

ELIZANDRA AMARAL MONTEIRO

MODELAÇÃO MATEMÁTICA DA QUEDA LIVRE

**São Paulo
2006**

ELIZANDRA AMARAL MONTEIRO

MODELAÇÃO MATEMÁTICA DA QUEDA LIVRE

**Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia Civil.**

Área de Concentração: Engenharia Hidráulica

**Orientador: Prof. Dr. Podalyro Amaral de
Souza**

**São Paulo
2006**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 11 de outubro de 2006

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Monteiro, Elizandra Amaral

**Modelação matemática da queda livre / E.A. Monteiro. --
Edição Revisada. -- São Paulo, 2006.
113 p.**

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Hidráulica e
Sanitária.**

**1.Dissipadores de energia 2.Estruturas hidráulicas 3.Escoa-
mento superficial (Modelagem matemática) I.Universidade de
São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia
Hidráulica e Sanitária II.t.**

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Elza e Eliseo, pelo apoio e incentivo constantes no meu desenvolvimento profissional.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Podalyro Amaral de Souza pela orientação e pela oportunidade de aprendizado no Laboratório de Hidráulica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Ao Centro Tecnológico de Hidráulica – CTH (Convênio entre a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e Departamento de Águas e Energia Elétrica), pelo apoio e por colocar à disposição recursos humanos necessários à elaboração deste trabalho.

Ao Departamento de Hidrologia do Departamento de Águas e Energia Elétrica – DAEE, pelo apoio e incentivo para elaboração desta dissertação.

Ao colega Luís Fernando Maia Lima por todos os conhecimentos positivos proporcionados para o meu aprendizado e para a elaboração desta dissertação.

Aos colegas e funcionários do CTH pela contribuição decisiva mostrada em todos os momentos.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação trata da hidráulica da queda livre em canal de seção retangular. A análise bibliográfica do tema está calcada nos trabalhos pioneiros, nos clássicos e nos recentes.

Com base nos princípios da Física: Conservação de Massa, Quantidade de Movimento, e Primeira Lei da Termodinâmica, foi desenvolvido um modelo matemático para a queda livre.

O modelo proposto, após ser analisado do ponto de vista de sua consistência, foi validado em comparações com resultados fornecidos por outros pesquisadores, geralmente com modelos empíricos (ou semi-empíricos), ajustados a dados experimentais.

Os resultados obtidos pelo modelo matemático proposto nesta dissertação, correspondem a boas estimativas das grandezas envolvidas nos escoamentos em queda livre, o que credencia o modelo proposto como uma ferramenta apropriada para projetos em engenharia hidráulica, principalmente quando se tem em conta que a queda livre é o mecanismo de dissipação mais presente na natureza.

Palavras-chave: Dissipadores de energia. Estruturas hidráulicas. Escoamento superficial (modelagem matemática).

ABSTRACT

This study addresses free fall hydraulics in rectangular channel section. References were based on not only earlier studies, but also on classical and most recent ones.

Based on principles of Physics, such as mass conservation, momentum and the First Law of Thermodynamics, a mathematical model has been developed as an example of free fall hydraulic.

After extensive consistency analyses the proposed model has been validated by comparing different results furnished by other researchers, generally based on empirical or semi-empirical treatment adjusted to experimental data.

Results obtained from the mathematical model proposed here correspond to good estimates of greatneses involved in the free overfall and that turns the proposed model into an adequate tool for Hydraulic Engineering projects, especially when we all know free overfall is the most common dissipation mechanism in Nature.

Keywords: Dissipation of energy. Hydraulic structures. Superficial flow (mathematical modelling).

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1/1 – Ressalto ao pé do vertedor (BAKHMETEFA, 1932).....	16
Figura 3.1/2 – Ressalto abaixo de um degrau (BAKHMETEFA, 1932).	17
Figura 3.1/3 – Escoamento sobre a queda (BAKHMETEFA, 1932).....	18
Figura 3.2/1 – Diagrama de Energia Específica (ROUSE, 1936).	25
Figura 3.2/2 – Perfis de superfície e distribuição de pressão na queda livre (ROUSE, 1936). 26	
Figura 3.3/1 – Queda livre em duas dimensões (MOORE, 1943).....	27
Figura 3.3/2 – Energia na base da queda livre (MOORE, 1943).....	28
Figura 3.3/3 – Forças que atuam na queda livre (MOORE, 1943).....	29
Figura 3.4/1 – Gráficos para determinação (a) do k na equação $Y_t = kY_c$; e (b) da declividade da linha d'água na seção de queda (FATHY & AMIN, 1954).....	31
Figura 3.4/2 – Distribuição das pressões (FATHY & AMIN, 1954).	32
Figura 3.5/1 – Tipos de escoamentos (RAND, 1955).	34
Figura 3.5/2 – Geometria do escoamento na queda x Parâmetro de queda (RAND, 1955).....	36
Figura 3.5/3 – Localização da profundidade d_1 (RAND, 1955).....	36
Figura 3.6/1 – Disposição das rugosidades (DELLEUR et al., 1956).....	37
Figura 3.6/2 – Resultados obtidos (DELLEUR et al., 1956).....	37
Figura 3.7/1 – Queda livre interpretada pela curva da energia específica (CHOW, 1959).....	38
Figura 3.8/1 – Curva de resultados (SMITH, 1962).....	40
Figura 3.8/2 – $Q/D_0^{5/2} = 2,67$; $D_c/D_0 = 0,70$ (SMITH, 1962).....	40
Figura 3.8/3 – $Q/D_0^{5/2} = 3,05$; $D_c/D_0 = 0,75$ (SMITH, 1962).....	41
Figura 3.9/1 – Queda livre (HENDERSON, 1966).....	42
Figura 3.9/2 – Estrutura da queda (HENDERSON, 1966).....	43
Figura 3.9/3 – Dissipação de energia na base da queda livre (HENDERSON, 1966).....	44
Figura 3.10/1 – Relação entre profundidade de queda e profundidade crítica versus relação declividade do canal e declividade crítica (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).....	48
Figura 3.10/2 – Distribuição de pressão na seção de queda (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).....	49
Figura 3.10/3 – Distribuição de velocidades para declividade nula (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).....	50
Figura 3.10/4 – Distribuição de velocidades para declividade adversa (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).....	51

Figura 3.10/5 – Distribuição de velocidades para declividade severa (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).....	52
Figura 3.10/6 – Distribuição de tensão de cisalhamento no leito do canal (adimensionalizado) (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).	52
Figura 3.13/1 – Influência da rugosidade na profundidade de queda (RAJARATNAM et al., 1976).....	56
Figura 3.14/1 – Modelo da rugosidade no leito (KRAIJENHOFF & DOMMERHOLT, 1977).	57
Figura 3.15/1 – Esquema da queda d'água (GILL, 1979).....	58
Figura 3.15/2 – Variação y_1/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).....	61
Figura 3.15/3 – Variação y_p/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).....	61
Figura 3.15/4 – Variação E_1/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).	62
Figura 3.16/1 – Profundidade de queda para canal trapezoidal horizontal (SUBRAMANYA & MURTHY, 1987).	65
Figura 3.18/1 – Esquema da queda livre (CHANSON, 1994).	67
Figura 3.19/1 – Distribuição de velocidade em várias seções para $y_c/h = 0,20$ (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).	73
Figura 3.19/2 – Relação entre a vazão de recirculação Q_c e a vazão total Q versus y_c/h (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).	73
Figura 3.19/3 – Variação da perda de energia para a queda d'água e para o jato inclinado (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).	74
Figura 3.19/4 – Variação de y_p/h versus y_c/h e l_p/h versus y_c/h (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).	75
Figura 3.19/5 – Variação de perda de energia versus y_c/h (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).	76
Figura 3.23/1 – Definição das variáveis (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	80
Figura 3.23/2 – Relação entre Y_c/H versus Y_2/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	81
Figura 3.23/3 – Variação relativa de Y_p/H versus Y_c/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	82
Figura 3.23/4 – Variação de perda de energia versus Y_c/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	82
Figura 3.23/5 – Variação relativa de Y_2/H versus Y_c/H para escoamento supercríticos (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	83

Figura 3.23/6 – Variação de Y_p/H versus Y_c/H para escoamento supercrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	84
Figura 3.23/7 – Variação da perda de energia versus Y_c/H para escoamento supercrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).	84
Figura 3.24/1 – Esquema básico dos poços de quedas (CHANSON, 2002).	86
Figura 6.1/1 – Esquema básico da queda livre.	90
Figura 6.5/1 – Volume de Controle (V_c).	93
Figura 6.5/2 – Ângulo de Incidência (θ).	96
Figura 6.5/3 – Alcance do jato (L_j).	98
Figura 6.7/1 – Variação de y_1 / y_c em função de $y_c / \Delta Z_0$.	103
Figura 6.7/2 – Variação de y_2 / y_1 em função de $y_c / \Delta Z_0$.	104
Figura 6.7/3 – Comparação da variação de y_1 / y_c em função de $y_c / \Delta Z_0$ entre o trabalho atual e Rand (1955).	105
Figura 6.7/4 – Comparação da variação de y_2 / y_1 em função de $y_c / \Delta Z_0$ entre o trabalho atual e Rand (1955).	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.10/1 – Dados experimentais obtidos por Rajaratnam e Muralidhar (1968).	46
Tabela 3.15/1 – Comparação dos cálculos de y_1 , y_p e $\cos\theta$ (GILL, 1979).	60
Tabela 3.15/2 – Dados experimentais para canal de largura 10,32cm (GILL, 1979).	63
Tabela 3.15/3 – Dados experimentais para canal de largura 30,48cm (GILL, 1979).	63
Tabela 3.15/4 – Verificação dos valores teóricos da inclinação da trajetória do jato (GILL, 1979)	64
Tabela 6.7/1 – Cálculos utilizando a formulação nova ($k = 0,10$)	102
Tabela 6.7/2 – Comparação de y_1 / y_c ($k = 0,10$).....	102
Tabela 6.7/3 – Comparação de y_2 / y_1 ($k = 0,10$)	103
Tabela 6.7/4 – Diferenças percentuais entre o trabalho atual e Rand (1955).....	104
Tabela 6.7/5 – Cálculos utilizando a formulação nova com variação de (k).....	104

LISTA DE SÍMBOLOS

Serão relacionados somente os símbolos utilizados no Capítulo 6 – Desenvolvimento Analítico; os demais serão descritos subseqüentes ao seu aparecimento no texto.

$A :=$	área molhada	(m ²)
$B :=$	largura do canal	(m)
$c :=$	altura da soleira de jusante	(m)
$g :=$	aceleração da gravidade	(m/s ²)
$k :=$	coeficiente de perda de carga localizada	(-)
$L :=$	comprimento da bacia	(m)
$L_j :=$	alcance do jato	(m)
$L_r :=$	comprimento do ressalto (<i>roller</i>)	(m)
$q :=$	vazão específica	(m ³ /s/m)
$Q :=$	vazão principal	(m ³ /s)
$Q_1 :=$	vazão principal ($Q_1 \equiv Q$)	(m ³ /s)
$Q_3 :=$	vazão recirculante	(m ³ /s)
$Q_m :=$	vazão incrementada	(m ³ /s)
$v :=$	velocidade média associada à vazão Q	(m/s)
$v_1 :=$	velocidade média na seção (1)	(m/s)
$v_b :=$	velocidade média na seção terminal ou de queda	(m/s)
$v_c :=$	velocidade média na seção crítica	(m/s)
$v_m :=$	velocidade média associada à vazão Q_m	(m/s)
$y_1 :=$	profundidade na seção (1), a jusante do impacto	(m)
$y_2 :=$	profundidade na seção (2) ou profundidade conjugada fluvial	(m)
$y_c :=$	profundidade crítica	(m)
$\Delta Z_0 :=$	altura de queda (degrau)	(m)

$\varphi :=$	coeficiente adimensional, $\varphi \leq 1$ da Equação (6.3/20)	(-)
$\theta :=$	ângulo de incidência do jato	(rad)
$\rho :=$	massa específica	(kg/m ³)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO – OBJETIVOS	13
2. JUSTIFICATIVA	15
3. ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA	16
3.1 BAKHMETEFF (1932)	16
3.2 ROUSE (1936).....	23
3.3 MOORE (1943).....	26
3.4 FATHY E AMIN (1954).....	31
3.5 RAND (1955).....	33
3.6 DELLEUR, DOOGE E GENT (1956).....	37
3.7 CHOW (1959).....	38
3.8 SMITH (1962).....	39
3.9 HENDERSON (1966).....	41
3.10 RAJARATNAM E MURALIDHAR (1968).....	46
3.11 BAUER E GRAF (1971)	53
3.12 DOMINGUEZ (1974).....	53
3.13 RAJARATNAM, MURALIDHAR E BELTAOS (1976).....	53
3.14 KRAIJENHOFF E DOMMERHOLT (1977).....	56
3.15 GILL (1979).....	57
3.16 SUBRAMANYA E MURTHY (1987).....	65
3.17 UNITED STATES DEPARTMENT OF THE INTERIOR (1987).....	66
3.18 CHANSON (1994).....	67
3.19 RAJARATNAM E CHAMANI (1995).....	71
3.20 ANNANDALE (1995).....	76
3.21 MONTES (1998).....	77
3.22 CHANSON (2001).....	77
3.23 CHAMANI E BEIRAMI (2002).....	78
3.24 CHANSON (2002).....	85
4. MATERIAIS E MÉTODOS.....	87
4.1 MATERIAIS	87
4.2 MÉTODOS	87
5. RESULTADOS ESPERADOS	89
6. DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO	90

6.1	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	90
6.2	IDENTIFICAÇÃO DAS GRANDEZAS INTERVENIENTES.....	90
6.3	SELEÇÃO DOS PRINCÍPIOS DA FÍSICA	92
6.4	ADOÇÃO DE HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	92
6.5	DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO	93
6.6	ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO	101
6.7	VALIDAÇÃO DO MODELO	102
7.	DISCUSSÃO	106
8.	CONCLUSÕES	107
9.	RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	109
10.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	110

1. INTRODUÇÃO – OBJETIVOS

Os escoamentos livres nos rios e canais, em várias situações, necessitam de mecanismos de dissipação de energia, sempre associado ao incremento da turbulência. Nos projetos de canais, o mecanismo mais usado para dissipação corresponde à formação de um ressalto hidráulico confinado a uma bacia de dissipação, que é uma estrutura cara e complexa. Na natureza, a ocorrência de um ressalto hidráulico é um evento raro e os mecanismos de dissipação efetivamente encontrados são as corredeiras e as cachoeiras, ou seja, quedas livres. A queda livre é a ocorrência de dissipação mais presente na natureza. Isso leva a questionar se a natureza está certa, ou errada, em adotar este mecanismo para dissipar energia.

Pensando um pouco mais na natureza, a quantidade de quedas livres encontradas nos rios brasileiros são milhares! Quantos ressaltos hidráulicos consegue-se encontrar, talvez nenhum que seja feito pela natureza. Se for extrapolado para o mundo, a quantidade de quedas livres é imensa e a de ressaltos, insignificante.

A dissipação de energia através da queda livre é um assunto pouco explorado no passado e no início do século 21, talvez o único caso deste tipo de dissipação bem explorado é a dissipação tratada no trabalho de Rand (1955), que se tornou um clássico nesta área e é utilizado até hoje, em 2006.

Esse trabalho foi desenvolvido com dois objetivos. **O primeiro deles, corresponde ao resgate do mecanismo de dissipação de energia por queda livre como o mais comum na natureza.**

O segundo objetivo, é o desenvolvimento e a validação de um modelo conceitual de queda livre com base nos princípios da física e com a adoção de um número de hipóteses simplificadoras realísticos.

2. JUSTIFICATIVA

A adoção deste tema justifica-se pela tendência dos tempos atuais de se produzir o mínimo de interferência com a natureza, procurando imitá-la sempre que possível e viável, o que parece ser o caso da dissipação de energia por queda livre.

Neste trabalho, optou-se por manter todas as notações originais dos diversos autores pesquisados.

3. ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA

3.1 BAKHMETEFF (1932)

Bakhmeteff (1932) apresenta em seu trabalho a formação do ressalto hidráulico após um degrau ou um vertedor. Dependendo do nível d'água de jusante, a queda d'água pode ser do tipo livre ou afogada (Figura 3.1/1).

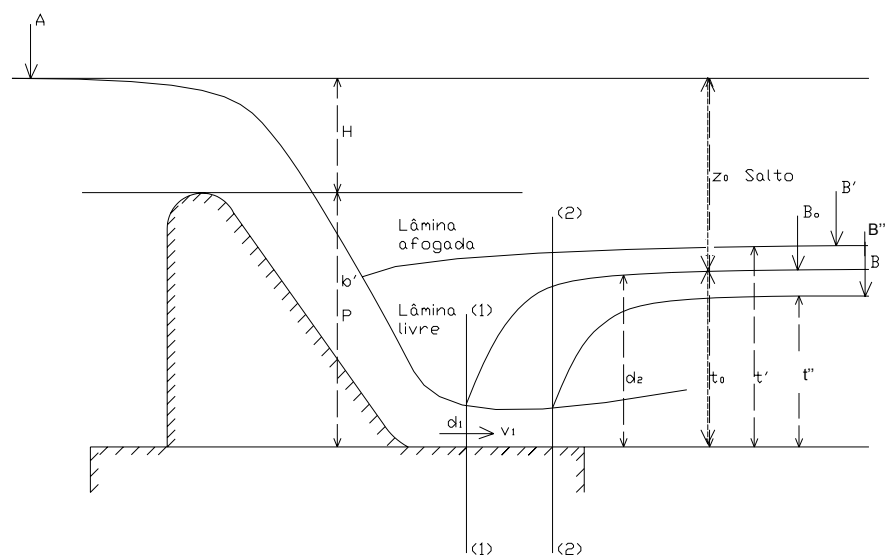


Figura 3.1/1 – Ressalto ao pé do vertedor (BAKHMETEFFF, 1932).

Onde:

d_1 := profundidade na seção (1);

d_2 := profundidade na seção (2);

H := carga hidráulica de montante;

P := altura do degrau ou altura da queda;

t' := altura conjugada do ressalto afogado;

t'' := altura conjugada do ressalto livre;

t_0 := altura conjugada de ressalto;

v_1 := velocidade média na seção (1);

Z_0 := desnível entre o nível a montante e a jusante.

Se o nível de água de jusante for B' , há geração de ressalto afogado. Se o nível de água de jusante for B_0 , limite do ressalto livre. Se o nível de água de jusante for B'' , há formação de ressalto livre com avanço do jato.

Bazin, apud Bakhmeteff (1932), informa, baseado apenas em observações experimentais, que o critério para a ocorrência do ressalto livre ou afogado é o parâmetro Z/P (Figura 3.1/2), onde:

Z := desnível entre o nível a montante e a jusante.

Quando $Z/P > 0,75$, o ressalto será livre. Em caso contrário, o ressalto será afogado.

Para um canal de montante retangular, com declividade moderada ou nula, tem-se:

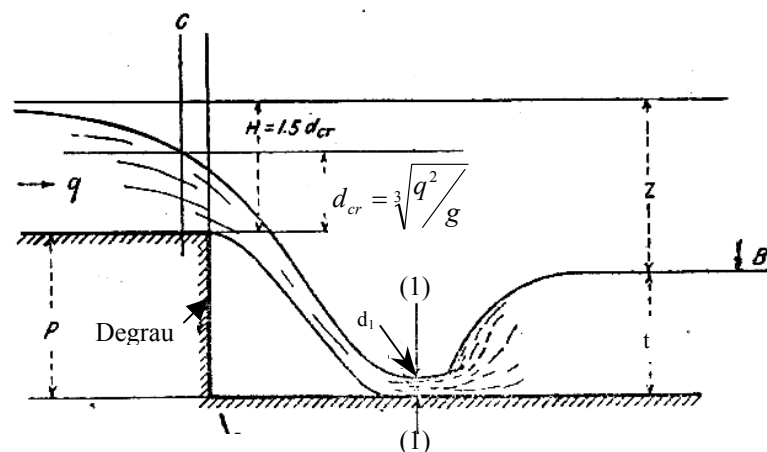


Figura 3.1/2 – Ressalto abaixo de um degrau (BAKHMETEFF, 1932).

Onde:

d_{cr} := profundidade crítica;

q := vazão específica;

$t :=$ altura conjugada de ressalto.

O autor explica qualitativamente, através do conceito de energia específica, que já ocorre uma perda de energia na curva descendente antes da queda propriamente dita (Figura 3.1/3).

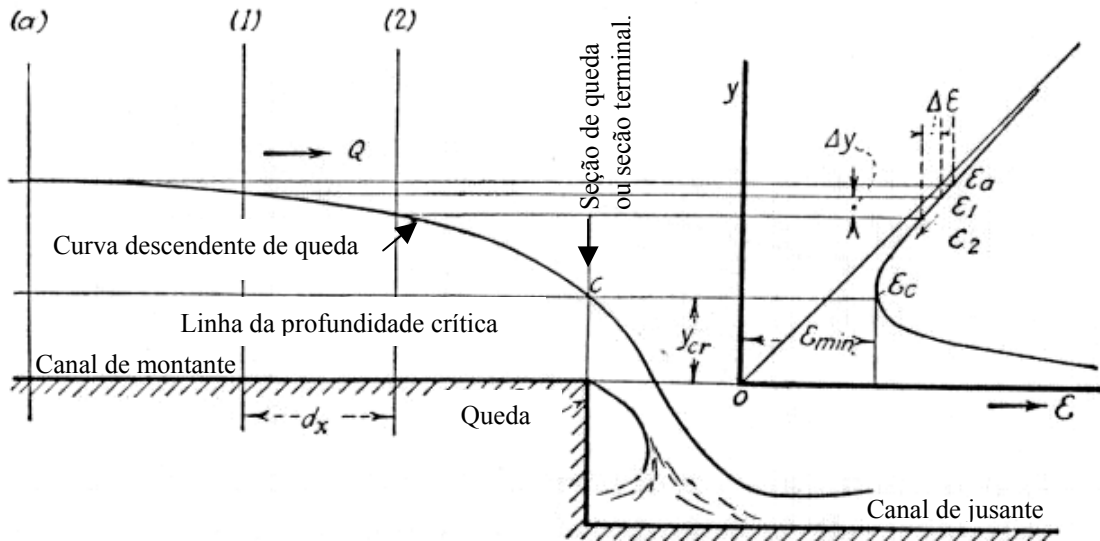


Figura 3.1/3 – Escoamento sobre a queda (BAKHMETEFFF, 1932).

Onde:

$d_x :=$ comprimento longitudinal;

$Q :=$ vazão escoada;

$y_{cr} :=$ profundidade crítica;

$\Delta y :=$ variação de profundidade;

$\Delta \epsilon :=$ variação de energia específica;

$\epsilon_i :=$ energia específica na seção considerada, onde $i = 0, 1$ e 2 ;

$\epsilon_c :=$ energia específica correspondente à profundidade crítica, também corresponde à energia específica mínima;

$\epsilon_{min} :=$ energia específica mínima.

Em seu estudo teórico o autor assumiu canal horizontal. Logo, o efeito da declividade do fundo em acelerar o escoamento e superar a resistência é nulo. O movimento nestas condições somente se dá devido à energia específica armazenada no líquido. Conseqüentemente, a passagem da seção (1) para a seção (2) na curva de queda corresponde a uma troca da seção mais alta da curva de energia com perda de energia específica $-\Delta\varepsilon$ acompanhada por uma perda apropriada de $-\Delta y$. A superfície do movimento do líquido tem uma tendência natural em diminuir, porém, a queda não pode ser inferior à profundidade crítica, onde essa profundidade corresponde à mínima energia de queda. Qualquer perda na curva além de y_{cr} significa a passagem do movimento dentro da menor seção da curva de energia. Isso somente seria possível se fosse adicionada energia externa. Logo, a profundidade crítica é o menor limite onde a curva pode decair no processo natural de dissipação de energia. Por isso a profundidade crítica é a menor profundidade a qual, por razões naturais, encontra-se no final do canal de montante antes da queda.

Ressalta-se que, em seu estudo teórico, o autor utilizou um canal horizontal, onde o movimento ocorre às custas da energia específica armazenada no líquido. Adotou também resistência nula; devido a isso, a profundidade crítica encontra-se no limite da seção de queda.

Como será visto nos próximos trabalhos, isto não é verdade. Ocorre uma resistência ao escoamento e a profundidade crítica é diferente da profundidade de queda ou profundidade terminal (profundidade que ocorre na seção de queda), pois a resistência retira energia do escoamento. Além disso, o escoamento deixa de ser paralelo próximo da queda.

Na seção crítica, tem-se:

$$\varepsilon = y_{cr} + \frac{v_c^2}{2g} \quad (3.1/1)$$

Arranjando-se adequadamente, tem-se:

$$\varepsilon = y_{cr} + \frac{1}{2g} \times \frac{Q^2}{a_{cr}^2} \quad (3.1/2)$$

$$a_{cr} = y_{cr} \times b \quad (3.1/3)$$

$$\varepsilon = y_{cr} + \frac{1}{2g} \times \frac{Q^2}{y_{cr}^2 b^2} \quad (3.1/4)$$

$$q = \frac{Q}{b} \quad (3.1/5)$$

$$\varepsilon = y_{cr} + \frac{1}{2g} \times \frac{q^2}{y_{cr}^2} \quad (3.1/6)$$

$$\frac{q^2}{g} = y_{cr}^3 \quad (3.1/7)$$

$$\varepsilon = y_{cr} + \frac{1}{2} \times \frac{y_{cr}^3}{y_{cr}^2} = y_{cr} + \frac{1}{2} y_{cr} \quad (3.1/8)$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} y_{cr} \quad (3.1/9)$$

Onde:

a_{cr} := área na seção crítica;

b := largura superficial do canal na seção crítica;

g := aceleração da gravidade;

v_c := velocidade média na seção crítica;

ε := energia específica refere-se à linha de fundo a qual varia de seção para seção.

