

José Jorge Nader

**HIPOPLASTICIDADE E
ELASTOPLASTICIDADE
PARA SOLOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da USP
para obtenção do título de Doutor em Engenharia

São Paulo, 1999

José Jorge Nader

**HIPOPLASTICIDADE E
ELASTOPLASTICIDADE
PARA SOLOS**

Orientador:

Prof. Dr. Carlos de Sousa Pinto

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Tese apresentada à Escola Politécnica da USP
para obtenção do título de Doutor em Engenharia

São Paulo, 1999

Devo muito aos amigos que me ajudaram das mais diferentes formas, especialmente ao Prof. Carlos de Sousa Pinto, com quem tive o prazer e o privilégio de conviver e trabalhar nos últimos dez anos.

RESUMO

O grande número de modelos constitutivos existentes, apresentados com diferentes graus de clareza e generalidade, e a terminologia variada tornam a compreensão dessa área da Mecânica dos Solos tarefa difícil.

Com o intuito de contribuir para a mudança dessa situação, foram escolhidas duas classes de modelos, os elastoplásticos e os hipoplásticos, para um estudo comparativo.

O primeiro passo é elaborar uma teoria da Elastoplasticidade, na linha da moderna Mecânica do Contínuo, cujas principais características são: obediência ao princípio da objetividade material, a tensão como solução de equação diferencial hipoeástica e como resposta à deformação imposta, o emprego exclusivo de tensores definidos na configuração corrente, como parece adequado para solos. Mostra-se que esta Elastoplasticidade e a Hipoplasticidade compartilham características fundamentais, mas tratam de modo muito distinto o fenômeno da irreversibilidade.

O modelo Cam-Clay é reconstruído e generalizado com o auxílio das equações elastoplásticas propostas. Soluções analíticas são obtidas em trajetórias retilíneas de tensão.

Na segunda parte deste trabalho é proposta uma nova equação hipoplástica, que envolve quatro constantes características do material, bem conhecidas na Mecânica dos Solos. Seu desempenho no confronto com resultados de diversos ensaios de laboratório com um solo siltoso (particularmente, ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão) e com as previsões do Cam-Clay está entre medianamente bom e bom. A inexistência do domínio elástico em Hipoplasticidade proporciona uma resposta mais realista que as do Cam-Clay (assim como de outros modelos elastoplásticos) nas trajetórias de tensão em que ocorre diminuição da tensão octaédrica.

A equação é capaz de reproduzir fenômenos e características importantes do comportamento dos solos, como o estado crítico, a envoltória de resistência, o comportamento normalizado, o comportamento em deformações proporcionais, as mudanças de comportamento em diferentes trajetórias de tensão e deformação.

A simplicidade da equação proposta permite uma análise de seu comportamento global que auxilia na sua compreensão e comparação com outros modelos. Os resultados principais são as soluções analíticas nas deformações proporcionais e um quadro sintético de respostas.

ABSTRACT

The great number of existing constitutive models, presented in different degrees of clarity and generality, and the varied terminology make the comprehension of this area of Soil Mechanics a difficult task.

With the aim of contributing to change this situation two classes of models, hypoplastic and elastoplastic models, have been chosen for a comparative study.

The first step is the development of a theory of Elastoplasticity in the lines of modern Continuum Mechanics, the main characteristics of which are: obedience to the principle of material objectivity, the stress as the solution of a hypoelastic differential equation and as a response to an imposed deformation, the exclusive use of tensors defined at the current configuration as it seems suitable for soils. It is shown that this Elastoplasticity and Hypoplasticity share fundamental characteristics but treat irreversibility in quite different ways.

The Cam-Clay model is reconstructed and generalized with the help of the proposed elastoplastic equations. Analytical solutions are obtained in straight stress paths.

In the second part of this work a new hypoplastic equation is proposed involving four material constants which are well-known in Soil Mechanics. Its performance in the prediction of results of several laboratory tests on a silty soil (especially triaxial tests along different stress paths) and as compared to Cam-Clay predictions lies between fairly good and good. The inexistence of an elastic domain in Hypoplasticity allows a more realistic response than that of Cam-Clay (as well as of other elastoplastic models) in stress paths in which the octahedral stress is reduced.

The equation is able to reproduce important soil characteristics and phenomena as critical states, strength envelope, normalized behaviour, behaviour in proportional deformations, changes in behaviour in different stress or strain paths.

The equation is simple enough to allow an analysis of its global behaviour, helping the comprehension and the comparison with other models. Main results are analytical solutions in proportional deformations and a synthetic response portrait.

Lista de Símbolos

- A_a : a parte anti-esférica (com traço nulo) de um tensor A .
- A^T : o transposto de um tensor A .
- A^{-1} : o inverso de um tensor A .
- $\|A\|$: norma de um tensor A .
- $A:B$: produto interno de dois tensores A e B , definido por $A:B = \text{tr}(A^T B)$.
- D : tensor estirante (“stretching”), a parte simétrica de L .
- D^e : estirante elástico.
- D^p : estirante plástico.
- E : tensor de deformação infinitesimal.
- $f: \text{Sym} \rightarrow R$: função de plastificação.
- F : gradiente da deformação.
- I_A, II_A, III_A : primeiro, segundo e terceiro invariantes principais de um tensor A .
- I : primeiro invariante de T ($I = I_T$).
- J : segundo invariante de T_* ($J = II_{T_*}$).
- k : parâmetro de endurecimento.
- L : gradiente espacial da velocidade.
- Lin : conjunto dos tensores (de 2ª. ordem).
- Lin^+ : conjunto dos tensores com determinante positivo.
- Orth : conjunto dos tensores ortogonais.
- Orth^+ : conjunto dos tensores ortogonais com determinante positivo.
- Psym : conjunto dos tensores simétricos, positivos-definidos.
- $p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$: tensão octaédrica.
- $q = \sigma_a - \sigma_r$: tensão desviadora.
- R : conjunto dos números reais.
- Skw : conjunto dos tensores anti-simétricos.
- Sym : conjunto dos tensores simétricos.
- t : tempo.

T : tensão de Cauchy.

T_a : a parte anti-esférica de T .

$\overset{\circ}{T}$: taxa corrotacional (de Jaumann) de T .

$tr A$: traço de um tensor A .

W : tensor girante ("spin"), a parte anti-simétrica de L .

θ : tensor nulo.

I : tensor identidade.

∇f : o gradiente de f .

ε_a : deformação logarítmica axial.

ε_r : deformação logarítmica radial.

$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$: deformação logarítmica volumétrica.

$\gamma = \varepsilon_a - \varepsilon_r$: distorção logarítmica.

σ_a : tensão axial.

σ_r : tensão radial.

$\eta = q / p$.

SUMÁRIO

Capítulo 1: INTRODUÇÃO	1.1
1.1 Objetivos.....	1.1
1.2 Apanhado histórico.....	1.4
Capítulo 2: HIPOELASTICIDADE, HIPOPLASTICIDADE E ELASTO- PLASTICIDADE	2.1
2.1 Introdução.....	2.1
2.2 Propriedades básicas.....	2.3
2.3 Hipoelasticidade.....	2.8
2.4 Hipoplasticidade.....	2.10
2.5 Elastoplasticidade.....	2.13
2.5.1 Funções constitutivas.....	2.14
2.5.2 O domínio elástico e a superfície de plastificação.....	2.14
2.5.3 A resposta do material.....	2.15
2.5.4 Irreversibilidade.....	2.21
2.5.5 A condição de continuidade.....	2.23
2.5.6 A decomposição do estirante em parcelas elástica e plástica e a lei de endurecimento.....	2.26

2.5.7 A condição de normalidade.....	2.27
2.5.8 Estado crítico.....	2.28
2.5.9 Comparação com a Elastoplasticidade clássica.....	2.30
2.5.10 Domínio elástico de gradientes da deformação e a decomposição do gradiente da deformação em fatores elástico e plástico.....	2.35
Capítulo 3: O MODELO CAM-CLAY.....	3.1
3.1 Introdução.....	3.1
3.2 Equações do modelo.....	3.3
3.3 Caracterização do solo e ensaios.....	3.11
3.4 Determinação das constantes do Cam-Clay.....	3.13
3.4.1 Determinação de λ e κ	3.13
3.4.2 Determinação de G e M	3.13
3.5 Confronto entre previsões teóricas e resultados experimentais nos ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão.....	3.16
3.6 Confronto entre previsões teóricas e resultados experimentais nos ensaios edométrico, K_0 , triaxial não-drenado e triaxiais drenados com carregamento cíclico.....	3.24
Capítulo 4: A EVOLUÇÃO DA HIPOPLASTICIDADE.....	4.1
Capítulo 5: A NOVA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA.....	5.1
5.1 Introdução.....	5.1
5.2 A equação.....	5.2
5.3 Determinação das constantes do modelo.....	5.8

5.3.1 Determinação de λ e κ	5.9
5.3.2 Determinação de M	5.10
5.3.3 Determinação de \tilde{G}	5.11
5.3.4 Comentários.....	5.12
5.4 Confronto entre previsões teóricas e resultados experimentais nos ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão	5.13
5.5 Confronto entre previsões teóricas e resultados experimentais nos ensaios edométrico, K_0 , triaxial não-drenado e triaxiais drenados com carregamento cíclico.....	5.25
5.6 Confronto entre previsões teóricas com $\kappa = 0,030$ e resultados experimentais..	5.34
Capítulo 6: ANÁLISE DA NOVA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA	6.1
6.1 Introdução.....	6.1
6.2 Deformações proporcionais.....	6.4
6.3 Quadro sintético de respostas.....	6.16
Capítulo 7: CONCLUSÃO	7.1

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

A primeira parte deste trabalho foi motivada pela situação atual no campo dos modelos constitutivos para solos.

O grande número de modelos existentes, apresentados com diferentes graus de clareza e generalidade, e a terminologia variada tornam a compreensão dessa área da Mecânica dos Solos, a comparação entre eles e a escolha de um deles para uma aplicação específica, tarefas difíceis.

Diante deste quadro, foram escolhidas duas classes de modelos, os elastoplásticos e os hipoplásticos, para um estudo comparativo que envolve uniformização e generalização¹.

A maior parte dos modelos constitutivos para solos, seguindo o caminho aberto pelo Cam-Clay na década de 1960, baseia-se na Elastoplasticidade² clássica. Esta teoria,

¹ O autor desenvolveu parte deste estudo comparativo no Instituto de Geotecnia e Túneis da Universidade de Innsbruck, Áustria.

² Neste trabalho (com exceção da seção 1.2, que contém um resumo histórico), emprega-se o termo Elastoplasticidade para designar as teorias conhecidas mais comumente por Plasticidade (as que contêm elementos como função de plastificação, domínio elástico etc). Neste contexto, entende-se por

não tendo sido incluída na revisão da Mecânica do Contínuo feita nas décadas de 1950 e 1960, permaneceu com pontos obscuros. Por exemplo, ela não obedece ao princípio da objetividade material, segundo o qual o comportamento dos materiais deve ser independente do referencial do qual se observa o movimento, ou, em outros termos, uma rotação rígida imposta a um corpo não deve alterar o estado de tensão. Além disso nela a deformação não é tratada com generalidade suficiente. Ao contrário, a Hipoplasticidade, proposta por Kolymbas na segunda metade da década de 1970 em Karlsruhe, Alemanha, como generalização da Hipoelasticidade, nasceu no âmbito da moderna Mecânica do Contínuo, suas equações são definidas com clareza e obedecem ao princípio mencionado.

O primeiro passo neste estudo comparativo (capítulo 2), foi elaborar uma teoria da Elastoplasticidade, na linha da moderna Mecânica do Contínuo, em que o movimento determina a tensão (a resposta do material), cujas equações obedeçam ao princípio da objetividade material e que sejam adequadas como base de modelos para solos. Mostra-se que esta Elastoplasticidade, a Hipoelasticidade e a Hipoplasticidade compartilham características fundamentais.

No capítulo 3, o modelo Cam-Clay é reconstruído e generalizado com o auxílio das equações elastoplásticas apresentadas no capítulo 2.

Na segunda parte deste trabalho é proposta uma nova equação hipoplástica, cuja criação foi motivada por dois problemas de caráter diferente.

Em primeiro lugar houve um motivo prático, específico: a representação do comportamento de um solo siltoso submetido a ensaios de laboratório, sobretudo ensaios

triaxiais com diferentes trajetórias de tensão. O surgimento da nova equação constitui-se num passo seguinte de uma linha de pesquisa liderada pelo Prof. Carlos de Sousa Pinto, na qual foi criado, por ele próprio, o modelo SUEF (Pinto e Nader, 1994) e foi estudado e aplicado o modelo Cam-Clay (Nader e Pinto, 1994), entre outros. É importante dizer que, antes que se empreendesse a criação de uma nova equação, tentou-se aplicar equações hipoplásticas existentes aos ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão realizados com esse solo siltoso, mas a qualidade da previsão foi ruim. Restou, então, trabalhar na criação da nova equação, que resultou ser uma das mais simples equações hipoplásticas, se não a mais simples. Apesar da simplicidade, a qualidade de suas previsões é razoável ou boa, na comparação com resultados experimentais de uma variada gama de ensaios (capítulo 5). O desempenho da nova equação é confrontado com o do Cam-Clay perante a mesma série de experimentos.

O segundo motivo é mais genérico e relaciona-se à conveniência em ter-se uma compreensão global do tipo de resposta que uma certa equação hipoplástica fornece. As razões pelas quais o modelo Cam-Clay é bem aceito e bem conhecido são que é simples, que descreve fenômenos importantes do comportamento dos solos, mesmo que quantitativamente possa falhar, e que pode ser explicado com auxílio da superfície de plastificação, da superfície do estado crítico, da superfície limite de estado. Com a Hipoplasticidade a situação é diferente: uma análise qualitativa global do comportamento teórico, mesmo das equações mais simples, é muito complexa, restando aos pesquisadores fazer análises locais (para cada estado de tensão) com auxílio das envoltórias de respostas de Gudehus (1979), ou realizar experimentos numéricos, necessariamente limitados em número. Assim, o segundo motivo a que se referiu acima é a criação de uma equação simples, que represente fenômenos básicos do comportamento

dos solos e que, através de uma análise qualitativa, produza um quadro de referência de respostas teóricas com o auxílio do qual ela possa ser compreendida de forma global (capítulo 6). Pelo menos como meta, pretendia-se que a nova equação hipoplástica fosse para os modelos hipoplásticos o que o Cam-Clay é para os elastoplásticos.

A nova equação envolve constantes bem conhecidas na Mecânica dos Solos, o que facilita sua determinação e a interpretação de resultados.

Ao longo de todo o trabalho, estão presentes conceitos e símbolos usados na moderna Mecânica do Contínuo, tais como aparecem nos livros de Gurtin (1981) e Truesdell e Noll (1965), aos quais se remete o leitor, caso necessário.

Na próxima seção, traça-se um breve histórico da evolução das equações constitutivas para sólidos e sua aplicação em Mecânica dos Solos, mostrando o contexto em que surgiram a Hipoplasticidade e as modernas teorias da Elastoplasticidade.

1.2 APANHADO HISTÓRICO

(Esta sinopse é ilustrada pela linha do tempo da página 1.9)

Desde o começo do século, a Elasticidade Linear e a Plasticidade Perfeita já eram empregadas em engenharia, em particular em Mecânica dos Solos, como pode ser constatado no clássico *Theoretical Soil Mechanics*, de Terzaghi, publicado em 1943. No primeiro capítulo deste livro, o autor divide em problemas de deformação e problemas de ruptura os casos práticos da Engenharia Geotécnica que requerem uso de teorias da mecânica dos sólidos. Na solução dos primeiros era usada a Elasticidade Linear. Para os

problemas de ruptura a Plasticidade Perfeita fornecia resultados úteis, como, por exemplo, para o cálculo da capacidade de carga de fundações diretas.

Na década de 1950, a Teoria da Plasticidade conheceu um período de evolução, em que se destacam o livro *Introduction to the Mathematical Theory of Plasticity*, de Hill (1950) e vários artigos (Drucker, 1950, 1959, 1966, Drucker e Prager, 1952, Hill, 1958, Prager, 1949). As pesquisas focalizavam, além da Plasticidade Perfeita, a Plasticidade com endurecimento. As pesquisas em Plasticidade desenvolviam-se numa linha que pode ser chamada Mecânica Aplicada, caracterizada pela proximidade com as aplicações e por um rigor menor do que o da Matemática. Mais claramente, nas teorias desenvolvidas nessa linha o problema da deformação de sólidos não é tratado de forma geral, hipóteses às vezes não são claramente separadas de resultados, teoremas incluem hipóteses tácitas.

Drucker, Gibson e Henkel (1957) mostraram como os novos conceitos da Teoria da Plasticidade podiam servir para representar fenômenos importantes da deformação dos solos. Simultaneamente pesquisas experimentais importantes vinham sendo feitas na Inglaterra. Sob a liderança de Roscoe, o grupo da Universidade de Cambridge iniciou, no final da década de 1950, a elaboração de uma teoria para o comportamento dos solos partindo do conceito de estado crítico. Incorporando os novos conceitos da Teoria da Plasticidade, que, como mostrado por Drucker, Gibson e Henkel, eram promissores, chegaram, pouco antes da metade da década de 1960, ao modelo Cam-Clay (Schofield e Wroth, 1968, Roscoe e Burland, 1968).

Também no início da década de 1950, um grupo de matemáticos liderados por Truesdell e Noll iniciava uma revolução na Mecânica do Contínuo. Começaram a reorganizar a disciplina desde os conceitos mais primitivos. Criaram uma teoria geral do

comportamento dos materiais, reorganizaram antigas teorias como a Elasticidade e a Viscoelasticidade e criaram novas equações constitutivas como as da Hipoelasticidade. Esta linha de pesquisa, conhecida como Mecânica Racional, caracteriza-se pela generalidade com que trata a deformação dos materiais, pela clareza e rigor matemático. Os principais avanços foram publicados no *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. O trabalho realizado até o início da década de 1960 foi condensado em dois volumes do *Handbuch der Physik : The Classical Field Theories* (1960) de Truesdell e Toupin e *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1965) de Truesdell e Noll. A influência do tratado *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* pode ser notada em todo trabalho importante no campo da Mecânica do Contínuo (aplicada ou não) publicado depois de 1965. Truesdell e Noll não abordaram algumas teorias tais como a Plasticidade por não se enquadrarem na teoria dos materiais simples de Noll³, e, especialmente, por não obedecerem a um princípio fundamental da mecânica do contínuo na forma mais rigorosa dada por eles: o princípio da objetividade material. A partir de então, na mesma linha, continuaram as pesquisas em Elasticidade, Viscoelasticidade, Termodinâmica do Contínuo etc. Em Plasticidade, os primeiros esforços para desenvolvê-la na linha da Mecânica Racional devem-se a Pipkin e Rivlin (1965) e Owen (1968, 1970), iniciando a teoria dos materiais com domínio elástico, e a Green e Naghdi (1965). Nos trabalhos de Lee e Liu (1967) e Lee (1969), na linha de Mecânica Aplicada, surge a idéia de decompor o gradiente da deformação em produto de fatores elástico e plástico. A teoria dos materiais com domínio elástico prosseguiu na Mecânica Racional

³ Em 1972, Noll publicou uma nova teoria dos materiais simples, mais ampla, elaborada com a finalidade de abranger teorias anteriormente excluídas, como a Plasticidade.

com Silhavý (1977), Lucchesi e Podio-Guidugli (1988, 1990, 1995) e Lucchesi *et al.* (1992,1993)⁴. Essas teorias modernas da Plasticidade são às vezes identificadas pelo termo Plasticidade Finita.

Voltando à Mecânica dos Solos, após o surgimento do Cam-Clay, abriu-se nova linha de pesquisa. Outros modelos foram propostos, alguns deles semelhantes ao Cam-Clay, mas com leis de endurecimento mais complexas (p. ex., Mróz *et. al.*, 1979). Contudo, tal evolução processa-se até hoje, em grande parte, na linha tradicional, desconsiderando a revolução da Mecânica do Contínuo, seus princípios fundamentais e as modernas teorias da Plasticidade mencionadas no parágrafo anterior, que se desenvolvem simultaneamente.

A teoria de Elastoplasticidade desenvolvida nesta tese procura aproximar-se da linha da Mecânica Racional mas é diferente das modernas teorias de Plasticidade, voltadas ao comportamento dos metais. Uma diferença importante é que, ao utilizar equações hipoeelásticas, a teoria apresentada nesta tese não privilegia nenhuma configuração de referência, como parece apropriado para solos.

Uma linha de pesquisa inovadora em modelos constitutivos para solos, inspirada na moderna Mecânica do Contínuo, surgiu no final da década de 1960, na Universidade de Karlsruhe, Alemanha, conduzida por Gudehus. Lá, Kolymbas (1978) propôs uma generalização da Hipoeelasticidade, que passou a ser chamada Hipoplasticidade. Como se sabe, na equação constitutiva da Hipoeelasticidade está presente uma função linear do

⁴ Mais informações sobre a evolução da Plasticidade moderna são dadas por Antman (1995), que também resume pontos problemáticos da Plasticidade clássica, e por Naghdi (1990).

tensor estirante D (a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade). Kolymbas, abandonando a linearidade em D , produziu uma equação capaz de representar a irreversibilidade de deformações que se observa nos solos. É interessante que, com uma única equação, pode-se representar o comportamento em carregamento e descarregamento. O capítulo 4 traz mais informações a respeito da evolução da Hipoplasticidade⁵.

Atualmente, a Hipoplasticidade é estudada sobretudo no Instituto de Geotecnia e Túneis da Universidade de Innsbruck, Áustria, dirigido pelo Prof. D. Kolymbas, e no Instituto de Mecânica dos Solos e das Rochas da Universidade de Karlsruhe, Alemanha, dirigido pelo Prof. G. Gudehus. Comparações entre Hipoplasticidade e Elastoplasticidade são encontradas em trabalhos de pesquisadores da área de Hipoplasticidade (p.ex., Kolymbas, 1993, Niemunis, 1993) e têm também a finalidade de divulgá-la entre os estudiosos de Elastoplasticidade (consulte-se, por exemplo, na *home page* www.uibk.ac.at/c/c8/c813/res/hytopl.html, uma breve análise comparativa com o interesse de divulgação, elaborada pelo autor desta tese).

⁵ Deve-se mencionar que pesquisadores de Grenoble, França, desenvolveram um modelo chamado Cloe (Chambon et al. 1994), cujas equações são semelhantes a algumas equações hipoplásticas.

Linha do tempo

	1940	1950	1960	1970	1980	1990
MECÂNICA APLICADA	ELASTICIDADE LINEAR					
	PLASTICIDADE PERFEITA	PLASTICIDADE COM ENDURECIMENTO		INFLUÊNCIA DA MECÂNICA RACIONAL, PLASTICIDADE FINITA		
MECÂNICA RACIONAL		REORGANIZAÇÃO DA MECÂNICA DO CONTÍNUO, TEORIA DOS MATERIAIS SIMPLES, ELASTICIDADE FINITA, HIPOELASTICIDADE		PLASTICIDADE FINITA, TEORIA DOS MATERIAIS COM DOMÍNIO ELÁSTICO		
				TERMODINÂMICA RACIONAL		
MECÂNICA DOS SOLOS	TEORIA DO ADENSAMENTO					
	TEORIA DE CAPACIDADE DE CARGA			CAM-CLAY	MODELOS CONSTITUTIVOS BASEADOS NA PLASTICIDADE CLÁSSICA	HIPOPLASTICIDADE

2 HIPOELASTICIDADE, HIPOPLASTICIDADE E ELASTOPLASTICIDADE

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se um estudo comparativo de Hipoelasticidade, Hipoplasticidade e de uma teoria da Elastoplasticidade, proposta nesta tese, procurando deixar claros os conceitos e hipóteses empregados. Mostra-se que essas teorias possuem características fundamentais em comum.

Para a Mecânica dos Solos são mais importantes a Hipoplasticidade e a Elastoplasticidade, pois nelas, principalmente na segunda, está baseada a maioria dos modelos constitutivos. A Hipoelasticidade foi incluída, e é termo comparativo importante, porque dela surgiu a Hipoplasticidade como generalização e também porque as equações constitutivas da Elastoplasticidade, tal como construída nesta tese, são hipoelásticas.

As equações elastoplásticas deste trabalho originam-se de uma modificação das equações constitutivas da Elastoplasticidade clássica e pretendem substituí-las como fundamento de modelos para solos. Assim como nas teorias nascidas na moderna Mecânica do Contínuo (p.ex. Hipoelasticidade) ou sob sua influência (p.ex. Hipoplasticidade), mas em contraste com a Elastoplasticidade clássica, nesta teoria da

Elastoplasticidade a tensão representa a resposta do material à deformação imposta e suas equações obedecem ao princípio da objetividade material. Apesar dessas diferenças importantes para com a Elastoplasticidade clássica, existem bastantes semelhanças para que os modelos constitutivos para solos baseados na teoria clássica possam ser reconstruídos facilmente com a teoria proposta, como, por exemplo, foi feito com o modelo Cam-Clay (capítulo 3). As equações elastoplásticas mais gerais obtidas contemplam o amolecimento, não incluído na teoria tradicional, e são uma evolução do material apresentado por Nader (1995). Embora apenas o caso de endurecimento isotrópico seja abordado, a extensão para endurecimento isotrópico e cinemático combinados segue essencialmente a mesma linha, tendo já sido feita, porém não será apresentada.

É preciso mencionar que, nos últimos trinta anos, equações constitutivas elastoplásticas que obedecem ao princípio da objetividade têm sido propostas como correção da teoria clássica (veja-se o capítulo 1). Porém, para a maioria dos autores, o foco de aplicação está nos metais, o que imprime às suas teorias características que as tornam inadequadas para os solos e, portanto, são sensivelmente diferentes da apresentada neste trabalho. Acontece que nessas teorias existe uma configuração de referência preferencial, o que não ocorre com os solos. Parece mais apropriado, em Mecânica dos Solos, trabalhar com tensores de tensão e velocidade de deformação definidos na configuração corrente: utilizam-se nesta tese a tensão de Cauchy e o gradiente espacial da velocidade. Em Mecânica dos Solos interessa saber que alteração ocorrerá na tensão, a partir do *estado atual*, se for imposta uma certa deformação.

Um ponto de divergência entre algumas teorias modernas de Elastoplasticidade encontra-se no modo como é feita a separação da deformação em partes elástica e

plástica. A maioria dos autores tem preferido trabalhar com a decomposição em produto do gradiente da deformação (p.ex. Lucchesi *et al.*, 1992). Da forma como está organizada a teoria apresentada neste trabalho, nenhuma decomposição é necessária enquanto definições e critérios gerais são expostos, depois do que, para que um paralelo com outras teorias fique mais claro, faz-se a decomposição em soma do tensor estirante (a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade). Não obstante, pode ser mostrado que, sob certas hipóteses, as duas formas de decomposição podem conviver. A escolha dos tensores que medem a velocidade com que se altera a tensão e a velocidade de deformação também divide os pesquisadores. Aqui trabalha-se com a taxa corrotacional da tensão de Cauchy (a derivada de Jaumann) e com o gradiente espacial da velocidade, ao passo que, na Elastoplasticidade clássica, empregam-se as derivadas comuns da tensão de Cauchy e do tensor de deformação infinitesimal, fazendo com que a equação constitutiva resultante não obedeça ao princípio da objetividade material.

2.2 PROPRIEDADES BÁSICAS

A Elastoplasticidade, da maneira como é construída neste trabalho, a Hipoelasticidade e a Hipoplasticidade possuem propriedades básicas semelhantes, conforme será mostrado a seguir. As importantes diferenças que há entre elas serão discutidas nas seções posteriores deste capítulo, quando cada uma dessas teorias será tratada separadamente.

Consideremos o gradiente da deformação num ponto do corpo dado por uma função de classe C^1 do tempo $F = F(t)$, definida num intervalo I , e que, num instante $t = t_0$ de I , a tensão nesse ponto seja T_0 . Em geral o gradiente da deformação é dado por uma função de classe C^1 por partes e a descrição seguinte aplica-se a subintervalos em que a restrição dessa função é de classe C^1 .

Nas equações constitutivas tomarão parte os tensores estirante e girante, definidos por $D = \text{sym}(\dot{F}(t)F^{-1}(t))$ e $W = \text{skw}(\dot{F}(t)F^{-1}(t))$, respectivamente, em que sym indica a parte simétrica de um tensor, enquanto skw indica sua parte anti-simétrica, e o ponto superposto representa derivada em relação ao tempo.

Tanto para os materiais elastoplásticos como para os materiais hipoeelásticos e hipoplásticos, a tensão de Cauchy $T(t)$, que representa a resposta à deformação especificada num certo intervalo, é a solução de uma equação diferencial ordinária

$$\dot{T} = h(T, D) + WT - TW,$$

com a condição inicial $T(t_0) = T_0$. A função h deve ter propriedades que garantam existência e unicidade da solução.

Normalmente exprime-se a equação acima usando a derivada de Jaumann (ou taxa corrotacional de T) definida por $\overset{\circ}{T} = \dot{T} - WT + TW$:

$$\overset{\circ}{T} = h(T, D). \quad (2.1)$$

Esta é a equação constitutiva básica das teorias examinadas neste capítulo. Em Elastoplasticidade, há equações constitutivas subsidiárias.

Os materiais são caracterizados, em parte, pela função h , à qual se impõem certas restrições, que podem ser divididas em dois grupos. O primeiro grupo é de restrições

obedecidas por todos os materiais elastoplásticos, hipoeelásticos e hipoplásticos segundo contém restrições determinantes de algumas propriedades de certos materiais

a) Restrições essenciais

a.1) restrição imposta pelo princípio da objetividade material

De acordo com este princípio, o comportamento dos materiais deve ser independente do observador (veja-se, por exemplo, Truesdell and Noll, 1965).

A tensão de Cauchy, sua taxa corrotacional e o tensor estirante transformam-se, numa mudança de observador, de acordo com: $T^* = QTQ^T$, $D^* = QDQ^T$ e $\overset{\circ}{T}^* = Q\overset{\circ}{T}Q^T$, em que Q é o tensor ortogonal que relaciona os movimentos relativos aos dois referenciais.

Matematicamente, o princípio da objetividade material requer que, se T , D e $\overset{\circ}{T}$ satisfazem (2.1), então T^* , D^* e $\overset{\circ}{T}^*$, relacionados a T , D e $\overset{\circ}{T}$ por uma mudança de observador arbitrária, também a satisfaçam: $Q\overset{\circ}{T}Q^T = h(QTQ^T, QDQ^T)$ para todo tensor ortogonal Q . Como $\overset{\circ}{T} = h(T, D)$, então deve valer:

$$Qh(T, D)Q^T = h(QTQ^T, QDQ^T)$$

mostrando que a função h deve ser isotrópica nos seus dois argumentos.

a.2) Restrição imposta pela independência da velocidade de deformação

Hipoelasticidade, Hipoplasticidade e Elastoplasticidade procuram representar materiais que não exibem comportamento viscoso, cujo comportamento não depende da

velocidade de deformação ou da velocidade de aplicação da tensão. De modo mais preciso, a tensão num certo instante depende da seqüência de deformações sofridas pelo material e não da velocidade com que estas deformações tenham sido impostas. Matematicamente, essa exigência traduz-se da seguinte forma:

Dado $F(t)$ definido em $[0, \infty)$, seja $T(t)$ a solução de (2.1) com a condição inicial $T(0) = T_0$. Consideremos agora uma função diferenciável e estritamente crescente $\alpha(t)$ definida $[0, \infty)$, com $\alpha(0) = 0$ (uma função como esta é chamada função de mudança da escala de tempo) e um novo gradiente de deformação definido por $\tilde{F}(t) = F(\alpha(t))$, que representa uma seqüência de gradientes de deformação idêntica à anterior, mas percorrida com diferente velocidade (enquanto na segunda deformação um certo gradiente é atingido num tempo t , na primeira deformação o mesmo gradiente é atingido num tempo $\alpha(t)$). Note-se que $\tilde{F}(0) = F(0)$. Pode-se calcular facilmente:

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \dot{\alpha}(t)F'(\alpha(t)),$$

$$\tilde{D}(t) = \dot{\alpha}(t)D(\alpha(t)),$$

$$\tilde{W}(t) = \dot{\alpha}(t)W(\alpha(t)).$$

Deseja-se que a resposta em termos de tensão seja a mesma, isto é, que a um mesmo valor do gradiente corresponda a mesma tensão. Impõe-se, portanto, que $\tilde{T}(t) = T(\alpha(t))$ seja solução de (2.1), qualquer que seja $\alpha(t)$ com as propriedades mencionadas no parágrafo anterior. A condição inicial está satisfeita porque $\tilde{T}(0) = T(\alpha(0)) = T(0) = T_0$. Com $\dot{\tilde{T}}(t) = \dot{\alpha}(t)T'(\alpha(t))$ e as relações acima, obtemos:

$$\overset{\circ}{\tilde{T}}(t) = \dot{\alpha}(t)\overset{\circ}{T}(\alpha(t)) = h(\tilde{T}(t), \tilde{D}(t)) = h(T(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)D(\alpha(t)))$$

Mas, por hipótese, $\overset{\circ}{T}(\alpha(t)) = h(T(\alpha(t)), D(\alpha(t)))$. Assim,

$$\dot{\alpha}(t)h(T(\alpha(t)), D(\alpha(t))) = h(T(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)D(\alpha(t))).$$

Como $F(t)$ e $\alpha(t)$ (e, portanto, $\dot{\alpha}(t)$) são arbitrários, deduz-se que h deve ser positivamente homogênea de grau 1 em D (com qualquer número real positivo a , pode-se construir $\alpha(t) = at$).

b) Restrições determinantes de algumas propriedades

b.1) Restrição imposta pela existência da superfície do estado crítico

É observado em experimentos que os solos, quando submetidos a certas deformações com distorção crescente, tendem a um estado, chamado crítico, em que a taxa de variação volumétrica e a taxa de variação de tensão tendem a zero. Em termos gerais, devem existir pares (T, D) , com $\text{tr}D = 0$, que satisfaçam $h(T, D) = 0$ e os primeiros elementos de todos esses pares devem formar a superfície do estado crítico.

b.2) Restrição imposta pela existência de comportamento normalizado

Observa-se em experimentos com alguns solos o que se chama de comportamento normalizado. De forma geral, pode-se expressá-lo matematicamente do seguinte modo:

Consideremos que o material, inicialmente sob tensão $T(0) = T_0$, seja submetido a deformação com gradiente $F = F(t)$ e que sua resposta seja $T = T(t)$, que satisfaz a equação (2.1). Seja, agora, o mesmo material, inicialmente sob tensão $\hat{T}(0) = \lambda T_0$, $\lambda > 0$, submetido a deformação com mesmo gradiente $F = F(t)$. Dizer que o material tem comportamento normalizado significa dizer que a solução da equação (2.1) é, neste

último caso, $\hat{T} = \hat{T}(t) = \lambda T(t)$. Examinemos as conseqüências desta propriedade, notando, em primeiro lugar, que a condição inicial está verificada $\hat{T}(0) = \lambda T_0$.

Comparando

$$\dot{\hat{T}} - W\hat{T} + \hat{T}W = h(\hat{T}, D) = h(\lambda T, D)$$

e

$$\dot{\hat{T}} - W\hat{T} + \hat{T}W = \lambda \dot{T} - W\lambda T + \lambda TW = \lambda \overset{\circ}{T} = \lambda h(T, D),$$

obtemos

$$h(\lambda T, D) = \lambda h(T, D).$$

Dada a arbitrariedade das grandezas envolvidas, conclui-se que h deve ser positivamente homogênea de grau 1 em T .

Se evocarmos esta propriedade de homogeneidade, concluímos que, se T pertence à superfície do estado crítico ($h(T, D) = 0$), então λT também pertence, qualquer que seja λ positivo: a superfície do estado crítico é cônica.

2.3 HIPOELASTICIDADE

Consideremos o gradiente da deformação num ponto do corpo dado por uma função do tempo de classe C^1 : $F = F(t)$ e que, em $t = t_0$, a tensão é T_0 . Nos materiais hipoeelásticos a resposta é dada por $T(t)$ satisfazendo $T(t_0) = T_0$ e

$$\overset{\circ}{T} = h(T, D) \tag{2.2}$$

em que a função h é linear em D .

Uma propriedade importante dos materiais hipoeásticos é a chamada reversibilidade, conferida justamente por ser h linear em D .

Para esclarecer este ponto, estudemos a resposta dos materiais hipoeásticos num ciclo de deformação cujo gradiente, no intervalo de tempo $[0, 2b]$ é dado por:

$$\begin{aligned} t \mapsto F_1 &= F(t), \quad 0 \leq t \leq b \\ t \mapsto F_2 &= F(2b - t), \quad b \leq t \leq 2b \end{aligned} \quad (2.3)$$

A função F é definida num intervalo de números reais contendo $[0, b]$, e é de classe C^1 .

Nota-se, então, que o gradiente percorre uma curva, primeiro num sentido, depois noutro.

Seja $T_1 = T_1(t)$ a solução de (2.2) no intervalo $[0, b]$, com a condição $T_1(0) = T_0$. Será provado que a solução de (2.2) no intervalo $[b, 2b]$, com a condição $T_2(2b) = T_0$, é $T_2 = T_2(t) = T_1(2b - t)$ e que, portanto, a trajetória de tensão é a mesma do intervalo precedente, a menos do sentido de percurso, que agora é o contrário. De fato, usando as relações:

$$\dot{F}_2 = -\dot{F}(2b - t)$$

$$D_2 = -D(2b - t)$$

$$W_2 = -W(2b - t)$$

verificamos, por substituição, que $T_2 = T_2(t) = T_1(2b - t)$ é solução de (2.2):

$$\dot{T}_2 = h(T_2, D_2) + W_2 T_2 - T_2 W_2,$$

$$-\dot{T}_1(2b - t) = h(T_1(2b - t), -D(2b - t)) - W(2b - t)T_1(2b - t) + T_1(2b - t)W(2b - t) \text{ e,}$$

daí,

$$\dot{T}_1(2b - t) = h(T_1(2b - t), D(2b - t)) + W(2b - t)T_1(2b - t) - T_1(2b - t)W(2b - t),$$

que é verdadeira, por hipótese. A condição $T_2(2b) = T_1(0) = T_0$ também está satisfeita.

Com isso foi mostrado que a tensão também completa um ciclo, e dizemos que há reversibilidade. É importante enfatizar que essencial para a existência desta propriedade é valer $h(T, -D) = -h(T, D)$. Isto ocorre em Hipoelasticidade, mas não em Elastoplasticidade e Hipoplasticidade, como veremos nas seções seguintes.

Finalmente, deve-se chamar a atenção para o caráter restrito dos ciclos de deformação considerados. Algumas vezes interessa-nos conhecer o comportamento do material em ciclos mais gerais em que apenas os pontos inicial e final coincidem. Nestes casos ocorre irreversibilidade também em Hipoelasticidade, a menos que a equação hipoelástica seja a de um material elástico.

2.4 HIPOPLASTICIDADE

Consideremos o gradiente da deformação num ponto do corpo d^2d função do tempo de classe C^1 : $F = F(t)$ e que, em $t = t_0$ hipoplásticos a resposta é dada por $T(t)$ satisfazendo $T(t)$

$$\dot{T} = h(T, D)$$

em que a função h é estritamente positiva homogênea

$ah(T, D)$ para todo D não-nulo e todo T , se e

Logo, a função h é não-linear irreversibilidade com uma única equação,

demonstração da seção anterior). Num ciclo de deformação como (2.3), a tensão não realiza um ciclo.

Todas as equações hipoplásticas já propostas têm a seguinte forma (veja-se, por exemplo, Kolymbas, 1991):

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \mathbf{L}(\mathbf{T})[\mathbf{D}] + \|\mathbf{D}\|\mathbf{N}(\mathbf{T}) \quad (2.4)$$

que, por isso, merece atenção especial. Para cada \mathbf{T} , $\mathbf{L}(\mathbf{T})$ é um tensor de quarta ordem invertível e $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ é um tensor de segunda ordem; $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}$ é a norma de \mathbf{D} .

Para que (2.4) obedeça ao princípio da objetividade material, as funções $(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mapsto \mathbf{L}(\mathbf{T})[\mathbf{D}]$ e $\mathbf{T} \mapsto \mathbf{N}(\mathbf{T})$ devem ser isotrópicas.

Além disso, $\mathbf{L}(\mathbf{T})$ e $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ devem ser tais que produzam a superfície do estado crítico, caso se deseje representar esta característica fundamental do comportamento dos solos. Recordando o que foi visto na seção 2.2, diz-se que (\mathbf{T}, \mathbf{D}) , com \mathbf{D} não-nulo, é um par de estado crítico, se \mathbf{T} e \mathbf{D} satisfazem simultaneamente:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L}(\mathbf{T})[\mathbf{D}] + \|\mathbf{D}\|\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \mathbf{L}(\mathbf{T})[\mathbf{D} + \|\mathbf{D}\|\mathbf{L}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{N}(\mathbf{T})]] = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\text{tr}\mathbf{D} = 0 \quad (2.6)$$

Os primeiros elementos de todos esses pares formam a superfície do estado crítico.

Por ser $\mathbf{L}(\mathbf{T})$ invertível, (2.5) é equivalente a

$$\mathbf{D} = -\|\mathbf{D}\|\mathbf{L}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{N}(\mathbf{T})]. \quad (2.7)$$

Uma vez que \mathbf{D} não é nulo, a equação acima implica:

$$\|\mathbf{L}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{N}(\mathbf{T})]\| = 1, \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.6) obtemos

$$\text{tr}(\mathbf{L}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{N}(\mathbf{T})]) = 0. \quad (2.9)$$

Ou seja, se (T, D) , com D não-nulo, é um par de estado crítico, então T e D satisfazem (2.7) e T satisfaz (2.8) e (2.9), que devem definir a mesma superfície, restringindo assim $L(T)$ e $N(T)$.

Suponhamos agora que T satisfaça (2.8) e (2.9), mostraremos que este T , junto com $D = -\alpha L(T)^{-1}[N(T)]$, $\alpha > 0$, forma um par de estado crítico. Como (2.8) está satisfeita por hipótese, decorre $\alpha = \|D\|$ e, portanto, (2.7) se satisfaz. Como (2.9) está satisfeita por hipótese, (2.6) também está.

Ainda no âmbito da eq. 2.4, é possível e conveniente isolar D , em alguns casos. É o que ocorre quando se deseja simular ensaios de laboratório nos quais se impõe a trajetória de tensão. Para isso, aplicamos $L(T)^{-1}$ a ambos os membros de (2.4):

$$L(T)^{-1}[\dot{T}] = D + L(T)^{-1}[N(T)]\|D\|.$$

Introduzindo, por simplicidade, $A = L(T)^{-1}[\dot{T}]$ e $B = L(T)^{-1}[N(T)]$, obtemos:

$$D = A - B\|D\| \quad (2.10)$$

Vamos analisar três casos e, em cada um, determinar D , se possível. Auxiliará a interpretação ressaltar que $\|B\| = 1$ (cf. 2.8) e $B:B = 1$ são equivalentes e definem a superfície do estado crítico.

