74	-9,03
40	-4,66	1,64	50	-6,26	-6,26
41	-5,98	4,05			
42	-5,80	3,71			

Tabela 4.20 – Tensões iniciais ponderadas da 5ª fase

		TRAMO 1		TRAMO 2		TRAMO 3	
Δx	x	F	H	F	H	F	H
0	0,0	-4,876E-10	1,355E+05	9,963E-06	1,364E+05	1,268E-05	1,322E+05
4,4	4,4	-3,681E-06	1,370E+05	1,172E-05	1,357E+05	1,466E-05	1,315E+05
4,4	8,8	-5,629E-06	1,401E+05	3,289E-06	1,360E+05	4,516E-06	1,318E+05
4,4	13,2	-6,331E-06	1,426E+05	-5,005E-06	1,366E+05	-6,457E-06	1,301E+05
4,4	17,6	-5,732E-06	1,436E+05	-7,272E-06	1,394E+05	-9,649E-06	1,329E+05
4,4	22,0	-5,188E-06	1,436E+05	-6,408E-06	1,394E+05	-8,905E-06	1,329E+05
4,4	26,4	-6,025E-06	1,436E+05	-7,185E-06	1,394E+05	-1,024E-05	1,329E+05
4,4	30,8	-4,218E-06	1,409E+05	-4,829E-06	1,366E+05	-7,656E-06	1,301E+05
4,4	35,2	4,652E-06	1,360E+05	5,932E-06	1,318E+05	5,509E-06	1,253E+05
4,4	39,6	1,241E-05	1,357E+05	1,537E-05	1,315E+05	1,708E-05	1,249E+05
4,4	44,0	9,963E-06	1,364E+05	1,268E-05	1,322E+05	1,329E-05	1,257E+05
		f_{ob}	4,401E-05	f_{ob}	7,826E-05	f_{ob}	6,022E-05
		f_{oa}	-8,705E-05	f_{oa}	2,252E-06	f_{oa}	-6,750E-06
		f_{bb}	1,225E-04	f_{bb}	1,263E-04	f_{bb}	1,328E-04
		f_{aa}	8,925E-05	f_{aa}	9,162E-05	f_{aa}	9,535E-05
		f_{ab}	5,141E-05	f_{ab}	5,301E-05	f_{ab}	5,552E-05

		TRAMO 4		TRAMO 5	
Δx	x	F	H	F	H
0	0,0	1,329E-05	1,257E+05	3,307E-05	1,142E+05
4,4	4,4	1,778E-05	1,249E+05	5,403E-05	1,134E+05
4,4	8,8	6,913E-06	1,253E+05	5,219E-05	1,138E+05
4,4	13,2	-7,863E-06	1,186E+05	-2,881E-05	8,312E+04
4,4	17,6	-1,088E-05	1,213E+05	-4,749E-05	8,578E+04
4,4	22,0	-8,163E-06	1,213E+05	-3,951E-05	8,578E+04
4,4	26,4	-8,484E-06	1,213E+05	-4,657E-05	8,578E+04
4,4	30,8	-2,954E-06	1,186E+05	-5,507E-05	8,484E+04
4,4	35,2	1,834E-05	1,138E+05	-5,108E-05	8,235E+04
4,4	39,6	3,706E-05	1,134E+05	-3,472E-05	7,945E+04
4,4	44,0	3,307E-05	1,142E+05	-1,140E-08	7,796E+04
		f_{ob}	2,917E-04	f_{ob}	-7,487E-04
		f_{oa}	3,746E-05	f_{oa}	-1,182E-04
		f_{bb}	1,459E-04	f_{bb}	2,071E-04
		f_{aa}	1,024E-04	f_{aa}	1,290E-04
		f_{ab}	6,052E-05	f_{ab}	8,267E-05

Tabela 4.21 – Coeficientes de flexibilidade da 5ª fase

Aplicando a equação matricial 4.14, obtêm-se os momentos hiperestáticos progressivos $M_{1,4}$, $M_{2,4}$, $M_{3,4}$ e $M_{4,4}$.

$$\begin{bmatrix} 2,14105E-04 & 5,30123E-05 & 0 & 0 \\ 5,30123E-05 & 2,21697E-04 & 5,55243E-05 & 0 \\ 0 & 5,55243E-05 & 2,35191E-04 & 6,05229E-05 \\ 0 & 0 & 6,05229E-05 & 2,74864E-04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{1,4} \\ M_{2,4} \\ M_{3,4} \\ M_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,62645E-05 \\ -7,15135E-05 \\ -9,76778E-05 \\ -1,73493E-04 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,4} = -0,15863 \text{ MN} \cdot \text{m} = -159 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{2,4} = -0,23205 \text{ MN} \cdot \text{m} = -232 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{3,4} = -0,21000 \text{ MN} \cdot \text{m} = -210 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{4,4} = -0,58496 \text{ MN} \cdot \text{m} = -585 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

seção	σ_{15t}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 91$ dias		$t = 112$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-1,63	-1,63	-1,61	-1,61	-4,14
1	-1,22	-2,37	-1,21	-2,33	-4,54
2	-0,99	-2,80	-0,98	-2,74	-5,20
3	-0,89	-2,99	-0,89	-2,91	-5,65
4	-0,94	-2,89	-0,94	-2,82	-5,63
5	-0,99	-2,79	-0,99	-2,72	-5,52
6	-0,91	-2,95	-0,90	-2,88	-5,75
7	-1,12	-2,56	-1,10	-2,52	-5,12
8	-2,06	-0,85	-2,02	-0,86	-3,91
9	-2,86	0,60	-2,80	0,56	-4,55
10	-2,64	0,21	-2,58	0,16	-4,86
11	-2,79	0,48	-2,73	0,43	-4,52
12	-1,93	-1,09	-1,88	-1,12	-4,02

Tabela 4.22a – Redistribuição de tensão da 5ª fase

seção	σ_{25i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 91$ dias		$t = 112$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
12	-2,28	-0,92	-2,23	-0,94	-4,66
13	-1,23	-2,82	-1,20	-2,80	-6,16
14	-0,99	-3,28	-0,96	-3,22	-7,00
15	-1,07	-3,13	-1,04	-3,08	-6,81
16	-0,99	-3,26	-0,97	-3,21	-7,01
17	-1,25	-2,79	-1,21	-2,78	-6,17
18	-2,31	-0,87	-2,25	-0,91	-4,67
19	-3,21	0,77	-3,13	0,70	-5,42
20	-2,99	0,37	-2,90	0,29	-5,82
21	-3,14	0,65	-3,06	0,58	-5,40
22	-2,18	-1,10	-2,12	-1,15	-4,76
seção	σ_{35i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 91$ dias		$t = 112$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
22	-2,59	-1,01	-2,53	-1,05	-5,93
23	-1,38	-3,22	-1,34	-3,18	-7,86
24	-1,07	-3,78	-1,04	-3,71	-8,99
25	-1,13	-3,67	-1,11	-3,60	-8,81
26	-1,02	-3,87	-0,99	-3,80	-9,12
27	-1,28	-3,40	-1,24	-3,36	-8,09
28	-2,44	-1,28	-2,38	-1,31	-6,03
29	-3,43	0,51	-3,34	0,45	-6,82
30	-3,15	0,01	-3,06	-0,06	-7,21
31	-3,48	0,61	-3,39	0,54	-6,84
32	-2,55	-1,08	-2,48	-1,13	-5,98
seção	σ_{45i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 91$ dias		$t = 112$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
32	-3,08	-1,24	-2,99	-1,27	-8,75
33	-1,74	-3,67	-1,69	-3,62	-11,30
34	-1,49	-4,14	-1,44	-4,05	-12,56
35	-1,68	-3,79	-1,62	-3,73	-11,98
36	-1,65	-3,83	-1,59	-3,78	-12,13
37	-2,08	-3,06	-1,99	-3,07	-10,59
38	-3,58	-0,32	-3,45	-0,44	-8,40
39	-4,87	2,03	-4,70	1,86	-10,41
40	-4,66	1,64	-4,46	1,43	-11,51
41	-5,98	4,05	-5,81	3,88	-11,03
42	-5,80	3,71	-5,68	3,59	-6,34
seção	σ_{55i} [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 91$ dias		$t = 112$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
42	-8,24	-2,65	-7,99	-2,41	-52,20
43	-4,60	-9,29	-4,56	-8,52	-62,04
44	-3,73	-10,87	-3,80	-9,83	-67,64
45	-4,02	-10,34	-4,10	-9,31	-65,63
46	-3,77	-10,80	-3,86	-9,73	-67,11
47	-3,53	-11,24	-3,61	-10,18	-68,10
48	-3,88	-10,60	-3,88	-9,73	-64,80
49	-4,74	-9,03	-4,62	-8,45	-59,28
50	-6,26	-6,26	-6,00	-6,00	-55,68

