

JOSE MIGUEL BRASSEA VILLARROEL

Engenheiro Civil - Universidad de Chile

DISPERSÃO DE EFLUENTES NO OCEANO

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
1992

JOSE MIGUEL BRASSEA VILLARROEL

Engenheiro Civil - Universidad de Chile

Nº USP 1586798

DISPERSÃO DE EFLUENTES NO OCEANO

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração :
Engenharia Hidráulica

Orientador :
Prof. Dr. Sérgio Eiger
Nº Func. 553581

São Paulo
1992

DEDICATÓRIA

A minha esposa Gabriela e a meus filhos
Tatiana, Miguel e Vania pelo incentivo
e permanente estímulo e compreensão.

RECONHECIMENTOS

Aos amigos e orientadores Profs. Dr Sergio Eiger e Dr. Podalyro Amaral de Souza pelas diretrizes seguras e permanente incentivo.

Ao Prof. Dr Antonio Garcia Occhipinti pela oportunidade de compartilhar de numerosos estudos e projetos na área de Emissários Submarinos ao longo das duas últimas décadas.

SUMÁRIO

Lista de tabelas	
Lista de figuras	
Lista de símbolos	
Resumo	
"Abstract"	
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DA LITERATURA	8
3 DESCRIÇÃO FÍSICA DA DISPERSÃO	12
3.1 Características do fenômeno	12
3.2 Classificação básica	18
3.3 Fatores intervenientes	21
4 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA DISPERSÃO	26
4.1 Modelos teóricos	26
4.1.1 Difusão molecular	26
4.1.2 Difusão molecular com advecção	28
4.1.3 Difusão turbulenta	29
4.1.4 Dispersão	31
4.1.5 Soluções teóricas	33
4.1.5.1 Solução da equação de difusão molecular	33

4.1.5.1.1 Equação unidirecional	33
4.1.5.1.2 Equação em duas e três dimensões	44
4.1.5.2 Solução da equação da difusão advectiva	46
4.1.5.3 Solução da equação da dispersão	47
4.1.5.4 Determinação do coeficiente de dispersão	48
4.1.5.5 Solução da dispersão ou diluição inicial por análise integral	52
4.1.6 Discussão	64
4.2 Modelos físicos de diluição inicial	65
4.2.1 Conceitos básicos aplicados aos modelos físicos de diluição inicial	65
4.2.2 Diluição inicial em meio homogêneo estagnado	67
4.2.3 Diluição inicial em meio estratificado estagnado	73
4.2.4 Diluição inicial em meio homogêneo advectivo	77
4.2.5 Diluição inicial em meio estratificado advectivo	81
4.3 Modelos de misturação	90
4.3.1 Modelo de BROOKS	90
4.3.2 Modelo de CHIN e ROBERTS (1982,1985)	96
4.3.3 Modelo de TORO (1991)	97
4.3.4 Análise geral	98
5 SISTEMAS DE LANÇAMENTO DE EFLUENTES AO MAR	99
5.1 Elementos principais	99
5.2 - Parâmetros Básicos	101

6	ANÁLISE DE UM CASO	102
6.1	Características principais	102
6.2	Avaliação da diluição inicial	103
6.3	Avaliação da misturação	105
6.4	Discussão	105
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	107
7.1	Conclusões	107
7.2	Recomendações	109
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111

Lista de tabelas

Número		Página
4.1.1	Erf (x/σ) e integral da concentração C em função de x/σ .	38
4.1.2	Equacionamento dos jatos e plumas circulares. JIRKA et al (1986)	58
4.1.3	Coefficientes dos jatos e plumas circulares. JIRKA et al (1986)	59
4.1.4	Equacionamento dos jatos e plumas bidimensionais. JIRKA et al (1986)	61
4.1.6	Coefficientes do jatos e plumas bidimensionais. JIRKA et al (1986)	62
4.3.1	Larguras de campo	77
5.1	Diluição inicial mínima	104

Lista de figuras

Número		Página
1.1	Efluentes - Lançamento na praia (Jato horizontal e superficial com baixa dispersão).	2
1.2	Efluentes - Lançamento perto da praia e no fundo do mar (Jato horizontal e no fundo do mar, a pouca distância da praia com dispersão regular).	3
1.3	Efluentes - Lançamento mais longe da praia e no fundo do mar (Jato horizontal e no fundo do mar, longe da praia com dispersão mais que regular).	4
1.4	Efluentes - Lançamento longe da praia, no fundo do mar e com jatos múltiplos (Jatos múltiplos horizontais no fundo do mar com boa dispersão).	5
3.1	Descarga única e descarga múltipla	13
3.2	Tipos de jatos - para efluente mais denso, igual ou mais leve que o corpo receptor.	16
3.3	Casos básicos (jatos horizontais) Escoamento em meio :	19
3.4	Fatores que intervêm na dispersão	25
4.1.1	Concentração - Distribuição gaussiana	35
4.1.2	Concentração - Distribuição normal $f(x/\sigma)$	37

4.1.3	F(x) como série de contribuições com massa $f(\xi)d\xi$.	40
4.1.4	Caso particular com $f(x) = 0$ Distribuição espacial no início igual zero	41
4.1.5	Concentração como função do tempo	43
4.1.6	Croquis de dispersão de GUNERSON	51
4.1.7	Coeficiente de dispersão de ORLOB	51
4.1.8	Jato puro isolado	53
4.1.9	Pluma pura isolada	56
4.2.1	Jatos isolados boiantes em meio homogêneo estagnado	67
4.2.2	Diluição em jatos isolados boiantes em meio homogêneo estagnado ROBERTS (1977)	68
4.2.3	Jatos lineares boiantes em meio homogêneo estagnado	69
4.2.4	Diluição em jatos lineares boiantes em meio homogêneo estagnado LISETH (1976) reaproveitado por ROBERTS (1977)	70
4.2.5	Jatos isolados em meio estratificado estagnado	73
4.2.6	Jatos lineares em meio estratificado estagnado	75
4.2.7	Jatos isolados boiantes em meio homogêneo advectivo	77
4.2.8	Jatos lineares boiantes em meio homogêneo advectivo	78

4.2.9	Diluição mínima de jatos lineares em meio homogêneo advectivo	ROBERTS (1977)	80
4.2.10	Jatos isolados em meio estratificado advectivo		81
4.2.11	Jatos lineares em meio estratificado advectivo		83
4.2.12	Diluição inicial em Plumas lineares em meio estratificado advectivo	ROBERTS (1989)	85
4.2.13	Diluição média / diluição mínima Vs F	ROBERTS (1989)	86
4.2.14	Coeficientes z_e/l_b , h_e/l_b , z_m/l_b Vs F	ROBERTS (1989)	87
4.3.1	Curva de dispersão de ORLOB		91
4.3.2	Dispersão em campo horizontal bidimensional		92
4.3.3	Dispersão horizontal - Harremoes		95
5.1	Croquis de sistemas de lançamento de efluentes ao mar		99

lista de simbolos

A	Área do orifício
B	Boiância total
B	Fluxo de boiância em jatos isolados
b	Boiância unitária
b	Fluxo de boiância por unidade de comprimento de difusor
b	Largura do campo
C	Concentração
C ₀	Concentração inicial
D	Coefficiente de difusão molecular
D _x	Coefficiente de difusão na direção x
D _y	Coefficiente de difusão na direção y
D _z	Coefficiente de difusão na direção z
D	Diâmetro do difusor
D _e	Diâmetro do jato
D _o	Diâmetro do orifício
ε_x	Coefficiente de difusão turbulenta na direção x
ε_y	Coefficiente de difusão turbulenta na direção y
ε_z	Coefficiente de difusão turbulenta na direção z
F	Número de Froude de correntes igual U^3/b
F _o	Número de Froude de orifício
F _e	Número de Froude de jato
F ℓ_j	Número de Froude de equilibrio

$F\ell_p$	Número de Froude de equilíbrio
g	Aceleração de gravidade
g'	Aceleração aparente igual a $\frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} g$
g'_o	Aceleração aparente inicial igual a $\frac{\rho_a - \rho_o}{\rho_a} g$
g'_c	Aceleração aparente no eixo
H	Profundidade
h_s	Espessura do campo
K	Coefficiente de dispersão
K_j	Coefficiente de expansão
L	Comprimento do difusor
l_a	Escala de vazão total
l_q	Escala de vazão unitária
l_M	Escala de momentum total
l_m	Escala de momentum unitário
l_B	Escala de boiância total
l_b	Escala de boiância unitária
M	Massa total
M	Momentum do jato isolado
M	Fluxo de momentum de jato isolado
m	Momentum unitário
m	Fluxo de momentum por unidade de comprimento do difusor
N	Frequência de boiância
Q	Vazão total
Q	Fluxo de volume total

Q_c	Fluxo de massa
q	Vazão unitária
q	Vazão específica por unidade de comprimento
q_0	Vazão por orifício
S	Diluição inicial
S_0	Diluição inicial de jato isolado
S_m	Diluição inicial mínima no eixo do jato
S_a	Diluição inicial média
s	Espaçamento entre orifícios
u	Velocidade da corrente na direção x
v	Velocidade da corrente na direção y
w	Velocidade da corrente na direção z
u_c	Velocidade no eixo
v_e	Velocidade de entrada ao jato
t	Tempo
u_j	Velocidade do jato na saída do orifício
s	Coordenada axial
r	Coordenada radial
x, y, z	Coordenadas cartesianas
z_m	Altura do nível médio do campo
z_e	Altura do nível máximo (topo) do campo
σ	Desvio padrão igual a \sqrt{zDt}
σ_x	Desvio padrão na direção x
σ_y	Desvio padrão na direção y
σ_z	Desvio padrão na direção z
$\text{erf } x$	Função erro em x

- $\Delta\rho_0$ Diferença de densidade inicial efluente-água do mar
- θ Ângulo do eixo difusor em relação às correntes
- ρ Massa específica da mistura no local
- ρ_a Massa específica da água do mar
- ρ_e Massa específica do efluente
- ρ_r Massa específica do corpo receptor
- ν Viscosidade cinemática

RESUMO

A permanente contaminação das águas litorâneas por resíduos domésticos e industriais, exigem um melhor conhecimento dos fenômenos de dispersão no mar e dos sistemas de lançamento dos efluentes em seu seio.

A orientação deste trabalho é a de fornecer subsídios ao conhecimento e equacionamento dos fenômenos de transporte de massa ou de poluentes no mar.

Os fenômenos de dispersão no mar apresentam duas formas básicas chamadas :
a) misturação ou dispersão horizontal, com características naturais.
b) diluição inicial, com características forçadas por técnicas que aproveitam as diferenças de massa específica e momentum.

No desenvolvimento deste trabalho são mostradas as características da dispersão, seus conceitos básicos e os fatores que intervêm.

São mostradas as características e conceitos básicos dos modelos físicos de diluição inicial e dos modelos de misturação, incluindo análise e discussão dos diferentes casos.

É mostrada a importância da diluição inicial em relação à misturação e se indicam os casos típicos de diluição inicial, incluindo a modelagem matemática e o desenvolvimento da análise dimensional.

ABSTRACT

The permanent contamination of the littoral water by domestic and industrial residue claims a better knowledge of the ocean sewage dispersion and the ocean waste disposal system.

This work is oriented to provide subsidy for the knowledge of the ocean mass transport phenomena and pollution.

The ocean dispersion phenomena present two basic forms :

- a) the horizontal mixing or horizontal dispersion with the natural characteristics.
- b) the initial dilution with the forced characteristics for the density difference and momentum techniques.

In the development of this work is shown the dispersion characteristic, its basic concept and the intervenient factors.

The basic concept and characteristics of the initial dilution and the horizontal dispersion physical models, with analysis and dicussion for the different case are presented.

The initial dilution significance with regard to the horizontal dispersion and the initial dilution typical case with the mathematical models and the development of the dimensional analysis are included.

1.- INTRODUÇÃO

A crescente contaminação das praias e áreas litorâneas por resíduos domésticos e industriais lançados ao mar de forma totalmente inadequada, a utilização ostensiva das praias pela população permanente e flutuante, para lazer e recreação e o aumento das doenças de veiculação hídrica nessas áreas, justificam um melhor conhecimento dos fenômenos de dispersão no mar e dos processos que os utilizam.

O conhecimento dos fenômenos de dispersão no oceano, tem permitido o lançamento dos efluentes neste corpo receptor de maneira cada vez mais racional.

Inicialmente, como infelizmente acontece até agora em numerosas cidades litorâneas, em especial nos países em desenvolvimento, os efluentes tem sido lançados nas orlas litorâneas, da mesma forma como são lançados nos córregos, rios e lagoas, contaminando as águas nesses locais. Figura 1.1

Posteriormente, aproveitando as condições de dispersão, os efluentes passaram a ser lançados a certa distância das praias e no fundo do mar, no caso dos esgotos, de modo a obter uma dispersão ou diluição inicial mais eficiente, em função da diferença de densidade dos esgotos e da água do mar e do momentum do jato. Figuras 1.2 e 1.3

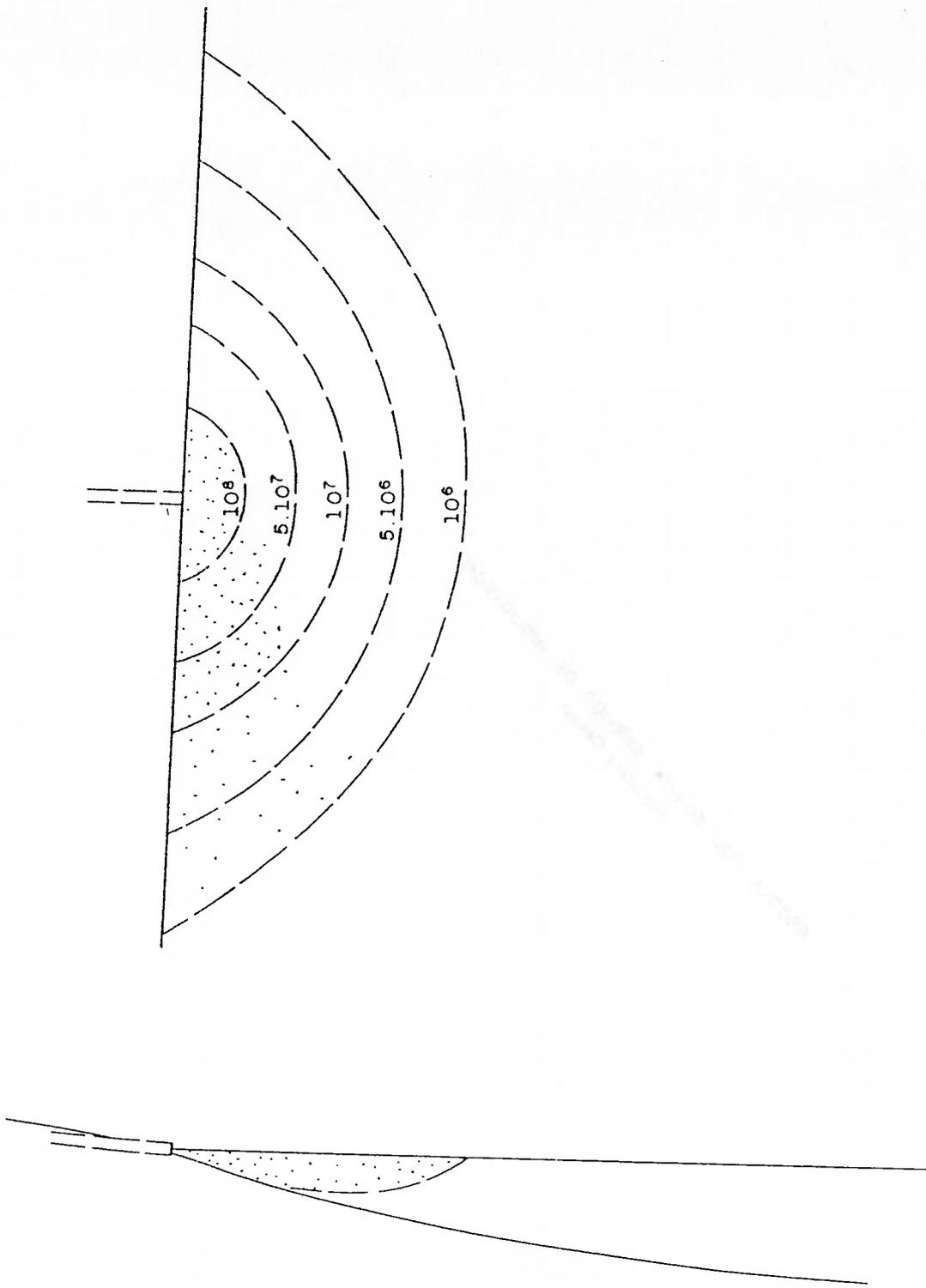


Figura 1.1. - Efluentes - Lançamento na praia (Jato horizontal e superficial com baixa dispersão)

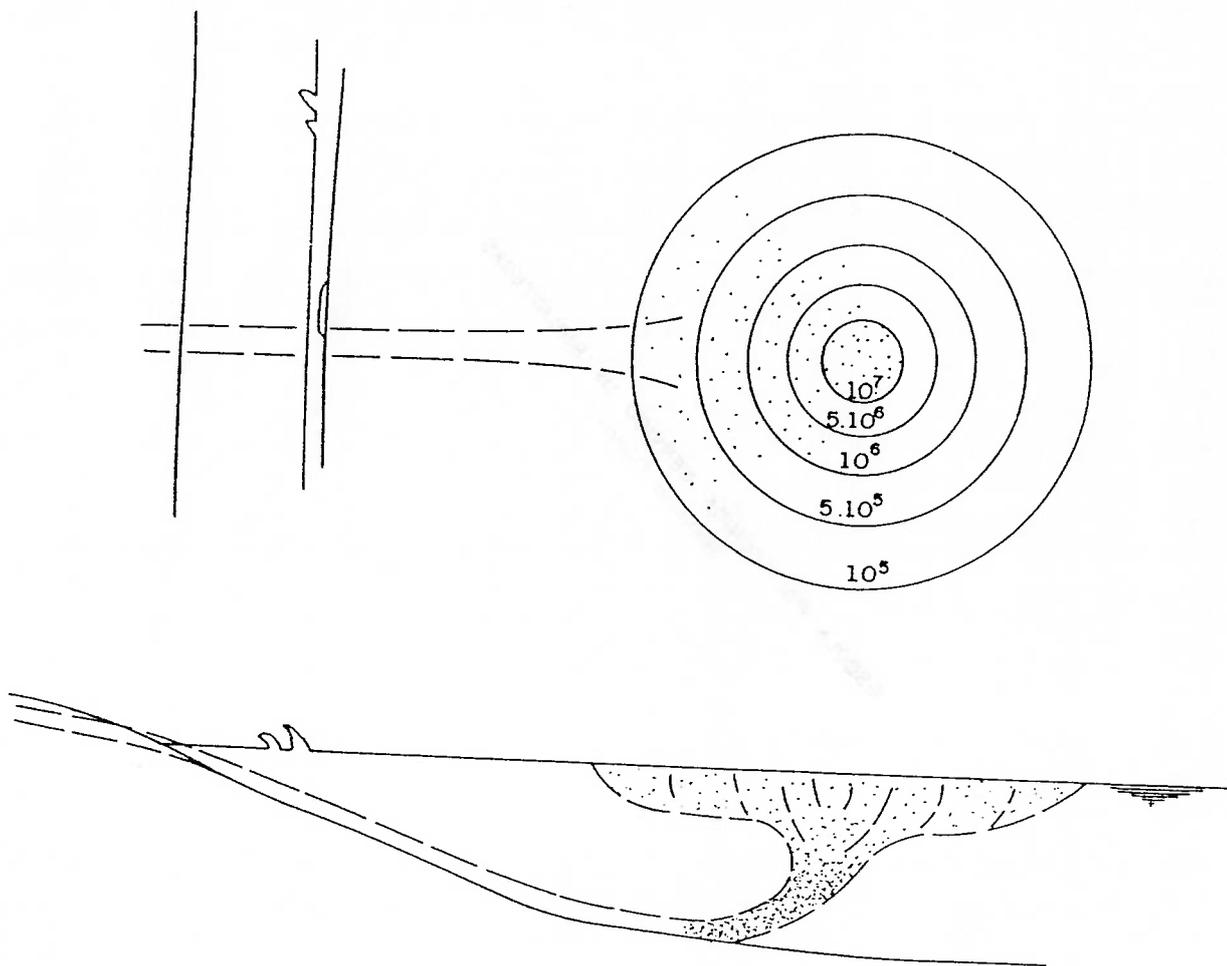


Figura 1.2. - Efluentes - Lançamento perto da praia e no fundo do mar. (Jato horizontal e no fundo do mar, a pouca distância da praia com dispersão regular)

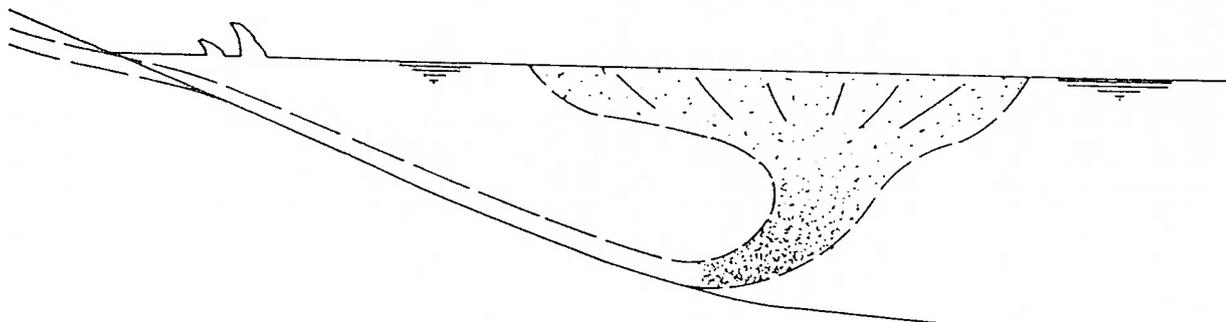
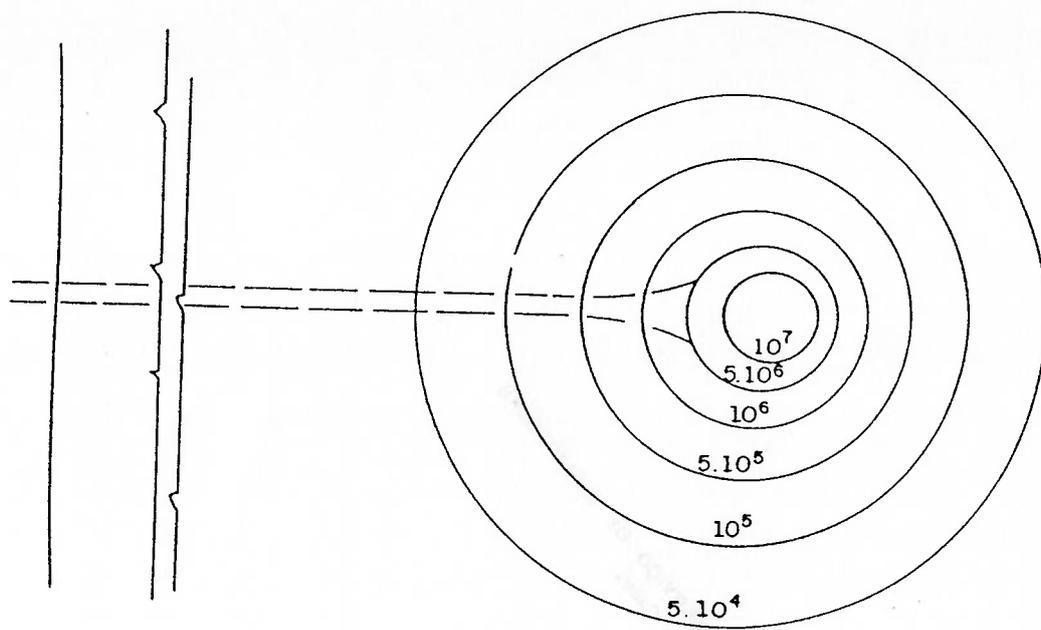


Figura 1.3.- Efluentes - Lançamento mais longe da praia e no fundo do mar (Jato horizontal e no fundo do mar, longe da praia com dispersão mais que regular)

