

**PATRÍCIA HELENA DE ANDRADE SARTORI OLIVEIRA**

**PROCESSO APROXIMADO PARA CONSIDERAÇÃO DA NÃO-  
LINEARIDADE FÍSICA DE PILARES EM CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do Título de Mestre  
em Engenharia

São Paulo

2004

**PATRÍCIA HELENA DE ANDRADE SARTORI OLIVEIRA**

**PROCESSO APROXIMADO PARA CONSIDERAÇÃO DA NÃO-  
LINEARIDADE FÍSICA DE PILARES EM CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do Título de Mestre  
em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia de Estruturas

Orientador:  
Prof. Doutor Ricardo Leopoldo e Silva  
França

São Paulo

2004

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Oliveira, Patrícia Helena de Andrade Sartori**  
**Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado / P.H.A.S. Oliveira. -- São Paulo, 2004.**

p.

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.**

**1.Rigidez de pilares 2.Não-linearidade física de pilares I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.**

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Patrícia Helena de Andrade Sartori Oliveira

Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter me dado esta oportunidade.

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Ricardo Leopoldo e Silva França, pela atenção sempre concedida, constante incentivo e diretrizes que me fizeram evoluir possibilitando a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, pelo apoio constante durante esta caminhada e estímulo nos estudos.

Aos meus irmãos, Fernando e Marcelo, pela força e eterna amizade.

Ao meu marido, pelo companheirismo e carinho.

Aos meus amigos, pelo incentivo pela conquista deste título.

E agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta estudos referentes à rigidez de pilares em análises de segunda ordem. É discutida a questão dos parâmetros necessários para definir o comportamento reológico de peças de concreto armado e também são expostos os fenômenos de instabilidade das estruturas.

Para o fornecimento de dados de rigidez para análises não-lineares, utilizam-se relações momento-normal-rigidez secante. Para isto, através da linearização das relações momento-curvatura, são construídos ábacos de curvas de interação, acopladas a valores de rigidez secante adimensionais, para seções retangulares, circulares e vazadas. Com a finalidade de demonstrar a aplicabilidade, apresentam-se exemplos de utilização desses ábacos para dimensionamento e verificação de pilares. Nestes exemplos a não-linearidade geométrica é considerada através do processo P-delta ou pelos processos simplificados como o do Pilar-Padrão e do Pilar-Padrão Melhorado, de acordo com a Norma Brasileira NBR 6118:2003. A não-linearidade física é considerada pelos ábacos de curvas de interação momento-normal-rigidez secante adimensionais ou pela expressão aproximada da rigidez secante. Além disso, são expostos métodos simplificados de cálculo adotados pelo boletim 16 da FIB e pelo Eurocode-2 para consideração da não-linearidade e comparados com a Norma Brasileira.

Palavras-chave: análise não-linear. rigidez de pilares em concreto armado.

## **ABSTRACT**

This work presents studies about the stiffness of columns in second order analysis. It is discussed the issue about the necessary parameters to define the rheological behavior of reinforced concrete pieces and it is also exposed the occurrences of structure instability.

It is used relations of secant normal-stiffness-moment for the specification of stiffness data used in non-linear analysis. In this case, through the linearity of curvature-moment relations, curvature interaction diagrams are formed and incorporated to secant not dimensional stiffness values for rectangular, circular and hollow sections. With the objective to demonstrate its application, it is presented examples of use for the diagrams in column design and verification.

In these examples the geometrical non-linearity is considered through the P-delta process or through the simplified processes like the Standard-Column and the Improved-Standard-Column, in accordance with the Brazilian Standard NBR 6118:2003. The physical non-linearity is considered through the diagrams of secant normal-stiffness-moment interactions or through the approximate identification of secant stiffness. In addition, it is shown the simplified calculation methods used by FIB Journal 16 and by Eurocode-2 for consideration of the non-linearity and comparison with the Brazilian Standard.

