UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

RAFAEL DOS SANTOS GIORIA

Estudo da estabilidade secundária da esteira de um cilindro em oscilação forçada

São Paulo

2010

RAFAEL DOS SANTOS GIORIA

Estudo da estabilidade secundária da esteira de um cilindro em oscilação forçada

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração: Eng. Mecânica de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Julio Romano Meneghini

São Paulo

2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Gioria, Rafael dos Santos
Estudo da estabilidade secundária da esteira de um cilindro em oscilação forçada / R.S. Gioria. -- São Paulo, 2010.
170 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Estabilidade (Análise) 2. Mecânica dos fluídos computacional 3. Dinâmica dos fluídos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

Dedico esta tese a minha esposa Dáfne, a meus pais Selme e Celso, e a meu irmão Gustavo.

"In all affairs it's a healthy thing now and then to hang a question mark on the things you have long taken for granted."

Bertrand Russell

"Men fear thought as they fear nothing else on earth – more than ruin – more even than death.... Thought is subversive and revolutionary, destructive and terrible, thought is merciless to privilege, established institutions, and comfortable habit. Thought looks into the pit of hell and is not afraid. Thought is great and swift and free, the light of the world, and the chief glory of man."

Bertrand Russell em "Principles of Social Reconstruction"

"L'intelligence est invincible..."

Victor Hugo em "Os trabalhadores do mar"

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Selme e Celso, por incentivarem, apoiarem e fazerem o possível para a realização de minha graduação e deste doutorado.

À minha esposa Dáfne pelo amor, carinho, compreensão, apoio e paciência nesta jornada.

Ao meu irmão Gustavo pela amizade, espírito crítico e dedicação inspiradora.

Ao prof. Dr. Julio R. Meneghini, pela orientação nestes anos de pós-graduação, pelo incentivo e confiança em meu trabalho, e por tornar disponível uma excelente estrutura para trabalho.

Ao prof. Dr. José Maria Saiz Jabardo, pela minha graduação e por possibilitar o contato com prof. Meneghini e incentivar meu doutorado na POLI.

Aos professores que contribuíram direta e indiretamente neste trabalho: José A. P. Aranha, Clóvis A. Martins, Fábio Saltara, Ernani V. Volpe.

Ao prof. Spencer J. Sherwin por me receber e me orientar no período de pesquisa passado na Inglaterra. Aos amigos Bruno Carmo e Gustavo Ássi por me ajudarem e me receberem em Londres.

Aos amigos e colegas de trabalho do NDF ao longo destes anos de pós-graduação. Ao amigo Alessandro "Roque" Lima, aos *espectrais* Paulo Jabardo e Bruno Carmo, aos amigos e colegas Gustavo Ássi, Ivan Korkischko, Iago Barbeiro, Pedro Lavinas, Reinaldo Orselli, Lauro Silveira, Rafael Tanaka, Fernanda Takafuji, Rodrigo Provasi, Alfredo Neto, Guilherme Franzini, Rafael Nemoto, Stérgios Tsiloufas, Cesar, Zeponne, Bonnato, Eduardo, ... pelo convívio neste ambiente, pelas discussões técnicas e outras nem tanto, pelas colaborações em trabalhos, pelos bons momentos e pelo futebol de categoria.

À incrível secretária Ivone Margarido pela ajuda imensa permitindo a fluidez deste trabalho.

À Fapesp pela bolsa concedida para realização deste doutorado .

RESUMO

Esta tese apresenta o estudo da transição para um escoamento tridimensional da esteira de um cilindro oscilando. Esta é a transição secundária do escoamento ao redor de um cilindro, sendo a primária a própria esteira de von Kármán.

A investigação é realizada na mesma faixa de número de Reynolds (Re) que ocorre a transição da esteira de um cilindro fixo: $200 \leq \mathrm{Re} \leq 400$.

O estudo envolve simulações numéricas diretas bi- e tridimensionais do escoamento incompressível ao redor de um cilindro oscilando usando o método dos elementos espectrais. A transição também é analisada através do estudo de estabilidade linear do escoamento. O método de Gaston Floquet é adequado para a análise de estabilidade a perturbações tridimensionais devido à periodicidade característica da esteira de von Kármán. Além disto, o método é mais geral e não é aplicado somente a equações autônomas com soluções periódicas: ele também pode ser usado em análises cujo campo base é estacionário como a análise da transição primária da esteira de um cilindro.

Mostra-se que a transição da esteira para tridimensionalidade é influenciada pela oscilação do cilindro. As oscilações podem atrasar a transição quando em amplitudes baixas e com escoamento a um número de Reynolds até 260. Em outros casos, a transição é similar à observada no escoamento ao redor um cilindro fixo. Além disso, quando há mudança de padrões de desprendimento de vórtices devido às oscilações, desencadeiam-se modos instáveis diferentes dos observados na esteira de um cilindro fixo.

A comparação dos resultados da análise de estabilidade de Floquet com simulações numéricas diretas e experimentos publicados mostra na maioria dos casos que, apesar de ser uma análise de estabilidade linear, muitas características da análise persistem além do limiar de estabilidade. As situações com discrepâncias são identificadas nesta tese, como padrão de desprendimento diferentes em simulações bi- e tridimensionais na mesma situação. As causa das discrepâncias são estudadas através das simulações numéricas diretas e considerações sobre o sistema linearizado e a abrangência da análise de estabilidade.

Em adição, mostra-se que há um limiar de amplitude de oscilação acima do qual

a dinâmica da esteira, e portanto a transição secundária, é afetada. Abaixo deste limiar, retoma-se o comportamento do escoamento ao redor de um cilindro fixo.

Palavras-chave: *Escoamento ao redor de um cilindro oscilando, Transição secundária da esteira, Método dos elementos espectrais, Análise de estabilidade de Floquet*

ABSTRACT

This thesis presents the investigation of the transition to a three-dimensional flow in the wake of an oscillating circular cylinder. This is the secondary transition of the flow around a circular cylinder, while the primary transition leads to the von Kármán wake.

The investigative work is performed in the Reynolds number (Re) range which occurs the secondary transition of the wake o a circular cylinder: $200 \leq \mathrm{Re} \leq 400$.

The study consists of two- and three-dimensional direct numerical simulations of the incompressible flow around an oscillating circular cylinder by means of the spectral/hp method. The transition is also analyzed through linear stability study of the flow. The Gaston Floquet method is an appropriate method for this linear stability analysis to three-dimensional perturbations due to the typical periodicity of the von Kármán wake. Furthermore, the Floquet method is of a general kind and it is not specifically applied to autonomous equation with periodic solutions: it can be employed in analysis with a stationary base flow like the primary transition of the wake of a circular cylinder.

The thesis shows that the transition to a three-dimensional wake is affected by the cylinder oscillation. The oscillations can delay the transition when they have low amplitudes and the flow has Reynolds number below 260. In other situations, the transition is similar to that observed in the flow of a fixed circular cylinder. In addition, when there is a change in the vortex shedding pattern due to the oscillatory motion, the observed unstable modes are different than those in a wake of a fixed circular cylinder.

The comparison of the results from the Floquet stabilty analysis with the ones from direct numerical simulations and published experiments shows that in most cases, despite the linearization for the stability analysis, many features of the analysis persist beyond the instability threshold. The discrepant features observed are specified in this thesis, e.g. vortex shedding patterns different in two- and three-dimensional simulations with the same parameters. The cause of the discrepancies are studied through direct numerical simulations and careful considerations on the linearized system and the range of the stability analysis.

In addition, this thesis shows that there is a threshold amplitude of oscillation

for which the wake dynamics, therefore the secondary transition, is affected. Below this threshold, the wake behaves the same way as in the flow around a fixed circular cylinder.

Keywords: *Flow around an oscillating circular cylinder, Secondary transition of a wake, Spectral/hp element method, Floquet stability analysis*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

CFL	Número de Courant-Friedrich-Lewis
DNS	Simulação numérica direta (*Direct Numerical Simulation*)
FEM	Método dos elementos finitos (*Finite Element Method*)
FFT	Transformada de Fourier rápida
LES	*Large Eddy Simulation*
PIV	Velocimentria por imagem de partículas (*Particle Image Velocimetry*)
RMS	Média quadrática (*Root Mean Square*)
SEM	Método dos elementos espectrais (*Spectral Element Method*)
SM	Métodos espectrais (*Spectral Method*)
VIV	Vibrações induzidas por vórtices

LISTA DE SÍMBOLOS

$_{ij}$	Notação tensorial
$_{,i}$	Derivada na coordenada i pela notação tensorial
Δt	Passo do tempo
Ω	Domínio computacional
Ω_{ij}	Tensor rotação de um elemento fluido, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
$\boldsymbol{\Omega}^2$	Contração do tensor rotação $\boldsymbol{\Omega}^2 = \Omega_{ik}\Omega_{kj}$
β	Número de onda do modo tridimensional ($\beta = 2\pi d/\lambda$)
$\partial\Omega$	Contorno do domínio computacional
ϵ_{ijk}	Operador permutação
λ	Comprimento de onda do modo tridimensional ($\lambda = 2\pi d/\beta$)
μ	Multiplicador de Floquet
ν	Viscosidade cinemática
ω	Vorticidade $\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\hat{\imath}_k$
ρ	Massa específica
A	Amplitude de oscilação do corpo no escoamento
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
$C_{L_{\mathrm{RMS}}}$	Média quadrática do coeficiente de sustentação
J_e	Ordem do esquema explícito de marcha no tempo
J_i	Ordem do esquema implícito de marcha no tempo
Re	Número de Reynolds, $\mathrm{Re} = U_\infty d/\nu$
S_{ij}	Tensor deformação de um elemento fluido, $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
$\boldsymbol{S}^2$	Contração do tensor rotação $\boldsymbol{S}^2 = S_{ik}S_{kj}$
St	Número de Strouhal, $\mathrm{St} = f_{\mathrm{St}}/U_\infty d$

T	Período
U_∞	Velocidade do escoamento ao longe
d	Diâmetro do cilindro
f_{St}	Freqüência de Strouhal de desprendimento de vórtices
$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$	Versores das direções cartesianas
p	Pressão
$p_{,ij}$	Hessiano da pressão na notação tensorial
t	Tempo
$\mathbf{u}$	Velocidade do escoamento
x,y,z	Coordenadas cartesianas

1 INTRODUÇÃO

O escoamento incompressível ao redor de corpos rombudos e a interação entre escoamento e estrutura envolvidos em vibrações induzidas por vórtices ainda são temas de diversos estudos devido a sua importância na engenharia, como exploração de petróleo em águas profundas, e devido à riqueza fenomenológica de grande interesse para a área acadêmica. Estes fenômenos ainda têm algumas questões de relevância física em aberto. Uma delas, foco desta tese, é como a oscilação do corpo afeta o escoamento da esteira a jusante do cilindro. Mais especificamente, a transição secundária da esteira e as tridimensionalidades são influenciadas pelo movimento do corpo e por isso são de foco desta tese.

O entendimento da fenomenologia envolvendo o escoamento ao redor de uma geometria simples pode ser um ponto chave na caracterização de vibrações induzidas por vórtices em alta amplitude. *Risers* (tubos que levam petróleo do fundo do mar até as plataformas), umbilicais, cabos e sistemas de ancoragem são comuns em plataformas de exploração de petróleo e estão sujeitos a ações do escoamento marítimo constantemente. Um aprofundamento do conhecimento fundamental dos fenômenos envolvidos neste escoamento é um dos pontos de partida para a extensão do desenvolvimento da exploração de petróleo em águas profundas.

Com intuito de examinar estes fenômenos, este trabalho investiga o escoamento ao redor de um cilindro em oscilação transversal forçada. Embora seja uma geometria simples, o escoamento ao redor de um cilindro é rico em fenômenos: mesmo em números de Reynolds baixos há separação da camada limite, interação entre camadas cisalhantes livres, formação de esteira de vórtices, entre outros. Escolheu-se avaliar o efeito da amplitude de oscilação de um cilindro em sua esteira já que é reportado e observado experimentalmente que o escoamento tem comportamentos distintos em baixa e alta amplitude de oscilação em vibrações induzidas por vórtices (VIV). Embora a freqüência de oscilação tenha uma importância fundamental neste escoamento, o efeito da freqüência é, aqui nesta tese, considerado apenas para avaliação da sincronização da esteira com o movimento do corpo. Vibrações induzidas por vórtices têm resposta em amplitudes

consideráveis quando a esteira está sincronizada com o movimento do corpo.

Através de simulações numéricas diretas (DNS) com método dos elementos espectrais e análise de estabilidade Floquet aplicada ao escoamento, é possível estudar com detalhe suficiente a física do fenômeno. Mesmo que a situação simulada seja distante da prática (e.g., números de Reynolds muito diferentes), a física e o comportamento do sistema em Reynolds diferentes não são tão distantes assim.

Mostra-se, neste trabalho, que as oscilações afetam a transição secundária da esteira do cilindro oscilando e mudam o comportamento dinâmico da esteira não só no âmbito bidimensional (padrão de desprendimento de vórtices, por exemplo).

Como visão geral, as oscilações podem suprimir as tridimensionalidades da esteira num certo intervalo de número de Reynolds. Isso é mostrado nesta tese através de simulações numéricas diretas e corroborado pela análise de estabilidade. As oscilações também mudam as características tridimensionais da esteira (quando não as suprime) em comparação à de cilindro fixo: apresentam características tridimensionais com comprimento característicos mais curtos, por exemplo.

Ademais, se as amplitudes forem altas suficientes, as oscilações mudam até o padrão de desprendimento de vórtices (isso é observado em simulações bidimensionais também): ao invés de desprender 2 vórtices de circulação contrária por ciclo, observa-se o desprendimento de 1 par de vórtices com circulação contrária alternado por 1 vórtice isolado ou 2 pares de vórtices com circulação contrária alternados. Essas mudanças de padrão de desprendimento são essencialmente de caráter bidimensional mas o padrão de 2 pares de vórtices alternados só é observado em simulações tridimensionais e experimentos até onde este pesquisador observou. Com estas mudanças de padrão de desprendimento, deflagram-se modos tridimensionais diferentes dos que aparecem na esteira do cilindro fixo.

Sumariamente, esta tese concerne a física fundamental do escoamento ao redor de um cilindro oscilando a fim de promover conhecimento básico que suporte futuras investigações em escoamento ao redor de corpos rombudos e vibrações induzidas por vórtices.

Esta tese está dividida em capítulos seguindo este introdutório. O capítulo 2 trata de uma revisão dos assuntos envolvidos nesta tese (escoamento ao redor de de um cilindro, o método dos elementos espectrais usado nas simulações numéricas, o método de Floquet para análise de estabilidade, e identificação de vórtices) com uma introdução aos

métodos.

Em seguida, o capítulo 3 trata dos preparativos das simulações numéricas. Qualquer trabalho envolvendo métodos numéricos necessita de uma avaliação da capacidade a aplicabilidade do método. Uma listagem dos casos simulados e uma justificativa de escolha também são apresentadas neste capítulo.

A seguir, os resultados são apresentados e discussões que eles suscitam são delineadas. Primeiro, o capítulo 4 apresenta a investigação realizada sobre o escoamento ao redor de um cilindro fixo. Este é subdividido em seções: uma trata do efeito do tamanho do domínio computacional na direção da envergadura, posteriormente fala-se sobre as simulações numéricas diretas realizadas, e então trata-se da análise de estabilidade da esteira de von Kármán.

O capítulo 5, por sua vez, tem foco na esteira de um cilindro em oscilação forçada. Este capítulo apresenta as simulações numéricas e análise de estabilidade realizadas nesta tese. Por fim, as conclusões são traçadas no capítulo 6.

Os apêndices constituintes desta tese são: apêndice A que descreve com mais detalhes o método dos elementos espectrais, o apêndice B que apresenta o método de análise de estabilidade de Floquet e o apêndice C investiga sucintamente a transição primária da esteira de um cilindro através do método de Floquet.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS

Aqui se apresenta um histórico sucinto sobre os principais tópicos envolvidos neste trabalho. Trata-se de uma análise de publicações envolvendo o tema do trabalho, relatando informações úteis ao entendimento da pesquisa.

Esta seção é dividida em partes de acordo com o assunto relacionado. A primeira parte aborda publicações na área de escoamento em corpos rombudos, mais especificamente em torno de um cilindro. A parte seguinte engloba o método numérico que é empregado nas simulações, método de elementos espectrais. Ainda há uma seção que revisa os principais trabalhos em análise de estabilidade de Floquet, principalmente aplicada à análise da transição secundária da esteira de um cilindro. Por fim, uma revisão sobre a identificação de estrutura vortical no escoamento.

Nesta tese, considera-se o escoamento incompressível viscoso de fluido newtoniano. Assume-se que o fluido tem viscosidade dinâmica μ constante. O escoamento incompressível é regido por três parâmetros dimensionais: um comprimento característico (no caso, o diâmetro do cilindro d), a velocidade do escoamento ao longe U_∞ e a viscosidade cinemática do fluido ν. Logo, toma-se o número de Reynolds $\mathrm{Re} = U_\infty d/\nu$ que atua como parâmetro de controle do sistema. O escoamento pode ser representado por grandezas adimensionais, lembrando que U_∞ e d servem como escalas para velocidade e comprimento.

O estado do fluido em qualquer instante de tempo t pode ser representado pelo campo de velocidade adimensional $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ($\mathbf{u}(x, y, t)$ em simulações bidimensionais) e pelo campo de pressão escalonado pela densidade $p(x, y, z, t)$ ($p(x, y, t)$ em simulações bidimensionais).

As simulações numéricas que são realizadas neste trabalho são de um escoamento tridimensional incompressível de um fluido newtoniano. As equações de Navier-Stokes

para escoamento incompressível, sem forças de corpo e com propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Estas equações podem ser adimensionalizadas utilizando as seguintes relações:

$$\overline{u} = \frac{u}{U_\infty},\ \overline{v} = \frac{v}{U_\infty},\ \overline{w} = \frac{w}{U_\infty},\ \overline{t} = \frac{tU_\infty}{d},$$
$$\overline{x} = \frac{x}{d},\ \overline{y} = \frac{y}{d},\ \overline{z} = \frac{z}{d},\ \overline{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2},\ \mathrm{Re} = \frac{U_\infty d}{\nu}$$

Todas as variáveis utilizadas daqui para diante serão adimensionais, exceto quando houver indicação contrária, e por isso não se usará mais a barra sobre as grandezas a fim de simplificar a notação. As equações de Navier-Stokes podem então ser escritas na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u}\,, \tag{2.1a}$$

$$\nabla.\mathbf{u} = 0\,, \tag{2.1b}$$

com condições de contorno adequadas. Estas condições de contorno são apresentadas na Tab. 2.1 e Fig. 2.10, mas em suma são: condição de escoamento ao longe (velocidade imposta U_∞) a montante e nas laterais do domínio, condição de saída a jusante ($\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n} = 0$ e $p = 0$, convecção sem alteração da parte cinemática) e não escorregamento na parede do corpo ($\mathbf{u} = 0$ na parede).

2.1 Escoamento ao redor de um cilindro

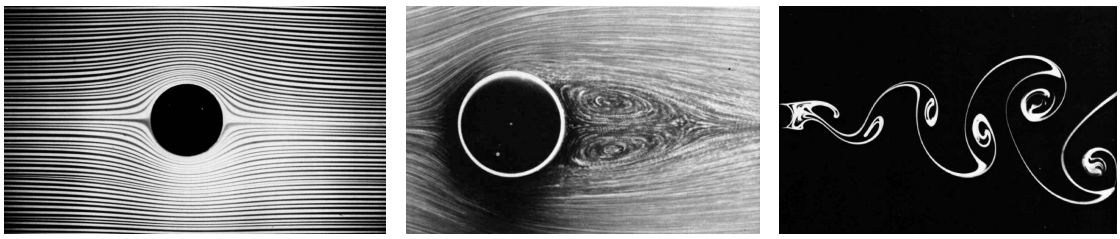
Esta seção trata de uma revisão sobre os fenômenos associados ao escoamento ao redor de um cilindro isolado.

O regime do escoamento ao redor de um cilindro fixo é uma função do número de Reynolds. Os regimes de escoamento pertinentes a esta tese são os que ocorrem até número de Reynolds 500. A descrição dos regimes de escoamento são baseadas em Williamson (1996).

A número de Reynolds muito baixo, o escoamento segue o contorno do cilindro. Este regime de escoamento ocorre até número de Reynolds por volta de 5 e está representado na Fig. 2.1(a). Com o aumento do número de Reynolds, a camada limite se separa da parede do cilindro e um par de vórtices simétricos é formado a jusante próximo do corpo

como na Fig. 2.1(b). Este ainda é um regime de escoamento estacionário e o comprimento da bolha aumenta com o número de Reynolds até aproximadamente Reynolds 45.

Utilizando a terminologia de sistemas dinâmicos, uma bifurcação de Hopf do sistema ocorre na faixa de número de Reynolds $45 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 50$. As camadas cisalhantes dos lados opostos do cilindro começam a interagir e forma-se a esteira de vórtices(Fig. 2.1(c)). Atribui-se o nome de von Kármán a esta esteira de vórtices em homenagem aos estudos pioneiros em esteira de corpos rombudos realizados por Theodore von Kármán. Nesta condição, o escoamento apresenta uma freqüência típica associada ao desprendimento alternado dos vórtices. Esta é a freqüência de Strouhal f_{St} e é observada diretamente na série temporal do coeficiente de sustentação C_L.



(a) $\mathrm{Re} \lesssim 5$. (b) $5 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 50$. (c) $\mathrm{Re} \gtrsim 50$.

Figura 2.1: Regimes de escoamento ao redor de um cilindro. Figuras retiradas de van Dyke (1988).

Gerrard (1966) trata do mecanismo de formação (interação entre as camadas cisalhantes livres) da esteira no escoamento ao redor de corpos rombudos. Ele descreve o modo como os vórtices são alimentados pela camada cisalhante livre separada do corpo. A camada cisalhante oposta ameniza a intensidade do vórtice em sua geração pela interação exemplificada pela seta (a) na Fig. 2.2. Depois a alimentação de circulação é cortada (seta (b) na Fig. 2.2), ocorrendo, então, a convecção do vórtice. Então, pela seta (c), o próximo vórtice começa a ser formado pelo enrolamento da camada cisalhante. A importância da região de formação pode ser inferida pelo mecanismo na Fig. 2.2, e o movimento transversal do cilindro pode alterar as características da esteira mudando a intensidade das camadas cisalhantes e promovendo uma interação mais intensa entre estas.

O escoamento permanece bidimensional até um número de Reynolds por volta de 190, quando a esteira passa por uma transição secundária e surgem as primeiras tridimensionalidades do escoamento ao redor de um cilindro. Esta primeira transição manifesta uma mudança na freqüência de desprendimento de vórtices. Observa-se a deformação dos tubos de vórtices da esteira principal (esteira de von Kármán). Este é conhecido

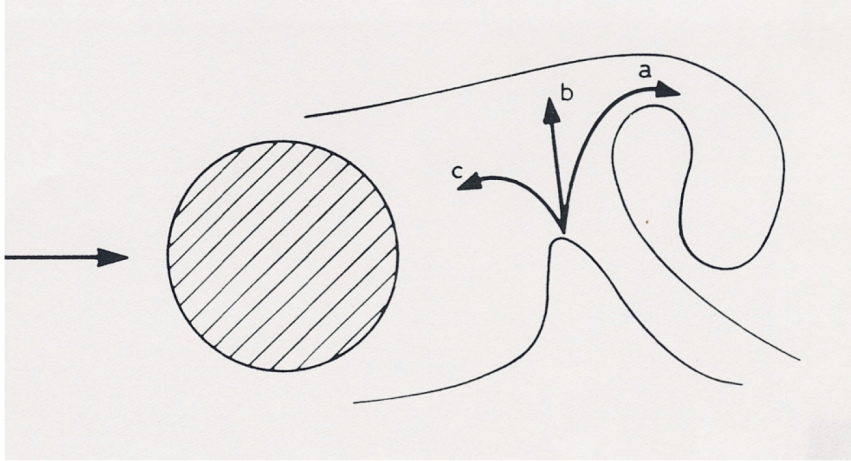


Figura 2.2: Esquema de formação da esteira de um cilindro fixo. Retirada de Gerrard (1966).

como o modo A e é observado com um comprimento periódico característico ao longo da envergadura de aproximadamente 4 diâmetros do cilindro. Com o aumento do número de Reynolds, uma outra transição é observada a um número de Reynolds por volta de 260. Agora vórtices ao longo do escoamento com escala menor são observados, com comprimento periódico característico ao longo da envergadura por volta de 1 diâmetro do cilindro. Esta tese tem foco nestas transições para tridimensionalidade e em como as oscilações harmônicas transversais do cilindro a afetam.

Posteriores mudanças com o aumento do número de Reynolds são observadas, como aumento da desordem nas pequenas escalas tridimensionais da esteira e seguem uma rota para turbulência desenvolvida. Mais detalhes podem ser encontrados em Williamson (1996).

Williamson (1988a) estuda a relação entre o número de Strouhal e o número de Reynolds no regime de desprendimento laminar de vórtices. Através de experimentos, ele associa a descontinuidade da curva St $\times$ Re em Reynolds baixos (Re até 180) à mudança do modo de desprendimento dos vórtices; o desprendimento passa a ser oblíquo. Manipulando as condições de contorno das extremidades do cilindro, o autor força o desprendimento paralelo de vórtices eliminando a descontinuidade da curva St $\times$ Re.

Williamson (1988b) apresenta dois estágios na transição da esteira laminar bidimensional para as formações tridimensionais a um Reynolds mais alto. Estas transições se relacionam com as descontinuidades na curva St $\times$ Re para esteira de cilindro. A primeira descontinuidade ocorre a Reynolds entre 170 e 180. O autor afirma que a deformação dos tubos de vórtices de von Kármán cria vorticidade na direção do escoamento, aparecendo

as primeiras tridimensionalidades. O comprimento característico destas tridimensionalidades é da ordem de 4 diâmetros. A segunda transição ocorre em Reynolds entre 230 e 260. A mudança na estrutura dos vórtices na direção do escoamento, diminuindo o comprimento característico para ordem de 1 diâmetro, é responsável por esta segunda descontinuidade.

Williamson (1992) mostra que a transição na esteira envolve o aparecimento de "deslocamentos de vórtices" (*vortex dislocations* segundo o autor). São irregularidades que começam de pequenas perturbações no escoamento tridimensional, crescendo a jusante. São responsáveis por distorções de grande escala. Estas estruturas são geradas entre regiões ao longo da envergadura de desprendimento e estão fora de fase com os vórtices da esteira primária de von Kármán. Uma conclusão deste artigo é apresentar que a rota para turbulência em escoamento ao redor de um cilindro é regida por três fenômenos físicos de origem na esteira próxima, onde são formados os vórtices: o primeiro é o aparecimento de vorticidade em direções perpendiculares ao eixo do cilindro; o segundo é o deslocamento de vórtices em grande escala, distorcendo a esteira, e o terceiro é o aparecimento de vórtices em instabilidades da camada cisalhante para $\mathrm{Re} \approx 1000$, introduzindo turbulência tridimensional de pequena escala na região.

Wu et al. (1996) apresentaram um estudo das estruturas tridimensionais, usando PIV de alta densidade de partículas, no escoamento ao redor de um cilindro. O intervalo de Reynolds de seu artigo é de 140 a 550. Foram obtidos contornos de vorticidade e linhas de desprendimento. O intuito era analisar a faixa de transição de escoamento bidimensional para tridimensional, relacionando os vórtices que aparecem na direção do escoamento com os vórtices de von Kármán. Conforme será visto ao longo da presente tese, a oscilação altera os campos base bidimensionais e a a forma destes, por sua vez, têm papel fundamental no aparecimento das tridimensionalidades.

Barkley e Henderson (1996) analisaram a estabilidade da esteira periódica de um cilindro para uma faixa de Reynolds de 140 a 300. A análise envolvia a solução bidimensional do campo através do método de elementos espectrais e o cálculo da estabilidade tridimensional através da teoria de Floquet (mesma técnica usada nesta tese). As instabilidades tridimensionais resultantes da análise tinham comprimento de onda na direção da envergadura da ordem de 4 diâmetros para Reynolds a partir de 188. Este comprimento da instabilidade é muito próximo do observado experimentalmente por Williamson (1996). Um segundo ramo de modos foi obtido a Reynolds por volta de 259 com comprimentos de onda da ordem de 1 diâmetro, que também é próximo do observado experimentalmente

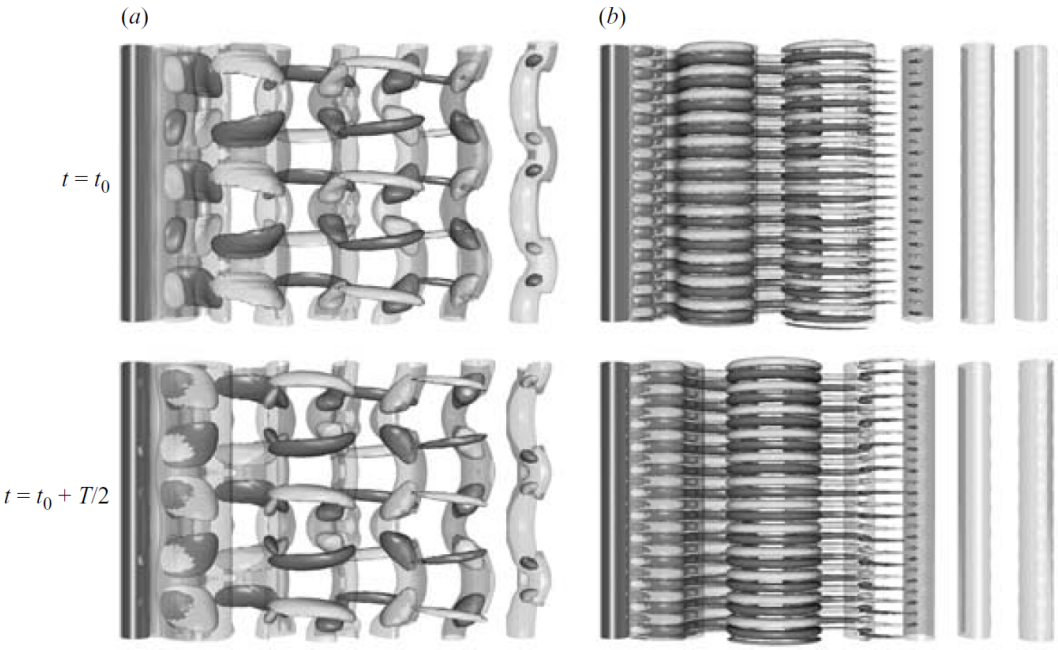


Figura 2.3: Iso-superfícies de vorticidade, sendo a translúcida a esteira principal e as sólidas a vorticidade ao longo do escoamento (tridimensionalidades). O cilindro está à esquerda da figura e o escoamento vai da esquerda para direita. T é o período da esteira. (a) modo A em Reynolds 195 e (b) modo B em Reynolds 265. Retirado de Blackburn, Marques e Lopez (2005).

por Williamson (1996). Este trabalho é um ponto de referência essencial no estudo da transição da esteira de um cilindro, e este método é aplicado ao escoamento ao redor de um cilindro oscilando nesta tese.

Além desta caracterização pelo comprimento característica da instabilidade, os modos podem ser classificado pelas suas simetrias espaço-temporais. Como referência, a esteira de von Kármán tem a simetria dada pela equação abaixo:

$$\text{von Kármán:} \begin{cases} \tilde{u}(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{v}(x,y,z,t) = -\tilde{v}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{\omega}_z(x,y,z,t) = -\tilde{\omega}_z(x,-y,z,t+T/2) \end{cases}$$

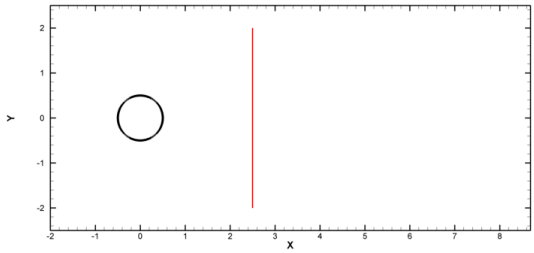
Como em qualquer análise de estabilidade e bifurcações, a transição do escoamento bidimensional para o tridimensional apresenta quebras de simetrias. As simetrias dos modos A e B da esteira de um cilindro fixo obtidos por Barkley e Henderson (1996) são dadas pelas equações abaixo, em função da vorticidade na direção x.

$$\text{Modo A:} \left\{ \tilde{\omega}_x(x,y,z,t) = -\tilde{\omega}_x(x,-y,z,t+T/2)\,, \right.$$

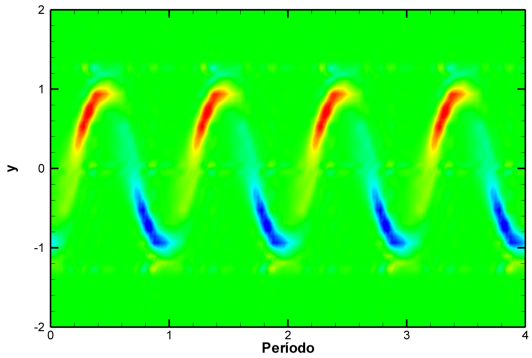
onde pode-se observar que apresenta a mesma simetria da esteira de von Kármán em um plano, mas tem variações ao longo da envergadura do cilindro. Já o modo B tem a simetria representada em função da vorticidade na direção x por

$$\text{Modo B: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = \tilde{\omega}_x(x, -y, z, t + T/2) \right. .$$

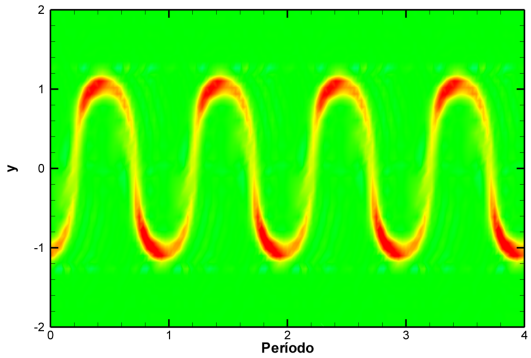
Estas características de simetria podem ser observadas pelas superfícies de vorticidade dos modos na esteira de um cilindro na Fig. 2.3. O escoamento vai da esquerda para direita na figura e a vista é ortogonal ao plano formado pelo escoamento ao longe e o eixo do cilindro. A coluna (a) da figura mostra o modo A com defasagem de meio período entre as figuras superior e inferior. Notar que o modo A, em uma mesma posição na envergadura do cilindro, tem vorticidade ao longo do escoamento com sinais alternados (cores sólidas alternadas na horizontal da figura) entre os vórtices da esteira principal (tubos translúcidos). Já o modo B tem o mesmo sinal em uma posição fixa na envergadura do cilindro (cor sólida é a mesma na horizontal da figura).



(a) Linha de registro da série temporal.



(b) Simetria do modo A.



(c) Simetria do modo B.

Figura 2.4: Contorno de vorticidade em x (ω_x). A escala horizontal é o tempo dividido em períodos do desprendimento de vórtices e a escala vertical é a linha (da figura (a)) onde se registrou a série temporal da vorticidade em x.

Outra forma de representar a relação de simetria apresentada acima de modo

gráfico é tomar uma série temporal da vorticidade em x em uma linha a jusante do cilindro (em x e z constantes variando y) como a linha vermelha na Fig. 2.4(a). Esta representação é mostrada na Fig. 2.4 e pode ser interpretada como a série temporal de vorticidade em x, tomada em um ponto na envergadura do cilindro na posição representada pela linha vermelha da Fig. 2.4(a).

Henderson (1997) conduziu simulações tridimensionais com método de elementos espectrais para uma faixa de número de Reynolds da ordem de 10 até 1000. O resultados de Barkley e Henderson (1996) são comparados com os resultados de simulações numéricos tridimensionais. O autor identificou condições sob as quais a esteira evolui para estados periódicos, quase-periódicos e caóticos de acordo com a envergadura periódica do cilindro simulado. Este artigo indica que não há evidência de outra bifurcação no escoamento bidimensional senão a da formação da esteira de von Kármán dentro da faixa de Reynolds estudada. Neste artigo o autor escreve que o número de modos de Fourier usado na discretização na direção da envergadura do cilindro deve ser da ordem de $L/d \times \sqrt{\mathrm{Re}}$, a fim de capturar as estruturas significativas do escoamento turbulento.

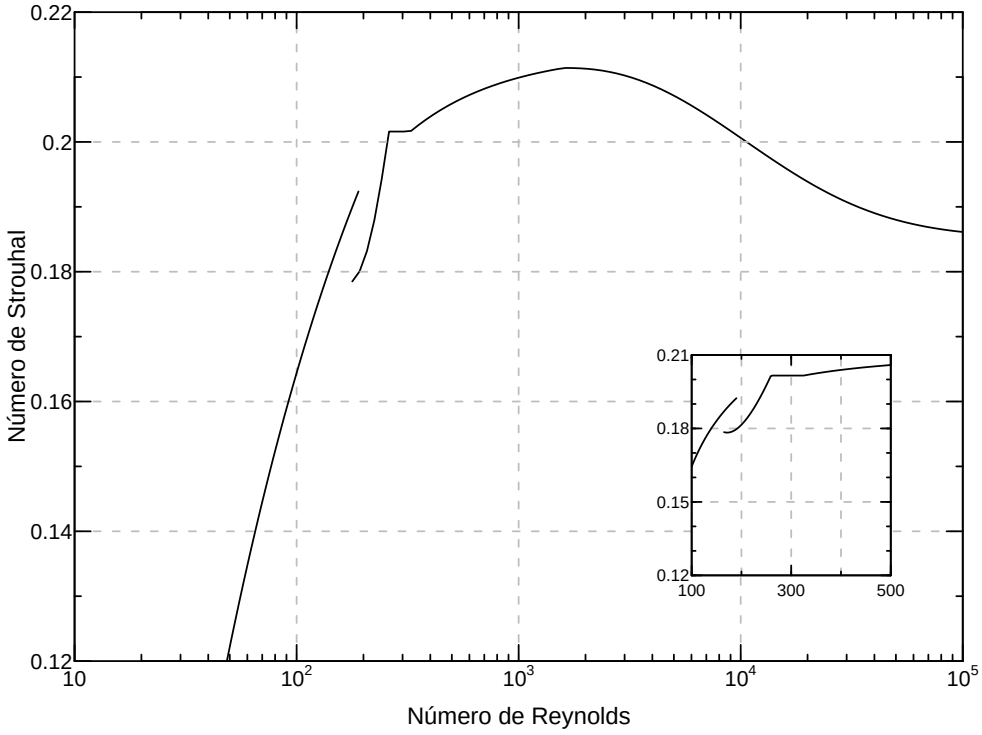
Norberg (2003) apresenta uma excelente revisão de investigações relacionadas à sustentação flutuante do cilindro parada colocado em escoamento. Norberg traz também resultados experimentais para Reynolds entre 47 e 2×10^5. Os regimes de desprendimento de vórtices para esta faixa são citados e descritos. Ele apresenta também resultados de comprimento de correlação axial e as relações empíricas em função do número de Reynolds para o número de Strouhal (Fig. 2.5(a)) e para a média quadrática do coeficiente de sustentação (Fig. 2.5(b)). Estes resultados são usados nesta tese como base de comparação para as simulações numéricas diretas.

2.1.1 Escoamento ao redor de um cilindro oscilando

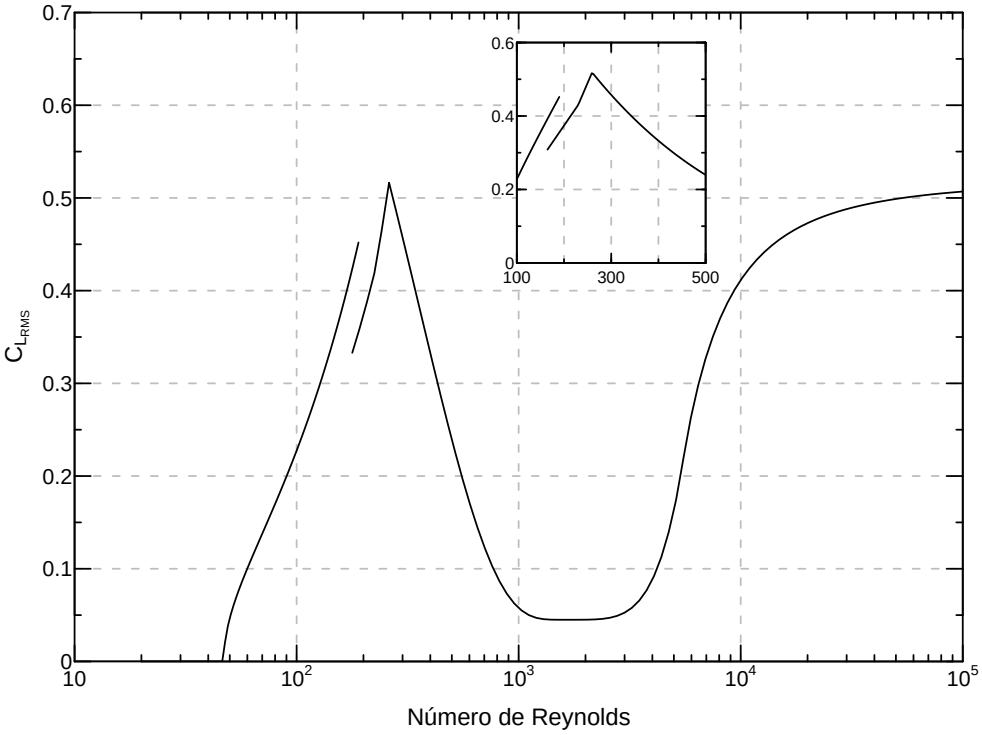
Nesta tese, as simulações envolvem oscilação forçada de um cilindro, portanto neste curta revisão o foco será em um cilindro em oscilação forçada.

A oscilação do corpo pode trazer mudanças consideráveis na esteira do cilindro (BEARMAN, 1984). O padrão de desprendimento de vórtices é notavelmente alterado com o aumento de amplitude. Mais importante para esta tese é que as tridimensionalidades da esteira também são alteradas pelo movimento do corpo.

Um mapa de padrões de desprendimento de vórtices na esteira de um cilindro oscilando transversalmente foi montado por Williamson e Roshko (1988). A faixa de nú-



(a) Número de Strouhal.



(b) Coeficiente de sustentação.

Figura 2.5: Curvas montadas a partir das relações empíricas encontradas em Norberg (2003). A região de interesse da tese está destacada.

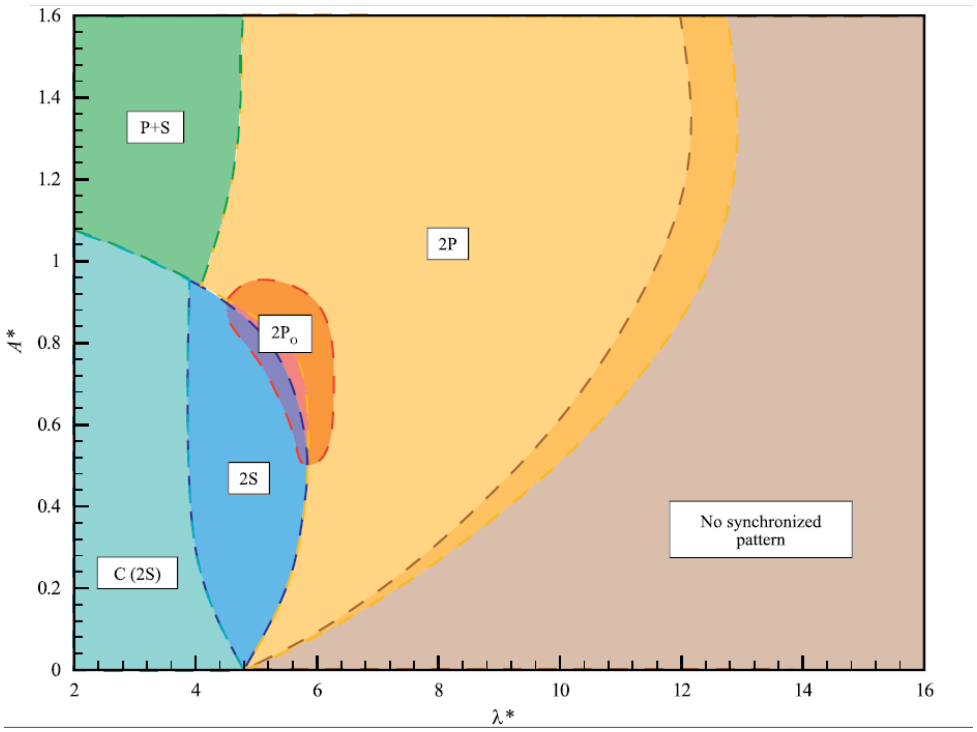


Figura 2.6: Mapa de sincronização e dos regimes de desprendimento de vórtices na esteira de um cilindro oscilando transversalmente com Re = 4000. Este mapa mostra os principais padrões de desprendimento na região de sincronização da esteira com o movimento do cilindro. Na escala abaixo da figuras, $\lambda^* = U_\infty/(f_{\text{osc}}d)$. (MORSE; WILLIAMSON, 2009)

mero de Reynolds que eles ensaiaram é $300 < \text{Re} < 1000$. Este mapa mostra os principais padrões de desprendimento na região de sincronização da esteira com o movimento do cilindro. Vale lembrar que este mapa foi levantado experimentalmente. Os padrões de desprendimento observados em simulações bidimensionais não seguem este mapa. Este mapa citado, foi reconstruído com uma melhor resolução por Morse e Williamson (2009) para Reynolds constante 4000 e é apresentado na Fig. 2.6.

Sabe-se que a oscilação influencia a dinâmica da esteira. Observa-se que a deflagração de tridimensionalidades pode ser atrasada (em relação ao número de Reynolds) ao se impor oscilações harmônicas transversais em amplitudes moderadas. Berger (1967) reporta através de experimentos com Reynolds de 10 a 350 que oscilações adequadas extendem o número de Reynolds crítico da transição secundária da esteira para algo entre 300 e 350. Esse efeito estabilizante da oscilação do cilindro também é observado nas simulações desta tese e a mudança do Reynolds crítico é capturada pela análise de estabilidade de Floquet.

Koopman (1967) realizou experimentos com visualização dos filamentos de vórtices desprendidos do cilindro oscilando transversalmente. O escoamento era a número de

Reynolds 200. Observa-se que os filamentos de vórtices não apresentam variação ao longo da envergadura, ou seja, o escoamento é bidimensional.

Como parte desta tese, o autor realizou a investigação do limiar inferior da amplitude de oscilação para o qual é possível inibir a deflagração de tridimensionalidades na esteira do cilindro oscilando. A investigação é apresentada na seção 5.3 para números de Reynolds 200 e 300.

Com a mudança do padrão de desprendimento de vórtices, espera-se que a transição da esteira tenha alterações. A mudança da simetria espaço-temporal da esteira base (esteira bidimensional) possibilita o surgimento de tridimensionalidades diferentes das observadas na esteira de um cilindro fixo (MARQUES; LOPEZ; BLACKBURN, 2004; BLACKBURN; MARQUES; LOPEZ, 2005).

Leontini, Thompson e Hourigan (2007) investigaram a transição na esteira de um cilindro oscilando transversalmente. Estes pesquisadores também observaram que a esteira é absolutamente estável a perturbações tridimensionais para amplitude de oscilação até $0.6d$ e número de Reynolds até 280. Eles também concluem que, quando o padrão de desprendimento de vórtices é 2S, os modos tridimensionais deflagrados na transição são os mesmo observados na esteira de um cilindro fixo. Em oscilação de amplitude maior, a esteira do cilindro tem padrão de desprendimento P+S; a simetria espaço-temporal é diferente da esteira de von Kármán. Nesta situação, modos tridimensionais sub-harmônicos são observados, em concordância com esta tese. Este modos têm simetria dada pela equação abaixo (em função da vorticidade na direção do eixo x, ω_x):

$$\text{Sub-harmônico: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = -\tilde{\omega}_x(x, y, z, t + T) \right. .$$

2.2 Método dos elementos espectrais

O método de elementos espectrais (SEM) é uma mescla entre o método espectral puro e o método de elementos finitos, através do uso de funções de base espectrais em uma formulação de elementos finitos. Do primeiro método, ele herda a convergência exponencial e a alta resolução, devido à alta ordem das funções de aproximação. Do segundo vem a divisão do domínio em elementos, que permite refinamento local e flexibilidade geométrica.