Na seção (1)

$$v_1 = \varphi \sqrt{2g(P + H - d_1)} \quad (3.1/10)$$

$$q = \varphi d_1 \sqrt{2g(P + H - d_1)} \quad (3.1/11)$$

Onde:

φ := coeficiente de velocidade que quantifica todas as perdas entre a carga hidráulica de montante e a seção (1).

Na crista do vertedor, tem-se:

$$q = m \sqrt{2gH}^{3/2} \quad (3.1/12)$$

Onde:

m : = coeficiente de vazão.

Igualando-se as equações (3.1/11) e (3.1/12), tem-se:

$$\varphi d_1 \sqrt{2g(P + H - d_1)} = m \sqrt{2gH}^{3/2} \quad (3.1/13)$$

Dividindo-se por $\sqrt{2g}$ e elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$\varphi^2 d_1^2 (P + H - d_1) = m^2 H^3 \quad (3.1/14)$$

Como Z é uma grandeza constante, e fazendo-se:

$$x = \frac{H}{P} \text{ e } y = \frac{d_1}{P} \quad (3.1/15)$$

$$\varphi^2 y^2 P^2 (P + xP - yP) = m^2 x^3 P^3 \quad (3.1/16)$$

$$\varphi^2 y^2 (1 + x - y) = m^2 x^3 \quad (3.1/17)$$

Com os valores de φ , m , H e P (ou x) na equação, por tentativa e erro, resolve-se a equação de 3º grau, determina-se o valor de d_1 .

Utilizando-se a equação do número de Froude:

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gd}} \text{ ou } F_r^2 = \frac{v^2}{gd} \quad (3.1/18)$$

Onde:

v : = velocidade média.

Na seção (1) tem-se:

$$F_{r_1}^2 = \frac{v^2}{gd_1} \quad (3.1/19)$$

Substituindo-se a equação (3.1/10) em (3.1/19) tem-se:

$$F_{r_1}^2 = \frac{\varphi^2 2g(P + H - d_1)}{gd_1} \quad (3.1/20)$$

$$F_{r_1}^2 = \frac{2\varphi^2 P}{d_1} \left(\frac{P}{P} + \frac{H}{P} - \frac{d_1}{P} \right) \quad (3.1/21)$$

$$F_{r_1}^2 = \frac{2\varphi^2}{y} (1 + x - y) \quad (3.1/22)$$

Lembrando-se da equação do ressalto hidráulico obtém-se:

$$d_2 = t_0 = \frac{d_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8F_{r_1}^2} \right) \quad (3.1/23)$$

$$t_0 = \frac{d_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{2\varphi^2}{y} (1 + x - y) \right)} \right) \quad (3.1/24)$$

$$t_0 = \frac{d_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16\varphi^2}{y} (1 + x - y)} \right) \quad (3.1/25)$$

Se o nível de água a jusante for menor que t , o jato avança até encontrar um novo d_1' de ressalto que seja conjugado do nível de água a jusante, e o ressalto será livre. Se o nível for igual ao valor de t , condição limite para o ressalto livre. E se o nível for maior que o valor de t , ocorre o ressalto afogado.

Para se determinar a condição limite do ressalto livre, deve-se impor a seguinte igualdade:

$$Z + t = H + P \quad (3.1/26)$$

Na condição limite, $Z = Z_0$ para $t = t_0$.

$$Z_0 = H + P - t_0 \quad (3.1/27)$$

$$\frac{Z_0}{P} = \frac{H}{P} + \frac{P}{P} - \frac{t_0}{P} \quad (3.1/28)$$

$$\left(\frac{Z}{P}\right)_0 = x + 1 - \frac{1}{P} \left\{ \frac{d_1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{16\phi^2}{y} (1 + x - y)} \right] \right\} \quad (3.1/29)$$

$$\left(\frac{Z}{P}\right)_0 = x + 1 - \frac{y}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{16\phi^2}{y} (1 + x - y)} \right] \quad (3.1/30)$$

A vazão (q) que verte sobre o degrau assemelha-se a um vertedor de parede espessa com: $\phi = 1$, ou seja, assume que não haja perda de carga entre o canal de montante e a seção (1) do canal de jusante; $m = 0,385$ (coeficiente de vazão) e a carga hidráulica $H = \varepsilon_{cr} = 1,5 d_{cr}$.

$$q = 0,385 \times \sqrt{2gH}^{3/2} \quad (3.1/31)$$

$$H = 1,5d_{cr} = 1,5\sqrt{q^2/g} \quad (3.1/32)$$

Bakhmeteff (1932), apesar de citar a perda de energia na queda d'água, desconsidera qualquer perda em seus cálculos.

3.2 ROUSE (1936)

O autor propõe um método de dimensionamento de vazão utilizando a queda livre; entretanto o escoamento na queda livre não é paralelo. A seção da crista é a seção real de

mínima energia e, conseqüentemente, a seção de controle. Além disso, a profundidade da crista é um porcentual constante da profundidade crítica usada para escoamento paralelo. A análise do autor vem verificar experimentalmente uma maneira simples de determinar a vazão na queda livre.

De acordo com o princípio de energia mínima em fluxo paralelo, uma determinada vazão, levada por um canal longo de declividade moderada que termina em queda livre, fluirá abaixo das condições de energia mínima ou carga total em alguma seção próxima à seção crítica. São determinadas as seguintes relações (Figura 3.2/1):

$$d_c = \frac{2}{3} H_c = 2 \frac{v^2}{2g} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} \quad (3.2/1)$$

Onde:

b : = largura do canal;

d_c : = profundidade crítica para escoamento paralelo (hidrostática);

g : = aceleração da gravidade;

H_c : = energia específica do escoamento ou carga total sobre o fundo do canal na seção crítica;

Q : = vazão;

v : = velocidade média em uma seção vertical.

Se a declividade do canal for igual à declividade crítica no escoamento uniforme, então é exatamente igual à profundidade crítica:

$$S = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R} = \frac{v_c^2 (b + 2d_c)}{C^2 b d_c} \quad (3.2/2)$$

Onde:

A : = área da seção transversal do escoamento;

C : = coeficiente de Chezy;

R := raio hidráulico;

S := declividade do canal;

v_c := velocidade média na seção crítica.

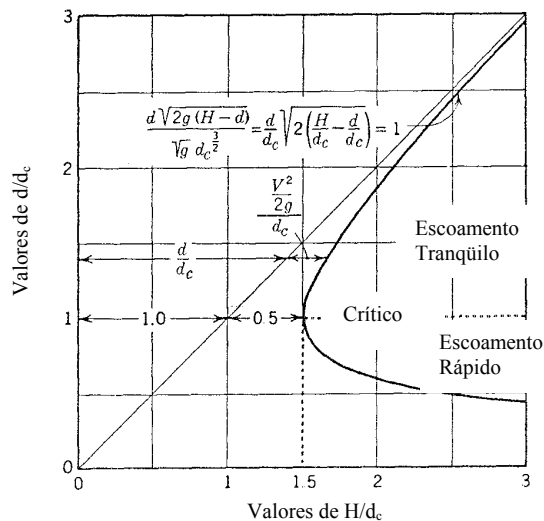


Figura 3.2/1 – Diagrama de Energia Específica (ROUSE, 1936).

Onde:

d := profundidade do escoamento em uma seção qualquer;

H := energia específica do escoamento ou carga total sobre o fundo do canal.

O autor determina uma relação entre a profundidade da seção de queda (d_0) e a profundidade crítica (d_c) para canais retangulares horizontais lisos. Encontrou experimentalmente

$$\frac{d_0}{d_c} = 0,715, \text{ desconsiderando a vazão e a largura do canal.}$$

Rouse (1936) informa também que a localização da profundidade crítica está entre 3 a 4 vezes a profundidade crítica, antes da seção de queda.

Apresenta, também, perfis da distribuição de pressão na queda livre (Figura 3.2/2).

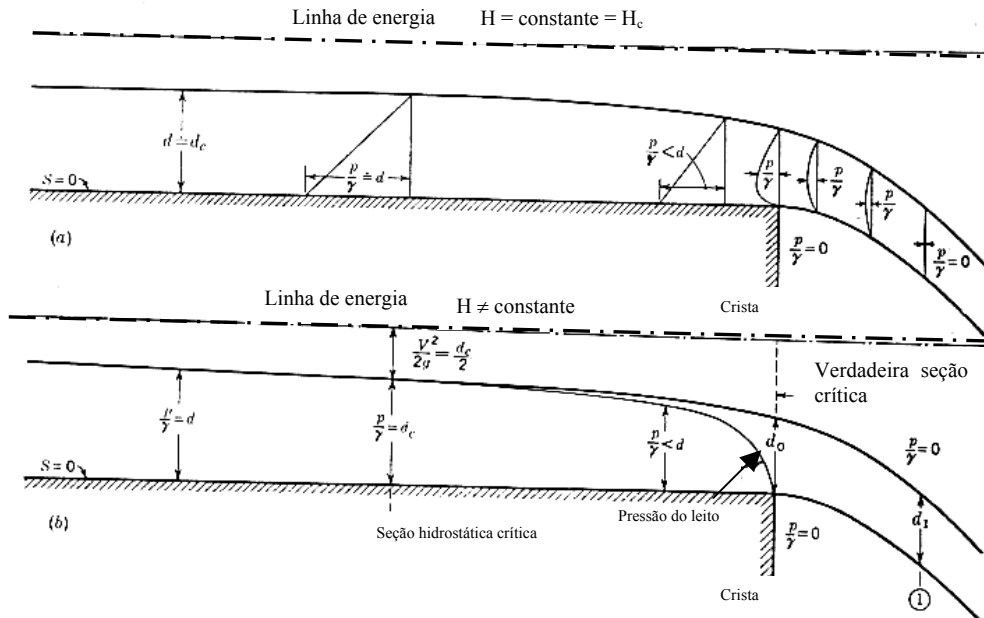


Figura 3.2/2 – Perfis de superfície e distribuição de pressão na queda livre (ROUSE, 1936).
 (a) caso que assume energia específica constante, perfil real;
 (b) distribuição de pressão na queda é similar à ilustração (a).

3.3 MOORE (1943)

Moore (1943) realizou um estudo experimental em modelo para a análise da perda de energia na queda livre. Deste estudo, o autor deriva uma fórmula para a altura do ressalto hidráulico, obtendo graficamente o comprimento do ressalto e o efeito sobre a dissipação de energia. O artigo, também, elucida a presença da água estacionária antes do jato da queda d'água e sua altura.

Medições detalhadas de dados de laboratório mostram que a perda de energia da queda d'água é de magnitude significativa. A perda de energia é função do parâmetro h/d_c

(Figura 3.3/1), onde:

d_c : = profundidade crítica;

h := altura de queda.

Quanto maior for este parâmetro, maior será a dissipação de energia.

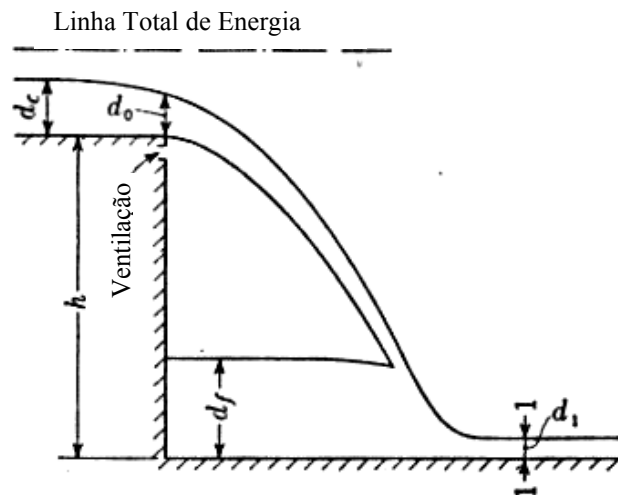


Figura 3.3/1 – Queda livre em duas dimensões (MOORE, 1943).

Onde:

d_0 := profundidade na seção de queda ou seção terminal;

d_1 := profundidade d'água antes do ressalto;

d_f := profundidade da água estacionária (piscina).

O autor tece considerações sobre o comprimento do ressalto e o efeito da submergência do ressalto sobre a dissipação de energia.

Com a quantificação de perda de energia, Moore (1943) fornece uma fórmula para determinação da altura (d_1) do ressalto após a queda (Figura 3.3/2).

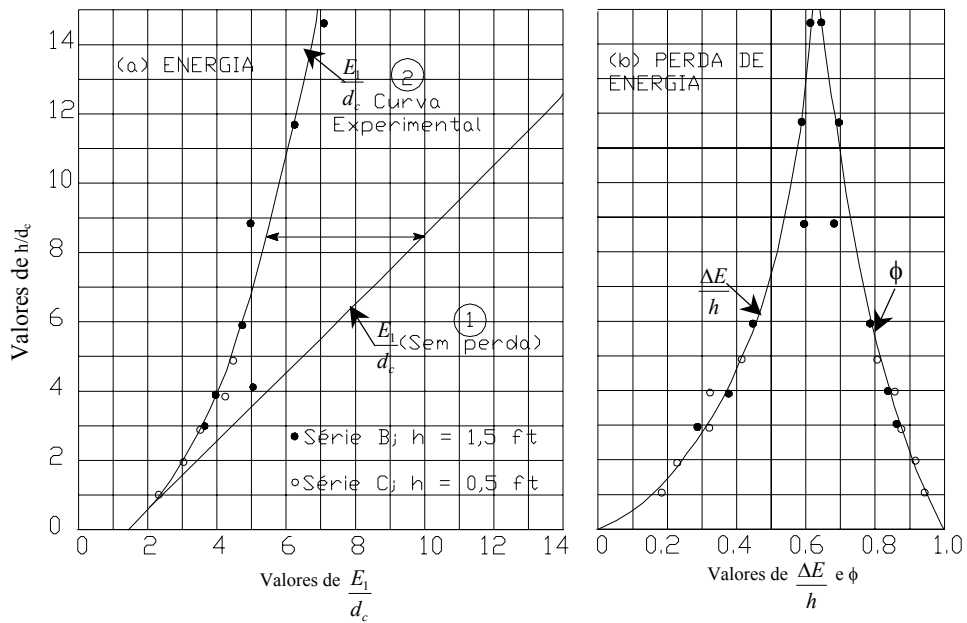


Figura 3.3/2 – Energia na base da queda livre (MOORE, 1943).

Onde:

E_1 := energia na base da queda livre;

ΔE := perda de energia;

ϕ := coeficiente de velocidade.

Através do uso da conservação de quantidade de movimento, o autor obtém a equação para a determinação da profundidade da água estacionária atrás do jato (Figura 3.3/3):

$$\left(\frac{d_f}{d_c}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{d_c}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{d_c}{d_1}\right) - 3 \quad (3.3/1)$$

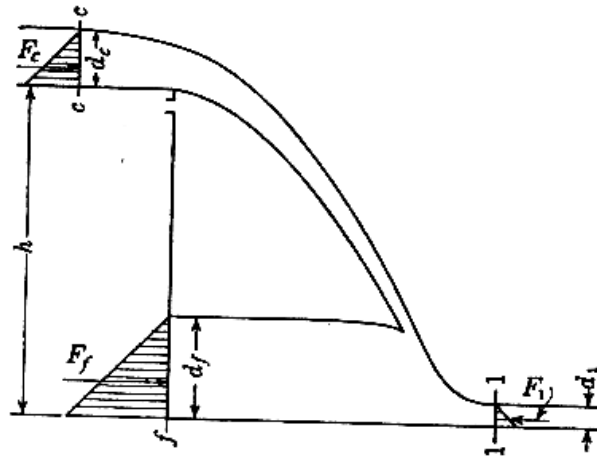


Figura 3.3/3 – Forças que atuam na queda livre (MOORE, 1943).

Onde:

F_1 := somatória das forças na seção 1;

F_c := somatória das forças na seção crítica;

F_f := somatória das forças na seção da piscina.

Moore (1943) explica que a presença de água estacionária (piscina) origina-se da troca de quantidade de movimento na direção horizontal, quando o jato d'água atinge o leito.

Para a profundidade conjugada fluvial do ressalto, os resultados experimentais concordam bem com os valores teóricos:

$$\frac{d_2}{d_c} = \frac{d_1}{2d_c} \left[-1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{d_c}{d_1} \right)^3} \right] \quad (3.3/2)$$

Onde:

d_2 := profundidade conjugada fluvial do ressalto ou profundidade d'água após o ressalto.

No estudo do efeito da submergência do ressalto, Moore (1943) conclui que o jato d'água, possuindo alta velocidade, persiste em grande distância a jusante.

White e outros (1943) discute o trabalho de Moore (1943) e, através de sua análise teórica, obtém os seguintes resultados:

$$Q_f = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} Q \quad (3.3/3)$$

Onde:

Q := vazão total de queda;

Q_f := vazão de refluxo;

θ := ângulo de incidência do jato, não considerando a existência da piscina.

$$V_1 = \frac{V}{2}(1 + \cos \theta) \quad (3.3/4)$$

V := velocidade de queda do jato;

V_1 := velocidade que segue para jusante da queda.

A velocidade de queda do jato (V) sendo dada por:

$$V = \sqrt{2g \left(h + \frac{3}{2} d_c \right)} \quad (3.3/5)$$

O autor, também, encontra

$$\cos \theta = \frac{1,06}{\sqrt{\frac{h}{d_c} + \frac{3}{2}}} \quad (3.3/6)$$

$$\frac{d_1}{d_c} = \frac{\sqrt{2}}{1,06 + \sqrt{\frac{h}{d_c} + \frac{3}{2}}} \quad (3.3/7)$$

Tais resultados assumem que não há perda entre a profundidade crítica antes da queda, e antes do encontro do jato com o canal de fuga. White e outros (1943), recomenda estudos para escoamento supercrítico antes da queda.

Nesse trabalho não há um tratamento explícito da dissipação de energia associada ao mecanismo da queda livre.

3.4 FATHY E AMIN (1954)

Fathy e Amin (1954) realizaram um estudo tanto teórico como experimental, em modelo com a preocupação na determinação da profundidade terminal ou de queda e, também, na declividade da linha d'água da queda. Com base em seus resultados experimentais, os autores forneceram gráficos para a determinação da profundidade terminal e da declividade da linha d'água como função da declividade do canal (Figura 3.4/1).

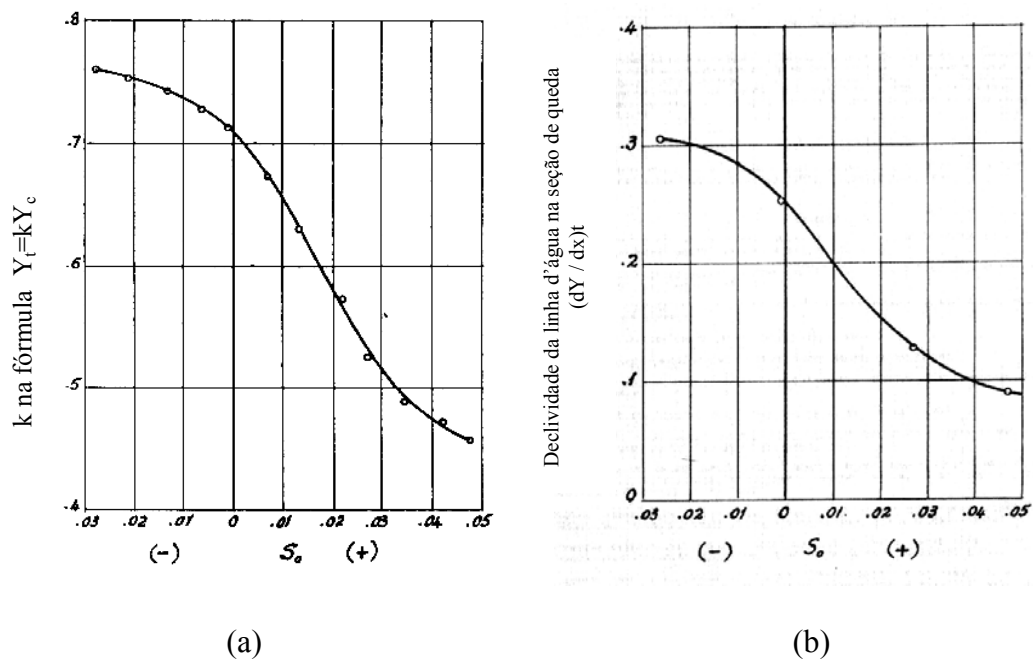


Figura 3.4/1 – Gráficos para determinação (a) do k na equação $Y_t = kY_c$; e (b) da declividade da linha d'água na seção de queda (FATHY & AMIN, 1954).

Onde:

S_0 := declividade do leito;

Y_c := profundidade crítica;

Y_t := profundidade terminal.

Pela figura, para $S_0 = 0$, $Y_t = 0,715 Y_c$.

Os autores, em seus experimentos, encontram pressões negativas na seção da queda (Figura 3.4/2).

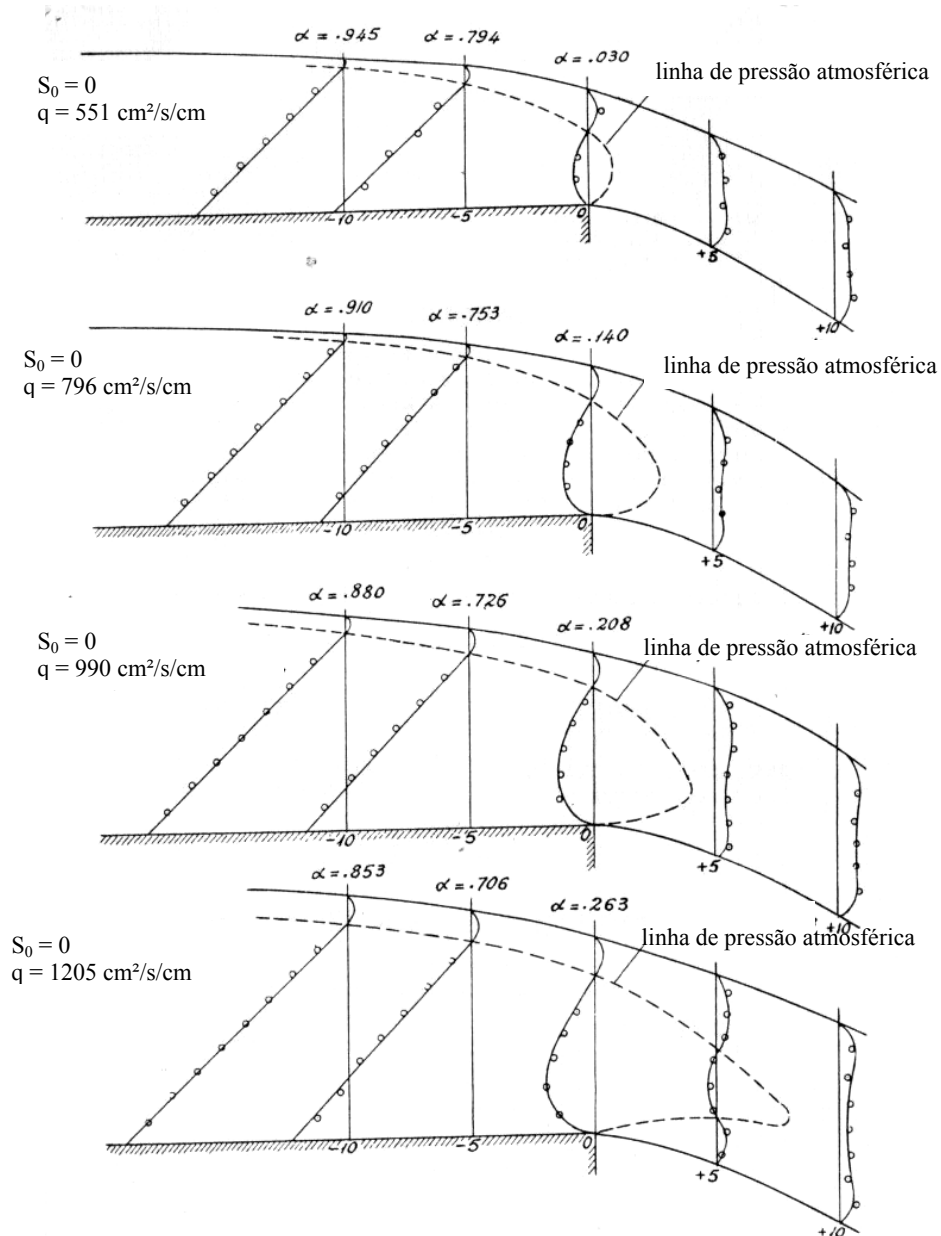


Figura 3.4/2 – Distribuição das pressões (FATHY & AMIN ,1954).

Onde:

α : = fator de correção de pressão ($\alpha = 1 \Rightarrow$ pressão hidrostática).

A existência de pressão negativa pode confundir um pouco, porém o caso em questão é um equilíbrio dinâmico e não estático, e não há nenhuma razão, do ponto de vista dinâmico. Fisicamente, a mudança dos valores sub-atmosféricos para valores atmosféricos, pode ser conseguida, até certo ponto, pela liberação de ar levado pela água em solução ou em suspensão, mas tal restrição não pode prevenir completamente a redução de pressão, pois a água é renovada continuamente.

3.5 RAND (1955)

Rand (1955) assume escoamento subcrítico ao longo de todo o canal (tanto a montante como a jusante) e lâmina aerada. A geometria do escoamento depende da vazão específica (q), da altura de queda (h) e do escoamento uniforme tanto do canal de montante como do canal de jusante. O escoamento a jusante pode ser de ressalto livre ou ressalto afogado (Figura 3.5/1).

