

**FÁBIO MALUF JAZRA**

**DIMENSIONAMENTO DE CHAPAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia

São Paulo

2008

**FÁBIO MALUF JAZRA**

**DIMENSIONAMENTO DE CHAPAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia

**Departamento:**

Engenharia de Estruturas e Fundações

**Área de concentração:**

Engenharia de Estruturas

**Orientador:**

Prof. Dr. João Carlos Della Bella

São Paulo

2008

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa Inêz, pelo incentivo, paciência, companheirismo e apoio incondicional.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos Della Bella pelo apoio e orientação ao longo do trabalho.

Ao meu gerente Maeda, por permitir que eu fizesse o Mestrado.

Aos meus colegas da Logictel, pela paciência.

À secretária de pós-graduação Janete, pelo apoio.

Ao Prof. Frank J. Vecchio pelas importantes dicas enviadas por email.

Aos meus pais Oswaldo e Leila, pelo precioso bem que me deixaram, que é a educação e o estudo.

## RESUMO

Jazra, F.M. **Dimensionamento de chapas de concreto armado** [Reinforced concrete membranes design]. 2008. 126 p.

Dissertação Mestrado – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Neste trabalho são apresentados procedimentos para o dimensionamento de elementos de chapa de concreto armado com armaduras em malha ortogonal, com as direções não coincidentes com as das tensões principais. É feita uma revisão dos conceitos teóricos do Método de Baumann e do Modified Compression Field Theory, sendo que no primeiro foi incorporada a relação tensão-deformação do concreto fissurado proposta por Vecchio e Collins. Para a análise das deformações principais é feita uma revisão do estado duplo de deformações utilizando-se o círculo de Mohr. Posteriormente são feitas comparações entre os resultados de modelo físicos e as formulações analíticas, bem como entre os resultados de modelos hipotéticos utilizando ambos os métodos, com o objetivo de valorizar o Método de Baumann dada a sua simplicidade, mostrando que este apresenta resultados a favor da segurança. Buscou-se através do Método de Baumann avaliar os benefícios da utilização de armaduras de compressão.

Palavras-chave: concreto armado, dimensionamento, chapas

## ABSTRACT

Jazra, F.M. **Reinforced concrete membranes design** [Dimensionamento de chapas de concreto armado]. 2008. 126 p.

Dissertação Mestrado – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Procedures are presented for the reinforced concrete membranes design with orthogonal mesh, which does not coincide with principal stress directions. A review of the theoretical fundamentals for Baumann Method and Modified Compression Field Theory is presented, and in the first was used the stress-strain relationships for the cracked concrete developed by Vecchio and Collins. A review of the plane strain is presented using the Mohr Circle for the principal strains analysis. Later, the results of tested panels and the theoretical formulations are compared, also between hypothetical panels using both methods, to enhance the Baumann Method due its simplicity, ensuring that presents overestimated results. Benefits were evaluated through Baumann Method using compression reinforcement.

Keywords: reinforced concrete, design, membranes

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dimensionamento de elementos de chapa</b>	<b>6</b>
2.1	Método de Baumann.....	6
2.1.1	Hipóteses básicas	6
2.1.2	Equilíbrio	7
2.1.3	Compatibilidade das deformações	10
2.1.4	Análise das deformações principais – Círculo de Mohr	13
2.1.5	Equações simplificadas	20
2.1.6	Equações constitutivas	21
2.1.6.1	Aço	21
2.1.6.2	Concreto	22
2.1.7	Dimensionamento	25
2.1.7.1	Armaduras	25
2.1.7.2	Concreto	25
2.1.8	Casos de dimensionamento	26
2.1.8.1	Caso I) Ambas armaduras tracionadas	26
2.1.8.2	Caso II) $n_x < 0$ e $ n_x  >  n_{xy}  \rightarrow n_{sx} = 0$	26
2.1.8.3	Caso III) $n_y < 0$ e $ n_y  >  n_{xy}  \rightarrow n_{sy} = 0$	27
2.1.8.4	Caso IV) $n_x < 0$ , $n_y < 0$ e $n_x \cdot n_y \geq n_{xy}^2$	28
2.2	Modified Compression Field Theory (MCFT).....	30
2.2.1	Hipóteses básicas	30
2.2.2	Equilíbrio das tensões médias	32
2.2.3	Equilíbrio das tensões na fissura	35
2.2.4	Condições de compatibilidade das deformações médias	38
2.2.5	Abertura das fissuras	40
2.2.6	Relações tensão-deformação	40
2.2.6.1	Aço	40
2.2.6.2	Concreto	41
2.2.7	Tensão de cisalhamento e deformações na fissura	42
<b>3</b>	<b>Comparação com os resultados de modelos físicos</b>	<b>45</b>

