

VITOR FAUSTINO PEREIRA



**A TRANSFORMADA DE FOURIER
NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE
SÃO PAULO PARA A OBTENÇÃO DO TÍ-
TULO DE MESTRE EM ENGENHARIA.

VITOR FAUSTINO PEREIRA

ENGENHEIRO CIVIL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA (1978)

**A TRANSFORMADA DE FOURIER
NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE
SÃO PAULO PARA A OBTENÇÃO DO TÍ
TULO DE MESTRE EM ENGENHARIA.

ORIENTADOR: PROF. Dr. DÉCIO LEAL DE ZAGOTTIS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES
E.P.U.S.P.

SÃO PAULO

1981

A minha esposa, Mariza
Aos meus pais, Raul e Lúcia

AGRADECIMENTOS

À Fundação Universidade Estadual de Londrina, sem cujo apoio não teria sido possível a realização deste trabalho.

Ao Professor José Augusto de Queiróz, pelos primeiros ensinamentos de Mecânica das Estruturas e pelo incentivo recebido nestes últimos anos.

A todos os colegas de turma do curso de graduação, que muito me animaram a seguir este caminho.

Ao Professor Décio Leal de Zagottis, pela orientação recebida.

Às Senhoritas Deusely Ferreira Rocha e Taeko Margarete Tanji, pela dedicação com que realizaram o serviço de datilografia.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos principais um estudo pormenorizado da transformada de Fourier e suas propriedades, bem como suas aplicações à análise da resposta de estruturas de comportamento linear, com um grau de liberdade, sujeitas a um carregamento dinâmico.

O emprego da transformada de Fourier na dinâmica das estruturas passou a apresentar interesse prático por causa do algoritmo computacional da transformada rápida de Fourier, proposto por Cooley e Tukey, em 1965, para a resolução de problemas numéricos.

Na primeira parte deste trabalho, que é composta de onze capítulos, é apresentado um estudo da transformada de Fourier e de suas propriedades, para os casos analíticos e numéricos, separadamente.

A aplicação da mesma na dinâmica das estruturas é feita na segunda parte, composta de quatro capítulos, para carregamentos contínuos e discretizados, utilizando-se as propriedades demonstradas na primeira parte. São considerados também, separadamente, os casos de carregamento determinístico e aleatório.

As situações em que o carregamento é discretizado são as que apresentam maiores interesses práticos e, por isto, vêm acompanhadas de exemplos. Um deles é constituído por um acelerograma de terremoto, fornecido pela KWU (Kraftwerk Union), e utilizado como dado de projeto nas usinas nucleares que ora se constroem no Brasil.

ABSTRACT

The main objective of this work is a detailed study of the Fourier transform and its properties, as well as of its applications to response analysis of one degree of freedom structures, with linear behaviour, subjected to a dynamic loading.

The use of Fourier transform in the dynamics of structures began to be of practical importance with the proposal of the computational algorithm of fast Fourier transform, by Cooley and Tukey, in 1965, for the resolution of numerical problems.

In the first part of this work, which is composed of eleven chapters, is shown a study of the Fourier transform and its properties, for the analytic and numerical cases, separately.

The application of it in the dynamics of structures is made in the second part, composed of four chapters, for continuous and discretized loading, using the properties demonstrated in the first part. The cases of deterministic and random loading are also considered, separately.

The situations in which the loading is discretized present more practical importance and, for this reason, examples are added to them. One of them is constituted of an earthquake acelerogram, given by KWU (Kraftwerk Union), and used in the design of the nuclear power plants which are now being built in Brazil.

Í N D I C E

1.² PARTE

| | |
|--------------------------------------------------------------|------|
| 1 - A FUNÇÃO DELTA | |
| 1.1 - Funções fortemente concentradas | 1.1 |
| 1.2 - A função delta de Dirac | 1.2 |
| 1.3 - Propriedades | 1.3 |
| 1.3.1 - Filtragem | 1.3 |
| 1.3.2 - Deslocamento | 1.3 |
| 1.3.3 - Escalonamento | 1.3 |
| 1.3.4 - Produto por funções originárias | 1.4 |
| 1.4 - Representação da função delta | 1.4 |
| 1.5 - Limites generalizados | 1.4 |
| 2 - A TRANSFORMADA DE FOURIER | |
| 2.1 - Definição | 2.1 |
| 2.2 - Representação | 2.2 |
| 2.3 - Outras definições da transformada de Fourier | 2.3 |
| 2.4 - Demonstração da fórmula da inversão | 2.4 |
| 2.5 - Condições de existência | 2.5 |
| 2.6 - Fórmula alternativa da inversão | 2.5 |
| 2.7 - Transformada de Fourier de um pulso retangular | 2.5 |
| 2.8 - Transformada de Fourier de uma exponencial decrescente | 2.6 |
| 2.9 - Transformada de Fourier de um impulso | 2.8 |
| 2.10 - Transformada de Fourier de uma constante | 2.9 |
| 2.11 - Transformada de Fourier de uma função harmônica | 2.9 |
| 3 - PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER | |
| 3.1 - Linearidade | 3.1 |
| 3.2 - Escalonamento | 3.1 |
| 3.3 - Deslocamento | 3.3 |
| 3.4 - Diferenciação | 3.6 |
| 3.5 - Funções complexas no tempo | 3.7 |
| 3.6 - Áreas sob as curvas | 3.10 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------|------|
| 4 - FUNÇÕES PERIÓDICAS | |
| 4.1 - Séries de Fourier no domínio do tempo | 4.1 |
| 4.2 - Expansão do período acrescentando-se zeros | 4.5 |
| 4.3 - Da série de Fourier a transformada de Fourier | 4.8 |
| 4.4 - Transformada de Fourier de uma função periódica | 4.9 |
| 4.5 - Funções periódicas no domínio da frequência | 4.11 |
| 4.6 - Transformada de Fourier de uma série de impulsos | 4.13 |
| 5 - CONVOLUÇÃO E CORRELAÇÃO | |
| 5.1 - Convolução | 5.1 |
| 5.2 - Intervalo de duração e limites de integração | 5.3 |
| 5.3 - Convolução envolvendo funções delta | 5.7 |
| 5.4 - Convolução envolvendo funções periódicas | 5.9 |
| 5.5 - Teorema da convolução | 5.10 |
| 5.6 - Correlação | 5.13 |
| 5.7 - Intervalo de duração e limites de integração | 5.15 |
| 5.8 - Correlação envolvendo funções periódicas | 5.15 |
| 5.9 - Teorema da correlação | 5.16 |
| 5.10 - Algumas propriedades das funções de convolução e de correlação | 5.19 |
| 6 - TRUNCAMENTO E DISCRETIZAÇÃO DE FUNÇÕES | |
| 6.1 - Truncamento de uma função periódica em um intervalo finito | 6.2 |
| 6.2 - Transformada de Fourier de uma função harmônica truncada | 6.6 |
| 6.3 - Discretização no domínio do tempo | 6.8 |
| 6.4 - Discretização no domínio da frequência | 6.12 |
| 6.5 - Pontos de descontinuidade | 6.15 |
| 6.6 - Conclusões | 6.17 |
| 7 - A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER | |
| 7.1 - Transformada discreta de uma função de duração finita | 7.1 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|------|
| 7.2 - Transformada discreta inversa de Fourier de uma função de banda finita | 7.5 |
| 7.3 - Transformada discreta de uma função periódica | 7.8 |
| 7.4 - O par de transformadas discretas | 7.9 |
| 7.5 - Periodicidade das sequências | 7.13 |
| 7.6 - Interpolação no domínio da frequência | 7.14 |
| 7.7 - Coeficientes de Fourier de funções periódicas | 7.15 |
| 7.8 - Notação matricial | 7.17 |
| 7.9 - Fluxograma de cálculo para a transformada discreta de Fourier | 7.19 |
| | |
| 8 - PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER | |
| 8.1 - Linearidade | 8.1 |
| 8.2 - Deslocamento no tempo | 8.1 |
| 8.3 - Deslocamento na frequência | 8.3 |
| 8.4 - Fórmula alternativa da inversão | 8.3 |
| 8.5 - Sequências complexas no tempo | 8.4 |
| 8.6 - Áreas sob as curvas | 8.6 |
| | |
| 9 - A TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER | |
| 9.1 - Fundamentos do algoritmo | 9.1 |
| 9.2 - Desenvolvimento teórico | 9.2 |
| 9.3 - Exemplos de aplicação | 9.5 |
| 9.4 - Reordenação dos dados | 9.9 |
| 9.4.1 - O contador binário revertido | 9.11 |
| 9.4.2 - Fluxograma para reordenação dos dados | 9.12 |
| 9.5 - Esquema de combinações | 9.12 |
| 9.6 - Fluxograma | 9.19 |
| 9.7 - Comentários | 9.22 |
| | |
| 10 - APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER | |
| 10.1 - Procedimentos | 10.1 |
| 10.1.1 - Pontos de descontinuidade | 10.1 |
| 10.1.2 - Duração das sequências | 10.2 |
| 10.1.3 - Periodicidade das sequências | 10.2 |
| 10.1.4 - Transformada inversa | 10.4 |
| 10.1.5 - Interpolação no domínio da frequência | 10.5 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 10.1.6 - Coeficientes de Fourier de funções periódicas | 10.7 |
| 10.2 - Exponencial decrescente | 10.7 |
| 10.2.1 - Transformada de uma sequência com 16 termos | 10.8 |
| 10.2.2 - Transformada discreta inversa de uma sequência com 16 termos | 10.10 |
| 10.2.3 - Interpolação no domínio da frequência acrescentando-se zeros | 10.12 |
| 10.2.4 - Interpolação no domínio da frequência repetindo-se a sequência | 10.13 |
| 10.2.5 - Transformada de uma sequência com 32 termos | 10.15 |
| 10.2.6 - Transformada de sequências com 64 e 128 termos | 10.15 |
| 10.2.7 - Comparação dos resultados obtidos | 10.19 |
| 10.3 - Coeficientes de Fourier de um pulso retangular periódico | 10.20 |
| 10.4 - Transformada discreta de uma cossenóide truncada | 10.21 |
| 11 - CONVOLUÇÃO E CORRELAÇÃO DISCRETAS | |
| 11.1 - Convolução discreta de sequências de duração finita | 11.1 |
| 11.2 - Correlação discreta de sequências de duração finita | 11.6 |
| 11.3 - Exemplo de aplicação | 11.10 |
| 11.4 - Convolução discreta envolvendo uma função periódica | 11.12 |
| 11.5 - Correlação discreta envolvendo duas funções periódicas | 11.14 |
| 11.6 - Teoremas da convolução e da correlação discreta | 11.16 |
| 11.7 - Algumas propriedades da convolução e da correlação discreta. | 11.19 |
| 11.8 - Convolução e correlação discreta de sequências finitas via domínio da frequência | 11.20 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 11.9 - Exemplos de aplicação | 11.27 |
| 11.10 - Correlação discreta, via domínio da frequência, entre duas sequências <u>pe</u> riódicas | 11.30 |
| 11.11 - Convolução discreta, via domínio da frequência, envolvendo uma sequência <u>pe</u> riódica | 11.30 |
| 11.12 - Conclusões | 11.32 |

2.^a PARTE

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 12 - ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A UM CARREGAMENTO CONTÍNUO E DETERMINÍSTICO | |
| 12.1 - Sistemas lineares | 12.1 |
| 12.2 - Cálculo da resposta pela equação <u>dife</u> rencial | 12.5 |
| 12.3 - Cálculo da resposta pela integral de Duhamell | 12.5 |
| 12.3.1 - Função de resposta a um <u>im</u> pulso unitário | 12.5 |
| 12.3.2 - Integral de Duhamell | 12.7 |
| 12.4 - Cálculo da resposta no domínio da <u>fre</u> quência | 12.10 |
| 12.4.1 - Função de transferência | 12.11 |
| 12.5 - Outros tipos de excitação e resposta | 12.18 |
| 12.6 - Dimensões | 12.20 |
| 13 - ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A UM CARREGAMENTO CONTÍNUO E ALEATÓRIO | |
| 13.1 - Processos aleatórios | 13.1 |
| 13.1.1 - Definição | 13.1 |
| 13.1.2 - Propriedades estatísticas ao longo das amostras | 13.1 |
| 13.1.3 - Propriedades estatísticas ao longo do tempo | 13.2 |
| 13.1.4 - Processos aleatórios <u>estacio</u> nários | 13.4 |
| 13.1.5 - Processos <u>aleat</u> órios <u>estacio</u> nários e <u>erg</u> ódicos | 13.4 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 13.2 - Autocorrelação média de uma função de um processo aleatório estacionário e ergódico | 13.5 |
| 13.2.1 - Definição | 13.6 |
| 13.2.2 - Propriedade | 13.7 |
| 13.3 - Espectro de Fourier | 13.8 |
| 13.3.1 - Definição | 13.8 |
| 13.3.2 - Teorema de Parseval - Propriedades do espectro de Fourier | 13.10 |
| 13.3.3 - Outra definição para o espectro de Fourier | 13.11 |
| 13.3.4 - Dimensões do espectro de Fourier | 13.13 |
| 13.3.5 - Outras denominações | 13.14 |
| 13.3.6 - Processos aleatórios de banda estreita e larga | 13.14 |
| 13.4 - Transmissão de vibrações aleatórias | 13.15 |
| 13.4.1 - Média da resposta | 13.16 |
| 13.4.1.1 - Carregamento periódico | 13.16 |
| 13.4.1.2 - Carregamento de duração finita | 13.17 |
| 13.4.2 - Espectro de Fourier da resposta | 13.19 |
| 13.4.2.1 - Carregamento periódico | 13.19 |
| 13.4.2.2 - Carregamento de duração finita | 13.21 |
| 13.4.2.3 - Filtragem | 13.21 |
| 13.4.3 - Média quadrática da resposta | 13.23 |
| 13.4.3.1 - Carregamento periódico | 13.23 |
| 13.4.3.2 - Carregamento de duração finita | 13.24 |
| 13.5 - Comentário final | 13.25 |
| 14 - ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A UM CARREGAMENTO DISCRETIZADO E DETERMINÍSTICO | |
| 14.1 - Discretização das funções de resposta e transferência | 14.1 |

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 14.2 | - Cálculo da resposta através do domínio do tempo | 14.3 |
| 14.2.1 | - Carregamento de duração finita | 14.3 |
| 14.2.2 | - Carregamento periódico | 14.10 |
| 14.3 | - Cálculo da resposta através do domínio da frequência | 14.12 |
| 14.3.1 | - Carregamento de duração finita | 14.13 |
| 14.3.1.1 | - Utilizando a transformada da função da resposta | 14.13 |
| 14.3.1.2 | - Utilizando a função de transferência | 14.15 |
| 14.3.2 | - Carregamento periódico | 14.18 |
| 14.4 | - O programa "RESPOSTA" | 14.19 |
| 14.5 | - Resposta a um carregamento em exponencial crescente | 14.20 |
| 14.6 | - Resposta a um carregamento em exponencial decrescente | 14.27 |
| 14.7 | - Resposta a um carregamento sísmico | 14.31 |
| 14.8 | - Espectro de resposta de um terremoto | 14.34 |
| 14.9 | - Comparação das respostas obtidas via domínio da frequência | 14.37 |
| 14.10 | - Transmissão de um acelerograma | 14.42 |
| 14.11 | - Conclusão | 14.47 |
| 15 | - ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A UM CARREGAMENTO DISCRETIZADO E ALEATÓRIO | |
| 15.1 | - Processos aleatórios | 15.1 |
| 15.2 | - Autocorrelação discreta média de uma sequência de um processo aleatório estacionário e ergódico | 15.4 |
| 15.2.1 | - Definição | 15.5 |
| 15.2.2 | - Obtenção da autocorrelação discreta média | 15.6 |
| 15.2.3 | - Propriedade da autocorrelação discreta média | 15.8 |
| 15.3 | - Espectro de Fourier de uma sequência de um processo aleatório | 15.8 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 15.3.1 - Definição | 15.9 |
| 15.3.2 - Obtenção do espectro de Fourier numericamente | 15.9 |
| 15.3.3 - Propriedades do espectro de Fourier de uma sequência discreta | 15.13 |
| 15.3.4 - Obtenção da autocorrelação discreta e da autocorrelação discreta média através do domínio da frequência | 15.16 |
| 15.3.5 - Outra definição para o espectro de Fourier | 15.18 |
| 15.4 - Transmissão de vibrações aleatórias | 15.20 |
| 15.4.1 - Transmissão da média | 15.20 |
| 15.4.1.1 - Previsão da média da resposta | 15.20 |
| 15.4.1.2 - Comprovação dos resultados | 15.22 |
| 15.4.2 - Espectro de Fourier da resposta | 15.27 |
| 15.4.2.1 - Carregamento de duração finita | 15.28 |
| 15.4.2.2 - Carregamento periódico | 15.28 |
| 15.4.2.3 - Espectro de Fourier do carregamento dado | 15.29 |
| 15.4.3 - Média quadrática da resposta | 15.30 |
| 15.5 - O programa "ESPECTRO" | 15.34 |
| 15.6 - Exemplos | 15.35 |
| 15.7 - Comentário final | 15.38 |

CAPÍTULO 1

A FUNÇÃO DELTA

1.1 - Funções fortemente concentradas

É comum encontrar-se nas diversas aplicações da física funções fortemente concentradas.

Por exemplo, uma força concentrada atuando sobre uma viga, pode ser entendida como uma carga distribuída fortemente concentrada (Figura 1.1).

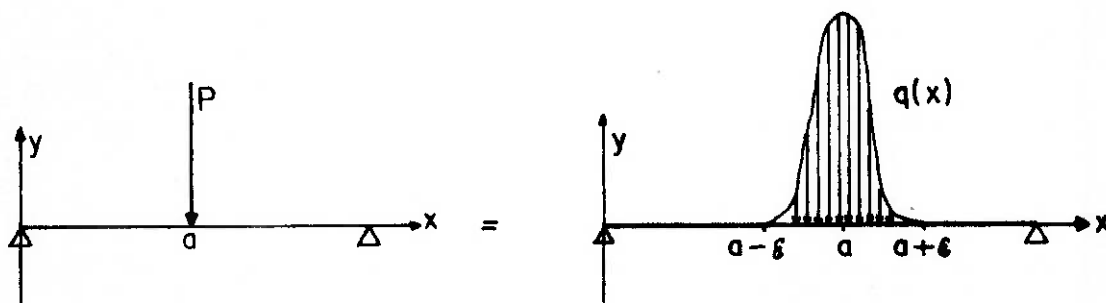


Figura (1.1)

Para que os dois carregamentos sejam equivalentes estaticamente devemos ter:

$$P = \int_{a-\xi}^{a+\xi} q(x) dx \quad (1.1)$$

Existem infinitas funções $q(x)$ que satisfazem esta integral. No entanto, podemos afirmar que a função $q(x)$ tende para a carga concentrada P , quando:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow 0 \\ q(a) &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

de modo que sua área seja igual a P .

Dizemos então que a carga P é uma função infinitamente concentrada.

1.2 - A função delta de Dirac

Matematicamente é impossível definir uma função que seja infinitamente concentrada.

Com o objetivo de resolver este problema, Dirac propôs a introdução da "função delta $\delta(x)$ " que representa uma função fortemente concentrada.

A mesma é dada simbolicamente por:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

de maneira que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.3)$$

Uma outra característica da "função $\delta(x)$ " é dada pela integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \quad (1.5)$$

Esta é a chamada propriedade de filtragem da "função $\delta(x)$ ". Ela atua como um filtro selecionando entre todos os valores possíveis de $f(x)$, chamada de função teste, o seu valor no ponto $x = a$.

A rigor, o delta de Dirac não pode ser apresentado como uma função. Na realidade, estamos tratando de um outro ente matemático chamado de distribuição.

O significado do mesmo só pode ser claramente entendido à luz da teoria das distribuições. No entanto, como este não é o objetivo deste trabalho, podemos tratar o delta de Dirac como uma função ordinária, desde que consideremos somente os valores de suas integrais.

Isto é o que será feito aqui, visto que o $\delta(x)$ sempre aparecerá dentro de uma integral, multiplicando uma outra

função $\phi(x)$ que será chamada de função teste.

1.3 - Propriedades:

A seguir, sem demonstração, apresentam-se algumas propriedades da função $\delta(x)$ que serão utilizadas.

1.3.1 - Filtragem:

Como já foi mostrado, dada uma função $\phi(x)$, chamada de função teste, a mesma pode ser definida de acordo com a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0) \quad (1.6)$$

1.3.2 - Deslocamento:

A função $\delta(x-a)$ é definida por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \phi(x) dx = \phi(a) \quad (1.7)$$

1.3.3 - Escalonamento:

A função $\delta(ax)$ é definida pela integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) \phi(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') \phi\left(\frac{x'}{a}\right) dx' \quad (1.8)$$

No denominador aparece o módulo de "a", pois quando o mesmo é negativo, trocam-se os limites de integração. Da expressão (1.8) concluímos que:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.9)$$

Desta propriedade decorre que a função $\delta(x)$ é par:

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (1.10)$$

1.3.4 - Produto por funções ordinárias:

O produto de uma função $\delta(x)$ por uma função ordinária $h(x)$ é definido pela integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(x) h(x)] \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) \phi(x) dx$$

de onde decorre que: se $h(x)$ é contínua em $x = 0$

$$h(x) \delta(x) = h(0) \delta(x) \quad (1.11)$$

1.4 - Representação da função delta

Como foi dito, o delta de Dirac pode ser tratado como uma função, desde que não falemos nos valores que a mesma assume, mas sim nos valores de suas integrais.

Portanto, em um sistema de eixos, a função será representada por um impulso, cuja amplitude é igual a integral da mesma. Por exemplo, a função

$$y = k\delta(x-a)$$

é representada por:

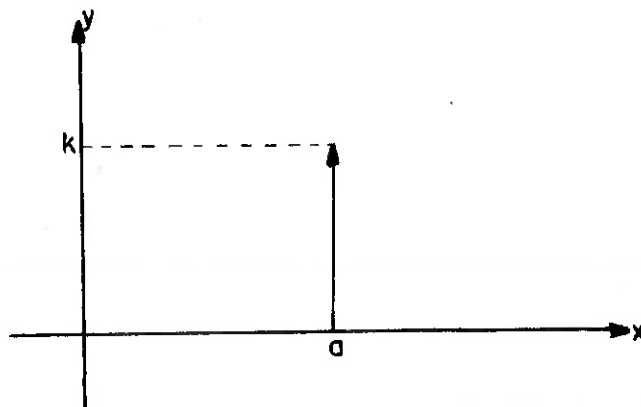


Figura (1.2)

1.5 - Limites generalizados

Como vimos, não é possível encontrar uma função ordinária que satisfaça a definição da função δ . No entanto, é possível

sível definir uma sequência de funções $f_n(x)$ que tende para a função δ .

Tomemos, por exemplo, a sequência de funções:

$$f_n(x) = \frac{\text{sen} 2n\pi x}{\pi x} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

O gráfico de um dos termos da sequência será:

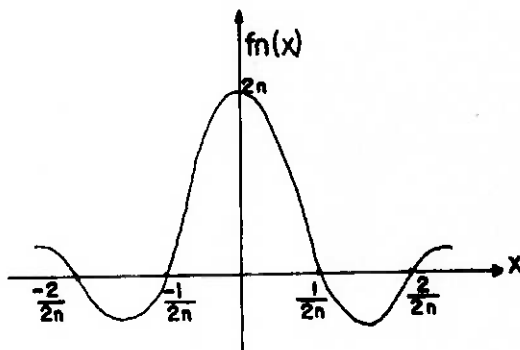


Figura (1.3)

Esta função apresenta uma das propriedades da função $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \quad (1.13)$$

A função $\delta(x)$ pode ser definida então, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} 2n\pi x}{\pi x} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dizemos que a sequência de funções $f_n(x)$ tende para a função $\delta(x)$.

A função $f_n(x)$ pode ainda ser dada pela integral:

$$f_n(x) = \int_{-n}^n \cos 2\pi xy dy \quad (1.15)$$

Logo, a função $\delta(x)$ pode ser dada pela integral:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \cos 2\pi xy dy$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi xy \, dy \quad (1.16)$$

$$\delta(x-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(x-a)y \, dy \quad (1.17)$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{-i2\pi xy} = \cos 2\pi xy - i \operatorname{sen} 2\pi xy$$

temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xy} \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi xy \, dy - i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} 2\pi xy \, dy$$

Mas, como a função seno é ímpar, a segunda integral é nula. Logo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi xy \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xy} \, dy$$

o que irá conduzir à:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xy} \, dy \quad (1.18)$$

CAPÍTULO 2

A TRANSFORMADA DE FOURIER

A representação de uma função através de sua transformada é uma técnica muito usada para a solução de problemas de física-matemática.

Exemplo típico é a solução de equações diferenciais que apresentam certa complexidade. As mesmas tornam-se muito simples quando a função é representada por sua transformada. Nestes casos é comum o emprego das transformadas de Laplace e Fourier.

A transformada de Fourier é a mais usada no estudo dos sistemas lineares que é o objetivo deste trabalho. Por se tratar de uma ferramenta essencial, a mesma será estudada detalhadamente.

2.1 - Definição:

Dada uma função $h(t)$, do parâmetro tempo, a mesma pode ser representada da seguinte forma:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2.1)$$

Nesta expressão $H(f)$ é chamada de transformada de Fourier de $h(t)$ e é dada pela expressão:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.2)$$

A transformada de Fourier é uma função do parâmetro frequência.

É interessante observar que $h(t)$ e $H(f)$ representam uma mesma função. Dizemos que $H(f)$ é a representação da função $h(t)$ no domínio da frequência.

Portanto, a transformada de Fourier representa uma

função através de suas componentes na frequência.

A expressão (2.1) é chamada de Transformada Inversa de Fourier.

Esta é uma maneira de se definir a transformada de Fourier. Muitos autores preferem definir a transformada a partir das séries de Fourier. No entanto, pode-se considerar, como será visto, a série como um caso particular da transformada de Fourier.

2.2 - Representação

Levando em conta a fórmula de Euler:

$$e^{\pm i2\pi ft} = \cos 2\pi ft \pm i \operatorname{sen} 2\pi ft \quad (2.3)$$

A expressão (1.2) pode ser posta sob a forma:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt$$

onde o primeiro termo é a parte real e o segundo a imaginária da transformada.

Como $H(f)$ é um número complexo, representemos separadamente sua parte real $R(f)$ e sua parte imaginária $I(f)$.

Uma outra maneira de se representar a transformada é através de seu módulo e de seu ângulo de fase dados respectivamente por:

$$|H(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} = \sqrt{H(f) \cdot H^*(f)} \quad (2.4)$$

$$\theta(f) = \operatorname{arc} \tan \frac{I(f)}{R(f)} \quad (2.5)$$

A expressão (2.4) decorre da definição de módulo de um número complexo, onde $H^*(f)$ é o complexo conjugado de $H(f)$.

$|H(f)|$ é a amplitude de $h(t)$

$\theta(f)$ é o ângulo de fase da transformada.

2.3 - Outras definições da Transformada de Fourier:

Existem diversas maneiras de se definir a transformada de Fourier. Alguns autores preferem utilizar a frequência cíclica $\omega = 2\pi f$. Neste caso teríamos:

$$H(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.6)$$

$$h(t) = a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

Uma das condições necessárias para se recair no caso anterior é:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2\pi}$$

É comum, no entanto, encontrar variações para estas constantes, tais como:

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \quad a_2 = 1 \quad \text{ou} \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Butkov, por exemplo, define o par de transformadas pelas expressões:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8)$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

É óbvio que as expressões (2.2) e (2.1), (2.6) e (2.7), (2.8) e (2.9) constituem transformadas diferentes. No entanto, são todas transformadas de Fourier, devido à natureza das mesmas. O importante é que, duas a duas, elas constituem um par de transformadas. Isto significa que $H(f)$ é Transformada de Fourier de $h(t)$ e $h(t)$ é a Transformada da Inversa de Fourier de $H(f)$.

A afirmação que $H(f)$ e $h(t)$ constituem um par de transformadas de Fourier pode ser representada simbolicamente das seguintes maneiras:

$$H(f) = F[h(t)] \quad h(t) = F^{-1} [H(f)]$$

ou então,

$$h(t) \stackrel{F}{=} H(f)$$

2.4 - Demonstração da fórmula da inversão:

Usando conceitos da teoria das distribuições é fácil demonstrar que (2.1) e (2.2) constituem um par de transformadas de Fourier.

A expressão (2.2) pode ser escrita mudando a variável t para x :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi fx} dx$$

A função $h(t)$ pode ser obtida da expressão:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi fx} dx \right] e^{i2\pi ft} df$$

Alterando a ordem da integração:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi t(t-x)} df \right] dx$$

Mas, conforme (1.18),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f(t-x)} df = \delta(t-x) = \delta(x-t)$$

pois a segunda integral desta expressão é nula.

Logo:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \delta(x-t) dx$$

que é a expressão (1.7).

A demonstração é idêntica para qualquer um dos pares de transformadas apresentados.

2.5 - Condições de existência:

Uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência da transformada de Fourier, é a de que ela seja absolutamente integrável. Isto equivale dizer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (2.10)$$

Existem funções que, apesar de não satisfazerem esta condição, possuem transformadas de Fourier. No entanto, estas transformadas só podem ser determinadas usando-se os conceitos da teoria das distribuições.

2.6 - Fórmula alternativa da inversão:

Dados dois números complexos z_1 e z_2 , podemos afirmar que:

$$z_1 \cdot z_2 = (z_1^* \cdot z_2^*)^* \quad (2.11)$$

onde o asterisco indica o complexo conjugado.

De acordo com este resultado, a expressão (2.1) pode ser alterada para:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H^*(f) e^{-i2\pi ft} \right]^* df \quad (2.12)$$

2.7 - Transformada de Fourier de um pulso retangular:

Dada a função:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_0/2 \\ 0 & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

sua transformada de Fourier será dada por:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$P(f) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos 2\pi f t dt - i \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin 2\pi f t dt$$

A segunda integral é nula, pois a função seno é ímpar.

$$P(f) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos 2\pi f t dt$$

$$P(f) = \frac{1}{2\pi f} \sin 2\pi f t \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{1}{2\pi f} \left[\sin \pi f T_0 - \sin \pi f (-T_0) \right]$$

$$P(f) = \frac{2 \sin \pi f T_0}{2\pi f} = T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f T_0} \quad (2.13)$$

A figura (2.1) ilustra o par de transformadas

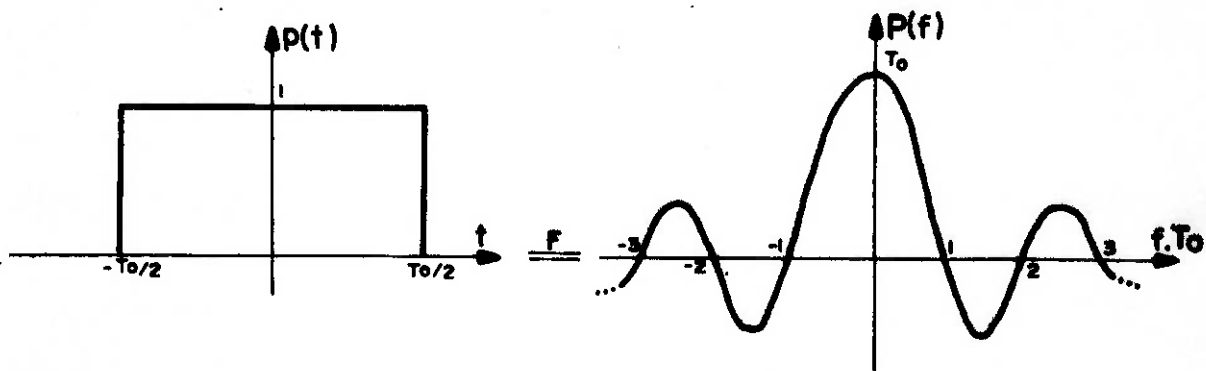


Figura (2.1)

Pode-se demonstrar que a transformada inversa de $P(f)$, dada por (2.1), é a função $p(t)$.

2.8 - Transformada de Fourier de uma exponencial decrescente

Consideremos a função:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

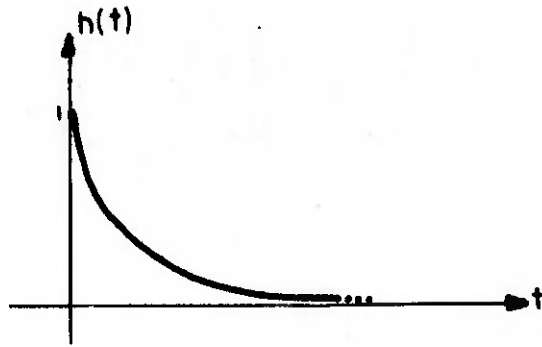


Figura (2.2)

Sua transformada de Fourier será dada por:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i2\pi ft} dt$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} e^{-t(1+i2\pi f)} dt$$

$$H(f) = \frac{-1}{1+i2\pi f} e^{-t(1+i2\pi f)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+i2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{1}{1+i2\pi f} \frac{(1-i2\pi f)}{1-i2\pi f} = \frac{1-i2\pi f}{1+4\pi^2 f^2}$$

Como se vê a função $H(f)$ é complexa. Suas partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por:

$$R(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} \quad (2.14-a)$$

$$I(f) = \frac{-2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2} \quad (2.14-b)$$

Na figura (2.3) temos a representação da parte real e imaginária de $H(f)$.

Novamente pode-se demonstrar que $h(t)$ e $H(f)$ constituem um par de transformadas.

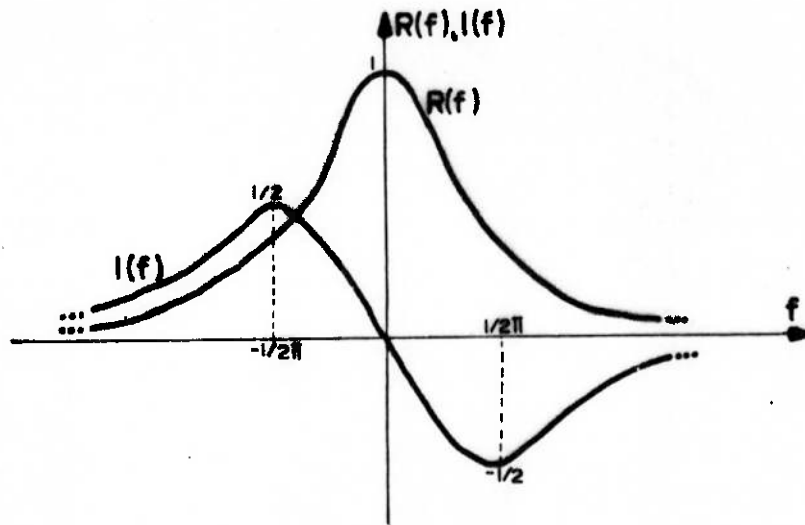


Figura (2.3)

2.9 - Transformada de Fourier de um impulso:

Consideremos uma função constituída de um impulso unitário:

$$h(t) = \delta(t)$$

Temos:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i2\pi f \cdot 0} = 1 \quad (2.19)$$

Portanto, a transformada de Fourier de um impulso é uma constante cujo valor é igual a área do impulso

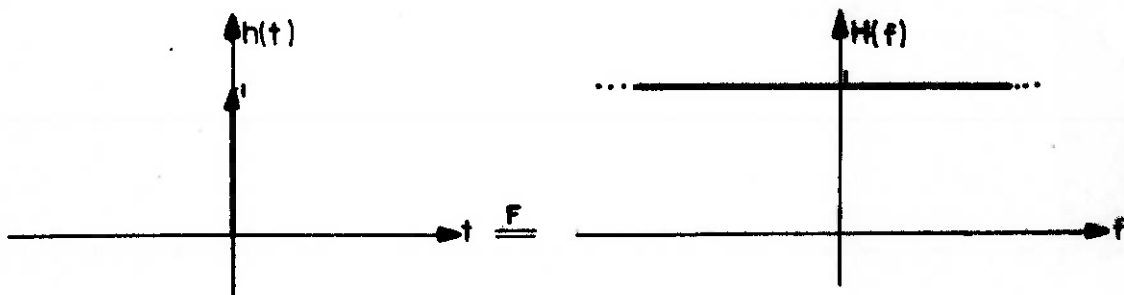


Figura (2.4)

2.10 - Transformada de Fourier de uma constante:

Consideremos a função $h(t) = 1$.

Esta função não satisfaz a condição de existência da Integral de Fourier. No entanto, a mesma pode ser determinada usando-se da teoria das distribuições.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi ft} dt$$

Segundo (1.18) temos:

$$H(f) = \delta(f) \quad (2.16)$$

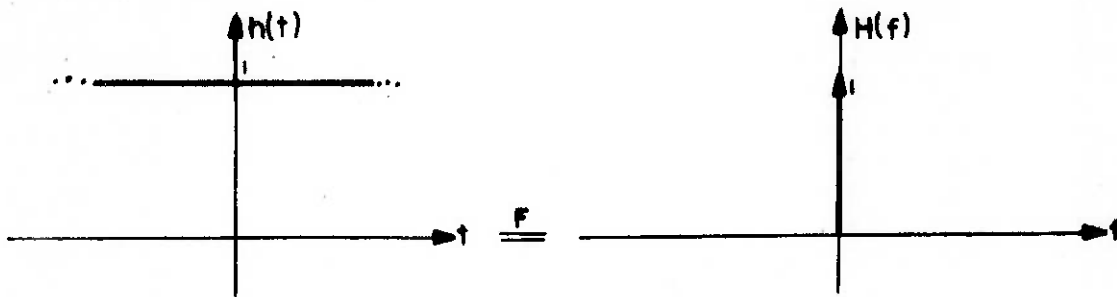


Figura (2.5)

A transformada de Fourier de uma constante consiste de um impulso cuja área fornece o valor da constante.

2.11 - Transformada de Fourier de uma função harmônica:

As funções harmônicas também não seguem a condição de existência da integral de Fourier. No entanto, como no caso anterior, podemos determiná-las usando-se conceitos da teoria das distribuições.

Dadas as expressões (2.3) é fácil verificar que:

$$\cos 2\pi F_0 t = \frac{1}{2} e^{i2\pi F_0 t} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi F_0 t} \quad (2.17)$$

$$\sin 2\pi F_0 t = \frac{i}{2} e^{-i2\pi F_0 t} - \frac{i}{2} e^{+i2\pi F_0 t} \quad (2.18)$$

Consideremos primeiramente a função:

$$h(t) = \cos 2\pi F_0 t$$

A transformada de Fourier é dada por:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi F_0 t e^{-i2\pi f t} dt$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{i2\pi F_0 t} e^{-i2\pi f t} dt +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-i2\pi F_0 t} e^{-i2\pi f t} dt$$

$$H(f) = \frac{1}{2} \delta(f - F_0) + \frac{1}{2} \delta(f + F_0) \quad (2.19)$$

Portanto, temos o par de transformadas:

$$\cos 2\pi F_0 t \xrightarrow{F} \frac{1}{2} \delta(f - F_0) + \frac{1}{2} \delta(f + F_0)$$

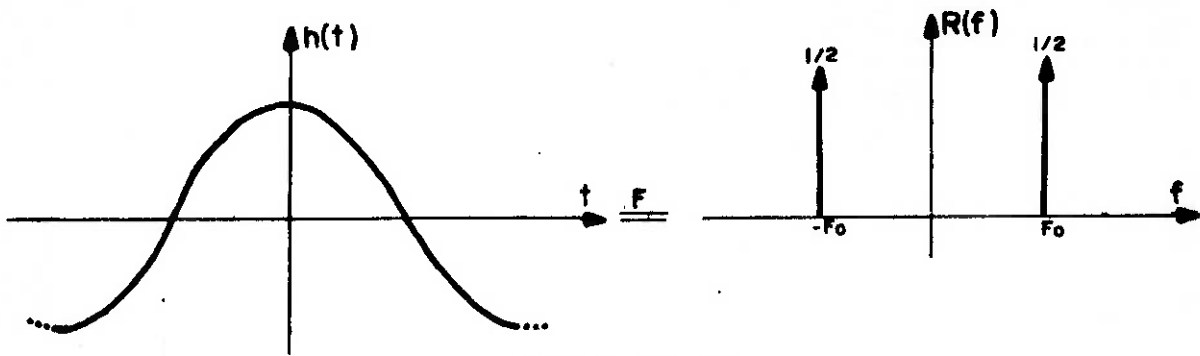


Figura (2.6)

Analogamente podemos demonstrar que

$$\sin 2\pi F_0 t \xrightarrow{F} \frac{i}{2} \delta(f + F_0) - \frac{i}{2} \delta(f - F_0) \quad (2.20)$$

Os dois pares estão ilustrados nas figuras (2.6) e

(2.7).

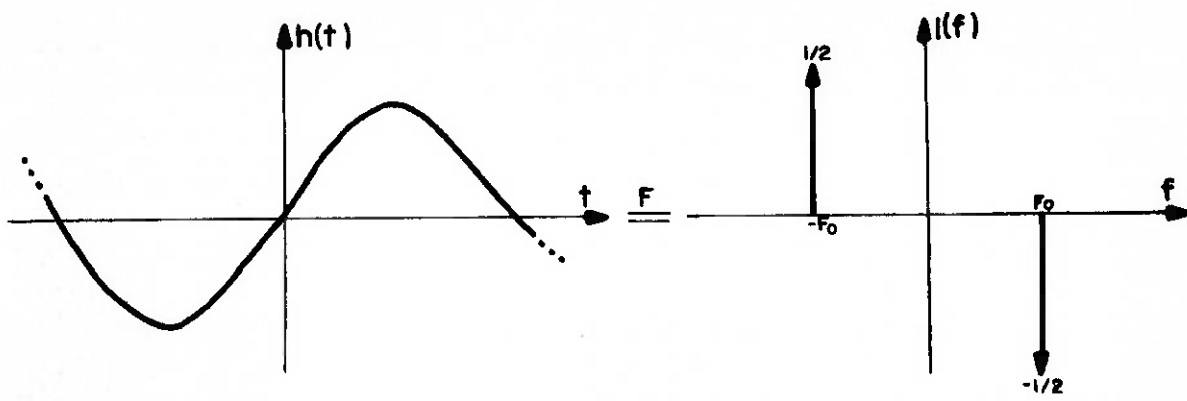


Figura (2.7)

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Apresentamos neste capítulo algumas propriedades básicas da transformada de Fourier necessárias a sua aplicação.

As mais importantes e que serão mais utilizadas vêm acompanhadas de exemplos de aplicação.

3.1 - Linearidade

A transformada de Fourier goza da propriedade de linearidade. Isto significa que a transformada de uma combinação linear de duas funções é igual à combinação linear das transformadadas.

$$a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) \stackrel{F}{=} a_1 H_1(f) + a_2 H_2(f) \quad (3.1)$$

3.2 - Escalonamento

Se a transformada de Fourier de uma função $h(t)$ é $H(f)$, a transformada da função $h(at)$, onde "a" é real, não nulo, pode ser obtida fazendo $t' = at$ em (2.2).

$$F \left[h(at) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(at) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$F \left[h(at) \right] = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') e^{-i2\pi f/at'} dt'$$

O valor de "a" é tomado em módulo, pois quando o mesmo é negativo, os limites de integração são trocados, trocando-se o sinal da transformada.

O novo par é dado pela expressão:

$$h(at) \stackrel{F}{=} \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3.2)$$

A expressão (3.2) corresponde ao escalonamento no tempo. Quando o escalonamento é realizado no domínio da frequência, é fácil demonstrar que:

$$\frac{1}{|a|} h\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{F}{=} H(af) \quad (3.3)$$

A propriedade de escalonamento afirma então que, quando a escala de uma função em um domínio é reduzida do fator "a", no outro domínio a escala da mesma função apresenta-se ampliada do mesmo fator.

Esta propriedade pode ser percebida intuitivamente nas figuras (3.1). Ao se aumentar a duração do pulso retangular, reduzindo-se a escala do tempo, no domínio da frequência, a função será menos dispersa e terá sua amplitude aumentada. No limite, quando a duração do pulso vai de $-\infty$ a $+\infty$, a função $P(f)$ tende a um impulso.

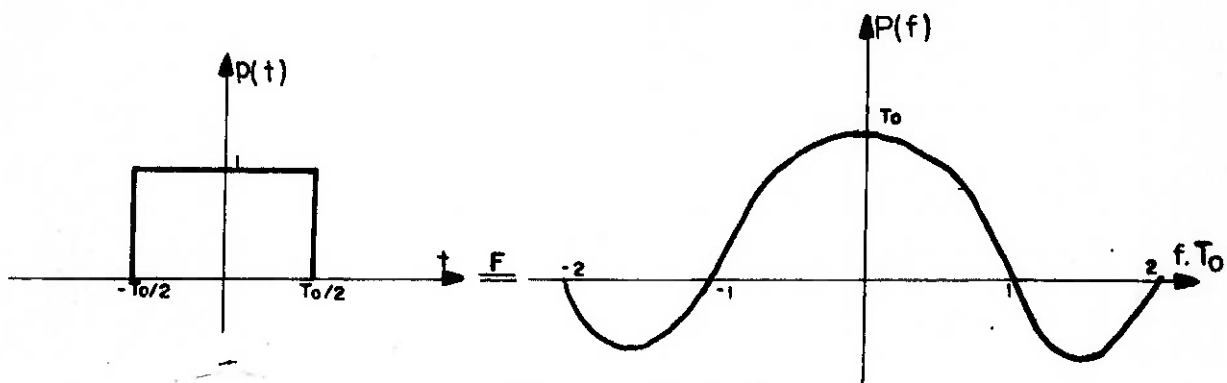


Figura (3.1-a)

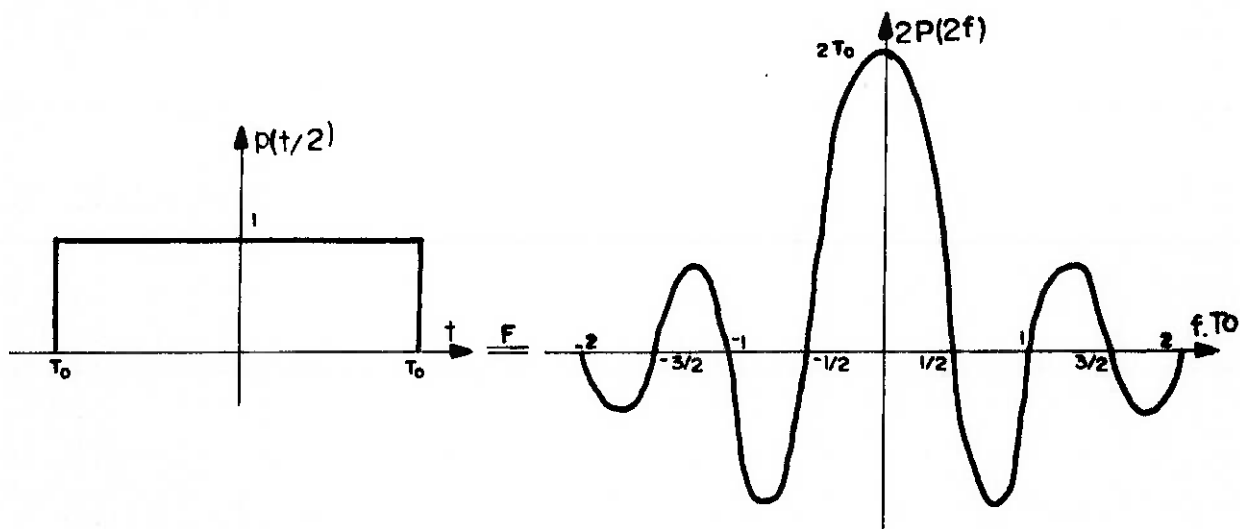


Figura (3.1-b)

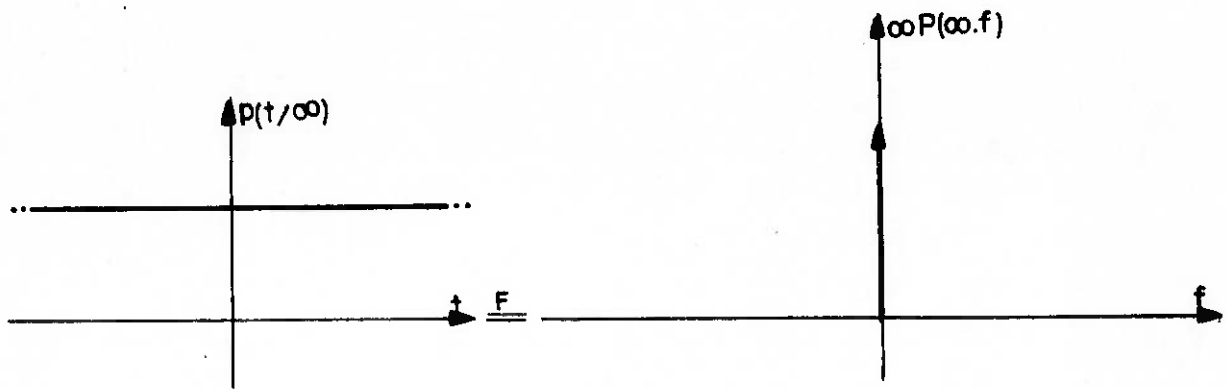


Figura (3.1-c)

O par de transformadas genérico será:

$$p(at) = \frac{F}{|a|} \frac{\text{sen } 2\pi a f T_0}{2\pi f}$$

$$p(at) = \frac{F}{|a|} \frac{\text{sen } 2\pi a f T_0}{2\pi f} \quad (3.4)$$

A função delta não é nada mais que o limite das transformadas quando "a" tende a infinito. A expressão (3.4) é idêntica a (1.14).

3.3 - Deslocamento

Se uma função é deslocada no domínio do tempo de uma constante t_0 , a sua transformada pode ser obtida mudando-se para a variável $s = t - t_0$.

$$F[h(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t_0) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$F[h(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-i2\pi f(s+t_0)} ds$$

$$F[h(t-t_0)] = e^{-i2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-i2\pi f s} ds$$

O novo par de transformadas fica então estabelecido, pela relação:

$$h(t-t_0) \stackrel{F}{=} e^{-i2\pi ft_0} H(f) \quad (3.5)$$

Analogamente se a transformada de uma função é deslocada de uma constante f_0 , sua transformada inversa pode ser obtida pelo par (3.6).

$$e^{i2\pi f_0 t} h(t) \stackrel{F}{=} H(f-f_0) \quad (3.6)$$

É interessante observar que o deslocamento em um domínio não altera o módulo da função no outro.

De fato, na expressão (3.5), calculando o módulo da transformada da função deslocada:

$$\begin{aligned} |F[h(t-t_0)]| &= \sqrt{F[h(t-t_0)] F^*[h(t-t_0)]} \\ |F[h(t-t_0)]| &= \sqrt{e^{-i2\pi ft_0} e^{i2\pi ft_0} H(f) H^*(f)} \\ |F[h(t-t_0)]| &= \sqrt{H(f) H^*(f)} \\ |F[h(t-t_0)]| &= |F[h(t)]| \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analogamente pode-se demonstrar que:

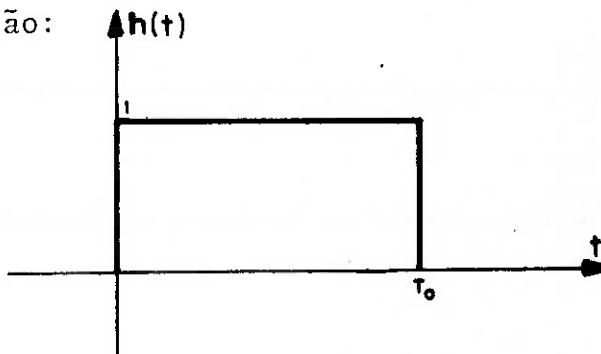
$$|F^{-1}[H(f-f_0)]| = |F^{-1}[H(f)]| \quad (3.8)$$

Exemplo 3.1 - Transformada de Fourier de um pulso retangular deslocado

Consideremos a função:

$$h(t) = p(t-t_0/2)$$

Figura (3.2)



Sua transformada pode ser obtida pela expressão (3.5)

$$H(f) = e^{-i2\pi f \frac{T_0}{2}} P(f)$$

$$H(f) = (\cos \pi f T_0 - i \operatorname{sen} \pi f T_0) T_0 \frac{\operatorname{sen} \pi f T_0}{\pi f T_0}$$

$$H(f) = R(f) + iI(f)$$

$$R(f) = T_0 \cos \pi f T_0 \frac{\operatorname{sen} \pi f T_0}{\pi f T_0} = \frac{\operatorname{sen} 2\pi f T_0}{2\pi f T_0} \quad (3.9)$$

$$I(f) = -T_0 \frac{\operatorname{sen}^2 \pi f T_0}{\pi f T_0} \quad (3.10)$$

Como se vê, a função que era real, tornou-se complexa devido ao deslocamento. No entanto, a sua amplitude continua a mesma, tendo mudado somente seu ângulo de fase.

De fato:

$$\sqrt{R^2(f) + I^2(f)} = T_0 \frac{\operatorname{sen} \pi f T_0}{\pi f T_0}$$

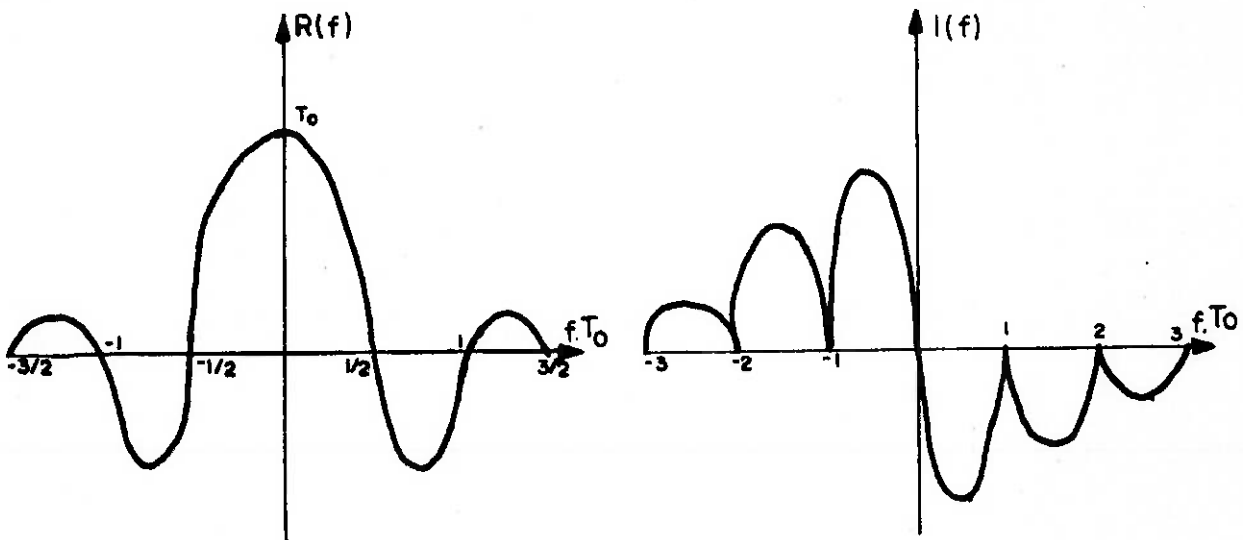


Figura (3.3)

Comparando as figuras (3.3) com (2.1) conclui-se que, com o deslocamento no domínio do tempo, as raízes da parte real da transformada mudaram para os múltiplos da metade da frequência.

No entanto, em qualquer ponto, o módulo da transformada é o mesmo. Tanto a parte real como a imaginária são nulas nas frequências múltiplas da fundamental.

3.4 - Diferenciação

Considere-se uma função $h(t)$ e sua transformada $H(f)$.

A relação entre as transformadas de uma derivada de ordem n de $h(t)$ e de $h(t)$ pode ser obtida facilmente:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$\frac{d^n}{dt^n} h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \frac{d^n}{dt^n} e^{i2\pi ft} df$$

$$\frac{d^n}{dt^n} h(t) = (i2\pi f)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df$$

O par de transformadas para a derivada n -ésima de $h(t)$ fica estabelecido pela relação:

$$\frac{d^n}{dt^n} h(t) \stackrel{F}{=} (i2\pi f)^n H(f) \quad (3.11)$$

Analogamente a relação entre as transformadas inversa de uma derivada de ordem n de $H(f)$ e de $H(f)$ pode ser estabelecida pelo par:

$$(-i2\pi f)^n h(t) \stackrel{F}{=} \frac{d^n}{dt^n} H(f) \quad (3.12)$$

Estas relações são de grande utilidade na resolução da equação diferencial de um sistema linear.

3.5 - Funções complexas no tempo

Analise agora qual a natureza da transformada de Fourier nos mais diversos casos.

Uma função $h(t)$ complexa pode ser separada em duas partes: uma real e outra imaginária.

$$h(t) = R(t) + iI(t) \quad (3.13)$$

Tanto a parte real como a imaginária podem ser consideradas como a soma de funções pares e ímpares:

$$h(t) = R_p(t) + R_i(t) + iI_p(t) + iI_i(t) \quad (3.14)$$

onde:

$$R_p(t) = \frac{R(t) + R(-t)}{2} \quad R_i(t) = \frac{R(t) - R(-t)}{2} \quad (3.15)$$

$$I_p(t) = \frac{I(t) + I(-t)}{2} \quad I_i(t) = \frac{I(t) - I(-t)}{2} \quad (3.16)$$

Determinemos agora qual a característica da transformada de cada parcela da equação (3.14). Um caso mais geral pode ser considerado como a soma de casos particulares.

3.5.1 - A função do tempo é real e par

$$h(t) = R_p(t)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(t) \cos 2\pi f t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(t) \sin 2\pi f t dt$$

A segunda parcela é nula porque a função resultante a ser integrada é ímpar.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(t) \cos 2\pi f t dt$$

Como $H(-f) = H(f)$, a transformada é real e par. Fica então estabelecido o par das transformadas:

$$R_p(t) \stackrel{F}{=} R_p(f) \quad (3.17)$$

3.5.2 - A função do tempo é real e ímpar

$$h(t) = R_i(t)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(t) \cos 2\pi f t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(t) \operatorname{sen} 2\pi f t dt$$

$$H(f) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(t) \operatorname{sen} 2\pi f t dt$$

Como: $H(-f) = -H(f)$:

$$R_i(t) \stackrel{F}{=} I_i(f) \quad (3.18)$$

3.5.3 - A função do tempo é imaginária e par

$$h(t) = i I_p(t)$$

$$H(f) = i \int_{-\infty}^{+\infty} I_p(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$H(f) = i \int_{-\infty}^{+\infty} I_p(t) \cos 2\pi f t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} I_p(t) \operatorname{sen} 2\pi f t dt$$

$$H(f) = i \int_{-\infty}^{+\infty} I_p(t) \cos 2\pi f t dt$$

$$H(-f) = H(f)$$

$$I_p(t) \stackrel{F}{=} I_p(f) \quad (3.19)$$

3.5.4 - A função do tempo é imaginária e ímpar

$$h(t) = i I_i(t)$$

$$H(f) = i \int_{-\infty}^{+\infty} I_i(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$H(f) = i \int_{-\infty}^{+\infty} I_i(t) \cos 2\pi f t + \int_{-\infty}^{+\infty} I_i \operatorname{sen} 2\pi f t dt$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_i(t) \operatorname{sen} 2\pi f t dt$$

$$\text{Como } H(-f) = -H(f) \quad (3.20)$$

$$I_i(t) \stackrel{F}{=} R_i(f)$$

O pulso retangular é uma função real e par. Sua transformada é também real e par.

O pulso retangular deslocado ou a exponencial decrescente são casos de funções reais. Suas transformadas são dadas pela soma dos casos 1 e 2. A parte real é par e a imaginária ímpar. Portanto:

$$H(-f) = H^*(f) \quad (3.21)$$

Com os casos 1 e 3 conclui-se que a transformada de Fourier de uma função complexa e par do tempo é uma função complexa e par da frequência.

$$h_p(t) \stackrel{F}{=} H_p(f) \quad (3.22)$$

Analogamente, com os casos 2 e 4 conclui-se que a transformada de Fourier de uma função complexa e ímpar do tempo é uma função complexa e ímpar da frequência:

$$h_i(t) \stackrel{F}{=} H_i(f) \quad (3.23)$$

3.6 - Áreas sob as curvas

Calculando a componente da transformada de Fourier na frequência zero:

$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \quad (3.24)$$

que é igual a área sob a curva de $h(t)$.

Igualmente:

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) df \quad (3.25)$$

Portanto, a componente da função $H(f)$ na frequência zero é igual a área sob a curva $h(t)$ e a componente da função $h(t)$ no instante zero é igual a área sob a curva $H(f)$.

CAPÍTULO 4

FUNÇÕES PERIÓDICAS

São apresentados neste capítulo as séries de Fourier e a transformada de Fourier de funções periódicas.

Mostramos também a definição clássica da transformada de Fourier: uma extensão da série de Fourier quando a função deixa de ser periódica.

4.1 - Séries de Fourier no domínio de tempo

Dada a função $f(t)$ da figura (4.1), periódica no domínio do tempo, é sempre possível representar-se a mesma como uma soma de harmônicos da seguinte forma:

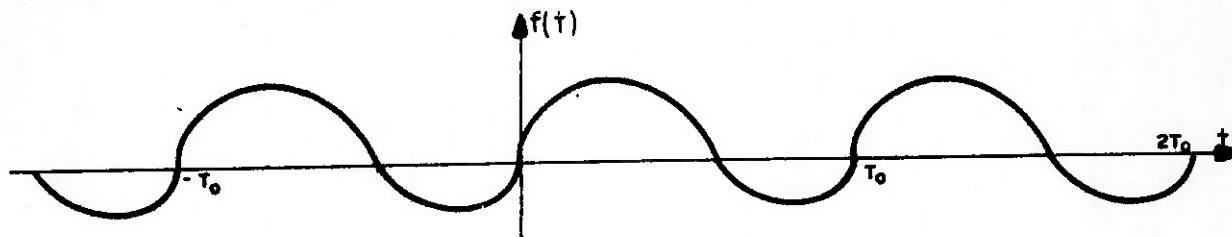


Figura (4.1)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos 2\pi n F t + b_n \sin 2\pi n F t \right] \quad (4.1)$$

onde:

$$F = \frac{1}{T_0} \quad (4.2)$$

é chamada de frequência fundamental. Os coeficientes a_n e b_n são dados pelas expressões:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(2\pi n F t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(2\pi n F t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Com o emprego da fórmula de Euler, expressão (2.3), a função $f(t)$ pode ser expressa da seguinte maneira.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{i2\pi nFt} \quad (4.5)$$

onde os coeficientes $F(n)$ são obtidos pela expressão:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-i2\pi nFt} dt \quad n=-\infty, \dots, +\infty \quad (4.6)$$

É fácil verificar a relação entre os coeficientes $F(n)$ e a_n e b_n :

$$F(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (4.7)$$

Se $f(t)$ é real:

$$F(-n) = F^*(n) \quad (4.8)$$

Tanto nas expressões (4.3), (4.4) como (4.6) as integrais podem ser calculadas sobre qualquer intervalo, desde que o mesmo seja igual a um período.

As duas maneiras de se definir a série de Fourier são equivalentes. Se a função $f(t)$ for real, ao se desenvolver a expressão (4.5), os termos imaginários cancelam-se automaticamente.

Pode-se verificar também que as expressões (4.5) e (4.6) são duas maneiras diferentes de representar a mesma função. Substituindo a primeira na segunda, chega-se a uma identidade trivial.

Exemplo (4.1)

Consideremos a função da figura (4.2) e determinemos seus coeficientes de Fourier.

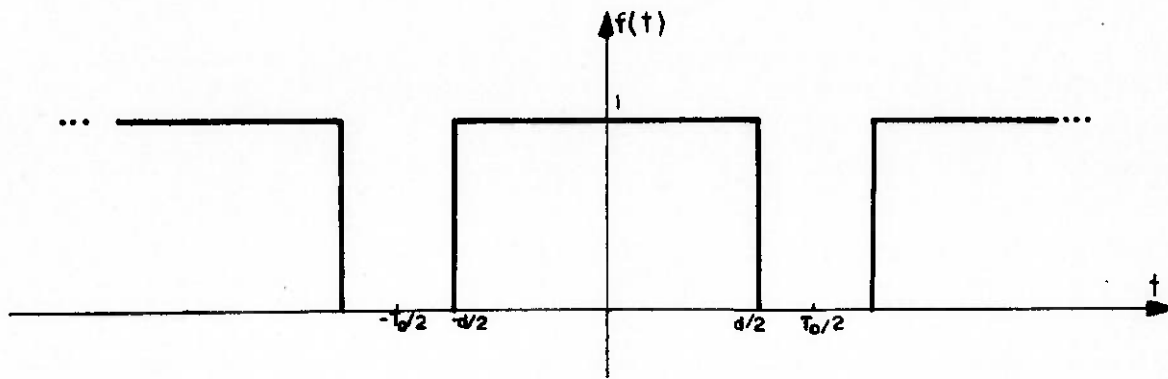


Figura (4.2)

De acordo com a expressão (4.6) temos:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-in2\pi Ft} dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-in2\pi Ft} dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-in2\pi Ft} dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-d/2}^{d/2} \cos(2\pi n Ft) dt - i \int_{-d/2}^{d/2} \text{sen}(2\pi n Ft) dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-d/2}^{d/2} \cos(2\pi n Ft) dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \left. \frac{\text{sen} 2\pi n Ft}{2\pi n F} \right|_{-d/2}^{d/2}$$

$$F(n) = \frac{1}{2\pi n} \left[\text{sen} \pi n F d - \text{sen} \pi n F (-d) \right]$$

$$F(n) = \frac{2 \text{sen} \left(n\pi \frac{d}{T_0} \right)}{2\pi n}$$

$$F(n) = \frac{d}{T_0} \frac{\text{sen}(n\pi \frac{d}{T_0})}{n\pi \frac{d}{T_0}} \quad (4.9)$$

Consideremos o caso em que $T_0 = 2d$

$$F(n) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} \quad (4.10)$$

A cada coeficiente $F(n)$ está associada uma frequência múltipla da fundamental:

$$f = nF = n/T_0 \quad (4.11)$$

Podemos construir um gráfico onde marcamos em abscissas a ordem do coeficiente, ou a frequência a ele associada, e, em ordenadas, os seus valores. A este gráfico chamamos de espectro de amplitude. O mesmo é uma função discreta, diferente de zero somente para valores inteiros de n ou frequências múltiplas da fundamental.

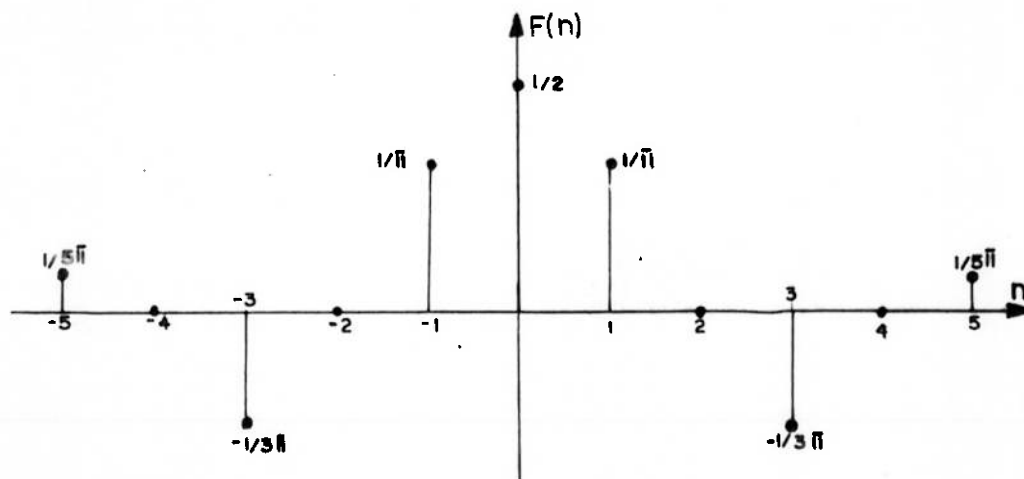


Figura (4.3)

Observando-se a figura (4.3) nota-se que, para este caso, a amplitude de um coeficiente é inversamente proporcional à ordem do mesmo. Por isso os coeficientes de ordem superior têm pouca influência na função $f(t)$ e a mesma pode ser obtida com poucos termos da série.

4.2 - Expansão do período acrescentando-se zeros:

Vamos verificar agora o que acontece com a série de Fourier de uma função periódica ao se aumentar o período, aumentando-se o intervalo em que a mesma é nula.

Considere-se as duas funções abaixo:

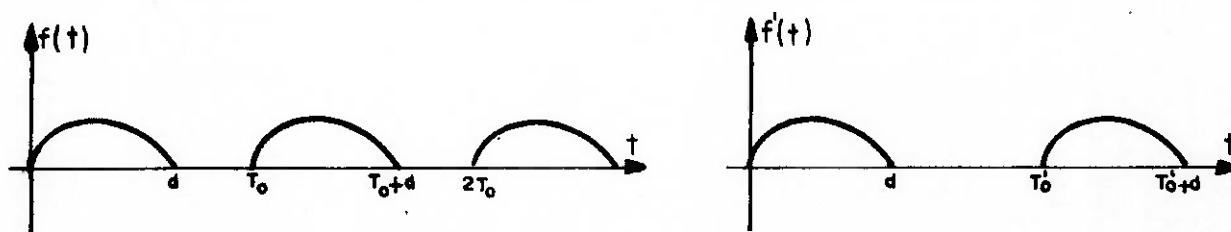


Figura (4.4)

Os coeficientes de $f(t)$ são dados por:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-in2\pi t/T_0} dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^d f(t) e^{-in2\pi t/T_0} dt \quad (4.12)$$

Se mantivermos o intervalo em que a função é diferente de zero, no segundo caso, ela terá os seguintes coeficientes:

$$F'(n) = \frac{1}{T_0'} \int_0^d f'(t) e^{-in2\pi t/T_0'} dt$$

Como no intervalo $(0, d)$ as duas funções são idênticas e considerando $T_0' = \lambda T_0$, tem-se:

$$F'(n) = \frac{1}{\lambda T_0} \int_0^d f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{\lambda} \frac{t}{T_0}} dt \quad (4.13)$$

Comparando-se (4.12) com (4.13), tem-se:

$$F'(n) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \quad (4.14)$$

Esta expressão só é aplicável quando (n/λ) for um número inteiro:

A cada coeficiente $F(n)$ da função $f(t)$ está associada uma frequência múltipla da sua fundamental.

$$f = n/T_0$$

A cada coeficiente $F'(n)$ da função $f'(t)$ está associada uma frequência múltipla de sua fundamental.

$$f' = n/\lambda T_0$$

Como o período da segunda função é maior, a mesma possui os harmônicos mais próximos um do outro. As componentes da função $f'(t)$, nas frequências que são múltiplas das frequências fundamentais de $f(t)$ e $f'(t)$, estão relacionadas com as componentes de $f(t)$ nas mesmas frequências pela expressão (4.14).

Exemplo (4.2)

Consideremos a função do exemplo 4.1 com período de 5 seg. Consideremos uma nova função $f'(t)$ idêntica à anterior, mas com período de 10 segundos.

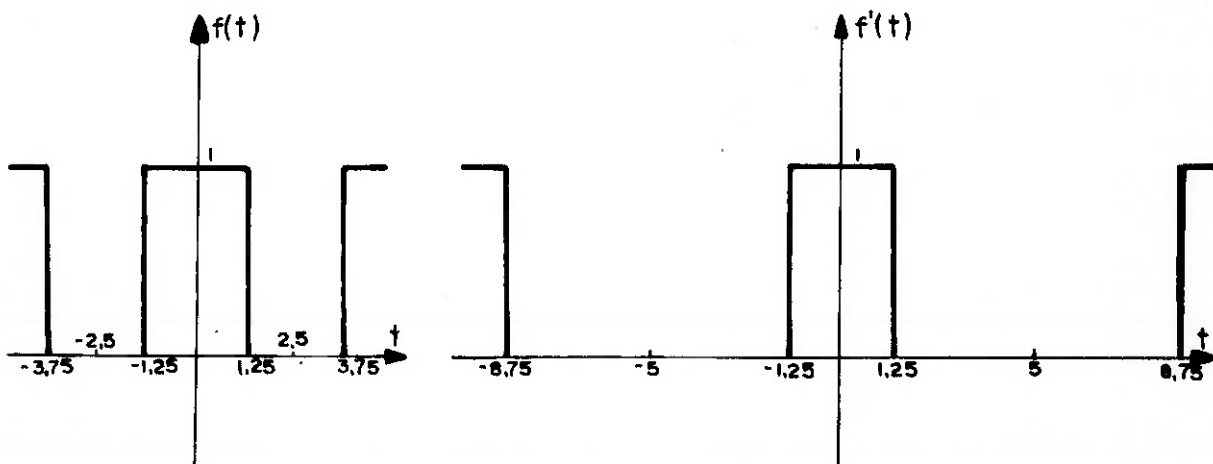


Figura (4.5)

Os coeficientes de Fourier das duas funções podem ser calculados substituindo-se $T_0 = 2d$ e $T_0' = 4d$ em (4.9).

$$F(n) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$F'(n) = \frac{1}{4} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}}$$

A figura (4.6) fornece os espectros de amplitudes em função das frequências.

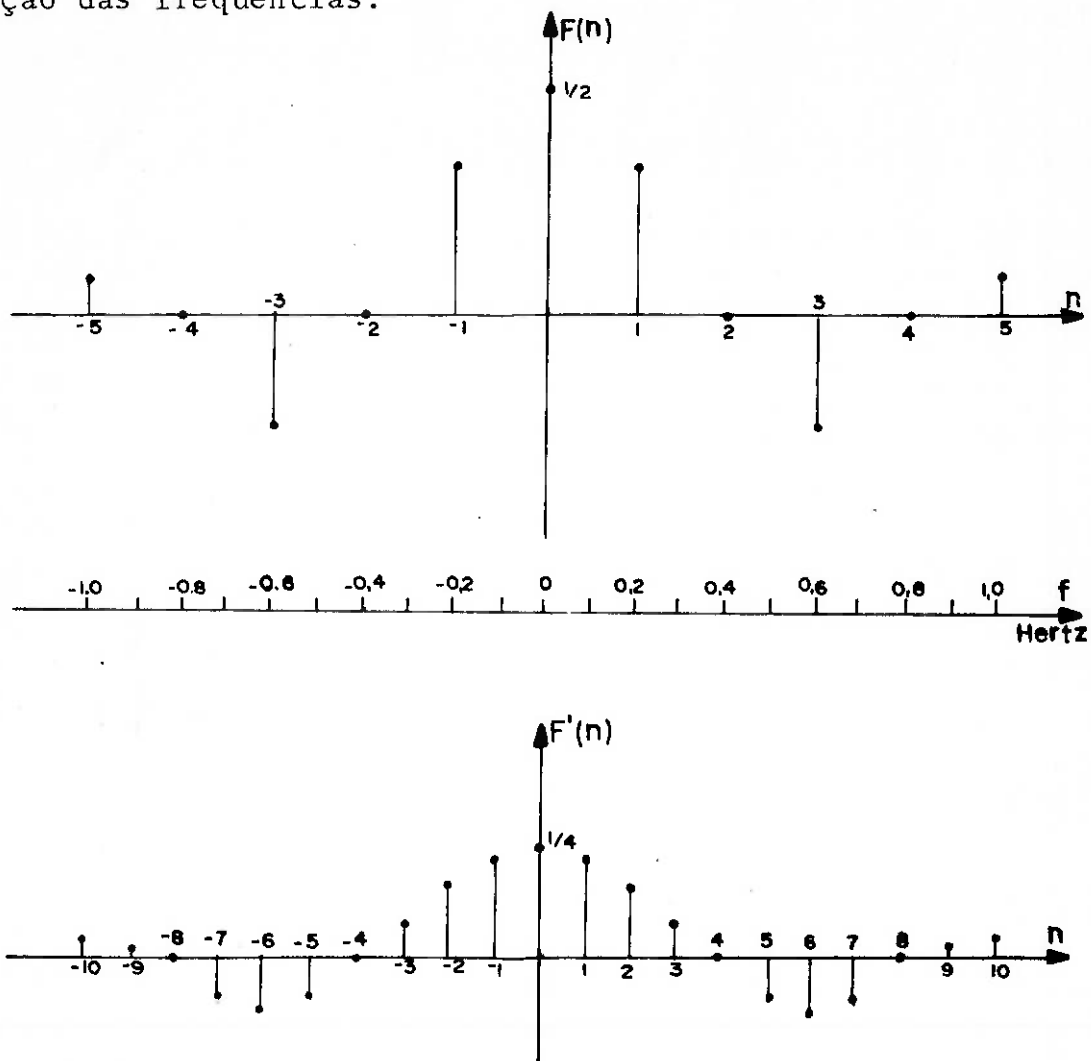


Figura (4.6)

Para uma frequência de, por exemplo: 0,6 Hz, temos as sociado os coeficientes $F(3)$ e $F'(6)$, onde

$$F'(6) = \frac{1}{2} F(3)$$

4.3 - Da série de Fourier a transformada de Fourier

Partindo do raciocínio anterior, podemos estender a série de Fourier para o caso em que o período tende para o infinito. Neste caso, as informações ficam infinitamente próximas uma da outra e o espectro de amplitude torna-se contínuo.

Para que os coeficientes não fiquem nulos e resulte uma indeterminação, o fator $1/T_0$ na expressão (4.6) é passado para a expressão (4.5). Unindo-se as duas:

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-in2\pi Ft} dt \right] e^{in2\pi Ft}$$

$$f(t) = F \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-i2\pi n Ft} dt \right] e^{in2\pi Ft}$$

Quando $T_0 \rightarrow \infty$, temos:

$$F \rightarrow df \quad nF \rightarrow f$$

e a soma se torna uma integral:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \right] e^{i2\pi ft} df$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi ft} df \quad (4.15)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (4.16)$$

Estas expressões são as mesmas que (2.1) e (2.2).

O desenvolvimento aqui mostrado é utilizado por muitos autores. Estes definem a série de Fourier de uma função periódica e mostram que no limite, quando o período tende para o infinito, a soma (4.5) transforma-se na integral (2.1).

No entanto, esta transformação só se dá se mudarmos o fator $1/T_0$ da expressão (4.6) para (4.5). Se não tomarmos esta medida, para o período tendendo a infinito, os coeficientes de Fourier serão todos nulos.

O que na realidade acontece, e se pode verificar na figura (4.6), é que, se formos aumentando o período de uma função, acrescentando-se trechos nulos, e em cada fase multiplicamos os coeficientes de Fourier obtidos pelo período T_0 obteremos sempre os mesmos valores. Estes valores obtidos em cada frequência são na realidade os valores da transformada da função quando o período for estendido para o infinito.

Esta afirmação pode ser melhor entendida observando-se as figuras (4.7)

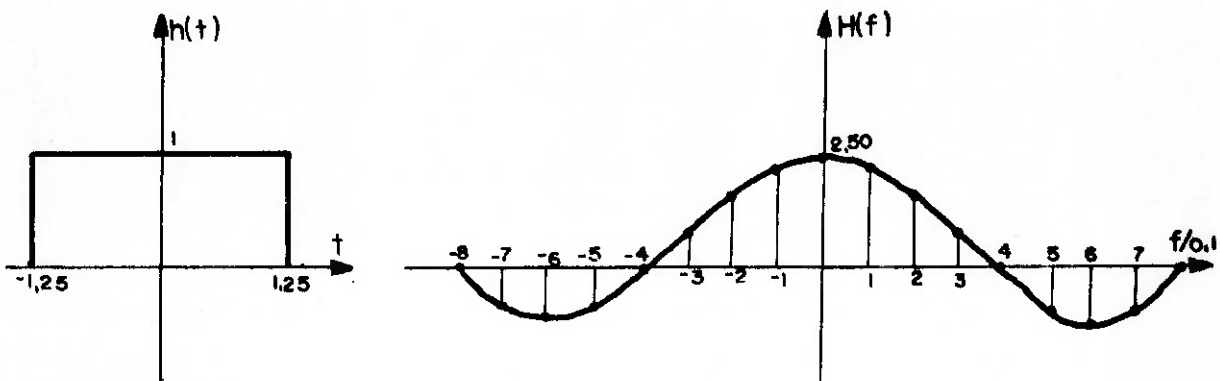


Figura (4.7)

Na figura (4.7-a) indicamos a função $h(t)$, com duração finita de 2,5 seg., e na figura (4.7-b) sua transformada de Fourier.

Se considerarmos a função periódica da figura (4.5-a), calcularmos os seus coeficientes de Fourier, e multiplicarmos ' pelo período que é de 5,0 segundos, obteremos os pontos 0, ± 2 , ± 4 , ± 6 , ... da figura (4.7-b). Se fizermos a mesma coisa com a função periódica da figura (4.5.b), obteremos os pontos 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ...

Devido à mudança do fator $1/T_0$ da expressão (4.6) para (4.5) os coeficientes de Fourier de uma função periódica não têm a mesma dimensão dos valores da transformada de Fourier desta função suposta de duração finita.

4.4 - Transformada de Fourier de uma função periódica

As funções periódicas não satisfazem a condição de existência da integral de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Se tentarmos calcular a transformada de uma função deste tipo pela expressão (2.2), vamos chegar a resultados totalmente sem sentidos:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Esta integral pode ser separada em infinitas outras sobre cada período:

$$F(f) = \dots + \int_{-T_0}^0 f(t) e^{-i2\pi ft} dt + \int_0^{T_0} f(t) e^{-i2\pi ft} dt + \dots$$

Para as frequências diferentes de múltiplos da fundamental estas integrais são nulas. Mas para estas frequências teremos uma soma que não converge para valor finito algum:

$$F(n/T_0) = \dots + T_0 F(n) + T_0 F(n) + \dots$$

A única saída é tentarmos, como já foi feito em outros exemplos, utilizar os conceitos da teoria das distribuições. Substituindo a expressão (4.5) na integral de Fourier, teremos:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{in2\pi Ft} e^{-i2\pi ft} dt$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(f-nF)t} dt$$

De acordo com a expressão (1.18):

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(f-nF) \quad (4.17)$$

A transformada de Fourier de uma função periódica é constituída de uma série de impulsos, localizados nas frequências múltipla da fundamental. A área de cada um destes impulsos

fornece o valor do coeficiente de Fourier na frequência onde o mesmo se encontra. As figuras (4.8) ilustram esta diferença.

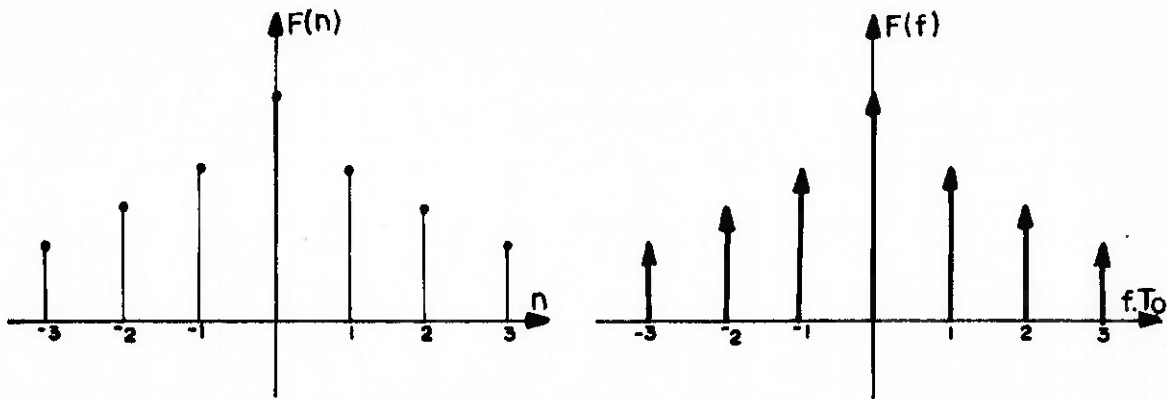


Figura (4.8)

Alguns autores afirmam que a série de Fourier é um caso particular de transformada de Fourier quando a função torna-se periódica. No entanto, esta afirmação não parece correta, visto que os valores dos coeficientes de Fourier são finitos e conhecidos. O mesmo não acontece com os valores da transformada de Fourier. Isto é uma consequência do fato de que, na série de Fourier, a integral é tomada somente sobre um período enquanto que, na transformada de Fourier, esta é tomada sobre todo o domínio do tempo.

A função original $f(t)$ pode ser obtida pela transformada inversa substituindo-se (4.17) em (2.1). Se procedermos desta maneira, chegaremos à expressão (4.5).

4.5 - Funções periódicas no domínio da frequência

Dada uma função periódica no domínio da frequência, de período F_0 , a mesma pode ser representada por uma soma de harmônicos da seguinte forma:

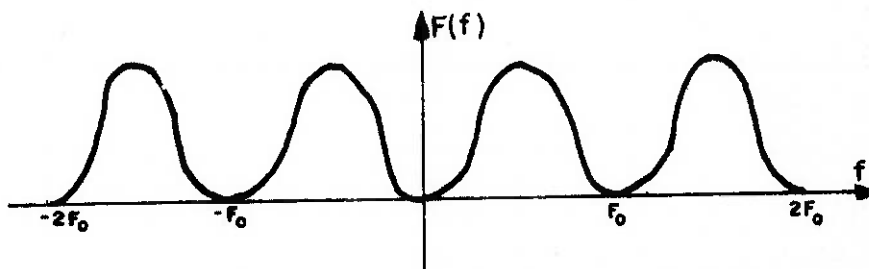


Figura (4.9)

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-i2\pi f k T} \quad (4.18)$$

onde: $T = \frac{1}{F_0}$ (4.19)

é chamado de período fundamental.

Os coeficientes de Fourier no domínio do tempo, $f(k)$, são dados por:

$$f(k) = \frac{1}{F_0} \int_0^{F_0} F(f) e^{i2\pi f k T} df \quad (4.20)$$

A transformada inversa de uma função periódica no domínio da frequência é constituída por uma série de impulsos, nos instantes $1/F_0$. A área de cada impulso fornece o valor do coeficiente de Fourier, $f(k)$, neste instante.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \delta(t - kT) \quad (4.21)$$

Nas figuras (4.10) apresentamos as duas representações da função no domínio do tempo.

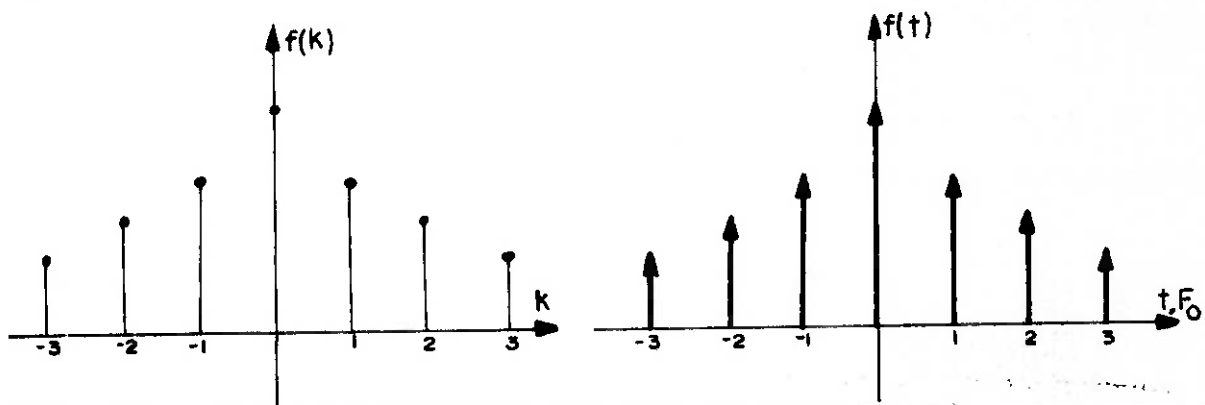


Figura (4.10)

A função $F(f)$ pode ser obtida substituindo-se a expressão (4.21) em (2.2). Com isto chegaremos à expressão (4.18).

4.6 - Transformada de Fourier de uma série de impulsos:

Consideremos a série de impulsos no domínio do tempo:

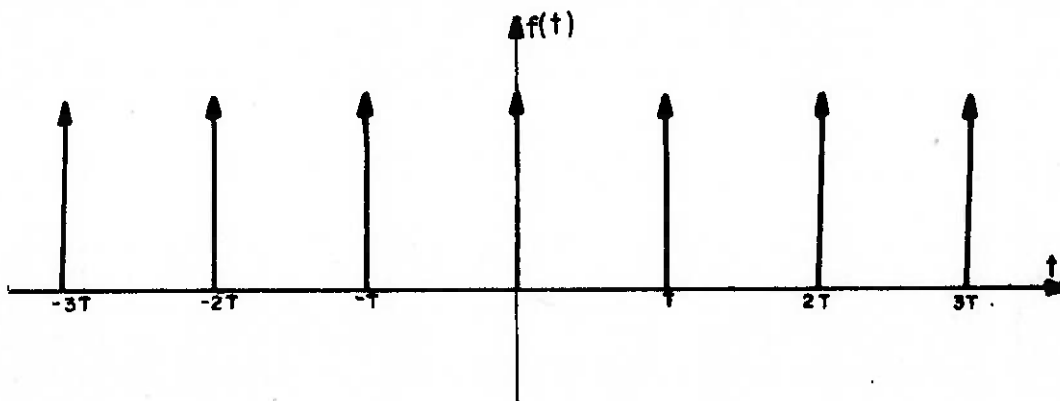


Figura (4.11)

A mesma será representada por $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (4.22)$$

Como a série de impulsos é uma função periódica, de terminemos os seus coeficientes de Fourier $F(n)$ e, a seguir, es crevemos:

$$F(f) = \left[\delta_T(t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(f-nF) \quad (4.23)$$

Como o período da função é T :

$$F = 1/T$$

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{3T/2} e^{-i2\pi nt/T} \delta(t-kT) dt$$

$$F(n) = \frac{1}{T} e^{-i2\pi nk}$$

qualquer que seja o intervalo de integração tomado.

Levando em conta a periodicidade das funções seno e cosseno:

$$e^{-i2\pi nk} = e^0 = 1$$

$$F(n) = \frac{1}{T}$$

$$F(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-nF)$$

$$F(f) = \frac{1}{T} \delta_F(f) \quad (4-24)$$

A transformada de Fourier de uma série de impulsos unitários, localizados nos múltiplos de T , é também uma série de impulsos, localizados nas frequências múltiplas de $1/T$, com áreas $1/T$.

Como consequência da propriedade do escalonamento, quanto mais próximos estiverem os impulsos no domínio do tempo, mais afastados eles estarão no domínio da frequência e vice-versa.

Analogamente, pode-se demonstrar que a transformada inversa de uma série de impulsos unitários, espaçados de F , é também uma série de impulsos, localizados nos múltiplos de $1/F$, com áreas $1/F$.

Podemos então estabelecer os dois pares de transformadas:

$$\delta_T(t) \stackrel{F}{=} \frac{1}{T} \delta_F(f) \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{F} \delta_T(t) \stackrel{F}{=} \delta_F(f) \quad (4.26)$$

CAPÍTULO 5

CONVOLUÇÃO E CORRELAÇÃO

São apresentadas neste capítulo a convolução e a correlação de funções, bem como os diversos teoremas a elas relacionados. Muitos dos resultados aqui obtidos serão utilizados na apresentação dos capítulos seguintes.

5.1 - Convolução

Dadas duas funções $x(t)$ e $h(t)$ no domínio do tempo chama-se de convolução de $x(t)$ com $h(t)$ a função $y(t)$ dada pela equação:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (5.1)$$

A mesma é simbolicamente representada por:

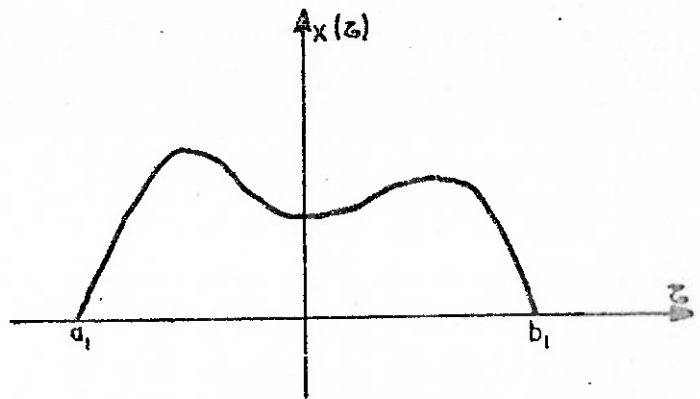
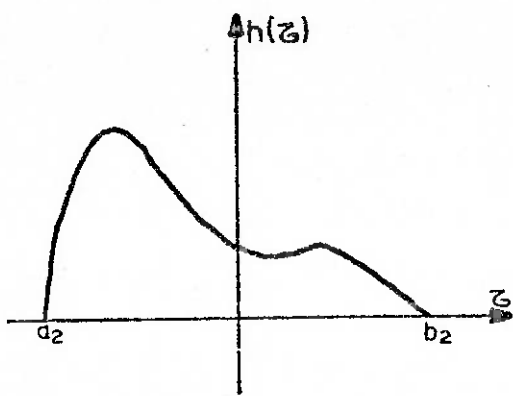
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.2)$$

Este tipo de integral aparece frequentemente na análise de sistemas lineares. No entanto, este conceito pode ser ilustrado graficamente da seguinte maneira:

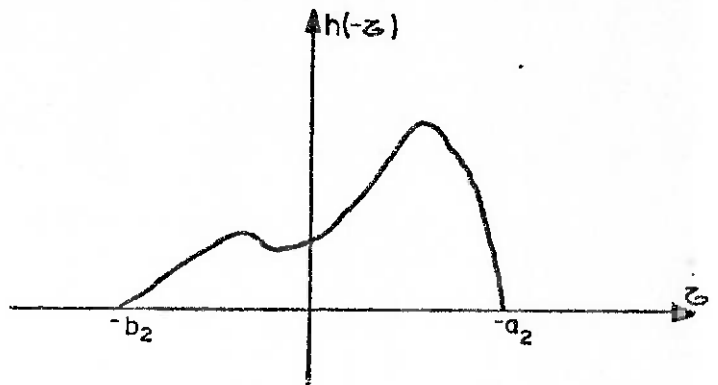
Dada duas funções $x(\tau)$ e $h(\tau)$:

- 1º) Tomemos a imagem de $h(\tau)$ com relação ao eixo das ordenadas obtendo $h(-\tau)$: esta operação é chamada de reflexão.
- 2º) Desloquemos a função refletida de t : deslocamento.
- 3º) Multipliquemos as funções $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$: multiplicação.
- 4º) Calculemos a área da função obtida da multiplicação de $-\infty$ a $+\infty$: integração.

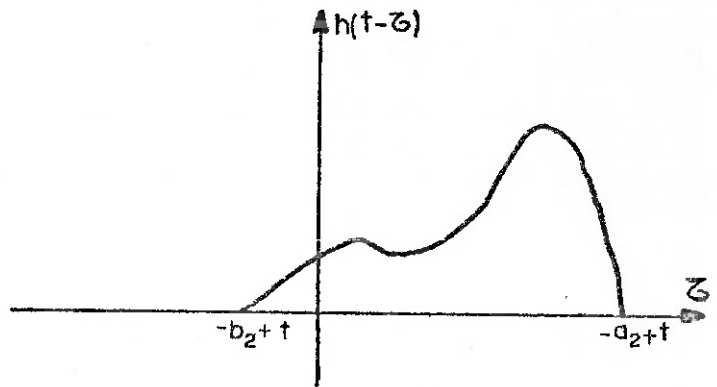
Os passos de 1 a 4 são repetidos para cada valor de t , obtendo-se $y(t)$. As figuras (5.1) ilustram estas passagens.



- 1º Passo: reflexão



- 2º Passo: deslocamento



- 3º Passo: multiplicação

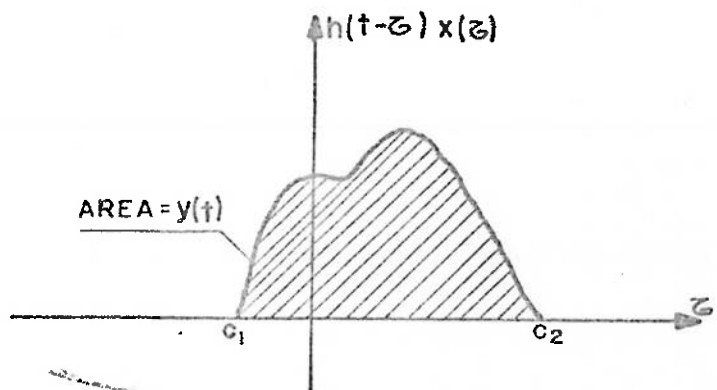


Figura (5.1)

O 4º passo consiste em se calcular a área da função $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$ entre c_1 e c_2 . Basta que uma das funções tenha duração finita para que o intervalo de integração também seja finito.

$$y(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (5.3)$$

Os passos 2, 3, 4 são repetidos para cada valor de t .

5.2 - Intervalo de duração e limites de integração

No caso em que as duas funções são de duração finita, a convolução também é de duração finita. No exemplo da figura (5.1) é fácil perceber que:

$$y(t) = 0 \begin{cases} t \geq b_2 + b_1 \\ t \leq a_2 + a_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

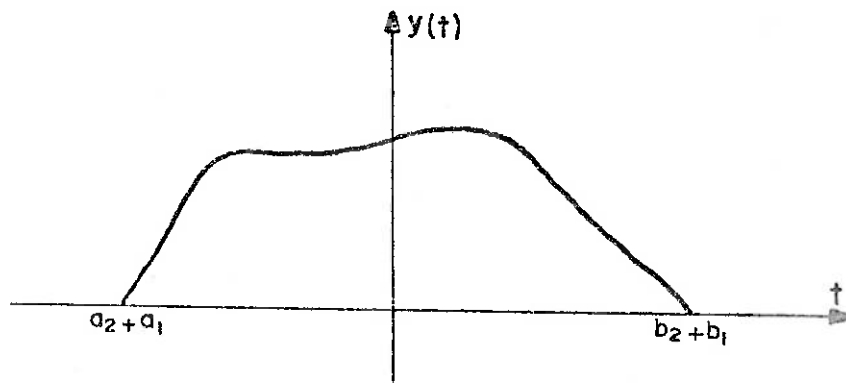


Figura (5.2)

Além disso, para cada valor de t dentro do intervalo (a_2+a_1, b_2+b_1) , os limites de integração da expressão (5.3) são dados por:

$$c_1 = \text{Maior } (-b_2+t, a_1) \quad (5.5)$$

$$c_2 = \text{Menor } (-a_2+t, b_1) \quad (5.6)$$

Observemos que os limites de integração podem variar com o parâmetro t .

Exemplo 5.1

Determinar a convolução das funções:

$$h(t) = 1 \quad t \geq 0$$

$$x(t) = \text{sen}(t) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

As duas funções estão nas figuras (5.3).

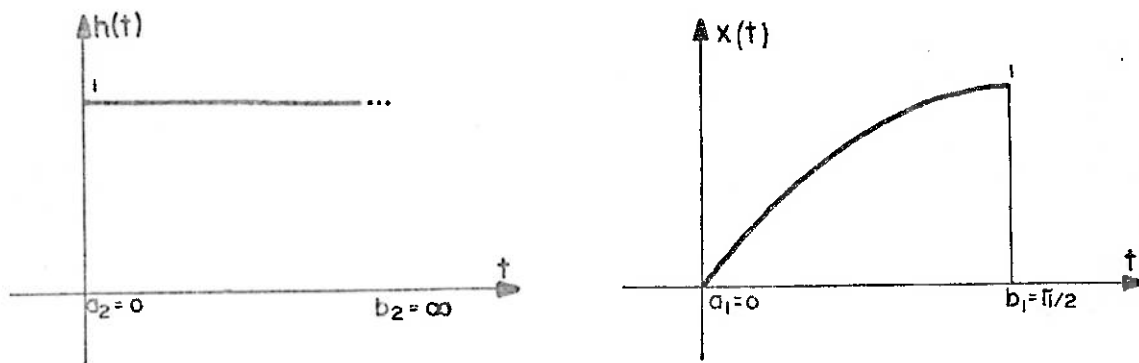


Figura (5.3)

O intervalo de duração de convolução é dado por:

$$y(t) \neq 0 \quad \text{para} \quad (a_2 + a_1 < t < b_2 + b_1)$$

$$y(t) \neq 0 \quad \text{para} \quad (0 < t < \infty)$$

Os limites de integração para cada valor de t são:

$$c_1 = \text{Maior}(-b_2 + t, a_1) = \text{Maior}(-\infty + t, 0) = 0$$

$$c_2 = \text{Menor}(-a_2 + t, b_1) = \text{Menor}(+t, \pi/2)$$

$$c_2 = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ \pi/2 & t \geq \pi/2 \end{cases}$$

Substituindo em (5.3)

$$y(t) = \int_0^t \text{sen}(\tau) \, d\tau \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$y(t) = \int_0^{\pi/2} \text{sen}(\tau) d\tau \quad t \geq \pi/2$$

$$y(t) = -\cos(\tau) \Big|_0^t = -\cos(t) + \cos(0) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$y(t) = 1 - \cos(t) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$y(t) = -\cos(\tau) \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1 \quad t \geq \pi/2$$

A figura (5.4) ilustra o resultado da convolução. O mesmo resultado seria obtido se os passos de 1 a 4 fossem realizados sobre a função $x(t)$.