O autor define o parâmetro de queda (D) como:

$$D = \frac{q^2}{gh^3} = \left(\frac{d_c}{h} \right)^3 \quad (3.5/1)$$

Onde:

d_c : = profundidade crítica;

g : = aceleração da gravidade;

h : = altura da queda;

q : = vazão específica.

Em função deste parâmetro de queda, o autor fornece:

$$\frac{d_1}{h} = 0,54D^{0,425} \quad \text{ou} \quad \frac{d_1}{h} = 0,54 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{1,275} \quad (3.5/2)$$

$$\frac{d_2}{h} = 1,66D^{0,27} \quad \text{ou} \quad \frac{d_2}{h} = 1,66 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,81} \quad (3.5/3)$$

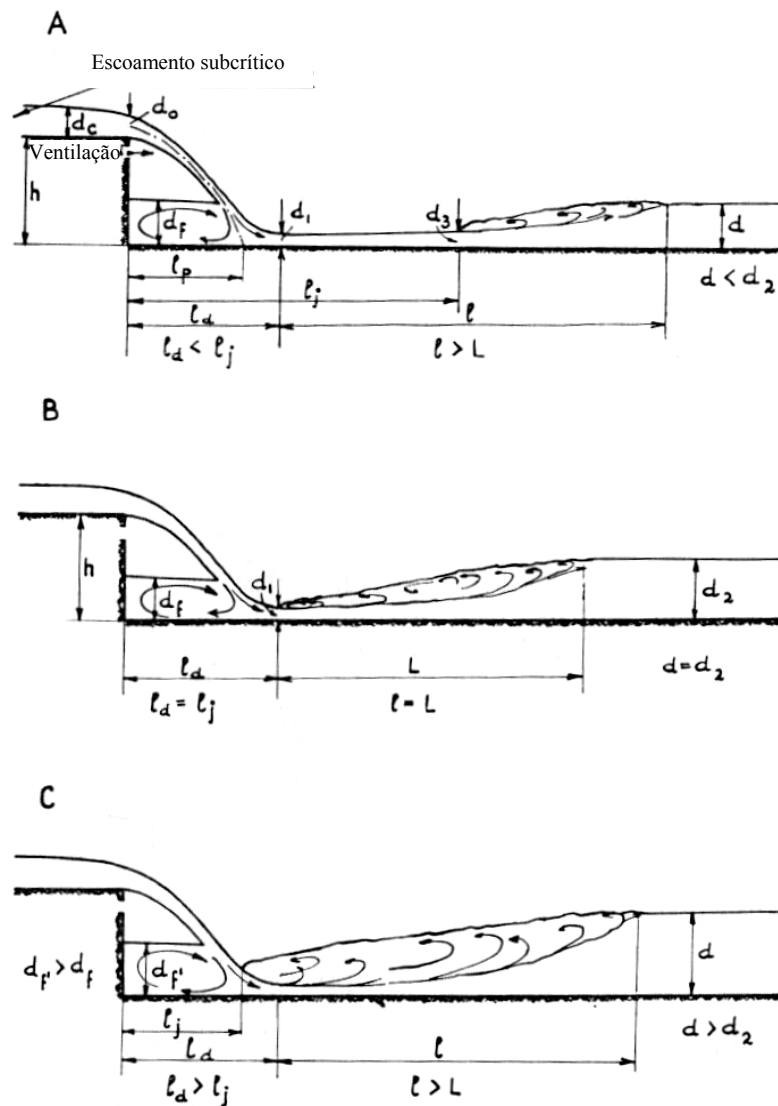


Figura 3.5/1 – Tipos de escoamentos (RAND, 1955).

(A) e (B) queda livre com ressalto livre;

(C) queda livre com ressalto afogado

$$\frac{l_d}{h} = 4,30D^{0,27} \quad (3.5/4)$$

Onde:

d : = profundidade a jusante do canal;

d_0 : = profundidade na seção de queda ou terminal = $0,715 d_c$;

d_1 : = profundidade após a queda, antes do ressalto;

d_2 := profundidade após o ressalto;

d_3 := profundidade do escoamento supercrítico no começo do ressalto hidráulico (A);

d_f := profundidade da água estacionária atrás do jato ou profundidade da “piscina”;

d_f^1 := profundidade “ d_f ” no caso do ressalto afogado;

l := distância entre o ponto de incidência do jato e o final do “roller” do ressalto;

L := comprimento do “roller” do ressalto hidráulico;

l_d := alcance do jato, distância horizontal entre o degrau e o ponto de ocorrência de d_1 ;

l_j := distância entre o paramento do degrau e o começo do ressalto hidráulico;

l_p := distância do degrau até a linha de centro da incidência do jato (A).

O autor, também, encontra as seguintes relações:

$$\frac{l_d}{d_2} = 2,60 \quad (3.5/5)$$

$$\frac{l_d}{h} = \frac{1,98 \left(1 + 0,357 \frac{d_c}{h} \right) \sqrt{\frac{d_c}{h}}}{\sqrt{1 + 0,357 \frac{d_c}{h} - \frac{d_f}{h}}} \quad (3.5/6)$$

$$\frac{d_f}{h} = D^{0,22} \quad (3.5/7)$$

$$\frac{L}{h} = 6 \left(\frac{d_2}{h} - \frac{d_1}{h} \right) \quad (3.5/8)$$

Todas estas relações estão mostradas na Figura 3.5/2.

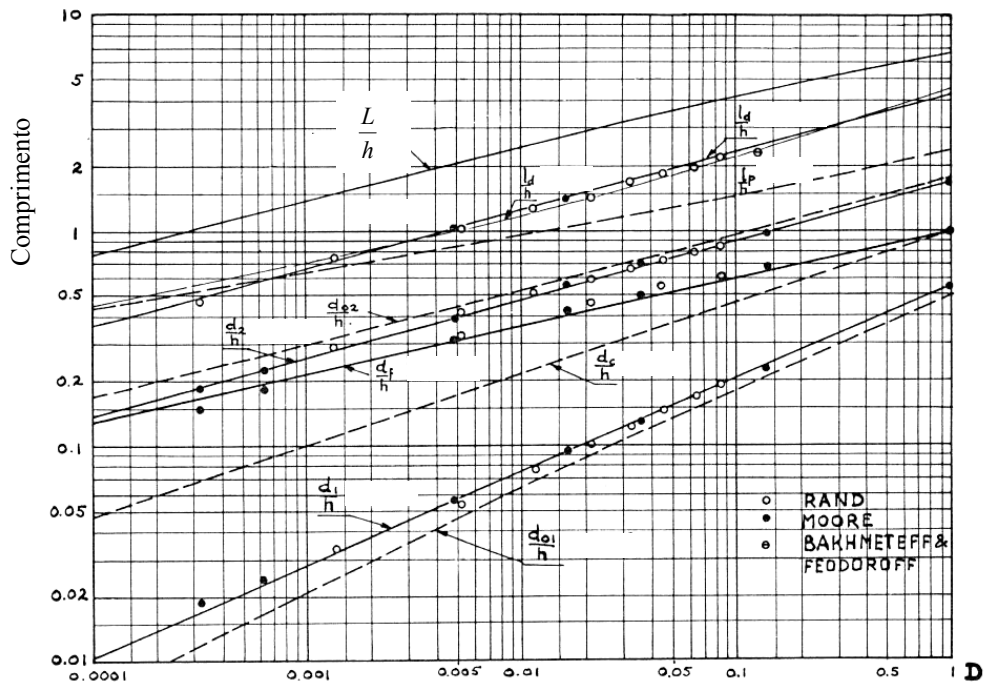


Figura 3.5/2 – Geometria do escoamento na queda x Parâmetro de queda (RAND, 1955).

O local da profundidade d_1 pode ser determinado pela linha reta ABC. O ponto B está no eixo da lâmina d'água na altura da piscina e o ponto C está no eixo da seção transversal da seção de queda. Ligando-se C e B encontra-se A no leito do canal de fuga (Figura 3.5./3).

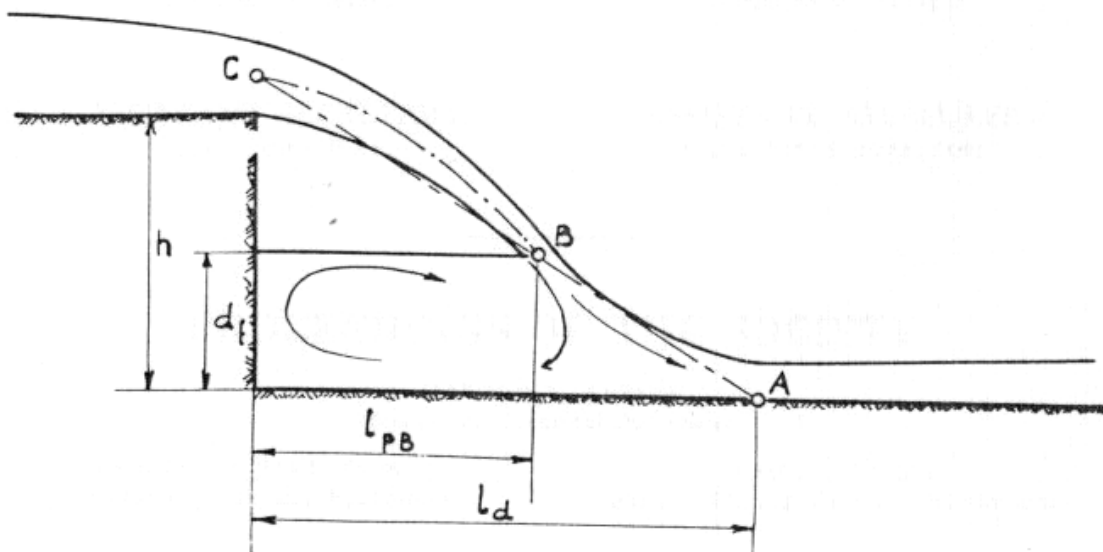


Figura 3.5/3 – Localização da profundidade d_1 (RAND, 1955).

As relações obtidas por Rand (1955) foram baseadas em dados de laboratório e nos dados experimentais de Moore (1943). Assim, dado h e q calcula-se l_d , d_f , d_1 e d_2 . Se o nível d'água a jusante for inferior a d_2 , o ressalto ocorre mais a jusante; se o nível d'água for maior que d_2 , o ressalto será afogado.

3.6 DELLEUR, DOOGE E GENT (1956)

Delleur, Dooge e Gent (1956), procuraram estudar a influência de declividade e rugosidade na profundidade da seção de queda.

A rugosidade no modelo foi idealizada com a seguinte disposição (Figura 3.6/1).

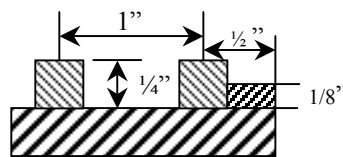


Figura 3.6/1 – Disposição das rugosidades (DELLEUR et al., 1956).

A Figura 3.6/2 ilustra a influência da declividade relativa sobre a relação de profundidade de queda e profundidade crítica.

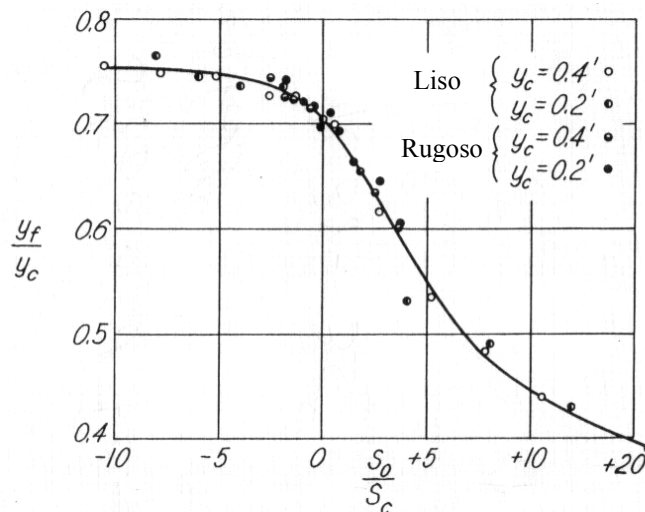


Figura 3.6/2 – Resultados obtidos (DELLEUR et al., 1956).

Onde:

S_0 := declividade do leito do canal;

S_c := declividade crítica;

y_c := profundidade na seção crítica;

y_f := profundidade na seção terminal ou seção de queda.

3.7 CHOW (1959)

Chow (1959), em seu trabalho, usando o conceito de energia específica na queda livre, determina que o escoamento no trecho próximo à queda não é paralelo, mas sim curvilíneo, ou seja, a curvatura do escoamento é pronunciada e isto invalida que a profundidade crítica ocorra exatamente na queda (Figura 3.7/1).

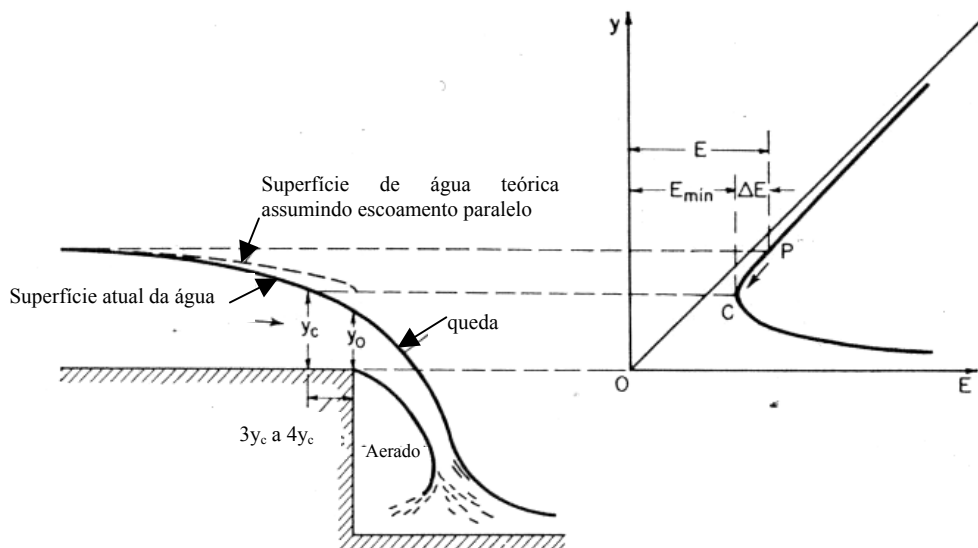


Figura 3.7/1 – Queda livre interpretada pela curva da energia específica (CHOW, 1959).

A seção de queda é de fato uma seção de mínima energia, mas não devendo ser qualificada pela hipótese de escoamento paralelo.

Rouse (1936), apud Chow (1959), informa que para pequenas declividades do canal de montante, a profundidade crítica é 1,4 vezes maior que a profundidade de queda ($y_c = 1,4 y_0$ ou $y_0 = 0,715 y_c$) e que a localização da profundidade crítica é cerca de 3 a 4 vezes a profundidade crítica, antes da queda.

Chow (1959) já ilustra os resultados de Rand (1955).

3.8 SMITH (1962)

Smith (1962) estudou a profundidade de queda para canal cilíndrico circular liso.

A declividade deste canal é nula ou moderada, de modo que o escoamento a montante da queda seja fluvial.

O estudo é tanto teórico como experimental, em modelo.

Os resultados do experimento estão dispostos no gráfico (Figura 3.8/1). Há uma mudança na

forma da curva para $\left(\frac{Q}{D_0}\right)^{5/2} \cong 2,9$, indicando mudança na forma do escoamento

(Figura 3.8/2 e 3.8/3).

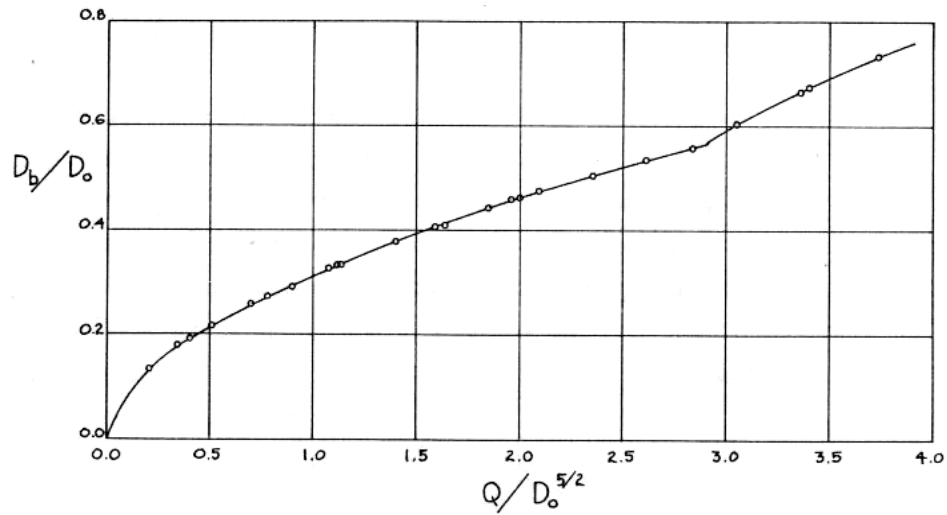


Figura 3.8/1 – Curva de resultados (SMITH, 1962).

Onde:

D_0 := diâmetro do tubo;

D_b := profundidade do escoamento da borda do tubo;

D_c := profundidade crítica do escoamento;

Q := vazão total do escoamento.

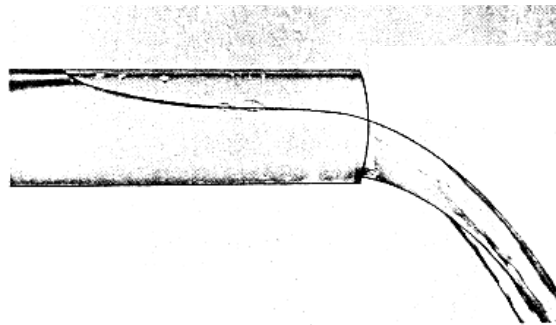


Figura 3.8/2 – $Q/D_0^{5/2} = 2,67$; $D_c/D_0 = 0,70$ (SMITH, 1962).

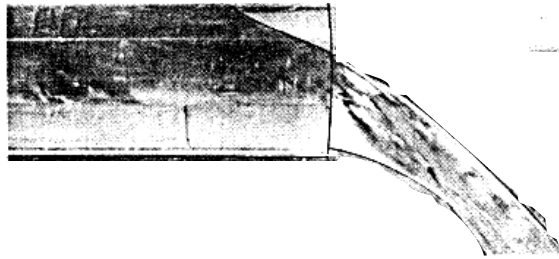


Figura 3.8/3 – $Q/D_0^{5/2} = 3,05$; $D_c/D_0 = 0,75$ (SMITH, 1962).

3.9 HENDERSON (1966)

Henderson (1966) divide o estudo da queda livre em dois tópicos: o primeiro tópico cuida da queda propriamente dita e do jato; e o segundo, refere-se ao encontro do jato no leito de jusante e continuação do movimento da massa d'água após a dissipação de energia devido à queda.

Henderson (1966) aplica a conservação de quantidade de movimento e de massa e obtém a seguinte relação:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{2Fr_1^2}{1 + 2Fr_1^2} \quad (3.9/1)$$

Onde:

Fr_1 : = número de Froude na seção A;

y_1 : = profundidade na seção A ($y_1 = y_c$);

y_2 : = profundidade na seção C (ver Figura 3.9/1).

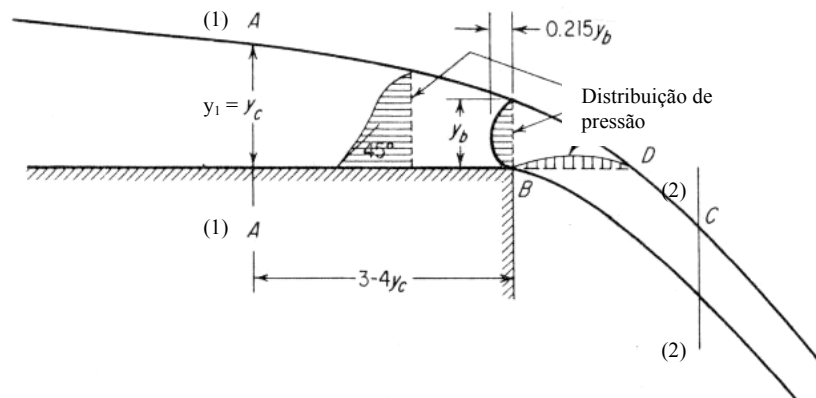


Figura 3.9/1 – Queda livre (HENDERSON, 1966).

Onde:

y_b := profundidade da seção de queda;

y_c := profundidade crítica.

A pressão média na seção B é consideravelmente menor que a hidrostática. Na seção A, a pressão ainda é hidrostática. Os efeitos locais da queda d'água são confinados na região AB. Se o canal de montante possuir declividade moderada, nula ou adversa, o escoamento em A será crítico. Caso o canal seja de declividade forte ou severa, o escoamento em A será supercrítico e determinado pelas condições de montante.

Admitindo que ocorra o escoamento crítico em A, vem $Fr_1^2 = 1$ e $\frac{y_2}{y_c} = \frac{2}{3}$. Deste modo os

valores limites para profundidade de queda (y_b) situam-se entre:

$$\frac{2}{3} < \frac{y_b}{y_c} < 1 \quad (3.9/2)$$

Henderson (1966), informa que Rouse (1936) encontrou experimentalmente $y_b = 0,715 y_c$.

Há uma grande quantidade de dissipação de energia devido à corrente de recirculação induzida pelo jato na base da piscina (Figura 3.9/2). A piscina serve para suprir o impulso horizontal, necessário para mover o jato para a direção horizontal. A quantidade de energia foi determinada pelas experiências de Moore (1943).

White (1943), ao discutir o trabalho de Moore (1943), forneceu a seguinte explicação para a corrente de recirculação na piscina: próximo ao ponto A, uma pequena camada d'água, possuindo uma quantidade de movimento desprezível, penetra e mistura-se com o jato d'água. Estas duas correntes unem-se e possuem uma velocidade uniforme v_m . O jato então alcança a base do canal, dividindo-se em uma corrente principal com velocidade $v_1 = v_m$, e uma corrente secundária que retorna à piscina, onde dissipa a quantidade de movimento adquirida junto ao jato. Pela conservação de massa, a vazão Q_3 da corrente secundária é igual à vazão que entra no jato pelo ponto A (Figura 3.9/2).

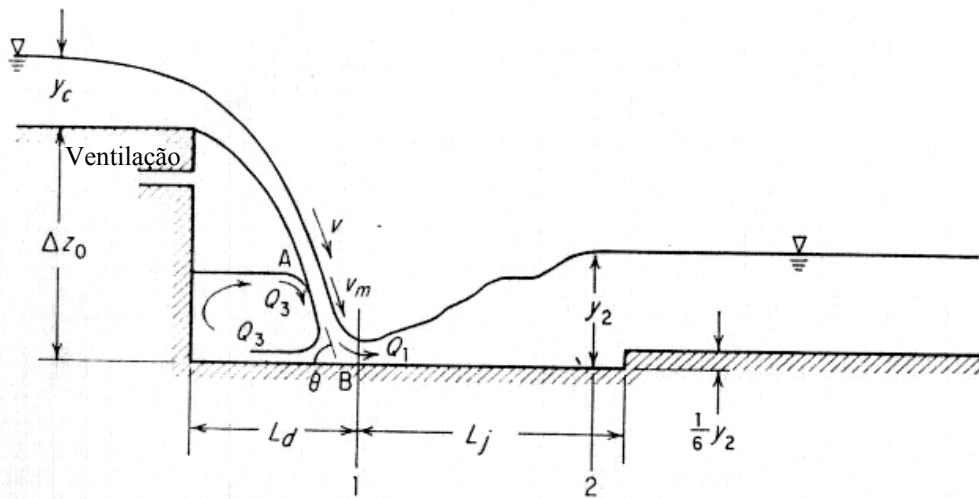


Figura 3.9/2 – Estrutura da queda (HENDERSON, 1966).

Onde:

L_d := largura da piscina;

L_j := largura do canal de jusante;

Q_1 := vazão de jusante;

Q_3 := vazão da piscina;

v := velocidade do jato de queda;

v_m := velocidade depois da união das duas correntes;

y_2 := profundidade conjugada de jusante;

Δz_0 := altura do degrau;

θ := ângulo de incidência do jato.

A dissipação de energia, devida somente à queda d'água, pode ser de 50% ou mais da energia inicial. Havendo um ressalto hidráulico após a queda d'água há mais dissipação de energia, de modo que ao todo (globalmente), a dissipação total pode ser substancial (Figura 3.9/3).

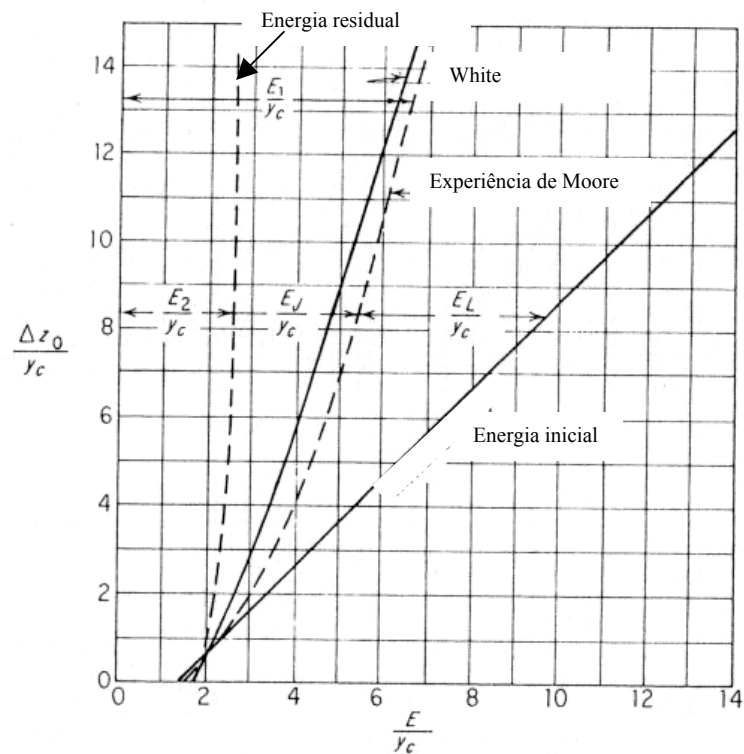


Figura 3.9/3 – Dissipação de energia na base da queda livre (HENDERSON, 1966).