Tabela 4.22b – Redistribuição de tensão da 5ª fase

4.3.1.6 Cálculo da 6ª fase

seção	m	kN.m	MPa	MPa	seção	m	kN.m	MPa	MPa
	distância	M	σ_{sup}	σ_{inf}		distância	M	σ_{sup}	σ_{inf}
0	0,0	0	0,00	0,00	26	114,4	3529	-7,15	13,02
1	4,4	2963	-6,00	10,93	27	118,8	2244	-4,55	8,28
2	8,8	5067	-10,27	18,69	28	123,2	100	-0,20	0,37
3	13,2	6311	-12,79	23,28	29	127,6	-2905	5,88	-10,71
4	17,6	6695	-13,56	24,70	30	132,0	-6768	13,71	-24,97
5	22,0	6220	-12,60	22,94	31	136,4	-3140	6,36	-11,58
6	26,4	4886	-9,90	18,02	32	140,8	-372	0,75	-1,37
7	30,8	2691	-5,45	9,93	32	140,8	-372	0,75	-1,37
8	35,2	-363	0,73	-1,34	33	145,2	1537	-3,11	5,67
9	39,6	-4276	8,66	-15,77	34	149,6	2586	-5,24	9,54
10	44,0	-9049	18,33	-33,38	35	154,0	2776	-5,62	10,24
11	48,4	-4957	10,04	-18,29	36	158,4	2106	-4,27	7,77
12	52,8	-1725	3,50	-6,36	37	162,8	576	-1,17	2,13
12	52,8	-1725	3,50	-6,36	38	167,2	-1813	3,67	-6,69
13	57,2	647	-1,31	2,39	39	171,6	-5061	10,25	-18,67
14	61,6	2160	-4,38	7,97	40	176,0	-9170	18,58	-33,82
15	66,0	2814	-5,70	10,38	41	180,4	-4385	8,88	-16,17
16	70,4	2608	-5,28	9,62	42	184,8	-459	0,93	-1,69
17	74,8	1542	-3,12	5,69	42	184,8	-459	0,93	-1,69
18	79,2	-384	0,78	-1,41	43	189,2	2607	-5,28	9,62
19	83,6	-3169	6,42	-11,69	44	193,6	4813	-9,75	17,75
20	88,0	-6813	13,80	-25,13	45	198,0	6160	-12,48	22,72
21	92,4	-2940	5,96	-10,85	46	202,4	6647	-13,47	24,52
22	96,8	73	-0,15	0,27	47	206,8	6275	-12,71	23,15
22	96,8	73	-0,15	0,27	48	211,2	5043	-10,22	18,60
23	101,2	2226	-4,51	8,21	49	215,6	2951	-5,98	10,89
24	105,6	3520	-7,13	12,98	50	220,0	0	0,00	0,00
25	110,0	3954	-8,01	14,59					

Tabela 4.23 – Momento fletor e tensões iniciais da 6ª fase

σ_{16i}^* [MPa]			σ_{26i}^* [MPa]			σ_{36i}^* [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,122E-04$, $\chi_i = 0,0294$			$\epsilon_{csi} = -2,144E-04$, $\chi_i = 0,0304$			$\epsilon_{csi} = -2,168E-04$, $\chi_i = 0,0316$		
$E_{ci} = 46400$ MPa , $\phi_i = 1,577$			$E_{ci} = 45800$ MPa , $\phi_i = 1,646$			$E_{ci} = 45000$ MPa , $\phi_i = 1,727$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf	seção	sup	inf
0	-6,53	-6,53	12	-7,96	-3,97	22	-8,34	-3,23
1	-5,50	-8,40	13	-4,60	-10,08	23	-4,93	-9,43
2	-4,99	-9,34	14	-3,97	-11,22	24	-4,26	-10,67
3	-4,84	-9,62	15	-4,38	-10,47	25	-4,61	-10,03
4	-5,12	-9,10	16	-4,04	-11,09	26	-4,21	-10,75
5	-5,25	-8,86	17	-4,74	-9,83	27	-4,85	-9,59
6	-4,64	-9,98	18	-8,17	-3,59	28	-8,21	-3,47
7	-5,05	-9,22	19	-10,85	1,30	29	-10,83	1,30
8	-8,20	-3,50	20	-9,30	-1,52	30	-9,23	-1,62
9	-10,60	0,87	21	-10,55	0,76	31	-10,47	0,65
10	-8,77	-2,45	22	-7,58	-4,65	32	-7,49	-4,77
11	-10,08	-0,07						
12	-7,16	-5,38						

Tabela 4.24a – Tensões iniciais ponderadas da 6ª fase

σ_{46i}^* [MPa]			σ_{56i}^* [MPa]		
$\epsilon_{csi} = -2,193E-04$, $\chi_i = 0,0332$ $E_{ci} = 43700$ MPa , $\phi_i = 1,830$			$\epsilon_{csi} = -2,222E-04$, $\chi_i = 0,0357$ $E_{ci} = 41400$ MPa , $\phi_i = 1,981$		
seção	sup	inf	seção	sup	inf
32	-8,15	-3,36	42	-8,14	-2,82
33	-4,77	-9,52	43	-5,12	-8,32
34	-4,09	-10,77	44	-4,70	-9,08
35	-4,42	-10,16	45	-5,27	-8,05
36	-4,01	-10,91	46	-5,11	-8,34
37	-4,61	-9,81	47	-4,80	-8,91
38	-7,92	-3,79	48	-4,89	-8,73
39	-10,48	0,87	49	-5,33	-7,93
40	-8,87	-2,06	50	-6,25	-6,25
41	-10,35	0,64			
42	-7,67	-4,25			

Tabela 4.24b – Tensões iniciais ponderadas da 6ª fase

		TRAMO 1		TRAMO 2		TRAMO 3	
Δx	x	F	H	F	H	F	H
0	0,0	-2,353E-08	7,784E+04	7,993E-05	7,874E+04	1,076E-04	7,589E+04
4,4	4,4	-2,256E-05	7,933E+04	1,467E-04	7,802E+04	1,763E-04	7,517E+04
4,4	8,8	-2,835E-05	8,221E+04	3,977E-05	7,833E+04	6,084E-05	7,549E+04
4,4	13,2	-2,500E-05	8,468E+04	-4,331E-05	8,011E+04	-2,942E-05	7,675E+04
4,4	17,6	-1,061E-05	8,562E+04	-5,887E-05	8,275E+04	-4,876E-05	7,938E+04
4,4	22,0	-5,407E-06	8,562E+04	-4,182E-05	8,275E+04	-3,318E-05	7,938E+04
4,4	26,4	-2,976E-05	8,562E+04	-5,595E-05	8,275E+04	-5,071E-05	7,938E+04
4,4	30,8	-2,251E-05	8,297E+04	-3,728E-05	8,011E+04	-3,344E-05	7,675E+04
4,4	35,2	8,461E-05	7,833E+04	8,762E-05	7,549E+04	9,659E-05	7,214E+04
4,4	39,6	1,692E-04	7,802E+04	1,898E-04	7,517E+04	2,022E-04	7,183E+04
4,4	44,0	7,993E-05	7,874E+04	1,076E-04	7,589E+04	1,116E-04	7,254E+04
		f_{ob}	1,073E-03	f_{ob}	1,118E-03	f_{ob}	1,329E-03
		f_{oa}	-2,392E-04	f_{oa}	3,531E-04	f_{oa}	6,606E-04
		f_{bb}	2,104E-04	f_{bb}	2,183E-04	f_{bb}	2,282E-04
		f_{aa}	1,518E-04	f_{aa}	1,573E-04	f_{aa}	1,637E-04
		f_{ab}	8,718E-05	f_{ab}	9,054E-05	f_{ab}	9,441E-05

