

HENRIQUE ZARNAUSKAS DIAS DE SOUZA VIEIRA

**Análise dinâmica não linear de fundações isoladas ou
conectadas de motores não ideais**

São Paulo

2024

HENRIQUE ZARNAUSKAS DIAS DE SOUZA VIEIRA

**Análise dinâmica não linear de fundações isoladas ou
conectadas de motores não ideais**

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro
Mazzilli

São Paulo

2024

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Vieira, Henrique Zarnauskas Dias de Souza
Análise dinâmica não linear de fundações isoladas ou conectadas de motores não ideais / H. Z. D. S. Vieira -- versão corr. -- São Paulo, 2024.
123 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Dinâmica das estruturas 2.Análise não linear das estruturas 3.Métodos iterativos 4.Caos (sistemas dinâmicos) I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

*Dedico este trabalho aos desafios que tive em minha vida, que me trouxeram resistência,
flexibilidade e sabedoria*

Agradecimentos

Um trabalho de pesquisa sempre possui o apoio de diversas pessoas. Não é possível nomear todos que ajudaram a concluir este feito, mas gostaria de citar nomes importantes que me fizeram chegar onde estou e que me guiaram durante estes anos.

À minha mãe, Cibele Zarnauskas Dias, que sempre cuidou e se preocupou comigo, que mostrou a mim as belezas da ciência e do estudo desde quando era pequeno, e que me ajuda para poder ter mais tempo para escrever este trabalho.

Ao professor Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, que me orientou não só durante o meu mestrado, mas desde a graduação, tirando dúvidas de como é o meio acadêmico, guiando-me nos estudos que me interessavam sobre dinâmica e me incentivando a avançar mais nos meus conhecimentos, trazendo materiais para que pudesse procurar e estudar.

Ao professor Guilherme Rosa Franzini, que foi como um segundo orientador meu, mostrando-me as maravilhas e dificuldades de ser um pesquisador, explicou teorias e forneceu conteúdos de estudo que me permitiram entender e desenvolver minha pesquisa.

Ao professor Petrus Gorgônio Bulhões da Nóbrega, que realizou estudos que inspiraram esta pesquisa, além de dispor de seu tempo para esclarecer dúvidas sobre esta pesquisa. O trabalho dele foi essencial para a realização desta pesquisa.

Aos meus amigos Thayná Isabelle da Silva Sa e Mateus Alves Medeiros, que sempre estiveram ao meu lado, nos momentos felizes e tristes, apoiando-me e dando-me conselhos. Agradeço por todos os momentos em que estamos juntos e espero estar sendo um grande amigo para vocês assim como vocês são para mim.

Ao engenheiro aeronáutico Evandro de Carlo Montovam Monteiro, que me auxiliou na revisão deste trabalho, apoiou-me e esteve por perto sempre que precisei. Agradeço pelos tempos que passamos juntos, trocas de conhecimento que tivemos e por toda ajuda que me deu.

Aos meus primos Yasmin Dias Santos e João Pedro Faleiros Dias Paro, que sempre estiveram presentes em minha vida e são como irmãos para mim. Sempre estaremos presentes um para o outro.

À Bruna Vitorino dos Santos, que sempre me apoia nos estudos, me traz alegria e me incentiva a ir atrás de meus sonhos. Quero trazer tanta alegria em sua vida como tem trazido à minha.

À Universidade de São Paulo, que me propiciou educação e oportunidades para estar onde estou hoje, sou grato por estar realizando o mestrado nesta instituição.

*“Seja menos curioso sobre as pessoas e mais curioso sobre ideias”
(Curie, Marie Skłodowska)*

Resumo

Vieira, H. Z. D. S. **Análise dinâmica não linear de fundações isoladas ou conectadas de motores não ideais**. 2024. Dissertação (Mestrado) em Engenharia de Estruturas – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Esta pesquisa retoma os estudos realizados por Nóbrega (1994) sobre a sincronização de motores não ideais em uma mesma fundação. O projeto se expande, a seguir, para o estudo de fundações interligadas de motores não ideais, verificando os casos em que ocorrem fenômenos de autossincronização da resposta dinâmica. Para ambos os modelos, foram formuladas as equações eletromecânicas considerando motores elétricos de corrente contínua. Desta forma, é necessário considerar a curva característica dos motores e fenômenos não lineares, como o efeito Sommerfeld.

Utilizando a integração numérica por Runge-Kutta de quarta ordem juntamente com a aplicação da FFT, foram encontradas as soluções estacionárias de ambos os modelos, verificando as amplitudes e frequências das variáveis na solução, além de estudar em ambos os casos as seções do espaço de parâmetros e a mudança de atratores, analisando no caso de fundações conectadas as regiões que possuem maiores energias cinéticas, potenciais, dissipadas e providas aos motores.

No primeiro modelo da pesquisa, sobre o caso indicado por Nóbrega (1994) como possivelmente caótico, foi averiguado o experimento por mais tempo que os demais casos, utilizando o gráfico de recorrência e estudando pontos próximos ao ensaio numérico, assim verificando que o caso em questão não caracteriza um atrator caótico. Para o segundo modelo desta pesquisa, alterando a voltagem nos motores, foram obtidas seções de bacias de atração, observando-se a mudança de soluções dependendo da voltagem em que os motores se mantêm, verificando-se que o aumento da voltagem causa uma mudança de atrator no sistema estudado. Ademais, foi usado neste segundo modelo a aplicação de Poincaré com o intuito de estudar a estabilidade das soluções, comprovando serem estáveis.

Palavras-chave: atratores, autossincronização, bacias de atração, vibrações não lineares, motores não ideais.

Abstract

Vieira, H. Z. D. S. **Nonlinear dynamic analysis of isolated or connected foundations of non-ideal motors**. 2024. Dissertação (Mestrado) em Engenharia de Estruturas – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

This research takes up the studies carried out by Nóbrega (1994) on self-synchronization of non-ideal motors on the same foundation. The project is enhanced to analyze the case of motors in connected foundations, verifying when self-synchronization occurs. For both cases, the electromechanical equations of the models were formulated considering direct current electric motors. Thus, it is necessary to consider the characteristic curve of the motors and non-linear phenomena, such as the Sommerfeld effect.

Using fourth order Runge-Kutta numerical integration with the application of FFT, the stationary solutions of both models were found, checking the amplitudes and frequencies of the variables in the solution, in addition, studying in both models, the sections of the parameter space and the change of attractors, analyzing in the model of connected foundations the regions that have greater kinetic, potential, dissipated energy and energy supplied to the motors.

In the first model of the research, in the case indicated by Nóbrega (1994) as possibly chaotic, the experiment was investigated for a longer time span than the other cases, using the recurrence plots and studying points close to the numerical test, thus verifying that the case in question does not have a chaotic attractor. For the second model of this research, by changing the voltage of the motors, sections of the basins of attraction were obtained, observing the change of solutions depending on the voltage at which the motors remain, verifying that increasing the voltage causes a change of attractor in the studied system. Furthermore, in the second model, the application of Poincaré were used to study the stability of the solutions, proving that they are stable.

key-words: attractors, self-synchronization, basins of attraction, non-linear vibrations, non-ideal motors.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Dois motores de moinhos	20
Figura 2 – Dois motores de peneiras	21
Figura 3 – Fundação dos motores de peneiras	21
Figura 4 – Curvas características dos motores	27
Figura 5 – Curvas características aproximadas dos motores CC	28
Figura 6 – Tensão elétrica nos motores ao longo do tempo	29
Figura 7 – Modelo matemático de dois motores na mesma base	30
Figura 8 – Modelo matemático de dois motores em fundações conectadas	35
Figura 9 – Exemplo de seção bidimensional do espaço de parâmetros	42
Figura 10 – Exemplo de seção de parâmetros com energia explícita	45
Figura 11 – Exemplo de estudo de bacia de atração	46
Figura 12 – Exemplo ilustrativo da aplicação de Poincaré	48
Figura 13 – Ilustração da aplicação de Poincaré para uma variável ao longo do tempo	49
Figura 14 – Exemplos de gráficos de recorrência	51
Figura 15 – Diferença de ângulos de 0 com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido	52
Figura 16 – Diferença de ângulos de π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido	53
Figura 17 – Soma de ângulos de π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido	53
Figura 18 – Soma de ângulos de 2π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido	53
Figura 19 – Gráfico da tensão elétrica v pelo tempo τ	55
Figura 20 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	56
Figura 21 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	56
Figura 22 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	57
Figura 23 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	57
Figura 24 – Gráfico $q \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	58
Figura 25 – Gráfico $q' \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	58

Figura 26 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	59
Figura 27 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	59
Figura 28 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	60
Figura 29 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	61
Figura 30 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	61
Figura 31 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	62
Figura 32 – Gráfico $q \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	63
Figura 33 – Gráfico $q' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	63
Figura 34 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	64
Figura 35 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	64
Figura 36 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$	65
Figura 37 – Gráficos $\psi'_1 \times \tau$ e $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$	65
Figura 38 – Gráficos $q \times \tau$ e $q' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$	66
Figura 39 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$	66
Figura 40 – Projeção do espaço de fase onde $\xi = 1\%$	67
Figura 41 – Projeção do espaço de fase onde $\xi = 10\%$	68
Figura 42 – Ensaio numérico analisado entre 0 à $5 \cdot 10^3$ e 0 à $77 \cdot 10^3$	69
Figura 43 – Projeção do plano de fase do ensaio numérico analisado entre 0 à $78 \cdot 10^3$	69
Figura 44 – Projeção do plano de fase de ensaios numéricos próximos ao analisado	70
Figura 45 – Gráficos de recorrência das variáveis q e q' após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$	71
Figura 46 – Gráficos de recorrência das variáveis ψ'_1 e ψ'_2 após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$	71
Figura 47 – Gráficos de recorrência das variáveis F_1 e F_2 após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$	72
Figura 48 – Espaço de parâmetros $\xi \times (\psi_1 - \psi_2)$ inicial, para $u_i = 3 \text{ V}$	73
Figura 49 – Espaço de parâmetros $\xi \times u_i$, para diversos $\psi_1 - \psi_2$ iniciais	73
Figura 50 – Espaço de parâmetros $(\psi_1 - \psi_2)$ inicial $\times u_i$, para diversos ξ	74

Figura 51 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	76
Figura 52 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	76
Figura 53 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	77
Figura 54 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	77
Figura 55 – Gráfico $q_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	78
Figura 56 – Gráfico $q_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	78
Figura 57 – Gráfico $q'_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	79
Figura 58 – Gráfico $q'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	79
Figura 59 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	80
Figura 60 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	80
Figura 61 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	81
Figura 62 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	82
Figura 63 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	82
Figura 64 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	83
Figura 65 – Gráfico $q_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	83
Figura 66 – Gráfico $q_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	84
Figura 67 – Gráfico $q'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	84
Figura 68 – Gráfico $q'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	85
Figura 69 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$	86
Figura 70 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas	86

Figura 71 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$	87
Figura 72 – Gráficos $\psi'_1 \times \tau$ e $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$	87
Figura 73 – Gráficos $q_1 \times \tau$ e $q_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$	88
Figura 74 – Gráficos $q'_1 \times \tau$ e $q'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$	88
Figura 75 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$	89
Figura 76 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$	89
Figura 77 – Gráficos $\psi'_1 \times \tau$ e $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$	90
Figura 78 – Gráficos $q_1 \times \tau$ e $q_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$	90
Figura 79 – Gráficos $q'_1 \times \tau$ e $q'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$	91
Figura 80 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$	91
Figura 81 – Espaços de parâmetros	93
Figura 82 – Energia provida aos motores nas seções	94
Figura 83 – Energia cinética nas seções	95
Figura 84 – Energia potencial nas seções	96
Figura 85 – Energia dissipada nas seções	97
Figura 86 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,661$ ($u = 6,7$ V) e $\varphi = 0,671$ ($u = 6,8$ V)	98
Figura 87 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,681$ ($u = 6,9$ V) e $\varphi = 0,691$ ($u = 7,0$ V)	99
Figura 88 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,701$ ($u = 7,1$ V) e $\varphi = 0,710$ ($u = 7,2$ V)	99
Figura 89 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,720$ ($u = 7,3$ V) e $\varphi = 0,730$ ($u = 7,4$ V)	100
Figura 90 – Seção $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,740$ ($u=7,5$ V)	100
Figura 91 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,254$ ($u = 12,7$ V) e $\varphi = 1,264$ ($u = 12,8$ V)	101
Figura 92 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,274$ ($u = 12,9$ V) e $\varphi = 1,283$ ($u = 13,0$ V)	101

Figura 93 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,303$ ($u = 13,2$ V) e $\varphi = 1,323$ ($u = 13,4$ V)	102
Figura 94 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,343$ ($u = 13,6$ V) e $\varphi = 1,362$ ($u = 13,8$ V)	102
Figura 95 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,372$ ($u = 13,9$ V) e $\varphi = 1,372$ ($u = 14,0$ V)	103
Figura 96 – Seção $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,392$ ($u=14,1$ V)	103
Figura 97 – Aplicação de Poincaré nos planos de fase $q_1 \times q'_1$ e $q_2 \times q'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas	104
Figura 98 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times \psi'_1$ e $\tau \times \psi'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas	105
Figura 99 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q_1$ e $\tau \times q_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas	105
Figura 100 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q'_1$ e $\tau \times q'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas	106
Figura 101 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times F_1$ e $\tau \times F_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas	106
Figura 102 – Aplicação de Poincaré nos planos de fase $q_1 \times q'_1$ e $q_2 \times q'_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas	107
Figura 103 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times \psi'_1$ e $\tau \times \psi'_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas	108
Figura 104 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q_1$ e $\tau \times q_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas	108
Figura 105 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q'_1$ e $\tau \times q'_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas	109
Figura 106 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times F_1$ e $\tau \times F_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas	109
Figura 107 – Imagem exemplificativa de perda de informação ao salvar dados	120
Figura 108 – Imagem exemplificativa da transformação de variáveis da FFT	121

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais do sistema com uma fundação	32
Tabela 2 – Parâmetro dimensional do sistema com uma fundação	32
Tabela 3 – Variáveis adimensionais do sistema com uma fundação	32
Tabela 4 – Parâmetros adimensionais do sistema com duas fundações	37
Tabela 5 – Parâmetro dimensional do sistema com duas fundações	37
Tabela 6 – Variável adimensional do sistema com duas fundações	37
Tabela 7 – Parâmetros adimensionais relativos à energia dos sistemas	43
Tabela 8 – Constantes da equação de voltagem	54
Tabela 9 – Parâmetros adimensionais dos ensaios com uma fundação	55
Tabela 10 – Proximidade (ϵ) utilizada para cada variável	71
Tabela 11 – Pontos com diferença de respostas entre pesquisas	74
Tabela 12 – Parâmetros adimensionais do primeiro ensaio com duas fundações . . .	75
Tabela 13 – Parâmetros adimensionais do segundo ensaio com duas fundações . . .	81
Tabela 14 – Parâmetros adimensionais dos espaços de parâmetros com duas fundações	92
Tabela 15 – Parâmetros adimensionais do estudo de bacia de atração com duas fundações	98

Lista de símbolos

a	Distância entre a massa excêntrica e o eixo do motor
b	Distância horizontal entre a origem do sistema de coordenadas e o eixo dos motores
c	Coefficiente de amortecimento viscoso linear da fundação
C_i	Constantes da equação de tensão elétrica
e_c	Energia cinética adimensional do sistema
e_d	Energia dissipada adimensional do sistema
e_i	Energia elétrica adimensional provida ao motor i
e_p	Energia potencial adimensional do sistema
E_c	Energia cinética do sistema
E_d	Energia dissipada do sistema
E_i	Energia elétrica provida ao motor i
E_{max}	Energia máxima que pode ser provida a um motor
E_p	Energia potencial do sistema
E_V	Esforço energeticamente conjugado de uma variável V qualquer
f_{cem}	Força contra-eletromotriz
F_i	Relação de torque do motor i
i	Unidade imaginária
i_a	Corrente elétrica do circuito do motor
I	Momento de inércia dos rotores dos motores
\mathbf{i}	Vetor unitário do sentido horizontal
\mathbf{j}	Vetor unitário do sentido vertical
k	Coefficiente de rigidez elástica linear da fundação
k_f	Coefficiente de rigidez elástica linear da conexão das fundações

k_E	Coefficiente da força contra-eletromotriz
k_M	Coefficiente do torque do motor
\mathbf{k}_i	Vetores temporários da integração de Runge-Kutta
L_a	Indutância elétrica do motor
m	Massa excêntrica dos motores
m_0	Massa da fundação
M_i	Torque do motor i
M_0	Torque máximo no motor relativo à tensão elétrica máxima
$O(f(n))$	Complexidade computacional em função f de n quantidade de dados, onde f varia dependendo do método utilizado
$\mathbf{O}_n(\delta t^5)$	Desvio no passo n da integração de Runge-Kutta
q	Deslocamento adimensional da fundação única
q_i	Deslocamento adimensional da fundação i
R_a	Resistência elétrica do motor
\mathbf{R}_i	Vetor posição da massa i
t	Tempo dimensional
t_a	Tempo médio em que ocorre a transição do crescimento linear da tensão elétrica para um valor constante
t_n	Tempo da n -ésima iteração do método de Runge-Kutta
t_1	tempo inicial do intervalo analisado
t_2	tempo final do intervalo analisado
T	Período da solução analisada
T^*	Período adimensional da solução analisada
u	Tensão elétrica aplicada aos terminais dos motores
u_i	Tensão elétrica inicial aplicada aos terminais dos motores
u_{max}	Tensão elétrica máxima aplicada aos terminais dos motores
v	Tensão elétrica adimensional aplicada aos terminais dos motores

v_i	Tensão elétrica inicial adimensional aplicada aos terminais dos motores
V_m	média de uma variável discreta V qualquer
\dot{V}	Derivada de uma variável V qualquer em relação ao tempo dimensional t
\ddot{V}	Derivada de segunda ordem de uma variável V qualquer em relação ao tempo dimensional t
V'	Derivada de uma variável V qualquer em relação ao tempo adimensional τ
V''	Derivada de segunda ordem de uma variável V qualquer em relação ao tempo adimensional τ
\mathbf{V}'	Derivada de um vetor V qualquer em relação ao tempo adimensional τ
x	Deslocamento da fundação única
x_i	Deslocamento da fundação i
y_i	variável i do sistema matemático em estudo
\mathbf{y}	Vetor das variáveis do sistema matemático em estudo
\mathbf{y}_n	Vetor das variáveis estimado pelo método de Runge-Kutta na n -ésima iteração
α	Relação entre massas do sistema
β	Relação entre coeficientes elásticos
γ	Torque adimensional máximo
δ	Relação entre resistência e indutância
δt	Diferença entre t_n e t_{n+1} , comumente chamado de passo utilizado na integração
$\delta \tau$	Diferença entre τ_n e τ_{n+1} , chamado de passo adimensional utilizado na integração
Δ	Metade da variação do tempo dimensional em que ocorre a transição do crescimento linear da tensão elétrica para um valor constante
ϵ	proximidade do método gráfico de recorrência
η	Relação entre momentos de inércia

$\nu(k)$	k-ésima componente de frequência da DFT
ξ	Taxa de amortecimento
ς	Intervalo do tempo adimensional da variação da tensão
τ	Tempo adimensional
τ_a	Tempo adimensional da variação da tensão
τ_0	Tempo adimensional de início da análise de Poincaré
τ_1	Tempo adimensional do primeiro resultado analisado
τ_2	Tempo adimensional do segundo resultado analisado
φ	Tensão adimensional máxima
φ^*	Relação entre Tensão máxima e período
ψ_i	Ângulo da massa excêntrica do motor i
ω	Frequência do sistema com rotor parado
Ω_0	Velocidade angular máxima relativa à tensão elétrica máxima

Sumário

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Justificativa	22
1.2	Objetivos	24
1.3	Organização da dissertação	24
2	MODELO MATEMÁTICO	26
2.1	Motores elétricos	26
2.2	Dois motores em uma mesma fundação	29
2.3	Dois motores em fundações conectadas	34
3	METODOLOGIAS UTILIZADAS	40
3.1	Espaços de parâmetros	41
3.2	Energia	42
3.3	Bacias de atração	45
3.4	Aplicação de Poincaré	47
3.5	Gráfico de Recorrência	50
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA FUNDAÇÃO ÚNICA, COM DOIS MOTORES	52
4.1	Ensaio numéricos	54
4.2	Análise da indicação de caos	68
4.3	Espaços de parâmetros	72
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA DUAS FUNDAÇÕES CONECTADAS, COM UM MOTOR EM CADA	75
5.1	Ensaio numéricos	75
5.2	Espaços de parâmetros e energias	92
5.3	Bacias de atração	98
5.4	Aplicação de Poincaré	104
6	CONCLUSÕES	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DA TENSÃO PELO TEMPO	117

APÊNDICE B – MÉTODO RUNGE-KUTTA	119
APÊNDICE C – TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER	121

1 Introdução

Máquinas que geram vibrações em estruturas estão presentes em diversas instalações, como turbinas eólicas, trituradores, peneiras vibratórias, entre outras. Em muitos casos, é de grande interesse o estudo das vibrações induzidas por estas máquinas, seja para evitar esforços dinâmicos excessivos ou melhorar o conforto dos usuários do ambiente em que estão instaladas.

É comum que tais máquinas estejam apoiadas sobre estruturas que possuem rigidez elástica e amortecimento viscoso, desta forma, pode-se dissipar vibrações indesejadas. Neste trabalho, tais estruturas serão tratadas como as fundações destas máquinas, justamente por sustentarem elas. As figuras 1 e 2 mostram máquinas que produzem vibrações, são exemplos de máquinas que ilustram o problema estudado neste trabalho, e a figura 3 mostra uma fundação como a descrita.

Figura 1 – Dois motores de moinhos



Fonte: Prof. Claudius de Sousa Barbosa

Figura 2 – Dois motores de peneiras



Fonte: Prof. Claudius de Sousa Barbosa

Figura 3 – Fundação dos motores de peneiras



Fonte: Prof. Claudius de Sousa Barbosa

No estudo das vibrações em fundações com mais de uma máquina rotativa não ideal (aquela para a qual o torque e a potência útil variam em relação à frequência do conjunto máquina \times fundação e, conseqüentemente, o regime de operação do motor depende das vibrações do sistema como um todo), é muito importante considerar o efeito da autossincronização, visto que este efeito pode aumentar ou diminuir as vibrações e esforços nas estruturas, dependendo das condições iniciais ao serem ligadas. Assim, é evidenciada a importância do tema estudado.

1.1 Justificativa

O estudo sobre as vibrações causadas pelas máquinas não ideais não é recente. Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld relatou ensaios de um motor elétrico de massa desbalanceada sobre uma viga em balanço, controlando o fornecimento de potência elétrica. Observou que a frequência de oscilação do sistema era praticamente constante na região da ressonância, apesar de acréscimos significativos da amplitude de deslocamento da viga. Quando a amplitude máxima era alcançada, na região de ressonância, o gasto energético do motor aproximadamente dobrava. Entretanto, após a ressonância, a amplitude decrescia bruscamente, enquanto a velocidade angular do rotor crescia rapidamente. Este fenômeno foi nomeado Efeito Sommerfeld.

Kononenko (1969) compilou uma série de trabalhos anteriores relacionados aos sistemas não ideais. Abordou um sistema de massas giratórias desbalanceadas, assunto analisado inicialmente por Blekhman (1964), introduziu as características estáticas do motor nas equações de movimento, estudou a estabilidade dos sistemas e propôs uma explicação detalhada do efeito Sommerfeld.

Os trabalhos citados no último parágrafo possuem grande relevância para o tema, entretanto, todos eles trataram sobre a resposta dinâmica de somente uma máquina apoiada em uma estrutura. Paz e Cole (1992) estudaram a autossincronização de motores apoiados em uma mesma estrutura, detalhando gráficos de motores e ampliando os estudos de Blekhman (1964).

Nóbrega (1994) tratou da autossincronização de motores não ideais apoiados em estruturas horizontalmente elásticas, mas verticalmente rígidas, introduzindo as propriedades eletromecânicas nas equações de movimento, que influenciam diretamente no torque do motor.

Blekhman et al. (2002), utilizando valores médios das variáveis em solução dinâmica, definiram e exemplificaram com diversos casos a autossincronização e estabilidade de rotores de sistemas vibratórios autossincronizados e sincronizados. Por este método ser aplicável em diversos casos, ele é comumente usado para verificar a solução de sistemas vibratórios não lineares, podendo fragmentar a solução do problema em respostas de alta e baixa frequência, assim, simplificando a análise.

O estudo da autossincronização de quatro motores não ideais foi feito por Balthazar, Felix e Brasil (2005), através de simulação numérica. O modelo matemático consiste em quatro motores de corrente contínua com massa excêntrica, montados em um pórtico em que apenas a deslocabilidade lateral foi considerada. Apesar de possuir mais motores, este sistema se assemelha ao analisado neste trabalho, mantendo sua análise utilizando métodos que simplificam a abundância de dados analisados.

Nas pesquisas de Wen et al. (2010) e Zhao, Wen e Zhang (2010), foram analisadas

as vibrações em sistemas de duas e três dimensões espaciais, utilizando um sistema de quatro motores distribuídos em um plano e apoiados em blocos sustentados e conectados elasticamente, sem amortecimento. Utilizando métodos computacionais e média de valores de variáveis em solução dinâmica, puderam investigar a sincronização dos sistemas e as características dinâmicas dos motores.

Em mesma linha de pesquisa, Zhang, Wen e Zhao (2013, 2014) deduziram a condição de sincronização e a estabilidade de sincronização para um sistema vibratório com três rotores em um mesmo plano, onde seus eixos formam um triângulo equilátero, apoiados em um bloco sustentado elasticamente sem amortecimento. Após a dedução da condição de sincronização, realizaram experimentos que comprovaram os resultados obtidos.

Hou e Fang (2015) também estudaram a autossincronização de dois motores não ideais apoiados em uma estrutura, considerando desta vez a estrutura horizontalmente e verticalmente elásticas, com amortecimento em ambos os eixos. Neste experimento, foi observado que a vibração vertical influencia minimamente na vibração horizontal da estrutura e pode ser desprezada, o que confirmou as hipóteses usadas por Nóbrega (1994).

Fang, Hou e Nan (2015) investigaram o modelo de uma peneira vibratória, consistindo em dois rotores de massas excêntricas apoiados em blocos, onde o primeiro bloco é sustentado elasticamente pelo segundo, que é sustentado elasticamente pelo solo. Foram consideradas as sustentações elásticas tanto na horizontal quanto na vertical. Devido à falta de simetria do modelo, foram obtidos resultados diferentes de variação de velocidade e torque do primeiro e segundo motor, verificando qual possuía maiores oscilações dependendo das condições iniciais do modelo computacional.

Um pouco depois, Pan et al. (2018) investigaram um sistema de pêndulo-rotor apoiados em um bloco, suportado horizontalmente por um amortecedor e uma mola. Nesta pesquisa, além de analisar os resultados computacionais obtidos, foi utilizado o método de Poincaré para verificar a sincronização do problema.

Visando estudar um sistema de controle para sincronização, Chen, Liu e Li (2021) pesquisaram a sincronização de três motores apoiados em uma viga sustentada elasticamente. Com um sistema que pode detectar as vibrações em tempo real e controlar os motores, é possível forçar uma sincronização mais benéfica para o sistema, não se limitando a mudanças das condições iniciais para buscar sincronias específicas.

Por mais abrangentes que os estudos neste ramo se mostrem, não são conhecidos estudos sobre motores não ideais apoiados em estruturas distintas interconectadas, além de não serem usuais os estudos de energias e bacias de atração¹, sendo mais frequentes os estudos de trajetórias e sincronias. Visto que este cenário ocorre em diversos empreendi-

¹ O estudo de bacias de atração, melhor explicado na metodologia deste trabalho, consiste em mapear soluções do sistema buscadas para diferentes valores iniciais das variáveis do modelo.

mentos industriais e ainda não foi explorado, é importante o estudo que está sendo feito neste trabalho.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é estudar a autossincronização de motores não ideais apoiados em fundação única, retomando os estudos feitos por Nóbrega (1994), discutindo eventual ocorrência de respostas caóticas indicada em seus estudos. Na sequência, tem-se como objetivo estudar a autossincronização de motores não ideais apoiados em fundações distintas, porém conectadas elasticamente. Para alcançar este objetivo, são elaborados objetivos específicos:

- Obter as respostas do sistema de dois motores apoiados em uma fundação, caracterizando cada uma das soluções possíveis de se obter, retomando os resultados obtidos por Nóbrega;
- Criar as mesmas projeções do espaço de parâmetros realizados por Nóbrega no sistema com uma fundação, com o intuito de identificar como os parâmetros alteram o sistema e confrontar resultados;
- Retomar o caso indicado por Nóbrega como possivelmente caótico, realizando o experimento indicado, utilizando gráfico de recorrência e estudando casos próximos ao ponto em questão;
- Obter respostas do sistema de dois motores apoiados em fundações conectadas, caracterizando cada uma das soluções possíveis de se obter;
- Criar seções do espaço de parâmetros do sistema com duas fundações, verificando como parâmetros selecionados afetam a busca de soluções;
- Realizar um estudo de energias do sistema com duas fundações, verificando a energia cinética, potencial, dissipada e fornecida pelas máquinas. Este estudo tem o intuito de verificar como os parâmetros alteram as energias do sistema;
- Estudar bacias de atração e verificar como ocorre a mudança da busca de solução pelo sistema de duas fundações;
- Utilizar a aplicação de Poincaré para verificar a estabilidade das soluções buscadas pelo sistema com duas fundações;

1.3 Organização da dissertação

Para realizar os objetivos estabelecidos e apresentá-los de forma lógica, este trabalho é organizado nos seguintes capítulos:

- Introdução: são apresentados o tema da pesquisa, mostrando a importância deste estudo, bibliografias relacionadas, os objetivos da pesquisa e a organização da

dissertação;

- Modelo matemático: são apresentadas as equações dos motores elétricos e dos dois sistemas a serem estudados nesta pesquisa, indicando como são obtidas as equações dos sistemas com variáveis e parâmetros adimensionais;
- Metodologias utilizadas: são apresentadas as metodologias mencionadas nos objetivos e utilizadas para obter os resultados da pesquisa; são elas os espaços de parâmetros, os estudo de energias, as bacias de atração e a aplicação de Poincaré;
- Análise dos resultados para fundação única, com dois motores: são apresentados os resultados obtidos para o sistema de fundação única, mostrando os ensaios numéricos e as soluções encontradas, a análise da indicação de caos e o estudo do espaço de parâmetros;
- Análise dos resultados para duas fundações conectadas, com um motor em cada: são apresentados os resultados obtidos para o sistema de duas fundações conectadas, mostrando os ensaios numéricos e as soluções encontradas, os espaços de parâmetros e estudo de energias, as bacias de atração e a aplicação de Poincaré;
- Conclusões: capítulo que retoma resultados obtidos e conclui a dissertação com a última análise do trabalho.

2 Modelo matemático

Os sistemas dinâmicos a serem estudados nesta pesquisa são compostos por motores elétricos de corrente contínua, como fontes de excitação, apoiados em estruturas flexíveis. Tais motores são ditos não ideais, pois seu torque e a potência útil variam com a frequência do sistema, conseqüentemente, o regime de funcionamento é influenciado pela própria resposta da estrutura. Desta forma, o primeiro passo da metodologia desta pesquisa é estudar as equações de motores não ideais e o efeito Sommerfeld.

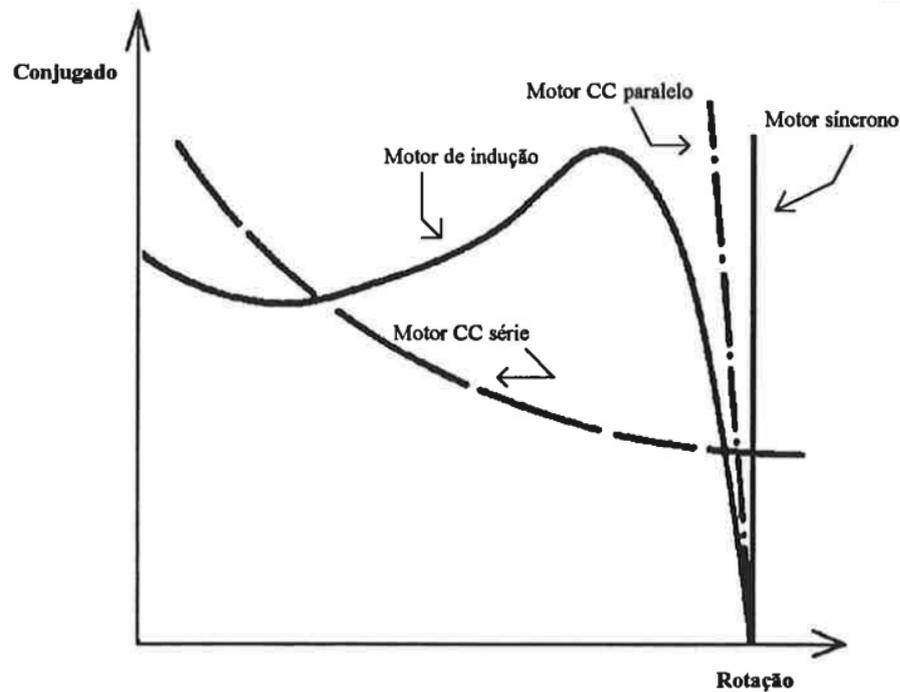
Para definição da equação dos motores, refere-se aos estudos feitos por Lobosco e Dias (1988) e assume-se uma variação linear do torque com a rotação do motor. A tensão elétrica no terminal dos motores é considerada linearmente crescente durante certo tempo e constante a partir de então.

Após definir as equações dos motores, faz-se necessário o estudo mecânico dos modelos propostos para encontrar as equações dos sistemas. Para isso, serão calculadas a energia cinética e a potencial do sistema, para posterior uso da equação de Euler-Lagrange. Com as equações da dinâmica estabelecidas, são obtidos adimensionais relativos às variáveis e então são escritas na forma de espaço de estados para facilitar o uso do método de Runge-Kutta.

2.1 Motores elétricos

Kononenko (1969) estudou as curvas características dos motores e o efeito Sommerfeld de rotores apoiados em uma viga em balanço. Say e Taylor (1986) estudaram os pontos de operação em regime permanente dos motores. Lobosco e Dias (1988) mostraram que a curva característica dos motores apresenta uma diminuição do torque com o aumento da velocidade angular. Na presente pesquisa, será utilizada uma aproximação da curva característica de motores de corrente contínua (motores CC) (ver figuras 4 e 5).

Figura 4 – Curvas características dos motores



Fonte: Lobosco e Dias (1988)

Para obter a função de curva característica aproximada do motor, será utilizada a equação mostrada abaixo, decorrente da aplicação da lei das malhas de Kirchhoff, onde:

- f_{cem} é a força contraeletromotriz;
- i_a é a corrente elétrica do circuito;
- L_a é a indutância elétrica;
- R_a é a resistência elétrica;
- u é a tensão elétrica aplicada aos terminais;
- $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ para qualquer variável v , sendo t o tempo

$$u - f_{cem} = R_a i_a + L_a \dot{i}_a \quad (2.1)$$

A força contraeletromotriz é modelada como uma grandeza proporcional da velocidade angular do motor:

$$f_{cem} = k_E \dot{\psi}_i \quad (2.2)$$

O torque do motor pode ser modelado como uma grandeza proporcional da corrente elétrica do circuito:

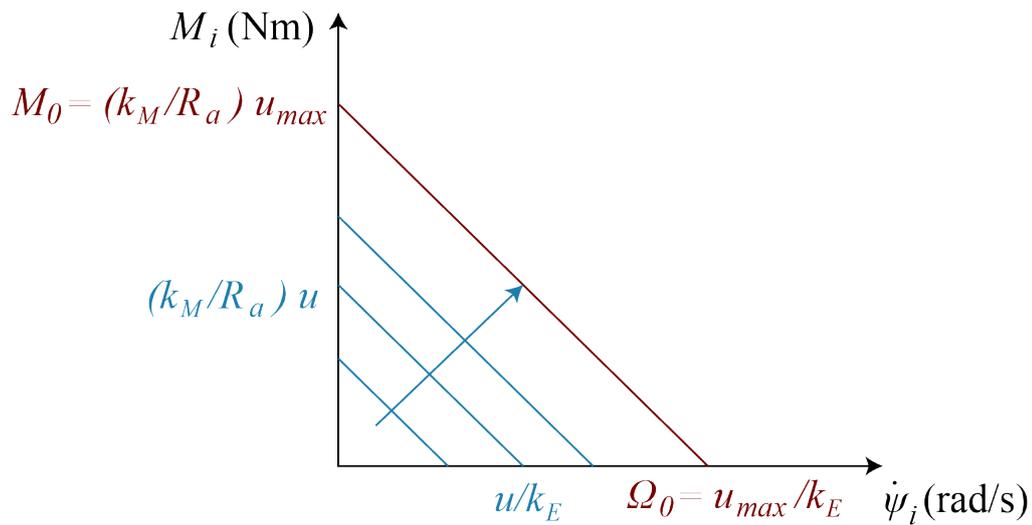
$$M_i = k_M i_a \quad (2.3)$$

Dessa forma, substituindo as Eqs. (2.2) e (2.3) na Eq. (2.1), a seguinte equação pode ser escrita:

$$u - k_E \dot{\psi}_i = \frac{R_a}{k_M} M_i + \frac{L_a}{k_M} \dot{M}_i \quad (2.4)$$

Em um regime estacionário, em que $\dot{M}_i = 0$, o maior torque possível no motor é $M_0 = \frac{k_M}{R_a} u_{max}$ e a maior velocidade angular possível é $\Omega_0 = \frac{u_{max}}{k_E}$.

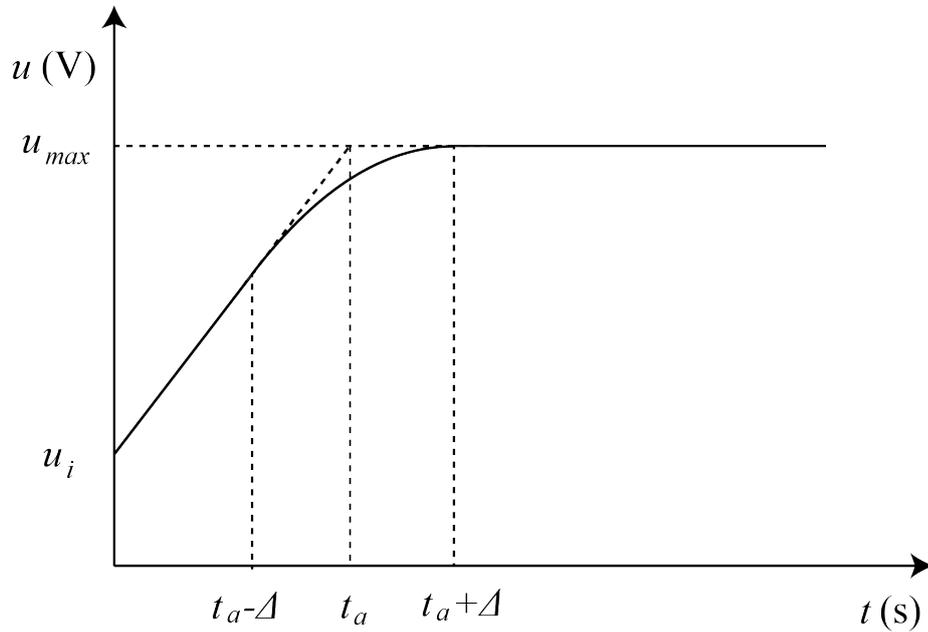
Figura 5 – Curvas características aproximadas dos motores CC



Fonte: Adaptado de Nóbrega (1994)

Ao ligar os motores elétricos, considera-se que a tensão elétrica inicial vale u_i e o comportamento inicial da tensão elétrica nos motores seja linearmente crescente até o instante de tempo $t_a - \Delta$, com uma transição até o tempo $t_a + \Delta$, onde se estabelece constante com máxima tensão u_{max} , como mostra a figura a seguir.