Keywords: non-linear analysis. stiffness of columns in reinforced concrete.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1- Introdução.....	01
2- A instabilidade e deformabilidade em estruturas de concreto armado.....	04
2.1- Fenômenos de Instabilidade em estruturas.....	04
2.2- A deformabilidade das estruturas de concreto armado.....	08
3- Parâmetros de projeto para análises não-lineares de segunda ordem em estruturas reticuladas de concreto armado.....	10
3.1- Hipóteses Básicas.....	10
3.2- Diagramas Tensão-Deformação para o Concreto.....	12
3.3- Relações Constitutivas para o Concreto.....	14
3.4- Consideração da Deformação Lenta.....	17
3.5- Relações Constitutivas para o Aço.....	18
3.6- Introdução da Segurança nas Ações, para Análises Não-Lineares de Segunda Ordem.....	19
4- Utilização de valores de rigidez secante baseados na linearização das relações momento-curvatura, para análises de Segunda Ordem.....	22
4.1- Definição da rigidez secante adimensional ou relativa.....	23
4.2- Proposta de linearização das relações momento-curvatura .....	24
4.3- Procedimento para obtenção de $\kappa$ e Construção de ábacos de interação para seções retangulares e circulares, cheias e vazadas.....	27
4.4- Expressão aproximada da rigidez adimensional $\kappa$ .....	32
4.5- Processos Simplificados para solução de pilares isolados utilizando rigidez secante adimensional .....	35
4.5.1- Método do Pilar-Padrão com rigidez $\kappa$ aproximada da NBR 6118:2003.....	35
4.5.2- Método do Pilar-Padrão Melhorado com rigidez secante adimensional.....	37



5-	Estudo para definição do conjunto de dimensões e arranjos de armaduras de pilares utilizados atualmente nas edificações.....	42
5.1-	Estudo das possibilidades de arranjos de armaduras de pilares atendendo a NBR 6118:2003.....	42
5.1.1-	Dimensões limites da peça.....	43
5.1.2-	Disposição relativa às armaduras.....	43
5.1.3-	Valores de taxas de armaduras longitudinais limites.....	44
5.2-	Limites de variação de $d'/h$ necessários para cada tipo de arranjo de seção retangular cheia.....	46
5.3-	Limites de variação de $d'/h_0$ necessários para cada tipo de arranjo de seção retangular vazada.....	59
5.4-	Limites de variação de $d'/h$ necessários para cada tipo de arranjo de seção circular.....	70
5.5-	Escolha dos arranjos genéricos para construção dos ábacos.....	72
6-	Aplicabilidade a problemas com flexão normal composta.....	76
6.1-	Exemplo 1 – Comparação de exemplo mostrado no boletim de da FIB com a NBR 6118:2003.....	77
6.1.1-	Métodos de cálculo adotados pela FIB – boletim 16.....	78
6.1.2-	Métodos de cálculo adotados pela NBR 6118:2003.....	83
6.1.2.1-	Processo do Pilar-Padrão com rigidez $\kappa$ aproximada.....	83
6.1.2.2-	Processo do Pilar-Padrão Melhorado com rigidez $\kappa$ aproximada.....	86
6.2-	Exemplo 2 – Comparação do Método do Eurocode 2 utilizando dinamogramas e o do Processo do Pilar-Padrão Melhorado.....	89
6.2.1-	Método do Eurocode 2 utilizando Dinamogramas.....	89
6.2.2-	Processo do Pilar-Padrão Melhorado com $\kappa$ do ábaco.....	94
6.3-	Exemplo 3 – Pilar com seção retangular vazada.....	97
6.4-	Exemplo 4 – Comparação entre o Método Geral e o Método Aproximado para consideração da não-linearidade física dos materiais .....	104
7-	Conclusão.....	121
	Referências Bibliográficas.....	123

Anexo A - Ábacos de interação adimensionais Momento-Normal-Rigidez Secante para seções retangulares e circulares submetidos à flexão normal composta.....	125
Anexo B - Tabela com o estudo das possibilidades de disposição das armaduras e das dimensões da seção transversal.....	208

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Pilar solicitado excêntricamente.....	04
Figura 2- Bifurcação da trajetória de equilíbrio.....	05
Figura 3- Ponto limite.....	06
Figura 4- Ruínas por ruptura do material e por instabilidade.....	07
Figura 5- Domínios de deformações que caracterizam o Estado Limite Último.....	11
Figura 6- Diagrama tensão-deformação para o concreto para cargas de curta duração.....	12
Figura 7- Diagrama aproximado tensão-deformação do concreto para cargas de longa duração.....	14
Figura 8- Comparação do diagrama parábola-retângulo e o de Grasser para $N_d=1500\text{kN}$ .....	16
Figura 9- Diagrama tensão-deformação idealizado para o aço.....	18
Figura 10- Diagrama momento-curvatura esquemático.....	21
Figura 11- Linearização proposta por Kordina e Quast (1986).....	25
Figura 12- Linearização Proposta.....	26
Figura 13- Curvas de interação dos valores últimos para várias taxas de armadura.....	28
Figura 14- Processo de obtenção de $\kappa$ .....	28
Figura 15- Curvas de interação e valores de $\kappa$ correspondentes.....	29
Figura 16- Arranjos de armadura elaborados por França (1991).....	30
Figura 17- Arranjos de armadura elaborados no trabalho.....	31
Figura 18- Gráficos de comparação da rigidez secante $\kappa$ obtida pelos ábacos e obtidas pela expressão aproximada.....	34
Figura 19- Solução gráfica da expressão de $\kappa$ aproximada.....	36
Figura 20- Pilar-Padrão Melhorado com carregamento de cálculo dividido por $\gamma_{f3}$ .....	37
Figura 21- Relação Momento-curvatura.....	38
Figura 22- Verificação do método do Pilar-Padrão.....	41
Figura 23- Disposições das armaduras.....	43
Figura 24- Consideração de $d'/h$ e $d'/b$ na tabela.....	47
Figura 25- Arranjos definidos para seção retangular cheia.....	56

