EDUARDO ASSAD KABA NACCACHE

Confiabilidade aplicada ao problema de interação estaca-solo

São Paulo
2016

EDUARDO ASSAD KABA NACCACHE

Confiabilidade aplicada ao problema de interação estaca-solo

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Departamento de Estruturas

Orientador: Dimas Betioli Ribeiro

São Paulo
2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo,____de_____de_____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Naccache, Eduardo Assad Kaba
Confiabilidade aplicada ao problema de interação solo-estrutura / E. A. K. Naccache -- versão corr. -- São Paulo, 2016.
191 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Estacas (Confiabilidade) 2.Método dos elementos finitos 3.Método dos elementos de contorno 4.Interação solo-estrutura I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

EDUARDO ASSAD KABA NACCACHE

Confiabilidade aplicada ao problema de interação estaca-solo

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

São Paulo
2016

TERMO DE JULGAMENTO

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas bênçãos concedidas.

Agradeço aos meus pais, pela dedicação constante.

Agradeço ao prof. Dr. Dimas Betioli Ribeiro pela ótima oportunidade de realizar um mestrado na Escola Politécnica e pelos ensinamentos.

Agradeço aos impecáveis funcionários da faculdade pelos seus esclarecimentos e apoio.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos concedida.

DO SABOR DAS COISAS

Por mais raro que seja, ou mais antigo,

Só um vinho é deveras excelente:

Aquele que tu bebes calmamente

Com o teu mais velho e silencioso amigo...

(Mário Quintana)

RESUMO

Este trabalho busca aplicar técnicas de confiabilidade ao problema de grupo de estacas utilizadas como fundação de estruturas correntes. Para isso, lança-se mão de um modelo tridimensional de interação estaca-solo onde estão presentes o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o método dos Elementos Finitos (MEF) que atuam de forma acoplada. O MEC, com as soluções fundamentais de Mindlin (meio semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear é utiliza), é utilizado para modelar o solo. Já o MEF é utilizado para modelar as estacas. Definido o modelo de funcionamento estrutural das estacas, parte-se para a aplicação de métodos trazidos da confiabilidade estrutural para avaliação da adequabilidade em relação aos estados limite de serviço e estados limites últimos. Os métodos de confiabilidade utilizados foram o Método de Monte Carlo, o método FOSM (First-Order Second-Moment) e o método FORM (First-Order Reliability Method).

PALAVRAS-CHAVE: Confiabilidade. Interação solo-estrutura. Estacas. Elementos de contorno. Acoplamento MEC/MEF. Escorregamento.

ABSTRACT

This work seeks to apply reliability techniques to the problem of piles groups used as current structures foundation. For this, makes use of a three-dimensional model of pile-soil interaction with the boundary element method (BEM) and the finite element method (FEM) working coupled. The BEM, with Mindlin fundamental solutions (semi-infinite medium, homogeneous, isotropic and linear elastic) is used to model the soil. The MEF is used to model the piles. Defined the model of structural functioning of the piles, the aim goes to the application of structural reliability for assessing the adequacy of the serviceability limit states and ultimate limit states. Reliability methods used were the Monte Carlo method, the FOSM (First-Order Second-Moment) method and the FORM method (First-Order Reliability Method).

KEYWORDS: Reliability. Soil-structure interaction. Piles. Boundary element. Coupling BEM / FEM. Slipping.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

MEC/BEM	Método dos Elementos de Contorno
MEF/FEM	Método dos Elementos Finitos
FOSM	First-Order Second-Moment
FORM	First-Order Reliability Method
MC	Monte Carlo
GMLC	Gerador Multiplicativo Linear Congruencial
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
PDF	Função de Densidade de Probabilidade
CPF	Função de Probabilidade Acumulada

Sumário

1. Introdução

Esta dissertação de mestrado trata do desenvolvimento de um código computacional para a modelagem e verificação da segurança em relação a estados-limite de estacas presentes em fundações de estruturas correntes. Para tanto, lança mão de técnicas de confiabilidade para a análise probabilística de estacas modeladas com o método dos elementos finitos (MEF) acoplado ao método dos elementos de contorno (MEC). O solo é modelado com o MEC empregando as soluções fundamentais de Mindlin, adequadas para a consideração de um semi-espaço infinito tridimensional. As estacas são modeladas como elementos de barra com o MEF, sendo cada uma delas representada no MEC como uma linha de carga. O elemento finito de barra empregado possui quatro nós e quatorze parâmetros nodais, sendo três de deslocamento para cada nó mais duas rotações para o nó de topo. O escorregamento das estacas em relação ao maciço é realizado empregando modelos de aderência para definir a evolução das tensões de fuste durante a transferência de carga para o solo. A análise de confiabilidade se dá por três métodos: o método FOSM (First order second moment), passando ao método FORM (First order reliability method) e pelo método Monte Carlo.

1.1 Breve histórico das Estruturas e Fundações

A engenharia de estruturas, tanto de superestruturas como de infraestruturas sempre teve forte conotação cultural, daí, formou seus conceitos, desde a pré-história, como sínteses de toda uma vasta e multimilenar experiência construtiva. Esta experiência, no entanto, só foi cientificamente teorizada na engenharia no séc. XX (HACHICH et al., 1998).

Foi na idade dos metais que se desenvolveram ferramentas capazes de perfurar o solo, dando origem às precursoras das estacas de hoje. Nos antigos impérios do Oriente Próximo, "obras como palácios e templos eram assentes sobre fundações arrumadas com restos de outras estruturas ou paredes, misturados com terra e tudo socado". Não obstante, é desta época e localização o primeiro código de construção que se tem notícia, compondo o código de Hamurabi, rei da babilônia (HACHICH et al., 1998).

Na mesopotâmia as minas de pedras eram escassas em muitas localidades. As estruturas babilônicas, como os famosos Zigurates eram em sua maioria constituídas de tijolos de barro secos ao sol e assentados com asfalto ou betume. Em outras localidades, entretanto, como em Jerwan próxima a Níneve, capital do império Assírio, existe ruínas de um aqueduto com aproximadamente mil pés de comprimento e 70 de largura todo de pedra calcária (KIRBY et al., 1956)

Na construção grega, desde as culturas iniciais de Creta e Micenas até o desenvolvimento pleno da cultura grega, as fundações não sofreram grandes alterações, constituindo-se de pedaços de pedra sobrepostos. Em lugares com terrenos mais fracos, antes das pedras, adicionava-se primeiro uma camada de terra misturada com cinzas de carvão ou uma camada de terra apiloada ou uma mistura de calcário mole com pedregulho. Em alguns casos, estacas cravadas de madeira chegaram a ser utilizadas (HACHICH et al., 1998).

Há indícios, de que os gregos utilizaram barras de aço como reforço para vigas de pedra. As fundações do Tesouro de Delfos apresentam barras de ferro com 3,25 polegadas de largura, 4 polegadas de espessura e 41 pés de comprimento. Em um templo em Bassas, barras com seção "u" dentro de vigas de mármore foram usadas para suportar a cobertura. Há indícios até mesmo no Parthenon de ferro inserido entre as camadas de pedra para ancorar as cornijas (KIRBY et al., 1956).

Em Roma, cargas maiores nas fundações eram obtidas em função da construção de obras mais pesadas. Explorou-se bastante a utilização do arco, da abóboda e do cimento

romano, gerado a partir da mistura de pozolana (cinzas vulcânicas), calcário e pedaços de pedra ou tijolos cozidos. Sua engenharia foi bastante documentada, transmitindo através da obra do engenheiro militar e arquiteto Vitrúvio, interessantes passagens como a compactação do terreno através da cravação de estacas de madeira e o uso de ensecadeiras feitas de troncos de árvores com pontas de ferro, em dupla fila e preenchidas com argila amassada em cestos de junco, para fundações subaquáticas (HACHICH et al., 1998).

Na idade média, como na maioria das outras áreas do conhecimento, não se observou grandes avanços. Para as construções usuais, davam-se um prazo máximo de dez anos de garantia contra o colapso. Apesar disso, obras de grande porte como castelos e igrejas representam até hoje feitos notáveis da engenharia culminando no renascimento com a genialidade de Galileo e Da Vinci. Este último, contribuindo com maquinas de construção como bate-estacas e o primeiro dando inicio à resistência dos materiais.

Na construção das igrejas medievais destaca-se a criação das abóbodas nervuradas como primeiro avanço em relação às técnicas herdadas dos romanos. Outro invento dos “engenheiros” medievais foram os arcobotantes, que são um tipo de contraforte bastante utilizado no estilo gótico (KIRBY et al., 1956).

Na idade moderna, destacam-se os engenheiros franceses Vauban e Labelye. Vauban foi o primeiro a visualizar a interação de forças que ocorre entre o solo e as estruturas de retenção, além de realizar diversas obras como pontes, canais e, principalmente, fortificações. O segundo introduziu o uso de caixões submergidos para servir como base de fundação submersa. No século XVIII, a experiência acumulada até Vauban começa a ser teorizada, constituindo-se então uma mecânica dos solos primeva. Neste contexto, Charles Augustin Coulomb, grande engenheiro e físico, estabelece em seu trabalho de 1773 a clássica equação que relaciona a resistência ao cisalhamento do solo com sua coesão, a tensão normal e o ângulo de atrito. Ela é primeiramente escrita somente em termos de tensões totais. A introdução do conceito de tensões efetivas vem somente com Terzaghi (1943). Com o início da revolução industrial, a utilização do tijolo cerâmico nas construções, além das argamassas e do concreto, é fortalecida. Sendo na aplicação em fundações, que o concreto adquiriu grande notoriedade (HACHICH et al., 1998).

O período contemporâneo da mecânica dos solos começa no séc. XX com Terzaghi, assim, de forma desassociada do período contemporâneo definido pela história, que começa antes, com a revolução francesa em 1789. Terzaghi introduziu o estudo do adensamento e o

conceito das tensões efetivas como já mencionado. Com isso, pôde obter uma definição precisa do ângulo de atrito interno, da coesão e, portanto, da resistência ao cisalhamento. Elaborou também, expressões para a determinação da capacidade última de fundações superficiais e profundas. Muitas outras contribuições foram dadas por Karl Terzaghi. Elas estão reunidas em "Theoretical Soil Mechanics" (Terzaghi, 1943) e "Soil Mechanics in Engineering Practice" (Terzaghi; Peck, 1948). Devem-se citar também Ralph B. Peck, Donald W. Taylor e Arthur Casagrande, os quais, juntamente com Terzaghi, definiram os alicerces atuais da mecânica dos solos.

Com relação à história das fundações no Brasil, têm-se no período colonial, como principal tipo de fundação, os alicerces. Estes se constituíam em pedras socadas em valas escavadas ao longo das paredes. A espessura, em geral de 20 cm a mais do que a da parede e a profundidade cerca de um metro. Nas cadeias colocavam-se pedras grandes para dificultar as fugas. A mão de obra escrava foi bastante utilizada. Para obras públicas era comum também o emprego de presos (TELLES, 1984).

Muitos dos engenheiros militares que atuaram no Brasil-Colônia provieram do Colégio de Santo Antão em Portugal, dirigido por padres jesuítas, onde se ensinava matemática aplicada à navegação e às fortificações. Tais engenheiros também vinham com a função de ensinar artes militares aos colonos através de cursos do tipo "Aula de Fortificação" dirigida pelo capitão engenheiro Gregório Gomes Henriques, criada em 1699 no Rio de Janeiro. Em 1792, após já ter sofrido duas alterações e ampliações a "Aula de Fortificação" é transformada em "Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho" (TELLES, 1984).

Com a chegada da família real portuguesa em 1808 é que passam a se constituir as primeiras escolas de ensino superior como a Academia Real Militar fundada em 1810 vindo a substituir a "Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho". Também, dá-se inicio aos primeiros estudos da geologia brasileira, com foco inicial na mineração e na construção de estradas de ferro.

Durante o Império (1822-1889), encontram-se grandes dificuldades na construção de cais de portos onde o terreno, na maioria das vezes era mole. Um sucesso da época foi o cais das Docas da Alfândega, no Rio de Janeiro, com sua construção iniciada em 1866, sob a direção de André Rebouças. "O cais, em alvenaria de pedra e cimento, é fundado sobre estacas de madeira; o que exigiu uma ensecadeira composta de estacas e pranchas de madeira, surpreendentemente cravadas com bate-estacas a vapor e inspecionadas por mergulhadores

com escafandros a ar comprimido" (SANTOS et al. 1985 apud HACHICH et al., 1998). Destaca-se também neste período, o Reservatório d'Água do Pedregulho, no Rio de Janeiro. Trata-se de uma obra que apresentou sérios problemas de recalques, até que em 1882, estes cessam por completo permitindo sua operação normal até hoje. Por fim, durante o império teve-se o inicio da construção de edifícios com tijolos e em estrutura metálica, com eles, fundações mais aprimoradas do que o simples alicerce foram necessárias, como as sapatas ou blocos de alvenaria de tijolos ou de pedra sobre solo apiloado (HACHICH et al., 1998).

No período da República observou-se o inicio da utilização do concreto armado, que vinha evoluindo desde Lambot em 1848 e seu contemporâneo Mounier, em grande escala no mundo e no Brasil. Seu emprego permitiu a construção de edifícios mais altos e com cargas mais concentradas. Apesar da pouca documentação, sabe-se que já eram empregadas sapatas de concreto armado, blocos de concreto simples e estacas de madeira ou pré-moldadas de concreto armado, com bloco de coroamento de concreto (HACHICH et al., 1998).

A firma alemã Wayss & Freytag teve papel decisivo no desenvolvimento do concreto armado no Brasil, abrindo uma filial no Rio de Janeiro em 1924, apesar de que há controvérsias quanto ao real inicio de suas atividades no país, com indícios de que tenha sido antes, por volta de 1913 (VARGAS et al., 1994).

Em 1894 é inaugurada a Escola Politécnica de São Paulo, sob a direção de Antônio Francisco de Paula e Souza. Sob a vigência de seu segundo diretor, Francisco de Paula Ramos de Azevedo, teve inicio a contribuição massiva da escola à urbanização da cidade de São Paulo e ao concomitante fortalecimento de sua indústria da construção civil (VARGAS et al., 1994).

Outros momentos importantes da engenharia brasileira foram a fundação do primeiro instituto de pesquisas tecnológicas, a "Estação Experimental de Combustíveis e Minérios" em 1922 no Rio de Janeiro, que mais tarde, em 1936, transformou-se no Instituto Nacional de Tecnologia e a criação do "Laboratório de Ensaios de Materiais" na Escola Politécnica de São Paulo em 1926 por Ary Torres, que mais tarde, em 1934, transformou-se no hoje conhecido Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT). Organiza-se neste, uma Seção de Estruturas e Fundações sob a chefia de Telemaco van Langendonck com Odair Grillo como responsável pelos ensaios de fundações. Em 1938, Odair cria a Seção de Solos e Fundações. Assim, muitos engenheiros de solos, de várias partes do Brasil, foram formados por esta instituição. Parcerias importantes com o Departamento de Estradas e Rodagem do Estado de São Paulo

são criadas para dar à pavimentação de estradas de rodagem a tecnologia adequada, como a tecnologia dos pavimentos de solos estabilizados e a teoria do dimensionamento de pavimentos com base na Mecânica dos Solos. Outra frente de atuação do IPT foi com relação às fundações de pontes e edifícios. O primeiro passo foi estabelecer métodos e equipamentos adequados de sondagens do sobsolo. O método adotado foi o de percussão com circulação de água. Para quantificar a consistência, a compacidade e a resistência do solo, recorreu-se à medida do número de golpes de um peso de 60 Kg, caindo de 75 cm de altura, necessários para cravar o amostrador 30 cm no solo. Assim, criando o número de resistência à penetração tipo IPT. Diversos métodos de ensaio de resistência à penetração foram desenvolvidos pelo mundo, levando, por conseguinte, às tentativas de padronização muitas vezes frustradas, mas convergindo aos poucos para o favorecimento do SPT (HACHICH et al., 1998).

Em 1947 Odair Grillo assume a primeira disciplina de mecânica dos solos e fundações da Escola Politécnica da USP. Nunca antes os tópicos dessa natureza haviam sido ensinados de forma desassociada a cátedras mais abrangentes como a de “Fundações e Grandes Estruturas” e da qual Grillo era assistente do professor responsável, Mario Whately (VARGAS et al., 1994).

Na década de 50, ocorre a construção de Brasília: um grande marco da construção civil nacional. A exploração do subsolo e os estudos e projetos de fundação de seus edifícios foram feitos por firmas cariocas. Os solos de Brasília eram residuais de arenitos e siltitos capeados por uma camada de colúvio. Os tipos de fundação escolhidos foram estacas Franki e tubulões a céu aberto, já que o nível d’água era bem profundo (HACHICH et al., 1998).

Entre os anos 40 e 60 os professores José Carlos Figueiredo Ferraz, Décio Leal de Zagottis e Péricles Brasiliense Fusco, inovam o cálculo da segurança estrutural com a introdução da teoria das probabilidades (VARGAS et al., 1994).

Em 1952, Dirceu Velloso, sucessor de Costa Nunes na direção da firma “Estacas Franki Ltda”, juntamente com Nelson Aoki, desenvolveram o clássico método de cálculo da capacidade de carga de estacas, denominado Método Aoki-Velloso. Esta firma foi a primeira especializada em fundações no Brasil. Também foi a responsável por introduzir a prática de provas de carga sobre estacas (VARGAS et al., 1994).

Em 1954, no 1º Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos, realizado em Porto Alegre, Samuel Chamecki, faz a primeira contribuição para o problema da interação entre fundações e estruturas.

Na década de 60 chegam os primeiros computadores ao Brasil. Em 1964 tem-se o primeiro programa para calculo de estruturas de concreto armado feito por Waldyr Muniz Oliva e Valdemar Setzer. Em 1967, a firma Antonio A. Noronha Serviços de Engenharia S.A. adquiriu um computador IBM 1130 8K de memória, que contribuiu bastante no projeto da ponte Rio-Niterói. Ao mesmo tempo, em São Paulo uma ala do Escritório Técnico Arthur Luiz Pitta se especializa em programas de cálculo e processamento para terceiros, dando origem a Prócálculo Ltda (VARGAS et al., 1994).

Em 1974, a utilização da computação na Geotecnia é institucionalizada com o "1º Seminário Brasileiro do Método dos Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Solos", realizado no Rio de Janeiro pela COPPE. (HACHICH et al., 1998)

'Em 1980, consolida-se a separação entre a Mecânica dos Solos e a Engenharia de Fundações, com a fundação da Associação Brasileira de Empresas de Fundações e Serviços Geotécnicos Especializados (ABEF).

1.2 Breve Histórico da Confiabilidade Estrutural

De acordo com Madsen; Krenk e Lind (1986), os primeiros estudos em confiabilidade estrutural remontam de 80 a 90 anos atrás, apenas. De 1920 a 1960, deu-se o seu discreto começo através de alguns poucos pioneiros de variadas nações que estabeleceram os conceitos básicos que definem um evento estrutural randômico, inclusive o conceito de minimização do custo esperado de uma estrutura, indo na contramão da concepção clássica da engenharia estrutural.

Também segundo Madsen; Krenk e Lind (1986) delimita-se um período de 1967 a 1974, quando se intensificaram as buscas para encontrar uma abordagem confiabilística que não fosse excessivamente complexa e que fosse racional, no sentido de que realmente pudesse conduzir a dimensionamentos ótimos. O ano de 1974 é marcado pela publicação da primeira normatização em estados limites com embasamento probabilístico racional. Delimita-se também um período de 1974 a 1984, quando as pesquisas evidenciaram que a maior parte das

falhas estruturais provém de erros humanos ou de um “ato de Deus”. Assim, a confiabilidade estrutural passou a ser vista como apenas uma parte de um problema maior de controle de qualidade na engenharia civil.

De 1984 até a atualidade, os métodos de confiabilidade estrutural evoluíram bastante alcançando grande complexidade matemática. Com isso, os níveis mais avançados de verificação da segurança estrutural, aqueles que mais se aproximam de uma abordagem puramente probabilística, descritos no item 5.4.2.3.2, tornam-se aos poucos mais acessíveis.

1.3 Estacas

Nesta sessão, faz-se uma breve passagem sobre os tipos de estacas atualmente utilizados como forma de introdução e contextualização prática do assunto desenvolvido de fato nesta dissertação.

Os diferentes tipos de estacas estão associados a diferentes materiais constituintes e a diferentes métodos construtivos. Estes dois fatores introduzem importantes fontes de variabilidade na resistência final de uma estaca. Lembrando que estacas são elementos de fundação profunda, necessárias quando o solo próximo à superfície do terreno não possui capacidade adequada.

1.3.1 Estacas de Madeira

As estacas de madeira tem sua utilização principal, no Brasil, em obras provisórias. São constituídas por troncos de árvores com extremidades preparadas para a cravação e com a casca removida. Têm duração ilimitada quando mantidas permanentemente debaixo d’água, caso contrário, quando sujeita a ciclos de secagem e molhagem, decompõem-se rapidamente. Assim, caso a estaca seja projetada para situações onde não se encontre totalmente submersa, ela deverá receber obrigatoriamente tratamento com produtos preservativos.

A Norma Brasileira de Fundações (NBR 6122/2010) estabelece que “a ponta e topo devem ter diâmetros maiores que 15 e 25 cm, respectivamente, e o segmento de reta que une os centros das seções da ponta e do topo deve estar compreendido integralmente no interior do perímetro da estaca”. Ela atenta também para a necessidade de proteção do topo da estaca

durante a cravação e para a eventual necessidade de utilização de ponteiras de aço para atravessar camadas mais resistentes de solo. Deve-se remover a região da estaca danificada durante a cravação.

1.3.2 Estacas Metálicas

As estacas metálicas são peças de aço laminado ou soldado como os perfis I ou H, chapas dobradas formando seções circulares ou retangulares e até mesmo os trilhos de linhas férreas podem ser reaproveitados como estacas. Apesar de não serem economicamente atrativas para o uso mais comum, possuem muitas vantagens como facilidades de cravação, transporte, manipulação, emendas ou cortes. Podem ser cravadas sem risco de provocar levantamento de estacas vizinhas.

Estacas metálicas vêm sendo muito utilizadas para contenção na fase de construção no caso de subsolo na divisa de terrenos. Podendo ser utilizadas também, como fundação de pilares de divisa, após a construção do subsolo.

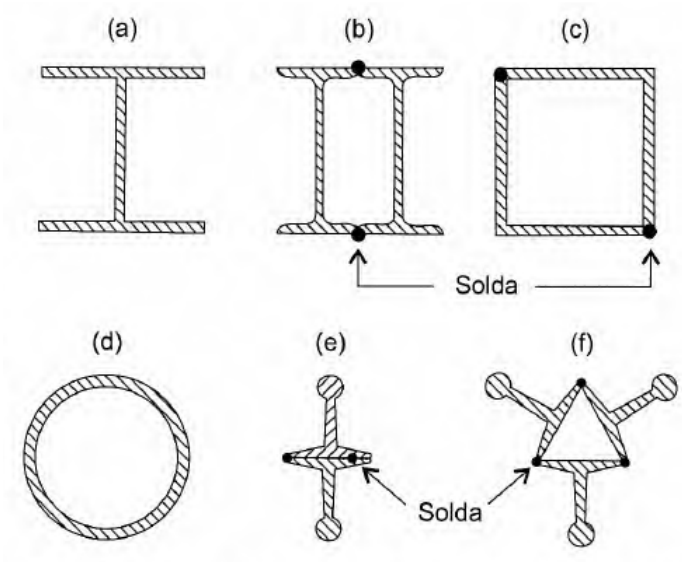

Figura 1– Estacas de Aço. Seções Transversais.

(Velloso; Lopes, 2010)

Da mesma forma que para as estacas de madeira, as estacas metálicas, conservam-se indefinidamente desde que algumas condições sejam respeitadas. No caso das estacas de

madeira, é necessário que esta esteja inteiramente imersa no lençol freático, de modo a impedir o contato dos microrganismos pré-existente na madeira com o ar. Já nas estacas metálicas, a imersão total no solo natural, sem a necessidade de imersão no lençol, é uma condição suficiente para garantir, sem qualquer proteção ou pintura, a resistência da estaca durante toda a vida da estrutura (Romanoff, 1962 apud Velloso; Lopes, 2010). Apesar disso, para dispensar tratamento especial, deve-se adotar uma espessura de sacrifício que vai de 1 a 3,2 mm, dependendo do tipo de solo, conforme a tabela 5 da NBR 6122. Por fim, vale lembrar que as estacas metálicas, assim como as de madeira, devem ser as mais retilíneas possíveis (flecha máxima de 0,2 % do comprimento de qualquer um de seus segmentos) e admitem tolerância de no máximo 5 mm em suas dimensões nominais que não as suas espessuras e de no máximo 0,5 mm de tolerância para suas espessuras.

1.3.3 Estacas Pré-Moldadas de Concreto

O concreto adapta-se muito bem às estacas, por ter boa resistência aos agentes agressivos e aos ciclos de secagem e umedecimento. Podem ser de concreto armado ou protendido, sendo a protendida bastante utilizada em pontes e portos. O adensamento do concreto pode ser feito por vibração ou centrifugação. Os comprimentos fornecidos vão de 4 a 12 metros. Para comprimentos maiores, elas podem ser emendadas por luvas de aço soldadas ou apenas encaixadas.

Na manipulação das estacas pré-moldadas de concreto, deve-se respeitar algumas condições. Na suspensão ou estocagem por dois pontos, os apoios devem-se localizar a uma distância da extremidade igual ao comprimento divido por cinco. Já na suspensão da estaca por apenas um ponto, este ponto deve-se localizar a uma distância da extremidade igual ao comprimento da estaca dividido por três. Estas condições visam distribuir igualmente os momentos fletores, de modo a buscar a economia de armação da estaca.

A fissuração em estacas pré-moldadas de concreto passa por um rígido controle, sendo o limite máximo estabelecido em um milímetro. Caso a estaca apresente fissuras longitudinais, devem ser trocadas.

Nas estacas cravadas por meio de percussão, tanto as de madeira, de aço e de concreto, cria-se um gráfico de cravação que consiste em contar a quantidade de golpes aplicados no topo das estacas por metro de cravação. Além disso, o controle da cravação deve ser feito

também por meio da nega, do repique elástico, prova de carga dinâmica e ou prova de carga estática, que é obrigatória caso o número de estacas presentes na obra seja superior ao estabelecido na NBR 6122/2010.

1.3.4 Estacas Moldadas in-loco

1.3.4.1 Franki

A ideia dessas estacas consiste em cravar o tubo de revestimento indiretamente, através do impacto de um pilão de grandes dimensões sobre uma bucha feita de brita e areia e localizada na parte inferior do tubo. Quando a bucha atinge a cota desejada, ela é alargada, apiloando-se pequenas e sucessivas quantidades de concreto seco. Terminado o alargamento da base, dispõem-se as armaduras necessárias de modo a continuar permitindo a passagem do pilão e amarrando a um dos ferros longitudinais um cabo de controle que avisará em casos de acidentes na concretagem. Por fim, o concreto é lançado em pequena quantidade e apiloado em seguida, até completar uma altura de 30 cm acima da conta de arrasamento. O tubo de revestimento é recuperado aos poucos, respeitando uma altura mínima de concreto no seu interior.

Este sistema de execução de estacas permite grande estanqueidade dentro do tubo de revestimento, assim, praticamente não há restrições quanto ao uso da estaca Franki em relação às condições do subsolo, com exceção de camadas muito espessas de solo mole. Em algumas situações, podem-se gerar vibrações excessivas e levantamento de estacas vizinhas. Para contornar estes problemas, opta-se por escavação prévia com trado adequado ou por cravação com tubo aberto e posterior limpeza com piteira.

1.3.4.2 Escavadas sem Lama Bentonítica

Nessa categoria, incluem-se as estacas tipo Strauss, estacas escavadas mecanicamente com trado helicoidal e estacas tipo broca.

Strauss

As estacas tipo Strauss são uma excelente alternativa quando se impõem menores desconfortos de ruído e vibrações nas vizinhanças, mas não é recomendada para nível d’água

muito alto nem para argilas muito moles e saturadas. O equipamento necessário é simples e de fácil mobilidade no canteiro de obras. A escavação é feita com piteira e introdução simultânea de seguimentos de tubos de revestimento rosqueáveis entre si. Ao fim da perfuração, o interior do tubo de revestimento é lavado e preenchido com uma coluna de aproximadamente um metro, que será apiloado para dar origem à ponta da estaca. Repete-se o procedimento até atingir a superfície do terreno, inserindo-se as armaduras de ligação antes do arrasamento.

Estacas Escavadas Mecanicamente com Trado Helicoidal

A nomenclatura desse tipo de estaca é o seu próprio processo executivo. O equipamento de escavação é normalmente acoplado a caminhões ou chassis metálicos aferindo-lhe grande versatilidade. Da mesma forma que para as outras estacas moldadas in loco sem se utilizar de nenhum tipo de percussão, não gera vibrações nas proximidades. Não são praticáveis em subsolos arenosos e em subsolos submersos (abaixo do lençol freático).

O avanço da perfuração depende do comprimento da haste helicoidal do equipamento, já que esta é inserida totalmente no solo através de seu giro, seguida de sua suspensão para retirada do mesmo. Atingida a cota prevista em projeto, o fundo é apiloado com soquete de concreto, em seguida, inicia-se a concretagem com auxílio de tremonha com 2,5 metros de comprimento mínimo, para evitar o contato do concreto com as paredes da estaca (Joppert, 2007)

Estacas tipo Broca

Este tipo de estaca recebe a mesma denominação (estaca escavada mecanicamente) pela NBR 6122 que a estaca escavada mecanicamente com trado helicoidal, devido às suas grandes semelhanças tais como serem escavadas sem revestimento ou fluido estabilizante; serem adequadas apenas para pequenas cargas e não serem recomendadas para atuar abaixo do nível d’água.

1.3.4.3 Hélice Contínua

Diferentemente da estaca escavada mecanicamente com trado helicoidal, na estaca hélice contínua, associada a máquinas perfuratrizes que lhe conferem seus atributos, a perfuração é contínua; o tradado não é retirado nem para retirar o solo escavado nem para fazer a concretagem de tal sorte que o terreno não sofre alívio de pressões significativas. O que se tem então é um equipamento capaz de executar uma estaca escavada sem revestimento ou fluido estabilizante em solos coesivos ou arenosos, na presença ou não de água.

A colocação da armação pode apresentar algumas dificuldades, já que ela é feita após a concretagem da estaca.

Atualmente, a estaca hélice contínua é intensamente utilizada na construção de edifícios por vantagens como: grande velocidade de execução, ausência de vibrações ou ruídos. (Joppert, 2007)

1.3.4.4 Escavadas com Lama Bentonítica

São estacas normalmente utilizadas em obras pesadas. Podem ser do tipo Barrete ou Estacão.

Segundo Santos et al., 1975 apud Velloso e Lopes, 2010, a bentonita é uma argila do grupo da montmorilonita. Ela se caracteriza por um brilho semelhante ao de ceras e por um tato untoso.

Segundo Fleming e Sliwinski et al., 1977 apud Velloso e Lopes, 2010, a lama bentonítica é resultado da adição de água na argila bentonítica. Quando se adiciona água na montmorilonita sódica, ela expande-se até quebrar os cristais de argila, formando um gel. Esse gel tem uma propriedade chamada de tixotropia que é a capacidade de liquefazer-se quando agitada e voltar à condição de gel, quando em repouso. Outra propriedade importante é a capacidade de formar uma película impermeável na interface com o solo.

Para que a lama tenha um bom efeito na estabilização das paredes das estacas, deve-se garantir que ela tenha uma altura mínima de 1,5 metros acima do nível d’água.

Tanto para a estaca barrete quanto para o estacão, de modo geral, o processo executivo resume-se a escavação imersa em lama bentonítica, seguida de colocação da armação e concretagem com tubo tremonha.

Estaca Barrete

O processo executivo da estaca barrete esta associado ao uso do equipamento do tipo *Clan Shell* para escavação. Necessita de uma mureta guia em concreto armado ao longo do contorno da estaca, com 1 metro de profundidade, para proteção do topo da escavação.

Estacão

Para os estacões, utilizam-se equipamentos de escavação do tipo mesas rotativa ou "balde". Necessitam de tubo guia com 5 a 10 centímetros a mais que o diâmetro da estaca e comprimento de 1, 5 a 4 metros, para proteção do topo da escavação.

1.3.4.5 Estacas Injetadas

São estacas com diâmetro máximo de 50 centímetros, primeiramente concebidas como reforço de fundações, mas rapidamente passando a serem utilizadas em diversas situações.

Estaca Raiz

As estacas raiz são escavadas com tubos rotativos. Conforme o tubo avança, injeta-se água em seu interior que irá carregar o solo escavado pelo espaço entre o tubo e a coroa de perfuração, que é mais larga e, portanto, dará origem a uma estaca com diâmetro maior do que o diâmetro do tubo. Feita a perfuração, instala-se a armadura e em seguida é inserido um tubo de PVC para injeção de argamassa de baixo para cima até que vaze pelo topo e toda a água seja removida. Por fim, retira-se o tubo com a aplicação de golpes de ar comprimido, completando-se a quantidade de argamassa conforme necessário.

Microestaca

As microestacas são escavadas de forma similar que nas estacas raiz. A diferença de fato está no que se segue à perfuração. Estando esta terminada, insere-se a armação que é constituída por um tubo chamado de “tubo-manchete” e por armação complementar de vergalhões. A calda de cimento é injetada em duas fases. Na primeira, ela é injetada pela válvula inferior do tubo manchete para que extravase pela parte externa, formando uma bainha de cimento que substituirá o revestimento, caso ele tenha sido necessário, e vedará a saída da calda de cimento quando ela for injetada pelo tubo-manchete. A segunda etapa é o preenchimento do tubo-manchete de baixo para cima, válvula por válvula, até obterem-se as pressões de injeções previstas. O que se obtém no final, é a formação de bulbos fortemente comprimidos contra o solo.

1.3.5 Capacidade de Carga Vertical

Conforme Barros (2012) existem diversos métodos para a previsão da capacidade de carga vertical em estacas, tais como o método de Aoki-Velloso (1975), o método de Cabral (1996), o método de Alonso (1996) e o método de Decourt-Quaresma (1978).

Neste trabalho será de interesse saber a capacidade resistente de uma estaca carregada verticalmente em termos de deslocamento máximo, para além do qual ela perde completamente sua função estrutural.

Em Vesic apud Vick (2014) admite-se para o recalque de ruptura um valor igual a 10% e 25% do diâmetro da ponta para estacas cravadas e escavadas, respectivamente. E em Fellenius apud Vick (2014) admite-se para o recalque de ruptura um valor igual a 10% do diâmetro da estaca ou 1,5 polegadas.

De acordo com a norma brasileira para projeto e execução de fundações, a NBR 6122, na realização de provas de carga em estacas, pode-se extrapolar a curva carga x recalque obtida até o ponto onde ela encontre a reta dada por:

$$\Delta_r = \frac{PL}{AE} + \frac{D}{30} \tag{1.1}$$

Sendo Δ_r o recalque de ruptura; *P* é a carga aplicada na estaca; *L* seu comprimento; *A* a área d sua seção transversal; *E* o módulo de elasticidade do material da estaca e *D* seu diâmetro.

1.4 Motivação

Em Kirby et al. (1956) é feita a interessante observação de que embora a ciência tenha sido de certo modo uma criação grega, tais conhecimentos científicos tinham muito pouca aplicação na engenharia da época e que na verdade, a engenharia, como emprego da tecnologia e dos recursos materiais disponíveis na solução de problemas práticos, contribuiu mais para o desenvolvimento da ciência do que a ciência para o desenvolvimento da engenharia, pelo menos até a segunda metade do século XIX.

Atualmente, a engenharia não pode ser desassociada da ciência. Este trabalho insere-se, portanto, neste contexto onde nem o pensamento analítico e nem arte da técnica caminham separados, buscando-se validar um enfoque matemático através de métodos já consagrados pela prática.

Na engenharia de fundações, por natureza, as incertezas são maiores do que nas estruturas não enterradas. Além disso, e também em função disso, as dificuldades para o desenvolvimento de modelos estruturais são também maiores. Como resultado, tem-se o domínio de metodologias de projeto com base científica experimental e não teórica como exposto no excerto abaixo:

> Assim, pode-se dizer com segurança que, em nosso País, a técnica das fundações não tem recebido o tratamento científico adequado. Essa afirmação pode ser comprovada se se considerar quão pequeno é o número de conceitos gerais, estabelecidos em base científica, utilizados na técnica das fundações. O projeto de fundações, ou mais precisamente seu dimensionamento, está calcado na utilização de correlações que são estabelecidas para determinadas regiões e extrapoladas para outras condições, às vezes, de maneira inescrupulosa (Velloso; Lopes, 2010).

Na busca por novos modelos de cálculo e dimensionamento de elementos de fundação a eles pode ser atrelada a verificação da segurança. A introdução da segurança é, em alguns casos, calcada puramente na experiência adquirida pelo meio especializado, mas pode estar também embasada em métodos probabilísticos.

A verificação da segurança em uma dada estrutura pode ser feita estabelecendo funções de estados limites (funções que relacionam o valor limite que uma grandeza pode assumir ao valor obtido dessa mesma grandeza). Na prática, nem todos os estados são verificados, como se pode observar no trecho abaixo:

> A segurança nas fundações deve ser estudada por meio de duas análises correspondentes aos estados-limite últimos e aos estados-limite de utilização. Os estados-limite últimos podem ser vários (por exemplo: perda de capacidade de carga e instabilidade elástica ou flambagem), assim como os estados-limite de utilização definidos na NBR 8681/84. Entretanto, em obras correntes de fundação, estas análises em geral se reduzem à verificação do estado-limite último de ruptura ou deformação plástica excessiva (análise de ruptura) e à verificação do estado-limite de utilização caracterizado por deformações excessivas (análise de deformações) (item 5.6 da NBR 6122/96). (Cintra; Aoki, 1999)

1.5 Objetivos

Como objetivo a ser alcançado neste trabalho, coloca-se, de forma mais abrangente, a verificação da segurança em relação a estados-limite de serviço e estados-limite últimos de uma estaca isolada e de grupos de estacas. Um pouco mais pormenorizadamente, podem-se listar os seguintes objetivos:

1. Desenvolver um modelo mecânico de interação estaca-solo considerando a aderência perfeita entre a estaca e solo e considerando a perda de aderência entre a estaca e o solo.
2. Verificar situações de ELS e ELU.
3. Comparar as respostas de diferentes métodos de confiabilidade aplicados a uma dada configuração estrutural.
4. Definir o nível de confiabilidade mais adequado.

1.6 Estrutura da Dissertação

No capítulo 2 é feita uma revisão de artigos científicos que de alguma forma apresentam um assunto em comum com esta dissertação.

No capítulo 3 faz-se uma rápida passagem pelo método dos elementos de contorno e pelo método dos elementos finitos, que são os arcabouços teóricos principais necessários para a formulação do modelo de estacas imersa em solo homogêneo utilizado neste trabalho.

No capítulo 4 têm-se os conceitos básicos de probabilidade e estatística necessários para que o tema da confiabilidade estrutural possa ser abordado.

No capítulo 5 aborda-se o tema da confiabilidade estrutural.

No capítulo 6 são analisados alguns exemplos de possíveis casos em fundações por estacas e no capitulo 7 é feita a conclusão do trabalho.

2. Revisão Bibliográfica

Diversas técnicas podem ser encontradas na literatura para a simulação de problemas de interação estaca-solo, dentre elas são citadas algumas na sequência.

Em uma delas, o solo é substituído por um sistema de molas equivalente e discreto, também conhecido como modelo de Winkler. As maiores vantagens da aplicação desse modelo são sua simplicidade e relativa facilidade de implementação computacional, enquanto que sua desvantagem é a dificuldade de escolher-se os módulos de reação das molas. Um trabalho que pode ser citado nesta linha é o de Mylonakis & Gazetas (1998).

Outro modelo conhecido que pode ser aplicado na simulação do solo é o método da camada finita (MCF). Aplicando esta teoria em um problema tridimensional este fica reduzido apenas duas dimensões, o que reduz o tempo de processamento. Essa ferramenta é eficiente em problemas elásticos, podendo o solo ser anisotrópico e formado por camadas de diferentes propriedades físicas. Uma falha que pode ser apontada no MCF é que esta ferramenta pode ser aplicada somente em problemas de domínio elástico. Neste contexto, cita-se o trabalho de Ta & Small (1998).

Tem-se também a linha de pesquisa que se utiliza de métodos numéricos mais avançados, empregando, por exemplo, o método dos elementos finitos (MEF) ou o método dos elementos de contorno (MEC). O MEF, na maioria dos casos, é a opção mais eficiente e prática para a análise de estruturas. No entanto, as vantagens do MEF são poucas quando aplicado em situações de domínio infinito, que constitui o caso de problemas de interação estaca-solo. Isto acontece porque o MEF é um método de domínio, sendo necessário dividir o domínio do problema em elementos. Para simular um sólido semi-infinito se torna necessário aplicar as condições de contorno do problema a grandes distâncias, resultando em um grande número de elementos, nós e, consequentemente, equações a serem resolvidas. Além disto, o armazenamento de informações tais como coordenadas de nós e conectividades entre nós e elementos é onerosa. Estes problemas se tornam ainda mais acentuados quando a análise é tridimensional.

Apesar destas desvantagens, o MEF é popular na literatura na simulação de problemas de domínio infinito. Em Chow & Teh (1991), o MEF é aplicado no problema de uma placa

rígida com estacas apoiada em um solo elástico, linear e infinito, estando a placa em contato com o solo. É possível considerar um solo com módulo de elasticidade linearmente variável com a profundidade.

Outra ferramenta numérica que pode ser considerada eficiente para modelar o solo em problemas de interação do solo com a estrutura é o MEC. Como somente o contorno do domínio do problema é dividido em elementos, a análise fica reduzida em uma dimensão. Isto diminui o custo computacional envolvido na resolução de equações, além de simplificar o armazenamento de dados. Devido a estas vantagens vários autores utilizam o MEC na análise da interação estaca-solo, conforme pode ser observado nos trabalhos citados a seguir.

O modelo de Steinbrenner, o qual considera uma camada de solo indeslocável a uma profundidade prescrita, foi aplicado em Poulos & Davies (1968), considerando uma estaca incompressível imersa no solo. Submetida a uma carga axial, esta estaca é dividida em elementos cilíndricos, cada qual submetido a uma tensão de cisalhamento uniforme. A ponta da estaca é uma base alargada, na qual se considera unicamente a tensão axial. Esta mesma formulação foi empregada em Poulos (1968), considerando então grupos de estacas. O ponto de partida é a interação de duas estacas, a partir da qual é obtido um coeficiente de influência. Para grupos com mais de duas estacas é feita uma superposição de efeitos, tomando as estacas duas a duas. São analisados diversos grupos de estacas idênticas variando seu número e posicionamento, sendo todas submetidas ao mesmo carregamento.

Em Butterfield & Banerjee (1971) são analisados grupos de estacas ligadas por uma placa rígida. É aplicada uma força concentrada e vertical na placa, determinando então o deslocamento vertical estabelecido no sistema. Em Banerjee (1976) é feito um estudo semelhante considerando então estacas inclinadas e utilizando o método indireto das equações integrais, podendo ser aplicada na placa uma força ou um momento. Outra extensão foi adicionada a esse trabalho em Banerjee (1978), tornando possível simular um solo com módulo de elasticidade linearmente variável com a profundidade.

No trabalho de Chin & Chow (1990) o MEC é empregado na análise de grupos de estacas, porém a solução fundamental utilizada na formulação é obtida a partir de Chanet al. (1974). Esta solução corresponde a uma força concentrada aplicada no interior de um solo composto por duas camadas.

Podem ser encontrados também, na literatura, trabalhos que envolvem sólidos elásticos tridimensionais modelados pelo MEC. Neste contexto podem ser citados Banerjee (1976) e Banerjee & Davies (1977), que apresentam uma ferramenta para a análise de estacas conectadas ou não por uma placa rígida e imersas em um meio heterogêneo.

Com o intuito de aumentar a abrangência de seus trabalhos, alguns autores estudam o acoplamento de diferentes formulações. Neste contexto, são citados abaixo alguns trabalhos diretamente ligados a este projeto e que utilizam o MEC em conjunto com o MEF.

No trabalho de Mendonça & Paiva (2003) são analisados grupos de estacas, que podem estar conectadas por uma placa flexível, submetidos a ações verticais. Em Mendonça & Paiva (2000) é feita uma análise semelhante, mas modelando a placa flexível também por equações integrais ao invés de elementos finitos. Também emprega uma formulação semelhante o trabalho de Filho et al. (2005), sendo então consideradas placas rígidas e permitindo que sejam aplicadas também cargas horizontais no topo das estacas.

Em Almeida & Paiva (2004) é proposta uma formulação para a análise tridimensional da interação de um edifício com um solo composto por uma ou mais camadas apoiadas em uma superfície de deslocamento nulo. Esta formulação foi ponto de partida para os trabalhos de Almeida & Paiva (2007) e Ribeiro & Paiva (2014), na análise de problemas de interação do solo com a estrutura.

Nos trabalhos de Botta (2003) e Rocha (2009) são simulados meios modelados pelo MEC e reforçados por elementos de barra modelados pelo MEF, representando enrijecedores. Nestes trabalhos, o escorregamento dos enrijecedores é formulado definindo seu deslocamento em relação ao meio como uma variável de acoplamento. Em Rocha (2009) são empregados diferentes modelos de aderência, incluindo o de aderência perfeita, e em Botta (2003) são introduzidos modelos de dano que consideram a perda de aderência dos enrijecedores.

Em Vick (2014) são simuladas estacas com o MEC incluindo diferentes modelos de aderência para considerar o escorregamento do fuste em relação ao solo. É empregada a solução fundamental de Mindlin para modelar o solo e um elemento finito com quatorze graus de liberdade para modelar as estacas. O acoplamento MEC-MEF é efetivado incluindo o escorregamento, utilizando estratégias semelhantes às empregadas por Rocha (2009) e Botta

(2003). O autor compara resultados com dados experimentais e programas comerciais, validando a ferramenta desenvolvida.

Diversos trabalhos da literatura realizam estudos estatísticos no contexto da análise de estacas. Serão aqui descritos alguns selecionados por serem mais fortemente relacionados ao tema deste projeto.

Em Bea et al. (1999) atenta-se para as diferenças de capacidade das estacas em função da forma de atuação do carregamento, como sua velocidade e periodicidade, além de vieses criados na forma de obtenção dos parâmetros do solo e do método de cravação das estacas. Ressalta-se também que a confiabilidade real de grupos de estacas acaba na grande maioria das vezes sendo maior do que a confiabilidade prevista, devido à redundância estrutural.

Segundo Tandjiria et al. (2000), incertezas podem estar presentes nas propriedades do solo devido a, por exemplo, um número reduzido de ensaios ou fórmulas laboratoriais imprecisas para relacionar os parâmetros medidos. Também são citadas em Tandjiria et al. (2000) incertezas relacionadas às propriedades físicas e geométricas da estaca bem como às cargas nela atuantes. Tais fatores favorecem uma abordagem estatística do problema, em detrimento de uma abordagem determinística.

Em Zhang et al. (2001) diversos métodos simplificados de previsão de capacidade de carga axial são testados. O índice de confiabilidade obtido para cada um dos métodos variou de 1,92 a 3,11 dando indícios da grande sensibilidade em relação ao modelo utilizado. Além disso, também são obtidos índices de confiabilidade maiores para grupos de estaca devido a fatores de grupo e de sistema estrutural, propondo-se um método para obter índices de confiabilidade adequados à confiabilidade de uma estaca isolada tendo-se fixado a confiabilidade desejada para o grupo.

Estacas carregadas lateralmente são avaliadas em Eloseily et al. (2002), mostrando-se que os principais modos de falha acontecem por deslocamento lateral excessivo ou por momento excessivo.

Em Cai et al. (2012) é proposto um novo método para interpretar resultados de testes laboratoriais para estimar a capacidade última de estacas, usando como justificativa análises de confiabilidade. Os autores demonstram que o método proposto é mais confiável que outros métodos ao obter um índice de confiabilidade superior aos obtidos pelos demais. Consequentemente, o método proposto leva a uma menor probabilidade de falha.

É avaliada estatisticamente a capacidade de carga lateral de estacas rígidas em Pula & Rozanski (2012), propondo uma solução baseada no trabalho de Broms (1964). É demonstrado que variações aleatórias nas propriedades do solo podem causar alterações significativas na capacidade de carga lateral. Os autores recomendam que a média espacial das propriedades do solo seja envolvida em análises de confiabilidade de estacas rígidas.

Em Teixeira et al. (2012) é examinada a influência de incertezas na confiabilidade de estacas verticais, utilizando os métodos FORM e simulação Monte Carlo. Ao comparar os métodos, concluiu-se que o FORM é adequado somente para casos mais simples ou como aproximação inicial, por ser incapaz de incorporar todos os detalhes relevantes do problema. Outra conclusão dos autores é que é incorreto ignorar a correlação espacial das variáveis, apesar de conservador.