Os métodos espectrais (SM) derivam de métodos analíticos de solução de equações diferenciais parciais que apresentam soluções baseadas em expansões em série de funções

ortogonais. Estas funções são suaves e o erro da equação diferencial é minimizado segundo um dado critério. Suas aplicações à dinâmica de fluidos remetem à meteorologia (ver Boyd (2001)). A vantagem deste método é a convergência exponencial que possibilita a solução do problema com relativamente poucos graus de liberdade. Contudo, geometrias complexas são difíceis de serem tratadas com esta abordagem.

Os métodos de elementos finitos (FEM) permitem a solução de problemas em geometrias complexas com certa flexibilidade. Depois de anos de evolução e estudo, este método hoje é utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais.

Por um lado, existem métodos de baixa ordem para simulação de problemas em geometrias complexas e "problemas de engenharia" envolvendo modelos físicos avançados (por exemplo, modelos de turbulência como k-ϵ e k-ω, modelos de combustão). Por outro, pesquisas envolvendo simulação numérica direta (DNS) só são possíveis com métodos de ordem superior. Uma outra questão relevante é a simulação durante longos intervalos de tempo. Nesta situação, uma resolução espacial alta é essencial para minimizar os erros (KARNIADAKIS; ISRAELI; ORSZAG, 1991), o que é o caso deste trabalho onde se estudam séries temporais longas de um escoamento ao redor de cilindro oscilando.

2.2.1 Conceitos fundamentais da discretização espacial

Conforme supracitado, o método de elementos espectrais procura juntar a vantagem do método de elementos finitos (flexibilidade) com a vantagem dos métodos espectrais (convergência exponencial). No método de elementos espectrais, as funções de base são definidas localmente em um elemento. A convergência é resultado de um aumento da ordem de interpolação (refinamento tipo p) e/ou um refinamento da malha (refinamento tipo h). Por isso, o SEM também é chamado de método hp.

Ao longo da evolução dos métodos numéricos, diversos modos de refinamento de resultado foram apresentados. O refinamento consiste no aumento de graus de liberdade da forma discreta. Essencialmente, o resultado exato é aquele que abrange infinitos graus de liberdade.

O método mais comum, e possivelmente o mais claro para o entendimento, é o refinamento h. A variável manipulada para o refinamento h é a dimensão dos elementos da malha. Faz-se uma malha mais fina, globalmente ou em regiões onde aparecem os maiores erros, dividindo o domínio em subdomínios menores a fim de diminuir os erros

da discretização. Este método de refinamento nasce do método das diferenças finitas, cujas discretizações consistentes, ao tomar o limite de $\Delta x \to \infty$, tornam-se novamente as derivadas da equação original. O refinamento comum no método de elementos finitos é o tipo h.

Outro método de refinamento é a versão p, também chamado de método espectral, que se aplica ao domínio todo. A ordem da aproximação é alterada neste refinamento a fim de diminuir o resíduo tomando uma função interpoladora que melhor aproxima a solução. Tal método surgiu na meteorologia, e tem como objetivo uma maior acurácia, como mostrado em Boyd (2001). O método provém da idéia de uma série de funções que converge conforme se aumenta o número de funções na série.

Ambos métodos terão suas vantagens e desvantagens apresentadas a seguir, com o objetivo de chegar ao método de refinamento hp, que consiste na combinação destes dois métodos e um dos conceitos nesta seção. O objetivo desta combinação é obter as vantagens de cada método que a compõe. O que se clama do refinamento hp é que este alcança uma convergência superior, assintoticamente exponencial. Ou seja, o erro decresce rapidamente com o aumento do número de graus de liberdade.

No refinamento do tipo h a ordem do polinômio utilizado como função de base em todos os elementos é mantida e a convergência é atingida através da redução do tamanho dos elementos. O caractere h representa o tamanho característico de um elemento.

No refinamento do tipo p uma malha fixa é empregada e a convergência á atingida através do aumento da ordem do polinômio em todos os elementos. O caractere p representa a ordem da expansão. Se o domínio inteiro for tratado como um único elemento, então este método nada mais é do que o método espectral puro.

2.2.2 Método *hp*

O principal objetivo em se adotar um método hp é contornar as desvantagens dos métodos h e p tentando manter suas vantagens. O método h divide o domínio em subdomínios e adota interpolantes locais, em geral polinômios de grau fixo, lineares ou quadráticos, que são não nulos apenas em seu subdomínio. Já o método espectral adota funções globais, isto é, sobre o domínio todo, de alta ordem. Quando maior acurácia é necessária, seguindo o método h, divide-se em subdomínios de tamanhos menores, e seguindo o método p, aumenta-se o grau do interpolador.

Como exemplo dos métodos h e p, a Fig. 2.7 que apresenta a função $\arctan(60x/\pi)$

no intervalo $x \in [-1, 1]$ e aproximações por dois métodos: h e p. A curva preta é a função exata. A curva vermelha é uma aproximação p usando 6 polinômios ímpares[1] de Chebyshev (BOYD, 2001) pelo método de Galerkin (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1983). O método de Galerkin é um caso particular do método dos Resíduos Ponderados, cuja função de ponderação é a mesma função usada na interpolação. A curva azul é uma aproximação h, com 5 elementos lineares por colocação.[2] Esta função foi escolhida propositalmente por apresentar as falhas de ambos métodos.

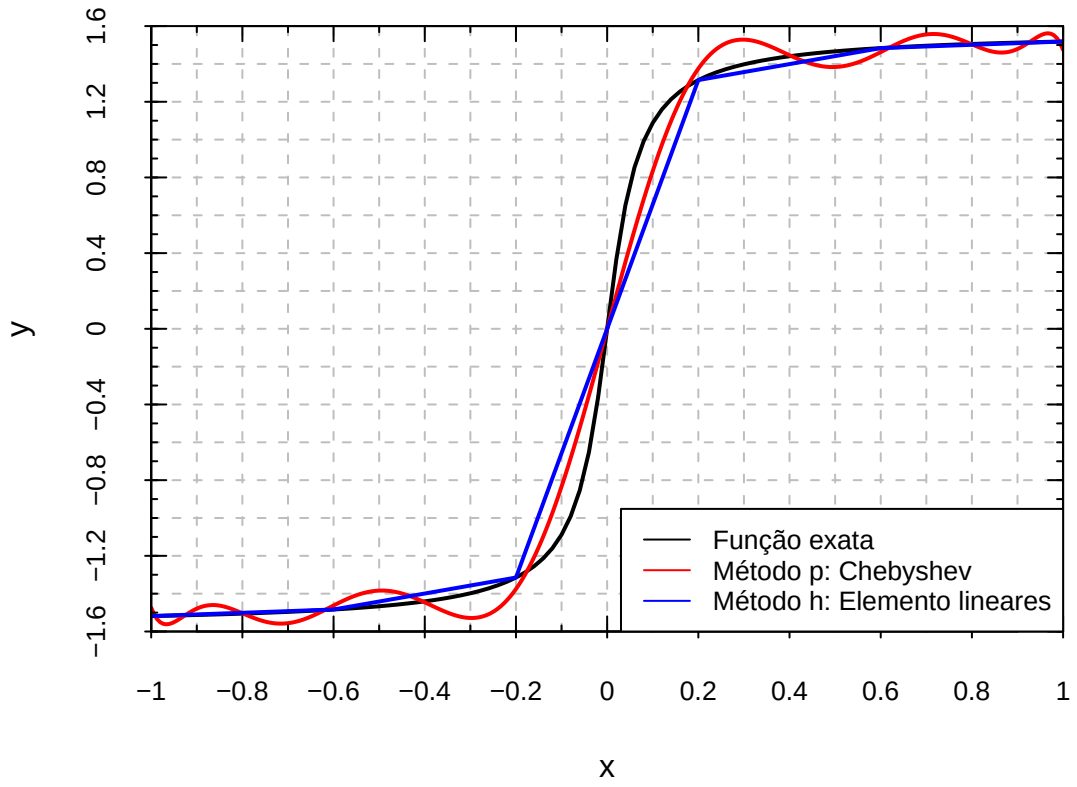


Figura 2.7: Exemplo de aproximações pelos métodos h e p.

2.2.2.1 Método *h*

Uma vantagem do método h é que este converte as equações diferenciais em matrizes esparsas, já que os interpoladores são não nulos apenas em algum subdomínio. Uma segunda vantagem é que os subdomínios são facilmente ajustados à geometria do problema. Sua principal desvantagem tange a baixa acurácia em relação aos outros métodos dado um mesmo número de graus de liberdade, porque cada função base (interpolante local, não nulo para um subdomínio) é um polinômio de baixa ordem e há uma considerável

[1] Equivale ao uso de 6 graus de liberdade para representar uma função ímpar.
[2] Equivalente a 6 graus de liberdade.

descontinuidade na derivada entre os elementos. Para uma boa aproximação, exige-se uma discretização bem fina, principalmente nos locais de grandes gradientes. A Fig. 2.7 ilustra bem a limitação deste método: notar a descontinuidade na derivada por exemplo. A fim de melhorar a aproximação, pode-se discretizar mais próximo da região de grande gradiente (método adaptativo).

2.2.2.2 Método *p*

Métodos espectrais, em contrapartida ao método h, geram equações algébricas com matrizes completas se forem de uma base mal escolhida, tornando a solução numérica computacionalmente custosa. Uma boa escolha é os polinômios ortogonais na norma escolhida para ser minimizada. Porém a acurácia atingida com este método é alta para um mesmo número de graus de liberdade. A eficiência computacional é melhorada se usar métodos iterativos rápidos para soluções de matrizes. Uma grande limitação deste método é a de ser prático apenas quando a geometria do problema é simples ou razoavelmente suave e regular. Variações não suaves geram oscilações no resultado aproximado, principalmente na região de grande gradiente, conhecidas como fenômeno de Gibbs. A aproximação da função arco-tangente na Fig. 2.7 ilustra bem este problema. Polinômios de Chebyshev (BOYD, 2001) foram usados por serem ortogonais na norma a ser minimizada escolhida (norma $\mathbb{L}_2$), e a interpolação tem 6 graus de liberdade.

2.2.2.3 Método *hp*

O método hp é a base do método de elementos espectrais. Consiste de uma mistura dos métodos h e p. O domínio é dividido em subdomínios, como no método h, ganhando então a flexibilidade da discretização da geometria e a matriz esparsa, características do método de elementos finitos convencionais. Ao mesmo tempo, o grau do polinômio interpolador em cada subdomínio é bastante alto para manter a alta acurácia, herança do método p. Este método supera bem as dificuldades do método p próximo a regiões de grande gradiente ao realizar um refinamento h nesta região, conciliando bem os dois métodos. Para aproveitar as características do método hp, visando um refinamento adaptativo, deve-se grosso modo refinar h onde há grandes gradientes e refinar p onde se deseja maior acurácia e suavidade.

Há uma grande desvantagem no método hp: gerar sistemas muito mal condicionados. A característica de gerar matrizes esparsas e bem condicionadas pelo método h é limitada pela escolha das funções de bases, que tendem a preencher a matriz. Matrizes

mal condicionadas geram dificuldades nas soluções numéricas e implicam em uma sensibilidade grande da solução em relação a pequenas alterações nos elementos da matriz. Como a matriz de solução é composta pelos produtos internos entre funções de base, é possível aliviar o peso da solução numérica fazendo uma boa escolha para as funções de base. Algumas opções são: séries de Fourier, polinômios de Jacobi, e seus casos particulares de Legendre e Chebyshev (BOYD, 2001) já que estes têm a propriedade de ortogonalidade entre si, resultando numa matriz mais esparsa e mais bem condicionada.

2.2.3 Ordem de convergência

Boyd (2001) apresenta as ordens de convergência na forma: logaritmo do módulo dos coeficiente $\log \mid a_n \mid$ pelo logaritmo da ordem dos coeficientes $\log(n)$ na Fig. 2.8.

A convergência algébrica é característica do método h. Para o método hp, se bem colocado, espera-se uma convergência entre geométrica e super-geométrica.

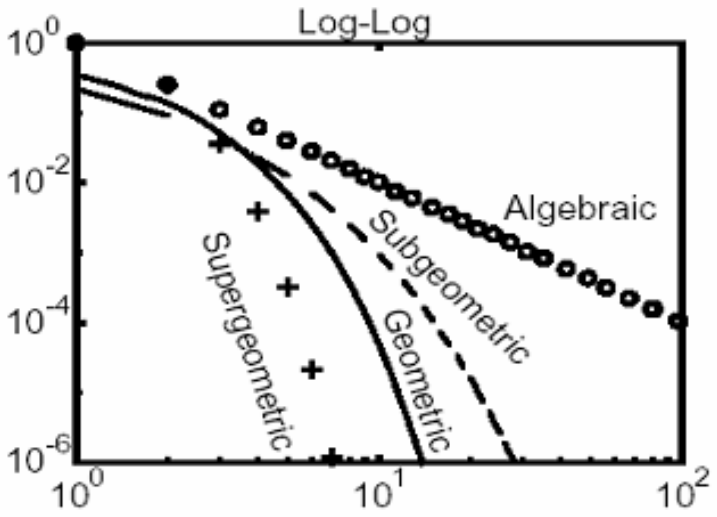
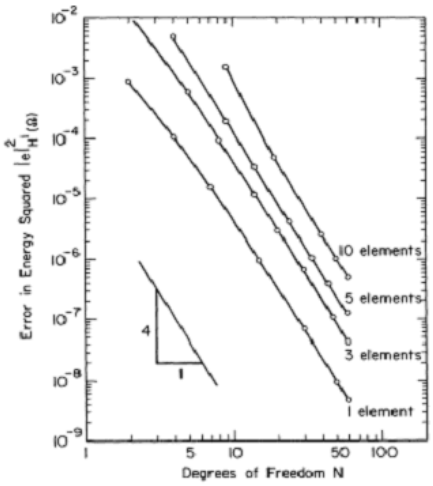


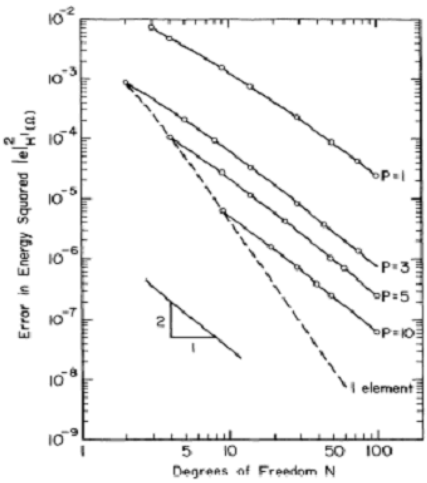
Figura 2.8: Gráfico de ordem de convergência: $\log \mid a_n \mid \times \log(n)$. (BOYD, 2001)

Babuška e Suri (1994) apresentaram com rigor as características de convergência do método p e hp. Também mostraram que o método h é limitado a uma convergência algébrica. Uma vantagem apresentada pelo método hp sobre o p é o decrescimento do erro quando bem tratadas as irregularidades geométricas, característica herdada do método h.

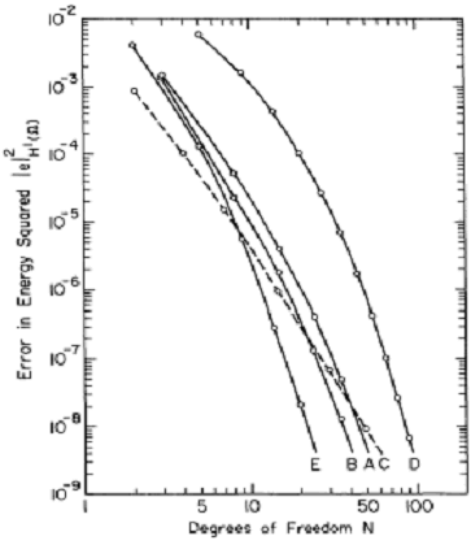
Babuška e Dork (1981) apresentaram estimativas de erro, fixando grau do polinômio e refinando a malha na Fig. 2.9(a), fixando malha e variando grau do polinômio na Fig. 2.9(b), e mudando ambos na Fig. 2.9(c).



(a) Fixando grau do polinômio e mudando grid para se aumentar o número de graus de liberdade. (BABUŠKA; DORK, 1981)



(b) Fixando grid e mudando grau do polinômio para se aumentar o número de graus de liberdade. (BABUŠKA; DORK, 1981)



(c) Combinação do refinamento h e p. (BABUŠKA; DORK, 1981)

Figura 2.9: Erros em função do número de graus de liberdade para os métodos h, p e hp.

2.2.4 Aplicação do método dos elementos espectrais às equações de Navier-Stokes incompressíveis

As simulações numéricas que são realizadas neste trabalho são de um escoamento tridimensional incompressível de um fluido newtoniano.

A solução numérica das equações de Navier-Stokes apresenta diversas dificuldades. Talvez a mais evidente seja a existência do termo não linear. No método que será descrito aqui, o termo não linear é tratado de maneira explícita e com um passo de tempo (Δt) adequado este problema é solucionado.

Uma outra dificuldade importante é a forma de acoplamento entre pressão e velocidade, que faz com que as duas variáveis não possam ser aproximadas independentemente. Uma condição de compatibilidade conhecida como condição *inf-sup* ou *div-stability* deve ser satisfeita pelos espaços discretos que aproximarão a solução, a fim de garantir estabilidade e unicidade da solução discreta. Na implementação utilizada neste trabalho, esta condição é satisfeita ao usar o método *splitting* para a marcha no tempo. Maiores detalhes sobre esta condição podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin (2005).

Tabela 2.1: Condições de contorno do sistema de equações que regem o escoamento incompressível. Ver Fig. 2.10 para esquema gráfico.

tipo	nome da condição	condição implementada relativo
Dirichlet	entrada	$\mathbf{u} = U_\infty = 1$ em $\partial\Omega_\infty$
	corpo	$\mathbf{u} = 0$ em $\partial\Omega_{\text{corpo}}$
Neumann	saída ou fluxo	$\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ em $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$ com $p = 0$

Aqui é importante ressaltar as condições de contorno impostas para que o sistema de equações tenha uma solução particular do problema que é estudado. A Tab. 2.1 resume as condições de contorno usadas nesta tese. Para as condições de contorno nas simulações com cilindro oscilando veja a Tab. 2.3 na seção 2.2.5. Para ajudar a visualização das condições de contorno, a Fig. 2.10 aponta onde são aplicadas as condições de contorno e a direção do escoamento.

2.2.4.1 Método de marcha no tempo

Primeiramente serão definidas condições de contorno apropriadas para o tipo de problema estudado neste trabalho, que é o escoamento externo ao redor de um corpo rombudo. Começando com as condições de contorno para velocidade, pode-se dizer que ao longe, onde não há influência do corpo nem da esteira por ele formada, o escoamento pode ser

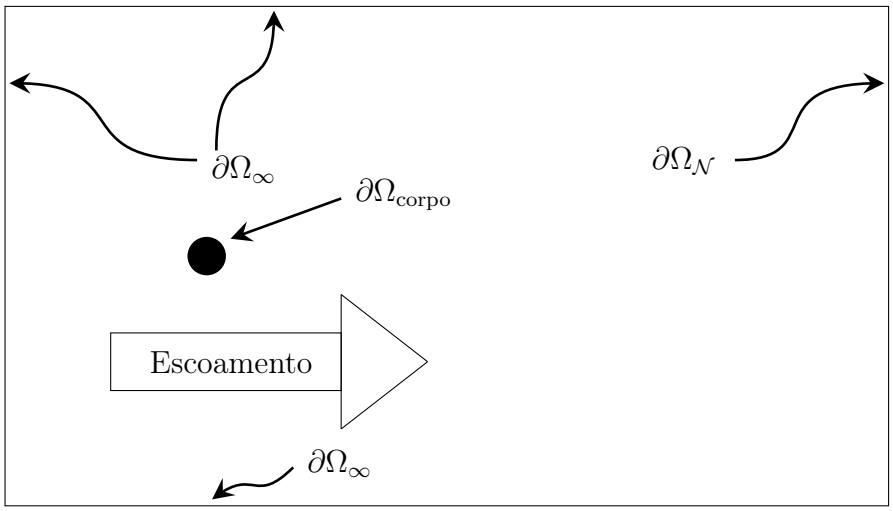


Figura 2.10: Esquema do domínio computacional e das condições de contorno impostas às equações que regem o escoamento incompressível.

considerado não perturbado e a velocidade é igual a U_∞. Nas paredes, é imposta condição de não escorregamento e a velocidade é nula. Na região de saída de fluido, tipicamente influenciada pela esteira, a derivada da velocidade na direção normal do contorno pode ser considerada como nula, ou seja, $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} = 0$.

Já para a pressão, na saída se impõe uma condição $p = 0$, que pelo *splitting method* que será apresentado se torna do tipo Neumann para a equação de Poisson, isto é, $\partial p/\partial\mathbf{n} = 0$. Quanto à condição de contorno da pressão na parede, a literatura apresenta um debate intenso sobre esta questão. Vale lembrar que não existe uma equação de estado para pressão[3] no escoamento incompressível e, portanto, a pressão numa parede é conseqüência do escoamento. Tradicionalmente, nas paredes adotou-se para a pressão um gradiente nulo:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\text{parede}} = 0$$

Deve-se ressaltar que a adoção deste tipo de condição de contorno é compatível com a teoria da camada limite. Contudo, segundo Karniadakis, Israeli e Orszag (1991), esta condição de contorno compromete qualquer tentativa de se obter uma precisão melhor do que primeira ordem no tempo. Os mesmos autores propõem uma condição de contorno do tipo Neumann de alta ordem para a pressão nestas regiões, que é derivada da equação de equilíbrio de quantidade de movimento linear na direção normal na fronteira do domínio.

[3]Uma equação de estado, por exemplo, que representa p em função de outras propriedades termodinâmicas.

Esta condição de alta ordem é a empregada nesta tese. Ela também é utilizada nas regiões de escoamento ao longe na implementação empregada neste trabalho. Ela será descrita mais adiante nesta seção, juntamente com o método de avanço no tempo *splitting method*.

Ao resolver as equações de Navier-Stokes no tempo, é necessário adotar uma discretização temporal. O mais usual em escoamentos incompressíveis é fazer a discretização no tempo independente da discretização no espaço. O método de elementos espectrais permite uma resolução muito alta no espaço, mas isso de nada adianta se a resolução temporal não for compatível com esta precisão. A discretização temporal, além de estar diretamente ligada com fenômenos transientes, também influencia diretamente na forma do sistema de equações que precisam ser resolvidas. Em particular, ela determina a forma da equação de pressão e dita a qualidade da aproximação da restrição de incompressibilidade nas formulações com variáveis primitivas, ou seja, formulações do tipo pressão-velocidade.

Karniadakis, Israeli e Orszag (1991) propõem um método de solução das equações de Navier-Stokes transitórias usando *time-splitting* (ou *splitting method*) que permite o uso de precisões de ordens superiores.

A eq. (2.1a) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{N}(\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbb{L}(\mathbf{u}) \tag{2.2}$$

onde

$$\mathbb{N}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})]$$
$$\mathbb{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2\mathbf{u}$$

que representam o termo convectivo e o termo difusivo. O termo convectivo geralmente é implementado desta forma para reduzir *aliasing* (KARNIADAKIS; ISRAELI; ORSZAG, 1991) e apresenta resultados superiores apesar de aumentar o custo computacional.

A eq. (2.2) integrada num passo de tempo Δt resulta em:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

onde o índice n se refere ao passo de tempo $t_n = n\Delta t$. O termo não linear é aproximado por um esquema explícito de ordem J_e da família de Adams-Bashforth, principalmente

Tabela 2.2: Coeficientes dos esquemas Adams-Bashforth e Adams-Moulton.

	Coeficiente	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
Adams-Bashforth	β_0	0	0	0
	β_1	1	3/2	23/12
	β_2	0	$-1/2$	$-16/12$
	β_3	0	0	5/12
Adams-Moulton	γ_0	1	1/2	5/12
	γ_1	0	1/2	8/12
	γ_2	0	0	$-1/12$
	γ_3	0	0	0

por razões de eficiência:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t = \Delta t \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \tag{2.4}$$

onde J_e é a ordem do esquema explícito de integração e β_q são os pesos dados pela Tab. 2.2, que dependem da ordem de integração escolhida. Os termos lineares $\mathbb{L}(\mathbf{u})$ são aproximados de forma implícita por razões de estabilidade. Será utilizado um esquema de ordem J_i da família de Adams-Moulton, resultando em:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t = \Delta t \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \tag{2.5}$$

onde J_i é a ordem do esquema implícito de integração e γ_q são os pesos dados pela Tab. 2.2, que dependem da ordem de integração escolhida. Por último, o termo de pressão será reescrito:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p\,\mathrm{d}t = \Delta t \nabla \overline{p}^{n+1} \tag{2.6}$$

onde $\overline{p}^{n+1}$ é um campo escalar que assegura que o campo de velocidades final é incompressível ao final do passo de tempo $(n+1)$.

Usando esta notação, a marcha de integração temporal utilizando o *splitting method* pode ser realizada em três etapas, tomando a seguinte forma:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \qquad \text{em } \Omega \tag{2.7a}$$

$$\frac{\hat{\hat{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla \overline{p}^{n+1} \qquad \text{em } \Omega \tag{2.7b}$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\hat{\mathbf{u}}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \qquad \text{em } \Omega \tag{2.7c}$$

com condições de contorno essenciais $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0 \qquad \text{em } \partial\Omega$$

Nestas equações, $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ são campos de velocidade intermediários. A eq. (2.7a) pode ser resolvida para $\hat{\mathbf{u}}$, já que é uma expressão explícita. Desde que se conheça o campo $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$, que deve vir da eq. (2.7b), a eq. (2.7c) também pode ser resolvida para $\mathbf{u}^{n+1}$, pois se trata de uma equação linear resolvida de maneira implícita. Resta saber como resolver a eq. (2.7b), já que nesta expressão há duas incógnitas: $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\overline{p}^{n+1}$. Isto é solucionado assumindo que o campo de velocidades intermediário satisfaz a condição de incompressibilidade do fluido, assim:

$$\nabla \cdot \hat{\hat{\mathbf{u}}} = 0 \qquad \text{em } \Omega \tag{2.8}$$

Aplicando o operador divergente na eq. (2.7b) e substituindo a eq. (2.8) chega-se a:

$$\nabla^2 \overline{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \qquad \text{em } \Omega \tag{2.9}$$

Resta-nos estabelecer as condições de contorno para esta equação. Para isso, toma-se a eq. (2.2) no contorno $\partial\Omega$, multiplicando todos os termos pelo vetor normal $\mathbf{n}$:

$$\int_{t_m}^{t^{n+1}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}t = \begin{array}{l} -\displaystyle\int_{t_m}^{t^{n+1}} \nabla p \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_{t_m}^{t^{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}t \\ -\displaystyle\int_{t_m}^{t^{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}t \end{array}, \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{2.10}$$

O termo dentro da integral do lado esquerdo desta equação pode ser reescrito:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}$$

O segundo termo do lado direito desta equação é nulo, visto que o domínio é indeformável; portanto o vetor normal na fronteira é invariante no tempo. Já o primeiro termo, quando integrado em todo o contorno, representa o fluxo líquido de massa no domínio. Como está sendo considerado um escoamento incompressível, sem fontes ou sorvedouros no interior do domínio, a integral no contorno deste termo é nula, embora localmente ele possa não ser. Entretanto, como as equações do método numérico empregado posteriormente são integradas em todo o domínio, este termo será cancelado numa etapa seguinte, e por isso, ele será desconsiderado nesta etapa. Isto posto, o termo do

lado esquerdo na eq. (2.10) é anulado e substituindo nela as expressões (2.4), (2.5) e (2.6), chega-se a:

$$\frac{\partial \overline{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \right] \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{2.11}$$

Nota-se que nesta expressão aparecem variáveis no tempo $n+1$, que são incógnitas. Isto acontece devido ao tratamento implícito do termo difusivo $\mathbb{L}(\mathbf{u})$. A fim de eliminar este problema e construir um esquema estável, o termo difusivo é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

O primeiro termo, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$, será tratado de forma implícita enquanto o segundo termo, $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, será tratado de forma explícita. Pode-se reescrever então a eq. (2.11):

$$\frac{\partial \overline{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-q}) \\ \displaystyle + \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \beta_q (-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q})) \end{array} \right] , \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{2.12}$$

Note que nesta equação, o termo $\gamma_0 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})$ pode ser igualado a zero, pois o requisito de incompressibilidade no passo $n+1$ faz com que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. Desse modo, elimina-se as velocidades no passo $n+1$ da expressão e a única incógnita passa a ser $\partial \overline{p}^{n+1}/\partial \mathbf{n}$. Em suma, a eq. (2.12) representa a condição de contorno de alta ordem para pressão e é a condição usada nas simulações desta tese.

2.2.4.2 Decomposição modal na direção do eixo

A aplicação de expansões espectrais em domínios homogêneos é apresentada às equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Para isso considere o caso do movimento de um fluido viscoso ao redor de um cilindro infinitamente longo posicionado perpendicularmente a uma corrente uniforme. Assume-se que o fluido tenha massa específica constante ρ e viscosidade dinâmica constante μ. Este escoamento incompressível depende de três parâmetros dimensionais: o diâmetro do cilindro d, a velocidade da corrente livre U_∞, e a viscosidade cinemática do fluido $\nu = \mu/\rho$. A única combinação adimensional destes parâmetros é o número de Reynolds, $\mathrm{Re} = U_\infty d/\nu$, e ele serve como um parâmetro de controle do sistema. O problema pode ser descrito de forma adimensional, com U_∞ e d servindo de escalas de referência para velocidade e comprimento. O estado do fluido em

qualquer instante de tempo t neste escoamento é determinado pelo campo de velocidades $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ e o campo de pressão $p(x, y, z, t)$. Estes campos são descritos num sistema de coordenadas onde x está alinhado com a direção e sentido da corrente livre, y é normal à corrente livre e ao eixo do cilindro e z está alinhado com o eixo do cilindro.

A evolução do escoamento é descrita pelas equações de Navier-Stokes para fluido incompressível, escritas a seguir na forma adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbb{N}(\mathbf{u}) - \nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{em } \Omega$$

onde $\mathbb{N}(\mathbf{u})$ representa o termo convectivo não linear dado por:

$$\mathbb{N}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})]$$

O domínio computacional Ω representa a região do espaço tridimensional ao redor do cilindro na qual as equações de Navier-Stokes serão resolvidas.

O primeiro passo da discretização é reduzir o problema do infinito para um problema num domínio de dimensão finita L na direção da envergadura. Em outras palavras, serão considerados escoamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ que satisfaçam o requisito de periodicidade:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z + L, t)$$

O campo tridimensional periódico $\mathbf{u}$ pode ser projetado exatamente num conjunto de modos de Fourier bidimensionais $\hat{\mathbf{u}}_q$ usando a transformada de Fourier:

$$\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{u}(x, y, z, t) e^{-i(2\pi/L)qz} \, \mathrm{d}z$$

Da mesma maneira, os modos na direção do eixo $\hat{\mathbf{u}}_q$ dão a expansão do campo de velocidades numa série de Fourier e podem ser encontrados através da transformada inversa de Fourier, desta vez, já apresentada na sua versão discreta:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz}$$

Substituindo a expansão de Fourier do campo de velocidades nas equações de Navier-Stokes, é obtido um sistema acoplado de equações para os modos de Fourier.

Define-se o número de onda escalado $\beta_q = (2\pi/L)q$ e os operadores dependentes de q:

$$\tilde{\nabla} \equiv (\partial_x, \partial_y, i\beta_q), \qquad \tilde{\nabla}^2 \equiv (\partial_x^2, \partial_y^2, -\beta_q^2)$$

A equação de evolução para os modos de Fourier passa então a ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial \hat{\mathbf{u}}_q}{\partial t} = -\mathbb{N}_q(\mathbf{u}) - \tilde{\nabla}\hat{p}_q + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\nabla}^2\mathbf{u}_q \\ \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_q = 0 \end{array}, \qquad \text{em } \Omega$$

O termo não linear de convecção proporciona o acoplamento entre todos os modos. Pode-se grafar este termo assim:

$$\mathbb{N}_q(\mathbf{u}) = \frac{1}{L}\int_0^L \mathbb{N}(\mathbf{u})e^{-i(2\pi/L)qz}\,\mathrm{d}z$$

A representação final do campo de velocidades será tomada como uma expansão truncada:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{q=-M}^{M} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)e^{i(2\pi/L)qz}$$

Computacionalmente é mais conveniente calcular a evolução de modos bidimensionais de Fourier $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ do que o campo tridimensional completo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Como $\mathbf{u}$ é real, os modos de Fourier satisfazem à condição de simetria $\hat{\mathbf{u}}_{-q} = -\hat{\mathbf{u}}_q^*$. Por isso, apenas metade do espectro ($q > 0$) é necessário. No entanto cabe a ressalva de que os campos $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ e $\hat{p}_q(x, y, t)$ são complexos, pois a expansão utilizada é uma série de Fourier, e por isso requerem o dobro de espaço para armazenamento.

A representação do campo de velocidades através de modos de Fourier tem outras vantagens intrínsecas. Ela proporciona uma maneira direta de ligar modos particulares de sistemas com padrões tridimensionais específicos. A teoria de estabilidade linear pode predizer quais modos interagirão de forma mais forte com o escoamento bidimensional para produzir estes padrões. A amplitude média no tempo dos modos de Fourier é uma indicação direta da quão boa é a resolução dos cálculos efetuados. E finalmente, a amplitude dependente do tempo dos modos de Fourier oferece uma maneira conveniente de explicar a transferência de energia entre as diferentes escalas na esteira tridimensional.

O conjunto de equações modais são integradas avançando-se no tempo utilizando-se o método de *splitting*. A repetição dos cálculos para cada um dos modos de Fourier sugere uma estratégia natural de distribuição do trabalho computacional num conjunto de processadores paralelos: cada modo é atribuído a um computador diferente. A integração

no tempo é feita para cada modo em paralelo com troca de dados no começo do passo de tempo visando avaliar o termo não-linear. Este termo é computado pseudo-espectralmente numa malha de pontos no espaço físico através do uso de uma transformada rápida de Fourier (FFT). O cálculo do termo não linear compreende grosso modo a um quarto do trabalho computacional. O trabalho restante constitui a solução de sistemas lineares nos passos referentes à pressão e ao termo de difusão. Esses últimos passos não requerem interação entre os modos e podem ser feitos em paralelo, com o trabalho balanceado no conjunto de processadores paralelos.

2.2.5 Navier-Stokes em referencial não-inercial

O estudo central desta tese é a dinâmica do escoamento ao redor de um cilindro em oscilação forçada. Boa parte das simulações devem reproduzir o movimento oscilatório do cilindro de alguma maneira. Nesta seção, pondera-se sobre as maneiras de simular um cilindro oscilando.

Listo aqui algumas das maneiras possíveis mais usuais para um único corpo rígido no escoamento:

- Uso de malha deformável;
- Uso de malha deslizante;
- Método de fronteira imersa para representar o cilindro;
- Resolver o escoamento em um referencial não-inercial fixo ao corpo.

As três primeiras citadas têm uma implementação mais complexa que compensaria para o caso de múltiplos corpos com movimento relativo entre si. As complicações que tais implementações trariam seriam:

- Necessidade de reconstrução das matrizes de solução numérica em cada passo de tempo;
- Presença de elementos muito deformados pode afetar o método numérico (no caso de malha deformável);
- Implementação de elementos não conformes (no caso de malha deslizante);
- Presença de descontinuidade que afetaria o bom condicionamento do método de elementos espectrais (principalmente no caso de fronteira imersa).

Por tais motivos, e devido a complexidade já inerente do fenômeno estudado, optou-se pelo uso de um referencial não-inercial. A idéia é manter a estrutura do código e da simulação acrescentando apenas os efeitos do referencial não-inercial.

Seguem, então, as principais vantagens e desvantagens da implementação de um referencial não-inercial.

- Vantagens
  - Implementação mais simples que outros métodos;
  - Malha não se modifica, necessitando apenas uma construção das matrizes do método numérico, poupando custo computacional.
- Desvantagem
  - Condições de contorno devem mudar ao longo do tempo, deteriorando levemente a estabilidade numérica;
  - Uma força de campo é introduzida e varia ao longo do tempo também, deteriorando levemente a estabilidade numérica.

2.2.5.1 Implementação

A implementação do referencial não-inercial fixo ao corpo segue a idéia de Meneghini e Bearman (1995) e Li, Sherwin e Bearman (2002). Ambos realizaram simulações bidimensionais com referencial não-inercial, respectivamente com os métodos de vórtices discretos e de elementos espectrais. Aqui, implementou-se o referencial não-inercial para simulações tridimensionais com domínio homogêneo. A rotação do sistema não-inercial não é tratada aqui por se tratar de simulações de cilindro com comprimento periódico relacionadas à vibração induzida por vórtices. Mesmo assim, a rotação em torno do eixo z foi implementada.

Adota-se uma coordenada absoluta,

$$\mathbf{x}' = (x', y', z')\,,$$

e a relativa,

$$\mathbf{x} = (x, y, z)\,,$$

associadas ao deslocamento do corpo $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))$ pela expressão

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}(t) \tag{2.13}$$

A velocidade é dada pela derivada temporal da eq. (2.13):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \tag{2.14}$$

As derivadas espaciais não apresentam mudanças. A derivada espacial em x no referencial não-inercial pode ser deduzida:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}$$

as derivadas nas outras coordenadas são obtidas analogamente, resultando em

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

conseqüentemente, os operadores gradiente e Laplaciano permanecem os mesmo:

$$\nabla = \nabla' \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 = \nabla'^2$$

A derivada temporal se relaciona com o movimento do corpo. O operador derivada temporal absoluta (índice a) é:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = -\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla() + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r$$

onde o índice r indica o referencial relativo.

Tomando a equação de Navier-Stokes adimensional para escoamento incompressível e fluido newtoniano com viscosidade constante, no referencial absoluto,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right) + (\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' = -\nabla' p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2 \mathbf{v}'$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = 0$$

seus termos apresentar-se-ão, ao passarem para o referencial não inercial, nas seguintes formas

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = \nabla \cdot (\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\nabla' p = \nabla p$$

$$\nabla'^2 \mathbf{v}' = \nabla^2 (\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' = \left[(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \nabla\right](\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\eta}}}_{=0} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{\eta}}}_{=0}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_a = -\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla(\mathbf{v}') + \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}\right)_r =$$
$$= -\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \left(\frac{\partial(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}})}{\partial t}\right)_r = -\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r + \ddot{\boldsymbol{\eta}}$$

Destarte, a equação que rege o escoamento no referencial não-inercial é:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{v} - \ddot{\boldsymbol{\eta}} \tag{2.17a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.17b}$$

Naturalmente as condições de contorno empregadas nas simulações não são as mesmas que o caso do cilindro fixo. Assim, usando a mesma notação desta seção, as condições de contorno são transformadas ao referencial relativo. A Tab. 2.3 apresenta as condições de contorno modificadas para o referencial não-inercial. Deve-se observar que a condição periódica ao longo da envergadura do cilindro não é modificada.

Tabela 2.3: Condições de contorno no referencial absoluto e no relativo. Veja Fig. 2.10 para os locais do contorno onde são aplicadas as condições.

tipo	condição	Referencial absoluto	Referencial relativo
Dirichlet	entrada	$\mathbf{v}'$ em $\partial\Omega_\infty$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$ em $\partial\Omega_\infty$
	corpo	$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$ em $\partial\Omega_{\text{corpo}}$	$\mathbf{v} = 0$ em $\partial\Omega_{\text{corpo}}$
Neumann	saída ou fluxo	$\nabla'\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = 0$ em $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$	$\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$

Vale notar que o campo de vorticidade não é modificado quando não há rotação do sistema de referência. Basta aplicar as operação acima para o verificar.

O cálculo da força resultante também não necessita de modificações no cálculo já implementado pois não inclui-se a aceleração inercial $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$ na pressão. O cálculo da força no referencial não-inercial pode ser relacionado com o cálculo da força no referencial absoluto pela equação abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}' &= \int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}(t)} \sigma \mathbf{n}' \,\mathrm{d}S' = -\int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}(t)} p\mathbf{n}' \,\mathrm{d}S' + \int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}(t)} \tau \cdot \mathbf{n}' \,\mathrm{d}S' \\
&= -\int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}(t)} p\mathbf{n}' \,\mathrm{d}S' + \int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}(t)} \nu(\nabla'\mathbf{v}' + \nabla'\mathbf{v}'^T) \cdot \mathbf{n}' \,\mathrm{d}S' \\
&= -\int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}} p\mathbf{n} \,\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}} \nu(\nabla(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \nabla(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}})^T) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}} p\mathbf{n} \,\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega_{\text{corpo}}} \nu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S \\
&= \mathbf{F}_{\text{pressão}} + \mathbf{F}_{\text{fricção}} = \mathbf{F}
\end{aligned}$$

2.2.6 Algumas publicações sobre método dos elementos espectrais

Patera (1984) apresenta a primeira aplicação do método de elementos espectrais à dinâmica de fluidos. Este é a base da monografia de Karniadakis e Sherwin (2005), que traz os detalhes matemáticos e computacionais da implementação que é utilizada neste trabalho. Patera combina a flexibilidade dos elementos finitos e a acurácia do método espectral aplicando à solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. É Patera quem nomeia método dos elementos espectrais (SEM). Em seu artigo, Patera analisa o comportamento do método em uma equação difusiva (tipo Helmholtz), em uma equação de onda (convectiva) e em uma equação de advecção-difusão, similar às equações de Navier-Stokes. Apresenta a solução do escoamento laminar em uma expansão de um canal mostrando a viabilidade do método. Demonstra que o método tem uma boa acurácia e mantém a convergência espectral.

Korczak e Patera (1986) continuam o desenvolvimento do método introduzindo elementos isoparamétricos, permitindo a solução para geometrias curvas. Trata-se o termo convectivo não-linear de forma explícita e aplica-se a técnica de condensação estática para resolver equações elípticas resultantes do tratamento implícito da equação de Stokes. Aprimora-se o esquema de avanço no tempo e apresenta-se a simulação bidimensional do escoamento entre dois cilindros concêntricos. Karniadakis, Bullister e Patera (1986) introduzem a soma fatorada para maior eficiência computacional do método.

Karniadakis (1990) propõe um método misto, elementos espectrais com espectral puro com séries de Fourier, para simulação de escoamentos em domínios com uma direção homogênea (direção que não há um comprimento característico). Exemplos de tais domínios são geometrias tridimensionais que podem ser geradas através de extrusão de uma geometria bidimensional, como o cilindro. Emprega-se uma discretização bidimensional com elementos espectrais e usa-se uma expansão espectral de Fourier na direção perpendicular a este plano (decomposição modal descrita na seção 2.2.4.2). Esta proposta fornece uma boa base para implementações de processamento paralelo, porque as equações da continuidade e difusão podem ser resolvidas separadamente em cada plano e o acoplamento entre as diferentes seções se restringe ao termo não-linear, feito de maneira explícita. Karniadakis introduz o uso de polinômios de Legendre como base das discretizações de elementos espectrais, permitindo o uso de quadraturas de Gauss eficientemente nas operações de integração numérica. Usam-se procedimentos iterativos de inversão de matrizes (gradiente conjugado e multigrid). A montagem do esquema permite aplicações

DNS e LES. Exemplos de aplicação em escoamento turbulento são apresentados neste artigo: escoamento em canal com nervura e escoamentos em superfícies com nervuras.

Karniadakis, Israeli e Orszag (1991) introduzem um novo esquema de avanço no tempo para a pressão, usando condições de contorno de alta ordem para a pressão. Este esquema minimiza o efeito de camadas limites numéricas produzidas pelo método. Atinge-se uma resolução temporal de ordem mais alta com boa estabilidade numérica.

Henderson e Karniadakis (1995) aplicam a decomposição modal em simulações de escoamento ao redor de cilindro isolado para número de Reynolds 1000. Os autores detalharam o procedimento de refinamento de malha adotado: inicialmente refinaram a malha bidimensional, depois estudaram a sensibilidade quanto ao comprimento periódico simulado e ao número de modos empregados na direção homogênea. Os resultados mostram que apenas o refinamento bidimensional não basta para produzir resultados concordantes com os experimentais. Salienta-se que o comprimento simulado, $L/d = 2\pi$, e a quantidade de modos empregados, 16, são poucos para simular a física da turbulência na esteira. Henderson (1997) mais tarde escreveu que o número de modos que deve ser empregado para capturar estruturas significativas deste escoamento é da ordem de $L/d \times \sqrt{\mathrm{Re}}$, onde L é o comprimento periódico.

Warburton, Sherwin e Karniadakis (1999) propõem novas bases para discretizações de elementos espectrais em malhas híbridas. As bases apresentadas são do tipo C^0 e são expansão modais ou expansões mistas modais/nodais. Introduz-se a decomposição contorno-interior. Usam-se polinômios de Jacobi (mais especificamente polinômios de Legendre) para as quadraturas numéricas, para os produtos tensoriais e para as ordens de expansão variáveis em cada elemento. Análise e comparação das propriedades das bases introduzidas são feitas quanto aos operadores de projeção, convecção linear e difusão. Este artigo apresenta as funções de base usadas no método empregado nesta tese: uma modificação do polinômio de Legendre para acomodar a restrição de continuidade C^0.

Por fim, sobre o método dos elementos espectrais (SEM), a referência principal da implementação usada é Karniadakis e Sherwin (2005). Canuto et al. (2006), Canuto et al. (2007) também abordam métodos espectrais puros e elementos espectrais com ênfase em dinâmica de fluidos. Especificamente sobre métodos espectrais puros, uma boa referência é Boyd (2001) e, sobre elementos finitos aplicados à dinâmica de fluidos, Gunzburger (1989) e Zienkiewicz e Taylor (2000a), Zienkiewicz e Taylor (2000b).

2.3 Análise de estabilidade de Floquet

Aqui está apresentada uma introdução à análise de estabilidade de Floquet. A teoria é descrita com maior rigor matemático e mais detalhes no apêndice B.

Em análise de estabilidade de escoamento, avalia-se o crescimento de pequenas perturbações a partir de um escoamento base. Para tanto, assumindo que a solução da equação de Navier-Stokes seja a soma do campo base $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ e a perturbação $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$, introduzimos esta soma na equação do escoamento incompressível (eq. (2.1)):

$$\frac{\partial(\mathbf{U}+\mathbf{u}')}{\partial t} + (\mathbf{U}+\mathbf{u}')\cdot\nabla(\mathbf{U}+\mathbf{u}') + \nabla(p+p') - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\mathbf{U}+\mathbf{u}') = 0\,,$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{U}+\mathbf{u}') = 0\,.$$

Rearranjando-as tem-se:

$$\underbrace{\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{U}}_{\text{Campo Base resolvido, portanto nulo}} +$$
$$+\underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{u}' + \nabla p' - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u}'}_{\text{Equação Linear da Evolução da Perturbação}} + \underbrace{\mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{u}'}_{\text{Termo não-linear}} = 0\,,$$

e a continuidade

$$\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{U}}_{\text{Continuidade do Campo Base}} + \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{u}'}_{\text{Continuidade da Perturbação}} = 0\,.$$

A equação linearizada da evolução da perturbação é usada. Despreza-se o termo não-linear na análise pois assume-se que a perturbação é de ordem menor que o campo base na escala curta de tempo. Então o termo $\mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{u}'$ é de ordem inferior aos demais termos. Supõe $\mathbf{U}\sim\mathcal{O}(1)$ e $\epsilon \ll 1$, então $\mathbf{u}'\sim\mathcal{O}(\epsilon)$ e $\mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{u}'\sim\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Obtém-se então:

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} = -\mathbf{DN}(\mathbf{u}') - \frac{1}{\rho}\nabla p' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u}' \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{2.20a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}' = 0 \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{2.20b}$$

onde

$$\mathbf{DN}(\mathbf{u}') \equiv (\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u}' \tag{2.20c}$$

é o termo advectivo linearizado.

A avaliação da estabilidade do escoamento base é feita a partir das eq. (2.20) que representam a evolução da perturbação. Na análise de estabilidade usual, o campo

base é estacionário, portanto $\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y, z)$ e então chega-se diretamente a um problema de autovalor definido por um operador invariável no tempo. No caso de Floquet, o operador $\mathbf{L}$ é variável no tempo e tem um período característico:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}')\,. \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{L}$ representa a parte direita da eq. (2.20a) sujeita a restrição eq. (2.20b).

Este problema dado pela eq. (2.21) tem soluções que podem ser decompostas em uma soma de soluções da forma $\tilde{\boldsymbol{u}}(x, y, z, t)\exp(\sigma t)$, onde $\tilde{\boldsymbol{u}}(x, y, z, t)$ são funções T periódicas. Estas são os modos de Floquet do operador $\mathbf{L}$. Os números complexos σ são expoentes de Floquet. Na prática, integra-se o a equação 2.21 em um período e obtém-se:

$$\mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{u}'_n \tag{2.22}$$

onde n se refere a um período completo. Então resolve-se o problema de autovalor do operador $\mathbf{A}$, que é invariável no tempo. Obtêm-se o multiplicador de Floquet $\mu = \exp(\sigma T)$ e os modos $\tilde{\boldsymbol{u}}(x, y, z, t_0)$ em um instante t_0 para este problema de autovalor. Ou seja, $\tilde{\boldsymbol{u}}(x, y, z, t_0 + T) = \mu\tilde{\boldsymbol{u}}(x, y, z, t_0)$ (ou no caso discreto $\tilde{\boldsymbol{u}}_{n+1} = \mu\tilde{\boldsymbol{u}}_n$).