Figura 6 – Tensão elétrica nos motores ao longo do tempo



Fonte: Adaptado de Nóbrega (1994)

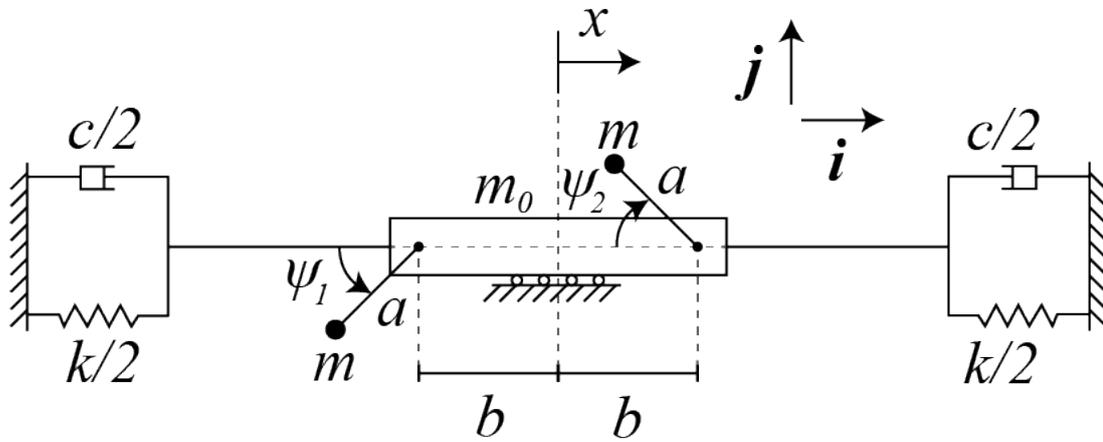
Foi suposta uma equação de transição polinomial cúbica entre os intervalos crescente linear e constante, assim, evitando uma variação brusca na tensão e em sua derivada, tendo sido concluído que neste caso a equação que proporciona melhor transição entre os trechos crescente linear e constante é uma polinomial quadrática, explicado no apêndice A. A seguir, é mostrada a Eq. (2.5) que descreve a tensão em diferentes intervalos de tempo.

$$u = \begin{cases} \frac{u_{max} - u_i}{t_a} t + u_i & \text{para } t \leq t_a - \Delta \\ u_{max} - \frac{u_{max} - u_i}{4\Delta t_a} (t - t_a - \Delta)^2 & \text{para } t_a - \Delta \leq t \leq t_a + \Delta \\ u_{max} & \text{para } t \geq t_a + \Delta \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 Dois motores em uma mesma fundação

Um dos objetos de estudo desta pesquisa é o modelo de dois motores elétricos de corrente contínua apoiados em uma única fundação. Para este estudo, é considerado que os coeficientes elástico e de amortecimento sejam conhecidos. Desta forma, o modelo se iguala ao estudado por Nóbrega (1994).

Figura 7 – Modelo matemático de dois motores na mesma base



Fonte: Adaptado de Nóbrega (1994)

A seguinte notação é utilizada:

- a é a distância entre a massa excêntrica e o eixo do motor;
- b é a distância horizontal entre a origem do sistema de coordenadas e o eixo dos motores na configuração de referência.
- c é o coeficiente de amortecimento viscoso linear da fundação
- I é o momento de inércia dos rotores dos motores
- \mathbf{i} é o vetor unitário da direção horizontal
- \mathbf{j} é o vetor unitário da direção vertical
- k é o coeficiente de rigidez elástica linear da fundação
- m é a massa excêntrica dos motores
- m_0 é a massa da fundação
- x é o deslocamento da fundação única
- ψ_i é o ângulo da massa excêntrica do motor i

A partir do modelo estabelecido na figura 7, é possível obter os vetores posição e velocidade das massas m_0 e m consideradas pontuais. Os índices 0, 1 e 2 representam a massa da estrutura e as massas excêntricas dos motores elétricos 1 e 2, respectivamente.

Vetores posição e velocidade da massa da fundação:

$$\mathbf{R}_0 = (x; 0) \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = (\dot{x}; 0) \quad (2.7)$$

Vetores posição e velocidade das massas excêntricas:

$$\mathbf{R}_1 = (x - b - a \cos \psi_1; -a \sin \psi_1) \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = (\dot{x} + a\dot{\psi}_1 \sin \psi_1; -a\dot{\psi}_1 \cos \psi_1) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{R}_2 = (x + b - a \cos \psi_2; a \sin \psi_2) \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = (\dot{x} + a\dot{\psi}_2 \sin \psi_2; a\dot{\psi}_2 \cos \psi_2) \quad (2.11)$$

Com os vetores velocidade e posição obtidos, é possível calcular a energia cinética (E_c) e a energia potencial (E_p) do sistema.

A energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} [m_0 \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \dot{\mathbf{R}}_0 + m \dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1 + m \dot{\mathbf{R}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}}_2 + I\dot{\psi}_1^2 + I\dot{\psi}_2^2] \quad (2.12)$$

$$E_c = \frac{1}{2} (m_0 + 2m) \dot{x}^2 + ma\dot{x} (\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2 \sin \psi_2) + \frac{1}{2} (I + ma^2) (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) \quad (2.13)$$

A energia potencial é dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.14)$$

Note que, caso os motores girassem no mesmo sentido, somente alteraria o sinal do componente \mathbf{j} dos vetores \mathbf{R}_1 e $\dot{\mathbf{R}}_1$, o que não causa alteração na equação de energia cinética e potencial neste estudo. Desta forma, as soluções obtidas por estas equações valem tanto para motores com sentido de rotação idênticos ou opostos, salvo a interpretação física do resultado.

É possível encontrar as equações de movimento do sistema com a equação de Euler-Lagrange representada abaixo, onde V é uma coordenada generalizada do sistema e E_V é o esforço energeticamente conjugado da variável em análise.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{V}} - \frac{\partial E_c}{\partial V} + \frac{\partial E_p}{\partial V} = E_V \quad (2.15)$$

Analisando a variável x , onde o esforço energeticamente conjugado é a força de amortecimento viscoso $-c\dot{x}$:

$$(m_0 + 2m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx + ma \sum_{i=1}^2 (\ddot{\psi}_i \sin \psi_i + \dot{\psi}_i^2 \cos \psi_i) = 0 \quad (2.16)$$

Analisando a variável ψ_1 , onde o esforço energeticamente conjugado é o torque do motor M_1 :

$$(ma^2 + I)\ddot{\psi}_1 + ma\ddot{x} \sin\psi_1 = M_1 \quad (2.17)$$

Analisando a variável ψ_2 , onde o esforço energeticamente conjugado é o torque do motor M_2 :

$$(ma^2 + I)\ddot{\psi}_2 + ma\ddot{x} \sin\psi_2 = M_2 \quad (2.18)$$

Para uma melhor análise dos dados, é benéfico escrever as equações do movimento usando variáveis adimensionais. Para isso, novos parâmetros e variáveis serão introduzidos:

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais do sistema com uma fundação

Nome	Nomenclatura	fórmula de cálculo
Tensão elétrica adimensional	v	u/u_{max}
Relação entre massas do sistema	α	$m/(m_0 + 2m)$
Torque adimensional máximo	γ	$\eta M_0/(ma^2\omega^2)$
Relação entre resistência e indutância	δ	$R_a/(L_a\omega)$
Relação entre momentos de inércia	η	$ma^2/(ma^2 + I)$
Taxa de amortecimento	ξ	$c\omega/(2k)$
Intervalo do tempo da variação da tensão	ς	$\omega\Delta$
Tempo da variação da tensão	τ_a	ωt_a
Tensão adimensional máxima	φ	$u_{max}/(k_E\omega)$

Fonte: Autor

Tabela 2 – Parâmetro dimensional do sistema com uma fundação

Nome	Nomenclatura	fórmula de cálculo
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$\sqrt{k/(m_0 + 2m)}$

Fonte: Autor

Tabela 3 – Variáveis adimensionais do sistema com uma fundação

Nome	Nomenclatura	formula de cálculo
Relação de torque	F_i	M_i/M_0
Deslocamento adimensional da fundação	q	x/a
Tempo adimensional	τ	ωt

Fonte: Autor

A derivada em relação ao tempo adimensional é indicada por um apóstrofo, por exemplo, $\dot{q} = q'\omega$. É mostrado a seguir as Eqs. (2.16) à (2.18) e a Eq. (2.5) utilizando adimensionais:

Usando adimensionais na Eq. (2.16):

$$q'' + 2\xi q' + q + \alpha \sum_{i=1}^2 (\psi_i'' \operatorname{sen} \psi_i + \psi_i'^2 \cos \psi_i) = 0 \quad (2.19)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.17):

$$\psi_1'' + \eta q'' \operatorname{sen} \psi_1 = \gamma F_1 \quad (2.20)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.18):

$$\psi_2'' + \eta q'' \operatorname{sen} \psi_2 = \gamma F_2 \quad (2.21)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.5):

$$v = \begin{cases} \frac{1-v_i}{\tau_a} \tau + v_i & \text{para } \tau \leq \tau_a - \varsigma \\ 1 - \frac{1-v_i}{4\varsigma\tau_a} (\tau - \tau_a - \varsigma)^2 & \text{para } \tau_a - \varsigma \leq \tau \leq \tau_a + \varsigma \\ 1 & \text{para } \tau \geq \tau_a + \varsigma \end{cases} \quad (2.22)$$

$$v' = \begin{cases} \frac{1-v_i}{\tau_a} & \text{para } \tau \leq \tau_a - \varsigma \\ -\frac{1-v_i}{2\varsigma\tau_a} (\tau - \tau_a - \varsigma) & \text{para } \tau_a - \varsigma \leq \tau \leq \tau_a + \varsigma \\ 0 & \text{para } \tau \geq \tau_a + \varsigma \end{cases} \quad (2.23)$$

Visando isolar as derivadas de segunda ordem nas equações desenvolvidas, é feita a substituição das Eqs. (2.20) e (2.21) na Eq. (2.19):

$$q'' = -\frac{2\xi q' + q + \alpha \sum_{i=1}^2 (\gamma F_i \operatorname{sen} \psi_i + \psi_i'^2 \cos \psi_i)}{(1 - \eta\alpha(\operatorname{sen}^2 \psi_1 + \operatorname{sen}^2 \psi_2))} \quad (2.24)$$

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.20):

$$\psi_1'' = \gamma F_1 + \eta \operatorname{sen} \psi_1 \frac{2\xi q' + q + \alpha \sum_{i=1}^2 (\gamma F_i \operatorname{sen} \psi_i + \psi_i'^2 \cos \psi_i)}{(1 - \eta\alpha(\operatorname{sen}^2 \psi_1 + \operatorname{sen}^2 \psi_2))} \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.21):

$$\psi_2'' = \gamma F_2 + \eta \operatorname{sen} \psi_2 \frac{2\xi q' + q + \alpha \sum_{i=1}^2 (\gamma F_i \operatorname{sen} \psi_i + \psi_i'^2 \cos \psi_i)}{(1 - \eta\alpha(\operatorname{sen}^2 \psi_1 + \operatorname{sen}^2 \psi_2))} \quad (2.26)$$

Usando a Eq. (2.4), as equações adimensionais dos motores podem ser escritas como abaixo:

$$F_i' = \delta \left(v - \frac{\psi_i'}{\varphi} - F_i \right) \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (2.27)$$

Assim, pode-se escrever as equações do sistema na forma de espaço de estados, que facilita a utilização do método de Runge-Kutta, como mostrado a seguir:

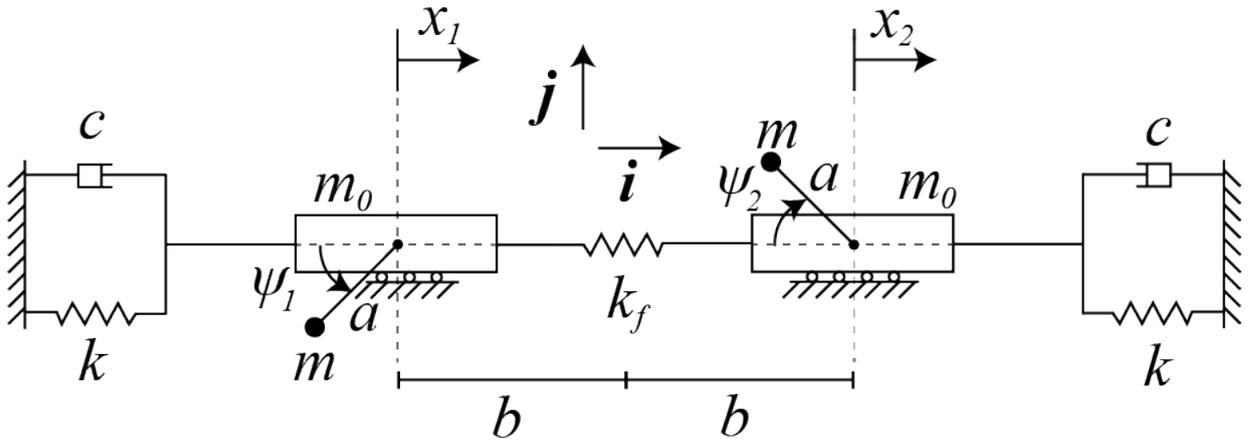
$$\mathbf{y} = \begin{cases} y_1 = q \\ y_2 = q' \\ y_3 = \psi_1 \\ y_4 = \psi_1' \\ y_5 = \psi_2 \\ y_6 = \psi_2' \\ y_7 = F_1 \\ y_8 = F_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{y}' = \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{2\xi y_2 + y_1 + \alpha(\gamma y_7 \operatorname{sen} y_3 + \gamma y_8 \operatorname{sen} y_5 + y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5)}{(1 - \eta \alpha (\operatorname{sen}^2 y_3 + \operatorname{sen}^2 y_5))} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \gamma y_7 + \eta \operatorname{sen} y_3 \frac{2\xi y_2 + y_1 + \alpha(\gamma y_7 \operatorname{sen} y_3 + \gamma y_8 \operatorname{sen} y_5 + y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5)}{(1 - \eta \alpha (\operatorname{sen}^2 y_3 + \operatorname{sen}^2 y_5))} \\ y_5' = y_6 \\ y_6' = \gamma y_8 + \eta \operatorname{sen} y_5 \frac{2\xi y_2 + y_1 + \alpha(\gamma y_7 \operatorname{sen} y_3 + \gamma y_8 \operatorname{sen} y_5 + y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5)}{(1 - \eta \alpha (\operatorname{sen}^2 y_3 + \operatorname{sen}^2 y_5))} \\ y_7' = \delta(y_9 - \frac{y_4}{\varphi} - y_7) \\ y_8' = \delta(y_9 - \frac{y_6}{\varphi} - y_8) \end{cases} \quad (2.29)$$

2.3 Dois motores em fundações conectadas

Outro modelo matemático estudado nesta pesquisa é o de dois motores elétricos de corrente contínua nominalmente idênticos apoiados em fundações idênticas conectadas entre si, como ocorre com fundações conectadas por uma viga baldrame. Para este estudo, é considerado que a conexão das fundações possui um coeficiente elástico (k_f) conhecido e um amortecimento desprezível.

Figura 8 – Modelo matemático de dois motores em fundações conectadas



Fonte: autor

A seguir, é apresentado somente os símbolos que se diferenciam do sistema anterior:

- k_f é o coeficiente de rigidez elástica linear da conexão das fundações
- x_i é o deslocamento da fundação i

Note que, por mais que ambos os sistemas possuam coeficiente de amortecimento viscoso linear e coeficiente de rigidez elástica linear, eles são definidos de formas diferentes nas figuras 7 e 8

Assim como no modelo anterior, é possível obter os vetores posição e velocidade das massas consideradas pontuais. Os índices 1, 2, 3 e 4 representam a estrutura da esquerda, a estrutura da direita, a massa excêntrica do motor da esquerda e a massa excêntrica do motor da direita, respectivamente.

Vetores posição e velocidade das massas das fundações:

$$\mathbf{R}_1 = (x_1 - b; 0) \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = (\dot{x}_1; 0) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{R}_2 = (x_2 + b; 0) \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = (\dot{x}_2; 0) \quad (2.33)$$

Vetores posição e velocidade das massas excêntricas:

$$\mathbf{R}_3 = (x_1 - b - a \cos \psi_1; -a \sin \psi_1) \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_3 = (\dot{x}_1 + a\dot{\psi}_1 \sin \psi_1; -a\dot{\psi}_1 \cos \psi_1) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{R}_4 = (x_2 + b - a \cos \psi_2; a \sin \psi_2) \quad (2.36)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_4 = (\dot{x}_2 + a\dot{\psi}_2 \sin \psi_2; a\dot{\psi}_2 \cos \psi_2) \quad (2.37)$$

Com os vetores posição e velocidade obtidos, é possível calcular a energia cinética (E_c) e a energia potencial (E_p) do sistema.

A energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} \left[m_0 \dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}}_1 + m_0 \dot{\mathbf{R}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}}_2 + m \dot{\mathbf{R}}_3 \cdot \dot{\mathbf{R}}_3 + m \dot{\mathbf{R}}_4 \cdot \dot{\mathbf{R}}_4 + I\dot{\psi}_1^2 + I\dot{\psi}_2^2 \right] \quad (2.38)$$

$$E_c = \frac{1}{2} (m_0 + m) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + ma \sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i \dot{\psi}_i \sin \psi_i) + \frac{1}{2} (I + ma^2) (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) \quad (2.39)$$

A energia potencial é dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k_f (x_2 - x_1)^2 \quad (2.40)$$

$$E_p = \frac{1}{2} (k + k_f) (x_1^2 + x_2^2) - k_f x_1 x_2 \quad (2.41)$$

Note que, caso os motores girassem no mesmo sentido, somente alteraria o sinal do componente \mathbf{j} dos vetores \mathbf{R}_3 e $\dot{\mathbf{R}}_3$, o que não causa alteração na equação de energia cinética e potencial neste estudo. Desta forma, as soluções obtidas por estas equações valem tanto para motores com sentido de rotação idênticos ou opostos, salvo a interpretação física do resultado.

Assim como no modelo anterior, é possível encontrar as equações de movimento do sistema com a Eq. (2.15) de Euler-Lagrange.

Analisando a variável x_1 , onde o esforço energeticamente conjugado é a força de amortecimento viscoso $-c\dot{x}_1$:

$$(m_0 + m) \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k + k_f)x_1 - k_f x_2 + ma (\ddot{\psi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\psi}_1^2 \cos \psi_1) = 0 \quad (2.42)$$

Analisando a variável x_2 , onde o esforço energeticamente conjugado é a força de amortecimento viscoso $-c\dot{x}_2$:

$$(m_0 + m) \ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + (k + k_f)x_2 - k_f x_1 + ma (\ddot{\psi}_2 \sin \psi_2 + \dot{\psi}_2^2 \cos \psi_2) = 0 \quad (2.43)$$

Analisando a variável ψ_1 , onde o esforço energeticamente conjugado é o torque do motor M_1 :

$$(ma^2 + I)\ddot{\psi}_1 + ma\ddot{x}_1 \sin \psi_1 = M_1 \quad (2.44)$$

Analisando a variável ψ_2 , onde o esforço energeticamente conjugado é o torque do motor M_2 :

$$(ma^2 + I)\ddot{\psi}_2 + ma\ddot{x}_2 \sin \psi_2 = M_2 \quad (2.45)$$

É benéfico escrever as equações do movimento usando variáveis adimensionais, para isso, novos parâmetros e variáveis serão introduzidos. Serão mencionados apenas os parâmetros e variáveis distintos das tabelas 1 à 3 do caso de fundação única.

Tabela 4 – Parâmetros adimensionais do sistema com duas fundações

Nome	Nomenclatura	formula de cálculo
Relação entre massas do sistema	α	$m/(m_0 + m)$
Relação entre coeficientes elásticos	β	$k_f/(k + k_f)$
Taxa de amortecimento	ξ	$c\omega/(k + k_f)$

Fonte: Autor

Tabela 5 – Parâmetro dimensional do sistema com duas fundações

Nome	Nomenclatura	formula de cálculo
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$\sqrt{(k + k_f)/(m_0 + m)}$

Fonte: Autor

Tabela 6 – Variável adimensional do sistema com duas fundações

Nome	Nomenclatura	formula de cálculo
Deslocamento adimensional da fundação i	q_i	x_i/a

Fonte: Autor

Desta forma, as Eqs. (2.42) à (2.45) com adimensionais é mostrada abaixo. A Eq. (2.5) com adimensionais para este modelo é igual à apresentada no modelo anterior pela Eq. (2.22).

Usando adimensionais na Eq. (2.42):

$$q_1'' + 2\xi q_1' + q_1 - \beta q_2 + \alpha (\psi_1'' \text{sen} \psi_1 + \psi_1'^2 \cos \psi_1) = 0 \quad (2.46)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.43):

$$q_2'' + 2\xi q_2' + q_2 - \beta q_1 + \alpha (\psi_2'' \text{sen} \psi_2 + \psi_2'^2 \cos \psi_2) = 0 \quad (2.47)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.44):

$$\psi_1'' + \eta q_1'' \text{sen} \psi_1 = \gamma F_1 \quad (2.48)$$

Usando adimensionais na Eq. (2.45):

$$\psi_2'' + \eta q_2'' \text{sen} \psi_2 = \gamma F_2 \quad (2.49)$$

Visando isolar as derivadas de segunda ordem nas equações desenvolvidas, são feitas as substituições mostradas abaixo.

Substituindo a Eq. (2.48) na Eq. (2.46):

$$q_1'' = -\frac{2\xi q_1' + q_1 - \beta q_2 + \alpha (\gamma F_1 \text{sen} \psi_1 + \psi_1'^2 \cos \psi_1)}{1 - \eta \alpha \text{sen}^2 \psi_1} \quad (2.50)$$

Substituindo a Eq. (2.46) na Eq. (2.48):

$$\psi_1'' = \frac{\gamma F_1 + \eta (2\xi q_1' + q_1 - \beta q_2 + \alpha \psi_1'^2 \cos \psi_1) \text{sen} \psi_1}{1 - \eta \alpha \text{sen}^2 \psi_1} \quad (2.51)$$

Substituindo a Eq. (2.49) na Eq. (2.47):

$$q_2'' = -\frac{2\xi q_2' + q_2 - \beta q_1 + \alpha (\gamma F_2 \text{sen} \psi_2 + \psi_2'^2 \cos \psi_2)}{1 - \eta \alpha \text{sen}^2 \psi_2} \quad (2.52)$$

Substituindo a Eq. (2.47) na Eq. (2.49):

$$\psi_2'' = \frac{\gamma F_2 + \eta(2\xi q_2' + q_2 - \beta q_1 + \alpha \psi_2'^2 \cos \psi_2) \operatorname{sen} \psi_2}{1 - \eta \alpha \operatorname{sen}^2 \psi_2} \quad (2.53)$$

Usando a Eq. (2.4), a equação adimensional do motor i pode ser escrita exatamente como a Eq. (2.27) demonstrada no modelo anterior.

$$F_i' = \delta \left(v - \frac{\psi_i'}{\varphi} - F_i \right) \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (2.54)$$

Assim, pode-se escrever as equações do sistema na forma de espaço de estados, que facilita a utilização do método de Runge-Kutta, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{y} = \begin{cases} y_1 = q_1 \\ y_2 = q_1' \\ y_3 = q_2 \\ y_4 = q_2' \\ y_5 = \psi_1 \\ y_6 = \psi_1' \\ y_7 = \psi_2 \\ y_8 = \psi_2' \\ y_9 = F_1 \\ y_{10} = F_2 \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{y}' = \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{2\xi y_2 + y_1 - \beta y_3 + \alpha(\gamma y_9 \operatorname{sen} y_5 + y_6^2 \cos y_5)}{1 - \eta \alpha \operatorname{sen}^2 y_5} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -\frac{2\xi y_4 + y_3 - \beta y_1 + \alpha(\gamma y_{10} \operatorname{sen} y_7 + y_8^2 \cos y_7)}{1 - \eta \alpha \operatorname{sen}^2 y_7} \\ y_5' = y_6 \\ y_6' = \frac{\gamma y_9 + \eta(2\xi y_2 + y_1 - \beta y_3 + \alpha y_6^2 \cos y_5) \operatorname{sen} y_5}{1 - \eta \alpha \operatorname{sen}^2 y_5} \\ y_7' = y_8 \\ y_8' = \frac{\gamma y_{10} + \eta(2\xi y_4 + y_3 - \beta y_1 + \alpha y_8^2 \cos y_7) \operatorname{sen} y_7}{1 - \eta \alpha \operatorname{sen}^2 y_7} \\ y_9' = \delta \left(y_{11} - \frac{y_6}{\varphi} - y_9 \right) \\ y_{10}' = \delta \left(y_{11} - \frac{y_8}{\varphi} - y_{10} \right) \end{cases} \quad (2.56)$$

3 Metodologias utilizadas

Com as equações de movimento dos modelos estabelecidas, é possível utilizar o método de Runge-Kutta de quarta ordem para fazer a integração numérica ao longo do tempo. Este método é importante para obter o resultado do sistema para vários parâmetros e condições iniciais distintos, servindo como base para aplicação de diversos outros métodos utilizados nesta pesquisa.

Os estudos realizados por Andronov, Vitt e Khaikin (1966) e Slotine e Li (1991) servem como base para entender convergências para soluções constantes ou periódicas. A convergência para valores constantes ocorre se, sem interferências externas ao sistema, as variáveis (do vetor de estado \mathbf{y}) sempre mantêm o mesmo valor ao passar do tempo, podendo ser estável, quando o sistema tende a se manter nestes valores mesmo com perturbações leves, ou instável, caso o sistema tenda a se afastar destes valores caso ocorra alguma perturbação. A solução periódica ocorre se, sem interferências externas ao sistema, as variáveis sempre mantêm o mesmo valor ao passar um período T , ou seja, oscila sempre com o mesmo período e as variáveis repetem os mesmos valores, como expresso pela Eq. (3.1).

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}(\tau + T) \quad (3.1)$$

As soluções periódicas podem ser estáveis, se, com pequenas perturbações, possuem a tendência de se manter na oscilação original, ou instáveis, se, com pequenas perturbações, possuem tendência de escape da órbita de oscilação. Com base nessas definições, será realizada a análise dos resultados obtidos por estes métodos.

A transformada rápida de Fourier (FFT) contribui para encontrar as frequências e amplitudes predominantes no modelo, analisando as soluções que os sistemas podem atingir, isso pois a FFT é um algoritmo que obtém o espectro frequência \times amplitude de um intervalo de tempo dos resultados obtidos. Esta ferramenta é complementada pela análise no espaço de parâmetros, que mostra como os parâmetros do sistema contribuem na busca de soluções diversas. Ainda sobre o espaço de parâmetros, é feito um estudo de energia sobre os casos analisados para verificar se existe correlação entre a solução buscada pelo sistema e o consumo de energia dos motores. A análise do espaço de fase verifica se condições iniciais distintas do sistema influenciam na busca de soluções diferentes do sistema, sendo feita alteração dos parâmetros para verificar como se modifica o espaço de fase do sistema nesta mudança.

É de interesse estudar o possível efeito caótico mencionado por Nóbrega (1994). Os estudos feitos por Thompson, Stewart e Turner (1990), Hirsch, Smale e Devaney (2012),

Guckenheimer e Holmes (2013), Lynch (2004) e Viana (2018) mostram que existem diversas definições diferentes sobre caos dependendo do autor, mas existem características citadas a seguir que costumam ser exibidas pelas soluções de sistemas caóticos:

- Oscilações aperiódicas das variáveis de estado;
- Alta sensibilidade às condições iniciais;
- Alta sensibilidade à alteração de parâmetros;
- Imprevisibilidade após um tempo relativamente curto;
- Espectro de frequência contínuo, de banda larga, porém limitado;
- Estacionariedade, isto é, embora aperiódico, os padrões tendem a se repetir;
- Presença do atrator estranho (*strange attractor*).

Os estudos sobre caos já foram realizados com base na integração numérica por Beyhan (2013), Dai et al. (2015) e Mehdi e Kareem (2017). Nesta pesquisa, é verificado o caso indicado com base no gráfico de recorrência e nos resultados das integrações numéricas, partindo de valores próximos e acompanhando os valores das variáveis ao longo do tempo.

Um estudo mais rigoroso sobre as soluções periódicas encontradas é feito utilizando a aplicação de Poincaré. A metodologia verifica se o sistema convergiu para uma solução periódica e se esta solução é estável ou instável, analisando os resultados oscilatórios das variáveis do sistema ao longo do tempo.

3.1 Espaços de parâmetros

Alterando os parâmetros é possível obter respostas diferentes dos sistemas. Ao alterar consistentemente alguns parâmetros, é possível obter as respostas das variáveis para uma região do espaço de parâmetros do sistema. Esta forma de observar o sistema já foi estudada por Holt e Gaitan (1996), Piqueira, Monteiro e Filho (2004), Gryazina e Polyak (2006) e Sönmez e Ayasun (2015) e mostra-se uma forma excelente de identificar como os parâmetros influenciam na busca de solução do sistema.

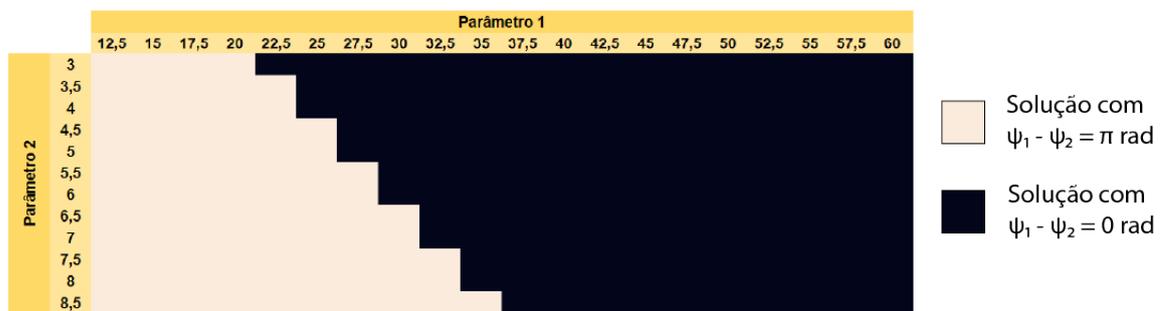
O método consiste em dividir o espaço de parâmetros em células, de forma que o espaço seja constituído de várias delas. Para um espaço bidimensional, é usual que as células sejam retangulares.

Após a divisão do espaço de parâmetros, aplica-se a integração numérica de Runge-Kutta utilizando os parâmetros iguais aos dos centros das células do espaço, obtendo as soluções de cada centro de célula como parâmetro, que será extrapolado como a convergência com parâmetros iguais aos pontos desta célula. Para diferenciar as soluções apresentadas em cada célula, colore-se cada célula conforme o seguinte procedimento:

- A primeira célula analisada no espaço é colorida com uma certa cor;
- Caso o sistema convirja para uma solução diferente das soluções com parâmetros diferentes, a célula será pintada por uma nova cor;
- Células que o ponto central é uma condição do sistema convergir para uma mesma solução que já foi mapeada em outra célula são coloridas com a mesma cor desta outra célula.

A seguir, é mostrado um exemplo de uma seção bidimensional fictícia de um espaço de parâmetros, mostrando dois parâmetros quaisquer.

Figura 9 – Exemplo de seção bidimensional do espaço de parâmetros



Fonte: autor

3.2 Energia

Estudar o consumo de energia como Menin et al. (2007), Silva (2009), Iliuk et al. (2014) e Mendes, Mazzilli e Ribeiro (2020) é importante para evitar desperdício da energia do motor. Associado com o estudo do espaço de parâmetros pode ser uma ferramenta útil para saber em quais condições o sistema consome menos ou mais energia na solução.

O cálculo da energia potencial dos sistemas já está mostrado pelas Eqs. (2.14) e (2.41), assim como o cálculo da energia cinética pelas Eqs. (2.13) e (2.39). Para encontrar a energia fornecida ao motor é necessário realizar a integral ao longo do tempo da multiplicação da tensão do motor pela corrente elétrica da máquina. Utilizando a Eq. (2.3) é possível obter a fórmula da energia fornecida para cada motor do sistema.

$$E_i = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \frac{M_i(t)}{k_M} dt \quad (3.2)$$

Devido à análise ser feita em tempo discreto, a equação acima se torna um somatório da multiplicação da tensão do motor pela corrente elétrica da máquina e pelo passo da integração numérica δt .

$$E_i = \sum_{t=t_1}^{t_2} u(t) \frac{M_i(t)}{k_M} \delta t \quad (3.3)$$

A energia fornecida ao sistema provém somente do circuito dos motores, portanto, a energia dissipada pelo sistema (E_d), por ações de amortecimento, resistência e indutância do motor, somado à energia cinética (E_c) e a energia potencial (E_p), é igual à energia fornecida ao sistema, a energia provida aos motores. Desta forma é possível calcular a energia dissipada pelo sistema.

$$\sum_{i=1}^2 E_i = E_d + E_c + E_p \quad (3.4)$$

Visto que os resultados coletados pelo método de Runge-Kutta são variáveis adimensionais, e visando a uma maior abrangência dos resultados obtidos por este método, são determinadas as equações adimensionais da energia cinética (E_c), potencial (E_p), provida aos motores (E_i) e dissipada (E_d). Tais adimensionais serão obtidos dividindo-se as energias já calculadas pela energia máxima que o motor pode prover em um período do sistema (E_{max}), obtida quando a tensão u e o torque do motor M_i são máximos.

$$E_{max} = \sum_{t=t_1}^{t_1+T} u_{max} \frac{M_0}{k_M} \delta t = u_{max} \frac{M_0}{k_M} T \quad (3.5)$$

Para obter equações adimensionais, é introduzido dois adimensionais, ambos relativos ao período da solução analisada encontrada pelo sistema, sendo um deles relacionado também com a tensão elétrica máxima do sistema:

Tabela 7 – Parâmetros adimensionais relativos à energia dos sistemas

Nome	Nomenclatura	fórmula de cálculo
Período adimensional	T^*	ωT
Relação entre Tensão máxima e período	φ^*	$u_{max} T / k_M$

Fonte: Autor

Desta forma, a energia adimensional que cada motor recebe em um período (e_i) pode ser calculada como mostrado a seguir:

$$e_i = \frac{E_i}{E_{max}} = \sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{u M_i \delta t}{u_{max} M_0 T} = \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \frac{v F_i}{T^*} \delta \tau \quad (3.6)$$

A seguir, é mostrada a equação adimensional da energia potencial (e_p) e da cinética (e_c) do sistema de fundação única:

$$e_p = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\gamma \varphi^* \alpha} q^2 \quad (3.7)$$

$$e_c = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\gamma \varphi^* \alpha} q'^2 + \frac{\eta}{\gamma \varphi^*} q' (\psi'_1 \sin \psi_1 + \psi'_2 \sin \psi_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma \varphi^*} (\psi_1'^2 + \psi_2'^2) \quad (3.8)$$

A seguir, expressa-se a equação adimensional da energia potencial (e_p) e cinética (e_c) do sistema de duas fundações conectadas:

$$e_p = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\gamma \varphi^* \alpha} (q_1^2 + q_2^2 - \beta q_1 q_2) \quad (3.9)$$

$$e_c = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\gamma \varphi^* \alpha} (q_1'^2 + q_2'^2) + \frac{\eta}{\gamma \varphi^*} \sum_{i=1}^2 (q_i' \psi_i' \sin \psi_i) + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma \varphi^*} (\psi_1'^2 + \psi_2'^2) \quad (3.10)$$

Em ambos os sistemas, é possível utilizar a Eq. (3.4) para encontrar a expressão da energia dissipada adimensional (e_d).

$$e_d = -e_c - e_p + \sum_{i=1}^2 e_i \quad (3.11)$$

Sistemas oscilatórios costumam possuir variações da energia potencial, cinética e dissipada. Isso ocorre por conta da oscilação das massas no sistema. Quando a massa possui menores velocidades, há tendência de se ter menores energias cinéticas e dissipadas pelo sistema, e maior energia potencial acumulada; o oposto também é válido. Para evitar que o tempo de análise influencie no valor calculado das energias do sistema, será calculada a média das energias dos sistemas em solução em um período T .

Para calcular a energia média em um intervalo de tempo entre τ_1 à τ_2 na solução, é utilizada a equação de média para uma variável $V(t)$ qualquer:

$$V_m = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} V(\tau) d\tau}{\tau_2 - \tau_1} \quad (3.12)$$

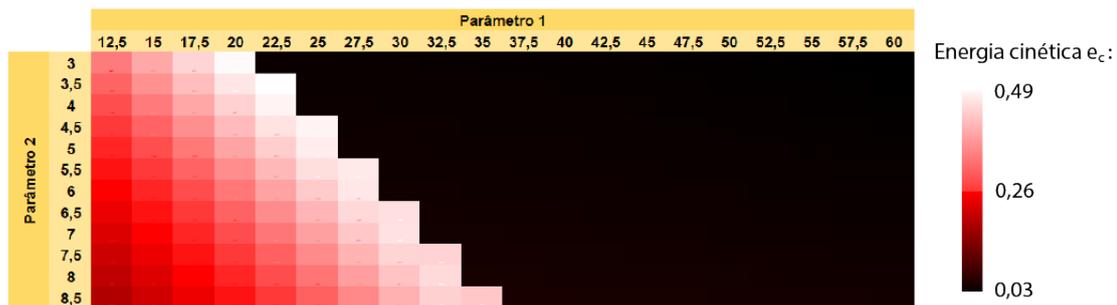
Considerando que os dados obtidos pelo método de Runge-Kutta são discretos, com espaçamento de δt entre os resultados, é mostrada a equação da média para uma variável discreta $V(t)$ qualquer:

$$V_m = \frac{\sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} V(\tau) \delta \tau}{\tau_2 - \tau_1} \quad (3.13)$$

A comparação das energias dos sistemas é feita no espaço de parâmetros, permitindo, desta forma, comparar a efetividade dos sistemas dependendo dos parâmetros do sistema. Esta análise permite obter condições do ambiente que favoreçam a eficiência energética, além de verificar qual solução periódica dos sistemas possui um maior gasto energético.

Nesta análise, o espaço de parâmetros será dividido como explicado na seção 3.1, mas, em vez de colorir o espaço baseado na solução do sistema, as células serão coloridas com relação à energia analisada, podendo criar diagramas para cada uma das energias citadas nesta metodologia. Quanto maior for a energia analisada na célula, mais claro é o tom da cor da célula, quanto menor for a energia na célula, mais escuro é o tom da cor, como mostrado na figura 10, um exemplo fictício com parâmetros quaisquer.

Figura 10 – Exemplo de seção de parâmetros com energia explícita



Fonte: autor

3.3 Bacias de atração

A análise de bacias de atração, constitui em obter respostas diferentes dos sistemas alterando os valores iniciais das variáveis do modelo. Nesta análise, é possível mapear as regiões de um espaço de fase cujas variáveis iniciais causam atração para soluções específicas.

Este método possui muita similaridade com o explicado na seção 3.1, pois ambos possuem os mesmos procedimentos metodológicos para se obter os resultados, somente se diferenciando no espaço analisado. Esta forma de se obter o espaço de fase do sistema já foi estudada por Araujo (2006), Carvalho (2013), Souza (2015) e Souza, Alvarez e Lobao (2017) e revela boas conclusões sobre como as condições iniciais do sistema interferem nas soluções que o sistema busca.