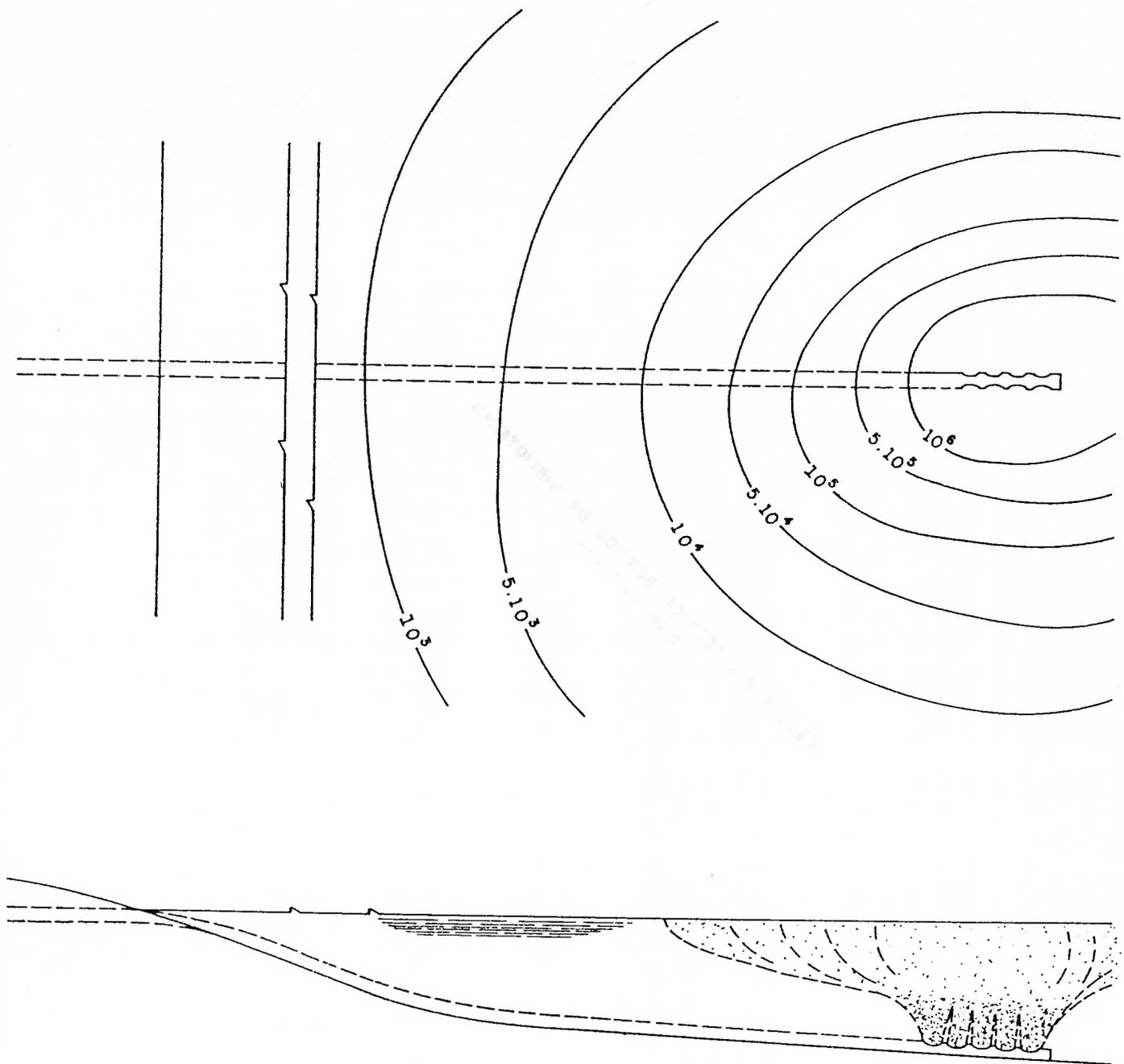


Figura 1.4. - Efluentes - Lançamento longe da praia , no fundo do mar e com jatos múltiplos (Jatos múltiplos horizontais no fundo do mar com boa dispersão)

Atualmente, graças ao conhecimento alcançado sobre os fenômenos de dispersão no mar, são utilizados sofisticados processos de lançamento empregando sistemas multidifusores de forma a alcançar elevadas taxas de diluição inicial. Figura 1.4

Portanto, o conhecimento dos fenômenos de dispersão é fundamental na proteção racional das orlas marítimas e o aprofundamento nestes conceitos deverá, sem dúvida, contribuir no futuro para a obtenção de sistemas de lançamento de efluentes mais eficientes e seguros, condizentes com o princípio de preservação do meio ambiente.

O presente trabalho tem em vista fornecer subsídios aos estudos e projetos de lançamento de efluentes no oceano, através de um melhor conhecimento dos fenômenos de transporte de massa ou de poluentes nas águas do mar.

O transporte de massa é, principalmente, uma função da advecção e da difusão turbulenta, no caso de substâncias conservativas e também de processos ou reações específicas para as substâncias não conservativas.

O trabalho é orientado principalmente aos efluentes de origem doméstica presentes em qualquer cidade litorânea e cujos despejos são naturalmente o mar.

Pretende-se mostrar as principais formas de solução apresentadas por eminentes pesquisadores, para simular os complexos fenômenos de dispersão, em especial os de diluição inicial, tendo em vista sua maior importância relativa.

Serão apresentadas as modelagens matemáticas mais usuais, incluindo suas vantagens e limitações.

Procurar-se-á determinar os principais caminhos dedutivos dos equacionamentos propostos pelos diversos pesquisadores, assim como o alcance e validade das suas postulações.

Analisar-se-ão as limitações impostas às diversas soluções, as discussões técnicas relativas a essas concepções e suas possibilidades de aplicação prática, levando em conta as condições de segurança e garantia dos equacionamentos previstos para obtenção de valores próximos dos reais.

2. - REVISÃO DA LITERATURA

A utilização dos processos de dispersão no mar com a finalidade de diluir efluentes domésticos ou industriais teve seu início no começo do século XX.

Inicialmente, as comunidades costeiras lançavam seus efluentes ao mar, na camada superficial, buscando o aproveitamento das condições naturais de dispersão que o mar apresenta. Estes lançamentos representam uma forma intuitiva de aproveitamento da dispersão. Entretanto, devido ao baixo grau de dispersão obtido, apenas por misturação, estes foram logo substituídos por outros mais eficientes.

RAWN e PALMER (1929) realizaram as primeiras pesquisas de dispersão, executadas de forma sistemática e racional, com descargas submersas que denominaram de jatos turbulentos boiantes, no intuito de aproveitar a diferença de densidade entre a água do mar (corpo receptor) e a descarga dos efluentes (esgotos).

Este processo de dispersão turbulenta melhorou as condições de diluição dos efluentes com a água do mar e permitiu a obtenção de diluições da ordem de 1 : 10 para descargas submersas a profundidades em torno de 15m. Para distinguí-lo da dispersão natural ou misturação, este processo de dispersão forçada passou a denominar-se de diluição inicial.

As pesquisas de RAWN e PALMER (1929) feitas com base na modelagem física do fenômeno e com base na Mecânica dos Fluidos dividiram as pesquisas posteriores em dois campos :

- Diluição inicial
- Dispersão natural ou Misturação ou dispersão horizontal

As pesquisas de RAWN e PALMER (1929) foram feitas com descargas de água doce em forma de jatos boiantes em ambiente salino, estagnado e não estratificado. Estas pesquisas mostraram a importância que a diluição inicial poderia representar no processo de dispersão.

Pode-se dizer que as descargas submersas ou jatos boiastes apresentam três fases :

- Fase inicial de jato
- Fase intermediária
- Fase final de pluma

PEARSON (1956) apud ROBERTS (1977) estudou a interferência das descargas de jatos circulares que resultam numa pluma com características semelhantes à de uma fonte linear.

RAWN, BOWERMAN e BROOKS reanalisaram em 1960 os dados obtidos por RAWN e PALMER em 1929 e aplicando a modelagem física e a análise dimensional obtiveram a diluição inicial como uma função do número de Froude do jato e da razão entre profundidade e o diâmetro do orifício de descarga. A diluição inicial mostrou ser independente do número de Reynolds, para grandes números de Reynolds, como acontece nas descargas de emissários submarinos.

Embora esta formulação represente um grande avanço no estudo da diluição inicial com difusores de orifícios múltiplos, não leva em conta a estratificação de densidade da água do mar, nem a influência das correntes.

BROOKS (1959) apud LAWRENCE (1961), em "Diffusion of sewage effluent in an ocean current", apresentou outro equacionamento para a diluição inicial levando em conta as velocidades das correntes mas não a estratificação. BROOKS (1959) apresentou também uma relação para simular o efeito da mistura natural no mar, com a fórmula do erro (4.1.26).

Além de RAWN e PALMER (1929), numerosos pesquisadores têm contribuído ao estudo da dispersão no mar, entre os quais podemos citar ABRAHAM (1970), BROOKS (1972), CHU (1979), MORTON (1956), TAYLOR (1956), TURNER (1956) e mais recentemente KOH (1975), FISHER et al (1979), LEE (1986), JIRKA(1991), ROBERTS et al (1989), STOLZENBACH (1980), WALLIS (1977), WRIGHT (1984).

Em 1977, ROBERTS apresentou os resultados de uma nova série de experiências com dispersão, que permitiram definir melhor a diluição inicial com correntes marinhas. Posteriormente, ROBERTS et al (1989) apresentaram pesquisas levando em conta a estratificação de densidade.

Outros pesquisadores como JIRKA (1982),(1991), WRIGHT (1980),(1984), contribuíram para a formulação mais detalhada dos processos de dispersão levando em conta a estratificação e as correntes. Em geral as pesquisas foram realizadas utilizando modelos físicos e análise dimensional.

3. - DESCRIÇÃO FÍSICA DA DISPERSÃO

3.1.- Características do fenômeno

Conforme pode ser apreciado na figura 3.1, em continuação, o fenômeno da dispersão de efluentes no mar através de descargas únicas ou através de sistemas difusores múltiplos, apresenta duas etapas básicas :

- 1a Etapa : Diluição Inicial
- 2a Etapa : Misturação

Ambas etapas representam o fenômeno da dispersão, entretanto a diluição inicial representa um tipo de dispersão forçada e a misturação uma dispersão natural.

A diluição inicial pode ser obtida por efeito do momentumou jato e/ou por efeito da diferença de densidade entre o efluente descarregado e o meio receptor (mar).

A misturação, dispersão natural ou dispersão horizontal são diversos nomes com os quais se conhece a dispersão que acontece no mar pelo efeito turbulento usual do comportamento de suas águas, devido aos ventos e correntes, principalmente, que se sobrepõem aos efeitos da difusão molecular.

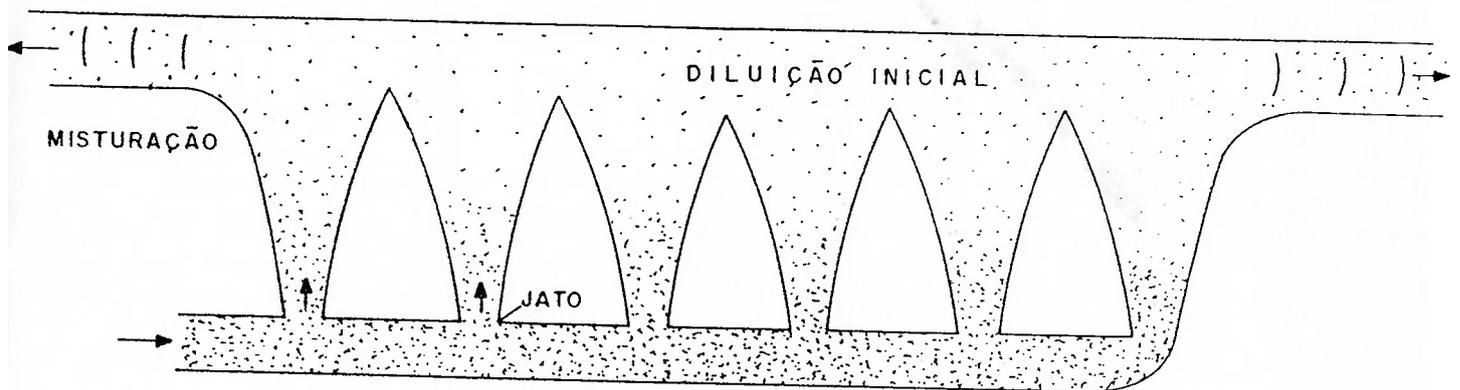
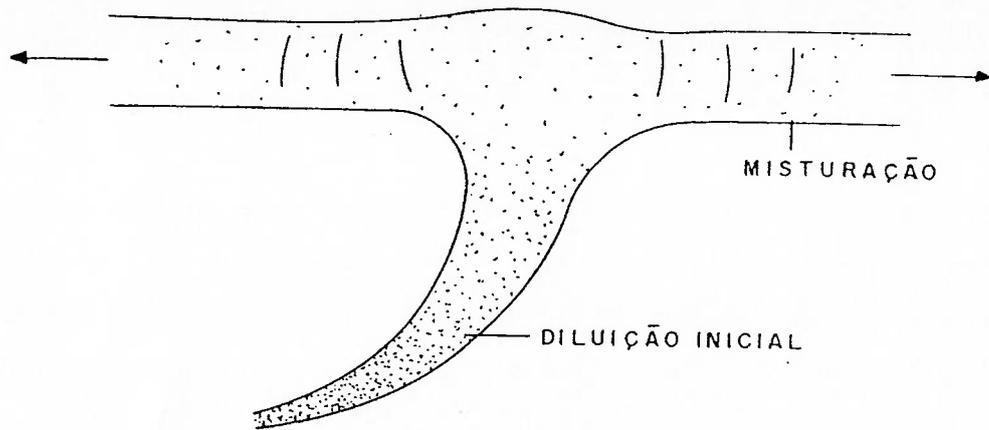


Figura 3.1. - Descarga única e descarga múltipla

Na descarga por jatos no fundo do mar, para diluição inicial, basicamente podem ter-se três possíveis situações :

- Jato puro

Nesta situação não existe efeito de diferença de densidade e é possível quando o efluente e o corpo receptor apresentam densidades iguais.

Quando somente o fluxo provocado pelo momentum inicial em alta velocidade causa a dispersão pode-se chamar de jato puro, onde efluente e corpo receptor são iguais em densidade.

- Pluma pura

A pluma pura se apresenta quando somente o efeito de diferença de densidade, "boiância" (efluentes leves) ou "submergência" (efluentes densos), atua sobre o efluente, não existindo efeito de jato ou momentum.

No caso da boiância o empuxo ascensional provocado pela diferença de densidade entre o efluente e o corpo receptor leva à mistura de efluente com água de mar em direção à superfície, podendo atingir a superfície (mar não estratificado) ou não atingí-la (mar estratificado).

No caso da submergência o efluente denso leva a mistura de efluente e água do mar a submergir ou afundar, atingindo o fundo se o mar não está estratificado ou podendo ficar acima do fundo se o mar é estratificado.

O conceito de pluma leva implícito o fato de apresentar velocidade de escoamento fraca ou baixo número de FROUDE.

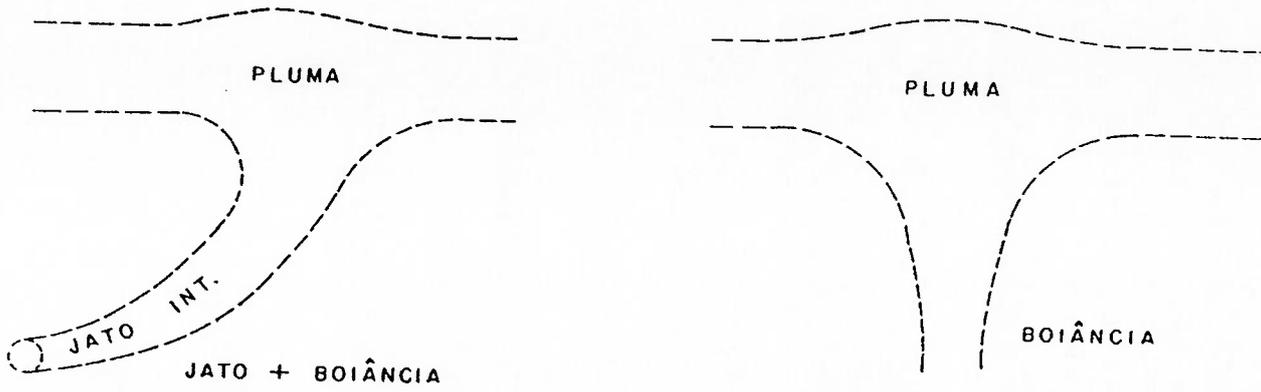
- Jato boiante ou submergente

Neste caso tem-se os efeitos de momentum e de diferença de densidade atuando conjuntamente, situação habitual nos sistemas de disposição oceânica.

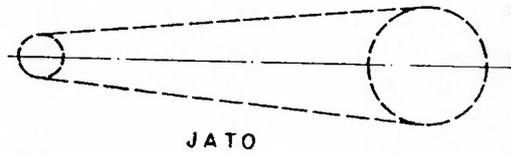
A dispersão mínima se apresenta quando o jato é vertical e aumenta conforme aumenta o ângulo do eixo do orifício em relação à vertical. O máximo ângulo viável, do ponto de vista prático é 90° , ou jato horizontal boiante ou submergente.

Na figura 3.2 se encontram os croquis dos três tipos indicados.

$\rho_{\text{EFLUENTE}} < \rho_{\text{RECEPTOR}}$



$\rho_{\text{EFLUENTE}} = \rho_{\text{RECEPTOR}}$



$\rho_{\text{EFLUENTE}} > \rho_{\text{RECEPTOR}}$

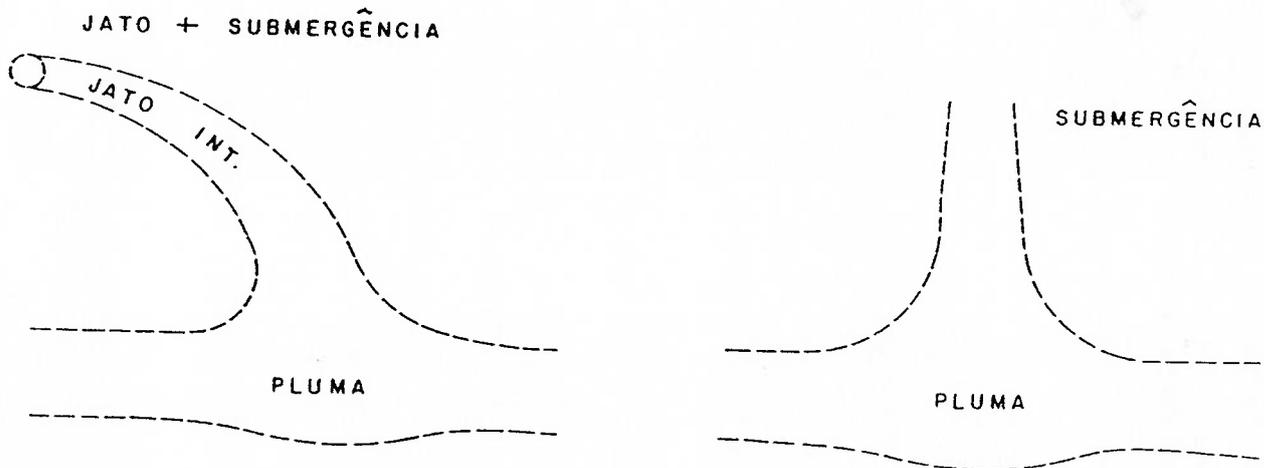


Figura 3.2. - Tipos de jatos - para efluente mais denso, igual ou mais leve que o corpo receptor.

Logo que o efluente sai da tubulação, tende a subir, caso seja mais leve, ou a descer, caso seja mais denso.

Os efluentes domésticos e alguns industriais são em geral mais leves, razão pela qual estes efluentes tendem a subir, quando descarregados no fundo do mar.

A descarga dos efluentes normalmente é feita através de bocais ou orifícios e o escoamento inicial, pode-se dizer apresenta três trechos principais :

- **Jato** : Onde o momentum provocado pelo jato predomina sobre o empuxo ascencional provocado pela diferença de densidade. No caso de jatos horizontais pode-se apreciar que nesta fase o escoamento mantém-se próximo da horizontal.
- **Intermediário** : Onde não está bem caracterizado o predomnio de jatos ou plumas . Para descargas horizontais, o escoamento neste trecho apresenta trajetórias próximas a 45° em relação à horizontal.
- **Pluma** : Onde o empuxo ascencional provocado pela diferença de densidade predomina sobre o momentum do jato. No caso de jatos horizontais, corresponde ao trecho próximo da trajetória vertical.

3.2. - Classificação básica

Conforme apresentado na figura 3.3. tem-se 4 (quatro) casos básicos para a Diluição Inicial :

- a) Em meio Homogêneo Estagnado
- b) Em meio Estratificado Estagnado
- c) Em meio Homogêneo Advectivo
- d) Em meio Estratificado Advectivo

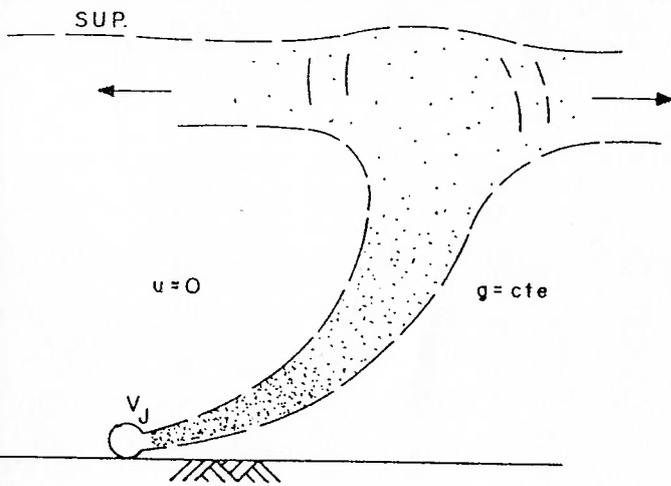
Na condição a) o escoamento tende chegar à superfície onde forma uma camada de densidade levemente menor que a do corpo receptor, e como não há corrente, o espalhamento posterior na camada superficial, será estritamente por efeito de dispersão superficial ou misturação.

Na condição b) o escoamento somente atinge uma camada intermediária, localizada onde a densidade do mar coincide com a densidade da mistura água-efluente. O espalhamento posterior será somente por misturação.

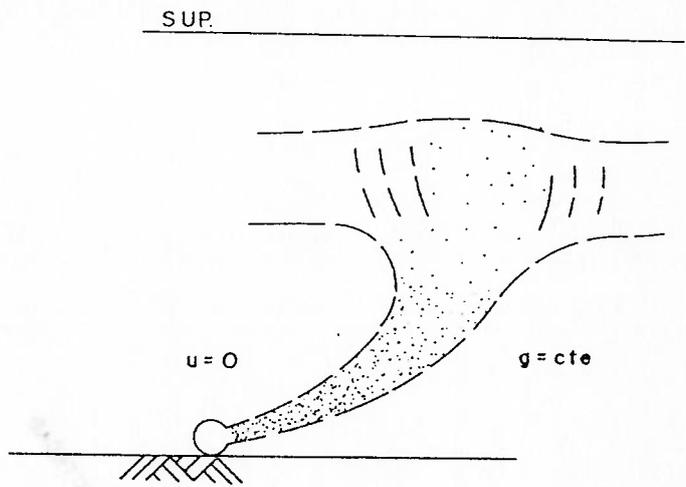
Na condição c) o escoamento atinge a superfície, num ponto mais afastado na horizontal, devido à velocidade do campo advectivo que afeta a diluição inicial. O espalhamento posterior será influenciado pela misturação.

CASOS BÁSICOS (JATOS HORIZONTAIS)

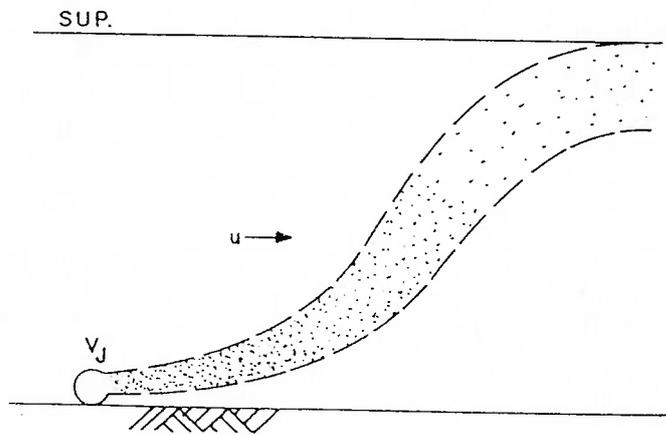
MEIO
a) HOMOGÊNEO ESTAGNADO



MEIO
b) ESTRATIFICADO ESTAGNADO



MEIO
c) HOMOGÊNEO ADVECTIVO



MEIO
d) ESTRATIFICADO ADVECTIVO

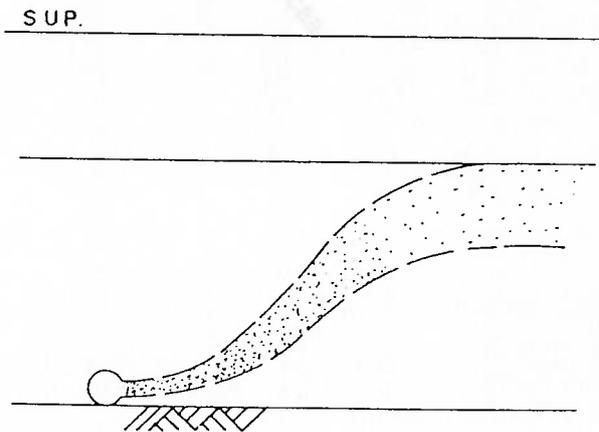


Figura 3.3. - Casos básicos (jatos horizontais)

Na condição d) o escoamento atinge somente uma camada intermediária, onde as densidades da água do mar e da mistura são iguais, num ponto afastado horizontalmente por efeito das correntes. O espalhamento posterior será afetado pela misturação .