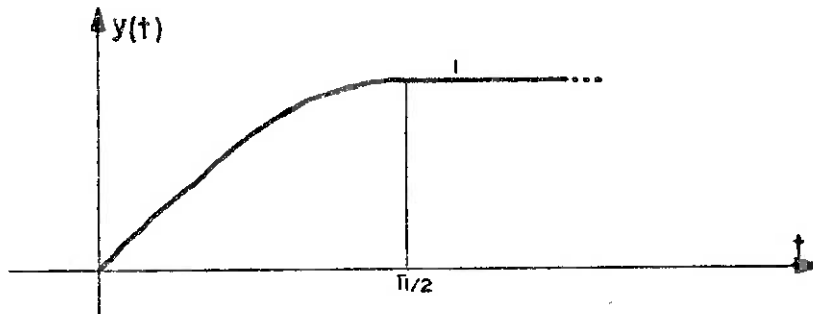


Figura (5.4)

Exemplo (5.2)

Determinar a convolução das funções:

$$x(t) = p(t)$$

$$h(t) = p(t)$$

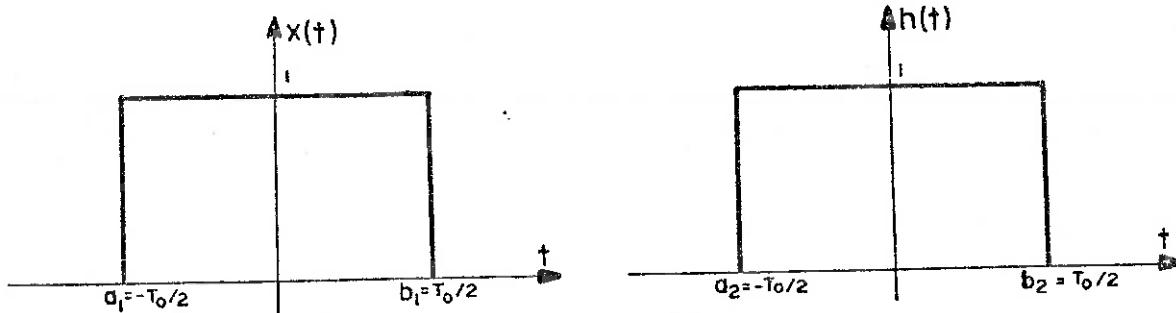


Figura (5.5)

O intervalo de duração da convolução é dado por:

$$y(t) \neq 0 \quad \text{para} \quad (-T_0 < t < T_0)$$

e para cada valor de t os limites de integração da equação (5.3) serão:

$$c_1 = \text{Maior}(-b_2+t, a_1) = \text{Maior}\left(\frac{T_0}{2}+t, \frac{T_0}{2}\right)$$

$$c_1 = \begin{cases} -\frac{T_0}{2}+t & 0 \leq t \leq T_0 \\ -\frac{T_0}{2} & -T_0 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$c_2 = \text{Menor}(-a_2+t, b_1) = \text{Menor}\left(\frac{T_0}{2}+t, \frac{T_0}{2}\right)$$

$$c_2 = \begin{cases} -\frac{T_0}{2}+t & -T_0 \leq t \leq 0 \\ -\frac{T_0}{2} & 0 \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

Substituindo em (5.3):

$$y(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{c_1}^{c_2} d\tau = \tau \Big|_{c_1}^{c_2}$$

1º caso: $0 \leq t \leq T_0$

$$y(t) = \tau \Big|_{-\frac{T_0}{2}+t}^{\frac{T_0}{2}} = T_0 - t$$

2º caso: $-T_0 \leq t \leq 0$

$$y(t) = \tau \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}+t} = T_0 + t$$

A figura (5.6) ilustra o resultado da convolução:

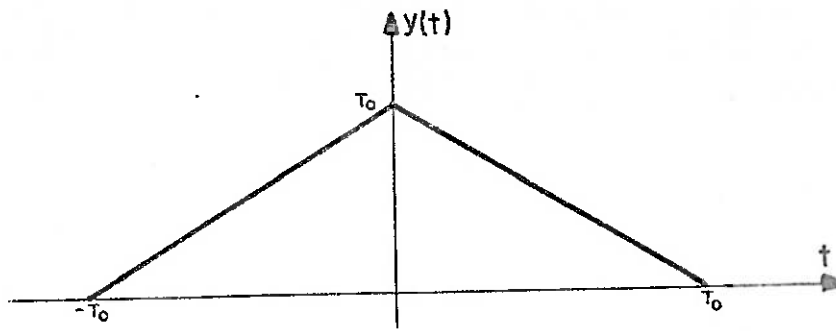


Figura (5.6)

5.3 - Convolução envolvendo funções delta

Dadas as funções:

$$x(t) = \delta(t-a) \quad \text{e} \quad h(t)$$

A convolução das duas será dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-a) h(t-\tau) d\tau$$

De acordo com (1.5)

$$y(t) = h(t-a)$$

A convolução de uma função qualquer com um impulso na abscissa "a", corresponde a deslocar esta função para a abscissa "a":

Isto pode ser representado simbolicamente pela relação abaixo:

$$h(t) * \delta(t-a) = h(t-a) \quad (5.7)$$

As figuras (5.7) ilustram exemplos da relação (5.7).

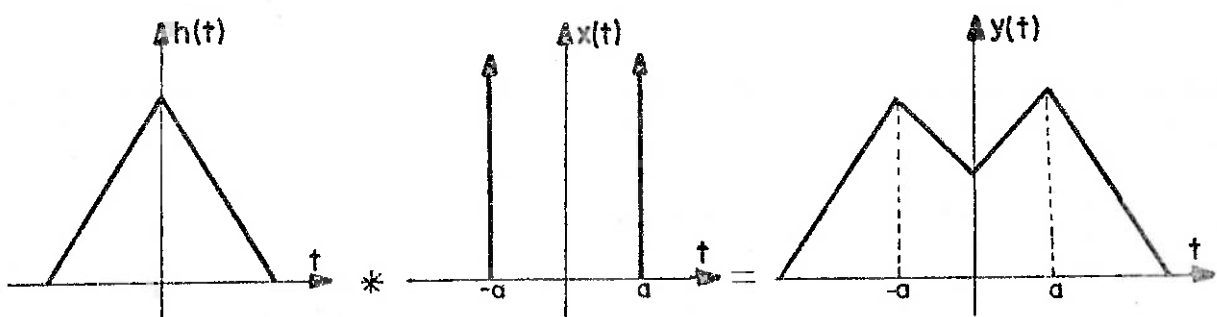
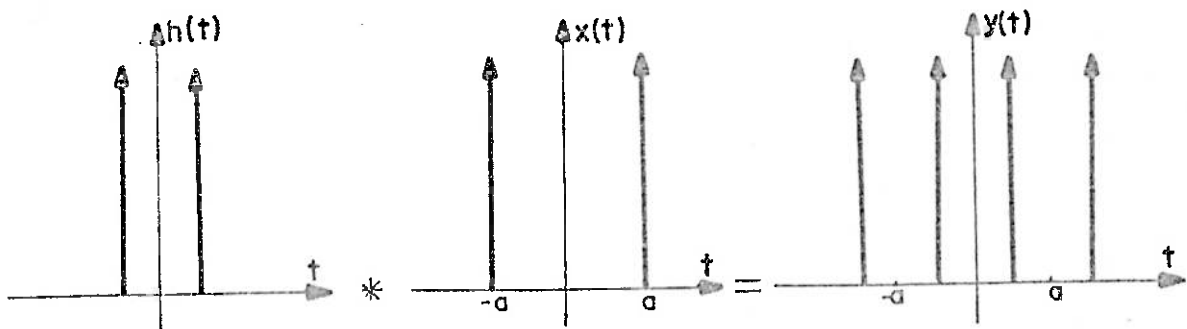
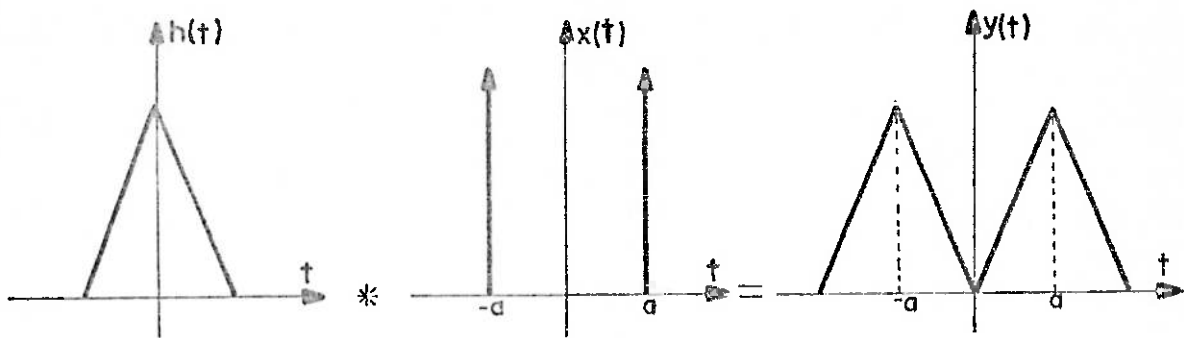
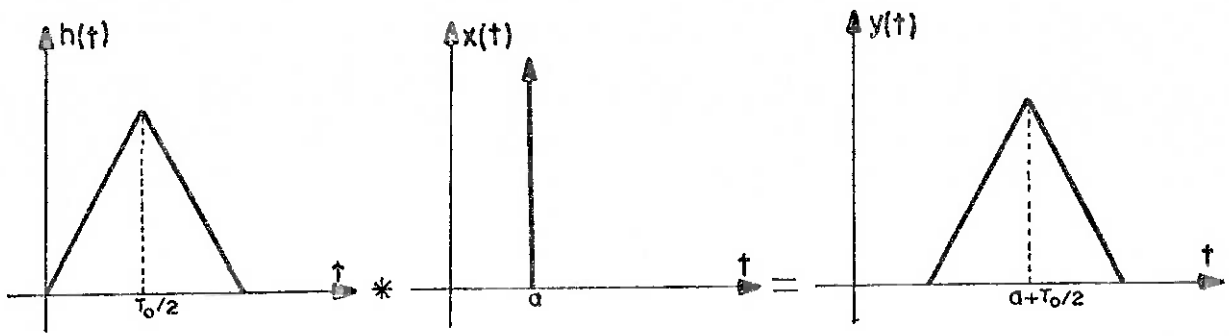


Figura (5.7)

5.4 - Convolução envolvendo funções periódicas

Consideremos apenas o caso de interesse em que uma delas é periódica e a outra não.

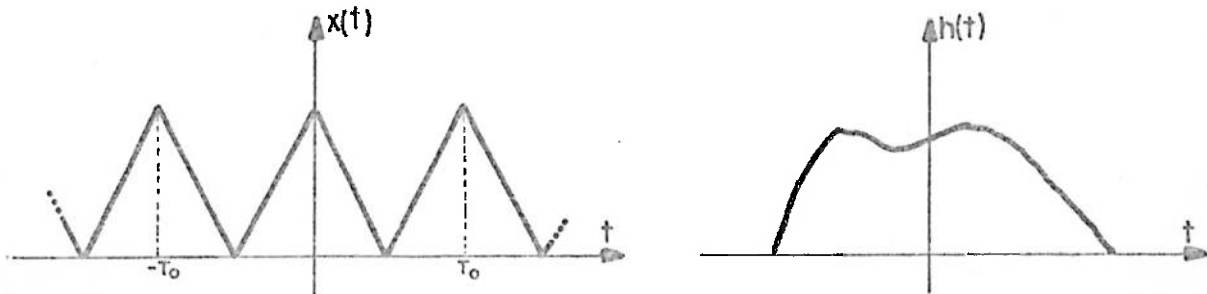


Figura (5.8)

A convolução entre as duas funções é dada pela mesma expressão (5.1).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

É fácil verificar que, neste caso, a função é periódica com o mesmo período T_0 :

$$y(t+T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t+T_0-\tau) d\tau \quad (5.8)$$

Fazendo $\tau - T_0 = \tau'$ e $\tau = \tau' + T_0$

$$y(t+T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau' + T_0) h(t - \tau') d\tau'$$

Mas, como a função $x(t)$ é periódica com o mesmo período T_0 :

$$y(t+T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau') h(t - \tau') d\tau'$$

$$y(t+T_0) = y(t) \quad (5.9)$$

Se a função periódica é $h(t)$, a mesma conclusão pode

ser tirada diretamente em (5.8).

Se a função $h(t)$ for limitada no intervalo (a,b) , os limites da integral podem ser estabelecidas utilizando as expressões (5.5) e (5.6).

$$c_1 = \text{Maior } (-b+t, -\infty) = t-b$$

$$c_2 = \text{Menor } (-a+t, +\infty) = t-a$$

$$y(t) = \int_{t-b}^{t-a} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (5.10)$$

5.5 - Teorema da convolução

Consideremos a função de convolução:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

e calculemos sua transformada de Fourier.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-i2\pi ft} dt$$

Mudando a ordem de integração:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-i2\pi ft} dt \right] d\tau$$

Mas, de acordo com (3.5)

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} H(f) d\tau$$

$$Y(f) = H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

O par de transformada que representa a convolução será então:

$$x(t) * h(t) \stackrel{F}{=} X(f) \cdot H(f) \quad (5.11)$$

Este é o teorema da convolução no domínio do tempo. O mesmo afirma que a convolução, no domínio do tempo, de duas funções equivale, no domínio da frequência, à multiplicação de suas transformadas de Fourier. A função de convolução pode ser então obtida pelas expressões:

$$X(f) = F [x(t)] \quad (5.12-a)$$

$$H(f) = F [h(t)] \quad (5.12-b)$$

$$Y(f) = X(f) H(f) \quad (5.12-c)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = F^{-1} [Y(f)] \quad (5.12-d)$$

O teorema da convolução é válido mesmo que uma das funções seja periódicas. Neste caso as expressões podem ser simplificadas. Dadas as funções $x(t)$ ou $h(t)$ e $y(t)$, periódicas, suas transformadas são dadas por:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n) \delta(f-nF) \quad (5.13-a)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \delta(f-nF) \quad (5.13-b)$$

Substituindo estas na expressão (5.12-c)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n) \delta(f-nF) = H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \delta(f-nF)$$

Em cada frequência múltipla da fundamental, o coeficiente de Fourier da convolução é dado por:

$$Y(n) = H(n/T_0) X(n)$$

A função de convolução pode ser obtida calculando - se a transformada inversa de (5.13-a) o que é equivalente a:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}}$$

As expressões (5.14) resumem as operações necessárias para o cálculo da convolução, via domínio da frequência, quando uma das funções é periódica:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (5.14-a)$$

$$X(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} dt \quad (5.14-b)$$

$$Y(n) = X(n) H(n/T_0) \quad (5.14-c)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}} \quad (5.14-d)$$

Analogamente, como foi feito no domínio do tempo, pode ser demonstrado o teorema da convolução no domínio da frequência. Este afirma que a convolução de duas funções no domínio da frequência equivale, no domínio do tempo, a multiplicação de suas transformadas inversas.

$$x(t) h(t) \stackrel{F}{=} X(f) * H(f) \quad (5.15)$$

Exemplo (5.3)

Determinar a transformada de Fourier da função:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq T_0 \\ t+T_0 & -T_0 \leq t \leq 0 \\ T_0-t & 0 \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

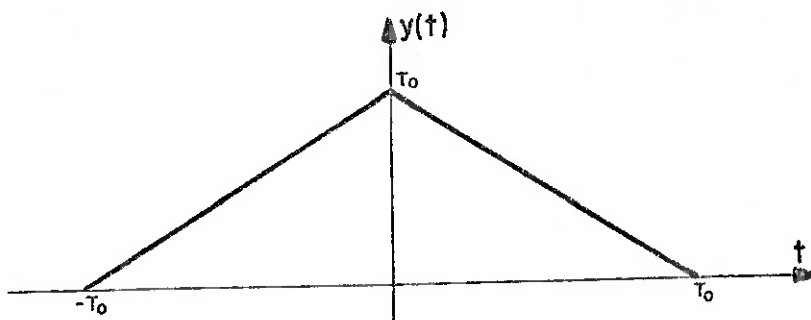


Figura (5.9)

Conforme foi visto no exemplo 5.2:

$$y(t) = p(t) * p(t)$$

Logo, de acordo com (5.12-c)

$$Y(f) = P(f) \cdot P(f)$$

$$Y(f) = \left(\frac{\text{sen } 2\pi f T_0}{2\pi f} \right)^2$$

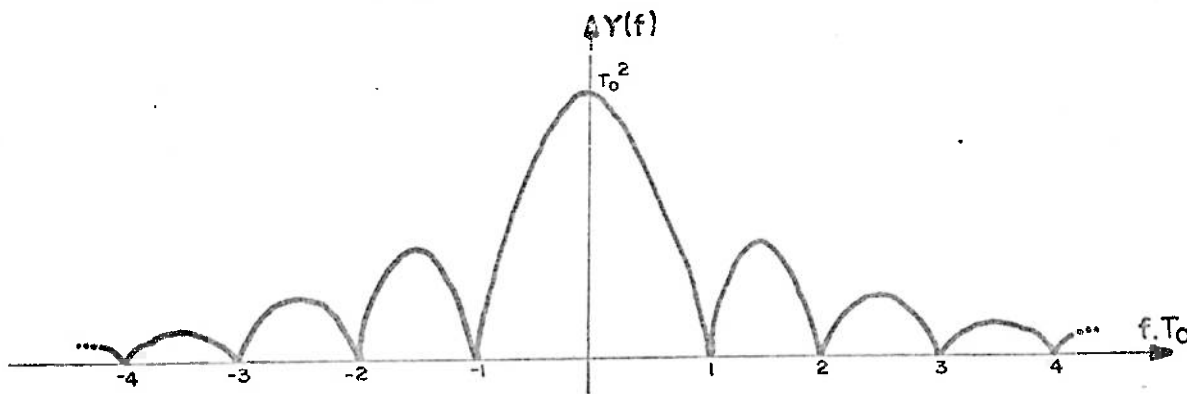


Figura (5.10)

5.6 - Correlação

Uma outra integral de grande importância é a integral de correlação:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \quad (5.16)$$

A mesma é simbolicamente representada por:

$$z(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (5.17)$$

A integral de correlação pode ser interpretada graficamente de maneira análoga à integral de convolução. A única diferença é a de que não há necessidade da reflexão.

As figuras (5.11) ilustram as passagens necessárias para o cálculo da integral de correlação:

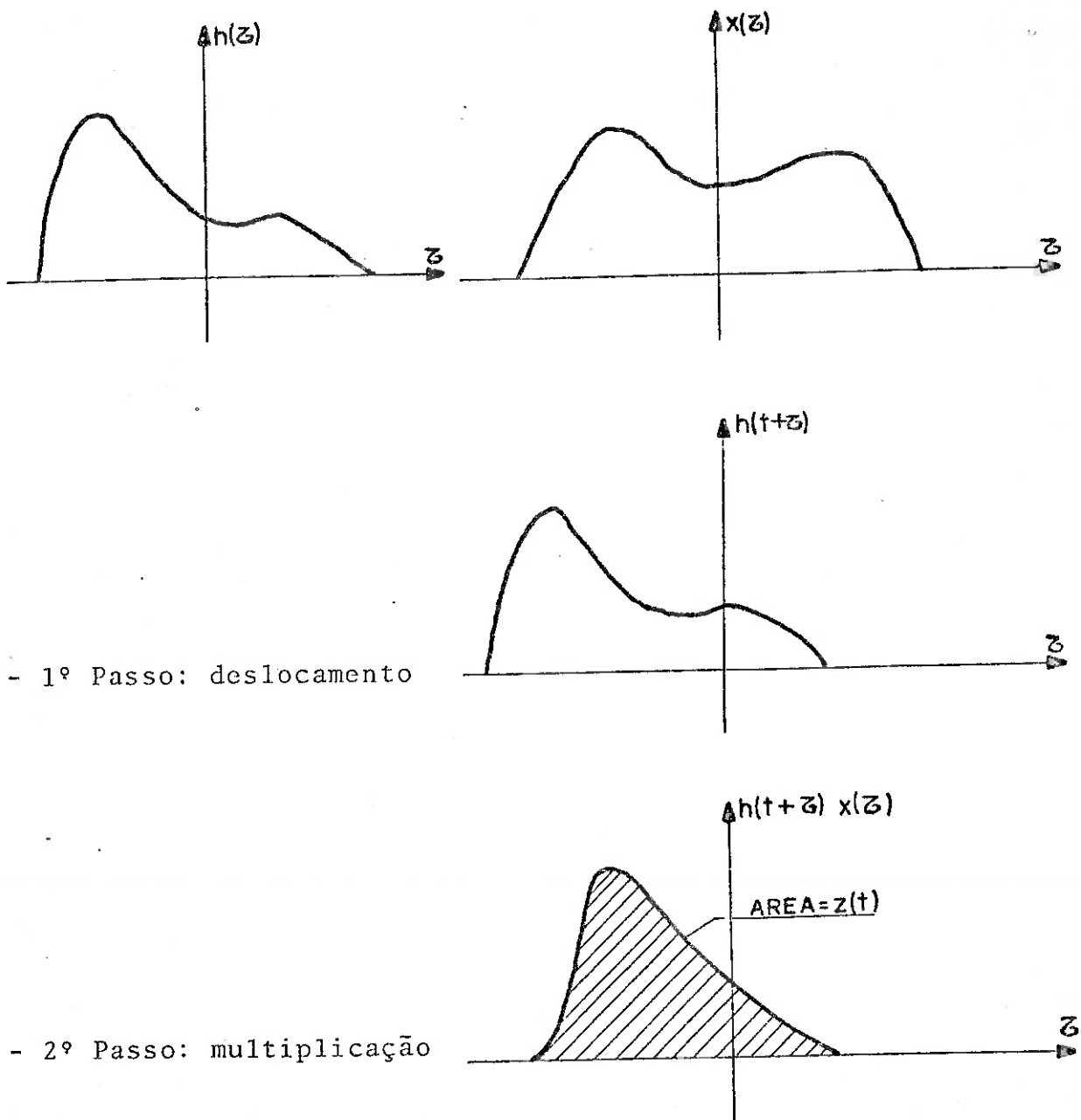


Figura (5.11)

3º Passo - Integração:

$$z(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \quad (5.18)$$

Os passos 1, 2, 3 são repetidos para cada valor de t . Um caso particular da correlação ocorre quando $x(t)$ e $h(t)$ apresentam a mesma função. Neste, a integral da equação (5.16) é chamada de autocorrelação e representado por $u(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(t+\tau) d\tau \quad (5.19)$$

5.7 - Intervalo de duração e limites de integração

Analogamente ao caso da convolução, a correlação de duas funções de duração finita também é uma função de duração finita. Observando as figuras (5.11) é fácil perceber que:

$$z(t) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t \geq b_2 + a_1 \\ t \leq -(a_2 + b_1) \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Para cada valor de t , dentro do intervalo $(a_2 + b_1, b_2 + a_1)$ os limites de integração da expressão (5.18) são dados por:

$$c_1 = \text{Máximo} (a_2 - t, a_1) \quad (5.21)$$

$$c_2 = \text{Mínimo} (b_2 - t, b_1) \quad (5.22)$$

Observemos que, como no caso da convolução, os limites de integração podem variar com o parâmetro t .

5.8 - Correlação envolvendo funções periódicas

Consideremos apenas o caso de interesse em que as duas funções são periódicas.

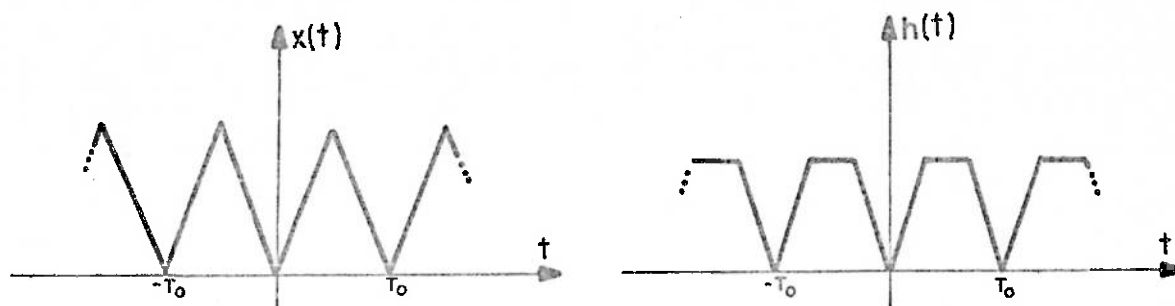


Figura (5.12)

Neste caso a correlação não pode ser dada por (5.16). Definimos então a mesma para duas funções periódicas pela expressão:

$$z(t) = \int_0^{T_0} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \quad (5.23)$$

Neste caso a correlação também é periódica com o mesmo período T_0 .

$$z(t+T_0) = z(t) \quad (5.24)$$

5.9 - Teorema da correlação

Calculemos a transformada da função $z(t)$:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \right] e^{-i2\pi ft} dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t+\tau) e^{-i2\pi ft} dt \right] d\tau$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) H(f) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$$Z(f) = X(-f) \cdot H(f)$$

Considerando que $x(t)$ é real, o par de transformadas para a correlação será então:

$$x(t) \otimes h(t) \stackrel{F}{=} X^*(f) H(f) \quad (5.25)$$

Este é o teorema da correlação no domínio do tempo. O mesmo afirma que a correlação de duas funções, no domínio do tempo, corresponde à multiplicação, no domínio da frequência, da transformada da função a ser deslocada pelo complexo conjugado da transformada da outra função. A função de correlação pode então ser obtida pelas expressões:

$$X(f) = F [x(t)] \quad (5.26-a)$$

$$H(f) = F [h(t)] \quad (5.26-b)$$

$$Z(f) = X^*(f) H(f) \quad (5.26-c)$$

$$z(t) = x(t) \otimes h(t) = F^{-1} [Z(f)] \quad (5.26-d)$$

A aplicação da expressão (5.26-c) para correlação envolvendo duas funções periódicas não é adequada pois do lado direito da igualdade teríamos um produto de duas distribuições, o que não é definido.

O problema é contornado se percebermos que a correlação das duas funções periódicas das figuras (5.12) é idêntica à correlação das duas funções das figuras (5.13).

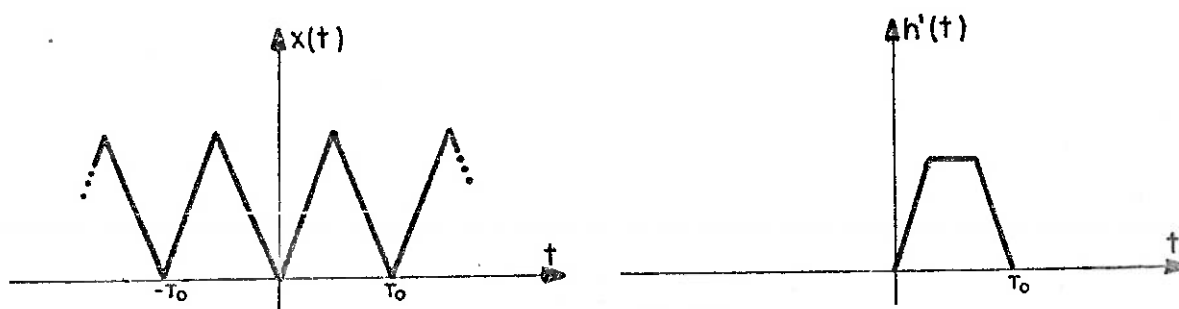


Figura (5.13)

Mesmo que uma delas seja finita, o resultado é o mesmo, caso ambas sejam periódicas.

Para estas funções, podemos aplicar as expressões (5.26-c) o que conduz à:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z(n) \delta(f-nF) = H'(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X^*(n) \delta(f-nF)$$

Para uma frequência múltipla da fundamental temos:

$$Z(n) = H'(n/T_0) X^*(n)$$

Mas, segundo (4.29)

$$H'(n/T_0) = H(n)T_0$$

Logo:

$$Z(n) = H(n) X^*(n) T_0$$

Como a função de correlação é periódica, sua transformada de Fourier é dada por:

$$Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z(n) \delta(f-nF) \quad (5.27)$$

A função de correlação pode ser determinada calculando-se a transformada inversa de (5.27) o que é equivalente a:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}}$$

As expressões (5.28) resumem as operações para o cálculo da correlação de duas funções periódicas via domínio da frequência.

$$X(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} dt \quad (5.28-a)$$

$$H(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} h(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} dt \quad (5.28-b)$$

$$Z(n) = T_0 X^*(n) H(n) \quad (5.28-c)$$

$$z(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}} \quad (5.28-d)$$

No caso de autocorrelação de uma função não periódica, a mesma pode ser obtida por:

$$X(f) = F [x(t)] \quad (5.29-a)$$

$$U(f) = |X(f)|^2 \quad (5.29-b)$$

$$u(t) = F^{-1} [U(f)] \quad (5.29-c)$$

A autocorrelação de uma função periódica pode ser obtida pelas expressões:

$$X(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} \quad (5.30-a)$$

$$U(n) = T_0 |X(n)|^2 \quad (5.30-b)$$

$$U(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U(n) \delta(f-n/T_0) \quad (5.30-c)$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}} \quad (5.30-d)$$

5.10 - Algumas propriedades das funções de convolução e de correlação

Utilizando as definições da convolução e da correlação dadas pelas suas integrais ou teoremas apresentados, podemos demonstrar as seguintes propriedades:

5.10.1 - A convolução é comutativa:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (5.31)$$

Neste caso, tanto faz deslocar a função $x(t)$ como $h(t)$.

5.10.2 - A correlação não é comutativa:

$$x(t) \otimes h(t) = h(-t) \otimes x(-t) \quad (5.32)$$

Observemos no teorema da correlação que, quando a função $h(t)$ é deslocada, sua transformada aparece multiplicada pelo complexo conjugado da transformada de $x(t)$ e vice versa.

5.10.3 - Correlação de funções pares:

A correlação de funções pares é comutativa e coincide com a convolução.

$$x(t) \otimes h(t) = h(-t) \otimes x(-t)$$

$$x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) = x(t) * h(t)$$

5.10.4 - A autocorrelação é par:

$$u(-t) = x(-t) \otimes x(-t)$$

Mas, segundo (5.32)

$$x(-t) \otimes x(-t) = x(t) \otimes x(t)$$

Logo:

$$u(-t) = u(t) \quad (5.33)$$

CAPÍTULO 6

TRUNCAMENTO E DISCRETIZAÇÃO DE FUNÇÕES

Dada uma função $h(t)$, no domínio do tempo, podemos obter sua representação $H(f)$, no domínio da frequência, através da transformada de Fourier dada pela expressão (2.2). Analogamente dada uma função $H(f)$, no domínio da frequência, podemos obter sua representação $h(t)$, no domínio do tempo, através da transformada inversa de Fourier dada pela expressão (2.1).

A transformada discreta de Fourier não é nada mais na da menos que um processo utilizado para resolver estas integrais numericamente. Isto é desejável em situações onde, ao invés de conhecermos uma destas funções, conhecemos apenas uma sequência finita de pontos representativa da mesma e desejamos obter uma outra sequência de pontos que se espera seja representativa de sua transformada ou de sua transformada inversa.

Uma outra situação onde é vantajoso o emprego de um método numérico acontece quando estas integrais são excessivamente trabalhosas e desejamos apenas conhecer valores das mesmas em pontos discretos.

Em qualquer um dos dois casos supomos que a sequência conhecida foi obtida da discretização de uma função, que não necessitamos conhecer. Espera-se então que o resultado de qualquer uma destas integrações numéricas seja também uma discretização da transformada ou da transformada inversa.

No entanto, se esta discretização não for feita com certos cuidados, os resultados encontrados poderão diferir completamente da realidade.

Um outro problema surge quando se trata de funções periódicas. No cálculo da transformada de Fourier destas funções, a integral deve ser tomada sobre todo o domínio do tempo. No entanto, para utilizarmos uma sequência finita representativa da mesma, somos obrigados a truncar esta função em um intervalo finito. Se este truncamento não for realizado com certos critérios, os resultados encontrados novamente poderão diferir do esperado.

Neste capítulo apresentamos um estudo dos efeitos do truncamento de uma função periódica sobre sua transformada, bem como, os efeitos da discretização em um domínio sobre a representação da função no outro domínio.

6.1 - Truncamento de uma função periódica em um intervalo finito

Dada uma função periódica $f(t)$, fig. (6.1-a), para se calcular sua transformada de Fourier somos obrigados a realizar uma integração sobre todo o domínio do tempo. Com isto obtemos uma série de impulsos, fig. (6.2-a), localizados nos múltiplos da frequência fundamental. A área de cada impulso fornece o valor do coeficiente do Fourier nestas frequências.

Matematicamente o truncamento pode ser entendido como o produto da função periódica com o pulso retangular, fig. (6.1-b), com duração igual ao intervalo de truncamento. Assim obtemos a função $f_T(t)$, fig. (6.1-c), que posteriormente será discretizada

$$f_T(t) = f(t) \cdot p(t) \quad (6.1)$$

A transformada de Fourier da função truncada $F_T(f)$, fig. (6.2-c), pode ser obtida pela convolução da transformada $F(f)$ da função periódica com a transformada $P(f)$, fig. (6.2-b), do pulso retangular.

$$F_T(f) = F(f) * P(f) \quad (6.2)$$

De acordo com (4.17)

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(f-nF) \quad F = 1/T_0$$

e, conforme (2.13)

$$P(f) = T_c \frac{\text{sen} \pi f T_c}{\pi f T_c}$$

A convolução das duas transformadas é, de acordo com (5.7):

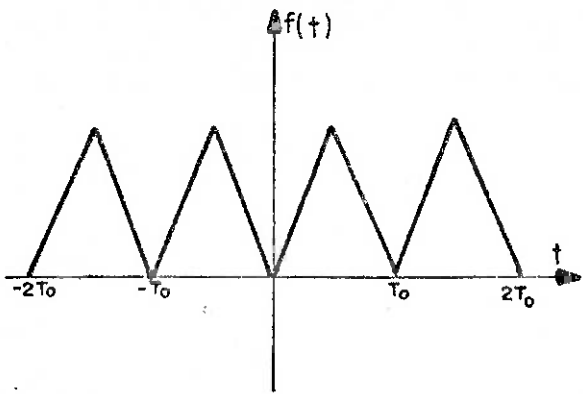


Figura (6.1-a)

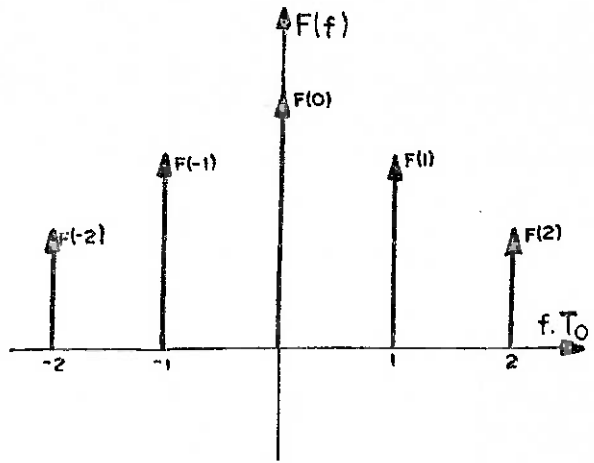


Figura (6.2-a)

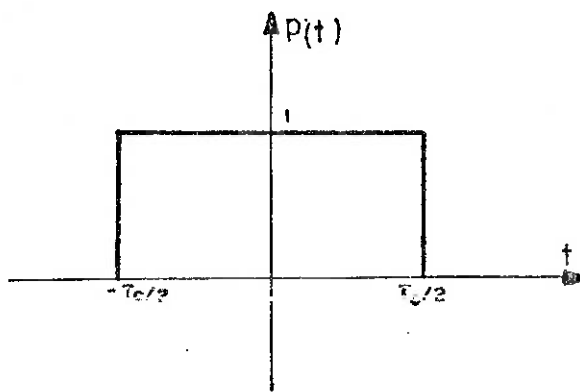


Figura (6.1-b)

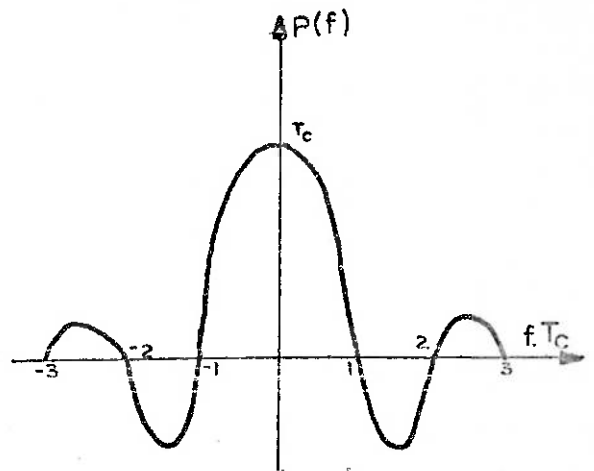


Figura (6.2-b)

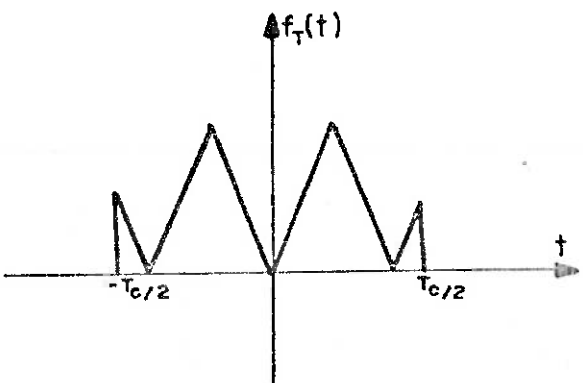


Figura (6.1-c)

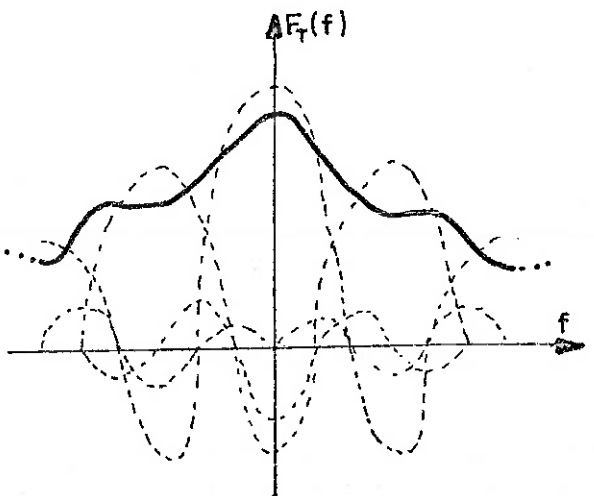


Figura (6.2-c)

$$F_T(f) = T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \frac{\text{sen} \pi T_c (f-nF)}{\pi T_c (f-nF)} \quad (6.3)$$

A transformada de Fourier de uma função periódica truncada é constituída de uma série de funções $P(f)$, com amplitudes $F(n)T_c$, centradas nas frequências múltiplas da fundamental.

Pelo fato da função $P(f)$ ser contínua, as informações estarão espalhadas em todo o domínio da frequência e não apenas em pontos discretos. Este efeito é chamado de "leakage".

A figura (6.2-b) mostra que a função $P(f)$ passa por zeros nos múltiplos do inverso do intervalo de truncamento. Portanto, se o intervalo de truncamento for diferente de um número inteiro de períodos, as informações nas frequências múltiplas da fundamental receberão contribuições das infinitas funções $P(f)$. Na fig. (6.3) mostramos este efeito para dois impulsos.

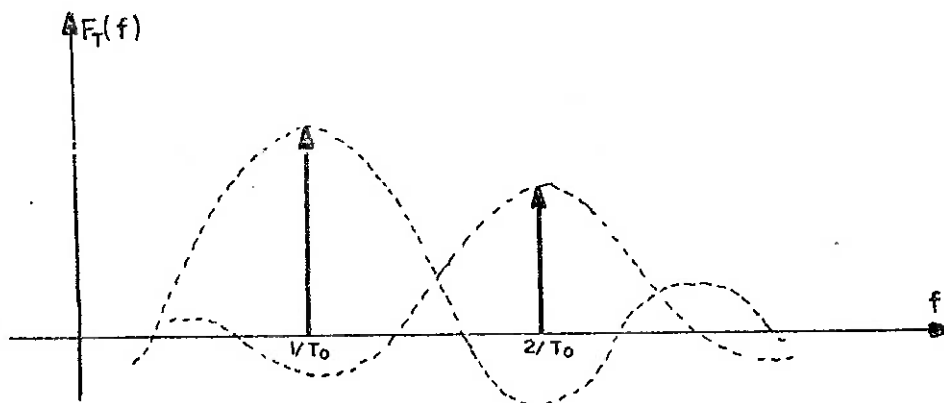


Figura (6.3)

Se o intervalo de truncamento for igual a um múltiplo inteiro de períodos, esta interferência não ocorrerá.

De fato, fazendo

$$T_c = mT_0$$

calculemos os valores da transformada nas frequências múltiplas do inverso do intervalo de truncamento

$$f = j/mT_0$$

$$F_T(j/mT_0) = mT_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \frac{\text{sen} \pi m T_0 (n/T_0 - j/mT_0)}{\pi m T_0 (n/T_0 - j/mT_0)}$$

$$F_T(j/mT_0) = mT_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \frac{\text{sen} \pi (mn - j)}{\pi (mn - j)} \quad (6.4)$$

Se m for inteiro, todos os termos da somatória serão nulos, exceto o termo:

$$n = j/m$$

Neste caso a somatória fornecerá:

$$F_T(j/mT_0) = mT_0 F(j/m) \quad (6.5)$$

As componentes da transformada, nas frequências múltiplas do inverso do intervalo de truncamento, são iguais aos coeficientes de Fourier nestas frequências multiplicados pelo intervalo de truncamento.

Se o intervalo de truncamento for igual a um período, estaremos exatamente obtendo a transformada de Fourier de uma função de duração finita. As informações nas frequências que são múltiplas da fundamental, da função periódica, fornecem os coeficientes de Fourier destas, multiplicados pelo período da função.

Isto pode ser observado fazendo-se m igual a unidade na expressão (6.5).

$$F_T(j/T_0) = T_0 F(j) \quad (6.6)$$

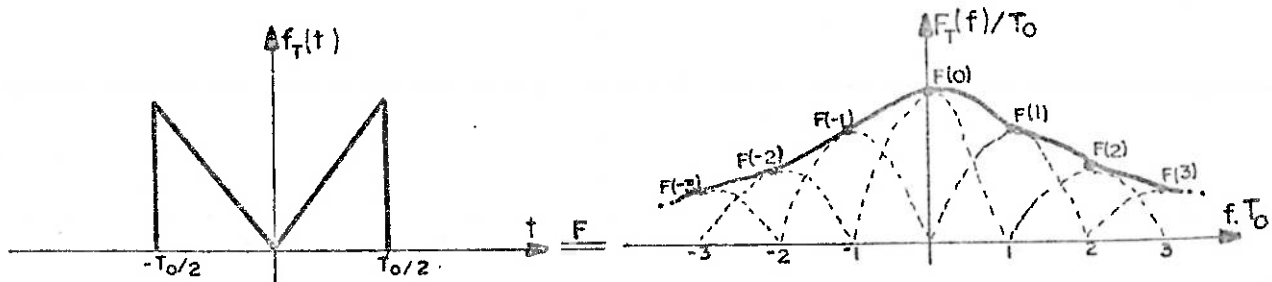


Figura (6.4)

Se o intervalo de truncamento for igual a dois períodos, as componentes nas frequências intermediárias às fundamentais serão nulas, pois os coeficientes de Fourier nestas frequências também são nulos. No entanto, nas frequências múltiplas da fundamental, os valores obtidos serão iguais ao do caso anterior multiplicados por dois.

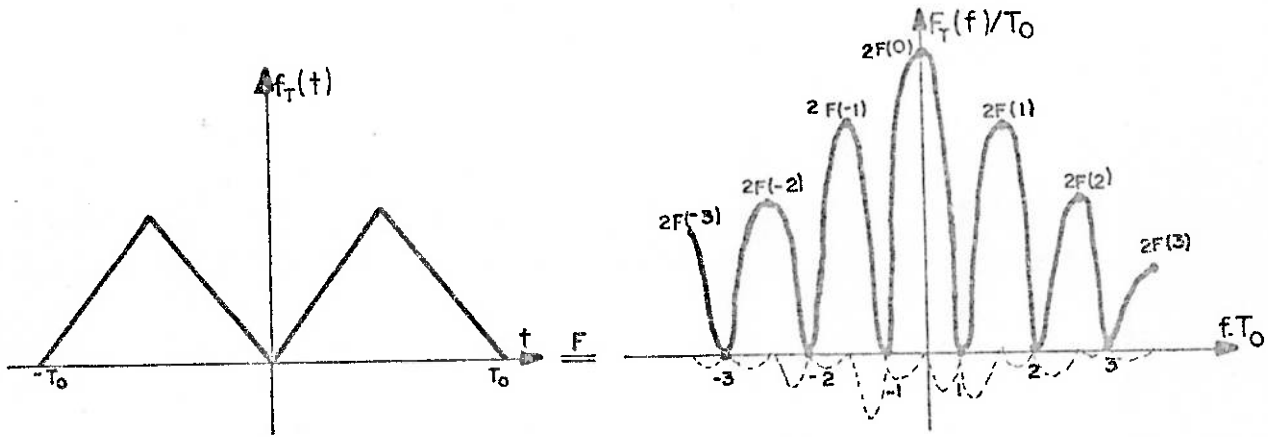


Figura (6.5)

No limite, quando o intervalo de truncamento tende para o infinito, a função $P(f)$ tende para um impulso, as informações se concentram na frequência fundamental, obtendo assim a transformada de uma função periódica.

De maneira análoga pode se demonstrar que o truncamento de uma função periódica no domínio da frequência provoca o espalhamento das informações no domínio do tempo.

6.2 - Transformada de Fourier de uma função harmônica truncada

Consideremos a cossenóide da fig. (6.6-a). Na fig. (6.6-b) representamos os seus coeficientes de Fourier e na fig. (6.6-c) a sua transformada de Fourier.

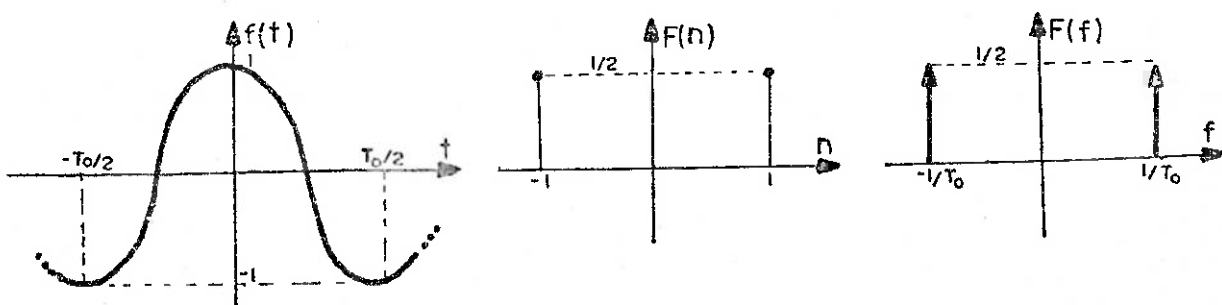


Figura (6.6)

O par de transformadas é dado pelas expressões:

$$f(t) = \cos 2\pi \frac{t}{T_0}$$

$$F(f) = \frac{1}{2} \delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)$$

Ao truncarmos a mesma, estaremos localizando duas funções $P(f)$ nos impulsos da figura (6.6-c).

O novo par de transformadas é dado pelas expressões:

$$f_T(f) = \begin{cases} \cos 2\pi \frac{t}{T_0} & |t| < T_c/2 \\ 0 & |t| > T_c/2 \end{cases} \quad (6.7-a)$$

$$F_T(f) = \frac{T_c}{2} \left[\frac{\text{sen} \pi T_c (f + 1/T_0)}{\pi T_c (f + 1/T_0)} + \frac{\text{sen} \pi T_c (f - 1/T_0)}{\pi T_c (f - 1/T_0)} \right] \quad (6.7-b)$$

e estão representados nas figuras (6.7)

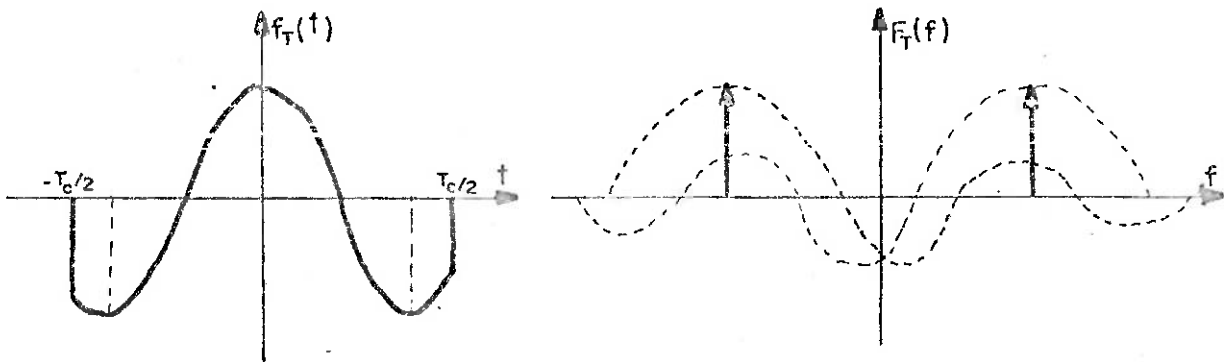


Figura (6.7)

Calculemos o valor da transformada em $+1/T_0$ no caso em que:

$$T_c = \frac{8}{3} T_0$$

$$F_T(1/T_0) = \frac{T_c}{2} \left[\frac{\text{sen} \frac{16\pi}{3}}{\frac{16\pi}{3}} + 1 \right]$$

A primeira parcela desta expressão representa a interferência da função $P(f)$ localizada na frequência $(-1/T_0)$.

6.3 - Discretização no domínio do tempo

Dada a função $h(t)$ da fig. (6.8-a), ao discretizarmos a mesma, obtemos a sequência $h(k)$ da fig. (6.8-b).

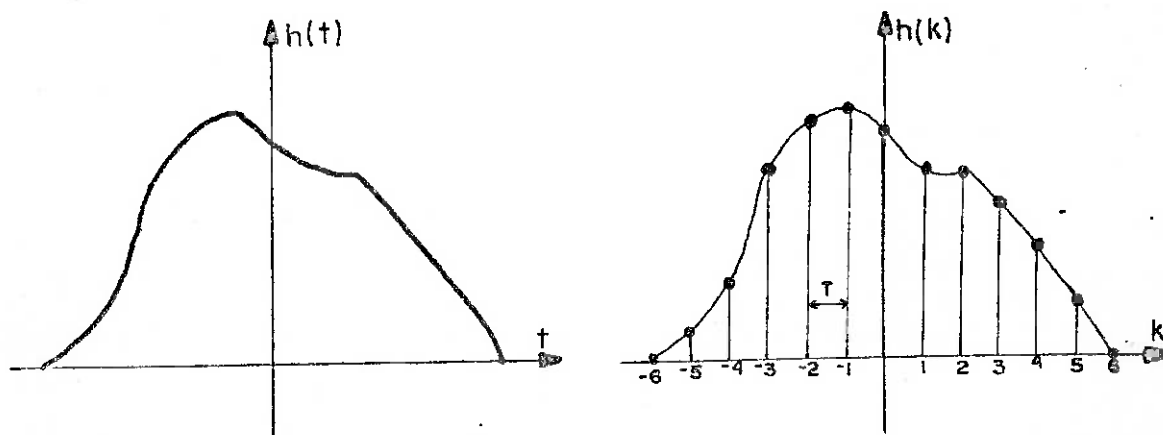


Figura (6.8)

Matematicamente, a discretização no domínio do tempo, pode ser entendida como o produto da função, fig. (6.9-a), pela série de impulsos da figura (6.9-b).

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t) \delta(t - kT) \quad (6.8)$$

Com isso, ao invés de uma função contínua, obtemos uma série de impulsos $\hat{h}(t)$, fig. (6.9-c), espaçados do intervalo de discretização. A área de cada impulso fornece o valor da função onde este se encontra.

Estes impulsos não são os pontos discretos da função, fig. (6.8-b), mas representam os mesmos. Oportunamente estabeleceremos as diferenças entre estas duas representações.

No domínio da frequência este produto é equivalente à convolução de suas transformadas. A transformada $H(f)$, da função $h(t)$, é dada na fig. (6.10-a) e na fig. (6.10-b) representamos a transformada $\delta_F(f)$ da série de impulsos. Esta é uma nova série de impulsos dados por:

$$\delta_F(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T)$$

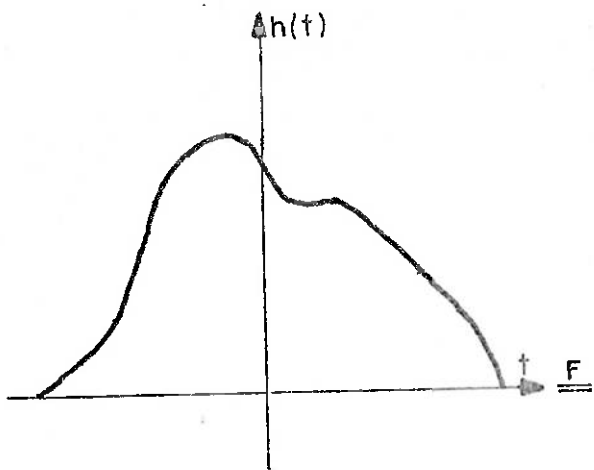


Figura (6.9-a)

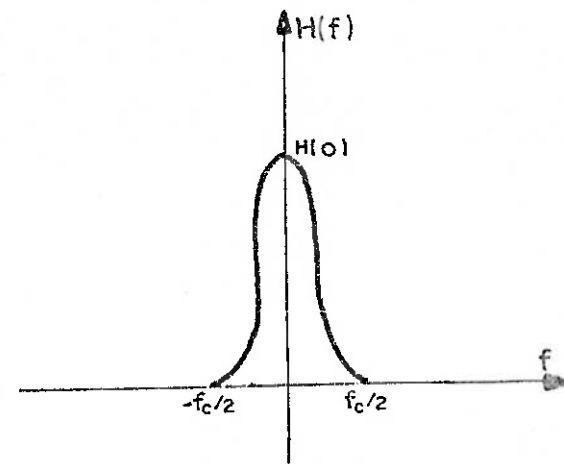


Figura (6.10-a)

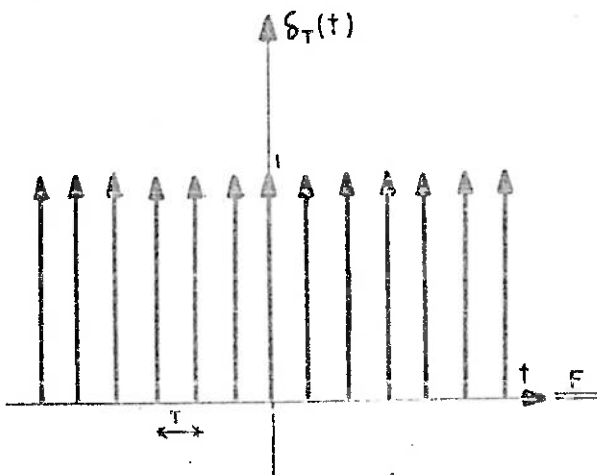


Figura (6.9-b)

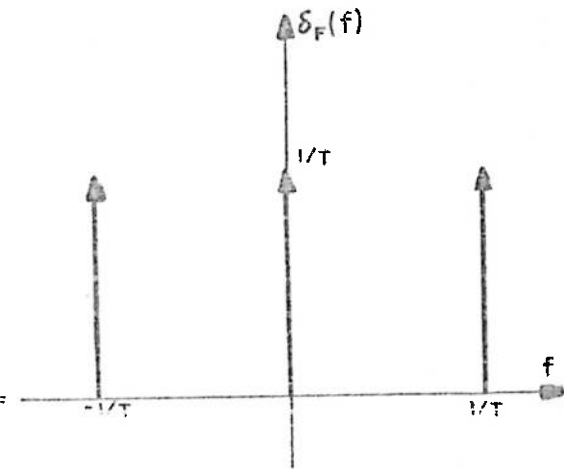


Figura (6.10-b)

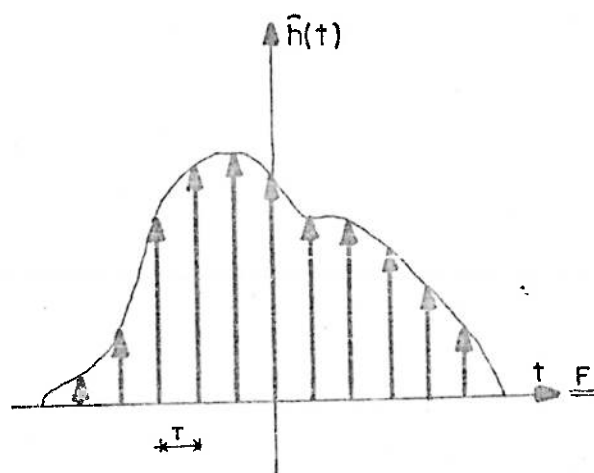


Figura (6.9-c)

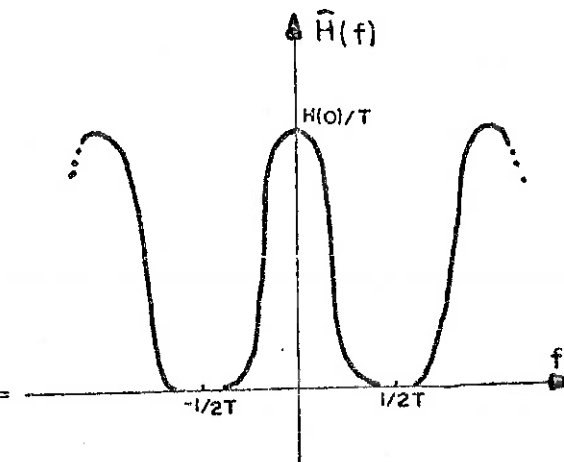


Figura (6.10-c)

Convolvendo as funções das figuras (6.10-a) e (6.10-b) temos a transformada $\hat{H}(f)$, figura (6.10-c), da função $h(t)$.

$$\hat{H}(f) = H(f) * \delta_T(f)$$

Segundo (5.7)

$$\hat{H}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(f-n/T) \quad (6.9)$$

Como se pode analisar pela figura (6.10-c) ou pela expressão (6.9), a representação da função no domínio da frequência tornou-se periódica devido à discretização no domínio do tempo.

Isto já era de se esperar se lembrarmos de (4.21) que a transformada inversa de uma função periódica, no domínio da frequência, é constituída de uma série de impulsos localizados nos múltiplos do período fundamental desta.

Os valores discretos da função $h(t)$, figura (6.8-b), são na realidade os coeficientes de Fourier, no domínio do tempo, da função periódica $\hat{H}(f)$, no domínio da frequência. Com isto fica estabelecida a diferença entre as representações das figuras (6.8-b) e (6.8-c).

Quando a transformada de uma função tem o aspecto da figura (6.10-a), dizemos que a mesma possui uma largura de banda de f_c Hertz.

Se para a mesma função o intervalo de discretização fosse

$$T > \frac{1}{f_c}$$

o resultado seria o da figura (6.11)

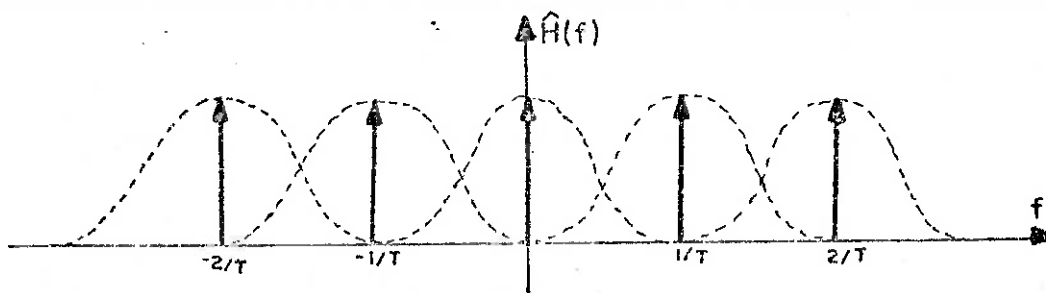


Figura (6.11)

Notemos que, pelo fato do intervalo de discretização no domínio do tempo ser maior do que o inverso da largura de banda de sua transformada, esta resultou distorcida, devido à superposição de funções do tipo da figura (6.10-a).

Este fenômeno é chamado de "aliasing" no domínio da frequência. Para que o mesmo seja evitado, sendo f_c a largura de banda de sua transformada, basta ter:

$$T < \frac{1}{f_c} \quad (6.10)$$

Quando a largura de banda de uma função for infinita, como na figura (6.12), a transformada sempre estará distorcida.

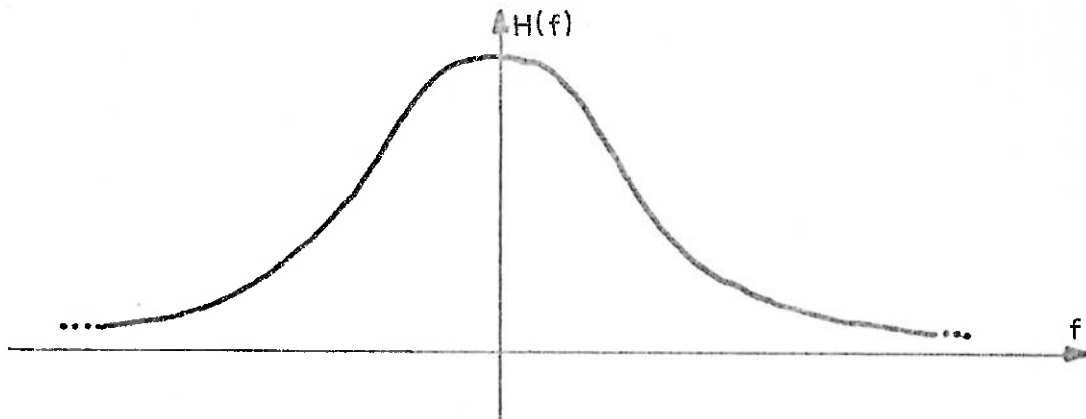


Figura (6.12)

Neste caso o intervalo de discretização, no domínio do tempo, deve ser suficientemente pequeno para que a interferência seja desprezível.

Devido à discretização da função no domínio do tempo, em intervalos de T segundos, só foi possível obter informações de sua transformada na faixa de frequências:

$$\frac{-1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T} \quad (6.11)$$

As informações contidas em outras frequências são repetições das contidas nestas.

A frequência $1/2T$ é comumente chamada de frequência de Nyquist.

6.4 - Discretização no domínio da frequência

Dada a função $H(f)$ da figura (6.13-a), ao discretizarmos a mesma, obtemos a sequência $H(n)$ da figura (6.13-b).

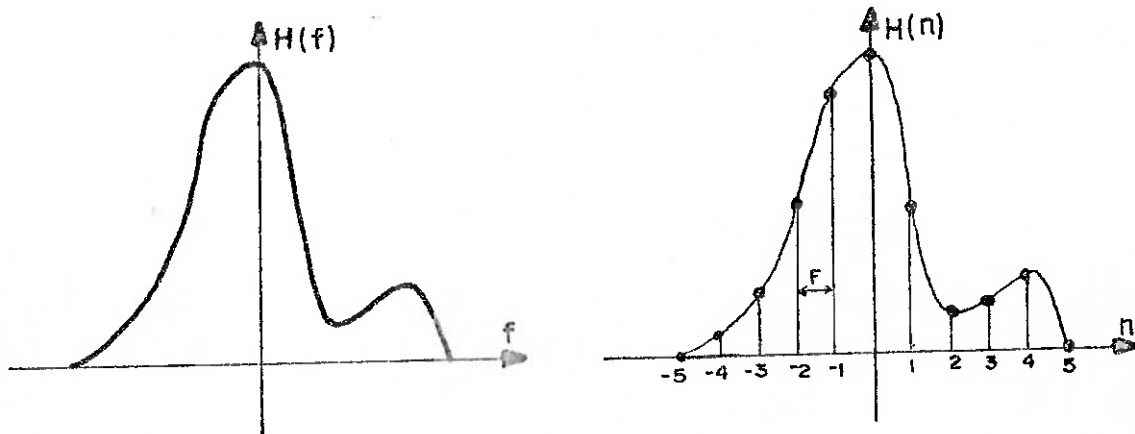


Figura (6.13)

Matematicamente, a discretização no domínio da frequência pode ser entendida como o produto da função da figura (6.15-a) pela série de impulsos da figura (6.15-b).

$$\hat{H}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(f) \delta(f-nF) \quad (6.12)$$

Com isso, ao invés de uma função contínua, obtemos uma série de impulsos $\hat{H}(f)$, figura (6.15-c), espaçados do intervalo de discretização. A área de cada impulso fornece o valor da função na frequência onde este se encontra.

Estes impulsos não são os pontos discretos da função, figura (6.13-b), mas representam os mesmos. Oportunamente estabeleceremos as diferenças entre estas duas representações.

No domínio do tempo, este produto é equivalente à convolução de suas transformadas inversas. A transformada inversa $h(t)$, da função $H(f)$, é dada na figura (6.14-a) e na figura (6.14-b) representamos a transformada inversa $\delta_T(t)$ da série de impulsos. Esta é uma nova série de impulsos dada por:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k/F)$$

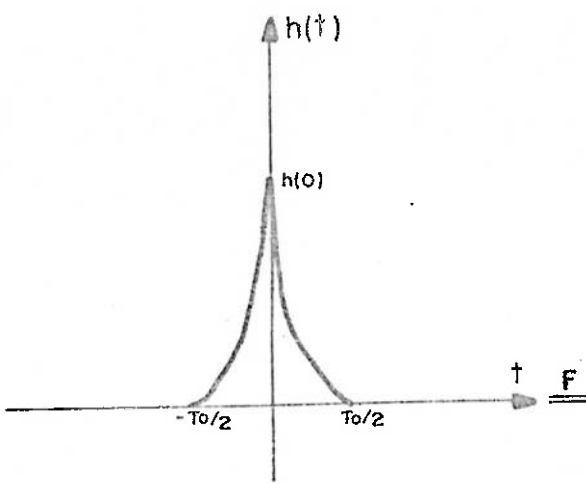


Figura (6.14-a)

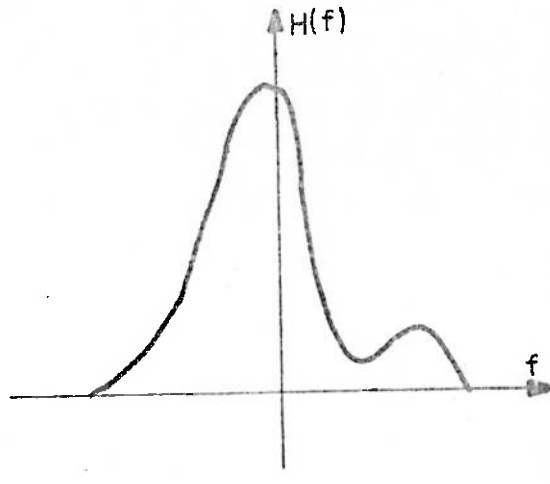


Figura (6.15-a)

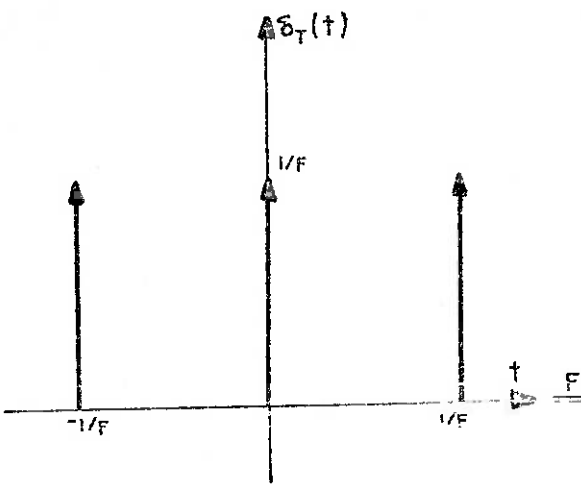


Figura (6.14-b)

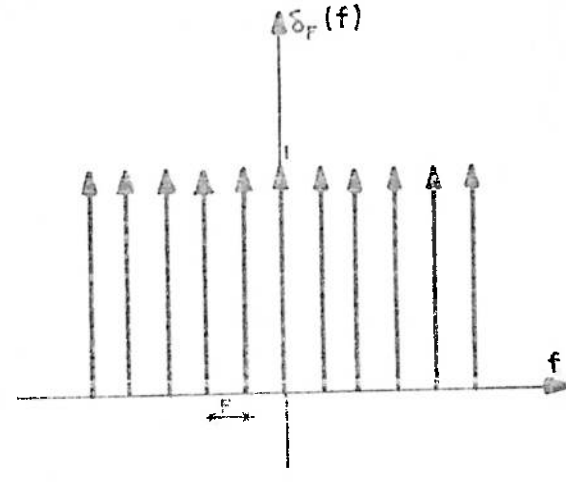


Figura (6.15-b)

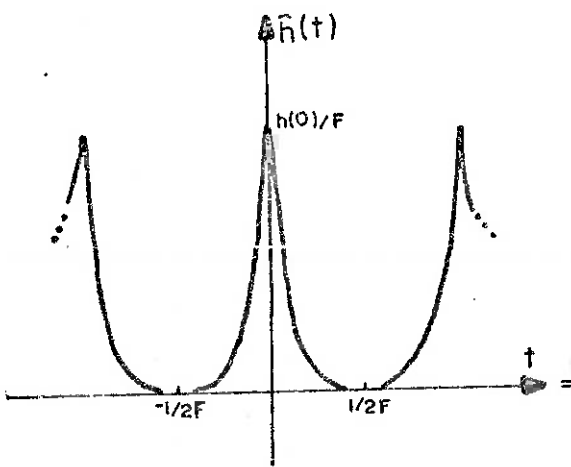


Figura (6.14-c)

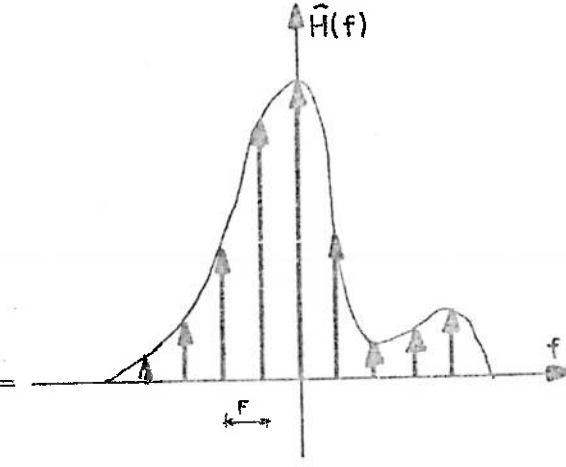


Figura (6.15-c)

Convolvendo as funções das figuras (6.14-a) e (6.14-b) temos a transformada inversa $h(t)$, figura (6.14-c), da função discretizada.

$$\hat{h}(t) = h(t) * \delta_T(t)$$

Segundo (5.7):

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t-k/F) \quad (6.13)$$

Como se pode analisar pela figura (6.14-c) ou pela expressão (6.13), a representação da função no domínio do tempo tornou-se periódica devido à discretização no domínio da frequência.

Isto já era de se esperar se lembrarmos de (4.17) que a transformada de uma função periódica, no domínio do tempo, é constituída por uma série de impulsos localizados nos múltiplos da frequência fundamental desta.

Os valores discretos da função $H(f)$ na fig. (6.13-b) são na realidade os coeficientes de Fourier da função periódica $\hat{h}(t)$. Com isto fica estabelecida a diferença entre as representações das figuras (6.13-b) e (6.15-c).

Quando a transformada inversa de uma função tem o aspecto da figura (6.14-a), dizemos que a mesma possui duração finita de T_0 segundos.

Se para a mesma função o intervalo de discretização fosse:

$$F > \frac{1}{T_0}$$

o resultado de sua transformada inversa seria o da fig. (6.16).

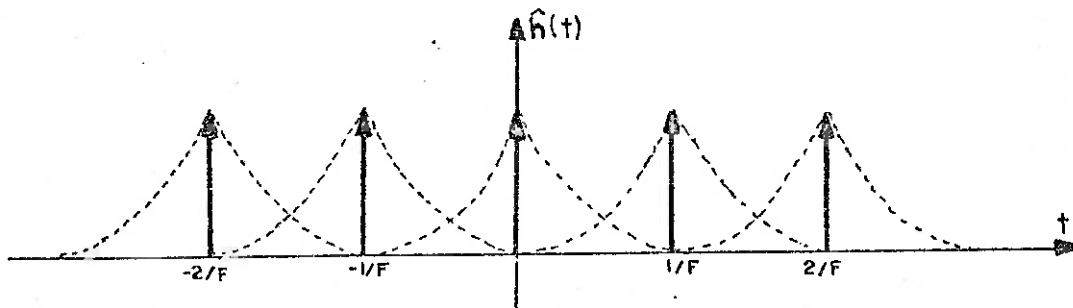


Figura (6.16)

Notemos que, pelo fato do intervalo de discretização no domínio da frequência ser maior que o inverso da duração de sua transformada inversa, esta resultou distorcida devido à sua perposição de funções do tipo da figura (6.14-a).

Este fenômeno é chamado de "aliasing" no domínio do tempo. Para que o mesmo seja evitado, sendo T_0 a duração de sua transformada inversa, basta ter:

$$F < \frac{1}{T_0} \quad (6.14)$$

Quando a duração de uma função for infinita, como na figura (6.17), a transformada inversa sempre estará distorcida.

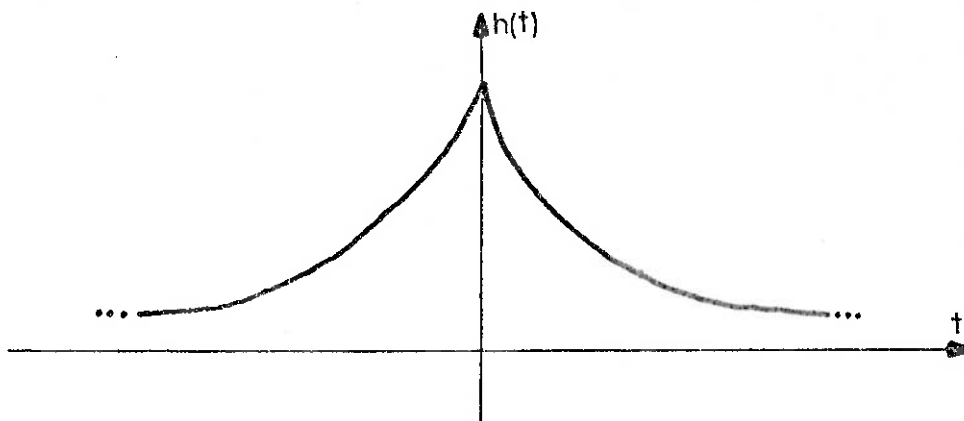


Figura (6.17)

Neste caso o intervalo de discretização no domínio da frequência deve ser suficientemente pequeno para que este efeito seja desprezível.

Devido à discretização no domínio da frequência em intervalos de F Hertz, só foi possível obter informações de sua transformada inversa nos instantes:

$$\frac{-1}{2F} \leq t \leq \frac{1}{2F} \quad (6.15)$$

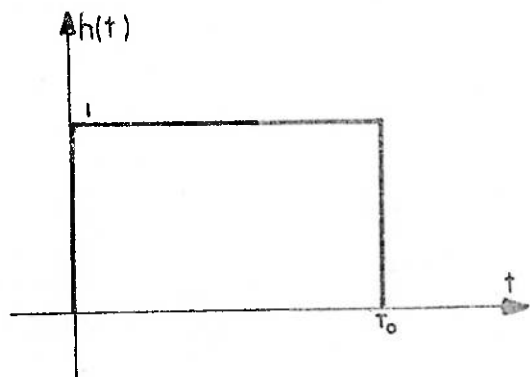
As informações contidas em outros instantes são repetições das contidas neste.

6.5 - Pontos de descontinuidade

Cuidado especial deve ser tomado, na discretização

de uma função, com valores atribuídos à mesma em pontos de descontinuidade.

Consideremos, por exemplo, a função da figura (6.18) descontínua em $t = 0$ e $t = T_0$.



$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T_0 \\ 0 & t > T_0 \quad t < 0 \end{cases}$$

Figura (6.18)

Analisemos somente a descontinuidade em $t = 0$.

A mesma pode ser obtida a partir de sua transformada.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} dt$$

Quando a transformada inversa é calculada discretamente, não podemos fornecer um número infinito de pontos. Ao truncarmos a função $H(f)$ e calcularmos a integral, numericamente, estaremos obtendo uma nova função $h_L(t)$.

$$h_L(t) = \int_{-L}^{+L} H(f) e^{i2\pi ft} dt \quad (6.16)$$

No limite temos:

$$h(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} h_L(t) \quad (6.17)$$

O comportamento da função $h_L(t)$ é descrito na figura (6.19).

Esta oscilação da função $h_L(t)$ em torno da função $h(t)$ é conhecida como fenômeno de Gibb. Este fenômeno é facilmente percebido quando se trunca a série de Fourier de uma função periódica em um número finito de harmônicos.

Demonstra-se que:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} h_L(0) = \frac{h(+0) + h(-0)}{2} \quad (6.18)$$

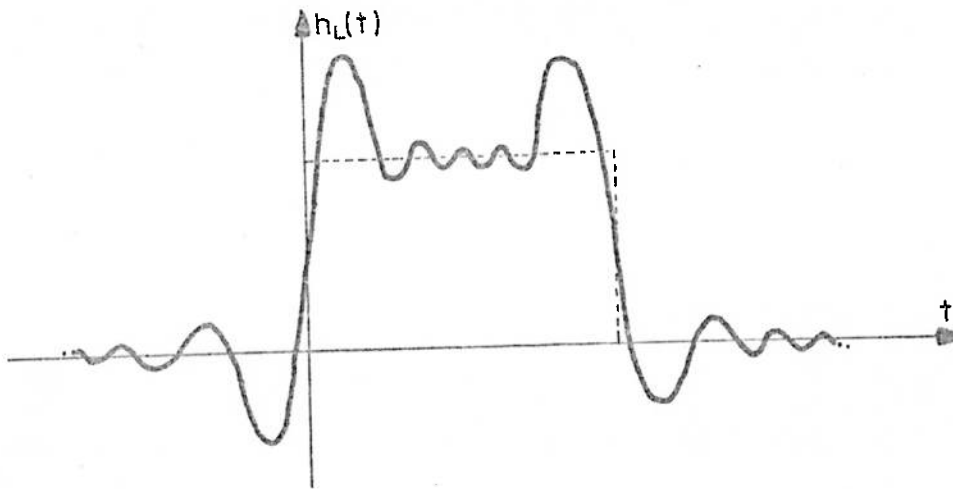


Figura (6.19)

Para que a transformada de uma função possa ser calculada numericamente, de maneira correta, o valor desta em pontos de descontinuidade deve ser dado pela média dos valores assumidos pela função no mesmo.

Procedimento análogo deve ser tomado quando a função no domínio da frequência apresenta pontos de descontinuidade e se quer calcular sua transformada inversa.

6.6 - Conclusões

Os resultados deste capítulo são muito importantes. Os mesmos serão utilizados para se poder calcular a transformada ou a transformada inversa de Fourier, numericamente, de maneira correta. Por isto vale a pena resumí-los.

- 1º) O truncamento de uma função periódica em um intervalo finito faz com que as informações no domínio da frequência, antes concentradas nas frequências múltiplas da fundamental, espalhem-se sobre todo o domínio. Este fenômeno é chamado de "LEAKAGE".
- 2º) Se o intervalo de truncamento de uma função periódica não for múltiplo inteiro do período da mesma, as componentes em uma frequência múltipla da fundamental receberá contribuições de outras frequências.

- 3º) A discretização de uma função em um domínio faz com que sua representação no outro domínio torne-se periódica. Se o intervalo de discretização não for suficientemente pequeno, esta representação estará distorcida devido ao efeito de "ALIASING".
- 4º) Os pontos obtidos na discretização de uma função em um domínio são os coeficientes de Fourier de sua representação no outro domínio, tornada periódica e dividida pelo intervalo de discretização.
- 5º) Quando uma função apresenta descontinuidade em um domínio, o valor discreto da mesma em um destes pontos deve ser dado pela média dos valores da função no mesmo.

CAPÍTULO 7

A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Apresentamos neste capítulo as expressões para o cálculo da transformada discreta e da transformada discreta inversa de Fourier, bem como, algumas propriedades básicas das mesmas.

7.1 - Transformada discreta de Fourier de uma sequência de duração finita.

Consideremos a função, no domínio do tempo, da figura (7.1-a). Na figura (7.1-b) apresentamos sua transformada de Fourier.

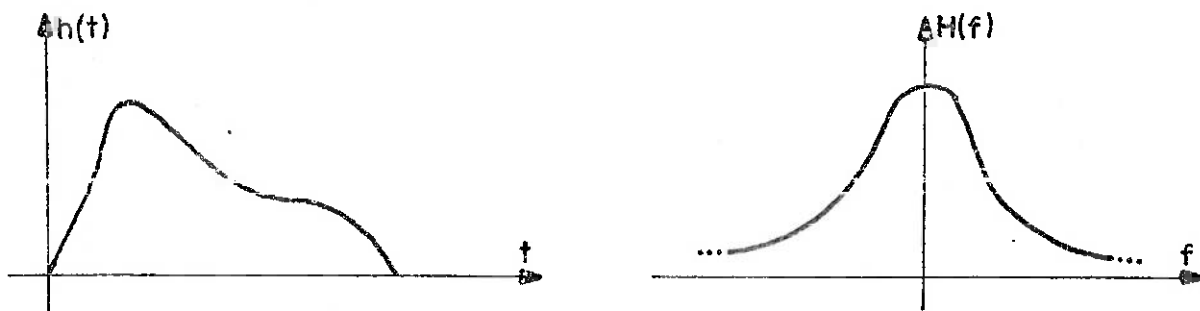


Figura (7.1)

Como nosso objetivo é calcular numericamente a transformada de Fourier, somos obrigados a considerar somente funções de duração finita.

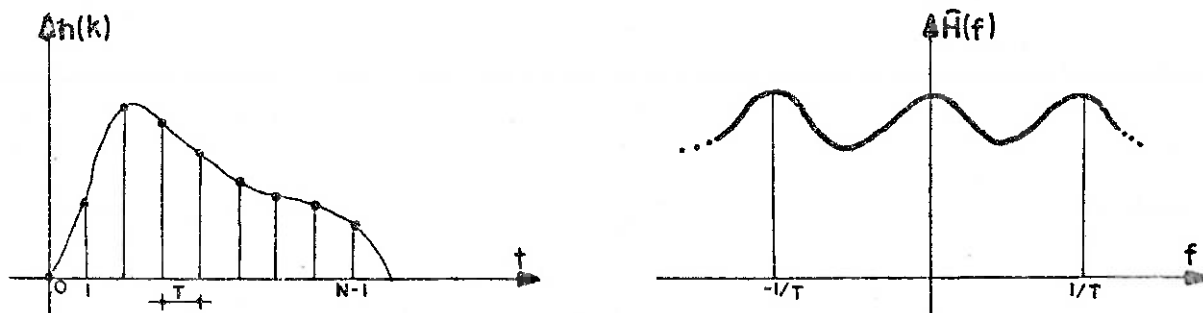


Figura (7.2)

Conforme vimos no ítem 6.3 os pontos $h(k)$, figura (7.2-a), da sequência obtida da discretização da função $h(t)$, figura (7.1-a), são os coeficientes de Fourier, no domínio do tempo, da função $\hat{H}(f)$, periódica, da figura (7.2-b).

Segundo (4.18), a função $\hat{H}(f)$ pode ser obtida a partir de seus coeficientes de Fourier no domínio do tempo pela expressão:

$$\hat{H}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-i2\pi f k T}$$

Como a sequência $h(k)$ é finita

$$\hat{H}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi f k T}$$

Mas, o que queremos conhecer é a função $H(f)$, transformada de $h(t)$. Segundo (6.9) a função $\hat{H}(f)$ em um período, salvo erros de "aliasing" no domínio da frequência, não é nada mais que a transformada de $h(t)$ dividida pelo intervalo de discretização.

$$\hat{H}(f) = \frac{H(f)}{T}$$

Logo:

$$H(f) = T \sum_{k=0}^{n-1} h(kT) e^{-i2\pi f k T} \quad (7.1)$$

A expressão (7.1) fornece o valor da transformada de Fourier de uma função $h(t)$, para qualquer frequência, a partir do conhecimento de uma sequência de pontos da mesma. Pode se verificar que esta é o resultado da integração numérica da expressão (2.2).

Calculando o valor da transformada para uma frequência

$$f + \frac{m}{T}$$

temos:

$$H\left(f + \frac{m}{T}\right) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(kt) e^{-i2\pi\left(f + \frac{m}{T}\right)kT}$$

$$H\left(f + \frac{m}{T}\right) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi fkT} e^{-i2\pi mk}$$

Devido à periodicidade das funções seno e cosseno temos:

$$e^{-i2\pi mk} = 1 \quad \text{se } m \text{ e } k \text{ são inteiros}$$

Logo:

$$H\left(f + \frac{m}{T}\right) = H(f) \quad (7.2)$$

A expressão (7.2) é uma comprovação do que já havíamos previsto. Devido à discretização, no domínio do tempo, a transformada da função tornou-se periódica com período igual a $1/T$.

Com isto, se a mesma tiver uma largura de banda maior do que $1/T$, ela estará distorcida devido ao "aliasing" no domínio da frequência.

É fácil verificar em (7.1) que:

$$H\left(\frac{1}{2T} + f\right) = H\left(\frac{-1}{2T} + f\right) \quad (7.3)$$

As componentes nas frequências entre $1/2T$ e $1/T$ referem as frequências entre $-1/2T$ e zero. Como consequência:

$$H(1/2T) = H(-1/2T) \quad (7.4)$$

A figura (7.3) ilustra esta propriedade.

Se a função $H(f)$ for ímpar, o que sempre ocorre com a parte imaginária da transformada de uma função real, teremos:

$$H\left(\frac{1}{2T}\right) = 0$$

como se pode notar na figura (7.4).

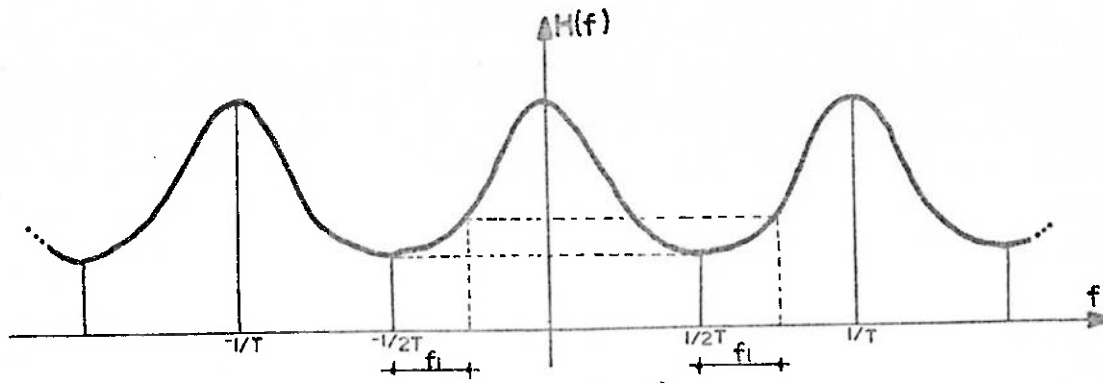


Figura (7.3)

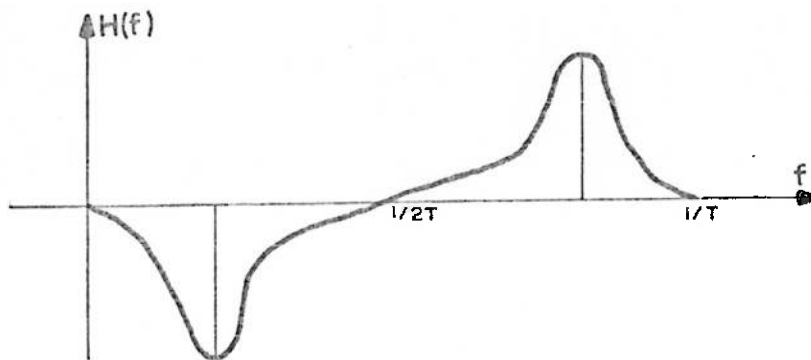


Figura (7.4)

Devido a (7.2) e (7.3) não precisamos calcular os valores da transformada de Fourier em todas as frequências. Basta tomar a faixa.

$$0 \leq f \leq \frac{1}{T}$$

Calculando os valores da transformada nesta faixa, obteremos na realidade os valores de $H(f)$ para

$$\frac{-1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}$$

Se quisermos aumentar o alcance das informações no domínio da frequência, basta reduzir o intervalo de discretização no domínio do tempo. É bom lembrar que, se a transformada tiver largura de banda infinita, os resultados estarão sempre distorcidos.

7.2 - Transformada discreta inversa de Fourier de uma função de banda finita.

Consideremos a função, no domínio da frequência, da figura (7.5-b). Na figura (7.5-a) apresentamos sua transformada inversa de Fourier.

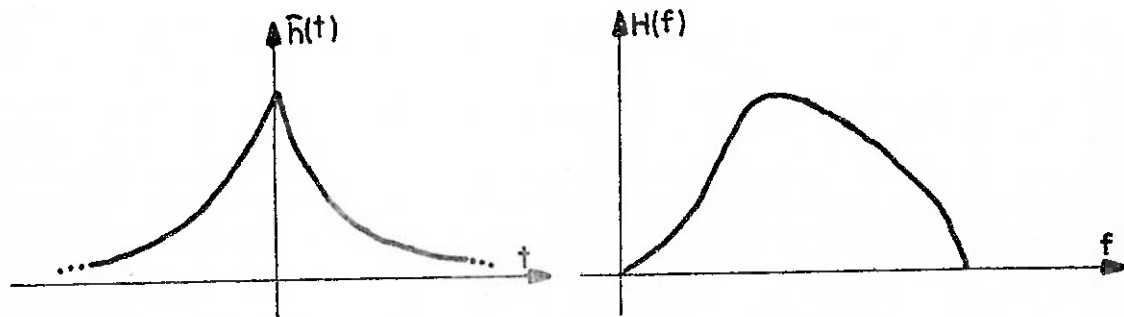


Figura (7.5)

Só poderemos considerar funções $H(f)$ de banda finita pois as sequências devem obrigatoriamente ser finitas.

Conforme vimos no ítem 6.4, os pontos $H(n)$ da figura (7.6-b), obtidos da discretização da função $H(f)$, são os coeficientes de Fourier da função $\hat{h}(t)$, periódica, da figura (7.6-a).

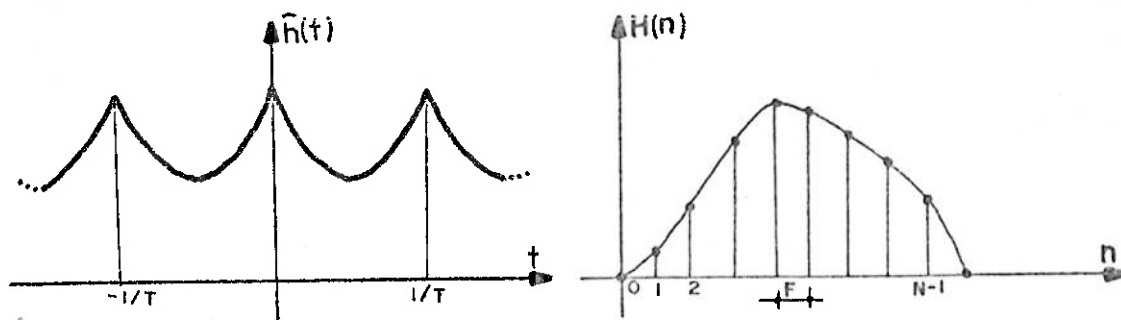


Figura (7.6)

Segundo (4.5), a função $\hat{h}(t)$ pode ser obtida a partir de seus coeficientes de Fourier pela expressão:

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n) e^{i2\pi n F t}$$

Como a sequência $H(n)$ é finita:

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi n F t}$$

Mas o que queremos conhecer é a função $h(t)$, transformada inversa de $H(f)$. Segundo (6.13) a função $\hat{h}(t)$ em um período, salvo erros devidos ao "aliasing" no domínio do tempo, não é nada mais que a transformada inversa $h(t)$ dividida pelo intervalo de discretização:

$$\hat{h}(t) = \frac{h(t)}{F}$$

Logo:

$$h(t) = F \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi n F t} \quad (7.5)$$

A expressão (7.5) fornece os valores da transformada inversa de Fourier, de uma função $H(f)$, para qualquer instante a partir do conhecimento de uma sequência de pontos da mesma. Pode se verificar que esta expressão é o resultado da integração numérica da expressão (2.1).

Calculando o valor da transformada inversa para um instante $(t + m/F)$, temos

$$h\left(t + \frac{m}{F}\right) = F \sum_{n=0}^{N-1} H(nF) e^{i2\pi n F \left(t + \frac{m}{F}\right)}$$

$$h\left(t + \frac{m}{F}\right) = F \sum_{n=0}^{N-1} H(nF) e^{i2\pi n F t} e^{i2\pi n m}$$

Devido a peridiocidade das funções seno e cosseno:

$$e^{i2\pi m n} = 1 \quad \text{se } m \text{ e } n \text{ são inteiros}$$

Logo:

$$h\left(t + \frac{m}{F}\right) = h(t) \quad (7.6)$$

A expressão (7.6) é uma comprovação do que já havíamos previsto. Devido à discretização no domínio da frequência, a transformada inversa da função tornou-se periódica com período igual a $1/F$.

Com isto, se a mesma tiver uma duração maior do que $1/F$, ela estará distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

É fácil verificar em (7.5) que:

$$h\left(\frac{1}{2F} + t\right) = h\left(\frac{-1}{2F} + t\right) \quad (7.7)$$

As componentes entre os instantes $1/2F$ e $1/F$ referem-se aos instantes entre $-1/2F$ e zero. Como consequência:

$$h\left(\frac{1}{2F}\right) = h\left(\frac{-1}{2F}\right) \quad (7.8)$$

A figura (7.7) ilustra esta propriedade.

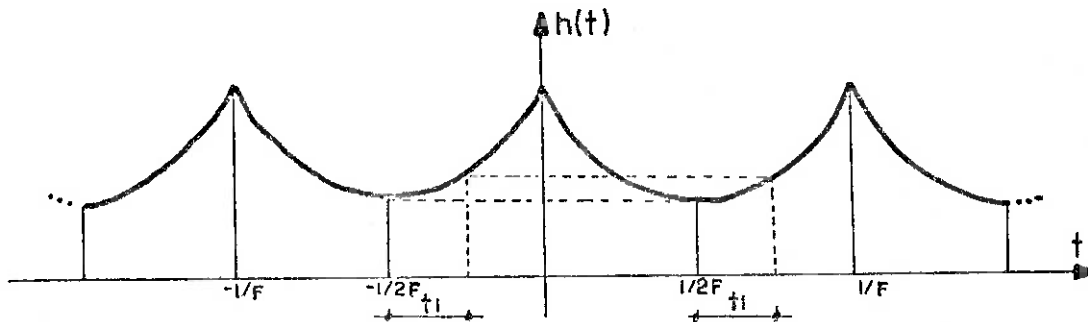


Figura (7.7)

Devido a (7.7) e (7.8) não precisamos calcular os valores da transformada inversa de Fourier em todos os instantes. Basta tomar o intervalo:

$$0 \leq t \leq 1/F$$

Calculando os valores da transformada inversa neste intervalo obteremos na realidade os valores de $h(t)$ para

$$-1/2F \leq t \leq 1/2F$$

Se quisermos aumentar o alcance das informações no domínio do tempo, basta reduzir o intervalo de discretização no domínio da frequência. É bom lembrar que, se a transformada inversa tiver duração infinita, os resultados estarão sempre distorcidos.

7.3 - Transformada discreta de uma função periódica

Para calcularmos a transformada de Fourier de uma função, numericamente, a rigor devemos fornecer todos os pontos da mesma. No entanto, como as somatórias devem ser finitas, necessitamos primeiramente truncar a função em um intervalo finito. Por isto nos dois casos anteriores só consideramos funções de banda ou duração finita.

Existem casos de funções que se estendem sobre todo o domínio do tempo ou da frequência. Mesmo assim devemos ter:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} h(t) = 0 \qquad \lim_{|t| \rightarrow \infty} H(f) = 0$$

para que a condição de existência seja satisfeita.

Nestes casos, ao truncarmos as funções, estaremos descharacterizando-as. Com isto já é de se esperar alguma diferença na sua transformada. Mas os resultados serão tão mais satisfatórios quanto maior o intervalo de truncamento.

A título de exemplo, as funções das figuras (7.8) não são exatamente as mesmas. Mas, se o intervalo de truncamento for suficientemente longo, as diferenças serão desprezíveis.

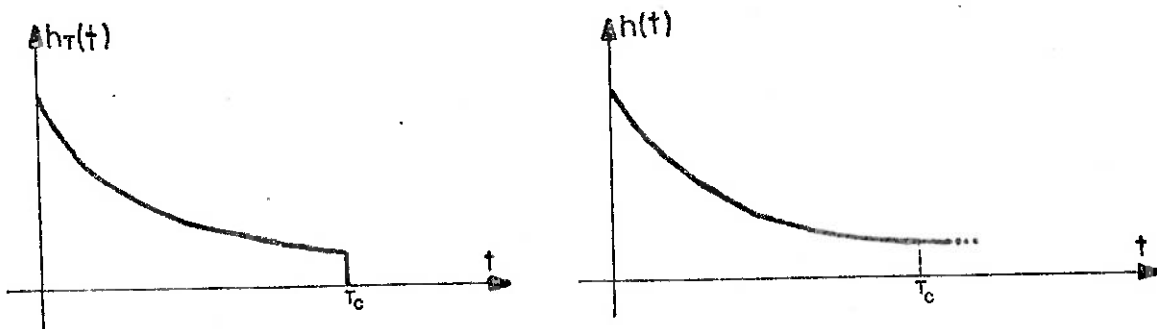


Figura (7.8)

No caso de funções periódicas é impossível truncá-las em um intervalo finito sem se descharacterizá-las completamente. Isto já foi verificado no ítem (6.1).

Mesmo assim, o intervalo de truncamento deve ser igual a um número inteiro de períodos para que não ocorra a interferência das informações em outras frequências.

Se o intervalo de truncamento for igual a um período,

estaremos na realidade calculando a transformada de Fourier de uma função de duração finita. As informações estarão espalhadas sobre todo o domínio da frequência. Neste caso, figura (6.4), as informações nas frequências múltiplas da fundamental fornecerão os coeficientes de Fourier da função periódica, multiplicados pelo período da função.

Se o intervalo de truncamento for igual a dois períodos, teremos o caso da figura (6.5).

Só conseguiremos obter realmente a transformada da função periódica se fornecermos todos os períodos da mesma. Como isto é impossível, estaremos então calculando a transformada discreta de uma função de duração finita, obtida do truncamento da função periódica.

7.4 - O par de transformadas discretas

Consideremos a sequência $h(k)$, no domínio do tempo, obtido da discretização com N termos, espaçados de T , da função $h(t)$.

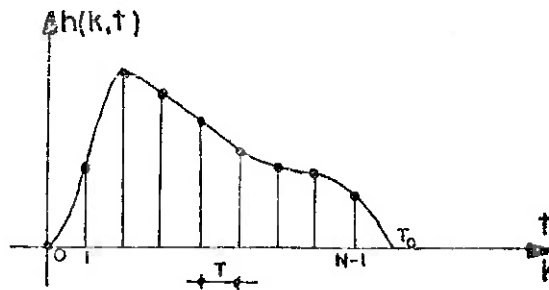


Figura (7.9)

Sendo T_0 a duração da mesma temos:

$$T = \frac{T_0}{N}$$

Como vimos, a transformada da função $h(t)$ calculada discretamente tem o aspecto da figura (7.10), onde:

$$F_0 = \frac{1}{T} \tag{7.9}$$

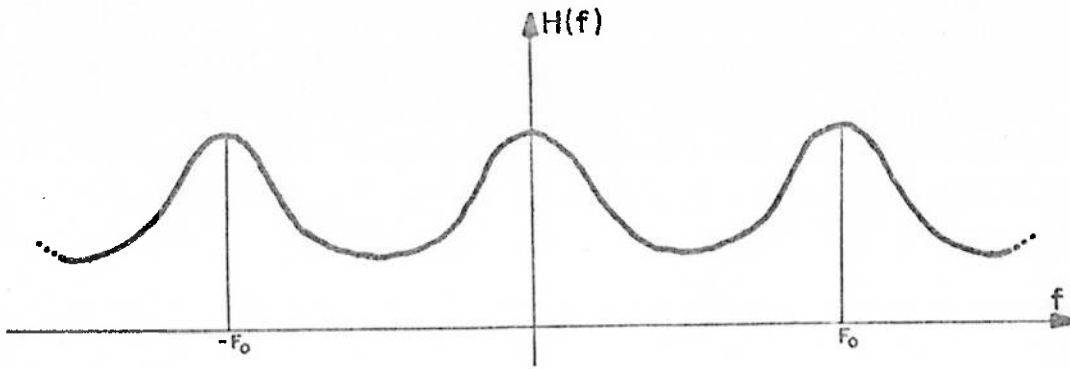


Figura (7.10)

Consideremos agora a sequência obtida da discretização, em um período, da função $H(f)$ com N termos espaçados de F :

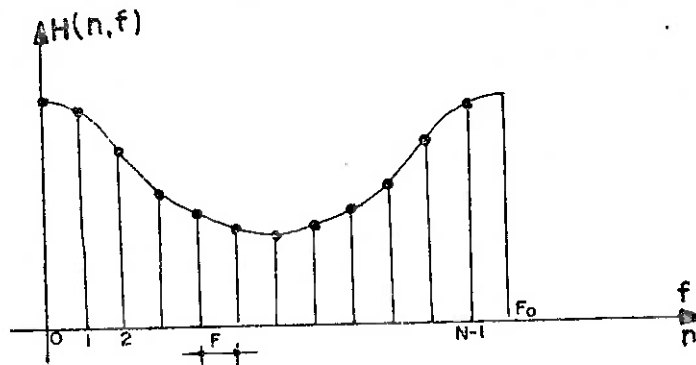


Figura (7.11)

onde:

$$F = \frac{F_0}{N} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT} \quad (7.10)$$

Se calcularmos a transformada inversa da função $H(f)$ discretamente, com N termos dentro de um período, vamos obter a mesma função $h(t)$, porém periódica.

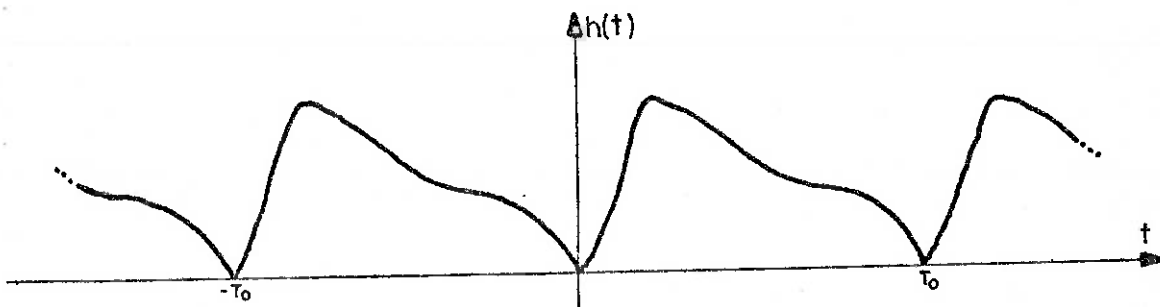


Figura (7.12)

Observamos que, neste caso não ocorre "aliasing" no domínio do tempo, pois a função $h(t)$ é de duração finita igual ao inverso do intervalo de discretização no domínio da frequência.