		TRAMO 4		TRAMO 5	
Δx	x	F	H	F	H
0	0,0	1,116E-04	7,254E+04	1,063E-04	6,812E+04
4,4	4,4	1,847E-04	7,183E+04	1,991E-04	6,741E+04
4,4	8,8	6,163E-05	7,214E+04	8,061E-05	6,772E+04
4,4	13,2	-3,536E-05	7,231E+04	-7,626E-06	6,572E+04
4,4	17,6	-5,631E-05	7,493E+04	-1,735E-05	6,832E+04
4,4	22,0	-4,042E-05	7,493E+04	1,335E-05	6,832E+04
4,4	26,4	-6,013E-05	7,493E+04	4,725E-06	6,832E+04
4,4	30,8	-4,328E-05	7,231E+04	-1,675E-05	6,740E+04
4,4	35,2	9,397E-05	6,772E+04	-2,504E-05	6,497E+04
4,4	39,6	2,058E-04	6,741E+04	-2,291E-05	6,215E+04
4,4	44,0	1,063E-04	6,812E+04	-3,573E-08	6,068E+04
		f_{ob}	1,222E-03	f_{ob}	-7,086E-05
		f_{oa}	6,121E-04	f_{oa}	9,862E-04
		f_{bb}	2,426E-04	f_{bb}	2,641E-04
		f_{aa}	1,724E-04	f_{aa}	1,861E-04
		f_{ab}	9,996E-05	f_{ab}	1,083E-04

Tabela 4.25 – Coeficientes de flexibilidade da 6ª fase

Aplicando a equação matricial 4.14, obtêm-se os momentos hiperestáticos progressivos $M_{1,4}$, $M_{2,4}$, $M_{3,4}$ e $M_{4,4}$.

$$\begin{bmatrix} 3,67782E-04 & 9,05395E-05 & 0 & 0 \\ 9,05395E-05 & 3,81998E-04 & 9,44060E-05 & 0 \\ 0 & 9,44060E-05 & 4,00565E-04 & 9,99642E-05 \\ 0 & 0 & 9,99642E-05 & 4,28740E-04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{1,4} \\ M_{2,4} \\ M_{3,4} \\ M_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,42646E-03 \\ -1,77821E-03 \\ -1,94079E-03 \\ -2,20827E-03 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,4} = -3,09462 \text{ MN} \cdot \text{m} = -3095 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{2,4} = -3,18438 \text{ MN} \cdot \text{m} = -3184 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{3,4} = -2,98281 \text{ MN} \cdot \text{m} = -2983 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{4,4} = -4,45514 \text{ MN} \cdot \text{m} = -4455 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

seção	σ_{16i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 112$ dias		$t = 10000$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
0	-6,53	-6,53	-5,99	-5,99	-114,75
1	-5,50	-8,40	-5,23	-7,32	-117,42
2	-4,99	-9,34	-4,91	-7,87	-120,95
3	-4,84	-9,62	-4,85	-7,95	-122,52
4	-5,12	-9,10	-5,12	-7,48	-120,53
5	-5,25	-8,86	-5,19	-7,36	-120,16
6	-4,64	-9,98	-4,53	-8,48	-126,60
7	-5,05	-9,22	-4,71	-8,18	-123,85
8	-8,20	-3,50	-7,36	-3,53	-111,67
9	-10,60	0,87	-9,34	0,19	-119,39
10	-8,77	-2,45	-7,31	-3,53	-117,91
11	-10,08	-0,07	-8,76	-0,88	-118,47
12	-7,16	-5,38	-6,18	-5,63	-114,74

seção	σ_{26i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 112$ dias		$t = 10000$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
12	-7,96	-3,97	-6,97	-4,20	-116,27
13	-4,60	-10,08	-4,07	-9,24	-133,77
14	-3,97	-11,22	-3,63	-9,95	-140,62
15	-4,38	-10,47	-4,03	-9,28	-136,73
16	-4,04	-11,09	-3,70	-9,84	-140,00
17	-4,74	-9,83	-4,20	-9,02	-132,72
18	-8,17	-3,59	-7,17	-3,84	-115,76
19	-10,85	1,30	-9,49	0,48	-123,52
20	-9,30	-1,52	-7,78	-2,63	-123,50
21	-10,55	0,76	-9,20	-0,05	-123,06
22	-7,58	-4,65	-6,59	-4,89	-117,29

Tabela 4.26a – Redistribuição de tensão da 6ª fase

seção	σ_{36i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 112$ dias		$t = 10000$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
22	-8,34	-3,23	-7,34	-3,45	-119,28
23	-4,93	-9,43	-4,41	-8,57	-135,76
24	-4,26	-10,67	-3,92	-9,35	-142,84
25	-4,61	-10,03	-4,27	-8,77	-139,21
26	-4,21	-10,75	-3,89	-9,41	-143,17
27	-4,85	-9,59	-4,34	-8,69	-136,32
28	-8,21	-3,47	-7,23	-3,64	-119,55
29	-10,83	1,30	-9,48	0,56	-128,26
30	-9,23	-1,62	-7,71	-2,65	-128,17
31	-10,47	0,65	-9,10	-0,14	-127,59
32	-7,49	-4,77	-6,46	-5,02	-121,78

seção	σ_{46i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 112$ dias		$t = 10000$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
32	-8,15	-3,36	-7,11	-3,59	-124,75
33	-4,77	-9,52	-4,19	-8,65	-143,43
34	-4,09	-10,77	-3,68	-9,47	-151,81
35	-4,42	-10,16	-3,97	-8,98	-148,64
36	-4,01	-10,91	-3,54	-9,69	-153,58
37	-4,61	-9,81	-3,92	-9,11	-146,40
38	-7,92	-3,79	-6,69	-4,33	-126,23
39	-10,48	0,87	-8,83	-0,33	-132,98
40	-8,87	-2,06	-7,03	-3,64	-131,25
41	-10,35	0,64	-8,77	-0,45	-132,90
42	-7,67	-4,25	-6,56	-4,57	-126,49

seção	σ_{56i}^* [MPa]				$\Delta\sigma_p$
	$t_0 = 112$ dias		$t = 10000$ dias		
	sup	inf	sup	inf	
42	-8,14	-2,82	-7,02	-3,10	-131,56
43	-5,12	-8,32	-4,60	-7,30	-145,99
44	-4,70	-9,08	-4,47	-7,50	-148,65
45	-5,27	-8,05	-5,11	-6,46	-140,23
46	-5,11	-8,34	-5,04	-6,57	-140,70
47	-4,80	-8,91	-4,76	-7,04	-143,64
48	-4,89	-8,73	-4,77	-7,05	-142,44
49	-5,33	-7,93	-5,00	-6,68	-138,85
50	-6,25	-6,25	-5,61	-5,61	-135,87

Tabela 4.26b – Redistribuição de tensão da 6ª fase

4.3.2 Viga contínua em fase única

Considerando-se fase única de construção e carregamento, foi determinado o diagrama de momentos fletores da carga permanente somada à protensão (g+P), utilizando-se o programa de análise estrutural SAP2000n[®].