O escoamento poderá ser dividido ainda em descargas isoladas ou interligadas, conhecidas como jatos circulares e jatos lineares.

3.3. - Fatores intervenientes

Serão definidos os conceitos básicos necessários ao adequado esclarecimento dos fenômenos de dispersão conforme o enfoque previsto e tendo em vista a caracterização da terminologia a ser utilizada.

- Concentração

A concentração indica a quantidade de massa de uma substância existente num determinado volume do espaço (água do mar).

- Indicador de qualidade ou Indicador

A água como um meio pode apresentar , além de suas características físicas e químicas básicas, outros componentes tais como substâncias em dissolução ou partículas em suspensão que não fazem parte de sua natureza.

Os elementos que se encontram na água têm recebido diversas denominações, conforme a área do conhecimento e a finalidade dos estudos envolvidos, como por exemplo, contaminante que indica a presença de bactérias ou outros organismos , ou poluente que indica a presença de substâncias não biológicas, tais como o petróleo.

Para o caso de efluentes lançados nas águas do mar, em especial os esgotos sanitários, utilizaremos a expressão "indicador de qualidade" ou simplesmente indicador para representar a quantidade de elemento estranho ao meio aquático marinho ou característico dele, tais como coliformes fecais, oxigênio dissolvido, DBO, DQO, partículas em suspensão, temperatura, pH, etc.

O indicador de qualidade de um elemento descreve a quantidade desse elemento no meio e reflete a qualidade dele em termos relativos ao elemento em questão.

Em geral a qualidade de um meio deve estar representada pelo efeito ponderado dos vários indicadores. Tendo em vista os problemas técnicos e operacionais de avaliação de cada elemento que se encontra no meio, adota-se normalmente um ou mais elementos como representantes do estado de qualidade do meio.

Alguns indicadores podem ser conservativos, como o sal, cuja distribuição espacial e temporal não é afetada por reações com o meio e com outros integrantes, ou podem ser transformados (não conservativo) por outros processos além do transporte físico. Os indicadores poderão ser considerados ativos se afetarem as características físicas do meio, como a temperatura e a salinidade da água do mar, que alteram a estrutura espacial de densidade e as condições hidrodinâmicas desse meio, ou passivos quando não afetam em absoluto, tais condições, como o oxigênio dissolvido.

- Advecção

A advecção é o transporte de massa num meio fluido, movido pelo campo de velocidades.

- Convecção

A convecção é o transporte de massa num fluido, movido pelo campo de velocidades, induzido por gradiente de densidades ou pressões.

- Advecção diferenciada

A advecção diferenciada, EIGER (1991), corresponde a uma advecção feita num campo de velocidades com distribuição espacial variável e deslocamento de camadas por cisalhamento.

TAYLOR (1954) apud FISHER (1979) indica que "o espalhamento (spreading) na direção do fluxo, comum a todos os fluxos, é causado principalmente pelo perfil de velocidade na seção transversal. Escoamentos com gradiente de velocidade são chamados de escoamentos cisalhantes (shear flows)"

O termo "advecção diferenciada" identifica melhor o tipo de fluxo, visto que se pode medir variações de velocidade entre as camadas.

- Difusão molecular

A difusão molecular corresponde ao espalhamento das partículas em um meio devido aos movimentos randômicos e à agitação térmica molecular das partículas que o constituem.

- Difusão turbulenta

A difusão turbulenta corresponde ao espalhamento de partículas em um meio devido ao movimento turbulento dos fluidos. A difusão turbulenta é conceitualmente análoga à difusão molecular, e apresenta limitações de equacionamento devido ao fato de ser causada por turbilhões no meio fluido.

- Dispersão

A dispersão é o nome dado ao efeito do espalhamento devido à ação conjunta da difusão molecular, turbulenta e advecção diferenciada. O efeito relativo da difusão molecular é desprezível em relação aos efeitos da difusão turbulenta e da advecção.

. Diluição inicial

A diluição inicial representa uma forma de dispersão forçada ou convectiva que leva em conta os efeitos devidos as descargas por jatos, diferença de densidade entre fluidos efluente e receptor, efeitos convectivos induzidos no efluente e advecção no meio receptor.

. Misturação

A misturação representa a dispersão natural no meio ambiente marinho, seu espalhamento horizontal pelo meio aquático, em função da turbulência natural do meio.

Na ilustração 3.4 se encontram os fatores que intervêm.

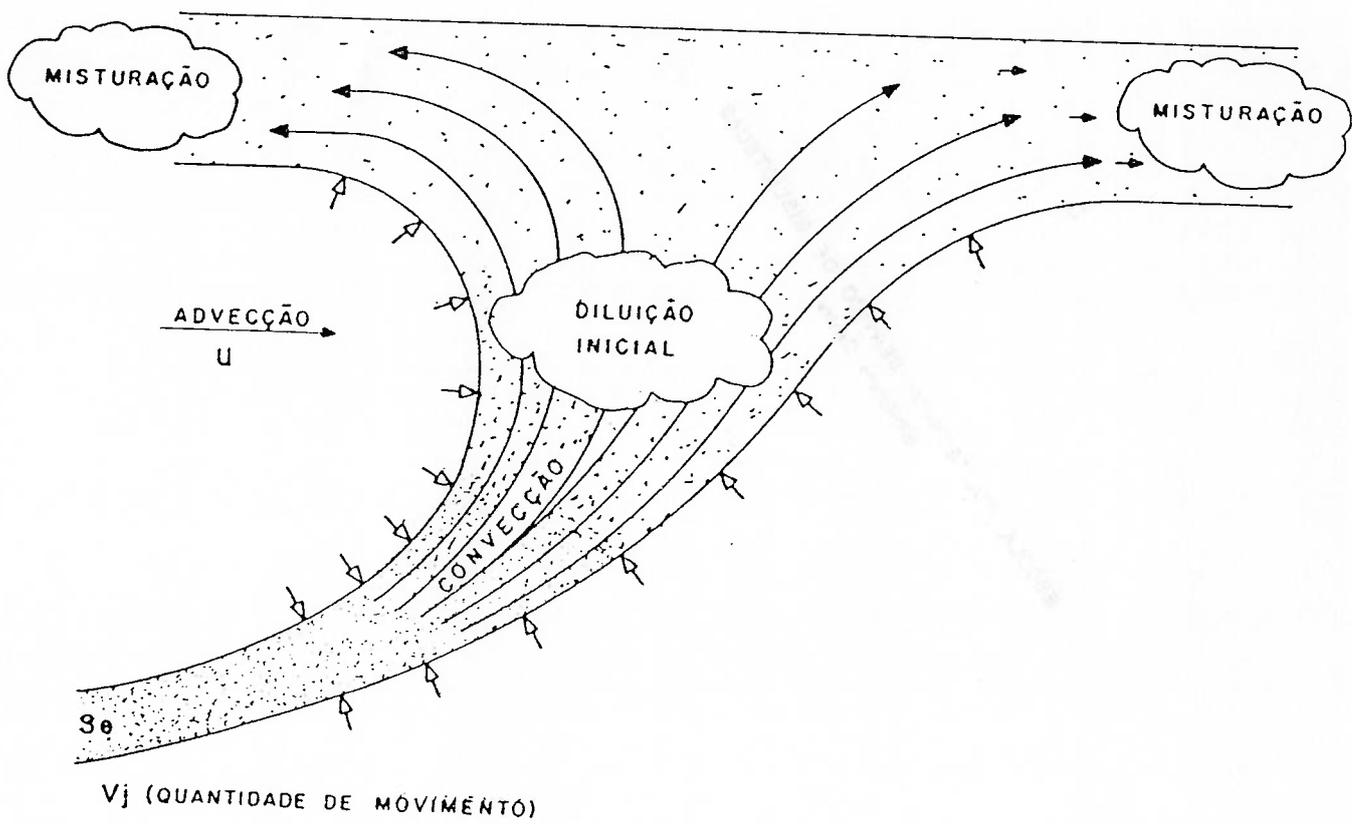


Figura 3.4 - Fatores que intervêm na dispersão

4. - DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA DISPERSÃO

4.1. - Modelos teóricos

4.1.1. - Difusão molecular

A difusão molecular corresponde ao processo de dispersão mais simples pois leva em conta somente a agitação térmica molecular das partículas.

A difusão é representada pela lei de FICK que diz "Que o fluxo de mistura por unidade de área e de tempo é proporcional ao gradiente de concentração da mistura nessa direção"

$$q = -D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (4.1.1)$$

onde

q : fluxo difusivo
D : coeficiente de difusão molecular
C : concentração

em três dimensões a relação será

$$q = -D \nabla C \quad (4.1.1a)$$

Num processo unidimensional de transporte de massa tem-se que:

- $C(x,t)$ = massa por unidade de volume no ponto x e no tempo t
- A variação de massa em um dado volume deve ser igual à variação de fluxo entre seções extremas, logo :

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.1.2)$$

e substituindo-se na lei de FICK, tem-se

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.3)$$

Em três dimensões será :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (4.1.4)$$

Esta relação representa a difusão em um fluido estagnado.

4.1.2. - Difusão molecular com advecção

A advecção é o efeito da corrente que incrementa o fluxo de massa transportada.

Desta forma o fluxo de massa transportada será igual ao fluxo advectivo mais o fluxo difusivo.

$$q = uC - D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (4.1.5)$$

substituindo-se na equação de conservação de massa, tem-se :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial uC}{\partial x} \right) = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.6)$$

Pode-se demonstrar (Fisher et al., 1979) que para u constante, fazendo ($x' = x - ut$), obtém-se a equação da difusão pura :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} \right) \quad (4.1.7)$$

Da mesma forma que para o caso unidirecional poderá ser demonstrado que mediante a troca de variáveis :

- $x' = x - ut$ para $u = \text{constante}$
- $y' = y - vt$ para $v = \text{constante}$
- $z' = z - wt$ para $w = \text{constante}$

que a equação em três dimensões que inclui a advecção :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (4.1.8)$$

se transforma na equação da difusão pura em três dimensões

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z'^2} \right) \quad (4.1.9)$$

4.1.3. - Difusão turbulenta

A difusão turbulenta é baseada no conceito de turbulência, que entretanto ainda não é totalmente compreendida, embora seja reconhecida pelas suas características (Eiger, 1991 com base em Tennekes e Lumley, 1983). Um escoamento turbulento pode ser considerado como sendo formado por turbilhões, desorganizado, tridimensional e variável no tempo

Aplicando-se a hipótese de que uma variável turbulenta em um ponto no espaço, pode ser decomposta em um valor médio temporal definido e um valor flutuante turbulento, pode-se dizer que :

$$\begin{aligned} C &= \bar{C} + c' \\ u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned}$$

Utilizando-se as expressões acima na equação da difusão mais advecção, com as devidas transformações obtém-se a seguinte equação para um sistema bidimensional :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [(D + \epsilon_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [(D + \epsilon_y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}] \quad (4.1.10)$$

onde $\bar{u}'c' = \epsilon_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$

ϵ_x, ϵ_y : coeficientes de difusão turbulenta

$\bar{v}'c' = \epsilon_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}$

— : O traço acima dos símbolos indica valores médios

Taylor apresentou um trabalho em 1921, com base no movimento browniano, demonstrando que numa nuvem de partículas em escoamento unidimensional com velocidade média nula e turbulência homogênea e estacionária, a variância espacial correspondente à nuvem de partículas pode ser representada por :

$$\sigma_x^2(t) = \overline{u'^2} (t T_{L,x} + \text{cte}) \quad (4.1.11)$$

ou

$$\frac{\partial \sigma_x^2(t)}{\partial x} = \overline{u'^2} T_{L,x} = 2 \epsilon_x$$

onde $T_{L,x}$: escala lagrangiana de tempo
 σ_x : variância temporal
 ϵ_x : coeficiente de difusão turbulenta
 $\overline{u'^2}$: velocidade média quadrática das partículas

4.1.4. - Dispersão

Aplicando uma solução aproximada TAYLOR (1953) apud EIGER (1991) mostrou que a dispersão longitudinal está representada pela equação :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (4.1.12)$$

$$\bar{u} : \text{velocidade média de fluxo} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy$$

A barra acima difere das anteriores já que esta corresponde ao fluxo e as outras à velocidade média das partículas.

$$K : \text{coeficiente de dispersão} = - \frac{1}{hD} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy$$

escoamento laminar

onde $u' = u - \bar{u}$ u' não representa flutuações turbulentas têm conotação geométrica

D : difusão molecular ϵ_y : difusão turbulenta

$$K : \text{coeficiente de dispersão} = - \frac{1}{h} \int_0^h u' \int_0^y \frac{1}{\epsilon_y(y)} \int_0^y u' dy dy dy$$

escoamento turbulento

$$\frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} = 2K \quad (4.1.11a)$$

O valor de K depende da velocidade [função $u(y)$] e da difusão turbulenta conforme o tipo de escoamento laminar ou turbulento. Em qualquer caso o valor de K depende fundamentalmente da advecção diferenciada ou seja para $u' \neq 0$, pois em caso de não haver advecção diferenciada $u' = 0$ e $K = 0$ e não existiria dispersão longitudinal.

Em termos práticos existe uma semelhança entre a equação da dispersão e a equação da difusão, embora os coeficientes envolvidos sejam totalmente diferentes. Usualmente, o coeficiente de dispersão é muito maior que o coeficiente de difusão.

O maior problema está na obtenção do coeficiente de dispersão.

4.1.5. - Soluções teóricas

No intuito de ilustrar os conceitos apresentados estão sendo apresentadas as soluções teóricas mais interessantes, partindo da equação de difusão molecular, visto que as soluções desta poderão ser utilizadas nos outros casos, tomando-se as devidas precauções em relação às limitações e utilização dos respectivos coeficientes de difusão ou dispersão.

4.1.5.1. - Solução da equação de difusão molecular

4.1.5.1.1. - Equação unidirecional

Considerando a equação unidirecional de difusão (4.1.4)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)$$

- a) Solução Fundamental

De acordo com Carslaw e Jaeger (1959) em " Conduction of Heat in Solids" , aplicando a expressão :

$$\phi(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.13)$$

tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2t}\right)^{3/2} e^{-x^2/4Dt} + \left(\frac{x^2}{4Dt}\right)^{5/2} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\left(\frac{x}{2Dt}\right)^{3/2} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\left(\frac{1}{2Dt}\right)^{3/2} e^{-x^2/4Dt} + \left(\frac{x^2}{4Dt}\right)^{5/2} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.16)$$

Logo

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.1.17)$$

Portanto $\phi(x,t)$ dado pela equação (4.1.13) é uma solução particular da equação (4.1.4) cujas propriedades são :

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad t \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad t \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \phi \, dx = (4\pi Dt)^{1/2} \quad \text{para} \quad \forall \quad t > 0 \quad (4.1.18)$$

Esta solução particular $\phi(x,t)$ pode se ajustar para a solução fundamental ao se fazer :

$$C(x,t) = \phi(x,t) / (4\pi Dt)^{1/2}$$

Logo

$$C(x, y) = [M/(4Dt)^{1/2}] e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.19)$$

Esta solução representa uma distribuição gaussiana . Ver figura 4.1.1.

Onde $C(x, t)$ = Concentração no tempo t e na distância x
 M = Massa total em qualquer t
 D = Coeficiente de difusão
 t = Tempo
 x = Distância

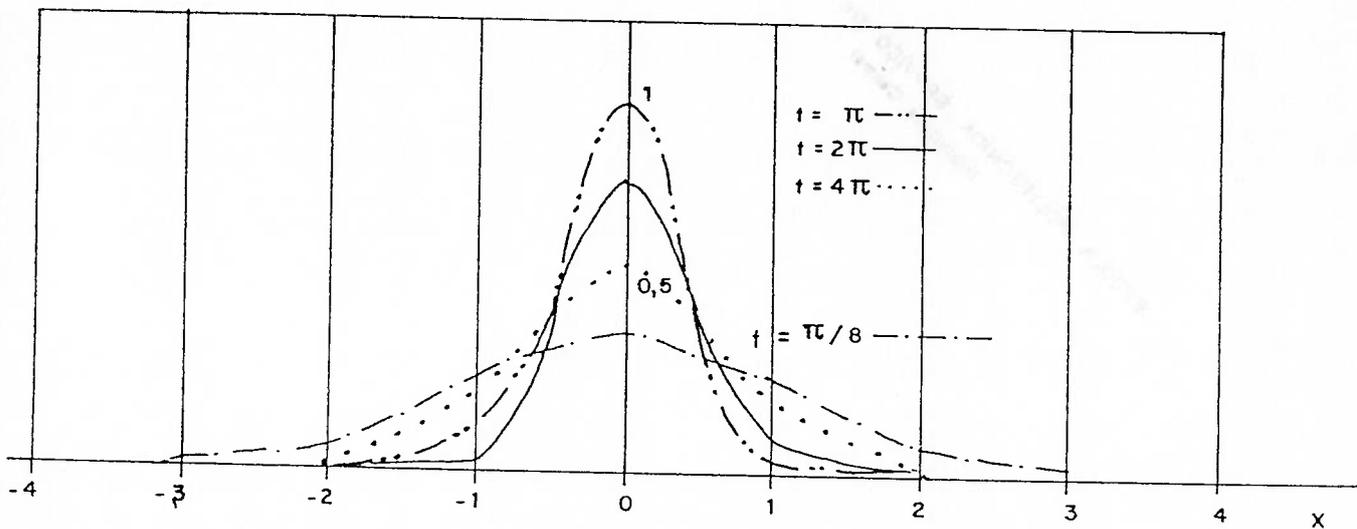


Figura 4.1.1 Concentração - Distribuição gaussiana

Na publicação "Mixing in inland and coastal water", FISHER et al(1979) apresentam a mesma solução fundamental $C(x,t)$ onde M é a massa total de elemento descarregado.

Esta solução pode ser modificada fazendo :

$$\sigma = \sqrt{2Dt}$$

que é conhecida como desvio padrão , crescente em função de t

Logo :

$$C(x,t) = [M/\sigma(2\pi)^{1/2}] e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (4.1.20)$$

Em estudos na lagoa Bikini feitos por W.H. MUNK , G.C. EWING e R.R. REVELLE (1949) foi utilizada a expressão :

$$C = [C_0/\sigma(2\pi)^{1/2}] e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (4.1.21)$$

Onde : C = Concentração no ponto x

C₀ = Concentração inicial

σ = Desvio padrão da concentração = $\sqrt{2Dt}$

x = Distância

Esta solução implica em um lançamento pontual com decréscimo da concentração por unidade de comprimento , em função do crescimento do valor $x/\sigma = x/\sqrt{2Dt}$ mas cuja massa total se conserva igual a M .

- b) Solução com função erro

A partir da expressão

$$\phi = t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.1.13)$$

de ϕ em função de x , fazendo

$$\xi = x/\sqrt{4Dt} \quad \text{tem-se}$$

$$\int_0^x t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt} dx = 2\sqrt{D} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-\xi^2} d\xi \quad (4.1.22)$$

Onde : $\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ (4.1.23)

Logo a solução da equação é :

$$C = A \text{ erf } x/\sqrt{4Dt} = A \text{ erf } x/\sigma \sqrt{2}$$

onde A deveria ser igual a $1/\sqrt{4Dt} = 1/\sigma \sqrt{2}$ para que C corresponda à solução fundamental .

Uma forma interessante de apresentação é como função do valor x/σ que engloba a distância e o tempo numa só distribuição.

Na figura 4.1.2. a seguir está a distribuição normal que corresponde à solução fundamental

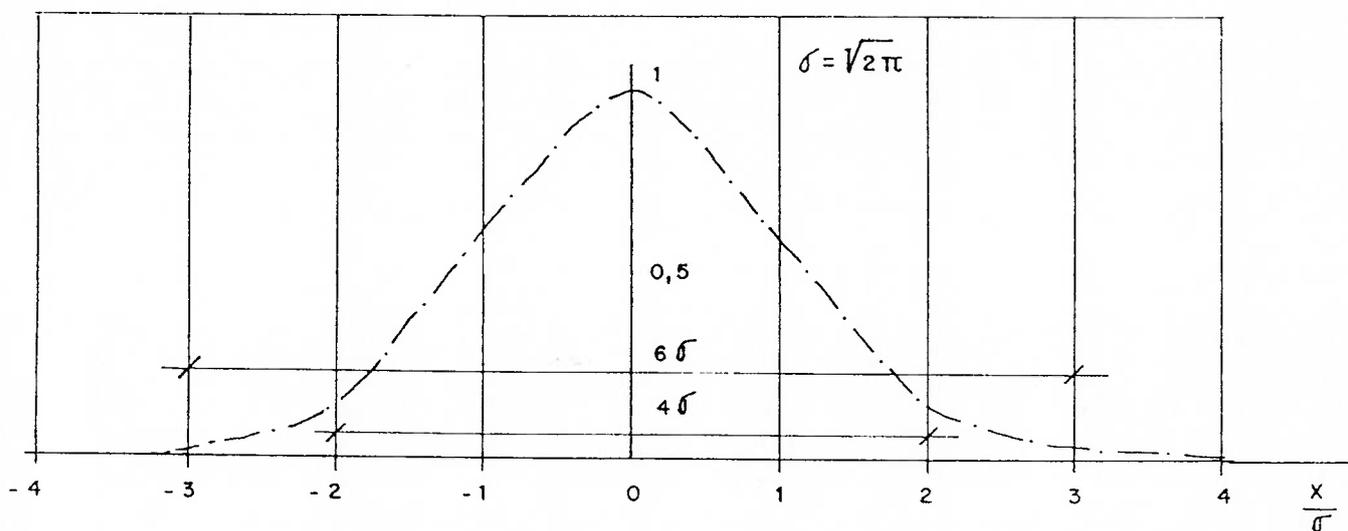


Figura 4.1.2. - Distribuição normal $f(x/\sigma)$

Na tabela a seguir com função x/σ , estão indicados os valores correspondentes ao $\text{erf } x/\sigma$ e a integral da distribuição normal da concentração C :

$$\text{erf}(x/\sigma) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^{x/\sigma} e^{-(x/\sigma)^2} d(x/\sigma) \quad (4.1.24)$$

e

$$C = (1/\sigma\sqrt{\pi}) \int_0^{x/\sigma} e^{-1/2(x/\sigma)^2} = (e^{1/2}/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_0^{x/\sigma} e^{-(x/\sigma)^2} dx \quad (4.1.25)$$

Tabela 4.1.1

x/σ	$\text{erf}(x/\sigma)$	C
0.0	0.0	0.0
0.1	0.1129	0.0398
0.2	0.2227	0.0793
0.3	0.3286	0.1197
0.4	0.4284	0.1554
0.5	0.5205	0.1915
0.7	0.6778	0.2580
1.0	0.8427	0.3413
1.5	0.9661	0.4332
2.0	0.9953	0.4773
2.5	0.9996	0.4938
3.0	0.99998	0.4987
3.5		0.4998
4.0		0.49996
∞	1.0000	0.5000

Onde pode-se apreciar que para valores $x/\sigma = 2$ tem-se aproximadamente 95% da massa total e com $x/\sigma = 3$ tem-se 99.7% na distribuição normal ou no $\text{erf}(x/\sigma)$. Nesta faixa $\text{erf}(x/\sigma) = 2C$, visto que C representa a metade da distribuição normal .

Logo, em termos práticos, tem-se que a largura de dispersão será da ordem de 4σ a 6σ ($4\sqrt{2Dt}$ a $6\sqrt{2Dt}$)

Uma utilização desta relação é dada pela equação de Brooks (1960)

$$\frac{S_t}{S_o} = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{b}{4\sqrt{Dt}}\right)} = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{b/2}{2\sqrt{Dt}}\right)} = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma}\right)}$$

(4.1.26)

onde :

$x = b/2$
 S_t = Diluição em t
 S_o = Diluição inicial
 D = Coeficiente de difusão

A formulação de Brooks corresponde a :

$$C_t = C_o \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{b/2}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

(4.1.27)

- c) Solução da forma $t^m f [x/\sqrt{4Dt}]$

Pode ser verificado que uma expressão do tipo $t^m f [x/\sqrt{4Dt}]$ satisfaz a equação unidirecional de difusão 4.1.4 se esta pode ser transformada na equação :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + 2z \frac{df}{dz} - 4mf = 0$$

que possui como solução uma função $f(z)$

- d) Soluções que dependem das condições iniciais .