A análise de estabilidade de Floquet é similar à análise de estabilidade de campos bases estacionários. A principal diferença recai em como lidar com um campo base periódico. Na análise de Floquet, o crescimento/decaimento de pequenas perturbações são avaliadas em relação ao período do campo base. Então avaliamos um problema de autovalor do operador que evolui a perturbação de um instante t a um período seguinte $t + T$. Cada autovalor deste operador representa a taxa de crescimento/decaimento da perturbação em um período (no comportamento assintótico): estes são os multiplicadores de Floquet (μ). Ou seja, a perturbação é multiplicada por μ a cada período que passa. Quando $|\mu| > 1$, o escoamento base é absolutamente instável a perturbações e cresce a cada período. Do contrário, se $|\mu| < 1$, o escoamento é estável quanto a aplicação de perturbações. O respectivo autovetor representa o campo de perturbação associado àquela taxa de crescimento/decaimento, também chamados neste trabalho de modos.

Há mais informação, além de taxa de crescimento/decaimento, no multiplicador de Floquet. O campo de perturbações, com o passar de um período, é multiplicado pelo multiplicador de Floquet (como citado acima e mostrado no apêndice B). Logo, se o multiplicador de Floquet for real e positivo, o campo de perturbações somente é alterado em intensidade ao decorrer um período. Se o multiplicador for real e negativo, o campo de perturbação também sofre mudança em seu sinal. Para que o campo retorne ao sinal

inicial, um outro período deve passar, portanto o período do campo de perturbação é o dobro do período do campo base. O modo associado é referido como sub-harmônico neste trabalho, com a marcante característica do período dobrado. Se o multiplicador for complexo, significa que a perturbação introduz uma freqüência não-harmônica no sistema. Usualmente, na esteira de um cilindro, estes modos podem ser observados como ondas, na direção da envergadura, estacionárias ou propagantes.

Depois de aplicar a teoria de Floquet às equações da evolução da perturbação (equações de Navier-Stokes linearizadas), assumimos que a direção da envergadura é homogênea (um cilindro infinitamente longo) e empregamos uma expansão de Fourier para discretizar o campo de perturbação nesta direção, lembrando que as perturbações tridimensionais são o foco desta pesquisa. Com a introdução da expansão de Fourier, assumimos que existe um comprimento periódico característico que ela pode representar. Já que as equações são lineares e as componentes da expansão de Fourier são ortogonais entre si, cada componente de Fourier pode ser avaliada independentemente. Portanto avaliamos cada comprimento de onda λ (ou número de onda $\beta = 2\pi/\lambda$) tomando-o como um parâmetro a mais na análise.

Em cada caso apresentado neste texto, procuramos os multiplicadores de Floquet que são maiores que 1 em um intervalo de números de onda. De fato, estamos interessados nos números de onda que apresentam a maior taxa de crescimento para uma dada situação (número de Reynolds, amplitude de oscilação, ...), logo procuramos os picos das curvas de multiplicador de Floquet (μ) por número de onda (β) apresentadas neste trabalho. Estes picos são os modos mais instáveis e governam o comportamento assintótico do sistema linearizado.

2.3.1 Algumas publicações sobre método de Floquet

Iooss e Joseph (1990) explicam a teoria de Floquet de modo básico e geral. O apêndice B foi escrito com base neste livro a fim de definir matematicamente o método.

Barkley e Henderson (1996), aplicando a teoria de Floquet às equações de Navier-Stokes, investigaram numericamente a estabilidade da esteira periódica de um cilindro para uma faixa de Reynolds de 140 a 300. Este trabalho é a principal referência de comparação para os demais estudos da estabilidade do escoamento em torno de cilindro e é reproduzido neste trabalho com o intuito de teste da implementação usada neste doutorado. O principal resultado de Barkley e Henderson é que as instabilidades tridimensionais resultantes da análise tinham comprimento de onda na direção da envergadura da ordem

de 4 diâmetros para Reynolds a partir de 188. Este é o modo A e não representa uma quebra da simetria espaço-temporal da esteira de von Kármán. Um segundo ramo instável foi obtido a Reynolds por volta de 259 com comprimentos de onda da ordem de 1 diâmetro, referente ao modo B que é uma quebra da simetria do campo base.

Os resultados de Barkley e Henderson (1996) são notáveis se comparados com os experimentos de Williamson (1988b). Os números de Reynolds críticos obtidos pela análise de estabilidade são muito próximos dos números de Reynolds em que se observam descontinuidades na curva de Strouhal, associadas às transições por Williamson. Outra semelhança dos resultados da análise de estabilidade em relação aos experimentos é o comprimento característica das instabilidades: modo A observa-se um comprimento por volta de $4d$ e o modo B algo em torno de $1d$.

Zhang et al. (1995) também observaram os modos A e B com comprimentos de ondas ao longo da envergadura semelhantes ao de Barkley e Henderson (1996). Eles também observaram a presença de um modo de comprimento de onda intermediário com freqüência não-harmônica com a freqüência de desprendimento de vórtices.

Robichaux, Balachandar e Vanka (1999) analisaram a estabilidade da esteira do escoamento ao redor de um corpo prismático de seção quadrada. Os modos A e B também são observados nesta configuração. Além deste, outro modo foi observado com comprimento de onda na direção ao longo da envergadura intermediário e foi nomeado de S. Os autores sugeriram que este modo tem um caráter sub-harmônico (multiplicador de Floquet real e negativo). Mais tarde, Blackburn e Lopez (2003) mostraram que o modo observado era quasi-periódico (multiplicador de Floquet complexo) e tal equívoco se deve ao método usado por Robichaux, Balachandar e Vanka que apenas permitia a identificação da parte real do multiplicador.

Marques, Lopez e Blackburn (2004) mostraram que apenas três tipos de modos (A, B e o quasi-periódico) podem ser observados em uma esteira bidimensional periódica com simetria espaço-temporal do tipo $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(u,v)(x,y,t) = \mathcal{H}(u,-v)(x,y,t+\frac{1}{2}T) \tag{2.23}$$

Notar que esta simetria representa também a esteira de von Kármán.

Blackburn, Marques e Lopez (2005) investigaram a estabilidade da esteira de corpos rombudos. Para um cilindro fixo, a investigação englobou um número de Reynolds mais alto que Barkley e Henderson (1996). Eles observaram que um outro modo se torna

instável a um Reynolds por volta de 377 e com o comprimento de onda na direção da envergadura de $1.8d$ (comprimento semelhante ao publicado por Zhang et al. (1995)). Este é um modo quasi-periódico e é observado na esteira como ondas estacionárias ou propagantes. Neste mesmo artigo, os autores identificam quando o modo quasi-periódico é uma onda estacionária ou propagante e sua simetria pode ser representada pela vorticidade em x dada pela equação:

$$\text{Modo QP: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = \tilde{\omega}_x(x, y, z + k_z, t + T) \right. .$$

Leontini, Thompson e Hourigan (2007) analisaram a estabilidade da esteira de um cilindro oscilando. Eles apresentam que, quando a esteira tem padrão de desprendimento 2S, apenas os modos A, B e quasi-periódico são obtidos pela análise de estabilidade. Esta tese apresenta resultados de acordo com os autores; como citado acima, não se esperam outros resultados segundo Marques, Lopez e Blackburn (2004). Quando a esteira muda para padrão de desprendimento P+S, modos sub-harmônicos são observados também em concordância com esta tese. Os autores se limitaram a amplitudes até $0.7d$, não avaliando amplitudes mais altas das respostas típicas de VIV em cilindro (amplitudes chegam a mais de $1.0.d$). A freqüência avaliada não tinha uma razão fixa em relação ao número de Strouhal para os diversos Reynolds, portanto não se pode distinguir diretamente o efeito da variação da amplitude, freqüência e número de Reynolds.

Carmo et al. (2008) empregaram o mesmo método de análise de estabilidade de Floquet para a geometria de dois cilindros em arranjos desalinhados. Neste artigo, observou-se a influência da presença do segundo cilindro na esteira: as transições secundárias são alteradas e podem surgir modos instáveis diferentes dos observados para um cilindro fixo. Isso se deve à mudança no padrão de desprendimento de vórtices causada pela presença de um segundo cilindro. Modos sub-harmônicos são observados na transição da esteira para esta geometria. Tal modo também é observado em esteira de um cilindro oscilando como reporta Leontini, Thompson e Hourigan (2007) e esta tese.

2.4 Identificação de vórtices

Esta seção tem como objetivo uma questão importante em escoamentos: a identificação de vórtices.[4] Como critérios subjetivos falham devido à arbitrariedade ou à definição

[4]Vórtices apresentam, grosseiramente, formas cônicas/cilíndricas e são associados a um movimento circulatório. Os vórtices são identificados na cultura popular do mundo todo. Por vezes são associados a entes com comportamentos travessos e arredios como o Saci no Brasil, o *dust devil* da cultura anglo-saxã e

incompleta e/ou confusa, uma revisão curta em critérios de identificação de estruturas vorticais se faz necessária.

Alguns trabalhos sobre escoamento ao redor de corpos rombudos, como cilindro, apresentam contornos de vorticidade para caracterizar a esteira formada a jusante do corpo. Embora em escoamentos ao redor de corpos rombudos prismáticos seja razoável esta associação direta, regiões de intensa vorticidade não definem vórtices: camadas limites laminares têm vorticidade alta e não são vórtices. Além da questão de definição, contornos de vorticidade podem ser mostrados com escalas arbitrárias.

Outro critério usado é região com mínimo de pressão, já que é uma tendência de movimentos circulatórios nos quais a força centrífuga tende a ser balanceada pela pressão. Há exceções para tais casos como escoamento de Stokes onde a pressão é contrabalanceada por forças viscosas[5]. Ainda assim, tal conceito de mínimo de pressão exige uma definição bem clara e cuidadosa em um espaço tridimensional.

Neste caminho, Jeong e Hussain (1995), cujo critério proposto foi adotado neste trabalho, revisam critérios propostos até então e delineiam alguns requisitos para se identificar um núcleo de um vórtice:

1. O núcleo do vórtice deve ter um vorticidade líquida, logo uma circulação líquida.
2. A geometria do núcleo de vórtice identificado deve ser invariante galileano.

Estas condições garantem a identificação de estruturas vorticais através de um critério objetivo, eliminando escolhas arbitrárias.

A proposta de Jeong e Hussain (1995) parte da idéia do mínimo de pressão para se definir um vórtice em escoamento incompressível. A inconsistência entre a existência de um mínimo de pressão e um núcleo de vórtice deve ser então eliminada. A inconsistência se deve a dois efeitos: (i) deformações transitórias, que podem criar mínimos de pressão sem envolver movimento vortical ou rotacional; (ii) efeitos viscosos, que podem eliminar o mínimo de pressão em escoamento com movimento vortical. O objetivo deles era descartar estes dois efeitos.

os *djinns* dos árabes. Vórtices estão freqüentemente presentes na literatura. Bons exemplos são Caribde em "Odisséia" de Homero e o maelstrom em "A Descent Into the Maelstrom" de Edgar A. Poe inspirado na mitologia escandinava. É o maelstrom que engole o Capitão Nemo no Nautilus em "Vinte mil léguas submarinas" de Julio Verne e Capitão Ahab diz que perseguiria Moby Dick (de Herman Melville) até no maelstrom se necessário.

[5]O escoamento de Stokes é representado pela equação de quantidade de movimento $\nabla p = \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}$ e de conservação de massa $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

O critério de Jeong e Hussain (1995) é reproduzido aqui[6]. Parte-se da equação para o Hessiano da pressão $p_{,ij} = \partial^2 p/\partial x_i \partial x_j$ já que ele contém informação sobre os mínimos locais da pressão (obs.: segue-se a notação tensorial usual). Para tanto, aplica-se o operador gradiente às equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)$$

ou, usando a notação tensorial mais compacta e lembrando da propriedade comutativa da derivada

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_k u_{i,k}\right) = -\frac{1}{\rho} p_{,ij} + \nu u_{i,jkk} \tag{2.24}$$

onde o lado esquerdo denota o gradiente de aceleração. Lembrar que $p_{,ij}$ é simétrico.

Lembrando que todo tensor pode ser decomposto em uma soma de um tensor simétrico com um antissimétrico, por exemplo:

$$b_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(b_{ij} + b_{ji}\right)}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(b_{ij} - b_{ji}\right)}_{\text{antissimétrico}}$$

Decompõe-se, então, o gradiente da velocidade em partes simétrica e antissimétrica definidas por:

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}} = S_{ij} + \Omega_{ij} \tag{2.25}$$

Trabalhando termo a termo da eq. (2.24), aproveitando que as derivadas espaciais são comutativas:

- Termo viscoso

$$\nu \nabla^2 u_{i,j} = \nu u_{i,jkk} = \nu \frac{1}{2}(u_{i,jkk} + u_{j,ikk}) + \nu \frac{1}{2}(u_{i,jkk} - u_{j,ikk}) =$$
$$= \nu \nabla^2 S_{ij} + \nu \nabla^2 \Omega_{ij} = \nu S_{ij,kk} + \nu \Omega_{ij,kk}$$

- Termo da derivada temporal

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(S_{ij} + \Omega_{ij}\right)$$

[6]Usou-se a mesma notação apresentada no artigo de Jeong e Hussain (1995) por questão de simplicidade. Deve-se estar atento a possíveis diferenças de notação nas demais seções deste texto.

- Termo convectivo

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_k u_{i,k}\right) = \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u_k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2}(u_{k,j}+u_{j,k}) + \frac{1}{2}(u_{k,j}-u_{j,k})\right]\left[\frac{1}{2}(u_{i,k}+u_{k,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,k}-u_{k,i})\right]}_{\mathrm{I}} +$$

$$+ \underbrace{u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + u_k\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\left[S_{kj}+\Omega_{kj}\right]\left[S_{ik}+\Omega_{ik}\right]}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + u_k\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} =$$

$$= S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + \Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} + u_k\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k}$$

então, juntando todos os termos se separando-os em simétricos e antissimétricos

$$\underbrace{\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + S_{ik}S_{kj} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + \frac{1}{\rho}p_{,ij} - \nu S_{ij,kk}}_{\text{simétrica}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k} + \Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} - \nu\Omega_{ij,kk}}_{\text{antissimétrica}} = 0 \quad (2.26)$$

A parte antissimétrica da eq. (2.26) é a equação de transporte de vorticidade, portanto é nula. A equação de transporte da vorticidade é obtida como demonstrado abaixo. Tomando os dois termo menos claros da parte antissimétrica da equação (2.26) e rearranjado-os:

$$\Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} = \frac{1}{4}\left(u_{i,k}-u_{k,i}\right)\left(u_{k,j}+u_{j,k}\right) + \frac{1}{4}\left(u_{i,k}+u_{k,i}\right)\left(u_{k,j}-u_{j,k}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[u_{i,k}u_{k,j} + u_{i,k}u_{j,k} - u_{k,i}u_{k,j} - u_{k,i}u_{j,k} + u_{i,k}u_{k,j} - u_{i,k}u_{j,k} + u_{k,i}u_{k,j} - u_{k,i}u_{j,k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{i,k}u_{k,j} - u_{k,i}u_{j,k}\right] = \frac{1}{2}\left[u_{i,1}u_{1,j} + u_{i,2}u_{2,j} + u_{i,3}u_{3,j} - u_{1,i}u_{j,1} - u_{2,i}u_{j,2} - u_{3,i}u_{j,3}\right]$$

Tomamos como exemplo, $i = 2$ e $j = 1$, para facilitar o entendimento sem perda de generalidade[7]. Temos então:

$$\frac{1}{2}\left[u_{2,1}u_{1,1} + u_{2,2}u_{2,1} + u_{2,3}u_{3,1} - u_{1,2}u_{1,1} - u_{2,2}u_{1,2} - u_{3,2}u_{1,3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{1,1}(u_{2,1}-u_{1,2}) + u_{2,2}(u_{2,1}-u_{1,2}) + u_{2,3}u_{3,1} - u_{3,2}u_{1,3}\right]$$

e adicionamos e subtraímos estes dois termos $u_{3,3}(u_{2,1}-u_{1,2})$ e $u_{3,2}u_{3,1}$, para obtermos a

[7]Se for uma escolha diferente de i, j, o arranjo final não muda, apenas os termos adicionados/subtraídos teriam diferentes índices.

expressão abaixo já rearranjada convenientemente:

$$\frac{1}{2}\left[u_{1,1}(u_{2,1}-u_{1,2})+u_{2,2}(u_{2,1}-u_{1,2})+u_{3,3}(u_{2,1}-u_{1,2})-\right.$$
$$\left.-(u_{3,2}-u_{2,3})u_{3,1}-(u_{1,3}-u_{3,1})u_{3,2}-(u_{2,1}-u_{1,2})u_{3,3}\right]=\frac{1}{2}\left[\omega_3 \mathrm{div}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u_3\right]$$

Ou seja, este termo pode ser escrito, na notação vetorial, como $1/2[\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{u}]$. Se retomarmos a parte antissimétrica da eq. (2.26), e lembrando que $\Omega_{ij}=-1/2\epsilon_{ijk}\omega_k$, obtemos a equação de transporte de vorticidade escrita baixo:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}-\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}=0$$

Logo, a parte antissimétrica da eq. (2.26) é de fato a equação de transporte da vorticidade. Logo, esta parte é nula.

Já a parte simétrica de eq. (2.26) é

$$\frac{\mathrm{D}S_{ij}}{\mathrm{D}t}-\nu S_{ij,kk}+\Omega_{ik}\Omega_{kj}+S_{ik}S_{kj}=-\frac{1}{\rho}p_{,ij} \tag{2.27}$$

A ocorrência de um mínimo local da pressão em um plano exige dois autovalores positivos do Hessiano da pressão $p_{,ij}$.[8] Como considerado acima nas proposições 1 e 2, aqui os dois primeiros termos da parte esquerda da eq. (2.27) não são considerados já que o primeiro deles representa a deformação irrotacional transiente e o segundo representa efeitos viscosos. Logo apenas $\mathbf{S}^2+\boldsymbol{\Omega}^2$, sendo $\mathbf{S}^2=S_{ik}S_{kj}$ e $\boldsymbol{\Omega}^2=\Omega_{ik}\Omega_{kj}$, é considerado para se determinar o mínimo local da pressão devido a movimento vortical. Ou seja, o Hessiano da pressão é aproximado pela seguinte expressão (ρ apenas dá a escala da pressão no caso):

$$-p_{,ij}\approx\mathbf{S}^2+\boldsymbol{\Omega}^2 \tag{2.28}$$

Para se identificar um vórtice, procura-se um mínimo local da pressão em um plano. Para tanto, define-se então um núcleo de vórtice como a região com 2 autovalores negativos do tensor $\mathbf{S}^2+\boldsymbol{\Omega}^2$. Ressalta-se que $\mathbf{S}^2+\boldsymbol{\Omega}^2$ é simétrico, portanto tem apenas autovalores reais que podem ser ordenados como $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3$. Vem daí a adoção da denominação "critério λ_2". Em suma, quando λ_2 for negativo, a região faz parte de um vórtice.

Um outro critério proposto é o "critério Q" por Hunt, Wray e Moin (1988). Este também é invariante galileano e baseia-se no gradiente da velocidade. Eles definem um

[8] O plano onde ocorre o mínimo é definido pelos autovetores relacionados aos dois autovalores positivos do Hessiano da pressão $p_{,ij}$.

vórtice como a região onde o segundo invariante Q do tensor gradiente de velocidade $\nabla\mathbf{u}$ é positivo com a condição adicional da pressão na região ser mais baixa que o valor no infinito. O segundo invariante do tensor é definido por

$$Q \equiv \frac{1}{2}\left(u_{i,i}^2 - u_{i,j}u_{j,i}\right) = -\frac{1}{2}u_{i,j}u_{j,i} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2\right) \tag{2.29}$$

onde as normas são o traço, $\|\mathbf{\Omega}\| = [\mathrm{tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^t)]^{1/2}$ e $\|\mathbf{S}\| = [\mathrm{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^t)]^{1/2}$, e $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{S}$ são as componentes antissimétricas e simétricas de $\nabla\mathbf{u}$. Logo Q representa o balanço local entre magnitude de vorticidade e taxa de deformação cisalhante e é positivo quando a vorticidade se sobressai.

Para escoamentos bidimensionais, os dois critérios Q e λ_2 são equivalentes. Para demonstrar isso, tomemos um tensor gradiente de velocidade qualquer para o escoamento bidimensional incompressível[9]

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

do qual podemos calcular $Q = -1/2\,(a^2 + (-a)^2 + bc + cb) = -a^2 - bc$.

Montando o tensor $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ do critério λ_2, temos

$$\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

que para um λ_2 negativo, é necessário que $a^2 + bc$ seja negativo, isto é $Q = -a^2 - bc > 0$.

[9]Observar que o traço de $\nabla\boldsymbol{u}$ é o divergente, portanto nulo para escoamento incompressível.

3 PREPARAÇÃO DAS SIMULAÇÕES

"... mas tenhas cuidado em mover-te com lenteza e com cautela, porque tua máquina poderia proporcionar-te o delírio, e não o êxtase."

O Pêndulo de Foucault (Umberto Eco)

3.1 Análise de convergência

A análise de convergência das simulações de método de elementos finitos espectrais (SEM) (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005) foi realizada através da variação dos principais parâmetros de controle da simulação: discretização h da malha, dimensões do domínio simulado como distâncias do contorno de entrada, do contorno lateral e de contorno de saída, grau do polinômio interpolador e grau de integração temporal. A magnitude do passo de tempo na integração numérica temporal foi escolhida de modo que o número de Courant-Friedrich-Lewis (CFL) se mantenha menor que o limite do método de marcha no tempo. Nas simulações posteriores, diminuiu-se o passo de tempo apenas quando foi necessária uma melhor amostragem das séries temporais.

Avaliou-se o escoamento bidimensional em dois números de Reynolds: 200 e 300. Para simulações com número de Reynolds mais elevado, um maior refinamento adicional é empregado, principalmente nas regiões próxima à parede e de esteira. O refinamento não é realizado "linearmente" com o número de Reynolds.

As grandezas usadas como referência para análise de convergência são as típicas do escoamento ao redor de um cilindro: medem-se o número de Strouhal ($\mathrm{St} = f_{st}d/U_\infty$, onde f_{st} é a freqüência de desprendimento de vórtices, d o diâmetro do cilindro e U_∞ velocidade ao longe), o coeficiente de arrasto médio ($C_{D_{\text{médio}}}$) e a média quadrática (RMS) do coeficiente de sustentação ($C_{L_{\text{RMS}}}$). Estas grandezas são medidas quando o escoamento já está desenvolvido por um intervalo de tempo longo. A avaliação da freqüência de Strouhal é feita através de uma FFT (*fast Fourier transform*) da série temporal do coeficiente de sustentação, cuja variação está diretamente associada ao desprendimento de vórtices.

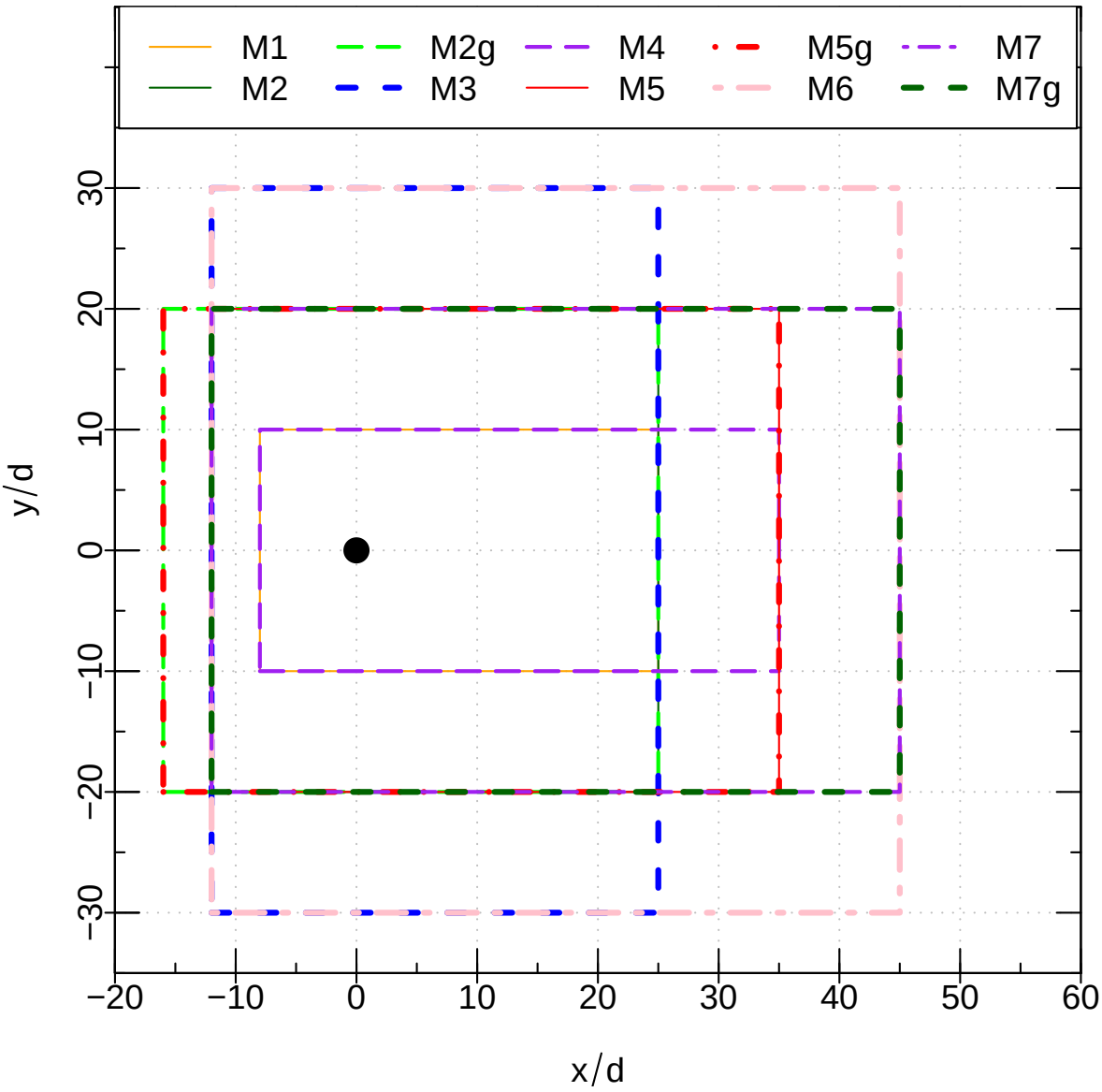


Figura 3.1: Dimensão das malhas usadas no teste de convergência.

O procedimento de teste de convergência segue Barkley e Henderson (1996) e Carmo et al. (2008). Primeiro escolhe-se uma malha que provém uma boa aproximação do escoamento. Depois refina-se o grau do interpolador visando uma solução que converge assim como se testa o grau de interpolação no tempo. As simulações realizadas neste teste foram bidimensionais e de modo que uma está contida em outra. A Fig. 3.1 apresenta todas as malhas usadas no teste de convergência. As dimensões das malhas estão explícitas na Tab. 3.1.

Como a geometria deste estudo, um cilindro, é homogênea na direção ao longo da envergadura do cilindro, pode-se empregar uma expansão modal periódica nesta direção

adotando um comprimento periódico que não filtra as tridimensionalidades do escoamento. Portanto não se exige uma discretização de malha h com elementos tridimensionais. Neste caso, o refinamento é realizado aumentando-se o número de modos da expansão de Fourier.

Nos testes de convergência, as condições de contorno e inicial são as mesmas das simulações realizadas neste trabalho. As condições iniciais são a do escoamento iniciado impulsivamente na velocidade ao longe, ou seja, $\mathbf{u}(x, y, z, t = 0) = 1\hat{\imath}$.

As condições de contorno são as já apresentadas na Tab. 2.1 e mostradas na Fig. 2.10. Apenas ratificando, a condição de entrada atribuímos $U_\infty = 1$ na direção do escoamento, na parede a condição de não-escorregamento e na saída uma condição "convectiva" $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

3.1.1 Parâmetros relativos à malha

Um conjunto de 10 malhas distintas foi simulado para avaliação dos efeitos da dimensão e do refinamento das malhas. Os outros parâmetros foram mantidos constantes: grau de polinômio interpolador é 9 e integração no tempo de 1ª ordem.

O efeito do refinamento é testado mudando-se o tamanho dos elementos nas regiões onde há gradientes no escoamento, principalmente na região próxima à parede e na esteira.

A Tab. 3.1 apresenta as dimensões das malhas simuladas, em distância do centro do cilindro, e o número de elementos que estas contêm.

Tabela 3.1: Dimensões e número de elementos das malhas simuladas.

Nome da malha	Entrada $[x/d]$	Lateral $[y/d]$	Saída $[x/d]$	n^o de elementos
M1	8	20	25	313
M2	12	40	25	413
M2G	16	40	25	425
M3	12	60	25	459
M4	8	20	35	357
M5	12	40	35	473
M5G	16	40	35	485
M6	12	60	45	578
M7	12	40	55	563
M7G	16	60	55	643

Ao observar os resultados da análise de convergência, devemos ter em mente

que grandezas como o número de Strouhal são as primeiras a convergir e não devem ser tomadas isoladamente. Aprimora-se a avaliação usando grandezas como coeficientes de arrasto e de sustentação que são sensíveis ao refinamento na região da parede, à dimensão da malha e, no caso de escoamento ao redor de corpo rombudo, ao refinamento da esteira próxima. Ciente de tais sensibilidades pode-se obter parâmetros adequados para a simulação.

A compilação das grandezas de comparação resultantes destas simulações de teste de convergência estão na Tab. 3.2 e na Tab. 3.3 para Reynolds 200 e 300 respectivamente.

Tabela 3.2: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 200 obtidas com as diferentes malhas.

Nome da malha	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L_{\text{RMS}}}$
M1	$0,2018$	$1,3940$	$0,5095$
M2	$0,1999$	$1,3631$	$0,4971$
M2G	$0,1966$	$1,3523$	$0,4903$
M3	$0,1999$	$1,3606$	$0,4962$
M4	$0,2033$	$1,3944$	$0,5093$
M5	$0,1999$	$1,3643$	$0,4980$
M5G	$0,1966$	$1,3534$	$0,4908$
M6	$0,1999$	$1,3628$	$0,4968$
M7	$0,1999$	$1,3643$	$0,4972$
M7G	$0,1966$	$1,3511$	$0,4902$

Tabela 3.3: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 300 obtidas com as diferentes malhas.

Nome da malha	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L_{\text{RMS}}}$
M1	$0,2166$	$1,4278$	$0,6771$
M2	$0,2133$	$1,3975$	$0,6656$
M2G	$0,2133$	$1,3877$	$0,6603$
M3	$0,2133$	$1,3920$	$0,6628$
M4	$0,2166$	$1,4279$	$0,6771$
M5	$0,2133$	$1,4001$	$0,6660$
M5G	$0,2133$	$1,3908$	$0,6615$
M6	$0,2133$	$1,3983$	$0,6651$
M7	$0,2133$	$1,3983$	$0,6651$
M7G	$0,2133$	$1,3878$	$0,6598$

Tomando a maior malha M7G como referência, comparamos inicialmente o efeito do comprimento de saída: as malhas M5G e M2G apenas diferem da M7G em relação

à distância entre fronteira de saída e o corpo. Na Tab. 3.2 nota-se pouca variação nas grandezas avaliadas. Logo a escolha da malha deve refletir no interesse na esteira (análise de estabilidade da esteira ou variações na esteira distante) e não tanto nas grandezas avaliadas no corpo.

Para avaliar o comprimento de entrada, podemos tomar dois pares de malha cujo comprimento é crescente: o par M2 e M2G e o par M5 e M5G. Percebe-se que tanto o número de Strouhal e o coeficiente de arrasto médio são sensíveis a esta distância

A comparação destes dados apresentados levam à escolha das malhas M5G ou M7G. Ambas malhas resultam no mesmo número de Strouhal com três algarismos significativos e em coeficientes de arrasto médio e de sustentação RMS de mesma ordem.

Para as simulações neste trabalho, malhas maiores do que estas testadas são usadas atentando ao refinamento nas regiões próximas ao cilindro e da esteira conforme se aumenta o número de Reynolds e velocidades locais. A escolha de malhas maiores se deve à necessidade de confiabilidade nos resultados de campo base para análise de estabilidade e às mudanças causadas pelas oscilações do cilindro não avaliadas nesta análise. Malhas mais largas são usadas já que o cilindro experimenta velocidades transversais da ordem da velocidade ao longe quando oscila em amplitudes altas e a condição de contorno de saída situa-se mais distante para permitir o pleno desenvolvimento da esteira.

Como paradigma final para o número de Strouhal e $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$, utilizou-se de Norberg (2003) que apresenta uma boa compilação de resultados experimentais e numéricos de escoamento ao redor de cilindro. Para uma melhor visualização, as figuras alteradas de Norberg (2003), Fig. 3.2 e 3.3, dispõem os resultados do conjunto de parâmetros adotado nas simulações posteriores. Os casos bidimensionais do teste de convergência (Re = 200 e Re = 300 com malha M7G, grau de interpolação 9 e ordem de integração 2) são os quadrados ■ . Os casos tridimensionais são representados (números de Reynolds 200, 300 e 400) pelos círculos • que aparecem nestas figuras.

3.1.2 Grau do polinômio interpolador

Determinada a malha com melhor tendência à convergência, testa-se o efeito do grau do polinômio interpolador. Nesta análise, a malha empregada foi a de maior dimensão, a M7G (ver Tab. 3.1), procurando evitar ao máximo a interferência das condições de contorno longe do corpo. Os graus de polinômio avaliados foram de 6 a 12. Os resultados estão presentes na Tab. 3.4 e na Tab. 3.5.

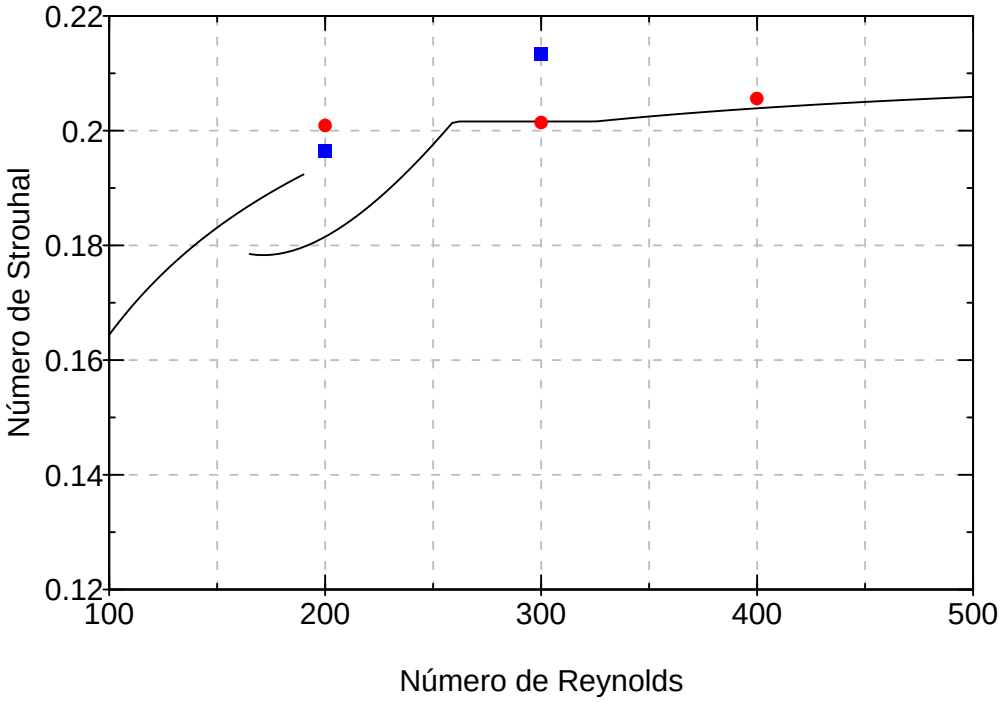


Figura 3.2: Número de Strouhal por número de Reynolds: este trabalho: ■ , bidimensional; • , tridimensional; —, fórmula empírica de Norberg (2003) obtida a partir de dados experimentais.

Conclui-se que um polinômio interpolador de grau 8 é o bastante, pois a partir deste grau a variação percentual de todas as grandezas avaliadas é muito pequena. Para simulações de cilindro oscilando usa-se polinômio de grau 9 ou 10. O objetivo é suavizar o campo de vorticidade, já que a resolução da equação de Navier-Stokes através do método de elementos espectrais (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005) nos leva à forma fraca, que exige apenas continuidade C^0 da interpolação[1]. O aumento do grau do polinômio minimiza o erro na 1ª derivada espacial do campo de velocidades[2].

3.1.3 Ordem de integração temporal

A ordem de integração foi avaliada usando a mesma malha da avaliação de ordem do polinômio interpolador. O grau do polinômio interpolador foi fixo em 9, já que este apresenta bons resultados. Os resultados são apresentados para integração de 1ª ordem até a de 3ª ordem na Tab. 3.6 e na Tab. 3.7, para Reynolds 200 e 300 respectivamente.

[1] A continuidade C^0 exige apenas que a velocidade seja contínua entre os elementos. A derivada espacial da velocidade apresenta, por conseguinte, uma descontinuidade entre elementos que diminui conforme o método numérico converge.

[2] A vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ é uma derivada espacial de 1ª ordem do campo de velocidades: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \imath_k$

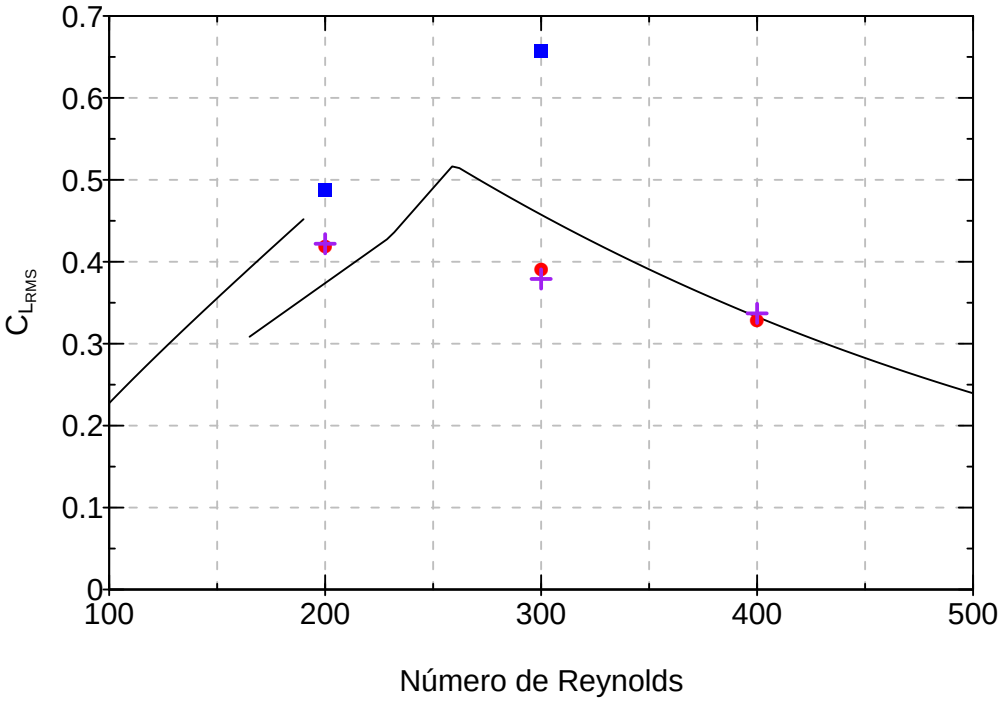


Figura 3.3: $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ por número de Reynolds: ■ , bidimensional; • , tridimensional a partir da média ao longo envergadura; + , tridimensional na seção média de uma envergadura de comprimento periódico $12d$; —, fórmula empírica de Norberg (2003) obtida a partir de dados experimentais.

A integração temporal escolhida para as simulações é a de 2ª ordem, pois apresenta um resultado satisfatório e melhores estabilidade e rapidez da solução numérica.

3.2 Estudo de convergência da análise de estabilidade de Floquet

O estudo da convergência da análise de Floquet foi realizado por Jabardo (2008) com quem compartilho o uso do código e a experiência com o método de elementos espectrais (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005). O método de análise de Floquet foi introduzido na seção 2.3 e também é descrito no apêndice B. Sobre o método de Floquet, pode-se consultar Iooss e Joseph (1990), Barkley e Henderson (1996) e Carmo et al. (2008).

A acurácia da análise de estabilidade depende da acurácia da representação do campo base periódico (escoamento bidimensional). Outro aspecto relevante é a acurácia da representação do operador linear da análise de Floquet (veja eq. (2.22)). Uma escolha óbvia é usar a mesma malha e a mesma ordem de interpolação das simulações bidimen-

Tabela 3.4: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 200 em função do grau do polinômio interpolador.

Grau do polinômio	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L_{\text{RMS}}}$
6	$0,1966$	$1,3525$	$0,4920$
7	$0,1966$	$1,3507$	$0,4900$
8	$0,1966$	$1,3513$	$0,4901$
9	$0,1966$	$1,3511$	$0,4902$
10	$0,1966$	$1,3510$	$0,4895$
11	$0,1966$	$1,3512$	$0,4900$
12	$0,1966$	$1,3512$	$0,4902$

Tabela 3.5: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 300 em função do grau do polinômio interpolador.

Grau do polinômio	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L_{\text{RMS}}}$
6	$0,2133$	$1,3914$	$0,6613$
7	$0,2133$	$1,3879$	$0,6584$
8	$0,2133$	$1,3881$	$0,6601$
9	$0,2133$	$1,3878$	$0,6598$
10	$0,2133$	$1,3876$	$0,6598$
11	$0,2133$	$1,3878$	$0,6601$
12	$0,2133$	$1,3879$	$0,6602$

sionais. Entretanto, as questões de estabilidade são limitadas à região da esteira próxima mesmo quando o escoamento base é sensível a malhas curtas/estreitas (ver §3.1.1, por exemplo). Barkley e Henderson (1996) apresentam o estudo de convergência da estabilidade de Floquet para a esteira de um cilindro fixo e emprega uma malha menor para a computação da análise de Floquet. O campo base bidimensional é interpolado em uma malha de dimensões menores. Carmo et al. (2008) abordam da mesma maneira a análise do escoamento ao redor de dois cilindros em arranjos desalinhados.

As malhas empregadas nas simulações do escoamento base bidimensional para a análise de Floquet têm a distância do cilindro até a saída de $95d$, até a entrada de $36d$ e largura de $50d$. A malha mais curta usada na análise de estabilidade de Floquet tem entrada a $8d$, saída a $30d$ e largura de $10d$.

O uso de uma malha mais curta para a análise de estabilidade se deve ao interesse na estabilidade da esteira próxima ao cilindro (*near wake* na literatura em língua inglesa). A esteira próxima tem a freqüência de Strouhal ou a freqüência da oscilação

Tabela 3.6: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 200 em função da ordem de integração temporal.

Ordem de integração	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L\text{RMS}}$
1	$0,1966$	$1,3511$	$0,4902$
2	$0,1966$	$1,3482$	$0,4875$
3	$0,1966$	$1,3492$	$0,4872$

Tabela 3.7: Grandezas adimensionais das simulações para Re = 300 em função da ordem de integração temporal.

Ordem de integração	n^o de Strouhal	$C_{D_{\text{médio}}}$	$C_{L\text{RMS}}$
1	$0,2133$	$1,3878$	$0,6598$
2	$0,2133$	$1,3857$	$0,6570$
3	$0,2133$	$1,3857$	$0,6571$

do corpo quando há sincronização da esteira. A esteira distante apresenta freqüência e dinâmica diferentes. Neste esteira secundária ocorre a amalgamação dos vórtices e ela tem freqüências sub-harmônicas. Taneda (1959) observou a esteira secundária experimentalmente e Inoue, Yamazaki e Bisaka (1995), Inoue e Yamazaki (1999) e Vorobieff, Georgiev e Ingber (2002) também a estudaram.

Em cada passo de tempo o campo base é calculado a partir de *snapshots* computados previamente. Uma interpolação trigonométrica é usada para calcular o campo base, portanto o número de *snapshots* usados para a interpolação é um aspecto importante no tempo computacional total, no uso de memória e na acurácia da representação do campo base. A Tab. 3.8 apresenta os resultados do estudo de convergência.

Tabela 3.8: Maior multiplicador de Floquet μ para Re = 200 e $\beta = 2.5$.

Número de *snapshots*	Ordem do polinômio	$\max\|\mu\|$	$\%erro$
16	9	0.525449	0.88
32	9	0.520825	0.001
64	9	0.520819	0
128	9	0.520819	0
32	8	0.522084	0.24
32	7	0.509797	2.1
32	6	0.475627	8.7

Conclui-se que se pode obter um resultado satisfatório com uma malha muito

menor que a do campo base, ainda usando o grau do interpolador 9 (o mesmo grau do campo base) e 32 *snapshots* por período. Este resultado com malha pequena está em acordo com Barkley (2005), que estudou a estabilidade da esteira de um cilindro em domínios muito pequenos na região da esteira próxima.

3.3 Escolha dos casos para análise de estabilidade

A escolha dos casos para análise de estabilidade teve duas fases. A primeira fase foi inspirada pelos resultados das simulações diretas. Depois da análise de estabilidade de Floquet inicial confirmar alguns resultados das simulações diretas, focamos no refinamento dos resultados da análise de Floquet e no estudo da influência da amplitude de oscilação nos limiares de estabilidade e nos modos instáveis deflagrados.

3.3.1 Seleção pelo DNS

As simulações numéricas diretas, por serem computacionalmente custosas, tiveram condições cuidadosamente escolhidas baseadas em informações sobre o escoamento ao redor de um cilindro fixo e sobre vibrações induzidas por vórtices (VIV) em um cilindro isolado.

Os números de Reynolds simulados estão na faixa em que ocorre a transição secundária da esteira de von Kármán de um cilindro fixo: ver Barkley e Henderson (1996) para as primeiras instabilidades tridimensionais a $\mathrm{Re} \approx 180$ e $\mathrm{Re} \approx 270$, respectivamente modos A e B, e Blackburn e Lopez (2003) a $\mathrm{Re} \approx 370$ com o modo quase-periódico. Deste modo, as DNS foram realizadas com números de Reynolds 200, 300, 400 e 500.

Quanto a freqüência de oscilação forçada, adotou-se o valor fixo de 95% da freqüência de Strouhal do cilindro fixo a fim de capturar a sincronização entre a freqüência de oscilação do corpo e a freqüência de desprendimento de vórtices.

A amplitude de oscilação das DNS está na faixa usual de resposta de um cilindro em VIV que é entre $0.4d$ e $1.0d$. Nas simulações, forçou-se a oscilação do cilindro em amplitudes $0.4d$ e $1.0d$. A Tab. 3.9 resume os parâmetros das DNS.

Assim sendo, definimos os parâmetros para as primeiras análises de estabilidade de Floquet de acordo com a Tab. 3.10.

Tabela 3.9: Parâmetros dos casos das DNS.

Reynolds	200, 300, 400, 500
Amplitudes de oscilação	$0.4d$ e $1.0d$
Freqüência de oscilação	$0.95f_{\mathrm{St}}$

Tabela 3.10: Condições do escoamento para análise de estabilidade de Floquet.

Reynolds	200, 240, 260 e 300
Amplitudes de oscilação	$0.4d$, $0.5d$, $0.6d$, $0.65d$, $0.7d$, $0.8d$, $0.9d$ e $1.0d$

3.3.2 Outros casos escolhidos

Os resultados (ver Cap. 5) desta análise suscitaram o estudo do limiar de amplitude de oscilação no qual pode-se dizer que a amplitude de oscilação influencia a transição da esteira. No limite $A \to 0$, obviamente deve-se retomar os resultados de cilindro fixo, portanto espera-se que se tenha um limiar de amplitude.

Nos resultados para número de Reynolds 200 em amplitudes baixas obtiveram-se campos de escoamento bidimensionais estáveis a perturbações tridimensionais embora para cilindro fixo no mesmo número de Reynolds se obtenha instabilidades tridimensionais. Por esta razão, este número de Reynolds foi escolhido para a análise.