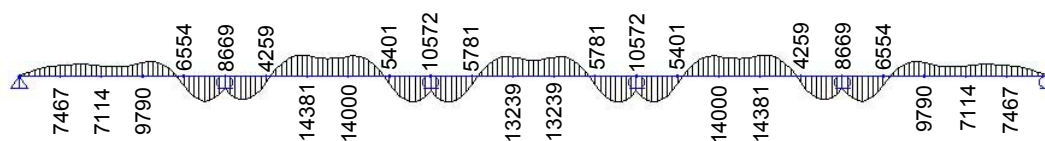


Figura 4.14 – Diagrama de momento fletor para fase única

seção	M - imediato	M -progressivo	M - final	M - fase única	Δ
0	0	0	0	0	0,0%
1	-4680	-413	-5093	-4930	3,3%
2	-6975	-827	-7802	-7467	4,5%
3	-7586	-1240	-8826	-8312	6,2%
4	-6161	-1653	-7814	-7114	9,8%
5	-5502	-2067	-7568	-6673	13,4%
6	-8407	-2480	-10887	-9790	11,2%
7	-6478	-2893	-9372	-8064	16,2%
8	8336	-3307	5029	6554	-23,3%
9	19584	-3720	15864	17615	-9,9%
10	10818	-4133	6685	8669	-22,9%
11	18716	-4142	14574	16468	-11,5%
12	6598	-4150	2448	4259	-42,5%
12	6598	-4150	2448	4259	-42,5%
13	-9085	-4158	-13243	-11507	15,1%
14	-11883	-4167	-16049	-14381	11,6%
15	-9846	-4175	-14021	-12412	13,0%
16	-11374	-4183	-15557	-14000	11,1%
17	-8067	-4191	-12259	-10746	14,1%
18	8124	-4200	3924	5401	-27,3%
19	20750	-4208	16542	17990	-8,0%
20	13362	-4216	9145	10572	-13,5%
21	20972	-4173	16799	18181	-7,6%
22	8567	-4130	4437	5781	-23,2%
22	8567	-4130	4437	5781	-23,2%
23	-7403	-4087	-11489	-10175	12,9%
24	-10488	-4043	-14531	-13239	9,8%
25	-8738	-4000	-12738	-11460	11,2%
26	-10553	-3957	-14510	-13239	9,6%
27	-7534	-3914	-11447	-10175	12,5%
28	8371	-3870	4500	5781	-22,2%
29	20710	-3827	16883	18181	-7,1%
30	13034	-3784	9250	10572	-12,5%
31	20579	-3909	16669	17990	-7,3%
32	8108	-4035	4073	5401	-24,6%
32	8108	-4035	4073	5401	-24,6%
33	-7927	-4161	-12088	-10746	12,5%
34	-11078	-4286	-15364	-14000	9,7%
35	-9393	-4412	-13805	-12412	11,2%
36	-11274	-4538	-15812	-14381	9,9%
37	-8320	-4663	-12984	-11507	12,8%
38	7518	-4789	2730	4259	-35,9%
39	19792	-4914	14878	16468	-9,7%
40	12051	-5040	7011	8669	-19,1%
41	20694	-4536	16158	17615	-8,3%
42	9322	-4032	5290	6554	-19,3%

seção	M - imediato	M -progressivo	M - final	M - fase única	Δ
42	9322	-4032	5290	6554	-19,3%
43	-5616	-3528	-9144	-8064	13,4%
44	-7668	-3024	-10692	-9790	9,2%
45	-4885	-2520	-7405	-6673	11,0%
46	-5668	-2016	-7684	-7114	8,0%
47	-7216	-1512	-8728	-8312	5,0%
48	-6729	-1008	-7737	-7467	3,6%
49	-4557	-504	-5061	-4930	2,7%
50	0	0	0	0	0,0%

Tabela 4.27 – Resumo de valores de momento fletor

Na tab. 4.27 pode-se observar os valores do momento fletor final, soma das parcelas inicial e progressiva, ao lado dos valores iniciais para o caso de fase única de aplicação de carga, gerando variações de até 42,5% com maiores amplitudes nas primeiras fases construtivas.

4.3.3 Perdas de protensão

i	$\Delta\sigma_p$	ΔN_p	perda
0	-195,00	-5187	13,3%
1	-203,73	-5419	13,9%
2	-215,89	-5743	14,8%
3	-224,69	-5977	15,4%
4	-221,88	-5902	15,2%
5	-219,70	-5844	15,0%
6	-229,76	-6112	15,7%
7	-217,73	-5792	14,9%
8	-187,71	-4993	12,8%
9	-206,67	-5497	14,1%
10	-210,23	-5592	14,4%
11	-204,36	-5436	14,0%
12	-195,36	-5197	13,4%
12	-188,26	-5008	12,9%
13	-223,07	-5934	15,3%
14	-239,80	-6379	16,4%
15	-233,63	-6214	16,0%
16	-239,72	-6377	16,4%
17	-222,94	-5930	15,2%
18	-188,20	-5006	12,9%
19	-206,14	-5483	14,1%
20	-210,94	-5611	14,4%
21	-204,43	-5438	14,0%
22	-193,91	-5158	13,3%
22	-186,60	-4963	12,8%
23	-218,87	-5822	15,0%
24	-234,98	-6250	16,1%
25	-229,27	-6099	15,7%
26	-235,86	-6274	16,1%
27	-220,35	-5861	15,1%
28	-187,33	-4983	12,8%
29	-205,46	-5465	14,0%
30	-209,79	-5580	14,3%
31	-203,56	-5415	13,9%
32	-193,63	-5151	13,2%
32	-186,13	-4951	12,7%
33	-218,64	-5816	15,0%
34	-234,92	-6249	16,1%
35	-229,84	-6114	15,7%
36	-237,09	-6306	16,2%
37	-222,29	-5913	15,2%
38	-187,95	-4999	12,9%
39	-203,38	-5410	13,9%
40	-205,70	-5472	14,1%
41	-202,11	-5376	13,8%
42	-192,14	-5111	13,1%
42	-183,76	-4888	12,6%
43	-208,03	-5534	14,2%
44	-216,29	-5753	14,8%
45	-205,86	-5476	14,1%
46	-207,81	-5528	14,2%
47	-211,74	-5632	14,5%
48	-207,25	-5513	14,2%
49	-198,13	-5270	13,5%
50	-191,55	-5095	13,1%
		média	14,21%

Tabela 4.28 – Perdas de protensão progressivas – instante $t = 10000$ dias

Na tab. 4.28 observa-se que as perdas de protensão progressivas variam num intervalo de 12,6% a 16,4%, apresentando um valor médio de 14,2%, em relação ao valor de protensão inicial (P_i).