Figura 26- Seção retangular vazada.....	59
Figura 27- Seção retangular vazada adotando a espessura média.....	60
Figura 28- Comparação entre a seção real (A, B, C, D, E e F) e a seção equivalente (A', B', C', D', E' e F').....	61
Figura 29- Casos de comparação das seções para $\rho=0,5\%$ .....	63
Figura 30- Casos de comparação das seções para $\rho=2,0\%$ .....	65
Figura 31- Arranjos para seção retangular vazada.....	67
Figura 32- Disposição da armadura em camadas.....	68
Figura 33- Disposição das barras de aço de duas maneiras.....	68
Figura 34- Comparação da resistência da peça para dois tipos de disposição das barras de aço.....	69
Figura 35- Seção circular cheia e vazada.....	70
Figura 36- Disposição da armadura em camadas para seção circular.....	70
Figura 37- Comparação de curvas de interação Força Normal – Momento Fletor....	71
Figura 38- Disposições das barras de aço para mesma taxa de armadura.....	72
Figura 39- Curvas de interação Força Normal – Momento Fletor resistentes para os arranjos reais.....	73
Figura 40- Disposições das barras de aço pra seção circular.....	74
Figura 41- Curvas de interação Força Normal – Momento Fletor resistentes para diversas disposições das barras, utilizando diâmetros equivalentes, e mesma taxa de armadura ( $\rho=2,55\%$ ) para seção circular de 40cm de diâmetro.....	74
Figura 42- Discretização da seção circular em poligonal.....	75
Figura 43- Curva de interação Momento-Normal para $f_{ck}=35\text{MPa}$ , seção transversal retangular constante e $d'/h = 0,10$ .....	81
Figura 44- Momento resistente $M_{Rd}$ em no ELU em função da taxa de armadura $\omega$ para $N_d=1600\text{kN}$ .....	81
Figura 45- Para $l_0/h=20$ , seção transversal retangular com armadura distribuída nos dois lados opostos com $d'/h = 0,10$ e concreto com $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .....	89
Figura 46- Tipos de carregamento e arranjos adotados para construção dos dinamogramas.....	90

Figura 47- Dinamograma para pilar em balanço, com seção retangular constante e força concentrada no topo.....	93
Figura 48- Desenho esquemático do processo P- $\Delta$ .....	101
Figura 49- Geometria da peça.....	104
Figura 50- Armaduras para cada trecho do pilar.....	105
Figura 51- Tipos de carregamentos na estrutura.....	106
Figura 52- Combinação dos carregamentos e diagramas dos esforços.....	107
Figura 53- Relação momento-curvatura para as três diferentes seções do pilar.....	107
Figura 54- Primeira etapa do processo P- $\Delta$ .....	113
Figura 55- Segunda etapa do processo P- $\Delta$ .....	114
Figura 56- Comparação entre os dois métodos para rigidez do pilar em cada trecho.....	120

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Associação dos arranjos.....	56
Tabela 2- Resultados obtidos pelo Método da FIB, pelo Processo do Pilar Padrão e do Pilar Padrão Melhorado e rigidez $\kappa$ aproximada.....	88
Tabela 3- Resultados obtidos pelo Método do Eurocode 2 e pelo Processo do Pilar Padrão Melhorado.....	96
Tabela 4- Método iterativo P- $\Delta$ .....	101
Tabela 5- Planilha de integração numérica.....	109
Tabela 6- Processo P- $\Delta$ .....	117
Tabela 7- Comparação entre o método geral e o método aproximado.....	119