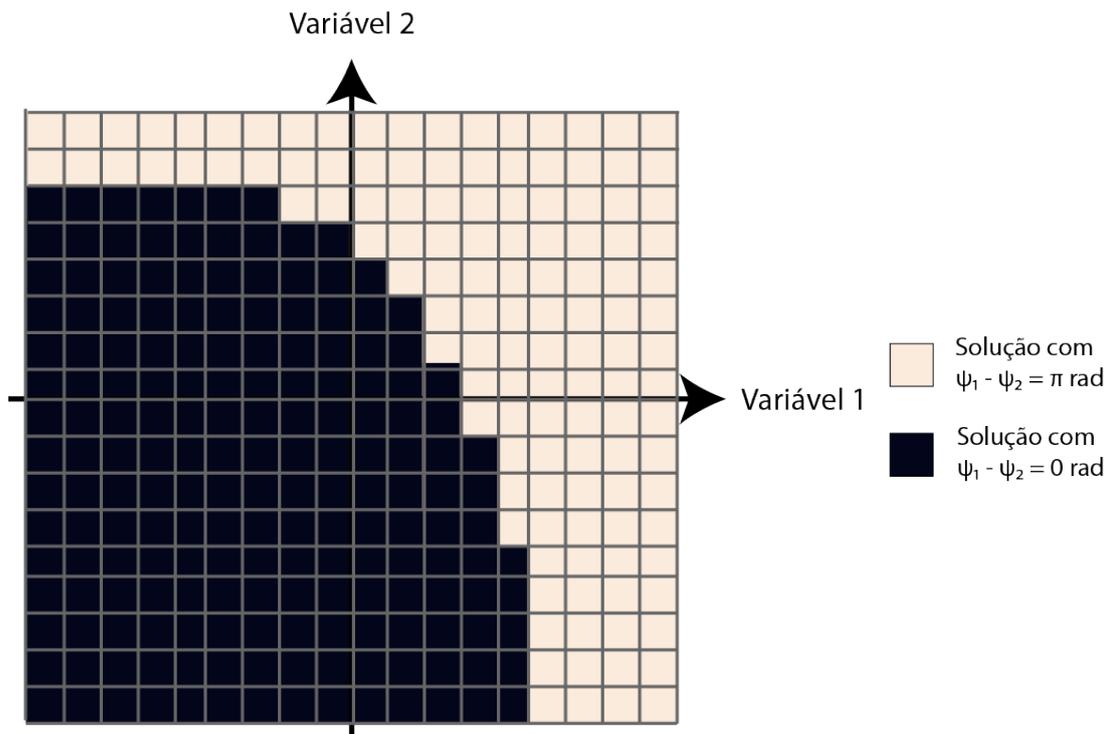
Assim como no método do espaço de parâmetros, o espaço analisado é dividido em células de forma que o espaço seja constituído da união delas. Para um espaço bidimensional, é usual que as células sejam retangulares. Com a divisão do espaço de fase, é aplicada a integração numérica de Runge-Kutta em cada centro de célula do espaço, dessa forma, obtendo as soluções de cada ponto como condição inicial. Para colorir as bacias de atração seguem-se os seguintes procedimentos para cada célula:

- A primeira célula analisada no espaço é pintada de uma determinada cor;
- Caso o sistema convirja para uma solução diferente das soluções com pontos iniciais diferentes, a célula será pintada por uma nova cor;
- Células que o ponto central é uma condição do sistema convergir para uma mesma solução que já foi mapeada em outra célula são pintadas da mesma cor que está outra célula.

É importante notar que a bacia de atração pode se alterar mudando os parâmetros. Para uma melhor análise de como os parâmetros alteram a convergência do sistema, pode ser interessante analisar bacias de atração de várias seções do espaço de fase, mudando os parâmetros em cada seção, entretanto, essa análise é menos direta do que analisar observando o espaço de parâmetros, além de ser custoso computacionalmente.

Para melhor análise dos resultados, são mostradas seções bidimensionais do espaço de fase na análise das bacias de atração. A seguir é mostrado um exemplo do estudo de Bacia de atração com uma seção bidimensional fictícia de um espaço de fase para duas variáveis quaisquer.

Figura 11 – Exemplo de estudo de bacia de atração



Fonte: autor

3.4 Aplicação de Poincaré

Utilizada nas pesquisas de Löffelmann, Kučera e Gröller (1998a) (1998b), Kolemen, Kasdin e Gurfil (2012), Guckenheimer e Holmes (2013) e Gonçalves, Silva e Prado (2016), a aplicação de Poincaré é muito útil para verificar estabilidade de movimentos periódicos em sistemas dinâmicos, principalmente para sistemas com muitas variáveis, por não aumentar significativamente o custo computacional com o aumento de variáveis analisadas. Ele é aplicado quando o sistema apresenta uma solução periódica como expressa pela Eq. (3.1).

Uma das formas de se utilizar o método é com base no período de oscilação que a solução possui. Se a solução do sistema for estável, as variáveis do sistema devem possuir os mesmos valores após n períodos, sendo n um número natural qualquer. Por este motivo, é importante realizar o estudo da FFT antes de construir o mapa, para identificar a frequência da oscilação do movimento periódico a ser estudado.

A aplicação de Poincaré se constitui em selecionar um plano transversal à trajetória da solução periódica e registrar os pontos que a solução periódica cruza este plano, desta forma, mapeando os pontos que cruzam este plano, sendo pontos que se diferenciam de um período no tempo. Também é possível realizar uma projeção da aplicação de Poincaré em um espaço de fase de menor dimensão, assim, possibilitando visualizar a aplicação de forma mais fácil, em uma imagem que mostre duas variáveis do plano de fase.

Outra análise possível de ser feita com a aplicação de Poincaré é a visualização em gráficos temporais. Ao criar um gráfico de uma das variáveis y_i de \mathbf{y} em função do tempo τ , é possível somente utilizar os pontos obtidos pela aplicação de Poincaré, dessa forma, se o sistema possuir solução estável, os pontos obtidos pelo método estarão alinhados horizontalmente quando o sistema estiver em solução.

A estabilidade do movimento pode ser analisada com base nas propriedades da aplicação de Poincaré. Caso os pontos analisados coincidam no mesmo ponto do plano ou estejam em uma região limitada transversal, o movimento periódico é estável. Caso os pontos não coincidam ao longo do tempo ou não estejam em uma região limitada, o movimento periódico é instável.

A aplicação de Poincaré pode ser utilizada como descritos nos seguintes passos:

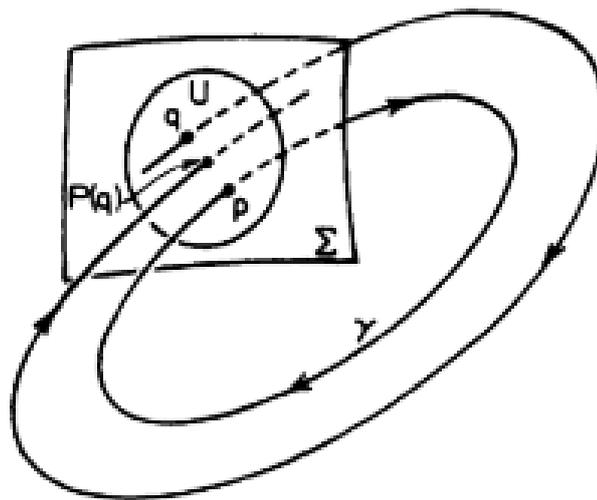
1. Encontrar a solução periódica em que o sistema converge;
2. Encontrar o período do sistema na solução, com base na frequência das variáveis neste intervalo de tempo, utilizando a FFT;
3. Selecionar um plano transversal à trajetória da solução periódica;

4. Registrar os pontos que a solução periódica cruza o plano;
5. Projetar os pontos selecionados e a trajetória da solução em um plano de fase, desta forma, construindo o mapa de Poincaré;
6. Construir um gráfico em função do tempo a partir dos pontos registrados e da trajetória da solução;
7. Analisar a estabilidade do movimento periódico com base nas propriedades da aplicação de Poincaré.

A aplicação de Poincaré pode ser utilizada para analisar a estabilidade de soluções periódicas em sistemas dinâmicos de alta dimensão, por possuir pouco custo computacional mesmo que se tenha muitas variáveis envolvidas. O mapa de Poincaré reduz a dimensão do sistema ao projetar a solução periódica em um espaço de estado de menor dimensão. Além disso, fornece uma visualização geométrica da solução periódica e permite a análise da estabilidade do movimento periódico.

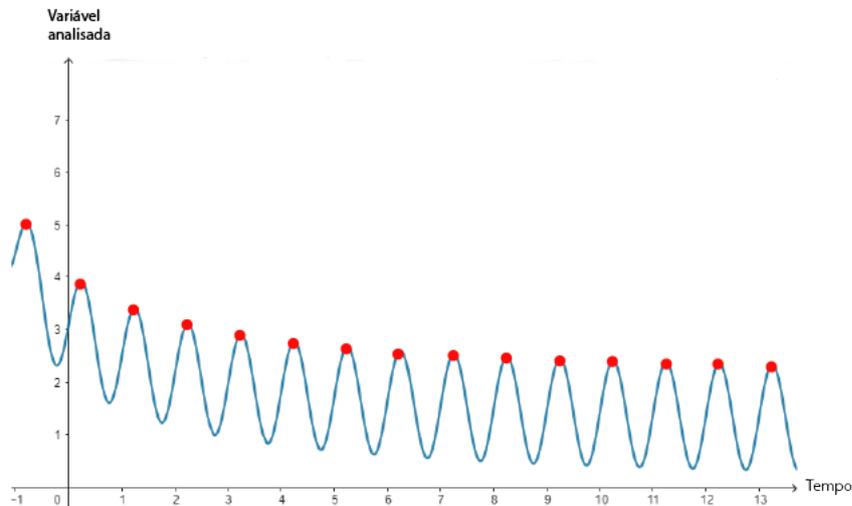
A figura 12 apresenta uma imagem ilustrativa sobre a aplicação de Poincaré para uma órbita fechada γ e a trajetória do ponto do espaço de fase q tendendo para a órbita mencionada. A figura 13 apresenta uma ilustração da aplicação de Poincaré para criar um gráfico como mencionado anteriormente, analisando uma variável ao longo do tempo, marcando em vermelho os pontos que cruzam o plano transversal da aplicação de Poincaré.

Figura 12 – Exemplo ilustrativo da aplicação de Poincaré



Fonte: Guckenheimer e Holmes (2013)

Figura 13 – Ilustração da aplicação de Poincaré para uma variável ao longo do tempo



Fonte: autor

A programação da aplicação de Poincaré, realizada na linguagem Python, coleta a série temporal do vetor das variáveis do sistema \mathbf{y} ao longo do tempo provindo do método de Runge-Kutta, com recorte específico no tempo em que se deseja analisar a solução periódica, e da frequência predominante das variáveis neste intervalo de tempo provinda da FFT. Com esses dados, são copiados os vetores do formato $\mathbf{y}(\tau_0 + nT)$ junto com o tempo $\tau_0 + nT$ para uma nova lista, onde τ_0 é o tempo de início da análise, T é o período que a solução analisada possui, calculado como o inverso da frequência obtido pela FFT, e n é um número natural qualquer.

Com a lista original dos vetores \mathbf{y} e a nova lista, são mapeadas pela aplicação de Poincaré as trajetórias, mostrando-as projetadas em um plano de duas variáveis do vetor \mathbf{y} , como exemplos $(\psi_1 - \psi_2) \times (\psi'_1 - \psi'_2)$. Com ambas as listas plotadas, é possível ver a trajetória completa das variáveis e o ponto fixo, caso se tenha uma solução periódica estável, que a lista obtida pela aplicação de Poincaré produz. As listas de pontos selecionados associados com o tempo em que cada ponto foi obtido também são um bom recurso para produzir gráficos em função do tempo, onde é possível ver pontos com mesmo valor no eixo das ordenadas, caso se tenha uma solução periódica assintoticamente estável, obtido pela aplicação de Poincaré.

3.5 Gráfico de Recorrência

Utilizado em diversos contextos como análise econômica por Brock, Hsieh e LeBaron (1991), estudo de batimentos cardíacos por Marwan et al. (2002) e análise de sistemas hamiltonianos por Sales (2023), o gráfico de recorrência (em inglês, *Recurrence Plots*) é uma técnica poderosa e versátil para a análise de séries temporais, proporcionando uma representação visual da recorrência dos resultados em sistemas dinâmicos.

Em um sistema dinâmico, a recorrência de uma variável $y_i(\tau_1)$ qualquer em um tempo τ_1 é definida quando, após um certo tempo (definido pelo instante τ_2), a variável retorna a uma vizinhança pré-definida $y_i(\tau_1) \pm \epsilon$, como mostrado na expressão 3.14.

$$y_i(\tau_2) = y_i(\tau_1) \pm \epsilon \quad (3.14)$$

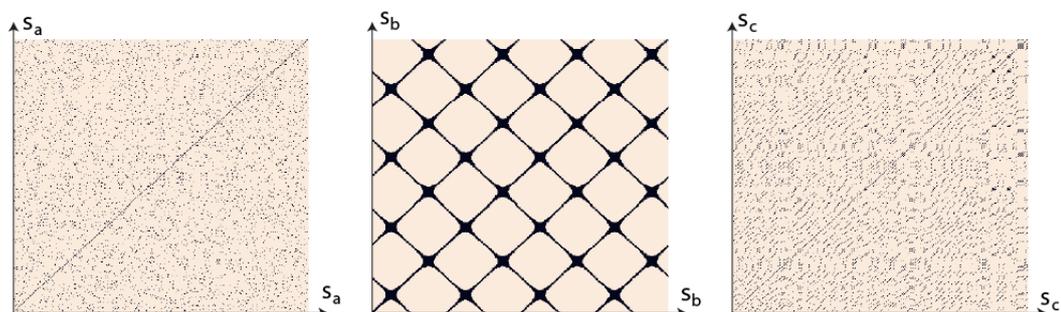
Desta forma, é construído o gráfico de recorrência comparando o valor $y_i(\tau_1)$ da abscissa com o valor $y_i(\tau_2)$ da ordenada: se $y_i(\tau_1)$ e $y_i(\tau_2)$ tiverem uma diferença em módulo menor que ϵ , o local do gráfico é preenchido com a cor preta, caso contrário é preenchido com a cor bege.

Estes gráficos ajudam a visualizar padrões nas séries temporais analisadas, conseguindo até verificar se alguma série possui fenômenos caóticos. A seguir, são apresentados três exemplos de gráficos de recorrência na figura 14, referentes às séries s_a , s_b e s_c :

- A série s_a é constituída de valores aleatórios entre 0 a 10, obtidos a partir da biblioteca "random" do Python;
- A série s_b é obtida a partir da série temporal $s_b(\tau) = \text{sen}(\tau)$;
- A série s_c refere-se a um sistema caótico, onde o primeiro número é escolhido aleatoriamente entre $]0; 1[$, e o n ésimo número pode ser calculado como mostrado na Eq. (3.15);

$$s_{c(n)} = \begin{cases} 1,5s_{c(n-1)} & , \text{ se } 0,0 < s_{c(n-1)} \leq 0,5 \\ 1,5(1 - s_{c(n-1)}) & , \text{ se } 0,5 < s_{c(n-1)} < 1,0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Figura 14 – Exemplos de gráficos de recorrência



Fonte: autor

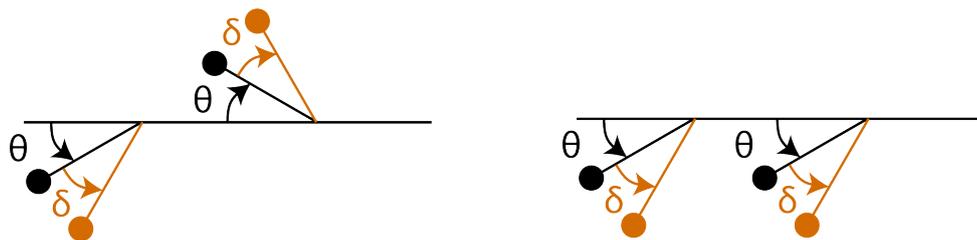
Na figura 14, na série s_b , é notável um padrão de linhas a cada período do sistema, e é possível distingui-la das séries s_a e s_c , dado que s_a possui pontos aleatórios pretos distribuídos no gráfico, enquanto s_c possui alguns traços diagonais em seu gráfico, isso ocorre pelo fenômeno de estacionariedade, mencionado no início deste capítulo, que indica padrões que tendem a se repetir em sistemas caóticos mesmo sendo aperiódicos. Desta forma, é mostrado que este método possibilita distinguir séries periódicas, caóticas e aleatórias.

4 Análise dos resultados para fundação única, com dois motores

O objetivo deste capítulo é a apresentação dos resultados obtidos pela aplicação dos métodos descritos no capítulo anterior. Os resultados oriundos da integração numérica das equações de movimento pelo método de Runge-Kutta permitem analisar os ensaios numéricos das variáveis ao longo do tempo para ambos os sistemas, o que será útil para entendimento das soluções buscadas pelos sistemas e aplicações de demais métodos. Gráficos da FFT em intervalos de tempo em que o movimento da variável oscila somente com uma ou duas frequências foram omitidos, e seus dados foram redigidos na análise dos ensaios numéricos, para melhorar o entendimento do texto.

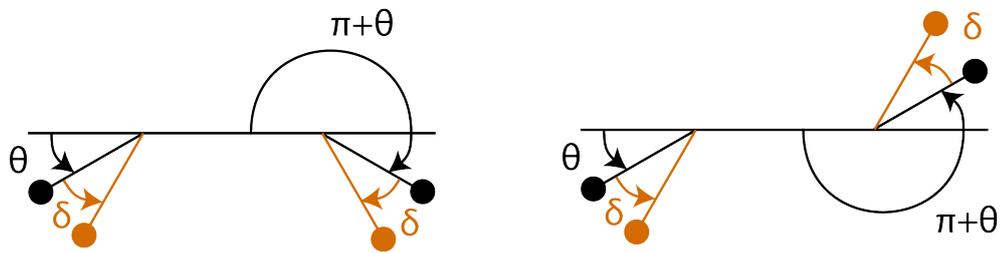
Os dados obtidos de ambos os sistemas estudados mostram que a autossincronização dos motores somente busca soluções em que as massas excêntricas dos motores estejam em mesma fase (diferença angular das massas de 0) ou em oposição (diferença angular das massas de π). É notável que, no caso do sistema de motores em fundações conectadas, as fundações vibram em mesmo sentido quando as massas excêntricas rotacionam em fase, e as fundações vibram em sentidos opostos quando as massas excêntricas rotacionam em oposição. As figuras a seguir mostram essa sincronia com uma mudança δ de ângulos com o passar do tempo.

Figura 15 – Diferença de ângulos de 0 com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido



Fonte: Autor

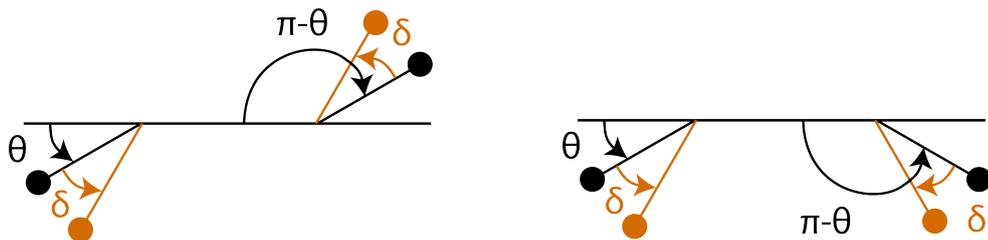
Figura 16 – Diferença de ângulos de π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido



Fonte: Autor

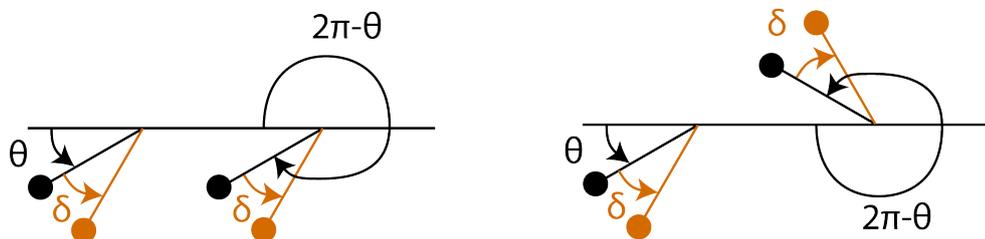
Os sistemas não possuem tendência de sincronia quando os ângulos das massas excêntricas possuem uma soma constante, pois, para se manter uma soma constante ao longo do tempo, o motor teria de girar no sentido oposto à tendência que possui, como mostrado nas figuras abaixo, com uma mudança δ de ângulos com o passar do tempo:

Figura 17 – Soma de ângulos de π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido



Fonte: Autor

Figura 18 – Soma de ângulos de 2π com motores em sentidos opostos e em mesmo sentido



Fonte: Autor

Visto que o motor possui uma tendência de permanecer em rotação, os ângulos das massas excêntricas têm uma tendência de permanecer em crescimento ao longo do tempo, impedindo a caracterização de um equilíbrio dinâmico. Por este motivo, este trabalho irá analisar se o sistema está em equilíbrio observando todas as variáveis do sistema, excluindo as variáveis ψ_1 e ψ_2 e adicionando-se as variáveis $\psi_1 - \psi_2$ e $\psi'_1 - \psi'_2$ que se enquadram nas características de equilíbrio exploradas pela metodologia. Ademais, o valor de $\psi_1 - \psi_2$ será sempre considerado como o resto da divisão $\frac{(\psi_1) - (\psi_2)}{2\pi}$, ou seja, $\psi_1 - \psi_2 = ((\psi_1) - (\psi_2)) \bmod(2\pi)$, pois é analisada a posição da massa excêntrica do primeiro motor relativamente à posição da massa excêntrica do segundo motor, sem diferenciar equilíbrios em que uma das massas tenha dado volta ou voltas a mais do que a outra massa excêntrica.

4.1 Ensaios numéricos

Existe um cenário diferente para cada mudança de parâmetros e de condições iniciais, entretanto, muitos dos cenários possuem fenômenos similares a depender da solução à qual eles convergem. Nesta subseção, são apresentados dois ensaios numéricos de sistemas, o primeiro converge para uma solução onde as diferenças de ângulos dos motores vale 0, e o segundo converge para uma solução que a diferença de ângulos vale π . Serão discutidos os fenômenos que ocorrem antes, durante e posteriormente à convergência de cada solução do sistema, além de realizar comparações entre os ensaios numéricos apresentados.

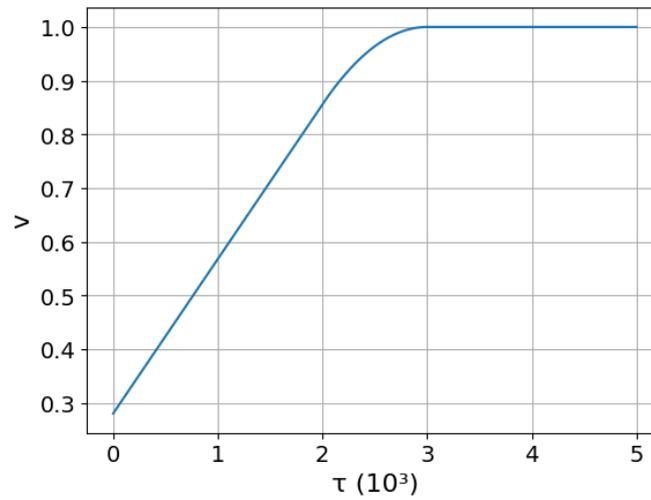
A variação da tensão elétrica adimensional v perante o tempo é igual para todos os ensaios numéricos por ser uma equação com única variável τ . As constantes da equação de voltagem foram idênticas às usadas no trabalho de Nóbrega (1994) e são as mostradas a seguir:

Tabela 8 – Constantes da equação de voltagem

Nome	Nomenclatura	valor
Tensão elétrica inicial adimensional	v_i	3V / 10.7V
Intervalo do tempo da variação da tensão	ς	500
Tempo da variação da tensão	τ_a	2500

Fonte: Autor

A figura 19 mostra a tensão elétrica em relação ao tempo adimensional τ .

Figura 19 – Gráfico da tensão elétrica v pelo tempo τ 

Fonte: Autor

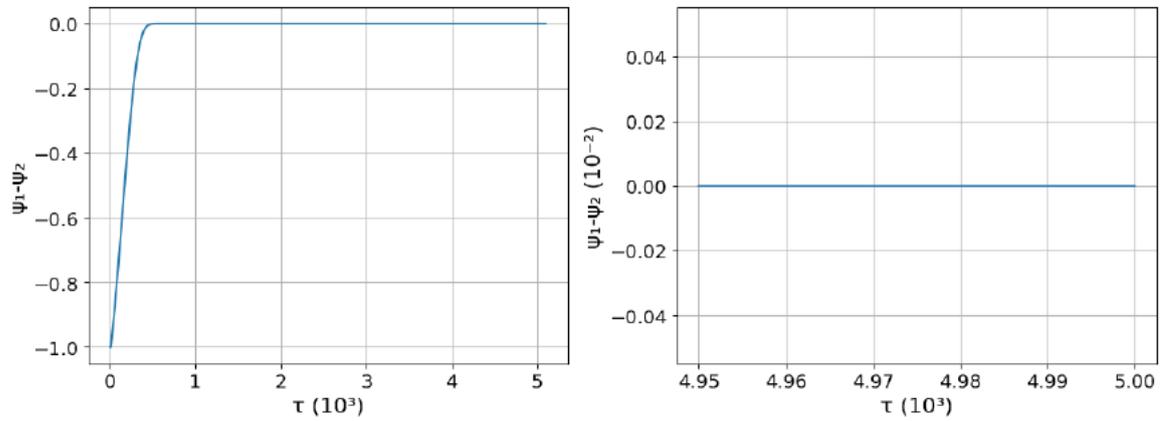
Os ensaios numéricos possuem parâmetros similares aos da estrutura apresentada no trabalho de Nóbrega (1994). O primeiro ensaio numérico apresentado possui convergência para a solução cuja diferença dos ângulos vale 0. As variáveis possuem valores iniciais iguais a 0, com exceção do ângulo ψ_1 , que possui o valor de 1. A seguir, são mostrados os parâmetros utilizados e as figuras relacionadas às variáveis angulares do primeiro ensaio numérico.

Tabela 9 – Parâmetros adimensionais dos ensaios com uma fundação

Nome	Nomenclatura	Valor
Relação entre massas do sistema	α	$7,651 \cdot 10^{-3}$
Torque adimensional máximo	γ	$7,144 \cdot 10^{-1}$
Relação entre resistência e indutância	δ	$1,733 \cdot 10^2$
Relação entre momentos de inércia	η	$6,247 \cdot 10^{-1}$
Taxa de amortecimento	ξ	1,000%
Tensão adimensional máxima	φ	$2,143 \cdot 10^0$
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$8,658 \cdot 10^1$

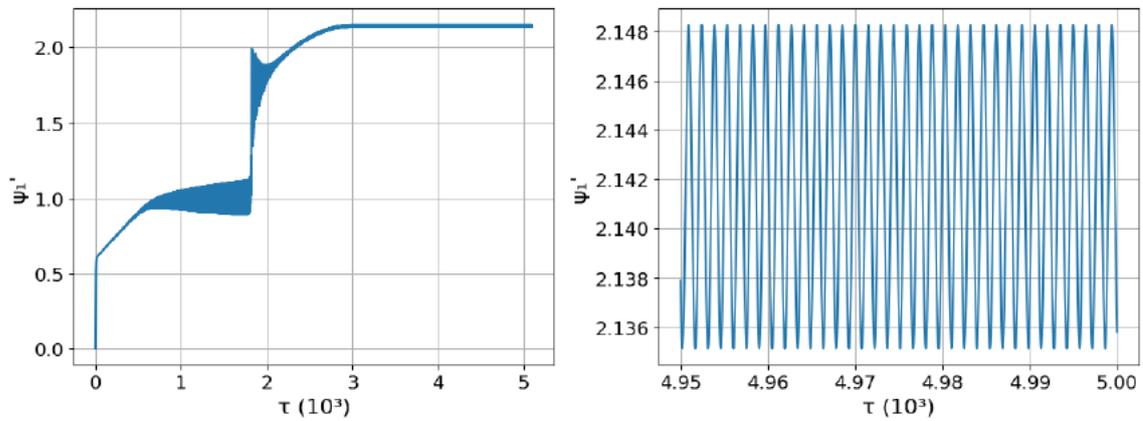
Fonte: Autor

Figura 20 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



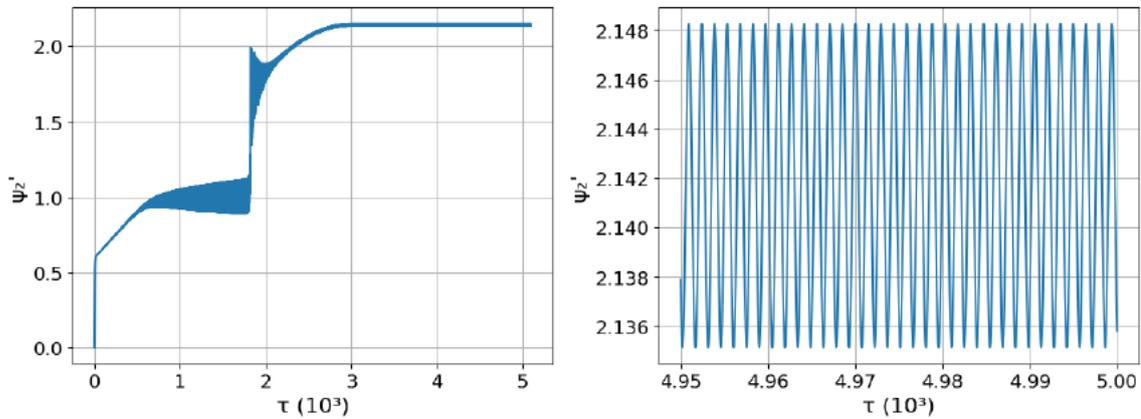
Fonte: Autor

Figura 21 – Gráfico $\psi_1' \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



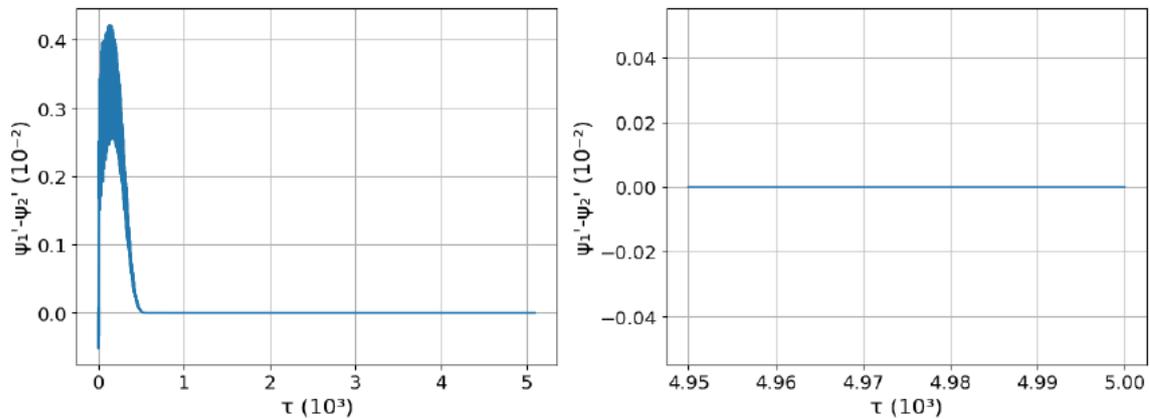
Fonte: Autor

Figura 22 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 23 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$

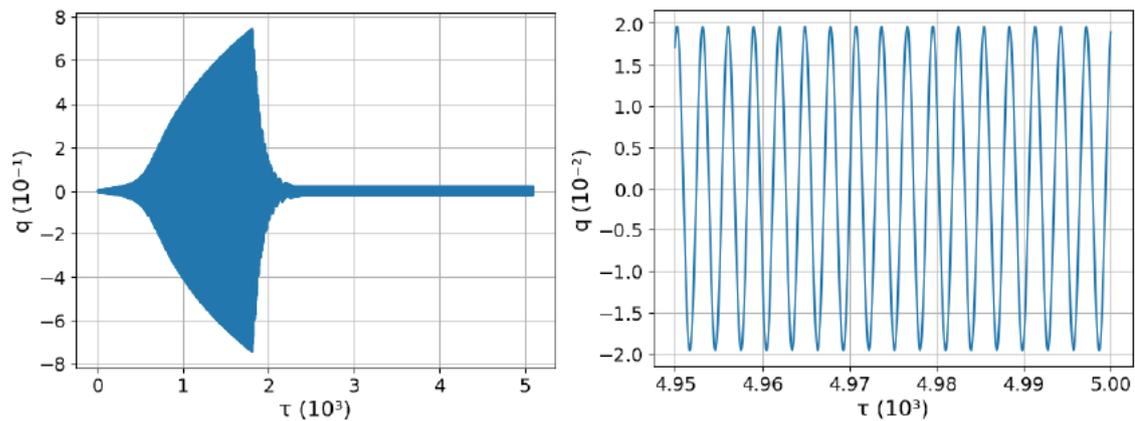


Fonte: Autor

Pelas figuras 20 e 23, é notável que a diferença dos ângulos e das velocidades angulares dos motores permaneça com valor zero após $\tau = 600$. Com base nas figuras 21 e 22, em torno de $\tau = 1800$, ocorre um aumento brusco das velocidades angulares, junto com a diminuição brusca de amplitude do movimento da fundação, visto nas figuras 24 e 25 a seguir, indicando o efeito Sommerfeld. Mesmo com as mudanças bruscas das velocidades angulares, a diferença $\psi_1 - \psi_2$ permanece nula. Pode ser dito que o ensaio numérico converge para a solução do sistema após $\tau = 3000$, onde ψ'_1 e ψ'_2 oscilam com mesma fase, ambos variando em torno do valor 2,142 com amplitude e frequência predominantes de respectivamente $6 \cdot 10^{-3}$ e $6.82 \cdot 10^{-1}$, como visto pelas figuras 21 e 22. Demais variáveis

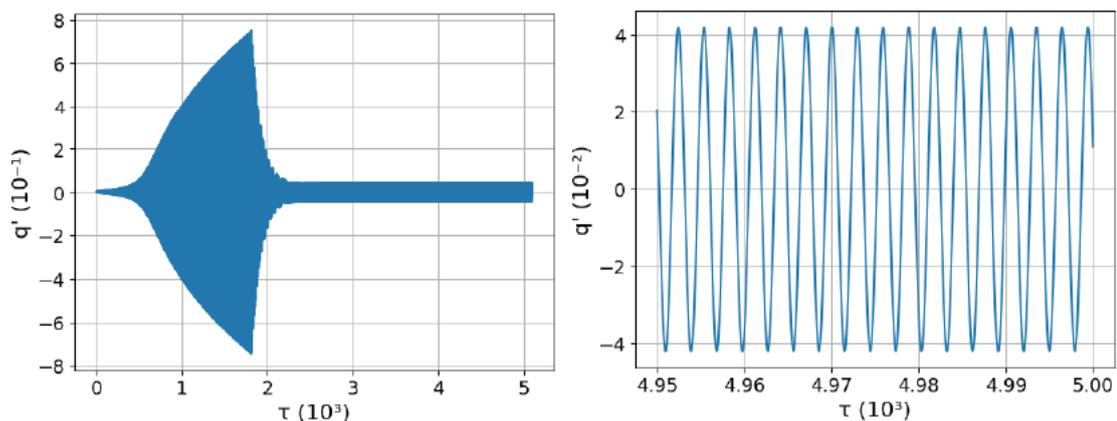
deste ensaio numérico também comprovam que o sistema converge para a solução após $\tau = 3000$. A seguir, são mostradas figuras das variáveis deste ensaio numérico relacionadas à fundação.

Figura 24 – Gráfico $q \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 25 – Gráfico $q' \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$

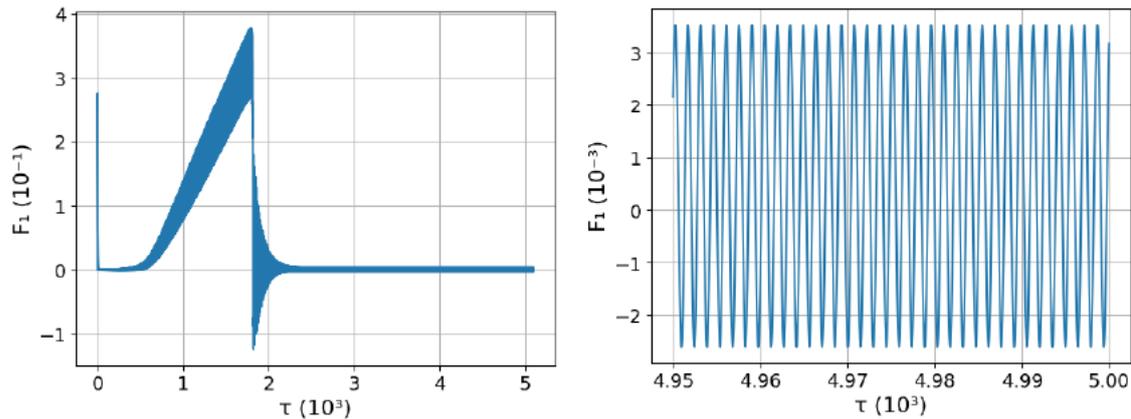


Fonte: Autor

É observado respectivamente pelas figuras 24 e 25 que o movimento e a velocidade da fundação começam a aumentar suas amplitudes quando a diferença $\psi_1 - \psi_2$ se torna nula em $\tau = 600$, e atingem o máximo em $\tau = 1800$, onde ocorre uma brusca diminuição de amplitude por conta do efeito Sommerfeld. Extraíndo os dados do gráfico no tempo em que o sistema se encontra em solução, q possui uma amplitude predominante de $1,92 \cdot 10^{-2}$ com uma frequência de $3,41 \cdot 10^{-1}$, metade da frequência das velocidades angulares mencionadas,

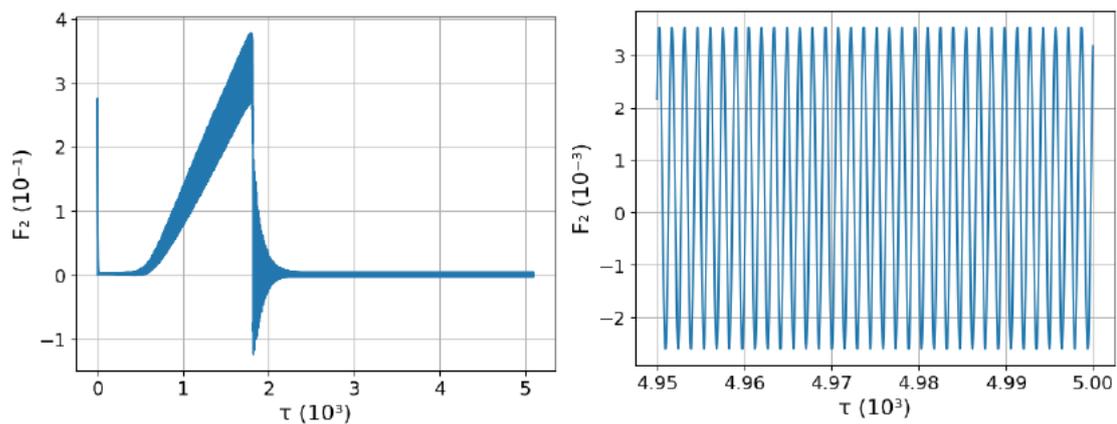
q' também possui uma frequência predominante de $3,41 \cdot 10^{-1}$ com amplitude de $4,10 \cdot 10^{-2}$. Como esperado, q e q' possuem uma defasagem angular de $\frac{\pi}{2}$, reforçando que a vibração da fundação está oscilando em uma função senoidal ao longo do tempo. A seguir, são mostradas figuras relacionadas ao torque dos motores.