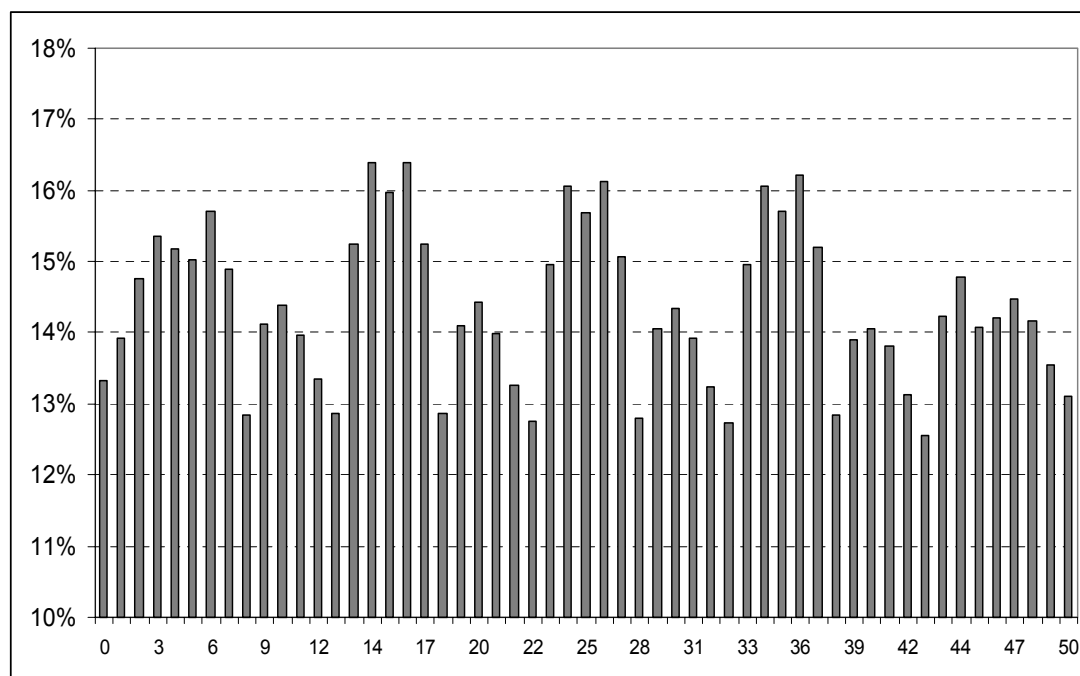


Figura 4.15 – Gráfico de perdas progressivas nas seções

4.3.4 Redistribuição de tensão normal

A tab. 4.29 apresenta a redistribuição de tensão normal no instante t igual a 10000 dias. O processo de cálculo permite encontrar a redistribuição em qualquer fase construtiva como também as forças progressivas de protensão, tal qual apresentado nas fig. 4.16 (seção 5) e 4.17 (seção 10).

seção	σ - imediato [MPa]		σ - progressivo [MPa]		σ - final [MPa]	
	sup	inf	sup	inf	sup	inf
0	-6,26	-6,26	0,93	0,93	-5,33	-5,33
1	-5,31	-7,99	0,44	1,93	-4,87	-6,06
2	-4,85	-8,83	0,09	2,75	-4,76	-6,08
3	-4,72	-9,06	-0,12	3,24	-4,85	-5,82
4	-5,01	-8,53	-0,13	3,21	-5,14	-5,32
5	-5,15	-8,29	-0,04	3,02	-5,19	-5,27
6	-4,56	-9,36	0,02	3,04	-4,54	-6,32

seção	σ - imediato [MPa]		σ - progressivo [MPa]		σ - final [MPa]	
	sup	inf	sup	inf	sup	inf
7	-4,95	-8,65	0,41	2,17	-4,54	-6,48
8	-7,95	-3,19	1,24	0,26	-6,71	-2,92
9	-10,23	0,96	1,95	-0,78	-8,28	0,18
10	-8,45	-2,27	2,33	-1,41	-6,13	-3,68
11	-10,05	0,64	2,03	-0,94	-8,03	-0,30
12	-7,60	-3,83	1,44	0,01	-6,16	-3,82
12	-7,60	-3,83	1,41	-0,05	-6,18	-3,87
13	-4,42	-9,61	0,66	1,79	-3,76	-7,83
14	-3,85	-10,64	0,34	2,59	-3,51	-8,05
15	-4,27	-9,89	0,36	2,48	-3,91	-7,41
16	-3,96	-10,46	0,35	2,58	-3,61	-7,87
17	-4,63	-9,24	0,67	1,77	-3,96	-7,47
18	-7,91	-3,26	1,42	-0,06	-6,48	-3,33
19	-10,47	1,39	2,05	-0,96	-8,42	0,43
20	-8,97	-1,33	2,35	-1,44	-6,62	-2,78
21	-10,51	1,47	2,03	-0,95	-8,48	0,52
22	-8,00	-3,10	1,43	0,01	-6,57	-3,09
22	-8,00	-3,10	1,40	-0,05	-6,59	-3,15
23	-4,76	-8,99	0,65	1,75	-4,11	-7,24
24	-4,14	-10,13	0,33	2,55	-3,81	-7,58
25	-4,49	-9,48	0,33	2,47	-4,16	-7,01
26	-4,12	-10,15	0,31	2,60	-3,81	-7,55
27	-4,73	-9,04	0,62	1,84	-4,12	-7,20
28	-7,96	-3,17	1,35	0,05	-6,60	-3,12
29	-10,46	1,38	1,97	-0,82	-8,49	0,56
30	-8,90	-1,45	2,25	-1,28	-6,65	-2,74
31	-10,43	1,33	1,97	-0,86	-8,46	0,47
32	-7,90	-3,27	1,41	0,04	-6,50	-3,23
32	-7,90	-3,27	1,38	-0,02	-6,52	-3,29
33	-4,66	-9,19	0,67	1,72	-3,99	-7,47
34	-4,02	-10,35	0,38	2,46	-3,64	-7,88
35	-4,36	-9,73	0,41	2,33	-3,94	-7,40
36	-3,98	-10,42	0,42	2,41	-3,55	-8,01
37	-4,58	-9,33	0,77	1,59	-3,81	-7,74
38	-7,78	-3,49	1,54	-0,28	-6,24	-3,77
39	-10,27	1,04	2,18	-1,23	-8,09	-0,19
40	-8,70	-1,82	2,48	-1,75	-6,22	-3,57
41	-10,45	1,37	2,09	-1,09	-8,36	0,28
42	-8,15	-2,82	1,40	0,03	-6,75	-2,79
42	-8,15	-2,82	1,38	-0,04	-6,77	-2,86
43	-5,12	-8,33	0,55	1,79	-4,58	-6,54
44	-4,71	-9,09	0,16	2,61	-4,55	-6,48
45	-5,27	-8,06	0,08	2,61	-5,19	-5,45
46	-5,11	-8,35	-0,03	2,83	-5,14	-5,52
47	-4,80	-8,92	-0,05	2,92	-4,85	-6,00
48	-4,90	-8,74	0,13	2,55	-4,77	-6,19
49	-5,34	-7,94	0,45	1,84	-4,89	-6,11
50	-6,26	-6,26	0,91	0,91	-5,35	-5,35