3.1	Determinação analítica das deformações a partir do carregamento.....	47
3.1.1	Roteiro de cálculo para utilizar o Método de Baumann	47
3.1.2	Roteiro de cálculo para utilizar o MCFT	48
3.1.3	Resumo da análise dos painéis	50
3.2	Considerações sobre a curva tensão-deformação do concreto.....	56
3.3	Comparação entre o Método de Baumann e o MCFT para o dimensionamento de modelos hipotéticos.....	58
3.3.1	Painel A (Caso I – tração nas armaduras nas duas direções)	59
3.3.2	Painel B (Caso II – tração na armadura na direção do eixo y)	62
3.3.3	Painel C (Caso III – tração na armadura na direção do eixo x)	65
<b>4</b>	<b>Estudo da armadura de compressão no caso III</b>	<b>69</b>
4.1	Painel D.....	70
4.2	Painel E.....	72
4.3	Painel F.....	76
4.4	Painel G.....	78
4.5	Painel H.....	81
4.6	Painel I.....	83
<b>5</b>	<b>Estudo da armadura de compressão no caso IV</b>	<b>89</b>
5.1	Equilíbrio.....	89
5.2	Painel J.....	92
5.3	Painel K.....	94
<b>6</b>	<b>Discussão dos resultados</b>	<b>98</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>100</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE A – Resultados detalhados dos modelos físicos</b>	<b>104</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – viga de concreto armado (Fonte: ACI Structural Journal /July-August 2006, p.614)	2
<b>Figura 1.2</b> – estruturas laminares onde está presente o comportamento de membrana (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.219)	3
<b>Figura 1.3</b> – elemento de concreto armado fissurado (Fonte: ACI Structural Journal January-February 1989, p.27)	4
<b>Figura 1.4</b> – círculo de Mohr das deformações médias (entre fissuras) (Fonte: ACI Structural Journal /January-February 1989, p.27)	4
<b>Figura 1.5</b> – chapa de concreto PV20 após ruptura (Fonte: ACI Structural Journal March-April 1986, p.227)	5
<b>Figura 2.1</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido a carregamento de tração e cisalhamento	7
<b>Figura 2.2</b> – trecho do elemento de chapa com uma face paralela à direção das fissuras, com as forças envolvidas	8
<b>Figura 2.3</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido ao carregamento de tração e cisalhamento	9
<b>Figura 2.4</b> – trecho do elemento de chapa com uma face perpendicular à direção das fissuras, com as forças envolvidas	9
<b>Figura 2.5</b> – deformada do trecho do elemento de chapa com uma face paralela às fissuras	10
<b>Figura 2.6</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido ao carregamento de tração e cisalhamento	13
<b>Figura 2.7</b> – deformada do elemento de chapa	13
<b>Figura 2.8</b> – elemento de chapa fissurado com as deformações longitudinais paralelas aos eixos x e y e, as principais	14
<b>Figura 2.9</b> – círculo de Mohr das deformações	14
<b>Figura 2.10</b> – convenção do sinal da metade da distorção do trecho do elemento de chapa	15
<b>Figura 2.11</b> – convenção do sinal do ângulo entre o eixo vertical y e a direção de $\epsilon_2$ do trecho do elemento de chapa	15

