FLÁVIO JOSÉ GARZERI

Engenheiro Mecânico-Aeronáutico
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (1985)

DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM PÓRTICO PLANO SOB CARREGAMENTO NÃO IDEAL: ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA À ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:
ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ORIENTADOR:
PROF. DR. REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL

SÃO PAULO

2001

SYSNO: 1219254
06/02/01

Defesa: 04/10/01
1v. (várias paginações)

DEDALUS - Acervo - EPBC
31200006187

Orientador:
Reyolando Manuel Lopes Rebello da Fonseca Brasil

BC
Universidade de São Paulo
Biblioteca da Escola Politécnica
FT-1598

À minha esposa, Mary.

Aos meus filhos Flávio e Gisele.

Aos meus pais, Flávio e Celina.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
TERMO DE JULGAMENTO DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

Aos 04 dias do mês de outubro de 2001, às 09:00 horas, no Edifício Paula Souza da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, presente a Comissão Julgadora, integrada pelos Senhores Professores Doutores Reyolando Manoel Lopes Rebelo da Fonseca Brasil, orientador do candidato, Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, José Elias Laier, Ney Roitman e Paulo Battista Gonçalves, iniciou-se a Defesa de Tese de Doutoramento do(a) Sr(a). **FLÁVIO JOSÉ GARZERI.** (747107) (1267975)

Título da Tese: **"DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM PÓRTICO PLANO SOB CARREGAMENTO NÃO IDEAL: ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL ".**

Concluída a argüição, procedeu-se ao julgamento na forma regulamentar, tendo a Comissão Julgadora considerado o(a) candidato(a):

Dr.: 2085521 432393

Prof.Dr. Reyolando Manoel L. R. da F. Brasil....(APROVADO **)**
Prof.Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli.....(APROVADO **)**
Prof.Dr. José Elias Laier.....(APROVADO **)**
Prof.Dr. Ney Roitman.....(APROVADO **)**
Prof.Dr. Paulo Battista Gonçalves.....(APROVADO **)**

Para constar, é lavrado o presente termo, que vai assinado pela Comissão Julgadora e pela Secretária de Pós-Graduação.

São Paulo, 04 de outubro de 2001.

A COMISSÃO JULGADORA

Carlos Mazzilli

Ney Roitman

Paulo Batista Gonçalves

Secretária: Elisabete Apª F.S.Ramos

Obs: Resolução 4476, de 17.09.1997 Altera dispositivos do Regimento Geral da USP Art.109 - Imediatamente após o encerramento da argüição da dissertação ou da tese cada examinador expressará seu julgamento em sessão secreta, considerando o candidato **aprovado** ou **reprovado**.

Homologado pela C.P.G. em reunião realizada 15/10/2001.

Agradecimentos

O autor deseja agradecer

ao Prof. Reyolando M. L. R. F. Brasil, pela orientação e paciência durante a elaboração deste trabalho. Mais que um orientador, um grande amigo sempre disposto a ajudar e aconselhar;

à General Motors do Brasil e aos gerentes: José Celso Mazarin e Roberto O. Fujisawa, por me permitirem utilizar a infra-estrutura do Campo de Provas da Cruz Alta, em particular o Laboratório de Acústica e Vibração;

aos professores José M. Baltazar e Pedro de Almeida, pelo incentivo e sugestões durante o exame de qualificação;

aos amigos Fernando Ooki e Ricardo Lopes, pelo apoio moral e pelas horas dispensadas na tentativa de tornar o sistema de aquisição da Iotech operacional, bem como em convencer-me da sua estabilidade;

ao amigo Paulo Padilha, por operar o sistema LMS de análise modal e pelas valiosas discussões sobre esse assunto.

Resumo

Nesta tese, apresenta-se a análise numérica e experimental do comportamento dinâmico não linear de um pórtico excitado por uma fonte não ideal – um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado – como exemplo dessa classe de problemas.

Elabora-se um modelo matemático com quatro graus de liberdade: dois relacionados com o deslocamento horizontal e vertical do ponto de apoio do máquina e dois com os parâmetros de funcionamento do motor elétrico. Adota-se a formulação Lagrangeana para gerar as equações de movimento contendo termos não lineares até ordem cúbica. A solução numérica é obtida através do método de Runge-Kutta com passo adaptativo.

Ensaios dinâmicos e estáticos foram realizados com o motor e com o sistema completo, com vistas a validar o modelo matemático. Um sistema de medição digital armazenou todos os dados obtidos em arquivos de fácil leitura pelos programas atualmente disponíveis. Filmagens de alta velocidade e fotografia estroboscópica registraram movimentos típicos relacionados com comportamentos não lineares.

Os resultados numéricos e experimentais mostram boa correlação entre si, além de apresentarem alguns dos fenômenos associados ao se forçar uma estrutura a passar por uma de suas ressonâncias excitando-a com um dispositivo com potência limitada, como o efeito Sommerfeld. Outros fenômenos, devidos ao comportamento geometricamente não linear da estrutura, são também detectados, tais como saturação modal e transferência de energia.

Abstract

Numerical and experimental analysis of the nonlinear dynamics of a portal frame excited by a non-ideal source – an unbalanced direct current motor – is presented in this thesis as an example of this class of problems.

A four degree of freedom model is elaborated: two of them related to the horizontal and vertical structural displacements and two others to the functioning parameters of the motor. A Lagrangian approach for deducing the equations of motion, up to cubic non-linear terms is followed. The numerical solution is obtained through Runge-Kutta algorithm with adaptive step.

Static and dynamic tests were performed with the motor and with the complete system, in order to validate the mathematical model. A digital acquisition system recorded all data in computer files, ready to be read by available commercial programs. High speed filming and stroboscopic photography were used to register typical movements related to nonlinear behavior.

Numerical and mathematical results show good correlation, as well as present some phenomena related to passage through resonance with limited power excitation such as the Sommerfeld effect. Some other phenomena, related to the nonlinear behavior of the structure are also detected, as modal saturation and energy transference.

Índice

SIMBOLOGIA xi

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 Histórico **1.1**

1.2 Objetivos **1.4**

1.3 Materiais e Métodos **1.5**

1.3.1 O Sistema Estrutura/Motor 1.5
1.3.2 A Análise Numérica 1.5
1.3.3 A Análise Experimental 1.6

CAPÍTULO 2 – A ESTRUTURA

2.1 Introdução **2-1**

2.2 Modos de Vibrar **2-2**

2.2.1 Primeiro Modo (vibração lateral) 2-3
2.2.2 Segundo Modo (bending) 2-3

2.3 Campo de deslocamentos **2-4**

2.4 Rigidezes e Massas Equivalentes **2-8**

2.4.1 Primeiro Modo 2-9
2.4.2 Segundo Modo 2-11

CAPÍTULO 3 – O MOTOR ELÉTRICO

3.1 Introdução **3-1**

3.2 Princípios Físicos Eletromagnéticos **3-3**

3.2.1 Lei de Faraday 3-3
3.2.1 Lei de Lenz 3-4
3.2.1 Força sobre um condutor em um campo magnético 3-5

3.3 Componentes de um Motor DC **3-6**

3.3.1 Carcaça 3-7
3.3.2 Coletor 3-7

3.3.3 Escovas 3-8
3.3.4 Estator 3-8
3.3.5 Mancais 3-8
3.3.6 Rotor 3-8

3.4 Perdas de Energia em Motores CC 3-9

3.4.1 Perdas Elétricas 3-9
3.4.2 Perdas Magnéticas 3-9
3.4.3 Perdas Mecânicas 3-10

3.5 Modelo Matemático 3-10

3.5.1 Torque em um Motor DC 3-10
3.5.2 Força Contra-eletromotriz 3-12
3.5.3 Modelo Eletromecânico 3-14
3.5.4 Equações Matemáticas 3-16

3.6 Determinação Experimental de Parâmetros de Motores DC 3-18

3.6.1 Determinação de R_{po} e V_e 3-18
3.6.2 Determinação de $K1_{abs}$, $K2_{abs}$ e $K3_{abs}$ 3-19
3.6.3 Determinação de K_t e K_e 3-19
3.6.4 Determinação de R_{pf} 3-20
3.6.5 Determinação de L_r 3-20
3.6.6 Determinação de J_r 3-21

CAPÍTULO 4 – O SISTEMA MOTOR/ESTRUTURA

4.1 Introdução 4-1

4.2 Energia Cinética 4-2

4.2.1. Estrutura 4-2
4.2.2. Motor Elétrico 4-4

4.3 Energia Potencial 4-5

4.3.1. Estrutura 4-5
4.3.2. Motor Elétrico 4-7

4.4 Equações do Movimento 4-7

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE NUMÉRICA

5.1 Introdução 5.1

5.2 Sistema de Equações 5.2

5.3 Análise de Eventos 5.5

5.3.1. Solução Estática 5.9
5.3.2. Vibrações Livres 5.10
5.3.3. Aceleração do Motor sob Tensão Constante 5.10

5.3.4. Vibrações Forçadas: Desaceleração do Motor. 5.12
5.3.5. Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Crescente. 5.15
5.3.6. Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Decrescente. 5.17

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MOTOR ELÉTRICO

6.1 Introdução 6-1

6.2 Bancada de Ensaio 6-2

6.3 Determinação da Resistência Elétrica do Rotor e da Queda de Tensão nas Escovas (R_{po} e $V_{\hat{e}}$) 6-4

6.4 Determinação da Constante de Torque (K_t) 6-6

6.5 Perdas no Ferro e por Histerese - Determinação da Resistência Equivalente 6-8

6.6 Determinação das Perdas Mecânicas 6-10

6.7 Determinação das Inércias Rotacionais do Rotor, do Estator e Dos Volantes de Inércia. 6-10

6.8 Determinação da Indutância do Rotor (Lr) 6-12

6.9 Conclusão 6-13

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE MODAL DO SISTEMA

7.1 Introdução 7-1

7.2 Método de Ensaio 7-2

7.3 Modos Naturais 7-3

7.4 Freqüências Naturais 7-4

CAPÍTULO 8 – ANÁLISE EXPERIMENTAL DO SISTEMA

8.1 Introdução 8-1

8.1.1. Configuração do Sistema 8-2
8.1.2. Instrumentação 8-4

8.2 Rigidez Horizontal e Vertical 8-11

8.3 Vibrações Livres 8-12

8.3.1. Vibrações Livres Após Deslocamento Inicial Horizontal 8-14
8.3.2. Vibrações Livres Após Deslocamento Inicial Vertical 8-24

8.4 Vibrações Forçadas: Aceleração do Motor sob Tensão Constante **8-27**

8.5 Vibrações Forçadas: Desaceleração do Motor **8-31**

8.6 Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Crescente **8-31**

8.7 Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Decrescente **8-38**

8.8 Registros Fotográficos **8-43**

CAPÍTULO 9 – OBSERVAÇÕES FINAIS

9.1 Geral **9.1**

9.2 Sobre o motor utilizado **9.2**

9.2.1 Resistência elétrica do rotor e das escovas 9.2
9.2.2 Perdas no Ferro e por Histerese 9.3
9.2.3 Perdas Mecânicas 9.3
9.2.4 Tensão e corrente de alimentação 9.3
9.2.5 Volantes de Inércia 9.4

9.3 Sobre a estrutura **9.4**

9.4 Sobre os resultados analíticos e experimentais do Sistema Estrutura/Motor **9.5**

9.5 Sugestões para Trabalhos Futuros **9.6**

BIBLIOGRAFIA

APÊNDICES

APÊNDICE A – EQUIPAMENTOS

A.1 Introdução **A.1**

A.2 Especificações Técnicas **A.2**

APÊNDICE B – PÊNDULO TORCIONAL

B.1 Introdução **B.1**

B.2 Análise do Movimento **B.2**

B.2.1 Energia Potencial B.2
B.2.2 Energia Cinética B.4
B.2.3 Equação do Movimento B.5

B.3 Limitações B.6

B.4 Utilização B.7

APÊNDICE C – ENCURTAMENTO DE VIGAS/COLUNAS

C.1 Introdução C.1

C.2 Encurtamento: Expressão Exata C.2

C.3 Encurtamento: Expressão Aproximada C.3

Simbologia

Letras Gregas

α	Ângulo entre as linhas de indução magnética de um campo e o vetor velocidade associado a um condutor imerso nesse campo.
β	Posição angular do rotor.
θ	Ângulo formado entre as linhas de força de um campo magnético e a direção da corrente elétrica em um condutor imerso nesse campo.
θ_p	Amplitude de vibração da base do pêndulo rotacional em radianos.
ρ	Densidade do material do pórtico.
ρ_{vol}	Densidade do material dos volantes de inércia.
$\phi(x)$	Função de forma.
$\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$	Deslocamentos angulares dos pontos 1,2 e 3 do pórtico, respectivamente.
γ_p	Ângulo formado entre os cabos de um pêndulo rotacional e o eixo z (vertical) durante uma rotação de θ_p radianos da sua base.
$\alpha 1_c$, $\beta 1_c$, $\gamma 1_c$	Constantes relacionadas com o primeiro modo de vibração da coluna do pórtico.
$\phi 1_c$, $\phi 2_c$	Primeiro e segundo modos de vibração da coluna do pórtico.
$\alpha 1_v$, $\beta 1_v$, $\gamma 1_v$	Constantes relacionadas com o primeiro modo de vibração da viga do pórtico.
Δz_p	Elevação da base de um pêndulo rotacional quando sua base gira θ_p radianos
$\phi 1_v$, $\phi 2_v$	Primeiro e segundo modos de vibração da viga do pórtico.
$\alpha 2_c$, $\beta 2_c$, $\gamma 2_c$	Constantes relacionadas com o 2° modo de vibração da coluna do pórtico.
$\alpha 2_v$, $\beta 2_v$, $\gamma 2_v$, $\delta 2_v$, $\eta 2_v$, $\lambda 2_v$	Constantes relacionadas com o 2° modo de vibração da viga do pórtico.
α_i	Ângulo entre as linhas do campo magnético e o vetor velocidade associado a i-ésima bobina do motor elétrico.

θ_i	Ângulo formado entre as linhas de força do campo magnético do estator e a direção da corrente elétrica que percorre a i-ésima bobina do rotor do motor elétrico.
ω_r	Velocidade angular do rotor.

Letras Romanas Maiúsculas

A	Área da secção transversal das colunas e vigas do pórtico.
Aux_1, Aux_2, Aux_3, Aux_4	Constantes auxiliares (vide campo de deslocamentos).
$Aux_5(t)$ ... $Aux_7(t)$	Variáveis auxiliares.
B	Intensidade do campo magnético.
B_i	Intensidade do campo magnético que atravessa a i-ésima bobina do rotor do motor elétrico.
B_m	Máxima indução magnética no material do rotor do motor elétrico.
C_{lc}	Capacitância inserida num circuito ressonante LC.
D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6	Constantes relacionadas com o campo de deslocamentos do pórtico.
E	Módulo de elasticidade do material do pórtico
E_c	Energia cinética
F	Força
G	Módulo de elasticidade a torção do material do pórtico
I	Momento de inércia à flexão das colunas e vigas do pórtico.
$J1_m$, $J2_m$	Inércias rotacionais equivalentes do motor elétrico relacionadas com o primeiro e segundo modos de vibração do pórtico, respectivamente.
$J2_c$	Inércia rotacional equivalente da coluna relacionada com o segundo modo de vibração.
J_b	Inércia rotacional da base do pêndulo
J_{desb}	Inércia rotacional da massa não balanceada agregada ao volante do motor elétrico.

J_e	Inércia rotacional do estator do motor elétrico.
J_i	Inércia rotacional concentrada em um elemento de viga na coordenada i.
J_{obj}	Inércia rotacional do objeto sobre a base do pêndulo rotacional.
J_p	Inércia rotacional da base do pêndulo.
J_r	Inércia rotacional do rotor do motor elétrico.
J_v	Inércia rotacional do volante de inércia acoplado ao eixo do motor.
$K1_{abs}$, $K2_{abs}$, $K3_{abs}$	Constantes relacionadas com o torque absorvido pelas perdas mecânicas e pela resistência aerodinâmica do rotor do motor elétrico.
$K1_{pf}$, $K2_{pf}$	Constantes relacionadas com a resistência equivalente R_{pf}.
K_e	Constante de proporcionalidade relacionada com a força contra-eletromotriz do motor elétrico.
K_t	Constante de proporcionalidade relacionada com o torque do motor elétrico.
L	Largura do pórtico (distância entre centros das colunas).
L_r	Indutância equivalente do rotor elétrico.
$M1_c$, $K1_c$, $C1_c$	Massa, rigidez e amortecimento equivalentes de cada coluna do pórtico, relacionados com o primeiro modo de vibração.
$M1_m$, $M2_m$	Massas modais equivalentes do motor elétrico relacionadas com o primeiro e segundo modos de vibração do pórtico, respectivamente.
$M1_v$, $K1_v$, $C1_v$	Massa, rigidez e amortecimento equivalentes da viga do pórtico, relacionados com o primeiro modo de vibração.
$M2_c$, $K2_c$, $C2_c$	Massa, rigidez e amortecimento equivalentes de cada coluna do pórtico, relacionados com o segundo modo de vibração.
$M2_v$, $K2_v$, $C2_v$	Massa, rigidez e amortecimento equivalentes da viga do pórtico, relacionados com o segundo modo de vibração.
M_b	Massa da base do pêndulo rotacional.
M_{desb}	Massa não balanceada total fixa nos volantes de inércia.
M_m	Massa do motor elétrico.
M_{obj}	Massa do objeto preso à base do pêndulo.
M_r	Massa do rotor do motor elétrico.
M_{vol}	Massa total dos volantes de inércia
N_1, N_2 ... N_n	Forças dissipativas generalizadas.

N_b	Número de bobinas ativas do rotor do motor elétrico.
P_1, P_2 e P_3	Variáveis auxiliares.
P_e	Perda ôhmica ou potência elétrica dissipada por efeito Joule.
P_h	Potência elétrica dissipada devido à histerese magnética.
P_{pf}	Potência elétrica dissipada pela resistência R_{pf}.
R_{desb}	Distância da massa desbalanceadora ao centro do rotor.
R_m	Resistência elétrica equivalente do motor elétrico.
R_{pd}	Distância do centro de oscilação do pêndulo rotacional aos cabos de suspensão, medida no plano da sua base.
R_{pf}	Resistência equivalente às perdas no ferro do motor elétrico.
R_{po}	Resistência elétrica equivalente associada às perdas ôhmicas do rotor.
R_{vol}	Raio externo do volante de inércia.
T	Torque.
T_{abs}	Torque absorvido pelas perdas mecânicas (atritos) e pela resistência aerodinâmica do rotor do motor elétrico.
T_{ca}	Torque reativo na carcaça do motor.
T_e	Energia cinética da estrutura.
T_m	Energia cinética do motor.
T_p	Energia cinética do pêndulo.
T_{tot}	Energia cinética do sistema motor/estrutura.
T_u	Torque útil disponível no eixo do motor elétrico.
U_e	Energia de deformação associada à estrutura.
U_m	Energia de deformação associada ao motor.
U_p	Energia potencial do pêndulo rotacional.
V_a	Tensão elétrica sobre os bornes do motor elétrico.
V_e	Energia potencial da estrutura.
V_{esc}	Queda de tensão nas escovas do motor elétrico.
V_{fe}	Força contra-eletromotriz do motor elétrico.
V_m	Energia potencial do motor.
V_{max}	Tensão máxima de alimentação do motor.

Vol_m	Volume do material metálico do motor sujeito à variação de fluxo magnético.
V_{tot}	Energia potencial total do sistema estrutura/motor.
W_c	Energia potencial da estrutura relacionada com as forças conservativas.
W_e	Energia potencial das forças conservativas.
W_h	Potência elétrica dissipada num motor devido ao fenômeno da histerese.
W_m	Energia potencial das forças conservativas associadas ao motor.
W_{oh}	Perda ôhmica em watts.
W_p	Potência elétrica dissipada num motor devido às correntes parasitas.
W_{pf}	Potência elétrica dissipada num motor devido às perdas no ferro.
$Z(t)$	Coordenada generalizada.
Z_n	Número de espiras em cada bobina do rotor do motor elétrico.

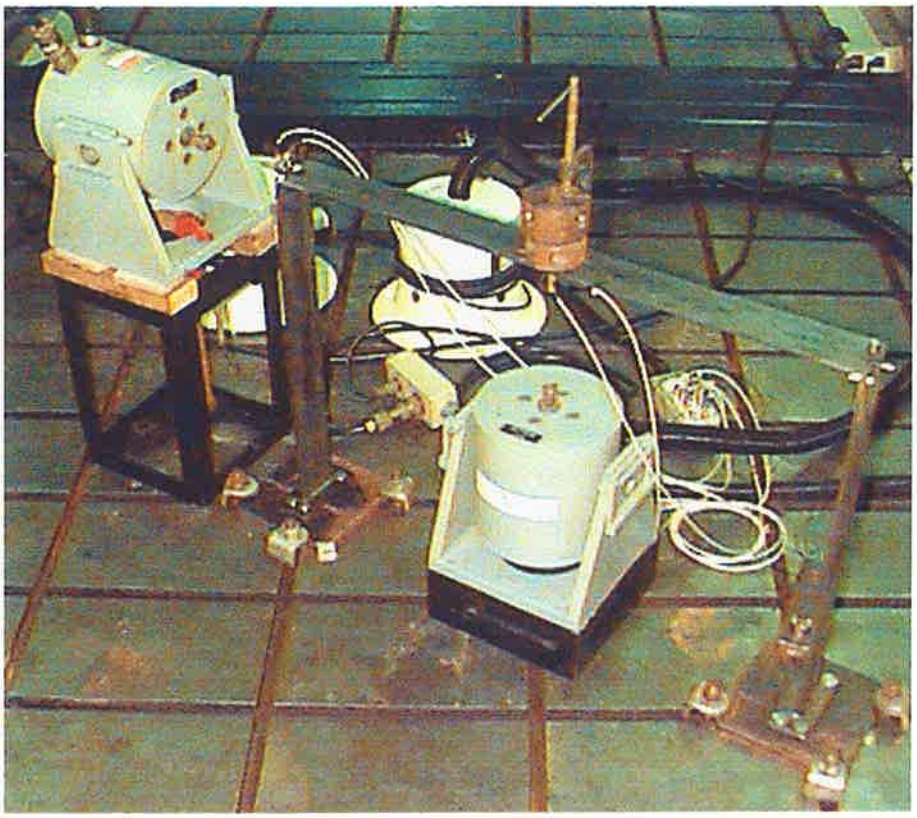
Letras Romanas Minúsculas

b_e	Largura da espira elétrica.
b_s	Largura da secção transversal das colunas e da viga do pórtico.
c	Constante de amortecimento.
$\underline{c}$	Amortecimento equivalente de um elemento estrutural.
c1, c2	Constantes de amortecimento relacionadas com o primeiro e segundo modos de vibração do pórtico, respectivamente.
ds	Comprimento de um elemento infinitesimal da linha elástica.
f_{lc}	Freqüência de ressonância de um circuito LC.
f_m	Freqüência de variação do fluxo magnético no rotor do motor elétrico.
f_p	Freqüência de oscilação do pêndulo, quando há um objeto na sua base.
f_{po}	Freqüência de oscilação do pêndulo, estando a sua base vazia.
f_r	Freqüência de rotação do rotor do motor elétrico.
g	Aceleração da gravidade local.
h	Altura do pórtico (distância do solo ao centro da viga).

h_m	Distância do centro do eixo de rotação do motor ao plano horizontal que passa pelo centro da viga do pórtico.
h_p	Distância da base do pêndulo ao seu ponto de suspensão, quando há um objeto nessa base.
h_{po}	Distância da base do pêndulo ao seu ponto de suspensão, quando não há objetos sobre essa base.
h_s	Altura da secção transversal das colunas e da viga do pórtico.
i	Corrente elétrica.
i_b	Corrente elétrica que percorre as bobinas do rotor do motor elétrico.
i_m	Corrente elétrica que percorre o motor elétrico.
i_T	Corrente elétrica que percorre o conversor de torque (vide cap. sobre motor elétrico).
$\underline{k}$	Rigidez equivalente de um elemento estrutural.
k_h, k_t	Constantes relacionadas com a perda magnética no material do rotor do motor elétrico.
l	Comprimento.
l_e	Comprimento ativo de uma espira imersa em um campo magnético.
m	Massa por unidade de comprimento.
$\underline{m}$	Massa equivalente de um elemento estrutural.
m_1, m_2 ... m_i	Massas concentradas em um elemento de viga (coordenadas 1, 2 ... i).
$q_1(t)$, $q_2(t)$	Coordenadas generalizadas relacionadas com o movimento do pórtico.
r_{vol}	Raio interno do volante de inércia.
t_e	Espessura das lâminas do rotor do motor elétrico.
t_{vol}	Espessura dos volantes de inércia.
$u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$	Deslocamentos horizontais dos pontos 1, 2 e 3 do pórtico, respectivamente.
$v(x,t)$	Deslocamento vertical de um elemento de viga.
v_1, v_2 ... v_i	Deslocamento vertical do ponto i de um elemento de viga.
$v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$	Deslocamentos verticais dos pontos 1,2 e 3 do pórtico, respectivamente.
v_e	Velocidade periférica de uma espira em movimento rotacional.
x	Coordenada cartesiana.
x_1, x_2, x_3	Abcissas dos pontos 1,2 e 3 do pórtico, respectivamente.

x_4	Abcissa da massa desbalanceadora.
y_1, y_2, y_3	Ordenadas dos pontos 1,2 e 3 do pórtico, respectivamente.
y_4	Ordenada da massa desbalanceadora.

1 INTRODUÇÃO



Primeiros Ensaios

Dois excitadores eletrodinâmicos foram utilizados para simular a excitação de um motor elétrico que, posteriormente, foi fixado no centro do vão livre do pórtico.

Na foto ao lado, o motor foi substituído por uma massa de inércia equivalente.

1.1 HISTÓRICO

Desde o século XVII, após a publicação das três partes da obra de Sir Isaac Newton - Philosophiae Naturalis Principia Mathematica - a humanidade observa uma evolução contínua e crescente das ciências exatas e, em particular, da arte que faz uso intenso das suas bases de dados: a Engenharia. Essa evolução foi radicalmente acelerada, por volta dos anos 40, com o advento do computador eletrônico - marco histórico do século XX – que deu início a um processo evolutivo que, do ponto de vista da área de cálculo estrutural e numérico, é caracterizado por duas fases distintas.

Durante a primeira fase, a nova máquina substituiu os dispositivos de cálculo existentes – réguas e ábacos – com benefícios indubitáveis em relação à velocidade e

precisão. Soluções numéricas, há muito tempo esboçadas, puderam ser aprimoradas e postas em uso; cita-se, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos.

Como a maioria dos grandes inventos, os primeiros computadores não eram eficientes nem, tampouco, de fácil utilização. O mais antigo deles, disponível para utilizações extra-acadêmicas, pertenceu à marinha dos Estados Unidos; ocupava andares de um prédio especialmente construído para contê-lo, possuía pouca memória e queimava uma quantidade vultosa de válvulas por dia, exigindo manutenções e paradas constantes. Devido a essa limitada e onerosa capacidade de processamento, os problemas solucionados baseavam-se em modelos matemáticos simples; era comum a adoção de hipóteses ideais para descrever os fenômenos físicos, muitas vezes fundamentadas em simples relações lineares entre as variáveis envolvidas.

Com o avanço tecnológico dos computadores e da eletrônica digital – que caracteriza a segunda fase da evolução – áreas específicas da Engenharia e da Física foram e continuam sendo extremamente beneficiadas; em particular, é o caso da Experimental. Sensores mais precisos, sensíveis e baratos acoplados a computadores puseram à disposição de nós, seres humanos, um poder de observação e de armazenamento de dados inimagináveis há 40 anos atrás. Analogamente, esse mesmo avanço permitiu que cálculos mais refinados sejam realizados atualmente, baseados em modelos matemáticos não lineares e, portanto, mais realísticos - pois nenhum sistema físico existente é linear sob todas as condições.

As análises de estruturas não lineares excitadas por fontes não ideais – fontes com potência limitada, com amplitude e freqüências dependentes da resposta do sistema - vêm, ao longo do tempo, sendo influenciadas pela evolução citada acima. A disponibilidade de recursos têm possibilitado observações e estudos mais minuciosos desde as últimas décadas do século passado, como pode ser constatado pelo breve histórico a seguir.

Em 1904, Sommerfeld observou comportamentos não lineares em uma estrutura excitada por uma fonte com potência finita. Com seu experimento – um motor elétrico desbalanceado montado numa base elástica – constatou que as amplitudes de vibração aumentavam ao se ceder mais potência elétrica ao motor sem que, ao mesmo tempo, a sua freqüência de rotação se elevasse proporcionalmente. Curiosamente, tal fato ocorria quando o motor excitava a base elástica com uma freqüência aproximadamente igual à da natural do sistema; além disso, havia um limite para tal fenômeno: ao atingir a amplitude máxima de vibração, qualquer acréscimo da energia fornecida, mesmo que diminuta, provocava uma mudança significativa e brusca da rotação.

Somente em 1969, Kononenko[22] aborda o efeito Sommerfeld com riqueza de detalhes, explicando o fenômeno que leva o nome do pesquisador que o relatou pela primeira vez. Seus trabalhos foram focados em um experimento mecanicamente simples – um motor elétrico conectado a uma viga em balanço – modelado como um sistema de um grau de liberdade.

Embora Nóbrega[30] cite outros autores que investigaram o mesmo fenômeno, os trabalhos dos dois mencionados acima caracterizam o limite da primeira fase da evolução do conhecimento sobre o problema, ou seja, seus autores constataram a inadequação dos modelos lineares em representar o efeito Sommerfeld.

Balachandran e Nayfeh[2,3,29], em 1979, e mais recentemente, em 1991, apresentaram trabalhos experimentais e teóricos sobre sistemas não lineares – nos mais atuais, a estrutura era composta por duas vigas unidas em ângulo reto - excitados por motores elétricos não ideais. O modelo matemático, que considerava a estrutura como um sistema de dois graus de liberdade, incluía, à semelhança dos experimentos de Kononenko[22], as curvas características dos motores (relações entre rotação, torque e consumo de energia sob regime de funcionamento estável e estacionário).

Brasil e Mazzilli[9], em 1995, analisaram um pórtico plano com não linearidades geométricas excitado por uma fonte ideal. Esse trabalho foi utilizado como base para outro – Brasil e Mook[8] – onde a fonte de vibração foi substituída por um motor elétrico, mas sem considerar as suas propriedades eletromecânicas (indutância, inércia, resposta dinâmica etc). Nesse último trabalho, analisaram-se os fenômenos relacionados com a passagem pela ressonância com potência limitada (efeito Sommerfeld e saturação modal).

Brasil e Balthazar[10,11,13] , nos últimos três anos, publicaram artigos versando sobre o mesmo tema: análise numérica de um pórtico plano excitado por um motor elétrico não ideal. Os autores analisaram os fenômenos que ocorrem quando o motor excita a estrutura com freqüências crescentes e decrescentes, passando por uma das ressonâncias do sistema, bem como aspectos da estabilidade das soluções e a possível ocorrência de caos; novamente, aspectos dinâmicos do motor não foram considerados.

Com relação aos trabalhos experimentais recentes, Balthazar e Mook[4], em 1997, apresentaram os resultados de um ensaio efetuado com a colaboração de duas universidades renomadas: Virginia Polytechnic Institute e Universidade de Campinas. Um motor DC foi fixado a uma viga em balanço onde foram observados o efeito Sommerfeld, bem como modulações da amplitude de oscilação durante a passagem pela ressonância. Os testes utilizaram equipamentos modernos, permitindo, em algumas situações, análises em tempo real (FFT) e a gravação dos dados em formato digital. Outros autores citados por

Brasil[8,13] conduziram experimentos em estruturas mais complexas do que uma viga em balanço, geralmente formadas por vigas unidas em L; Nóbrega[30] menciona trabalhos relacionados com auto-sincronização de dois ou mais motores montados em estruturas elásticas com um ou mais graus de liberdade.

Mesmo após quase 100 anos do primeiro ensaio de Sommerfeld, há ainda muito a se analisar e pesquisar. Observa-se que, na grande maioria dos trabalhos teóricos citados, os modelos matemáticos adotam hipóteses simplificadoras com relação às propriedades eletromecânicas dos motores; a influência da resposta dinâmica, por exemplo, não é considerada em muitos deles. Ressalta-se, também, que sistemas com três ou mais graus de liberdade são raramente analisados; geralmente, adota-se um grau de liberdade para o motor (sua rotação), cabendo os demais à estrutura. Na área experimental, há uma carência de ensaios para corroborar os modelos propostos até o momento, principalmente os elaborados para pórticos. Infelizmente, poucos são os trabalhos que abordam sistemas mais complexos que os já estudados por Nayfeh[29] e Kononenko[22].

1.2 OBJETIVOS

Tem-se por objetivo estudar analítica e experimentalmente um pórtico plano excitado por um motor elétrico de corrente contínua, verificando a ocorrência dos fenômenos de ressonância interna - saturação modal - e do efeito Sommerfeld.

Almeja-se formular modelo matemático baseado nos trabalhos de Brasil[8,10,11,13], considerando-se um campo de deslocamento mais complexo e um modelo matemático mais pormenorizado da fonte de excitação, a fim de se obter um conjunto de equações que descreva o sistema físico de forma mais realística possível sem, contudo, complicar desnecessariamente o problema.

Pretende-se, com a análise experimental, preencher a lacuna atualmente existente na literatura, reportando e descrevendo os fenômenos prenunciados pelas análises matemáticas. Tenciona-se, também, armazenar a maior quantidade de dados possível, disponibilizando-os para corroborar modelos e permitir extensões futuras, tais como a análise de estabilidade.

1.3 MATERIAIS E MÉTODOS

1.3.1 O Sistema Estrutura/Motor

A estrutura analisada é composta por um pórtico metálico esbelto com um motor elétrico de corrente contínua (DC) fixado no centro do seu vão livre (figura 1.1). Acoplam-se ao eixo do motor um dispositivo para medir as suas rotações e dois volantes de inércia, a fim de atenuar as acelerações angulares bruscas características da máquina elétrica escolhida.

Com a finalidade de reduzir as perdas de energia, as uniões entre a viga e as colunas são soldadas e o pórtico é fixado a uma base sísmica cuja massa é centenas de vezes maior do que a da estrutura. Essa fixação, por sua vez, é realizada por meio de flanges de aço de elevada espessura, presos à superfície da massa sísmica por grampos especiais (popularmente conhecidos por unhas metálicas).

As dimensões do pórtico são estabelecidas de tal forma que possibilitam uma relação de, aproximadamente, um para dois entre os dois primeiros modos de vibração (característica que permite a ocorrência do fenômeno de acoplamento de modos ou ressonância interna). As rigidezes também são dimensionadas para que os modos naturais não contidos no plano da figura não sejam relevantes na análise.

1.3.2 A Análise Numérica

O modelo matemático é elaborado com um número reduzido de graus de liberdade: dois relacionados com a estrutura (deslocamentos horizontais e verticais do ponto

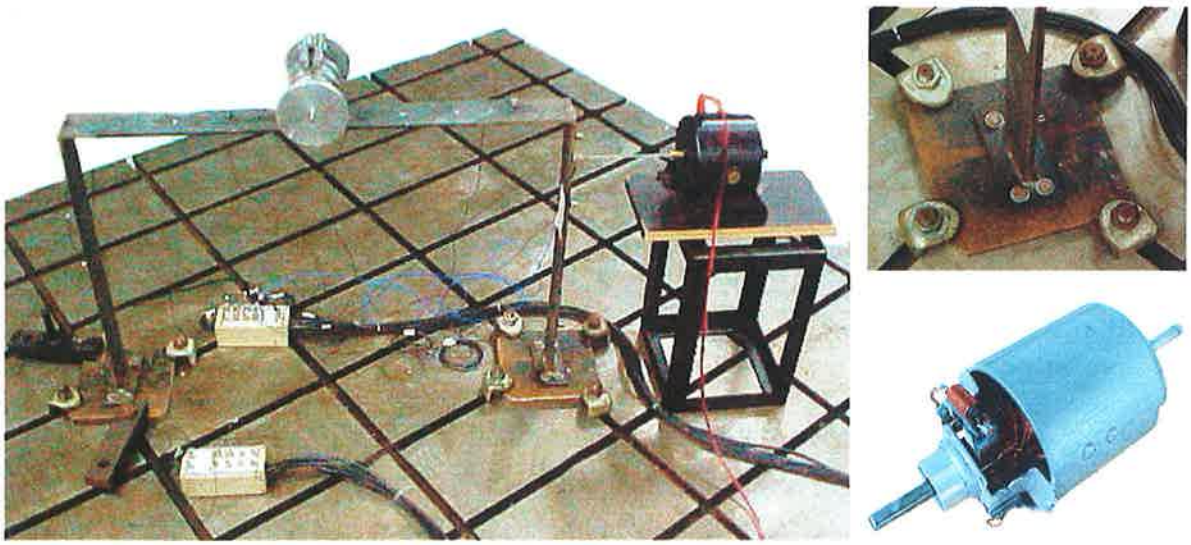


Figura 1.1: Sistema estrutura/motor elétrico analisado. Detalhes da fixação e do motor elétrico.

central da viga) e dois referentes ao motor elétrico (posição angular do rotor e corrente elétrica de alimentação). A redução do número de graus de liberdade da estrutura se faz através de funções de forma, calculando-se massas, rigidezes e amortecimentos equivalentes via método de Rayleigh[14]. Com relação ao motor elétrico, desenvolve-se um modelo específico para descrevê-lo, possuindo mais detalhes do que aqueles normalmente disponíveis na literatura[21,23,24,26,31]; considera-se, por exemplo, as diversas perdas elétricas e mecânicas por meio de funções não lineares.

Deduzem-se as equações do movimento através do método de Lagrange[14], considerando-se termos até a ordem cúbica. Os resultados numéricos são obtidos através da integração direta das equações do movimento, empregando-se o método de Runge-Kutta[6,33] de 4ª ordem com passo adaptativo. Utiliza-se um programa matemático[27] tanto para essa integração, quanto para a manipulação algébrica das equações.

1.3.3 A Análise Experimental

A análise experimental foi conduzida em duas fases: a primeira, realizada com a estrutura e com o motor separadamente, para determinação e ajustes de parâmetros; a segunda, para obtenção de dados do comportamento dinâmico do conjunto motor/estrutura.

Os ensaios com o motor elétrico exigiram a construção de uma bancada de testes específica. Extensometria[15], interferometria laser e técnicas convencionais de medição de variáveis elétricas foram empregadas para a obtenção dos parâmetros eletromecânicos (inércia rotacional, perdas por atrito, resistência interna, indutância do rotor, coeficientes de proporcionalidade entre torque e corrente). Esses ensaios não só auxiliaram na elaboração do modelo matemático como, também, na determinação das modificações que se fizeram necessárias (adição de volantes de inércia e substituição dos mancais originais – buchas de bronze - por rolamentos).

Com relação à estrutura, realizou-se uma análise modal[17,19] que teve por objetivo verificar se as freqüências naturais eram compatíveis com as previstas pelo modelo matemático. Essa análise também foi necessária para a determinação de uma massa adicional, fixada ao redor do motor, para ajustar a relação entre as suas duas primeiras freqüências naturais do pórtico. Durante os ensaios, empregaram-se métodos tradicionais de medição de aceleração (acelerômetros piezelétricos de massa reduzida) e o programa Cada-X® da LMS.

O ensaio do sistema completo foi focado nas medições da aceleração do ponto central da viga, bem como da tensão, corrente e rotação do motor elétrico. Analisou-se o comportamento do sistema sob vibrações livres e forçadas; nesse último caso, especial

atenção foi conferida para o registro dos fenômenos durante passagem pela 2ª ressonância (incluindo filmagens com câmera digital de alta velocidade e fotografias estroboscópicas). Os dados experimentais – analógicos – foram convertidos, filtrados e armazenados na forma digital através de uma placa de aquisição acoplada a um computador.

2 A ESTRUTURA

Produzida em aço de médio carbono (SAE 1040), com juntas soldadas e sem qualquer tipo de tratamento superficial que proporcione amortecimento, a estrutura ao lado é o objeto da análise deste capítulo.

Suas dimensões são tais que as freqüências dos dois primeiros modos de vibração mantêm uma relação de 1:2; característica que possibilita a ocorrência do fenômeno da saturação modal.

Na foto, massas fixadas no centro da viga simulam a inércia de um motor elétrico que foi instalado posteriormente.

2.1 INTRODUÇÃO

A figura 2.1 apresenta os parâmetros do pórtico plano analisado neste capítulo. As colunas – de altura h e engastadas na base - e a viga - de comprimento L, rigidamente conectada às colunas - têm secção retangular uniforme de área A e são constituídas do mesmo material (isotrópico, linear, com módulo de elasticidade E e densidade ρ). No centro do vão livre há uma massa concentrada (com propriedades inerciais e rotacionais), que simula, neste estágio da análise, as inércias de um motor elétrico.

Com uma escolha criteriosa das dimensões dos elementos estruturais, é possível construir um pórtico tal que os seus dois primeiros modos de vibração sejam aqueles apresentados nas figuras 2.2 e 2.3. Ainda por meio dessa seleção de dimensões, as freqüências naturais desses modos podem ser suficientemente distintas das demais, tornando possível caracterizar a resposta do pórtico a uma excitação por meio de uma

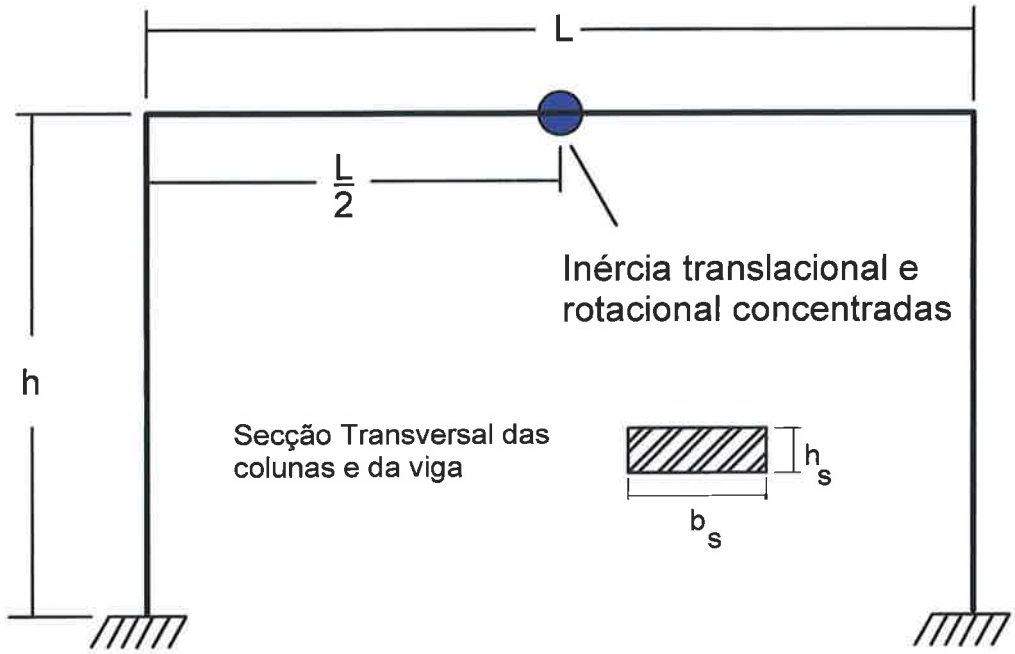


Figura 2.1: Dimensões do pórtico plano.

combinação desses modos. Logicamente, essa aproximação só é válida para excitações cujos espectros correspondentes possuam apenas freqüências próximas aos dois primeiros modos.

Assumiu-se que o pórtico plano da figura 2.1 possui dimensões tais que permitem as aproximações acima e, dessa forma, realizou-se a sua análise dinâmica prévia utilizando-se apenas dois graus de liberdade. Essa redução do número de variáveis foi possível através da escolha de um campo de deslocamentos adequado e da utilização do método de Rayleigh, como será visto nos próximos itens.

A dedução das equações que descrevem o movimento do pórtico será realizada em outro capítulo, onde será incluída a dinâmica do motor elétrico no modelo matemático. No presente, apenas modelos estruturais equivalentes aos dois primeiros modos de vibração foram obtidos.

2.2 Modos de Vibrar

Os dois primeiros modos de vibração da estrutura são aqueles apresentados nas figuras 2.2 e 2.3, desde que respeitadas as condições mencionadas no item anterior.

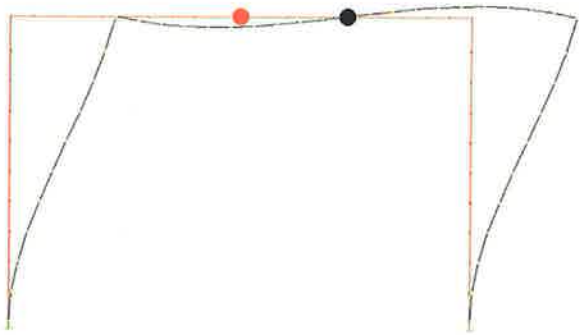


Figura 2.2: Primeiro modo de vibração (lateral).

Figura 2.3: Segundo modo de vibração (bending).

Em cada um dos modos, as formas de vibrar dos elementos estruturais (colunas e viga) podem ser aproximadas por funções matemáticas, denominadas funções-de-forma. Considerando-se apenas funções polinomiais, escrevem-se as seguintes aproximações:

2.2.1 Primeiro Modo (vibração lateral)

$$\phi 1_c(x) = \alpha 1_c \cdot \frac{x}{h} + \beta 1_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \gamma 1_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3 \tag{2.1}$$

$$\phi 1_v(x) = \alpha 1_v \cdot \frac{x}{L} + \beta 1_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \gamma 1_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{2.2}$$

Onde

$\phi 1_c(x)$	forma de vibrar da coluna no primeiro modo;
$\phi 1_v(x)$	forma de vibrar da viga no primeiro modo;
$\alpha 1_c$, $\beta 1_c$, $\gamma 1_c$,	
$\alpha 1_v$, $\beta 1_v$, $\gamma 1_v$	são constantes;
x	é a coordenada local ao longo dos eixo do elemento estrutural considerado.

É comum a normalização das funções de forma pelo deslocamento de um determinado ponto da estrutura no modo considerado. No presente caso, assume-se que as funções $\phi 1_c(x)$ e $\phi 1_v(x)$ fornecem valores normalizados relativos ao deslocamento horizontal do pórtico.

2.2.2 Segundo Modo (*bending*)

$$\phi 2_c(x) = \alpha 2_c \cdot \frac{x}{h} + \beta 2_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \gamma 2_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3 \tag{2.3}$$

$$\phi 2_v(x) = \alpha 2_v \cdot \frac{x}{L} + \beta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \gamma 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \delta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^4 + \eta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^5 + \lambda 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^6 \tag{2.4}$$

Onde

$\phi 2_c(x)$	forma de vibrar da coluna no segundo modo;
$\phi 2_v(x)$	forma de vibrar da viga no segundo modo;
$\alpha 2_c$, $\beta 2_c$, $\gamma 2_c$,	
$\alpha 2_v$, $\beta 2_v$, $\gamma 2_v$,	
$\delta 2_v$, $\eta 2_v$, $\lambda 2_v$	constantes;
x	é a coordenada local ao longo dos eixo do elemento estrutural considerado.

Assume-se que as funções $\phi 2_v(x)$ e $\phi 2_c(x)$ fornecem valores normalizados relativos ao deslocamento vertical do ponto central do vão livre e à rotação da extremidade não engastada da coluna, respectivamente.

2.3 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

A figura 2.4 apresenta os deslocamentos de três pontos principais da estrutura (extremidades das colunas e ponto central do vão livre). Considerando-se o encurtamento dos elementos estruturais quando deformados e desprezando-se termos de ordem superior a três, escrevem-se as seguintes relações:

$$u_1(t) = u_2(t) + D_1 \cdot v_2(t)^2 + D_2 \cdot u_2(t)^2 \tag{2.5}$$

$$u_3(t) = u_2(t) - D_1 \cdot v_2(t)^2 - D_2 \cdot u_2(t)^2 \tag{2.6}$$

$$v_1(t) = -D_3 \cdot u_1(t)^2 \tag{2.7}$$

$$v_3(t) = -D_3 \cdot u_3(t)^2 \tag{2.8}$$

$$\gamma_1(t) = D_4 \cdot \left(v_2(t) - \frac{v_1(t) + v_3(t)}{2} \right) - D_5 \cdot u_2(t) \tag{2.9}$$

$$\gamma_2(t) = D_6 \cdot u_2(t) \tag{2.10}$$

$$\gamma_3(t) = -D_4 \cdot \left(v_2(t) - \frac{v_1(t) + v_3(t)}{2} \right) - D_5 \cdot u_2(t) \tag{2.11}$$

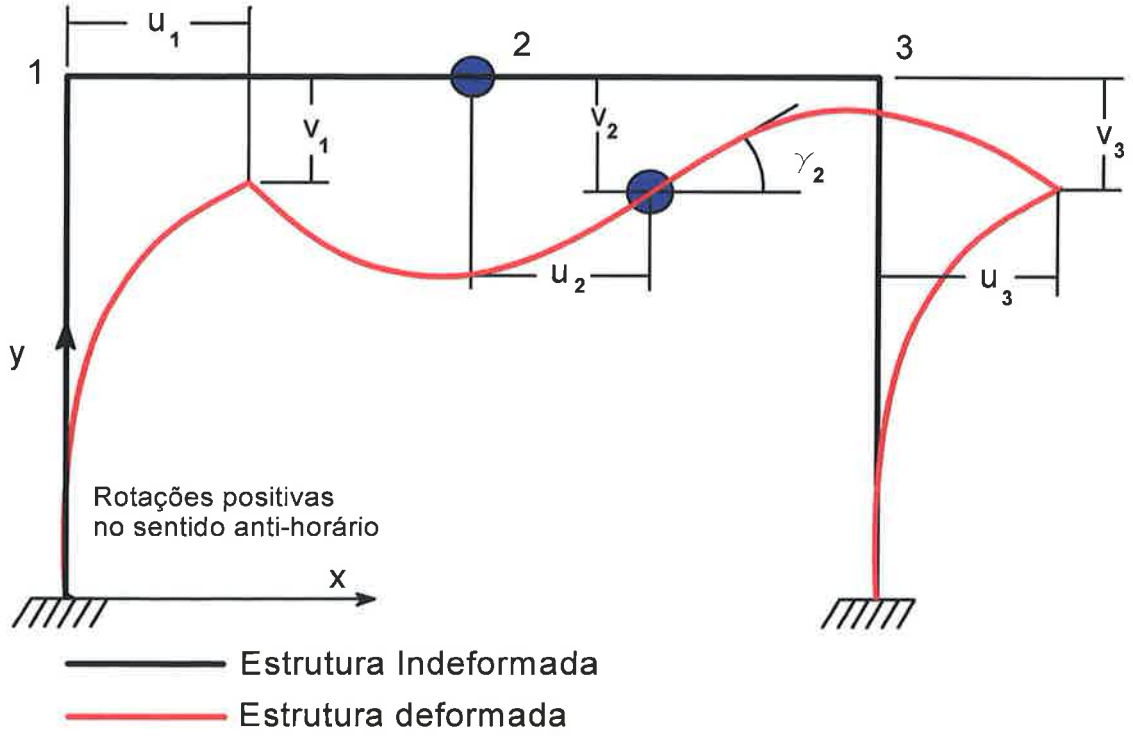


Figura 2.4:Campo de deslocamento adotado.

As constantes D_1, D_2 e D_3 estão relacionadas com os encurtamentos da viga devido às formas de vibrar. A constante D_1, por exemplo, está associada com o encurtamento sofrido pela viga do vão central quando esta sofre deformações causadas pelo 2° modo de vibração da estrutura. O cálculo dessa constante é feito através da expressão C.7, utilizando-se a função de forma $\phi 2_v(x)$ (expressão 2.4). Analogamente, a constante D_2 está relacionada com o encurtamento da viga devido ao 1° modo e a constante D_3, com o encurtamento da coluna no 1° modo.

A constante D_6 relaciona a rotação do ponto central da viga com o deslocamento horizontal desse mesmo ponto. Notando-se que apenas a forma de vibrar do primeiro modo contribui para essa rotação, o valor aproximado de D_6 é obtido através da derivada da função de forma $\phi 1_c(x)$, calculada em $x = L/2$.

As relações entre a rotação da extremidade da coluna com os deslocamentos vertical e horizontal da viga – que para uma estrutura linear é constante - foram denominadas D_4 e D_5 e obtidas através do Método dos Trabalhos Virtuais.

As expressões para o cálculo das constantes D_1 a D_6 são dadas a seguir:

$$D_1 = \frac{1}{L} \cdot \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha 2_v^{\,2} + \frac{2}{3} \cdot \beta 2_v^{\,2} + \frac{9}{10} \cdot \gamma 2_v^{\,2} + \frac{8}{7} \cdot \delta 2_v^{\,2} + \frac{25}{18} \cdot \eta 2_v^{\,2} + \frac{18}{11} \cdot \lambda 2_v^{\,2} \right) \ldots \\ + \left(\delta 2_v + \eta 2_v + \lambda 2_v + \gamma 2_v + \beta 2_v \right) \cdot \alpha 2_v \ldots \\ + \left(\frac{3}{2} \cdot \gamma 2_v + \frac{5}{3} \cdot \eta 2_v + \frac{12}{7} \cdot \lambda 2_v + \frac{8}{5} \cdot \delta 2_v \right) \cdot \beta 2_v \ldots \\ + \left(\frac{15}{7} \cdot \eta 2_v + \frac{9}{4} \cdot \lambda 2_v + 2 \cdot \delta 2_v \right) \cdot \gamma 2_v + \left(\frac{8}{3} \cdot \lambda 2_v + \frac{5}{2} \cdot \eta 2_v \right) \cdot \delta 2_v \ldots \\ + 3 \cdot \eta 2_v \cdot \lambda 2_v \end{array} \right] \tag{2.12}$$

$$D_2 = \frac{27 \cdot \gamma 1_v^{\,2} + 45 \cdot \beta 1_v \cdot \gamma 1_v + 30 \cdot \alpha 1_v \cdot \gamma 1_v + 20 \cdot \beta 1_v^{\,2} + 30 \cdot \alpha 1_v \cdot \beta 1_v + 15 \cdot \alpha 1_v^{\,2}}{30 \cdot L} \tag{2.13}$$

$$D_3 = \frac{27 \cdot \gamma 1_c^{\,2} + 45 \cdot \beta 1_c \cdot \gamma 1_c + 30 \cdot \alpha 1_c \cdot \gamma 1_c + 20 \cdot \beta 1_c^{\,2} + 30 \cdot \alpha 1_c \cdot \beta 1_c + 15 \cdot \alpha 1_c^{\,2}}{30 \cdot h} \tag{2.14}$$

$$D_4 = \frac{12 \cdot \left(G \cdot A \cdot h^3 + 6 \cdot G \cdot I \cdot L + 12 \cdot E \cdot h \cdot I \right) \cdot h \cdot L^2 \cdot G \cdot A}{\left[\left(96 \cdot G \cdot h \cdot I - 2 \cdot G \cdot A \cdot L^3 + 48 \cdot L \cdot E \cdot I \right) \cdot Aux1 + Aux2 \right]} \tag{2.15}$$

$$D_5 := \frac{3 \cdot \left(G \cdot A \cdot L^3 + 24 \cdot G \cdot h \cdot I + 12 \cdot L \cdot E \cdot I \right) \cdot h^2 \cdot G \cdot A}{(6 \cdot h \cdot E + 3 \cdot L \cdot G) \cdot Aux3 + Aux4 \cdot G \cdot A} \tag{2.16}$$

$$D_6 = \frac{27 \cdot \gamma 2_c^{\,2} + 45 \cdot \beta 2_c \cdot \gamma 2_c + 30 \cdot \alpha 2_c \cdot \gamma 2_c + 20 \cdot \beta 2_c^{\,2} + 30 \cdot \alpha 2_c \cdot \beta 2_c + 15 \cdot \alpha 2_c^{\,2}}{30 \cdot h} \tag{2.17}$$

Onde:

$$Aux1 = \left[h^3 \cdot A \cdot (h + 2 \cdot L) + 3 \cdot I \cdot L \cdot (2 \cdot h + L) \right] \cdot G \ldots \\ + 6 \cdot h \cdot E \cdot I \cdot (2 \cdot h + L)$$

$$Aux2 = 3 \cdot G \cdot A \cdot L^3 \cdot \left[\begin{array}{l} \left[2 \cdot G \cdot h^3 \cdot (h + L) \right] \cdot A \ldots \\ + 3 \cdot (L + 4 \cdot h) \cdot I \cdot (2 \cdot E \cdot h + G \cdot L) \end{array} \right]$$

$$Aux3 := \left[G \cdot \left(6 \cdot L^2 \cdot A \cdot h + A \cdot L^3 + 24 \cdot h \cdot I \right) + 12 \cdot L \cdot E \cdot I \right] \cdot I$$

$$Aux4 := h^3 \cdot \left[G \cdot \left(3 \cdot L^2 \cdot A \cdot h + 2 \cdot A \cdot L^3 + 48 \cdot h \cdot I \right) + 24 \cdot L \cdot E \cdot I \right]$$

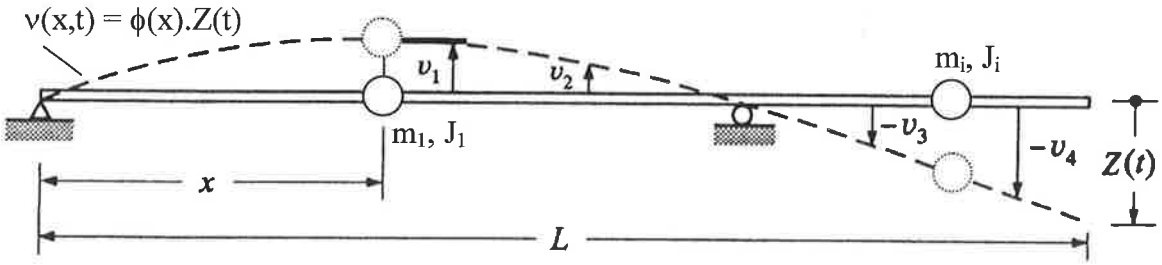


Figura 2.5: Elemento de viga com massas concentradas, cuja forma de vibrar é dada pela função ϕ(x).

Definindo-se as seguintes coordenadas generalizadas,

$$q_2(t) = \frac{v_2(t)}{L} \tag{2.18}$$

$$q_1(t) = \frac{u_2(t)}{h} \tag{2.19}$$

o campo de deslocamentos, em termos de $q_1(t)$ e $q_2(t)$, é dado por:

$$u_1(t) = q_1(t) \cdot h + D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 + D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 \tag{2.20}$$

$$u_2(t) = q_1(t) \cdot h \tag{2.21}$$

$$u_3(t) = q_1(t) \cdot h - D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 - D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 \tag{2.22}$$

$$v_1(t) = -D_3 \cdot \left[q_1(t) \cdot h + D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 + D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 \right]^2 \tag{2.23}$$

$$v_2(t) = q_2(t) \cdot L \tag{2.24}$$

$$v_3(t) = -D_3 \cdot \left[q_1(t) \cdot h - D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 - D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 \right]^2 \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) = {} & D_4 \cdot D_3 \cdot D_2^2 \cdot q_1(t)^4 \cdot h^4 + \left[D_4 \cdot D_3 \cdot h^2 \cdot \left(2 \cdot D_1 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^2 \cdot D_2 + 1\right)\right] \cdot q_1(t)^2 \ldots \\ & + D_4 \cdot L \cdot q_2(t) \cdot \left(D_3 \cdot D_1^2 \cdot L^3 \cdot q_2(t)^3 + 1\right) - D_5 \cdot q_1(t) \cdot h \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\gamma_2(t) = D_6 \cdot h \cdot q_1(t) \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) = {} & -D_4 \cdot D_3 \cdot D_2^2 \cdot q_1(t)^4 \cdot h^4 \ldots \\ & + \left[-D_4 \cdot D_3 \cdot h^2 \cdot \left(2 \cdot D_1 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^2 \cdot D_2 + 1\right)\right] \cdot q_1(t)^2 \ldots \\ & + \left(-D_5 \cdot q_1(t) \cdot h\right) - D_4 \cdot L \cdot \left(q_2(t)^3 \cdot D_3 \cdot D_1^2 \cdot L^3 + 1\right) \cdot q_2(t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.4 Rigidezes e Massas Equivalentes

Considerando-se um sistema estrutural arbitrário unidimensional, como ilustrado na figura 2.5, onde assume-se que sua forma de vibrar é descrita pela seguinte expressão:

$$v(x,t) = \phi(x) \cdot Z(t) \tag{2.29}$$

Onde:

$Z(t)$ é uma coordenada generalizada;

$\phi(x)$ é a função de forma,

pode-se provar, através do princípio dos trabalhos virtuais, que esse sistema é dinamicamente equivalente a um outro com apenas um grau de liberdade, cujas propriedades físicas, relativas à coordenada generalizada Z(t), são dadas por:

$$\underline{m} = \int_0^L m(x) \cdot \phi(x)^2 dx + \sum_i m_i \cdot (\phi(x)_i)^2 + \sum_i J_i \cdot \left[\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right)_i\right]^2 \tag{2.30}$$

$$\underline{k} = \int_0^L E \cdot I(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right)^2 dx \tag{2.31}$$

$$\underline{c} = c \cdot \int_0^L E \cdot I(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right)^2 dx \tag{2.32}$$

Onde:

$m(x)$ massa por unidade de comprimento;

m_i massa concentrada, localizada na coordenada i;

$\phi(x)_i$ valor de $\phi(x)$ no ponto i;

J_i inércia rotacional concentrada, localizada na coordenada i;

$\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right)_i$ derivada da função $\phi(x)$, calculada na coordenada i ;

$I(x)$ momento de inércia ao longo do elemento estrutural;

c constante de amortecimento (assume-se que o amortecimento é proporcional à velocidade de deformação);

$\underline{m}$, $\underline{k}$ e $\underline{c}$ massa, rigidez e amortecimento equivalentes.

O procedimento acima, conhecido por Método de Rayleigh, é utilizado a seguir para calcular dois sistemas dinamicamente equivalentes ao pórtico da figura 2.1 (um para cada modo de vibração).

2.4.1 Primeiro Modo

Substituindo-se as funções de forma 2.1 e 2.2 nas expressões 2.30 a 2.32, obtém-se a massa, a rigidez e o amortecimento equivalentes para o 1° modo de vibração.