- d.1) Solução com distribuição espacial no início $C(x,0)$

Considerando : $C(x,0) = M\delta(x-\xi)$

tendo no limite $C(\pm\infty,0) = 0$

Logo

$$\therefore C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \quad (4.1.28)$$

Admitindo : $C(x,0) = f(x) \quad -\infty < x < +\infty$

e considerando $M = f(\xi)d\xi$

para cada contribuição, tem-se como concentração total

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} * d\xi \quad (4.1.29)$$

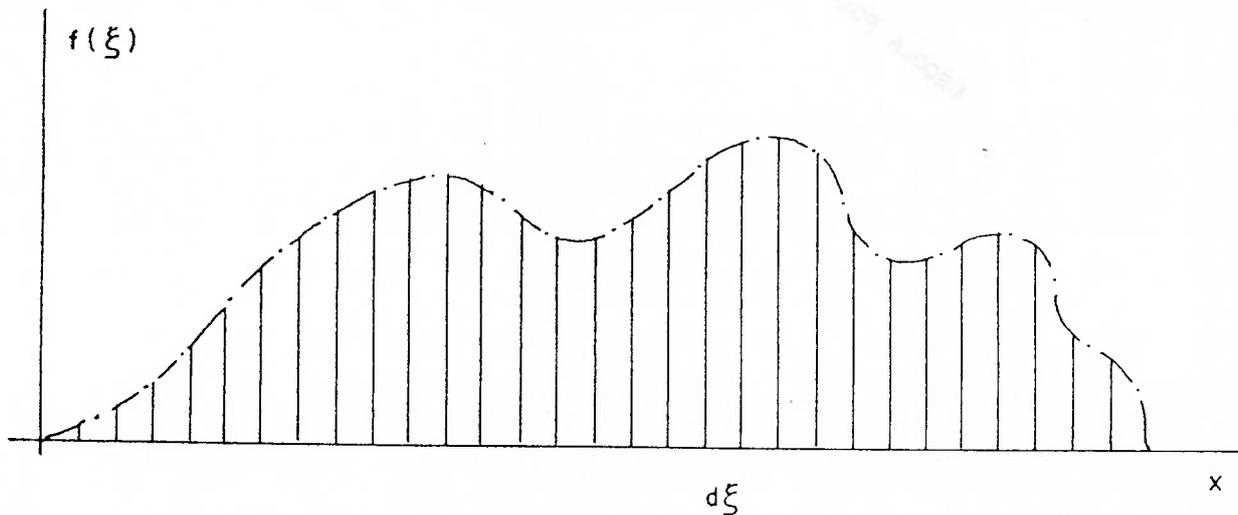


Figura 4.1.3. - $f(x)$ como série de contribuições com massa $f(\xi)d\xi$

Um caso particular de $f(x)$ é dado por :

$$C(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } x < 0 \\ C_0 & \text{p/ } x > 0 \end{cases}$$

conforme ilustração 4.1.4 a seguir :

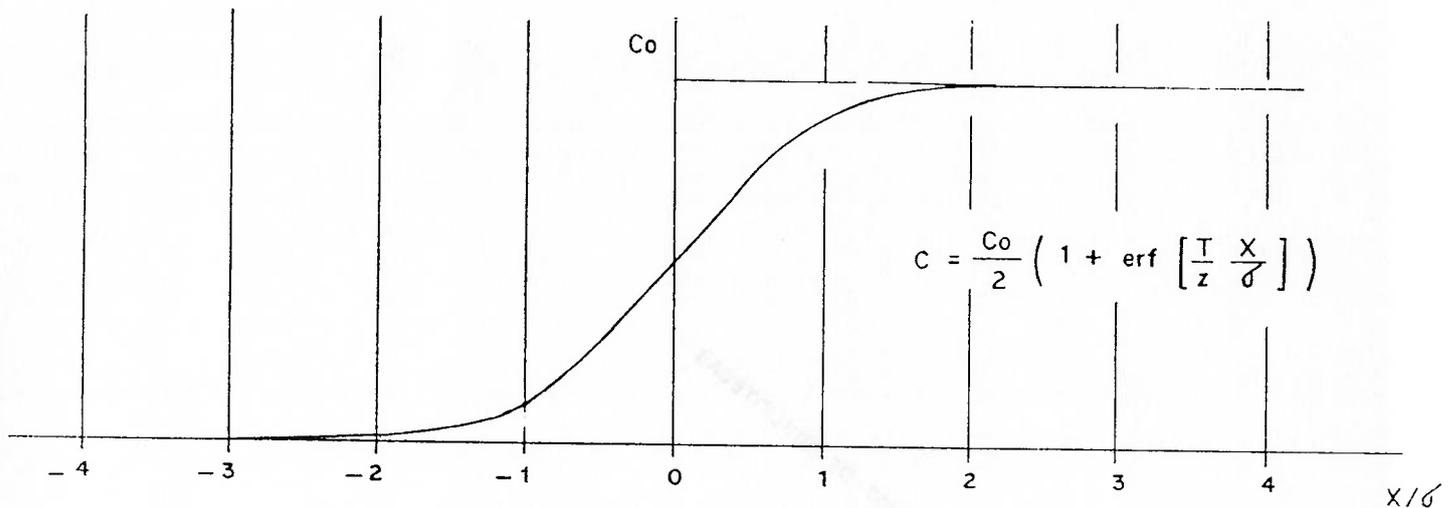


Figura 4.1.4. - Caso particular com $f(x) = 0$
Distribuição espacial no início igual zero

$$C(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-\xi)^2/4Dt} d\xi \quad (4.1.30)$$

Fazendo : $\eta = (x-\xi)/\sqrt{4Dt}$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (4.1.31)$$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \quad (4.1.32)$$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} [1 + \operatorname{erf}(\eta)] \quad (4.1.33)$$

Onde : $\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (4.1.34)$

- d.2.) Solução com concentração inicial em função do tempo

$C(x, t)$.

$$C(x, t) = \begin{cases} 0 & p/ t = 0 & \forall x > 0 \\ C_0 & p/ t > 0 & x = 0 \end{cases}$$

Aplicando análise dimensional obtém-se :

$$C = C_0 f(x/\sqrt{4Dt}) \quad (4.1.35)$$

onde f é uma função qualquer, fazendo $\eta = x/\sqrt{4Dt}$ e

considerando que :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{dC}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{1}{2t} \eta \frac{dC}{d\eta} \quad (4.1.36)$$

e

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 C}{d\eta^2} \quad (4.1.37)$$

obtém-se para a equação de difusão

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D * \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

uma equação diferencial ordinária :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (4.1.38)$$

com condições de contorno :

$$f(0) = 1$$

$$f(\infty) = 0$$

$$C(-x, t) = C(x, t)$$

que tem como solução, para os valores positivos :

$$C = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right] \quad (4.1.39)$$

$$C = C_0 \left[\operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right] \quad x > 0 \quad (4.1.40)$$

A função $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$ (4.1.41)

Na figura 4.1.5 está a distribuição de concentração dada por C.

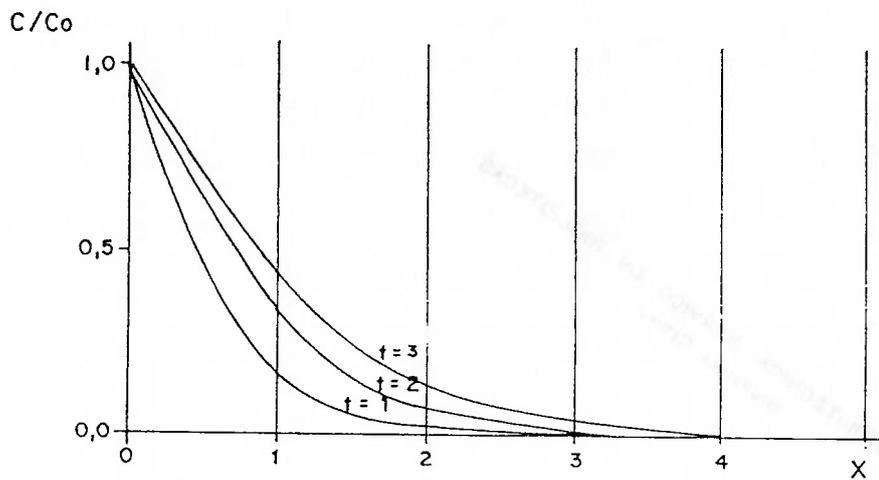


Figura 4.1.5. - Concentração como função do tempo

-d.3.) Solução com entrada de massa em função de tempo

Uma contínua injeção de massa com taxa M é equivalente à injeção de massas $M\delta t$ em cada instante tal que a concentração resultante seja:

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{M(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} e^{-x^2/4D(t-\tau)} \quad (4.1.42)$$

onde : $M(\tau)$ é a taxa de entrada de massa.

Quando a concentração inicial é zero, tem-se o fluxo de massa M desviado, e $t = 0$, $x = 0$

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4D(t-\tau)} d\tau \quad (4.1.43)$$

4.1.5.1.2. -Equação em duas e três dimensões

Supõe-se a condição inicial $C(x,y,0) = M \delta(x) \delta(y)$ considerando-se a equação em duas dimensões

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4.1.44)$$

onde : D_x e a difusão no eixo x
e D_y e a difusão no eixo y .

Admite-se que $D_x \neq D_y$ no presente caso. Salienta-se que na difusão molecular $D_x = D_y = 0$.

Aplicando-se a regra do produto $C(x,y,t) = C_1(x,t) \cdot C_2(y,t)$

onde : C_1 e função de x e não função de y
e C_2 e função de y e não função de x .

$$\text{Portanto } \frac{\partial(C_1 C_2)}{\partial t} = C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} \quad (4.1.46)$$

$$\frac{\partial(C_1 C_2)}{\partial t} = D_x C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \quad (4.1.47)$$

Rearranjando-se, tem-se

$$C_2 \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] + C_1 \left[\frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (4.1.48)$$

Esta equação é atendida se

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = 0$$

(4.1.49)

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} = 0$$

e se C_1 e C_2 são soluções das equações (4.1.4) e (4.1.4.1)

do tipo (4.1.19), tem-se para duas dimensões que :

$$\iint C \, dx \, dy = M \quad (4.1.50)$$

$$e \quad C(x, y, t) = C_1 C_2 = (M / 4\pi t \sqrt{D_x D_y}) * e^{-(x^2 / 4D_x t + y^2 / 4D_y t)} \quad (4.1.51)$$

em tres dimensões a distribuição de concentrações é dada por:

$$C(x, y, z, t) = (M / [4\pi t]^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}) * e^{-(x^2 / 4D_x t + y^2 / 4D_y t + z^2 / 4D_z t)} \quad (4.1.52)$$

Em resumo tem-se que a massa M é expressa como:

- * massa por unidade de comprimento - unidirecional
- * massa por unidade de área - bidirecional
- * massa por unidade de volume - tridimensional

- A distribuição de concentração unidirecional representa uma função gaussiana

- A distribuição de concentração bidirecional apresenta curvas de isoconcentração do tipo elípticas, onde os eixos estão

$$\text{na relação } a^2 / b^2 = [D_x / D_y]^{1/2} \quad (4.1.53)$$

- A distribuição de concentração tridirecional apresenta uma superfície com forma de elipsóide de revolução.

4.1.5.2. - Difusão advectiva

A equação
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.1.54)$$

representa a difusão unidirecional com efeito advectivo da corrente u .

- A.) Solução fundamental

A equação (4.1.54) fazendo-se $x' = x - ut$ permite obter a equação (4.1.4) da difusão, sem advecção, em função de t e x' que devidamente substituída, fornece :

$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} * e^{-\{(x-ut)^2/4Dt\}} \quad (4.1.55)$$

- B.) Soluções com condições iniciais e advecção

- B.1.) Concentração inicial zero

Condições iniciais

$$C(x,0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ C_0 & x < 0 \end{cases}$$

Aplicando-se $x' = x - ut$, obtém-se a equação (4.1.4) da difusão sem advecção.

Aplicando a condição $C(x,0) = M \delta(x-\xi)$, obtém-se a equação (4.1.33) que modificada para x' fornece :

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

- b.2.) Outras soluções podem ser obtidas conforme sejam definidas as condições iniciais de $C(x,0)$ e $C(0,t)$

4.1.5.3 Solução da equação de dispersão

A equação da difusão turbulenta e da dispersão correspondem à equação da difusão molecular, com a modificação do coeficiente de difusão para o coeficiente de difusão turbulenta ou para o coeficiente de dispersão. Portanto, todas as soluções previstas para a difusão molecular são válidas para a difusão turbulenta e para a dispersão, respeitadas as limitações das soluções.

Entretanto deve-se esclarecer que deverão ser verificadas as condições iniciais e de contorno que influenciam a solução a fim de enquadrar-se nas características da dispersão.

4.1.5.4. -Determinação do coeficiente de dispersão

A partir da teoria da difusão da Taylor e da equação de Einstein onde se aplica o coeficiente de difusão de turbilhões e devido à extensão do fenômeno aos campos turbulentos o coeficiente de difusão ou dispersão passou a ser elemento fundamental nos estudos de dispersão.

- 1.) A equação de Einstein (1956) apud ORLOB (1959) e EIGER (1991)

$$D_z = \frac{1}{2} \frac{d(\sigma_z^2)}{dt} \quad (4.1.57)$$

Define o coeficiente em função da variância ou desvio padrão dos deslocamentos laterais em relação à posição média de um número estatisticamente significativo de turbilhões..

- 2.) Aplicando-se o conceito de comprimento de mistura usualmente creditado a Prandtl se reconhece uma analogia entre fluido turbulento e o caminho de um meio livre, do conceito da dinâmica do gás.

Isto resulta na definição da difusão de turbilhões (Eddy).

$$D_z = l_z (W'^2)^{1/2} \quad (4.1.58)$$

onde: D_z = coeficiente de difusão turbulenta

l_z = comprimento de mistura

$\sqrt{W'^2}$ = raiz quadrada da velocidade de flutuação ao quadrado

- 3.) Pela teoria de Taylor

$$D_z = \overline{W'^2} \int_0^t R_\xi d\xi \quad (4.1.59)$$

onde: $\overline{W'^2}$ = média das velocidades de flutuação ao quadrado

ξ = tempo de deslocamento

R_ξ = coeficiente de correlação da velocidade de

flutuação igual: $= (W'_{t_0} * W'_{t_0+\xi}) / (W'_{t_0})^2$

- 4.) Lei de Richardson (1948)

$$D_z = e L_z^{4/3} \quad (4.1.50)$$

onde: e = constante

L_z = comprimento de escala da turbulência

D_z = coeficiente de difusão

Pearson aplicou esta relação na forma $D = 0,01 L^{4/3}$ e Gunerson aplicando-a na Baía de Santa Mônica, para verificar o comportamento do sistema de lançamento de Hyperion, observou que o coeficiente D estava mais próximo de $D = 0,005 L^{4/3}$.

Para obter os valores de D, Gunerson aplicou a relação:

$$D = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) / 2(t_2 - t_1) \quad (4.1.51)$$

da equação de Einstein , e assumindo-se que :

$$\sigma_1 = W_1/4 \quad e \quad \sigma_2 = W_2/4 \quad (4.1.52)$$

correspondente a 95% da massa difundida, obteve:

$$D = \left(\frac{W_2^2 - W_1^2}{32 \Delta t} \right) \quad (4.1.53)$$

onde W_1 e W_2 são larguras do campo (figura 4.1.6)

- 5.) Relação de ORLOB

Orlob (1959) analisou as formulações existentes na época e chegou à proposição de uma relação do tipo:

$$D = 0,0136 E^{1/3} L^{4/3} \quad (4.1.54)$$

onde: D = coeficiente de dispersão
 E = dissipação de energia
 L = comprimento da escala de turbulência

$$E = VgS_e \quad \text{onde: } V = \text{velocidade média}$$

g = aceleração da gravidade

S_e = declividade da linha de energia ao longo do fluxo

No estudo de ORLOB se observa uma concentração de valores

- em :- $D_z = 0,009 L^{4/3}$
 - $D_z = 0,005 L^{4/3}$
 - $D_z = 0,001 L^{4/3}$

Além disso Orlob indica que o coeficiente de dispersão é variável de acordo com o figura 4.1.7.

6. - Relação de OKUBO

Para OKUBO (1971) apud OCCHIPINTI (1973) e CHIN et al (1985), $K_a = 0.0103 L^{1.15}$, que corresponde a $\sigma_{rc}^2 = 0.0108 t^{2.34}$.

7. - Relação de TALBOT

TALBOT (1974) apud CHIN et al (1985) encontrou $\sigma_{rc}^2 = 0.081 t^{2.19}$.

8. - Relação de CHIN e ROBERTS apud ROBERTS (1986)

CHIN et al (1985) encontraram após 5 horas:

$$\frac{C_{max}}{M} = 8.95 \cdot 10^{-5} t^{-2} \quad \text{para o verão, e}$$

$$\frac{C_{max}}{M} = 1.07 \cdot 10^{-5} t^{-1.28}$$

onde C_{max} em kg/m^3 , M em kg e t em segundos.

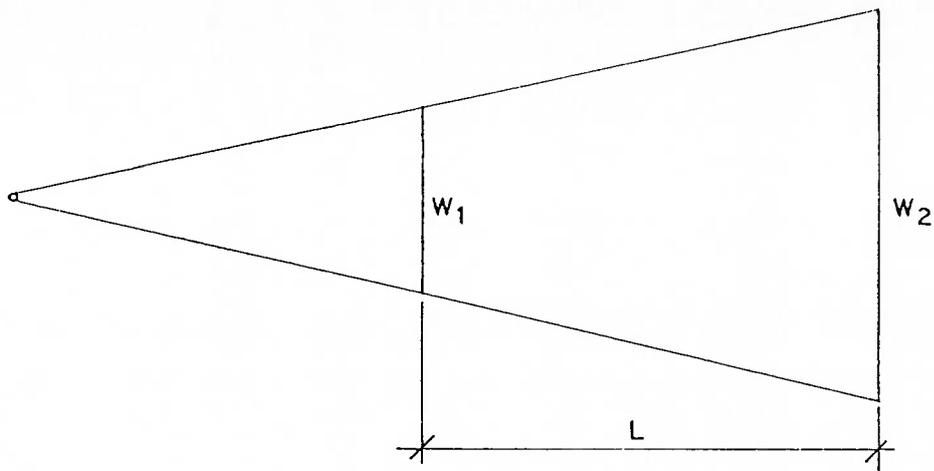


Figura 4.1.6. - Croquis de dispersão s/GUNERSON

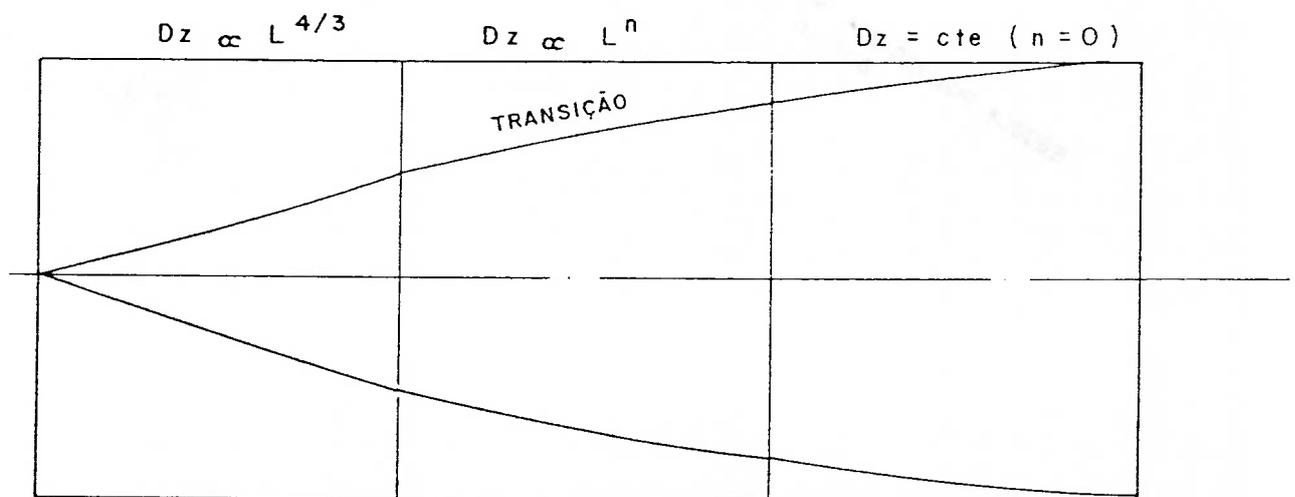


Figura 4.1.7. - Coeficiente de dispersão de ORLOB

4.1.5.5. - Solução da dispersão ou diluição inicial por análise integral.

A dispersão inicial provocada por descargas no fundo do mar, para efluentes leves, pode se apresentar de três formas diferentes, conforme já visto :

- Jato puro (momentum)
- Pluma pura (boiância)
- Combinação jato-pluma

Esta metodologia foi utilizada por BROOKS (1972), com base nos estudos de MORTON, TAYLOR e TURNER (1956) e atualmente JIRKA et al (1986) apresentam um amplo estudo com base na análise integral.

- 1.) Solução para jato puro isolado (jato circular)

Neste caso se admite que :

- . A densidade do jato e do corpo receptor são iguais
- . O ambiente é estagnado
- . Não há estratificação

As equações básicas do jato são :

- Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} = 0 \quad (4.1.55)$$

- Momentum

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'v'})$$

- Conservação de massa

$$u \frac{\partial C}{\partial s} + v \frac{\partial C}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{c'v'})$$

Na figura 4.1.8 ,mostra-se as características do jato puro

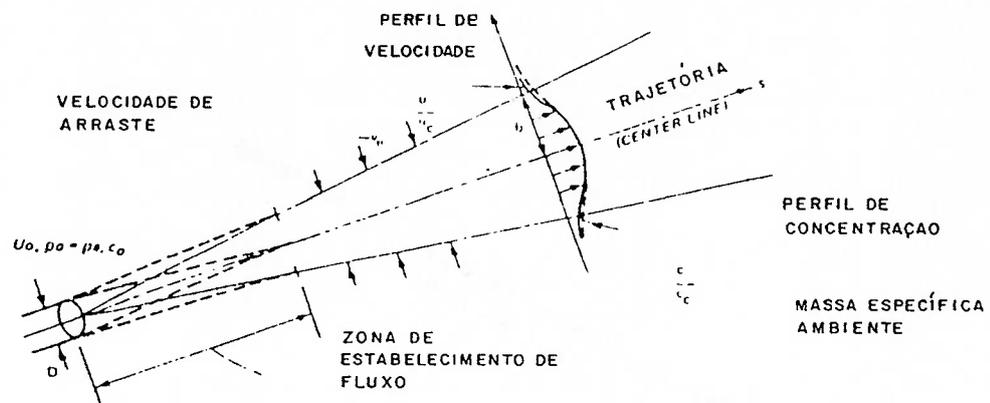


Figura 4.1.8. - Jato puro isolado

Neste sistema "s" é a coordenada axial e "r" é a coordenada radial , sendo a turbulencia lateral representada pelos termos $\overline{u'v'}$ e $\overline{c'v'}$. O momentum transversal é considerado desprezível.

As condições iniciais para um jato normalizado serão :

$$\text{para } s = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = U_0 \\ c = C_0 \end{array} \right. , \quad r \leq \frac{D}{2}$$

As condições de contorno são :

$$\text{para } r \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 0 \\ u'v' \rightarrow 0 \\ c'v' \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Aplicando análise integral tem-se

$$\frac{u}{u_c} = f\left(\frac{r}{b}\right) = e^{-\left(\frac{r}{b}\right)^2}$$

$$\frac{c}{c_0} = f\left(\frac{r}{b}\right) = e^{-\left(\frac{r}{\lambda b}\right)^2}$$

$$Q = 2\pi \int_0^{\infty} u \, r \, dr \quad \text{fluxo de volume}$$

$$M = 2\pi \int_0^{\infty} u^2 \, r \, dr \quad \text{fluxo de momentum}$$

$$Q_c = 2\pi \int_0^{\infty} u \, c \, r \, dr \quad \text{fluxo de massa}$$

$$\text{onde} \quad Q = 2\pi I_1 u_c b^2$$

$$M = 2\pi I_2 u_c^2 b^2$$

$$Q_c = 2\pi I_3 u_c c_c b^2$$

na qual os coeficientes integrais são :

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(\eta) \eta \, d\eta \quad I_2 = \int_0^{\infty} f^2(\eta) \eta \, d\eta$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} f(\eta) F(\eta) \quad \text{onde } \eta = \frac{r}{b}$$

utilizando as funções gaussianas obtém-se :

$$I_1 = \frac{1}{2} \quad I_2 = \frac{1}{4} \quad I_3 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

Integrando as equações anteriores e utilizando as condições de contorno, tem-se :

$$\frac{dQ}{ds} = 2\pi b v_e \quad \text{onde } v_e : \text{ velocidade de entrada no jato}$$

$$\frac{dM}{ds} = 0 \quad b : \text{ largura do jato}$$

$$\frac{dQ_c}{ds} = 0 \quad \lambda : \text{ parâmetro}$$

De acordo com as pesquisas SCHLICHTING (1968) apud JIRKA (1986), obteve-se :

$$\frac{db}{ds} = K_j \quad K_j = \text{coeficiente de expansão}$$

$$\frac{d}{ds} (2\pi I_2 u_c^2 b^2) = 0 \quad u_c = \text{velocidade no eixo}$$

Isto significa que a largura do jato é proporcional à distância. MORTON, TAYLOR e TURNER (1956) verificaram primeiro a condição $v_e \propto u_c$.

$$\frac{d}{ds} (2\pi I_1 u_c b^2) = 2\pi a_j u_c b$$

$$\frac{d}{ds} (2\pi I_2 u c^2 b^2) = 0$$

logo

$$a_j = I_1 K_j$$

- 2) Pluma pura isolada

O movimento gerado por diferença de densidade entre o efluente e o corpo receptor é responsável pela boiância ou pela submergência.