Onde:

E := perda de energia;

E_1 := perda de energia na seção (1);

E_2 := perda de energia na seção (2);

E_j := perda de energia no ressalto;

E_L := perda de energia na queda.

Observa-se no gráfico (Figura 3.9/3), que a energia residual é insensível (praticamente constante) em relação à altura de queda. Henderson (1966) propõe então usar um valor de energia residual igual a 2,5 vezes a profundidade crítica como critério preliminar de projeto (e daí gera uma altura de soleira igual a 0,4 vezes a profundidade crítica).

Henderson (1966) apresenta os valores sugeridos por Rand (1955) e informa que os valores obtidos pelo método de Rand (1955) adequam-se aos dados experimentais com erros inferiores a 5%.

Henderson (1966), também, informa que a soleira no final da estrutura é uma característica padrão de projeto, o qual ajuda a manter o ressalto hidráulico imediatamente após a queda do jato d'água. O autor informa, também, que Rouse (1936) fornece elementos da forma do jato e o comportamento da estrutura para um canal de montante com declividade elevada (escoamento supercrítico).

Cabe ressaltar que a fórmula 6-39 $\left(\frac{L_d}{\Delta z_0} = 4,30 \left(\frac{y_c}{\Delta z_0} \right)^{0,09} \right)$, página 200 de Henderson

(1966), encontra-se com o valor do expoente diferente do original de Rand (1955).

Henderson (1966) escreveu o expoente como sendo 0,09, quando o original de Rand (1955) recomenda 0,81. French (1986), baseando-se no trabalho de Henderson cometeu o mesmo engano.

3.10 RAJARATNAM E MURALIDHAR (1968)

Os autores fizeram extensas medições em canais lisos com declividade adversa, nula ou positiva (moderada e severa).

Os autores mediram:

- a) distribuição de pressão;
- b) distribuição de velocidade;
- c) perfil da linha d'água;
- d) pressão no leito;
- e) tensão de cisalhamento no leito.

O estudo foi realizado com um canal de montante de largura de 18", comprimento de 20 ft e degrau de 15" e obtiveram os seguintes resultados:

Tabela 3.10/1 – Dados experimentais obtidos por Rajaratnam e Muralidhar (1968).

Exp. n.º	S_0	q (ft ³ /s/ft)	y_c (ft)	y_0 (ft)	y_e (ft)	y_e/y_c	y_e/y_0	S_0/S_c	Fr_0	L (ft)	K_c	β_c
1A	0	1.54	0.419	-	0.310	0.740	-	0	1.0	0.938	0.372	1.148
1B	0	1.02	0.319	-	0.228	0.715	-	0	1.0	0.938	0.372	1.074
1C**	0	1.29	0.373	-	0.270	0.723	-	0	1.0	0.896	-	1.100
2A*	0.0054	1.52	0.416	0.333	0.283	0.680	0.850	2.767	1.40	0.667	0.340	1.206
2B*	0.0054	1.15	0.345	0.272	0.230	0.665	0.842	2.598	1.44	0.667	0.340	1.196

Exp. n.º	S_0	q (ft ³ /s/ft)	y_c (ft)	y_0 (ft)	y_e (ft)	y_e/y_c	y_e/y_0	S_0/S_c	Fr_0	L (ft)	K_e	β_e
2C	0.0054	1.306	0.375	0.299	0.256	0.684	0.855	2.673	1.41	0.750	0.340	1.222
3A	0.0288	1.564	0.424	0.228	0.215	0.507	0.946	14.83	2.53	0.417	0.270	1.138
3B*	0.0288	1.22	0.359	0.184	0.175	0.487	0.950	14.04	2.73	0.250	0.270	1.158
3C*	0.0288	1.00	0.314	0.159	0.146	0.465	0.900	13.43	2.77	0.500	0.270	1.080
3D*	0.0288	0.74	0.257	0.130	0.119	0.460	0.915	12.57	2.78	0.333	0.270	1.072
4A	-0.0101	1.57	0.433	-	0.314	0.725	-	-5.21	1.0	0.758	0.462	1.103
4B*	-0.0101	1.266	0.368	-	0.274	0.745	-	-4.97	1.0	0.563	0.462	1.162
4C*	-0.0101	1.00	0.314	-	0.233	0.742	-	-4.71	1.0	0.479	0.462	1.156
4D*	-0.0101	0.76	0.262	-	0.193	0.737	-	-4.43	1.0	0.434	0.462	1.138
5A*	-0.0009	1.585	0.428	-	0.307	0.716	-	0.465	1.0	1.417	-	1.080
6A*	0.0005	1.582	0.427	-	0.307	0.720	-	0.258	1.0	2.417	0.340	1.085
6B*	0.0005	1.062	0.328	-	0.235	0.716	-	0.237	1.0	2.042	0.340	1.077

* ensaio de duração limitada;

** ensaio incompleto.

Onde:

Fr_0 : = número de Froude na seção crítica;

K_e : = coeficiente de correção de pressão na seção de queda;

L : = distância entre a seção de queda e a seção crítica;

q : = vazão específica;

S_0 : = declividade do canal;

S_c : = declividade crítica;

y_0 : = profundidade normal;

y_c : = profundidade crítica;

y_e : = profundidade de queda ou terminal;

β_e : = coeficiente de quantidade de movimento.

Para canal horizontal ou adverso, os dados experimentais concordam com o trabalho anterior de Delleur e outros (1956). Para declividade severa, a relação profundidade de queda sobre profundidade crítica é maior que a curva sugerida por Delleur e outros (1956) (Figura 3.10/1). Uma possível causa, segundo os autores, pode ser a quantificação da declividade crítica.

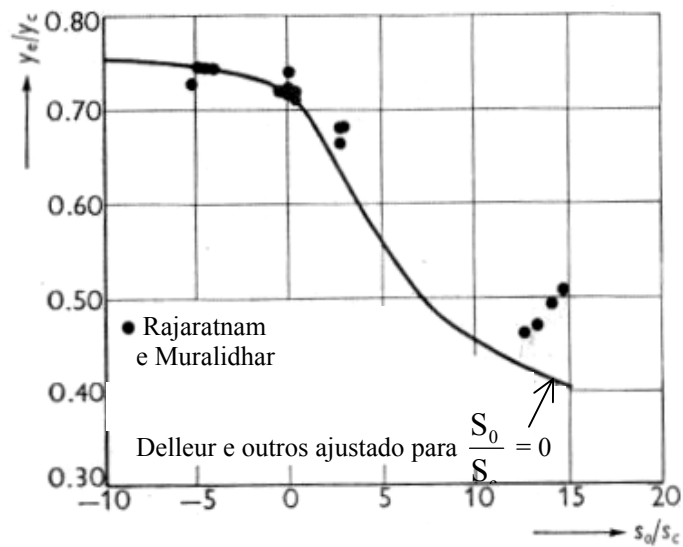


Figura 3.10/1 – Relação entre profundidade de queda e profundidade crítica versus relação declividade do canal e declividade crítica (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

Os autores ilustram na Figura 3.10/2 os resultados da distribuição de pressão na seção de queda.

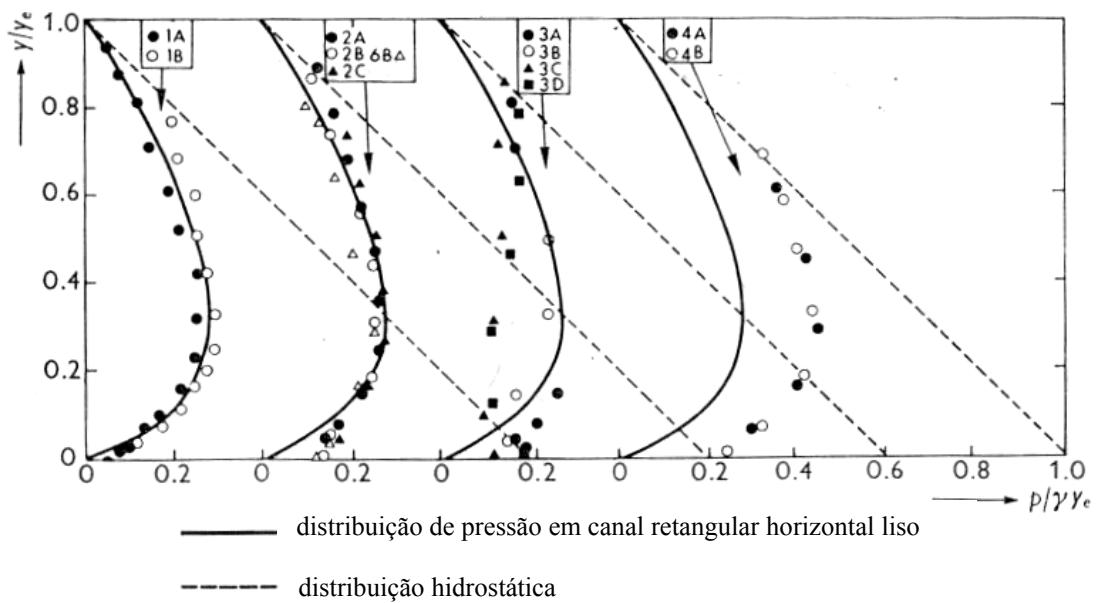


Figura 3.10/2 – Distribuição de pressão na seção de queda
(RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

Onde:

p/γ : = altura piezométrica;

y : = profundidade medida a partir do fundo do canal.

No canal de declividade nula (série 1), ou moderada (série 2), apresentam distribuição de pressão bem similares a de um canal horizontal liso. Nos canais de declividade adversa, ou severa, apresentam comportamento distinto do canal de declividade nula. No caso do canal de declividade severa, a distribuição de pressão é praticamente uniforme, e para canal de declividade adversa, apresenta valores bem superiores comparados ao canal de declividade nula.

O campo de velocidade próximo à seção de queda para declividade nula é representado pela Figura 3.10/3.

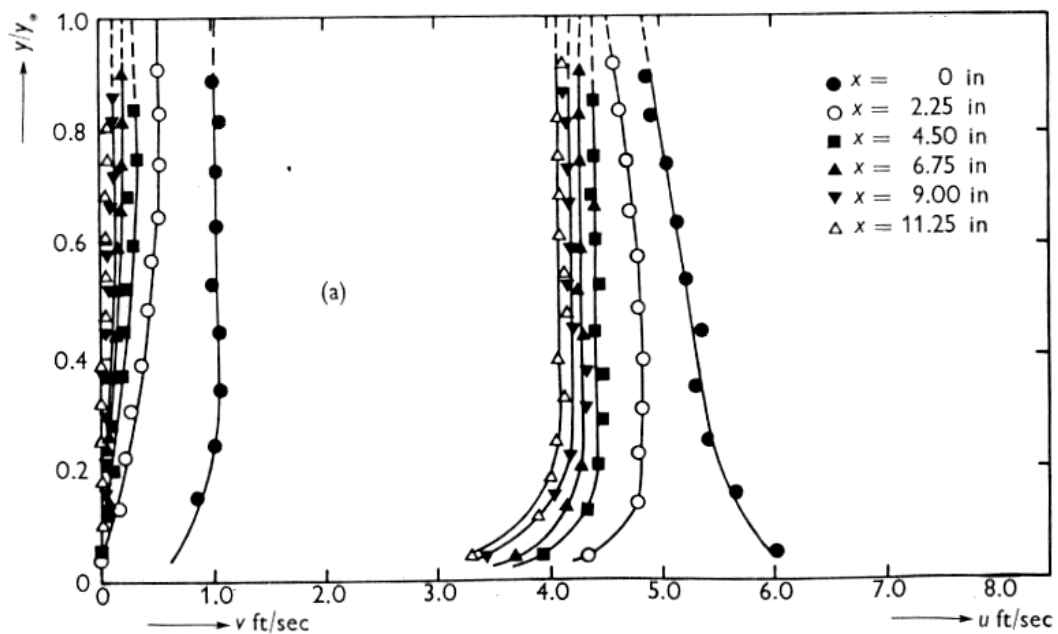


Figura 3.10/3 – Distribuição de velocidades para declividade nula
(RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

Onde:

u := velocidade longitudinal;

v := velocidade vertical;

x := distância.

A velocidade vertical (v) aumenta à medida que se aproxima da queda e, também, a velocidade longitudinal (u), sendo que na seção de queda, a velocidade é maior próximo ao leito do canal.

O canal de declividade adversa apresenta características semelhantes ao canal de declividade nula (Figura 3.10/4).

A velocidade vertical para canal de declividade severa apresenta variação bem inferior comparada aos dois casos anteriores e a velocidade longitudinal máxima, na seção de queda, não acontece próximo ao leito como nos casos anteriores (Figura 3.10/5).

Para declividade severa (série 3) a tensão de cisalhamento aumenta pouco à medida que se aproxima da queda. Para a declividade moderada (série 2) a tensão de cisalhamento aumenta 100%. Para declividade nula (série 1) a tensão de cisalhamento aumenta 200%. Para declividade adversa (série 4) a tensão de cisalhamento aumenta 300% (Figura 3.10/6).

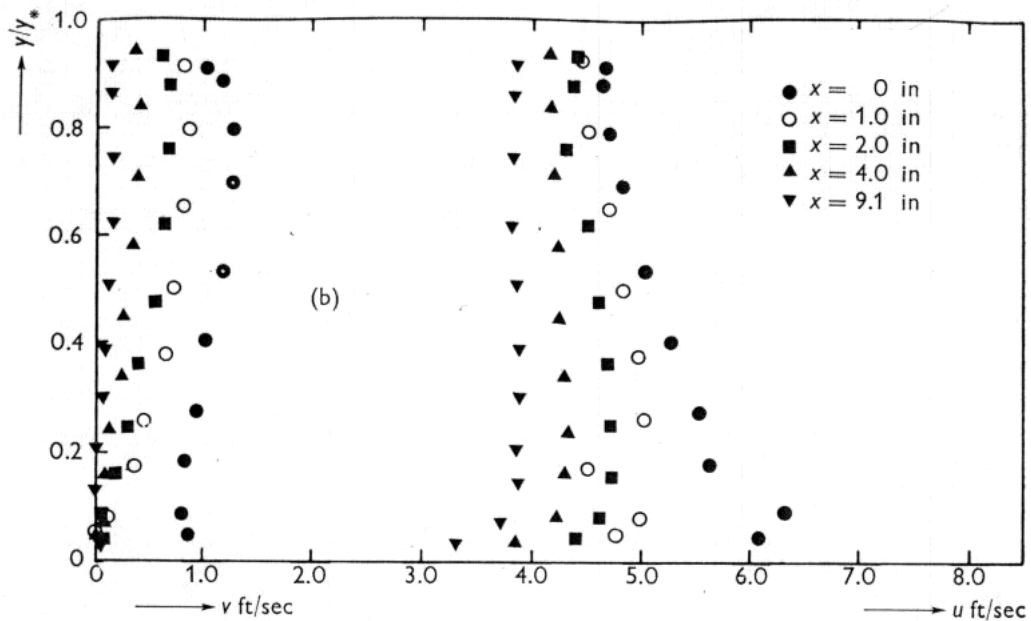


Figura 3.10/4 – Distribuição de velocidades para declividade adversa (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

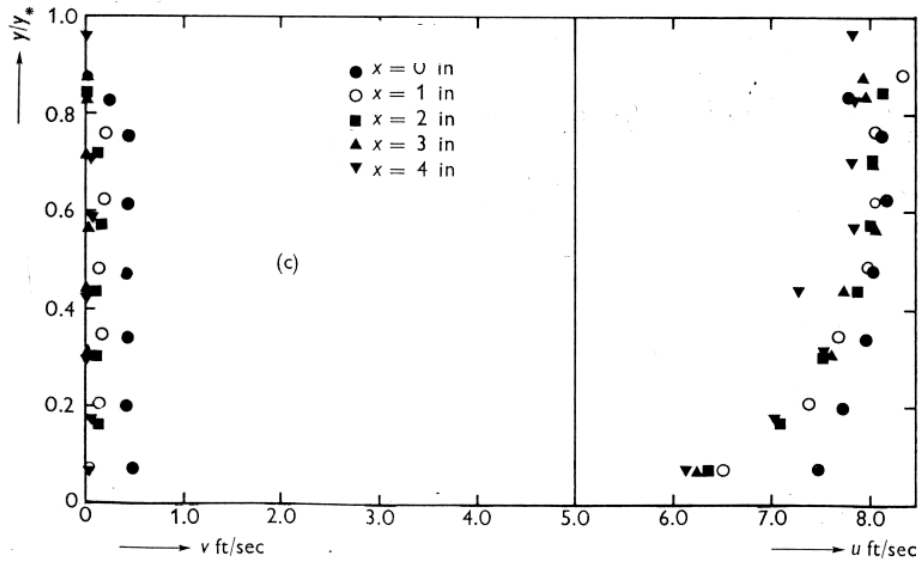


Figura 3.10/5 – Distribuição de velocidades para declividade severa (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

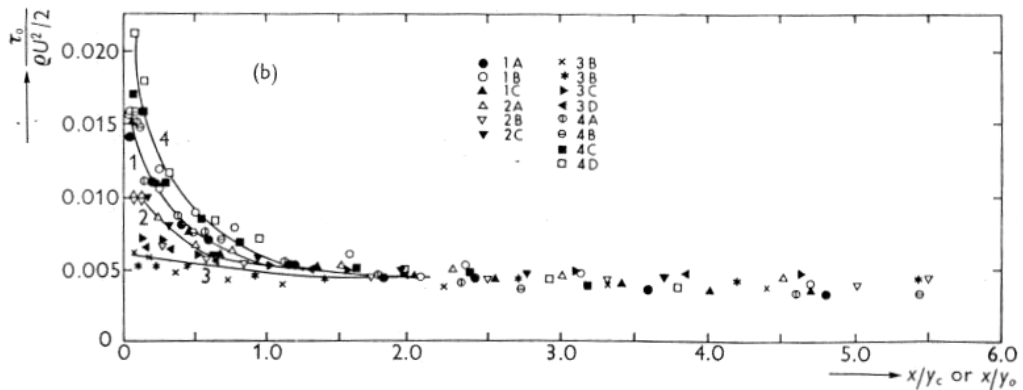


Figura 3.10/6 – Distribuição de tensão de cisalhamento no leito do canal (adimensionalizado) (RAJARATNAM & MURALIDHAR, 1968).

Onde:

U : = velocidade média na seção de controle de montante;

x : = distância da seção terminal;

ρ : = massa específica do fluido;

τ_0 : = Tensão de cisalhamento no leito.

3.11 BAUER E GRAF (1971)

Bauer e Graf (1971) fizeram seu trabalho em um canal retangular de declividade moderada com largura de 17", vazão variando entre 0,08 ft³/s até 2,2 ft³/s e obtiveram que a relação entre a profundidade de queda e a profundidade crítica é de 0,772 (Lembrar que Rouse (1943) encontrou 0,715). Entretanto, os autores informaram que o comprimento do canal deveria ser maior para gerar dados mais confiáveis.

3.12 DOMINGUEZ (1974)

Dominguez (1974) apresenta relações para a modelação da queda livre. Entretanto, em seu modelo, este não considerou aeração da lâmina d'água na queda do jato. Com isso obteve valores experimentais diferentes de Rand (1955) e Moore (1943).

3.13 RAJARATNAM, MURALIDHAR E BELTAOS (1976)

Os autores Rajaratnam, Muralidhar e Beltaos (1976) realizando estudos experimentais preliminares em canais retangulares horizontais e rugosos, encontraram que a relação entre a profundidade de queda e a profundidade crítica é diferente de 0,715. Em suas considerações teóricas, os autores usam análise dimensional e encontram a seguinte relação funcional para canais de qualquer declividade,

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\text{Re}, \frac{S_0}{S_c}, \frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/1)$$

Onde:

K_s : = rugosidade equivalente do leito;

Re : = número de Reynolds, definido como $\frac{q}{\nu}$;

q := vazão específica;

ν := viscosidade cinemática;

S_0 := declividade do canal;

S_c := declividade crítica;

y_c := profundidade crítica;

y_e := profundidade de queda.

Para canais lisos de declividade moderada,

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\text{Re}, \frac{S_0}{S_c}\right) \quad (3.13/2)$$

Observações experimentais mostram que a relação acima se reduz para,

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\frac{S_0}{S_c}\right) \quad (3.13/3)$$

Uma possível explicação para relação (3.13/3) é que a declividade crítica inclui o fator de atrito, o qual por sua vez depende do número de Reynolds.

Para canais rugosos de declividade moderada, onde o efeito da viscosidade é negligenciável, temos:

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\frac{S_0}{S_c}, \frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/4)$$

Se $\frac{K_s}{y_c}$ for menor que algum valor limite então $\frac{y_e}{y_c} = f\left(\frac{S_0}{S_c}\right)$. Neste caso, a declividade

crítica absorve os efeitos da rugosidade relativa $\frac{K_s}{y_c}$.

Para canais rugosos de declividade nula,

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/5)$$

Para canais lisos de declividade nula,

$$\frac{y_e}{y_c} = f(Re) \quad (3.13/6)$$

Para valores elevados do número de Reynolds (Re), Rouse (1936) encontrou,

$$\frac{y_e}{y_c} = 0,715 \quad (3.13/7)$$

Para canais rugosos e severos,

$$\frac{y_e}{y_c} = f\left(\frac{S_0}{S_c}, \frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/8)$$

Assumindo que os parâmetros são separáveis,

$$\frac{y_e}{y_c} = g1\left(\frac{S_0}{S_c}\right)g2\left(\frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/9)$$

Relação a ser confirmada pelos experimentos.

Se o canal for severo e liso,

$$\left(\frac{y_e}{y_c}\right)_s = f\left(\frac{S_0}{S_c}\right) \quad (3.13/10)$$

Dividindo as relações anteriores,

$$\frac{\frac{y_e}{y_c}}{\left(\frac{y_e}{y_c}\right)_s} = f\left(\frac{K_s}{y_c}\right) \quad (3.13/11)$$

A análise experimental foi realizada em um canal com comprimento de 6,10 m, largura de 460 mm e degrau de 380 mm.

Se $\frac{K_s}{y_c} < 0,1$, a rugosidade não influi significativamente, independente da declividade, se

$\frac{K_s}{y_c} > 0,45$, a rugosidade diminui em 20% a profundidade de queda comparado a

profundidade de queda do leito liso. Para valores intermediários de $\frac{K_s}{y_c}$ a leitura é direta no

gráfico (Figura 3.13/1).

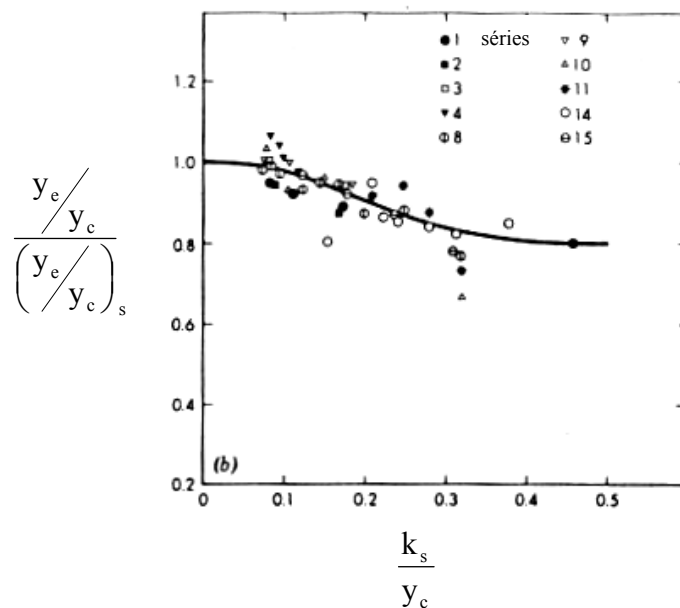


Figura 3.13/1 – Influência da rugosidade na profundidade de queda
(RAJARATNAM et al., 1976).

3.14 KRAIJENHOFF E DOMMERHOLT (1977)

Kraijenhoff e Dommerholt (1977) expuseram que a profundidade de queda é constante, independente da declividade (horizontal ou moderada) e rugosidade. Entretanto, deve-se observar que a rugosidade artificial utilizada não era uniforme ao longo da largura do canal (Figura 3.14/1).

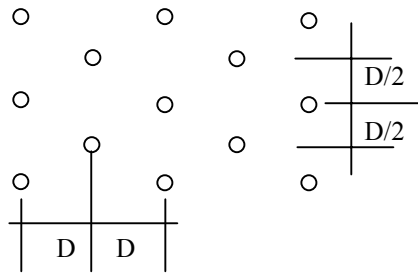


Figura 3.14/1 – Modelo da rugosidade no leito
(KRAIJENHOFF & DOMMERHOLT, 1977).

Onde:

D := distância entre as rugosidades.