O MEC é aplicado de forma eficiente em conjunto com simulação por Monte Carlo em Mehanny et al. (2011), para o estudo do efeito do deslocamento aleatório de estacas conectadas a uma placa. São utilizados elementos cilíndricos para modelar a estaca e a teoria de Reissner para modelar a placa. O trabalho conclui que caso as estacas sejam projetadas para suportar uma carga 10% superior à de projeto, a segurança estará assegurada caso apenas uma estaca se desloque.

Em Klammler et al. (2013) a capacidade de carga axial de uma estaca é obtida combinando-se resultados empíricos com uma equação dinâmica (equação que prevê a capacidade de carga a partir de ensaios dinâmicos e não estáticos). A capacidade de carga dada por esse método é então utilizada na determinação dos fatores de resistência segundo os critérios da AASHTO. O resultado esperado é obtido: quanto maior o número de estacas monitoradas dentre as estacas pertencentes a um grupo, maior é o fator de resistência.

Em Fan et al. (2014) é desenvolvido um esquema sistemático para avaliar simultaneamente diferentes estados limites de utilização em estacas escavadas, definindo falha como um evento no qual deslocamentos excedem valores limites. Para a modelagem do sistema estaca-solo é empregado um método de diferenças finitas e a confiabilidade é considerada por simulação Monte Carlo. Conclui-se que a inclusão da dependência entre as propriedades do solo é essencial para a análise de confiabilidade, bem como a consideração de múltiplos modos de falha simultâneos.

3. Modelo Mecânico Utilizado

3.1 Método dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) cria meios para a resolução de problemas estabelecidos por equações diferenciais através da discretização do contorno do domínio das variáveis do problema e satisfazendo-se as condições de domínio de forma exata e as condições de contorno de forma aproximada.

Teoria da Elasticidade

O problema de determinar as tensões na interface estaca-solo e os deslocamentos desta estaca é definido primeiramente pelas equações da Teoria da Elasticidade e é do desenvolvimento desta teoria que surgem as chamadas soluções fundamentais que serão capazes de satisfazer o domínio de forma exata.

Na matemática, pode ser feito um paralelo com as equações integrais onde as soluções fundamentais equivalem às chamadas funções Kernel e por isso, recebendo esta denominação diversas vezes na literatura.

O problema geral da Teoria da Elasticidade Linear fica completamente determinado quando de posse das condições de contorno, das equações de equilíbrio, das equações cinemáticas e das relações constitutivas, próprias da teoria. Sem esquecer-se dos teoremas complementares, como o teorema de Cauchy, que relaciona de forma consistente as componentes da tensão em um plano qualquer com as tensões nos planos normais aos eixos coordenados.

Definindo-se para um sólido qualquer (Figura 2), tensões impostas $\bar{\mathbf{t}}$ numa região S_t de sua superfície e deslocamentos impostos $\bar{\mathbf{u}}$ numa região S_u de sua superfície, têm-se as condições de contorno devidamente estabelecidas. Já as equações de equilíbrio podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{3.1}$$

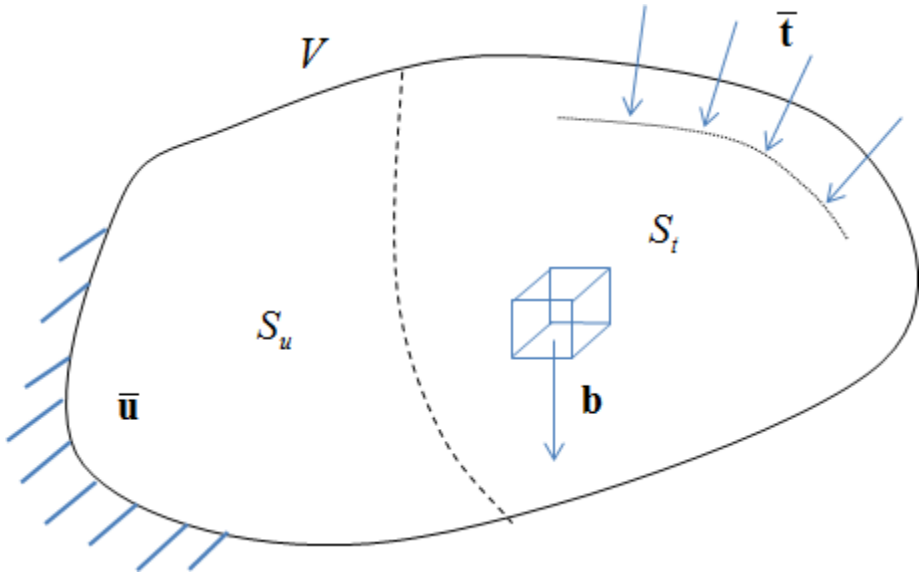

Figura 2 – Sólido.

Sendo σ_{ij} as componentes do tensor das tensões de Cauchy para um ponto do campo de tensões na configuração indeformada e b_i as componentes das forças de volume para esse mesmo ponto.

As equações cinemáticas são definidas eliminando-se os termos de ordem superior do tensor das deformações de Green e podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3.2}$$

Sendo neste caso, a equação válida para um ponto do campo de deslocamentos na configuração indeformada.

As equações constitutivas provêm da Lei de Hooke e são dadas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + 2\mu\, \varepsilon_{ij} \tag{3.3}$$

Sendo $\mu = E / 2(1+\nu)$ o módulo de cisalhamento, $\lambda = 2\nu\mu / \left(1 - 2\nu\right)$ a constante de Lamé e ν o coeficiente de Poisson. A letra grega δ representa a função delta de Kronecker; para i igual a j ela vale 1 e 0 quando diferentes.

O equilíbrio também pode ser expresso em termos dos deslocamentos ao invés das tensões, substituindo-se (3.2) em (3.3) em seguida substituindo o resultado em (3.1) chega-se na equação de Navier:

$$\mu\, u_{i,jj} + \left(\mu + \lambda\right) u_{j,ji} + b_i = 0 \tag{3.4}$$

Soluções Fundamentais

A solução fundamental de Kelvin, que não será usada neste trabalho, mas que é de grande importância é obtida da solução da equação (3.4) quando se consideram forças de volume unitárias atuando em uma direção e em apenas um ponto de um domínio infinito. A representação matemática deste tipo de carregamento é feito através da distribuição Delta de Dirac que é definida da seguinte maneira:

$$\Delta\left(x^i, x\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & se & x = x^i \\ 0 & se & x \neq x^i \end{array} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta\left(x^i, x\right) f\left(x\right) dx = f\left(x^i\right) \tag{3.5}$$

Apresenta-se agora, a solução fundamental de Mindlin que foi a solução de fato utilizada neste trabalho. Esta solução fundamental da elasticidade apresenta algumas diferenças em relação à solução de Kelvin, apesar de ser deduzida a partir dela de acordo com Mindlin (1936). Enquanto a de Kelvin fornece o campo de deslocamentos e o campo de tensões de um meio infinito sujeito a uma carga pontual, a de Mindlin fornece o campo de deslocamentos e tensões para um semi-espaço infinito sujeito a uma carga pontual, com a condição de que o plano de contorno ($z = 0$) deste semi-espaço tenha somente tensões nulas caso não corresponda a regiões de carregamento.

Conforme a Figura 3 abaixo, considerando-se uma carga unitária normal ao plano de contorno e aplicada no ponto de coordenadas (0,0,c), as soluções de Mindlin assumem os seguintes valores para os deslocamentos em um ponto de coordenadas (x,y,z):

$$u = \frac{r}{16\pi G(1-\nu)}\left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5}\right] \tag{3.6}$$

$$v = u \tag{3.7}$$

$$w = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\left[\begin{array}{l} \dfrac{3-4\nu}{R_1} + \dfrac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2^3} + \dfrac{(z-c)^2}{R_1^3} + \\ \dfrac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \dfrac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \end{array}\right] \tag{3.8}$$

Considerando-se uma carga unitária paralela ao plano de contorno e aplicada no ponto de coordenadas (0,0,c), as soluções de Mindlin assumem os seguintes valores para os deslocamentos em um ponto de coordenadas (x,y,z):

$$u = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\left[\begin{array}{l} \dfrac{3-4\nu}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{x^2}{R_1^3} + \dfrac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \dfrac{2cz}{R_2^3}\left(1 - \dfrac{3x^2}{R_2^2}\right) + \\ \dfrac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c}\left(1 - \dfrac{x^2}{R_2(R_2+z+c)}\right) \end{array}\right] \tag{3.9}$$

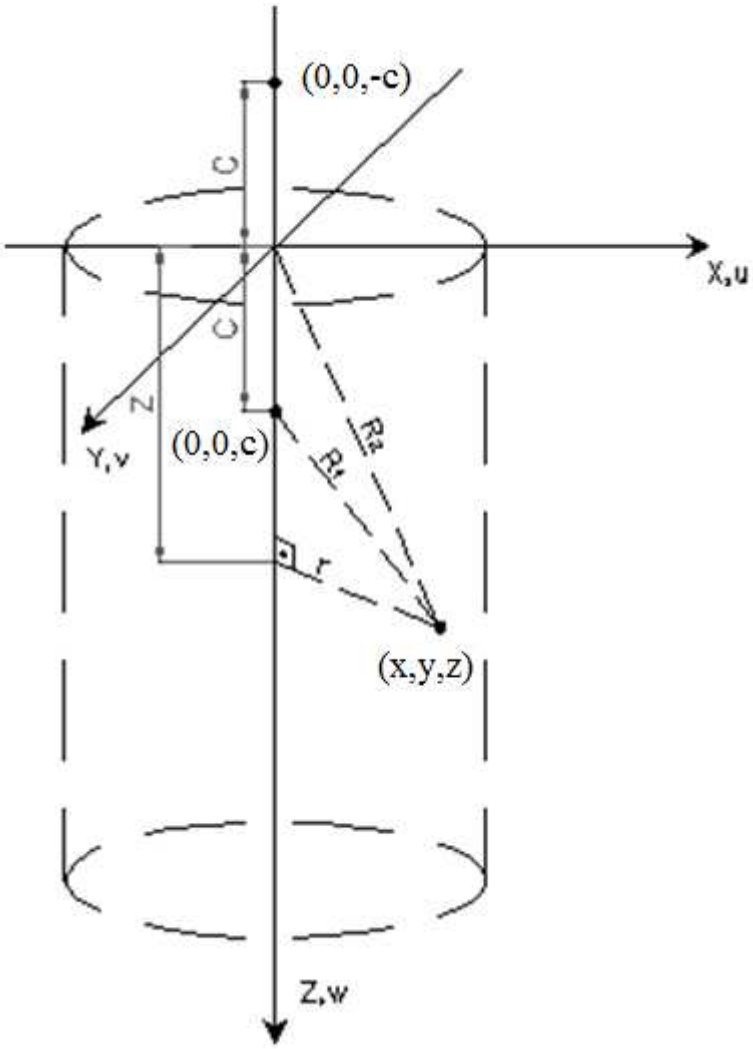

Figura 3 – Parâmetros da solução de Mindlin. Fonte: Mindlin (1936).

$$v = \frac{xy}{16\pi G(1-\nu)}\left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2}\right] \tag{3.10}$$

$$w = \frac{x}{16\pi G(1-\nu)}\left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)}\right]$$

(3.11)

Conforme será mostrado adiante, somente as soluções fundamentais para os deslocamentos serão necessárias neste trabalho, assim, não serão apresentadas as fórmulas para o campo de tensões da solução fundamental de Mindlin.

Equação Integral do Contorno

O ponto de partida do MEC pode ser obtido por diferentes abordagens. A meta a ser atingida, no entanto, assim como para o MEF, é a mesma: estender as relações fundamentais de equilíbrio ou de energia para todo o domínio do corpo elástico.

Integra-se a equação de equilíbrio (3.1) sobre todo o domínio de interesse e utiliza-se como função de ponderação dos erros de aproximação um campo de deslocamentos admissíveis quaisquer u_i^*, de forma a ter-se:

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right) u_i^* \, d\Omega = 0 \tag{3.12}$$

Desenvolvendo-se a expressão acima através de integrações por partes e com o auxílio do teorema do divergente chega-se na expressão que equivale ao teorema da reciprocidade de Betti-Maxwell em termos das foças de volume e das forças de superfície tal que:

$$\int_\Gamma t_i u_i^* \, d\Gamma + \int_\Omega b_i u_i^* \, d\Omega = \int_\Gamma t_i^* u_i \, d\Gamma + \int_\Omega b_i^* u_i \, d\Omega \tag{3.13}$$

No MEC a equação (3.13) tem uma importância muito grande já que como se verá adiante, os campos vetoriais associados ao campo de deslocamentos usado como função de ponderação $\left(u_i^*, t_i^*, b_i^*\right)$ são substituídos pelos campos vetoriais correspondentes a uma das soluções fundamentais da elasticidade.

A equação (3.13) equivale à seguinte expressão:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \, d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \, d\Omega \tag{3.14}$$

Note-se que no MEF, basta trabalhar com apenas um dos lados das equações (3.13) e (3.14) já que as soluções fundamentais não são necessárias, ou seja, utiliza-se uma expressão equivalente a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^{*} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^{*} d\Omega \tag{3.15}$$

No MEF, somente o campo vetorial associado ao campo de deslocamentos usado como função de ponderação $\left(u_i^{*}\right)$ é necessário e passa a representar deslocamentos virtuais caso seja aplicado o teorema dos deslocamentos virtuais ou variações caso sejam aplicados princípios variacionais.

Dando continuidade à formulação necessária para o desenvolvimento do MEC, aplicam-se as soluções fundamentais de Mindlin na equação (3.13). Convencionando-se chamar de ponto fonte (p) o ponto do interior do domínio de aplicação da carga unitária, ponto campo (q) o ponto do interior do domínio onde os efeitos desta carga são medidos e (Q) o ponto do contorno onde os efeitos desta carga são medidos, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_j(Q) u_{ij}^{*}(p,Q)\, d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^{*}(p,\mathrm{q})\, d\Omega = \\ \int_{\Gamma} t_{ij}^{*}(p,\mathrm{Q}) u_j(Q)\, d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{*}(p,\mathrm{q}) u_i(q)\, d\Omega \end{aligned} \tag{3.16}$$

Sendo $i = 1, 2, 3$ cada uma das direções de aplicação da carga unitária no ponto fonte e $j = 1, 2, 3$ cada uma das direções possíveis de deslocamento, de componentes de tensão ou força de volume aplicada no ponto campo. Assim, as soluções fundamentais formam matrizes $3x3$.

Além disso, sabe-se que para as soluções fundamentais, as forças de volume são cargas concentradas representadas pela função Delta de Dirac de acordo com (3.5), portanto:

$$b_i^{*}(p,\mathrm{q}) = \Delta(p,q) \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \Delta(p,q) u_i(q) d\Omega = u_i(p) \tag{3.17}$$

Chega-se finalmente na chamada identidade de Somilgliana, que é expressa por:

$$u_i(p) = -\int_\Gamma t_{ij}^*(p,\mathrm{Q})u_j(Q)d\Gamma + \int_\Gamma t_j(Q)u_{ij}^*(p,Q)d\Gamma + \int_\Omega b_j(q)u_{ij}^*(p,\mathrm{q})d\Omega \tag{3.18}$$

Note-se que a identidade de Somigliana só é válida quando o ponto fonte situa-se dentro do domínio Ω. Como forma de simplificar o procedimento necessário para resolver os valores do contorno, levam-se todos os pontos da equação (3.18) para o contorno sendo agora o ponto fonte (P) um ponto de aplicação da carga unitária do contorno. Tal procedimento é alcançado considerando-se primeiramente o contorno como uma superfície suave e tomando-se o limite $\varepsilon_r \to 0$ dos dois primeiros termos do lado direito da equação (3.18), sendo ε_r o raio de uma semiesfera com centro em cada ponto fonte levado até o contorno. Para a solução fundamental de Kelvin, que é a mais comumente utilizada e portanto, a mais encontrada na literatura especializada, o primeiro termo do lado direito, é definido em termos de valores principais de Cauchy por apresentar singularidade e produzirá um termo livre que para superfícies suaves vale $-\frac{1}{2}u_i(P)$. No caso mais geral, o termo livre é determinado considerando-se um movimento de corpo livre de acordo com Brebbia (1992).

Quando da utilização da solução fundamental de Mindlin, na passagem do domínio para pontos do contorno somente não aparecem termos adicionais, de acordo com Filho et al. (1999).

Para uma estaca, que é o caso desenvolvido neste trabalho, a superfície de contorno a ser integrada é uma reta, portanto, uma “superfície” suave. Além disso, a solução fundamental de Mindlin garante que $t_{ij}^*(p,\mathrm{Q}) = 0$ no plano de contorno e opta-se por desprezarem-se as forças de volume atuantes no maciço do solo, ou seja, $b_j(q) = 0$. Assim, a equação do contorno trabalhada de fato reduz-se a apenas:

$$u_i(P) = \int_\Gamma t_j(Q)u_{ij}^*(P,Q)d\Gamma \tag{3.19}$$

Esta equação representa uma linha de carga aplicada no interior do maciço de solos. Além disso, as tensões t_j representam a interface entre o MEC e o MEF como desenvolvido no item 3.3 abaixo.

Quando $P = Q$ em (3.19) adota-se a mesma técnica encontrada em Ribeiro (2009). Para $P \neq Q$ pertencentes a bases de estacas, a integração analítica é mais adequada. Para $P = Q$ pertence à base da estaca, parte-se também para integração analítica, tal como demonstrado em Filho et al. (1999).

3.2 Método dos Elementos Finitos

Assim como o MEC, o Método dos Elementos Finitos (MEF) contribui para a resolução de problemas estabelecidos por equações diferenciais. Repartindo-se o domínio em elementos discretos com nós e dotados de funções interpoladoras no seu interior, satisfazem-se as condições de contorno de forma exata e as condições de domínio de forma aproximada.

A sua formulação generalizada no âmbito da engenharia de estruturas também pode ser alcançada por diferentes caminhos. Em todos eles, seja por métodos variacionais ou de resíduos ponderados, recai-se na forma fraca da equação de equilíbrio, que é uma forma integral.

Optando-se pelo cálculo variacional, dado um funcional W definido por:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, u(x), u'(x), u''(x), ..., u^p(x)\right) dx \tag{3.20}$$

Sabe-se que W torna-se estacionário quando sua primeira variação vale zero, o que equivale a:

$$\delta W = \frac{dW}{du}\delta u = \frac{dW}{da_i}\delta a_i = 0 \tag{3.21}$$

Sendo a_i com $i = 1, 2, ..., n$ os parâmetros da função u que compõe o funcional. No MEF, ela é normalmente uma função polinomial do tipo:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_{n+1} x^n \tag{3.22}$$

Aplicando-se as condições de contorno, pode-se escrever os parâmetros a_i em função dos deslocamentos e rotações nodais incógnitos w e das chamadas funções de forma $\mathbf{\Phi}_i$, reunidas adequadamente na matriz $\mathbf{\Phi}$, ficando-se com:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\ \mathbf{w} \tag{3.23}$$

Passa-se agora a considerar o funcional definido pela energia potencial total de um corpo elástico, que é a energia de deformação mais o trabalho realizado pelas forças externas.

A energia de deformação U em um elemento finito é definida por:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega_e \tag{3.24}$$

Sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor das tensões, dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.25}$$

Com o tensor $\mathbf{D}$ contendo as constantes elásticas do material e $\boldsymbol{\varepsilon}$, o vetor das deformações, obtido aplicando-se um operador diferencial ∂ no vetor de deslocamentos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial\, \mathbf{u} \tag{3.26}$$

Já o trabalho das forças externas T em um elemento finito é definido pelo vetor dos deslocamentos $\mathbf{u}$, das forças de volume $\mathbf{b}$ e das forças de superfície $\mathbf{t}$, da seguinte maneira:

$$\mathrm{T}_e = -\int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma_e \tag{3.27}$$

Assim, funcional definido pela energia potencial total vale:

$$P_e = U_e + \mathrm{T}_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma_e \tag{3.28}$$

A configuração de mínimo da energia potencial total de um sistema é uma configuração de equilíbrio estável. A condição de estacionariedade desse funcional é uma condição necessária para o mínimo, portanto impõem-se:

$$\delta P_e = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \frac{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \frac{\partial\left(\mathbf{u}^T \mathbf{b}\right)}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u}\, d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial\left(\mathbf{u}^T \mathbf{t}\right)}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u}\, d\Gamma_e = 0$$

Os dois últimos termos podem ser desenvolvidos sem maiores dificuldades. O primeiro no entanto, merece maior atenção. Substituindo (3.25) na expressão dentro da integral obtém-se:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Como o tensor $\mathbf{D}$ é simétrico, vale o seguinte resultado:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}$$

Com isso, o ponto de partida do MEF pode ser obtido:

$$\int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\, d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma_e = 0 \tag{3.29}$$

A hipótese fundamental do MEF é que o subdomínio de cada elemento pode ser aproximado por funções de forma tal como estabelecido em (3.23). Considerando que as variações dos deslocamentos e deformações podem ser aproximadas pelas mesmas funções de forma, tem-se que:

$$\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}\ \delta\mathbf{w}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \partial\boldsymbol{\Phi}\ \delta\mathbf{w} \tag{3.30}$$

E, portanto, (3.29) passa a ser escrita como:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}\, \mathbf{w}\; d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{\Phi}^T\, \mathbf{b}\; d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{\Phi}^T\, \mathbf{t}\; d\Gamma_e = 0 \tag{3.31}$$

Onde $\mathbf{B}$ contem as funções interpoladoras das deformações o que equivale a aplicar o operador diferencial ∂ nas funções de forma $\mathbf{\Phi}$.

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{\Phi} \tag{3.32}$$

Os deslocamentos nodais e as variações dos deslocamentos nodais podem ser colocados fora das integrais. Assim, define-se a matriz de rigidez de um elemento finito como:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}\; d\Omega_e \tag{3.33}$$

Define-se também o vetor de cargas nodais equivalentes como:

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{\Phi}^T\, \mathbf{b}\; d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \mathbf{\Phi}^T\, \mathbf{t}\; d\Gamma_e \tag{3.34}$$

A expressão (3.31) passa então a ser escrita como:

$$\delta \mathbf{w}^T\, \mathbf{K}_e\, \mathbf{w} = \delta \mathbf{w}^T \mathbf{f}_e$$

Como $\delta \mathbf{w}$ pode assumir valores arbitrários, permite-se escrever:

$$\mathbf{K}_e\, \mathbf{w} = \mathbf{f}_e$$

Aplicando-se os resultados acima para todos os elementos finitos do domínio, ou seja, para a malha de elementos adotada e fazendo-se a concordância entre coordenadas locais de

cada elemento e as coordenadas globais do sistema, chega-se no equacionamento completo do problema.

Sendo n_e o número total de elementos, a matriz de rigidez da estrutura é obtida pelo somatório das matrizes de rigidez de cada elemento, sendo necessária a expansão dos graus de liberdade e colocação adequada de cada termo.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}\; d\Omega_i \tag{3.35}$$

O carregamento nodal equivalente da estrutura também é obtido pelo somatório dos carregamentos aplicados em cada elemento sendo também necessária a expansão dos graus de liberdade e colocação adequada de cada termo.

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{b}\; d\Omega_i + \int_{\Gamma_i} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{t}\; d\Gamma_i \right) \tag{3.36}$$

3.2.1 Elemento Finito Utilizado

O elemento finito a ser utilizado na modelagem das estacas é ilustrado na Figura 4 abaixo. Na figura 4.a estão os possíveis carregamentos concentrados a serem aplicados pela extremidade do elemento. Em 4.b, os 4 nós do elemento associados aos 14 graus de liberdade são demonstrados em 4.c e 4.d estão representadas as forças de interação entre o solo que foi modelo pelo MEC e o elemento.

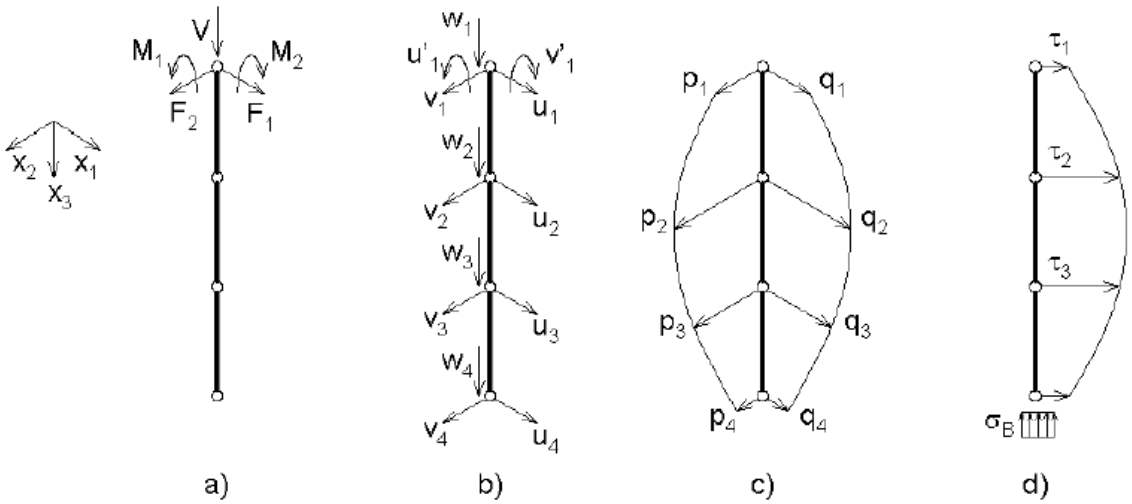

Figura 4 – Características do Elemento Finito utilizado.

Fonte: Ribeiro (2009)

Para os deslocamentos horizontais é utilizado um polinômio de quarto grau por possuir cinco parâmetros nodais, que é igual ao número de graus de liberdade do elemento em cada uma das duas direções horizontais. Este polinômio expresso por funções de forma φ na variável adimensional $\xi = x_3 / L$, conforme Ribeiro (2009) equivale a:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4}\xi^4 + 45\xi^3 - \frac{85}{4}\xi^2 + 1 \\ -\frac{9}{2}\xi^4 L + 9\xi^3 L - \frac{11}{2}\xi^2 L + \xi L \\ \frac{81}{2}\xi^4 - \frac{135}{2}\xi^3 - 27\xi^2 \\ -\frac{81}{4}\xi^4 + 27\xi^3 - \frac{27}{4}\xi^2 \\ \frac{9}{4}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

Assim, os deslocamentos horizontais e a rotação na direção de x_1 e os deslocamentos horizontais e a rotação na direção de x_2 são expressos respectivamente por:

$$u(\xi)=\boldsymbol{\varphi}^T\begin{Bmatrix}u_1\\u_1^{'}\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}\qquad\qquad v(\xi)=\boldsymbol{\varphi}^T\begin{Bmatrix}v_1\\v_1^{'}\\v_2\\v_3\\v_4\end{Bmatrix}\tag{3.38}$$

Para os deslocamentos verticais é utilizado um polinômio de terceiro grau por possuir quatro parâmetros nodais, que é igual ao número de graus de liberdade do elemento na direção vertical. Neste caso, chamando de ψ as funções de forma, tem-se:

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{Bmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{9}{2}\xi^3+9\xi^2-\frac{11}{2}\xi+1\\\frac{27}{2}\xi^3+\frac{45}{2}\xi^2+9\xi\\-\frac{27}{2}\xi^3+18\xi^2-\frac{9}{2}\xi\\\frac{9}{2}\xi^3-\frac{9}{2}\xi^2+\xi\end{Bmatrix}\tag{3.39}$$

Para os carregamentos horizontais q_i e p_i (linearmente distribuídos) são utilizadas as mesmas funções de forma, ficando-se, portanto, com:

$$w(\xi)=\boldsymbol{\psi}^T\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{Bmatrix}\qquad\qquad q(\xi)=\boldsymbol{\psi}^T\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{Bmatrix}\qquad\qquad p(\xi)=\boldsymbol{\psi}^T\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{Bmatrix}\tag{3.40}$$

Restam os carregamentos verticais (superficialmente distribuídos) que são aproximados por um polinômio do segundo grau. Neste caso, chamando de ω as funções de forma, tem-se:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{9}{2}\xi + 1 \\ -9\xi^2 + 6\xi \\ \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi \end{Bmatrix} \qquad \tau(\xi) = \boldsymbol{\omega}^T \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

Para o carregamento vertical devido à resistência de ponta da estaca, que equivale ao nó mais inferior da malha, adota-se uma incógnita nodal R.

De posse das funções de forma do elemento cria-se o funcional da energia potencial total e aplica-se a condição de mínimo desse funcional. Um sistema de quatorze incógnitas e quatorze equações será obtido. Calculando-se as integrais necessárias para a obtenção da matriz de rigidez, chega-se para as contribuições de rigidez nas direções x_1 e x_2 em:

$$\mathbf{K}_i = \frac{EI}{40L^3} \begin{bmatrix} 23722 & 4084\text{L} & -42876 & 26838 & -7684 \\ 4084\text{L} & 808\text{L}^2 & -6912\text{L} & 3996\text{L} & -1168\text{L} \\ -42876 & -6912\text{L} & 81648 & -55404 & 16632 \\ 26838 & 3996\text{L} & -55404 & 42282 & -13716 \\ -7684 & -1168\text{L} & 16632 & -13716 & 4768 \end{bmatrix}, \; i = 1, 2 \tag{3.42}$$

Nestas mesmas direções, os carregamentos distribuídos q e p são transformados em carregamentos nodais equivalentes pela matriz definida por:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{L}{6720} \begin{bmatrix} 721 & 495 & -45 & 285 \\ 38L & 18L & 18L & 38L \\ 54 & 2430 & -486 & -486 \\ 27 & -243 & 2673 & 567 \\ 38 & -162 & 378 & 474 \end{bmatrix}, \; i = 1, 2 \tag{3.43}$$

Portanto,

$$\mathbf{f}^{q} = \mathbf{Q}_1 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{f}^{p} = \mathbf{Q}_2 \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \tag{3.44}$$

Na direção x_3 as contribuições de rigidez são:

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EA}{40L} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

O carregamento distribuído τ é transformado em carregamento nodal equivalente pela matriz definida por:

$$\mathbf{Q}_3 = \frac{L}{80} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 36 & -9 & 0 \\ 3 & -18 & 45 & 0 \\ 7 & -20 & 23 & 80/L \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Portanto,

$$\mathbf{f}^{\tau} = \mathbf{Q}_3 \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ R \end{Bmatrix}$$

Define-se então uma ordenação para os graus de liberdade do elemento e monta-se a matriz de rigidez completa do elemento respeitando esta ordem. O mesmo vale para a matriz de transformação completa de esforços distribuídos em esforços nodais equivalentes.

O vetor global de deslocamentos é definido por:

$$\mathbf{u}^T = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_1^{'} \quad v_1^{'} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \right\} \tag{3.47}$$

O vetor global de esforços externos concentrados é definido por:

$$\mathbf{f}^T = \left\{ F_1 \quad F_2 \quad V \quad M_1 \quad M_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \tag{3.48}$$

O vetor global de esforços externos distribuídos é definido por:

$$\mathbf{s}^T = \left\{ q_1 \quad p_1 \quad \tau_1 \quad q_2 \quad p_2 \quad \tau_2 \quad q_3 \quad p_3 \quad \tau_3 \quad q_4 \quad p_4 \quad R \right\} \tag{3.49}$$

O equacionamento final para um elemento fica:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{Q}\,\mathbf{s} \tag{3.50}$$

Na utilização de mais de um elemento, o acoplamento deve ser feito de forma adequada. Para mais detalhes aconselha-se consultar Ribeiro (2009).

3.3 Acoplamento MEC/MEF

Adotando-se para as linhas de carga definidas por t_j na equação (3.19) as mesmas funções interpoladoras definidas para os carregamentos distribuídos no elemento finito da estaca e de acordo com (3.49), tem-se na variável adimensional $\xi = x_3 / L$ que:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & \omega_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{s} \tag{3.51}$$

E de forma compacta:

$$\mathbf{t}(\xi) = \mathbf{\Phi}^T(\xi)\,\mathbf{s} \tag{3.52}$$

Assim, a equação (3.19) passa a ser escrita como:

$$\mathbf{u}(P) = \int_\Gamma \mathbf{\Phi}^T(\xi)\,\mathbf{s}\,\mathbf{u}^*(P,\xi)\,d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^*(P,\xi)\,\mathbf{\Phi}^T(\xi)\,\mathbf{s}\,d\Gamma \tag{3.53}$$

Chamando de matriz $\mathbf{G}$ a matriz de influência de todas as estacas, caso sejam utilizados grupos de NE estacas, sendo NP pontos fonte por estaca dada por:

$$\mathbf{G} = \sum_{e=1}^{NE}\left[\sum_{p=1}^{NP}\int_\Gamma \mathbf{u}^*(P,\xi)\,\mathbf{\Phi}^T(\xi)\,d\Gamma\right] \tag{3.54}$$

Fazendo $N = NE \cdot NP$ pode-se simplificar $\mathbf{G}$ para apenas um somatório:

$$\mathbf{G} = \sum_{n=1}^{N}\int_\Gamma \mathbf{u}^*(P_n,\xi)\,\mathbf{\Phi}^T(\xi)\,d\Gamma \tag{3.55}$$

Define-se, após terem sido feitas todas as integrações para cada ponto fonte P, o sistema de equações:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{G}\,\mathbf{P}_s \tag{3.56}$$

Sendo $\mathbf{P}_s$ o vetor dos esforços nodais $\mathbf{s}$ generalizado para o caso de mais de uma estaca.

Conforme já mencionado no item 3.1, o acoplamento entre o MEC e o MEF é realizado pelas tensões distribuídas na interface estaca solo, substituindo-se:

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{u}_s \tag{3.57}$$

Na equação (3.50), ou seja:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_e = \mathbf{f} - \mathbf{Q}\,\mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{u}_s \tag{3.58}$$

Note-se, por exemplo, que para uma estaca de um elemento, o vetor $\mathbf{u}_e$ dos deslocamentos da estaca possui 14 graus de liberdade enquanto o vetor dos deslocamentos do solo $\mathbf{u}_s$ possui 12. Além disso, a matriz $\mathbf{Q}$ de dimensões $14\ x\ 12$ multiplicada pela matriz $\mathbf{G}^{-1}$ de dimensões $12\ x\ 12$ gera uma matriz $\mathbf{M}$ de dimensões $14\ x\ 12$. Caso não sejam feitas adaptações, os termos da equação (3.57) são incompatíveis. Este problema é resolvido expandindo-se a matriz $\mathbf{M}$ ou a matriz $\mathbf{G}$ com duas colunas de zeros na posição correspondente aos graus de liberdade $u_1^{'}$ e $v_1^{'}$ inseridos no vetor $\mathbf{u}_s$, com isso pode-se estabelecer a condição de compatibilidade de deslocamentos $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_s = \mathbf{U}$ e a equação (3.57) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{f} \tag{3.59}$$

3.3.1 Subelementação

Para fins de integração numérica, cada elemento da estaca pode ser dividido em vários outros. Esta subdivisão é necessária quando o ponto fonte e o ponto campo pertencem a mesma estaca, podendo assim estarem demasiadamente próximos, levando a perda de qualidade da integração.

A princípio, na ausência de subdivisão, a integração numérica é realizada com apenas uma mudança de variável, sem contar a transformação de z para ξ já definida acima para as funções de forma.

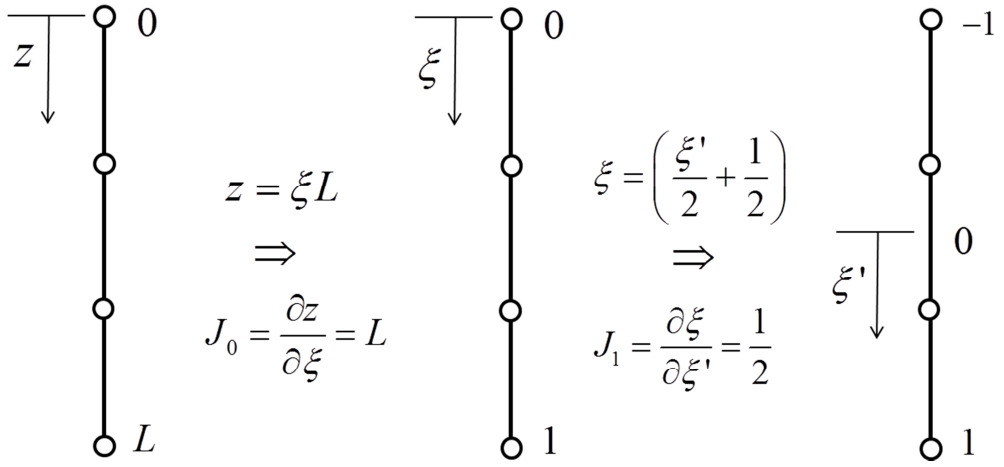

Figura 5 – Mudança de variável: de z para ξ e de ξ para ξ'.

Assim, pelo processo da quadradura de Gauss, a equação (3.55) equivale a:

$$\mathbf{G} = \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{g=1}^{PG} \mathbf{u}^{*}\left(P_n, \xi'_g\right) \mathbf{\Phi}^{T}\left(\xi'_g\right) \omega_g \, J \right] \tag{3.60}$$

Sendo PG o número de pontos de Gauss utilizados; ξ'_g as coordenadas dos pontos de Gauss; ω_g os pesos correspondentes a cada ponto; J o jacobiano dado por $J = J_0 J_1$, que de acordo com a Figura 5, vale $J = L/2$.

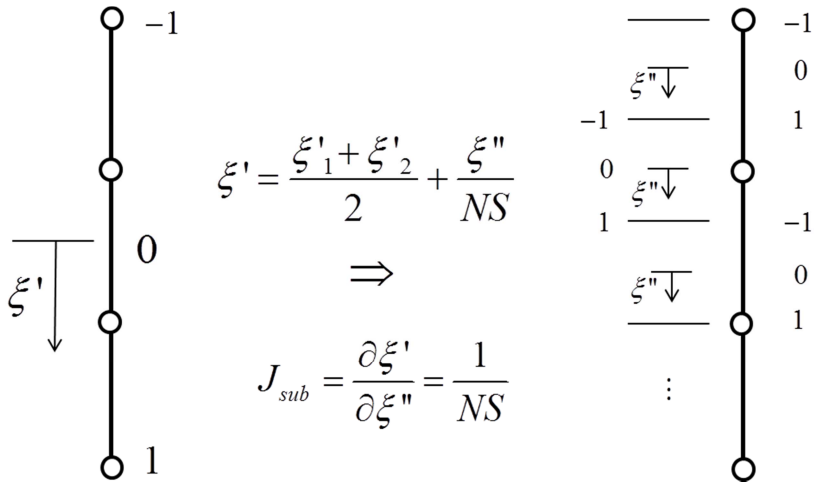

Figura 6 – Mudança de variável: de ξ' para ξ''.

Na fórmula da Figura 6 que expressa a relação entre ξ' e ξ'', ξ'_1 e ξ'_2 são as coordenadas de topo e de base de cada subelemento.

Finalmente, considerando-se os subelementos e suas coordenadas locais, tal como ilustrado na Figura 6 acima, pelo processo da quadradura de Gauss, a equação (3.55) equivale a:

$$\mathbf{G} = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{s=1}^{NS} \left[\sum_{g=1}^{PG} \mathbf{u}^{*}\left(P_n, \xi''_g\right) \mathbf{\Phi}^{T}\left(\xi''_g\right) \omega_g \; J \, J_{sub} \right] \right\} \tag{3.61}$$

Sendo NS o número de subelementos; ξ''_g as coordenadas dos pontos de Gauss; ω_g os pesos correspondentes a cada ponto; J_{sub} o jacobiano, que de acordo com a Figura 6, vale $J_{sub} = 1/NS$.

3.4 Modelo de aderência

Para a análise de situações de ELU faz-se necessária a utilização de um modelo mecânico para a interação estaca-solo que vá além da simples relação elástica-linear do modelo desenvolvido até agora.

Quadros de ruína de uma estaca submetida a carregamentos verticais caracterizam-se normalmente, por deformações excessivas, sendo raros os casos de ruptura do elemento estrutural que a constitui.

Para melhor caracterizar estas deformações excessivas, o escorregamento, podendo-se chamar também de plastificação, entre a estaca e o solo é admitido quando as tensões limites fornecidas pelo modelo de aderência são ultrapassadas.

Os modelos de aderência adotados neste trabalho são aqueles propostos em De Gennaro e Frank (2002). Eles fornecem o coeficiente de atrito μ em função do deslocamento relativo tangencial da interface u_t. Para interfaces não muito densas ("loose interface"), conforme ilustra a Figura 7, o aumento da resistência por atrito cresce assintoticamente até o limite de $\mu_f = \mu_r$. Sua equação é dada por:

$$\mu(u_t) = \mu_0 + (\mu_f - \mu_0)\frac{u_t}{A\left(\frac{\sigma_{ni}}{p_0}\right)t + \mu_t} \tag{3.62}$$

Sendo μ_0 o coeficiente de atrito que delimita a fase elástica inicial; μ_f é o coeficiente de atrito na ruptura; t é a espessura da camada de interface; A é um parâmetro adimensional que influencia o formato da curva de endurecimento; σ_{ni} é a tensão inicial na interface; p_0 é uma tensão de referência para assegurar a dimensão da equação.

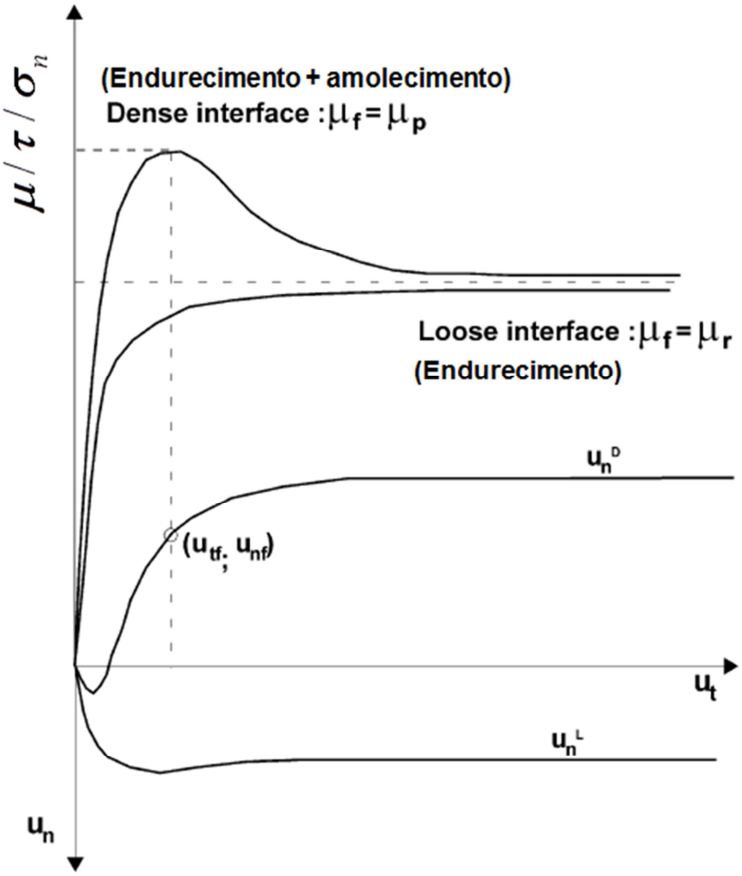

Figura 7 – Modelos de aderência. (De Gennaro; Franki, 2002)

Na Figura 7, u_n^D e u_n^L são os deslocamentos relativos normais da interface para as situações de "Dense interface" e "Loose interface" respectivamente. Valores positivos de u_n significam compressão e negativos, dilatação.

Já para interfaces densas ("dense interface"), que podem ser interpretadas como regiões de grande embricamento entre o solo e as estacas e altas tensões de confinamento, observa-se a existência de um pico de tensão, para $\mu_f = \mu_p$ com deslocamento correspondente u_{tf}, seguido de uma diminuição assintótica até μ_r. Para $u_t \leq u_{tf}$ basta fazer $\mu_f = \mu_p$ na equação (3.62):

$$\mu(u_t) = \mu_0 + (\mu_p - \mu_0)\frac{u_t}{A\left(\frac{\sigma_{ni}}{p_0}\right)t + \mu_t} \tag{3.63}$$

E para $u_t > u_{tf}$ tem-se a relação:

$$\mu(u_t) = \mu_r + (\mu_p - \mu_r)\operatorname{sech}\left[\frac{A_0}{t}(u_t - u_{tf})\right] \tag{3.64}$$

Ou,

$$\mu(u_t) = \mu_r + (\mu_p - \mu_r)\frac{1}{\cosh\left[\frac{A_0}{t}(u_t - u_{tf})\right]} \tag{3.65}$$

Sendo μ_r o coeficiente de atrito final para grandes deslocamentos relativos tangenciais; μ_p e u_{tf} são o coeficiente de atrito e o deslocamento correspondente ao pico de tensão; A_0 é um parâmetro adimensional que influencia o formato da curva de amolecimento.

De posse do coeficiente de atrito dado por (3.62) ou (3.63) e (3.65) a tensão limite atuante na interface é dada por:

$$\tau_{\lim} = \mu(t)\sigma_v K_0 \tag{3.66}$$

Para solos arenosos o coeficiente de empuxo K_0 é dado por (Pinto, 2006):

$$K_0 = 1 - sen\phi \tag{3.67}$$

Já para solos argilosos, tem-se (Pinto, 2006):

$$K_0 = \left(1 - sen\phi\right) RSA^{sen\phi} \tag{3.68}$$

Sendo RSA a razão de sobre adensamento do solo.

3.5 Implentação numérica do escorregamento

Na consideração do escorregamento vertical das estacas em relação ao solo, utiliza-se uma variável auxiliar $\mathbf{d}_{e-s}$ que representa o deslocamento relativo entre as estacas e o solo na direção vertical, tal que:

$$\mathbf{d}_{e-s} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \tag{3.69}$$

Com o deslocamento total estaca passando então a ser dado por:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_s + \mathbf{d}_{e-s} \tag{3.70}$$

Aos deslocamentos relativos associa-se uma matriz $\mathbf{K}_s$ de rigidez ao escorregamento de modo a poder incluir sua influência na equação (3.59), ou seja:

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{M}\right)\mathbf{U} + \mathbf{K}_s \mathbf{d}_{e-s} = \mathbf{f} \tag{3.71}$$

Utilizando-se, por simplicidade, a rigidez da estaca na direção x_3, dada por (3.45), também para $\mathbf{K}_s$ fica-se com:

$$\mathbf{K}_s = \frac{EA}{40L}\begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Note-se que (3.72) deve ser expandida em uma matriz $14NE\,x\,4NE$ para que os termos de (3.71) sejam compatíveis.

Finalmente, de posse de (3.72) parte-se para um processo de solução incremental, onde dentro de cada incremento de carga existe um processo iterativo para ajustar as forças de interação do fuste das estacas com o solo aos limites impostos pelo modelo de aderência. Para cada incremento de carga acumulam-se os valores correspondentes aos deslocamentos, deslocamentos relativos e forças de interação. Para mais detalhes aconselha-se consultar Vick (2014).

4. Conceitos de Probabilidade e Estatística Utilizados.

4.1 Probabilidade

O conceito daquilo que representa uma probabilidade não é óbvio. Encontram-se na literatura, três definições importantes. São elas:

1) Definição clássica, ou de Laplace: Probabilidade de um evento é o número de casos em que ele ocorre divido pelo número total de casos possíveis. Em termos matemáticos, tem-se:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{N_A}{N_{total}}$$

Onde:

N_A : soma das realizações do evento “A”

N_{total} : realizações totais.

2) Definição frequencialista, ou de Von Mises: Probabilidade de um evento é o limite para o qual tente sua frequência relativa para realizações independentes e sob as mesmas condições. Em termos matemáticos, tem-se:

$$P(\mathrm{A}) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Onde:

N_A : soma das realizações do evento “A”

N : realizações até um dado momento.

3) Definição subjetiva, ou Bayesiana: Probabilidade é chance de um evento ocorrer, com base numa crença ou intuição.

4.2 Variáveis Aleatórias

As variáveis podem ter qualquer natureza. Números, cores, gêneros, custos etc. Para a engenharia, e mais especificamente, para este trabalho, interessa apenas variáveis que podem ser expressas dentro do conjunto dos números reais. Para tanto, Beck (2011), define as variáveis reais da seguinte forma:

"Uma variável aleatória real $X(w)$ é uma função real que atribui a cada ponto amostral w de um espaço amostral Ω um valor real x, tal que o conjunto $\{X \leq x\}$ é um evento para qualquer número real x."

Os pontos de Ω formam o domínio da função $x = X(w)$, enquanto os valores assumidos por x constituem a sua imagem.

4.3 Momentos de uma variável aleatória

Média

Os momentos de uma variável aleatória são parâmetros que a definem no mundo probabilístico. O momento de primeira ordem equivale à média de uma variável, ou também à esperança matemática $E(x)$, e é dado por:

$$m^1 = \mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \tag{4.1}$$

Variância

Quando os momentos são referenciados na média da variável, eles são chamados de momentos centrais ou centrados. O momento central de segunda ordem equivale à variância de uma variável e é dado por:

$$m^2 = \sigma_x^2 = Var\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \; f_X(x) dx \tag{4.2}$$

Pode-se mostrar que a equação (4.2) é equivalente a:

$$\sigma_x^2 = E\left(x^2\right) - \left[E\left(x\right)\right]^2 \tag{4.3}$$

Momentos de ordens maiores que dois também são utilizados, embora com menor frequência, como no método de confiabilidade FOTM (First Order Third Moment), que se utiliza do momento central de ordem três, ou também chamado de coeficiente de assimetria.