<b>Figura 2.12</b> – círculo de Mohr das deformações com deformação imposta $\varepsilon_0 = \varepsilon_x = \varepsilon_y$	17
<b>Figura 2.13</b> – círculo de Mohr das deformações com deformação imposta $\varepsilon_0 < \varepsilon_x$	18
<b>Figura 2.14</b> – círculo de Mohr das deformações com deformação imposta $\varepsilon_0 < \varepsilon_y$	19
<b>Figura 2.15</b> – gráfico $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ em função de $\theta$	20
<b>Figura 2.16</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido ao carregamento de tração e cisalhamento com $n_{xy} < 0$	21
<b>Figura 2.17</b> – relação tensão-deformação para o concreto fissurado na compressão (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.225)	23
<b>Figura 2.18</b> – relação para a máxima tensão de compressão (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.225)	23
<b>Figura 2.19</b> – correlação dos dados do teste para o concreto fissurado na compressão (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.225)	24
<b>Figura 2.20</b> – representação tridimensional da relação tensão-deformação da compressão (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.225)	24
<b>Figura 2.21</b> – trecho do elemento de chapa com uma face paralela à direção das fissuras, com as forças envolvidas, quando não é necessária armadura paralela ao eixo x	26
<b>Figura 2.22</b> – trecho do elemento de chapa com uma face paralela à direção das fissuras, com as forças envolvidas, quando não é necessária armadura paralela ao eixo y	27
<b>Figura 2.23</b> – trecho do elemento de chapa com uma face perpendicular à direção das fissuras, com as forças envolvidas, quando não é necessária nenhuma armadura	28
<b>Figura 2.24</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido a tensões de tração e cisalhamento	31
<b>Figura 2.25</b> – transmissão da tensão de cisalhamento na fissura devido ao engrenamento dos agregados do concreto (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.226)	31
<b>Figura 2.26</b> – elemento de chapa de concreto fissurado submetido a tensões de tração e cisalhamento (Adaptado do ACI Structural Journal /March-April 1986, p.226)	32

<b>Figura 2.27</b> – trecho do elemento de chapa com uma face paralela à direção das fissuras na seção 1-1 (entre fissuras)	32
<b>Figura 2.28</b> – Tensão média de tração no concreto fissurado (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.225)	33
<b>Figura 2.29</b> – círculo de Mohr das tensões médias (entre fissuras) do elemento de chapa de concreto fissurado	34
<b>Figura 2.30</b> – trecho do elemento de chapa com uma face paralela à direção das fissuras na seção 2-2 (na fissura)	35
<b>Figura 2.31</b> – O MCFT para elementos de chapa (Fonte: ACI Structural Journal /March-April 1986, p.229)	37
<b>Figura 2.32</b> – círculo de Mohr das deformações médias (entre fissuras) do elemento de chapa de concreto fissurado	38
<b>Figura 2.33</b> – elemento de concreto fissurado com a distância entre as fissuras	40
<b>Figura 3.1</b> – gráfico da tensão analítica $\sigma_{sx}$ em função da tensão do ensaio $\sigma_{sx}$	53
<b>Figura 3.2</b> – gráfico da tensão analítica $\sigma_{sy}$ em função da tensão do ensaio $\sigma_{sy}$	54
<b>Figura 3.3</b> – gráfico da tensão analítica $\sigma_c$ em função da tensão do ensaio $\sigma_c$	55
<b>Figura 3.4</b> – Diagrama tensão-deformação do concreto (Fonte: NBR 6118:2003, p.24)	56
<b>Figura 4.1</b> – Gráfico das armaduras em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel E	86
<b>Figura 4.2</b> – Gráfico das armaduras em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel G	86
<b>Figura 4.3</b> – Gráfico das armaduras em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel I	87
<b>Figura 4.4</b> – Gráfico do esforço $n_c$ em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel E	87
<b>Figura 4.5</b> – Gráfico do esforço $n_c$ em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel G	87
<b>Figura 4.6</b> – Gráfico do esforço $n_c$ em função da deformação $\epsilon_x$ para o painel I	88
<b>Figura 5.1</b> – trecho do elemento de chapa com uma face perpendicular à direção de $\epsilon_2$	89
<b>Figura 5.2</b> – trecho do elemento de chapa com uma face perpendicular à direção de $\epsilon_1$	91
<b>Figura 5.3</b> – Gráfico das armaduras em função do ângulo $\theta$ para o painel K	97

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	American Concrete Institute
CEB	Comite Euro-International du Beton
DSFM	Disturbed Stress Field Model
MCFT	Modified Compression Field Theory
NBR	Norma Brasileira Registrada
ELU	Estado Limite Último