3.15 GILL (1979)

Gill (1979) modifica a teoria de White (1943); a velocidade (V_m) (Figura 3.15/1) não é uniforme, a presença da piscina gera um perfil de velocidade não-uniforme no jato inclinado. A pressão hidrostática, induzida pela piscina, fornece ao jato uma aceleração antes que o jato atinja o leito e deste modo modifica o ângulo de queda.

Gill (1979) propõe a seguinte modificação:

$$V' = \sqrt{2g \left(h - y_p + \frac{3}{2} y_c \right)} \quad (3.15/1)$$

Onde:

g := aceleração da gravidade;

h := altura do degrau;

V' := velocidade do jato antes de adentrar na piscina;

y_c := profundidade crítica;

y_p := profundidade da piscina.

$$V'_m = V' \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \quad (3.15/2)$$

Onde:

V'_m := velocidade do jato depois que adentra à piscina;

θ := ângulo de encontro do jato com o leito do canal de jusante.

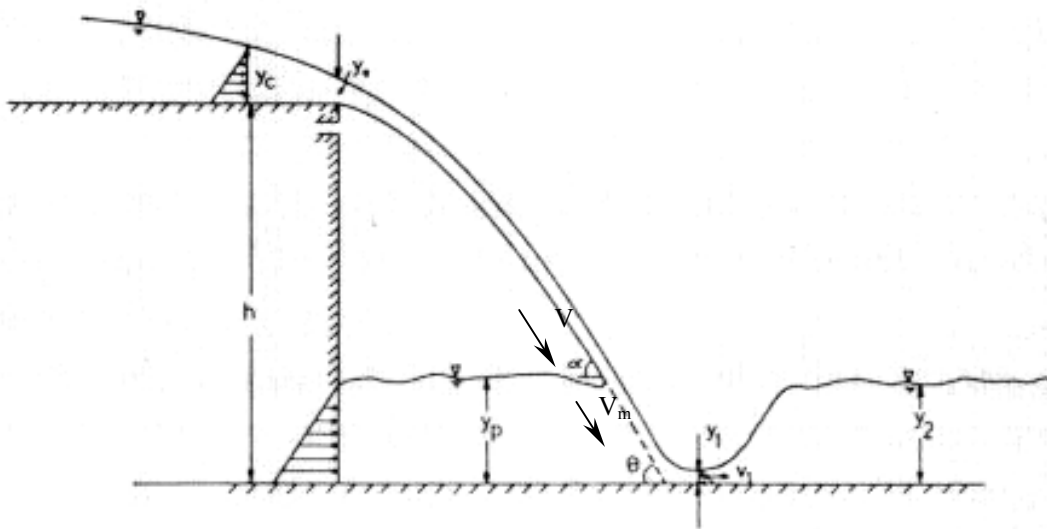


Figura 3.15/1 – Esquema da queda d'água (GILL, 1979).

Gill (1979) assume, também, que a componente horizontal de “ V'_m ” iguala à velocidade horizontal do jato acima da piscina.

$$V_x = \frac{3}{2} V_c = \frac{3}{2} \sqrt{g y_c} = V'_m \cos \alpha \quad (3.15/3)$$

Onde:

α := ângulo de entrada do jato na piscina.

O autor assume, também, que $\alpha = \theta$.

As equações resultantes são:

$$V_m' = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \sqrt{2g \left(h - y_p + \frac{3}{2} y_c \right)} \quad (3.15/4)$$

$$\cos \theta (1 + \cos \theta) \sqrt{2g \left(h - y_p + \frac{3}{2} y_c \right)} = 3\sqrt{gy_c} \quad (3.15/5)$$

Assumindo que o jato continua a acelerar-se até o leito,

$$V_1^2 = V_m'^2 + 2g(y_p - y_1) \quad (3.15/6)$$

Onde:

V_1 := velocidade do jato na seção 1 do canal de jusante;

y_1 := profundidade na seção 1.

E finalmente,

$$y_1 = \frac{\sqrt{gy_c^3}}{\sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{2} \times g \left(h - y_p + \frac{3}{2} y_c \right) + 2g(y_p - y_1)}} \quad (3.15/7)$$

O método de cálculo é iterativo:

a) assume y_p , por exemplo $\frac{y_p}{y_c}$ de Rand (1955);

b) calcula V' ;

c) calcula $\cos \theta$;

d) calcula V_m' ;

e) calcula V_1 ;

f) calcula y_1 ;

g) calcula $\frac{y_p}{y_c} = \sqrt{\left(\frac{y_1}{y_c}\right)^2 + 2\left(\frac{y_c}{y_1}\right)} - 3$;

Segundo Gill (1979), já na terceira tentativa é obtida a convergência. O autor lembra que seu ângulo θ difere do mesmo ângulo calculado pela fórmula de White (1943).

Gill (1979) fornece uma tabela (Tabela 3.15/1) e gráficos (Figuras 3.15/2, 3.15/3 e 3.15/4) comparando os valores numéricos com os modelos de White (1943), Rand (1955) e Gill (1979).

Tabela 3.15/1 – Comparação dos cálculos de y_1 , y_p e $\cos\theta$ (GILL, 1979).

y_c/h	y_1/y_c			y_p/h			$\cos\theta$		E_1/y_c		
	White	Rand	Gill	White	Rand	Gill	White	Gill	White	Rand	Gill
1.00	0.535	0.540	0.517	1.012	1.000	1.066	0.671	0.922	2.282	2.255	2.388
0.90	0.528	0.525	0.504	0.930	0.933	0.995	0.656	0.907	2.322	2.342	2.472
0.80	0.520	0.508	0.490	0.863	0.845	0.920	0.640	0.888	2.369	2.446	2.572
0.70	0.510	0.490	0.473	0.761	0.790	0.844	0.620	0.866	2.432	2.576	2.708
0.60	0.498	0.469	0.455	0.675	0.714	0.760	0.596	0.837	2.514	2.740	2.870
0.50	0.482	0.446	0.435	0.588	0.633	0.669	0.567	0.801	2.634	2.957	3.077
0.40	0.462	0.420	0.408	0.497	0.546	0.575	0.530	0.755	2.805	3.258	3.412
0.30	0.434	0.388	0.376	0.402	0.452	0.471	0.482	0.693	3.089	3.713	3.913
0.20	0.392	0.347	0.334	0.300	0.346	0.352	0.416	0.607	3.646	4.502	4.816
0.10	0.318	0.287	0.269	0.184	0.219	0.216	0.313	0.471	5.262	6.371	7.179
0.08	0.294	0.270	0.245	0.158	0.189	0.183	0.283	0.433	6.079	7.129	8.575
0.06	0.266	0.249	0.224	0.129	0.156	0.147	0.249	0.386	7.333	8.307	10.189
0.04	0.228	0.223	0.195	0.097	0.119	0.108	0.206	0.328	9.843	10.293	13.344
0.02	0.172	0.184	0.151	0.059	0.076	0.064	0.148	0.245	17.073	14.920	22.080
0.01	0.127	0.152	0.115	0.036	0.048	0.038	0.105	0.182	31.127	21.739	37.922

Onde;

E_1 := energia específica na seção 1.

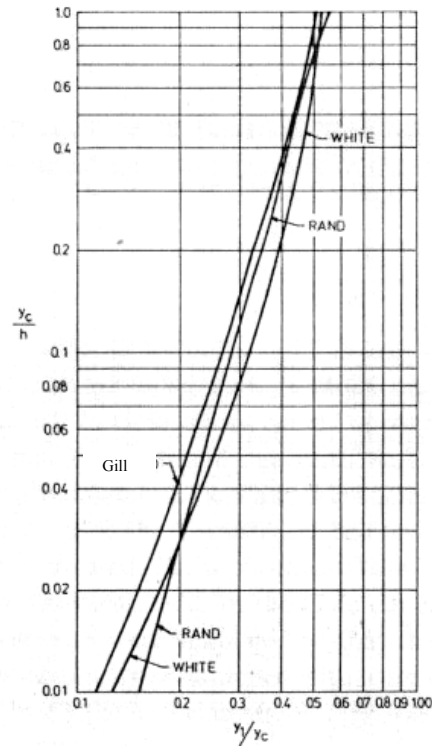


Figura 3.15/2 – Variação y_1/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).

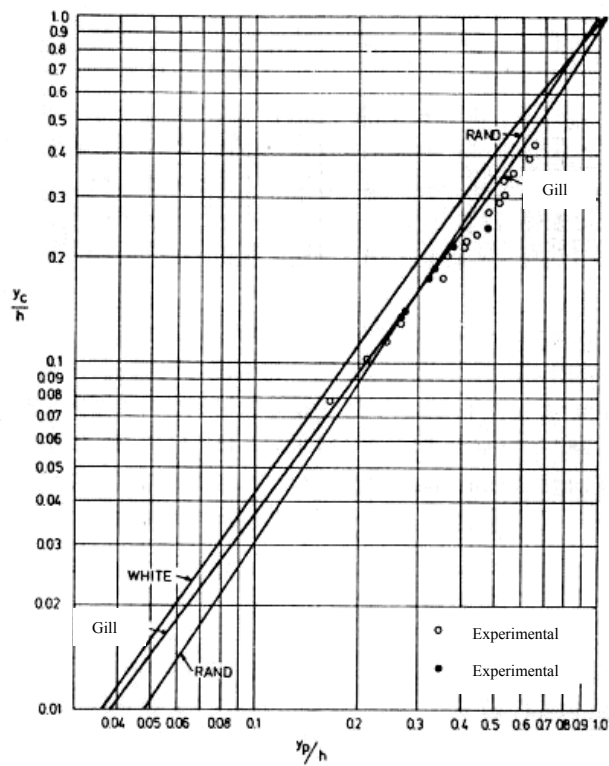


Figura 3.15/3 – Variação y_p/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).

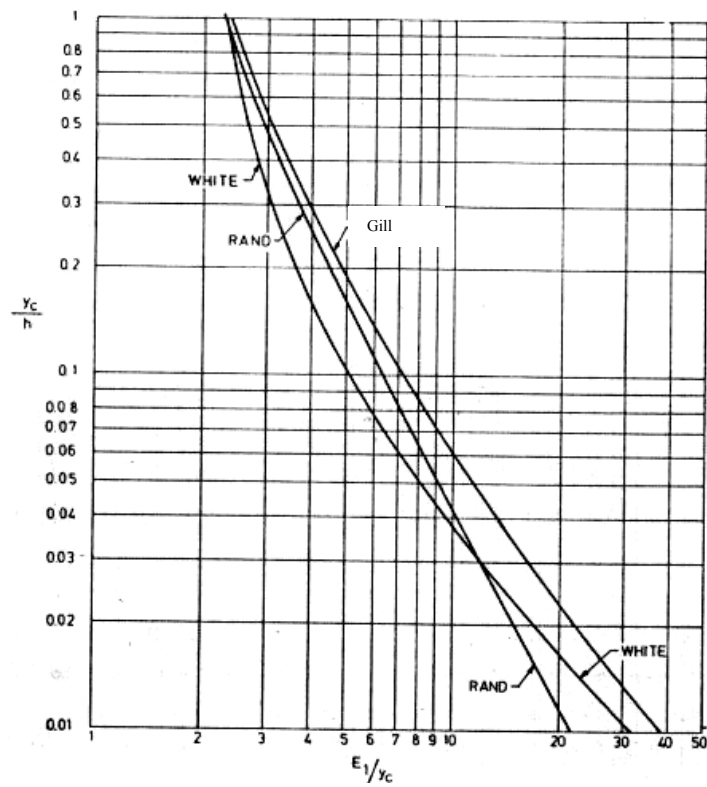


Figura 3.15/4 – Variação E_1/y_c em função de y_c/h (GILL, 1979).

Adequando equações mais simples, Gill (1979) fornece as seguintes relações:

$$\frac{y_1}{y_c} = 0,524 \left(\frac{y_c}{h} - 0,0053 \right)^{0,283} \quad (3.15/8)$$

$$\frac{y_p}{y_c} = 1,067 \left(\frac{y_c}{h} - 0,0016 \right)^{0,697} \quad (3.15/9)$$

$$\cos \theta = 0,968 \left(\frac{y_c}{h} - 0,0058 \right)^{0,305} \quad (3.15/10)$$

Gill (1979), também, realizou experiências e seus dados estão nas Tabelas 3.15/2 e 3.15/3.

Tabela 3.15/2 – Dados experimentais para canal de largura 10,32cm (GILL, 1979).

no.	vazão cm ³ /s	y _p cm	h cm	(y _p)calculado – cm			y _o cm	y _o /y _c
				White	Rand	Gill		
1	797	3.36	9.94	2.812	3.247	3.240	1.372	0.752
2	970	3.66	9.94	3.087	3.541	3.543	1.590	0.764
3	471	2.66	9.94	2.195	2.576	2.523	1.041	0.810
4	916	3.62	7.40	2.763	3.124	3.165	1.544	0.771
5	1175	3.97	7.40	3.116	3.485	3.548	1.829	0.774
6	1370	4.17	7.40	3.358	3.728	3.817	2.007	0.766
7	479	2.62	7.40	2.029	2.348	2.338	1.044	0.803
8	630	3.02	7.40	2.309	2.648	2.655	1.237	0.793
9	738	3.32	7.40	2.491	2.840	2.855	1.448	0.835
10	838	3.00	4.83	2.357	2.597	2.671	1.595	0.845
11	549	2.50	4.83	1.918	2.156	2.195	1.290	0.906
12	367	2.00	4.83	1.580	1.805	1.813	1.013	0.931
13	964	3.10	4.83	2.527	2.762	2.850	1.748	0.844
14	798	3.75	17.65	3.333	3.950	3.847	1.387	0.759
15	962	4.25	17.65	3.638	4.288	4.181	1.575	0.761
16	1184	4.75	17.65	4.009	4.698	4.625	1.783	0.750
17	537	2.95	17.65	2.768	3.319	3.165	1.069	0.762

Tabela 3.15/3 – Dados experimentais para canal de largura 30,48cm (GILL, 1979).

no.	vazão cm ³ /s	y _p cm	h cm	(y _p)calculado – cm			y _o cm	y _o /y _c
				White	Rand	Gill		
1	4925.49	5.50	15.3	4.520	5.204	5.485	-	-
2	7060.69	7.30	15.3	5.365	6.097	6.584	2.786	0.734
3	5826.69	5.80	15.3	4.895	5.604	5.973	2.502	0.749
4	4151.51	5.30	15.3	4.168	4.827	5.031	1.994	0.748
5	2917.42	4.10	15.3	3.531	4.133	4.208	1.516	0.720

Os valores teóricos da modelação de Gill (1979) aproximam-se bastante dos valores experimentais. Entretanto, a modelação de Gill (1979), fornece valores menores dos que medidos em seu experimento.

Tabela 3.15/4 – Verificação dos valores teóricos da inclinação da trajetória do jato
(GILL, 1979)

nº	ângulo de inclinação em graus		
	White	Gill	Experimental
1	65,66	54,36	54,18
2	63,19	51,08	50,23
3	64,53	52,88	48,90
4	66,79	55,80	53,26
5	69,01	58,55	61,07

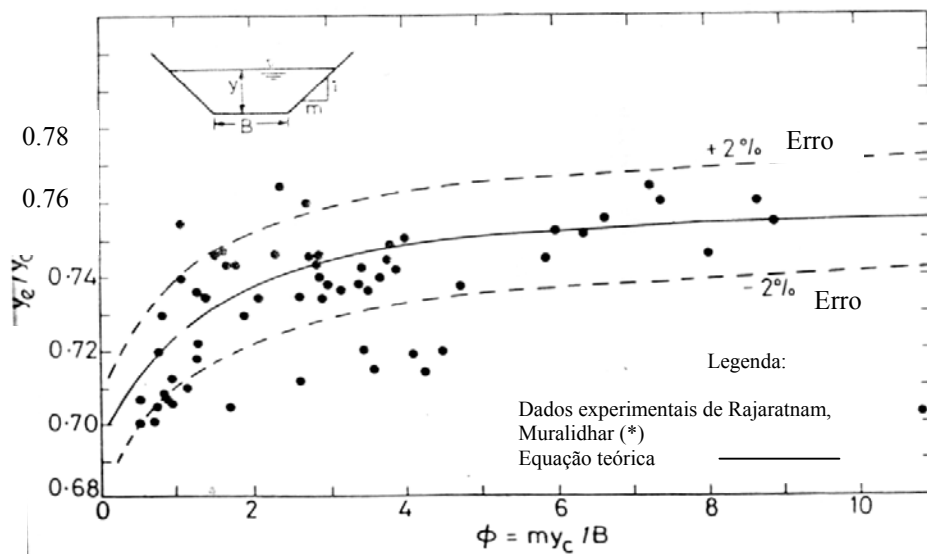
Os valores da teoria modificada (GILL, 1979) fornecem resultados bem compatíveis e com erros menores do que os previstos por White (1943).

Gill (1979) observou que a profundidade de queda sempre foi superior a 0,715 da profundidade crítica. Para valores elevados de degrau, esta relação aproxima-se do valor 0,715.

3.16 SUBRAMANYA E MURTHY (1987)

Subramanya e Murthy (1987), estudaram analiticamente a profundidade de queda em canais trapezoidais. Os autores comparam os seus resultados teóricos com dados experimentais publicados na literatura.

Cerca de 85% encontra-se na envoltória de $\pm 2\%$ de variação do valor teórico (Figura 3.16/1).



* Journal of Hydraulic Research, Vol. 8, N° 4, 1970.

Figura 3.16/1 – Profundidade de queda para canal trapezoidal horizontal (SUBRAMANYA & MURTHY, 1987).

Onde:

B : = largura da base do canal;

m : = cotangente do ângulo do talude do canal;

y : = profundidade do canal;

y_c : = profundidade crítica;

y_e : = profundidade de queda.

Estes autores também não estudaram a dissipação de energia do mecanismo da queda livre.

3.17 UNITED STATES DEPARTMENT OF THE INTERIOR (1987)

Esta publicação indica a queda livre para barragem em arco tipo fino ou para uma crista com uma face aproximadamente vertical de jusante.

A ventilação é necessária para evitar um jato pulsatório ou flutuante.

Onde não há proteção artificial na base da queda livre, a erosão ocorrerá no leito do rio e formará uma fossa profunda.

O volume e a profundidade da fossa são relacionados com a variação de vazão, a altura de queda e a profundidade de jusante do rio.

As propriedades de resistência à erosão do material do leito do rio, incluindo rochas, têm pouca influência na profundidade da fossa, elas somente afetam o tempo necessário para formar a fossa. Onde a erosão não pode ser tolerada, uma fossa natural poder ser criada pela construção de uma barragem auxiliar à jusante da estrutura principal, ou pela escavação de uma fossa, o qual é reforçada com leito de concreto.

Se o nível de água de jusante for suficiente, um ressalto hidráulico ocorrerá quando o jato d'água, em queda livre, cai sobre um leito plano.

Pode-se usar a queda livre para pequenas barragens de terra com altura de até 6 m, com uso de bacia dissipadora com blocos de dissipação e mais o “*end-sill*”.

Quando um jato livre cai verticalmente em uma piscina no leito do rio, uma “piscina de imersão” será erodida para uma profundidade que é relacionada com a vazão, a altura de queda e o material do leito. O leito do rio será erodido como resultado da ação abrasiva da agitação (turbulência) da água e do sedimento. Finalmente, a erosão alcança uma profundidade limite quando a energia do jato não é mais capaz de remover o material do leito da fossa erodido. Uma aproximação empírica simples para a profundidade máxima de erosão é:

$$D = 1,32H^{0,255}q^{0,54} \quad (3.17/1)$$

Onde:

D : = profundidade máxima de erosão abaixo do nível d'água de jusante (em ft);

H : = altura de queda do reservatório até o nível d'água de jusante (em ft);

q : = vazão específica (em $\text{ft}^3/\text{s}/\text{ft}$ ou ft^2/s).

Nota: 1 ft = 0,3048 m.

3.18 CHANSON (1994)

O autor descreve a queda livre no esquema apresentado na Figura (3.18/1).

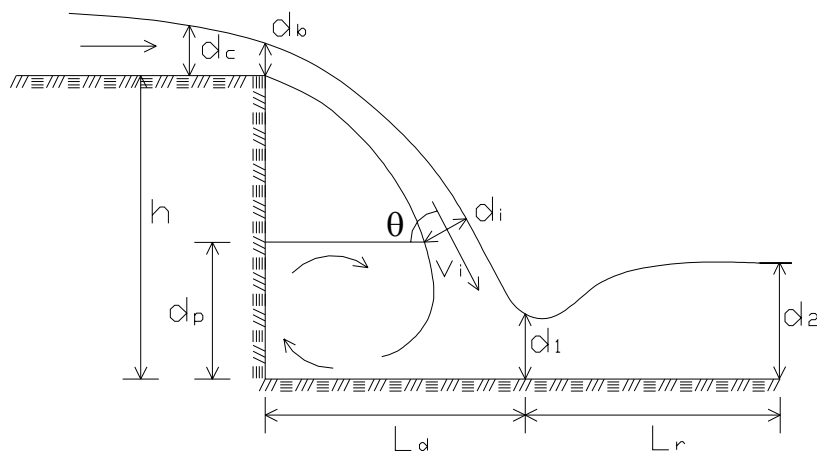


Figura 3.18/1 – Esquema da queda livre (CHANSON, 1994).

Onde:

d_1 := altura antes do ressalto;

d_2 := altura conjugada de ressalto;

d_b := profundidade da seção terminal ou seção de queda;

d_c := profundidade crítica;

d_i := largura do jato na seção de contato com a “piscina”;

d_p := profundidade da piscina;

h := altura de queda;

L_d := alcance do jato;

L_r := comprimento do ressalto;

v_i := velocidade média do jato na entrada da piscina;

θ := ângulo de incidência do jato.

Utiliza a seguinte relação matemática:

$$d_b = 0,715d_c \quad (3.18/1)$$

E pela equação da quantidade de movimento,

$$\frac{d_1}{d_c} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{h}{d_c}}} \quad (3.18/2)$$

Carga na seção (1), início do ressalto,

$$\frac{H_1}{d_c} = \frac{d_1}{d_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{d_c}{d_1} \right)^2 \quad (3.18/3)$$

Onde:

H_1 := Carga na seção (1).

Na seção (2), uso do ressalto hidráulico clássico,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right] \quad (3.18/4)$$

Perda de carga no ressalto hidráulico,

$$\frac{H_1 - H_2}{d_c} = \frac{(d_2 - d_1)^3}{4d_2d_1d_c} \quad (3.18/5)$$

Onde:

H_2 := Carga na seção (2), após o ressalto.

$$Fr_1 = \frac{q}{\sqrt{gd_1^3}} \quad (3.18/6)$$

Onde:

Fr_1 := número de Froude na seção (1).

Rand (1955) realizou diversas experiências e desenvolveu as seguintes correlações:

$$\frac{d_1}{h} = 0,54 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{1,275} \quad (3.18/7)$$

$$\frac{d_2}{h} = 1,66 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,81} \quad (3.18/8)$$

$$\frac{d_p}{h} = \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,66} \quad (3.18/9)$$

$$\frac{L_d}{h} = 4,30 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,81} \quad (3.18/10)$$

Outras correlações, que refletem as condições do escoamento do impacto do jato com a “piscina”, podem ser deduzidas da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{d_i}{h} = 0,687 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,483} \quad (3.18/11)$$

$$\frac{v_i}{v_c} = 1,455 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{-0,483} \quad (3.18/12)$$

$$\operatorname{tg}\theta = 0,838 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{-0,586} \quad (3.18/13)$$

Onde:

v_c := velocidade média crítica.

O comprimento do ressalto é dado pela seguinte equação:

$$\frac{L_r}{d_1} = 8 \left[\sqrt[3]{\left(\frac{d_c}{d_1} \right)^2} - 1,5 \right] \quad (3.18/14)$$

Se o alcance do jato (L_d) mais o comprimento do ressalto (L_r) é menor que o comprimento do leito de jusante, desenvolve-se completamente um ressalto hidráulico. O valor limite onde ocorre a queda livre com formação de ressalto hidráulico é dado pelas seguintes equações:

$$\frac{d_c}{h} < \left(\frac{d_c}{h} \right)_{\text{char}} \quad (3.18/15)$$

$$\left(\frac{d_c}{h} \right)_{\text{char}} = 0,0916 \left(\frac{h}{l} \right)^{-1,276} \quad (3.18/16)$$

Onde:

l := comprimento do leito de jusante.

A equação (3.18/16) é válida para $0,2 \leq \frac{h}{l} \leq 6$.

Para escoamento supercrítico de montante, a aplicação da quantidade de movimento conduz ao seguinte resultado:

$$\frac{d_1}{d_c} = \frac{2\operatorname{Fr}^{-2/3}}{1 + \frac{2}{\operatorname{Fr}^2} + \sqrt{1 + \frac{2}{\operatorname{Fr}^2} \left(1 + \frac{h}{d_c} \operatorname{Fr}^{2/3} \right)}} \quad (3.18/17)$$

Onde:

Fr := número de Froude do escoamento crítico de montante.

A dissipação entre a seção crítica e a seção (1) é dada por:

$$\frac{\Delta H}{H_0} = 1 - \left[\frac{\frac{d_1}{d_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{d_c}{d_1} \right)^2}{\frac{3}{2} + \frac{h}{d_c}} \right] \quad (3.18/18)$$

Onde:

H_0 := energia específica na seção crítica;

ΔH := perda de carga entre a seção crítica e a seção (1).

$$H_0 = h + \frac{3}{2} d_c \quad (3.18/19)$$

A perda de carga total entre a seção crítica e a seção (2) é dada por:

$$\frac{\Delta H}{H_0} = 1 - \left[\frac{0,54 \left(\frac{d_c}{h} \right)^{0,275} + \frac{3,43}{2} \left(\frac{d_c}{h} \right)^{-0,55}}{\frac{3}{2} + \frac{h}{d_c}} \right] \quad (3.18/20)$$

A maior parte da dissipação de energia em grandes barragens ocorre para um grande número de degraus. Para uma altura de barragem constante, a taxa de dissipação de energia diminui quando a vazão aumenta.