A mesma afirmação feita partindo do domínio do tempo pode ser feita partindo-se do domínio da frequência.

Para demonstrá-las consideremos as expressões (7.1) e (7.5).

$$H(f) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi f k T}$$

$$h(t) = F \sum_{n=0}^{N-1} H(nF) e^{i2\pi n F t}$$

Calculemos os valores da primeira nas frequências

$$f = nF$$

levando em conta que: $F = \frac{1}{NT}$

Calculemos os valores da segunda nos instantes

$$t = kT$$

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.11)$$

$$h(kT) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.12)$$

Substituindo a primeira na segunda temos

$$h(kT) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} T \sum_{j=0}^{N-1} h(jT) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$h(kT) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(jT) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi n \frac{(k-j)}{N}}$$

$$h(kT) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(jT) \sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos 2\pi \frac{n(k-j)}{N} + i \operatorname{sen} 2\pi \frac{n(k-j)}{N} \right)$$

Devido às propriedades das funções periódicas:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos 2\pi \frac{n(k-j)}{N} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ N & k = j \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{sen} 2\pi \frac{n(k-j)}{N} = 0$$

Logo:

$$h(kT) = \sum_{j=0}^{N-1} h(jT); \quad \text{para } j = k$$

$$h(kT) = h(kT)$$

o que demonstra que as expressões (7.11) e (7.12) representam a mesma sequência $h(k)$.

Analogamente pode se demonstrar, substituindo (7.12) em (7.11), que estas duas expressões representam a mesma sequência $H(n)$. Portanto, as expressões (7.11) e (7.12) constituem um par de transformadas discretas. As figuras (7.9) e (7.11) representam a mesma sequência, porém, em domínios diferentes.

Na figura (7.11) a função $H(f)$ está distorcida devido ao "aliasing" no domínio da frequência. Mas, ao calcularmos sua transformada inversa discretamente, obtemos exatamente a mesma sequência que a originou.

Esta conclusão é muito importante. No capítulo 6 apresentamos alguns cuidados que devem ser tomados na discretização e no truncamento de uma função. Estes são necessários quando desejamos que a transformada ou a transformada inversa calculada numericamente aproxime-se o melhor possível do resultado analítico. No entanto, os mesmos tornam-se absolutamente desnecessários caso desejamos ir a um domínio e voltar ao anterior.

As expressões (7.9) e (7.10) fornecem ainda uma outra

conclusão importante: o intervalo de discretização em um domínio é o inverso da duração no outro.

7.5 - Periodicidade das sequências

Considerando as expressões (7.11) e (7.12), podemos demonstrar que:

$$H(n + mN) = H(n) \quad (7.13-a)$$

$$H\left(\frac{N}{2} + n\right) = H\left(\frac{-N}{2} + n\right) \quad (7.13-b)$$

$$h(k + mN) = h(k) \quad (7.13-c)$$

$$h\left(\frac{N}{2} + k\right) = h\left(\frac{-N}{2} + k\right) \quad (7.13-d)$$

As expressões (7.13) já eram esperadas.

Devido à discretização nos dois domínios, as duas sequências tornaram-se periódicas. Portanto o par de transformadas discretas leva em conta que as sequências $h(k)$ e $H(n)$ são periódicas com período igual a N .

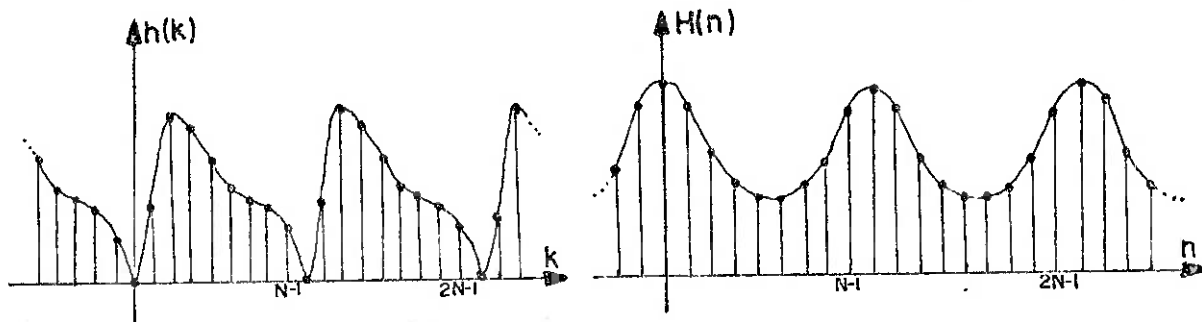


Figura (7.13)

Dados N termos no domínio do tempo basta obter N termos no domínio da frequência, pois os outros são repetições destes. Além disto os termos $H(n)$ no intervalo

$$\frac{N}{2} \leq n \leq N$$

referem-se às frequências:

$$\frac{-1}{2T} \leq f \leq 0$$

Analogamente, dados N termos no domínio da frequência, basta obter N termos no domínio do tempo.

7.6 - Interpolação no domínio da frequência

Muitas vezes é desejável obter-se informações mais próximas uma da outra no domínio da frequência. Como vimos isto só é possível se aumentarmos a duração da sequência no domínio do tempo.

No caso de sequências obtidas de funções periódicas, isto é feito repetindo-se o período da função. No entanto, devemos ter cuidado para se fornecer um número inteiro de períodos para que os resultados não resultem distorcidos. Mesmo assim os resultados nas frequências intermediárias, conforme figura (6.5-b), serão nulos.

No caso de sequências obtidas de funções de duração finita isto é feito inserindo-se um trecho de zeros. Considere as duas sequências das figuras (7.14).

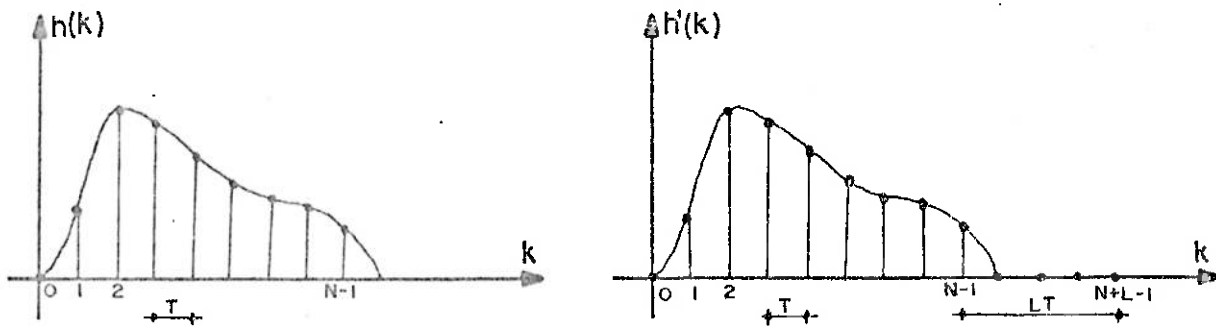


Figura (7.14)

A transformada discreta da primeira é dada por:

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

e da segunda:

$$H'(n) = T \sum_{k=0}^{N+L-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N+L}} \quad n=0, 1, 2, \dots, N+L-1$$

$$H'(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h'(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N+L}} + T \sum_{k=N}^{N+L-1} h'(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N+L}}$$

Como para

$$k > N-1 \quad \text{temos} \quad h'(k) = 0$$

e para

$$0 \leq k \leq N-1 \quad \text{temos} \quad h'(k) = h(k)$$

temos:

$$H'(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N+L}}$$

$$H'(n) = H\left(\frac{nN}{N+L}\right) \quad (7.14-a)$$

ou:

$$H(n) = H'\left(n \frac{N+L}{N}\right) \quad (7.14-b)$$

O termo $H(n)$ da transformada de $h(k)$ passa a ser o termo $H'(n)$ da transformada de $h'(k)$.

O intervalo de discretização no domínio da frequência que antes era:

$$F = \frac{1}{NT}$$

fica reduzido para:

$$F' = \frac{1}{(N+L)T} \quad (7.15)$$

7.7 - Coeficientes de Fourier de funções periódicas

A expressão (7.11) pode ser utilizada, com uma pequena alteração, para a obtenção dos coeficientes de Fourier numericamente.

Consideremos a sequência $h(k)$ de duração finita da figura (7.15-a) e a mesma sequência, agora periódica, na figura (7.15-b).

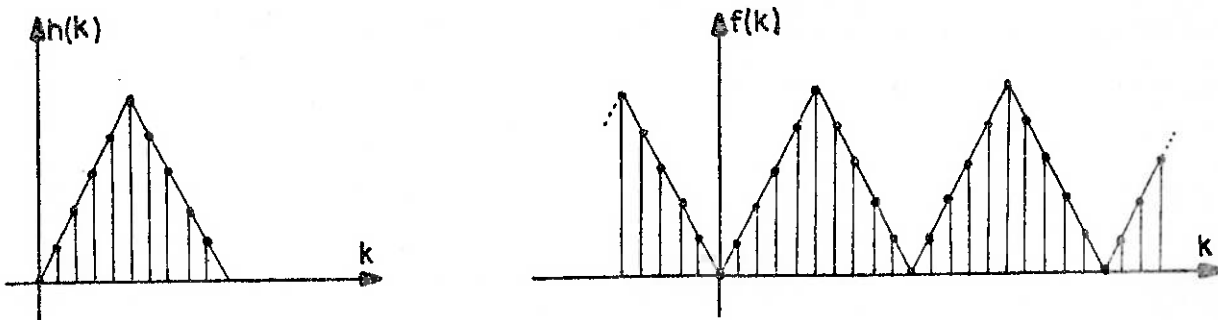


Figura (7.15)

Como sabemos, os coeficientes de Fourier da função periódica estão relacionados à transformada de Fourier da função de duração finita através da expressão:

$$F(n) = \frac{1}{T_0} H(n/T_0)$$

Portanto, para o caso das sequências das figuras (7.15)

$$F(n) = \frac{1}{NT} H(n)$$

$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.16)$$

A sequência original pode ser reconstituída a partir de seus coeficientes de Fourier pela expressão:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{i2\pi \frac{nk}{NT}}$$

Como só conhecemos N coeficientes de Fourier e levando em conta (7.13-d)

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.17)$$

A expressão (7.16) permite obter os coeficientes de Fourier numericamente e a expressão (7.17) permite reconstituir a sequência periódica a partir de seus coeficientes de Fourier.

Assim como (7.11) e (7.12) as duas representam a mesma sequência.

7.8 - Notação matricial

Tomando a expressão (7.11) podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) W^{nk} \quad (7.18)$$

onde:

$$W = e^{-\frac{j2\pi}{N}} \quad (7.19)$$

É fácil perceber que a expressão (7.18) é um produto de matrizes. Os termos das sequências $H(n)$ e $h(k)$ são duas matrizes colunas de ordem N . Os elementos W^{nk} constituem uma matriz quadrada de ordem N , de números complexos, onde o termo genérico W^{nk} é dado por:

$$W^{nk} = W^{nk} \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.20)$$

A expressão (7.18) na forma matricial toma então o seguinte aspecto:

$$[H] = T [W] [h] \quad (7.21)$$

Como exemplo, a transformada discreta de uma sequência de quatro termos pode ser indicada pelo produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

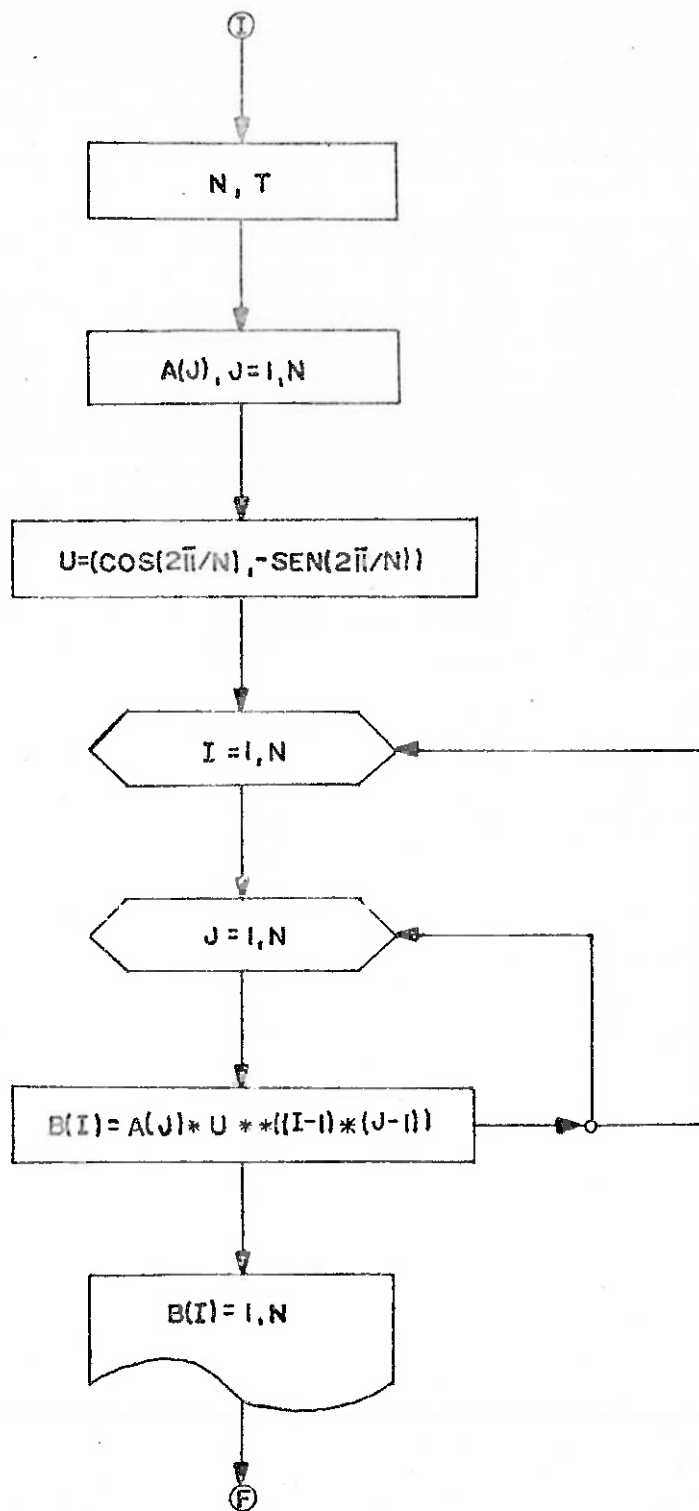


Figura (7.16)

7.9 - Fluxograma de cálculo para a transformada discreta de Fourier

Partindo da analogia com um produto de matrizes, é simples montar um fluxograma para o cálculo da transformada discreta de Fourier em um computador.

Devemos tomar cuidado neste caso em não se usar o índice zero. Utilizando as variáveis:

$$A(J) = h(J-1)$$

$$B(I) = H(I-1) \quad (7.23)$$

$$U(IJ) = W^{(I-1)(J-1)}$$

temos o fluxograma da figura (7.16).

No apêndice A-1 é apresentado um programa feito para a máquina Texas 59 que calcula a transformada discreta de Fourier de uma sequência com um máximo de 43 termos.

No apêndice A-2 é apresentada a subrotina TDF em FORTRAN IV para o computador Burroughs B6700.

Nenhum dos dois programas realiza a multiplicação pelo intervalo de discretização.

CAPÍTULO 8

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

São apresentadas neste capítulo as propriedades básicas da transformada discreta de Fourier. Como se poderá verificar, muitas delas são idênticas à da transformada contínua. No entanto, vale a pena estudá-las novamente, pois as mesmas são apresentadas de uma maneira discreta.

8.1 - Linearidade

Dado um conjunto de seqüências: $h_1(k)$, $h_2(k)$, $h_i(k)$, a transformada discreta de uma combinação linear das mesmas é igual à combinação linear de suas transformadas discretas, com os mesmos coeficientes:

$$a_1 h_1(k) + a_2 h_2(k) \xrightarrow{F} a_1 H_1(n) + a_2 H_2(n) \quad (8.1)$$

8.2 - Deslocamento no tempo

Consideremos uma seqüência $h(k)$ e, a seguir, a mesma seqüência sofrendo um deslocamento igual a jT .

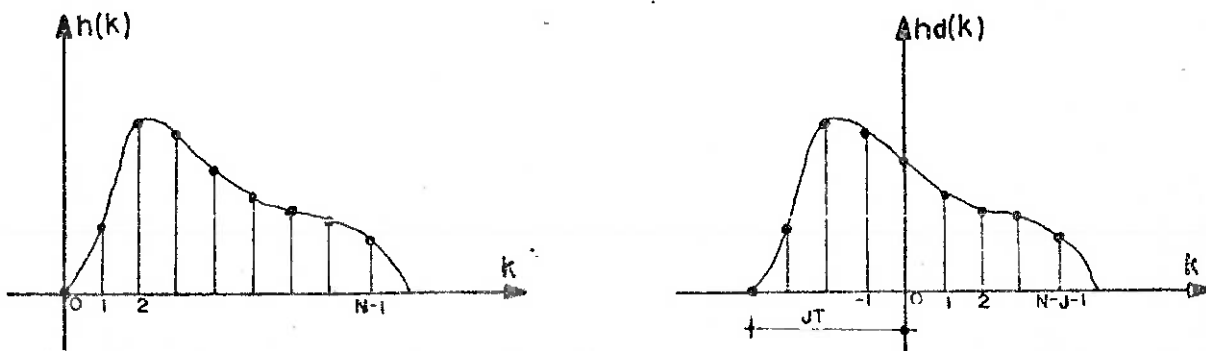


Figura (8.1)

$$hd(k) = h(k-j)$$

Tomemos a expressão da transformada discreta inversa de Fourier,

$$h(k) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

calculemos a transformada discreta inversa da sequência deslocada:

$$h(k-j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi n \frac{(k-j)}{N}}$$

$$h(k-j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} e^{-i2\pi \frac{nj}{N}}$$

O novo par de transformadas discretas fica estabelecido pela expressão:

$$h(k-j) = \underline{F} H(n) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} \quad (8.2)$$

$$H_d(n) = H(n) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} \quad (8.3)$$

A expressão (8.3) relaciona os termos da transformada da sequência $h(k)$ com os da transformada da sequência $h_d(k)$. É fácil verificar que, como no caso contínuo, o deslocamento não altera o módulo da transformada.

No caso de $j = mN$; deslocamento de um número inteiro de período, o valor da transformada não se altera.

Se $j = N/2$; deslocamento de meio período, temos:

$$H_d(n) = H(n) e^{-i\pi n}$$

$$H_d(n) = H(n) [\cos\pi n - i\sin\pi n]$$

$$H_d(n) = H(n) \cos\pi n$$

$$H_d(n) = \begin{cases} H(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ -H(n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (8.4)$$

basta trocar o sinal dos termos de ordem ímpar da transformada.

8.3 - Deslocamento na frequência

Dada uma sequência de uma transformada discreta $H(n)$ e a mesma sequência deslocada de jF , é possível estabelecer-se uma relação entre suas transformadas discretas inversas de Fourier.

$$H_d(n) = H(n-j) \quad (8.5)$$

$$H(n-j) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{(n-j)k}{N}}$$

$$H(n-j) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} e^{i2\pi \frac{jk}{N}}$$

O novo par de transformada fica estabelecido pela expressão:

$$h(k) e^{i2\pi \frac{jk}{N}} \stackrel{F}{=} H(n-j) \quad (8.6)$$

$$h_d(k) = h(k) e^{i2\pi \frac{jk}{N}} \quad (8.7)$$

Os mesmos raciocínios anteriores podem ser empregados para estudar os efeitos do deslocamento da sequência $H(n)$ sobre a sequência $h(k)$.

8.4 - Fórmula alternativa da inversão

Usando a propriedade de multiplicação dos números complexos (2.12):

$$z_1 z_2 = [z_1^* z_2^*]^*$$

podemos alterar a fórmula da inversão da transformada discreta de Fourier:

$$h(k) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$h(k) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \left[H^*(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right]^* \quad (8.8)$$

A segunda expressão é que será utilizada para se processar numericamente a transformada discreta inversa de Fourier. A vantagem reside no fato que se pode utilizar a mesma rotina do programa para se calcular tanto a transformada quanto a transformada inversa.

8.5 - Sequências complexas no tempo

Como foi feito no caso contínuo, uma sequência qualquer no domínio do tempo pode ser separada em uma parte real e outra imaginária, cada uma delas podendo ser decomposta em sequências pares e ímpares.

$$h(k) = R(k) + iI(k) \quad (8.9)$$

$$h(k) = R_p(k) + R_i(k) + iI_p(k) + iI_i(k) \quad (8.10)$$

onde:

$$R_p(k) = \frac{R(k) + R(-k)}{2} \quad (8.11-a)$$

$$R_i(k) = \frac{R(k) - R(-k)}{2} \quad (8.11-b)$$

$$I_p(k) = \frac{I(k) + I(-k)}{2} \quad (8.12-a)$$

$$I_i(k) = \frac{I(k) - I(-k)}{2} \quad (8.12-b)$$

Analisemos agora a transformada discreta de cada uma destas componentes.

8.5.1 - Sequência real e par no domínio do tempo

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} R_p(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} R_p(k) \left[\cos 2\pi \frac{nk}{N} - \text{sen} 2\pi \frac{nk}{N} \right]$$

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} R_p(k) \cos 2\pi \frac{nk}{N} - iT \sum_{k=0}^{N-1} R_p(k) \text{sen} 2\pi \frac{nk}{N}$$

como a segunda somatória é nula:

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} R_p(k) \cos 2\pi \frac{nk}{N}$$

Como: $H(-n) = H(n)$:

$$H(n) = R_p(n)$$

$$R_p(k) \stackrel{F}{=} R_p(n) \quad (8.13)$$

8.5.2 - Sequência real e ímpar do domínio do tempo

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} R_i(k) \cos 2\pi \frac{nk}{N} - iT \sum_{k=0}^{N-1} R_i(k) \text{sen} 2\pi \frac{nk}{N}$$

$$H(n) = -iT \sum_{k=0}^{N-1} R_i(k) \text{sen} 2\pi \frac{nk}{N}$$

Como: $H(-n) = -H(n)$

$$H(n) = I_i(n)$$

$$R_i(k) \stackrel{R}{=} I_i(n) \quad (8.14)$$

8.5.3 - Sequência imaginária e par no domínio do tempo

$$H(n) = iT \sum_{k=0}^{N-1} I_p(k) \cos 2\pi \frac{nk}{N} + T \sum_{k=0}^{N-1} I_p(k) \operatorname{sen} 2\pi \frac{nk}{N}$$

$$H(n) = iT \sum_{k=0}^{N-1} I_p(k) \cos 2\pi \frac{nk}{N}$$

Como: $H(-n) = H(n)$:

$$H(n) = I_p(n)$$

$$I_p(k) \stackrel{F}{=} I_p(n) \quad (8.15)$$

8.5.4 - Sequência imaginária e ímpar no domínio do tempo

Analogamente pode-se mostrar que:

$$I_i(k) \stackrel{F}{=} R_i(n) \quad (8.16)$$

Qualquer caso geral pode ser obtido como combinação linear dos casos acima.

8.6 - Áreas sob as curvas

Calculando a componente de $h(k)$ no instante $kt = 0$ temos:

$$h(0) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \quad (8.17)$$

que é igual a área sob a curva $H(f)$ calculada numericamente pela regra do retângulo.

Calculando a componente de $H(n)$ na frequência $nF = 0$

$$H(0) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \quad (8.18)$$

que tem o mesmo significado para a curva $h(t)$.

CAPÍTULO 9

A TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

A transformada rápida de Fourier (TRF) é um algoritmo computacional para se calcular a transformada discreta de Fourier de uma sequência.

Este algoritmo foi criado em 1965 por James W. Cooley e John W. Tukey. É uma maneira muito engenhosa de se calcular a transformada discreta de Fourier, reduzindo-se sensivelmente o número de operações e, conseqüentemente, o tempo de processamento.

Na avaliação da transformada discreta de Fourier por um computador havia necessidade de se criar uma nova variável para se acumular a sequência da transformada. Usando-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey veremos que isto não será mais necessário.

Vimos que a transformada discreta de Fourier não é nada mais nada menos do que um produto de uma matriz $(N \times N)$ por outra $(N \times 1)$. Para este produto são necessárias N^2 multiplicações. Usando-se o algoritmo aqui proposto, o número de multiplicações reduz-se para $N \log_2 N$. Reduzindo-se o número de operações reduzem-se automaticamente o tempo de processamento e erros de truncamento.

9.1 - Fundamentos do algoritmo

Consideremos, por exemplo, uma sequência constituída de 4 termos. Sua transformada discreta segundo (7.22) será dada por:

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

É fácil verificar que, devido à periodicidade dos elementos da matriz W :

$$W^9 = -W^3 = W^1 ; W^4 = -W^2 = W^0 = 1 ; W^6 = W^2$$

Logo, as relações (9.1) podem ser simplificadas para:

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & -1 & -W^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W^1 & -1 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Analisando o produto de matrizes acima, verificamos que os elementos da matriz W são periódicos e diversas operações são triviais. Indiretamente o algoritmo toma partido desta periodicidade reduzindo o número de operações.

Existem diversos algoritmos para se calcular a transformada rápida de Fourier. O mais usado é o de base 2 e é o que será aqui apresentado.

9.2 - Desenvolvimento teórico

Dada uma sequência constituída por um número N , par, de termos, a mesma pode ser decomposta em duas outras subsequências: uma constituída pelos seus termos de ordem par e outra pelos de ordem ímpar.

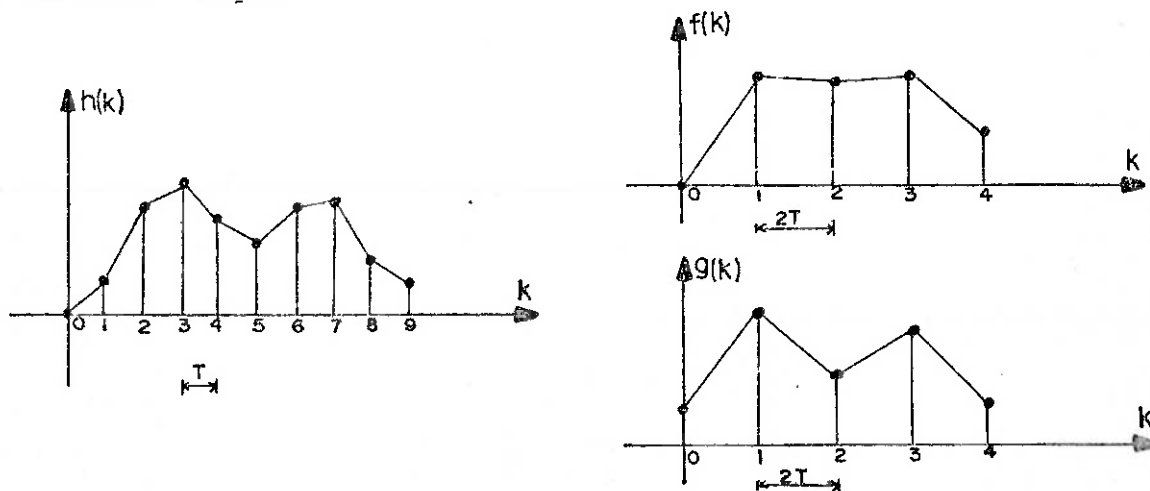


Figura (9.1)

Os termos das sub-sequências podem ser obtidos pelas expressões:

$$f(k) = h(2k) \quad (9.3)$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$g(k) = h(2k + 1) \quad (9.4)$$

Calculemos agora as transformadas discretas de Fourier das duas novas sequências:

$$F(n) = 2T \sum_{k=0}^{N/2-1} f(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} = 2T \sum_{k=0}^{N/2-1} h(2k) e^{-i2\pi \frac{2nk}{N}} \quad (9.5)$$

$$G(n) = 2T \sum_{k=0}^{N/2-1} g(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N/2}} = 2T \sum_{k=0}^{N/2-1} g(2k+1) e^{-i2\pi \frac{2nk}{N}} \quad (9.6)$$

A transformada discreta de $h(k)$ pode ser obtida tomando-se separadamente a soma sobre os seus termos de ordem par e ímpar:

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N/2-1} h(2k) e^{-i2\pi \frac{n2k}{N}} + T \sum_{k=0}^{N/2-1} h(2k+1) e^{-i2\pi \frac{(2k+1)n}{N}}$$

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N/2-1} h(2k) e^{-i2\pi \frac{n2k}{N}} + e^{-\frac{i2\pi n}{N}} T \sum_{k=0}^{N/2-1} h(2k+1) e^{-i2\pi \frac{2nk}{N}} \quad (9.7)$$

Substituindo as expressões (9.5) e (9.6) em (9.7) temos:

$$H(n) = \frac{1}{2} \left[F(n) + e^{-\frac{i2\pi n}{N}} G(n) \right]$$

Mas:

$$W^n = e^{-i2\pi \frac{n}{N}}$$

Logo:

$$H(n) = \frac{1}{2} \left[F(n) + W^n G(n) \right] \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (9.8)$$

Com a expressão (9.8) é possível obter-se a transformada de uma sequência a partir das transformadas das sub-sequências de seus termos de ordem par e ímpar.

Contudo, esta expressão permite obter somente os $N/2$ primeiros termos de $H(n)$, pois, $F(n)$ e $G(n)$ são calculados para $N/2$ pontos. Como $F(n)$ e $G(n)$ são periódicas com período $N/2$ pode-se escrever que:

$$F(n + N/2) = F(n) \quad G(n + N/2) = G(n) \quad (9.9)$$

Calculando $H(n + N/2)$:

$$H(n + \frac{N}{2}) = \frac{1}{2} \left[F(n) + W^{n+N/2} G(n) \right]$$

Mas:

$$W^{n+N/2} = W^n \cdot W^{N/2} = -W^n$$

Logo:

$$H(n + \frac{N}{2}) = \frac{1}{2} \left[F(n) - W^n G(n) \right] \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (9.10)$$

As equações (9.8) e (9.10) permitem obter os N termos da sequência $H(n)$ a partir das transformadas de suas sub-sequências: $F(n)$ e $G(n)$.

O número total de multiplicações necessárias neste caso será:

$$\frac{N^2}{4}, \text{ para se obter } F(n)$$

$$\frac{N^2}{4}, \text{ para se obter } G(n)$$

$$\frac{N}{2}, \text{ para se obter } W^n G(n)$$

totalizando um número de $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ multiplicações que

será sempre menor do que N^2 .

9.3 - Exemplos de aplicação:

9.3.1 - Transformada de uma sequência constituída de um termo

Antes de passarmos às aplicações das equações (9.8) e (9.10) vejamos um resultado que será utilizado nos exemplos seguintes:

Consideremos a sequência de um só termo:

$$h(k) = h(0)$$

Sua transformada discreta é obtida aplicando-se a expressão (7.11):

$$H(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$H(0) = T h(0) \tag{9.11}$$

9.3.2 - Transformada de uma sequência constituída de dois termos

Neste caso a sequência $h(k)$ é dada pelos termos:

$$h(k) = h(0), h(1)$$

As duas sub-sequências dela obtidas são dadas por:

$$f(k) = h(2k) \quad g(k) = h(2k+1) \quad k = 0, \dots, N/2 - 1$$

Com $N=2$ o único valor que k assume é zero, logo:

$$f(0) = h(0) \quad g(0) = h(1)$$

Levando-se em conta a expressão (9.11) e considerando se que o intervalo de discretização das sub-sequências é o dobro do da original, as transformadas de $f(k)$ e $g(k)$ são dadas por:

$$F(0) = 2T h(0) \quad G(0) = 2T h(1)$$

Como o único valor que k assume é zero, aplicando-se as equações (9.8) e (9.10) temos:

$$H(0) = \frac{1}{2} \left[F(0) + W^0 G(0) \right] \quad H(0) = T \left[h(0) + h(1) \right] \quad (9.12)$$

$$H(1) = \frac{1}{2} \left[F(0) - W^0 G(0) \right] \quad H(1) = T \left[h(0) - h(1) \right] \quad (9.13)$$

9.3.3 - Transformada de uma sequência constituída de 4 termos:

A sequência $h(k)$ é dada pelos termos:

$$h(k) = h(0), h(1), h(2), h(3)$$

Nas sub-sequências $f(k)$ e $g(k)$ o índice k assume os valores:

$$k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad k = 0, 1$$

Logo:

$$f(0) = h(0)$$

$$f(1) = h(2)$$

$$g(0) = h(1)$$

$$g(1) = h(3)$$

Para calcular as transformadas das sub-sequências f e g podemos dividir cada uma delas em duas outras de um termo cada.

As transformadas das 4 sub-sequências de um termo cada podem ser então obtidas aplicando-se a equação (9.11). A seguir vamos combinando as transformadas até se obter a da sequência original.

Aqui neste exemplo, as transformadas das sequências f e g podem ser obtidas aplicando-se diretamente as equações (9.12) e (9.13) do exemplo anterior.

$$F(0) = 2T [h(0) + h(2)]$$

$$G(0) = 2T [h(1) + h(3)]$$

$$F(1) = 2T [h(0) - h(2)]$$

$$G(1) = 2T [h(1) - h(3)]$$

Para $N = 4$ o multiplicador W^n assume o valor:

$$W^n = e^{-i2\pi\frac{n}{N}} = e^{-\frac{i\pi n}{2}}$$

Aplicando-se (9.8) e (9.10) temos:

$$H(0) = \frac{1}{2} [F(0) + W^0 G(0)] \quad H(0) = h(0) + h(2) + h(1) + h(3)$$

$$H(1) = \frac{1}{2} [F(1) + W^1 G(1)] \quad H(1) = h(0) - h(2) - i[h(1) - h(3)]$$

$$H(2) = \frac{1}{2} [F(0) - W^0 G(0)] \quad H(2) = h(0) + h(2) - h(1) - h(3)$$

$$H(3) = \frac{1}{2} [F(1) - W^1 G(1)] \quad H(3) = h(0) - h(2) + i[h(1) - h(3)]$$

9.3.4 - Transformada de uma sequência de 8 termos:

Consideremos a sequência $h(k)$

$$h(k) = h(0), h(1), h(2), h(3), h(4), h(5), h(6), h(7)$$

Esta sequência pode ser subdividida em duas outras $f(k)$ e $g(k)$:

$$f(0) = h(0) \quad f(1) = h(2) \quad f(2) = h(4) \quad f(3) = h(6)$$

$$g(0) = h(1) \quad g(1) = h(3) \quad g(2) = h(5) \quad g(3) = h(7)$$

A transformada de $h(k)$ pode ser obtida a partir das transformadas $f(k)$ e $g(k)$. Como estas possuem um número par de termos, podemos dividi-las em duas sub-sequências cada uma:

$$\begin{aligned} a(k) & \text{ e } b(k) & \text{ de } & f(k) \\ c(k) & \text{ e } d(k) & \text{ de } & g(k) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} a(0) &= f(0) = h(0) & a(1) &= f(2) = h(4) \\ b(0) &= f(1) = h(2) & b(1) &= f(3) = h(6) \\ c(0) &= g(0) = h(1) & c(1) &= g(2) = h(5) \\ d(0) &= g(1) = h(3) & d(1) &= g(3) = h(7) \end{aligned}$$

Estas sucessivas partições estão ilustradas abaixo:

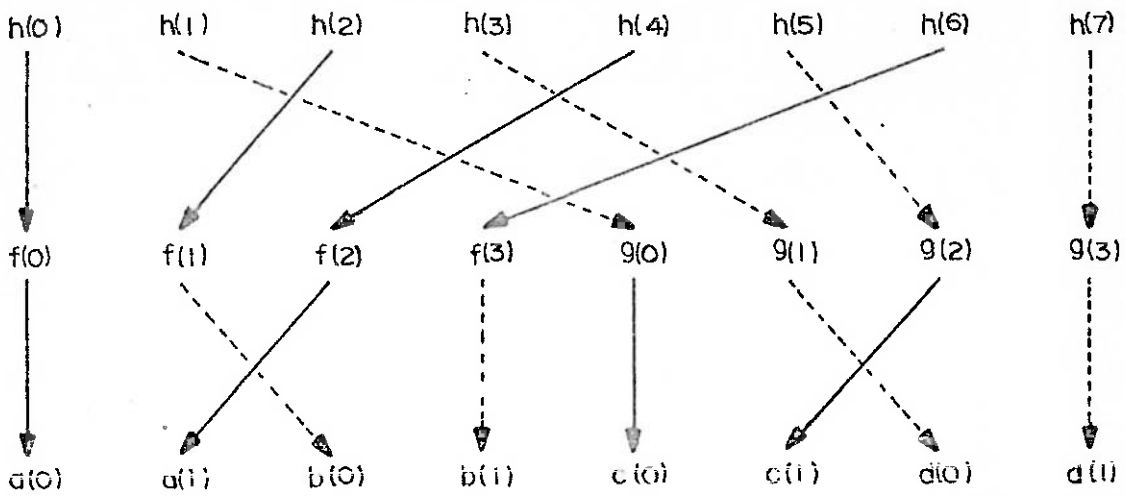


Figura (9.2)

Cada uma das 4 sub-sequências resultantes podem ser divididas em duas outras de um termo cada.

A seguir aplicamos a equação (9.11) a cada uma das oito sub-sequências resultantes para calcular suas transformadas. Então, vamos combinando-as sucessivamente, aplicando-se as equações (9.8) e (9.10), até se encontrar a transformada da sequência original.

Este é o algoritmo da transformada rápida de Fourier. No entanto, para que o mesmo seja aplicável, é necessário que o número de termos da sequência original seja potência inteira de dois:

$$ND = 2^M \quad (9.14)$$

Esta sequência é dividida sucessivamente até se obter ND sub-sequências de um termo. Aplicamos a equação (9.11) a cada uma destas sub-sequências para calcularmos suas transformadas. A seguir vamos combinando as mesmas, aplicando-se as equações (9.8) e (9.10), obtendo em cada passo transformadas de sequências maiores até se atingir a da original.

Lembrando que em cada partição o intervalo de discretização é o dobro do da sequência que a originou, as expressões (9.8) e (9.10) podem ser postas sob a forma.

$$H(n) = F(n) + W^n G(n) \quad (9.15)$$

$$H\left(n + \frac{ND}{2}\right) = F(n) - W^n G(n) \quad (9.16)$$

Com esta alteração basta multiplicar o resultado final das combinações pelo intervalo de discretizações T da sequência original.

9.4 - Reordenação dos dados

Como se viu no exemplo anterior, o primeiro passo para se calcular a transformada rápida de uma sequência e dividi-la várias vezes em sub-sequências de termos de ordem par e ímpar até se recair em sub-sequências de um termo.

Ao se proceder desta maneira, vai se alterando progressivamente a ordem dos termos.

No exemplo anterior os 8 termos foram colocados na ordem natural:

$$h(0), h(1), h(2), h(3), h(4), h(5), h(6), h(7)$$

Após a primeira partição, os mesmos ficaram na seguinte ordem:

$$h(0), h(2), h(4), h(6), h(1), h(3), h(5), h(7)$$

E, após a segunda:

$$h(0), h(4), h(2), h(6), h(1), h(5), h(3), h(7)$$

que corresponde as quatro sub-sequências de dois termos colocadas

das uma ao lado da outra. Se dividirmos cada uma dessas em duas outras de um termo cada, a ordem dos mesmos não será alterada sendo, portanto, esta, a final.

Para se passar da sequência original para a reordenada, basta trocar de posição alguns termos, por exemplo:

$h(1)$ com $h(4)$ $h(3)$ com $h(6)$

Em um programa para computador isto é feito da seguinte maneira:

1º) Criamos um contador que gere os índices da sequência original. Chamando este contador de L termos:

$L = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

2º) Criamos um outro contador que gere os índices da sequência reordenada. Chamando a este de J :

$J = 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.$

A cada dois índices L e J gerados permutamos $h(L)$ com $h(J)$.

A permutação pode ser evitada quando L for igual a J . No entanto, a mesma deve ser evitada quando L for maior que J , pois, neste caso, os termos $h(L)$ e $h(J)$ já haviam trocado de posição uma vez.

O segundo contador é chamado de contador binário revertido.

De uma maneira genérica o fluxograma desta passagem é dado pela figura (9.3).

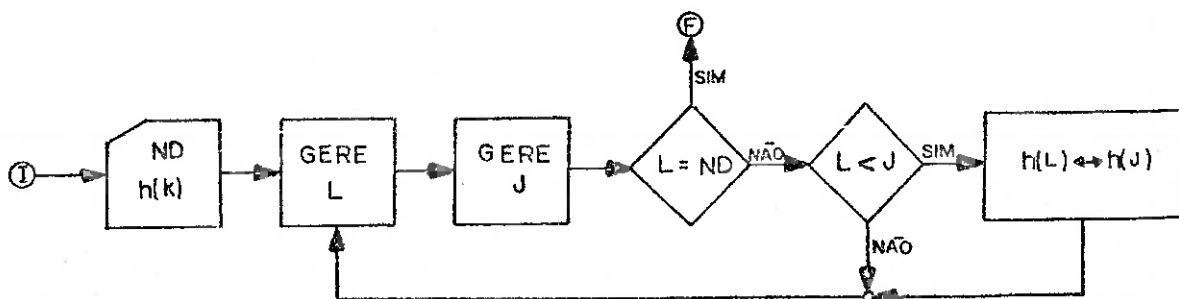


Figura (9.3)

9.4.1 - O contador binário revertido

Para $ND = 2^M$, existe uma relação entre os números gerados pelo contador L e pelo contador J. Esta relação é a seguinte:

1º) Dado L, escreve-se o mesmo na forma binária com M dígitos.

2º) Inverte-se a posição dos dígitos.

3º) Transforma-se o novo binário para a forma decimal obtendo-se J.

Por esta razão o contador J é chamado de contador binário revertido.

A seguir, mostramos como pode ser obtida a sequência dos índices J para 8 e 16 termos. Na primeira linha é dado L. Na segunda L é apresentado na forma binária. Na terceira aparece o novo binário com os dígitos invertidos e na quarta, o respectivo valor de J.

| L | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| | 000 | 100 | 010 | 110 | 001 | 101 | 011 | 111 |
| J | 0 | 4 | 2 | 6 | 2 | 5 | 3 | 7 |

Figura (9.4)

| L | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| | 0000 | 1000 | 0100 | 1100 | 0010 | 1010 | 0110 | 1110 | 0001 | 1001 | 0101 | 1101 | 0011 | 1011 | 0111 | 1111 |
| J | 0 | 8 | 4 | 12 | 2 | 10 | 6 | 14 | 1 | 9 | 5 | 13 | 3 | 11 | 7 | 15 |

Figura (9.5)

Em programas de computador não se usa o índice zero. Por isto os dois contadores devem gerar índices de 1 a N.

O primeiro contador é muito simples, basta criar uma variável e a cada passo incrementá-la de uma unidade.

O segundo já não é tão simples assim. A seguir apresentamos um fluxograma do mesmo. O primeiro termo J não é for_necido pois o mesmo é igual a unidade:

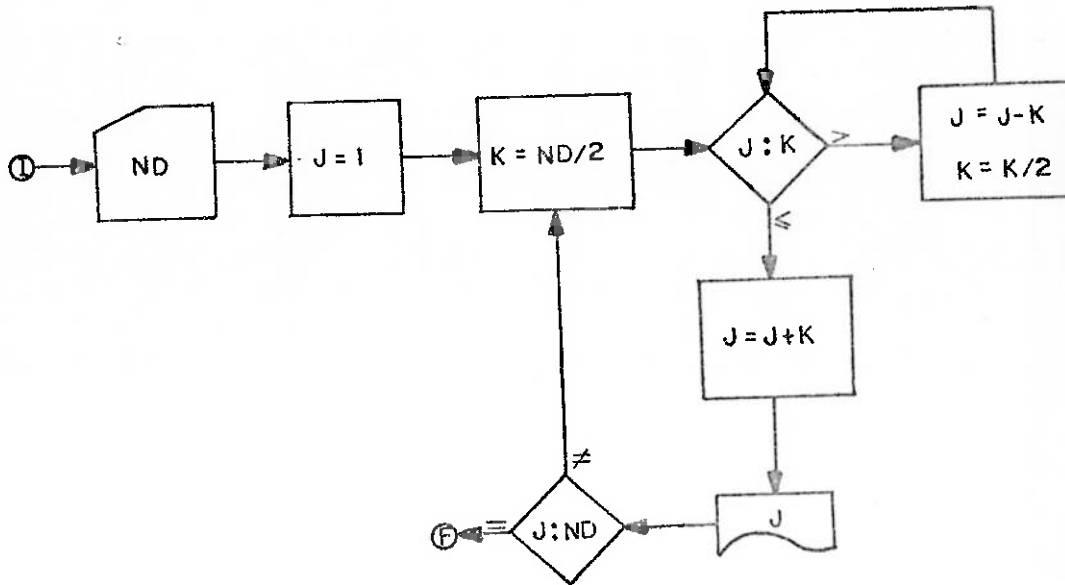


Figura (9.6)

9.4.2 - Fluxograma para reordenação dos dados

A figura (9.6) é um detalhe do 3º passo do fluxograma da figura (9.3). Desta maneira o fluxograma geral é o apresentado na figura (9.7).

9.5 - Esquema de combinações

9.5.1 - Relações básicas:

Levando-se em conta que nos programas de computador não se usa índice zero, as expressões (9.15) e (9.16) precisam ser ligeiramente alteradas para que continuem válidas:

$$H(n) = F(n) + W^{n-1} G(n) \quad (9.17)$$

$$n = 1, \dots, N/2$$

$$H(n+N/2) = F(n) - W^{n-1} G(n) \quad (9.18)$$

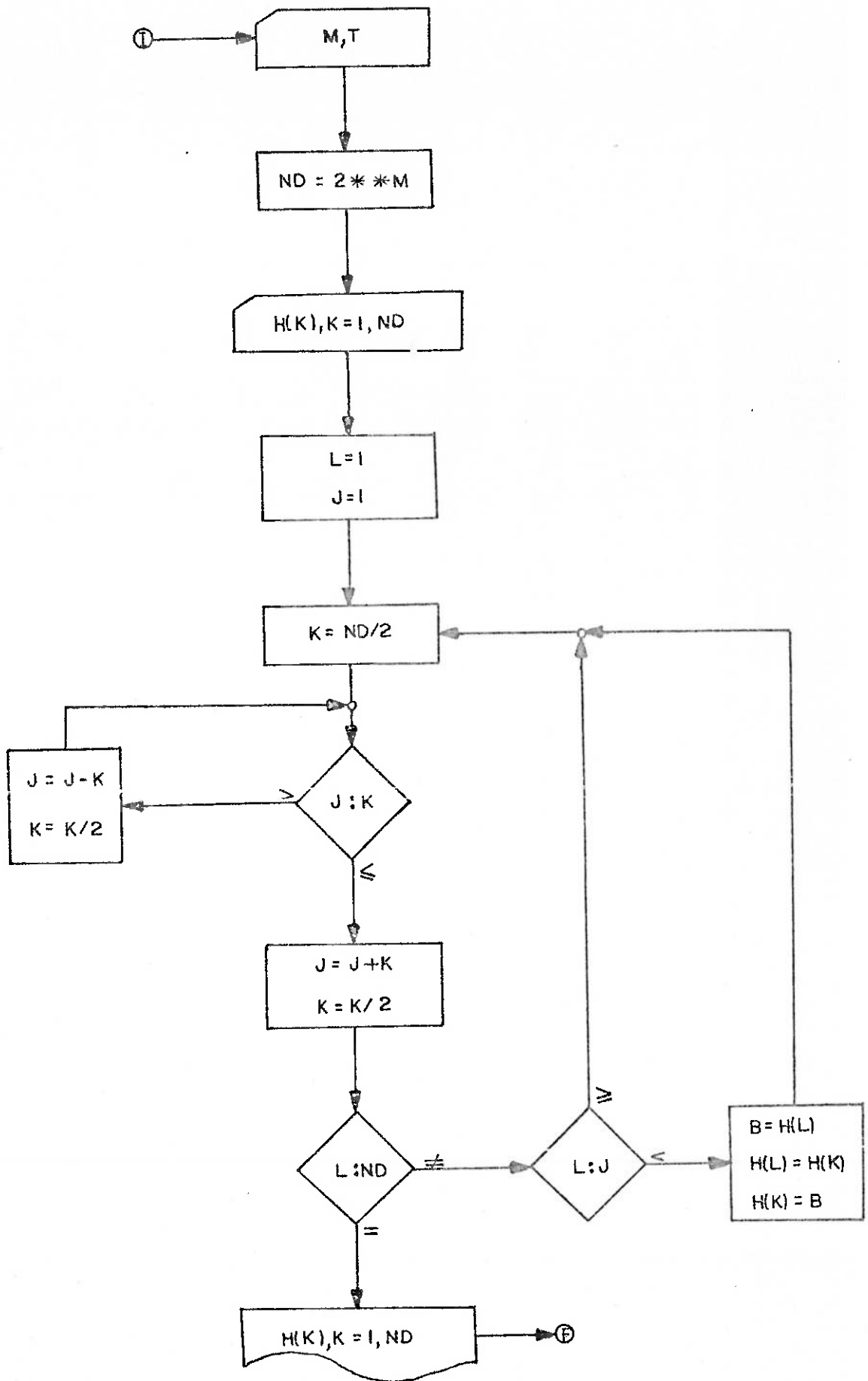


Figura (9.7)

onde o multiplicador W assume o valor:

$$W = e^{\frac{-i2\pi}{N}} \quad (9.19)$$

9.5.2 - Marcha de cálculo:

De acordo com o que foi visto, a marcha de cálculo para a transformada rápida de Fourier de uma sequência com ND termos pode ser a seguinte:

1º) Dividimos esta sequência em duas sub-sequências de $ND/2$ termos cada.

2º) Dividimos estas duas sequências em quatro sub-sequências de $ND/4$ termos cada.

3º) Procedemos desta maneira até obtermos ND sub-sequências de um termo cada.

4º) As transformadas de Fourier destas são dadas pelo próprio valor de cada termo. Portanto temos ND transformadas de sub-sequências de um termo.

5º) Combinando-as, de acordo com as expressões (9.17) e (9.18), temos $ND/2$ transformadas de sub-sequências de dois termos.

6º) Procedemos desta maneira sucessivamente até obtermos uma transformada de uma sequência de ND termos.

Simbolicamente, para uma sequência de oito termos teríamos o esquema da figura (9.8).

Vamos ver agora como esta sequência de cálculo pode ser feita por um computador de maneira rápida e eficiente, economizando o número de memórias.

Vamos supor sempre que os três primeiros passos já tenham sido realizados, ou seja: a sequência original já tenha sido reordenada.

Portanto, quando nos referirmos a sequência $h(k)$:

$$k = 1, 2, \dots, ND$$

estaremos considerando um conjunto ordenado de ND sub-sequências de um termo cada.

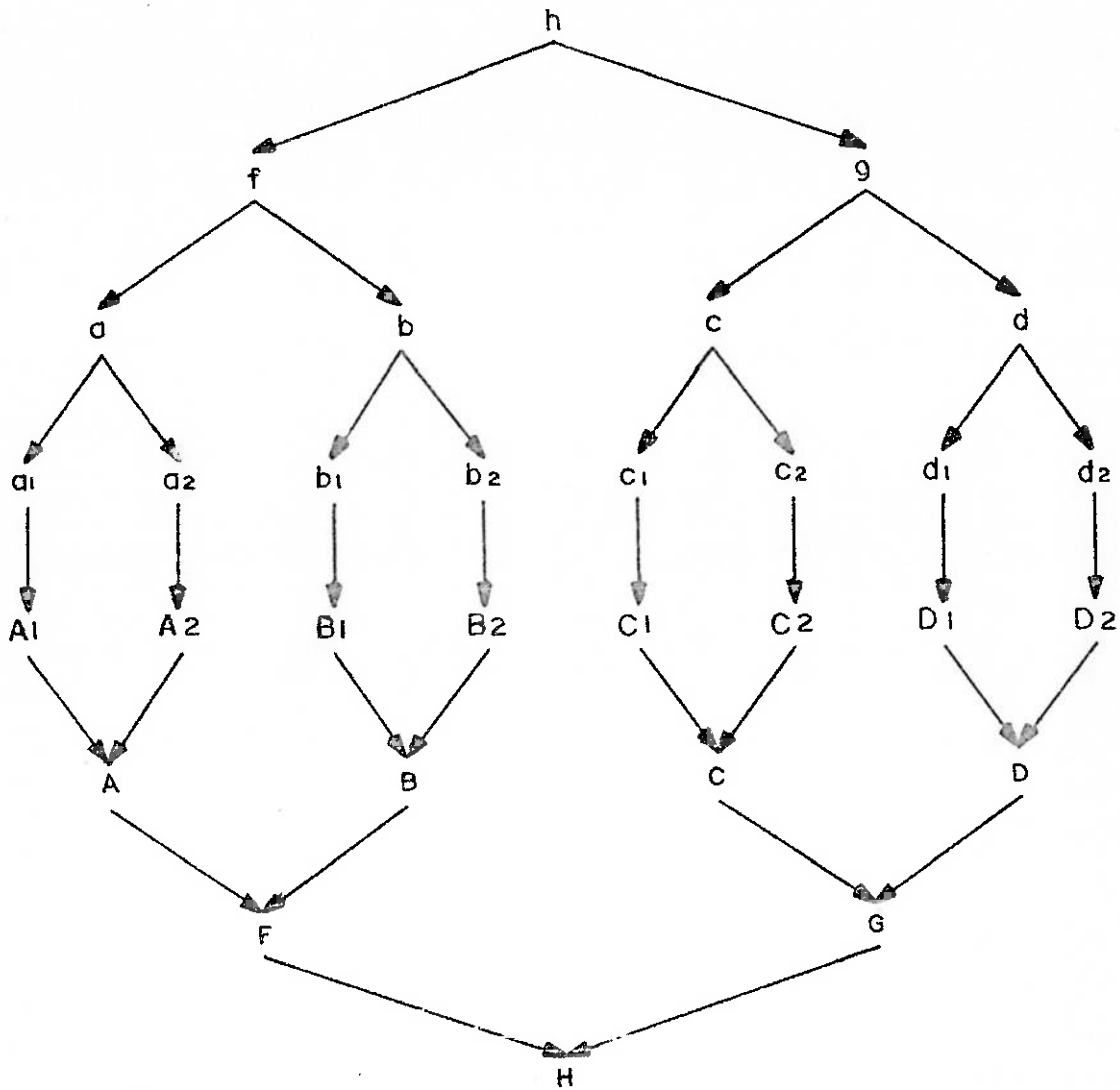


Figura (9.8)

9.5.3 - Transformada de uma sequência de dois termos:

Dada a sequência:

$$h(k) = h(1), h(2)$$

$$N = 2$$

Considerando:

$$f(1) = h(1)$$

$$g(1) = h(2)$$

e aplicando as equações (9.17) e (9.18) temos:

$$H(1) = h(1) + W^0 h(2)$$

$$H(2) = h(1) - W^0 h(2)$$

onde W é dado por (9.19)

$$W = e^{\frac{-i2\pi}{2}} = e^{-i\pi}$$

Em um computador é sempre desejável economizar o número de memórias. Para isso, ao invés de criarmos um novo vetor para representar $H(n)$, podemos usar o mesmo para representar a sequência $h(k)$ e sua transformada $H(n)$. Para isto basta fazer:

$$B = W^0 h(2)$$

$$h(2) = h(1) - B$$

$$h(1) = h(1) + B$$

Estas combinações estão representadas simbolicamente na figura (9.9). As setas que chegam em cada termo indicam quais os que contribuem para a formação daquele que é atingido pelas mesmas. Na extremidade de cada seta é indicado o valor pelo qual o termo de onde ela precede é multiplicado.

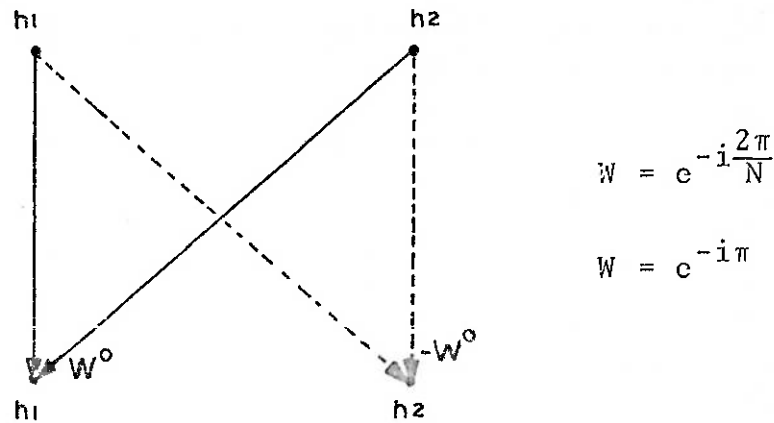


Figura (9.9)

9.5.4 - Transformada de uma sequência constituída de quatro termos.

Dada a sequência abaixo:

$$h(k) = h(1), h(2), h(3), h(4)$$

A transformada da mesma pode ser calculada como anteriormente em dois passos.

No primeiro passo calculemos as transformadas de duas sequências de dois termos aplicando as equações (9.17) e (9.18). Este passo é ilustrado na figura (9.10). Neste passo temos $N = 2$.

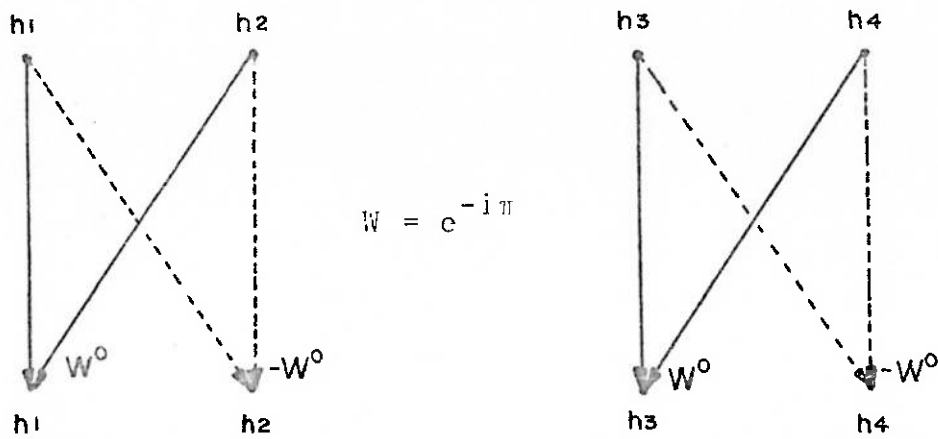


Figura (9.10)

Em cada passo indicamos ao lado do esquema o valor de W . As setas em traço contínuo referem-se à aplicação da expressão (9.17) e as em traço descontinuo são referentes à aplicação da expressão (9.18).

Em um segundo passo, combinemos estas duas transformadas de sub-sequências de dois termos para se obter a transformada da sequência de quatro termos.

Neste passo temos $N = 4$, logo:

$$W = e^{-i\pi/2}$$

Chamando de $f(k)$ e $g(k)$ os valores que se encontram nas memórias $h(k)$ após o processamento do 1º passo serão:

$$h(1) = F(1) \quad h(2) = F(2) \quad h(3) = G(1) \quad h(4) = G(2)$$

A aplicação das expressões (9.17) e (9.18) conduzirão aos seguintes resultados:

$$H(1) = h(1) + W^0 h(3) \quad H(2) = h(2) + W^1 h(4)$$

$$H(3) = h(1) - W^0 h(3) \quad H(4) = h(2) - W^1 h(4)$$

Usando a mesma variável $h(k)$ para representar a transformada, temos:

$$B = W^0 h(3) \quad h(3) = h(1) - B \quad h(1) = h(1) + B$$

$$B = W^1 h(4) \quad h(4) = h(2) - B \quad h(2) = h(2) + B$$

Este segundo passo é representado da seguinte maneira em um esquema de combinações:

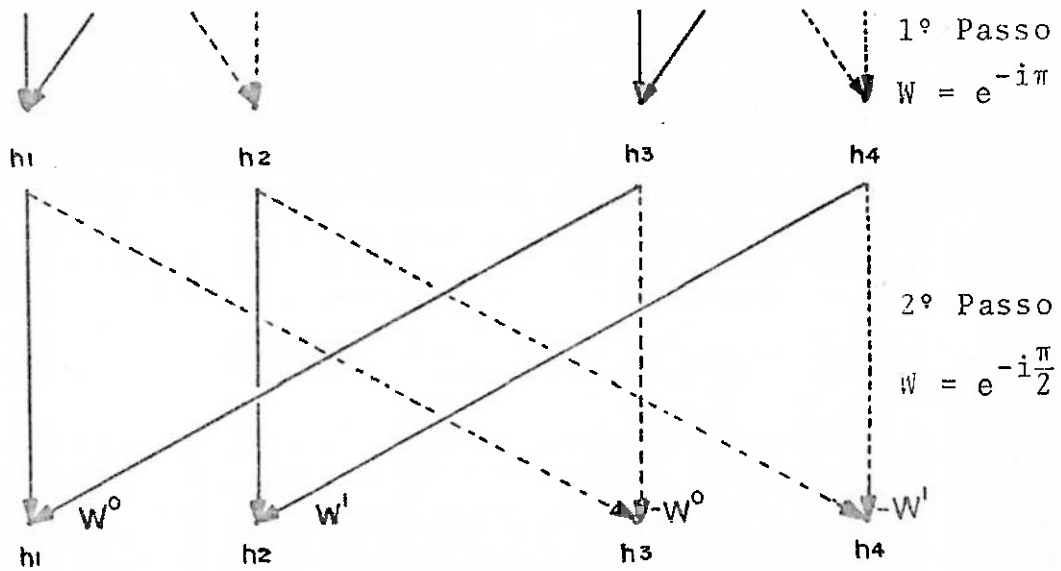


Figura (9.11)

9.5.5 - Transformada de uma sequência de oito termos

De acordo com a marcha de cálculo proposta e procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, temos o esquema de combinações dado pela figura (9.14)

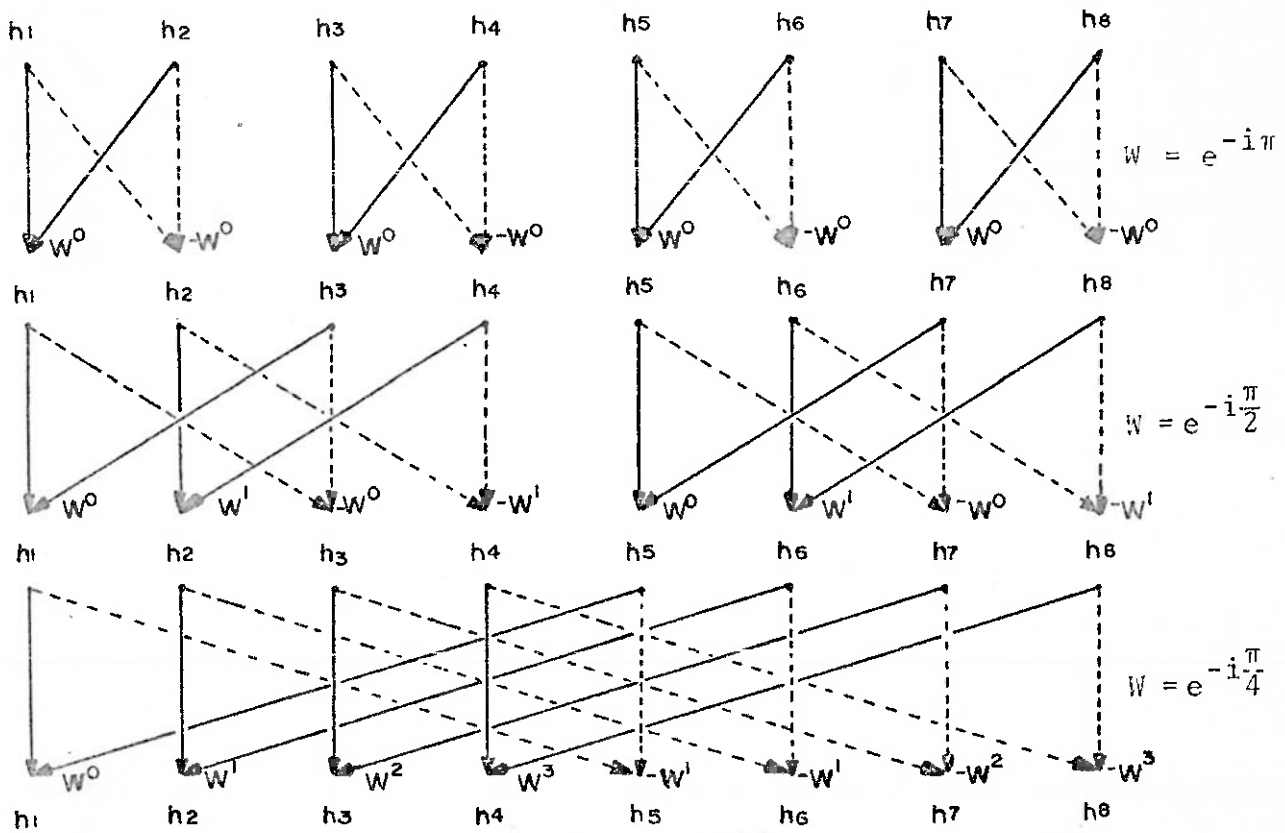


Figura (9.12)

9.5.6 - Transformada de uma seqüência de ND termos:

Com base nos exemplos que foram vistos podemos fazer algumas generalizações na marcha de cálculo.

Dado:

$$ND = 2^M$$

o número de passos de combinações será igual a M.

Em um passo NP qualquer combinamos as 2^{M-NP+1} transformadas de sub-sequências de 2^{NP-1} termos para se obter as 2^{M-NP} transformadas de sequências de 2^{NP} termos.

O valor de W em cada passo é:

$$W = e^{-i2\pi/2^{NP}} = e^{-i\pi/2^{(NP-1)}}$$

Para se obter as 2^{M-NP} transformadas de sequências de 2^{NP} termos, as fórmulas (9.17) e (9.18) são aplicadas 2^{NP-1} vezes cada uma.

Os expoentes de W, em um passo NP, variam de zero a $(2^{NP-1} - 1)$.

9.6 - Fluxograma:

Com base nas generalizações que foram feitas poderíamos propor um fluxograma com as seguintes operações:

1º) Em um passo NP calculemos $J = 2^{NP-1}$.

2º) Realizemos as combinações das duas primeiras sub-sequências com os expoentes de W variando de 0 a J-1.

3º) Obtida uma nova seqüência, combinemos as duas sub-sequências seguintes com os expoentes de W variando de 0 a J-1.

4º) Quando houverem sido obtidas as 2^{M-NP} seqüências deste passo, passa-se ao passo seguinte.

Nesta ordem, poderíamos calcular somente W^1 e obter as outras potências de W a partir dela.

$$W^0 = 1 \quad W^1 = W^0 W^1 \quad W^2 = W^1 W^1 \quad W^3 = W^2 W^1$$

Mesmo com esta vantagem este caminho não é o ideal. Como W é um número complexo, o tempo ganho no processamento é considerável, se se aproveitar um mesmo valor de W^n em todas as operações que o mesmo for necessário em um determinado passo.

Como exemplo, o segundo passo no processamento de uma sequência seria feito na seguinte ordem: (vide figura (9.12))

$$1) h(1) = h(1) + W^0 h(3)$$

$$2) h(3) = h(1) - W^0 h(3)$$

$$3) h(5) = h(5) + W^0 h(7)$$

$$4) h(7) = h(5) - W^0 h(7)$$

$$5) h(2) = h(2) + W^1 h(4)$$

$$6) h(4) = h(2) - W^1 h(4)$$

$$7) h(6) = h(6) + W^1 h(8)$$

$$8) h(8) = h(6) - W^1 h(8)$$

Chamando de $J = 2^{NP-1}$, em um passo NP :

1º) Tomemos um expoente $(n-1)$ de W .

2º) Combinamos:

$$h(n) \text{ com } h(n+J)$$

$$h(n+2J) \text{ com } h(n+3J)$$

$$h(n+4J) \text{ com } h(n+5J)$$

3º) As operações são repetidas até tomar o último termo $h(k)$ com $k \leq N$.

4º) A seguir incrementa-se o expoente de W e repetem-se as operações anteriores.

O multiplicador W^n pode ser obtido facilmente fazendo-se:

$$W^n = W^{n-1} \times W$$

Ou então, utilizando uma mesma variável U :

$$U = U \times W$$

Este processo de obtenção dos diversos expoentes de W pode ser iniciado fazendo-se:

$$U = W^* \text{ (complexo conjugado)}$$

e a seguir o novo valor é calculado pela multiplicação anterior.

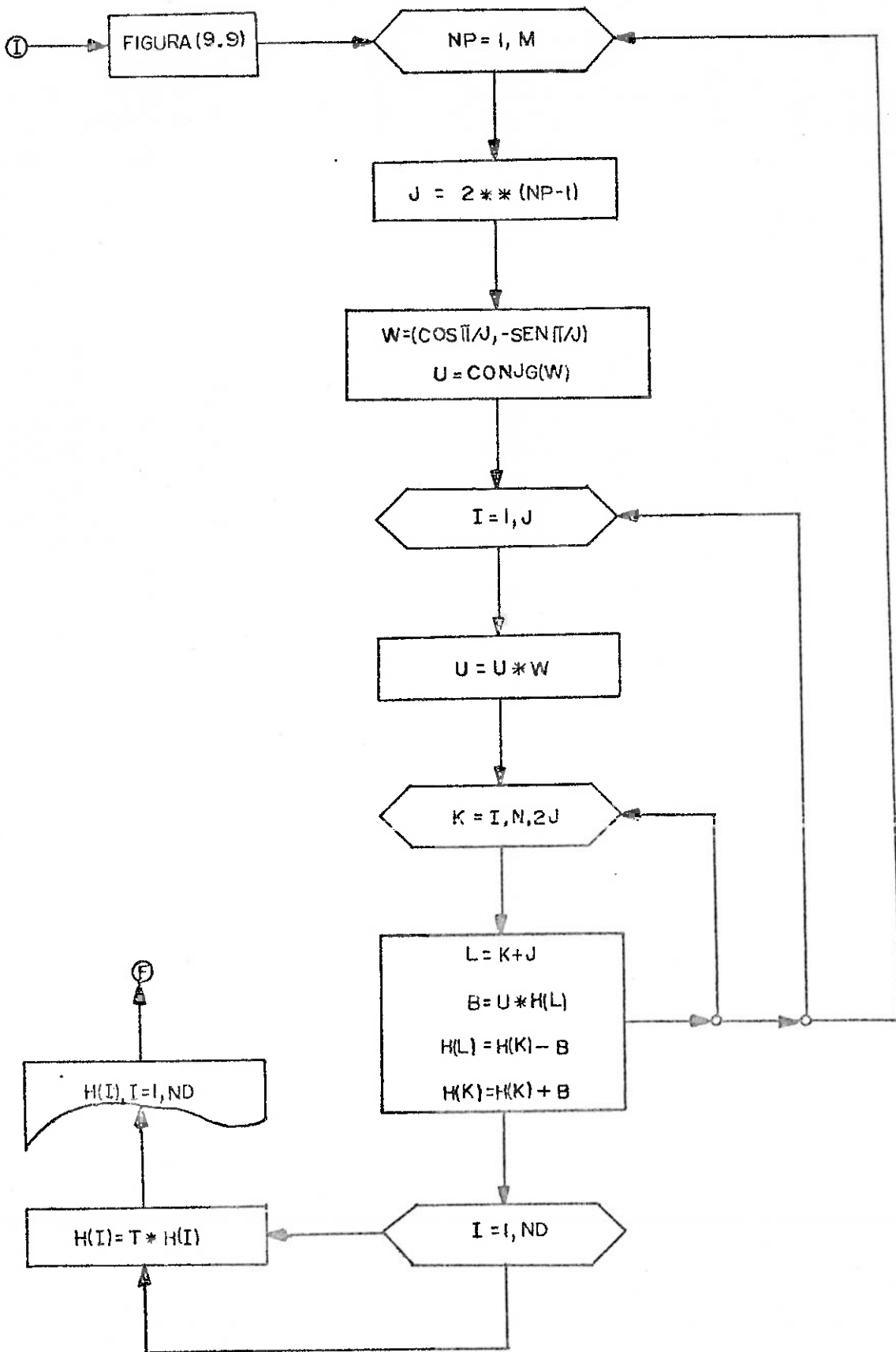


Figura (9.13)

Isto em nada altera os resultados pois no primeiro passo:

$$U = W^* x W = 1 = W^0$$

Terminadas todas as combinações em um determinado passo, passa-se para o seguinte.

O fluxograma destas operações é dado pela figura (9.13).

9.7 - Comentários:

O algoritmo aqui apresentado é o de base 2. No entanto, existem outros com base 3, 4 ou 5. Este é o mais usado. Se usássemos o de base 5, deveríamos ter:

$$ND = 5^M$$

o que poderia restringir suas aplicações.

O método aqui usado é chamado de dizimação no tempo, isto porque a sequência $h(k)$ é sucessivamente dividida em sub-sequências de termos de ordem par e ímpar de modo que os termos de $H(n)$ resultem vizinhos. Este foi o método proposto por Cooley e Tukey.

Existe um outro método, proposto por Sande e Tukey, que consiste em começar as combinações diretamente da sequência $h(k)$, sem reordená-la, de modo que a sequência $H(n)$ encontre-se dividida em termos de ordem par e ímpar. Neste caso a ordenação dos dados é feita após as combinações.

Portanto, estamos utilizando o método da dizimação no tempo, com algoritmo de base 2.

Em A-1 é apresentado um programa feito para a máquina de bolso Texas TI-59. O número máximo de termos é 32.

O programa só realiza a somatória da expressão (7.3), a multiplicação pelo intervalo de discretização deve ser feita fora do programa.

A título de exemplo, uma sequência de 32 termos teve sua transformada calculada pelo programa para transformada discreta de Fourier da mesma máquina em 88 minutos. Usando o pro

grama da transformada rápida, este tempo caiu para 10 minutos.

Em A-2 é apresentada uma sub-rotina em Fortran-IV para cálculo da transformada rápida de Fourier pelo computador Burroughs B6700. É a sub-rotina TRF.

CAPÍTULO 10

APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Com base em toda a teoria vista até agora, apresentamos alguns exemplos do uso da transformada discreta de Fourier. Antes, porém, são apresentados alguns procedimentos para se computar a mesma.

Exceto o exemplo 10.2.6, todos os outros foram resolvidos utilizando-se o programa da transformada rápida de Fourier da Texas-59.

10.1 - Procedimentos:

10.1.1 - Pontos de descontinuidade

A expressão (6.18) mostra que, em pontos de descontinuidade, o valor de um termo da sequência deve ser dado pelo valor médio da função nos mesmos. Isto decorre do fato de que a integral não é tomada em todo o domínio do tempo.

Procedimento análogo deve ser tomado para se computar a transformada inversa de uma sequência que apresente pontos de descontinuidade no domínio da frequência.

A figura (10.1) mostra, como exemplo, como devem ser fornecidos os pontos para se processar a transformada discreta de um pulso retangular deslocado.

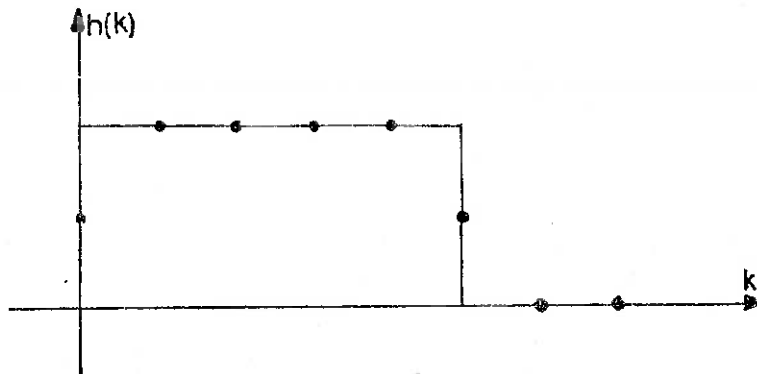


Figura (10.1)

10.1.2 - Duração das seqüências

Fato importante, que não deve ser esquecido, é o de que a duração ou a largura de banda de uma seqüência em um domínio é o inverso do intervalo de discretização no outro domínio.

$$F_0 = \frac{1}{T} \quad (10.1-a)$$

$$T_0 = \frac{1}{F} \quad (10.1-b)$$

10.1.3 - Periodicidade das seqüências

Foi demonstrado no capítulo 7 que a transformada discreta leva em conta que a seqüência é periódica nos dois domínios. Esta propriedade é extremamente útil para se calcular, ou para se interpretar, as transformadas de certas seqüências.

Vamos supor que o objetivo seja calcular, numericamente, a transformada do pulso triangular da figura (10.2-a) cujo resultado analítico é dado em (10.2-b).

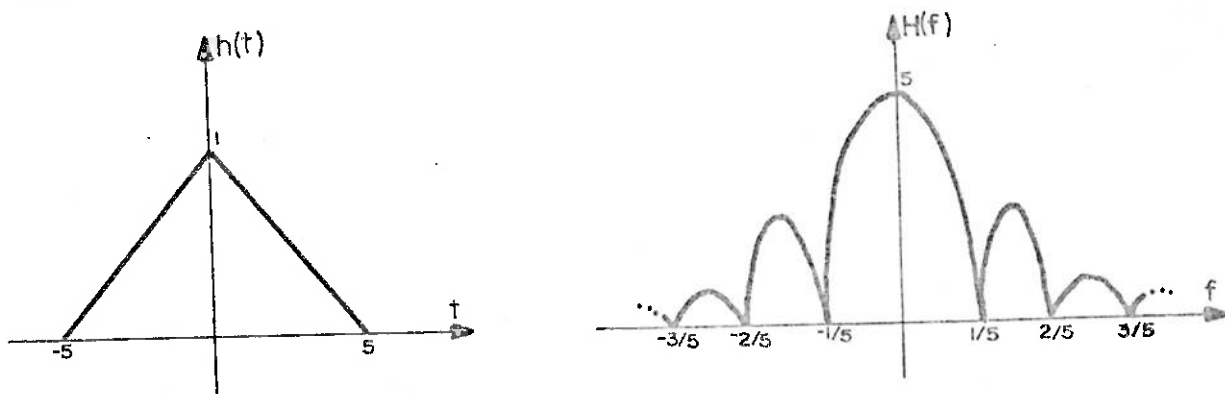


Figura (10.2)

Discretizando o mesmo em intervalos iguais de 1 segundo, temos a seqüência da figura (10.3).

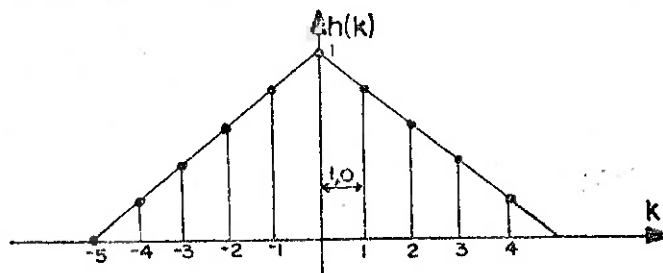


Figura (10.3)

No cálculo da transformada discreta devemos tomar os termos de ordem zero a nove. Na figura (10.3) são dispostos dos termos de ordem -5 a 4. Mas, conforme (7.13-d)

$$h(k + \frac{N}{2}) = h(k - \frac{N}{2})$$

$$h(k + 5) = h(k - 5)$$

o que conduz a:

$$h(5)=h(-5) \quad h(6)=h(-4) \quad h(7)=h(-3) \quad h(8)=h(-2) \quad h(9)=h(-1)$$

Com isto temos a sequência da figura (10.4). Na escala inferior indicamos os instantes a que se referem estes termos.

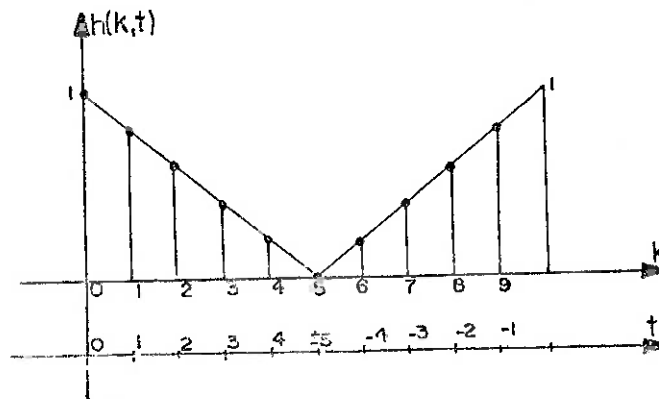


Figura (10.4)

Como a duração da sequência no domínio do tempo é de 10 segundos, o intervalo de discretização no domínio da frequência será de 0,1 Hertz. Além disto são conseguiremos informações da transformada nas frequências:

$$\frac{-1}{2 \times 1} \leq f \leq \frac{1}{2 \times 1}$$

$$-0,5 \text{ Hertz} \leq f \leq 0,5 \text{ Hertz}$$

Segundo (7.13-b) as componentes nas frequências negativas são obtidas com os índices de 5 a 9. Na figura (10.5) indicamos como os resultados são obtidos. Na escala inferior indicamos a que frequência corresponde cada termo.

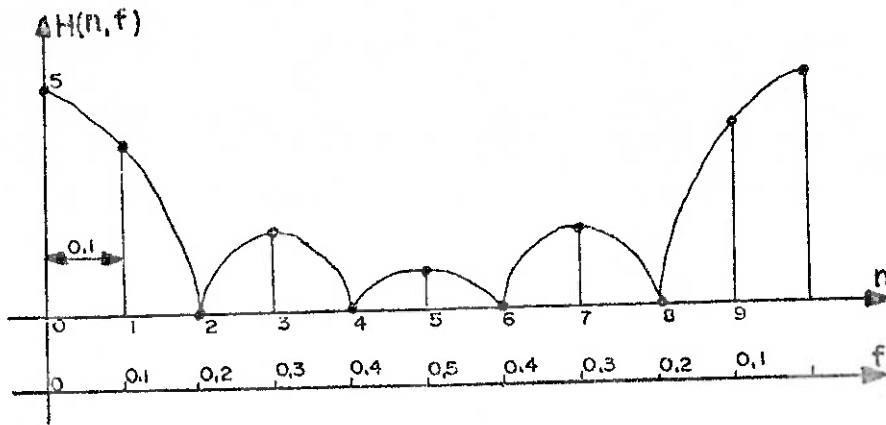


Figura (10.5)

É bom lembrar que, sendo o intervalo de discretização no domínio da frequência igual a 0,1 Hertz, o termo $H(3)$ refere-se à frequência de 0,3 Hertz. Ao contrário, o termo $H(7)$, não se refere à frequência de 0,7 Hertz, mas sim, a -0,3 Hertz.

10.1.4 - Transformada inversa

Analogamente ao que foi feito na transformada, ao se computar a transformada inversa de uma sequência, os valores de $H(n)$ para

$$n \geq N/2$$

referem-se à frequências negativas. Os valores $h(k)$ obtidos para

$$k \geq N/2$$

referem-se aos instantes:

$$\frac{-1}{2F} \leq t \leq 0$$

Assim sendo, ao se computar a transformada discreta inversa da função da figura (10.2-b), devemos fornecer a sequência da figura (10.5). Com isto obteremos a sequência da figura (10.4) que representa a função da figura (10.2-a).

A transformada inversa pode ser obtida utilizando-se o mesmo programa da transformada rápida de Fourier através da fórmula alternativa da inversão (8.8)

$$h(k) = \frac{1}{NT} \left[\sum_{k=0}^{N-1} H^*(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right]^* \quad (10.2)$$

Basta fornecer ao programa o complexo conjugado da sequência $H(n)$. A transformada inversa é igual ao complexo conjugado do resultado do programa multiplicado pelo intervalo de discretização no domínio da frequência.

Se a sequência $h(k)$ for real, não há necessidade de se tomar o complexo do resultado do programa.

10.1.5 - Interpolação no domínio da frequência

Em muitos casos de aplicação é interessante reduzir o intervalo entre cada informação no domínio da frequência. Como vimos, isto é possível aumentando-se a duração da sequência no domínio do tempo.

No caso de sequências periódicas, isto é feito repetindo-se um período da sequência. No entanto, devemos fornecer sempre um número inteiro de períodos.

Se o intervalo de truncamento for igual a um período, estaremos calculando a transformada discreta de Fourier de um pulso de duração finita.

Se o intervalo de truncamento for igual a dois períodos, para a mesma função da figura (10.2-a), teríamos o novo par de transformadas discretas.

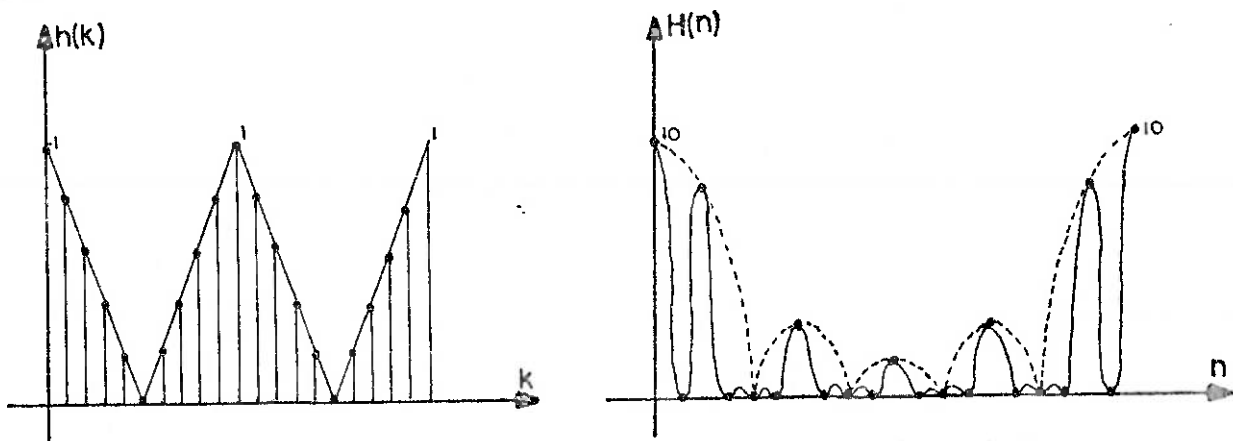


Figura (10.6)

Os valores da transformada nas frequências múltiplas da fundamental são o dobro dos valores da transformada da sequência da figura (10.4) na mesma frequência. Além disto, nas frequências intermediárias à fundamental, a transformada assume valores nulos.

No caso de sequências não periódicas, o artifício para se obter informações em frequências intermediárias é se acrescentar um trecho de zeros.

No exemplo anterior, se quiséssemos obter informações a cada 0,05 Hertz, o número de termos teria de ser:

$$N = \frac{1}{FT} = \frac{1}{0,05 \times 1} = 20$$

Com isto teríamos que acrescentar 10 zeros à sequência da figura (10.3):

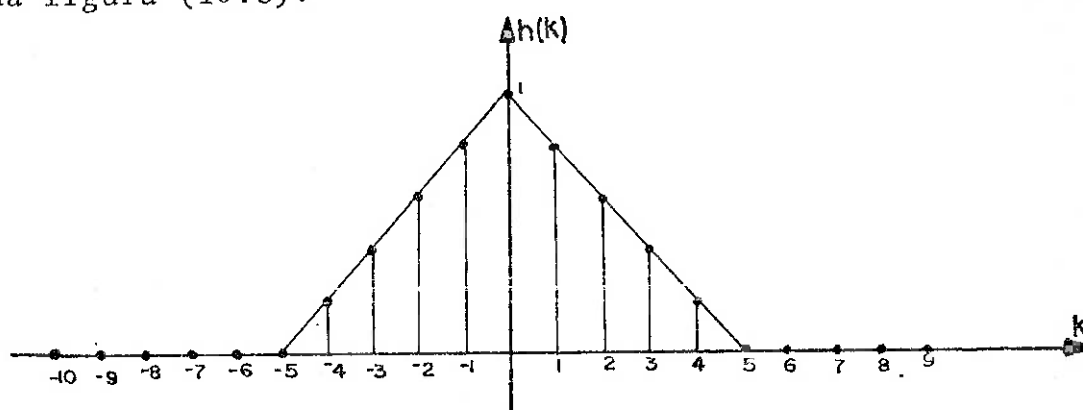


Figura (10.7)

As figuras (10.8) indicam como deve ser fornecida a sequência e como é obtido o resultado.

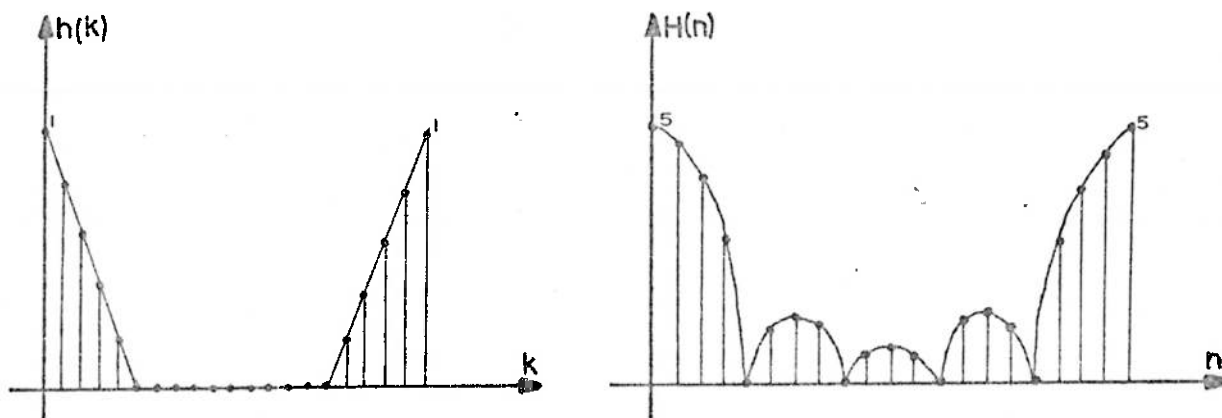


Figura (10.8)

De acordo com (7.14-b), os termos $H(n)$ da sequência da figura (10.5) estão relacionados aos termos $H'(n)$ da sequência da figura (10.8-b) através da expressão:

$$H(n) = H' \left(n \frac{N+L}{N} \right)$$

como $L=N$

$$H(n) = H'(2n)$$

10.1.6 - Coeficientes de Fourier para funções periódicas

O programa para a transformada rápida de Fourier pode ser utilizado para se calcular numericamente os coeficientes de Fourier de uma função periódica.

Para isto basta utilizar a expressão (7.16)

$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (10.3)$$

o que corresponde fornecer a sequência $h(k)$ ao programa e dividir o resultado pelo número de termos da mesma.

A partir dos coeficientes de Fourier, podemos reconstituir a sequência original através de (7.17).

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

Utilizando a fórmula alternativa da inversão:

$$f(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} F^*(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right]^* \quad (10.4)$$

10.2 - Exponencial decrescente

Consideremos uma exponencial decrescente com duração finita de 8 segundos, dada na figura (10.9).

Vamos calcular discretamente sua transformada e comparar os resultados com os pontos discretos da função obtida no ítem (2.8).

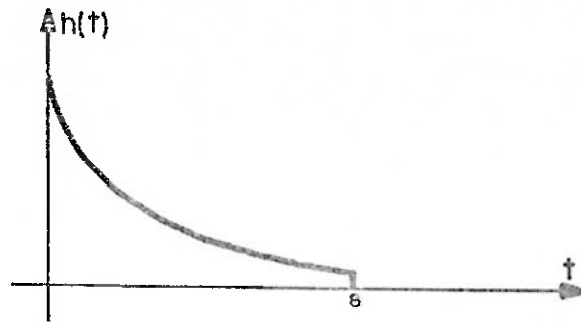


Figura (10.9)

Mesmo que a discretização não conduzisse a erro algum, uma pequena diferença seria de se esperar, pois a função $h(t)$ neste caso é de duração finita

O exemplo (2.8) forneceu os seguintes resultados: "

$$R(f) = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \quad (10.5-a)$$

$$I(f) = \frac{-2\pi f}{1+4\pi^2 f^2} \quad (10.5-b)$$

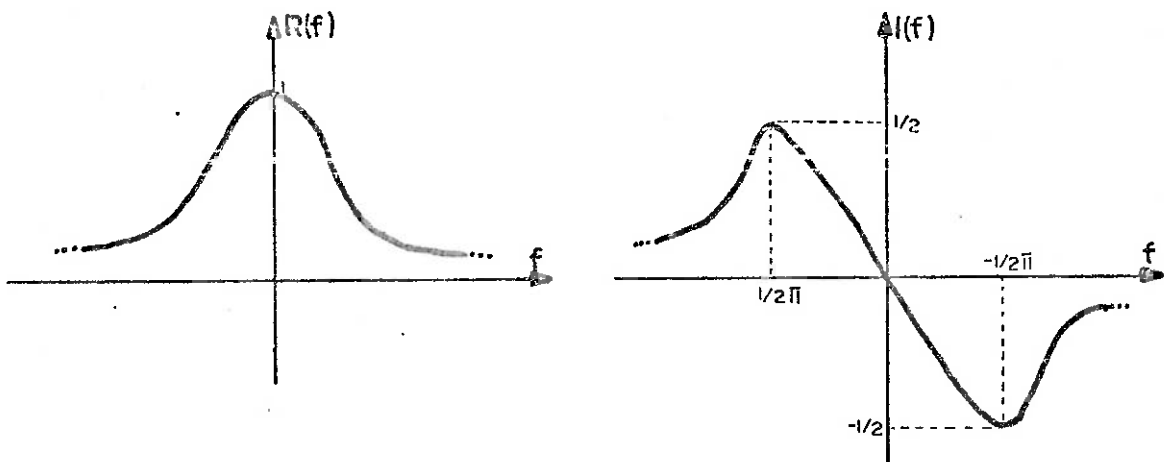


Figura (10.10)

Neste caso, como tanto a parte real como a imaginária possuem largura de banda infinita, se o intervalo de discretização for muito grande, os resultados poderão estar fortemente distorcidos devido ao "aliasing" no domínio da frequência.

10.2.1 - Transformada de uma sequência com 16 termos

Tomando uma sequência de 16 termos da função $h(t)$ temos:

$$T = \frac{T_0}{16} = 0,5 \text{ segundos}$$

$$F_0 = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hertz}$$

$$F = \frac{F_0}{16} = 0,125 \text{ Hertz}$$

Como a sequência da transformada se repete a cada 2 Hertz, só conseguiremos informações no intervalo de -1 a +1 Hertz. As componentes $H(n)$ para n variando de zero a $N/2$ referem-se às frequências positivas e as obtidas com n variando de $N/2$ a $N-1$ referem-se às frequências negativas.

A tabela (10.1) resume os resultados. Os valores das colunas 4 e 5 são determinados pelas expressões (10.5). Os das colunas 6 e 7 são determinados numericamente:

| n,k | h(k) | f | Valores exatos | | Valores numéricos | |
|-----|--------|--------|----------------|---------|-------------------|---------|
| | | | R(f) | I(f) | R(n) | I(n) |
| 0 | 0,5000 | 0,000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0203 | 0,0000 |
| 1 | 0,6065 | 0,125 | 0,6185 | -0,4858 | 0,6391 | -0,4694 |
| 2 | 0,3679 | 0,250 | 0,2884 | -0,4530 | 0,3096 | -0,4202 |
| 3 | 0,2231 | 0,375 | 0,1526 | -0,3596 | 0,1747 | -0,3099 |
| 4 | 0,1353 | 0,500 | 0,0920 | -0,2890 | 0,1154 | -0,2216 |
| 5 | 0,0821 | 0,625 | 0,0609 | -0,2391 | 0,0861 | -0,1529 |
| 6 | 0,0498 | 0,750 | 0,0431 | -0,2031 | 0,0709 | -0,0963 |
| 7 | 0,0302 | 0,875 | 0,0320 | -0,1759 | 0,0634 | -0,0466 |
| 8 | 0,0183 | ±1,000 | 0,0247 | ∓0,1552 | 0,0613 | 0,0000 |
| 9 | 0,0111 | -0,875 | 0,0320 | +0,1759 | 0,0634 | +0,0466 |
| 10 | 0,0067 | -0,750 | 0,0431 | +0,2031 | 0,0709 | +0,0963 |
| 11 | 0,0041 | -0,625 | 0,0609 | +0,2391 | 0,0861 | +0,1529 |
| 12 | 0,0025 | -0,500 | 0,0920 | +0,2890 | 0,1154 | +0,2216 |
| 13 | 0,0015 | -0,375 | 0,1526 | +0,3596 | 0,1747 | +0,3099 |
| 14 | 0,0009 | -0,250 | 0,2884 | +0,4530 | 0,3096 | +0,4202 |
| 15 | 0,0006 | 0,125 | 0,6185 | +0,4858 | 0,6391 | +0,4694 |

Tabela (10.1)

Como as funções $R(f)$ e $I(f)$ não possuem limitação de banda, houve uma sensível distorção dos resultados devido ao efeito de "aliasing" no domínio da frequência. Esta é maior para frequências próximas a ± 1 Hertz. Pode-se perceber que o valor da parte imaginária, calculado numericamente, nesta frequência é nulo devido a superposição de valores de sinais contrários.

Pode-se verificar, utilizando a expressão (10.2), que a sequência $h(k)$ é a transformada inversa da sequência $H(n)$ cujas partes real e imaginária são dadas nas colunas 6 e 7 respectivamente.

10.2.2 - Transformada discreta inversa de uma sequência com 16 termos.

Para se calcular a transformada inversa de uma função $H(f)$, no domínio da frequência, discretamente, precisamos obter uma sequência, no caso, complexa, representativa da mesma. Como a transformada discreta leva em conta que as sequências são periódicas, os $N/2$ primeiros termos devem corresponder à frequências positivas e os outros $N/2$ à frequências negativas. Com isto é de se esperar que a sequência obtida na transformada inversa seja representativa da função da figura (10.9).

A transformada discreta inversa pode ser computada utilizando-se a expressão (10.2).

A tabela (10.2) resume os resultados para um número de termos e um intervalo de discretização no domínio da frequência iguais aos do exemplo anterior.

Como para n igual a 8 estão associadas as frequências ± 1 Hertz, temos aí um ponto de descontinuidade. Os valores discretos das funções $R(f)$ e $I(f)$ neste ponto devem ser dados pelas médias destas funções nestes pontos.

$$R(8) = \frac{0,0247 + 0,0247}{2} = 0,0247$$

$$I(8) = \frac{0,0155 - 0,0155}{2} = 0$$

| | | | | valores numéricos | valores exatos |
|------|--------|--------|---------|----------------------|-------------------|
| n, k | f | R(n) | I(n) | h(k) | h(t) |
| 0 | 0,000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,4500 | 0,5000 |
| 1 | 0,125 | 0,6185 | -0,4858 | 0,6994 | 0,6065 |
| 2 | 0,250 | 0,2884 | -0,4530 | 0,3209 | 0,3679 |
| 3 | 0,375 | 0,1526 | -0,3596 | 0,2528 | 0,2231 |
| 4 | 0,500 | 0,0920 | -0,2890 | 0,1155 | 0,1353 |
| 5 | 0,625 | 0,0609 | -0,2391 | 0,0955 | 0,0821 |
| 6 | 0,750 | 0,0431 | -0,2031 | 0,0414 | 0,0498 |
| 7 | 0,875 | 0,0320 | -0,1759 | 0,0344 | 0,0302 |
| 8 | ±1,000 | 0,0247 | 0,0000 | 0,0180 | 0,0183 |
| 9 | -0,875 | 0,0320 | 0,1759 | 0,0077 | 0,0111 |
| 10 | -0,750 | 0,0431 | 0,2031 | 0,0143 | 0,0067 |
| 11 | -0,625 | 0,0609 | 0,2391 | -0,0082 | 0,0041 |
| 12 | -0,500 | 0,0920 | 0,2890 | 0,0209 | 0,0025 |
| 13 | -0,375 | 0,1526 | 0,3596 | -0,0258 | 0,0015 |
| 14 | -0,250 | 0,2884 | 0,4530 | 0,0438 | 0,0009 |
| 15 | -0,125 | 0,6185 | 0,4858 | -0,0804 | 0,0006 |

Tabela (10.2)

Observa-se uma pequena oscilação dos termos da sequência $h(k)$ em torno dos pontos da função $h(t)$. Esta oscilação é devida ao fenômeno da Gibb já estudado no item (6.5).

Além disto, como a transformada inversa da função $H(f)$ dada por:

$$H(f) = R(f) + iI(f)$$

é de duração infinita, uma pequena distorção é de se esperar devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

Se calcularmos a transformada discreta da sequência da coluna 5, obteremos exatamente as sequências das colunas 3 e 4.

| Número de termos | Tempo de processamento (seg.) | |
|------------------|-------------------------------|--------|
| | TDF | TRF |
| 64 | 5,7667 | 0,1167 |
| 128 | 26,5333 | 0,2167 |

Tabela (10.6)

10.2.7 - Comparação dos resultados obtidos

Os exemplos (10.2.1), (10.2.5) e (10.2.6) referem-se a mesma função da figura (10.9) porém com intervalos de discretização no domínio do tempo diferentes.

Como a duração da sequência é sempre 8 segundos, o intervalo de discretização no domínio da frequência é sempre 0,125 Hertz.

A tabela (10.7) resume os resultados obtidos na frequência de 0,75 Hertz. Em todos os casos a componente nesta frequência é obtida para n igual a 6.

| Valores numéricos e porcentagem de erro | | | | | | | | | Valor exato |
|-----------------------------------------|---------|--------|---------|--------|---------|-------|---------|-------|-------------|
| Número de termos | 16 | | 32 | | 64 | | 128 | | |
| Parte real | 0,0709 | +64,5% | 0,0486 | 12,8% | 0,0444 | 3,0% | 0,0434 | 0,7% | 0,0431 |
| Parte imag. | -0,0963 | -52,6% | -0,1780 | -12,4% | -0,1968 | -3,1% | -0,2015 | -0,8% | -0,2031 |

Tabela (10.7)

10.3 - Coeficientes de Fourier de um pulso retangular periódico

Tomemos como exemplo o pulso retangular periódico da figura (10.12).