Aproveitando-se do fato de que as funções de forma são distintas, é simples obter a contribuição individual de cada parte da estrutura no parâmetro modal equivalente. Assim, tem-se:

$$M1_c = \frac{h \cdot \rho \cdot A}{210} \cdot \left[\begin{array}{l} \left(70 \cdot \alpha 1_c^{\,2} + 42 \cdot \beta 1_c^{\,2} + 30 \cdot \gamma 1_c^{\,2}\right) \ldots \\ +21 \cdot \alpha 1_c \cdot \left(4 \cdot \gamma 1_c + 5 \cdot \beta 1_c\right) + 70 \cdot \beta 1_c \cdot \gamma 1_c \end{array} \right] \tag{2.33}$$

$$M1_v = \frac{L \cdot \rho \cdot A}{210} \cdot \left[\begin{array}{l} 70 \cdot \alpha 1_v^{\,2} + 42 \cdot \beta 1_v^{\,2} + 30 \cdot \gamma 1_v^{\,2} \ldots \\ +21 \cdot \alpha 1_v \cdot \left(4 \cdot \gamma 1_v + 5 \cdot \beta 1_v\right) + 70 \cdot \beta 1_v \cdot \gamma 1_v + 210 \end{array} \right] \tag{2.34}$$

$$K1_c = \frac{4 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot \left(\beta 1_c^{\,2} + 3 \cdot \beta 1_c \cdot \gamma 1_c + 3 \cdot \gamma 1_c^{\,2}\right) \tag{2.35}$$

$$K1_v = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \left(\beta 1_v^{\,2} + 3 \cdot \beta 1_v \cdot \gamma 1_v + 3 \cdot \gamma 1_v^{\,2}\right) \tag{2.36}$$

$$C1_c = \frac{4 \cdot c1 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot \left(\beta 1_c^{\,2} + 3 \cdot \beta 1_c \cdot \gamma 1_c + 3 \cdot \gamma 1_c^{\,2}\right) \tag{2.37}$$

$$C1_v = \frac{4 \cdot c1 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \left(\beta 1_v^{\,2} + 3 \cdot \beta 1_v \cdot \gamma 1_v + 3 \cdot \gamma 1_v^{\,2}\right) \tag{2.38}$$

$$M1_m = M_m \tag{2.39}$$

$$J1_m = J_e \cdot \left[\frac{\left(\alpha 1_v + \beta 1_v + \frac{3}{4} \cdot \gamma 1_v\right)}{L} \right]^2 \tag{2.40}$$

Onde:

$M1_c$ é a massa modal equivalente de cada coluna, calculada através da substituição de 2.1 - normalizada para o deslocamento da extremidade não engastada (u1(t) ou u2(t)) - em 2.30;

$M1_v$ é a massa modal equivalente da viga, calculada através da soma da sua massa total com a parcela obtida através da substituição de 2.2 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão (u2(t)) - em 2.30;

$K1_c$ é a rigidez modal equivalente de cada coluna, calculada através da substituição de 2.1 - normalizada para o deslocamento da extremidade não engastada (u1(t) ou u2(t)) - em 2.31;

$K1_v$ é a rigidez modal equivalente da viga, calculada através da substituição de 2.2 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão (u2(t)) - em 2.31;

$C1_c$ é o amortecimento modal equivalente de cada coluna, calculado através da substituição de 2.1 - normalizada para o deslocamento da extremidade não engastada (u1(t) ou u2(t)) - em 2.32;

$C1_v$ é o amortecimento modal equivalente da viga, calculada através da substituição de 2.2 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão (u2(t)) - em 2.32;

$M1_m$ é a massa modal equivalente do motor que, para o primeiro modo, equivale a sua massa total (M_m)

$J1_m$ é a inércia rotacional modal equivalente do motor em relação ao ponto de fixação desse na viga, calculada através da substituição de 2.2 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão (u2(t)) - em 2.30. O cálculo desconsiderou os termos de 2.30 que não incluem a inércia rotacional do motor .

A figura 2.6 apresenta um sistema dinamicamente equivalente ao pórtico da figura 2.4, considerando-se apenas o deslocamento horizontal do ponto 2.

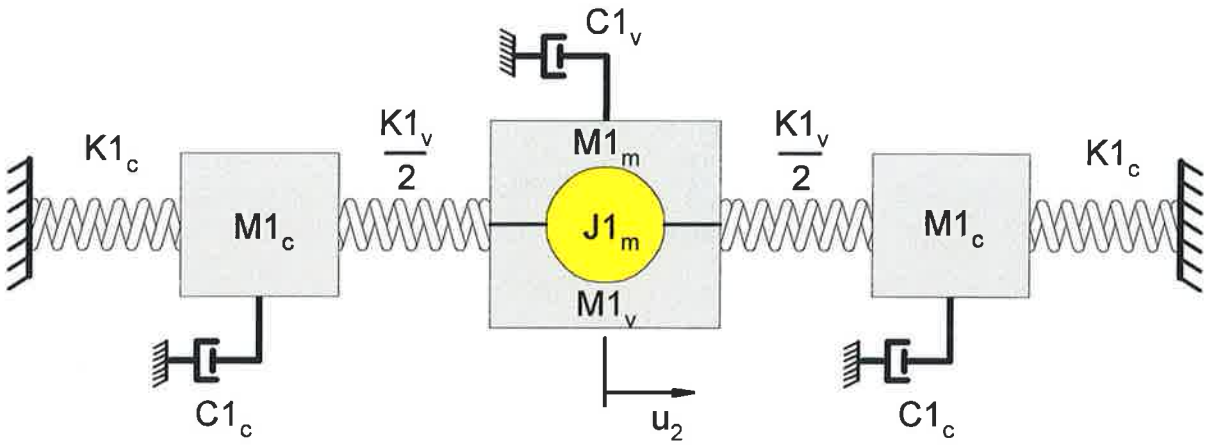


Figura 2.6: Sistema equivalente ao pórtico da fig. 2.4, considerando-se apenas os deslocamentos u_2 e γ_2.

2.4.2 Segundo Modo

Seguindo-se o mesmo procedimento de cálculo apresentado no item anterior, as massas, rigidezes e amortecimentos equivalentes para o segundo modo são:

$$J2_c = \frac{\rho \cdot A}{210} \cdot h \cdot \begin{bmatrix} 70 \cdot \alpha 2_c^{\,2} + 42 \cdot \beta 2_c^{\,2} + 30 \cdot \gamma 2_c^{\,2} \ldots \\ +21 \cdot \alpha 2_c \cdot \left(5 \cdot \beta 2_c + 4 \cdot \gamma 2_c\right) + 70 \cdot \beta 2_c \cdot \gamma 2_c \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$M2_v = L_m \cdot \rho \cdot S \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \alpha 2_v^{\,2} + \frac{1}{5} \cdot \beta 2_v^{\,2} + \frac{1}{7} \cdot \gamma 2_v^{\,2} + \frac{1}{9} \cdot \delta 2_v^{\,2} + \frac{1}{11} \cdot \eta 2_v^{\,2} + \frac{1}{13} \cdot \lambda 2_v^{\,2} \ldots \\ +\left(\frac{1}{4} \cdot \lambda 2_v + \frac{2}{7} \cdot \eta 2_v + \frac{2}{5} \cdot \gamma 2_v + \frac{1}{3} \cdot \delta 2_v + \frac{1}{2} \cdot \beta 2_v\right) \cdot \alpha 2_v \ldots \\ +\left(\frac{1}{4} \cdot \eta 2_v + \frac{1}{3} \cdot \gamma 2_v + \frac{2}{9} \cdot \lambda 2_v + \frac{2}{7} \cdot \delta 2_v\right) \cdot \beta 2_v \ldots \\ +\left(\frac{1}{5} \cdot \lambda 2_v + \frac{1}{4} \cdot \delta 2_v + \frac{2}{9} \cdot \eta 2_v\right) \cdot \gamma 2_v \ldots \\ +\left(\frac{2}{11} \cdot \lambda 2_v + \frac{1}{5} \cdot \eta 2_v\right) \cdot \delta 2_v \ldots \\ +\frac{1}{6} \cdot \eta 2_v \cdot \lambda 2_v \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$K2_c = \frac{4 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot \left(\beta 2_c^{\,2} + 3 \cdot \beta 2_c \cdot \gamma 2_c + 3 \cdot \gamma 2_c^{\,2}\right) \tag{2.43}$$

$$K2_v = E \cdot \frac{I}{L^3} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot \beta 2_v^{\,2} + 12 \cdot \gamma 2_v^{\,2} + \frac{144}{5} \cdot \delta 2_v^{\,2} + \frac{400}{7} \cdot \eta 2_v^{\,2} + 100 \cdot \lambda 2_v^{\,2} \ldots \\ + \left(24 \cdot \lambda 2_v + 20 \cdot \eta 2_v + 16 \cdot \delta 2_v + 12 \cdot \gamma 2_v\right) \cdot \beta 2_v \ldots \\ + \left(60 \cdot \lambda 2_v + 48 \cdot \eta 2_v + 36 \cdot \delta 2_v\right) \cdot \gamma 2_v \ldots \\ + \left(\frac{720}{7} \cdot \lambda 2_v + 80 \cdot \eta 2_v\right) \cdot \delta 2_v \ldots \\ + 150 \cdot \eta 2_v \cdot \lambda 2_v \end{array} \right] \tag{2.44}$$

$$C2_c = 4 \cdot c2 \cdot E \cdot I \cdot \frac{\left(\beta 2_c^{\,2} + 3 \cdot \beta 2_c \cdot \gamma 2_c + 3 \cdot \gamma 2_c^{\,2}\right)}{h^3} \tag{2.45}$$

$$C2_v = c2 \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot \beta 2_v^{\,2} + 12 \cdot \gamma 2_v^{\,2} + \frac{144}{5} \cdot \delta 2_v^{\,2} + \frac{400}{7} \cdot \eta 2_v^{\,2} + 100 \cdot \lambda 2_v^{\,2} \ldots \\ + \left(24 \cdot \lambda 2_v + 20 \cdot \eta 2_v + 16 \cdot \delta 2_v + 12 \cdot \gamma 2_v\right) \cdot \beta 2_v \ldots \\ + \left(60 \cdot \lambda 2_v + 48 \cdot \eta 2_v + 36 \cdot \delta 2_v\right) \cdot \gamma 2_v \ldots \\ + \left(\frac{720}{7} \cdot \lambda 2_v + 80 \cdot \eta 2_v\right) \cdot \delta 2_v \ldots \\ + 150 \cdot \eta 2_v \cdot \lambda 2_v \end{array} \right] \tag{2.46}$$

$$M2_m = M_{motor} \tag{2.47}$$

$$J2_m = 0 \tag{2.48}$$

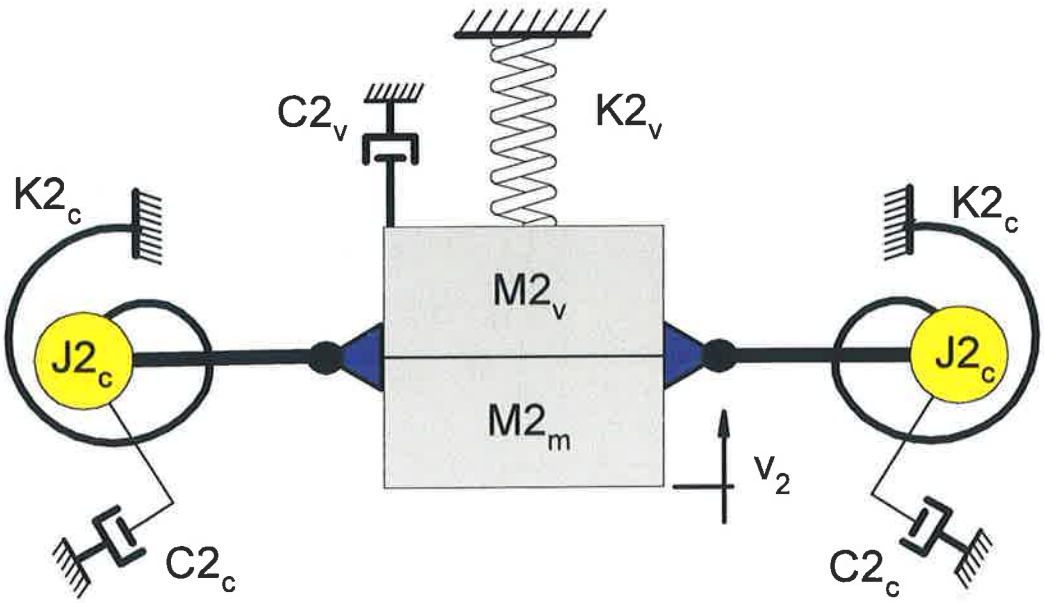


Figura 2.7: Sistema equivalente ao pórtico da fig. 2.4, considerando-se apenas os deslocamentos v_2, γ_1 e γ_3.

Onde:

$J2_c$ é a massa modal equivalente da coluna, calculada através da substituição de 2.3 - normalizada para a rotação da extremidade não engastada ($\gamma 1(t)$) - em 2.30.

$M2_v$ é a massa modal equivalente da viga, calculada através da substituição de 2.4 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão ($v2(t)$) - em 2.30. No cálculo não foram considerados os termos que envolvem massas e inércias concentradas.

$K2_c$ é a rigidez modal equivalente da coluna, calculada através da substituição de 2.3 normalizada para a rotação da extremidade não engastada ($\gamma 1(t)$) - em 2.31;

$K2_v$ é a rigidez modal equivalente da viga, calculada através da substituição de 2.4- normalizada para o deslocamento do ponto central do vão ($v2(t)$) - em 2.31;

$C1_c$ é o amortecimento modal equivalente da coluna, calculada através da substituição de 2.3- normalizada para o deslocamento do ponto central do vão ($v2(t)$) - em 2.32;

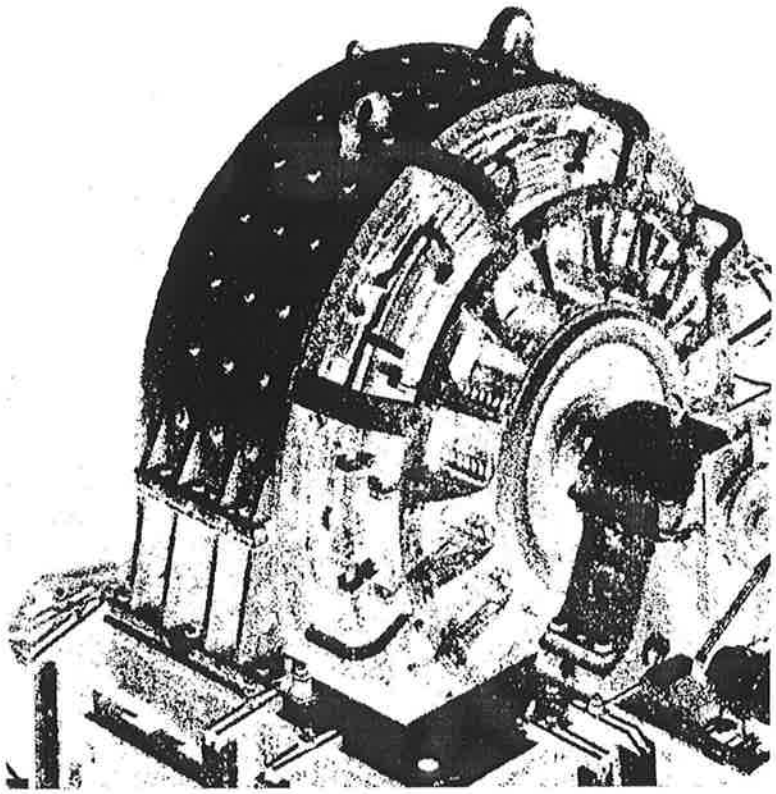
$C2_v$ é o amortecimento modal equivalente da viga, calculada através da substituição de 2.4 - normalizada para o deslocamento do ponto central do vão ($v2(t)$) - em 2.32;

$M2_m$ é a massa modal equivalente do motor que, para o segundo modo, equivale a sua massa total (M_m)

$J2_m$ é a inércia rotacional modal equivalente do motor. Ela é nula, pois o ponto central não sofre rotação no 2º modo.

A figura 2.7 apresenta um sistema dinamicamente equivalente ao pórtico da figura 2.4, considerando-se apenas o deslocamento vertical e rotacional do ponto 2.

3 O MOTOR ELÉTRICO



Embora atualmente haja uma grande disponibilidade de tipos e tamanhos de motores elétricos, poucos são aqueles que cujas características mecânicas e elétricas são divulgadas pelo fabricante.

O presente capítulo proporciona meios para análise e determinação de parâmetros de motores elétricos de corrente contínua; aborda o funcionamento básico desse tipo de motor e desenvolve um modelo matemático para simular o seu comportamento dinâmico.

3.1 INTRODUÇÃO

Há uma grande variedade de modelos de motores elétricos, que podem ser classificados[22] quanto às suas características de operação e necessidades de tipos de energia (figura 3.1).

Motores síncronos são aqueles onde se verifica que a freqüência de rotação do eixo é um múltiplo da freqüência da fonte de alimentação e, considerando-se as limitações elétricas e mecânicas do motor, é praticamente independente do torque gerado. Já nos assíncronos ou de indução, a razão entre a freqüência de rotação do eixo e a freqüência da fonte de alimentação é uma fração que depende do torque produzido.

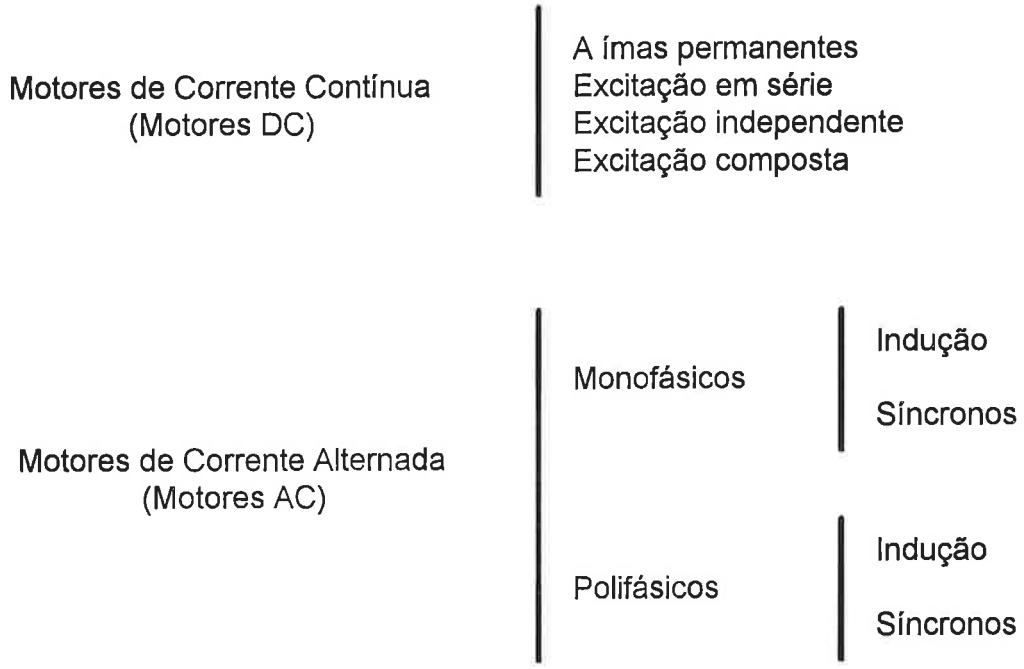


Figure 3. 1: Classificação dos motores elétricos.

Por serem robustos e economicamente bastante atrativos, os motores de indução são os mais largamente empregados. Os síncronos são preferidos quando é necessário se manter uma rotação rigorosamente constante e com elevado rendimento.

Os motores de corrente contínua são utilizados em aplicações que exigem que o controle da rotação seja preciso numa ampla faixa de valores. No entanto, com o avanço da tecnologia na área de fontes de alimentação de tensão e freqüência variáveis (fontes que permitem controlar a rotação dos motores de corrente alternada, em particular os assíncronos) e com a gradativa diminuição dos preços no decorrer dos anos dos componentes necessários para fabricá-las, tem-se observado uma redução das possibilidades de aplicação dos motores DC.

Dentre os tipos de motores de corrente contínua há aquele que utiliza ímãs permanentes. Esse modelo, além da característica comum à sua classe (controle preciso da rotação), possui as seguintes particularidades:

- ⇨ a relação entre o torque útil e a corrente de alimentação é linear;
- ⇨ possui massa reduzida;
- ⇨ tem elevado torque nas baixas rotações;
- ⇨ é compacto.

Devido aos fatores acima, esse tipo de motor vem sendo largamente utilizado pela indústria automobilística, que o emprega no acionamento de alguns itens do automóvel, tais como: antena, bancos, vidros, limpador de pára-brisa, bomba de combustível, motor etc.

Considerando-se a maior flexibilidade na execução de ensaios dinâmicos com modelos estruturais de pequenas dimensões e a facilidade de controle da rotação de motores de corrente contínua, optou-se por utilizar um motor DC a ímãs permanentes nos experimentos abordados nesta tese.

A formulação do modelo matemático desse tipo de motor e as técnicas experimentais utilizadas para a determinação dos seus parâmetros são discutidas a seguir. Antes, porém, é necessária uma breve apresentação dos princípios físicos eletromagnéticos envolvidos no funcionamento dos motores, bem como uma sucinta descrição dos componentes de um motor DC, a fim de melhor conduzir a análise do modelo matemático.

3.2 PRINCÍPIOS FÍSICOS ELETROMAGNÉTICOS

Há três princípios físicos importantes envolvidos no funcionamento dos motores elétricos: o da indução (lei de Faraday), o do sentido da corrente induzida (lei de Lenz) e o da força sobre condutores elétricos em campos magnéticos.

3.2.1 Lei de Faraday

Michael Faraday (1791-1867), inglês, físico e químico, em 1831 concluiu que toda vez que o número de linhas de indução através de um circuito varia, surge, neste circuito, uma força eletromotriz induzida.

O princípio da indução eletromagnética pode ser melhor compreendido através da figura 3.2. Essa ilustração mostra uma espira entre os pólos de um ímã, ou seja, inserida num campo magnético. Ao girar essa espira, o número de linhas de indução que atravessa a área ABCDA varia, causando o aparecimento de uma diferença de potencial (força eletromotriz) entre os seus terminais. A magnitude dessa força é dada por:

$$E = 2.l_e.B.v_e.\text{sen}(\alpha) \tag{3.1}$$

Onde:

- B é a intensidade do campo magnético;
- l_e é o comprimento ativo da espira (parte sombreada do condutor);
- v_e é a velocidade periférica da espira;
- α ângulo entre as linhas de indução e o vetor velocidade.

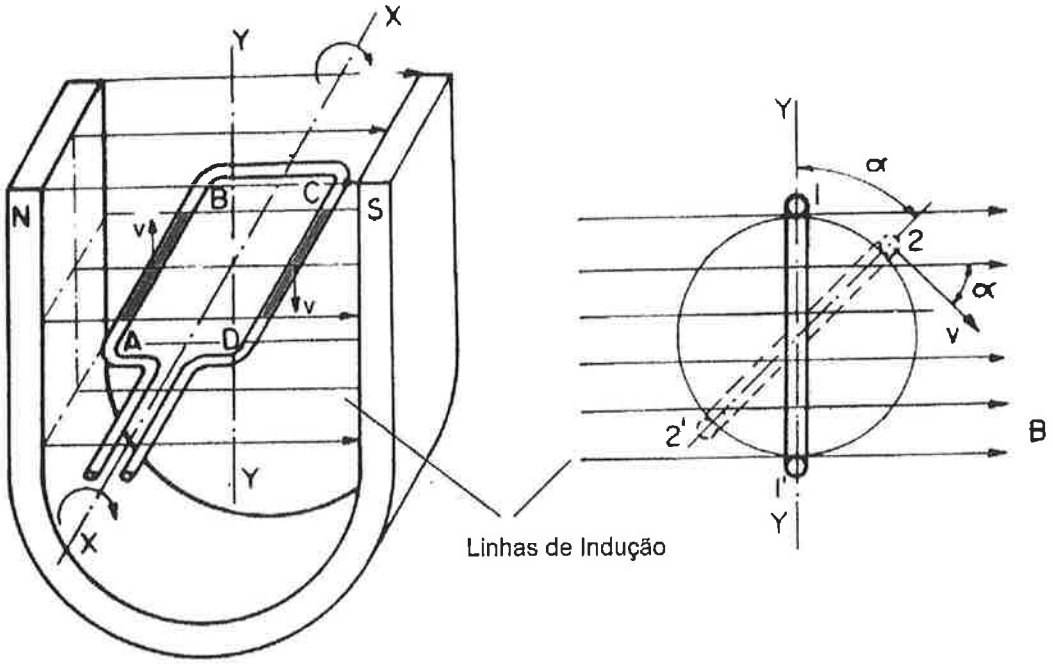


Figure 3. 2: Espira num campo magnético de intensidade constante.

3.2.2 Lei de Lenz

Em 1833, o físico russo Heinrich Lenz (1804-1865) observou que o sentido da corrente elétrica induzida em um circuito (corrente proporcionada pela força eletromotriz induzida) é tal que o seu efeito magnético se opõe à variação que a produziu.

No caso da figura 3.2, se as extremidades da espira fossem conectadas a uma carga elétrica e um torque fosse aplicado no sentido de girá-la no sentido horário, uma corrente elétrica circularia pela espira, produzindo um campo magnético que se oporia àquele representado nessa figura. A conseqüência imediata dessa reação seria o surgimento de um torque no sentido anti-horário, ou seja, resistente.

Há uma regra prática para se determinar o sentido da corrente induzida; ela é conhecida pelo seguinte nome: regra da mão direita de Fleming ou, simplesmente, regra da mão direita. A figura 3.3 indica como se utiliza essa regra para determinar o sentido convencional dessa corrente (do pólo positivo para o negativo). Como exemplo, nessa mesma ilustração, representa-se um trecho da espira da figura 3.2 com a indicação da corrente elétrica.

Na figura 3.4 pode-se visualizar os campos magnéticos gerados pela corrente induzida em torno dos condutores de uma espira. Deve-se notar que esses campos interagem com o campo do ímã ali representado, gerando forças contrárias ao movimento.

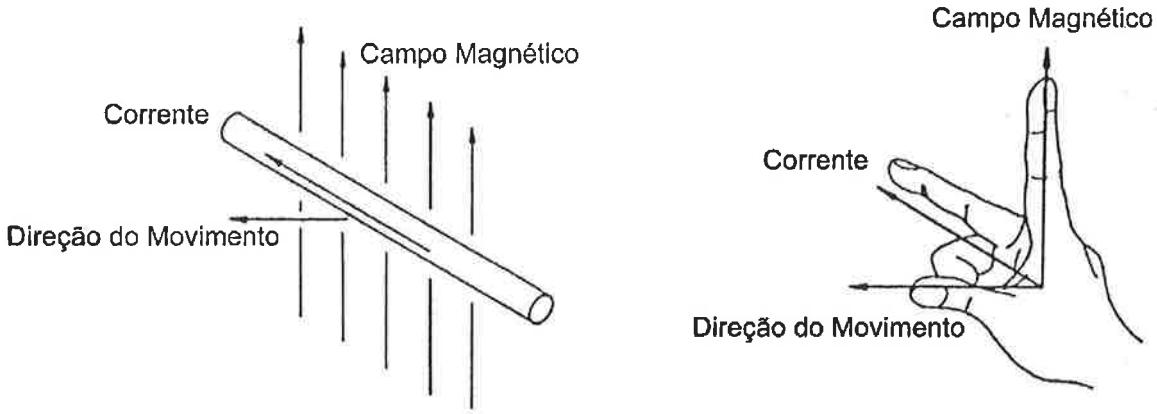


Figura 3. 3: Regra da mão direita para determinar o sentido da corrente induzida.

3.2.3 Força sobre um condutor em um campo magnético

Dado um condutor de comprimento l, percorrido por uma corrente elétrica i em um campo magnético uniforme de magnitude B e sendo θ o ângulo formado entre as linhas de força desse campo e a direção da corrente, a força magnética que age sobre esse condutor é dada por:

$$F = B.i.l.sen(\theta) \tag{3.2}$$

A figura 3.5 mostra a ação das forças sobre uma espira em um campo magnético, quando uma corrente elétrica circula pelos seus condutores. Nessa mesma figura, há a ilustração de uma regra (a da mão direita) utilizada para a determinação da direção e sentido da força magnética.

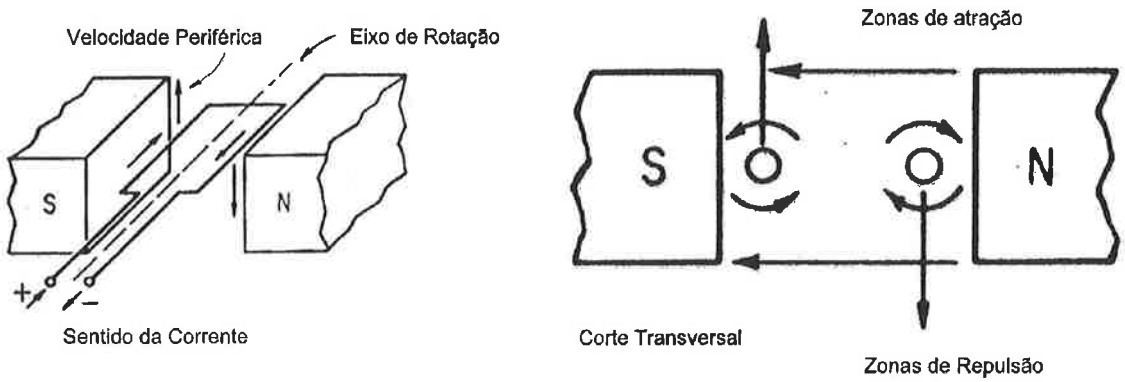


Figura 3. 4: Campo magnético em torno do condutor da espira, gerado pela corrente induzida

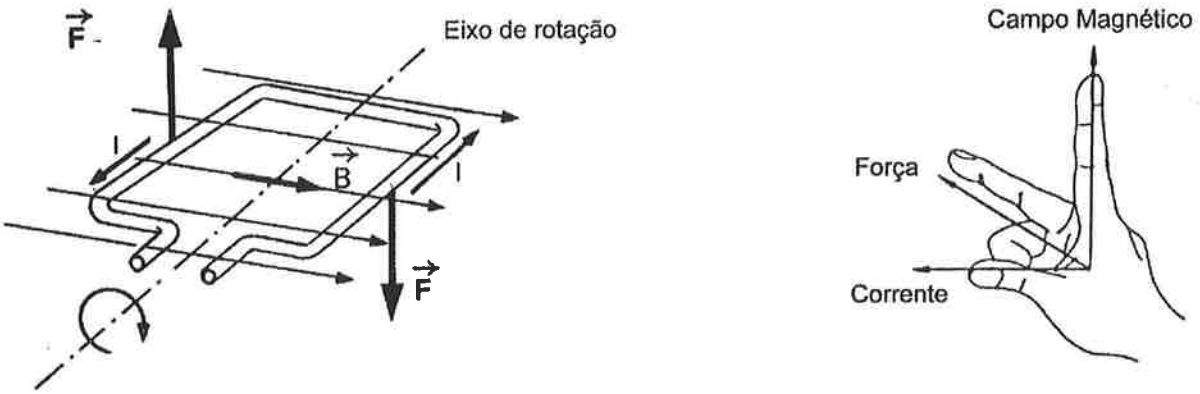


Figura 3.5: Força sobre um condutor em um campo magnético quando percorrido por uma corrente i.

3.3 COMPONENTES DE UM MOTOR DC

A figura 3.6 contém um corte longitudinal de um típico motor de corrente contínua de pequeno porte. As funções dos componentes indicados são descritas a seguir.

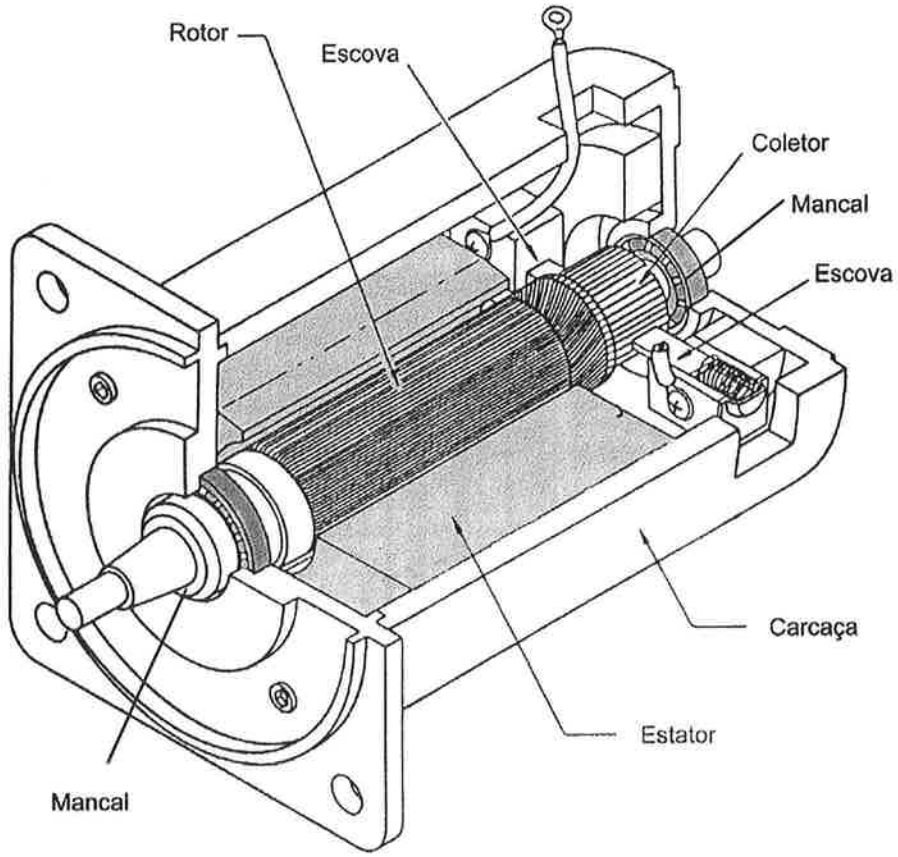


Figura 3.6: Componentes de um motor de corrente contínua a ímãs permanentes.

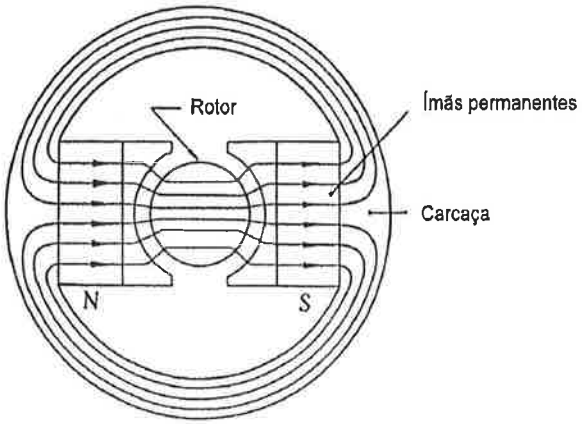


Figura 3.7: Corte transversal de um motor DC mostrando o fluxo magnético.

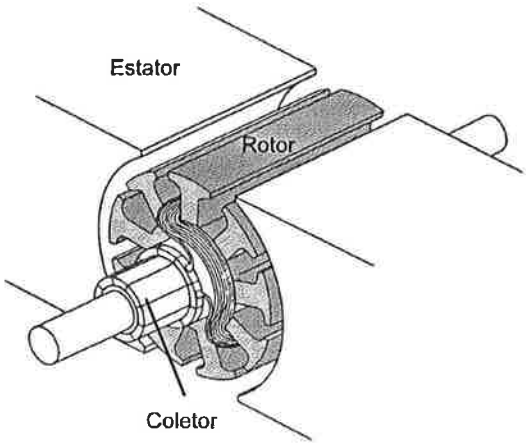


Figura 3.8: Disposição de um grupo de espiras no rotor.

3.3.1 Carcaça

A carcaça ou corpo do motor tem duas funções básicas: a estrutural, mantendo o estator e os mancais do rotor na posição e a de condutor magnético, completando o circuito formado pelos ímãs e armadura (figura 3.7).

3.3.2 Coletor

Quando uma corrente elétrica atravessa uma espira situado num campo magnético, surgem forças nos seus condutores, produzindo um binário (item 1.2.3, figura 3.5). Esse binário será máximo quando o plano da espira é paralelo às linhas do campo magnético e nulo quando for perpendicular.

Num motor elétrico DC, há várias espiras enroladas sobre a parte central do rotor (figura 3.8), cada uma delas ocupando uma determinada posição angular e conectada eletricamente ao comutador (também denominado coletor). É função desse energizá-las nos momentos corretos, impedindo que correntes elétricas atravessem espiras quando seus respectivos planos estiverem perpendiculares ao do campo.

Como pode ser verificado pela figura 3.9, a posição de equilíbrio estável de uma espira percorrida por uma corrente elétrica num campo magnético ocorre quando o seu plano é perpendicular às linhas desse campo. Se a corrente elétrica for invertida após a espira ter alcançado o ponto de equilíbrio, esse passará a ser instável; qualquer perturbação posterior fará com que a espira gire 180°, encontrando um novo ponto de equilíbrio.

É também função do comutador propiciar as inversões de corrente nas espiras no momento correto. Os instantes de interrupção e inversão variam de projeto a projeto, pois devem considerar vários fatores, tais como: suavidade durante o

funcionamento, maximização do torque produzido e ocorrência de faiscamento entre os terminais do coletor e as escovas.

3.3.3 Escovas

A função das escovas é conduzir a corrente elétrica provinda da fonte de energia externa para os segmentos do coletor (num motor de corrente contínua, uma delas é conectada ao positivo e, a outra, ao negativo). Geralmente são produzidas com grafite especial, proporcionando longa duração, baixo desgaste do coletor e reduzido faiscamento. Em determinadas aplicações, as escovas podem ser de material nobre (ligas de prata e/ou ouro).

3.3.4 Estator

O estator é a parte estacionária de um motor responsável pela geração do campo magnético interno. No caso de motores de corrente contínua, pode ser constituído por bobinas ou ímãs permanentes.

3.3.5 Mancais

Os mancais têm por função manter o rotor centralizado dentro do estator. Podem ser deslizantes (buchas de material antifricção) ou de rolamentos.

3.3.6 Rotor

É o componente do motor que contém o coletor e o eixo do motor e mantém as espiras igualmente distribuídas entre os seus sulcos (vide figura 3.8).

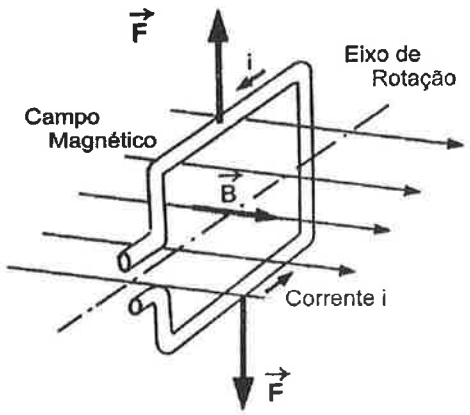


Figura 3.9: Posição de equilíbrio de uma espira energizada.

Como qualquer massa metálica sujeita a variações de fluxo magnético está sujeita a fenômenos dissipativos de energia (correntes parasitas e histerese magnética), o rotor é produzido de maneira a minimizá-los. A sua construção é feita com lâminas finas de aço, isoladas entre si e com boas propriedades magnéticas. Por esse método, a força eletromotriz induzida em cada lâmina é pequena e atua num circuito de secção reduzida, atenuando consideravelmente o valor das correntes parasitas e a correspondente perda de potência.

3.4 PERDAS DE ENERGIA EM MOTORES CC

O modelo matemático do motor, que será discutido no próximo item, inclui fatores que aproximam as perdas de energia verificadas em motores DC. Para uma melhor compreensão desses fatores, segue uma breve descrição dos principais mecanismos pelos quais elas ocorrem.

3.4.1 Perdas Elétricas

São as perdas ocasionadas devido à resistência dos condutores utilizados nos enrolamentos do rotor, bem como pela resistência de contato entre as escovas e o coletor. São também denominadas perdas ôhmicas, sendo expressas por.

$$W_{oh} = R_m \cdot i_m^2 \tag{3.3}$$

Onde:

W_{oh} é a perda ôhmica;

R_m é a resistência elétrica do circuito do motor, incluindo a resistência de contato entre escovas e coletor;

i_m é a corrente elétrica fornecida para o motor.

3.4.2 Perdas Magnéticas

Estas são as perdas por histerese e por correntes de Foucault (correntes parasitas, causadas pelo princípio de indução, itens 3.1.1 e 3.1.2) verificadas na massa metálica do rotor e nas faces polares dos ímãs.

Segundo Kosow[22] e Martignoni[25], as perdas magnéticas em um motor podem ser calculadas segundo as seguintes expressões:

$$W_h = k_h \cdot B_m^2 \cdot f_m \cdot Vol_m \tag{3.4}$$

$$W_p = k_t \cdot B_m^2 \cdot f_m^2 \cdot t_e^2 \cdot Vol_m \tag{3.5}$$

Onde:

W_h é a potência perdida por histerese;

W_p é a potência dissipada por correntes parasitas;

k_h , k_t são constantes relacionadas ao material utilizado;

B_m é o valor máximo da indução no material metálico do rotor;

f_m é a freqüência de variação do fluxo, que está relacionada com a rotação do motor;

t_e é a espessura das lâminas metálicas utilizadas na construção do motor;

Vol_m é o volume do material metálico sujeito à variação de fluxo;

3.4.3 Perdas Mecânicas

Num motor de corrente contínua que não possua um sistema de ventilação forçada para a sua refrigeração, as perdas mecânicas são causadas pela resistência aerodinâmica do rotor, pelos atritos nos mancais e devido a fricção entre a escovas e o coletor. Segundo Kenjo[20], as perdas mecânicas são proporcionais ao quadrado da velocidade de rotação da máquina elétrica.

3.5 Modelo Matemático

Considerando-se os princípios físicos apresentados no item 3.2 e os componentes de um motor de corrente contínua (item 3.3), é possível deduzir as expressões que permitem calcular o torque produzido, bem como as tensões nos terminais de motores DC. Relacionando-se essas expressões com aquelas que descrevem a cinética do rotor, bem como aquelas referentes aos tipos de perda de energia (item 3.4), obtém-se o modelo matemático almejado.

3.5.1 Torque em um Motor DC

Utilizando-se a expressão 3.2 e considerando-se a distribuição de grupos idênticos de espiras em um rotor de uma máquina elétrica de corrente contínua (figura 3.5), o torque produzido ao se energizar esse tipo de máquina é dado por:

$$T = \sum_{i=1}^{N_b} 2 \cdot Z_n \cdot b_e \cdot B_i \cdot l_e \cdot i_b \cdot \mathrm{sen}\left(\theta_i\right) \tag{3.6}$$

Onde:

T é o torque total produzido pelo motor;

Z_n é o número de espiras conectadas a duas lâminas consecutivas do coletor (vide figura 3.8). Cada grupo de espiras de um rotor é denominado bobina;

b_e é a metade da largura das espiras que constituem uma bobina (metade da distância AD apresentada na figura 3.2);

B_i intensidade de campo magnético produzido pelo estator em cada bobina i do rotor;

l_e comprimento efetivo das espiras das bobinas (partes sombreadas dos segmentos AB e DC da figura 3.2);

i_b é a corrente elétrica que percorre as bobinas;

θ_i é ângulo formado entre as linhas de força do campo gerado pelo estator e a direção da corrente elétrica nas espiras da bobina i;

N_b é o número de bobinas ativas do rotor.

Em máquinas de corrente contínua a ímãs permanentes criteriosamente projetadas, o campo magnético de intensidade B que atravessa o rotor varia pouco e suas linhas de campo são coplanares com os planos definidos pelas bobinas do rotor (as linhas de campo entram e emergem do rotor segundo ângulos retos, conforme figura 3.7). Assim, é praxe aproximar-se o termo B_i por um valor médio B e o termo sen(θ_i) por 1.

Com relação à corrente elétrica que percorre as bobinas do rotor, uma imediata aplicação da lei de Kirchoff (lei das correntes elétricas) no esquema de conexão dessas bobinas (figura 3.10) resulta:

$$i_b = \frac{i_m}{2} \quad \text{Onde } i_m \text{ é a corrente de alimentação do motor.} \tag{3.6}$$

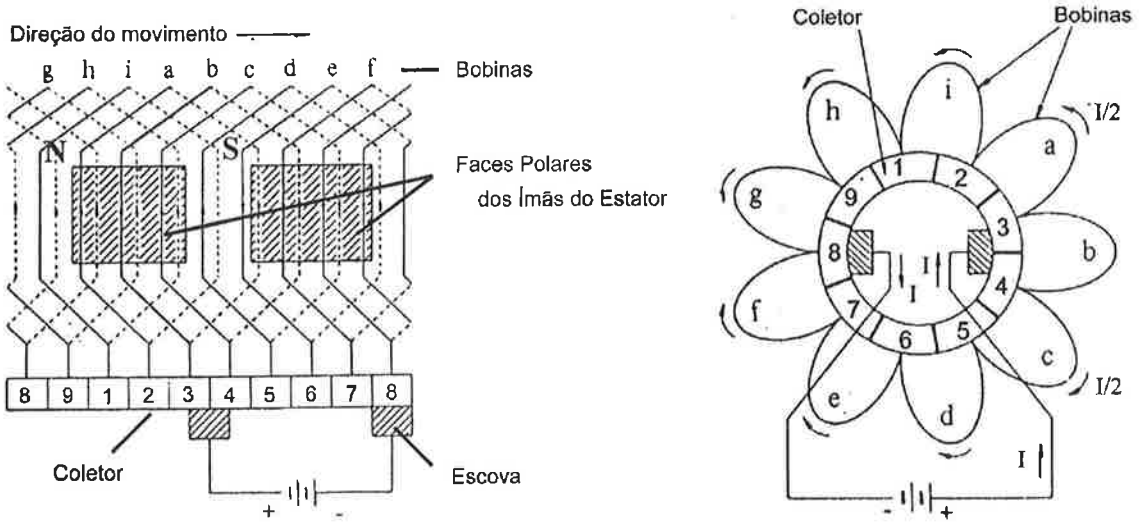


Figura 3.10: Diagrama de conexão das bobinas. Lado esquerdo: rotor retificado mostrando o sentido das correntes e posição das faces polares.

Considerando-se as aproximações acima e 3.6, a expressão do torque do motor (expressão 3.5) pode ser reescrita como:

$$T = N_b \cdot Z_n \cdot b_e \cdot B \cdot l_e \cdot i_m \tag{3.7}$$

Pela expressão acima, conclui-se que o torque produzido por uma máquina de corrente contínua a ímãs permanentes é proporcional à corrente elétrica da sua alimentação. A constante de proporcionalidade, K_t, (expressão 3.8) depende das características geométricas e elétricas do rotor, bem como das propriedades magnéticas dos ímãs que compõem o estator.

$$K_t = N_b \cdot Z_n \cdot b_e \cdot B \cdot l_e \tag{3.8}$$

3.5.2 Força Contra-eletromotriz

As bobinas do rotor de um motor de corrente contínua ficam sujeitas à variação do fluxo magnético quando o motor está em funcionamento. Pelo princípio da indução (item 3.2.1) e pelo princípio de Lenz (item 3.2.2), surge uma tensão nos terminais das bobinas que é contrária àquela que produz a corrente elétrica responsável pelo movimento do rotor, denominada força contra-eletromotriz.

Utilizando-se 3.1 e considerando-se o esquema de ligação das espiras apresentado na figura 3.10, escreve-se a seguinte expressão para a força contra-eletromotriz:

$$V_{fe} = \sum_{i=1}^{\frac{N_b}{2}} 2 \cdot Z_n \cdot B_i \cdot l_e \cdot v_e \cdot \operatorname{sen}(\alpha_i) \tag{3.9}$$

Onde:

- V_{fe} é a força eletromotriz produzida com a rotação do motor;
- Z_n é o número de espiras conectadas a duas lâminas consecutivas do coletor (vide figura 3.8). Cada grupo de espiras de um rotor é denominado bobina;
- B_i intensidade de campo magnético produzido pelo estator em cada bobina i do rotor;
- l_e comprimento efetivo das espiras das bobinas (partes sombreadas dos segmentos AB e DC da figura 3.2);
- v_e é a velocidade periférica das bobinas;

α_i é o ângulo formado pelas linhas do campo magnético e o vetor velocidade em cada bobina i;

N_b é o número de bobinas ativas do rotor.

Deve-se notar que a somatória das forças contra-eletromotrizes das bobinas é realizada apenas com a metade das bobinas ativas ($N_b/2$), devido à conexão elétrica em paralelo (figura 3.11).

Fazendo-se as mesmas aproximações citadas no item 3.5.1 com relação ao campo magnético, a expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V_{fe} = N_b \cdot Z_n \cdot B \cdot l_e \cdot v_e \tag{3.10}$$

Sendo ω_r a velocidade angular do rotor, a velocidade periférica (v_e) pode ser calculada por: $b_e \cdot \omega_r$, com b_e definido no item 3.5.1. Substituindo-se esse termo em 3.10, tem-se:

$$V_{fe} = N_b \cdot Z_n \cdot B \cdot l_e \cdot b_e \cdot \omega_r \tag{3.11}$$

A expressão acima indica que a força contra-eletromotriz em um motor de corrente contínua a ímãs permanentes é diretamente proporcional à velocidade angular do seu rotor. A constante de proporcionalidade, K_e (expressão 3.12), depende das

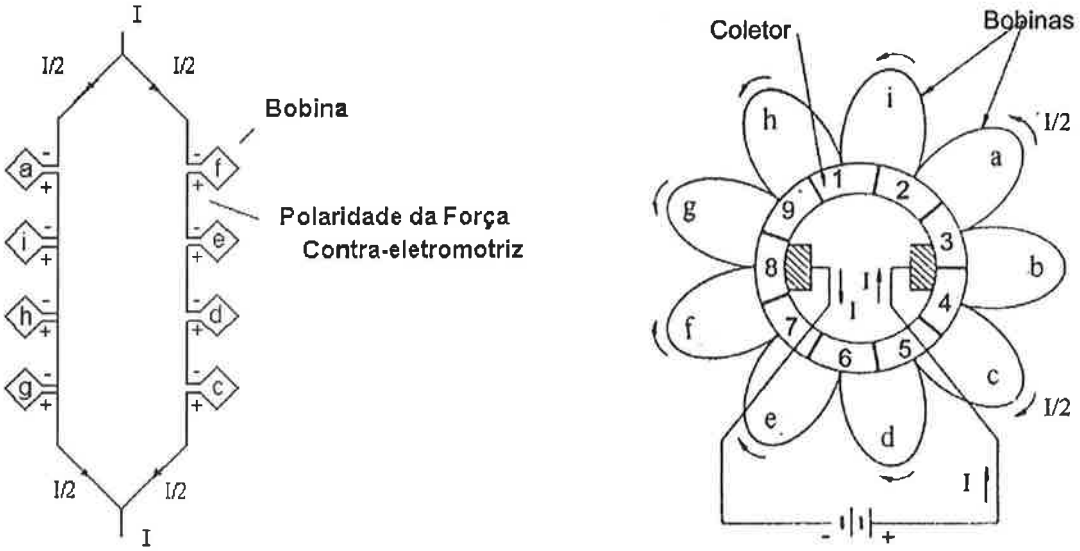


***Figura 3.11:** Diagrama de conexão das bobinas, mostrando o sentido da corrente de alimentação e a polarização das bobinas quanto a força contra-eletromotriz*

características geométricas e do número de bobinas, bem como das propriedades magnéticas dos ímãs que compõem o estator.

$$K_e = N_b \cdot Z_n \cdot b_e \cdot B \cdot l_e \tag{3.12}$$

Deve-se notar que as constantes de proporcionalidade K_e e K_t (expressões 3.8 e 3.12) são idênticas.

3.5.3 Modelo Eletromecânico

O circuito elétrico representativo de uma máquina elétrica de corrente contínua a ímãs permanentes é apresentado na figura 3.12, juntamente com componentes mecânicos equivalentes desse tipo de motor. As funções de cada uma das partes desse modelo eletromecânico são descritas a seguir:

Fonte V_a

É a fonte de alimentação. Fornece a corrente elétrica (i_m) que percorre o motor.

Diodos D1 e D2

Diodos que simulam a queda de tensão entre as escovas e o coletor, a qual é praticamente constante a partir de um determinado valor da corrente elétrica de alimentação.

Segundo Kenjo[20], a diferença de potencial (tensão) entre coletor e escovas depende dos materiais desses elementos, bem como da densidade (ampère/cm^2) e sentido da

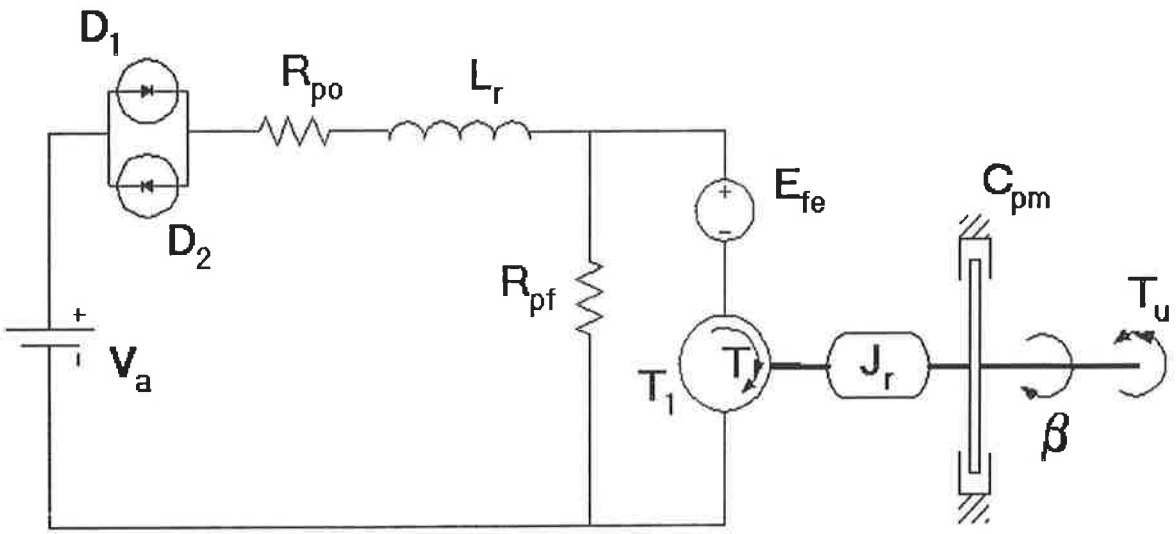


Figura 3.12: Modelo eletromecânico de um motor de corrente contínua a ímãs permanentes.

corrente que os atravessa.

Resistor R_{po}

Representa a perda ôhmica que ocorre nos condutores do rotor.

Indutor L_r

L_r simula a indutância do rotor, que é devida a associação das suas bobinas.

Gerador E_{fe}

Gera a força contra-eletromotriz associada com a rotação do motor (expressão 3.11).

Resistor R_{pf}

Modela as perdas no ferro, ou seja, as perdas por histerese e correntes parasitas (item 3.4.2).

Como R_{pf} está sujeito à mesma diferença de potencial que o gerador E_{fe} (o conversor de torque T_1 não causa queda de tensão), a potência dissipada pela sua resistência é dada por:

$$W_{pf} = \frac{V_{fe}^2}{R_{pf}} \tag{3.13}$$

Substituindo-se as expressões 3.11 e 3.12, resulta:

$$W_{pf} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K_e^2}{R_{pf}} \cdot f_r \tag{3.14}$$

Conclui-se, então, que o resistor R_{pf} dissipa uma potência que é proporcional ao quadrado da freqüência de rotação do motor (f_r).

Como a perda por correntes parasitas também é proporcional a f_r^2 (expressão 3.5), a escolha conveniente do valor de R_{pf} simula esse tipo de dissipação de energia.

As perdas por histerese, que são proporcionais à freqüência da rotação do motor (expressão 3.4), também podem ser incluídas no valor de R_{pf} com boa aproximação[20].

Conversor de Torque T_1

T_1 simula a conversão de energia que ocorre num motor DC, fornecendo um torque T que é proporcional à corrente que o percorre.

Amortecedor C_{pm}

Sua função é simular as perdas mecânicas discutidas no item 3.4.3.

Para conferir uma maior flexibilidade ao modelo, assumiu-se que o torque absorvido por esse amortecedor é do tipo:

$$T_{abs} = K1_{abs} + K2_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta\right) + K3_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta\right)^2 \tag{3.15}$$

Onde:

T_{abs}	é o torque devido ao atrito entre coletor e escovas, resistência aerodinâmica do rotor e atrito dos mancais;
$K1_{abs}$, $K2_{abs}$, $K3_{abs}$	são coeficientes constantes;
β	é a posição angular do rotor;

Inércia J_r

Simula a inércia rotacional do rotor e de todos os dispositivos conectados ao seu eixo (volantes de inércia, anéis internos dos rolamentos dos mancais etc).

3.5.4 Equações Matemáticas

Considerando-se somente o circuito elétrico do modelo eletromecânico (figura 3.12), as quedas de tensão presentes no circuito do motor elétrico (figura 3.13) devem ser iguais à tensão de alimentação. Dessa forma, tem-se:

$$V_a = L_r \cdot \frac{d}{dt} i_m + R_{po} \cdot i_m + K_e \cdot \frac{d}{dt}\beta + V_{esc} \tag{3.16}$$

Onde:

V_a	é a tensão de alimentação;
L_r	é a indutância aparente do rotor;
i_m	é a corrente de alimentação;
R_{po}	é a resistência equivalente às perdas ôhmicas no rotor (item 3.5.3);
K_e	constante de proporcionalidade (expressão 3.12);
β	é a posição angular do rotor;
V_{esc}	é a queda de tensão nas escovas.

Utilizando-se a expressão 3.15, o equilíbrio das forças aplicadas ao eixo do motor é expresso por:

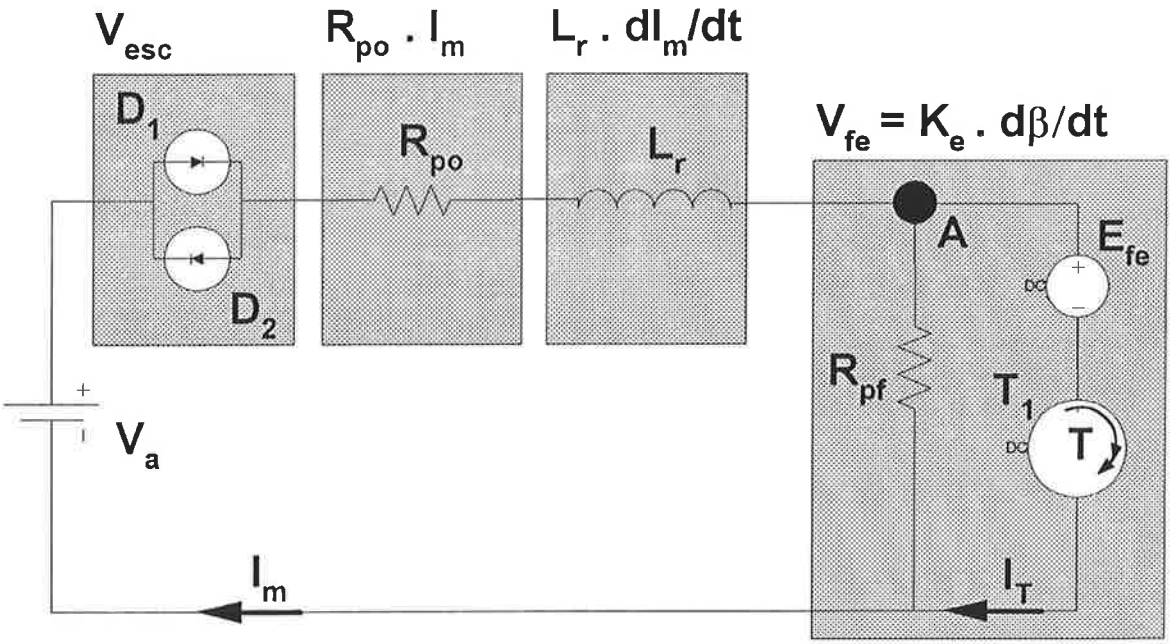


Figura 3.13: Quedas de tensão ao longo do circuito de um motor DC a ímãs permanentes.

$$T = J_r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\beta + T_{abs} + T_u \tag{3.17}$$

Onde:

- T torque gerado pelo motor elétrico;
- J_r inércia rotacional do rotor e acessórios (item 3.5.3)
- β é a posição angular do rotor;
- T_{abs} torque relacionado com as perdas mecânicas;
- T_u Carregamento ou torque absorvido por um dispositivo qualquer (torque útil);

O torque gerado pelo motor (T) pode ser calculado pela expressão 3.7 quando as perdas no ferro são nulas. Para os demais casos, essa mesma expressão fornece o torque T, desde que se deduza da corrente total de alimentação do motor (i_m) a parcela correspondente a essas perdas.

Considerando-se o equilíbrio das correntes no nó A da figura 3.13 (princípio de Kirchoff), a corrente que atravessa o conversor T_1 é dada por:

$$i_T = i_m - \frac{V_{fe}}{R_{pf}} \tag{3.18}$$

O termo V_{fe}/R_{pf} é a parcela da corrente de alimentação que não contribui para a geração de torque. Substituindo-se 3.18 e 3.8 em 3.7, resulta:

$$T = \left(i_m - \frac{V_{fe}}{R_{pf}} \right) \cdot K_t \tag{3.19}$$

Onde:

- T é o torque gerado pelo motor elétrico;
- i_m é a corrente de alimentação;
- V_{fe} é a força contra-eletromotriz (expressão 3.11);
- R_{pf} é a resistência equivalente às perdas no ferro (item 3.5.3);
- K_t é a constante de proporcionalidade do torque (expressão 3.8).

3.6 Determinação Experimental dos Parâmetros dos Motores DC

Os parâmetros elétricos e mecânicos de um motor de corrente contínua podem ser determinados através de técnicas de medição diretas ou indiretas. Dependendo do modelo eletromecânico adotado e das características de ensaio, todos os parâmetros podem ser obtidos sem a desmontagem do motor.

A seguir, são apresentadas as técnicas adotadas para a caracterização do motor elétrico utilizado no modelo experimental desta tese.

3.6.1 Determinação de R_{po} e V_{esc}

Considerando-se um motor com rotor travado e alimentado com corrente contínua, a expressão 3.16 se reduz a:

$$V_a = R_{po} \cdot i_m + V_{esc} \tag{3.20}$$

Variando-se a tensão de alimentação (V_a) e medindo-se a corrente i_m, determina-se V_{esc} e R_{po} por meio de uma simples regressão linear.

3.6.2 Determinação de $K1_{abs}$, $K2_{abs}$ e $K3_{abs}$

Se durante a rotação livre e constante de um motor - funcionamento a vazio ou sem carga - a sua carcaça for apoiada de tal forma que apenas a sua rotação seja possível e instalando-se um dispositivo que meça o torque para mantê-la em equilíbrio, a determinação de $K1_{abs}$, $K2_{abs}$ e $K3_{abs}$ é obtida através da expressão 3.17. Deve-se notar que o torque produzido pelo motor (T) e aquele que tende a girar a sua carcaça são iguais pelo princípio da ação e reação.

Fazendo-se T_u igual a zero (carregamento nulo) e $d\beta/dt$ constante em 3.17 (rotação constante), tem-se:

$$T = K1_{abs} + K2_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta\right) + K3_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta\right)^2 \tag{3.21}$$

Alterando-se a tensão de alimentação do motor para que a sua rotação varie desde zero até a máxima permitida e medindo-se o torque T, as constantes $K1_{abs}$, $K2_{abs}$ e $K3_{abs}$ são determinadas através do método dos mínimos quadrados, considerando-se uma função quadrática de interpolação.