A aceleração aparente ou modificada $g' = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} g$ que provoca a boiância, em efluentes leves, é conhecida como pluma devido à pequena diferença de densidade que gera velocidades de escoamento baixas com pequeno número de FROUDE.

Na figura 4.1.9 apresenta-se a forma da pluma

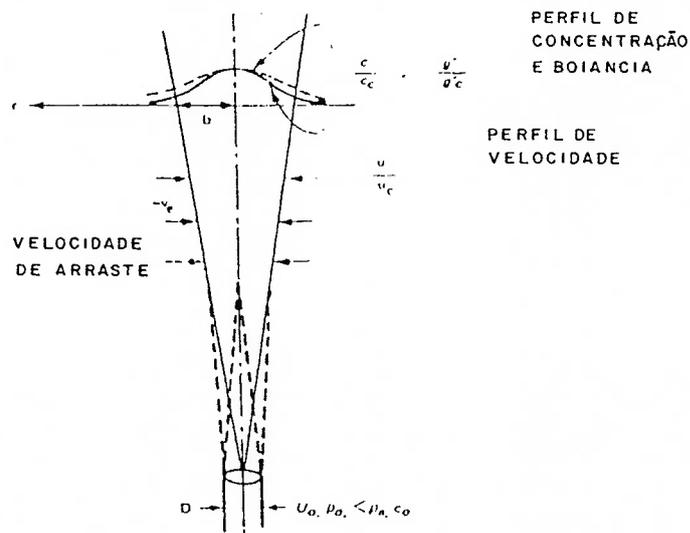


Figura 4.1.9. - Pluma pura isolada

aplicando :

$$\text{momentum vertical } u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'v'}) + g'$$

$$\text{conservação da boiância } u \frac{\partial g'}{\partial s} + v \frac{\partial g'}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r (g')'v')$$

Condições iniciais

$$\text{para } s = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} g' = g'_o \\ u = u_o = F \ell_p \frac{I_2^{5/4}}{8^{1/4} I_1 I_3^{1/2}} (g'_o D)^{1/2} \\ c = C_o \end{array} \right\}$$

Condições de contorno

$$\text{para } r = \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} g' \rightarrow 0 \\ (g')'v' \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

De forma similar aos jatos isolados, JIRKA et al(1986) apresenta as condições de pluma isolada.

Nas tabelas 4.1.2 e 4.1.3 JIRKA (1986) apresenta um resumo do equacionamento e dos coeficientes dos jatos e plumas isolados.

Tabela 4.1.2. -Equacionamento dos jatos e plumas circulares segundo JIRKA et al (1986).

	Jato circular	Pluma circular
	$a_0 = \frac{\pi}{4} D^2$	
	$M_0 = U_0^2 a_0$	$M = \left(\frac{5}{4} \frac{I_2^{3/2} I_1^4}{I_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_p} J_0 Q_0^2 \right)^{2/5}$
	$Q_0 = u_0$	Q_0
	$Q_{c0} = U_0 c_0 a_0$	Q_{c0}
		$J = J_0$
Momentum		
	$M = 2\pi I_2 u_c^2 b^2$	$M = M_0$
		$M = \frac{1}{2} (\pi I_2)^{1/3} \left(\frac{I_4}{I_1 I_3} J_0 \frac{\alpha_p}{5} \right)^{2/3} (3s)^{4/3}$
Vazão		
	$Q = 2\pi I_1 u_c b^2$	$Q = \left(\frac{2\pi M_0}{I_2} \right)^{1/2}$
		$Q = \left(\frac{I_4 \pi^2}{I_1 I_2 I_3} J_0 \right)^{1/3} \left(\frac{\alpha_p}{5} \right)^{4/3} (3s)^{5/3}$
Fluxo de massa		
	$Q_c = 2\pi I_3 u_c c b^2$	$Q_c = Q_{c0}$
		$Q_c = Q_{c0}$
Boiância		
	$J = 2\pi I_3 u_c c b^2$	$J = J_0$
Largura		
	$b = k_j s = \frac{\alpha_j}{I_1} s$	$b = k_p s = \frac{\alpha_p}{5 I_1} s$
Diluição em volume		
	$S = \frac{Q}{Q_0}$	$S = \frac{Q}{Q_0}$
Diluição mínima no eixo		
	$S_c = \frac{c_0}{c_c} = \frac{g'_0}{g'_c}$	$S_c = \frac{I_3}{I_1} S$
		$S_c = \frac{I_3}{I_1} S$

Tabela 4.1.3.- Coeficientes dos jatos e plumas circulares
segundo JIRKA et al (1986)..

	Jato circular	Pluma circular
Coeficiente de expansão	$k_j = 0.110$	$k_p = 0.100$
Relação $\frac{\alpha}{k}$	$\frac{\alpha_j}{k_j} = \frac{1}{2}$	$\frac{\alpha_p}{k_p} = \frac{5}{6}$
Coeficiente de entrada	$\alpha_j = 0.055$	$\alpha_p = 0.083$
Coeficiente de dispersão	$\lambda_j = 1.2$	$\lambda_p = 1.2$
No de Froude de equilibrio	$F\ell_j = \infty$	$F\ell_p = 4.66$
	$I_1 = \frac{1}{2}$	$I_2 = \frac{1}{4}$
	$I_3 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$	$I_4 = \frac{\lambda^2}{2}$
	$F\ell = \frac{u_c}{(g'_c b)^{1/2}}$	

Com metodologia semelhante à adotada nos jatos circulares, JIRKA apresenta soluções para jatos e plumas bidimensionais ou lineares.

Sempre considerando as alternativas extremas ou momentum puro ou boiância pura.

Esta técnica de cálculo que limita as soluções a determinadas condições específicas pode tornar-se interessante, na medida em que se visualiza que boas soluções de dispersão estão localizadas próximas dos extremos, denominados condições de pluma ou de jato.

A seguir as tabelas 4.1.4 e 4.1.5 com jatos e plumas bidimensionais e respectivos coeficientes.

Tabela 4.1.4. -Equacionamento dos jatos e plumas bidimensionais segundo JIRKA et al (1986).

	Jato plano	Pluma plana
Condição inicial	$m_o = U_o^2 B$	$m_o = \left(\frac{i_2 i_4}{2 i_1^2 i_3^2 \alpha_p} \right)^{1/3} q_o j_o^{1/3}$
	$q_o = U_o B$	q_o
	$q_{c_o} = U_o c_o B$	q_{c_o}
Momentum		$j_o = U_o q_o B$
	$m = i_2 u_c^2 b$	$m = \left(\frac{2 i_2 i_4}{i_1 i_3^2} \right)^{1/3} \alpha_p^{1/3} j_o^{2/3} S$
Vazão		
	$q = I_1 u_c^2 b$	$q = \left(\frac{4 i_1 i_4}{i_2 i_3} \right)^{1/3} \alpha_p^{2/3} j_o^{1/3} S$
Fluxo de massa		
	$q_c = i_3 u_c c_o b$	$q_c = q_{c_o}$
Boiância		
	$J = i_3 u_c q_c b$	$j = j_o$
Largura		
	$b = k_j S = \frac{4 \alpha_j}{i_1} S$	$b = k_p S = \frac{2 \alpha_p}{i_1} S$
Diluição em volume		
	$S = \frac{Q}{Q_o}$	$S = \frac{Q}{Q_o}$
Diluição mínima no eixo		
	$S_c = \frac{c_o}{c_c} = \frac{g_o}{g_c}, \quad S_c = \frac{i_3}{i_1} S$	$S_c = \frac{i_3}{i_1} S$

Tabela 4.1.5. - Coeficientes dos jatos e plumas bidimensionais segundo JIRKA et al (1986).

	Jato plano	Pluma plana
Coeficiente de expansão	$k_j = 0.135$	$k_p = 0.147$
Relação α/k	$\frac{\alpha_j}{k_j} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\frac{\alpha_p}{k_p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Coeficiente de entrada	$\alpha_j = 0.060$	$\alpha_p = 0.130$
Coeficiente de dispersão	$\lambda_j = 1.35$	$\lambda_p = 1.30$
No de Froude de equilibri	$F\ell_j = \omega$	$F\ell_p = 3.54$

$$I_1 = \sqrt{\pi} \quad I_2 = \sqrt{\pi/2} \quad I_3 = \lambda \sqrt{\pi/(1+\lambda^2)} \quad I_4 = \lambda \sqrt{\pi}$$

$$F\ell = \frac{u_c}{(g_c' b)^{1/2}}$$

- 3) Jatos com momentum inicial passando depois a pluma

As descargas no fundo do mar normalmente apresentam esta combinação, já que saem como jatos e após estes perderem o momentum passa a predominar a boiância ou pluma.

Ao combinar as condições de momentum e pluma, JIRKA (1986) adota uma serie de condições que permitem simplificar o equacionamento e aproximá-lo das condições reais, tais como:

- a) Ambiente estagnado
- b) Ambiente homogêneo
- c) Coeficiente de alargamento K constante, quando este apresenta grandes variações :

	Jato	Pluma
Circular	0.110	0.100
plano	0.135	0.147

- d) Coeficiente α constante, sendo que suas variações são muito grandes:

	Jato	Pluma
Circular	0.055	0.083
plano	0.066	0.130

A análise integral para jatos e plumas pode-se encontrar na publicação "Mixing in River" JIRKA et al (1986)

4.1.6. - Discussão

As soluções teóricas permitem uma avaliação geral do problema tanto em termos qualitativos como quantitativos, entretanto, o aspecto quantitativo fica condicionado à aproximação da solução em relação ao problema real.

Deverá prestar-se especial cuidado na utilização de coeficientes de dispersão no caso de soluções do tipo gaussiano, ou nos coeficientes de alargamento K , ou no coeficiente α , ou na velocidade de entrada v_e nas soluções com análise integral.

A utilização de coeficientes em forma generalizada leva a valores com margem de erro muito grande, enquanto que a adequada escolha do coeficiente levará a resultados próximos da realidade.

Os coeficientes de dispersão no mar são influenciados pelos fatores locais razão pela qual é recomendável que seja feita uma pesquisa no local, para determinação das variações dos coeficientes em especial entre inverno e verão onde aparece uma grande variação CHIN (1985).

4.2.- Modelos físicos de diluição inicial

4.2.1.-Conceitos básicos aplicados aos modelos físicos de diluição inicial.

Segundo WRIGTH et al (1984) e ROBERTS (1986)

- Equações

Jatos Isolados
circulares

$$Q = u_j A$$

$$B = g(\Delta\rho_0/\rho)Q$$

$$M = u_j Q$$

$$N = (-g/\rho_0 \frac{d\rho}{dz})^{1/2}$$

$$l_Q = Q/M^{1/2} = A^{1/2}$$

$$l_M = M^{3/4}/B^{1/2}$$

$$l_B = b^{1/4}/N^{3/4}$$

Jatos lineares
interligados

$$q = Q/L$$

$$b = g(\Delta\rho_0/\rho)q$$

$$m = u_j q$$

$$N = (-g/\rho_0 \frac{d\rho}{dz})^{1/2}$$

$$l_q = q^2/m$$

$$l_m = m/b^{2/3}$$

$$l_b = b^{1/3}/N$$

Simbologia

Q, q = vazão total e unitária L = comprimento do difusor

B, b = "boiância" total e unitária

M, m = "momentum" total e unitário

l_Q, l_q = escala de vazão total e unitária

l_M, l_m = escala de momentum total e unitário

l_B, l_b = escala de boiância total e unitária

u_j = velocidade do jato ρ_0 = massa específica do efluente

A = área do orifício ρ_a = massa específica (água do mar)

g = aceleração de gravidade

$\Delta\rho_0$ = diferença de densidade (água do mar-efluente)

Os conceitos de escala conforme WRIGTH (1984) et al correspondem :

l_Q, l_q = escala de vazão total ou unitária correspondente ao comprimento desde a origem, onde o fluxo de volume influencia o campo de escoamento. l_Q é aproximadamente igual ao diâmetro do orifício e l_q é igual a largura da fenda teórica

l_M, l_m = escala de momentum total e unitária corresponde ao comprimento desde a origem até onde o momentum atua.

l_B, l_b = escala de "boiância" total e unitária corresponde ao comprimento desde a origem até onde a "boiância" atua.

A comparação entre os termos l_M e l_B ou l_m e l_b respectivamente, indica a influência maior de um ou outro dos parâmetros.

A relação $l_M / l_B > 1$ indica que o momentum predomina sobre a boiância, e se $l_M / l_B < 1$ indica que a boiância predomina sobre o momentum.

Admite-se que nos casos a serem considerados nos equacionamentos tem-se escoamento turbulento e independente da viscosidade e dos efeitos do no. de Reynolds.

4.2.2. -Diluição inicial em meio homogêneo estagnado

Neste caso a situação mais geral de jato linear é conforme a figura 4.2.3 a seguir

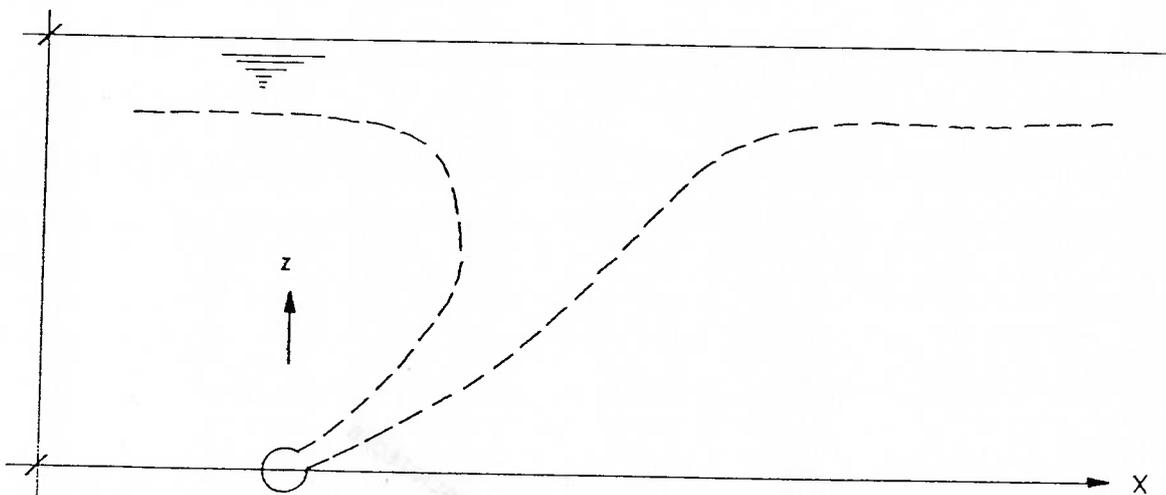


Figura 4.2.1. - Jatos isolados boiantes em meio homogêneo estagnado.

Admitindo-se uma função: $g' = (q, b, m, s, u, n, \theta, x, y, z)$, onde

$$g' = \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} g$$

Em ambiente estagnado $u = 0$, independente de x , y e θ

Como o meio não é estratificado $N = 0$, logo

$$g' = (q, b, m, s, z) \quad (4.2.9)$$

- Jatos Isolados boiantes em meio homogêneo estagnado

Para o caso de jatos circulares isolados (figura 4.2.1) tem-se que q, b, m são Q, B, M e "s" não afeta o sistema, sendo portanto

$$g' = (Q, B, M, Z) \quad (4.2.10)$$

Aplicando-se a análise dimensional

$$S_m / F_e = f(z/l_M, z/l_Q) \quad (4.2.11)$$

como o efeito da vazão é pequeno z/l_Q é dispensável

Logo $S_m / F_e = f(z/l_M)$ (4.2.12)

Na figura 4.2.2 é mostrada a curva que representa esta equação obtida experimentalmente em laboratório por ROBERTS (1977).

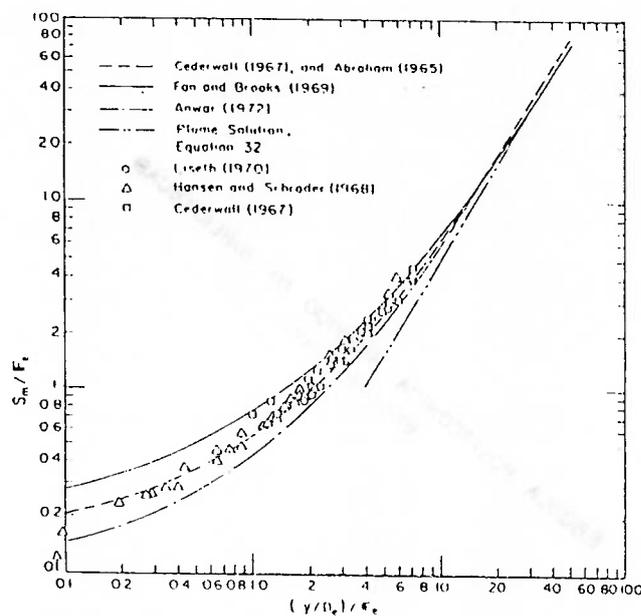


Figura 4.2.2. -Diluição em jatos isolados boiando em meio homogêneo estagnado ROBERTS (1977)

Quando $z/l_M \gg 1$ tem-se segundo ROBERTS (1977)

$$S_m / F_e = 0.118 (z/l_M)^{5/3} = 0.107 (z/dF_e)^{5/3} \quad (4.2.13)$$

Que é a condição de pluma. Utilizável para $z/l_M > 10$

A espessura do campo superficial é para o caso de pluma

$$h_s = f(H, B) \text{ ou } h_s = \text{cte} * H$$

Onde a cte = 0,08 de JIRKA e LEE (1981) apud ROBERTS (1986) e RAWN e PALMER (1929), ou seja :

$$h_s = H / 12$$

Visto que a espessura é pequena o efeito desta pode ser desprezado e considerar $z = y = H$ na eq. (4.2.13)

- Jatos lineares boiantes em meio homogêneo estagnado

Para o caso de jatos lineares

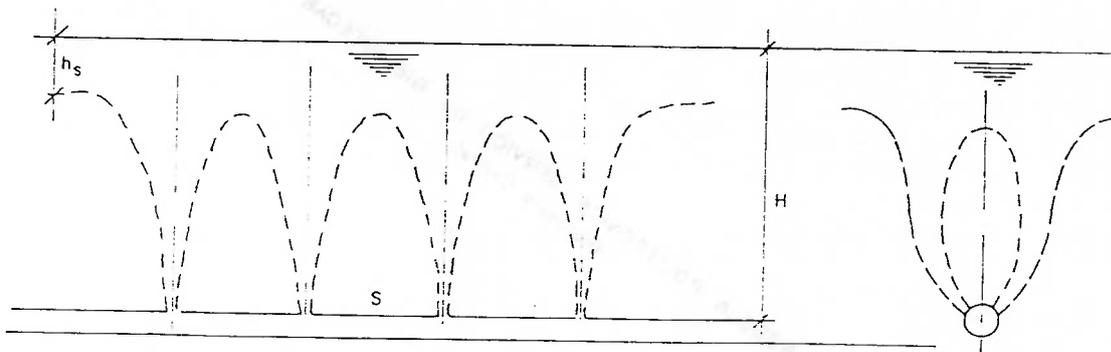


Figura 4.2.3. - Jatos lineares boiantes em meio homogêneo estagnado

Aplicando-se a análise dimensional à equação (4.2.9) obtém-se :

$$S_m / F_e = (1/C_3)(\pi/4)^{-2/3} (z/l)^{-2/3} (z/dF_e)^{5/3} \quad (4.2.14)$$

que para a condição de pluma $C_3 = 2.37$, tem-se :

$$S_m / F_e = 0.5(2z/s)^{-2/3} (z/dF_e)^{5/3} \quad (4.2.15)$$

com erro estimado em 10%, para difusor com orifícios nos dois lados ($s = 1/2$), alternados

Na figura 4.2.4 se mostra um gráfico de LISETH (1976) reaproveitado por ROBERTS (1977) .

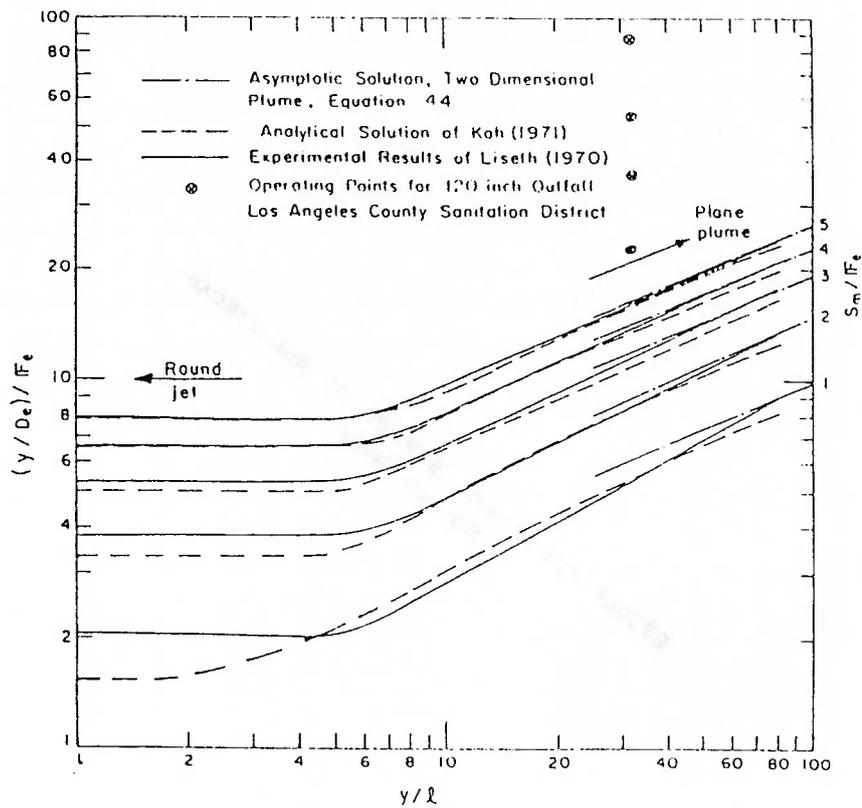


Figura 4.2.4. - Diluição em jatos lineares boiantes em meio homogêneo estagnado LISETH (1976) reaproveitado por ROBERTS (1977)

- Resultados

A figura 4.2.2 mostra a boa correlação da equação da pluma circular (4.1.13) com dados de pesquisas feitas por LISETH (1970), HANSEN e SCHRODER (1968) e CEDERWALL (1968) e com equacionamentos propostos por CEDERWALL (1967), ABRAHAM (1965), FAN e BROOKS (1969), ANWAR (1972). Sua utilização para valores $z/l_m > 10$ atende aos difusores habituais.

A figura 4.2.4 mostra que a pluma linear eq. (4.1.15) tem boa correlação com a solução da análise integral de KOH (1971) e com os dados experimentais de LISETH (1970).

- Aplicabilidade

As equações de ROBERTS (1977) são aplicáveis aos casos normais que se enquadram nas limitações.

- No caso de plumas circulares independentes deverá ter-se $z/l_m > 10$ ROBERTS (1977)
- No caso de plumas lineares deverá ter-se $z/s > 20$, ROBERTS (1977) e (1986)

Valores de z/l_m ou z/s , menores que os indicados, apresentam um erro muito grande na diluição inicial em relação aos valores obtidos por LISETH (1976).

- Análise Geral

Esta situação é uma das que leva mais tempo sendo estudada tendo em vista a simplicidade em relação aos outros casos.

Foram concentrados esforços em encontrar uma solução para este caso e a partir daqui obter as outras soluções mais complexas .