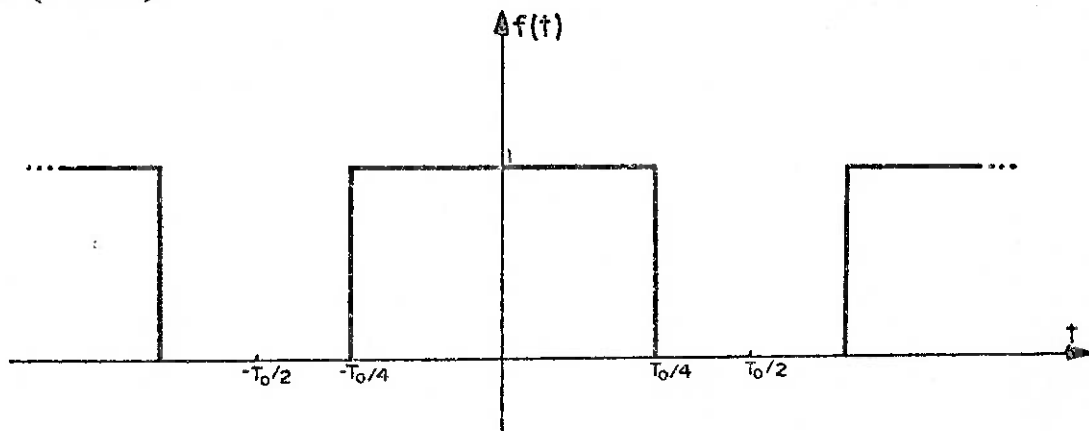


Figura (10.12)

Os coeficientes de Fourier do mesmo podem ser obtidos analiticamente pela expressão (4.10).

$$F(n) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \quad (10.6)$$

Ao se discretizar um período da função da figura (10.12) em 16 intervalos, obtemos a sequência da figura (10.13).

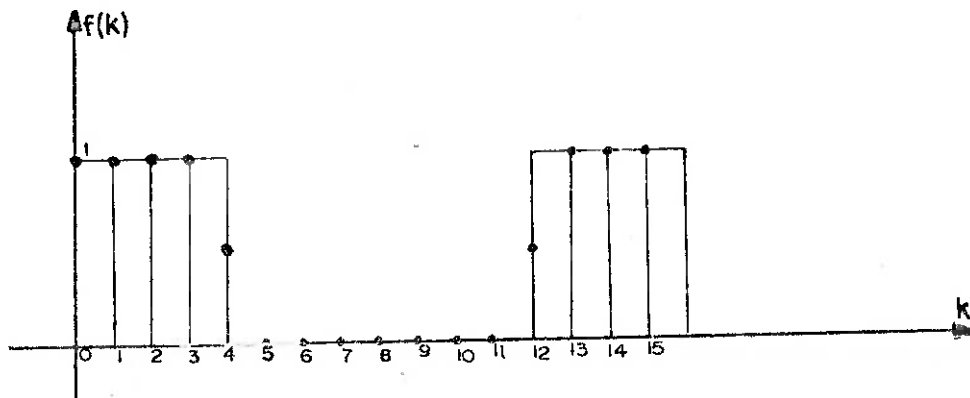


Figura (10.13)

Os coeficientes de Fourier da função periódica $f(t)$ podem ser obtidos numericamente pela expressão (10.3). A tabela (10.8) resume os resultados obtidos pela expressão (10.6) e os obtidos numericamente.

| | | valor exato | valor numérico |
|-----|------|---------------|----------------|
| n,k | f(k) | F(n) | F(n) |
| 0 | 1 | 0,5 | 0,5 |
| 1 | 1 | 0,3183098862 | 0,3142087183 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | -0,1061032954 | -0,0935378602 |
| 4 | 0,5 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0,0636619772 | 0,0417611649 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | -0,0454728408 | -0,012432023 |
| 8 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | -0,0454728408 | -0,012432023 |
| 10 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | +0,0636619772 | 0,0417611649 |
| 12 | 0,5 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | -0,1061032954 | -0,0935378602 |
| 14 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | +0,3183098862 | 0,3142087183 |

Tabela (10.8)

Da mesma maneira que na transformada discreta, os coeficientes $F(n)$ para n maior ou igual a $N/2$ referem-se à frequências negativas.

A sequência da coluna 2 pode ser reconstituída a partir da sequência da coluna 4 utilizando-se a expressão (10.4).

10.4 - Transformada discreta de uma cossenóide truncada

10.4.1 - Intervalo de truncamento igual a dois períodos

Tomemos uma sequência de 16 pontos obtida da discreti

zação de dois períodos de uma cossenóide:

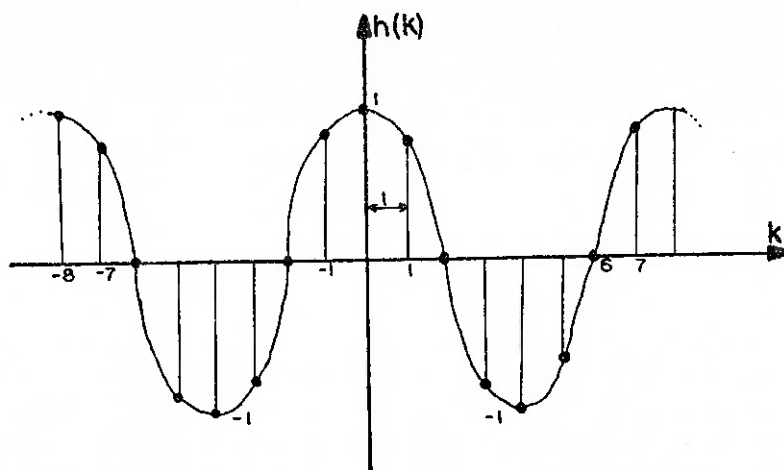


Figura (10.14)

Considerando um período igual a 8 segundos temos:

$$T = \frac{16}{16} = 1 \text{ segundo}$$

$$F = \frac{1}{16} = 0,0625 \text{ Hertz}$$

A frequência fundamental da cossenóide é de 0,125 Hertz.

Se a cossenóide não fosse truncada, sua transformada consistiria de dois impulsos, de áreas iguais a $1/2$, localizados, nas frequências $\pm 0,125$ Hertz. Como a mesma é truncada em dois períodos, as informações espalhar-se-ão sobre todo o domínio da frequência. Este fenômeno é chamado "leakage". Nas frequências fundamentais a transformada será dada pelo produto do coeficiente de Fourier da função periódica, que é igual a $1/2$, com o intervalo de truncamento, 16 segundos.

As figuras (10.16) ilustram a sequência fornecida e a obtida. Em traço contínuo mostramos a função que cada sequência representa.

A transformada discreta fornece informações no domínio da frequência a cada 0,0625 Hertz. Nestas frequências, exceto em $\pm 0,125$, a função da figura (6.15-b) assume valores nulos. Por isto não foi possível detectar o efeito de "leakage".

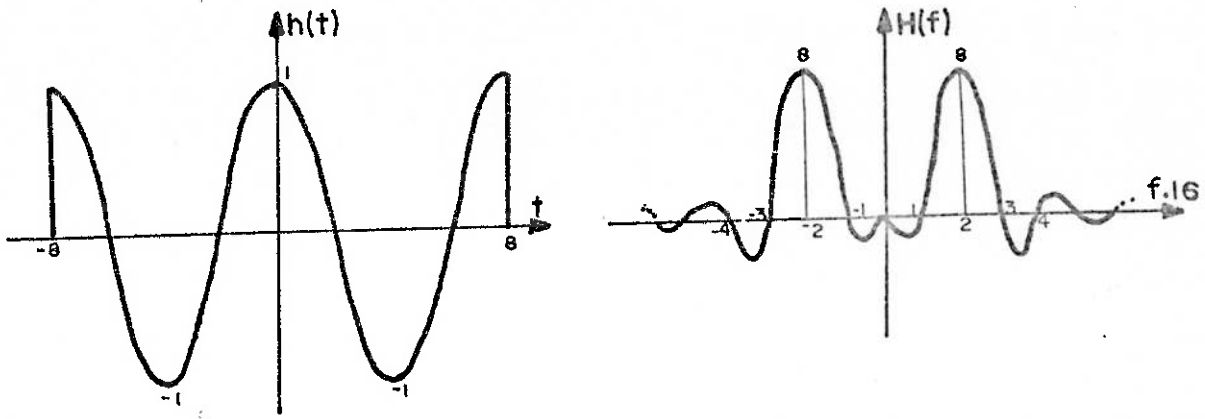


Figura (10.15)

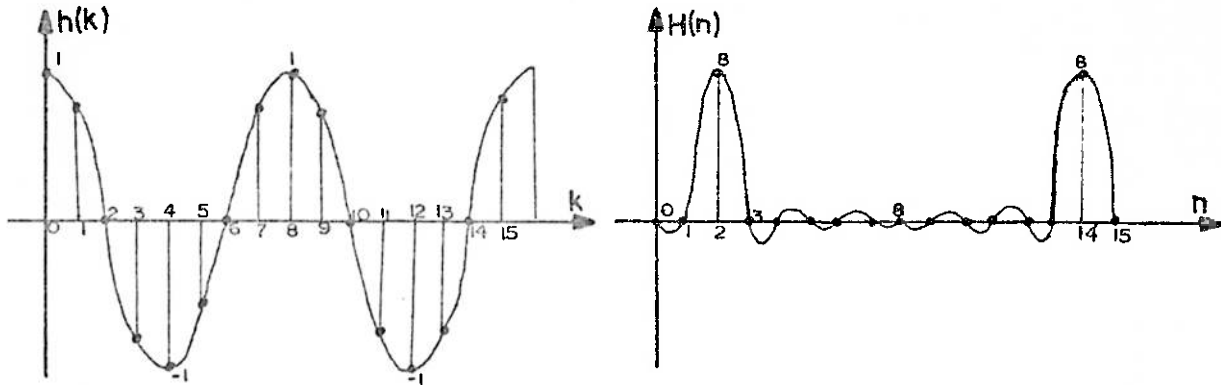


Figura (10.16)

10.4.2 - Intervalo de truncamento diferente de um número inteiro de períodos

Consideremos a cossenoíde da figura (10.17) com intervalo de truncamento igual a 2,2 períodos.

Para um período de 8 segundos, tomando 16 termos no intervalo de 2,2 períodos, temos:

$$T_0 = 8 \text{ segundos}$$

$$T_c = 2,2 \times 8 = 17,6 \text{ segundos}$$

$$T = \frac{17,6}{16} = 1,1 \text{ segundos}$$

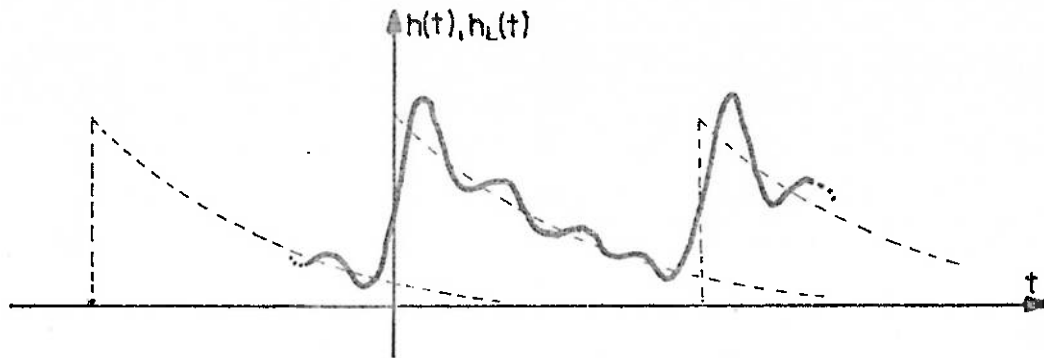


Figura (10.11)

10.2.3 - Interpolação no domínio da frequência acrescentando-se zeros.

Tomemos a sequência de 16 termos do exemplo (10.2.1) com duração de 8 segundos e intervalo de discretização de 0,5 segundo.

Se acrescentarmos a esta sequência 16 termos nulos, igualmente espaçados, aumentaremos sua duração para 16 segundos. Como o intervalo de discretização não foi alterado, a sequência $H(n)$ continua se repetindo a cada 2 Hertz. Mas, como a duração da sequência no domínio do tempo dobrou, o intervalo de discretização no domínio da frequência passou de 0,125 Hertz para 0,0625 Hertz. Com isto conseguimos obter informações nas frequências intermediárias às do exemplo (10.2.1).

A tabela (10.3) resume uma parte dos resultados obtidos.

| n, k | h(k) | f | Valores exatos | | Valores numéricos | |
|------|--------|--------|----------------|---------|-------------------|---------|
| | | | R(f) | I(f) | R(n) | I(n) |
| 0 | 0,5000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0203 | 0,0000 |
| 1 | 0,6065 | 0,0625 | 0,8664 | -0,3402 | 0,8876 | -0,3323 |
| 2 | 0,3679 | 0,1250 | 0,6185 | -0,4858 | 0,6391 | -0,4694 |
| 3 | 0,2231 | 0,1875 | 0,4188 | -0,4934 | 0,4401 | -0,4691 |
| 4 | 0,1353 | 0,2500 | 0,2884 | -0,4530 | 0,3096 | -0,4202 |
| 5 | 0,0821 | 0,3125 | 0,2060 | -0,4044 | 0,2279 | -0,3635 |
| 6 | 0,0498 | 0,3750 | 0,1526 | -0,3596 | 0,1747 | -0,3099 |

Tabela (10.3)

| n,k | h(k) | f | Valores exatos | | Valores numéricos | |
|-----|--------|-------------|----------------|--------------|-------------------|---------|
| | | | R(f) | I(f) | R(n) | I(n) |
| 7 | 0,0302 | 0,4375 | 0,1169 | -0,3213 | 0,1398 | -0,2630 |
| 8 | 0,0183 | 0,5000 | 0,0920 | -0,2890 | 0,1154 | -0,2216 |
| 9 | 0,0111 | 0,5625 | 0,0741 | -0,2620 | 0,0986 | -0,1854 |
| 10 | 0,0067 | 0,6250 | 0,0609 | -0,2391 | 0,0861 | -0,1529 |
| 11 | 0,0041 | 0,6875 | 0,0509 | -0,2197 | 0,0775 | -0,1235 |
| 12 | 0,0025 | 0,7500 | 0,0431 | -0,2031 | 0,0709 | -0,0963 |
| 13 | 0,0015 | 0,8125 | 0,0370 | -0,1886 | 0,0666 | -0,0709 |
| 14 | 0,0009 | 0,8750 | 0,0320 | -0,1761 | 0,0634 | -0,0466 |
| 15 | 0,0006 | 0,9375 | 0,0280 | -0,1650 | 0,0619 | -0,0231 |
| 16 | 0,0000 | $\pm 1,000$ | 0,0247 | $\mp 0,1552$ | 0,0611 | 0,0000 |
| 17 | 0,0000 | -0,9375 | 0,0280 | +0,1650 | 0,0619 | 0,0231 |

Tabela (10.3)

Se calcularmos a transformada discreta inversa da sequência complexa das colunas 6 e 7, obteremos a mesma sequência da coluna 1.

Comparando-se as tabelas (10.1) e (10.3) verificamos que os resultados da primeira encontram-se também na segunda nas frequências múltiplas de 0,1250 Hertz. Mas esta última consegue fornecer informações intermediárias às da primeira.

10.2.4 - Interpolação no domínio da frequência repetindo-se a sequência.

Como já afirmamos no item (10.1.5), a repetição da sequência fornece resultados nulos nas frequências intermediárias às das múltiplas da fundamental. Além disto, nas frequências múltiplas da fundamental, o resultado será o dobro do que se obteria se se fornecesse somente um período.

Em nosso caso, como o período é de 8 segundos, a frequência fundamental é de 0,125 Hertz.

Na tabela (10.4) apresentamos os resultados obtidos . Comparando-se estes resultados numéricos com os da tabela (10.1) podem-se confirmar as afirmações feitas.

Calculando-se a transformada discreta inversa da se quência complexa das colunas 4 e 5, obtemos a sequência da colu na 2.

| n,k | h(k) | f | Valores numéricos | |
|-----|--------|--------------|-------------------|---------|
| | | | R(n) | I(n) |
| 0 | 0,5000 | 0,0000 | 2,0406 | 0,0000 |
| 1 | 0,6065 | 0,0625 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 0,3679 | 0,1250 | 1,2782 | -0,9388 |
| 3 | 0,2231 | 0,1875 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0,1353 | 0,2500 | 0,6192 | -0,8404 |
| 5 | 0,0821 | 0,3125 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 0,0498 | 0,3750 | 0,3495 | -0,6200 |
| 7 | 0,0302 | 0,4375 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 0,0185 | 0,5000 | 0,2508 | -0,4452 |
| 9 | 0,0111 | 0,5625 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 0,0067 | 0,6250 | 0,1722 | -0,3056 |
| 11 | 0,0041 | 0,6875 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0,0025 | 0,7500 | 0,1418 | -0,1926 |
| 13 | 0,0015 | 0,8125 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 0,0009 | 0,8750 | 0,1268 | -0,0932 |
| 15 | 0,0006 | 0,9375 | 0,0000 | 0,0000 |
| 16 | 0,5000 | $\pm 1,0000$ | 0,1222 | 0,0000 |
| 17 | 0,6065 | -0,9375 | 0,0000 | 0,0000 |
| 18 | 0,3679 | -0,8750 | 0,1268 | 0,0932 |
| 19 | 0,2231 | -0,8125 | 0,0000 | 0,0000 |
| 30 | 0,0009 | -0,1250 | 1,2782 | 0,9388 |
| 31 | 0,0006 | -0,0625 | 0,0000 | 0,0000 |

Tabela (10.4)

10.2.5 - Transformada de uma sequência com 32 termos

A mesma função da figura (10.9) é agora discretizada em 32 termos. O intervalo de discretização no domínio do tempo passa a ser:

$$T = \frac{8}{32} = 0,25 \text{ segundos}$$

e no domínio da frequência:

$$F = \frac{1}{NT} = 0,125 \text{ Hertz}$$

Como a duração da sequência é a mesma do exemplo (10.2.1), os dois intervalos de discretização no domínio da frequência são iguais. No entanto, como neste último o intervalo de discretização é o dobro do do caso anterior, a sequência passa a se repetir a cada 4 Hertz. Neste caso as informações serão obtidas na faixa de -2 a +2 Hertz.

Os termos da sequência $h(k)$ podem ser obtidas pela expressão:

$$h(k) = e^{-0,25k}$$

A tabela (10.5) resume os resultados obtidos. Na mesma apresentamos somente os 22 primeiros termos da sequência $h(k)$.

10.2.6 - Transformadas de sequências com 64 e 128 termos

A seguir apresentamos os resultados de dois exemplos realizados no computador Burroughs B6700.

No primeiro deles a função da figura (10.9) é discretizada em 64 termos e no segundo, em 128 termos.

Para os dois exemplos são calculadas as transformadas discretas. Uma delas é obtida utilizando-se a expressão (7.21), subrotina TDF, e a outra é obtida utilizando-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier, subrotina TRF.

Em ambos os casos são impressos os tempos gastos no cálculo com cada subrotina, bem como, os resultados corretos.

| n,k | h(k) | f | Valores corretos | | Valores numéricos | |
|-----|--------|--------|------------------|---------|-------------------|---------|
| | | | R(f) | I(f) | R(n) | I(n) |
| 0 | 0,5000 | 0,000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0048 | 0,0000 |
| 1 | 0,7788 | 0,125 | 0,6185 | -0,4858 | 0,6234 | -0,4815 |
| 2 | 0,6065 | 0,250 | 0,2884 | -0,4530 | 0,2935 | -0,4447 |
| 3 | 0,4724 | 0,375 | 0,1526 | -0,3596 | 0,1578 | -0,3472 |
| 4 | 0,3679 | 0,500 | 0,0920 | -0,2890 | 0,0973 | -0,2725 |
| 5 | 0,2865 | 0,625 | 0,0609 | -0,2391 | 0,0663 | -0,2183 |
| 6 | 0,2231 | 0,750 | 0,0431 | -0,2031 | 0,0486 | -0,1780 |
| 7 | 0,1738 | 0,875 | 0,0320 | -0,1761 | 0,0377 | -0,1465 |
| 8 | 0,1353 | 1,000 | 0,0247 | -0,1552 | 0,0306 | -0,1212 |
| 9 | 0,1054 | 1,125 | 0,0196 | -0,1387 | 0,0257 | -0,0999 |
| 10 | 0,0821 | 1,250 | 0,0160 | -0,1253 | 0,0223 | -0,0816 |
| 11 | 0,0639 | 1,375 | 0,0132 | -0,1142 | 0,0198 | -0,0655 |
| 12 | 0,0498 | 1,500 | 0,0111 | -0,1049 | 0,0181 | -0,0508 |
| 13 | 0,0388 | 1,625 | 0,0095 | -0,0970 | 0,0169 | -0,0373 |
| 14 | 0,0302 | 1,750 | 0,0082 | -0,0902 | 0,0161 | -0,0245 |
| 15 | 0,0235 | 1,875 | 0,0072 | -0,0843 | 0,0156 | -0,0121 |
| 16 | 0,0183 | ±2,000 | 0,0063 | ±0,0791 | 0,0155 | 0,0000 |
| 17 | 0,0143 | -1,875 | 0,0072 | 0,0843 | 0,0156 | 0,0121 |
| 18 | 0,0111 | -1,750 | 0,0082 | 0,0902 | 0,0161 | 0,0245 |
| 19 | 0,0087 | -1,625 | 0,0095 | 0,0970 | 0,0169 | 0,0373 |
| 20 | 0,0067 | -1,500 | 0,0111 | 0,1049 | 0,0181 | 0,0508 |
| 21 | 0,0052 | -1,375 | 0,0132 | 0,1142 | 0,0198 | 0,0655 |

Tabela (10.5)

A tabela (10.6) pode ser utilizada para se comparar os tempos de processamento mostrando a vantagem do algoritmo proposto no capítulo 9.

NUMERO DE PONTOS DA EXPONENCIAL* 64
INTERVALO DE DISCRETIZACAO* 0.1250

Table with 8 columns of numerical data, likely representing exponential function values at discrete intervals.

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER
TEMPO DE PROCESSAMENTO* 5.7667SEGUNDOS

PARTE REAL DA TRANSFORMADA

Table with 8 columns of numerical data, representing the real part of the discrete Fourier transform.

PARTE IMAGINARIA DA TRANSFORMADA

Table with 8 columns of numerical data, representing the imaginary part of the discrete Fourier transform.

TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER
TEMPO DE PROCESSAMENTO* 0.1167SEGUNDOS

PARTE REAL DA TRANSFORMADA

Table with 8 columns of numerical data, representing the real part of the fast Fourier transform.

PARTE IMAGINARIA DA TRANSFORMADA

Table with 8 columns of numerical data, representing the imaginary part of the fast Fourier transform.

PARTE REAL DA TRANSFORMADA
RESULTADO CORRETO

Table with 8 columns of numerical data, representing the corrected real part of the transform.

PARTE IMAGINARIA DA TRANSFORMADA
RESULTADO CORRETO

Table with 8 columns of numerical data, representing the corrected imaginary part of the transform.

$$F = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{17,6} \text{ Hertz}$$

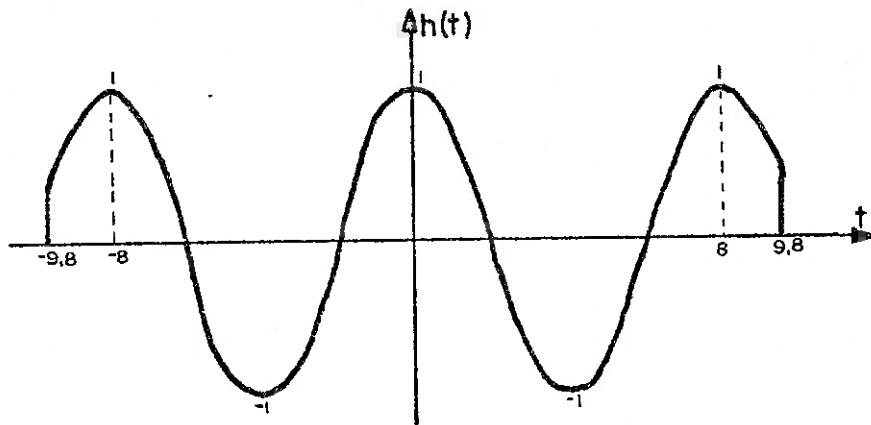


Figura (10.17)

A equação que fornece cada termo desta sequência é:

$$h(k) = \cos \frac{2,2\pi k}{8}$$

Como o intervalo de truncamento não é um número inteiro de períodos, as informações numa frequência múltipla da fundamental recebe contribuição da outra, figura (6.7-b).

Nas figuras (10.18) ilustramos as sequências fornecida e a obtida. Em um traço contínuo mostramos a função que cada sequência representa.

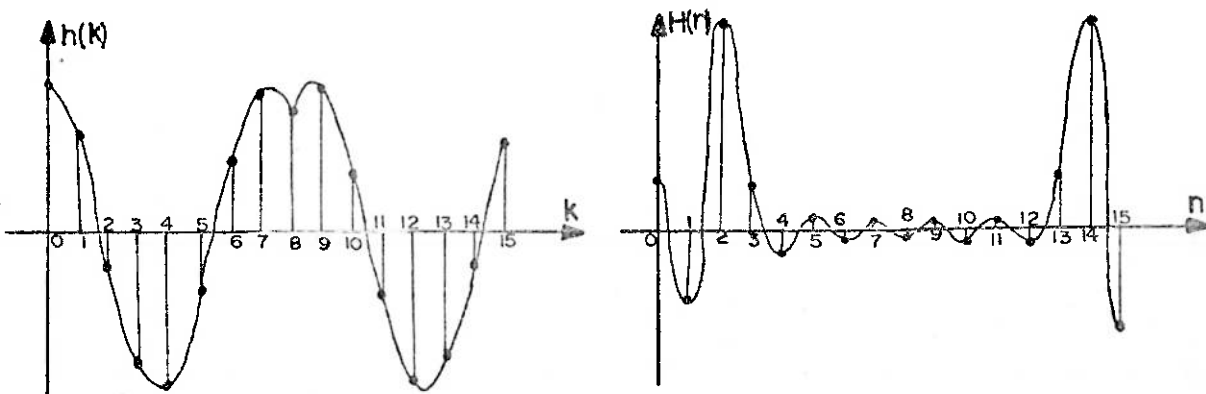


Figura (10.18)

A tabela (10.9) resume os resultados.

Se a função não fosse truncada, as informações se centrariam nas frequências $\pm 0,125$ Hertz. Mas, devido ao truncamento, as mesmas espalharam-se sobre todo o domínio da frequência como se pode notar na figura (10.18-b).

Com intervalo de truncamento diferente de um número inteiro de períodos não é possível se obter informações nas frequências fundamentais que, no caso, são $\pm 0,125$ Hertz. Se isto fosse possível, poderíamos comprovar numericamente a interferência da componente em $+ 0,125$ Hertz na frequência de $-0,125$ Hertz e vice e versa.

| | | | | Valor numérico |
|------|--------------|---------|--------------|----------------|
| n, k | t | h(k) | f | H(n) |
| 0 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,4025 |
| 1 | 1,1000 | 0,6494 | 0,0568 | -1,7916 |
| 2 | 2,2000 | -0,1564 | 0,1136 | 8,5269 |
| 3 | 3,3000 | -0,8526 | 0,1705 | 1,8428 |
| 4 | 4,4000 | -0,9511 | 0,2273 | -0,7572 |
| 5 | 5,5000 | -0,3827 | 0,2841 | 0,4765 |
| 6 | 6,6000 | 0,4540 | 0,3409 | -0,3623 |
| 7 | 7,7000 | 0,9724 | 0,3977 | 0,3127 |
| 8 | $\pm 8,8000$ | 0,8090 | $\pm 0,4545$ | -0,2981 |
| 9 | -7,7000 | 0,9724 | -0,3977 | 0,3127 |
| 10 | -6,6000 | 0,4540 | -0,3409 | -0,3623 |
| 11 | -5,5000 | -0,3827 | -0,2841 | 0,4765 |
| 12 | -4,4000 | -0,9511 | -0,2273 | -0,7572 |
| 13 | -3,3000 | -0,8526 | -0,1705 | 1,8428 |
| 14 | -2,2000 | -0,1564 | -0,1136 | 8,5269 |
| 15 | -1,1000 | 0,6494 | -0,0568 | -1,7916 |

Tabela (10.9)

Pode-se verificar que a transformada inversa da sequência da coluna 5 é a própria sequência da coluna 1.

CAPÍTULO 11

CONVOLUÇÃO E CORRELAÇÃO DISCRETAS

Desenvolvem-se neste capítulo as expressões para o cálculo da convolução e da correlação de seqüências. Como no caso da transformada discreta de Fourier, estas seqüências são supostas obtidas de funções contínuas.

O objetivo principal deste capítulo não é o de se comparar os resultados da convolução e da correlação obtidos numericamente com os resultados analíticos. O objetivo mais importante é o cálculo da convolução e da correlação discretas através da transformada discreta de Fourier.

11.1 - Convolução discreta de seqüências de duração finita

Consideremos as duas funções da figura (11.1).

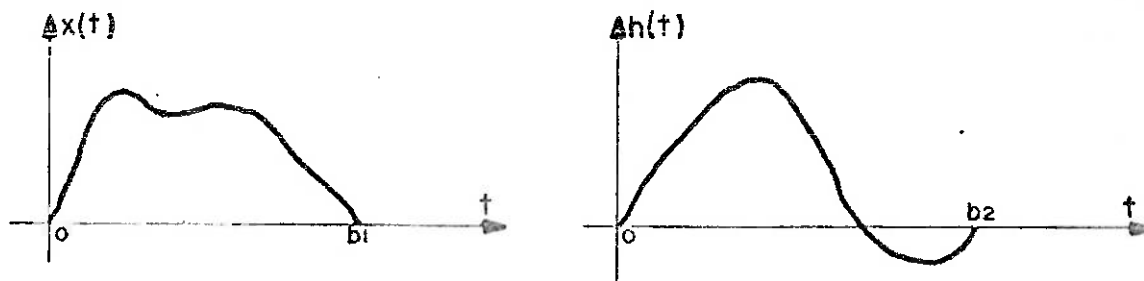


Figura (11.1)

A convolução das duas funções é dada pela expressão (5.3).

$$y(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (11.1)$$

Como foi demonstrado:

$$y(t) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t \geq b_2 + b_1 \\ t \leq 0 \end{array} \right. \quad (11.2)$$

e:

$$c_1 = \text{Maior}(-b_2 + t, 0) \quad (11.3)$$

$$c_2 = \text{Menor}(t, b_1)$$

Consideremos agora duas seqüências obtidas pela discretização das duas funções $x(t)$ e $h(t)$ em intervalos constante e iguais para ambas.

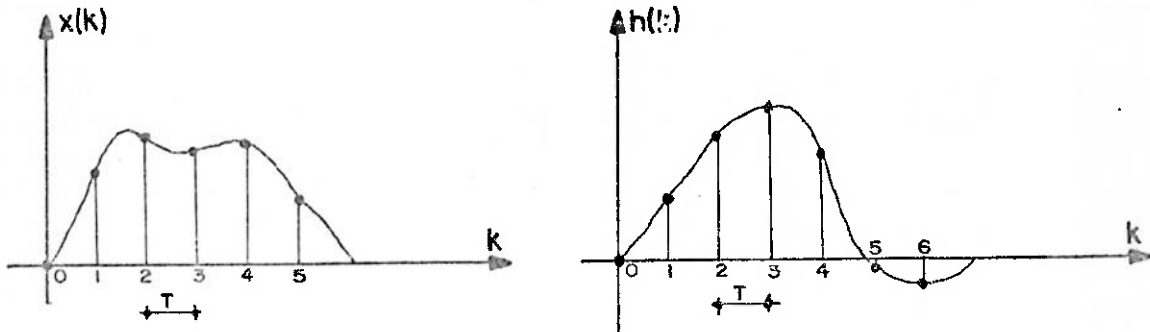


Figura (11.2)

A convolução discreta das duas seqüências pode ser obtida avaliando-se numericamente a integral da expressão (11.1).

$$y(k) = x(k) * h(k)$$

$$y(kT) = T \sum_{i=J_1}^{J_2} x(iT) h((k-i)T) \quad (11.4)$$

A convolução discreta pode ser ilustrada graficamente da mesma maneira da convolução contínua. A única diferença reside no fato da integração ser substituída por uma soma.

Dadas as duas seqüências $x(i)$ e $h(i)$, tomemos inicialmente a seqüência $x(i)$:

| | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x(0)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | $x(3)$ | $x(4)$ | $x(5)$ |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

Tomemos a seqüência $h(i)$ refletida em relação ao eixo vertical:

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| h(6) | h(5) | h(4) | h(3) | h(2) | h(1) | h(0) |
|------|------|------|------|------|------|------|

Para obtermos $y(k)$, desloquemos a sequência $h(i)$ k unidades, multipliquemos termo a termo as sequências $x(i)$ e $h(k-i)$ e somemos os resultados.

A obtenção de $y(3)$ pode ser feita multiplicando e so mando os termos abaixo:

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) |
|------|------|------|------|------|------|

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| h(6) | h(5) | h(4) | h(3) | h(2) | h(1) | h(0) |
|------|------|------|------|------|------|------|

$$y(3) = T(x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0))$$

É fácil observar que para as sequências das figuras (11.2)

$$y(k) = 0 \begin{cases} k < 0 \\ k > 11 \end{cases}$$

e que no caso de k igual a 3 basta fazer na expressão (11.4):

$$J_1 = 0 \quad J_2 = 3$$

De maneira genérica, dadas duas sequências $x(k)$ e $h(k)$ com N_1 e N_2 termos cada uma, tais que:

$$\begin{aligned} x(k) &= 0 \\ h(k) &= 0 \end{aligned} \quad \text{para } k < 0$$

podemos afirmar que:

$$y(k) = 0 \begin{cases} k > N_1 + N_2 - 2 \\ k < 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

Além disto, para cada termo da sequência da convolução, a somatória da expressão (11.4) só precisa ser avaliada de J_1 a J_2 pois os outros termos são nulos. Os limites J_1 e J_2 são dados por:

$$J_1 = \text{Maior} (-N_2+k+1, 0) \quad (11.6-a)$$

$$J_2 = \text{Menor} (k, N_1-1) \quad (11.6-b)$$

Na figura (11.3) é apresentado um fluxograma, que é resultado das expressões (11.5) e (11.6), para o cálculo da convolução discreta entre duas sequências.

No caso de ter N_1 diferente de N_2 , a convolução discreta pode ser calculada igualando-se as durações das duas sequências. Isto é feito acrescentando-se zeros à aquela que tiver uma duração menor de modo que resulte:

$$N_1 = N_2$$

Com isto o fluxograma da figura (11.3) simplifica-se razoavelmente. Contudo, aumenta-se o tempo de processamento pois são feitas muitas multiplicações por zero que, no caso anterior, eram evitadas.

Na figura (11.4) apresentamos um fluxograma para o cálculo da convolução discreta neste caso. Quando as duas sequências realmente possuem o mesmo número de termos, o cálculo da convolução discreta por este último fluxograma é mais rápido pois muitos testes desnecessários são evitados.

No apêndice A-1 apresentamos um programa para a calculadora programável Texas 59 que calcula a convolução discreta de duas sequências segundo o fluxograma da figura (11.3).

Em A-2 apresentamos a subrotina CONVOL em FORTRAN para o computador Burroughs B6700 que calcula a convolução discreta de duas sequências segundo o fluxograma da figura (11.4). Nesta subrotina são calculados somente os $N-1$ primeiros termos da convolução. Portanto temos sempre:

$$J_1 = 0 \quad e \quad J_2 = k$$

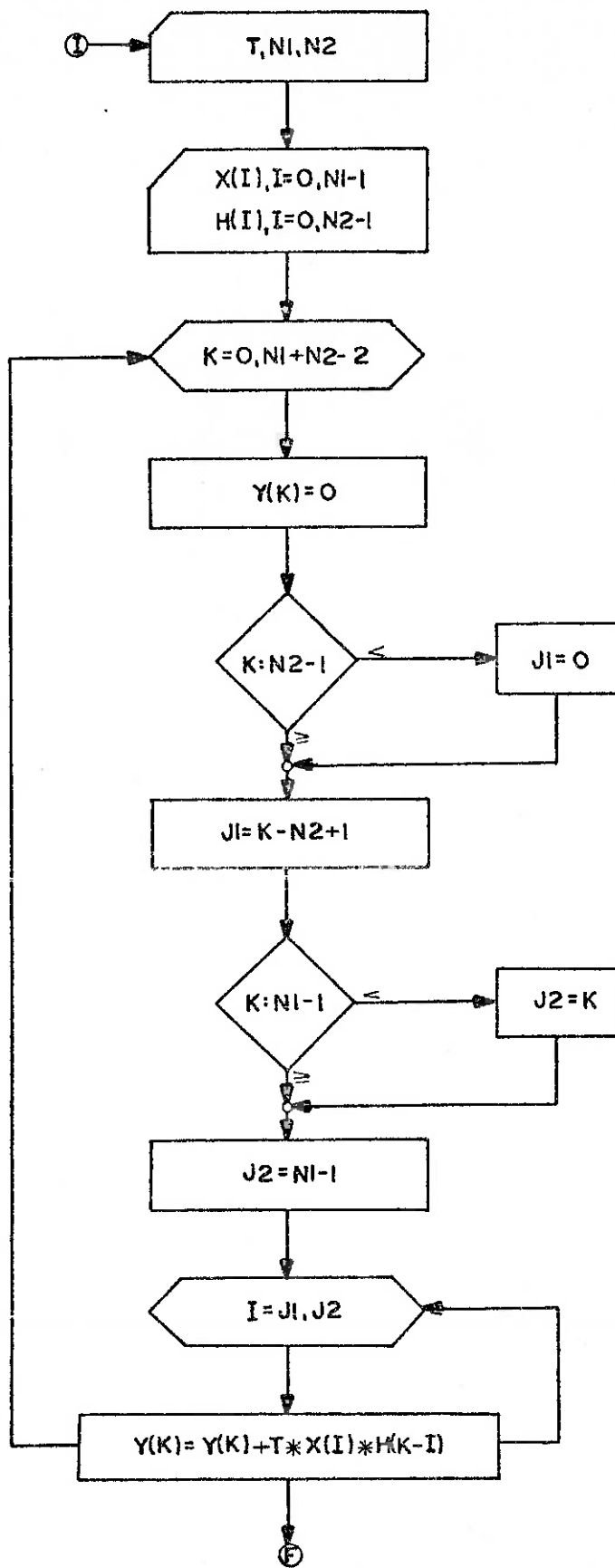


Figura (11.3)

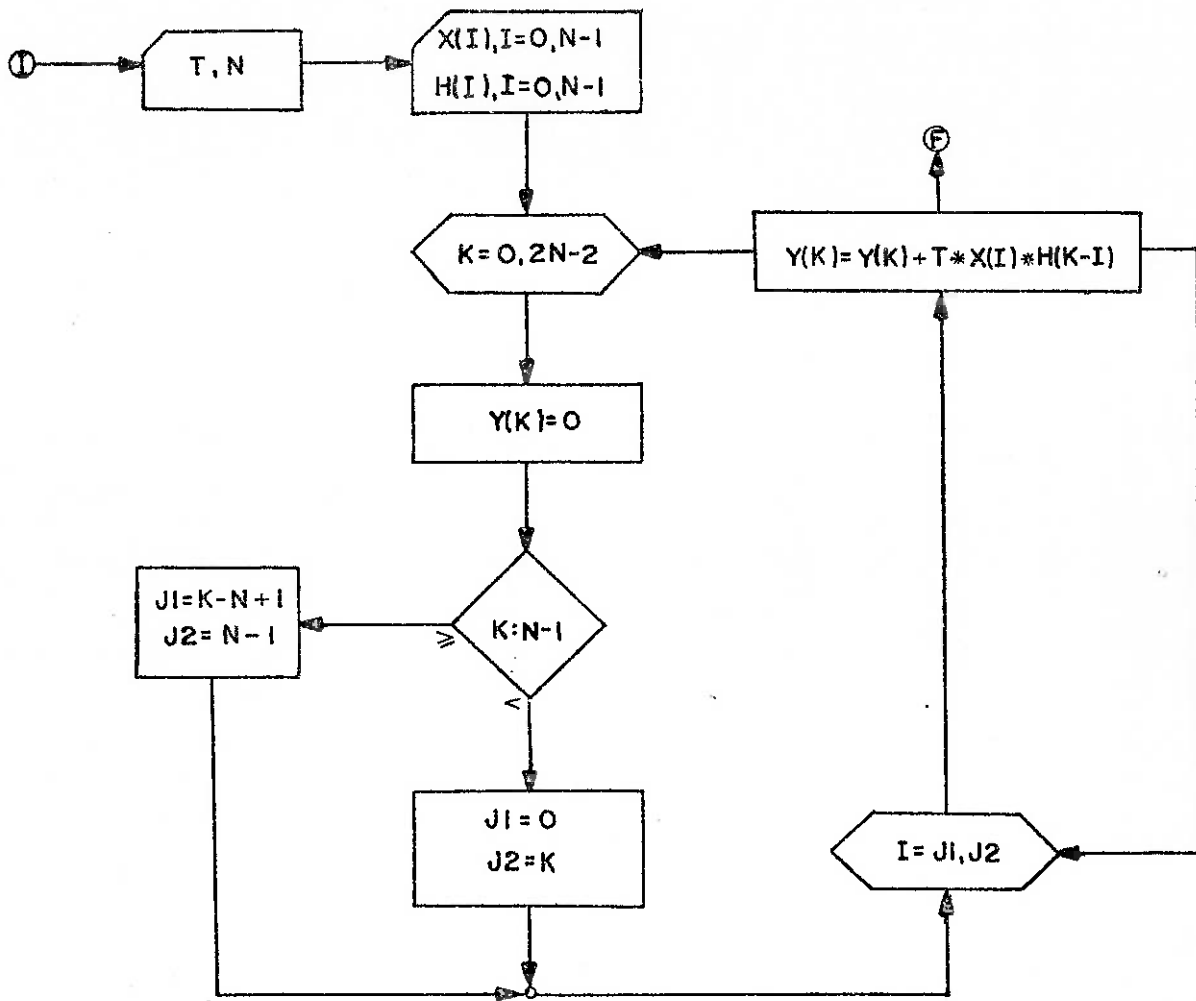


Figura (11.4)

11.2 - Correlação discreta de seqüências de duração finita

Considerando as mesmas funções da figura (11.1), a correlação entre elas é dada pela expressão (5.18).

$$z(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \quad (11.7)$$

Como foi demonstrado:

$$z(t) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t \geq b_2 \\ t \leq -b_1 \end{array} \right. \quad (11.8)$$

e:

$$c_1 = \text{Maior}(-t, 0) \quad (11.9)$$

$$c_2 = \text{Menor}(b_2-t, b_1)$$

Considerando agora as duas sequências das figuras (11.2) resultantes da discretização das funções das figuras (11.1), a correlação discreta entre as mesmas pode ser obtida avaliando-se numericamente a expressão (11.7).

$$z(k) = x(k) \otimes h(k)$$

$$z(kT) = T \sum_{i=J_1}^{J_2} x(iT) h((k+i)T) \quad (11.10)$$

A diferença fundamental entre a convolução e a correlação discreta é a de que esta não necessita que a sequência $h(i)$ seja refletida. Para se calcular $z(3)$ basta realizar os produtos segundo o esquema abaixo:

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) |
|------|------|------|------|------|------|

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| h(6) | h(5) | h(4) | h(3) | h(2) | h(1) | h(0) |
|------|------|------|------|------|------|------|

No entanto, na correlação discreta, apareceram valores da mesma para k negativo. No cálculo de $z(-3)$, por exemplo, temos que realizar os produtos segundo o esquema.

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) |
|------|------|------|------|------|------|

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| h(0) | h(1) | h(2) | h(4) | h(5) | h(6) |
|------|------|------|------|------|------|

É fácil perceber que para as sequências da figura (11.2):

$$z(k) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} k < -5 \\ k > 6 \end{array} \right.$$

e que no caso de k igual a 2 basta fazer na expressão (11.10):

$$J1 = 0 \quad J2 = 3$$

De maneira genérica, dadas duas sequências $x(k)$ e $h(k)$ com $N1$ e $N2$ termos cada uma, tais que:

$$\begin{aligned} x(k) &= 0 \\ &\text{para } k < 0 \\ h(k) &= 0 \end{aligned}$$

podemos afirmar que:

$$z(k) = x(k) \otimes h(k) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} k > N2-1 \\ k < 1-N1 \end{array} \right. \quad (11.11)$$

Além disto, para cada termo $z(k)$ no intervalo dado por (11.11), a somatória da expressão (11.10) só necessita ser realizada de $J1$ e $J2$, onde:

$$J1 = \text{Máximo}(-k, 0) \quad (11.12-a)$$

$$J2 = \text{Mínimo}(N2-k-1, N1-1) \quad (11.12-b)$$

Com base nestas expressões, na figura (11.5) apresentamos um fluxograma para o cálculo da correlação discreta.

Como foi feito na convolução discreta, o fluxograma da figura (11.5) pode ser simplificado para o caso em que as duas consequências possuem o mesmo número de termos.

No apêndice A-1 apresentamos um programa para a Texas 59 que calcula a correlação discreta segundo o fluxograma (11.5).

Um caso particular da correlação discreta é a autocorrelação discreta de uma sequência $x(k)$.

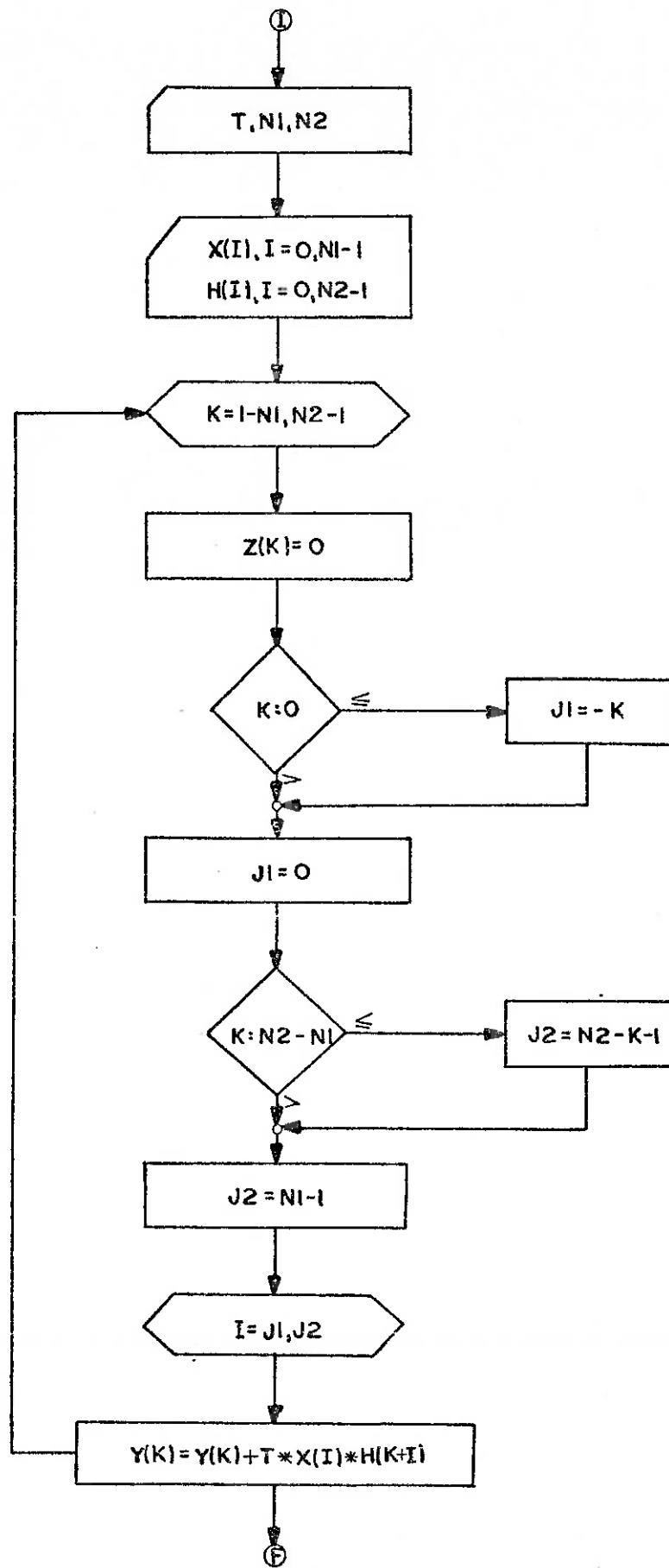


Figura (11.5)

$$u(k) = T \sum_{i=J1}^{J2} x(i) x(k+i) \quad (11.13)$$

É importante lembrar que, tanto a convolução como a correlação discretas, são tão mais próximas do resultado contínuo quanto menor for o intervalo de discretização.

A precisão pode ainda ser melhorada se outras regras de integração numérica mais refinadas como a do trapézio ou a do Simpson forem utilizadas. No entanto, preferimos a regra do retângulo por ter sido a mesma utilizada no cálculo da transformada discreta de Fourier. Como o objetivo principal deste capítulo é mostrar a utilização da transformada discreta de Fourier no cálculo da convolução e da correlação discretas, preferimos a regra do retângulo para que as propriedades a serem demonstradas continuem válidas.

11.3 - Exemplo de aplicação

A título de exemplo, consideremos duas seqüências $x(k)$ e $h(k)$ com 10 e 12 termos respectivamente, com intervalo de discretização de 0,5 segundos, dadas na tabela (11.1).

| | | | | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| x(i) | 0,0 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 3,5 | 4,0 | 2,5 | 1,0 | | |
| h(i) | 1,0 | 3,0 | 5,0 | 6,0 | 5,0 | 4,5 | 4,0 | 5,0 | 6,5 | 7,0 | 5,0 | 3,0 |

Tabela (11.1)

De acordo com o fluxograma da figura (11.3), devemos ter os valores de k variando no intervalo:

$$k = 0, \dots, N1+N2-2$$

$$k = 0, 1, \dots, 19, 20$$

Para k igual a zero temos:

$$J1 = 0 \qquad J2 = 0$$

$$y(0) = T \sum_{i=0}^0 x(i) h(0-i) = T(x(0) h(0)) = 0,00$$

Para k igual a oito temos:

$$J1 = 0 \qquad J2 = 8$$

$$y(8) = T \sum_{i=0}^8 x(i) h(8-i)$$

$$y(8) = T(x(0) h(8) + x(1) h(7) + \dots + x(8) h(0))$$

$$y(8) = 50,00$$

Para k igual a 10 temos:

$$J1 = 0 \qquad J2 = 9$$

$$y(10) = T \sum_{i=0}^9 x(i) h(10-i)$$

$$y(10) = T(x(0) h(10) + x(1) h(9) + \dots + x(9) h(1))$$

$$y(10) = 62,00$$

Para k igual a 18 termos temos:

$$J1 = k - N2 + 1 = 7$$

$$J2 = N1 - 1 = 9$$

$$y(18) = T \sum_{i=7}^9 x(i) h(18-i)$$

$$y(18) = T(x(7) h(11) + x(8) h(10) + x(9) h(9))$$

$$Y(18) = 15,75$$

A tabela (11.12) apresenta todos os valores da sequência calculados pelo programa da Texas-59.

| | | | | | |
|---|--------|----|--------|----|--------|
| k | y(k) | 7 | 41,750 | 15 | 48,750 |
| 0 | 0,000 | 8 | 50,000 | 16 | 39,375 |
| 1 | 0,500 | 9 | 56,875 | 17 | 27,250 |
| 2 | 2,500 | 10 | 62,000 | 18 | 15,750 |
| 3 | 7,000 | 11 | 63,875 | 19 | 6,250 |
| 4 | 14,250 | 12 | 63,625 | 20 | 1,500 |
| 5 | 23,250 | 13 | 60,625 | | |
| 6 | 32,750 | 14 | 55,875 | | |

Tabela (11.2)

11.4 - Convolução discreta envolvendo uma função periódica

Consideremos a função periódica da figura (11.6-a) e a função de duração finita da figura (11.6-b).

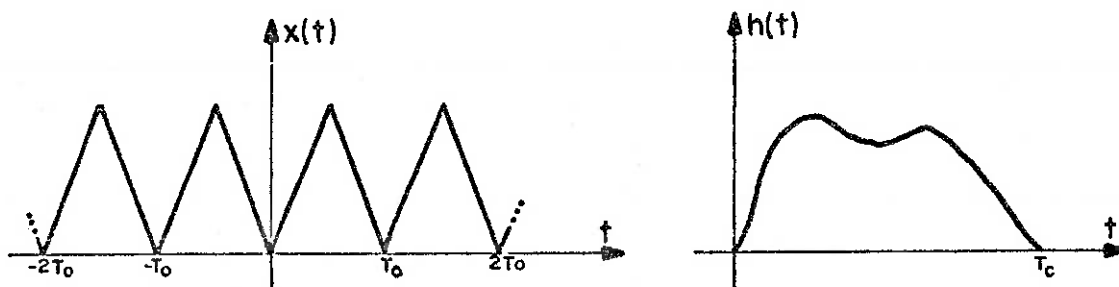


Figura (11.6)

A convolução entre as duas é também periódica, com o mesmo período T_0 , e é dada pela expressão (5.10).

$$y(t) = \int_{t-T_c}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (11.14)$$

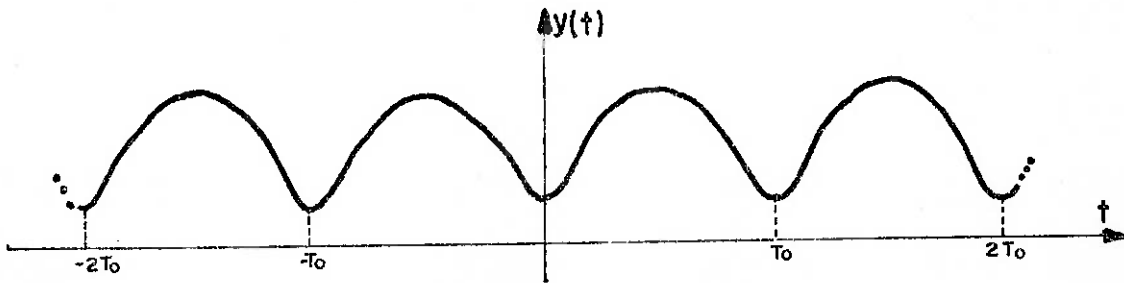


Figura (11.7)

Consideremos agora as duas funções de duração finita das figuras (11.8)

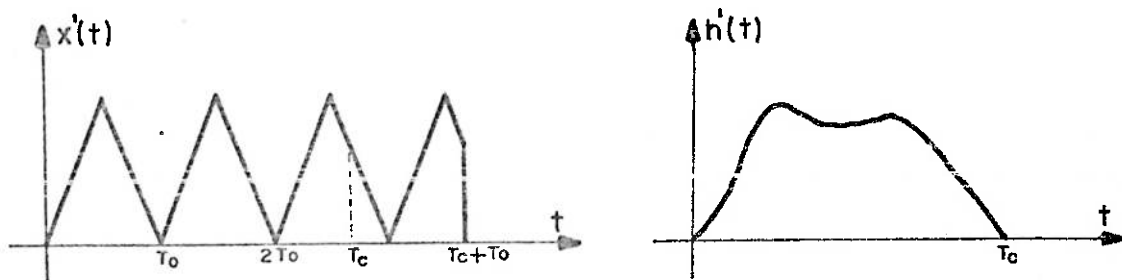


Figura (11.8)

A convolução entre as duas é de duração finita com duração igual a:

$$T_c + T_c + T_0 = 2T_c + T_0$$

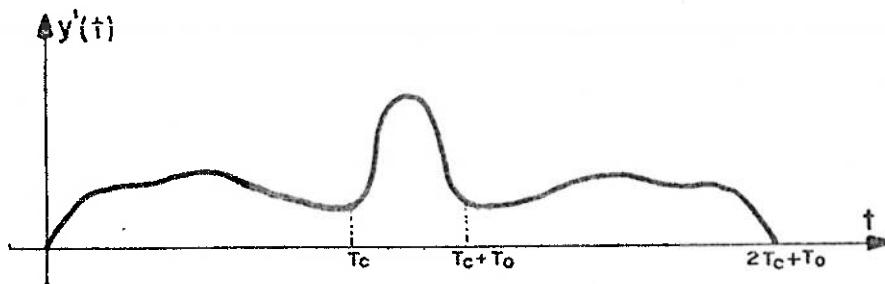


Figura (11.9)

Deslocando-se convenientemente as funções das figuras (11.6) e das figuras (11.8), pode-se perceber:

$$y'(t) = y(t) \quad T_c \leq t \leq T_c + T_0$$

Com isto conseguimos os resultados corretos da convolução em um período.

Portanto, para calcularmos a convolução das funções das figuras (11.6) discretamente, basta tomar as sequências finitas das figuras (11.10).

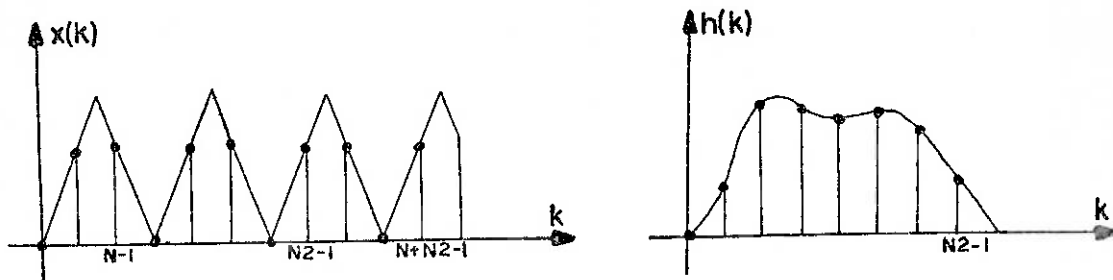


Figura (11.10)

Com isto podemos utilizar as mesmas expressões e programas obtidos para sequências finitas.

É bom lembrar que os resultados corretos encontram-se no intervalo

$$N_2 - 1 \leq k \leq N_2 + N_1 - 1 \quad (11.15)$$

11.5 - Correlação discreta envolvendo duas funções periódicas

Consideremos as duas funções periódicas, de mesmo período T_0 , das figuras (11.11).

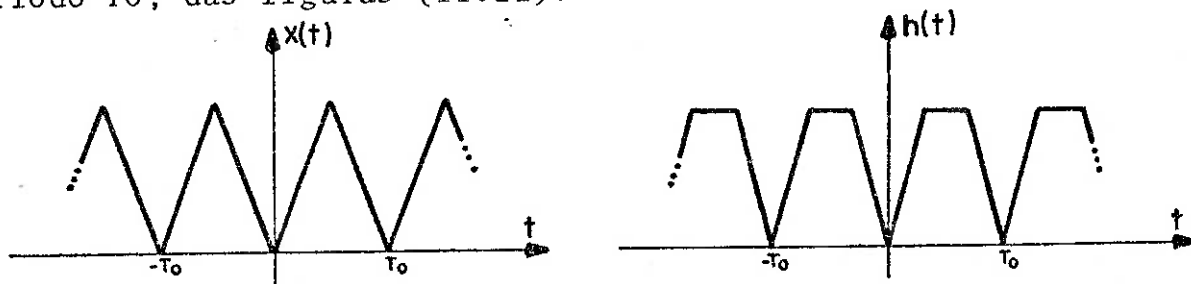


Figura (11.11)

A correlação entre elas é também periódica, com o mesmo período T_0 e é dada pela expressão (5.23).

$$z(t) = \int_0^{T_0} x(\tau) h(t+\tau) d\tau \quad (11.16)$$

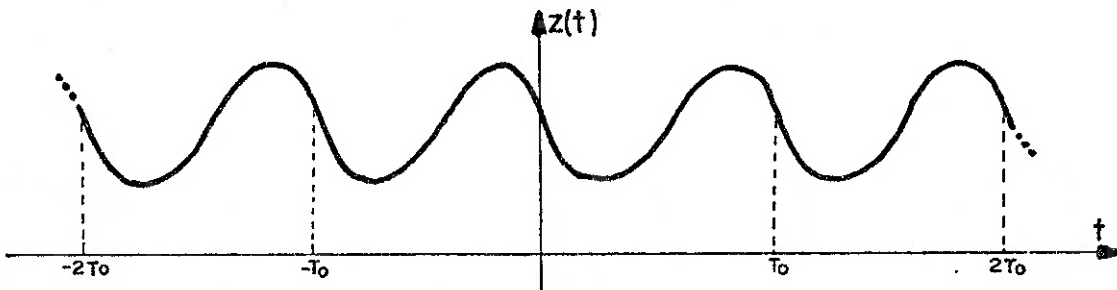


Figura (11.12)

Consideremos agora as duas funções de duração finita das figuras (11.13).

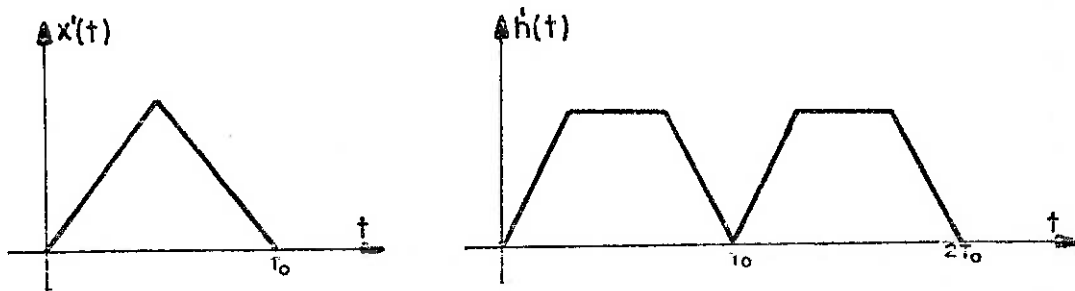


Figura (11.13)

A correlação entre elas é de duração finita com duração igual a:

$$2T_0 + T_0 = 3T_0$$

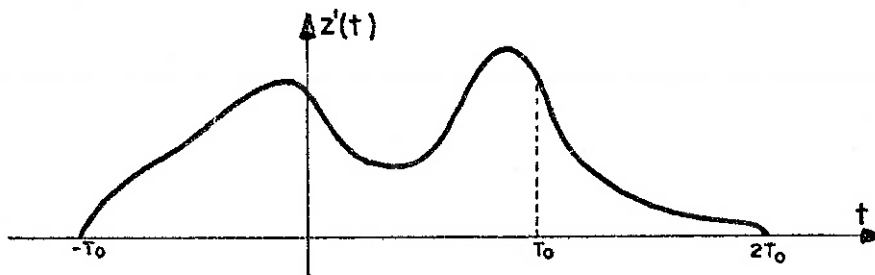


Figura (11.14)

Pode-se perceber, deslocando-se convenientemente as funções das figuras (11.11) e das figuras (11.13), que:

$$z'(t) = z(t) \quad 0 \leq t \leq T_0$$

Com isto conseguimos os resultados corretos da correlação em um período.

Portanto, para calcularmos a correlação das funções periódicas das figuras (11.11), basta tomar as sequências finitas das figuras (11.15).

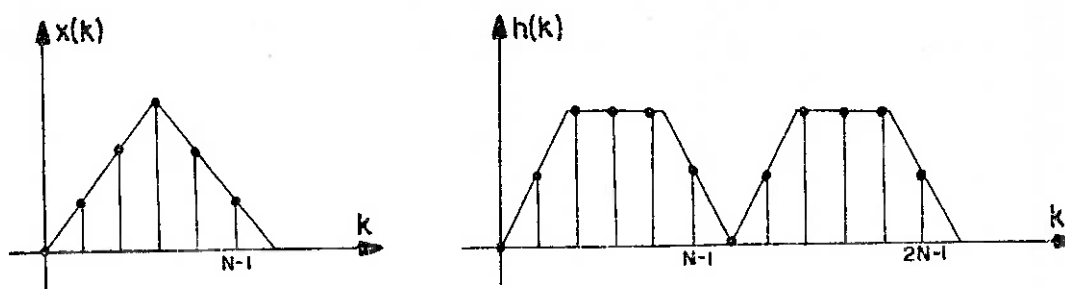


Figura (11.15)

Com isto podemos utilizar as mesmas expressões e os mesmos programas obtidos para sequências finitas.

É bom lembrar que os resultados corretos encontram-se no intervalo

$$0 \leq k \leq N \quad (11.17)$$

11.6 - Teoremas da convolução e da correlação discreta

Consideremos agora duas sequências $x(k)$ e $h(k)$ com o mesmo número de termos.

A expressão para o cálculo da convolução discreta é:

$$y(k) = x(k) * h(k) = T \sum_{m=J1}^{J2} x(m) h(k-m)$$

A mesma pode ser posta sob a forma:

$$y(k) = T \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(k-m) \quad (11.18)$$

se lembrarmos que:

$$\begin{aligned} x(k) &= 0 & | & k < 0 \\ h(k) &= 0 & | & k > N-1 \end{aligned} \quad (11.19)$$

Calculando a transformada discreta da expressão (11.18) temos:

$$Y(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Y(n) = T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(k-m) \right] e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Y(n) = T^2 \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} h(k-m) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Y(n) = T H(n) \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}$$

$$Y(n) = H(n) X(n) \quad (11.20-a)$$

$$y(k) = \bar{F}^{-1} [H(n) X(n)] \quad (11.20-b)$$

$$y(k) = \frac{1}{NT} \left[\sum_{n=0}^{N-1} [H(n) X(n)]^* e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right]^* \quad (11.20-c)$$

As expressões (11.20) constituem o teorema da convolução discreta no domínio do tempo. Este afirma que a convolução discreta de duas sequências no domínio do tempo é equivalente, no domínio da frequência, ao produto, termo a termo, de suas transformadas discretas.

Analogamente pode ser demonstrado o teorema da convolução discreta no domínio da frequência:

$$Y(n) = X(n) * H(n) \quad (11.21-a)$$

$$Y(n) = F [x(k) h(k)] \quad (11.21-b)$$

$$Y(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) h(k)] e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (11.21-c)$$

Considerando novamente as duas seqüências com o mesmo número de termos, a correlação discreta pode ser calculada pela expressão:

$$z(k) = x(k) \otimes h(k) = T \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(k+m) \quad (11.22)$$

se levarmos em conta (11.19).

Calculando a transformada discreta da expressão (11.22) temos:

$$Z(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Z(n) = T^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(k+m) \right] e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Z(n) = T^2 \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} h(k+m) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$Z(n) = T H(n) \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}$$

$$Z(n) = X^*(n) H(n) \quad (11.23-a)$$

$$z(k) = F^{-1} [X^*(n) H(n)] \quad (11.23-b)$$

$$z(k) = \frac{1}{NT} \left[\sum_{n=0}^{N-1} X(n) H^*(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right]^* \quad (11.23-c)$$

As expressões (11.23) constituem o teorema da correlação discreta no domínio do tempo. Este afirma que a correlação discreta de duas seqüências no domínio do tempo é equivalente, no domínio da frequência, ao produto, termo a termo, da transformada discreta da seqüência a ser deslocada pelo complexo conjugado da transformada discreta da outra seqüência.

No caso da autocorrelação discreta temos:

$$U(n) = X^*(n) X(n) = |X(n)|^2 \quad (11.24-a)$$

$$u(k) = F^{-1} \left[|X(n)|^2 \right] \quad (11.24-b)$$

$$u(k) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (11.24-c)$$

11.7 - Algumas propriedades da convolução e da correlação discretas

Utilizando as definições ou os teoremas da convolução e correlação discretas podemos demonstrar as mesmas propriedades do caso contínuo.

11.7.1 - A convolução discreta é comutativa

$$x(k) * h(k) = h(k) * x(k) \quad (11.25)$$

11.7.2 - A correlação discreta não é comutativa

$$x(k) \otimes h(k) = h(-k) \otimes x(-k) \quad (11.26)$$

Observemos no teorema da correlação discreta que, quando a sequência $h(k)$ é deslocada, sua transformada discreta aparece multiplicada pelo complexo conjugado da transformada discreta da sequência $x(k)$ e vice-versa.

11.7.3 - Correlação de sequências pares

No caso de sequências periódicas, as mesmas podem ser pares:

$$x(-k) = x(k)$$

$$h(-k) = h(k)$$

Neste caso a correlação é comutativa:

$$x(k) \otimes h(k) = h(k) \otimes x(k) \quad (11.27)$$

11.7.4 - A autocorrelação discreta é par

$$u(-k) = x(-k) \otimes x(-k)$$

Mas, segundo (11.26)

$$x(-k) \otimes x(-k) = x(k) \otimes x(k)$$

Logo:

$$u(-k) = u(k) \quad (11.28)$$

11.8 - Convolução e correlação discreta de sequências finitas via domínio da frequência

Como dissemos no começo, o maior objetivo deste capítulo é o de orientar o uso de algoritmo da transformada rápida de Fourier no cálculo da convolução e da correlação discretas.

Isto será feito utilizando-se os teoremas da convolução e da correlação discretas. Ao invés de utilizarmos as expressões (11.4) e (11.10), vamos realizar os cálculos através do domínio da frequência, da seguinte maneira:

Primeiramente calculemos as duas transformadas discretas das duas sequências.

A seguir multipliquemos termo a termo, convenientemente as duas transformadas discretas.

Calculando a transformada inversa da sequência obtida no passo anterior, temos a convolução ou a correlação discretas.

Este caminho pode parecer muito mais demorado do que o normal. No entanto, para certas sequências, ganha-se um bom tempo no cálculo se utilizarmos o algoritmo da transformada rápida de Fourier.

Para utilizarmos este algoritmo é necessário que o

número de termos seja uma potência inteira de dois. Além disto, no caso da convolução ou da correlação discreta via domínio da frequência, foi considerado que os números de termos das duas seqüências são iguais. Portanto, dadas duas seqüências com N_1 e N_2 termos, precisamos acrescentar L_1 zeros a primeira e L_2 zeros a segunda de modo que:

$$N_1 + L_1 = N_2 + L_2 = 2^M$$

Para as duas seqüências das figuras (11.2) com 6 e 7 termos podemos acrescentar dois zeros à primeira e um à segunda de modo que as duas fiquem com 8 termos.

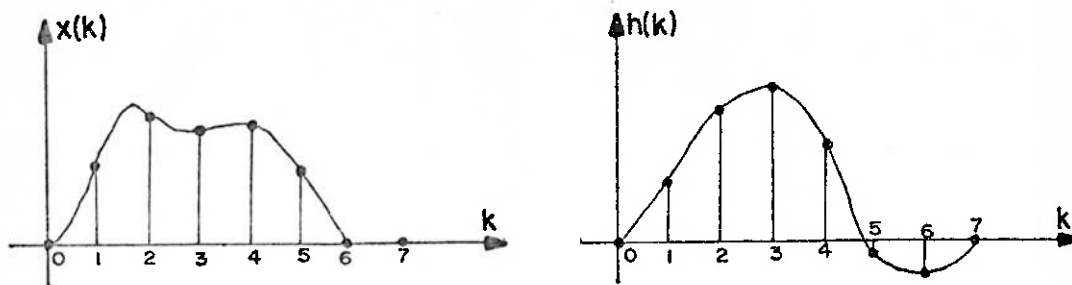


Figura (11.16)

Conforme vimos em (11.5) e (11.11), a convolução ou a correlação discreta de duas seqüências finitas $x(k)$ e $h(k)$ com N_1 e N_2 termos, respectivamente, é uma outra seqüência finita com $N_1 + N_2 - 1$ termos com duração de $(N_1 + N_2 - 1)T$ segundos.

No caso das seqüências das figuras (11.2), tanto a correlação como a convolução dsicreta teriam 12 termos.

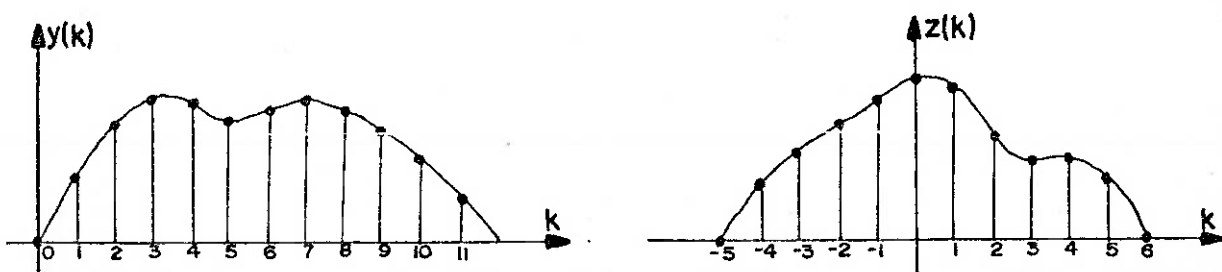


Figura (11.17)

Se as duas seqüências $x(k)$ e $h(k)$ forem acrescentados zeros, de maneira que elas fiquem com o mesmo número N de termos, a duração de cada uma será NT segundos.

Ao calcularmos as transformadas discretas destas duas seqüências, obteremos duas outras, $X(n)$ e $H(n)$, com o mesmo intervalo de discretização $1/NT$ Hertz.

Multiplicando estas convenientemente, obteremos uma outra seqüência, $Y(n)$ ou $Z(n)$, com os termos igualmente espaçados de $1/NT$ Hertz.

Ao calcularmos a transformada discreta inversa de $Y(n)$ ou $Z(n)$, vamos obter uma seqüência periódica com período igual a NT segundos. Se o período for menor do que a duração da convolução ou da correlação, além de não conseguirmos determinar todos os termos, alguns destes estarão distorcidos devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

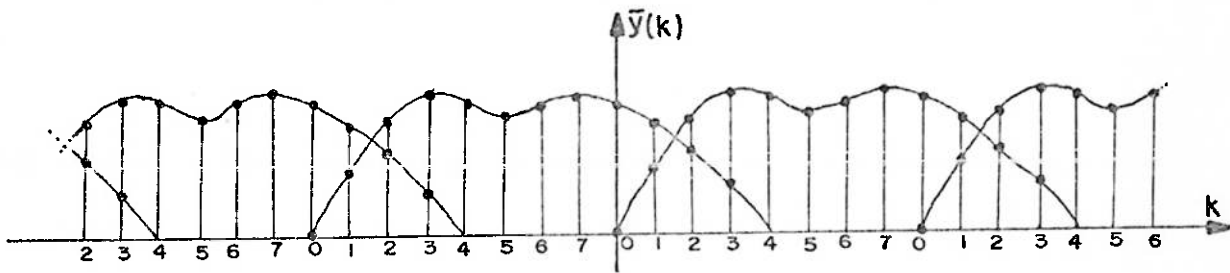


Figura (11.18-a)

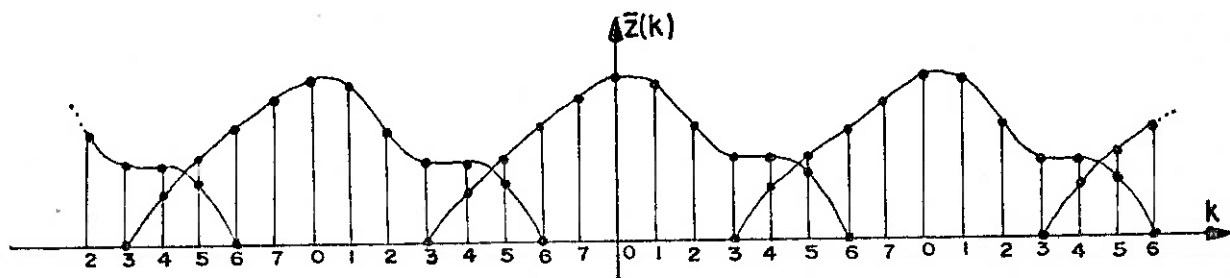


Figura (11.18-b)

Portanto, para que não ocorra esta distorção, é necessário que:

$$NT \geq (N_1 + N_2 - 1)T$$

$$N_1 + L_1 \geq N_1 + N_2 - 1$$

$$L_1 \geq N_2 - 1 \quad (11.29)$$

Existe uma outra maneira de se explicar esta distorção no resultado. Quando calculamos a correlação ou a convolução discretas via domínio da frequência, estamos, na realidade, realizando estas operações da seguinte maneira:

$$y(k) = F^{-1} [X(n)] * F^{-1} [H(n)] \quad (11.30-a)$$

$$z(k) = F^{-1} [X^*(n)] \otimes F^{-1} [H(n)] \quad (11.30-b)$$

A transformada discreta de Fourier leva em conta que a sequência é periódica nos dois domínios. Portanto, ao realizarmos os cálculos via domínio da frequência, o que é equivalente a utilizar as expressões (11.30), estaremos, na realidade, calculando a correlação ou a convolução discreta de sequências periódicas.

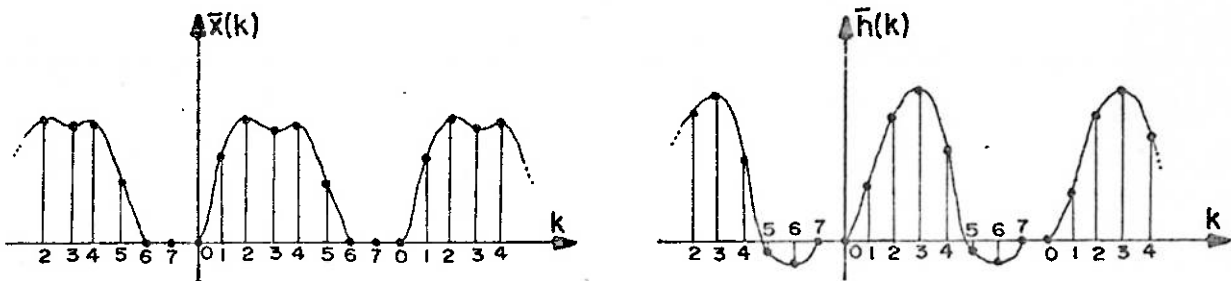


Figura (11.19)

Como estas sequências representam funções periódicas, com período igual a NT segundos, a convolução ou a correlação discreta das mesmas também representará uma outra função periódica de mesmo período.

As sequências obtidas, somando-se os termos onde ocorrem superposições nas figuras (11.18) serão então a convolução e correlação discretas das sequências das figuras (11.19).

O cálculo de $\tilde{y}(2)$ e $\tilde{z}(3)$ das sequências das figuras (11.19) pode ser feito segundo o esquema da figura (11.20).

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) | 0 | 0 |
| h(2) | h(1) | h(0) | 0 | h(6) | h(5) | h(4) | h(3) |
| h(3) | h(4) | h(5) | h(6) | 0 | h(0) | h(1) | h(2) |

Figura (11.20)

$$\tilde{y}(2) = T(x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)+x(4)h(6)+x(5)h(5))$$

$$\tilde{z}(3) = T(x(0)h(3)+x(1)h(4)+x(2)h(5)+x(3)h(6)+x(5)h(0))$$

O mesmo cálculo para as sequências de duração finita da figura (11.2) pode ser feito segundo o esquema da figura (11.21).

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|---|---|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) | 0 | 0 |
| h(2) | h(1) | h(0) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| h(3) | h(4) | h(5) | h(6) | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura (11.21)

$$y(2) = T(x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0))$$

$$z(3) = T(x(0)h(3)+x(1)h(4)+x(2)h(5)+x(3)h(6))$$

Os valores de $y(10)$ e $z(-5)$ para estas mesmas sequências podem ser obtidos segundo o esquema da figura (11.22).

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) | x(5) | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | h(6) | h(5) | h(4) | h(3) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | h(0) | h(1) | h(2) |

Figura (11.22)

$$y(10) = T(x(4)h(6)+x(5)h(5))$$

$$z(-5) = T(x(5)h(0))$$

De onde se conclui que:

$$\bar{y}(2) = y(2) + y(10)$$

$$\bar{z}(3) = z(3) + z(-5)$$

Estas mesmas relações podem ser observadas diretamente nas figuras (11.18). Nestas mesmas figuras podem ser obtidas as relações entre todos os termos das sequências $\bar{y}(k)$ e $\bar{z}(k)$ e os das sequências das figuras (11.17).

$$\bar{y}(0) = y(0) + y(8)$$

$$\bar{z}(-4) = z(-4) + z(+4)$$

$$\bar{y}(1) = y(1) + y(9)$$

$$\bar{z}(-3) = z(-3) + z(+5)$$

$$\bar{y}(2) = y(2) + y(10)$$

$$\bar{z}(-2) = z(-2) + z(+6)$$

$$\bar{y}(3) = y(3) + y(11)$$

$$\bar{z}(-1) = z(-1)$$

$$\bar{y}(4) = y(4)$$

$$\bar{z}(0) = z(0)$$

$$\bar{y}(5) = y(5)$$

$$\bar{z}(+1) = z(+1)$$

$$\bar{y}(6) = y(6)$$

$$\bar{z}(+2) = z(+2)$$

$$\bar{y}(7) = y(7)$$

$$\bar{z}(+3) = z(+3) + z(-5)$$

Se as sequências possuem inicialmente N_1 e N_2 termos e a cada uma são acrescentados L_1 e L_2 zeros, tal que:

$$N_1 + L_1 = N_2 + L_2 = N$$

são conseguiremos obter N termos da convolução ou da correlação discreta. Como estas possuem $N_1 + N_2 - 1$ termos, ficam faltando conhecer:

$$N_1 + N_2 - 1 - N_1 - L_1 = N_2 - L_1 - 1 = N_1 - L_2 - 1$$

Pode-se verificar que, no caso da convolução discreta, estes termos somam-se aos iniciais e, no caso da correlação dis

creta, estes somam-se aos laterais.

Cada termo genérico da convolução ou da correlação discreta distorcida pode ser obtido pelas expressões:

$$\tilde{y}(k) = y(k) + y(N+k) \quad (11.31)$$

$$\tilde{z}(k) = z(k) + z(k-N) \quad \text{se } k > 0 \quad (11.32-a)$$

$$\tilde{z}(k) = z(k) + z(k+N) \quad \text{se } k < 0 \quad (11.32-b)$$

É interessante verificar os valores assumidos pelos termos $\tilde{y}(N2-1)$ e $\tilde{z}(0)$:

$$\tilde{y}(N2-1) = y(N2-1) + y(N+N2-1)$$

$$\tilde{z}(0) = z(0) + z(-N)$$

$$\tilde{y}(N2-1) = y(N2-1) + y(N1+L1+N2-1)$$

$$\tilde{z}(0) = z(0) + z(-N1-L1)$$

Como já sabemos da convolução e da correlação discretas

$$y(k) = 0 \quad \text{se } k \geq N1+N2-1$$

$$z(k) = 0 \quad \text{se } k \leq -N1$$

Logo:

$$\tilde{y}(N2-1) = y(N2-1) \quad (11.33-a)$$

$$\tilde{z}(0) = z(0) \quad \forall L1, L2 \quad (11.33-b)$$

Estes termos permanecem inalterados mesmo que nenhum zero seja acrescentado.

Para as sequências da figura (11.2), levando em conta a expressão (11.29), devemos ter:

$$L1 \geq N2-1 \quad L1 \geq 6 \quad \text{e} \quad L2 \geq 5$$

para que o resultado não se apresente distorcido.

Fazendo $L1$ igual a 10 e $L2$ igual a 9 teremos duas sequências de 16 termos. Calculando agora a convolução e corre

lação discretas via domínio da frequência, encontraremos os resultados esperados.

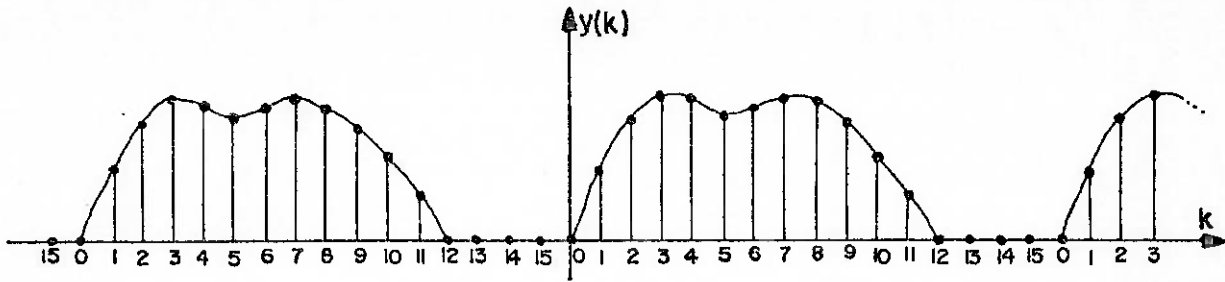


Figura (11.23-a)

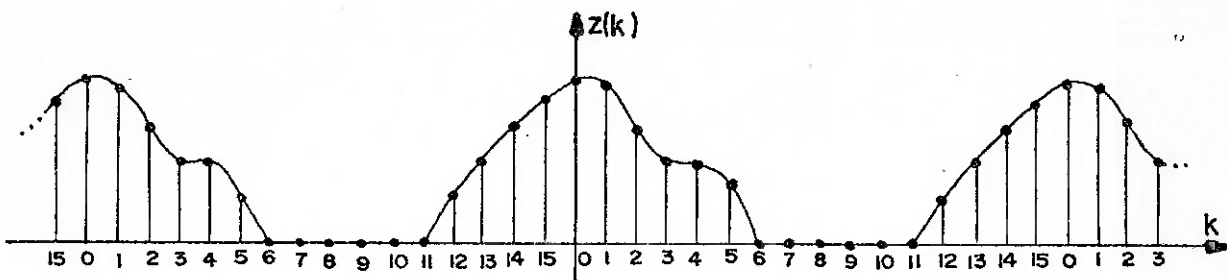


Figura (11.23-b)

11.9 - Exemplos de aplicação

Consideremos, como exemplo, o cálculo da convolução discreta das sequências do exemplo (11.3) via domínio da frequência.

11.9.1 - Sequências com 16 termos

Aumentemos, inicialmente, as duas sequências para 16 termos, acrescentando-se 6 zeros à primeira e 4 à segunda. As transformadas foram obtidas utilizando-se o programa para a Texas 59.

Deve-se lembrar que este programa não realiza a multiplicação pelo intervalo de discretização. Estas devem ser feitas posteriormente. Os dois intervalos são:

$$T = 0,5 \text{ segundos} \quad F = \frac{1}{16 \times 0,5} = 0,125 \text{ Hertz}$$

Os resultados da convolução apresentam uma precisão de 5 casas decimais. Este pequeno erro deve-se a arredondamentos ocorridos durante os cálculos.

| n,k | x(k) | h(k) | RX(n) | IX(n) | RH(n) | IH(n) | RY(n) | IY(n) | $\tilde{y}(k)$ |
|-----|------|------|-----------|----------|-----------|----------|------------|-----------|----------------|
| 0 | 0,0 | 1,0 | 12,25000 | 0,00000 | 27,50000 | 0,00000 | 336,87500 | 0,00000 | 39,375 |
| 1 | 1,0 | 3,0 | - 3,81943 | -7,69349 | - 8,60868 | -7,57010 | - 25,36023 | 95,14430 | 27,750 |
| 2 | 2,0 | 5,0 | - 0,85355 | 1,81066 | 1,78033 | -6,35876 | 9,99393 | 8,65111 | 18,250 |
| 3 | 3,0 | 6,0 | - 1,02310 | -0,70291 | - 2,36495 | 2,05891 | 3,86681 | - 0,44411 | 13,250 |
| 4 | 3,5 | 5,0 | 0,25000 | 0,50000 | - 0,75000 | -0,25000 | - 0,06250 | - 0,43750 | 15,750 |
| 5 | 4,0 | 4,5 | - 0,41624 | -0,31382 | - 0,30662 | -0,11266 | 0,09227 | 0,14312 | 23,250 |
| 6 | 3,5 | 4,0 | - 0,14645 | 0,31066 | 0,71967 | -0,35876 | 0,00606 | 0,27611 | 32,750 |
| 7 | 4,0 | 5,0 | 0,25877 | -0,30440 | 0,28026 | 0,25832 | 0,15116 | - 0,01846 | 41,750 |
| 8 | 2,5 | 6,5 | - 0,75000 | 0,00000 | - 1,00000 | 0,00000 | 0,75000 | 0,00000 | 50,000 |
| 9 | 1,0 | 7,0 | 0,25877 | 0,30440 | 0,28026 | -0,25832 | 0,15116 | 0,01846 | 56,875 |
| 10 | 0,0 | 5,0 | - 0,14645 | -0,31066 | 0,71967 | 0,35876 | 0,00606 | - 0,27611 | 62,000 |
| 11 | 0,0 | 3,0 | - 0,41624 | 0,31382 | - 0,30662 | 0,11266 | 0,09227 | - 0,14312 | 63,875 |
| 12 | 0,0 | 0,0 | 0,25000 | -0,50000 | - 0,75000 | 0,25000 | - 0,06250 | 0,43750 | 63,625 |
| 13 | 0,0 | 0,0 | - 1,02310 | 0,70291 | - 2,36495 | -2,05891 | 3,86681 | 0,44411 | 60,625 |
| 14 | 0,0 | 0,0 | - 0,85355 | -1,81066 | 1,78033 | 6,35876 | 9,99393 | - 8,65111 | 55,875 |
| 15 | 0,0 | 0,0 | - 3,81943 | 7,69349 | - 8,60868 | 7,57010 | - 25,36023 | -95,14430 | 48,750 |

Tabela (11.3)

Pode-se verificar que os valores $\tilde{y}(k)$ da tabela (11.3) estão relacionados aos valores $y(k)$ da tabela (11.2) através da expressão (11.31).

$$\tilde{y}(k) = y(k) + y(16+k)$$

Os valores $\tilde{y}(k)$ correspondem, na realidade, à convolução discreta das seqüências $x(k)$ e $h(k)$ periódicas.

11.9.2 - Sequências com 32 termos

Neste caso, os intervalos de discretização são:

$$T = 0,5 \text{ segundos} \quad F = \frac{1}{32 \times 0,5} = 0,0625 \text{ Hertz}$$

| n,k | x(k) | h(k) | RX(n) | IX(n) | RH(n) | IH(n) | RY(n) | IY(n) | y(k) |
|-----|------|------|----------|----------|----------|-----------|------------|------------|--------|
| 0 | 0,0 | 1,0 | 12,25000 | 0,00000 | 27,50000 | 0,00000 | 336,87500 | 0,00000 | 0,000 |
| 1 | 1,0 | 3,0 | 5,97239 | -9,53271 | 8,57330 | -21,09400 | -149,88002 | -207,70830 | 0,500 |
| 2 | 2,0 | 5,0 | -3,81943 | -7,69349 | -8,60868 | -7,57010 | -25,36023 | 95,14430 | 2,500 |
| 3 | 3,0 | 6,0 | -5,14337 | -0,30209 | 0,63280 | 1,37613 | -2,83899 | -7,26909 | 7,000 |
| 4 | 3,5 | 5,0 | -0,85355 | 1,81066 | 1,78033 | -6,35876 | 9,99394 | 8,65111 | 14,250 |
| 5 | 4,0 | 4,5 | 0,44066 | -0,40247 | -5,48057 | -3,55781 | -3,84699 | 0,63799 | 23,250 |
| 6 | 3,5 | 4,0 | -1,02310 | -0,70291 | -2,36495 | 2,05891 | 3,86681 | -0,44411 | 32,750 |
| 7 | 4,0 | 5,0 | -0,90019 | 0,62136 | 0,37972 | 0,01398 | -0,35051 | 0,22336 | 41,750 |
| 8 | 2,5 | 6,5 | 0,25000 | 0,50000 | -0,75000 | -0,25000 | -0,06250 | -0,43750 | 50,000 |
| 9 | 1,0 | 7,0 | 0,18791 | -0,35457 | -0,08090 | 0,20678 | 0,05812 | 0,06754 | 56,875 |
| 10 | 0,0 | 5,0 | -0,41624 | -0,31382 | -0,30662 | -0,11266 | 0,09227 | 0,14312 | 62,000 |
| 11 | 0,0 | 3,0 | -0,44732 | 0,13102 | 0,10774 | 0,58190 | -0,12444 | -0,24618 | 63,875 |
| 12 | 0,0 | 0,0 | -0,14645 | 0,31066 | 0,71967 | -0,35876 | 0,00606 | 0,27611 | 63,625 |
| 13 | 0,0 | 0,0 | 0,20028 | 0,18115 | -0,33103 | -0,41309 | 0,00853 | -0,14270 | 60,625 |
| 14 | 0,0 | 0,0 | 0,25877 | -0,30440 | 0,28026 | 0,25832 | 0,15156 | -0,18464 | 55,875 |
| 15 | 0,0 | 0,0 | -0,31036 | -0,55889 | 0,19895 | -0,83014 | -0,52570 | 0,14465 | 48,750 |
| 16 | 0,0 | 0,0 | -0,75000 | 0,00000 | -1,00000 | 0,00000 | 0,75000 | 0,00000 | 39,375 |
| 17 | 0,0 | 0,0 | -0,31036 | 0,55889 | 0,19895 | 0,83104 | -0,52570 | -0,14645 | 27,250 |
| 18 | 0,0 | 0,0 | 0,25877 | 0,30440 | 0,28026 | -0,25832 | 0,15156 | 0,18464 | 15,750 |
| 19 | 0,0 | 0,0 | 0,20028 | -0,18115 | -0,33103 | -0,41309 | 0,00853 | 0,14270 | 6,250 |
| 20 | 0,0 | 0,0 | -0,14645 | -0,31066 | 0,71967 | 0,35876 | 0,00606 | -2,27611 | 1,500 |
| 21 | 0,0 | 0,0 | -0,44732 | -0,13102 | 0,10774 | -0,58190 | -0,12444 | 0,24618 | 0,000 |
| 22 | 0,0 | 0,0 | -0,41624 | 0,31382 | -0,30662 | 0,11266 | 0,09227 | -0,14312 | 0,000 |
| 23 | 0,0 | 0,0 | 0,18791 | 0,35457 | -0,08090 | -0,20678 | 0,05812 | -0,06754 | 0,000 |
| 24 | 0,0 | 0,0 | 0,25000 | -0,50000 | -0,75000 | 0,25000 | -0,06250 | 0,43750 | 0,000 |
| 25 | 0,0 | 0,0 | -0,90019 | -0,62136 | 0,37972 | -0,01398 | -0,35051 | -0,22336 | 0,000 |
| 26 | 0,0 | 0,0 | -1,02310 | 0,70291 | -2,36495 | -2,05891 | 3,86681 | 0,44411 | 0,000 |
| 27 | 0,0 | 0,0 | 0,44066 | 0,40247 | -5,48057 | 3,55781 | -3,84699 | -0,63799 | 0,000 |
| 28 | 0,0 | 0,0 | -0,85355 | -1,81066 | 1,78033 | 6,35876 | 9,99394 | -8,65111 | 0,000 |
| 29 | 0,0 | 0,0 | -5,14337 | 0,30209 | 0,63280 | -1,37613 | -2,83899 | 7,26909 | 0,000 |
| 30 | 0,0 | 0,0 | -3,81943 | 7,69349 | -8,60868 | 7,57010 | -25,36023 | -95,14430 | 0,000 |
| 31 | 0,0 | 0,0 | 5,97239 | 9,53271 | 8,57330 | 21,09400 | -149,88002 | 207,78830 | 0,000 |

Tabela (11.4)

Como se vê, salvo erros de arredondamento, os resultados são os mesmos do exemplo (11.3).

11.10 - Correlação discreta, via domínio da frequência, entre duas sequências periódicas

O teorema da convolução e da correlação discretas ser vem igualmente para sequências periódicas. Aliás, o certo é se afirmar que estes teoremas valem somente para sequências periódicas pois esta é uma propriedade do par de transformadas discretas.

Se tivermos que realizar a correlação discreta de se quências periódicas, basta tomar apenas um período de cada uma que a transformada discreta de Fourier se encarrega do resto.

É importante lembrar que devemos fornecer apenas e tão somente um período de cada sequência. Se fornecermos dois períodos, isto é equivalente a se tomar a integral (5.23) no intervalo de $(0, 2T_0)$ e com isto os resultados aparecerão multiplicados por dois.

Se o número de termos em um período não for potência inteira de dois, é melhor tomar um outro intervalo de discretização adequado para que isto ocorra.

11.11 - Convolução discreta, via domínio da frequência, envolvendo uma sequência periódica

Consideremos as duas sequências das figuras (11.24).

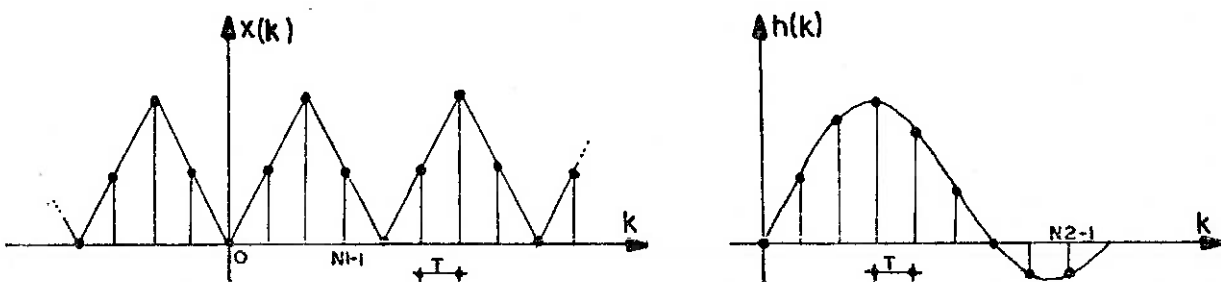


Figura (11.24)

Primeiramente devemos fornecer um número de termos que seja suficiente para cobrir um número inteiro de períodos da sequência $x(k)$ e, ao mesmo tempo, seja maior do que N_2 .

$$N = kN_1$$

$$N > N_2$$

A sequência $h(k)$ pode ter sua duração aumentada completando-a com $L2$ zeros.

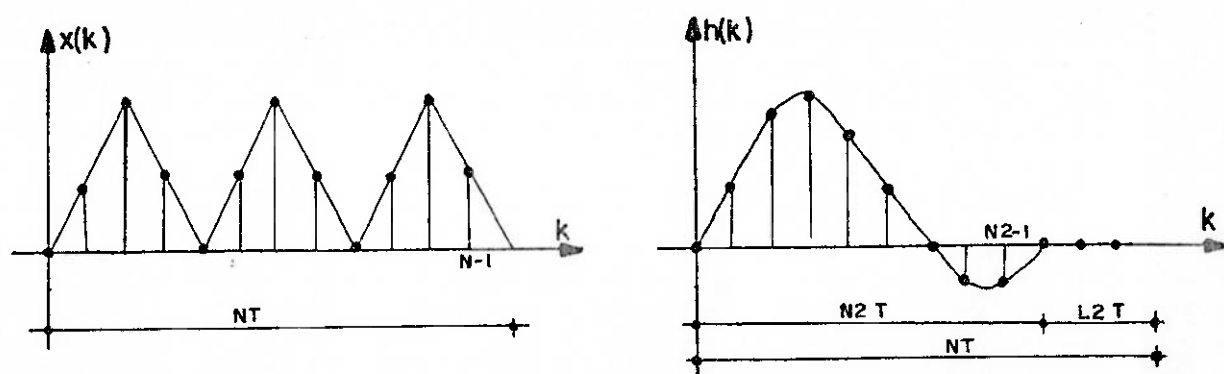


Figura (11.25)

Quando calculamos a convolução discreta destas sequências, via domínio da frequência, estamos supondo que as duas são periódicas.

Na realidade, basta que uma delas seja periódica que os resultados são os mesmos. Isto pode ser verificado nos esquemas das figuras (11.20), (11.21) e (11.22). Basta supor que apenas $h(k)$ é periódica.

No nosso exemplo então podemos supor os N termos de $x(k)$ como uma sequência de duração finita e a sequência $h(k)$ como periódica. Apesar do objetivo ser o contrário, isto em nada altera os resultados.

O importante é que, para qualquer deslocamento k , todos os termos da sequência $h(k-i)$ sejam multiplicados pelos termos da sequência periódica $x(i)$.

Como se pode notar pelas figuras (11.26), para qualquer deslocamento k , os termos da sequência $h(k-i)$ que faltam de um lado aparecem do outro, pelo fato da mesma ser periódica.

Portanto, para se calcular a convolução discreta, via domínio da frequência, da sequência periódica $x(k)$ com a sequência de duração finita $h(k)$ das figuras (11.24) basta tomar N termos de cada sequência da figura (11.25).

É importante lembrar que devemos sempre tomar um número inteiro de períodos. Se o intervalo de discretização não fornecer, em um número inteiro de períodos, um número N potência inteira de dois, é melhor alterá-lo para que isto aconteça.

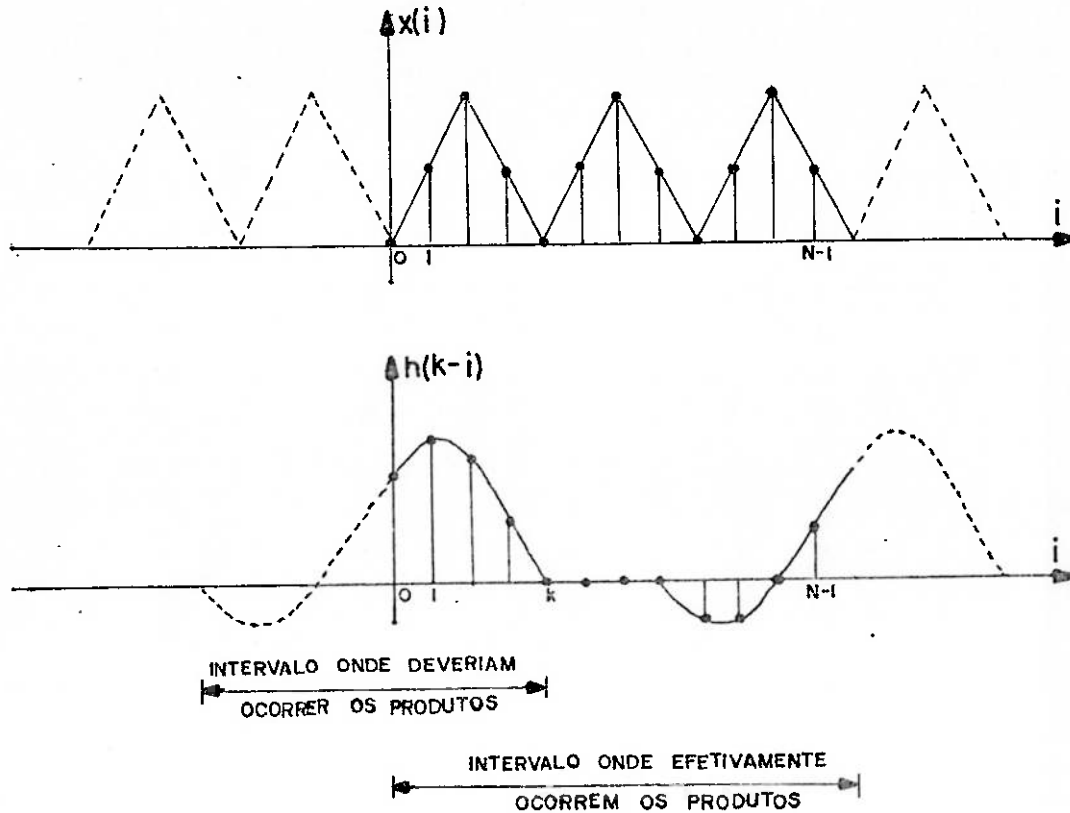


Figura (11.26)

11.12 - Conclusões

O exemplo do ítem (11.9) apresentado neste capítulo não constitui um caso típico onde seja vantajoso se empregar a transformada rápida de Fourier para o cálculo da convolução discreta.