Figura 26 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 27 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



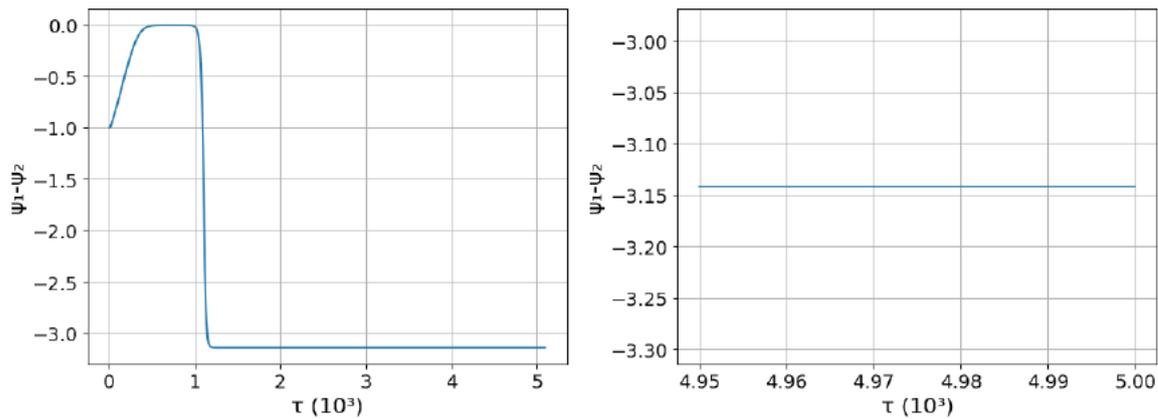
Fonte: Autor

Novamente é notado o efeito Sommerfeld em $\tau = 1800$ ao analisar os torques dos motores nas figuras 26 e 27. O torque dos motores aumenta gradualmente entre $\tau = 600$ até $\tau = 1800$, juntamente com a amplitude da vibração dos torques. Após $\tau = 1800$, ocorre uma diminuição brusca de seu valor médio, juntamente com uma diminuição da variação de seus valores. Em $\tau = 3000$, os torques F_1 e F_2 oscilam com mesma fase, ambos

com frequência predominante de $6,82 \cdot 10^{-1}$ e amplitude de $2,81 \cdot 10^{-3}$, a variação dos torques na solução ocorre em torno do valor de $0,47 \cdot 10^{-3}$, ademais, os torques dos motores possuem uma defasagem de π em relação às velocidades angulares dos motores indicados nas figuras 21 e 22. Após a convergência, a amplitude da oscilação é maior que o valor médio do torque, indicando que ocorre torque negativo nos motores em alguns tempos.

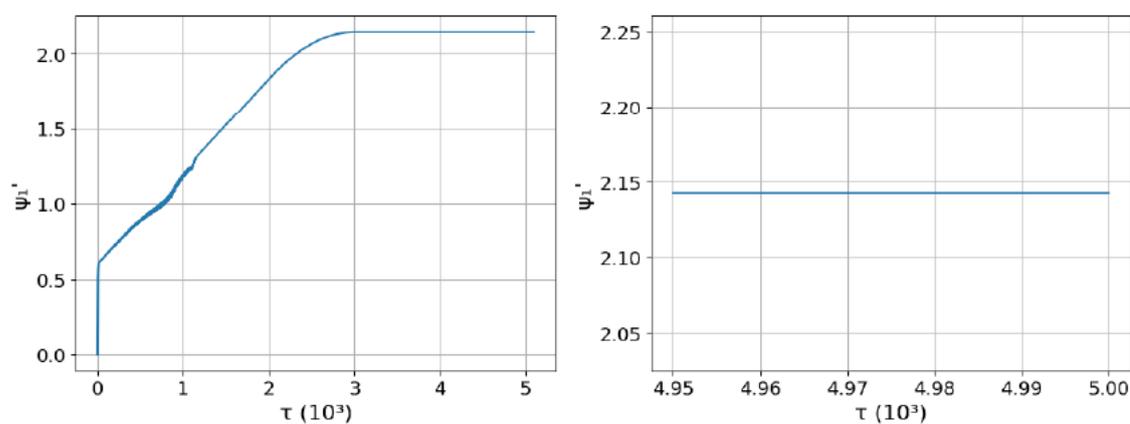
O segundo ensaio numérico apresentado, que converge para a solução cuja diferença dos ângulos dos motores vale π , possui parâmetros idênticos ao primeiro ensaio numérico apresentado, com exceção da taxa de amortecimento ξ , que neste caso vale 10%, além disso, as condições iniciais do problema também são idênticas ao primeiro ensaio numérico. Assim como feito no primeiro ensaio numérico, são discutidos os resultados obtidos do segundo ensaio numérico pelos métodos de Runge-Kutta e da FFT, além de se realizar uma comparação entre o primeiro e o segundo ensaio numérico. A seguir, são mostradas figuras relacionadas às variáveis angulares do segundo ensaio numérico.

Figura 28 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



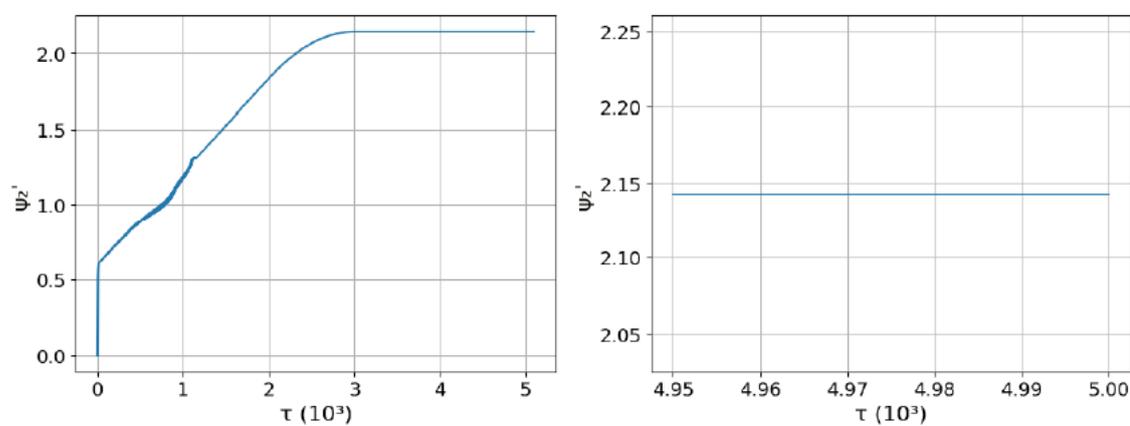
Fonte: Autor

Figura 29 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



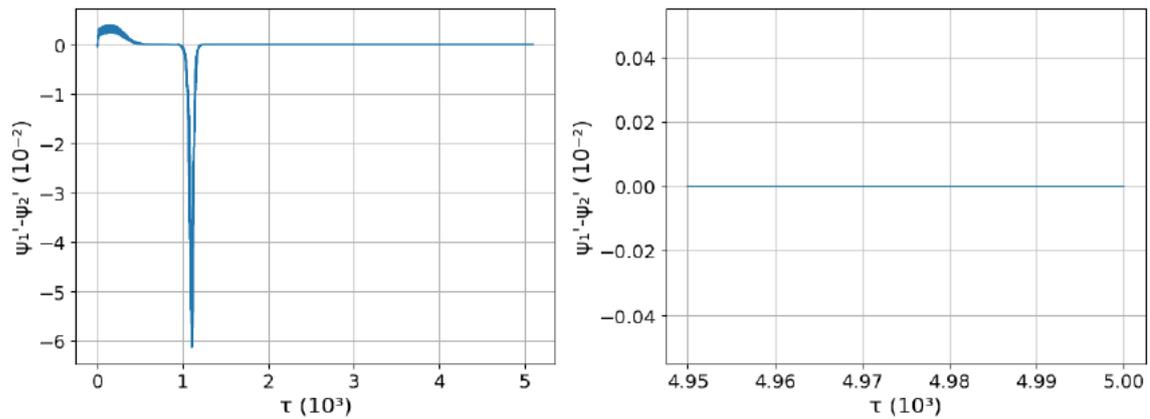
Fonte: Autor

Figura 30 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

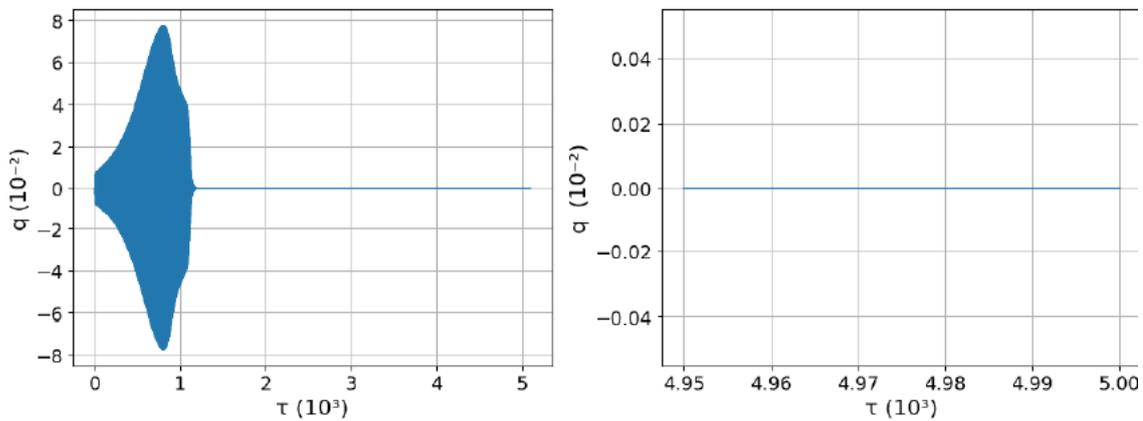
Figura 31 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

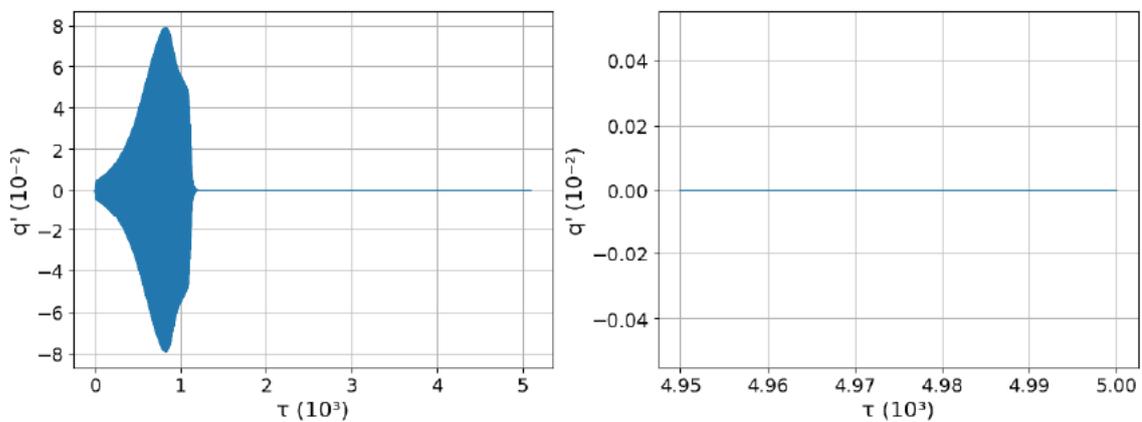
Distintamente do outro caso visto nas figuras 20 e 23, as figuras 28 e 31 deste ensaio mostram a diferença dos ângulos e das velocidades angulares ficarem próximas a 0 entre $\tau = 500$ a $\tau = 900$, após este intervalo, ocorre uma mudança brusca na diferença angular, permanecendo constante com módulo de π após $\tau = 1200$, enquanto que a diferença das velocidades angulares possui um pico em $\tau = 1200$, voltando a ser nula após este período. As figuras 29 e 30 mostram as velocidades angulares crescerem com amplitudes também crescentes ao longo do tempo até em torno de $\tau = 1100$, onde ocorre uma brusca e localizada variação da diferença das velocidades angulares. A partir desta variação em torno de $\tau = 1100$, as velocidades angulares continuam a crescer sem que suas amplitudes variem muito. Somente após $\tau = 3000$ as velocidades angulares dos motores se mantêm constantes, ambas no valor de 2,142, sem ocorrer vibrações em torno deste valor, como ocorria no primeiro ensaio numérico apresentado. A seguir, são apresentados os gráficos relacionados à fundação.

Figura 32 – Gráfico $q \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 33 – Gráfico $q' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$

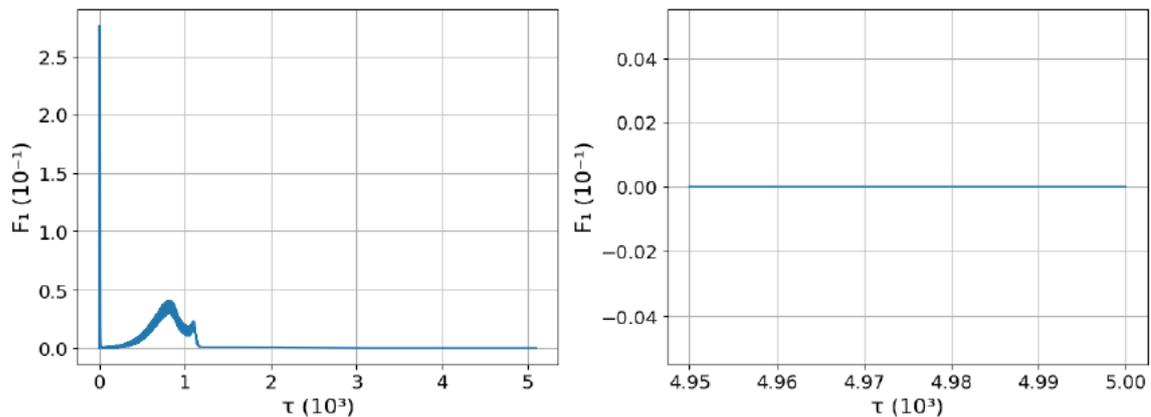


Fonte: Autor

Segundo as figuras 32 e 33, a fundação no segundo ensaio numérico possui uma oscilação crescente no início do experimento, até que varia bruscamente por volta de $\tau = 1100$, onde mantém deslocamentos e velocidades nulas. É notável que a solução do primeiro ensaio numérico seja periódica, possuindo oscilações com períodos constantes nas variáveis, diferente da solução do segundo ensaio numérico, que não possui vibrações nas variáveis que caracterizam a solução periódica, podendo ser caracterizada como uma solução estática. Isso ocorre pois, quando a diferença angular é de 0, as massas excêntricas causam esforços complementares na fundação, entretanto, quando a diferença dos ângulos é de π , os esforços gerados são opostos e se anulam, por isso não ocorre mudança de esforços

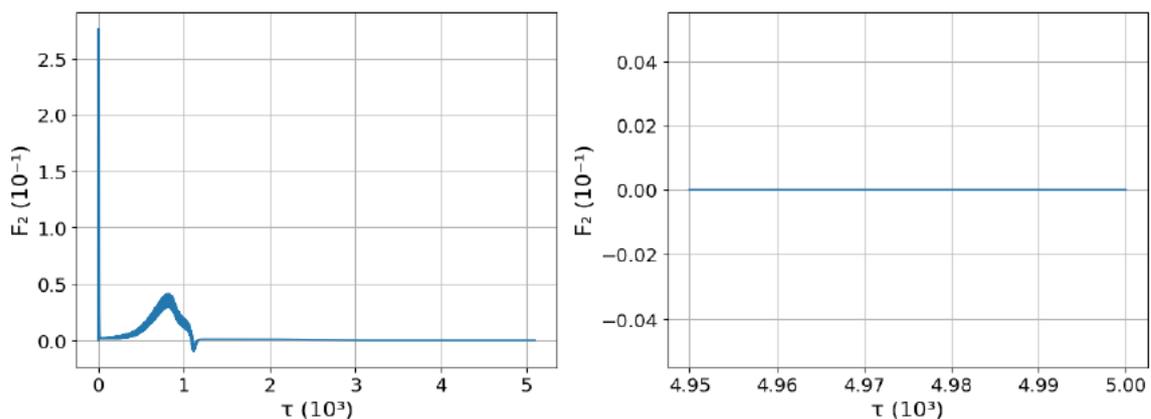
pelo giro das massas excêntricas. Por não haver oscilação das fundações, as velocidades angulares dos motores se mantêm constantes.

Figura 34 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 35 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



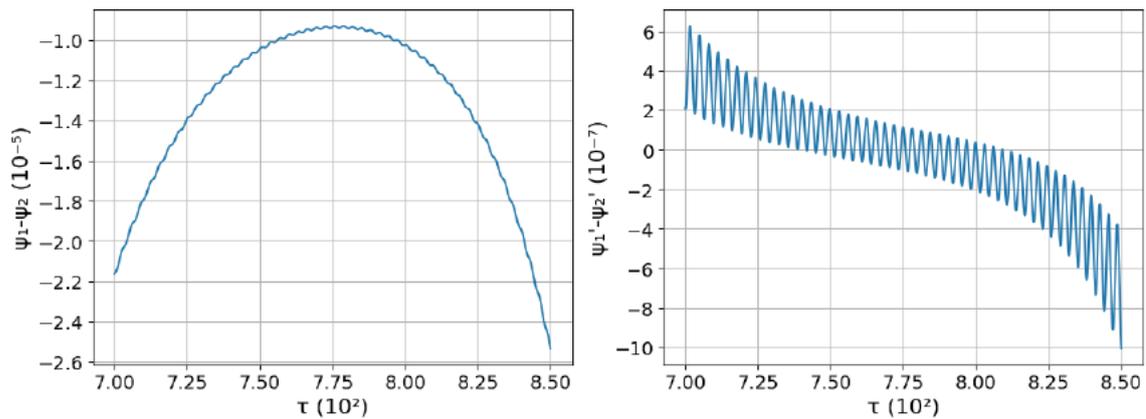
Fonte: Autor

Pelas figuras 34 e 35, os torques dos motores crescem levemente no início do experimento, assim como no primeiro ensaio numérico mostrado nas figuras 26 e 27, entretanto, diferentemente do primeiro ensaio numérico em que continuam crescendo até $\tau = 1800$, no segundo ensaio numérico os torques têm seus máximos locais em torno de $\tau = 800$, e começam a diminuir até serem nulos após $\tau = 1200$. Por volta de $\tau = 1100$, é observado que o torque F_1 possui um leve crescimento, antes de se anular, enquanto que o torque F_2 possui uma queda mais abrupta, ficando negativo por um pequeno

intervalo de tempo. Isso ocorre, pois a diferença dos ângulos dos motores está aumentando abruptamente em módulo no intervalo.

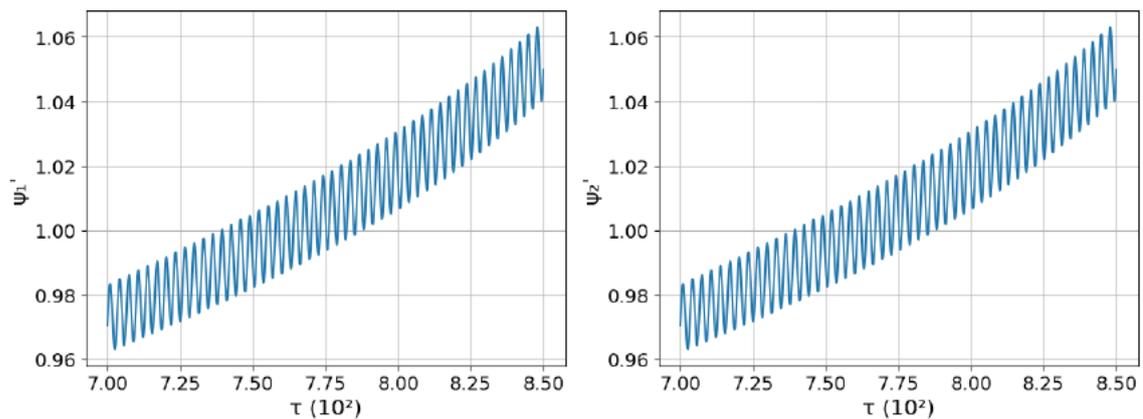
A seguir, são apresentadas figuras do segundo ensaio numérico, com recorte entre $\tau = 700$ a $\tau = 850$, intervalo em que a diferença angular dos motores fica muito próxima de zero.

Figura 36 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi_1' - \psi_2' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$



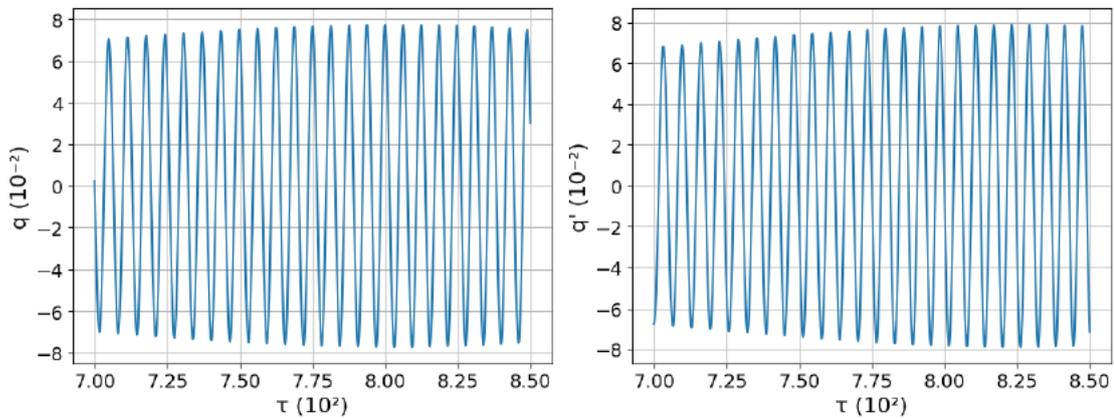
Fonte: Autor

Figura 37 – Gráficos $\psi_1' \times \tau$ e $\psi_2' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$



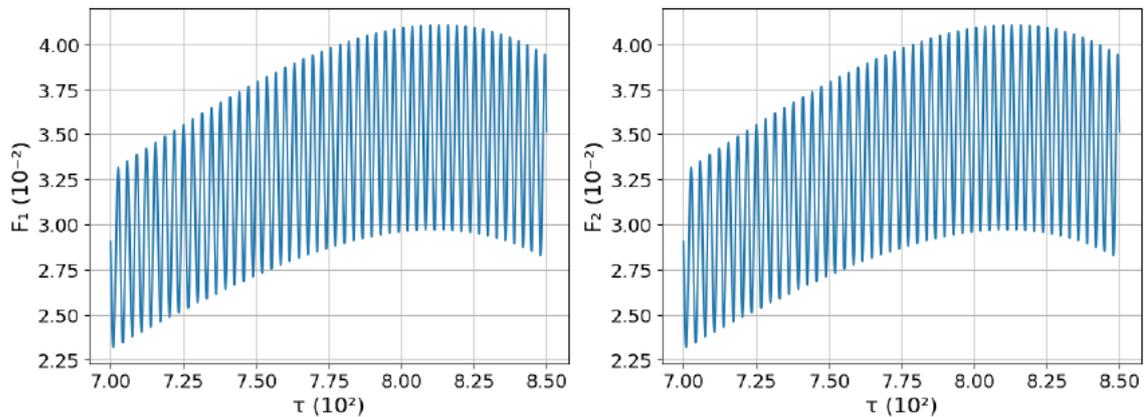
Fonte: Autor

Figura 38 – Gráficos $q \times \tau$ e $q' \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$



Fonte: Autor

Figura 39 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico da fundação única, no intervalo $\tau = 700$ a $\tau = 850$

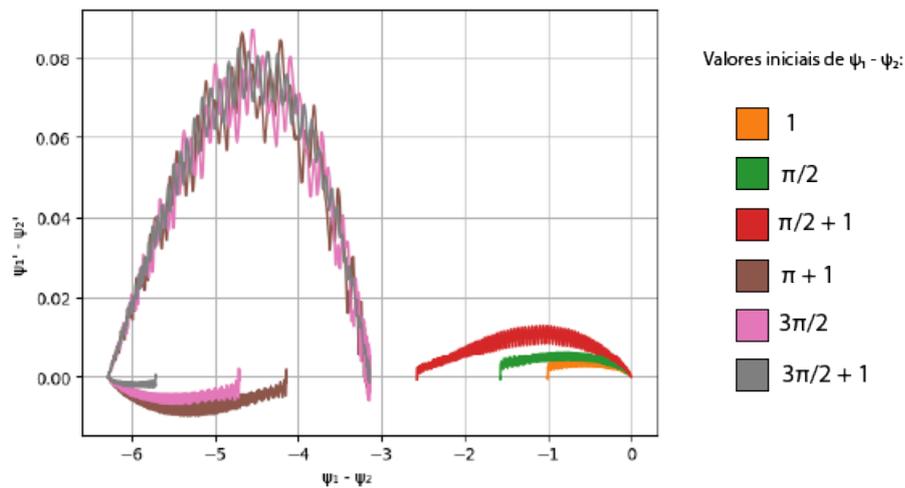


Fonte: Autor

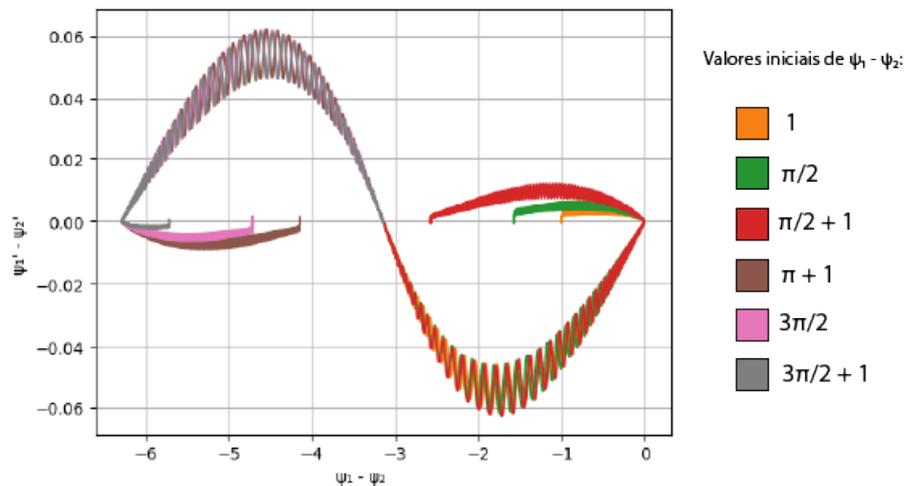
A variação das velocidades angulares dos motores (figura 37) e dos torques (figura 39) mostra que, neste instante, o ensaio numérico não se encontra na solução do sistema, mas é notável que tanto a diferença angular dos rotores quanto a diferença das velocidades angulares destes, mostradas na figura 36, possuem valores próximos de zero, além de que o movimento e velocidade da fundação (figura 38, possuem resultados próximos a uma trajetória cíclica, aumentando levemente sua amplitude ao longo do tempo. A variação da tensão elétrica que ocorre neste momento causa o aumento das velocidades angulares e a variação do torque dos motores, causando variações nas demais variáveis e impedindo que o sistema se estabilize com $\psi_1 - \psi_2 = 0$, portanto, este aumento da tensão elétrica obriga o sistema, após certo tempo, a procurar a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = \pi$.

Demais ensaios, onde a variável $\psi_1 - \psi_2$ se aproxima de 0 e, posteriormente, converge para a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, podem ser visualizados também pelas projeções dos planos de fase nos planos $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ mostradas a seguir, onde a figura 40 apresenta ensaio numérico com condições iniciais exceto ψ_2 iguais às do primeiro ensaio numérico, e a figura 41 apresenta ensaio numérico com condições iniciais exceto ψ_2 iguais às do segundo ensaio numérico. Cada uma das duas projeções abaixo apresenta a projeção de oito resultados, onde ambos os ensaios possuem ψ_2 iniciais diferentes, podendo serem vistos no eixo $\psi'_1 - \psi'_2 = 0$. ψ'_2 vale 1 para os ensaios numéricos em laranja, $\frac{\pi}{2}$ para as em verde, $\frac{\pi}{2} + 1$ para as em vermelho, $\pi + 1$ para as em marrom, $\frac{3\pi}{2}$ para as em rosa e $\frac{3\pi}{2} + 1$ para as em cinza. Os ensaios numéricos com ψ_2 inicial de 0 e π não podem ser vistos nas figuras, pois não possuem alteração de $\psi_1 - \psi_2$ ou $\psi'_1 - \psi'_2$ ao longo do tempo, portanto, permanecem respectivamente nos pontos (0;0) e $(-\pi;0)$ desta projeção.

Figura 40 – Projeção do espaço de fase onde $\xi = 1\%$



Fonte: Autor

Figura 41 – Projeção do espaço de fase onde $\xi = 10\%$ 

Fonte: Autor

Como visto, algumas mudanças de constantes e condições iniciais podem mudar a solução para a qual a trajetória irá convergir. Analisando as trajetórias, é observado que muitas trajetórias ficam próximas de outra solução antes de convergirem, sendo razoável supor que a variação da tensão elétrica nos motores, mostrada na figura 19, pode provocar a mudança da estabilidade das soluções do sistema.

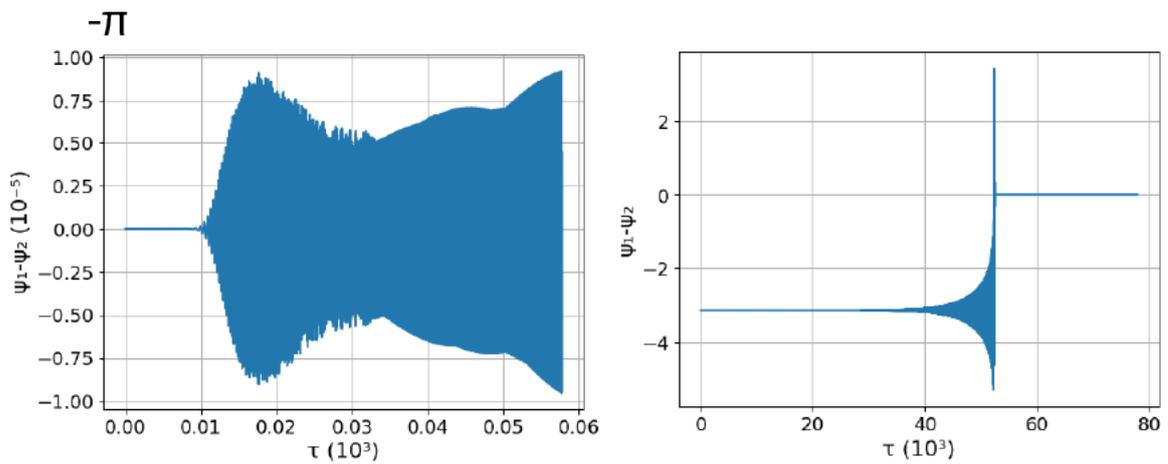
4.2 Análise da indicação de caos

Nóbrega (1994), em sua pesquisa, indicou um caso em que, ao sistema buscar uma solução, seria possível a ocorrência de caos. É indicado que este caso ocorre com parâmetros iguais aos dos ensaios numéricos apresentados, com exceção da taxa de amortecimento, que vale $\xi = 0\%$. As condições iniciais indicadas são iguais a zero, com exceção de $\psi_1 - \psi_2 = \frac{3\pi}{2}$, entretanto, a trajetória para esta condição inicial foi similar ao primeiro ensaio apresentado na seção anterior, sem manifestar fenômenos próximos ao indicado por Nóbrega ou fenômenos que indiquem possível ocorrência de caos, outrossim, foi observado que para os mesmos parâmetros indicados e condições iniciais iguais a zero, com exceção de $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, foram obtidos resultados próximos ao indicado, que indicam possível ocorrência de caos conforme explicado nos parágrafos seguintes.

Como explicado na pesquisa de Nóbrega, $\psi_1 - \psi_2$ permanece no valor de π até $\tau = 8 \cdot 10^2$, onde começa uma oscilação em torno de π sem manter um ciclo fechado, ou seja, sem manter uma frequência e uma amplitude de vibração constante, que é um fenômeno que pode ocorrer em alguns casos em que se observa caos. Esta oscilação não é observada em outros ensaios numéricos analisados.

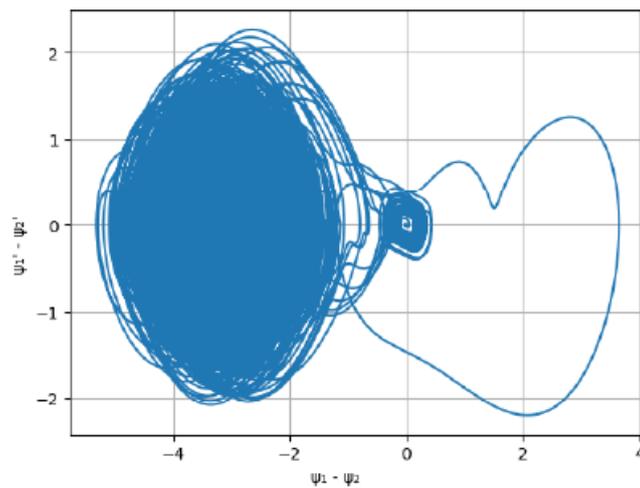
Esta oscilação aumenta gradualmente ao passar do tempo. Após um grande intervalo de tempo, quando $\tau = 5,2 \cdot 10^4$ (10 minutos), $\psi_1 - \psi_2$ possui uma variação brusca para uma oscilação em torno de 0, convergindo em $\tau = 5,3 \cdot 10^4$ para a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = 0$ em poucos instantes. É possível observar na figura 42 a oscilação da variável $\psi_1 - \psi_2$ ao longo do tempo da trajetória descrita nesta seção, e na figura 43 a projeção do plano de fase desta trajetória no plano $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$.

Figura 42 – Ensaio numérico analisado entre 0 à $5 \cdot 10^3$ e 0 à $77 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

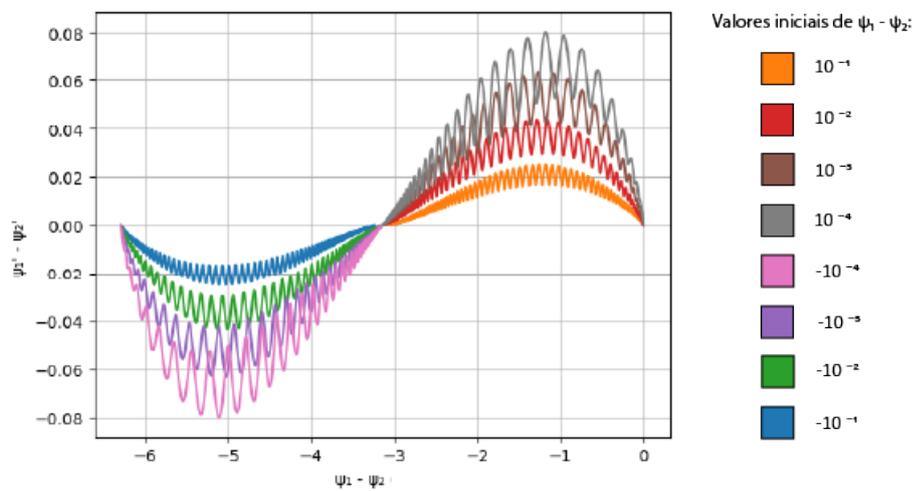
Figura 43 – Projeção do plano de fase do ensaio numérico analisado entre 0 à $78 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Com o intuito de verificar a convergência de pontos próximos ao estudado do plano de fase, foram realizados testes com condições iniciais muito próximas às condições estabelecidas para o ponto em estudo, onde a variável inicial ψ_2 é igual a $\pi \pm \delta$, com δ variando entre 10^{-1} à 10^{-4} . Como pode ser visto na figura 44, todos os casos com condições próximas ao ponto em estudo convergem para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ em menos de $\tau = 5 \cdot 10^3$ (1 minuto). A figura a seguir ilustra a projeção do plano de fase destas trajetórias no plano $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$.

Figura 44 – Projeção do plano de fase de ensaios numéricos próximos ao analisado



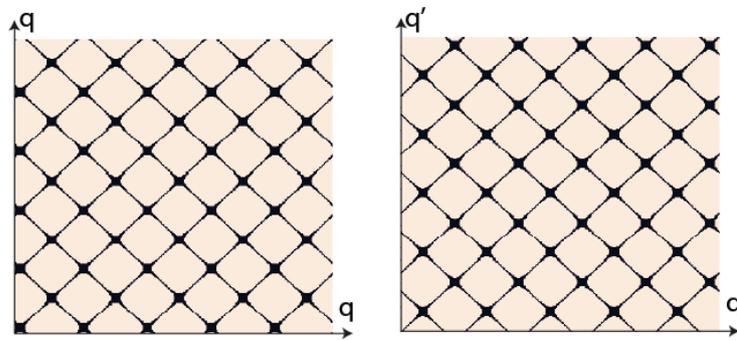
Fonte: Autor

Os dados obtidos indicam que tal região não apresenta fenômenos que indiquem caos, e sim, que o ponto em estudo, com os parâmetros citados, é uma solução instável do sistema. Para comprovar que não ocorre caos nesta região, são realizados gráficos de recorrência das variáveis q , q' , ψ'_1 , ψ'_2 , F_1 , F_2 do sistema. As variáveis $\psi_1 - \psi_2$ e $\psi'_1 - \psi'_2$ são constantes iguais a 0 neste intervalo, não sendo necessário conferir o gráfico de recorrência delas. A seguir, é mostrada a proximidade ϵ relativa à Eq. (3.14) usada em cada variável, visando a uma leitura melhor do gráfico, e os gráficos obtidos neste método.

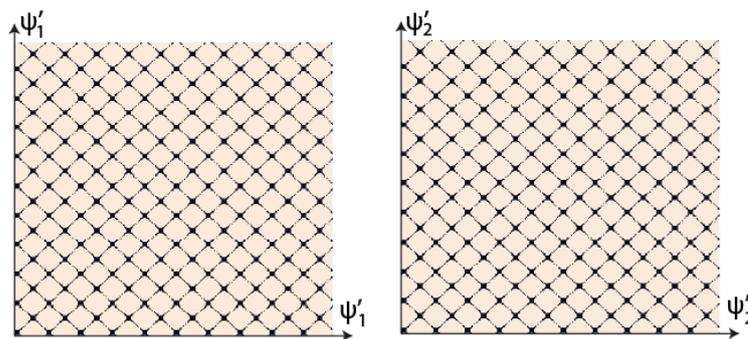
Tabela 10 – Proximidade (ϵ) utilizada para cada variável

Nome	Nomenclatura	proximidade (ϵ)
Deslocamento adimensional da fundação única	q	$0,22 \cdot 10^{-3}$
Velocidade adimensional da fundação única	q'	$0,22 \cdot 10^{-3}$
Ângulo da massa excêntrica do motor 1	ψ'_1	$0,1 \cdot 10^{-3}$
Ângulo da massa excêntrica do motor 2	ψ'_2	$0,1 \cdot 10^{-3}$
Relação de torque do motor 1	F_1	$0,05 \cdot 10^{-3}$
Relação de torque do motor 2	F_2	$0,05 \cdot 10^{-3}$

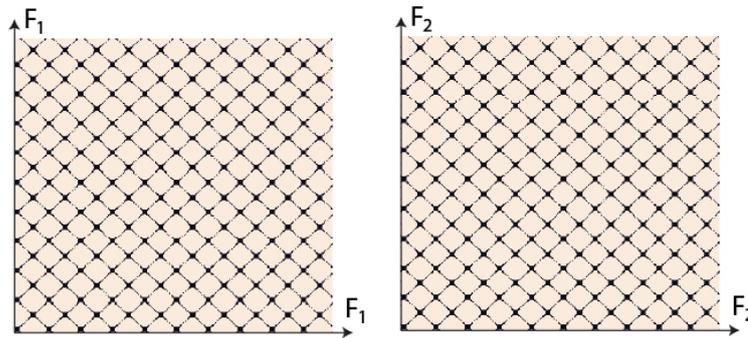
Fonte: Autor

Figura 45 – Gráficos de recorrência das variáveis q e q' após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$ 

Fonte: autor

Figura 46 – Gráficos de recorrência das variáveis ψ'_1 e ψ'_2 após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$ 

Fonte: autor

Figura 47 – Gráficos de recorrência das variáveis F_1 e F_2 após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$ 

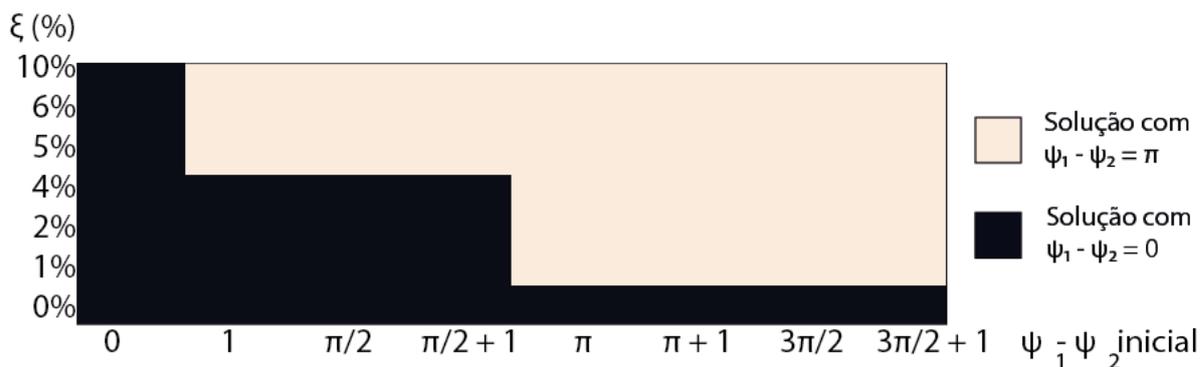
Fonte: autor

Utilizando a figura 14 da metodologia como comparação, todos os gráficos de recorrência obtidos se assemelham àquele com função senoidal, o que era esperado, visto que a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ possui as variáveis em uma trajetória senoidal, e por não possuir similaridade com gráficos de sistemas caóticos, é possível descartar essa possibilidade. Os gráficos das variáveis ψ'_1 , ψ'_2 , F_1 e F_2 apresentadas nas figuras 46 e 47 apresentam losangos em maior frequência do que os gráficos das variáveis q e q' na figura 45, por possuírem duas oscilações por período, enquanto que q e q' somente possuem uma oscilação por período.