Na natureza, esta situação é possível de ter em lagos, no mar é mais difícil de acontecer , talvez , em baías .

Entretanto esta solução nos permite obter os valores da condição de uma descarga num meio homogêneo estagnado de forma a caracterizar a zona de influência da descarga dos efluentes, definir a chamada mancha superficial, caso exista, e limitar a uma diluição inicial mínima que garanta a proteção adequada ao meio receptor, com mínimo impacto.

Outros valores fora da pluma poderão ser obtidos desde que se definam os coeficientes respectivos .

De qualquer forma a condição de pluma é uma das mais convenientes, visto que as maiores diluições iniciais poderão aparecer nas proximidades da condição de pluma ou da condição de jato.

4.2.3. - Diluição inicial em meio estratificado estagnado

- Jatos isolados em meio estratificado estagnado

$$g_o', z_m, z_e, h_s = f(M, B, N) \quad (4.1.16)$$

Onde :

z_m = Altura do nível medio do campo

z_e = Altura do nível máximo (topo)

h_s = Espessura do campo

$$g_o' = g(\Delta\rho/\rho_o)$$

Utilizando-se a análise dimensional obtém-se :

$$\frac{S_m Q N^{5/4}}{B^{3/4}}, \frac{z_m}{l_B}, \frac{z_e}{l_B}, \frac{h_s}{l_B} = f(l_M/l_B) \quad (4.2.17)$$

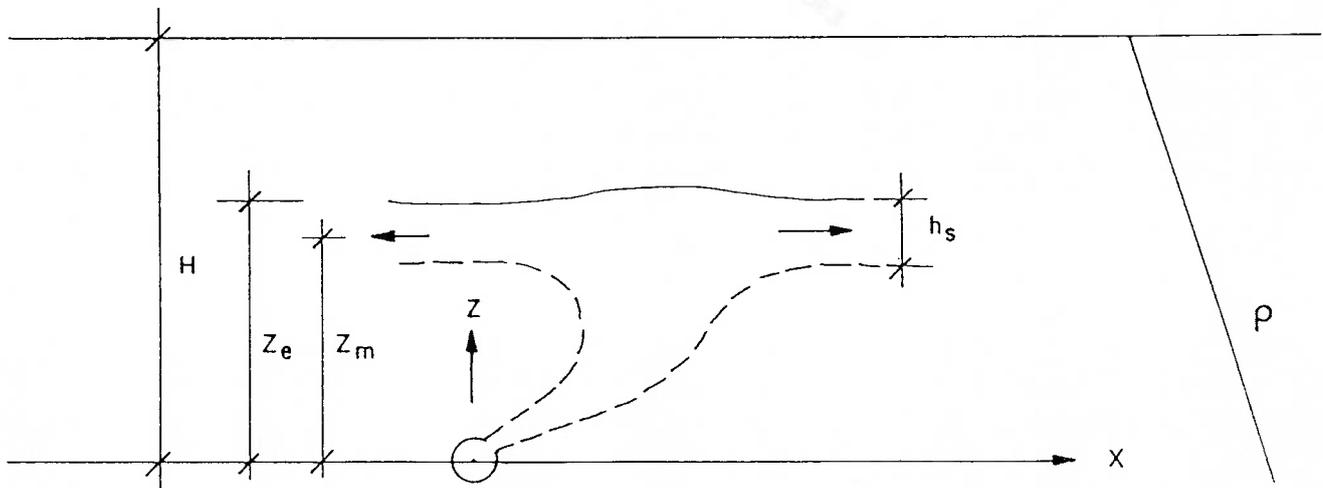


Figura 4.2.5. - Jato isolado em meio estratificado estagnado

BROOKS (1972) obteve solução numérica integral , de acordo com condições e com limitações impostas .

Para valores $l_m/l_B \ll 1$ tem-se a condição de pluma e a $f(l_m/l_B)$ vira constante , conforme mostra ROBERTS (1986).

Segundo WONG (1985) para jatos "boiantes" verticais com $l_m/l_B < 0,6$ tem-se :

$$\frac{S_m Q N^{5/4}}{B^{3/4}} = 0.8 \quad (4.2.18)$$

$$z_e/l_B = 4.5 \quad (4.2.19)$$

$$h_s/l_B = 1.5 \quad (4.2.20)$$

$$z_m/l_B = 2.9 \quad (4.2.21)$$

- Jatos lineares em meio estratificado estagnado

Aplicando-se as funções :

$$g_o' , z_m , z_e , h_s = f(m, b, N, s) \quad (4.2.22)$$

e utilizando-se a análise dimensional obtém-se :

$$\frac{S_m Q N}{b^{3/3}} , \frac{z_m}{l_B} , \frac{z_e}{l_B} , \frac{h_s}{l_B} = f\left(\frac{l_m}{l_B} , \frac{s}{l_B} \right) \quad (4.2.23)$$

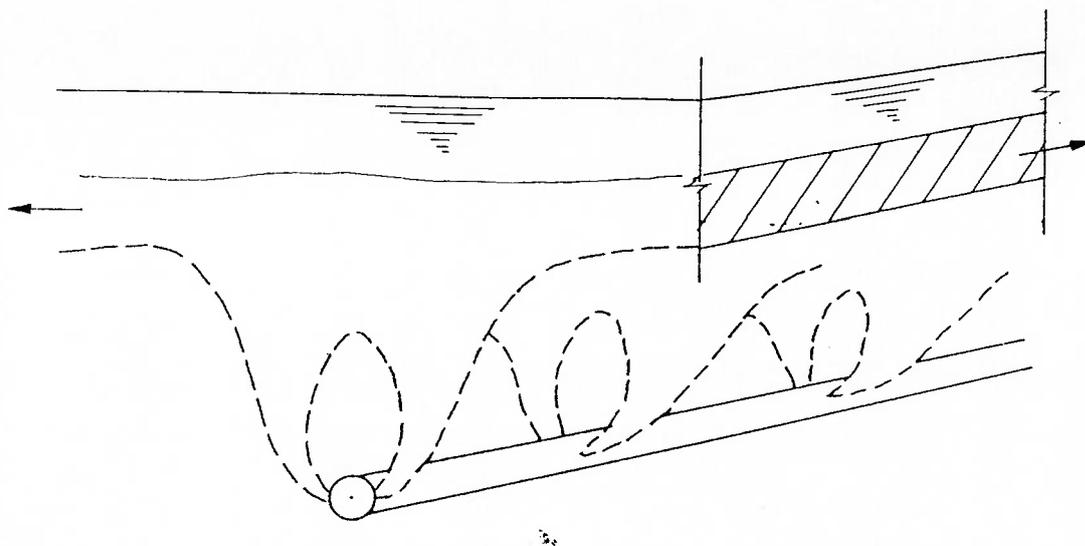


Figura 4.2.6. - Jatos lineares em meio
estratificado estagnado

Quando $z_m \gg s$ e $\frac{l_m}{l_b} \ll 1$

Pode-se aplicar a condição de pluma de acordo com WRIGTH et al (1980-1984) e ROBERTS (1989) .

$$\frac{S_m qN}{b^{2/3}} = 0.97 \quad (4.2.24)$$

$$\frac{ze}{l_b} = 2.6 \quad (4.2.25)$$

$$\frac{z_m}{l_b} = 1.7 \quad (4.2.26)$$

$$\frac{h_s}{l_b} = 1.9 \quad (4.2.27)$$

$$\frac{S_a}{S_m} = 2.0 \quad (4.2.28)$$

- Resultados

ROBERTS (1989) utilizando dados de KOH e FAN (1970), WRIGHT et al (1982), MUELLENHOFF et al (1985) e medições de laboratório encontrou as relações indicadas acima .

Comprovou que as diluições iniciais com pluma linear e as observadas coincidem ; já na pluma circular a diluição inicial observada era menor que a calculada.

- Aplicabilidade

Para aplicar a condição de pluma linear deve ter-se :

$$l_m/l_b < 0,1 \quad \text{e} \quad s/l_b < 0,3$$

Na condição de quase pluma linear que acontece quando :

$$l_m/l_b < 0.5 \quad \text{e} \quad s/l_b < 1.92$$

pode-se utilizar o equacionamento de pluma com uma margem de erro de aproximadamente 10%, conforme WRIGHT (1982) e ROBERTS (1989).

- Análise geral

A pluma linear permite calcular com segurança a diluição.

As alturas e espessuras do campo são um pouco inferiores aos valores reais encontrados.

De qualquer forma a pluma linear representa a condição mais econômica de difusor para igual número de orifícios.

4.2.4. - Diluição inicial em meio homogêneo advectivo

- Jato isolado boiante em meio homogêneo advectivo

A inclusão de uma corrente transversal ao fluxo difusor ,
causa um incremento na diluição inicial .

Na figura 4.2.7 a seguir tem-se

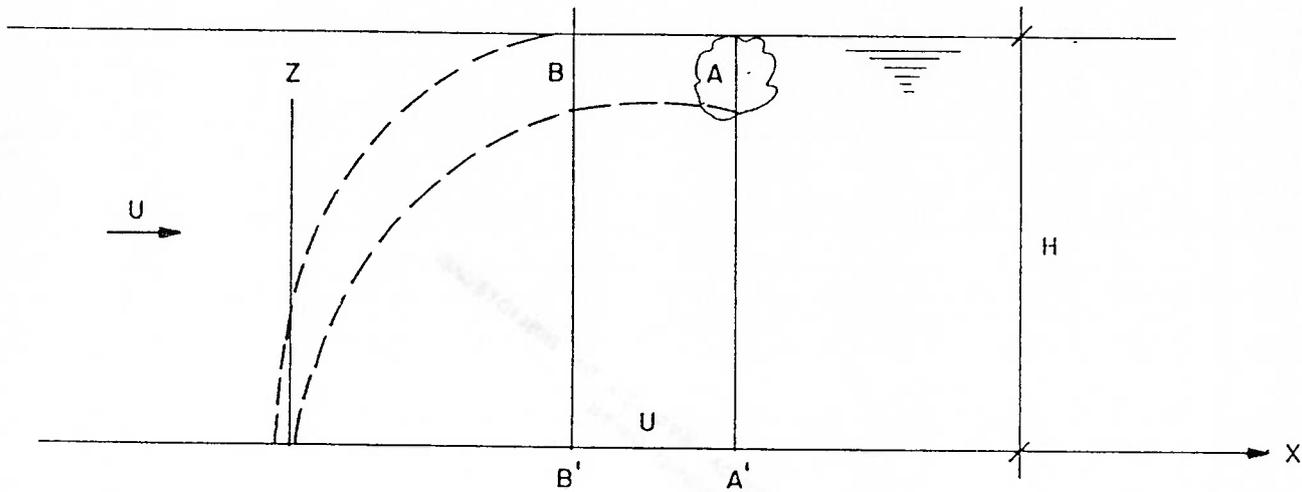


Figura 4.2.7. - Jatos isolados boiantes em meio homogêneo advectivo

Este modelo chamado de "Line Impulse Model" por CHU (1976 e 1979) , foi introduzido por PRIESTLY (1956) e SCORER (1958) e foi generalizado por CHU (1976) e rerepresentado por CHU (1979).

A idéia básica consiste em que o sistema de coordenadas se move com o fluxo transversal de modo a permitir um ambiente estacionário com vazão Q_0 , momentum M_0 e "boiancia" B movendo-se com velocidade U .

Desprezando o momentum na origem (1976 e 1979) CHU obtem :

$$\frac{S_m Q}{u l_s^2} = 0.41 \left(\frac{z}{l_s} \right)^2 \quad (4.2.29)$$

$$l_s = \left(\frac{4M^2}{\pi \rho \beta u} \right)^{1/3} \quad (4.2.30)$$

Aplicada para a condição de pluma isolada obtém-se a diluição mínima para $Z = H$.

$$\frac{S_m Q}{u H^2} = 0.41 \quad (4.2.31)$$

- Jatos lineares boiantes em meio homogêneo advectivo

Neste caso os jatos se interligam ao chegar na superfície (figura 4.2.8)

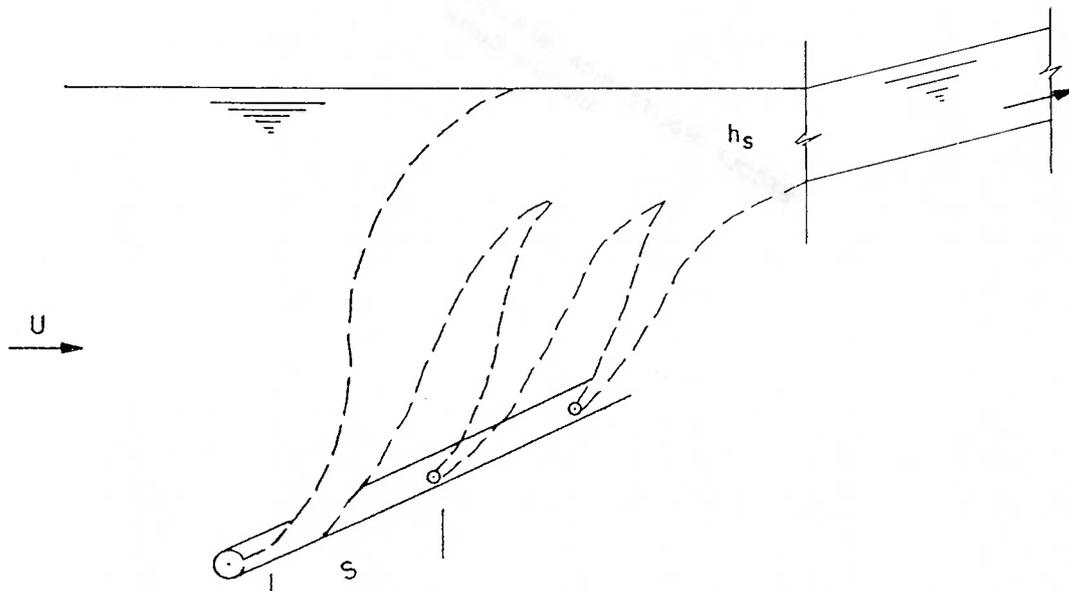


Figura 4.2.8. - Jatos lineares boiantes em meio homogêneo advectivo

O difusor com espaçamento s entre furos, para permitir uma pluma linear na superfície, foi estudado por Roberts (1977-1979) .

Partindo da função :

$$(\rho_r - \rho)g = f(u, b, \rho_0, L, H, x, y, z, \theta, \nu) \quad (4.2.32)$$

onde : ρ_r = massa específica do corpo receptor
 ρ = massa específica da mistura no local
 b = fluxo de boiância
 ν = viscosidade cinemática

Admite-se que as mudanças de massa específica do campo são pequenas em comparação com a massa específica absoluta do corpo receptor e afetam somente as forças gravitacionais e não afetam as forças de inércia de acordo com a concepção de Boussinesq .

Aplicando-se a análise dimensional à equação (4.2.32), obtém-se :

$$\frac{S}{uH} = f\left(F, \frac{L}{H}, \frac{x}{H}, \frac{y}{H}, \frac{z}{L}, \theta, \frac{b^{1/3}H}{\nu}\right) \quad (4.2.33)$$

Onde : $F = U^3/b$

$$S = \frac{\rho_r - \rho_0}{\rho_r - \rho}$$

$$R = b^{1/3} H/\nu$$

Para números de REYNOLDS grandes e fluxo turbulento, o fluxo dispersivo é independente do número de REYNOLDS.

Logo :
$$\frac{S_m q}{u H} = f\left(F, \frac{L}{H}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H}, \frac{z}{L}, \theta\right) \quad (4.2.34)$$

Na superfície a diluição é mínima no eixo, onde não depende de x e y e $y/H = 1$

Assim
$$\frac{S_m q}{u H} = f\left(F, \frac{L}{H}, \theta\right) \quad (4.2.35)$$

De acordo com as pesquisas realizadas, ROBERTS (1977) adotou :
$$\frac{S_m q}{u H} = f(F, \theta) \quad (4.2.36)$$

Sendo independente de L/H para $3,75 < L/H < 30$.

Para a condição de pluma linear $F < 0,1$, tem-se :

$$\frac{S_m q}{u H} = 0,27F^{-1/3} \quad \text{ROBERTS (1977)} \quad (4.2.37)$$

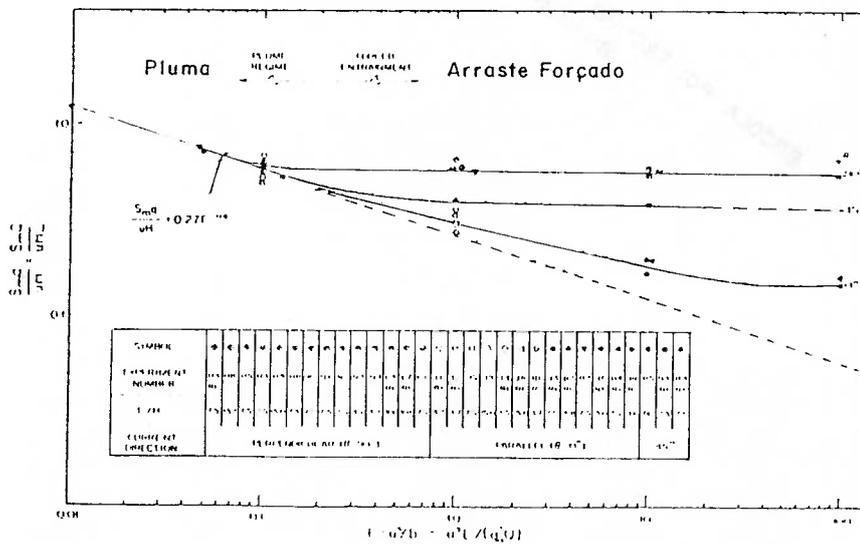


Figura 4.2.9.- Diluição mínima de jatos lineares em meio homogêneo advectivo ROBERTS (1977)

Na figura 4.2.9 ROBERTS (1977) apresenta as curvas para três ângulos θ correspondentes a : 0 , 45 , e 90°

- Resultados

Os resultados obtidos por ROBERTS se encontram plotados na figura 4.2.9 e permitiram a obtenção das curvas indicadas.

- Análise geral

As curvas da figura 4.2.9 permitem uma avaliação da diluição inicial em meio homogêneo, em presença de correntes .

4.2.5.- Diluição inicial em meio estratificado advectivo

- Jato isolado em meio estratificado advectivo

Na figura 4.2.10 a seguir tem-se um jato independente.

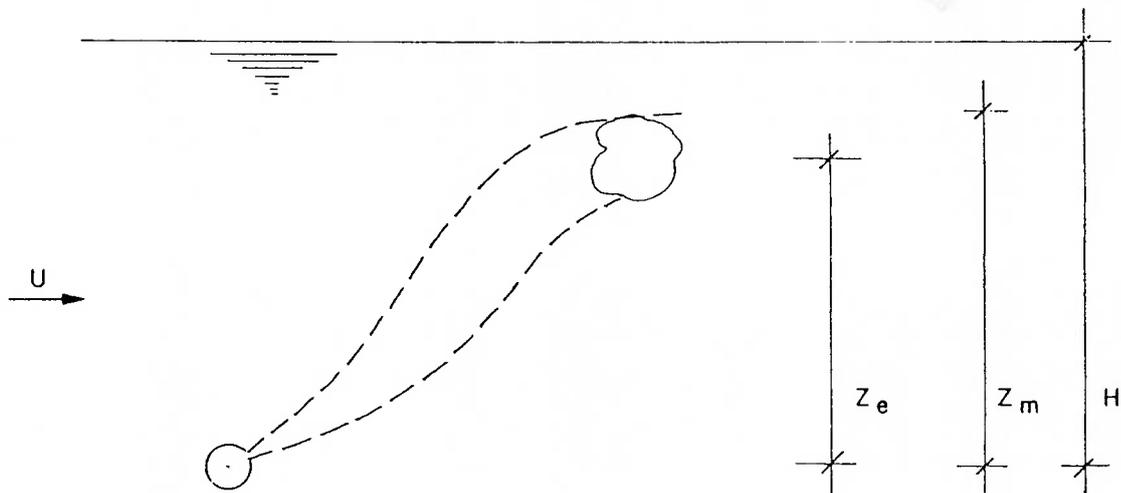


figura 4.2.10.- Jatos isolados em meio estratificado advectivo

WRIGHT (1984) estudou jatos verticais em meio estratificado com correntes e obteve soluções limitadas para o caso de "boiância" dominante e para o momentum dominante em águas profundas e em águas rasas .

O equacionamento previsto por WRIGHT (1984) parte da função :

$$\theta = f(Q, M, B, U, N, Z)$$

e obtém-se por análise dimensional uma relação para águas profundas :

p/ Momentum Dominante

$$\frac{S_m Q}{u l_s^2} = K_{10} \left(\frac{z_m}{l_m} \right)^2 \quad (4.2.38)$$

$$\text{com : } \frac{z_m}{l_m} = K_3 \left(\frac{l_a}{l_m} \right)^{1/3} \quad (4.2.39)$$

$$\frac{z_e}{l_m} = K_4 \left(\frac{l_a}{l_m} \right)^{1/3} \quad (4.2.40)$$

p/ Boiância Dominante

$$\frac{S_m Q}{u l_s^2} = K_{12} \left(\frac{z_m}{l_b} \right)^2 \quad (4.2.41)$$

$$\text{com : } \frac{z_m}{l_b} = K_7 \left(\frac{l_a}{l_b} \right)^{2/3} \quad (4.2.42)$$

$$\frac{z_e}{l_b} = K_8 \left(\frac{l_a}{l_b} \right)^{2/3} \quad (4.2.43)$$

onde : $K_3=2.2$, $K_4=1.5$, $K_7=2.3$, $K_8=1.85$, $K_{10}=0.25$, $K_{12}=0.25$

Wright (1984) divide o problema geral em uma série de pequenos problemas com suas limitações .

- Jatos lineares em meio estratificado advectivo

Para este caso ROBERTS ,SNYDER e BAUMGARTNER (1989) apresentaram as pesquisas relativas a jatos em ambiente estratificado com correntes .

Na figura 4.2.11 a seguir se apresentam as características dos jatos lineares em meio estratificado advectivo

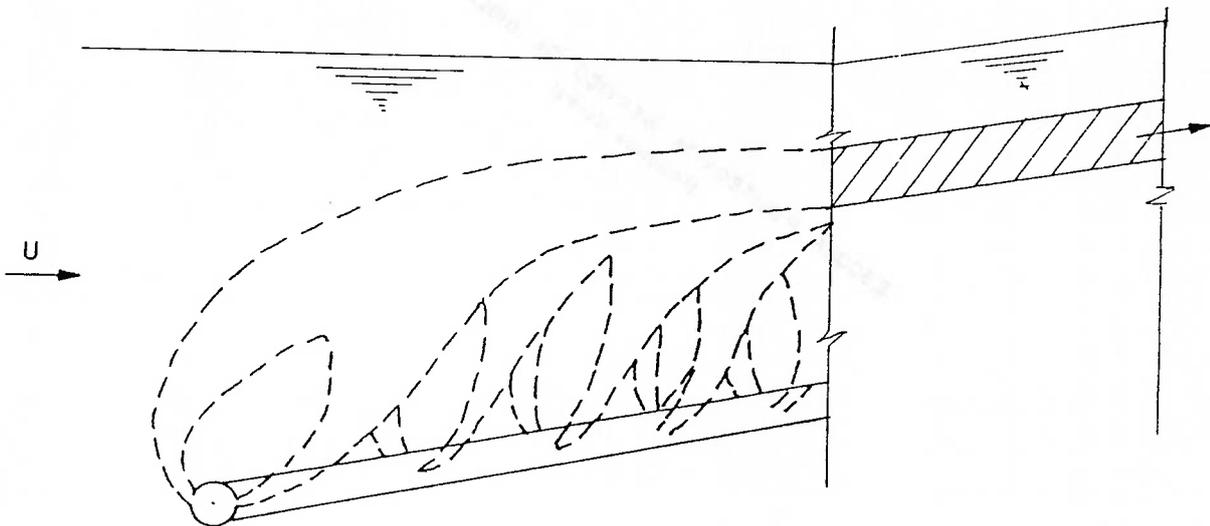


figura 4.2.11. - Jatos lineares em meio estratificado advectivo

Partindo da função

$$\phi = f(q, b, m, s, u, N, \theta)$$

(4.2.44)

na qual é admitido que o fluxo é turbulento e independente do número REYNOLDS e considerando os comprimentos de escala l_m , l_b , e l_q de acordo com WRIGTH (1982) e aplicando a análise dimensional ROBERTS et al (1989) obtiveram:

$$\phi = f\left(\frac{l_q}{l_b}, \frac{l_m}{l_b}, \frac{s}{l_b}, \frac{u^3}{b}, \theta\right) \quad (4.2.45)$$

Para a faixa de utilização de emissários submarinos nos quais tem-se l_q/l_b muito pequeno podendo deixar de ser considerado, levando em conta que a vazão linear q tem pouco efeito na determinação da condição de pluma, exceto próximo do orifício BROOKS (1980), WRIGTHS et al (1982).