Esta vantagem só é obtida para seqüências bem maiores. No entanto, os mesmos problemas que aqui surgiram poderão surgir nestas outras se não forem adotados os procedimentos corretos.

No caso de seqüências finitas com iguais números de termos devemos ter:

$$L_1 = L_2 = L \geq N-1$$

Como o número final de termos tem que ser par, vamos considerar sempre

$$L \geq N \quad (11.34)$$

Portanto, no cálculo da convolução ou da correlação discreta de sequências de duração finita com igual número de termos, devemos inicialmente dobrar a duração das mesmas acrescentando-se zeros.

É importante lembrar que, utilizando os teoremas da convolução e da correlação discretas, estamos indo ao domínio da frequência e depois voltando. Portanto, não há sentido em se preocupar com prováveis distorções no domínio da frequência. Na dedução destes teoremas foi considerado apenas que as sequências $x(k)$ e $X(n)$, assim como $h(k)$ e $H(n)$, constituem pares de transformadas discretas.

CAPÍTULO 12

ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A
UM CARREGAMENTO CONTÍNUO E DETERMINÍSTICO

12.1 - Sistemas lineares

Dizemos que um sistema é de resposta linear quando a resposta do mesmo a uma combinação linear de diversas excitações é dada pela combinação linear, com os mesmos coeficientes, das respostas à cada excitação.

A figura (12.1) ilustra esta característica:

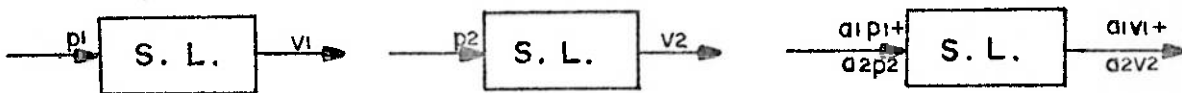


Figura (12.1)

Resumindo, podemos dizer que um sistema linear é aquele para o qual vale o princípio da superposição dos efeitos.

Na engenharia existem diversos tipos de sistemas lineares. Um deles, por exemplo, é um circuito elétrico onde a entrada (excitação) é caracterizada por uma diferença de potencial e a saída (resposta) por uma corrente elétrica.

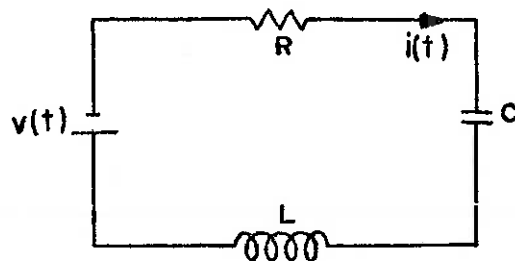


Figura (12.2)

Um outro sistema que tem grande analogia com os sistemas estruturais é o da figura (12.3)

Trata-se de um corpo de massa m , vinculado a um referencial fixo através de uma mola de constante k e de um amortecedor de constante c .

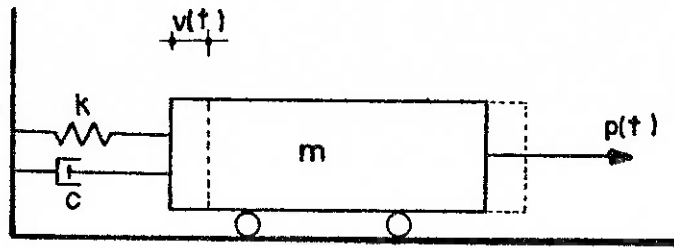


Figura (12.3)

A excitação é dada por um carregamento $p(t)$ e a resposta por deslocamentos $v(t)$.

Com a aplicação do carregamento externo desenvolvem-se no sistema de forças elásticas, proporcionais aos deslocamentos, forças viscosas, proporcionais às velocidades, e forças de inércia, proporcionais às acelerações. Elas são dadas respectivamente por:

$$f_s(t) = kv(t) \quad (12.1-a)$$

$$f_d(t) = c\dot{v}(t) \quad (12.1-b)$$

$$f_i(t) = m\ddot{v}(t) \quad (12.1-c)$$

Para que o sistema esteja em equilíbrio é necessário que estas forças equilibrem o carregamento externo.

$$f_s(t) + f_d(t) + f_i(t) = p(t)$$

Substituindo pelos valores destas forças temos:

$$kv(t) + c\dot{v}(t) + m\ddot{v}(t) = p(t) \quad (12.2)$$

que é a equação diferencial de equilíbrio do sistema.

O problema dinâmico consiste em se resolver esta equação diferencial. Dado o carregamento $p(t)$ deseja-se saber os deslocamentos $v(t)$. Conhecidos os deslocamentos em função do tempo as velocidades, $\dot{v}(t)$, e as acelerações, $\ddot{v}(t)$, são determinadas por simples diferenciação. A seguir as forças elásticas, viscosas e de inércia, em cada instante, podem ser determinadas pelas expressões (12.1).

O comportamento deste sistema é análogo ao das estruturas abaixo.

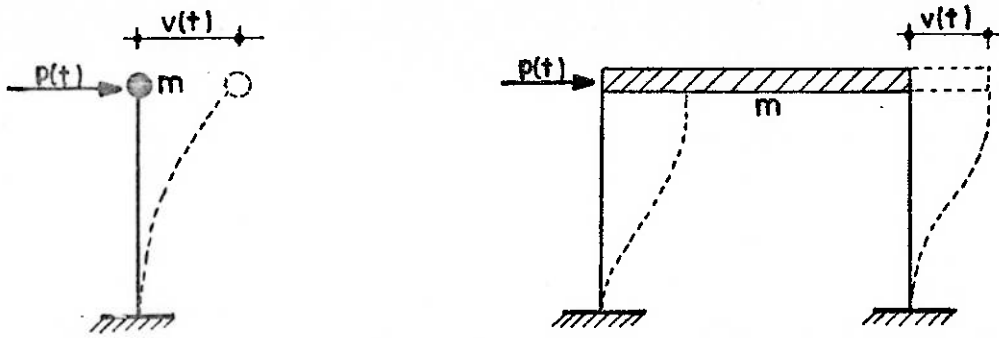


Figura (12.4)

Nestes casos só existe um deslocamento a ser determinado. Por isto estas estruturas e o sistema da figura (12.3) são chamados de sistemas de um grau de liberdade. Dado o carregamento $p(t)$ o deslocamento $v(t)$ é determinado pela mesma equação (12.2).

No caso das estruturas das figuras (12.4) a constante k é dada pela rigidez lateral da barra ou do pórtico. A massa é concentrada em um único ponto.

Se a estrutura não possuir amortecimento, ela terá uma frequência natural de vibração dada por:

$$\omega_0 = \frac{k}{m} \text{ rad/seg.} \quad (12.3-a)$$

ou

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{k}{m} \text{ Hertz} \quad (12.3-b)$$

O período natural é dado por:

$$P_0 = \frac{1}{f_0} \text{ segundos} \quad (12.3-c)$$

Chama-se amortecimento crítico aquele a partir do qual não ocorrem vibrações. Ele é dado por:

$$c_c = 2m\omega_0 \quad (12.4)$$

Nas estruturas não é comum falar-se em constante de amortecimento. O mesmo é quantificado através da porcentagem de amortecimento dada por:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (12.5)$$

Quando a porcentagem de amortecimento é menor do que cem por cento diz-se que a estrutura é sub-amortecida. Caso contrário ela é dita super-amortecida.

As estruturas usuais são sempre sub-amortecidas. É comum adotar em análise dinâmica porcentagens de amortecimento em torno de 5%. A partir da mesma pode se definir a constante de amortecimento:

$$c = 2\xi m\omega \quad (12.6)$$

Na presença do amortecimento a frequência de vibração diminui e o período aumenta.

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \quad (12.7-a)$$

$$f_d = f_0 \sqrt{1-\xi^2} \quad (12.7-b)$$

$$P_d = \frac{P_0}{1-\xi^2} \quad (12.7-c)$$

Pode-se verificar que, para as porcentagens de amortecimento usuais em estruturas, a frequência e o período da estrutura amortecida praticamente coincidem com o caso de amortecimento nulo.

Consideremos agora neste estudo dois casos básicos de carregamento: carregamento periódico e carregamento de duração finita.

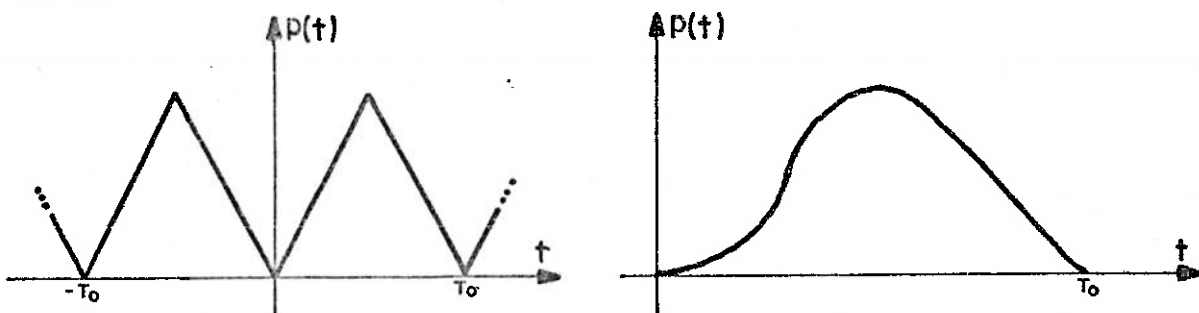


Figura (12.5)

Vejamos agora como pode ser determinada a resposta $v(t)$, em função do tempo, conhecido o carregamento $p(t)$.

12.2 - Cálculo da resposta pela equação diferencial

A maneira mais direta que temos de calcular a resposta é através da integração da equação diferencial (12.2).

A função $v(t)$ é obtida integrando-se convenientemente a mesma. Nesta integração devem ser levados em conta as condições iniciais de contorno.

Como a integração de equações diferenciais foge ao escopo deste trabalho, vamos estudar outros meios de se calcular a resposta onde se possam aplicar os conceitos matemáticos até aqui apresentados.

12.3 - Cálculo da resposta pela integral de Duhamell

12.3.1 - Função de resposta a um impulso unitário

Consideremos um carregamento constituído por um impulso de área unitária no instante inicial.

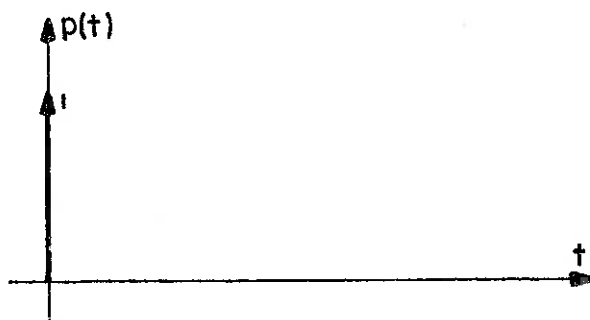


Figura (12.6)

Trata-se de um carregamento de duração infinitamente curta com intensidade infinitamente alta. O mesmo pode ser facilmente entendido à luz da teoria das distribuições.

A resposta ao mesmo é dada pela função $h(t)$ chamada de função de resposta a um impulso unitário.

$$h(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{\text{sen}\omega dt}{m\omega d} \right) \quad (12.8)$$

Esta expressão é válida somente para sistemas sub-amortecidos. A mesma mostra que a função é constituída por uma senóide multiplicada por uma exponencial decrescente. Quanto maior o amortecimento e a frequência natural, mais rapidamente decrescem as amplitudes da senóide. Para amortecimento nulo as amplitudes de cada período tornam-se constantes. O período da senóide é igual ao período da estrutura amortecida dado por (12.7-c).

Na figura (12.7) apresentamos esta função, plotada em escala, para o caso em que:

$$k = 1600 \text{ kgf/m} \quad m = 10 \text{ kgf seg}^2/\text{m} \quad \xi = 0,05$$

o que conduz à:

$$f_0 = 2,013 \text{ Hertz} \quad f_d = 2,011 \text{ Hertz}$$

$$P_d = 0,497 \text{ seg.}$$

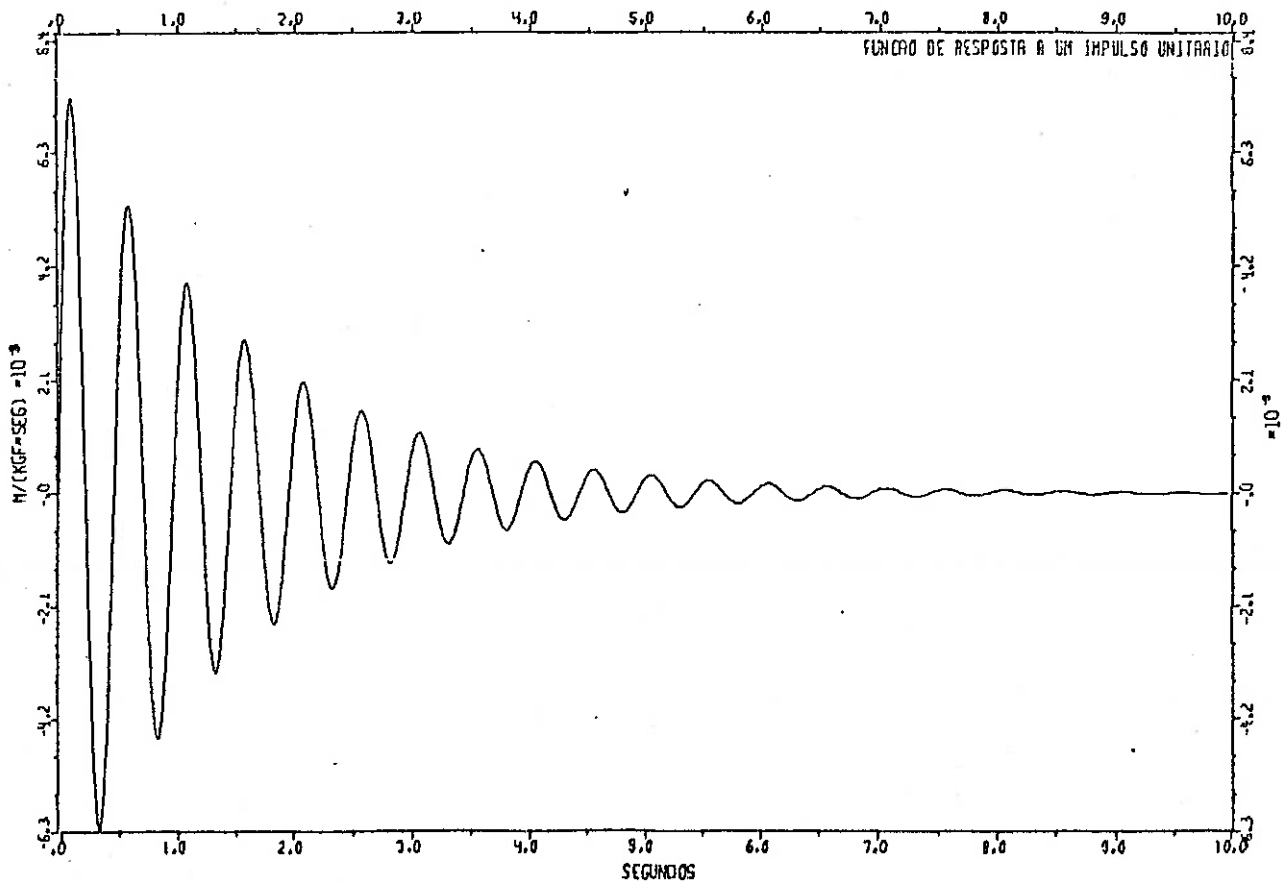


Figura (12.7)

Pode-se verificar que as unidades da função de resposta são dadas em: $m/(kgf \cdot seg)$.

12.3.2 - Integral de Duhamell

Consideremos agora um impulso no instante τ . A resposta ao mesmo pode ser obtida deslocando-se a função $h(t)$ da origem para este instante.

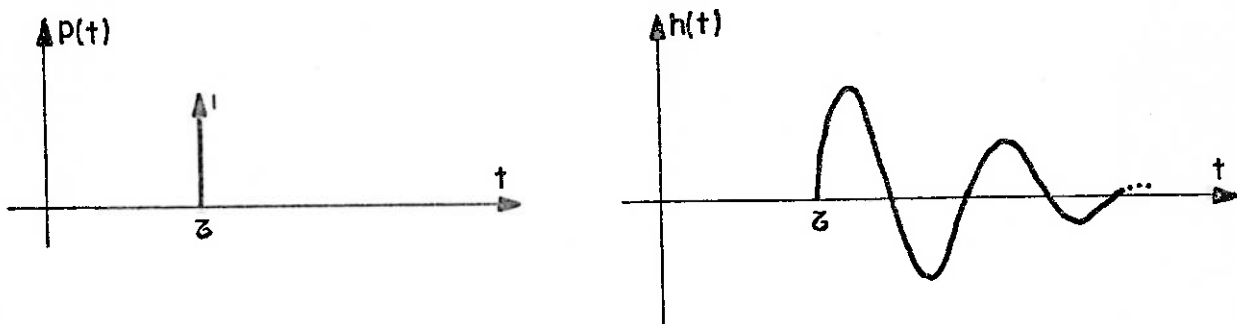


Figura (12.8)

A função de resposta para este caso será então:

$$h'(t) = h(t-\tau) - e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \left[\frac{1}{m\omega_d} \text{sen}\omega_d(t-\tau) \right] \quad (12.9)$$

Consideremos agora um carregamento genérico $p(t)$. O mesmo pode ser considerado como infinitos impulsos, infinitamente próximos um do outro, cada um deles com área $p(\tau) d\tau$.

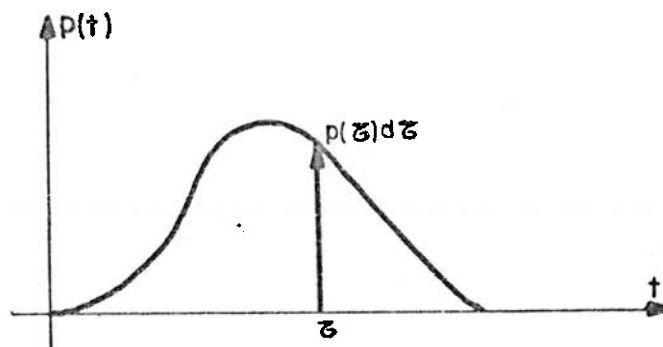


Figura (12.9)

Como a estrutura é de resposta linear, a resposta em um instante t é dada pela soma das respostas de todos os impulsos que ocorrem até aquele instante.

Como o carregamento é contínuo, e os impulsos estão infinitamente próximos um do outro, a soma é substituída por uma integração.

$$v(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (12.10)$$

A expressão (12.10) é conhecida como integral de Duhamel. É fácil perceber que a mesma é o resultado da convolução entre o carregamento e a função de resposta.

Para o caso de carregamento de duração finita temos:

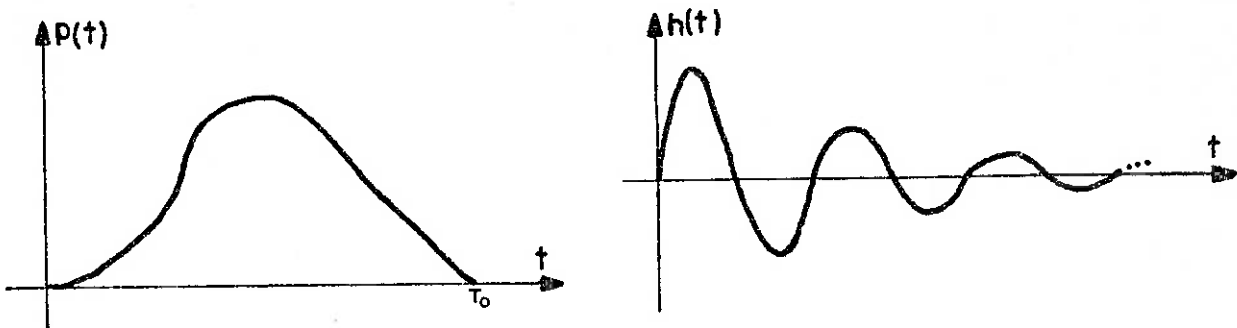


Figura (12.10)

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{se } t \leq t_0 \quad (12.11-a)$$

$$v(t) = \int_0^{t_0} p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{se } t \geq t_0 \quad (12.11-b)$$

Pode se verificar que os limites de integração dados pelas expressões (5.5) e (5.6) são os mesmos das expressões (12.11). A expressão (12.11-a) fornece os deslocamentos durante o carregamento; deslocamentos em vibrações forçadas, e a expressão (12.11-c) fornece os mesmos após cessado o carregamento; deslocamentos em vibrações livres.

Devido às características da função de resposta, estes últimos continuam a existir para qualquer instante após cessado o carregamento e, além disto, as características dos mesmos, figura (12.11), são idênticas às da função de resposta.

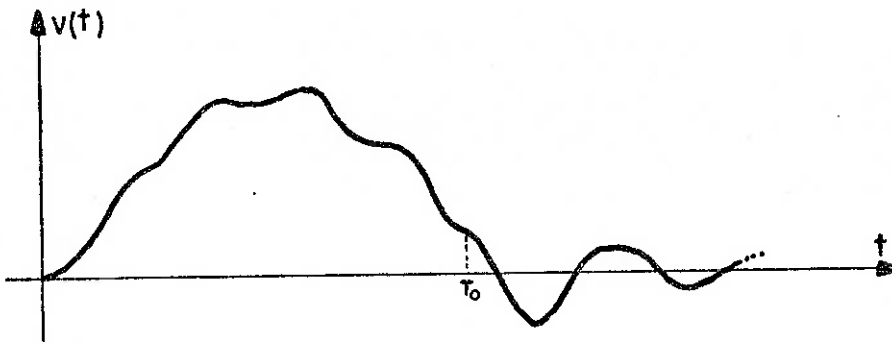


Figura (12.11)

Para o caso de carregamento periódico, figura (12.12), temos:

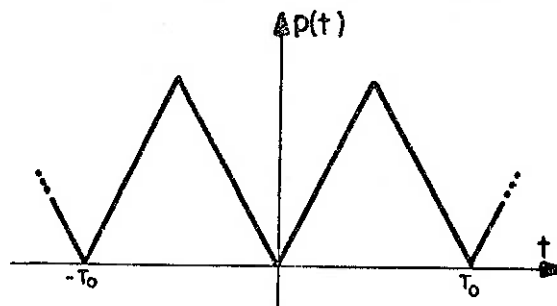


Figura (12.12)

$$v(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (12.12)$$

Pode se verificar neste caso que a resposta também é periódica e apresenta o mesmo período T_0 . Aliás, isto já era de se esperar conforme fora visto em (5.9). Neste caso não ocorrem vibrações livres pois estas se superpõem com as vibrações forçadas do período seguinte.

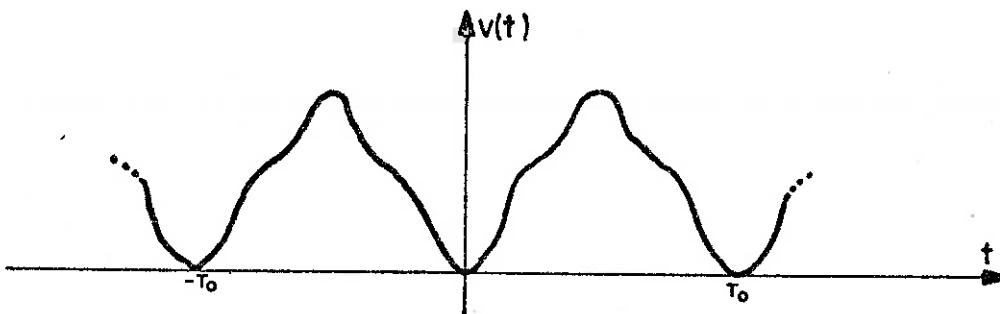


Figura (12.13)

12.4 - Cálculo da resposta no domínio da frequência

Como vimos, o cálculo da resposta pode ser feito através de uma integral de convolução entre o carregamento e a função de resposta a um impulso unitário.

Pelo teorema da convolução esta operação corresponde, no domínio da frequência, a multiplicar as transformadas de Fourier do carregamento e da função de resposta para obtermos a transformada da função $v(t)$.

Se o carregamento é de duração finita, basta aplicar o teorema da convolução dado pelas expressões (5.12). A aplicação deste conduz às expressões (12.13).

$$P(f) = \int_0^{T_0} p(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (12.13-a)$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (12.13-b)$$

$$V(f) = P(f) H(f) \quad (12.13-c)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{i2\pi ft} df \quad (12.13-d)$$

Se o carregamento é periódico, a resposta também o será. Neste caso, a transformada de Fourier de ambos consistirá de uma série de impulsos localizados nos múltiplos da frequência fundamental. A área de cada impulso fornece o coeficiente de Fourier, do carregamento ou da resposta, na frequência onde este se encontra.

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(n) \delta(f-n/T_0) \quad (12.14-a)$$

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V(n) \delta(f-n/T_0) \quad (12.14-b)$$

A resposta pode ser obtida diretamente aplicando-se o teorema da convolução dado pelas expressões (5.14). A aplicação deste conduz às equações (12.15)

$$P(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} dt \quad (12.15-a)$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (12.15-b)$$

$$V(n) = P(n) H(n/T_0) \quad (12.15-c)$$

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V(n) e^{i2\pi \frac{nt}{T_0}} \quad (12.15-d)$$

Vale a pena lembrar que as expressões (12.15) são as mesmas que (12.13). Estas últimas são uma simplificação das primeiras, que são gerais, quando o carregamento é periódico. Conhecidos os coeficientes de Fourier do carregamento e da resposta, as transformadas destes são dadas pelas expressões (12.14).

12.4.1 - Função de transferência

A função $H(f)$, transformada da função de resposta, é comumente chamada de função de transferência.

A mesma pode ser obtida calculando-se a transformada de $h(t)$ pela expressão (12.13-b) ou (12.15-b).

No entanto, existem outras maneiras bem mais simples de se obtê-la. Uma delas é supor a função $h(t)$ como sendo dada pelo produto das duas funções das figuras (12.14).

$$h_1(t) = \text{sen} \omega t$$

$$h_2(t) = \frac{1}{m\omega d} e^{-\omega_0 \xi t}$$

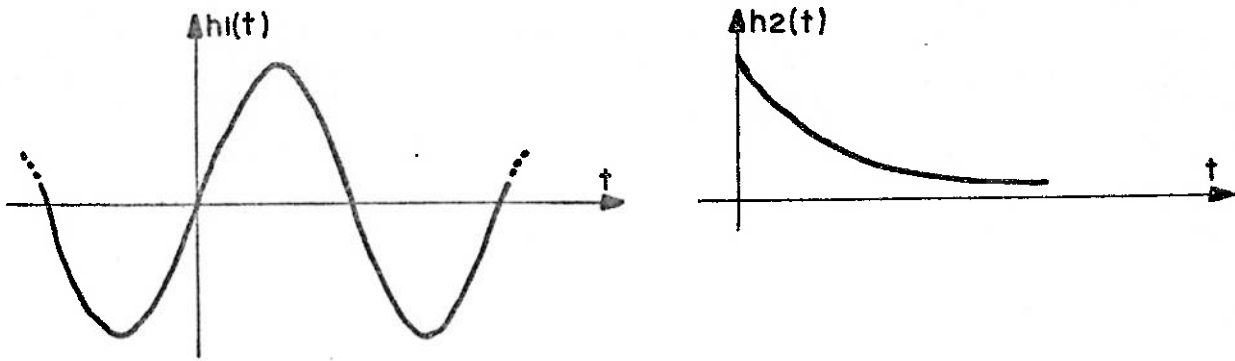


Figura (12.14)

O produto destas duas funções no domínio do tempo equivale a convolver suas transformadas no domínio da frequência.

A transformada de $h_1(t)$ pode ser obtida em (2.20).

$$F_1(f) = \frac{i}{2} \delta(f+f_d) - \frac{i}{2} \delta(f-f_d)$$

A transformada de $h_2(t)$ pode ser obtida da mesma maneira como foram obtidas as expressões (2.14) e (2.15).

Nas figuras (12.15) e (12.16) representamos as transformadas das duas funções.

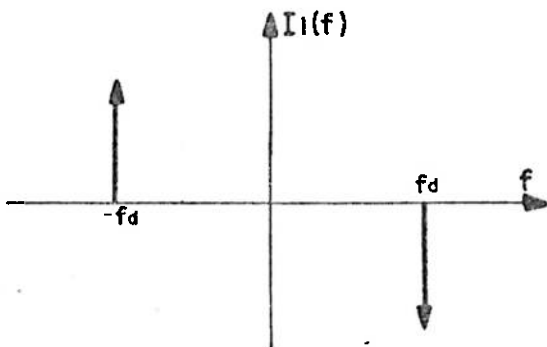


Figura (12.15)

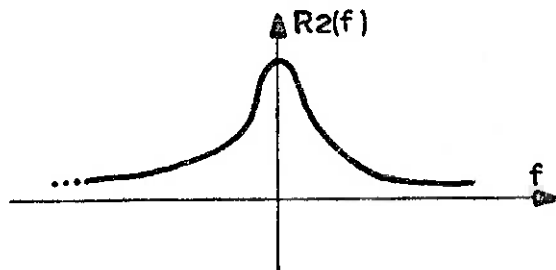


Figura (12.16-a)

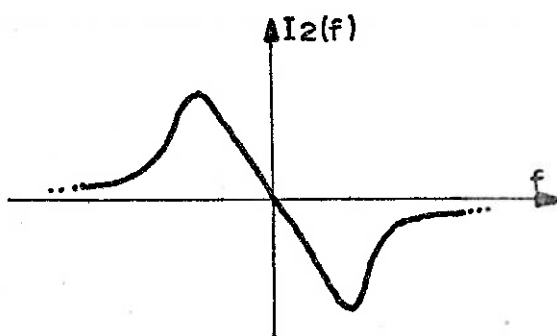


Figura (12.16-b)

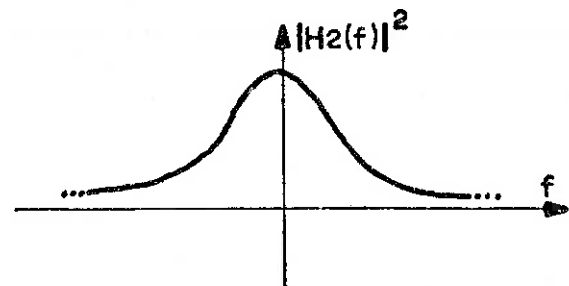


Figura (12.16-c)

A função de transferência pode ser obtida então convolvendo-se as funções das figuras (12.16-a) e (12.16-b) com os impulsos da figura (12.15). Como vimos no capítulo 5, estas convoluções podem ser obtidas deslocando-se os eixos verticais para as posições dos impulsos e multiplicando as funções pelas amplitudes destes.

Obtemos assim a parte real e imaginária da função de transferência.

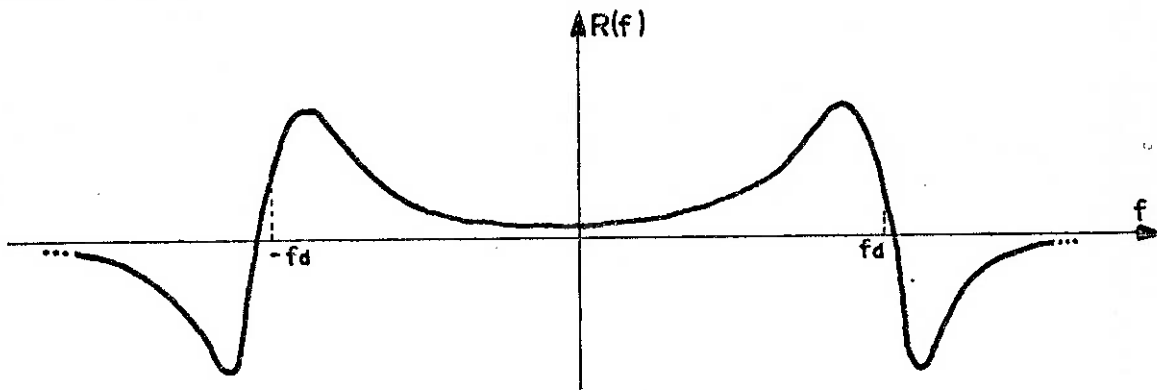


Figura (12.17-a)

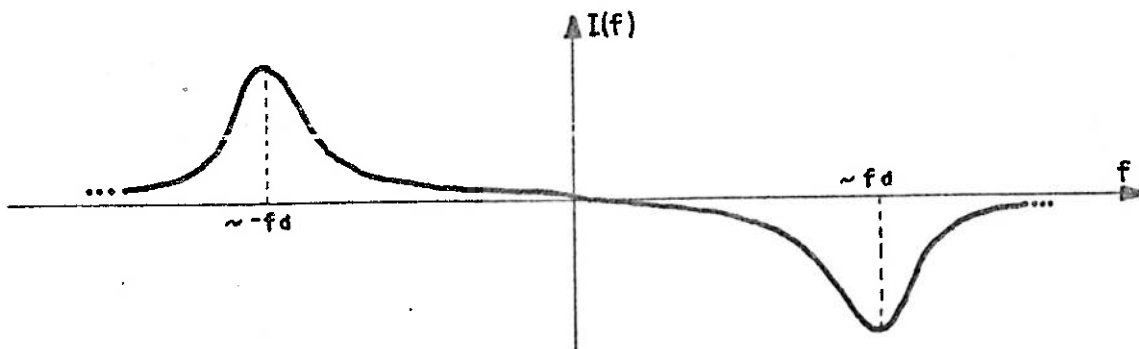


Figura (12.17-b)

O módulo ao quadrado da mesma é dado na figura (12.17-c)

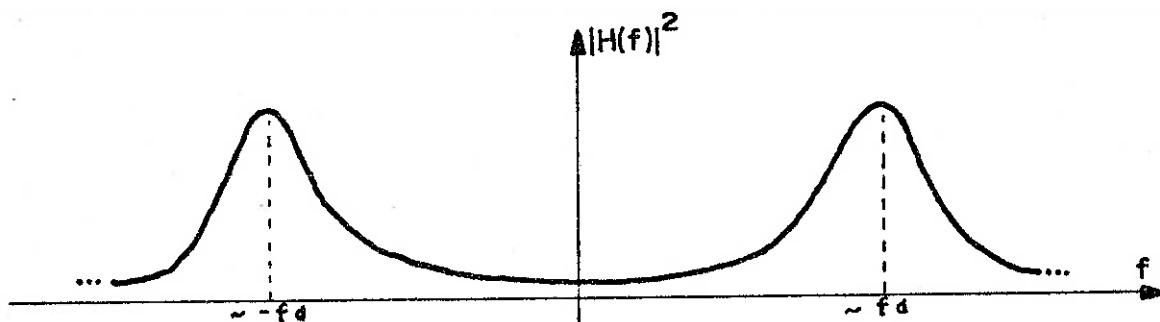


Figura (12.17-c)

A obtenção analítica da função de transferência pode ser realizada mais facilmente a partir da equação (12.1):

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$

Tomando a transformada de Fourier dos dois lados e levando em conta a propriedade da linearidade:

$$mF[\ddot{v}(t)] + cF[\dot{v}(t)] + kF[v(t)] = F[p(t)]$$

Mas, segundo (3.11):

$$F[\ddot{v}(t)] = (i2\pi f)^2 \cdot F[v(t)]$$

$$F[\dot{v}(t)] = i2\pi f \cdot F[v(t)]$$

Logo:

$$-4\pi^2 f^2 mV(f) + 2i\pi f cV(f) + kV(f) = P(f)$$

$$V(f) = \frac{P(f)}{k - 4\pi^2 f^2 m + 2i\pi f c}$$

Como: $V(f) = P(f) H(f)$

$$H(f) = \frac{1}{k - 4\pi^2 f^2 m + 2i\pi f c} \quad (12.16)$$

que é a expressão mais genérica da função de transferência.

Levando em conta (12.3) e (12.6) a mesma pode ser posta em função do parâmetro β .

$$\beta = f/f_0 \quad (12.17)$$

$$H(\beta) = \frac{1}{k(1 - \beta^2 + 2i\xi\beta)} \quad (12.18)$$

As partes reais e imaginária e o módulo ao quadrado são dados respectivamente por:

$$R(\beta) = \frac{1 - \beta^2}{k((1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2)} \quad (12.19-a)$$

$$I(\beta) = \frac{-2\xi\beta}{k((1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2)} \quad (12.19-b)$$

$$H(\beta)^2 = \frac{1}{k^2((1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2)} \quad (12.19-c)$$

É possível se demonstrar que o módulo ao quadrado passa por máximos para os parâmetros.

$$\beta_{\max} = \pm\sqrt{1-2\xi^2} \quad (12.20)$$

e o valor máximo do mesmo fica sendo:

$$|H(f)|^2_{\max} = \frac{1}{4\xi^2 k^2 (1-\xi^2)} \quad (12.21)$$

Com os amortecimentos usuais em estruturas verifica-se que o máximo da função é bem próximo a frequência natural.

É fácil perceber que, para o caso de amortecimento nulo, as funções da figura (12.17) tomam o seguinte aspecto:

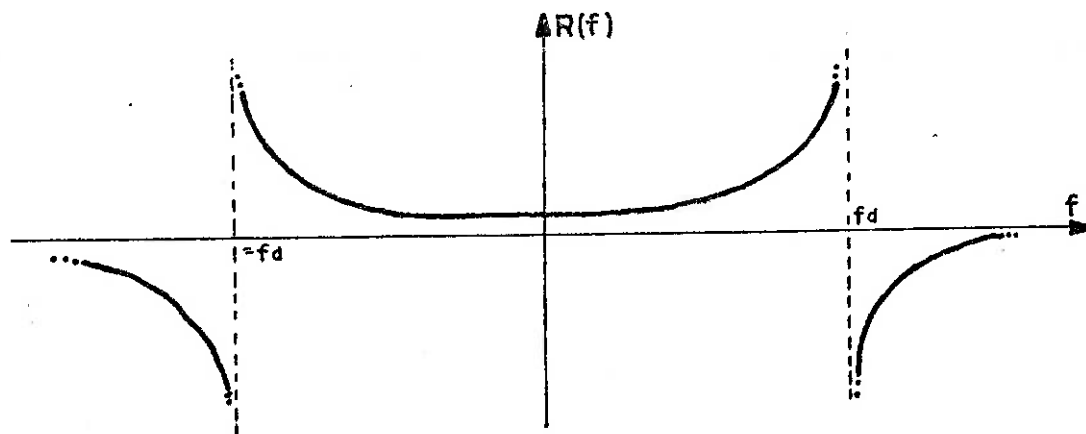


Figura (12.18-a)

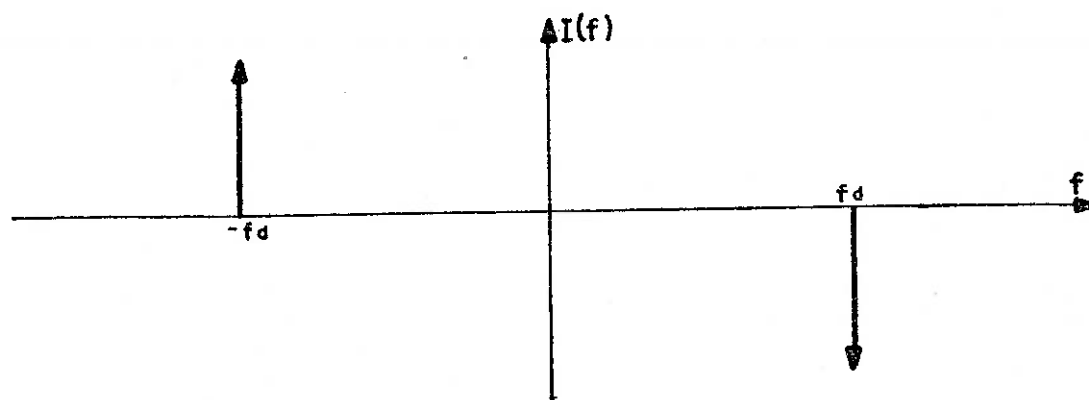


Figura (12.18-b)

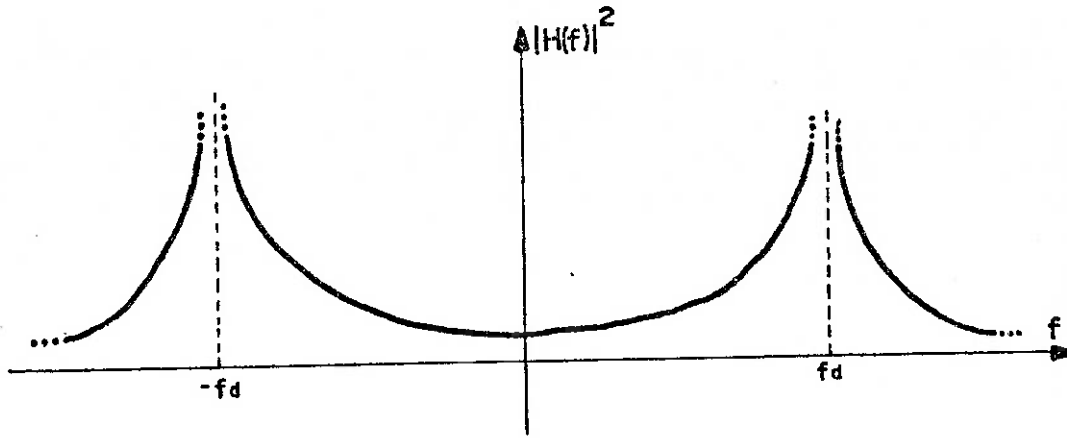


Figura (12.18-c)

Todas estas funções apresentam um ponto de descontinuidade na frequência natural. Neste caso, se o carregamento apresentar uma componente nesta frequência, a componente de resposta nesta mesma frequência apresentará valor infinito o que implicará em ressonância. Como as estruturas sempre apresentam um certo amortecimento, isto nunca ocorre. No entanto, como este amortecimento é pequeno, as componentes da função de transferência e o seu módulo ao quadrado apresentam-se concentradas em torno da frequência natural.

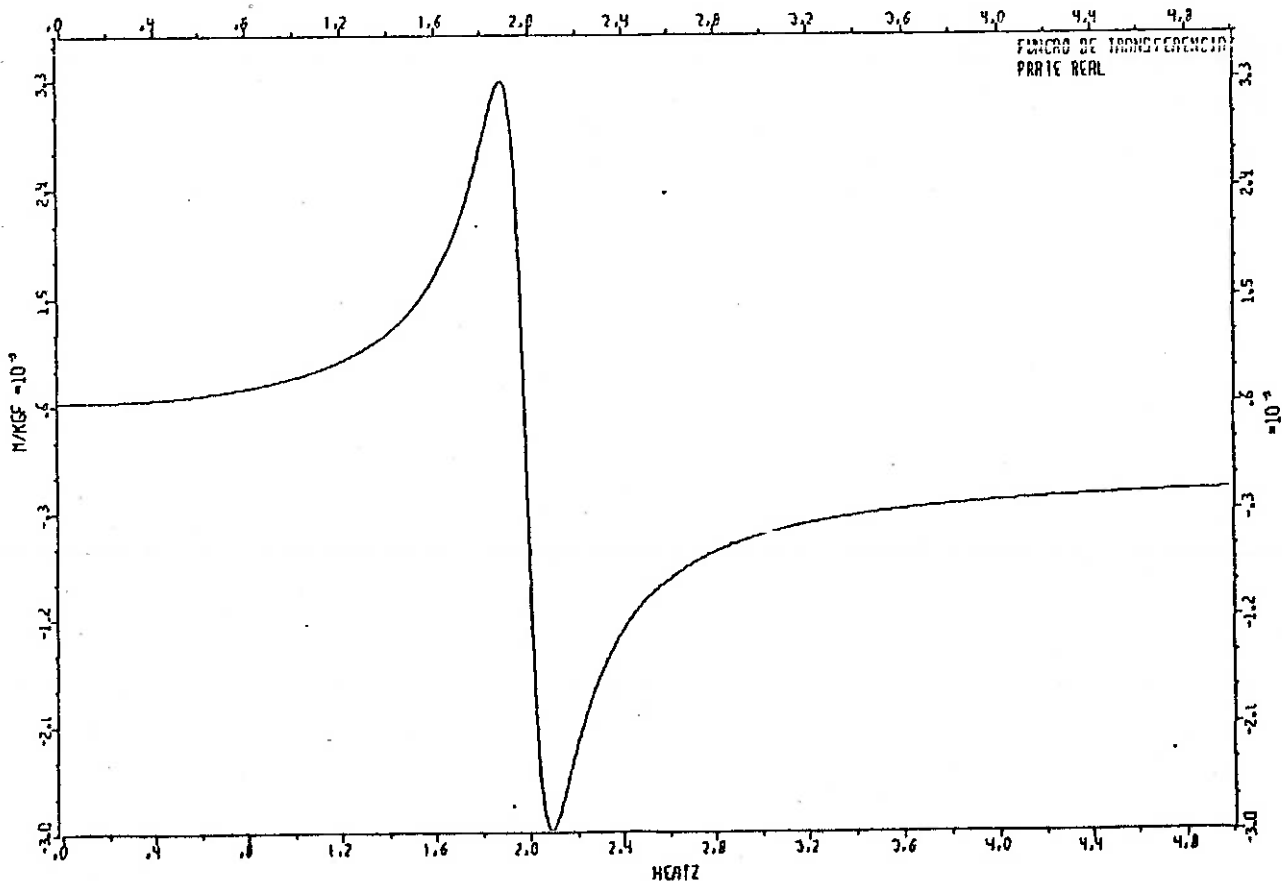


Figura (12.19-a)

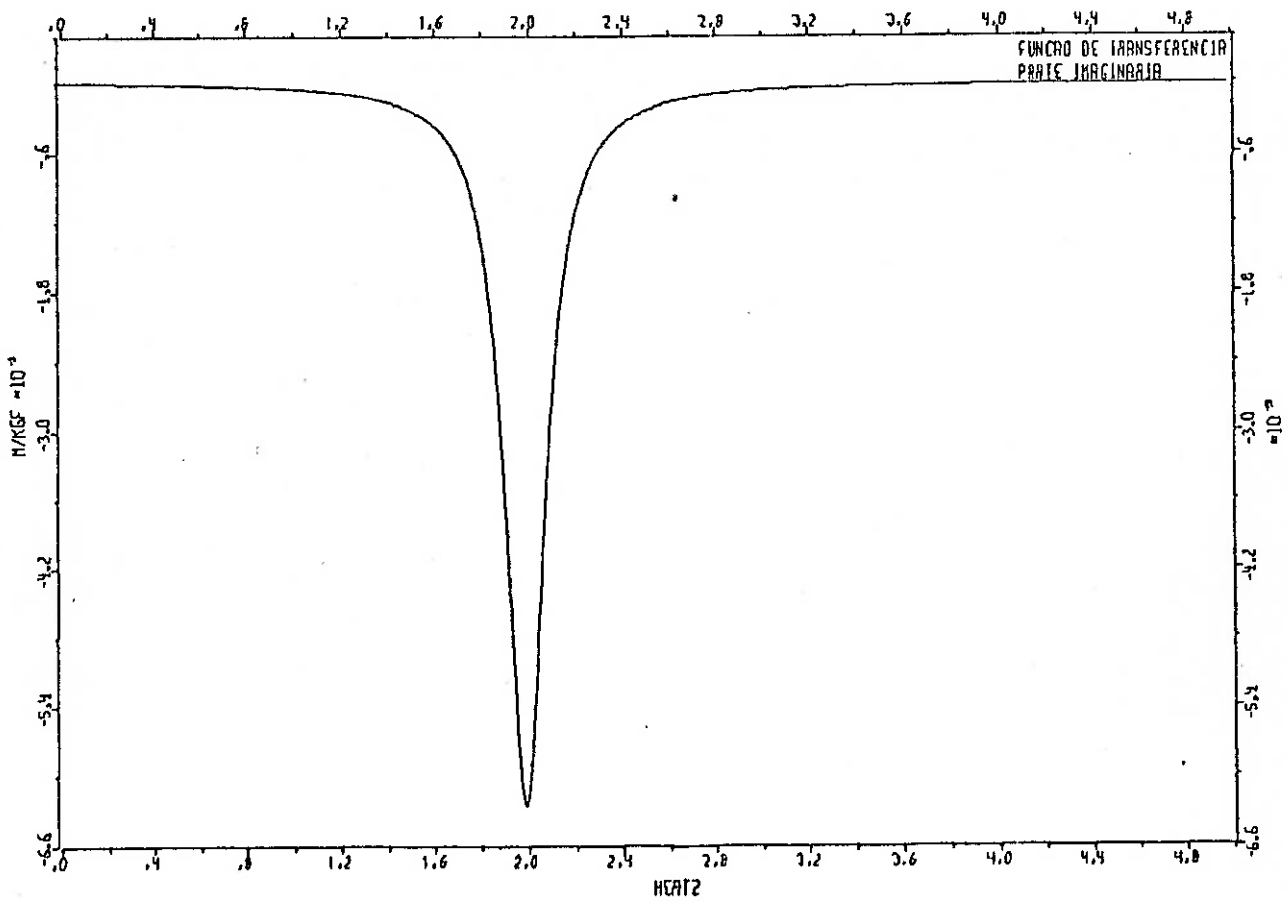


Figura (12.19-b)

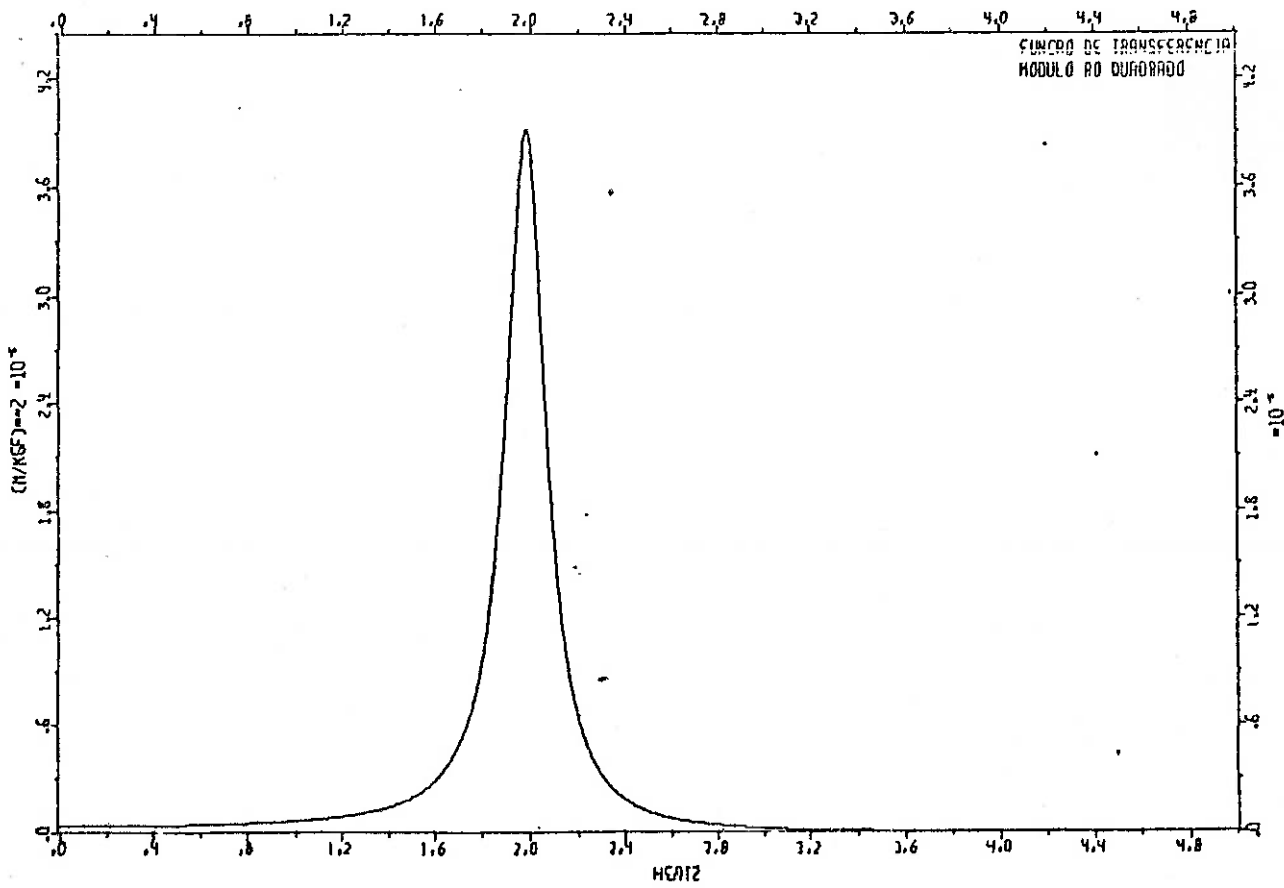


Figura (12.19-c)

Nas figuras (12.19) estas funções são apresentadas, somente para frequências positivas, plotadas em escala. As mesmas não são apresentadas para frequências negativas pois a parte real e o módulo ao quadrado são funções pares e a parte imaginária é uma função ímpar. Os valores das constantes do sistema são os mesmos do sistema cuja função de resposta é dada pela figura (12.7).

12.5 - Outros tipos de excitação e resposta

Até agora estudamos uma estrutura de resposta linear cuja excitação é dada por um carregamento em unidades de força e a resposta é dada por deslocamentos.

É comum em algumas aplicações práticas a excitação ser dada por outras grandezas físicas, tais como: acelerações, altura das ondas do mar, velocidade do vento e a resposta desejada em: tensões, reações de apoio, etc.

Em qualquer um destes casos podemos aplicar o estudo realizado neste capítulo. Para isto basta transformar qualquer tipo de excitação em forças equivalentes, obtemos os deslocamentos devidos a estas forças, e a seguir transformamos os mesmos na resposta desejada.

A título de exemplo vamos supor a estrutura da figura abaixo sujeita a uma aceleração, imposta por um terremoto, em sua base, $\ddot{v}_g(t)$. A resposta desejada são os momentos de engastamento em função do tempo $M(t)$.

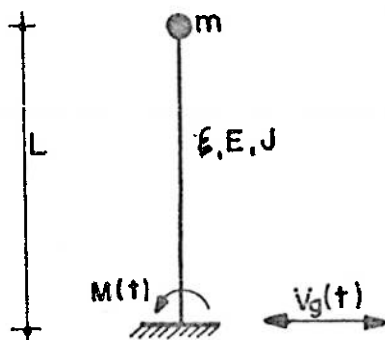


Figura (12.20)

Estas acelerações provocam na massa um carregamento equivalente dado por:

$$p(t) = -m\ddot{v}g(t) \quad (12.22)$$

A rigidez lateral da estrutura é dada por:

$$k = \frac{3EJ}{L^3} \quad (12.23)$$

Com a rigidez calculada, a massa e a porcentagem de amortecimento especificadas, podemos calcular, utilizando qualquer um dos processos expostos neste capítulo, os deslocamentos $v(t)$ devidos ao carregamento $p(t)$.

Obtidos os deslocamentos, podemos obter as forças elásticas desenvolvidas na barra pela expressão:

$$f_s(t) = kv(t) \quad (12.24)$$

E os momentos de engastamento provocados na base são dados por:

$$M(t) = f_s(t)L \quad (12.25)$$

Este é o caminhamento para se obter qualquer tipo de resposta a qualquer tipo de excitação.

No entanto, existe um procedimento mais direto que consiste em fornecer a excitação e obter a resposta na forma de sejada. Isto é feito alterando-se convenientemente as propriedades da estrutura. No entanto, para se poder aplicar este artifício, é necessário que tanto a relação entre excitação fornecida e as forças equivalentes, como a relação entre a resposta desejada e os deslocamentos da estrutura sejam do tipo linear.

No exemplo proposto poderíamos fornecer diretamente as acelerações na base e obter a resposta em momentos de engastamento adotando para a estrutura as constantes k' , m' , ξ onde:

$$k' = -k \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{L} = \frac{-1}{mL} \quad (12.26)$$

$$m' = -m \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{L} = \frac{-1}{kL} \quad (12.27)$$

12.6 - Dimensões

De uma maneira genérica se a excitação e a resposta têm as seguintes dimensões:

$$[E] = F^a L^b T^c \quad (12.28-a)$$

$$[R] = F^m L^n T^p \quad (12.28-b)$$

A rigidez, o amortecimento, a massa, a função de resposta e a função de transferência terão as seguintes dimensões:

$$[k] = F^{a-m} L^{b-n} T^{c-p} \quad (12.28-c)$$

$$[c] = [k] T \quad (12.28-d)$$

$$[m] = [k] T^2 \quad (12.28-e)$$

$$[h] = [c]^{-1} \quad (12.28-f)$$

$$[H] = [k]^{-1} \quad (12.28-g)$$

No caso de se fornecer o carregamento em kgf e a resposta ser desejada em metros, teremos as seguintes dimensões e unidades:

$$[E] = F \quad (\text{kgf})$$

$$[R] = L \quad (\text{m})$$

$$[k] = FL^{-1} \quad (\text{kgf/m})$$

$$[c] = FL^{-1} T \quad (\text{kgf} \cdot \text{seg}/\text{m})$$

$$[m] = FL^{-1} T^2 \quad (\text{kgf} \cdot \text{seg}^2/\text{m})$$

$$[h] = F^{-1} L T^{-1} \quad (\text{m}/(\text{kgf} \cdot \text{seg}))$$

$$[H] = F^{-1}L \quad (\text{m/kgf})$$

CAPÍTULO 13

ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS
A UM CARREGAMENTO CONTÍNUO E ALEATÓRIO

13.1 - Processos aleatórios

13.1.1 - Definição

Chamam-se processos aleatórios a qualquer fenômeno físico que pode ser representado por um conjunto de amostras, sendo este conjunto especificado por meio de propriedades estatísticas.

Neste capítulo estudamos o caso onde estas amostras são representadas por funções contínuas, $x_i(t)$, do tempo.

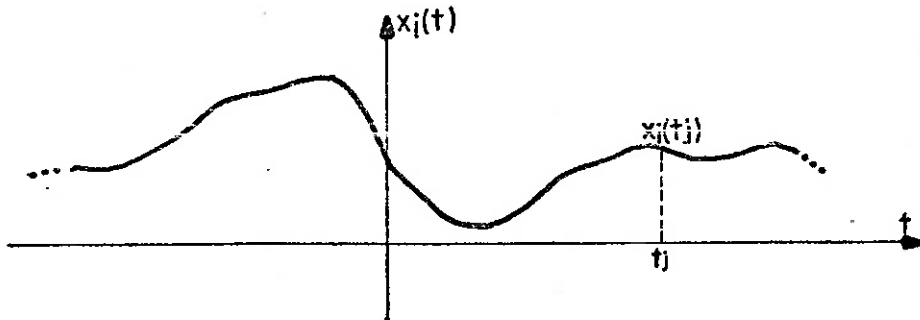


Figura (13.1)

As propriedades estatísticas que nos interessam no momento são a média, \bar{x} , e a média quadrática, \bar{x}^2 . Estas podem ser tomadas ao longo das amostras, para um determinado instante t_j , ou ao longo do tempo, para uma determinada amostra $x_i(t)$.

13.1.2 - Propriedades estatísticas ao longo das amostras

A média e a média quadrática ao longo das amostras, para o instante t_j , são dadas respectivamente por:

$$\bar{x}(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i(t_j) \quad (13.1-a)$$

$$\bar{x}^2(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2(t_j) \quad (13.1-b)$$

sendo N o número de amostras conhecidas.

13.1.3 - Propriedades estatísticas ao longo do tempo

No estudo dos processos aleatórios admite-se que as funções representativas dos mesmos estendem-se sobre todo o domínio do tempo. Neste caso, figura (13.1), a média e a média quadrática são dadas por:

$$\bar{x}_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) dt \quad (13.2-a)$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^2(t) dt \quad (13.2-b)$$

Se as funções $x_i(t)$ forem tais que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_i(t)| dt \neq \infty \quad (13.3)$$

as expressões (13.2) fornecerão valores nulos.

13.1.3.1 - Funções periódicas

Das funções de interesse prático na dinâmica das estruturas, as periódicas, figura (13.2), são as únicas para as quais há sentido em se aplicar as expressões (13.2).

Neste caso estas expressões simplificam-se para:

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_i(t) dt \quad (13.4-a)$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^T x_i^2(t) dt \quad (13.4-b)$$

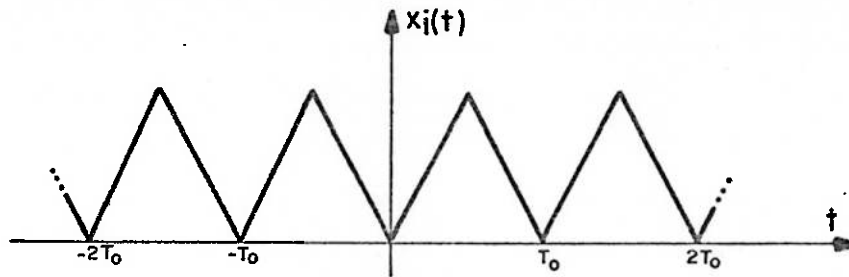


Figura (13.2)

13.1.3.2 - Funções não periódicas

Todas as outras funções, que não as periódicas, de interesse satisfazem a condição (13.3). Por isto não há sentido em se calcular a média e a média quadrática sobre todo o domínio do tempo pois as expressões (13.2) fornecerão valores nulos.

Para estas funções, figuras (13.3), é mais conveniente definir estas grandezas dentro de um certo intervalo $(0, T)$.

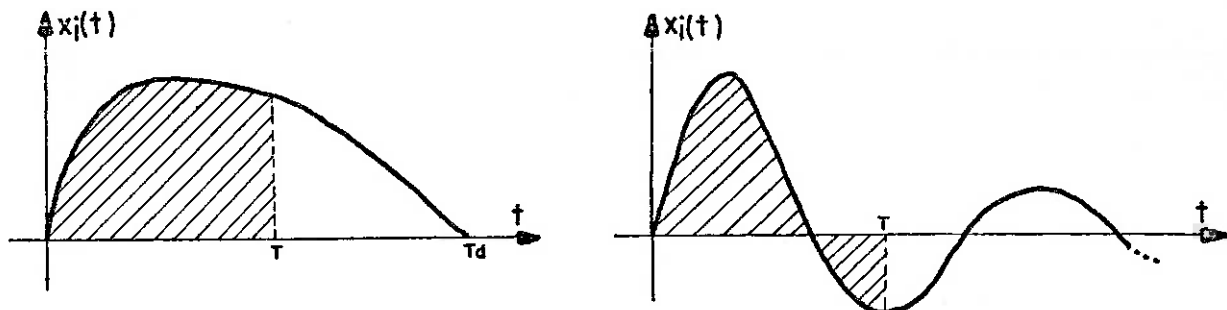


Figura (13.3)

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i^2(t) dt$$

Com estas mesmas expressões podem ser calculadas a média e a média quadrática dentro do intervalo de duração da função da figura (13.3-a)

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} x_i(t) dt \quad (13.5-a)$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} x_i^2(t) dt \quad (13.5-b)$$

Se o intervalo de duração for infinito e a função satisfizer a condição (13.3), como na figura (13.3-b), a média e a média quadrática, em todo o intervalo de duração, serão nulas.

13.1.4 - Processos aleatórios estacionários

Um processo aleatório é dito estacionário quando suas propriedades estatísticas, ao longo das amostras, não variam com o tempo:

$$\bar{x}_i(t_j) = \bar{x}_i(t_j + \tau) \quad (13.6-a)$$

$$\bar{x}_i^2(t_j) = \bar{x}_i^2(t_j + \tau) \quad (13.6-b)$$

13.1.5 - Processos aleatórios estacionários e ergódicos

Um processo aleatório estacionário é dito ergódico quando:

a) As propriedades estatísticas ao longo do tempo são as mesmas para todas as amostras:

$$\bar{x}_i(t) = \bar{x}_k(t) \quad (13.7-a)$$

$$\forall (i, k)$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \bar{x}_k^2(t) \quad (13.7-b)$$

b) As propriedades estatísticas, de qualquer amostra, ao longo do tempo, são iguais as propriedades estatísticas, ao longo das amostras, para qualquer instante.

$$\bar{x}_i(t) = \bar{x}(t_j) \quad (13.8-a)$$

$$\forall (i, j)$$

$$\bar{x}_i^2(t) = \bar{x}^2(t_j) \quad (13.8-b)$$

A hipótese ergódica simplifica muito o estudo dos processos aleatórios. Com a mesma um processo pode ser representado por uma única função, pois as propriedades destas são, ao mesmo tempo, iguais as das outras e iguais ao do conjunto em qualquer instante.

Não cabe aqui neste trabalho discutir a validade desta hipótese. O processo aleatório em estudo será assumido estacionário e ergódico.

13.2 - Autocorrelação média de uma função de um processo aleatório estacionário e ergódico

13.2.1 - Definição

Dada uma função $x(t)$ de um processo aleatório estacionário e ergódico, a função de autocorrelação média é definida pela expressão:

$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) x(t+\tau) d\tau \quad (13.9)$$

A autocorrelação média é a média da função $x(\tau) \cdot x(t+\tau)$ calculada segundo a expressão (13.2-a).

No caso de funções periódicas esta expressão pode ser obtida dividindo-se a autocorrelação:

$$u(t) = \int_0^{T_0} x(\tau) x(t+\tau) d\tau \quad (13.10)$$

pelo período da função.

Se a função for tal que a condição (13.3) seja satisfeita a autocorrelação média fornecerá valor nulo para qualquer instante t .

Por isto preferimos definir a autocorrelação média pela própria função de autocorrelação dividida pelo intervalo on

de ocorre o produto entre as funções $x(\tau)$ e $x(t+\tau)$.

$$u(t) = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) x(t+\tau) d\tau \quad (13.11-a)$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{c_2 - c_1} \quad (13.11-b)$$

13.2.1.1 - Funções periódicas

Se a função $x(t)$ é periódica, os limites da integral (13.11-a) são sempre iguais a um período. Neste caso:

$$R(t) = \frac{u(t)}{T_0} \quad (13.12)$$

que é uma consequência da expressão (13.9).

13.2.1.2 - Funções não periódicas

Se a função $x(t)$ é de duração T_d , os limites da integral (13.11-a) são, de acordo com (5.21) e (5.22):

$$c_1 = \text{Máximo}(-t, 0) \quad c_2 = \text{Mínimo}(T_d - t, T_d)$$

$$c_1 = \begin{cases} t & t \leq 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad c_2 = \begin{cases} T_d & t \leq 0 \\ T_d - t & t \geq 0 \end{cases}$$

A expressão (13.11-b) fornece então, de maneira genérica:

$$R(t) = \frac{u(t)}{T_d - |t|} \quad (13.13)$$

Podemos então estabelecer as seguintes relações entre a autocorrelação e a autocorrelação média.

$$R(t) = u(t) v(t) \quad (13.14-a)$$

e

$$u(t) = R(t) w(t) \quad (13.14-b)$$

onde:

$$v(t) = \frac{1}{T_d - |t|} \quad (13.15-a)$$

e

$$w(t) = T_d - |t| \quad (13.15-b)$$

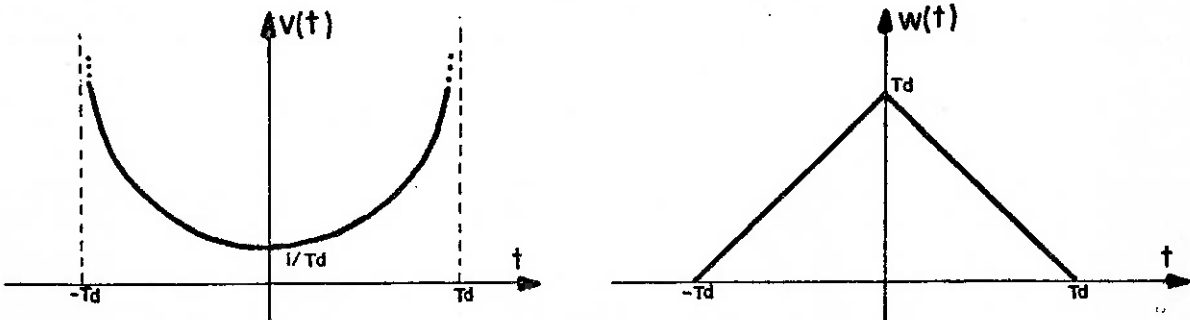


Figura (13.4)

Se a função $x(t)$ for de duração infinita, como na figura (13.3-b), os limites da integral serão sempre zero e infinito. Com isto a autocorrelação média será constante e igual a zero.

13.2.2 - Propriedade

Calculando $u(0)$ na expressão (13.11-a) temos:

$$u(0) = \int_{c_1}^{c_2} x^2(\tau) d\tau \quad (13.16)$$

13.2.2.1 - Funções periódicas

Se a função é periódica, de período T_0 , temos:

$$R(0) = \frac{u(0)}{T_0} = \overline{x^2}(\tau) \quad (13.17)$$

A autocorrelação média no instante inicial fornece a média quadrática, em um período, da função $x(t)$

13.2.2.2 - Funções não periódicas

Se a função é não periódica, de duração T_d , temos:

$$R(0) = \frac{u(0)}{T_d} = \int_0^{T_d} x^2(\tau) d\tau$$

$$R(0) = \frac{u(0)}{T_d} = \overline{x^2}(\tau) \quad (13.18)$$

A autocorrelação média no instante inicial fornece a média quadrática da função $x(t)$ em seu intervalo de duração.

Se a função for de duração infinita, como na figura (13.3-b), a média quadrática em todo o seu intervalo de duração é zero e, portanto, a autocorrelação média no instante inicial também o será. Aliás, como afirmamos anteriormente, esta última função, neste caso, só assume valores nulos.

13.3 - Espectro de Fourier

13.3.1 - Definição

Definimos o espectro de Fourier como a transformada de Fourier da função de autocorrelação.

$$S(f) = F[u(t)] \quad (13.19)$$

Como a autocorrelação é uma função real e par do tempo o espectro de Fourier será uma função real e par da frequência:

$$S(-f) = S(f) \quad (13.20)$$

13.3.1.1 - Funções periódicas

Se a função $x(t)$ é periódica, segundo (5.30), temos:

$$X(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi \frac{nt}{T_0}} dt \quad (13.21-a)$$

$$S(n) = T_0 |X(n)|^2 \quad (13.21-b)$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n) \delta(f-n/T_0) \quad (13.21-c)$$

O espectro de Fourier de uma função periódica, no domínio do tempo, é uma função real e par, que a cada frequência, múltipla da fundamental, associa um impulso cuja área fornece o módulo ao quadrado do coeficiente de Fourier da função $x(t)$, nesta frequência, multiplicado pelo período da mesma.

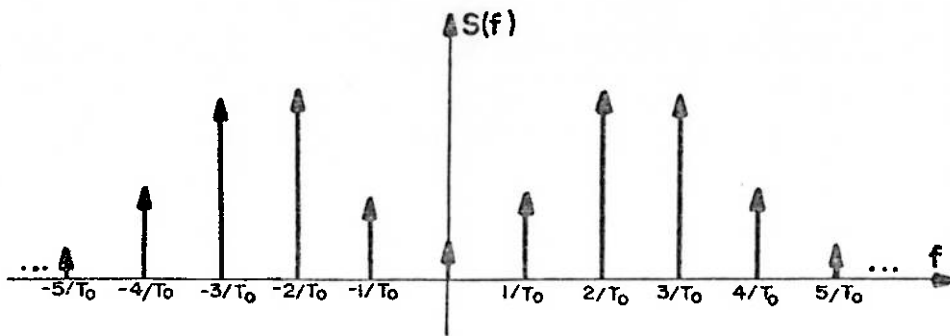


Figura (13.5)

13.3.1.2 - Funções não periódicas

Se a função $x(t)$ é não periódica, segundo (5.29), temos:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (13.22-a)$$

$$S(f) = |X(f)|^2 \quad (13.22-b)$$

O espectro de Fourier de uma função $x(t)$, não periódica no domínio do tempo, é uma função, real e par, que a cada frequência associa o módulo ao quadrado da transformada da função $x(t)$ nesta frequência.

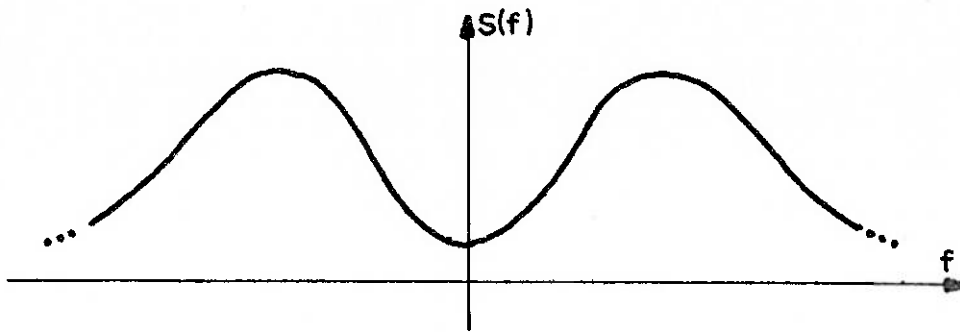


Figura (13.6)

13.3.2 - Teorema de Parseval. Propriedade do espectro de Fourier

De acordo com a expressão (13.19) temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{i2\pi ft} dt = \int_{c_1}^{c_2} x(\tau) x(t+\tau) d\tau$$

Para o instante $t = 0$, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \int_{c_1}^{c_2} x^2(\tau) d\tau \quad (13.23)$$

A expressão (13.23) é conhecida como teorema de Parseval. A integral do lado esquerdo fornece a área sob a curva do espectro de Fourier. A seguir mostramos a aplicação da mesma.

13.3.2.1 - Funções periódicas

Se a função é periódica, de período T_0 , temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \int_0^{T_0} x^2(\tau) d\tau$$

$$\bar{x}^2(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (13.24-a)$$

A média quadrática, em um período, é dada pela área sob a curva do espectro de Fourier dividida pelo período da fun

ção. Como o espectro de Fourier é constituído por uma série de impulsos de amplitudes $S(n)$:

$$\bar{x}^2(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} S(n) \quad (13.24-b)$$

$$\bar{x}^2(\tau) = \frac{1}{T_d} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (13.24-c)$$

13.3.2.2 - Funções não periódicas

Se a função $x(t)$ é não periódica com duração T_d :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \int_0^{T_d} x^2(\tau) d\tau \quad (13.25-a)$$

$$\bar{x}^2(\tau) = \frac{1}{T_d} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (13.25-b)$$

A média quadrática, no intervalo de duração da função, é dada pela área sob a curva do espectro dividida pela duração da função. Se a função é de duração infinita, a expressão (13.25-b) fornece valor nulo como já havíamos previsto.

13.3.3 - Outra definição para o espectro de Fourier

Alguns autores definem o espectro de Fourier como a transformada de Fourier da função de autocorrelação média:

$$\hat{S}(f) = F[R(t)] \quad (13.26)$$

Veamos agora quais as relações entre esta definição e a dada pela expressão (13.19).

13.3.3.1 - Funções periódicas

No caso de funções periódicas temos:

$$R(t) = \frac{u(t)}{T_0}$$

Logo, podemos estabelecer a seguinte relação entre as duas definições:

$$\hat{S}(f) = \frac{S(f)}{T_0} \quad (13.27)$$

de onde se conclui:

$$\bar{x}^2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f) df \quad (13.28)$$

A média quadrática da função periódica em um período é igual a área sob a curva $\hat{S}(f)$.

13.3.3.2 - Funções não periódicas

No caso de função de duração T_d , temos:

$$R(t) = u(t) v(t) \quad \text{onde} \quad v(t) = \frac{1}{T_d - |t|}$$

A relação inversa é dada por:

$$u(t) = R(t) w(t) \quad \text{onde} \quad w(t) = T_d - |t|$$

Chamando de $W(f)$ a transformada de Fourier de $w(t)$ podemos relacionar os espectros definidos pelas expressões (13.19) e (13.26) através do teorema da convolução no domínio da frequência.

$$u(t) = R(t) w(t)$$

$$S(f) = F[u(t)] \quad \hat{S}(f) = F[R(t)] \quad W(f) = F[w(t)]$$

$$S(f) = \hat{S}(f) * W(f)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f-\Omega) W(\Omega) d\Omega \quad (13.29)$$

De acordo com a expressão (3.25) temos:

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f) df$$

o que conduz à:

$$\overline{x^2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f) df \quad (13.30)$$

A área sob a curva $\hat{S}(f)$ fornece a média quadrática da função $x(t)$ no seu intervalo de duração.

Mesmo que as expressões (13.19) e (13.26) forneçam funções diferentes os espectros por elas definidos podem ser utilizados para obter a média quadrática da função em seu intervalo de duração.

Se a função $x(t)$ é de duração infinita, como na figura (13.3-b), a autocorrelação média é constante e igual a zero. Com isto o espectro de Fourier consiste de um impulso na origem de amplitude zero e, conseqüentemente, a média quadrática, em todo o intervalo de duração, será nula.

No estudo de vibrações aleatórias usaremos a definição (13.19) pois, como veremos, ela apresenta inúmeras vantagens.

13.3.4 - Dimensões do espectro de Fourier

Analisando as expressões (13.24-a) e (13.25-b) pode-se concluir que o espectro de Fourier apresenta a mesma unidade da função $x(t)$ ao quadrado multiplicada pela unidade de tempo ao quadrado.

Deste modo, se a excitação e a resposta em uma estrutura são dadas nas seguintes dimensões:

$$[E] = F^a L^b T^c \quad [R] = F^m L^n T^c$$

os espectros de Fourier de ambas terão as seguintes dimensões:

$$[Se] = F^2 a_L^{2b} T^{2c+2} \quad (13.31-a)$$

$$[Sr] = F^2 m_L^{2n} T^{2c+2} \quad (13.31-b)$$

No caso da excitação ser representada por um carregamento em kgf e a resposta por deslocamentos em metros, teremos as seguintes dimensões e unidades:

$$[E] = F \text{ (kgf)}$$

$$[R] = L \text{ (m)}$$

$$[Se] = F^2 T^2 \text{ (kgf}^2 \cdot \text{seg}^2)$$

$$[Sr] = L^2 T^2 \text{ (m}^2 \cdot \text{seg}^2)$$

13.3.5 - Outras denominações

Frequentemente o espectro de Fourier recebe outras denominações tais como: espectro de potência, densidade espectral de potência, espectro de energia, densidade espectral de energia.

Estas denominações surgem devido as unidades envolvidas.

Nas aplicações à dinâmica das estruturas não há sentido em se utilizar estas denominações pois nem sempre o espectro de Fourier terá unidades de potência ou energia.

13.3.6 - Processos aleatórios de bandas estreitas e largas

Conforme a característica do espectro de Fourier de uma função de um processo aleatório, este recebe um nome específico.

Se o espectro de Fourier fica concentrado sobre uma faixa estreita do domínio da frequência, o processo é do tipo

banda estreita (Narrow Band Process).

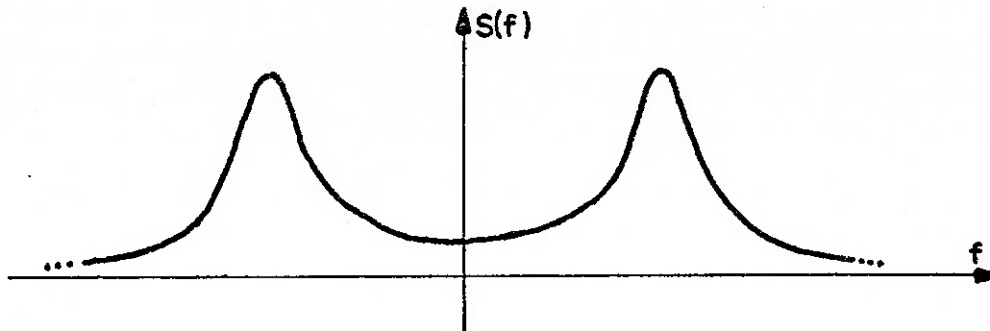


Figura (13.7)

Quando ocorre o contrário, o processo é de banda larga (Broad Band Process).

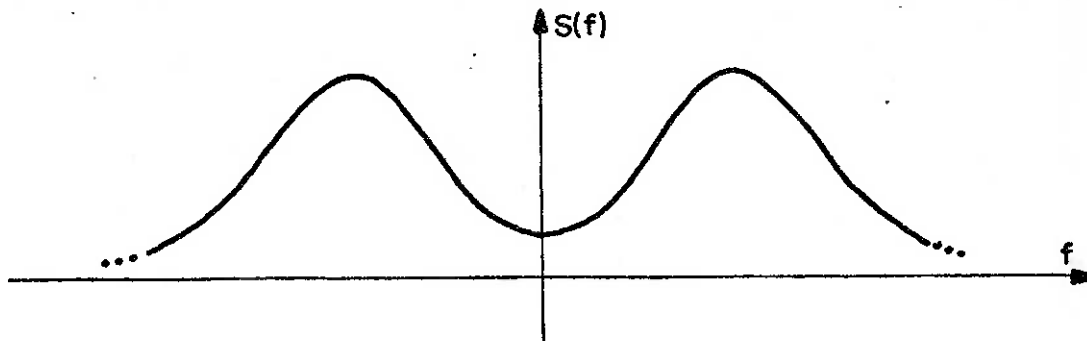


Figura (13.8)

Existe ainda um caso ideal chamado de ruído branco, (White Noise), em que o espectro de Fourier é constante.

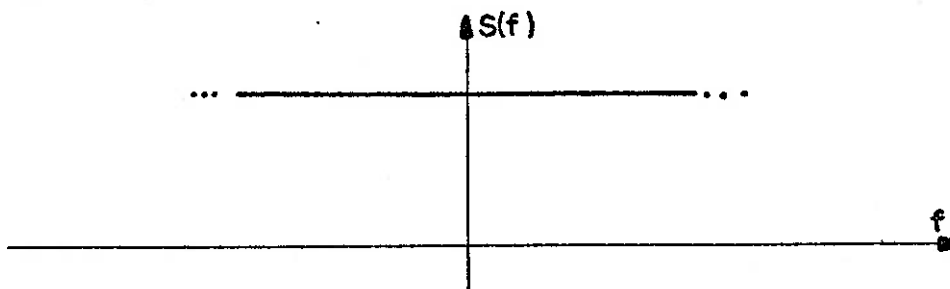


Figura (13.9)

Neste caso a função de autocorrelação é constituída de um impulso na origem.

13.4 - Transmissão de vibrações aleatórias

Quando o carregamento em uma estrutura é constituído

por um processo aleatório, é comum conhecer-se somente as propriedades estatísticas do mesmo, geralmente a média e o espectro de Fourier. O objetivo é, a partir das propriedades do carregamento, determinar as mesmas para a resposta.

Algumas vezes, no entanto, é conhecida uma função que caracteriza uma amostra, ou carregamento tipo, do processo. Neste caso poderíamos determinar a resposta, utilizando qualquer procedimento do capítulo 12, e então determinar suas propriedades estatísticas

No entanto, é mais vantajoso, a partir da função que caracteriza o carregamento, determinar suas propriedades e, a seguir, utilizando as conclusões que serão aqui apresentadas, determinar as propriedades da resposta.

13.4.1 - Média da resposta

13.4.1.1 - Carregamento periódico

Consideremos o carregamento periódico da figura (13.10-a). A resposta que também é periódica está representada na figura (13.10-b).

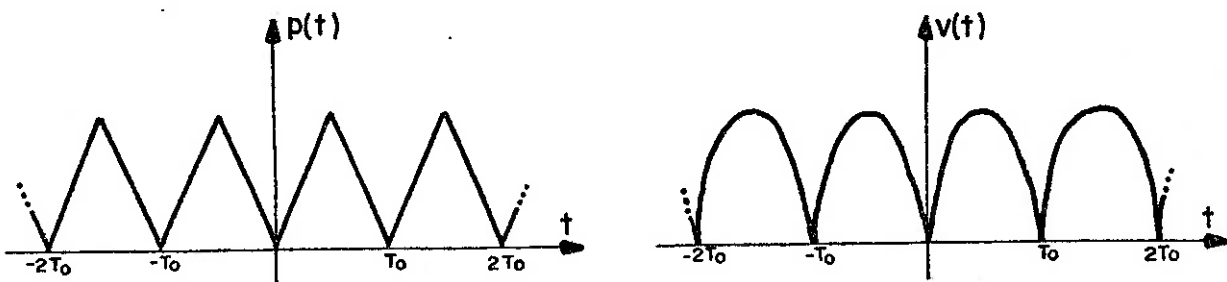


Figura (13.10)

A relação entre o carregamento e a resposta pode ser estabelecida através de seus coeficientes de Fourier, expressão (12.15-c).

$$V(n) = P(n) H(n/T_0)$$

Para a frequência zero temos:

$$V(0) = P(0) H(0)$$

Mas, segundo (4.6)

$$V(0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

$$P(0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt$$

Logo:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt = \frac{H(0)}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt$$

$$\bar{v}(t) = H(0) \bar{p}(t) \quad (13.32)$$

A média da resposta para um carregamento periódico é dada pelo carregamento médio multiplicado pela componente da função de transferência na frequência zero. Geralmente, dependendo do tipo de excitação, esta componente é igual ao inverso da rigidez.

13.4.1.2 - Carregamento de duração finita

Considerando o carregamento de duração finita da figura (13.11-a) e a resposta ao mesmo dada pela figura (13.11-b).

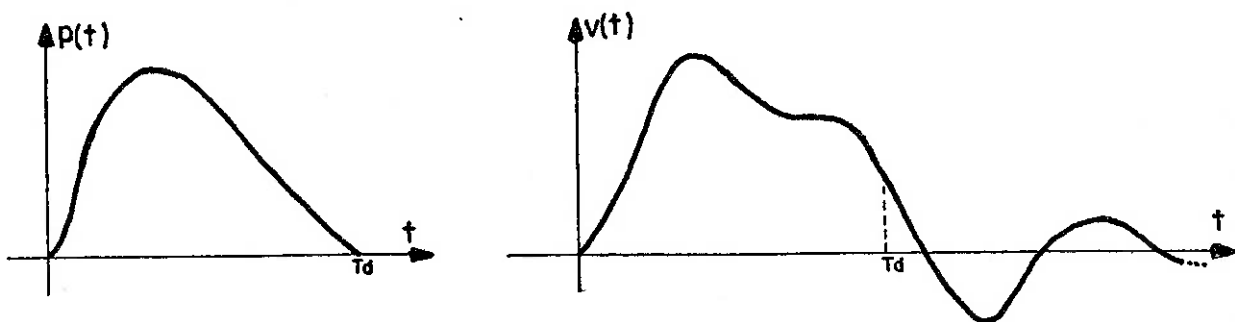


Figura (13.11)

A relação entre o carregamento e a resposta pode ser estabelecida, no domínio da frequência, através da expressão (12.13-c).

$$V(f) = P(f) H(f)$$

Para a frequência zero temos:

$$\dot{V}(0) = P(0) H(0) \quad (13.33-a)$$

Mas, segundo (3.25):

$$V(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt = \int_0^{T_d} v(t) dt + \int_{T_d}^{\infty} v(t) dt$$

$$P(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_0^{T_d} p(t) dt$$

Substituindo na expressão (13.33-a) e dividindo ambos os lados da mesma pela duração do carregamento temos:

$$\frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} v(t) dt + \frac{1}{T_d} \int_{T_d}^{\infty} v(t) dt = \frac{H(0)}{T_d} \int_0^{T_d} p(t) dt \quad (13.33-b)$$

$$\bar{v}(t) + \frac{1}{T_d} \int_{T_d}^{\infty} v(t) dt = H(0) \bar{p}(t) \quad (13.34)$$

Esta expressão relaciona a média do carregamento, $\bar{p}(t)$, durante o seu intervalo de duração, com a média da resposta, $\bar{v}(t)$, no mesmo intervalo.

Para que a expressão (13.34) fosse igual a (13.32), seria necessário que a integral do lado esquerdo fosse nula. Como esta integral refere-se aos deslocamentos em vibrações livres, a relação (13.32) nunca poderá ser estabelecida para carregamento de duração finita. Ela poderá ser aproximadamente válida na medida em que estes deslocamentos forem desprezíveis em relação aos deslocamentos em vibrações forçadas.

A relação (13.32) só poderia ser estabelecida para um carregamento de duração finita se fizéssemos na expressão (13.33-b) o instante T_d tender para o infinito. Com isto obteríamos média zero para o carregamento e para a resposta no intervalo $(0, \infty)$.

A possibilidade de se desprezar os deslocamentos em vibrações livres depende do tipo do carregamento, da sua duração relativa ao período natural da estrutura e da porcentagem

de amortecimento.

Um carregamento do tipo do da figura (13.12-a) produz deslocamentos desprezíveis em vibrações livres. O mesmo não acontece porém com o da figura (13.12-b). A aplicação da expressão (13.32) ao segundo pode conduzir a erros consideráveis.

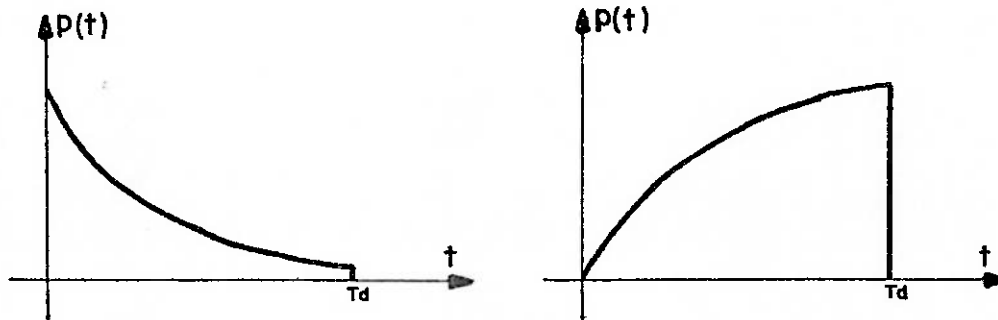


Figura (13.12)

13.4.2 - Espectro de Fourier da resposta

Vamos supor que seja conhecido o espectro de Fourier, $S_p(f)$, de um carregamento tipo e se deseje conhecer o espectro de Fourier, $S_v(f)$, da resposta.

Para isto partimos da expressão (12.13-c) que é válida tanto para carregamento de duração finita como para carregamento periódico.

$$V(f) = P(f) H(f)$$

13.4.2.1 - Carregamento periódico

Se o carregamento é periódico, a expressão (12.13-c) simplifica-se para:

$$V(n) = P(n) H(n/T_0)$$

multiplicando a mesma pela sua complexa conjugada:

$$V(n) V^*(n) = P(n) P^*(n) H(n/T_0) H^*(n/T_0)$$

$$|V(n)|^2 = |P(n)|^2 |H(n/T_0)|^2 \quad (13.35-a)$$

De acordo com as expressões (13.21):

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_p(n) \delta(f-n/T_0)$$

onde:

$$S_p(n) = T_0 |P(n)|^2$$

e:

$$S_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_v(n) \delta(f-n/T_0)$$

onde:

$$S_v(n) = T_0 |V(n)|^2$$

Logo:

$$S_v(n) = S_p(n) |H(n/T_0)|^2 \quad (13.35-b)$$

O espectro de Fourier da resposta para um carregamento periódico, que também é periódica, é uma função real e par que a cada frequência associa um impulso cuja área fornece o módulo ao quadrado do coeficiente de Fourier da resposta multiplicado pelo período T_0 .

O módulo ao quadrado de um coeficiente de Fourier da resposta, em uma frequência múltipla da fundamental, pode ser obtido a partir do módulo ao quadrado do coeficiente de Fourier do carregamento através da expressão (13.35-a).

Como a expressão (13.35-b) fornece a área de um impulso do espectro de Fourier da resposta em função da área de um impulso do espectro de Fourier do carregamento, a mesma pode ser generalizada para:

$$S_v(f) = S_p(f) |H(f)|^2 \quad (13.35-c)$$

Esta expressão deve ser entendida à luz da teoria das distribuições, expressão (1.11), e abrange todos os impulsos. As figuras (13.13) ilustram, para frequências positivas, a aplicação da mesma.

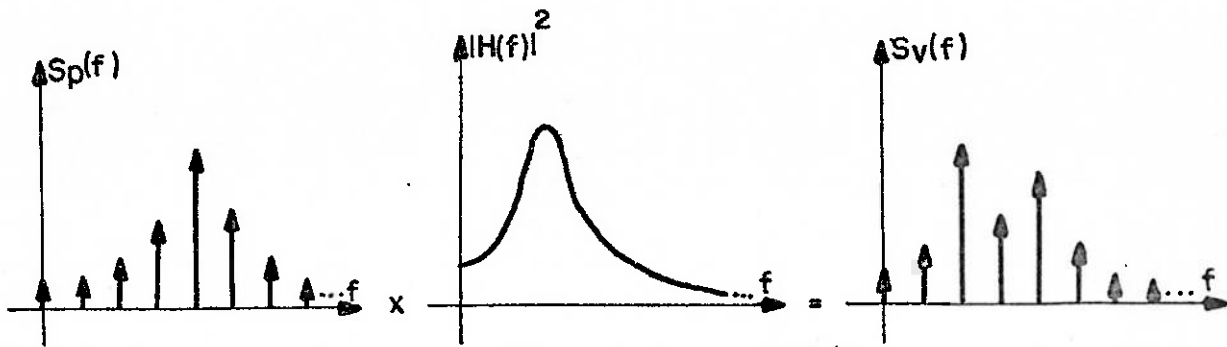


Figura (13.13)

13.4.2.2 - Carregamento de duração finita

Se o carregamento é de duração finita, podemos multiplicar a expressão (12.13-c) pela sua complexa conjugada.

$$V(f) V^*(f) = P(f) P^*(f) H(f) H^*(f)$$

$$|V(f)|^2 = |P(f)|^2 |H(f)|^2 \quad (13.36-a)$$

$$S_v(f) = S_p(f) |H(f)|^2 \quad (13.36-b)$$

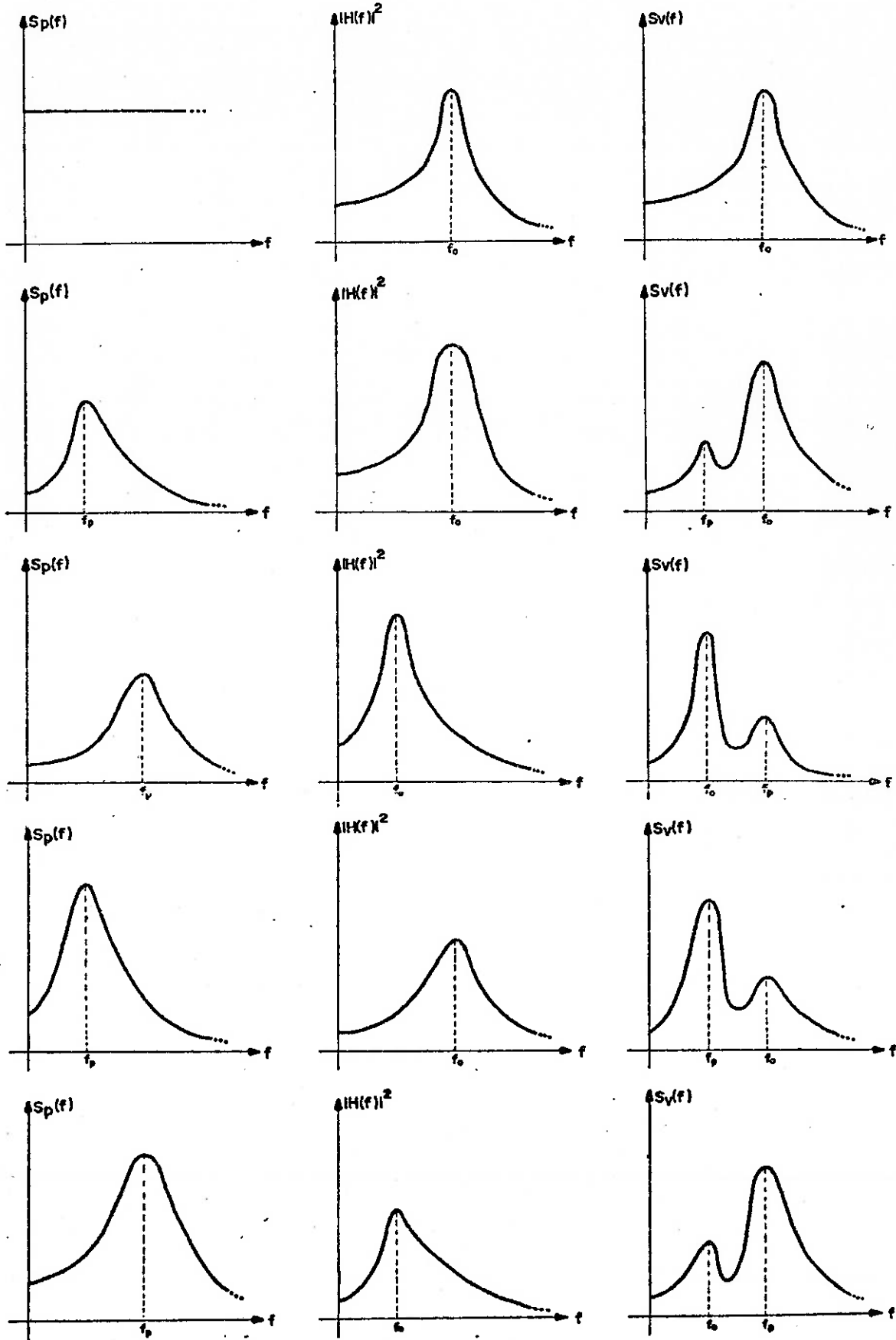
O espectro de Fourier da resposta para um carregamento de duração finita é uma função real e par que a cada frequência associa o módulo ao quadrado da transformada de Fourier da resposta nesta frequência.

O módulo ao quadrado da transformada de Fourier da resposta pode ser obtido a partir do módulo ao quadrado da transformada de Fourier do carregamento através da expressão (13.36-a).

13.4.2.3 - Filtragem

As expressões (13.35-c) e (13.36-b) resumem uma propriedade interessante dos sistemas lineares. Elas mostram que o espectro de Fourier da resposta pode ser obtido a partir do espectro do carregamento multiplicando-o pela função $|H(f)|^2$.

Devido ao fato da função $|H(f)|^2$ ser fortemente centrada em torno da frequência fundamental da estrutura, em alguns casos, esta funciona como filtro deixado passar para a



Figuras (13.14), (13.15), (13.16), (13.17) e (13.18)

resposta somente as informações em torno da frequência fundamental.

As figuras (13.14) a (13.18) resumem alguns casos usuais do espectro de Fourier do carregamento e da resposta. Nestas figuras consideramos somente carregamentos de duração finita e apresentamos somente as partes referentes à frequências positivas pois as três funções envolvidas são pares.

O primeiro caso é um caso ideal. O espectro de Fourier do carregamento apresenta componentes iguais em todas as frequências. A resposta, que é um processo de banda estreita, contém, quase que somente, componentes em torno da frequência natural.

No segundo e no terceiro caso a intensidade da função $|H(f)|^2$ é muito maior do que a da função $Sp(f)$. Com isto a estrutura atua como filtro deixando passar com maior intensidade, as componentes próximas à frequência fundamental permitindo pequenas perturbações próximas à frequência de pico do carregamento.

No terceiro e no quarto caso, como a intensidade da função $Sp(f)$ é muito maior do que a da função $|H(f)|^2$, a estrutura não chega a se comportar exatamente como um filtro. A resposta apresentará componentes com maior intensidade próximas à frequência de pico do carregamento e pequenas perturbações próximas à frequência natural da estrutura.

13.4.3 - Média quadrática da resposta

No item anterior vimos como pode ser obtido o espectro de Fourier da resposta a partir do espectro de Fourier do carregamento. Vejamos agora como pode ser obtida a média quadrática da resposta a partir do conhecimento do espectro de Fourier da mesma.

13.4.3.1 - Carregamento periódico

Se o carregamento é periódico, os módulos ao quadrado dos coeficientes de Fourier da resposta podem ser obtidos pela

expressão:

$$|V(n)|^2 = |P(n)|^2 |H(n/T_0)|^2$$

$$S_v(n) = S_p(n) |H(n/T_0)|^2$$

e o espectro de Fourier da mesma é dado por:

$$S_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_v(n) \delta(f-n/T_0)$$

A média quadrática da resposta, em um período, pode ser obtida por qualquer uma das expressões (13.24) que resultam em:

$$\bar{v}^2(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (13.37-a)$$

$$\bar{v}^2(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_v(n) \quad (13.37-b)$$

$$\bar{v}^2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V(n)|^2 \quad (13.37-c)$$

13.4.3.2 - Carregamento de duração finita

Se o carregamento é de duração finita T_d , como na figura (13.11-a), a resposta é de duração infinita como na figura (13.11-b). Neste caso a aplicação da expressão (13.35-a) fornece:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) df = \int_0^{\infty} v^2(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) df = \int_0^{T_d} v^2(t) dt + \int_{T_d}^{\infty} v^2(t) dt$$

A média quadrática da resposta, em todo o seu intervalo de duração, é zero. Mas, no mesmo intervalo de duração do carregamento, ela é dada por:

$$\bar{v}^2(t) = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} v^2(t) dt$$

$$\bar{v}^2(t) = \frac{1}{T_d} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) df - \frac{1}{T_d} \int_{T_d}^{\infty} v^2(t) dt \quad (13.38-a)$$

Esta expressão relaciona a média quadrática da resposta, no intervalo de duração do carregamento, com o espectro de Fourier da mesma.