I) $A = 0$ (equivalente a $\dot{T} = 0$): resulta $D = B\|D\|$. Se $\|B\| = 1$, qualquer D da forma $D = -\alpha B$, $\alpha \geq 0$, é solução; se não, $D = 0$ é a única solução.

II) $B = 0$ (equivalente a $N(T) = 0$): resulta $D = A = L(T)^{-1}[\dot{T}]$.

III) $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Fazendo o produto interno de cada membro de (2.10) por si mesmo, obtemos:

$$(B:B - 1)\|D\|^2 - 2A:B\|D\| + A:A = 0$$

cuja solução será procurada no conjunto dos números reais positivos (como $A \neq 0$, então 0 não é solução). Depois de determinado $\|D\|$, D é encontrado por (2.10).

a) Se $B:B=1$ e $A:B > 0$, a solução é $\|D\| = A:A/2A:B$ e, portanto,
 $D = A - (A:A/2A:B)B$.

b) Se $B:B=1$, $A:B \leq 0$, não há solução.

c) Se $B:B < 1$, o produto das raízes da equação do segundo grau $\frac{A:A}{B:B-1} < 0$ e

há apenas uma solução (raiz positiva) que é:

$$\|D\| = \frac{A:B - \sqrt{(A:B)^2 - A:A(B:B-1)}}{B:B-1}$$

d) Se $B:B > 1$, caso as duas raízes

$$\frac{A:B \pm \sqrt{(A:B)^2 - A:A(B:B-1)}}{B:B-1}$$

sejam reais positivas, ambas são solução; senão (se não há raiz real ou se há duas raízes reais negativas) não há solução.

Da análise feita acima conclui-se que, se $B:B < 1$ (região definida como interior da região limitada pela superfície do estado crítico), então T determina D univocamente.

2.5 ELASTOPLASTICIDADE

Consideremos o gradiente da deformação num ponto do corpo, dado por uma função do tempo t ,

$$F : I = [a, b] \subset R \rightarrow Lin^+, F = F(t) ,$$

de classe C^1 .

A resposta do material elastoplástico é caracterizada pela função $T: I \rightarrow Sym$, que associa a cada instante t a tensão de Cauchy $T(t)$. Na descrição da resposta do material aparecerá a função $k: I \rightarrow R$, que associa a cada instante t o parâmetro de endurecimento $k(t)$.

Na exposição da teoria será feita menção à derivada de uma função do tempo num extremo do intervalo fechado em que está definida, significando derivada unilateral.

2.5.1) Funções constitutivas

O material elastoplástico é caracterizado por três funções constitutivas:

$$A: Sym \rightarrow Lin(Sym),$$

$$B: Sym \rightarrow Sym ,$$

(sendo $Lin(Sym)$ um espaço de tensores de quarta ordem) e a função de plastificação:

$$f: Sym \rightarrow R ,$$

de classe C^1 .

O princípio da objetividade material impõe restrições a essas funções, conforme será visto nas próximas seções.

2.5.2) O domínio elástico e a superfície de plastificação

Em cada $t \in I$, o conjunto

$$E(t) = \{M \in Sym / f(M) \leq k(t)\},$$

chamado domínio elástico, é uma região fechada e conexa; sua fronteira,

$$\partial E(t) = \{M \in Sym / f(M) = k(t)\},$$

é a superfície de plastificação, que é regular, visto que f é diferenciável.

É um axioma desta teoria que

$$T(t) \in E(t), \quad \forall t \in I. \quad (2.11)$$

O fato de um certo T pertencer ou não à superfície de plastificação não deve depender do observador. Por isso, estabelece-se, como mais um axioma, que f seja objetiva, isto é:

$$f(QTQ^T) = f(T)$$

para todo $T \in Sym$ e todo $Q \in Orth$, ou seja, a função de plastificação deve ser isotrópica, podendo ser expressa como uma função de I_T , II_T e III_T , os invariantes principais de T : existe $g: R^3 \rightarrow R$, definida por $g(I_T, II_T, III_T) = f(T)$.

Mais adiante será empregado o gradiente da função de plastificação, $\nabla f(T)$, que, como é possível demonstrar, também é isotrópico:

$$\nabla f(QTQ^T) = Q\nabla f(T)Q^T$$

e, portanto, objetivo.

2.5.3) A resposta do material

Suponhamos que em $t_0 \in [a, b]$ a tensão seja T_0 e o parâmetro de endurecimento seja k_0 , satisfazendo o axioma estabelecido em (2.11): $f(T_0) \leq k_0$.

Especifica-se agora a resposta do material, isto é, a função $t \mapsto T(t)$, juntamente com a função $t \mapsto k(t)$, em subintervalos $J = [t_0, \tau]$, $a \leq t_0 < \tau \leq b$. Deve ser lembrado que será usado o conceito de derivada unilateral em pontos extremos do intervalo. Por simplicidade, introduzem-se $\psi(T, D) = A(T)[D]: \nabla f(T)$ e $D_0 = D(t_0)$.

Há dois tipos de resposta: regime elástico e regime elastoplástico.

Caracterização de regimes elásticos

Suponhamos que a situação inicial seja um dos três casos seguintes:

Caso I: $f(T_0) < k_0$,

Caso II: $f(T_0) = k_0$ e $\psi(T_0, D_0) < 0$,

Caso III: $f(T_0) = k_0$ e $\psi(T_0, D_0) = 0$.

A resposta é dada por $T(t)$ satisfazendo $T(t_0) = T_0$ e

$$\overset{\circ}{T} = A(T)[D] \quad (2.12)$$

em todo intervalo $J = [t_0, \tau]$, tal que $f(T(t)) \leq k_0$ (isto é, $T(t) \in E(t_0)$), $\forall t \in J$. Em tais intervalos diz-se que o regime é elástico e o parâmetro de endurecimento é constante:

$$k(t) = k_0 \quad .$$

Nos casos I e II sempre existem intervalos como acima especificado ao passo que, no caso III, eles podem ser vazios. Isso é demonstrado em seguida.

No caso I ($f(T_0) < k_0$), existem intervalos tais como acima, dada a continuidade das funções envolvidas.

Nos casos II e III, em que $f(\mathbf{T}_0) = k_0$, existem intervalos com acima especificado se e somente se $f(\mathbf{T}(t))$ é decrescente numa vizinhança à direita de t_0 . Mostraremos que a situação inicial pode dar informação sobre o crescimento de $f(\mathbf{T}(t))$. Para tanto, observemos que, em regime elástico, tendo em vista (2.12), vale

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{T}(t)) = \nabla f(\mathbf{T}(t)) : \dot{\mathbf{T}}(t) = \nabla f(\mathbf{T}(t)) : \overset{\circ}{\mathbf{T}}(t) = \nabla f(\mathbf{T}(t)) : \mathbf{A}(\mathbf{T}(t))[\mathbf{D}(t)] = \psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$$

Assim, no caso II, em que $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}(t_0), \mathbf{D}(t_0)) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{T}(t_0)) < 0$, intervalos tais como acima existem pois $f(\mathbf{T}(t))$ é decrescente numa vizinhança à direita de t_0 . Além disso, sendo $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) < 0$, então $\nabla f(\mathbf{T}_0) : \dot{\mathbf{T}}(t_0) < 0$, isto é, interpretando geometricamente, $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$ é dirigido para o interior do domínio elástico em t_0 .

No caso III, em que $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}(t_0), \mathbf{D}(t_0)) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{T}(t_0)) = 0$, a situação inicial não é suficiente para determinar se há ou não intervalos como especificado.

Caracterização de regimes elastoplásticos

Suponhamos que a situação inicial seja um dos dois casos seguintes:

Caso III: $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) = 0$,

Caso IV: $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) > 0$.

A resposta é dada por $\mathbf{T}(t)$ satisfazendo $\mathbf{T}(t_0) = \mathbf{T}_0$ e

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{D}] + \psi(\mathbf{T}, \mathbf{D})\mathbf{B}(\mathbf{T}), \quad (2.13)$$

em todo intervalo $J = [t_0, \tau]$, tal que $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t)) > 0$, $\forall t \in (t_0, \tau)$. Nesses intervalos J , diz-se que o regime é elastoplástico e o parâmetro de endurecimento altera-se de acordo com

$$k(t) = f(\mathbf{T}(t)) \quad (2.14)$$

No caso IV sempre existem intervalos como acima especificado; porém, no caso III, eles podem ser vazios, conforme se mostra a seguir.

Que no caso IV ($f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) > 0$), tais intervalos sempre existam, fica claro pela continuidade das funções envolvidas.

No caso III ($f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) = 0$) haverá intervalos como acima se e só se $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$ for crescente numa vizinhança à direita de t_0 .

Estudo do caso III

Resta examinar o caso III com mais pormenores, pois até agora sabe-se apenas que ele pode dar início a um regime elástico ou elastoplástico. Será demonstrado que ele sempre dá início a um e a apenas um regime.

Sendo, no caso III, $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) = 0$, podemos verificar se ocorre um ou outro regime examinando as derivadas de $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$ (desejamos saber se $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$ é crescente ou decrescente numa vizinhança à direita de t_0).

Sendo $A(\mathbf{T})^T$ o transposto de $A(\mathbf{T})$, podemos escrever $\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \mathbf{D} : A(\mathbf{T})^T [\nabla f(\mathbf{T})]$. Introduzindo $\mathbf{P}(\mathbf{T}) = A(\mathbf{T})^T [\nabla f(\mathbf{T})]$, desejamos calcular a derivada da função composta $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t)) = \mathbf{D}(t) : \mathbf{P}(\mathbf{T}(t))$, que é

$$\frac{d\psi}{dt}(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t)) = \dot{\mathbf{D}}(t) : \mathbf{P}(\mathbf{T}(t)) + \mathbf{D}(t) : \mathbf{P}'(\mathbf{T}(t))[\dot{\mathbf{T}}(t)]$$

em que \mathbf{P}' indica a derivada de \mathbf{P} . Como ambas as equações (2.12) e (2.13) dão o mesmo valor a $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$, então, pela equação acima, $\frac{d\psi}{dt}(\mathbf{T}(t_0), \mathbf{D}(t_0))$ é o mesmo quer se use a solução de (2.12) quer, a de (2.13), sendo apenas uma dessas soluções compatível

com o sinal de $\frac{d\psi}{dt}(\mathbf{T}(t_0), \mathbf{D}(t_0))$ (supondo que seja diferente de 0), mostrando que um e apenas um dos regimes acontece.

A evolução de k em regime elastoplástico

Podemos obter mais informações sobre a alteração de k em regime elastoplástico derivando em relação ao tempo ambos os membros de (2.14), tendo em vista a equação (2.13):

$$\dot{k} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{T}) = \nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \nabla f(\mathbf{T}) : [A(\mathbf{T})[D] + \psi(\mathbf{T}, D)\mathbf{B}(\mathbf{T})] = \psi(\mathbf{T}, D)\mu(\mathbf{T}) \quad (2.15)$$

em que se introduziu $\mu(\mathbf{T}) = 1 + \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{B}(\mathbf{T})$.

Diz-se que endurecimento, amolecimento ou plastificação perfeita acontecem caso $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}$ (que é igual a \dot{k}) seja positivo ($\dot{\mathbf{T}}$ aponta para fora do domínio elástico), negativo ($\dot{\mathbf{T}}$ aponta para dentro do domínio elástico) ou nulo ($\dot{\mathbf{T}}$ é tangente à superfície de plastificação ou nulo), o que é determinado por $\mu(\mathbf{T})$, já que $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t)) > 0$ em (t_0, τ) .

Em suma e comparando com a caracterização dos regimes elásticos vê-se que:

- 1) Se $f(\mathbf{T}_0) < k_0$, então segue-se regime elástico.
- 2) Se $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) < 0$, então segue-se regime elástico e $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$ aponta para dentro do domínio elástico.

3) Se $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) > 0$, então segue-se regime elastoplástico e $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$ pode apontar para dentro ou para fora do domínio elástico ou ainda ser tangente à superfície de plastificação dependendo de $\mu(\mathbf{T})$.

4) Se $f(\mathbf{T}_0) = k_0$ e $\psi(\mathbf{T}_0, \mathbf{D}_0) = 0$, então $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$ é tangente à superfície de plastificação e podemos verificar se ocorre um ou outro regime examinando as derivadas de $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$ (desejamos saber se $\psi(\mathbf{T}(t), \mathbf{D}(t))$ é crescente ou decrescente numa vizinhança à direita de t_0).

Assim, as definições dos regimes são compatíveis no sentido de que a ocorrência de um impede a do outro. Note-se que, nos casos em que $f(\mathbf{T}_0) = k_0$, o critério de plastificação não pode ser estabelecido em termos do sentido de $\dot{\mathbf{T}}(t_0)$, pois, se apontar para dentro do domínio elástico ou for tangente à superfície de plastificação, o regime que se segue pode ser elástico ou elastoplástico. Contudo, se apontar para fora, o regime fica bem determinado: é elastoplástico.

Restrições impostas pelo princípio da objetividade material sobre as funções constitutivas

A função $(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{D}]$ deve ser isotrópica para que (2.12) seja objetiva:

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{D}]\mathbf{Q}^T .$$

quaisquer que sejam $\mathbf{T}, \mathbf{D} \in \text{Sym}$ e $\mathbf{Q} \in \text{Orth}$.

Note-se que $\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ resulta objetivo.

Para que (2.13) seja objetiva, também a função $\mathbf{T} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{T})$ deve ser isotrópica:

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{T})\mathbf{Q}^T .$$

quaisquer que sejam $\mathbf{T} \in \text{Sym}$ e $\mathbf{Q} \in \text{Orth}$.

Síntese

Em vista do que foi estudado acima, podemos redescrever a resposta do material de modo mais sintético, se for $\mu(T) \neq 0$ (nesse caso, segundo (2.15), em regime elastoplástico vale $\psi(T, D) = \dot{k} / \mu(T)$):

A resposta é dada por $T(t)$ satisfazendo $T(t_0) = T_0$ e

$$\overset{\circ}{T} = A(T)[D] + \frac{\dot{k}}{\mu(T)} B(T) ,$$

sendo $\dot{k} = 0$, em regime elástico, e $\dot{k} = \mu(T)\psi(T, D)$, em regime elastoplástico, com a condição $k(t_0) = k_0$ em ambos os casos.

2.5.4 Irreversibilidade

Vimos que a tensão satisfaz (2.12), se o regime for elástico, e (2.13), se o regime for elastoplástico.

Estudaremos a resposta dos materiais elastoplásticos num ciclo de deformação cujo gradiente é dado por (2.3), repetido abaixo:

$$t \rightarrow F_1 = F(t), \quad 0 \leq t \leq b$$

$$t \rightarrow F_2 = F(2b - t), \quad b \leq t \leq 2b .$$

É interessante analisar dois casos.

Caso A

Suponhamos que o regime seja elástico em $[0, b]$. Seja $T_1 = T_1(t)$ a solução de (2.12) no intervalo $[0, b]$, com a condição $T_1(0) = T_0$, ou seja, $T_1 = T_1(t)$ pertence ao domínio elástico em qualquer instante desse intervalo.

Em $[b, 2b]$ o regime também é elástico, pois, de acordo com a demonstração feita na seção 2.3, a solução de (2.13) no intervalo $[b, 2b]$, com a condição $T_2(2b) = T_0$, é $T_2 = T_2(t) = T_1(2b - t)$ e que, portanto, descreve a mesma trajetória de tensão do intervalo precedente, a menos do sentido de percurso, permanecendo no domínio elástico. O material comporta-se como hipoeelástico em todo o intervalo $[0, 2b]$ (cf. seção 2.3)

Com isso concluímos que a tensão também faz um ciclo completo, e diz-se que há reversibilidade.

Caso B

Suponhamos que o regime seja elastoplástico em $[0, b]$. Seja $T_1 = T_1(t)$ a solução de (2.13) no intervalo $[0, b]$, com a condição $T_1(0) = T_0$. De acordo com a teoria apresentada, por ser o regime elastoplástico, $\psi(T_1(t), D_1(t)) > 0$ em $(0, b)$ e $f(T_1(t)) = k(t)$ em $[0, b]$.

A problema é determinar que regime ocorrerá em $[b, 2b]$, quando a deformação for revertida.

Por causa da continuidade das funções envolvidas $\psi(T_1(b), D_1(b))$ é positivo ou nulo. Assim, $\psi(T_2(b), D_2(b))$ é negativo ou nulo, respectivamente, pois $D_2(b) = -D_1(b)$ e $T_2(b) = T_1(b)$.

Caso $\psi(T_2(b), D_2(b))$ seja negativo, de acordo com a caracterização dos regimes, seguir-se-á regime elástico num certo intervalo, podendo o ciclo de deformação completar-se em regime elástico se b for suficientemente pequeno; a tensão ao final será diferente de T_0 , embora o gradiente da deformação tenha voltado ao seu valor inicial.

Se $\psi(T_2(b), D_2(b))$ é nulo, provaremos que, também neste caso, se seguirá regime elástico num certo intervalo. Suponhamos, ao contrário da tese, que o regime que se seguirá seja elastoplástico num intervalo $[b, b+c]$, $c \leq b$, e que, portanto, a resposta seja dada pela solução de (2.13). Analogamente à análise feita no caso anterior, pode-se concluir que $T_2 = T_2(t) = T_1(2b-t)$. A trajetória seria a mesma do intervalo $[b-c, b]$, porém percorrida em sentido contrário. Em qualquer instante $t \in [b, b+c]$, valeria $\psi(T_2(t), D_2(t)) = \psi(T_1(2b-t), -D_1(2b-t)) = -\psi(T_1(2b-t), D_1(2b-t))$. Mas, como o regime era elastoplástico em $[b-c, b]$, então $\psi(T_1(2b-t), D_1(2b-t)) > 0$ em $(b-c, b)$ e, por conseguinte, $\psi(T_2(t), D_2(t)) < 0$ em $(b, b+c)$, contrariando a hipótese de que o regime seria também elastoplástico em $[b, b+c]$. Conclusão: o regime é elástico num certo intervalo à direita de $t = b$ e, nele, $T_2 = T_2(t)$ deve satisfazer (2.12). Aqui vale a mesma observação: o ciclo de deformação pode completar-se em regime elástico se b for suficientemente pequeno, mas a tensão não retoma o valor inicial.

Com isso foi mostrado como a irreversibilidade do comportamento dos materiais é levada em conta em Elastoplasticidade.

Em ciclos nos quais apenas os pontos inicial e final coincidem, ocorre irreversibilidade mesmo dentro do domínio elástico, a menos que a equação hipoeástica do regime elástico seja a de um material elástico.

2.5.5) A condição de continuidade

Os membros direitos de (2.12) e (2.13) são dados por funções lineares em D .

Além disso, para cada T , se D é tal que $\psi(T, D) = 0$, então o valor dado pelas duas funções é o mesmo, qual seja, $A(T)[D]$. Por isso diz-se que vale a condição de continuidade (que será estabelecida em termos mais gerais a seguir).

Para melhor ilustrar a questão, suponhamos que $f(T_0) = k_0$ e que $F_1(t)$ seja tal que $\psi(T_1(t), D_1(t)) = 0$ num certo intervalo à direita de t_0 , de modo que o regime seja elástico, a resposta $T_1(t)$ seja dada pela solução de (2.12) e a tensão se desloque sobre a superfície de plastificação fixa. Se o gradiente da deformação fosse $F_2(t)$, um pouco diferente de $F_1(t)$, e levasse a regime elastoplástico, com $\psi(T_2(t), D_2(t)) > 0$ numa vizinhança à direita de t_0 , a resposta $T_2(t)$, solução de (2.13), não seria muito diferente, em virtude da propriedade mencionada no parágrafo anterior.

Demonstraremos que a forma da função linear presente na equação (2.13) é necessariamente aquela, para que se verifique a condição de continuidade.

Com esta finalidade, substituamos (2.13) por uma equação mais geral:

$$\overset{\circ}{T} = C(T)[D] \quad (2.16)$$

Impõe-se agora a condição de continuidade: para T fixo, a função que associa a cada D :

$$A(T)[D], \text{ se } \psi(T, D) \leq 0$$

e

$$C(T)[D], \text{ se } \psi(T, D) > 0,$$

deve ser contínua.

Portanto, qualquer que seja T , se D é tal que $\psi(T, D) = A(T)[D] : \nabla f(T) = 0$, então deve valer $C(T)[D] = A(T)[D]$.

Introduzindo $P(T) = A(T)^\top [\nabla f(T)]$, podemos escrever $\psi(T, D) = D:P(T)$. Para que se verifique a condição de continuidade, fixado T , os operadores lineares $A(T)$ e $C(T)$ assumem os mesmos valores quando calculados em tensores simétricos ortogonais a $P(T)$.

Fixado T , com $P(T) \neq 0$, pelo teorema da projeção (p. ex. Halmos, 1958) todo tensor D pode ser escrito como a soma de um tensor que é múltiplo de $P(T)$ e de um tensor ortogonal a $P(T)$:

$$D = \alpha(T)P(T) + M(T) ,$$

com $M(T):P(T) = 0$. Fazendo o produto interno de ambos os membros da equação acima por $P(T)$, encontramos

$$\alpha(T) = D:P(T) / P(T):P(T) = \psi(T, D) / P(T):P(T) .$$

Assim, voltando a (2.16):

$$C(T)[D] = \alpha(T)C(T)[P(T)] + C(T)[M(T)] .$$

Segundo a condição de continuidade, $C(T)[M(T)] = A(T)[M(T)]$ e, portanto:

$$C(T)[D] = \alpha(T)C(T)[P(T)] + A(T)[M(T)] .$$

Mas $M(T) = D - \alpha(T)P(T)$. Logo $A(T)[M(T)] = A(T)[D] - \alpha(T)A(T)[P(T)]$ e

$$C(T)[D] = \alpha(T)(C(T) - A(T))[P(T)] + A(T)[D] .$$

Definindo $B(T) = (C(T) - A(T))[P(T)] / P(T):P(T)$ e levando em conta a expressão de $\alpha(T)$, obtemos

$$C(T)[D] = \psi(T, D)B(T) + A(T)[D] .$$

2.5.6) A decomposição do estirante em parcelas elástica e plástica e a lei de endurecimento

Se $A(T)$ é invertível, no regime elástico vale

$$D = A(T)^{-1}[\dot{T}]$$

e, no regime elastoplástico, isolando D em (2.13):

$$D = A(T)^{-1}[\dot{T}] - \frac{\nabla f(T) : \dot{T}}{\mu(T)} A(T)^{-1}[B(T)] ,$$

desde que $\mu(T) \neq 0$.

As expressões acima sugerem interpretar D como sendo composto de uma parte elástica e uma plástica: $D = D^e + D^p$. A parte elástica é $D^e = A(T)^{-1}[\dot{T}]$ e a parte plástica é $D^p = \theta$, se o regime for elástico, e

$$D^p = -\frac{\nabla f(T) : \dot{T}}{\mu(T)} A(T)^{-1}[B(T)] = -\psi(T, D) A(T)^{-1}[B(T)] \quad (2.17)$$

se o regime for elastoplástico.

O próximo passo é estabelecer uma relação entre a evolução de k e a deformação plástica. De (2.17):

$$\psi(T, D) = \frac{\|D^p\|}{\|A(T)^{-1}[B(T)]\|} \quad (2.18)$$

Tendo em vista (2.15):

$$\dot{k} = \frac{\|D^p\|}{\|A(T)^{-1}[B(T)]\|} \mu(T) \quad (2.19)$$

Tradicionalmente, especifica-se de início a lei de evolução do parâmetro de endurecimento k em função de D^p (lei de endurecimento). A expressão deduzida acima mostra-nos que forma devem ter tais leis bem como sua relação com as outras funções da teoria. Consideremos, então, a seguinte lei de endurecimento, na qual \dot{k} é dado por uma função positivamente homogênea de grau 1 em D^p (para que o comportamento seja não-viscoso):

$$\dot{k} = \xi(\mathbf{T}, \mathbf{D}^p) = \|\mathbf{D}^p\| \xi(\mathbf{T}, \mathbf{D}^p / \|\mathbf{D}^p\|).$$

Esta equação, comparada com (2.19), revela a relação entre a nova função e as anteriormente introduzidas:

$$\xi(\mathbf{T}, -\mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{T})]) = \mu(\mathbf{T}).$$

A nova função herda a objetividade da antiga.

2.5.7) A condição de normalidade

Se a função \mathbf{B} for da forma $\mathbf{B}(\mathbf{T}) = \beta(\mathbf{T})\mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})]$, com $\beta(\mathbf{T}) < 0$ para todo \mathbf{T} , então:

$$\mathbf{D}^p = -\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D})\beta(\mathbf{T}) \nabla f(\mathbf{T}) \quad (2.20)$$

Neste caso, diz-se que se verifica a condição de normalidade: em qualquer instante de um regime elastoplástico \mathbf{D}^p e $\nabla f(\mathbf{T})$ são linearmente dependentes, e, assim, \mathbf{D}^p é normal à superfície de plastificação no ponto \mathbf{T} . Além disso, uma vez que $-\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D})\beta(\mathbf{T})$ é positivo, \mathbf{D}^p e $\nabla f(\mathbf{T})$ apontam para o mesmo lado da superfície de plastificação.

Por (2.17) e (2.19), com $\nabla f(\mathbf{T}): \mathbf{B}(\mathbf{T}) = \beta(\mathbf{T}) \nabla f(\mathbf{T}): \mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})]$, vale:

$$\mathbf{D}^p = -\frac{\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}}{1 + \beta(\mathbf{T}) \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{A}(\mathbf{T}) [\nabla f(\mathbf{T})]} \beta(\mathbf{T}) \nabla f(\mathbf{T}) ,$$

$$\dot{k} = \frac{\|\mathbf{D}^p\|}{\|\nabla f(\mathbf{T})\|} \mu(\mathbf{T}) .$$

Trataremos brevemente, agora, dois pontos explorados em teorias termodinâmicas da plasticidade.

Valendo a condição de normalidade, a potência do tensionamento na deformação plástica, definida por $\dot{\mathbf{T}} : \mathbf{D}^p$, é positiva em caso de endurecimento e negativa em caso de amolecimento, pois, por (2.20):

$$\dot{\mathbf{T}} : \mathbf{D}^p = -\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \beta(\mathbf{T}) \dot{\mathbf{T}} : \nabla f(\mathbf{T})$$

Suponhamos que $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{E}(t_0)$, $\mathbf{T}_0 \in \partial \mathbf{E}(t_0)$, que em $[t_0, t_1]$ o regime seja elastoplástico, que $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{E}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ e que valha a condição de normalidade. O trabalho das tensões na deformação plástica no intervalo $[t_0, t]$, por unidade de volume na configuração de referência (em t_0), definido por

$$\int_{t_0}^t (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} : \mathbf{D}^p d\tau = \int_{t_0}^t (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} : [-\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \beta(\mathbf{T}) \nabla f(\mathbf{T})] d\tau$$

é positivo ou nulo, qualquer que seja t , se a superfície de plastificação for convexa. De fato, sempre $\det \mathbf{F} [-\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \beta(\mathbf{T})] > 0$ e, se a superfície de plastificação for convexa, então $\mathbf{T} : \nabla f(\mathbf{T}) \geq 0$.

2.5.8 Estado Crítico

Em Elastoplasticidade o estado crítico deve existir em regime elastoplástico. A definição dada na seção 2.2 precisa ser completada de modo a incluir essa característica.

Diz-se que (T, D) , com $D \neq 0$, é um par de estado crítico se e somente se

$$\dot{T} = A(T)[D] + \psi(T, D)B(T) = \theta, \quad (2.21)$$

$$\text{tr}D = 0 \quad (2.22)$$

estiverem simultaneamente satisfeitas.

É interessante explorar a definição acima a fim de deduzir a equação da superfície do estado crítico e investigar as restrições impostas às funções constitutivas pela existência do estado crítico. Isso é feito mostrando-se que as duas equações acima são equivalentes a:

$$\mu(T) = 0 \quad (2.23)$$

$$\exists \gamma < 0 / D = \gamma A(T)^{-1}[B(T)], \quad (2.24)$$

$$\text{tr}(A(T)^{-1}[B(T)]) = 0 \quad (2.25)$$

De (2.21) deduz-se (2.24), sendo $\gamma = -\psi(T, D)$.

Fazendo o produto interno de ambos os membros de (2.21) por $\nabla f(T)$, obtemos:

$$\nabla f(T) : [A(T)[D] + \psi(T, D)B(T)] = \psi(T, D)\mu(T) = 0,$$

que implica (2.23), que é a equação da superfície do estado crítico.

De (2.24) e (2.22) deduz-se (2.25), que deve definir a mesma superfície do estado crítico.

Passemos à demonstração no sentido inverso. De (2.24) resulta

$$A(T)[D] - \gamma B(T) = \theta. \quad (2.26)$$

Calculando $\psi(T, D)$, com D dado por (2.24), deduz-se $\gamma = -\psi(T, D)$, que, colocado em (2.26), produz (2.21).

De (2.24) e (2.25), obtemos (2.22).

2.5.9) Comparação com a Elastoplasticidade clássica

As apresentações usuais de Elastoplasticidade clássica não se enquadram no estilo da moderna Mecânica do Contínuo. A teoria é normalmente construída sem abordar o problema da deformação de forma geral, sem separar claramente hipóteses de resultados, e muitas vezes, sem definir claramente que tensores de deformação e tensão são usados. Além disso, não é exigida obediência ao princípio de objetividade material, nem são impostas restrições de outra ordem sobre as funções constitutivas. Em alguns livros e artigos que tratam a Elastoplasticidade clássica, incrementos de deformação são dados como função de incrementos de tensão, sem que o significado desses incrementos seja explicado. Para que tenham sentido, tais incrementos devem ser interpretados como derivadas temporais de funções cujos valores são algum tensor de deformação e algum tensor de tensão. Em um nível de clareza um pouco superior, alguns trabalhos revelam que se trata do tensor de deformação infinitesimal E e da tensão de Cauchy T . Nesses termos é importante repetir que as equações fornecem a derivada temporal do tensor de deformação infinitesimal em função da derivada temporal da tensão de Cauchy, ou seja, supõe-se dada a função $T(t)$ e, como resultado, obtém-se $\dot{E}(t)$. Disso decorre que não há informação suficiente para a determinação do gradiente da deformação $F(t)$. Além disso a teoria não é capaz de representar amolecimento, um fenômeno no qual duas deformações diferentes podem levar à mesma alteração de tensão. Note-se que a colocação do problema é diferente daquela empregada na teoria dos materiais de Truesdell e Noll (1965) na qual o movimento deve determinar a tensão. Um modo de resolver esta falha da Elastoplasticidade clássica é exigir que seja possível inverter as

relações, de modo a exprimir $\dot{T}(t)$ como função de $T(t)$ e $\dot{E}(t)$ e, coerentemente, alterar o critério de plastificação, que é tradicionalmente estabelecido em termos de tensões exclusivamente. Com isso o movimento passa a determinar a tensão, mas resta o problema da obediência ao princípio da objetividade material.

Uma teoria de Elastoplasticidade clássica, com as correções mencionadas no parágrafo anterior, mas que continua não obedecendo ao princípio da objetividade material, é obtida se, nas equações da teoria apresentada nas subseções anteriores, D for substituído por $\dot{E}(t)$ e a derivada de Jaumann de T for substituída pela derivada ordinária. Sucintamente, na teoria assim obtida, designada de agora em diante por Elastoplasticidade clássica, quer o regime seja elástico, quer seja elastoplástico, a equação constitutiva tem a forma

$$\dot{T} = f(T)[\dot{E}], \quad (2.22)$$

em que \dot{E} é a derivada em relação ao tempo do tensor de deformação infinitesimal.

Na Elastoplasticidade apresentada neste trabalho, assim como em Hipoelasticidade e Hipoplasticidade, a equação constitutiva é da forma

$$\overset{\circ}{T} = f(T)[D]. \quad (2.23)$$

Vamos comparar essas duas equações quanto à aproximação de suas soluções.

Consideremos soluções $T_1(t)$ e $T_2(t)$ das equações (2.22) e (2.23), respectivamente, que satisfazem a mesma condição inicial $T_1(0) = T_2(0) = T_0$.

Investigaremos em que condições essas duas funções se aproximam.

Antes de tudo, recordemos algumas relações cinemáticas.

Seja $F = F(t)$ o gradiente da deformação no instante t , dado por uma função de classe C^1 , com $F(0) = I$ (em $t = 0$, o corpo ocupa a configuração de referência).

Definem-se o gradiente do deslocamento: $H = F - I$, o tensor de deformação infinitesimal: $E = \text{sym}H$, o gradiente espacial da velocidade: $L = \dot{F}F^{-1}$, o estirante: $D = \text{sym}L$, o girante: $W = \text{skw}L$. A decomposição polar do gradiente da deformação fornece $F = RU$, em que R é a rotação e U , o estiramento direito. Algumas relações entre eles são:

$$D = R(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^{-1} / 2 \quad ,$$

$$W = \dot{R}R^{-1} + R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^{-1} / 2 \quad ,$$

$$\dot{E} = (\dot{R}U + R\dot{U} + U\dot{R}^{-1} + \dot{U}R^{-1}) / 2 \quad ,$$

$$D = \dot{E}F^{-1} + (F^{-T}\dot{F}^T - \dot{F}^T F^{-1}) / 2 = \text{sym}(\dot{E}F^{-1} - \dot{F}^T F^{-1}) \quad .$$

Em $t = 0$, na configuração de referência (identificada pelo índice 0), sendo $F(0) = R(0) = U(0) = I$, decorrem:

$$D_0 = \dot{E}_0 = \dot{U}_0 \quad , \quad (2.24)$$

$$W_0 = \dot{R}_0 \quad . \quad (2.25)$$

Voltando às equações constitutivas e suas soluções, como $T_1(t)$ e $T_2(t)$ são diferenciáveis, valem:

$$T_1(t) = T_0 + \dot{T}_1(0)t + o(t) \quad , \quad (2.26)$$

$$T_2(t) = T_0 + \dot{T}_2(0)t + o(t) \quad , \quad (2.27)$$

à medida que $t \rightarrow 0$. Mas, por (2.22) e (2.23): $\dot{T}_1(0) = f(T_0)[\dot{E}_0]$ e $\dot{T}_2(0) = f(T_0)[D_0] + W_0T_0 - T_0W_0$. Assim, em vista de (2.24), (2.26) e (2.27) tornam-se:

$$T_1(t) = T_0 + f(T_0)[\dot{E}_0]t + o(t) \quad , \quad (2.28)$$

$$T_2(t) = T_0 + f(T_0)[\dot{E}_0]t + (W_0T_0 - T_0W_0)t + o(t) \quad , \quad (2.29)$$

que, por comparação, fornecem:

$$T_2(t) = T_1(t) + (W_0 T_0 - T_0 W_0)t + o(t) .$$

Ou seja, mesmo desprezando os termos de ordem superior a t , as duas soluções não se aproximam, a menos que $W_0 T_0 - T_0 W_0 = \theta$. Isto ocorre se na configuração de referência a tensão for hidrostática $T_0 = \alpha I$, α escalar, ou se $W_0 = \theta$.

Podemos ir adiante introduzindo $E(t) = \dot{E}_0 t + o(t)$ e $R(t) = I + \dot{R}_0 t + o(t)$, com o auxílio de (2.25), em (2.28) e (2.29), para obtermos as seguintes relações tensão-deformação:

$$T_1(t) = T_0 + f(T_0)[E(t)] + o(t)$$

$$T_2(t) = T_0 + f(T_0)[E(t)] + R(t)T_0 - T_0 R(t) + o(t)$$

mostrando a importância da rotação na diferença entre as duas soluções.

É interessante relacionar essas aproximações com a magnitude das deformações e investigar o que acontece se as deformações forem relativamente pequenas.

Consideremos, então, as funções $t \xrightarrow{r} E(t)$, inversível numa vizinhança de $t = 0$, $t \xrightarrow{s} T(t)$ e $E \xrightarrow{g} \hat{T}(E)$, $g = s \circ r^{-1}$, diferenciável (seu domínio é uma variedade de dimensão um). Podemos escrever:

$$\hat{T}(E) = T_0 + dg(\theta)[E] + o(E),$$

em que d indica a derivada. Mas, lembrando que $E(0) = \theta$, vale

$$dg(\theta)[E] = ds(r^{-1}(\theta))[dr^{-1}(\theta)[E]] = \dot{T}(\theta)(\nabla r^{-1}(\theta):E)$$

e, portanto:

$$\hat{T}(E) = T_0 + \dot{T}(\theta)(\nabla r^{-1}(\theta):E) + o(E)$$

Desprezar os termos $o(\mathbf{E})$ é o que se quer dizer por trabalhar no domínio das pequenas deformações.

Consideremos agora os dois casos, referentes às soluções das equações 1 e 2:

$$\hat{\mathbf{T}}_1(\mathbf{E}) = \mathbf{T}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{T}_0)[\dot{\mathbf{E}}_0](\nabla r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{E}) + o(\mathbf{E}) \quad ,$$

$$\hat{\mathbf{T}}_2(\mathbf{E}) = \mathbf{T}_0 + \{\mathbf{f}(\mathbf{T}_0)[\dot{\mathbf{E}}_0] + \mathbf{W}_0\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W}_0\}(\nabla r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{E}) + o(\mathbf{E}) \quad ,$$

fórmulas essas que estabelecem uma relação linear entre o acréscimo de tensão $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) - \mathbf{T}_0$ e o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} (desprezados os termos $o(\mathbf{E})$). Percebe-se que, ainda que se desprezem os termos $o(\mathbf{E})$, as duas funções não se aproximam em geral, a não ser que $\mathbf{W}_0\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W}_0 = \boldsymbol{\theta}$.

Quanto à obediência ao princípio da objetividade material, a equação constitutiva da Elastoplasticidade clássica falha. Para mostrar isto recordemos como se transformam alguns tensores perante uma mudança de observador:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T$$

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^* &= (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{Q}^T + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{Q}}^T)/2 = \text{sym}(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} - \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^T) = \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{E}} + \text{sym}(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}) + \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^T \end{aligned}$$

Diz-se que uma equação obedece ao princípio da objetividade material se for satisfeita independentemente do observador. Vejamos o caso da equação (2.23). Se a igualdade se verifica para certos $\dot{\mathbf{T}}^*$, \mathbf{T} e \mathbf{D} , então ela se verifica para

$\dot{T}^* = Q\dot{T}Q^T$, $T^* = QTQ^T$ e $D^* = QDQ^T$, qualquer que seja o tensor ortogonal Q , pois $f(T)[D]$ é isotrópica, isto é,

$$f(QTQ^T)[QDQ^T] = Qf(T)[D]Q^T$$

A equação (2.23) satisfaz o princípio da objetividade.

Ao contrário, se (2.22) for satisfeita por \dot{T} , T e \dot{E} , ela não será satisfeita, em geral, por

$$\dot{T}^* = \dot{Q}TQ^T + Q\dot{T}Q^T + QT\dot{Q}^T, \quad T^* = QTQ^T \quad \text{e} \quad \dot{E}^* = (\dot{Q}F + Q\dot{F} + \dot{F}^TQ^T + F^T\dot{Q}^T)/2.$$

2.5.10) Domínio elástico de gradientes da deformação e a decomposição do gradiente da deformação em fatores elástico e plástico

Esta seção tem o objetivo de aproximar a teoria apresentada nesta tese de outras teorias elastoplásticas modernas. Para isso estudaremos o caso especial em que a equação hipoeástica do regime elástico (2.12) deriva da equação constitutiva de um material elástico isotrópico. O parágrafo seguinte deixará claro que esta hipótese é plausível.

A equação constitutiva de um material elástico isotrópico, referida a uma configuração não-distorcida (nela a tensão é hidrostática), é $T = g(V)$, em que V é o estiramento esquerdo e g é uma função isotrópica. Truesdell e Noll (1965) provaram que todo material elástico isotrópico cuja função g é invertível é também hipoeástico.

Consideremos um certo instante τ em que $T(\tau) = T_n$ (tensão da configuração natural, isto é, $T_n = g(I)$) e $k(\tau) = k_\tau$. Se o material é submetido a deformação com gradiente dado pela função $F(t) = V(t)R(t)$ (decomposição polar), definida num intervalo

I , se o regime for elástico, ele o será enquanto $f(T(t)) \leq k_\tau$, isto é, enquanto $f(g(V(t))) \leq k_\tau$, pois $T = g(V)$.

Isto sugere a construção de uma função de plastificação baseada no estiramento esquerdo, definida por $\Phi(V) = f(g(V))$. Indo adiante, define-se o domínio elástico dos gradientes no instante $t = \tau$ como:

$$\Sigma(\tau) = \{F = VR, V \in Psym, R \in Orth^+ / \Phi(V) \leq k_\tau\},$$

isto é, o conjunto dos gradientes correspondentes a deformações puramente elásticas a partir da configuração ocupada em $t = \tau$.

A definição de regime elástico e elastoplástico poderia ser reestabelecida em termos da função Φ .

Como resposta a $F(t)$, a tensão altera-se de acordo com $T(t)$ (obedecendo 2.12 ou 2.13). Se $T(t)$ pertence à imagem de g , em cada instante definem-se os fatores elástico e plástico de F , respectivamente, por:

$$V_e = g^{-1}(T),$$

$$P = V_e^{-1}F.$$

A justificativa para essa nomenclatura aparece se estudarmos um ciclo de tensão. Como hipótese, admitamos que $T_n \in E(t)$, $\forall t \in I$. Se na configuração ocupada num instante t , o material é submetido à deformação com gradiente V_e^{-1} , a tensão voltará ao valor inicial, mas o gradiente, relativo à configuração natural, não será I , senão $P = V_e^{-1}F$, representando a deformação residual num ciclo de tensão.

3 O MODELO CAM-CLAY

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 5 será apresentado uma nova equação hipoplástica, desenvolvida principalmente com o fim de representar o comportamento mecânico de um certo solo siltoso em ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão. Será avaliado também o desempenho da equação na previsão de ensaios de compressão isotrópica, edométrica e triaxial não-drenada e ensaio K_0 .

Para servir como termo de comparação, neste capítulo 3, examina-se o desempenho do modelo Cam-Clay perante a mesma série de ensaios. A maior parte dessa análise, mais especificamente a parte referente aos ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão e ao ensaio de compressão isotrópica, já havia sido feita na dissertação de mestrado deste autor (Nader, 1993), e consiste, então, de uma reapresentação. O mesmo não se pode dizer da análise dos ensaios de compressão edométrica, triaxial não-drenada e ensaio K_0 , que aqui aparece pela primeira vez.