A relação U^3/b é um tipo de número de Froude F , para o corpo receptor.

$$\text{Logo} \quad \frac{S_m qN}{b^{2/3}} = f\left(\frac{l_m}{l_b}, \frac{s}{l_b}, F, \theta\right) \quad (4.2.46)$$

$$\frac{z_e}{l_b}, \frac{h_e}{l_b}, \frac{z_m}{l_b} = f\left(\frac{l_m}{l_b}, \frac{s}{l_b}, F, \theta\right) \quad (4.2.47)$$

Para a condição de estagnação (corrente zero) .as equações (4.2.46) e (4.2.47) tornam-se :

$$\frac{S_m qN}{b^{3/4}} \frac{z_e}{l_b} \frac{h_e}{l_b} \frac{z_m}{l_b} = f\left(\frac{l_m}{l_b}, \frac{s}{l_b}\right) \quad (4.2.48)$$

Relações obtidas também por WRIGTH et al (1982), quando l_m/l_b e s/l_b tendem a zero, indicam que se chega à condição de pluma linear, onde os efeitos de espaçamento dos furos e momentum dos jatos são desprezíveis em função do efeito de boiância, neste caso:

$$\frac{S_m qN}{b^{2/3}} \frac{z_e}{lb} \frac{h_e}{lb} \frac{z_m}{lb} = C_1, C_2, C_3, C_4 \quad (4.2.49)$$

Onde : C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes experimentais.

Na figura 4.2.12 a seguir ROBERTS (1989) apresenta a diluição inicial mínima em meio estratificado advectivo.

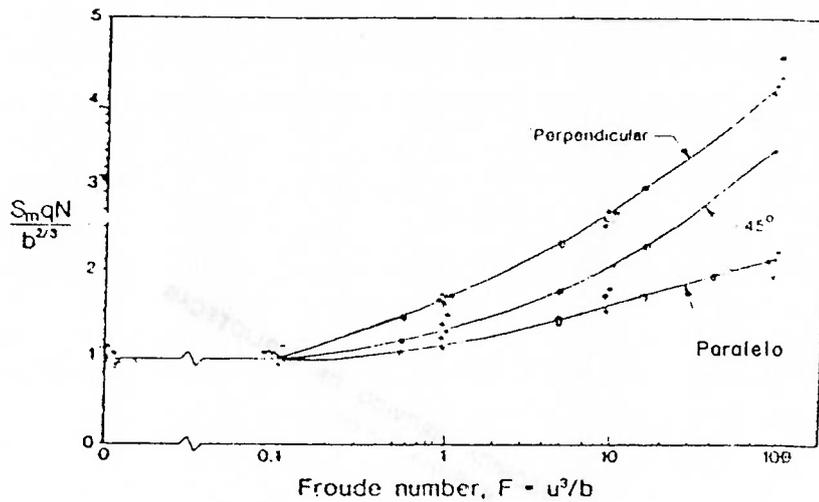


Figura 4.2.12. - Diluição inicial em plumas lineares em meio estratificado advectivo

Os resultados de ROBERTS (1989) indicam que a diluição inicial fica independente de l_m/l_b e s/l_b , quando $l_m/l_b < 0,2$ e $s/l_b < 0,3$, e se aproxima da pluma linear. Para $l_m/l_b < 0,5$ e $s/l_b < 1,92$ tem-se uma condição de quase pluma linear onde pode ser utilizada a pluma linear com erro de 10%.

Os maiores emissários do Pacífico conforme Fisher et al (1979), (tabela 10.1), apud ROBERTS (1989), indicam pouca influência do fluxo de momento na diluição inicial.

Tendo em vista estes fatos ROBERTS et al(1989) realizaram uma série de pesquisas onde consideraram:

$$l_m / l_b = 0,078 , 0,20 e 0,5$$

$$s / l_b = 0,31 , 0,78 e 1,92$$

$$e \quad F = 0 , 0,1 , 1 , 10 e 100$$

e com difusores cujos eixos são orientados perpendicularmente, a 45° e paralelamente as correntes, em ambientes estratificados.

Nas figuras 4.2.12 a 4.2.14, estão as representações da equação (4.2.47) conforme as pesquisas feitas por ROBERTS et al(1989).

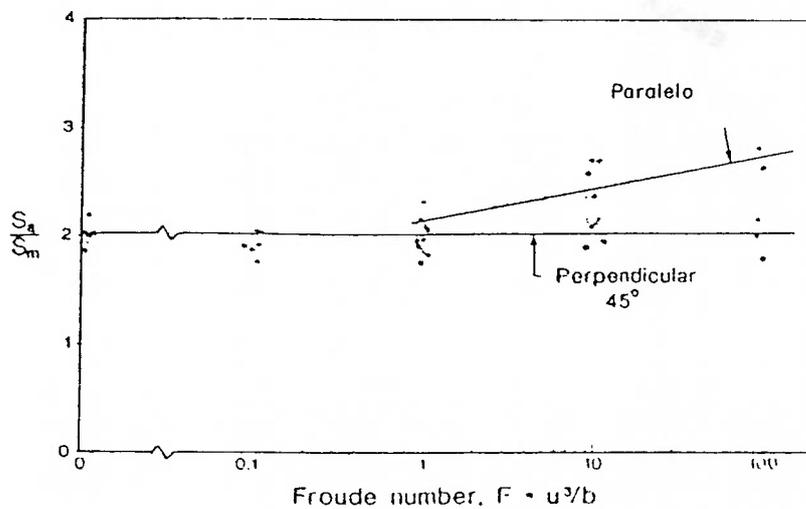
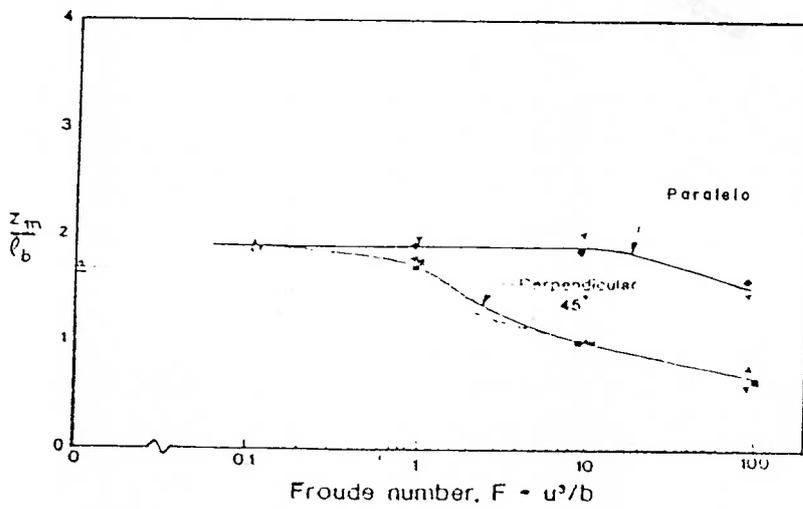
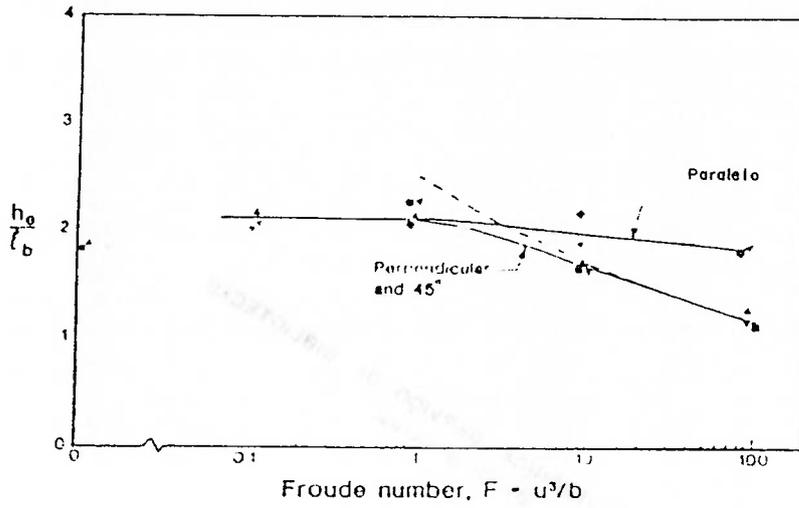
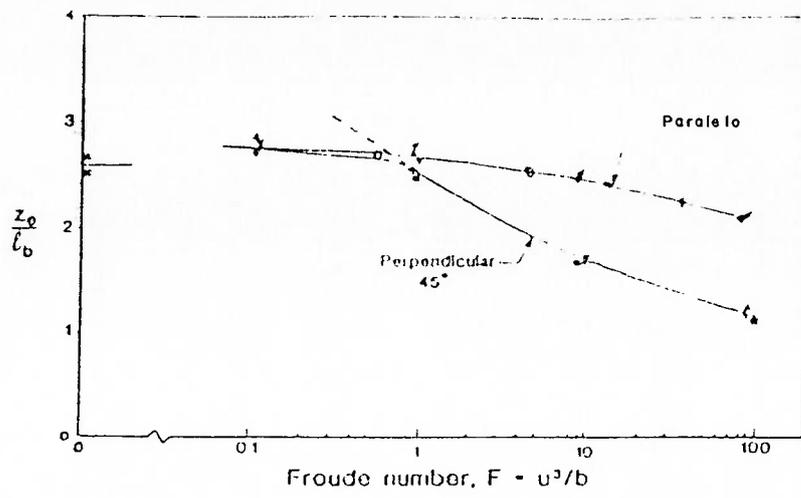


figura 4.2.13. - Diluição média / diluição mínima Vs F
segundo ROBERTS et al (1989)



4.2.14. - z_0/l_b , h_0/l_b , z_1/l_b Vs F - ROBERTS et al (1989)

- Resultados

Os resultados obtidos com jatos circulares isolados são úteis ainda que limitados, embora deva ser esclarecido que a solução de jato linear é sempre mais prática e econômica, que os jatos isolados, para igual número de orifícios.

Os resultados obtidos com jatos lineares em meio estratificado advectivo representam melhor a variação do fenômeno observado

Este caso é o mais generalizado e apresenta boa correlação com as condições naturais. Sem dúvida que com pesquisas mais amplas os resultados poderão sofrer alguns ajustes.

Verificou-se, que o equacionamento para jatos lineares em meio estratificado advectivo, permite diluições maiores que no correspondente equacionamento de jatos lineares em meio homogêneo advectivo, para frequências de boiância $N < 0.02$.

Este fato parece indicar um limite na estratificação onde a formulação é válida, visto que a frequência de boiância foi mais ou menos contante nas pesquisas ($N = 0.290$ a $N = 0.343$), realizadas por ROBERTS et al (1989).

- Aplicabilidade

O cálculo de jatos lineares em meio estratificado advectivo é facilmente aplicável de acordo com os dados disponíveis do estudo que se pretende analisar.

- Análise geral

A formulação de ROBERTS, SNYDER e BAUMGARTNER (1989) representa a mais completa pesquisa já realizada e permite uma boa segurança na sua aplicação, de modo a otimizar a utilização da diluição inicial, tendo em vista sua grande importância na atualidade.

Existe discrepância entre a diluição não estratificada e a diluição com estratificação pequena ($N < 0.02$), pois a última apresenta valores maiores que a primeira, o que não deveria acontecer, visto que a primeira representa o limite máximo de diluição para um certo difusor, com efluente e meio receptor característico. Não deverão ser considerados os valores de diluição obtidos com $N < 0.02$, ou que sejam superiores à diluição obtida em meio homogêneo advectivo.

Cabe assinalar que estes equacionamentos permitem uma análise muito flexível da dispersão de modo a ter uma visão global das diversas situações de um sistema difusor.

4.3.- Modelos de misturação

4.3.1.- Modelo de BROOKS

A equação de dispersão tridimensional é representada pela relação:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} & + & u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} & + & v \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} & + & w \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} & - & K_x \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} & - & K_y \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} & - & K_z \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} & = & 0 \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) & & (5) & & (6) & & (7) & & (4.3.1) \end{array}$$

Esta equação define as mudanças na concentração de um fluxo tridimensional.

Para aplicação da equação (4.3.1) consideram-se os seguintes aspectos:

- a) Em regime permanente o termo 1 é zero.
- b) Dispersão vertical é desprezível em relação à dispersão horizontal; termos 4 e 7 são desprezíveis.
- c) Fluxo na direção x, logo $v = 0$ (direção y) e termo 3 é zero.
- d) Dispersão horizontal longitudinal na direção x é desprezível em relação à dispersão horizontal transversal na direção y e o termo 5 é zero.
- e) K_y constante

logo a equação (4.3.1) fica reduzida a

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - K_y \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3.2)$$

Brooks (1960) resolveu a equação (4.3.2) e obteve:

$$C_m = C_o \operatorname{erf} (b / 4 \sqrt{K_y t}) \quad (4.3.3)$$

LAWRENCE (1961) apresentou para a equação de BROOKS (1960)

$$C_m = C_o \operatorname{erf} \left\{ 1.23 / \sqrt{[(8Kot / b^{2/3})^3 - 1]} \right\}$$

para $K_y/K_o = (1/b)^{4/3}$, incluindo um erro, pois deveria ser

$$C_m = C_o \operatorname{erf} \left\{ 1.5 / [(1+2\beta x/3b)^3 - 1]^{1/2} \right\}$$

onde $\beta = 12 K_o / ub$, logo (4.3.3a)

$$C_m = C_o \operatorname{erf} (1.5 / [(1 + 8Kot/b^2)^3 - 1]^{1/2})$$

O coeficiente K_y sugerido por Richardson (1948) apud ORLOB (1959) como sendo:

$$K_y = e L^{4/3} \quad (4.3.4)$$

que ORLOB encontrou ser: $K_y = 0.0136 E^{1/3} L^{4/3}$ (4.3.5)

além disto Orlob encontrou que "e" varia de 0,001 a 0,01, sendo um pouco mais frequente $e = 0.01$, para o trecho inicial.

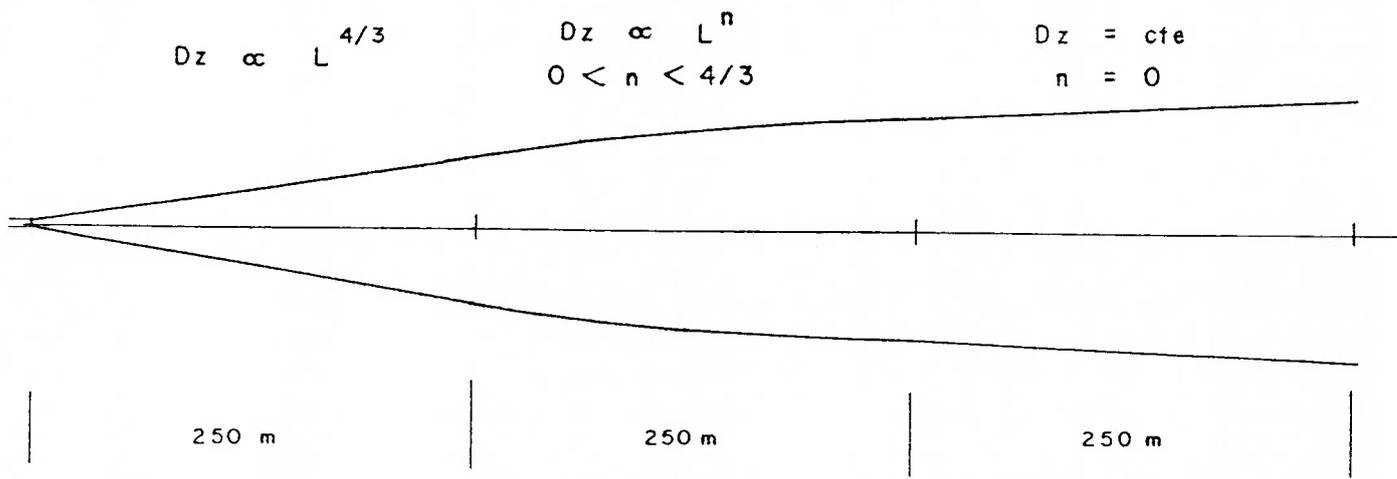


Figura 4.3.1. - Curva de dispersão de ORLOB

- No primeiro trecho segue a lei de $4/3$
- No segundo um valor L^n com $0 < n < 4/3$
- No terceiro $K_y = \text{cte}$ ($n = 0$)

K_y vai diminuindo conforme o elemento se dispersa.

Para um campo horizontal bidimensional tem-se

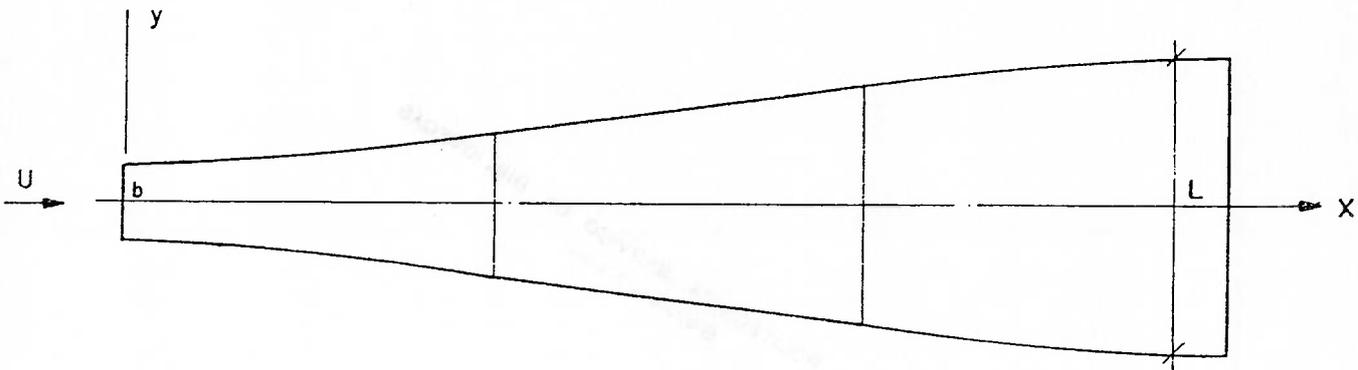


Figura 4.3.2. - Dispersão em campo horizontal bidimensional

$$K_y = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} \quad (4.3.6)$$

onde : K_y não é constante

A equação (4.3.2.) é resolvida admitindo-se um $K_o = \text{cte}$.

Logo, deverá ser utilizada uma transformação de variável de modo a permitir que K_o substitua o K_y na equação (4.3.2).

Portanto: $\frac{K_y}{K_o} = f(x)$

Admitindo que $L = 2 \sqrt{3} \sigma$ tem-se

$$\sigma^2 = \frac{L^2}{12}$$

$$K_y = (1/2) \frac{d\sigma^2}{dt} = (1/24) \frac{2LdL}{dt}$$

$$\frac{K_y}{K_0} = \frac{L}{12 K_0} \frac{dL}{dt} = \frac{uL}{12K_0} \frac{dL}{dx}$$

a) Para $K_y/K_0 = 1$

$$\frac{K_y}{K_0} = (uL/12K_0) \frac{dL}{dx} \implies dx = (u/12K_0) L dL$$

$$\int_0^x dx = (u/12K_0) \int_0^L L dl$$

$$x = (u/12K_0) [L^2 - b^2]$$

Logo

$$\frac{L}{b} = \left(1 + \frac{24K_0x}{b^2} \right)^{1/2} = \left(1 + 2\beta \frac{x}{b} \right)^{1/2} \quad (4.3.7)$$

$$\text{onde : } \beta = 12K_0/ub$$

b) Para $K_y/K_0 = L/b$

$$\frac{K_y}{K_0} = L/b = (uL/12k_0) \frac{dL}{dx}$$

$$dx = (bu/12k_0) dL$$

$$\int_0^x dx = (bu/12k_0) \int_b^L dL$$

$$x = (bu/12k_0) [L - b]$$

Logo

$$\frac{L}{b} = 1 + \frac{12K_0x}{ub^2} = 1 + \beta \frac{x}{b} \quad (4.3.8)$$

c) Para $K_y/K_o = (L/b)^{4/3}$

$$K_y/K_o = (L/b)^{4/3} = (uL/12K_o) \frac{dL}{dx}$$

$$dx = (uL/12K_o)(b/L)^{4/3} dL$$

$$\int_0^x dx = (ub^{4/3}/12K_o) \int_b^L L^{-1/3} dL$$

$$x = (ub^{4/3}/12K_o)(3/2) [L^{2/3} - b^{2/3}]$$

Logo :

$$\frac{L}{b} = \left(1 + \frac{8K_o x}{ub^2} \right)^{3/2} = \left(1 + \frac{2\beta x}{3b} \right)^{3/2} \quad (4.3.9)$$

A equação (4.3.3) será modificada de acordo com :

a) Para $K_y/K_o = 1$

$$C_m = C_o \cdot \text{erf} \left(\frac{b \sqrt{u}}{4\sqrt{K_o x}} \right) = C_o \cdot \text{erf} \left(\frac{1.5}{2\beta x/b} \right)^{1/2} \quad (4.3.10)$$

b) Para $K_y/K_o = L/b$

$$C_m = C_o \cdot \text{erf} \left(\frac{1.5}{[(1+\beta x/b)^2 - 1]} \right)^{1/2} \quad (4.3.11)$$

c) Para $K_y/K_o = (L/b)^{4/3}$

$$C_m = C_o \cdot \text{erf} \left(\frac{1.5}{[(1+2\beta x/3b)^3 - 1]} \right)^{1/2} \quad (4.3.12)$$

A diluição por misturação é $D_M = \frac{C_o}{C_m}$

HARREMOES (1967), apresentou a seguinte relação para o alargamento do campo horizontal :

$$b_{eff} = b_n + 0.15 L_{eff} \quad (4.3.13)$$

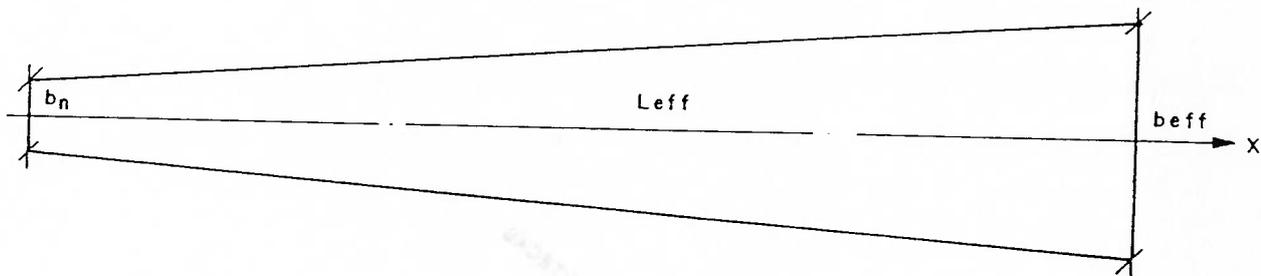


Figura 4.3.3. - Dispersão horizontal HARREMOES

onde :

- b_{eff} = largura perpendicular para $x = L_{eff}$
- b_n = largura perpendicular ao eixo na origem
- L_{eff} = comprimento x até o ponto considerado

Na tabela 4.3.1 a seguir estão os dados correspondentes às relações L/b das equações (4.3.7) , (4.3.8) e (4.3.9), assim como b_{eff}/b_n da equação (4.3.13).

Tabela 4.3.1

$\beta x/b$	L/b (4.3.7)	L/b (4.3.8)	L/b (4.3.9)	L_{eff}	b_{eff}/b_n (4.3.13)
1	1.73	2.00	2.15	1220	2.83
2	2.23	3.00	3.56	2440	4.66
3	2.64	4.00	5.19	3660	6.49
4	3.00	5.00	7.02	4880	8.32
5	3.31	6.00	9.02	6100	10.15
6	3.60	7.00	11.18	7320	11.84
7	3.87	8.00	13.81	8540	13.81
8	4.12	9.00	15.90	9760	15.64
9	4.35	10.00	18.50	10980	17.47

Para $\beta x/b = 3$ que corresponde aproximadamente a um emissário usual, tem-se diluições da ordem de 1:2 a 1:4 vezes, nos casos indicados, o que mostra que a dispersão horizontal ou misturação é normalmente muito secundária em relação à diluição inicial que no mínimo tem 1:100.

A misturação será no mínimo 25 vezes menor que a diluição inicial, podendo chegar facilmente a 100 vezes ou mais. Em termos práticos na engenharia poderá até ser desprezada em função da diluição inicial.

A solução de BROOKS supõe uma corrente unidirecional, que no intuito de obter a diluição por misturação ou concentração mais crítica, pode ser na direção da praia..