Para que esta expressão fosse análoga a (13.37-a) seria necessário que a segunda integral do lado direito fosse nula. Como esta integral refere-se aos deslocamentos em vibrações livres, uma relação do tipo da (13.37-a) nunca poderá ser estabelecida para carregamentos de duração finita. Ela poderá ser aproximadamente válida na medida em que estes deslocamentos forem desprezíveis em relação aos deslocamentos em vibrações forçadas. Neste caso teremos:

$$\bar{v}^2(t) \approx \frac{1}{T_d} \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) df \quad (13.38-b)$$

13.5 - Comentário final

Alguns autores apresentam as expressões (13.32) e (13.37-a) como gerais para os sistemas lineares. Estas são obtidas porque os mesmos partem de conceitos, estatisticamente mais corretos, tomando a média e a média quadrática sobre um intervalo infinitamente longo.

Como vimos, se considerarmos um intervalo infinitamente longo, teremos sempre, exceto para carregamentos periódicos, média e média quadrática nulas. Como achamos isto sem sentido, preferimos tomar estas grandezas dentro de um intervalo finito, no caso igual a duração do carregamento. Com isto obtemos as expressões (13.34) e (13.38-a).

C A P Í T U L O 1 4

ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A UM
CARREGAMENTO DISCRETIZADO E DETERMINÍSTICO

Apresentamos neste capítulo os procedimentos necessários para o cálculo da resposta de uma estrutura linear, com um grau de liberdade, sujeita a um carregamento determinístico.

A avaliação numérica da resposta é desejável em duas situações: a primeira ocorre quando a aplicação das expressões do capítulo 12 é excessivamente trabalhosa. A outra ocorre quando, ao invés de conhecermos a função $p(t)$ que descreve o carregamento, conhecemos apenas uma sequência $p(k)$ representativa do mesmo.

É importante lembrar que o objetivo deste capítulo não é o de comparar resultados obtidos analiticamente com os obtidos numericamente. O objetivo principal, além de fornecer os procedimentos necessários, é também comparar o cálculo tradicional, computando numericamente a integral de Duhamell, com o cálculo numérico via domínio da frequência.

14.1 - Discretização das funções de resposta e transferência

Como a resposta será calculada numericamente utilizando uma destas expressões, é necessário que as mesmas sejam discretizadas em intervalos iguais.

Chamando de T o intervalo de discretização no domínio do tempo a expressão (12.8) pode ser posta sob a forma:

$$h(kT) = \frac{1}{2\pi mfd} e^{-\xi 2\pi f_0 kT} \text{sen} 2\pi f d kT \quad (14.1)$$

Quanto menor este intervalo, mais preciso será o resultado encontrado. É necessário que este intervalo seja menor do que meio período da senoide. Se isto não ocorrer, estaremos representando a função de resposta de uma estrutura com período maior do que a que realmente temos.

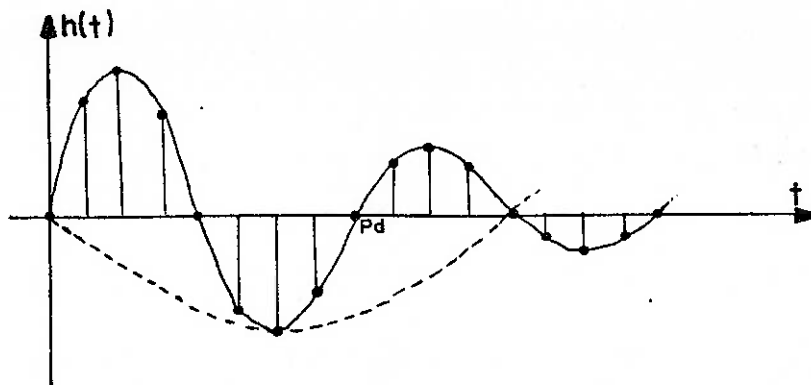


Figura (14.1)

Na figura (14.1) representamos em linha contínua a função de resposta representada quando $T = Pd/8$ e em linha tracejada a mesma quando $T = 3Pd/4$.

Chamando de F o intervalo de discretização no domínio da frequência as expressões (12.19-a) e (12.19-b) podem ser postas sob a forma:

$$R(nF) = \frac{1}{k} \left[\frac{1 - (nF/fo)^2}{(1 - (nF/fo)^2)^2 + 4\xi^2 (nF/fo)^2} \right] \quad (14.2-a)$$

$$I(nF) = \frac{1}{k} \left[\frac{-2\xi (nF/fo)^2}{(1 - (nF/fo)^2)^2 + 4\xi^2 (nF/fo)^2} \right] \quad (14.2-b)$$

Em uma análise numérica o intervalo de discretização no domínio da frequência fica amarrado ao intervalo de discretização no domínio do tempo.

Se a sequência que representa o carregamento for constituída de N termos espaçados de T segundos, o intervalo de discretização no domínio da frequência, segundo (7.10), será:

$$F = \frac{1}{NT} \quad (14.3)$$

Devemos lembrar ainda que na discretização da função de transferência os termos da mesma no intervalo

$$\frac{N}{2} < n < N$$

devem se referir à frequências negativas.

Em A-1 apresentamos um programa para a Texas-59 que calcula os valores da função de resposta e de transferência para instantes e frequências fornecidos. Este mesmo programa calcula os valores desta função em intervalos constantes.

Em A-2 apresentamos a função declaração (FRIU), em Fortran-IV, para o computador Burroughs B6700, que calcula o valor da função de resposta para um instante e parâmetros fornecidos. Neste mesmo apêndice temos a função sub-programa (COMPLEX FUNCTION TRANSF) que gera um número complexo que fornece o valor da função de transferência para a frequência e os parâmetros dados.

14.2 - Cálculo da resposta através do domínio do tempo.

No capítulo 12 verificamos que a resposta de uma estrutura linear pode ser obtida através de uma integral de convolução entre o carregamento e a função de resposta. Esta integral é conhecida como integral de Duhamell.

14.2.1 - Carregamento de duração finita.

Dado o carregamento da figura (14.2-a) a resposta ao mesmo, figura (14.2-b), pode ser obtida através das expressões (14.4).

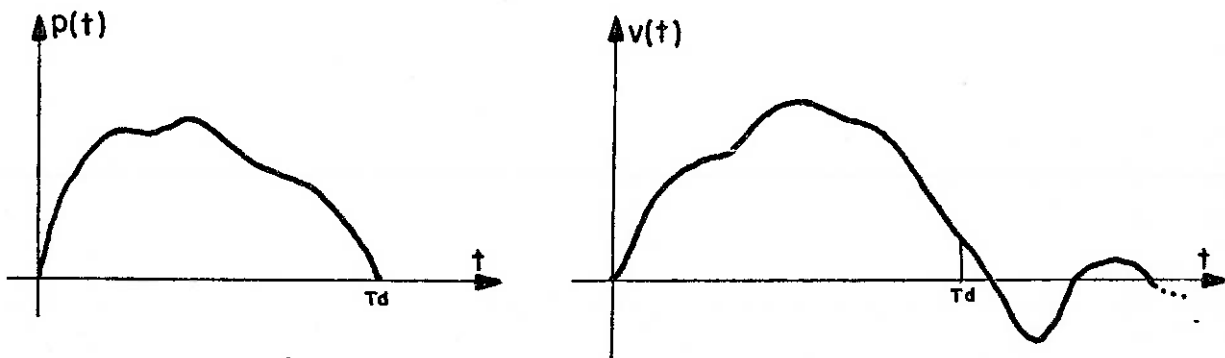


Figura (14.2)

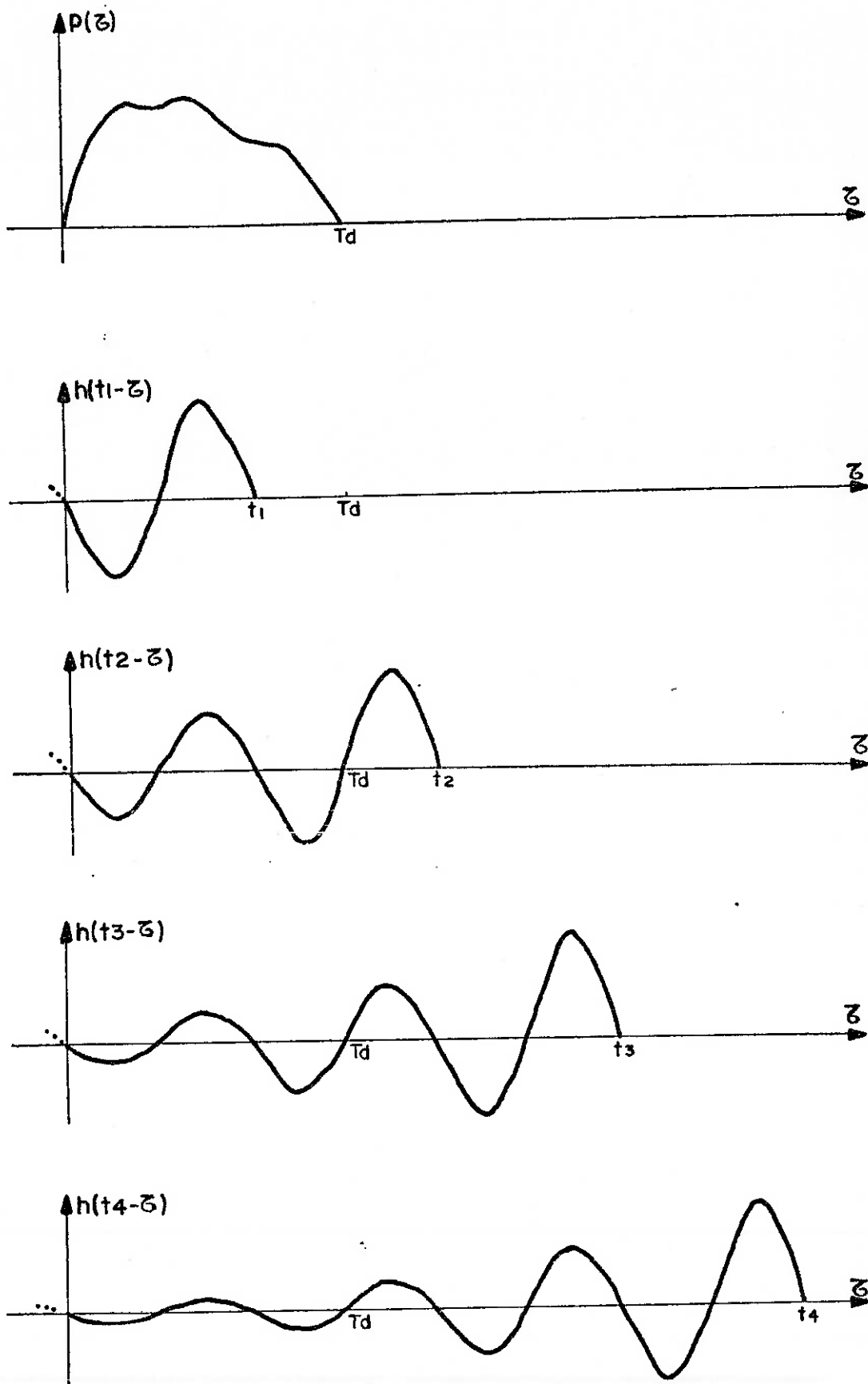


Figura (14.3)

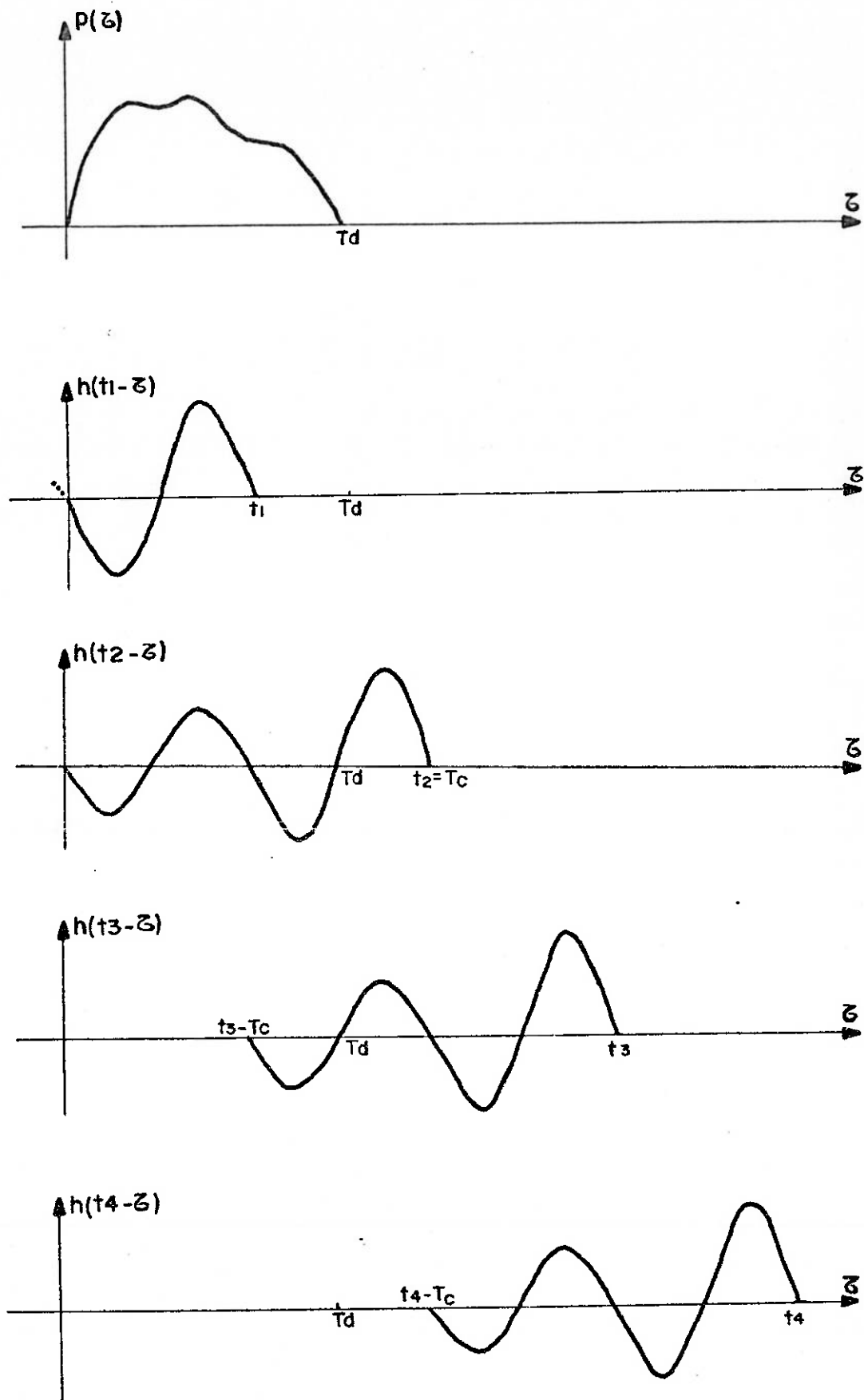


Figura (14.4)

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad t \leq T_d \quad (14.4-a)$$

$$v(t) = \int_0^{T_d} p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad t \geq T_d \quad (14.4-b)$$

Como já vimos, a função de resposta estende-se da origem até o infinito. Para que a resposta possa ser calculada numericamente é necessário que esta função seja truncada. Ao truncarmos a função de resposta em um intervalo finito, a resposta passará a ser de duração finita.

Nas figuras (14.3) indicamos como são realizados os produtos $p(\tau) h(t-\tau)$ para a função de resposta sem truncar e na figura (14.4) para o caso da mesma ser truncada.

Como pode se verificar, se a função de resposta é truncada em um intervalo T_c , a convolução é correta somente para os instantes $t \leq T_c$. Além disto, para $t \geq T_c + T_d$ teremos:

$$v(t) = 0 \quad t \geq T_c + T_d$$

As figuras (14.5) ilustram o resultado correto e o encontrado com a função de resposta truncada.

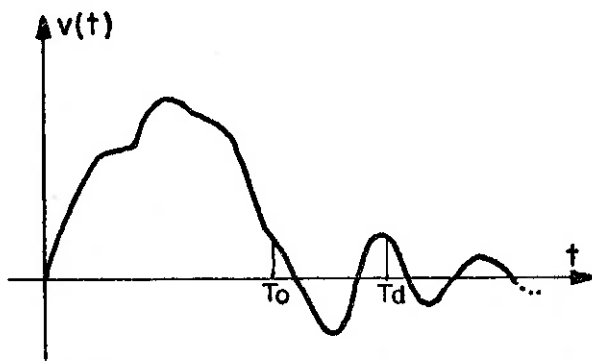


Figura (14.5-a) - Deslocamentos corretos

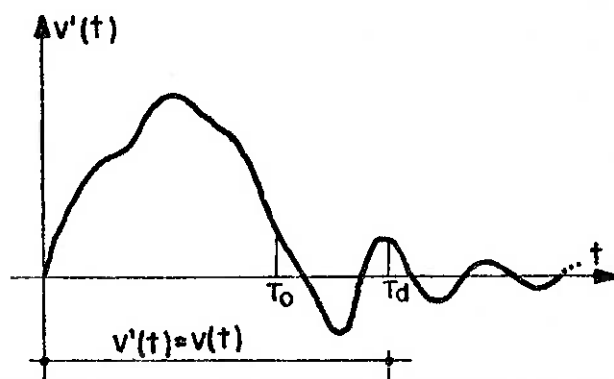


Figura (14.5-b) - Deslocamentos determinados com a função de resposta truncada

Como na prática não existe interesse em se conhecer os deslocamentos em vibrações livres, o intervalo de truncamento pode ser tomado igual à duração do carregamento. Com isto temos as duas funções da figura (14.6) a serem convolvidas.

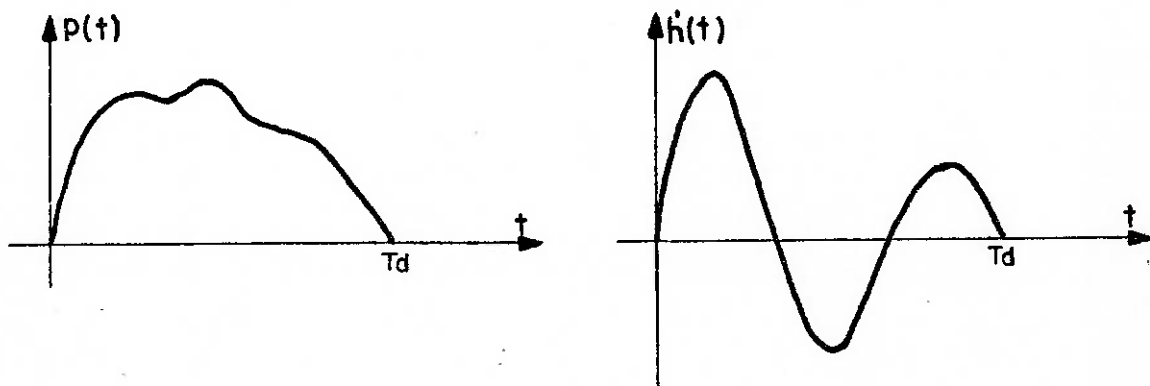


Figura (14.6)

A convolução entre estas duas funções é uma outra função de duração finita $2T_d$. Os resultados são corretos no intervalo $(0, T_d)$.

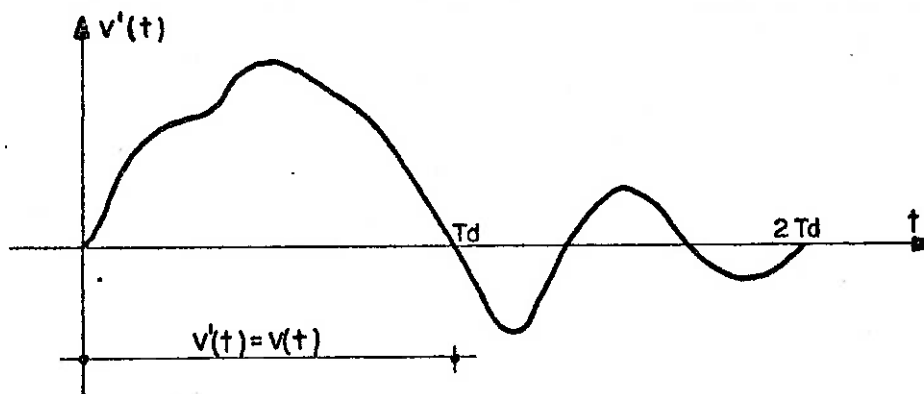


Figura (14.7)

Com a função de resposta truncada na duração do carregamento, obtemos os deslocamentos em vibrações livres no intervalo $(T_d, 2T_d)$. No entanto, os mesmos não podem ser considerados como corretos.

Sendo as duas funções de duração finita, a convolução discreta entre as mesmas pode ser avaliada numericamente de acordo com o que foi estudado no ítem (11.1).

As figuras (14.8) mostram as duas sequências obtidas da discretização das funções das figuras (14.6).

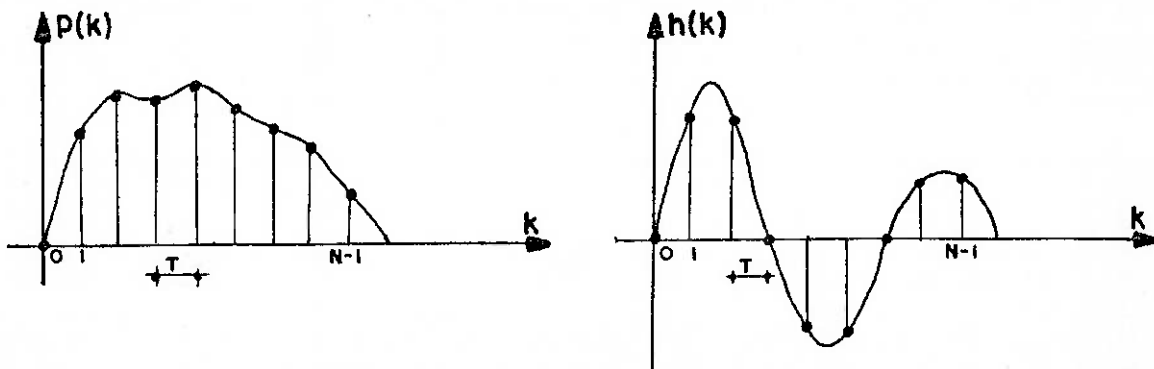


Figura (14.8)

Segundo a expressão (11.4) temos:

$$v(k) = T \sum_{i=J_1}^{J_2} p(i) h(k-i) \quad (14.5)$$

como as duas sequências possuem o mesmo número de termos, segundo (11.6), os limites da somatória serão:

$$J_1 = \text{Maior} (-N + k + 1, 0) \quad (14.6.a)$$

$$J_2 = \text{Menor} (k, N - 1) \quad (14.6-b)$$

o que conduz às expressões:

$$v(k) = T \sum_{i=0}^k p(i) \cdot h(k-i) \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (14.7-a)$$

$$v(k) = T \sum_{i=k-N+1}^{N-1} p(i) h(k-i) \quad N-1 \leq k \leq 2N-1 \quad (14.7-b)$$

A expressão (14.7-a) fornece os deslocamentos no intervalo $(0, Td)$ da figura (14.7) e a expressão (14.7-b) os des

locamentos no intervalo $(T_d, 2T_d)$ da mesma.

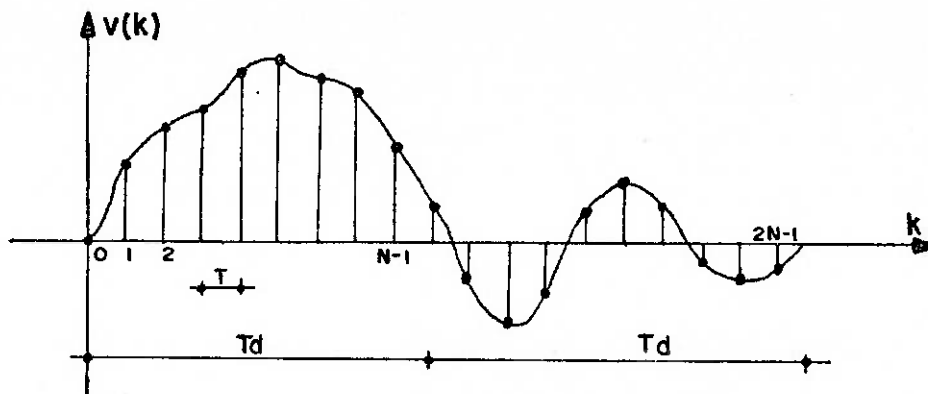


Figura (14.9)

A expressão (14.7-b) será abandonada uma vez que não há interesse em se determinar os deslocamentos em vibrações livres. Mesmo que houvesse tal interesse, a mesma não deveria ser utilizada, pois estes deslocamentos não seriam corretos devido ao truncamento da função de resposta.

No entanto, se alterarmos a duração do carregamento de T_d para $(T_d + LT)$ acrescentando-se L zeros e, se truncarmos a função de resposta no instante $(T_d + LT)$, conseguiremos obter $(N + L)$ termos corretos da resposta. Se a duração do carregamento for dobrada, acrescentando-se zeros, conseguiremos obter, a menos de erros numéricos, a resposta em vibrações livres em um intervalo igual ao da duração do carregamento.

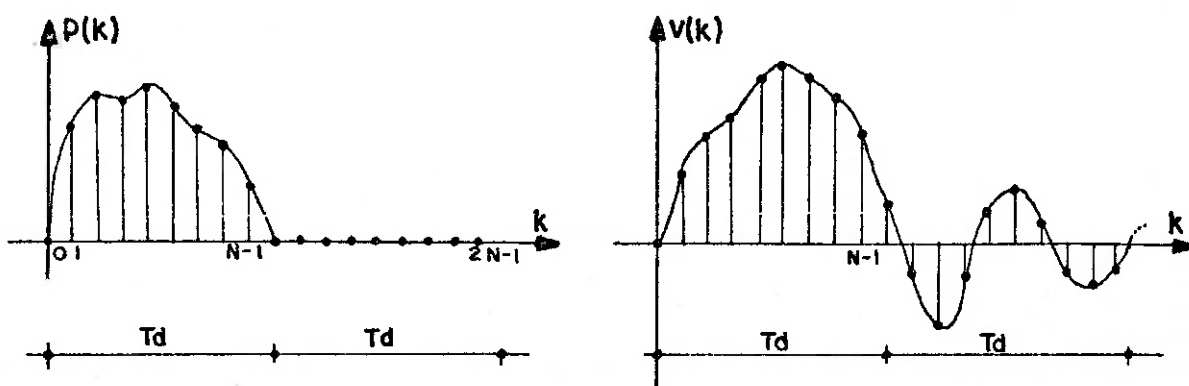


Figura (14.10)

Tanto o programa para a convolução da Texas-59, como a subrotina CONVOL do B6700 podem ser utilizados no cálculo da

resposta. O primeiro programa pode fornecer todos os termos resultantes da convolução discreta, equações (14.7-a) e (14.7-b), caso seja desejável conhecê-los. No entanto, a subrotina CONVOL fornece só os N primeiros termos da resposta, equação (14.7-a), que é o que realmente interessa.

14.2.2 - Carregamento periódico

No caso de carregamento periódico, podemos utilizar a técnica exposta no ítem (11.4) para avaliar a convolução discreta com as mesmas rotinas desenvolvidas para sequências finitas.

Novamente somos obrigados a truncar a função de resposta. No entanto, neste caso, o truncamento deve ser feito com mais critério do que no caso anterior.

Consideremos o carregamento periódico da figura (14.11):

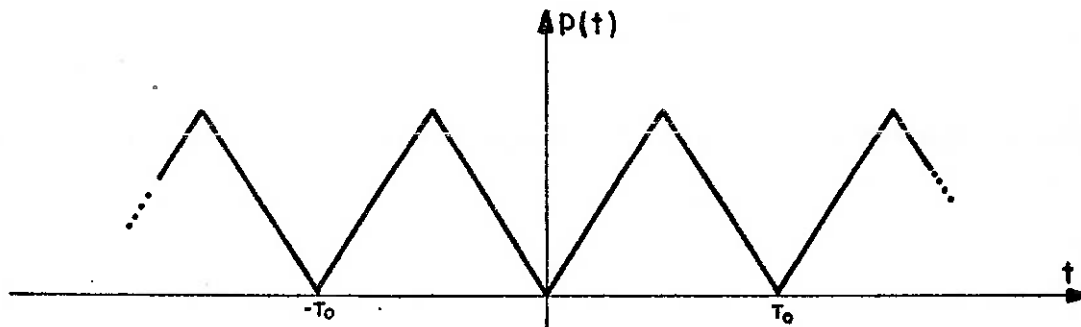


Figura (14.11)

A resposta do mesmo, que também é periódica, pode ser obtida, em um período, somando-se a resposta em vibrações forçadas, para o pulso que ocorre neste período, com as respostas em vibrações livres dos infinitos pulsos que ocorreram anteriormente.

Ao truncarmos a função de resposta, estamos limitando o número de respostas que se superpõe. No entanto, este erro pode ser desprezível se o intervalo de truncamento for tal que:

$$h(t \geq T_c) \cong 0$$

Nas figuras (14.12) temos dois casos de respostas a carregamentos periódicos calculados com a função de resposta truncada. No primeiro caso, figura (14.12-b), o erro cometi

do é considerável e no segundo, figura (14.12-c), o mesmo é desprezível.

Um bom critério para se escolher o intervalo de truncamento é verificar o decaimento da exponencial. Este depende da frequência natural e da porcentagem de amortecimento. O resultado será tão mais correto quanto mais verdadeira for a expressão:

$$e^{-\xi\omega_0 T_c} \cong 0 \quad (14.8)$$

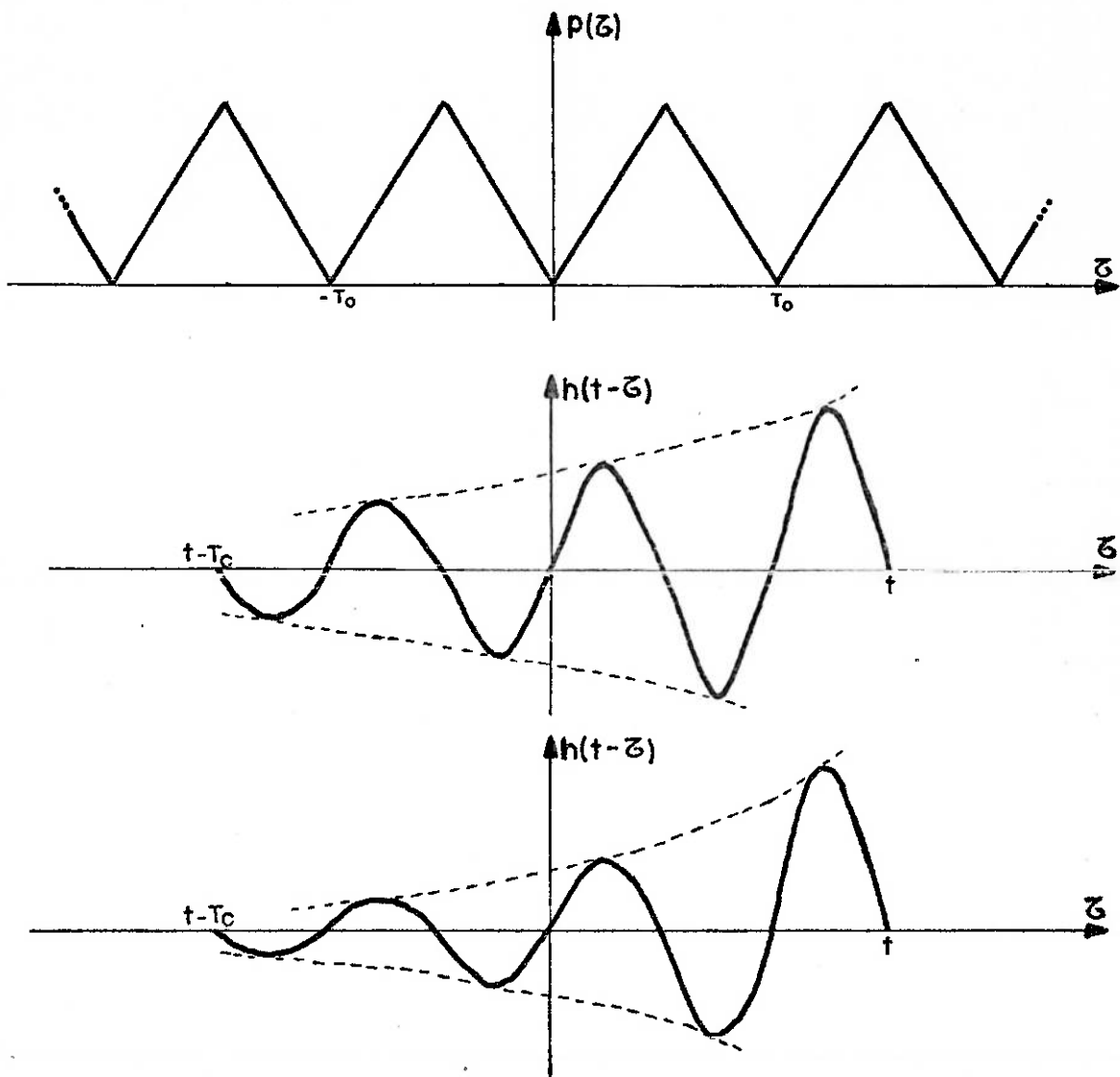


Figura (14.12)

Sendo a função $h(t)$ de duração finita T_c , basta considerarmos, conforme vimos no item (11.4), a função periódica com duração finita T_d :

$$T_d = T_o + T_c$$

Seria interessante desde já procurar se tomar um intervalo de truncamento igual a um número inteiro de períodos. Com isto, temos as duas sequências das figuras (14.13) a serem convolvidas numericamente.

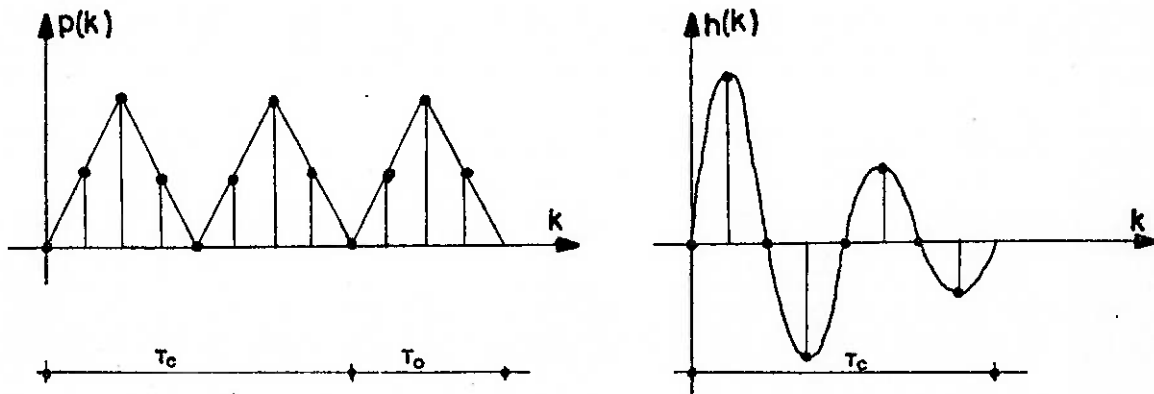
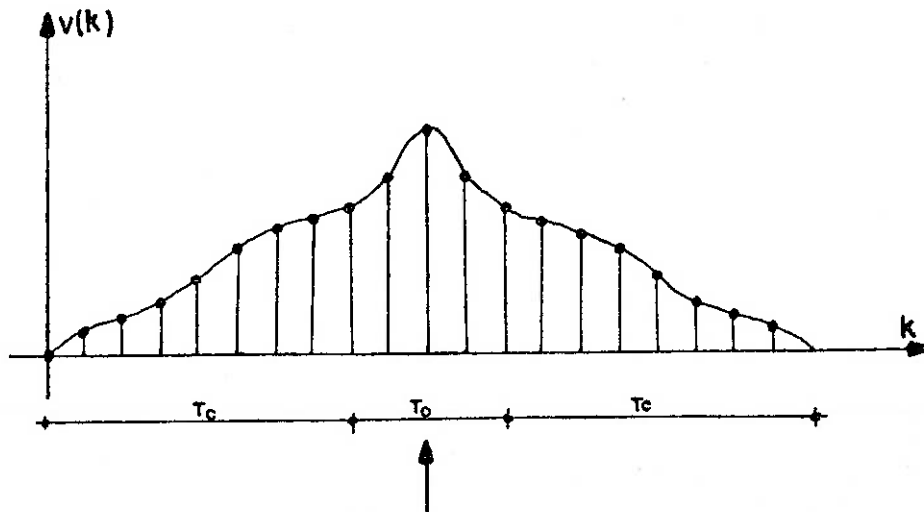


Figura (14.13)

Com isto podemos utilizar as mesmas rotinas desenvolvidas no capítulo 11 para sequências finitas.

É importante lembrar que, sendo as duas sequências de duração finita, a convolução também será finita, com duração igual a $(2T_c + T_o)$. Os resultados corretos porém, segundo (11.15), encontram-se no intervalo:

$$T_c \leq t \leq T_c + T_o$$



Resultados corretos

Figura (14.14)

14.3 - Cálculo da resposta através do domínio da frequência.

Conforme vimos no ítem (12.4) a resposta pode ser obtida aplicando-se o teorema da convolução. No ítem (11.6) vi

mos que este teorema vale também para o caso discreto. O mesmo afirma que a convolução discreta de duas funções, no domínio do tempo, equivale ao produto, termo a termo, no domínio da frequência, de suas transformadas discretas. Portanto, podemos propor a seguinte marcha para o cálculo numérico da resposta.

Primeiramente calculamos as transformadas discretas do carregamento e da função de resposta.

$$P(n) = F [p(k)] \quad (14.9-a)$$

$$\hat{H}(n) = F [h(k)] \quad (14.9-b)$$

A seguir efetuamos os produtos, termo a termo, destas duas sequências obtendo a transformada discreta da resposta:

$$V(n) = P(n) \hat{H}(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14.9-c)$$

Calculando a transformada discreta inversa de $V(n)$ obteremos a resposta:

$$v(k) = F^{-1} [V(n)] \quad (14.9-d)$$

Esta marcha de cálculo, aparentemente mais complexa do que a apresentada no ítem anterior, em alguns casos pode ser altamente vantajosa devido ao emprego do algoritmo da transformada rápida de Fourier.

Além disto, em alguns casos, a operação (14.9-b) pode ser eliminada obtendo-se a sequência $\hat{H}(n)$ diretamente da discretização da função de transferência.

Este procedimento pode ser adotado se a função de transferência discretizada realmente representar a transformada discreta da função de resposta. Adiante veremos quando esta aproximação é válida.

14.3.1 - Carregamento de duração finita.

14.3.1.1 - Utilizando a transformada da função de resposta.

Conforme vimos no ítem anterior, a resposta a um carregamento discreto $v(k)$, com duração T_d , pode ser obtida convolvendo-o com a função de resposta, discretizada, truncada em T_d segundos. Com isto, figura (14.9), obtemos a resposta correta no intervalo $(0, T_d)$. Podemos ainda obter a resposta em vibrações livres no intervalo $(T_d, 2T_d)$. No entanto, estes valores não serão corretos devido ao truncamento da função $h(t)$.

Segundo (11.34) no cálculo da convolução discreta, via domínio da frequência, de duas sequências com o mesmo número de termos devemos inicialmente dobrar a duração destas sequências acrescentando-se zeros.

Procedendo-se desta maneira o resultado obtido, utilizando a marcha de cálculo dada pelas expressões (14.9), segundo o teorema da convolução discreta, a menos de erros de arredondamento, é o mesmo que se consegue utilizando as expressões (14.7).

Neste caso porém, além dos deslocamentos em vibrações forçadas dados pela expressão (14.7-a), obtemos também os deslocamentos em vibrações livres dados pela expressão (14.7-b). Isto ocorre devido ao fato de entrarmos com todos os termos da sequência no cálculo da transformada. No entanto, estes deslocamentos em vibrações livres não são corretos devido ao truncamento da função de resposta.

Se tomarmos as duas sequências da figura (14.8), a resposta obtida será dada pela figura (14.9).

Se quisermos conhecer os deslocamentos corretos em um intervalo de $(T_d + LT)$ segundos, devemos aumentar a duração do carregamento para $2(T_d + LT)$ segundos acrescentando-se zeros, truncar a função de resposta em $(T_d + LT)$ segundos e dobrar a sua duração acrescentando-se zeros.

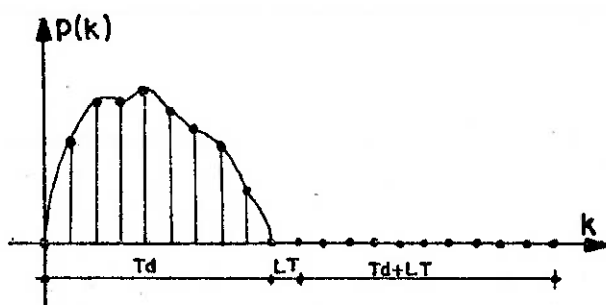


Figura (14.15-a)

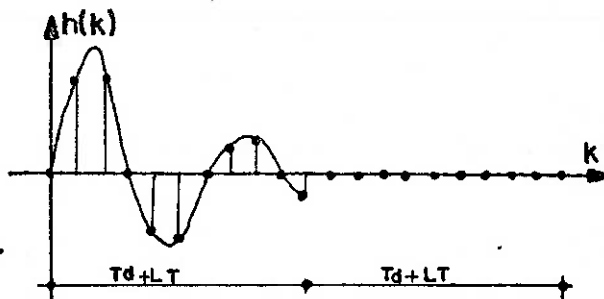


Figura (14.15-b)

Com isto, a resposta terá duração de $2(T_d + LT)$ segundos e os deslocamentos serão corretos no intervalo $(0, T_d + LT)$.

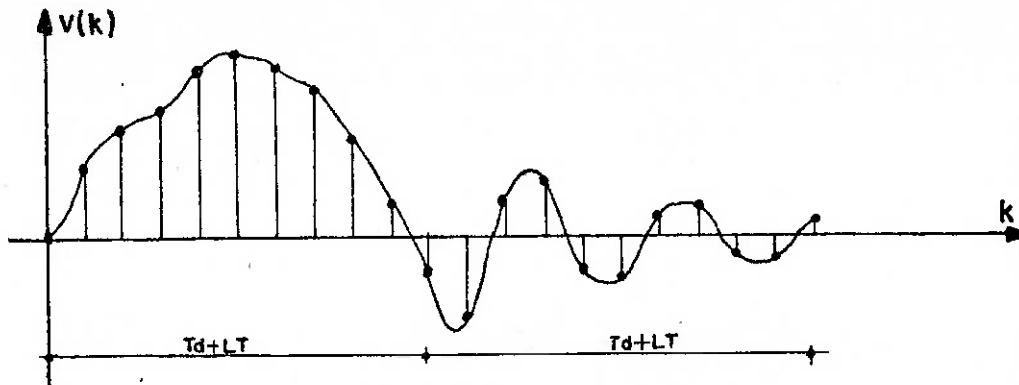


Figura (14.15-c)

Se não dobrarmos as durações das sequências, acrescentando-se zeros, a resposta será obtida para um carregamento periódico de período T_d . Com isto, haverá uma superposição dos deslocamentos em vibrações livres, no período $(T_d, 2T_d)$, com os deslocamentos em vibrações forçadas no intervalo $(0, T_d)$.

Nos casos em que estes deslocamentos em vibrações livres são desprezíveis, podemos computar as transformadas sem dobrar as durações das sequências.

14.3.1.2 - Utilizando a função de transferência

Em alguns casos podemos, ao invés de calcular a transformada discreta da sequência $h(k)$, tomarmos a sequência complexa $H(n)$, obtida da discretização da parte real e imaginária da função de transferência. Com isto economizamos mais tempo de processamento, pois uma transformada não precisa mais ser computada.

Este procedimento é válido se realmente tivermos:

$$F[h(k)] = \hat{H}(n) \cong H(n)$$

Para que isto ocorra são necessárias duas coisas:

a) O intervalo de discretização no domínio do tempo deve ser suficientemente pequeno. Se este intervalo for relativamente grande, teremos a sequência $\hat{H}(n)$, que representa a função de transferência discretizada e distorcida devido ao efeito "aliasing" no domínio da frequência. Neste caso, se quisermos fornecer diretamente a sequência da transformada de $h(k)$, devemos então fornecer uma sequência distorcida.

b) Se o intervalo de duração do carregamento for T_d , deveremos ter:

$$h(T_d) \cong 0$$

Se isto não ocorrer, a função de transferência discretizada não corresponderá a transformada discreta da função de resposta truncada.

Como vimos, a função de resposta é obtida pelo produto de uma exponencial decrescente por uma senóide. Para verificarmos se o truncamento poderá descaracterizá-la, basta observarmos o decaimento da exponencial segundo a expressão (14.8).

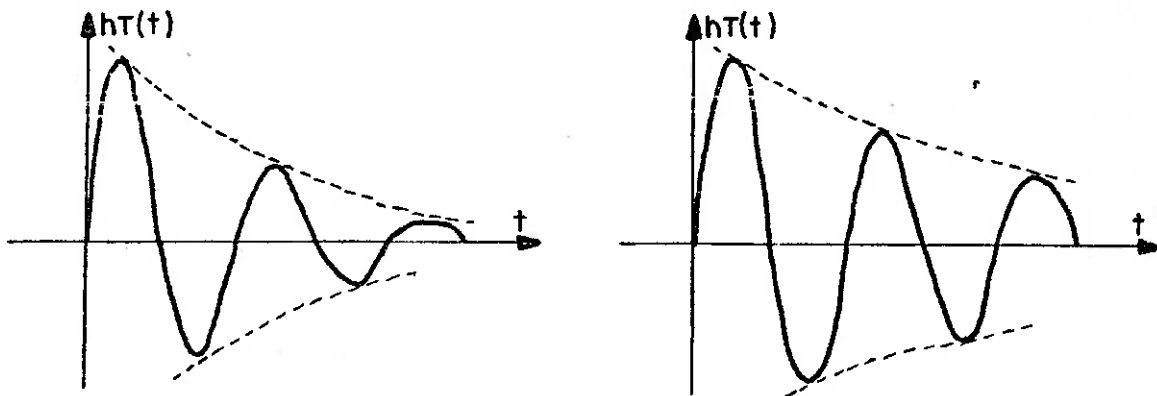


Figura (14.16)

No caso da figura (14.16-a) podemos considerar a função de transferência como transformada da função $hT(t)$. O mesmo porém não pode ser feito no segundo caso.

A influência do intervalo de duração na resposta obtida utilizando a função de transferência discretizada pode ser entendida da seguinte maneira:

Consideremos o carregamento da figura (14.17) cuja duração foi aumentada de T_0 segundos para T_d acrescentando-se L zeros.

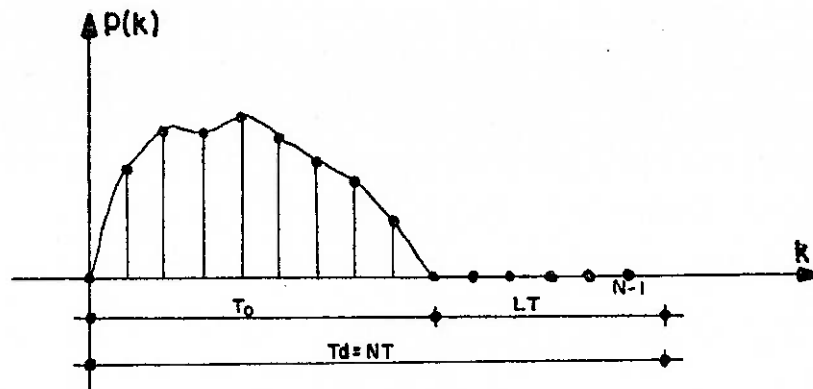


Figura (14.17)

Quando calculamos a transformada discreta do mesmo ob temos uma seqüência complexa, no domínio da frequência, cujos termos estão espaçados de:

$$F = \frac{1}{T_d} \quad (\text{Hertz})$$

Ao multiplicarmos pela função de transferência discretizada devemos tomar para esta o mesmo intervalo F acima.

Sendo dada a seqüência $H(n)$, a sua multiplicação pela seqüência $P(n)$ equivale a convolução da seqüência $v(k)$ com a transformada inversa de $H(n)$.

Como a função $h(t)$ não é de duração finita, estaremos então considerando uma função de resposta distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo. Na realidade estaremos realizando a convolução discreta do carregamento com a seqüência obtida da discretização da função resultante da superposição das funções abaixo:

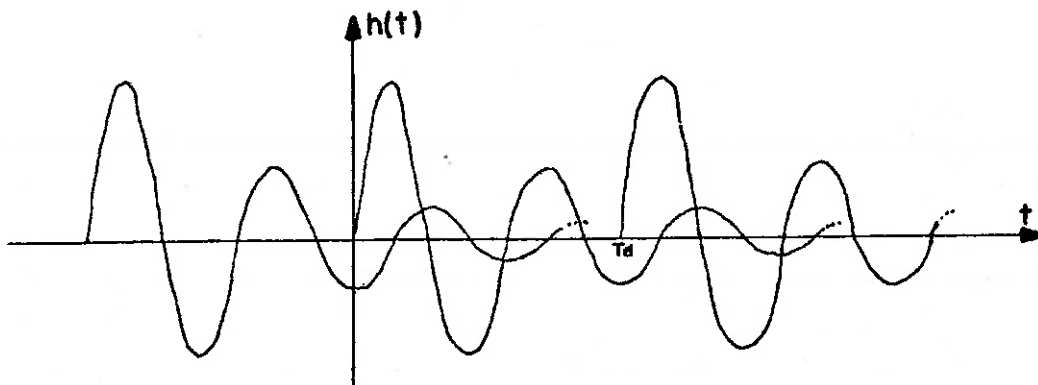


Figura (14.18)

Como podemos ver, além de estarmos considerando uma função de resposta distorcida, a mesma será periódica.

Como já afirmamos no capítulo 5, a convolução de uma função de duração finita $x(t)$ com outra periódica $y(t)$, terá o mesmo resultados se considerarmos $x(t)$ periódica e $y(t)$ finita.

Portanto, quando utilizamos a função de transferência discretizada, estamos calculando a resposta para um carregamento periódico, de período T_d , considerando uma função de resposta distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

Para que o procedimento seja justificado, é necessário então que, ao mesmo tempo:

$$v(t) \approx 0 \quad h(t) \approx 0 \quad \text{para } t > T_d \quad (14.10)$$

Neste caso então, não adianta apenas dobrar a duração do carregamento. É necessário que as duas condições dadas pelas equações (14.10) sejam satisfeitas.

É bom lembrarmos o comentário feito no final do capítulo 11. Quando calculamos a convolução discreta de duas sequências, devemos tomar as transformadas discretas das mesmas tal qual elas foram encontradas. Não importa se no cálculo destas transformadas surgiram distorções.

Portanto, para que a resposta via domínio da frequência seja compatível com a resposta calculada via domínio do tempo, só podemos utilizar a função de transferência discretizada se esta realmente representar, com boa aproximação, a transformada discreta da função resposta.

14.3.2 - Carregamento periódico.

O estudo da resposta via domínio da frequência para um carregamento periódico pode ser feito de acordo com o que está exposto no ítem 11.11.

Devemos primeiramente fornecer um número inteiro de períodos do carregamento com uma duração total T_d .

A rigor, deveríamos cobrir toda função de resposta com o carregamento. Como isto não é possível, devemos conside

rar um intervalo finito de T_d a partir do qual:

$$h(T_d) \cong 0$$

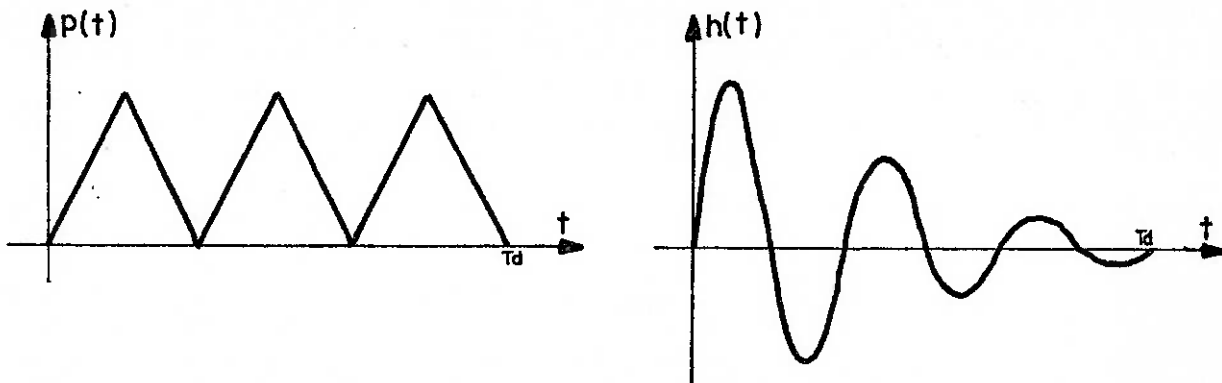


Figura (14.19)

A resposta a um carregamento periódico, em um instante, é obtida pela superposição das respostas em vibrações livres dos infinitos pulsos que ocorreram anteriormente com a resposta em vibração forçada do pulso que ocorre naquele instante. Se limitarmos então a duração da função de resposta, estaremos limitando o número de respostas em vibrações livres que se superpõem.

Se $h(t > T_d) \cong 0$ este procedimento é plenamente justificado. A resposta neste caso pode ser então obtida utilizando a transformada discreta da função de resposta.

Para utilizarmos a função de transferência discretizada, basta assegurar que o intervalo de discretização no domínio do tempo seja suficientemente pequeno para que a condição (a) do ítem 14.3.1.2 seja satisfeita.

A condição (b) é automaticamente satisfeita considerando um intervalo T_d suficientemente longo. Não necessitamos nos preocupar com o carregamento pois este é realmente periódico.

14.4 - O programa "RESPOSTA"

Baseado nas técnicas apresentadas até agora, foi elaborado um programa para o computador Burroughs B-6700, em Fortran IV, para o cálculo da resposta de um sistema linear, de um grau de liberdade, sujeito a um carregamento discretizado.

O programa foi denominado RESPOSTA. Usando o mesmo pode-se obter a resposta através do domínio do tempo ou através do domínio da frequência utilizando um dos procedimentos citados.

A listagem e as instruções para utilização do mesmo encontram-se no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Os três exemplos que apresentamos a seguir foram processados por este programa. As respostas e o carregamento foram plotados unindo-se os pontos da sequência com segmentos de reta.

14.5 - Resposta a um carregamento em exponencial crescente

O primeiro exemplo é constituído por um carregamento em exponencial crescente com duração de 9 segundos.

O carregamento foi discretizado constituindo uma sequência de 500 termos espaçados de 0,018 segundos.

A tabela (14.1) resume as características da estrutura e a figura (14.20) mostra o carregamento plotado.

DADOS DO PROBLEMA

Sistema linear com um grau de liberdade

Características da estrutura

| | | |
|-------------------------------|---|-----------------------|
| Rigidez da estrutura | = | 1600,00000 kgf/m |
| Massa da estrutura | = | 10,00000 kgf.seg**2/m |
| Porcentagem de amortecimento | = | 5,00000 |
| Amortecimento da estrutura | = | 12,64911 kgf*seg/m |
| Frequência natural | = | 2,01317 hertz |
| Frequência natural amortecida | = | 2,01065 hertz |

Tabela (14.1)

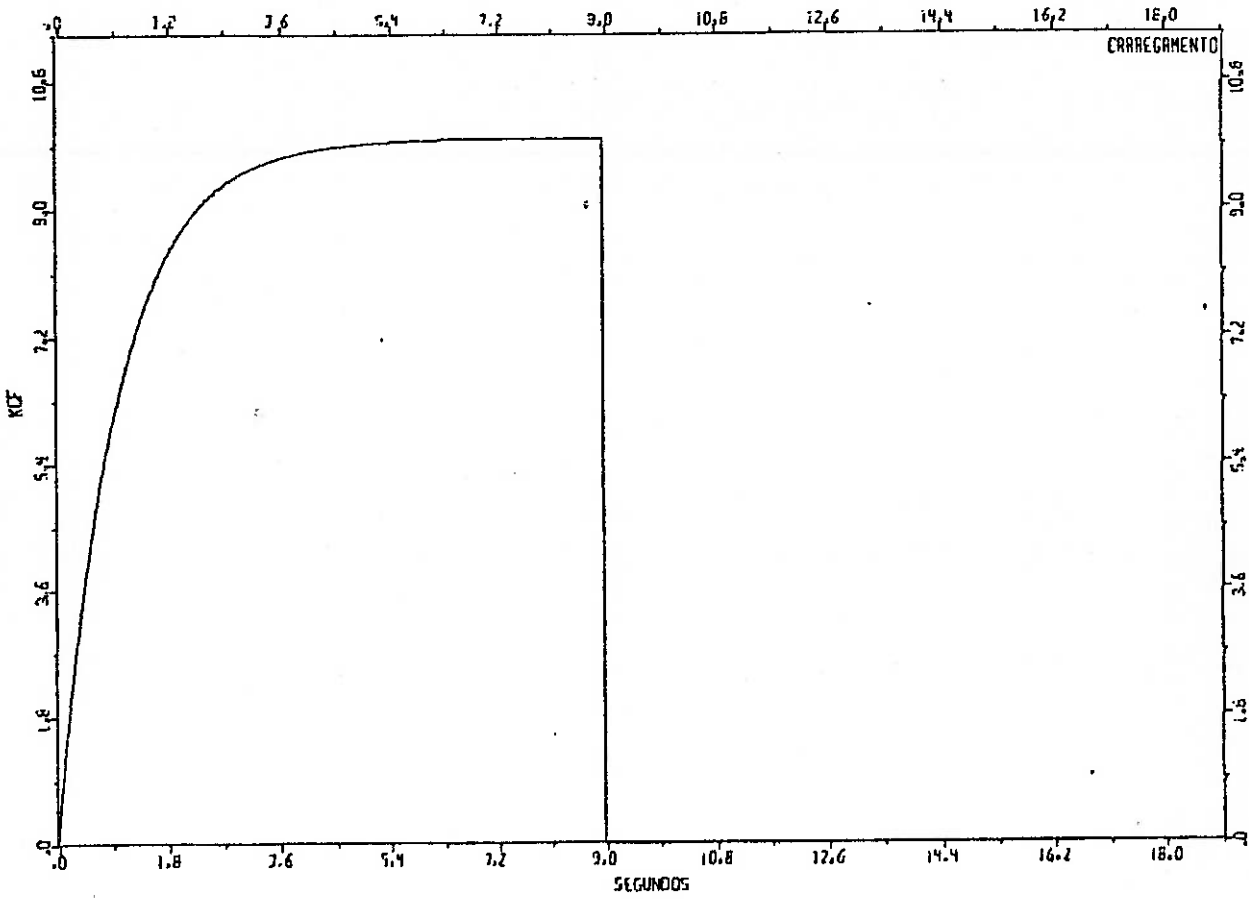


Figura (14.20)

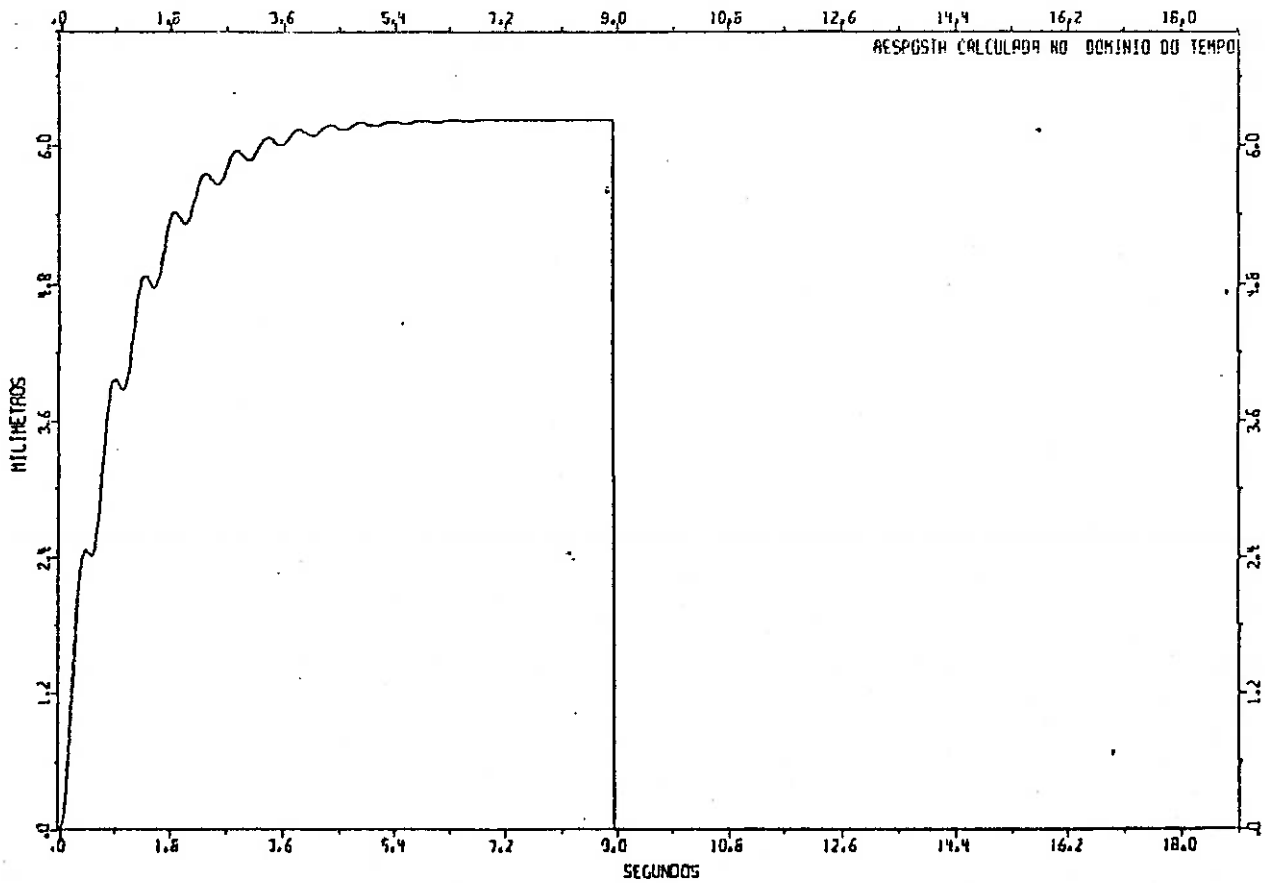


Figura (14.21)

14.5.1 - Resposta calculada no domínio do tempo

Primeiramente a resposta foi obtida no domínio do tempo realizando-se a convolução discreta com a função de resposta.

Na figura (14.21) mostramos a resposta obtida. Como a somatória da expressão (14.7-b) não é realizada, o programa fornece:

$$v(k) = 0 \quad k \geq 500$$

14.5.2 - Resposta calculada no domínio da frequência utilizando a transformada da função de resposta

Para se processar corretamente a resposta por este método, as sequências do carregamento e da função de resposta devem ter inicialmente seus números de termos dobrados acrescentando-se zeros. Como este número precisa ser potência inteira de dois, o mesmo já foi logo aumentando para 1024 tendo a duração da sequência passado para 18,432 segundos.

A figura (14.22) mostra a resposta obtida.

Através deste gráfico verificamos que, neste caso, aparecem os deslocamentos em vibrações livres. No entanto, como já dissemos, os mesmos não são corretos devido ao truncamento da função de resposta. Além disto, pelo fato desta função e o carregamento possuírem duração de 9 segundos, temos:

$$v(t) = 0 \quad \text{para } t \geq 18 \text{ segundos}$$

Os valores de cada termo da sequência não são apresentados. Mas uma comparação dos dois resultados mostra que, no intervalo de 0 a 9 segundos, com precisão de cinco casas decimais, eles são os mesmos. No entanto, no intervalo de 9 a 18 segundos os valores da resposta são nulos no primeiro caso e diferentes de zero no segundo. No intervalo de 18 a 18,432 segundos a resposta é nula para os dois casos.

14.5.3 - Resposta calculada no domínio da frequência utilizando a função de transferência

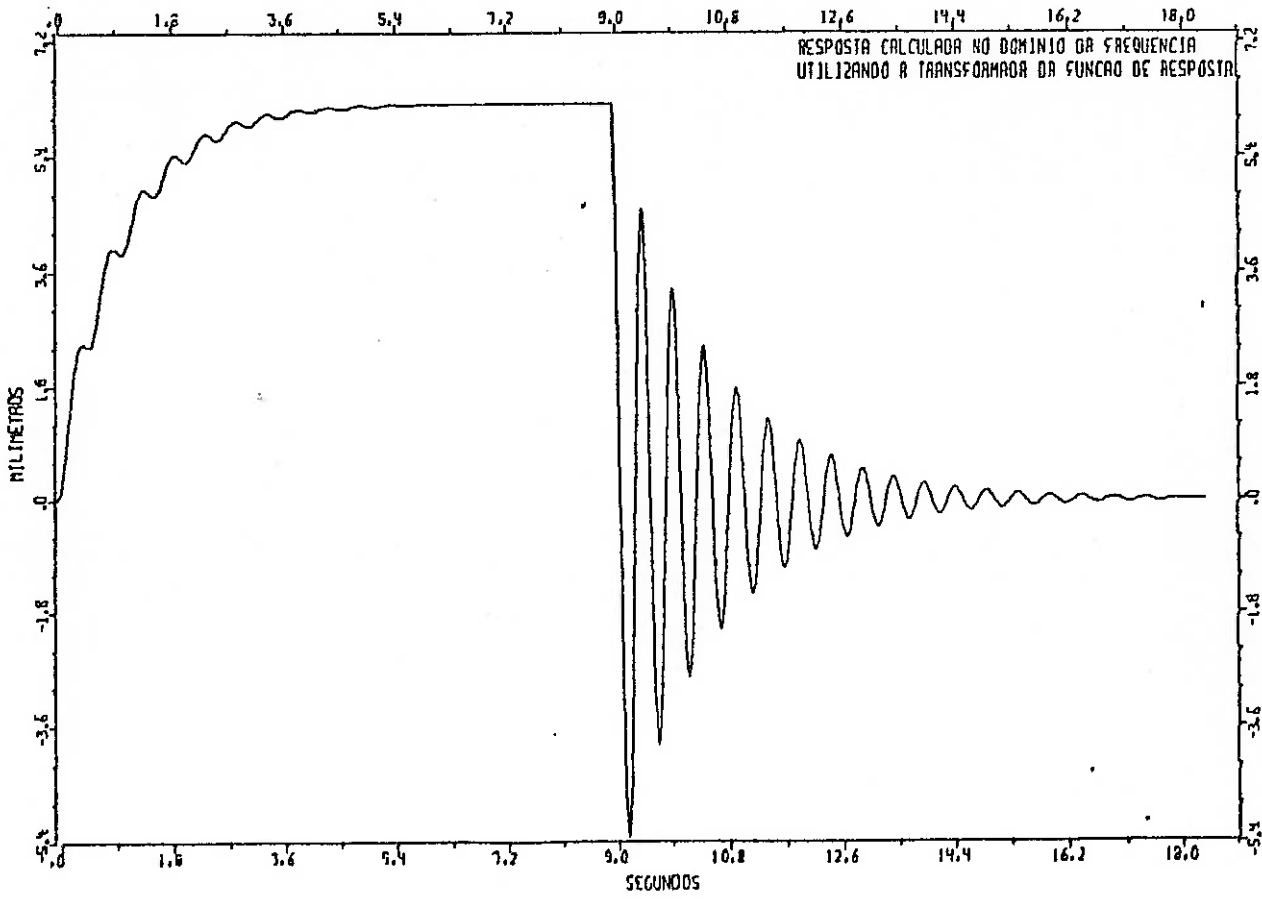


Figura (14.22)

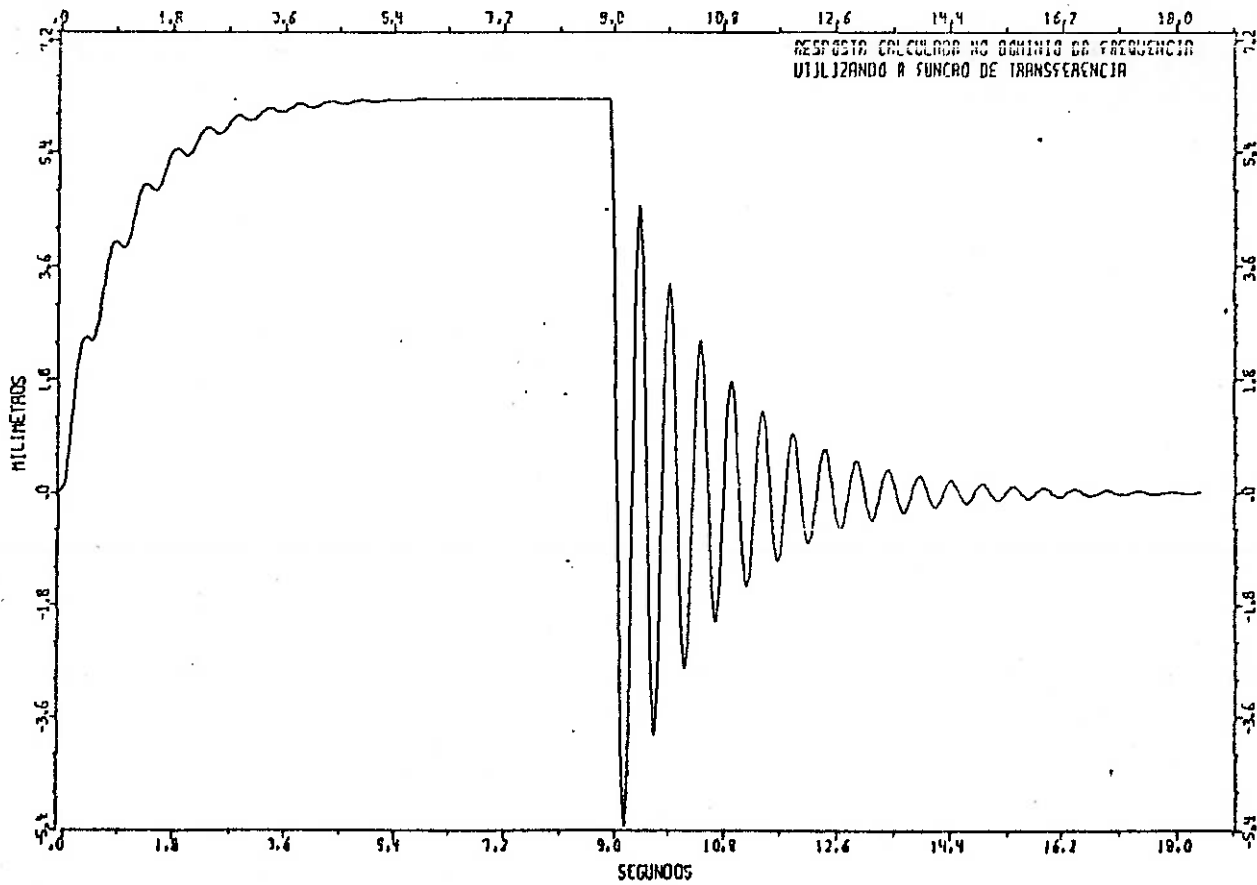


Figura (14.23)

Neste caso devemos considerar para o carregamento um número N de termos tal que:

$$e^{-\xi\omega_0 NT} \approx 0$$

Se considerarmos o mesmo número de termos do exemplo anterior, teremos:

$$e^{-\xi\omega_0 1024 \times 0,018} = 8,65 \times 10^{-6}$$

Se considerarmos apenas 512 termos, teremos:

$$e^{-\xi\omega_0 512 \times 0,018} \approx 2,94 \times 10^{-3}$$

A consideração de apenas 512 termos equivale a tomarmos a função de resposta truncada em 9,216 segundos. As componentes desta função além deste instante são desprezíveis. No entanto, isto apenas não justifica o emprego de 512 termos visto que haveria uma superposição dos deslocamentos em vibrações livres, que são consideráveis, com os obtidos em vibrações forçadas.

Optamos então pelo emprego de 1024 termos para a frequência do carregamento. Na figura (14.23) representamos a resposta obtida.

Analisando os valores da resposta, encontramos uma diferença muito pequena em relação ao caso anterior. Esta diferença se deve ao fato dos deslocamentos após o instante de 18,432 segundos não serem totalmente desprezíveis. No entanto, observando a figura (14.23), verifica-se que estas diferenças são irrelevantes.

14.5.4 - Resposta calculada no domínio da frequência utilizando a transformada da função de resposta sem dobrar a duração do carregamento.

Neste caso o número de termos foi aumentado para 512 apenas para poder se utilizar o algoritmo da transformada rápida de Fourier. Com isto a duração foi aumentada para 9,216 segundos. Na figura (14.24) representamos o resultado obtido.

Comparando-se a mesma com a figura (14.22), pode-se

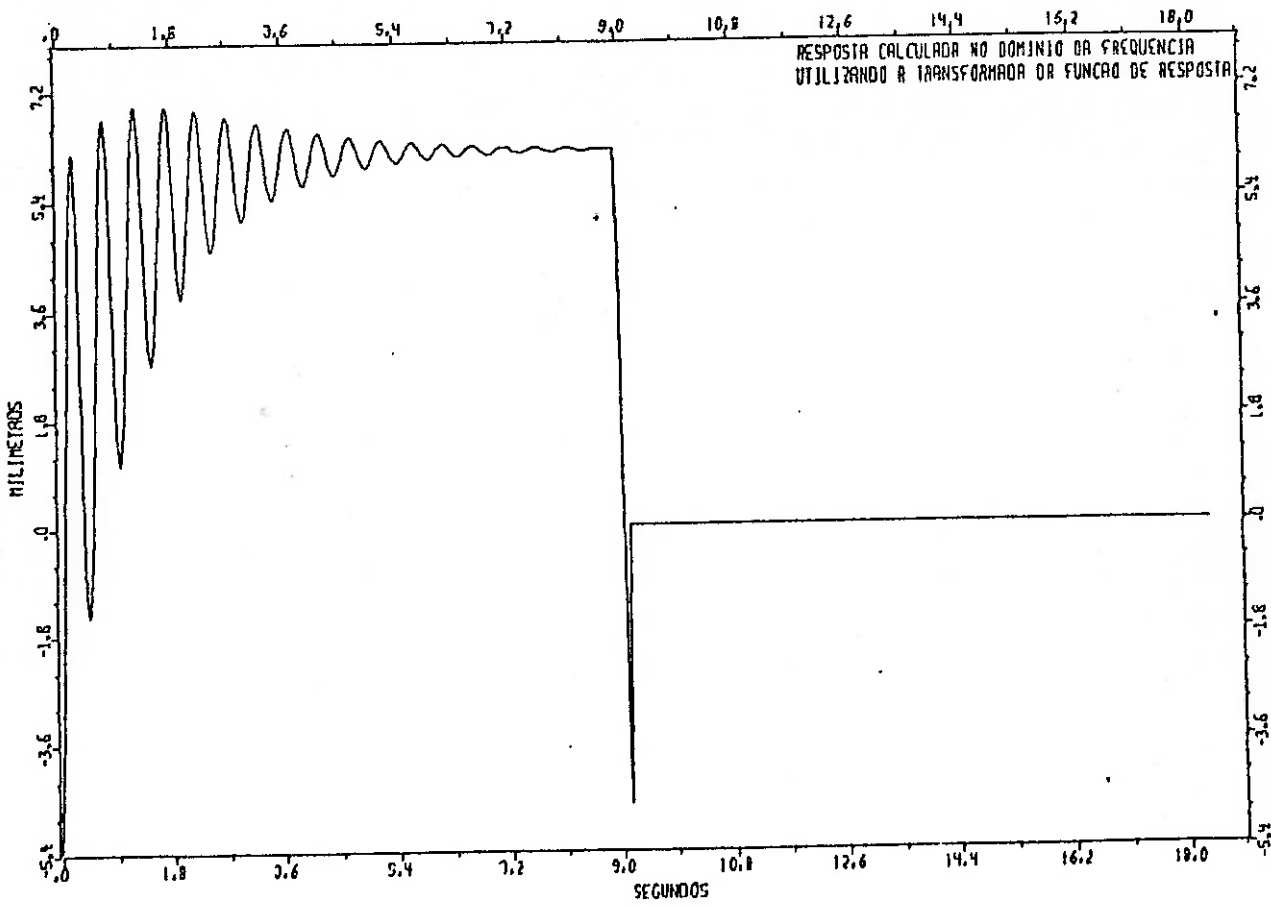


Figura (14.24)

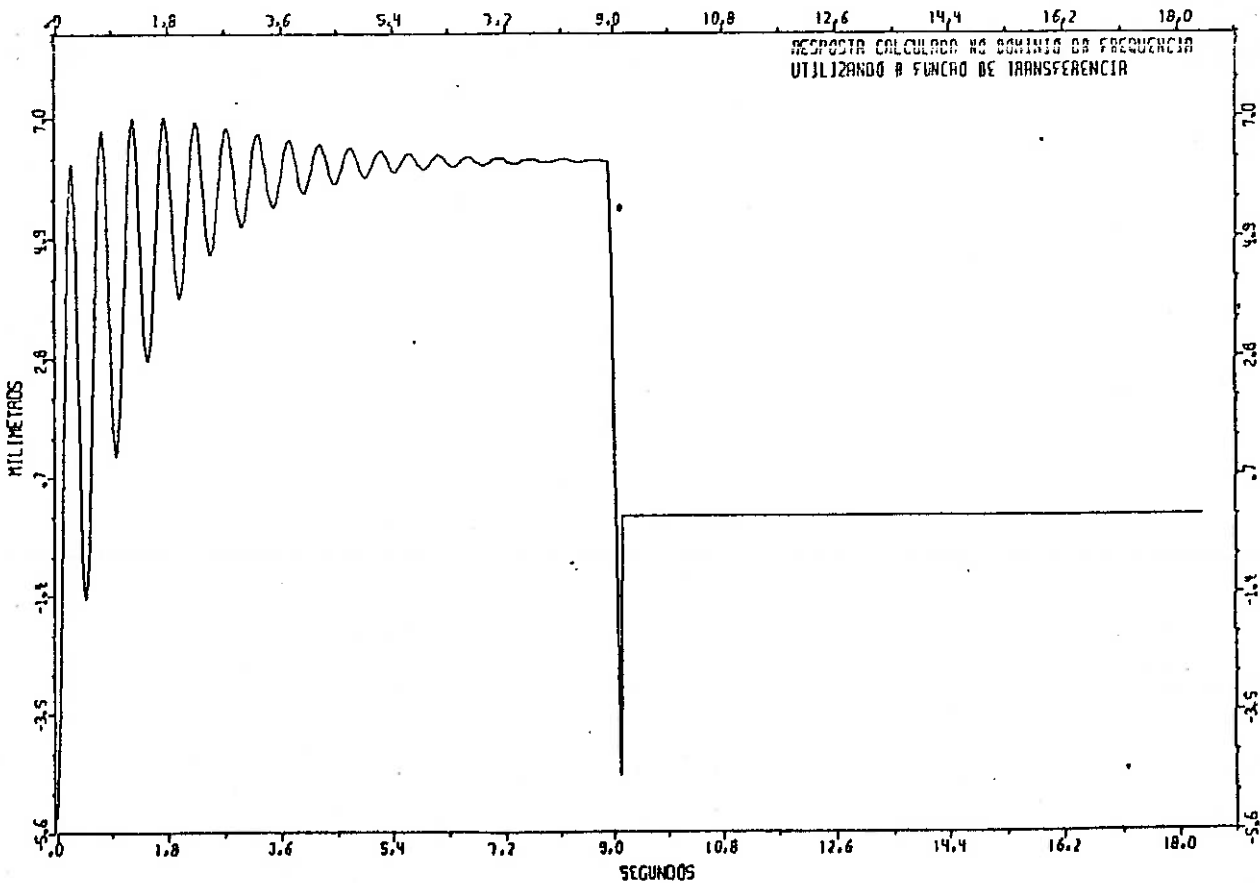


Figura (14.25)

verificar que esta última é obtida da primeira somando-se os deslocamentos que ocorrem no intervalo de 9,216 a 18,216 segundos com os que ocorrem no intervalo de 0 a 9 segundos. Isto equivale considerar um carregamento do tipo abaixo:

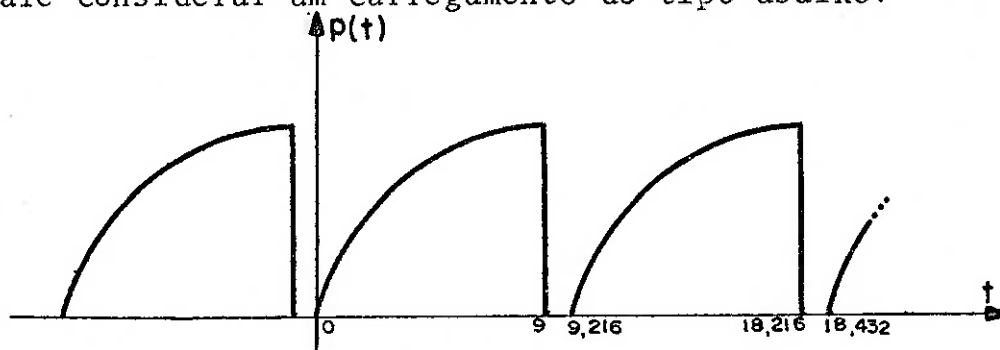


Figura (14.26)

O efeito da superposição pode ser facilmente verificado constatando-se que o deslocamento no instante inicial não é nulo.

14.5.5 - Resposta calculada no domínio da frequência utilizando a função de transferência sem dobrar a duração do carregamento.

Neste caso, o carregamento foi tomado com o mesmo número de termos do exemplo anterior.

Agora, além de aparecer o mesmo erro do exemplo anterior, aparece um outro, muito pequeno, devido ao fato da função de transferência não representar exatamente a transformada discreta da função de resposta truncada em 9,216 segundos.

Na figura (14.25) apresentamos o resultado obtido. Comparando-se esta com a (14.24) verifica-se que a diferença é praticamente desprezível.

14.5.6 - Comparação dos tempos de processamento

Na tabela (14.2) representamos os tempos gastos no processamento da resposta para cada um dos casos deste exemplo. Na primeira linha está o número de termos do carregamento, na segunda o procedimento adotado para se calcular a resposta e na terceira o tempo gasto no processamento em segundos.

Analisando este quadro, pode-se verificar que a análise

se no domínio da frequência sempre leva vantagem sobre a análise no domínio do tempo.

Mesmo aumentando o número de termos para se computar as transformadas a vantagem continua.

Quando se usa diretamente a função de transferência, o tempo de processamento é inferior ao que se obtém utilizando a transformada da função de resposta pois temos uma transformada a menos a ser calculada.

| | | | | | |
|-------|-------|------|------|------|------|
| N | 500 | 1024 | 1024 | 512 | 512 |
| PROC. | CONV. | TFR | FT | TFR | FT |
| TP | 10,27 | 7,68 | 5,27 | 3,72 | 2,43 |

Tabela (14.2)

CONV = Convolução

TRF = Transformada da função de resposta

FT = Função de transferência

14.6 - Resposta a um carregamento em exponencial decrescente

A seguir apresentamos um outro exemplo em que o carregamento é constituído por 500 pontos de uma exponencial decrescente, com intervalo de discretização de 0,018 segundos e duração de 9 segundos.

As características da estrutura são as mesmas do exemplo anterior.

As figuras (14.27) ilustram o carregamento e a resposta obtida no domínio do tempo.

As figuras (14.28) ilustram as respostas calculadas no domínio da frequência com a duração do carregamento aumentada para 18,432 segundos.

As figuras (14.29) ilustram o mesmo caso, porém com a duração do carregamento aumentada para 9,216 segundos.

Nota-se neste caso que, como os deslocamentos em vibrações livres são desprezíveis, aliás não foram nem detectadas pela precisão de Plotter, não houve erro considerável introduzida pelo "aliasing" no domínio do tempo.

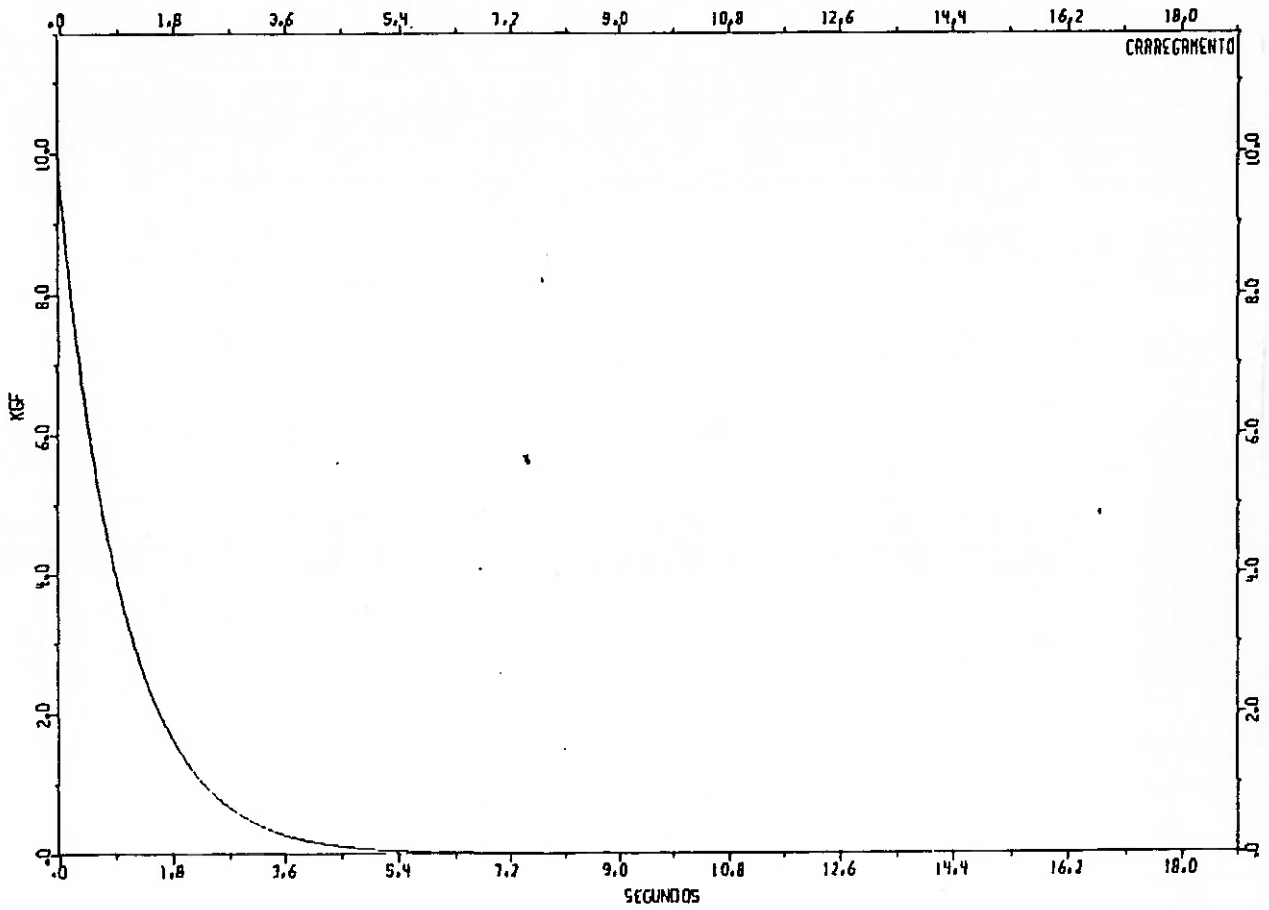


Figura (14.27-a)

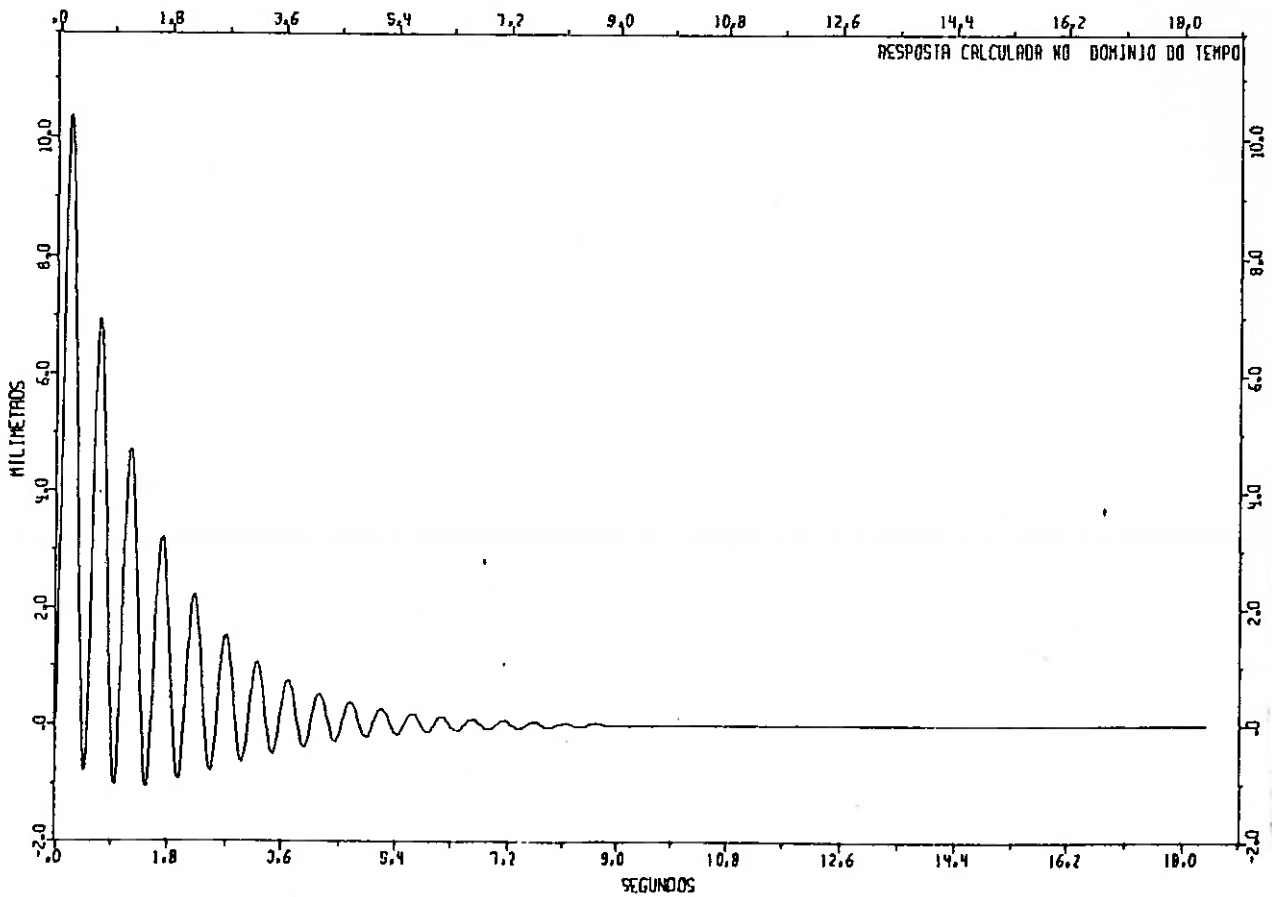


Figura (14.27-b)

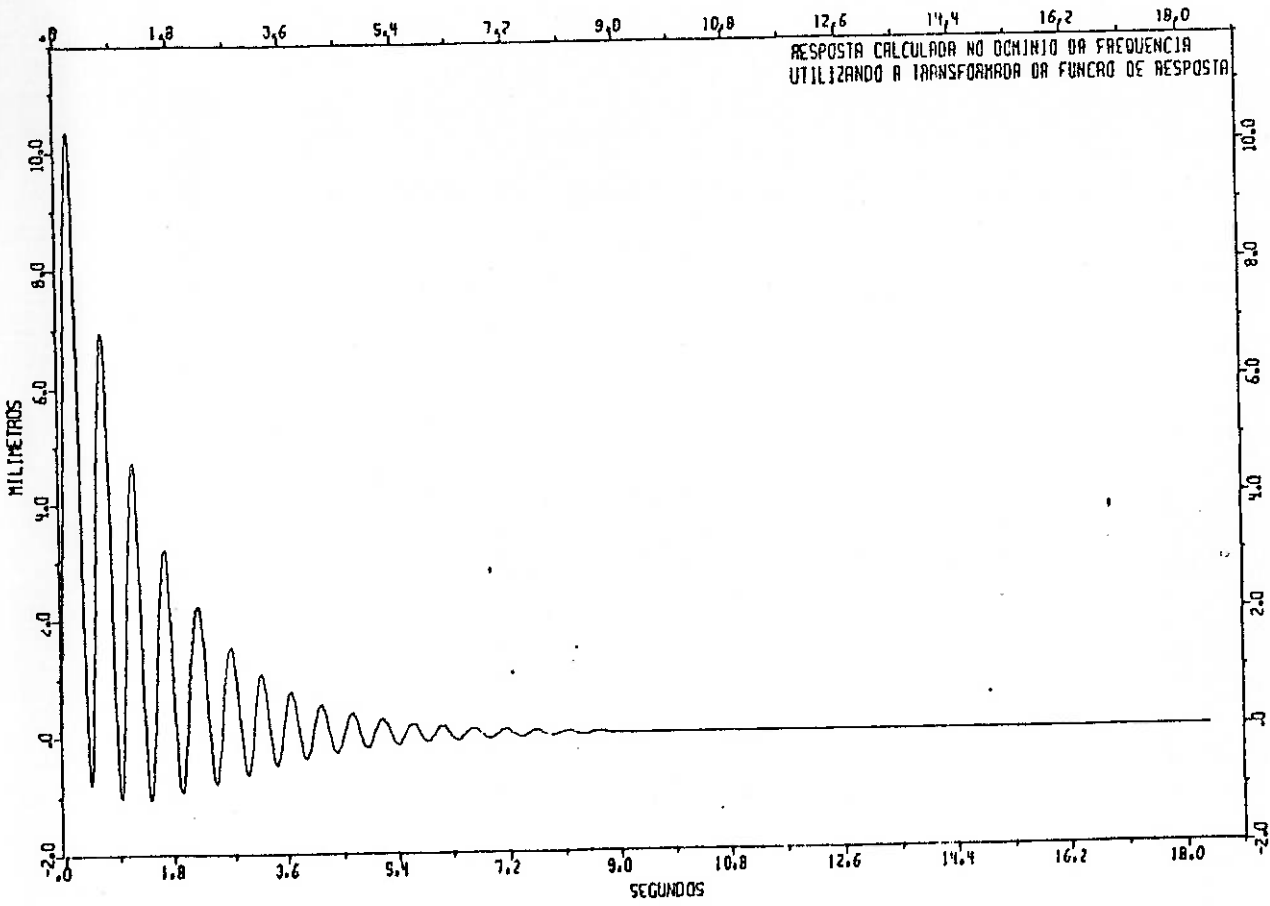


Figura (14.28-a)

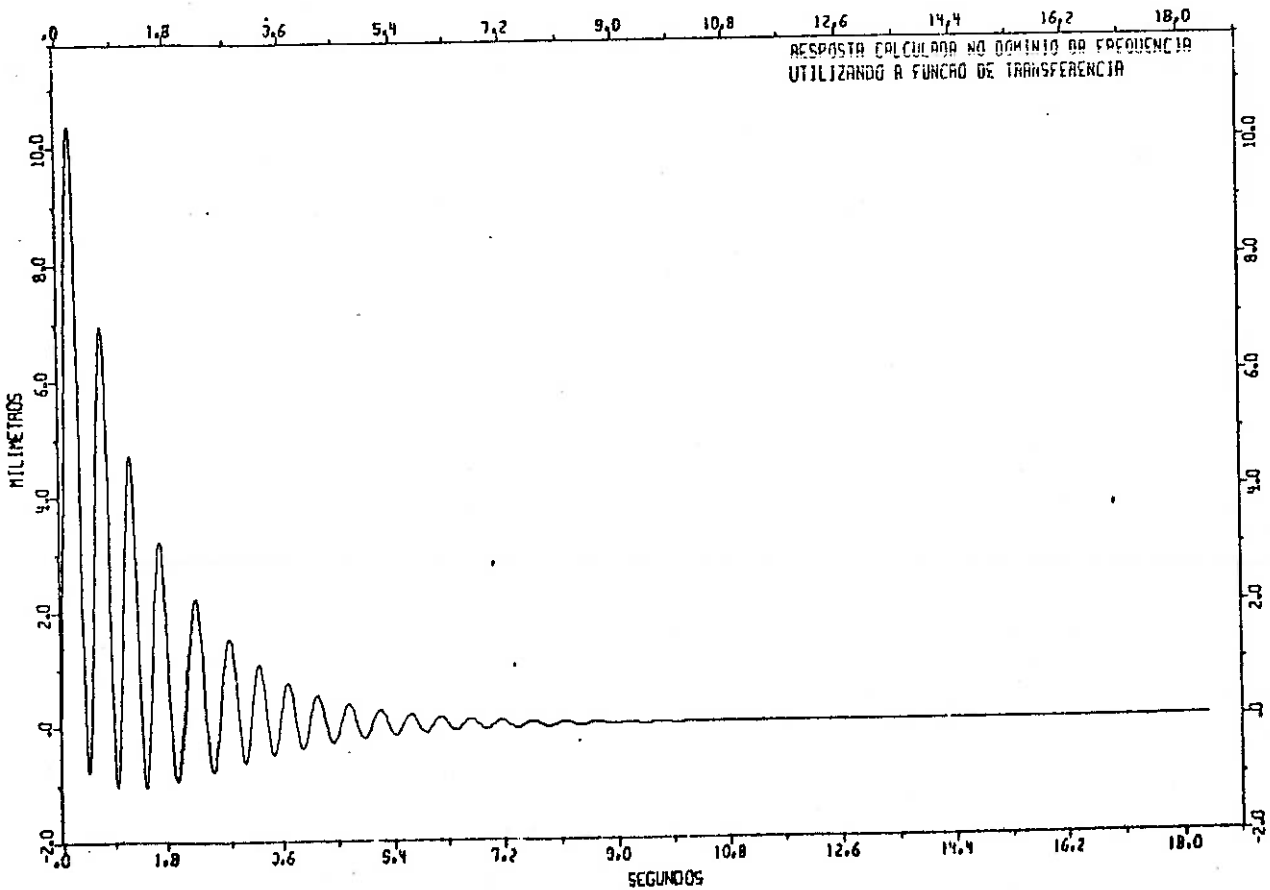


Figura (14.28-b)

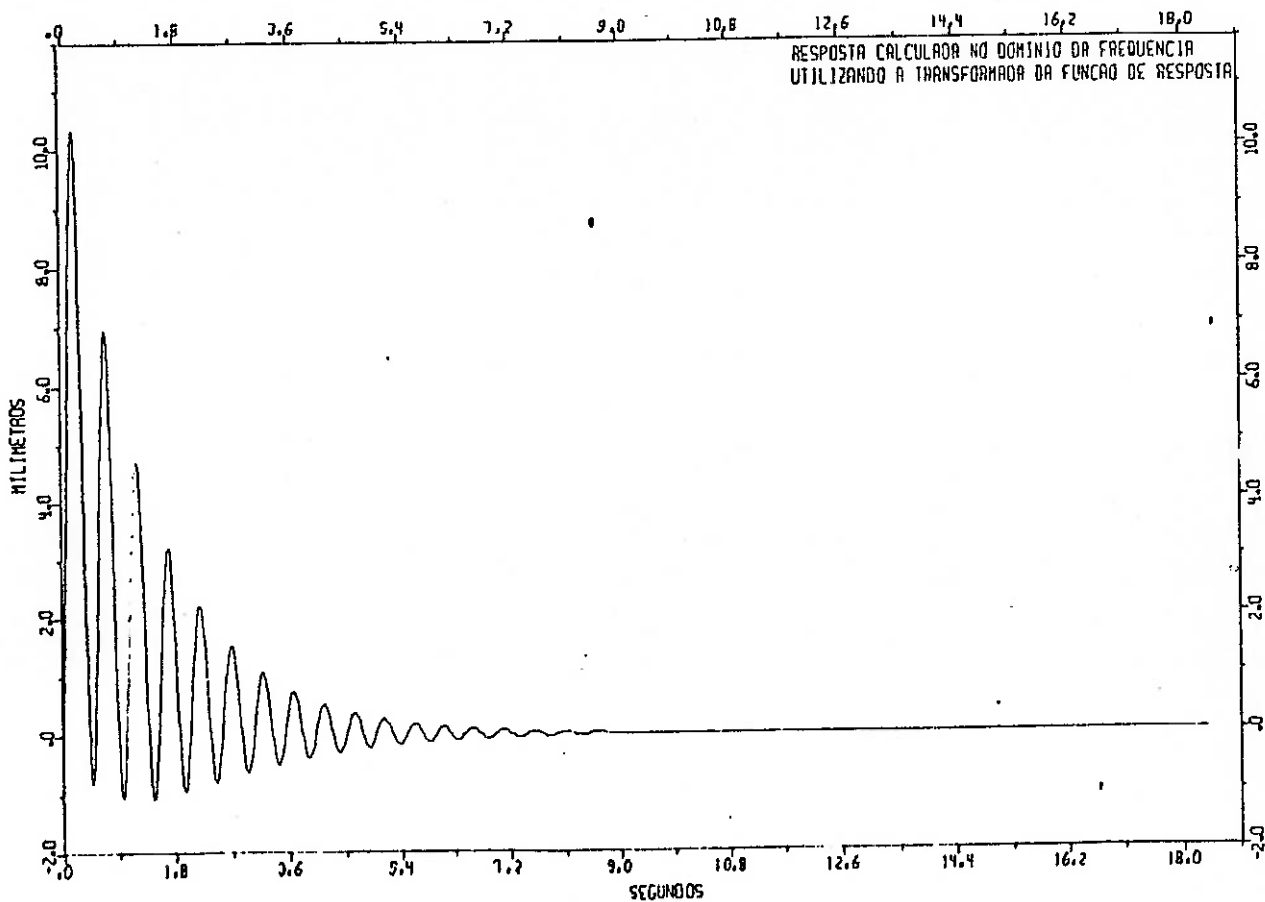


Figura (14.29-a)

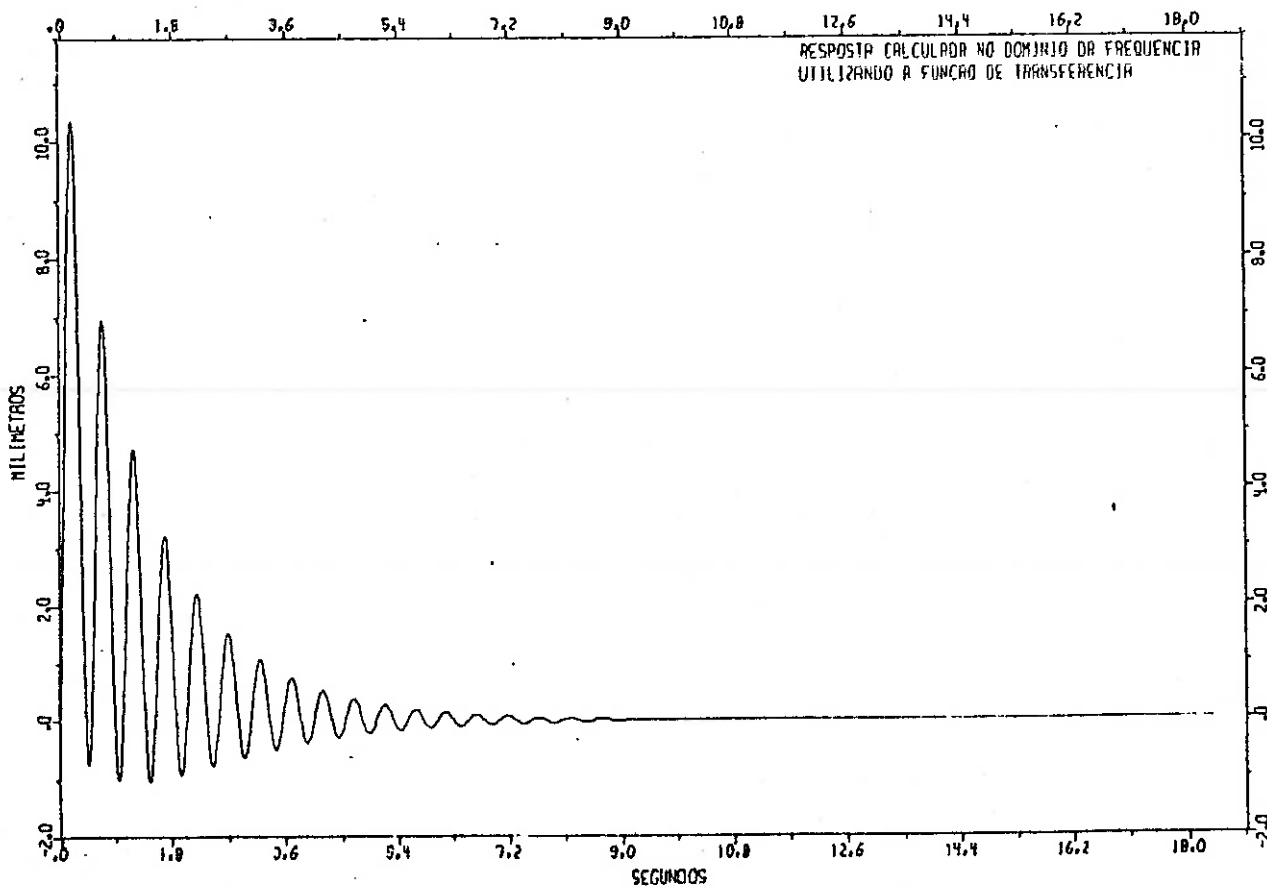


Figura (14.29-b)

Na tabela (14.3) representamos o tempo gasto no pro cessamento em cada caso.

| | | | | | |
|-------|-------|------|------|------|------|
| N | 500 | 1024 | 1024 | 512 | 512 |
| PROC. | CONV. | TFR | FT | TFR | FT |
| TP | 10,34 | 8,08 | 5,50 | 3,78 | 2,53 |

Tabela (14.3)

14.7 - Resposta a um carregamento sísmico.