Também é objetivo deste capítulo propor uma nova forma de construção do modelo Cam-Clay. Nos livros e artigos sobre este modelo, as equações apresentadas não

relacionam tensores de tensão e deformação ou velocidade de deformação, mas sim invariantes desses tensores, ficando a aplicação restrita aos casos em que não há alteração das direções principais. Esta limitação é eliminada aqui, ao generalizar-se o modelo Cam-Clay por meio das equações elastoplásticas propostas no capítulo 2, produzindo equações tensoriais aplicáveis a qualquer caso. Além disso, por serem derivadas das equações elastoplásticas gerais, as equações do Cam-Clay assim obtidas obedecem ao princípio da objetividade material. Acrescente-se que o caso de amolecimento é agora levado em conta, o que constitui uma evolução importante da generalização do Cam-Clay feita num trabalho anterior (Nader, 1995).

Cabe ainda esclarecer de qual versão do modelo Cam-Clay se está tratando, já que existe mais de uma. Será mostrado a seguir que as equações gerais, quando particularizadas para o caso dos ensaios triaxiais, em que duas tensões principais e duas deformações principais são idênticas, se reduzem às equações do modelo Cam-Clay Modificado, na forma dada por Houlsby, Wroth e Wood (1984), que é levemente diferente da do Cam-Clay Modificado de Roscoe e Burland (1968), ambos tendo superfície de plastificação elipsoidal, em contraste com o Cam-Clay original (Schofield e Wroth, 1968).

Particularizadas para os casos de ensaios triaxiais, as equações diferenciais resultantes são passíveis de integração analítica em trajetórias retílineas de tensão, conforme veremos.

3.2 EQUAÇÕES DO MODELO

Inicialmente, deve-se lembrar que no modelo Cam-Clay há quatro constantes características do material λ , κ , G e M , cuja interpretação física pode ser encontrada em Houslyby, Wroth e Wood (1984) ou Nader (1993).

A função de plastificação é:

$$f(\mathbf{T}) = \tilde{f}(I, J) = -\frac{I}{3} - \frac{9J}{M^2 I}, \quad (3.1)$$

em que $I = I_T \neq 0$, $J = -II_{T_a} = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{T}_a^2$, sendo $\mathbf{T}_a = \mathbf{T} - (\text{tr} \mathbf{T} / 3) \mathbf{I}$ (a parte anti-esférica de \mathbf{T}).

Será empregado, logo adiante, o gradiente da função de plastificação $\nabla f(\mathbf{T}) = \zeta \mathbf{I} + \theta \mathbf{T}_a$, em que

$$\zeta = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial I} = -\frac{1}{3} + \frac{9J}{M^2 I^2}$$

e

$$\theta = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J} = -\frac{9}{IM^2}$$

A equação $\tilde{f}(I, J) = p_0$, para um valor fixo do parâmetro de endurecimento p_0 :

$$\frac{\left(I + \frac{3}{2}p_0\right)^2}{\left(\frac{3}{2}p_0\right)^2} + \frac{(\sqrt{J})^2}{\left(\frac{Mp_0}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

corresponde a uma curva de plastificação semi-elíptica se as coordenadas são (I, \sqrt{J}) .

Conforme podemos notar, o centro tem coordenadas $-(3/2)p_0, 0$.

Vimos no capítulo 2 que $\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = A(\mathbf{T})[\mathbf{D}]:\nabla f(\mathbf{T})$ desempenha papel fundamental no critério de plastificação. No modelo Cam-Clay

$$A(\mathbf{T})[\mathbf{D}] = 2GD - \left(2G + \frac{I}{\kappa}\right) \frac{\text{tr}\mathbf{D}}{3} \mathbf{I} ,$$

resultando, portanto:

$$\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = A(\mathbf{T})[\mathbf{D}]:\nabla f(\mathbf{T}) = -\zeta \frac{I}{\kappa} \text{tr}\mathbf{D} + 2\theta G \text{tr}(\mathbf{T}_a \mathbf{D}) .$$

Passemos agora as equações diferenciais constitutivas a que deve obedecer a tensão de Cauchy. Em regime elástico vale:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = A(\mathbf{T})[\mathbf{D}] = 2GD - \left(2G + \frac{I}{\kappa}\right) \frac{\text{tr}\mathbf{D}}{3} \mathbf{I} ,$$

enquanto, em regime elastoplástico:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = A(\mathbf{T})[\mathbf{D}] + \psi(\mathbf{T}, \mathbf{D})\mathbf{B}(\mathbf{T}) ,$$

com

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}) = \frac{m(\mathbf{T})A(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})]}{1 + m(\mathbf{T})\nabla f(\mathbf{T}):A(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})]} ,$$

sendo

$$m = -\frac{3(\lambda - \kappa)}{I} \left[1 - \left(\frac{27J}{M^2 I^2} \right)^2 \right]^{-1} ,$$

$$A(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = 2G\nabla f(\mathbf{T}) - (2G + \frac{I}{\kappa})\zeta\mathbf{I} \quad ,$$

$$\nabla f(\mathbf{T}): A(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = -\frac{3\zeta^2 I}{\kappa} + 4G\theta^2 J \quad .$$

Como foi visto no capítulo 2, pode-se interpretar o tensor estirante como sendo a soma de duas parcelas $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$. A parte elástica é:

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2G}\overset{\circ}{\mathbf{T}} - \left(\frac{\kappa}{3I} + \frac{1}{6G}\right)\text{tr}\overset{\circ}{\mathbf{T}}\mathbf{I} = \frac{1}{2G}\overset{\circ}{\mathbf{T}}_a - \frac{\kappa}{3I}\dot{I}\mathbf{I} \quad ,$$

com $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_a = \overset{\circ}{\mathbf{T}}_a - W\mathbf{T}_a + \mathbf{T}_a W$. A parte elastoplástica é nula em regime elástico e

$$\mathbf{D}^p = m \left[(\zeta^2 \dot{I} + \zeta\theta J)\mathbf{I} + (\zeta\theta \dot{I} + \theta^2 J)\mathbf{T}_a \right] \quad (3.2)$$

em regime elastoplástico.

A evolução do parâmetro de endurecimento é dada por:

$$\dot{p}_0 = \frac{I}{3(\lambda - \kappa)} \left(1 + \frac{27J}{M^2 I^2} \right) I_{D^p} \quad .$$

Por meio da eq. 3.2 é possível mostrar que, quando $27J/(M^2 I^2)$ tende a 1 (sendo $I < 0$), a norma de \mathbf{D}_a^p (a parte anti-esférica de \mathbf{D}^p), uma medida da taxa de distorção plástica, tende a infinito; no âmbito do modelo Cam-Clay diz-se que o estado do material tende ao estado crítico. Note-se a diferença para com a definição geral de estado crítico dada no capítulo 2.

A equação

$$\frac{J}{I^2} = \frac{M^2}{27} \quad (3.3)$$

(critério de Drucker-Prager, (Drucker e Prager, 1952)), com $I < 0$, define o estado crítico com respeito à tensão.

Pode-se mostrar que, no estado crítico, vale:

$$\frac{\dot{e}}{(1+e)} = -\lambda \frac{\dot{I}}{I} \quad (3.4)$$

sendo e o índice de vazios.

Para que se possa comparar as previsões do modelo Cam-Clay com os resultados experimentais, apresenta-se agora a forma particular que as equações gerais assumem nos estados de tensão e deformação encontrados em ensaios triaxiais.

Nos ensaios triaxiais, corpos-de-prova cilíndricos são submetidos a deformação homogênea que os mantém aproximadamente cilíndricos (supõe-se que permaneçam perfeitamente cilíndricos), alterando-lhes o raio e a altura. Sendo $H(t)$, $R(t)$ e $V(t)$ altura, raio e volume do cilindro no instante t , definem-se as deformações logarítmicas axial, radial e volumétrica como $\varepsilon_a = \ln(H(0)/H(t))$, $\varepsilon_r = \ln(R(0)/R(t))$ e $\varepsilon_v = \ln(V(0)/V(t)) = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$ (note-se que são positivas se há diminuição de altura, raio ou volume). Empregaremos a taxa de deformação volumétrica $\dot{\varepsilon}_v$ e a taxa de distorção $\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r$. Em qualquer instante, $W = 0$ e a matriz de D (numa base ortonormal da qual um dos versores tem a direção do eixo do cilindro) é:

$$[D] = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix}.$$

A matriz de T também é diagonal:

$$[T] = \begin{bmatrix} -\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r \end{bmatrix},$$

em que figuram as tensões axial (σ_a) e radial (σ_r), que são positivas na compressão.

Na interpretação desses ensaios supõe-se que a aceleração seja nula e que não haja forças de corpo, de modo que a equação de equilíbrio do momento linear seja satisfeita identicamente.

Serão usados os parâmetros $p = (\sigma_a + 2\sigma_r) / 3$, $q = \sigma_a - \sigma_r$, e $\eta = |q| / p$.

Como consequência da decomposição de D em D^e e D^p , $\dot{\epsilon}_v$ e $\dot{\gamma}$ decompõem-se como $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p$ e $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p$.

Partindo da equação geral (3.1), a função de plastificação em termos de p e q é obtida:

$$\hat{f}(p, q) = p + \frac{q^2}{M^2 p}.$$

A curva de plastificação $\hat{f}(p, q) = p_0$, para cada valor de p_0 , é uma elipse.

Introduzindo os parâmetros definidos acima nas equações constitutivas gerais, por meio dos invariantes, obtemos as relações apropriadas para a análise de ensaios triaxiais:

$$\dot{\epsilon}_v^e = \kappa \frac{\dot{p}}{p} \quad (3.5)$$

$$\dot{\gamma}^e = \frac{1}{2G} \dot{q} \quad (3.6)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = (\lambda - \kappa) \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \quad (3.7)$$

$$\dot{\gamma}^p = \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \dot{\epsilon}_v^p \quad (3.8)$$

As formas particulares das equações 3.3 e 3.4 características do estado crítico para o caso de ensaios triaxiais são (com $p > 0$):

$$|q| = Mp$$

$$\frac{\dot{e}}{(1+e)} = -\lambda \frac{\dot{p}}{p}$$

Agora, apresenta-se o resultado da integração analítica das equações 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 para o caso de ensaios triaxiais drenados com adensamento isotrópico que seguem uma trajetória retilínea no plano (p, q) , formando com o eixo p (abscissas) um ângulo designado genericamente por β . A equação dessas trajetórias é $q = \tan \beta (p - p_c)$, em que p_c é a pressão de adensamento isotrópico a que o material foi submetido antes da aplicação da tensão desviadora q .

A fig. 3.1 mostra, no plano (p, q) , a curva de plastificação do Cam-Clay depois da aplicação da pressão de adensamento isotrópico p_c e algumas trajetórias de tensão, levando à identificação de dois grupos. Para $\beta \leq \pi/2$ as trajetórias mantêm o material, desde o início, em regime elastoplástico em direção ao estado crítico ($\eta = M$). Para $\beta > \pi/2$ as trajetórias de tensão inicialmente levam o material ao regime elástico, até que atingem a curva de plastificação (em $\eta = -M^2 / \tan \beta$), quando se inicia o regime elastoplástico.

A integração das equações 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, ao longo das trajetórias de tensão mencionadas, fornece equações que geram curvas tensão-deformação teóricas que podem ser comparadas com curvas experimentais. No que se segue, o tempo t é usado como parâmetro para as trajetórias de tensão $(p(t), q(t))$ e $N = \tan \beta$.

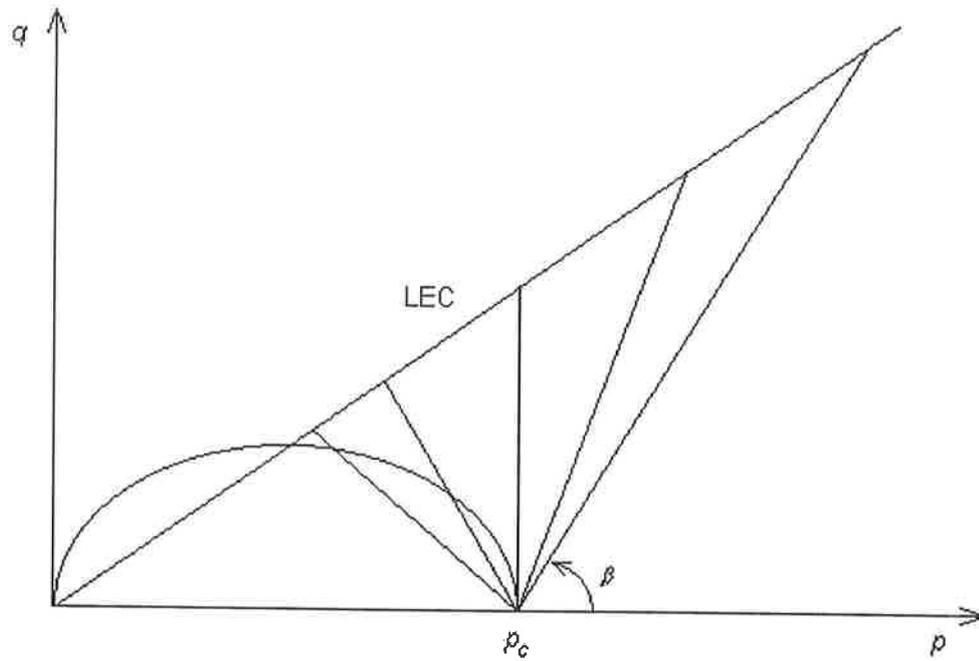


Figura 3.1 - Curva de plastificação do Cam-Clay e trajetórias de tensão (LEC indica a linha do estado crítico).

O resultado da integração é o seguinte conjunto de relações tensão-deformação.

1º Grupo: $\beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Neste caso o regime é sempre elastoplástico. Em qualquer instante $t \geq 0$, com $p(0) = p_c$ e $\eta(0) = 0$:

$$\varepsilon_v(t) = \int_0^t (\dot{\varepsilon}_v^e + \dot{\varepsilon}_v^p) d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_c} + (\lambda - \kappa) \left[\ln \frac{p(t)}{p_c} + \ln \frac{M^2 + \eta^2(t)}{M^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(t) - \varepsilon_r(t) &= \int_0^t (\dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p) d\tau = \frac{1}{2G} q(t) + \\ &+ (\lambda - \kappa) \left\{ \frac{3}{2(N^2 - M^2)} \left[M \ln \frac{M + \eta(t)}{M - \eta(t)} - N \ln \frac{(M^2 - \eta^2(t)) N^2}{(N - \eta(t))^2 M^2} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{3}{M} \arctan \frac{\eta(t)}{M} + \frac{3}{2M} \ln \frac{M + \eta(t)}{M - \eta(t)} \right\} \end{aligned}$$

2º Grupo: $\beta > \frac{\pi}{2}$.

Em $t = 0$ (com $p(0) = p_c$ e $\eta(0) = 0$), a trajetória de tensão inicia o regime elástico que dura até que seja atingida a curva de plastificação no instante $t = t_*$, quando $p(t_*) = p_* = p_c N^2 / (N^2 + M^2)$ e $\eta(t_*) = \eta_* = -M^2 / N$. Depois disso começa a ocorrer regime elastoplástico. Assim, para $0 \leq t < t_*$:

$$\varepsilon_v(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_v^e d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_c},$$

$$\varepsilon_a(t) - \varepsilon_r(t) = \int_0^t \dot{\gamma}^e d\tau = \frac{1}{2G} q(t)$$

e, para $t \geq t_*$,

$$\varepsilon_v(t) = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_v^e d\tau + \int_{t_*}^t \dot{\varepsilon}_v^p d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_c} + (\lambda - \kappa) \left[\ln \frac{p(t)}{p_*} + \ln \frac{M^2 + \eta^2(t)}{M^2 + \eta_*^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(t) - \varepsilon_r(t) &= \int_0^{t_*} \dot{\gamma}^e d\tau + \int_{t_*}^t \dot{\gamma}^p d\tau = \frac{1}{2G} q(t) + \\ &+ (\lambda - \kappa) \left\{ \frac{3}{2(N^2 - M^2)} \left[M \ln \frac{(M + \eta(t))(M - \eta_*)}{(M - \eta(t))(M + \eta_*)} - N \ln \frac{(M^2 - \eta^2(t))(N - \eta_*)^2}{(N - \eta(t))^2 (M^2 - \eta_*^2)} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{3}{M} \left[\arctan \frac{\eta(t)}{M} - \arctan \frac{\eta_*}{M} \right] + \frac{3}{2M} \ln \frac{(M + \eta(t))(M - \eta_*)}{(M - \eta(t))(M + \eta_*)} \right\} \end{aligned}$$

3.3 CARACTERIZAÇÃO DO SOLO E ENSAIOS

O solo ensaiado é caracterizado por: fração argila, 10%; fração silte, 63%; fração areia, 27%; limite de liquidez, 47%; índice de plasticidade, 18%; peso específico dos grãos, $26,5 \text{ kN/m}^3$ (Nader, 1993). A curva granulométrica encontra-se na fig. 3.2.

Na confecção dos corpos-se-prova, uma lama (com umidade de 41%) era inicialmente preparada com o solo desestruturado. Em seguida, aplicava-se-lhe pressão de 20 kPa para adensamento isotrópico. Do bloco assim constituído, talhavam-se corpos de prova para os ensaios.

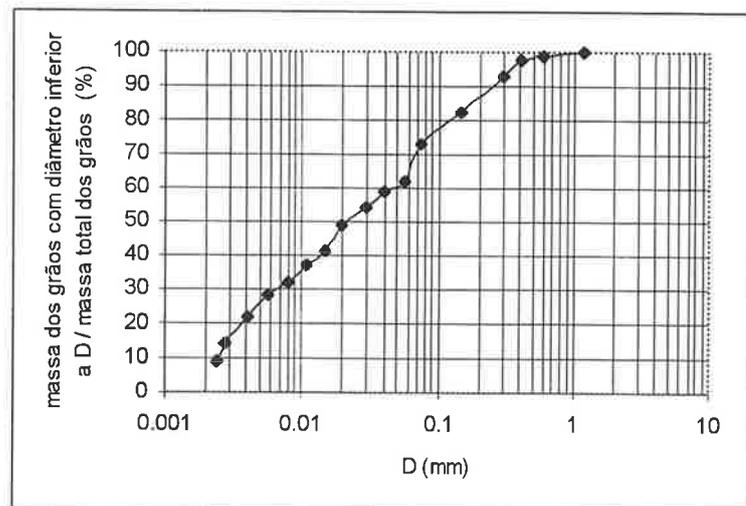


Figura 3.2 - Curva granulométrica.

Nos ensaios triaxiais drenados cada corpo-de-prova, após adensamento isotrópico a 200 kPa, era submetido a uma entre seis trajetórias retíneas de tensão (fig.

3.3), nas quais os acréscimos de tensão axial ($\Delta\sigma_a$) e radial ($\Delta\sigma_r$) se relacionam da seguinte forma:

trajetória 1: $\Delta\sigma_r = 7\Delta\sigma_a$;

trajetória 2: σ_r constante (o ensaio convencional de compressão por carregamento);

trajetória 3: $\Delta\sigma_r = -\Delta\sigma_a/2$, isto é, p constante;

trajetória 4: $\Delta\sigma_r = -\Delta\sigma_a$;

trajetória 5: $\Delta\sigma_r = -2\Delta\sigma_a$;

trajetória 6: $\Delta\sigma_r < 0$, σ_a constante (o ensaio de compressão por descarregamento).

Nas cinco primeiras $\Delta\sigma_a > 0$.

Os resultados desses ensaios já foram apresentados por Nader (1993), mas serão rerepresentados neste trabalho.

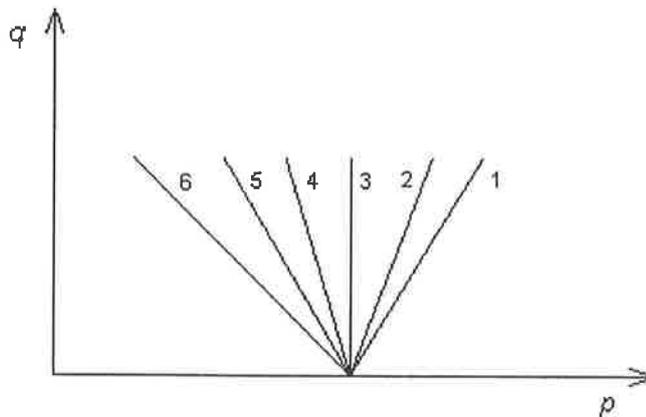


Figura 3.3 - Trajetórias de tensão.

3.4 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DO CAM-CLAY

3.4.1) Determinação de λ e κ

Os coeficientes angulares das retas de compressão virgem e descompressão-recompressão isotrópicas do Cam-Clay no diagrama $\ln p \times \ln (1+e)$ são $-\lambda$ e $-\kappa$, respectivamente. Segundo o modelo, na compressão virgem edométrica a resposta é também uma reta no gráfico $\ln \sigma_v \times \ln (1+e)$ com coeficiente angular $-\lambda$ (σ_v é a tensão vertical).

Contudo, nota-se na fig 3.4, que mostra o resultado do ensaio de compressão isotrópica, que não são retos os trechos de compressão nem os de descompressão e recompressão obtidos experimentalmente. Diante disso, adotou-se $\lambda = 0,070$ e $\kappa = 0,018$, que fazem com que a curva experimental seja razoavelmente bem reproduzida (veja-se a resposta teórica na própria fig. 3.4) e que os ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão sejam representados do melhor modo possível.

3.4.2) Determinação de G e M

Um ensaio triaxial de compressão por carregamento com ciclo de descarregamento-recarregamento, segundo o modelo Cam-Clay, forneceria uma curva q (tensão desviadora) $\times \gamma = \epsilon_a - \epsilon_r$ (distorção) contendo uma reta em vez do laço comumente detectado em ensaios. O coeficiente angular do trecho reto de

descarregamento-recarregamento é $2G$.

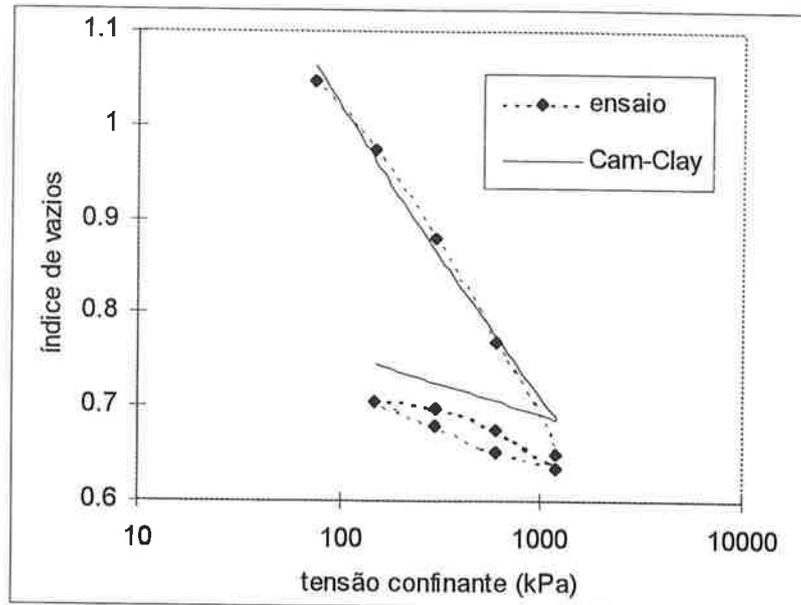


Figura 3.4 - Ensaio de compressão isotrópica.

Foram feitos dois ensaios triaxiais de compressão por carregamento com ciclo de descarregamento-recarregamento, cujos resultados estão mostrados na fig. 3.5. No primeiro deles o descarregamento se deu quando a tensão desviadora atingiu 47% da de ruptura, e no segundo, quando a tensão desviadora era 81% do valor da de ruptura. Retas ajustadas aos laços fornecem $G = 16700$ kPa.

Para M , escolheu-se 1,46, que é o valor correspondente ao estado crítico na trajetória 2 (cujos resultados experimentais estão na fig. 3.7) e que melhor reproduz o conjunto de ensaios com diferentes trajetórias de tensão.

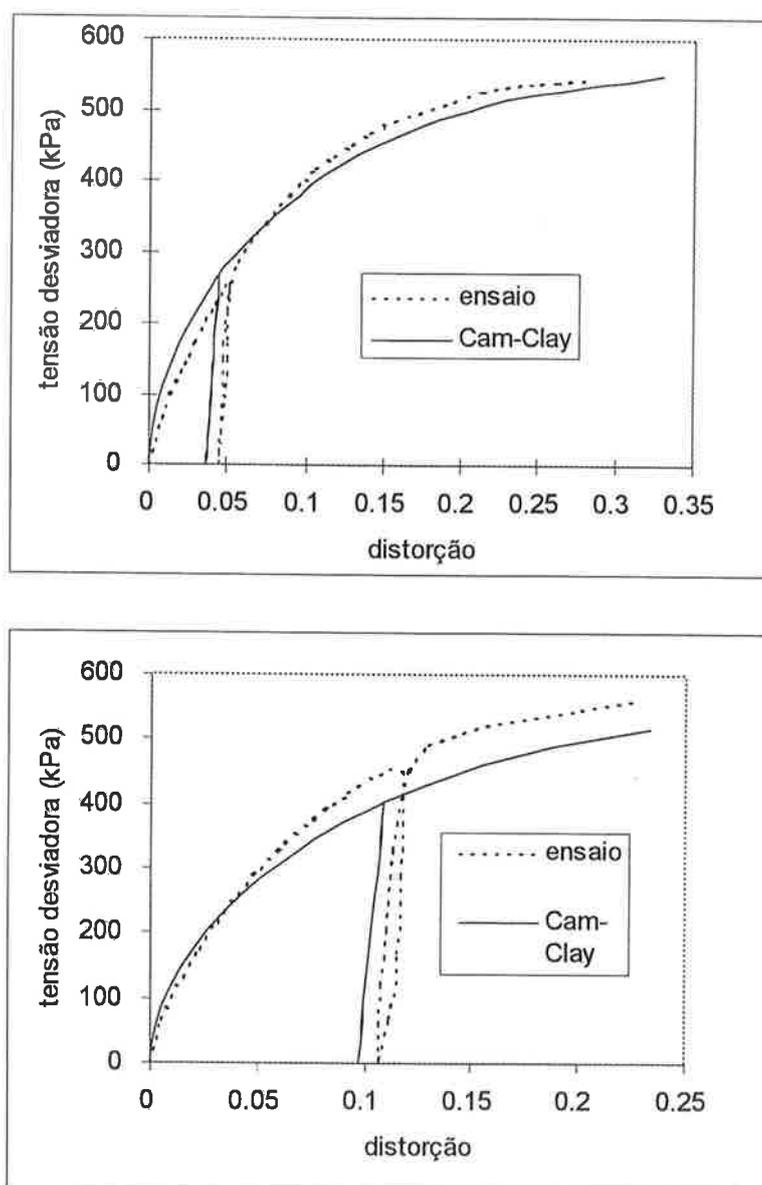


Figura 3.5 - Ensaio com ciclo de carregamento.

3.5 CONFRONTO ENTRE PREVISÕES TEÓRICAS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS NOS ENSAIOS TRIAXIAIS DRENADOS COM DIFERENTES TRAJETÓRIAS DE TENSÃO

As curvas experimentais e teóricas dos ensaios triaxiais drenados com as seis trajetórias de tensão estão nas figuras de 3.6 a 3.11. Nos gráficos, no eixo das abscissas está a deformação axial definida por $(H_0 - H)/H_0$, sendo H_0 a altura antes da aplicação da tensão desviadora e H , a altura num certo instante. No eixo das ordenadas dos gráficos inferiores está a deformação volumétrica definida por $(V_0 - V)/V_0$, sendo V_0 o volume antes da aplicação da tensão desviadora e V , o volume num certo instante.

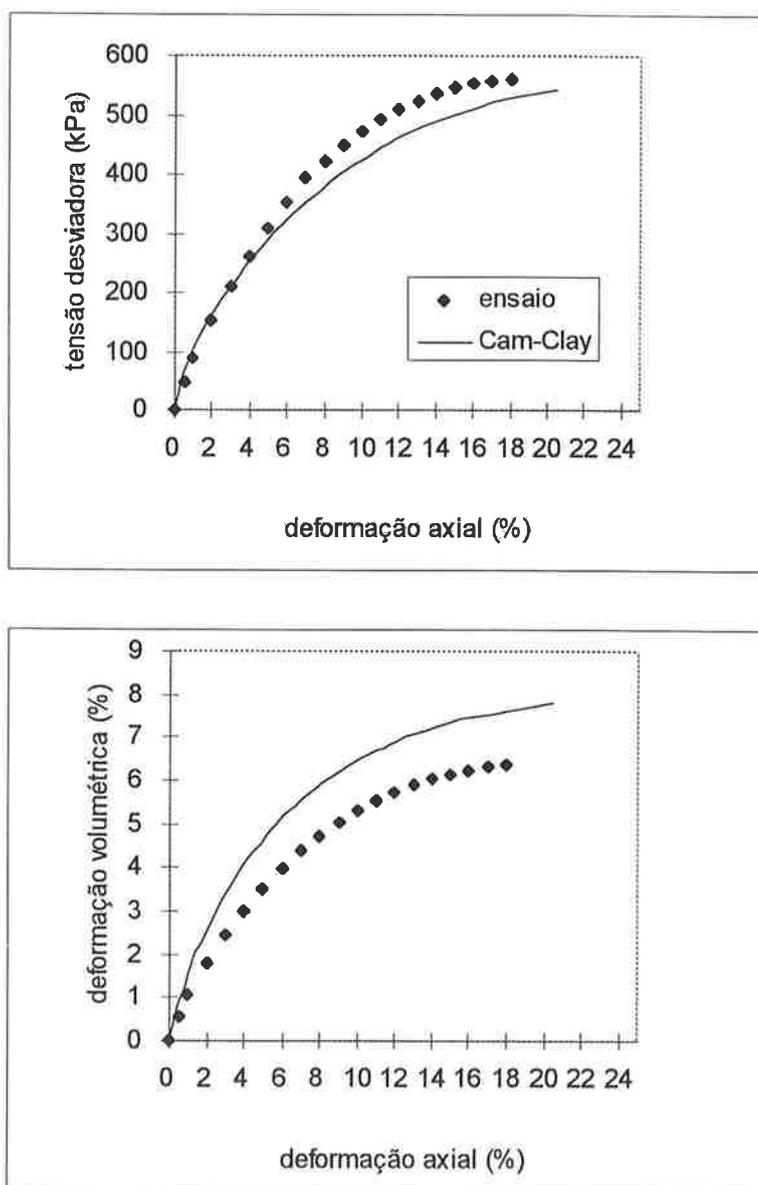


Figura 3.6 - Trajetória 1.

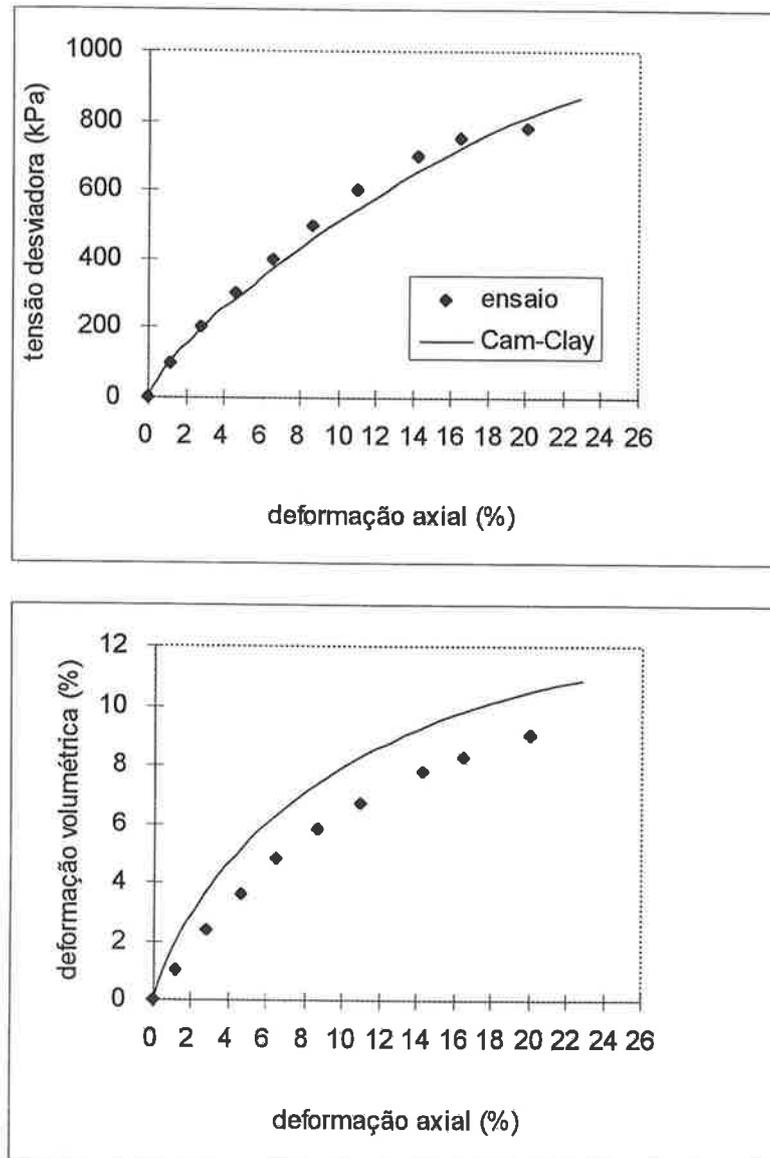


Figura 3.7 - Trajetória 2.

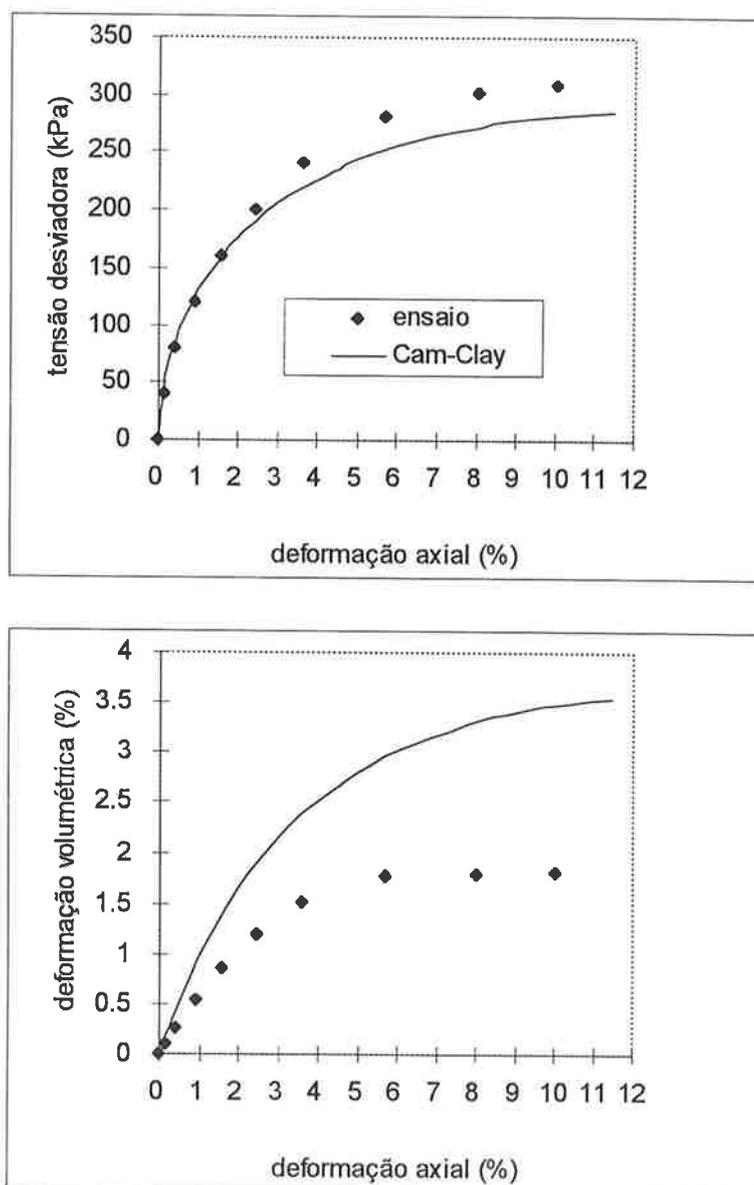


Figura 3.8 - Trajetória 3.

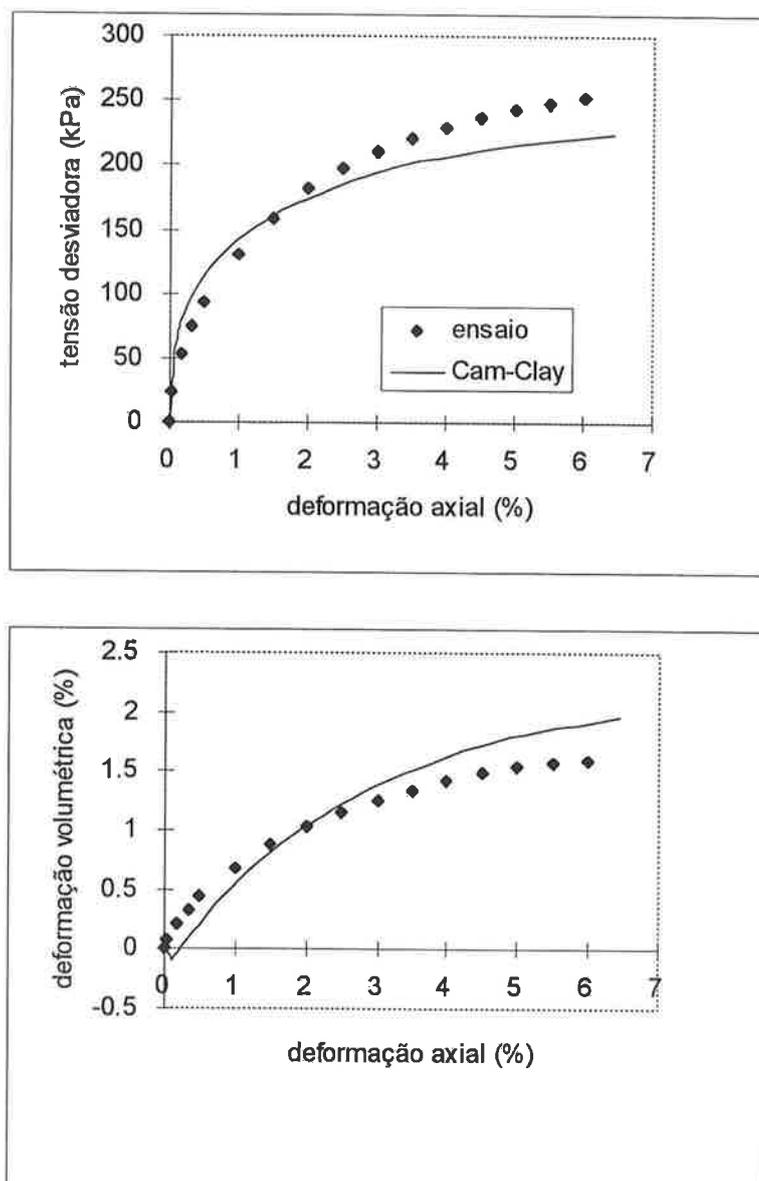


Figura 3.9 - Trajetória 4.

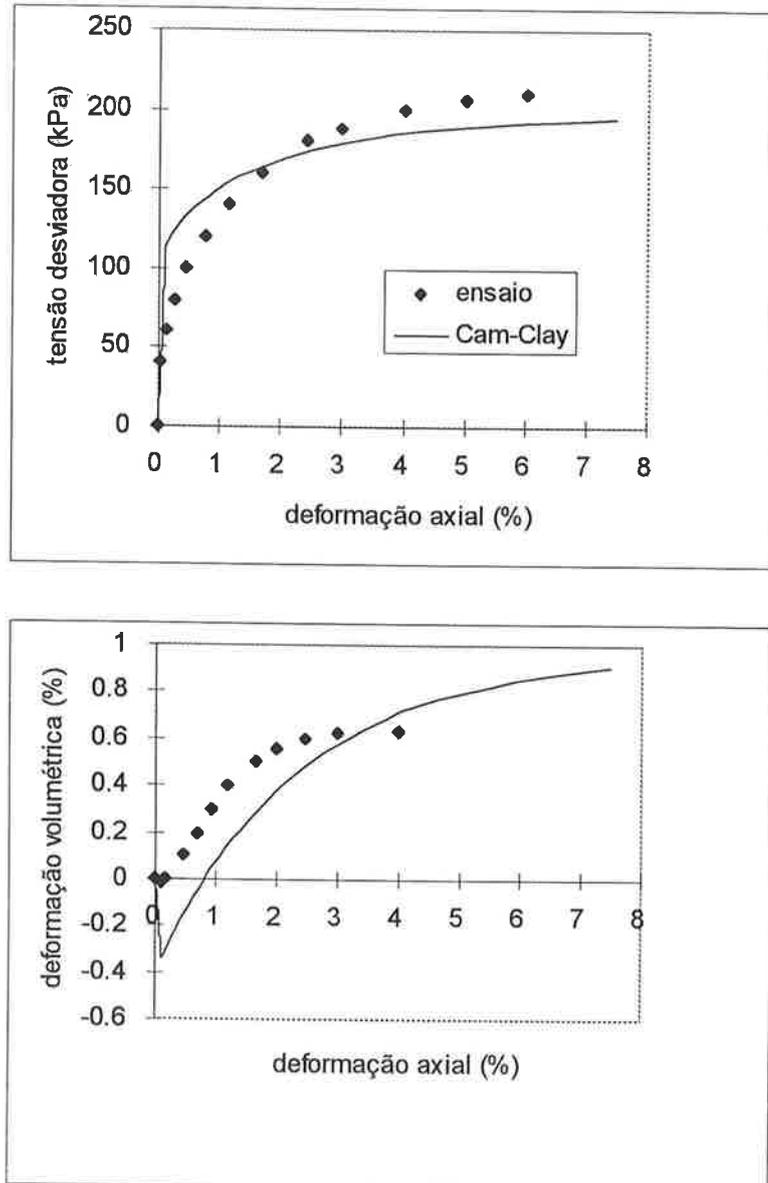


Figura 3.10 - Trajetória 5.