A fim de se manter a sincronização da esteira com o movimento do corpo, simulações com a freqüência de oscilação do corpo igual à freqüência de Strouhal f_{St} foram realizadas. Os limites de sincronização entre as freqüências de movimento do corpo e do desprendimento de vórtices pode ser encontrado em diversas publicações, como Meneghini e Bearman (1995) e Karniadakis e Triantafyllou (1989).

Destarte, os casos para esta análise são com número de Reynolds 200, freqüência de oscilação f_{St} e nas amplitudes da tabela abaixo:

Tabela 3.11: Casos para o estudo do limiar de amplitude.

Amplitudes de oscilação	$0.005d$, $0.01d$, $0.02d$, $0.03d$, $0.034d$ $0.04d$, $0.05d$, $0.1d$, $0.2d$, $0.3d$

4 ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO FIXO

Este capítulo é dedicado aos resultados referentes ao escoamento ao redor de um cilindro fixo. Ele está dividido em três seções principais. A seção 4.1 avalia o efeito do tamanho do domínio computacional na direção da envergadura do cilindro sobre a dinâmica das tridimensionalidades da esteira. Seguindo, a seção 4.2 relata as simulações numéricas diretas do escoamento ao redor de um cilindro fixo, com ênfase nas características tridimensionais da esteira. Por fim, a seção 4.3 mostra o emprego do método de Floquet para avaliar o surgimento de tridimensionalidades na esteira de um cilindro fixo.Este resultados servem de base de comparação para os do cilindro oscilando.

4.1 Avaliação do efeito do comprimento periódico em DNS tridimensionais

O objetivo desta análise do efeito do comprimento periódico usado nas simulações numéricas com método do elementos espectrais (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005) visa validar o comprimento escolhido para as simulações de cilindro oscilando. Como estas simulações são computacionalmente custosas, um comprimento periódico bem escolhido, assim como um conjunto de parâmetros de simulação através de uma análise de convergência (§3.1), proporciona uma situação "ótima" de simulação.

Este estudo foi inspirado pelos resultados de Norberg (2003) e sua compilação de diversos dados. Sua curva de $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ (média quadrática do coeficiente de sustentação), cruzando dados experimentais e simulações bi- e tridimensionais, proporciona uma base de informação suficiente para delinear-se um limiar, ou melhor, a transição do tridimensional para o bidimensional, mudando-se o tamanho periódico do domínio da simulação computacional. Espera-se, e mostra-se com os dados abaixo, que há uma escala ao longo da envergadura abaixo da qual não se deflagra nenhuma tridimensionalidade.

Ao mudar o comprimento periódico, a fim de manter consistência das simulações,

manteve-se a mesma resolução na discretização ao longo da envergadura. Embora não citado na seção 3.1 (análise de convergência), a discretização na direção ao longo do eixo do cilindro é feita por uma expansão trigonométrica. O número de componentes desta expansão é escolhido para se resolver as menores escalas com energia significativa. Seguiu-se, então, Henderson (1997) que propôs que o número de modos necessário para se resolver as escalas menores de turbulência é da ordem de $L/d \times \sqrt{Re}$.

Nesta investigação, mostra-se também que há uma transição entre o tridimensional com resultados semelhante aos de experimentos, e o bidimensional puro simulado computacionalmente. Este efeito foi notado experimentalmente por Szepessy e Bearman (1992) mudando a distância entre 2 placas que deslizavam ao longo do cilindro. Este experimento tem suas limitações: a camada limite da placa interage com a camada limite e a esteira do cilindro, principalmente quando as placas estão próximas. Este efeito é difícil de isolar experimentalmente. Isto é contornado em qualquer simulação numérica ao escolher condições de contorno adequadas para a simulação.

4.1.1 Casos simulados e resultados

Para os casos, o número de Reynolds escolhido foi 400 porque nesta situação já se nota uma mudança considerável entre número de Strouhal (St) tridimensional e bidimensional (Re $<$ 180) apresentada na Fig. 4.1. O $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ tridimensional e bidimensional também são bem distintos neste Reynolds: uma razão da ordem de 0.4 conforme a Fig. 4.2. Sobre a Fig. 4.2, Norberg (2003) agrupou seus dados experimentais e diversos resultados numéricos bi e tridimensionais. Norberg (2003) mediu a força numa seção do cilindro, enquanto os resultados que apresento aqui é uma média ao longo do comprimento periódico. Também calculou-se a força em uma seção do cilindro (ver $+$ na figura) e os resultados não diferem significativamente dos da média ao longo da envergadura apresentados posteriormente.

A Fig. 4.2, adaptada de Norberg (2003), resume o comportamento do escoamento em função do número de Reynolds: até ≈ 50 não há a esteira de von Kármán (que reflete na flutuação da força), portanto o $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ é nulo; até $Re \approx 200$ o escoamento permanece bidimensional; de $Re \approx 200$ a $Re \approx 10^4$ ocorrem transições tridimensionais e mudanças no ponto de separação; depois uma larga faixa onde o comportamento permanece semelhante (de $Re \approx 10^4$ até $Re \approx 10^5$) e finalmente em $Re \approx 2 \times 10^5$ a 5×10^5 ocorre a crise do arrasto modificando o ponto de separação.

Após a adoção de um número de Reynolds e uma malha apropriada, um caso bidimensional para referência foi simulado. Para tanto, um esquema de marcha no tempo

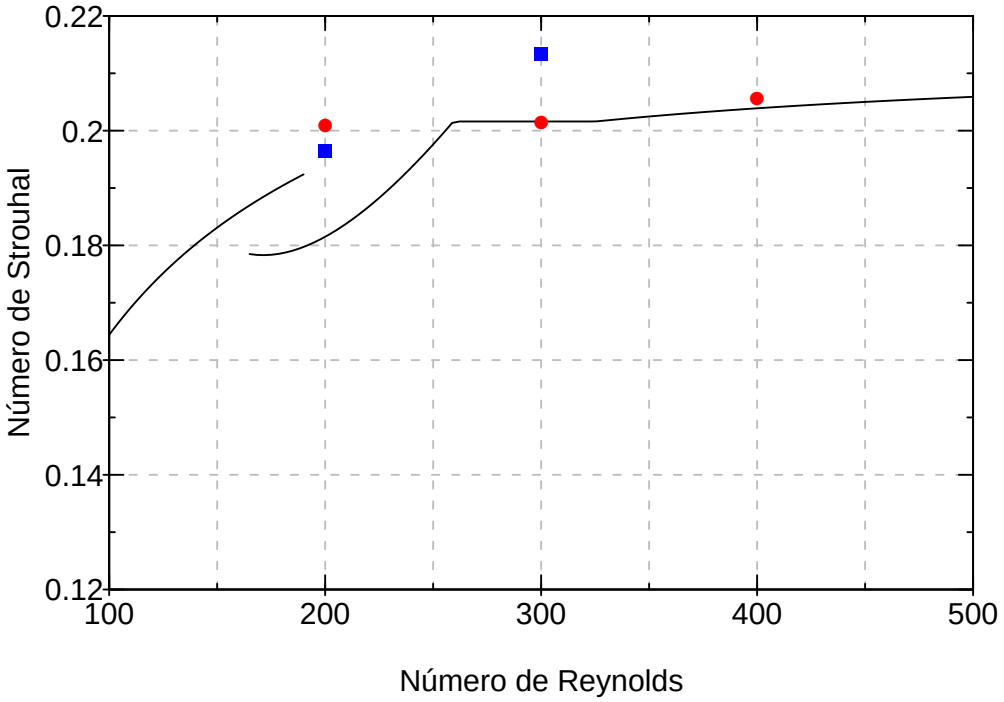


Figura 4.1: Número de Strouhal por número de Reynolds: este trabalho: ■ , bidimensional; • , tridimensional; —, fórmula empírica de Norberg (2003) obtida a partir de dados experimentais.

de segunda ordem e polinômio de grau 9 foram usados na discretização de elementos espectrais.

Com o caso bidimensional de referência simulado, o comprimento periódico na direção da envergadura foi variado. A Tab. 4.1 mostra os casos simulados e os resultados de $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ em relação ao bidimensional. O número de Strouhal resultante também é mostrado.

A Fig. 4.3 mostra parte do efeito da variação do comprimento periódico. Nota-se que o $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ tende ao bidimensional ($L/d = 0$ no gráfico), que a transição para este Reynolds ocorre numa região estreita, associada com o número de onda da instabilidade de modo B, que é $\lambda_{B_{cr}} \approx 0.82d$, conforme obtido em análises de estabilidade de Floquet (vide, por exemplo, Barkley e Henderson (1996) e esta tese §4.3). Notam-se dois casos que apresentaram duas soluções possíveis (pontos vermelhos na Fig. 4.3).

A transição do tridimensional "experimental" para o bidimensional não ocorre como uma variação direta de um para o outro; há casos onde o resultado de $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ não se encontra entre os resultantes do bidimensional e do tridimensional experimental, por

[1]Dado retirado da equação empírica apresentada em Norberg (2003).

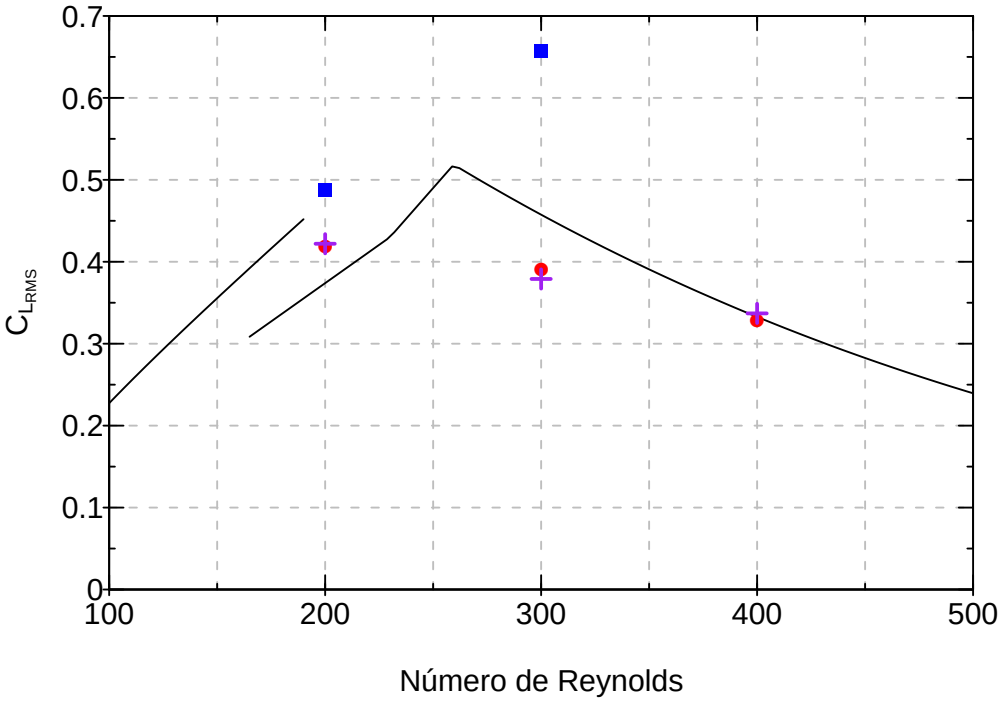


Figura 4.2: $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ por número de Reynolds: ■ , bidimensional; • , tridimensional a partir da média ao longo da envergadura; + , tridimensional na seção média de uma envergadura de comprimento periódico $12d$; —, fórmula empírica de Norberg (2003) obtida a partir de dados experimentais.

exemplo os casos $L/d = 0.7$ e $L/d = 0.8$. Nesta região, há duas soluções possíveis e estáveis como supracitado e mostrado nas Fig. 4.5 e 4.6: há uma solução com a série temporal do coeficiente de sustentação quase harmônica (Fig. 4.5(l) e 4.5(o)) e uma solução com modulação intensa do coeficiente (Fig. 4.5(k) e 4.5(n)). Estes resultados foram obtidos partindo de um campo inicial no domínio computacional igual ao da condição de contorno de velocidade (velocidade inicial unitária no domínio) e com ruído aleatório em todo o domínio por um curto intervalo de tempo. O curioso é o escoamento tender ora para a solução "harmônica", ora para a solução "modulada".

Este resultado importante indica a possibilidade de uma solução bi-caótica, ou seja, há 2 atratores neste sistema dinâmico para esta situação. Esta região deve ser limitada pois por volta de $L/d = 0.35$ o escoamento dissipa as tridimensionalidades e se torna bidimensional, tendo portanto uma "única" solução[2], e para $L/d \gtrapprox 2$ tem características tridimensionais que não se alteram com a mudança do comprimento periódico do cilindro, tendo novamente "uma única solução possível"[2].

[2]As aspas são usadas pois não se prova a unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes.

Tabela 4.1: Dados resultantes de simulações DNS para número de Reynolds 400.

Razão L/d	$C_{L_{\mathrm{RMS}}}$	$C_{L_{\mathrm{RMS}_{3D}}}/C_{L_{\mathrm{RMS}_{2D}}}$	Freqüência Strouhal
bidimensional	0.78243	1.00	0.22459
0.1	0.78299	1.00	0.22424
0.25	0.78144	1.00	0.22188
0.35	0.78266	1.00	0.22083
0.40	0.71830	0.92	0.22400
0.45	0.59959	0.77	0.22500
0.50	0.52428	0.67	0.22229
0.55	0.45403	0.58	0.21818
0.60	0.41493	0.53	0.22567
0.65	0.35299	0.45	0.22000
0.70 modulado	0.14467	0.18	0.20833
0.70 harmônico	0.34550	0.44	0.21538
0.75	0.3237	0.41	0.22000
0.80 modulado	0.18959	0.24	0.20714
0.80 harmônico	0.30976	0.40	0.21875
1.0	0.33276	0.43	0.20821
2.0	0.35679	0.46	0.20952
4.0	0.25215	0.32	0.20578
6.0	0.27029	0.35	0.20624
12.0	0.32858	0.42	0.20587
experimental[1]	0.3327	0.43	0.2039

Outro efeito da variação do comprimento periódico que não é mostrado na Fig. 4.3 é a transição do sinal de C_L. O coeficiente de sustentação, em ambos casos tridimensional numérico e experimental, apresenta um comportamento caótico que pode ser notado pela forte modulação do sinal de C_L, como mostram as Fig. 4.5(q)–4.5(t). Ao longo da transição, apesar do escoamento ainda apresentar tridimensionalidades, o C_L ao longo do tempo vai perdendo seu comportamento modulado, se tornando harmônico. As soluções com C_L harmônico tem duas fases: uma faixa de L/d transiente com amplitude de C_L baixa representada nas Fig. 4.5(e)–4.5(p) que contém os casos com duas soluções moduladas vistas nas Fig. 4.5(k) e 4.5(n); e outra faixa cuja amplitude do C_L é a mesma do bidimensional apresentada nas Fig. 4.5(a)–4.5(d).

É possível observar o efeito das tridimensionalidades através da distribuição de C_L ao longo da envergadura do cilindro. A Fig. 4.6 mostra o desvio do coeficiente de sustentação ($C'_L(z,t)$) em relação ao valor médio na envergadura em um instante t ($C_{L_{\mathrm{spanmean}}}(t)$). Este desvio é definido por $C'_L(z,t) = C_L(z,t) - C_{L_{\mathrm{spanmean}}}(t)$. Foi escolhido um instante

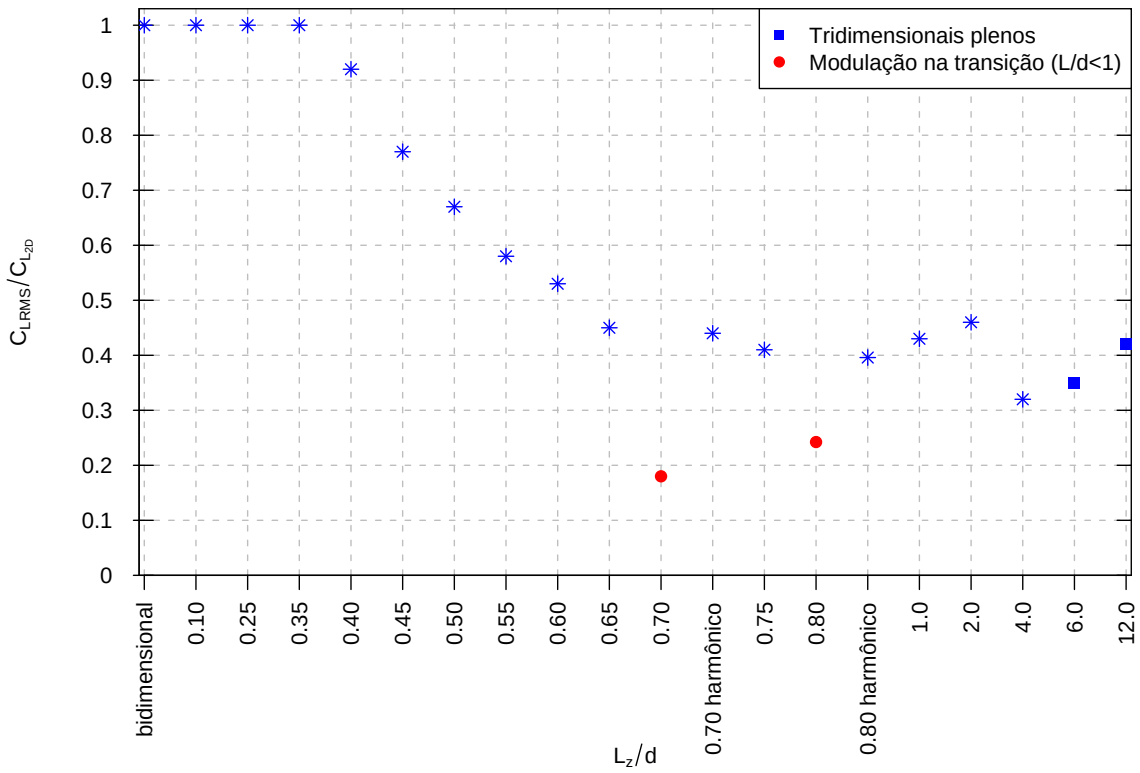


Figura 4.3: Razão entre $C_{L_{\mathrm{RMS}}}$ tridimensional e bidimensional em função do comprimento periódico simulado. ■ são resultados tridimensionais plenos; ● são resultados com modulação na transição ($L/d < 1$). O resultado bidimensional foi mostrado como $L/d = 0$.

de máximo desvio quando o $\varpi(t)$ definido na equação abaixo é máximo[3].

$$\varpi(t) = \frac{1}{L}\int_0^L (C_L(z,t) - C_{L_{\mathrm{spanmean}}}(t))^2 \,\mathrm{d}z \tag{4.1}$$

As Fig. 4.6(a)–4.6(h), 4.6(k), 4.6(l) e 4.6(n) apresentam um desvio do coeficiente de sustentação ao longo da envergadura muito pequeno. Todos estes casos se referem a soluções cujo coeficiente de sustentação é caracteristicamente harmônico. Os casos que têm características de escoamento tridimensional e apresentam um sinal de sustentação com forte modulação na amplitude apresentam desvios do coeficiente de sustentação ao longo da envergadura mais proeminentes e irregulares como mostram as Fig. 4.6(o)–4.6(s).

Temos duas exceções nesta descrição: os casos de amplitude modulados com os comprimentos periódicos $0.7d$ e $0.8d$, respectivamente as Fig. 4.6(j) e 4.6(m). Apesar do coeficiente de sustentação apresentar modulação de amplitude, o desvio do coeficiente de sustentação ao longo da envergadura não se parece com os casos tridimensionais e

[3] $\varpi(t)$ é a média quadrática na envergadura do coeficiente de sustentação em um instante t.

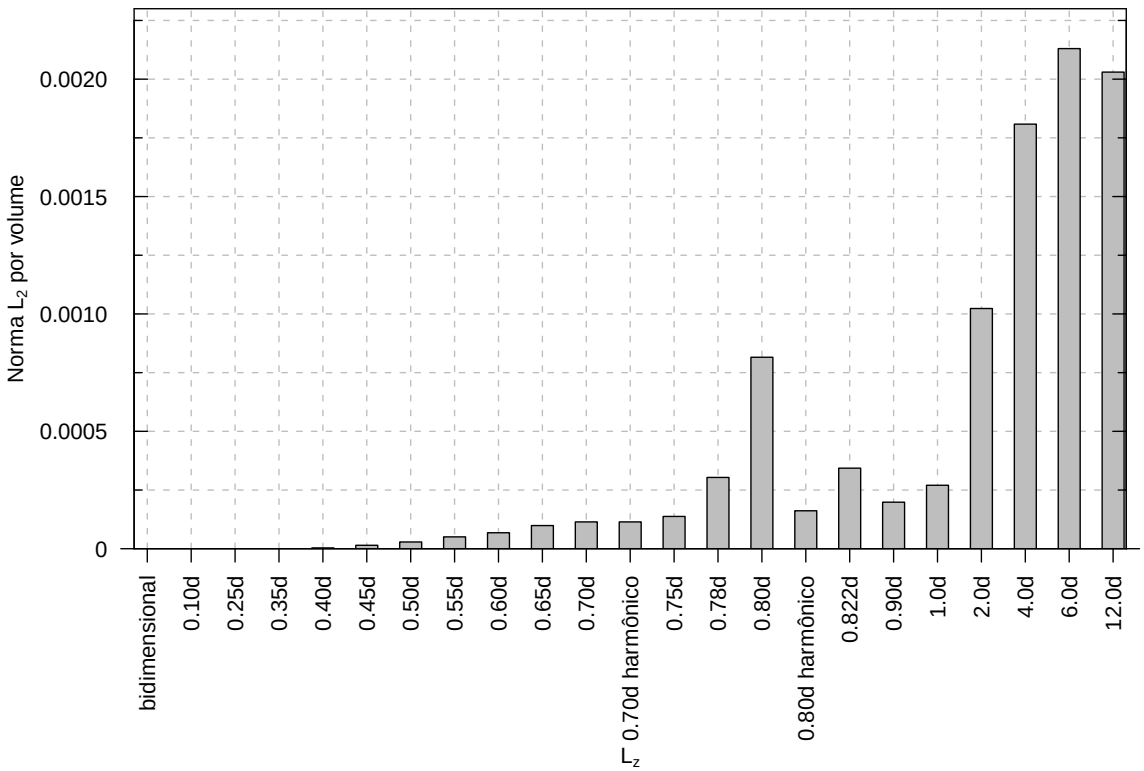


Figura 4.4: Norma $\mathbb{L}_2$ da parcela tridimensional do campo de velocidade ($\mathrm{E}_{3\mathrm{D}}$) em função do comprimento periódico simulado.

comprimento longos citados acima. O desvio aparenta um harmônico simples e mais intenso que os casos quase bidimensionais. Isso pode ser explicado pelo desprendimento de vórtice oblíquo: o tubo de vórtice não se desprende simultaneamente ao longo da envergadura e também não apresenta deformações além de ser oblíquo em relação ao cilindro causando a modulação de amplitude da sustentação ao longo do tempo.

Outro modo de se medir o efeito do tamanho do domínio computacional na direção da envergadura sobre o escoamento tridimensional é através da energia contida nas tridimensionalidades. Para tanto, devemos definir uma norma adequada. Aqui usaremos a norma $\mathbb{L}_2$ aproveitando a construção do problema discreto. Primeiro define-se a norma $\mathbb{L}_2$ por volume do domínio em um instante de tempo como:

$$\mathrm{E}_2(t) = \|\boldsymbol{u}\|_2 = \frac{1}{V}\int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\Omega$$

Lembrando que a discretização na direção z (na direção da envergadura do cilindro) é feita através de uma expansão de Fourier, a 1ª componente de Fourier fornece a parcela bidimensional. Então integra-se no volume somente a 1ª componente da discreti-

zação em z. Logo define-se a norma $\mathbb{L}_2$ da energia das componentes tridimensionais ($\mathrm{E}_{3\mathrm{D}}$) pela diferença abaixo

$$\mathrm{E}_{\text{componentes 3D}}(t) = \mathrm{E}_2(t) - \mathrm{E}_{\text{1a componente Fourier}}(t),$$

que é variável no tempo. Tomamos então, para a análise, o máximo desta energia no intervalo simulado

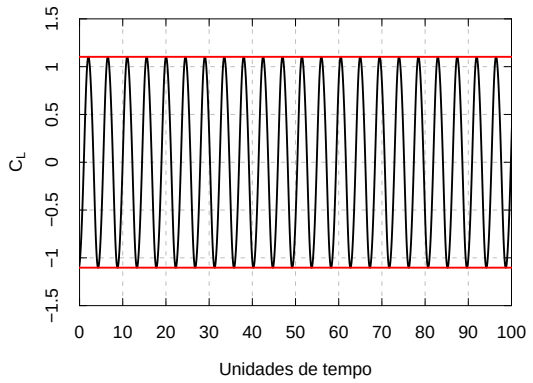
$$\mathrm{E}_{3\mathrm{D}} = \max\left(\mathrm{E}_{\text{componentes 3D}}(t)\right).$$

O pico de energia da parcela associado às tridimensionalidades, $\mathrm{E}_{3\mathrm{D}}$, é apresentado na Fig. 4.4 para os diferentes tamanhos em z do domínio computacional.

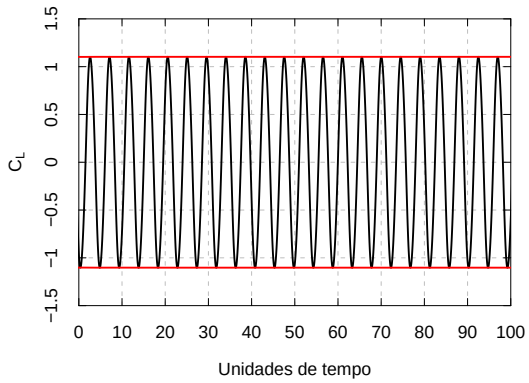
Primeira constatação a se fazer, baseando-se na Fig. 4.4 é que para tamanho de domínio L_z até $0.7d$, o escoamento é praticamente bidimensional. A energia contida nas componentes tridimensionais do escoamento é muito baixa.

Outro ponto interessante é no caso bi-caótico com $L_z = 0.8d$. A solução harmônica não contém componentes tridimensionais com energia considerável enquanto a solução modulada apresenta muito mais energia. Isto é refletido na distribuição de coeficiente de sustentação ao longo da envergadura mostrado nas Fig. 4.6(m) e 4.6(n). A solução modulada apresenta forte variação do C_L ao longo da envergadura (Fig. 4.6(m)) em relação à solução harmônica apresentada na Fig. 4.6(n). Este patamar elevado de energia nas tridimensionalidades é associado diretamente ao modo B da esteira do cilindro. Em um Reynolds acima de 280, o modo B, que tem um comprimento característico de aproximadamente $0.8d$, tem maior taxa de crescimento e prepondera na esteira (BARKLEY; HENDERSON, 1996; BLACKBURN; LOPEZ, 2003) e este caso tem o comprimento periódico mais próximo deste modo, realçando-o.

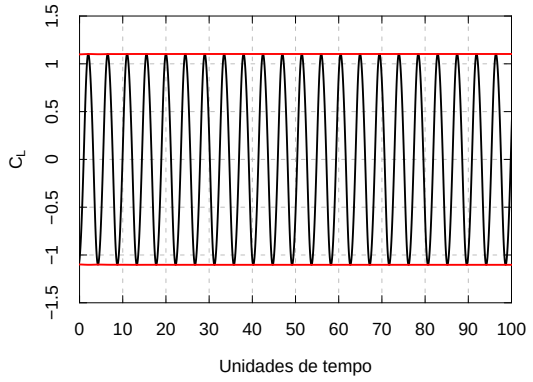
Os casos que podem ser considerados tridimensionais plenos (destacados por ■ na Fig. 4.3) apresentam um nível de energia bem elevado: na Fig. 4.4 são os casos $L_z = 6.0d$ e $L_z = 12.0d$. Este nível de energia é a referência neste trabalho para escoamento tridimensional bem resolvido em número de Reynolds 400.



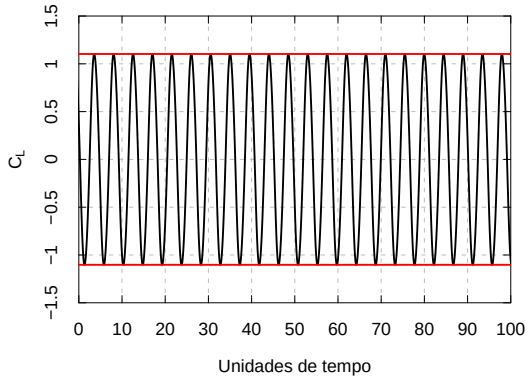
(a) Bidimensional, Re = 400.



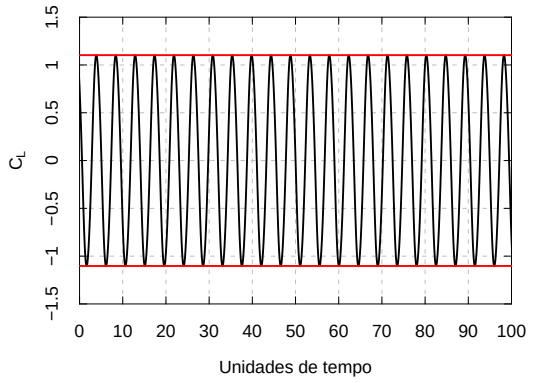
(b) $L_z = 0.1d$, Re = 400.



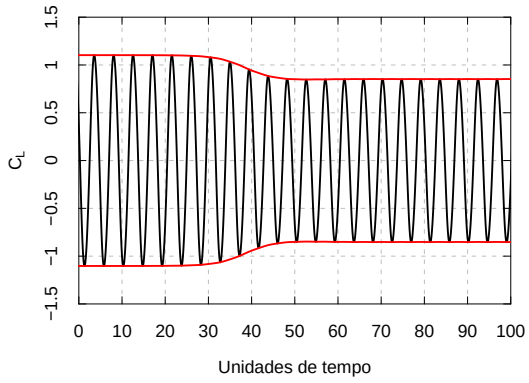
(c) $L_z = 0.25d$, Re = 400.



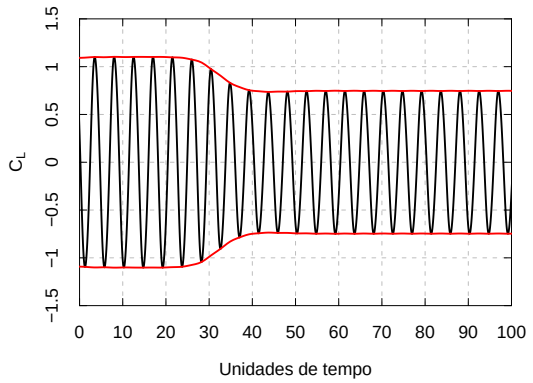
(d) $L_z = 0.35d$, Re = 400.



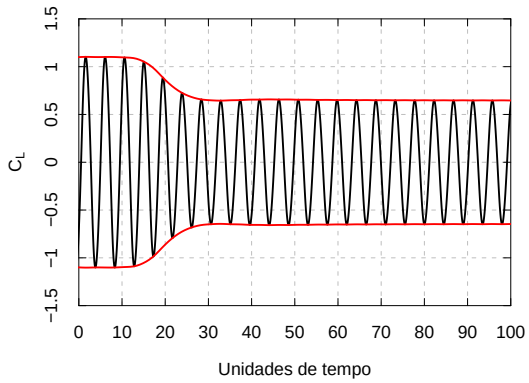
(e) $L_z = 0.4d$, Re = 400.



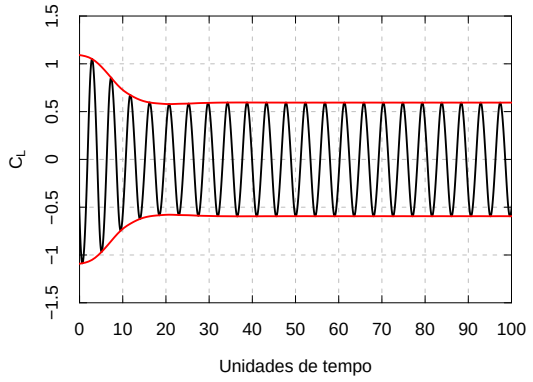
(f) $L_z = 0.45d$, Re = 400.



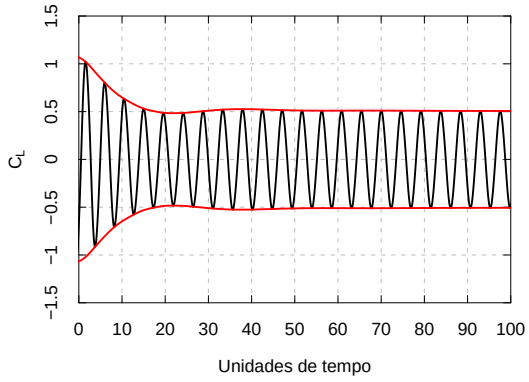
(g) $L_z = 0.5d$, Re $= 400$.



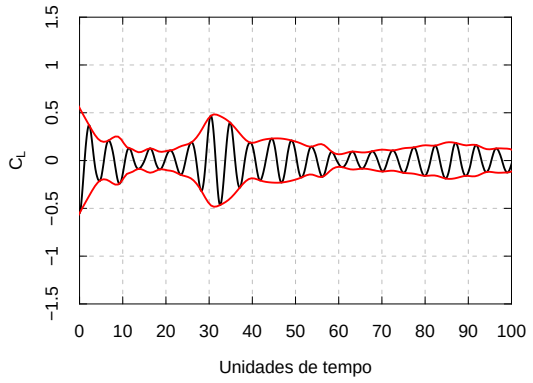
(h) $L_z = 0.55d$, Re $= 400$.



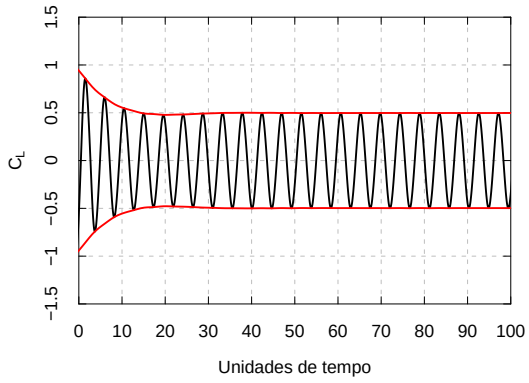
(i) $L_z = 0.6d$, Re $= 400$.



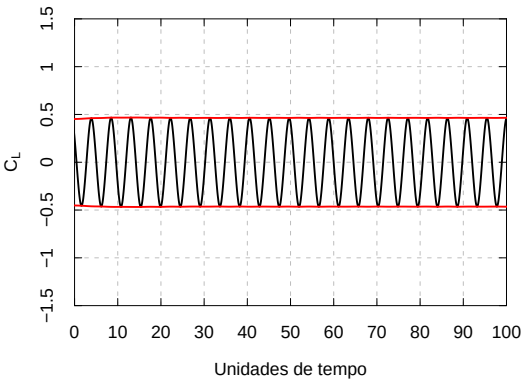
(j) $L_z = 0.65d$, Re $= 400$.



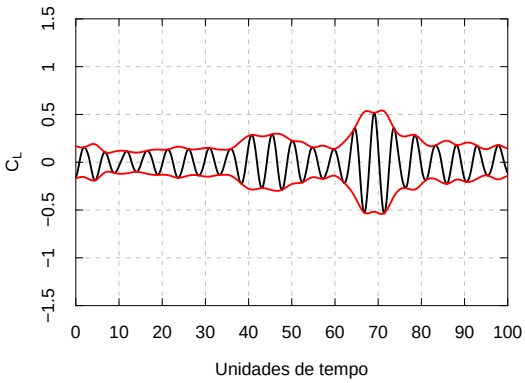
(k) $L_z = 0.70d$ modulado, Re $= 400$.



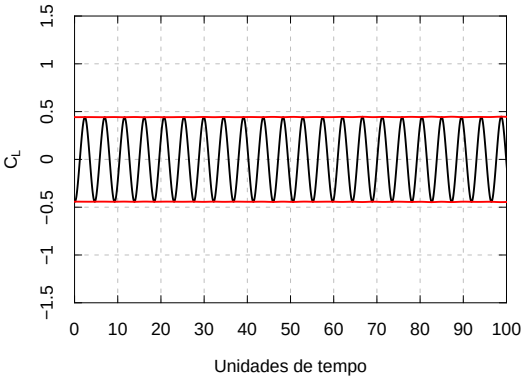
(l) $L_z = 0.70d$ harmônico, Re $= 400$.



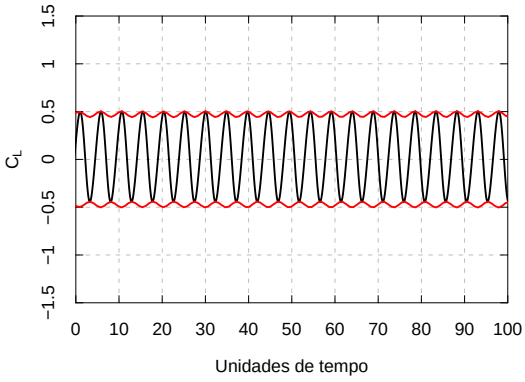
(m) $L_z = 0.75d$, Re $= 400$.



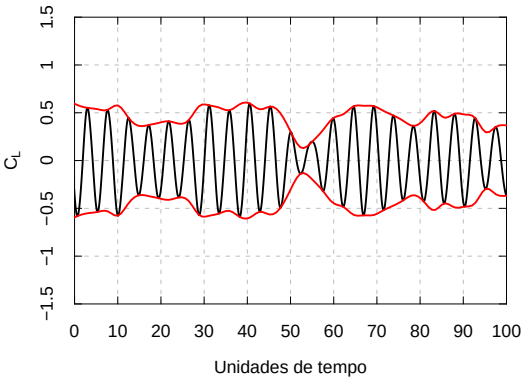
(n) $L_z = 0.80d$ modulado, Re $= 400$.



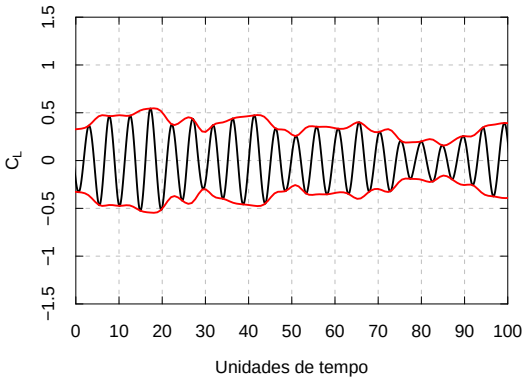
(o) $L_z = 0.80d$ harmônico, Re $= 400$.



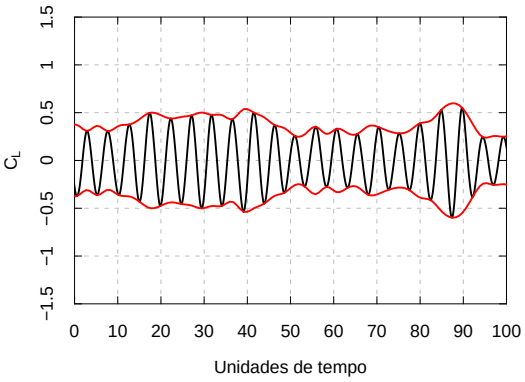
(p) $L_z = 1.0d$, Re $= 400$.



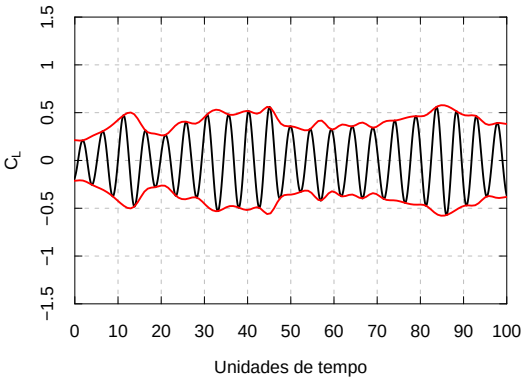
(q) $L_z = 2.0d$, Re $= 400$.



(r) $L_z = 4.0d$, Re $= 400$.

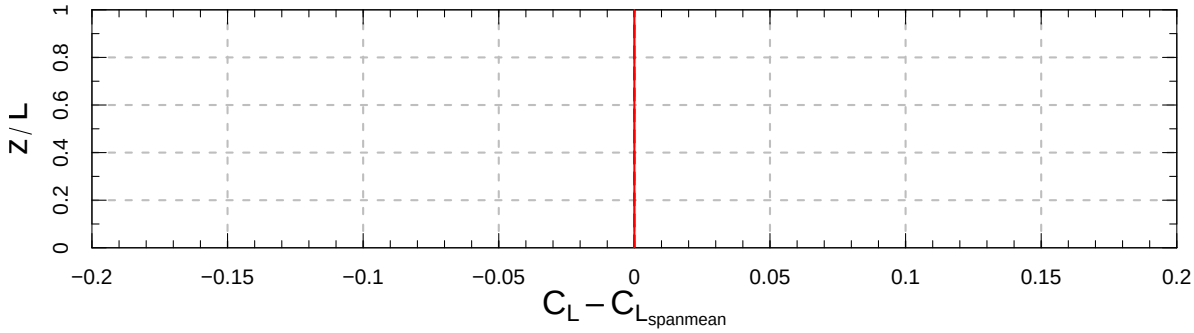


(s) $L_z = 6.0d$, Re $= 400$.

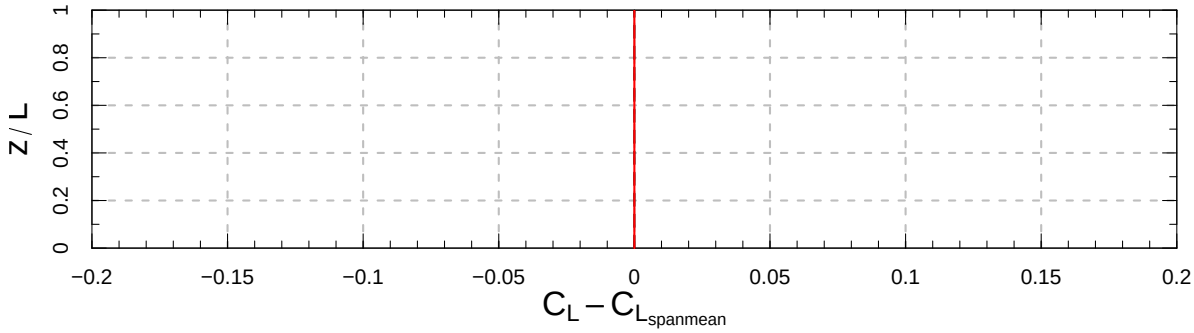


(t) $L_z = 12.0d$, Re $= 400$.

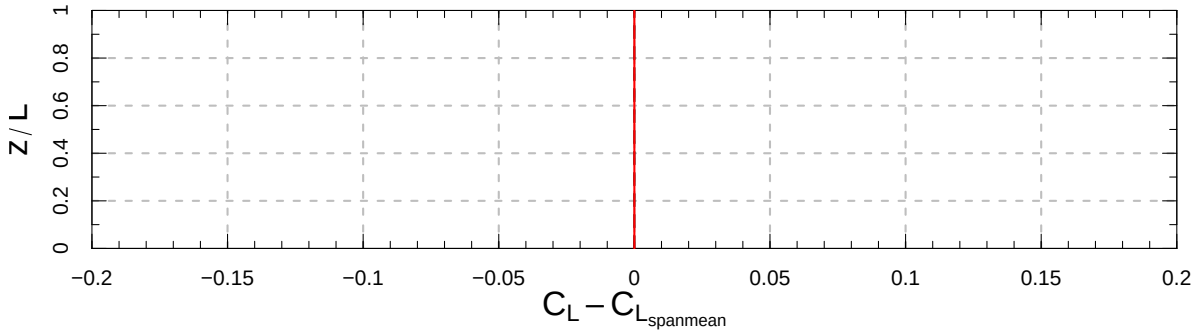
Figura 4.5: C_L (preto) e seu envelope de amplitude (vermelho) instantâneos nos 100 unidades de tempo adimensional finais de cada simulação em número de Reynolds 400.



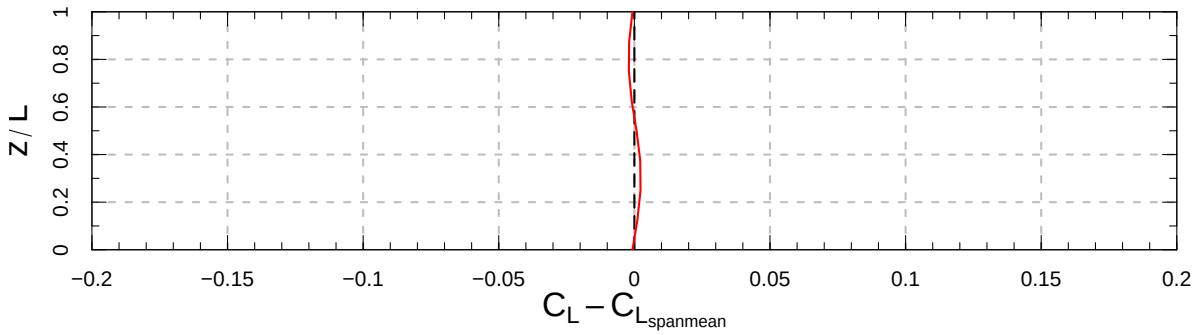
(a) $L_z = 0.10d$, Re = 400.



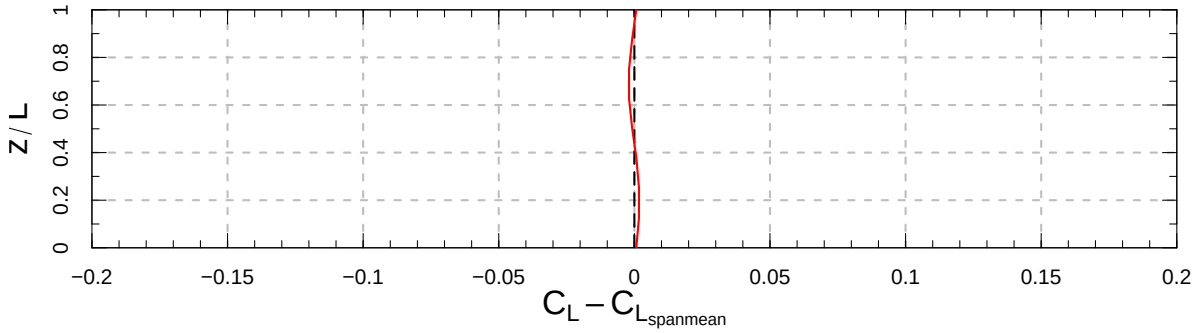
(b) $L_z = 0.25d$, Re = 400.



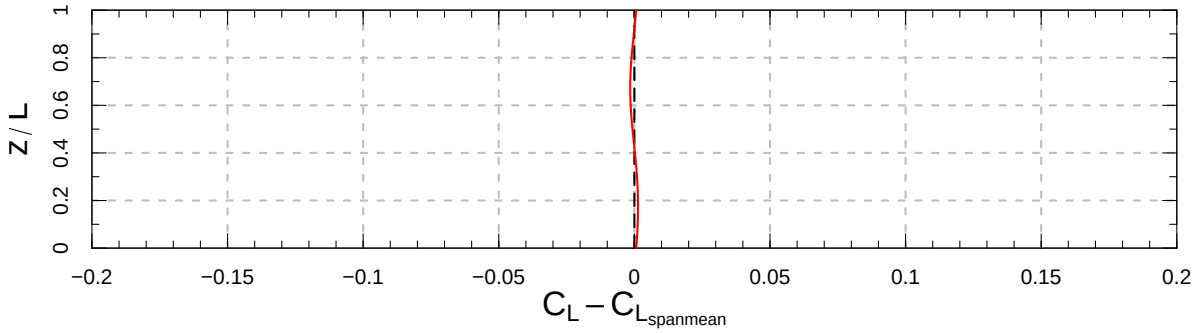
(c) $L_z = 0.35d$, Re = 400.