4.3 Espaços de parâmetros

Com a ideia de confrontar os ensaios obtidos, são apresentados abaixo os espaços de parâmetros apresentados por Nóbrega (1994) em seus estudos. Nestes ensaios numéricos, sempre que u_i for igual a 3 V ou 5 V (v_i respectivamente 0,280 e 0,467), u_{max} é igual a 10,7 V ($\varphi = 2,143$), e sempre que u_i for 9,5 V ou 11,5 V (v_i respectivamente 0,559 e 0,676), u_{max} é igual a 17,0V ($\varphi = 3,404$). As condições iniciais das variáveis, exceto v_i e ψ_1 , são nulas e os demais parâmetros não apresentados nos diagramas, exceto φ , são iguais aos dos ensaios numéricos anteriores. As células em preto representam convergência para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$, e as células em creme representam convergência para a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = \pi$.

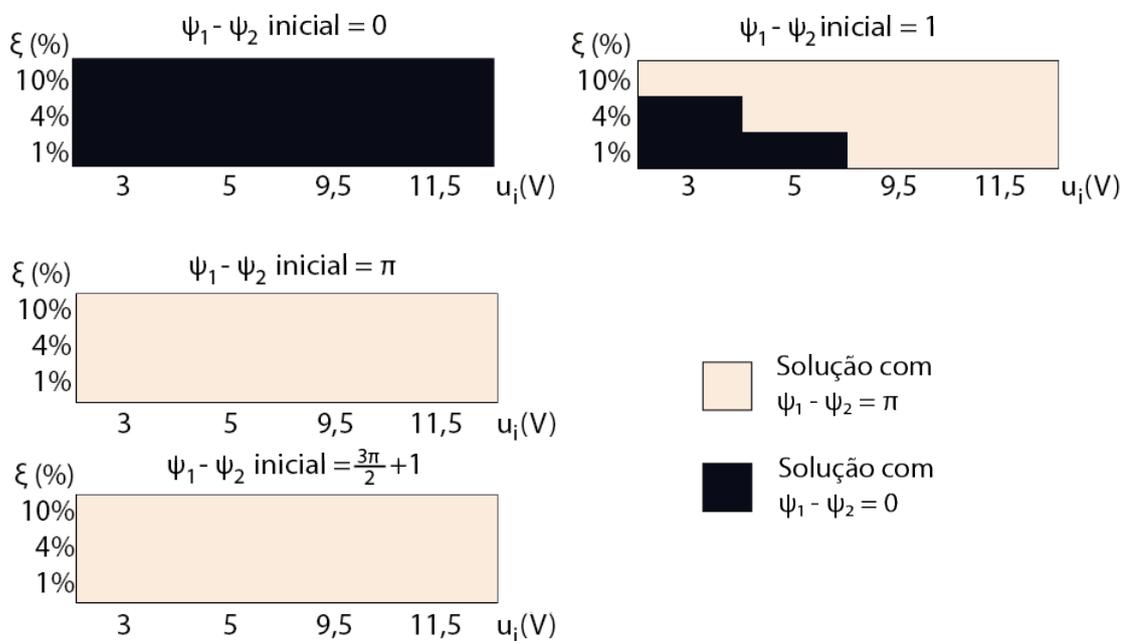
Figura 48 – Espaço de parâmetros $\xi \times (\psi_1 - \psi_2)$ inicial, para $u_i = 3$ V



Fonte: Autor

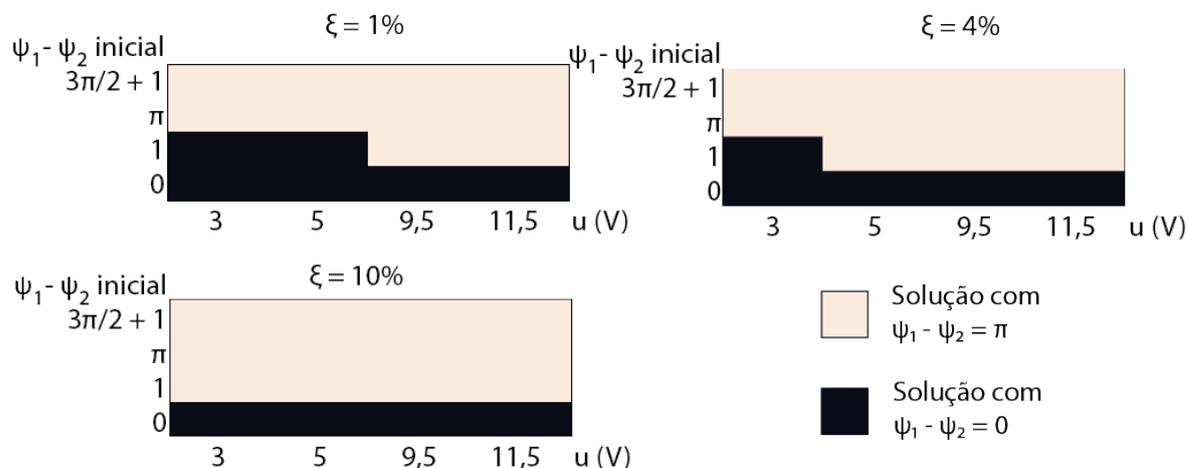
Observando a figura 48, é notável que os resultados observados na projeção do plano de fase da figura 40 são observados na linha de $\xi = 1\%$ do espaço de parâmetros, assim como os resultados observados na projeção do plano de fase da figura 41 são observados na linha de $\xi = 10\%$ do espaço de parâmetros.

Figura 49 – Espaço de parâmetros $\xi \times u_i$, para diversos $\psi_1 - \psi_2$ iniciais



Fonte: Autor

Figura 50 – Espaço de parâmetros $(\psi_1 - \psi_2)$ inicial $\times u_i$, para diversos ξ



Fonte: Autor

Ao comparar as respostas obtidas com as obtidas por Nóbrega (1994), grande parte dos pontos dos espaços de parâmetros possuem soluções congruentes, entretanto, quatro pontos mostrados nos espaços possuem respostas diferentes para cada trabalho, um deles é o ponto que Nóbrega indicou que poderiam ocorrer fenômenos caóticos, e já foi discutido na seção anterior que não foi observado caos nesta região, os demais três pontos estão próximos das divisões das bacias de atração das soluções do sistema. Uma hipótese que pode explicar esta diferença nos resultados é o truncamento ou arredondamento computacional, que, em métodos iterativos, acumulam erros ao longo da iteração. Por serem poucos pontos em que ocorre esta diferença de resultados, pode-se validar os resultados obtidos por Nóbrega. A seguir, mostram-se na tabela os parâmetros dos pontos que possuem respostas diferentes para as pesquisas feitas, indicando quais espaços de parâmetros possuem estas diferenças.

Tabela 11 – Pontos com diferença de respostas entre pesquisas

Figuras	$(u_i; \xi; \psi_1 - \psi_2)$	Resultado de Nóbrega	Resultado desta pesquisa
48	$(3V; 0\%; \frac{3\pi}{2})$	Indicação de possível caos	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$
49 e 50	$(3V; 10\%; 1)$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$
49 e 50	$(5V; 4\%; 1)$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$
49 e 50	$(5V; 1\%; \pi)$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$	Converge para solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$

Fonte: Autor

5 Análise dos resultados para duas fundações conectadas, com um motor em cada

5.1 Ensaios numéricos

Assim como no caso de dois motores em uma fundação, existem diversos resultados que podem ser mostrados, mudando as variáveis e condições iniciais. Serão apresentados dois ensaios numéricos, um que possui convergência para uma solução onde $\psi_1 - \psi_2 = 0$, e outro que possui convergência para uma solução onde $\psi_1 - \psi_2 = \pi$. Ambos os ensaios numéricos, antes de convergirem para a solução, ficam próximos de um valor $\psi_1 - \psi_2$ diferente da solução para a qual convergem, características que são apresentadas e analisadas. Por mais que sejam ensaios numéricos específicos, eles representam com eficácia fenômenos que ocorrem em ensaios que convergem para a mesma solução que eles. Os valores da tensão elétrica adimensional v são iguais para os dois ensaios apresentados, além de serem iguais aos utilizados na fundação única, e podem ser vistos na figura 19.

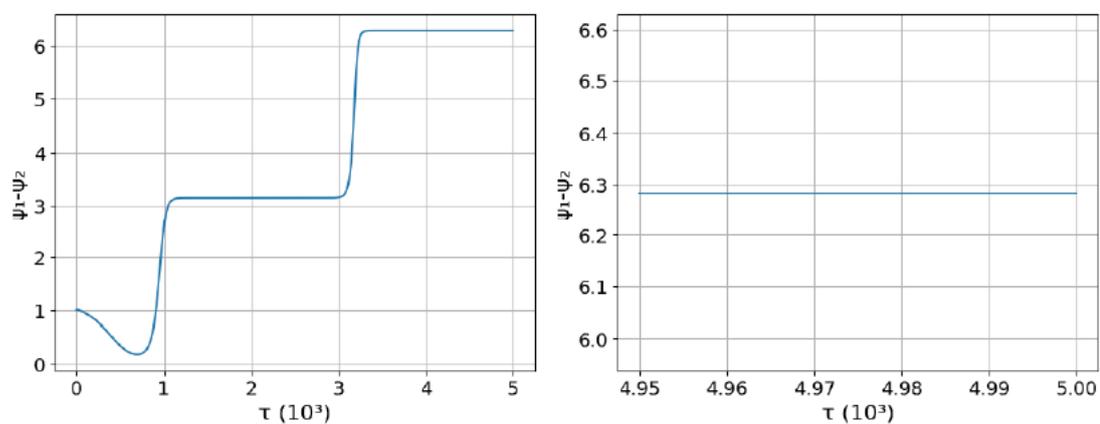
Tal qual os ensaios do sistema de fundação única, os ensaios numéricos do sistema com duas fundações possuem parâmetros similares aos da estrutura apresentada no trabalho de Nóbrega (1994). Para o primeiro ensaio numérico apresentado, que converge para a solução com diferença angular dos motores nula, as condições iniciais das variáveis são todas 0, com exceção da variável ψ_2 que vale 1. A seguir, são mostrados os parâmetros utilizados e gráficos relativos aos ângulos do primeiro ensaio numérico apresentado do caso de duas fundações, com foco na descrição da solução para a qual o sistema convergiu.

Tabela 12 – Parâmetros adimensionais do primeiro ensaio com duas fundações

Nome	Nomenclatura	Valor
Relação entre massas do sistema	α	$7,710 \cdot 10^{-3}$
Relação entre coeficientes elásticos	β	50,00%
Torque adimensional máximo	γ	$3,473 \cdot 10^{-1}$
Relação entre resistência e indutância	δ	$1,208 \cdot 10^2$
Relação entre momentos de inércia	η	$6,247 \cdot 10^{-1}$
Taxa de amortecimento	ξ	10,00%
Tensão adimensional máxima	φ	$6,694 \cdot 10^{-1}$
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$1,242 \cdot 10^2$

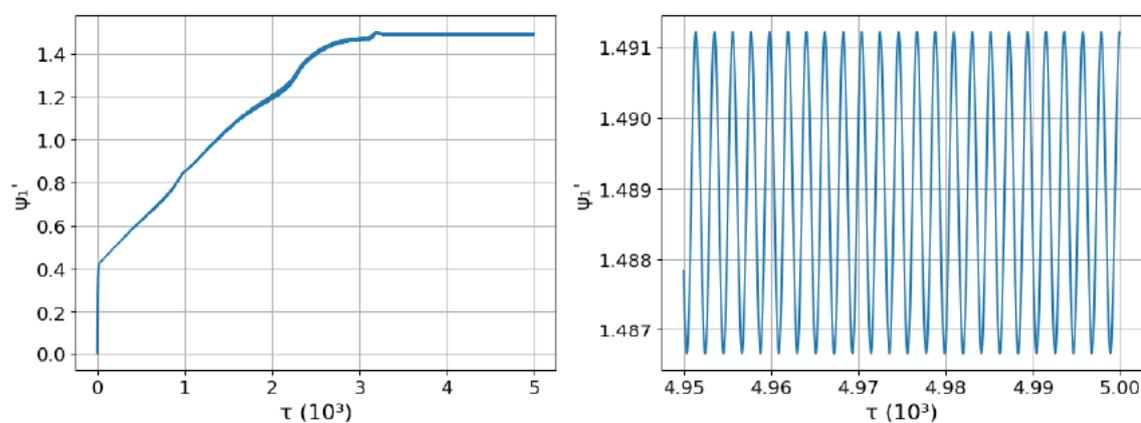
Fonte: Autor

Figura 51 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



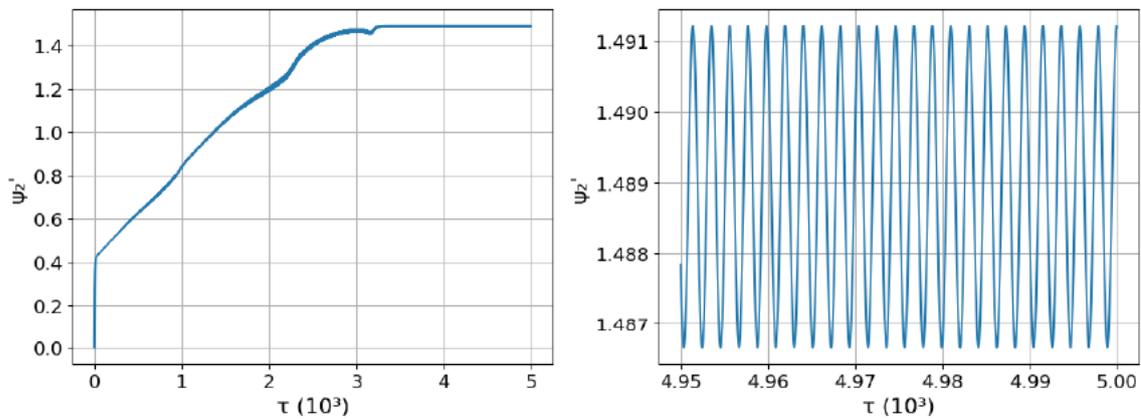
Fonte: Autor

Figura 52 – Gráfico $\psi_1' \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



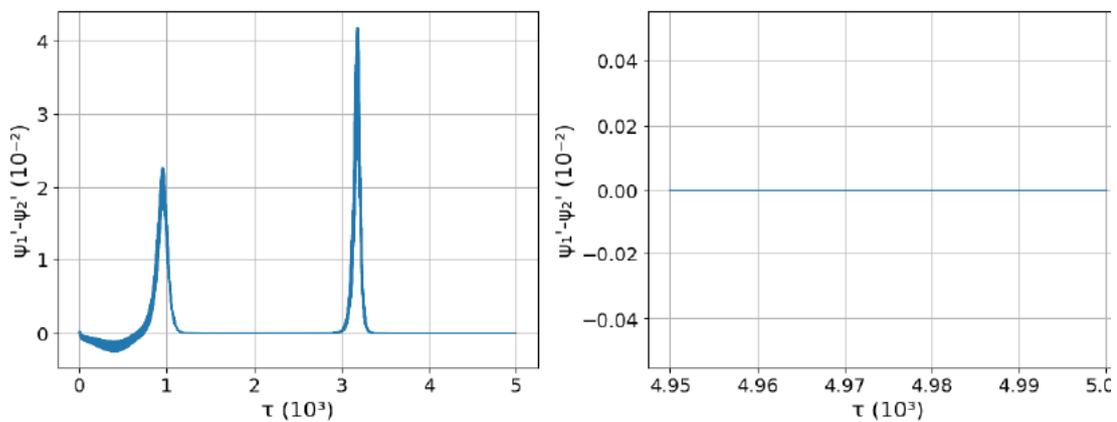
Fonte: Autor

Figura 53 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 54 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$

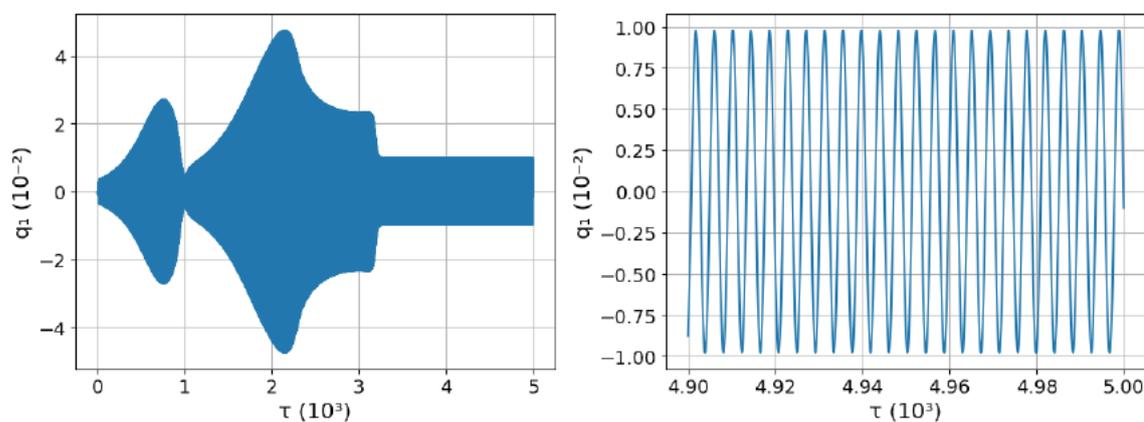


Fonte: Autor

As figuras 51 e 54 revelam que, de $\tau = 800$ à $\tau = 1100$, ocorre um crescimento rápido na variável $\psi_1 - \psi_2$, junto com um pico na variável $\psi'_1 - \psi'_2$. Entre $\tau = 1100$ e $\tau = 3000$, $\psi_1 - \psi_2$ permanece constante em π e $\psi'_1 - \psi'_2$ permanece nulo, entretanto, nas figuras 52 e 53, ψ'_1 e ψ'_2 possuem valores crescentes neste intervalo de tempo, o que impede que o cenário seja caracterizado como uma solução neste cenário. Entre $\tau = 3000$ e $\tau = 3300$ ocorre novamente um pico na variável $\psi'_1 - \psi'_2$ e uma mudança brusca em $\psi_1 - \psi_2$, até que após $\tau = 3300$ o sistema converge para uma solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ e $\psi'_1 - \psi'_2 = 0$. No intervalo de tempo que o ensaio numérico está em solução, ψ'_1 e ψ'_2 oscilam em frequência predominante de $4,74 \cdot 10^{-1}$ e amplitude predominante de $1,5 \cdot 10^{-3}$

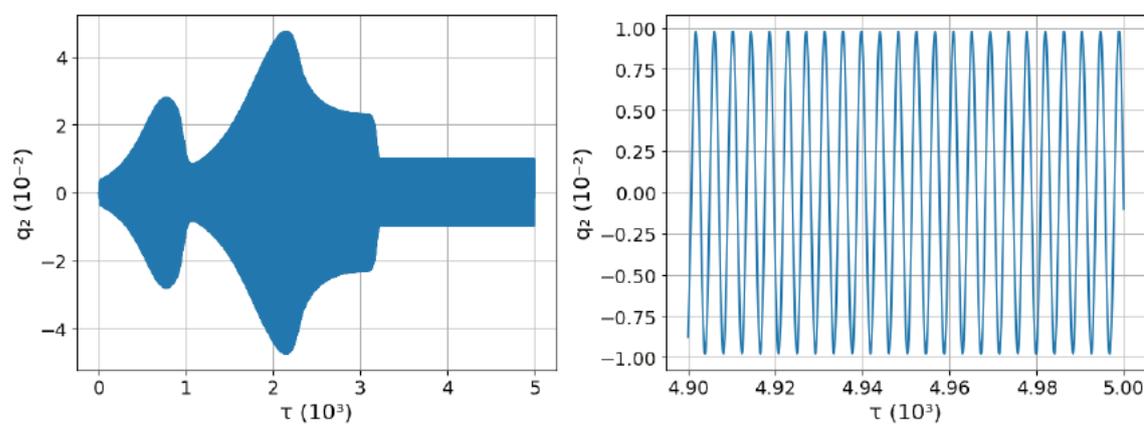
em torno do valor de 1,489, além de oscilarem com mesma fase. A seguir são mostrados os resultados das fundações do sistema.

Figura 55 – Gráfico $q_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



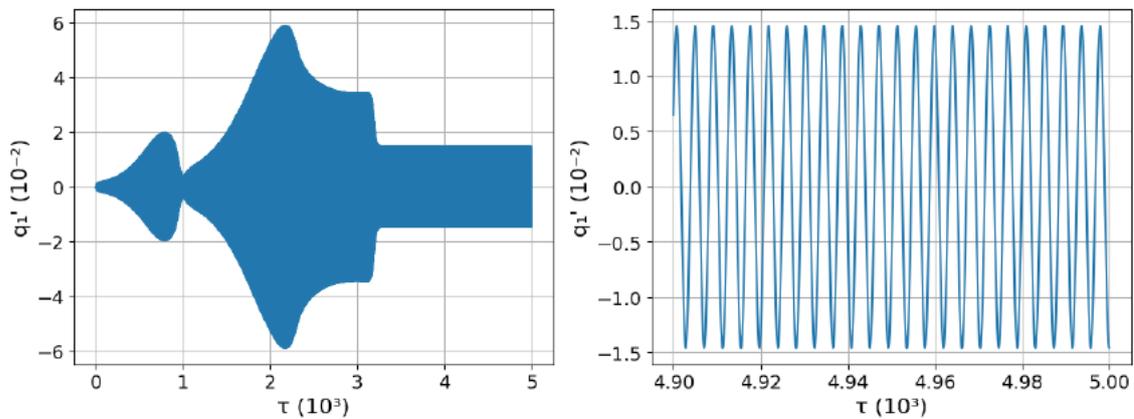
Fonte: Autor

Figura 56 – Gráfico $q_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



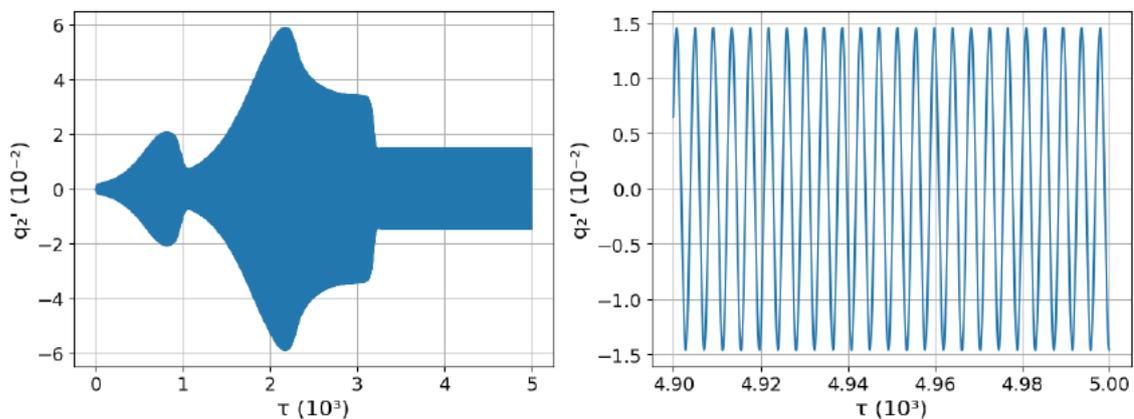
Fonte: Autor

Figura 57 – Gráfico $q'_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 58 – Gráfico $q'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$

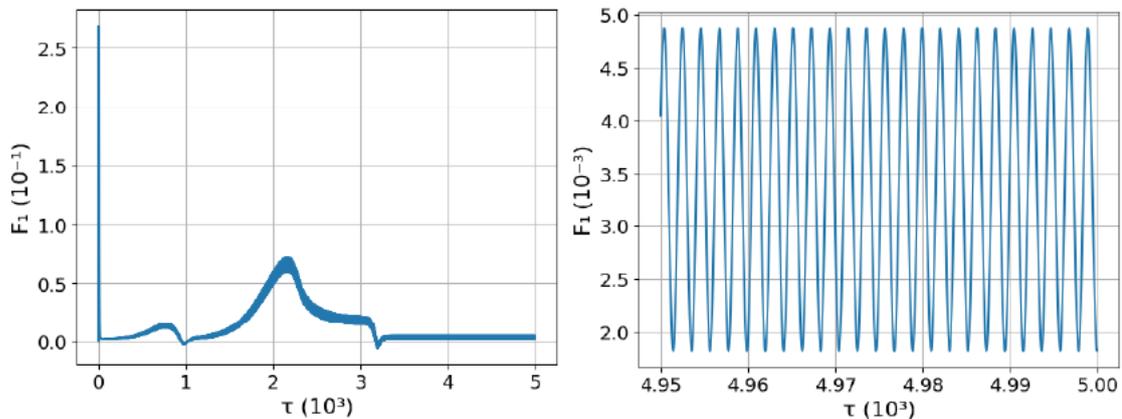


Fonte: Autor

Os gráficos de q_1 (figura 55) e q_2 (figura 56) ao longo do tempo são muito similares, assim como q'_1 (figura 57) também é similar a q'_2 (figura 58), as quatro variáveis diminuem suas amplitudes bruscamente no mesmo intervalo de tempo em que $\psi_1 - \psi_2$ varia bruscamente. É notado que nenhuma destas variáveis permanecem em uma oscilação periódica até $\tau = 3300$, quando variam bruscamente para uma oscilação periódica. Na solução, as oscilações de q_1 e q_2 possuem mesma frequência predominante de $2,37 \cdot 10^{-1}$ (metade da frequência predominante da oscilação de $\psi_1 - \psi_2$) e mesma amplitude predominante de $8,7 \cdot 10^{-3}$, além de não possuírem defasagem. As oscilações de q'_1 e q'_2 naturalmente também não possuem defasagem na solução, e possuem mesma amplitude

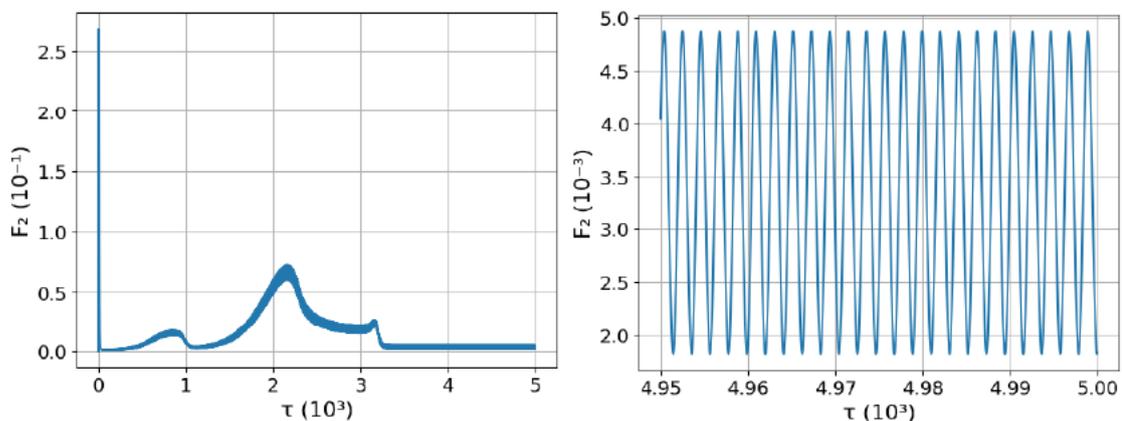
predominante de $1,3 \cdot 10^{-2}$, além de terem a mesma frequência predominante que as variáveis q_1 e q_2 . A seguir, são apresentadas as respostas dos torques dos motores.

Figura 59 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 60 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

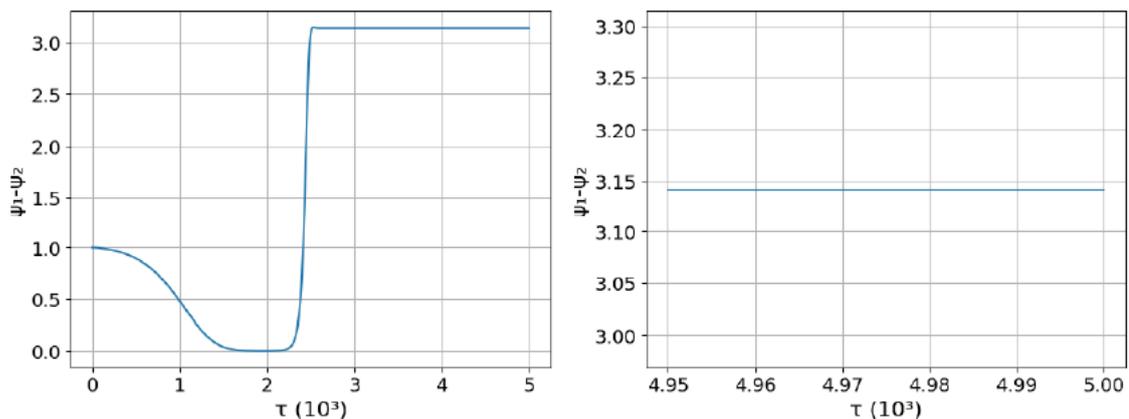
Analisando as figuras 59 e 60, é notável que os torques dos motores variam muito antes de o sistema convergir para a solução, ficando próximos de zero no tempo da primeira variação brusca de $\psi_1 - \psi_2$ e convergindo para a solução oscilando periodicamente próximo do zero após a segunda variação brusca de $\psi_1 - \psi_2$. Ambos os torques dos motores, em regime, oscilam em torno de $3,3 \cdot 10^{-3}$ com frequência predominante de $4,74 \cdot 10^{-1}$ e amplitude predominante de $1,5 \cdot 10^{-3}$, não possuindo defasagem de F_2 em relação à F_1 .

O segundo ensaio numérico apresentado para este modelo, que converge para a solução cuja diferença dos ângulos dos motores vale π , possui condições iniciais do problema iguais a 0, com exceção de ψ_1 , que vale 1. Além de se discutir os resultados obtidos do segundo ensaio numérico, também é realizada uma comparação entre a solução do primeiro e do segundo ensaio numérico, com intenção de apontar suas maiores diferenças. A seguir, são mostradas as constantes deste ensaio e as figuras relacionadas às variáveis angulares do segundo ensaio numérico, com foco na solução.

Tabela 13 – Parâmetros adimensionais do segundo ensaio com duas fundações

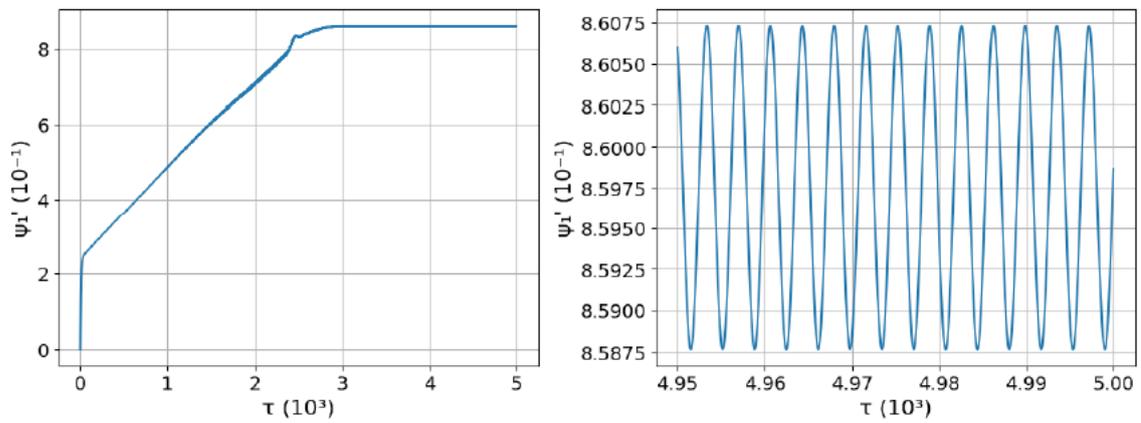
Nome	Nomenclatura	Valor
Relação entre massas do sistema	α	$7,710 \cdot 10^{-3}$
Relação entre coeficientes elásticos	β	50,00%
Torque adimensional máximo	γ	$1,158 \cdot 10^{-1}$
Relação entre resistência e indutância	δ	$6,974 \cdot 10^1$
Relação entre momentos de inércias	η	$6,247 \cdot 10^{-1}$ %
Taxa de amortecimento	ξ	10,00%
Tensão adimensional máxima	φ	$1,159 \cdot 10^0$
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$2,151 \cdot 10^2$

Fonte: Autor

Figura 61 – Gráfico $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$ 

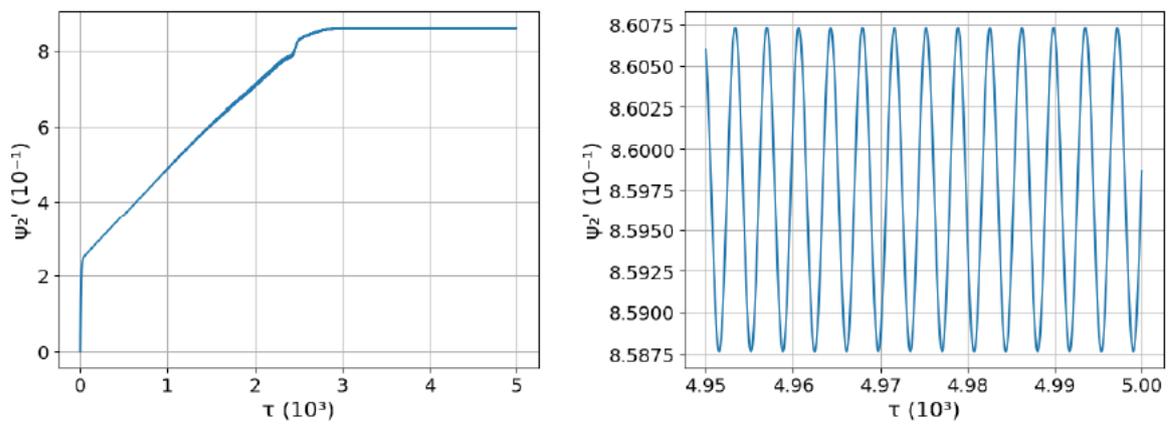
Fonte: Autor

Figura 62 – Gráfico $\psi'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



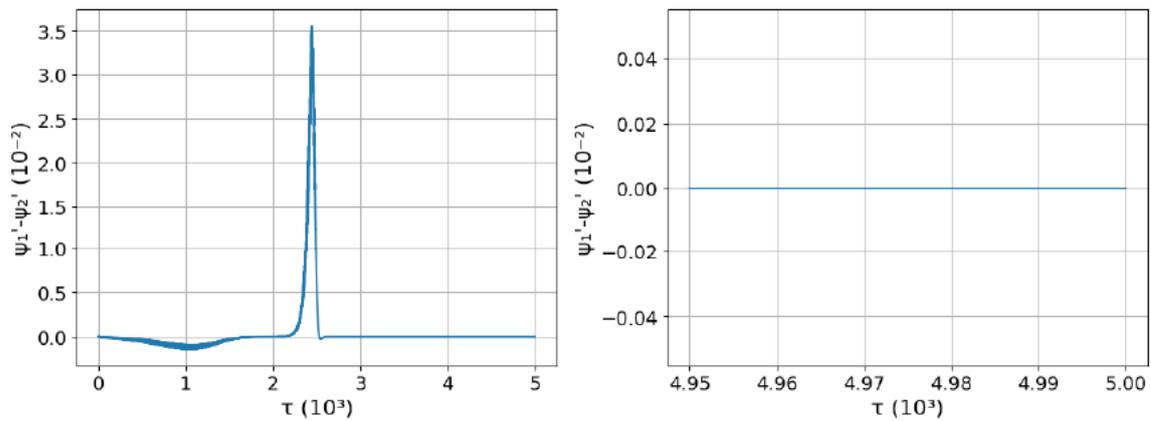
Fonte: Autor

Figura 63 – Gráfico $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

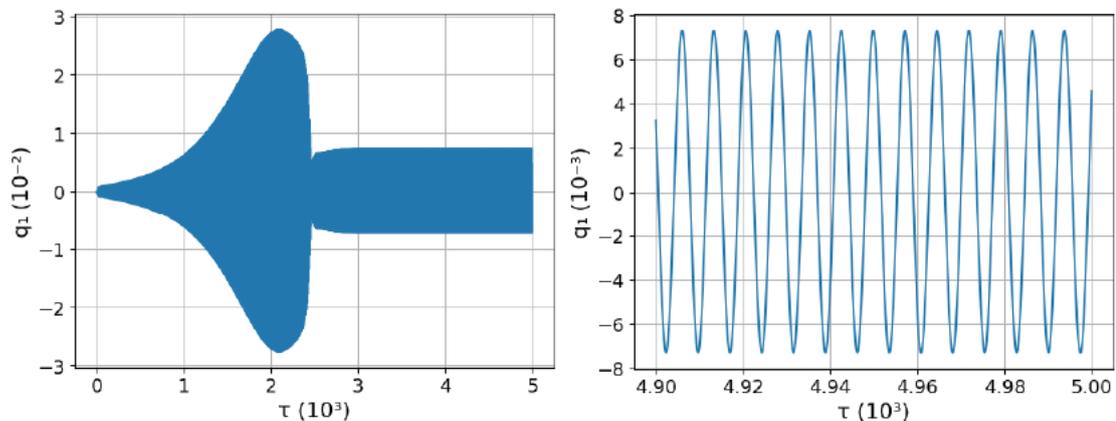
Figura 64 – Gráfico $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

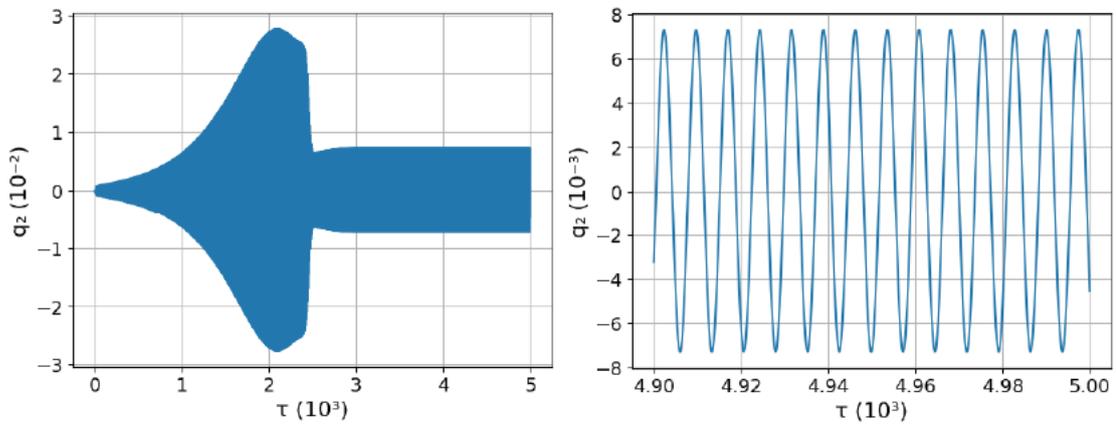
Baseado nas figuras 61 à 64, entre $\tau = 1600$ e $\tau = 2200$, $\psi_1 - \psi_2$ fica com valor de 0, enquanto ψ'_1 e ψ'_2 crescem gradualmente. Diferentemente do outro ensaio numérico mostrado nas figuras 51 e 54, segundo as figuras 61 e 64 somente existe uma mudança brusca na variável $\psi_1 - \psi_2$, entre $\tau = 2200$ e 2500 , juntamente com um pico na variável $\psi'_1 - \psi'_2$. Após $\tau = 2500$, $\psi_1 - \psi_2$ permanece no valor de π e $\psi'_1 - \psi'_2$ permanece nulo, enquanto ψ'_1 e ψ'_2 , mostrados respectivamente nas figuras 62 e 63 encontram-se oscilando com mesma fase em torno de $0,860$, com frequência predominante de $2,76 \cdot 10^{-1}$ e amplitude predominante de $7,5 \cdot 10^{-4}$. A solução do segundo ensaio numérico possui valores menores de ψ'_1 e ψ'_2 , assim como amplitudes menores da oscilação.