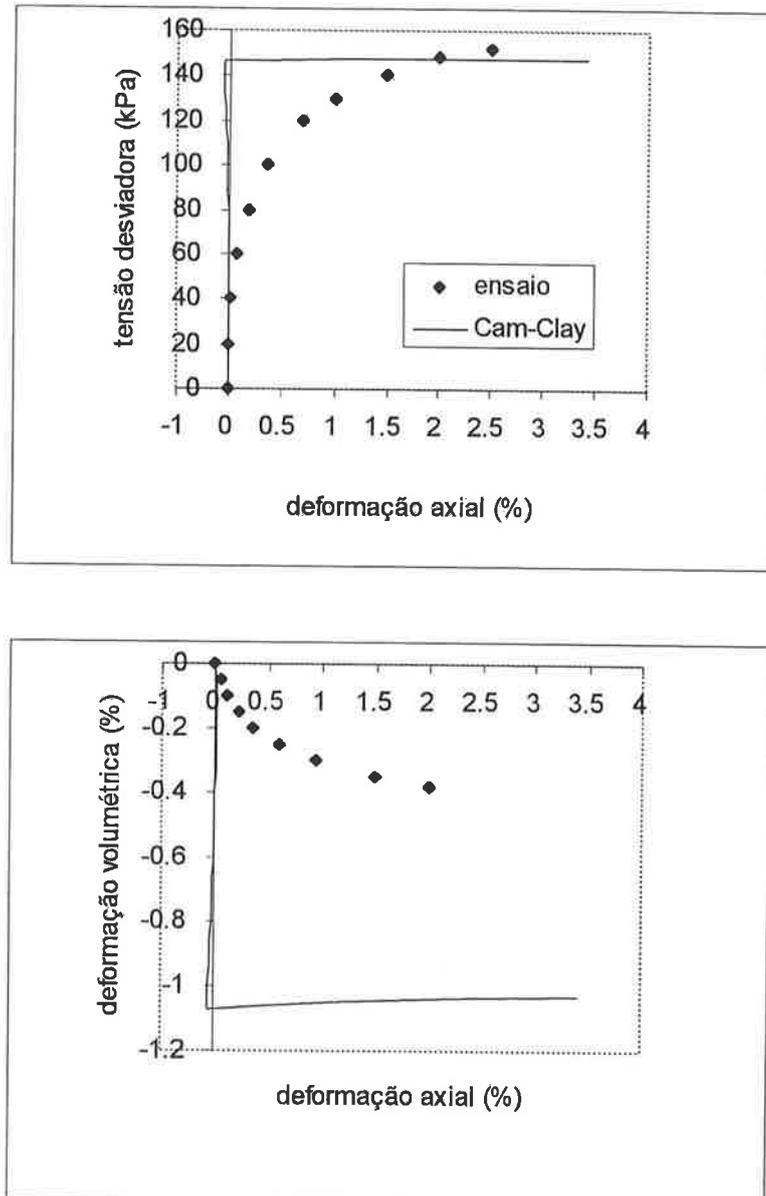


Figura 3.11 - Trajetória 6.

Analisemos, em primeiro lugar, as curvas tensão desviadora-deformação axial.

Observa-se que a tensão desviadora que leva ao estado crítico é maior que a indicada pelo modelo Cam-Clay nas trajetórias 3, 4, 5 e 6, mas é menor na trajetória 1. Isto justifica-se por ter sido o parâmetro M obtido do ensaio com a trajetória 2 e a envoltória de resistência ser levemente curva. Além disso, na trajetória 1, houve geração de pressão neutra em excesso no último estágio de carregamento, que levou o corpo-de-prova à ruptura.

A respeito da deformabilidade, nas trajetórias 1, 2 e 3 nota-se boa concordância entre teoria e experimento no trecho inicial das curvas, onde $q/p_c \leq 1$. A partir daí, com relação à previsão teórica, o solo mostrou-se menos deformável nas três trajetórias. Nas trajetórias 4, 5 e 6 as discrepâncias são maiores. Segundo a teoria essas trajetórias primeiramente levariam o solo ao regime elástico com baixa deformabilidade, até que cruzassem a curva de plastificação inicial, a partir de quando, após uma cedência brusca, a deformabilidade iria aumentando em direção ao estado crítico. Os resultados experimentais mostram, entretanto, que o solo torna-se, desde o início da aplicação da tensão desviadora, continuamente mais deformável. Para a trajetória 6 a falha do modelo é ainda maior.

Passemos agora às curvas deformação volumétrica-deformação axial.

O modelo Cam-Clay prevê deformações volumétricas exageradas nas trajetórias 1, 2 e 3. A diferença relativa é tanto maior quanto mais inclinada é a trajetória. Nos ensaios 4 e 5, mesmo com a diminuição da tensão octaédrica p , o solo apresentou diminuição de volume. Segundo a teoria, enquanto a trajetória se encontrasse no

domínio elástico, haveria aumento de volume e, após ter cruzado a curva de plastificação, o solo passaria a comprimir-se. A diferença entre comportamento observado e previsto é considerável, sendo maior na trajetória 5. Mas o desencontro mais grave deu-se na trajetória 6. Embora tanto o experimento quanto o modelo Cam-Clay tenham dado como resultado global a ocorrência de aumento de volume, este foi bem maior na previsão teórica (da ordem de duas vezes e meia o do ensaio no final da curva). Além disso a forma das curvas é bem diferente.

3.6 CONFRONTO ENTRE PREVISÕES TEÓRICAS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS NOS ENSAIOS EDOMÉTRICO, K_0 , TRIAXIAL NÃO-DRENADO E TRIAXIAIS DRENADOS COM CARREGAMENTO CÍCLICO

O resultado do ensaio edométrico e a previsão teórica constam da fig. 3.12. A boa concordância no trecho de compressão não se repete no de expansão.

A fig. 3.13 compara as tensões axial e radial no ensaio K_0 com a resposta do Cam-Clay (o resultado deste ensaio já foi apresentado por Pinto e Nader, 1991). Nota-se que a linha K_0 dada pelo modelo ($K_0 = 0,53$) é bem mais inclinada que a experimental ($K_0 = 0,38$). A correlação de Jáky estima $K_0 = 1 - \text{sen}\phi = 1 - \text{sen}36^\circ = 0,41$. Além disso o modelo não é capaz de representar o laço de descarregamento-recarregamento. No

capítulo seguinte será feita uma discussão sobre o resultado deste ensaio, quando se comparar o resultado experimental com a previsão da equação hipoplástica.

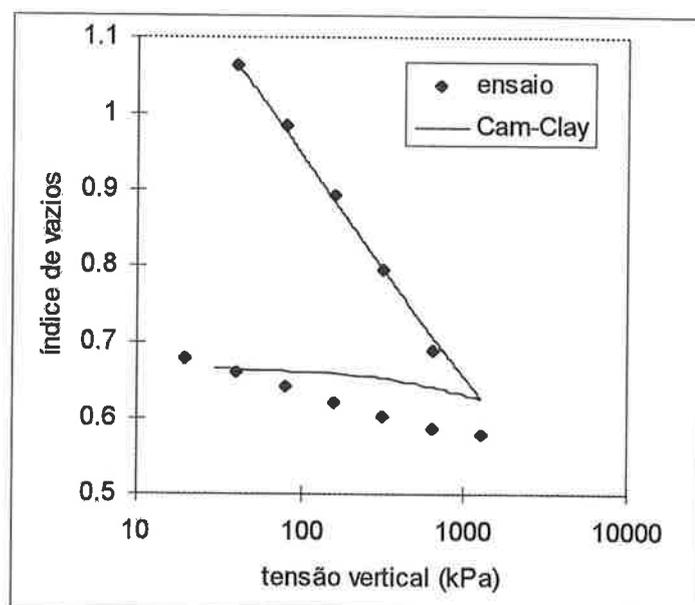


Figura 3.12 - Ensaio de compressão edométrica.

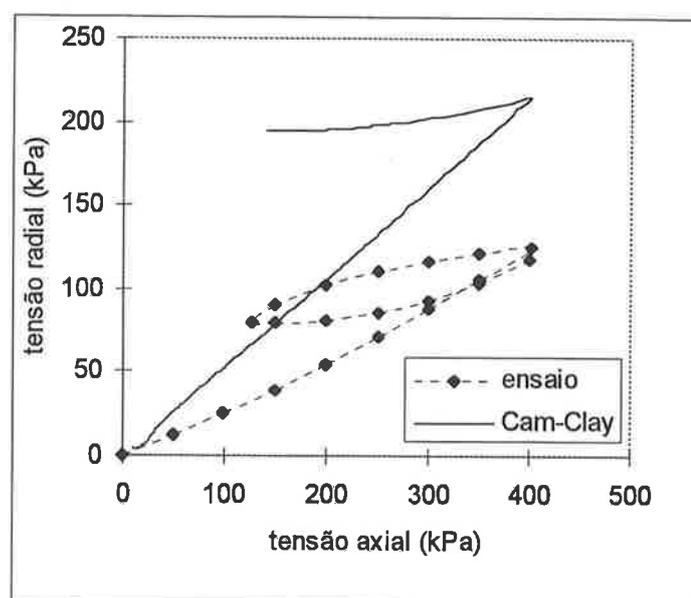


Figura 3.13 - Ensaio K_0 .

No ensaio triaxial não-drenado (fig. 3.14) as curvas tensão desviadora-deformação axial e pressão neutra-deformação axial mostram boa concordância entre teoria e experimento em seus trechos iniciais. A resposta teórica para a trajetória de tensão é medianamente boa.

As curvas tensão desviadora-deformação axial e deformação volumétrica-deformação axial dos dois ensaios triaxiais de compressão por carregamento (trajetória 2) com ciclo de carregamento estão mostradas nas figs. 3.15 e 3.16. Em ambos os ensaios a previsão da curva tensão desviadora-deformação axial é razoavelmente boa, salvo o laço de descarregamento-recarregamento que o modelo trata como uma curva única (cf. fig. 3.7, na qual encontram-se as curvas da trajetória 2, sem ciclo de carregamento). Quanto à deformação volumétrica, a previsão do modelo é exagerada, conforme já havíamos constatado na fig. 3.7, cabendo observar que no ciclo o solo apresentou menor variação de volume que o previsto pelo modelo.

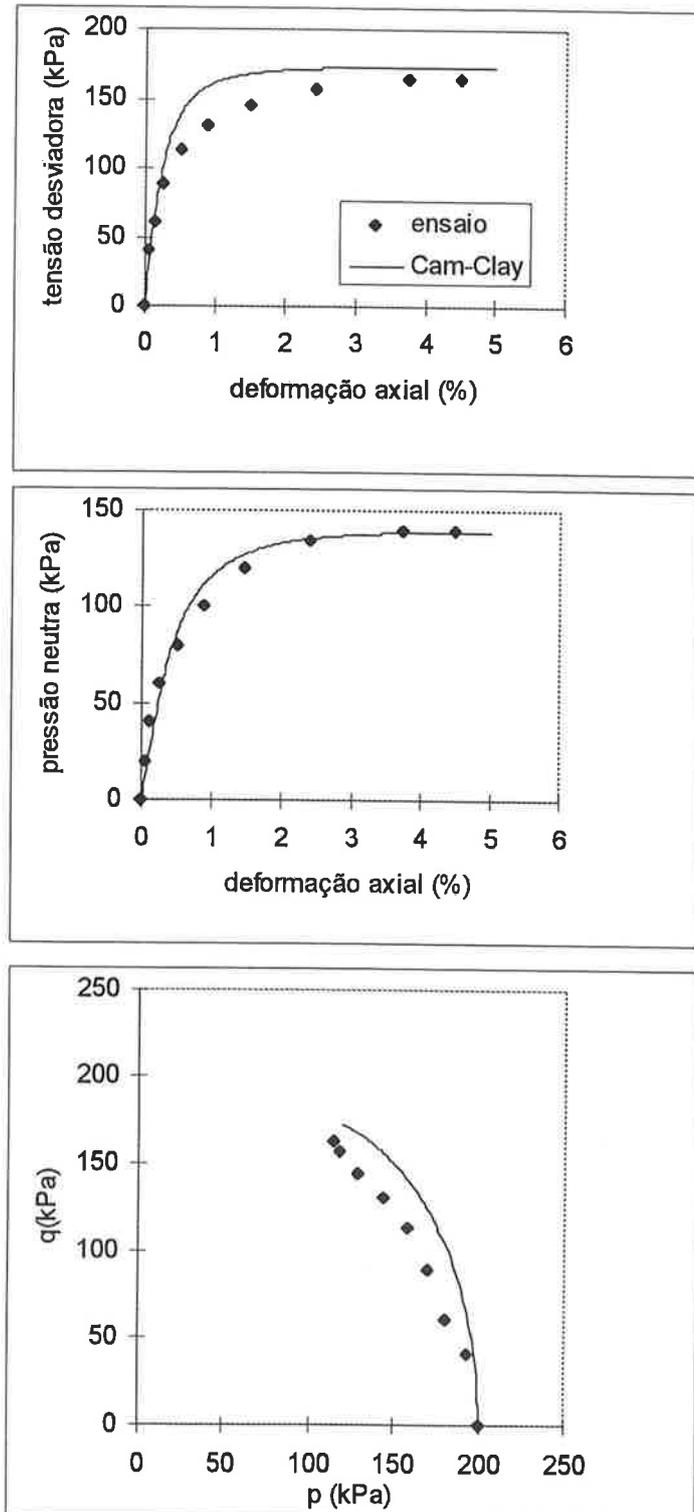


Figura 3.14 - Ensaio de compressão triaxial não-drenado.

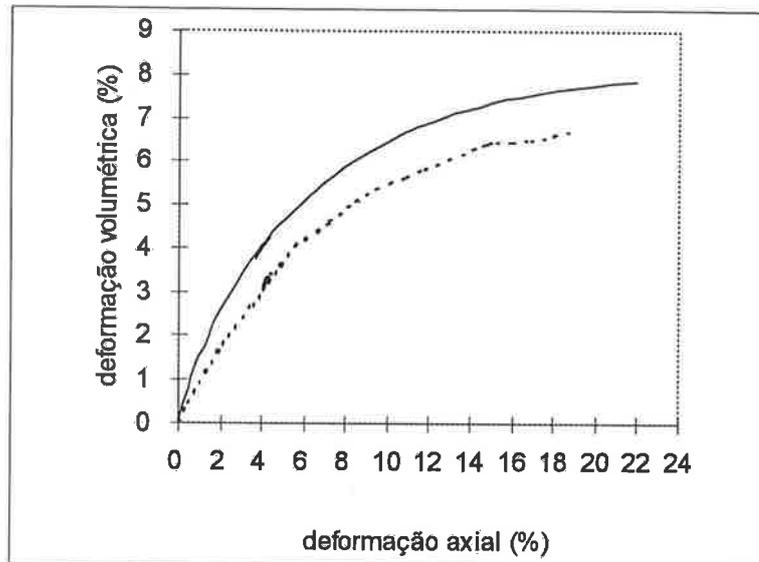
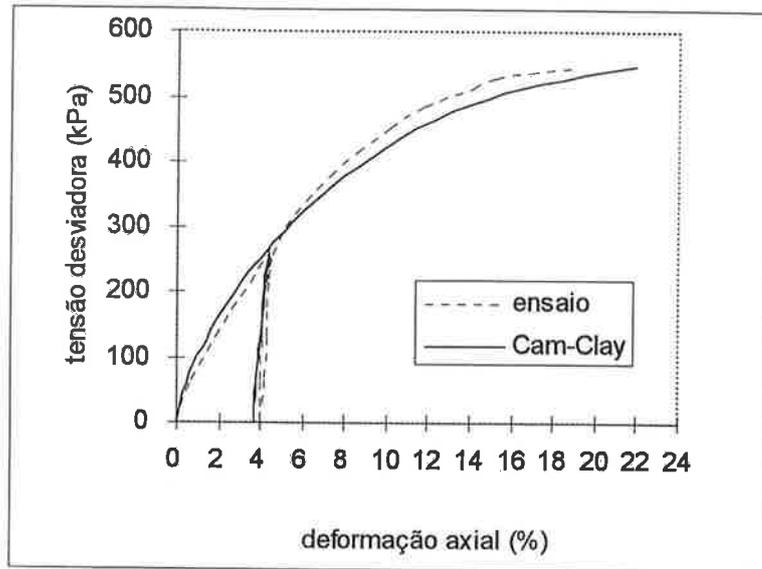


Figura 3.15 - Primeiro ensaio drenado com ciclo de carregamento.

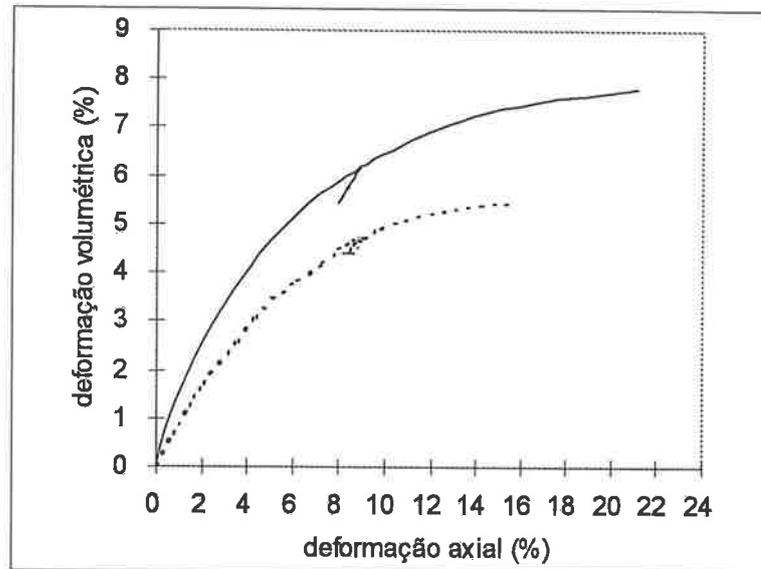
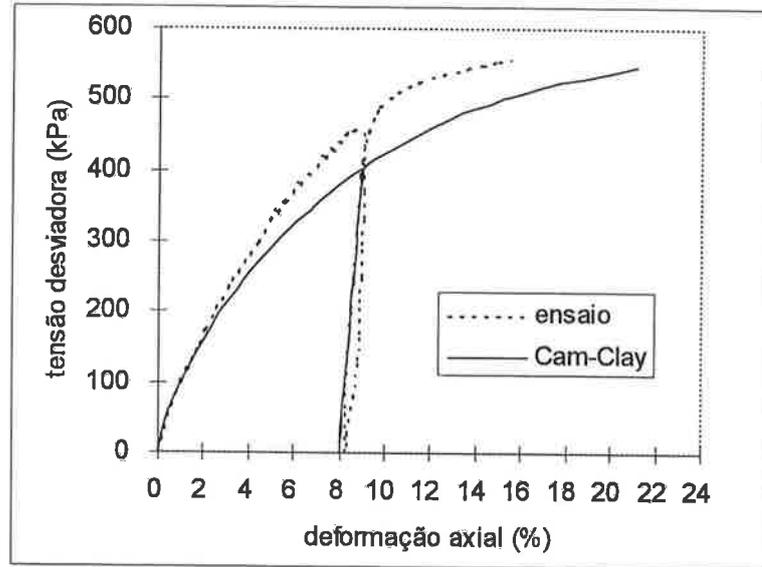


Figura 3.16 - Segundo ensaio drenado com ciclo de carregamento.

4 A EVOLUÇÃO DA HIPOPLASTICIDADE

No capítulo 5 será apresentada uma nova equação hipoplástica. Para que se possa situá-la no âmbito geral das pesquisas em Hipoplasticidade, este capítulo faz um breve histórico das pesquisas na área, proporcionando um panorama das principais equações hipoplásticas existentes e suas aplicações, apresentadas em ordem cronológica.

A Hipoplasticidade surgiu em 1978 na tese de doutoramento de Kolymbas, orientado por Gudehus, na Universidade de Karlsruhe, Alemanha, e tem-se constituído numa ferramenta alternativa aos modelos elastoplásticos para a descrição do comportamento dos solos. Embora seus princípios básicos não restrinjam a aplicação a alguns solos em especial, quase a totalidade dos trabalhos em Hipoplasticidade tem sido destinado às areias.

As equações hipoplásticas básicas são da forma:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}). \quad (4.1)$$

como a proposta por Kolymbas, em 1985:

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 \frac{1}{2}(\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) + C_2 \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D})\mathbf{1} + \left(C_3 \mathbf{T} + C_4 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} \right) \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}, \quad (4.2)$$

resultado da melhoria e simplificação das versões desenvolvidas nos primeiros anos de pesquisa (veja-se, por exemplo, Kolymbas, 1984). A equação contém quatro constantes

características do material, que podem ser determinadas num ensaio de compressão triaxial convencional.

A fig. 4.1 compara previsões da equação acima com resultados de ensaios triaxiais de compressão e extensão, realizados com pressões confinantes de 203, 350 e 500 kPa, em corpos-se-prova da areia de Hostun (Kolymbas, 1988). Note-se que a equação foi capaz de representar razoavelmente as curvas $\sigma_a - \sigma_r \times \varepsilon_a$, tanto em compressão como em extensão, bem como a contração volumétrica inicial seguida de expansão típicas de areias densas sob compressão.

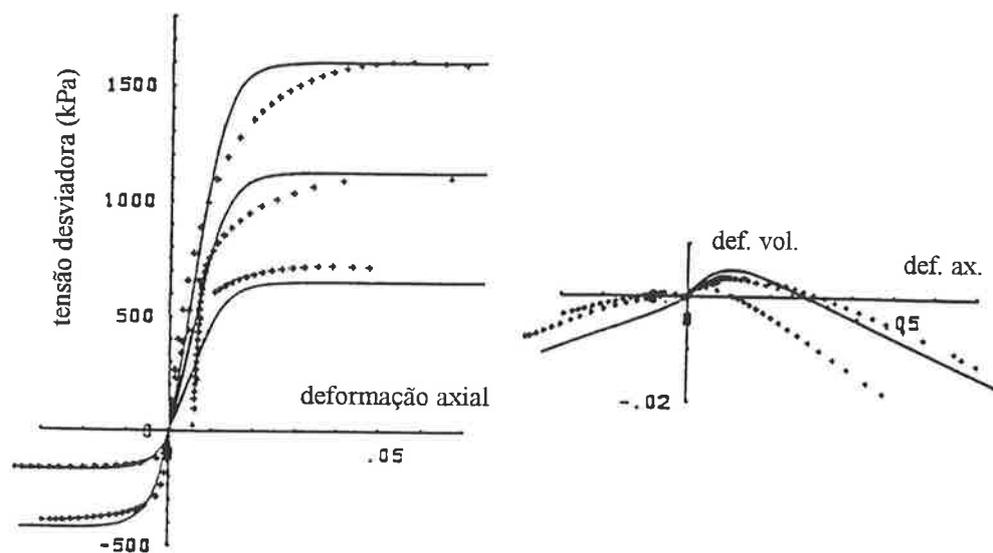


Figura 4.1 - Ensaio de compressão e extensão com a areia de Hostun e resposta teórica (apud Kolymbas, 1988).

Outra equação desse tipo, criada em 1992,

$$\dot{T} = C_1 (tr T) D + C_2 \frac{tr(TD)T}{tr T} + \left(C_3 \frac{T^2}{tr T} + C_4 \frac{T_a^2}{tr T} \right) \sqrt{tr D^2}, \quad (4.3)$$

também contém quatro constantes que podem ser determinadas com o resultado de um ensaio triaxial e, do mesmo modo, destina-se às areias (Wu e Bauer, 1994). Em relação à

eq. 4.2, a eq. 4.3 constitui-se numa evolução, pois não permite a ocorrência de tensões de tração.

As figs. 4.2 e 4.3 mostram a aplicação desta equação à areia de Karlsruhe, em ensaios de compressão triaxial e edométrica.

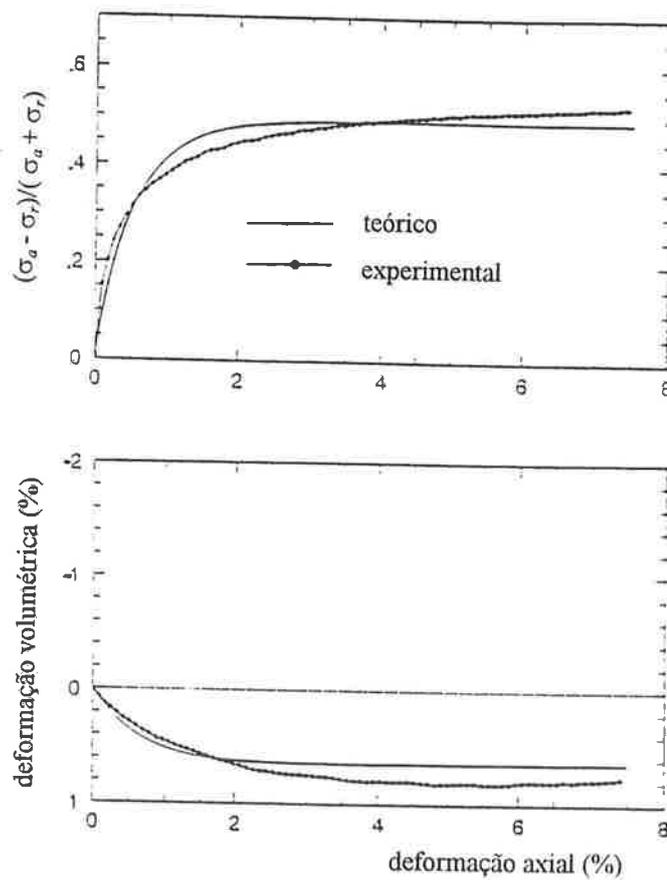


Figura 4.2 - Compressão triaxial em amostra fofa da areia de Karlsruhe com pressão confinante de 100 kPa e resposta teórica (*apud* Wu e Bauer, 1994).

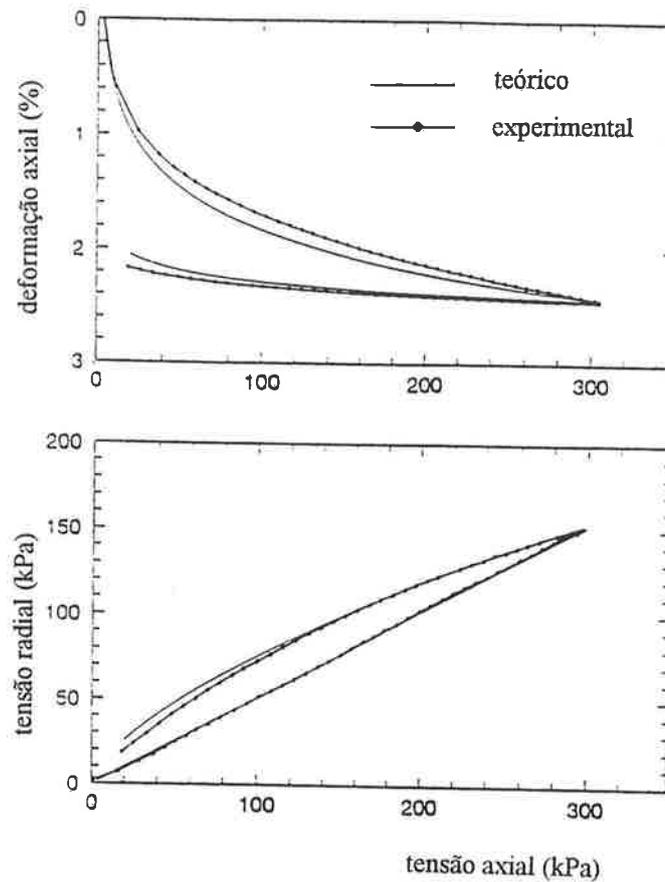


Figura 4.3 - Compressão edométrica em amostra fofa da areia de Karlsruhe e resposta teórica (*apud* Wu e Bauer, 1994).

A fig. 4.4 mostra uma seção (normal ao eixo hidrostático) da superfície de resistência deduzida da eq. 4.3 e pontos obtidos em ensaios triaxiais verdadeiros com a mesma areia, revelando o bom desempenho da teoria.

Na fig. 4.5 são comparados resultados experimentais e teóricos para quatro diferentes trajetórias de tensão em outra areia. Apenas na trajetória 1 a previsão da equação hipoplástica não é boa.

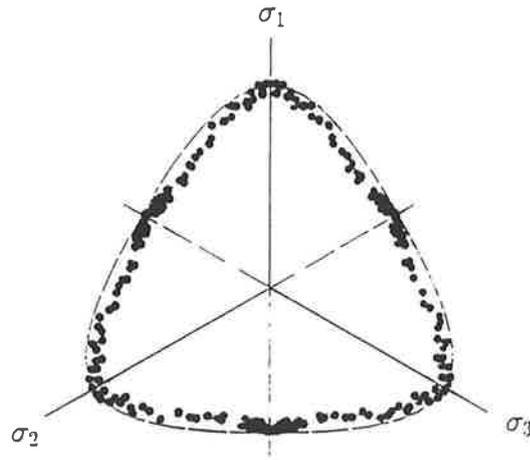


Figura 4.4 - Seção da superfície de ruptura normal ao eixo hidrostático para areia de Karlsruhe em estado compacto: resultados experimentais e teóricos (apud Wu e Bauer, 1994).

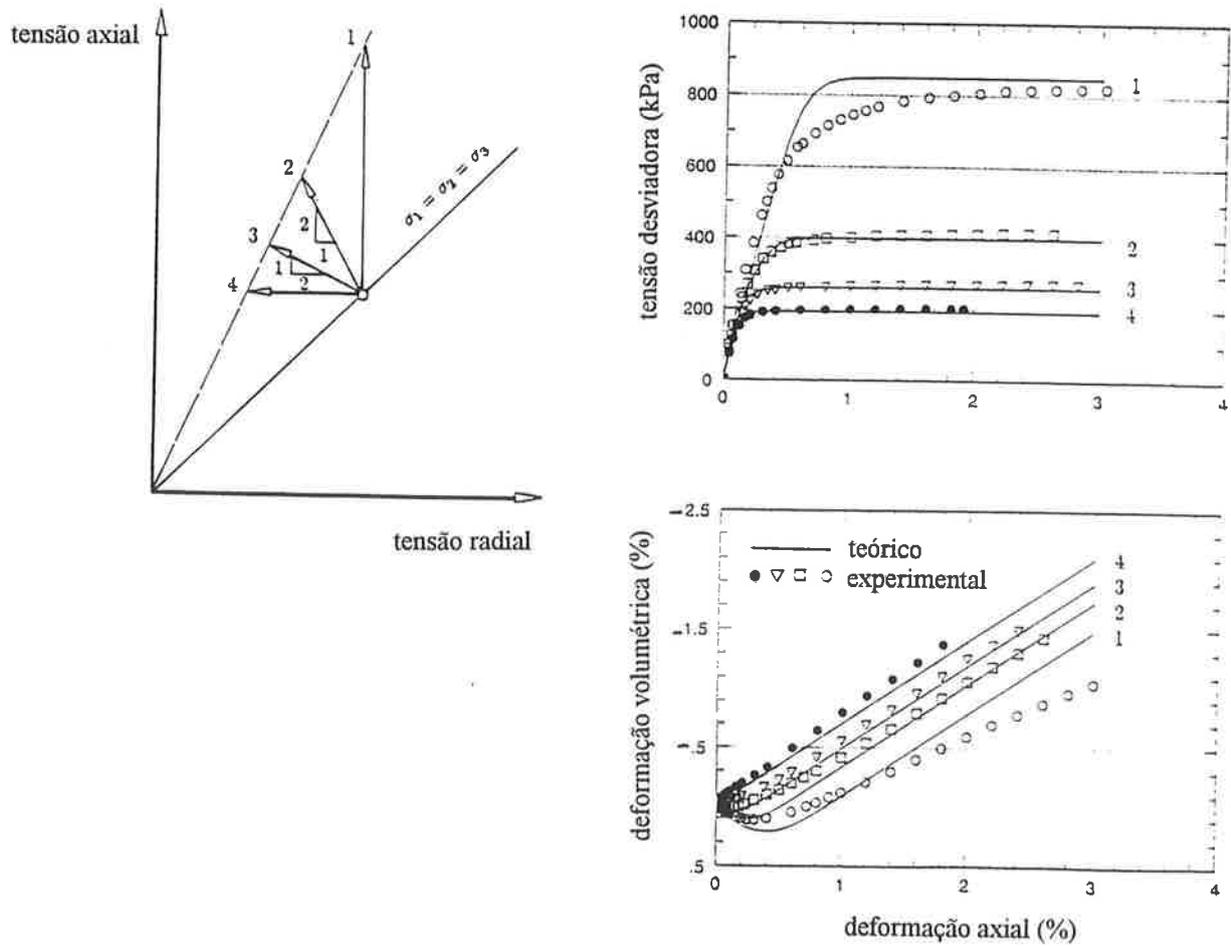


Figura 4.5 - Ensaio triaxiais com diferentes trajetórias de tensão (apud Wu e Bauer, 1994).

As equações básicas apresentadas acima não são capazes de reproduzir as diferenças que se observam quando se ensaia uma mesma areia com índices de vazios diferentes ou quando se ensaia uma areia num certo índice de vazios, mas com tensões confinantes diferentes. Kolymbas (1991) denominou picnotropia a propriedade que tem as areias de variar seu comportamento conforme a densidade e barotropia a propriedade de variar seu comportamento de acordo com o nível de tensão. Para que esses efeitos pudessem ser representados, o passo seguinte dos pesquisadores foi incluir o índice de vazios e na equação hipoplástica, fazendo com ela perdesse sua simplicidade inicial, mas se tornasse mais potente. De um modo geral, a equação hipoplástica adquiriu a forma:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e) \quad (4.4)$$

O modo de incluir o índice de vazios variou entre diferentes autores. A proposta de Wu e Bauer (1993) foi multiplicar as duas últimas parcelas da eq. 4.3 pelo fator I_e :

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{T} \mathbf{D}) \mathbf{T}}{\text{tr} \mathbf{T}} + \left(C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr} \mathbf{T}} + C_4 \frac{\mathbf{T}_a^2}{\text{tr} \mathbf{T}} \right) \sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2} I_e$$

sendo

$$I_e = [1 - a(p)] \frac{e - e_{\min}}{e_c(p) - e_{\min}} + a(p)$$

em que e_{\min} é o índice de vazios mínimo da areia, $e_c(p)$, o índice de vazios no estado crítico associado à tensão octaédrica p através de:

$$e_c = p_1 + p_2 \exp(p_3 p)$$

e

$$a = q_1 + q_2 \exp(q_3 p)$$

Uma desvantagem é que as constantes p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 e q_3 são de difícil calibração. Seus autores apenas mostram as potencialidades do modelo por meio de experimentos numéricos, sem, entretanto, aplicá-lo a um solo.

Um modo melhor de tratar barotropia e picnotropia foi encontrado por Kolymbas *et al.* (1995), com a introdução da retrotensão S associada ao índice de vazios. Sua equação é:

$$\begin{aligned} \dot{T} = & C_1 \text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}((\mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{D})}{\text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S})}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) + \\ & + \left(C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} + C_4 \frac{\mathbf{T}_a^2}{\text{tr}\mathbf{T}} + C_5 \frac{\mathbf{T}^3}{\text{tr}\mathbf{T}^2} + C_6 \frac{\mathbf{T}_a^3}{\text{tr}\mathbf{T}^2} \right) \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2} \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{S} = s\mathbf{I} = \left[s_0 + k \left(\frac{p}{p_0} \right)^\nu \ln \frac{1+e}{1+e_0} \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \mathbf{1}$$

$C_1, \dots, C_6, \alpha, \nu$ são constantes, s_0 e e_0 são valores de s e e correspondentes a um certo $p = p_0$ e

$$k = - \frac{s_0}{\left(\frac{p_c}{p_0} \right)^\nu \ln \frac{1+e_c}{1+e_0}}$$

sendo e_c e p_c valores de e e p no estado crítico. Note-se que s se anula no estado crítico.

Em princípio, para a determinação das constantes seria necessário apenas um ensaio triaxial com uma amostra da areia no estado compacto. Entretanto, como são necessários dados relativos ao estado crítico e, como se sabe, a amostra inicialmente compacta não se encontra mais homogênea no estado crítico, é recomendável a realização de um outro ensaio triaxial com uma amostra da areia no estado fofo.

Os autores aplicaram sua equação à areia de Karlsruhe, conforme veremos a seguir. Nas figs. 4.6 e 4.7 pode-se avaliar a capacidade do modelo em representar

barotropia e picnotropia, respectivamente. A fig. 4.6 mostra resultados de ensaios triaxiais de compressão realizados com várias pressões confinantes e as curvas teóricas produzidas com a equação acima. A equação é capaz de representar a diminuição do ângulo de atrito e da deformação volumétrica de expansão com a pressão confinante. A fig. 4.7 traz resultados de ensaios triaxiais em corpos de prova preparados em diferentes índices de vazios e previsões teóricas que reproduzem as tendências reveladas nos experimentos.

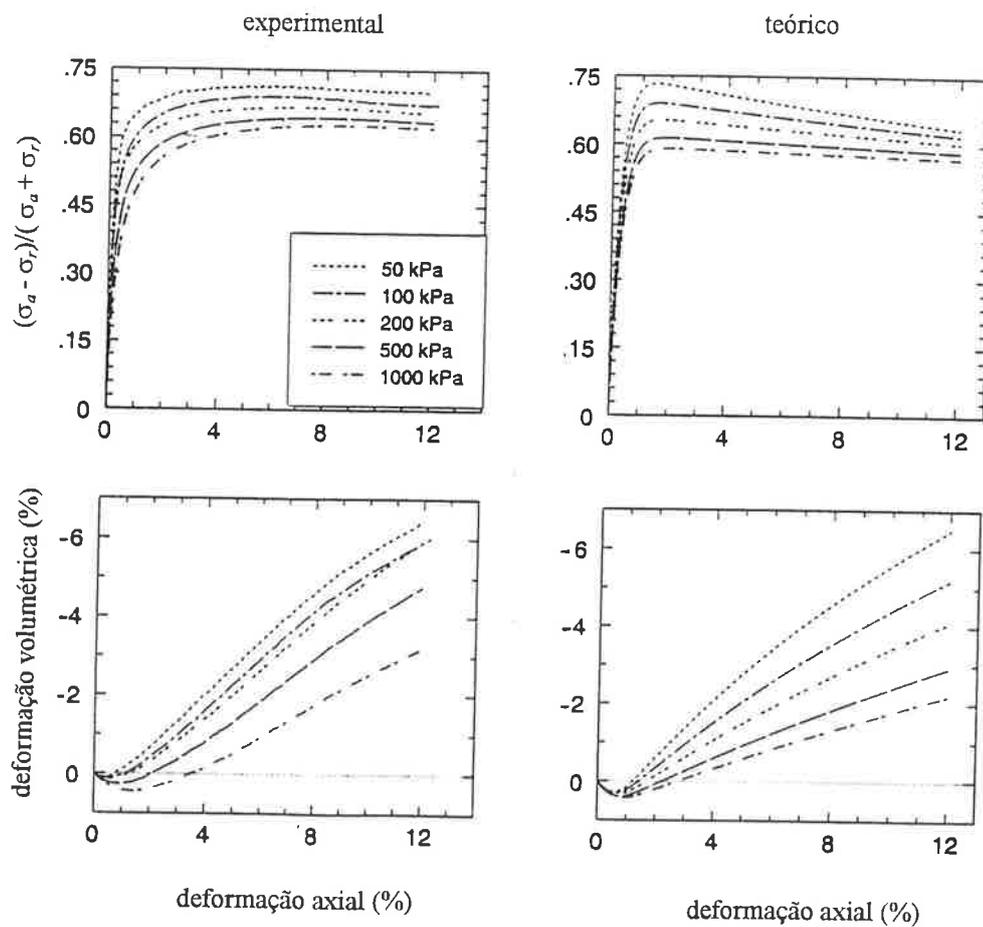


Figura 4.6 - Compressão triaxial com diferentes pressões confinantes em areia e resposta teórica (*apud*

Kolymbas *et al.*, 1995).

A fig. 4.8 faz a comparação entre resultados experimentais de compressão edométrica em corpos-de-prova preparados em dois índices de vazios diferentes e as boas respostas teóricas.

Mostraram ainda que, pelo menos qualitativamente, o modelo é capaz de representar as diferenças marcantes de comportamento de areias fofas e compactas em ensaios não-drenados (fig. 4.9).

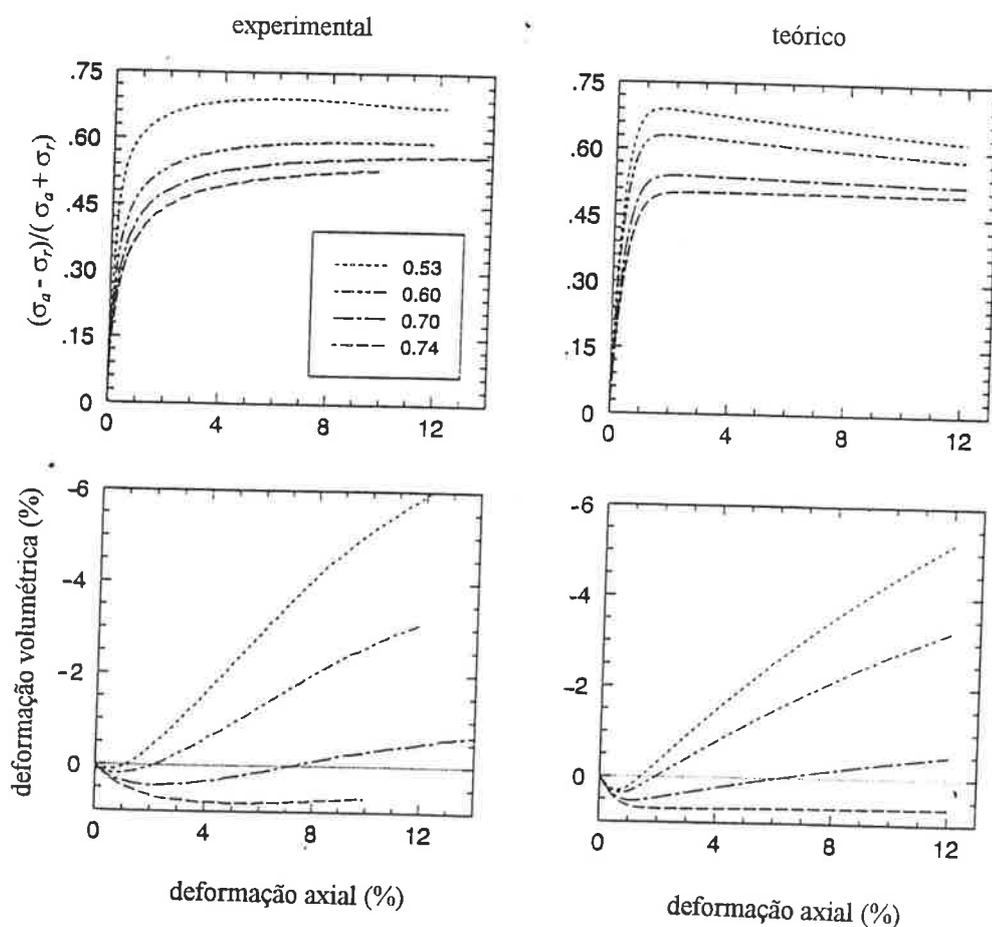


Figura 4.7 - Compressão triaxial com diferentes índices de vazios iniciais e resposta teórica (apud

Kolymbas *et al.*, 1995).