Para o caso de uma amostra de n elementos, a variância s_x^2 é diferente da variância correspondente a todo o universo da variável X e para que ela seja estimada de forma não enviesada pelos elementos da amostra, deve-se multiplicar σ_x^2 por um termo corretivo, tal que:

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_x^2$$

Portanto:

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1} \left\{ E\left(x^2\right) - \left[E\left(x\right)\right]^2 \right\} \tag{4.4}$$

Covariância e Correlação

Quando mais de uma variável estão envolvidas, pode-se estudar a relação de dependência entre elas. Os parâmetros que quantificam esta dependência entre variáveis são a covariância e a correlação. A primeira é dada por:

$$\begin{aligned} Cov(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_{x_1})(x_2-\mu_{x_2})\, f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\ &= E\left[(x_1-\mu_{x_1})(x_2-\mu_{x_2})\right] \\ &= E(x_1x_2)-\mu_{x_1}\mu_{x_2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

E a segunda é dada por:

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{Cov(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \tag{4.6}$$

4.4 Funções de densidade de probabilidade (pdf) e probabilidade acumulada (cpf) de uma variável aleatória.

Para que uma dada função matemática represente uma função de densidade de probabilidades $f_X(\mathrm{x})$, a seguinte relação é imperativa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{4.7}$$

Observa-se também que todas as variáveis definidas neste trabalho são do tipo contínuas, assim, um determinado ponto de sua imagem, embora possua uma densidade de probabilidade diferente de zero, tem probabilidade de ocorrência igual a zero. O computo de

probabilidade em variáveis contínuas só é possível então em termos de intervalos de valores, da seguinte maneira:

$$P(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \int_a^b f_X(x)\,dx \tag{4.8}$$

Ou

$$P(\mathrm{X} \leq \overline{x}) = \int_{-\infty}^{\overline{x}} f_X(x)\,dx \tag{4.9}$$

De (4.9) pode-se definir a função de distribuição acumulada (cdf) como:

$$F_X(\overline{x}) = \int_{-\infty}^{\overline{x}} f_X(x)\,dx \tag{4.10}$$

De (4.10) pode-se estabelecer uma relação entre a PDF e a CDF procedendo-se da seguinte forma:

$$\frac{dF_X(\overline{x})}{d\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}} \int_{-\infty}^{\overline{x}} f_X(x)\,dx$$

$$\therefore \qquad f_X(\overline{x}) = \frac{dF_X(\overline{x})}{d\overline{x}} \tag{4.11}$$

As figuras 10 e 11 mostram de forma conjunta os gráficos das distribuições de probabilidades do tipo normal (N), lognormal (LN) e gumbel (G). Nos itens a seguir, são dados mais detalhes dessas distribuições.

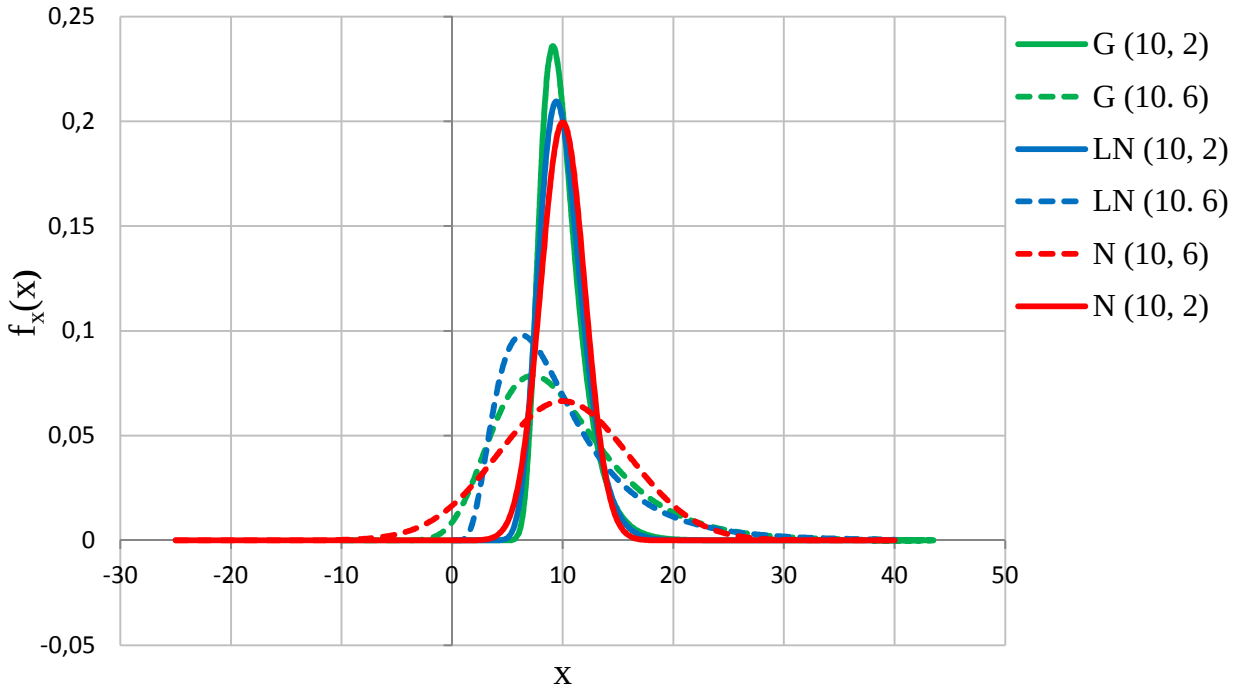

Figura 8 – Funções de densidade de probabilidade (pdf).

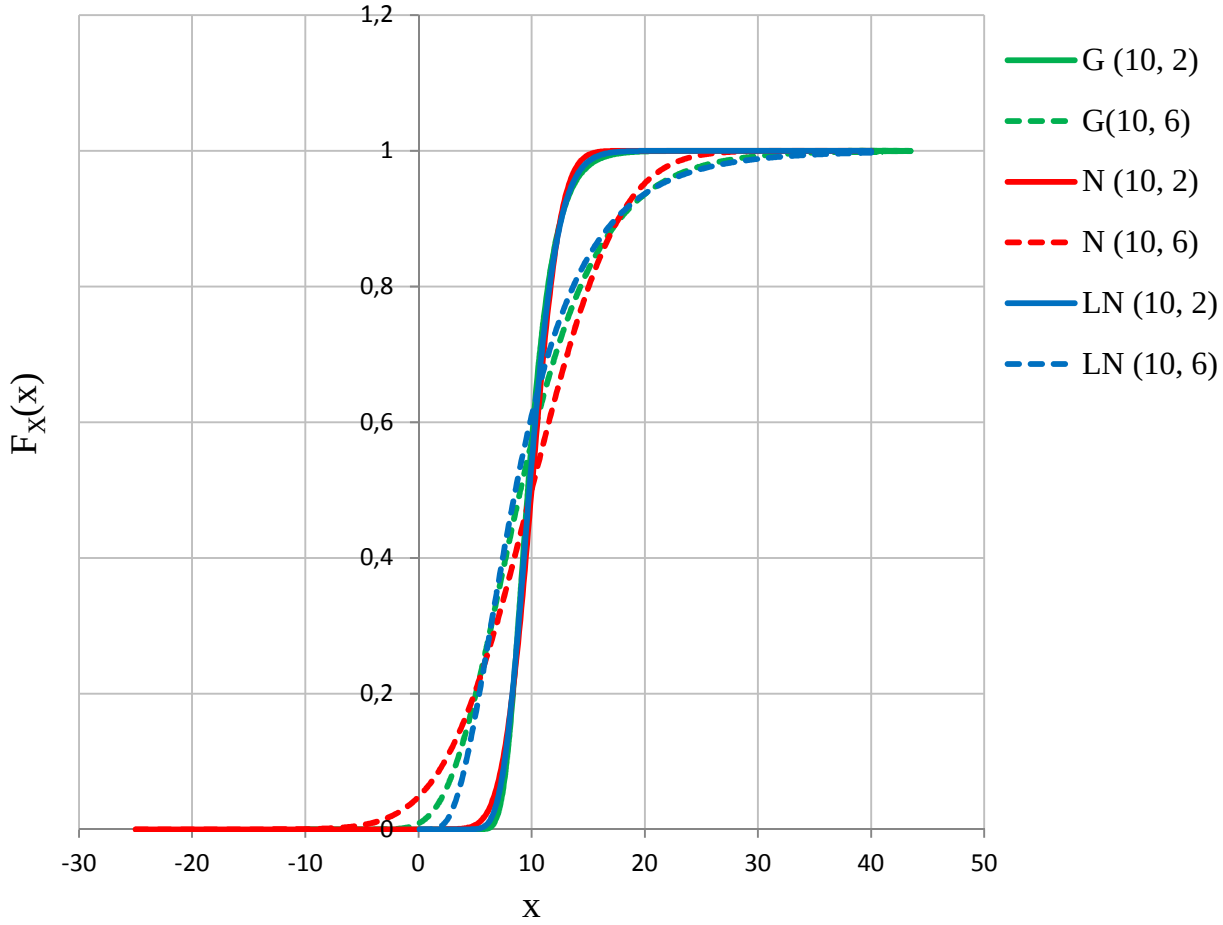

Figura 9 – Funções de probabilidade acumulada (cpf).

4.4.1 Distribuição Normal

Sejam Y_i (i=1,2,...,n), variáveis aleatórias independentes; com distribuições de probabilidade quaisquer e primeiro e segundo momentos μ_{Yi} e σ_{Yi}, define-se a variável X como:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{4.12}$$

Sendo a variável X uma combinação linear das variáveis Y_i, são válidas as seguintes expressões:

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} \mu_{yi} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{yi}^2 \tag{4.13}$$

O Teorema do Limite Central afirma que, quando n tende para o infinito, a distribuição de probabilidades da variável X tende para a distribuição normal, que recebe este nome por ser frequentemente encontrada em casos práticos (Fusco 1977). Sua função de densidade de probabilidade e sua função de probabilidade acumulada são, respectivamente, dadas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{4.14}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] d\varphi \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{4.15}$$

A integral acima não tem solução analítica. Seus resultados são tabelados utilizando-se uma transformação de variável do tipo:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \tag{4.16}$$

A variável Z possui média zero ($\mu_Z = 0$) e desvio padrão unitário $\sigma_Z = 1$. A distribuição normal de probabilidades escrita em função de Z recebe o nome de distribuição normal padrão. As funções de densidade de probabilidade e probabilidade acumulada passam a ser:

$$f_Z(\mathrm{z}) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathrm{z}^2 \right] \qquad -\infty \le z \le \infty \tag{4.17}$$

$$F_Z(\mathrm{z}) = \Phi(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{z} \phi(\varphi)\, d\varphi \qquad -\infty \le z \le \infty \tag{4.18}$$

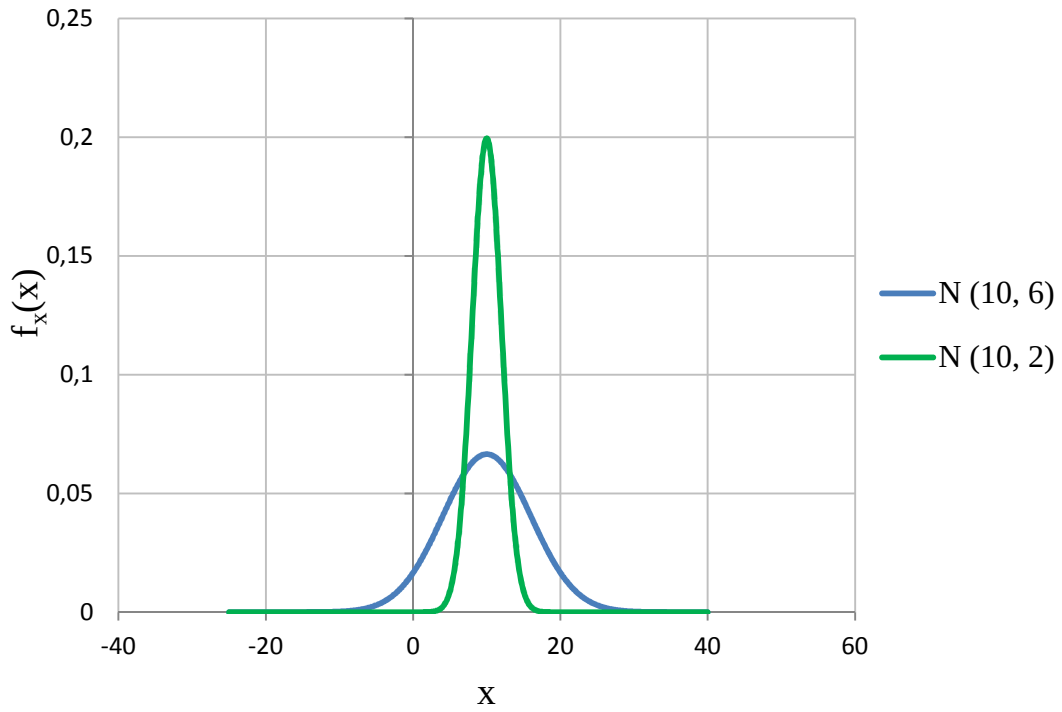

Figura 10 – Funções de Densidade de Probabilidade Normais.

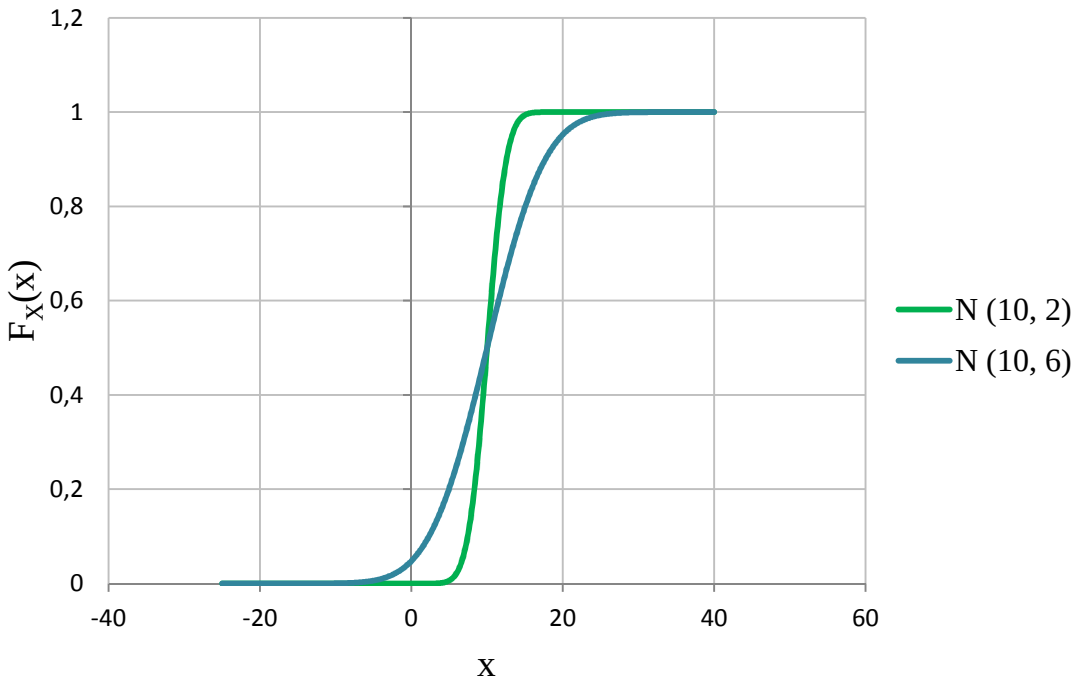

Figura 11 – Funções de Probabilidade Acumulada Normais.

4.4.2 Distribuição Log-normal

A distribuição log-normal é obtida aplicando a função exponencial a uma variável com distribuição normal, de modo inverso, extraindo o logaritmo natural de uma variável com distribuição log-normal, obtém-se uma variável com distribuição normal, ou seja:

$$y = \ln x \approx N(\mu_y, \sigma_y) \tag{4.19}$$

$$x = e^y \approx LN(\mu_x, \sigma_x) \tag{4.20}$$

Fazendo, conforme Fusco (1977), de (4.13) tem-se que:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \tag{4.21}$$

Tomando-se (4.19) como uma função de uma variável, unívoca e monotônica, a seguinte relação é válida:

$$f_X(x)\,dx = f_Y(y)\,dy$$

Além disso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{1}{x} \cdot f_Y(y) \tag{4.22}$$

Sendo:

$$y = \ln x \qquad \lambda = \mu_y \qquad \text{e} \qquad \xi = \sigma_y \tag{4.23}$$

Por fim, substituindo (4.23) em (4.21) e inserindo em (4.22), chega-se nas funções de probabilidade log-normais:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \qquad 0 \le x \le \infty \tag{4.24}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\varphi)d\varphi = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right) \qquad 0 \le x \le \infty \tag{4.25}$$

Sendo válidas também, as seguintes expressões (Beck, 2011):

$$\xi = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\sigma_x / \mu_x\right)^2\right)} \tag{4.26}$$

$$\lambda = \ln \mu_x - \tfrac{1}{2}\xi^2 \tag{4.27}$$

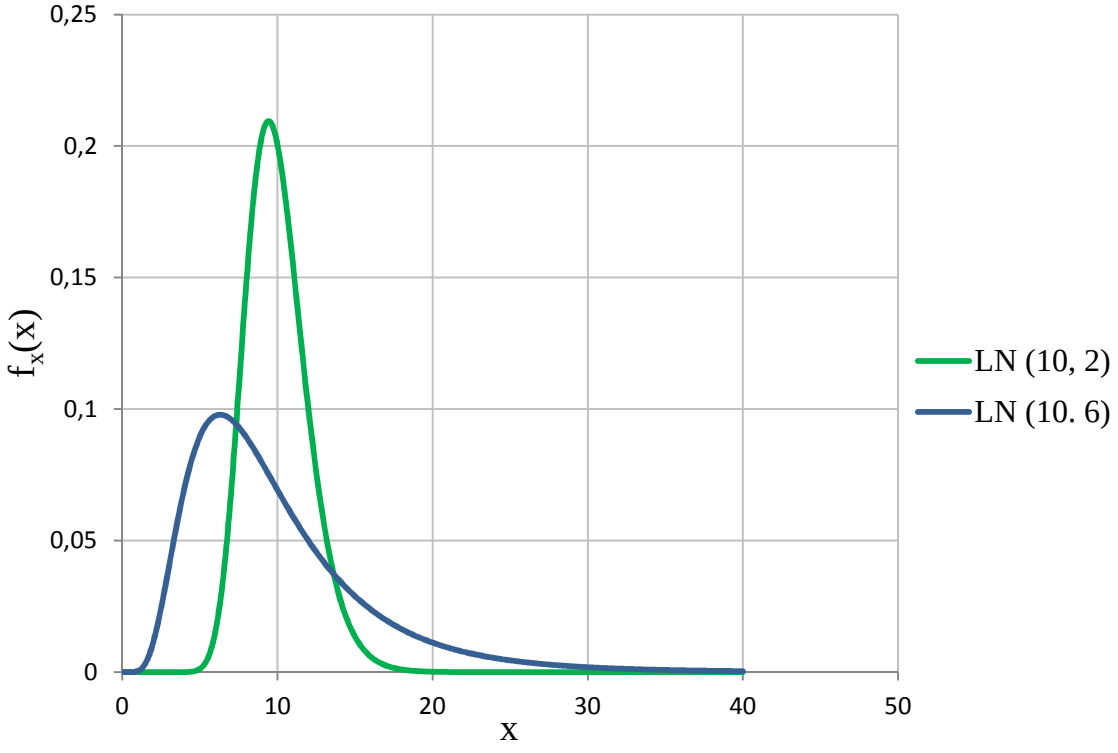

Figura 12 – Funções de Densidade de Probabilidade Log-normais.

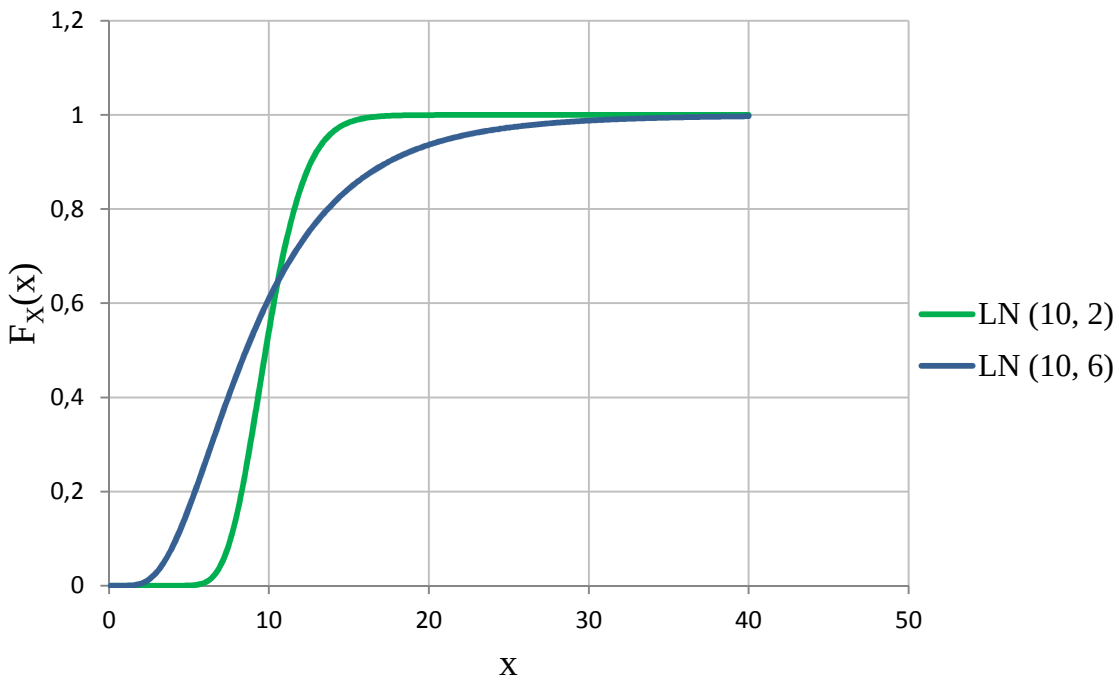

Figura 13 – Funções de Probabilidade Acumulada Log-normais

4.4.3 Distribuição de Gumbel

Esta distribuição de probabilidades é um dos três tipos de distribuição de extremos de uma variável aleatória. Os outros dois são a distribuição de Frechet e Weibull que não serão utilizadas neste trabalho.

Dada uma amostra $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ de n observações independentes de uma mesma variável aleatória Y, define-se uma nova variável X que represente o valor máximo dessa amostra, ou seja, $X = máx(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. A probabilidade de essa nova variável ser menor ou igual a certo limite $\overline{x}$, é dada então por:

$$P(X \leq \overline{x}) = P(Y_1 \leq \overline{x}) \cap P(Y_2 \leq \overline{x}) \cap ... \cap P(Y_n \leq \overline{x})$$

O que equivale a:

$$F_X(\overline{x}) = F_{Y_1}(\overline{x}) \cdot F_{Y_1}(\overline{x}) \cdot .... \cdot F_{Y_n}(\overline{x}) = \left[F_Y(\overline{x})\right]^n \tag{4.28}$$

Quando $n \to \infty$ a cauda superior de $F_Y(y)$ é dada por uma expressão do tipo (Fusco, 1976):

$$F_Y(y) = 1 - e^{-g(y)} \tag{4.29}$$

Onde $g(y)$ é uma função crescente. A distribuição de probabilidades da variável X passa a ser a distribuição de Gumbel, que é dada por:

$$F_X(x) = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\tilde{x})}\right] \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{4.30}$$

$$f_X(x) = \alpha \exp\left[-\alpha(x-\tilde{x}) - e^{-\alpha(x-\tilde{x})}\right] \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{4.31}$$

Sendo $\alpha > 0$ uma medida de dispersão e $\tilde{x}$ a moda da distribuição, lembrando que moda é o valor mais comum que uma variável pode assumir. A média e a variância da distribuição de Gumbel são dadas em função de α e $\tilde{x}$ da seguinte forma:

$$\mu_x = \tilde{x} + \frac{0,5772}{\alpha} \tag{4.32}$$

$$\sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6}\,\alpha} \tag{4.33}$$

Ou, de forma inversa, tem-se:

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6}\,\sigma_x} \tag{4.34}$$

$$\tilde{x} = \mu_x - \frac{0,5772\sqrt{6}\,\sigma_x}{\pi} \tag{4.35}$$

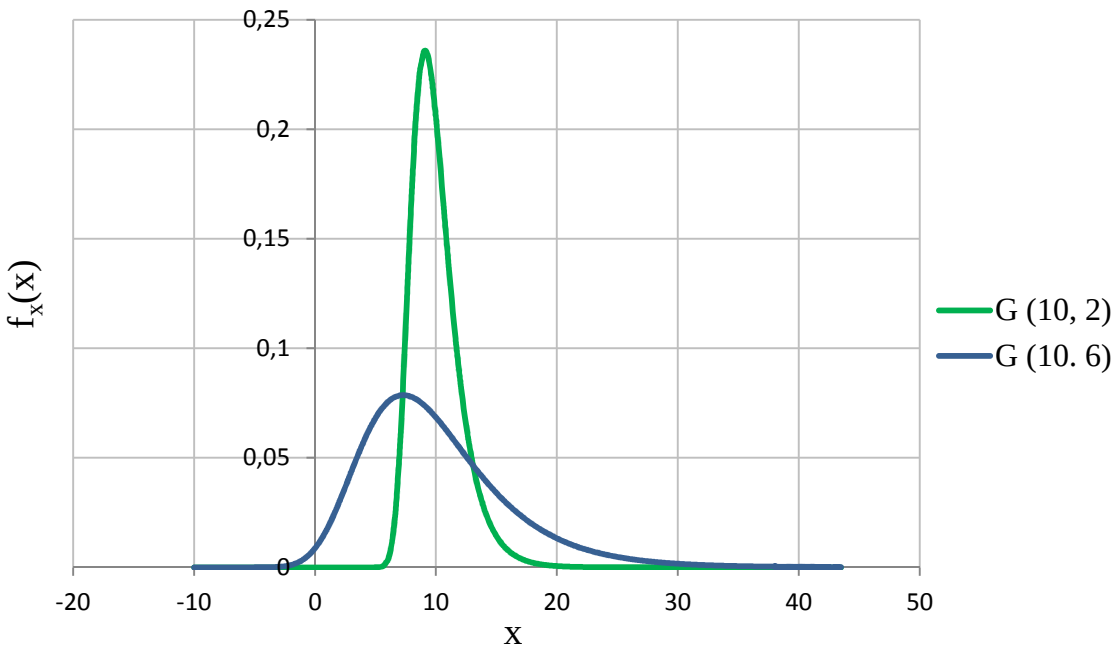

Figura 14 – Funções de densidade de probabilidade de Gumbel.

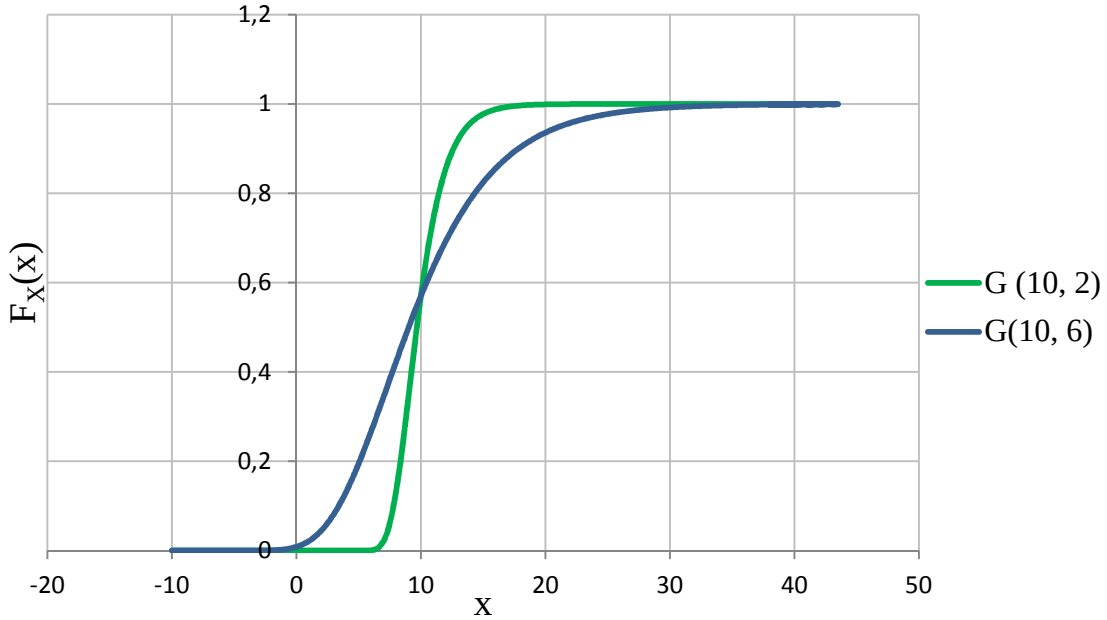

Figura 15 - Funções de probabilidade acumulada de Gumbel.

5. Confiabilidade Estrutural

Conforme Fusco (1974), o problema geral da segurança estrutural envolve diferentes etapas, interligadas entre si. A interação entre elas pode ser ilustrada conforme o esquema a seguir:

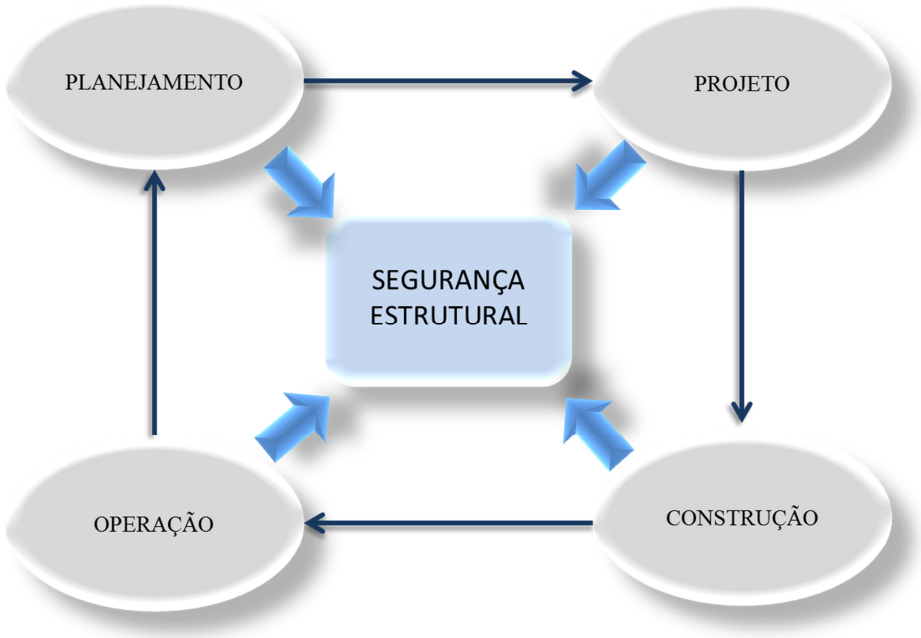

Figura 16 – Problema geral da segurança estrutural

Como planejamento, imagina-se o entendimento das especificidades de cada tipo de construção. Como projeto, imaginam-se as verificações cabíveis de projeto de acordo com as normas vigentes. Como construção, imagina-se a execução de forma adequada, tendo em vista assegurar aquilo que foi previsto em projeto. Finalmente, como operação, tem-se as destinações que serão dadas às construções, devendo-se garantir que elas estão sendo utilizadas para as finalidades previstas, caso contrário, todas as verificações de segurança careceriam de significado.

Para o caso específico deste trabalho, o foco do estudo está sobre as medidas de segurança a serem tomadas na fase de projeto de estruturas e fundações, daí o nome Confiabilidade Estrutural.

5.1 Incertezas

A presença das incertezas é o motivo pelo qual a segurança deve ser estudada, não só nas estruturas, mas também em outros setores. Onde existirem atividades humanas exercidas, regular e ou sistematicamente, medidas de segurança são concebidas como forma de prevenção contra o inesperado e o indesejado. Como exemplos, têm-se as medidas de segurança utilizadas pelos funcionários de uma fábrica, de um laboratório, de um canteiro de obras, de um parque de diversões. Já em uma menor escala, diversas medidas de segurança são tomadas nas ações individuais de cada um. Ao desfrutar de um banho de mar, por exemplo, admite-se uma lâmina d'água limite para a qual o risco de afogamento é considerado aceitável. Ela é estabelecida muitas vezes por critério de um salva-vidas presente no local, ou muitas vezes também por critérios estabelecidos pelo grupo social de cada um.

Uma das possíveis formas de se classificar as incertezas é separá-las entre intrínsecas e epistemológicas (Melchers, 1999). As incertezas intrínsecas representam a incapacidade humana de delimitar completamente os fenômenos naturais, portanto, elas representam o inesperado, o aleatório, aquilo que pode acontecer sem deixar possibilidade de escolha ou reação. As incertezas epistemológicas referem-se às imperfeições do instrumental utilizado para gerar as informações de interesse, admitindo diversas formas de aprimoramento.

Nas incertezas físicas incluem-se aquelas relativas às propriedades dos materiais utilizados; à aleatoriedade das cargas variáveis e às imprecisões geométricas.

A incerteza de previsão diz respeito à incapacidade do projetista garantir que as condições admitidas por ele ao fazer o dimensionamento da sua estrutura estarão de fato presentes na obra.

Incerteza fenomenológica atenta para o fato de que o conhecimento atual da sociedade não inclui a compreensão de todos os fenômenos que ocorrem na natureza, assim, principalmente ao deparar-se com um novo tipo de construção, sistema estrutural desafiador, materiais num antes utilizados, os engenheiros responsáveis devem ter em mente que as chances de estar-se desprezando um comportamento importante são maiores.

Uma ilustração da classificação das incertezas é dada na Figura 17.

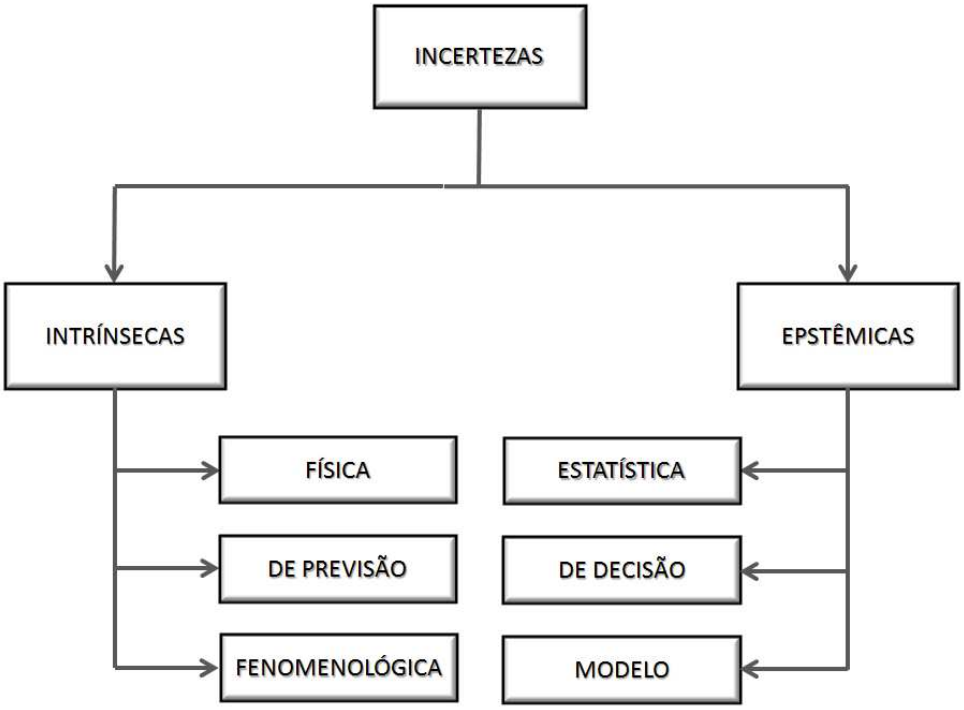

Figura 17 – Classificação das Incertezas.

A incerteza estatística origina-se ao estabelecer-se a equivalência entre os dados amostrais de uma variável com seu modelo matemático de probabilidades. Para tanto, deve-se lançar mão de testes de aderência entre um e outro, como o teste Qui-Quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov. Neste trabalho só serão utilizadas estatísticas assumidas como exatas para um dado parâmetro.

A incerteza de decisão é relativa às dificuldades de estabelecerem-se os limites representativos de um determinado fenômeno indesejado ou configuração indesejada. Como exemplo tem-se a frequência máxima de vibração de um pavimento de edifício que não gere desconforto aos usuários.

A incerteza de modelo atenta para o fato de que diferentes modelos físicos de análise geram diferentes resultados entre si e diferentes também daqueles obtidos experimentalmente. Ela pode ser considerada através da adição de uma variável que represente a distância entre o valor previsto pelo modelo e o valor observado.

Um item que não foi colocado na figura 17 é o erro humano. Trata-se de um elemento crucial na obtenção do sucesso ou insucesso de qualquer empreitada.

O erro humano é responsável por 85% dos acidentes ligados às estruturas. (Matousek et al., 1976, apud Schneider, 1997). Com isso, fica evidente que a segurança estrutural vai além da técnica, incluindo fatores que incidem diretamente no indivíduo envolvido na cadeia de produção, ou seja, são fatores psicológicos, sociais e educacionais.

Investigações preliminares de tarefas rotineiras utilizadas no projeto estrutural mostram que erros numéricos ocorrem numa taxa 2% a cada passo de um cálculo matemático. Dado que em média, um determinado cálculo envolve dois passos, o erro médio por cálculo é 4%. (Melchers, 1999).

O erro humano é também um tipo de incerteza que influencia a segurança, apesar disso, não se podem admitir erros grosseiros como um cenário possível dentro da verificação da segurança estrutural. Para combater tais erros, mais do que uma análise probabilística sofisticada, as medidas da tabela 5.1 seriam mais efetivas.

Medidas Facilitadoras	Medidas de Controle
Educação	Auto-verificação
Bom Ambiente de Trabalho	Verificação Externa
Redução da Complexidade	Sanções Legais
Seleção de Pessoal	

Tabela 5.1 – Estratégias de Controle do Erro Humano. (Melchers, 1999)

5.2 Risco

A definição de risco não é única. Ele pode ser definido como a probabilidade de que um evento aconteça, multiplicada pelos danos gerados com a sua ocorrência (Estes danos são expressos em unidades monetárias normalmente). Ele também pode ser interpretado como um tipo especial de probabilidade: àquelas relativas a eventos prejudiciais aos afetados pela sua ocorrência.

Existem os riscos enfrentados de modo voluntário, como a queda de um avião, a escalada de uma montanha, o uso de substancias que causam dependência química, o

desabamento de edificações (é discutível se as pessoas considerem a possibilidade de que suas casas possam ruir ao comprá-las. Caso seja consentido que elas não consideram essa possibilidade, tratar-se-á então de um risco involuntário), entre outros. Existem também os riscos enfrentados de modo involuntário, estão presentes, mas são impostos por terceiros ou pela natureza, sem deixar opção de escolha para o indivíduo tais como furacões, terremotos, desastres nucleares, acidentes industriais entre outros.

Pode-se afirmar que os esforços empreendidos na adoção de métodos para a verificação da segurança têm como principal objetivo permitir, através do reconhecimento das incertezas presentes, ao menos de forma aproximada, que o risco envolvido em uma dada atividade possa ser acessado e, portanto, contribuir para as decisões a serem tomadas.

Cabe ao engenheiro de estruturas e fundações, controlar os riscos envolvidos na sua obra. Dessa maneira, o desenvolvimento das análises probabilísticas aplicadas à engenharia e, mais especificamente, à engenharia de fundações, representa a evolução da capacidade de controle desses riscos, assim, abandonando aos poucos, mas nunca completamente, a sua dependência da experiência acumulada e do bom senso do profissional.

5.3 Fixação dos Níveis de Segurança ou Riscos Aceitáveis

Na escolha do nível de segurança a ser empregado em uma estrutura, ao corpo técnico responsável cabe imbuir-se de argumentos éticos e filosóficos para decidir o que é aceito pela sociedade e o que não é.

Questões como “O que pode acontecer de que maneira e com qual frequência?” e “O que deve ser permitido a acontecer, com que frequência, e onde?” devem ser respondidas (Schneider, 1997)

Um primeiro caminho a seguir em busca de indicações a respeito, é a observação dos riscos normalmente enfrentados em outras atividades. Um outro caminho seria baseado na minimização dos custos totais envolvidos.

A fase de projeto de uma estrutura é alheia aos erros que possam ser cometidos em outras etapas, de modo que o superdimensionamento de um elemento estrutural não impedirá

que o construtor não vá falhar na sua execução. Assim, fica claro que, na fixação dos níveis de segurança praticados pelo projetista, admite-se que o mercado da construção esteja empregando as boas práticas da engenharia (Borges; Castanheta, 1971).

Segundo o JCSS (Joint Committee on Structural Safety) a sociedade deve ser capaz de construir e manter, com a confiabilidade adequada, edificações que:

I. Permaneçam adequadas ao uso quando postas em serviço.
II. Permaneçam íntegras quando sujeitas a carregamentos repetitivos.
III. Apresentem robustez adequada; que não se danifiquem exageradamente quando sujeitas a eventos inesperados. Em outras palavras, elas devem ser seguras contra o colapso progressivo.

Aliando estas três exigências com a otimização dos custos necessários para a aplicação dos níveis de segurança adequados e para a reconstrução de algumas construções representativas do universo de todas as construções, o JCSS propõe para situações de ELU os índices de confiabilidade da Tabela 5.2 e para situações de ELS não reversíveis, os índices de confiabilidade da Tabela 5.3.

Custo relativo das medidas de segurança	Classes de consequecias de falha		
	1 - Pequena	2 - Moderada	3 - Grande
A - Grande	$\beta = 3{,}1$ ($p_f \approx 10^{-3}$)	$\beta = 3{,}3$ ($p_f \approx 5.10^{-4}$)	$\beta = 3{,}7$ ($p_f \approx 10^{-4}$)
B - Normal	$\beta = 3{,}7$ ($p_f \approx 10^{-4}$)	$\beta = 4{,}2$ ($p_f \approx 10^{-5}$)	$\beta = 4{,}4$ ($p_f \approx 5.10^{-6}$)
C - Pequeno	$\beta = 4{,}2$ ($p_f \approx 10^{-5}$)	$\beta = 4{,}4$ ($p_f \approx 5.10^{-6}$)	$\beta = 4{,}7$ ($p_f \approx 10^{-6}$)

Tabela 5.2 – Índices de confiabilidade alvo para ELU. (JCSS, 2001)

As classes de consequências de falha são definidas em função da razão r entre os custos totais (custo de construção mais custo de falha) e os custos de construção, da seguinte maneira:

Classe 1 - Pequena ($r \leq 2$):

Risco à vida e consequências econômicas, dado um cenário de falha, são pequenas ou desprezíveis. (Ex: estruturas agrícolas, silos, postes)

Classe 2 - Moderada ($2 < r \leq 5$):

Risco à vida, dado um cenário de falha, é médio ou as consequências econômicas são consideráveis. (Ex: edificações residenciais e comerciais, edificações industriais)

Classe 3 - Grande ($5 < r \leq 10$):

Risco à vida, dado um cenário de falha, é alto ou as consequências econômicas são importantes. (Ex:pontes, teatros, hospitais, edifícios altos)

Custo relativo das medidas de segurança	
A - Grande	$\beta = 1{,}3$ ($p_f \approx 10^{-1}$)
B - Normal	$\beta = 1{,}7$ ($p_f \approx 5.10^{-2}$)
C - Pequeno	$\beta = 2{,}3$ ($p_f \approx 10^{-2}$)

Tabela 5.3 – Índices de confiabilidade alvo para ELS. (JCSS, 2001)

Quanto aos chamados Custos relativos das medidas de segurança o JCSS define apenas a classe B como adequada para situações em que as variáveis de resistência e carregamento apresentem variabilidade média $(0{,}1 < V < 0{,}3)$, vida útil de projeto normal e taxa de obsolescência da ordem de 3%.

O JCSS observa que conjuntamente com a imposição de requisitos formais de confiabilidade para os membros estruturais, medidas de garantia e gestão da qualidade devem ser tomadas durante todas as etapas da vida de uma obra. Apesar disso, não apresenta medidas de qualidade a serem tomadas associadamente aos índices de confiabilidade alvo. Tal associação aparece de forma mais detalhada em outro exemplo de normatização que apresenta diretrizes para análises de confiabilidade: a norma europeia EN 1999:2002 *Basis of Structural Design* do Eurocode. Nela, definem-se três classes de confiabilidade (Tabela 5.4) que a ela podem ser associadas três classes de consequências (Tabela 5.5), três níveis de supervisão durante a fase de projeto (Tabela 5.6) e três níveis de inspeção durante a fase de construção (Tabela 5.7).

Reliability Class	Minimum values for β	
	1 year reference period	50 years reference period
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Tabela 5.4 – Classes de confiabilidade para ELU (EN 1990:2002).

Consequences Class	Description	Examples of buildings and civil engineering works
CC3	**High** consequence for loss of human life, *or* economic, social or environmental consequences **very great**	Grandstands, public buildings where consequences of failure are high (e.g. a concert hall)
CC2	**Medium** consequence for loss of human life, economic, social or environmental consequences **considerable**	Residential and office buildings, public buildings where consequences of failure are medium (e.g. an office building)
CC1	**Low** consequence for loss of human life, *and* economic, social or environmental consequences **small or negligible**	Agricultural buildings where people do not normally enter (e.g. storage buildings), greenhouses

Tabela 5.5 – Classes de consequências (EN 1990:2002).

Design Supervision Levels	Characteristics	Minimum recommended requirements for checking of calculations, drawings and specifications
DSL3 relating to RC3	Extended supervision	Third party checking : Checking performed by an organisation different from that which has prepared the design
DSL2 relating to RC2	Normal supervision	Checking by different persons than those originally responsible and in accordance with the procedure of the organisation.
DSL1 Relating to RC1	Normal supervision	Self-checking: Checking performed by the person who has prepared the design

Tabela 5.6 – Níveis de supervisão de projeto (EN 1990:2002).

Inspection Levels	Characteristics	Requirements
IL3 Relating to RC3	Extended inspection	Third party inspection
IL2 Relating to RC2	Normal inspection	Inspection in accordance with the procedures of the organisation
IL1 Relating to RC1	Normal inspection	Self inspection

Tabela 5.7 – Níveis de inspeção (EN 1990:2002).

5.4 Métodos de Verificação da Segurança – uma visão geral

Segundo afirma Hachich (1978), "a toda e qualquer estrutura, fixada a sua vida útil, está associada uma probabilidade de ruína não nula". Como consequência disso, alguns métodos foram criados para manter essa probabilidade sob controle mesmo sem conhecer seu valor exato.

A seguir, apresentam-se brevemente os principais métodos para a verificação da segurança com foco na fase de projeto.

5.4.1 Método das Tensões Admissíveis

Por tensões admissíveis entende-se: tensões *resistentes* admissíveis. Assim, impõem-se um coeficiente de segurança chamado de coeficiente de segurança interno, por atuar no lado da resistência e não das ações externas. A tensão de projeto, ou admissível, será então a tensão de ruptura (σ_u) conhecida do material, dividida por este coeficiente (γ_i), ou seja:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{\gamma_i} \tag{5.1}$$

Os valores atribuídos ao coeficiente de segurança interno são determinados através de um consenso do meio técnico, ou seja, provém da experiência acumulada dos profissionais da área, sem a existência de análises probabilistas. (Alonso et al, 1991 apud Santos, 2007)

O exemplo 1 a seguir e que será desenvolvido nas seções adiantes foi adaptado de Zagottis (1976).

Exemplo 1: Considere-se a viga da figura 18 constituída por um material elasto-plástico ideal ou elasto-frágil ideal, com os seguintes parâmetros:

- $f_y = 30\, kN/\text{cm}^2$ - resistência ao escoamento

- $200\ GPa$ - módulo de elasticidade

- $a = 40\, cm \quad b = 12\, cm$

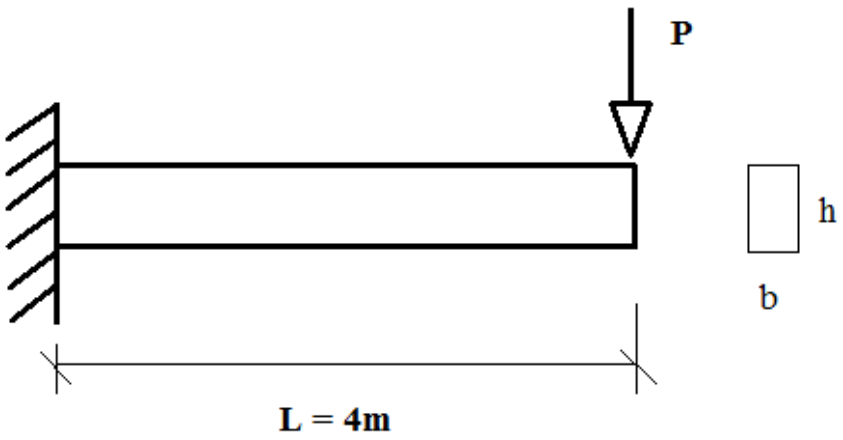

Figura 18 – Viga em balanço

Utilizando-se as equações da Resistência dos Materiais, procura-se saber qual seria a maior carga P que pode ser aplicada, respeitando um coeficiente de segurança interno igual a 2 ($\gamma_i = 2$).