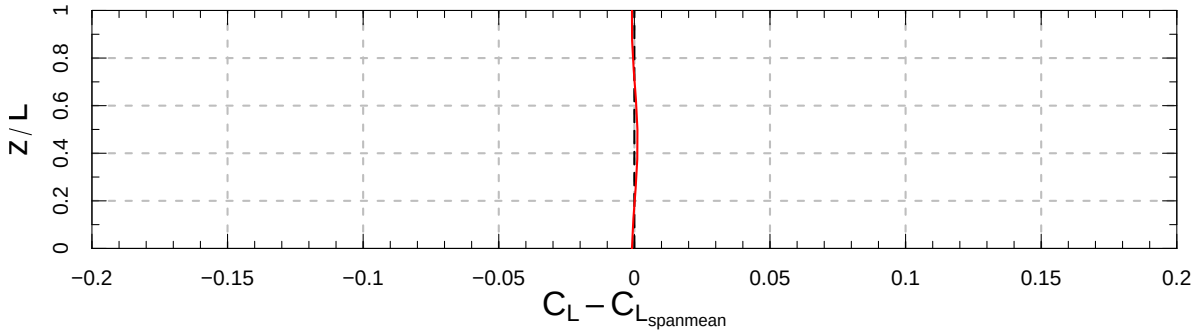
(d) $L_z = 0.40d$, Re = 400.



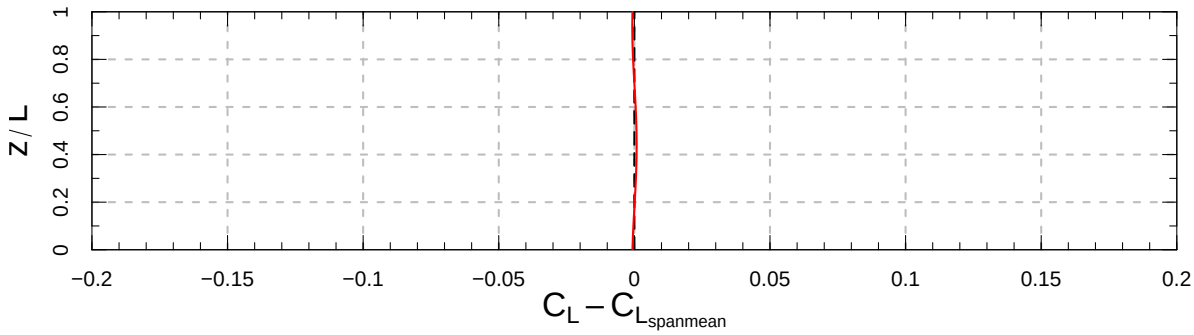
(e) $L_z = 0.45d$, Re = 400.



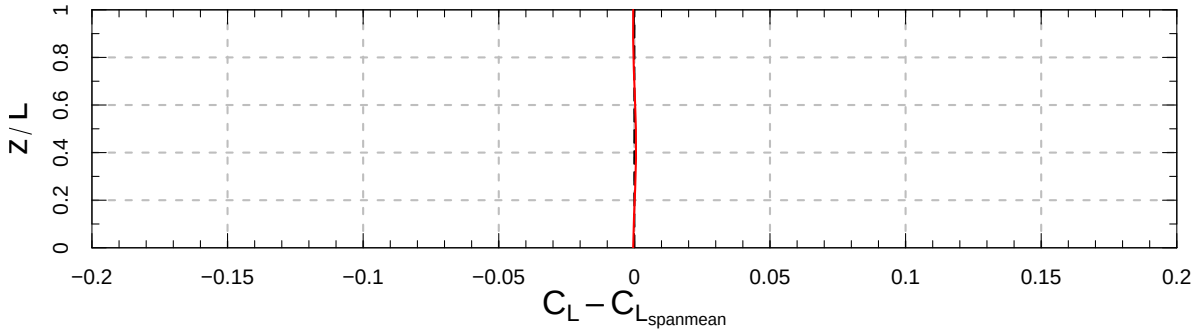
(f) $L_z = 0.50d$, Re = 400.



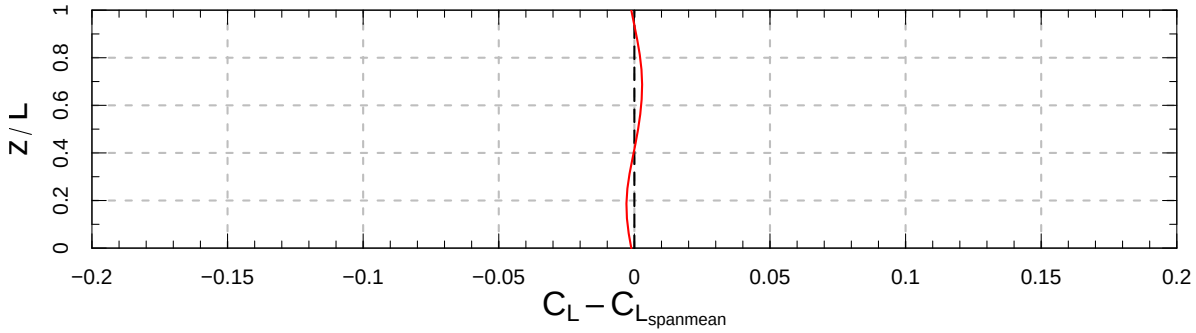
(g) $L_z = 0.55d$, Re = 400.



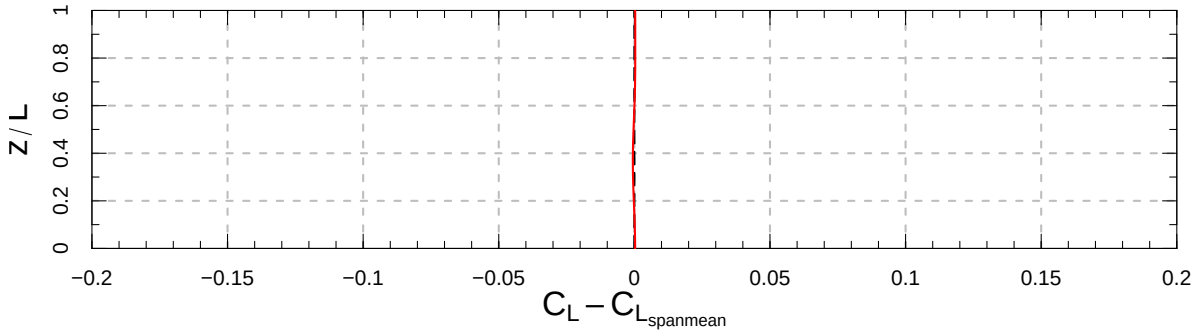
(h) $L_z = 0.60d$, Re = 400.



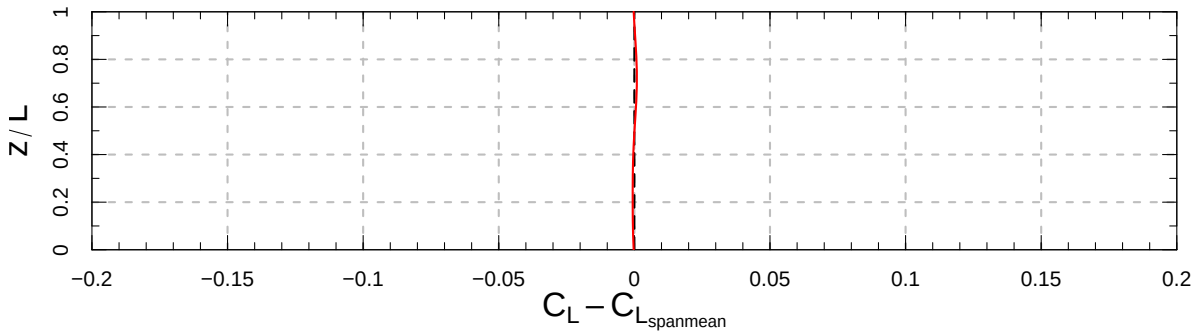
(i) $L_z = 0.65d$, Re = 400.



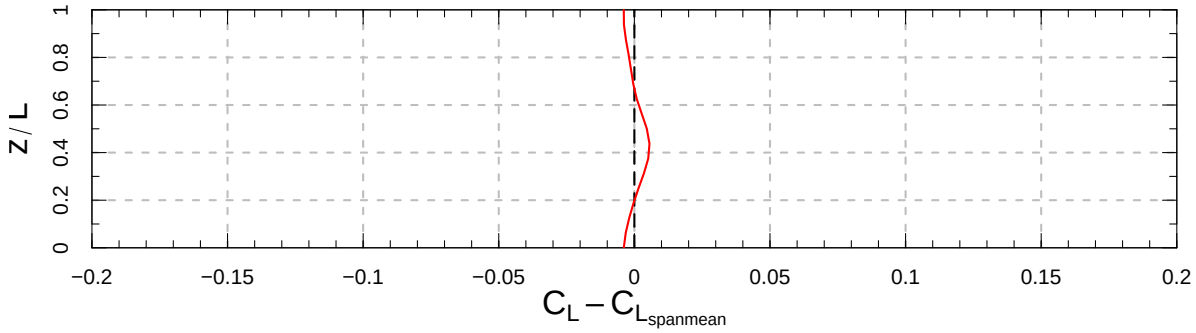
(j) $L_z = 0.70d$ modulado, Re = 400.



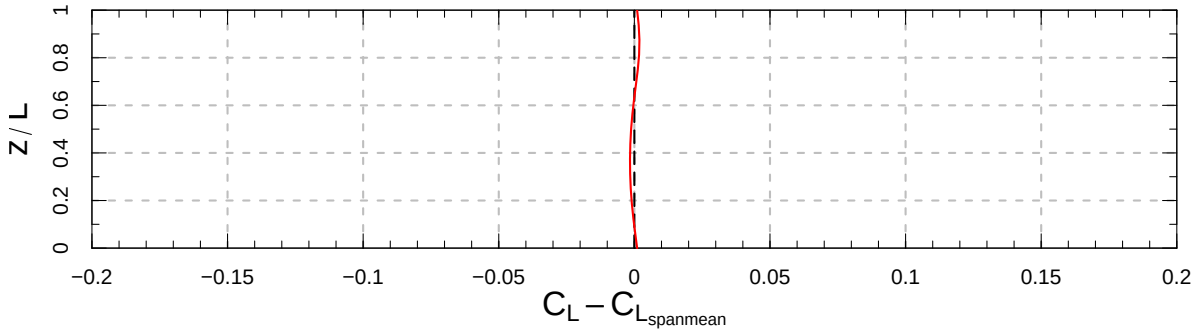
(k) $L_z = 0.70d$ harmônico, Re = 400.



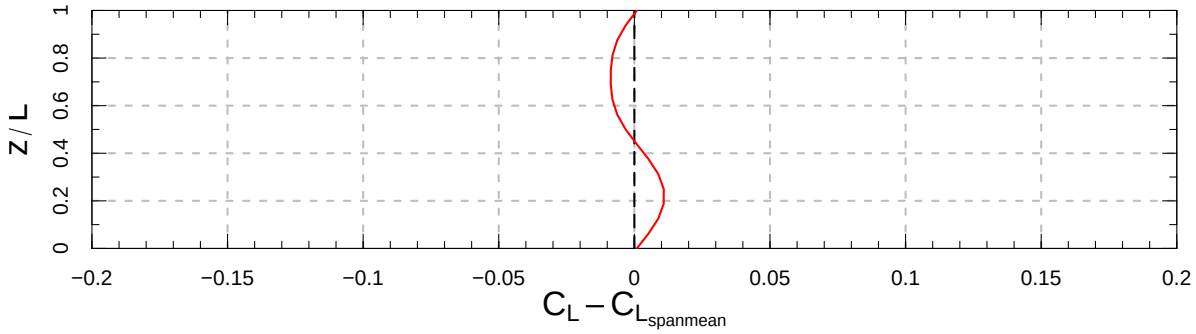
(l) $L_z = 0.75d$, Re = 400.



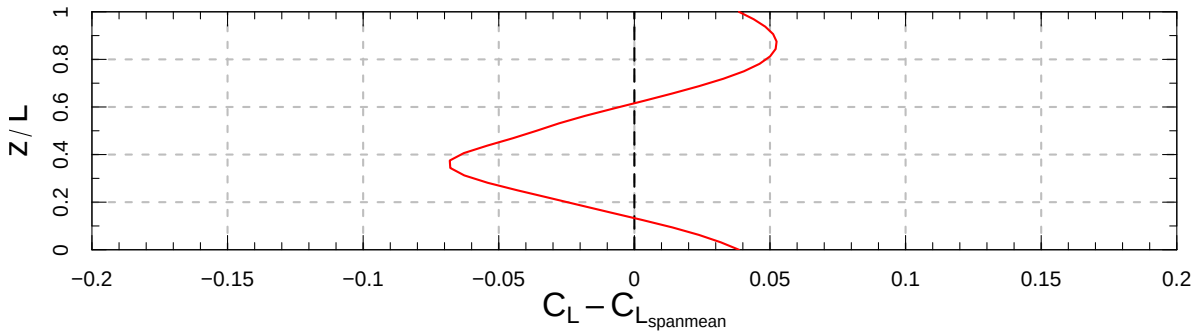
(m) $L_z = 0.80d$ modulado, Re = 400.



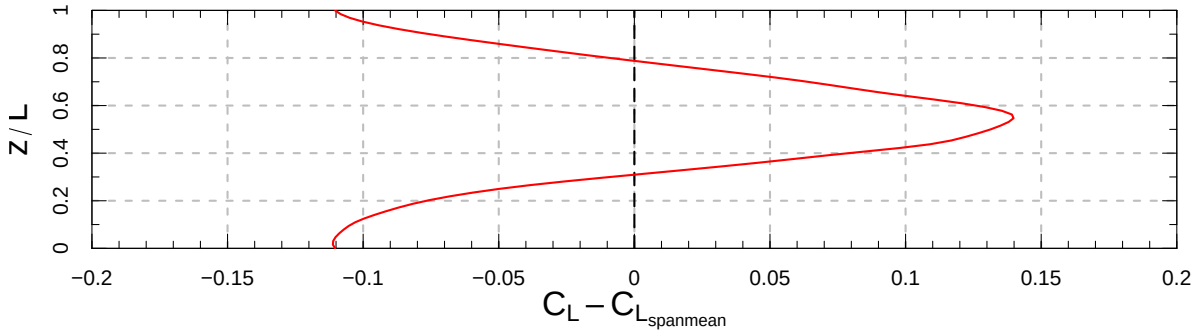
(n) $L_z = 0.80d$ harmônico, Re = 400.



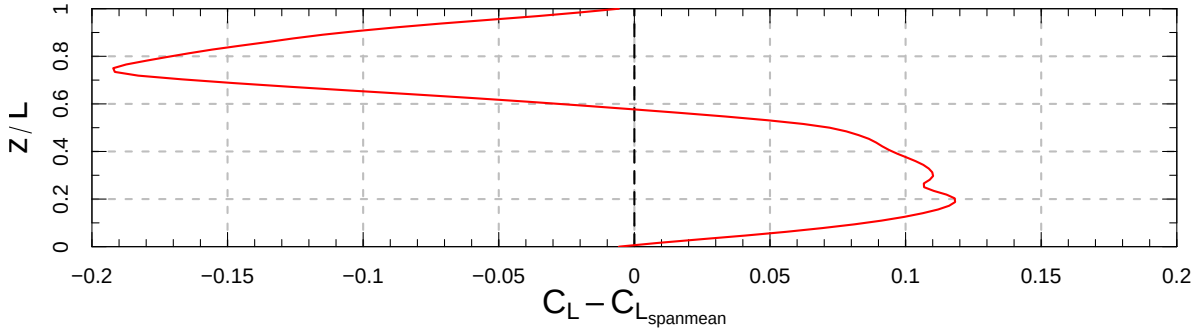
(o) $L_z = 1.0d$, Re = 400.



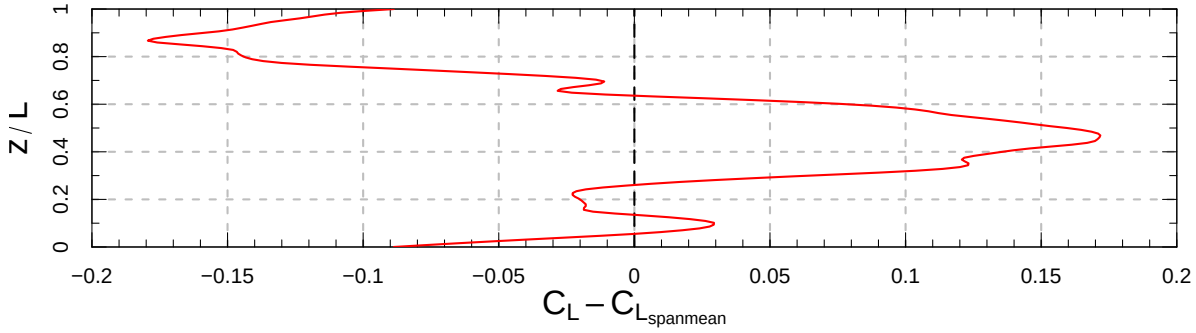
(p) $L_z = 2.0d$, Re = 400.



(q) $L_z = 4.0d$, Re = 400.



(r) $L_z = 6.0d$, Re = 400.



(s) $L_z = 12.0d$, Re = 400.

Figura 4.6: Resultados, para número de Reynolds 400, de $C'_L(z/L, t_{\varpi_{\max}})$ no instante quando ϖ é máximo ao longo da envergadura. Eixo horizontal (desvio) de -0.2 a 0.2 e vertical normalizado pelo comprimento periódico ($0 \leqslant z/L \leqslant 1$).

4.2 Simulações numéricas diretas tridimensionais

O conjunto inicial de simulações numéricas visou, com o método de elementos espectrais (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005), formar uma base de comparação para as simulações posteriores. Os parâmetros de simulação seguem as orientações dadas pela análise de convergência (ver §3.1).

Todas as simulações tridimensionais apresentadas nesta seção têm 12 diâmetros de comprimento periódico na direção da envergadura do cilindro z e a discretização ao longo da envergadura é feita com componentes de Fourier seguindo os critérios da análise de convergência na seção 3.1 e com número de componentes da ordem de $L/d \times \sqrt{\mathrm{Re}}$ (HENDERSON, 1997) para resolver as menores escalas. A condição inicial de todas simulações é escoamento unitário, ou seja, o escoamento começa impulsivamente, e ruido branco foi usado para deflagrar as tridimensionalidades.

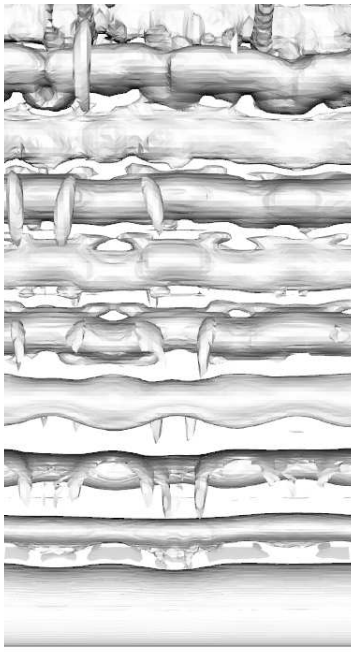
Esta seção apresenta os resultados das simulações numéricas diretas (DNS) avaliando as estruturas vorticais na esteira, identificadas pelo critério λ_2 proposto por Jeong e Hussain (1995) (ver §2.4). Outro critério de identificação de vórtices, o critério Q de Hunt, Wray e Moin (1988) (ver §2.4), foi cogitado. Este não apresenta diferenças significativas na identificação de vórtices em escoamentos tridimensionais em relação ao critério λ_2. Ademais o critério Q é equivalente ao λ_2 em escoamentos bidimensionais como mostrado na seção 2.4.

A fim de comparar as diferenças nas tridimensionalidades da esteira, também é apresentado contorno de grandezas em fatias do escoamento.

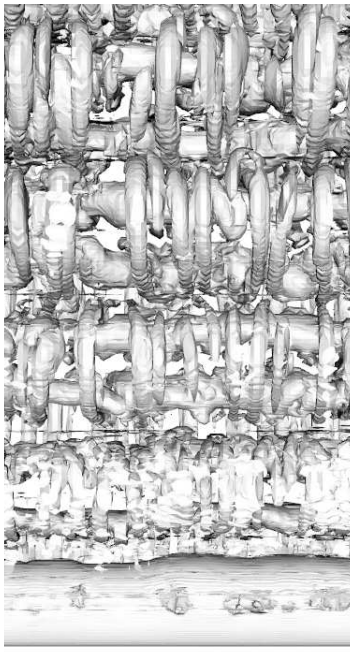
4.2.1 Cilindro fixo

Inicialmente, simularam-se escoamentos ao redor de um cilindro fixo já que é um escoamento bem estudado e paradigma para qualquer escoamento ao redor de um cilindro. Estes resultados servem como comparação consistente para os demais casos com oscilação do cilindro.

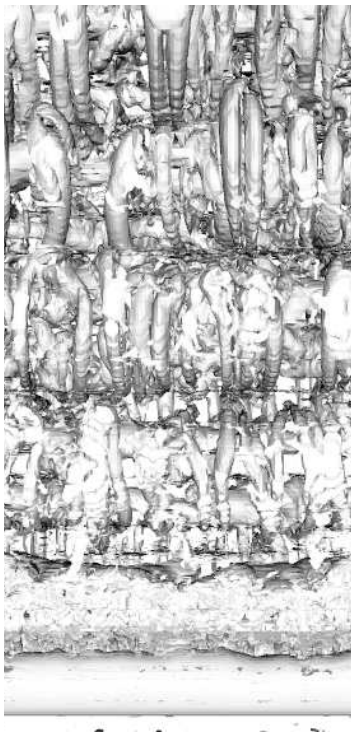
As estruturas vorticais do escoamento ao redor de um cilindro fixo estão apresentadas na Fig. 4.7. Na Fig. 4.7(a), os tubos de vórtices desprendidos do cilindro apresenta ondulações com comprimento de onde característico do modo A: aproximadamente $4d$ conforme a análise de estabilidade de Floquet na seção 4.3 e de Barkley e Henderson (1996). São aproximadamente 3 ondulações ao longo o comprimento periódico do cilindro



(a) Re = 200.



(b) Re = 300.



(c) Re = 400.

(d) Re = 500.

Figura 4.7: Estrutura vortical segundo o critério λ_2 de Jeong e Hussain (1995) do escoamento ao redor de um cilindro fixo. Vista ortogonal ao plano xy e escoamento de baixo para cima.

simulado de $12d$ conforme apresentado na Fig. 4.7(a).

Para o número de Reynolds 300, os modos A e B são instáveis com comprimentos de onda característicos de aproximadamente $4d$ e $0.8d$ respectivamente, segundo análise de estabilidade de Floquet (seção 4.3 e Barkley e Henderson (1996)). Ainda é possível notar vagamente estes modos na Fig. 4.7(b). Ao aumentar o número de Reynolds, Fig. 4.7(c) e 4.7(d), estruturas menores são observadas e os modos da análise de estabilidade linear já não são facilmente identificados. Outro modo que é difícil ser identificado em Reynolds 400 e 500 é o modo QP (instável em Reynolds aproximadamente 377 de Blackburn e Lopez (2003)), mas devido à presença da escalas menores e a sua característica de modulação das tridimensionalidades.

Estes escoamentos ao redor de um cilindro fixo são usados como base de comparação para os escoamentos ao redor de um cilindro oscilando. Mostra-se que as características da esteira de um cilindro oscilando mudam consideravelmente como pode ser visto na seção 5.2 através de simulações numéricas diretas usando método dos elementos espectrais e através de análise de estabilidade linear de Floquet na seção 5.4.

4.3 Análise de Floquet do cilindro fixo

Esta análise para o cilindro fixo foi realizada a fim de se criar uma base de comparação. A estabilidade da esteira de von Kármán de um cilindro fixo é um caso referencial por já ser bem estudado experimentalmente, por exemplo por Williamson (1988b), e numericamente, por exemplo o primeiro trabalho aplicando a teoria de Floquet em uma esteira de um cilindro de Barkley e Henderson (1996) e com outra abordagem por Persillon e Braza (1998). O método usado na análise de estabilidade é o método de Floquet segue os moldes de Barkley e Henderson (1996) e Carmo et al. (2008), e uma breve introdução foi feita na seção 2.3 enquanto uma descrição mais detalhada está no apêndice B.

Os campos base sobre os quais a estabilidade é estudada foram simulados em domínio bidimensional usando o método do elemento espectrais. Esperou-se um longo tempo para que a esteira se desenvolve-se plenamente e o período do campo base foi identificado através de FFT da série temporal do coeficiente de sustentação. Os parâmetros usados nas simulações e nas análises seguiram as diretrizes propostas na análise de convergência da seção 3.1.

A Fig. 4.8 apresenta o módulo dos multiplicadores de Floquet em função do número de onda. Deste gráfico pode-se identificar comprimentos de ondas instáveis e

inferir os números de Reynolds críticos, sendo então uma boa forma de compilação de dados da análise.

Observando a Fig. 4.8, primeiro deve-se notar que as curvas para número de Reynolds menor ou igual a 185 estão inteiramente abaixo da linha de estabilidade neutra (quando o multiplicador de Floquet $|\mu| = 1$). Isso significa que estes casos são absolutamente estáveis para qualquer perturbação tridimensional. Este resultado é condizente com a literatura; ver Barkley e Henderson (1996) por exemplo que estima o número de Reynolds crítico para a transição secundária da esteira de von Kármán em 188.

Aumentando o número de Reynolds, nota-se que as curvas de Reynolds 190 a 250 na Fig. 4.8 cruzam a linha de estabilidade neutra em apenas uma região com $\beta < 2.5$. Estas curvas têm um pico em um número de onda β aproximadamente 1.6, que equivale a um comprimento de onda $\lambda_A \approx 3.9d$. Estes valores também estão de acordo com Barkley e Henderson (1996). Esta primeira instabilidade que surge é o modo A caracterizado pelo seu comprimento de onda $\lambda_A \approx 3.9d$ e sua simetria espaço-temporal semelhante à da esteira de von Kármán representada pela equação abaixo:

$$\text{Modo A: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = -\tilde{\omega}_x(x, -y, z, t + T/2) \right.$$

A partir do número de Reynolds 260 um segundo modo torna-se instável como mostra a Fig. 4.8; este é o modo B (pico da direita no gráfico). De fato, Barkley e Henderson (1996) estimam seu Reynolds crítico em 259 explicando o porquê do pico da curva de Re = 260 em $\beta = 8$ estar tão próximo de 1. Caracterizando este modo, o modo B tem a simetria espaço-temporal diferente do modo A. Sua simetria está apresentada na equação abaixo. O modo B tem um comprimento de onda típico em escoamento ao redor de um cilindro de aproximadamente $0.8d$.

$$\text{Modo B: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = \tilde{\omega}_x(x, -y, z, t + T/2) \right.$$

Um mapa de estabilidade, como a Fig. 4.9, resume estes dados em regiões estável/instável e mostra mais claramente o número de Reynolds crítico (ponta mais esquerda de cada curva hachurada). Este mapa apresenta o espaço de comprimento de onda da instabilidade pelo número de Reynolds. Na forma aqui apresentada, a linha representa a estabilidade neutra (multiplicador de Floquet com módulo unitário) e a área hachurada é onde o módulo do multiplicador de Floquet é maior que 1.

O mapa resultante é comparável ao de Barkley e Henderson (1996). Ele está

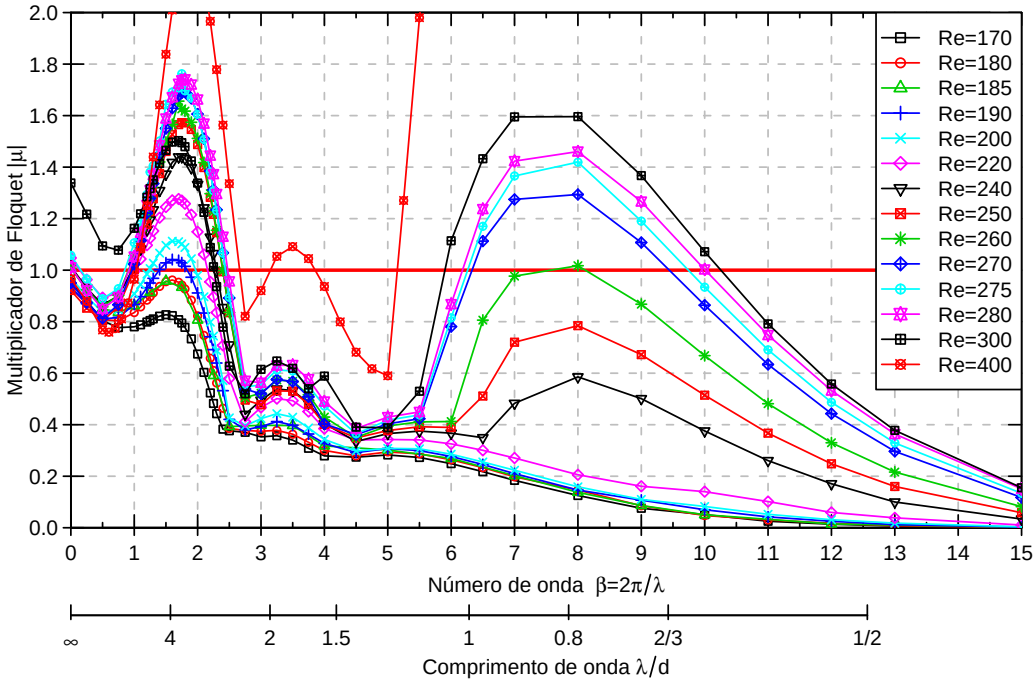


Figura 4.8: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para escoamento do cilindro fixo. Ambos picos representa multiplicadores reais puros: o da esquerda é associado ao modo A e o da direita ao modo B.

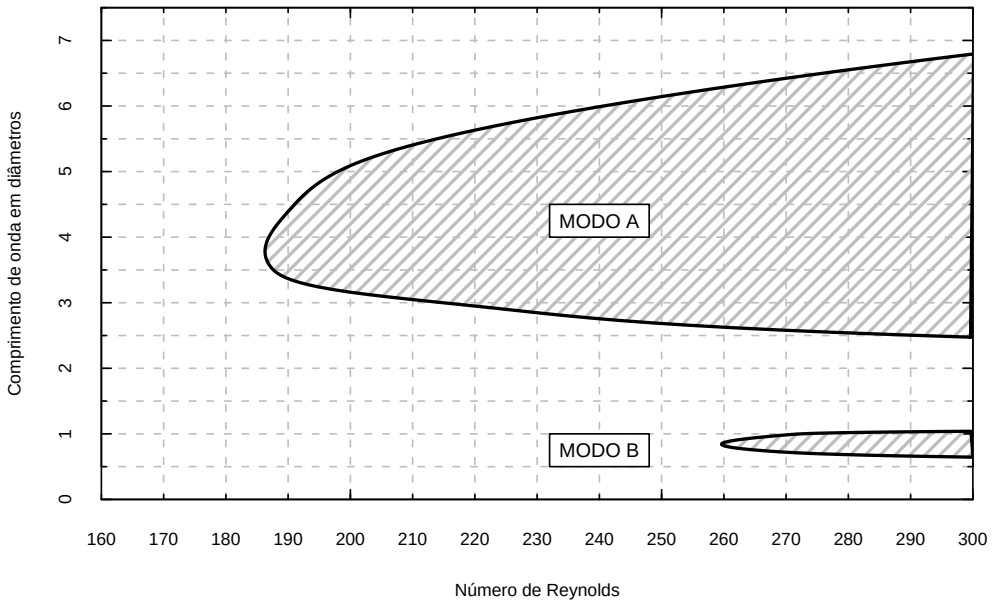


Figura 4.9: Mapa de estabilidade para escoamento em torno de cilindro fixo resultante da análise de estabilidade. A região hachurada mostra que o conjunto de parâmetros ali resulta em um sistema instável. A região superior é associada ao modo A e a inferior ao modo B.

apresentado na Fig. 4.9. Esta figura é uma chave para a comparação posterior (§5.4) aos casos de oscilação forçada, onde mostra-se que a oscilação altera a transição secundária da esteira e que o modo mais afetado é o modo A. Desta figura podemos identificar o Reynolds crítico do modo A por volta de 185, com comprimento de instabilidade de aproximadamente $3.8d$, quanto o modo B tem Reynolds crítico próximo de 260 e comprimento por volta de $0.8d$.

Embora tal mapa forneça informações importantes ele pode ser mal interpretado: ele representa apenas os resultados da estabilidade linear. De fato, o modo B é uma bifurcação de um estado bidimensional já instável: o escoamento bidimensional já é instável para o modo A. O ramo tridimensional que bifurca deste escoamento bidimensional herda esta instabilidade. Logo qualquer bifurcação para este número de Reynolds acima do crítico do modo B não alcançará um estado de equilíbrio com o modo B puro, mesmo que ele seja o dominante.

Ainda que o panorama e a Fig. 4.9 apresentem uma aparente coexistência dos modos, no sistema fluido completo não-linear e não-modal, representado pelas equações de Navier-Stokes e da continuidade, não há necessariamente a coexistência deles com as mesmas características que a análise de estabilidade resulta.

Para cilindro fixo, segundo Blackburn, Marques e Lopez (2005), ainda se tem um terceiro modo instável, identificado como modo QP (quasi-periódico) a um número de Reynolds acima da escala mostrada na Fig. 4.9. Segundo Blackburn, Marques e Lopez, três modos instáveis são possíveis para a esteira de von Kármán: modo A, modo B e modo QP. Os números de Reynolds críticos são apresentados na Tab. 4.2.

Tabela 4.2: Números de Reynolds críticos dos modos instáveis do escoamento ao redor de um cilindro fixo isolado.

Modo	Reynolds crítico	Comprimento	Referência
Modo A	188	$3.96d$	Barkley e Henderson (1996)
Modo B	259	$0.822d$	Barkley e Henderson (1996)
Modo QP	377	$1.8d$	Blackburn, Marques e Lopez (2005)

O modo quasi-periódico foi obtido pelo mesmo método e é mostrado aqui para Reynolds 400. A Fig. 4.10 apresenta a curva de módulo do multiplicar de Floquet $|\mu|$ pelo número de onda $\beta = 2\pi/\lambda$. Esta curva tem 3 picos instáveis: o do modo A com o $\beta \sim 8$, o do modo B $\beta \sim 1.8$ e o do modo quasi-periódico (BLACKBURN; LOPEZ, 2003) com o $\beta \sim 3.5$ (cujo comprimento de onda é aproximadamente $1.8d$). Nota-se que a taxa de

crescimento do modo B fica além da escala do gráfico por estar distante de seu Reynolds crítico.

O modo quasi-periódico não tem um período típico associado com o campo base: não tem o período do campo base nem seus sub- ou super-harmônicos. A Fig. 4.11 apresenta graficamente a simetria do modo quasi-periódico representada pela vorticidade em x (ao mesmo molde da revisão bibliográfica §2.1). Notar que a vorticidade na região $y = -1.2$ vai mudando ao longo do período indicando que a freqüência do modo QP não apresenta relação harmônica com a freqüência do campo base, ou seja, através do multiplicador complexo este modo insere um freqüência não-harmônica na esteira.

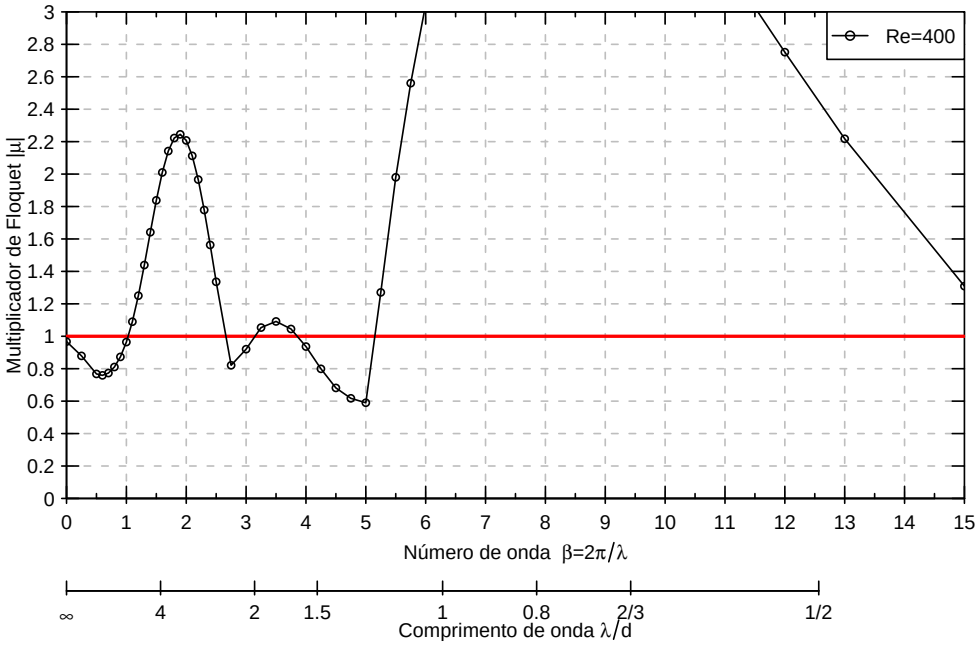
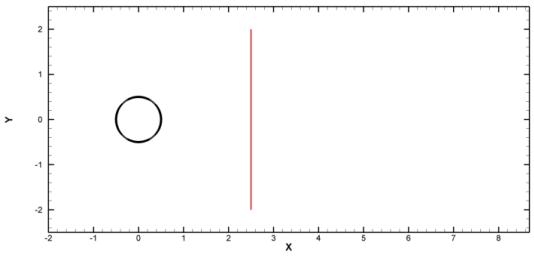
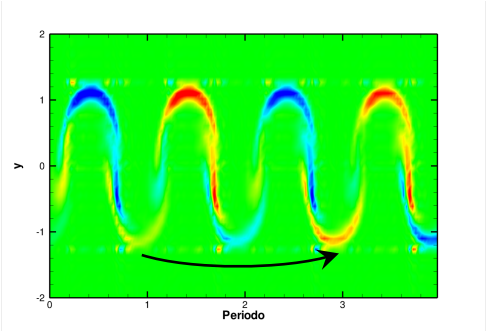


Figura 4.10: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para escoamento do cilindro fixo em número de Reynolds 400. O pico do modo quasi-periódico é para $\beta = 3.5$.



(a) Linha de registro da série temporal.



(b) Modo quasi-periódico.

Figura 4.11: Simetria do modo quasi-periódico representada pelo contorno de vorticidade em x (ω_x) ao longo do período de desprendimento de vórtices do campo base. Notar que a intensidade de vorticidade na região $y = -1.2$ vai mudando ao longo do período (acompanhar a seta indicativa) indicando que a freqüência do modo QP não apresenta relação harmônica com a freqüência do campo base.

5 ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO EM OSCILAÇÃO FORÇADA

Aqui trata-se dos resultados referentes ao escoamento ao redor de um cilindro em oscilação transversal forçada. Este capítulo está dividido em quatro seções principais. Inicialmente, a seção 5.1 discorre sobre a fronteira de sincronização da esteira com o movimento do cilindro. Este assunto é importante pois justifica a escolha da freqüência de oscilação nas investigações posteriores. Em seguida, simulações numéricas diretas tridimensionais são apresentadas na seção 5.2, onde começa-se a apresentar aspectos da esteira tridimensional para comparação com a análise de estabilidade. A seção 5.3 trata da avaliação de uma faixa de amplitudes de oscilação do cilindro para a qual a esteira não apresenta crescimento de tridimensionalidades. Isto foi observado nas simulações numéricas diretas da seção anterior e é investigada nesta seção via análise de estabilidade. Finalmente, a análise de estabilidade de Floquet é aplicada para estudo da esteira de um cilindro oscilando na seção 5.4. Este seção investigada as tridimensionaldides da esteira de um cilindro oscilando em amplitudes típicas observadas em vibrações induzidas por vórtices (VIV).

5.1 Fronteira de sincronização da esteira

Como esta tese se concentra nos efeitos da amplitude de oscilação do cilindro sobre a esteira, é necessário definir uma freqüência de oscilação para o cilindro. O critério de escolha da freqüência de oscilação não deve ter influência sobre os resultados e tem que ser tal que a freqüência não seja um parâmetro na análise da transição secundária da esteira de um cilindro.

Uma primeira restrição na escolha da freqüência de oscilação é que, com esta freqüência, a esteira do escoamento esteja sincronizada com o movimento do cilindro. Esta seção da tese visa levantar esta fronteira de sincronização primária[1] a fim de escolher

[1]Define-se sincronização primária quando a razão entre a freqüência de oscilação e a freqüência da esteira sob influência da oscilação é 1, e não algum harmônico, por exemplo 1/2. Ver Fig. 5.1.

uma freqüência de oscilação adequada à investigação.

Para complementar, um outro critério assumido nesta tese para a análise da transição secundária da esteira é que a razão entre a freqüência de oscilação e a freqüência de desprendimento de vórtices para um cilindro fixo seja constante. Esta escolha tem o intuito de eliminar o efeito do número de Reynolds na variação da freqüência natural da esteira (ver Fig. 2.5(a) que mostra a variação do número de Strouhal em função do número de Reynolds).

Com isto em mente, esta seção apresenta a investigação da fronteira de sincronização para 2 números de Reynolds, a fim de medir a influência do Reynolds na fronteira: números de Reynolds 200 e 300. As amplitude de oscilação investigadas estão na faixa entre $0.02d$ a $0.6d$ a a faixa de freqüência de oscilação de $0.5_{f_{\mathrm{St}}}$ a $1.0_{f_{\mathrm{St}}}$. A Tab. 5.1 sumaria os parâmetros escolhidos.

Tabela 5.1: Faixa de parâmetros estudados na investigação da fronteira de sincronização da esteira com o movimento do cilindro.

Números de Reynolds	Amplitude de oscilação	Freqüência de oscilação
200 e 300	$0.02d \leq A \leq 0.6d$	$0.5_{f_{\mathrm{St}}} \leq f_{\mathrm{osc}} \leq 1.0_{f_{\mathrm{St}}}$

Para esta investigação, a fronteira foi levantada através de simulações bidimensionais inicialmente. Estas são apresentadas na seção 5.1.1. Algumas simulações tridimensionais (§5.1.2) também são empregadas mas apenas com intuito de verificação da fronteira e constatação de discrepâncias entre as simulações bi- e tridimensionais.

É importante ressaltar que há histerese no levantamento da fronteira de sincronização (veja a Fig. 5.1 de Woo (1998), onde há uma região hachurada que representa a fronteira), portanto é importante a condição inicial adotada nas simulações. As simulações apresentadas têm condição inicial como se o escoamento começasse impulsivamente, ou seja, adota-se $\mathbf{u}(x, y, t = 0) = U_\infty$ (ou $\mathbf{u}(x, y, z, t = 0) = U_\infty$ no caso tridimensional) como condição inicial de todas as simulações aqui apresentadas.

5.1.1 Simulações bidimensionais da fronteira

A Fig. 5.2 resume os resultados obtidos. Vale notar que fora desta fronteira (para esquerda da linha no gráfico) a esteira pode estar fora de sincronização ou sincronizada em subharmônicos (1/2 ou 2/3 por exemplo da Fig. 5.1).

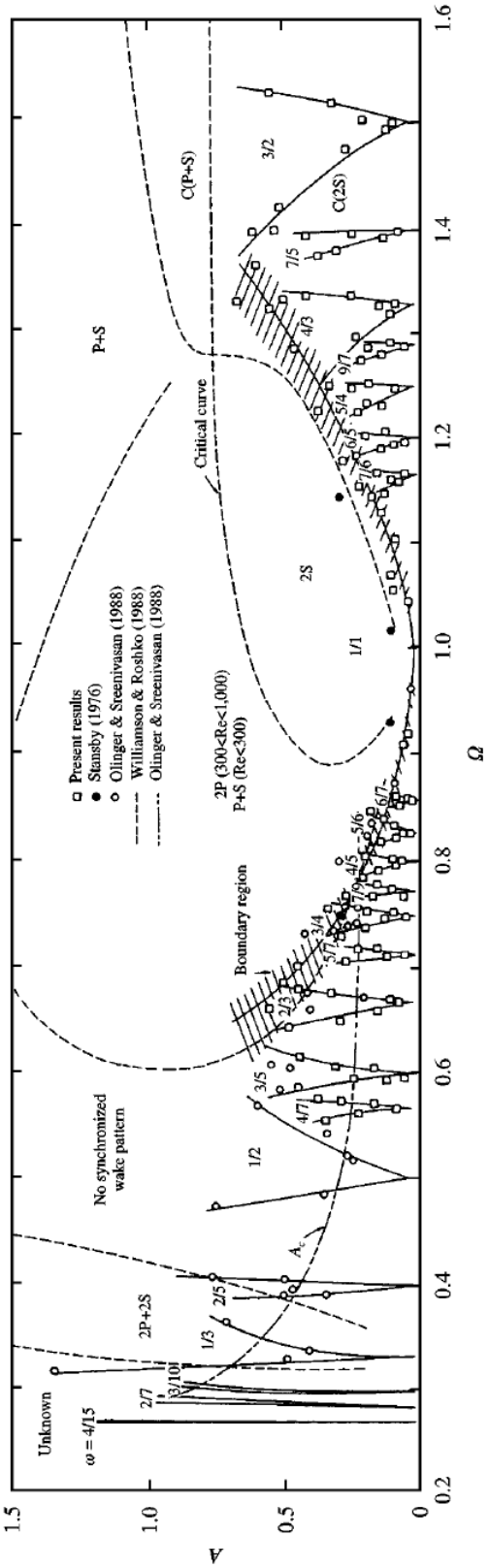
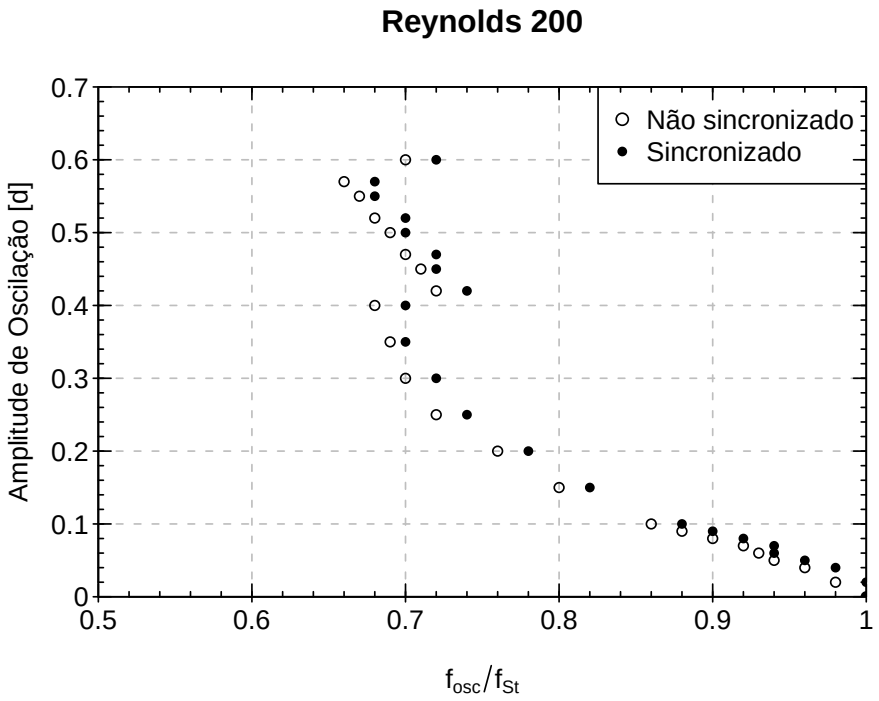
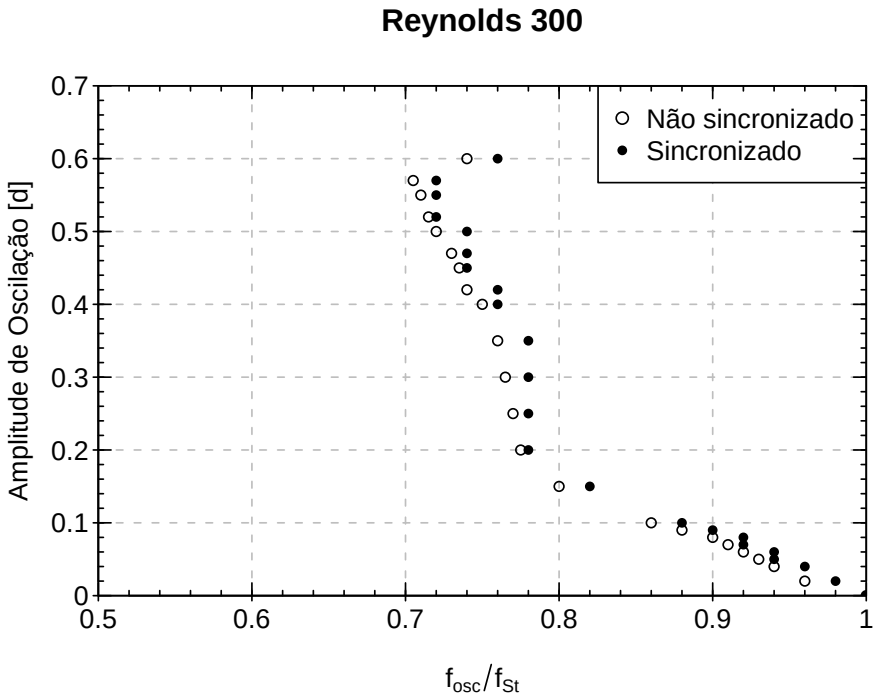


Figura 5.1: Fronteiras de sincronização primária, sub-harmônicas e super-harmônicas. Notar região hachurada onde a fronteira não se define bem devido à histerese. Retirado de Woo (1998).