Figura 65 – Gráfico $q_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



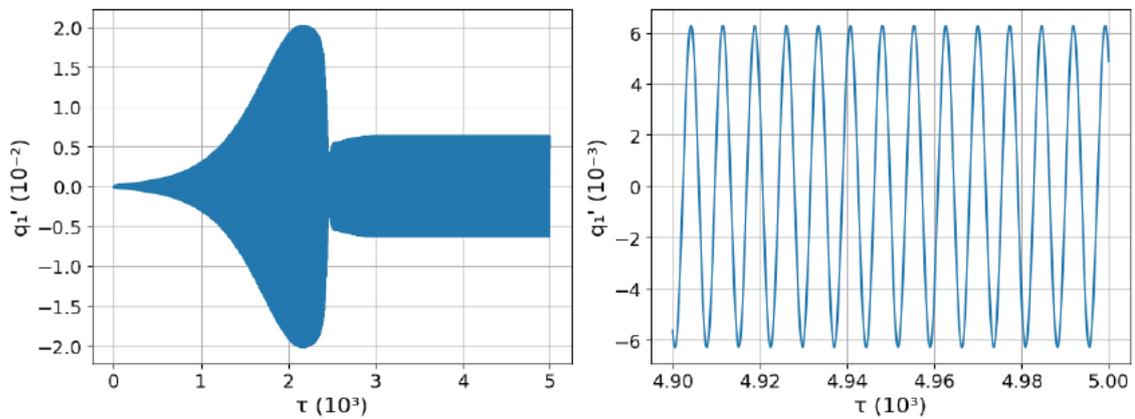
Fonte: Autor

Figura 66 – Gráfico $q_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



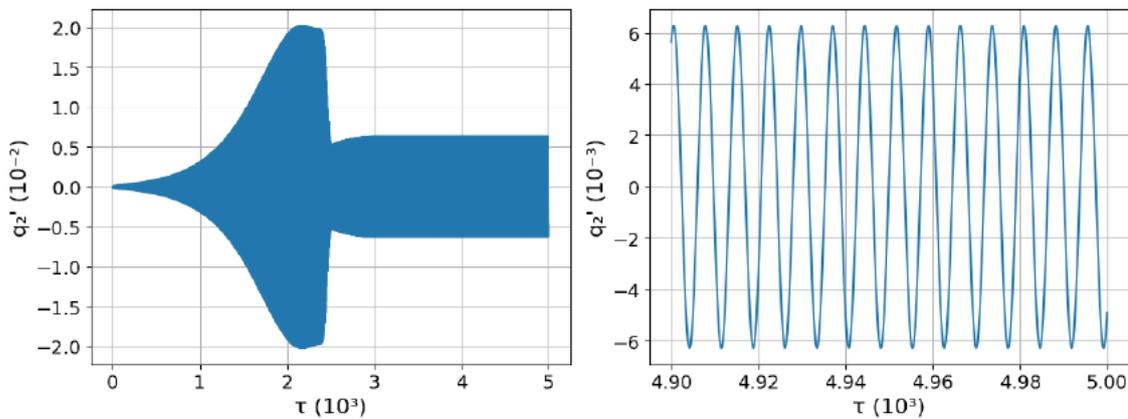
Fonte: Autor

Figura 67 – Gráfico $q'_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

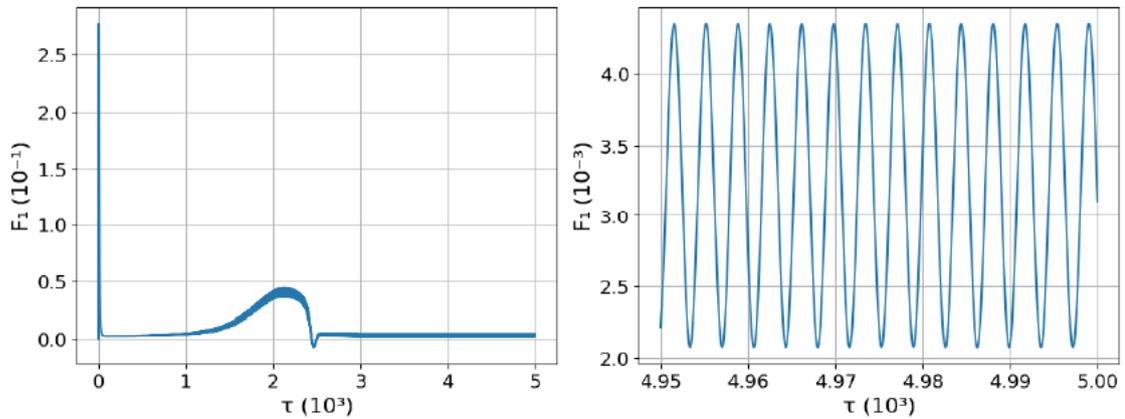
Figura 68 – Gráfico $q'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

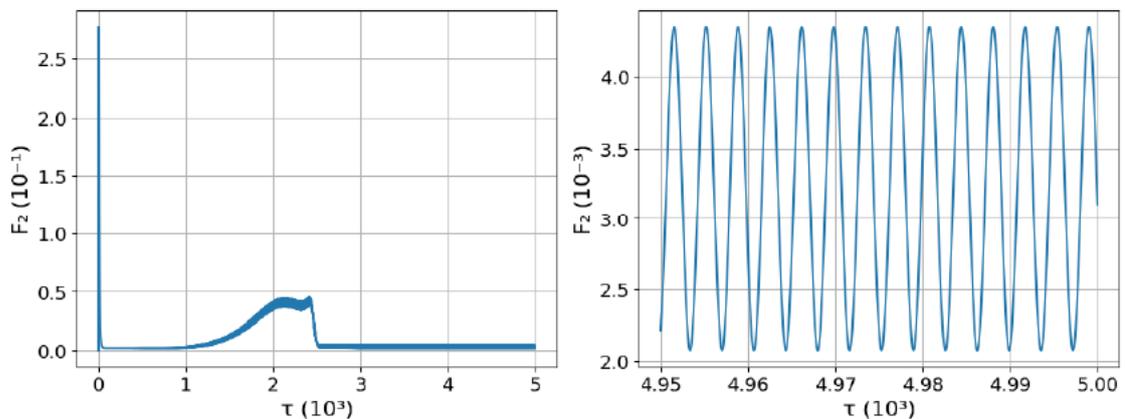
As amplitudes das variáveis q_1 , q_2 , q'_1 e q'_2 , mostradas respectivamente entre as figuras 65 à 68, crescem gradualmente de $\tau = 0$ até $\tau = 2200$. Assim como $\psi_1 - \psi_2$, estas variáveis possuem uma variação brusca entre $\tau = 2200$ e $\tau = 2500$ e, logo em seguida, convergem para a solução. Diferentemente do primeiro ensaio numérico mostrado entre as figuras 55 à 58, o segundo ensaio numérico somente possui uma variação brusca nas variáveis relativas à fundação, q_1 e q_2 possuem mesma frequência predominante de $1,38 \cdot 10^{-1}$ e mesma amplitude predominante de $6,2 \cdot 10^{-3}$, e possuem uma defasagem de π , q'_1 e q'_2 possuem mesma frequência predominante que os deslocamentos da fundação, e ambas possuem uma amplitude predominante de $5,4 \cdot 10^{-3}$. É notável que esta solução possua amplitudes menores de vibração da fundação. A seguir, são mostrados gráficos relativos ao torque dos motores para o segundo ensaio numérico.

Figura 69 – Gráfico $F_1 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, com foco no intervalo de $4,95 \cdot 10^3$ à $5,00 \cdot 10^3$



Fonte: Autor

Figura 70 – Gráfico $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas

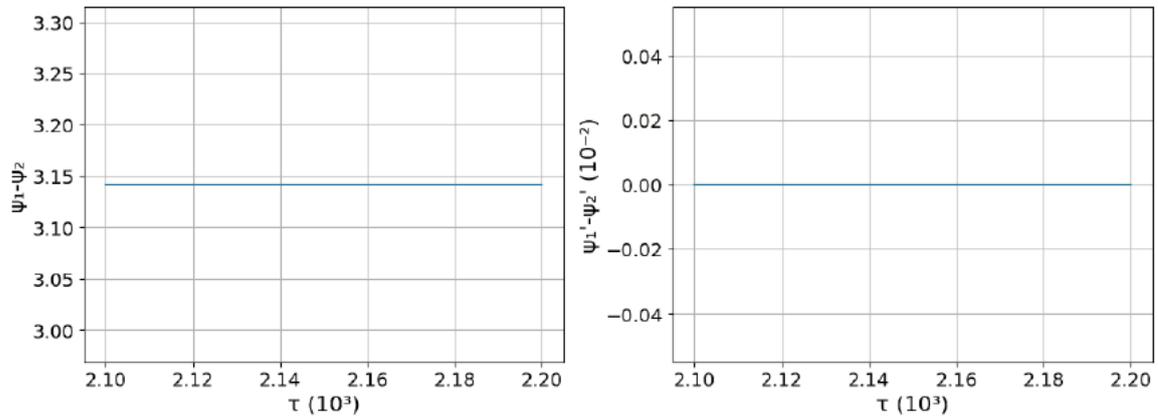


Fonte: Autor

As figuras 69 e 70 mostram os torques F_1 e F_2 crescerem gradualmente até $\tau = 2200$, quando F_1 decai rapidamente e F_2 cresce levemente antes de decair rapidamente. Em $\tau = 2500$, F_1 e F_2 oscilam em torno de $3,2 \cdot 10^{-3}$, ambos com frequência predominante de $2,76 \cdot 10^{-1}$ e amplitude predominante de $8,7 \cdot 10^{-4}$. Comparando o torque deste ensaio numérico com o torque do primeiro ensaio deste caso mostrado nas figuras 59 e 60, além de este ensaio numérico atingir a solução mais rapidamente que no primeiro ensaio, ele possui variações menores dos valores dos torques dos motores até a convergência para a solução, mas ambos possuem aumento dos torques até atingirem a solução, onde variam em torno de um valor próximo de zero, havendo momentos em que estas variáveis estão negativas. A seguir, serão mostrados momentos de ambos os ensaios numéricos quando possuem $\psi_1 - \psi_2$

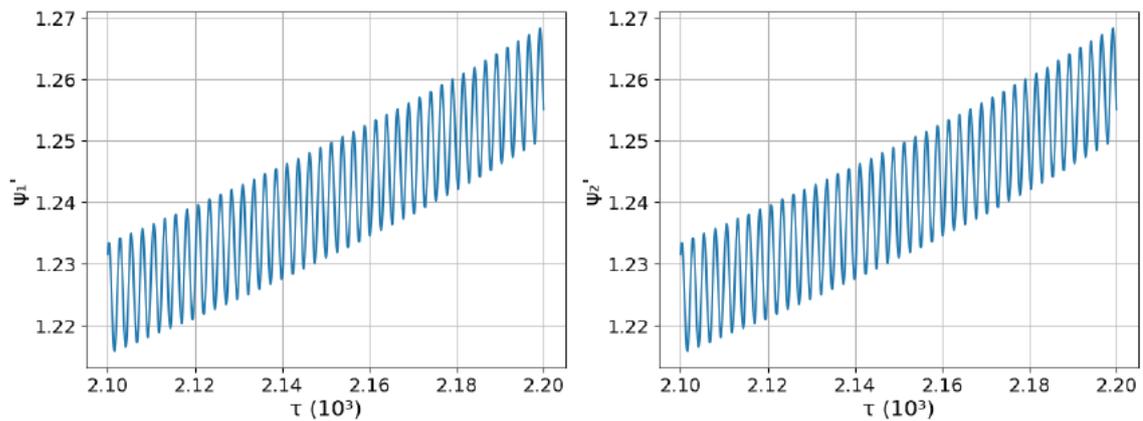
constante, mas não estando em solução com movimento periódico, explorando com mais detalhes os fenômenos que ocorrem nestes cenários.

Figura 71 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$



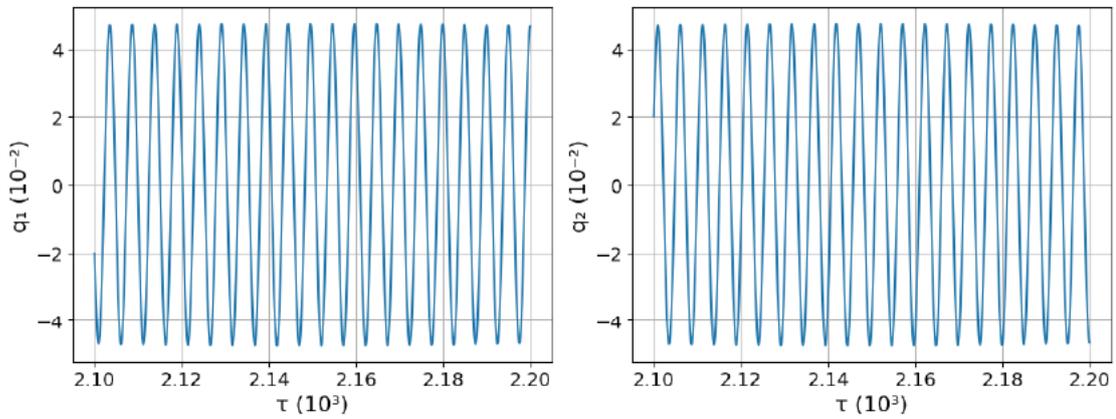
Fonte: Autor

Figura 72 – Gráficos $\psi'_1 \times \tau$ e $\psi'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$



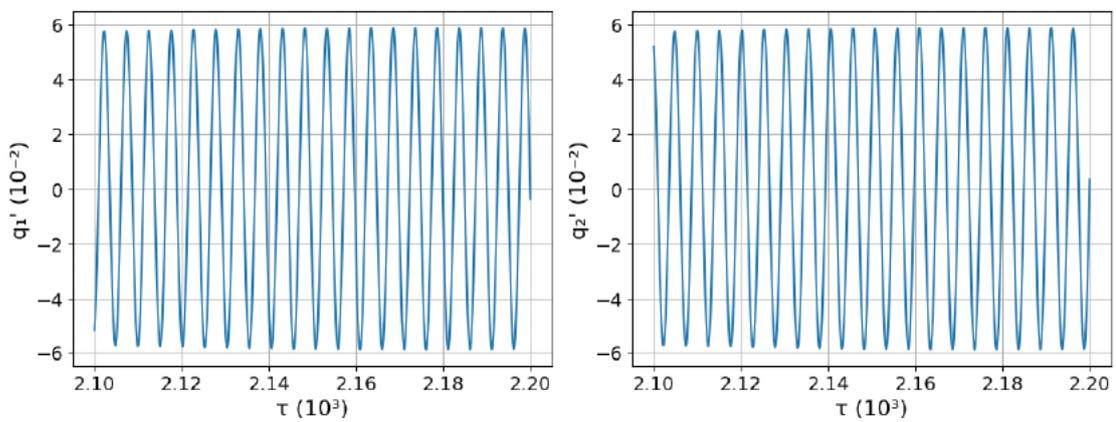
Fonte: Autor

Figura 73 – Gráficos $q_1 \times \tau$ e $q_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$



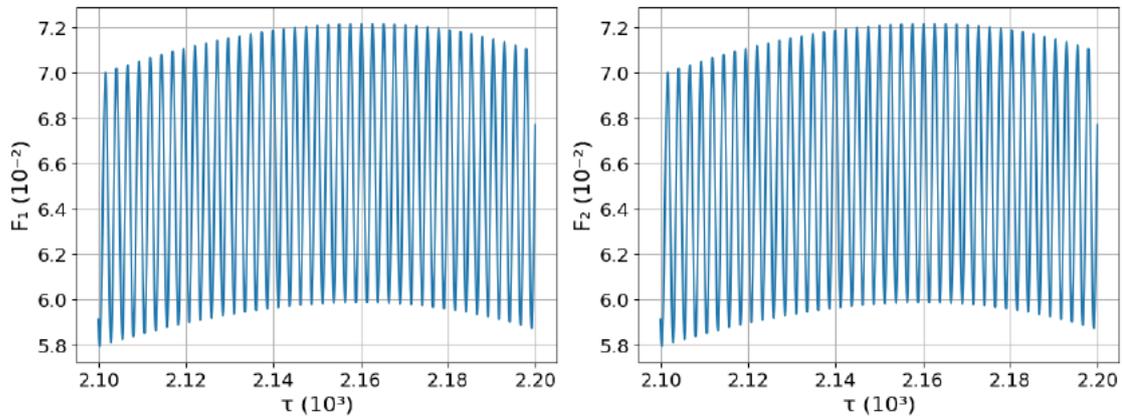
Fonte: Autor

Figura 74 – Gráficos $q'_1 \times \tau$ e $q'_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$



Fonte: Autor

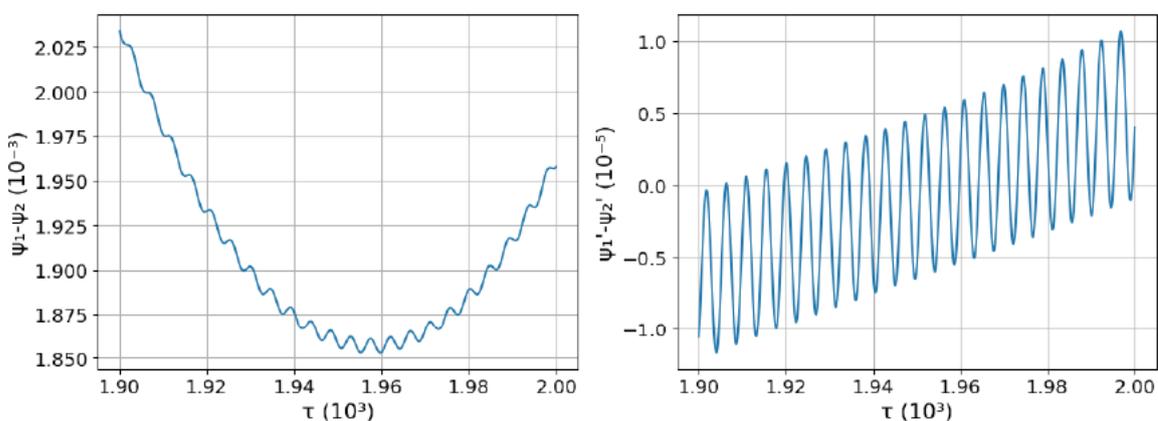
Figura 75 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do primeiro ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 2100$ a $\tau = 2200$



Fonte: Autor

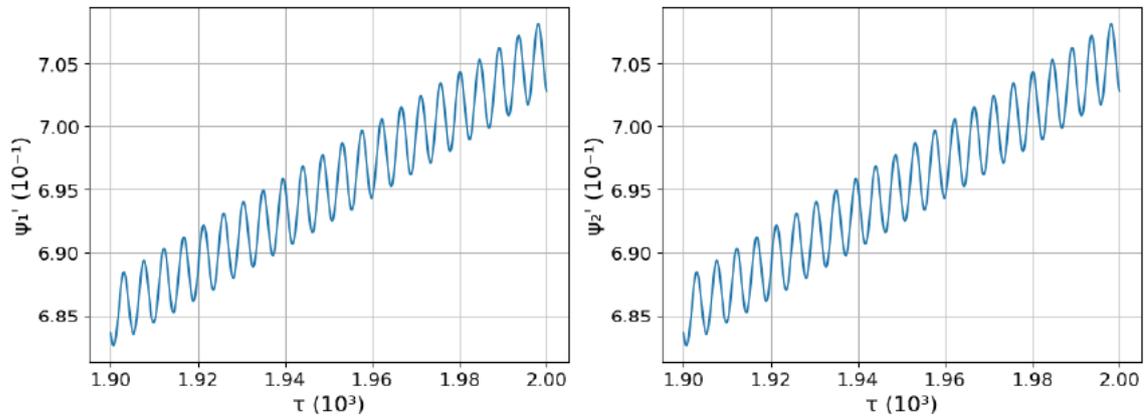
É notável que o ensaio numérico neste intervalo de tempo não esteja em regime permanente, por conta do crescimento de ψ'_1 e ψ'_2 visto na figura 72, mas os ensaios numéricos mostrados nas figuras 71 à 75 possuem uma frequência de vibração que varia levemente neste intervalo de tempo. As amplitudes predominantes das variáveis são maiores do que na solução, assim como valores médios dos resultados, por outro lado, as frequências predominantes das variáveis são menores em comparação com a solução.

Figura 76 – Gráficos $\psi_1 - \psi_2 \times \tau$ e $\psi'_1 - \psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$



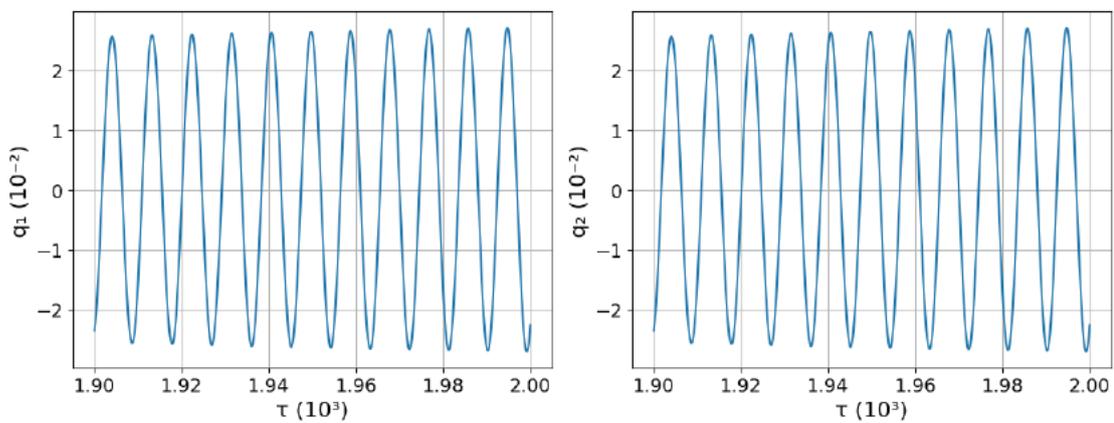
Fonte: Autor

Figura 77 – Gráficos $\psi'_1 \times \tau$ e $\psi'_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$



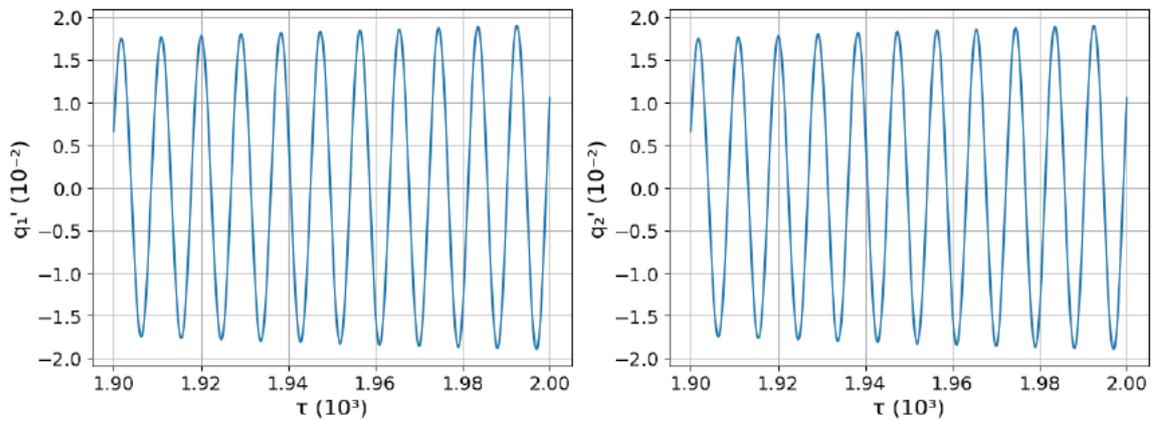
Fonte: Autor

Figura 78 – Gráficos $q_1 \times \tau$ e $q_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$



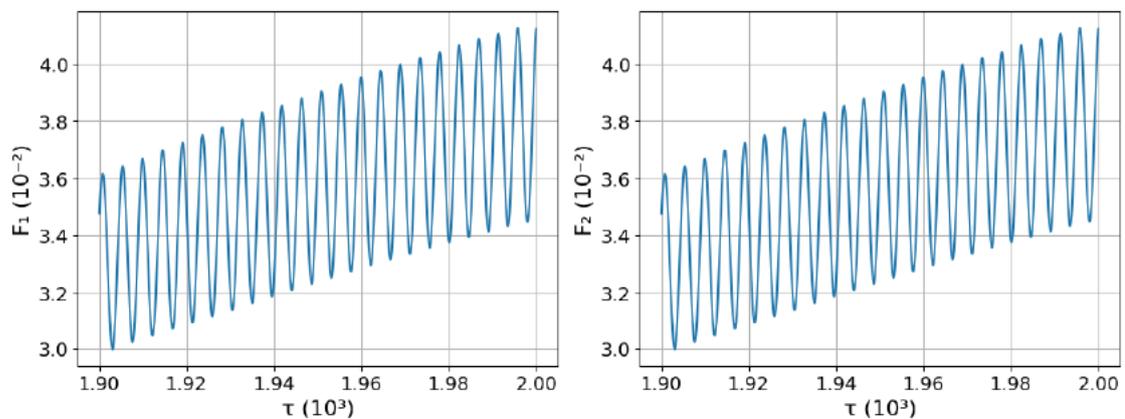
Fonte: Autor

Figura 79 – Gráficos $q_1' \times \tau$ e $q_2' \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$



Fonte: Autor

Figura 80 – Gráficos $F_1 \times \tau$ e $F_2 \times \tau$ do segundo ensaio numérico do caso de fundações conectadas, no intervalo $\tau = 1900$ a $\tau = 2000$



Fonte: Autor

Assim como o trecho selecionado do primeiro ensaio numérico, o trecho selecionado do segundo ensaio numérico mostrado nas figuras 76 à 69 possui variáveis com frequências predominantes variando pouco no intervalo, com amplitudes predominantes maiores do que as vistas nas soluções e frequências predominantes menores, mas ainda é notável como o trecho possui frequências e amplitudes bem marcantes mesmo não convergindo. Analisando as variáveis ψ_1' , ψ_2' , F_1 e F_2 nas figuras 77 e 80, é possível afirmar que o sistema não se encontra em solução neste intervalo.

Como visto, algumas mudanças de parâmetros e condições iniciais podem causar uma mudança na convergência do sistema, que será melhor explicado nas próximas subseções. Analisando os resultados, é levantada a hipótese de que a variação da tensão elétrica nos motores poderia provocar esta mudança de busca de solução. Um dos fatores que contribuiu para levantar esta hipótese foi o aumento da voltagem estar imediatamente ligado ao aumento do torque dos motores nas equações do sistema (2.54), que pode causar frequências distintas de esforços na fundação e conseqüentemente na massa excêntrica do motor. Esta hipótese será melhor explorada na seção Bacias de atração.

5.2 Espaços de parâmetros e energias

Como dito no capítulo anterior, é de interesse explorar como parâmetros afetam os atratores que o sistema terá, para isso, são analisados espaços de parâmetros com olhar em três variáveis: relação entre coeficientes elásticos β , taxa de amortecimento ξ e frequência do sistema com rotor parado ω . As variáveis foram escolhidas por estarem bem relacionadas com o movimento das fundações, e se constatou com as figuras a seguir que elas influenciam para qual solução o sistema pode convergir.

No fim da seção anterior, é indicado que o crescimento da tensão elétrica ao longo do tempo altere a busca da solução pelo sistema, questão melhor explorada na próxima seção. Para evitar que uma variação da tensão elétrica varie o torque (mostrado na Eq. (2.54)) e interfira nas soluções buscadas de cada ponto do espaço de parâmetro, é considerado que a tensão elétrica seja constante ao longo do tempo, em outras palavras, $v_i = 1$ na Eq. (2.22) da tensão elétrica, fórmula válida para o primeiro e segundo sistema explorados neste trabalho.

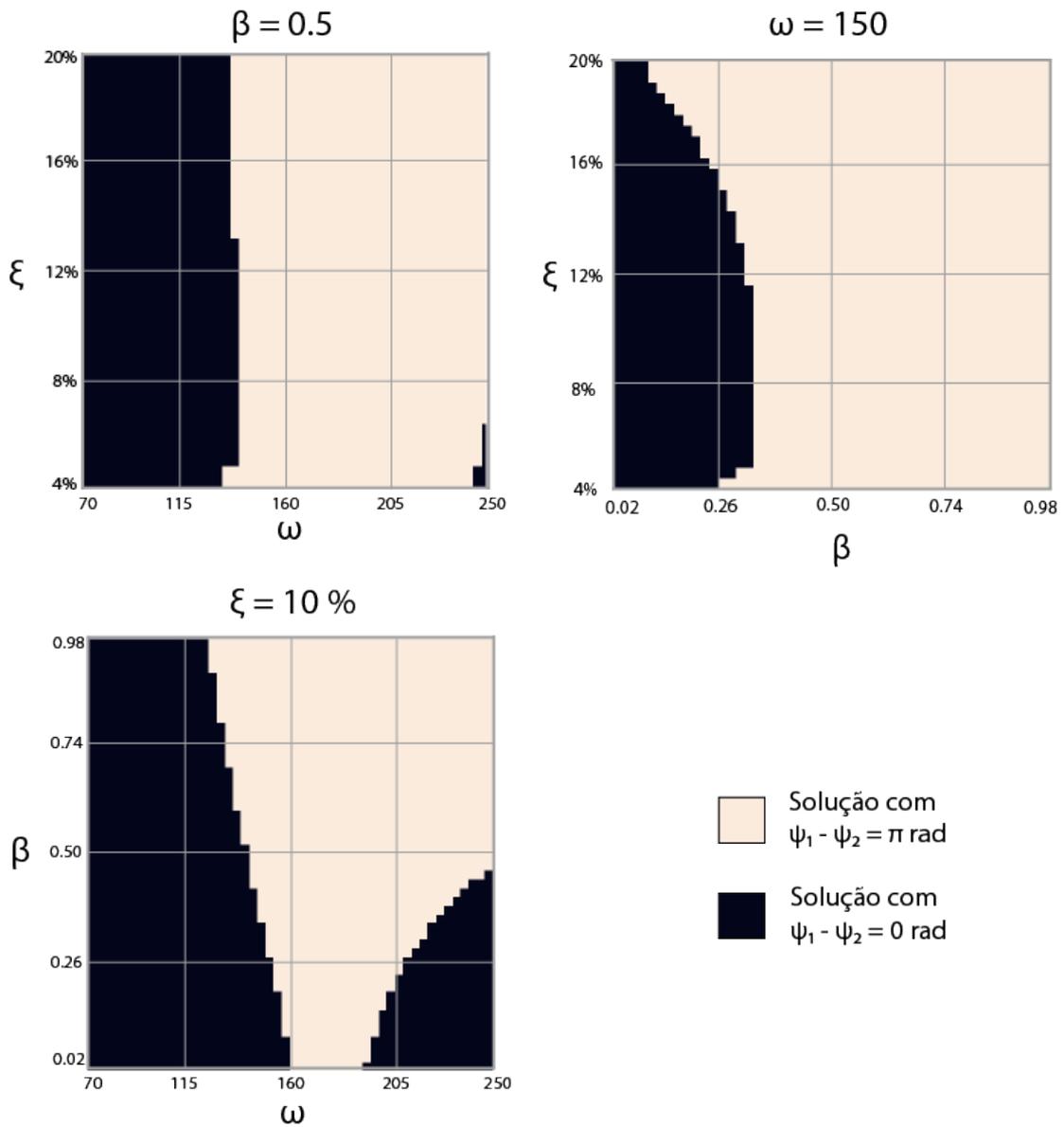
As condições iniciais dos ensaios numéricos são triviais, com exceção de $\psi_1 = 1$, ademais, os parâmetros utilizados são mostrados na tabela a seguir:

Tabela 14 – Parâmetros adimensionais dos espaços de parâmetros com duas fundações

Nome	Nomenclatura	Valor
Relação entre massas do sistema	α	$7,710 \cdot 10^{-3}$
Torque adimensional máximo	γ	$1,736 \cdot 10^{-1}$
Relação entre resistência e indutância	δ	$8,541 \cdot 10^1$
Relação entre momentos de inércia	η	62,47%
Tensão adimensional máxima	φ	$9,466 \cdot 10^{-1}$

Fonte: Autor

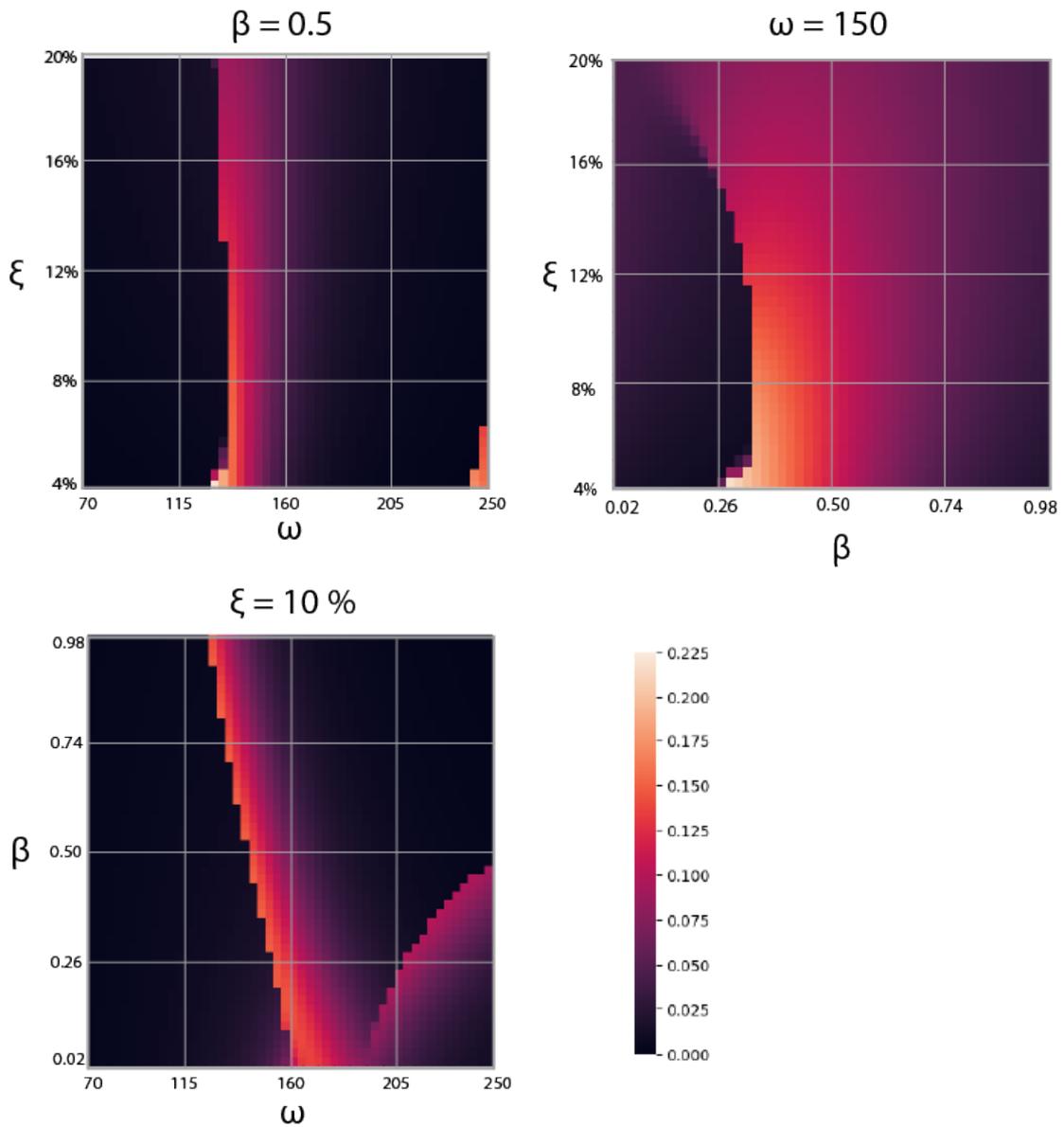
Figura 81 – Espaços de parâmetros



Fonte: Autor

Na figura 81, é possível visualizar como os parâmetros interferem na busca das soluções pelo sistema, e serão importantes para a discussão feita sobre as energias do sistema. A próxima figura trata da energia fornecida a ambos os motores do sistema.

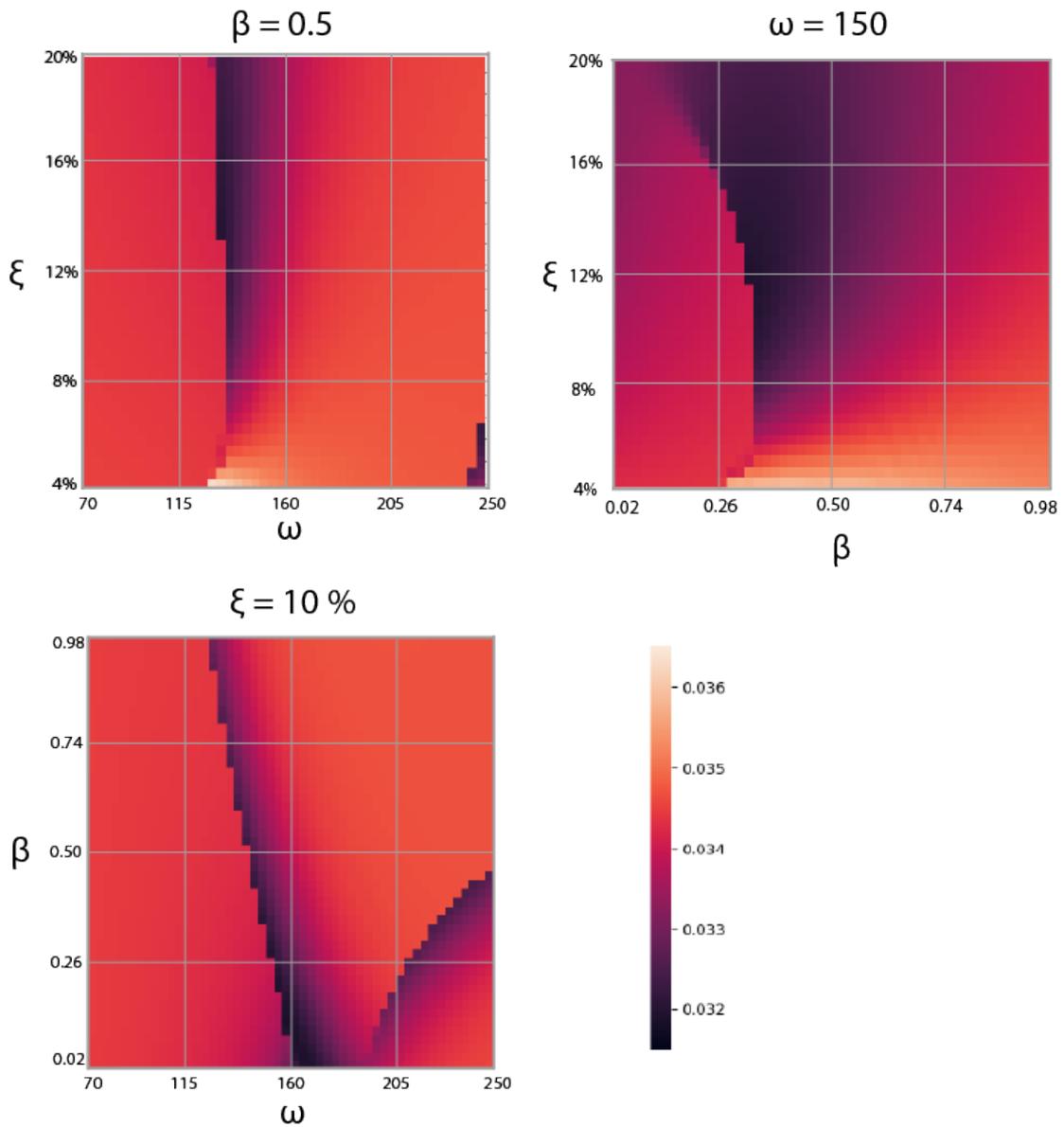
Figura 82 – Energia provida aos motores nas seções



Fonte: Autor

É possível ver na figura 82 que próximo dos limites onde ocorre mudança de solução, os motores recebem mais energia, indicando uma maior demanda de energia para o sistema. Ademais, em geral, é provido mais energia para o sistema para valores da taxa de amortecimento ξ pequenos. Em geral, é notado que a solução que possui $\psi_1 - \psi_2 = \pi$ possui mais energia provida aos motores. A próxima figura é relacionada à energia cinética do sistema.