Quando o material for elasto-frágil, a máxima tensão normal é representativa do estado de tensões. Como ela aparece na seção do engastamento, fica-se com:

$$\sigma_{máx} = \frac{6PL}{bh^2} \leq \sigma_{adm} = \frac{f_y}{\gamma_i} \tag{5.2}$$

De forma equivalente:

$$P \leq \frac{f_y}{\gamma_i} \frac{bh^2}{6L} \tag{5.3}$$

Logo, $$P_{máx} = \frac{30 \cdot 12 \cdot 40^2}{2 \cdot 6 \cdot 400} = 120\ kN$$

Quando o material for elasto-plástico, utiliza-se a tensão cisalhante máxima como representativa do estado de tensões. Pelo circulo de möhr, sabe-se que a máxima tensão cisalhante vale:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{5.4}$$

Quando a máxima tensão normal para o estado de tensões em um ponto vale σ_1, e a mínima $\sigma_3 = 0$, a máxima tensão cisalhante valerá $\sigma_1 / 2$. Para as fibras extremas tem-se:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{3PL}{bh^2} \leq \frac{\tau_y}{\gamma_i} \tag{5.5}$$

Como $\tau_y = \frac{f_y}{2}$, chega-se no mesmo resultado:

$$P_{máx} = \frac{f_y}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_i} \cdot \frac{bh^2}{3L} = 120\,kN$$

Como ressalta Zagottis (1976), o coeficiente de segurança interno, não é representativo de quão segura uma estrutura é, mas sim da variabilidade da resistência do material envolvido. Ressalta também que nem sempre o coeficiente de segurança interno deve ser utilizado, posto que antes de um elemento estrutural atingir sua tensão admissível, ele

pode apresentar comportamentos não lineares, como a flambagem; levando a um dimensionamento contra a segurança. Já em outros casos, como a plastificação de uma viga, que é um comportamento não linear da estrutura com ganho de resistência última, obtém-se um dimensionamento antieconômico. Em outras palavras, a existência de algum tipo de não linearidade da estrutura, conduz à perda da equivalência entre o coeficiente de segurança aplicado na resistência, o coeficiente de segurança interno, daquele que seria aplicado nas ações externas, o coeficiente de segurança externo.

5.4.2 Método dos Estados Limites

De modo a suprir as deficiências do método das tensões admissíveis em identificar e respeitar os diversos modos de ruína aos quais as estruturas podem estar sujeitas, o método dos estados limites passou a ser utilizado no meio técnico.

Agora, para a verificação da segurança de uma estrutura, em primeiro lugar devem-se definir os eventos que estabelecem os limites entre a configuração desejada e a indesejada. Limites que dizem respeito ao bem estar do usuário, estética e durabilidade, limitando deformações, fissurações e vibrações, são chamados ***estados limites de serviço***. Já os limites relativos à perda de capacidade resistente, seja por perda de equilíbrio, deformação plástica excessiva, perda de estabilidade, entre outros, são chamados ***estados limites últimos***, de acordo com a NBR 8681 (2003).

Na abordagem determinista da verificação da segurança pelo método dos estados limites, é utilizado o coeficiente global de segurança. Ele pode ser interno ou externo.

Existem também as abordagens semiprobabilistas e probabilistas do método dos estados limites.

A seguir, são fornecidos maiores detalhes relativos aos diferentes tratamentos dados à verificação da segurança utilizando-se o método dos estados limites.

5.4.2.1 Método Determinista

Nesse contexto, estão inseridos os métodos de equilíbrio limite, muito utilizados na engenharia geotécnica. Neles, são feitas comparações das forças e dos momentos atuantes,

com as forças e os momentos resistentes em uma superfície crítica de ruptura do solo (MASSAD, 2010).

Focando-se apenas, por simplicidade, no exemplo da viga desenvolvido no exemplo 1, um tratamento determinista para o estado limite de plastificação é dado no exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2: Para a mesma viga no exemplo 1, procura-se determinar qual é o coeficiente de segurança externo relativo ao estado limite de plastificação da seção do engastamento quando $P = 120\ kN$.

Quando o material for elasto-frágil, a ruptura se dá antes desse estado limite ser alcançado, portanto, verifica-se somente, na sequencia, a condição de material elasto-plástico.

Admitindo a capacidade de se ter uma seção onde todos os seus pontos alcançaram a tensão de escoamento, uma situação possível nas estruturas de aço, o momento resistente vale:

$$M_r = Z_p \cdot f_y \qquad \text{com} \qquad Z_p = \frac{bh^2}{4} \tag{5.6}$$

Logo,

$$M_r = \frac{12 \cdot 40^2 \cdot 30}{4 \cdot 100} = 1440\ kNm \Rightarrow P_{máx} = \frac{M_r}{L} = 360\ kN$$

Portanto,

$$\gamma_e\ P = P_{máx} \Rightarrow \gamma_e = 360 / 120 = 3$$

Conclui-se que para $P = 120kN$, o método das tensões admissíveis fornece uma relação entre esforços resistentes sobre esforços solicitantes igual a 2, enquanto o método dos estados limites, em sua abordagem determinística, fornece, para esta mesma relação, um valor igual a 3.

De acordo com aquilo que já foi exposto acima, este resultado mostra o quanto o método das tensões admissíveis pode levar a resultados pouco eficientes.

5.4.2.2 Método Semiprobabilístico

O Método Semiprobabilístico pode ser visto como uma evolução imediata aos métodos determinísticos apresentados acima. Ele traz como novidade os coeficientes parciais de segurança. Estes coeficientes parciais tem a vantagem de considerar a variabilidade das solicitações e das resistências separadamente, de modo que para um determinado estado limite, deve-se ter:

$$\phi_i R_i \geq \gamma_{gi} S_{gi} + \gamma_{qi} S_{qi} + \ldots \tag{5.7}$$

Por outro lado, o Método Semiprobabilístico, pode ser visto também como um aprimoramento do Método Probabilístico Condicionado nível 1 (item 5.4.2.3.1) de forma a implementar-se uma avaliação racional dos fatores que influenciam a segurança da estruturas (Hachich, 1978).

A expressão (5.7) foi originalmente desenvolvida nos anos 60 para as normas de concreto armado (Melchers, 1999)

Os coeficientes de segurança parciais, que ganharam força com a criação das normas em estados limites, resultaram do consenso entre construtores e calculistas, mas referenciando-os também, nos níveis de segurança alcançados com o método das tensões admissíveis. (MOTTA; MALITE et al.,2002 apud MORAIS, 2006)

Eles ainda têm uso limitado na engenharia geotécnica, apesar disso, para a verificação de estacas, por exemplo, enquanto elemento estrutural independente do solo, a NBR 6122/2010 propõe os coeficientes de segurança parciais para cada tipo de estaca, de acordo com a tabela 5.8 abaixo.

Tipo de estaca	f_{ck} [d] máximo de projeto MPa	γ_f	γ_c	γ_s	Comprimento útil mínimo (incluindo trecho de ligação com o bloco) e % de armadura mínima		Tensão média atuante abaixo da qual não é necessário armar (exceto ligação com o bloco) MPa
					Armadura %	Comprimento m	
Hélice/hélice de deslocamento [a]	20	1,4	1,8	1,15	0,5	4,0	6,0
Escavadas sem fluido	15	1,4	1,9	1,15	0,5	2,0	5,0
Escavadas com fluido	20	1,4	1,8	1,15	0,5	4,0	6,0
Strauss [b]	15	1,4	1,9	1,15	0,5	2,0	5,0
Franki [b]	20	1,4	1,8	1,15	0,5	Armadura integral	-
Tubulões não encamisados	20	1,4	1,8	1,15	0,5	3,0	5,0
Raiz [b,c]	20	1,4	1,6	1,15	0,5	Armadura integral	-
Microestacas [b,c]	20	1.4	1.8	1.15	0.5	Armadura integral	-
Estaca trado vazado segmentado	20	1,4	1,8	1,15	0,5	Armadura integral	-

Tabela 5.8 – Coeficientes de segurança parciais para verificação de ELU do elemento de fundação (NBR 6122/2010)

Coeficientes parciais de segurança tais como mostrados na tabela 5.8 devem ser calibrados de modo que possam, nas diversas estruturas encontradas, proporcionar a segurança e racionalidade máximas possíveis. Atualmente essa calibragem é feita com o auxílio dos métodos probabilísticos condicionados níveis 2 e 3.

A seguir busca-se dar uma ideia de como os coeficientes parciais de segurança podem ser calibrados conforme Melchers (1999).

Dado um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{x}$ com distribuições de probabilidades quaisquer, podem-se aproximar tais distribuições por distribuições normais, como estabelecido em (5.60) e (5.61). Por hora basta admitir que:

$$x_i^* = F_{X_i}^{-1}\left[\Phi\left(y_i^*\right)\right] \tag{5.8}$$

Com a relação (5.8) acima se garante que a probabilidade acumulada do ponto de projeto x_i^* na sua distribuição de origem seja igual à probabilidade acumulada assumindo-se uma distribuição normal equivalente. Sendo $\mathbf{y}$ o vetor já com as variáveis no espaço normal padrão, tem-se de (5.38) que:

$$x_i^* = \mu_{x_i} + y_i^* \sigma_{x_i}$$

De (5.43) sabe-se que:

$$y_i^* = \beta \alpha_i$$

Portanto,

$$x_i^* = \mu_{x_i}(1 + \alpha_i \beta \delta_{x_i}) \tag{5.9}$$

Se x_i estiver representando variáveis do lado das resistências, de (5.17) e (5.9) obtém-se:

$$x_i^* = \frac{1 + \alpha_i \beta \delta_{x_i}}{1 - k_{x_i} \delta_{x_i}} x_{ik} = \frac{x_{ik}}{\gamma_{mi}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{mi} = \frac{1 - k_{x_i} \delta_{x_i}}{1 + \alpha_i \beta \delta_{x_i}} \tag{5.10}$$

Se x_i estiver representando variáveis do lado das solicitações, de (5.18) e (5.9) obtém-se:

$$x_i^* = \frac{1 + \alpha_i \beta \delta_{x_i}}{1 + k_{x_i} \delta_{x_i}} x_{ik} = \gamma_{fi} x_{ki} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{fi} = \frac{1 + \alpha_i \beta \delta_{x_i}}{1 + k_{x_i} \delta_{x_i}} \tag{5.11}$$

Com γ_{mi} e γ_{fi} como coeficientes parciais de segurança.

5.4.2.3 Métodos Probabilistas

Aqui as grandezas participantes do modelo estrutural são tratadas sempre como variáveis aleatórias.

No exemplo 3 a seguir, mostra-se uma possível abordagem probabilista.

Exemplo 3: Considerando ainda a estrutura representada pela figura 18, mas com material elasto-frágil de resistência respeitando uma distribuição log-normal com média $\overline{f}_y = 30\,kN/cm^2$ e coeficientes de variação δ de 15% e 25%, determina-se a relação entre a probabilidade de ruína e valores de P.

Primeiramente, calculam-se os parâmetros λ e ξ da distribuição log-normal, para $\delta = 0{,}15$:

$$\xi = \sqrt{\ln(1+\delta^2)} \qquad \lambda = \ln \overline{f}_y - \frac{\delta^2}{2} \tag{5.12}$$

Em seguida, fixa-se um valor para a probabilidade de ruína p_f^* e utilizam-se os valores correspondes da distribuição normal-padrão da seguinte forma:

$$p_f^* = \Phi\left(f_y \leq \frac{\ln f_y^* - \lambda}{\xi} \right) \tag{5.13}$$

De (5.13) obtém-se f_y^*. A esse valor, corresponde um valor P*:

$$P^* = \frac{f_y^* bh^2}{6L} \tag{5.14}$$

Assim, ao projetar-se a estrutura para um carregamento determinístico igual a P*, a probabilidade de ruína será p_f^*.

Um coeficiente de segurança externo pode também ser associado, da seguinte maneira:

$$\gamma_e = \frac{\overline{f_y}}{f_y^*} = \frac{\overline{P}}{P^*} \tag{5.15}$$

Variando-se p_f^* de 10^{-10} a 0,9, chega-se nos resultados da tabela 5.9.

p_f*	f_y* (kN/cm^2)	P* (kN)	γ_e
1,0E-10	11,49	91,89	2,61
1,0E-08	12,84	102,76	2,34
1,0E-06	14,60	116,80	2,05
1,0E-04	17,04	136,29	1,76
1,0E-02	20,97	167,75	1,43
0,1	24,51	196,05	1,22
0,5	29,67	237,34	1,01
0,9	35,92	287,34	0,84

Tabela 5.9 – Resultados exemplo 3 (δ=0,15).

Repetindo os cálculos para δ=0,25, chega-se nos resultados da tabela 5.10.

p_f*	f_y* (kN/cm^2)	P* (kN)	γ_e
1,0E-10	6,08	48,62	4,94
1,0E-08	7,31	58,47	4,10
1,0E-06	9,03	72,24	3,32
1,0E-04	11,65	93,19	2,58
1,0E-02	16,41	131,31	1,83
0,1	21,23	169,83	1,41
0,5	29,10	232,83	1,03
0,9	39,90	319,22	0,75

Tabela 5.10 – Resultados exemplo 3 (δ=0,25).

Com este exemplo, introduz-se o cálculo da probabilidade de ruína nas estruturas e demonstra-se que variáveis com maior coeficiente de variação, levam a maiores coeficientes de segurança.

5.4.2.3.1 Método Probabilístico Condicionado

Neste método, admite-se que o calculo da verificação da segurança é dependente do modelo estrutural. O exemplo 3 acima é um exemplo válido. Nele verificou-se a probabilidade de ruína apenas da seção do engastamento, embora não exista nada que impeça outra seção qualquer de falhar antes da seção mais solicitada. Apesar disso, o Método Probabilístico Condicionado apresenta bons resultados porque, normalmente, a probabilidade de ruína nas seções menos solicitadas não é importante o suficiente para causar grandes alterações ao serem consideradas.

Fusco (1977) define três níveis de aplicação do Método Probabilístico Condicionado da seguinte maneira:

Nível I

No nível 1 de aplicação, adotam-se valores extremos de cada variável, correspondentes a probabilidades previamente aceitas, levando à seguinte condição de segurança:

$$S(s_{1extr}, s_{1extr}, \ldots, s_{Nextr}) < R(r_{1extr}, r_{2extr}, \ldots, r_{Nextr}) \tag{5.16}$$

Com S representando a função que relaciona os parâmetros que influenciam as solicitações com um determinado esforço solicitante e R representando a função que relaciona os parâmetros que influenciam as resistências com a resistência a um determinado esforço resistente.

Os valores extremos das variáveis são na verdade empregados na forma de valores característicos acrescidos de coeficientes de majoração ou minoração. Os valores característicos são definidos como relativos a um determinado quantil de sua distribuição de probabilidade.

No caso de distribuições normais, para as resistências, tem-se (Figura 19):

$$r_{i,k} = \mu_{r_i}(1 - k_{r_i}\delta_{r_i}) \tag{5.17}$$

Sendo o coeficiente de variação igual a:

$$\delta_{r_i} = \frac{\sigma_{r_i}}{\mu_{r_i}}$$

E para as solicitações, tem-se (Figura 20):

$$s_{i,k} = \mu_{s_i}(1 + k_{s_i}\delta_{s_i}) \tag{5.18}$$

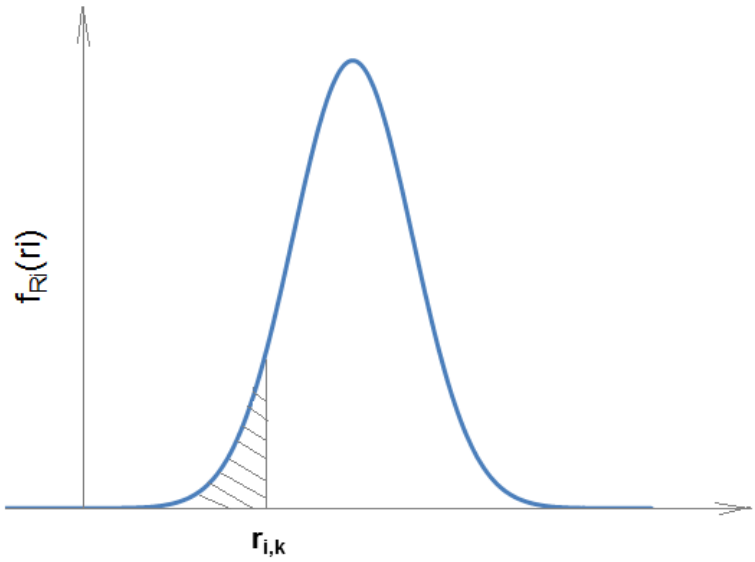

Figura 19 - Valores Característicos de r_i

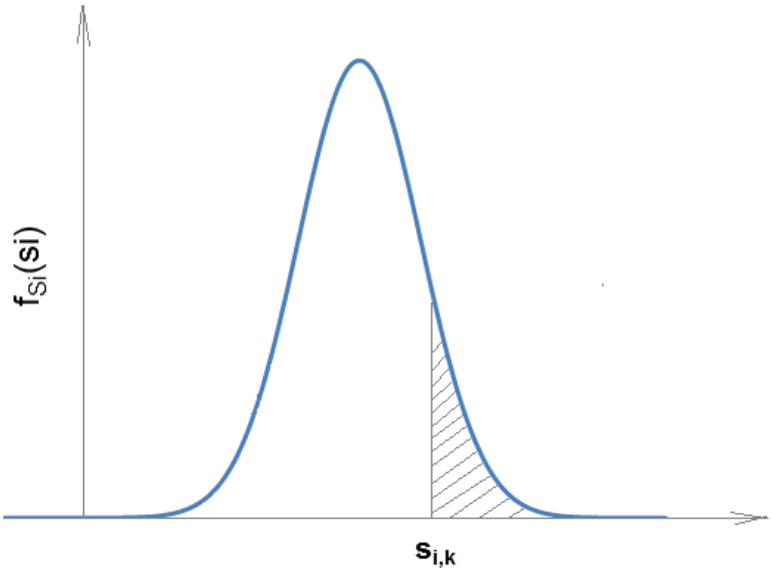

Figura 20 – Valores Característicos de s_i

Sendo o coeficiente de variação igual a:

$$\delta_{s_i} = \frac{\sigma_{s_i}}{\mu_{s_i}}$$

k_{r_i} e k_{s_i} são os valores das normais padrão correspondentes às probabilidades fixadas.

Juntamente com os coeficientes de majoração e minoração, a expressão pode ser escrita como:

$$S(\gamma_{s_1} s_{1k}, \gamma_{s_2} s_{2k}, ..., \gamma_{s_N} s_{Nk}) < R\left(\frac{r_{1k}}{\gamma_{r_1}}, \frac{r_{2k}}{\gamma_{r_2}}, ..., \frac{r_{Nk}}{\gamma_{r_N}}\right) \tag{5.19}$$

Nível II

O nível 2 emprega o processo dos extremos funcionais, onde ao invés de estabelecerem-se valores extremos para cada variável interveniente em um dado estado limite, estabelecem-se valores extremos para S e para R, também correspondentes a probabilidades previamente aceitas. Define-se S e R tais como feito acima para o nível 1. Fica-se, portanto, com a seguinte condição de verificação da segurança:

$$S_{extr}(s_1, s_2, ..., s_N) < R_{extr}(r_1, r_2, ..., r_N) \tag{5.20}$$

Em uma concepção mais atual, é no nível 2 de aplicação do MPC que as técnicas de confiabilidade estrutural começam a entrar em cena. São os chamados métodos de segundo momento. Para tanto, trata-se S e R como uma única função da seguinte maneira:

$$M = R - S \tag{5.21}$$

Passa-se então a ser necessário definir somente o valor extremo de uma função. Quando S e R obedecem a distribuições normais de probabilidade, pode-se relacionar a probabilidade de que M seja menor que um determinado valor extremo com os seus primeiro e segundo momentos centrais, da seguinte maneira:

$$p_f = \Phi(-\beta) \tag{5.22}$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{5.23}$$

A equação (5.23) define o chamado índice de confiabilidade β como estabelecido por Cornell (1969).

Quando S e R obedecem a distribuições log-normais, tem-se:

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}} \tag{5.24}$$

A equação (5.24) define o índice de confiabilidade β como estabelecido por Rosenbleuth e Esteva (1972).

Ainda, quando M define uma função não mais linear de S e R, mas uma função não linear qualquer, tal qual se possa escrever:

$$M = g(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.25}$$

Pode-se aplicar uma expansão em série de Taylor dos dois primeiros momentos da função M e absorver somente os termos de primeira ordem, ficando-se com:

$$\mu_M = g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, ..., \mu_{x_n}) \tag{5.26}$$

$$\sigma_M^2 = \sum_i^n \sum_j^n \frac{\delta g}{\delta x_i} \frac{\delta g}{\delta x_j} Cov\left[x_i, x_j\right] \tag{5.27}$$

Ou, se as variáveis x_i e x_j forem independentes:

$$\sigma_M^2 = \sum_i^n \sigma_{x_i}^2 \left(\frac{\delta g}{\delta x_i}\right)^2 \tag{5.28}$$

Aplicando-se (5.26) e (5.28) na equação (5.23) obtém-se o índice de confiabilidade relativo ao método de nome mean value first-order second-moment (MVFOSM):

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, ..., \mu_{x_n})}{\left(\sum_i^n \sum_j^n \frac{\delta g}{\delta x_i} \frac{\delta g}{\delta x_j} Cov\left[x_i, x_j \right] \right)^{1/2}} \tag{5.29}$$

Observa-se que, as equações (5.23) e (5.29) envolvem apenas distribuições normais para as variáveis aleatórias e a equação (5.24) envolve apenas distribuições log-normais.

Juntamente com o método FOSM (first-order second-moment), abordado na seção 5.5.1, tem-se as possíveis abordagens da confiabilidade estrutural no âmbito da verificação da segurança do nível 2 do MPC.

Nível III

Segundo Fusco (1977) o nível três corresponde ao processo exato e para o qual a condição de verificação da segurança é dada por:

$$\left[R(r_1, r_2, ..., r_N) - S(s_1, s_2, ..., s_N) \right]_{extr} > 0 \tag{5.30}$$

Também em uma concepção mais atual, diferencia-se o nível 3 do nível 2 apenas com relação à precisão dos métodos de confiabilidade estrutural empregados. Ou seja, devem ser utilizados procedimentos que permitam uma análise probabilística mais completa que aquela proporcionada pelos métodos de segundo momento, mas ainda não tão completa como no Método Probabilístico Puro.

O passo que deve ser dado no nível 3 com relação ao nível 2 é a utilização de variáveis aleatórias dotadas de distribuições de probabilidade a que mais se assemelham e não somente distribuições normais ou log-normais. Para tanto, empregam-se métodos de integração numérica da função conjunta de densidade de probabilidades no domínio de falha, de acordo com a equação abaixo.

$$P_f = P\left[\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in D_f\right] = \int_{D_f} ... \int f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} \tag{5.31}$$

Emprega-se também o Método de Monte Carlo, abordado na seção 5.5.3 e o Método FORM (First order Reliability Method), abordado em 5.5.2. Sendo este último, juntamente com o método SORM (Second order Reliability Method), o qual não será abordado nesta dissertação, chamados de métodos de transformação por trabalharem com variáveis "transformadas" de uma distribuição conjunta de probabilidades qualquer para uma distribuição conjunta normal padrão.

5.4.2.3.2 Método Probabilístico Puro

Com o Método Probabilístico Puro, almeja-se poder considerar na verificação da segurança, todos os possíveis cenários que possam caracterizar um determinado estado limite. Além disso, para ser um método de verificação da segurança e de dimensionamento completo, a ele devem-se somar critérios de maximização da sua utilidade, dos quais se destaca a minimização de custos.

Exemplo 4: Separando-se a viga da Figura 18 em quatro segmentos de 1 metro; Atribuindo-se a cada um dos parâmetros uma distribuição de probabilidades do tipo log-normal com parâmetros definidos conforme a Tabela 5.11 abaixo e utilizando-se a expressão (5.32) para o custo esperado como critério de decisão, relaciona-se o valor da altura média a ser usada no dimensionamento com os respectivos custos esperados e probabilidade de ruína.

variável	média	variabilidade
fy (kN/cm^2)	30	0,15
P (kN)	120	0,2
L (cm)	400	0
b (cm)	12	0,1
h (cm)	hm	0,1

Tabela 5.11 – Parâmetros das variáveis log-normais

Custo esperado:

$$E\left[Custo\right] = C\left(p_f\right)\cdot\left(1-p_f\right)+\left(C\left(p_f\right)+Danos\right)\cdot p_f \tag{5.32}$$

Para os danos atribui-se um prejuízo de R$ 100.000. Para a construção e reconstrução atribuem-se valores unitários iguais de R$ 1.000 por metro cúbico de viga.

A probabilidade de ruína não condicionada passa a ser:

$$p_f = 1-(1-p_{f_A})\cdot(1-p_{f_B})\cdot(1-p_{f_C})\cdot(1-p_{f_D}) \tag{5.33}$$

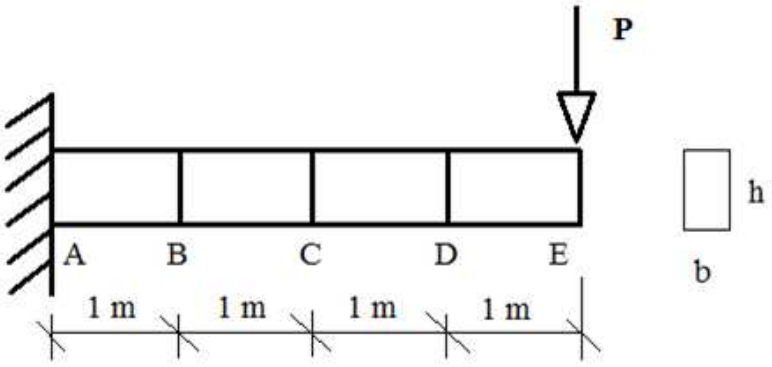

Figura 21 – Viga em balanço segmentada

Para cada seção, encontra-se uma função de distribuição conjunta de probabilidades que fornecerá a probabilidade de ruína da seção. Isso é feito da seguinte maneira:

Seja γ_A a relação entre a resistência e a solicitação na seção A, tem-se:

$$\gamma_A = \frac{R_A}{S_A} = \frac{f_y b_A h_A^{\ 2}}{6Pl_A} \tag{5.34}$$

Aplicando-se o logaritmo em ambos os lados da equação:

$$\ln\gamma_A = \ln\frac{f_y b_A h_A^{\ 2}}{6Pl_A}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln \gamma_A = \ln f_y b_A h_A^{\ 2} - \ln 6 \mathrm{Pl}_A$$

$$\Rightarrow \qquad \ln \gamma_A = \ln f_{yA} + \ln b_A + 2 \ln h_A - (\ln 6 + \ln \mathrm{P} + \ln \mathrm{l}_A)$$

Como as variáveis tem distribuição log-normal, seus respectivos logaritmos naturais apresentam distribuição normal, o que equivale a dizer que $\ln \gamma_A$ também tem distribuição normal, em acordo com a teoria de probabilidades que estabelece que qualquer combinação linear de variáveis aleatórias com distribuição normal, também obedece a uma distribuição normal.

Os parâmetros dessas distribuições são dados por (4.26) e (4.27).

Os parâmetros de $\mathrm{G} = \ln \gamma_A$, são expressos por:

$$\lambda_G = \lambda_{f_{yA}} + \lambda_{b_A} + 2\lambda_{h_A} - (\lambda_P + \ln 6 + \ln l_A) \tag{5.35}$$

$$\xi_G = \sqrt{\xi_{f_{yA}}^2 + \xi_{b_A}^2 + 4\xi_{h_A}^2 + \xi_P^2} \tag{5.36}$$

Com os parâmetros da distribuição conjunta em mãos, calcula-se a probabilidade de falha utilizando-se a distribuição normal padrão.

$$p_{f_A} = \Phi\left(-\frac{\lambda_G}{\xi_G}\right) \tag{5.37}$$

Para as outras seções realiza-se o mesmo procedimento, de modo a poder-se achar a probabilidade de ruína da estrutura através da expressão (5.33).

Repete-se o mesmo procedimento para alturas variando de 40 a 80 centímetros. A relação entre as alturas da viga e o custo esperado é ilustrada pelo gráfico abaixo.

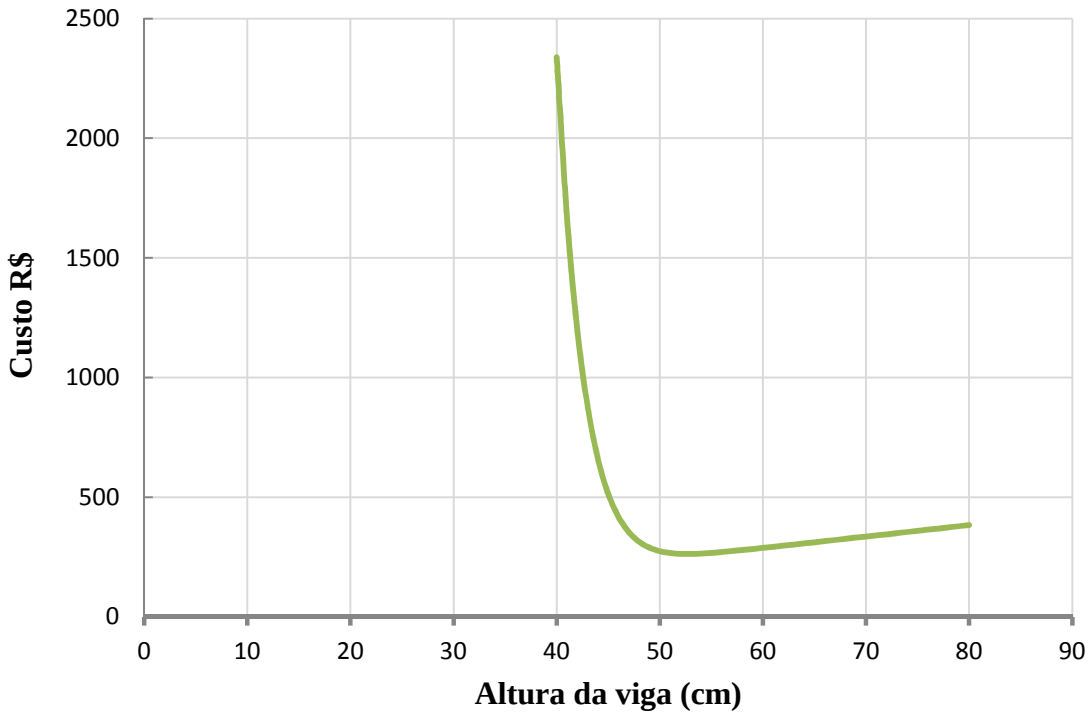

Figura 22 – Custo Esperado x Altura da viga

Para uma altura igual a 53 centímetros, o custo esperado encontra-se no seu ponto de mínimo, portanto, essa é a altura ótima. Deve-se verificar se a este dimensionamento ótimo, segundo os critérios adotados, corresponde também uma segurança adequada.

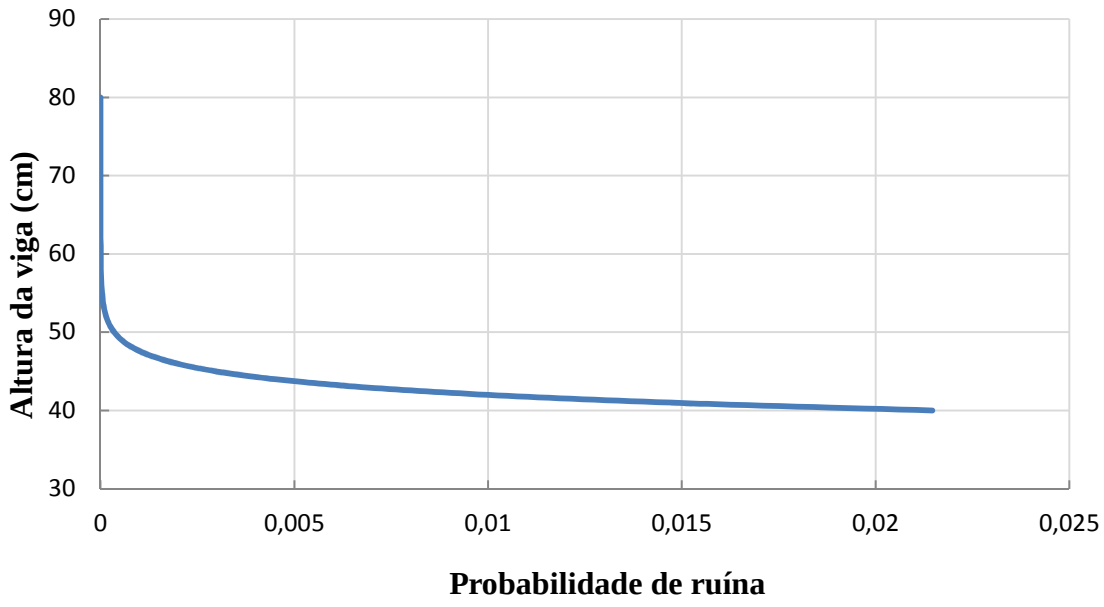

Figura 23 – Probabilidade de ruína x Altura.

5.5 Métodos de Confiabilidade utilizados

5.5.1 Método FOSM (First-Order Second-Moment)

Este método foi o primeiro a fornecer um índice de confiabilidade β a apresentar a chamada invariabilidade em relação à formulação da equação de estado limite. Ele também traz como novidade a busca pelo chamado ponto de projeto.

Trabalha-se ainda somente com distribuições normais de probabilidade para as variáveis intervenientes, mas agora no espaço normal padrão Z através da relação definida em (4.12), que no campo da confiabilidade estrutural recebe o nome de transformação de Hasofer e Lind.

$$y_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \tag{5.38}$$

A distribuição conjunta de probabilidades das variáveis do problema passa a ser então do tipo normal padrão multivariada, que é centrada na origem dos eixos coordenados e que é simétrica em relação a eles (simetria radial). Estas duas últimas propriedades indicam que a distância da origem dos eixos à superfície definida pela equação de estado limite é uma boa representante do índice de confiabilidade. Tal medida é útil para uma aproximação de primeira ordem do cálculo da probabilidade de falha. Esta aproximação de primeira ordem do cálculo da probabilidade de falha equivale à integração de menos infinito a mais infinito em todos os eixos menos no eixo que define a distância da origem à superfície de estado limite, e neste eixo, fazer a integração para valores maiores do que essa distância.

A interpretação geométrica do índice de confiabilidade, como exposta acima, permite afirmar que:

$$\beta_{mín} = \left(\mathbf{y}^* \cdot \mathbf{y}^*\right)^{1/2} \tag{5.39}$$

$$g\left(\mathbf{y}^*\right) = 0 \tag{5.40}$$

Sendo y^* o ponto de projeto. Este ponto tem a importante propriedade de ser o ponto de maior probabilidade pertencente a $g(\mathbf{y})=0$. Ademais, o vetor unitário normal à superfície $g(\mathbf{y})=0$ é dado por:

$$n(\mathbf{y})=\frac{\nabla g(\mathbf{y})}{\left|\nabla g(\mathbf{y})\right|} \tag{5.41}$$

As componentes desse vetor também representam os fatores de sensibilidade α_i, que indicam como o próprio nome diz, o quanto β é sensível a cada variável. O vetor α é definido como direcionado para o domínio de falha, portanto no sentido oposto a n, logo:

$$\alpha(\mathbf{y})=-n(\mathbf{y}) \tag{5.42}$$

Assim, pode-se obter uma relação direta entre o ponto de projeto e o índice de confiabilidade da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^*=\beta_{mín}\boldsymbol{\alpha}^* \tag{5.43}$$

Não se pode esquecer que a distribuição normal padrão multivariada só terá simetria radial se as variáveis intervenientes não forem correlacionadas. Caso sejam, deve-se aplicar uma transformação, que além de levar ao espaço normal-padrão, gere variáveis não correlacionadas.

Seja X o espaço normal de variáveis correlacionadas e Y o espaço normal-padrão de variáveis não correlacionadas, deve-se utilizar uma matriz de transformação A, tal que:

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}^T\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right) \tag{5.44}$$

E de modo a obter-se uma matriz de correlação C_Y diagonal unitária:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_Y &= Cov(\mathbf{y},\mathbf{y}^T) \\ &= \begin{pmatrix} Var(y_1,y_1) & \cdots & Cov(y_1,y_n) \\ \vdots & \ddots & Cov(y_{n-1},y_n) \\ Cov(y_n,y_1) & Cov(y_n,y_{n-1}) & Var(y_n,y_n) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}\end{aligned} \tag{5.45}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_Y &= Cov\left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_x),\left[\mathbf{A}^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_x)\right]^T\right) \\ &= Cov\left(\mathbf{A}^T\mathbf{x}-\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}_x,\mathbf{x}^T\mathbf{A}-\boldsymbol{\mu}_x^T\mathbf{A}\right) \\ &= Cov\left(\mathbf{A}^T\mathbf{x},\mathbf{x}^T\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^T Cov\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^T\right)\mathbf{A}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{C}_Y = \mathbf{A}^T\mathbf{C}_X\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{5.46}$$

Para que não altere o módulo do vetor x, a matriz A deve ser ortogonal, ou seja:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \tag{5.47}$$

O procedimento necessário para encontrar-se a matriz A está descrito no apêndice B.

Feita as devidas transformações necessárias para se trabalhar no espaço Y aí então passam a serem válidas as propriedades de interesse do índice de confiabilidade.

Quando a equação de estado limite é linear, as equações (5.41) e (5.42) passam a ser constantes e o cálculo de β é feito diretamente, aplicando (5.42) em (5.43) sujeita a (5.40) ou então se calculando μ_g e σ_g aplicados ao índice de Cornell. Por outro lado, quando a equação de estado limite não é linear, enfrenta-se uma nova dificuldade que é encontrar o ponto de projeto. De forma geral, este problema pode ser colocado como um problema de otimização, da seguinte maneira:

$$\nabla \beta(\mathbf{y}) = \lambda \nabla g(\mathbf{y})$$

Ou
$$-\nabla\left(\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}\right)^{1/2} = |\lambda| \nabla g(\mathbf{y}) \tag{5.48}$$

Esta equação representa a minimização de β sujeita a $g(\mathbf{y}) = 0$, com a utilização do multiplicador de Lagrange λ. Desenvolvendo-a, obtém-se uma solução analítica do problema, como exposto a seguir:

$$-y_1(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{-1/2} = |\lambda| \frac{\partial g}{\partial y_1}$$
$$\vdots$$
$$-y_n(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{-1/2} = |\lambda| \frac{\partial g}{\partial y_n}$$

De forma compacta, tem-se:

$$-\frac{\mathbf{y}}{\beta(\mathbf{y})} = |\lambda| \nabla g(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{y} = -|\lambda| \nabla g(\mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}) \tag{5.49}$$

Substituindo (5.49) em (5.39) e considerando $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$, tem-se:

$$\beta_{mín} = \left[|\lambda|^2 \beta_{mín}^2 \nabla g\left(\mathbf{y}^*\right) \cdot \nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)\right]^{1/2} \Rightarrow \lambda = \left[\nabla g\left(\mathbf{y}^*\right) \cdot \nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)\right]^{-1/2}$$

Retornando a (5.49) o valor encontrado de λ, chega-se finalmente em:

$$\beta_{mín} = -\frac{\mathbf{y}^*}{\left[\nabla g\left(\mathbf{y}^*\right) \cdot \nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)\right]^{-1/2} \nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)} = -\frac{\nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)}{\left|\nabla g\left(\mathbf{y}^*\right)\right|} \cdot \mathbf{y}^* \tag{5.50}$$

Como esperado, (5.50) é equivalente a (5.43), ou seja:

$$\beta_{mín} = \boldsymbol{\alpha}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}^{*} \tag{5.51}$$

Pode-se mostrar que linearizando a equação de estado limite no ponto de projeto e aplicando o índice de Cornell, chega-se ao mesmo resultado. Estas duas soluções são pouco práticas para situações que envolvam muitas variáveis, assim, utilizam-se métodos numéricos para a resolução do problema.

O algoritmo de Hassofer e Lind é uma expansão de primeira ordem em série de Taylor no ponto de projeto da equação de estado limite, ou seja:

$$g(\mathbf{y}) \approx g(\mathbf{y}^{*}) + \nabla g(\mathbf{y}^{*}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}^{*}) = 0 \tag{5.52}$$

Desenvolvendo-se esta expressão, aplicando (5.43) e rearranjando, chega-se em:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}^{*} \left[\beta_{mín} - \frac{g(\mathbf{y}^{*})}{\left|\nabla g(\mathbf{y}^{*})\right|} \right] \tag{5.53}$$

Beck (2014) sugere que (5.25) seja adaptada de modo a facilitar sua programação, da seguinte maneira:

$$\mathbf{y} = \frac{\nabla g(\mathbf{y}^{*}) \cdot \mathbf{y}^{*} - g(\mathbf{y}^{*})}{\left|\nabla g(\mathbf{y}^{*})\right|} \nabla g(\mathbf{y}^{*}) \tag{5.54}$$

No final do processo, deve-se obter $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{*}$. Esta fórmula de recorrência pode ser escrita no espaço X, da seguinte maneira (Madsen et. al, 1986):

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{x}^{*}) \frac{(\mathbf{x}^{*} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \nabla g(\mathbf{x}^{*}) - g(\mathbf{x}^{*})}{\nabla g(\mathbf{x}^{*})^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{x}^{*})} \tag{5.55}$$

Esse algoritmo, apesar de sua simplicidade e praticidade não oferece garantia de convergência.

Na aplicação do método FOSM em um problema envolvendo, de forma simplificada, dois grupos de variáveis, as de resistência e variáveis de solicitação, pode-se ilustrar o método como mostra a Figura 24 abaixo.

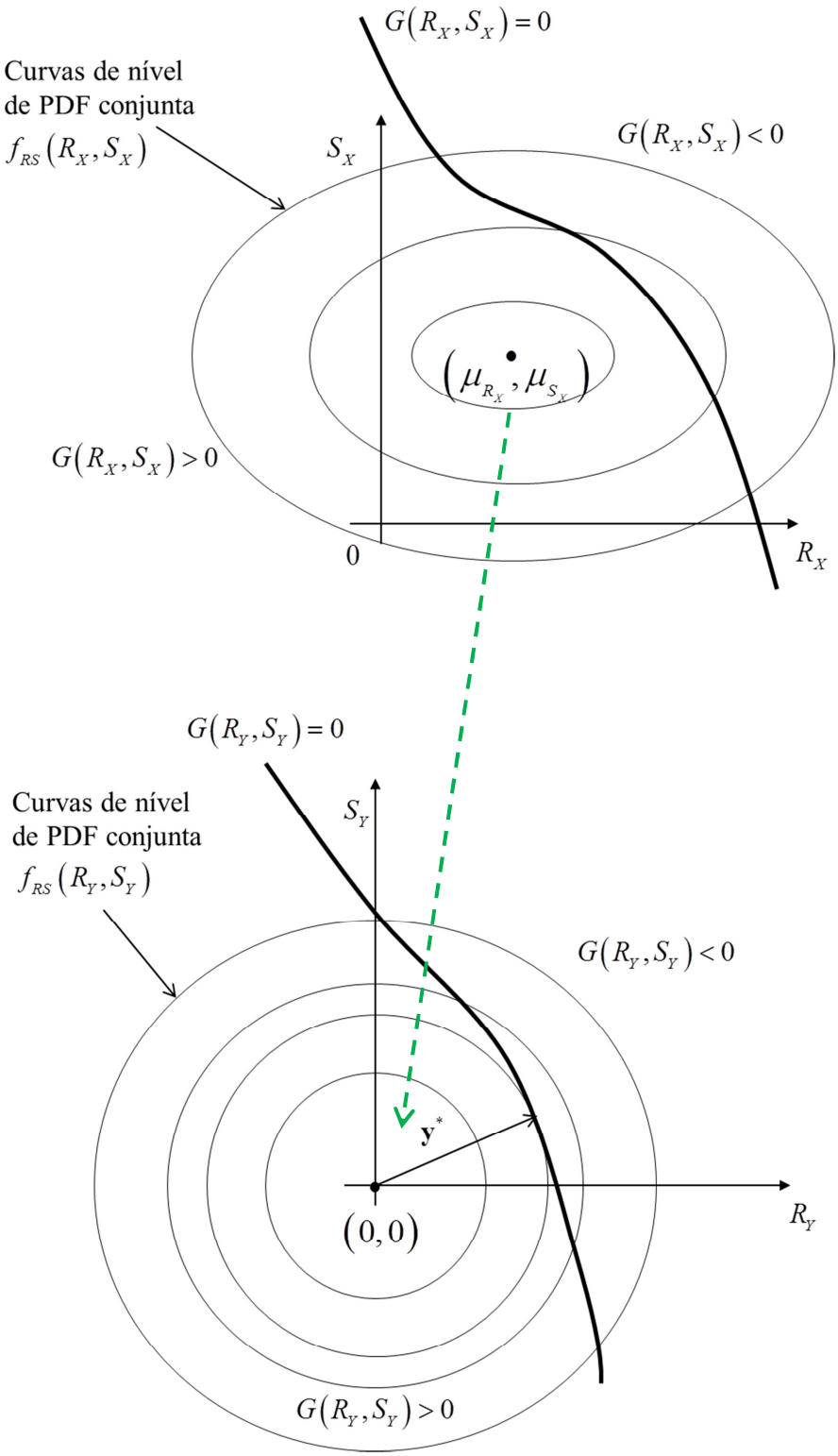

Figura 24 – Método FOSM. Passagem do espaço X para o espaço Y.

5.5.2 Método FORM (First-Order Riliability Method)

O método FORM se utiliza de todos os conceitos desenvolvidos no método FOSM, com a diferença de não estar mais restrito à apenas distribuições normais de probabilidade para as variáveis intervenientes do problema. São admitidas, portanto, distribuições estatísticas quaisquer para suas distribuições de probabilidades.

Como, no entanto, o método FOSM é a base do método FORM, faz-se necessário uma nova transformação de variáveis que as leve também para o espaço normal padrão não correlacionado. Quando a distribuição conjunta de probabilidades no espaço original X das variáveis é conhecida, o que é difícil, mas possível, pode-se aplicar transformações diretas para o espaço das variáveis normais-padrão não correlacionado Y. Este processo é conhecido como transformação de Rosenblatt. Ele consiste na preservação do conteúdo de probabilidade entre as distribuições de probabilidade nos seus respectivos espaços de variáveis, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_X\left(x_1\right) &= \Phi\left(y_1\right) \\ F_X\left(x_2\right) &= \Phi\left(y_2 \mid y_1\right) \\ &\vdots \\ F_X\left(x_n\right) &= \Phi\left(y_n \mid y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{5.56}$$

Invertendo-se (5.56) obtém-se, como dito acima, uma transformação direta $X \rightarrow Y$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi^{-1}\left[F_1\left(x_1\right)\right] \\ y_2 &= \Phi^{-1}\left[F_2\left(x_2 \mid x_1\right)\right] \\ &\vdots \\ y_n &= \Phi^{-1}\left[F_n\left(x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right] \end{aligned}$$

No caso das variáveis x_i serem independentes, as probabilidades condicionais acima desaparecem e a transformação passa a ser apenas:

$$\mathbf{y} = \Phi^{-1}\left[F_X\left(\mathbf{x}\right)\right] \tag{5.57}$$

Atenta-se para o fato de que antes da aplicação de um algoritmo de busca pelo ponto de projeto no espaço Y, como o de Hasofer e Lind exposto acima, a equação de estado limite e seu vetor gradiente devem ser adequadas a este espaço, da seguinte maneira:

$$g\left(\mathbf{x}\right) = g\left(\mathbf{y}\right)\left|\mathbf{J}\right| \tag{5.58}$$

$$\nabla g\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{J}\nabla g\left(\mathbf{y}\right) \tag{5.59}$$

Sendo $\mathbf{J}$ a matriz jacobiana com elementos $j_{ij} = \partial y_i / \partial x_j$.