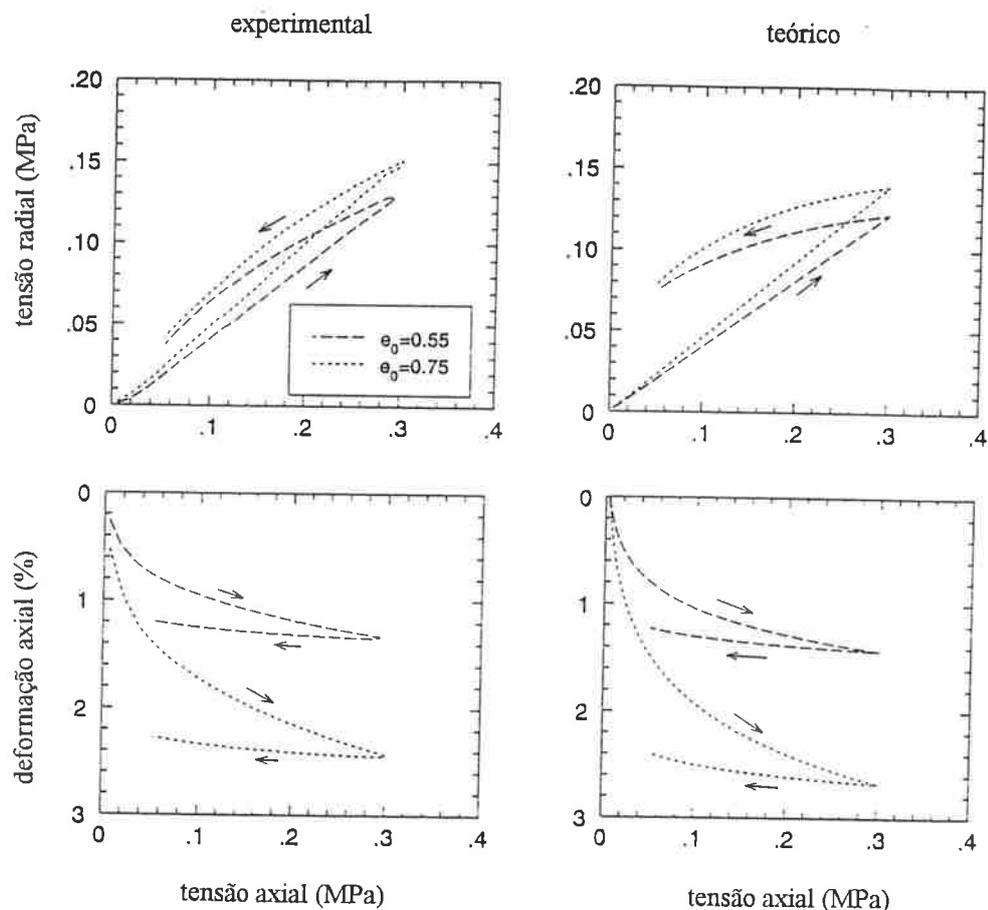


Figura 4.8 - Compressão edométrica com diferentes índices de vazios iniciais e resposta teórica (*apud* Kolymbas *et al.*, 1995).

No estágio seguinte, e mais recente, da evolução das equações hipoplásticas, Gudehus (1996) e Bauer (1995) formularam a seguinte equação, em que comparecem fatores controladores de barotropia e picnotropia, envolvendo constantes diretamente relacionadas com propriedades básicas dos solos:

$$\dot{\hat{T}} = f_s \left[L(\hat{T}, D) + f_d N(\hat{T}) \sqrt{\text{tr} D^2} \right] \quad (4.5)$$

em que

$$\hat{T} = T / \text{tr} T,$$

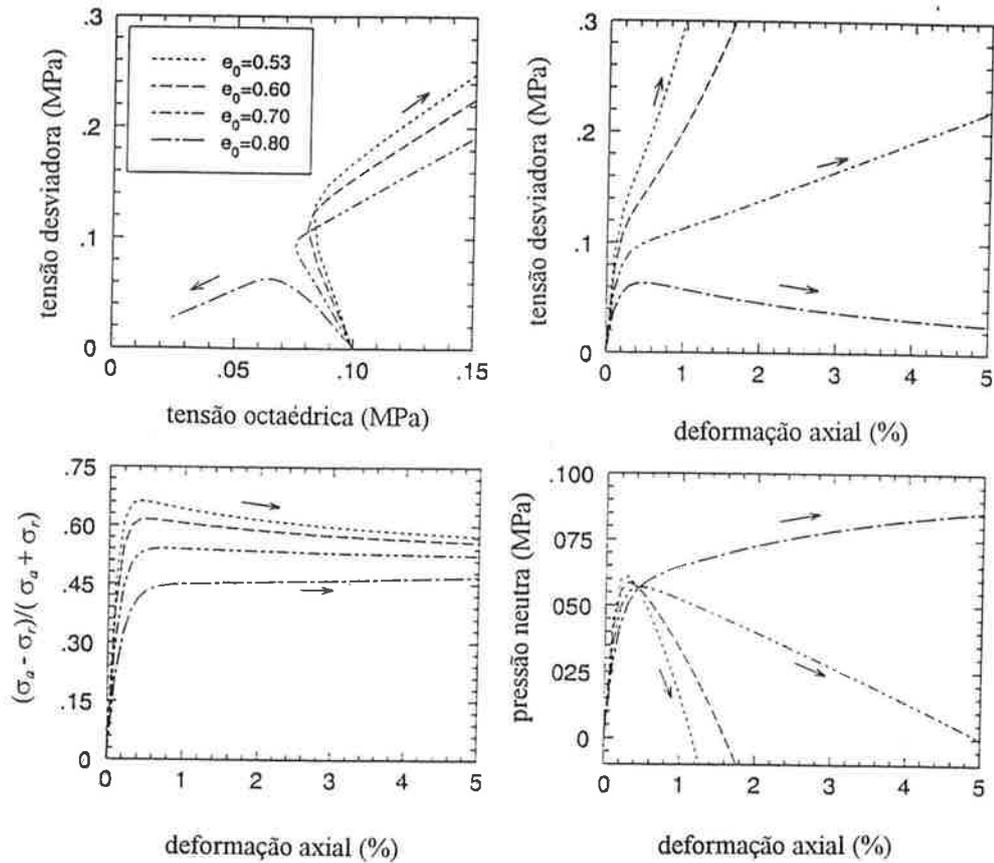


Figura 4.9 - Previsão teórica de resultados de ensaios de compressão não-drenada com diferentes índices de vazios iniciais (*apud* Kolymbas *et al.*, 1995).

$$L(\hat{T}, D) = a_1^2 D + \hat{T} \operatorname{tr}(\hat{T}D) \quad ,$$

$$N(\hat{T}) = a_1(\hat{T} + \hat{T}_a) \quad .$$

Por sua vez

$$a_1 = c_1 + c_2 \|\hat{T}_a\| [1 + \cos(3\theta)] \quad ,$$

$$\cos(3\theta) = -\sqrt{6} \frac{\operatorname{tr}(\hat{T}_a^3)}{[\operatorname{tr}(\hat{T}_a^2)]^{3/2}} \quad ,$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}\phi)}{\sqrt{8} \operatorname{sen}\phi} ,$$

$$c_2 = \frac{3(3 + \operatorname{sen}\phi)}{8 \operatorname{sen}\phi} ,$$

sendo ϕ o ângulo de atrito no estado crítico.

Os fatores que comparecem na equação relacionam-se com os índices de vazios crítico e limites (máximo e mínimo):

$$f_s = \left(\frac{e_c(p)}{e} \right)^\beta f_b ,$$

sendo $e_c(p)$ o índice de vazios no estado crítico associado à tensão octaédrica p , dado por

$$e_c(p) = e_{c0} \exp[-(3p / h_s)^n] .$$

$$f_d = \left(\frac{e - e_d(p)}{e_c(p) - e_d(p)} \right)^\alpha ,$$

sendo $e_d(p)$ o mínimo índice de vazios em que a areia pode encontrar-se, se a tensão octaédrica for p , dado por

$$e_d(p) = e_{d0} \exp[-(3p / h_s)^n] .$$

$$f_b = \left(\frac{e_i(p)}{e_c(p)} \right)^\beta \frac{1 + e_i(p)}{e_i(p)} \frac{h_s}{nh_i} \left(\frac{3p}{h_s} \right)^{1-n} ,$$

sendo $e_i(p)$ o máximo índice de vazios em que a areia pode encontrar-se, se a tensão octaédrica for p , dado por

$$e_i = e_{i0} \exp[-(3p / h_s)^n] ,$$

e

$$h_i = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \frac{1}{c_1 \sqrt{3}} .$$

Note-se que os valores de $e_c(p)$, $e_d(p)$ e $e_i(p)$, para $p = 0$, são e_{c0} , e_{d0} e e_{i0} , respectivamente.

Assim, as constantes do modelo são ϕ , β , α , h_s , n , e_{c0} , e_{d0} , e_{i0} .

Hügel (1995) implementou a eq. 4.5 num programa de elementos finitos e a aplicou à análise de experimentos de campo (em escala natural) de um bloco de fundação e de uma escavação com parede diafragma. Para o bloco de fundação, notemos na fig. 4.10 os diagramas força-deslocamento medido e calculado com deformação tridimensional (3D) e deformação plana (2D), em que é nítida a superioridade do modelo tridimensional de elementos finitos. Nessa figura F denota a força inclinada aplicada (a relação entre as componentes horizontal e vertical é 0,4), u , o deslocamento na direção da força, $\varphi_m = \arcsen(\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 + \sigma_3)$, o ângulo de atrito mobilizado e φ_w , ângulo de atrito entre o bloco e o solo. Para a parede diafragma, conforme mostra o aquele autor, as previsões teóricas também são realistas.

A mais recente equação hipoplástica resultou de uma mudança feita por von Wolffersdorff (1996) na eq. 4.5. Tal alteração trouxe as seguintes melhorias: a superfície do estado crítico é a de Matsuoka/Nakai (1977) e, com isso, são previstos valores mais realistas de ângulo de atrito de pico e estado crítico em ensaios triaxiais de extensão e de deformação plana; a curva de compressão isotrópica é o limite superior para o índice de vazios. Conforme mostram as figs. 4.11 e 4.12, são de boa qualidade as previsões teóricas dos resultados experimentais de ensaios de compressão edométrica e triaxial com variadas pressões confinantes, feitos com corpos de prova da areia de Hochstetten moldada com índices de vazios diferentes.

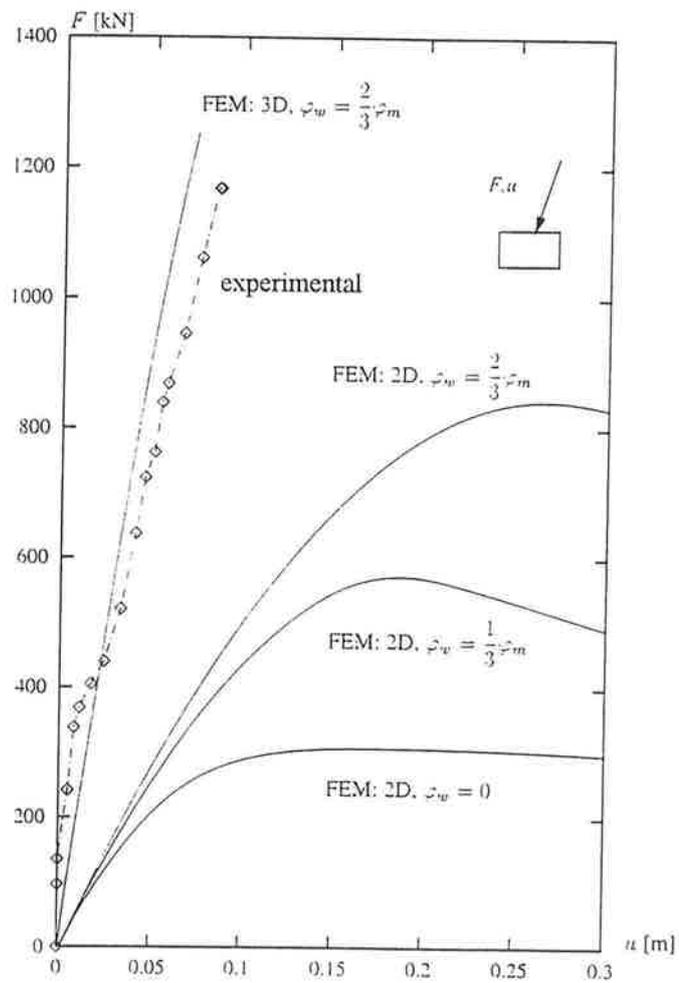


Figura 4.10 - Comparação entre curvas força-deslocamento medida e calculada com modelo bidimensional e tridimensional de elementos finitos e diferentes rugosidades do bloco de fundação (apud Hùgel, 1995).

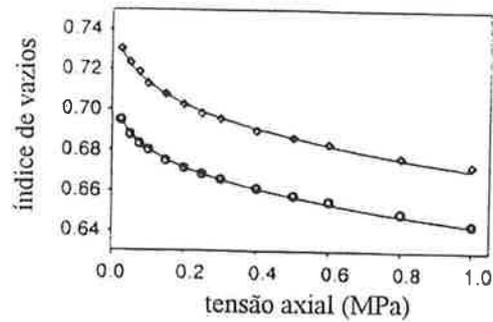


Figura 4.11 - Compressão edométrica da areia de Hochstetten com diferentes índices de vazios iniciais (apud von Wolffersdorff, 1995).

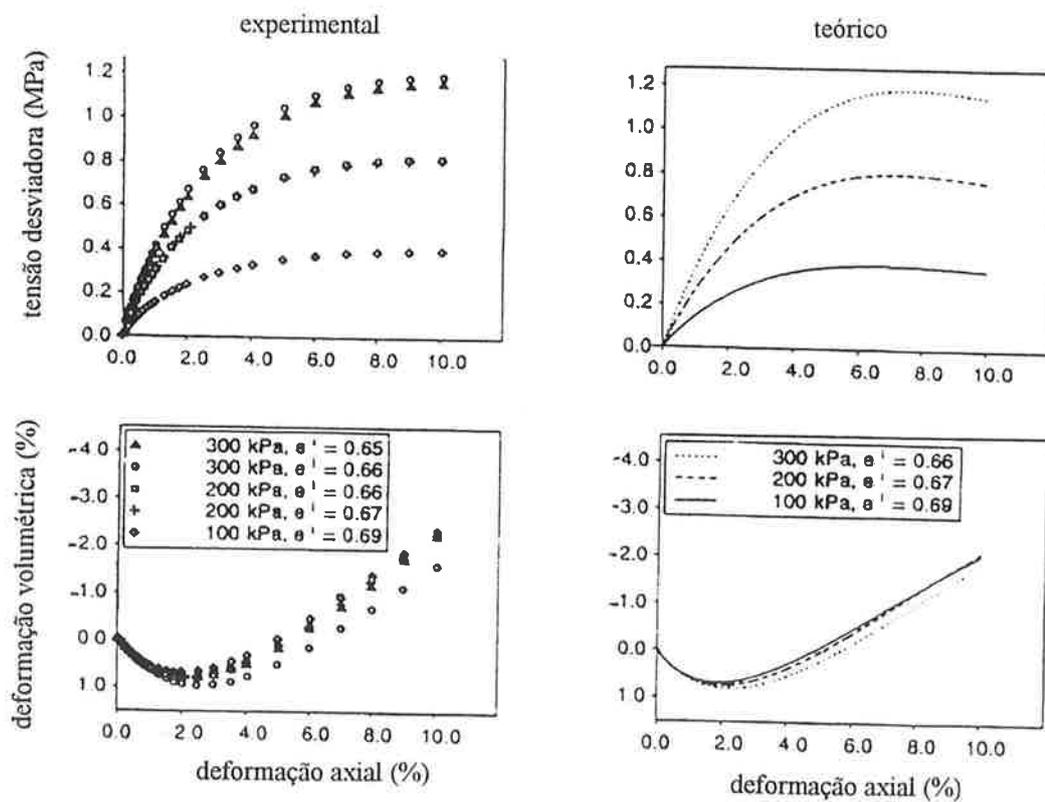


Figura 4.12 - Compressão triaxial da areia de Hochstetten com diferentes pressões confinantes e índices de vazios iniciais (apud von Wolffersdorff, 1995).

Situemos, agora, no quadro da evolução da Hipoplasticidade, a equação hipoplástica apresentada no capítulo 5 desta tese.

Desenvolveu-se uma equação da forma básica (4.1), que se pode aplicar, em princípio, a qualquer tipo de solo, e não da forma mais recente (4.4), cujo objetivo principal é descrever barotropia e picnotropia de areias, porque se tratava de um solo siltoso. A capacidade de representação do comportamento desse solo por parte da nova equação será avaliada no capítulo 5.

Além disso, simplicidade era uma das metas. Entre as equações hipoplásticas existentes, mesmo as mais simples não foram submetidas a uma análise qualitativa da resposta que fornecem, por não serem simples o bastante. A equação proposta, ao contrário, permite esse tipo análise, conforme veremos no capítulo 6.

5 A NOVA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA

5.1 INTRODUÇÃO

Há alguns anos, iniciou-se na Escola Politécnica da USP uma linha de pesquisa em modelos constitutivos para solos da cidade de São Paulo. O primeiro material examinado foi o silte residual de migmatito, encontrado no Campus da USP, cujo comportamento mecânico foi investigado numa série de ensaios, com ênfase em solicitações drenadas em diversas trajetórias de tensão. Os resultados experimentais foram comparados com as previsões teóricas de alguns modelos como o SUEF (Pinto e Nader, 1994) e o Cam-Clay (Nader e Pinto, 1994), este último tendo sido abordado no capítulo 3.

Em etapa seguinte dessa mesma linha de pesquisa, foi criada uma nova equação constitutiva hipoplástica para esse mesmo solo, a qual será apresentada logo adiante, onde também se discutirá seu desempenho no confronto com o que se observou em laboratório, em ensaios de compressão isotrópica, edométrica, triaxial drenada com diferentes trajetórias de tensão, triaxial não-drenada e ensaio K_0 , sobre amostras reconstituídas. Será feita também a comparação com a resposta do modelo Cam-Clay.

As constantes presentes na nova equação hipoplástica relacionam-se de modo direto com parâmetros bem conhecidos da Mecânica dos Solos, o que torna mais fácil sua calibração e mais clara sua influência na resposta do modelo, em contraste com o que ocorre com a maioria das equações hipoplásticas, nas quais as constantes não são de interpretação fácil.

Além disso, conforme veremos no capítulo 6, em alguns casos é possível obter soluções analíticas das equações diferenciais que fornecem um quadro de respostas que serve de referência em solicitações mais complexas e permite que se entenda melhor o comportamento de modelos hipoplásticos, proporcionando um paralelo com o modelo Cam-Clay. Com isso esta equação pode contribuir para a divulgação da Hipoplasticidade, que, por falta de estudos qualitativos, parece menos atraente ao estudioso de Mecânica dos Solos.

5.2 A EQUAÇÃO

Propõe-se a seguinte equação hipoplástica:

$$\dot{T} = \frac{1}{3} [C_1 \text{tr} D \text{tr} T + C_2 (\text{tr} T_a D)] I + (C_4 - \eta) (\text{tr} T) D_a + \left[\frac{1}{3} C_3 (\text{tr} T) I + C_5 T_a \right] \sqrt{\text{tr} D^2}, \quad (5.1)$$

em que o índice a indica a parte anti-esférica (com traço nulo) de um tensor,

$$\eta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\text{tr} T_a^2}}{\text{tr} T},$$

e C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 são dadas por

$$C_1 = -\frac{I}{2} \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{I}{\kappa} \right),$$

$$C_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2} \frac{C_3}{M},$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\kappa} \right),$$

$$C_4 = -\frac{\tilde{G}}{3},$$

$$C_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\tilde{G} + 3M}{M},$$

sendo λ, κ, M e \tilde{G} constantes características do material, cujo significado físico ficará claro logo adiante.

Em suma, há apenas quatro constantes independentes.

Cabe aqui uma nota sobre o processo de criação de uma equação constitutiva, que, por ser marcado sobretudo por tentativas e erros, não pode ser traçado com nitidez. Nele, o conhecimento de características básicas do comportamento dos solos e a experiência em trabalhar com outras equações desempenha papel muito importante. No caso de equações hipelásticas, hipoplásticas e elastoplásticas, é fundamental como guia o teorema de representação para funções tensoriais isotrópicas de duas variáveis tensoriais (Wang, 1969), segundo o qual a forma mais geral que a equação pode ter é:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} = & \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{T} + \phi_2 \mathbf{D} + \phi_3 \mathbf{T}^2 + \phi_4 \mathbf{D}^2 + \phi_5 (\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) + \phi_6 (\mathbf{T}^2 \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}^2) + \\ & + \phi_7 (\mathbf{T}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{T}) + \phi_8 (\mathbf{T}^2 \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{T}^2) \end{aligned}$$

em que cada ϕ_i é uma função isotrópica dos invariantes básicos de \mathbf{T} e \mathbf{D} :

$$\phi_i = \phi_i(\text{tr}\mathbf{T}, \text{tr}\mathbf{T}^2, \text{tr}\mathbf{T}^3, \text{tr}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{D}^2, \text{tr}\mathbf{D}^3, \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{T}^2 \mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}^2), \text{tr}(\mathbf{T}^2 \mathbf{D}^2))$$

A título de ilustração de um procedimento usado durante a elaboração de uma equação constitutiva, vejamos como uma leitura simplificada da eq. 5.1 nos pode dizer se ela é capaz de representar fenômenos fundamentais. De forma imprecisa, mas suficiente para o momento, pode-se dizer que a equação informa que variação na tensão (lado esquerdo da igualdade) ocorre se impusermos uma certa deformação, sendo relevante o estado de tensão atual. Nos dois exemplos a seguir, fixemos $W = 0$ e, portanto, $\dot{T} = \dot{T}$.

Suponhamos que o estado atual de tensão seja isotrópico (hidrostático): $T = -bI$, $b > 0$ (compressão) (portanto, $T_a = 0$). A equação simplifica-se:

$$\dot{T} = \frac{1}{3}[-3bC_1 \text{tr}D]I - 3bC_4 D_a + \frac{1}{3}(-3b)C_3 I \sqrt{\text{tr}D^2}.$$

Se impusermos deformação isotrópica ($D_a = 0$), e só neste caso, notamos que a variação de tensão também será isotrópica (um múltiplo de I), conforme se espera de solos isotrópicos.

Outra característica marcante do comportamento dos solos é o fato de deformações sem variação de volume ($\text{tr}D = 0$), como nos ensaios triaxiais não-drenados em solos saturados, serem acompanhadas de variação na soma das tensões principais. Isso é previsto pela eq. 5.1. De fato, colocando $\text{tr}D = 0$ em (5.1), calculamos $\text{tr}\dot{T}$ não-nulo, em geral:

$$\text{tr}\dot{T} = C_2(\text{tr}T_a D) + C_3 \text{tr}T \sqrt{\text{tr}D^2}.$$

Para que, posteriormente, se possa fazer o confronto entre as previsões teóricas deste modelo e o resultado de ensaios triaxiais, é fundamental deduzir a forma particular da equação geral 5.1 para tais casos. Utilizando-se o que foi estudado no capítulo 3, e as grandezas lá introduzidas para a análise de ensaios triaxiais, a equação geral fornece:

$$\dot{p} = -C_1 p \dot{\epsilon}_v - \frac{2}{9} C_2 q \dot{\gamma} + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 p \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2} \quad (5.2)$$

$$\dot{q} = -3(C_4 - \eta) p \dot{\gamma} + \frac{\sqrt{3}}{3} C_5 q \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2} \quad (5.3)$$

Para enfatizar o significado físico das constantes características do material, vamos analisar algumas solicitações bem conhecidas e interpretá-las pelo prisma desta teoria.

a) Compressão e expansão isotrópicas

Neste caso temos $\sigma_a = \sigma_r = p$, $q = 0$, $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_v / 3$, $\dot{\gamma} = 0$. Em (5.2):

$$\dot{p} = -C_1 p \dot{\epsilon}_v + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 p |\dot{\epsilon}_v|.$$

Se há compressão ($\dot{\epsilon}_v > 0$), então:

$$\dot{p} = \left(-C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 \right) p \dot{\epsilon}_v.$$

Mas

$$-C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto,

$$\dot{p} = \frac{1}{\lambda} p \dot{\epsilon}_v. \quad (5.4)$$

Caso haja expansão ($\dot{\epsilon}_v < 0$), então:

$$\dot{p} = \left(-C_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 \right) p \dot{\epsilon}_v.$$

Sendo

$$-C_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}C_3 = \frac{1}{\kappa} ,$$

vale

$$\dot{p} = \frac{1}{\kappa} p \dot{\varepsilon}_v . \quad (5.5)$$

Se o valor do índice de vazios ao longo do tempo for dado por $e = e(t)$, pode-se mostrar que $\dot{\varepsilon}_v = \dot{e} / (1 + e)$. Integrando as equações (5.4) e (5.5) com $p(0) = p_0$ e $e(0) = e_0$, obtemos, respectivamente:

$$\ln \frac{1+e_0}{1+e} = \lambda \ln \frac{p}{p_0} ,$$

$$\ln \frac{1+e_0}{1+e} = \kappa \ln \frac{p}{p_0} ,$$

como no modelo Cam-Clay (capítulo 3).

Num ciclo de carregamento o modelo produz a resposta representada na fig. 5.1. O comportamento defeituoso no recarregamento é o principal defeito da Hipoplasticidade em geral.

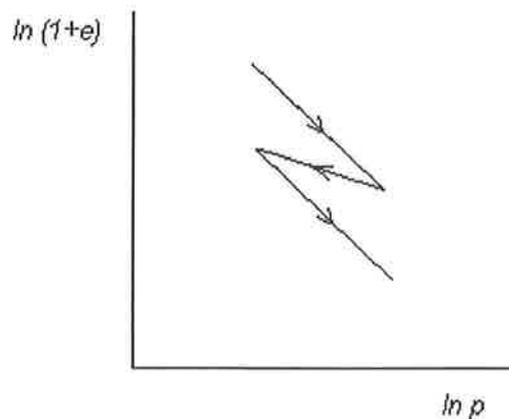


Figura 5.1 - Compressão e expansão isotrópicas, segundo o modelo.

b) Começo de um ensaio triaxial

Em um ensaio triaxial, terminada a etapa de adensamento isotrópico, inicia-se a alteração em q . No primeiro instante desta fase, têm-se $p(0) = \sigma$ (pressão confinante), $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) \neq 0$. Em (5.3):

$$\dot{q} = -3C_4\dot{\gamma}\sigma$$

Donde:

$$\tilde{G} = \frac{\dot{q}}{\dot{\gamma}\sigma}$$

\tilde{G} é, portanto, o coeficiente angular da reta tangente à curva $(q/\sigma) \times \gamma$ na origem. Tal coeficiente angular, segundo esta equação, não depende sequer da trajetória de tensão, em contraste com o que mostram os experimentos, como veremos adiante.

c) Estado Crítico

Pondo $\dot{\varepsilon}_v = 0$ em (5.2) e (5.3), resultam

$$\dot{p} = -\frac{2}{9}C_2q\dot{\gamma} + \frac{\sqrt{6}}{3}C_3p|\dot{\gamma}|,$$

$$\dot{q} = -3\left(C_4 - \frac{|q|}{p}\right)p\dot{\gamma} + \frac{\sqrt{6}}{3}C_5q|\dot{\gamma}|.$$

Substituindo as expressões das constantes, obtemos:

$$\dot{p} = \frac{\sqrt{6}}{3}C_3\left(-\frac{q}{M}\dot{\gamma} + p|\dot{\gamma}|\right) \quad (5.6)$$

$$\dot{q} = \tilde{G}\left(p\dot{\gamma} - \frac{q}{M}|\dot{\gamma}|\right) + 3(|q|\dot{\gamma} - q|\dot{\gamma}|) \quad (5.7)$$

Se $\dot{\gamma} > 0$ e $q = Mp$ ou se $\dot{\gamma} < 0$ e $q = -Mp$, resulta, pela equação (5.6), $\dot{p} = 0$. Se $\dot{\gamma} > 0$, $q \geq 0$ e $q = Mp$ ou se $\dot{\gamma} < 0$, $q \leq 0$ e $q = -Mp$, resulta, pela equação (5.7), $\dot{q} = 0$. Com isso fica mostrado que as linhas do estado crítico no diagrama (p, q) são as semi-retas $q = Mp$ e $q = -Mp$, com $p \geq 0$.

5.3 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DO MODELO

Uma vez que a descrição das propriedades do solo e dos ensaios realizados foi feita no capítulo 3, partimos diretamente para a determinação das constantes características do solo, para a qual foi conveniente combinar dois procedimentos. Um deles utiliza-se da interpretação feita na seção anterior, na qual são analisadas solicitações ou situações em que cada parâmetro influi isoladamente: λ ocorre isoladamente na equação da compressão isotrópica, κ ocorre isoladamente na equação da expansão isotrópica, M é o coeficiente angular da reta do estado crítico, \tilde{G} é o coeficiente angular da reta tangente à curva $(q/\sigma) \times \gamma$ na origem. O outro procedimento leva em conta a finalidade do estudo, que é reproduzir, com as equações do modelo, as curvas experimentais obtidas em diversas solicitações, em especial nos ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão. Como nessas solicitações todos os parâmetros têm influência simultânea, neste segundo procedimento os valores devem ser escolhidos de modo a levarem ao melhor resultado global.

5.3.1) Determinação de λ e κ

Segundo o modelo, na compressão e expansão isotrópicas, o logaritmo de $(1+e)$ varia linearmente com o logaritmo da tensão aplicada e os coeficientes angulares das retas são $-\lambda$ e $-\kappa$, conforme explicado na seção anterior; a resposta é a mesma do modelo Cam-Clay.

No capítulo 3 (fig. 3.4), vimos que não são retas as curvas experimentais de compressão e expansão, reproduzidas a seguir na fig. 5.2 juntamente com a previsão do modelo hipoplástico. A resposta do modelo hipoplástico é igual a do Cam-Clay na compressão e na expansão, mas é diferente na recompressão.

Lembrando que o objetivo principal é representar o comportamento observado nos ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão, escolheram-se valores de λ e κ que produzissem a resposta teórica que mais se aproximasse da experimental nesses ensaios, sem que a representação da compressão isotrópica ficasse muito prejudicada, como podemos notar na própria fig. 5.2. Os valores adotados foram: $\lambda = 0,070$ e $\kappa = 0,018$; os mesmos adotados para o modelo Cam-Clay. Note-se que a recompressão não é bem representada pelo modelo, como já se havia comentado na seção anterior.

Vale salientar que poderia ter acontecido de os valores de λ e κ escolhidos para o Cam-Clay não serem iguais aos escolhidos para a equação hipoplástica, pois, embora ambos os modelos tenham resposta idêntica na compressão e expansão isotrópicas, o mesmo não ocorre nas seis trajetórias de tensão seguidas nos ensaios triaxiais drenados, as quais se deseja representar do modo mais fiel.

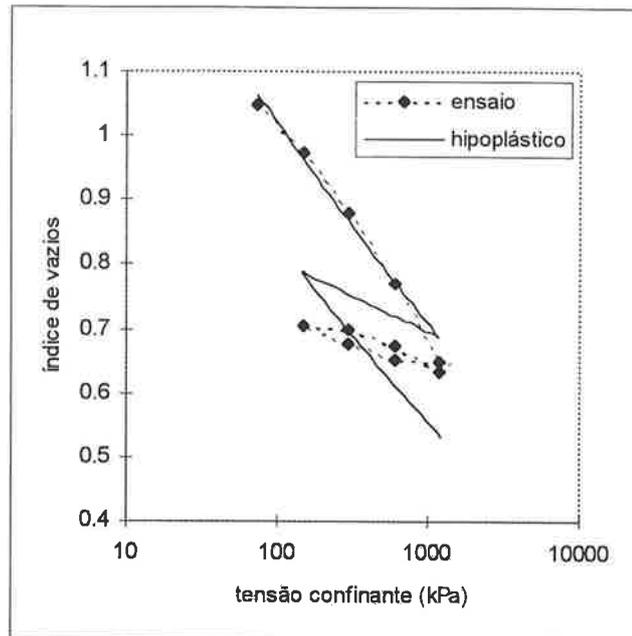


Figura 5.2 - Ensaio de compressão isotrópica.

5.3.2) Determinação de M

De acordo com o modelo, no estado crítico, a relação entre o módulo de q e p deve ser igual a M , não importando qual seja a trajetória de tensão. Com os dados experimentais de ruptura nas seis trajetórias de tensão, consideradas individualmente, não se encontram os mesmos valores de M :

Trajectoria 1: $M = 1,32$ (valor excessivamente baixo, fruto do desenvolvimento de pressão neutra, e por isso desprezado na análise);

Trajectoria 2: $M = 1,46$;

Trajectoria 3: $M = 1,54$;

Trajectoria 4: $M = 1,60$;

Trajectoria 5: $M = 1,60$;

Trajectoria 6: $M = 1,54$;

É compreensível que as trajetórias 3, 4, 5 e 6 forneçam valores de M um pouco superiores, porque nelas a tensão radial cai abaixo do valor inicial (antes do carregamento axial), tornando o solo sobreadensado.

Optou-se pelo valor $M = 1,46$ (correspondente ao ângulo de atrito de 36°), em primeiro lugar, porque é o que leva à melhor previsão teórica das curvas tensão desviadora-deformação axial e deformação volumétrica-deformação axial no conjunto das seis trajetórias de tensão e, em segundo lugar, porque é o determinado pela trajetória 2, que é o ensaio triaxial convencional, do qual se dispõe normalmente.

5.3.3) Determinação de \tilde{G}

Segundo o modelo, o parâmetro \tilde{G} pode ser obtido do resultado de qualquer ensaio triaxial, pois independe do tipo de trajetória. Entretanto, calculados os coeficientes angulares das retas tangentes à curva $(q/\sigma) \times \gamma$ na origem, para cada ensaio drenado com uma particular trajetória de tensão, valores diferentes foram obtidos:

Trajectoria 1: $\tilde{G}=33$;

Trajectoria 2: $\tilde{G}=45$;

Trajectoria 3: $\tilde{G}=79$;

Trajectoria 4: $\tilde{G}=179$;

Trajectoria 5: $\tilde{G}=150$;

Trajectoria 6: $\tilde{G}=313$.

Deve-se chamar a atenção para a imprecisão dos primeiros registros de deformação feitos no início do carregamento e para a consequência imediata que têm na

determinação de \tilde{G} feita acima. Neste caso, é ainda mais importante examinar o desempenho dos vários valores de \tilde{G} na representação das curvas experimentais.

Escolheu-se $\tilde{G} = 54$, pois foi o que produziu curvas teóricas que mais se aproximaram das experimentais no conjunto de ensaios com diferentes trajetórias de tensão.

5.3.4) Comentários

Note-se que a ênfase está sendo dada aos ensaios drenados com diferentes trajetórias de tensão, isto é, as constantes foram escolhidas de modo que o comportamento nesses ensaios, vistos como um conjunto, seja melhor representado pelo modelo, conforme será visto na próxima seção.

Evidentemente, se cada ensaio for analisado individualmente, pode-se encontrar constantes específicas mais apropriadas. Feita essa análise, resultou que os valores das constantes apresentadas acima também são os melhores para as trajetórias 2, 4 e 5. Para as outras três trajetórias, são dados a seguir os valores de uma ou mais constantes que devem substituir os valores anteriores de maneira que a previsão teórica seja um pouco melhor:

Trajectoria 1: $\kappa = 0,05$; $M = 1,35$; $\tilde{G} = 40$.

Trajectoria 3: $\kappa = 0,027$.

Trajectoria 6: $\tilde{G} = 60$.

5.4 CONFRONTO ENTRE PREVISÕES TEÓRICAS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS NOS ENSAIOS TRIAXIAIS DRENADOS COM DIFERENTES TRAJETÓRIAS DE TENSÃO

Vamos comparar as curvas tensão desviadora-deformação axial e deformação volumétrica-deformação axial experimentais com as teóricas, correspondentes às seis trajetórias de tensão.

As curvas teóricas calculadas com a equação hipoplástica, das figuras de 5.3 a 5.8, foram obtidas utilizando-se $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,018$, $M = 1,46$ e $\tilde{G} = 54$. Nas mesmas figuras estão reproduzidas as curvas do modelo Cam-Clay, já analisadas no capítulo 3, para que possamos comparar o desempenho das duas teorias.

Nota-se, de início, que o valor de tensão desviadora na ruptura é bem inferior ao previsto em teoria na trajetória 1, coincide com o teórico na trajetória 2 e é levemente superior ao teórico nas trajetórias 3, 4, 5 e 6, como ocorre com os resultados do modelo Cam-Clay. As razões são as mesmas expostas no capítulo anterior.

Quanto às curvas tensão desviadora-deformação axial, a qualidade da previsão é medianamente boa nas trajetórias 2, 3, 4 e 5. Na trajetória 1, o ajuste só é bom em baixas deformações, e, na trajetória 6, o solo mostrou-se sensivelmente menos deformável que o previsto.

Comparemos agora as duas teorias:

Trajetoária 1: o Cam-Clay aproxima-se mais do observado experimentalmente.

Trajetoária 2: a qualidade da previsão é quase a mesma, sendo a equação hipoplástica levemente superior.

Trajectoria 3: a curva produzida pela equação hipoplástica é mais próxima dos pontos experimentais para deformações axiais superiores a 2,5%, enquanto, para deformações inferiores a este valor, a curva calculada com o Cam-Clay ajusta-se melhor.

Trajectorias 4, 5 e 6: a equação hipoplástica é superior, pois descreve o aumento gradual de deformabilidade observado nos ensaios, embora subestime o valor da tensão desviadora, sobretudo na trajetória 6. No modelo Cam-Clay, nessas três trajetórias em que ocorre diminuição da tensão octaédrica p , o regime é inicialmente elástico e a deformabilidade teórica é excessivamente baixa até que se atinja a curva de plastificação, por isso são produzidas curvas de forma significativamente diferentes das experimentais, principalmente na trajetórias 5 e 6. Nesta última chega a ser previsto aumento na altura do corpo-de-prova.

Quanto às curvas de deformação volumétrica-deformação axial, a qualidade da previsão feita com a equação hipoplástica é boa nas trajetórias 2, 4, 5 e 6, sobretudo nas três últimas. A resposta teórica não é tão boa nas trajetórias 1 e 3.

Em comparação com o Cam-Clay, a equação hipoplástica é melhor em todas as trajetórias. As diferenças são marcantes nas trajetórias 4, 5 e 6, em que o Cam-Clay prevê expansão elástica inicial em desacordo com os resultados de ensaios. Nas trajetórias 5 e 6 as curvas do Cam-Clay são muito diferentes das experimentais. Na trajetória 3, o Cam-Clay superestima a deformação volumétrica mais que a equação hipoplástica.

Em Hipoplasticidade, a inexistência de um domínio elástico, aliada a propriedades intrínsecas do modelo em questão, faz com que a resposta seja mais realista na maioria das trajetórias e curvas.

Deve-se lembrar que o desempenho do modelo SUEF, examinado noutra ocasião (Pinto e Nader, 1994), também foi bom nas seis trajetórias de tensão.

No final da seção anterior, comentou-se que a resposta teórica melhora um pouco nas trajetórias 1, 3 e 6, se forem adotados outros valores para uma ou mais constantes. As figuras 5.9, 5.10 e 5.11 mostram as novas curvas teóricas, produzidas com os novos valores das constantes, específicos para cada uma das trajetórias, em comparação com as antigas e com o resultado experimental.

Na trajetória 1, os valores específicos de κ (0,05), M (1,35) e \tilde{G} (40) melhoram a representação tanto da curva tensão desviadora - deformação axial, que agora se ajusta bem aos pontos experimentais, quanto da curva deformação volumétrica - deformação axial. Na trajetória 3, com o novo valor de κ (0,027) é bem melhor a previsão da curva deformação volumétrica-deformação axial, ao passo que, na curva tensão desviadora-deformação axial a qualidade da resposta teórica é quase a mesma. Também na trajetória 6, é na curva deformação volumétrica - deformação axial que a resposta teórica se torna sensivelmente mais próxima dos resultados experimentais, quando se usa o novo valor de \tilde{G} (60).

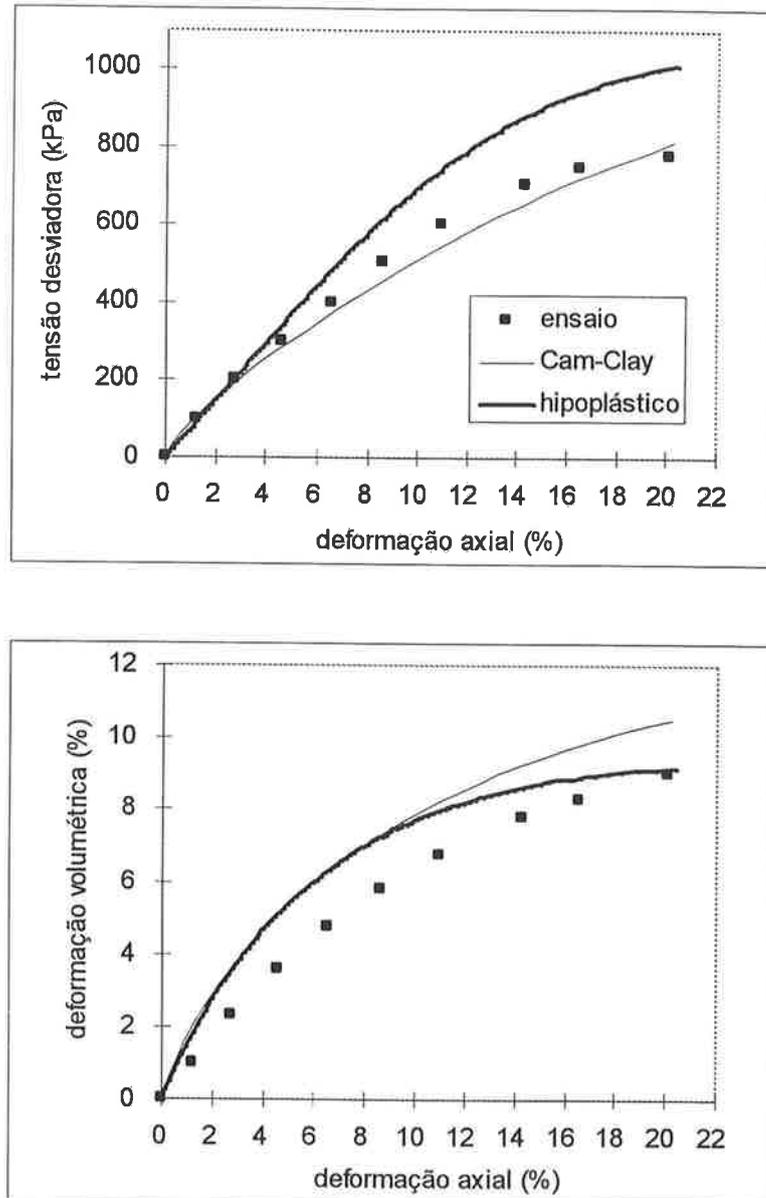


Figura 5.3 - Trajetória 1.