(a)



(b)

Figura 5.2: Fronteiras de sincronização levantadas através de simulação numérica direta bidimensional. Região onde há sincronização é à direita da curva mostrada. f_{osc} é a freqüência de oscilação do cilindro e f_{St} é a freqüência de desprendimento de vórtices do cilindro fixo no mesmo Reynolds.

O critério adotado para definir se a esteira está sincronizada é: quando a menor freqüência no espectro do coeficiente de sustentação é igual à freqüência imposta de oscilação do cilindro, admite-se que há sincronização. As Fig. 5.2 apresentam dois dados, os pontos não pintados são simulações que não apresentaram sincronização e os pontos pintados apresentam sincronização. A curva de sincronização foi traçada pelo ponto médio destes pares para uma dada amplitude.

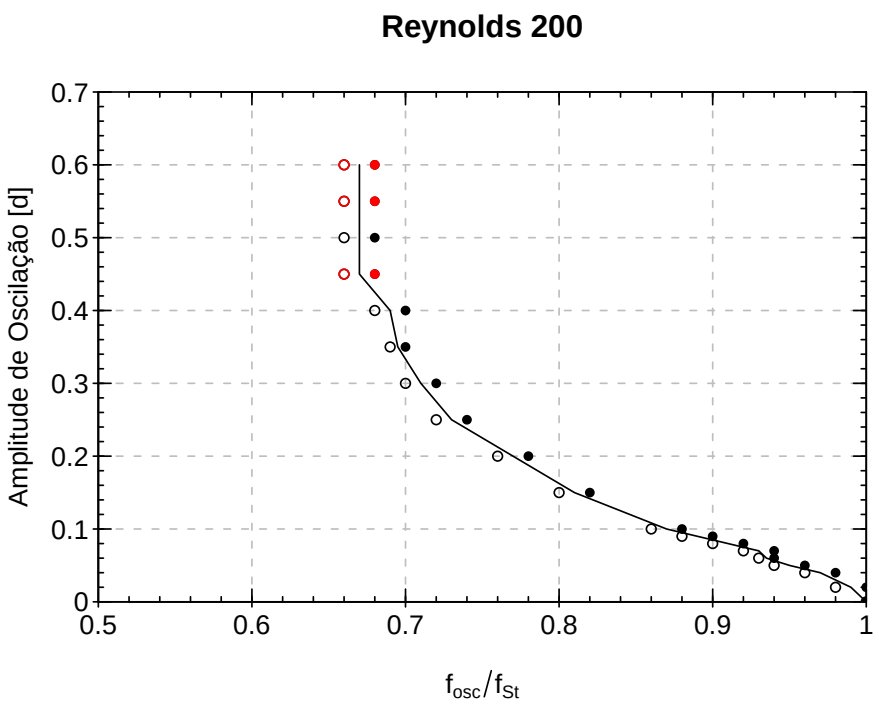
As simulações da análise de estabilidade desta tese são para razão de freqüência 0.90 com exceção da avaliação do limiar de amplitude. Da Fig. 5.2, nota-se que esta freqüência escolhida $0.90 f_{\mathrm{St}}$ está dentro da fronteira de sincronização. Já para análise do limiar de amplitude de oscilação para influenciar a esteira, a freqüência de oscilação escolhida foi exatamente a freqüência de Strouhal, evitando, assim, cair fora sincronização.

Também pode-se observar dos gráficos na Fig. 5.2 que a fronteira tem influência do número de Reynolds mesmo em simulações bidimensionais. De qualquer maneira, as simulações apresentadas nesta tese estão certamente dentro da fronteira de sincronização.

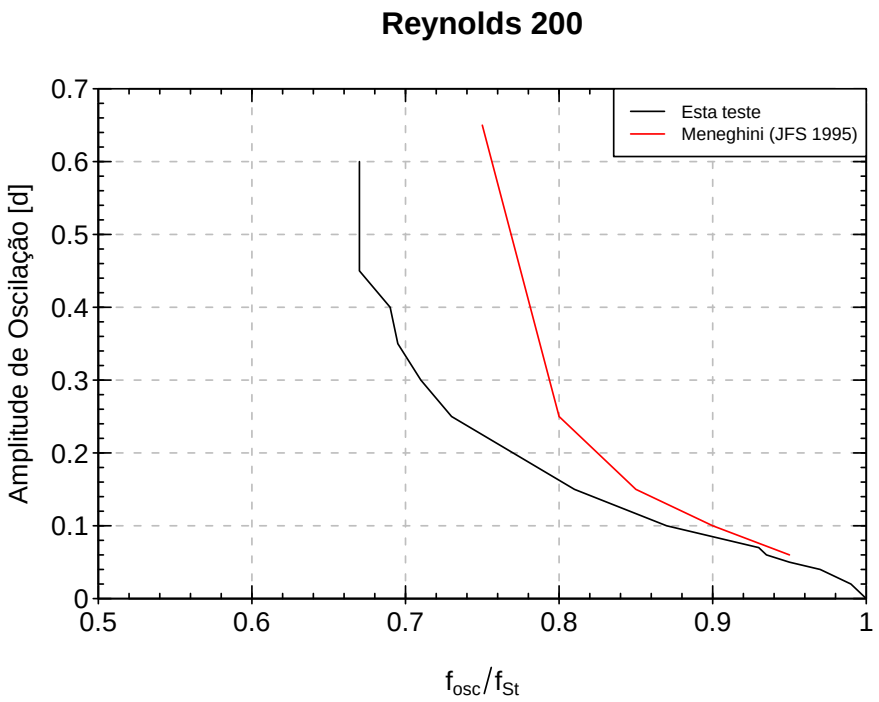
5.1.2 Simulações tridimensionais

A fim de corroborar a curva de sincronização levantada com simulações bidimensionais, alguns casos tridimensionais foram escolhidos. A escolha se deu, principalmente, na região cuja sincronização não seguiu o comportamento esperado. A Fig. 5.3(a) apresenta o resultado da fronteira de sincronização com dados de simulações bi- e tridimensionais. Nota-se que as simulações tridimensionais (resultados destacados em vermelhos) alargam a fronteira de sincronização em amplitudes mais altas, se compararmos com a Fig. 5.2(a).

A Fig. 5.3(b) mostra a fronteira levantada nesta tese usando o método dos elementos espectrais em comparação com a levantada por Meneghini e Bearman (1995) através do método dos vórtices discretos. Esta discrepância entre as curvas de sincronização pode ser atribuída à diferença de ordem entre os métodos e ao emprego de simulações tridimensionais no caso desta tese. Em baixa amplitude, os escoamento é absolutamente estável a perturbações tridimensionais como é avaliada na seção 5.4, portanto simulações bidimensionais são suficientes para representar a física do escoamento justificando a proximidade das fronteiras de sincronização na Fig. 5.3(b) em amplitudes menores que $0.2d$.



(a) Fronteira de sincronização com simulações bidimensionais (em preto) e tridimensionais (em vermelho).



(b) Comparação das fronteiras de sincronização.

Figura 5.3: Fronteiras de sincronização levantadas através de simulação numérica direta. Região onde há sincronização é à direita da curva mostrada. f_{osc} é a freqüência de oscilação do cilindro e f_{St} é a freqüência de desprendimento de vórtices do cilindro fixo no mesmo Reynolds.

5.2 Simulações numéricas diretas tridimensionais

Todas as simulações tridimensionais apresentadas nesta seção têm 12 diâmetros de comprimento periódico na direção da envergadura do cilindro z e a discretização ao longo da envergadura é feita com modos de Fourier seguindo os critérios da análise de convergência na seção 3.1 e com número de modos da ordem de $L/d \times \sqrt{\mathrm{Re}}$ (HENDERSON, 1997) para resolver as menores escalas. A condição inicial de todas simulações é escoamento unitário, ou seja, o escoamento começa impulsivamente, e ruido branco foi usado para deflagrar as tridimensionalidades.

Aos mesmos moldes apresentados para o escoamento ao redor de um cilindro fixo (§4.2), esta seção apresenta os resultados das simulações numéricas diretas (DNS) avaliando as estruturas vorticais na esteira, identificadas pelo critério λ_2 proposto por Jeong e Hussain (1995) (ver §2.4). A fim de comparar as diferenças nas tridimensionalidades da esteira, também é apresentado contorno de grandezas em fatias do escoamento.

5.2.1 Cilindro oscilando

Os casos tridimensionais de oscilação forçada relatados neste seção têm freqüência de oscilação do corpo na região de sincronização da esteira: $0.95 f_{\mathrm{St}}$. As amplitudes escolhidas são as de resposta típica dos ramos inferior e superior em problemas de vibração induzida por vórtices (WILLIAMSON; GOVARDHAN, 2004): uma amplitude baixa de $0.4d$ correspondendo ao ramo inferior e uma alta de $1.0d$ referente ao pico de amplitude de resposta. Ratificando a seção 3.3, os casos simulados estão relacionados na abaixo:

- Números de Reynolds: 200, 300, 400 e 500
- Amplitudes de oscilação: $0.4d$ e $1.0d$
- Freqüência de oscilação fixa: $0.95 f_{\mathrm{St}}$

É de se esperar que mudanças ocorram devido ao movimento oscilatório do corpo. Na investigação experimental do escoamento ao redor de corpos rombudos oscilando realizada por Bearman e Obasaju (1982), eles observaram que o movimento oscilatório causa um aumento de correlação na envergadura da força de sustentação. Isso é efeito das tridimensionalidades, ou a falta delas, na esteira do corpo.

A fim de investigar como as tridimensionalidades são afetadas pela oscilação do cilindro estas simulações foram realizadas.

5.2.1.1 Amplitude 0.4d

De início, para inferir sobre as tridimensionalidades da esteira de um cilidnro oscilando, apresenta-se a Fig. 5.4 com a identificação de vórtices pelo critério λ_2 da esteira de um cilindro oscilando com amplitude $0.4d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$.

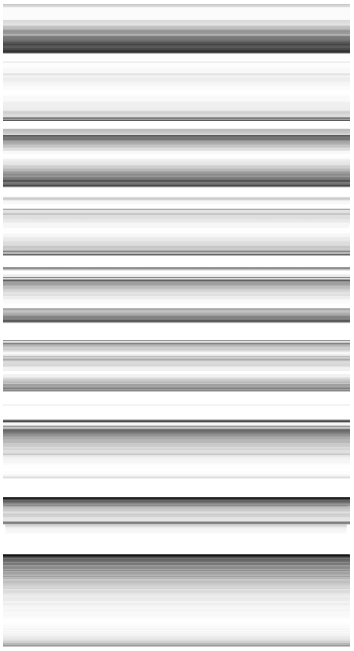
Ao fazer a comparação entre a esteira do cilindro oscilando com número de Reynolds 200 na Fig. 5.4(a) e a esteira do cilindro fixo da Fig. 4.7(a), nota-se claramente que a oscilação neste caso dissipa as tridimensionalidades da esteira. A análise de estabilidade apresentada nas seções 5.4 e 5.3 e publicada por Gioria e Meneghini (2007) ratifica este resultado mostrando que o escoamento bidimensional é absolutamente estável a perturbações tridimensionais nesta situação ($A = 0.4d$ e $f = 0.95f_{\mathrm{St}}$).

O caso com número de Reynolds 300 e amplitude $0.4d$, na Fig. 5.4(b), mostra uma esteira com estruturas tridimensionais intensas. O interessante é que esta esteira é comparável àquela resultante do escoamento ao redor de um cilindro fixo com o mesmo número de Reynolds (Fig. 4.7(b)). Esta esteira também é dominada pelo modo similar ao modo B em relação ao comprimento de onda da instabilidade por volta de $0.8d$ conforme os resultados de análise de estabilidade (seção 5.4 e Barkley e Henderson (1996)).

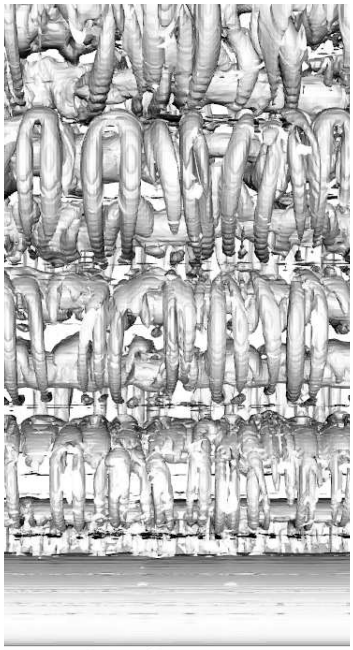
Quando o número de Reynolds é aumentado, a esteira tridimensional persiste, como mostram as Fig. 5.4(c)–5.4(d). Estruturas de escala menor são mais aparentes nestes casos.

Como citado anteriormente, experimentos com corpo rombudo oscilando como os realizados por Bearman e Obasaju (1982) indicam um aumento da correlação na envergadura do coeficiente de sustentação o que induz a interpretação de que a esteira se tornaria "mais bidimensional". Com exceção do caso cujo número de Reynolds é 200 e amplitude baixa ($A = 0.4d$), os resultados, como os da Fig. 5.4, mostram o contrário desta intuição: a esteira tridimensional persiste com o aumento do número de Reynolds apresentando estruturas de comprimentos característicos menores. Esta característica também se manifesta em amplitude de oscilação mais alta, como $1.0d$, conforme mostrada na subseção seguinte.

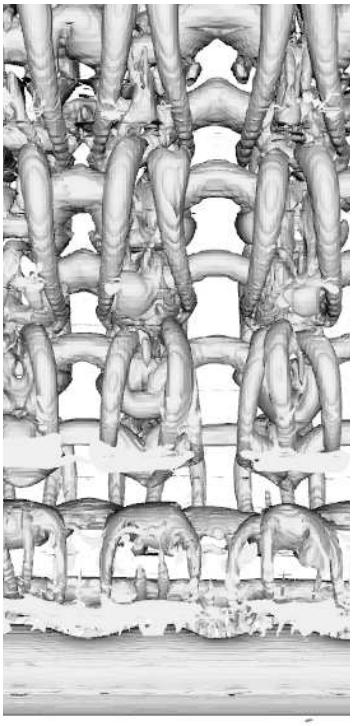
Com intuito de esclarecer o padrão de desprendimento de vórtices dessas simulações tridimensionais, a Fig. 5.5 apresenta o contorno de vorticidade na direção z em uma fatia do escoamento. Nota-se claramente o padrão de desprendimento de vórtices nos casos de baixa amplitude de oscilação $0.4d$. Todos esses casos têm o padrão de desprendimento 2S similar ao da esteira de von Kármán de um cilindro fixo.



(a) Re = 200.



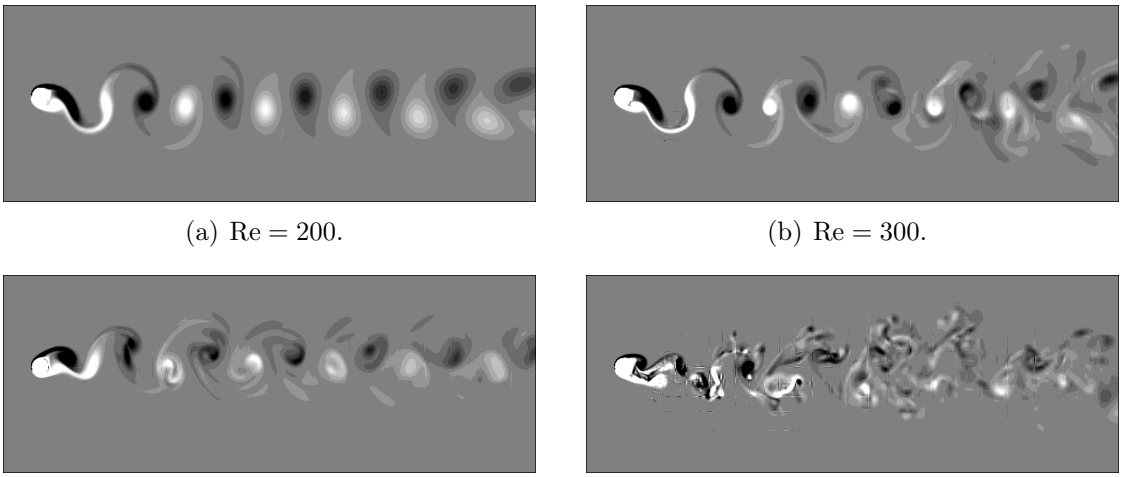
(b) Re = 300.



(c) Re = 400.

(d) Re = 500.

Figura 5.4: Estrutura vortical segundo o critério λ_2 de Jeong e Hussain (1995) do escoamento ao redor de um cilindro oscilando com amplitude $0.4d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$. Vista ortogonal ao plano xy e escoamento de baixo para cima. Cilindro está na posição de máximo deslocamento no ciclo da oscilação.



(a) Re = 200. (b) Re = 300.

(c) Re = 400. (d) Re = 500.

Figura 5.5: Fatia xy na seção média do cilindro com contornos instantâneos de vorticidade adimensional na direção z ($\omega_z d/U_\infty$) para cilindro oscilando com amplitude de oscilação $0.4d$ e freqüência $0.95 f_{\mathrm{St}}$. Níveis de vorticidade adimensional $\omega_z d/U_\infty$ do preto, -2, ao branco, 2. Cilindro está na posição de máximo deslocamento no ciclo da oscilação.

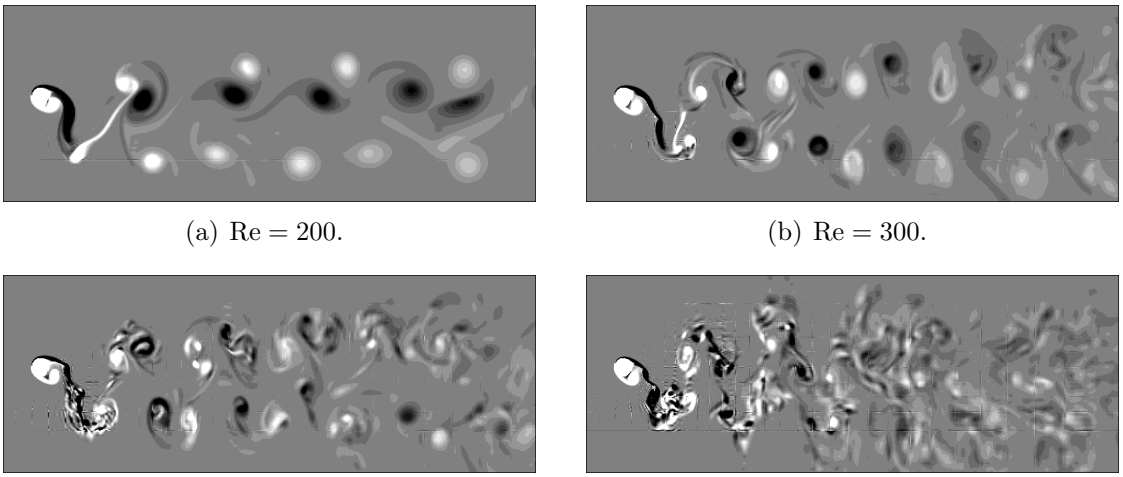
5.2.1.2 Amplitude 1.0d

Seguindo os mesmos moldes de apresentação de resultados dos casos de amplitude baixa, apresenta-se a Fig. 5.6, na qual é possível identificar o padrão de desprendimento de vórtices das simulações numéricas do escoamento ao redor de um cilindro oscilando com $1.0d$ de amplitude e freqüência $0.95 f_{\mathrm{St}}$. Mudanças no padrão de desprendimento são notáveis em relação aos casos anteriores com cilindro fixo (§4.2.1) e de oscilação com amplitude baixa (§5.2.1.1).

O caso com número de Reynolds 200 e amplitude $1.0d$ apresenta o padrão de desprendimento P+S como pode ser visto na Fig. 5.6(a). Este padrão de desprendimento também é observado em simulações bidimensionais como nos campos base na próxima seção 5.4.1. Vale observar que este padrão é uma quebra na simetria espaço-temporal da esteira de von Kármán. Esta simetria é representa pela equação abaixo:

$$\text{von Kármán:} \quad \begin{cases} \tilde{u}(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{v}(x,y,z,t) = -\tilde{v}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{\omega}_z(x,y,z,t) = -\tilde{\omega}_z(x,-y,z,t+T/2) \end{cases} \tag{5.1}$$

Esta observação é importante pois o padrão de desprendimento P+S permite o surgimento de instabilidades diferentes na esteira (BLACKBURN; MARQUES; LOPEZ, 2005).



(a) Re = 200. (b) Re = 300.

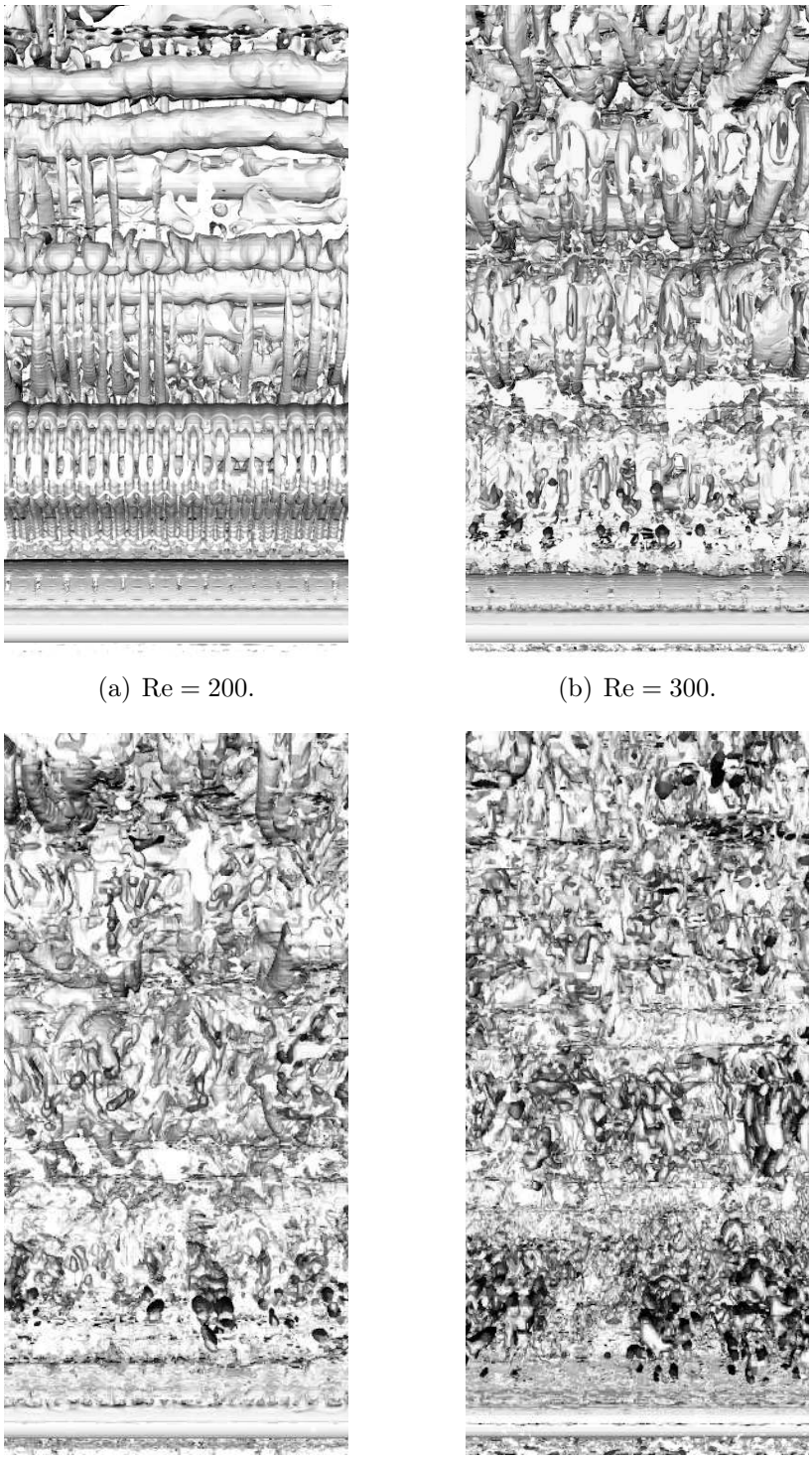
(c) Re = 400. (d) Re = 500.

Figura 5.6: Fatia xy na seção média do cilindro com contornos instantâneos de vorticidade adimensional na direção z ($\omega_z d/U_\infty$) para cilindro oscilando com amplitude $1.0d$ e freqüência $0.95 f_{\mathrm{St}}$. Níveis de vorticidade $\omega_z d/U_\infty$ do preto, -2, ao branco, 2. Cilindro está na posição de máximo deslocamento no ciclo da oscilação.

Ainda sobre o padrão de desprendimento de vórtices, observa-se que para número de Reynolds acima de 300 o padrão é 2P (2 pares de vórtices desprendidos por ciclo de oscilação do cilindro). Neste trabalho, este padrão foi observado somente em simulações numéricas tridimensionais. Os campos base bidimensionais simulados para a análise de Floquet (§5.4) somente produziram padrões 2S e P+S. Isso associa o padrão 2P ao escoamento tridimensional, mas os resultados da análise da estabilidade secundária da esteira não acusa mudança no padrão de desprendimento, ou seja, não há uma transição de um escoamento bidimensional para um tridimensional com padrão 2P.

A Fig. 5.7 apresenta os vórtices identificados pelo critério λ_2 na esteira para oscilação com amplitude elevada. Estruturas em escalas mais finas são observadas, especialmente no intervalo de número de Reynolds de 300 a 500 vistos na Fig. 5.7(b)–5.7(d). Dificilmente um comprimento de instabilidade, associado diretamente a um modo de Floquet, é claramente identificado pois o escoamento desenvolvido já está longe do âmbito de pequenas perturbações da análise de estabilidade de Floquet.

Para o número de Reynolds 200, com padrão de desprendimento diferente, observa-se na Fig. 5.7(a) uma tridimensionalidade mais saliente com comprimento de onda curto. Esta aparece devido a quebra de simetria do escoamento base. Embora o comprimento de onda seja próximo do comprimento do modo B, por volta de $0.8d$ (§4.3 e Barkley e Henderson (1996)), a tridimensionalidade não apresenta mesma simetria que o modo B



(a) Re = 200.

(b) Re = 300.

(c) Re = 400.

(d) Re = 500.

Figura 5.7: Estrutura vortical segundo o critério λ_2 de Jeong e Hussain (1995) do escoamento ao redor de um cilindro oscilando com amplitude $1.0d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$. Vista ortogonal ao plano xy e escoamento de baixo para cima. Cilindro está na posição de máximo deslocamento no ciclo da oscilação.

nem a simetria do modo A.

Para caracterizar bem o modo capturado na simulação, recordamos que a simetria do modo A é a mesma da esteira de von Kármán citada acima na eq. (5.1) , e pode ser descrita como

$$\text{Modo A: } \begin{cases} \tilde{u}(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{v}(x,y,z,t) = -\tilde{v}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{w}(x,y,z,t) = \tilde{w}(x,-y,z,t+T/2) \end{cases} \tag{5.2}$$

ou a reescrevendo em função da vorticidade na direção x

$$\text{Modo A: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x,y,z,t) = -\tilde{\omega}_x(x,-y,z,t+T/2) \right. \tag{5.3}$$

Já o modo B tem a simetria representada em função da velocidade

$$\text{Modo B: } \begin{cases} \tilde{u}(x,y,z,t) = -\tilde{u}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{v}(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{w}(x,y,z,t) = -\tilde{w}(x,-y,z,t+T/2) \end{cases}$$

e em função da vorticidade na direção x por

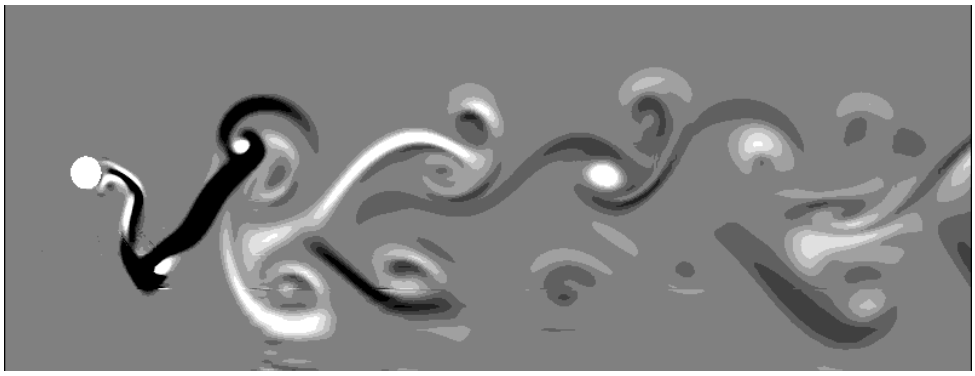
$$\text{Modo B: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x,y,z,t) = \tilde{\omega}_x(x,-y,z,t+T/2) \right. \tag{5.4}$$

Modos sub-harmônicos também são obtidos pela análise de estabilidade de Floquet e são representados por multiplicadores reais negativos. Estes resultados estão na análise de estabilidade na seção 5.4. Os modos sub-harmônicos, que têm período dobrado em relação ao período de desprendimento de vórtice, podem ser representados por

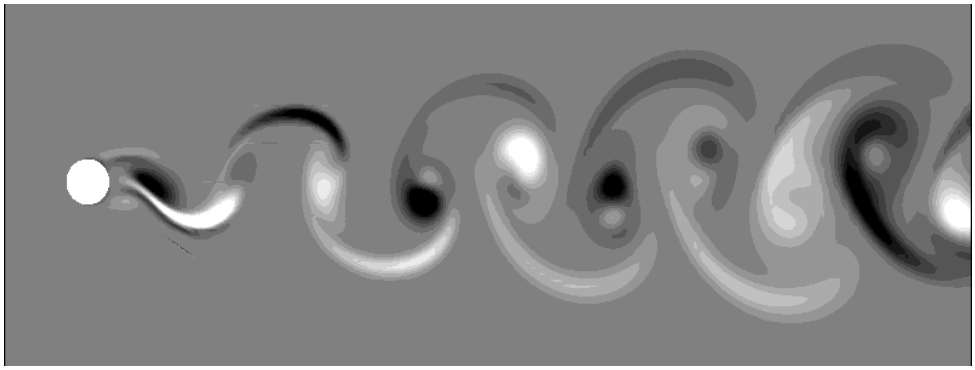
$$\text{Sub-harmônico: } \left\{ \tilde{\omega}_x(x,y,z,t) = -\tilde{\omega}_x(x,y,z,t+T) \right. \tag{5.5}$$

O modo capturado pela simulação numérica direta tem característica sub-harmônica como mostra a Fig. 5.8(a). De fato, a análise de estabilidade de Floquet (§5.4) o identifica como um modo sub-harmônico. A fim de clarear as diferenças entre o modo sub-harmônico e o modo A, a Fig. 5.8(b) mostra a vorticidade na direção do escoamento para o modo A.

Lembrando o trabalho de análise de simetrias de Blackburn, Marques e Lopez (2005), quando a esteira tem a simetria da esteira de von Kármán (eq. (5.1)), que apresenta padrão de desprendimento 2S, os modos instáveis possíveis de bifurcarem deste campo base são os modos A, B e QP (quasi-periódico). O modo QP apresenta multiplicador



(a)



(b)

Figura 5.8: Escoamento ao redor de um cilindro: (a) oscilando com amplitude $0.4d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$ a Re = 200, cilindro na posição de máximo deslocamento no ciclo da oscilação; (b) fixo Re = 200. Fatia xy na seção média do cilindro com contornos instantâneos de vorticidade adimensional na direção x ($\omega_x d/U_\infty$). Níveis de vorticidade do preto, -0.5, ao branco, 0.5.

de Floquet complexo, então insere através das tridimensionalidades uma freqüência não-harmônica no escoamento. Ele pode ser identificado como uma onda estacionária ou propagante na envergadura da esteira. O modo QP pode ser representado por:

$$\text{Modo QP} : \Big\{ \tilde{\omega}_x(x, y, z, t) = \tilde{\omega}_x(x, y, z + k_z, t + T) \tag{5.6}$$

Voltando à Fig. 5.8(a), o padrão de desprendimento no caso Re = 200 e amplitude de oscilação $1.0d$ é o P+S, portanto não está restrito pela análise realizada por Blackburn, Marques e Lopez (2005). De fato, isso é comprovado pela vorticidade na direção x mostrada na Fig. 5.8(a), onde pode-se observar que ela inverte de sinal (muda de preto para branco, ou vice-versa) a cada grupo de vórtices P+S, caracterizando um aspecto sub-harmônico das tridimensionalidades identifica pela eq. (5.5). Esta característica sub-harmônica também será identificada na análise de estabilidade da esteira cujo padrão de desprendimento de vórtices é P+S (ver seção 5.4 sobre a análise de estabilidade).

5.3 Limiar de amplitude

O movimento oscilatório do cilindro tem efeitos notáveis no escoamento. Diversas publicações se preocuparam e classificaram o padrão de desprendimento de vórtices na esteira do cilindro oscilando, tanto experimentalmente (ver a revisão de Williamson e Govardhan (2004)) quanto numericamente (e.g. Meneghini e Bearman (1995)). Quanto às tridimensionalidades da esteira, investigações experimentais focaram mais na correlação da força ao longo do cilindro (e.g. Bearman (1992)) e as numéricas mais recentemente nas tridimensionalidades e transição da esteira (como em Gioria, Carmo e Meneghini (2007), Leontini, Thompson e Hourigan (2007) e Gioria et al. (2009)). Até onde se sabe, não se investigou uma amplitude mínima para influenciar o escoamento e as tridimensionalidades da esteira. Esta seção se dedica à estimativa de um limiar de amplitude para influenciar a esteira tridimensional de um cilindro oscilando.

Naturalmente é de se esperar que o comportamento da esteira de um cilindro oscilando em amplitudes muito pequenas seja similar ao comportamento da esteira de um cilindro fixo. Com isto em mente, parte-se de amplitudes bem pequenas ($\mathcal{O}(0.01d)$), e através da análise de estabilidade de Floquet (§2.3 e Barkley e Henderson (1996)) infere-se sobre as tridimensionalidades da esteira. Para tanto, escolhe-se a freqüência de oscilação do cilindro com valor exatamente da freqüência de desprendimento de vórtices do cilindro fixo a fim de manter a sincronização entre oscilação e a esteira em amplitude muito baixas, já que a fronteira de sincronização se estreita ao diminuir a amplitude como mostrada na seção 5.1 e em (MENEGHINI; BEARMAN, 1995).

Dois números de Reynolds foram escolhidos para esta investigação: 200 e 300. Esta escolha se deve ao comportamento da esteira de um cilindro fixo (ver análise de Floquet do cilindro fixo na §4.3): a Re = 200 apenas o modo A é instável pela análise de Floquet enquanto em Re = 300 ambos modos, A e B, são instáveis. A faixa de amplitude de oscilação investigada vai de $0.0d$ a $0.3d$. Amplitudes acima de $0.3d$ são investigadas mais adiante na seção sobre análise de estabilidade de Floquet de um cilindro oscilando (§5.4).

Podemos definir uma faixa de amplitude que influenciam a esteira com esta investigação:

- Uma amplitude de oscilação mínima cujas perturbações tridimensionais são suprimidas, ou seja, uma amplitude para a qual a esteira do cilindro oscilando é absolutamente estável a perturbações tridimensionais;

- Uma amplitude superior para a qual a esteira retoma as tridimensionalidades (§5.4).

Em suma, abaixo de uma certa amplitude mínima, o comportamento da esteira do cilindro oscilando é similar ao da esteira de um cilindro fixo. Acima desta amplitude, pode-se inibir o crescimento de tridimensionalidades.

Os campos base para esta análise foram simulados bidimensionalmente usando o método dos elementos espectrais seguindo as diretrizes da análise de convergência apresentada na seção 3.1. A oscilação é considerada usando um referencial não-inercial como descrito na seção 2.2.5.

5.3.1 Resultados e discussão

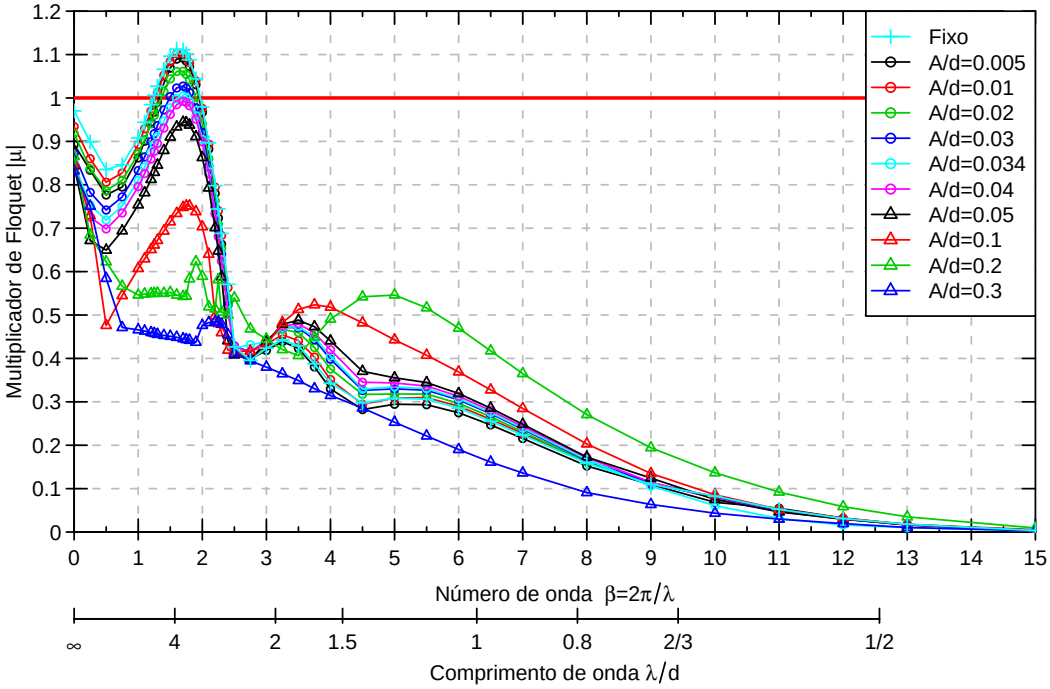
Para iniciar a discussão, apresenta-se um gráfico do módulo do multiplicador de Floquet ($|\mu|$) pelo número de onda da instabilidade para as amplitudes na faixa investigada. Procuram-se os picos que cruzam a linha $|\mu| = 1$ (resultados de estabilidade neutra) indicando instabilidades tridimensionais; e as curvas que permanecem inteiramente abaixo deste $|\mu| = 1$ indicando situações absolutamente estáveis a perturbações.

A Fig. 5.9 apresenta os resultados dos multiplicadores de Floquet. Nota-se que em ambos gráficos, as curvas tendem para a curva do cilindro fixo conforme a amplitude de oscilação vai diminuindo. Outra característica notável é que há curvas que ficam inteiramente abaixo de $|\mu| = 1$, ou seja, há amplitudes que mantêm a esteira bidimensional.

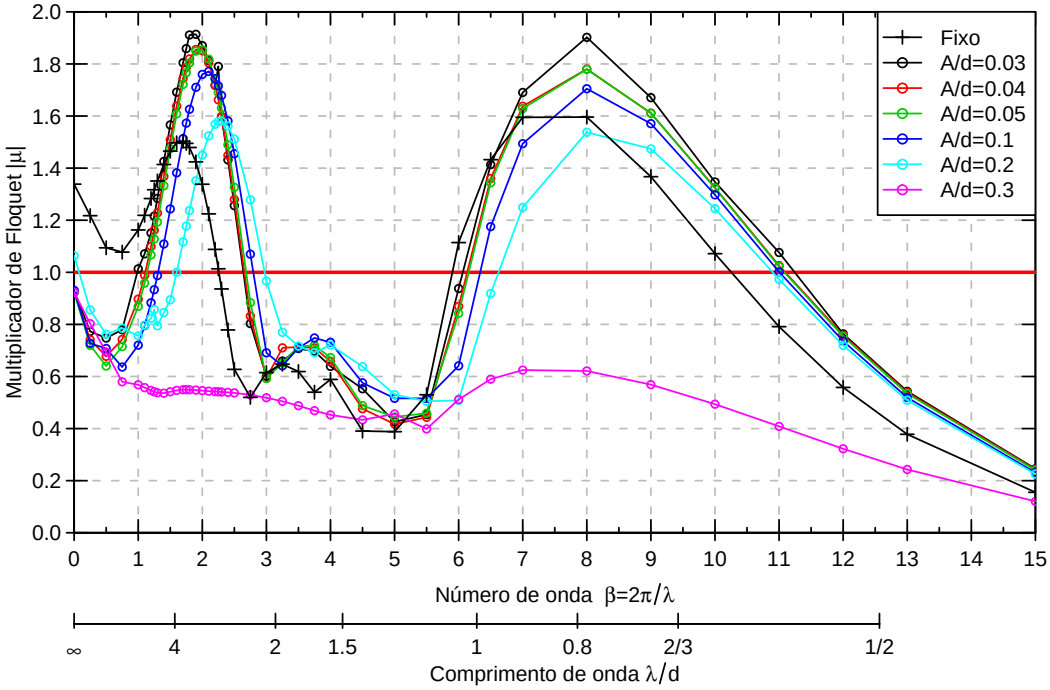
Outro modo de apresentar esses dados é através de um mapa de estabilidade. O mapa resume o espaço de parâmetros: comprimento de onda da instabilidade $\times$ amplitude de oscilação. No mapa (Fig. 5.10), a curva de estabilidade neutra é traçada e a região hachurada é instável.

Vejamos primeiro o caso com Re = 200. Da Fig. 5.10(a), podemos estimar que o limiar de amplitude é por volta de $0.03d$. A partir desta amplitude de oscilação, as tridimensionalidades são suprimidas. A supressão de tridimensionalidades na esteira de um cilindro oscilando é observada em uma faixa de amplitude de oscilação. Esta faixa de amplitude é $0.03d < A < 0.65d$. Este limite superior é obtido na seção de análise de estabilidade de Floquet (§5.4) em amplitudes de oscilação usuais da resposta de VIV.

Ainda em Re = 200, quando a amplitude de oscilação é menor que o limiar estimado acima em $0.03d$, observa-se um modo instável com as características de simetria do modo A. Seu comprimento de onda, de aproximadamente $3.7d$, próximo da amplitude

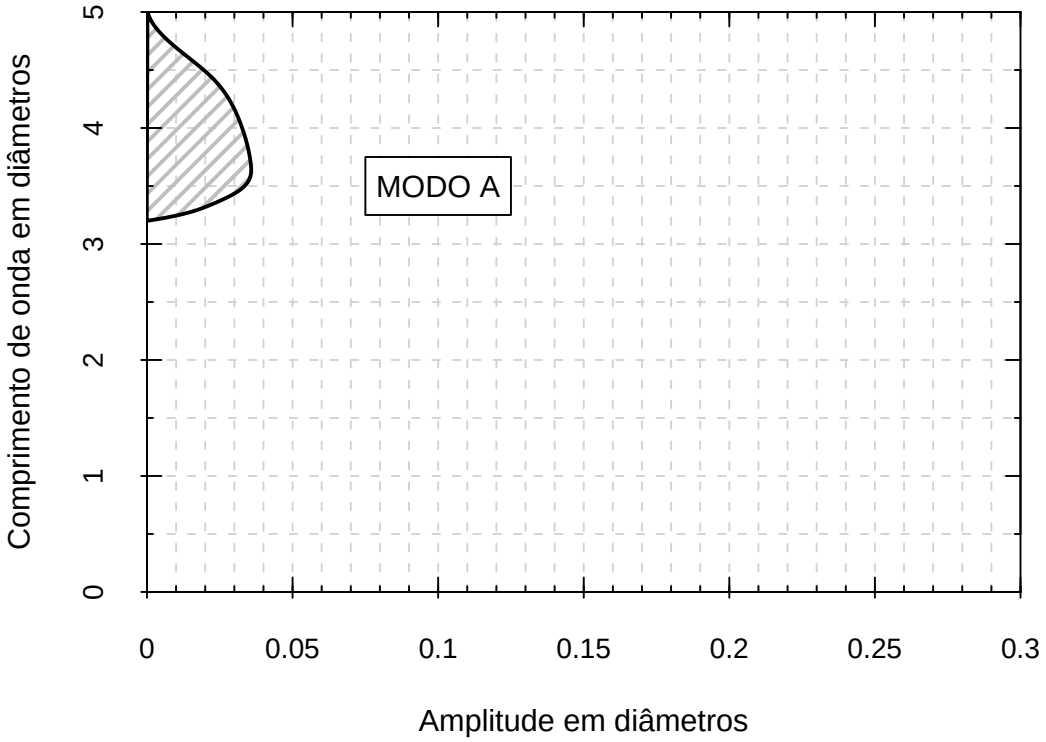


(a) Número de Reynolds 200.

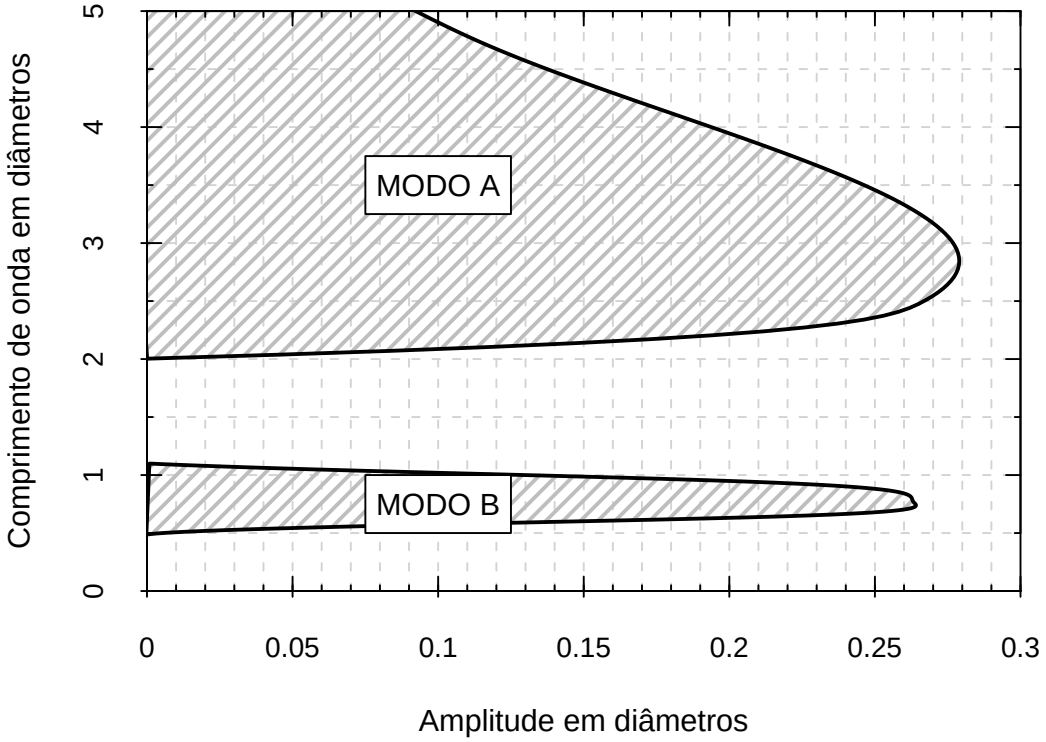


(b) Número de Reynolds 300.

Figura 5.9: Multiplicadores de Floquet para amplitudes de oscilação baixas.



(a) Número de Reynolds 200.



(b) Número de Reynolds 300.

Figura 5.10: Espaço de parâmetros amplitude por comprimento da instabilidade. As regiões hachuradas são instáveis.

crítica é um pouco menor que o comprimento de onda do modo A na esteira de um cilindro fixo aproximadamente $4d$ (ver seção 4.3 ou Barkley e Henderson (1996)).