3.19 RAJARATNAM E CHAMANI (1995)

Rajaratnam e Chamani (1995), examinam as hipóteses de White (1943) e Gill (1979), realizam experiências e apresentam medições da distribuição de velocidade na queda do jato, bem como a distribuição de velocidade do jato no encontro com a piscina.

O trabalho, também, indica que a dissipação de energia é devido à mistura do jato com a piscina, e desenvolve um método para quantificar a perda de energia.

O canal onde foi realizado o teste possui uma largura de 0,46m, comprimento de 6,55m e degraus de 0,62m e 0,25m.

Foram realizadas 10 medições de vazões na seguinte faixa:

$$0,06 < \frac{y_c}{h} < 0,35 \quad (3.19/1)$$

Onde:

h := altura do degrau;

y_c := profundidade crítica.

Para simulação do jato sem piscina, foram feitas 4 medições na seguinte faixa:

$$0,20 < \frac{y_c}{h} < 0,35 \quad (3.19/2)$$

A distribuição de velocidade é praticamente uniforme no jato antes da chegada na piscina, mas deixa de ser uniforme junto ao rolo provocado na piscina (Figura 3.19/1).

A relação entre a vazão de recirculação Q_c e a vazão total Q varia de forma não linear de 0,6 para 0,17, com valores correspondentes de y_c/h de 0,05 até 0,35, respectivamente (Figura 3.19/2).

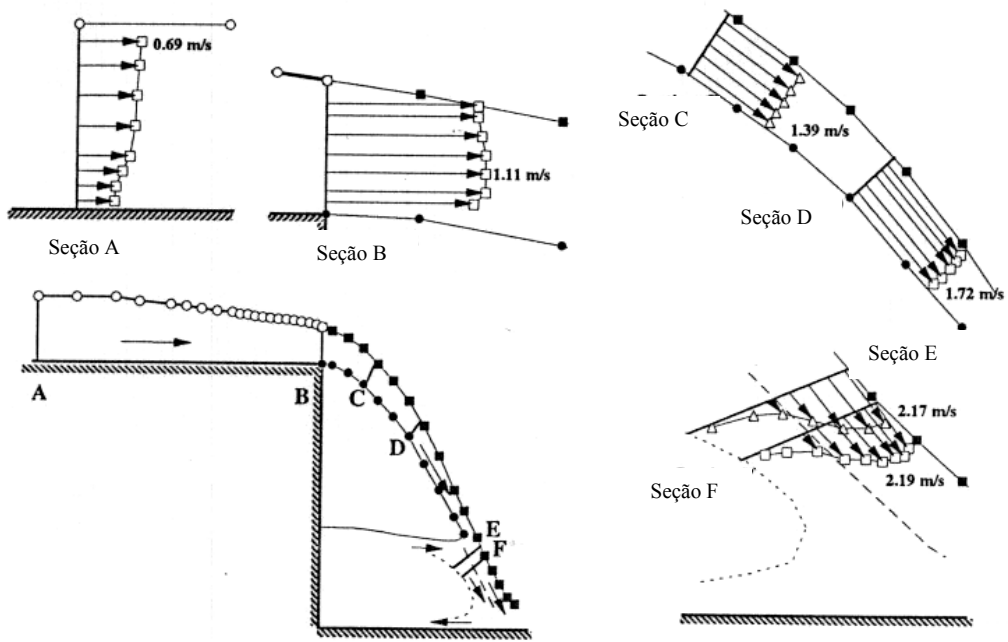


Figura 3.19/1 – Distribuição de velocidade em várias seções para $y_c/h = 0,20$ (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).

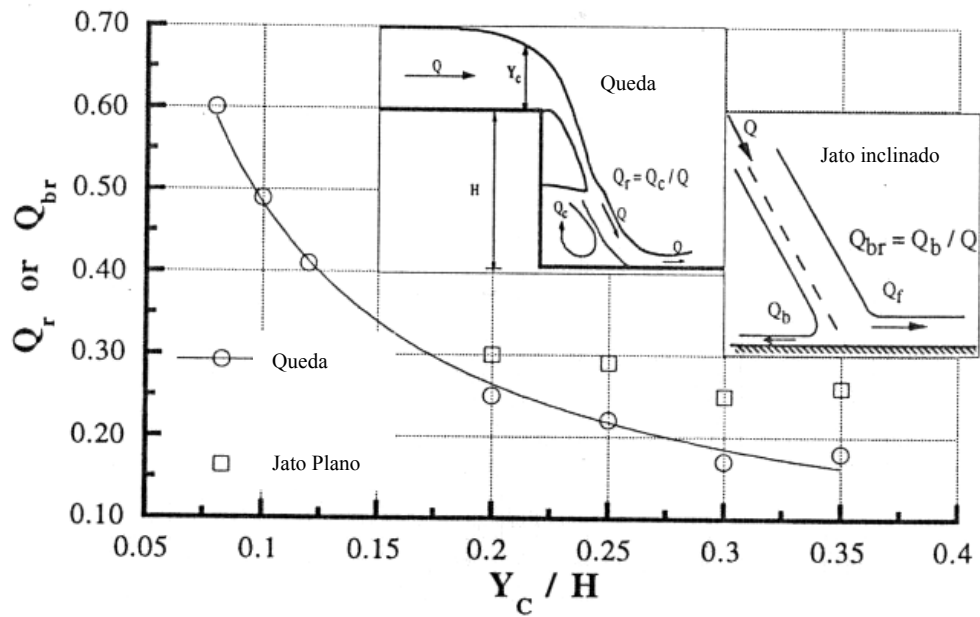


Figura 3.19/2 – Relação entre a vazão de recirculação Q_c e a vazão total Q versus y_c/h (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).

A vazão de recirculação do jato, desconsiderando a piscina, é praticamente constante e igual a 27% da vazão total (Q) para valores de y_c/h variando de 0,20 até 0,35. Deste modo verifica-se que a piscina influi bastante no fenômeno.

Os dados experimentais dos autores e os de Moore (1943) concordam bem com a seguinte equação empírica (Figura 3.19/3):

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 0,896 \left(\frac{y_c}{h} \right)^{-0,766} \quad (3.19/3)$$

Onde:

E_0 := energia antes da queda;

ΔE := perda de energia na queda do jato.

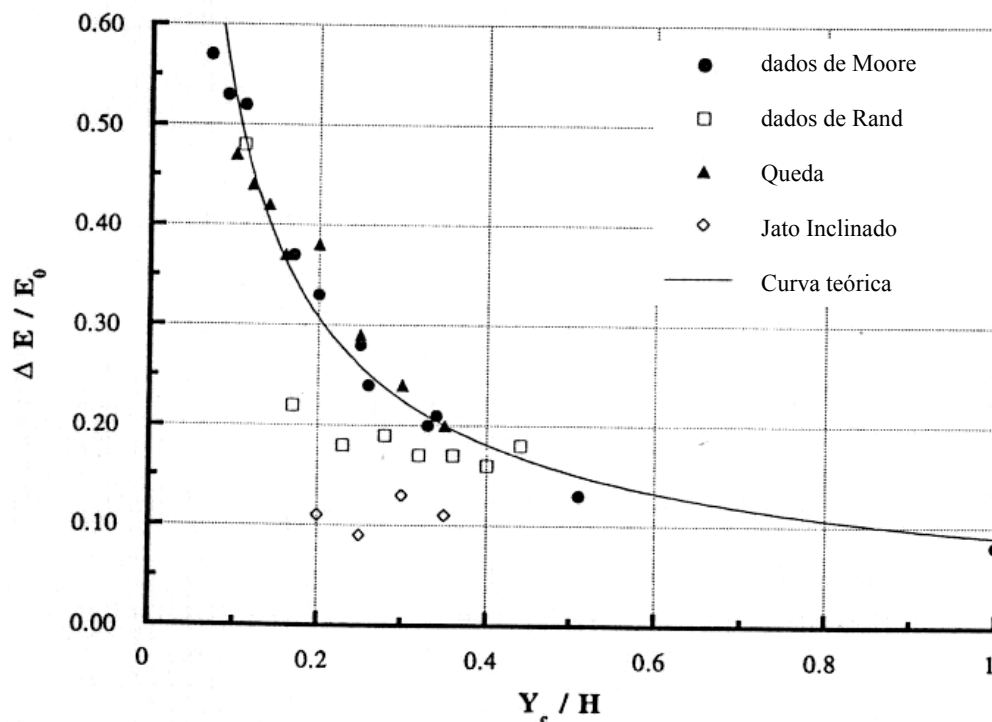


Figura 3.19/3 – Variação da perda de energia para a queda d'água e para o jato inclinado (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).

Os dados de Rand (1955), segundo os autores, ficam abaixo da curva empírica devido ao possível método de cálculo de velocidade derivado por Rand (1955).

A curva de Rand (1955) fornece bons resultados para y_p/h (Figura 3.19/4), mas os autores não comparam com os valores de Rand (1955) para l_p/h . A equação empírica proposta pelos autores é:

$$\frac{y_p}{h} = 1,107 \left(\frac{y_c}{h} \right)^{0,719} \tag{3.19/4}$$

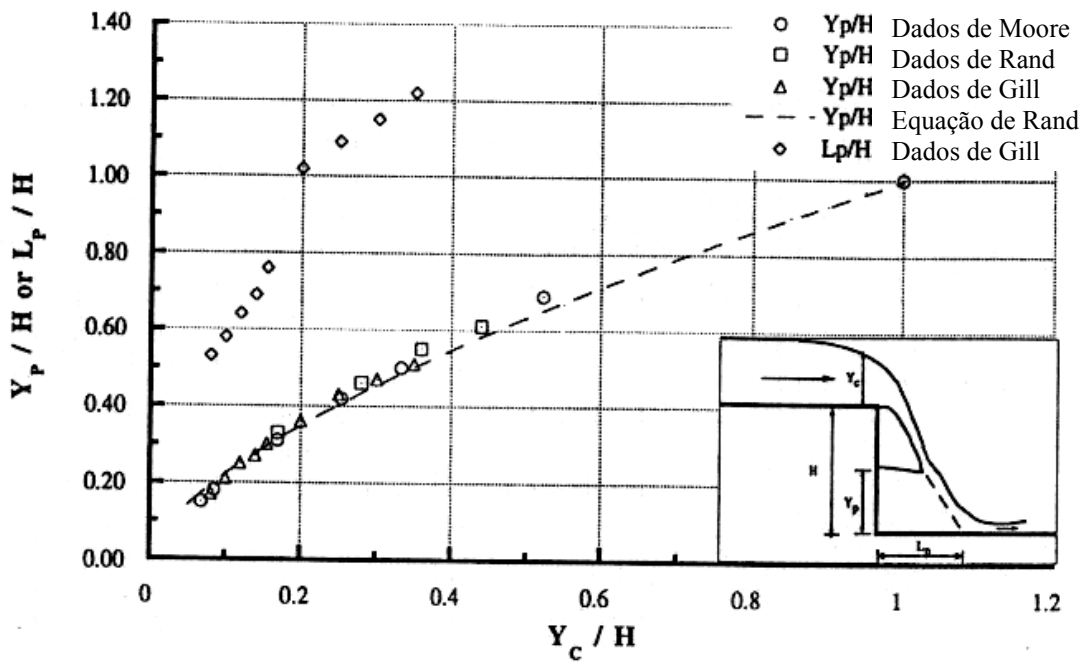


Figura 3.19/4 – Variação de y_p/h versus y_c/h e l_p/h versus y_c/h (RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).

Os autores fornecem um método de cálculo para a determinação da perda de energia, devido à queda d'água, e encontram valores próximos aos de Gill (1979) (Figura 3.19/5).

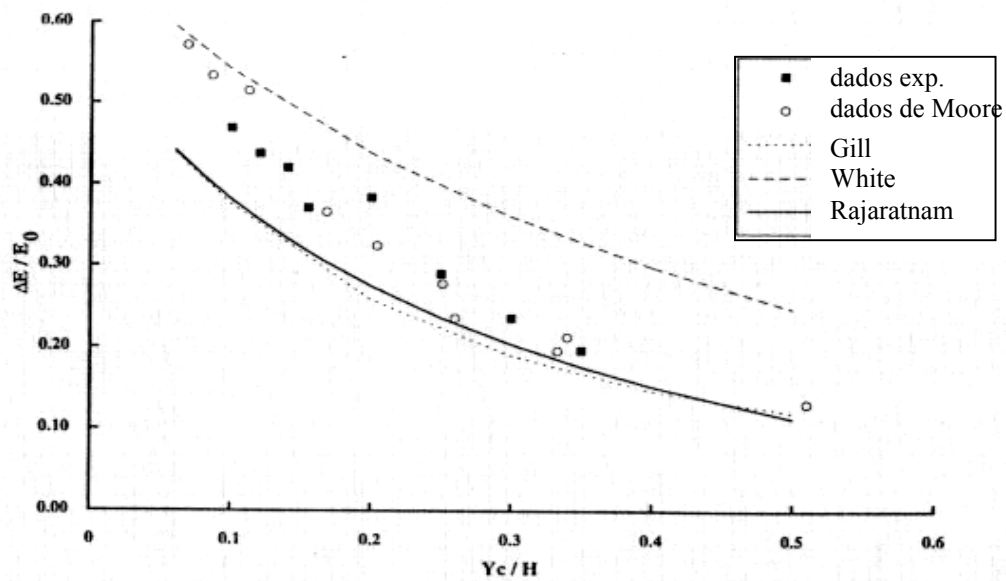


Figura 3.19/5 – Variação de perda de energia versus y_c/h
(RAJARATNAM & CHAMANI, 1995).

3.20 ANNANDALE (1995)

Annandale (1995) estudou a interação entre a taxa de dissipação de energia e a erosão de leitos.

$$\text{Pot} = \rho g q \Delta E \quad (3.20/1)$$

Onde:

g : = aceleração da gravidade;

Pot : = potência erosiva da água ou taxa de dissipação de energia;

q : = vazão específica;

ΔE : = perda de energia;

ρ : = massa específica da água.

O autor apresenta as equações da queda livre baseado em Henderson (1966).

3.21 MONTES (1998)

Montes (1998) ilustra os métodos de Rand (1955) e Dominguez (1974), mas não explica que o método de Dominguez (1974) não utiliza uma lâmina aerada.

3.22 CHANSON (2001)

O autor indica a estrutura de queda livre para baixas cargas. A dissipação de energia ocorre no impacto do jato e no ressalto hidráulico.

Na queda do jato, forma-se uma piscina d'água recirculante atrás do jato. Esta massa d'água é importante, pois fornece uma força de pressão paralela ao leito do canal, o qual é necessária para tocar a direção da quantidade de movimento do jato de um ângulo em relação ao leito, para deixar o jato paralelo ao leito horizontal. Chanson (2001) usa as fórmulas empíricas de Rand (1955).

As equações foram completamente verificadas com numerosos dados laboratoriais.

Na prática, estruturas de queda são eficientes dissipadores de energia. São usadas tipicamente para quedas de 7 a 8 m e descarga de até 10 m³/s.

Pressões médias elevadas no leito e flutuação de pressão no leito existem na queda do jato. O leito deve ser reforçado no local de queda do jato e também deve ser reforçado onde ocorre o ressalto hidráulico.

Uma soleira poder ser construída a jusante da estrutura de queda para reduzir o feito da erosão. A soleira cria uma piscina natural de dissipação de energia entre duas estruturas (estrutura de queda e soleira) o qual reduz a força de erosão abaixo da queda do jato.

Se o escoamento no canal de montante for supercrítico e seguindo o mesmo método de White (1943), obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{d_1}{d_c} = \frac{2Fr^{-2/3}}{1 + \frac{2}{Fr^2} + \sqrt{1 + \frac{2}{Fr^2} \left(1 + \frac{\Delta z}{d_c} Fr^{2/3}\right)}} \quad (3.22/1)$$

Onde:

d_1 : = profundidade antes do ressalto;

d_c : = profundidade crítica;

Fr : = número de Froude do escoamento supercrítico do canal de montante;

Δz : = altura do degrau.

3.23 CHAMANI E BEIRAMI (2002)

Chamani e Beirami (2002) propõem um método para a determinação das características hidráulicas da queda livre usando a contribuição do método de Gill (1979) e Rouse (1943). Combinando princípios da conservação de massa e quantidade de movimento, os autores encontraram (Figura 3.23/1).

$$\frac{Y_p}{Y_1} = \sqrt{\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^2 + 2F_1^2 \left(\frac{Y_1}{Y_2}\right) - (2F_1^2 + 1)} \quad (3.23/1)$$

$$V_m = \frac{V}{2}(1 + \cos\beta) \quad (3.23/2)$$

$$V_m = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)\sqrt{2g[Y_1(1 + 0,5F_1^2) + H - Y_p]} \quad (3.23/3)$$

$$\cos\beta = \frac{\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8A}{\sqrt{2B}}}\right)}{2} \quad (3.23/4)$$

$$A = \frac{2F_1^2}{(1 + 2F_1^2)} \quad (3.23/5)$$

$$B = \sqrt{1 + 0,5F_1^2 + \frac{H}{Y_1} - \frac{Y_p}{Y_1}} \quad (3.23/6)$$

$$Y_2^3 - \frac{1}{2g}(V_m^2 + 2gY_p)Y_2^2 + \frac{q}{2g} = 0 \quad (3.23/7)$$

Onde:

F_1 := número de Froude na seção 1;

g := aceleração da gravidade;

H := altura de queda;

q := vazão específica;

V := velocidade média da queda livre antes do jato atingir a altura da piscina;

V_m := velocidade média quando o jato atinge a altura da piscina;

Y_1 := profundidade após a queda, antes do ressalto (seção 1);

Y_2 := profundidade após o ressalto;

Y_p := profundidade da piscina;

β := inclinação do jato no leito.

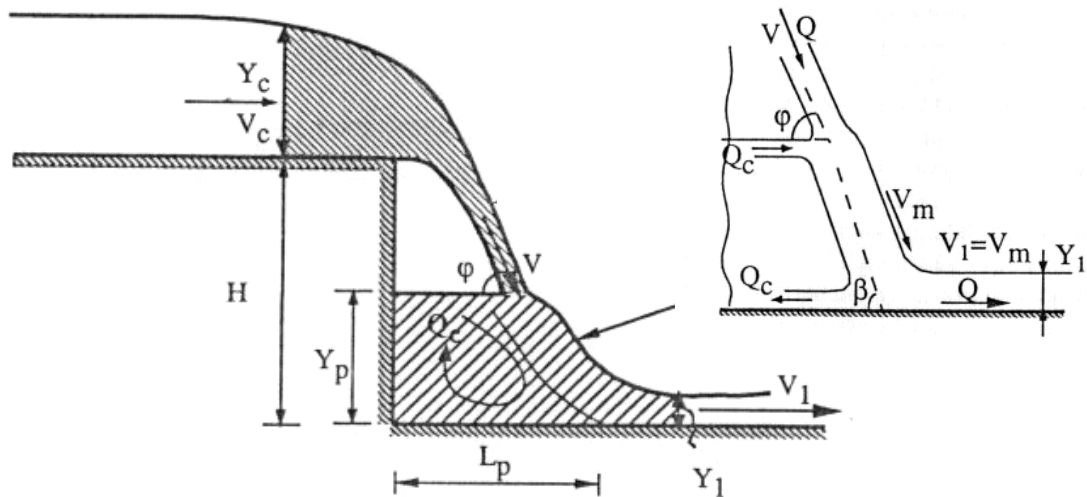


Figura 3.23/1 – Definição das variáveis (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

As equações acima podem ser resolvidas pelo método de tentativa e erro.

O método é usado da seguinte maneira:

- De posse de F_1 , calcula-se Y_1 ;

$$Y_1 = \left[\frac{q^2}{gF_1^2} \right]^{1/3} \quad (3.23/8)$$

- Arbitra-se Y_p e calcula-se β ;
- Calcula-se V_m a partir de β ;
- Calcula-se Y_2 através da equação (3.23/7);
- Calcula-se Y_p através de (3.23/1).

Se o valor arbitrário e calculado de Y_p for próximo não há necessidade de interação.

Deste modo, o método dos autores serve para escoamento subcrítico ou supercrítico do canal de aproximação, para qualquer valor do número de Froude.

O método fornece bons resultados para o cálculo de $\frac{Y_2}{H}$ tanto para regime subcrítico como para supercrítico e para valores de $\frac{Y_p}{H}$ para regime fluvial.

Para a determinação de perda de carga os autores fornecem a seguinte equação empírica:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 0,0562 \left(\frac{Y_c}{H} \right)^{-1,032} F_1^{-0,559} \quad (3.23/9)$$

Com índice de determinação $I = 0,98$.

A curva adequa-se bem aos dados experimentais (Figura 3.23/2).

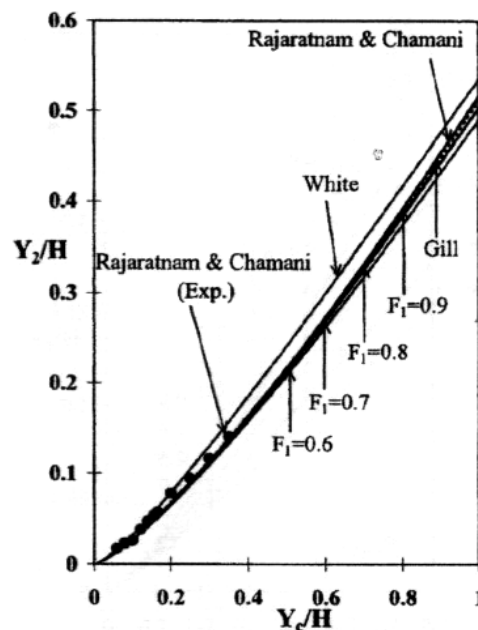


Figura 3.23/2 – Relação entre Y_c/H versus Y_2/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

Os valores teóricos novamente modelam bem o fenômeno, exceto para os dados experimentais de Gill (1979), que são maiores que os previstos (Figura 3.23/3).

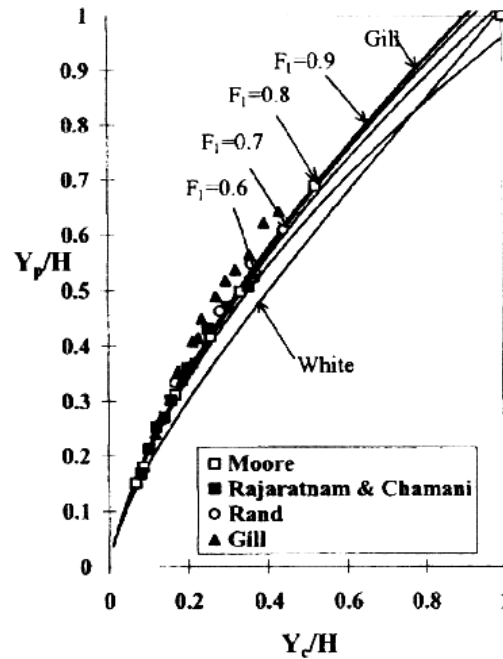


Figura 3.23/3 – Variação relativa de Y_p/H versus Y_c/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

Os valores experimentais são maiores que os fornecidos pelo modelo teórico (Figura 3.23/4).

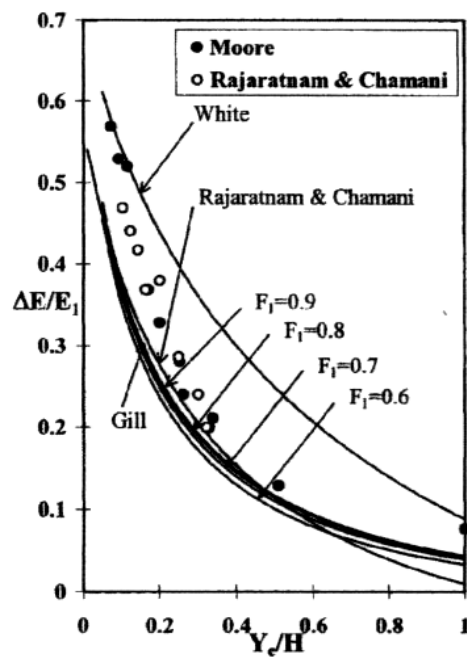


Figura 3.23/4 – Variação de perda de energia versus Y_c/H para escoamento subcrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

Os valores teóricos encontram-se um pouco abaixo dos dados experimentais, mas de um modo geral a concordância é boa. Os autores informam que possíveis explicações para a discrepância sejam a entrada de ar na base do jato e erros na medição do perfil da velocidade (Figura 3.23/5).

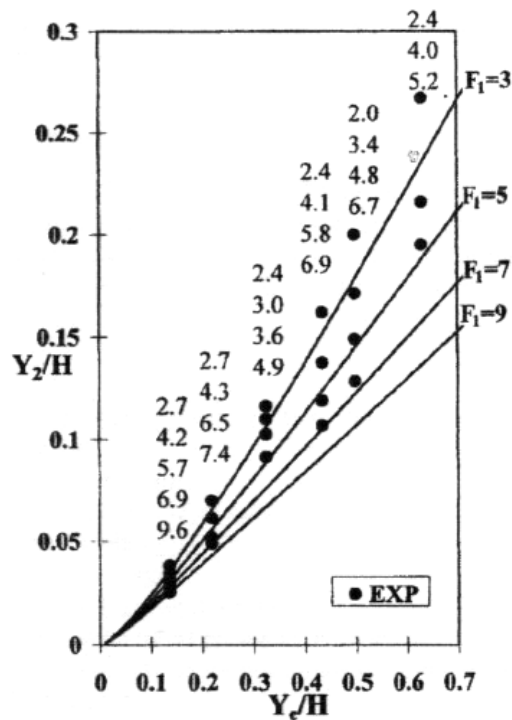


Figura 3.23/5 – Variação relativa de Y_2/H versus Y_c/H para escoamento supercríticos (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

Os valores teóricos são bem discrepantes em relação aos experimentais. Como a tensão de cisalhamento foi desprezada na formação teórica, e o alcance do jato é maior que no caso subcrítico, podem ser possíveis explicações para as discrepâncias (Figura 3.23/6).