4.3.2. -Modelo de CHIN e ROBERTS (1982,1985)

Este modelo segundo ROBERTS (1986) supõe uma avaliação da dispersão horizontal ou misturação por simulações com uso de lagrangianos aleatórios a partir de dados contínuos de medição de correntes distribuídos espacialmente , obtidos na área de estudo .O modelo se acopla com o modelo de simulação de pluma linear .e foi apresentado por Chin e Roberts em "A Mathematical Model of Dispersion In Costal Waters",Report N° SCEGIT 82-105 School of Civil Engineering,Georgia Institute of Technology (1982) e em "Model of Dispersion in Coastal water" J. Hydraulic Engra 111,12-28

4.3.3. - Modelo de TORO (1991)

Este é um modelo hidrodinâmico com solução por diferenças finitas .

O modelo parte das equações de Navier-Stokes integradas ao longo da profundidade , válidas para águas pouco profundas, da equação de difusão e da equação do estado que expressa a relação entre massa específica do corpo receptor e do elemento a ser difundido

O modelo está dividido em camadas horizontais com distribuição hidrostática de pressões .

A integração numérica no tempo , para o campo de escoamento, é feita pelo algoritmo de Lax-Wendroff modificado para reduzir o ruído das oscilações entre nós .

Para o campo difusivo o modelo utiliza o esquema implícito de Crank-Nicolson , tendo em vista que as escalas de tempo do escoamento e da difusão podem ser diferentes .

O modelo é apresentado por Toro em "Modelamento Matemático de Fenómenos Hidrodinâmicos em Regiones cercanas a la Costa" , postgrado, Universidad Nacional de Colombia, Medellin ,1991.

5. - SISTEMAS DE LANÇAMENTO DE EFLUENTES AO MAR

5.1. - Elementos principais

Um sistema de dispersão de efluentes no mar, nas condições atuais, pode ser representado por um sistema de lançamento submarino que consta das seguintes partes principais :

- Estação de tratamento prévio
- Emissário submarino
- Difusor

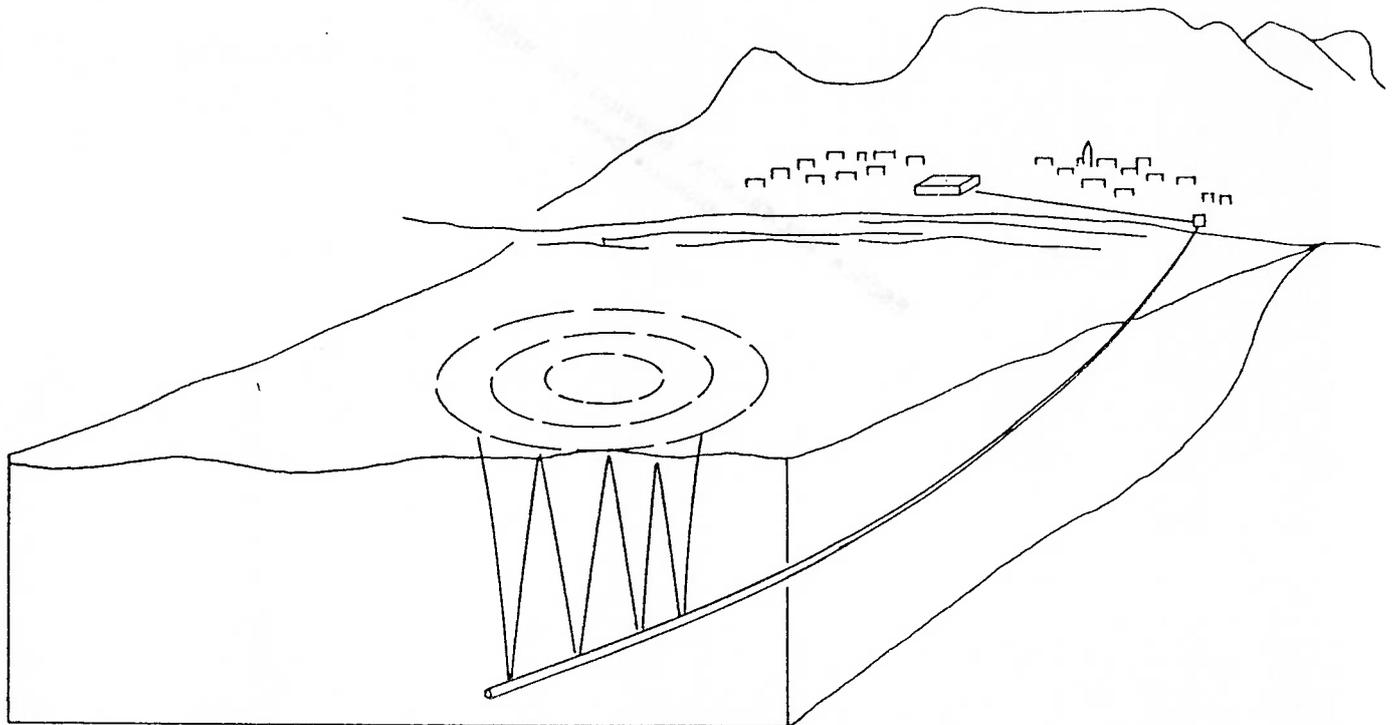


figura 5.1. - Croquis de sistemas de lançamento de efluentes ao mar.

4.3.4 - Análise Geral

Em termos gerais a solução de Brooks (1960) é simples e fácil de utilizar , fornecendo uma avaliação razoável da misturação em corpos de água abertos.

Não é um método completo mais é prático e econômico de utilizar, exigindo apenas as informações de correntes e outros dados obtidos em campanhas normais de medição oceanográfica .

Não é adequado para baías ou áreas fechadas .

A solução de Chin e Roberts (1982 e 1985) é mais sofisticado, requer medições contínuas durante longos períodos em vários pontos de modo a caracterizar o campo de correntes na área ,para posterior simulação do modelo difusor .

Exige um programa de computador e ampla gama de informações ,o modelo é adequado a baías e locais fechados .

O modelo de Toro é um modelo do tipo hidrodinâmico que permite avaliar a difusão em qualquer área .

O modelo é adequado a baías e áreas fechadas , exige muitas informações .

Os modelos mencionados de Chin e Roberts (1982-1985) e Toro (1991) precisam de calibração com dados de campo .

A Estação de Tratamento Prévio permite condicionar os efluentes de modo a tornar possível seu lançamento sem provocar impactos significativos no corpo receptor. Deve permitir entre outros a eliminação dos sólidos grosseiros, médios e finos maiores que 1 ou 2 mm, as gorduras e elementos flutuantes que provocam deterioração estética da água do mar e acumulação nas praias e os resíduos industriais contendo metais pesados que possam afetar o meio aquático.

O grau de tratamento dependerá das características dos efluentes a serem lançados ao mar pelo sistema de descarga, devendo adequá-los de modo que junto com a dispersão permitam garantir as condições de qualidade fixadas para as águas litorâneas.

O Emissário Submarino permite o afastamento dos efluentes previamente tratados até o ponto de descarga pelo difusor. O afastamento visa garantir uma distância adequada em relação às praias no intuito de preservar a balneabilidade das mesmas, assim como permitir que as descargas sejam efetuadas a uma profundidade compatível com as necessidades de dispersão.

O difusor, localizado no ponto de descarga dos efluentes, é previsto de modo a maximizar a diluição inicial no sistema, contribuindo para minimizar as perturbações ambientais no ponto de lançamento.

5.2. - Parâmetros básicos

O sistema de dispersão no mar, conhecido como emissário submarino, corresponde a um processo de redução de concentração dos efluentes, que pode ser representado pelo seguinte modelo matemático, OCCHIPINTI (1986) :

$$C_f = C_i * R_t * R_b * R_m * R_{di}$$

onde C_f = Concentração final do indicador de poluição
 C_i = Concentração inicial do indicador de poluição
 R_t = Redução por Tratamento
 R_b = Redução por Decaimento Bacteriano
 R_m = Redução por Misturação
 R_{di} = Redução por Diluição Inicial

Os coeficientes de redução (R) indicados acima devem satisfazer à condição : $0 \leq R \leq 1$

Para o caso de efluentes domésticos o indicador de poluição é a concentração de coliformes.

A redução por tratamento (R_t) e a redução bacteriana (R_b) são independentes do processo de dispersão que está representado pela redução por misturação (R_m) e pela redução por diluição inicial (R_{di}).

6. - ANÁLISE DE UM CASO

6.1.- Características principais

Neste caso serão consideradas às informações relativas ao emissário submarino de Praia Grande, subsistema I.

A avaliação será com base nos equacionamentos apresentados nos capítulos anteriores.

Os dados básicos são :

- $Q = 1041 \text{ l/s}$ vazão máxima
- $s = 2.5 \text{ m}$ espaçamento entre orifícios
- $D = 1.0 \text{ m}$ diâmetro do difusor
- $H = 13.0 \text{ m}$ profundidade do difusor
- $\theta = 0^\circ$ ângulo do difusor em relação às correntes (condição crítica)
- $u = 0.0 \text{ a } 0.4 \text{ m/s}$ velocidade das correntes
- $N = 0.0 \text{ a } 0.04$ frequência de boiância
- $g'_o = 0.24$ aceleração aparente ou modificada

6.2.- Avaliação da diluição inicial

Com base nas informações do item 6.1 e adotando :

- Comprimento do difusor	L = 435 m
- Vazão específica linear	q = 2.39 l/s
- No de orifícios dx	nx = 174
- No de orifícios dz	nz = 1
- Diâmetro do orifício	d1 = 6.5 cm
- Diâmetro do orifício	dz = 13.0 cm

A partir dos dados acima obtém-se

. O fluxo de momentum $m = 2.868 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s}^2 \text{)}$

. A fluxo de boiância $b = 5.768 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^3/\text{s}^3 \text{)}$

e as escalas de comprimento :

$$l_q = 1.99 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$l_b = 2.077 \text{ (m)}$$

$$l_m = 0.415 \text{ (m)}$$

Logo

$$l_m/l_b = 0.02$$

$$s/l_b = 0.83$$

} valores fora da pluma linear

A "pluma linear" se encontra, para :

$$l_m/l_b < 0.2$$

$$s/l_b < 0.3$$

A "quase pluma linear" encontra-se, para :

$$l_m/l_b < 0.5$$

$$0.3 < s/l_b < 1.92$$

Na situação estudada é possível utilizar a condição de pluma com um erro provável de até 10%.

Aplicando a condição de pluma linear em meios homogêneo e estratificado estagnados e também para a condição advectiva obtém-se a tabela 5.1 .

Tabela 5.1.- Diluição inicial mínima

		Diluição mínima				
U m /s	F	Meio homogêneo	Meio estratificado			
			N			
			0.01*	0.02	0.03	0.04
0.00	0.00	190	280	140	93	70
0.10	0.62	195	303	151	101	76
0.20	5.03	249	390	195	130	97
0.30	16.98	294	462	231	154	116
0.40	40.20	348	549	274	183	137

Estos valores de diluição mínima correspondem a valores de diluição media entre 140 e 1416 .

Os valores obtidos correspondem a difusores paralelos à corrente. Difusores em ângulo de incidencia de correntes de 45° ou 90° tem diluições cerca de 4% e 47% maiores respectivamente.

6.3.- Avaliação da misturação

A misturação apresenta neste caso , para um emissário usual entre 3 e 4 km e na faixa de velocidades indicadas :

$$D_m = 4 \text{ a } 6 \quad (\text{ver tabela 4.3.1})$$

6.4.- Discussão

Neste caso o sistema apresenta boas condições em qualquer circunstância :

parâmetro	Diluição	
	velocidade da corrente 0 (m/s)	0.4 (m/s)
diluição inicial (Ddi)	140	1416
misturação (Dm)	6	5
decaimento bacteriano (DB)	250 ou +	5
tratamento e cloração (Dt)	8.5	8.5
	Concentração ($\frac{\text{COLIS}}{100\text{ML}}$)	
total Ddi*Dm*DB	$2.10 \cdot 10^5$	$3.5 \cdot 10^4$
esgoto bruto	$3.00 \cdot 10^8$	$3.0 \cdot 10^8$
concentração final sem tratamento	$1.40 \cdot 10^3$	$8.5 \cdot 10^3$
concentração com tratamento	$0.16 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^3$
índice de qualidade		$1.0 \cdot 10^3$

Conforme pode-se apreciar na segunda coluna o emissário submarino atende às condições necessárias. quanto à coluna 1 apresenta valores (160 colis) abaixo do índice (1000 colis).

SECRETARIA DE ESTADO DE AGRICULTURA
DEPARTAMENTO DE AGRICULTURA
BRASÍLIA

7.- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1.- Conclusões

A parte da dispersão que apresenta melhores modelagens é a diluição inicial, em especial com ROBERTS (1977,1989) , WRIGTH (1982,1984) e JIRKA (1982,1991) entre outros, seja por modelos físicos ou análise integral.

Para a diluição inicial, as soluções por análise integral que podem ser obtidas nos extremos de pluma pura ou jato puro, estão chegando próximas das soluções em modelos físicos, nesses extremos, em especial o de pluma pura, o que mostra certa concordância nas soluções. Neste caso admite-se que a pluma linear se encontra quando $S_m q N / b^{2/3}$ é constante e torna-se independente do número, espaçamento e diâmetro dos orifícios do difusor e onde $s/l_b \leq 0.31$ e $l_m/l_b \leq 0.2$, ROBERTS (1989), em meio estratificado.

Próximo das soluções com pluma pura, estão sendo pesquisados jatos com baixo fluxo de momentum e jatos com preponderância da boiância. Neste caso ROBERTS (1989) encontrou que para meio estratificado, podem ser consideradas as condições de pluma linear, quando se tenham $l_m/l_b \leq 0.5$ e $s/l_b \leq 1.92$

Persistem algumas discrepâncias entre a diluição em meio estratificado e a diluição em meio homogêneo para frequências de boiância (N) abaixo de 0.02, onde aparecem valores de diluição inicial maiores que a diluição inicial em meio homogêneo (sem estratificação).

As pesquisas de ROBERTS (1989) foram realizadas utilizando uma frequência de boiância ,mais ou menos fixa (N em torno de 0.3, valor no modelo reduzido), o que pode estar condicionando os resultados quando o N real aparece menor que 0.02.

Em termos de misturação as pesquisas para obtenção dos coeficientes de dispersão tem-se encaminhado mais para a parte dispersão em rios e lagoas, entretanto parece ser que o coeficiente de dispersão no mar deveria ser variável em função do tempo e das características locais. Por tanto a definição do coeficiente de dispersão exige pesquisas de campo nos diversos períodos do ano.

Algumas pesquisas com ondas mostram que trens de ondas atuando sobre jatos aumentam a diluição inicial, quando os jatos são opostos às ondas ISMAIL e WIEGEL (1984).

Efeitos de ondas e marés, na diluição inicial, foram estudados por TALBOT (1971) e PRAKASH et al (1984), para determinar as circulações induzidas por correntes.

As pesquisas neste campo são complexas e estão sendo executadas em alguns locais notadamente pelas equipes de ROBERTS, WRIGTH, JIRKA e outros , de modo que pode-se aproveitar as pesquisas para os projetos de sistemas de lançamento de efluentes ao mar.

7.2. - Recomendações

Recomenda-se a realização das seguintes pesquisas :

1.- Pesquisas de diluição inicial em meio homogêneo estagnado e com correntes para difusores paralelos, perpendiculares e com ângulo de 45° em relação às correntes.

Pode ser separada em três grupos :

- Diluição inicial nas proximidades da pluma pura
- Diluição inicial intermediária
- Diluição inicial nas proximidades do jato puro

2.- Pesquisas de diluição inicial em meio estratificado estagnado e com correntes para difusores paralelos, perpendiculares e com ângulo de 45° em relação às correntes.

Pode ser dividido em três grupos :

- Diluição inicial nas proximidades da pluma pura
- Diluição inicial intermediária
- Diluição inicial nas proximidades do jato puro

3.- Pesquisas de diluição inicial fazendo variar a vazão, numa forma similar à variação das descargas do esgoto doméstico durante o dia (0.8 a 1.5 vezes a vazão média) e sua comparação com a diluição inicial para a vazão máxima.

4. - Pesquisas de diluição inicial com injeção de ar na mistura esgoto-água de mar para quebrar a estratificação no mar.
5. - Pesquisas de diluição inicial em jatos com direção oposta aos trens de ondas.
6. - Pesquisas de diluição inicial em jatos com direção oposta à corrente .
7. - Pesquisas de diluição inicial em jatos por efeito de arrebatamento de ondas em especial as do tipo spilling

8. - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 8.01.- ABRAHAM, G ; OS, A.G. van "Vertical mixing in stratified tidal flows", Discussion, Journal ASCE, January 1979.
- 8.02.- ADAMS, E.E. ; TROWBRIDGE, J.H. "Circulation induced by coastal diffuser discharga", Journal of waterway, port, coastal and ocean engineering, November 1985.
- 8.03.- AGUDO, E.G. ; DOS SANTOS, J.L. "Experimental measurement of turbulent diffusion, initial dilution and T_{90} , Marine Disposal Seminar, Brasil, 1986.
- 8.04.- ALMQUIST, C.W. ; STOLZENBACH, K.D. "Staged multiport diffusers", Journal ASCE, February 1980.
- 8.05.- BROOKS N.H. "Dispersion in hydrologic and coastal enviroments", Report No KH-R-29, Caltech, December 1972.
- 8.06.- CARSLAW, H.S ; JAEGER, J.C. "Conduction of heat in solids, Oxford University Press, 1959.
- 8.07.- CHIN, D.A. Influence of surface waves on outfall dilution, Journal ASCE, August 1987.
- 8.08.- CHU, V. "L.N. Fan's data on buoyant jets in crossflow", Journal ASCE, May 1979.
- 8.09.- DIACHISHIN, A. "Dye dispersion studies", Journal da ASCE, January 1963.
- 8.10.- DITTRICH, A. "Surface films and mixing in two-layer fluid", Journal ASCE August 1987.
- 8.11.- EIGER, S. "Qualidade da água em rios e estuários", Hidrologia ambiental, vol 3, Edusp 1991.
- 8.12.- FERNANDO, H.J.S. ; JOHNSTONE, H. ; ZANGRANDO, F. "Interfacial mixing caused by turbulent buoyant jets", Journal ASCE, January 1989.
- 8.13.- FISHER, H.B. "The mechanics of dispersion in natural streams", Journal ASCE , November 1967.
- 8.14.- FISHER, H.B. ; IMBERGER, J. ; LIST, E.J. ; KOH, R.C.Y. ; BROOKS, N.H. "Mixing in inland and coastal waters", Academic Press, 1979.

- 8.15. - GUNERSON, C.G. "Sewage disposal in Santa Monica bay", California, Journal ASCE, February 1958.
- 8.16. - HARREMOES, P. "Theoretical treatment of data on turbulent dispersion related to disposal of industrial wastes, Reports Nos 1 and 2 for Research Contract #402RB, Copenhagen, Danish Isotope Center 1967.
- 8.17. - HOLLEY, E.R. ; JIRKA, G.H. "Mixing in rivers", Technical Report E-86-11, US Army Engineer Waterway Experiments Station, Vicksburg, Miss., September 1986.
- 8.18. - ISMAIL, N.M. ; WIEGEL, R.L. "Opposing wave effect on Momentum Jets spreading rate", Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, November 1983.
- 8.19. - JIRKA, G.H. "Multiport diffusers for heat disposal : A Summary", Journal ASCE, December 1982.
- 8.20. - JIRKA, G.H. ; DONEKER, R.L. "Hydrodynamic classification of submerged single port discharges", Journal ASCE, September 1991.
- 8.21. - JIRKA, G.H. ; AKAR, P.J. "Hydrodynamic classification of submerged multiport discharges", Journal ASCE, September 1991.
- 8.22. - JOSHI, P.B. ; TAYLOR, R.B "Circulation induced by tidal jets", Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, November 1983.
- 8.23. - KRENKEL, P.A. "Waste dispersion characteristics of streams using turbulet diffusion phenomenon", Journal WPCF, December 1962.
- 8.24. - LAWRENCE, C.H. "Sanitary considertions of five-mile ocean outfall", Journal ASCE, July 1961.
- 8.25. - LEE, J.H.W. "Near field mixing of staged diffuser", Journal ASCE, August 1980.
- 8.26. - LEE, J.H.W. ; CHEUNG, V.W.L. "Inclined plane buoyant jet in stratified fluid", Journal ASCE, July 1986.
- 8.27. - LEE, J.H.W. ; NEVILLE-JONES, P. "Initial dilution of horizontal jet in crosflow", Journal ASCE, May 1987.
- 8.28. - MURALIKRISHNA, I.V. ; SARMA, K.V.N. "Buoyant jet discharges into infinite ambient waters", Journal ASCE, May 1979.

- 8.29. - NOUTSOPOULOS, G. ; HATZICOMNINOU, S. ; YIANNOPOULOS, P. "Dilution in vertical round buoyant jet", Discussion, Journal ASCE, May 1979.
- 8.30. - NOUTSOPOULOS, G.C. ; YIANNOPOULOS, P.C. "Axial dilution in obstructed round buoyant jet", Journal ASCE, January 1989.
- 8.31. - OCCHIPINTI, A.G. "Estudos preliminares necessários à disposição oceânica de esgotos", Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, 1973.
- 8.32. - OCCHIPINTI, A.G. "Conceptual approach on ocean disposal", Marine Disposal Seminar, Brasil 1986.
- 8.33. - ORLOB, G.T. "Eddy diffusion in homogeneous turbulence", Journal ASCE, September 1959.
- 8.34. - RAWN, A.M. ; BOWERMAN, F.R. ; BROOKS, N.H. "Diffusers for disposal of sewage in sea water", Journal ASCE, March 1960.
- 8.35. - RAWN, A.M. ; PALMER, H.K. "Pre-determining the extent of sewage in sea water", Journal ASCE, May 1929.
- 8.36. - ROBERTS, P.J.W. "Dispersion of water discharged from outfall diffusers of finite length", Caltech, Report No KH-R-35, March 1977.
- 8.37. - ROBERTS, P.J.W. "Line plume and ocean outfall dispersion", Journal ASCE, April 1979.
- 8.38. - ROBERTS, P.J.W. "Two-dimensional flow of multiport diffuser", Journal ASCE, Technical notes, May 1979.
- 8.39. - ROBERTS, P.J.W. "Ocean outfall dilution : Effects of currents", Journal ASCE, May 1980.
- 8.40. - ROBERTS, P.J.W. "The use of current data in ocean outfall design", Marine disposal seminar, Brasil 1986.
- 8.41. - ROBERTS, P.J.W. "Initial dilution prediction for ocean outfall", Marine disposal seminar, Brasil 1986.
- 8.42. - ROBERTS, P.J.W. ; TOMS, G. "Inclined dense jets in flowing current", Journal ASCE, March 1987.
- 8.43. - ROBERTS, P.J.W. ; SNYDER, W.H. ; BAUMGARTNER, D.J. "Ocean outfall I : Submerged waste field formation", Journal ASCE, January 1989.

- 8.44. - ROBERTS, P.J.W. ; SNYDER, W.H. ; BAUMGARTNER, D.J. "Ocean outfall II : Spatial evolution of submerged wastefield", Journal ASCE, January 1989.
- 8.45. - SILVESTER, R. "Coastal engineering 2", Elsevier Scientific Publishing Company, 1974.
- 8.46. - TORO, F.C. "Modelamiento matemático de fenómenos hidrodinámicos en regiones cercanas a la costa, Postgrado, Universidad Nacional de Colombia, Medellin, A.R.H - 0 , 1991.
- 8.47. - VILLARROEL, J.M.B. "Instalación de servicio de aguas servidas en la ciudad de El Quisco con variante de emissario submarino", Tese de Especialización presentada a la Escuela de Ingenieria de la Universidad de Chile, diciembre 1973.
- 8.48. - VILLARROEL, J.M.B. "Disposição oceânica de efluentes - Evolução histórica - Seminario de Obras Marítimas, Universidade de São Paulo, Pos Graduação, 1990.
- 8.49. - WALLACE, R.B. ; SHEFF, B.B. "Two-dimensional buoyant jets in two-layer ambient fluid", Journal ASCE, August 1987.
- 8.50. - WALLIS, J.G. "Initial dilution with deepwater diffusers", Journal WPCF, July 1977.
- 8.51. - WASHBURN, L. ; JONES, B.H. ; BRATKOVICH, A. ; DICKEY, T.D. ; CHEN, M.S. "Mixing, dispersion, and resuspension in vicinity of ocean wastewater plume. Journal ASCE, January 1992.
- 8.52. - WILKINSON, D.L. "Two-dimensional bubble plumes", Journal ASCE, February 1979.
- 8.53. - WRIGHT, S.J. ; WONG, D.R. ; ZIMMERMAN, K.E. ; WALLACE, R.B. "Outfall diffuser behavior in stratified ambient fluid", Journal ASCE, April 1982.
- 8.54. - WRIGHT, S.J. "Buoyant jets in density stratified crossflow", Journal ASCE, May 1984.