3.6.3 Determinação de K_t e K_e

A força contra-eletromotriz em um motor de corrente contínua (V_{fe}, figura 3.13) pode ser calculada através da expressão 3.16, substituindo-se $K_e d\beta/dt$ por V_{fe}:

$$V_a = L_r \cdot \frac{d}{dt} i_m + R_{po} \cdot i_m + V_{fe} + V_{esc} \tag{3.16}$$

Considerando-se um motor em regime de rotação constante, o valor médio de $L_r.di_m/dt$ durante um certo período de tempo pode ser desprezado frente ao valores médios dos demais termos da expressão acima. Dessa forma, tem-se:

$$V_{fe} = K_e \cdot \frac{d}{dt}\beta \cong V_a - \left(R_{po} \cdot i_m + V_{esc}\right) \tag{3.22}$$

Com R_{po} e V_{esc} determinados no item 3.6.1 e através de medições simples de tensão e corrente elétricas durante ensaios a rotação constante, o lado esquerdo da expressão 3.22 é facilmente calculado. Se a velocidade angular também for mensurada durantes esses mesmos ensaios, é possível realizar uma regressão linear, obtendo-se o coeficiente K_e; esse é numericamente igual ao de K_t, conforme item 3.5.2.

3.6.4 Determinação de R_{pf}

Substituindo-se a expressões 3.11 e 3.12 em 3.19 e considerando-se que K_t e K_e são iguais (item 3.5.2), resulta:

$$T = \left(i_m - \frac{K_t \cdot \omega_r}{R_{pf}} \right) \cdot K_t \tag{3.22}$$

Onde:

ω_r é a velocidade angular do rotor;

Substituindo-se 3.22 em 3.17 e isolando-se o termo que contém i_m, obtém-se:

$$i_m = \frac{J_r}{K_t} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\beta(t) + \frac{K_t}{R_{pf}} \cdot \frac{d}{dt}\beta(t) + \frac{T_{ca}}{K_t} \tag{3.23}$$

Onde:

$$T_{ca} = K1_{abs} + K2_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta(t) \right) + K3_{abs} \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2}\beta(t) \right)^2 + T_u \tag{3.24}$$

Se a reação da carcaça do motor (cuja magnitude é T_{ca}) for medida durante o funcionamento em regime de rotação constante, a expressão 3.23 se reduz a:

$$i_m = \frac{K_t}{R_{pf}} \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta(t) \right) + \frac{T_{ca}}{K_t} \tag{3.25}$$

Através de uma regressão linear entre a velocidade angular (como variável independente) e a corrente i_m (como variável dependente), calcula-se o coeficiente K_t/R_{pf}. Com K_t determinado no item anterior, obtém-se R_{pf} através de uma simples manipulação algébrica.

3.6.5 Determinação de L_r

O valor da indutância equivalente do rotor pode ser obtido através de uma medição direta por meio de uma ponte RLC.

3.6.6 Determinação de J_r

A inércia rotacional do rotor com respectivos componentes adicionais (volantes de inércia, acoplamentos etc) pode ser medida indiretamente através da resposta dinâmica do sistema a um degrau de tensão aplicado aos bornes do motor. Outro meio - que exige a desmontagem prévia do motor- utiliza um pêndulo rotacional.

A expressão que relaciona a inércia rotacional de um rotor fixo numa base de um pêndulo rotacional com a freqüência de oscilação desse pêndulo é a seguinte (vide apêndice B):

$$4\cdot\pi^2\cdot g\cdot R_{pd}\cdot\frac{\left(f_{po}^{\,2}\cdot h_{po}-f_p^{\,2}\cdot h_p\right)\cdot M_{base}+M_r\cdot f_{po}^{\,2}\cdot h_{po}}{16\cdot\pi^4\cdot f_{po}^{\,2}\cdot f_p^{\,2}\cdot h_{po}\cdot h_p} \tag{3.26}$$

Onde:

g é a aceleração da gravidade no local do ensaio;

R_{pd} é a distância do centro de oscilação do pêndulo aos fios de suspensão da base;

M_{base} é a massa da base do pêndulo;

M_r é a massa do rotor;

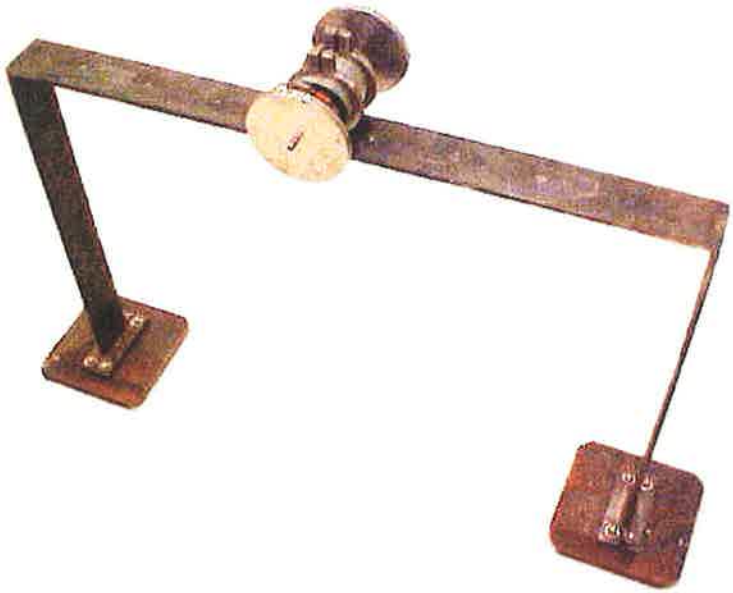
f_{po} é a freqüência de oscilação do pêndulo sem inércias adicionais na sua base;

f_p é a freqüência de oscilação do pêndulo quando o rotor está preso na sua base;

h_p é a distância da base ao ponto de suspensão do pêndulo quando o rotor está fixo nesta base;

h_{po} é a distância da base ao ponto de suspensão do pêndulo quando não há inércias adicionais fixas à sua base.

4 O SISTEMA MOTOR/ESTRUTURA



O modelo matemático para o sistema ao lado contém apenas quatro graus de liberdade: dois relativos aos deslocamentos do ponto central da viga (horizontal e vertical) e dois relacionados com o motor elétrico (rotação e corrente elétrica).

Neste capítulo, deduzem-se as equações do movimento desse sistema através da equação de Lagrange, a qual é válida para sistemas lineares e não lineares.

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo utilizam-se as informações dos capítulos precedentes na dedução das equações do movimento. Toda a análise é conduzida de forma literal, permitindo que soluções numéricas posteriores possam estudar a influência dos vários parâmetros do problema.

A equação de Lagrange, que é válida para sistemas lineares e não lineares, é empregada na obtenção das equações diferenciais do movimento, as quais são expressas em termos de quatro variáveis generalizadas - duas relativas aos deslocamentos horizontal e vertical do ponto central da viga e duas relacionadas com o motor elétrico (corrente elétrica e rotação).

As expressões das energias cinética e potencial do sistema, as quais são necessárias no processo dedutivo, são escritas com base nos sistemas dinâmicos equivalentes apresentados no capítulo 2. (figuras 2.6 e 2.7), onde os parâmetros de rigidez,

massa e amortecimento desses sistemas foram obtidos através do método de Rayleigh. Ressalta-se que os componentes do motor e respectivos acessórios (volantes de inércia, suportes etc) foram considerados rígidos e, dessa forma, as energias potenciais de deformação relacionadas com esses componentes foram desprezadas na análise.

O desbalanceamento do motor, que produz as forças necessárias para a excitação da estrutura, foi considerado como uma massa independente (M_{desb}), possuindo inércia rotacional (J_{desb}), conectada ao eixo do rotor e mantida afastada desse por uma certa distância radial (R_{desb}). Embora essa situação seja irreal na prática, permitiu obter um modelo mais realístico da estrutura de teste – os desbalanceamentos nessa estrutura são causados pela fixação de massas nos volantes de inércia do motor – e não impede que situações mais verossímeis sejam analisadas.

Por último, como o campo de deslocamento apresentado no item 2.3 considera apenas termos de ordem inferior a três, a mesma aproximação foi realizada durante todo o processo de obtenção das equações do movimento.

4.2 ENERGIA CINÉTICA

4.2.1. Estrutura

Considerando-se o campo de deslocamentos analisado no item 2.3 e as figuras 2.6 e 2.7, escreve-se a seguinte expressão para a energia cinética da estrutura:

$$T_e = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{l} M1_c \cdot \left(\frac{d}{dt}x_1\right)^2 + M1_c \cdot \left(\frac{d}{dt}x_3\right)^2 + J2_c \cdot \left(\frac{d}{dt}\gamma_1\right)^2 + J2_c \cdot \left(\frac{d}{dt}\gamma_3\right)^2 \ldots \\ + M1_v \cdot \left(\frac{d}{dt}x_2\right)^2 + M2_v \cdot \left(\frac{d}{dt}y_2\right)^2 \ldots \\ + J1_m \cdot \left(\frac{d}{dt}\gamma_2\right)^2 + M1_m \cdot \left(\frac{d}{dt}x_2\right)^2 + M2_m \cdot \left(\frac{d}{dt}y_4\right)^2 \end{array} \right] \tag{4.1}$$

Onde γ_1, γ_2 e γ_3 são as rotações dos pontos 1, 2 e 3, já definidas no capítulo 2; x_1, x_2, x_3 e y_2 são as coordenadas desses mesmos pontos, dadas por:

$$x_1(t) = q_1(t) \cdot h + D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 + D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 \tag{4.2}$$

$$x_2(t) = u_2(t) + \frac{L}{2} = q_1(t) \cdot h + \frac{L}{2} \tag{4.3}$$

$$x_3(t) = u_3(t) + L = q_1(t) \cdot h - D_1 \cdot \left(q_2(t) \cdot L\right)^2 - D_2 \cdot \left(q_1(t) \cdot h\right)^2 + L \tag{4.4}$$

$$y_2(t) = v_2(t) + h = q_2(t) \cdot L + h \tag{4.5}$$

Substituindo-se 4.2 a 4.5 em 4.1, resulta:

$$T_e := Aux_5(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 + Aux_6(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 + Aux_7(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) \tag{4.6}$$

Onde:

$$Aux_5(t) := \begin{bmatrix} 16 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3^2 \cdot D_2^4 \cdot h^8 \cdot q_1(t)^6 \ldots \\ + 16 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3^2 \cdot h^6 \cdot \left(2 \cdot D_1 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^2 \cdot D_2 + 1\right) \cdot D_2^2 \cdot q_1(t)^4 \ldots \\ + 4 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3^2 \cdot h^4 \cdot \left(2 \cdot D_1 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^2 \cdot D_2 + 1\right)^2 \cdot q_1(t)^2 \ldots \\ + J2_c \cdot D_5^2 \cdot h^2 \ldots \\ + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot q_1(t)^2 \cdot D_2^2 \cdot M1_c \cdot h^2 + 2 \cdot M1_c \ldots \\ + D_6^2 \cdot J1_m + M1_m + M1_v \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Aux_6(t) := \begin{bmatrix} 16 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3^2 \cdot h^4 \cdot D_1^2 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^4 \cdot D_2^2 \cdot q_1(t)^4 \ldots \\ + \begin{pmatrix} 32 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot L^6 \cdot D_3^2 \cdot h^2 \cdot D_1^3 \cdot D_2 \cdot q_2(t)^4 \ldots \\ + 8 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot L^3 \cdot D_3 \cdot h^2 \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot q_2(t) \end{pmatrix} \cdot q_1(t)^2 \ldots \\ + J2_c \cdot D_4^2 \cdot L^2 \cdot \left(4 \cdot q_2(t)^3 \cdot D_3 \cdot D_1^2 \cdot L^3 + 1\right)^2 \ldots \\ + 4 \cdot M1_c \cdot D_1^2 \cdot q_2(t)^2 \cdot L^4 + \frac{1}{2} \cdot M2_m \cdot L^2 + \frac{1}{2} \cdot M2_v \cdot L^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Aux_7 := & \left(32 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3^2 \cdot h^6 \cdot D_1 \cdot q_2(t) \cdot L^2 \cdot D_2^3 \cdot q_1(t)^5\right) \ldots \\ & + 8 \cdot J2_c \cdot L \cdot D_3 \cdot D_4^2 \cdot h^4 \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot D_2 \cdot q_2(t)^3 \cdot D_3 \cdot D_1^2 \cdot L^3 \ldots \\ + D_2 + 2 \cdot D_3 \cdot L \cdot D_1 \cdot q_2(t) \end{pmatrix} \cdot q_1(t)^3 \ldots \\ & + \begin{bmatrix} \left(32 \cdot L^6 \cdot D_3^2 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot h^2 \cdot D_1^3 \cdot D_2 \cdot q_2(t)^5\right) \ldots \\ + 16 \cdot L^4 \cdot D_3^2 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot D_1^2 \cdot h^2 \cdot q_2(t)^3 \ldots \\ + \left(8 \cdot L^3 \cdot D_3 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot h^2 \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot q_2(t)^2\right) \ldots \\ + 4 \cdot L \cdot D_3 \cdot J2_c \cdot D_4^2 \cdot h^2 \end{bmatrix} \cdot q_1(t) \ldots \\ & + 8 \cdot M1_c \cdot D_1 \cdot q_2(t) \cdot L^2 \cdot D_2 \cdot q_1(t) \cdot h^2 \end{aligned}$$

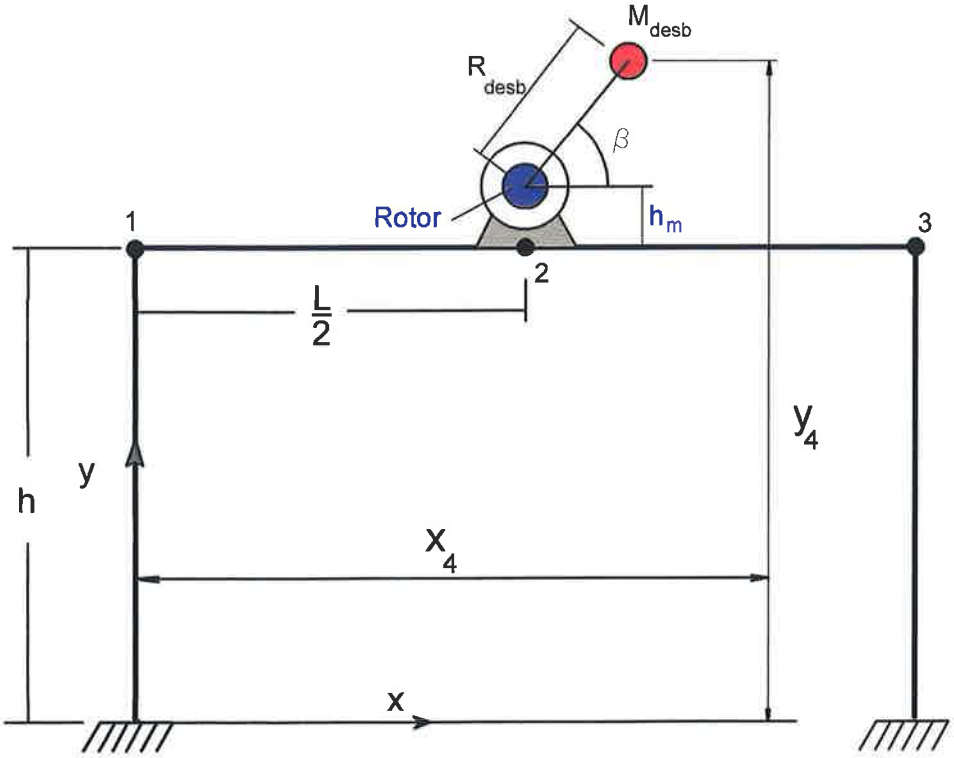


Figura 4.1: Coordenadas da massa que provoca o desbalanceamento do motor.

4.2.2. Motor Elétrico

A energia cinética do motor devido aos movimentos de translação da estrutura já foi considerada na expressão 4.6. A parcela devido ao movimento de rotação do rotor e da massa desbalanceadora é expressa por:

$$T_m = \frac{1}{2} \cdot \left[M_{desb} \cdot \left[\left(\frac{d}{dt}x_4\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y_4\right)^2 \right] + \left(J_r + J_{desb}\right) \cdot \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)^2 \right] \tag{4.7}$$

Onde:

x_4 e y_4: são as coordenadas da massa desbalanceadora, dadas por (figura 4.1):

$$x_4(t) = u_2(t) + \frac{L}{2} + R_{desb} \cdot \cos(\beta(t)) \tag{4.8}$$

$$y_4(t) = v_2(t) + R_{desb} \cdot \sin(\beta(t)) + h + h_m \tag{4.9}$$

J_r inércia rotacional do rotor em relação ao seu eixo de simetria longitudinal;

M_{desb} massa desbalanceadora;

β posição angular do rotor.

Definindo-se a coordenada generalizada $q_3(t)$ por:

$$q_3(t) = \beta(t)$$

as expressões 4.8 e 4.9 podem ser reescritas em termos das demais coordenadas (q1(t) e q2(t)), obtendo-se:

$$x_4(t) = q_1(t) \cdot h + R_{desb} \cdot \cos\left(q_3(t)\right) + \frac{L}{2} \tag{4.10}$$

$$y_4(t) = q_2(t) \cdot L + R_{desb} \cdot \sin\left(q_3(t)\right) + h + h_m \tag{4.11}$$

Substituindo-se 4.10 e 4.11 em 4.7, obtém-se a expressão da energia cinética do motor em termos das coordenadas generalizadas, devido apenas à sua rotação.

$$\begin{aligned} T_m = & \frac{1}{2} \cdot M_{desb} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 \ldots \\ & + \frac{1}{2} \cdot M_{desb} \cdot L^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 \ldots \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left(M_{desb} \cdot R_{desb}{}^2 + J_r + J_{desb}\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_3(t)\right)^2 \ldots \\ & + M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \left[\begin{array}{l} L \cdot \cos\left(q_3(t)\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) \ldots \\ + \left[-\sin\left(q_3(t)\right) \cdot h \cdot \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right) \right] \end{array} \right] \cdot \left(\frac{d}{dt} q_3(t)\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3 Energia Potencial

4.3.1. Estrutura

A energia potencial total da estrutura é obtida através da seguinte expressão:

$$V_e = U_e - W_e \tag{4.13}$$

Onde:

U_e é a energia de deformação das colunas e da viga;

W_e é a energia potencial das forças conservativas.

Considerando-se novamente o campo de deslocamentos analisado no item 2.3 e as figuras 2.6, 2.7 e 4.1, escrevem-se as seguintes expressões para U_e e W_e:

$$U_e = \frac{1}{2}\cdot K1_c\cdot\left(u_1(t)^2 + u_3(t)^2\right) + \frac{1}{2}\cdot K2_c\cdot\left(\gamma_1(t)^2 + \gamma_3(t)^2\right)\ldots$$
$$+\frac{1}{2}\cdot K2_v\cdot\left(v_2(t) - \frac{v_1(t)+v_3(t)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot K1_v\cdot u_2(t)^2 \tag{4.14}$$

$$W_e = -g\cdot\left[M2_v\cdot\left(v_2(t)+h\right) + M2_m\cdot\left(v_2(t)+h+h_m\right)\right] \tag{4.15}$$

Substituindo-se 4.14 e 4.15 em 4.13 e reescrevendo-se o resultado em termos das coordenadas generalizadas q_1, q_2 e q_3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
V_e = {} & \frac{1}{2}\cdot K1_c\cdot\left[\begin{array}{l}\left(2\cdot q_1(t)^2\cdot h^2 + 2\cdot D_1^2\cdot q_2(t)^4\cdot L^4\right)\ldots\\ +4\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot L^2\cdot D_2\cdot q_1(t)^2\cdot h^2 + 2\cdot D_2^2\cdot q_1(t)^4\cdot h^4\end{array}\right]\ldots\\
& +\frac{1}{2}\cdot K2_c\cdot\left[\begin{array}{l}2\cdot D_4^2\cdot D_3^2\cdot D_2^4\cdot q_1(t)^8\cdot h^8\ldots\\ +\left[4\cdot D_4^2\cdot D_2^2\cdot D_3^2\cdot h^6\cdot\left(2\cdot D_2\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot L^2+1\right)\right]\cdot q_1(t)^6\ldots\\ +2\cdot D_4^2\cdot D_3\cdot h^4\cdot\left(\begin{array}{l}D_3 + 2\cdot D_2^2\cdot L\cdot q_2(t)\ldots\\ +4\cdot D_3\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot L^2\cdot D_2\ldots\\ +6\cdot D_3\cdot D_2^2\cdot L^4\cdot q_2(t)^4\cdot D_1^2\end{array}\right)\cdot q_1(t)^4\ldots\\ +2\cdot h^2\cdot\left(\begin{array}{l}4\cdot D_4^2\cdot D_3\cdot D_1\cdot q_2(t)^3\cdot L^3\cdot D_2\ldots\\ +2\cdot D_4^2\cdot D_3\cdot L\cdot q_2(t)\ldots\\ +2\cdot D_4^2\cdot D_3^2\cdot L^4\cdot q_2(t)^4\cdot D_1^2\ldots\\ +D_5^2 + 4\cdot D_4^2\cdot D_3^2\cdot D_1^3\cdot q_2(t)^6\cdot L^6\cdot D_2\end{array}\right)\cdot q_1(t)^2\ldots\\ +2\cdot D_4^2\cdot L^2\cdot q_2(t)^2\cdot\left(1 + L^3\cdot q_2(t)^3\cdot D_3\cdot D_1^2\right)^2\end{array}\right]\\
& +\frac{1}{2}\cdot K2_v\cdot\left[\begin{array}{l}D_3\cdot q_1(t)^2\cdot h^2\cdot\left(h^2\cdot q_1(t)^2\cdot D_2^2+1\right) + q_2(t)\cdot L\ldots\\ +D_3\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot L^2\cdot\left(D_1\cdot q_2(t)^2\cdot L^2 + 2\cdot D_2\cdot q_1(t)^2\cdot h^2\right)\end{array}\right]^2\ldots\\
& +\frac{1}{2}\cdot K1_v\cdot\left(q_1(t)\cdot h\right)^2 + g\cdot\left[M2_v\cdot\left(q_2(t)\cdot L+h\right) + M2_m\cdot\left(q_2(t)\cdot L+h+h_m\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3.2. Motor Elétrico

A energia potencial devida ao motor elétrico é calculada através da seguinte expressão:

$$V_m = U_m - W_m \tag{4.17}$$

Onde:

U_m é a energia de deformação das partes constituintes do motor, dos suportes e dos volantes de inércia;

W_m é a energia potencial das forças conservativas.

Considerando-se que a energia potencial devido à massa do motor já foi incluída na expressão 4.14 e que a energia de deformação é nula - supondo-se que o motor e seus acessórios são rígidos – a expressão 4.16 é reescrita na seguinte forma:

$$V_m = g \cdot M_{desb} \cdot y_4(t) \tag{4.18}$$

Substituindo-se 4.10 em 4.17, obtém-se a energia potencial do motor em termos das coordenadas generalizada q_2 e q_3.

$$V_m = g \cdot M_{desb} \cdot \left(q_2(t) \cdot L + R_{desb} \cdot \sin\left(q_3(t)\right) + h + h_m\right) \tag{4.19}$$

4.4 Equações do Movimento

A equação de Lagrange que permite obter as equações do movimento de um sistema a partir das expressões das energias cinética e potencial e das forças externas atuantes é a seguinte:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\left(\frac{d}{dt}q_n(t)\right)}T_{tot}\right] - \left(\frac{\partial}{\partial q_n}T_{tot}\right) + \frac{\partial}{\partial q_n}V_{tot} = N_n \tag{4.20}$$

Onde:

T_{tot} é a energia cinética total do sistema considerado;

V_{tot} é a energia potencial total do sistema;

n índice que, para a estrutura analisada, varia entre 1 e 3;

q_n variáveis generalizadas;

N_n forças generalizadas.

Para o sistema estrutural considerado, as energias cinética e potencial são obtidas através da soma algébrica das energias correspondentes da estrutura e do motor (itens 4.2 e 4.3); as forças generalizadas são predominantemente dissipativas, calculadas através da multiplicação de constantes por velocidades generalizadas (a única exceção é o torque gerado pelo motor, o qual é relacionado com a variável q_3).

Para as coordenadas generalizadas q_1 e q_2, escrevem-se as expressões de N_1 e de N_2 com base nos sistemas equivalentes (figuras 2.6 e 2.7):

$$N_1(t) = -\left(C1_c \cdot \frac{d}{dt} u_1(t) + C1_c \cdot \frac{d}{dt} u_3(t) + C1_v \cdot \frac{d}{dt} u_2(t) \right) \tag{4.21}$$

$$N_2(t) = -\left[C2_c \cdot \left(\frac{d}{dt} \gamma_1(t) \right) + C2_c \cdot \left(\frac{d}{dt} \gamma_3(t) \right) + C2_v \cdot \frac{d}{dt} v_2(t) \right] \tag{4.22}$$

Com relação à coordenada q_3, a força generalizada é a resultante do torque gerado pelo motor (T(t), item 3.5, expressão 3.19) com o torque absorvido (3.21):

$$N_3(t) = T(t) - T_{abs}(t) \tag{4.23}$$

Substituindo-se as expressões 3.19, 3.21 e 3.22 em 4.23, resulta:

$$N_3(t) = \left[i_m - \frac{K_e \cdot \left(\frac{d}{dt} q_3(t) \right)}{R_{pf}} \right] \cdot K_t - \left[K1_{abs} + K2_{abs} \cdot \frac{d}{dt} \beta(t) + K3_{abs} \cdot \left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right)^2 \right] \tag{4.24}$$

Definindo-se uma quarta variável generalizada (q_4) como:

$$q_4(t) = \frac{i_m(t)}{\left(\frac{V_{max}}{R_{po}} \right)} \tag{4.25}$$

onde:

$i_m(t)$ é a corrente de armadura (ou de alimentação do motor);

V_{max} é a máxima tensão de alimentação do motor;

R_{po} é a resistência equivalente às perdas ôhmicas.

é possível reescrever a expressões 4.21, 4.22 e 4.24 em termos das coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3 e q_4:

$$N_1(t) = -h \cdot \left(2 \cdot C1_c + C1_v\right) \cdot V_1(t) \tag{4.26}$$

$$N_2(t) = 2 \cdot C2_c \cdot D_5 \cdot V_1(t) \cdot h - C2_v \cdot L \cdot V_2(t) \tag{4.27}$$

$$N_3(t) = \left(q_4(t) \cdot \frac{V_{max}}{R_{po}} - \frac{K_t \cdot V_3(t)}{R_{pf}} \right) \cdot K_t - \left(K1_{abs} + K2_{abs} \cdot V_3(t) + K3_{abs} \cdot V_3(t)^2 \right) \tag{4.28}$$

Onde:

$$V_1(t) = \frac{d}{dt} q_1(t) \qquad V_2(t) = \frac{d}{dt} q_2(t) \qquad V_3(t) = \frac{d}{dt} q_3(t)$$

Considerando-se as forças generalizadas N_1 a N_3, substituindo-se as expressões das energias cinética e potencial do sistema motor/pórtico em 4.20 e desprezando-se os termos com ordem superior a 3 (relativos às coordenadas generalizadas), obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
& h \cdot \left[\begin{array}{l} \left(8 \cdot h^2 \cdot q_1(t)^2 \cdot D_3^2 \cdot D_4^2 + 2 \cdot D_5^2\right) \cdot J2_c \ldots \\ + \left(2 + 8 \cdot q_1(t)^2 \cdot D_2^2 \cdot h^2\right) \cdot M1_c + M_{desb} \ldots \\ + D_6^2 \cdot J1_m + M1_m + M1_v \end{array} \right] \cdot A_1(t) \ldots \\
& + \left[4 \cdot L \cdot h \cdot q_1(t) \cdot \left(\begin{array}{l} 2 \cdot J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^2 \cdot D_2^2 \cdot h^2 \cdot q_1(t)^2 \ldots \\ + 2 \cdot J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^2 \cdot D_1 \cdot q_2(t)^2 \cdot D_2 \cdot L^2 \ldots \\ + 2 \cdot M1_c \cdot D_1 \cdot q_2(t) \cdot D_2 \cdot L + J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^2 \end{array} \right) \right] \cdot A_2(t) \ldots \\
& + \left(-M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \sin\left(q_3(t)\right)\right) \cdot A_3(t) \ldots \\
& + 8 \cdot h^3 \cdot q_1(t) \cdot \left(D_2^2 \cdot M1_c + D_3^2 \cdot D_4^2 \cdot J2_c\right) \cdot V_1(t)^2 \ldots \\
& + 8 \cdot D_1 \cdot L^2 \cdot D_2 \cdot q_1(t) \cdot h \cdot M1_c \cdot V_2(t)^2 \ldots \\
& + \left(-M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \cos\left(q_3(t)\right)\right) \cdot V_3(t)^2 \ldots \\
& + h \cdot \left(2 \cdot C1_c + C1_v\right) \cdot V_1(t) \ldots \\
& + h \cdot q_1(t) \cdot \left(\begin{array}{l} 4 \cdot q_2(t) \cdot K2_c \cdot D_4^2 \cdot D_3 \cdot L \ldots \\ + 2 \cdot q_2(t) \cdot K2_v \cdot L \cdot D_3 + 2 \cdot K1_c \ldots \\ + K1_v + 2 \cdot K2_c \cdot D_5^2 \end{array} \right)
\end{aligned} = 0 \tag{4.29}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[4\cdot q_1(t)\cdot h^2\cdot\left[\begin{array}{l}\left(2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot D_2\cdot L^2\right)\ldots\\ +2\cdot M1_c\cdot D_1\cdot q_2(t)\cdot D_2\cdot L\ldots\\ +\left(2\cdot q_1(t)^2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_2^{\,2}\cdot h^2\right)\ldots\\ +J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\end{array}\right]\right]\cdot A_1(t)\ldots \qquad = 0\\
&+L\cdot\left[\begin{array}{l}16\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c\cdot q_2(t)^3\cdot D_3\cdot D_1^{\,2}\cdot L^3\ldots\\ +\left(8\cdot M1_c\cdot D_1^{\,2}\cdot q_2(t)^2\cdot L^2\right)\ldots\\ +16\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c\cdot D_3\cdot h^2\cdot D_1\cdot q_2(t)\cdot D_2\cdot q_1(t)^2\cdot L\ldots\\ +M2_m+M2_v+2\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c+M_{desb}\end{array}\right]\cdot A_2(t)\ldots\\
&+M_{desb}\cdot R_{desb}\cdot\cos\left(q_3(t)\right)\cdot A_3(t)\ldots\\
&+4\cdot h^2\cdot\left[\begin{array}{l}\left(6\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_2^{\,2}\cdot q_1(t)^2\cdot h^2\right)\ldots\\ +2\cdot L\cdot M1_c\cdot D_1\cdot q_2(t)\cdot D_2\ldots\\ +\left(2\cdot L^2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot D_2\right)\ldots\\ +J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\end{array}\right]\cdot V_1(t)^2\ldots\\
&+8\cdot L^2\cdot D_1\cdot\left[\begin{array}{l}\left(3\cdot D_1\cdot L^2\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot q_2(t)^2\cdot D_3\right)\ldots\\ +D_1\cdot L\cdot M1_c\cdot q_2(t)\ldots\\ +D_3\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot h^2\cdot D_2\cdot q_1(t)^2\end{array}\right]\cdot V_2(t)^2\ldots\\
&+\left(-M_{desb}\cdot R_{desb}\cdot\sin\left(q_3\right)\right)\cdot V_3(t)^2\ldots\\
&+4\cdot C2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot D_3\cdot h^2\cdot q_1(t)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(2\cdot q_1(t)^2\cdot h^2\cdot D_2^{\,2}\right)\ldots\\ +2\cdot L^2\cdot D_1\cdot q_2(t)^2\cdot D_2+1\end{array}\right]\cdot V_1(t)\ldots\\
&+L\cdot\left[\left[\begin{array}{l}2\cdot D_4^{\,2}\cdot\left[\begin{array}{l}\left(4\cdot D_1^{\,2}\cdot D_3\cdot q_2(t)^3\cdot L^3\right)\ldots\\ +4\cdot q_1(t)^2\cdot D_2\cdot q_2(t)\cdot D_1\cdot h^2\cdot D_3\cdot L+1\end{array}\right]\cdot C2_c\\ +C2_v\end{array}\right]\ldots\right]\cdot V_2(t)\ldots\\
&+D_3\cdot h^2\cdot\left(K2_v+2\cdot K2_c\cdot D_4^{\,2}\right)\cdot q_1(t)^2\ldots\\
&+L\cdot\left[\begin{array}{l}\left(32\cdot D_1\cdot D_2\cdot q_1(t)\cdot h^2\cdot V_1(t)\cdot V_2(t)\cdot D_3\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot L\right)\ldots\\ +2\cdot D_4^{\,2}\cdot K2_c+K2_v\end{array}\right]\cdot q_2(t)\ldots\\
&+g\cdot\left(M2_m+M_{desb}+M2_v\right)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$$\begin{bmatrix} \left(-M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \sin\left(q_3(t)\right) \cdot h\right) \cdot A_1(t) \ldots \\ + M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot L \cdot \cos\left(q_3(t)\right) \cdot A_2(t) \ldots \\ + \left(M_{desb} \cdot R_{desb}{}^2 + J_r + J_{desb}\right) \cdot A_3(t) \ldots \\ + \left(K3_{abs} \cdot D_6 \cdot h\right) \cdot V_3(t)^2 \ldots \\ + \left(\dfrac{K_t{}^2}{R_{pf}} - K2_{abs}\right) \cdot D_6 \cdot h \cdot V_3(t) \ldots \\ + g \cdot M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \cos\left(q_3(t)\right) - \left(q_4(t) \cdot \dfrac{V_{max}}{R_{po}} \cdot K_t - K1_{abs}\right) \cdot D_6 \cdot h \end{bmatrix} = 0 \tag{4.31}$$

Onde:

$$A_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) \qquad A_2(t) = \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) \qquad A_3(t) = \frac{d^2}{dt^2} q_3(t)$$

As equações 4.29 a 4.31 e a 3.16 – reescrita, a seguir, em termos da coordenadas generalizadas q_3 e q_4 e considerando o movimento relativo entre estator e rotor, causado pelo movimento da estrutura ($\beta(t)$ - $\gamma_2(t)$) - definem o movimento do sistema estrutura/motor.

$$L_r \cdot \frac{V_{max}}{R_{po}} \cdot \frac{d}{dt} q_4(t) + q_4(t) \cdot V_{max} + K_e \cdot \left(V_3(t) - D_6 \cdot h \cdot V_1(t)\right) = V_a(t) - V_{esc} \tag{4.32}$$

5 ANÁLISE NUMÉRICA

Vários incidentes já aconteceram devido a falhas na análise numérica durante a fase de projeto ou de funcionamento de um determinado dispositivo.

Dentre os mais famosos, cita-se o ocorrido com o módulo lunar utilizado na missão Apollo 11, o qual continha um computador de bordo para controlar a nave durante a alunissagem.

Com uma memória em torno de 8Kbytes e pesando aproximadamente 35Kg, esse computador, inicialmente projetado pela IBM, era considerado um dos mais avançados para o início dos anos 70. Seu software de aquisição e análise de dados permitia – assim se pensava – pousar a nave com um mínimo de interferência humana.

Momentos antes do primeiro pouso do Homem na lua, o computador foi desconectado – um dos astronautas assumiu o comando para evitar o impacto com o solo.

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se as manipulações algébricas das equações do sistema motor/estrutura, a fim de deixá-las numa forma conveniente para permitir a utilização de um dos vários métodos de integração numérica disponíveis. Simulam-se, também, algumas respostas estruturais a partir de excitações simples, tais como: deslocamento inicial imposto, aceleração do motor elétrico sob tensão constante, aceleração lenta e gradativa do motor nas proximidades da ressonância do sistema etc.

O método de integração de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo adaptativo foi o escolhido para resolver o sistema de equações diferenciais. Além da sua notável

estabilidade, seu algoritmo pode ser encontrado na maioria dos livros sobre cálculo numérico e é disponível em vários *softwares* de simulação; em particular, utilizou-se o programa Mathcad - versão 7.0/*Professional*, produzido pela MathSoft - para gerar os resultados deste capítulo.

5.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para que a integração numérica das equações 4.26 a 4.28 seja possível através do método de Runge-Kutta, os termos contendo as derivadas segundas das variáveis generalizadas devem ser isolados. O rearranjo algébrico necessário é explicado a seguir.

Primeiramente, as equações 4.26 a 4.28 podem ser reescritas na seguinte forma:

$$E_1(Y)\cdot A_1(t) + E_2(Y)\cdot A_2(t) + E_3(Y)\cdot A_3(t) + E_4(Y) = 0 \tag{5.1}$$

$$E_5(Y)\cdot A_1(t) + E_6(Y)\cdot A_2(t) + E_7(Y)\cdot A_3(t) + E_8(Y) = 0 \tag{5.2}$$

$$E_9(Y)\cdot A_1(t) + E_{10}(Y)\cdot A_2(t) + E_{11}\cdot A_3(t) + E_{12}(Y) = 0 \tag{5.3}$$

$$L_r \cdot \frac{V_{max}}{R_{po}} \cdot V_4(t) + Y_3 \cdot V_{max} + K_e \cdot \left(Y_6 - D_6 \cdot h \cdot Y_4\right) = V_a(t) - V_{esc} \tag{5.4}$$

Onde

$Y = [\, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 \,]$

$Y = [q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), V_1(t), V_2(t), V_3(t)]$ vetor das variáveis generalizadas e suas respectivas derivadas. (5.5)

$$E_1(Y) = h \cdot \left[\begin{array}{l} \left[\left[8 \cdot h^2 \cdot \left(Y_0\right)^2 \cdot D_3^{\,2} \cdot D_4^{\,2} + 2 \cdot D_5^{\,2} \right] \cdot J2_c \ldots \right] \ldots \\ + \left[2 + 8 \cdot \left(Y_0\right)^2 \cdot D_2^{\,2} \cdot h^2 \right] \cdot M1_c \\ + M_{desb} + D_6^{\,2} \cdot J1_m + M1_m + M1_v \end{array} \right] \tag{5.6}$$

$$E_2(Y) = \left[4 \cdot L \cdot h \cdot Y_0 \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^{\,2} \cdot D_2^{\,2} \cdot h^2 \cdot \left(Y_0\right)^2 \ldots \\ + 2 \cdot J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^{\,2} \cdot D_1 \cdot \left(Y_1\right)^2 \cdot D_2 \cdot L^2 \ldots \\ + 2 \cdot M1_c \cdot D_1 \cdot Y_1 \cdot D_2 \cdot L + J2_c \cdot D_3 \cdot D_4^{\,2} \end{array} \right] \right] \tag{5.7}$$

$$E_3(Y) = -M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \sin\left(Y_2\right) \tag{5.8}$$

$$
\begin{aligned}
E_4(Y) = {} & \left(8\cdot h^3\cdot Y_0\cdot M1_c\cdot D_2^{\,2} + 8\cdot h^3\cdot Y_0\cdot D_3^{\,2}\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c\right)\cdot\left(Y_4\right)^2 \ldots \\
& + 8\cdot D_1\cdot L^2\cdot D_2\cdot Y_0\cdot h\cdot M1_c\cdot\left(Y_5\right)^2 \ldots \\
& + \left(-M_{desb}\cdot R_{desb}\cdot\cos\left(Y_2\right)\right)\cdot\left(Y_6\right)^2 \ldots \\
& + h\cdot\left(2\cdot C1_c + C1_v\right)\cdot Y_4 \ldots \\
& + h\cdot Y_0\cdot\begin{pmatrix} 4\cdot Y_1\cdot K2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot D_3\cdot L + 2\cdot Y_1\cdot K2_v\cdot L\cdot D_3 \ldots \\ + 2\cdot K1_c + K1_v + 2\cdot K2_c\cdot D_5^{\,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$
E_5(Y) = 4\cdot Y_0\cdot h^2\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_1\cdot\left(Y_1\right)^2\cdot D_2\cdot L^2 + 2\cdot M1_c\cdot D_1\cdot Y_1\cdot D_2\cdot L \ldots \\ + 2\cdot\left(Y_0\right)^2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_2^{\,2}\cdot h^2 + J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2} \end{bmatrix}
\tag{5.10}
$$

$$
E_6(Y) = L\cdot\begin{bmatrix} 16\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c\cdot\left(Y_1\right)^3\cdot D_3\cdot D_1^{\,2}\cdot L^3 \ldots \\ + 8\cdot M1_c\cdot D_1^{\,2}\cdot\left(Y_1\right)^2\cdot L^2 \ldots \\ + 16\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c\cdot D_3\cdot h^2\cdot D_1\cdot Y_1\cdot D_2\cdot\left(Y_0\right)^2\cdot L \ldots \\ + M2_m + M2_v + 2\cdot D_4^{\,2}\cdot J2_c + M_{desb} \end{bmatrix}
\tag{5.11}
$$

$$
E_7(Y) = M_{desb}\cdot R_{desb}\cdot\cos\left(Y_2\right)
\tag{5.12}
$$

$$
\begin{aligned}
E_8(Y) = {} & 4\cdot h^2\cdot\begin{bmatrix} 6\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_2^{\,2}\cdot\left(Y_0\right)^2\cdot h^2 \ldots \\ + 2\cdot L\cdot M1_c\cdot D_1\cdot Y_1\cdot D_2 \ldots \\ + 2\cdot L^2\cdot J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2}\cdot D_1\cdot\left(Y_1\right)^2\cdot D_2 + J2_c\cdot D_3\cdot D_4^{\,2} \end{bmatrix}\cdot\left(Y_4\right)^2 \ldots \\
& + 8\cdot L^2\cdot D_1\cdot\begin{bmatrix} 3\cdot D_1\cdot L^2\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot\left(Y_1\right)^2\cdot D_3 + D_1\cdot L\cdot M1_c\cdot Y_1 \ldots \\ + D_3\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot h^2\cdot D_2\cdot\left(Y_0\right)^2 \end{bmatrix}\cdot\left(Y_5\right)^2 \ldots \\
& + \left(-M_{desb}\cdot R_{desb}\cdot\sin\left(Y_2\right)\right)\cdot\left(Y_6\right)^2 \ldots \\
& + 4\cdot C2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot D_3\cdot h^2\cdot Y_0\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot\left(Y_0\right)^2\cdot h^2\cdot D_2^{\,2} \ldots \\ + 2\cdot L^2\cdot D_1\cdot\left(Y_1\right)^2\cdot D_2 + 1 \end{bmatrix}\cdot Y_4 \ldots \\
& + L\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot D_4^{\,2}\cdot\begin{bmatrix} 4\cdot D_1^{\,2}\cdot D_3\cdot\left(Y_1\right)^3\cdot L^3 \ldots \\ + 4\cdot\left(Y_0\right)^2\cdot D_2\cdot Y_1\cdot D_1\cdot h^2\cdot D_3\cdot L + 1 \end{bmatrix}\cdot C2_c + C2_v \end{bmatrix}\cdot Y_5 \ldots \\
& + D_3\cdot h^2\cdot\left(K2_v + 2\cdot K2_c\cdot D_4^{\,2}\right)\cdot\left(Y_0\right)^2 \ldots \\
& + L\cdot\begin{pmatrix} 32\cdot D_1\cdot D_2\cdot Y_0\cdot h^2\cdot Y_4\cdot Y_5\cdot D_3\cdot J2_c\cdot D_4^{\,2}\cdot L \ldots \\ + 2\cdot D_4^{\,2}\cdot K2_c + K2_v \end{pmatrix}\cdot Y_1 \ldots \\
& + g\cdot\left(M2_m + M_{desb} + M2_v\right)
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$E_9(Y) = \left(-M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \sin\left(Y_2\right) \cdot h\right) \tag{5.14}$$

$$E_{10}(Y) = M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot L \cdot \cos\left(Y_2\right) \tag{5.15}$$

$$E_{11} = \left(M_{desb} \cdot R_{desb}{}^2 + J_r + J_{desb}\right) \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} E_{12}(Y) = {} & K3_{abs} \cdot D_6 \cdot h \cdot \left(Y_6\right)^2 + \left(\frac{K_t{}^2}{R_{pf}\left(Y_6\right)} - K2_{abs}\right) \cdot D_6 \cdot h \cdot Y_6 \ldots \\ & + g \cdot M_{desb} \cdot R_{desb} \cdot \cos\left(Y_2\right) - \left(Y_3 \cdot \frac{V_{max}}{R_{po}} \cdot K_t - K1_{abs}\left(Y_3\right)\right) \cdot D_6 \cdot h \end{aligned} \tag{5.17}$$

Em seguida, as equações 5.1 a 5.3 são expressas na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ E_5 & E_6 & E_7 \\ E_9 & E_{10} & E_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_4 \\ -E_8 \\ -E_{12} \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

A solução de 5.18, as expressões de $A_i(t)$ - com i variando de 1 a 3 - e $V_j(t)$ - com j variando de 1 a 4 - em termos das coordenadas generalizadas e a equação 5.4 - reescrita numa forma conveniente, a fim de evidenciar o termo $V_4(t)$ - se constituem no sistema de equações a ser resolvido pelo método de Runge-Kutta. Para uma maior clareza, essas equações são apresentadas a seguir.

$$A_1(t) = \frac{1}{E_{13}(Y)} \cdot \begin{bmatrix} -\left(E_6(Y) \cdot E_{11} - E_7(Y) \cdot E_{10}(Y)\right) \cdot E_4(Y) \ldots \\ +\left(E_2(Y) \cdot E_{11} - E_3(Y) \cdot E_{10}(Y)\right) \cdot E_8(Y) \ldots \\ +\left(-E_2(Y) \cdot E_7(Y) + E_3(Y) \cdot E_6(Y)\right) \cdot E_{12}(Y) \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

$$A_2(t) = \frac{1}{E_{13}(Y)} \cdot \begin{bmatrix} -\left(-E_5(Y) \cdot E_{11} + E_7(Y) \cdot E_9(Y)\right) \cdot E_4(Y) \ldots \\ +\left(-E_1(Y) \cdot E_{11} + E_3(Y) \cdot E_9(Y)\right) \cdot E_8(Y) \ldots \\ +\left(E_1(Y) \cdot E_7(Y) - E_3(Y) \cdot E_5(Y)\right) \cdot E_{12}(Y) \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$$A_3(t) = \frac{1}{E_{13}(Y)} \cdot \begin{bmatrix} -\left(E_5(Y) \cdot E_{10}(Y) - E_6(Y) \cdot E_9(Y)\right) \cdot E_4(Y) \ldots \\ +\left(E_1(Y) \cdot E_{10}(Y) - E_2(Y) \cdot E_9(Y)\right) \cdot E_8(Y) \ldots \\ +\left(-E_1(Y) \cdot E_6(Y) + E_2(Y) \cdot E_5(Y)\right) \cdot E_{12}(Y) \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

$$\frac{d}{dt}V_1(t) = A_1(t) \qquad (5.22)$$

$$\frac{d}{dt}V_2(t) = A_2(t) \qquad (5.23)$$

$$\frac{d}{dt}V_3(t) = A_3(t) \qquad (5.24)$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = V_1(t) \qquad (5.25)$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = V_2(t) \qquad (5.26)$$

$$\frac{d}{dt}q_3(t) = V_3(t) \qquad (5.27)$$

$$\frac{d}{dt}q_4(t) = V_4(t) \qquad (5.28)$$

$$V_4(Y,t) = R_{po}\cdot\frac{\left[\left(-Y_6 + D_6\cdot h\cdot Y_4\right)\cdot K_e + V_a(t) - Y_3\cdot V_{max} - V_{esc}(t)\right]}{L_r\cdot V_{max}} \qquad (5.29)$$

Onde:

$$E_{13}(Y) = E_1(Y)\cdot E_6(Y)\cdot E_{11} - E_1(Y)\cdot E_7(Y)\cdot E_{10}(Y) - E_2(Y)\cdot E_5(Y)\cdot E_{11} \ldots$$
$$+ E_3(Y)\cdot E_5(Y)\cdot E_{10}(Y) + E_2(Y)\cdot E_9(Y)\cdot E_7(Y) - E_3(Y)\cdot E_9(Y)\cdot E_6(Y)$$

Dadas as condições iniciais num instante t_0 ($q_1(t_o)$, $q_2(t_o)$, $q_3(t_o)$, $q_4(t_o)$, $V_1(t_o)$, $V_2(t_o)$, $V_3(t_o)$), as acelerações $A_1(t_0)$, $A_2(t_0)$ e $A_3(t_0)$ são calculadas através das expressões 5.19 a 5.21 e a variável $V_4(t_0)$, por meio da 5.29; com esses dados e integrando-se numericamente as expressões 5.22 a 5.28 pelo método escolhido, obtém-se os valores das variáveis generalizadas q_1 a q_4, bem como as derivadas de primeira ordem V_1 a V_3, todas relativas ao próximo instante (t_1). Esse procedimento é repetido para se estimar os valores para os próximos instantes, sempre tomando-se os dados calculados para um dado momento como sendo as condições iniciais para se estimar o seguinte.

5.3 Análise de Eventos

A tabela 5.1 contém os valores adotados para as várias constantes presentes nas expressões 5.4 e 5.6 a 5.17. As condições iniciais para os casos analisados, tais como: tensões de alimentação iniciais, deslocamentos impostos, adição de massas etc são apresentados nos próximos itens.

Cte.	Descrição	Valor
ρ	Densidade do material do pórtico.	7700 Kg/m^3
A	Área da secção transversal das colunas e vigas do pórtico.	0.0006 m^2
b_s	Largura da secção transversal das colunas e da viga do pórtico.	0.076 m
$C1_c$	Amortecimento equivalente de cada coluna do pórtico, relacionado com o primeiro modo de vibração.	0.22
$C1_v$	Amortecimento equivalente da viga do pórtico, relacionado com o primeiro modo de vibração.	0.037
$C2_c$	Amortecimento equivalente de cada coluna do pórtico, relacionado com o segundo modo de vibração.	0.037
$C2_v$	Amortecimento equivalente da viga do pórtico, relacionado com o segundo modo de vibração.	0.52
E	Módulo de elasticidade do material do pórtico	$207x10^9$ Pa
g	Aceleração da gravidade local.	9.8 m/s^2
h	Altura do pórtico (da sapata de fixação ao centro da viga).	0.604 m
h_s	Altura da secção transversal das colunas e da viga do pórtico.	0.0079 m
h_m	Distância do eixo do motor ao centro da viga.	0.0206 m
I	Momento de inércia à flexão das colunas e vigas do pórtico.	$3.12x10^{-9}$ m^4
$J1_m$	Inércia rotacional equivalente do motor elétrico relacionada com o primeiro modo de vibração da estrutura.	$3.28x10^{-3}$ $Kg.m^2$
$J2_c$	Massa equivalente de cada coluna do pórtico, relacionada com o segundo modo de vibração.	$9.77x10^{-3}$ $Kg.m^2$
J_{desb}	Inércia rotacional da massa não balanceada agregada ao volante do motor elétrico.	0.0 $Kg.m^2$
J_e	Inércia rotacional do estator do motor elétrico.	$8.7x10^{-4}$ $Kg.m^2$
J_r	Inércia rotacional do rotor do motor elétrico.	$1.32x10^{-3}$ $Kg.m^2$
$K1_{abs}$	Constante relacionada com o torque absorvido pelas perdas mecânicas e pela resistência aerodinâmica do rotor do motor elétrico.	0.0 se $i \leq 10mA$ $3.67x10^{-2}$ N.m para as demais correntes.

Tabela 5-1: Descrição e valores das constantes utilizadas na simulação numérica do sistema estrutra/motor.

Cte.	Descrição	Valor
$K1_c$	Rigidez equivalente de cada coluna do pórtico, relacionada com o primeiro modo de vibração.	$8.197X10^3$ N/m
$K1_v$	Rigidez equivalente da viga do pórtico, relacionada com o primeiro modo de vibração.	$1.289X10^4$ N/m
$K2_{abs}$	Constante relacionada com o torque absorvido pelas perdas mecânicas e pela resistência aerodinâmica do rotor do motor elétrico.	$4.35x10^{-5}$ N.m/s
$K2_c$	Rigidez equivalente de cada coluna do pórtico, relacionada com o segundo modo de vibração.	$4.330X10^3$ N/m
$K2_v$	Rigidez equivalente da viga do pórtico, relacionada com o segundo modo de vibração.	$6.138X10^4$ N/m
$K3_{abs}$	Constante relacionada com o torque absorvido pelas perdas mecânicas e pela resistência aerodinâmica do rotor do motor elétrico.	0.0 N.m/s^2
K_e	Constante de proporcionalidade relacionada com a força contra-eletromotriz do motor elétrico.	0.0132 V.s/rd
K_t	Constante de proporcionalidade relacionada com o torque do motor elétrico.	0.0132 N.m/A
L	Largura do pórtico.	0.890 m
L_r	Indutância equivalente do rotor elétrico.	200 μH
$M1_c$	Massa equivalente de cada coluna do pórtico, relacionada com o primeiro modo de vibração.	0.64 Kg
$M1_m$ $M2_m$	Massas modais equivalentes do motor elétrico relacionadas com o primeiro e segundo modos de vibração do pórtico, respectivamente.	2.56 Kg
$M1_v$	Massa equivalente da viga do pórtico, relacionada com o primeiro modo de vibração.	4.137 Kg
$M2_v$	Massa equivalente da viga do pórtico, relacionada com o segundo modo de vibração.	1.815 Kg
M_{desb}	Massa não balanceada total fixa aos volantes de inércia.	0.00232 Kg
M_m	Massa do motor elétrico.	1.90 Kg

Tabela 5-1: Descrição e valores das constantes utilizadas na simulação numérica do sistema. Continuação.

Cte.	Descrição	Valor
R_{desb}	Distância da massa desbalanceadora ao centro de giro do rotor.	0.060 m
R_{pf}	Resistência equivalente às perdas no ferro do motor elétrico.	0.0011 se $\omega \leq 0.2$rd/s $\frac{\omega}{0.872 \cdot \omega + 180}\ \Omega$ se $\omega \rangle 0.2$rd/s ϖ é a velocidade angular do rotor.
R_{po}	Resistência elétrica equivalente associada às perdas ôhmicas do rotor.	0.12 Ω
V_{esc}	Queda de tensão nas escovas do motor elétrico.	0.0 V
V_{max}	Tensão máxima de alimentação do motor.	12.5 V

Tabela 5-1: Descrição e valores das constantes utilizadas na simulação numérica do sistema estrutura/motor.

Atribuiu-se à inércia J_{desb} o valor nulo, devido à sua influência ser ínfima em relação às demais presentes no sistema. No entanto, no caso de alguém querer utilizar o mesmo modelo matemático em experimentos semelhantes - onde o motor elétrico e as dimensões do corpo utilizado para causar os desbalanceamentos sejam diferentes – essa suposição deverá ser revista.

A dimensão L, no caso ideal, é a distância entre os centros das colunas do pórtico. Dependendo da forma com que as colunas se unem à viga, essa distância poderá ser menor. Por exemplo, no pórtico construído, o processo de soldagem agregou material na parte interna dos seus cantos, diminuindo o vão livre em alguns milímetros (a distância original era de 0.900m).

Deve-se notar que as massas $M1_m$ e $M2_m$ - massas modais equivalentes do motor elétrico relacionadas com o primeiro e segundo modos de vibração da estrutura - podem ser distintas da massa do motor (M_m). Tal foi considerado para permitir ajustes das freqüências naturais de vibração do pórtico de forma independente; porém, ressalta-se que ao se utilizar esse recurso, a inércia rotacional $J1_m$ terá de ser alterada, a fim de refletir a nova realidade. Como exemplo, cita-se a adição de massa ao redor do estator do motor elétrico; nesse caso, as massas $M1_m$ e $M2_m$ serão iguais, mas superiores à M_m; a inércia rotacional ($J1_m$) aumentará.

As constantes de rigidez equivalente, massa e amortecimento relativos às colunas e vigas ($K1_v$, $M2_v$, $C1_c$, $K2_c$, $M1_v$ etc) foram calculadas através das expressões presentes no capítulo 2, utilizando-se os valores da tabela 5.2.

Elemento	Modo	Função de Forma
Viga	1°	$\phi_{1v}(x) = \alpha 1_v \cdot \frac{x}{L} + \beta 1_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \gamma_{1v} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad \begin{pmatrix} \alpha 1_v \\ \beta 1_v \\ \gamma 1_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.082 \\ 3.246 \\ -2.165 \end{pmatrix}$
Coluna	1°	$\phi_{1c}(x) = \alpha 1_c \cdot \frac{x}{h} + \beta 1_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \gamma 1_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3 \qquad \begin{pmatrix} \alpha 1_c \\ \beta 1_c \\ \gamma 1_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.036 \\ 1.3441 \\ -0.3851 \end{pmatrix}$
Viga	2°	$\phi 2_v(x) = \alpha 2_v \cdot \frac{x}{L} + \beta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \gamma 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \ldots + \delta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^4 + \eta 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^5 + \lambda 2_v \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^6 \qquad \begin{pmatrix} \alpha 2_v \\ \beta 2_v \\ \gamma 2_v \\ \delta 2_v \\ \eta 2_v \\ \lambda 2_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.915 \\ 3.126 \\ 2.949 \\ -34.079 \\ 39.161 \\ -13.073 \end{pmatrix}$
Coluna	2°	$\phi_{2c}(x) = \alpha 2_c \cdot \frac{x}{h} + \beta 2_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \gamma 2_c \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3 \qquad \begin{pmatrix} \alpha 2_c \\ \beta 2_c \\ \gamma 2_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0101 \\ -0.6266 \\ 0.6138 \end{pmatrix}$

Tabela 5-2: Funções de forma utilizadas nos cálculos das constantes de rigidez, massa e amortecimento equivalentes da tabela 5.1.

5.3.1. Solução Estática

Fazendo-se as acelerações A_i, as velocidades V_i (i = 1,2) nas equações 4.29, 4.30, 4.31, obtém-se a solução para o caso estático

$$q_{2est} = \frac{-1}{L} \cdot g \cdot \frac{\left(M2_m + M_{desb} + M2_v\right)}{\left(K2_v + 2 \cdot K2_c \cdot D_4^{\,2}\right)} \tag{5.30}$$

$$q_{1est} = 0 \qquad q3est = 3\pi/2 \tag{5.31}$$

Onde q1est, q2est e q3est são os valores das variáveis generalizadas para o caso estático.

Da equação 4.29, fazendo-se $q_2 = A_i = V_i = 0$ (i = 1,2), obtém-se a expressão da rigidez horizontal do pórtico (1ª ordem):

$$\text{Rigidez horizontal} = 2 \cdot K1_c + K1_v + 2 \cdot K2_c \cdot D_5^2 \tag{5.32}$$

Analogamente, da equação 4.30, fazendo-se $q_1 = A_i = V_i = 0$ (i = 1,2), obtém-se a expressão da rigidez vertical do pórtico (1ª ordem):

$$\text{Rigidez vertical} = 2 \cdot D_4^2 \cdot K2_c + K2_v \tag{5.33}$$

Substituindo-se os valores da tabela 5.1 em 5.30, 5.32 e 5.33, resulta:

Rigidez horizontal do pórtico: 4.25×10^4 N/m

Rigidez vertical do pórtico: 9.31×10^4 N/m

5.3.2. Vibrações Livres

A figura 5.1 apresenta os picos das acelerações horizontais e verticais do ponto central da viga após um deslocamento inicial imposto de 4mm na horizontal. Deve-se observar na figura citada uma oscilação da aceleração horizontal (mínimos relativos nos primeiros 25 segundos de vibração livre) no mesmo instante que a aceleração vertical atinge seus máximos valores.

Analogamente, a figura 5.2 apresenta os picos das acelerações horizontais e verticais do ponto central da viga após deslocamentos iniciais impostos de 1.5mm na vertical e 0.1mm na horizontal. Notou-se que simulações realizadas com vários deslocamentos iniciais verticais, mantendo-se os horizontais nulos, não produziram movimento na direção horizontal.

5.3.3. Aceleração do Motor sob Tensão Constante

As figuras 5.3 e 5.4 apresentam os resultados da simulação de uma partida do motor com tensão constante e igual a 2.23V.

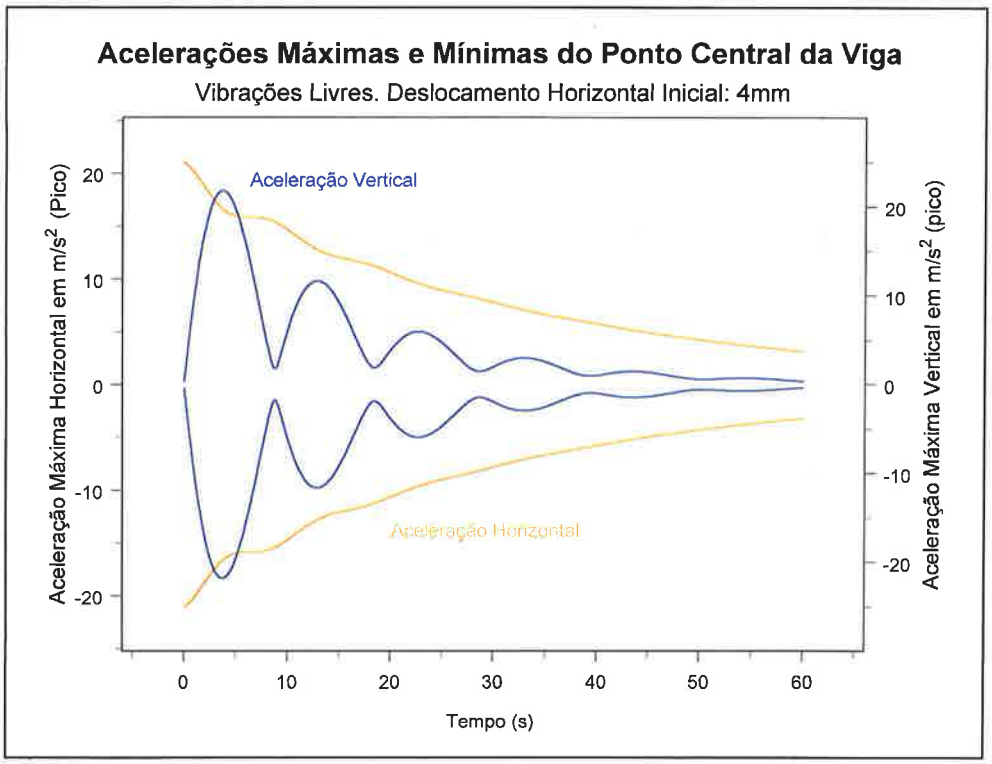


Figure 5-1: Vibrações Livres (simulação). Deslocamento horizontal inicial de 4mm.