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS ROMANOS

$a_{sx}$	área da armadura por unidade de comprimento paralela ao eixo x
$a_{sy}$	área da armadura por unidade de comprimento paralela ao eixo y
$E_s$	módulo de elasticidade longitudinal da armadura
$f'_c$	resistência característica à compressão do concreto segundo o ACI
$f_{cd}$	resistência de cálculo à compressão do concreto
$f_{ck}$	resistência característica à compressão do concreto
$f_{cd1}$	resistência à compressão de cálculo do concreto em zonas não fissuradas
$f_{cd2}$	resistência à compressão de cálculo do concreto em zonas fissuradas
$f_1$	máxima tensão principal média no concreto
$f_2$	mínima tensão principal no concreto
$f_{cx}$	tensão no concreto paralela ao eixo x
$f_{cy}$	tensão no concreto paralela ao eixo y
$f_{2max}$	máxima tensão de compressão no concreto quando $\varepsilon_2 = \varepsilon'_c$ para um dado $\varepsilon_1$
$f_x$	tensão normal paralela ao eixo x
$f_y$	tensão normal paralela ao eixo y
$f_{yd}$	tensão de cálculo de escoamento da armadura
$f_{yx}$	tensão de escoamento na armadura paralela ao eixo x
$f_{yy}$	tensão de escoamento na armadura paralela ao eixo y
$f_{sx}$	tensão normal média na armadura paralela ao eixo x
$f_{sy}$	tensão normal média na armadura paralela ao eixo y
$f_{sxc}$	tensão normal na fissura na armadura paralela ao eixo x
$f_{syc}$	tensão normal na fissura na armadura paralela ao eixo y
$h$	espessura da chapa de concreto
$n_c$	esforço no concreto por unidade de comprimento paralelo ao plano principal de menor deformação (>0 quando de compressão)
$n'_c$	esforço no concreto por unidade de comprimento paralelo ao plano principal de maior deformação (>0 quando de compressão)

$n_x$	carregamento por unidade de comprimento paralelo ao eixo x
$n_y$	carregamento por unidade de comprimento paralelo ao eixo y
$n_{xy}$	carregamento transversal por unidade de comprimento
$n_{sx}$	esforço por unidade de comprimento na armadura paralela ao eixo x
$n_{sy}$	esforço por unidade de comprimento na armadura paralela ao eixo y
$R_d$	esforço resistente de cálculo
$S_d$	esforço solicitante de cálculo
$s_{\theta'}$	distância entre fissuras
$s_x$	espaçamento das fissuras perpendicular à direção do eixo x
$s_y$	espaçamento das fissuras perpendicular à direção do eixo y
$v$	tensão tangencial
$v_{xy}$	tensão tangencial
$v_{ci}$	tensão tangencial na fissura devido ao engrenamento dos agregados do concreto
$v_{cim\max}$	tensão tangencial máxima na fissura devido ao engrenamento dos agregados do concreto
$w$	abertura da fissura

## SÍMBOLOS GREGOS

$\Delta\varepsilon_{1cr}$	acrécimo da máxima deformação principal, na fissura
$\varepsilon_c$	deformação específica paralela à direção da fissura
$\varepsilon'_c$	deformação específica no concreto quando no teste de cilindro a tensão atinge $f'_c$
$\varepsilon_{xcr}$	deformação específica na armadura paralela ao eixo x, na fissura
$\varepsilon_{ycr}$	deformação específica na armadura paralela ao eixo y, na fissura
$\varepsilon_{sx}$	deformação específica na armadura paralela ao eixo x
$\varepsilon_{sy}$	deformação específica na armadura paralela ao eixo y
$\varepsilon_x$	deformação específica paralela ao eixo x
$\varepsilon_y$	deformação específica paralela ao eixo y
$\varepsilon_1$	máxima deformação principal
$\varepsilon_2$	mínima deformação principal
$\Phi_{sx}$	diâmetro da armadura paralela ao eixo x
$\Phi_{sy}$	diâmetro da armadura paralela ao eixo y
$\gamma_c$	coeficiente de ponderação da resistência do concreto
$\gamma_{xy}$	distorção
$\theta$	ângulo entre o eixo vertical y e a fissura e/ou plano principal
$\theta'$	ângulo entre o eixo horizontal x e a fissura e/ou plano principal
$\rho_x$	taxa da armadura paralela ao eixo x (área da armadura dividido pela área da seção de concreto)
$\rho_y$	taxa da armadura paralela ao eixo y (área da armadura dividido pela área da seção de concreto)
$\sigma_c$	tensão normal de compressão no concreto
$\sigma_{sx}$	tensão normal na armadura paralela ao eixo x
$\sigma_{sy}$	tensão normal na armadura paralela ao eixo y