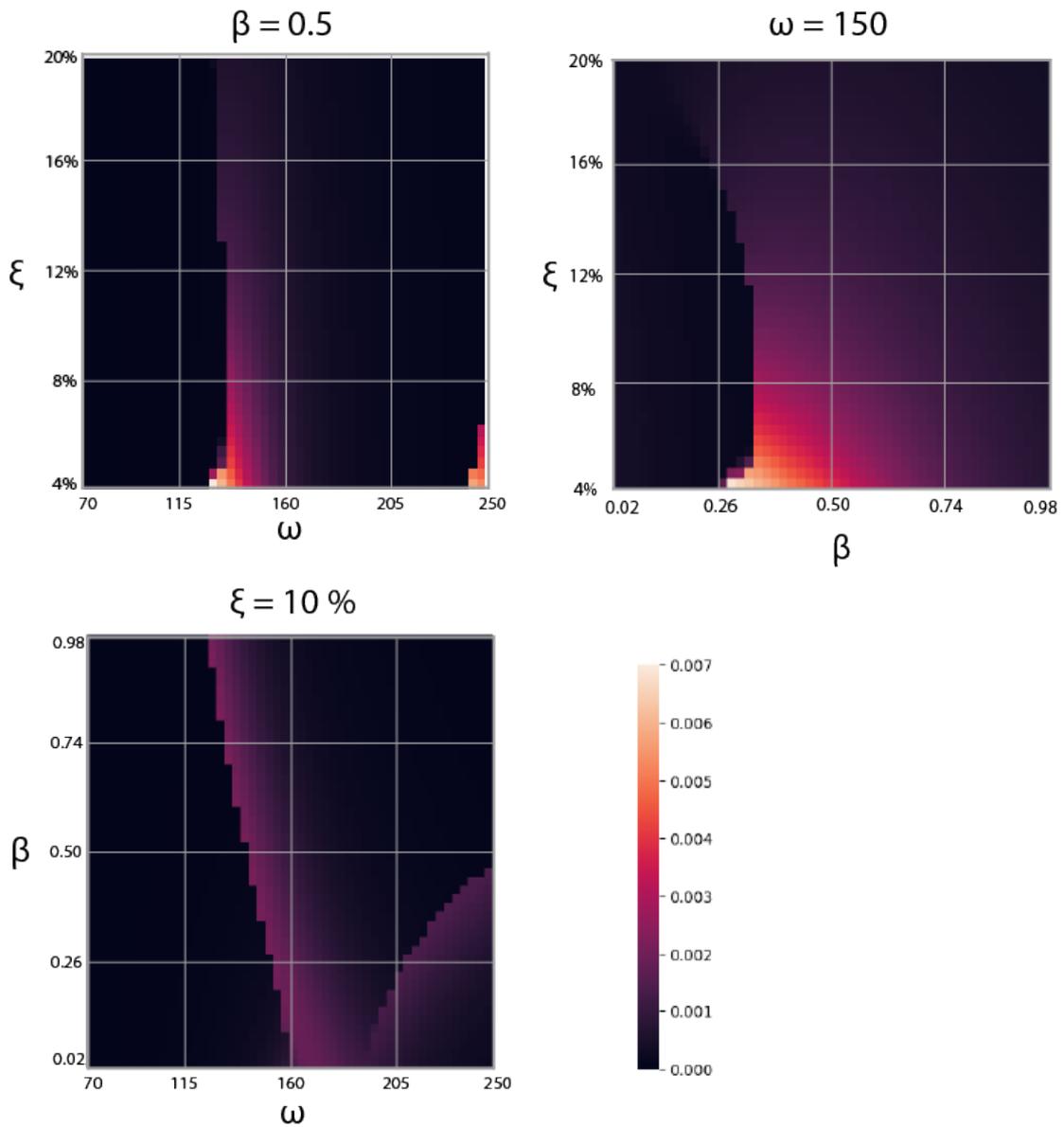
Figura 83 – Energia cinética nas seções



Fonte: Autor

Na figura 83, é notado que a energia cinética do sistema não varia muito dependendo da solução para qual o sistema converge. Das poucas variações que ocorrem sobre a energia cinética, pode ser dito que são maiores para taxa de amortecimento ξ pequenos, além de ter menos energia cinética em ensaios numéricos próximos do limite entre as soluções. A próxima figura a ser comentada é relacionada à energia potencial dos ensaios numéricos.

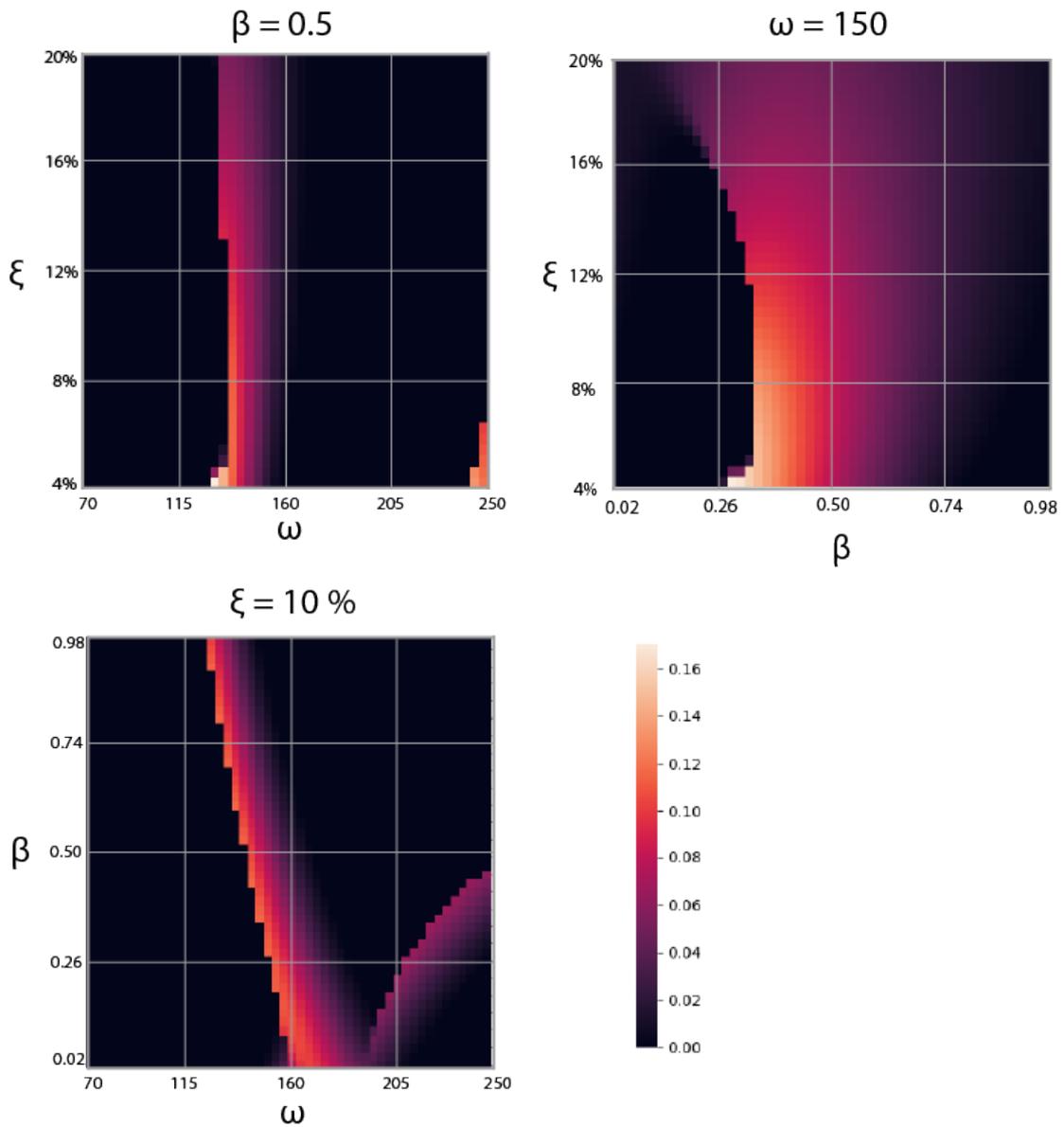
Figura 84 – Energia potencial nas seções



Fonte: Autor

Como visto na figura 84, a energia potencial na solução é pequena em comparação às outras energias para todos os casos analisados, sendo levemente maior para valores pequenos da taxa de amortecimento ξ , próximo das mudanças de soluções e levemente maior em geral para soluções com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$. A seguir é apresentada a figura relacionada à energia dissipada pelo sistema.

Figura 85 – Energia dissipada nas seções



Fonte: Autor

Com base na figura 85, a energia dissipada pelo sistema costuma ser maior exatamente em regiões em que a energia fornecida aos motores é maior, observando que a energia cinética não varia muito com os parâmetros e a energia potencial é pequena em comparação às outras, pode-se dizer que, para casos com parâmetros que causem uma maior demanda de energia a ser fornecida aos motores, boa parte desta energia é dissipada pelo sistema.

5.3 Bacias de atração

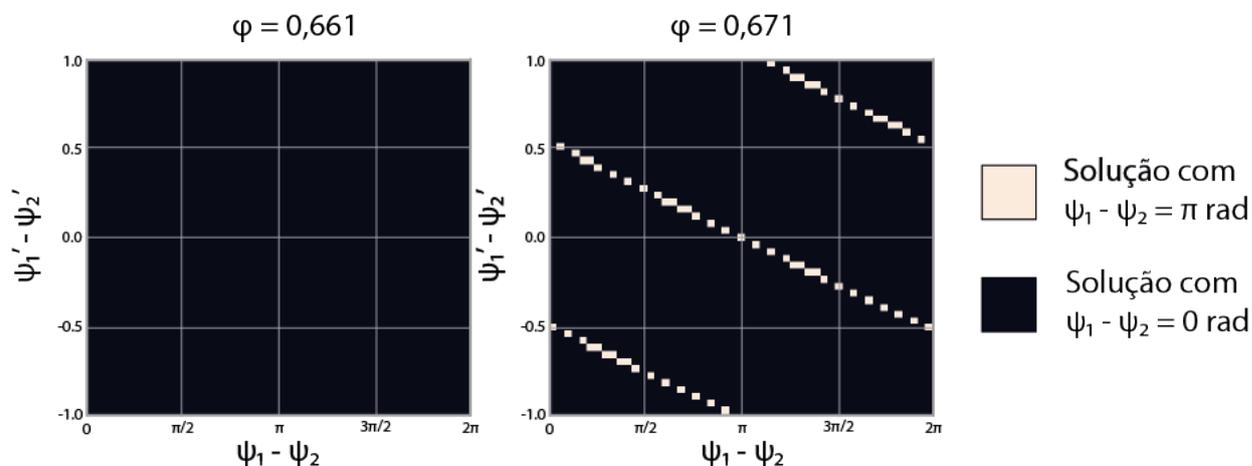
Para encontrar as bacias de atração e verificar se a tensão elétrica causa mudanças na estabilidade das soluções, questão levantada nas seções anteriores, são estudadas as bacias de atração em seções do espaço de fase com diferentes tensões elétricas nos motores. Para evitar que o crescimento da tensão elétrica ao longo do tempo interfira na busca da solução do sistema, é considerado que a tensão elétrica seja constante ao longo do tempo, em outras palavras, $v_i = 1$ na Eq. (2.22) da tensão elétrica, fórmula válida para o primeiro e segundo sistema explorados neste trabalho. Condições iniciais diferentes de ψ_1 e ψ'_1 são nulas para estes ensaios numéricos, ademais, os parâmetros utilizados são mostrados na tabela a seguir:

Tabela 15 – Parâmetros adimensionais do estudo de bacia de atração com duas fundações

Nome	Nomenclatura	Valor
Relação entre massas do sistema	α	$7,710 \cdot 10^{-3}$
Relação entre coeficientes elásticos	β	50,00%
Torque adimensional máximo	γ	$1,736 \cdot 10^{-1}$
Relação entre resistência e indutância	δ	$8,541 \cdot 10^1$
Relação entre momentos de inércia	η	62,47%
Taxa de amortecimento	ξ	10,00%
Tensão adimensional máxima	φ	$9,466 \cdot 10^{-1}$
Frequência do sistema com rotor parado	ω	$1,756 \cdot 10^2$

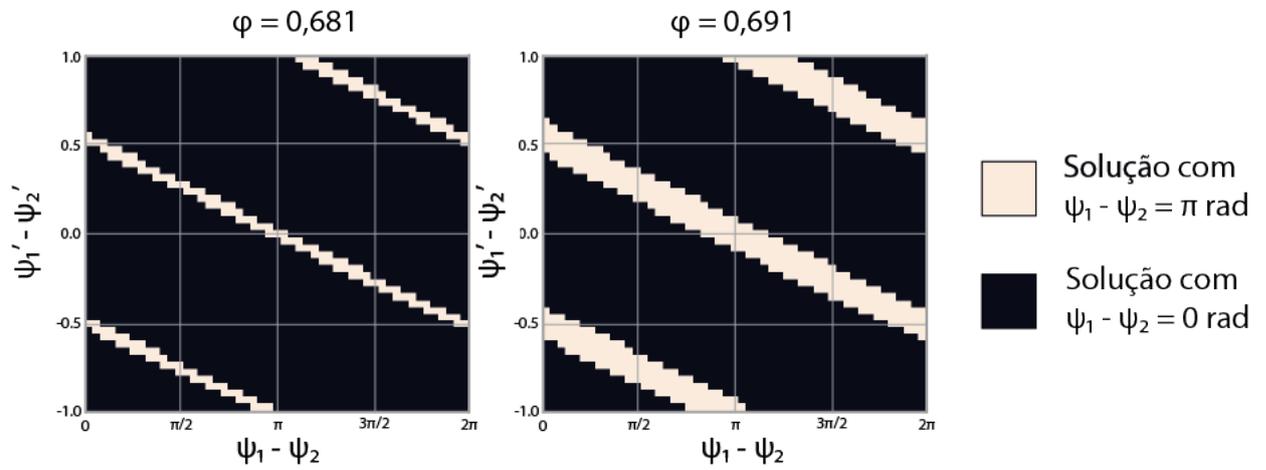
Fonte: Autor

Figura 86 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,661$ ($u = 6,7$ V) e $\varphi = 0,671$ ($u = 6,8$ V)



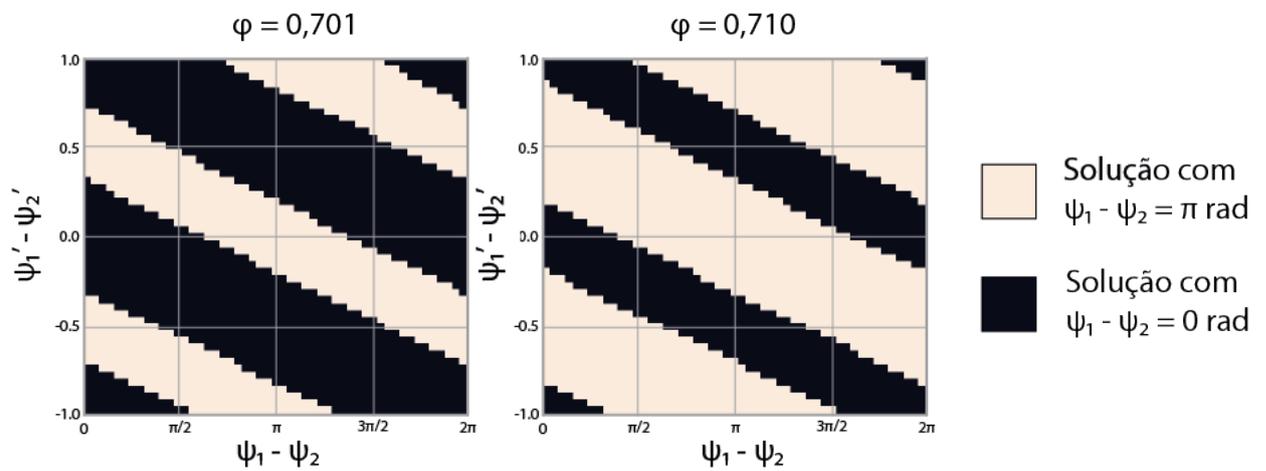
Fonte: Autor

Figura 87 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,681$ ($u = 6,9$ V) e $\varphi = 0,691$ ($u = 7,0$ V)



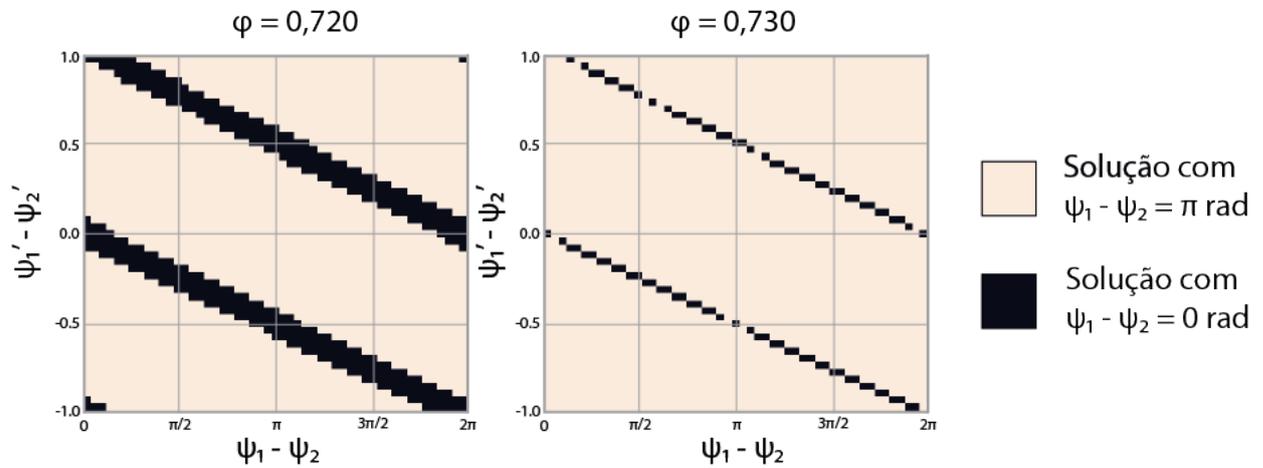
Fonte: Autor

Figura 88 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,701$ ($u = 7,1$ V) e $\varphi = 0,710$ ($u = 7,2$ V)



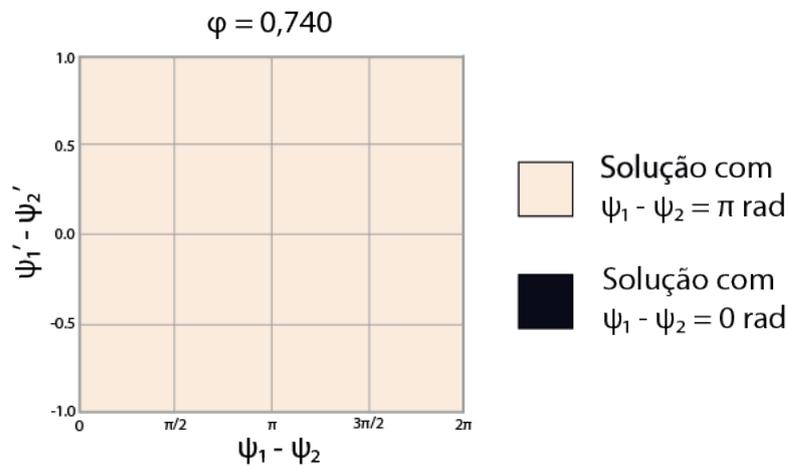
Fonte: Autor

Figura 89 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,720$ ($u = 7,3$ V) e $\varphi = 0,730$ ($u = 7,4$ V)



Fonte: Autor

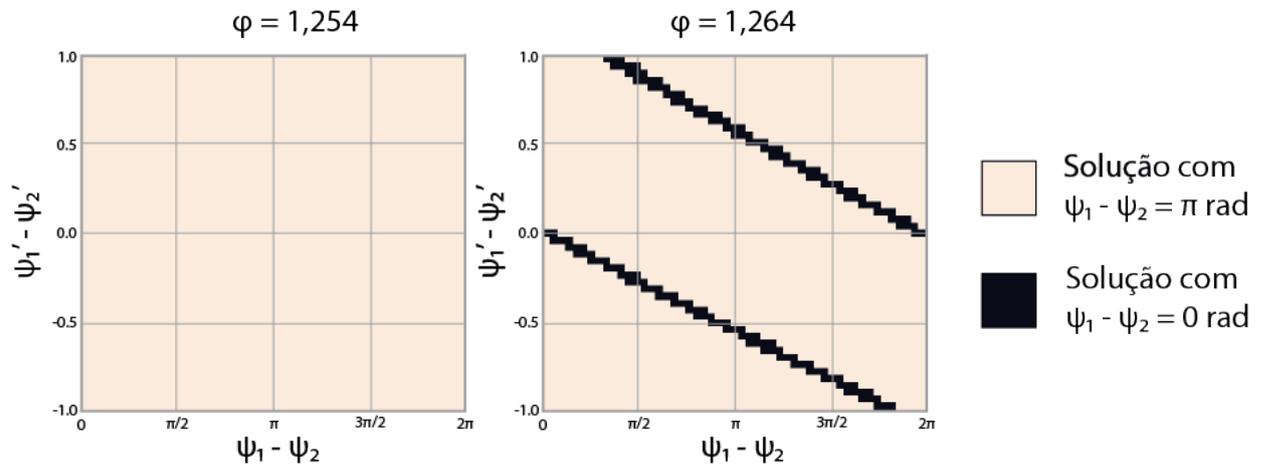
Figura 90 – Seção $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 0,740$ ($u=7,5$ V)



Fonte: Autor

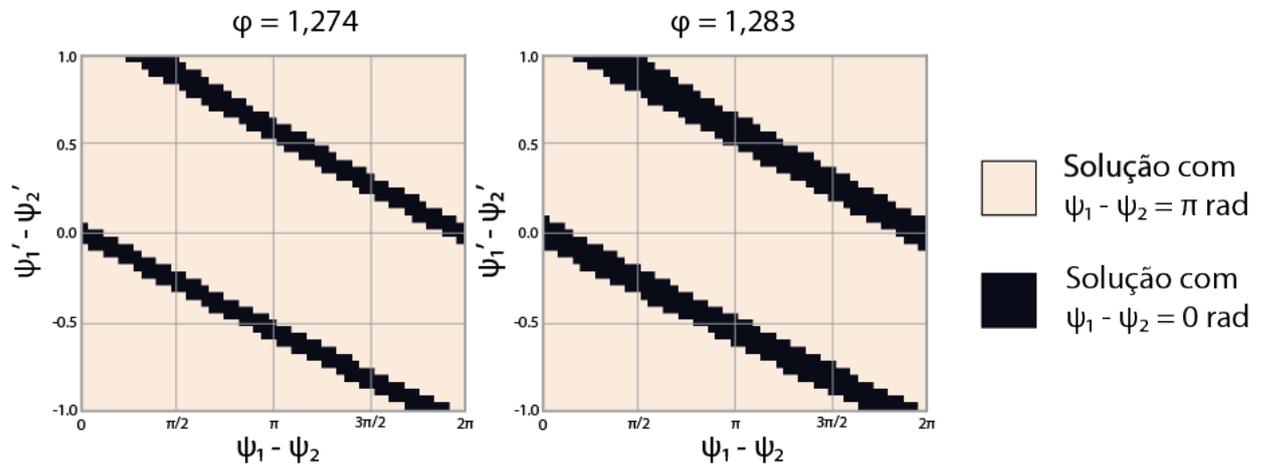
É possível ver nas figuras 86 à 90 que, cada vez que se adota uma tensão maior, uma fenda da solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$ aumenta de tamanho, diminuindo gradualmente o tamanho da região que converge para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$. A seguir, são apresentados outros valores de tensão maiores, onde é possível ver a fenda da solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ novamente surgindo e tomando mais espaço na seção analisada.

Figura 91 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,254$ ($u = 12,7$ V) e $\varphi = 1,264$ ($u = 12,8$ V)



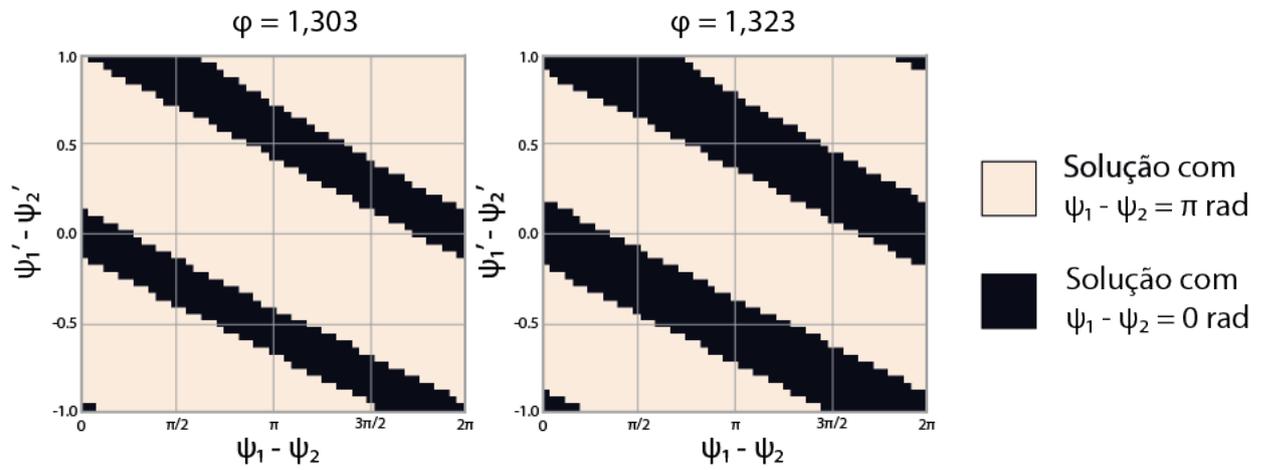
Fonte: Autor

Figura 92 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,274$ ($u = 12,9$ V) e $\varphi = 1,283$ ($u = 13,0$ V)



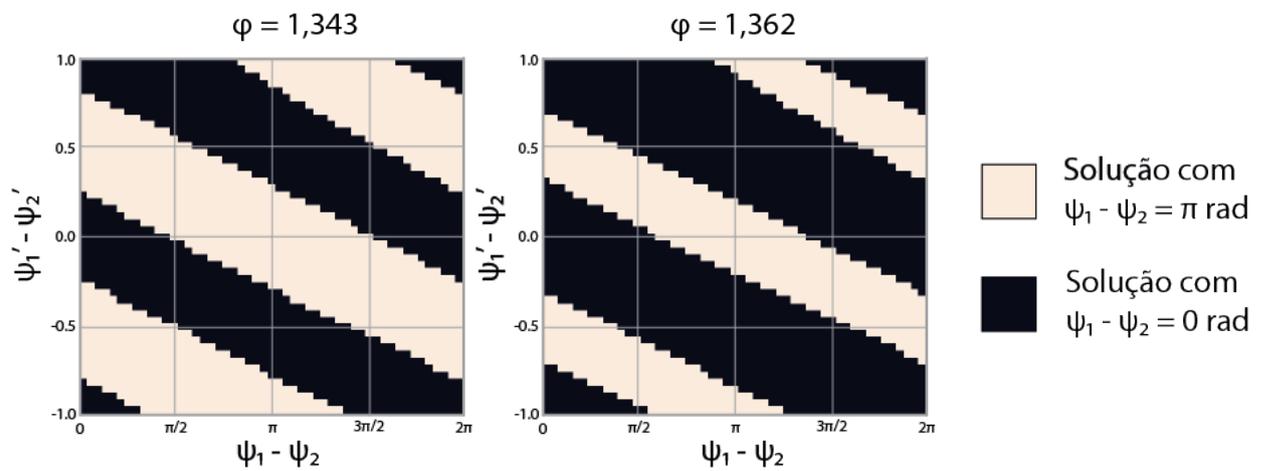
Fonte: Autor

Figura 93 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,303$ ($u = 13,2$ V) e $\varphi = 1,323$ ($u = 13,4$ V)



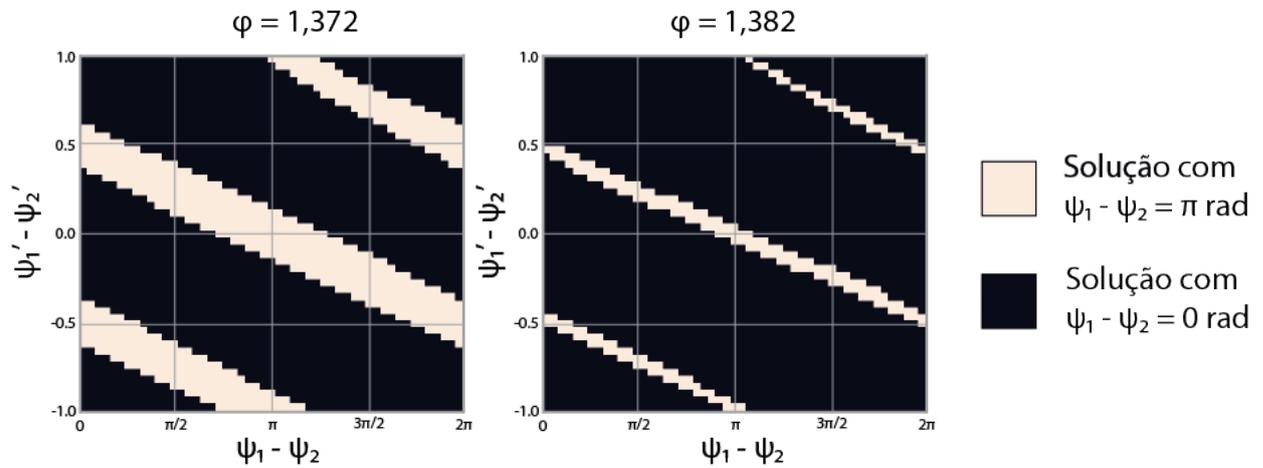
Fonte: Autor

Figura 94 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,343$ ($u = 13,6$ V) e $\varphi = 1,362$ ($u = 13,8$ V)



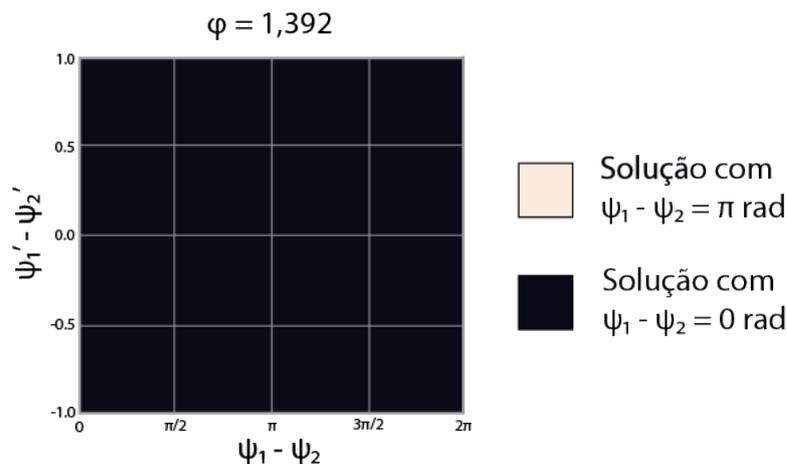
Fonte: Autor

Figura 95 – Seções $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,372$ ($u = 13,9$ V) e $\varphi = 1,382$ ($u = 14,0$ V)



Fonte: Autor

Figura 96 – Seção $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ do estudo de bacia de atração para $\varphi = 1,392$ ($u=14,1$ V)



Fonte: Autor

Nas figuras 91 à 96, é possível ver que, adotando uma tensão maior, resultados que convergem para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ aparecem nas seções, abrindo uma nova fenda e diminuindo a região que converge para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, quanto maior a voltagem no terminal dos motores.

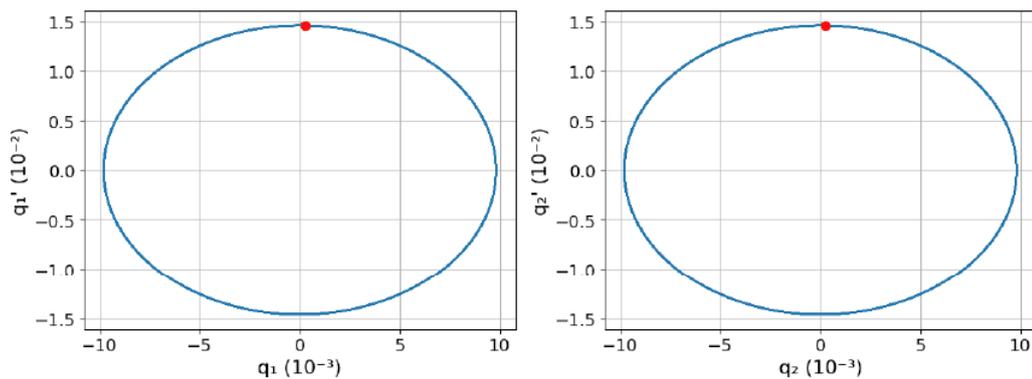
As figuras mostradas nesta seção provam não só que as soluções do sistema mudam de estabilidade dependendo da voltagem do motor, mas também que existem intervalos de voltagens em que, dependendo das variáveis iniciais escolhidas, o sistema pode convergir tanto para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$ quanto para a que possui a diferença igual a π .

5.4 Aplicação de Poincaré

Para realizar os estudos da estabilidade das soluções do sistema utilizando esta aplicação, são considerados os resultados obtidos pelo primeiro e segundo ensaio numérico deste sistema, verificando se, após $\tau = 4,00 \cdot 10^3$, o sistema convergiu para uma solução. Em ambos os ensaios numéricos, foi identificado, utilizando a FFT, que as variáveis ψ'_1 , ψ'_2 , F_1 e F_2 possuem frequências iguais ao dobro das variáveis q_1 , q'_1 , q_2 e q'_2 . Será considerado que a frequência característica do sistema, usada para a construção da aplicação de Poincaré, é a frequência em que as variáveis relacionadas ao movimento das fundações (q_1 , q'_1 , q_2 e q'_2) oscilam, dessa forma, as variáveis que possuem o dobro dessa frequência realizam duas oscilações por período do sistema.

A seguir, são apresentados os resultados do primeiro ensaio numérico no intervalo de tempo entre $\tau = 4,95 \cdot 10^3$ e $\tau = 5,00 \cdot 10^3$. Em azul, está a série temporal obtida pelo método de Runge-Kutta, em vermelho, os resultados obtidos após a aplicação de Poincaré.