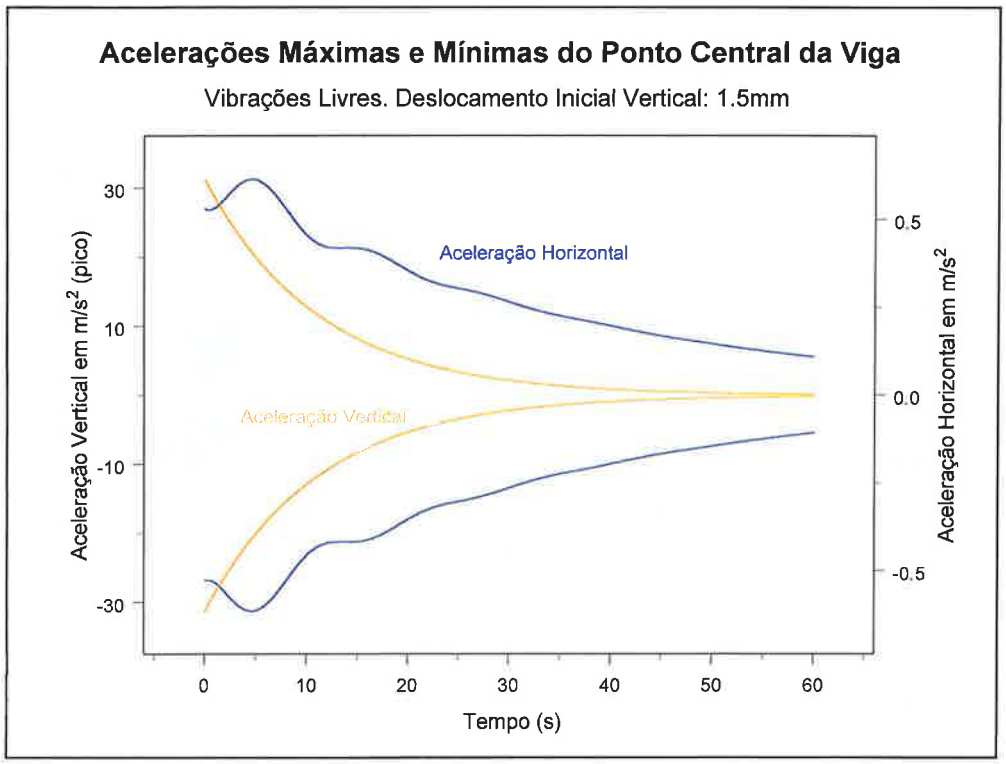


Figure 5-2: Vibrações livres (simulação). Deslocamento vertical e horizontal iniciais de 1.5mm. e 0.1mm, respectivamente.

Deve-se notar que a rotação máxima do motor não chegou a freqüência correspondente à 2ª ressonância do sistema. Além disso, a amplitude de vibração da componente vertical se mantém estável após alguns segundos iniciais; o mesmo não pode ser dito da componente horizontal.

Analogamente, as figuras 5.5 e 5.6 se referem aos resultados obtidos com tensão constante igual a 2.35V. Ressalta-se o comportamento da corrente e da rotação do motor após 25 segundos de funcionamento, mostrando sinais de interação com o sistema estrutural.

5.3.4. Vibrações Forçadas: Desaceleração do Motor.

Simulou-se a situação de desligamento do motor (interrupção do fornecimento de energia), estando esse, inicialmente, com uma freqüência de rotação superior a da 2ª ressonância do sistema. A figura 5.7 apresenta os resultados de forma gráfica.

Observa-se, através do resultados, que os dois modos são excitados à medida que a freqüência de rotação se aproxima de cada uma das freqüências naturais do sistema; é igualmente interessante notar que os valores máximos das componentes de aceleração decaem sem apresentar oscilações pronunciadas.

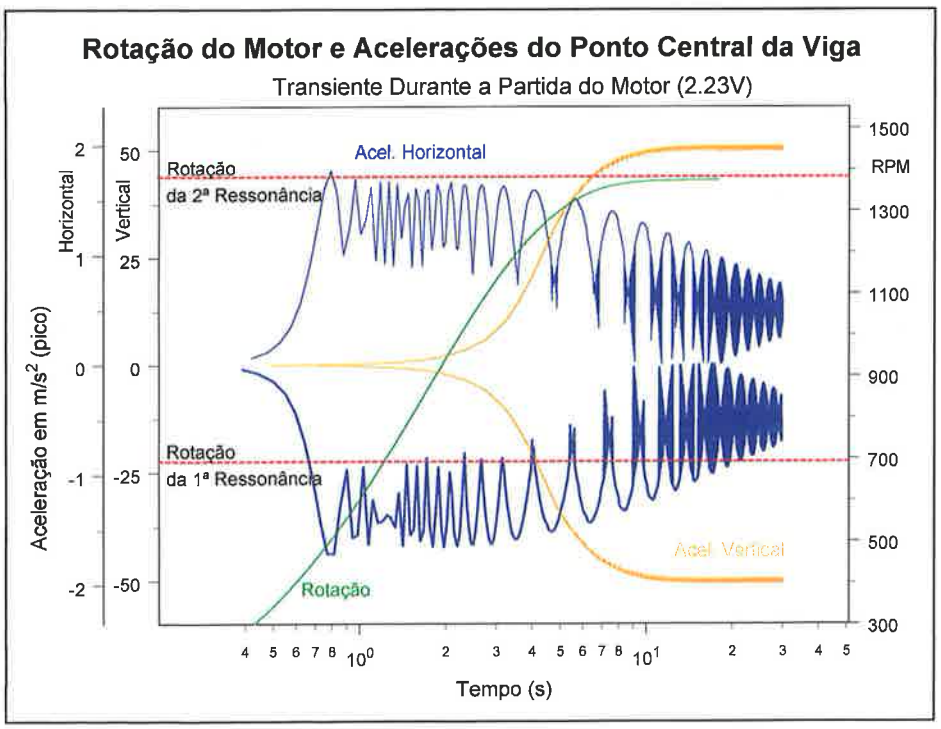


Figura 5.3: Comportamento da rotação do motor e das acelerações máximas e mínimas do ponto central da viga durante uma partida com tensão constante igual a 2.23V.

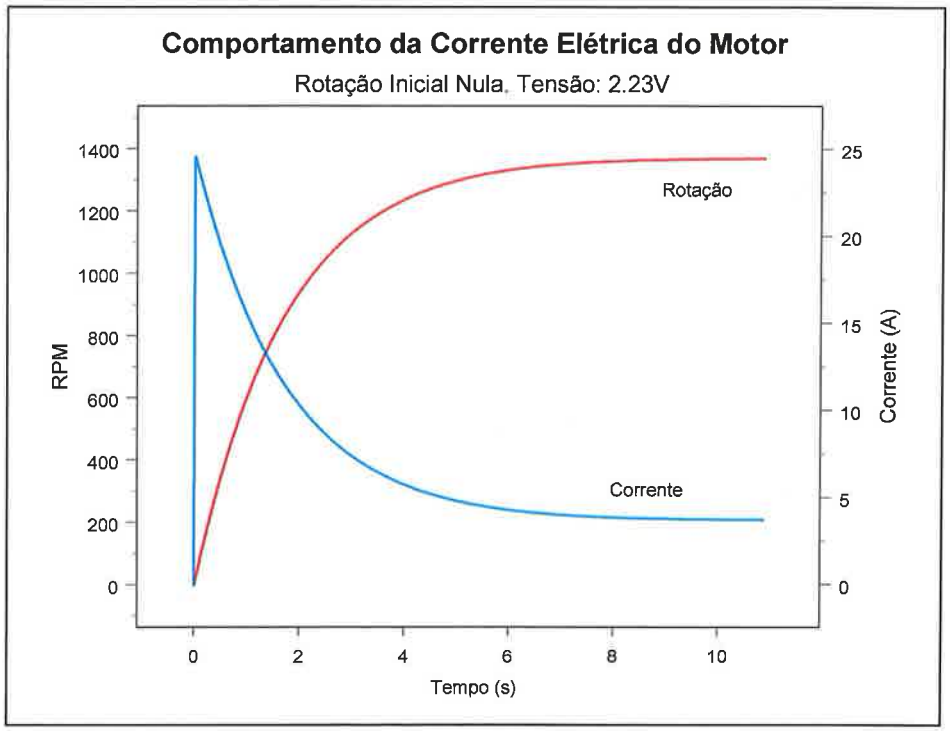


Figura 5.4: Comportamento da corrente e da rotação do motor durante uma partida com tensão constante igual a 2.23V.

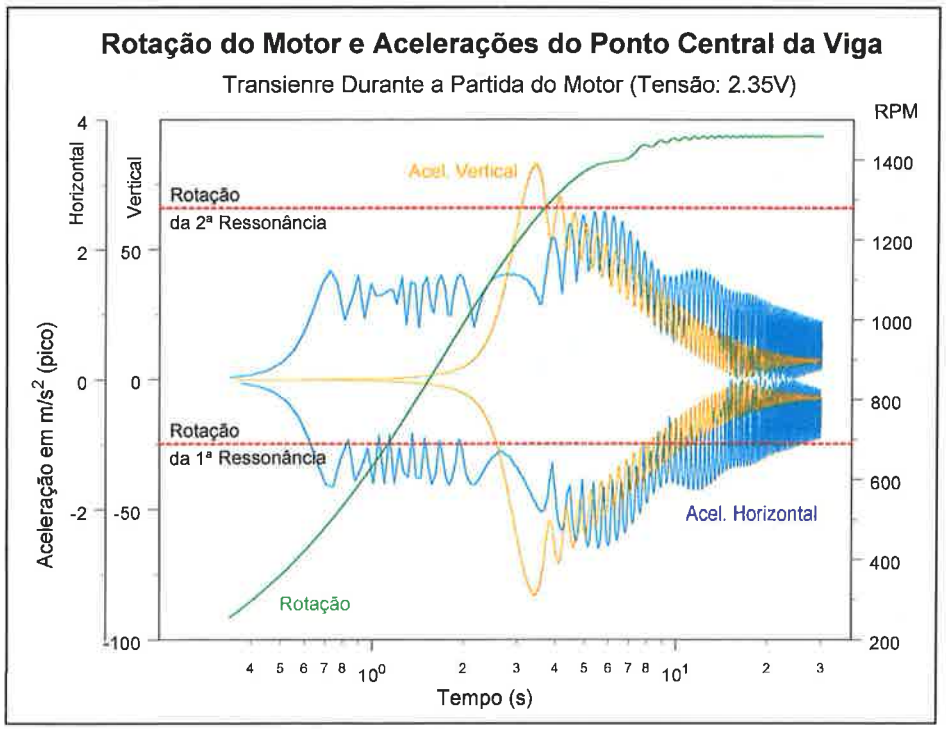


Figura 5.5: Comportamento da rotação do motor e das acelerações máximas e mínimas do ponto central da viga durante uma partida com tensão constante igual a 2.35V..

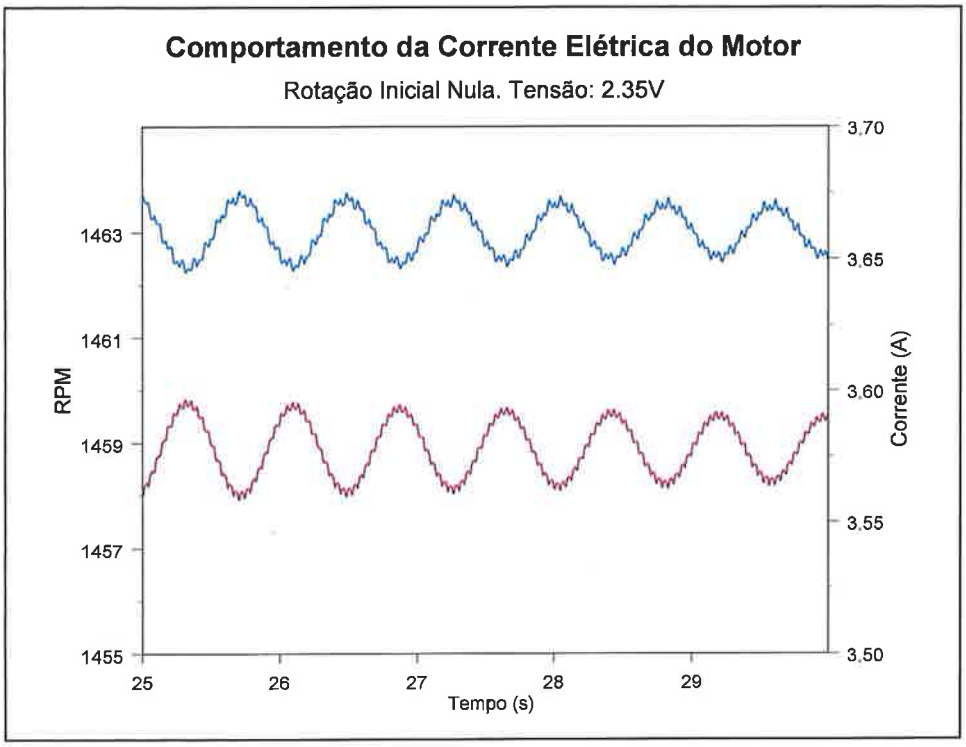


Figura 5.6: Comportamento da corrente e da rotação do motor durante uma partida com tensão constante igual a 2.23V.

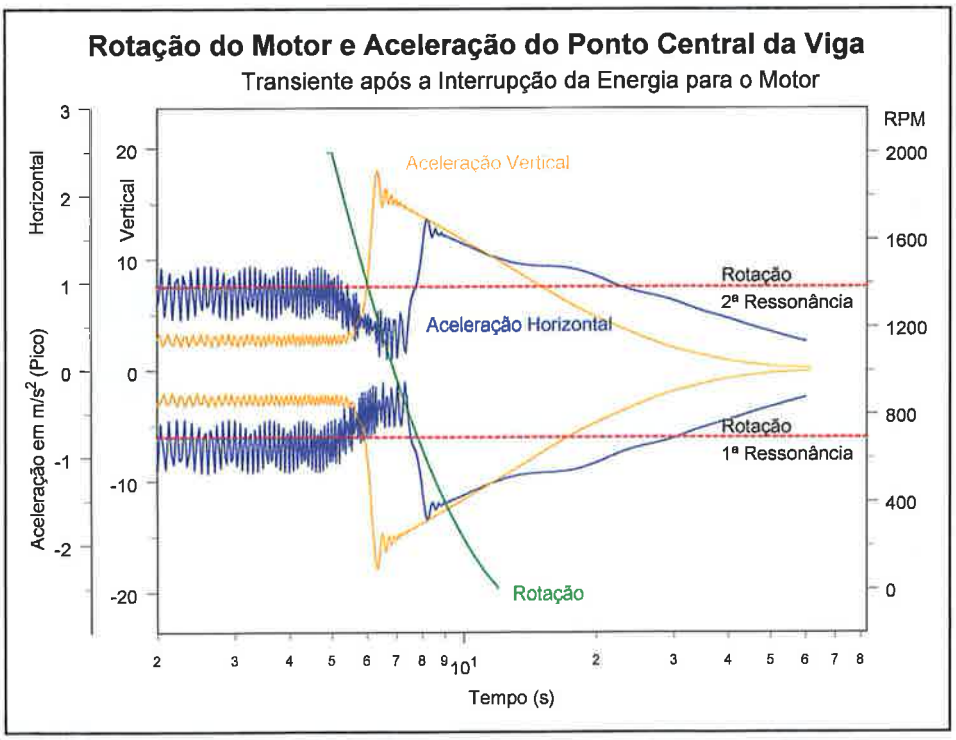


Figura 5.7: Comportamento da aceleração do ponto central da viga e da rotação do motor após a interrupção do fornecimento de energia elétrica.

As oscilações presentes na componente horizontal antes do instante onde ocorre a interrupção de energia (figura 5.7, t ≤ 8s) são espúrias da aceleração do motor; na realidade, obtiveram-se os dados da figura 5.7 de uma simulação onde o motor foi acelerado e mantido algumas dezenas de segundos com tensão constante e, finalmente, desligado.

5.3.5. Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Crescente.

Realizaram-se simulações onde a tensão de alimentação era repentinamente elevada nos primeiros segundos do cálculo da resposta do sistema, estando as demais variáveis com valores praticamente constantes. A figura 5.8 contém os resultados obtidos com relação às amplitudes máximas de aceleração do ponto central da viga durante a passagem pela 2ª ressonância; a figura 5.9 mostra a ocorrência do fenômeno da saturação modal e a figura 5.10, a potência consumida pelo motor devido ao efeito Sommerfeld.

As faixas amarelas dos gráficos 5.8 e 5.10 indicam as regiões onde se verificaram saltos da rotação do motor, ou seja, onde não há respostas estáveis do sistema.

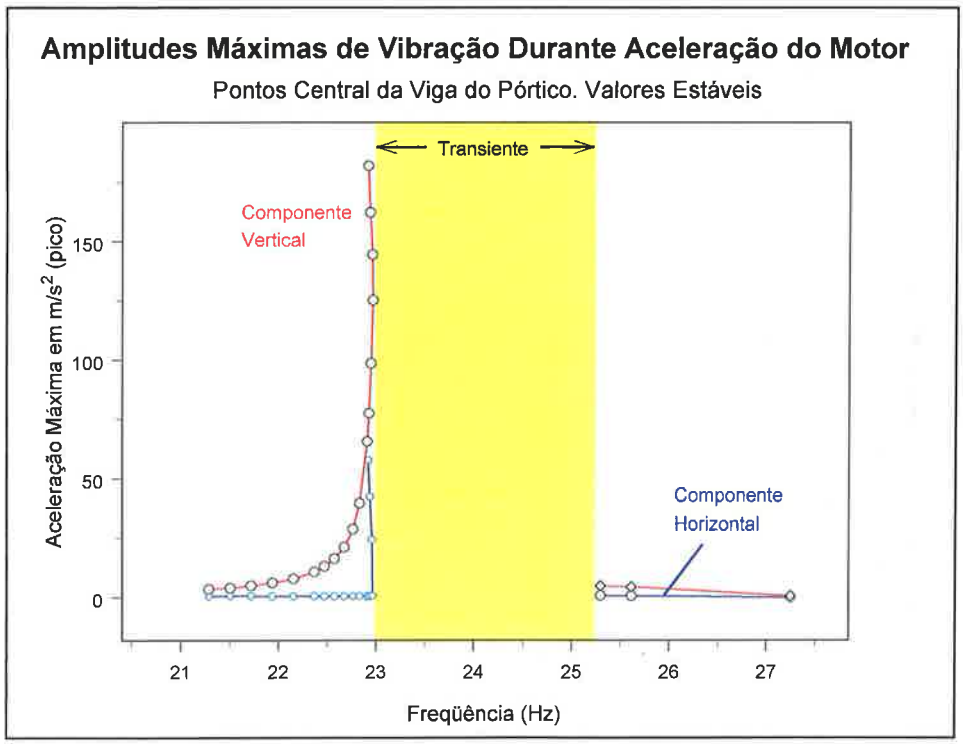


Figura 5.8: Acelerações máximas do ponto central da viga durante a passagem pela 2ª ressonância com rotação crescente.

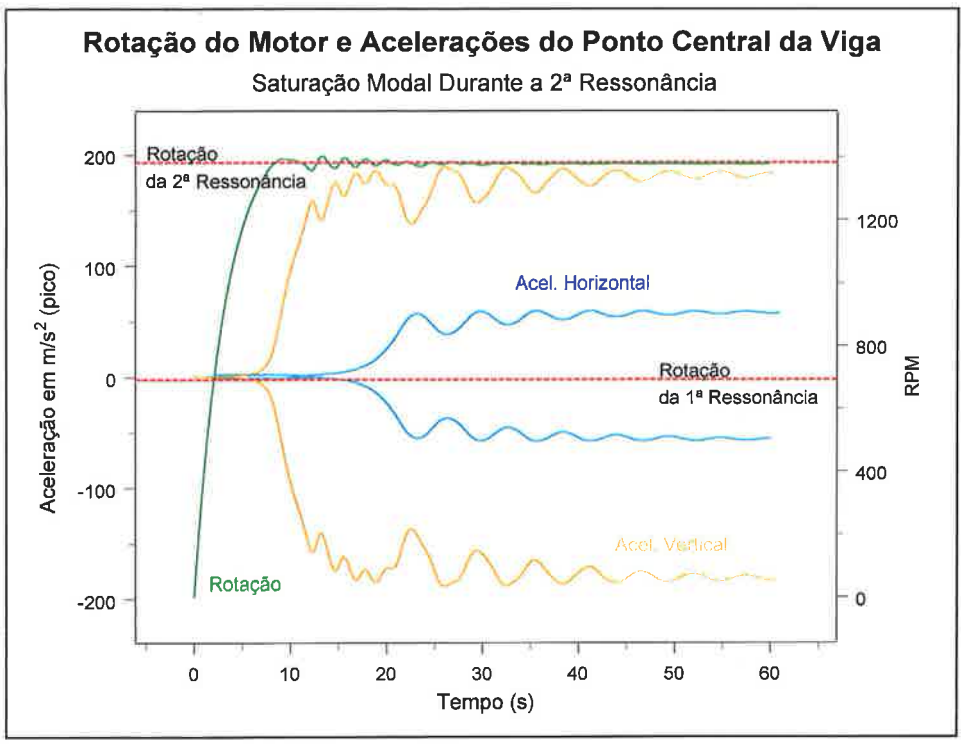


Figura 5.9: Saturação modal durante a 2ª ressonância. Tensão constante (2.75V) aplicada em t=0. Motor inicialmente parado.

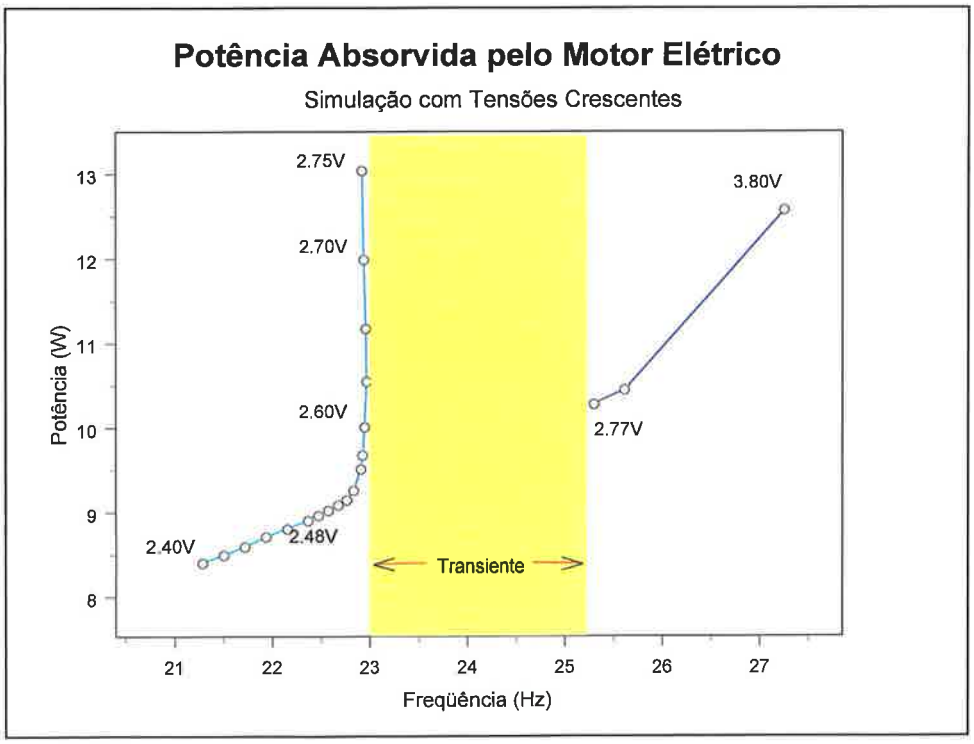


Figura 5.10: Aumento da potência consumida pelo motor durante a passagem pela 2ª ressonância (efeito Sommerfeld).

5.3.6. Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Decrescente.

Analogamente ao realizado no item anterior, a resposta do sistema foi investigada durante a passagem pela sua segunda ressonância com rotações decrescentes. A figura 5.11 apresenta os resultados obtidos; da qual conclui-se que o fenômeno da saturação modal não ocorre sob essas condições.

A figura 5.12 mostra os resultados relativos à potência elétrica consumida pelo motor para as mesmas condições mencionadas acima.

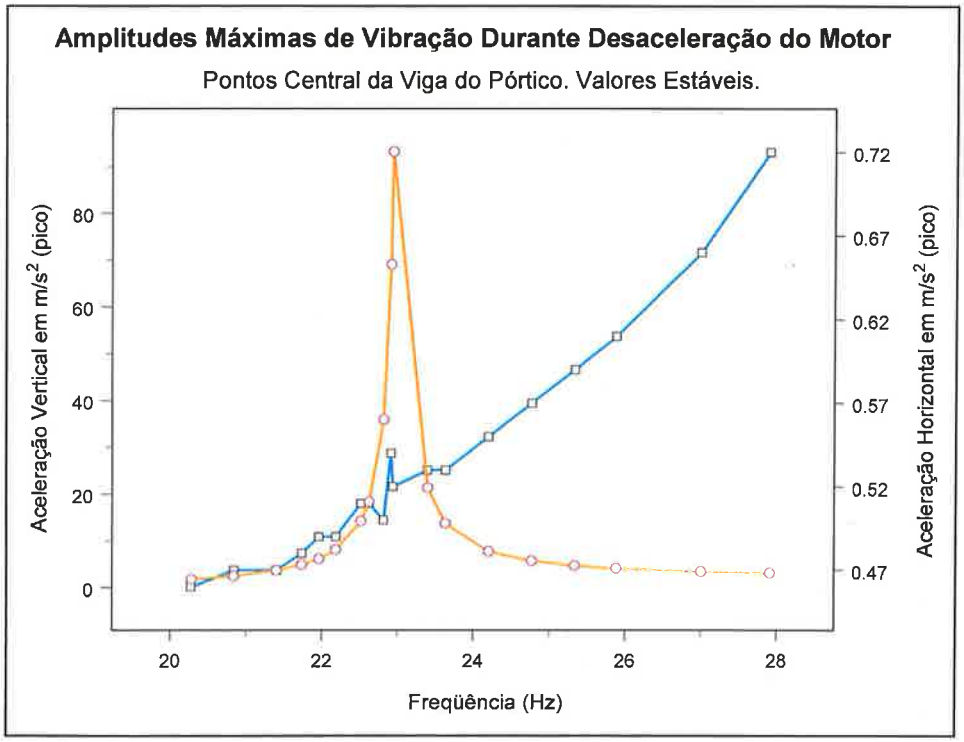


Figura 5.11: Acelerações máximas do ponto central da viga durante a passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente.

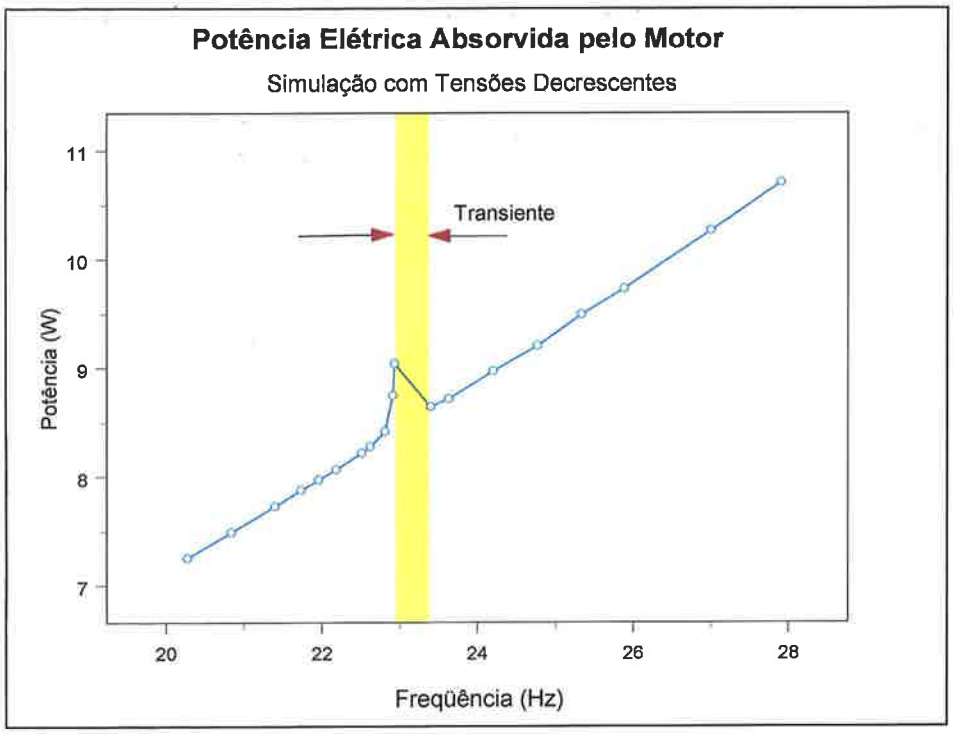


Figura 5.12: Aumento da potência consumida pelo motor durante a passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente.

6 ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MOTOR ELÉTRICO

Produzido pela Siemens para a indústria automobilística, o motor elétrico ao lado é leve, potente, de construção simples e possui eixo de saída duplo. Os volantes de inércia acoplados ao seu eixo não são originais; foram especialmente produzidos para atenuar as acelerações do seu rotor.

O presente capítulo aborda os ensaios efetuados para a determinação das características mecânicas e elétricas desse motor.

6.1 INTRODUÇÃO

No capítulo sobre motores elétricos, analisaram-se métodos de obtenção experimental dos parâmetros elétricos e mecânicos de um motor de corrente contínua. No presente capítulo, abordam-se detalhes construtivos sobre dispositivos de testes, limitações práticas e cuidados que devem ser observados durante os ensaios de um motor DC.

O assunto é focado na determinação experimental dos parâmetros de um motor Siemens de pequenas dimensões, cuja potência aproximada é de 250W. Esse motor foi escolhido devido à configuração do seu eixo (duplo, permitindo acoplamentos dos dois lados), à resistência a sobrecargas, à massa reduzida e por necessitar de uma baixa tensão de alimentação (12VDC).

6.2 Bancada de Ensaio

Para a determinação das características do motor Siemens, construiu-se uma bancada de ensaio específica (figura 6.1). Essa consta de apoios com rolamentos de esferas para o eixo do motor (figura 6.2), permitindo que esse seja suspenso apenas por dois pontos, deixando sua carcaça livre para girar. Há também um dispositivo metálico (pinça) que é fixo ao motor e é apoiado na sua outra extremidade; consta, na realidade, de uma célula-de-carga de alumínio sensível apenas a momentos.

Também, através da figura 6.1, observa-se outra célula-de-carga conectada ao motor, a qual não é apoiada na sua extremidade. Ela pode ser deslizada para a posição da célula de alumínio, substituindo-a nos testes mais rigorosos, pois foi projetada para resistir a torques mais elevados (é produzida em aço e possui uma secção transversal de maiores dimensões). Outra função dessa célula é permitir a aplicação de torques conhecidos na carcaça do motor, a fim de permitir a calibração da célula mais sensível (a aplicação dos torques é efetuada através de massas previamente determinadas, que são penduradas na extremidade livre da pinça de aço).

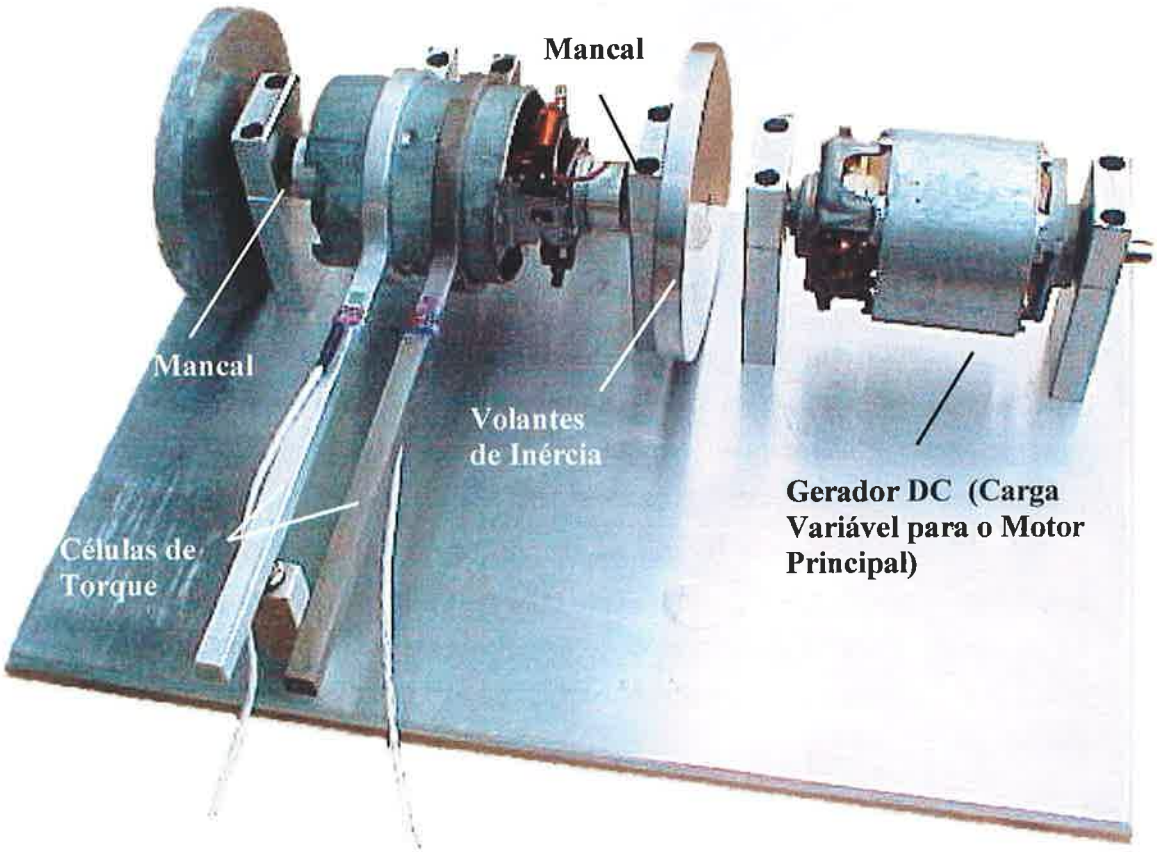


Figura 6.1: Bancada para medição do torque de atrito e do torque útil gerado pelo motor.

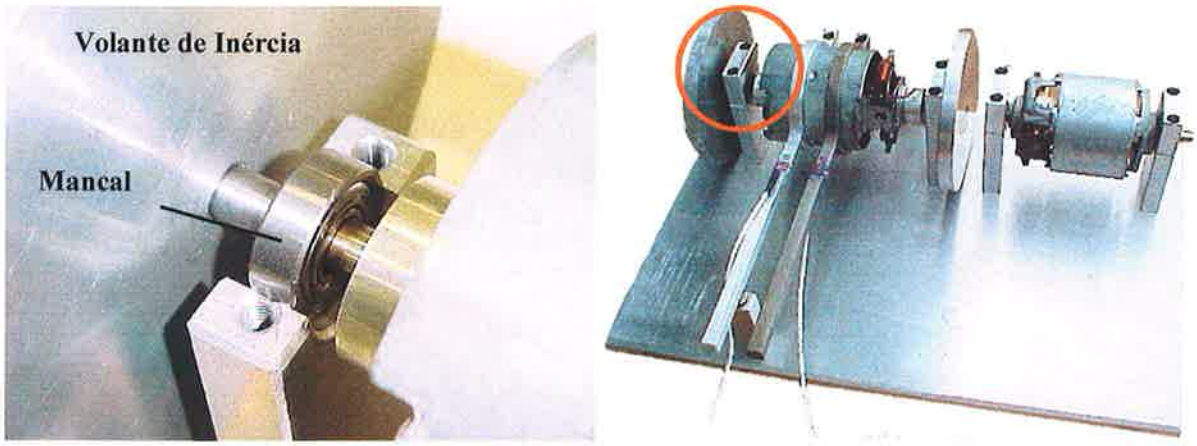


Figura 6.2: Detalhe do mancal da bancada de teste (sem a capa superior) e da conexão do volante de inércia ao eixo do motor.

Quando o motor é posto a girar, o torque de reação que age na carcaça do motor deforma a pinça; essa deformação é detectada por uma ponte completa de extensômetros (figura 6.3), colada numa secção especialmente usinada na extremidade próxima ao motor. Um amplificador estável e específico para extensômetros é conectado a essa ponte, sendo sua saída ligada a um milivoltímetro de alta impedância. O torque é então determinado através da simples multiplicação do valor da tensão média fornecida pelo amplificador pela constante de calibração dessa célula.

A corrente e a tensão elétricas presentes nos bornes do motor são mensuradas através de um voltímetro de alta impedância e de um amperímetro com baixa resistência interna, conectados conforme esquema apresentado na figura 6.4. Com esse tipo de conexão entre os instrumentos, a queda de potencial que ocorre no amperímetro não afeta as medições de tensão.

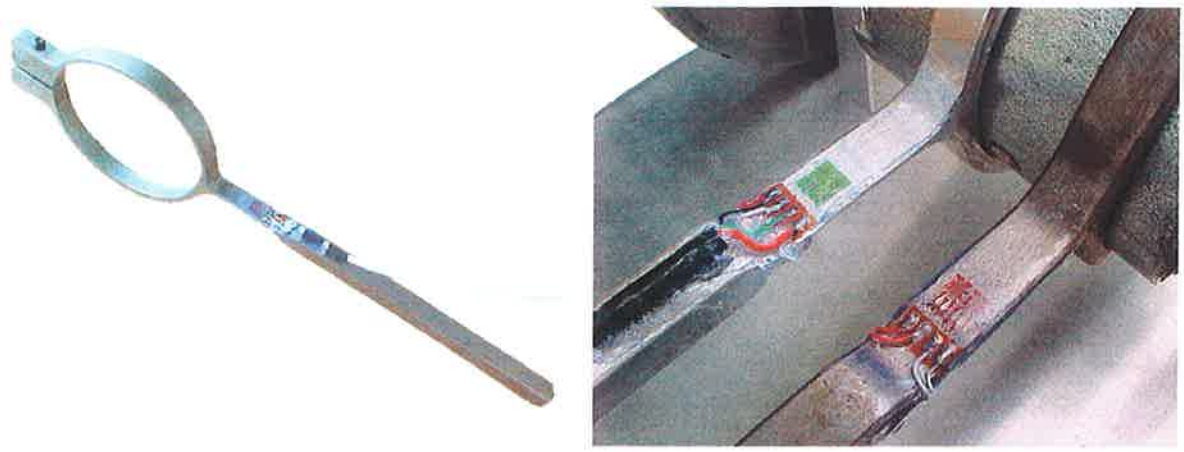


Figura 6.3: Secções instrumentadas das células de torque (configuração tipo ponte completa).

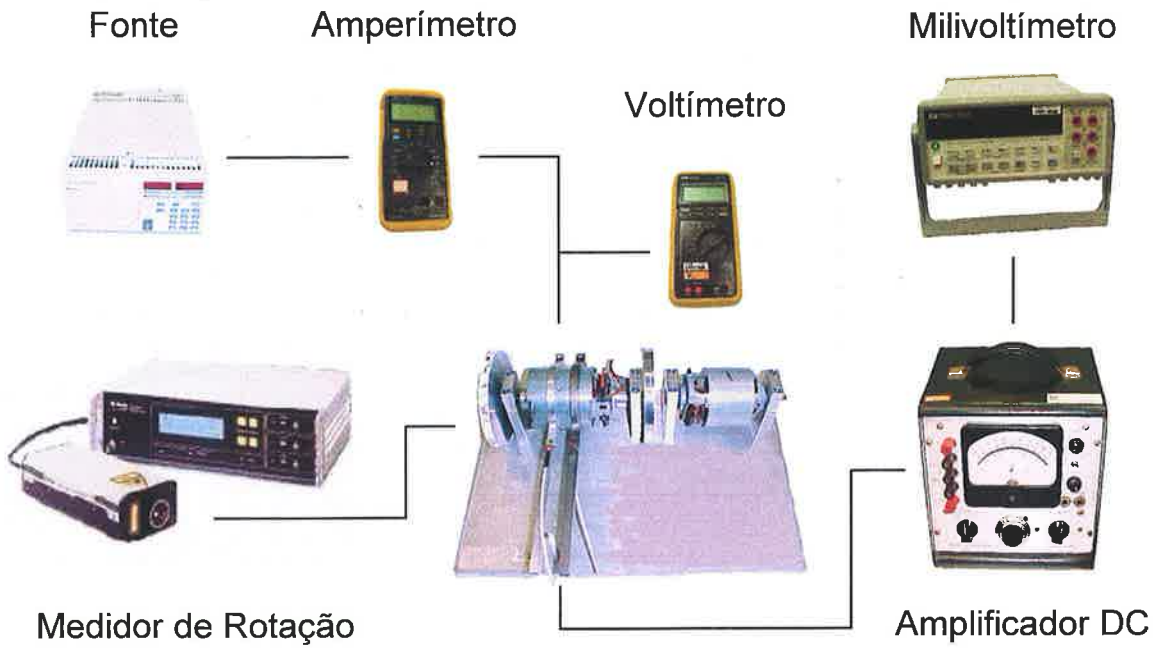


Figura 6.4: Conexão dos instrumentos durante os ensaios do motor elétrico.

A velocidade angular do motor é obtida através de um medidor de rotação ótico ou por meio de um laser torcional. Esse último permite a medição da vibração angular do rotor quando em funcionamento, possibilitando adequar volantes de inércia fixos ao eixo do motor, a fim de suavizar o seu movimento (vide figura 6.2). Observa-se que as vibrações torcionais em uma máquina DC são causadas, principalmente, pelo chaveamento das bobinas do rotor e são tanto menores quanto melhor for a sua qualidade.

6.3 Determinação da Resistência Elétrica do Rotor e da Queda de Tensão nas Escovas (R_{PO} e V_{ESC}).

Com o rotor travado por meio de um calço entre um dos volantes de inércia e a bancada de ensaio, procederam-se medições de corrente e de tensão elétricas nos bornes do motor. Como o número de bobinas energizadas depende da posição das escovas sobre o comutador – fato que altera a resistência aparente do motor – realizaram-se medições para três posições distintas do rotor. A tabela 6.1 apresenta os resultados obtidos.

Através de regressões lineares entre os dados de tensão e corrente mensurados, foram obtidas a resistência e a queda de tensão nas escovas (vide item 3.6.1). A figura 6.5 mostra a boa correlação entre os dados experimentais e as regressões, bem como a variação da resistência aparente do rotor com a sua posição.

Med.	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão
	A	V	A	V	A	V
1	0.202	0.037	0.203	0.037	0.193	0.037
2	0.390	0.070	0.390	0.070	0.371	0.071
3	0.602	0.109	0.604	0.109	0.579	0.111
4	0.785	0.142	0.791	0.142	0.753	0.145
5	1.008	0.181	1.016	0.181	0.960	0.185
6	1.191	0.213	1.196	0.213	1.139	0.217
7	1.396	0.254	1.420	0.252	1.346	0.257
8	1.612	0.293	1.644	0.292	1.563	0.297
9	1.799	0.326	1.833	0.324	1.741	0.330
10	2.016	0.366	2.063	0.364	1.960	0.370
11	2.200	0.399	2.236	0.397	2.142	0.403
12	2.410	0.438	2.460	0.436	2.374	0.442
13	2.600	0.472	2.655	0.468	2.564	0.475
14	2.799	0.512	2.882	0.507	2.779	0.514
15	2.992	0.544	3.076	0.539	2.964	0.547
16	--	--	3.305	0.578	3.188	0.586
17	--	--	3.545	0.617	3.447	0.621

Tabela 6.1: Resultados obtidos com o rotor travado.

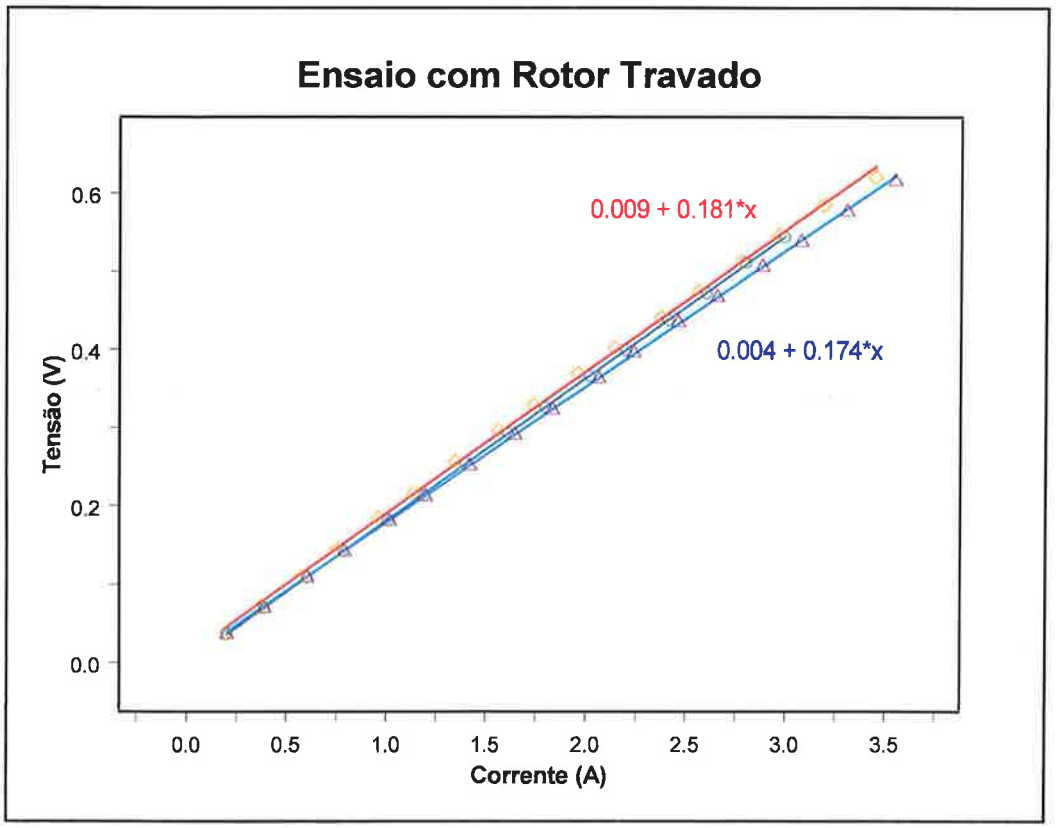
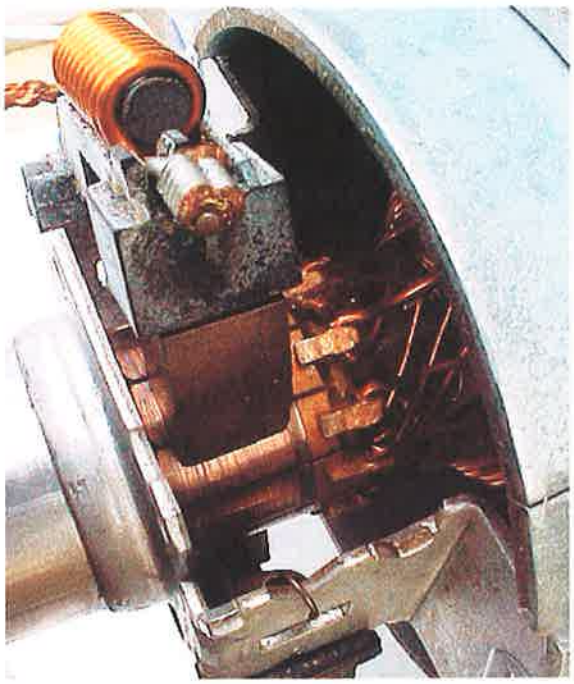


Figura 6.5: Regressões lineares dos resultados obtidos (tabela 6.1) com o rotor travado.



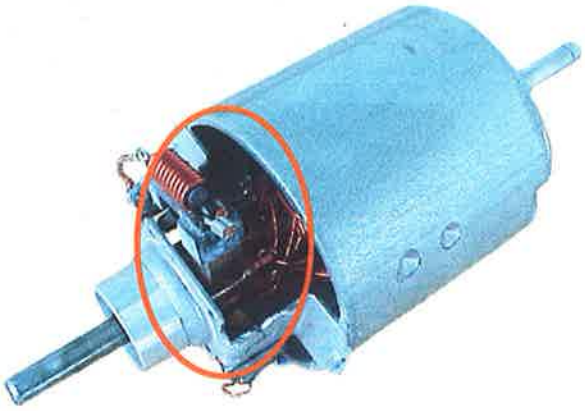


Figura 6.6: Detalhe do mecanismo de comutação. Notar que no mínimo dois segmentos do coletor podem ser curto-circuitados pelas escovas, significando que as bobinas a eles conectadas ficam inativas (não contribuem com o torque gerado e alteram a resistência do rotor).

Considerando-se as especificações técnicas dos equipamentos de ensaio (apêndice A), bem como a variação da resistência rotor devido ao mecanismo de comutação (figura 6.6), adotou-se um valor médio para R_{po} (resistência do rotor). Da mesma forma, assumiu-se nula a queda de tensão nas escovas, pois o valor médio obtido para esse parâmetro é desprezível quando comparado às demais diferenças de potencial presentes no circuito do motor.

6.4 Determinação da Constante de Torque (K_T)

Com o motor sob carga, foram medidos os parâmetros de alimentação de energia (corrente e tensão elétricas nos bornes do motor) e a velocidade angular do rotor. Os dados obtidos constam na tabela 6.2.

Ressalta-se que o carregamento do motor não é absolutamente necessário para a determinação da sua constante de proporcionalidade de torque (K_t). No entanto, ao se aplicar uma carga moderada (torque resistivo), aliada a uma inércia significativa quando comparada com a do rotor, observa-se que a rotação desse permanece estável por períodos mais longos, permitindo uma coleta de dados mais conveniente, baseada em médias. Isso ocorre devido ao fato das variações de torque proporcionadas por alterações nas condições de atrito dos mancais, flutuação da corrente ocasionada pela variação da resistência do rotor

Med.	Corrente	Tensão	Rotação
	A	V	rd/s
1	9.461	5.390	271.3
2	8.247	4.470	233.3
3	6.493	3.583	188.8
4	5.780	3.133	160.0
5	5.199	2.865	144.6
6	4.898	2.679	133.4
7	4.704	2.496	122.9
8	4.364	2.222	103.7
9	4.311	1.923	94.3
10	3.994	1.742	82.1
11	3.760	1.553	67.0
12	3.247	1.291	45.7
13	0.000	0.000	0.0

Tabela 6.2: Resultados obtidos com o motor carregado

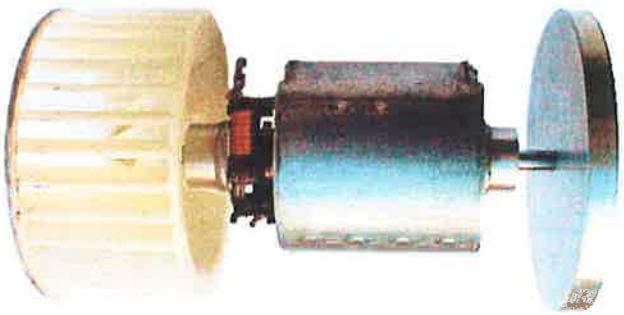


Figura 6.7: Uma ventoinha e um volante inercial conferiram estabilidade de funcionamento ao motor nos ensaios de determinação da constante K_e.

com a temperatura, alterações da resistência das escovas devido ao efeito térmico etc serem proporcionalmente bem menores que o torque resistivo e, portanto, insuficientes para causar uma aceleração brusca da rotação do motor. Assim, durante os ensaios, utilizou-se uma ventoinha acoplada em um dos lados do eixo do motor e um volante de inércia do outro; isso permitiu um carregamento livre de transientes e uma considerável estabilidade da rotação (figura 6.7).

A regressão linear entre a velocidade angular e a força contra-eletromotriz,

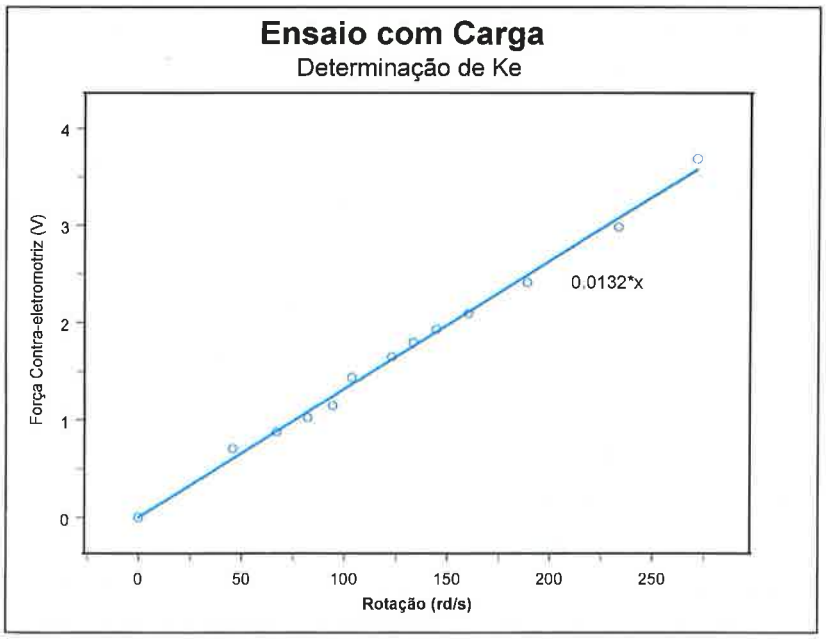


Figura 6.8: Regressão linear entre a rotação e força contra-eletromotriz. O coeficiente angular é a constante de proporcionalidade K_e, que é numericamente igual à constante de torque K_t.

que pode ser facilmente calculada através da expressão 3.22, forneceu o valor de Ke (figura 6.8). Como já analisado no item 3.6.3, o valor de K_e é numericamente igual ao de K_t, se o Sistema Internacional de Unidades (SI) for utilizado.

6.5 Perdas no Ferro e por Histerese - Determinação da Resistência Equivalente

Durante o funcionamento estável em determinadas rotações do motor, mediram-se os parâmetros apresentados na tabela 6.3. O carregamento empregado durante os testes foi o mesmo utilizado na obtenção da constante K_e (ventoinha e volante de inércia acoplados ao eixo do rotor).

Caso se considere a expressão 3.25 como função de interpolação para os dados da tabela 6.3, é possível obter o valor de R_{pf} por meio do método dos mínimos quadrados, conforme já descrito no item 3.6.4. O valor assim obtido é uma boa aproximação para as perdas no ferro e por histerese, desde que a rotação do motor não varie expressivamente.

Um método mais preciso é aquele que considera R_{pf} como função da velocidade angular do rotor. Primeiramente, calcula-se o valor de R_{pf} para cada rotação apresentada na tabela 6.3. Determinam-se, em seguida, pelo método dos mínimos quadrados, os coeficientes da seguinte expressão:

Med.	Corrente	Tensão	Torque	Rotação
	A	V	10^{-3} N.m	rd/s
1	9.461	5.390	46.29	271.3
2	8.247	4.470	37.14	233.3
3	6.493	3.583	25.64	188.8
4	5.780	3.133	21.36	160.0
5	5.199	2.865	18.11	144.6
6	4.898	2.679	16.07	133.4
7	4.704	2.496	14.23	122.9
8	4.364	2.222	11.27	103.7
9	4.311	1.923	10.59	94.3
10	3.994	1.742	8.85	82.1
11	3.760	1.553	6.22	67.0
12	3.247	1.291	4.80	45.7
13	0.000	0.000	---	0.0

Tabela 6.3: Resultados obtidos com o motor carregado: parâmetros mecânicos e elétricos.

Rotação	R_{pf} calc.
rd/s	Ω
271.3	0.60
233.3	0.57
188.8	0.55
160.0	0.51
144.6	0.50
133.4	0.48
122.9	0.45
103.7	0.39
94.3	0.35
82.1	0.33
67.0	0.27
45.7	0.21

Tabela 6.4: Valores calculados de Rpf via (3.25).

$$R_{pf}(\omega_r) = \frac{\omega_r}{K1_{pf} \cdot \omega_r + K2_{pf}} \tag{6.1}$$

Onde: ω_r é a velocidade angular do rotor em rd/s.

A tabela 6.4 apresenta os resultados o cálculo da resistência equivalente às perdas no ferro e por histerese (R_{pf}). A figura 6.9 mostra a aproximação obtida com a expressão 6.1.

Substituindo-se 6.1 em 3.14 e considerando-se que $\varpi_r = 2.\pi.f_r$, resulta:

$$W_{pf} = \left(4 \cdot \pi^2 \cdot K_e^2 \cdot K1_{pf}\right) \cdot f_r^2 + \left(2 \cdot \pi \cdot K_e^2 \cdot K2_{pf}\right) \cdot f_r \tag{6.2}$$

A expressão 6.2 mostra que parte da potência dissipada pelo resistor equivalente R_{pf} é proporcional ao quadrado da freqüência de rotação (f_r); a parte restante é diretamente proporcional a f_r.

Considerando-se as expressões 3.4 e 3.5, conclui-se que a expressão de interpolação apresentada em 6.1 faz com que a potência dissipada pelo resistor R_{pf} simule teoricamente as perdas magnéticas.

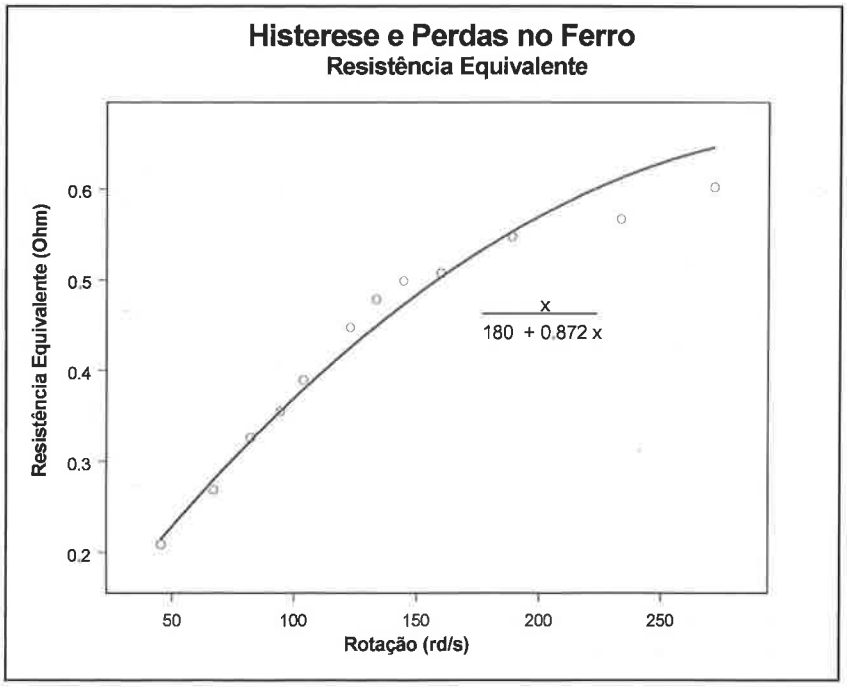


Figura 6.9: Valor da resistência equivalente às perdas no ferro e por histerese em relação a velocidade angular do rotor.

6.6 Determinação das Perdas Mecânicas

Os ensaios para a determinação das perdas mecânicas foram realizados sem a imposição de cargas resistivas, ou seja, somente volantes de inércia foram conectados a ambos os lados do eixo do motor, a fim de aumentar a estabilidade da sua rotação.

Medições de torque e rotação foram obtidas durante a operação estável do motor e estão presentes na tabela 6.5.

A figura 6.10 apresenta o ajuste dos dados da tabela 6.5 pelo métodos dos mínimos quadrados, utilizando-se a expressão 3.21 como função de interpolação. Deve-se notar que o termo quadrático foi omitido, pois sua contribuição é pequena perante aos demais termos da expressão.

6.7 Determinação das Inércias Rotacionais do Rotor, do Estator e Dos Volantes de Inércia.

As inércias rotacionais do rotor e do estator foram mensuradas através de um pêndulo rotacional com três fios de sustentação (vide apêndice B). Os volantes de inércia, por possuírem geometrias simples, tiveram suas inércias rotacionais calculadas através da seguinte expressão:

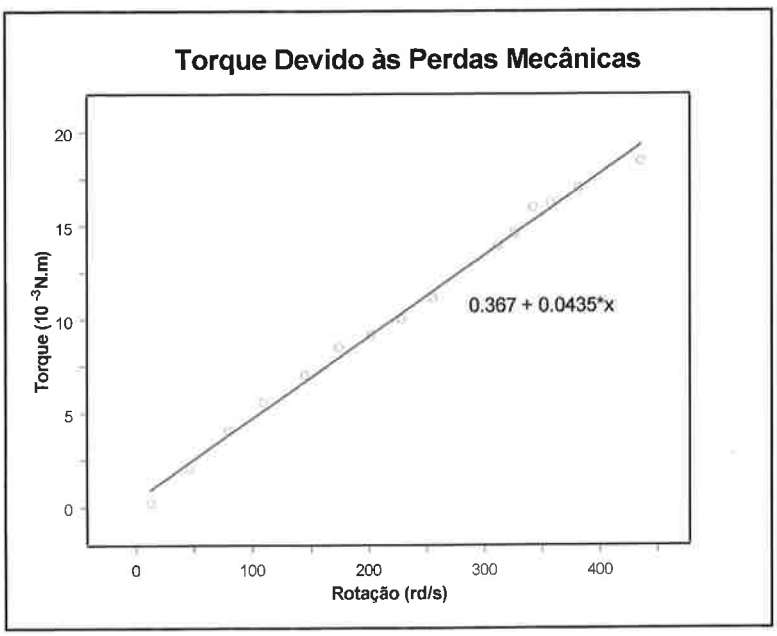


Figura 6.10: Torque absorvido pela resistência aerodinâmica do rotor, atrito dos mancais e pelo dispositivo de comutação.

Med.	Rotação	Torque
	rd/s	10^{-3} N.m
1	435.6	18.4
2	381.7	17.0
3	357.6	16.2
4	342.4	16.0
5	326.2	14.6
6	312.1	13.9
7	255.5	11.1
8	228.3	10.0
9	202.1	9.1
10	174.4	8.5
11	145.0	7.0
12	109.4	5.6
13	79.6	4.0
14	46.1	2.1
15	12.6	0.2

Tabela 6.5: Resultados obtidos com o rotor livre.

Parâmetro	Símbolo (expressão B.16)	Valor
Massa da base	M_b	0.04579 Kg
Massa da base + estator	$M_b + M_{obj}$	0.82109 Kg
Massa da base + rotor	$M_b + M_{obj}$	0.56349 Kg
Comprimento do fio de sustentação	h_{po}	0.306 m
Comprimento do fio de sustentação com o rotor sobre a base	h_p	0.545 m
Comprimento do fio de sustentação com o estator sobre a base	h_p	0.307 m
Aceleração da gravidade	g	9.8 m/s^2
Distância do ponto de fixação dos fios de sustentação ao centro da base	R_{pd}	0.0518 m

Tabela 6.6: Parâmetros para cálculo das inércias rotacionais dos componentes do motor com um pêndulo torcional a três fios.

$$J_v = \frac{1}{2} \cdot \rho_{vol} \cdot t_{vol} \cdot \pi \cdot \left(R_{vol}^{\ 4} - r_{vol}^{\ 4} \right) \tag{6.3}$$

Onde:

J_{vol} inércia rotacional do volante em relação ao eixo de rotação;
ρ_{vol} densidade do material do volante;
e_{vol} espessura do volante;
R_{vol}, r_{vol} raio externo e interno do volante, respectivamente.