Apresentamos agora um caso em que não conhecemos a função $p(t)$ que descreve o carregamento mas sim uma sequência de pontos representativo do mesmo.

Trata-se de um acelerograma de terremoto, artificial, fornecido pela KWU, e utilizado como dado de projeto em usinas nucleares. O mesmo possui 1500 pontos espaçados de 0,01 segundos, com duração total de 15 segundos.

As acelerações foram transformadas em forças, utilizando a expressão (12.22), e a seguir toda a sequência foi deslocada da média obtendo assim um carregamento de média zero.

Os dados da estrutura são os mesmos dos exemplos anteriores.

No cálculo da resposta via domínio da frequência, a sequência do carregamento foi aumentada para 4096 termos tendo sua duração passado para 40,96 segundos.

Como neste caso a duração do carregamento é suficientemente longa e o intervalo de discretização suficientemente pequeno, as duas respostas obtidas no domínio da frequência praticamente são idênticas.

A tabela (14.4) mostra o tempo gasto no cálculo de cada resposta e as figuras (14.30), (14.31), (14.32) e (14.33) ilustram o carregamento e as respostas obtidas.

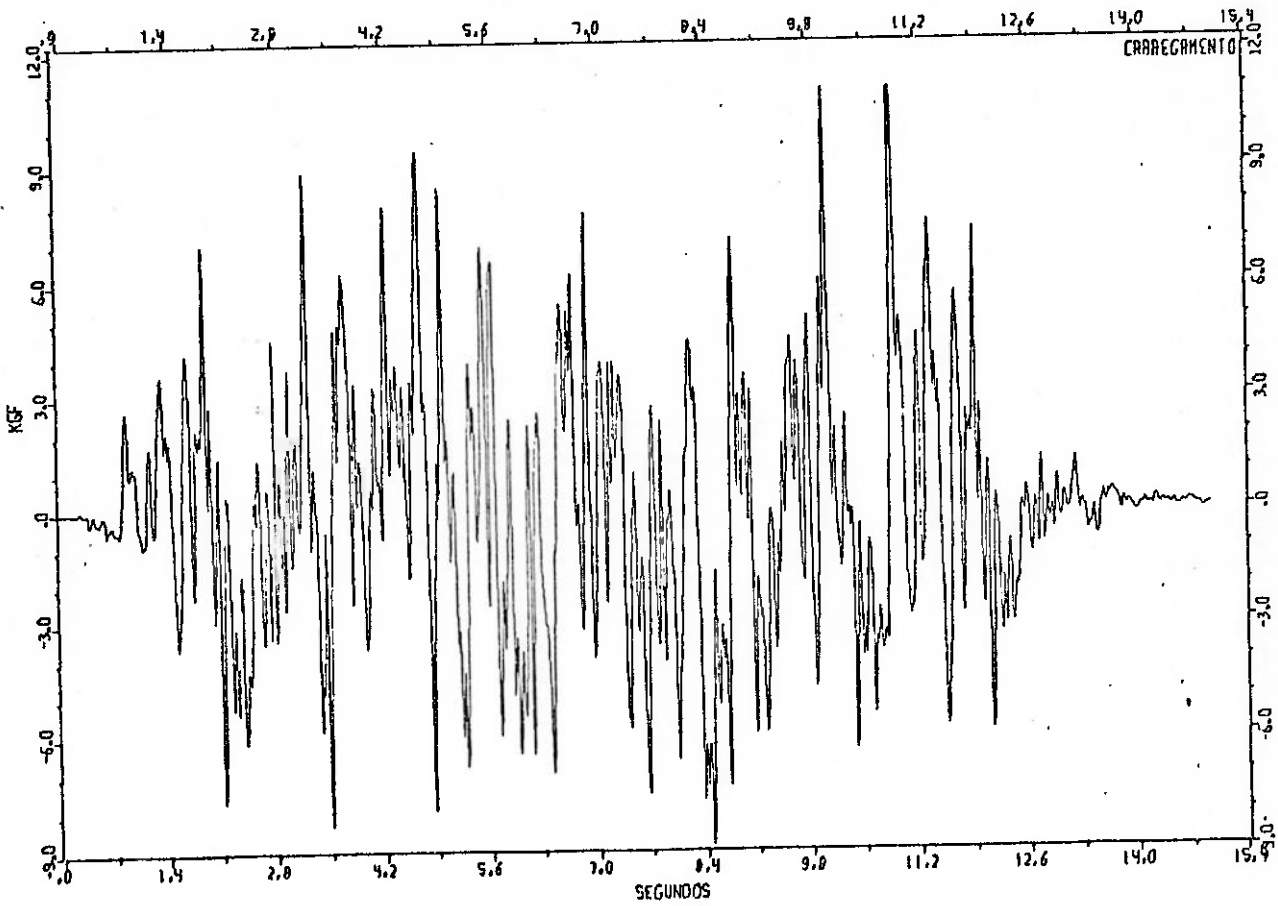


Figura (14.30)

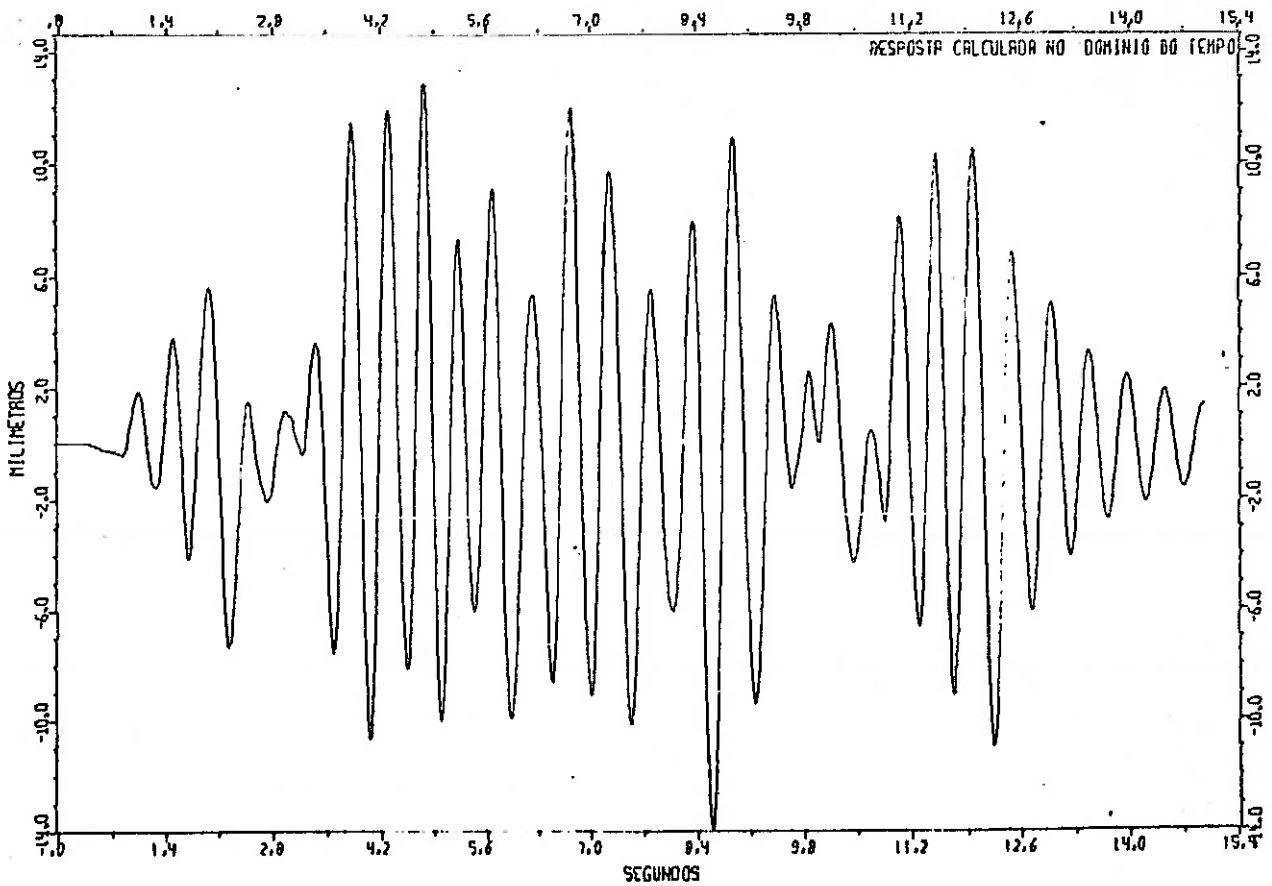


Figura (14.31)

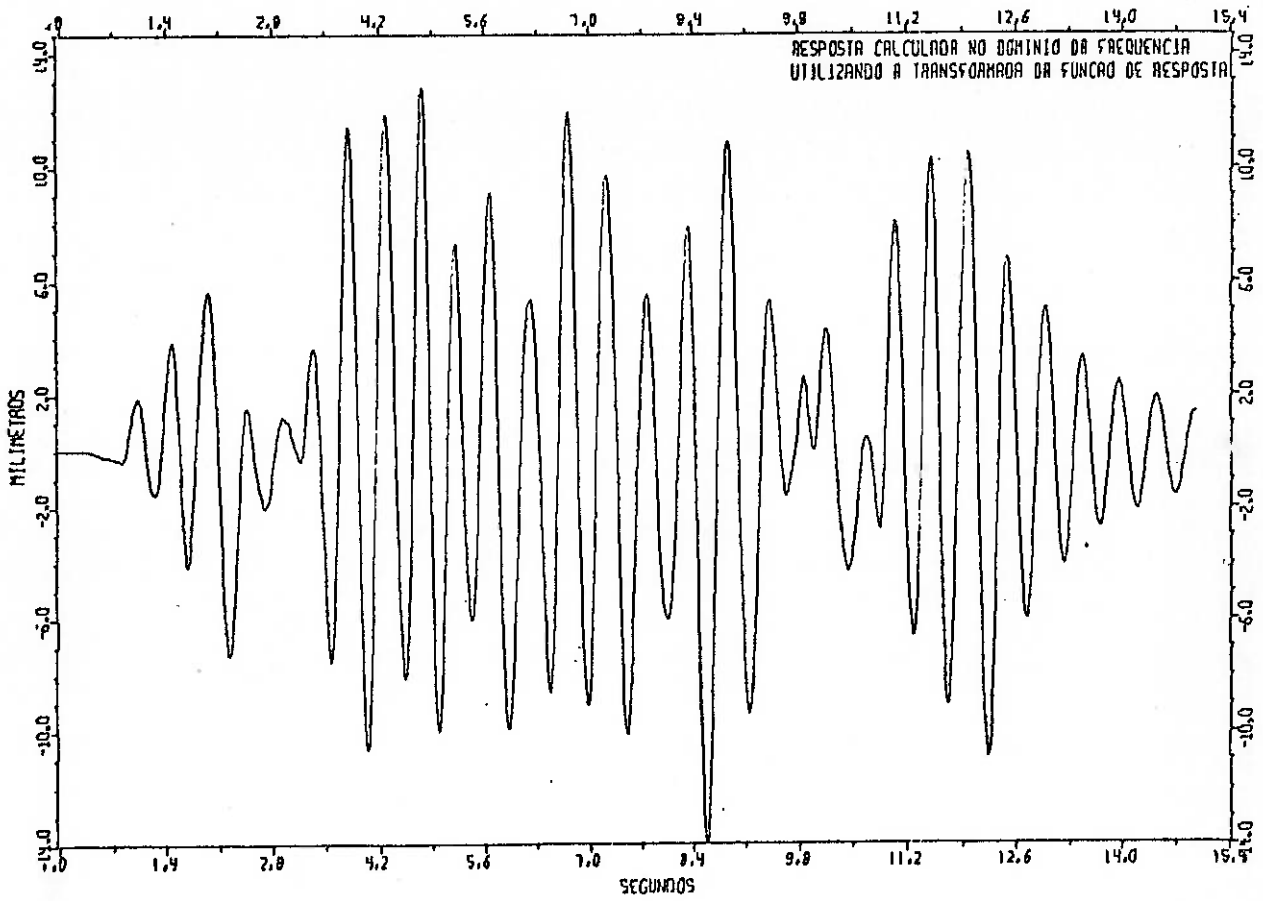


Figura (14.32)

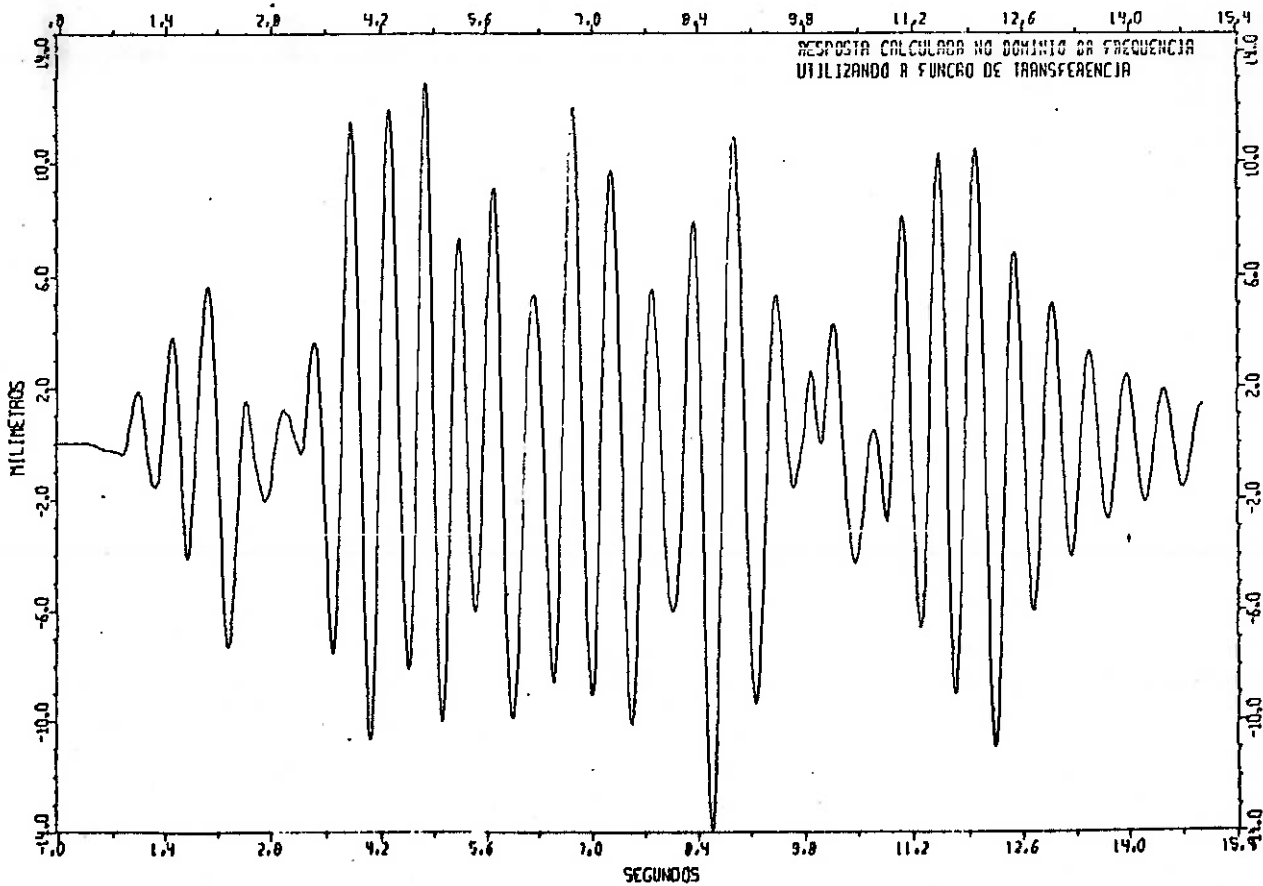


Figura (14.33)

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| N | 1500 | 4096 | 4096 |
| PROC. | CONV. | TFR | FT |
| TP | 88,85 | 35,18 | 24,08 |

Tabela (14.4)

14.8 - Espectro de resposta de um terremoto.

Quando submetemos um sistema linear de um grau de liberdade a acelerações em sua base $\ddot{v}_g(t)$, os deslocamentos do mesmo podem ser obtidos resolvendo-se a equação diferencial:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_g(t)$$

Levando-se em conta a expressão (12.6) temos:

$$m\ddot{v}(t) + 2m\xi\omega_0 \dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_g(t)$$

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{v}(t) + \omega_0^2 v(t) = -\ddot{v}_g(t)$$

o que mostra que os deslocamentos dependem do acelerograma, da frequência natural e da porcentagem de amortecimento.

Para uma mesma estrutura, se variamos a rigidez e a massa, mantendo constante a razão entre elas, a resposta não se altera.

Baseado nesta propriedade procura-se, no projeto de estruturas resistentes a sismos, verificar como varia a resposta máxima da mesma em função de sua frequência natural para um determinado acelerograma e porcentagem de amortecimento.

O deslocamento $v(t)$ em um instante qualquer pode ser obtido pela integral de Duhamell.

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t -m\ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau$$

Como o sinal negativo não tem nenhum significado físico real pois, o que interessa é o deslocamento máximo em módulo, temos:

$$v(t) = \frac{1}{\omega d} \int_0^t \ddot{v}g(t) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \text{sen}\omega d(t-\tau) d\tau$$

O deslocamento máximo é dado então por:

$$v_{\max} = \frac{1}{\omega d} \text{SRv}(\xi, \omega) \quad (14.11)$$

onde:

$$\text{SRv}(\xi, \omega) = \left[\int_0^t \ddot{v}g(t) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \text{sen}\omega d(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (14.12)$$

e é chamada de velocidade espectral, por ter unidade de velocidade.

Chama-se de espectro de resposta ao gráfico no qual marcamos em abcissas o período ou a frequência da estrutura e em ordenadas os valores de SRv correspondentes a estas frequências.

O gráfico é construído em escala logarítmica e costuma-se, para um determinado terremoto, traçar uma curva para cada porcentagem de amortecimento.

A análise deste gráfico pode ser muito útil no projeto permitindo que se escolha a frequência natural da estrutura para que a resposta máxima não ultrapasse certos níveis.

É bom lembrar que o espectro de resposta não deve ser confundido com o espectro de Fourier da resposta.

Utilizando o programa resposta, procuramos construir este gráfico para o acelerograma que gerou o carregamento da figura (14.30), para uma porcentagem de amortecimento de 5%.

Para isto foi-se variando a frequência natural da estrutura, variando a relação entre a massa e a rigidez, e calculando-se a resposta máxima, em módulo, para cada caso.

Os valores da velocidade espectral foram obtidos através de:

| f_0 (hz) | ω_0 (rad/seg) | ω_d (rad/seg) | P_0 (seg) | v_{\max} (mm) | $v_{\max} \cdot \omega_d$ (mm/seg) | Proc. |
|---------------|-------------------------|-------------------------|----------------|--------------------|---------------------------------------|-------|
| 10,00 | 62,83 | 62,75 | 0,10 | 0,55 | 34,51 | FT |
| 5,00 | 31,42 | 31,38 | 0,20 | 2,26 | 70,92 | FT |
| 4,00 | 25,13 | 25,10 | 0,25 | 4,00 | 100,40 | FT |
| 3,00 | 18,85 | 18,83 | 0,33 | 7,03 | 132,37 | FT |
| 2,50 | 15,71 | 15,69 | 0,40 | 10,46 | 164,12 | FT |
| 2,00 | 12,57 | 12,55 | 0,50 | 14,47 | 181,60 | FT |
| 1,25 | 7,85 | 7,84 | 0,80 | 28,85 | 226,18 | FT |
| 1,00 | 6,28 | 6,28 | 1,00 | 36,35 | 228,28 | FT |
| 0,80 | 5,03 | 5,02 | 1,25 | 46,44 | 233,13 | TFR |
| 0,50 | 3,14 | 3,14 | 2,00 | 80,77 | 253,62 | TFR |
| 0,40 | 2,51 | 2,51 | 2,50 | 127,79 | 320,75 | TFR |
| 0,33 | 2,09 | 2,09 | 3,00 | 175,76 | 367,34 | TFR |
| 0,25 | 1,57 | 1,57 | 4,00 | 177,19 | 278,19 | TFR |
| 0,20 | 1,26 | 1,26 | 5,00 | 225,09 | 283,56 | TFR |
| 0,10 | 0,63 | 0,63 | 10,00 | 470,79 | 296,60 | TFR |

Tabela (14.5)

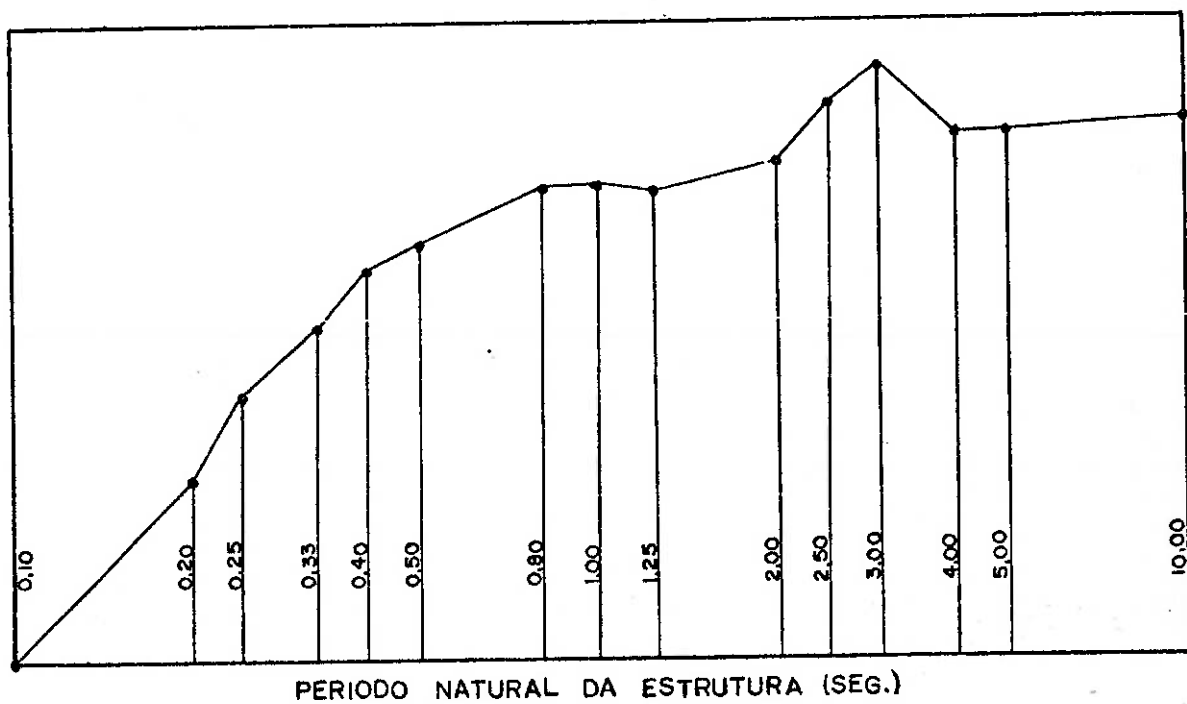


Figura (14.34)

$$SRv(\xi, \omega) = v_{\max} \cdot \omega d$$

A tabela (14.5) resume os resultados obtidos e na figura (14.34) apresentamos o espectro de resposta.

14.9 - Comparação das respostas obtidas via domínio da frequência.

Na construção do espectro de resposta da figura (14.34) as respostas foram obtidas através do domínio da frequência.

Em todos os casos a sequência do carregamento foi aumentada para 4096 termos tendo a duração do mesmo passado para 40,96 segundos.

Para frequências naturais muito altas podemos utilizar a discretização da função de transferência. De fato, no primeiro caso, considerando o intervalo de truncamento de 40,96 segundos, o valor da expressão (14.8) neste instante será:

$$e^{-\xi\omega_0 T d} = 1,26 \times 10^{-56}$$

o que mostra que a discretização da função de transferência não introduz nenhuma distorção na função de resposta devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

Além disto, as respostas em vibrações livres que ocorrem após o instante de 40,96 segundos são igualmente desprezíveis devido ao mesmo motivo anterior.

Para este caso poderíamos até ter considerado apenas 2048 termos que o erro ainda seria desprezível.

No entanto, para frequências muito baixas, tivemos que utilizar a transformada da função de resposta. Se verificarmos o decaimento da exponencial no último exemplo para um intervalo de 40,96 segundos, teremos:

$$e^{-\xi\omega_0 T d} = 0,276$$

o que demonstra que a discretização da função de transferência poderia introduzir erros consideráveis.

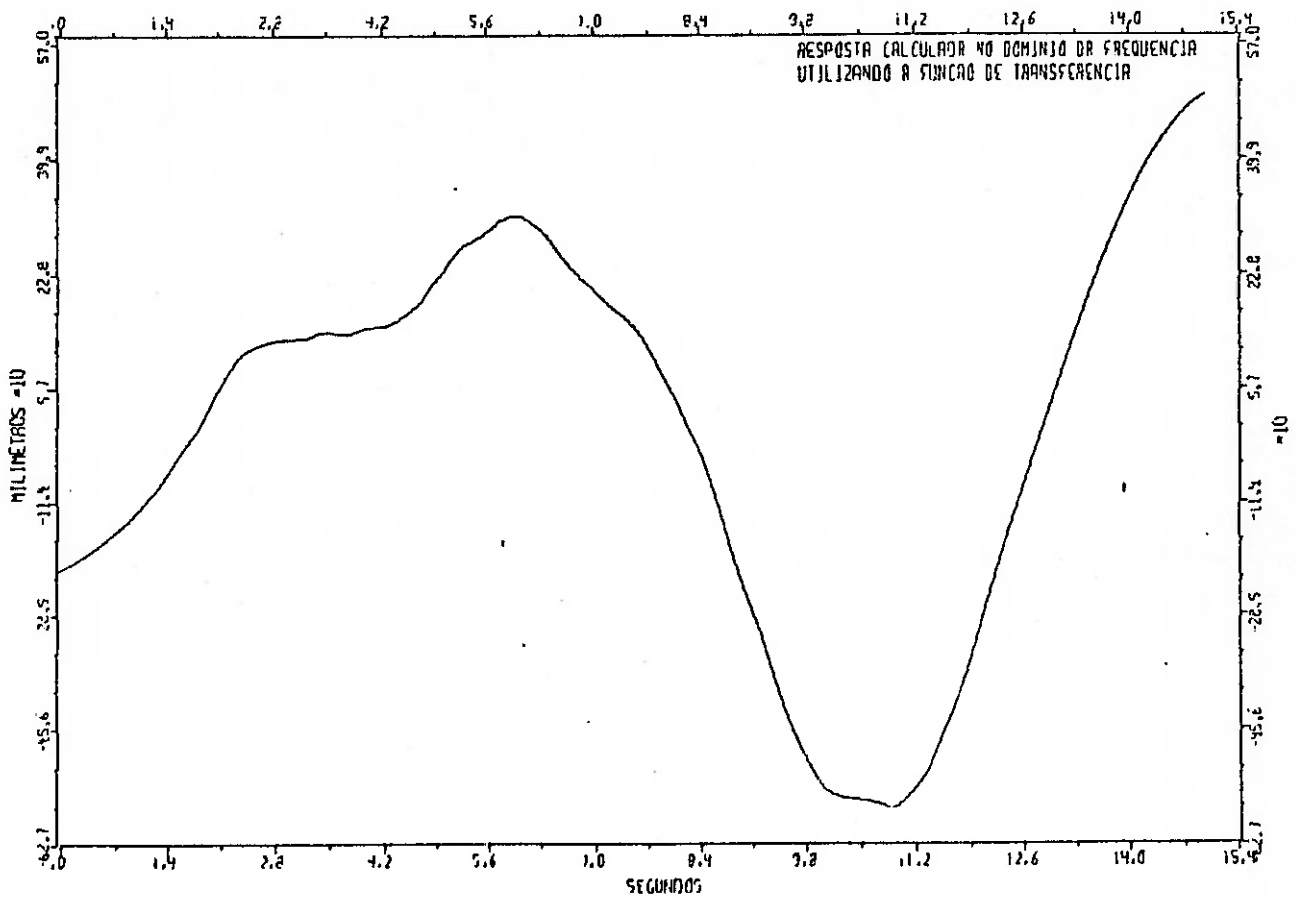


Figura (14.35-a)

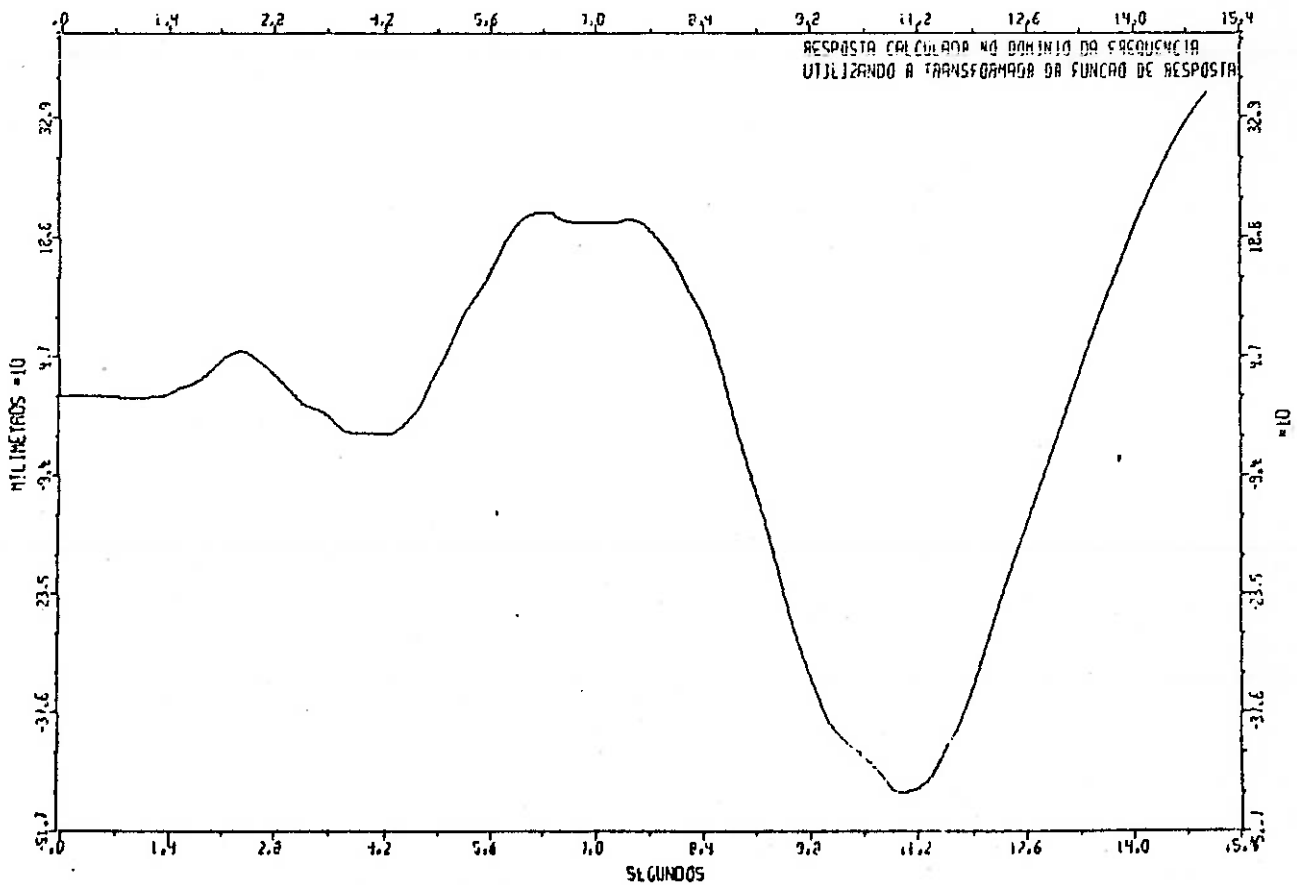


Figura (14.35-b)

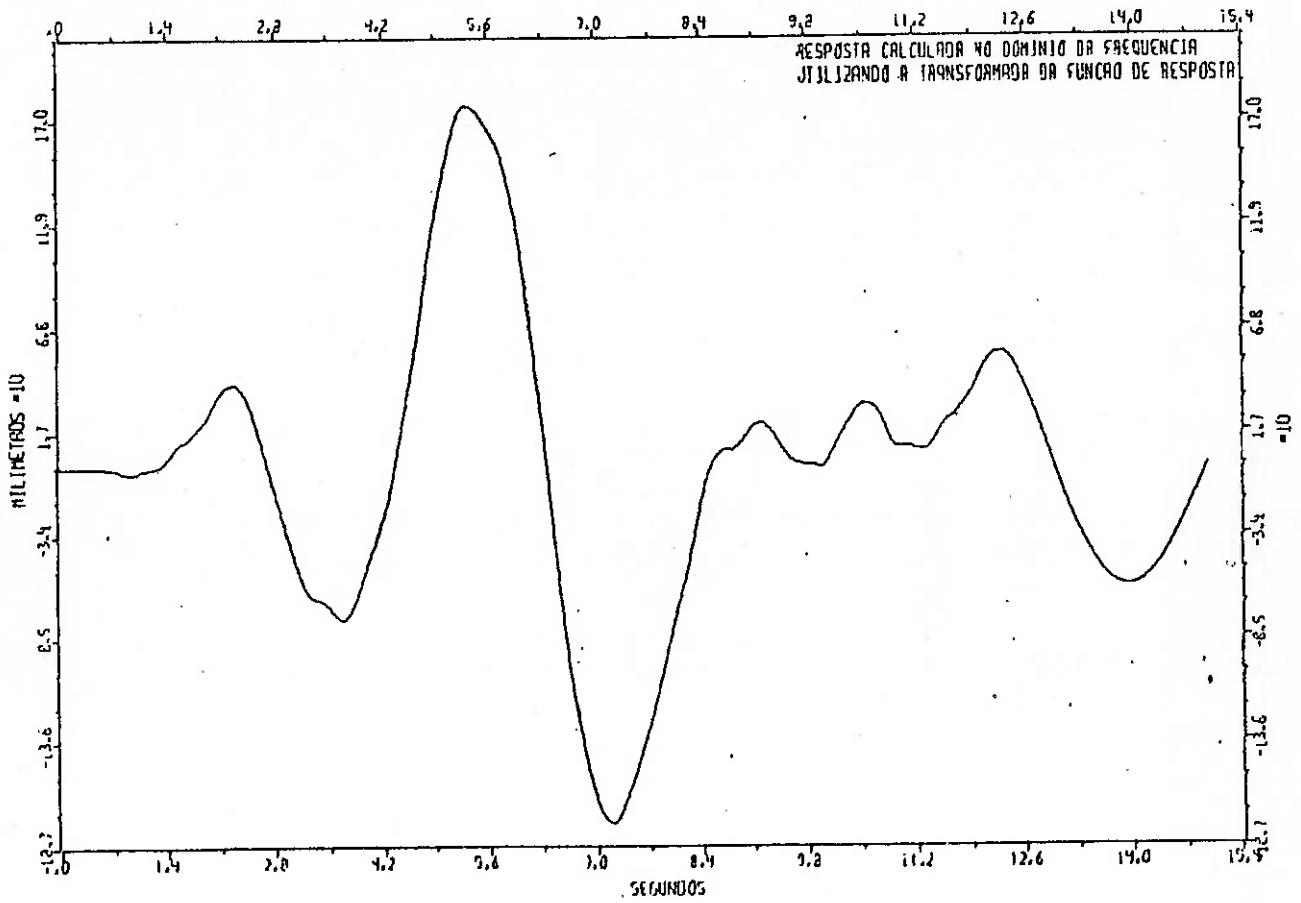


Figura (14.36) $f_0 = 0,25 \text{ hz}$

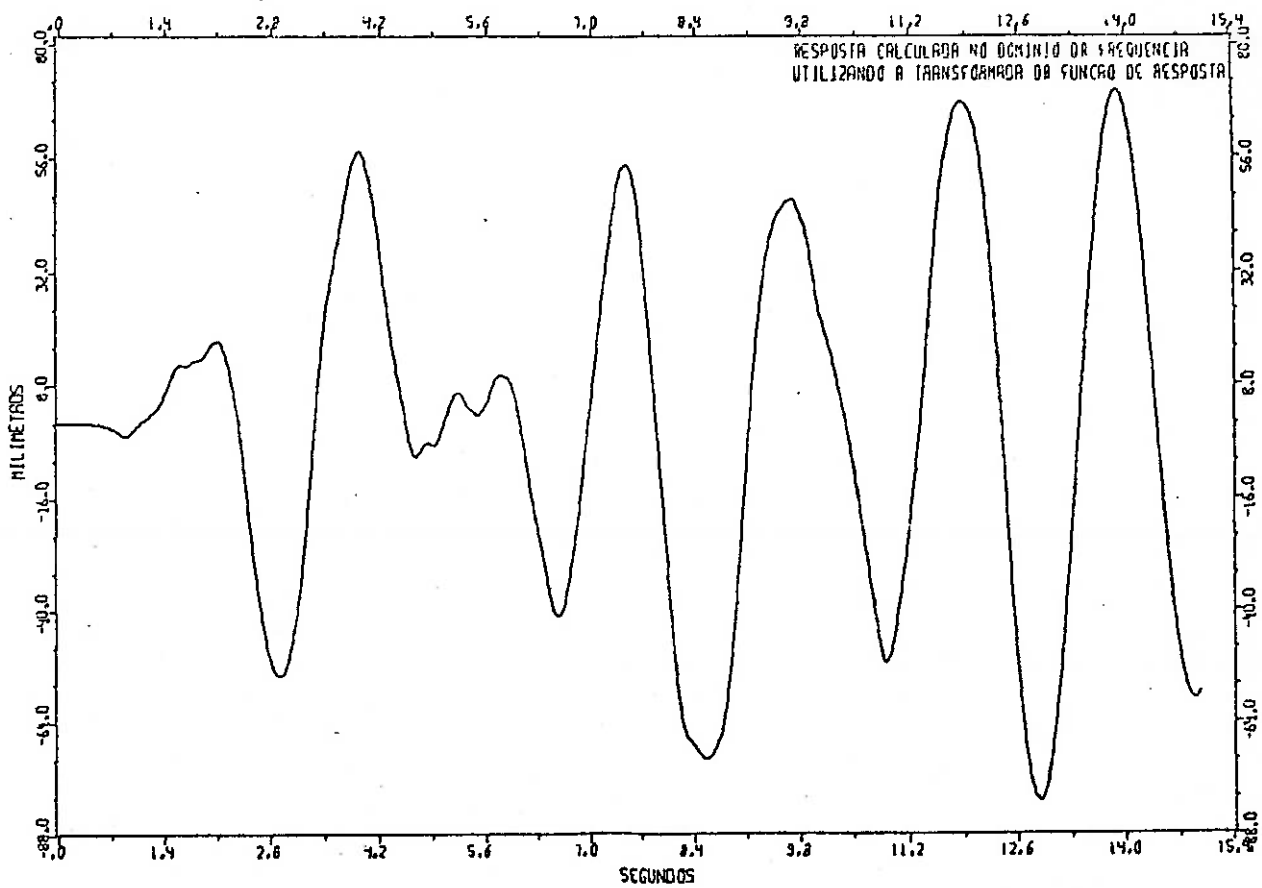


Figura (14.37) $f_0 = 0,50 \text{ hz}$

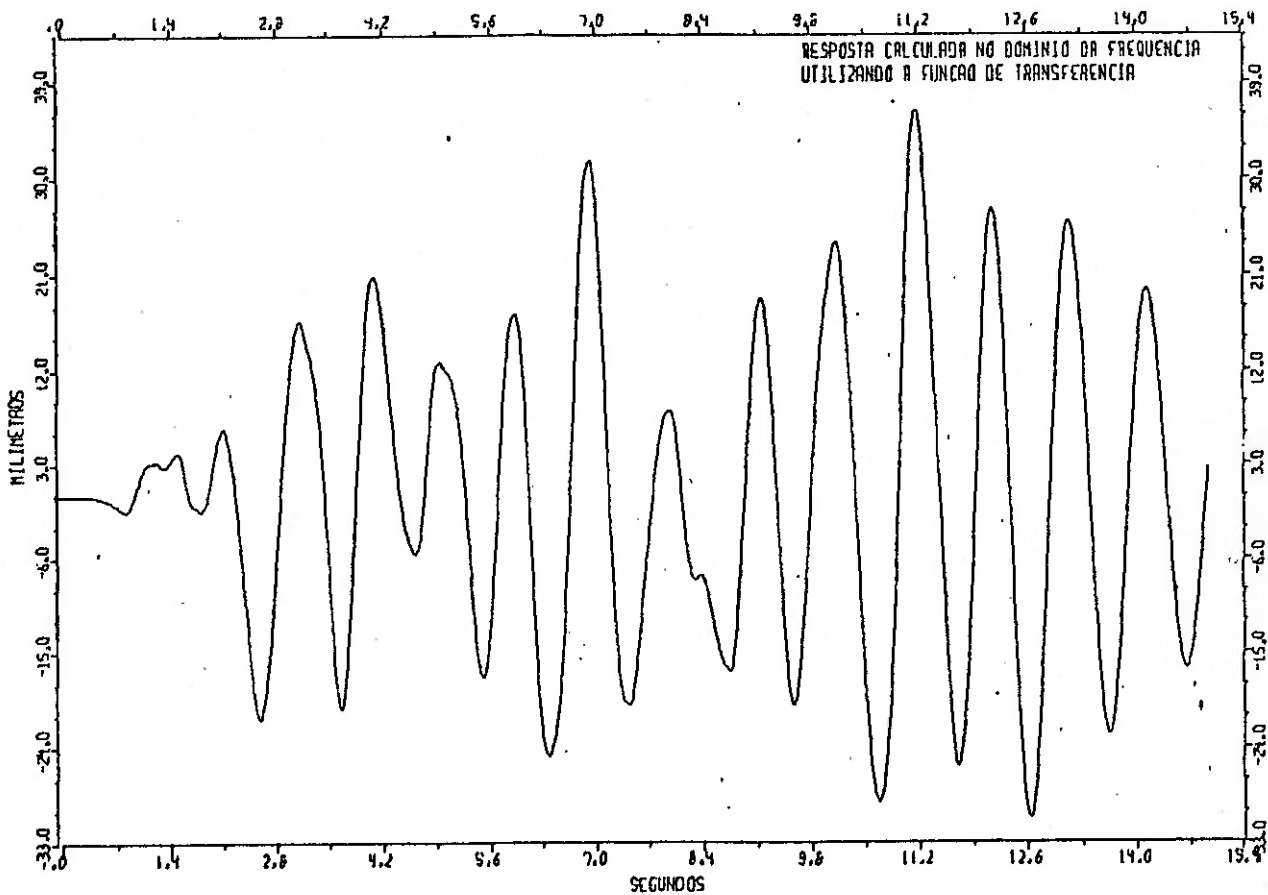


Figura (14.38) $f_0 = 1,00 \text{ hz}$

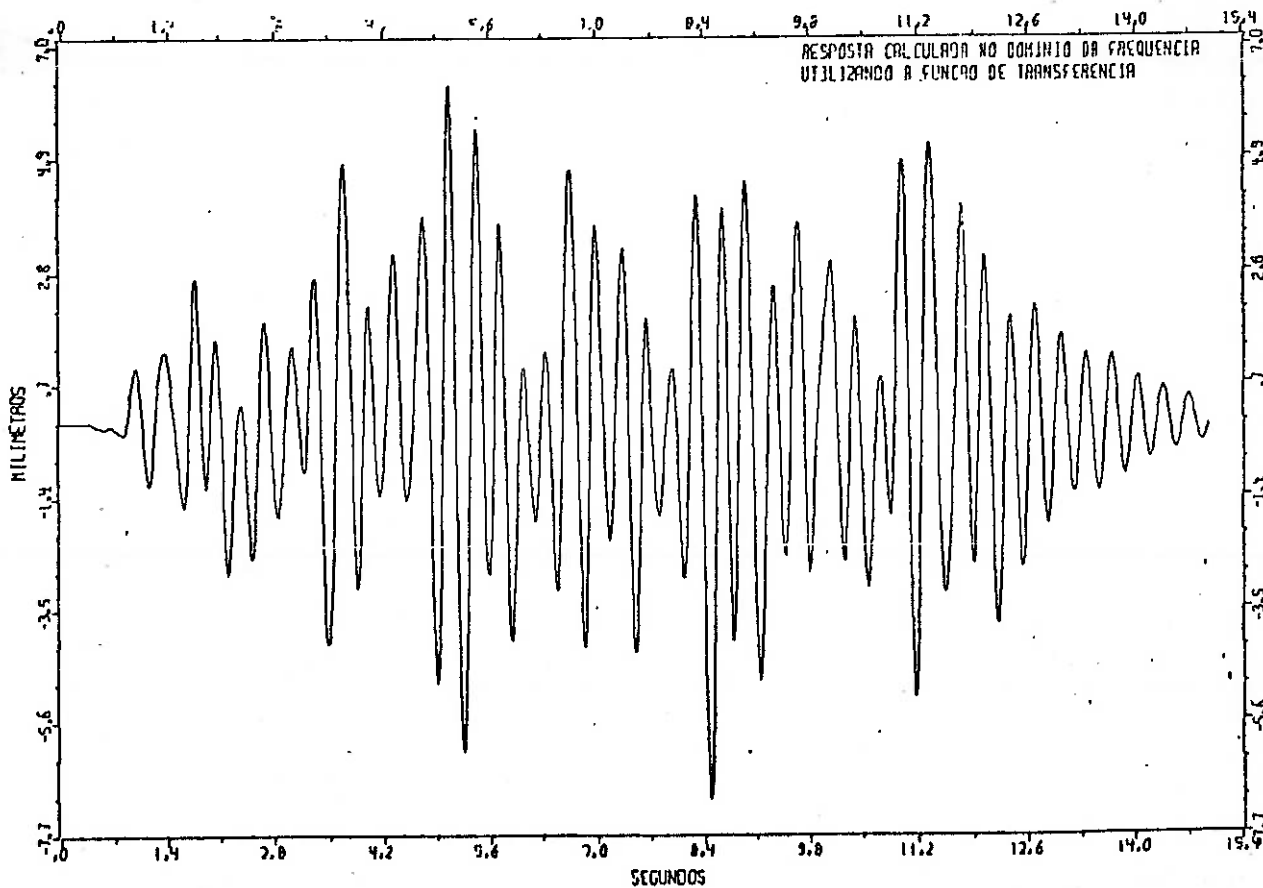
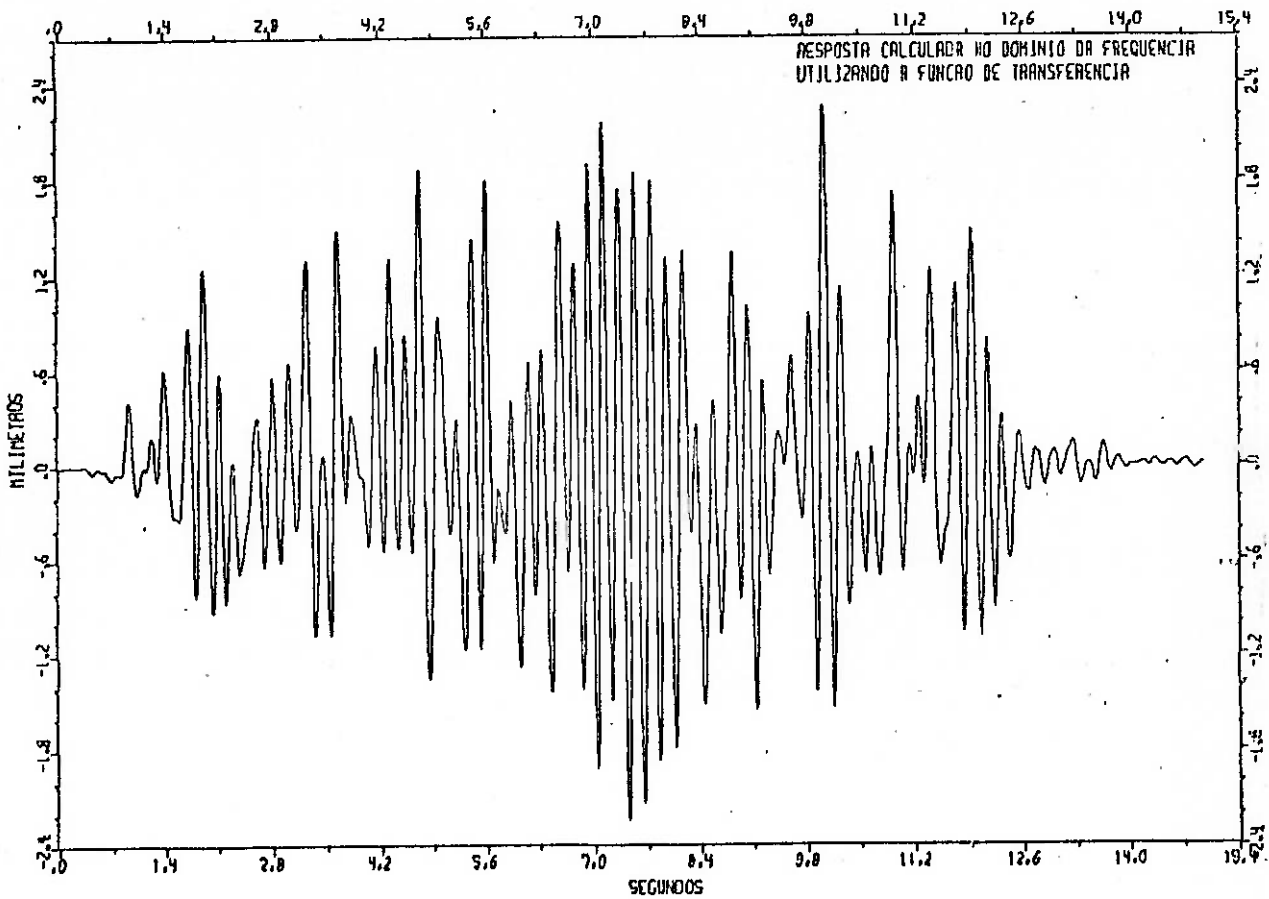
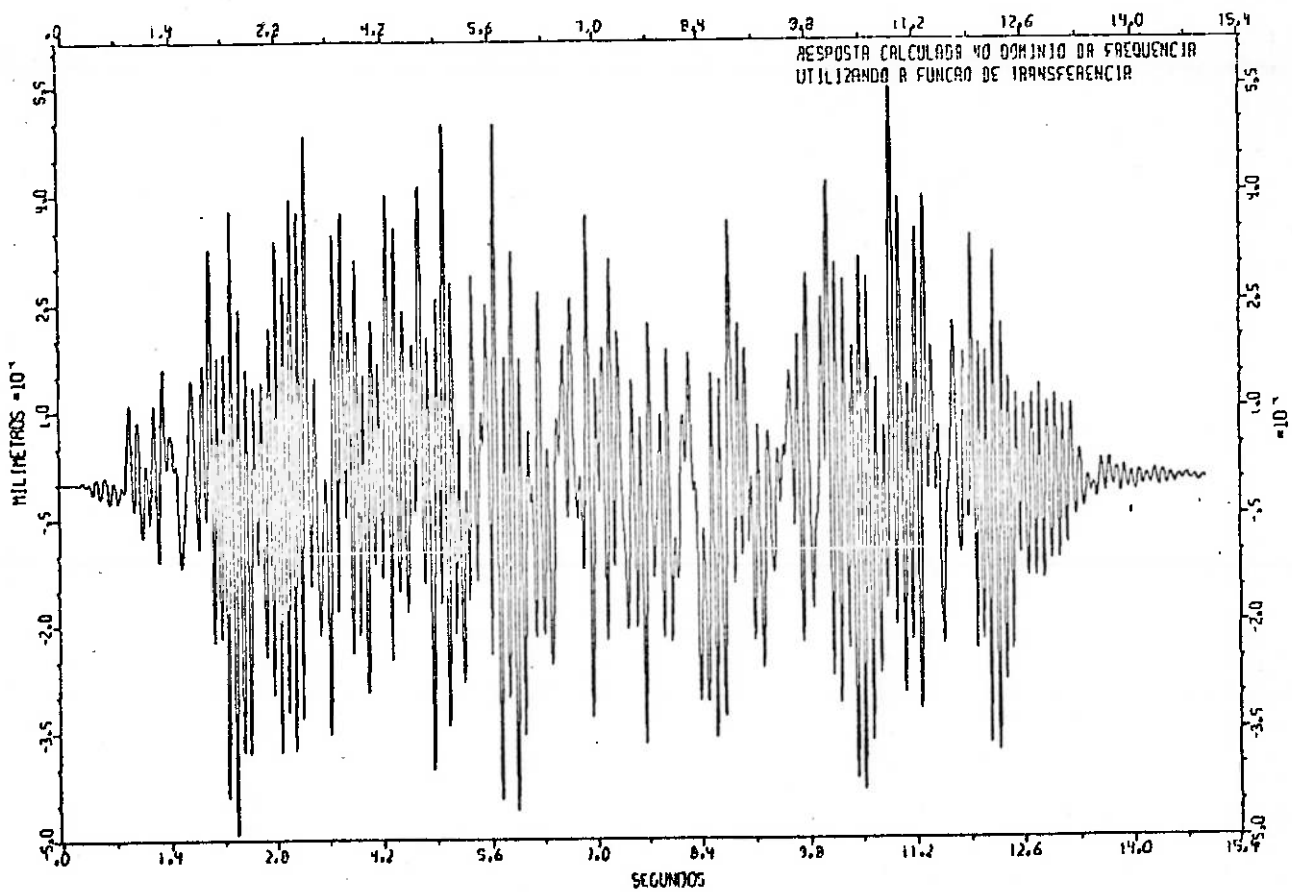


Figura (14.39) $f_0 = 3,00 \text{ hz}$

Figura (14.40) $f_0 = 5,00$ hzFigura (14.41) $f = 10,00$ hz

Se neste último caso quiséssemos utilizar este procedimento e fixássemos o erro em 0,001 deveríamos ter:

$$e^{-\xi\omega_0 T_d} \leq 0,001 \quad T_d \geq 220 \text{ segundos}$$

Como aumentando o número de termos aumenta-se o tempo de cálculo das transformadas, este procedimento poderia não ser vantajoso.

Na última coluna da tabela (14.5) apresentamos o processo utilizado no cálculo de cada resposta.

A título de exemplo, apresentamos nas figuras (14.35) as respostas calculadas utilizando os dois processos para o caso em que a frequência é de 0,63 rad/seg.

Pode-se notar o erro introduzido neste caso ao se utilizar a função de transferência. O "aliasing" no domínio do tempo introduzido na função de resposta pode ser percebido verificando-se que o deslocamento no instante inicial não foi nulo.

A seguir apresentamos nas figuras de números (14.36) a (14.41) as respostas obtidas para outras frequências naturais da estrutura. É interessante observar a influência da frequência natural no tipo de resposta obtida.

14.10 - Transmissão de um acelerograma

Consideremos o pórtico da figura (14.42) sujeito a acelerações $\ddot{v}_g(t)$ em sua base.

Os deslocamentos da viga superior podem ser determinados supondo um carregamento $p(t)$, atuando na mesma, dado por (12.22).

$$p(t) = -m\ddot{v}_g(t)$$

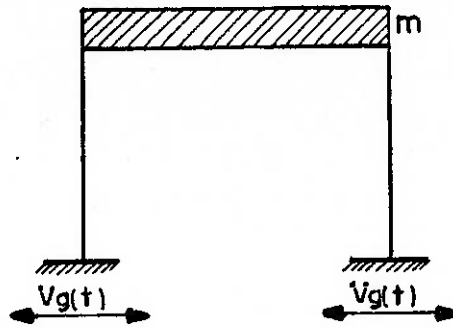


Figura (14.42)

Existem casos em que, conhecido os deslocamentos de um ponto da estrutura, é desejável se determinar as acelerações a que o mesmo está sujeito.

Estas acelerações podem ser determinadas a partir dos deslocamentos por diferenças finitas.

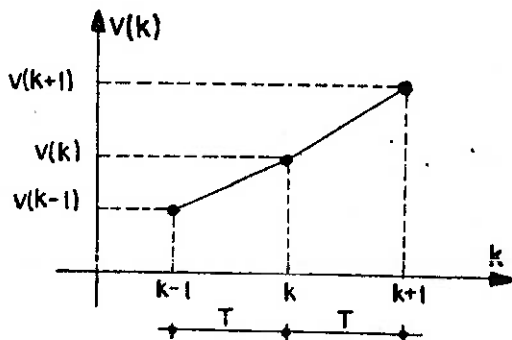


Figura (14.43)

$$\ddot{v}(k) = \frac{v(k+1) - 2v(k) + v(k-1)}{T^2} \quad (14.13)$$

A sequência $\ddot{v}_g(k)$ fornece as acelerações, em função do tempo, a que a base está sujeita. A sequência $\ddot{v}(k)$ fornece as acelerações, em função do tempo, a que a viga está sujeita.

Conforme as características da estrutura, estas acelerações podem ser tanto amplificadas como amortecidas.

Como exemplo, vamos considerar novamente o mesmo caso do ítem (14.5). Na figura (14.44) mostramos o acelerograma que deu origem ao carregamento da figura (14.30).

Para obter o carregamento basta multiplicar estas acelerações por 10 , que é a massa do sistema.

Como a resposta foi obtida através do domínio da fre

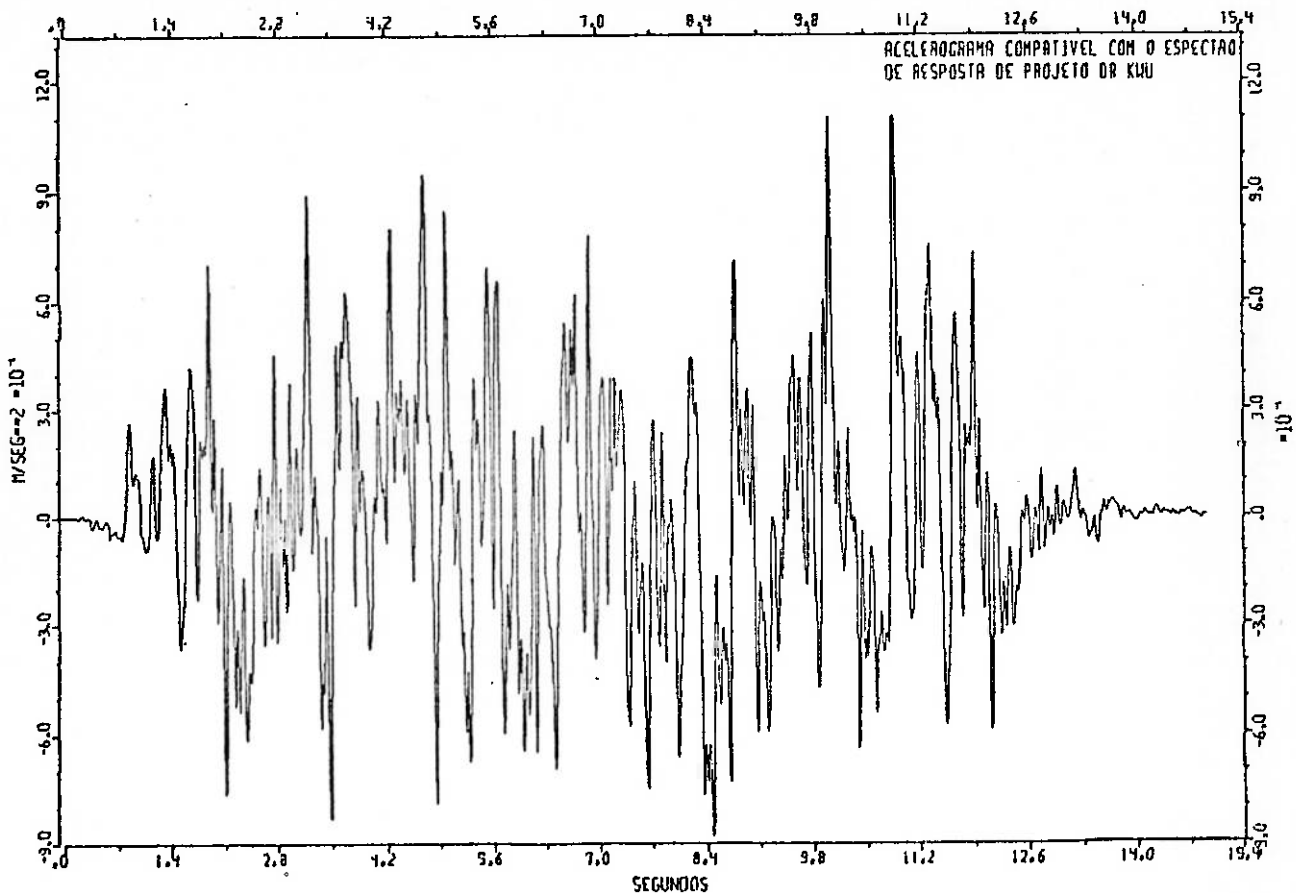


Figura (14.44)

quência, temos que obter primeiramente a transformada de Fourier do carregamento. A mesma é apresentada, apenas a título de curiosidade, nas figuras (14.45).

Multiplicando esta sequência pela função de transferência discretizada, temos a transformada do carregamento. Considerando o sistema com as mesmas características do exemplo do ítem (14.5), teremos para $V(n)$ a sequência das figuras (14.46).

Calculando a transformada inversa desta sequência, vamos obter a resposta que é apresentada na figura (14.33).

Aplicando a expressão (14.13) à sequência $v(k)$ da figura (14.33), obtemos as acelerações que aparecem na massa. As mesmas são dadas pela sequência da figura (14.47).

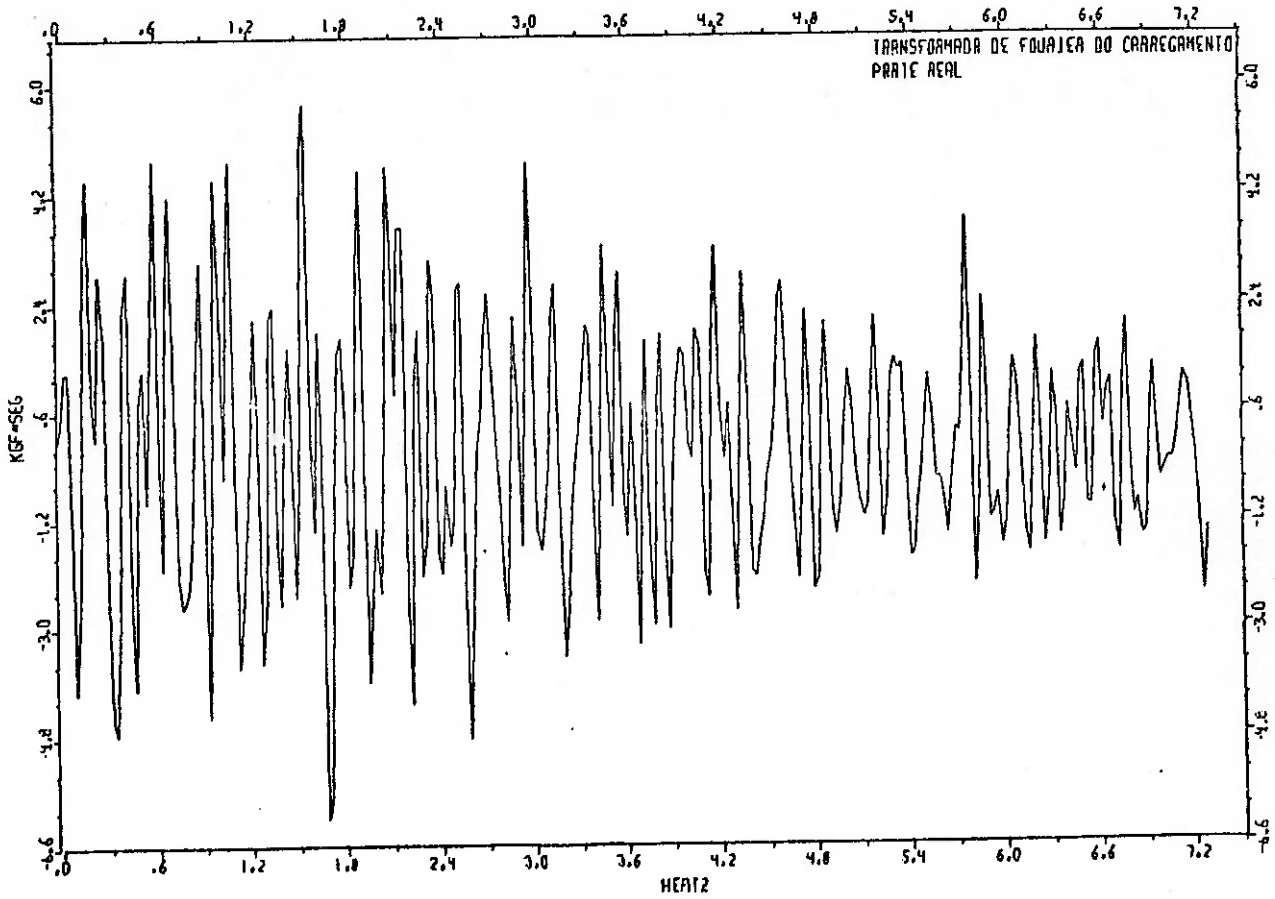


Figura (14.45-a)

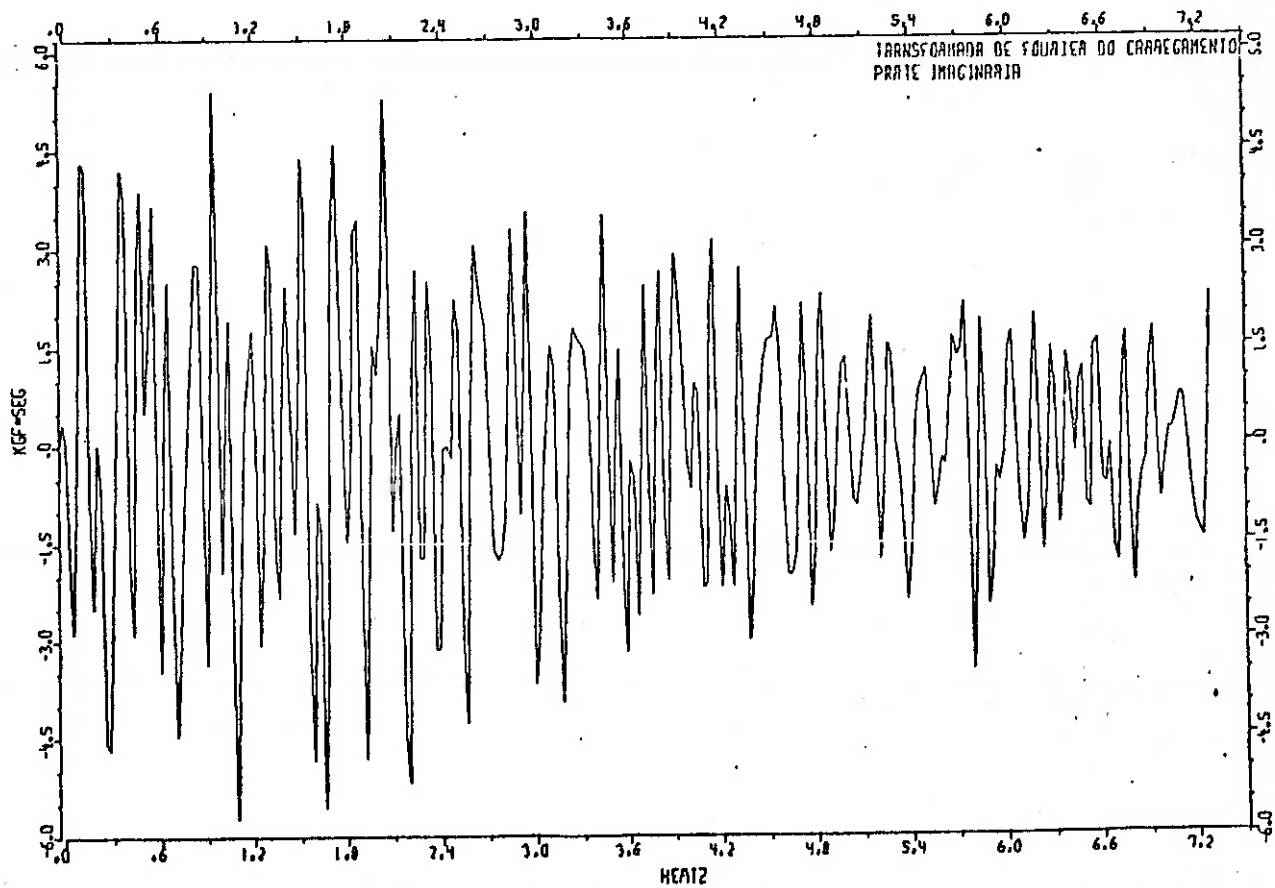


Figura (14.45-b)

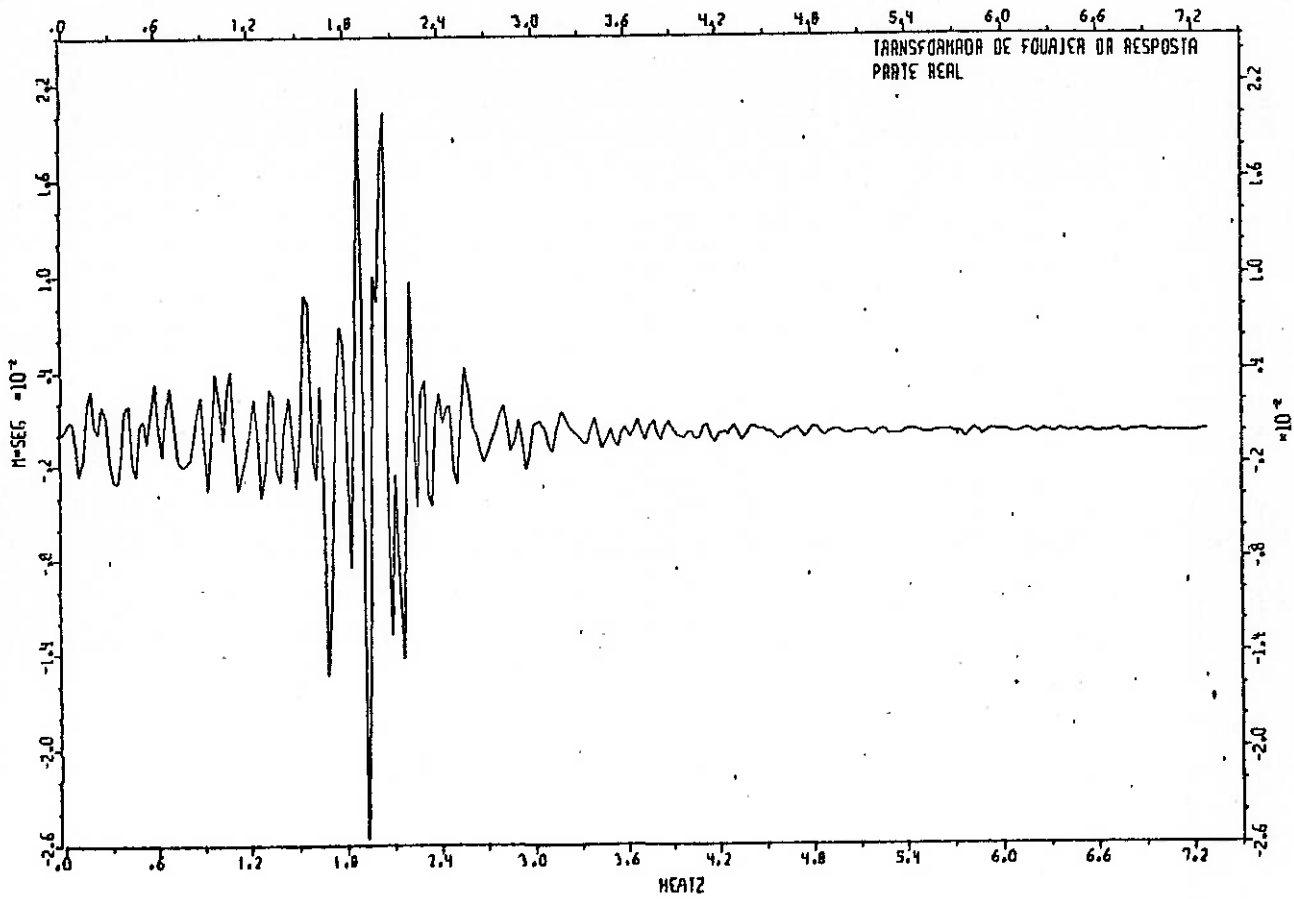


Figura (14-46-a)

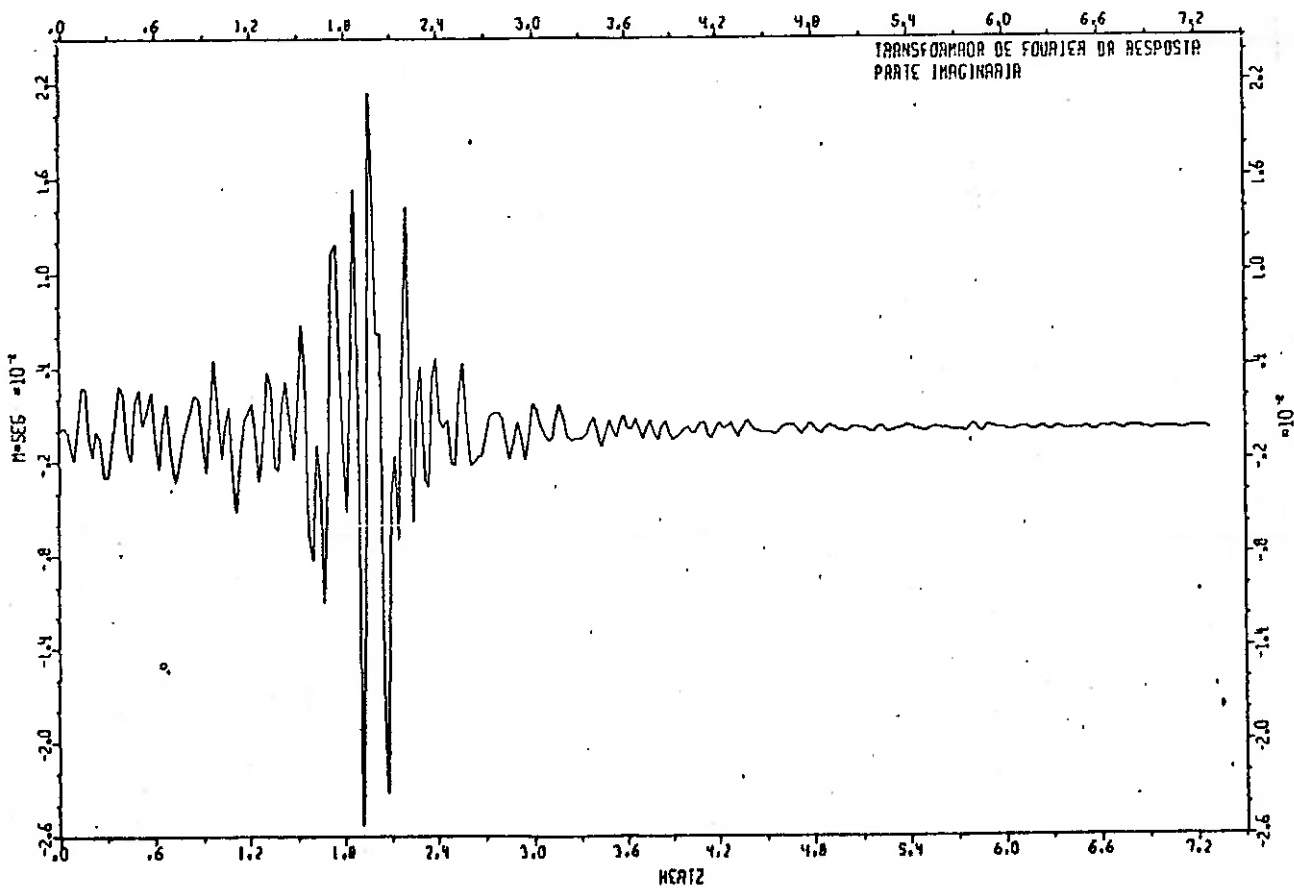


Figura (14.46-b)

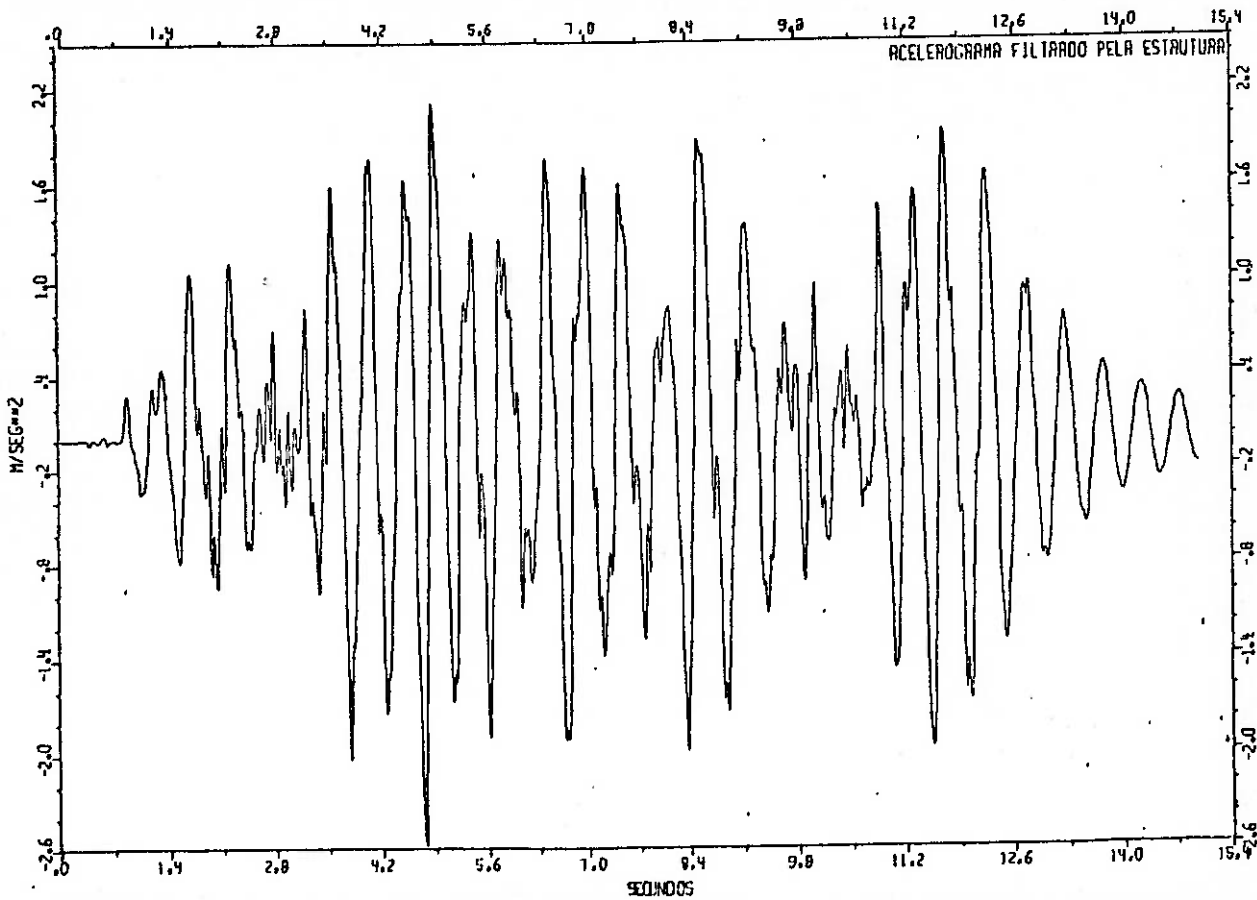


Figura (14.47)

Comparando-se esta com a figura (14.44), verifica-se que este acelerograma foi amplificado pela estrutura.

14.11 - Conclusão

Uma análise dos tempos gastos no processamento das respostas nos exemplos apresentados mostra que o cálculo numérico via domínio da frequência é muito mais vantajoso do que o mesmo realizado sobre a integral de Duhamel. Esta vantagem é obtida mesmo que se tenha que calcular a transformada da função de resposta.

Deve-se salientar que esta vantagem é graças ao algo

rítmo computacional da transformada rápida de Fourier.

A utilização da análise via domínio da frequência tem grande interesse ainda, como veremos no capítulo seguinte, em situações onde o carregamento constitui um processo aleatório.

Uma análise das características da estrutura sobre o tipo de resposta foge ao escopo deste trabalho, mas pode ser realizada interpretando-se as figuras de número (14.36) a (14.41).

C A P Í T U L O 1 5

ESTRUTURAS DE RESPOSTA LINEAR SUJEITAS A
UM CARREGAMENTO DISCRETIZADO E ALEATÓRIO

Tratamos neste capítulo, como foi feito no capítulo 13, das situações onde se deseja conhecer certas características estatísticas da resposta, no caso, a média e a média quadrática.

Em muitos casos de análise dinâmica é conhecido um histórico do carregamento. Consideraremos neste capítulo, como fizemos no capítulo anterior, casos em que este carregamento é dado através de uma sequência discreta no domínio do tempo.

Conhecido este carregamento, poderia se determinar a resposta utilizando qualquer uma das técnicas expostas no capítulo anterior, e, a seguir, obter, numericamente, a média e a média quadrática da mesma.

No entanto, como veremos, é mais fácil obter primeiramente a média e o espectro de Fourier do carregamento e, a partir destes, determina-se então a média e o espectro de Fourier da resposta. Conhecido o espectro de Fourier da resposta, pode-se obter a média quadrática da mesma.

Existem situações, mais simples ainda, em que a média e o espectro de Fourier do carregamento já são dados de projeto.

Este capítulo tem dois objetivos principais:

a) Dado um carregamento, constituído por uma sequência discreta no domínio do tempo, obter, numericamente, a média, a média quadrática e o espectro de Fourier do mesmo.

b) Dados a média e o espectro de Fourier de um carregamento, obter a média da resposta e, numericamente, o espectro de Fourier da mesma. A partir do conhecimento do espectro de Fourier da resposta determina-se a média quadrática da mesma.

15.1 - Processos aleatórios

Como já dissemos anteriormente, define-se como processo aleatório a qualquer fenômeno que pode ser representado por um conjunto de amostras, sendo este conjunto especificado por meio de propriedades estatísticas.

Neste capítulo vamos considerar o caso em que estas amostras são constituídas por sequências discretas, $x_i(t)$, do tempo.

As propriedades estatísticas que nos interessam são a média, \bar{x} , e a média quadrática \bar{x}^2 .

A avaliação destas, para um determinado instante t_j , pode ser feita de acordo com as expressões (13.1-a) e (13.1-b).

A única diferença em relação ao que foi exposto no ítem (13.1) é quanto a avaliação destas propriedades, para uma amostra, ao longo do tempo. Isto se deve ao fato de que as amostras não são mais especificadas por funções contínuas, mas sim por sequências discretas.

Consideremos, por exemplo, a sequência de uma amostra $x_i(k)$ da figura (15.1).

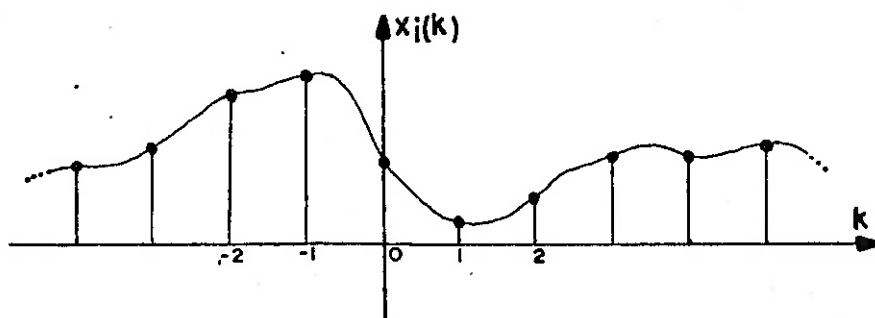


Figura (15.1)

A média e a média quadrática da mesma, em todo o domínio do tempo, podem ser dadas pelas expressões (15.1) que são resultado da integração numérica das expressões (13.2).

$$\bar{x}_i(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i(k) \quad (15.1-a)$$

$$\bar{x}_i^2(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i^2(k) \quad (15.1-b)$$

Estas expressões não têm sentido para seqüências do tipo da figura (15.2) que satisfazem a condição:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_i(k)| \neq \infty \quad (15.2)$$

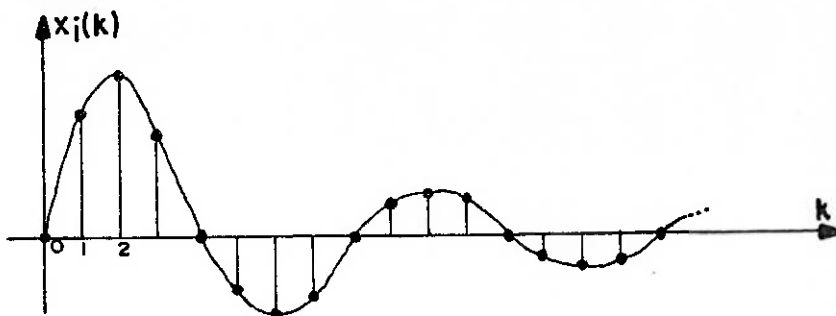


Figura (15.2)

Nestes casos a média e a média quadrática serão sempre nulas.

Um dos casos em que se tem sentido utilizar as expressões (15.1) é quando se trata de seqüências periódicas.

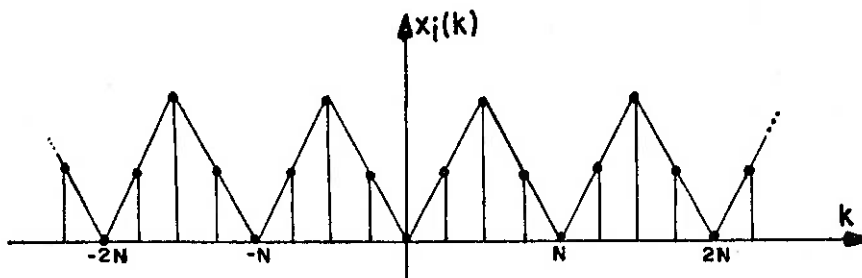


Figura (15.3)

Neste caso as mesmas podem ser tomadas sobre um único período que o resultado é o mesmo que se aplicarmos (15.1).

$$\bar{x}_i(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_i(k) \quad (15.3-a)$$

$$\bar{x}_i^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_i^2(k) \quad (15.3-b)$$

15.2.1 - Definição

Dada uma sequência discreta, $x_i(k)$, de um processo aleatório estacionário e ergódico, define-se a autocorrelação discreta média pela expressão:

$$R(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=N/2}^{N/2-1+k} x(j) x(k+j) \quad (15.6)$$

Como se pode verificar esta expressão é o resultado da integração numérica da expressão (13.9).

A autocorrelação discreta média é a média, em todo o domínio do tempo, da sequência dada pelo produto de $x(j)$ com $x(j+k)$.

Levando-se em conta (11.13) podemos estabelecer a seguinte relação entre a autocorrelação discreta e a autocorrelação discreta média.

$$R(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} u(k) \quad (15.7)$$

No caso de sequências periódicas, ou que satisfaçam a condição (15.2), se considerarmos o intervalo de tempo tendendo a infinito, teremos sempre:

$$R(k) = 0 \quad \forall k$$

pois neste caso os termos da autocorrelação discretas são finitos.

Por isto achamos melhor tomar a autocorrelação discreta média como a sequência de autocorrelação discreta dividida pelo intervalo de tempo onde se dá o produto $x(k) x(k+j)$.

$$u(k) = T \sum_{j=J_1}^{J_2} x(j) x(k+j) \quad (15.8-a)$$

$$R(k) = \frac{u(k)}{(J_2 - J_1 + 1)T} \quad (15.8-b)$$

15.2.2 - Obtenção da autocorrelação discreta média

Se a sequência $x(k)$ for de duração finita, como na figura (15.4), segundo (11.11) teremos:

$$u(k) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} k > N-1 \\ k < 1-N \end{array} \right.$$

Neste caso a autocorrelação discreta existirá para valores de k negativos. Como a sequência $x(k)$ tem duração NT segundos, a sequência $u(k)$ terá duração de $(2N-1)T$ segundos.

Os limites da somatória segundo (11.12) serão:

$$J1 = \text{Máximo } (-k, 0)$$

$$J2 = \text{Mínimo } (N-k-1, N-1)$$

Logo se:

$$k \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} J1 = 0 \\ J2 = N-k-1 \end{array} \right. \quad \text{e se} \quad k \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l} J1 = -k \\ J2 = N-1 \end{array} \right.$$

De maneira genérica podemos estabelecer a seguinte relação:

$$R(k) = \frac{u(k)}{(N-|k|)T} \quad (15.9)$$

Ou ainda:

$$R(k) = u(k) \cdot v(k) \quad \text{e} \quad (15.10-a)$$

$$u(k) = R(k) \cdot w(k) \quad (15.11-a)$$

onde:

$$v(k) = \frac{1}{(N-|k|)T} \quad \text{e} \quad (15.10-b)$$

$$w(k) = (N-|k|)T \quad (15.11-b)$$

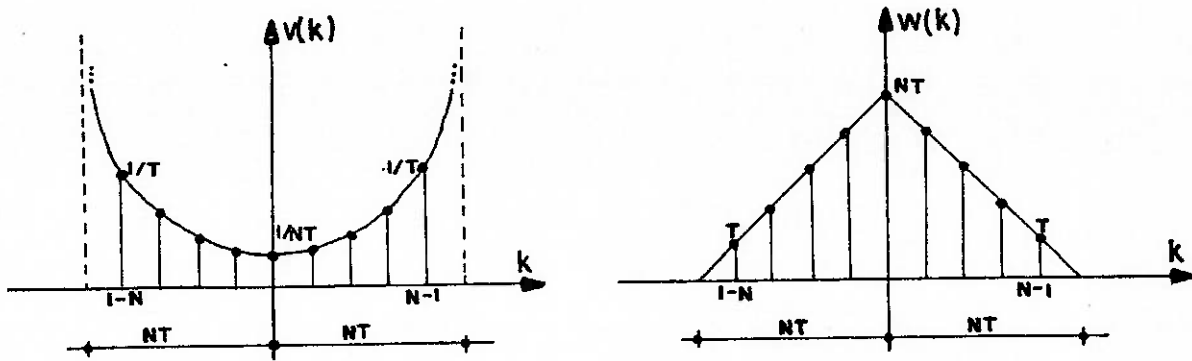


Figura (15.5)

As figuras (15.6) ilustram o aspecto das seqüências $u(k)$ e $R(k)$ neste caso.

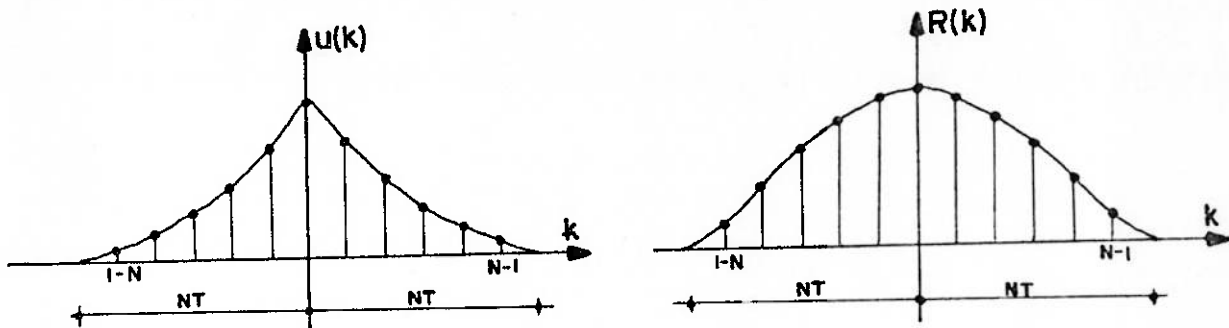


Figura (15.6)

Se a seqüência $x(k)$ for periódica, figura (15.3), de período igual a NT segundos, a seqüência $u(k)$ também o será com o mesmo período. A mesma pode ser obtida utilizando a técnica exposta no ítem (11.5). A seguir obtemos a seqüência $R(k)$ pela expressão:

$$R(k) = \frac{u(k)}{NT} \quad (15.12)$$

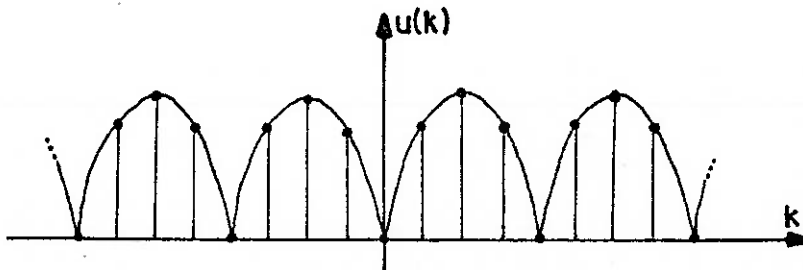


Figura (15.7)

Se a seqüência $x(k)$ for de duração infinita, do tipo da figura (15.2), o intervalo onde se realiza a somatória será de zero a infinito e com isto a autocorrelação discreta será

constante e igual a zero.

Em qualquer caso a sequência $u(k)$ é par e $R(k)$ também o será.

15.2.3 - Propriedade da autocorrelação discreta média

Se calcularmos o valor de $u(k)$ no instante inicial, teremos:

$$u(0) = T \sum_{j=J_1}^{J_2} x^2(j)$$

Se a sequência for de duração finita, teremos:

$$J_1 = 0 \qquad J_2 = N-1$$

$$u(0) = T \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j) = \bar{x}^2(j) NT$$

$$R(0) = \frac{u(0)}{NT} \qquad (15.13)$$

O valor da autocorrelação discreta média no instante inicial é igual a média quadrática da sequência no seu intervalo de duração.

Se a sequência for periódica, com período NT segundos, a expressão (15.13) também será válida. Neste caso o valor da autocorrelação discreta média no instante inicial é igual a média quadrática da sequência $x(k)$ em um período.

Se a sequência for de duração infinita, do tipo da figura (15.2), a autocorrelação discreta média no instante inicial será zero. Aliás como já dissemos, ela é nula para qualquer instante. Neste caso o valor de $R(0)$ fornece a média quadrática de $x(k)$ em todo o seu intervalo de duração. Este valor é nulo pois a sequência satisfaz a condição (15.2).

15.3 - Espectro de Fourier de uma sequência de um processo aleatório.

Vamos estudar neste ítem o caminharmento para se obter, por via numérica, o Espectro de Fourier de uma amostra de um processo aleatório constituída por uma sequência discreta.

15.3.1 - Definição

O espectro de Fourier é definido agora da mesma maneira como foi feito no capítulo 13. Como estamos tratando de sequências discretas o mesmo será dado pela transformada discreta da sequência da autocorrelação discreta.

$$S(n) = F[u(k)] \quad (15.14)$$

Como a autocorrelação discreta é uma sequência real e par no domínio do tempo, o espectro de Fourier será uma outra sequência real e par no domínio da frequência.

$$S(-n) = S(n) \quad (15.15)$$

15.3.2 - Obtenção do espectro de Fourier numericamente

O Espectro de Fourier pode ser obtido numericamente obtendo-se, primeiramente, a sequência de autocorrelação discreta e, a seguir, tomando-se a sua transformada discreta.

No entanto, consegue-se uma grande economia no tempo de processamento se se obter o mesmo utilizando o teorema da correlação discreta. Para isto basta aplicar a equação (11.24). Segundo a mesma:

$$u(k) = F^{-1} \left[|X(n)|^2 \right]$$

Logo, podemos afirmar que:

$$S(n) = F[u(k)] = |X(n)|^2 \quad (15.16)$$

O espectro de Fourier é igual ao módulo ao quadrado da transformada discreta da sequência $u(k)$.

É fácil perceber a vantagem de se obter diretamente o espectro de Fourier. Pelo caminho normal somos obrigados a obter primeiramente $u(k)$ e, a seguir sua transformada discreta. Pelo segundo processo basta obter a transformada discreta de $x(k)$ e, a seguir, o seu módulo ao quadrado. Como o número de operações para obtenção do módulo ao quadrado de $X(n)$ é muito menor do que o necessário para se obter $u(k)$, justifica-se assim o segundo procedimento.

15.3.2.1 - Sequências de duração finita

Consideremos a sequência $x(k)$ abaixo:

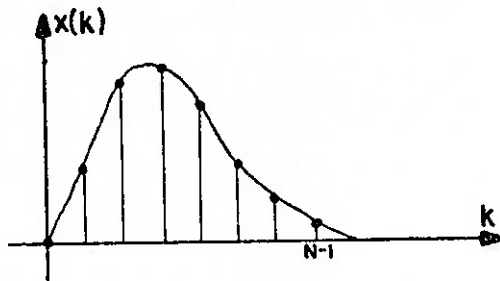


Figura (15.8)

Podemos obter primeiramente a sequência de autocorrelação discreta da mesma utilizando as técnicas expostas no item (11.2).

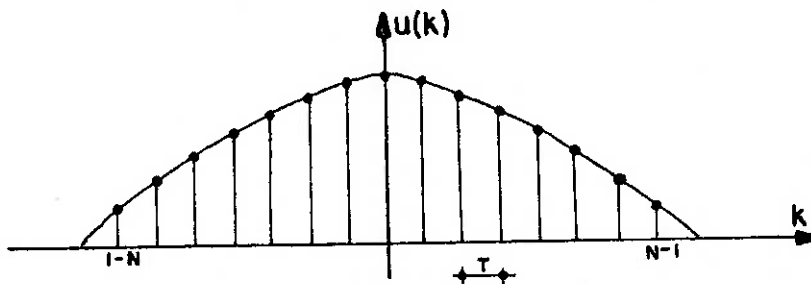


Figura (15.9)

A seguir basta computar a transformada discreta da mesma para obtermos $S(n)$. Como a sequência possui $(2N-1)$ termos, pode ser que seja necessário acrescentar L zeros à mesma para que se possa utilizar o algoritmo da transformada rápida de Fourier.