Tabela 4.29 – Redistribuição de tensão normal – instante $t = 10000$ dias

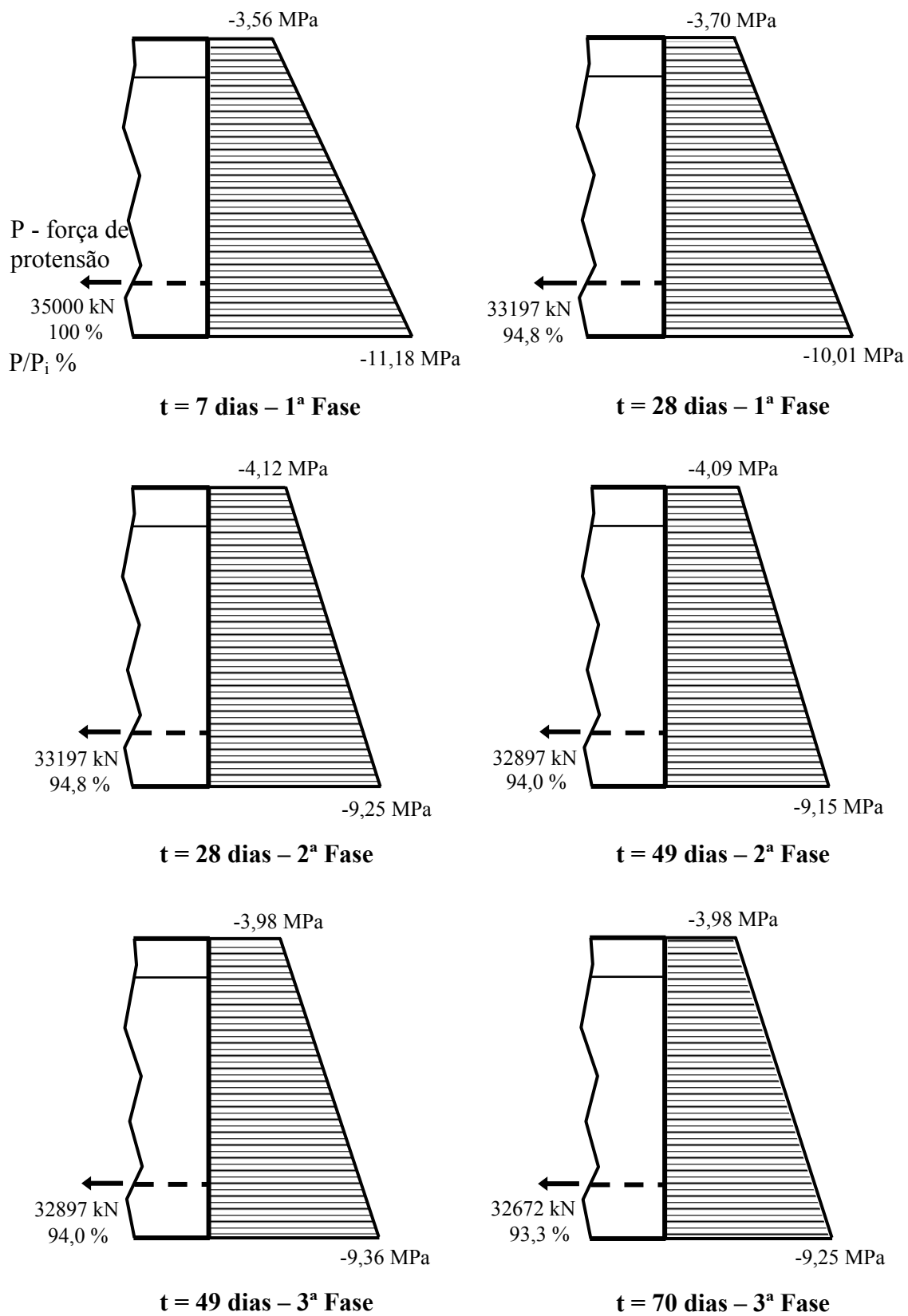


Figura 4.16a – Redistribuição de tensão na seção 5

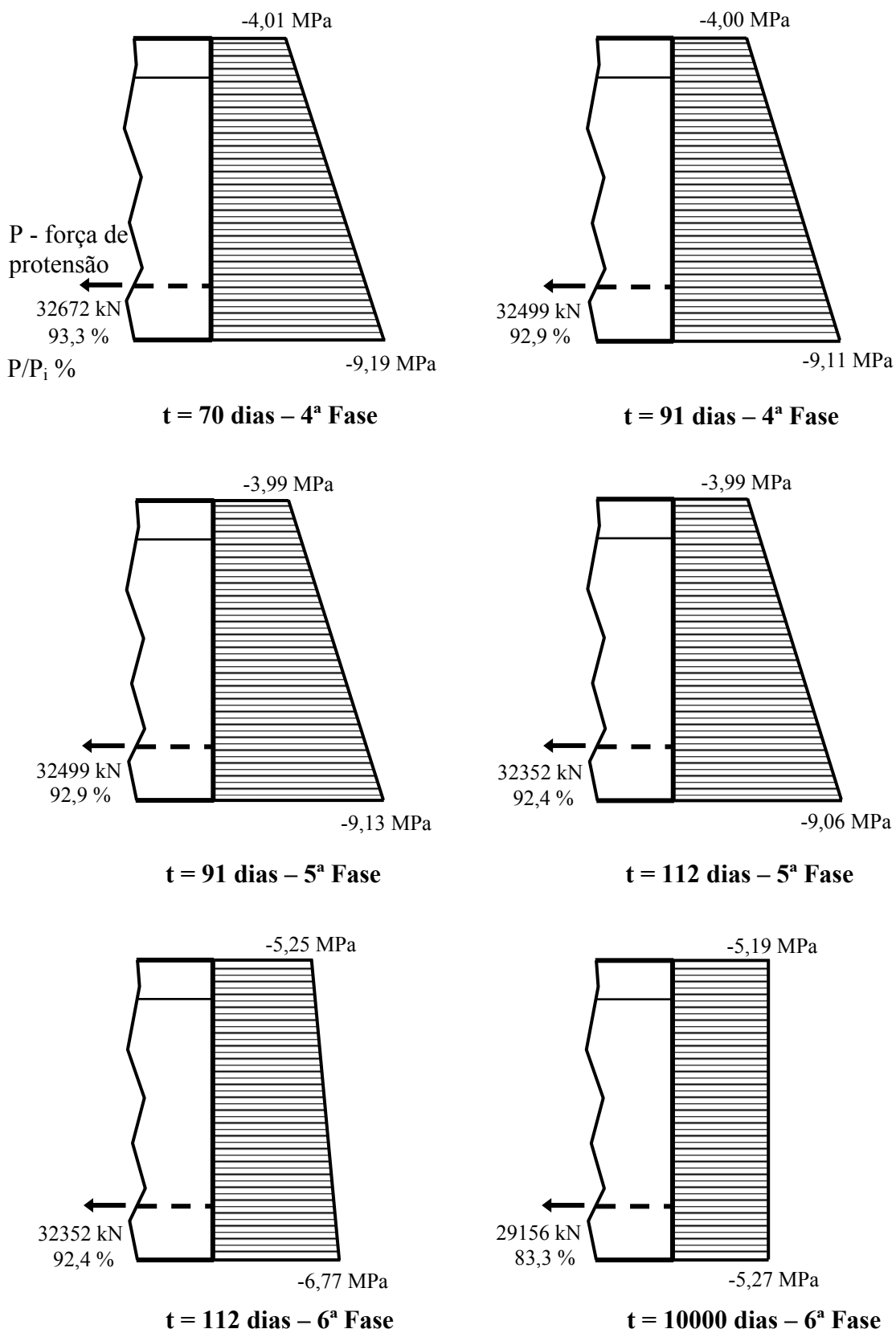


Figura 4.16b – Redistribuição de tensão na seção 5

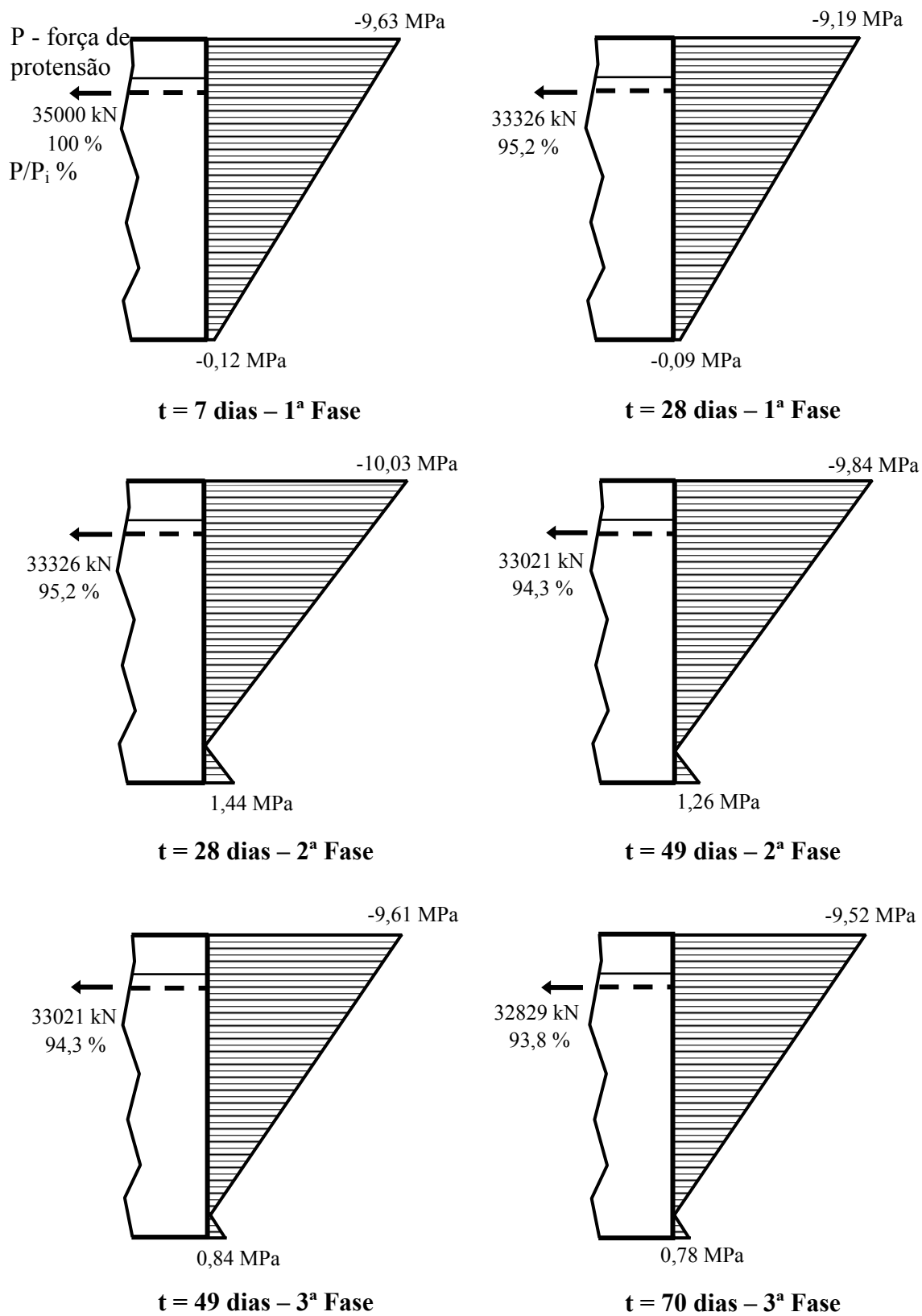


Figura 4.17a – Redistribuição de tensão na seção 10

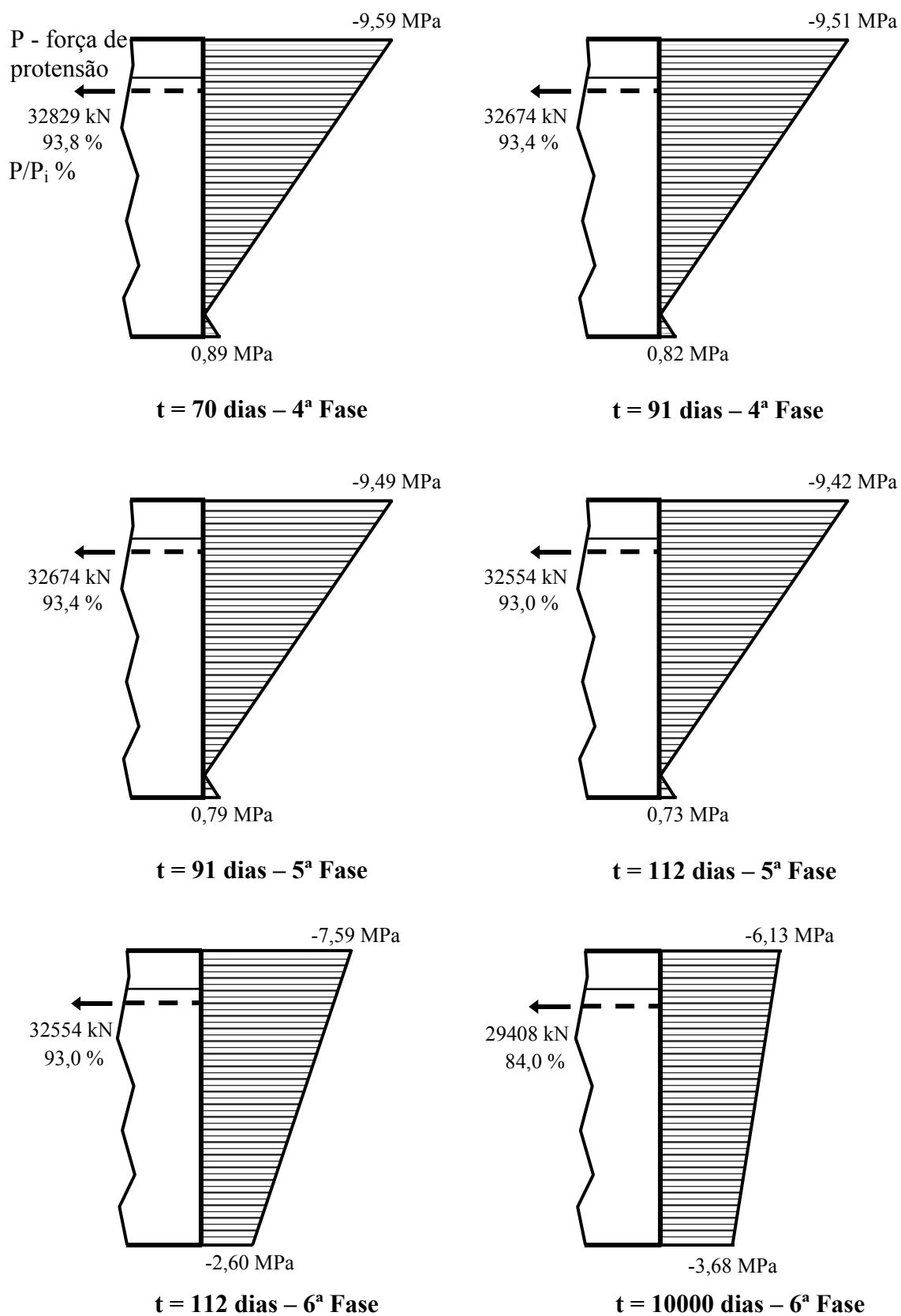
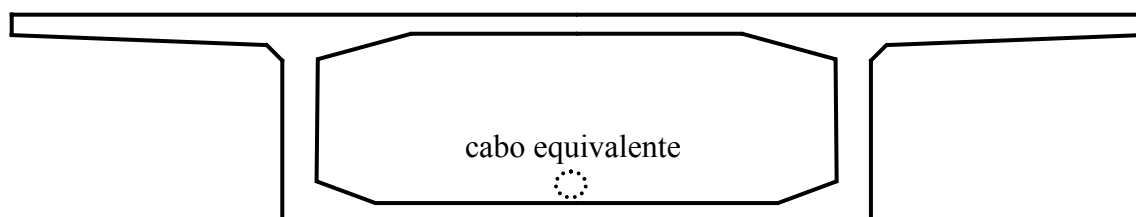
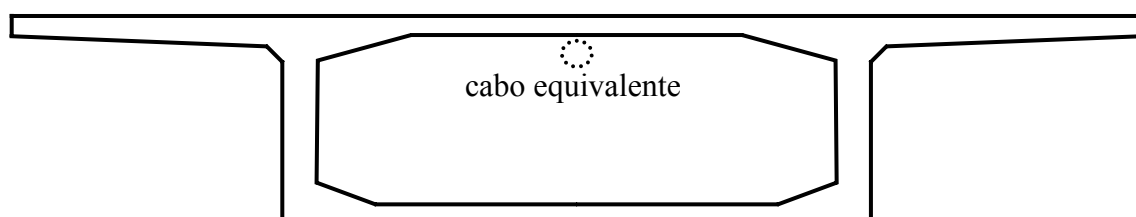


Figura 4.17b – Redistribuição de tensão na seção 10



SEÇÃO 5 – meio do vão do 1º tramo



SEÇÃO 10 – 2º apoio

Figura 4.18 – Desenho esquemático das seções transversais 5 e 10

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho pôde-se notar que a análise de redistribuição de esforços em vigas de concreto protendido com seção composta encontra no método dos prismas equivalentes uma ferramenta de grande utilidade na sistematização do cálculo, seja por planilha eletrônica ou em aplicativo gerado em ambiente de programação.