Como, normalmente, não se tem em mãos a distribuição conjunta de probabilidades, a transformação mais apropriada para se obter um vetor de variáveis não correlacionadas no espaço normal padrão é a chamada transformação de Nataf. Ela consiste de três etapas. A primeira é a obtenção de distribuições normais equivalentes a cada uma das distribuições marginais de probabilidade, fazendo, portanto, a passagem do espaço das variáveis correlacionadas com distribuições quaisquer U, para o espaço das variáveis correlacionadas com distribuição normal X. Na verdade o que se equivalem, de forma aproximada apenas, são as chamadas "caudas" das distribuições de modo que no ponto de projeto as PDFs e as CDFs se igualem, ou seja:

$$F_{U_i}\left(u_i^*\right) = f_{X_i}\left(x_i^*\right) \tag{5.60}$$

$$f_{U_i}\left(u_i^*\right) = f_{X_i}\left(x_i^*\right) \tag{5.61}$$

Nesta primeira etapa, utiliza-se a distribuição normal padrão apenas como auxiliar na determinação dos momentos centrais de primeira e segunda ordem das distribuições normais equivalentes. A transformação para o espaço normal padrão só é feita na etapa seguinte. Deste

modo, sendo ϕ e Φ os símbolos usuais para a PDF normal padrão e para a CDF normal padrão, respectivamente, pode-se escrever (5.60) e (5.61) como:

$$F_{U_i}\left(u_i^*\right) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \tag{5.62}$$

$$f_{U_i}\left(u_i^*\right) = \frac{1}{\sigma_{x_i}}\phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \tag{5.63}$$

O desvio padrão da normal equivalente obtém-se isolando $\left(x_i^* - \mu_{x_i}\right)\Big/\sigma_{x_i}$ na equação (5.62) e substituindo em (5.63), resultando em

$$\sigma_{x_i} = \frac{1}{f_{U_i}\left(u_i^*\right)}\phi\left[\Phi^{-1}\left(F_{U_i}\left(u_i^*\right)\right)\right] \tag{5.64}$$

A média obtém-se de (5.62) utilizando o resultado obtido em (5.64) para σ_{x_i}:

$$\frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} = \Phi^{-1}\left(F_{U_i}\left(u_i^*\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mu_{x_i} = x_i^* - \Phi^{-1}\left(F_{U_i}\left(u_i^*\right)\right)\sigma_{x_i} \tag{5.65}$$

Assim, de posse de μ_{x_i} e σ_{x_i} as normais equivalentes às variáveis para $i = 1, 2, \ldots, n$ ficam definidas.

Um caso particular ocorre quando a distribuição de probabilidades de u_i é lognormal. Quando isso ocorre (5.62) pode ser escrita como:

$$F_{U_i}\left(u_i^*\right) = \Phi\left(\frac{\ln u_i^* - \lambda_{u_i}}{\xi_{u_i}}\right) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\right) \tag{5.66}$$

Ou seja:

$$\frac{\ln u_i^* - \lambda_{u_i}}{\xi_{u_i}} = \frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \tag{5.67}$$

De (4.14) e (4.24) a equação (5.63) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{x^* \xi_{u_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln u_i^* - \lambda_{u_i}}{\xi_{u_i}} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)^2 \right]$$

Sendo válida a igualdade (5.67), tem-se que o desvio padrão da normal equivalente vale:

$$\sigma_{x_i} = x^* \xi_{u_i} \tag{5.68}$$

E de (5.67) e (5.68) a média da normal equivalente vale:

$$\mu_{x_i} = x^* \left(1 - \ln x^* + \lambda_{u_i} \right) \tag{5.69}$$

Na Figura 25 e Figura 26 ilustra-se a PDF e a CDF, respectivamente, da normal equivalente a uma distribuição lognormal com média $\mu_{u_i} = 20$ e desvio padrão $\sigma_{u_i} = 6$ no ponto $u_i^* = 21$.

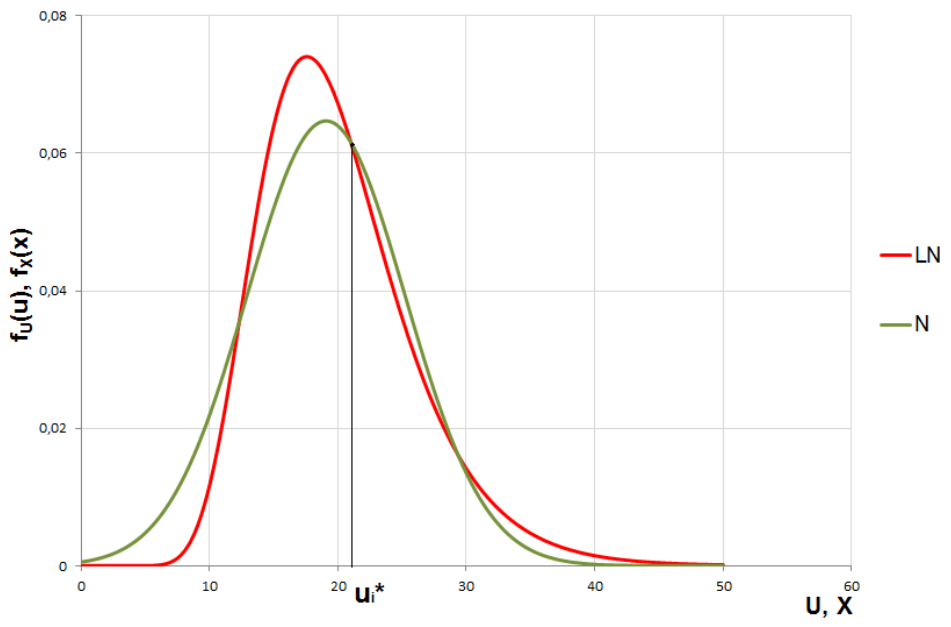

Figura 25 – PDF da normal equivalente a uma lognormal

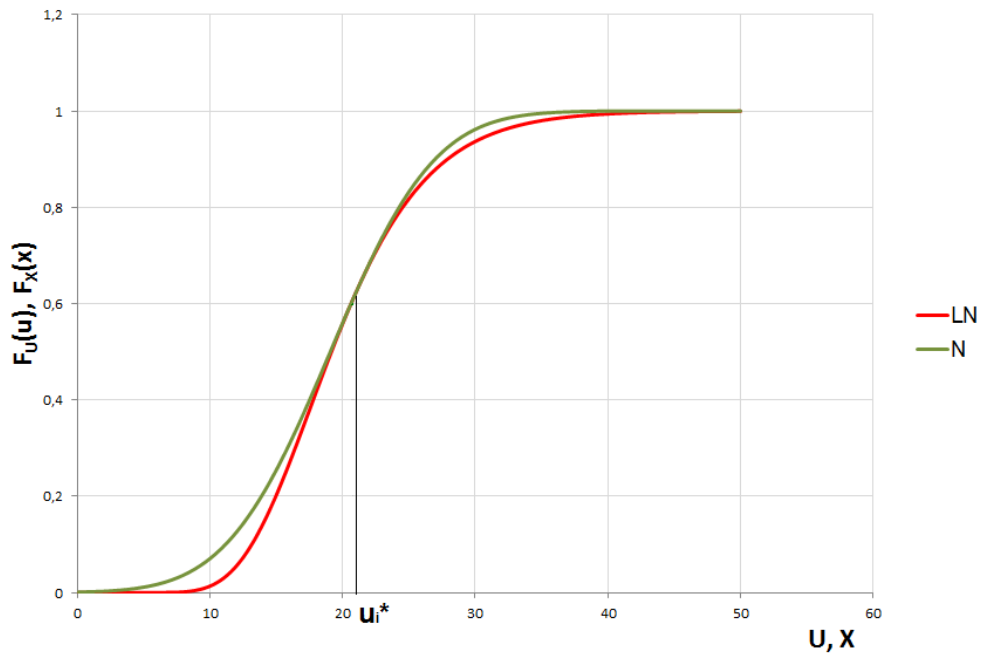

Figura 26 – CDF da normal equivalente a uma lognormal

A segunda etapa faz a passagem do espaço X para o espaço das variáveis correlacionadas com distribuições normais-padrão Z, portanto, representa a transformação

de Hasofer e Lind dada em (5.38). As covariâncias e, portanto, os coeficientes de correlação $\rho_{x_i x_j}$ também devem ser transportados para o espaço Z, como segue:

$$\rho_{u_i u_j} = \frac{Cov\left(u_i, u_j\right)}{\sigma_{u_i}\sigma_{u_j}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \phi_2\left(z_i, z_j, \rho_{z_i z_j}\right) dz_i dz_j \tag{5.70}$$

Os coeficientes $\rho_{z_i z_j}$ são determinados iterativamente pela equação acima ou por fórmulas aproximadas que fornecem a seguinte relação (Kiureghian e Liu, 1986):

$$r_{ij} = \frac{\rho_{z_i z_j}}{\rho_{u_i u_j}} \tag{5.71}$$

A terceira etapa faz a passagem do espaço Z, para o espaço das variáveis normais-padrão não correlacionadas Y. Para isso impõe-se que a matriz de correlação no espaço Y seja diagonal unitária, ou matriz identidade, tal que, sendo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} \tag{5.72}$$

Obtenha-se:

$$\mathbf{C}_Y = Cov(\mathbf{y}, \mathbf{y}^T) = \mathbf{I} \tag{5.73}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_Y &= \mathrm{Co}v\left(\mathbf{A}^T\mathbf{z}, \left(\mathbf{A}^T\mathbf{z}\right)^T\right) \\ &= Cov\left(\mathbf{A}^T\mathbf{z}, \mathbf{z}^T\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^T Cov\left(\mathbf{z}, \mathbf{z}^T\right)\mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{C}_Y = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_Z \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{5.74}$$

Da mesma forma que em (5.46), a matriz A é encontrada conforme procedimento descrito no apêndice B.

Na aplicação do método FORM em um problema envolvendo, de forma simplificada, dois grupos de variáveis, as de resistência e variáveis de solicitação, pode-se ilustrar o método como mostra a Figura 27.

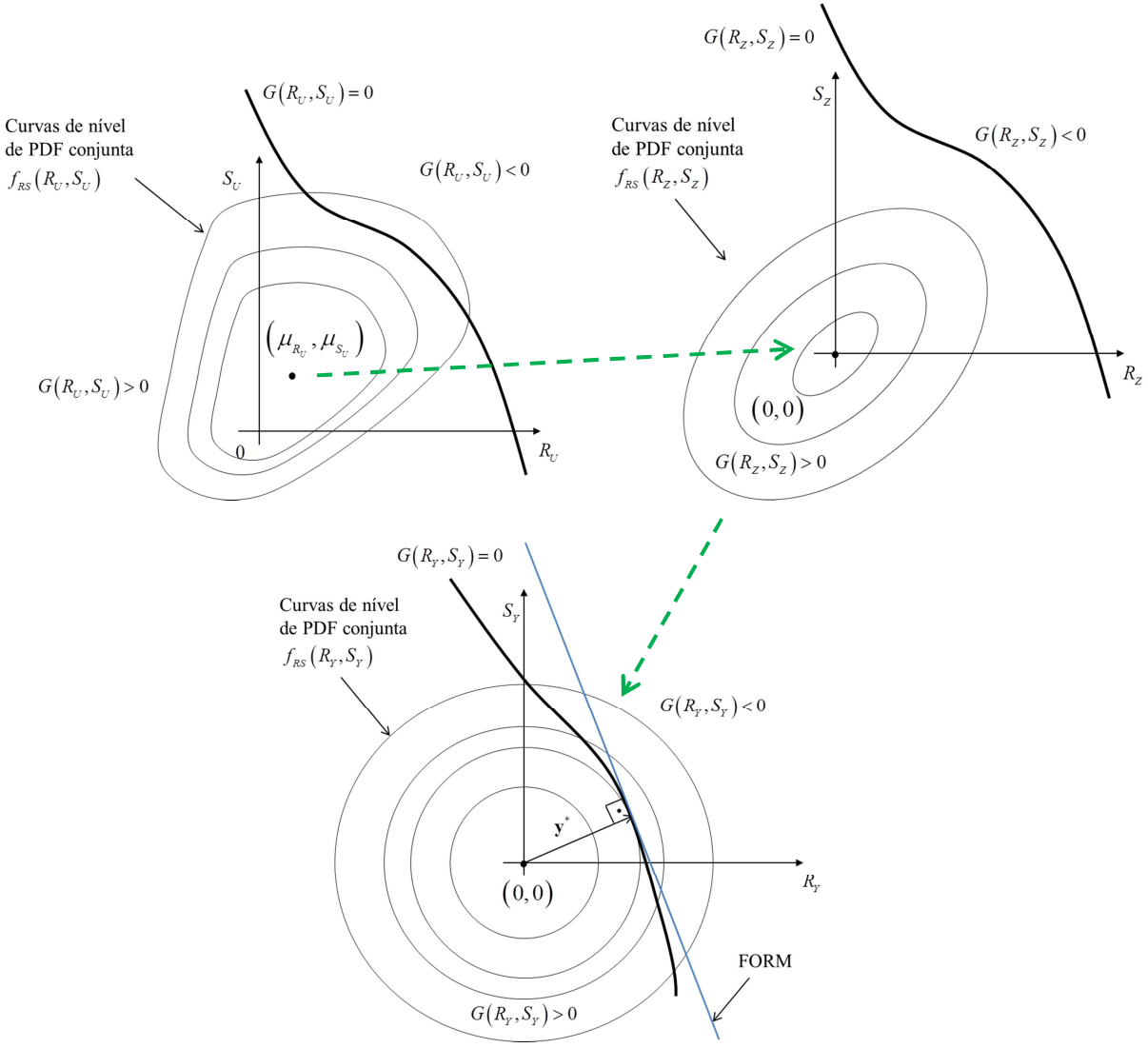

Figura 27 – Método FORM. Passagem do espaço U para o espaço Z. Passagem do espaço Z para o espaço Y.

5.5.3 Método Monte Carlo

O porquê de esse método ser chamado de Monte Carlo tem uma origem interessante e pode ser lido no excerto abaixo:

> O termo "Monte Carlo" foi introduzido por von Neumann e Ulam durante a segunda Guerra Mundial, como código para o trabalho secreto em Los Alamos; ele foi sugerido pelos cassinos na cidade de Monte Carlo em Monaco. O método de Monte Carlo foi então aplicado a problemas relacionados à bomba atômica. O trabalho envolveu a simulação direta do comportamento de difusão aleatória de nêutrons em material cindível. (RUBINSTEIN, 1981, tradução nossa).

Como se pode ler acima, o Método Monte Carlo, está diretamente relacionado com a ideia de simulação. Segundo Naylor apud Rubinstein (1981) “simulação é uma técnica numérica para conduzir experimentos em um computador; experimentos tais que se utilizem de modelos matemáticos e lógicos para descrever o comportamento de sistemas econômicos ou de negócios ao longo de um período de tempo”.

O Método Monte Carlo pode ser definido como um tipo específico de simulação em que as observações são independentes uma das outras; a resposta do modelo pode ser expressa por uma função; o tempo não exerce grande influência.

Para executar uma simulação lança-se mão de números gerados aleatoriamente. De acordo com L’ecuyer (1988), um gerador de números aleatórios é definido por um espaço de estado finito S, uma função $f : S \rightarrow S$ e a denominada semente s_0. A função f é uma fórmula recursiva que gera uma sequência pseudoaleatória dentro do espaço de estado, da seguinte forma:

$$s_i = f\left(s_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.75}$$

A cada elemento dessa sequência, associa-se um número aleatório U variando de 0 a 1, utilizando-se uma transformação $g : \mathrm{S} \rightarrow (0,1)$, tal que:

$$u_i = g(s_i) \tag{5.76}$$

Essa sequência, como já foi mencionado, é na verdade determinística e repete-se ao completar um ciclo. Este ciclo tem um tamanho ou período dado pelo menor inteiro n para o qual:

$$s_{i+n} = s_i \tag{5.77}$$

Os geradores mais comumente utilizados são os Geradores Lineares Congruenciais de Lehmer (L'ecuyer, 1988). Eles são definidos da seguinte maneira:

$$s_i = f(s_{i-1}) = (as_{i-1} + c) \pmod{m}, \qquad u_i = g(s_i) = \frac{s_i}{m} \tag{5.78}$$

A notação matemática $(\bmod m)$, significa que a diferença entre os valores de cada lado da igualdade, é múltipla ou divisível por m. Trata-se de uma relação de congruência entre números inteiros, daí o nome dado ao gerador.

Em (5.4) m, a e c são inteiros positivos com $a < m$ e $c < m$. Fazendo-se $c = 0$ obtém-se um gerador chamado de Gerador Multiplicativo Linear Congruencial (GMLC), que pode ser definido como:

$$s_i = f(s_{i-1}) = as_{i-1} \pmod{m}, \qquad u_i = g(s_i) = \frac{s_i}{m} \tag{5.79}$$

Neste caso, o período máximo igual a m não pode ser alcançado como em (5.4) limitando o espaço de estado a $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Em L'ecuyer (1988) obtém-se um gerador através da combinação de dois ou mais geradores GMLC de forma a obterem-se geradores eficientes e com maior período. Além disso, são aplicados diversos testes sobre os geradores obtidos de forma a garantir sua

uniformidade e independência entre os valores gerados. Assim, julgou-se vantajoso utilizá-los neste trabalho.

Pode-se verificar visualmente a uniformidade de um gerador plotando-se um par coordenado $\left(u_k, u_{k+1}\right)$. Para o gerador utilizado obtém-se a Figura 28 abaixo:

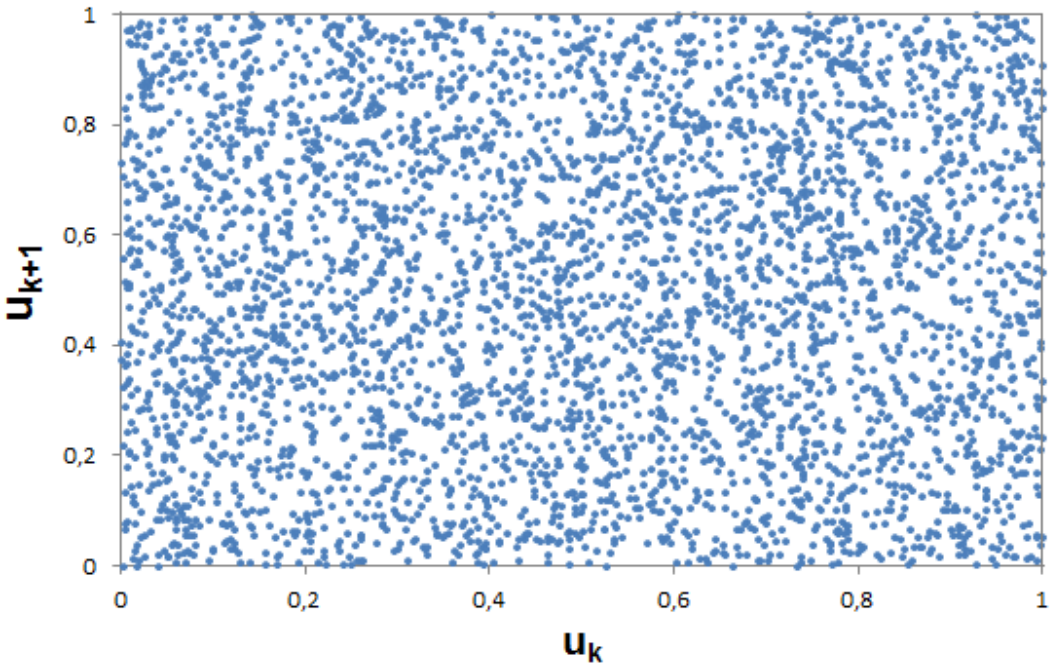

Figura 28 – Teste de Uniformidade do GMLC.

A princípio o teste visual indica que os números obedecem a uma distribuição uniforme de probabilidade já que não se podem observar um comportamento tendencioso dos pares coordenados, eles estão distribuídos igualmente no plano. Apesar disso, atualmente dispõem-se de diversos testes para dar mais robustez ao algoritmo. Podem-se aplicar testes estatísticos, tais como os apontados em Rubinstein (1981). No apêndice A realiza-se o teste qui-quadrado a título de exercício, posto que o algoritmo utilizado já foi suficientemente testado.

Com relação ao tempo de processamento para geração de números aleatórios, o gráfico da Figura 29 indica o tempo gasto em segundos para gerar e plotar números aleatórios em um arquivo de dados. A eficiência em relação ao tempo gasto é muito importante. Ao decidir pelo uso do algoritmo este quesito teve um peso alto e, portanto, considerou-se satisfatório seu desempenho.

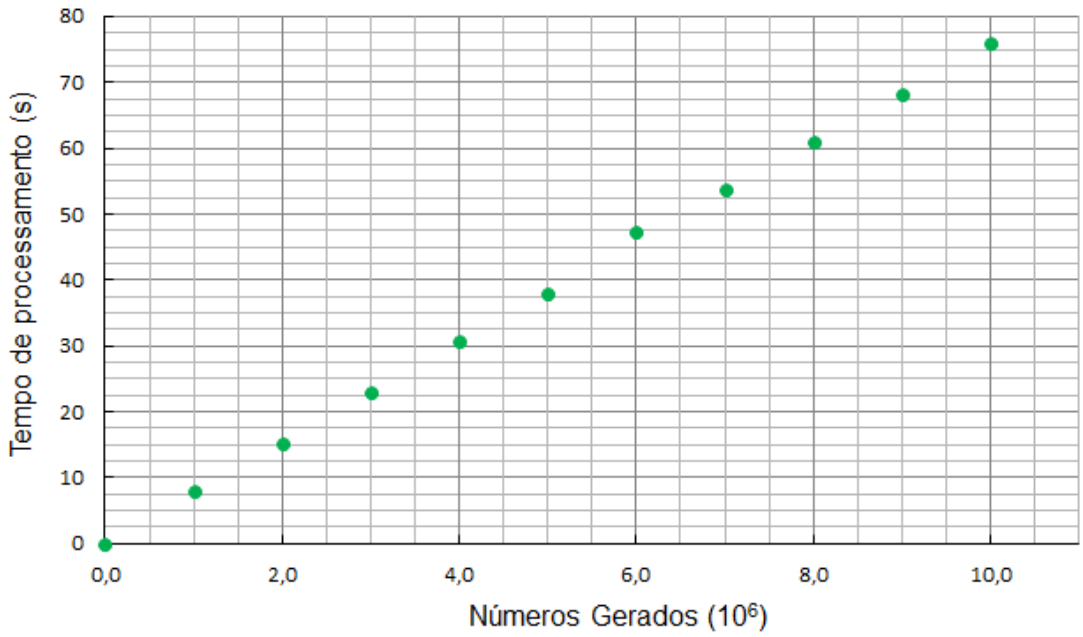

Figura 29 – Tempo de processamento

Dando prosseguimento ao método Monte Carlo de confiabilidade estrutural, agora de posse de um gerador de números aleatórios, cada uma das variáveis aleatórias envolvidas em um dado problema pode ser simulada separadamente e enviada para a função de estado limite que define o problema estrutural.

Seja X o espaço de variáveis originais não correlacionadas, dada uma variável x pertencente a este espaço e com CDF $F_X(x)$, gera-se um valor representativo dessa variável, a partir de um número u^* entre 0 e 1 gerado aleatoriamente que passa a representar o valor de $F_X(x)$ em um ponto correspondente x^*, de modo que:

$$u^* = F_X(x^*) \tag{5.80}$$

Para acessar o valor x^* basta então tomar a inversa da CDF:

$$x^* = F_X^{-1}(u^*) \tag{5.81}$$

Repete-se tal procedimento para todas as varáveis envolvidas, obtendo-se então uma avaliação da função de interesse. Somando-se o número de cenários pertencentes ao domínio de falha, determina-se a probabilidade de falha. Assim define-se a probabilidade de falha como:

$$p_f = \int_{D_f} \ldots \int I(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{5.82}$$

Com $I(\mathbf{x})$ uma função indicadora a qual domínio, se no domínio de falha D_f ou no domínio de segurança D_s, o vetor das variáveis $\mathbf{x}$ trouxe a estrutura.

$$I(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 1 & se & \mathbf{x} \in D_f \\ 0 & se & \mathbf{x} \in D_s \end{Bmatrix} \tag{5.83}$$

De forma equivalente a (5.82), pode-se escrever:

$$p_f = E\left[I(\mathbf{x})\right] = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} I\left(\mathbf{x}_i\right) \tag{5.84}$$

Com s como número total de simulações.

Já para o caso em que se parta do espaço X das variáveis originais correlacionadas, não é mais possível aplicar (5.81) diretamente para acessar o valor da variável, posto que se assim fosse feito, ela estaria sendo gerada de forma independente de outras a serem geradas posteriormente, o que não é mais o caso.

Para gerar então, corretamente, variáveis correlacionadas, deve-se primeiramente, gerar um vetor de números aleatórios $\mathbf{u}^*$ para cada uma das variáveis intervenientes no problema e de forma equivalente ao que foi feito para variáveis não correlacionadas, gera-se um vetor de variáveis normais-padrão não correlacionadas.

$$\mathbf{y}^* = \Phi^{-1}\left(\mathbf{u}^*\right) \tag{5.85}$$

De posse da matriz de transformação como definida em (5.71), obtém-se um vetor de variáveis normais-padrão correlacionadas da seguinte forma:

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{y}^* \tag{5.86}$$

Com a ajuda das distribuições marginais de probabilidade $F_{\mathrm{x}}(\mathbf{x})$ do espaço original, chega-se em um vetor de variáveis no espaço X de interesse e que servirá como dados de entrada para a equação de estado limite implícita.

$$\mathbf{x}^* = F_{\mathrm{x}}^{-1}\left(\Phi\left(\mathbf{z}^*\right)\right) \tag{5.87}$$

A partir daí, as equações (5.82) a (5.84) são utilizadas da mesma forma.

É possível atribuir um intervalo de confiança ao valor obtido em (5.84). Para isso, além da estimativa da média, falta ainda ter uma estimativa da variância de p_f.

De acordo com o teorema do limite central, para $s \to \infty$, a distribuição de p_f segue uma distribuição normal. A estimativa da média de p_f é dada por (5.84) e a estimativa da variância de p_f é igual a:

$$Var\left(p_f\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^2 \sum_{i=1}^{s} Var\left[I\left(\mathbf{x}_i\right)\right] = \frac{1}{s} Var\left[I\left(\mathbf{x}\right)\right] \tag{5.88}$$

De (4.4) pode-se afirmar que:

$$Var\left[I\left(\mathbf{x}\right)\right] = \frac{s}{s-1}\left\{E\left[I^2\left(\mathbf{x}\right)\right] - E\left[I\left(\mathbf{x}\right)\right]^2\right\} \tag{5.89}$$

Considera-se válido adotar a estimativa para a variância de $I(\mathbf{x})$ dada por (5.48) já que se trabalhará somente com grandes amostras. Conforme Fusco (1976), em amostras

retiradas de um universo normal, deve-se ter $s \geq 32$ para que com 95% de probabilidade o erro relativo da estimativa do desvio-padrão não supere 25%.

Aplicando (5.84) em (5.89) tem-se:

$$Var\left[I\left(\mathbf{x}\right)\right] = \frac{s}{s-1}\left\{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} I^2\left(\mathbf{x}_i\right) - p_f^2\right\}$$

E, finalmente, de (5.88) a variância de p_f vale:

$$Var\left(p_f\right) = \sigma_{p_f}^2 = \frac{1}{s-1}\left\{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} I^2\left(\mathbf{x}_i\right) - p_f^2\right\} \tag{5.90}$$

De posse de (5.46) e (5.49), o intervalo de confiança para p_f é dado por:

$$-k_c\sigma_{pf} + p_f \leq \mu_{p_f} \leq p_f + k_c\sigma_{pf} \tag{5.91}$$

Sendo k_c o valor da distribuição normal-padrão correspondente a um nível de confiança C pré-determinado.

$$\Phi\left(-k_c \leq z \leq k_c\right) = C \tag{5.92}$$

Para obter-se um nível de confiança de $C = 95\%$, por exemplo, $k_c = 1{,}96$.

Conclui-se assim, a exposição do chamado Método Monte Carlo simples ou cru, que é aplicável para problemas de razoável complexidade desde que o tempo de processamento não seja um fator limitante ou inibidor. Variantes mais eficientes desse método podem ser desenvolvidas.

5.6 Confiabilidade de Sistemas

O estudo de sistemas estruturais tem como objeto de análise, as estruturas sujeitas a múltiplos modos de falha.

Para o caso do modelo de estacas em estudo, serão admitidos três modos de falha:

1. Ruptura do elemento estrutural da estaca por compressão excessiva.
2. Plastificação total da resistência oferecida pelas forças de interface estaca-solo.
3. Deslocamento excessivo.

Os três modos são modos de falha para o ELU. Para o ELS vale exclusivamente o terceiro modo.

5.6.1 Sistema em série

Em uma estrutura idealizada como um sistema em série, seus membros são ligados como em uma corrente, assim, a falha de qualquer um de seus membros acarreta a falha da estrutura inteira. Designando-se por M_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, o evento de falha de cada um dos n membros da estrutura, a probabilidade de falha da estrutura é dada por:

$$p_f = P\left(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n\right) \tag{5.93}$$

Sendo D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, o domínio de falha de cada um dos n modos de falha associados à estrutura em estudo, (5.31) passa a ser:

$$p_f = \int_{\cup_{i=1}^{n} D_i} \ldots \int f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{5.94}$$

5.6.2 Sistema em paralelo

Em uma estrutura idealizada como um sistema em paralelo, seus membros são ligados como em uma grade, assim, a falha de um dos seus membros não acarreta a falha da estrutura inteira. A probabilidade de falha da estrutura passa a ser:

$$p_f = P\left(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n\right) \tag{5.95}$$

Sendo D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, o domínio de falha de cada um dos n modos de falha associados à estrutura em estudo, (5.31) passa a ser:

$$p_f = \int_{\cap_{i=1}^{n} D_i} \ldots \int f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{5.96}$$

5.6.3 Limites de p_f para sistemas estruturais em série

Como alternativa à integração da equação (5.94), pode-se utilizar os limites superior e inferior da probabilidade de falha e assim obter seu valor com uma boa precisão.

Para uma estrutura com três modos de falha, por exemplo, a probabilidade total de falha é dada por:

$$\begin{aligned} p_f = {} & P\left(M_1\right) + P\left(M_2\right) + P\left(M_3\right) \\ & - P\left(M_1 \cap M_2\right) - P\left(M_1 \cap M_2\right) - P\left(M_1 \cap M_2\right) \\ & + P\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3\right) \end{aligned} \tag{5.97}$$

Considerando-se apenas os termos uni-modais e n modos de falha, estabelecem-se os limites de primeira ordem (Beck, 2011):

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\text{máx}}}\left[P\left(M_i\right)\right] \le p_f \le \sum_{i=1}^{n} P\left(M_i\right) \tag{5.98}$$

Considerando-se, além dos termos uni-modais, os termos bi-modais, estabelecem-se os limtes de segunda ordem (Beck, 2011):

$$P\left(M_1\right)+\sum_{i=2}^{n} máx\left[0,\ P\left(M_i\right)-\sum_{j=1}^{i-1} P\left(M_i \cap M_j\right)\right] \leq p_f$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} P\left(M_i\right)-\sum_{i=2}^{n} máx\left[P\left(M_i \cap M_j\right)\right] \tag{5.99}$$

5.6.4 *Método Monte Carlo para sistemas estruturais*

Pode-se afirmar que o método Monte Carlo é o mais eficiente para aplicação em sistemas estruturais. Nele não se faz necessária a aplicação dos limites da probabilidade de falha, podendo-se proceder a integração das equações (5.94) e (5.96) diretamente.

Para sistemas em série, a função indicadora utilizada em (5.82) passa a ser:

$$I\left(\mathbf{x}\right)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & se & \mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^{n} D_{f_i} \\ 0 & se & \mathbf{x} \in D_s \end{array}\right\} \tag{5.100}$$

E para sistemas em paralelo, a função indicadora utilizada em (5.82) passa a ser:

$$I\left(\mathbf{x}\right)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & se & \mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} D_{f_i} \\ 0 & se & \mathbf{x} \in D_s \end{array}\right\} \tag{5.101}$$

5.6.5 *Método FOSM e FORM para sistemas estruturais*

Tais métodos são aproximados, como já demostrado nos itens 5.5.2 e 5.5.3. Os limites da probabilidade de falha como exposto acima, passam então a serem importantes alternativas.

A determinação da probabilidade das intersecções, necessárias para a avaliação dos limites bi-modais, é feita de forma aproximada. Para isso tomam-se as funções de estado limite duas a duas e adotadas como variáveis de uma distribuição normal-padrão bivariada. Sendo duas funções de estado limite, linearizadas e no espaço normal-padrão tais que:

$$g_i(\mathbf{y}) = \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} y_k = \beta_i - \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{y} \tag{5.102}$$

$$g_j(\mathbf{y}) = \beta_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} y_k = \beta_j - \boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{y} \tag{5.103}$$

As variâncias de cada uma delas vale:

$$\sigma_{g_i}^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^2 \sigma_{y_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^2 = 1 \tag{5.104}$$

$$\sigma_{g_j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 \sigma_{y_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 = 1 \tag{5.105}$$

A média de cada uma delas vale:

$$\mu_{g_i} = \beta_i \tag{5.106}$$

$$\mu_{g_j} = \beta_j \tag{5.107}$$

De (4.5), a covariância entre elas vale:

$$
\begin{aligned}
Cov\left(g_i, g_j\right) &= E\left[\left(g_i - \mu_{g_i}\right)\left(g_j - \mu_{g_j}\right)\right] = E\left(g_i g_j\right) - \mu_{g_i}\mu_{g_j} \\
&= E\left[\left(\beta_i - \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{y}\right)\left(\beta_j - \boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{y}\right)\right] - \mu_{g_i}\mu_{g_j} \\
&= E\left[\left(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{y}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{y}\right)\right] \\
&= Cov\left(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{y}\right) + E\left(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{y}\right)E\left(\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{y}\right) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_i Cov\left(\mathbf{y}, \mathbf{y}\right)\boldsymbol{\alpha}_j
\end{aligned}
$$

$$\therefore$$

$$Cov\left(g_i, g_j\right) = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \tag{5.108}$$

De (4.6), a correlação entre elas vale:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov\left(g_i, g_j\right)}{\sigma_{g_i}\sigma_{g_j}} = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \tag{5.109}$$

Pode-se constatar através da Figura 31 que a correlação entre as funções de estado limite é também o cosseno do ângulo θ_{ij} que as normais a elas fazem entre si, ou seja:

$$\rho_{ij} = \cos\theta_{ij} \tag{5.110}$$

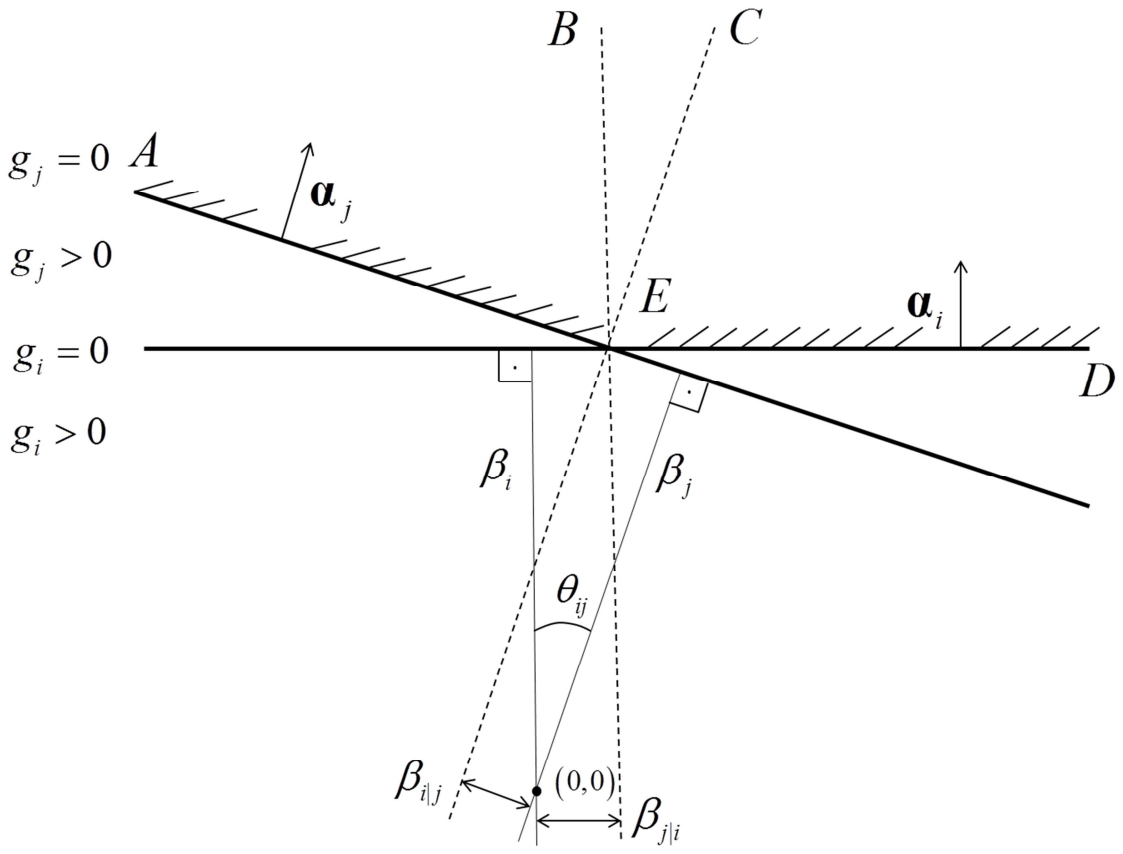

Figura 30 – Intersecção entre modos de falha. Adaptado de Ditlevsen apud Madsen et. al (1986)

A probabilidade $P\left(g_i < 0 \cap g_j < 0\right) = P\left(M_i \cap M_j\right)$ pode então ser calculada, de forma aproximada, com o auxilio da distribuição normal acumulada bivariada Φ_2 da seguinte forma:

$$P\left(M_i \cap M_j\right) = \Phi_2\left(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}\right) = \int_{-\infty}^{-\beta_i}\int_{-\infty}^{-\beta_j} \varphi_2\left(x, y, \rho_{ij}\right) dxdy \tag{5.111}$$

Sendo φ_2 a distribuição normal bivariada dada por:

$$\varphi(x,y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x+y-2\rho xy}{1-\rho^2}\right] \tag{5.112}$$

Melhor do que realizar a integração da equação (5.111) é, novamente, lançar mão dos limites superiores e inferiores da probabilidade buscada. A Figura 31 mostra uma situação para $\rho_{ij}>0$. A probabilidade da intersecção $P\left(M_i \cap M_j\right)$, equivale à integração sobre a área hachurada da Figura 30. $P\left(M_i \cap M_j\right)$ é maior do que a integração sobre a área definida pelo ângulo $A\hat{E}C$ ou sobre a área definida pelo ângulo $B\hat{E}D$, mas é menor do que a integração sobre a soma dessas duas áreas, desse modo pode-se estabelecer que:

se $\rho_{ij}>0$:

$$\begin{aligned} &\mathit{máx}\left[\Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_{j|i}),\Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_{i|j})\right]\le P\left(M_i\cap M_j\right)\le \\ &\qquad\qquad \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_{j|i})+\Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_{i|j}) \end{aligned} \tag{5.113}$$

se $\rho_{ij}<0$:

$$0\le P\left(M_i\cap M_j\right)\le \mathit{mín}\left[\Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_{j|i}),\Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_{i|j})\right] \tag{5.114}$$

As distâncias $\beta_{j|i}$ e $\beta_{i|j}$ podem ser encontradas através das relações geométricas da Figura 31. Com algumas manipulações algébricas chega-se nas expressões:

$$\beta_{i|j}=\frac{\beta_i-\rho_{ij}\beta_j}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}} \tag{5.115}$$

$$\beta_{j|i}=\frac{\beta_j-\rho_{ij}\beta_i}{\sqrt{1-\rho_{ij}^2}} \tag{5.116}$$

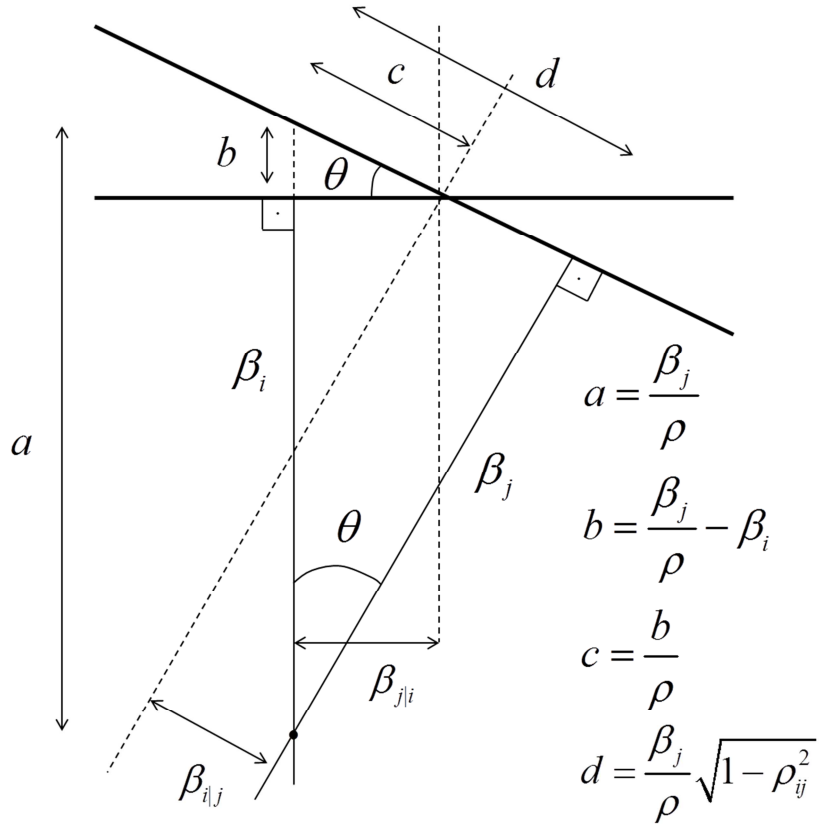

Figura 31 – Relações geométricas.

Note-se que $\beta_{j|i}$ representa a probabilidade de falha no modo j dado que $g_i(\mathbf{y}) = 0$, algo que representa uma probabilidade condicional. O mesmo vale para $\beta_{i|j}$.

6. Exemplos

6.1 Estaca Isolada Sujeita a Momento

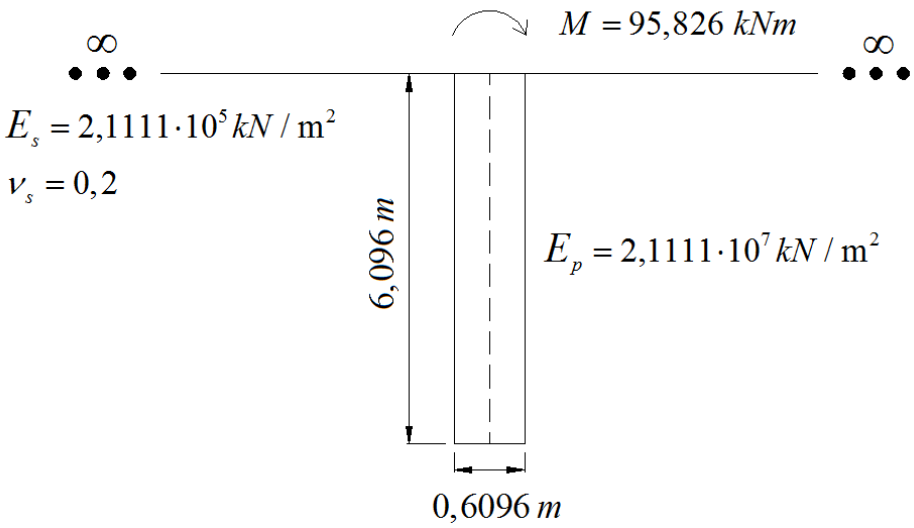

Figura 32 - Exemplo 1.

Este exemplo foi tirado de Andrade et al. (2014). A média das variáveis (Módulo de elasticidade da estaca e do solo; coeficiente de Poisson do solo; comprimento e diâmetro da estaca; momento fletor aplicado na cabeça da estaca) está representada na figura acima e seus desvios padrões são todos iguais a 10% de suas respectivas médias. Elas são avaliadas primeiro como sendo todas normais e depois como sendo todas log-normais.

A função de estado limite é definida para o deslocamento horizontal da estaca com um deslocamento de referência de 0,37 mm, ou seja:

$$g(\mathbf{x}) = 0{,}37 - |d_c| \tag{6.1}$$

Assim, a diferença em relação ao que foi feito em Andrade et al. (2014) será apenas relativo ao modelo mecânico utilizado. Se lá ele consiste na utilização da solução fundamental de Kelvin com a discretização da superfície de contorno em elementos triangulares finitos e infinitos, aqui ele consiste, como exposto acima, na utilização da solução fundamental Mindlin, sem a existência de integrais na superfície de contorno. As estacas, no entanto, foram representadas da mesma forma, pelo o elemento finito de quatro nós como descrito na sessão 3.2.1.

Considerando todas as variáveis com distribuição normal de probabilidades e acompanhando a convergência dos resultados para uma quantidade crescente de simulações de Monte Carlo, chega-se no gráfico abaixo:

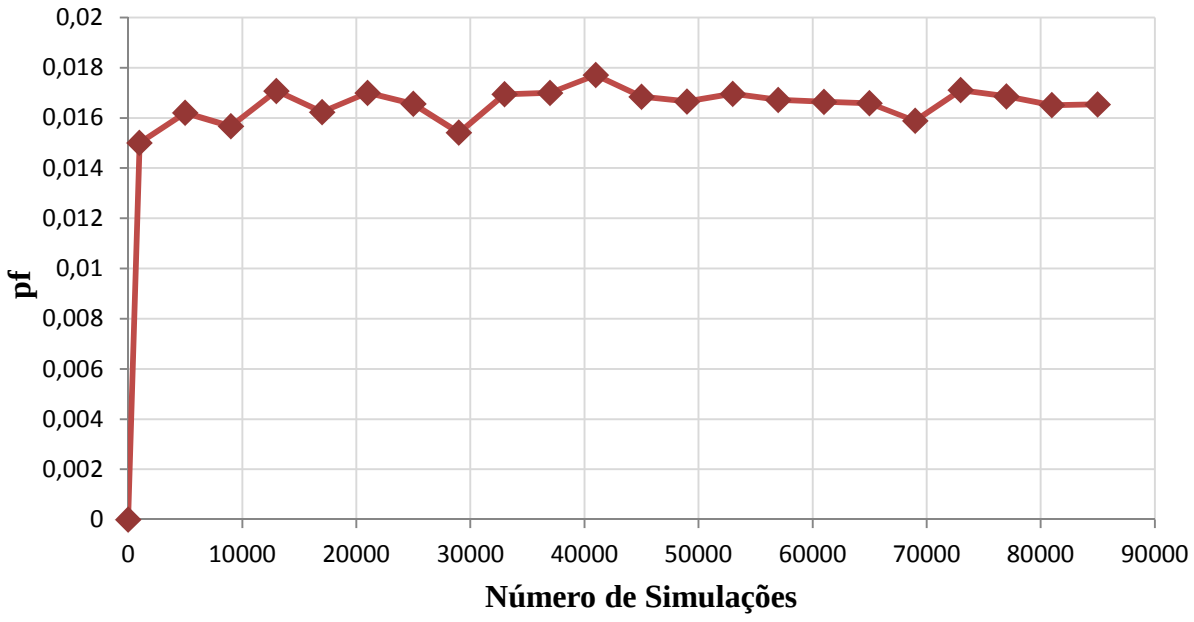

Figura 33 – Convergência M.C. para variáveis normais.

Pelo gráfico, pode-se observar que a probabilidade de falha converge para um valor entre 0,016 e 0,018 ou um valor bastante próximo de 0,0165.

Ainda considerando todas as variáveis com distribuição normal, o método FOSM fornece um índice de confiabilidade $\beta = 2{,}11$ que corresponde a uma probabilidade de falha de 0,0174 ou 1,74%, indicando a concordância entre os métodos e validando os resultados.