Com a densidade do material (ρ_{vol}) obtida indiretamente através da medição

Objeto	Período
	s
Base do pêndulo	0.800
Estator	0.723
Rotor	0.526

Tabela 6.7: Períodos de oscilação obtidos com o pêndulo torcional.

Objeto	Inércia Rot.
	Kg.m^2
Base do pêndulo	$6.4.10^{-5}$
Estator	$8.7.10^{-4}$
Rotor	$1.3.10^{-4}$

Tabela 6.8: Inércias rotacionais medidas com o pêndulo torcional.

da massa e do cálculo do volume do volante, chegou-se ao seguinte valor para a sua inércia rotacional: 5.97 10^{-4} Kg.m^2.

Com um simples cronômetro digital obtiveram-se os períodos de oscilação do pêndulo para as seguintes condições: somente a base, base mais estator e base mais rotor (tabela 6.7). Com esses períodos e com os dados da tabela 6.6, calcularam-se as inércias rotacionais da base do pêndulo, do rotor e do estator através da expressão B16. A tabela 6.8 apresenta os resultados obtidos, todos referentes ao eixo de simetria longitudinal do motor.

6.8 Determinação da Indutância do Rotor (L_R)

A indutância do rotor foi medida através de uma ponte RLC, desconectando-se, previamente, a fonte e os demais instrumentos de medição do circuito do motor.

Outra maneira de se obter o valor de L_r é através da montagem de um circuito ressonante[19] envolvendo o rotor, componentes eletrônicos discretos, um milivoltímetro e uma fonte de sinais senoidais conforme figura 6.10. O valor da freqüência de ressonância desse circuito está relacionado com a indutância procurada através da seguinte expressão:

$$L_r = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f_{lc})^2 \cdot C_{lc}} \tag{6.3}$$

Onde:

f_{lc} é a freqüência de ressonância do circuito;

C_{lc} é o valor do capacitor inserido no circuito.

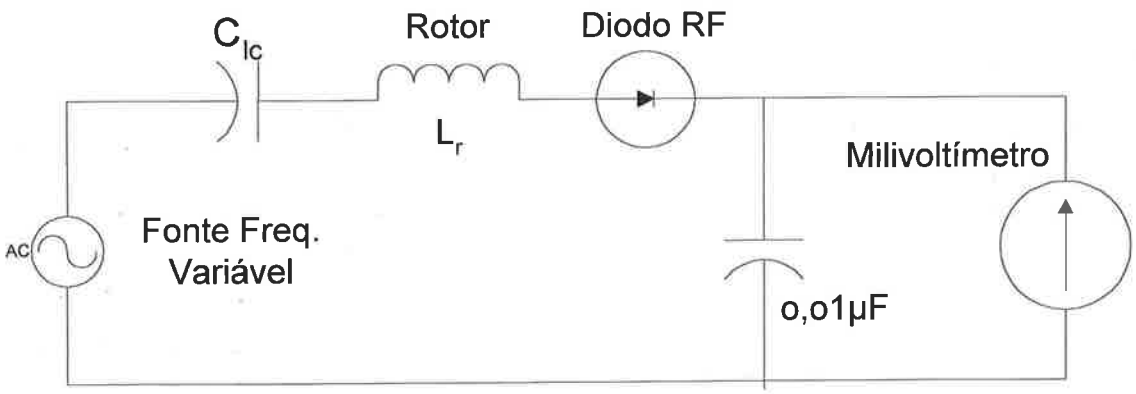


Figure 6.10: Circuito prático para medição da indutância do rotor.

Conhecendo-se o valor da capacitância utilizada no circuito e obtendo-se a freqüência da fonte de sinais para uma máxima indicação do milivoltímetro, o valor da indutância do rotor pode ser calculada facilmente pela expressão 6.3.

6.9 CONCLUSÃO

A tabela a seguir reúne todas as características mecânicas e elétricas do motor Siemens analisado que são importantes para a simulação do sistema estrutura/motor construído (vide item 3.5.3).

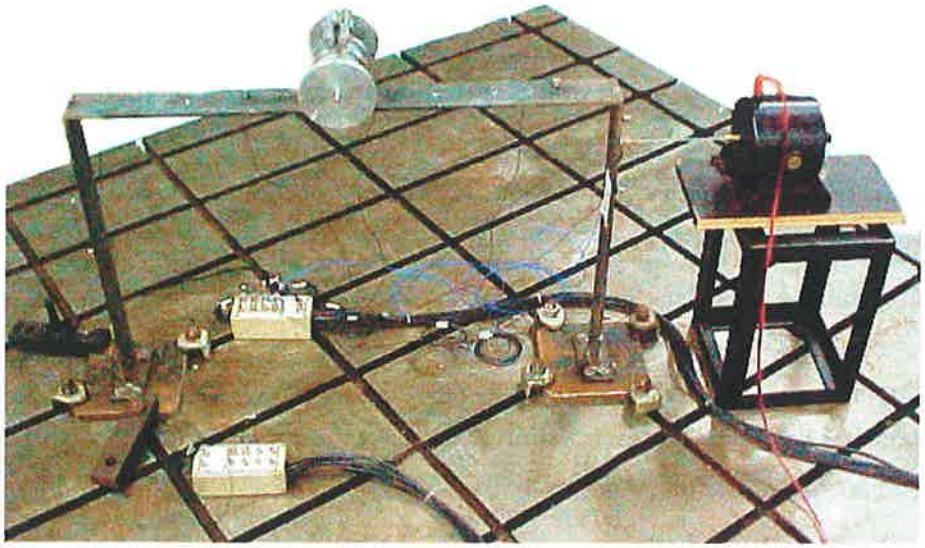
Símbolo	Parâmetro	Valor
J_e	Inércia rotacional do estator.	$8.7\ 10^{-4}$ Kg.m^2
J_r	Inércia rotacional do rotor (inclui volantes).	$1.32\ 10^{-3}$ Kg.m^2
J_v	Inércia rotacional de cada volante.	$5.97\ 10^{-4}$ Kg.m^2
K_e	Constante da força contra-eletromotriz.	0.0132 V.s/rd
K_t	Constante de torque.	0.0132 N.m/A
L_r	Indutância do rotor.	200 μH
M_m	Massa do motor (inclui volantes e suportes).	2.320 Kg
M_{vol}	Massa total dos volantes de inércia.	0.664 Kg
R_{pf}	Perdas no ferro e por histerese (resistência equivalente).	$\frac{\omega}{0.872\cdot\omega + 180}\ \Omega$ Onde ϖ é a velocidade angular do motor em rd/s.
R_{po}	Resistência interna média.	0.18 Ω
R_{vol}	Raio externo dos volantes de inércia.	0.060 m
r_{vol}	Raio interno dos volantes de inércia.	0.004 m
T_{abs}	Perdas mecânicas (torque de atrito).	$(0.367 + 0.0435\varpi_r)10^{-3}$ N.m, onde ϖ_r é a velocidade angular do motor em rd/s

Tabela 6.9: Parâmetro elétricos e mecânicos do motor.

Símbolo	Parâmetro	Valor
t_{vol}	Espessura dos volantes de inércia.	0.011 m
V_{esc}	Queda de tensão nas escovas.	0 V

Tabela 6.9: Parâmetro elétricos e mecânicos do motor.Continuação.

7 ANÁLISE MODAL DA ESTRUTURA



Programas para análise modal experimental pressupõem que a estrutura apresente um comportamento linear.

Devido a essa limitação, erros significativos na determinação dos modos ocorreram por ocasião da análise modal do pórtico ao lado, principalmente nas faixas de freqüência onde essa estrutura apresenta o fenômeno da saturação modal.

7.1 INTRODUÇÃO

O propósito da análise modal experimental do sistema estrutura/motor foi o de verificar se os seus dois primeiros modos de vibração correspondiam àqueles apresentados nas figuras 2.2 e 2.3 (condição necessária para que o modelo matemático desenvolvido nos capítulos anteriores simule o comportamento do sistema).

A análise realizada também serviu para comprovar a qualidade da estrutura construída, pois verificou-se se os outros modos de vibração não eram próximos demais aos dois primeiros, fato que comprometeria a resposta do sistema.

Por último, com base nos resultados obtidos, determinou-se experimentalmente a quantidade de massa necessária que, quando adicionada ao ponto central da viga, faz com que a relação das freqüências dos dois primeiros modos de vibração seja igual a 2. Conforme mencionado no capítulo 1, essa condição é necessária para que o fenômeno de saturação modal ocorra.

7.2 MÉTODO DE ENSAIO

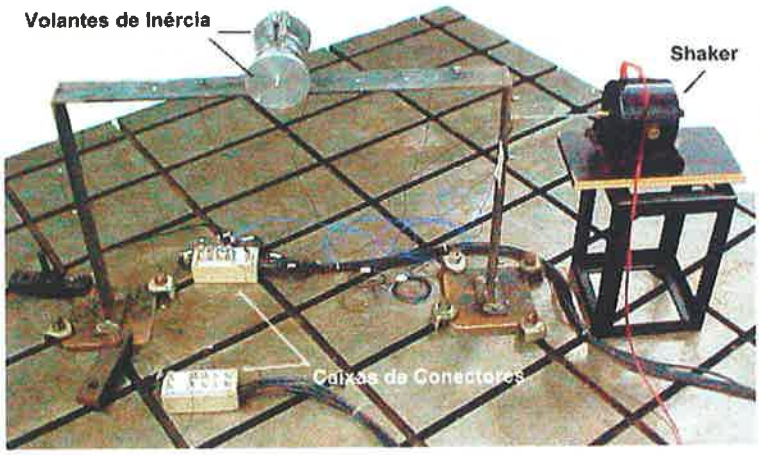
O pórtico com o motor elétrico completo foi fixado a uma base sísmica de aproximadamente cinco toneladas. Para garantir uma condição próxima ao engastamento ideal e reduzir ao máximo as perdas de energia devido a fixações deficientes, utilizaram-se parafusos de grande bitola, chapas de aço de espessura elevada e solda, conforme pode ser visto no detalhe da figura 7.1.

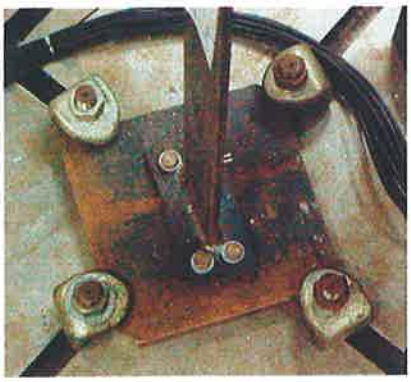
Um vibrador eletrodinâmico com massa de armadura reduzida foi instalado no terço superior de uma das colunas do pórtico. Uma célula de carga piezelétrica (figuras 7.2 e 7.4) foi instalada entre a haste desse vibrador (*shaker*) e a estrutura, a fim de medir os esforços transmitidos. Com a finalidade de garantir apenas a transmissão de esforços colineares com o eixo do *shaker*, uma haste plástica de pequeno diâmetro (4mm) foi utilizada.

Nove acelerômetros uniaxiais leves (figura 7.3) foram instalados na estrutura empregando-se cera de abelha. Escolheram-se 8 pontos de medição em cada coluna (figura 7.2) e 11 na viga, privilegiando-se as regiões sujeitas a maiores deslocamentos (3 pontos próximos do centro do vão livre e cinco no terço superior de cada coluna, conforme figura 7.5). As direções de medição foram sempre ortogonais às faces maiores dos elementos da estrutura.

Ajustou-se o sistema de aquisição de dados para uma resolução em freqüência de 0.19Hz, com topo de escala em 100 Hz. Os demais parâmetros foram os seguintes:

- Excitação do *shaker*: sinal randômico entre 0.1 e 230Hz;





Detalhe da fixação.

Figura 7.1: Instalação do sistema em uma base sísmica

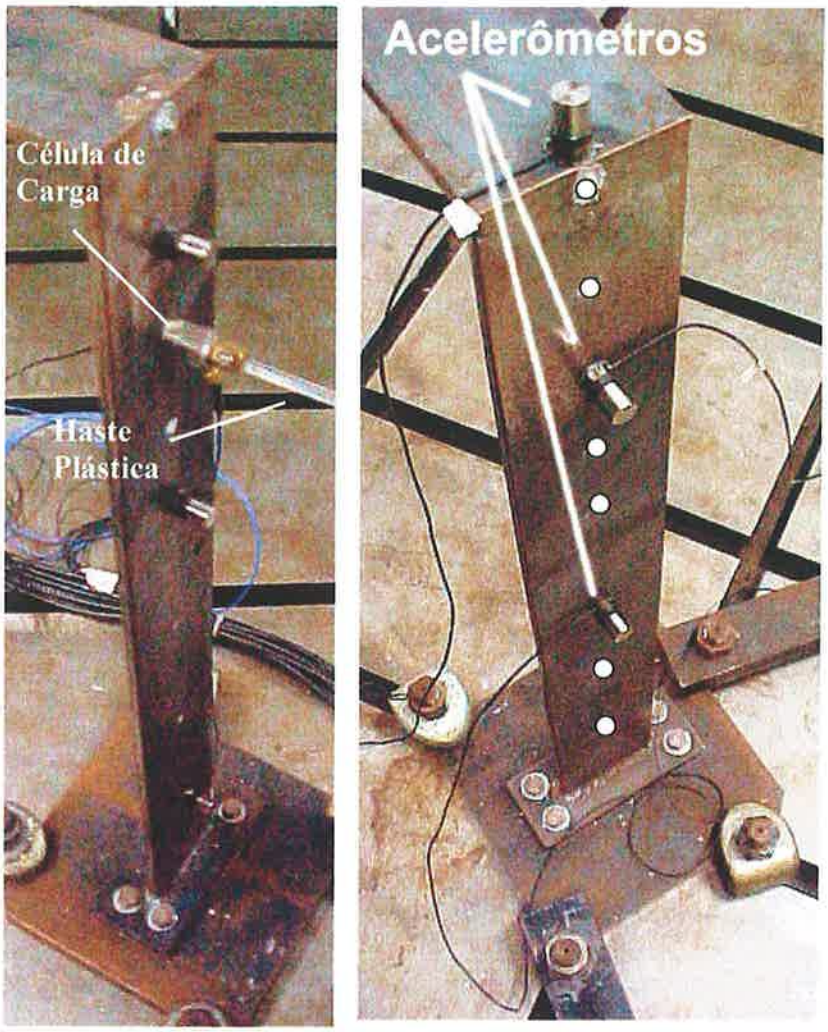


Figura 7.2: Pontos de fixação dos acelerômetros nas colunas. Fixação da célula de carga e haste do shaker.

Figura 7.3: Acelerômetro modal PCB.

Figura 7.4: Célula de carga piezelétrica.

- Janelamento: *hanning* ;
- Média dos resultados: aritmética, 100 medições ;
- Estimador das FRFs: H1.

A aquisição dos sinais nos 27 pontos escolhidos foi efetuada em três etapas. Em cada uma delas o vibrador eletrodinâmico permaneceu fixo, movendo-se apenas os acelerômetros. Em todas as etapas observou-se uma distribuição eqüitativa dos acelerômetros pela estrutura, a fim de se evitar problemas induzidos pela concentração de suas massas.

Os sinais dos acelerômetros foram coletados e tratados por placas A/D conectadas a uma estação de trabalho Unix. Nessa estação, empregou-se um *software* - LMS/CAD X – para análise dos dados.

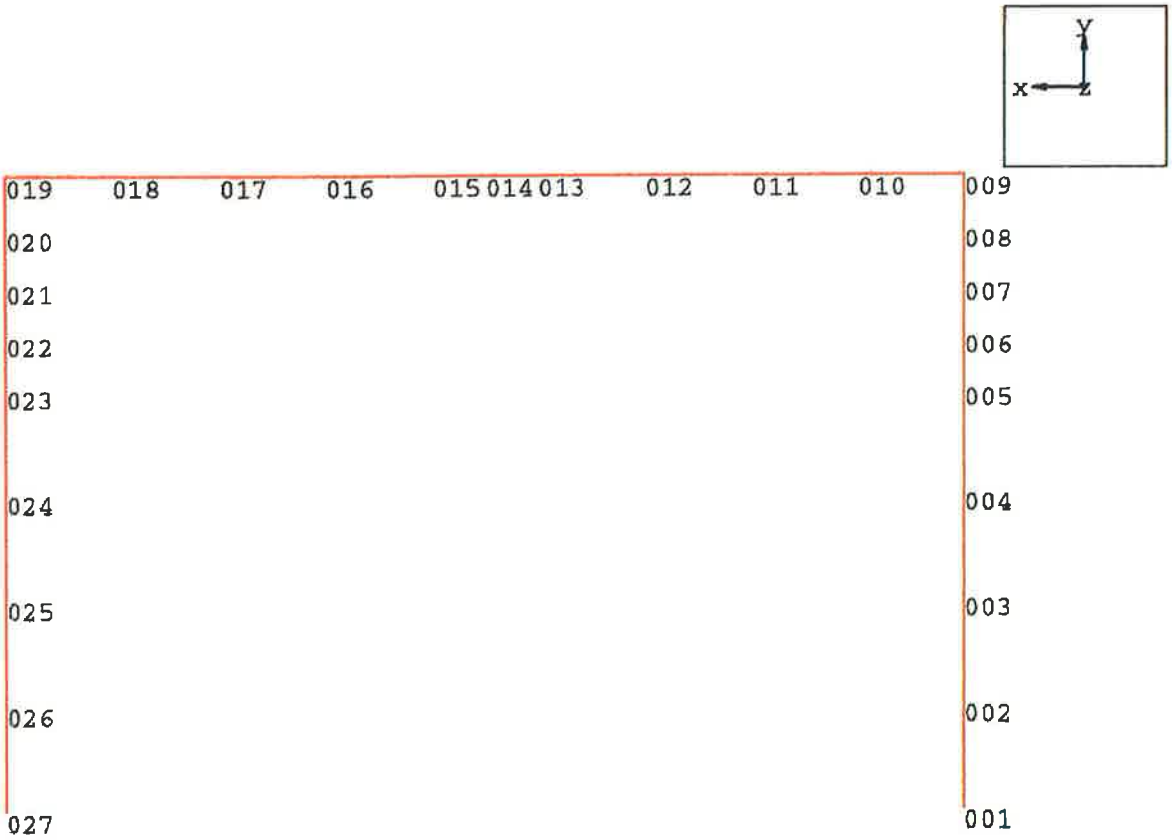


Figura 7.5: Identificação e posicionamento dos pontos de medição na estrutura

Realizou-se, também, uma análise simplificada dos modos de vibração perpendiculares ao plano do pórtico. Foram medidos nove pontos distribuídos pela estrutura, utilizando-se o mesmo equipamento e configuração do programa LMS empregados no teste anterior. O *shaker*, para essa análise, foi posicionado perpendicularmente ao plano do pórtico, com a célula de carga colada num ponto a 15 cm de uma das extremidades da viga , a fim de excitar igualmente modos simétricos e anti-simétricos.

7.3 Modos Naturais

Os dois primeiros modos naturais de vibração obtidos estão apresentados nas figuras 7.6 e 7.7. Observa-se que eles são iguais aos das figuras 2.2 e 2.3, porém apresentam deformações nas suas formas. Isso se deve ao fato do programa de análise pressupor que a estrutura possui comportamento linear, ausente de fenômenos tais como, por exemplo, o da transferência de energia entre modos.

Figura 7.6: 1º modo de vibração da estrutura.

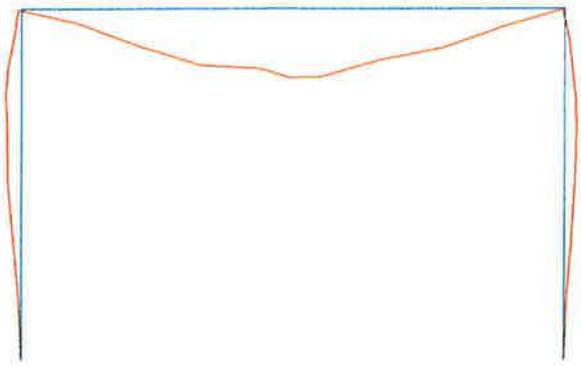


Figura 7.7: 2º modo de vibração da estrutura.

As figuras 7.8 a 7.12 mostram os quatro modos naturais – modos no plano do pórtico - obtidos através do programa LMS, num ensaio com o nível de excitação mais elevado. Comparando-se as formas dos dois primeiros modos com aquelas obtidas no ensaio anterior, nota-se que as deformações se acentuaram, devido às maiores amplitudes de vibração intensificarem o comportamento não linear da estrutura.

7.4 FREQÜÊNCIAS NATURAIS

A tabela 7.1 contém as freqüências e os amortecimentos modais do sistema estrutura motor, enquanto as figuras 7.13 e 7.14 apresentam as funções de transferência nas duas direções investigadas: no plano do pórtico e perpendicular a esse (na realidade, essas figuras são os resultados das somas de todas as funções de transferência obtidas em cada ponto da figura 7.5). Ao todo, detectaram-se 5 modos naturais na faixa de freqüência considerada . Os picos em torno dos 80 hertz presentes em ambas as funções de transferência não possuem, segundo cálculos realizados pelo *software*, formas modais

Figura 7.8: 1º Modo de vibração da estrutura. Análise com nível de excitação mais elevado.

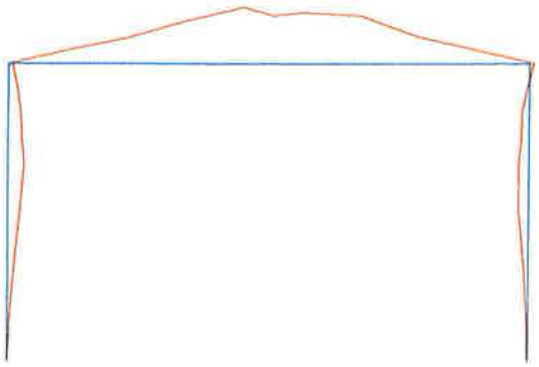


Figura 7.9: 2º Modo de vibração da estrutura. Análise com nível de excitação mais elevado.

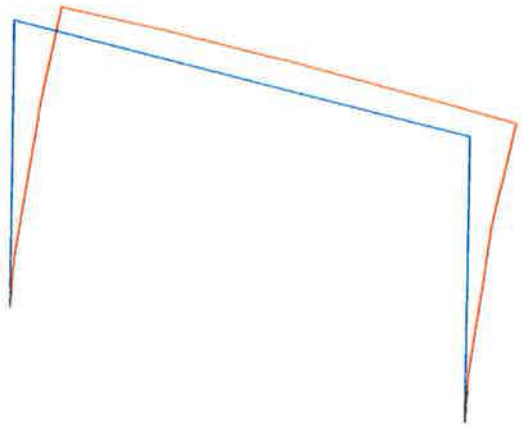


Figura 7.10: 3º modo de vibração. Análise com nível de excitação elevado.

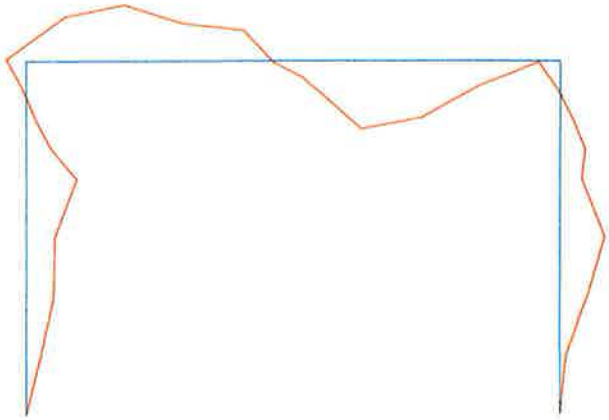


Figura 7.11: 4º modo de vibração. Análise com nível de excitação elevado.

ortogonais entre si. Considerando-se isso e a proximidade das freqüências centrais dos respectivos picos, assumiu-se tratar do mesmo modo.

Ainda com relação aos modos naturais, nota-se que a única forma modal sem distorções é aquela não contida no plano do pórtico; que foi somente detectada quando se alterou a posição do *shaker*.

Modo	Freqüência Hz	Amortecimento %
1	11.0	1.08
2	22.2	0.36
3	44.7	0.78
4	79.5	0.54
5	91.5	0.18

Tabela 7.1: Freqüências e amortecimentos modais da estrutura.

Analogamente ao que ocorreu na determinação dos modos naturais, o cálculo do amortecimento estrutural também foi afetado pelo comportamento não linear da estrutura, apresentando resultados diferentes a cada avaliação (tabela 7.2). Ressalta-se que, devido ao baixo amortecimento estrutural, todas as avaliações de amortecimento foram efetuadas no domínio do tempo.

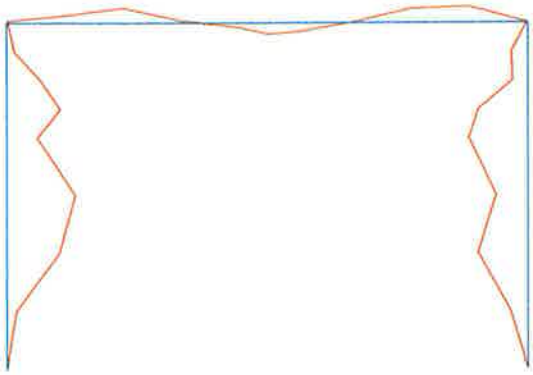


Figura 7.12: 5º modo de vibração. Análise com nível de excitação elevado.

Modo	Amortecimento %		
	1ª Med.	2ª Med.	3ª Med.
1	0.03	1.27	1.08
2	0.11	0.31	0.36

Tabela 7.2: Amortecimentos determinados em medições consecutivas.

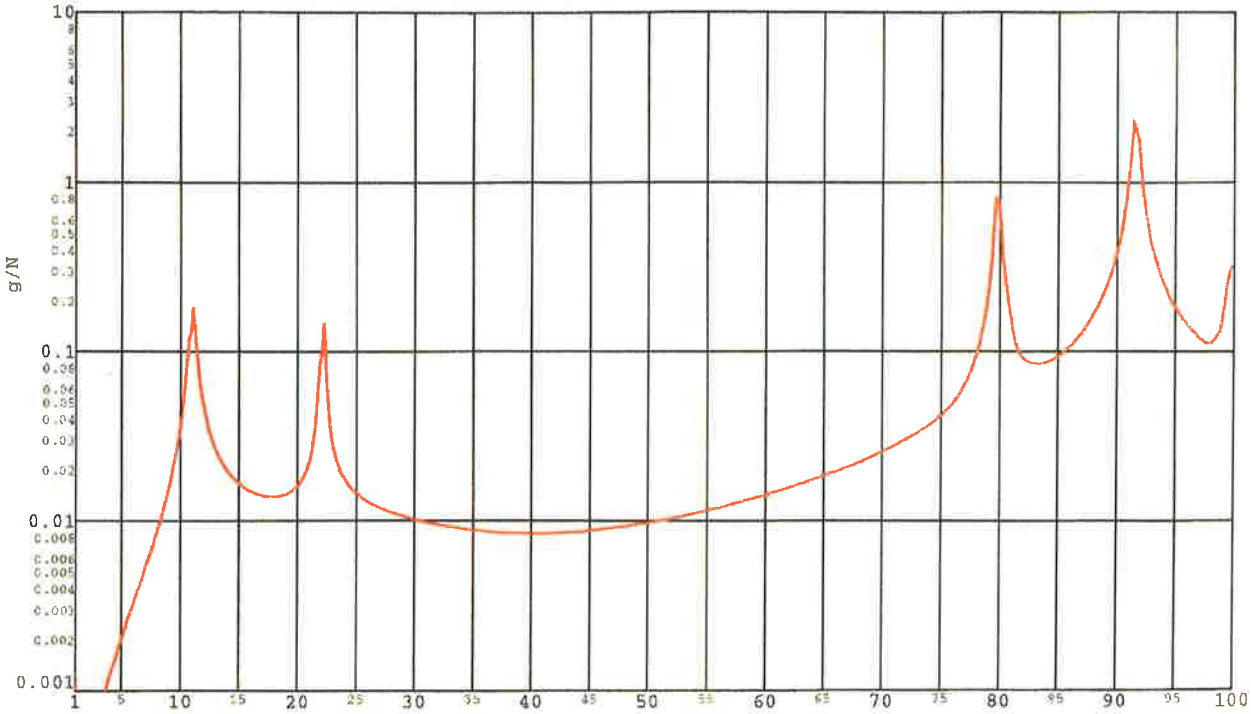


Figura 7.13: Função de transferência da estrutura (excitação no plano do pórtico).

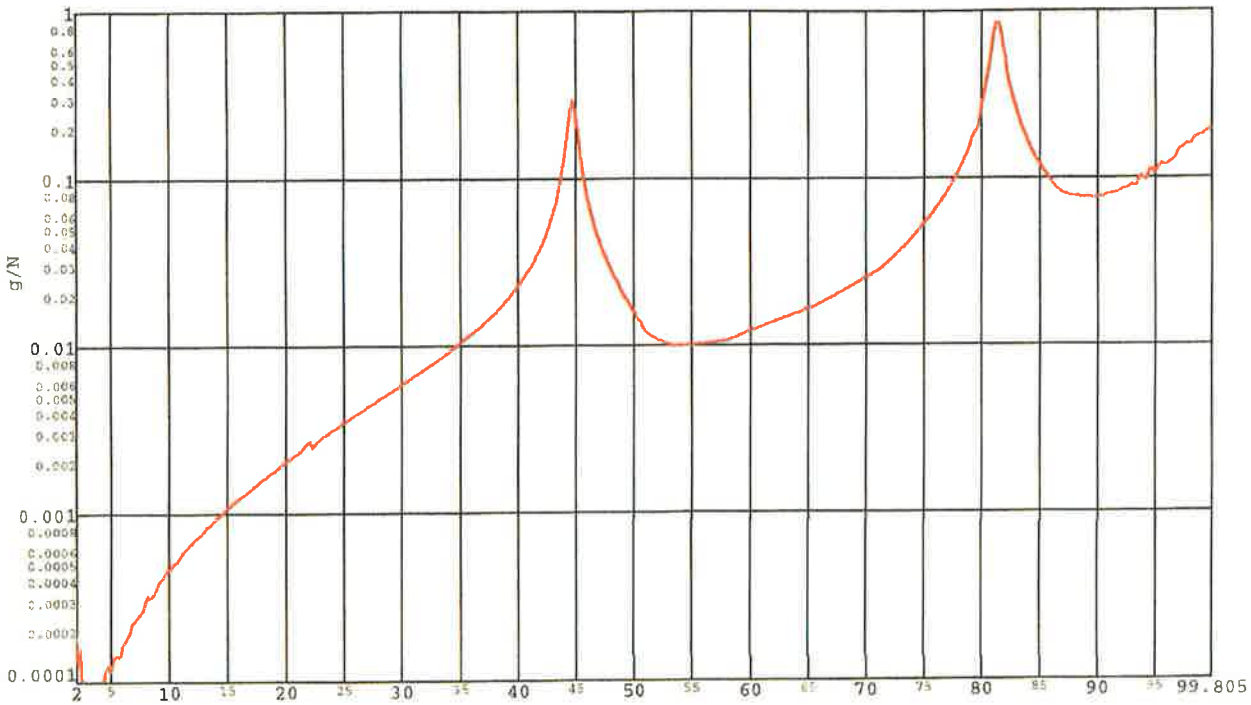


Figura 7.14: Função de transferência da estrutura (excitação perpendicular ao plano do pórtico).

8 ANÁLISE EXPERIMENTAL DO SISTEMA

Ao lado, o autor efetua os últimos ajustes no equipamento antes da sessão de filmagem e fotografia, com o objetivo de mostrar o movimento estrutural durante a ressonância.

Utilizou-se um fundo preto para realçar os elementos do sistema durante a filmagem com luz estroboscópica. A secção frontal do pórtico foi pintada com tinta refletiva, visando o mesmo efeito.

8.1 INTRODUÇÃO

Com o sistema montado e fixo numa base sísmica com massa aproximada de cinco toneladas, efetuaram-se ensaios para a determinação do comportamento estrutural em dois casos: vibrações livres e excitação com freqüências próximas a da sua segunda ressonância. No segundo, exploraram-se duas condições: passagem pela ressonância com rotação crescente e decrescente.

Com a finalidade de se verificar a representatividade do modelo matemático elaborado no capítulo 4, as duas componentes da aceleração do ponto central da viga do pórtico (vertical e horizontal) foram gravadas em formato digital. A corrente elétrica da alimentação do motor e a sua rotação também foram armazenadas na maioria dos ensaios; a exceção ocorreu em alguns testes de aceleração rápida do motor, onde o sinal de rotação foi substituído pela tensão de alimentação, devido a limitações do sistema de aquisição de dados (número de canais disponíveis para gravação).

Em todos os ensaios realizados com excitação do motor, a tensão de alimentação foi o parâmetro de controle do sistema. As passagens pela 2ª ressonância da estrutura foram obtidas através de mudanças graduais dessa tensão, observando-se as limitações da fonte de potência (capacidade de regulagem e estabilização) e a significância dessas mudanças perante ao ruído gerado pelo circuito elétrico do motor (fator limitante na escolha da diferença mínima entre dois níveis de tensão próximos).

O critério adotado para a escolha do número e da magnitude máxima dos níveis de tensão foi subjetivo. Considerou-se a proximidade da freqüência de excitação – dada pela rotação do motor - com a da ressonância estrutural – conhecida pela análise modal prévia - e o valor das componentes de aceleração do ponto central da viga. Dessa forma, menores diferenças de tensão foram adotadas quando a estrutura se aproximava da sua ressonância.

Vários detalhes na preparação do sistema motor/estrutura para os testes, bem como a escolha e a configuração do sistema de aquisição de dados, foram fundamentais para a observação dos fenômenos da saturação modal e do efeito Sommerfeld. Dada a importância desses detalhes, reservaram-se os itens abaixo para melhor descrevê-los.

8.1.1. Configuração do Sistema

O amortecimento estrutural é um parâmetro que depende, dentre outros fatores, do material utilizado e de aspectos construtivos e de acabamento, tais como: tipos de juntas (rígidas ou flexíveis), pintura etc. Atualmente, há materiais próprios para aumentar esse parâmetro - em forma de mantas, fabricados à base de asfalto e/ou polímeros (plásticos) - que podem ser facilmente aplicados sobre a superfície estrutural. Também estão disponíveis amortecedores dinâmicos discretos (sistemas tipo massa/mola) com elevadas taxas de amortecimento, mas com eficiências dependentes das faixas de freqüências para os quais foram projetados.

Considerando-se que o amortecimento estrutural pode ser facilmente acrescido caso seja necessário, o sistema motor/estrutura foi projetado para reduzir esse parâmetro ao máximo. Para isso, foram adotados os seguintes princípios construtivos: uniões soldadas (entre colunas e viga, entre sapatas e colunas), sapatas e dispositivos de fixação à base sísmica superdimensionados (reduzindo, dessa forma, o deslocamento relativo entre a estrutura e a fundação), minimização de pontos de contato e/ou fixações entre cabos elétricos e a estrutura. Com relação a esse último, a figura 8.1 mostra as ligações elétricas aéreas, que evitam o atrito com a estrutura e aumentam a vida útil dos condutores, pois distribuem as tensões de deformação durante as oscilações da estrutura

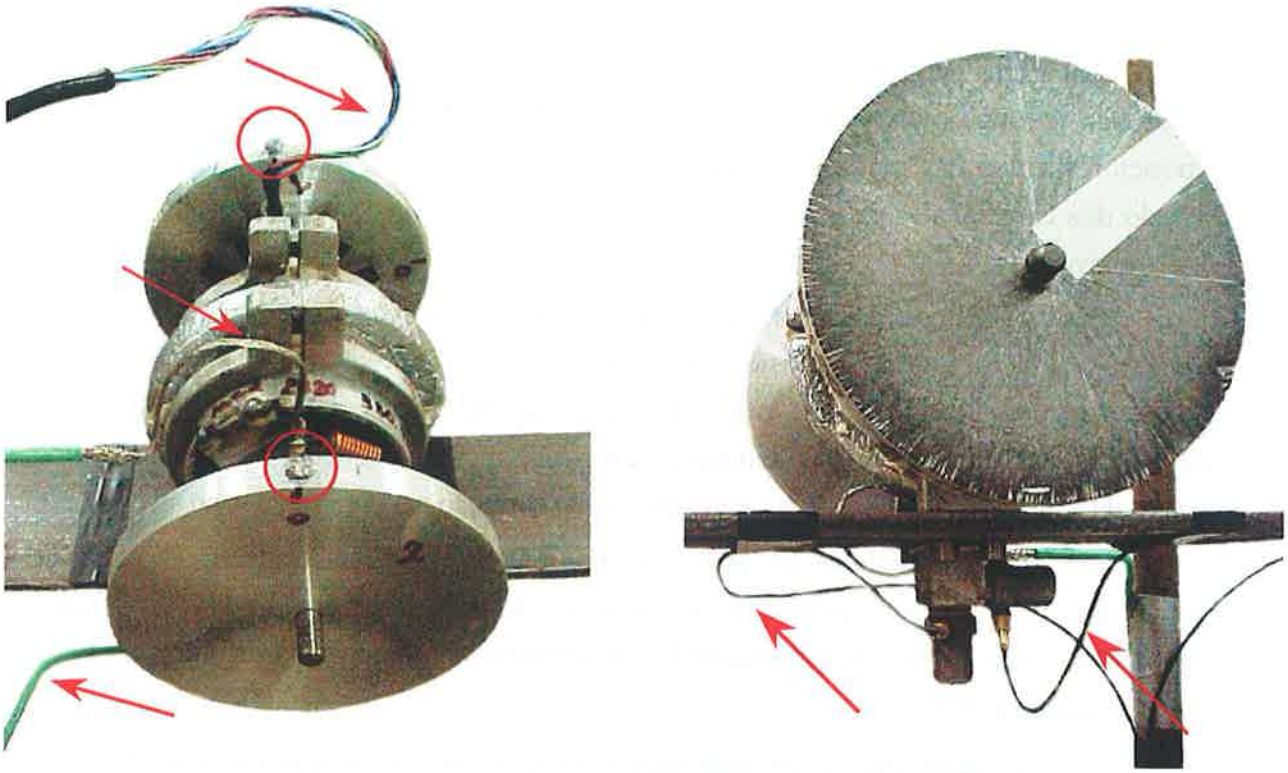


Figura 8.1: Ligações elétricas aéreas (minimização do atrito e aumento da vida útil dos condutores). Massas coladas nos volantes de inércia para excitar a estrutura.

(notar o encaminhamento curvilíneo dos condutores nas proximidades dos pontos de conexão e de fixação à viga do pórtico).

Outro detalhe importante na configuração do sistema é o balanceamento *in locu* dos volantes de inércia. Como a excitação da estrutura é obtida através da força gerada pelos desbalanceamentos dessas partes durante a rotação do motor, diferenças entre os volantes podem causar torques que podem excitar outros modos de vibração - como a primeira torção, por exemplo - alterando a resposta estrutural. Além desse fato, somente através da minimização dos desbalanceamentos residuais foi possível quantificar corretamente os níveis de excitação, alterados através da colagem de massas previamente conhecidas nas periferias dos volantes de inércia (vide figura 8.1).

É importante ressaltar que os procedimentos convencionais de balanceamento[33,35,36] pressupõem comportamentos lineares dos sistemas a serem corrigidos, sendo, dessa forma, utilizados com sucesso nos balanceamentos de rotores rígidos. O emprego desses métodos no sistema em questão traria resultados insatisfatórios, pois as oscilações da estrutura nas proximidades das ressonâncias amplificariam as acelerações causadas pelos desbalanceamentos intencionalmente provocados nos volantes (geralmente,

os métodos convencionais utilizam massas de testes conhecidas para causar desbalanceamentos controlados, a fim de determinar a relação linear entre a excitação e resposta da estrutura), alterando os resultados dos cálculos de determinação das magnitudes e posicionamentos das massas de correção. Para contornar esse problema, utilizou-se o Método dos Coeficientes de Influência[16], normalmente empregado nos balanceamentos de eixos flexíveis.

O método dos coeficientes de influência é baseado em duas premissas: a primeira, que a resposta de um sistema não linear pode ser aproximada pelas respostas de diversos sistemas lineares, cada qual válida para um trecho específico de freqüência; a segunda, que o efeito de um desbalanceamento individual e pequeno pode ser corrigido através da soma das influências de várias massas de correção a serem fixadas no sistema.

Considerando-se as premissas do método de balanceamento, a faixa de rotação do motor e as freqüências de ressonâncias da estrutura, tomaram-se as seguintes providências para tornar a determinação das magnitudes e posicionamentos das massas de correção mais precisa:

a- empregou-se um filtro digital passa-banda com freqüência central igual a da rotação do motor durante as leituras das acelerações verticais dos seus dois mancais. Isso permitiu que a relação sinal/ruído fosse maximizada, removendo-se da resposta do sistema os sinais não síncronos com a excitação;

b- evitou-se a aquisição de dados - acelerações dos mancais e rotação do motor - nas condições de operação muito próximas as das ressonâncias do sistema (as variações bruscas das amplitudes de vibração nas adjacências das ressonâncias, devido ao baixo amortecimento estrutural e a impossibilidade do motor elétrico manter rotações extremamente estáveis - com variações menores que 0.4% - tornaram as medições pouco confiáveis sob essas condições).

Aliando-se as medidas acima com uma instrumentação estável e precisa, obteve-se um grau de balanceamento bastante satisfatório para o sistema (2.4gmm).

8.1.2. Instrumentação

Foram quatro os tipos de grandezas físicas mensuradas durante os ensaios: aceleração, rotação, corrente e tensão elétricas. Cada uma delas exigiu sensores e

dispositivos que capturaram e condicionaram os seus valores ao longo do tempo, permitindo, posteriormente, a armazenagem dos mesmos.

A escolha de determinados equipamentos e a elaboração de alguns dispositivos para tratamento prévio dos sinais permitiu a observação de fenômenos que não seria possível de outro modo. Dada a importância desse assunto, explica-se, a seguir, como foi realizada a aquisição de dados, bem como as ações e procedimentos seguidos para superar algumas dificuldades.

Armazenagem dos Dados

Na falta de um gravador digital, a armazenagem da maioria dos dados foi realizada por meio de uma placa analógica/digital, fabricada pela National Instruments (vide apêndice A), acoplada ao barramento de um computador tipo PC. Devido às suas excelentes características técnicas - quatro canais de aquisição simultânea, taxa de aquisição mínima de 4000 amostras/seg, relação sinal ruído superior a 80dB e filtros *antialiasing* - não houve restrições quanto a gravação dos dados, excetuando-se o número limitado de canais.

Um programa simples, elaborado no ambiente gráfico Labview, controlou a placa de aquisição e armazenou os dados em disco rígido no formato binário. Considerando-se a taxa mínima de amostragem e o tempo médio de gravação utilizado (3 minutos para cada evento), esse formato de armazenagem foi essencial para uma boa compactação dos dados.

Os demais dados, principalmente aqueles obtidos durante os ensaios de vibração livre, foram armazenados no formato TXT, utilizando-se *software* e *hardware* específicos fabricados pela Iotech. O sistema, que é dotado de uma placa de aquisição padrão PCMCIA, dois módulos com filtros *antialiasing* e um computador portátil apresentou performance inferior ao descrito anteriormente e, por isso, foi preterido para os demais testes.

Medição das Acelerações

Dois acelerômetros piezelétricos com amplificadores incorporados – também conhecidos por acelerômetros tipo ICP - foram instalados no centro da viga do pórtico, imediatamente abaixo do motor elétrico (figura 8.2). Esses sensores possibilitaram a medição das componentes horizontal e vertical da aceleração do ponto mencionado sem distorções e/ou ruídos de baixa freqüência, que são normalmente observados nos acelerômetros piezelétricos convencionais, devido ao atrito interno das malhas dos seus cabos de alimentação (efeito triboelétrico).

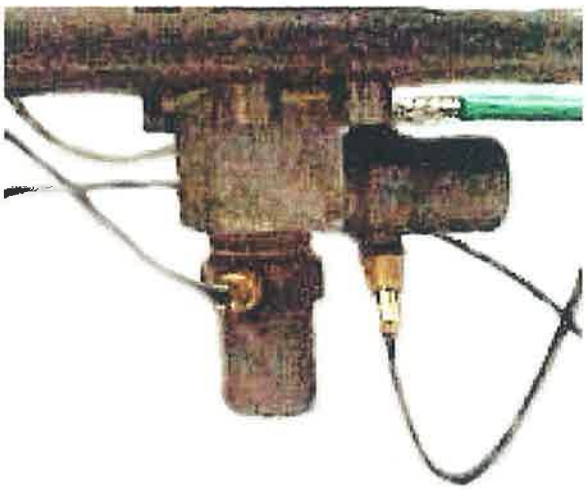


Figura 8-2: Detalhe da fixação dos acelerômetros ICP sob a viga do pórtico.

Sensores ICP necessitam de fontes de corrente para operarem (também conhecidas por condicionadores ICP). No presente caso, escolheu-se um modelo que possuía filtros internos e amplificação do sinal de saída, além de mostradores de grandes dimensões para permitir a visualização do valor RMS e/ou de pico (característica que muito auxiliou no controle do sistema motor/estrutura nas proximidades das ressonâncias estruturais).

Os filtros dos condicionadores (um para cada acelerômetro) foram ajustados para atenuar sinais não contidos na faixa de freqüência compreendida entre 1 e 1000 Hz. Embora não fossem absolutamente necessários, possibilitaram a otimização do ganho de entrada da placa de aquisição, reduzindo componentes de aceleração com freqüências fora da faixa de interesse (ruídos originados pelos rolamentos do motor, escovas etc).

Outro detalhe importante na medição das acelerações foi o emprego de sensores eletricamente isolados, a fim de se evitarem problemas causados por diferenças de potencial entre a estrutura – naturalmente aterrada através da base sísmica metálica - e o sistema de medição – conectado ao terra através do circuito elétrico do laboratório.

A calibração do sistema de aquisição (acelerômetros, condicionadores e placa A/D) foi verificada montando-se cada um dos acelerômetros na base de um vibrador específico para tal finalidade (vide apêndice A).

Medição da Corrente Elétrica do Motor

Utilizou-se um *shunt,* fabricado com quatro resistores comerciais com capacidades de dissipação térmica elevadas, para as medições da corrente alimentação do motor (figura 8.3). Esse dispositivo, conectado em série com o circuito de alimentação, permitiu medir

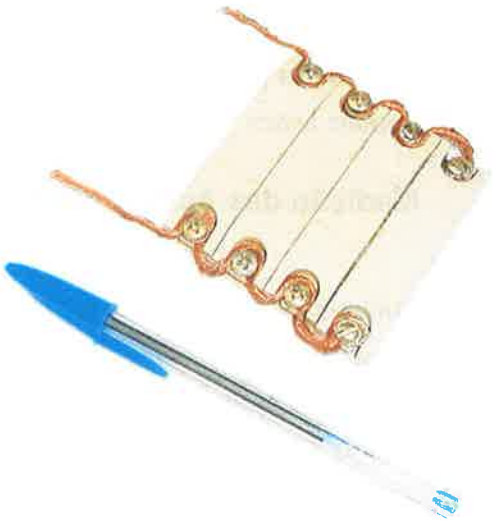


Figura 8-3: Shunt utilizado nas medições.

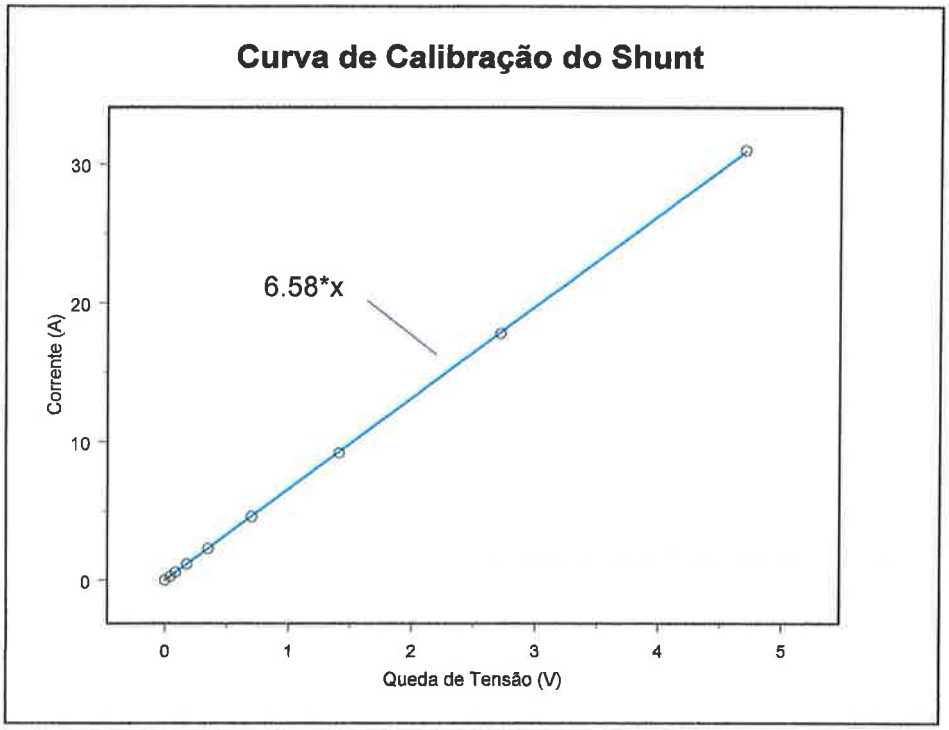


***Figura 8-4:** Curva de calibração do shunt utilizado nas medições da corrente de alimentação do motor elétrico.*

correntes elétricas intensas - através da simples leitura da diferença de potencial entre seus bornes de conexão - sem dissipar parcelas significativas de potência elétrica por efeito Joule.

Com o auxílio de dois multímetros digitais e de uma fonte de energia, obteve-se a curva de calibração do *shunt* construído (figura 8.4). Observou-se que a relação linear entre a corrente que o atravessava e a queda de potencial entre seus bornes variava com a temperatura dos seus resistores. No entanto, notou-se que devido à grande capacidade de dissipação de potência desses resistores e o curto período de exposição do *shunt* a correntes elevadas – picos que ocorriam durante a

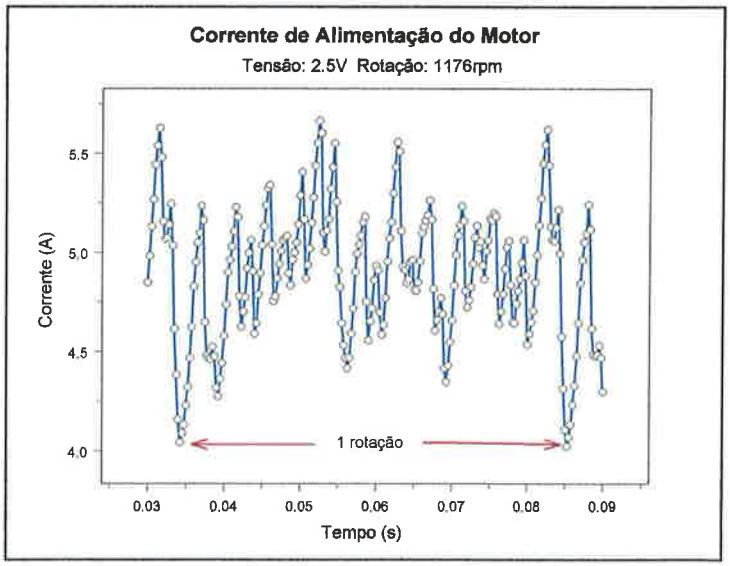


***Figura 8-4:** Corrente de alimentação do motor: picos causad os pela comutação das bobinas do rotor.*

partida do motor - a variação da temperatura era insuficiente para causar erros significativos.

Para atenuar os transientes de corrente de alta e média freqüências ocasionados pelo chaveamento das bobinas do motor e, dessa forma, tornar a medição de corrente mais precisa, conectou-se um banco de capacitores em paralelo com a saída da fonte de alimentação. Esse banco continha cinco capacitores eletrolíticos de 10000μ, quatro de poliéster (0.47μF, 0.1μF, 0.047μF e 0.01μF) e três cerâmicos (1nF, 10pF e 100pF), todos conectados em paralelo entre si. Ressalta-se que, devido às diferentes velocidades de carga e descarga dos capacitores utilizados, esse tipo de arranjo eleva a eficiência de atenuação.

Medição da Tensão de Alimentação

Devido à limitação da tensão máxima suportada pela placa A/D (2.8V), utilizou-se um divisor de tensão simples para mensurar as tensões de alimentação do motor. Esse divisor, composto por três resistores de precisão de 1KΩ-1/8W ligados em série entre si e, em paralelo com o circuito do motor, permitiram uma relação entre a tensão mensurada e a tensão de alimentação igual a 1/3. A escolha dos valores desses resistores considerou a impedância de entrada da placa, a fim de minimizar o erro de medição.

Medição da Rotação do Motor

Dentre as várias opções disponíveis para se mensurar a rotação de um motor DC (análise de Fourier da sua corrente de alimentação, interferometria laser, células fotoelétricas, lâmpadas estroboscópicas etc), escolheu-se aquela que aliou praticidade, confiabilidade, baixo custo e precisão: sensor óptico

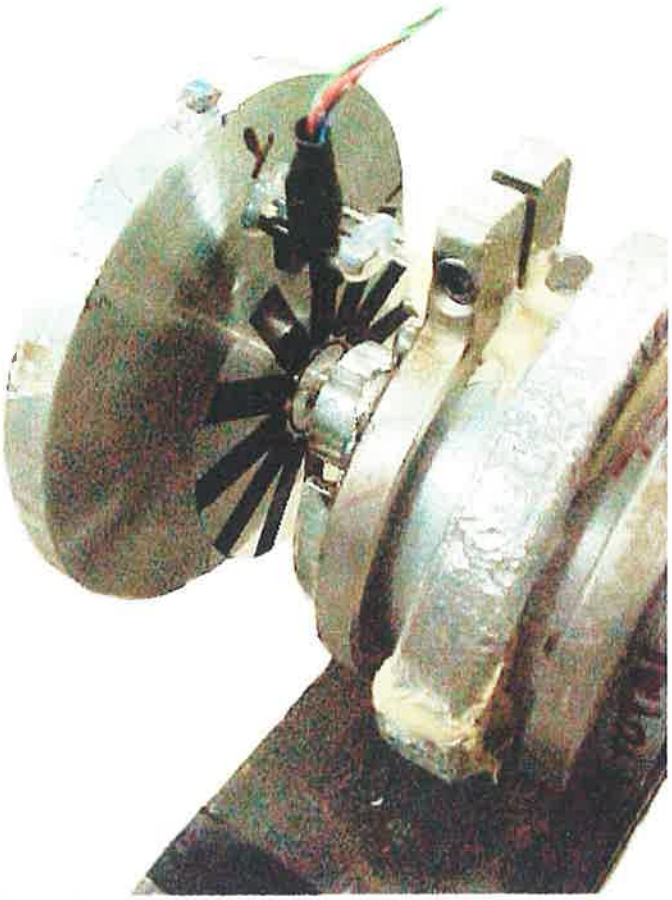


Figura 8-5: Dispositivo óptico para medir a rotação do motor.

acoplado diretamente ao eixo do motor.

O sensor mostrado na figura 8.5 foi elaborado e construído no Laboratório de Ruídos & Vibrações da General Motors, em Indaiatuba/SP. Permite medições de rotação superiores a 15000 rpm com erros inferiores a 0.1%, dependendo do meio utilizado para a contagem dos pulsos gerados.

Nos ensaios do sistema estrutura/motor, os sinais gerados pelo sensor óptico (onda quadrada com freqüência igual a doze vezes a rotação do motor) foram armazenados junto com as demais medições em arquivos binários. Um programa elaborado pelo autor, utilizando o ambiente gráfico Labview, converteu esses arquivos para o formato TXT, extraindo, simultaneamente, a informação da rotação do motor dos sinais gravados.

Como a placa utilizada não possuía uma entrada específica para um contador digital, o sinal do sensor foi conectado diretamente a uma entrada analógica com taxa de aquisição de 4000 amostras/seg. Essa taxa de amostragem e o filtro *antialiasing* utilizado (automaticamente inserido na medição pela placa da National) acabaram por distorcer a forma da onda quadrada gerada por esse sensor (figura 8.6).

Para extrair a rotação média do motor a intervalos regulares do sinal distorcido do sensor, o programa mencionado acima procedeu da seguinte maneira: determinou os picos desse sinal e os intervalos de tempo (Δtp_i) a cada Np picos, considerando a taxa de amostragem utilizada (1/4000 s); então, com os intervalos médios entre cada pico conhecidos (Δtmp_i, obtido pela simples divisão de Δtp_i por Np) e o número de pulsos por revolução do eixo do motor (12), calculou a rotação média a cada intervalo Δtp_i (rpm médio = 60 x 1 / (12 *Δtmp_i)). Ressalta-se que a escolha do número de pulsos (Np) para estimar a rotação média é um fator crítico. Considerando-se as incertezas envolvidas na

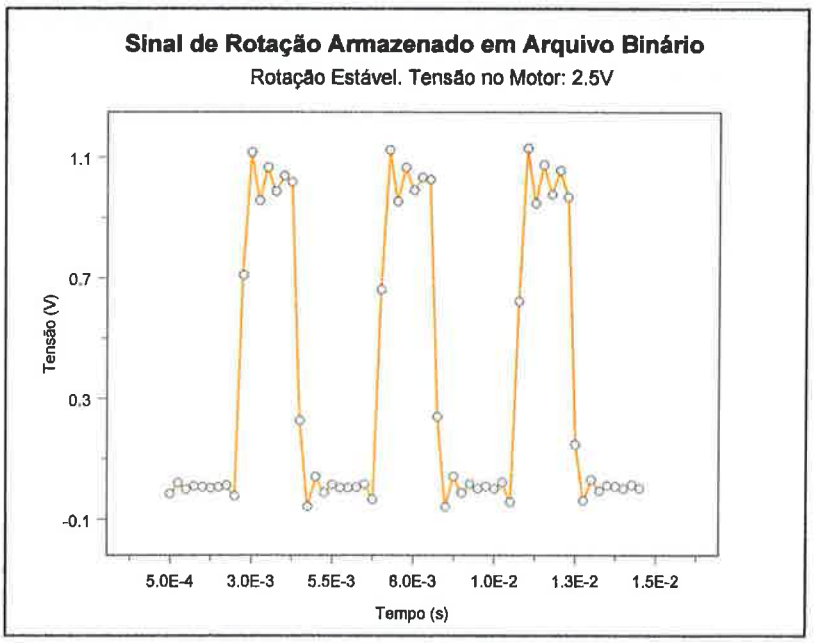


Figura 8-6: Sinal de rotação distorcido após processo de amostragem e filtragem pela placa A/D (original é uma onda quadrada).

determinação dos picos da forma de onda armazenada, utilizaram-se os seguintes valores:

- Np=6, na conversão de aquivos onde conhecia-se que a rotação do motor tinha variado bruscamente no decorrer da medição;
- Np=12, onde o motor permaneceu estável durante o ensaio.

Para a determinação dos picos, empregou-se uma sub-rotina já disponível no ambiente de programação Labview, a qual utiliza um algoritmo capaz de lidar com sinais ruidosos e distorcidos.

Alimentação do motor

Dada a magnitude da corrente de partida do motor – sob determinadas condições, esse parâmetro pode atingir valores acima de 30A – e a necessidade de manter constante a tensão de alimentação durante os ensaios, empregou-se uma fonte chaveada, estabilizada, com potência e corrente de saída máximas iguais a 1700W e 45A, respectivamente.

Ressalta-se a importância do circuito de estabilização e monitoramento da tensão de alimentação durante os ensaios. Conforme pode ser visto na figura 8.7, a diferença de potencial entre os bornes do motor utilizado é contaminada pelos ruídos gerados pelo seu dispositivo de comutação (escovas e coletor). Embora essa parcela de ruído possa ser minimizada através de bancos de capacitores e indutores (como aquele discutido anteriormente no item: Medição da Corrente de Alimentação), o circuito de controle da fonte deve ser capaz

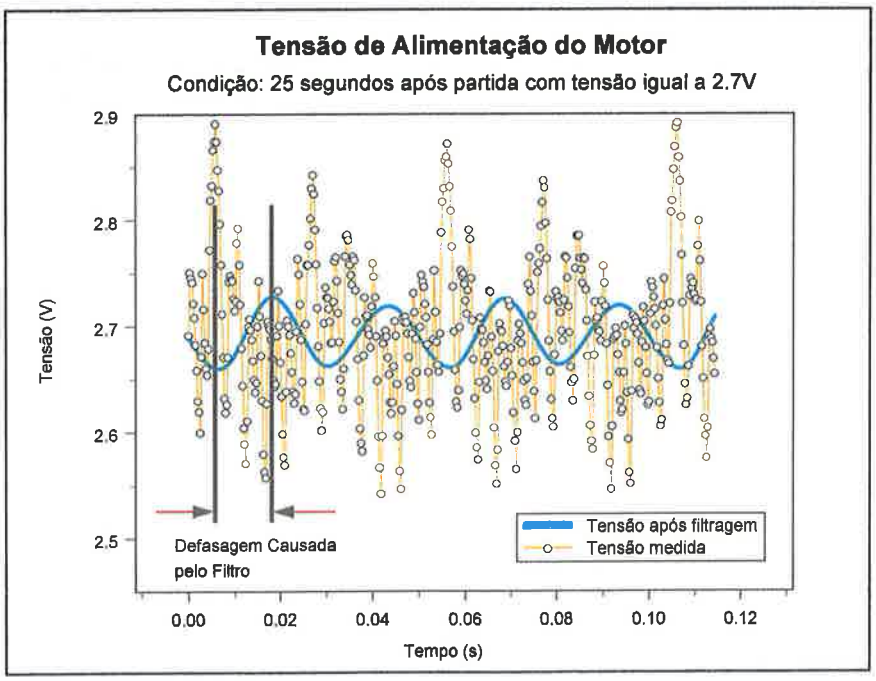


Figura 8-7: Tensão de alimentação do motor elétrico antes e após filtragem (Filtro Butterworth, passa-baixa, ordem 4)

de lidar com esse problema, fazendo o uso de, por exemplo, filtros eletrônicos e/ou de microprocessadores.

8.2 RIGIDEZ HORIZONTAL E VERTICAL

Com o auxílio de um dinamômetro digital portátil e de um relógio comparador analógico com base magnética, foram realizados ensaios para a determinação das rigidezes horizontal e vertical do pórtico.

Durante o ensaio para a determinação da rigidez vertical, o relógio comparador foi posicionado no centro da parte inferior da viga. O carregamento foi aplicado no sentido de baixo para cima a 1cm de distância do apalpador do relógio, medido na direção longitudinal do pórtico.