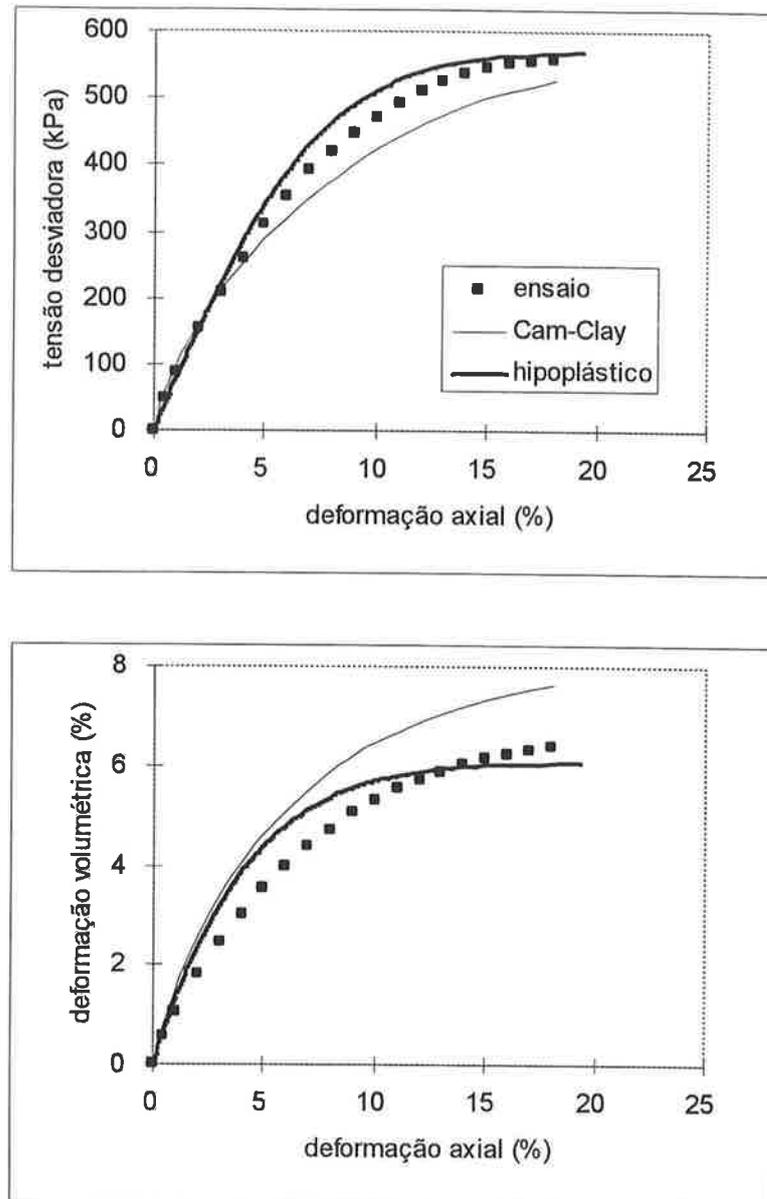


Figura 5.4 - Trajetória 2.

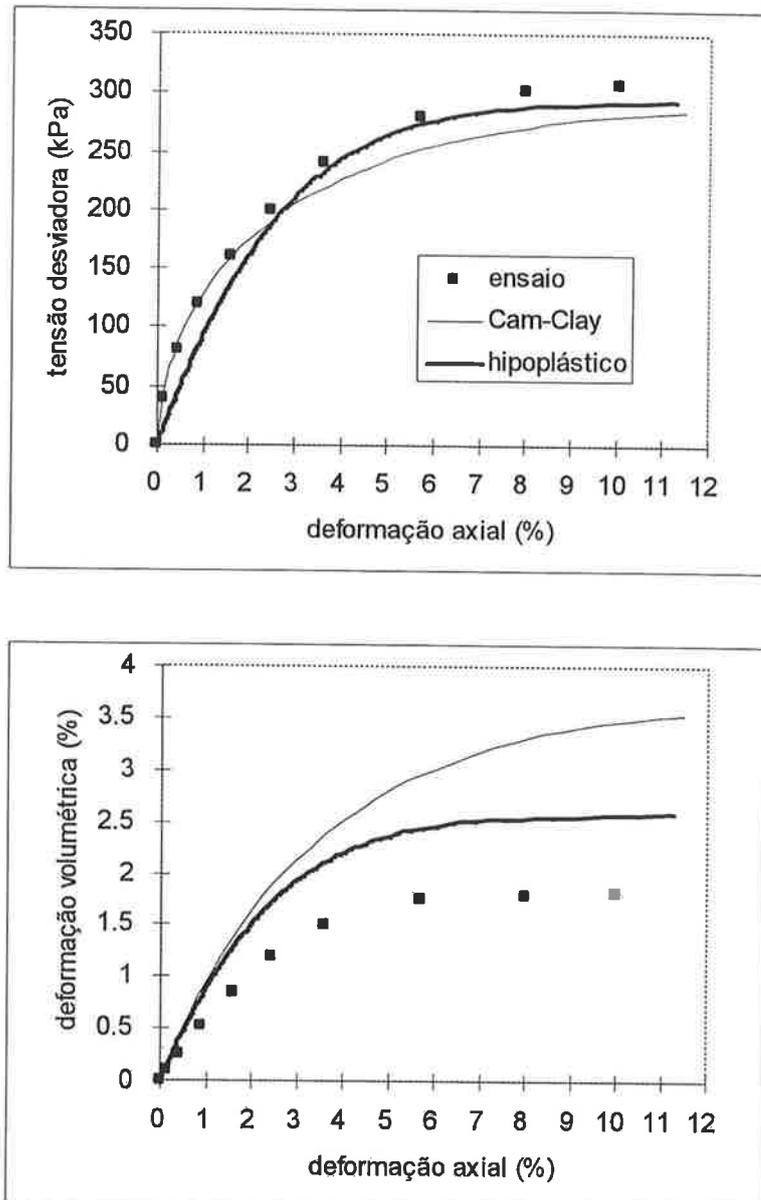


Figura 5.5 - Trajetória 3.

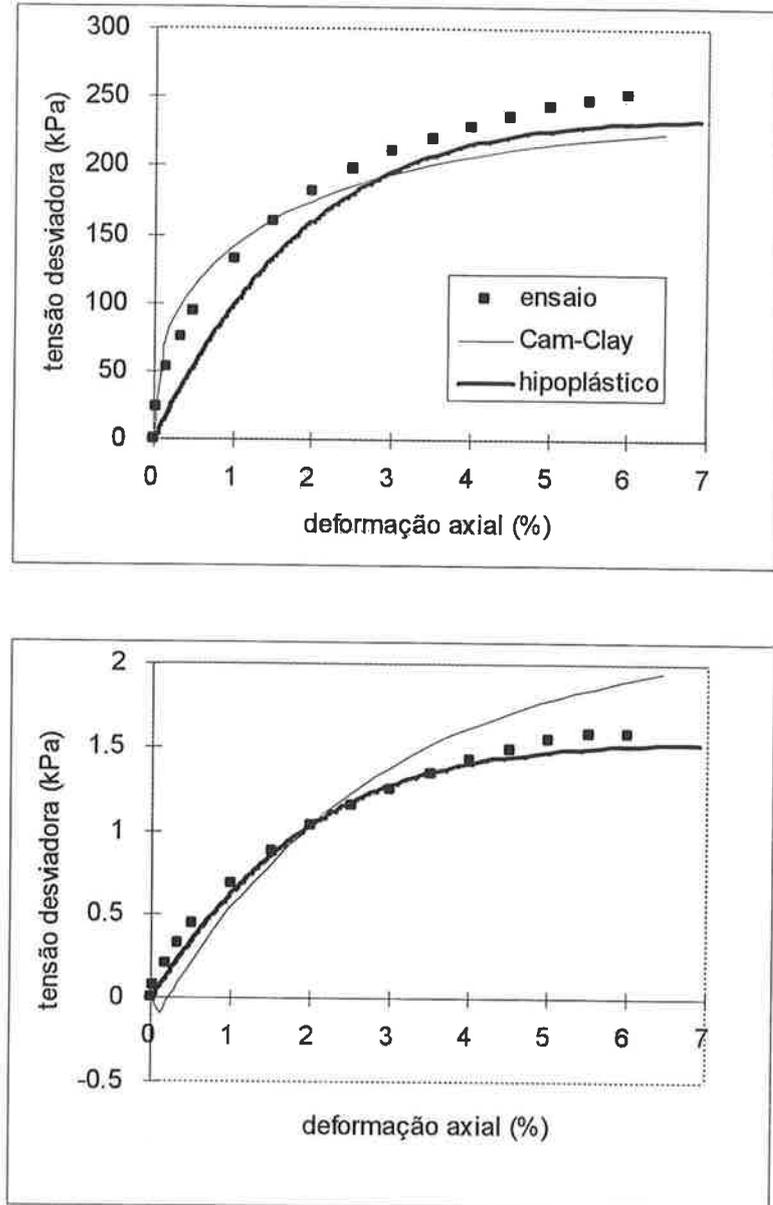


Figura 5.6 - Trajetória 4.

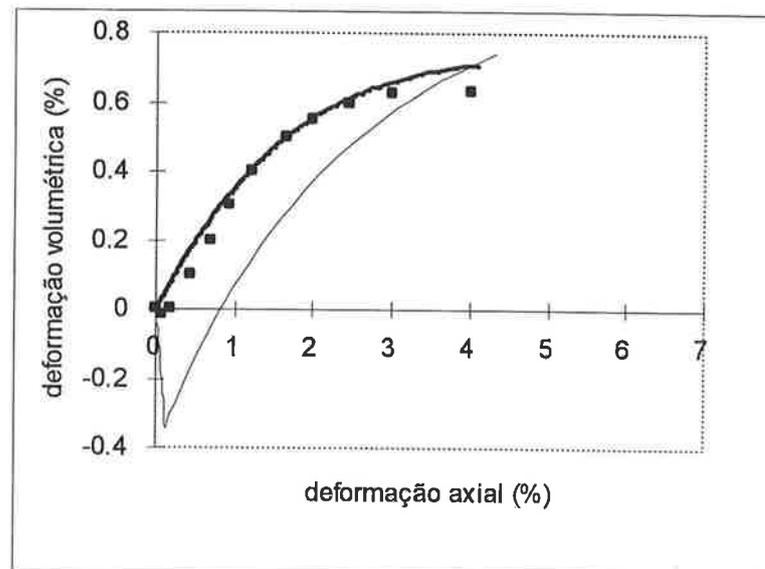
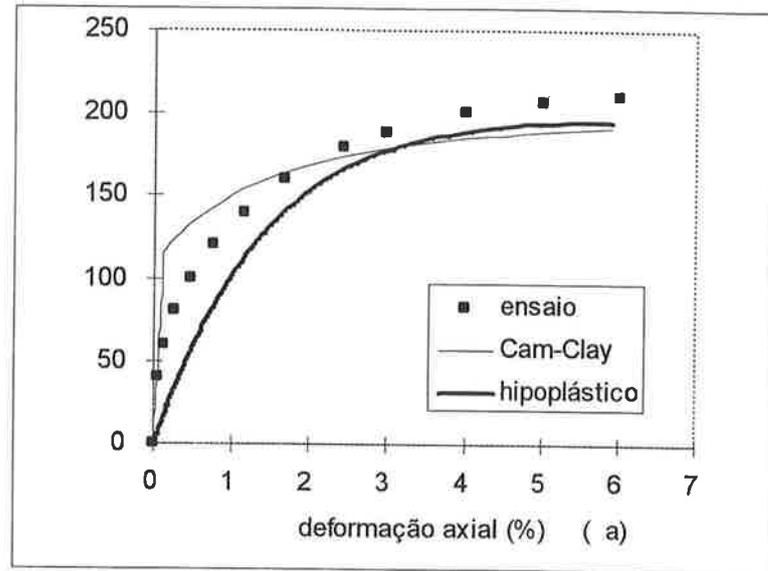


Figura 5.7 - Trajetória 5.

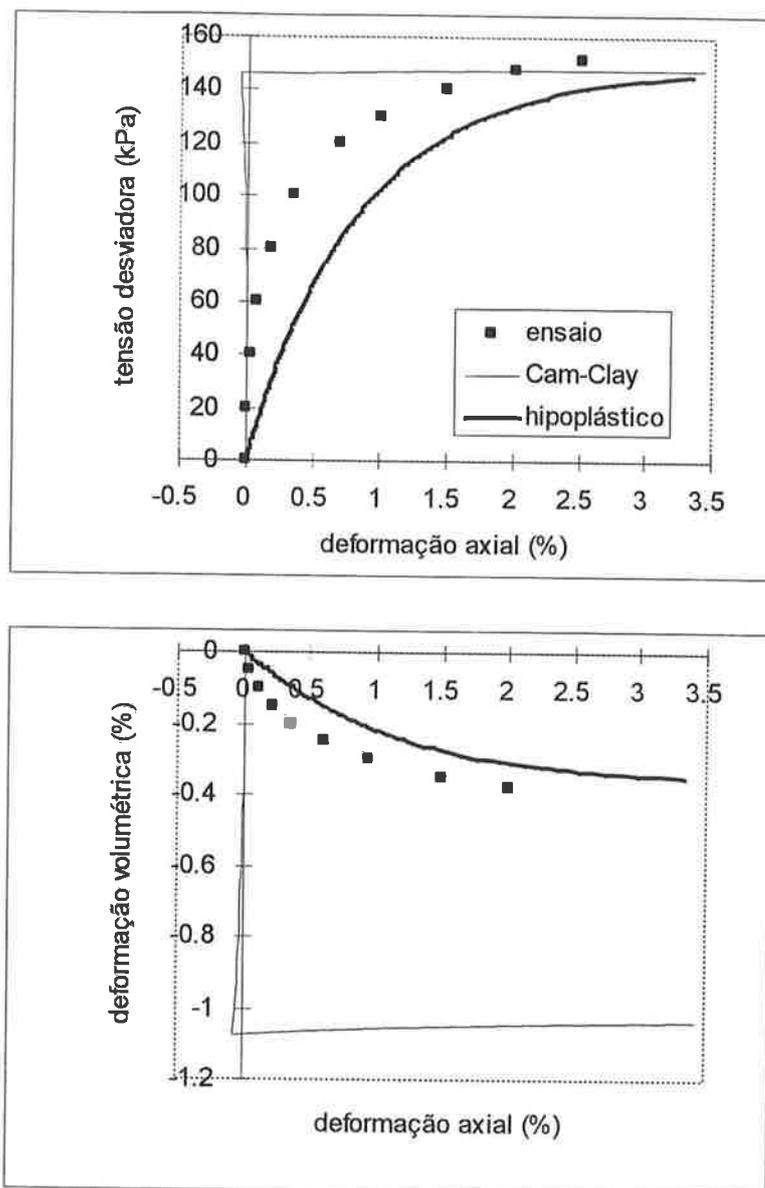


Figura 5.8 - Trajetória 6.

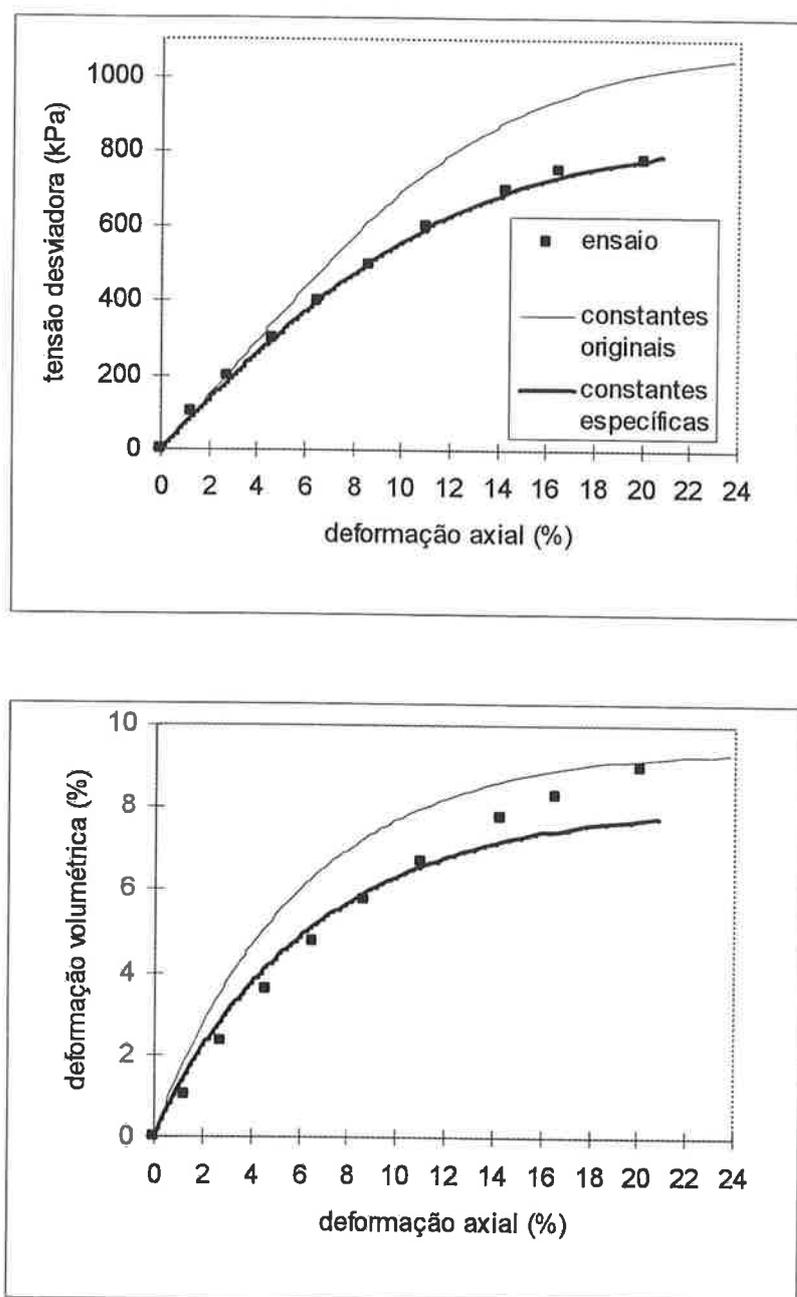


Figura 5.9 - Trajetória 1. Constantes originais: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,018$, $M = 1,46$, $\tilde{G} = 54$. Constantes específicas: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,050$, $M = 1,35$, $\tilde{G} = 40$.

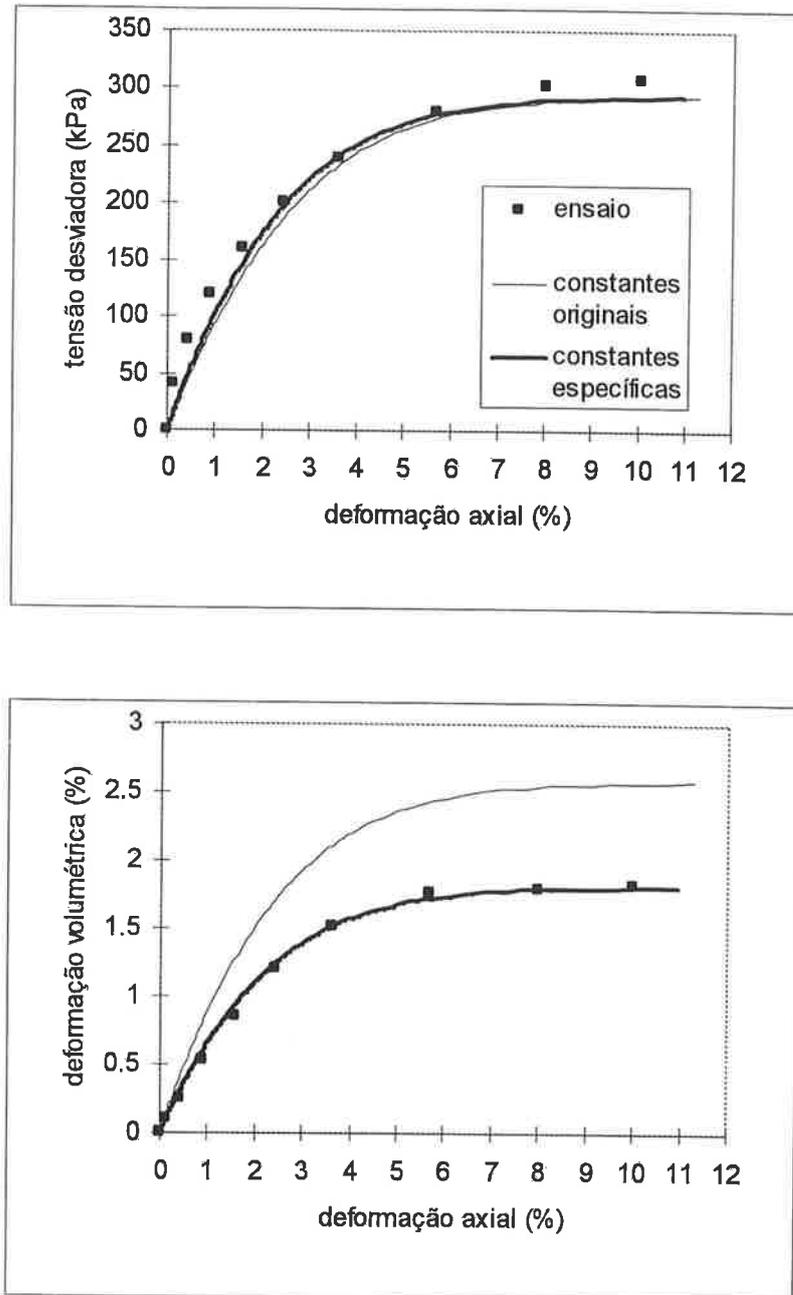


Figura 5.10 - Trajetória 3. Constantes originais: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,018$, $M = 1,46$, $\tilde{G} = 54$. Constantes específicas: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,027$, $M = 1,46$, $\tilde{G} = 54$.

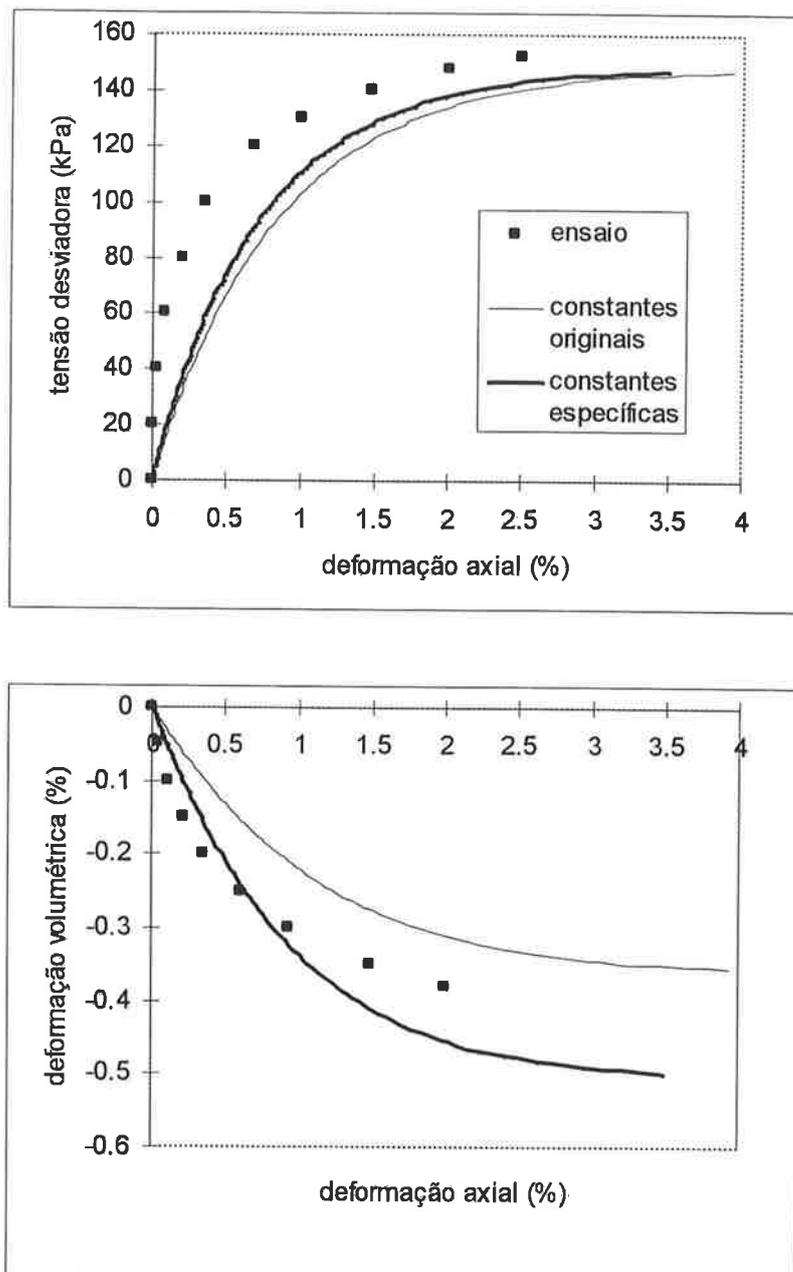


Figura 5.11 - Trajetória 6. Constantes originais: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,018$, $M = 1,46$, $\tilde{G} = 54$. Constantes específicas: $\lambda = 0,070$, $\kappa = 0,018$, $M = 1,46$, $\tilde{G} = 60$.

5.5 CONFRONTO ENTRE PREVISÕES TEÓRICAS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS NOS ENSAIOS EDMÉTRICO, K_0 , TRIAXIAL NÃO-DRENADO E TRIAXIAIS DRENADOS COM CARREGAMENTO CÍCLICO

O resultado do ensaio edométrico e as curva teóricas são mostrados na fig. 5.12. Em comparação com a resposta do Cam-Clay, a resposta do modelo hipoplástico é pior na compressão e um pouco melhor na expansão (notem-se as inclinações).

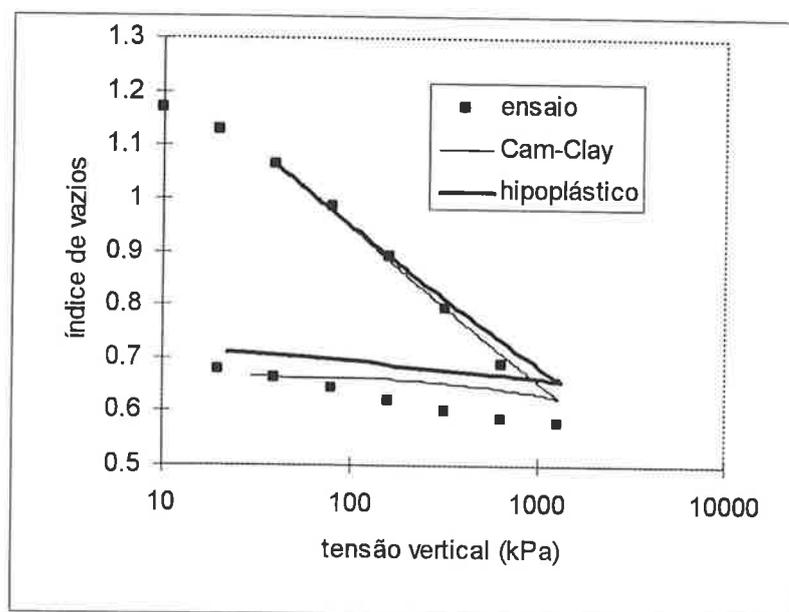


Figura 5.12 - Ensaio de compressão edométrica.

Examinemos, agora, na fig. 5.13, a curva tensão radial-tensão axial descrita no ensaio K_0 e a curva prevista pelas teorias.

Cabe uma nota sobre o resultado experimental que, diferentemente do que se espera nesse tipo de ensaio, não produziu uma reta no trecho inicial de compressão, até cerca de 200 kPa. Este fato pode ser justificado se lembrarmos o modo como a amostra foi preparada. Em primeiro lugar, preparou-se um bloco adensado isotropicamente a 20 kPa, do qual se talhou a amostra. A retirada da amostra do bloco torna-a sobreadensada e a mantém em estado isotrópico de tensão. No trecho curvo que se nota na fig. 5.13, o estado de tensão do solo passa de isotrópico a anisotrópico e o estado do solo, de sobreadensado a normalmente adensado. A relação tensão radial/ tensão axial diminui desde 1 até o valor de K_0 , depois do que fica constante, definindo a reta cujo início se vê na mesma figura. O valor de K_0 assim determinado é de 0,38, enquanto o valor dado pela equação hipoplástica é 0,45. É de se esperar que, se fosse feito um ensaio K_0 com um corpo-de-prova deste solo que estivesse de início normalmente adensado e em estado de tensão na situação K_0 , seria obtido, como resultado no gráfico da fig. 5.13, uma reta de coeficiente angular igual a K_0 e que passa pela origem. Se assim fosse, a diferença entre os resultados experimental e teórico seria menor.

Por fim, comparemos os laços de descarregamento-recarregamento experimental e previsto pela equação hipoplástica, com inclinações diferentes.

A resposta teórica do Cam-Clay é pior na compressão, com K_0 excessivamente alto (0,53), não reproduz o ciclo, pois lá, segundo este modelo o regime é elástico, porém representa melhor a curva de descarregamento.

A fig. 5.14 mostra os resultados experimentais e as previsões teóricas do ensaio não-drenado.

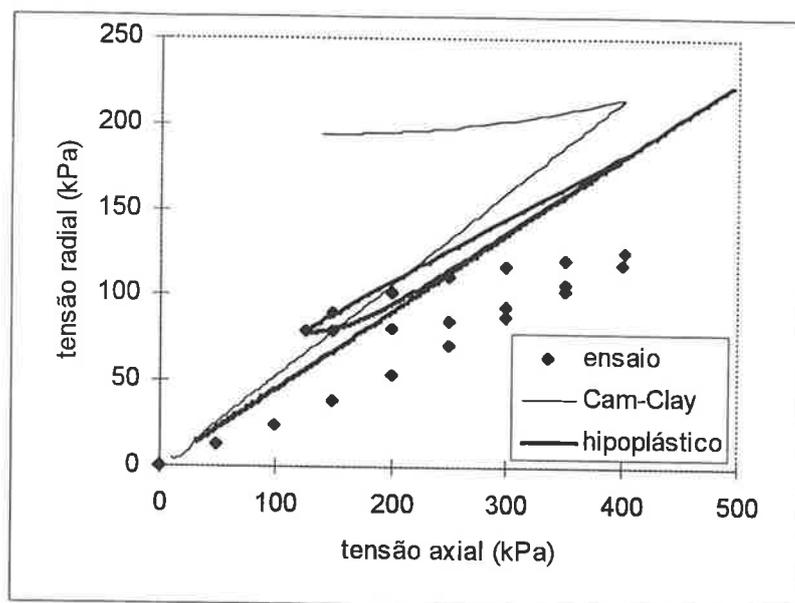


Figura 5.13 - Ensaio K_0 .

A equação hipoplástica prevê valores de tensão desviadora e pressão neutra sensivelmente mais baixos que os observados para deformações axiais inferiores a 2%. Contudo, nas proximidades do estado crítico a qualidade da previsão melhora, pois os valores de q , p e pressão neutra são corretamente indicados pela teoria. A divergência entre modelo e experimento também fica clara quando se comparam as trajetórias de tensão. Segundo a equação hipoplástica ela é reta, em contraste com o que se observa experimentalmente. No entanto, terminam no mesmo ponto.

A resposta do Cam-Clay é melhor no início das curvas tensão desviadora-deformação axial e pressão neutra-deformação axial, e também no que se refere à forma da trajetória de tensão, embora os valores de p e q nas proximidades do estado crítico não sejam tão corretamente previstos como os do modelo hipoplástico.

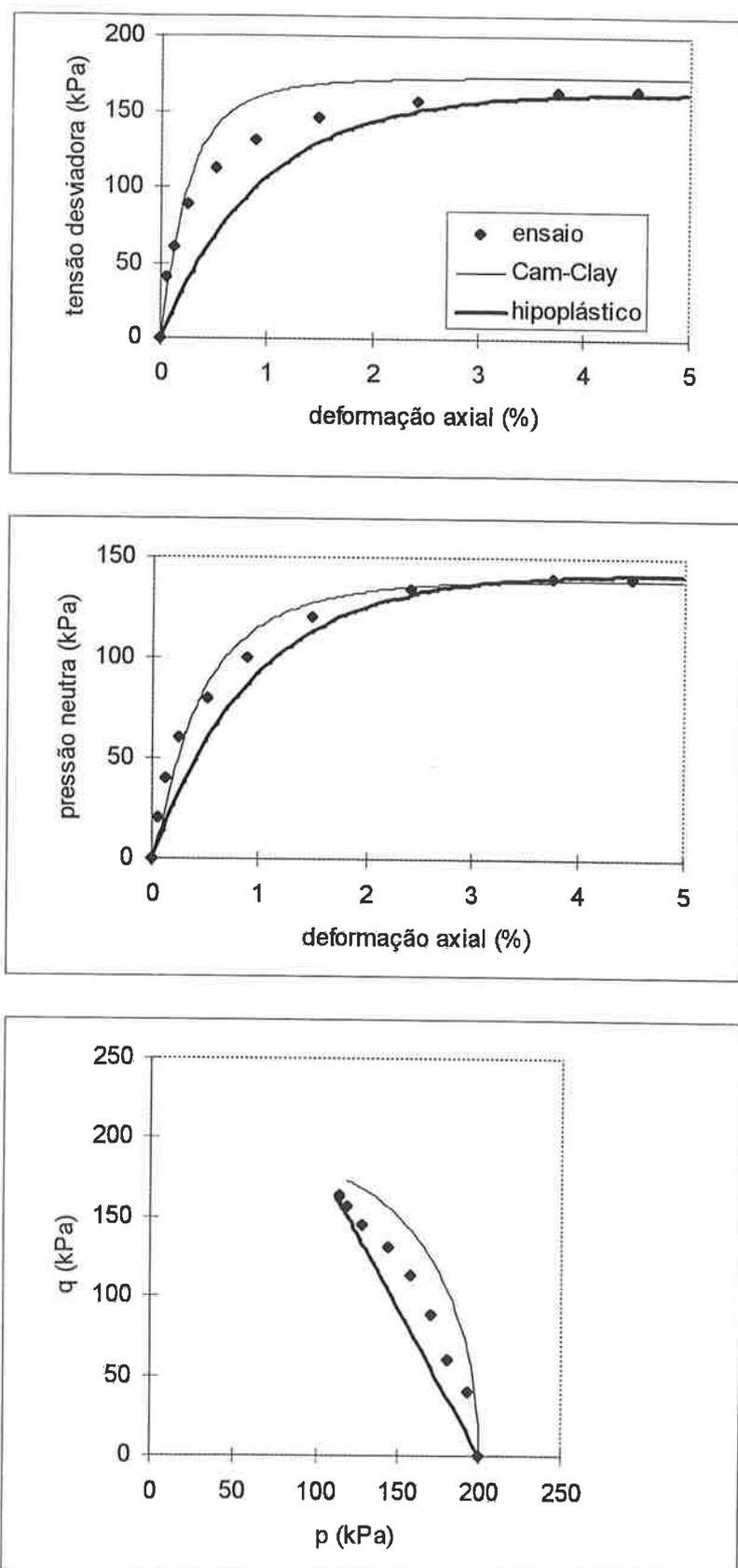


Figura 5.14 - Ensaio de compressão triaxial não-drenado.

Quanto aos ensaios triaxiais de compressão por carregamento com ciclo de descarregamento-recarregamento (figs. 5.15 e 5.16), em ambos a previsão da curva tensão desviadora-deformação axial pela equação hipoplásticas é medianamente boa nos trechos de carregamento e descarregamento, mas é muito ruim no recarregamento. A curva deformação volumétrica-deformação axial revela que, mesmo no descarregamento, a previsão teórica é ruim, pois indica diminuição de volume em que pese ser a altura crescente e a pressão confinante constante. Este aspecto pode ser melhorado se adotarmos $\kappa = 0,030$, quando então obtemos o resultado mostrado nas figs. 5.17 e 5.18. Como essa mudança influencia todas as outras curvas, surge o interesse em saber em que medida a previsão é alterada. Disso trata a próxima seção.

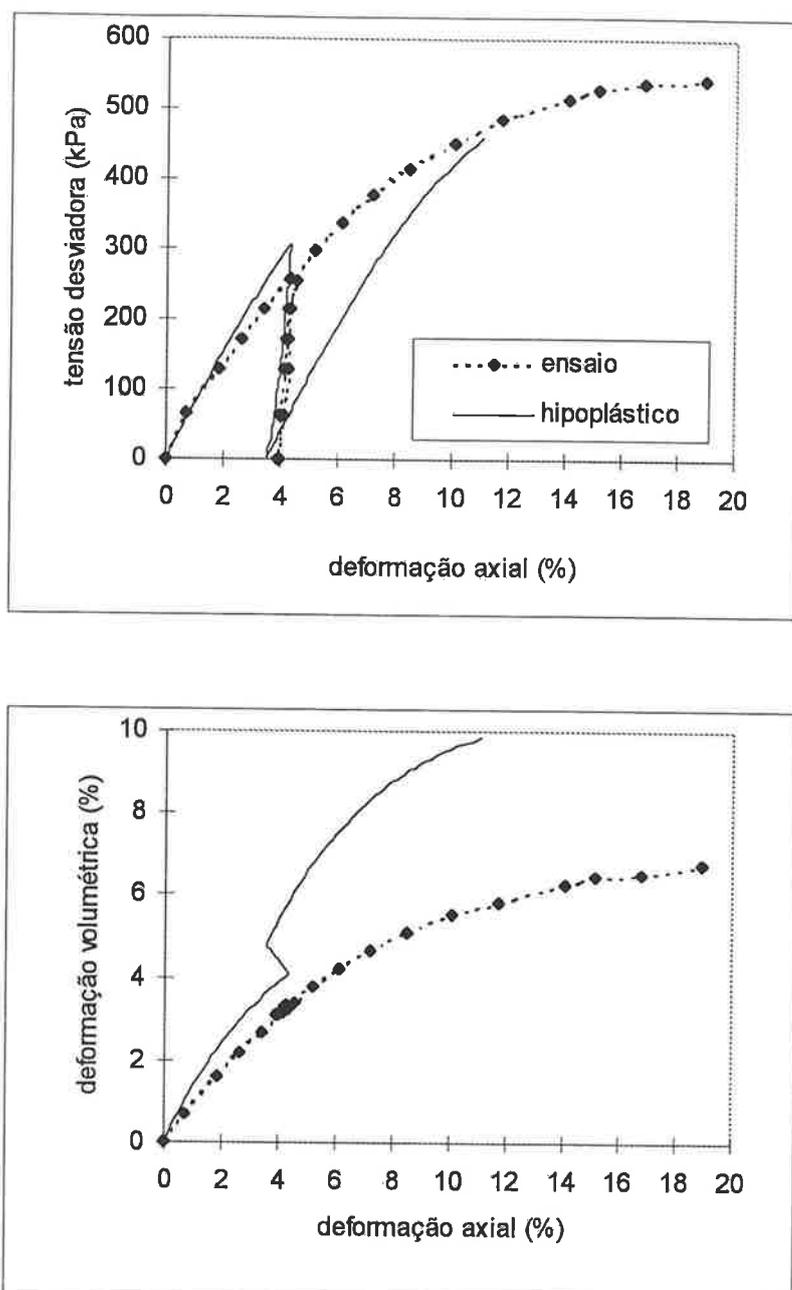


Figura 5.15 - Primeiro ensaio drenado com ciclo de carregamento ($\kappa = 0,018$).

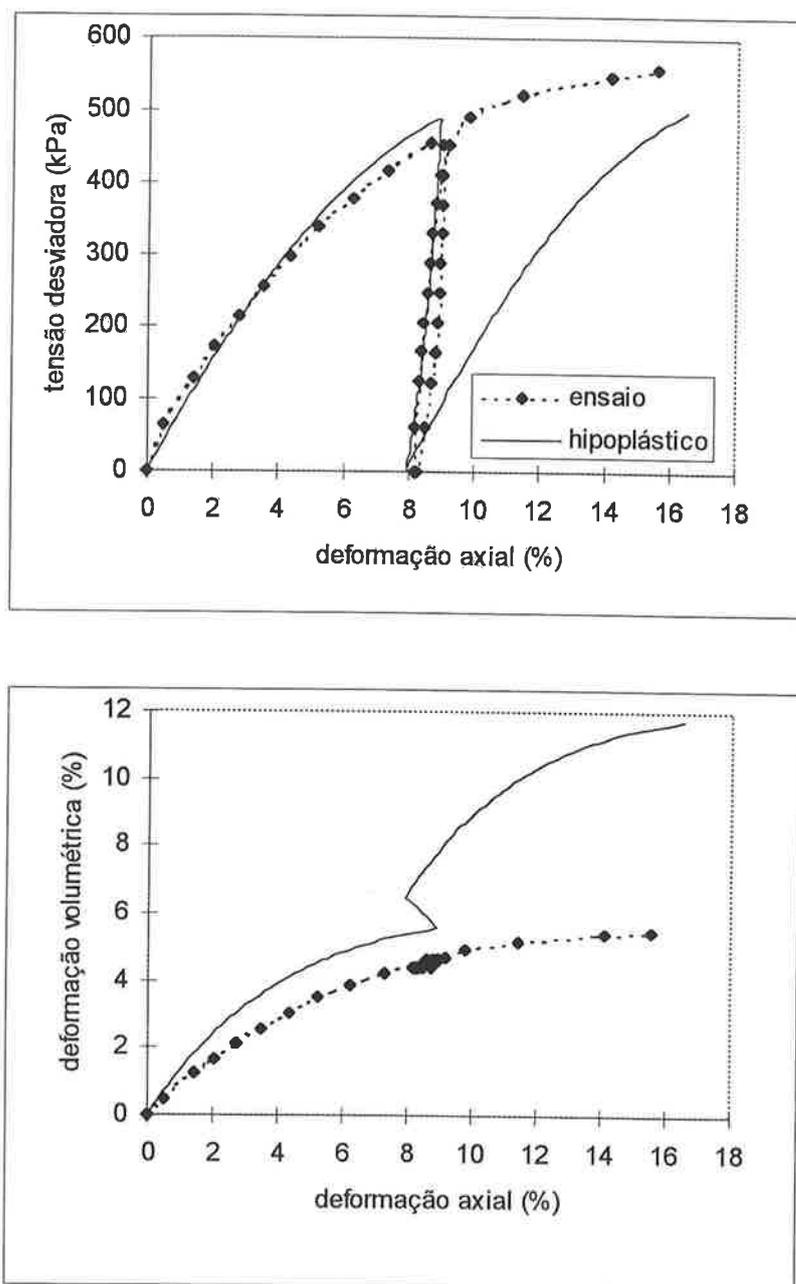


Figura 5.16 - Segundo ensaio drenado com ciclo de carregamento ($\kappa = 0,018$).