Quanto ao Reynolds 300, lembramos que neste número de Reynolds a esteira de um cilindro fixo apresenta dois modos instáveis, modo A ($\lambda_{\mathrm{A}} \sim 4d$) e o modo B ($\lambda_{\mathrm{B}} \sim 0.8d$). Quando há oscilação do cilindro, podemos estimar o limiar de amplitude para estabilização da esteira em $0.28d$. Em outras palavras, a esteira do cilindro oscilando com Reynolds 300 é absolutamente estável a perturbações tridimensionais na faixa de amplitude de oscilação $0.28d < A < 0.35d$. Quando a amplitude de oscilação é menor que o limiar, ambos modos A e B são observados. A diferença em relação à esteira de um cilindro fixo em mesmo Reynolds é que o comprimento de onda do modo A é mais curto com a oscilação enquanto o modo B não se altera significativamente.

Conclui-se que é possível inibir o crescimento das tridimensionalidades usando a oscilação do cilindro em números de Reynolds baixos (abaixo de 300). Para outros números de Reynolds, as tridimensionalidades presentes na esteira do cilindro oscilando são alteradas. Isso é mostrado nesta tese na próxima seção 5.4.

5.4 Análise de Floquet do cilindro oscilando

Duas subseções integram esta parte e seguem os passos da análise de estabilidade: primeiro calcula-se o escoamento base (§5.4.1) sobre o qual avaliar-se-á a equação linearizada da evolução da perturbação na análise de estabilidade (§5.4.2). O método usado na análise de estabilidade é mesmo da seção anterior e está descrito no apêndice B.

Aqui a análise é feita para uma freqüência de oscilação com razão fixa em $0.90 f_{\mathrm{St}}$. Esta freqüência está dentro da região de sincronização da esteira com o movimento do cilindro (§5.1) e por ser uma razão fixa em relação ao número de Strouhal, evita o efeito de variação do número de Strouhal em função do número de Reynolds.

5.4.1 Escoamentos bases bidimensionais

Para se realizar a análise de Floquet, é necessário um campo base periódico. Inicialmente, simulações numéricas bidimensionais foram realizadas para os casos listados na Tab. 5.2. Esta tabela também traz a informação sobre a periodicidade da esteira (do campo de velocidade e pressão) em função do período de oscilação do cilindro (T).

O padrão de desprendimento 2S da esteira de von Kármán observado no escoa-

Tabela 5.2: Periodicidade da esteira em relação ao período da oscilação imposta (T).

Número de Reynolds	Amplitude [d] 0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	0.9	1.0
200	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T
240	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T
260	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T
300	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T	2T
340	1T	1T	1T	1T	1T	1T	1T	NP[2]

mento ao redor de um cilindro fixo não ocorre sempre quando há um movimento oscilatório do corpo. Usualmente, a esteira é classificada pelo número e disposição do vórtices desprendidos por ciclo de oscilação, onde S significa um vórtice único e P um par de vórtices. Tab. 5.3 lista os padrões de desprendimento de vórtices obtidos nas simulações bidimensionais. Ressalta-se que o padrão 2P não aparece em nenhuma simulação bidimensional realizada nesta investigação, mas está presente nas simulações numéricas tridimensionais apresentadas na seção 5.2.

Tabela 5.3: Regime de desprendimento de vórtices obtidos nas simulações bidimensionais.

Número de Reynolds	Amplitude [d] 0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	0.9	1.0
200	2S	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
240	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
260	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
300	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
340	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	2S	

A Tab. 5.4 mostra os padrões de desprendimento obtidos nas simulações numéricas diretas tridimensionais relatadas na seção 4.2. Aparentemente as tridimensionalidades e efeitos não-lineares têm um papel importante no padrão de desprendimento de vórtices já que apenas nestas simulações tridimensionais o padrão 2P ocorre.

O caso com número de Reynolds 300 e amplitude de oscilação $1.0d$ mostra claramente a diferença entre os padrões de desprendimento em simulações bidimensionais e tridimensionais. No escoamento bidimensional, este caso tem padrão P+S (ver Tab. 5.3) enquanto o tridimensional apresenta padrão 2P (Tab. 5.4).

[2]NP foi marcado para identificar uma esteira não periódica.

Tabela 5.4: Regime de desprendimento de vórtices obtidos nas simulações tridimensionais relatadas na seção 5.2.

Número de Reynolds	Amplitude $[d]$ 0.4	1.0
200	2S	P+S
300	2S	2P
400	2S	2P
500	2S	2P

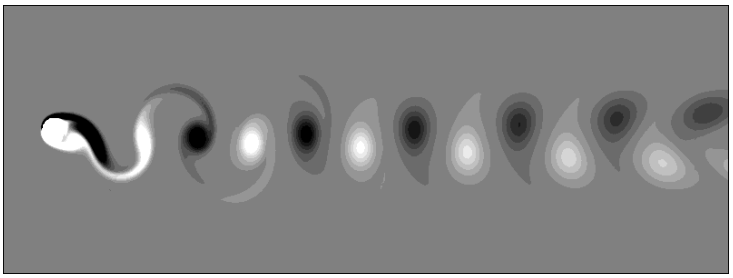
Exemplos dos padrões de desprendimento de vórtices são apresentados na Fig. 5.11 a fim de situar a nomenclatura adotada neste texto. A esteira de um cilindro fixo é a 2S. Para se ter outros padrões de desprendimento de vórtices deve-se agir no sistema: impor oscilações no cilindro, deixá-lo livre para sofrer vibrações induzidas pelos vórtices, atuar na região de formação dos vórtices ou na região de separação da camada limite.

5.4.2 Análise de estabilidade de Floquet

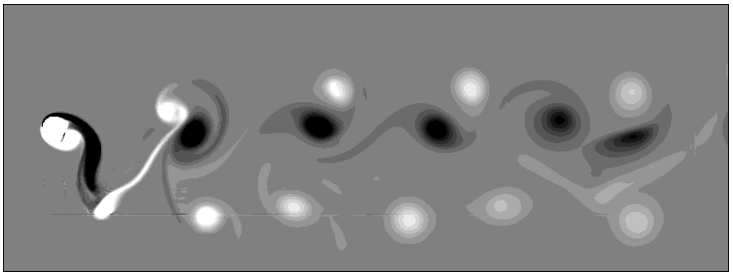
Os resultados da análise de estabilidade de Floquet estão compilados nas Fig. 5.12–5.19. Esta série de gráficos apresenta o módulo do multiplicador de Floquet ($|\mu|$) em função do número de onda na direção z da instabilidade (β). Manteve-se uma escala moderada para o eixo y nestes gráficos a fim de se manter clareza na figura. Os picos além da escala do gráfico podem indicar que a análise linear de estabilidade está sendo explorada além de seu limite, ou seja, longe da condição crítica, para representar a taxa de crescimento da instabilidade, porém as características do modo mantêm-se robustamente.

Nas Fig. 5.12–5.14 é possível notar que há curvas que permanecem abaixo do limite $\mu = 1$. Estes casos são absolutamente estáveis para perturbações tridimensionais: o escoamento permanece bidimensional. Isto é um efeito direto da oscilação com freqüência dentro da região de sincronização com a esteira apresentada na seção 5.1.[3] O fato notável é que neste número de Reynolds para cilindro fixo a esteira é instável. Uma explicação mais elaborada sobre o efeito estabilizante da oscilação do cilindro é dada ao longo e no fim desta seção. Este resultado também dá o limite superior de amplitude de oscilação para o qual o escoamento permanece bidimensional, complementando a investigação do limiar inferior de amplitude de oscilação em que o escoamento permanece bidimensional apresentada na seção 5.3.

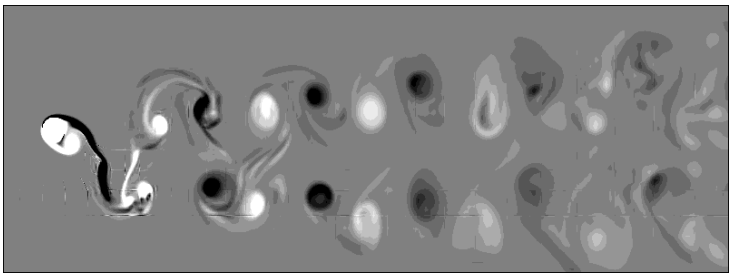
[3]Meneghini e Bearman (1995) também delineiam a fronteira de sincronização para um cilindro em oscilação forçada.



(a) Padrão 2S.



(b) Padrão P+S.



(c) Padrão 2P.

Figura 5.11: Exemplos de padrão de desprendimento de vórtices.

As curvas das Fig. 5.12–5.19 apresentam picos em regiões de número de onda β diferentes dos observados para o cilindro fixo (Fig. 4.8). Os picos dos gráficos na região $\beta < 2.5$ representam o comportamento do modo A. Os picos que ocorrem em $\beta > 6$ são do modo B. Na faixa intermediária manifesta-se o modo sub-harmônico quando a esteira tem padrão P+S.

Seguindo a descrição acima, pela Fig. 5.12 o comportamento para amplitude de oscilação $0.4d$ apresenta escoamentos estáveis a perturbações tridimensionais para Reynolds até 260. Isto é esperado se lembrarmos das simulações numéricas na seção 5.2.1: o escoamento permaneceu bidimensional para o caso Re = 200 e $A = 0.4d$. Para a faixa de número de Reynolds acima de 260 o escoamento se comporta como o de cilindro fixo: ambos modos A e B são instáveis. O modo B apresentando um pico mais alto em $\beta \approx 7$ que o modo A em $\beta \approx 1.6$. Salienta-se que nesta situação o padrão de desprendimento de vórtices na esteira é 2S (Tab. 5.3), esperam-se apenas estes modos segundo Blackburn,

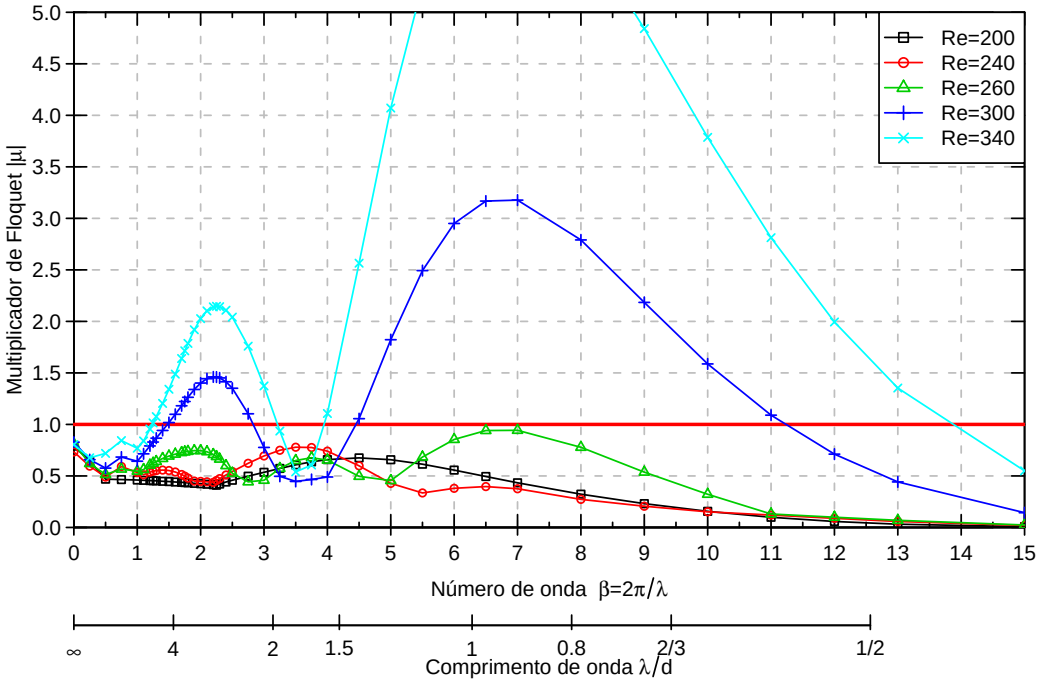


Figura 5.12: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.4$.

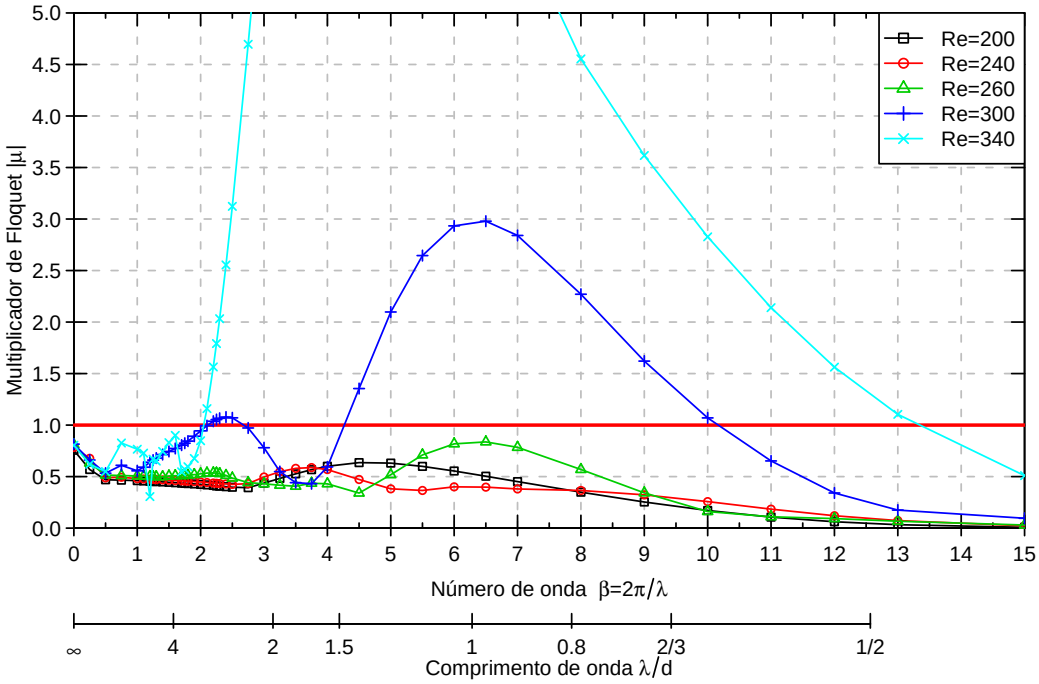


Figura 5.13: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.5$.

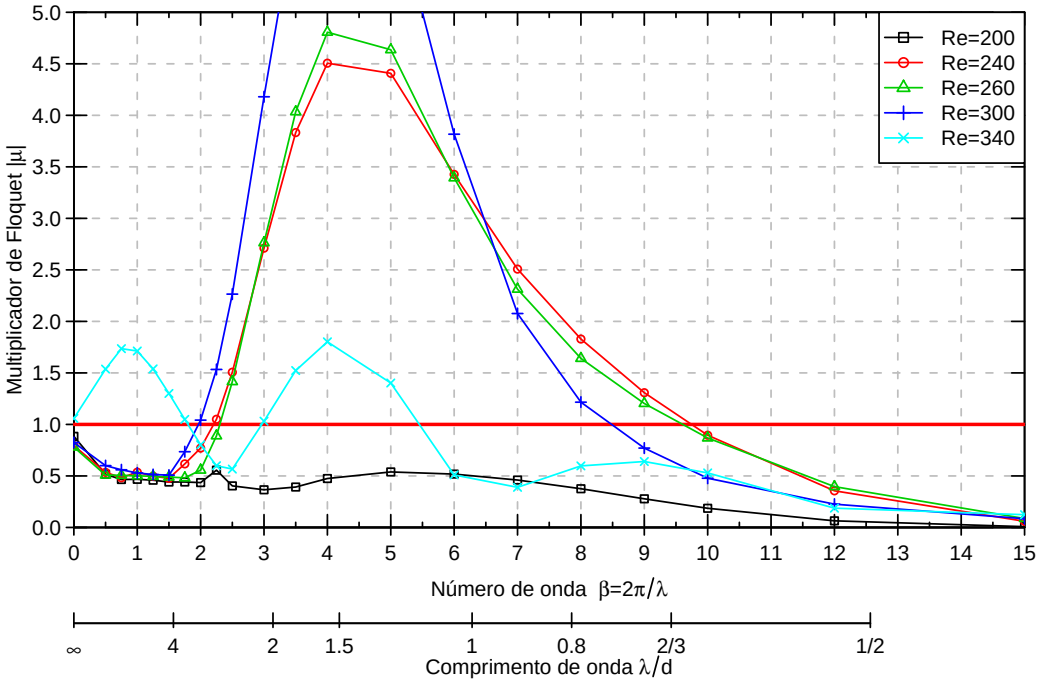


Figura 5.14: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.6$.

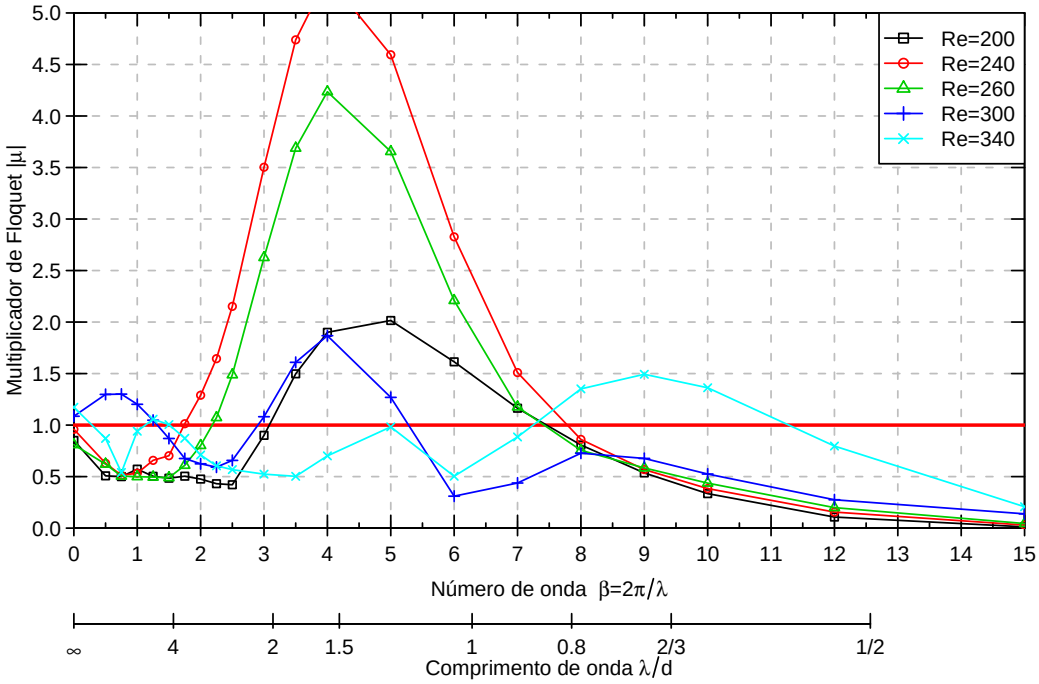


Figura 5.15: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.65$.

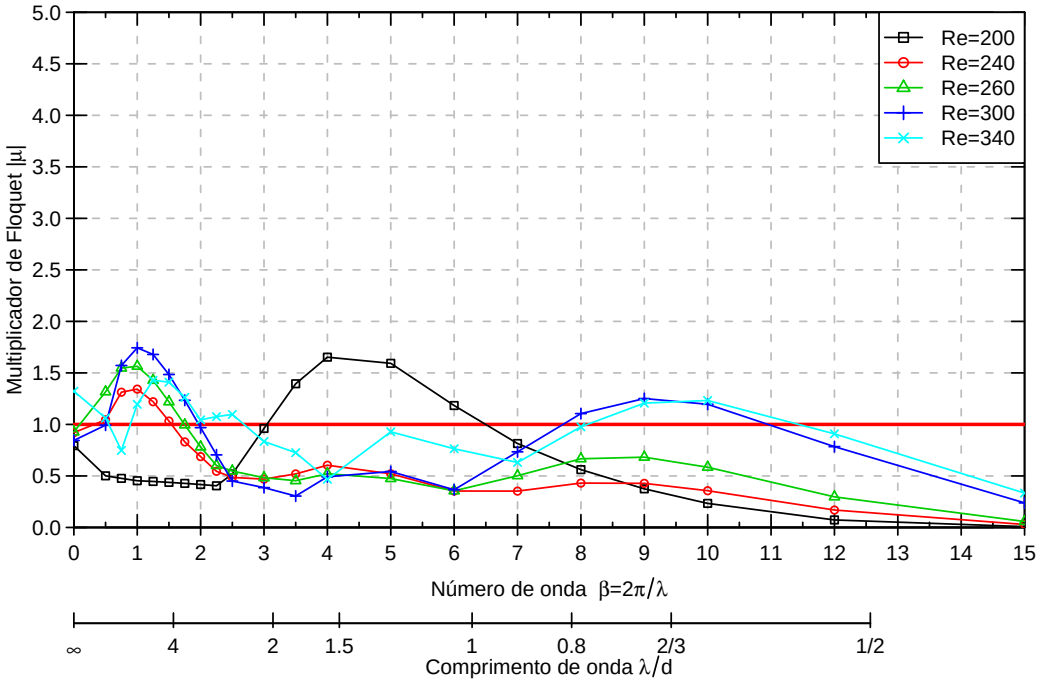


Figura 5.16: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.7$.

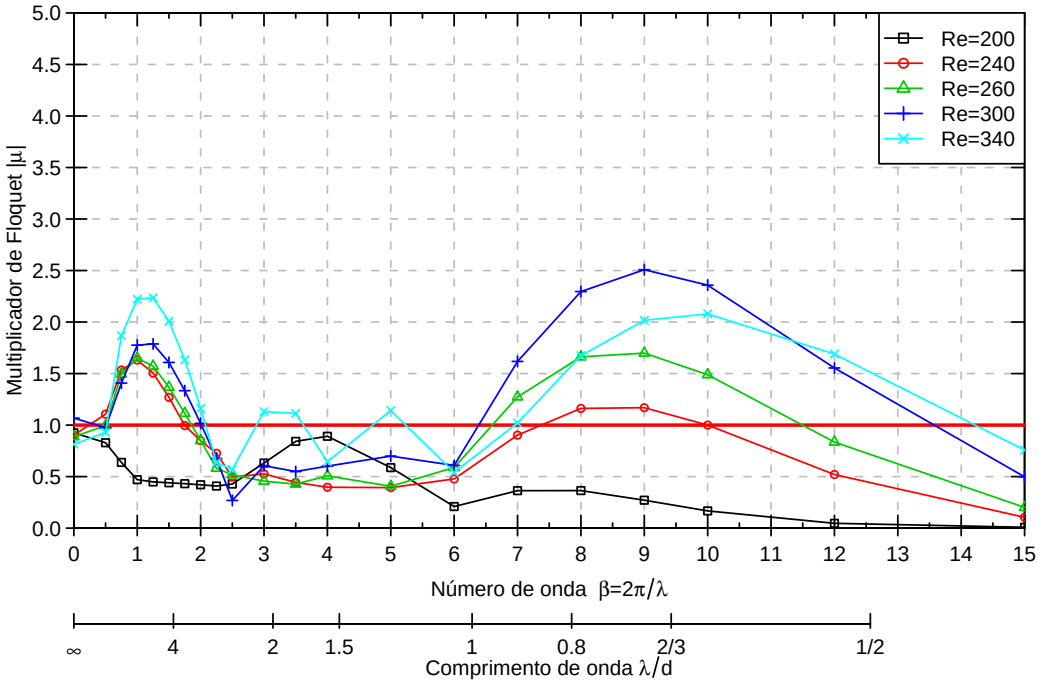


Figura 5.17: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.8$.

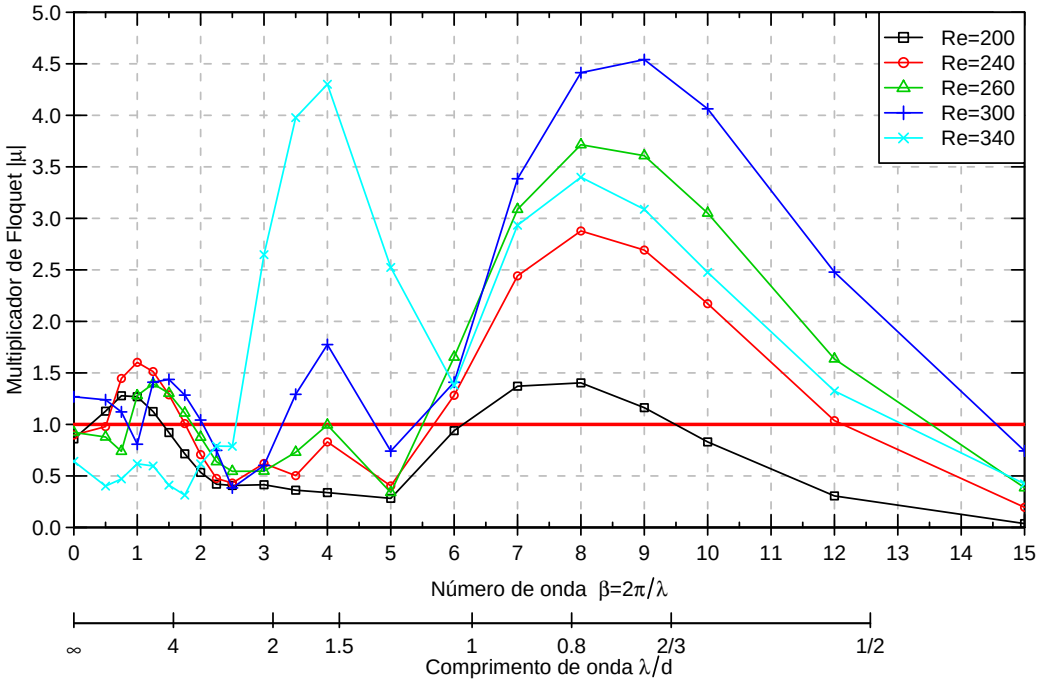


Figura 5.18: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 0.9$.

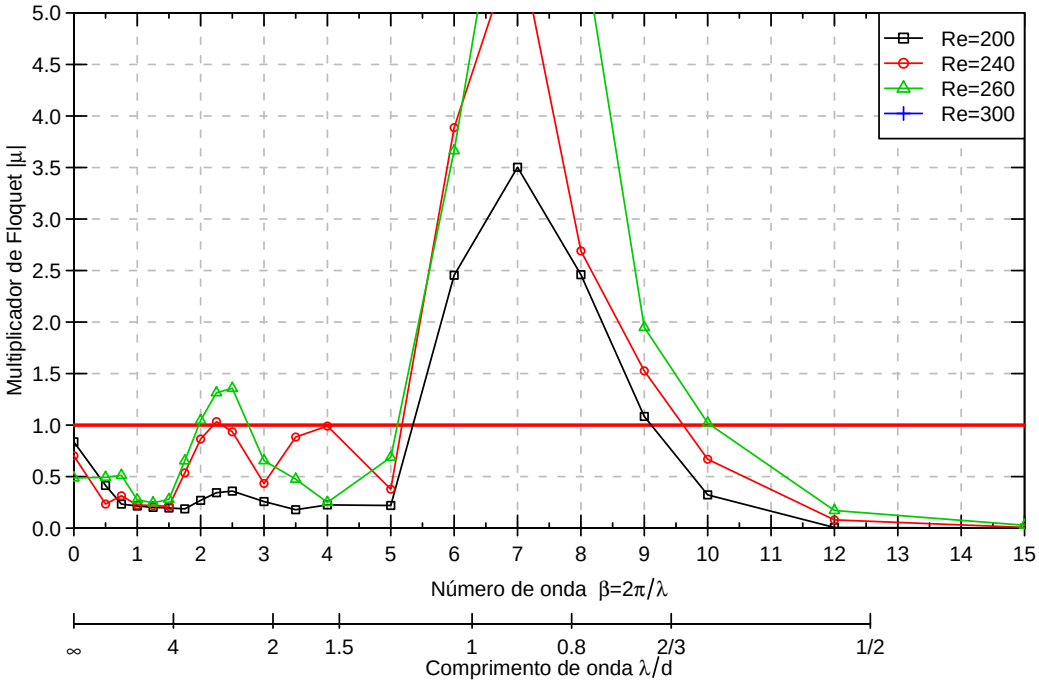


Figura 5.19: Multiplicadores de Floquet em função do número de onda para amplitude de oscilação $A/d = 1.0$.

Marques e Lopez (2005).

Para o caso seguinte, uma mudança de comportamento importante ocorre. O caso Re = 340 na Fig. 5.13 apresenta apenas um pico na região de número de onda intermediária. O pico ocorre a um número de onda aproximadamente 4, respectivo ao comprimento de onda por volta de $1.5d$. Este caso tem seu escoamento base com padrão de desprendimento de vórtices diferente; tem padrão P+S reportado na Tab. 5.3. O padrão P+S permite o aparecimento de um modo sub-harmônico (multiplicador de Floquet é um número real negativo). Os casos com número de Reynolds mais baixos, 200 a 260 ainda se mantêm estáveis e o Reynolds 300 apresenta ambos modos A e B.

Para a amplitude de oscilação seguinte, amplitude $0.6d$ na Fig. 5.14, apenas o número de Reynolds 200 se mantém absolutamente estável a perturbações tridimensionais e também é o único caso que ainda tem padrão de desprendimento 2S. Os demais casos apresentam o modo sub-harmônico devido a esteira P+S com comprimento de onda típico por volta de $1.5d$.

Conforme aumenta-se a amplitude de oscilação este comportamento vai se repetindo com escoamentos cujo padrão de desprendimento de vórtices é P+S. A diferença mais notável é que o modo B aparece para alguns casos destes com número de onda próximo de 7 e o modo sub-harmônico tem seu número de onda levemente alterado para mais baixo, se aproximando de 2. As Fig. 5.15–5.17 e Fig. 5.19 mostram esta evolução do comportamento.

Outra observação importante é o caso quando a esteira retorna ao padrão 2S: o caso com número de Reynolds 340 e amplitude de oscilação $0.9d$. Na Fig. 5.17 observa-se para este caso (curva azul clara) dois picos também: o de número de onda $\beta \approx 8$ é o modo B em seu comprimento de onda típico da esteira 2S de um cilindro. O outro pico próximo de $\beta \approx 4$ é um modo quasi-periódico (QP) representado por um multiplicador de Floquet complexo. Este modo também foi obtido em um cilindro fixo por Blackburn, Marques e Lopez (2005) a um número de Reynolds mais alto, 377 (ver Tab. 4.2). Aqui, com oscilação do cilindro, ele é obtido a um número de Reynolds 340 porém com oscilações do corpo com amplitude elevada, $0.9d$. Isso se deve às altas velocidades experimentadas pelo cilindro em oscilação com amplitude elevada, levando a um número de Reynolds instantâneo local elevado. A observação do modo QP não contradiz a literatura: em esteira com padrão de desprendimento 2S apenas modos A, B e QP aparecem segundo Blackburn, Marques e Lopez (2005).

Outra maneira de caracterizar os modos é pela região onde eles ocorrem na esteira.

Tipicamente, o modo A ocorre mais intensamente nos núcleos dos vórtices do campo base e na ligação entre os vórtices, enquanto o modo B ocorre nas regiões com vorticidade que ligam os vórtices emitidos e bem fracamente nos núcleos. As Fig. 5.20–5.22 servem para mostrar isso: a vorticidade em x do modo tridimensional é apresentada em contornos preenchidos coloridos sobreposta pelo campo base representado por linhas de nível de vorticidade em z.

As Fig. 5.20 são exemplos dos modos A e B para um cilindro oscilando. Este modos também ocorrem na esteira de um cilindro fixo (para este modos do cilindro fixo, veja as Fig. 5.24). A Fig. 5.20(a) é um caso com modo A para cilindro oscilando com amplitude $0.4d$ e freqüência $0.90f_{\mathrm{St}}$ onde são notáveis a região de mais intensidade das perturbações e a simetria citada na eq. (5.3). A Fig. 5.20(b) se refere ao modo B. Sua simetria também segue claramente a eq. (5.4).

Os modos sub-harmônicos também têm suas características bem evidentes em figuras como na Fig. 5.21. Nota-se que a cada grupo de vórtices no padrão P+S a vorticidade na direção x da perturbação muda de sinal. A distinção entre os dois modos apresentados na Fig. 5.21 se dá na região onde as perturbações se manifestam mais intensamente. No caso $Re = 200$ e $A/d = 0.7$, vê-se da Fig. 5.21(a) que a perturbação é mais intensa na ligação entre os vórtices de sinais opostos (o negativo do par P com o vórtice emitido isoladamente S). No outro caso, $Re = 300$ e $A/d = 0.7$ da Fig. 5.21(b), a perturbação se distribui nas ligações entre todos os vórtices.

Para completar esta caracterização, um exemplo do modo quasi-periódico que surge numa esteira com padrão 2S é apresentado na Fig. 5.22. Embora não seja possível apresentar o efeito da freqüência não-harmônica introduzida por este modo através desta figura, podemos inferir que este modo é mais intenso nos núcleos dos vórtices.

Um outro modo interessante de observar o conjunto de parâmetros com que surgem instabilidade é em um mapa de número de Reynolds por comprimento de onda da instabilidade (λ), como feito na seção anterior (Fig. 4.9). Nesta seção, somente os mapas que trazem informações novas são apresentados.

Fig. 5.23 apresenta dois mapas com intuito de comparação: o mapa Fig. 5.23(a) é formado com os dados realizados nesta pesquisa para amplitude de oscilação $0.4d$ [4] e o Fig. 5.23(b) é de Barkley e Henderson (1996) para um cilindro fixo.

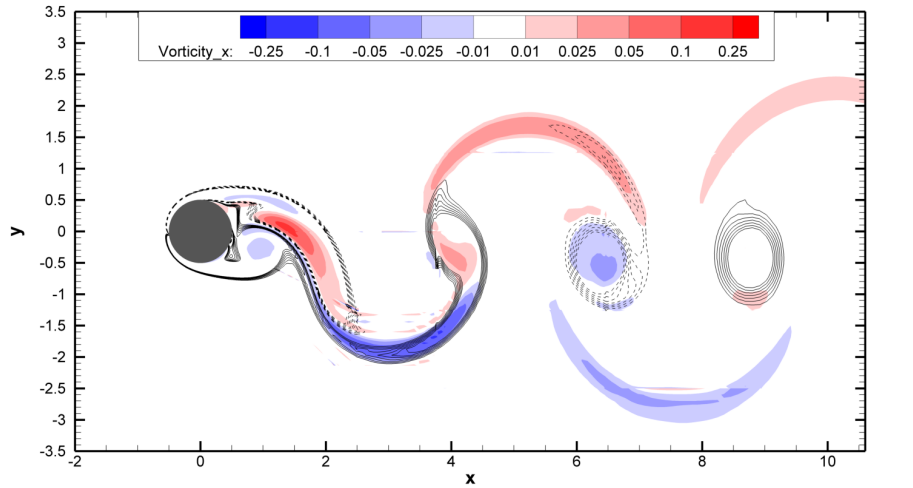
A semelhança da região instável com comprimento de onda λ mais curto (região

[4]Como observação a parte, o mapa para o caso de amplitude $0.5d$ apresentaria o mesmo aspecto.

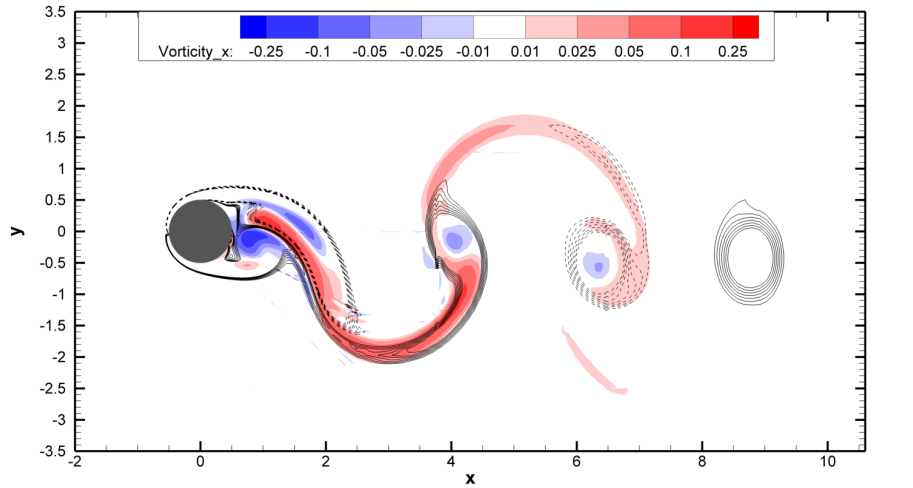
inferior) entre as figuras 5.23(a) e 5.23(b) é marcante. Aparentemente o modo B não é afetado em oscilações de amplitude $0.4d$. A região do modo A, com comprimento de onda λ mais longo (região superior) é bem diferente; o modo A é consideravelmente afetado e inibido pela oscilação do corpo.

Com este resultados da análise de estabilidade e o uso de simulações numéricas diretas, pode-se ir além dos resultados obtidos por Leontini, Thompson e Hourigan (2007). Podemos inferir que o movimento oscilatório do cilindro é estabilizante em amplitudes baixas porque aparentemente o movimento inibe a instabilidade de comprimento de onda maior, o modo A. Para amplitudes mais altas, a instabilidade deflagrada é semelhante ao modo B, que é uma instabilidade na esteira próxima e ocorre nas camadas cisalhantes que ligam os tubos de vórtices desprendidos. O movimento em baixa amplitude tende a aumentar a correlação ao longo da envergadura nos tubos de vórtice desprendidos e inibe o modo A por ser uma instabilidade dos tubos como mostra a Fig. 5.24(a) (ver que dentro das linhas identificando os vórtices a cor é diferente de verde) e a Fig. 5.4(a), onde o modo é mais intenso nos vórtices desprendidos. Já o modo B não é tão alterado porque é uma instabilidade das camadas cisalhantes que ligam os vórtices (ver na Fig. 5.24(b) que os núcleos dos vórtices desprendidos são verdes, e a parte colorida liga este vórtices) e esta interação entre os vórtices depende da intensidade deles.

Estes resultados complementam o estudo do limiar de amplitude de oscilação para o qual a esteira se estabiliza apresentado na seção 5.3. A esteira é estabilizada pelo movimento do cilindro apenas em uma faixa de amplitude limitada. Nesta seção mostrou-se que, para Reynolds 200, a esteira é absolutamente estável a perturbações tridimensionais para amplitude de oscilação do cilindro até aproximadamente $0.60d$, completando a faixa: a esteira é estável quando o cilindro oscila com $0.03d < A < 0.60d$ a Reynolds 200.

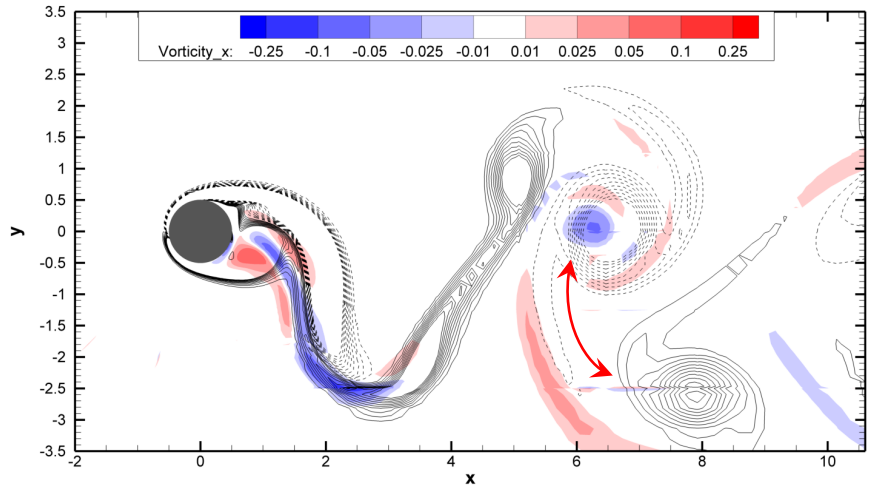


(a) $Re = 300$, $A/d = 0.4$, $\beta = 2.25$.

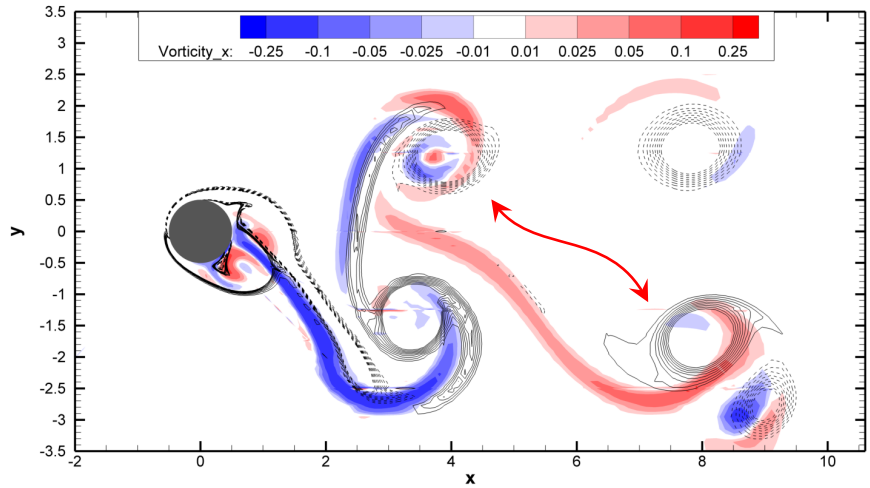


(b) $Re = 300$, $A/d = 0.4$, $\beta = 7.00$.

Figura 5.20: Campo de vorticidade em x da perturbação ($\omega_x d/U_\infty$, de valores negativos em azul, pelo branco, a positivos em vermelho) superposto pela vorticidade em z do campo base ($\omega_z d/U_\infty$, do negativo em linhas tracejadas ao positivo em linhas cheias). A posição na envergadura é a que a vorticidade é mais intensa ($z = 0$) e o instante é o de deslocamento máximo no ciclo de oscilação.

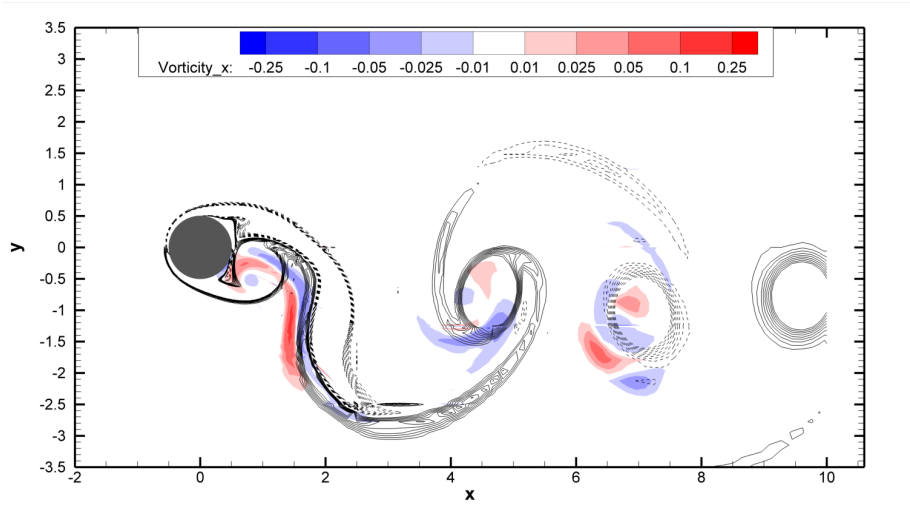


(a) $Re = 200$, $A/d = 0.7$, $\beta = 4.00$.



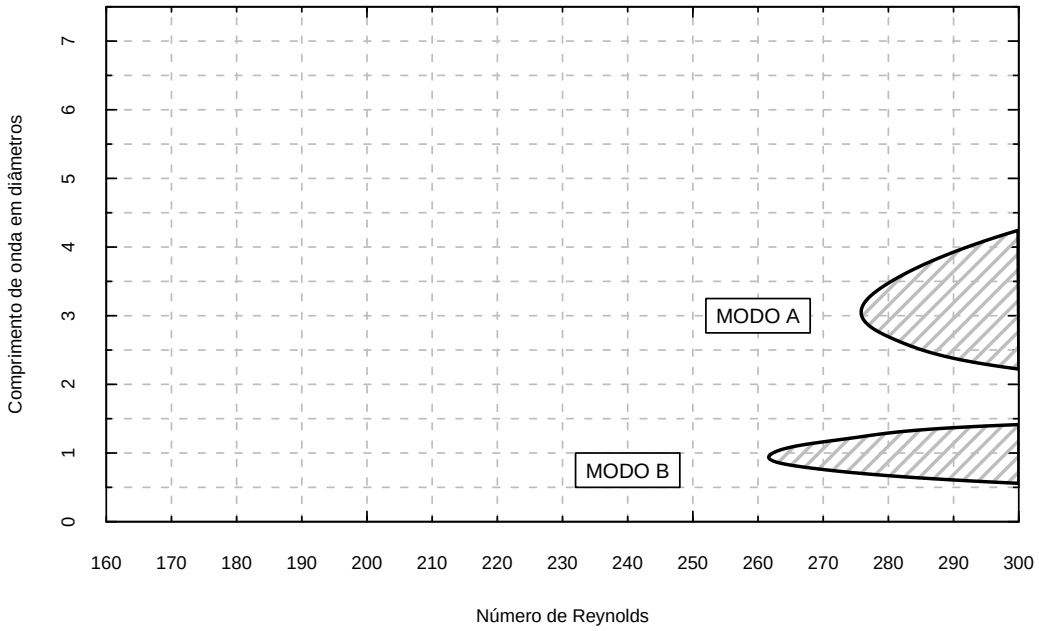
(b) $Re = 300$, $A/d = 0.7$, $\beta = 9.00$.

Figura 5.21: Campo de vorticidade em x da perturbação ($\omega_x d/U_\infty$, de valores negativos em azul, pelo branco, a positivos em vermelho) superposto pela vorticidade em z do campo base ($\omega_z d/U_\infty$, do negativo em linhas tracejadas ao positivo em linhas cheias). A posição na envergadura é a que a vorticidade é mais intensa ($z = 0$) e o instante é o de deslocamento máximo no ciclo de oscilação.

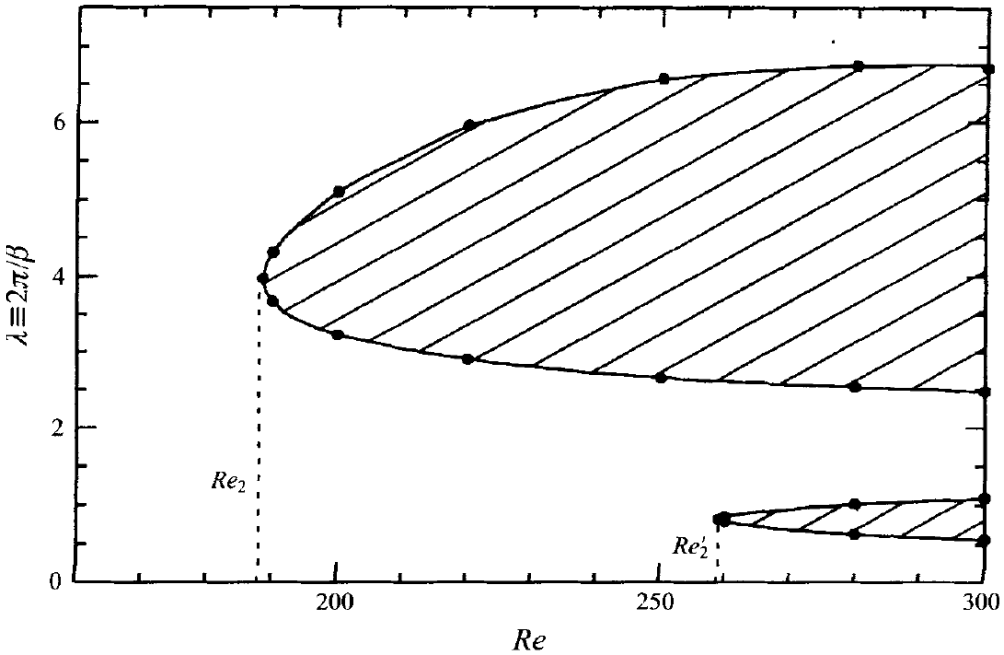


(a) $Re = 340$, $A/d = 0.9$, $\beta = 8.00$.

Figura 5.22: Campo de vorticidade em x da perturbação ($\omega_x d/U_\infty$, de valores negativos em azul, pelo branco, a positivos em vermelho) superposto pela vorticidade em z do campo base ($\omega_z d/U_\infty$, do negativo em linhas tracejadas ao positivo em linhas cheias). A posição na envergadura é a que a vorticidade é mais intensa ($z = 0$) e o instante é o de deslocamento máximo no ciclo de oscilação.