A disposição desses mesmos equipamentos, na determinação da rigidez horizontal, foi totalmente diferente. O relógio comparador situou-se no centro da face interna de uma das colunas, num ponto a 2cm da face inferior da viga; o carregamento foi aplicado no centro da face externa da mesma coluna, na junção dessa com a viga.

O procedimento adotado durante os ensaios foi o seguinte: aplicava-se a carga de maneira progressiva até que um determinado deslocamento fosse obtido; então, descarregava-se a estrutura lentamente e lia-se, diretamente do visor do dinamômetro, a máxima força atingida.

Considerando-se as incertezas envolvidas (alinhamento do relógio comparador, posicionamento do dinamômetro, paralaxe nas medidas de deslocamento etc), o procedimento acima foi repetido pelo menos duas vezes para cada deslocamento, a fim de se obter uma quantidade razoável de pontos para uma análise estatística (regressão linear).

A tabela 8.1 apresenta os resultados dos ensaios, enquanto as figuras 8.8 e 8.9 mostram graficamente o ajuste das regressões lineares para cada uma das direções ensaiadas.

Aproveitando-se o posicionamento do relógio comparador nos dois ensaios, determinou-se os limites aproximados de deslocamento horizontal e vertical, abaixo dos quais a estrutura mantém um comportamento linear. Observou-se que deslocamentos horizontais superiores a 6.0mm causam deformação estrutural permanente (0.01mm para um deslocamento horizontal de 6.00±0.02mm). Analogamente, na direção vertical, constatou-se o limite de 4.0mm (0.01mm residuais para 4.00±0.02mm de deslocamento).

Teste	Direção	Carga N ± 0.4	Deslocamento (m) Horiz. ± 0.02E-3	Deslocamento (m) Vert. ± 0.02E-3
1	Vertical	9.8		1.0E-04
2	Vertical	10.0		1.0E-04
3	Vertical	9.8		1.0E-04
4	Vertical	19.2		2.0E-04
5	Vertical	19.4		2.0E-04
6	Vertical	38.2		4.0E-04
7	Vertical	37.8		4.0E-04
8	Vertical	57.0		6.0E-04
9	Vertical	56.4		6.0E-04
10	Vertical	94.0		1.0E-03
11	Vertical	93.4		1.0E-03
12	Vertical	140.6		1.5E-03
13	Vertical	140.6		1.5E-03
14	Vertical	187.7		2.0E-03
15	Vertical	187.0		2.0E-03
16	Horizontal	21.4	5.0E-04	
17	Horizontal	21.4	5.0E-04	
18	Horizontal	43.6	1.0E-03	
19	Horizontal	43.6	1.0E-03	
20	Horizontal	64.2	1.5E-03	
21	Horizontal	63.8	1.5E-03	
22	Horizontal	85.0	2.0E-03	
23	Horizontal	84.4	2.0E-03	
24	Horizontal	106.6	2.5E-03	
25	Horizontal	106.6	2.5E-03	
26	Horizontal	127.4	3.0E-03	
27	Horizontal	127.4	3.0E-03	
28	Horizontal	148.6	3.5E-03	
29	Horizontal	149.0	3.5E-03	

Tabela 8.1: Resultados dos ensaios de determinação das rigidezes horizontal e vertical.

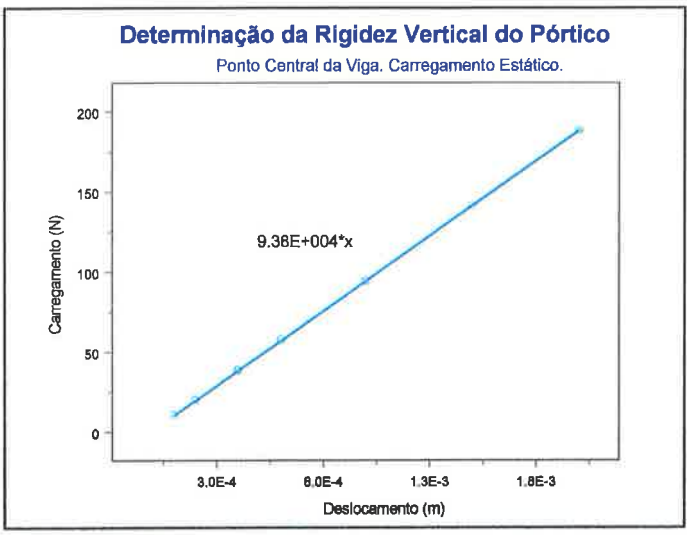


Figura 8.8: Deslocamento vertical do ponto central da viga sob carregamento estático.

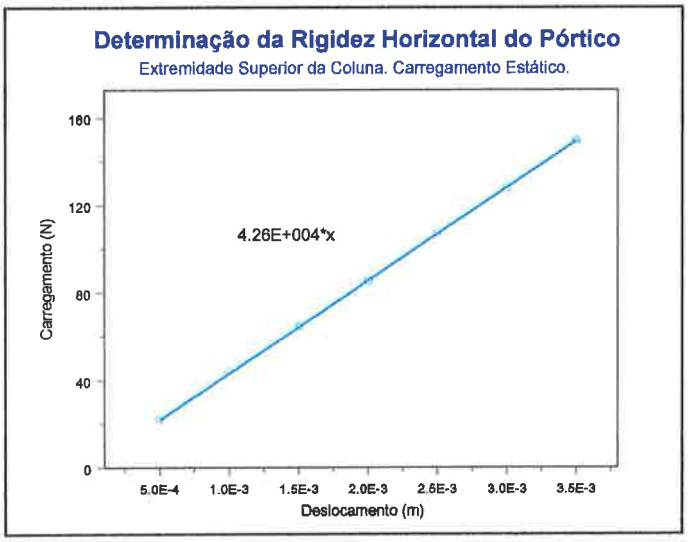


Figura 8.9: Deslocamento horizontal do ponto extremo de uma das colunas do pórtico sob carregamento estático.

8.3 VIBRAÇÕES LIVRES

As vibrações livres do sistema motor/estrutura foram induzidas através de deslocamentos iniciais nas duas direções de interesse: horizontal e vertical. Um dispositivo específico foi concebido (figura 8.10 e 8.11) para permitir o controle da magnitude do deslocamento imposto e do instante da sua liberação.

Com o auxílio de um relógio comparador instalado no centro da face interna da coluna, o deslocamento horizontal inicial era controlado através do esticador de cabos

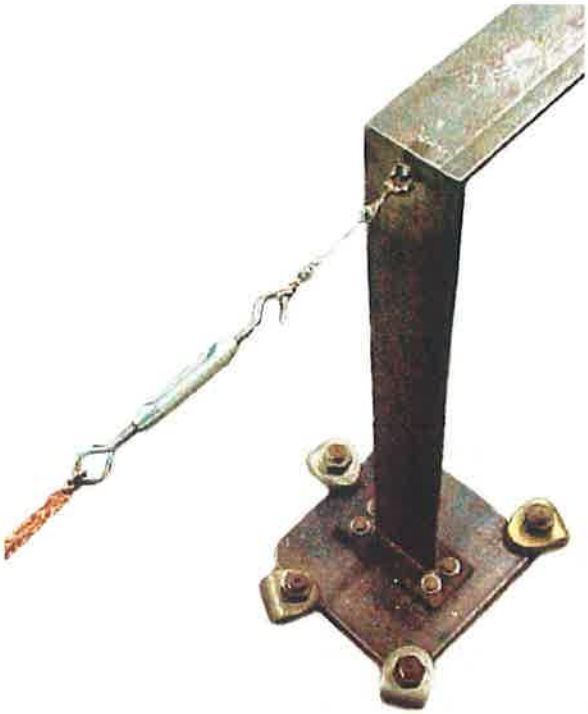


Figura 8-10: Dispositivo para impor deslocamentos horizontais à estrutura.

Figura 8.11: Detalhe da fixação do dispositivo na coluna do pórtico.

mostrado na figura 8.10. Um condutor de cobre prendia uma das extremidades desse esticador a um suporte eletricamente isolado da fundação metálica; a outra, era conectada à estrutura por meio de um fusível mecânico (figuras 8.11 e 8.12). Após o afastamento do apalpador do relógio da estrutura, conectavam-se os pólos de um banco de baterias automotivas em dois pontos: num dos parafusos de fixação da coluna à fundação e no condutor preso ao suporte isolado. A corrente elétrica de alta intensidade que se desenvolvia acabava por romper o fusível mecânico em milissegundos, liberando a estrutura.

Para impor deslocamentos verticais à estrutura, procedeu-se da mesma forma; as únicas diferenças foram: a localização do relógio comparador (posicionado no centro da face inferior da viga e no meio dessa) e a fixação do condutor do esticador à fundação, a qual se deu através de um olhal eletricamente isolado.

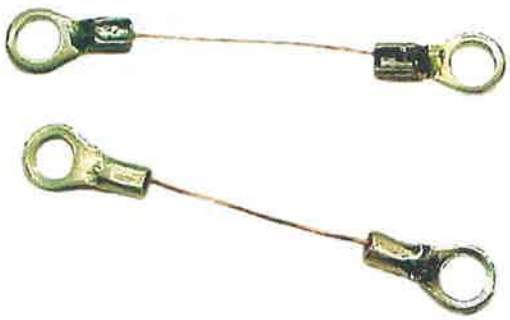


Figura 8.12: Fusíveis mecânicos utilizados no dispositivo da figura 8.10.

O funcionamento correto do dispositivo descrito depende de três fatores, a

saber: do diâmetro do condutor de cobre do fusível mecânico, das conexões elétricas do circuito e da capacidade de corrente das baterias. O primeiro possui restrições: não pode ser excessivamente espesso (pois necessitaria de correntes muito elevadas para propiciar seu rompimento) e nem muito fino (pois não suportaria a tensão mecânica imposta para deslocar a estrutura). Quanto ao segundo fator, é imprescindível garantir uma conexão elétrica instantânea com o banco de baterias, além de baixas resistências de contato em todo o circuito (o fusível mecânico deve ser o ponto fraco, ou seja, o trecho com maior resistência elétrica e com menor inércia térmica). Quanto ao último fator, o banco de baterias deverá ser capaz de fornecer correntes elevadas durante curtos períodos de tempo ou, em outras palavras, deverá possuir uma baixa resistência interna e uma quantidade suficiente de energia armazenada para manter essa corrente.

As seguintes providências foram tomadas durante os ensaios para contornar as limitações acima:

a- empregaram-se dois tipos de fusível mecânico que se diferenciaram pelo diâmetro do condutor de cobre (1.0 e 0.4mm). Os de maior diâmetro foram utilizados para impor deslocamentos iguais e/ou superiores a 0.5mm, dependendo da direção testada (horizontal ou vertical);

b- duas baterias automotivas de 12V-55Ah foram ligadas em série quando se utilizou o fusível mecânico mais espesso. A ligação foi em paralelo nos demais casos;

c- todas as conexões foram ou aparafusadas ou soldadas para reduzir suas resistências elétricas. Os condutores elétricos possuíam diâmetros bem superiores ao do fusível mecânico mais espesso (manteve-se uma relação mínima de 10 entre esses diâmetros);

d- a ligação do banco de baterias ao circuito deu-se através de um disjuntor térmico de 100A. O mecanismo de contato rápido desse tipo de dispositivo garantiu chaveamentos eficientes (sem interrupções e com baixa resistência).

8.3.1. Vibrações Livres Após Deslocamento Inicial Horizontal

As figuras 8.13 e 8.14 mostram os picos das acelerações horizontais e verticais do ponto central da viga após deslocamentos iniciais horizontais de 0.1mm e 4mm, respectivamente. Os ensaios correspondentes foram realizados em momentos distintos e com diferentes instrumentações. O primeiro, com deslocamento inicial de 0.1mm, ocorreu no início dos experimentos e utilizou o sistema de aquisição da Iotech; o segundo com 4mm

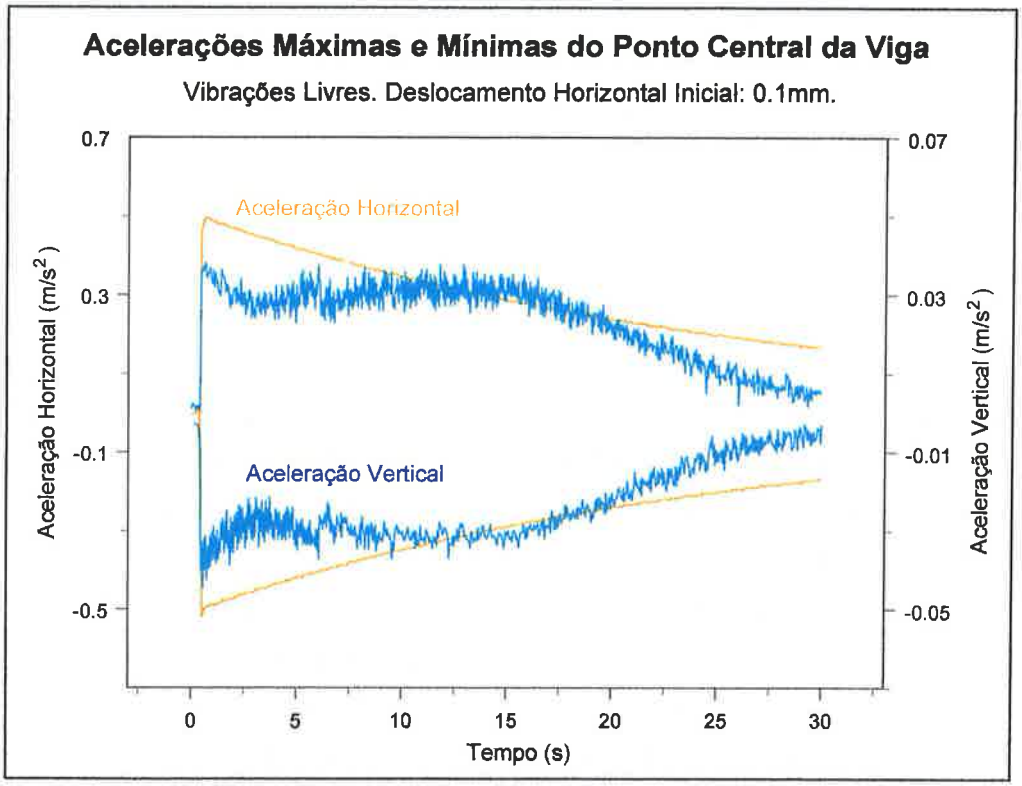


Figura 8.13: Vibrações livres. Deslocamento horizontal inicial de 0.1mm.

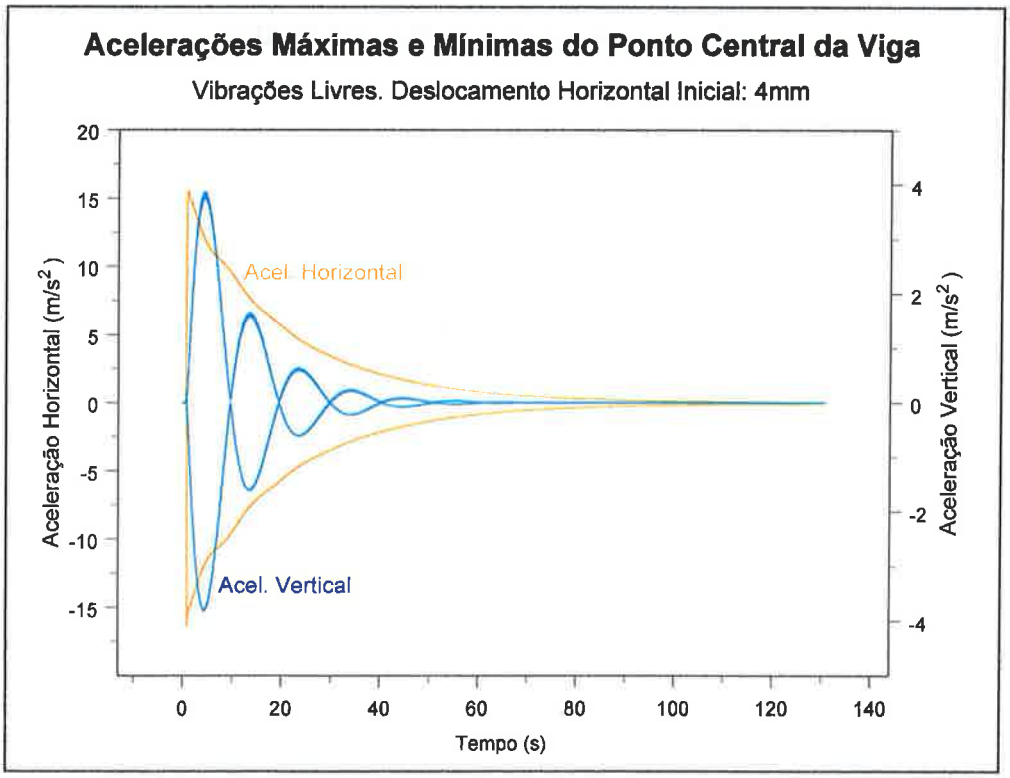


Figura 8.14: Vibrações Livres. Deslocamento horizontal inicial de 4mm.

de deslocamento horizontal imposto, foi o último ensaio realizado com a estrutura (após os testes com o motor elétrico em funcionamento) e utilizou o sistema da National.

Uma observação mais cuidadosa da figura 8.14 revela uma oscilação da aceleração horizontal (mínimos relativos nos primeiros 20 segundos de vibração livre) no mesmo instante que a aceleração vertical atinge seus máximos valores. Já a figura 8.13 não apresenta o mesmo fenômeno.

A grande quantidade de picos na curva da componente vertical de aceleração (figura 8.13) se deve a dois fatores: à instrumentação utilizada (ruído eletrônico intrínseco) e à influência da vibração horizontal da estrutura (os picos possuem uma periodicidade igual ao do modo horizontal). Tal influência pode ser melhor observada na figura 8.15, onde o histórico das componentes de aceleração horizontal e vertical são apresentadas logo após a liberação da estrutura.

As figuras 8.16 e 8.17 apresentam os decaimentos logarítmicos da componente horizontal da aceleração em duas situações: deslocamento inicial horizontal de 4mm e de 1mm, respectivamente. Essas figuras também mostram os ajustes de funções exponenciais para cada caso através do método dos mínimos quadrados.

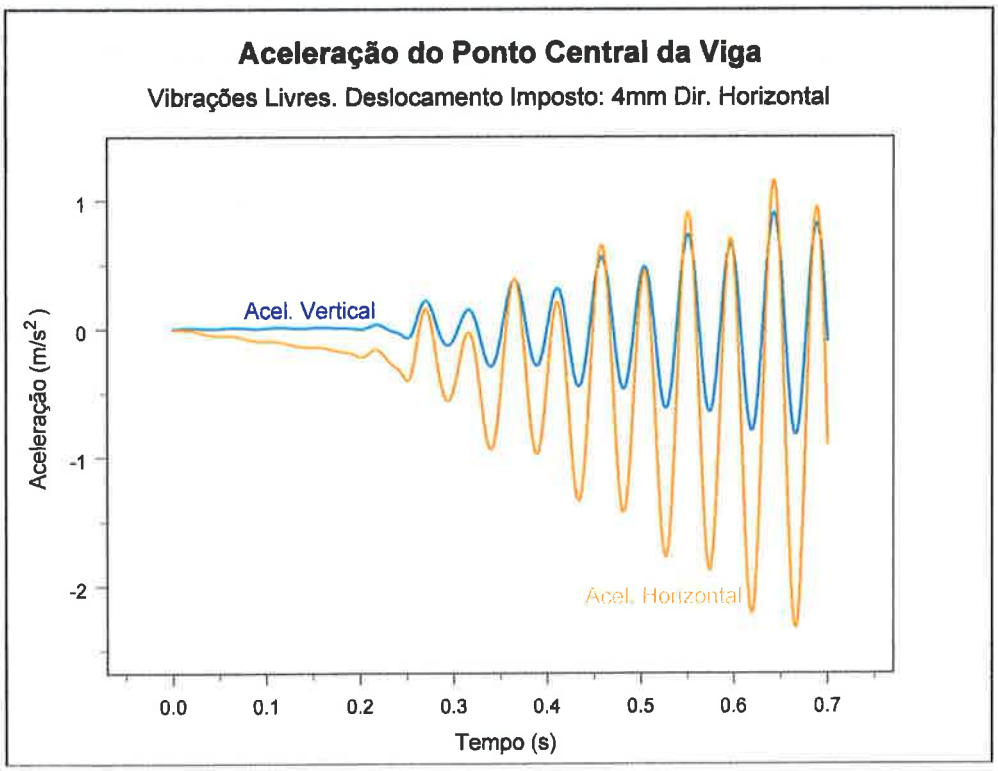


Figura 8.15: Histórico da aceleração do ponto central da viga após deslocamento inicial horizontal de 4mm.

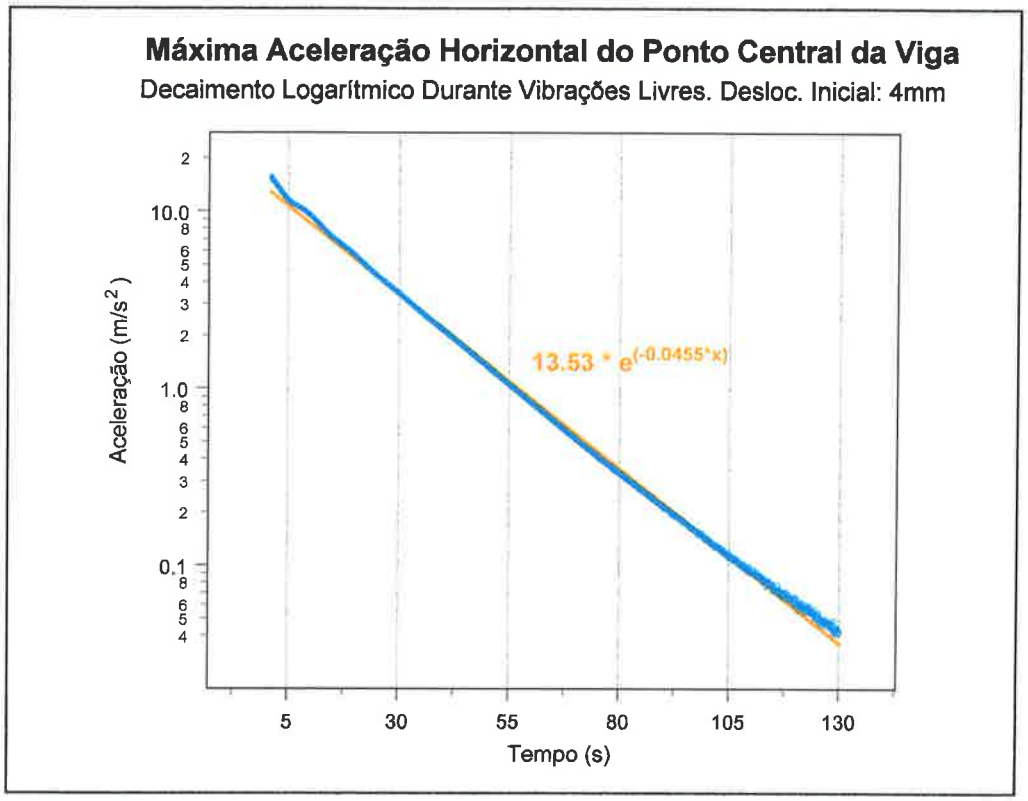


Figura 8.16: Decaimento logarítmico da componente horizontal da aceleração do ponto médio da viga após deslocamento inicial de 4mm. Oscilações livres.

Analogamente, a figura 8.18 mostra o decaimento da componente vertical da aceleração do ponto central da viga para as mesmas situações citadas acima. Embora os valores máximos dessa componente apresentem um comportamento oscilatório, verifica-se que os picos dessa oscilação também decaem exponencialmente ao longo do tempo.

Como os níveis de vibração eram suficientemente elevados mesmo após algumas dezenas de segundos do início do movimento – as magnitudes se situavam dentro dos limites mensuráveis pela instrumentação utilizada - foi possível calcular o espectro das componentes da aceleração do ponto central da viga com uma relativa precisão. A figura 8.19 apresenta o resultado desse cálculo, efetuado com os dados obtidos entre 1.02s e 19.50s, relativos ao início das vibrações livres com deslocamento inicial de 4mm. As amplitudes de vibração foram calculadas em dB, tornando possível uma comparação qualitativa dos amortecimentos de cada uma das componentes. Também através desse cálculo, verificou-se a relação de 1:2 entre as duas primeiras freqüências de ressonância do sistema motor/estrutura.

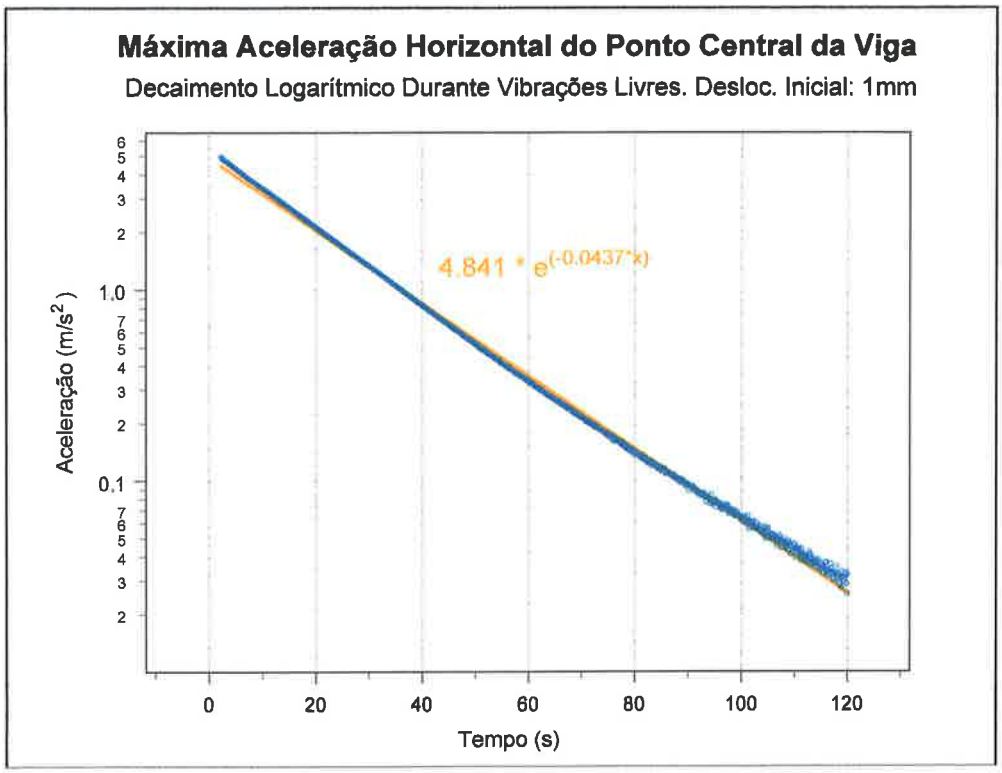


Figura 8.17: Decaimento logarítmico da componente horizontal da aceleração do ponto médio da viga após deslocamento inicial de 1mm. Oscilações livres.

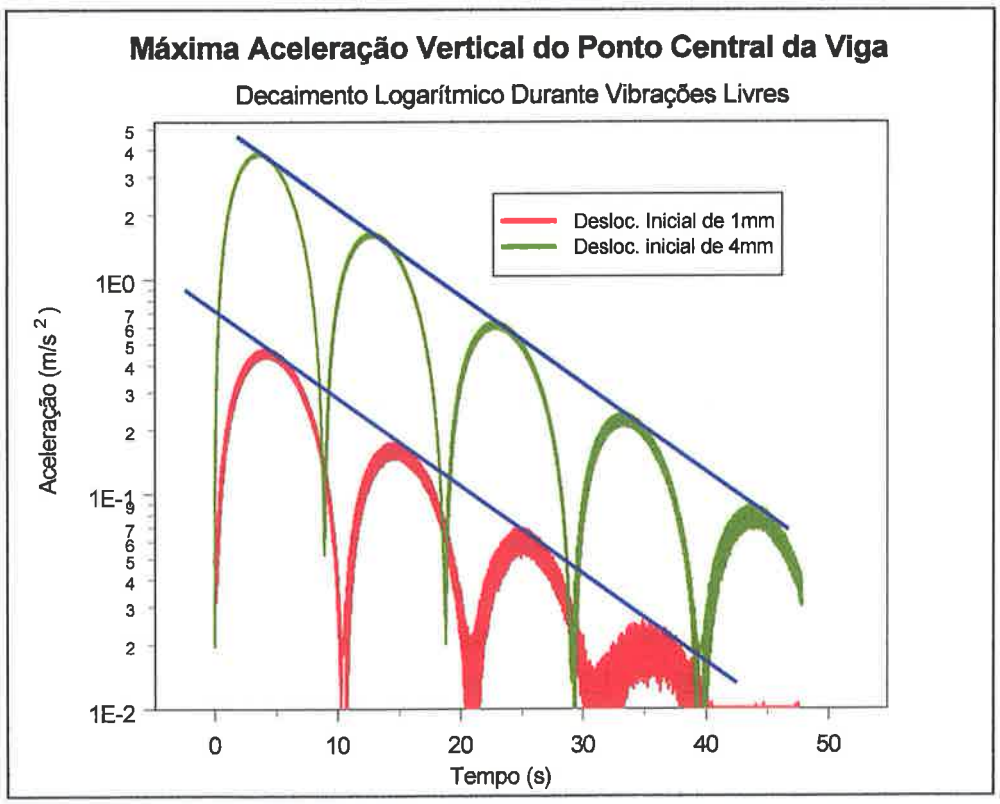


Figure 8-18: Decaimento logarítmico da componente vertical da aceleração do ponto médio da viga após deslocamento inicial horizontal. Oscilações livres.

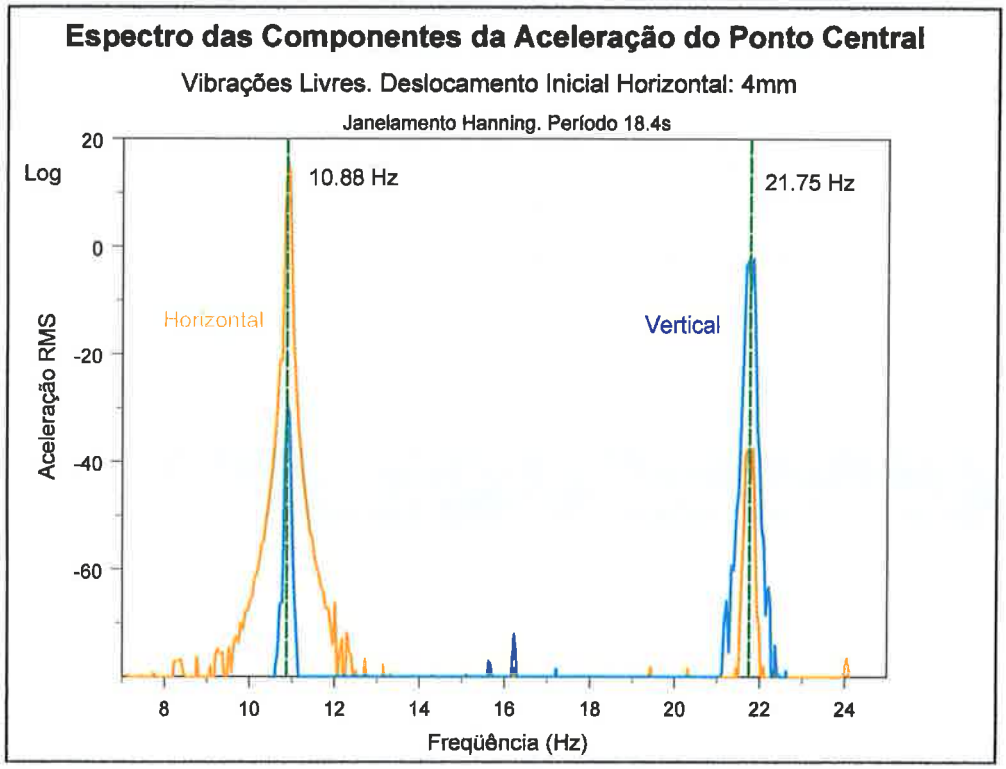


Figure 8-19: Espectro das componentes da aceleração do ponto central da viga durante vibrações livres. Deslocamento horizontal inicial de 4.0mm.

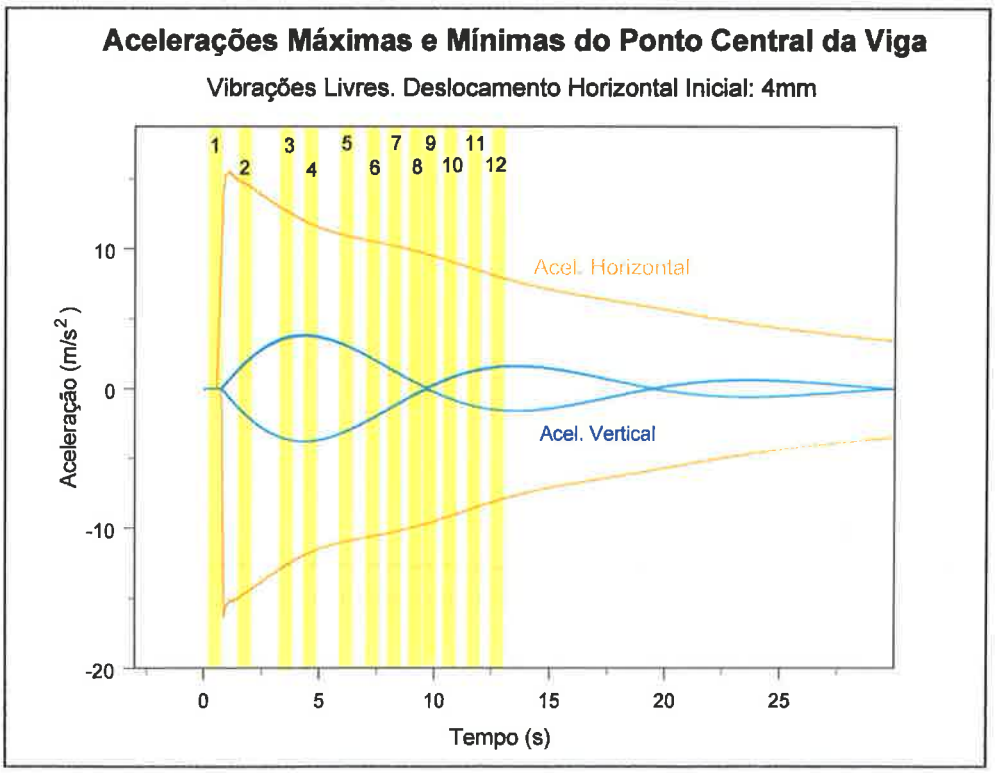


Figure 8-20: Localização dos períodos apresentados na tabela 8.2.

Com a finalidade de se verificar o histórico das amplitudes e das fases das componentes da aceleração do ponto central da viga durante as oscilações livres que se sucedem após um deslocamento horizontal inicial, foram escolhidos 12 períodos de tempo iguais, mas não eqüidistantes, do histórico da aceleração de um dos ensaios realizados. A figura 8.20 apresenta a localização aproximada dos trechos escolhidos e a tabela 8.2 contém os gráficos das acelerações correspondentes.

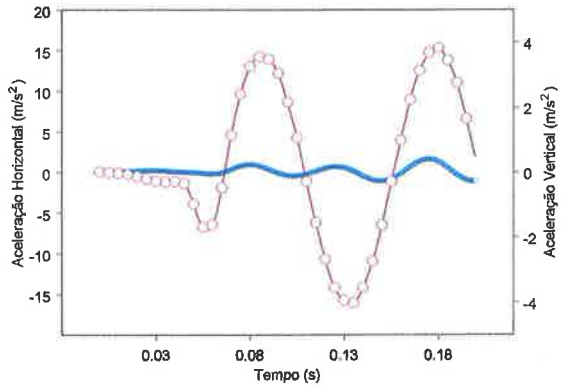
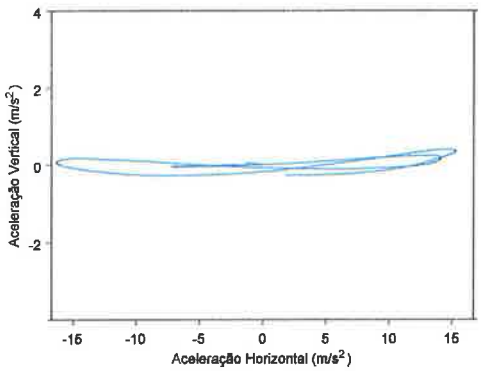
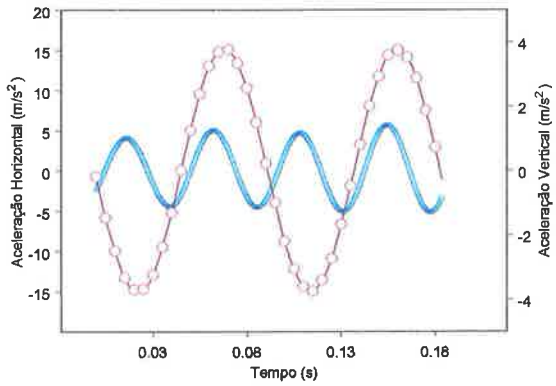
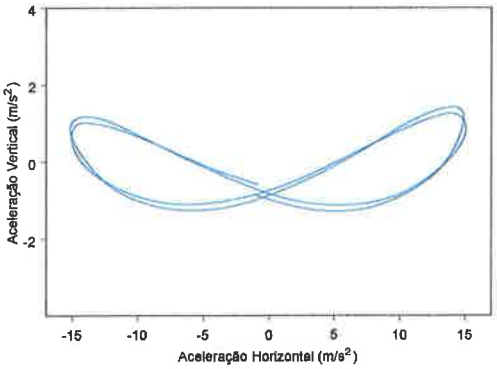
Trecho	Histórico da Aceleração	Acel. Horizontal X Vertical
1		
2		

Tabela 8-2: Aceleração do ponto central da viga em diversos instantes após um deslocamento inicial horizontal de 4mm. Oscilações livres.

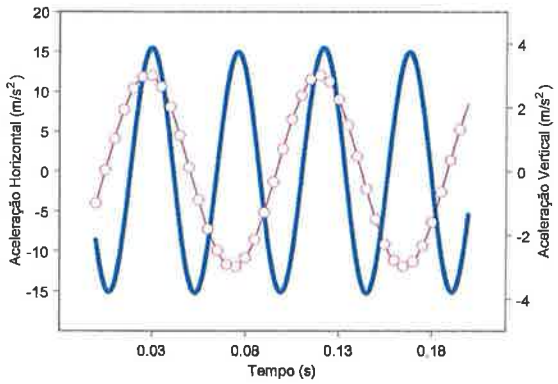
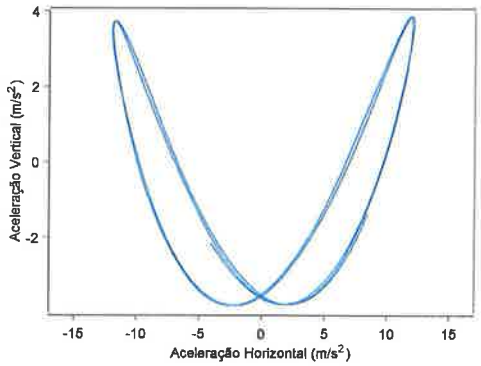
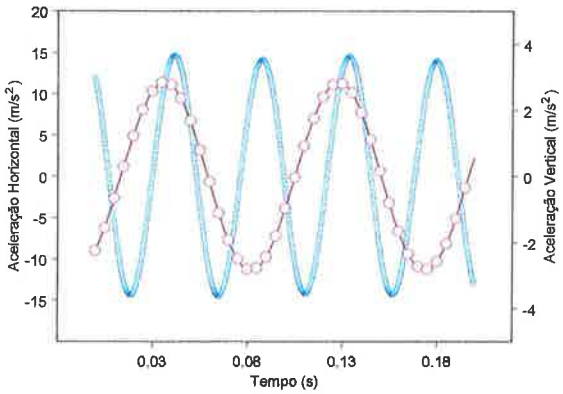
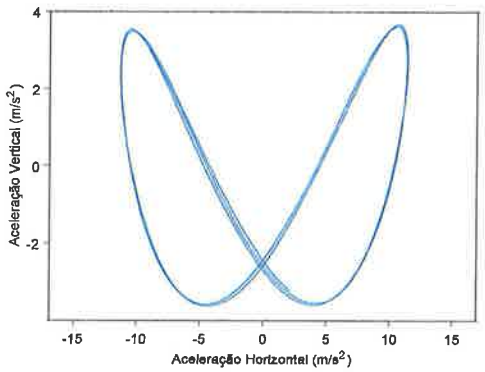
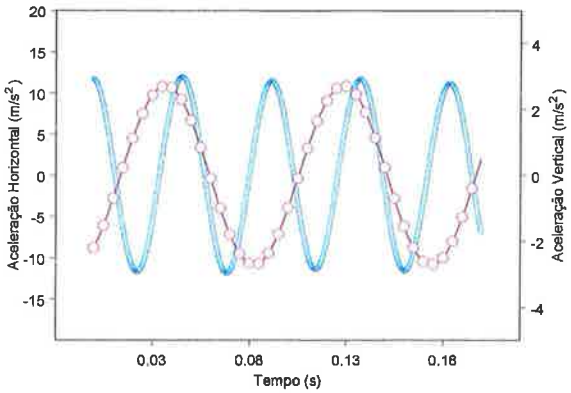
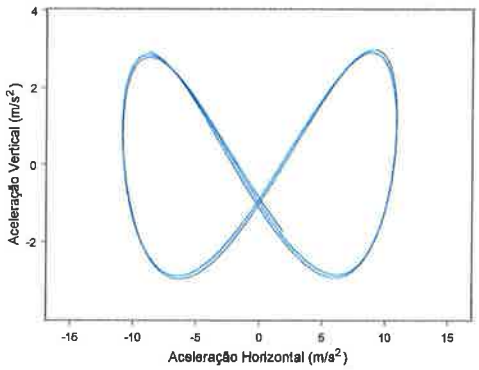
Trecho	Histórico da Aceleração	Acel. Horizontal X Vertical
3		
4		
5		

Tabela 8-2: ***Aceleração do ponto central da viga em diversos instantes após um deslocamento inicial horizontal de 4mm. Oscilações livres. Continuação.***

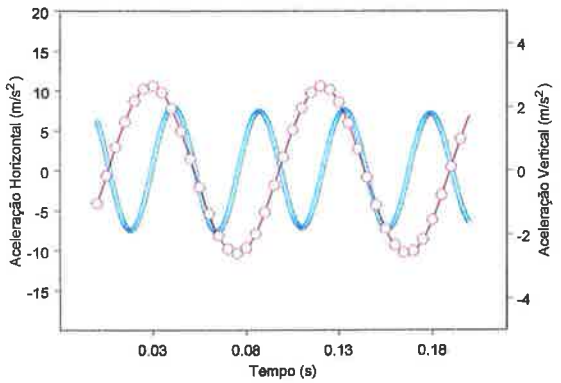
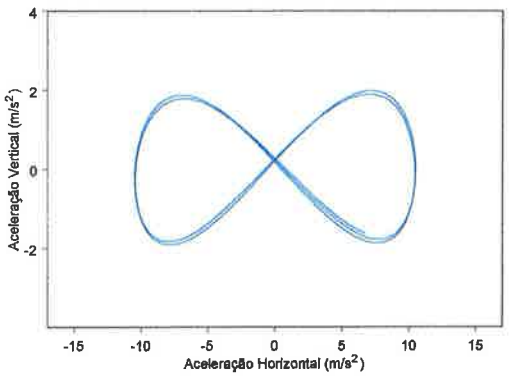
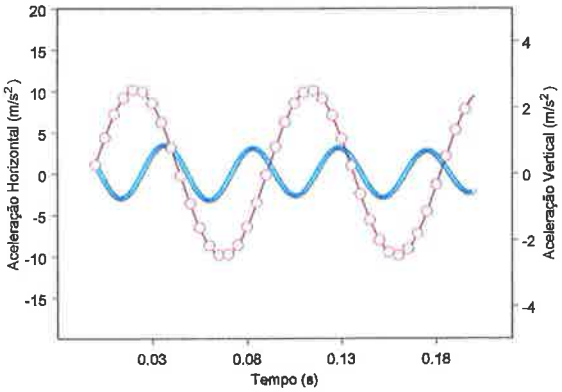
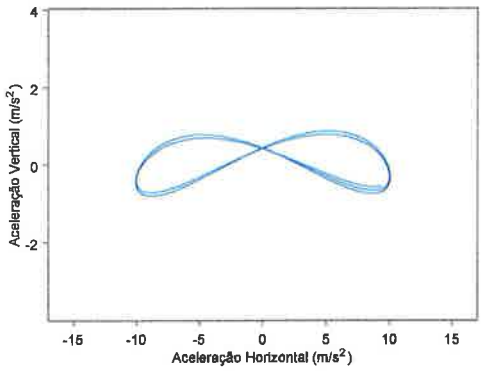
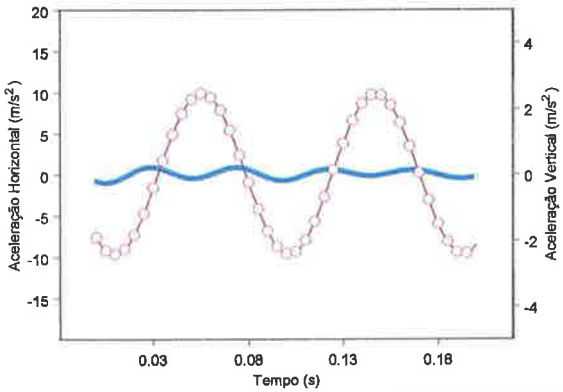
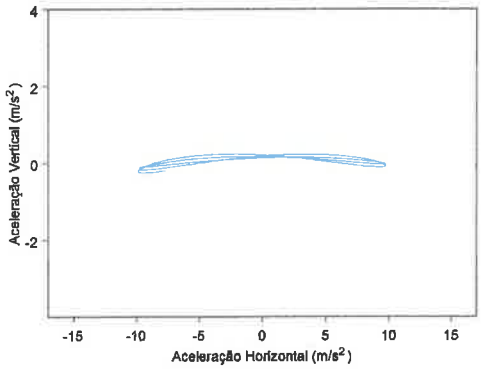
Trecho	Histórico da Aceleração	Accl. Horizontal X Vertical
6		
7		
8		

Tabela 8-2: ***Aceleração do ponto central da viga em diversos instantes após um deslocamento inicial horizontal de 4mm. Oscilações livres. Continuação.***

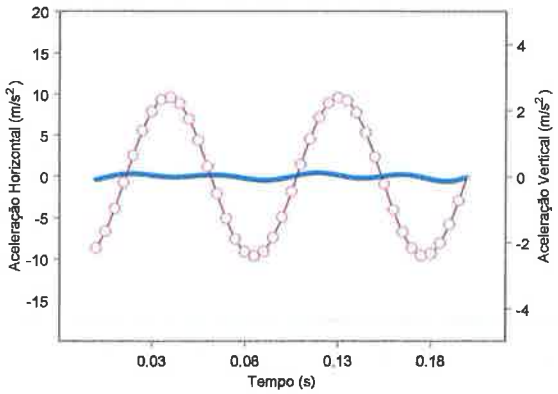
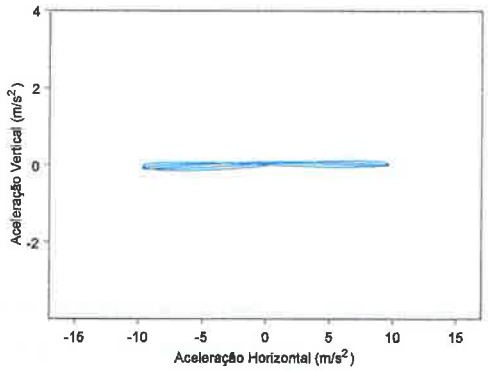
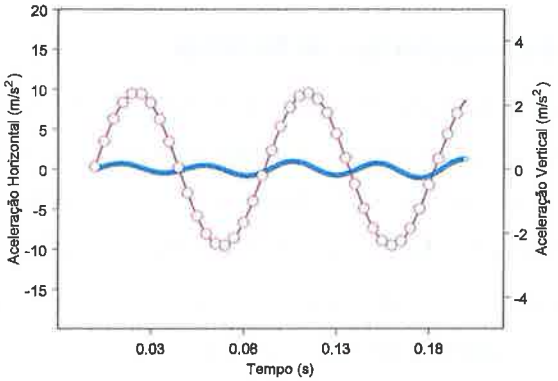
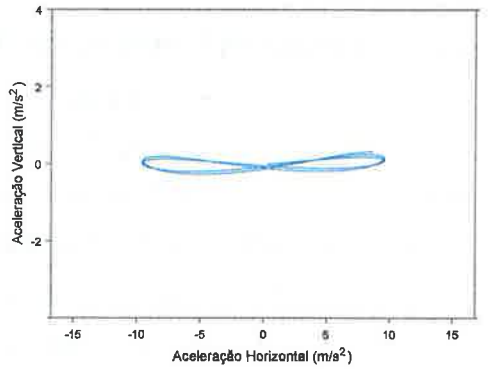
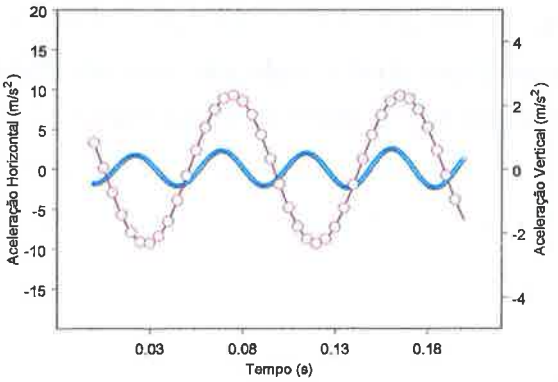
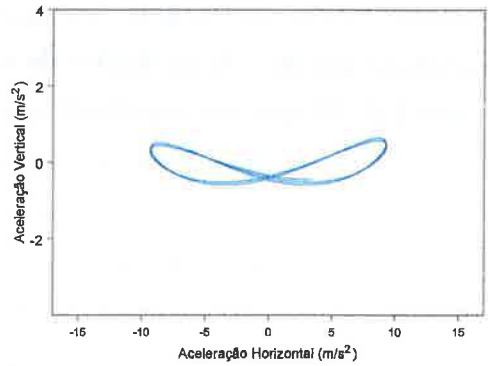
Trecho	Histórico da Aceleração	Acel. Horizontal X Vertical
9		
10		
11		

Tabela 8-2: Aceleração do ponto central da viga em diversos instantes após um deslocamento inicial horizontal de 4mm. Oscilações livres. Continuação.

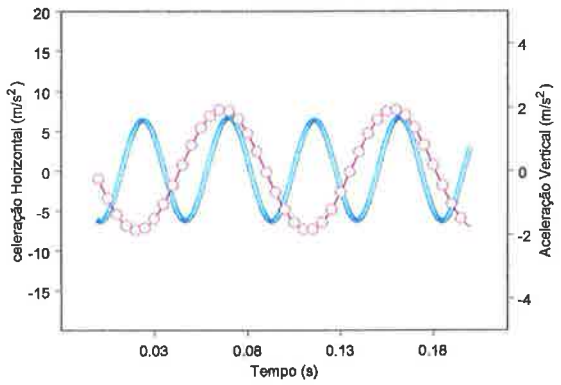
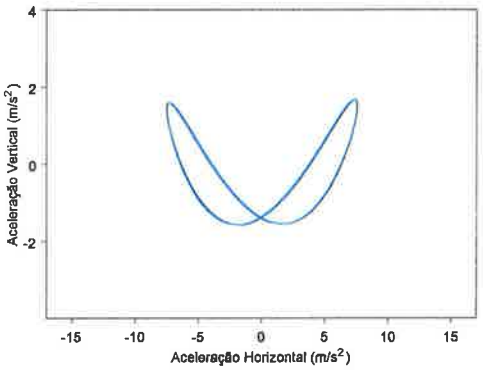
Trecho	Histórico da Aceleração	Acel. Horizontal X Vertical
12		

Tabela 8.2: Aceleração do ponto central da viga em diversos instantes após um deslocamento inicial horizontal de 4mm. Oscilações livres.

8.3.2. Vibrações Livres Após Deslocamento Inicial Vertical

Os deslocamentos verticais iniciais, durante a execução dos ensaios de vibração livre, foram limitados por razões operacionais; a maior rigidez da estrutura e a limitada capacidade das baterias – suficiente apenas para fundir fusíveis mecânicos de até 1.0mm de diâmetro – acabaram por determinar o deslocamento máximo vertical.

Três ensaios foram realizados com diferentes deslocamentos iniciais, a fim de se verificar se a estrutura apresentaria comportamentos distintos durante as oscilações livres, principalmente em relação ao decaimento das amplitudes de vibração. As figuras 8.21 e 8.22 apresentam os picos das componentes horizontal e vertical da aceleração do ponto central da viga do pórtico para deslocamentos iniciais de 1.5mm e 0.2mm, respectivamente. Os resultados do terceiro ensaio citado, realizado com um deslocamento inicial de 0.1mm, são semelhantes aos da figura 8.22 e, por isso, foram omitidos.

Os decaimentos logarítmicos das componentes verticais da aceleração do ponto médio da viga podem ser visualizados nos gráficos 8.23 e 8.24. Com relação ao ensaio com deslocamento inicial de 0.1mm, a interpolação das amplitudes pelo método dos mínimos quadrados resultou: $1.464 * e^{(-0.0765*x)}$.

A figura 8.25 compara o decaimento das componentes horizontais da aceleração do ponto central da viga de dois dos ensaios realizados. Embora apresentem oscilações, a atenuação dos picos ao longo do tempo segue uma função exponencial.

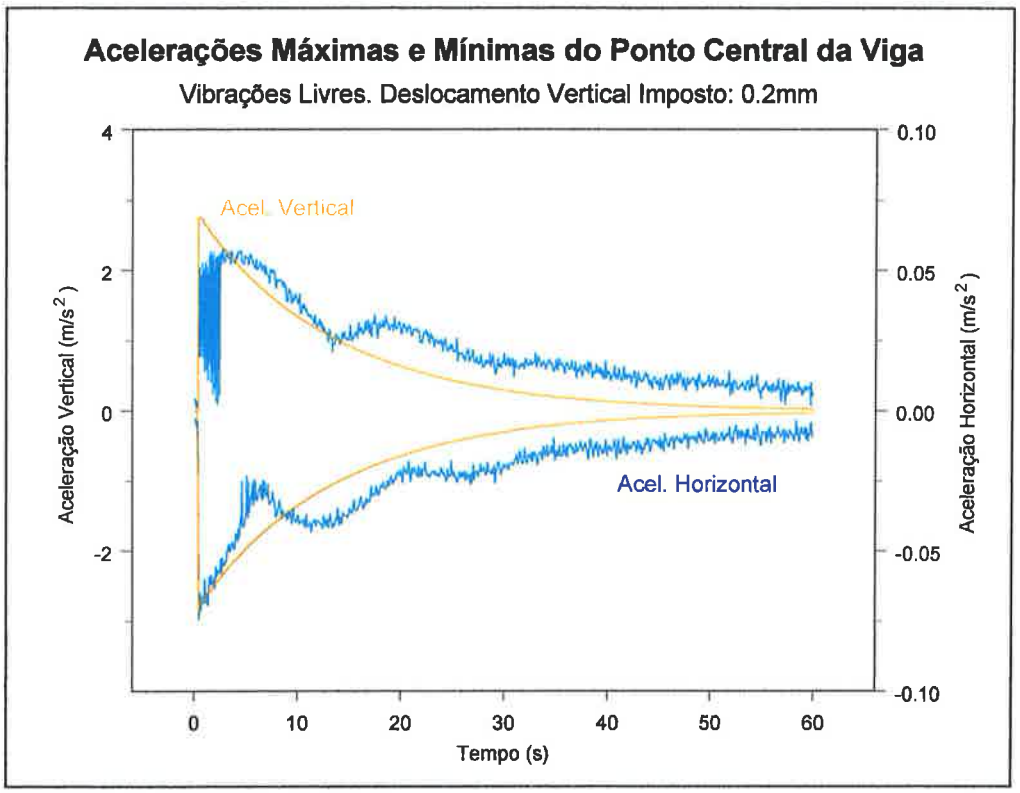


Figura 8-21: Vibrações livres. Deslocamento vertical inicial de 0.2mm.

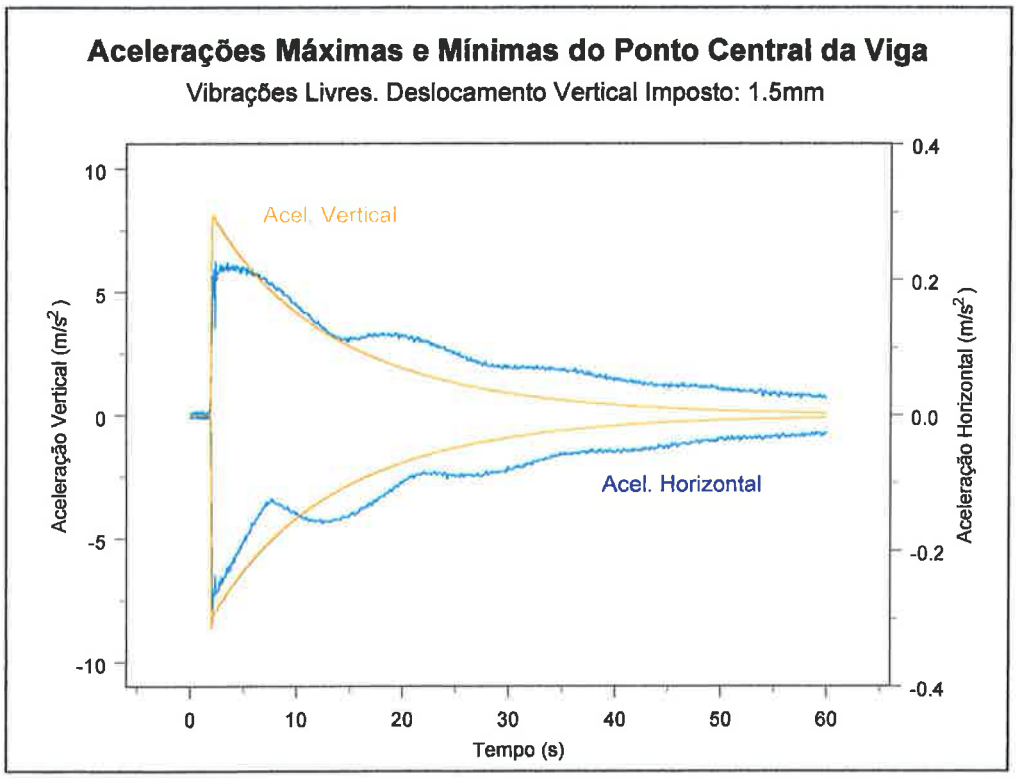


Figura 8-22: Vibrações livres. Deslocamento vertical inicial de 1.5mm.

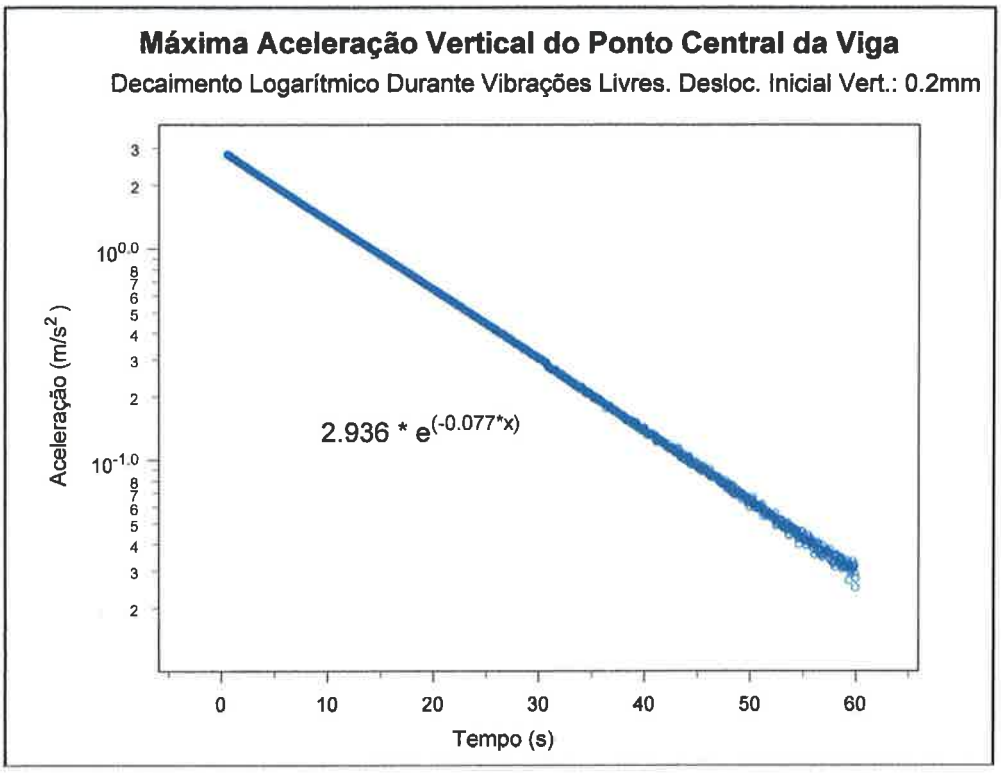


Figura 8.23: Decaimento logarítmico da componente vertical da aceleração do ponto médio da viga. Deslocamento vertical inicial:0.2mm. Oscilações livres.

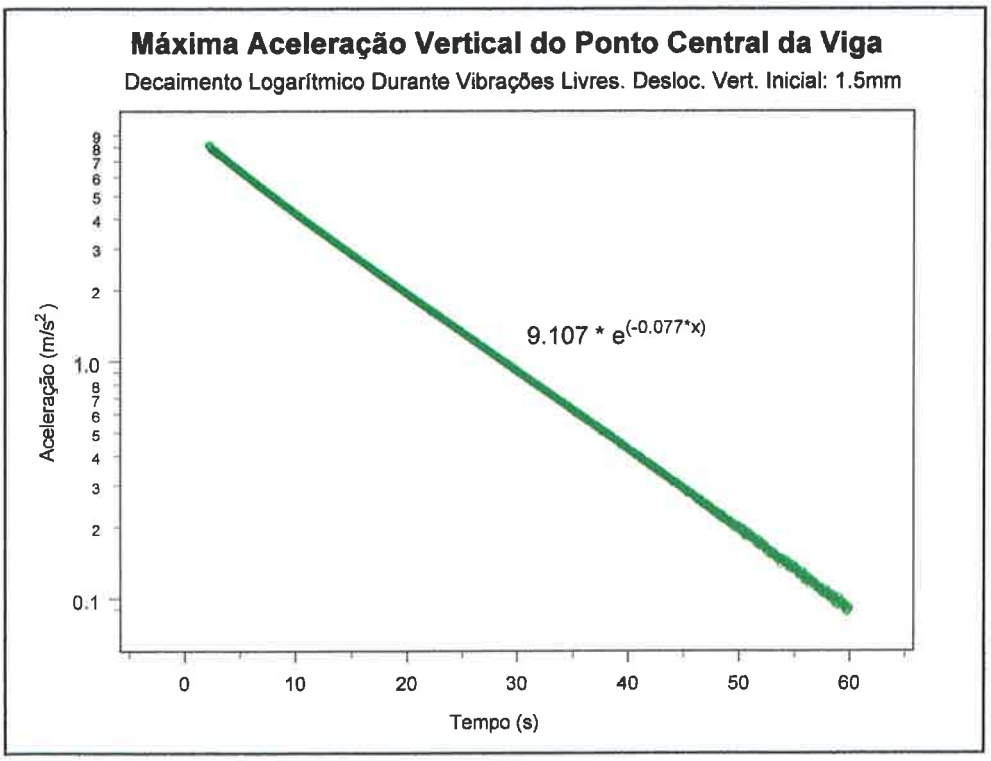


Figura 8.24: Decaimento logarítmico da componente vertical da aceleração do ponto médio da viga. Deslocamento vertical inicial:1.5mm. Oscilações livres.