Figura 97 – Aplicação de Poincaré nos planos de fase $q_1 \times q'_1$ e $q_2 \times q'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas

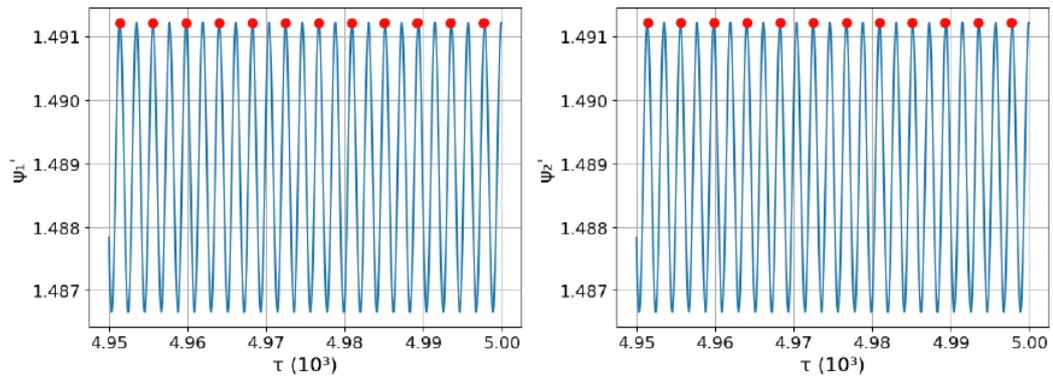


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 98 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times \psi'_1$ e $\tau \times \psi'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas

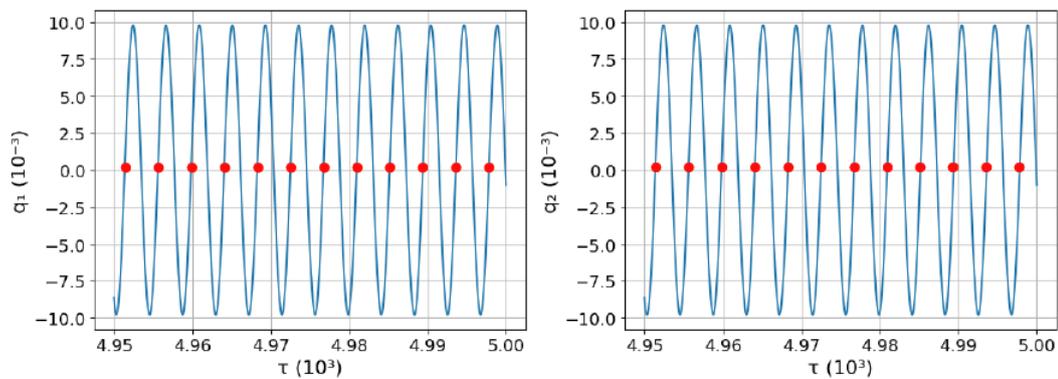


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 99 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q_1$ e $\tau \times q_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas

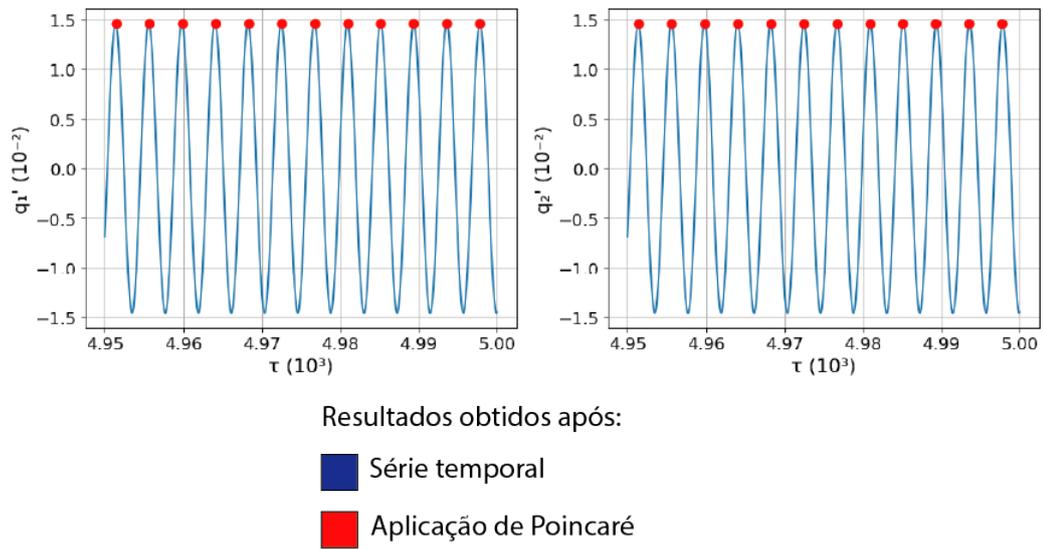


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

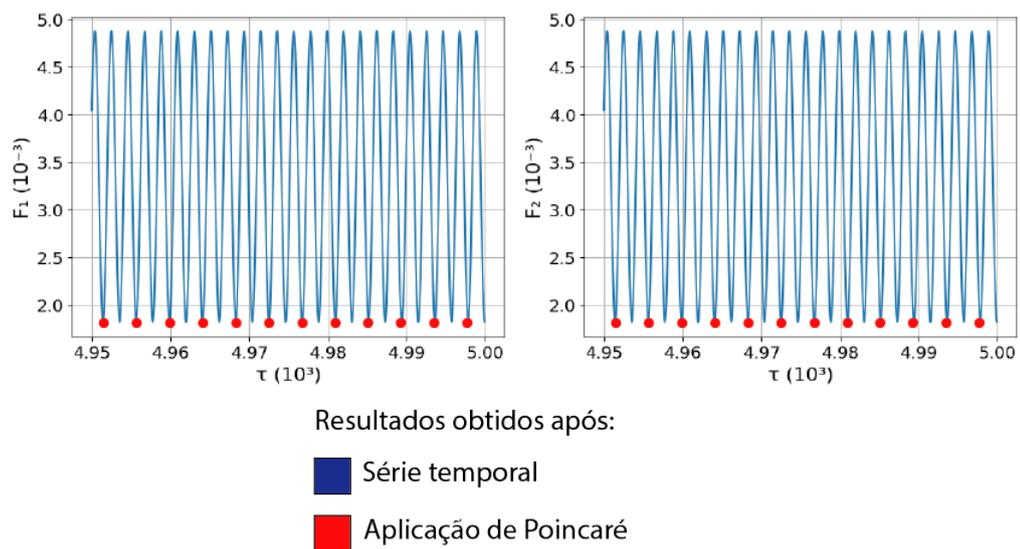
Fonte: Autor

Figura 100 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q'_1$ e $\tau \times q'_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas



Fonte: Autor

Figura 101 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times F_1$ e $\tau \times F_2$ para o primeiro experimento de fundações conectadas

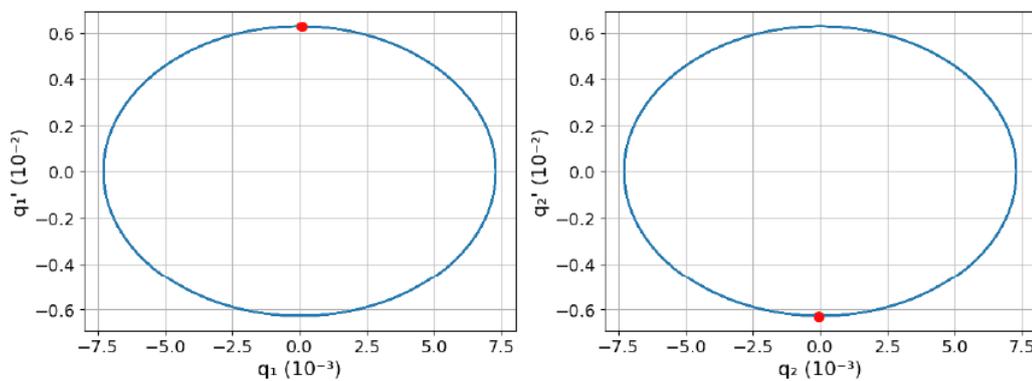


Fonte: Autor

É possível observar na figura 97 que o resultado em vermelho é projetado em um único ponto nos planos de fase, ademais, é mostrado nas figuras 98 até 101 como uma coleção de pontos discretos sobre uma reta nos gráficos, mantendo um valor constante das variáveis ao longo do tempo. Conclui-se que o sistema apresenta os mesmos resultados ao passar dos períodos neste intervalo, indicando a ocorrência de uma solução estável.

A seguir, são apresentados os resultados do segundo ensaio numérico no intervalo de tempo entre $\tau = 4,95 \cdot 10^3$ e $\tau = 5,00 \cdot 10^3$. Em azul, está a série temporal obtida pelo método de Runge-Kutta, em vermelho, os resultados obtidos após a aplicação de Poincaré.

Figura 102 – Aplicação de Poincaré nos planos de fase $q_1 \times q_1'$ e $q_2 \times q_2'$ para o segundo experimento de fundações conectadas

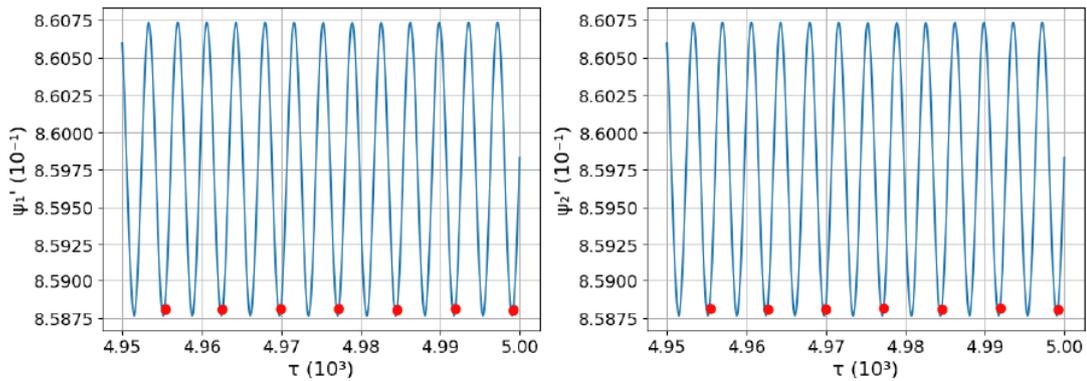


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 103 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times \psi'_1$ e $\tau \times \psi'_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas

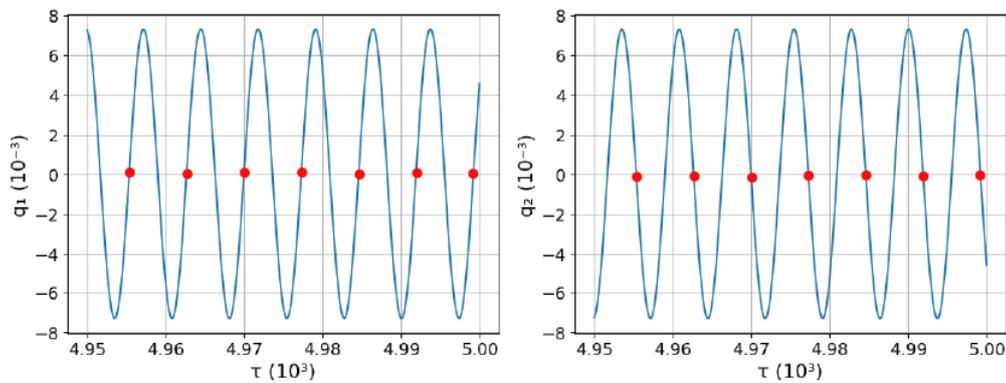


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 104 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q_1$ e $\tau \times q_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas

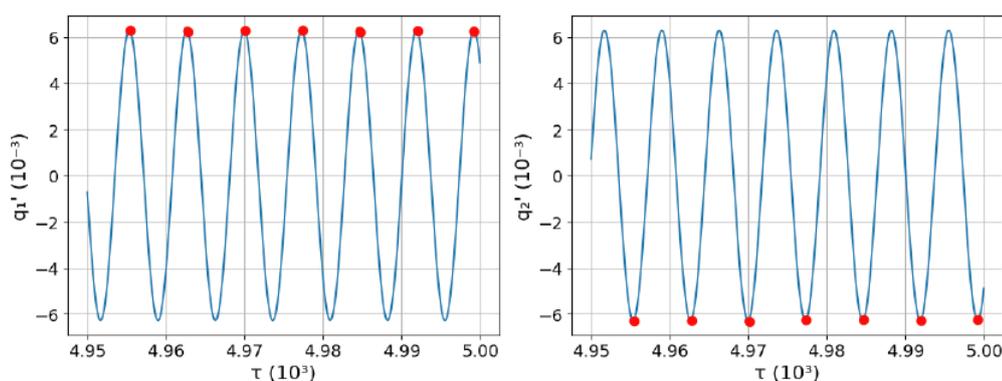


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 105 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times q_1'$ e $\tau \times q_2'$ para o segundo experimento de fundações conectadas

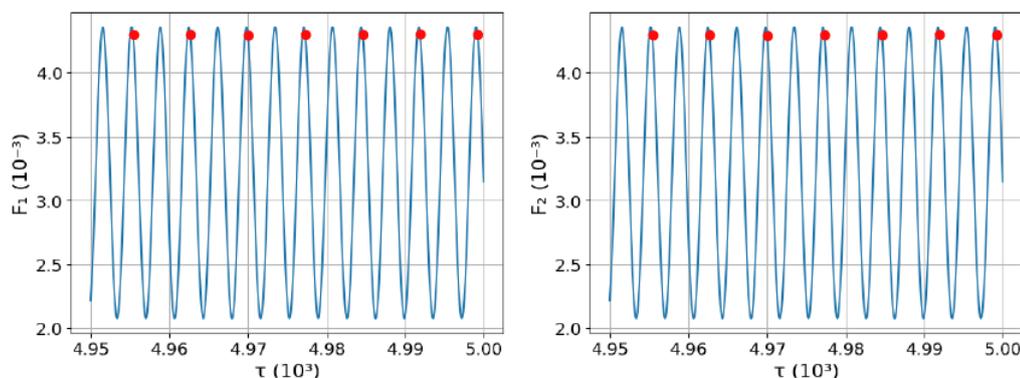


Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Figura 106 – Aplicação de Poincaré nos gráficos $\tau \times F_1$ e $\tau \times F_2$ para o segundo experimento de fundações conectadas



Resultados obtidos após:

- Série temporal
- Aplicação de Poincaré

Fonte: Autor

Assim como na análise anterior, o resultado em vermelho, nos planos de fase da figura 103, é projetado em um único ponto, e, nos gráficos das figuras 104 à 106 é mostrada como uma coleção de pontos sobre uma reta horizontal, desta forma, o sistema repete os mesmos valores das variáveis a cada período neste intervalo de tempo, mostrando que o sistema convergiu para uma solução estável.

Com base nestes resultados, é reafirmado que nos ensaios numéricos realizados anteriormente, o sistema converge para soluções estáveis, e que ocorre mudança na estabilidade dessas soluções a depender dos parâmetros e condições iniciais do sistema.

6 Conclusões

Neste trabalho, investigou-se a autossincronização resultante em um sistema dinâmico não ideal composto por uma fundação que sustenta dois motores elétricos de corrente contínua. A partir do método de Runge-Kutta, foram construídos gráficos das variáveis ao longo do tempo, obtendo os resultados das variáveis nas soluções, e analisando as frequências e amplitudes predominantes das variáveis. Foi observado que, para a solução que possui $\psi_1 - \psi_2$ constante igual a zero, as variáveis do sistema possuem uma única frequência e amplitude predominante, enquanto que, para a solução onde $\psi_1 - \psi_2$ permanece constante com o valor de π , o sistema possui o valor de suas variáveis constantes, exceto os próprios ângulos dos motores, mantendo o centro de massa do sistema na mesma posição horizontal sem haver movimento da fundação. Vale a pena destacar que, para a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, o torque dos rotores permanece nulo, o que não representa uma boa eficácia do motor. Efeitos de variações bruscas das variáveis ao buscar a solução do sistema podem ser compreendidos a partir do efeito Sommerfeld.

Variando os parâmetros eletromecânicos, construíram-se diagramas relacionados às variáveis de controle, que retomam os resultados obtidos por Nóbrega (1994) e permitem visualizar as condições iniciais que conduzem o sistema para cada uma das duas soluções. Nas proximidades das fronteiras das bacias de atração, foi observado que alguns valores obtidos divergiam dos resultados obtidos na pesquisa de Nóbrega, provavelmente este fenômeno deve ocorrer por truncamento ou arredondamento computacional que, em métodos iterativos, fazem um erro se propagar, entretanto, são poucos os pontos onde os resultados são diferentes de ambos os trabalhos, desta forma, esta pesquisa valida as respostas obtidas por Nóbrega.

Explorando o caso possivelmente caótico apontado por Nóbrega (1994), não foram identificados fenômenos próximos ao descrito para as condições apontadas pela pesquisa (de referência), mas foram observados fenômenos próximos ao descrito ao alterar $\psi_1 - \psi_2$ de $\frac{\pi}{2}$ para π nas condições indicadas. Neste caso próximo ao indicado, o sistema de uma fundação não convergia para uma solução do sistema após o tempo de $\tau = 5 \cdot 10^3$ como nos outros casos, mas sim permanecia vibrando sem período definido próximo da solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$. Ao explorar melhor este caso, foi verificado que o sistema converge após $\tau = 5,3 \cdot 10^4$ para a solução onde $\psi_1 - \psi_2 = 0$. Foram realizados ensaios numéricos com condições próximas à explorada, com variações mínimas de $\psi_1 - \psi_2$ inicial, sendo constatado que o sistema converge para a solução com $\psi_1 - \psi_2 = 0$; ademais foram obtidos gráficos de recorrência do período considerado em solução sendo confirmado que não existem evidências de fenômenos caóticos com estes parâmetros.

Este trabalho também investigou a autossincronização resultante em um sistema dinâmico não ideal composto por duas fundações conectadas, onde cada uma possui um motor elétrico de corrente contínua. A partir do método de Runge-Kutta, foram construídos gráficos das variáveis ao longo do tempo, obtendo os resultados das variáveis nas soluções, e analisando as frequências e amplitudes predominantes das variáveis. Neste sistema, observa-se que, para ambas as soluções do sistema, cada variável possui uma única frequência e amplitude predominante, sendo que a solução que possui $\psi_1 - \psi_2 = 0$ possui frequência do sistema e amplitudes das variáveis maiores do que a solução com $\psi_1 - \psi_2 = \pi$.

Para uma análise do espaço de parâmetros do sistema de duas fundações, foram variados os parâmetros para obter os planos do sistema. Com os resultados de cada ensaio numérico realizado para produzir os diagramas, foram calculadas as energias cinética, potencial, dissipada e provida pelos motores, observando-se o uso energético para cada equilíbrio e próximo das mudanças de soluções. Também foram realizados neste mesmo sistema diversos ensaios numéricos para se obter planos de fase $\psi_1 - \psi_2 \times \psi'_1 - \psi'_2$ para voltagens diferentes. A partir destes planos, pode-se observar que a voltagem fornecida aos motores influencia na busca de atratores do sistema, além de existirem voltagens onde o sistema pode buscar atratores diferentes a depender das condições iniciais.

Utilizando o método de Poincaré para o sistema de duas fundações, averigua-se que as soluções dinâmicas buscadas pela integração numérica são estáveis, ademais, foi constatado que a solução que possui $\psi_1 - \psi_2 = 0$ possui os pares de variáveis $(q_1; q_2)$, $(q'_1; q'_2)$, $(\psi'_1; \psi'_2)$ e $(F_1; F_2)$ oscilando com mesma fase, enquanto que a solução que possui $\psi_1 - \psi_2 = \pi$ possui os pares de variáveis $(\psi'_1; \psi'_2)$ e $(F_1; F_2)$ oscilando com mesma fase, enquanto que os pares $(q_1; q_2)$ e $(q'_1; q'_2)$, possuem uma defasagem de π .

Como sugestão para próximas pesquisas, é indicado o estudo dos modelos deste trabalho aplicando o método de Floquet, e aplicando carga mecânica nos motores, ademais, estudar modelo com três fundações conectadas, onde cada uma possui um motor não ideal conectado, onde existe a possibilidade que ocorra o fenômeno de localização neste caso. Estudar a variação dos parâmetros e condições iniciais deste sistema e como afeta as fundações e uso das energias é de importância para os estudos de soluções dinâmicas e os estudos de estruturas para apoiarem máquinas.

Referências

- ANDRONOV, A. A.; VITT, A. A.; KHAIKIN, S. E. Theory of oscillators: Adiwes international series in physics. Elsevier, 1966. Citado na página 40.
- ARAUJO, C. H. D. Controle de caos e dinâmica não linear. Projeto de iniciação científica, PIBIC/CNPq/INPE, 2006. Citado na página 45.
- BALTHAZAR, J. M.; FELIX, J. L. P.; BRASIL, R. M. L. R. F. Some comments on the numerical simulation of self-synchronization of four non-ideal exciters. *Applied mathematics and computation*, v. 164, n. 2, p. 615–625, 2005. Citado na página 22.
- BEYHAN, S. Runge-kutta model-based nonlinear observer for synchronization and control of chaotic systems. *ISA transactions*, v. 52, n. 4, p. 501–509, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 119.
- BLEKHMANN, I. I. The problem of synchronization of dynamical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 28, n. 2, p. 239–265, 1964. Citado na página 22.
- BLEKHMANN, I. I. et al. Self-synchronization and controlled synchronization: general definition and example design. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 58, n. 4-6, p. 367–384, 2002. Citado na página 22.
- BROCK, W. A.; HSIEH, D. A.; LEBARON, B. D. *Nonlinear dynamics, chaos, and instability: statistical theory and economic evidence*. [S.l.]: MIT press, 1991. Citado na página 50.
- CAMARGO, R. S.; FERREIRA, W. G. Algoritmos eficientes para correção de erros na análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas estruturais. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v. 9, n. 2, p. 1–25, 2012. Citado na página 121.
- CARTWRIGHT, J. H. E.; PIRO, O. The dynamics of runge-kutta methods. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 2, n. 03, p. 427–449, 1992. Citado na página 119.
- CARVALHO, E. C. *Vibrações não lineares e não planares e instabilidade dinâmica de barras esbeltas*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 45.
- CHEN, X.; LIU, J.; LI, L. Dynamics of the vibration system driven by three homodromy eccentric rotors using control synchronization. *Applied Sciences*, v. 11, n. 16, p. 76–91, 2021. Citado na página 23.
- DAI, H. et al. A comparison of classical runge-kutta and henon's methods for capturing chaos and chaotic transients in an aeroelastic system with freeplay nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, v. 81, p. 169–188, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 119.
- FANG, P.; HOU, Y.; NAN, Y. Synchronization of two homodromy rotors installed on a double vibro-body in a coupling vibration system. *Plos One*, v. 10, n. 5, p. 60–69, 2015. Citado na página 23.

- GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; PRADO, Z. J. G. N. Reduced order models for the nonlinear dynamic analysis of shells. *Procedia IUTAM*, Elsevier, v. 19, p. 118–125, 2016. Citado na página 47.
- GRYAZINA, E. N.; POLYAK, B. T. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited. *Automatica*, v. 42, n. 1, p. 13–26, 2006. Citado na página 41.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 41, 47 e 48.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. [S.l.]: Academic press, 2012. Citado na página 40.
- HOLT, R. G.; GAITAN, D. F. Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence. *Physical review letters*, v. 77, n. 18, p. 3791, 1996. Citado na página 41.
- HOU, Y.; FANG, P. Synchronization and stability of two unbalanced rotors with fast antirotation considering energy balance. *Mathematical problems in engineering*, p. 1–15, 2015. Citado na página 23.
- ILIUK, I. et al. Potential application in energy harvesting of intermodal energy exchange in a frame: Fem analysis. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 14, n. 08, p. 1–10, 2014. Citado na página 42.
- KOLEMEN, E.; KASDIN, N. J.; GURFIL, P. Multiple poincaré sections method for finding the quasiperiodic orbits of the restricted three body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 112, p. 47–74, 2012. Citado na página 47.
- KONONENKO, V. O. *Vibrating systems with a limited power supply*. [S.l.]: Iliffe, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- LOBOSCO, O. S.; DIAS, J. L. P. C. *Seleção e aplicação de motores elétricos*. [S.l.]: São Paulo: Mcgraw-Hill/Siemens, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- LÖFFELMANN, H.; KUČERA, T.; GRÖLLER, E. Poincaré section. *Mathematical Visualization: Algorithms, Applications and Numerics*, Springer Science & Business Media, p. 3–21, 1998. Citado na página 47.
- LÖFFELMANN, H.; KUČERA, T.; GRÖLLER, E. Visualizing poincaré maps together with the underlying flow. *Mathematical Visualization: Algorithms, Applications and Numerics*, p. 315–328, 1998. Citado na página 47.
- LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*. [S.l.]: Springer, 2004. Citado na página 41.
- MARWAN, N. et al. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *American Physical Society*, v. 66, n. 2, p. 1–8, 2002. Citado na página 50.
- MAZZILLI, C. E. N. et al. *Lições em Mecânica das Estruturas: dinâmica*. [S.l.]: Editora Blucher, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 121.

- MEHDI, S. A.; KAREEM, R. S. Using fourth-order runge-kutta method to solve lü chaotic system. *American Journal of Engineering Research*, v. 6, n. 1, p. 72–77, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 119.
- MENDES, B. A. P.; MAZZILLI, C. E. N.; RIBEIRO, E. A. R. Energy harvesting in a slender-rod model with modal asynchronicity. *Nonlinear Dynamics*, v. 99, p. 611–624, 2020. Citado na página 42.
- MENIN, R. C. G. et al. Algoritmos de conservação ou decréscimo da energia na análise dinâmica não-linear de estruturas. *XXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Porto-Portugal*, p. 1–17, 2007. Citado na página 42.
- NETO, A. P. C. *Considerações sobre o cálculo dinâmico de estruturas usando transformadas de fourier-aplicações a análise matricial de estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1991. Citado na página 121.
- NÓBREGA, P. G. B. *Auto-sincronização de motores não-ideais apoiados em estruturas elásticas*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1994. Citado 16 vezes nas páginas 6, 7, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 40, 54, 55, 68, 72, 74, 75 e 111.
- NTI AUDIO. *Transformação rápida de Fourier FFT*. 2022. Acesso em: 19 fev. 2023. Disponível em: <<https://www.nti-audio.com/pt/suporte/saber-como/transformacao-rapida-de-fourier-fft>>. Citado na página 121.
- PAN, F. et al. Theoretical study of synchronous behavior in a dual-pendulum-rotor system. *Shock and Vibration*, Hindawi, v. 2018, p. 1–14, 2018. Citado na página 23.
- PAZ, M.; COLE, J. D. Self-synchronization of two unbalanced rotors. *Journal of vibration and acoustics*, v. 114, n. 1, p. 37–41, 1992. Citado na página 22.
- PEREIRA, D. C. *Análise dinâmica por wavelets em um sistema com fricção seca e amortecimento*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, 2002. Citado na página 121.
- PIQUEIRA, J. R. C.; MONTEIRO, L. H. A.; FILHO, D. N. F. Bifurcation analysis for third-order phase-locked loops. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 5, p. 494–496, 2004. Citado na página 41.
- SALES, M. R. Dynamical aspects of hamiltonian systems: Chaos, stickiness, and recurrence plots. 2023. Citado na página 50.
- SAY, M. G.; TAYLOR, E. O. *Direct current machines*. [S.l.]: Pitman, 1986. Citado na página 26.
- SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese (Doutorado) — Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, 2009. Citado na página 42.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. Citado na página 40.

- SÖNMEZ, S.; AYASUN, S. Stability region in the parameter space of pi controller for a single-area load frequency control system with time delay. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 31, n. 1, p. 829–830, 2015. Citado na página 41.
- SOUZA, E. A. *Métodos iterativos para problemas não lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2015. Citado na página 45.
- SOUZA, E. A. de; ALVAREZ, G. B.; LOBAO, D. C. Comparação numérica entre métodos iterativos para problemas não lineares. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, p. 1–7, 2017. Citado na página 45.
- THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B.; TURNER, R. *Nonlinear dynamics and chaos*. [S.l.]: Computers in Physics - American Institute of Physics, 1990. v. 4. 562-563 p. Citado na página 40.
- VIANA, W. C. *Análise de dinâmica não linear e caracterização de caos: um estudo sobre um sistema unificado*. 1-102 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de curso (Bacharel)) — Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto, 2018. Citado na página 41.
- WEN, B. C. et al. Theory and techniques of vibrating machinery and their applications. *Science Press, Beijing*, v. 27, n. 3, p. 54–61, 2010. Citado na página 22.
- YILDIZ, B. S. et al. A novel chaotic runge kutta optimization algorithm for solving constrained engineering problems. *Journal of Computational Design and Engineering*, v. 9, n. 6, p. 2452–2465, 2022. Citado na página 119.
- ZHANG, X. L.; WEN, B. C.; ZHAO, C. Y. Synchronization of three non-identical coupled exciters with the same rotating directions in a far-resonant vibrating system. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 9, p. 2300–2317, 2013. Citado na página 23.
- ZHANG, X. L.; WEN, B. C.; ZHAO, C. Y. Experimental investigation on synchronization of three co-rotating non-identical coupled exciters driven by three motors. *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 13, p. 2898–2908, 2014. Citado na página 23.
- ZHAO, C. Y.; WEN, B. C.; ZHANG, X. L. Synchronization of the four identical unbalanced rotors in a vibrating system of plane motion. *Science China Technological Sciences*, v. 53, p. 405–422, 2010. Citado na página 22.

APÊNDICE A – Equação da tensão pelo tempo

A equação da tensão ao longo do tempo deve ser crescente linear antes de $t_a - \Delta$ e constante após $t_a + \Delta$, como mostrado a seguir

$$u = \begin{cases} \frac{u_{max} - u_i}{t_a} t + u_i & \text{para } t \leq t_a - \Delta \\ u_{max} & \text{para } t \geq t_a + \Delta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A equação de transição entre crescente linear e constante será considerada polinomial cúbica. Para encontrar esta equação, é necessário igualar os valores da função e da derivada nas extremidades do intervalo. A escolha da polinomial cúbica foi feita visando a simplificar a formulação para encontrar as constantes da equação.

$$\begin{cases} u(t_a - \Delta) = \frac{u_{max} - u_i}{t_a} (t_a - \Delta) + u_i \\ \dot{u}(t_a - \Delta) = \frac{u_{max} - u_i}{t_a} \\ u(t_a + \Delta) = u_{max} \\ \dot{u}(t_a + \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$u(t) = C_1(t - t_a - \Delta)^3 + C_2(t - t_a - \Delta)^2 + C_3(t - t_a - \Delta) + C_4 \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{u}(t) = 3C_1(t - t_a - \Delta)^2 + 2C_2(t - t_a - \Delta) + C_3 \quad (\text{A.4})$$

Com os valores da extremidade à direita é possível obter diretamente duas constantes:

$$u(t_a + \Delta) = C_4 = u_{max} \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{u}(t_a + \Delta) = C_3 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Com os valores da extremidade à esquerda se obtêm as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_a - \Delta) &= 3C_1(-2\Delta)^2 + 2C_2(-2\Delta) = \frac{u_{max} - u_i}{t_a} \\ 3C_1\Delta - C_2 &= \frac{u_{max} - u_i}{4\Delta t_a} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
 u(t_a - \Delta) &= C_1(-2\Delta)^3 + C_2(-2\Delta)^2 + u_{max} = \frac{u_{max} - u_i}{t_a}(t_a - \Delta) + u_i \\
 -8C_1\Delta^3 + 4C_2\Delta^2 &= (u_{max} - u_i) \left(\frac{t_a - \Delta}{t_a} - 1 \right) \\
 4\Delta^2(-2C_1\Delta + C_2) &= -(u_{max} - u_i) \frac{\Delta}{t_a} \\
 -2C_1\Delta + C_2 &= -\frac{u_{max} - u_i}{4\Delta t_a} \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

A partir das Eqs. (A.7) e (A.8) é possível determinar as últimas constantes:

$$C_1 = 0 \tag{A.9}$$

$$C_2 = -\frac{u_{max} - u_i}{4\Delta t_a} \tag{A.10}$$

Desta forma, obtemos a equação de transição da tensão:

$$u = \begin{cases} \frac{u_{max} - u_i}{t_a} t + u_i & \text{para } t \leq t_a - \Delta \\ u_{max} - \frac{u_{max} - u_i}{4\Delta t_a} (t - t_a - \Delta)^2 & \text{para } t_a - \Delta \leq t \leq t_a + \Delta \\ u_{max} & \text{para } t \geq t_a + \Delta \end{cases} \tag{A.11}$$

APÊNDICE B – Método Runge-Kutta

Métodos numéricos de integração são muito importantes para sistemas de equações diferenciais que não possuem solução analítica conhecida. Os pesquisadores Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta criaram uma família de métodos de integração, para os quais se pode escolher um dos métodos (ordem) com boa precisão, mas que não gere um custo computacional alto.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é muito utilizado hoje em dia devido à sua precisão e rapidez. Cartwright e Piro (1992), Mazzilli et al. (2016) e Yildiz et al. (2022) utilizaram este método para encontrar a trajetória do sistema dinâmico que estudaram e Beyhan (2013), Dai et al. (2015) e Mehdi e Kareem (2017) o utilizaram para estudar trajetórias de sistemas que possuem efeitos caóticos, mostrando a relevância que esta ferramenta possui. Este é o método utilizado nesta pesquisa para se obter os valores numéricos das variáveis ao longo do tempo.

O método não calcula o resultado da trajetória de forma contínua, mas em passos, onde n é o enésimo passo da integração numérica. É estimado o resultado do vetor das variáveis \mathbf{y}_{n+1} no tempo t_{n+1} com base no vetor \mathbf{y}_n e sua derivada no tempo t_n , onde δt é a diferença entre t_n e t_{n+1} , comumente chamada de passo da integração.

$$\mathbf{k}_1 = \delta t \mathbf{y}'_n(t_n; \mathbf{y}_n) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{k}_2 = \delta t \mathbf{y}'_n\left(t_n + \frac{1}{2}\delta t; \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{k}_3 = \delta t \mathbf{y}'_n\left(t_n + \frac{1}{2}\delta t; \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{k}_4 = \delta t \mathbf{y}'_n(t_n + \delta t; \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3) \quad (\text{B.4})$$

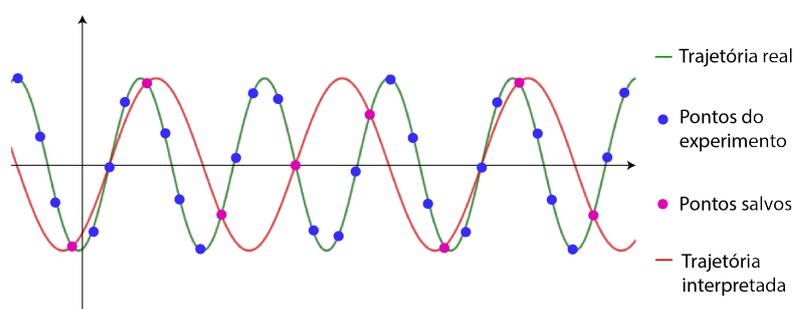
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \mathbf{O}_n(h^5) \quad (\text{B.5})$$

Os vetores \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 e \mathbf{k}_4 são temporários e somente utilizados para a integração numérica, enquanto o vetor $\mathbf{O}_n(\delta t^5)$ é o vetor dos desvios da integração numérica deste passo. Ao utilizar um passo pequeno como $\delta t = 10^{-2}$, o desvio fica irrelevante (na ordem de 10^{-10}).

O programa criado em linguagem Python para obter a trajetória das variáveis possui como entradas o vetor inicial \mathbf{y}_0 , que contém as condições iniciais do sistema, o valor dos parâmetros e o vetor \mathbf{y}'_n das derivadas das variáveis. Os vetores \mathbf{y}_n e \mathbf{y}'_n nesta pesquisa são respectivamente as Eqs. (2.28) e (2.29) para o sistema de fundação única e as Eqs. (2.55) e (2.56) para o sistema de fundações conectadas.

O programa criado é baseado em uma iteração de 0 a n, onde cada iteração utiliza os vetores \mathbf{y}_n e \mathbf{y}'_n para obter o vetor \mathbf{y}_{n+1} e guardar esta informação em um bloco de notas, dessa forma, tendo salvo todos os vetores de 0 a n. Caso tenha muitos dados para guardar, é possível salvar menos vetores para se realizar a análise sem perda de informação, contanto que a diferença do tempo dos vetores salvos continue bem menor do que o período de oscilação das variáveis analisadas. Caso a diferença do tempo entre os vetores salvos fique próxima do período da oscilação, podem ocorrer erros de interpretação dos dados, como exemplo considerar que a frequência da oscilação é menor do que a real, como mostrado na figura 107:

Figura 107 – Imagem exemplificativa de perda de informação ao salvar dados



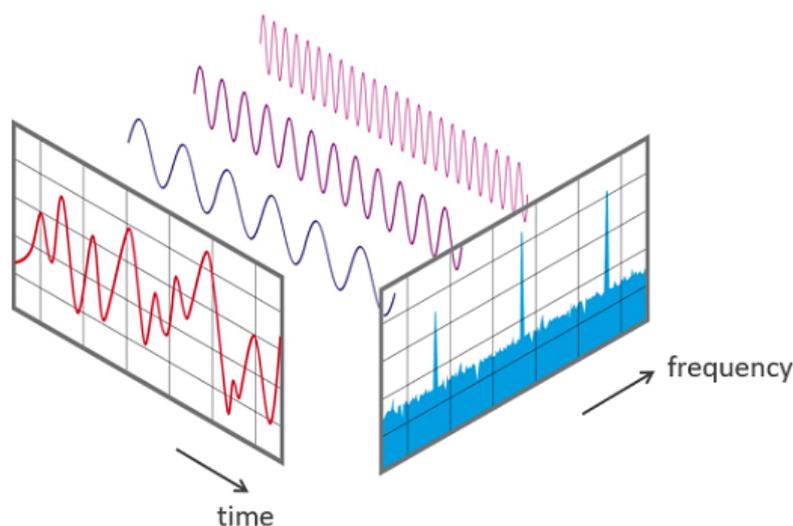
Fonte: autor

APÊNDICE C – Transformada rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier (em inglês, *Fast Fourier Transform* FFT) é um algoritmo muito versátil em estudos de dinâmica, por permitir obter o espectro frequência \times amplitude de um intervalo dos resultados obtidos, e permite avaliar se as variáveis do sistema estão oscilando em frequências específicas e se possuem frequências predominantes, além de identificar a amplitude com que as variáveis oscilam.

Neto (1991), Pereira (2002), Camargo e Ferreira (2012), Mazzilli et al. (2016) e NTi Audio (2022) utilizaram esta transformação para analisar a dinâmica de seus estudos, convertendo o histórico da variável em componentes espectrais individuais e, assim, fornecendo informações de frequência sobre o sinal. Reforça-se que se deve analisar todo o espectro de frequência obtido por este método, não somente a frequência predominante, pois outras frequências podem ser indícios de fenômenos importantes que ocorrem no modelo. Além disso, para melhor análise deste método, é importante que o passo da integração seja pequeno e constante para se obter melhor definição do espectro de frequências das variáveis. A ideia desta transformação é demonstrada com um exemplo ilustrativo na figura 108. Ao longo do intervalo de tempo, o sinal contém três frequências predominantes.

Figura 108 – Imagem exemplificativa da transformação de variáveis da FFT



Fonte: NTi Audio (2022)

A FFT é um algoritmo otimizado para calcular a Transformada Discreta de Fourier (em inglês, *Discrete Fourier Transform* DFT) de uma sequência de valores de uma certa variável. A DFT é uma transformação matemática que converte uma sequência de números complexos ordenados pelo tempo em outra sequência de números complexos, em que cada novo número representa a amplitude de cada frequência da sequência original.

A DFT de uma sequência $y(j)$ com n pontos é definida como:

$$\nu(k) = \sum_{j=0}^{n-1} y(j) e^{-i \frac{2\pi k j}{n}} \quad (\text{C.1})$$

em que $\nu(k)$ é a k -ésima componente de frequência da DFT e i é a unidade imaginária. A fórmula acima é calculada para todos os valores de k de 0 a $n - 1$.

A complexidade computacional de calcular a DFT utilizando a fórmula acima é $O(n^2)$, o que não é eficiente para valores grandes de n . Para reduzir a complexidade computacional, o algoritmo FFT foi desenvolvido.

A FFT é baseada na observação de que a DFT pode ser calculada eficientemente se a sequência for fatorizada em sequências menores e as DFTs dessas sequências menores forem combinadas. O algoritmo FFT divide a sequência original em duas sequências, que podem ser novamente divididas até que cada sequência possua um número, dessa forma, calculam-se as DFTs das sequências de um número. Estes resultados podem ser recombinados para obter a DFT da sequência original.

O algoritmo FFT utiliza uma estratégia de decomposição e recombinação para calcular eficientemente a DFT de uma sequência. A FFT pode ser calculada em dois passos:

1. Decomposição: A sequência de n pontos é dividida em duas sequências, $y_{par}(j)$ e $y_{impar}(j)$, definidas como:

$$y_{par}(j) = y(2j) \quad (\text{C.2})$$

$$y_{impar}(j) = y(2j + 1) \quad (\text{C.3})$$

2. Recombinação: As DFTs das duas sequências são combinadas para obter a DFT da sequência original:

$$\nu(k) = \nu_{impar}(k) + \nu_{par}(k) e^{-j \frac{2\pi k}{n}} \quad (\text{C.4})$$

A fórmula acima é repetida recursivamente até que o tamanho das sequências se torne 1, momento em que a DFT pode ser facilmente calculada.

A complexidade computacional da FFT é $O(n \log n)$, o que é muito mais eficiente do que a complexidade $O(n^2)$ da computação direta da DFT.

Na programação deste método em linguagem Python, foi utilizada a função $\text{FFT}(\mathbf{Y})$ do módulo “`scipy.fftpack`”, que executa o algoritmo da FFT explicado: recebe, como entrada, uma lista \mathbf{Y} de valores $y(j)$ de certa variável ao longo do tempo e retorna uma lista com as amplitudes $\nu(k)$ ao longo da frequência. Também são importadas as séries temporais obtidas pelo método de Runge-Kutta, com recorte específico no tempo em que se deseja analisar as frequências das variáveis, após ou durante a convergência do sistema. Para cada variável do sistema, é usada a função $\text{FFT}(\mathbf{Y})$ para se obter as amplitudes de cada frequência.

O algoritmo da FFT, que utiliza a DFT, retorna números complexos. Neste trabalho, a lista \mathbf{Y} de valores analisadas pertencem aos reais, resultando com que a lista retornada pela função $\text{FFT}(\mathbf{Y})$ também pertença aos reais, com valores de amplitudes nas frequências positivas e negativas espelhados como uma função par. Dado que não faz sentido físico falar de frequências negativas, é feita uma correção na lista dos valores $\nu(k)$, desconsiderando os valores obtidos nas frequências negativas e multiplicando por dois os valores nas frequências positivas.

Para calcular as frequências das amplitudes retornadas pela função $\text{FFT}(\mathbf{Y})$, é feita uma lista que começa em 0 e termina em T , onde T é calculado pela quantidade de pontos da lista original dividida pela variação do tempo da lista original. A quantidade de números desta lista é igual à quantidade de pontos da lista original dividida por dois e arredondada para cima, não sendo igual à quantidade de pontos da lista original por conta de se ignorarem os valores presentes em frequências negativas.

Com as listas de amplitudes e de frequências obtidas, é possível produzir um gráfico com a ajuda da biblioteca “`matplotlib.pyplot`”, pois a amplitude $\nu(k)$ na posição k da lista possui a frequência da posição k da lista de frequências. O programa em linguagem Python produz gráficos da amplitude em relação à frequência de cada variável do sistema analisado, em seguida, salva os valores da amplitude e da frequência em um arquivo texto para cada variável.