Passando para a situação em que todas as variáveis possuem distribuição log-normal de probabilidades e acompanhando a convergência dos resultados para uma quantidade crescente de simulações de Monte Carlo, chega-se no gráfico abaixo:

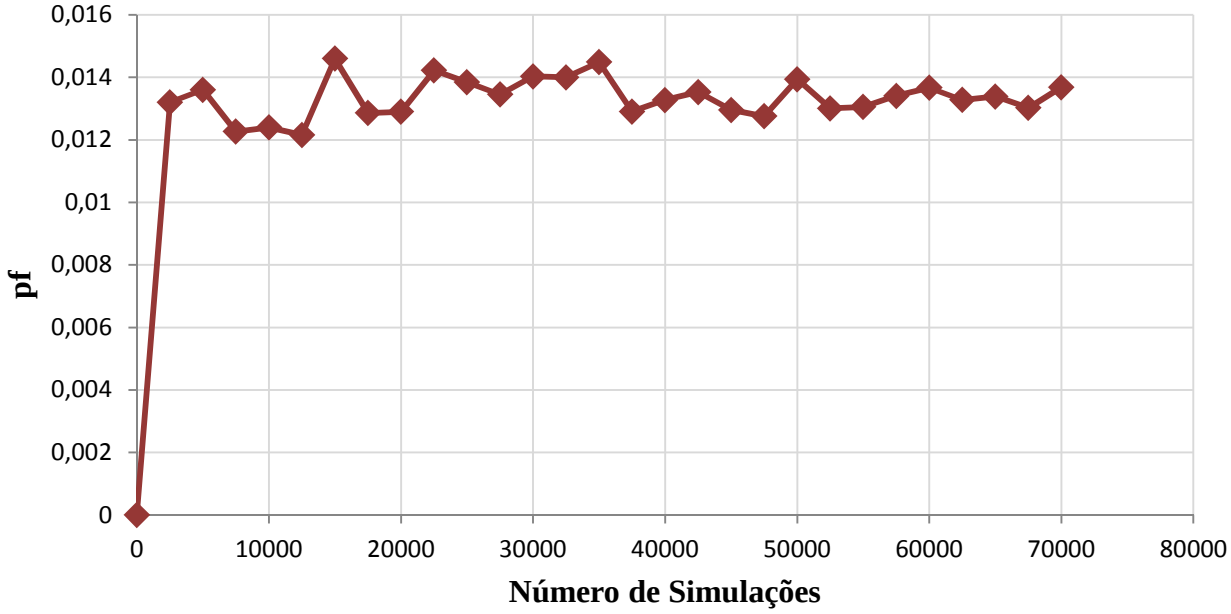

Figura 34 – Convergência M. C. para variáveis log-normais.

Pelo gráfico, pode-se observar que a probabilidade de falha converge para um valor entre 0,012 e 0,014 ou um valor bastante próximo de 0,0135.

Ainda considerando todas as variáveis com distribuição log-normal, o método FORM fornece um índice de confiabilidade $\beta = 2{,}173$ que corresponde a uma probabilidade de falha de 0,0149 ou 1,49%, indicando a concordância entre os métodos e validando os resultados.

Comparando-se os resultados obtidos aqui com os obtidos em Andrade et al. (2014) chega-se na seguinte tabela comparativa:

	FORM		Monte Carlo	
	Este trabalho	Andrade et al. (2014)	Este trabalho	Andrade et al. (2014)
Normal	1,74%	1,55%	1,65%	1,55%
Lognormal	1,49%	1,30%	1,35%	1,13%

Tabela 6.1 – Comparação exemplo 1.

6.2 Estaca Isolada Sujeita a Carga Vertical

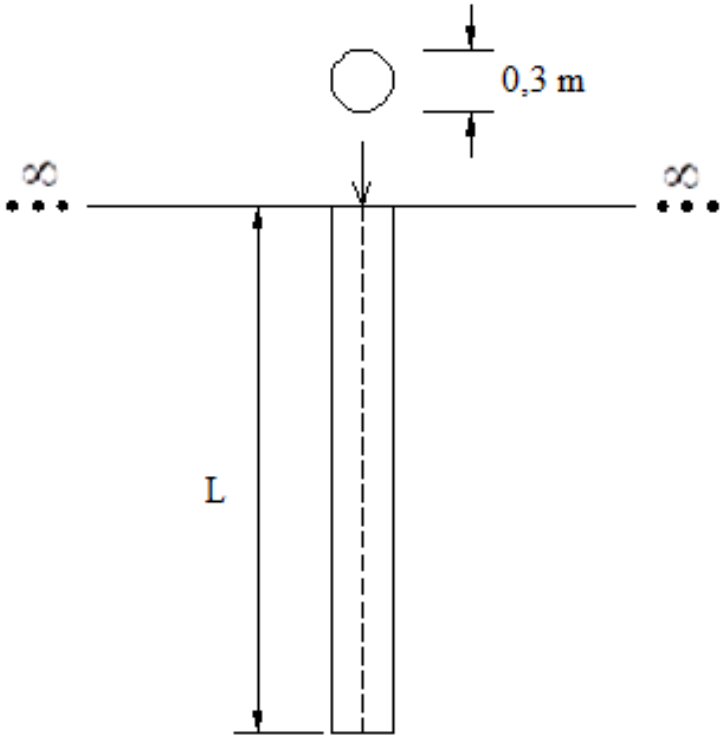

Figura 35 – Estaca Isolada.

Neste exemplo será avaliado o comportamento de uma estaca escavada sujeita a cargas verticais apenas. As distribuições adotadas para cada variável aleatória foram baseadas em Wang e Cao (2013), Bauer e Pula (2000), Beck et. al.(2014). Para as distribuições de probabilidade dos parâmetros dos modelos de aderência admitiram-se distribuições normais como as mais convenientes dado que estudos específicos para estes parâmetros são muito escassos.

O módulo de elasticidade do concreto utilizado foi admitido como aquele pertencente a um concreto com 20 MPa. O módulo de elasticidade secante aos 28 dias correspondente a este concreto vale (NBR 6118, 2014):

$$E_{si} = \left(0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80}\right) \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 21287,367 MPa \tag{6.2}$$

O módulo de elasticidade do solo foi adotado como o valor médio das cinco camadas de solo do exemplo dois encontrado em Said et. al. 2009. Para o ângulo de atrito adotou-se o mesmo procedimento, chegando-se em 39,44^o. O coeficiente de empuxo, de acordo com (3.67) vale:

$$K_0 = 1 - sen\left(39,44^o\right) = 0,365 \tag{6.3}$$

As médias dos parâmetros do modelo de aderência foram baseadas nos valores utilizados em Said et. al. 2009. Os modelos probabilísticos das variáveis e seus parâmetros estão listados na tabela 6.2 abaixo.

A correlação entre as variáveis é desprezada em todos os exemplos a seguir. Julgou-se ser esta a decisão mais adequada em vista de muito poucos estudos existentes que permitam adotar valores consistentes.

Tipo da variável	Nome da variável	Dimensão	Distribuição	Média	Desvio padrão
Carregamentos	Carga permanente (g)	kN.	Normal	170	17
	Carga variável (q)	kN.	Gumbel	51	10,2
Materiais	Módulo de elast. da estaca (E_p)	kN/m^2	Normal	21287367	2128736,7
	Módulo de elast. do solo (E_s)	kN/m^2	Log-normal	55000	$55000\delta_{Es}$
	Peso específico do solo (γ_s)	kN/m^3	Normal	17	3,4
	Coef. De Poisson do solo (ν)	-	Log-Normal	0,3	0,06
Dimensões	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	L	0,1L
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,3	0,03
Modelos de aderência	Coeficiente de atrito inicial (μ_0)	-	Normal	0,017	0,0017
	Coeficiente de atrito na ruptura (μ_r=μ_f)	-	Normal	0,51	$0,51\delta_{\mu r}$
	Parâmetro da curva de endurec. (A)	-	Normal	0,00008	0,000016
	Parâmetro da curva de amolec. (A_0)	-	Normal	15	1,5
	Espessura da camada de interface (t)	m	Normal	0,003	0,0006
	Tensão inicial na interface (σ_{ni})	kN/m^2	Normal	1	0,2
	Tensão de referência (p_0)	kN/m^2	Normal	1	0
	Deslocamento relativo no pico (u_{tf})	m	Normal	0,0001	0,0001
	Coeficiente de atrito de pico (μ_p)	-	Normal	0,6	0,06

Tabela 6.2 – Modelos probabilísticos das variáveis.

6.2.1 Verificações de ELS

O deslocamento de referencia adotado foi de 5,0 mm, portando a equação de estado limite de serviço, na unidade de milímetros, fica:

$$g(\mathbf{x}) = 5,0 - \left|d_c(\mathbf{x})\right| \tag{6.4}$$

Pode-se estudar a importância de cada parâmetro no cálculo da probabilidade de falha utilizando-se os componentes do vetor alfa dado em (5.42). Os resultados obtidos são ilustrados na figura 36 abaixo.

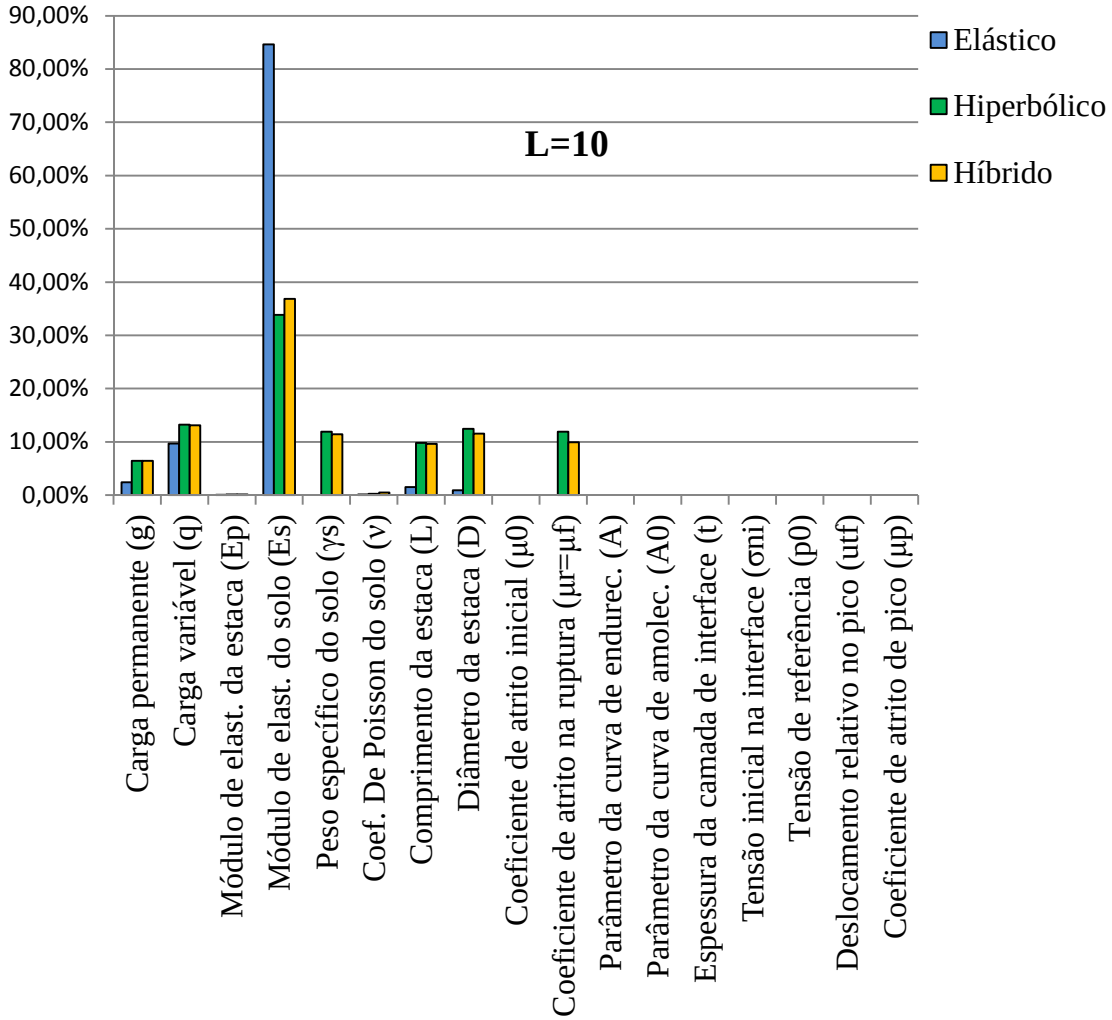

Figura 36 – Análise de sensibilidade. L = 10.

Pode-se notar que o módulo de elasticidade do solo é o parâmetro que apresenta maior importância para o cálculo da probabilidade de falha. Apesar disso, nota-se também que para os modelos de aderência hiperbólico e híbrido o módulo de elasticidade do solo já não é tão preponderante diminuindo mais o seu peso com o aumento do comprimento da estaca ou do diâmetro.

Julga-se de grande valor estudar o comportamento da estaca diante de um parâmetro tão complicado e difícil de ser obtido na prática, que é o módulo de elasticidade do solo. Foram plotados em três gráficos, um para cada modelo de aderência, como se comporta a probabilidade de falha para diversos coeficientes de variação do módulo de elasticidade do solo e diversos comprimentos da estaca. Os demais parâmetros foram mantidos iguais aos da tabela 6.2.

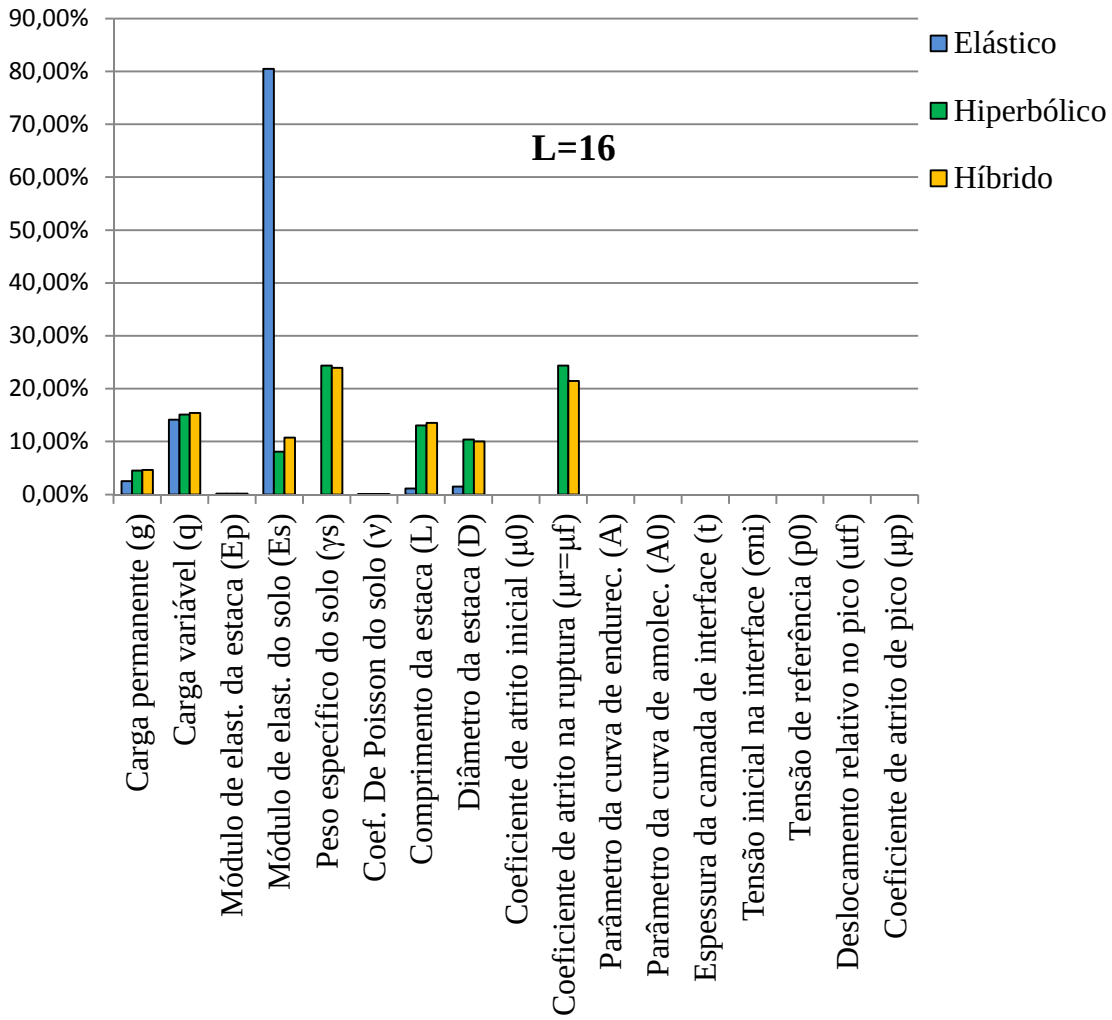

Figura 37 – Análise de Sensibilidade. L =16.

A Figura 37 mostra na verdade que com o aumento do comprimento da estaca, o deslocamento predominante passa a ser o plástico e não o elástico refletindo na menor sensibilidade da probabilidade de falha ao módulo de elasticidade do solo. Parâmetros como o coeficiente de atrito na ruptura e o peso específico do solo passam a desempenhar maior influencia na presença de escorregamento. Esta é uma informação importante a ser estudada em nas verificações de ELU a serem vistas no item seguinte.

Elástico

	δ_{Es} = 30%		δ_{Es} = 40%		δ_{Es} = 50%		δ_{Es} = 60%		δ_{Es} = 70%	
L (m)	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf
6	4,77	9,21E-07	3,43	3,02E-04	2,76	2,89E-03	2,20	1,39E-02	1,82	3,44E-02
7	5,17	1,17E-07	3,71	1,04E-04	2,98	1,44E-03	2,37	8,89E-03	1,99	2,33E-02
8	5,50	1,90E-08	3,95	3,91E-05	3,15	8,16E-04	2,62	4,45E-03	2,15	1,59E-02
9	5,80	3,32E-09	4,17	1,52E-05	3,26	5,57E-04	2,71	3,36E-03	2,30	1,07E-02
10	6,07	6,32E-10	4,36	6,50E-06	3,42	3,18E-04	2,93	1,69E-03	2,35	9,49E-03
11	6,30	1,49E-10	4,54	2,81E-06	3,55	1,93E-04	2,99	1,39E-03	2,44	7,34E-03
12	6,51	3,76E-11	4,72	1,18E-06	3,68	1,18E-04	3,03	1,22E-03	2,65	4,02E-03
13	6,73	8,48E-12	4,87	5,58E-07	3,79	7,53E-05	3,18	7,36E-04	2,72	3,26E-03
14	6,88	2,99E-12	5,00	2,87E-07	3,89	5,01E-05	3,25	5,77E-04	2,77	2,80E-03
15	7,02	1,11E-12	5,16	1,23E-07	3,98	3,45E-05	3,32	4,50E-04	2,82	2,40E-03
16	7,14	4,67E-13	5,29	6,12E-08	4,07	2,39E-05	3,38	3,62E-04	2,86	2,12E-03

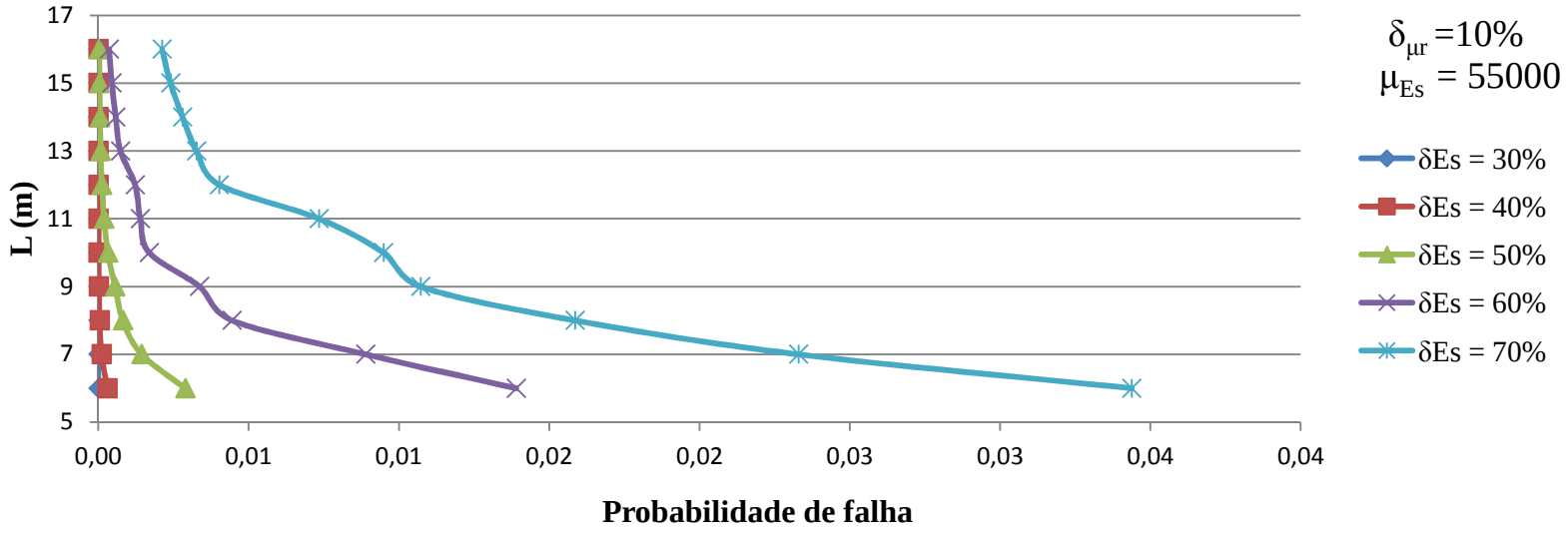

Figura 38 – L x pf x δEs para modelo elástico

Hiberbólico

	δ_{Es} = 30%		δ_{Es} = 40%		δ_{Es} = 50%		δ_{Es} = 60%		δ_{Es} = 70%	
L (m)	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf
6	-	7,98E-01	-	7,70E-01	-	7,60E-01	-	7,56E-01	-	7,50E-01
7	-	7,22E-01	-	7,08E-01	-	7,06E-01	-	7,10E-01	-	7,06E-01
8	-	6,34E-01	-	6,16E-01	-	6,30E-01	-	6,38E-01	-	6,44E-01
9	-	5,10E-01	-	5,24E-01	-	5,44E-01	-	5,54E-01	-	5,70E-01
10	-	3,58E-01	-	3,80E-01	-	4,14E-01	-	4,40E-01	-	4,62E-01
11	-	2,62E-01	-	2,96E-01	-	3,00E-01	-	3,10E-01	-	3,26E-01
12	-	1,68E-01	-	1,76E-01	-	1,98E-01	-	2,12E-01	-	2,32E-01
13	1,38	8,38E-02	1,34	9,01E-02	1,30	9,68E-02	1,25	1,06E-01	1,22	1,11E-01
14	1,65	4,95E-02	1,59	5,59E-02	1,55	6,06E-02	1,47	7,08E-02	1,39	8,23E-02
15	1,99	2,33E-02	1,92	2,74E-02	1,85	3,22E-02	1,78	3,74E-02	1,63	5,16E-02
16	2,19	1,43E-02	2,11	1,74E-02	2,07	1,92E-02	1,95	2,56E-02	1,91	2,81E-02

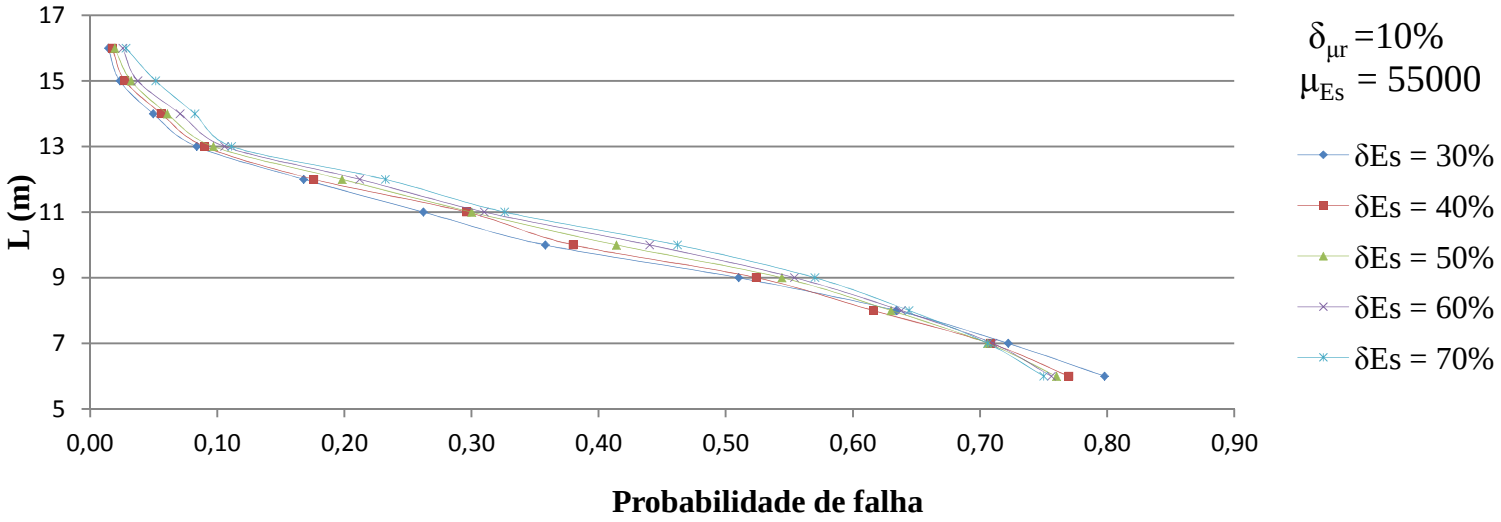

Figura 39 – L x pf x δEs para modelo hiperbólico.

Híbrido

	δ_{Es} = 30%		δ_{Es} = 40%		δ_{Es} = 50%		δ_{Es} = 60%		δ_{Es} = 70%	
L (m)	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf	β	pf
6	-	8,22E-01	-	8,04E-01	-	7,94E-01	-	7,80E-01	-	7,82E-01
7	-	7,48E-01	-	7,44E-01	-	7,44E-01	-	7,30E-01	-	7,32E-01
8	-	6,54E-01	-	6,52E-01	-	6,46E-01	-	6,50E-01	-	6,60E-01
9	-	5,00E-01	-	5,20E-01	-	5,42E-01	-	5,54E-01	-	5,74E-01
10	-	3,68E-01	-	3,92E-01	-	4,14E-01	-	4,32E-01	-	4,58E-01
11	-	2,64E-01	-	2,86E-01	-	3,00E-01	-	3,32E-01	-	3,50E-01
12	1,12	1,31E-01	1,08	1,40E-01	1,03	1,52E-01	0,97	1,65E-01	-	2,06E-01
13	1,48	6,94E-02	1,39	8,23E-02	1,25	1,06E-01	1,13	1,29E-01	0,98	1,64E-01
14	1,78	3,75E-02	1,65	4,95E-02	1,60	5,48E-02	1,48	6,94E-02	1,27	1,02E-01
15	2,07	1,92E-02	2,00	2,28E-02	1,90	2,87E-02	1,88	3,01E-02	1,66	4,85E-02
16	2,38	8,75E-03	2,21	1,34E-02	2,10	1,79E-02	2,02	2,17E-02	2,00	2,28E-02

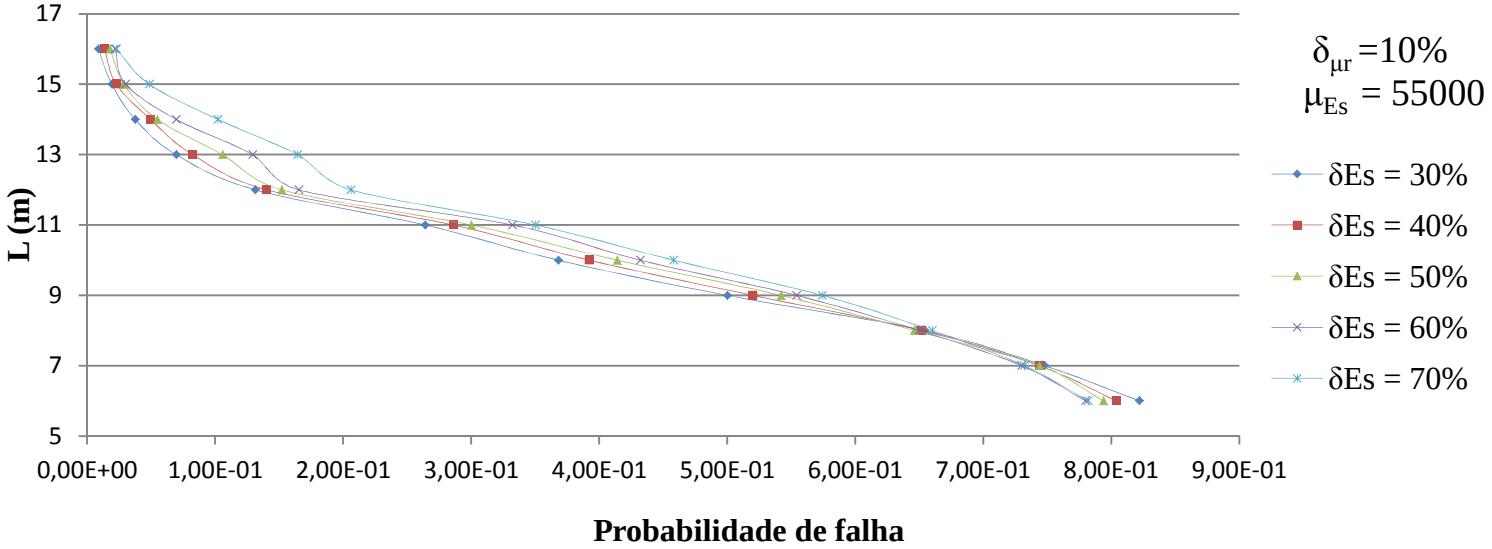

Figura 40 – L x pf x δEs para modelo híbrido.

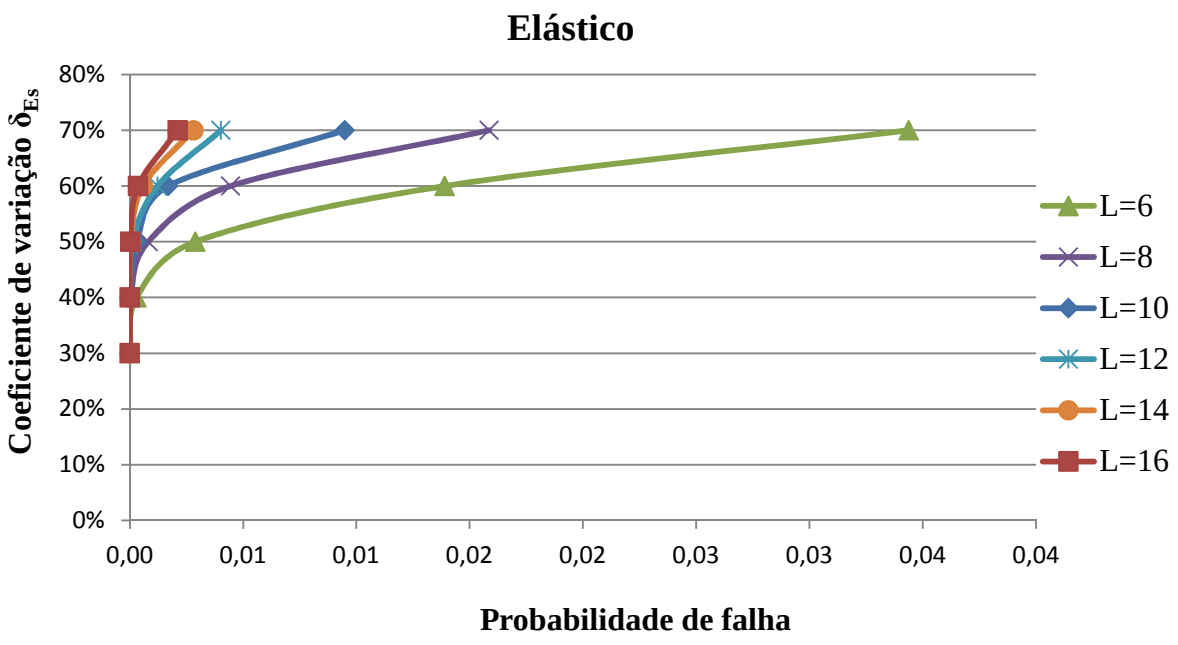

Figura 41 – δEs x pf. Elástico.

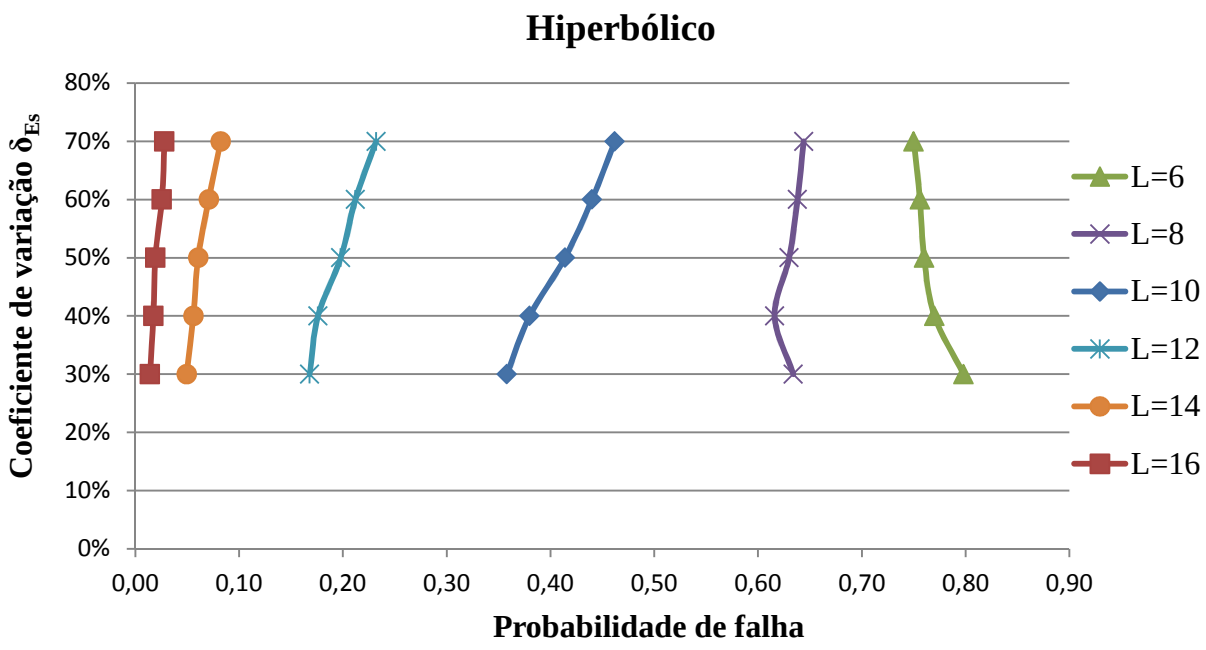

Figura 42 - δEs x pf. Hiperbólico.

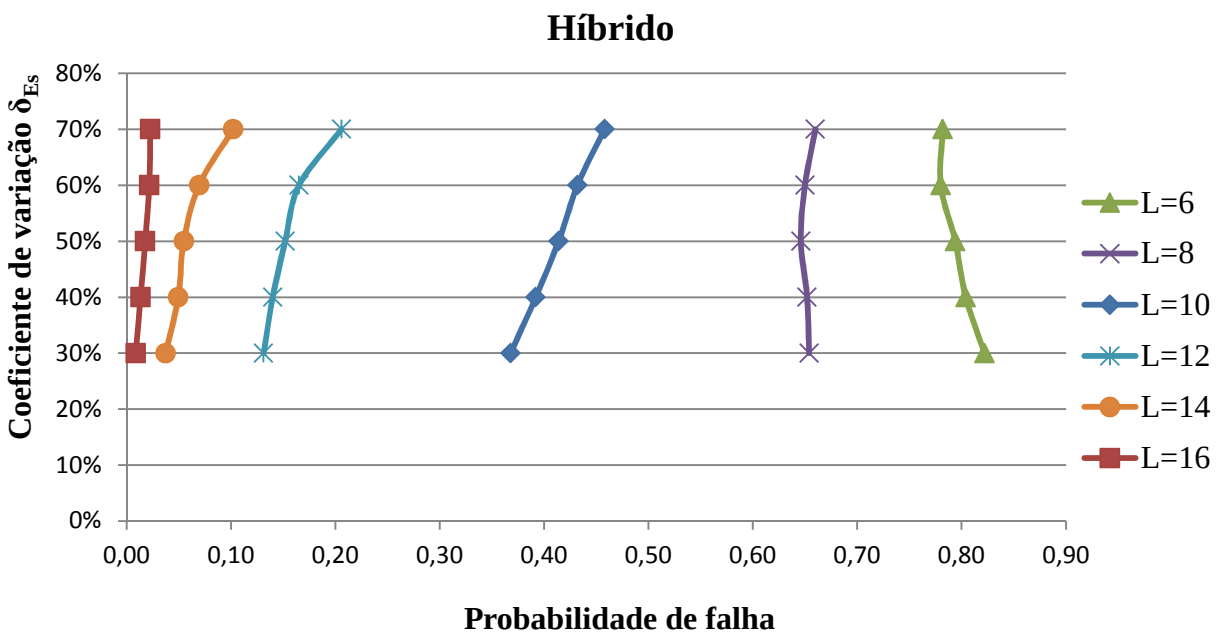

Figura 43 - δEs x pf. Híbrido.

Nas Figuras 38 a 40 a probabilidade de falha é mostrada em função do comprimento da estaca e do coeficiente de variação do módulo de elasticidade do solo. Para o modelo elástico observa-se a maior influencia do módulo de elasticidade. As Figuras 41 a 43 expressam os mesmo valores das Figuras 38 a 40, mas dispostos de maneira diferente, evidenciando que diferentes comprimentos de estaca são mais ou menos influenciados pela variabilidade do solo.

6.2.2 Verificações de ELU

Para situações de ELU utilizam-se neste trabalho os modelos que consideram o escorregamento da estaca em relação ao solo. Além disso, como já colocado no item 5.6, a estaca pode apresentar basicamente, neste trabalho, ruína em três diferentes situações e, portanto, sendo necessárias três equações de estado limite.

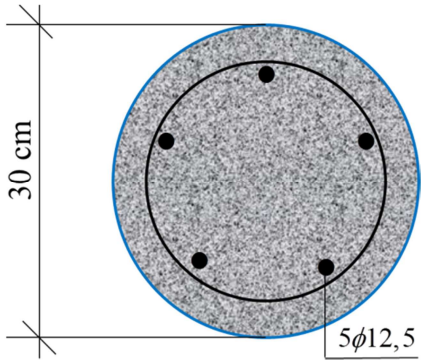

Figura 44 – Seção transversal da estaca.

O primeiro modo de ruína seria por compressão excessiva do material da estaca. Considerando-se uma estaca de concreto com seção transversal como a da Figura 44, a equação de estado limite deste modo é dada por:

$$g_1 = \left(A_c \cdot f_c + A_s \cdot f_s \right) - N_s \tag{6.5}$$

Sendo A_c a área de concreto; f_c a resistência do concreto; A_s a área de aço; f_s a resistência do aço.

De acordo com Fusco (1977) o coeficiente de variação da resistência do concreto pode ser adotado como igual a 10% e o coeficiente de variação da resistência do aço pode ser adotada como igual 5%. A média da resistência do concreto de 20MPa vale:

$$\mu_{f_c} = f_{ck} + 1,64 \cdot \sigma_{f_c} = 20 + 1,64 \cdot 2 = 23,3\text{MPa}$$

Para o aço da armadura, sendo do tipo CA-50, sua resistência média vale 500 MPa.

O segundo modo de ruína acontece quando todo o atrito lateral for solicitado sobrando apenas a resistência de ponta como capaz de absorver acréscimos de carga. Isso acontece quando todos os nós do elemento finito da estaca, com exceção do nó da base, alcançarem as tensões limites do modelo de aderência. Este modo só pode ser avaliado pelo método de Monte Carlo. A sua equação de estado limite não pode ser escrita em termos numéricos, apenas como função indicadora:

$$g_2(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 & se & \mathbf{x} \notin D_{f_2} \\ 1 & se & \mathbf{x} \in D_{f_2} \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

Um terceiro modo de falha pode ser criado com base no quanto da carga total está sendo resistida pela ponta da estaca, posto que possam existir situações em que toda a resistência por atrito lateral foi solicitada, mas a ponta da estaca ainda possui uma reserva de resistência, assim define-se o parâmetro λ como sendo a razão entre a carga vertical resistida pela estaca e carga vertical total que esta sendo solicitada, ou seja:

$$\lambda = \frac{N_{Rponta}}{N_S} \tag{6.7}$$

Este modo está ligado em paralelo com o segundo modo e em série com os demais. Da mesma forma que para o modo 2, este modo só pode ser avaliado através de uma função indicadora, ou seja:

$$g_3(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 & se & \mathbf{x} \notin D_{f_3} \\ 1 & se & \mathbf{x} \in D_{f_3} \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

O quarto modo de ruína acontece quando se ultrapassa um deslocamento de referência admitido como representativo da ruptura. Adotando-se para este valor de referência como 20% do diâmetro da estaca como apontado no item 1.3.5., a equação de estado limite deste modo é dada, na unidade de centímetros, por:

$$g_4(\mathbf{x}) = 6,0 - \left|d_c(\mathbf{x})\right| \tag{6.9}$$

A probabilidade de falha para o ELU passa a ser estimada então pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M_1) + P(M_2 \cap M_3) + P(M_4) - P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \\ &\quad - P(M_1 \cap M_4) - P(M_4 \cap M_2 \cap M_3) + \\ &\quad P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Para o carregamento adotado, de acordo com a tabela 6.2, nota-se facilmente que o primeiro modo de falha pode ser desprezado, dado que a chance dele acontecer é nula. Desse modo, a equação (6.10) pode ser simplificada para:

$$p_f = P(M_2 \cap M_3) + P(M_4) - P(M_4 \cap M_2 \cap M_3) \tag{6.11}$$

Para o coeficiente de atrito na ruptura, a distribuição de probabilidade passa a ser a log-normal. Optou-se por esta distribuição por ser naturalmente truncada em zero. Nos exemplos a seguir a também é feita esta alteração, para que não sejam gerados valores negativos para o coeficiente de atrito, algo que acontece quando se tem uma distribuição normal com grandes desvios padrões ou grandes coeficientes de variação.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
10	4,30E-01	4,98E-01	5,44E-01
11	2,38E-01	3,60E-01	4,54E-01
12	1,28E-01	2,66E-01	3,72E-01
13	7,20E-02	1,74E-01	3,06E-01
14	3,00E-02	1,27E-01	2,32E-01
15	1,40E-02	7,90E-02	1,82E-01
16	6,67E-03	4,50E-02	1,44E-01
17	2,33E-03	2,90E-02	1,08E-01
18	1,33E-03	2,43E-02	9,00E-02
19	8,33E-04	1,50E-02	6,60E-02
20	3,00E-04	8,86E-03	5,17E-02

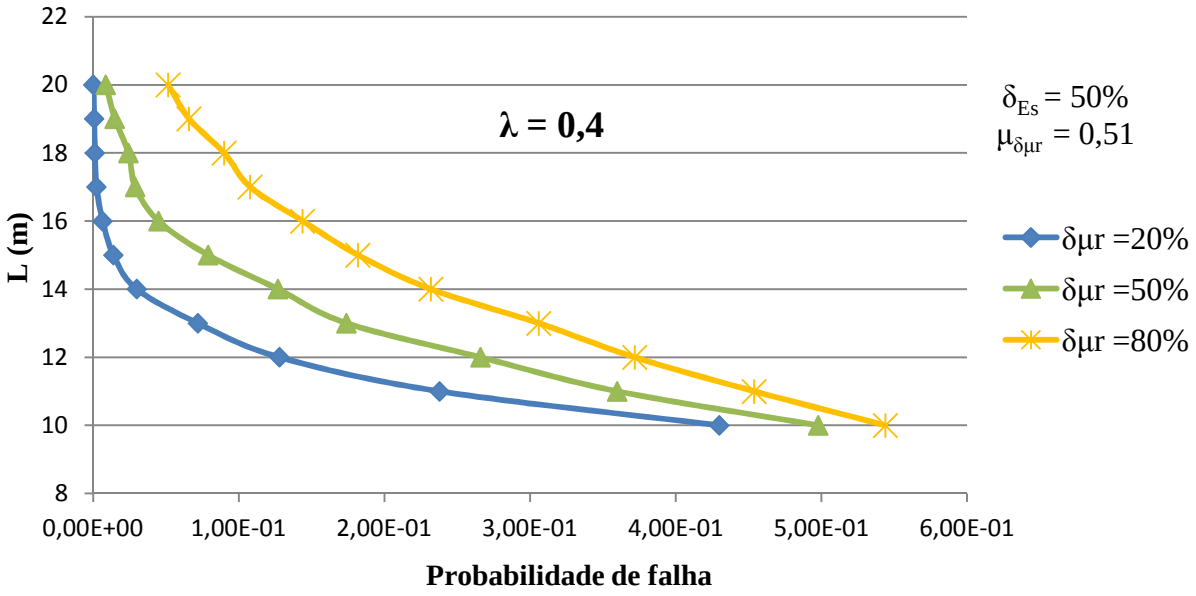

Figura 45 - L x pf x δμr. Hiperbólico.

Híbrido			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
10	4,26E-01	4,90E-01	5,12E-01
11	2,26E-01	3,44E-01	3,80E-01
12	1,00E-01	2,26E-01	2,88E-01
13	3,85E-02	1,22E-01	2,10E-01
14	1,80E-02	6,40E-02	1,28E-01
15	6,67E-03	4,00E-02	8,50E-02
16	1,50E-03	2,10E-02	4,90E-02
17	1,00E-03	1,20E-02	3,07E-02
18	3,33E-04	6,67E-03	1,60E-02
19	1,00E-04	4,33E-03	6,10E-03
20	2,00E-04	1,67E-03	3,25E-03

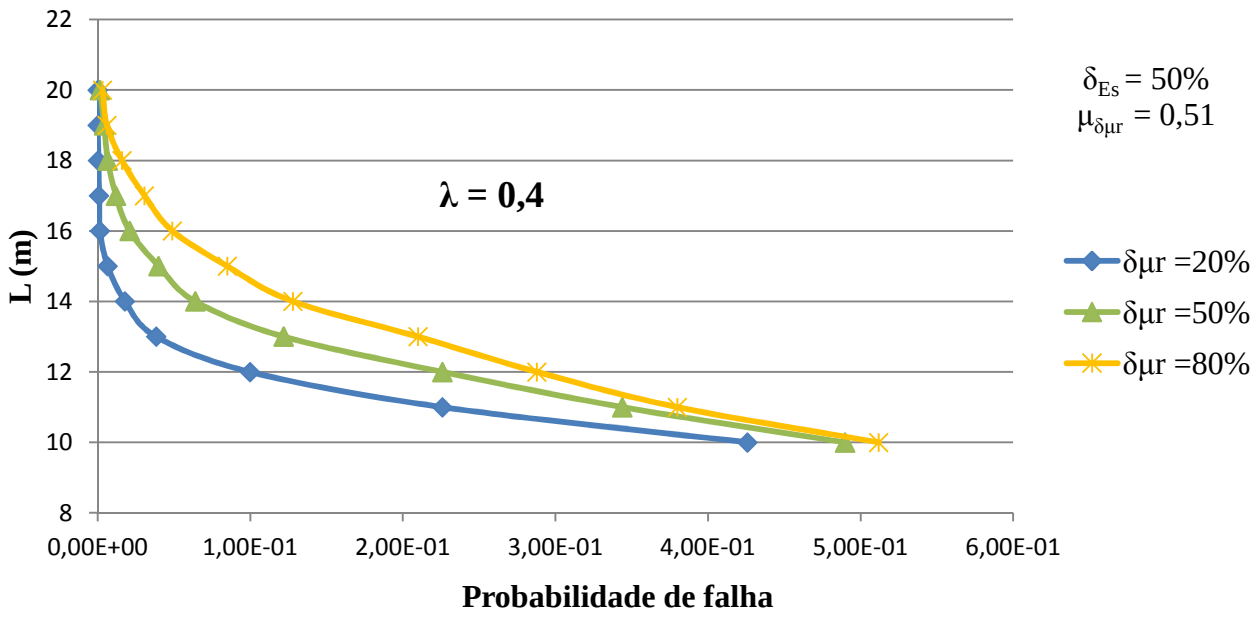

Figura 46- L x pf x δμr. Híbrido.

Nas Figuras 45 e 46 a probabilidade de falha é mostrada em função do comprimento da estaca e do coeficiente de variação do coeficiente de atrito na ruptura.

6.3 Grupo de três estacas

Neste exemplo, são consideradas estacas escavadas do tipo hélice contínua. Serão adotados os mesmos parâmetros do solo do exemplo anterior, variando-se apenas os carregamentos e as dimensões das estacas. Mantém-se também o tipo de concreto utilizado.