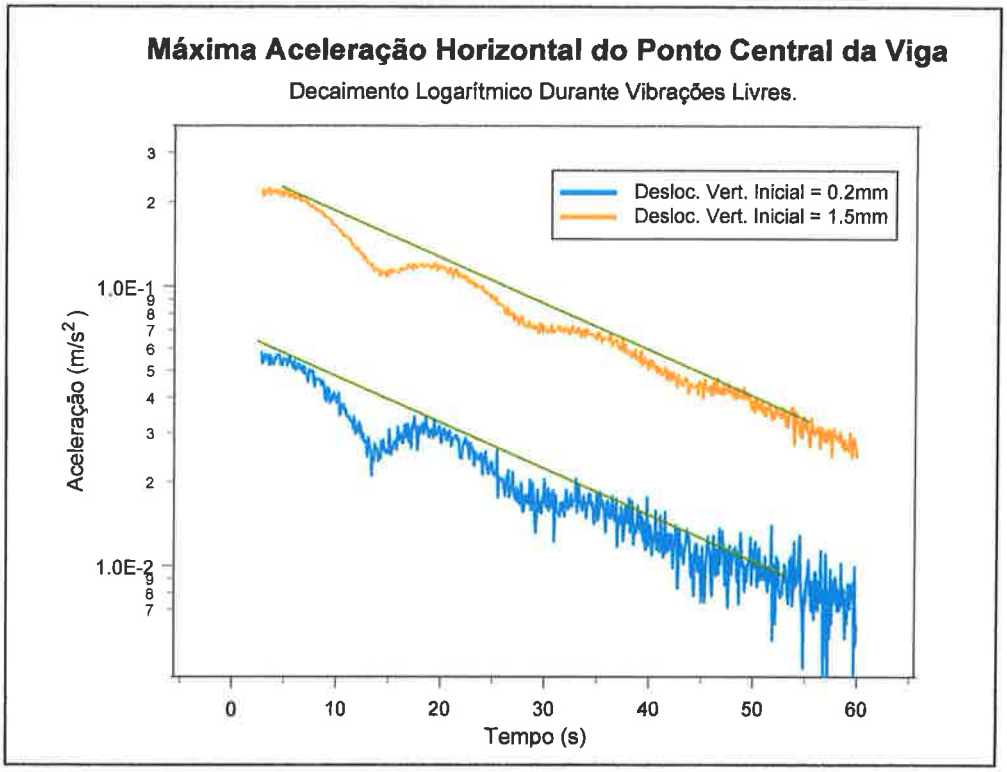


Figura 8.25: Decaimento logarítmico da componente horizontal da aceleração do ponto médio da viga após deslocamento vertical inicial. Oscilações livres.

8.4 Vibrações Forçadas: Aceleração do Motor sob Tensão Constante

Estando o motor parado e a estrutura em repouso, conectou-se repentinamente a fonte de alimentação ao circuito do motor, causando a sua rápida aceleração. Dependendo do nível da tensão aplicada, pôde-se observar três fenômenos distintos:

a- estabilização da freqüência de rotação do motor num valor inferior e bem distinto de uma das freqüências naturais da estrutura;

b- o valor da freqüência de rotação do motor variou em torno de uma das freqüências naturais da estrutura;

c- a freqüência de rotação do motor superou uma das duas freqüências naturais consideradas da estrutura .

Apenas os casos b e c acima foram armazenados, pois o primeiro (a) não apresentou comportamentos não lineares pronunciados.

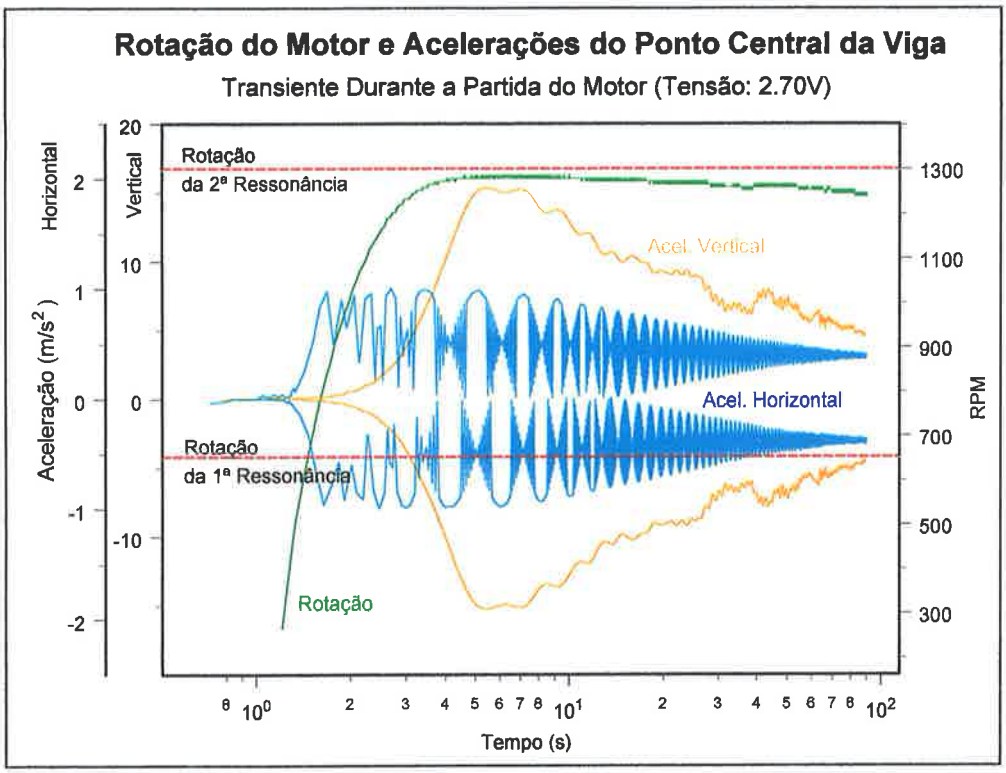


Figura 8.26: Comportamentos da rotação do motor e das acelerações máximas e mínimas do ponto central da viga durante uma partida com tensão limitada em 2.70V.

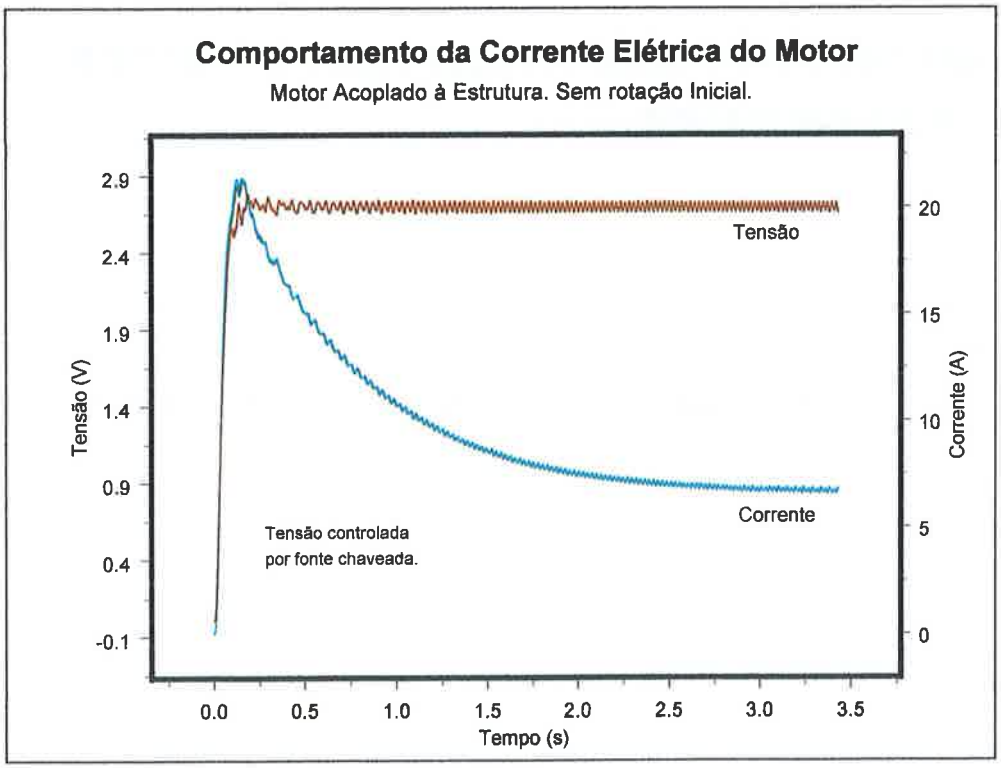


Figura 8.27: Transientes da tensão e da corrente elétricas do motor durante uma partida com tensão limitada em 2.70V.

A figura 8.26 contém os gráficos da rotação do motor e das componentes da aceleração do ponto central da viga, obtidas de um ensaio com resultados típicos do caso b. Analogamente, as figuras 8.27 a 8.29 mostram os comportamentos da corrente e da tensão elétricas do motor durante a mesma situação. Deve-se notar que a tensão aplicada (2.70V) não foi suficientemente alta para permitir que o motor ultrapassasse a 2ª freqüência de ressonância da estrutura; fato que já não ocorreu no ensaio posterior, cujos resultados, também representativos do caso b, podem ser visualizados na figura 8.30.

Finalmente, a figura 8.31 mostra os resultados de um ensaio onde a freqüência da rotação do motor superou e permaneceu com valores consideravelmente acima da freqüência da segunda ressonância estrutural.

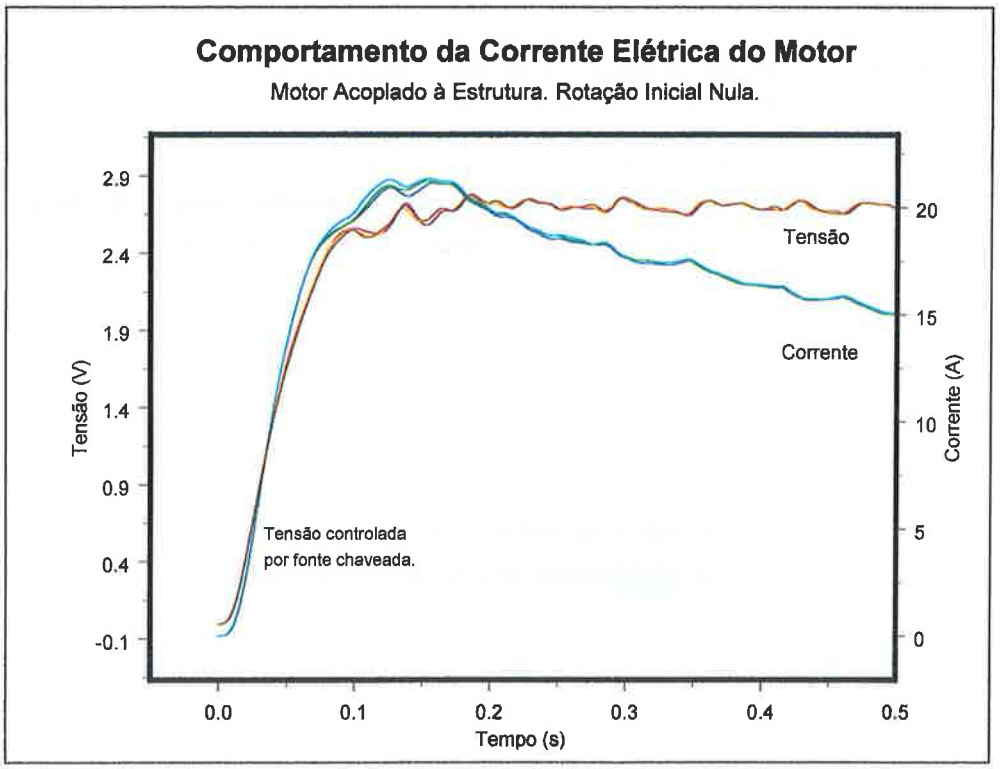


Figura 8.28: Transientes da tensão e da corrente elétricas do motor durante uma partida com tensão limitada em 2.70V: primeiros 5/10 de segundo.

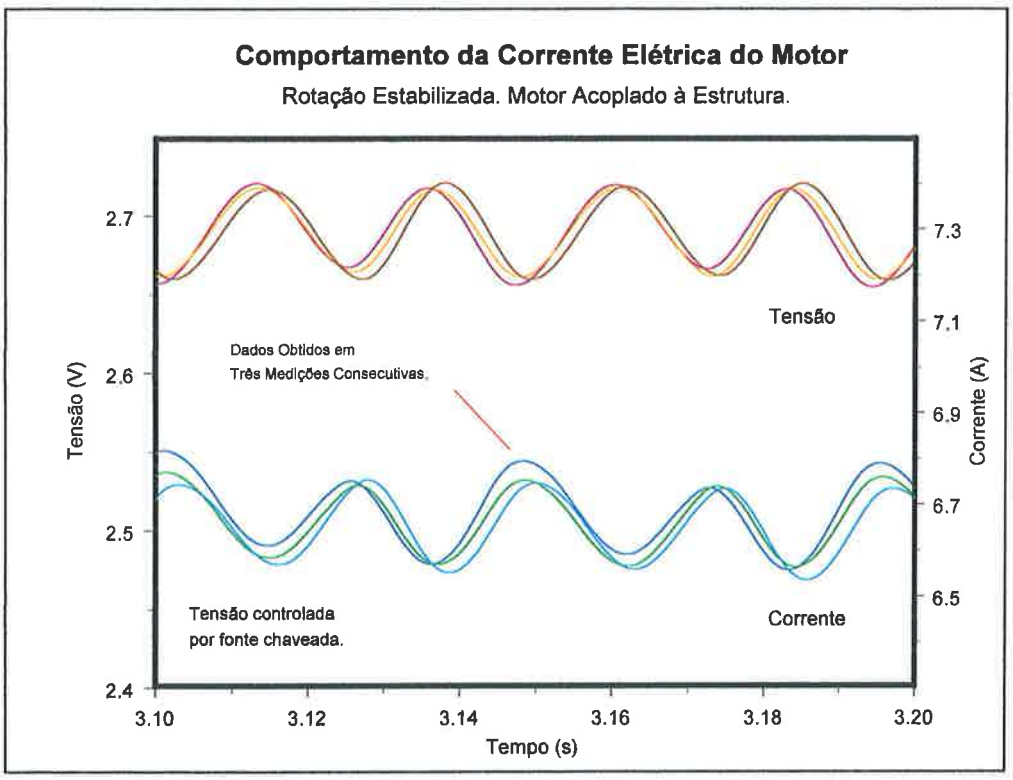


Figura 8.29: Oscilações da tensão e da corrente elétricas do motor quando sua rotação se aproxima da 2ª ressonância da estrutura.

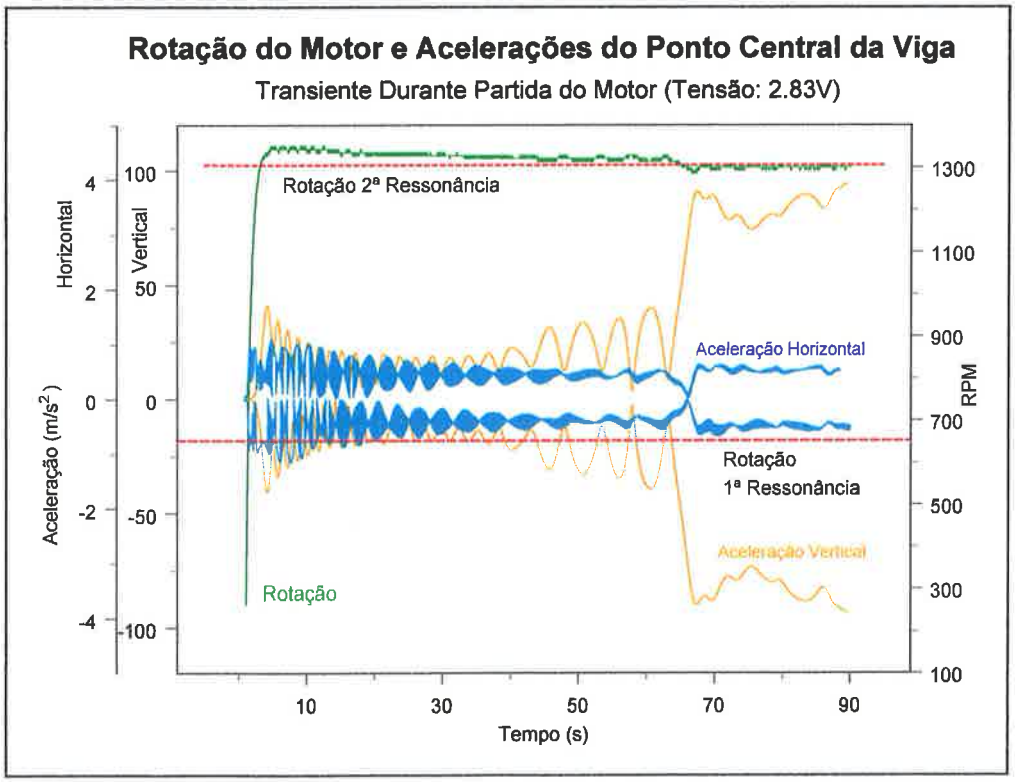


Figura 8.30: Comportamentos da rotação do motor e das acelerações máximas e mínimas do ponto central da viga durante uma partida com tensão limitada em 2.83V.

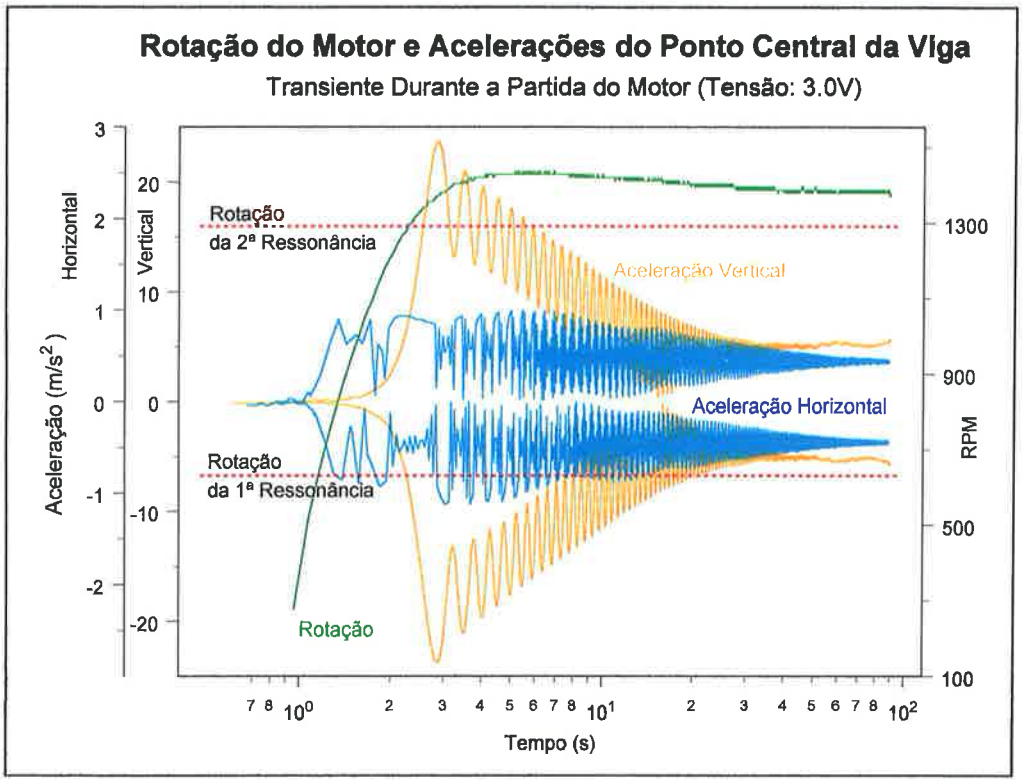


Figura 8.31: Comportamentos da rotação do motor e das acelerações máximas e mínimas do ponto central da viga durante uma partida com tensão limitada em 3.00V.

8.5 Vibrações Forçadas: Desaceleração do Motor

O fenômeno que se sucede após a interrupção da energia elétrica fornecida para o motor (redução da rotação e transientes de vibração) também foi observado e gravado. Monitorou-se um único caso: desligamento da alimentação, estando inicialmente o motor com uma freqüência de rotação estável e acima da 2ª ressonância (figura 8.32).

Ressalta-se que, devido a uma característica do programa de pós-processamento, rotações do motor inferiores a 200rpm não foram registradas; por essa razão, a figura 8.32 não apresenta o instante exato da parada do motor.

8.6 Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Crescente

Estando a rotação do motor estabilizada entre a 1ª e 2ª freqüências naturais do sistema, elevou-se gradativamente a tensão elétrica da fonte de alimentação, causando-se a aceleração do motor através da 2ª ressonância do conjunto motor/estrutura. Os acréscimos

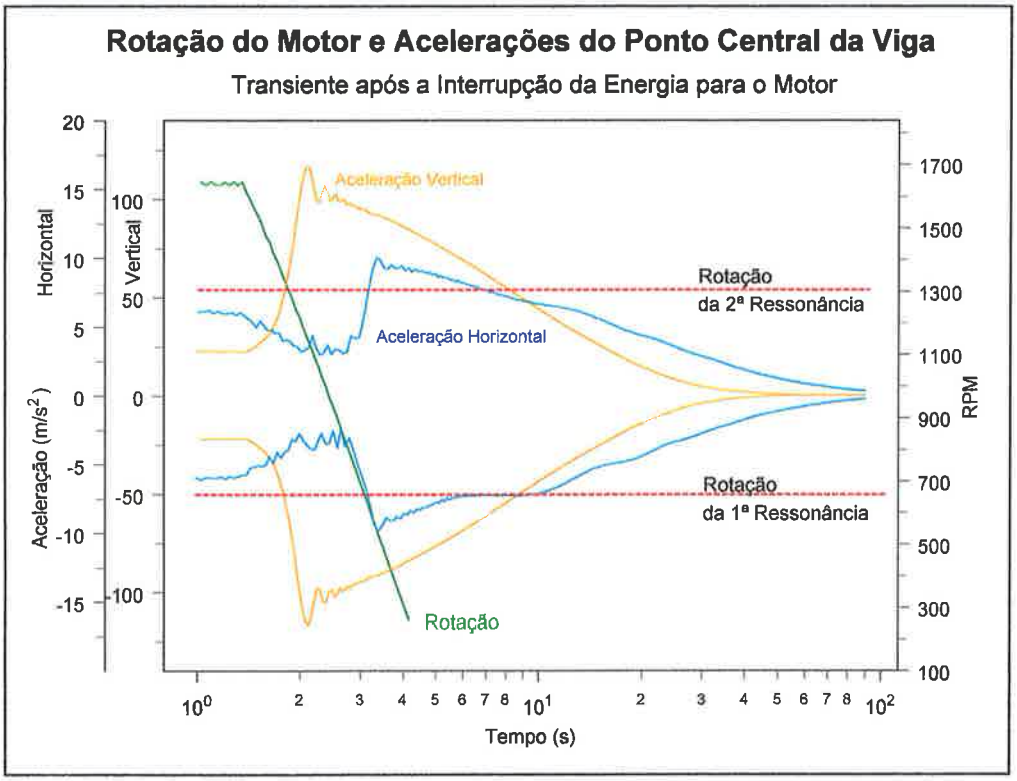


Figura 8.32: Comportamentos da estrutura e da rotação do motor após interrupção do fornecimento de energia para o motor.

de tensão foram reduzidos nas proximidades da ressonância estrutural, a fim de se observar possíveis transientes.

Permitiu-se um período de tempo de, no mínimo, 3 minutos entre cada acréscimo de tensão, durante os quais procedeu-se exatos 3 minutos de gravação dos valores das componentes de aceleração do ponto central da viga, da rotação do motor e da sua corrente elétrica.

As figuras 8.33 e 8.34 mostram os momentos onde ocorreram dois fenômenos distintos: a saturação modal – a componente de aceleração horizontal teve seu valor elevado bruscamente, enquanto a componente vertical permaneceu relativamente estável – e o término do fenômeno da 2ª ressonância estrutural.

A rotação do motor durante os fenômenos citados também merece atenção especial; deve-se observar sua variação durante a 2ª ressonância (principalmente no decorrer da saturação modal) e seu expressivo acréscimo após o término dessa. Na figura 8.34, durante os primeiros 2 segundos de gravação, o aumento da rotação do motor é devido a alteração da sua tensão de alimentação (de 2.80 para 2.83V).

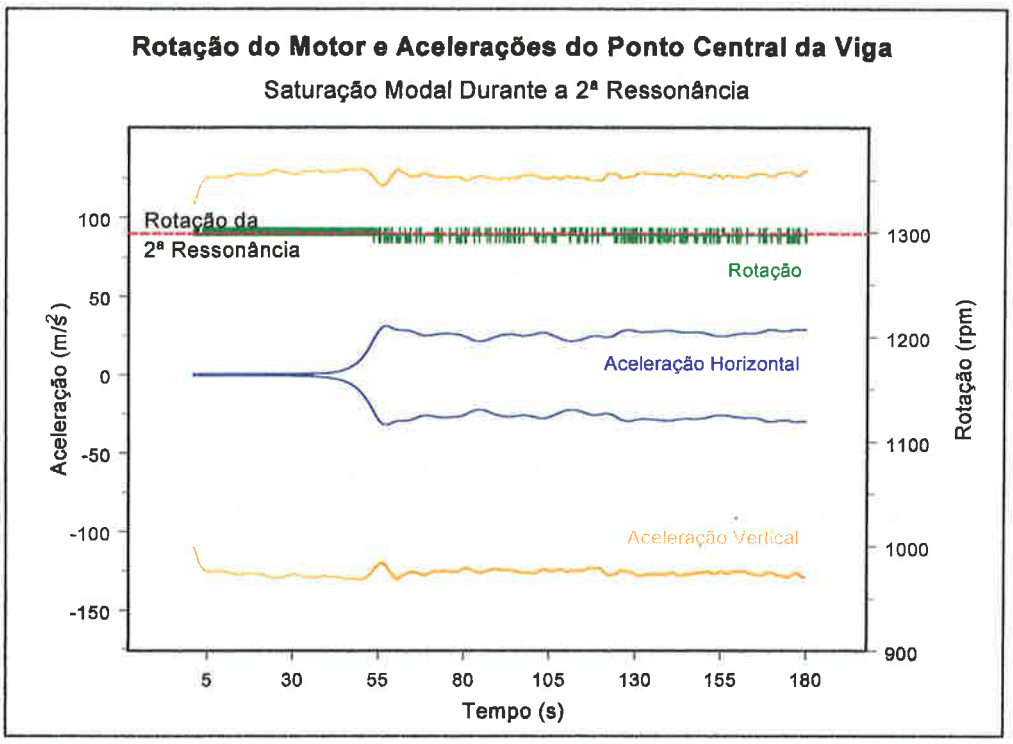


Figura 8.33: Saturação modal durante a 2ª ressonância. Tensão de alimentação alterada de 2.78V para 2.80V nos primeiros 2 segundos de ensaio.

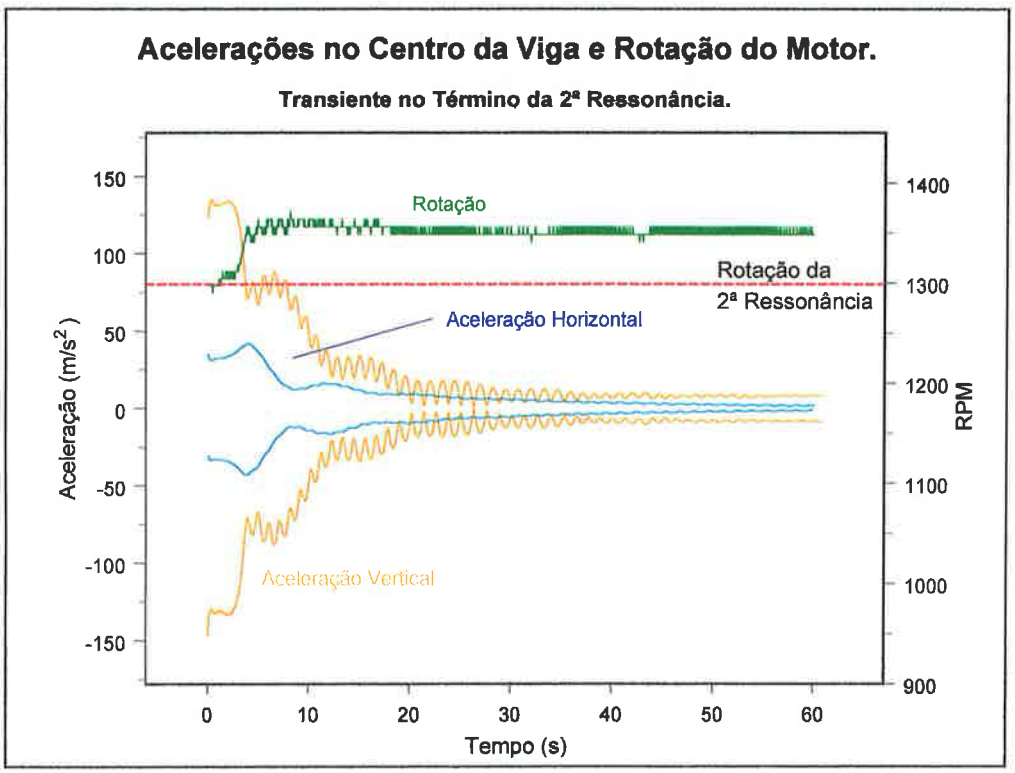


Figura 8.34: Término da 2ª ressonância devido ao aumento da rotação do motor. Tensão de alimentação alterada de 2.80 para 2.83V.

A figura 8.35 mostra o comportamento das amplitudes das componentes da aceleração do ponto central da viga durante a passagem pela 2ª ressonância com rotação crescente. A região amarela indica uma faixa de instabilidade onde foram observadas acelerações bruscas da rotação do motor.

Ao se elevar continuamente a tensão de alimentação do motor, estando esse com freqüência de rotação próxima a da 2ª ressonância do sistema, provoca-se o aumento da sua rotação, até o momento que essa se estabiliza em torno de um determinado valor (igual a da 2ª freqüência natural do sistema). A partir desse instante, sucessivos acréscimos da tensão somente elevam a potência elétrica absorvida pelo motor, que não é mais canalizada para alterar a sua rotação, mas sim para aumentar as amplitudes de vibração da estrutura. O processo possui um limite: quando a estrutura não é mais capaz de absorver a energia cedida pelo motor, a rotação desse dispara, atingindo, após um certo período, valores estáveis e proporcionais à tensão de alimentação. A potência elétrica absorvida pelo motor durante a passagem pela 2ª ressonância é apresentada na figura 8.36.

A tabela 8.3 contém os gráficos das acelerações do ponto central da viga antes e durante o fenômeno da saturação modal. Os dados foram obtidos do mesmo arquivo utilizado para elaborar a figura 8.33.

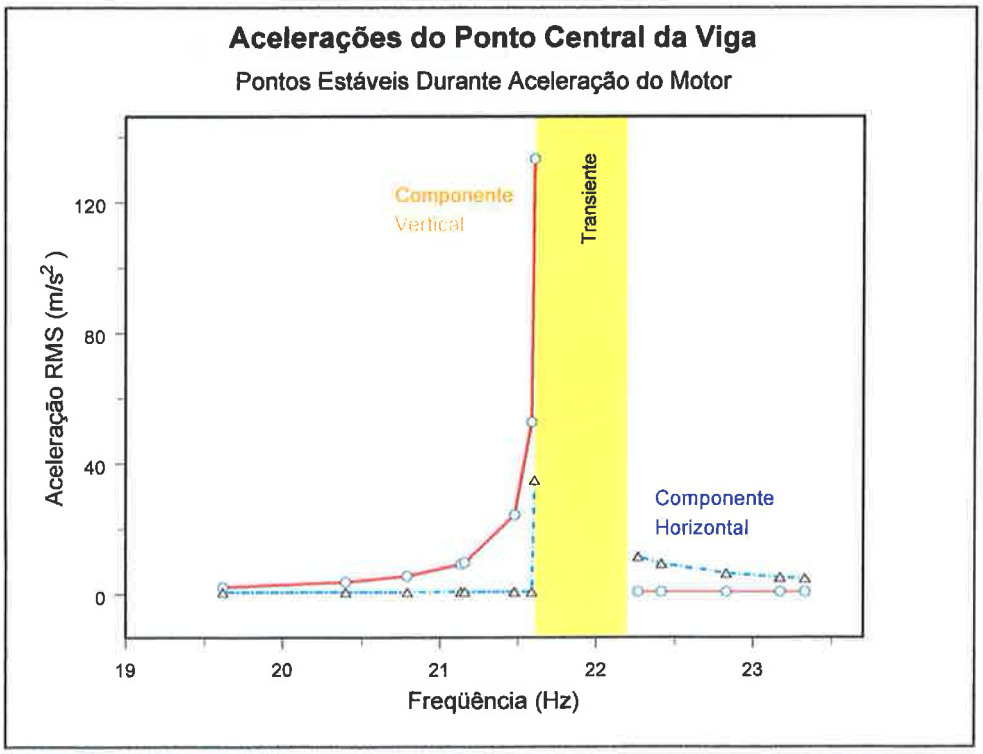


Figura 8.35: Acelerações máximas do ponto central da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação crescente.

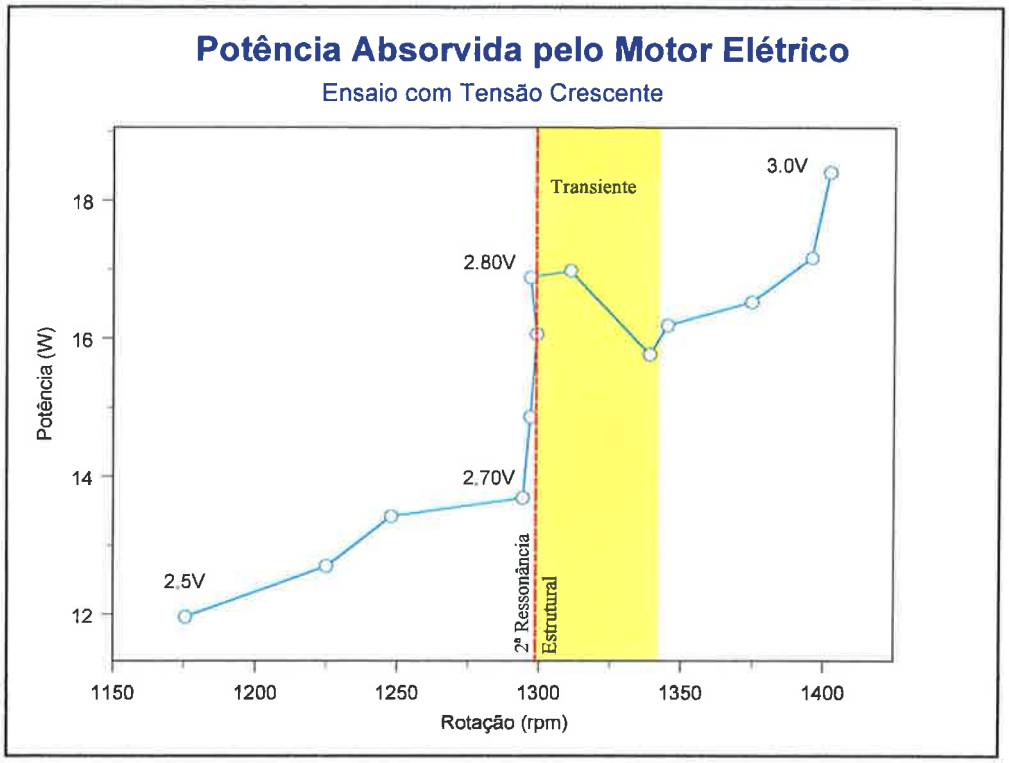


Figura 8.36 Aumento da potência consumida pelo motor durante a 2ª ressonância (efeito Sommerfeld).

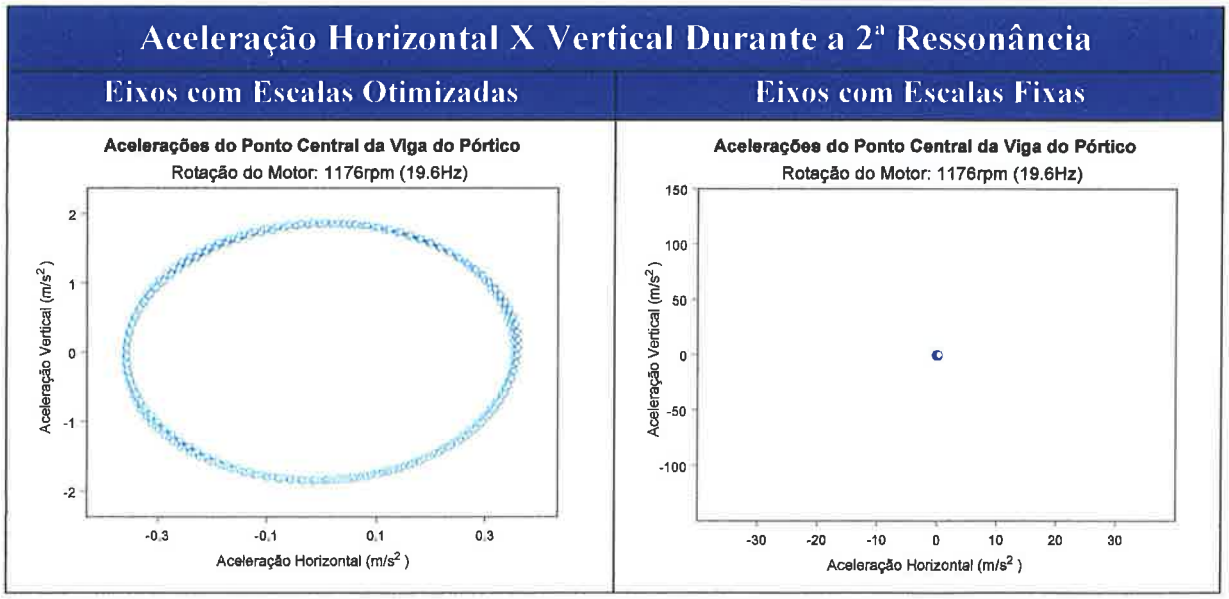


Tabela 8-3: Aceleração do ponto central da viga antes e durante o fenômeno da saturação modal na 2ª ressonância do sistema motor/estrutura.

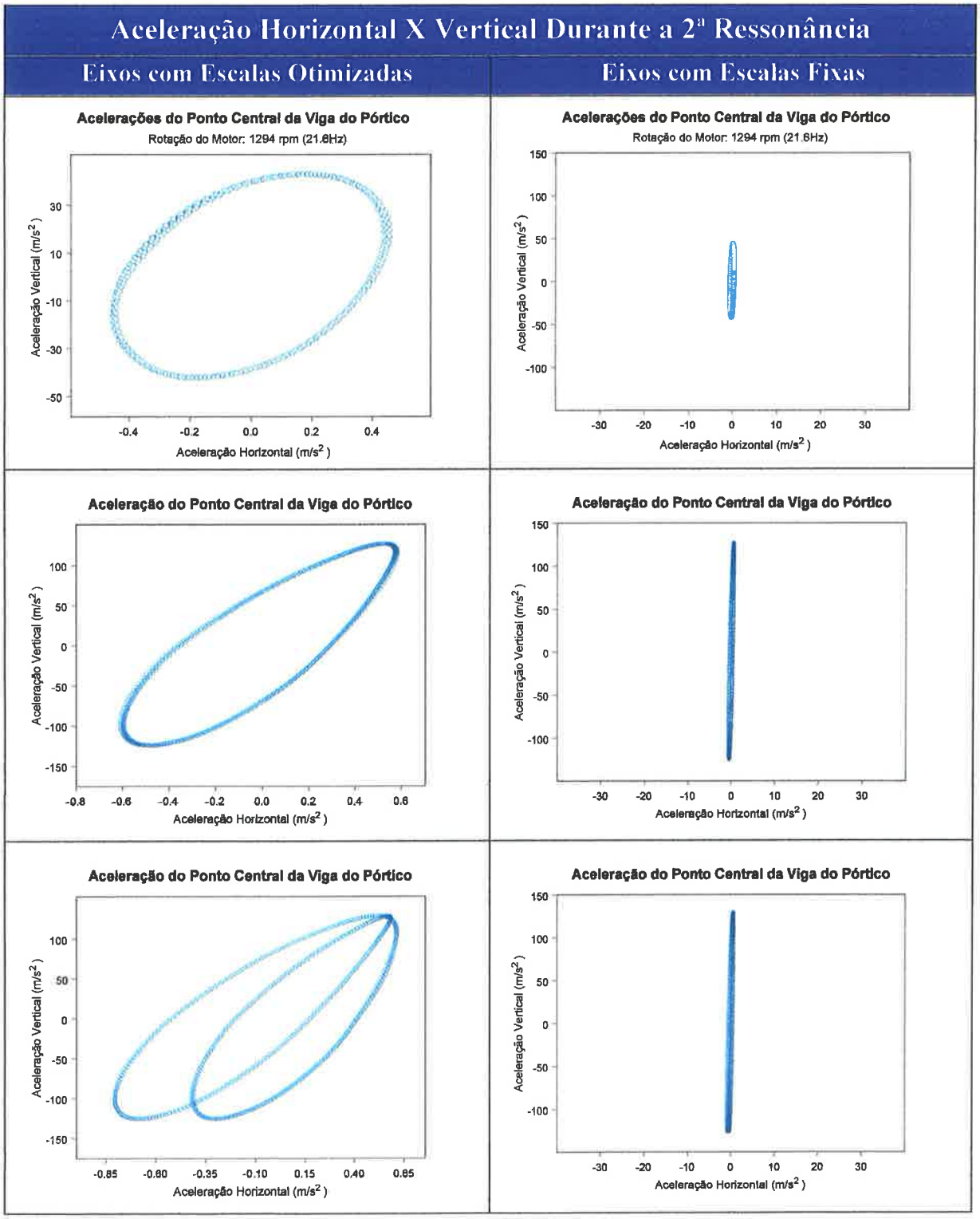


Tabela 8-3: Aceleração do ponto central da viga antes e durante o fenômeno da saturação modal na 2ª ressonância do sistema motor/estrutura. Continuação.

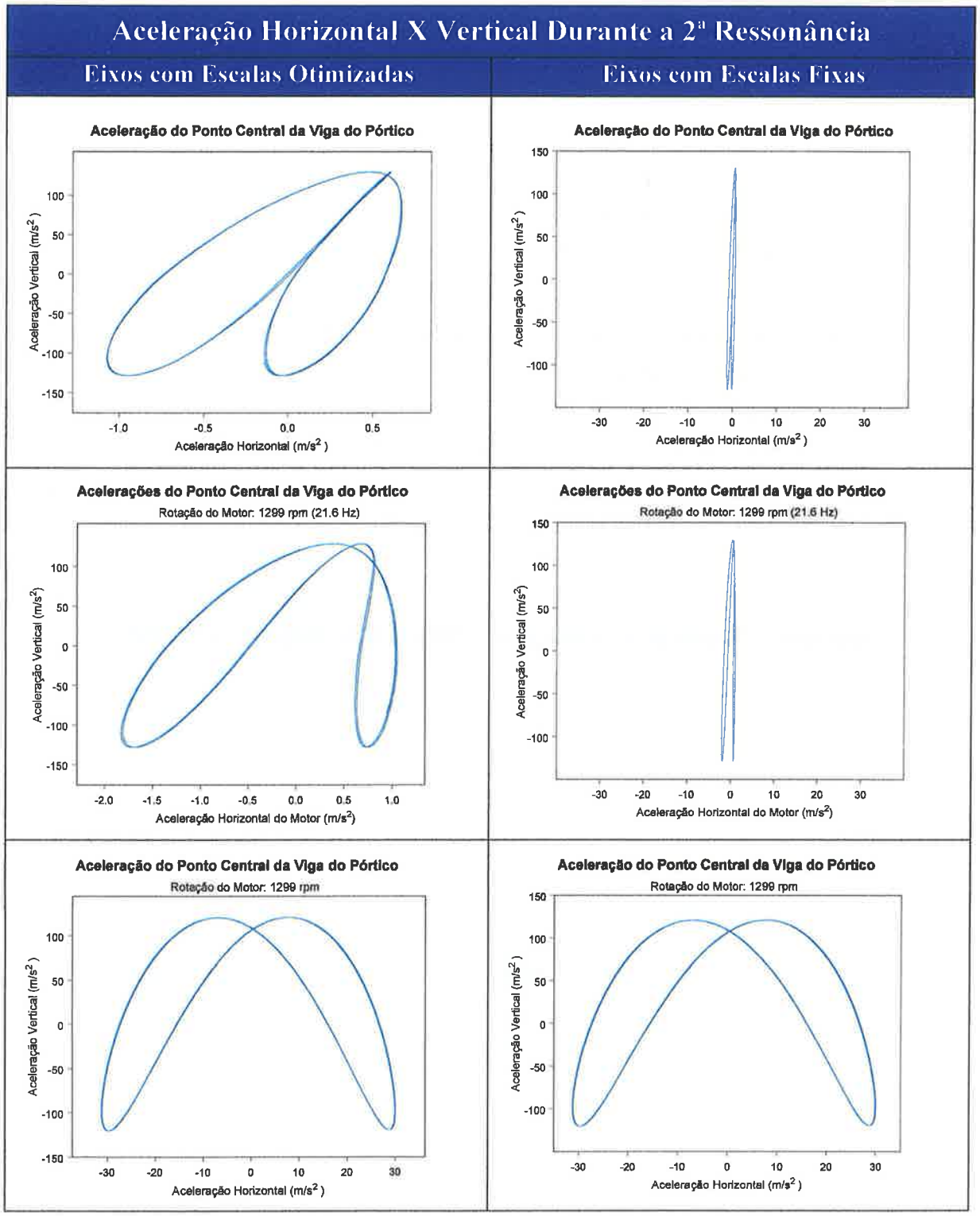


Tabela 8-3: Aceleração do ponto central da viga antes e durante o fenômeno da saturação modal na 2ª ressonância do sistema motor/estrutura.

8.7 Vibrações Forçadas: Passagem pela Ressonância com Rotação Gradativamente Decrescente

Após os ensaios descritos no item anterior, estando o motor com freqüência de rotação acima da 2ª ressonância do sistema, procedeu-se a redução gradativa da sua tensão de alimentação. Todas as rotinas relacionadas com os períodos de observação e registro dos fenômenos, número de níveis de tensão e seus respectivos valores foram exatamente iguais às adotadas durante a passagem pela ressonância com rotação crescente.

A figura 8.37 mostra o comportamento das amplitudes das componentes da aceleração do ponto central da viga durante a passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente. A região azul indica uma faixa de rotações do motor, durante as quais foram observadas oscilações das amplitudes máximas de vibração; a figura 8.38 apresenta um exemplo desse fato, obtido quando a tensão foi reduzida de 2.85V para 2.83V.

A tabela 8.4 contém os gráficos das acelerações do ponto central da viga durante os ensaios em questão. A coluna esquerda permite uma melhor visualização das

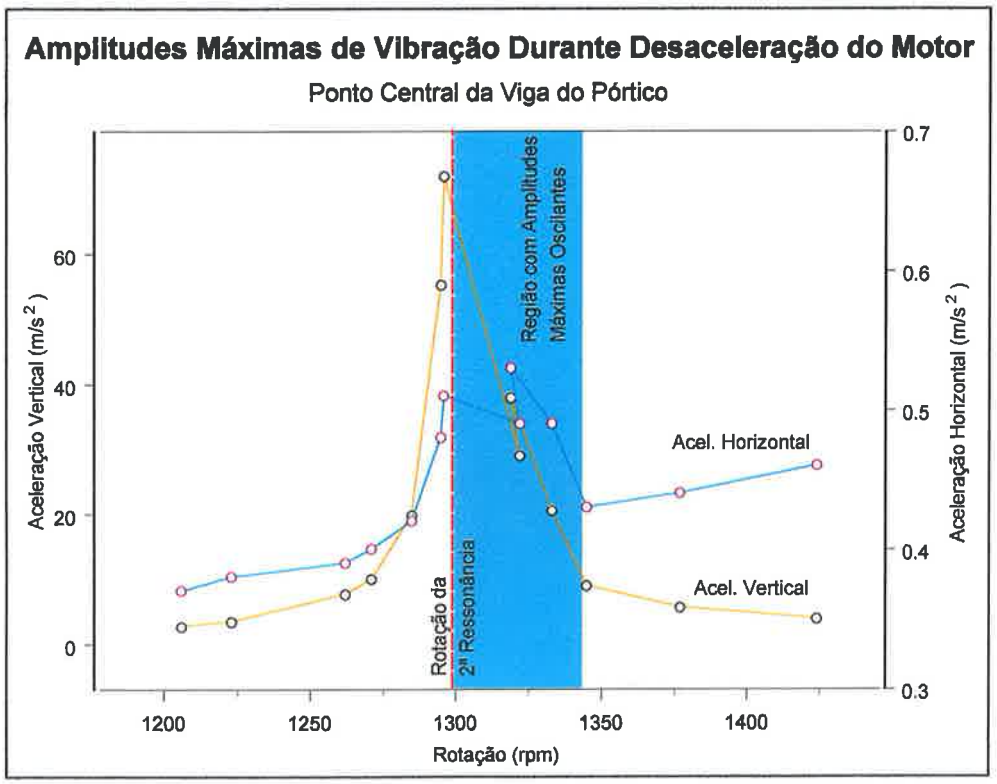


Figura 8.37: Acelerações máximas do ponto central da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente.

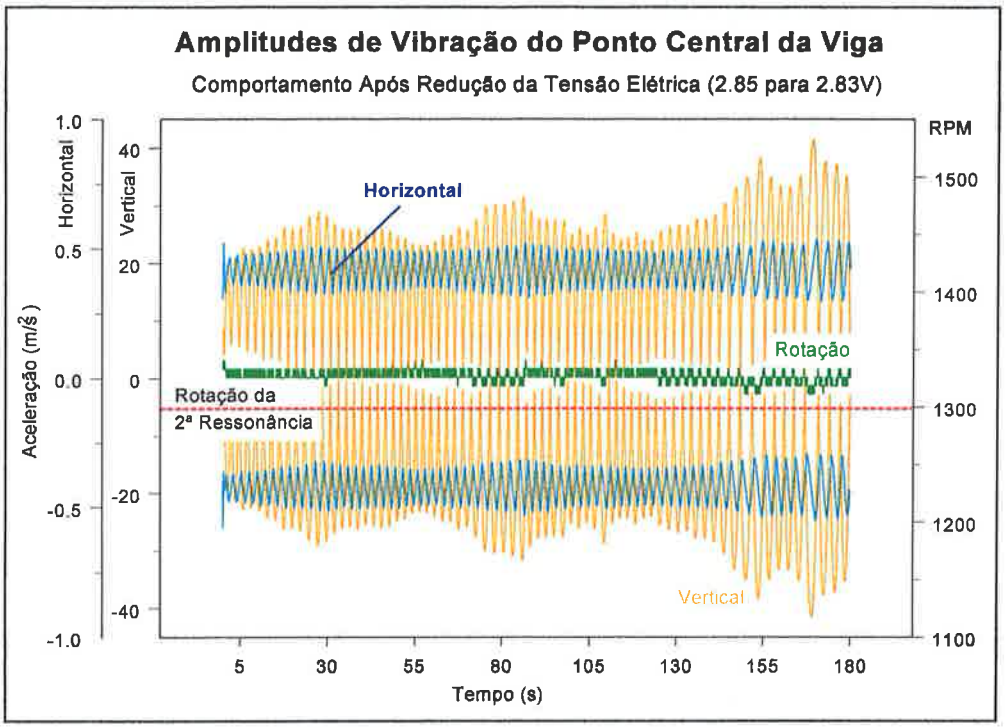


Figura 8.38: Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração durante a desaceleração do motor. Rotações próxima a da 2ª ressonância do sistema.

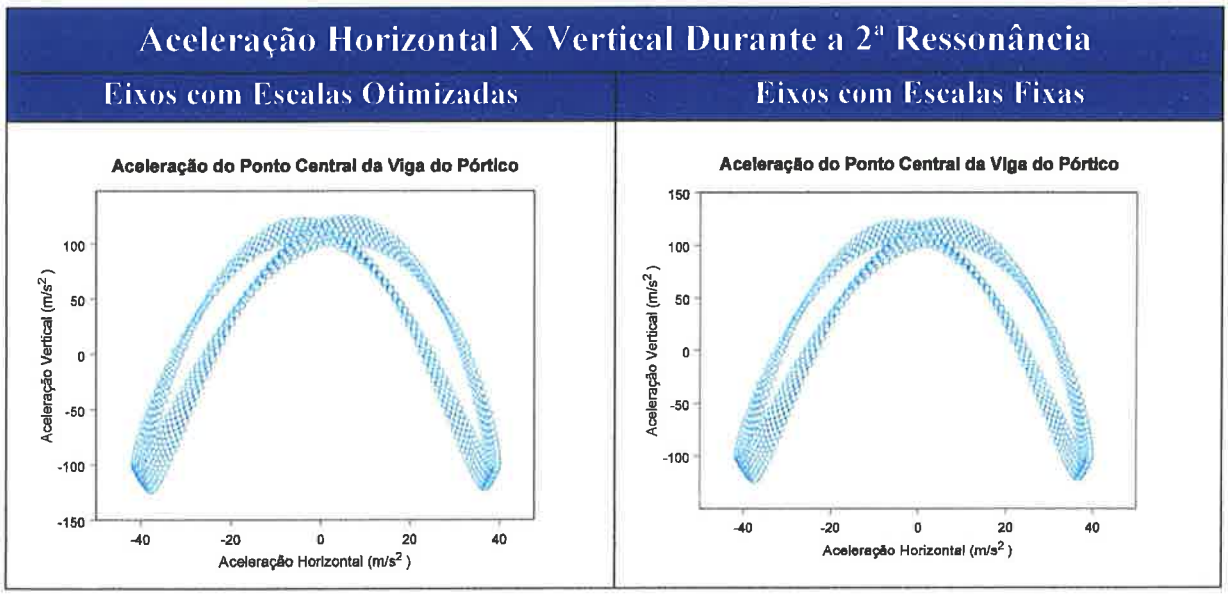


Tabela 8-4: Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente. Continuação.

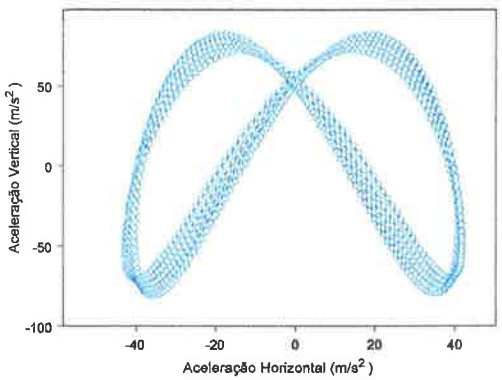
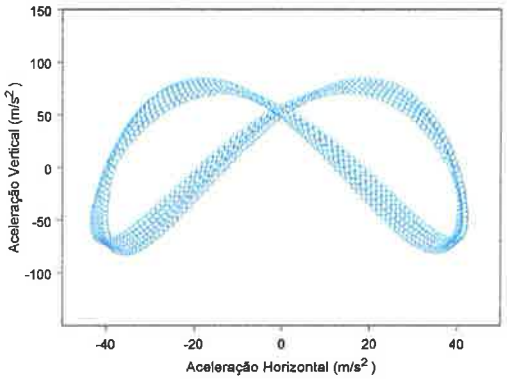
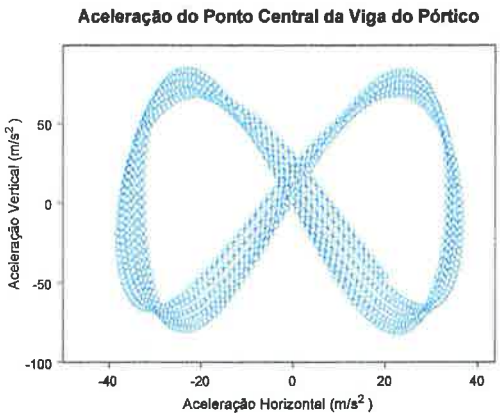
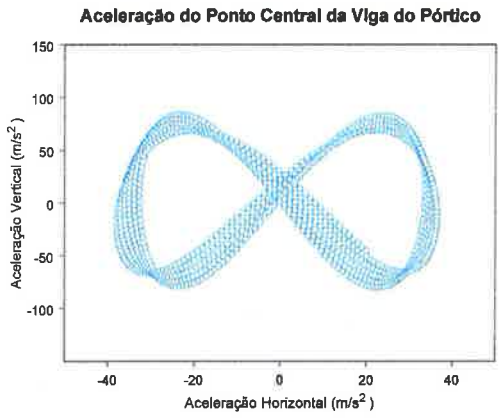
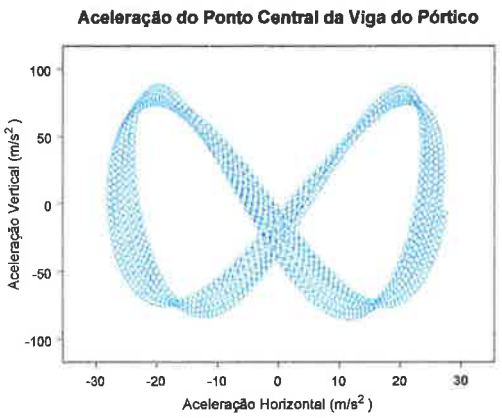
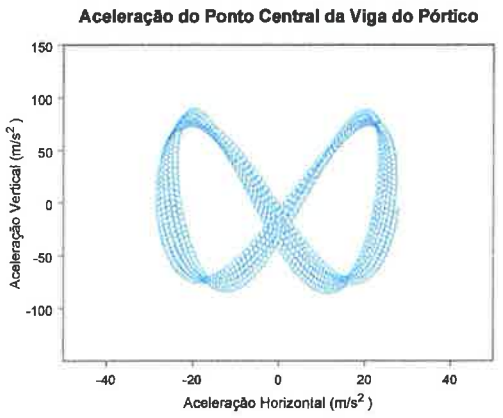
Aceleração Horizontal X Vertical Durante a 2ª Ressonância	
Eixos com Escalas Otimizadas	Eixos com Escalas Fixas
	
	
	

Tabela 8-4: ***Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente. Continuação.***

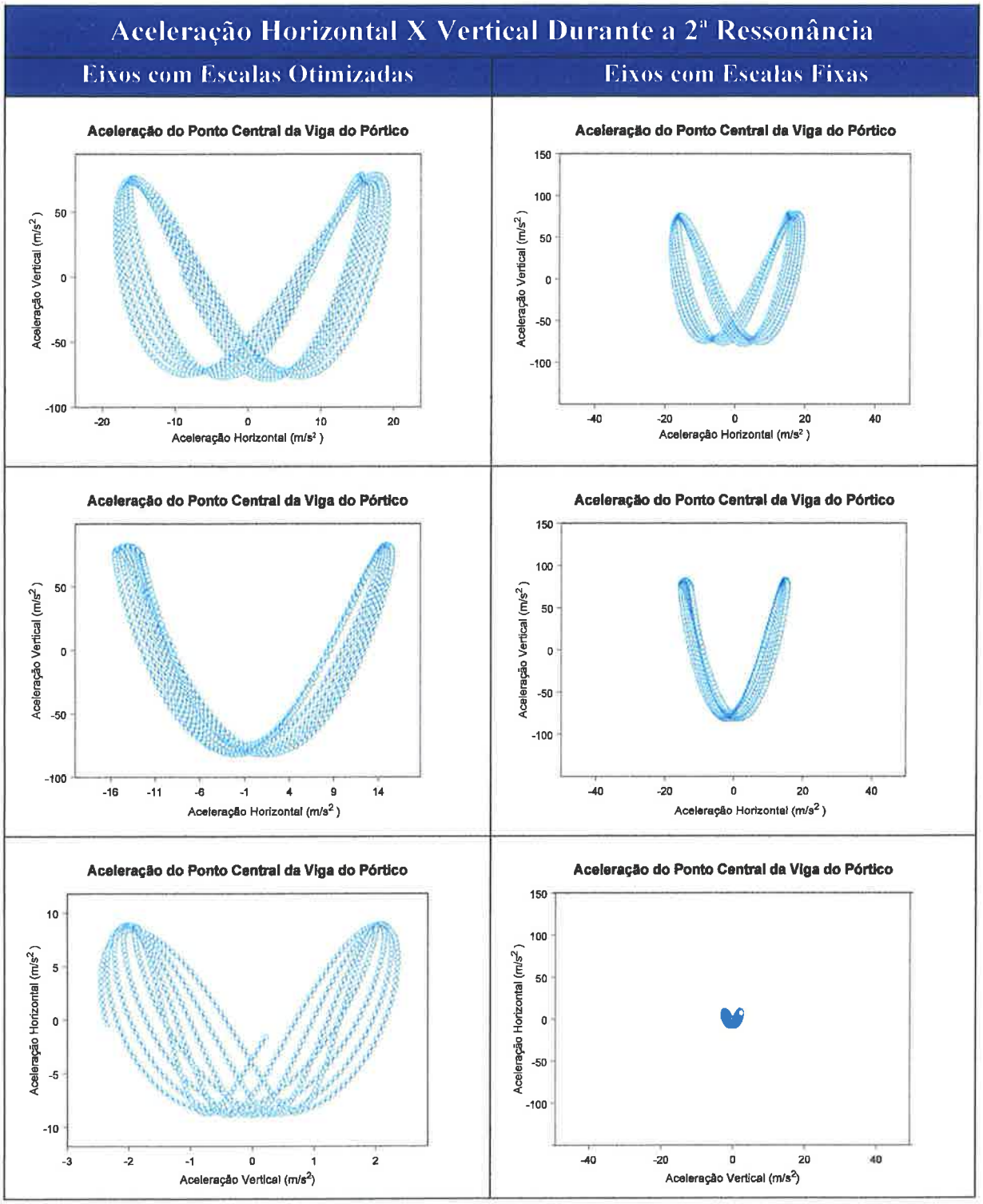


Tabela 8-4: ***Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente. Continuação.***

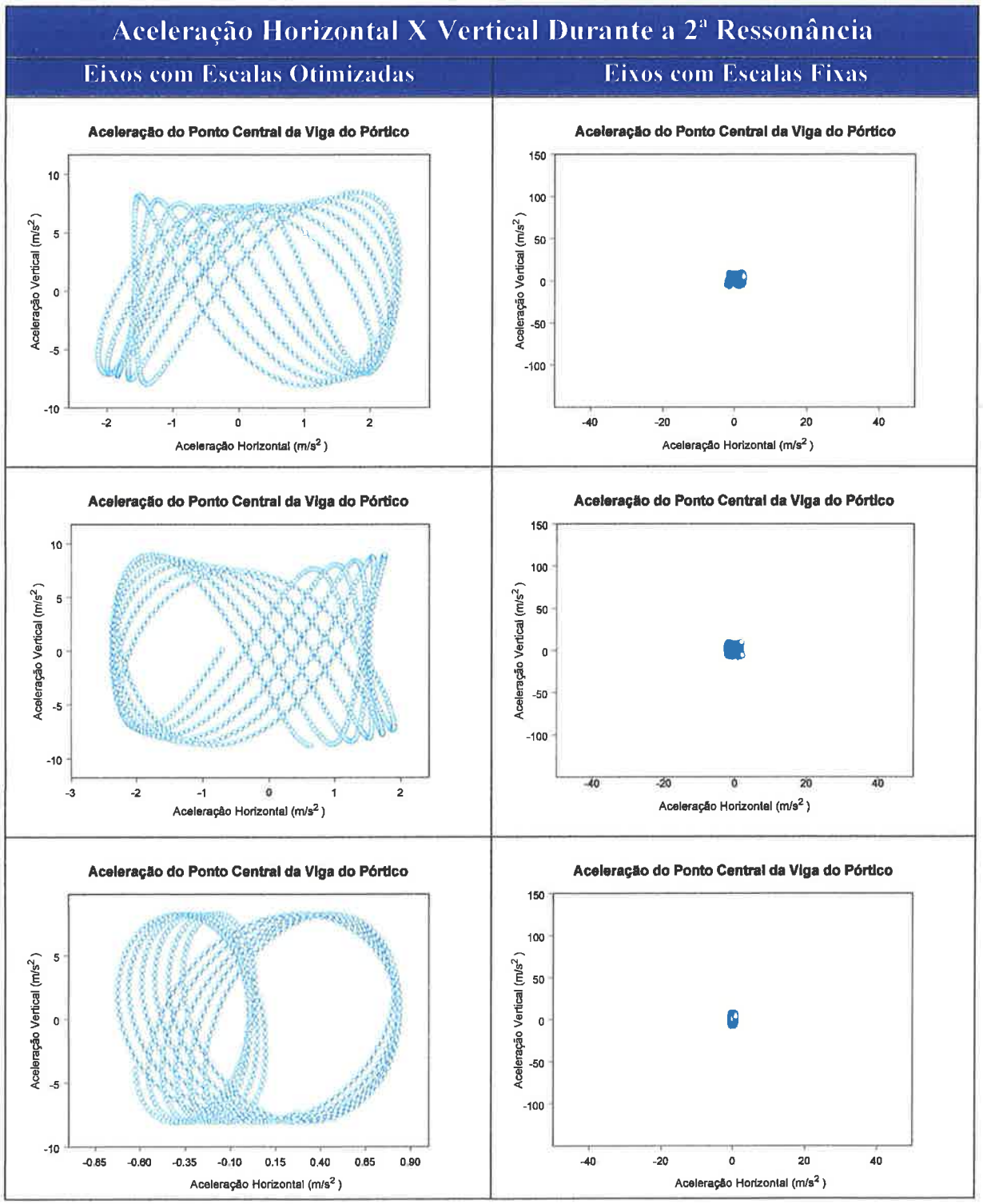


Tabela 8-4: Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente. Continuação.