Na avaliação das perdas progressivas, sob as hipóteses da elasticidade linear com a seção solicitada no estágio I e a manutenção da seção plana na configuração deformada, o método dos prismas equivalentes possibilita uma análise geral e completa, uma vez que permite a consideração de seções de concreto de idades distintas, como também camadas de armaduras de protensão e passivas, ou seja, a consideração de seção composta em diversas fases construtivas.

Assim como na verificação do estado limite último à flexão, a avaliação da redistribuição de tensões e das perdas progressivas pode ser realizada em diversas seções ao longo da viga, inclusive nas seções onde o afastamento dos cabos não permite a consideração de cabo equivalente.

No cálculo da redistribuição de esforços em vigas contínuas protendidas, o método dos prismas equivalentes, aplicado ao processo dos esforços, mostra-se um poderoso instrumento de projeto para a determinação dos esforços solicitantes progressivos. Sua vantagem em relação a outras metodologias de cálculo vem do fato de não introduzir a hipótese de seção homogênea, considerando a rotação em seção composta.

O método dos prismas equivalentes também pode ser aplicado ao estudo da contribuição da armadura passiva em seções compostas de peças de concreto protendido, como também na análise de seções mistas de concreto e aço, para avaliação de tensões e deformações. Na análise da redistribuição de esforços em estruturas hiperestáticas cabe a sugestão da aplicação do método dos prismas equivalentes junto ao processo dos deslocamentos, de modo que gere uma sistematização compatível com a análise matricial de estruturas.

Os resultados apresentados pelo exemplo numérico do capítulo 4, aplicação baseada na ponte sobre o Canal Laranjeiras com cinco vãos de 44 m, demonstram a

importância (magnitude) dos esforços progressivos que alcançam até 63,7% dos esforços imediatos, sendo em média 37,8% destes.

Ainda neste exemplo, comparando os esforços finais com aqueles encontrados considerando-se fase única de carregamento, as diferenças alçam 42,5% e apresentam uma média de 14,3%. A determinação da redistribuição de tensão e das perdas de protensão numa determinada seção ao longo das fases construtivas e de carregamento, conforme apresentam as fig. 4.17 e 4.18, demonstra a versatilidade e a capacidade de sistematização do método dos prismas equivalentes. A solução do exemplo foi obtida por meio de planilhas eletrônicas. Para uma utilização profissional é sugerida a automatização do método com um aplicativo baseado numa plataforma de programação.

LISTA DE REFERÊNCIAS

- ^[1] BRASIL. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 7197 – Projeto de estruturas de concreto protendido**. São Paulo: ABNT, 1989. 71p.
- ^[2] BRASIL. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto**. São Paulo: ABNT, 2003. 170p.
- ^[3] ESTADOS UNIDOS. American Concrete Institute. **ACI 318 – Building Code Requirements for Structural Concrete**. Detroit: ACI, 1999. 391p.
- ^[4] LEONHARDT, F. **Construções de concreto: concreto protendido**. Trad. de João Luis Escosteguy Merino. Rio de Janeiro: Interciência, 1983. v.5. 316p.
- ^[5] NEVILLE, A. M.; DILGER, W. H.; BROOKS, J. J. **Creep of plain and structural concrete**. New York: Construction Press, 1983. 361p.
- ^[6] GHALI, A.; FAVRE, R. **Concrete structures: stresses and deformations**. 2ed. New York: Spon, 1994. 444p.
- ^[7] FAVRE, R. et al. **Dimensionnement des structures en béton: dalles, murs, colonnes et fondations**. 1ed. Lausanne: Presses s et Universitaires Romandes, 1990. 491p. (Traité de génie civil de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, v.8).
- ^[8] JOHANNSON, J. **Diseño y calculo de estructuras pretensadas**. Barcelona: Marcombo, 1975. 582p.
- ^[9] SANTOS, H. C. **Análise de estruturas aperticadas de concreto armado e protendido com a consideração da deformação lenta**. 2001. 157p. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.
- ^[10] ISHITANI, H. **Estruturas de concreto protendido**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998. (Notas de aula PEF 5716).
- ^[11] FERRAZ, J. C. F.; CASTANHO, J. L. B. A. **Efeito da laje concretada posteriormente sobre viga protendida**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1989. (Boletim técnico BT/PEF 8904).
- ^[12] FERRAZ, J. C. F. **O método dos prismas equivalentes aplicado ao cálculo das variações de tensão, ao longo do tempo, nas seções de concreto**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1989. (Boletim técnico BT/PEF 8903).

- [13] FERRAZ, J. C. F. **Cálculo das alterações de tensão, ao longo do tempo, nas peças de concreto protendido: procedimentos diretos, simples, alternativos ao CEB.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1985. (Boletim técnico BT/PEF 8506).
- [14] FERRAZ, J. C. F. **Contribuição da fluência do aço, da fluência e retração do concreto nos deslocamentos devidos à flexão, nas peças de concreto protendido.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1986. (Boletim técnico BT/PEF 8609).
- [15] FERRAZ, J. C. F. **Alteração nos estados de tensão nas estruturas hiperestáticas devido à fluência do aço, do concreto e retração.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1988. (Boletim técnico BT/PEF 8807).
- [16] FERRAZ, J. C. F. **Sugestões à norma, em discussão, sobre “projeto de estruturas de concreto protendido”, NBR 7197 (NB 116).** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1988. (Boletim técnico BT/PEF 8813).
- [17] FERRAZ, J. C. F. **Vigas protendidas: alterações das tensões, das deformações e dos deslocamentos ao longo do tempo.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1986. (Boletim técnico BT/PEF 8616).
- [18] FERRAZ, J. C. F. **Coletânea de trabalhos.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1994. (Boletim técnico BT/PEF 9412).
- [19] FERRAZ, J. C. F. Perdas de protensão para carregamentos aplicados por etapas. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 1989. **Anais.** São Paulo: EPUSP/NEP, 1989. v.2. p.529-44.
- [20] CASTANHO, J. L. B. A. Exemplo de aplicação da NBR 7197 no cálculo das variações de tensão no aço e no concreto, devido às perdas diferidas. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 1989. **Anais.** São Paulo: EPUSP/NEP, 1989. v.3. p.21-51.
- [21] CASTANHO, J. L. B. A. Métodos simplificados de cálculo, para a solução de problemas ligados às variações de tensão, ao longo do tempo, em peças de concreto protendido: exemplos. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 1989. **Anais.** São Paulo: EPUSP/NEP, 1989. v.3. p.55-97.

- ^[22] CASTANHO, J. L. B. A. Perdas progressivas, comentários aos itens 7 e 8.5.2 da NBR 7197 – norma de projeto de estruturas de concreto protendido. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 1989. **Anais**. São Paulo: EPUSP/NEP, 1989. v.3. p.3-20.
- ^[23] FERRAZ, J. C. F. Alterações, ao longo do tempo, dos estados de tensão nas seções de concreto, armadas, para diferentes etapas de carregamento. **Anais EPUSP**, v.1, n.1a., p.413-29, 1988.
- ^[24] MANGINI, S. A. Esforços ao longo do tempo em estruturas de concreto – 1ª parte. **Revista do Ibracon**, ano VI, n.13, p.19-30, 1996.
- ^[25] MANGINI, S. A. Esforços ao longo do tempo em estruturas de concreto – 2ª parte. **Revista do Ibracon**, ano VI, n.14, p.31-38, 1996.
- ^[26] DILGER, W. H. Creep analysis of prestressed concrete structures using creep transformed section properties. **PCI Journal**, v.27, n.1, p.98-117, 1982.
- ^[27] MACHADO, C. P. **Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido**. 1990. 120p. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1990.
- ^[28] MENDES, J. A. **Cálculo automático de perdas progressivas em peças de concreto protendido**. 1993. 2v. 330p. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1993.
- ^[29] BUCHAIM, R. Tensões em vigas de concreto protendido. **Revista Estrutura**, ano 22, n. 95, p. 84-102. 1981.
- ^[30] VASCONCELOS, A. C. **Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas**. Rio de Janeiro: LTC, 1980. 64p.