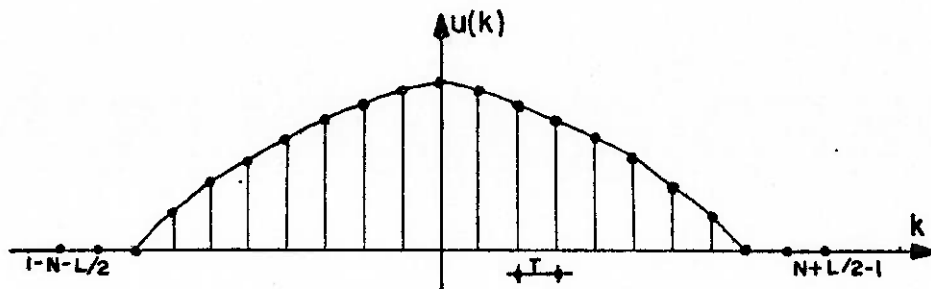


Figura (15.10)

Computando-se a transformada discreta da sequência da figura (15.10) teremos o espectro de Fourier da sequência (15.8), com $(2N + L - 1)$ termos, cujo intervalo de discretização será:

$$F = \frac{1}{(2N+L-1)T} \text{ Hertz}$$

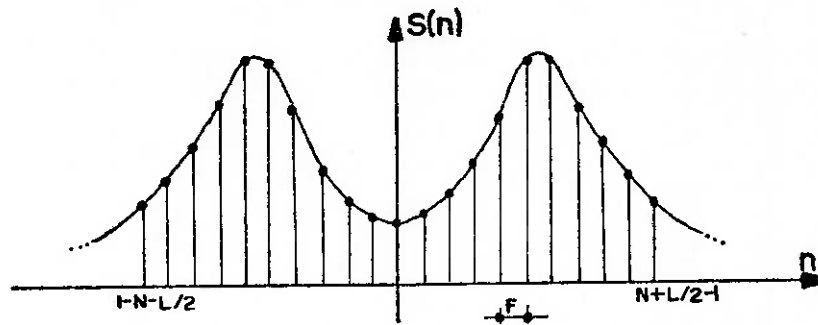


Figura (15.11)

A sequência $S(n)$ pode ser obtida mais rapidamente ainda, calculando-se primeiramente a transformada discreta, $X(n)$ de $x(k)$ e, a seguir, obtendo-se o módulo ao quadrado de $X(n)$.

Para se obter a mesma sequência da figura (15.11) é necessário primeiramente dobrar o número de termos da sequência $x(k)$ e, a seguir, acrescentar L zeros a fim de se poder utilizar o algoritmo da transformada rápida de Fourier.

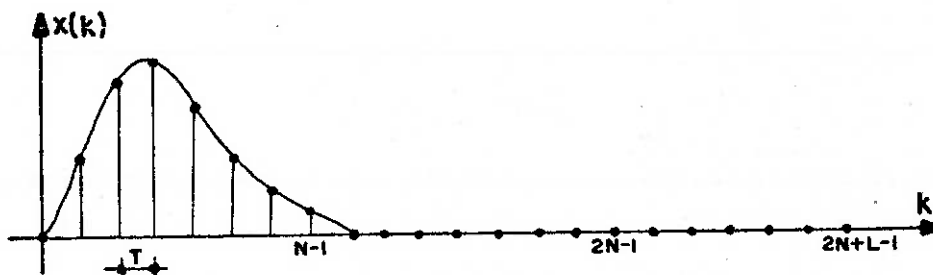


Figura (15.12)

No entanto, se não dobrarmos a duração da sequência $x(k)$, não significa que o espectro obtido estará errado. Apenas iremos obter pontos mais afastados na sequência da figura (15.11). Neste caso o intervalo de discretização será:

$$F = \frac{1}{(N+L-1)T} \text{ Hertz}$$

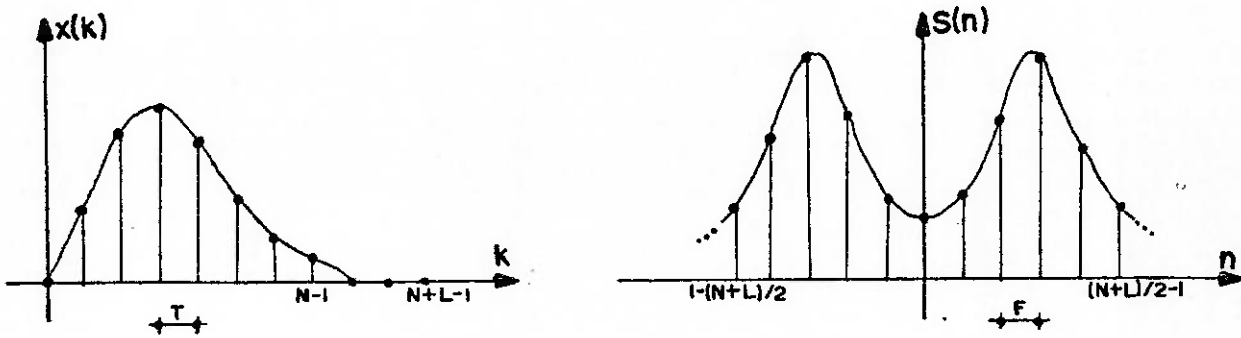


Figura (15.13)

15.3.2.2 - Sequências periódicas

Se a sequência $x(k)$ é periódica, figura (15.14-a), podemos obter primeiramente a sequência $u(k)$ de acordo com o exposto no item (11.5).

Com isto obteremos uma sequência periódica, figura (15.14-b), com o mesmo período de NT segundos.

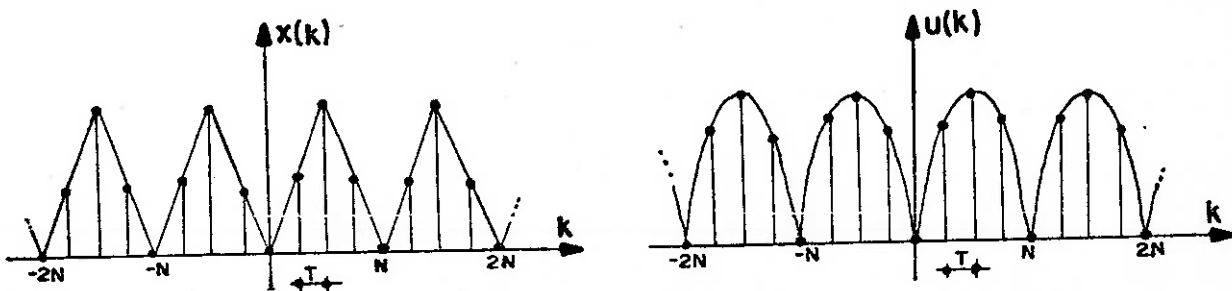


Figura (15.14)

O espectro de Fourier pode ser obtido computando-se a transformada discreta da sequência $u(k)$ assim obtida. Para isto devemos tomar os cuidados mencionados no item (7.3) para o cálculo da transformada discreta de sequências periódicas.

Como a sequência $u(k)$ possui N termos e é periódica,

se tomarmos um período da mesma, vamos obter N termos da sequência $S(n)$ cujo intervalo de discretização será:

$$F = \frac{1}{NT} \text{ Hertz}$$

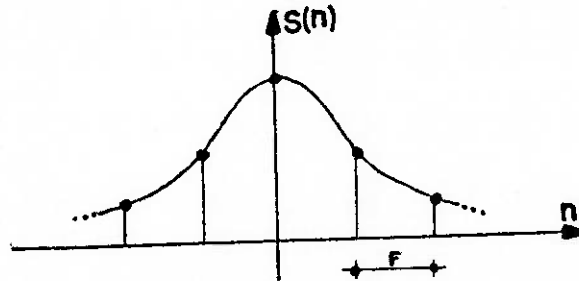


Figura (15.15)

Se quisermos obter diretamente o espectro de Fourier da sequência $x(k)$, devemos calcular primeiramente a sua transformada discreta e, a seguir, obter o módulo ao quadrado da mesma.

Se considerarmos apenas um período de $x(k)$ e procedermos desta maneira, vamos obter a mesma sequência $S(n)$ da figura (15.15).

Se considerarmos dois períodos, vamos obter pontos intermediários nulos na sequência desta figura e os termos referentes às frequências múltiplas da fundamental aparecerão multiplicados por dois.

15.3.3 - Propriedades do espectro de Fourier de uma sequência discreta.

De acordo com a expressão (15.14) podemos afirmar que:

$$u(k) = F^{-1}[S(n)]$$

$$T \sum_{j=J1}^{J2} x(j) x(k+j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{i \frac{2\pi nk}{N}}$$

Para o instante $t = 0.T$ teremos:

$$T \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} S(n)$$

$$T \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j) = \sum_{n=0}^{N-1} F.S(n) \quad (15.17)$$

A somatória do lado direito da expressão é exatamente igual a área, calculada discretamente, sob a sequência do espectro de Fourier.

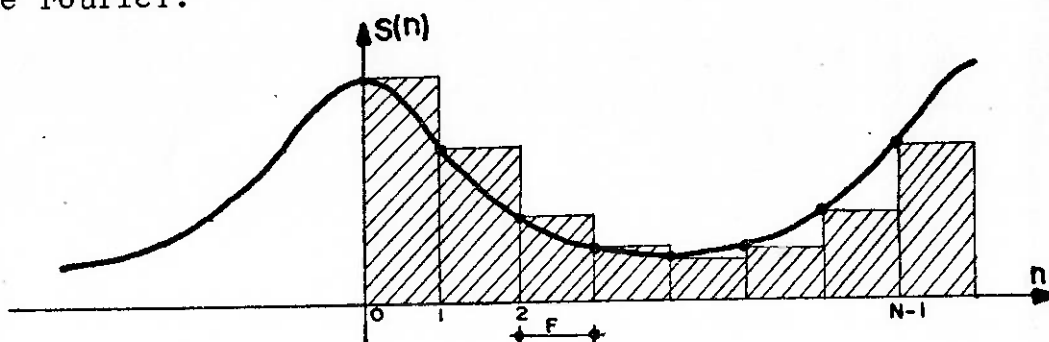


Figura (15.16)

15.3.3.1 - Sequência de duração finita

Se a sequência $x(k)$ é de duração finita e à mesma são acrescentados L zeros, teremos:

$$T \sum_{j=0}^{N+L-1} x^2(j) = \sum_{n=0}^{N+L-1} F.S(n)$$

Como no intervalo $(N-1, N+L-1)$ temos $x(k) = 0$

$$T \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j) = \sum_{n=0}^{N+L-1} S(n) \cdot F$$

Segundo (15.5-b) a média quadrática da sequência $x(k)$ de duração finita no seu intervalo de duração é igual a:

$$\bar{x}^2(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j)$$

$$\bar{x}^2(j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N+L-1} S(n) \cdot F$$

A média quadrática da sequência $x(k)$, no seu intervalo de duração, é igual a área definida pela sequência $S(n)$ dividida pelo intervalo de duração de $x(k)$.

Se quisermos tomar a média quadrática no intervalo $(0, N+L-1)$, teremos:

$$\bar{x}^2(j) = \frac{1}{(N+L-1)T} \sum_{n=0}^{N+L-1} S(n).F$$

O ato de acrescentarmos mais zeros à sequência não implica que com isto a média quadrática da mesma, apenas no seu intervalo de duração, vá se alterar. Isto não ocorre pois neste segundo caso estaremos obtendo pontos mais próximos um do outro na sequência $S(n)$ mas a área definida pela mesma não irá se alterar.

13.3.3.2 - Sequências periódicas

Se a sequência $x(k)$ é periódica, com período de NT segundos, e o seu espectro de Fourier é calculado tomando-se um período da mesma, temos:

$$T \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n).F$$

Segundo (15.3-b) a média quadrática da sequência em um período é igual a:

$$\bar{x}^2(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x^2(j)$$

$$\bar{x}^2(j) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} S(n).F$$

A média quadrática da sequência $x(k)$, em um período, é igual a área definida pela sequência $S(n)$ dividida pelo período de $x(k)$.

15.3.4 - Obtenção da autocorrelação discreta e da autocorrelação discreta média através do domínio da frequência.

De acordo com a expressão (15.14) temos:

$$u(k) = F^{-1} [S(n)]$$

Logo podemos propor a seguinte marcha para obter a sequência $u(k)$ que é idêntica às expressões (11.24):

a) Calculamos primeiramente a transformada discreta da sequência $x(k)$

$$X(n) = T \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}$$

b) A seguir obtemos o espectro de Fourier de $x(k)$

$$S(n) = |X(n)|^2 = X(n) \cdot X^*(n)$$

c) Obtemos então a sequência $u(k)$ computando a transformada inversa de $S(n)$

$$u(k) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

A sequência $R(k)$ pode ser então obtida através da expressão (15.10) ou (15.12).

Este caminhar, que parece mais longo, na realidade reduz sensivelmente o tempo de processamento. Esta redução é devido à vantagem computacional do algoritmo da transformada rápida de Fourier.

15.3.4.1 - Sequência de duração finita

Se a sequência $x(k)$ é de duração finita, devemos tomar os cuidados para obter a autocorrelação discreta da mesma via domínio da frequência mencionados no item (11.8).

Como este procedimento leva em conta a periodicidade

da sequência $x(k)$ devemos inicialmente dobrar a duração da mesma acrescentando-se zeros e, a seguir, se for necessário, acrescentar mais L zeros para que tenhamos um número final de termos que seja potência inteira de dois.

Se não procedermos desta maneira vamos obter uma sequência $u(k)$, figura (11.18-b), distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

O fato de não dobrarmos inicialmente a duração da sequência não afeta o espectro de Fourier, nem tampouco a sua propriedade fundamental. Segundo (11.33-b), mesmo que nenhum termo nulo seja acrescentado à sequência $x(k)$, o valor de $u(0)$ não sofrerá distorção. A expressão (8.17) afirma que este valor é igual a área definida pela sequência $S(n)$ que por sua vez está diretamente relacionada com a média quadrática da sequência.

Portanto, a média quadrática obtida através do espectro de Fourier permanece inalterada se aumentarmos a duração da sequência acrescentando-se zeros.

Na obtenção da sequência $u(k)$ através da transformada discreta inversa de $S(n)$, devemos nos lembrar que os primeiros termos referem-se à instantes positivos e os últimos a instantes negativos.

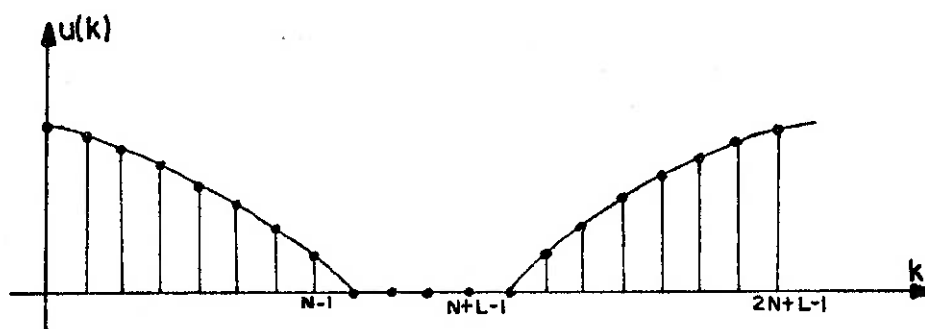


Figura (15.17)

A sequência $R(k)$ pode ser obtida a partir de $u(k)$ através da relação:

$$R(k) = \frac{u(k)}{(N - |k|)T}$$

15.3.4.2 - Sequências periódicas

Se a sequência $x(k)$ é periódica a autocorrelação discreta da mesma pode ser obtida da maneira como está exposta no ítem (11.10).

Neste caso devemos tomar um número inteiro de período da mesma.

A sequência $R(k)$ pode ser obtida a partir de $u(k)$ através da expressão:

$$R(k) = \frac{u(k)}{NT}$$

Se considerarmos dois períodos da sequência $x(k)$ os termos da sequência $u(k)$ aparecerão multiplicados por dois, mas os da sequência $R(k)$ serão os mesmos.

15.3.5 - Outra definição para o espectro de Fourier

Analogamente ao caso contínuo, alguns autores definem o espectro de Fourier de um processo aleatório constituído por uma sequência discreta como sendo a transformada discreta de Fourier da sequência de autocorrelação discreta média.

A fim de não se criar confusão com a definição que estamos usando, vamos chamar a este de espectro de Fourier corrigido.

$$\hat{S}(n) = F[R(k)] \quad (15.18)$$

No final deste capítulo faremos alguns comentários sobre as vantagens de se empregar uma definição ou outra.

Para obtermos $\hat{S}(n)$ devemos obter primeiramente a sequência $R(k)$ e, a seguir, computar sua transformada discreta. Como vimos a sequência $R(k)$ pode ser obtida mais rapidamente a partir da sequência $u(k)$ obtida do domínio da frequência.

15.3.5.1 - Sequência de duração finita

Se a sequência $x(k)$ é de duração finita podemos estabelecer a seguinte relação entre os espectros $S(n)$ e $\hat{S}(n)$.

$$\hat{S}(n) = F[R(k)]$$

$$\hat{S}(n) = F[u(k) \cdot v(k)]$$

Pelo teorema da convolução discreta no domínio da frequência temos:

$$\hat{S}(n) = F[u(k)] * F[v(k)]$$

Chamando de $V(n)$ a transformada discreta de $v(k)$:

$$V(n) = F[v(k)]$$

$$\hat{S}(n) = S(n) * V(n) \quad (15.19)$$

O espectro de Fourier corrigido, $\hat{S}(n)$, pode ser obtido através da convolução discreta no domínio da frequência da sequência $V(n)$ com o espectro de Fourier $S(n)$.

No entanto, se obtivermos a sequência $\hat{S}(n)$ diretamente na expressão (15.18), o tempo de processamento será menor do que se utilizarmos (15.19). Neste caso podemos propor a seguinte marcha de cálculo.

$$X(n) = F[x(k)] \quad (15.20-a)$$

$$S(n) = X(n) \cdot X^*(n) \quad (15.20-b)$$

$$u(k) = F^{-1}[S(n)] \quad (15.20-c)$$

$$R(k) = u(k) \cdot v(k) \quad (15.20-d)$$

$$\hat{S}(n) = F[R(k)] \quad (15.20-e)$$

De acordo com a expressão (8.17) temos:

$$R(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{S}(n) \cdot F$$

Levando-se em conta (15.13)

$$\bar{x}^2(k) = R(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{S}(n) \cdot F \quad (15.21)$$

A área definida pela sequência $\hat{S}(n)$ é igual a média quadrática da sequência $x(k)$ no seu intervalo de duração.

15.3.5.2 - Sequências periódicas

Se a sequência $x(k)$ é periódica, podemos estabelecer a seguinte relação entre os espectros $S(n)$ e $\hat{S}(n)$.

$$\hat{S}(n) = F [R(k)]$$

Segundo (15.12)

$$R(k) = \frac{u(k)}{NT}$$

Logo:

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{NT} S(n) \quad (15.22)$$

Pode-se verificar que, também neste caso, a área definida pela sequência $\hat{S}(n)$ é igual a média quadrática da sequência $x(k)$ em um período.

15.4 - Transmissões de vibrações aleatórias

Vejamos agora como podem ser obtidos a média e o espectro de Fourier da resposta a partir da média e do espectro de Fourier do carregamento. Vejamos também como pode ser obtida a média quadrática a partir do espectro de Fourier da mesma.

15.4.1 - Transmissão da média

15.4.1.1 - Previsão da média da resposta

Vamos supor inicialmente que seja conhecida a média de um carregamento, \bar{p} , e se queira conhecer a média da resposta, \bar{v} , sem se determinar o histórico da mesma.

Neste caso não interessa se o carregamento é uma função contínua ou uma sequência discreta do tempo. A relação entre as duas médias pode ser dada pela expressão (13.32), quando se tratar de carregamento periódico e pela expressão (13.34) quando se tratar de carregamento de duração finita.

A título de exemplo vamos considerar os mesmos carregamento dos itens (14.5) e (14.7).

O programa que foi utilizado para gerar as respostas destes carregamentos obtém também as médias e as médias quadráticas do carregamento e da resposta.

No caso da resposta, estes parâmetros são obtidos tanto para o intervalo de duração do carregamento, vibrações forçadas, quanto para o intervalo de tempo final resultante do aumento da duração do carregamento.

No primeiro exemplo, tínhamos uma exponencial crescente, figura (14.20), com 9 segundos de duração.

A média do carregamento, neste intervalo, calculada numericamente, foi de 8,879 kgf.

Na tabela (14.1) temos que:

$$H(0) = \frac{1}{k} = \frac{1}{1,6} \frac{\text{mm}}{\text{kgf}}$$

Utilizando a expressão (13.34) podemos prever a média da resposta neste intervalo:

$$\bar{v}(t) + \frac{1}{9} \int_0^{\infty} v(t) dt = H(0) \bar{p}(t)$$

$$\bar{v}(t) + \frac{1}{9} \int_0^{\infty} v(t) dt = 5,5494 \text{ mm}$$

Se os deslocamentos em vibrações livres fossem desprezíveis, poderíamos afirmar que no intervalo de duração do carregamento:

$$\bar{v}(t) \cong 5,5494 \text{ mm}$$

No entanto, como se pode notar pela figura (14.22), isto não ocorre. Por isto é bem possível que este valor não corresponda à realidade.

No terceiro exemplo do capítulo 14 tínhamos um acelerograma de terremoto, figura (14.30), com 15 segundos de duração. O mesmo apresenta média zero no seu intervalo de duração. Portanto, é de se esperar que a resposta também apresente média zero, neste intervalo, se os deslocamentos em vibrações livres forem desprezíveis.

15.4.1.2 - Comprovação dos resultados

Vamos comparar agora a média das respostas obtidas numericamente com os valores previstos no ítem anterior.

Consideremos a sequência de um carregamento $p(k)$ como na figura abaixo:

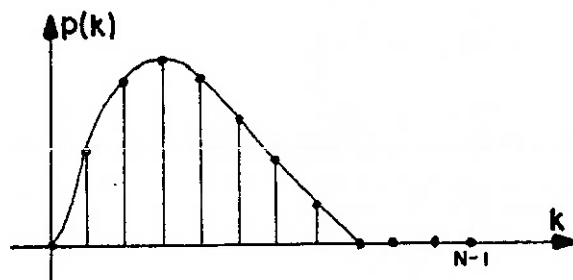


Figura (15.18)

A resposta ao mesmo pode ser obtida pela convolução discreta deste carregamento com a transformada discreta da função de resposta. No domínio da frequência teremos:

$$V(n) = P(n) \hat{H}(n) \quad (15.23-a)$$

onde:

$$\hat{H}(n) = F[h(k)]$$

A sequência $v(k)$, figura (15.19), pode ser obtida pe la transformada inversa $V(n)$.

No caso de podermos utilizar diretamente a função de transferência discretizada teremos:

$$V(n) = P(n) H(n) \quad (15.23-b)$$

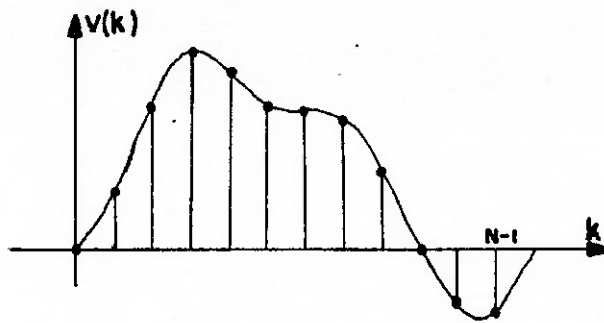


Figura (15.19)

As expressões (15.23) na frequência zero fornecem:

$$V(0) = P(0) \hat{H}(0) \quad e \quad V(0) = P(0) H(0)$$

Mas, sabemos que:

$$V(0) = T \sum_{k=0}^{N-1} v(k) = \bar{v} \cdot NT$$

$$P(0) = T \sum_{k=0}^{N-1} p(k) = \bar{p} \cdot NT$$

$$H(0) = \frac{1}{k} \quad \hat{H}(0) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(k)$$

onde \bar{v} e \bar{p} são a média do carregamento e a média da resposta no intervalo de NT segundos, e k é a rigidez da estrutura.

O valor $\hat{H}(0)$ é igual a área, calculada numericamente, sob a curva definida pela função de resposta, neste intervalo. A expressão:

$$\hat{H}(0) \cong 1/k$$

é válida na medida em que o intervalo de discretização é suficientemente pequeno e a duração suficientemente longa.

Voltando às expressões (15.23) teremos então para a média da resposta:

$$\bar{v} = \bar{p} \hat{H}(0) \quad (15.24-a)$$

no caso da mesma ser obtida através do domínio do tempo ou uti

lizando a transformada da função de resposta, e:

$$\bar{v} = \bar{p}/k \quad (15.24-b)$$

no caso da mesma ser obtida utilizando a função de transferência.

Vale a pena lembrar que as expressões (15.24) relacionam a média do carregamento no intervalo de NT segundos, já acrescentados os zeros, com a média da resposta no mesmo intervalo, já incluindo vibrações livres.

Consideremos agora o exemplo do item (14.5). A seguir resumimos as médias do carregamento e da resposta.

a - Carregamento

- a.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{p}_1 = 8,87900$ kgf
 a.2 - Média no intervalo de 9,216 segundos - $\bar{p}_2 = 8,67090$ kgf
 a.3 - Média no intervalo de 18,432 segundos - $\bar{p}_3 = 4,33544$ kgf

b - Respostas

- b.1 - Resposta calculada no domínio do tempo
 b.1.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{v}_1 = 5,51990$ mm
 b.2 - Resposta calculada no domínio da frequência, utilizando a transformada da função resposta
 b.2.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{v}_1 = 5,51990$ mm
 b.2.2 - Média no intervalo de 18,432 segundos - $\bar{v}_2 = 2,68959$ mm
 b.3 - Resposta calculada no domínio da frequência, utilizando a função de transferência
 b.3.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{v}_3 = 5,54395$ mm
 b.3.2 - Média no intervalo de 18,432 segundos - $\bar{v}_4 = 2,70965$ mm
 b.4 - Resposta calculada no domínio da

frequência, utilizando a função resposta, sem dobrar a duração do carregamento

- b.4.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{v}_5 = 5,47925$ mm
- b.4.2 - Média no intervalo de 9,216 segundos - $\bar{v}_6 = 5,37918$ mm
- b.5 - Resposta calculada no domínio da frequência utilizando a função de transferência, sem dobrar a duração do carregamento
- b.5.1 - Média no intervalo de 9 segundos - $\bar{v}_7 = 5,52034$ mm
- b.5.2 - Média no intervalo de 9,216 segundos - $\bar{v}_8 = 5,41931$ mm

A primeira observação a ser feita é a de que a média obtida no ítem b.1 é a mesma que a obtida em b.2. Isto ocorre porque, conforme explicado no capítulo 14, os deslocamentos obtidos no domínio do tempo e os obtidos no domínio da frequência, utilizando a transformada da função de resposta, com a duração do carregamento dobrada, são os mesmos.

No caso b.2 o programa fornece a área, sob a curva de finida pela função de resposta, calculada numericamente, no intervalo de 18,432 segundos, o valor encontrado foi de:

$$\hat{H}(0) = 0,62037 \text{ mm/kgf}$$

O valor da componente da função de transferência na frequência zero é de:

$$H(0) = \frac{1}{K} = \frac{1}{1,6} = 0,625 \text{ mm/kgf}$$

A diferença entre estes dois valores deve-se a erros introduzidos pela integração numérica.

No caso da resposta calculada no domínio do tempo e no domínio da frequência utilizando a transformada da função de resposta é fácil se comprovar a relação entre a média do carregamento, em todo o intervalo considerado, e a média da resposta no mesmo intervalo.

$$\bar{v}_2 = \bar{p}_3 \hat{H}(0)$$

A média do carregamento no intervalo de 18,432 segundos foi obtida a partir da média no intervalo de 9,216 segundos através da relação:

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 \times \frac{500}{1024}$$

Conhecida a média \bar{v}_2 se quiséssemos encontrar \bar{v}_1 através de uma expressão idêntica teríamos:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \times \frac{1024}{500} \quad (15.25)$$

$$\bar{v}_1 = 5,50828 \text{ mm}$$

Este valor não corresponde ao realmente encontrado, pois esta expressão despreza os deslocamentos em vibrações livres.

No caso da resposta ser obtida utilizando a função de transferência, teremos:

$$\bar{v}_4 = \bar{p}_3 H(0)$$

Novamente o valor de \bar{v}_3 não pode ser obtido a partir de \bar{v}_4 por uma expressão semelhante a (15.25) pelo fato de desprezarmos os deslocamentos em vibrações livres.

Nos casos da resposta ser obtida através do domínio da frequência sem se dobrar inicialmente a duração do carregamento, pode ser feita a mesma análise. Neste caso, é bom lembrar que estaremos obtendo a média de uma resposta distorcida, figura (14.24), devida ao "aliasing" no domínio do tempo.

É interessante comparar o valor do deslocamento médio durante o intervalo de vibrações forçadas previsto no item anterior, que foi de 5,5494 mm, com o obtido calculando a média da resposta obtida no domínio do tempo, que foi de 5,51990 mm.

Estes valores não são exatamente os mesmos por dois motivos. Primeiramente pelo fato de que os deslocamentos em vibrações livres foram desprezados no primeiro valor. Segundo pe

lo fato de que ao se obter a resposta numericamente são automaticamente introduzidos erros numéricos devido à discretização, truncamento, etc. No entanto, pode se observar que as diferenças entre os dois podem ser consideradas desprezíveis.

No caso do acelerograma do exemplo (14.7) a média do mesmo em seu intervalo de 15 segundos de duração é nula. A média obtida para a resposta no mesmo intervalo foi de 0,00107mm. Como neste caso chegaram a ser detectados deslocamentos de até 14 mm, este valor pode ser considerado desprezível.

15.4.2 - Espectro de Fourier da resposta

Consideremos a sequência do carregamento da figura (15.18) e a resposta ao mesmo dada pela figura (15.19).

A relação entre estas duas sequências pode ser dada, no domínio da frequência, pela expressão (15.23-a).

$$V(n) = P(n) \cdot \hat{H}(n)$$

No caso em que os erros introduzidos na função de resposta pela discretização forem insignificantes, teremos a expressão (15.23-b).

$$V(n) = P(n) \cdot H(n)$$

Tomando esta expressão e multiplicando ambos os lados pelo complexo conjugado da mesma, teremos:

$$V(n) V^*(n) = P(n) \cdot P^*(n) \cdot H(n) \cdot H^*(n)$$

$$|V(n)|^2 = |P(n)|^2 \cdot |H(n)|^2$$

Mas, segundo (15.16), o espectro de Fourier do carregamento é dado por:

$$S_p(n) = |P(n)|^2$$

e o da resposta por:

$$S_v(n) = |V(n)|^2$$

Logo, também no caso discreto, o espectro de Fourier da resposta pode ser obtido multiplicando o espectro de Fourier do carregamento pelo módulo ao quadrado da função de transferência.

$$S_v(n) = S_p(n) \cdot |H(n)|^2 \quad (15.26)$$

Esta expressão é válida se a transformada discreta da função de resposta se aproximar bem da função de transferência discretizada, caso contrário devemos considerar:

$$S_v(n) = S_p(n) \cdot |\hat{H}(n)|^2 \quad (15.27)$$

15.4.2.1 - Carregamento de duração finita

Se o carregamento é de duração finita devemos, antes de computar o seu espectro de Fourier, acrescentar-lhe um trecho de zeros para que não tenhamos o espectro de uma resposta distorcida.

Isto ocorre pois a obtenção do espectro de Fourier da resposta é semelhante à obtenção da resposta via domínio da frequência.

Se estivermos utilizando a transformada da função resposta, basta dobrar a duração do carregamento acrescentando-se zeros.

Se estivermos utilizando a função de transferência, devemos prolongar o carregamento até um instante em que o valor da transformada inversa desta seja desprezível.

No exemplo (14.5), se obtivermos o espectro de Fourier do carregamento com 1024 termos e, a seguir, calcularmos o espectro de Fourier da resposta, este se referirá à sequência da figura (14.22). Caso o espectro do carregamento tenha sido obtido com 512 termos, o da resposta se referirá à sequência da figura (14.24).

15.4.2.2 - Carregamento periódico

No caso de carregamento periódico não há que se tomar

precauções quanto ao "aliasing" no domínio do tempo.

Conforme foi explicado no item (14.3.2), a resposta neste caso, pode ser obtida através do domínio da frequência pelas expressões (14.23).

A única precaução é a de se tomar sempre um número inteiro de períodos.

15.4.2.3 - Espectro de Fourier do carregamento dado

Existem situações em análise dinâmica em que, ao invés de se conhecer um histórico do carregamento, já se conhece o espectro de Fourier do mesmo.

O mesmo pode vir dado através de uma função contínua ou de uma sequência discreta no domínio da frequência. No primeiro caso pode-se discretizar a função $S(f)$, em intervalos constantes, para se recair no segundo.

Obtida a sequência do espectro de Fourier do carregamento, a do espectro de Fourier da resposta pode ser obtida pela expressão (15.26) ou (15.27).

No caso de carregamento de duração finita deve-se tomar cuidado com o intervalo de discretização da sequência $S(n)$. Por isto é importante saber a qual duração do carregamento corresponde este espectro dado.

Se a sequência $S(n)$ possui um intervalo de discretização de F hertz, o carregamento tem então uma duração total de $1/F$ segundos.

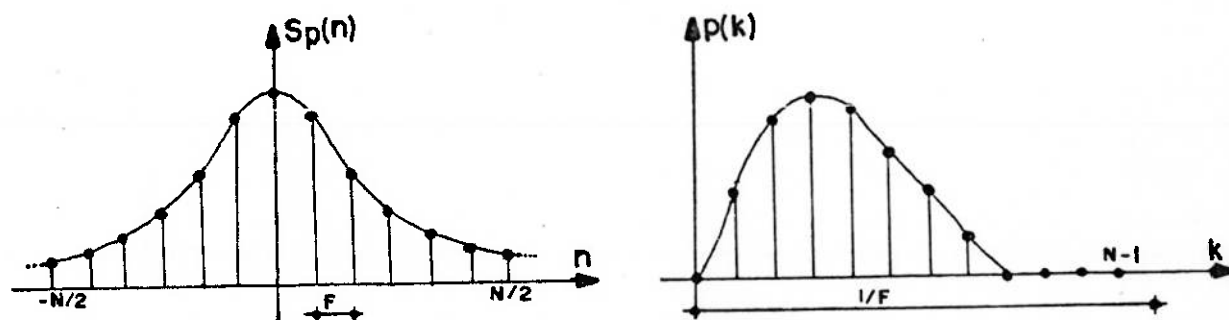


Figura (15.20)

É importante saber então se esta duração total do carregamento é suficientemente longa para que, ao calcularmos o es

pectro de Fourier da resposta numericamente, não estejamos ob-
tendo o mesmo para uma resposta distorcida devido ao "aliasing"
no domínio do tempo.

No caso de carregamento periódico, o intervalo de dis-
cretização do espectro de Fourier deve ser o inverso do período
do carregamento.

15.4.3 - Média quadrática da resposta

Consideremos um carregamento de duração finita e a
resposta do mesmo:

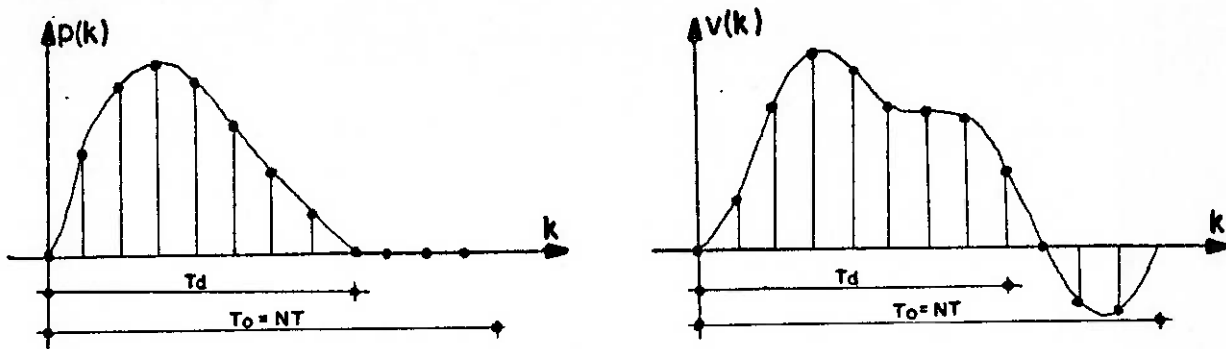


Figura (15.21)

Segundo vimos no ítem (15.3.3)

$$\bar{p}_1^{-2} = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} Sp(n) \quad (15.28)$$

$$\bar{v}_1^{-2} = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} Sv(n) \quad (15.29)$$

onde \bar{p}_1^{-2} e \bar{v}_1^{-2} são as médias quadráticas do carregamento e da res-
posta no intervalo de T_0 segundos.

Se quisermos obter a média quadrática do carregamento,
 \bar{p}_2^{-2} , no seu intervalo de duração apenas teremos:

$$\bar{p}_2^{-2} = \frac{T_0}{T_d} \bar{p}_1^{-2} \quad (15.30)$$

Uma expressão análoga a esta não pode ser estabeleci-
da para a resposta pois, conforme vimos no ítem (13.4.3), esta-
remos desprezando os deslocamentos em vibrações livres. Somente

no caso em que isto puder ser feito poderemos afirmar que a média quadrática da resposta, \bar{v}_2^2 , durante o intervalo de vibrações forçadas será dada por:

$$\bar{v}_2^2 = \bar{v}_1^2 \frac{T_0}{T_d} \quad (15.31)$$

No caso de carregamento de duração finita ainda, se a sequência $Sv(n)$ corresponder a uma resposta distorcida, estaremos obtendo a média quadrática desta resposta distorcida.

No caso de carregamentos periódicos, as expressões (15.28) e (15.29) serão válidas para se obter a média quadrática do carregamento e da resposta em um período. No caso de se tomar os espectros de Fourier do carregamento e da resposta para mais de um período, as médias quadráticas serão as mesmas.

A título de exemplo vamos considerar novamente o carregamento em exponencial crescente do ítem (14.5). A seguir resumimos alguns dados do mesmo e da resposta.

a - Carregamento

- a.1 - Média quadrática no intervalo de 9 segundos - $\bar{p}_1^2 = 83,23610 \text{ kgh}^2$
- a.2 - Média quadrática no intervalo de 9,216 segundos - $\bar{p}_2^2 = 81,28525 \text{ kgf}^2$
- a.3 - Média quadrática no intervalo de 18,432 segundos - $\bar{p}_3^2 = 40,64262 \text{ kgf}^2$
- a.4 - Área sob a curva do espectro de Fourier para o carregamento com 9,216 segundos de duração - $Ap_1 = 749,12490$
- a.5 - Área sob a curva do espectro de Fourier para o carregamento com 18,432 segundos de duração - $Ap_2 = 749,12490$

b - Resposta

- b.1 - Resposta calculada no domínio da frequência, utilizando a função de transferência, dobrando a duração do carregamento.

b.1.1 - Média quadrática no intervalo de 9 segundos .. - $\bar{v}_1^2 = 32,51594 \text{ mm}^2$

- b.1.2 - Média quadrática no intervalo de 18,432 segundos - $\bar{v}_2^2 = 16,72666 \text{ mm}^2$
- b.1.3 - Área sob a curva do espectro de Fourier - $Av_1 = 308,30579$
- b.2 - Resposta calculada no domínio da frequência, utilizando a função de transferência, sem dobrar a duração do carregamento.
- b.2.1 - Média quadrática no intervalo de 9 segundos .. - $\bar{v}_3^2 = 34,00568 \text{ mm}^2$
- b.2.2 - Média quadrática no intervalo de 9,216 segundos - $\bar{v}_4^2 = 33,56871 \text{ mm}^2$
- b.2.3 - Área sob a curva do espectro de Fourier - $Av_2 = 309,36920$

As médias quadráticas do carregamento nos casos a.2 e a.3 foram obtidas pela expressão (15.30).

$$\bar{p}_2^2 = \bar{p}_1^2 \frac{500}{512} \qquad \bar{p}_3^2 = \bar{p}_1^2 \frac{500}{1024}$$

Isto é válido pois o carregamento após o instante de 9 segundos é zero.

Pode-se notar que, pelo fato de se aumentar a duração do carregamento acrescentando-se zeros, a média quadrática do mesmo, obtida pelo espectro de Fourier, permanece inalterada.

$$\bar{p}_2^2 = \frac{Ap_1}{9,216} \qquad \bar{p}_3^2 = \frac{Ap_2}{18,432}$$

No caso b.1 pode-se verificar que:

$$\bar{v}_2^2 = \frac{Av_1}{18,432}$$

Este valor é a média quadrática da resposta, da figura (14.23), no intervalo de 18,432 segundos. Se neste caso não houvessem deslocamentos em vibrações livres o valor da mesma no intervalo de 9 segundos seria:

$$\overline{v}_1^2 \cong \overline{v}_2^2 \cdot \frac{18,432}{9} \qquad \overline{v}_1^2 \cong 34,2562 \text{ mm}^2$$

que não coincide com o valor dado em b.1.1.

No caso b.2 pode-se verificar também que:

$$\overline{v}_4^2 = \frac{Av_2}{9,216}$$

Este valor é a média quadrática da resposta, da figura (14.26), no intervalo de 9,216 segundos. Como pode se verificar pela figura a resposta é distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo. Também se, neste caso, não houvessem deslocamentos em vibrações livres, a média quadrática da resposta, durante o intervalo de vibrações forçadas, seria dada por:

$$\overline{v}_3^2 \cong \overline{v}_4^2 \cdot \frac{9,215}{9} \qquad \overline{v}_3^2 = 34,37436 \text{ mm}^2$$

que também não coincide com o valor dado em b.2.1.

Como as respostas das figuras (14.23) e (14.26) são totalmente diferentes, as médias quadráticas das mesmas no intervalo de vibrações forçadas também são diferentes, como se pode notar em b.1.1 e b.2.1.

Feitas estas observações podemos tirar algumas conclusões a respeito da obtenção da média quadrática da resposta a partir do espectro de Fourier da mesma.

a) O intervalo de discretização do espectro de Fourier do carregamento deve ser suficientemente pequeno para que não tenhamos o espectro de Fourier de uma resposta distorcida devido ao "aliasing" no domínio do tempo.

Se o carregamento, figura (15.21-a), tem uma duração de T_0 segundos o intervalo de discretização do espectro de Fourier do mesmo será:

$$F = \frac{1}{T_0} \text{ Hertz}$$

b) Tomando a área do espectro de Fourier da resposta e multiplicando pelo intervalo de discretização F do mesmo, teremos a média quadrática da resposta no intervalo de T_0 segundos.

A média quadrática da resposta, no intervalo de vibrações forçadas, pode ser calculada a partir da anterior, no caso em que os deslocamentos em vibrações livres são desprezíveis, pela expressão (15.31).

Como pode-se notar no caso de um carregamento do tipo da exponencial crescente a expressão (15.37) conduz a erros consideráveis.

A seguir apresentamos os mesmos dados relativos ao carregamento devido ao acelerograma do exemplo do ítem (14.7).

a - Carregamento

- a.1 - Média quadrática no intervalo de 15 segundos - $\bar{p}_1^2 = 9,62729 \text{ kgf}^2$
- a.2 - Média quadrática no intervalo de 40,96 segundos - $\bar{p}_1^2 = 3,52562 \text{ kgf}^2$
- a.3 - Área sob a curva do espectro de Fourier - $A_p = 144,40935$

b - Resposta calculada no domínio da frequência utilizada a função de transferência

- b.1 - Média quadrática no intervalo de 15 segundos - $\bar{v}_1^2 = 25,40843 \text{ mm}^2$
- b.2 - Média quadrática no intervalo de 40,96 segundos - $\bar{v}_2^2 = 9,32208 \text{ mm}^2$
- b.3 - Área sob a curva do espectro de Fourier - $A_v = 381,83252$

Como pode-se verificar o erro que se comete neste caso ao se desprezar os deslocamentos em vibrações livres é menor do que o do caso anterior.

15.5 - O programa "ESPECTRO"

Baseado nas técnicas até aqui apresentadas, foi elaborado um outro programa para o computador Burroughs B6700, em FORTRAN IV, para a análise de uma estrutura linear, de um grau de liberdade, sujeita a um carregamento discretizado.

Pode-se entrar neste programa com o carregamento ou o espectro de Fourier discretizados. Pode-se fornecer ainda as características de estrutura ou a função de transferência discretizada.

O programa obtém o espectro de Fourier do carregamento, $S(n)$, se o mesmo já não for dado, e o corrigido, $\hat{S}(n)$. O programa obtém também o espectro de Fourier resposta. Em todos os casos o mesmo calcula a área definida pelas sequências $S(n)$ e $\hat{S}(n)$.

A listagem e as instruções para utilização do mesmo encontram-se no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

15.6 - Exemplos

O exemplo que apresentamos agora foi realizado utilizando o programa ESPECTRO.

Trata-se do mesmo carregamento da figura (14.30).

Na figura (15.22) apresentamos o espectro de Fourier do mesmo. Na figura (15.23) apresentamos o espectro de Fourier corrigido $\hat{S}(n)$. Na figura (15.24) é apresentado o módulo ao quadrado da função de transferência da estrutura e na (15.25) o espectro de Fourier da resposta.

Como o intervalo de discretização do carregamento é de 0,01 segundos, no domínio da frequência as sequências ficam definidas na faixa de -50 a +50 hertz. Como a duração do carregamento é de 40,96 segundos, o intervalo de discretização no domínio da frequência é de 0,02441 hertz.

Como todas as sequências são pares, só apresentamos a parte referente às frequências positivas. Além disto, só representamos no gráfico a faixa de 0 a 8 hertz, visto que a partir desta frequência as componentes das sequências começaram a ficar desprezíveis.

Pode-se notar que, para frequências altas, as componentes do espectro de Fourier do carregamento vão diminuindo sensivelmente. Porém o mesmo apresenta valores consideráveis até a frequência de 8 Hertz.

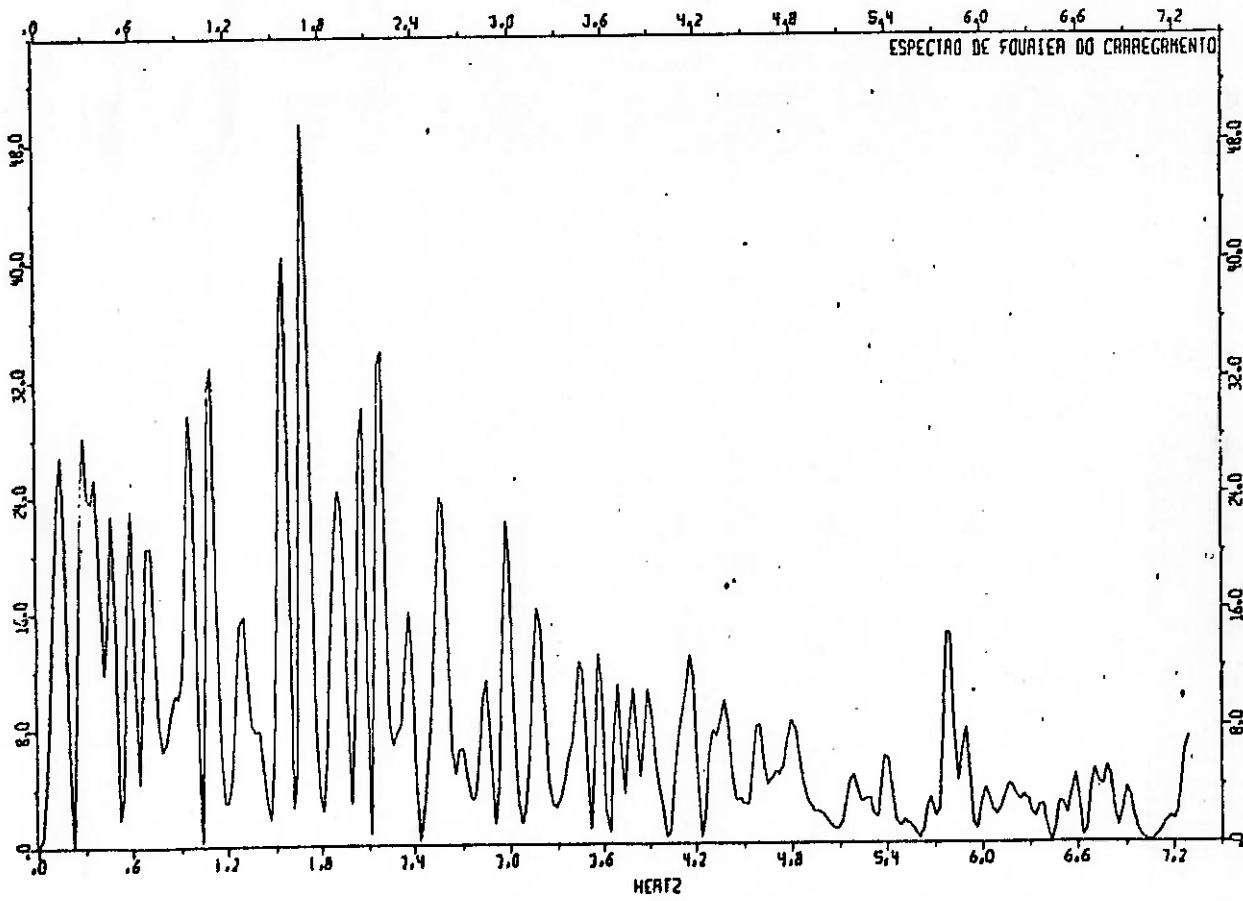


Figura (15.22)

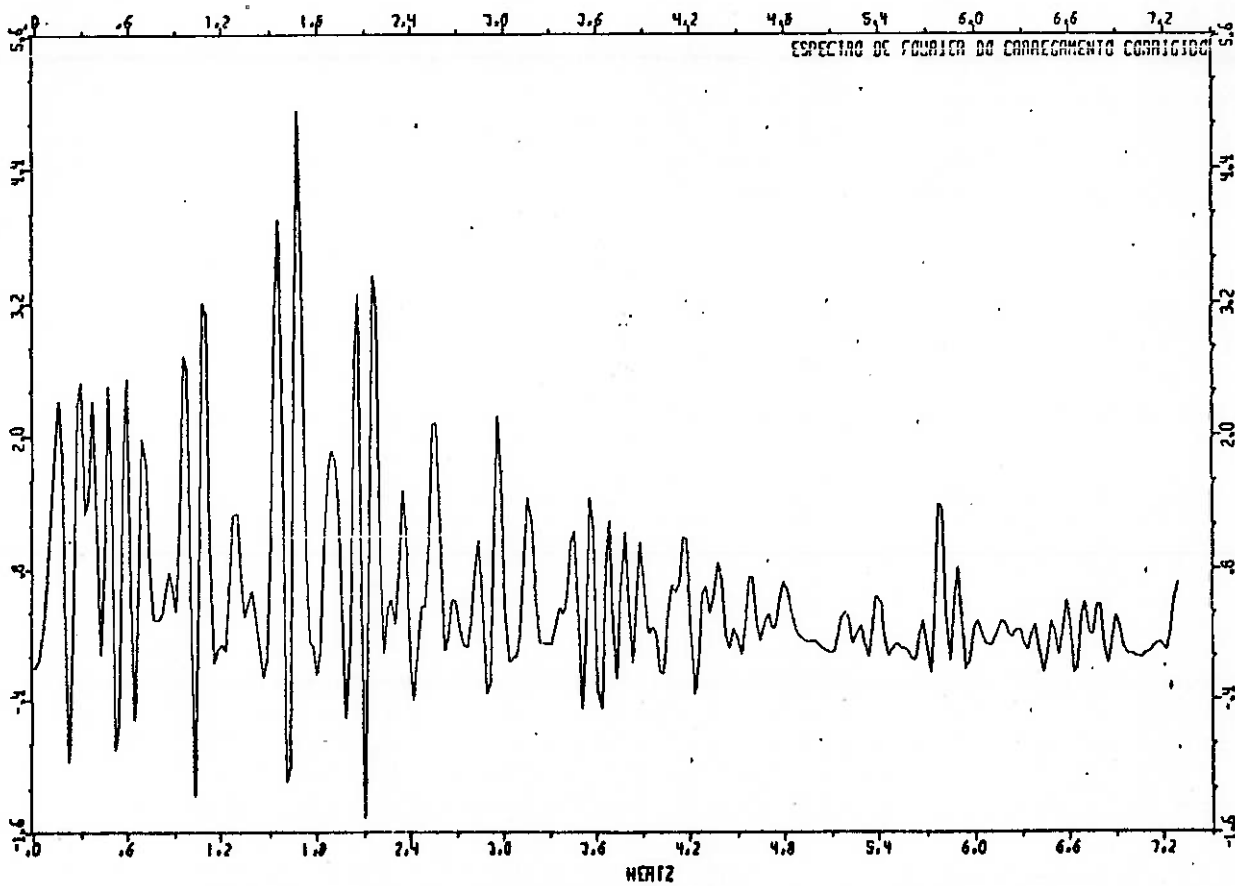


Figura (15.23)

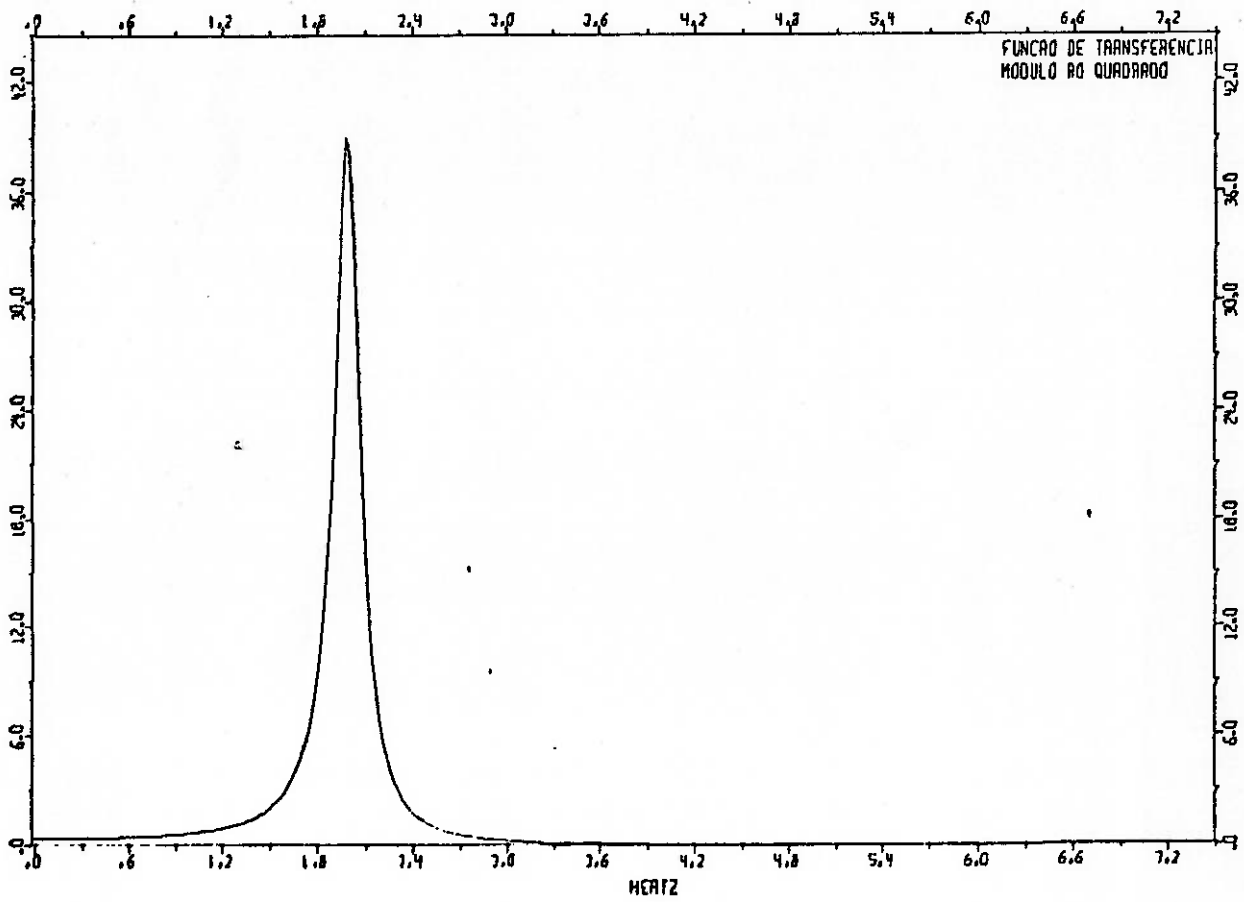


Figura (15.24)

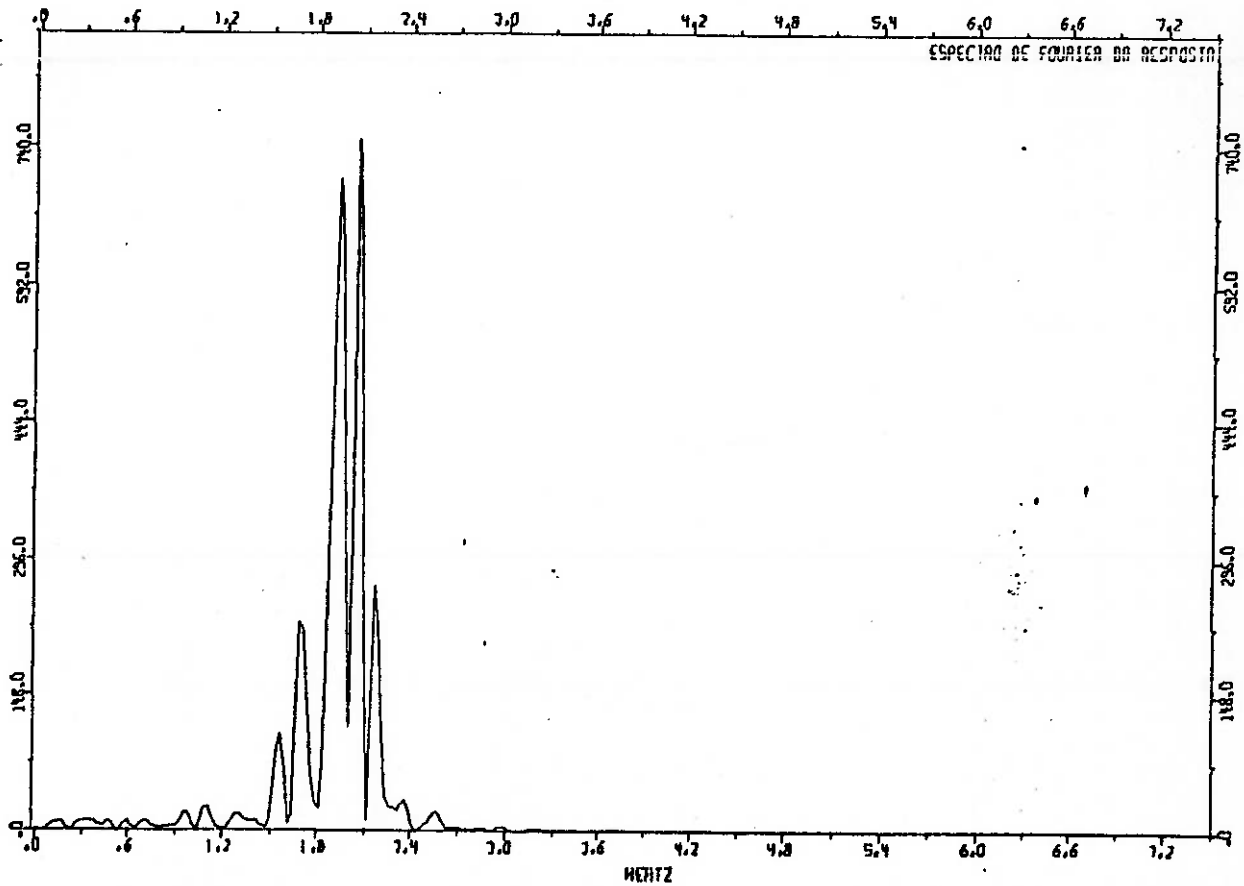


Figura (15.25)

Como o módulo ao quadrado da função de transferência é uma função fortemente concentrada em torno de 2 Hertz, que é a frequência natural da estrutura, o espectro de Fourier da resposta também encontra-se concentrado em torno desta frequência. Esta é a propriedade de filtragem dos sistemas lineares que explica o fato de uma excitação, de forma tão diversa como na figura (14.30), apresentar uma resposta de forma mais ou menos definida como na figura (14.33).

Pode-se verificar que a sequência $\hat{S}(n)$ apresenta, mais ou menos, as mesmas características da sequência $S(n)$. A primeira, porém, apresenta valores negativos o que não ocorre com a última. A área definida pela mesma em todo o seu intervalo de 100 Hz é igual a média quadrática do carregamento no intervalo de 40,96 segundos.

15.7 - Comentário final

Muitas das definições apresentadas no capítulo 13 e neste não coincidem com as encontradas nas bibliografias. O motivo para estas discordâncias é o mesmo citado no comentário final do capítulo 13. Ou seja, pelo fato destes autores tomarem as propriedades estatísticas: média, média quadrática e autocorrelação média, sobre todo o domínio do tempo.

Conforme frisamos, procedendo desta maneira para sequências de duração finita, vamos sempre encontrar valores nulos para as mesmas. Por isto achamos melhor considerar estas propriedades somente sobre um intervalo finito. Com isto aparecem as discrepâncias entre as definições.

No caso do espectro de Fourier, por exemplo, não faz diferença, para sequências periódicas, se considerarmos o mesmo como transformada de Fourier da autocorrelação ou da autocorrelação média pois, a relação entre eles se fará através de uma constante.

No caso do carregamento de duração finita, esta diferença existe e é grande como pode-se notar pelas figuras (15.22) e (15.23).

Por isto preferimos ficar com a segunda definição, pois ela não perde a propriedade de caracterizar a média quadrática

ca, e, além disto, tem a vantagem de se poder obter o espectro de Fourier da resposta.

Quanto ao problema da transmissão da média fica ainda uma questão em aberto: como se avaliar a integral do lado esquerdo da expressão (13.3.4) sem se precisar determinar a resposta?

A obtenção do espectro de Fourier da resposta a partir do espectro de Fourier do carregamento não apresenta maiores problemas. A única consideração a ser feita é quanto ao intervalo de discretização do mesmo.

Um outro problema que surgiu, que também fica em aberto, é a obtenção da média quadrática da resposta, no intervalo de duração do carregamento, a partir do espectro de Fourier da mesma.

Talvez possa se demonstrar que, na maioria dos casos, o fato de se desprezar os deslocamentos em vibrações livres, não introduz erros consideráveis no cálculo da média e da média quadrática da resposta no intervalo de vibrações forçadas.

Para não alongar muito este trabalho, este estudo é deixado para ser abordado em outros trabalhos sobre o tema caso o mesmo seja necessário.

A P Ê N D I C E 1

PROGRAMAS PARA A CALCULADORA TEXAS 59

Apresentamos neste apêndice alguns programas elaborados para esta calculadora e citados durante este trabalho.

O primeiro deles calcula a transformada discreta de Fourier de uma sequência segundo o fluxograma da figura (7.16). O número de termos é 43 e o programa obtém os termos da transformada, um de cada vez.

Antes de se iniciar o processamento deste programa deve-se inicialmente pressionar "10 OP 17". A seguir deve ser fornecido o número de termos da sequência, pressionando-se a tecla "A". Fornecemos então cada termo da sequência, a partir do primeiro, fornecendo primeiro a parte real e, a seguir, a imaginária, pressionando sempre a tecla "R/S".

A sequência da transformada é obtida na ordem inversa. Ao se fornecer a parte imaginária do último termo da sequência, é calculada a parte real do último termo da transformada. Pressionando-se a tecla "R/S" teremos a parte imaginária do mesmo. Continuando a pressionar esta tecla obteremos todos os termos da transformada na ordem inversa.

O segundo calcula a transformada discreta de Fourier de uma sequência utilizando o algoritmo da transformada rápida de Fourier, segundo o fluxograma da figura (9.13). Neste caso o número de termos deve ser potência inteira de dois e o máximo é de 32.

Antes de se iniciar o processamento deste programa, deve-se, inicialmente, pressionar "8 OP 17". A seguir deve ser fornecido o expoente de dois pressionando-se a tecla "A". Fornecemos então cada termo da sequência, a partir do primeiro, fornecendo primeiro a parte real e, a seguir, a imaginária, pressionando-se sempre a tecla "R/S".

Se a sequência ainda não estiver reordenada, segundo o fluxograma da figura (9.7), deve ser pressionada a tecla "D". Ao final da reordenação o visor ficará intermitente.

Se a tecla "D" foi pressionada, após a reordenação pressione "CLR" e "C" para se calcular a transformada da sequência. Se a sequência introduzida já estava reordenada, após introduzir a parte imaginária do último termo, o cálculo é, automaticamente, iniciado. Após a obtenção da sequência da transformada, o visor apresentará a parte real do primeiro termo da mesma. Pressionando-se a tecla "R/S", obteremos a parte real do segundo termo e assim sucessivamente.

O terceiro e o quarto programas servem para o cálculo da correlação e da convolução discretas, respectivamente, de duas sequências, segundo os fluxogramas das figuras (11.3) e (11.5). O número máximo de termos, somando-se os das duas sequências, é 80.

A maneira de se introduzir os dados é a mesma para os dois casos. Introduzimos primeiro o intervalo de discretização pressionando a tecla "A". A seguir introduzimos o número de termos da sequência $x(k)$ pressionando "B". Fornecemos então cada termo da mesma pressionando "R/S". A seguir introduzimos o número de termos da sequência $h(k)$ pressionando "C". Fornecemos então cada termo da mesma pressionando-se "R/S". Nos dois casos, quando for introduzido o último termo da sequência, o visor ficará intermitente.

Para se calcular os termos da convolução ou da correlação, basta, após introduzir o último termo da sequência $x(k)$, pressionar "CLR" "D". No caso da correlação discreta, a sequência que está sendo deslocada é $h(k)$.

Após pressionar "D", o visor apresentará o valor de $y(0)$ ou $z(0)$. Pressionando-se "R/S" teremos $y(1)$ ou $z(1)$ e assim sucessivamente. Quando for apresentado o último valor para k positivo, se se pressionar novamente "R/S", o visor ficará intermitente.

No caso da correlação discreta, após ter sido obtido o último valor de $z(k)$ para k positivo e o visor estiver intermitente, basta pressionar "CLR" "R/S" e será apresentado o valor de $z(k)$ para o último valor de k negativo. Pressionando-se seguidamente "R/S", teremos os outros valores de $z(k)$.

O quinto e último destes programas fornece valores das funções de resposta e de transferência, para instantes e

e frequências determinados, segundo as expressões (12.8) e (12.19).

Para utilizá-los introduza primeiramente a rigidez e pressione "A". Introduza a seguir a massa e a porcentagem de amortecimento, na forma centesimal, pressionando "R/S" em cada vez.

Para se obter o valor da função de transferência em uma determinada frequência, introduza a frequência e pressione "B". No visor aparecerá a parte real da função de transferência. Para obter a parte imaginária pressione "R/S". Para se obter o valor da função de resposta em um determinado instante, introduza o instante e pressione "C".

Para se obter o valor da função de transferência em frequências múltiplas de um intervalo de discretização, segundo as expressões (14.2), introduza o valor do intervalo e pressione "C". No visor aparecerá a parte real da função de transferência na frequência zero. Pressionando-se "R/S" tem-se o valor da parte imaginária. Continuando a pressionar esta tecla, teremos os valores desta função para múltiplos do intervalo dado em ordem crescente.

O mesmo pode ser feito para se obter o valor da função de resposta em instantes múltiplos de um intervalo de discretização, segundo a expressão (14.1). Para isto basta introduzir o valor deste intervalo e pressionar "D". Os outros procedimentos são idênticos ao passo anterior. Neste caso porém só aparece a parte real da função de transferência pois a imaginária é nula.

Deve-se lembrar que, para se utilizar este programa, o sistema de unidades adotado deve ser compatível.

A seguir apresentamos as listagens dos programas citados.

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 000 | 76 | LBL | 030 | 76 | LBL | 060 | 91 | R/S | 090 | 75 | - | 120 | 44 | SUM |
| 001 | 39 | CDS | 031 | 11 | A | 061 | 72 | ST* | 091 | 01 | 1 | 121 | 08 | 08 |
| 002 | 43 | RCL | 032 | 47 | CMS | 062 | 01 | 01 | 092 | 54 |) | 122 | 71 | SBR |
| 003 | 14 | 14 | 033 | 42 | STD | 063 | 69 | DP | 093 | 65 | x | 123 | 38 | SIN |
| 004 | 65 | x | 034 | 02 | 02 | 064 | 21 | 21 | 094 | 43 | RCL | 124 | 44 | SUM |
| 005 | 43 | RCL | 035 | 35 | 1/X | 065 | 97 | DSZ | 095 | 11 | 11 | 125 | 09 | 09 |
| 006 | 12 | 12 | 036 | 65 | x | 066 | 00 | 00 | 096 | 95 | = | 126 | 69 | DP |
| 007 | 75 | - | 037 | 02 | 2 | 067 | 00 | 00 | 097 | 42 | STD | 127 | 25 | 25 |
| 008 | 43 | RCL | 038 | 65 | x | 068 | 60 | 60 | 098 | 04 | 04 | 128 | 69 | DP |
| 009 | 15 | 15 | 039 | 89 | # | 069 | 25 | CLR | 099 | 39 | CDS | 129 | 26 | 26 |
| 010 | 65 | x | 040 | 95 | = | 070 | 42 | STD | 100 | 42 | STD | 130 | 97 | DSZ |
| 011 | 43 | RCL | 041 | 42 | STD | 071 | 08 | 08 | 101 | 12 | 12 | 131 | 03 | 03 |
| 012 | 13 | 13 | 042 | 11 | 11 | 072 | 42 | STD | 102 | 43 | RCL | 132 | 00 | 00 |
| 013 | 95 | = | 043 | 70 | RAD | 073 | 09 | 09 | 103 | 04 | 04 | 133 | 84 | 84 |
| 014 | 92 | RTN | 044 | 08 | 8 | 074 | 42 | STD | 104 | 38 | SIN | 134 | 43 | RCL |
| 015 | 76 | LBL | 045 | 69 | DP | 075 | 06 | 06 | 105 | 94 | +/- | 135 | 08 | 08 |
| 016 | 38 | SIN | 046 | 17 | 17 | 076 | 01 | 1 | 106 | 42 | STD | 136 | 91 | R/S |
| 017 | 43 | RCL | 047 | 43 | RCL | 077 | 06 | 6 | 107 | 13 | 13 | 137 | 43 | RCL |
| 018 | 14 | 14 | 048 | 02 | 02 | 078 | 42 | STD | 108 | 73 | RC* | 138 | 09 | 09 |
| 019 | 65 | x | 049 | 42 | STD | 079 | 05 | 05 | 109 | 05 | 05 | 139 | 91 | R/S |
| 020 | 43 | RCL | 050 | 07 | 07 | 080 | 43 | RCL | 110 | 42 | STD | 140 | 97 | DSZ |
| 021 | 13 | 13 | 051 | 65 | x | 081 | 02 | 02 | 111 | 14 | 14 | 141 | 07 | 07 |
| 022 | 85 | + | 052 | 02 | 2 | 082 | 42 | STD | 112 | 69 | DP | 142 | 00 | 00 |
| 023 | 43 | RCL | 053 | 95 | = | 083 | 03 | 03 | 113 | 25 | 25 | 143 | 69 | 69 |
| 024 | 15 | 15 | 054 | 42 | STD | 084 | 43 | RCL | 114 | 73 | RC* | 144 | 25 | CLR |
| 025 | 65 | x | 055 | 00 | 00 | 085 | 06 | 06 | 115 | 05 | 05 | 145 | 35 | 1/X |
| 026 | 43 | RCL | 056 | 01 | 1 | 086 | 65 | x | 116 | 42 | STD | 146 | 91 | R/S |
| 027 | 12 | 12 | 057 | 06 | 6 | 087 | 53 | < | 117 | 15 | 15 | | | |
| 028 | 95 | = | 058 | 42 | STD | 088 | 43 | RCL | 118 | 71 | SBR | | | |
| 029 | 92 | RTN | 059 | 01 | 01 | 089 | 07 | 07 | 119 | 39 | CDS | | | |

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 000 | 76 | LBL | 040 | 95 | = | 080 | 52 | EE | 120 | 42 | STD | 160 | 07 | 07 |
| 001 | 39 | CDS | 041 | 22 | INV | 081 | 22 | INV | 121 | 06 | 06 | 161 | 95 | = |
| 002 | 53 | < | 042 | 23 | LNK | 082 | 52 | EE | 122 | 01 | 1 | 162 | 72 | ST* |
| 003 | 43 | RCL | 043 | 52 | EE | 083 | 42 | STD | 123 | 06 | 6 | 163 | 08 | 08 |
| 004 | 14 | 14 | 044 | 22 | INV | 084 | 03 | 03 | 124 | 85 | + | 164 | 69 | DP |
| 005 | 65 | x | 045 | 52 | EE | 085 | 42 | STD | 125 | 02 | 2 | 165 | 27 | 27 |
| 006 | 43 | RCL | 046 | 42 | STD | 086 | 05 | 05 | 126 | 65 | x | 166 | 69 | DP |
| 007 | 12 | 12 | 047 | 02 | 02 | 087 | 25 | CLR | 127 | 43 | RCL | 167 | 28 | 28 |
| 008 | 75 | - | 048 | 08 | 8 | 088 | 42 | STD | 128 | 01 | 01 | 168 | 73 | RC* |
| 009 | 43 | RCL | 049 | 69 | DP | 089 | 01 | 01 | 129 | 95 | = | 169 | 07 | 07 |
| 010 | 15 | 15 | 050 | 17 | 17 | 090 | 43 | RCL | 130 | 42 | STD | 170 | 75 | - |
| 011 | 65 | x | 051 | 25 | CLR | 091 | 01 | 01 | 131 | 07 | 07 | 171 | 71 | SBR |
| 012 | 43 | RCL | 052 | 42 | STD | 092 | 65 | x | 132 | 43 | RCL | 172 | 38 | SIN |
| 013 | 13 | 13 | 053 | 04 | 04 | 093 | 89 | # | 133 | 07 | 07 | 173 | 74 | SM* |
| 014 | 54 |) | 054 | 01 | 1 | 094 | 55 | + | 134 | 85 | + | 174 | 07 | 07 |
| 015 | 92 | RTN | 055 | 06 | 6 | 095 | 43 | RCL | 135 | 43 | RCL | 175 | 95 | = |
| 016 | 76 | LBL | 056 | 42 | STD | 096 | 05 | 05 | 136 | 05 | 05 | 176 | 72 | ST* |
| 017 | 38 | SIN | 057 | 01 | 01 | 097 | 95 | = | 137 | 65 | x | 177 | 08 | 08 |
| 018 | 53 | < | 058 | 91 | R/S | 098 | 42 | STD | 138 | 02 | 2 | 178 | 69 | DP |
| 019 | 43 | RCL | 059 | 72 | ST* | 099 | 10 | 10 | 139 | 95 | = | 179 | 37 | 37 |
| 020 | 14 | 14 | 060 | 01 | 01 | 100 | 39 | CDS | 140 | 42 | STD | 180 | 43 | RCL |
| 021 | 65 | x | 061 | 69 | DP | 101 | 42 | STD | 141 | 08 | 08 | 181 | 05 | 05 |
| 022 | 43 | RCL | 062 | 21 | 21 | 102 | 12 | 12 | 142 | 73 | RC* | 182 | 65 | x |
| 023 | 13 | 13 | 063 | 61 | GTO | 103 | 43 | RCL | 143 | 08 | 08 | 183 | 04 | 4 |
| 024 | 85 | + | 064 | 00 | 00 | 104 | 10 | 10 | 144 | 42 | STD | 184 | 95 | = |
| 025 | 43 | RCL | 065 | 58 | 58 | 105 | 38 | SIN | 145 | 14 | 14 | 185 | 44 | SUM |
| 026 | 15 | 15 | 066 | 68 | NOP | 106 | 94 | +/- | 146 | 69 | DP | 186 | 07 | 07 |
| 027 | 65 | x | 067 | 68 | NOP | 107 | 42 | STD | 147 | 28 | 28 | 187 | 97 | DSZ |
| 028 | 43 | RCL | 068 | 68 | NOP | 108 | 13 | 13 | 148 | 73 | RC* | 188 | 06 | 06 |
| 029 | 12 | 12 | 069 | 76 | LBL | 109 | 43 | RCL | 149 | 08 | 08 | 189 | 01 | 01 |
| 030 | 54 |) | 070 | 12 | B | 110 | 02 | 02 | 150 | 42 | STD | 190 | 32 | 32 |
| 031 | 92 | RTN | 071 | 69 | DP | 111 | 55 | + | 151 | 15 | 15 | 191 | 69 | DP |
| 032 | 76 | LBL | 072 | 24 | 24 | 112 | 02 | 2 | 152 | 69 | DP | 192 | 21 | 21 |
| 033 | 11 | A | 073 | 02 | 2 | 113 | 45 | YK | 153 | 38 | 38 | 193 | 97 | DSZ |
| 034 | 70 | RAD | 074 | 45 | YK | 114 | 43 | RCL | 154 | 73 | RC* | 194 | 03 | 03 |
| 035 | 42 | STD | 075 | 43 | RCL | 115 | 04 | 04 | 155 | 07 | 07 | 195 | 00 | 00 |
| 036 | 00 | 00 | 076 | 04 | 04 | 116 | 95 | = | 156 | 75 | - | 196 | 90 | 90 |
| 037 | 65 | x | 077 | 55 | + | 117 | 52 | EE | 157 | 71 | SBR | 197 | 97 | DSZ |
| 038 | 02 | 2 | 078 | 02 | 2 | 118 | 22 | INV | 158 | 39 | CDS | 198 | 00 | 00 |
| 039 | 23 | LNK | 079 | 95 | = | 119 | 52 | EE | 159 | 74 | SM* | 199 | 12 | 8 |

A.5

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 200 | 76 | LBL | 224 | 91 | R/S | 248 | 42 | STO | 272 | 63 | EX* | 296 | 07 | 07 |
| 201 | 13 | C | 225 | 76 | LBL | 249 | 05 | 05 | 273 | 06 | 06 | 297 | 32 | XIT |
| 202 | 01 | 1 | 226 | 14 | D | 250 | 43 | RCL | 274 | 72 | ST* | 298 | 61 | GTO |
| 203 | 06 | 6 | 227 | 01 | 1 | 251 | 08 | 08 | 275 | 05 | 05 | 299 | 02 | 02 |
| 204 | 42 | STO | 228 | 42 | STO | 252 | 65 | x | 276 | 43 | RCL | 300 | 83 | 83 |
| 205 | 01 | 01 | 229 | 07 | 07 | 253 | 02 | 2 | 277 | 02 | 02 | 301 | 44 | SUM |
| 206 | 43 | RCL | 230 | 42 | STO | 254 | 85 | + | 278 | 55 | + | 302 | 07 | 07 |
| 207 | 02 | 02 | 231 | 08 | 08 | 255 | 01 | 1 | 279 | 02 | 2 | 303 | 69 | DP |
| 208 | 65 | x | 232 | 43 | RCL | 256 | 04 | 4 | 280 | 95 | = | 304 | 28 | 28 |
| 209 | 02 | 2 | 233 | 07 | 07 | 257 | 95 | = | 281 | 42 | STO | 305 | 43 | RCL |
| 210 | 95 | = | 234 | 32 | XIT | 258 | 42 | STO | 282 | 09 | 09 | 306 | 02 | 02 |
| 211 | 42 | STO | 235 | 43 | RCL | 259 | 06 | 06 | 283 | 43 | RCL | 307 | 75 | - |
| 212 | 03 | 03 | 236 | 08 | 08 | 260 | 73 | RC* | 284 | 09 | 09 | 308 | 01 | 1 |
| 213 | 73 | RC* | 237 | 77 | GE | 261 | 05 | 05 | 285 | 77 | GE | 309 | 95 | = |
| 214 | 01 | 01 | 238 | 02 | 02 | 262 | 63 | EX* | 286 | 03 | 03 | 310 | 32 | XIT |
| 215 | 91 | R/S | 239 | 76 | 76 | 263 | 06 | 06 | 287 | 01 | 01 | 311 | 43 | RCL |
| 216 | 69 | DP | 240 | 43 | RCL | 264 | 72 | ST* | 288 | 22 | INV | 312 | 08 | 08 |
| 217 | 21 | 21 | 241 | 07 | 07 | 265 | 05 | 05 | 289 | 44 | SUM | 313 | 22 | INV |
| 218 | 97 | DS2 | 242 | 65 | x | 266 | 69 | DP | 290 | 07 | 07 | 314 | 67 | EQ |
| 219 | 03 | 03 | 243 | 02 | 2 | 267 | 25 | 25 | 291 | 02 | 2 | 315 | 02 | 02 |
| 220 | 02 | 02 | 244 | 85 | + | 268 | 69 | DP | 292 | 22 | INV | 316 | 32 | 32 |
| 221 | 13 | 13 | 245 | 01 | 1 | 269 | 26 | 26 | 293 | 49 | FRD | 317 | 12 | B |
| 222 | 25 | CLR | 246 | 04 | 4 | 270 | 73 | RC* | 294 | 09 | 09 | | | |
| 223 | 35 | 1/X | 247 | 95 | = | 271 | 05 | 05 | 295 | 43 | RCL | | | |

CONVOLUÇÃO

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 000 | 76 | LBL | 038 | 02 | 02 | 076 | 75 | - | 114 | 01 | 01 | 152 | 09 | 09 |
| 001 | 11 | A | 039 | 85 | + | 077 | 01 | 1 | 115 | 20 | 20 | 153 | 69 | DP |
| 002 | 42 | STO | 040 | 43 | RCL | 078 | 95 | = | 116 | 43 | RCL | 154 | 25 | 25 |
| 003 | 00 | 00 | 041 | 03 | 03 | 079 | 77 | GE | 117 | 04 | 04 | 155 | 43 | RCL |
| 004 | 09 | 9 | 042 | 95 | = | 080 | 00 | 00 | 118 | 42 | STO | 156 | 05 | 05 |
| 005 | 69 | DP | 043 | 32 | XIT | 081 | 95 | 95 | 119 | 06 | 06 | 157 | 32 | XIT |
| 006 | 17 | 17 | 044 | 91 | R/S | 082 | 43 | RCL | 120 | 25 | CLR | 158 | 43 | RCL |
| 007 | 91 | R/S | 045 | 72 | ST* | 083 | 04 | 04 | 121 | 42 | STO | 159 | 06 | 06 |
| 008 | 76 | LBL | 046 | 03 | 03 | 084 | 75 | - | 122 | 09 | 09 | 160 | 77 | GE |
| 009 | 12 | B | 047 | 69 | DP | 085 | 43 | RCL | 123 | 01 | 1 | 161 | 01 | 01 |
| 010 | 42 | STO | 048 | 23 | 23 | 086 | 02 | 02 | 124 | 00 | 0 | 162 | 23 | 23 |
| 011 | 01 | 01 | 049 | 43 | RCL | 087 | 85 | + | 125 | 85 | + | 163 | 43 | RCL |
| 012 | 85 | + | 050 | 03 | 03 | 088 | 01 | 1 | 126 | 43 | RCL | 164 | 09 | 09 |
| 013 | 01 | 1 | 051 | 22 | INV | 089 | 95 | = | 127 | 05 | 05 | 165 | 65 | x |
| 014 | 00 | 0 | 052 | 77 | GE | 090 | 42 | STO | 128 | 95 | = | 166 | 43 | RCL |
| 015 | 42 | STO | 053 | 00 | 00 | 091 | 05 | 05 | 129 | 42 | STO | 167 | 00 | 00 |
| 016 | 02 | 02 | 054 | 44 | 44 | 092 | 61 | GTO | 130 | 07 | 07 | 168 | 95 | = |
| 017 | 95 | = | 055 | 25 | CLR | 093 | 00 | 00 | 131 | 01 | 1 | 169 | 91 | R/S |
| 018 | 42 | STO | 056 | 35 | 1/X | 094 | 98 | 98 | 132 | 00 | 0 | 170 | 69 | DP |
| 019 | 03 | 03 | 057 | 91 | R/S | 095 | 25 | CLR | 133 | 85 | + | 171 | 24 | 24 |
| 020 | 32 | XIT | 058 | 76 | LBL | 096 | 42 | STO | 134 | 43 | RCL | 172 | 43 | RCL |
| 021 | 91 | R/S | 059 | 14 | D | 097 | 05 | 05 | 135 | 01 | 01 | 173 | 04 | 04 |
| 022 | 72 | ST* | 060 | 43 | RCL | 098 | 43 | RCL | 136 | 85 | + | 174 | 32 | XIT |
| 023 | 02 | 02 | 061 | 01 | 01 | 099 | 01 | 01 | 137 | 43 | RCL | 175 | 43 | RCL |
| 024 | 69 | DP | 062 | 85 | + | 100 | 75 | - | 138 | 04 | 04 | 176 | 01 | 01 |
| 025 | 22 | 22 | 063 | 43 | RCL | 101 | 01 | 1 | 139 | 75 | - | 177 | 85 | + |
| 026 | 43 | RCL | 064 | 02 | 02 | 102 | 95 | = | 140 | 43 | RCL | 178 | 43 | RCL |
| 027 | 02 | 02 | 065 | 75 | - | 103 | 77 | GE | 141 | 05 | 05 | 179 | 02 | 02 |
| 028 | 22 | INV | 066 | 02 | 2 | 104 | 01 | 01 | 142 | 95 | = | 180 | 75 | - |
| 029 | 77 | GE | 067 | 95 | = | 105 | 16 | 16 | 143 | 42 | STO | 181 | 02 | 2 |
| 030 | 00 | 00 | 068 | 42 | STO | 106 | 43 | RCL | 144 | 08 | 08 | 182 | 95 | = |
| 031 | 21 | 21 | 069 | 03 | 03 | 107 | 01 | 01 | 145 | 73 | RC* | 183 | 77 | GE |
| 032 | 25 | CLR | 070 | 25 | CLR | 108 | 75 | - | 146 | 07 | 07 | 184 | 00 | 00 |
| 033 | 35 | 1/X | 071 | 42 | STO | 109 | 01 | 1 | 147 | 65 | x | 185 | 74 | 74 |
| 034 | 91 | R/S | 072 | 04 | 04 | 110 | 95 | = | 148 | 73 | RC* | 186 | 25 | CLR |
| 035 | 76 | LBL | 073 | 32 | XIT | 111 | 42 | STO | 149 | 06 | 08 | 187 | 35 | 1/X |
| 036 | 13 | C | 074 | 43 | RCL | 112 | 06 | 05 | 150 | 95 | = | 188 | 91 | R/S |
| 037 | 42 | STO | 075 | 02 | 02 | 113 | 61 | GTO | 151 | 44 | SUM | | | |

CORRELAÇÃO

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 000 | 76 | LBL | 009 | 12 | B | 018 | 42 | STO | 027 | 02 | 02 | 036 | 13 | C |
| 001 | 11 | A | 010 | 42 | STO | 019 | 03 | 03 | 028 | 22 | INV | 037 | 42 | STO |
| 002 | 42 | STO | 011 | 01 | 01 | 020 | 32 | XIT | 029 | 77 | GE | 038 | 02 | 02 |
| 003 | 00 | 00 | 012 | 85 | + | 021 | 91 | R/S | 030 | 00 | 00 | 039 | 85 | + |
| 004 | 09 | 9 | 013 | 01 | 1 | 022 | 72 | ST* | 031 | 21 | 21 | 040 | 43 | RCL |
| 005 | 69 | DP | 014 | 00 | 0 | 023 | 02 | 02 | 032 | 25 | CLR | 041 | 03 | 03 |
| 006 | 17 | 17 | 015 | 42 | STO | 024 | 69 | DP | 033 | 35 | 1/X | 042 | 95 | = |
| 007 | 91 | R/S | 016 | 02 | 02 | 025 | 22 | 22 | 034 | 91 | R/S | 043 | 32 | XIT |
| 008 | 76 | LBL | 017 | 95 | = | 026 | 43 | RCL | 035 | 76 | LBL | 044 | 91 | R/S |

A.6

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 045 | 72 | ST* | 075 | 42 | STD | 105 | 01 | 01 | 135 | 05 | 05 | 165 | 24 | 24 |
| 046 | 03 | 03 | 076 | 05 | 05 | 106 | 14 | 14 | 136 | 95 | = | 166 | 43 | RCL |
| 047 | 69 | DP | 077 | 61 | GTD | 107 | 43 | RCL | 137 | 42 | STD | 167 | 04 | 04 |
| 048 | 23 | 23 | 078 | 00 | 00 | 108 | 01 | 01 | 138 | 08 | 08 | 168 | 32 | XIT |
| 049 | 43 | RCL | 079 | 85 | 85 | 109 | 75 | - | 139 | 73 | RC* | 169 | 43 | RCL |
| 050 | 03 | 03 | 080 | 43 | RCL | 110 | 01 | 1 | 140 | 07 | 07 | 170 | 03 | 03 |
| 051 | 22 | INV | 081 | 04 | 04 | 111 | 95 | = | 141 | 65 | x | 171 | 77 | GE |
| 052 | 77 | GE | 082 | 94 | +/- | 112 | 42 | STD | 142 | 73 | RC* | 172 | 00 | 00 |
| 053 | 00 | 00 | 083 | 42 | STD | 113 | 06 | 06 | 143 | 08 | 08 | 173 | 71 | 71 |
| 054 | 44 | 44 | 084 | 05 | 05 | 114 | 25 | CLR | 144 | 95 | = | 174 | 25 | CLR |
| 055 | 25 | CLR | 085 | 43 | RCL | 115 | 42 | STD | 145 | 44 | SUM | 175 | 35 | 1/X |
| 056 | 35 | 1/X | 086 | 02 | 02 | 116 | 09 | 09 | 146 | 09 | 09 | 176 | 91 | R/S |
| 057 | 91 | R/S | 087 | 75 | - | 117 | 01 | 1 | 147 | 69 | DP | 177 | 94 | +/- |
| 058 | 76 | LBL | 088 | 43 | RCL | 118 | 00 | 0 | 148 | 25 | 25 | 178 | 01 | 1 |
| 059 | 14 | D | 089 | 01 | 01 | 119 | 85 | + | 149 | 43 | RCL | 179 | 42 | STD |
| 060 | 43 | RCL | 090 | 95 | = | 120 | 43 | RCL | 150 | 05 | 05 | 180 | 03 | 03 |
| 061 | 02 | 02 | 091 | 77 | GE | 121 | 05 | 05 | 151 | 32 | XIT | 181 | 01 | 1 |
| 062 | 75 | - | 092 | 01 | 01 | 122 | 95 | = | 152 | 43 | RCL | 182 | 75 | - |
| 063 | 01 | 1 | 093 | 07 | 07 | 123 | 42 | STD | 153 | 06 | 06 | 183 | 43 | RCL |
| 064 | 95 | = | 094 | 43 | RCL | 124 | 07 | 07 | 154 | 77 | GE | 184 | 01 | 01 |
| 065 | 42 | STD | 095 | 02 | 02 | 125 | 01 | 1 | 155 | 01 | 01 | 185 | 95 | = |
| 066 | 03 | 03 | 096 | 75 | - | 126 | 00 | 0 | 156 | 17 | 17 | 186 | 42 | STD |
| 067 | 25 | CLR | 097 | 43 | RCL | 127 | 85 | + | 157 | 43 | RCL | 187 | 04 | 04 |
| 068 | 42 | STD | 098 | 04 | 04 | 128 | 43 | RCL | 158 | 09 | 09 | 188 | 61 | GTD |
| 069 | 04 | 04 | 099 | 75 | - | 129 | 01 | 01 | 159 | 65 | x | 189 | 00 | 00 |
| 070 | 32 | XIT | 100 | 01 | 1 | 130 | 85 | + | 160 | 43 | RCL | 190 | 70 | 70 |
| 071 | 25 | CLR | 101 | 95 | = | 131 | 43 | RCL | 161 | 00 | 00 | | | |
| 072 | 77 | GE | 102 | 42 | STD | 132 | 04 | 04 | 162 | 95 | = | | | |
| 073 | 00 | 00 | 103 | 06 | 06 | 133 | 85 | + | 163 | 91 | R/S | | | |
| 074 | 80 | 80 | 104 | 61 | GTD | 134 | 43 | RCL | 164 | 69 | DP | | | |

FUNÇÕES DE RESPOSTA E TRANSFERÊNCIA

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| 000 | 76 | LBL | 038 | 12 | 12 | 076 | 33 | X² | 114 | 76 | LBL | 152 | 42 | STD |
| 001 | 11 | A | 039 | 65 | x | 077 | 85 | + | 115 | 13 | C | 153 | 05 | 05 |
| 002 | 70 | RHD | 040 | 02 | 2 | 078 | 04 | 4 | 116 | 42 | STD | 154 | 43 | RCL |
| 003 | 42 | STD | 041 | 65 | x | 079 | 65 | x | 117 | 14 | 14 | 155 | 05 | 05 |
| 004 | 01 | 01 | 042 | 69 | n | 080 | 43 | RCL | 118 | 65 | x | 156 | 85 | x |
| 005 | 91 | R/S | 043 | 95 | = | 081 | 03 | 03 | 119 | 43 | RCL | 157 | 43 | RCL |
| 006 | 42 | STD | 044 | 42 | STD | 082 | 33 | X² | 120 | 13 | 13 | 158 | 04 | 04 |
| 007 | 02 | 02 | 045 | 13 | 13 | 083 | 65 | x | 121 | 95 | = | 159 | 95 | = |
| 008 | 91 | R/S | 046 | 55 | ÷ | 084 | 43 | RCL | 122 | 38 | SIN | 160 | 71 | SBR |
| 009 | 42 | STD | 047 | 53 | < | 085 | 15 | 15 | 123 | 65 | x | 161 | 12 | B |
| 010 | 03 | 03 | 048 | 01 | 1 | 086 | 95 | = | 124 | 53 | < | 162 | 69 | DP |
| 011 | 43 | RCL | 049 | 75 | - | 087 | 65 | x | 125 | 43 | RCL | 163 | 25 | 25 |
| 012 | 01 | 01 | 050 | 43 | RCL | 088 | 43 | RCL | 126 | 17 | 17 | 164 | 61 | GTD |
| 013 | 55 | ÷ | 051 | 03 | 03 | 089 | 01 | 01 | 127 | 65 | x | 165 | 01 | 01 |
| 014 | 43 | RCL | 052 | 33 | X² | 090 | 95 | = | 128 | 43 | RCL | 166 | 54 | 54 |
| 015 | 02 | 02 | 053 | 54 |) | 091 | 42 | STD | 129 | 03 | 03 | 167 | 76 | LBL |
| 016 | 95 | = | 054 | 34 | FX | 092 | 09 | 09 | 130 | 65 | x | 168 | 15 | E |
| 017 | 34 | FX | 055 | 95 | = | 093 | 35 | 1/X | 131 | 43 | RCL | 169 | 42 | STD |
| 018 | 42 | STD | 056 | 42 | STD | 094 | 65 | < | 132 | 14 | 14 | 170 | 04 | 04 |
| 019 | 10 | 10 | 057 | 17 | 17 | 095 | 43 | RCL | 133 | 94 | +/- | 171 | 25 | CLR |
| 020 | 55 | ÷ | 058 | 91 | R/S | 096 | 16 | 16 | 134 | 54 |) | 172 | 42 | STD |
| 021 | 02 | 2 | 059 | 76 | LBL | 097 | 95 | = | 135 | 22 | INV | 173 | 05 | 05 |
| 022 | 55 | ÷ | 060 | 12 | B | 098 | 91 | R/S | 136 | 23 | LNx | 174 | 43 | RCL |
| 023 | 89 | n | 061 | 55 | ÷ | 099 | 02 | 2 | 137 | 55 | ÷ | 175 | 05 | 05 |
| 024 | 95 | = | 062 | 43 | RCL | 100 | 94 | +/- | 138 | 43 | RCL | 176 | 65 | x |
| 025 | 42 | STD | 063 | 11 | 11 | 101 | 65 | x | 139 | 13 | 13 | 177 | 43 | RCL |
| 026 | 11 | 11 | 064 | 95 | = | 102 | 43 | RCL | 140 | 55 | ÷ | 178 | 04 | 04 |
| 027 | 65 | x | 065 | 42 | STD | 103 | 03 | 03 | 141 | 43 | RCL | 179 | 95 | = |
| 028 | 53 | < | 066 | 14 | 14 | 104 | 65 | x | 142 | 02 | 02 | 180 | 71 | SBR |
| 029 | 01 | 1 | 067 | 33 | X² | 105 | 43 | RCL | 143 | 95 | = | 181 | 13 | C |
| 030 | 75 | - | 068 | 42 | STD | 106 | 14 | 14 | 144 | 91 | R/S | 182 | 69 | DP |
| 031 | 43 | RCL | 069 | 15 | 15 | 107 | 55 | ÷ | 145 | 92 | RTN | 183 | 25 | 25 |
| 032 | 03 | 03 | 070 | 94 | +/- | 108 | 43 | RCL | 146 | 00 | 0 | 184 | 61 | GTD |
| 033 | 33 | X² | 071 | 85 | + | 109 | 09 | 09 | 147 | 76 | LBL | 185 | 01 | 01 |
| 034 | 54 |) | 072 | 01 | 1 | 110 | 95 | = | 148 | 14 | D | 186 | 74 | 74 |
| 035 | 34 | FX | 073 | 95 | = | 111 | 91 | R/S | 149 | 42 | STD | | | |
| 036 | 95 | = | 074 | 42 | STD | 112 | 92 | RTN | 150 | 04 | 04 | | | |
| 037 | 42 | STD | 075 | 16 | 16 | 113 | 00 | 0 | 151 | 25 | CLR | | | |

A P Ê N D I C E 2

SUBROTINAS PARA O BURROUGHS B-6700

Apresentamos neste apêndice algumas subrotinas para este computador citadas durante este trabalho.

Os programas "RESPOSTA" e "ESPECTRO", que utilizam estas subrotinas, não são listados aqui por serem um tanto quanto extenso. As listagens e instruções para utilização dos mesmos encontram-se no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP.

A primeira delas é a subrotina "TDF" que calcula a transformada discreta de Fourier de uma sequência segundo o fluxograma da figura (7.16). Os parâmetros da mesma são o número de termos, o intervalo de discretização, um vetor "A" de números complexos que constitui a sequência no domínio do tempo e outro vetor "B" de números complexos que constitui a sequência no domínio da frequência.

A segunda é a subrotina "TRF" que calcula a transformada discreta de Fourier de uma sequência, utilizando o algoritmo proposto no capítulo 9, segundo o fluxograma da figura (9.13). Os parâmetros são o expoente de dois, o número de termos e um vetor "A" de números complexos que serve tanto para armazenar a sequência no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

A terceira é a subrotina "CONVOL" que realiza a convolução discreta de duas sequências com o mesmo número de termos segundo o fluxograma da figura (11.4). Os parâmetros são o intervalo de discretização, o número de termos de cada sequência, dois vetores "A" e "B" que armazenam os valores das duas sequências e um vetor "C" que armazena os N primeiros termos da convolução discreta.

Temos a seguir uma função complexa "COMPLEX FUNCTION TRANSF" que fornece as partes real e imaginária da função de transferência para uma determinada frequência. Os parâmetros são a rigidez, o amortecimento, a massa e a frequência natural.

Por último temos a declaração "FRIU" que fornece o valor da função de resposta para um determinado instante. Os parâmetros são a porcentagem de amortecimento, a frequência natural, a frequência natural da estrutura com amortecimento, a masa, o valor do número π e o instante para o qual se quer obter o valor da função.

A seguir apresentamos as listagens das mesmas.


```
SUBROUTINE TDF (ND,T,A,B)
COMPLEX A(5000),B(5000),W
PI=3.141592653589793
W=CMPLX(COS(2*PI/ND),-SIN(2*PI/ND))
DO 10 N=1,ND
DO 10 K=1,ND
10 B(N)=B(N)+T*A(K)*W**((N-1)*(K-1))
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE TRF (M,ND,A)
COMPLEX A(5000),B,U,W
J=1
L=1
10 K=ND/2
20 IF(J.LE.K) GO TO 30
J=J-K
K=K/2
GO TO 20
30 J=J+K
L=L+1
IF(L.GE.ND) GO TO 40
IF(L.GE.J) GO TO 10
B=A(L)
A(L)=A(J)
A(J)=B
GO TO 10
40 PI=3.141592653589793
DO 50 NP=1,M
J=2**(NP-1)
W=CMPLX(COS(PI/J),-SIN(PI/J))
U=CONJG(W)
DO 50 I=1,J
U=U+W
DO 50 K=I,ND,2*J
L=K+J
B=U+A(L)
A(L)=A(K)-B
50 A(K)=A(K)+B
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE CONVOL(T,N,A,B,C)
DIMENSION A(2500),B(2500),C(2500)
DO 10 K=1,N
C(K)=(0.)
DO 10 I=1,K
10 C(K)=C(K)+A(I)*B(K-I+1)
DO 20 I=1,N
20 C(I)=T*C(I)
RETURN
END
```

```
COMPLEX FUNCTION TRANSF(RIG,AMT,AMS,F)
PI=3.141592653589793
Q1=RIG-(2*PI*F)**2*AMS
Q2=2*PI*AMT*F
TRANSF=CMPLX(Q1/(Q1**2+Q2**2),-Q2/(Q1**2+Q2**2))
RETURN
END
```

```
FRIU (PAM, FNAT, FNATA, AMS, PI, TD) = EXP(-PAM*2*PI*FNAT*TD) * 1 / (AMS*2*PI
**FNATA) * SIN(2*PI*FNATA*TD)
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - BIGGS, John M.
Introduction to Structural Dynamics.
Mc Graw-Hill. New York. 1964.
- 02 - BRIGHAM, E. Oran.
The Fast Fourier Transform.
Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. N.J. 1974.
- 03 - BUTKOV, Eugene.
Física Matemática.
Guanabara Dois. Rio de Janeiro, RJ. 1979.
- 04 - CLOUGH, Ray M.; PENZIEN, Joseph.
Dynamics of Structures.
Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo. 1975.
- 05 - FUSCO, Péricles Brasiliense.
Estruturas de Concreto, V. 2.
Fundamentos Estatísticos da Segurança das Estruturas.
EDUSP/Mc Graw-Hill. São Paulo. 1977.
- 06 - HSU, Hwei P.
Análise de Fourier.
Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, 1973.
- 07 - NEWLAND, D.E.
An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis.
Longman Group Ltd. London. 1975.
- 08 - OTNES, Robert K.; ENOCHSON, Loren.
Applied Time Series Analysis, Volume 1.
John Wiley and Sons. New York. 1978.
- 09 - PAPOULIS, Athanasios.
Probability, Random Variables and Stochastic Process.
Mc Graw-Hill Kogakusha Ltd. Tokyo. 1965.

- 10 - PAPOULIS, Athanasios.
The Fourier Integral and its Applications.
Mc Graw-Hill. New York. 1962.

- 11 - ROBSON, J.D.
An Introduction to Random Vibration.
Elsevier Publications Company. Amsterdam. 1964.

- 12 - WIEGEL, Robert L.
Earthquake Engeneering.
Prentice Hall. Englewood Cliffs. N.J. 1970.