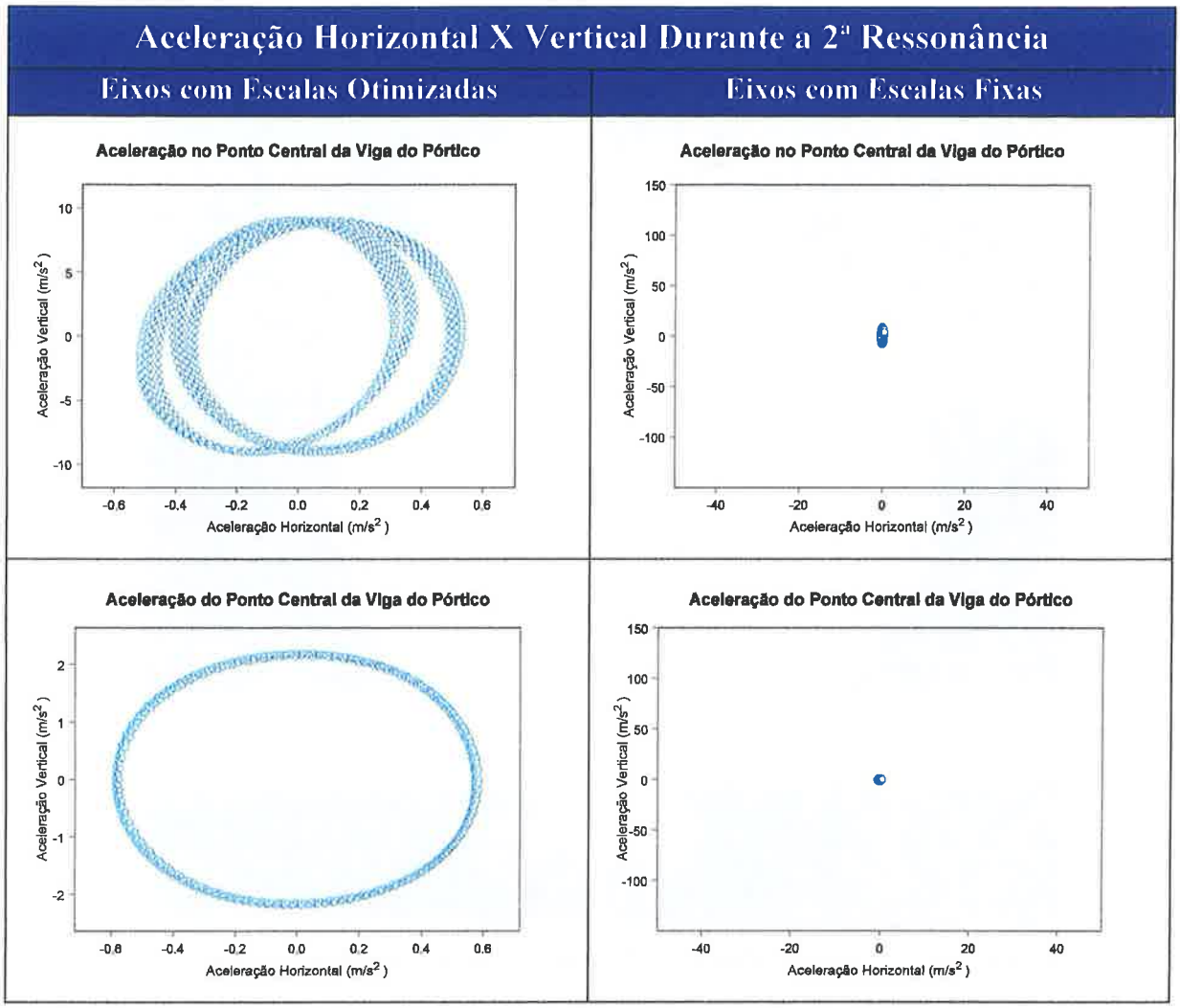


Tabela 8-4: ***Comportamento oscilatório das amplitudes máximas de vibração da viga durante passagem pela 2ª ressonância com rotação decrescente.***

relações entre as componentes de aceleração do ponto central, pois as escalas dos eixos dos gráficos estão otimizadas. O mesmo não ocorre com a coluna da direita, onde objetivou-se mostrar as formas aproximadas de vibração – a formas corretas seriam dadas pelos gráficos de deslocamentos (órbitas) - que um observador viria, caso esse direcionasse o seu olhar para um ponto próximo ao centro da viga como, por exemplo, o eixo do motor.

8.8 REGISTROS FOTOGRÁFICOS

Utilizando-se um *flash* fotográfico capaz de emitir lampejos de mesma intensidade a uma taxa fixa e uma máquina com recursos de controle de exposição (abertura e velocidade de obturador), obtiveram-se fotos do pórtico e do motor elétrico durante a ocorrência do fenômeno da saturação modal.

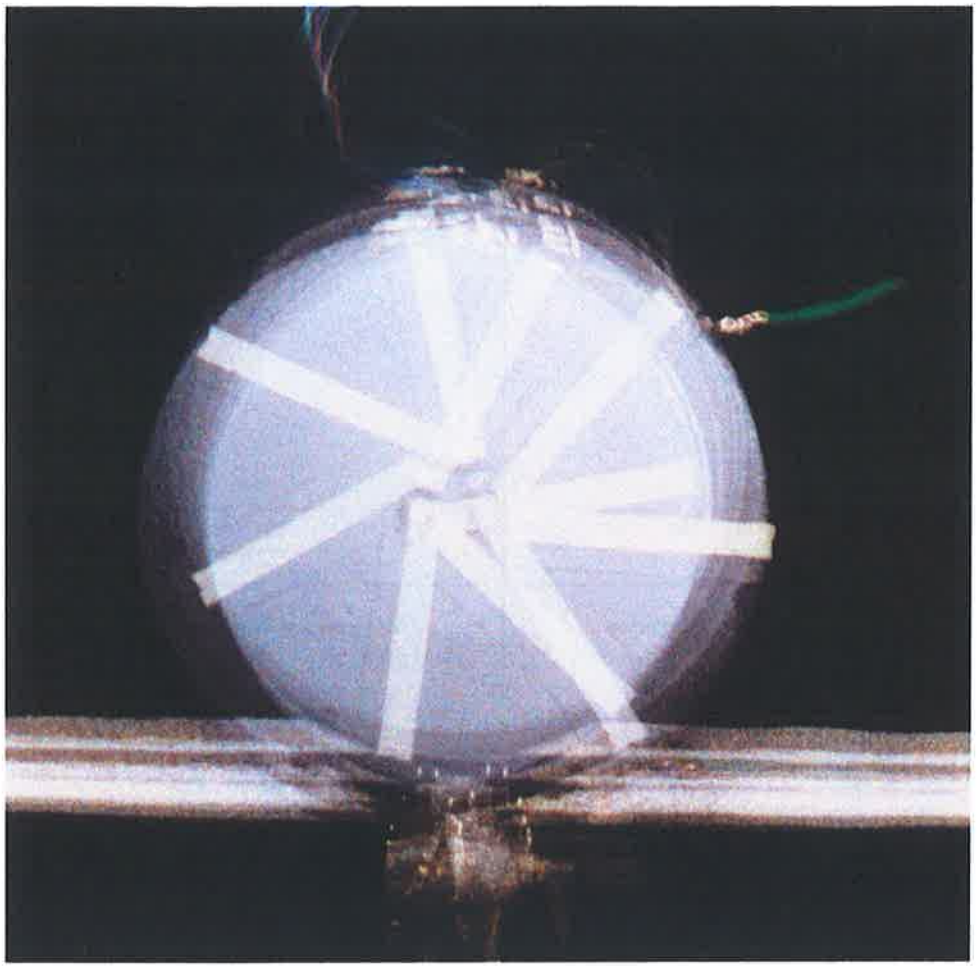


Figura 8.39: Fotografia estroboscópica do motor durante a 2ª ressonância do sistema.

O momento capturado na figura 8.39 foi obtido com uma lente macro de 100mm, 10 pulsos de *flash* a uma taxa de 10Hz e filme com sensibilidade ASA400. Deve-se observar a trajetória do centro do eixo do motor, comparando-a com a primeira figura da tabela 8.4. As faixas brancas são, na realidade, múltiplas exposições de uma fita refletiva, colada radialmente no volante de inércia e utilizada, no início dos ensaios, para verificar a rotação do motor com um tacômetro óptico; aqui, elas auxiliam na determinação da posição do eixo do motor. Os reflexos na parte superior do volante foram causados pelo fio de alimentação (vide figura 8.1).

O mesmo equipamento fotográfico que tornou possível a fotografia anterior (excetuando-se a lente, que foi substituída por outra com 35mm de distância focal) foi utilizado para se conseguir a foto mostrada em 8.40. Para realçar a estrutura, utilizou-se tinta especial na sua secção frontal e um fundo preto. Os mostradores registram as componentes horizontal e vertical da aceleração do ponto central da viga (valores RMS), bem como a rotação do motor durante o fenômeno da saturação modal.

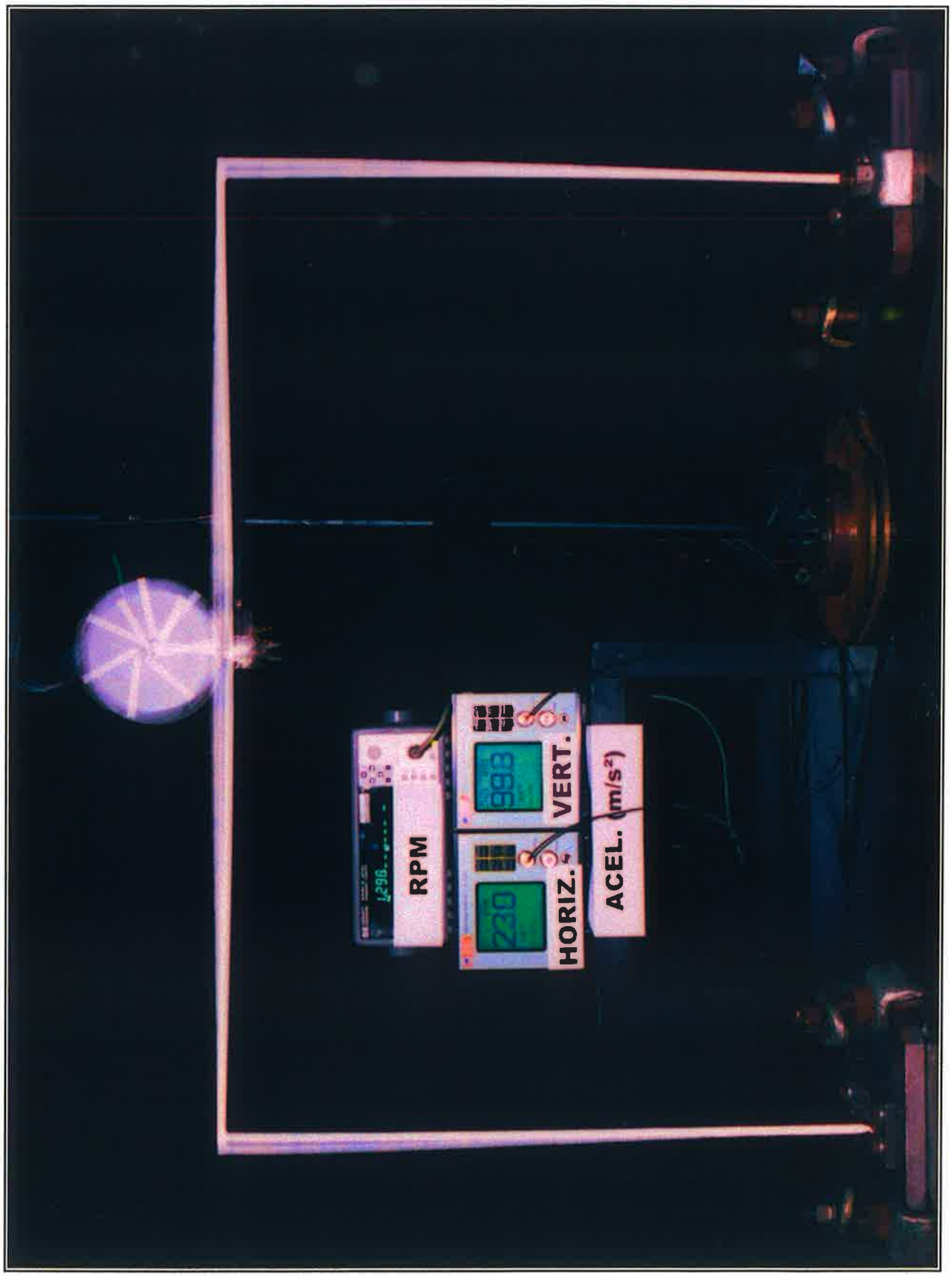


Figura 8.40: Fotografia estroboscópica do sistema motor/estrutura durante a 2ª ressonância.

9 OBSERVAÇÕES FINAIS

"Tudo tem o seu tempo

determinado, e há tempo

para todo o propósito

debaixo do céu".

ECLESIASTES 3:1

9.1 GERAL

As principais conclusões e contribuições deste trabalho estão espalhadas ao longo de seu corpo e seria desnecessário aqui repeti-las e reforça-las. Entretanto, alguns comentários importantes, ainda não feitos, merecem ser destacados neste capítulo final.

Trabalhos teóricos sobre pórticos planos não lineares excitados por motores não ideais estão disponíveis na literatura[8,10,11,12,13]. Embora em pequeno número, esses trabalhos permitiram ao autor adquirir conhecimento suficiente do problema para reanalisá-lo, propondo um campo de deslocamento mais complexo. De forma análoga, foi possível aprimorar o modelo analítico de motores de corrente contínua a ímãs permanentes, apesar da disponibilidade de artigos atuais, abordando o problema sobre o ponto de vista da simulação numérica, ser ainda mais escasso.

Na área experimental, principalmente no que concerne a trabalhos envolvendo pórticos planos, inexistem relatos de experimentos com excitação por motores não ideais. Igualmente raros são trabalhos sobre identificação de características eletrodinâmicas de motores de corrente contínua via ensaios dinâmicos. Ressalta-se,

também, a fragmentação das informações relacionadas com técnicas e procedimentos de medição. A obtenção de conhecimentos fundamentados, verossímeis e confiáveis dentre a vultosa quantidade de folhetos técnicos, manuais de operação, notas técnicas em revistas especializadas assemelha-se à prática do garimpo. Também digna de nota é a ausência de uma literatura atual, não tendenciosa, prática e livre de aspectos mercadológicos, que ilumine o obscuro caminho no qual se deparam o profissionais quando da escolha de equipamentos para análises dinâmicas.

9.2 SOBRE O MOTOR UTILIZADO

A interação entre a fonte não ideal – o motor – e a estrutura é um dos fatores chaves de todos os fenômenos observados nesta tese. Examinando-se os dois elementos envolvidos, nota-se que é na máquina elétrica onde se concentra uma grande parcela das aproximações adotadas durante a elaboração do modelo matemático do sistema. Considerando-se esses dois fatores, e a escassez de literatura já comentada, tecem-se, a seguir, alguns comentários específicos sobre as características do motor elétrico utilizado.

9.2.1 Resistência elétrica do rotor e das escovas

Em motores novos, as escovas não mantém um bom contato elétrico com o coletor. Tal fato só ocorre após um determinado período de funcionamento, quando o desgaste acaba por alisar as superfícies, aumentando a área de contato e, conseqüentemente, diminuindo a resistência à passagem de corrente.

O mau contato elétrico entre as escovas e o coletor causa dois problemas: a perda de torque do motor e a ocorrência de centelhamento. Deve-se notar que esse mau contato também pode ser causado por uma deficiência das molas que forçam as escovas contra o coletor (figura 6.6, centro inferior).

Dois fatos foram observados durante os ensaios que indicam que ocorreram problemas relacionados com as escovas :

- a resposta dinâmica simulada do motor a um degrau de tensão era diferente daquelas observadas experimentalmente (como exemplo, cita-se a curva de rotação da figura 8.26); ao se adotar o valor de 0.12Ω, ao invés de 0.18Ω, como determinado nos ensaios estáticos (item 6.3), a simulação numérica produziu resultados satisfatórios; com base nisso, concluiu-se que as escovas não estavam suficientemente ajustadas por ocasião dos ensaios de determinação da resistência do motor;

- o coletor e as escovas ficavam superaquecidos durante a passagem pela segunda ressonância do sistema (a elevação da temperatura era além da esperada, considerando-se o nível de potência absorvida pelo motor); como se notou, o motor era submetido a acelerações verticais e horizontais aproximadas de 140 m/s^2 e $30m/s^2$, respectivamente; acredita-se que tal solicitação foi suficiente para proporcionar uma oscilação da força de contato entre as escovas e o coletor.

9.2.2 Perdas no Ferro e por Histerese

Dependendo da qualidade dos materiais envolvidos na construção do motor, bem como das características de montagem, essas perdas podem assumir a mesma ordem de grandeza das demais presentes em um motor. A simulação matemática dessas perdas proposta pelo autor (itens 3.64 e 6.5) possui uma boa correlação com os dados experimentais (figura 6.9). É interessante notar que há obras que não as consideram ou que não explicitam o seu relacionamento com a rotação do rotor.

9.2.3 Perdas Mecânicas

As perdas mecânicas (item 3.4.3) podem ser importantes, dependendo das características de construção motor considerado. O modelo proposto pelo autor (polinômio cúbico, expressão 3.21) mostrou-se ser mais do que suficiente para representá-las, podendo ser simplificado nos próximos trabalhos.

A substituição dos mancais originais do motor (buchas de bronze) por mancais de rolamento foi fundamental para reduzir as perdas no motor escolhido a valores mínimos (figura 6.10). Além disso, essa providência evitou problemas de superaquecimento e desgaste prematuro dos mancais durante os ensaios, principalmente nas passagens pela 2ª ressonância, onde as acelerações atingidas danificariam os mancais originais.

Ainda com relação à figura 6.10, deve-se notar que há um torque residual quando a rotação é nula (a reta apresentada não passa pela origem). Tal fato está relacionado com o atrito dinâmico das escovas com o coletor, que foi especialmente considerado no modelo matemático (a rotina de cálculo o anulava quando a rotação se igualava a zero).

9.2.4 Tensão e corrente de alimentação

Como pode ser visto nas figuras 8.4 e 8.6, as características elétricas da alimentação estão muito longe daquelas previstas pelos modelos matemáticos encontrados

na literatura (curvas suáveis e contínuas). Na realidade, há uma grande parcela de ruído elétrico causado pelo mecanismo de comutação das bobinas do motor (escovas e coletor) que, se não for corretamente atenuado, pode provocar erros de leitura e/ou danos na instrumentação. Neste trabalho, empregaram-se bancos de capacitores e posterior filtragem dos dados adquiridos (filtros digitais, Butterworth de 4ª ordem, tipo passa-baixa) para reduzir esse o ruído.

9.2.5 Volantes de Inércia

Em determinados tipos de motores, especialmente aqueles de baixo custo e de média/alta potência, o torque produzido tem características impulsivas, com diversos transientes durante uma volta do motor (tantos quantos forem as bobinas comutadas durante essa revolução).

No presente trabalho, essa descontinuidade do torque foi detectada através de um laser torcional durante os ensaios na base de teste (figura 6.1). Observaram-se picos de aceleração angular no rotor principalmente nas rotações baixas, quando a energia cinética acumulada pelas inércias rotacionais do motor eram insuficientes para suavizar o torque gerado. Como esse tipo de comportamento depende do circuito de comutação (escovas e coletor) – que não é previsto pelo modelo matemático – tomou-se uma providência para atenuá-lo: dois volantes de inércia foram adicionados ao eixo do motor.

9.3 SOBRE A ESTRUTURA

Considerando-se os resultados da análise modal da estrutura (capítulo 7), verifica-se que as dimensões adotadas propiciaram um relativo afastamento do 3° modo de vibração (oscilação lateral perpendicular ao plano do pórtico) em relação aos dois primeiros, permitindo que a contribuição desse modo na resposta do sistema não influenciasse os resultados obtidos. Outro fato que colaborou nesse sentido foi a redução das excitações com componentes fora do plano do pórtico – obtidas através do correto posicionamento do motor - que, logicamente, ativariam o 3° modo.

O comentário acima também é válido para os demais modos; eles estão muito afastados dos primeiros (no domínio da freqüência), fazendo com que suas contribuições fossem mínimas na resposta do sistema, quando o pórtico foi excitado com freqüências próximas ao do seu segundo modo.

Outro fato digno de nota foi a forma pela qual o pórtico foi montado; a utilização de solda elétrica para unir a viga às colunas e essas às suas sapatas, acabou por reduzir as perdas de energia a valores mínimos (outros tipos de união poderiam dissipar energia por atrito entre as partes ou via deformações plásticas durante as oscilações da estrutura). Da mesma forma, a união das sapatas com a fundação, realizada com parafusos superdimensionados, teve o mesmo efeito.

Se, por um lado, a soldagem do pórtico ajudou a tornar o sistema quase ideal, por outro, restringiu o seu funcionamento. Para permitir uma boa soldagem, escolheu-se um aço de baixo carbono para a sua construção. Isso possibilitou que as tensões no material nas regiões próximas às uniões soldadas (uniões em ângulo reto) atingissem o limite de escoamento mais rapidamente do que ocorreria com a utilização de materiais mais nobres. Como conseqüência imediata desse fato, o pórtico construído apresenta comportamento não linear a partir de determinadas amplitudes de deslocamento, devido às deformações plásticas (vide item 8.2).

9.4 SOBRE OS RESULTADOS ANALÍTICOS E EXPERIMENTAIS DO SISTEMA ESTRUTURA/MOTOR.

De um forma geral, o modelo matemático previu o comportamento do sistema estrutura/motor com um relativo grau de precisão. Os maiores erros foram verificados nas amplitudes de oscilação durante a ressonância e no comportamento da estrutura durante as vibrações livres após um deslocamento vertical inicial imposto.

A discrepância quanto às amplitudes de oscilação pode ser explicada pelo modelo de amortecimento adotado. Baseado na premissa que o amortecimento é diretamente proporcional à velocidade de deformação do material, calculou-se os amortecimentos equivalentes para cada modo através das expressões 2.37, 2.38, 2.45 e 2.46, adotando-se um único valor para os coeficientes c1 e c2 (coeficientes de amortecimento modais). No entanto, durante os testes de vibração livre, percebeu-se que tal procedimento é inadequado para simular o comportamento estrutural. O problema foi contornado ajustando-se cada coeficiente de maneira independente, mas boas correlações entre dados teóricos e experimentais não foram obtidas.

Quanto à segunda discrepância citada acima, há duas explicações bastante prováveis para o fato :

- o deslocamento vertical inicial foi obtido através do mecanismo da 8.10 (item 8.3), instalado logo abaixo do motor; por questões práticas, não há

como garantir um deslocamento imposto na direção vertical sem que a outra direção seja afetada devido a problemas de alinhamento; sendo assim, os ensaios realizados na vertical tiveram, certamente, deslocamentos horizontais impostos;

- a estrutura real possui assimetrias que não são factíveis de serem simuladas por um modelo com apenas dois graus de liberdade, tais como o posicionamento do motor, comprimentos das colunas, deformações iniciais etc.

Fenômenos como o da saturação modal e efeito Sommerfeld puderam ser claramente observados e também previstos pelo modelo proposto. Há, ainda, vários outros relacionados com os parâmetros do pórtico que não foram explicitamente apresentados, como, por exemplo:

- o efeito da diferença das duas primeiras freqüências de ressonância sobre o comportamento estrutural durante vibrações livres; observou-se que essa diferença afeta o período dos picos de aceleração máxima da componente da direção não excitada durante as vibrações livres (na figura 8.14, por exemplo, a periodicidade dos picos da aceleração vertical está em torno de 10 segundos, o que significa uma diferença aproximada de 0.1Hz entre as freqüências dos dois primeiros modos);
- oscilações da tensão e da corrente elétricas do motor; notou-se que, quando a estrutura passa pelo segundo modo, a tensão e a corrente de alimentação apresentam freqüências de oscilação igual ao dobro da freqüência desse modo (vide figura 8.29);
- a dependência do fenômeno da saturação modal com a amplitude de excitação; tal fato pôde ser comprovado experimentalmente quando o desbalanceamento foi reduzido para 33gmm em cada volante de inércia e a estrutura não mais apresentou o fenômeno;

9.5 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Considerando-se o enorme esforço para construir um sistema que apresente consistentemente os fenômenos não lineares abordados na literatura, bem como a experiência acumulada na sua operação, na escolha dos equipamentos, na seleção dos

métodos de medição e análise, o sistema estrutura/motor estudado nesta tese poderia ser aproveitado para dar continuidade a pesquisas imediatas, como se segue:

- variações do comportamento estrutural ao se alterar a razão entre as freqüências dos dois primeiros modos e entre esses e a excitação; segundo Nayfeh[29], caos poderá ser observado em algumas circunstâncias;
- a influência do grau de desbalanceamento do motor durante a passagem pelas duas ressonâncias da estrutura, principalmente com relação ao fenômeno da saturação modal;
- considerando-se que a estrutura ultrapassa facilmente o seu limite elástico (como já comentado acima), dados podem ser obtidos para corroborar modelos matemáticos que simulem não linearidades material;
- desenvolvimento de um modelo mais aprimorado do motor, incluindo o mecanismo de comutação.

BIBLIOGRAFIA

" My books are water;

those of the great

geniuses are wine –

everybody drinks water "

Mark Twain

---

1. ANDRIULLI, John B. – *A simple way to measure mass moments of inertia.* Sound&Vibration, November, 1997, p. 18-19.

2. BALACHANDRAN, B. & NAYFEH, A. H. – *Nonlinear motions of beam-mass structure*. Nonlinear Dynamics, v.1:39-61, 1991.

3. BALACHANDRAN, B. & NAYFEH, A. H. – *Observations of modal interections in resonably forced beam-mass structures*. Nonlinear Dynamics, v.2: 77-177, 1991.

4. BALTHAZAR, J., MATTOS, M.C., MOOK, D., WIECZOREK, S.- *An Experimental Study of Vibrations of Nonideal Systems*. In: Proceedings of DETEC'97. ASME Design Engineering Technical Conferences. Sacramento, CA, September 1997.

5. BARR, A. D. S. & McWANNELL – *Parametric instability in structures under support motion*. J. Sound and Vibration, 14(4):491-509, 1971.

6. BATE, Glenn H. – *Vibration diagnostics for industrial electric motor drives.* Denmark, Bruel&Kjaer, Application Note BO 269-11.

7. BATHE, K. J. – *Finite element procedures in engineering analysis.* Prentice-Hall, 1982.

8. BRASIL, R. M. L. R. F. & D. T. Mook – *"Vibrations of a portal frame excited by a nonideal motor"*. In: Proceedings of the fifth conference on nonlinear vibrations, stability and dynamics of structures. Blacksbury, VA, USA, 1994.

9. BRASIL, R. M. L. R. F. & MAZZILLI, C. E. N. – *Effect of static loading on the nonlinear vibrations of a three-time redundant portal frame: analytical and numerical studies.* Nonlinear Dynamics, v.8: 347-366, 1995.

10. BRASIL, R.M.F.L. & Balthazar, J. M. – *"Nonlinear Oscillations of a Portal Frame Structure Excited by a Non-ideal Motor"*.In: Proceedings of 2000 2nd International Conference – Control of Oscillations and Chaos. St. Petersburg, Russia, v.2: 275-278.

11. BRASIL, R.M.L.F.,PALACIOS, J.L, BALTHAZAR, J.M. – *"Some comments on Numerical analysis of Nonlinear Vibrations of a Civil Structure Induced by a Non-Ideal Source"*. In: Proceedings of Computational Methods in Engineering. 21st Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Rio de Janeiro, Brasil, Dec. 2000.

12. BRASIL, R.M.L.R.F.& MAZZILLI, C. E. N. – *Vibrações não-lineares em fundações aporticadas de máquinas.* Revista International de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseno en Ingeniera, 6(1): 147-158, 1990.

13. BRASIL, R.M.L.F.& BALTHAZAR, J.M. – On regular and irregular oscillations of a civil engineering structure. A ser publicado.

14. CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. – *Dynamic of structures.* 2. ed. McGraw-Hill, 1993.

15. DALLY, W. James & RILEY, F. William – *Experimental stress analysis.* 3. ed. McGraw-Hill, 1991.

16. DARLOW, Mark S. – *Balancing of High-Speed Machinery.* Springer-Verlag, New York, 1989.

17. EWINS, D. J. – *Modal testing: theory and pratice*. England, Research Studies Press, 1984.

18. FENILI, A., BALTHAZAR, J.M., MOOK, D.T. – *A note on experimental identification of DC-motor parameters*. J. of Science Engineering, 2000 (submitted paper).

19. HEYLEN, W. et alii – *Modal analysis: theory and testing*. Belgium, Leuven, 1995.

20. JASKI, T. – *Como obtener Lo Maximo de su tester*. Arbó, Argentina, 1975.

21. KENJO, T. & NAGAMORI, S. – *Permanent Magnet and Brushless DC Motors*. Oxford, USA, 1985.

22. KONONENKO, V. O. – *Vibrating Systems with a limited power supply*. London, Iliffe Books, 1969.

23. KOSOW, I. Irving – *Máquinas elétricas e transformadores*. 5. ed. Porto Alegre, Globo, 1985.

24. LOBOSCO, Orlando Sílvio – *Seleção e aplicação de motores elétricos*. McGraw Hill:Siemens S.A., 1988.

25. MACCAMHAOIL, Macdara – *Static and dynamic balancing of rigid rotors*. Denmark, Bruel&Kjaer, Application Note BO 276-12.

26. MARTIGNONI, Alfonso – *Máquinas de corrente contínua*. Porto Alegre, Globo, 1977.

27. MATHCAD Professional 8.0 - User's guide. USA, MathSoft Inc., 1998.

28. NAYFEH, A. H. & BALACHANDRAN, B. – *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. Willey, 1995 .

29. NAYFEH, A. H. & MOOK, D. T. – *Nonlinear oscillations*. New York, John Willey, 1979.

30. NÓBREGA, Petrus G. B. – Auto-sincronização de motores não-ideais apoiados em estruturas elásticas. Dissertação de mestrado, EPUSP, 1994.

31. NUSSE, H. E. & YORKE, J. A. – *Dynamics: numerical explorations*. 2.ed. New York, Springer-Verlag, 1998.

32. OGATA, Katsuhiko – "*Matematical modeling of dynamic systems*" In: Modern Control Engineering. 2. ed. Prentice Hall, 1990, p. 117-126.

33. PLUMMER, Mitty C. – A new approach to balancing. Sound&Vibration, November, 2000, p.16-20.

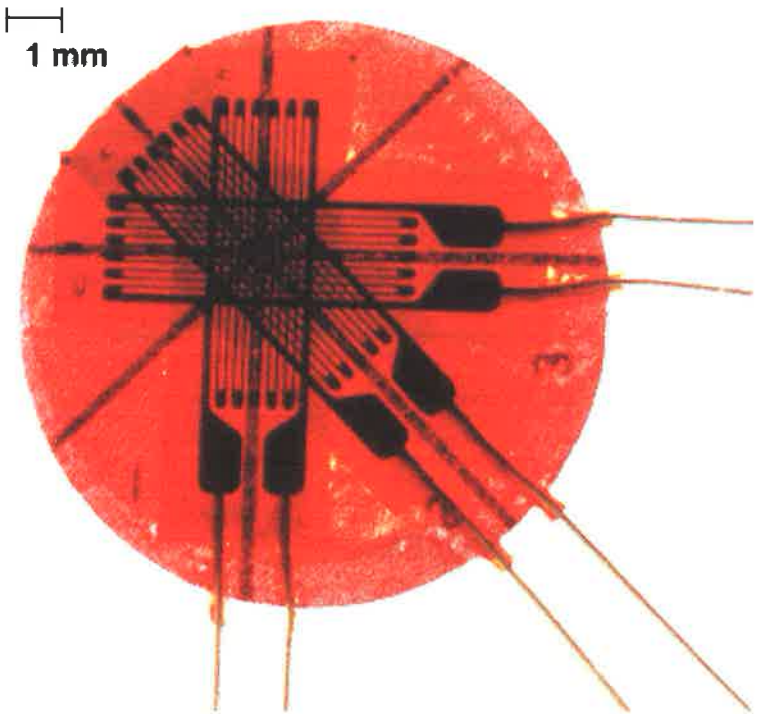
34. PRESS, William et alii – *Numerical Recipes in C*. 2 ed. Cambridge, 1992.

35. WOWK, Victor – *Machinery vibration: balancing*. McGraw Hill, 1995.

36. WOWK, Victor – *Machinery vibration: measurements and analysis*. McGraw Hill, 1991.

APÊNDICES

A EQUIPAMENTOS



Extensômetro tipo roseta 45°.

Os extensômetros elétricos têm origem na descoberta de Lord Kelvin (1824-1907), que observou que a resistência elétrica dos condutores varia com a deformação mecânica.
A descoberta foi anunciada na *Royal Society of London* em 1856.

Atualmente, os extensômetros são bem diferentes dos seus antecessores, que continham espiras de fio extremamente fino. Trilhas condutoras impressas com ligas nobres, polímeros resistentes a altas temperaturas e ataques químicos são uma constante nos nos *strain-gages* desenvolvidos recentemente.

A.1 INTRODUÇÃO

Os equipamentos utilizados nos experimentos são relacionados a seguir, juntamente com suas principais características - no caso de equipamentos multifuncionais, tais como os multímetros, apenas as especificações técnicas relacionadas com a função utilizada foram listadas.

Embora alguns equipamentos possuam capacidades de medição e manipulação de dados além daquelas apresentadas, essas foram omitidas pois não foram empregadas e/ou não influenciaram os resultados obtidos.

A.2 ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS

AMPLIFICADOR DC PARA EXTENSOMETRIA

Fabricante: Vishay

Modelo: BAM I

Excitação da Ponte: 0.5 a 6.0V

Sensibilidade: ±1 a 5000με/gage para ponte completa com extensômetros de 120Ω e GF=2.

Ruído: ± 2με RMS ref. a entrada

Estabilidade: 0.9μV/°C de 2° a 24°C

Resposta em freq.: DC a 20kHz

BALANÇA ANALÍTICA DIGITAL

Fabricante: Mettler

Modelo: PE 3600

Resolução: 0.01g

Precisão: 3%

FONTE REGULADA DC

Fabricante: Lambda

Modelo: LLS9018

Regulagem em tensão: 0.05% da tensão fornecida

Regulagem em corrente: 0.3% da corrente fornecida

Ripple em tensão: 5 mV RMS

Ripple em Corrente: 1%

Estabilidade: 0.1% em 8 horas

Max Corrente: 45 A

MULTÍMETRO DE BANCADA DIGITAL

Fabricante: Hewlett Packard

Modelo: 34401-A

Escalas utilizadas: 100 mV

Impedância: > 10 GΩ (esc. 40V)

Resolução: 0.001 mV

Precisão: 0.006 mV (mínima).

MULTÍMETRO DIGITAL

Fabricante: Hewlette Packard

Modelo: 973A

Escalas utilizadas: 10 A (DC)

Impedância: 11MΩ / 10MΩ (esc. 40V)

Resolução: 1mV / 10mV (esc. 40V)

Precisão: 0.1% + 1 dígito

MULTÍMETRO DIGITAL

Fabricante: Tecktronix

Modelo: DMM 850

Escalas utilizadas: 4V e 40V

Resolução: 1mV/10mV (esc. 4V/40V)

Precisão: 0.4% + 10 dígitos

LASER TORCIONAL

Fabricante: Polytech

Modelo: OFV 4000

Faixa útil (rotação): -7000 a 11000 rpm

Faixa de freq. para medição de vibração angular ($\Delta\omega$): 0.5 a 10 KHz.

Precisão: 1%

Linearidade: < 0.5%

Ponte RLC

Fabricante: WGB Eletrônica de Precisão

Modelo: RLC 80

Freqüência de teste: 111 Hz

Escala utilizada: 100 μH a 10 mH

Precisão da escala: 0.2% ou 5 dígitos

Resolução da escala: 0.1μH

Célula de Carga

Fabricante: PCB

Modelo: 208B02

Massa: 26 g

Freq. ressonância: 70 KHz

Resp. baixa freq. (-5%): 0.0001 Hz

Resolução: 0.009 N

Acelerômetro

Fabricante: PCB

Modelo: RLC 80 (ICP)

Massa: 11 g com a base

Faixa de Freqüência: 1 a 3000 Hz

Sensibilidade: 100 mV/g

Resolução: 0.005 g

Front-end

Fabricante: Hewlette Packard

Modelo: E1421B

Faixa Dinâmica: 80 dB

Faixa de freqüência: DC a 20 KHz

Taxa de amostragem: fixa 50KHz

Entradas: Tensão ou ICP (4mA)

Número de canais: 32

Acelerômetro

Fabricante: B&K
Modelo: 4396
Tipo: ICP

Faixa de Freqüência: 1 a 14KHz
Sensibilidade: 10 mV/m/s^2
Massa: 18.2 g

Condicionador/Amplificador

Fabricante: B&K
Modelo: 2525

Ganho de entrada: -20 a 60 dB
Ganho de saída: 0 a 10dB
Ruído: 20μV - 2 a 22KHz
Faixa de Freqüência: 0.2Hz a 100KHz
Sensibilidade entrada : 100μV a 10V
Filtro passa-baixa: 40dB/década
(2 pólos Butterworth)
Filtro passa-alta: 60dB/década
(3 pólos Butterworth)

Calibrador

Fabricante: B&K
Modelo: 4394

Freqüência: 159.2Hz
Amplitude: 10m/s^2
Precisão: ±2%
Sinal: Senoidal
Max. Capacidade: 70gramas

Frequencímetro Digital

Fabricante: Hewlett Packard

Modelo: 53181-A

Escalas utilizadas: DC to 225MHz

Impedância: > 1 MGΩ

Resolução: 0.001 Hz

Placa A/D

Fabricante: National Instruments

Modelo: 2150-C

Entradas: 4 de aquisição simultânea

Impedância: 460KΩ

Resolução: 16 bits

Tensão do sinal: 2.83V

Linearidade de fase: ±0.5° de 0 a 20KHz

Defasagem entre canais: ±1° de 0 a 10KHz

Offset error: ±5 LSB

B PÊNDULO TORCIONAL

Pêndulos torcionais se constituem numa maneira rápida e prática para determinação de inércias rotacionais. Precisões da ordem de 3% são obtidas facilmente com pêndulos corretamente dimensionados.

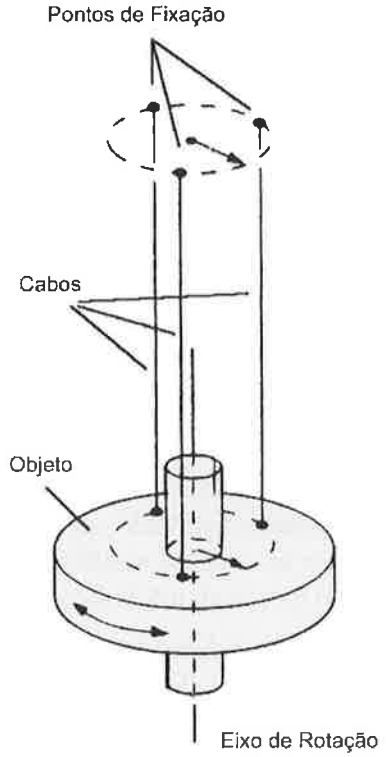
Ao lado, um rotor semelhante ao do motor elétrico utilizado nesta tese está instalado numa base auxiliar de um pêndulo torcional a três fios.

Os setores angulares azul e vermelho, pintados na base do pêndulo, auxiliam na verificação visual da amplitude de oscilação (amplitudes que ultrapassam a faixa vermelha produzem resultados insatisfatórios).

B.1 INTRODUÇÃO

Com o advento dos programas CAD, as inércias rotacionais de sólidos e ou de sistemas podem ser rapidamente obtidas. No entanto, quando a geometria é complexa e os dados necessários não estão disponíveis na forma de um arquivo eletrônico (dimensões e densidades dos materiais), o cálculo desse parâmetro não é imediato.

Pêndulos torcionais com dois ou mais cabos de suspensão (figura B.1) propiciam uma maneira precisa para a determinação experimental de inércias rotacionais de componentes ou sistemas, independentemente das suas complexidades. O processo requer apenas que o objeto, cuja inércia se quer determinar, seja suspenso por dois ou mais cabos; a freqüência da oscilação dos sistema assim constituído é, respeitadas certas limitações, inversamente proporcional à raiz quadrada da inércia rotacional desse objeto.



Alguns cuidados devem ser observados durante a utilização de pêndulos torcionais; comprimento e paralelismo dos cabos, distância dos pontos de fixação desses ao centro de giro, amplitude de vibração são apenas alguns exemplos. Para uma melhor compreensão das limitações do método, uma breve análise é apresentada a seguir.

***Figura B.1:** Pêndulo torcional de 3 fios. Os cabos de suspensão estão diretamente conectados ao objeto.*

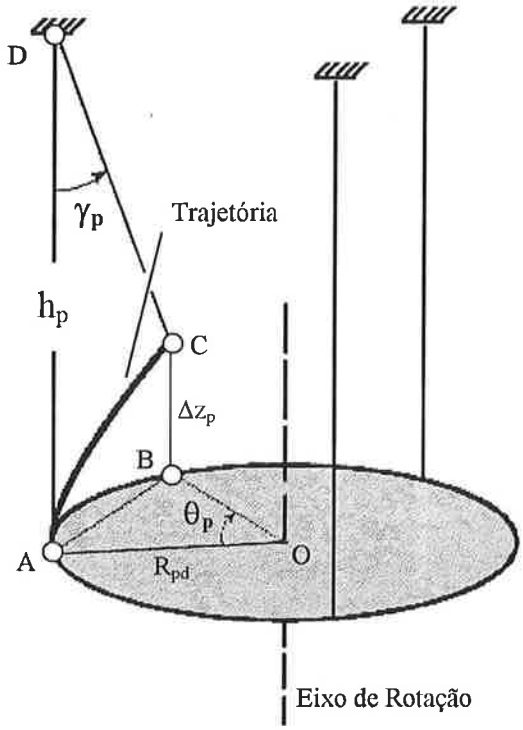
B.2 ANÁLISE DO MOVIMENTO

A figura B.2 apresenta um pêndulo torcional com três cabos paralelos, inextensíveis, de comprimento h_p, igualmente espaçados do centro de rotação (O) pela distância R_{pd} e suportando um objeto de massa M_{obj}. Para simplificar a figura, apenas a trajetória da extremidade de um dos cabos é mostrada quando esse pêndulo sofre uma rotação θ_p. Ainda por essa figura, os ângulos γ_p são aqueles formados pelas direções dos cabos com o eixo z durante a rotação θ_p.

Obtém-se as equações do movimento através do método de Lagrange, desprezando-se a dissipação de energia causada pelo atrito do pêndulo com o ar. Para a utilização desse método, as energias potencial e cinética são, a seguir, expressas em termos da variável θ_p.

B.2.1 Energia Potencial

Durante o movimento oscilatório, a massa M_{obj} se eleva acima do plano de repouso, acumulando energia potencial (na figura B.2, essa elevação é representada por



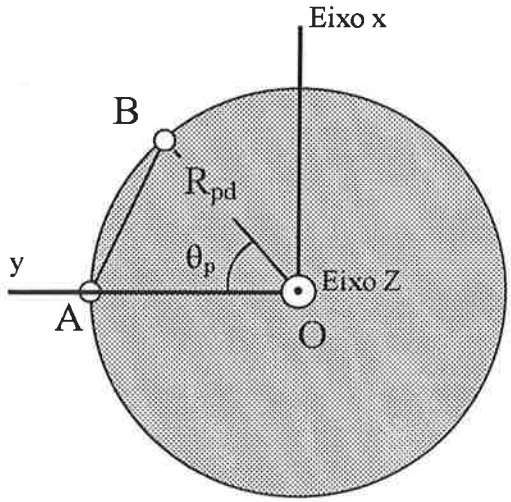


Figura B.2: ***Trajetória de uma extremidade de cabo em meio período de oscilação.***

Δz_p). Considerando-se que o segmento AB é a projeção do cabo de suspensão no plano definido pelos pontos A,B e O e que, por ser o cabo rígido, DA = DC = h_p, tem-se:

$$\Delta z_p = h_p \,.\, (1 - \cos(\gamma_p)) \tag{B.1}$$

$$h_p \,.\, \mathrm{sen}(\gamma_p) = AB \tag{B.2}$$

Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo AOB, resulta:

$$AB = R_{pd}\sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\theta_p\right)\right)} \tag{B.3}$$

Substituindo-se B.3 em B.2 e isolando-se o termo em sen(γ_p), tem-se:

$$\mathrm{sen}\left(\gamma_p\right) = \frac{R_{pd}\sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\theta_p\right)\right)}}{h_p} \tag{B.4}$$

Como a soma dos quadrados do seno e cosseno de um ângulo é igual a um e considerando-se que γ_p é menor que 90°, reescreve-se B.1 na seguinte forma:

$$\Delta z_p = h_p \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}(\gamma_p)^2}\right. \tag{B.5}$$

Substituindo-se B.4 na expressão anterior, tem-se

$$\Delta z_p = h_p \cdot \left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{R_{pd}^{\,2}}{h_p^{\,2}}\left(1 - \cos(\theta_p)\right)}\right] \tag{B.6}$$

Se a aceleração da gravidade no local é g e considerando-se a expressão B.6, a energia potencial do pêndulo é expressa por:

$$U_p = M_{obj} \cdot g \cdot \Delta z_p = M_{obj} \cdot g \cdot h_p \cdot \left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{R_{pd}^{\,2}}{h_p^{\,2}}\left(1 - \cos(\theta_p)\right)}\right] \tag{B.7}$$

B.2.2 Energia Cinética

A energia cinética do pêndulo é composta por duas parcelas: a devida à rotação da massa suspensa (M_{obj}) em torno do eixo z e a relacionada com o deslocamento vertical dessa mesma massa.

Como a velocidade vertical é obtida através da derivação de B.6 em relação à variável tempo, a energia cinética é expressa por:

$$T_c = \frac{1}{2} \cdot M_{obj} \cdot \left[\frac{\frac{R_{pd}^{\,2}}{h_p} \cdot \sin\left(\theta_p(t)\right) \cdot \frac{d}{dt}\theta_p(t)}{\left[1 - 2 \cdot \frac{R_{pd}^{\,2}}{h_p^{\,2}} \cdot \left(1 - \cos\left(\theta_p(t)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\right]^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{obj} \cdot \left(\frac{d}{dt}\theta_p(t)\right)^2 \tag{B.8}$$

Onde:

J_{obj} é a inercial rotacional do objeto suspenso.

B.2.3 Equação do Movimento

A equação de Lagrange para o caso de um sistema com um único grau de liberdade e livre de forças dissipativas é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\left(\frac{d}{dt}q_o\right)}E_c\right]-\left(\frac{d}{dq_o}E_c\right)+\frac{d}{dq_o}U=0 \tag{B.9}$$

Onde:

q_o variável associada ao movimento;

E_c energia cinética do sistema;

U energia potencial do sistema.

Substituindo-se as expressões das energias potencial e cinética (B.7 e B.8) em B.9 resulta, após uma manipulação algébrica, a equação do movimento do pêndulo torcional.

$$P_1(\theta_p)\cdot\frac{d^2}{dt^2}\theta_p+P_2(\theta_p)\cdot\left(\frac{d}{dt}\theta_p\right)^2+P_3(\theta_p)=0 \tag{B.10}$$

Com:

$$P_1(\theta_p)=\frac{\left[M_{obj}\cdot R_{pd}{}^4\cdot\sin(\theta_p)^2+J_{obj}\cdot\left[h_p{}^2-2\cdot R_{pd}{}^2\cdot(1-\cos(\theta_p))\right.\right.}{\left[h_p{}^2-2\cdot R_{pd}{}^2\cdot(1-\cos(\theta_p))\right]}$$

$$P_2(\theta_p)=R_{pd}{}^4\cdot\sin(\theta_p)\cdot M_{obj}\cdot\frac{\left[\left(h_p{}^2-2\cdot R_{pd}{}^2\right)\cdot\cos(\theta_p)+R_{pd}{}^2\cdot\left(1+\cos(\theta_p)\right)^2\right.}{\left[h_p{}^2-2\cdot R_{pd}{}^2\cdot(1-\cos(\theta_p))\right]^2}$$

$$P_3(\theta_p)=M_{obj}\cdot g\cdot\frac{R_{pd}{}^2}{\left[h_p{}^2-2\cdot R_{pd}{}^2\cdot(1-\cos(\theta_p))\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\sin(\theta_p)$$

Expandindo-se $P_1(\theta_p)$, $P_2(\theta_p)$ e $P_3(\theta_p)$ em séries de Taylor até termos de 2ªordem e substituindo as expressões resultantes em B.10, obtém-se:

$$J_{obj} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta_p + R_{pd}^{\ 4} \cdot \frac{M_{obj}}{h_p^{\ 2}} \cdot \theta_p \cdot \left(\frac{d}{dt}\theta_p\right)^2 + M_{obj} \cdot g \cdot \frac{R_{pd}^{\ 2}}{h_p} \cdot \theta_p = 0 \qquad (B.11)$$

A linearização de B.11 fornece:

$$J_{obj} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta_p + M_{obj} \cdot g \cdot \frac{R_{pd}^{\ 2}}{h_p} \cdot \theta_p = 0 \qquad (B.12)$$

A solução de B.12 conduz à freqüência natural do pêndulo (f_p), dada por:

$$f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{M_{obj} \cdot g \cdot R_{pd}^{\ 2}}{J_{obj} \cdot h_p}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (B.13)$$

Através de B.13, obtém-se a expressão que relaciona a inércia rotacional da massa M_p com a freqüência natural do pêndulo:

$$J_{obj} = \frac{M_{obj} \cdot g}{h_p} \cdot \left(\frac{R_{pd}}{2 \cdot \pi \cdot f_p}\right)^2 \qquad (B.14)$$

B.3 LIMITAÇÕES

Na dedução de B.14, assumiram-se algumas restrições quanto à disposição geométrica dos cabos do pêndulo, bem como realizaram-se algumas aproximações (linearização da equação do movimento). Em termos práticos, essas restrições e aproximações limitam parâmetros de ensaio e requerem cuidados durante a execução dos testes.

As limitações listadas a seguir devem ser observadas para se obterem resultados satisfatórios com o pêndulo torcional.

- Os cabos devem ser paralelos, de mesmas dimensões e eqüidistantes do centro de rotação do pêndulo. Também devem ser suficientemente rígidos (suas extensões durante o movimento oscilatório devem ser desprezíveis frente ao deslocamento vertical do objeto suspenso);
- Pontos de fixação dos cabos no objeto devem se situar num mesmo plano que, por sua vez, deve ser paralelo ao plano de rotação;
- Peso do objeto deve ser equilibrado igualmente pelos cabos, ou seja, o centro de gravidade do objeto deve se situar no centro de rotação do pêndulo;
- A amplitude de oscilação deve ser inferior a 5° (10° pico-a-pico) para que as aproximações realizadas na linearização de B.10 sejam válidas. Nesse mesmo sentido, a relação entre o comprimento dos cabos e a distância dos pontos de fixação desses ao centro de rotação deve ser superior a seis ($h_p/R_{pd} > 6$).

B.4 UTILIZAÇÃO

Dependendo da configuração geométrica do objeto para o qual se quer determinar a inércia rotacional, a fixação dos cabos é impossível ou não é imediata (requer dispositivos ou adaptações). Nesses casos, é comum a utilização de uma base de apoio, conforme figura B.2.

A utilização de tal tipo de base requer a observação das mesmas restrições apresentadas no item B.3. Além disso, a sua inércia rotacional deve ser incluída na expressão (B.14), resultando:

$$J_{obj} = \frac{M_{obj} \cdot g}{h_p} \cdot \left(\frac{R_{pd}}{2 \cdot \pi \cdot f_p} \right)^2 - J_p \qquad \text{(B.15)}$$

A inércia J_p pode ser determinada com o próprio pêndulo ou através de cálculo matemático, caso sua configuração geométrica seja simples. Para o primeiro caso, reescreve-se a expressão anterior na seguinte forma:

$$J_{obj} = \frac{1}{4} \cdot g \cdot R_{pd}^{\ 2} \cdot \frac{\left(M_{obj} \cdot h_{po} \cdot f_{po}^{\ 2} - M_b \cdot h_p \cdot f_p^{\ 2} \right.}{\pi^2 \cdot h_{po} \cdot h_p \cdot \left(f_{po} \cdot f_p \right)^2} \qquad \text{(B.16)}$$

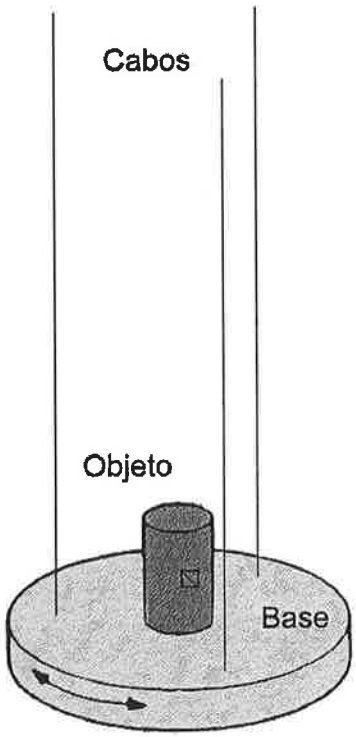


Figura B.3: Pêndulo torcional com base auxiliar.

Na expressão B.16, f_{po} e h_{po} são a freqüência e o comprimento dos cabos de sustentação do pêndulo quando não há objetos sobre a sua base auxiliar.

É praxe marcar círculos concêntricos na base de apoio, facilitando a centralização de objetos axissimétricos. Também é usual pré-dimensionar o pêndulo – através de dados aproximados - para que sua freqüência de oscilação se situe entre 0.2 e 2 Hz, permitindo, dessa forma, que se use um cronômetro manual para a determinação experimental dessa freqüência.

O valor mais provável da inércia rotacional do objeto é obtido através da expressão B.15, substituindo-se f_p pela média aritmética dos períodos de oscilação do pêndulo, determinados em vários ensaios consecutivos. Seguindo-se esse procedimento e tomando-se o cuidado de remover o objeto da base após cada teste, erros de centralização são minimizados.

Caso se utilize um cronômetro manual, deve-se observar um período mínimo de 120 segundos para a contagem das oscilações. Fazendo-se isso, o erro associado ao tempo de acionamento e interrupção do cronômetro – que, em média, é de 0.4s – se torna desprezível.

C ENCURTAMENTO DE UMA VIGA/COLUNA DEVIDO À FLEXÃO

Stephen P. Timoshenko (1878-1972)

Nascido e educado na Rússia, catedrático em Petrograd e Kiev, Timoshenko deixou o seu país e se estabeleceu nos Estados Unidos, após ensinar por um curto período em Belgrado e estudar com Prandtl. Professor nas faculdades de Michigan e Stanford, publicou livros sobre mecânica, teoria da elasticidade e vibração.

C.1 INTRODUÇÃO

A figura C.1 apresenta uma viga bi-apoiada sujeita aos carregamentos P e Q; um dos apoios é fixo (ponto A), enquanto o outro permite deslocamentos longitudinais. Por facilidade, a origem dos eixos coordenados é posicionada no ponto de apoio esquerdo, sendo o eixo x paralelo ao eixo da viga.

Caso se considere a viga inextensível, o deslocamento do apoio móvel do ponto C ao ponto B - devido ao carregamento indicado - é igual à diferença entre o comprimento da viga (L) e a projeção da sua linha elástica sobre o eixo x (segmento AB).

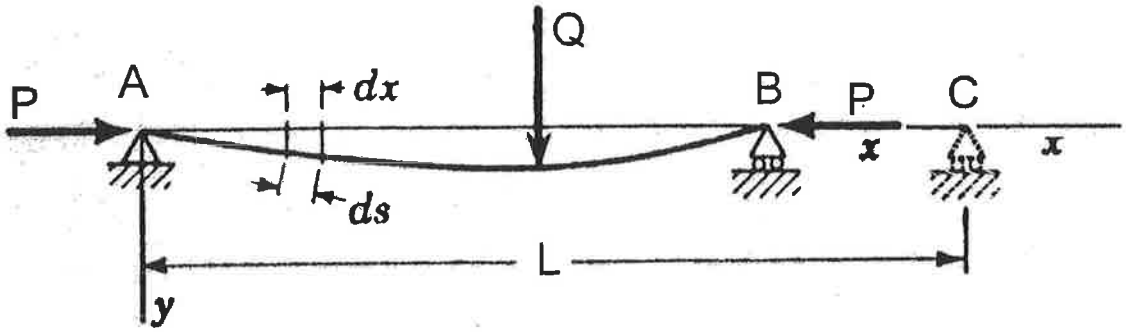


Figura C.1: Encurtamento de uma viga (segmentoBC) devido à flexão.

C.2 ENCURTAMENTO: EXPRESSÃO EXATA

A figura C.2 mostra o triângulo retângulo DEFD, formado pelos elementos infinitesimais ds (pertencente a linha elástica), dx (projeção de ds sobre o eixo x) e dy (deslocamento transversal relativo entre dois pontos da linha elástica separados pela distância ds). Através do teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{C.1}$$

Manipulando-se algebricamente a expressão acima, tem-se:

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{C.2}$$

Utilizando-se a expressão C.2, a fração do deslocamento do ponto de apoio B correspondente a um elemento ds é expresso por:

$$ds - dx = dx \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right] \tag{C.3}$$

O deslocamento total do ponto B é obtido através da integração de C.3 ao longo do comprimento da viga, ou seja:

$$BC = \int_0^L \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right] dx \tag{C.4}$$

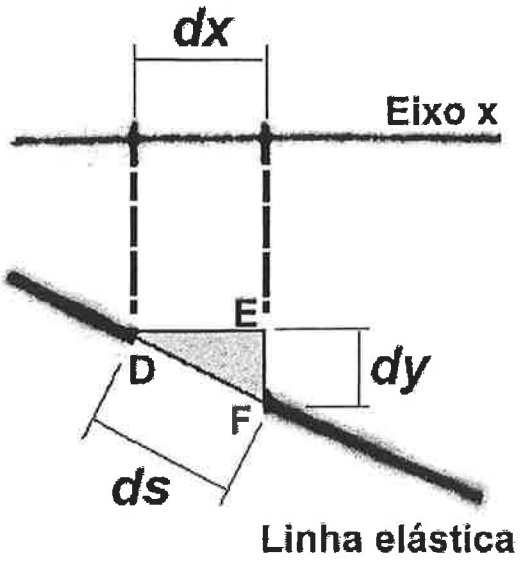


Figura C.2: Projeção de um elemento ds da linha elástica sobre o eixo x.

C.3 ENCURTAMENTO: EXPRESSÃO APROXIMADA

Expandindo-se o radical da expressão (C.2) em série de Taylor até termos de 2ª ordem, obtém-se:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \ldots.. \tag{C.5}$$

Substituindo-se C.5 em C.3, resulta:

$$ds - dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot dx \tag{C.6}$$

O deslocamento total aproximado do ponto B é obtido através da integração de C.6 ao longo do comprimento da viga, ou seja:

$$BC = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \tag{C.7}$$

A expressão C.7 é adotada por alguns autores para o cálculo do encurtamento de uma viga/coluna devido à flexão.