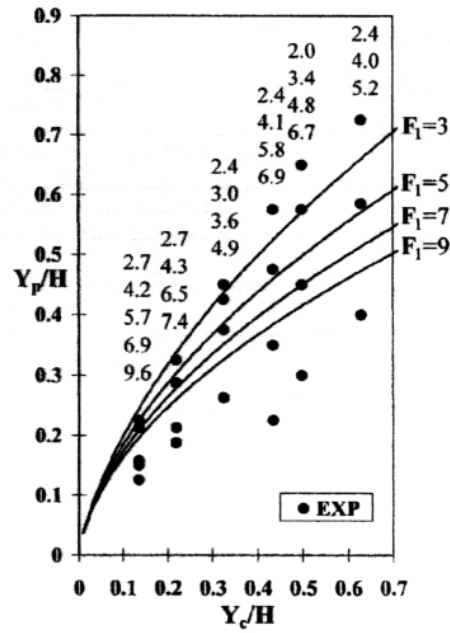


Figura 3.23/6 – Variação de Y_p/H versus Y_c/H para escoamento supercrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

Os valores experimentais são maiores que os fornecidos pelo modelo teórico (Figura 3.23/7).

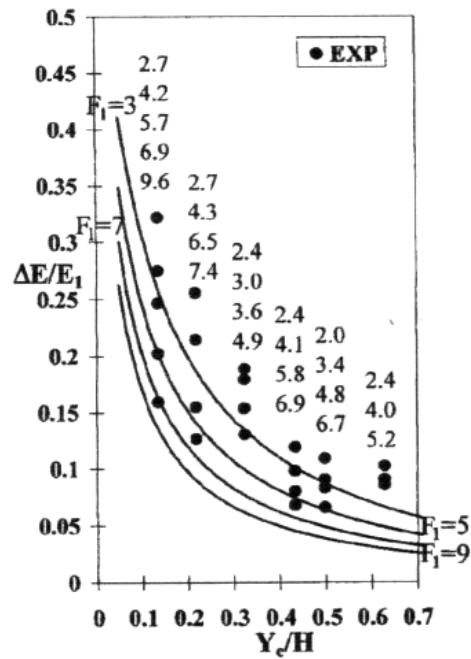


Figura 3.23/7 – Variação da perda de energia versus Y_c/H para escoamento supercrítico (CHAMANI & BEIRAMI, 2002).

3.24 CHANSON (2002)

O autor faz um estudo físico e matemático dos antigos poços de quedas romanos. Esses poços de queda romanos podem ter sido usados para quedas verticais em terrenos íngremes, para dissipação de energia cinética e aeração (reoxigenação) do escoamento.

O autor mostra que os poços de queda são eficientes dissipadores de energia para baixas quedas.

Chanson (2002) demonstra, através do modelo físico, que há uma alta dissipação de energia para baixas vazões.

Os poços de queda romanos possuíam uma piscina que agia como um amortecedor para a queda do jato, prevenindo a erosão do canal de jusante. Além disto, a piscina facilitava a entrada de bolhas de ar, e assim a troca de gás-água (oxigenação).

Os poços de queda romanos podem ser considerados como dissipadores de baixa queda e de baixa vazão.

O melhor regime hidráulico foi obtido com a configuração mostrada na Figura (3.24/1).

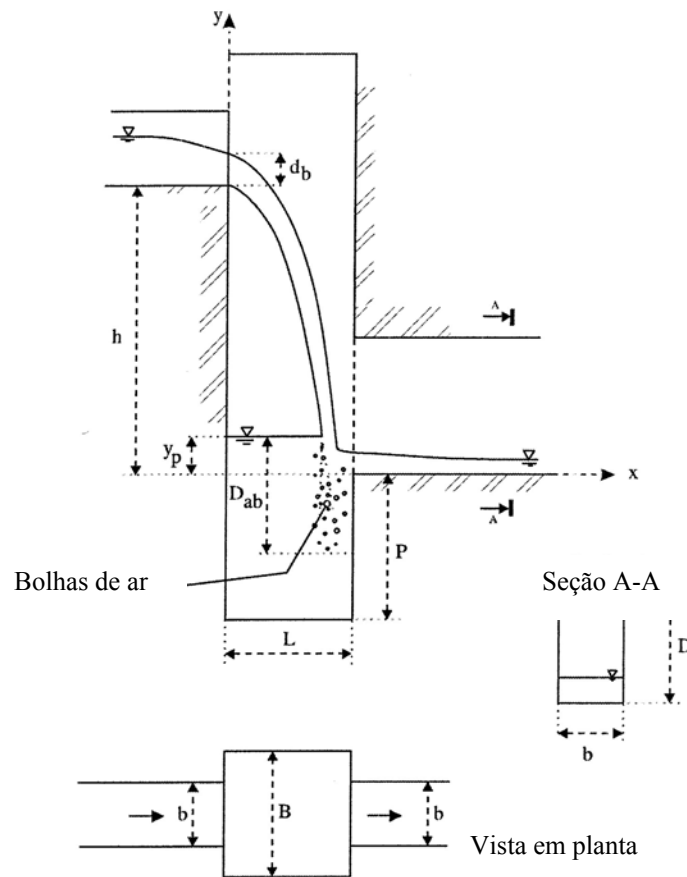


Figura 3.24/1 – Esquema básico dos poços de quedas (CHANSON, 2002).

Onde:

b := largura do canal;

B := largura do poço de queda;

D := altura do canal;

D_{ab} := profundidade de penetração das bolhas de ar, medida verticalmente a partir da superfície;

d_b := profundidade da seção de queda ou seção terminal;

h := altura de queda;

L := largura da piscina de dissipação;

P := profundidade da piscina de dissipação;

y_p := altura de água formada atrás do jato.

4. MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 MATERIAIS

Os materiais pesquisados serão livros, revistas, anais de congressos e dados experimentais de vários autores.

O computador certamente será uma ferramenta indispensável na elaboração da dissertação e validação do modelo conceitual com os dados coletados da análise bibliográfica.

4.2 MÉTODOS

Serão utilizados os princípios da mecânica dos fluidos.

O método a ser utilizado será:

- Análise dos modelos propostos;
- Coleta de informações experimentais;
- Desenvolvimento um modelo matemático conceitual, com base na seqüência do método científico.

O método científico que norteia o desenvolvimento de um modelo matemático consiste em:

- Colocação do problema, ter um enunciado o mais completo possível, já com algumas hipóteses necessárias;
- Identificação das grandezas intervenientes, descrição das grandezas variáveis dependentes, independentes, parâmetros e constantes físicas;

- Seleção dos princípios da física e das leis complementares (particulares) relacionadas com o problema;
- Adoção de hipóteses simplificadoras julgadas adequadas; estabelecimento do modelo matemático;
- Desenvolvimento do modelo matemático;
- Análise de consistência do modelo através de condições limites;
- Validação do modelo com os dados laboratoriais ou de campo.

5. RESULTADOS ESPERADOS

Com este trabalho espera-se obter um bom equacionamento, que uma vez validado, dê confiança para ser usado em projetos de engenharia.

Os resultados práticos deverão ajudar o engenheiro a fazer avaliações expeditas para que possa ter ordem de grandeza do valor da vazão da queda e da dissipação de energia na base da queda livre.

6. DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

6.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Modelar matematicamente a queda livre correspondente a um desnível (ΔZ_0), com o jato hídrico incidindo sobre uma superfície sólida horizontal, com ângulo de incidência (θ), com vazão recirculante (Q_3) a montante da incidência e com a formação de um ressalto hidráulico a jusante. A Figura (6.1/1) esquematiza esta colocação.

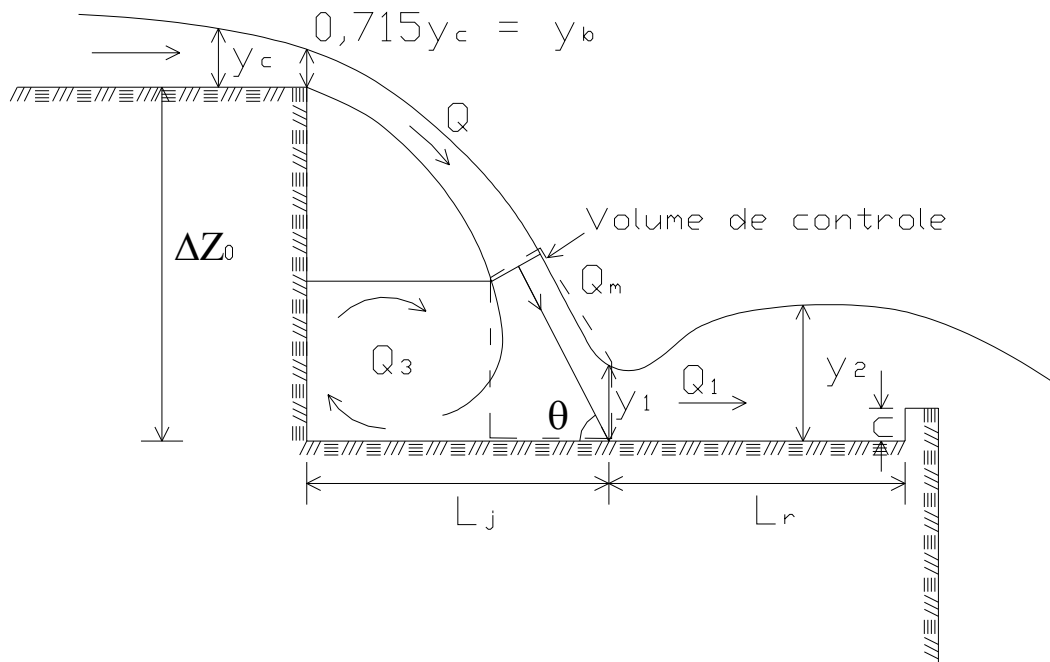


Figura 6.1/1 – Esquema básico da queda livre.

6.2 IDENTIFICAÇÃO DAS GRANDEZAS INTERVENIENTES

- A := área (m²)
- B := largura do canal (m)
- c := altura da soleira de jusante (m)

g :=	aceleração da gravidade	(m/s ²)
k :=	coeficiente de perda de carga localizada	(-)
L :=	comprimento da bacia	(m)
L_j :=	alcance do jato	(m)
L_r :=	comprimento do ressalto (<i>roller</i>)	(m)
q :=	vazão específica	(m ³ /s/m)
Q :=	vazão principal	(m ³ /s)
Q_1 :=	vazão principal ($Q_1 \equiv Q$)	(m ³ /s)
Q_3 :=	vazão recirculante	(m ³ /s)
Q_m :=	vazão incrementada	(m ³ /s)
v :=	velocidade média associada à vazão Q	(m/s)
v_1 :=	velocidade média na seção (1)	(m/s)
v_b :=	velocidade média na seção terminal ou de queda	(m/s)
v_c :=	velocidade média na seção crítica	(m/s)
v_m :=	velocidade média associada à vazão Q_m	(m/s)
y_1 :=	profundidade na seção (1), a jusante do impacto	(m)
y_2 :=	profundidade na seção (2) ou profundidade conjugada fluvial	(m)
y_c :=	profundidade crítica	(m)
ΔZ_0 :=	altura de queda (degrau)	(m)
φ :=	coeficiente adimensional ($\varphi \leq 1$) da Equação 6.4/20	(-)
θ :=	ângulo de incidência do jato	(rad)
ρ :=	massa específica	(kg/m ³)

6.3 SELEÇÃO DOS PRINCÍPIOS DA FÍSICA

Nesta modelação serão usados os três principais princípios que têm aplicações praticamente irrestritas:

- Conservação de Massa;
- Quantidade de Movimento;
- Primeira Lei da Termodinâmica.

O quarto princípio, que é a Segunda Lei da Termodinâmica, na qual é tratada a propriedade “Entropia”, não será usado.

O princípio da conservação de massa nos diz que a massa de um sistema físico é invariante, isto é, constante.

O princípio da quantidade de movimento é, em última análise, uma generalização da Segunda Lei de Newton que pode ser enunciada como: “O somatório das forças externas que atuam sobre um sistema é igual à taxa de variação da quantidade de movimento”.

A Primeira Lei da Termodinâmica corresponde ao balanço algébrico entre energia, calor e trabalho associados a um sistema.

6.4 ADOÇÃO DE HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Os itens a seguir são as principais hipóteses a serem usadas no desenvolvimento do modelo.

- Atrito desprezível no volume de controle;
- Força resultante das pressão na horizontal é nula;

- Regime permanente, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{v} dA = 0$;
- $v_m = v_1 = v_3$.

6.5 DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

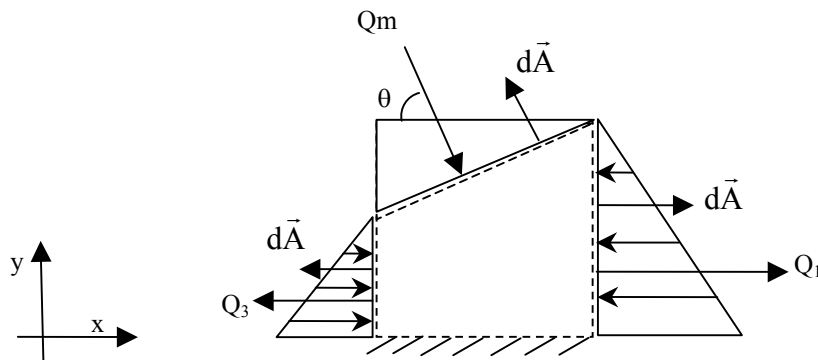


Figura 6.5/1 – Volume de Controle (Vc).

Da observação das Figuras (6.1/1) e (6.5/1) e das hipóteses formuladas, obtém-se as seguintes equações,

$$Q = Q_1 \quad (6.5/1)$$

$$Q_m = Q_1 + Q_3 \quad (6.5/2)$$

O princípio da quantidade de movimento, quando aplicado ao volume de controle indicado na Figura (6.5/1), fornece:

$$\Sigma F_{\text{ext}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{v} dA + \int_{S_c} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (6.5/3)$$

$$\int_{S_c} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6.5/4)$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = dQ \quad (6.5/5)$$

$$-\rho Q_m v_m \cos \theta + \rho Q_1 v_1 - \rho Q_3 v_3 = 0 \quad (6.5/6)$$

Dividindo a equação (6.5/6) por ρ , tem-se:

$$-Q_m v_m \cos \theta + Q_1 v_1 - Q_3 v_3 = 0 \quad (6.5/7)$$

Adotando-se a hipótese simplificadora, a equação (6.5/7) fica,

$$-Q_m \cos \theta + Q_1 - Q_3 = 0 \quad (6.5/8)$$

Pode-se substituir “ Q_3 ” da equação (6.5/2) na equação (6.5/8), obtendo-se:

$$-Q_m \cos \theta + Q_1 - Q_m + Q_1 = 0 \quad (6.5/9)$$

Que finalmente produz:

$$Q_1 = \frac{Q_m}{2}(1 + \cos \theta) \quad (6.5/10)$$

Se na equação (6.5/10) for eliminada a vazão Q_1 , com ajuda da equação (6.5/2), o resultado final é:

$$Q_3 = \frac{Q_m}{2}(1 - \cos \theta) \quad (6.5/11)$$

A profundidade y_1 do escoamento que segue para jusante com o impacto do jato, pode ser calculada como a seguir.

Aplica-se a equação de Bernoulli (Primeira Lei da Termodinâmica) da seção onde está a profundidade crítica, no patamar superior, até a seção (1), no início do ressalto.

$$\Delta Z_0 + y_c + \frac{v_c^2}{2g} = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} + k \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.5/12)$$

Onde a última parcela representa a perda e carga no trecho em análise.

Sabendo-se que:

$$\frac{v_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \quad (\text{Froude igual a } 1) \quad (6.5/13)$$

A equação (6.5/12) pode ser reescrita como:

$$\Delta Z_0 + \frac{3}{2}y_c = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}(1+k)$$

ou

$$\frac{\Delta Z_0}{y_c} + \frac{3}{2} = \frac{y_1}{y_c} + \frac{v_1^2}{2gy_c}(1+k) \quad (6.5/14)$$

Pela conservação de massa tem-se que

$$v_1 y_1 = v_c y_c$$

ou

$$v_1^2 = v_c^2 \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^2 \quad (6.5/15)$$

Substituindo-se em (6.5/14):

$$\frac{\Delta Z_0}{y_c} + \frac{3}{2} = \frac{y_1}{y_c} + \frac{v_c^2}{2gy_c} \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^2 (1+k) \quad (6.5/16)$$

Usando-se a equação (6.5/13) para eliminar o termo cinético da equação (6.5/16), obtém-se:

$$\frac{\Delta Z_0}{y_c} + \frac{3}{2} = \frac{y_1}{y_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^2 (1+k) \quad (6.5/17)$$

A equação (6.5/17) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{y_1}{y_c} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}} \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c} + \frac{3}{2} - \frac{y_1}{y_c}}} \quad (6.5/18)$$

Admitindo-se que:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (6.5/19)$$

Obtém-se finalmente:

$$\frac{y_1}{y_c} = \frac{1}{\phi\sqrt{2} \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c} + \frac{3}{2} - \frac{y_1}{y_c}}} \quad (6.5/20)$$

Esta equação nos permite obter o valor de y_1 conhecendo-se a vazão (Q) e a altura de queda (ΔZ_0).

ÂNGULO DE INCIDÊNCIA

Para a obtenção do ângulo de incidência do jato (θ), analisa-se a queda livre como um lançamento balístico com velocidade inicial na horizontal e obtém-se (Figura 6.5/2):

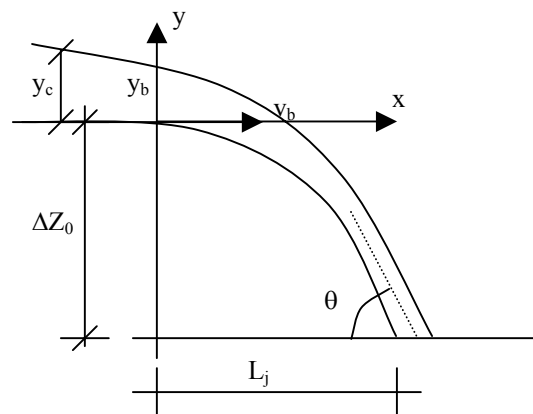


Figura 6.5/2 – Ângulo de Incidência (θ).

$$x = v_b \cdot t \quad (6.5/21)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (6.5/22)$$

Eliminando t entre as equações (6.5/21) e (6.5/22), tem-se:

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_b}\right)^2 \quad (6.5/23)$$

Para $x = L_j$, $y = -\Delta Z_0$, logo, pela equação (6.5/23), obtém-se:

$$L_j = v_b \sqrt{\frac{2\Delta Z_0}{g}} \quad (6.5/24)$$

Da equação (6.5/23), por derivação obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = -g \frac{x}{v_b^2} \quad (6.5/25)$$

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L_j} = -\frac{g}{v_b^2} \cdot v_b \sqrt{\frac{2\Delta Z_0}{g}} \quad (6.5/26)$$

$$|\tan \theta| = \frac{\sqrt{2g\Delta Z_0}}{v_b} = \frac{\sqrt{2g\Delta Z_0}}{v_b} \left(\frac{y_b}{y_b} \right) \quad (6.5/27)$$

Como $v_b y_b = q$ e $y_b = 0,716 y_c$, a Equação (6.5/27) pode ser escrita na forma

$$|\tan \theta| = \frac{\sqrt{2g\Delta Z_0}}{q} \cdot (0,715 y_c) \quad (6.5/28)$$

Sendo $q = \sqrt{g y_c^3}$, pode-se reescrever a Equação (6.5/28) como:

$$|\tan \theta| = \sqrt{\frac{2g\Delta Z_0 y_c^2 (0,715)^2}{g y_c^3}} \quad (6.5/29)$$

Ou mais simplificadamente como:

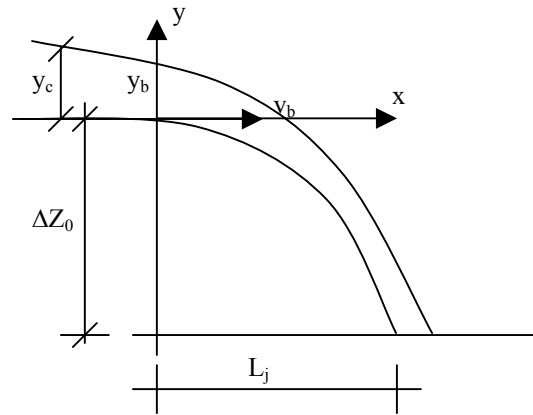
$$\boxed{|\tan \theta| = 1,01 \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c}}} \quad (6.5/30)$$

Ou

$$\boxed{\cos \theta = \cos \left[\arctan \left(1,01 \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c}} \right) \right]} \quad (6.5/31)$$

A equação (6.5/31) permite a determinação do ângulo de incidência (θ), a partir do conhecimento da altura de queda (degrau) (ΔZ_0) e da profundidade crítica (y_c).

ALCANCE DO JATO

Figura 6.5/3 – Alcance do jato (L_j).

Aplicando-se a conservação de massa a um volume de controle delimitado pelas seções onde ocorre a profundidade crítica e a terminal (Figura 6.5/3), tem-se:

$$v_c y_c = v_b y_b \quad (6.5/32)$$

Como $y_b = 0,715y_c$, tem-se:

$$v_c y_c = v_b (0,715)y_c \quad (6.5/33)$$

$$v_b = \frac{1}{0,715} v_c \quad (6.5/34)$$

Analisando-se a queda livre como um lançamento balístico com velocidade inicial na horizontal, obtém-se:

$$x = v_b \cdot t \quad (6.5/35)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (6.5/36)$$

Eliminando t entre as equações (6.5/35) e (6.5/36), tem-se:

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_b}\right)^2 \quad (6.5/37)$$

Para $x = L_j$, $y = -\Delta Z_0$, logo, pela equação (6.5/37), obtém-se:

$$-\Delta Z_0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{L_j}{v_b}\right)^2 \quad (6.5/38)$$

$$\frac{2\Delta Z_0 v_b^2}{g} = L_j^2 \quad (6.5/39)$$

$$L_j = v_b \sqrt{\frac{2\Delta Z_0}{g}} = \left(\frac{1}{0,715}\right) v_c \sqrt{\frac{2\Delta Z_0}{g}} \quad (6.5/40)$$

$$L_j = \left(\frac{1}{0,715}\right) \sqrt{2\Delta Z_0 \left(\frac{v_c^2}{g}\right)} \quad (6.5/41)$$

$$L_j = \left(\frac{1}{0,715}\right) \sqrt{2\Delta Z_0 y_c} \quad (6.5/42)$$

$$\boxed{\frac{L_j}{y_c} = 2,0 \sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c}}} \quad (6.5/43)$$

Esta equação modela o alcance do jato (L_j) para valores conhecidos da altura de queda (ΔZ_0) e da profundidade crítica (y_c).

ALTURA DA SOLEIRA

O ressalto livre é sempre muito sensível a pequenas variações das condições hidráulicas. Para se garantir a fixação da posição do ressalto, faz-se necessária a adoção de uma pequena soleira, contínua ou com “dentes” isolados. A adoção da altura c desta soleira deve merecer uma confirmação laboratorial. Na tradição da literatura russa, o valor de c costuma ser especificado como 40% da profundidade crítica. Assim tem-se:

$$\boxed{\frac{c}{y_c} = 0,4} \quad (6.5/44)$$

PROFUNDIDADE CONJUGADA DE RESSALTO

O ressalto que deverá ser formado a jusante do impacto do jato livre pode ter suas profundidades conjugadas modeladas pela equação do ressalto clássico.

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^3} - 1 \right)} \quad (6.5/45)$$

COMPRIMENTO DO RESSALTO

O comprimento deste ressalto pode ser modelado pela fórmula proposta por Chertoussov (1935) apud Faktorovitch e Vedeneev (1965), com a seguinte expressão reformulada:

$$\boxed{\frac{L_r}{y_c} = 10,3 \left(\frac{y_1}{y_c} \right) \left[\left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]^{0,81}} \quad (6.5/46)$$

COMPRIMENTO DA BACIA

O comprimento L da bacia corresponde, então, ao alcance do jato (L_j) acrescido do comprimento (L_r) do ressalto, ou seja:

$$\boxed{L = L_j + L_r} \quad (6.5/47)$$

6.6 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO

A queda livre nas suas principais características pode ser modelada pelas equações 6.5/20, 6.5/30 ou 6.5/31, 6.5/43, 6.5/44, 6.5/45, 6.5/46 e 6.5/47.

Na Equação (6.5/20), a altura de queda (ΔZ_0) é sempre, ou quase sempre, maior que y_1 , isso faz com que o radical englobando ΔZ_0 no segundo membro desta equação dê valores sempre positivos.

A fórmula (6.5/30) ou (6.5/31) mostra que para uma fixada profundidade crítica (y_c), a $\tan \theta$ aumenta com o aumento da altura ΔZ_0 e de modo proporcional a $\sqrt{\frac{\Delta Z_0}{y_c}}$.