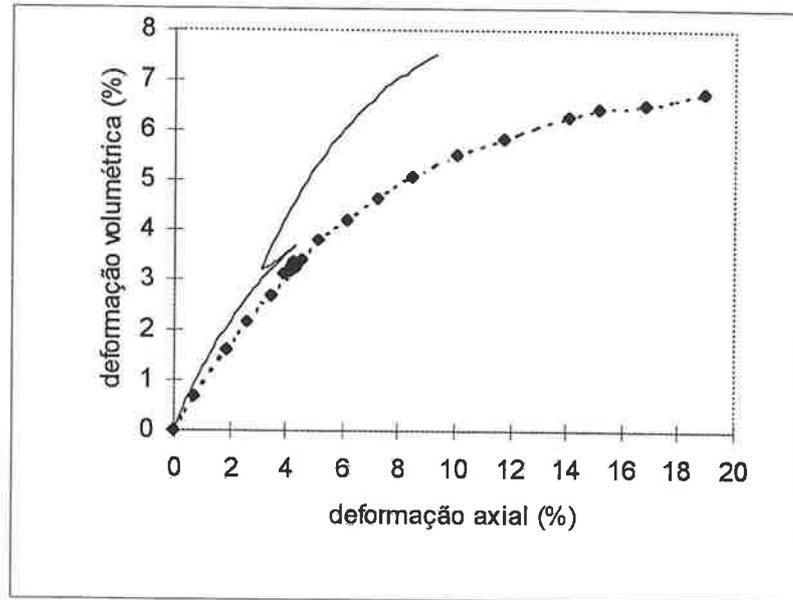
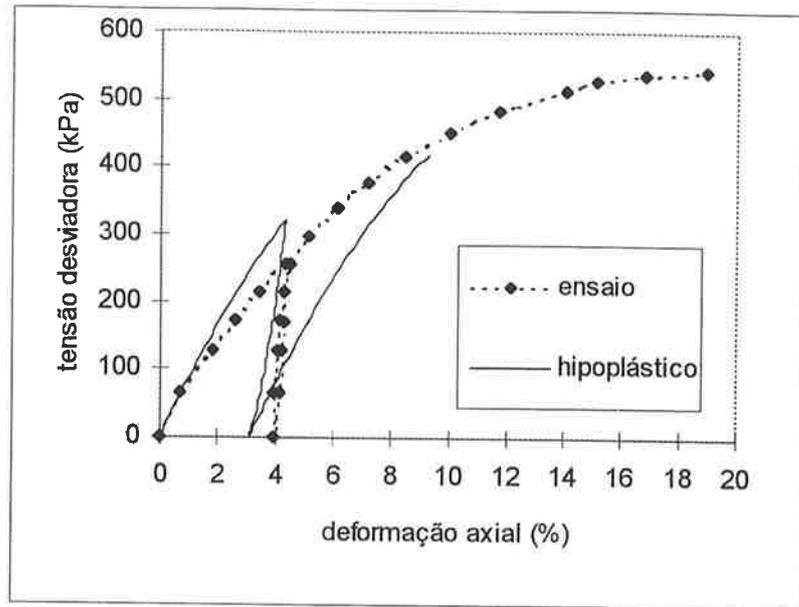


Figura 5.17 - Primeiro ensaio drenado com ciclo de carregamento ($\kappa = 0,030$).

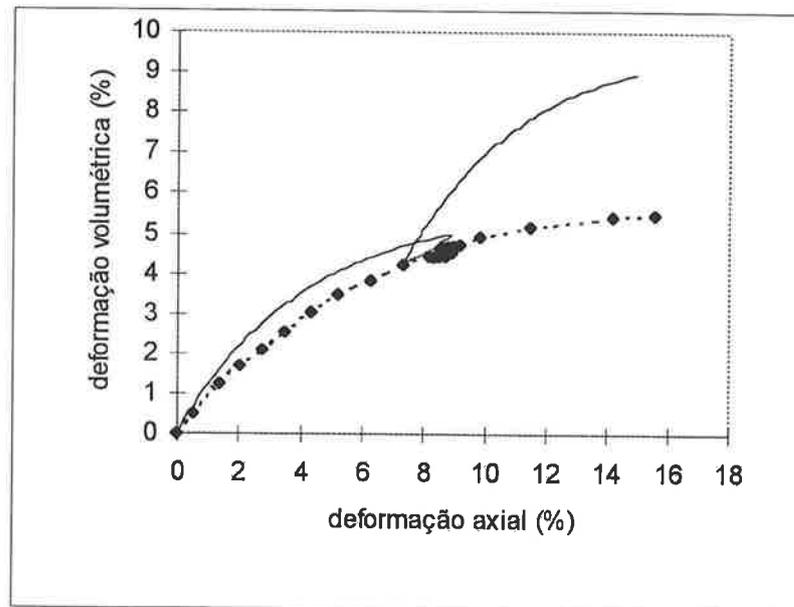
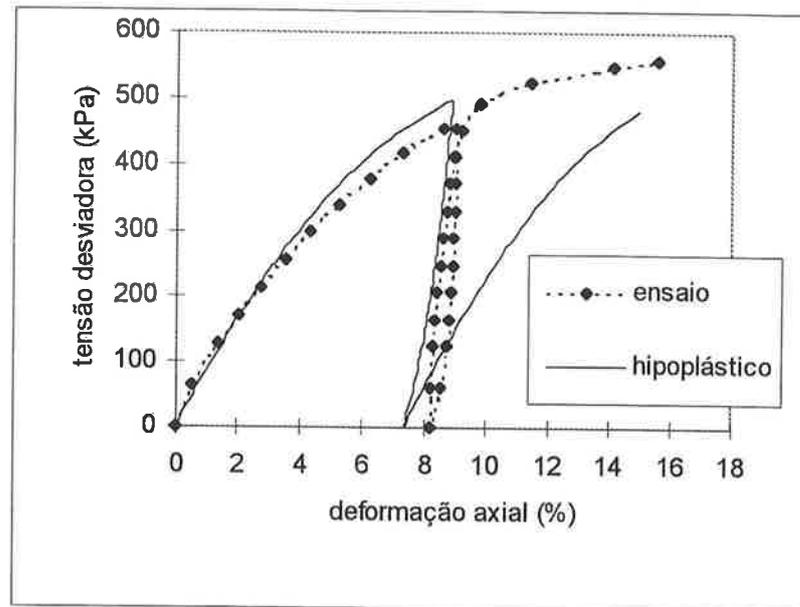


Figura 5.18 - Segundo ensaio drenado com ciclo de carregamento ($\kappa = 0,030$).

5.6 CONFRONTO ENTRE PREVISÕES TEÓRICAS COM $\kappa = 0,030$ E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A seguir, encontram-se os gráficos que comparam resultados experimentais dos mesmos ensaios referidos nas seções anteriores com a previsão da equação hipoplástica utilizando-se $\kappa = 0,030$ e os mesmos valores para as demais três constantes. Também são rerepresentadas as curvas obtidas com os valores originais das constantes a fim de facilitar a análise.

Comentários breves serão feitos sobre a qualidade da nova previsão frente à anterior.

Ensaio triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão (figs. de 5.19 a 5.24): a resposta teórica para as curvas tensão desviadora-deformação axial continua aproximadamente com a mesma qualidade; é agora um pouco melhor nas trajetórias 3, 4, 5 e 6. O mesmo não ocorre no que se refere às curvas deformação volumétrica-deformação axial: nas trajetórias 1 e 2 a qualidade da previsão é um pouco superior; na trajetória 3 a previsão é agora significativamente melhor; nas trajetórias 4, 5 e 6 piora sensivelmente a resposta teórica.

Ensaio de compressão isotrópica (fig. 5.25): como na compressão apenas λ influi, não há mudança. Na expansão o efeito do novo valor de κ , maior que o anterior, é aumentar a inclinação da reta de expansão, piorando um pouco a resposta teórica.

Ensaio de compressão edométrica (fig. 5.26): a qualidade da resposta teórica é um pouco superior, sobretudo no trecho de descompressão.

Ensaio K_0 (fig. 5.27): melhora a representação do laço de descarregamento-recarregamento, no que diz respeito às inclinações.

Ensaio de compressão triaxial não-drenado (fig. 5.28): piora a qualidade da previsão. Nem o valor da tensão desviadora de ruptura, nem a pressão neutra de ruptura são corretamente calculadas pelo modelo.

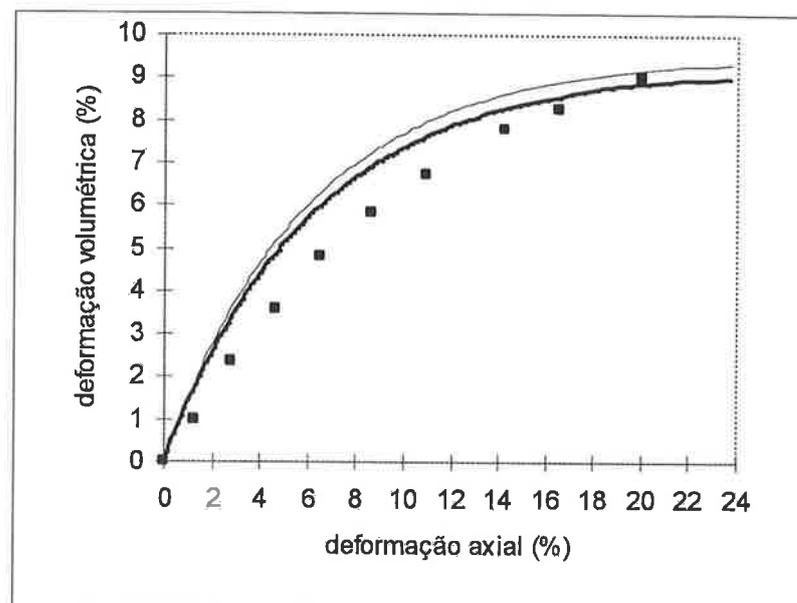
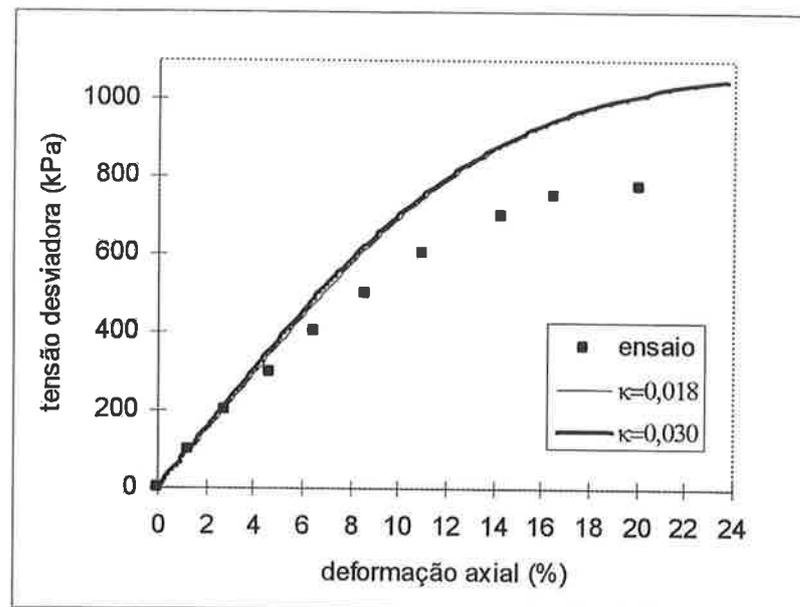


Figura 5.19 - Trajetória 1.

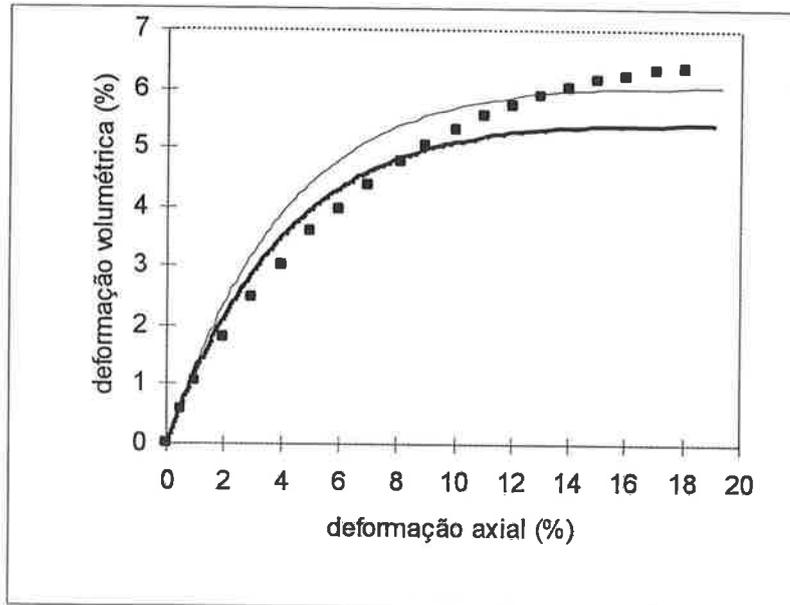
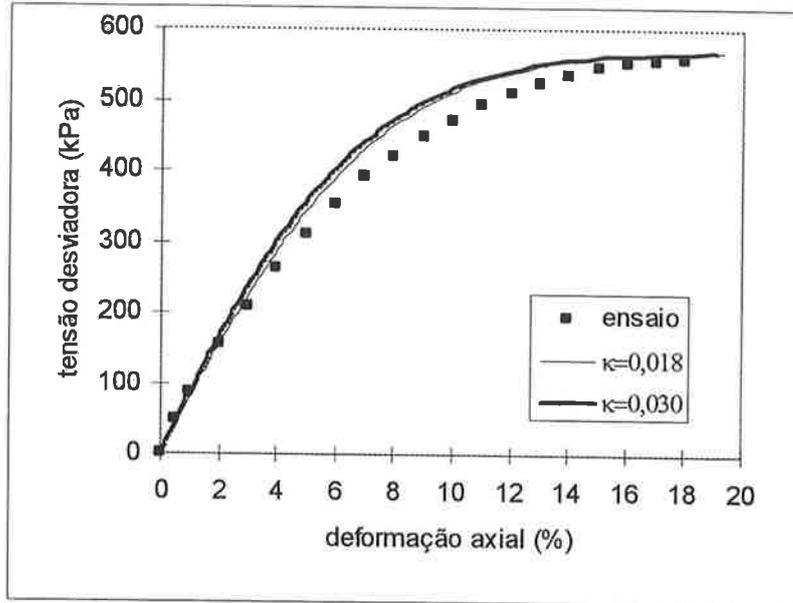


Figura 5.20 - Trajetória 2.

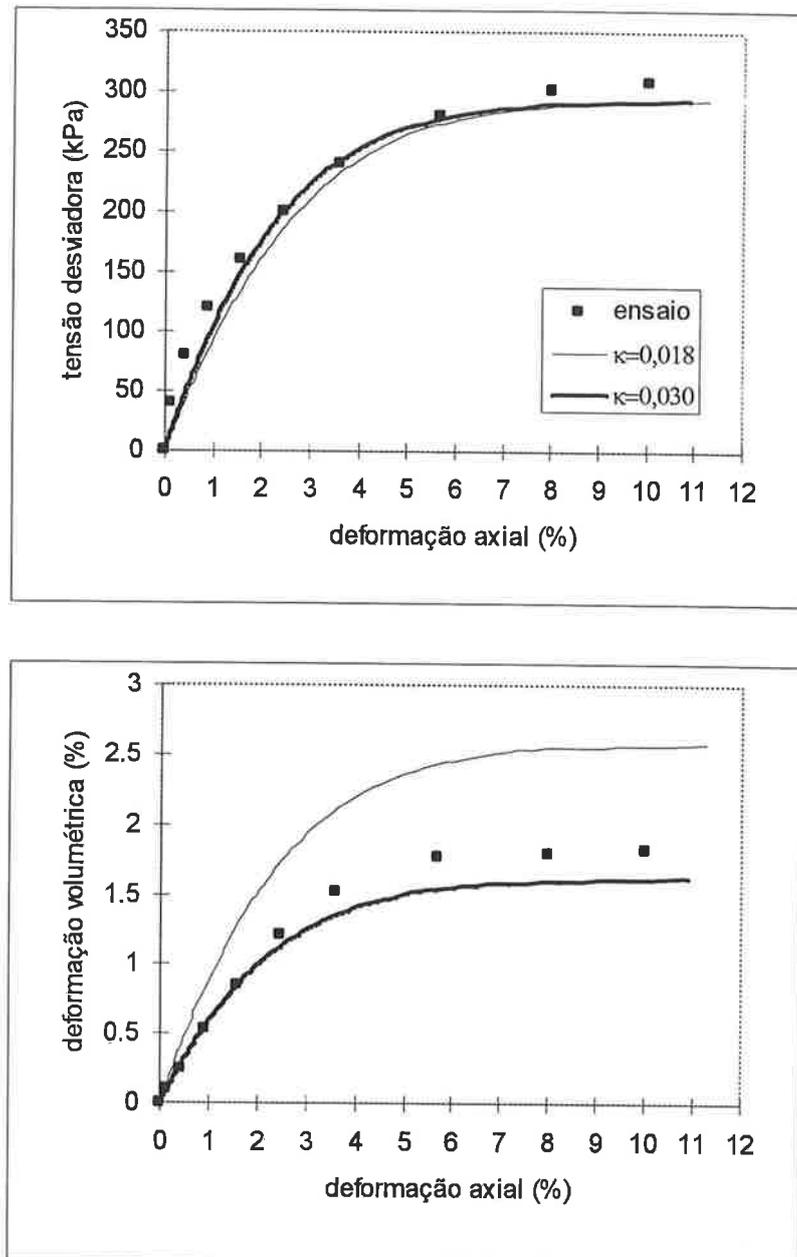


Figura 5.21 - Trajetória 3.

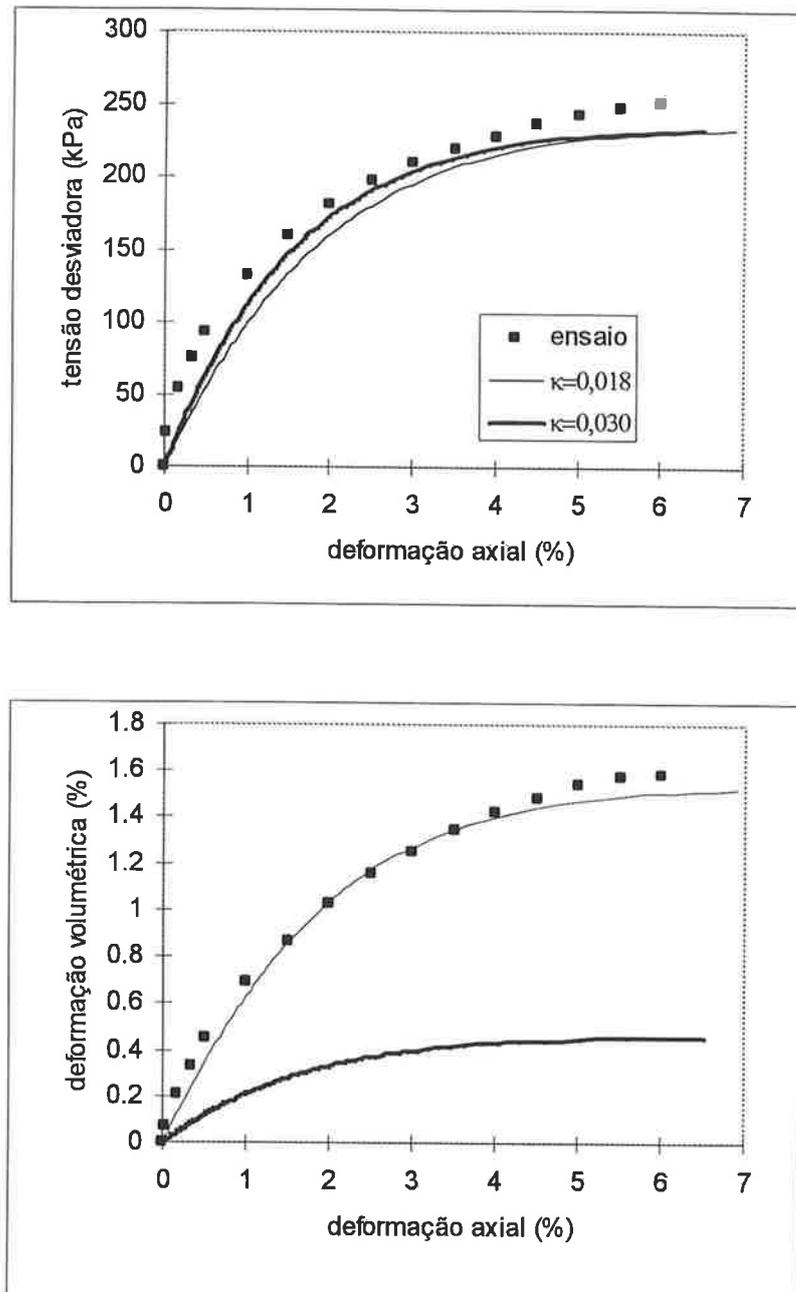


Figura 5.22 - Trajetória 4.

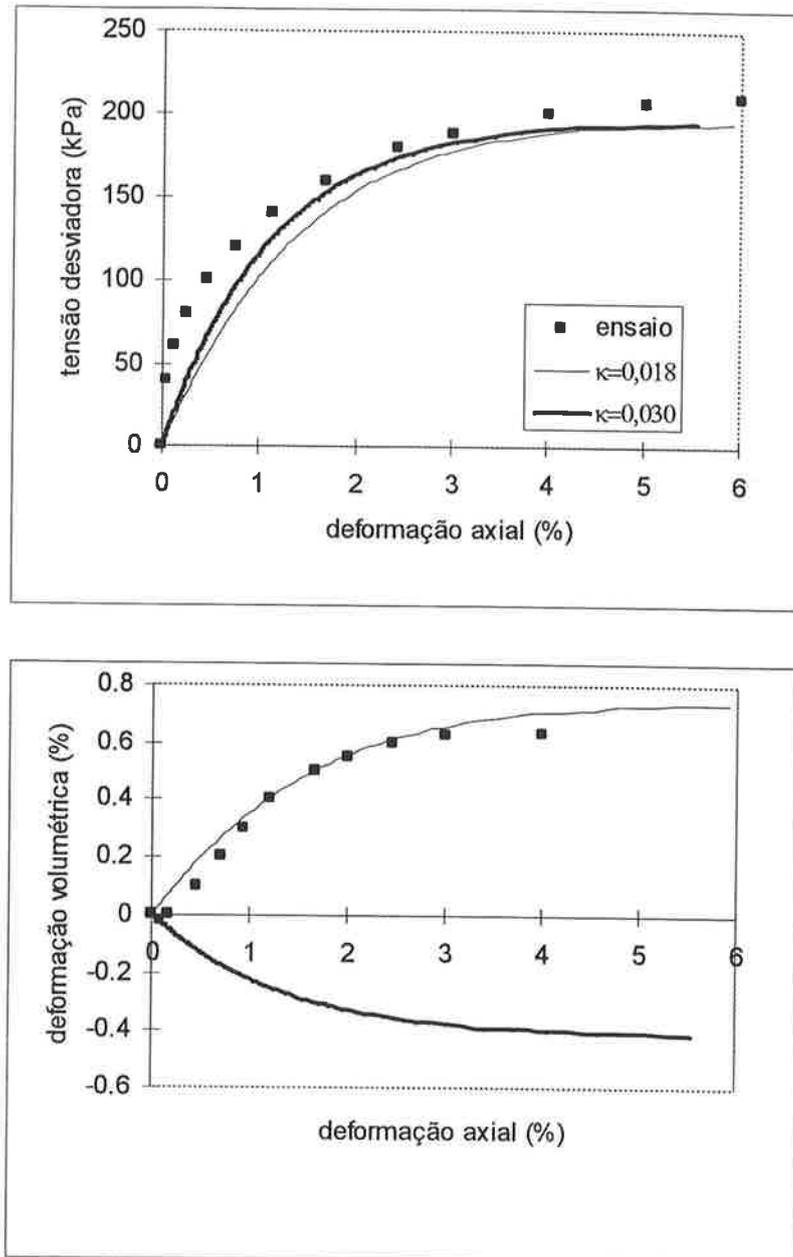


Figura 5.23 - Trajetória 5.

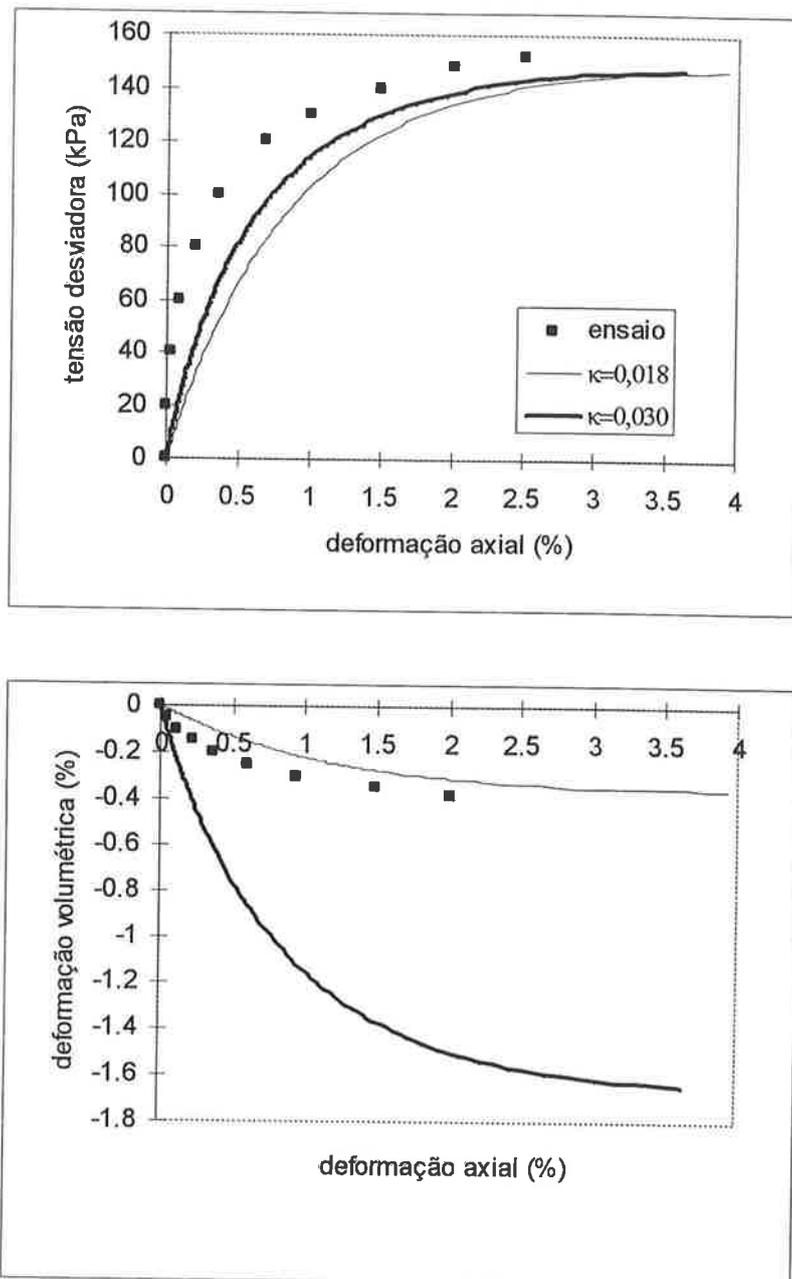


Figura 5.24 - Trajetória 6.

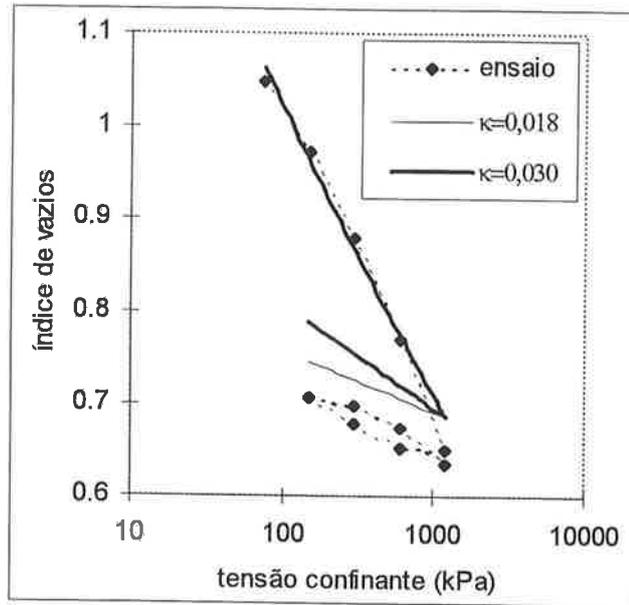


Figura 5.25 - Ensaio de compressão isotrópica.

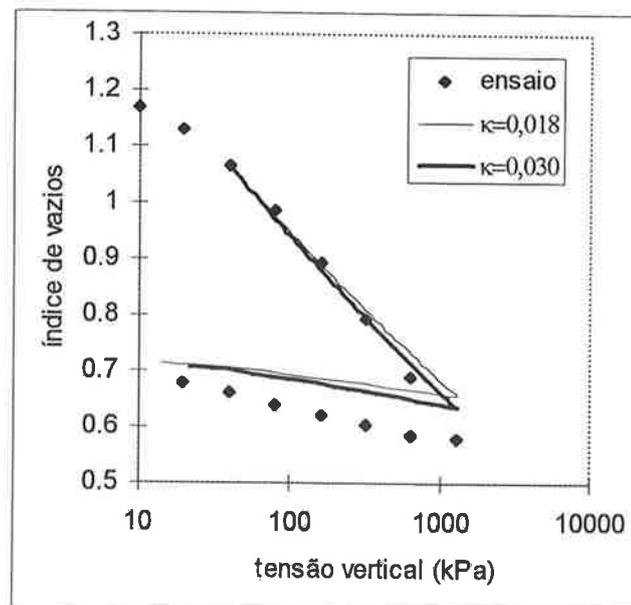


Figura 5.26 - Ensaio de compressão edométrica.

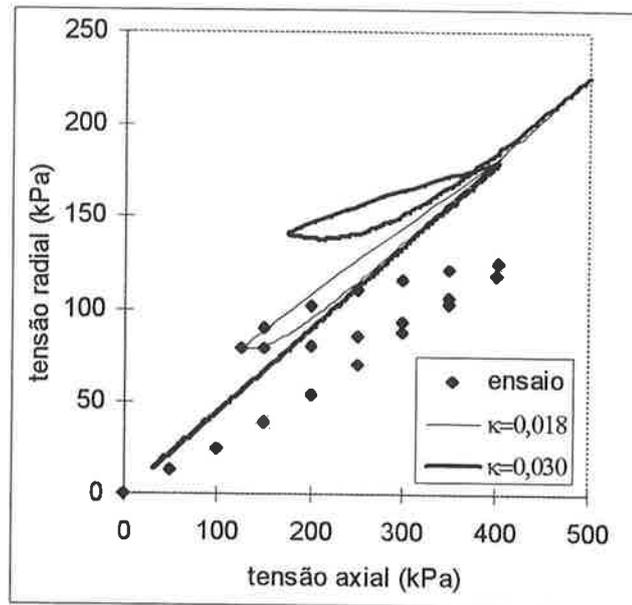


Figura 5.27 - Ensaio K_o .

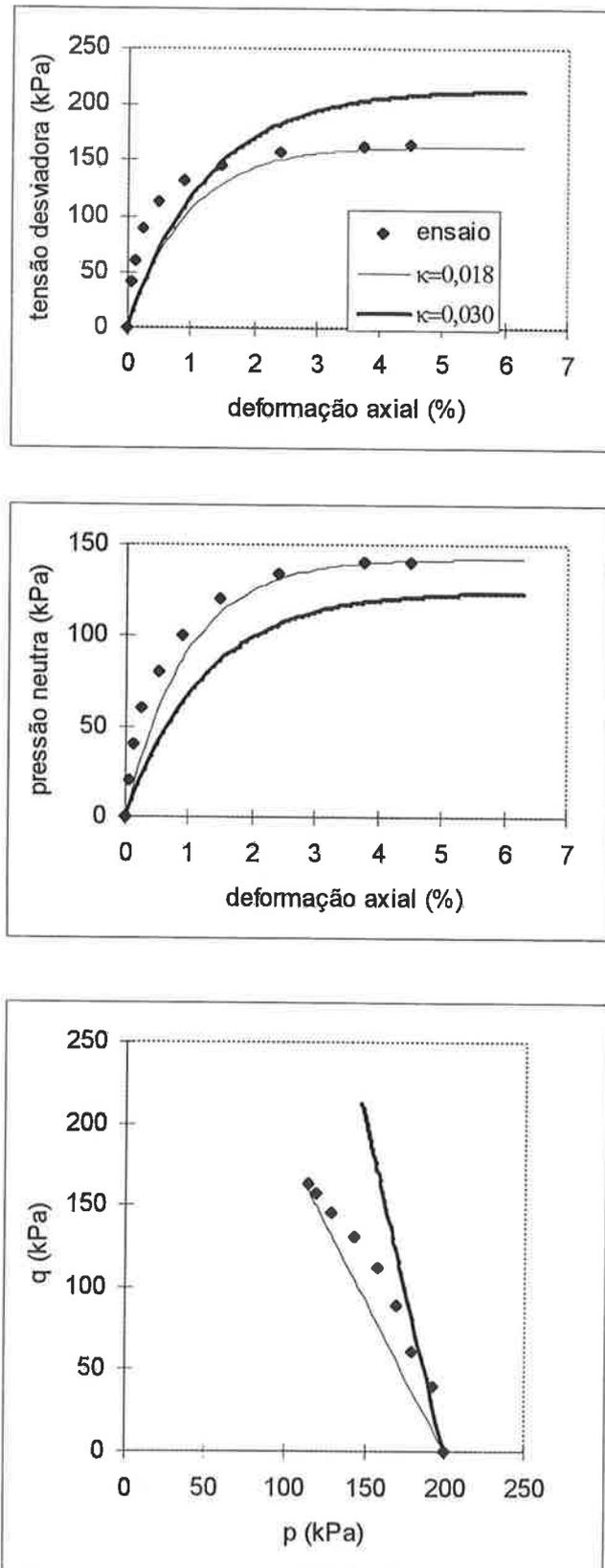


Figura 5.28 - Ensaio de compressão triaxial não-drenado.

6 ANÁLISE DA NOVA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo o objetivo é investigar propriedades da equação constitutiva proposta no capítulo 5 que permitam uma compreensão global do tipo de resposta que ela fornece. A análise se restringirá ao caso em que duas tensões principais são iguais, como ocorre nos ensaios triaxiais, situação em que muito já se conhece do comportamento dos solos e que, por isso, permite interpretação fácil.

Serão pesquisadas as soluções do sistema de equações diferenciais constituído pelas duas equações apresentadas no capítulo 5, nas incógnitas $p(t)$ e $q(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (-C_1 \dot{\epsilon}_v + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2}) p - \frac{2}{9} C_2 \dot{\gamma} q \\ \dot{q} &= -3C_4 \dot{\gamma} p + 3\dot{\gamma} |q| + \frac{\sqrt{3}}{3} C_5 \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2} q \end{aligned} \quad (6.1)$$

dadas as funções $\epsilon_v(t)$ e $\gamma(t)$.

Em primeiro lugar, consideremos o seguinte teorema, que tornará o estudo bem mais simples: $p_1(t)$ e $q_1(t)$ são a solução de (6.1), com $\dot{\epsilon}_v = r(t)$ e $\dot{\gamma} = s(t)$, com a condição inicial $p_1(0) = p_0$ e $q_1(0) = q_0$, se e somente se $p_2(t) = p_1(t)$ e $q_2(t) = -q_1(t)$ são a solução de (6.1), com $\dot{\epsilon}_v = r(t)$ e $\dot{\gamma} = -s(t)$, com a condição inicial $p_2(0) = p_0$ e $q_2(0) = -q_0$. A

demonstração, por simples substituição, é imediata. Portanto, duas deformações de mesmo $\dot{\epsilon}_v(t)$, mas com sinais contrários de $\dot{\gamma}(t)$, partindo de condições iniciais de tensão no plano (p, q) simétricas em relação ao eixo p , geram trajetórias simétricas em relação ao eixo p .

Baseado neste teorema, o procedimento de análise será restringir o estudo do sistema (6.1) às soluções tais que q nunca assuma valores negativos, de modo que se possa escrever $|q| = q$, tornando-o um sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \left(-C_1 \dot{\epsilon}_v + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2}\right) p - \frac{2}{9} C_2 \dot{\gamma} q \\ \dot{q} &= -3C_4 \dot{\gamma} p + \left(3\dot{\gamma} + \frac{\sqrt{3}}{3} C_5 \sqrt{\dot{\epsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2}\right) q \end{aligned} \quad (6.2)$$

As soluções com q negativo são facilmente determinadas pelas soluções com q não-negativo. Exemplificando, se, dados $\dot{\epsilon}_v = r(t)$ e $\dot{\gamma} = s(t)$, o problema é encontrar a solução $p_1(t)$ e $q_1(t)$ de (6.1) com condições iniciais $p_1(0) = p_0$ e $q_1(0) = q_0 < 0$, num intervalo I em que q permaneça negativo, primeiramente encontra-se a solução de (6.2), $p_2(t)$ e $q_2(t)$, com $\dot{\epsilon}_v = r(t)$ e $\dot{\gamma} = -s(t)$ e condições iniciais $p_2(0) = p_0$ e $q_2(0) = -q_0 > 0$, no intervalo I , em que q permanece positivo. A solução do problema original será $p_1(t) = p_2(t)$ e $q_1(t) = -q_2(t)$.

Neste estudo será conveniente exprimir, em cada instante, $\dot{\epsilon}_v(t)$ e $\dot{\gamma}(t)$ em coordenadas polares (fig. 6.1):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_v &= \rho(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\gamma} &= \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

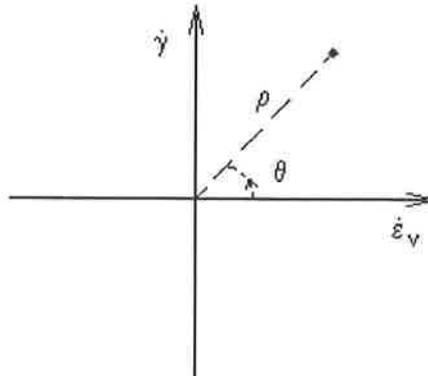


Figura. 6.1 - Velocidade de deformação e coordenadas polares.

O sistema linear (6.2), expresso em forma matricial, com $z = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, fica

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (6.4)$$

Os coeficientes da matriz $A(t)$, já introduzidas as coordenadas polares, são:

$$\begin{aligned} A_{11}(t) &= (-C_1 \cos\theta(t) + C_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \text{sen}^2 \theta(t)})\rho(t), \\ A_{12}(t) &= (-\frac{2}{9} C_2 \text{sen}\theta(t))\rho(t), \\ A_{21}(t) &= (-3C_4 \text{sen}\theta(t))\rho(t), \\ A_{22}(t) &= (3\text{sen}\theta(t) + C_5 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \text{sen}^2 \theta(t)})\rho(t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Na próxima seção, serão estudadas deformações proporcionais, que, além de seu interesse intrínseco, são a base para a construção de um quadro que sintetizará a resposta do modelo em solicitações genéricas.

6.2 DEFORMAÇÕES PROPORCIONAIS

O objeto desta são as deformações proporcionais, isto é, deformações que, partindo de $\varepsilon_v(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$ seguem trajetórias retilíneas, afastando-se da origem, no plano (ε_v, γ) , e em estudar como varia o tipo de resposta quando se comparam diversas deformações proporcionais.

Como ilustração, a fig. 6.2 traz trajetórias retilíneas de algumas deformações proporcionais comumente ensaiadas em laboratório. Por exemplo: compressão isotrópica ($\gamma / \varepsilon_v = 0, \varepsilon_v > 0$), compressão edométrica ($\gamma / \varepsilon_v = 1, \varepsilon_v > 0$), compressão não-drenada ($\varepsilon_v = 0, \gamma > 0$).

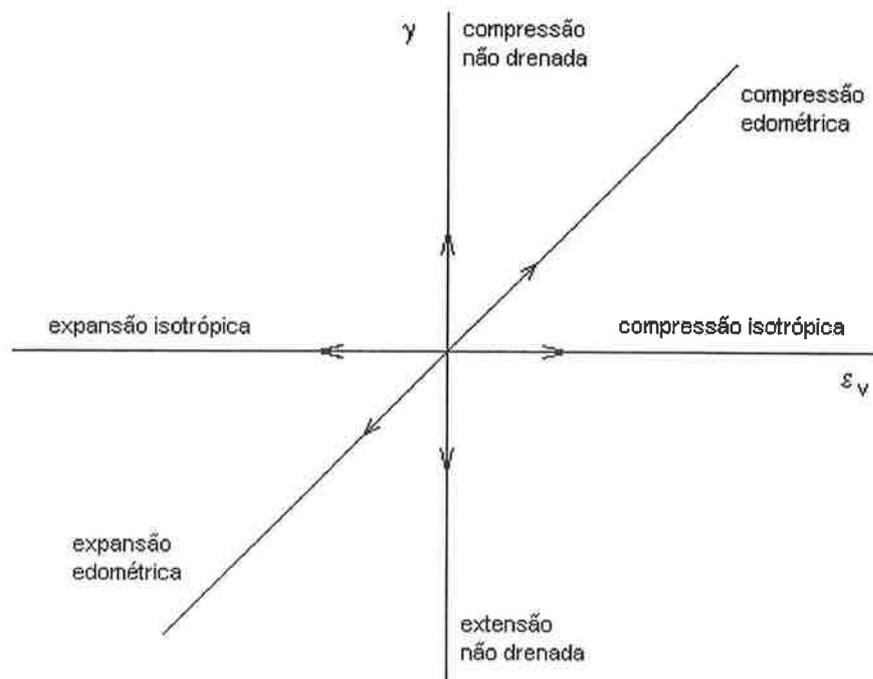


Figura 6.2 - Trajetórias de algumas deformações proporcionais.