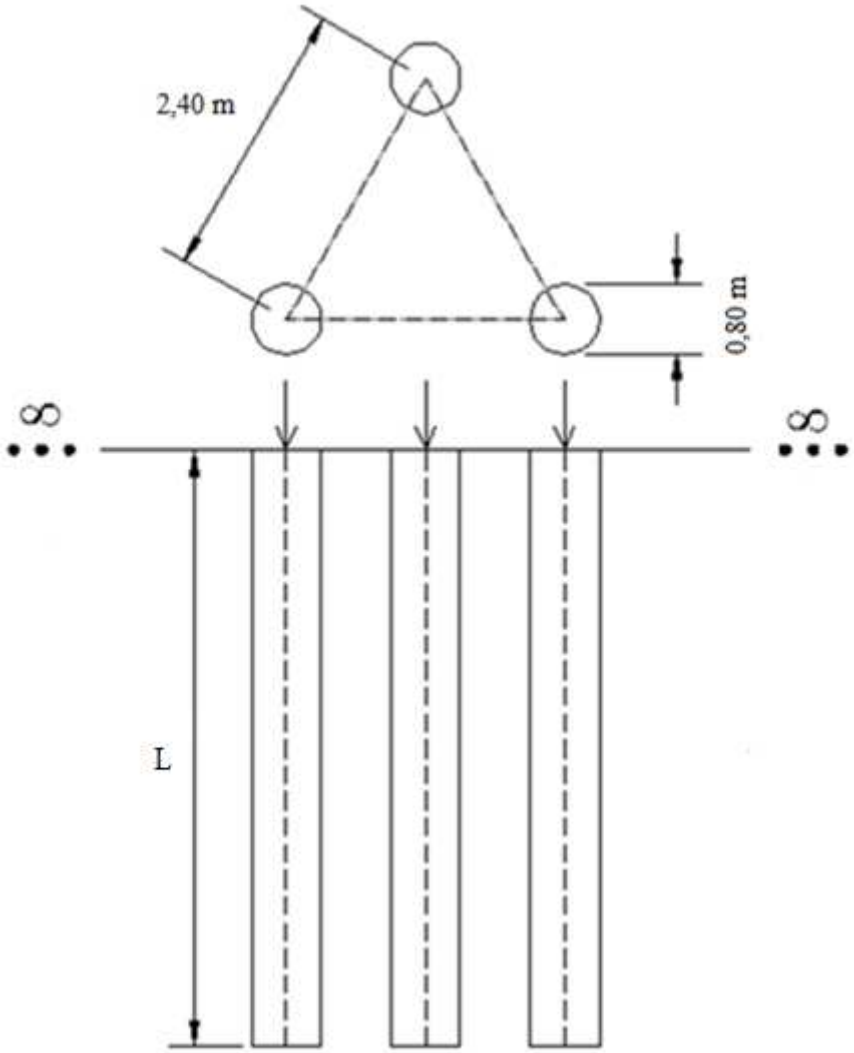

Figura 47 – Grupo de 3 estacas.

Tipo da variável	Nome da variável	Dimensão	Distribuição	Média	Desvio padrão
Carregamentos Estacas 1,2 e 3	Carga permanente (g)	kN.	Normal	1260	126
	Carga variável (q)	kN.	Gumbel	540	108
Materiais Solo e estacas 1,2 e 3	Módulo de elast. da estaca (E_p)	kN/m^2	Normal	21287367	2128736,7
	Módulo de elast. do solo (E_s)	kN/m^2	Log-normal	55000	$55000\delta_{Es}$
	Peso específico do solo (γ_s)	kN/m^3	Normal	17	3,4
	Coef. De Poisson do solo (ν)	-	Log-Normal	0,3	0,06
Dimensões Estacas 1,2 e 3	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	L	0,1L
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,8	0,08
Modelos de aderência	Coeficiente de atrito inicial (μ_0)	-	Normal	0,017	0,0017
	Coeficiente de atrito na ruptura (μ_r=μ_f)	-	Normal	0,51	$0,51\delta_{\mu r}$
	Parâmetro da curva de endurec. (A)	-	Normal	0,00008	0,000016
	Parâmetro da curva de amolec. (A_0)	-	Normal	15	1,5
	Espessura da camada de interface (t)	m	Normal	0,003	0,0006
	Tensão inicial na interface (σ_{ni})	kN/m^2	Normal	1	0,2
	Tensão de referência (p_0)	kN/m^2	Normal	1	0
	Deslocamento relativo no pico (u_{tf})	m	Normal	0,0001	0,0001
	Coeficiente de atrito de pico (μ_p)	-	Normal	0,6	0,06

Tabela 6.3 – Modelos probabilísticos das variáveis.

6.3.1 Verificações de ELS.

O deslocamento de referencia adotado foi de 10 mm, portando a equação de estado limite de serviço para cada estaca, na unidade de milímetros, fica:

$$g^n(\mathbf{x}) = 10,0 - \left|d_c^n(\mathbf{x})\right|, \quad n = 1,2,3 \tag{6.12}$$

Considerando que as estacas formem um sistema ligado em série, o limite superior bi-modal para a probabilidade de falha desse sistema vale, de acordo com (5.99):

$$\begin{aligned} p_f = {} & P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ & - máx\left[P(E_1 \cap E_3), P(E_2 \cap E_3)\right] \end{aligned} \tag{6.13}$$

Sendo E_i o evento de falha da estaca i.

Elástico			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
10	2,70E-01	4,00E-01	4,84E-01
11	2,12E-01	3,62E-01	4,56E-01
12	1,68E-01	3,08E-01	4,28E-01
13	1,34E-01	2,86E-01	3,90E-01
14	1,05E-01	2,53E-01	3,60E-01
15	8,30E-02	2,26E-01	3,30E-01
16	6,80E-02	2,01E-01	3,11E-01
17	4,80E-02	1,85E-01	2,90E-01
18	4,35E-02	1,71E-01	2,75E-01
19	3,65E-02	1,57E-01	2,62E-01
20	2,80E-02	1,44E-01	2,45E-01
21	2,22E-02	1,31E-01	2,34E-01
22	1,84E-02	1,19E-01	2,20E-01
23	1,75E-02	1,06E-01	2,11E-01
24	1,70E-02	1,00E-01	1,99E-01
25	1,33E-02	9,20E-02	1,94E-01
26	1,13E-02	8,70E-02	1,85E-01
27	9,00E-03	8,00E-02	1,76E-01
28	8,30E-03	7,20E-02	1,74E-01
29	6,92E-03	6,80E-02	1,67E-01
30	6,00E-03	6,40E-02	1,64E-01

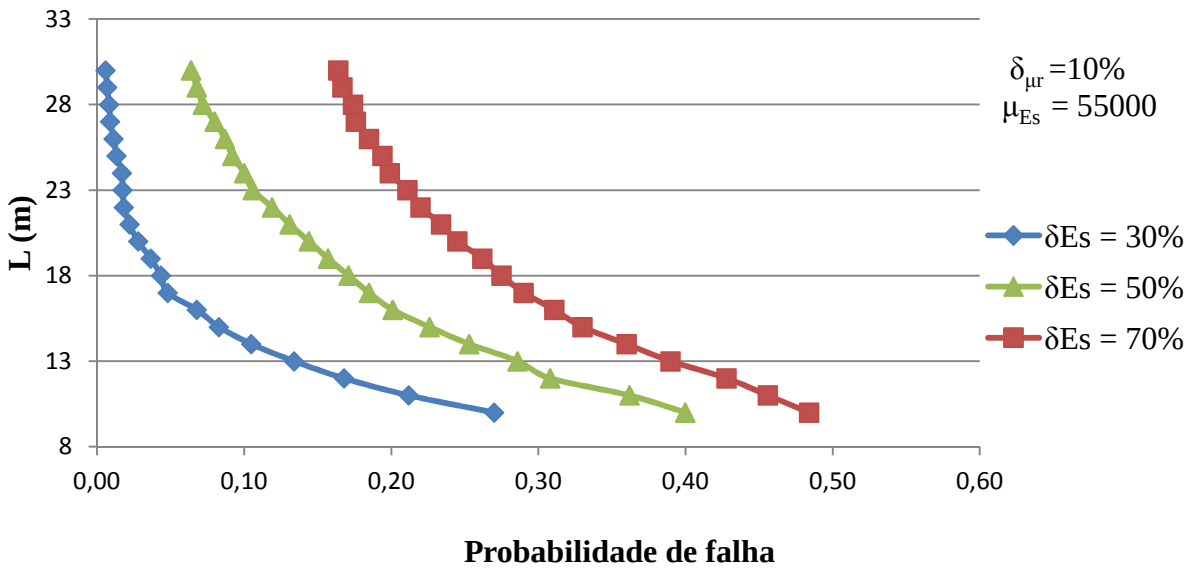

Figura 48 – L x pf x δEs. Elástico.

Hiperbólico			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
18	8,62E-01	8,60E-01	8,63E-01
19	7,83E-01	8,00E-01	8,03E-01
20	6,90E-01	7,10E-01	7,23E-01
21	5,63E-01	6,20E-01	6,63E-01
22	4,90E-01	5,40E-01	5,80E-01
23	4,20E-01	4,86E-01	5,40E-01
24	3,23E-01	4,17E-01	4,86E-01
25	2,70E-01	3,60E-01	4,37E-01
26	2,03E-01	3,13E-01	3,87E-01
27	1,43E-01	2,67E-01	3,57E-01
28	1,17E-01	2,30E-01	3,30E-01
29	1,04E-01	2,08E-01	3,10E-01
30	8,60E-02	1,78E-01	2,97E-01
31	7,65E-02	1,66E-01	2,83E-01
32	6,05E-02	1,52E-01	2,67E-01

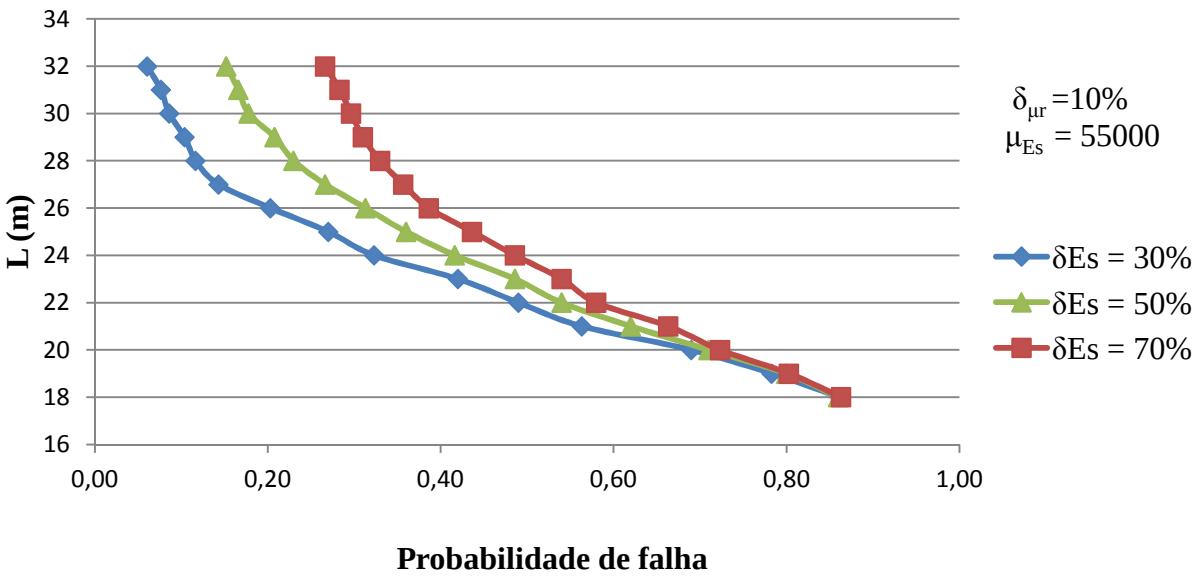

Figura 49 – L x pf x δEs. Hiperbólico.

Híbrido			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
18	8,70E-01	8,53E-01	8,47E-01
19	7,98E-01	8,13E-01	8,00E-01
20	7,63E-01	7,63E-01	7,43E-01
21	6,40E-01	6,57E-01	6,77E-01
22	5,33E-01	5,63E-01	6,10E-01
23	4,27E-01	4,70E-01	5,30E-01
24	3,47E-01	4,13E-01	4,67E-01
25	2,57E-01	3,53E-01	4,13E-01
26	2,10E-01	3,03E-01	3,70E-01
27	1,67E-01	2,57E-01	3,37E-01
28	1,20E-01	2,30E-01	3,17E-01
29	1,03E-01	2,00E-01	2,84E-01
30	8,67E-02	1,67E-01	2,73E-01
31	6,40E-02	1,48E-01	2,53E-01
32	5,40E-02	1,40E-01	2,47E-01

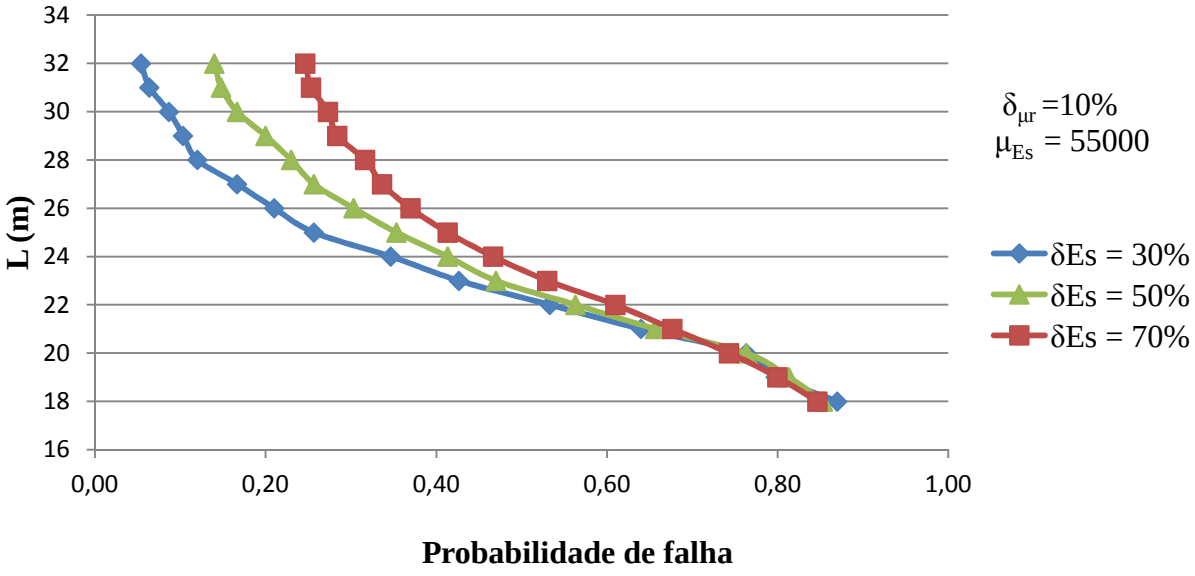

Figura 50 – L x pf x δEs. Híbrido.

Nas Figuras 48 a 50 pode-se observar que somente para comprimentos elevados das estacas, podem-se alcançar níveis de segurança satisfatórios, de acordo com a tabela 5.3.

6.3.2 Verificações de ELU.

Aos modos de falha intraespecíficos, ou seja, que dizem respeito a cada estaca em particular somam-se os modos de falha interespecíficos, que são estabelecidos entre estacas diferentes.

Os modos de 1 a 4 descritos no item 6.2.2 são os modos intraespecíficos no grupo de estacas. O primeiro modo de falha continua sendo desprezado e para o quarto modo de falha considera-se um deslocamento de referência como igual a 10% do diâmetro da estaca, portanto a equação de estado limite deste modo, na unidade de centímetros, é dada por:

$$g_4(\mathbf{x}) = 8,0 - \left| d_c(\mathbf{x}) \right| \tag{6.14}$$

Nos gráficos a seguir, variou-se o comprimento da estaca e o coeficiente de variação do coeficiente de atrito na ruptura μ_r, posto que, de acordo com a análise de sensibilidade realizada no exemplo anterior, este parâmetro, juntamente com o peso específico do solo, são os de maior importância na verificação de ELU. O peso específico do solo foi mantido com coeficiente de variação de 20%.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
18	5,30E-01	5,50E-01	5,80E-01
19	4,10E-01	4,88E-01	5,39E-01
20	3,06E-01	4,30E-01	5,04E-01
21	2,24E-01	3,66E-01	4,60E-01
22	1,66E-01	3,10E-01	4,18E-01
23	1,06E-01	2,56E-01	3,82E-01
24	6,80E-02	2,16E-01	3,44E-01
25	4,50E-02	1,76E-01	3,05E-01
26	2,40E-02	1,43E-01	2,62E-01
27	1,76E-02	1,16E-01	2,26E-01
28	9,50E-03	9,20E-02	2,10E-01
29	6,00E-03	6,70E-02	1,87E-01
30	5,00E-03	5,60E-02	1,59E-01

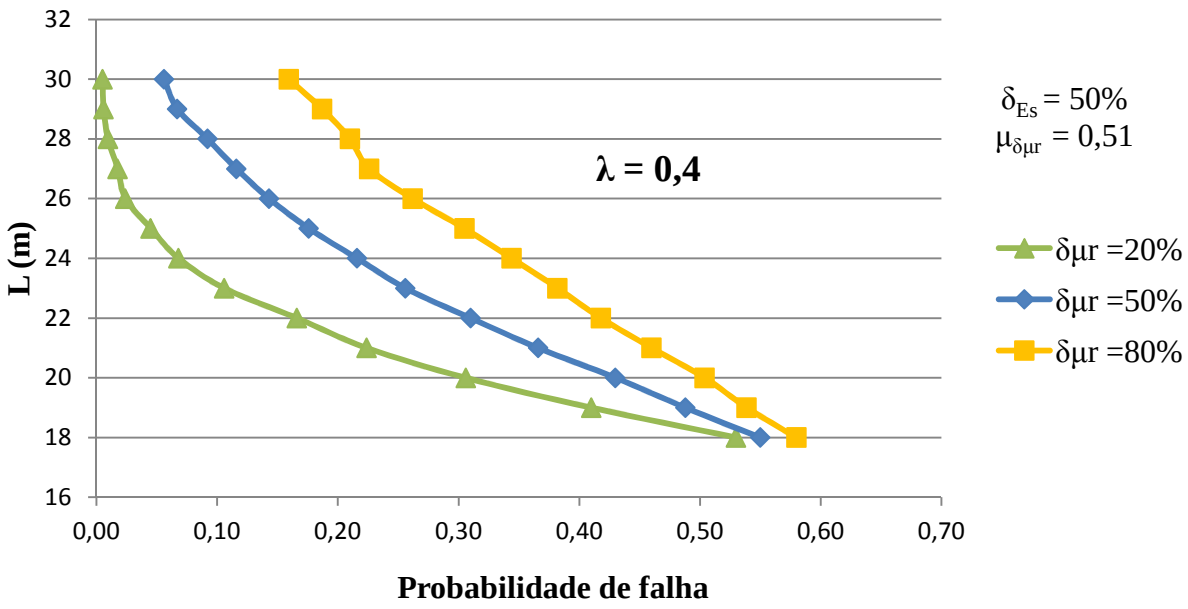

Figura 51 – L x pf x δμr. Hiperbólico.

Híbrido			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
18	5,74E-01	6,16E-01	6,26E-01
19	4,66E-01	5,50E-01	5,82E-01
20	3,54E-01	4,82E-01	5,16E-01
21	2,56E-01	4,10E-01	4,56E-01
22	1,64E-01	3,20E-01	3,84E-01
23	1,09E-01	2,52E-01	3,36E-01
24	6,73E-02	2,04E-01	2,80E-01
25	4,60E-02	1,72E-01	2,36E-01
26	3,00E-02	1,38E-01	1,96E-01
27	2,00E-02	1,04E-01	1,64E-01
28	1,60E-02	7,60E-02	1,34E-01
29	1,30E-02	6,10E-02	1,18E-01
30	6,70E-03	5,62E-02	9,10E-02

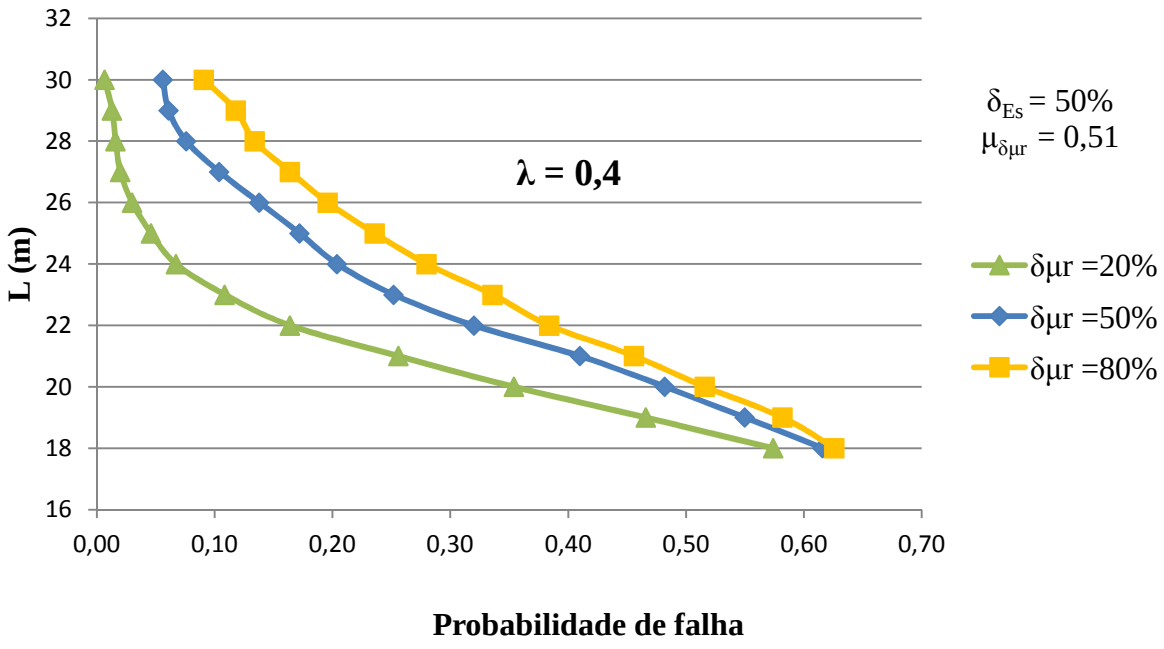

Figura 52 – L x pf x δμr. Híbrido.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
18	3,42E-01	4,48E-01	5,20E-01
19	2,36E-01	3,73E-01	4,55E-01
20	1,62E-01	3,00E-01	4,15E-01
21	9,00E-02	2,50E-01	3,55E-01
22	6,50E-02	2,15E-01	3,20E-01
23	3,70E-02	1,64E-01	2,76E-01
24	2,00E-02	1,32E-01	2,43E-01
25	1,33E-02	1,08E-01	2,18E-01
26	6,50E-03	8,00E-02	1,98E-01
27	6,00E-03	5,80E-02	1,76E-01
28	4,60E-03	4,70E-02	1,45E-01
29	3,33E-03	3,60E-02	1,31E-01
30	1,40E-03	2,60E-02	1,13E-01

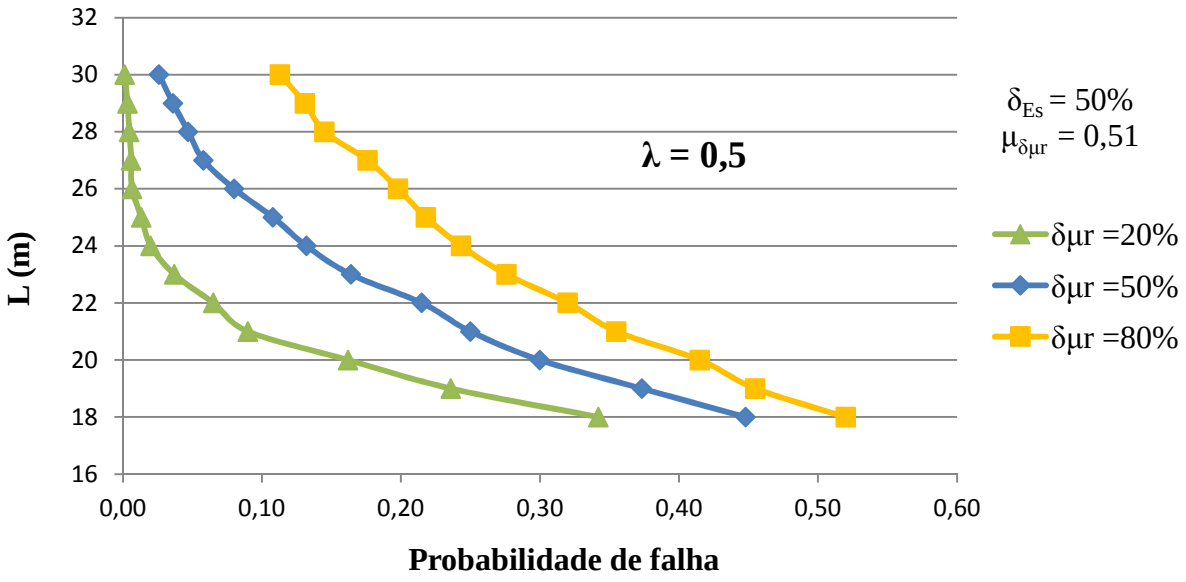

Figura 53 - L x pf x δμr. Hiperbólico.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
18	1,58E-01	3,00E-01	4,18E-01
19	7,80E-02	2,46E-01	3,44E-01
20	5,70E-02	2,00E-01	3,06E-01
21	2,00E-02	1,46E-01	2,74E-01
22	1,30E-02	1,16E-01	2,30E-01
23	7,00E-03	8,60E-02	2,08E-01
24	5,00E-03	6,00E-02	1,80E-01
25	3,14E-03	4,60E-02	1,54E-01
26	2,80E-03	3,40E-02	1,18E-01
27	2,00E-03	2,00E-02	1,08E-01
28	1,50E-03	1,80E-02	9,40E-02
29	7,50E-04	1,33E-02	7,70E-02
30	2,67E-04	1,00E-02	6,20E-02

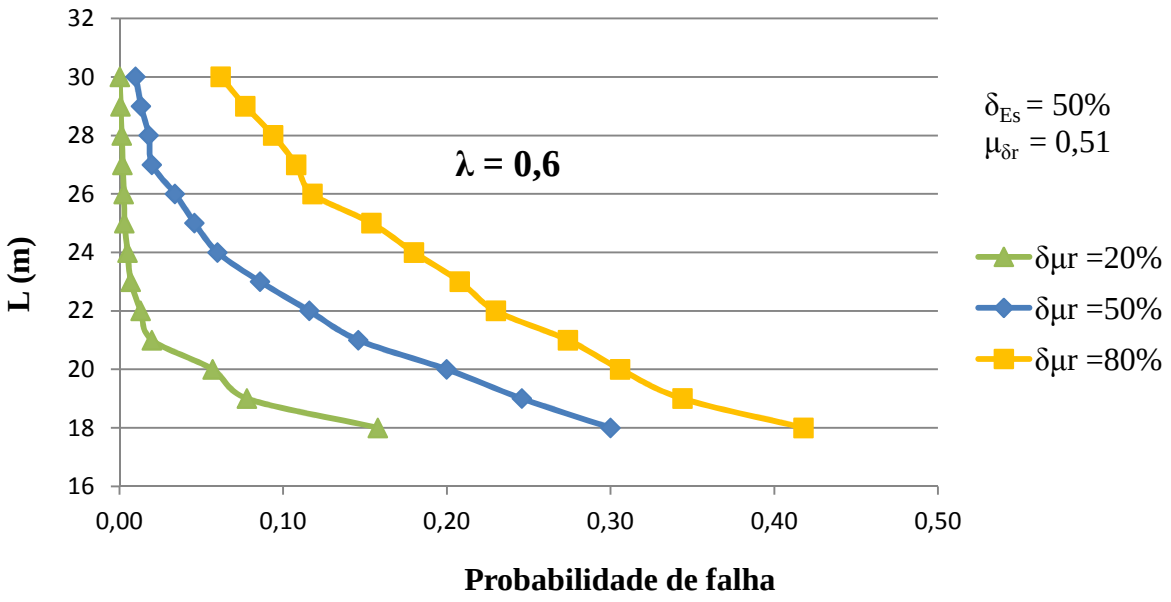

Figura 54 - L x pf x δμr. Hiperbólico.

De acordo com as Figuras 51 a 54, somente para situações em que a ponta da estaca seja capaz de suportar mais de 60% da carga total aplicada na estaca e para comprimentos elevados das estacas, os níveis de segurança para ELU serão satisfatórios.

6.4 Grupo de seis estacas

Neste exemplo, são consideradas estacas pré-moldadas de concreto. Serão adotados os mesmos parâmetros do solo do exemplo anterior, variando-se os carregamentos e as dimensões das estacas e mudando-se também agora os parâmetros do concreto utilizado por se tratar de um elemento pré-moldado, portanto apresentando maior qualidade e menor incerteza quanto à resistência obtida.

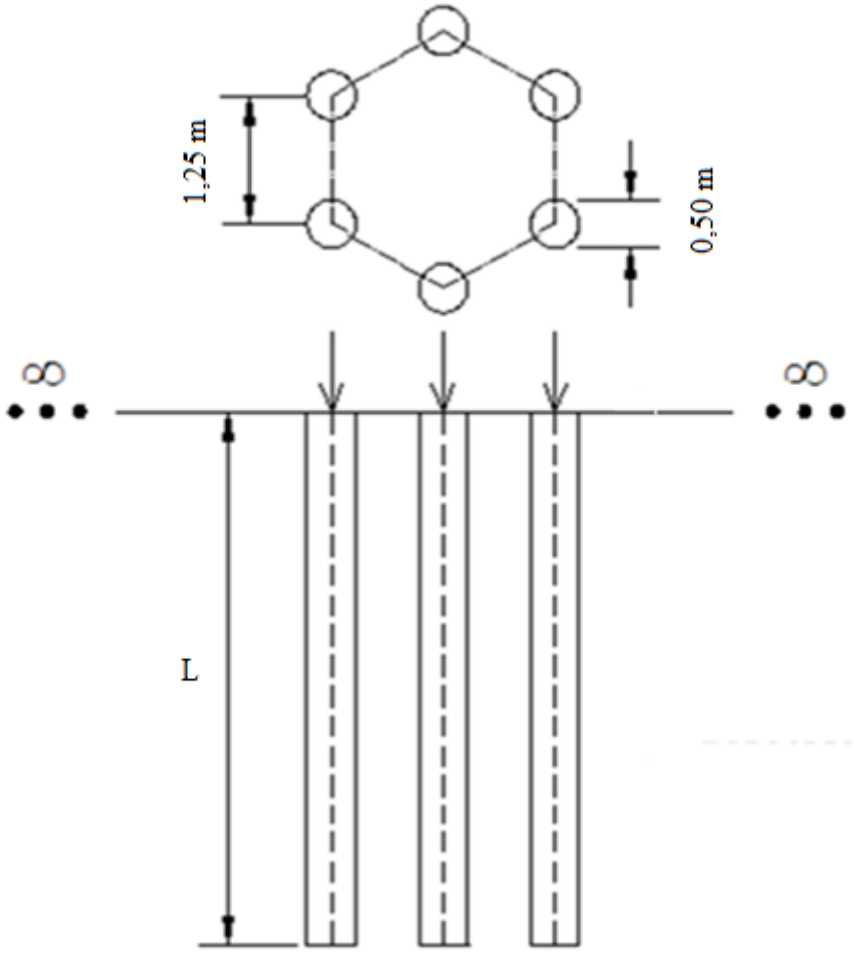

Figura 55 – Grupo de 6 estacas.

Tipo da variável	Nome da variável	Dimensão	Distribuição	Média	Desvio padrão
Carregamentos Estacas 1 a 6	Carga permanente (g)	kN.	Normal	720	72
	Carga variável (q)	kN.	Gumbel	480	96
Materiais Solo e estacas 1 a 6	Módulo de elast. da estaca (E_p)	kN/m^2	Normal	21287367	1064368,35
	Módulo de elast. do solo (E_s)	kN/m^2	Log-normal	55000	$55000\delta_{Es}$
	Peso específico do solo (γ_s)	kN/m^3	Normal	17	3,4
	Coef. De Poisson do solo (ν)	-	Log-Normal	0,3	0,06
Dimensões Estacas 1 a 6	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	L	0,1L
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,5	0,05
Modelos de aderência	Coeficiente de atrito inicial (μ_0)	-	Normal	0,017	0,0017
	Coeficiente de atrito na ruptura (μ_r=μ_f)	-	Normal	0,51	$0,51\delta_{\mu r}$
	Parâmetro da curva de endurec. (A)	-	Normal	0,00008	0,000016
	Parâmetro da curva de amolec. (A_0)	-	Normal	15	1,5
	Espessura da camada de interface (t)	m	Normal	0,003	0,0006
	Tensão inicial na interface (σ_{ni})	kN/m^2	Normal	1	0,2
	Tensão de referência (p_0)	kN/m^2	Normal	1	0
	Deslocamento relativo no pico (u_{tf})	m	Normal	0,0001	0,00001
	Coeficiente de atrito de pico (μ_p)	-	Normal	0,6	0,06

Figura 56 - Modelos probabilísticos das variáveis.

6.4.1 Verificações de ELS

O deslocamento de referencia adotado foi de 10 mm, portando a equação de estado limite de serviço para cada estaca, na unidade de milímetros, fica:

$$g^n(\mathbf{x}) = 12,0 - \left|d_c^n(\mathbf{x})\right|, \quad n = 1,2,3,4,5,6 \tag{6.15}$$

O limite superior bi-modal para a probabilidade de falha do sistema em série formado pelo grupo de seis estacas, de acordo com (5.99), vale:

$$\begin{aligned}
p_f &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) \\
&-P(E_1 \cap E_2) \\
&-máx\left[P(E_1 \cap E_3), P(E_2 \cap E_3)\right] \\
&-máx\left[P(E_1 \cap E_4), P(E_2 \cap E_4), P(E_3 \cap E_4)\right] \\
&-máx\left[P(E_1 \cap E_5), P(E_2 \cap E_5), P(E_3 \cap E_5), P(E_4 \cap E_5)\right] \\
&-máx\left[P(E_1 \cap E_6), P(E_2 \cap E_6), P(E_3 \cap E_6), P(E_4 \cap E_6), P(E_5 \cap E_6)\right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Note-se que como no exemplo de grupo com três estacas, o cálculo dessa probabilidade de falha para ELU é feito somente com o método de Monte Carlo que é o método mais eficiente para confiabilidade de sistemas, como já apontado no item 5.6.4.

Elástico			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
20	1,18E-01	2,80E-01	3,63E-01
21	1,01E-01	2,60E-01	3,43E-01
22	8,90E-02	2,45E-01	3,33E-01
23	7,50E-02	2,23E-01	3,30E-01
24	6,40E-02	2,17E-01	3,20E-01
25	6,33E-02	2,03E-01	3,09E-01
26	5,75E-02	1,91E-01	2,92E-01
27	5,17E-02	1,88E-01	2,93E-01
28	4,75E-02	1,81E-01	2,86E-01
29	3,60E-02	1,75E-01	2,76E-01
30	3,50E-02	1,68E-01	2,64E-01
31	3,00E-02	1,62E-01	2,54E-01
32	2,70E-02	1,50E-01	2,50E-01
33	2,50E-02	1,47E-01	2,48E-01
34	2,20E-02	1,39E-01	2,42E-01
35	2,10E-02	1,35E-01	2,38E-01
36	1,80E-02	1,25E-01	2,34E-01

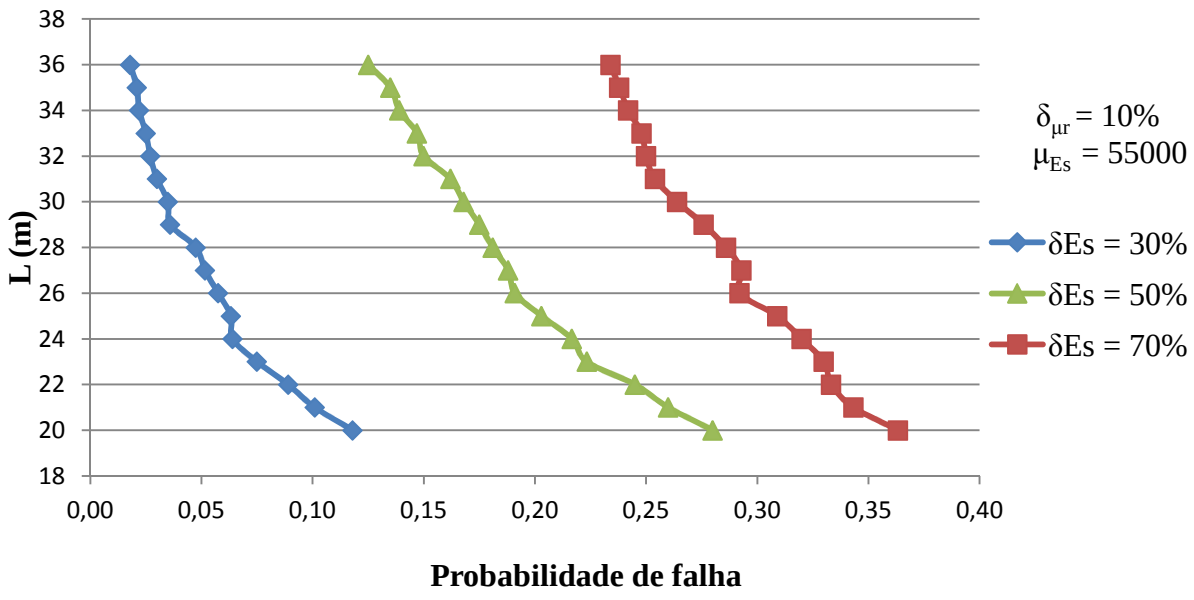

Figura 57 – L x pf x δEs. Elástico.

Hiperbólico			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
25	7,10E-01	7,47E-01	7,70E-01
26	6,66E-01	7,07E-01	7,17E-01
27	6,33E-01	6,73E-01	6,90E-01
28	5,87E-01	6,47E-01	6,90E-01
29	5,80E-01	6,33E-01	6,50E-01
30	5,40E-01	6,20E-01	6,50E-01
31	5,20E-01	6,00E-01	6,20E-01
32	4,80E-01	5,87E-01	6,20E-01
33	4,73E-01	5,60E-01	6,13E-01
34	4,27E-01	5,33E-01	5,87E-01
35	3,93E-01	5,13E-01	5,80E-01
36	3,87E-01	4,93E-01	5,73E-01
37	3,73E-01	4,93E-01	5,40E-01
38	3,73E-01	4,73E-01	5,30E-01
39	3,60E-01	4,67E-01	5,20E-01
40	3,53E-01	4,67E-01	5,10E-01

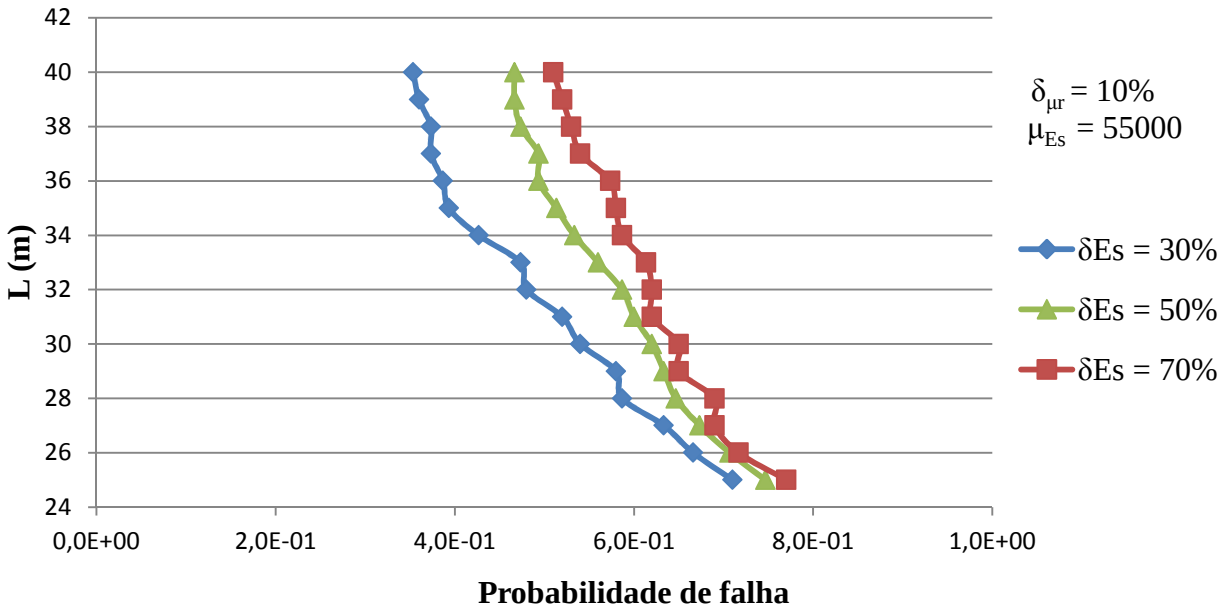

Figura 58 – L x pf x δEs. Hiperbólico

Híbrido			
	δ_{Es} = 30%	δ_{Es} = 50%	δ_{Es} = 70%
L (m)	pf	pf	pf
25	7,40E-01	7,33E-01	7,47E-01
26	6,87E-01	6,93E-01	7,20E-01
27	6,07E-01	6,60E-01	6,67E-01
28	5,73E-01	6,40E-01	6,50E-01
29	5,40E-01	6,20E-01	6,33E-01
30	5,00E-01	5,93E-01	6,20E-01
31	5,00E-01	5,93E-01	6,13E-01
32	4,93E-01	5,80E-01	5,90E-01
33	4,67E-01	5,53E-01	5,80E-01
34	4,43E-01	5,33E-01	5,73E-01
35	4,20E-01	5,13E-01	5,67E-01
36	3,93E-01	4,93E-01	5,67E-01
37	3,80E-01	4,87E-01	5,53E-01
38	3,64E-01	4,87E-01	5,40E-01
39	3,48E-01	4,73E-01	5,40E-01
40	3,45E-01	4,73E-01	5,30E-01

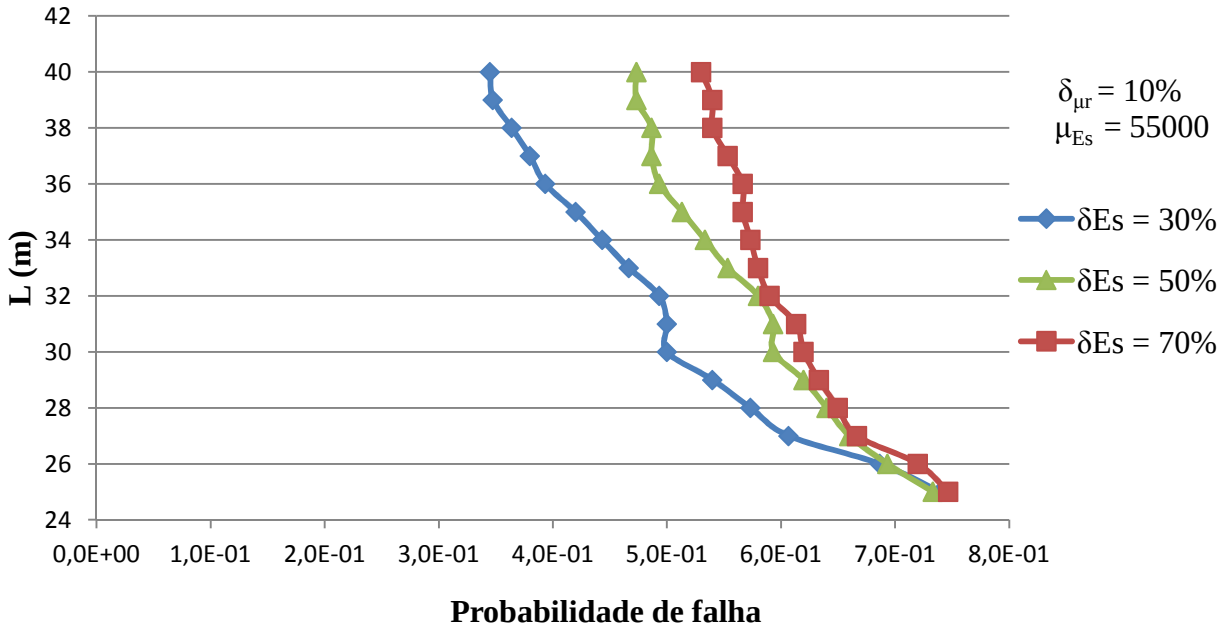

Figura 59 – L x pf x δEs. Híbrido.

Como se pode observar pelas Figuras 57 a 59, quando o escorregamento entre o solo e a estaca é levado em consideração, o dimensionamento da estaca para o ELS fica severamente prejudicado, podendo-se dizer que para o carregamento prescrito, a utilização de estacas pré-moldadas de 50 cm de diâmetro é inviável, não alcançando níveis de segurança satisfatórios, como base na tabela 5.3.

6.4.2 Verificações de ELU

Para situações de ELU a probabilidade de falha do sistema de seis estacas também é estimada por (6.14) com a diferença de que agora cada estaca apresenta os quatro modos de falha já conhecidos, da mesma forma que no exemplo anterior.

O primeiro modo de falha intraespecífico continua sendo desprezado e para o quarto modo de falha considera-se um deslocamento de referência como igual a 10% do diâmetro da estaca, portanto a equação de estado limite deste modo, na unidade de centímetros, é dada por:

$$g_4(\mathbf{x}) = 5,0 - \left|d_c(\mathbf{x})\right| \tag{6.17}$$

As Figuras 60 a 62 mostram que para as cargas atuantes, este grupo de seis estaca também encontra bastante dificuldade para atender o ELU. Isso se deve a cargas variáveis bastante altas (40% da carga total). Um dimensionamento seguro seria obtido mais facilmente aumentando-se o diâmetro das estacas.

Híbrido			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
20	5,73E-01	5,80E-01	6,60E-01
21	4,33E-01	5,00E-01	5,60E-01
22	2,73E-01	4,27E-01	5,00E-01
23	1,93E-01	3,67E-01	4,47E-01
24	1,47E-01	2,83E-01	3,93E-01
25	1,07E-01	2,20E-01	3,47E-01
26	8,00E-02	1,80E-01	3,13E-01
27	5,00E-02	1,47E-01	2,60E-01
28	3,50E-02	1,07E-01	2,20E-01
29	2,29E-02	9,50E-02	1,67E-01
30	1,50E-02	7,33E-02	1,47E-01
31	9,23E-03	6,67E-02	1,13E-01
32	8,75E-03	6,00E-02	8,00E-02
33	5,56E-03	5,33E-02	6,00E-02
34	3,33E-03	4,00E-02	6,00E-02
35	3,33E-03	4,00E-02	4,67E-02
36	2,80E-03	2,67E-02	4,00E-02
37	1,60E-03	2,00E-02	3,33E-02

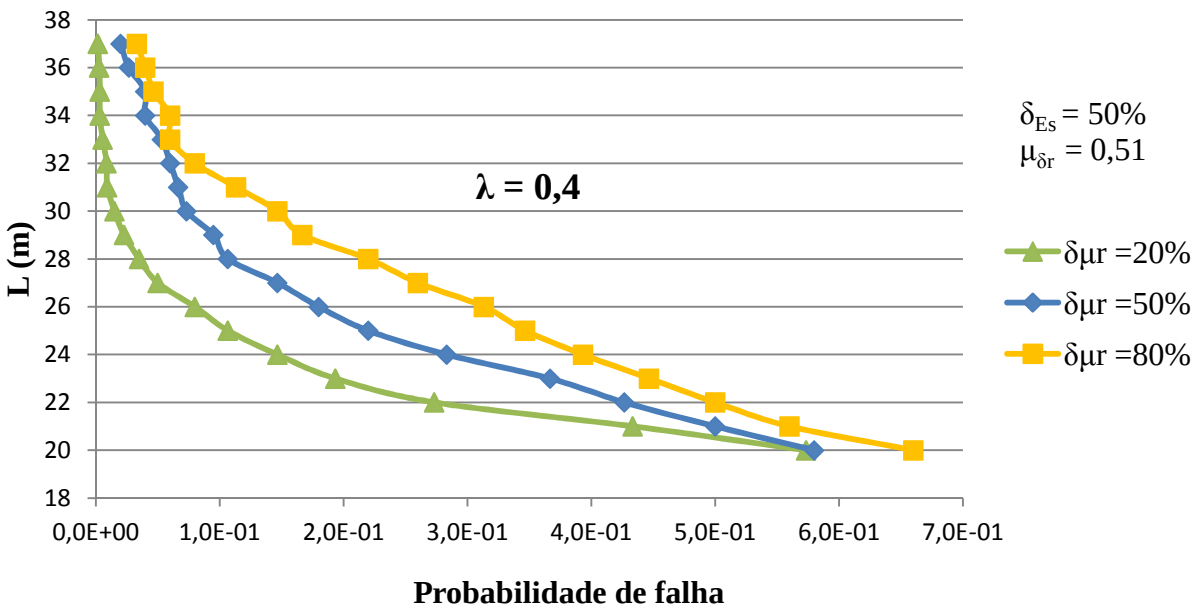

Figura 60 – L x pf x δμr. Híbrido.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
20	5,70E-01	6,60E-01	6,90E-01
21	4,70E-01	5,90E-01	6,00E-01
22	3,87E-01	4,90E-01	5,80E-01
23	2,80E-01	4,50E-01	5,30E-01
24	1,50E-01	4,00E-01	5,10E-01
25	1,30E-01	3,67E-01	4,70E-01
26	1,05E-01	3,07E-01	4,33E-01
27	5,50E-02	2,33E-01	3,93E-01
28	4,00E-02	1,73E-01	3,67E-01
29	2,75E-02	1,33E-01	3,40E-01
30	2,20E-02	1,00E-01	3,20E-01
31	1,40E-02	9,50E-02	2,80E-01
32	1,20E-02	8,00E-02	2,33E-01
33	6,67E-03	6,50E-02	1,67E-01
34	4,40E-03	5,20E-02	1,53E-01
35	2,80E-03	3,00E-02	1,27E-01
36	2,25E-03	2,33E-02	1,15E-01
37	1,50E-03	2,29E-02	1,00E-01

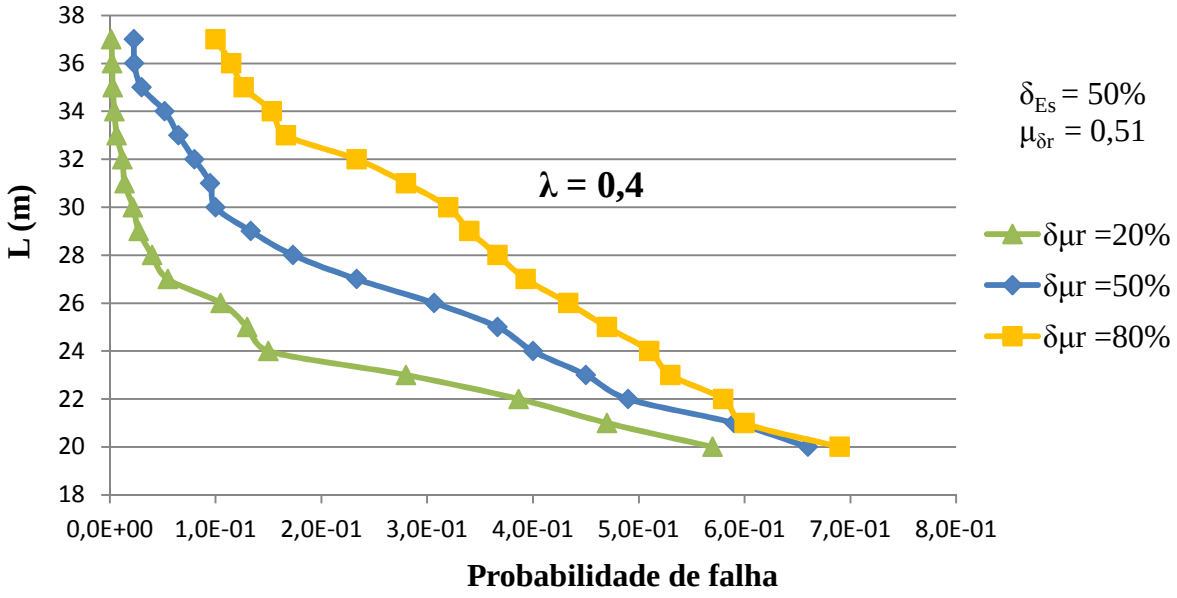

Figura 61 – L x pf x δμr. Hiperbólico.