A expressão (6.5/43) revela o fato do alcance do jato variar proporcionalmente a média harmônica entre a altura de queda (ΔZ_0) e a profundidade crítica (y_c) o que é compatível com a trajetória parabólica.

Nada a comentar sobre a altura da soleira (c) que adota $0,4 y_c$ (Equação 6.5/44).

A expressão (6.5/45) é a equação das profundidades conjugadas do ressalto clássico (livre, fundo horizontal e seção retangular) e como o próprio nome indica trata-se de um resultado “clássico” e consagrado.

Nada a comentar sobre o comprimento da bacia (L), que é a soma do alcance do jato (L_j) e o comprimento do ressalto (L_r) (Equação 6.5/46).

6.7 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo utilizaremos exemplos com os seguintes dados:

- Q (m^3/s);
- ΔZ_0 (m);
- Largura do canal = 1 m.

Tabela 6.7/1 – Cálculos utilizando a formulação nova ($k = 0,10$)

Q	ΔZ_0	y_c	$\Delta Z_0 / y_c$	φ	y_1 / y_c	θ	L_f / y_c	c	y_2 / y_1	L_f / y_c	L
m^3/s	m	(m)	(-)	(-)	(-)	(grau)	(-)	(m)	(-)	(-)	(m)
4.822	2.000	1.333	1.500	0.953	0.466	51.080	2.422	0.533	3.976	8.903	15.101
3.132	2.000	1.000	2.000	0.953	0.423	55.035	2.797	0.400	4.669	9.553	12.351
2.241	2.000	0.800	2.500	0.953	0.390	57.975	3.127	0.320	5.320	10.054	10.545
1.705	2.000	0.667	3.000	0.953	0.365	60.275	3.426	0.267	5.941	10.460	9.257
1.353	2.000	0.571	3.500	0.953	0.344	62.138	3.700	0.229	6.537	10.800	8.286
1.107	2.000	0.500	4.000	0.953	0.326	63.689	3.956	0.200	7.113	11.092	7.524
0.928	2.000	0.444	4.500	0.953	0.311	65.005	4.196	0.178	7.672	11.348	6.909
0.792	2.000	0.400	5.000	0.953	0.298	66.141	4.423	0.160	8.217	11.576	6.400
0.280	2.000	0.200	10.000	0.953	0.221	72.634	6.255	0.080	13.138	13.042	3.859

Tabela 6.7/2 – Comparação de y_1 / y_c ($k = 0,10$)

Q	ΔZ_0	y_c	$y_c / \Delta Z_0$	Atual	Bakmeteff	Moore	Rand	Henderson	Gill	Chanson
				y_1 / y_c						
m^3/s	m	(m)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
4.822	2.000	1.333	0.667	0.466	0.442	0.507	0.483	0.507	0.466	0.367
3.132	2.000	1.000	0.500	0.423	0.402	0.483	0.446	0.483	0.429	0.354
2.241	2.000	0.800	0.400	0.390	0.371	0.462	0.420	0.462	0.403	0.343
1.705	2.000	0.667	0.333	0.365	0.347	0.445	0.399	0.445	0.382	0.333
1.353	2.000	0.571	0.286	0.344	0.327	0.429	0.383	0.429	0.366	0.325
1.107	2.000	0.500	0.250	0.326	0.310	0.415	0.369	0.415	0.352	0.317
0.928	2.000	0.444	0.222	0.311	0.296	0.403	0.357	0.403	0.340	0.309
0.792	2.000	0.400	0.200	0.298	0.284	0.392	0.347	0.392	0.330	0.303
0.280	2.000	0.200	0.100	0.221	0.211	0.318	0.287	0.318	0.269	0.257

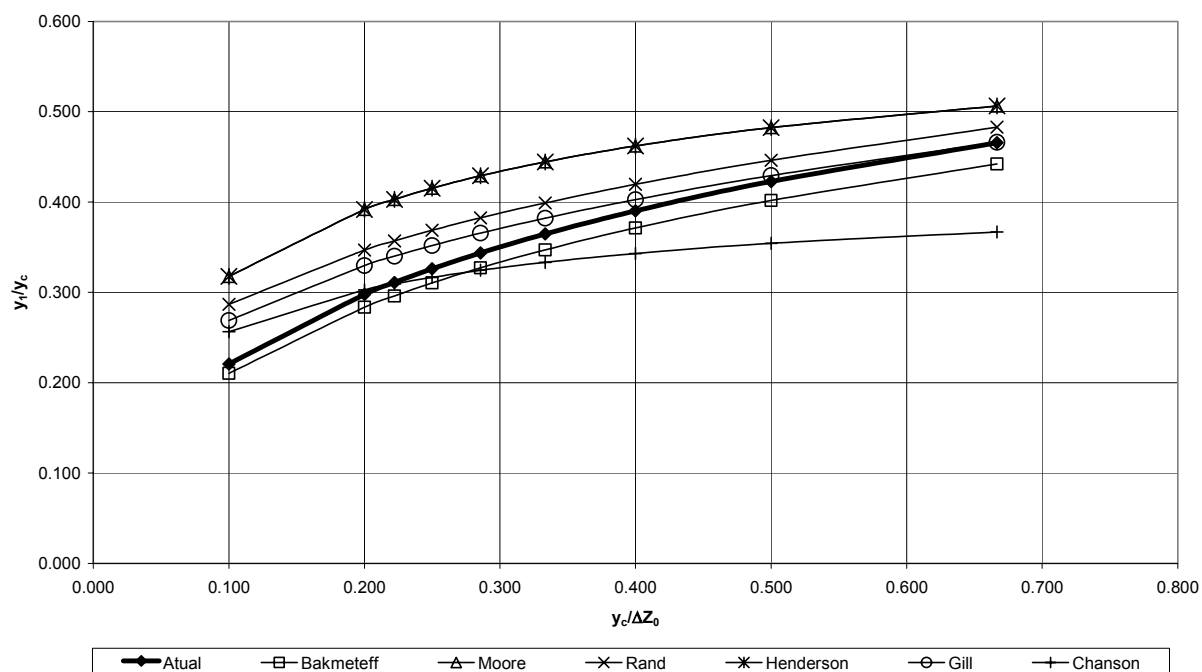


Figura 6.7/1 – Variação de y_1 / y_c em função de $y_c / \Delta Z_0$.

Tabela 6.7/3 – Comparação de y_2 / y_1 ($k = 0,10$)

Q	ΔZ_0	y_c	$y_c / \Delta Z_0$	Atual	Bakmeteff	Moore	Rand	Henderson	Chanson
				y_2 / y_1					
m ³ /s	m	(m)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
4.822	2.000	1.333	0.667	3.976	4.334	3.455	3.712	3.540	5.880
3.132	2.000	1.000	0.500	4.669	5.074	3.749	4.243	3.924	6.226
2.241	2.000	0.800	0.400	5.320	5.771	4.029	4.707	4.275	6.553
1.705	2.000	0.667	0.333	5.941	6.435	4.298	5.124	4.601	6.865
1.353	2.000	0.571	0.286	6.537	7.073	4.557	5.504	4.909	7.165
1.107	2.000	0.500	0.250	7.113	7.690	4.808	5.857	5.201	7.453
0.928	2.000	0.444	0.222	7.672	8.289	5.051	6.187	5.482	7.733
0.792	2.000	0.400	0.200	8.217	8.873	5.288	6.497	5.752	8.003
0.280	2.000	0.200	0.100	13.138	14.151	7.413	8.968	8.092	10.395

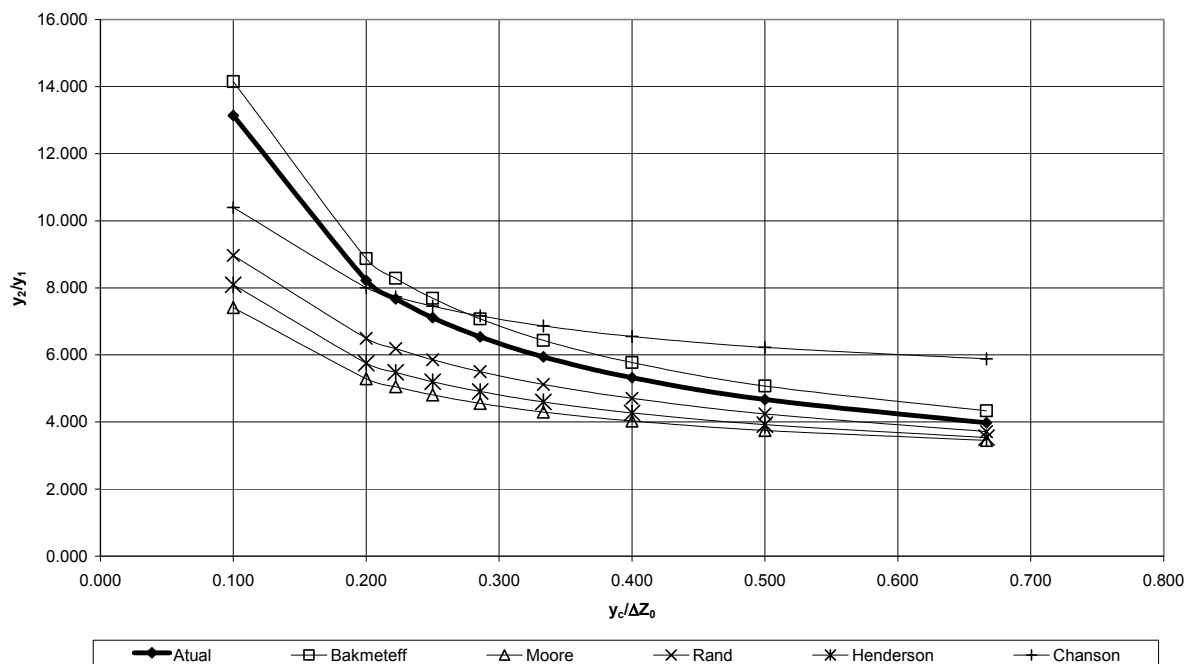


Figura 6.7/2 – Variação de y_2 / y_1 em função de $y_c / \Delta Z_0$.

Tabela 6.7/4 – Diferenças percentuais entre o trabalho atual e Rand (1955)

Atual	Rand	Diferença
y_1 / y_c		
(-)	(-)	(-)
0.466	0.483	4%
0.423	0.446	6%
0.390	0.420	8%
0.365	0.399	9%
0.344	0.383	11%
0.326	0.369	13%
0.311	0.357	15%
0.298	0.347	16%
0.221	0.287	30%

Atual	Rand	Diferença
y_2 / y_1		
(-)	(-)	(-)
3.976	3.712	7%
4.669	4.243	9%
5.320	4.707	12%
5.941	5.124	14%
6.537	5.504	16%
7.113	5.857	18%
7.672	6.187	19%
8.217	6.497	21%
13.138	8.968	32%

Se for feita a variação do coeficiente de perda de carga (k), tem-se:

Tabela 6.7/5 – Cálculos utilizando a formulação nova com variação de (k)

Q	ΔZ_0	y_c	k	ϕ	y_1 / y_c	θ	L_j / y_c	c	y_2 / y_1	L_r / y_c	L
m^3/s	m	(m)	(-)	(-)	(-)	(grau)	(-)	(m)	(-)	(-)	(m)
4.822	2.000	1.333	0.175	0.923	0.483	51.080	2.422	0.533	3.741	8.646	14.758
3.132	2.000	1.000	0.215	0.907	0.446	55.035	2.797	0.400	4.274	9.201	11.998
2.241	2.000	0.800	0.265	0.889	0.420	57.975	3.127	0.320	4.713	9.590	10.174
1.705	2.000	0.667	0.305	0.875	0.399	60.275	3.426	0.267	5.136	9.921	8.898
1.353	2.000	0.571	0.355	0.859	0.383	62.138	3.700	0.229	5.486	10.168	7.925
1.107	2.000	0.500	0.400	0.845	0.369	63.689	3.956	0.200	5.819	10.385	7.170
0.928	2.000	0.444	0.440	0.833	0.357	65.005	4.196	0.178	6.143	10.580	6.567
0.792	2.000	0.400	0.480	0.822	0.347	66.141	4.423	0.160	6.443	10.749	6.069
0.280	2.000	0.200	0.850	0.735	0.287	72.634	6.255	0.080	8.701	11.763	3.604

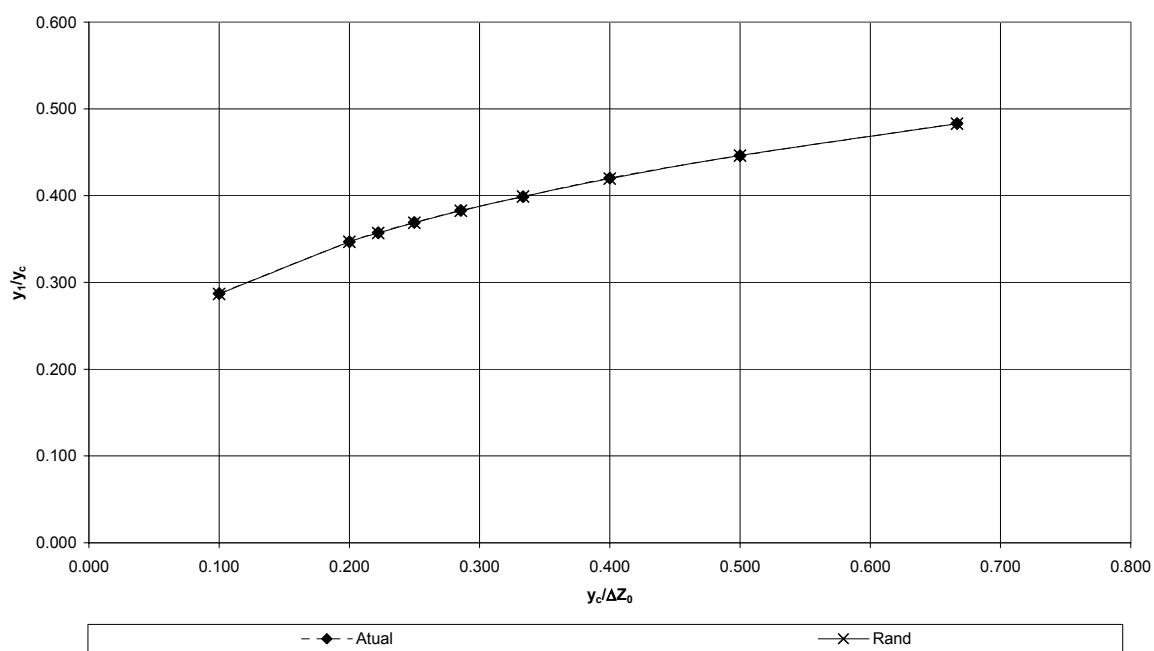


Figura 6.7/3 – Comparação da variação de y_1 / y_c em função de $y_c / \Delta Z_0$ entre o trabalho atual e Rand (1955).

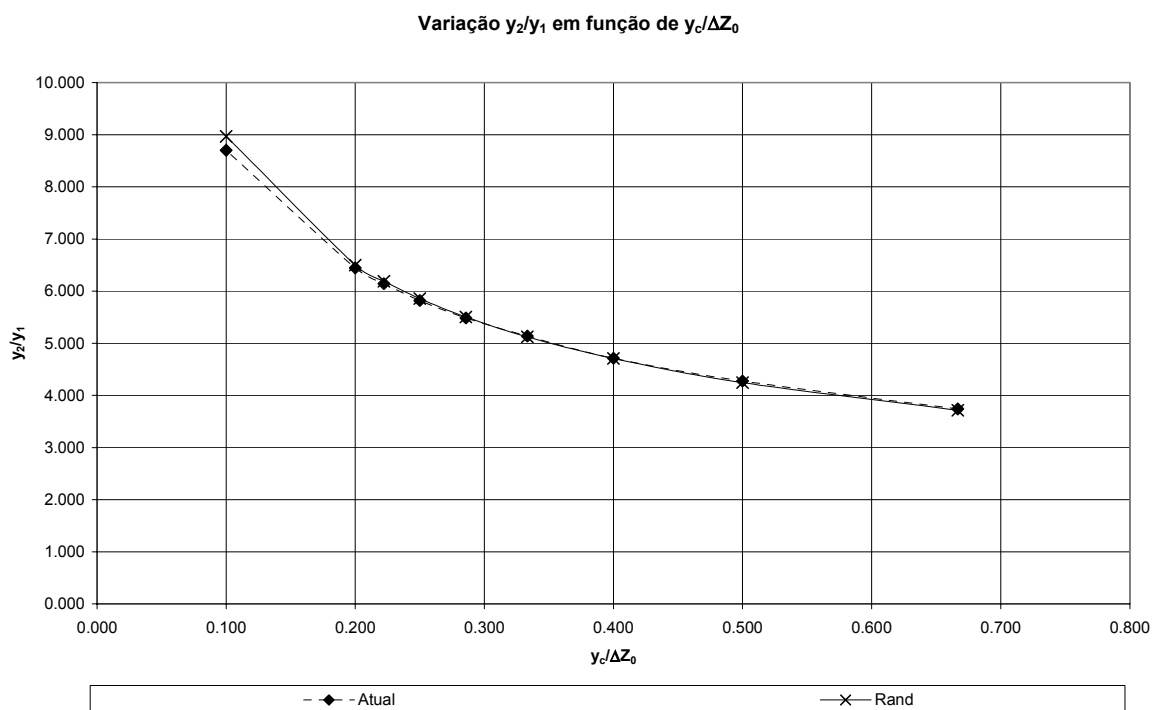


Figura 6.7/4 – Comparação da variação de y_2 / y_1 em função de $y_c / \Delta Z_0$ entre o trabalho atual e Rand (1955).

7. DISCUSSÃO

Os resultados obtidos pela aplicação das equações propostas por Rand (1955) podem ser considerados experimentais, pois tais equações foram obtidas por técnicas de ajustes a dados experimentais.

As diferenças obtidas, quando da comparação do presente modelo com os obtidos pela aplicação de Rand (1955), podem ser atribuídas à existência de perda de carga no trajeto do jato. No caso de Rand (1955) estas perdas estão intrinsecamente consideradas, enquanto na atual proposta elas são consideradas pela adoção do valor k (coeficiente de perda de carga localizada).

Para o valor de $k = 0,10$ (Tabela 6.7/4) as diferenças podem atingir até 32%, comparando-se

$\frac{y_1}{y_c}$ e $\frac{y_2}{y_1}$. Se fizermos o valor de k variando de 0,175 a 0,850 essas diferenças são mínimas,

o que mostra a validade e coerência deste modelo.

8. CONCLUSÕES

Este trabalho resgatou os mais importantes “modelos” propostos para o escoamento em queda livre em hidráulica. O mais clássico de todos os trabalhos analisados é, certamente, o modelo proposto por Rand (1955) em forma de equações empíricas ajustadas a dados experimentais.

Como contribuição primordial deste trabalho, considera-se o modelo conceitual de queda livre, em seus mais diferentes aspectos, desenvolvido com base nos princípios da física que norteiam o desenvolvimento da mecânica dos fluidos: Conservação da Massa; Quantidade de Movimento; Primeira Lei da Termodinâmica.

O modelo proposto requer apenas o conhecimento da vazão específica (q) e da altura de queda (ΔZ_0) e permite a determinação em seqüência: a profundidade crítica (y_c); a profundidade (y_1) a jusante do impacto do jato; o ângulo de incidência (θ) do jato; o alcance do jato (L_j); e quando se considera a existência de um ressalto clássico a jusante o impacto do jato, pode-se também determinar a profundidade conjugada fluvial do ressalto (y_2), o comprimento do “*roller*” do ressalto (L_r).

As principais equações que fazem parte do presente modelo apresentam consistência matemática.

O modelo proposto foi validado em comparação com outras propostas da literatura, com ênfase principalmente, na comparação com o modelo de Rand (1955). A presente proposta

fornece resultados muito próximos dos resultados de Rand (1955) pela adoção apropriada de valores do coeficiente de perda de carga (k) presente no modelo.

Por tratar-se de um modelo de equacionamento desenvolvido com base em princípios da física, com um mínimo de hipóteses simplificadoras, analisado do ponto de vista de consistência, submetido à validação, conclui-se ser uma proposta que deverá melhorar a confiabilidade para aplicações de engenharia.

9. RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Espera-se que esses resultados sejam melhor explorados para dissipação de energia em seqüência de cascatas, que é o mais comum na natureza, pois acresce a aeração do jato.

No modelo proposto, apenas o coeficiente de perda de carga (k) do jato resta como parâmetro de simulação, envolvendo um certo grau de incerteza, razão esta que sinaliza a necessidade de futuros ensaios laboratoriais e de campo para que se tenha maior confiabilidade na aplicação deste modelo.

A equação que permite a determinação da profundidade da piscina não consta do texto original desta dissertação, por ter sido deduzida em data posterior à entrega do trabalho na

Secretaria de Pós-graduação. Esta equação corresponde a $\frac{y_3}{y_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3 \left[2 - 3\left(\frac{y_1}{y_c}\right)\right]}$, foi

mostrada durante a exposição oral e recomenda-se que ela seja validade em futuras pesquisas.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANNANDALE, G.W. **Erodibility**. Journal of Hydraulics Research, Vol. 33, nº 4, 1995.p. 471-494.

BAKHMETEFF, B. A. **Hydraulics of open channels**. New York : McGraw Hill, 1932. 329 p.

BAUER, S.W; GRAF, W.H. **Free overfall as flow measuring device**. Journal of the irrigation and drainage division, Proceedings, ASCE, Vol. 797, N° IR1, 1971. p. 73-83.

CHAMANI, M.R.; BEIRAMI, M.K. **Flow characteristics at drops**. Journal of Hydraulics Engineering, Vol. 108, N° 8, 2002. p. 788-791.

CHANSON, H. **Hydraulic design of stepped cascades, channels, weirs and spillways**. Oxford: Elsevier Science Ltd;1994. 261 p.

____. **The hydraulics of open channel flow – a introduction**. Osford: Butterworth-Heinemann; 2001. 495 p.

____. **An experimental study of Roman dropshaft hydraulics**. Journal of Hydraulics Research, Vol. 40, N° 1, 2002. p. 3-12.

CHOW, N. T. **Open-channel hydraulics**. Tokyo: McGraw-Hill; 1959. 680 p.

DELLEUR, J.W.; DOOGE, J.C.I.; GENT, K.W. Influence of Slope and Roughness on the free overfall. In ROUSE, H. **Seven exploratory studies in hydraulics**. Journal of the Hydraulics Division, Proceedings, ASCE, Vol. 82, paper N° 1038, N° HY4, 1956. p. 30-35.

DOMINGUEZ, F.X. **Hidráulica**. Chile: Editorial Universitaria, 1974. 773 p.

FAKTOROVITCH, M. E.; VEDENEEV, B. E. **Energy dissipation in process of international of impinging flows**. Proceedings, IAHR, XI Congress, Leningrad, Vol. I, paper N° 151, 1965.

FATHY, A.; AMIN, M. S. **Hydraulics of the free overfall**. Journal of the Hydraulics Division, Proceedings, ASCE, Vol. 80, separate N° 564, December 1954. p. 1-12.

FRENCH, R.H. **Open-Channel Hydraulics**. New York : McGraw Hill, 1986. 706 p.

GILL, M.A. **Hydraulics of rectangular vertical drop structures**. Journal of Hydraulics Reseach, Vol. 17, N° 4, 1979. p. 289-302.

HENDERSON, F. M. **Open channel flow**. New York: Macmillan; 1966. 522 p.

KRAIJENHOFF, D.A.; DOMMERHOLT, A. **Brink depth method in rectangular channel**. Journal of the Irrigation and Drainage Division, Vol. 103, N° IR2, 1977. p. 171-177.

MONTES, S. **Hydraulics of open channel flow**. Reston: ASCE Press; 1998. 697 p.

MOORE, W. L. **Energy Loss at the base of a free overfall.** Journal of the Hydraulics Division, Transactions, ASCE, Vol. 108, paper N° 2204, 1943. p. 1343-1392.

RAND, W. **Flow geometry at straight drop spillways.** Journal of the Hydraulics Division, Proceedings, ASCE, Vol. 81, paper N° 791, 1955. p. 1-13.

RAJARATNAM, N.; CHAMANI, M.R. **Energy loss at drops.** Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, N° 3, 1995. p.373-384.

RAJARATNAM, N.; MURALIDHAR, D. **Characteristics of the rectangular free overfall.** Journal of Hydraulic Research, N° 3, 1968. p.233-258.

RAJARATNAM, N.; MURALIDHAR, D.; BELTAOS, S. **Roughness effects on rectangular free overfall.** Journal of Hydraulic Division, Proceedings, ASCE, Vol. 102, N° HY5, 1976. p.599-614.

ROUSE, H. **Discharge characteristics of the free overfall.** Civil Engineering, Vol. 6, N° 4, April 1936. p. 257-260.

SMITH, C.D. **Brink depth for a circular channel.** Journal of the Hydraulics Division, Proceedings, ASCE, paper N° 3327, N° HY6, 1962. p. 125-144.

SUBRAMANYA, K.; MURTHY, K.K. **End depth in a trapezoidal overfall.** Journal of The Institution of Engineers, Vol. 67, part CI6, 1987. p. 343-346.

UNITED STATES DEPARTMENT OF THE INTERIOR. Bureau of reclamation. **Design of small daws.** A water resources technical publication. Third edition, 1987. p. 352-354.

WHITE, M. P. et al. Discussion. In MOORE, W.L. **Energy Loss at the base of a free overfall.** Journal of the Hydraulics Division, Transactions, ASCE, Vol. 108, paper N° 2204, 1943. p. 1343-1392.