Para que possamos analisar de uma só vez todas as deformações proporcionais, é conveniente exprimi-las genericamente por coordenadas polares:

$$\varepsilon_v = f(t) \cos \theta$$

$$\gamma = f(t) \operatorname{sen} \theta$$

com $f(0) = 0$ e $f'(t) > 0$ em todo o seu domínio (a trajetória de deformação afasta-se da origem). Notemos que $f(t) = \sqrt{\varepsilon_v^2(t) + \gamma^2(t)}$. Fazendo variar θ em $[0, 360^\circ)$, todas as deformações proporcionais são levadas em conta. Por exemplo, à compressão isotrópica corresponde $\theta = 0^\circ$, à compressão edométrica, $\theta = 45^\circ$; à compressão não-drenada, $\theta = 90^\circ$ (fig. 6.2).

Fixado um valor de θ , qualquer que seja a função $f(t)$ a mesma trajetória de deformação é percorrida, porém com velocidade que depende de $f(t)$, pois $\dot{\varepsilon}_v = f'(t) \cos \theta$ e $\dot{\gamma} = f'(t) \operatorname{sen} \theta$.

O objetivo é fazer um estudo do sistema (6.4) para cada deformação proporcional, apresentando a solução. Conforme já vimos, o comportamento do material hipoplástico não depende da velocidade de deformação, no sentido preciso explicado no capítulo 2. Assim, para que a análise se simplifique bastante, escolhe-se $f(t) = t$, resultando velocidade de deformação constante dada por $\dot{\varepsilon}_v = \cos \theta$ e $\dot{\gamma} = \operatorname{sen} \theta$, ou seja, $\rho(t) = 1$ em (6.3).

Com isso o sistema (6.4) torna-se autônomo

$$\dot{z} = A z \tag{6.6}$$

e os coeficientes da matriz A são:

$$A_{11} = -C_1 \cos \theta + C_3 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta},$$

$$A_{12} = -\frac{2}{9}C_2 \operatorname{sen} \theta,$$

$$A_{21} = -3C_4 \operatorname{sen} \theta,$$

$$A_{22} = 3 \operatorname{sen} \theta + C_5 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

As soluções analíticas do sistema (6.6) dependem dessa escolha de $f(t)$, evidentemente, mas delas pode-se obter as soluções para um caso geral de modo muito simples. De fato, em virtude da homogeneidade de grau 1 das equações hipoplásticas, podemos afirmar que se a solução do sistema (6.4) com $f(t) = t$ (isto é, do sistema (6.6)) e certas condições iniciais, é $p(t)$ e $q(t)$, então a solução com as mesmas condições iniciais, mas com $f(t)$ genérico, é $p(f(t))$ e $q(f(t))$; as órbitas, entretanto, são as mesmas.

Serão investigados, primeiramente, os pontos de equilíbrio do sistema para diferentes valores de θ .

No plano (p, q) , a origem é ponto de equilíbrio, qualquer que seja θ . Para um certo θ , haverá outros pontos de equilíbrio se o determinante de A for nulo (veja-se, por exemplo, Pontryagin, 1962):

$$\det A = -3C_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3}(3C_3 \operatorname{sen} \theta - C_1 C_5 \cos \theta) \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} + \\ + \frac{1}{3}C_3 C_5 (1 + \operatorname{sen}^2 \theta) - \frac{2}{3}C_2 C_4 \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

As soluções dessa equação são $\theta = 90^\circ$ (independente dos valores das constantes) e $\theta \cong 276,97^\circ$ (obtido com os valores numéricos das constantes determinados no capítulo 5). No intervalo aberto entre essas duas soluções, $\det A > 0$. A primeira raiz, colocada em (6.6), revela que os pontos de equilíbrio, estáveis neste caso, são os pontos da reta

$$q = Mp,$$

chamada linha do estado crítico. A segunda raiz corresponde à reta $q \cong -1,25 p$, também formada de pontos estáveis.

Passemos às soluções do sistema, cuja equação característica é $\mu^2 - (A_{11} + A_{22})\mu + \det A = 0$. Do seu discriminante, $\Delta = (A_{11} - A_{22})^2 + A_{12}A_{21}$, depende o tipo de resposta.

Tendo em vista as relações entre as constantes presentes em (6.6) e λ , κ , M e \tilde{G} , conforme descrito no capítulo 5, o produto:

$$A_{12}A_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2M} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\lambda} \right) \tilde{G} \sin^2 \theta$$

é superior ou igual a zero, pois $M > 0$, $\kappa < \lambda$ e $\tilde{G} > 0$, para todo e qualquer solo, sendo nulo somente se $\sin \theta = 0$. Portanto, se $\sin \theta \neq 0$, vale $\Delta > 0$ e o sistema possui dois autovalores reais distintos.

Se $\sin \theta = 0$, então $\Delta = (A_{11} - A_{22})^2$ (neste caso, $A_{12} = A_{21} = 0$, isto é, a matriz é diagonal, e seus autovalores são A_{11} e A_{22}). Para saber se Δ pode ser nulo, investigamos

$$A_{11} - A_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa} + \sqrt{2} \frac{\tilde{G} + 3M}{M} \right],$$

lembrando que $\cos \theta$ vale 1 ou -1. Consideremos primeiramente $\cos \theta = 1$:

$$A_{11} - A_{22} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\tilde{G} + 3M}{M} > 0$$

pois λ , \tilde{G} e M são positivos qualquer que seja o solo. Agora, se $\cos \theta = -1$, então

$$A_{11} - A_{22} = -\frac{1}{\kappa} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\tilde{G} + 3M}{M},$$

que se anula se as constantes estiverem relacionadas pela seguinte equação:

$$\tilde{G} = M \left(\frac{\sqrt{2}}{\kappa} - 3 \right)$$

o que em princípio parece fisicamente possível, mas, no caso do solo em questão, não ocorre.

Resumindo: $\Delta > 0$, qualquer que seja θ .

Assim, a solução geral do sistema de equações diferenciais (6.6) é, em qualquer dos casos acima mencionados:

$$\mathbf{z} = k_1 e^{\mu_1 t} \mathbf{v}_1 + k_2 e^{\mu_2 t} \mathbf{v}_2 \quad ,$$

em que \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são autovetores associados aos autovalores μ_1 e μ_2 , respectivamente, e k_1 e k_2 são constantes.

No intervalo $90^\circ < \theta < 276,97^\circ$, os autovalores são negativos, logo a origem é ponto de equilíbrio estável do tipo nó. Nos intervalos $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ e $276,97^\circ < \theta \leq 360^\circ$, os autovalores têm sinais contrários e, portanto, a origem é ponto de equilíbrio instável do tipo sela.

Feita essa análise, pode-se desenhar retratos de fase para diferentes valores de θ e, com eles, facilmente esboçar trajetórias de tensão.

Examinemos, então, como responde o modelo em certas solicitações frequentemente impostas em laboratório. Em cada caso as figuras mostram, à esquerda, um retrato de fase do sistema (6.6), com o auxílio do qual se faz a interpretação, à direita, com trajetórias de tensão, restrita aos casos em que $q \geq 0$, pois só nesses casos as soluções do sistema (6.6) são também soluções do sistema original (6.1).

Nas soluções fornecidas a seguir, p_0 e q_0 representam os valores iniciais de p e q .

a) Compressão isotrópica ($\theta = 0$, $\dot{\epsilon}_v > 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_r > 0$)

A solução é:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 e^{t/\lambda} \\ q_0 e^{-\sqrt{2}(\bar{G}+3M)t/2M} \end{pmatrix}$$

Vemos na fig. 6.3 que, se o estado inicial é hidrostático, como em X, assim permanece, afastando-se da origem. Se não, como em Y, a trajetória tende assintoticamente ao eixo das abscissas à medida que o tempo passa.

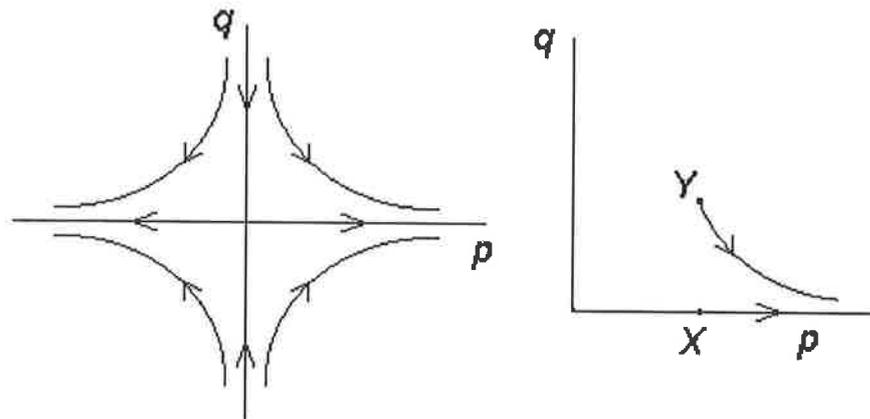


Figura 6.3 - Compressão isotrópica ($\theta = 0$). a) Retrato de fase. b) Trajetórias de tensão iniciando-se em dois pontos distintos X e Y.

b) Expansão isotrópica ($\theta = 180^\circ$, $\dot{\epsilon}_v < 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_r < 0$)

A solução é

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 e^{-t/\kappa} \\ q_0 e^{-\sqrt{2}(\bar{G}+3M)t/2M} \end{pmatrix}$$

Aqui também, se o estado inicial é hidrostático, como em X, assim permanece, mas agora aproxima-se da origem (fig. 6.4). Note-se que, se o estado inicial não é hidrostático, como em Y, a trajetória ultrapassa a linha do estado crítico. Em ambos os

casos a trajetória aproxima-se da origem do sistema de coordenadas sem, entretanto, jamais atingi-la, conforme revela a solução do sistema (p e q tendem a zero à medida que t tende a infinito).

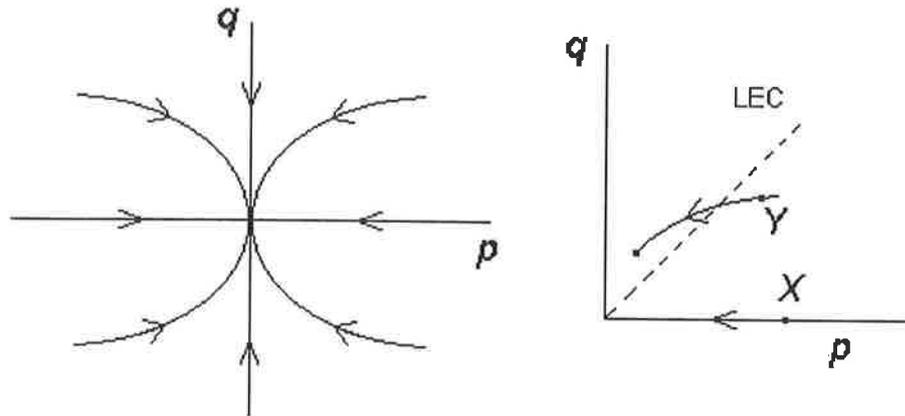


Figura 6.4 - Expansão isotrópica ($\theta = 180^\circ$). a) Retrato de fase. b) Trajetórias de tensão iniciando-se em dois pontos distintos X e Y (LEC indica a linha do estado crítico).

c) Compressão axial sem deformação lateral (edométrica) ($\theta = 45^\circ$, $\dot{\epsilon}_v = \dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_a > 0$, $\dot{\epsilon}_r = 0$).

Se o estado de tensão está inicialmente sobre a chamada linha K_θ , assim como o ponto Y, na fig. 6.5, sobre ela desenvolve-se, afastando-se da origem. Se não, tende assintoticamente a ela à medida que t tende a infinito. Com as constantes determinadas no capítulo 5, o valor de η correspondente à linha K_θ é 0,86, que fornece $K_\theta = 0,45$.

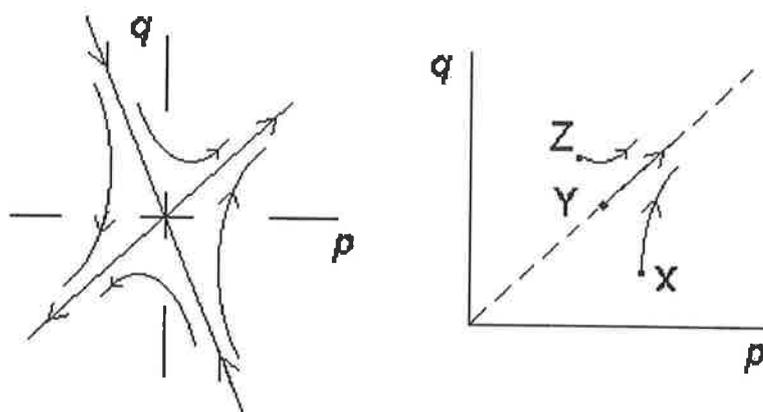


Figura 6.5 - Compressão edométrica ($\theta = 45^\circ$). a) Retrato de fase. b) Trajetórias de tensão iniciando-se em três pontos distintos X, Y (sobre a linha K_0) e Z.

d) Compressão axial seguida de expansão axial sem deformação lateral (edométricas)
 ($\theta = 225^\circ$, $\dot{\epsilon}_v = \dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_a < 0$, $\dot{\epsilon}_r = 0$)

Na fig. 6.6, à esquerda, mostra-se o retrato de fase da expansão edométrica ($\theta = 225^\circ$); à direita, a trajetória seguida quando, partindo de um estado sobre a linha K_0 (em A), o solo é submetido a compressão edométrica até B e depois é descarregado, também sem deformação lateral, até C.

A trajetória de descarregamento fica abaixo da de carregamento, conforme se observa experimentalmente. Para uma comparação direta com resultados experimentais, veja-se o capítulo 5.

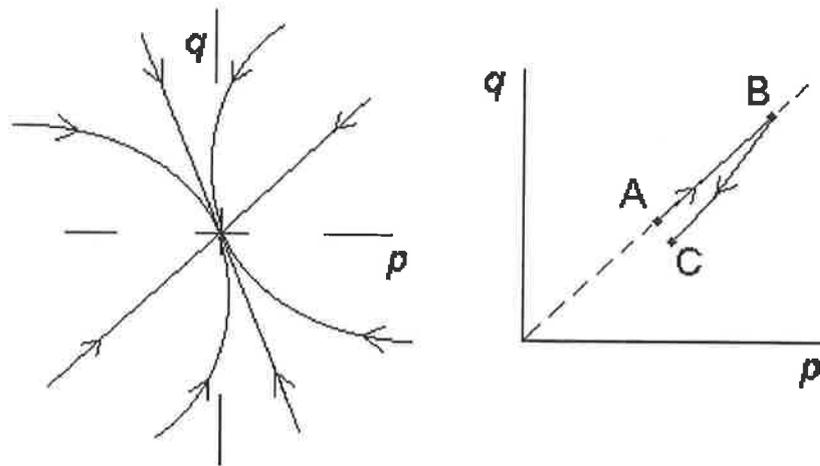


Figura 6.6 - a) Retrato de fase para expansão edométrica ($\theta = 225^\circ$). b) Trajetória para compressão seguida de expansão edométricas.

e) Compressão axial sem variação de volume (isocórica, compressão axial não-drenada em corpo-de-prova saturado) ($\theta = 90^\circ$, $\dot{\epsilon}_v = 0$, $\dot{\gamma} > 0$, $\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_a / 2$)

Neste caso, o determinante de A é nulo, e, portanto, um dos autovalores é nulo.

O outro vale:

$$A_{11} + A_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{\tilde{G}}{M},$$

que é negativo pois $\lambda > \kappa$ e \tilde{G} e M são positivos.

A solução é:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} I \\ M \end{pmatrix} + K_2 e^{\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{\tilde{G}}{M} \right] t} \begin{pmatrix} I \\ \Omega \end{pmatrix},$$

com:

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}\tilde{G}}{\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\kappa}},$$

$$K_1 = \frac{p_0\Omega - q_0}{\Omega - M},$$

$$K_2 = \frac{q_0 - Mp_0}{\Omega - M}.$$

Derivando a solução em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = K_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\kappa} \right) - \frac{\tilde{G}}{M} \right] e^{\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\kappa} \right) - \frac{\tilde{G}}{M} \right] t} \begin{pmatrix} I \\ \Omega \end{pmatrix}.$$

Caso $K_2 \neq 0$, então:

$$\frac{\dot{q}}{\dot{p}} = \frac{\sqrt{2}\tilde{G}}{\left(\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\kappa} \right)},$$

revelando que a trajetória de tensão é uma reta (fig. 6.7), em contraste com o que se observa em experimentos. Se $K_2 = 0$, então

$$q = Mp,$$

que é a equação da linha do estado crítico (constituída de pontos de equilíbrio estável).

f) Ciclo isocórico de compressão axial ($\theta = 90^\circ$) e descompressão axial ($\theta = 270^\circ$, $\dot{\varepsilon}_v = 0$, $\dot{\gamma} < 0$) (ciclo de compressão e descompressão axiais não-drenadas em corpo-de-prova saturado).

À esquerda, na fig. 6.8, encontra-se o retrato de fase para $\theta = 270^\circ$; à direita, a trajetória seguida no ciclo, indicando que, com a repetição dos ciclos, o solo se aproxima do estado crítico.

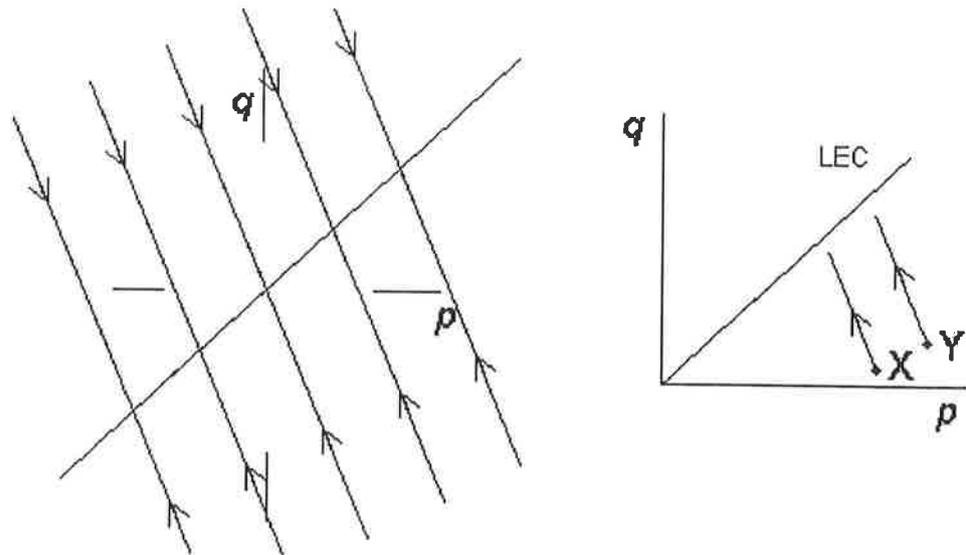


Figura 6.7 - Compressão axial isocórica ($\theta = 90^\circ$). a) Retrato de fase. b) Trajetórias de tensão iniciando-se em dois pontos distintos X e Y (LEC indica a linha do estado crítico).

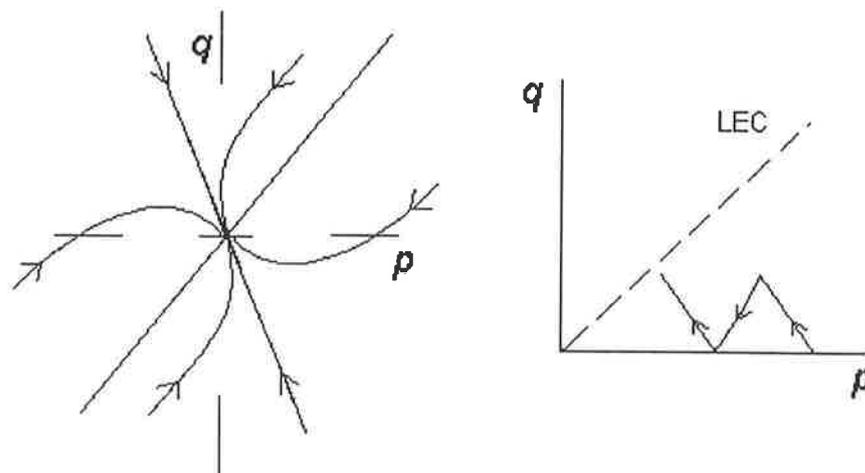


Figura 6.8 - a) Retrato de fase para decompressão axial isocórica ($\theta = 270^\circ$). b) Trajetória em ciclo isocórico.

g) Compressões anisotrópicas

Pelo termo compressões anisotrópicas, deseja-se designar deformações proporcionais com diminuição da altura de corpo-de-prova ($\dot{\epsilon}_a > 0$) e distorção positiva ($\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_a - \dot{\epsilon}_r > 0$), partindo de estados de tensão no primeiro quadrante sobre as variedades invariantes lineares correspondentes, por conseguinte, gerando trajetórias de tensão que se desenvolvem sobre essas retas. A compressão edométrica, abordada no item c acima, estando o estado inicial sobre a linha K_0 , faz parte deste grupo.

A fig 6.9 traz variedades lineares invariantes no primeiro quadrante (que é a região de interesse) correspondentes a algumas compressões anisotrópicas (identificadas pelo ângulo θ). Repetindo, se o estado inicial de tensão se localiza sobre uma dessas retas e o material é submetido a deformação proporcional correspondente a tal reta, então a trajetória de tensão desenvolve-se sobre ela. Note-se que, abaixo da linha do estado crítico as trajetórias se afastam da origem, enquanto o contrário ocorre acima dela.

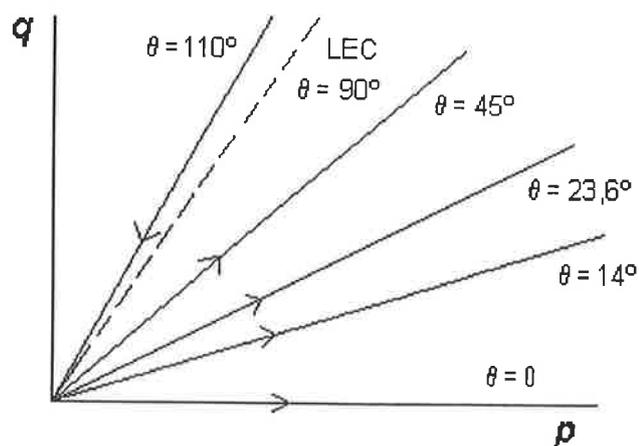


Figura 6.9 - Compressões anisotrópicas.

6.3 QUADRO SINTÉTICO DE RESPOSTAS

Voltando às deformações genéricas, num ponto (p, q) de uma trajetória de tensões, consideremos o vetor tangente (\dot{p}, \dot{q}) e o ângulo β tal que $\dot{p} = \sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2} \cos \beta$ e $\dot{q} = \sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2} \sin \beta$ (fig. 6.10).

Se os dois membros das duas equações do sistema (6.4) forem divididos por $p \neq 0$, obtêm-se:

$$\frac{\dot{p}}{p} = A_{11} + A_{12} \eta$$

$$\frac{\dot{q}}{p} = A_{21} + A_{22} \eta .$$

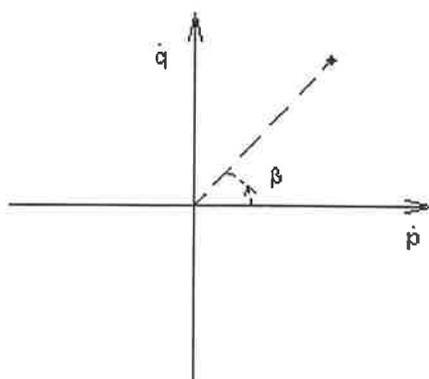


Figura 6.10 - Ângulo β .

Tendo em vista as expressões dos coeficientes de $A(t)$ em (6.5), as equações acima mostram que o ângulo β num particular instante t é determinado por $\eta(t)$ e $\theta(t)$. Note-se que, embora os coeficientes $A(t)$ dependam de $\theta(t)$ e $\rho(t)$, o ângulo β não

depende de $\rho(t)$; é interessante que β não depende de q e p isoladamente, senão do quociente entre eles. Esta propriedade sugeriu a construção do quadro sintético da fig. 6.11, que representa a resposta global da equação hipoplástica.

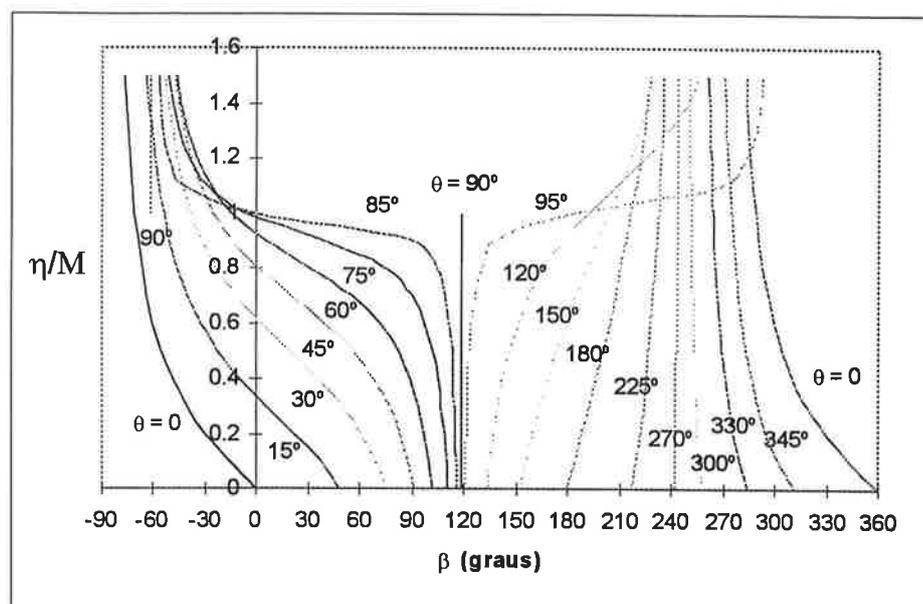


Figura 6.11 – Quadro sintético de respostas.

Cada curva do quadro da fig. 6.11 associa-se a um valor de θ , que, por sua vez, determina uma relação entre $\dot{\epsilon}_v$ e $\dot{\gamma}$. É digna de nota a descontinuidade existente para $\theta = 90^\circ$ ao qual correspondem dois segmentos de reta verticais, um para $\eta/M < 1$, o outro para $\eta/M > 1$. As abscissas desses dois segmentos verticais são ângulos cuja tangente é $\sqrt{2}\tilde{G}/(\lambda^{-1} - \kappa^{-1})$. Também é uma propriedade importante que nenhuma curva cruze a reta de ordenada $\eta/M = 1$ (estado crítico) entre as abscissas 0° e 180° , significando que trajetórias de tensão retas com inclinação entre estes dois valores não podem cruzar a reta do estado crítico.

O quadro serve para determinar a resposta instantânea do material quando as tensões que nele atuam são alteradas ou quando se lhe impõe certa deformação. O estado de tensão num certo instante é caracterizado no quadro exclusivamente por η/M , a velocidade de alteração de tensões, por β (que indica a relação entre \dot{p} e \dot{q}) e a velocidade de deformação, por θ (que indica a relação entre $\dot{\epsilon}_v$ e $\dot{\gamma}$). Para tornar a explicação mais fluente será usada a seguinte terminologia: se o material é submetido a alteração instantânea de tensões com velocidade (\dot{p}, \dot{q}) , à qual corresponde um certo valor de β , e sofre deformação que intantaneamente é caracterizada pelas velocidades de deformação $\dot{\epsilon}_v$ e $\dot{\gamma}$, às quais corrponde certo valor de θ , dir-se-á sucintamente que se aplica β e a resposta é θ . Analogamente, no caso em que se impõe a deformação e o material responde com determinada alteração de tensões, dir-se-á que se aplicou θ e a resposta foi β .

Por meio de exemplos será ilustrado o modo como o quadro pode ser usado para a determinação da resposta do modelo.

Se o estado inicial é $\eta/M = 0$ e se aplica $\theta = 0^\circ$ (instantaneamente compressão isotrópica) o quadro indica que a resposta é $\beta = 0^\circ$ (a intersecção da curva $\theta = 0^\circ$ com a reta $\eta/M = 0$), ou seja, que as tensões se alteram de modo que \dot{q} seja zero.

Já se, por exemplo, o estado inicial é tal que $\eta/M = 0,4$ e se aplica $\theta = 0^\circ$, o quadro indica $\beta = -49,1^\circ$ (a intersecção da curva $\theta = 0$ com a reta $\eta/M = 0,4$, ou seja, q diminui e p aumenta).

Vejamos o caso da compressão isotrópica retratada na fig. 6.3. Todos os pontos da trajetória que se inicia em X correspondem ao ponto de coordenadas (0,0) no quadro. A trajetória que se inicia em Y e tende assintoticamente ao eixo das abscissas

corresponde no quadro ao trecho da curva $\theta = 0^\circ$ entre o estado inicial e a reta $\eta/M = 0$.

Ainda com estado inicial $\eta/M = 0$, aplicando-se $\theta = 180^\circ$ (instantaneamente expansão isotrópica), a resposta segundo o quadro é $\beta = 180^\circ$, ou seja, \dot{q} é zero e p diminui (cf. fig. 6.4).

Qualquer que seja $\eta/M < 1$, se for aplicado $\theta = 90^\circ$ (instantaneamente compressão isocórica), a resposta é $\beta = 118,39^\circ$ (q aumenta e p diminui). Por isso a trajetória de tensão da compressão não-drenada é uma reta (veja-se a fig. 6.7). A trajetória também é reta caso $\eta/M > 1$, mas o valor de β é $-61,61^\circ (=118,39^\circ - 180^\circ)$ (q diminui e p aumenta).

Passemos a um caso em que se impõe a trajetória de tensão. Seja, por exemplo, a trajetória com p constante que parte de $q = 0$ em direção ao estado crítico, isto é, aquela em que $\beta = 90^\circ$ em todos os instantes. Com o auxílio do quadro, notamos que a trajetória (reta vertical de abscissa $\beta = 90^\circ$), dirigida para cima, cruza sucessivas curvas de θ constante revelando como varia a relação entre $\dot{\epsilon}_v$ e $\dot{\gamma}$ (θ tende a 90°), à medida que se aproxima da reta de ordenada $\eta/M = 1$ (estado crítico).

A equação hipoplástica deixa claro que $(\dot{\epsilon}_v, \dot{\gamma})$ determina (\dot{p}, \dot{q}) . Adaptando, para o caso de ensaios triaxiais, o que foi demonstrado em termos gerais no capítulo 2, é verdade que, se a tensão encontra-se abaixo da linha do estado crítico, existe uma relação biunívoca entre $(\dot{\epsilon}_v, \dot{\gamma})$ e (\dot{p}, \dot{q}) , isto é, (\dot{p}, \dot{q}) também determina $(\dot{\epsilon}_v, \dot{\gamma})$ (as curvas de igual valor de θ não se cruzam). Portanto, para $\eta/M < 1$ pode-se falar em aplicar θ ou β e ter como resposta β ou θ , respectivamente. O mesmo não é válido acima da linha do estado crítico, região na qual (\dot{p}, \dot{q}) não determina $(\dot{\epsilon}_v, \dot{\gamma})$; note-se que há cruzamento de curvas de igual valor de θ .

7 CONCLUSÃO

Foram estudadas teorias cuja equação constitutiva é:

$$\overset{\circ}{T} = h(T, D).$$

No caso mais geral em que o índice de vazios e (ou a densidade) está presente:

$$\overset{\circ}{T} = h(T, D, e)$$

a análise pode ser estendida sem dificuldade, importando lembrar que a alteração de e com o tempo obedece a:

$$\dot{e} = (1 + e)trD$$

Em Elastoplasticidade, para que os pontos essenciais da teoria (obediência ao princípio da objetividade material, caracterização de regimes elástico e elastoplástico, a tensão como solução de equação diferencial e como resposta à deformação imposta, o emprego exclusivo de tensores definidos na configuração corrente) concentrassem a atenção, apenas o endurecimento isotrópico foi abordado. Num estudo não incluído nesta tese, o caso de endurecimento isotrópico e cinemático combinados, presente em alguns modelo para solos, foi tratado, mantendo-se as características fundamentais da teoria, adicionando-se-lhe uma retrotensão e uma equação para sua evolução.

O estudo comparativo procurou identificar semelhanças de propriedades básicas da Hipoplasticidade e da Elastoplasticidade e realçar a diferença na forma de representar a irreversibilidade.

As equações elastoplásticas apresentadas serviram de base para a reconstrução e generalização do Cam-Clay. Soluções analíticas foram obtidas em trajetórias retilíneas de tensão.

A nova equação hipoplástica tem a vantagem de envolver apenas quatro constantes características do material, bem conhecidas na Mecânica dos Solos. Seu desempenho no confronto com resultados de diversos ensaios de laboratório com um solo siltoso (particularmente, ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão) e com as previsões do Cam-Clay foi avaliado, e, resumidamente, pode-se considerá-lo entre medianamente bom e bom. A equação incorpora fenômenos e características importantes do comportamento dos solos tais como o estado crítico, a envoltória de resistência, o comportamento normalizado, o comportamento em deformações proporcionais e tem a capacidade de refletir as mudanças de comportamento em diferentes solicitações, nuns casos mais fielmente que em outros.

É importante mencionar que, além das falhas de previsão do comportamento do solo específico em certas solicitações, há defeitos intrínsecos ao modelo, que se revelariam no confronto com qualquer solo. Por exemplo: a trajetória de tensão na compressão sem variação de volume é retilínea, a inclinação da reta tangente na origem à curva q/γ não depende da trajetória de tensão, nenhum efeito de sobreadensamento é levado em conta.

Um ponto positivo, que merece ênfase, é que a inexistência do domínio elástico em Hipoplasticidade proporciona uma resposta mais realista que as do Cam-Clay (e de outros modelos elastoplásticos) nas trajetórias de tensão em que ocorre diminuição da tensão octaédrica.

A simplicidade da equação proposta permitiu uma análise de seu comportamento global, que facilita sua compreensão e comparação com outros modelos. Os resultados principais são as soluções analíticas nas deformações proporcionais e o quadro sintético de respostas.

Um defeito comum a todas as equações hipoplásticas e, portanto existente também na equação em discussão, revela-se no recarregamento (quando a deformação é revertida pela segunda vez). A solução deste problema envolve a incorporação de memória nos modelos hipoplásticos e é assunto de pesquisa atual.

Pretende-se prosseguir o estudo comparativo e o trabalho de uniformização e classificação, examinando-se modelos em que a viscosidade seja relevante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTMAN, S. S. (1995). *Nonlinear Problems of Elasticity*. Nova York, Springer-Verlag.
- BAUER, E. (1995). Constitutive modelling of critical states in hypoplasticity. In: FIFTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NUMERICAL MODELS IN GEOMECHANICS (NUMOG V), Davos, Suíça, Balkema, p.15-20.
- CHAMBON, R.; DESRUES, J; HAMMAD, W.; CHARLIER, R. (1994). A new rate-type constitutive model for geomaterials. Theoretical basis and interpretation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 18, p. 253-278.
- DRUCKER, D. C.; GIBSON R. E.; HENKEL, D. J. (1957). Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity. *Transactions ASCE*, p. 239-346.
- DRUCKER, D.C. (1950). Some implications of work-hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, v.7, n.4, p. 411-418.

- DRUCKER, D.C. (1959). A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, p. 101-106.
- DRUCKER, D.C. (1966). Concept of path independence and material stability for soils. In: IUTAM SYMPOSIUM ON RHEOLOGY AND SOIL MECHANICS. Grenoble, França, p. 23-46.
- DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, v.10, n.2, p. 157-165.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 18, n. 4, p. 251-281.
- GUDEHUS, G. (1979). A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. In: 3RD. INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN GEOMECHANICS, W. Wittke (org.), Aachen, Alemanha, p. 1309-1323.
- GUDEHUS, G. (1996). A comprehensive constitutive equation for granular materials, *Soils and Foundations*, v.36, n. 1, p. 1-12.
- GURTIN, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. San Diego, California, Academic Press.

HALMOS, P. R. (1958). *Finite Dimensional Vector Spaces*. Nova York, Van Nostrand-Rheinhold.

HILL, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford, Clarendon Press.

HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 6, p. 139-150.

HOULSBY, G.T.; WROTH, C.P.; WOOD, D.M. (1984). Predictions of the result of laboratory tests on a clay using a critical state model. In: CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS, INTERNATIONAL WORKSHOP ON CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS, G.Gudehus, F.Darve, I.Vardoulakis (orgs.), Grenoble, França, Balkema, 1982, p. 99-121.

HÜGEL, H. M. (1995). *Prognose von Bodenverformungen*. Veröffentlichungen Heft 136, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Univesität Fridericana in Karlsruhe.

KOLYMBAS, D. (1978). *Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden*. Veröffentlichungen Heft 77, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Univesität Fridericana in Kalsruhe.

KOLYMBAS, D. (1984). A constitutive law of the rate type for soils. Position, calibration and prediction. In: CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS,

INTERNATIONAL WORKSHOP ON CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS, G.Gudehus, F.Darve, I.Vardoulakis (orgs.), Grenoble, França, Balkema, 1982, p. 419-437.

KOLYMBAS, D. (1988). A generalized hypoelastic constitutive equation. In: INTERNARIONAL WORKSHOP ON CONSTITUIVE EQUATIONS FOR GRANULAR NON-COHESIVE SOILS. Saada e Bianchini (orgs.), Case University, 1987, p. 349-359.

KOLYMBAS, D. (1991). An outline of hypoplasticity. *Archive of Applied Mechanics*, v. 61, p. 143-151.

KOLYMBAS, D. (1993). *Modern Approaches to Plasticity*. International Workshop. Horton, Grécia, Elsevier.

KOLYMBAS, D., HERLE, I.; VON WOLFFERSDORF, P.-A. (1995). Hypoplastic constitutive equation with back stress. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 19, p. 415-436.

LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, v. 36, p. 1-6.

LEE, E. H.; LIU, D. T. (1967). Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics*, v. 38, n. 1, p. 19-27.

LUCCHESI, M.; OWEN, D. R.; PODIO-GUIDUGLI, P. (1992). Materials with elastic range: a theory with a view toward applications - Part III - Approximate constitutive relations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 117, p. 53-96.

LUCCHESI, M.; PADOVANI, C.; PAGNI, A.; PODIO-GUIDUGLI, P. (1993). Materials with elastic range and plastic change of volume. *International Journal of Plasticity*, v. 9, p. 35-49.

LUCCHESI, M.; PODIO-GUIDUGLI, P. (1988). Materials with elastic range: a theory with a view toward applications - Part I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 102, p. 23-43.

LUCCHESI, M.; PODIO-GUIDUGLI, P. (1990). Materials with elastic range: a theory with a view toward applications - Part II. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 110, p. 9-42.

LUCCHESI, M.; PODIO-GUIDUGLI, P. (1995). Elastic unloading, neutral loading, and plastic loading in the theory of materials with elastic range. *International Journal of Plasticity*, v. 11, n. 1, p. 1-14.

- MATSUOKA, H.; NAKAI, T. (1977). Stress-strain relationship of soil based on the "SMP". Constitutive Equations of Soils. In: XI ICSMFE. Specialty Session. Tóquio, Japão, p.153-162.
- MRÓZ, Z.; NORRIS, V. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1979). Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. *Géotechnique*, v. 29, n.1, p. 1-34.
- NADER, J. J. (1993). *Modelos Elasto-Plásticos para Solos. O Cam-Clay e sua aplicação a diferentes trajetórias de tensão*. São Paulo, Dissertação (mestrado) - Escola Politécnica da USP.
- NADER, J. J. (1995). Objective Elastoplastic Equations for Soil Models. In: IV INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL PLASTICITY: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS, Barcelona, Espanha, p.1713-1724.
- NADER, J. J.; PINTO, C.S. (1994). Aplicação do Modelo Cam-Clay em Diferentes Trajetórias de Tensão. In: X CONGRESSO BRASILEIRO DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES, Foz do Iguaçu, v.3, p.649-656.
- NAGHDI, P. M. (1990). A critical review of the state of finite plasticity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, v. 41, p. 315-394.

NIEMUNIS, A. (1993). Hypoplasticity vs. Elastoplasticity, selected topics. In: MODERN APPROACHES TO PLASTICITY. International Workshop, D. Kolymbas (org.), Horton, Grécia, Elsevier, p. 278-307.

NOLL, W. (1972). A new mathematical theory of simple materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 48, p. 1-50.

OWEN, D. R. (1968). Thermodynamics of materials with elastic range. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 31, p. 91-112.

OWEN, D. R. (1970). A mechanical theory of materials with elastic range. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 37, p. 85-110.

PINTO, C. S.; NADER, J. J. (1991). Ensaio de laboratório em solos residuais. Relato, In: II SEMINÁRIO DE ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES ESPECIAIS, São Paulo, v. 2, p. 166-202.

PINTO, C. S.; NADER, J. J. (1994). Modelo de análise de tensões e deformações pela superposição de efeitos (modelo SUEF). In: X CONGRESSO BRASILEIRO DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES, Foz do Iguaçu, v.3, p.701-708.

PIPKIN, A. C.; RIVLIN, R. S. (1965). Mechanics of rate-independent materials. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, v. 16, p. 313-326.

- PONTRYAGIN, L. S. (1962). *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley.
- PRAGER, W. (1949) Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*, v. 20, n. 3, p. 235-241.
- ROSCOE, K. H.; BURLAND, J. B. (1968). On the generalized stress-strain behaviour of wet clay. In: ENGINEERING PLASTICITY, J.Heyman e F.A.Leckie (orgs.), Cambridge, Inglaterra, p. 535-609.
- SCHOFIELD, A. N.; WROTH, C. P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. Londres, McGraw-Hill.
- SILHAVÝ, M. (1977). On transformation laws for plastic deformations of materials with elastic range. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 63, p. 169-182.
- TERZAGHI, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. Nova York, John Wiley.
- TRUESDELL, C.; NOLL, W. (1965). The non-linear field theories of mechanics. In: HANDBUCH DER PHYSIK, v. III/3. S. Flügge (org.), Berlin, Springer-Verlag.
- TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. A. (1960). The classical field theories. In: HANDBUCH DER PHYSIK, v. III/1. S. Flügge (org.), Berlin, Springer-Verlag.

- VON WOLFFERSDORFF, P.-A. (1996). A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, v. 1, p. 251-271.
- WANG, C. C. (1969). On representations for isotropic functions. Part I. Isotropic functions of symmetric tensors and vectors. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 33, p. 249.
- WU, W.; BAUER, E. (1993). A hypoplastic model for barotropy and pycnotropy of granular soils. In: MODERN APPROACHES TO PLASTICITY, D. Kolymbas (org.), Horton, Grécia, Elsevier, p.225-245.
- WU, W.; BAUER, E. (1994). A simple hypoplastic constitutive model for sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 18, p. 833-862.