Hiberbólico			
	$\delta_{\mu r}$ =20%	$\delta_{\mu r}$ =50%	$\delta_{\mu r}$ =80%
L (m)	pf	pf	pf
20	4,00E-01	5,06E-01	5,80E-01
21	3,00E-01	4,67E-01	5,20E-01
22	1,87E-01	4,00E-01	4,93E-01
23	1,33E-01	3,53E-01	4,67E-01
24	1,13E-01	3,00E-01	4,40E-01
25	6,00E-02	2,27E-01	3,87E-01
26	3,50E-02	1,60E-01	3,53E-01
27	2,86E-02	1,20E-01	3,20E-01
28	1,50E-02	1,07E-01	3,07E-01
29	1,17E-02	8,00E-02	2,47E-01
30	7,50E-03	6,67E-02	2,07E-01
31	4,00E-03	5,33E-02	1,53E-01
32	2,80E-03	3,33E-02	1,27E-01
33	2,00E-03	2,33E-02	9,33E-02
34	1,67E-03	2,00E-02	9,33E-02
35	1,50E-03	2,00E-02	8,67E-02
36	1,45E-03	1,43E-02	8,00E-02
37	1,00E-03	1,23E-02	6,33E-02

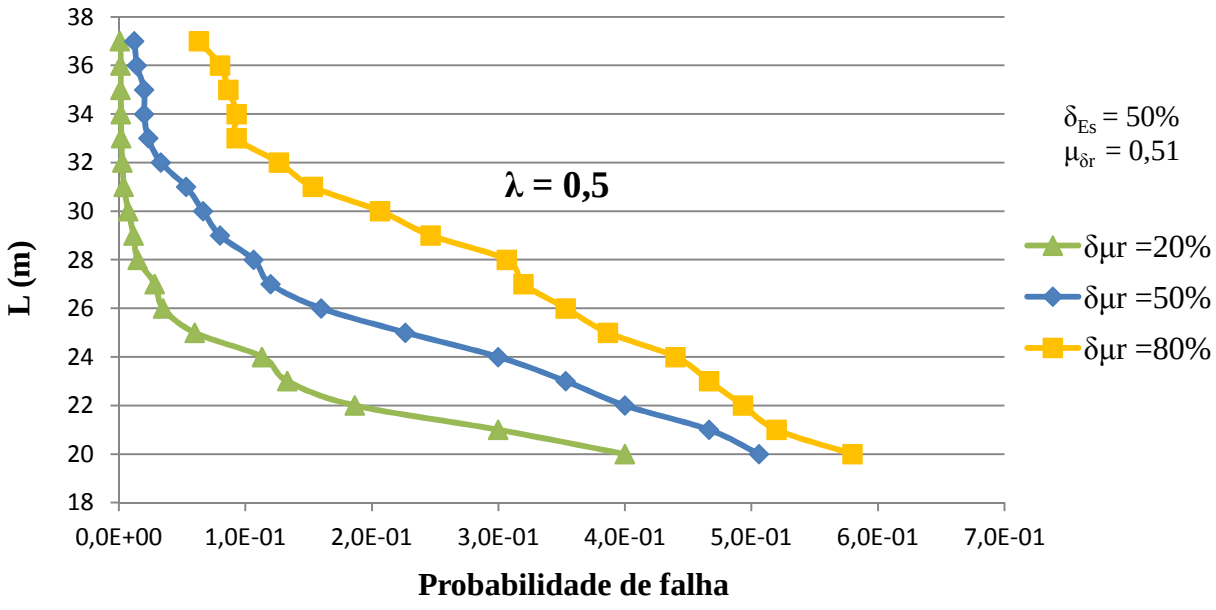

Figura 62 – L x pf x δμr. Hiperbólico.

6.5 Recalque diferencial entre duas estacas isoladas.

Neste exemplo, um novo modo de falha é utilizado. Este modo depende do deslocamento relativo entre as duas estacas da Figura 63. Tal deslocamento relativo, também chamado de recalque diferencial, é da maior importância para o desempenho e segurança das mais diversas estruturas.

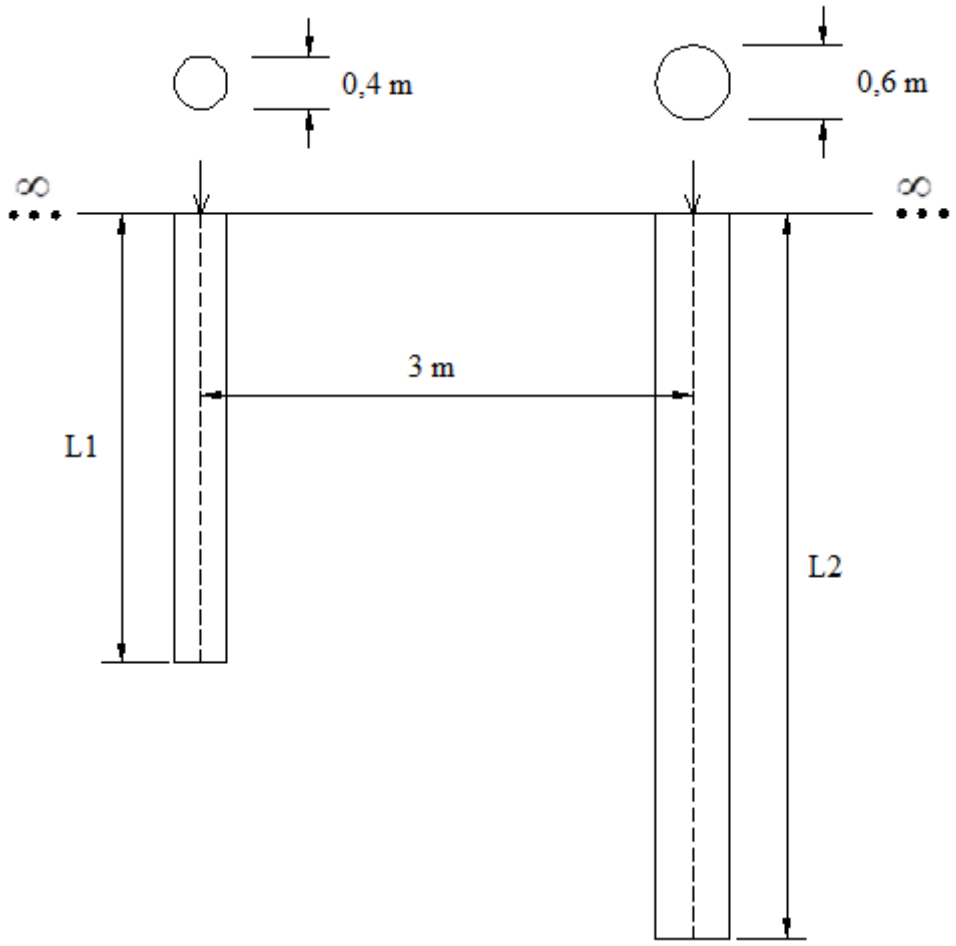

Figura 63 – Duas estacas isoladas. Medida Cálculo do recalque diferencial.

Tipo da variável	Nome da variável	Dimensão	Distribuição	Média	Desvio padrão
Carregamentos Estacas 1	Carga permanente (g)	kN.	Normal	280	28
	Carga variável (q)	kN.	Gumbel	70	14
Carregamentos Estacas 2	Carga permanente (g)	kN.	Normal	720	72
	Carga variável (q)	kN.	Gumbel	180	36
Materiais Solo e estacas 1 e 2	Módulo de elast. da estaca (E_p)	kN/m^2	Normal	21287367	1064368,35
	Módulo de elast. do solo (E_s)	kN/m^2	Log-normal	55000	$55000\delta_{Es}$
	Peso específico do solo (γ_s)	kN/m^3	Normal	17	3,4
	Coef. De Poisson do solo (ν)	-	Log-Normal	0,3	0,06
Dimensões Estacas 1	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	15	1,5
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,4	0,04
Dimensões Estacas 2	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	20	2
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,6	0,06
Modelos de aderênci	Coeficiente de atrito inicial (μ_0)	-	Normal	0,017	0,0017
	Coeficiente de atrito na ruptura (μ_r=μ_f)	-	Log-Normal	0,51	0,102
	Parâmetro da curva de endurec. (A)	-	Normal	0,00008	0,000016
	Parâmetro da curva de amolec. (A_0)	-	Normal	15	1,5
	Espessura da camada de interface (t)	m	Normal	0,003	0,0006
	Tensão inicial na interface (σ_{ni})	kN/m^2	Normal	1	0,2
	Tensão de referência (p_0)	kN/m^2	Normal	1	0
	Deslocamento relativo no pico (u_{tf})	m	Normal	0,0001	0,00001
	Coeficiente de atrito de pico (μ_p)	-	Normal	0,6	0,06

Tabela 6.4 – Modelos probabilísticos das variáveis.

Como se pode encontrar em Velloso e Lopes (2010), diversos autores propuseram valores limites para a rotação relativa ou distorção angular. Estes valores foram transcritos na tabela abaixo.

	Skempton e MacDonald (1956)	Meyerhof (1956)	Polshin e Tokar (1957)	Bjerrum (1963)
Danos estruturais	1/150	1/250	1/200	1/150
Fissuras em paredes e divisórias	1/300	1/500	1/500	1/500

Tabela 6.5 – Valores limites de rotação relativa ou distorção angular.

6.5.1 Verificações de ELS

Tomando como referência o valor proposto por Bjerrum (1963) para o valor limite da rotação relativa que evita fissuras e notando que as estacas estão separadas por três metros de distância, o deslocamento relativo limite entre elas vale:

$$d_{r,\lim} = 3 \cdot \tan \tfrac{1}{500} = 0{,}006\ m \qquad \text{ou} \qquad d_{r,\lim} = 6{,}0\ mm$$

Neste caso, será considerado apenas um evento que caracteriza a falha, a falha por recalque diferencial. Sua equação de estado limite pode ser colocada, na unidade de milímetros, da seguinte forma:

$$g(\mathbf{x}) = 6{,}0 - \left| d_c^1(\mathbf{x}) - d_c^2(\mathbf{x}) \right| \tag{6.18}$$

L1 = 15 m / L2 = 20 m

	Elástico	Hiperbólico	Híbrido
δ_{Es}	pf	pf	pf
30,00%	0,00E+00	5,00E-02	4,67E-02
50,00%	3,23E-05	7,67E-02	6,50E-02
70,00%	1,14E-03	9,50E-02	7,33E-02

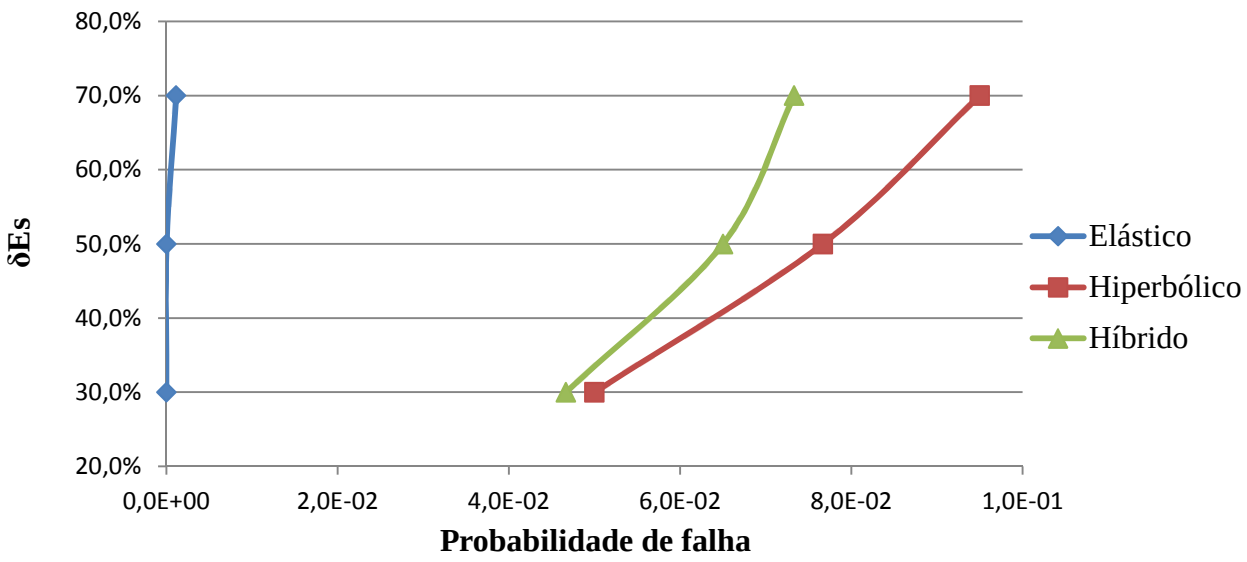

Figura 64 – δEs x pf.

6.5.2 Verificações de ELU

Tomando agora, o valor limite para rotação relativa, proposto por Bjerrum (1963) e que evita danos estruturais, fica-se com:

$$d_{r,\lim} = 3 \cdot \tan 1/150 = 0,02\ m \qquad \text{ou} \qquad d_{r,\lim} = 2,0\ cm$$

Agora, além da possibilidade de cada estaca alcançar a ruína isoladamente, o sistema é considerado falho caso o deslocamento relativo entre as estacas for maior do que o valor calculado acima, assim, neste sistema existe três eventos ligados em série que caracterizam a sua falha. A falha da estaca um (E_1), a falha da estaca dois (E_2) e a falha por recalque diferencial (E_3). O limite superior da probabilidade de falha passa então a ser:

$$\begin{aligned} p_f = {} & P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ & - máx\left[P(E_1 \cap E_3), P(E_2 \cap E_3)\right] \end{aligned} \tag{6.19}$$

A equação de estado limite de E_3 pode ser colocada, na unidade de centímetros, da seguinte forma:

$$g_3(\mathbf{x}) = 2,0 - \left| d_c^1(\mathbf{x}) - d_c^2(\mathbf{x}) \right| \tag{6.20}$$

Os quatro modos de falha intraespecíficos já conhecidos continuam valendo. Para o modo de falha quatro da primeira estaca adota-se um deslocamento máximo de 10% do seu diâmetro e para o modo de falha quatro da segunda estaca também, ficando-se, portanto, com:

$$g_4^1(\mathbf{x}) = 4,0 - d_c^1(\mathbf{x}) \tag{6.21}$$

$$g_4^2(\mathbf{x}) = 6,0 - d_c^2(\mathbf{x}) \tag{6.22}$$

Na verificação de ELU o que se observa é que o modo de falha por recalque diferencial detém um peso muito pequeno na probabilidade de falha do sistema. De fato, o recalque de diferentes estacas das fundações de uma edificação apresentam deslocamentos próximos, e são projetados para isso, de modo a deixar bem distante a possibilidade de recalques diferenciais consideráveis, dado que são muito prejudiciais à construção.

Em concordância com os argumentos acima, para este exemplo ao menos, pode-se afirma que o correto dimensionamento ao ELU de cada uma das duas estacas isoladamente vai garantir a segurança contra os recalques diferenciais. Situações mais preocupantes podem surgir quando da utilização de tipos de fundação muito diferentes para uma mesma edificação, tais como estacas e sapatas. Ou também estacas de tipos diferentes e sujeitas a carregamentos muito diferentes.

6.6 Comparação com o método Aoki-Velloso

Neste exemplo, busca-se validar o modelo numérico desenvolvido através do método proposto por Aoki e Velloso (1975). Este método, já amplamente difundido, fornece a capacidade de carga axial última suportada por uma estaca a partir de correlações com ensaios do tipo CPT ou SPT.

Posto que neste exemplo são utilizados resultados de ensaio do tipo SPT, valem as seguintes equações:

$$R_l = \frac{1}{F2}\sum_{i=1}^{n}\left(N_{SPTmédio,i} \cdot K_i \cdot \alpha_i \cdot \Delta L_i \cdot U\right) \tag{6.23}$$

$$R_p = \frac{1}{F1}\left(N_{SPT,ponta} \cdot K \cdot A_p\right) \tag{6.24}$$

$$R_t = R_l + R_p \tag{6.25}$$

$$R_{adm} = \frac{R_t}{FS} \tag{6.26}$$

Sendo:

R_l : Resistência por atrito lateral

R_p : Resistência da ponta da estaca

$N_{SPTmédio,i}$: Número do SPT médio na camada i

$N_{SPT,ponta}$: Número do SPT na ponta da estaca

ΔL_i : o comprimento da camada de solo i

U : o perímetro da estaca

A_p : Área da ponta da estaca

K_i e α_i : fatores dados pela tabela 6.5

$F1$ e $F2$: fatores dados pela tabela 6.6

FS : Fator de segurança. Usualmente igual a 2.

Tipo de solo	K (kN/m^2)	α (%)
Areia	1000	1,4
Areia siltosa	800	2
Areia silto-argilosa	700	2,4
Areia argilosa	600	3
Areia argilo-siltosa	500	2,8
Silte	400	3
Silte arenoso	550	2,2
Silte arenoso argiloso	450	2,8
Silte argiloso	230	3,4
Silte argilo-arenoso	250	3
Argila	200	6
Argila arenosa	350	2,4
Argila areno-siltosa	300	2,8
Argila siltosa	220	4
Argila silto-arenosa	330	3

Tabela 6.6 – Fatores K e α.

Tipo de Estaca	F1	F2
Pré-moldada	1,75	3,5
Escavada	3	6
Franki	2,5	5

Tabela 6.7 – Fatores F1 e F2.

Tomando como base o exemplo encontrado em Joppert (2007), tem-se uma estaca escavada com 30 centimetros de diâmetro e 10 metros de comprimento em um solo cujo ensaio SPT apresentou o perfil dado na figura 61 abaixo.

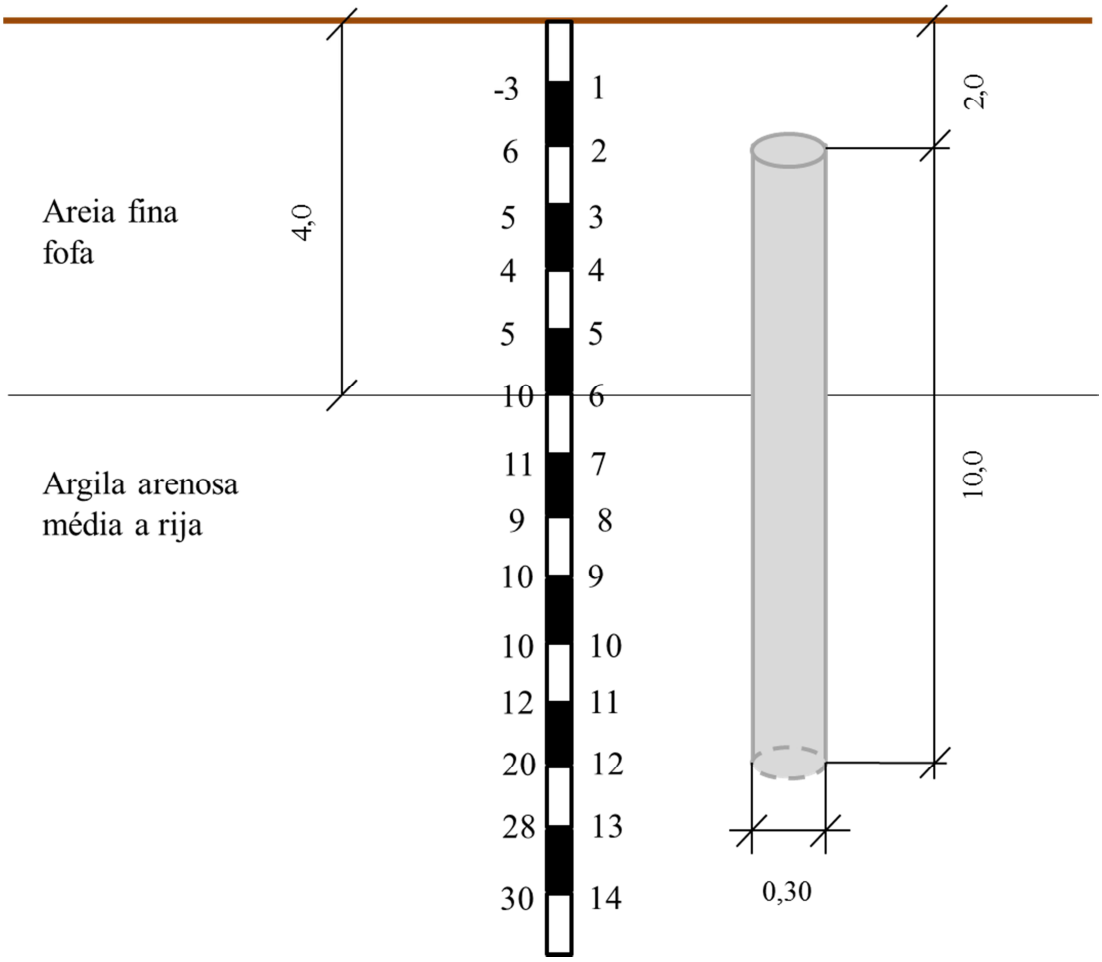

Figura 65 – Ensaio SPT. Adaptado de Joppert (2007).

Para a primeira camada de solo pode-se verificar que a resistência por atrito lateral vale:

$$R_{l1} = 43,87\ kN$$

Já para a segunda camada de solo vale:

$$R_{l2} = 79,0\ kN$$

Para a resistência de ponta pode-se verificar que a carga resistida vale:

$$R_p = 163\ kN$$

Assim, pode-se computar, de acordo com as equações (6.20) e (6.21) a carga admissível resistida pela estaca, que vale:

$$R_{adm} = \frac{285,87}{FS} = 142,94\ kN$$

Passa-se agora para a verificação da confiabilidade da equação (6.26) com a ajuda do modelo de estaca desenvolvido nesta dissertação. Para isso, toma-se a resistência admissível fornecida pelo método de Aoki-Velloso como solicitação do modelo numérico utilizado nos exemplos anteriores.

Da mesma forma como feito em todos os exemplos, a carga vertical aplicada na estaca é composta de uma parcela permanente e uma parcela acidental. Como se optou pela utilização de um coeficiente de segurança global (FS) não há majoração de cargas logo, para situações de projeto a solicitação de cálculo é apenas a soma das duas parcelas, ou seja:

$$S_d = G_k + Q_k \tag{6.27}$$

Igualando-se (6.27) a (6.26), tem-se que:

$$\frac{R_t}{FS} = G_k + Q_k \tag{6.28}$$

Definindo-se ξ como sendo:

$$\xi = \frac{Q_k}{Q_k + G_k} \tag{6.29}$$

Aplicando (6.29) em (6.28) chega-se em:

$$Q_k = \frac{R_t \xi}{FS} \tag{6.30}$$

$$G_k = \frac{R_t \left(1 - \xi\right)}{FS} \tag{6.31}$$

As equações (6.30) e (6.31) serão utilizadas para determinar os parâmetros dos carregamentos permanentes e acidentais para ξ variando de 0 a 1.

Resta agora determinar os parâmetros do solo a serem utilizados no modelo numérico. Como no modelo numérico o solo é homogêneo, não se pode considerar a existência das duas camadas. Para contornar este problema, determina-se o número do SPT médio da cabeça até a ponta da estaca e a partir dele determina-se o módulo de elasticidade do solo através da seguinte correlação (Sandroni, 1991 apud Velloso e Lopes, 2010):

$$E_s = 0,9\left(N_{SPT}\right)^{1,4} \tag{6.32}$$

Como se pode verificar facilmente o SPT médio da cabeça até a ponta da estaca é 9,3, portanto, o módulo de elasticidade vale 20423 kPa.

Para o ângulo de atrito, de acordo com Nunes (1958), pode-se adotar para argilas-arenosas o valor de 30º.

Segundo Pinto (2006), o peso específico natural do solo não varia muito entre os diferentes solos. Assim, adota-se 17 kN/m^2.

O coeficiente de Poisson também não varia muito, sendo adotado o valor de 0,35.

O coeficiente de atrito na ruptura, que é um parâmetro de extrema importância no modelo numérico deste trabalho, pode ser estimado por (Randolph e Wroth, 1981 apud Vick, 2014):

$$\mu = \frac{sen\varphi' \cos\varphi'}{1 + \left(sen\varphi'\right)^2} \tag{6.33}$$

Como o ângulo de atrito vale 30º, tem-se que o coeficiente de atrito vale 0,346.

Considerando que a maior parte do solo é argiloso, o coeficiente de empuxo é dado pela equação (3.68). Adotando-se RSA = 3, obtem-se um coeficiente de empuxo igual a 0,866.

Tipo da variável	Nome da variável	Dimensão	Distribuição	Média	Desvio padrão
Carregamentos	Carga permanente (g)	kN.	Normal	$R_t(1-\xi)/FS$	$0,1R_t(1-\xi)/FS$
	Carga variável (q) - Vida útil de 50 anos	kN.	Gumbel	$0,93R_t\xi/FS$	$0,186R_t\xi/FS$
Materiais	Módulo de elast. da estaca (E_p)	kN/m^2	Normal	21287367	2128736,7
	Módulo de elast. do solo (E_s)	kN/m^2	Log-normal	20423	10211,5
	Peso específico do solo (γ_s)	kN/m^3	Normal	17	3,4
	Coef. De Poisson do solo (ν)	-	Log-Normal	0,35	0,07
Dimensões	Comprimento da estaca (L)	m	Log-normal	10	1
	Diâmetro da estaca (D)	m	Log-normal	0,3	0,03
Modelos de aderência	Coeficiente de atrito inicial (μ_0)	-	Normal	0,017	0,0017
	Coeficiente de atrito na ruptura ($\mu_r=\mu_f$)	-	Normal	0,346	0,0692
	Parâmetro da curva de endurec. (A)	-	Normal	0,00008	0,000016
	Parâmetro da curva de amolec. (A_0)	-	Normal	15	1,5
	Espessura da camada de interface (t)	m	Normal	0,003	0,0006
	Tensão inicial na interface (σ_{ni})	kN/m^2	Normal	1	0,2
	Tensão de referência (p_0)	kN/m^2	Normal	1	0
	Deslocamento relativo no pico (u_{tf})	m	Normal	0,0001	0,0001
	Coeficiente de atrito de pico (μ_p)	-	Normal	0,6	0,06

Tabela 6.8 - Modelos probabilísticos das variáveis.

FS = 2

					Hiperpólico	Híbrido
ξ	μ_g	μ_q	σ_g	σ_q	β	β
0	142,94	0,00	14,29	0,00	3,17	3,26
0,1	128,64	13,29	12,86	2,66	3,17	3,32
0,2	114,35	26,59	11,43	5,32	3,16	3,32
0,3	100,05	39,88	10,01	7,98	3,16	3,35
0,4	85,76	53,17	8,58	10,63	3,16	3,32
0,5	71,47	66,46	7,15	13,29	3,16	3,32
0,6	57,17	79,76	5,72	15,95	3,16	3,32
0,7	42,88	93,05	4,29	18,61	3,12	3,29
0,8	28,59	106,34	2,86	21,27	3,08	3,26
0,9	14,29	119,64	1,43	23,93	3,02	3,19
1	0,00	132,93	0,00	26,59	3,00	3,12

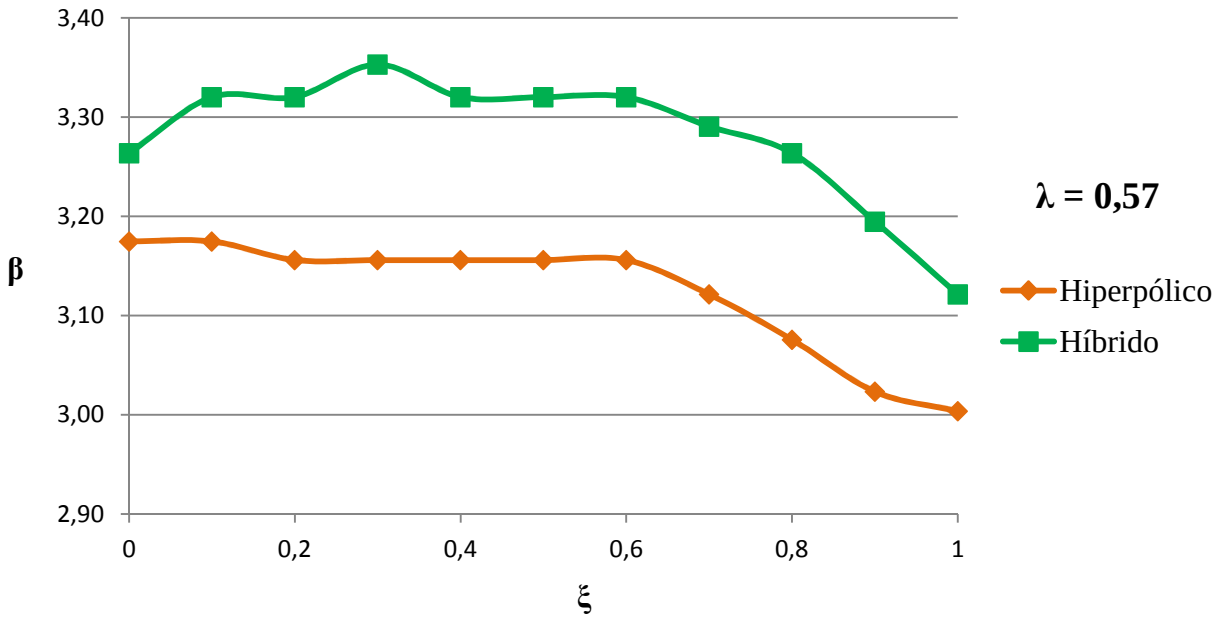

Figura 66 – β x ξ.

Imaginando estar-se tratando de uma estaca de fundação de uma residência ou edifício comercial, pelo o JCSS, as consequências de falha pertencem a classe 2. Além disso, os custos para aplicar as medidas de segurança desejadas são altos, posto que exige diversos ensaios e aluguel de equipamentos caros, assim, o índice de confiabilidade adequando segundo o JCSS seria β = 3,3. Já seguindo as orientações do Eurocode o índice de confiabilidade adequado passa a ser β = 3,8.

A figura 66 mostra portanto, que o a confiabilidade obtida pelo método Aoki-Velloso avaliada segundo o modelo numérico desenvolvido nesta dissertação fica um pouco abaixo daquela preconizada pelas referência citadas, mas mostrando que o modelo numérico é concordante com o método Aoki-Velloso, o que pesa bastante a seu favor.

7. Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo numérico para a verificação da segurança em fundações por estacas. O modelo mecânico determinístico de funcionamento da estaca imersa no solo e sujeita a esforços quaisquer em sua extremidade superior foi baseado na associação entre o método dos elementos de contorno, utilizado para modelar o solo homogêneo semi-infinito com o auxílio da solução fundamental de Mindlin e o método dos elementos finitos, utilizado para modelar a estaca, através de um único elemento de quatro nós e quatorze graus de liberdade. Esta associação revelou-se de fundamental importância para a posterior aplicação dos métodos de confiabilidade estrutural. Principalmente para o método de Monte Carlo, mas também para os outros métodos, são requeridas diversas iterações do modelo mecânico, assim, o tempo de processamento requerido para o cálculo dos deslocamentos da estaca para uma configuração específica de dimensões, materiais e carregamentos deve ser o menor possível. O método dos elementos de contorno é o principal responsável por permitir tal redução do tempo de processamento, já que com ele os graus de liberdade do sistema ficam enormemente reduzidos, comparando-se com um modelo tridimensional do solo feito através do método dos elementos finitos.

O enfoque principal da análise feita neste trabalho foi para estacas carregadas axialmente e portanto, com modelo de plastificação na direção vertical apenas. Critérios de plastificação em estacas carregadas horizontalmente podem ser encontrados, por exemplo, em Barakat, S. A. et. al. (1999).

Nos exemplos desenvolvidos pode-se notar que os deslocamentos obtidos nas estacas, assim como a probabilidades de falha em modos ligados ao deslocamento vertical, apresentam grande diferença quando o escorregamento da estaca em relação ao solo é considerado. Assim, pode-se concluir que a adoção de um modelo não linear é de fundamental importância para que previsões mais realistas e portanto, mais seguras possam ser feitas.

Para o estudo do recalque diferencial obteve-se confiabilidade aceitável para verificação de ELS. Já para verificações de ELU o modo de falha por recalque diferencial apresenta um peso ínfimo em relação aos modos de falha anteriormente utilizados para definir

o ELU. Desse modo, boas indicações no sentido de que o correto dimensionamento das estacas já é capaz de garantir a segurança contra recalque diferencial são alcançadas.

No último exemplo, o que se fez foi buscar indícios de que o modelo numérico desenvolvido neste trabalho produz bons resultados comparando-o com o método de Aoki-Velloso. O resultado foi positivo mostrando o grande potencial do trabalho desenvolvido nesta dissertação.

Propostas para futuros desenvolvimentos

Modelos numéricos mais aprimorados podem ser utilizados para a verificação da confiabilidade de estacas. O refinamento da malha de elementos finitos da estaca permitiria, por exemplo, uma maior precisão na verificação das tensões da interface estaca-solo. A consideração de varias camadas de solo com diferentes módulos de elasticidade, o que não é possível de ser considerado no modelo de Mindlin, tornaria o modelo mais realista, já que as camadas de solo formadas em diferentes eras geológicas levam a diferentes formas de interação solo-estrutura.

O aprimoramento que talvez seja o mais imediato a ser buscado nesse trabalho seria a consideração de critérios de ruptura para a resistência de ponta da estaca, mais sofisticados do que a utilização do parâmetro λ definido em 6.2.2.

Referências Bibliográficas

ABNT (2014). NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ABNT (2010). NBR 6122: Projeto e Execução de Fundações. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ABNT (2003). NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method:** Applications in Solids and Structures. John Wiley Sons, Ltd, 2002. 2 v.

ALMEIDA, V. S. & PAIVA, J. B. (2004). Análise da interação solo não-homogêneo/fundação empregando o mec juntamente com a técnica da rigidez sucessiva. **XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural**.

ALMEIDA, V. S. & PAIVA, J. B. (2007). Static analysis of soil/pile interaction in layered soil by bem/bem coupling. **Advances in Engineering Software**, 38(11-12):835-845.

ANDRADE, P. E. P., DE LIMA, E. T., NACCACHE, E. A. K., RIBEIRO, D. B. (2014). Reliability analysis of vertical piles with a bem-fem formulation. **XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering.**

BANERJEE, P. K. (1976). Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. International **Journal of Mechanical Sciences**, 18(6):293-303.

BANERJEE, P. K. (1978). Analysis of axially and laterally loaded pile groups. In Developments in Soil Mechanics - I, chapter 9, p. 317-343. **Applied Science Publishers, U.K**.

BANERJEE, P. K. & DAVIES, T. G. (1977). Analysis of pile groups embedded in gibson soil. In Proc. **9th Int. Conf. Soil Mechs Fdn Engng.,** volume 1, p. 381-386, Tokyo.

BAUER, J., PULA, W. (2000). Reliability with respect to settlement limit states of shallow foundations on linearly-deformable subsoil. **Computers and Geotechnics**, 26:281-308.

BARAKAT, S. A., MALKAWI, A. I. H., TAHAT, R. H. (1999). Reliability-based optimization of laterally loaded piles. **Structural Safety**, 21:45-64.

BARROS, N. B. F. (2012). **Previsão de recalque e análise de confiabilidade de fundações em estacas hélice contínuas**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil.

BEA, R.G. JIN, Z., VALLE, C., RAMOS, R. (1999). Evaluation of reliability of plataform pile foundations. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,** 125: 696-704.

BECK, A. T. Curso de Confiabilidade Estrutural. São Carlos, 2011.

BORGES, J. F., CASTANHETA, M. (1971). **Structural Safety.** 2th ed. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia civil.

BOTTA, A. S. (2003). **Método dos elementos de contorno para a análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1992). **Boundary Elements**: An Introductory Course. 2th ed. New York: MaGraw-Hill Book Company.

BROMS, B. B. (1964). Lateral resistance of piles in cohesionless soils. **Journal of Soil Mech. and Foundation Eng. Division**, 90:123-156.

BUTTERFIELD, R. & BANERJEE, P. K. (1971). The problem of pile group-pile cap interaction. **Géotechnique**, 21(2):135-142.

CAI, G., LIU, S., & PUPPALA, A. J. (2012). Reliability assessment of cptu-based pile capacity predictions in soft clay deposits. **Engineering Geology**, 141-142:84-91.

CHAN, K. S., KARASUDHI, P., & LEE, S. L. (1974). Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. **Int. J. Solids Structures,** 10:1179-1199.

CHIN, J. T. & CHOW, Y. K. (1990). Numerical analysis of axially loaded vertical piles and pile groups. **Computers and Geotechnics**, 9:273-290.

CHOW, Y. K. & Teh, C. I. (1991). Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering**, 117(11):1655-1668.

CINTRA, J. C. A.(1983). **Carregamento lateral em estacas**. São Carlos. Publicação 059/94. EESC/USP.

CINTRA, J. C. A.; AOKI, N. (1999). **Carga admissível em fundações profundas**. São Carlos. Projeto REENGE. EESC/USP.

DE GENNARO, V., FRANK, R. (2002). Elasto-plastic analysis of the interface behaviour between granular media and structure. **Computers and Geotechnics**, 29:547-572.

EN 1990:2002. (2005). Eurocode: Basis of structural design.

FAN, H., HUANG, Q., & LIANG, R. (2014). Reliability analysis of piles in spatially varying soils considering multiple failure modes. **Computers and Geotechnics**, 57:97-104.

FILHO, R. M. (1999). **Análise da interação estaca-solo via combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno.** Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil.

FILHO, R. M., MENDONÇA. V., & PAIVA, J. B. (2005). Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 29:195-203.

FUSCO, P.B. (1974). **Contribuição ao Estudo da Verificação da Segurança das Estruturas de Concreto.** 1974. 137p. Tese – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

FUSCO, P. B. (1977). **Fundamentos Estatísticos da Segurança das Estruturas**. McGraw-Hill do Brasil, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1977.

HACHICH, C. W.; FALCONI, F. F.; SAES J. L.; FROTA, R. G,; CARVALHO, C. S.; NIYAMA, S. **Fundações: Teoria e Prática**. São Paulo: Pini, 1998a.

HACHICH, C. W. **Modelos Matemáticos e Probabilistas em Engenharia Geotécnica – Uma sistematização em forma de sonata**. Tese apresentada no concurso de Livre Docência do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP, 1998b.

HACHICH, C. W. **Sobre a Segurança nos Projetos de Geotecnia.** 1978. 100 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.

JCSS (2001). Probabilistic model code. Joint Comittee on Structural Safety.

JOPPERT JUNIOR, I. **Fundações e Contenções em edifícios**: qualidade total na gestão do projeto e execução. São Paulo: Pini, 2007.

KIRBY, R. S. et al. **Engineering in History.** [S.I]: McGraw-Hill Book Company, 1956.Na obra: New York, Toronto London.

KLAMMLER, H., MCVAY, M., HERRERA, R., LAI, P. (2013). Reliability based design of driven pile groups using combination of pile driving equations and high strain dynamic pile monitoring. **Structural Safety,** 45:10-17.

L'ECUYER, P. (1988). Efficient and Portable Combined Random Number Generator. **Communications of the ACM**, 6:742-774.

MADSEN, H.O.; KRENK, S.; LIND, N.C. (1986). **Methods of Structural Safety**. New Jersey: Prentice-Hall, 1986.

MASSAD, F. **Obras de Terra**: curso básico de geotecnia. São Paulo: Oficina de Textos, 2010.

MEHANNY, S. S. F., & Rashed, Y. F. (2011). A probabilistic boundary element method applied to the pile dislocation problem. **Engineering Structures**, 33:2919-2930.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. Chichester New York: John Wiley, 1999.

MENDONÇA, A. V. & PAIVA, J. B. (2000). A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. **Engineering analysis with boundary elements**, 24(3):237-247.

MENDONÇA, A. V. & PAIVA, J. B. (2003). A elastostatic fem/bem analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. **Engineering analysis with boundary elements,** 27:919-933.

MINDLIN, R. D. (1936). Force at a point in the interior of semi-infinite solid. **Physics**, 7:195-202.

MYLONAKIS, G. & GAZETAS, G. (1998). Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. **Géotechnique**, 48(1):55-72.

NUNES, A. J. C. (1958). **Curso de mecânica dos solos e fundações**. Porto Alegre: Globo, 1958.

PINTO, C. S. (2006). **Curso básico de mecânica dos solos**. São Paulo: Oficina de Textos, 2006.

POULOS, H. G. (1968). Analysis of the settlement of pile groups. **Géotechnique**, 18(3):449-471.

POULOS, H. G. & DAVIES, H. G. (1968). The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, 18:351-371.

PULA, W. & ROZANSKI, A. (2012). Reliability of rigid piles subjected to lateral loads. **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, 12:205-218.

RIBEIRO, D. B.(2009). **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise de interação solo-estrutura via combinação Mec/Mef.** Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil.

RIBEIRO, D. B. & PAIVA, J. B. (2014). A new be formulation coupled to the fem for simulating vertical pile groups. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 41:1-9.

ROCHA, F. C. (2009). **Análise de domínios reforçados através da combinação mec/mef considerando modelos de aderência**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. John Wiley Sons, 1981.

SAID, I.,DE GENNARO, V., FRANK, R. (2009). Axisymetric finite element analysis of pile loading tests. **Computers and Geotechnics**, 36: 6-19.

SANTOS, M. S. **Inferência Bayesiana na Avaliação da Segurança de Fundações em Estacas de Deslocamento**. 2007. 157p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTOS, D. M., STUCCHI, F.R., BECK, A. T. (2014). Reliability of beams designed in accordance with Brazilian codes. **Ibracon structures and materials journal**, 5:723-746.

SCHNEIDER, J. **Introduction to Safety and Reliability of Structures**. Zurich: IABSE/AIPC/IVBH; 1997. 138p.

TA, L. D. & SMALL, J. C. (1998). Analysis and performance of piled raft foundations on layered soils-case studies. **Soil and Foundations**, 38(4):145-150.

TANDJIRIA, V., TEH, C. I., & LOW, B. K. (2000). Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods. **Structural Safety**, 22:335-355.

TEIXEIRA, A., HONJO, Y., CORREIA, A. G., & HENRIQUES, A. A. (2012). Sensitivity analysis of vertically loaded pile reliability. **Soils and Foundations**, 6:1118-1129.

TELLES, P. C. da Silva. **História da engenharia no Brasil**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.; 1984.

VARGAS, M. et al. **Contribuições para a história da engenharia no Brasil.** São Paulo: EPUSP, 1994.

VELLOSO, D.; LOPES, F. R. **Fundações**. São Paulo: Oficina de Textos, 2010.

VICK, G. B. **Método dos elementos de contorno aplicado na análise do escorregamento de estacas**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ZAGOTTIS, D. L. **Introdução da Segurança no Projeto Estrutural.** São Paulo: Departamento de Livros e Publicações do Grêmio Politécnico, 1976. Apostila do curso de Pontes e Grandes Estruturas.

ZHANG, L., TANG, W. H., NG, W. W. C. (2001). Reliability of Axially Loaded Driven Pile Groups. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,** 127:1051-1060.

WANG, Y., CAO, Z. (2013). Probabilistic characterization of Young's modulus of soil using equivalent samples. **Engineering Geology**, 159: 106-118.

Apêndice A - Teste Qui-Quadrado do Gerador de Números Aleatórios

O teste Qui-Quadrado é um teste que permite verificar a aderência de um dado fenômeno a uma determinada distribuição de probabilidades. Para o caso em questão, deseja-se verificar se o gerador de números aleatórios obedece a uma distribuição uniforme de probabilidades, ou seja, todo número gerado por ele tem igual probabilidade de ser gerado. Assim, a hipótese nula e a hipótese alternativa são:

$$\begin{aligned} H_0 &: f_X(x) = U(0,1) \\ H_1 &: f_X(x) \neq U(0,1) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Onde $U(0,1)$ representa a distribuição uniforme para a variável x no intervalo de 0 a 1.

A estatística utilizada para este teste obedece a distribuição Qui-Quadrado de probabilidades e é definida da seguinte maneira:

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{A.2}$$

Sendo O_i a frequência observada da variável X para o intervalo i de seu domínio e E_i a frequência esperada da variável X para o intervalo i de seu domínio.

Para o teste do gerador de números aleatórios, são definidos k intervalos não sobrejacentes contidos em $[0,1]$. A probabilidade de que um número esteja em qualquer um destes intervalos deve ser, de acordo com a distribuição uniforme de probabilidades, igual a $1/k$. Logo, o número esperado de observações em qualquer um destes intervalos vale $E_i = N/k$, com N igual ao número total de observações da variável. Assim, (A.2) passa a ser escrita como:

$$\chi^2_{obs} = \frac{k}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(O_i - \frac{N}{k}\right)^2 \qquad \text{(A.3)}$$

A hipótese nula é aceita se a seguinte condição for verificada:

$$P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{obs}\right) > \alpha$$

O valor α é definido como nível de significância. Ele é escolhido arbitrariamente e representa o quão significativamente bom o resultado da estatística deve ser. Para valores maiores de α, maior a exigência para a aceitação da hipótese nula. Seu valor mais usual é $\alpha = 0,05$.

Definindo-se 20 intervalos de comprimento 0,05 para os valores contidos entre 0 e 1, e para um número crescente de observações, obtém-se:

N	χ^2_{obs}	$P(\chi^2 \geq \chi^2_{obs})$
10^2	12,80	0,85
10^3	15,32	0,70
10^4	11,06	0,92
10^5	15,70	0,68
10^6	11,53	0,90
10^7	25,65	0,14
10^8	22,74	0,25
10^9	18,46	0,49
10^{10}	21,90	0,29

Tabela 7.1 – Teste Qui-Quadrado GMLC

Como nenhum valor da terceira coluna da tabela é inferior ao valor de alfa, pode-se afirmar que o gerador de números aleatórios passou no teste.

Apêndice B – Cálculo da matriz de transformação $\mathbf{A}$.

Conforme colocado no capítulo 5, a matriz $\mathbf{A}$ é a matriz de transformação para o espaço normal padrão não correlacionado. Dentre os diversos métodos existentes para encontra-la, destaca-se a decomposição de Cholesky por apresentar baixo custo computacional, posto que nele a matriz $\mathbf{A}$ é triangular inferior.

De (5.18) e (5.46) sabe-se que:

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_Z \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{B.1}$$

Isolando $\mathbf{C}_X$ chega-se em:

$$\mathbf{C}_Z = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} \mathbf{I} \mathbf{A}^{-1} \tag{B.2}$$

Como $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{-1}}$, pode-se escrever:

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \tag{B.3}$$

A equação (B.3) forma um sistema de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

Para resolver este sistema de equações acima é válida a seguinte fórmula de recorrência (RUBINSTEIN, 1981):

$$a_{ij} = \frac{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} t_{jk}}{\left(c_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{jk}^2 \right)^{1/2}} \tag{B.5}$$