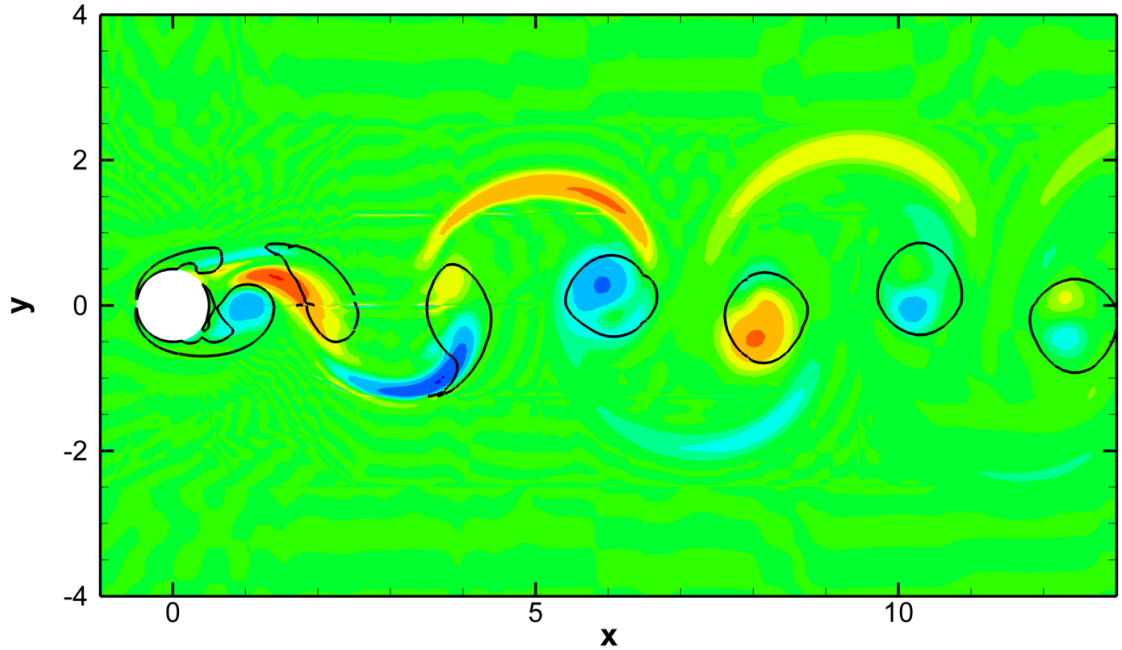


(a) Amplitude de oscilação $0.4d$ e freqüência $0.95f_{st}$.

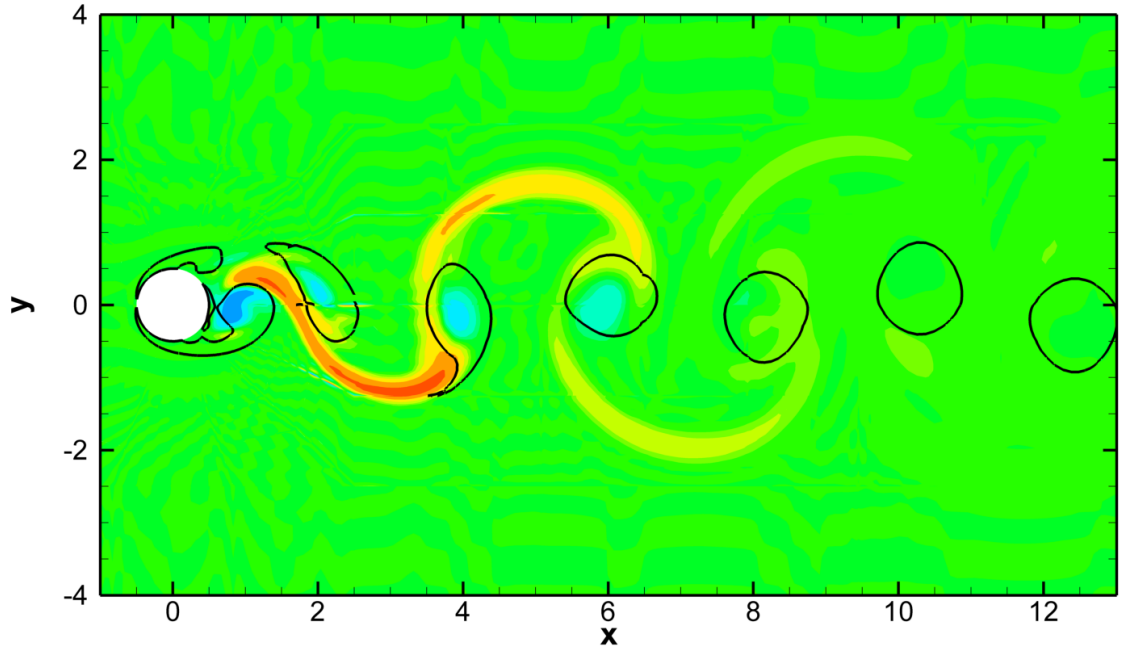


(b) Cilindro fixo. Retirado de Barkley e Henderson (1996).

Figura 5.23: Comparação entre mapas de estabilidade de Floquet. (a) cilindro oscilando a $0.95f_{st}$ e amplitude $0.4d$ e (b) cilindro fixo. A região hachurada é a região no espaço de parâmetros onde há instabilidade.



(a) Modo A.



(b) Modo B.

Figura 5.24: Contorno de vorticidade em x adimensional ($\omega_x d/U_\infty$) do modo de Floquet normalizado superposto pelo campo base da análise de estabilidade para cilindro fixo. Escala de cor do azul, vorticidade negativa, ao vermelho, vorticidade positiva, e as linhas representam os núcleos de vórtices do campo base identificados segundo o critério λ_2.

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste texto, desenvolveu-se o estudo do escoamento ao redor de um cilindro, com foco em oscilações forçadas. Aqui resumem-se as conclusões do estudo desenvolvido nesta tese. Este capítulo de fechamento segue a estrutura do texto da tese. Comentários sobre o escoamento ao redor de um cilindro fixo são traçados primeiramente, abordando o estudo do efeito da dimensão ao longo da envergadura para o domínio computacional e as simulações numéricas diretas comparadas ao estuda de estabilidade de Floquet. Em seguida, usando como base de comparação as observações do escoamento ao redor de um cilindro fixo, desenvolvem-se as conclusões sobre a investigação do escoamento em torno de um cilindro em oscilação forçada que envolve simulações numéricas diretas e análise de estabilidade de Floquet.

6.1 Discussão sobre escoamento ao redor de um cilindro fixo

Nesta tese foi mostrado que o tamanho do domínio computacional para a simulação numérica tem grande influência no escoamento resultante. Na seção 4.1, o efeito do comprimento periódico na direção ao longo do eixo do cilindro foi investigado. Mostra-se que o escoamento torna-se absolutamente bidimensional para um comprimento periódico por volta de $0.35d$.

Embora tridimensionalidades existam no escoamento mesmo em comprimentos periódicos menores que os comprimentos típicos das primeiras instabilidades tridimensionais de um cilindro fixo (ver seção 4.3 que apresenta os comprimentos $\approx 4d$ do modo A e $\approx 0.8d$ do modo B), o escoamento não é bem representado para domínios com estes comprimentos periódicos. Seguindo a Fig. 4.4, pode-se admitir que o escoamento começa a ser bem representado a partir de um comprimento periódico de $6d$, que apresenta um nível de energia por dimensão do domínio próximo ao observado no maior domínio simulado.

Outra observação importante é a ocorrência de duas soluções possíveis, partindo da mesma condição inicial com ruido aleatório, para comprimentos periódicos $0.7d$ e $0.8d$. Há duas soluções observadas, uma classificada como modulada e outra como harmônica. As duas soluções apresentam características diferentes. na primeira, o coeficiente de sustentação médio da envergadura apresenta modulação intensa na solução que apresenta a norma de energia das tridimensionalidades média mais alta e apresenta uma variação mais intensa de C_L ao longo da envergadura. Já a solução harmônica é nomeada assim por apresentar uma série temporal do coeficiente de sustentação médio da envergadura harmônico e menor intensidade de energia nas tridimensionalidades.

Para completar, observa-se um pico de energia das tridimensionalidades em um comprimento periódico $0.8d$ não-harmônico. Isso se deve à manifestação do modo B, cujo comprimento característico é aproximadamente $0.8d$ segundo análise de Floquet realizada na seção 4.3.

Simulações numéricas diretas do escoamento ao redor de um cilindro fixo foram apresentadas. O intuito é formar uma base de comparação já que o escoamento ao redor de um cilindro foi intensamente estudado ao longo do último século.

As estruturas vorticais, identificadas pelo critério λ_2 (BARKLEY; HENDERSON, 1996), são apresentadas na Fig. 4.7. Pode-se associar o comprimento característico ao longo da envergadura das tridimensionalidades às instabilidades observadas através de uma análise linear com o método de Floquet. Para Re = 200, apenas o modo A cujo comprimento característico é $\lambda_{\mathrm{A}} \approx 4.0d$ pode ser observado. Ao aumentar o número de Reynolds para 300, as tridimensionalidades da esteira se manifestam em $0.8d$. Este comprimento é associado ao modo B da análise de estabilidade. Para números de Reynolds mais altos, estruturas em escalas menores são observadas conforme esperado.

Em seguida, apresenta-se a análise de estabilidade de Floquet para a esteira de um cilindro fixo. Este análise foi realizada para validar o procedimento, comparando os resultados com os da literatura (e.g. Barkley e Henderson (1996)) e ter dados de comparação para os resultados do cilindro oscilando.

Na análise de estabilidade de Floquet, levantou-se o mapa de estabilidade da esteira do cilindro fixo, reproduzido abaixo. Os resultados estão de acordo com Barkley e Henderson (1996), validando o procedimento utilizado.

Uma extensão da análise para um número de Reynolds 400 foi realizada a fim de se obter o modo quasi-periódico observado por Blackburn, Marques e Lopez (2005). Neste

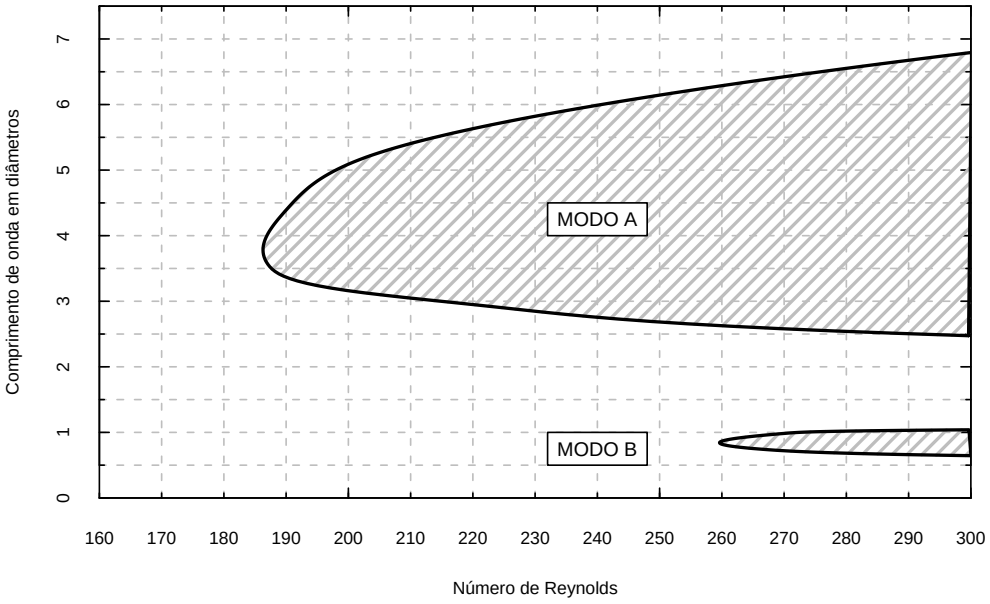


Figura 6.1: Mapa de estabilidade para escoamento em torno de cilindro fixo resultante da análise de estabilidade. A região hachurada mostra que o conjunto de parâmetros ali resulta em um sistema instável. A região superior é associada ao modo A e a inferior ao modo B.

Reynolds, todos os 3 modos observáveis em esteira de um cilindro fixo foram identificados com seus respectivos comprimentos característicos: modo A com $\lambda_{\mathrm{A}} \approx 4.0d$, modo B com $\lambda_{\mathrm{B}} \approx 0.8d$ e modo QP com $\lambda_{\mathrm{QP}} \approx 1.8d$.

Lembrando dos resultados a análise do comprimento periódico apresentada na tese, há um pico de energia quando a escolha do comprimento L_z é $0.8d$. Este é o comprimento característico das tridimensionalidades do modo B obtido através de análise de estabilidade. Pra ao Reynolds simulado 400, este é um comprimento com a maior taxa de crescimento (ver módulo do multiplicador de Floquet em $\beta \approx 8$ na Fig. 4.10).

6.2 Escoamento ao redor de um cilindro em oscilação forçada

De início, verificou-se a fronteira de sincronização da esteira com o movimento do cilindro. A investigação realizada nesta tese, principalmente a análise de estabilidade de Floquet, depende da periodicidade do sistema. Quando há sincronização, a freqüência da esteira é capturada pelo movimento do corpo. Procurou-se aqui a sincronização primária, definida quando a razão entre a freqüência de oscilação do corpo e a freqüência da esteira sob influência da oscilação é 1.

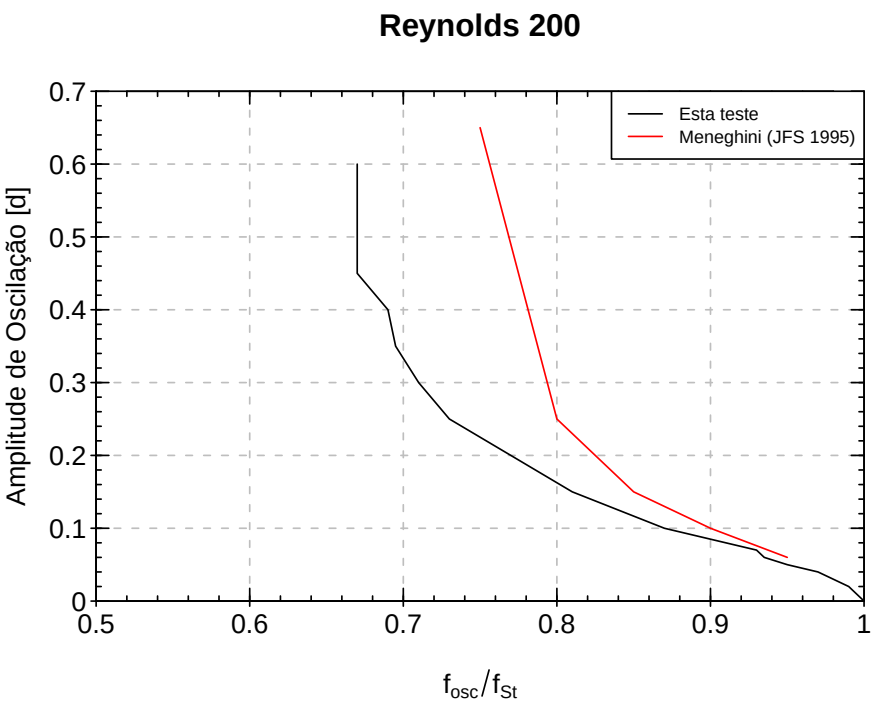


Figura 6.2: Fronteira de sincronização levantada através de simulação numérica direta. Região onde há sincronização é à direita da curva mostrada. f_{osc} é a freqüência de oscilação do cilindro e f_{St} é a freqüência de desprendimento de vórtices do cilindro fixo no mesmo Reynolds.

O critério adotado para definir se a esteira está sincronizada é: quando a menor freqüência no espectro do coeficiente de sustentação é igual à freqüência imposta de oscilação do cilindro, admite-se que há sincronização. As Fig. 5.2 apresentam dois dados, os pontos não pintados são simulações que não apresentaram sincronização e os pontos pintados apresentam sincronização. A curva de sincronização foi traçada pelo ponto médio destes pares para uma dada amplitude.

A Fig. 6.2 mostra a fronteira levantada nesta tese usando o método dos elementos espectrais em comparação com a levantada por Meneghini e Bearman (1995) através do método dos vórtices discretos. Esta discrepância entre as curvas de sincronização pode ser atribuída à diferença de ordem entre os métodos e ao emprego de simulações tridimensionais no caso desta tese. Em baixa amplitude, os escoamento é absolutamente estável a perturbações tridimensionais como é avaliada na seção 5.4, portanto simulações bidimensionais são suficientes para representar a física do escoamento justificando a proximidade das fronteiras de sincronização na Fig. 6.2 em amplitudes menores que $0.2d$.

Em suma, todas simulações realizadas nesta tese estão dentro da fronteira de

sincronização, garantindo a hipótese primordial da análise de Floquet que é a existência de uma periodicidade do sistema.

As simulações numéricas diretas preliminares, apresentadas na seção 5.2, mostram os efeitos das oscilações na esteira. Os principais efeitos apresentados são:

- Mudança no padrão de desprendimento de vórtices:
  - As simulações numéricas diretas apresentaram 3 padrões: o 2S (2 vórtices de circulação oposta por ciclo de oscilação) que é a esteira de von Kármán, P+S (1 par e 1 vórtice desprendidos por ciclo) que também é observado em simulações bidimensionais, e o 2P (2 pares de vórtices desprendidos por ciclo de oscilação) que só foi observado nas simulações tridimensionais. Os padrões estão apresentados nas Fig. 5.5 e 5.6.
- Esteira absolutamente estável a perturbações tridimensionais com o número de Reynolds 200 e amplitude de oscilação $0.4d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$ como mostra a Fig. 5.4(a).[1]
- Surgimento de tridimensionalidades na esteira do cilindro oscilando com aspectos diferentes das presentes na esteira de um cilindro fixo, como nas Fig. 5.4 e Fig. 5.7 que mostram as identificações de estruturas vorticais pelo método λ_2

Algumas considerações sobre as simulações numéricas diretas do escoamento ao redor do cilindro oscilando devem ser realçadas aqui. Para número de Reynolds 200, a esteira de um cilindro fixo é instável a perturbações tridimensionais (ver, por exemplo, Barkley e Henderson (1996) e seção 4.3). Como citado acima as tridimensionalidades são suprimidas quando há oscilação, na condição com amplitude $0.4d$ e freqüência $0.95f_{\mathrm{St}}$ neste mesmo número de Reynolds. Isso é ratificado no estudo do limiar de amplitude para a supressão das tridimensionalidades da esteira discutido abaixo.

Outra observação notável é o padrão de desprendimento de vórtices 2P, observado para amplitudes de oscilação $1.0d$ apenas nas simulações numéricas tridimensionais (ver Tab. 6.1). Nenhuma das simulações bidimensionais realizadas neste trabalho apresentou este padrão de desprendimento como mostra a Tab. 6.2 abaixo.

Sobre as tridimensionalidades do escoamento, quando o padrão de desprendimento de vórtices é P+S observa-se tridimensionalidade com característica sub-harmônica.

[1] Situação ratificada pela análise de estabilidade de Floquet para esta amplitude e Reynolds. Também mostra-se que há uma amplitude mínima para a supressão das tridimensionalidades na esteira neste mesmo trabalho.

Tabela 6.1: Regime de desprendimento de vórtices obtidos nas simulações tridimensionais relatadas na seção 5.2.

Número de Reynolds	Amplitude $[d]$ 0.4	1.0
200	2S	P+S
300	2S	2P
400	2S	2P
500	2S	2P

Tabela 6.2: Regime de desprendimento de vórtices obtidos nas simulações bidimensionais.

Número de Reynolds	Amplitude $[d]$ 0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	0.9	1.0
200	2S	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
240	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
260	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
300	2S	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S
340	2S	P+S	P+S	P+S	P+S	P+S	2S	

A análise de estabilidade de Floquet resulta em modos tridimensionais sub-harmônicos quando o padrão de desprendimento de vórtices é P+S.

Na investigação da existência do limiar de amplitude para as amplitudes de oscilação, mostrou-se que para número de Reynolds 200 o escoamento só retoma as tridimensionalidades quando a amplitude é menor que $\sim 0.03d$. Para amplitudes de oscilação mais baixas que este limiar, o modo A é instável de maneira similar ao caso com um cilindro fixo.

Quanto ao número de Reynolds 300, a amplitude limiar é bem mais alta e $\approx 0.27d$. Abaixo desta amplitude de oscilação, ambos modos A e B são instáveis, retomando uma situação similar à esteira de um cilindro fixo a número de Reynolds 300.

Os dois números de Reynolds apresentados têm limiares de amplitude bem diferentes. Como citado anteriormente, a oscilação parece afetar mais intensamente o modo A que é uma instabilidade mais intensa nos núcleos dos vórtices desprendidos e por isso o número de Reynolds 200, que no caso fixo apenas tem o modo A instável, é mais afetado.

Com a análise de estabilidade de Floquet, pôde-se inferir o efeito da amplitude de oscilação na transição secundária da esteira.

Quando o padrão de desprendimento de vórtices é 2S, algumas situações foram observadas.

Observou-se esteira absolutamente estável para os números de Reynolds mais baixos, 200 a 260, oscilando com amplitude baixas menores que $\approx 0.6d$. Posteriormente mostrou-se que a instabilidade que ocorre na esteira de um cilindro fixo é observada novamente para cilindro oscilando abaixo de uma certa amplitude limiar.

Esta estabilização da esteira devido ao movimento oscilatório ocorre porque o modo A é afetado pela oscilação. O movimento em baixa amplitude tende a aumentar a correlação ao longo da envergadura nos tubos de vórtice desprendidos e inibe o modo A (modo com mesma simetria da esteira de von Kármán eq. (5.3) e comprimento periódico na direção da envergadura de $\sim 4d$) por ser uma instabilidade dos tubos vorticais. Enquanto para cilindro fixo a número de Reynolds 200 se observa apenas o modo A, com oscilações acima de $0.03d$ e até por volta de $0.7d$ observa-se um escoamento bidimensional estável.

Quando a esteira com padrão 2S fica instável, ambos modo A e modo B (modo com comprimento periódico na direção da envergadura de $\sim 0.8d$ e simetria eq. (5.4)) são deflagrados. Observou-se este mesmo padrão de desprendimento num único caso com amplitude alta, o $0.9d$ e Reynolds $Re = 340$. Neste caso, um modo quasi-periódico (introduzindo uma freqüência não-harmônica no escoamento e com comprimento de onda intermediário entre o A e B) foi observado.

Todas estes modos da esteira 2S estão de acordo com a restrição da análise feita por Marques, Lopez e Blackburn (2004), que somente se observa modos instáveis do tipo A, B ou quasi-periódico a partir de um sistema com a simetria da esteira de von Kármán (eq. (6.1))

$$\text{von Kármán}: \begin{cases} \tilde{u}(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{v}(x,y,z,t) = -\tilde{v}(x,-y,z,t+T/2) \\ \tilde{w}(x,y,z,t) = \tilde{w}(x,-y,z,t+T/2) \end{cases} \tag{6.1}$$

Ao aumentar a amplitude de oscilação, o modo de desprendimento é alterado. Observa-se que, a cada ciclo de oscilação, 1 par de vórtices com sinais opostos é desprendido de um lado depois 1 vórtice isolado é desprendido do outro. Este padrão observado é P+S.

A partir deste padrão, instabilidades com características diferentes surgem. A principal características dos modos observados nestes casos é o período dobrado. Os modo instáveis observados são sub-harmônicos da esteira (por isso nomeados modos sub-

harmônicos neste trabalho) e apresenta comprimento de onda intermediário também. Esta característica foi observada nas simulações numéricas diretas apresentadas neste texto (ver Fig. 5.8(a) por exemplo).

Uma distinção entre os resultados das simulações numéricas diretas e a análise de estabilidade linear é o padrão de desprendimento de vórtices 2P.

Enquanto simulações numéricas diretas das equações de Navier-Stokes completas produzem em alguns casos o padrão 2P (ver Tab. 6.1), este padrão não foi observado em nenhuma simulações numéricas bidimensionais desta tese (ver Tab. 6.2). Procurou-se uma ligação para mudança de padrão de desprendimento através da análise de estabilidade de Floquet mas não se achou indicativos de mudanças de padrão de desprendimento.

Métodos de decomposição do escoamento (POD ou decomposição com os modos do operador de Koopman) podem ajudar a entender as estruturas da esteira tridimensional não observadas através da análise de estabilidade já que estas decomposições não requerem hipóteses como pequenas perturbações e equações linearizadas.

6.3 Trabalhos futuros

A área do estudo de estabilidade de escoamentos tem crescido nos últimos 10 anos devido ao grande aumento de capacidade computacional. Já é possível tratar problemas da ordem de grandeza necessária para escoamento de fluidos em geometrias mais complexas: situações em que não há solução analítica para escoamento.

A análise de estabilidade de Floquet tem um grande potencial: é válida para escoamentos base tanto estacionário quanto periódicos. Ainda assim esta análise tem grandes limitações especialmente na representação de sistemas fluidos. Uma hipótese fundamental empregada nesta análise é o tratamento de sistemas linearizados: isso pode limitar a abrangência desta análise. Outro ponto para o qual tal análise é cega é o comportamento do sistema em curto prazo: sistemas fluidos, mesmo linearizados, são tipicamente não-ortogonais e isso implica que o comportamento previsto pela análise de Floquet somente representa o comportamento assintótico do sistema. Para o estudo da dinâmica em curto prazo é necessária uma abordagem não-modal (SCHMID, 2007). Algumas técnicas são o "raio numérico" e crescimento transiente ótimo que já são abordadas por alguns na literatura: Schmid e Henningson (2001), Barkley, Blackburn e Sherwin (2007) e Abdessemed et al. (2008), por exemplo.

A aplicação destas técnicas para o escoamento ao redor de cilindro oscilando pode trazer luz a certos aspectos que não são explicados pela análise de estabilidade modal e são observados experimentalmente e em simulações numéricas diretas. Um aspecto é a mudança do padrão de desprendimento de vórtices para 2P. Outros aspectos como os ramos de resposta de vibrações induzidas por vórtices, os ramos superior e inferior (Fig. 6.3), são apenas inferidos destes resultados mas não explicados. Respostas histeréticas da esteira também são inferidas de transições subcríticas obtidas pela análise de Floquet mas estas mudanças ocorrem em escalas de tempo curtas e a análise modal assintótica não é capaz de capturá-la.

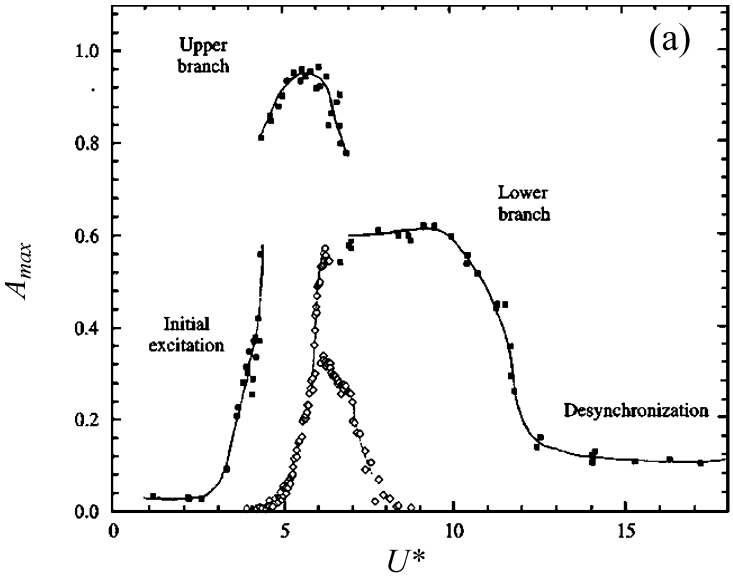


Figura 6.3: Ramos de resposta de vibração induzida por vórtices em cilindros. A_{max} é a amplitude normalizada pelo diâmetro do cilindro e $U^* = U_\infty / f_n d$ é a velocidade reduzida. Retirado de Williamson e Govardhan (2004).

Outra técnica que pode ser usada na avaliação da dinâmica da esteira tridimensional é a decomposição do escoamento. Para citar algumas POD, expansões de Fourier e decomposição do operador de Koopman.

A técnica POD (*proper orthogonal decomposition*, ver Rowley (2005) por exemplo) é aplicada para se representar o escoamento com poucos graus de liberdade e mantendo-se a dinâmica principal, em geral com fins de controle do escoamento. Outra meio de decomposição do escoamento é a por expansão de Fourier que destaca freqüências diferentes no escoamento, mas limita-se aos harmônicos da expansão e suas interações além de exigir formalmente uma periodicidade. Já a decomposição do operador de Koopman, destaca as freqüências principais (não necessariamente harmônicas) do escoamento e suas escalas,

ainda sem o limite da exigência de periodicidade do sistema.

REFERÊNCIAS

ABDESSEMED, N. et al. Transient growth analysis of the flow past a circular cylinder. *Physics of Fluids*, 2008. Under review.

BABUŠKA, I.; DORK, M. R. Error estimates for the combined h and p versions of the finite element method. *Numerische Mathematik*, v. 37, p. 257–277, 1981.

BABUŠKA, I.; SURI, M. The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties. *SIAM Review*, v. 36, n. 4, p. 578–632, 1994.

BARKLEY, D. Confined three-dimensional stability analysis of the cylinder wake. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 71, n. 1, p. 1–3, January 2005.

BARKLEY, D.; BLACKBURN, H. M.; SHERWIN, S. J. Direct optimal growth analysis for timesteppers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 231, p. 1–20, 2007.

BARKLEY, D.; HENDERSON, R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 322, p. 215–241, 1996.

BEARMAN, P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v. 16, p. 195–222, 1984.

BEARMAN, P. W. Challenging problems in bluff body wakes. In: ECKELMANN, H. et al. (Ed.). *Proc. IUTAM Symposium on Bluff-Body Wakes, Dynamics and Instabilities*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992. p. 1–10.

BEARMAN, P. W.; OBASAJU, E. D. An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 119, p. 297–321, 1982.

BERGER, E. Suppression of vortex shedding and turbulence behind oscillating cylinders. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 9, p. S191–S193, 1967.

BLACKBURN, H. M.; LOPEZ, J. M. On three-dimensional quasiperiodic Floquet instabilities of two-dimensional bluff body wakes. *Physics of Fluids*, v. 15, n. 8, p. 57–60, 2003.

BLACKBURN, H. M.; MARQUES, F.; LOPEZ, J. M. Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 522, p. 395–411, 2005.

BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2. ed. [S.l.]: Dover publications, 2001. Revised.

CANUTO, C. et al. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2006.

CANUTO, C. et al. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2007.

CARMO, B. S. *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.

CARMO, B. S. et al. Wake transition in the flow around two circular cylinders in staggered arrangements. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 597, p. 1–29, February 2008.

FINLAYSON, B. A. *The method of weighted residuals and variational principles with application in fluid mechanics, heat and mass transfer*. [S.l.]: Academic Press, 1972. (Mathematics in science and engineering, v. 87).

GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 25, n. Part 2, p. 401–413, 1966.

GIORIA, R. S.; CARMO, B. S.; MENEGHINI, J. R. Three-dimensional wake structures of flow around an oscillating circular cylinder. In: *Proc. OMAE 2007: 26th International Conference on Offshore Mechanics and Artic Engineering*. San Diego, USA: ASME, 2007.

GIORIA, R. S. et al. Floquet stability analysis of the flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 25, p. 676–686, 2009.

GIORIA, R. S.; MENEGHINI, J. R. Three-dimensionalities of the flow around an oscillating circular cylinder. In: *IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control*. Corfu, Greece: [s.n.], 2007. Poster presentation.

GUNZBURGER, M. D. *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: a Guide to Theory, Practice and Algorithms*. [S.l.]: Academic Press, 1989. 270 p.

HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 352, p. 65–112, 1997.

HENDERSON, R. D.; KARNIADAKIS, G. E. Unstructured spectral element methods for simulation of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, v. 122, p. 191–217, 1995.

HUERRE, P.; MONKEWITZ, P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech*, v. 22, p. 473–537, 1990.

HUNT, J. C. R.; WRAY, A. A.; MOIN, P. *Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows*. [S.l.], 1988.

INOUE, O.; YAMAZAKI, T. Secondary vortex streets in two-dimensional cylinder wakes. *Fluid Dynamics Research*, v. 25, p. 1–18, 1999.

INOUE, O.; YAMAZAKI, T.; BISAKA, T. Numerical simulation of forced wakes around a cylinder. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, v. 16, p. 327–332, 1995.

IOOSS, G.; JOSEPH, D. D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. (Undergraduate Texts in Mathematics).

JABARDO, P. S. *Estudo da Convergência da Análise de Estabilidade de Floquet*. 2008. Comunicação particular.

JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 285, p. 69–94, 1995.

KARNIADAKIS, G. E. Spectral element - Fourier methods for incompressible turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 80, p. 367–380, 1990.

KARNIADAKIS, G. E.; BULLISTER, E. T.; PATERA, A. T. A spectral element method for solution of the two- and three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. In: BERGAN, P.; BATHE, K. J.; WUNDERLICH, W. (Ed.). *Finite element methods for nonlinear problems*. [S.l.]: Springer, 1986. p. 803–817.

KARNIADAKIS, G. E.; ISRAELI, M.; ORSZAG, S. A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 97, p. 414–443, 1991.

KARNIADAKIS, G. E.; SHERWIN, S. J. *Spectral/*hp *element methods for CFD*. 2nd. ed. New York: Oxford University Press, 2005.

KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. Frequency selection and asymptotic states in laminar wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 199, p. 441–469, 1989.

KOOPMAN, G. H. The vortex wakes of vibrating cylinders at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 28, n. Part 3, p. 501–512, 1967.

KORCZAK, K. Z.; PATERA, A. T. An isoparametric spectral element method for solution of Navier-Stokes equations in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 62, p. 361–382, 1986.

LEONTINI, J. S.; THOMPSON, M. C.; HOURIGAN, K. Three-dimensional transition in the wake of a transversely oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 577, p. 79–104, 2007.

LI, L.; SHERWIN, S. J.; BEARMAN, P. W. A moving frame of reference algorithm for fluid/structure interaction of rotating and translating bodies. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 38, p. 187–206, 2002.

LOPEZ, J. I. H.; MENEGHINI, J. R.; SALTARA, F. Discrete approximation to the global spectrum of the tangent operator for flow past a circular cylinder. *Applied Numerical Mathematics*, v. 58, p. 1159–1167, 2008.

MARQUES, F.; LOPEZ, J. M.; BLACKBURN, H. M. Bifurcations in systems with Z_2 spatiotemporal and O(2) spatial symmetry. *Physica D*, v. 189, p. 247–276, 2004.

MENEGHINI, J. R.; BEARMAN, P. W. Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 9, p. 435–455, 1995.

MORSE, T. L.; WILLIAMSON, C. H. K. Fluid forcing, wake modes, and transitions for a cylinder undergoing controlled oscillations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 25, p. 697–712, 2009.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 57–96, 2003.

PATERA, A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, v. 54, p. 469–488, 1984.

PERSILLON, H.; BRAZA, M. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 365, p. 23–88, 1998.

ROBICHAUX, J.; BALACHANDAR, S.; VANKA, S. P. Three-dimensional Floquet instability of the wake of a square cylinder. *Physics of Fluids*, v. 11, n. 3, p. 560–578, 1999.

ROWLEY, C. W. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 15, n. 3, p. 997–1013, 2005.

SAAD, Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. [S.l.]: Manchester University Press, 1992.

SCHMID, P. J. Nonmodal stability theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 39, p. 129–162, 2007.

SCHMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. *Stability and Transition in Shear Flows*. 1st. ed. [S.l.]: Springer–Verlag, 2001.

SZEPESSY, S.; BEARMAN, P. W. Aspect ratio and end plate effects on vortex shedding from a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 234, p. 191–217, 1992.

TANEDA, S. Downstream development of the wakes behind cylinders. *J. Phys. Soc. Japan*, v. 14, p. 843–848, 1959.

van DYKE, M. *An Album of Fluid Motion*. 4. ed. [S.l.]: The Parabolic Press, 1988.

VOROBIEFF, P.; GEORGIEV, D.; INGBER, M. S. Onset of the second wake: dependence on the Reynolds number. *Physics of Fluids*, v. 14, n. 7, p. 53–56, July 2002.

WARBURTON, T. C.; SHERWIN, S. J.; KARNIADAKIS, G. E. Basis functions for triangular and quadrilateral high-order elements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 20, n. 5, p. 1671–1695, 1999.

WILLIAMSON, C.; ROSHKO, A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 2, p. 355–381, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for laminar vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 10, p. 2742–2744, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 11, p. 3165–3168, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. The natural and forced formation of spot-like 'vortex dislocations' in the transition of a wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 243, p. 393–441, 1992.

WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 28, p. 477–539, 1996.

WILLIAMSON, C. H. K.; GOVARDHAN, R. Vortex-induced vibrations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v. 36, p. 413–455, 2004.

WOO, H. G. C. A note on phase-locked states at low Reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, p. 153–158, 1998.

WU, J. et al. Three-dimensional vortex structures in a cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 312, p. 201–222, April 1996.

ZHANG, H. Q. et al. On the transition of the cylinder wake. *Physics of Fluids*, v. 7, n. 4, p. 779–794, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite Elements and Approximation*. New York: Wiley, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: Volume 1: the Basis*. 5th. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: Volume 3: Fluid Dynamics*. 5th. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000.

APÊNDICE A – MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

O método de elementos espectrais é uma mescla entre o método espectral puro e o método de elementos finitos, através do uso de funções de base espectrais em uma formulação de elementos finitos. Do primeiro método, ele herda a convergência exponencial e a alta resolução, devido à alta ordem das funções de aproximação. Do segundo vem a divisão do domínio em elementos, que permite refinamento local e flexibilidade geométrica.

Os métodos espectrais (SM) derivam de métodos analíticos de solução de equações diferenciais parciais que apresentam soluções baseadas em expansões em série de funções ortogonais. Estas funções são suaves e o erro da equação diferencial é minimizado segundo um dado critério. Suas aplicações a dinâmica de fluidos remetem à meteorologia (ver Boyd (2001)). A vantagem deste método é a convergência exponencial que possibilita a solução do problema com relativamente poucos graus de liberdade. Contudo, geometrias complexas são difíceis de serem tratadas com esta abordagem.

Os métodos de elementos finitos (FEM) permitem a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Depois de anos de evolução e estudo, este método hoje é utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais.

Por um lado, existem métodos de baixa ordem para simulação de problemas em geometrias complexas e "problemas de engenharia" envolvendo modelos físicos avançados (modelos de turbulência como k-ϵ). Por outro, pesquisas envolvendo simulação numérica direta (DNS) só são possíveis com métodos de ordem superior. Uma outra questão relevante é a simulação durante longos intervalos de tempo. Nesta situação, uma resolução espacial alta é essencial para minimizar os erros (KARNIADAKIS; ISRAELI; ORSZAG, 1991), o que é o caso deste trabalho onde se estudam séries temporais de grandezas num

escoamento ao redor de cilindros.

Este apêndice baseia-se principalmente em Karniadakis e Sherwin (2005), em Karniadakis, Israeli e Orszag (1991) e na seção sobre o assunto da dissertação de mestrado de Carmo (2005). Há alguns conceitos baseados em Boyd (2001) referentes ao método espectral e à convergência numérica e em Zienkiewicz e Morgan (1983) a respeito do método de elementos finitos.

A.1 Método dos resíduos ponderados

Ao aproximar numericamente a solução exata de uma equação, tipicamente o que se faz é substituir uma expansão infinita, que é a solução exata, por uma representação dada por um conjunto finito de funções conhecidas. Tal aproximação, em geral, é incapaz de satisfazer a equação diferencial em todos os pontos do domínio de interesse, portanto impõe-se que esta aproximação tenha que satisfazer um número finito de condições. A escolha destas condições é o que determina o tipo de método numérico. O método de resíduos ponderados (FINLAYSON, 1972; ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1983) consiste em utilizar funções de peso (ou ponderação) na forma integral ou na formulação fraca da equação diferencial em questão para se minimizar o erro da aproximação.

Para descrever este método, considera-se uma equação diferencial linear num domínio espacial Ω denotada por:

$$\mathbb{L}(u) = 0 \tag{A.1}$$

sujeita a condições de contorno e condições iniciais apropriadas. Assume-se que a solução $u(\mathbf{x}, t)$ pode ser representada com uma dada precisão por uma solução aproximada da forma:

$$u^{\delta}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{N_{gl}} \hat{u}_i(t)\Phi_i(\mathbf{x}) \tag{A.2}$$

onde $\Phi_i(\mathbf{x})$ são funções analíticas chamadas funções de base ou funções de forma, $\hat{u}_i(t)$ são os N_{gl} coeficientes desconhecidos e $u_0(\mathbf{x}, t)$ é selecionada de modo a satisfazer as condições de contorno e condições iniciais. A substituição da aproximação (A.2) na eq. (A.1) produz um resíduo não-nulo, R, tal que:

$$\mathbb{L}(u^{\delta}) = R(u^{\delta}) \tag{A.3}$$

A fim de estabelecer uma maneira única de determinar os coeficientes $\hat{u}_i(t)$, é imposta uma restrição ao resíduo R de modo que a eq. (A.3) se reduza a um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\hat{u}_i(t)$. Se a equação diferencial original (A.1) é

independente do tempo, então os coeficientes $\hat{u}_i$ podem ser determinados diretamente da solução de um sistema de equações algébricos.

Definindo o produto interno (f, g) no domínio Ω:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

A restrição colocada a R é tal que o produto interno do resíduo com uma função peso seja igual a zero, ou seja:

$$(v_j(\mathbf{x}), R) = 0 \,, \qquad j = 1, \ldots, N_{gl}$$

A função $v_j(\mathbf{x})$ é a função peso e é daí que vem o nome da técnica.

Se o método converge, $R(\mathbf{x})$ tenderá a zero desde que a solução $u^{\delta}(\mathbf{x}, t)$ tenda para a solução exata $u(\mathbf{x}, t)$ na medida em que $N_{gl} \to \infty$. A natureza do esquema é determinado pela escolha das funções de base $\Omega_i(\mathbf{x})$ e das funções de peso v_j.

Dentre as várias escolhas possíveis para as funções de peso, no método de Galerkin estas funções de peso são iguais às funções de base, ou seja, $v_j = \Phi_j$. Outros métodos além do método de Galerkin podem ser encontrados em Finlayson (1972), Zienkiewicz e Morgan (1983), Karniadakis e Sherwin (2005).

Na formulação do tipo Galerkin, condições de contorno do tipo Dirichlet devem que ser especificadas explicitamente enquanto condições de contorno do tipo Neumann podem ser tratadas implicitamente, como parte da solução, através do uso de integração por partes e de uma função teste que se anule nas partes da fronteira onde as condições de contorno do tipo Dirichlet são especificadas (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005). Por isso, as condições de contorno do tipo Neumann são também chamadas de naturais enquanto as do tipo Dirichlet são chamadas de essenciais.

Para tratar condições de contorno essenciais não-homogêneas, tendo em vista que as funções de teste são nulas nas regiões onde tais condições são definidas, é preciso que a base utilizada para aproximar a solução contenha outras funções que sejam não nulas nestes contornos. Sem isso, seria impossível satisfazer estas condições de contorno do problema. Assim, a solução aproximada u^{δ} é composta de uma parcela conhecida $u^{\mathcal{D}}$, que satisfaz as condições de contorno essenciais, e uma parcela homogênea desconhecida, $u^{\mathcal{H}}$, que se anula nos contornos com condição do tipo Dirichlet, ou seja:

$$u^{\delta} = u^{\mathcal{D}} + u^{\mathcal{H}}$$

Desse modo, o mesmo conjunto de funções agora é usado para representar a solução homogênea $u^{\mathcal{H}}$ e a função de teste v.

Algumas propriedades da formulação de Galerkin que tornam o seu uso interessante são unicidade de solução, ortogonalidade do erro em relação ao espaço de funções de peso, solução que minimiza a norma de energia do erro e equivalência de bases polinomiais em relação à norma de energia. Esta última característica implica que a estimativa de erro é independente do tipo de expansão polinomial e depende somente do espaço polinomial. Todas estas propriedades são descritas e provadas em Karniadakis e Sherwin (2005).

A.2 Aplicação dos conceitos

A.2.1 Decomposição elementar - refinamento *h*

Subdividir o domínio de interesse em diversos subdomínios tem algumas vantagens. Entre as principais estão a flexibilidade geométrica e o tratamento das equações localmente. A repartição do domínio deve ser feita de modo que todo o domínio seja coberto pelo novo conjunto de subdomínios e que estes subdomínios não se sobreponham. Em linguagem matemática, podemos dizer que, considerado um domínio Ω, pode-se dividi-lo em N_{el} elementos, denotados por Ω^e, tais que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e = \varnothing$$

Com intuito de introduzir e ilustrar os conceitos de mapeamento de coordenadas e elemento padrão, será descrito o início do procedimento de montagem das matrizes para um caso unidimensional de formulação do tipo elementos finitos utilizando funções de base lineares. Para este caso, cada modo tem valor unitário em um nó de cada um dos elementos e decai linearmente para zero ao longo dos elementos que contém este nó. Uma ilustração gráfica está na Fig. A.1.

Escrevendo a expressão de um elemento qualquer Ω^e:

$$\Omega_{st} = \{\xi \mid -1 < \xi < 1\}$$

O que se quer é definir uma mudança de coordenadas para um elemento padrão do tipo:

$$\Omega^e = \{x \mid x_{e-1} < x < x_e\}$$

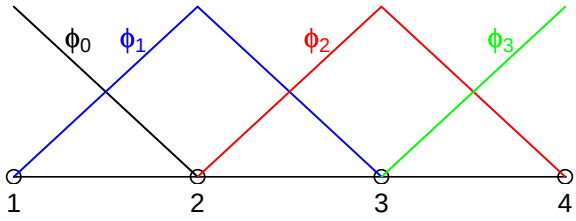


Figura A.1: Funções de forma lineares unidimensionais.

onde podemos definir as funções de base facilmente, em termos da coordenada local ξ, através das expressões:

$$\phi_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2}, & \xi \in \Omega_{st} \\ 0, & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} \qquad \phi_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2}, & \xi \in \Omega_{st} \\ 0, & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases}$$

O elemento padrão pode ser mapeado para qualquer domínio Ω e através da transformação $\chi^e(\xi)$ que expressa a coordenada global x em termos da coordenada local ξ como:

$$x = \chi^e(\xi) = \frac{1-\xi}{2} x_{e-1} + \frac{1+\xi}{2} x_e \,, \qquad \xi \in \Omega_{st}$$

Este mapeamento é bijetor, portanto tem uma inversa analítica $(\chi^e)^{-1}(x)$, da forma:

$$\xi = (\chi^e)^{-1}(x) = 2\frac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}} - 1 \,, \qquad x \in \Omega^e$$

Introduzidos os conceitos de elemento padrão e de mapeamento de coordenadas locais para globais, pode-se definir formalmente o espaço χ^δ do elemento *hp* em uma dimensão: se denotarmos o espaço de todos os polinômios de grau P definidos no elemento padrão Ω_{st} por $\mathcal{P}_P(\Omega_{st})$, então o espaço discreto χ^δ é o conjunto de todas as funções $u^\delta(x)$ que existem em H^1 e que são polinômios dentro de todos os elementos. Isto é, $u^\delta(\chi^e(\xi)) \in \mathcal{P}_P(\Omega_{st})$, que pode ser escrito formalmente como:

$$\chi^\delta = \left\{ u^\delta \mid u^\delta \in H^1, u^\delta(\chi^e(\xi)) \in \mathcal{P}_{P^e}(\Omega_{st}),\, e = 1, \ldots, N_{el} \right\}$$

Esta definição permite que tanto o mapeamento $\chi^e(\xi)$ quanto a ordem do polinômio P^e variem dentro de cada elemento e, portanto permitindo refinamento h, que altera $\chi^e(\xi)$ e refinamento p, que altera P^e.

Em métodos puramente do tipo h, como é o caso do método de elementos fini-

tos convencional, as funções de base são definidas localmente. Elas têm valor não nulo dentro de um único elemento e nulo em todos os outros e são construídas de modo a se obter uma aproximação C^0 da solução (a solução é contínua, mas não suas derivadas). Conseqüentemente a matriz global pode ser obtida através da montagem (assembly) das matrizes obtidas para cada elemento.

Observe que agora se podem considerar dois tipos de grau de liberdade: os graus de liberdade locais e os graus de liberdade globais. Cada grau de liberdade local corresponde a um grau de liberdade global, $i^e \to i$, onde i^e é o grau de liberdade local e i é o grau de liberdade global.

A montagem da matriz global M_{ij} a partir das matrizes elementares M^e_{ij} para uma base com N graus de liberdade local pode ser feita usando o seguinte algoritmo:

```
Para   e = 0 → N_elementos
    Para   i^e = 0 → N
        Para   i^e = 0 → N
            i_global = map(c, i^e) , j_global = map(c, j^e)
            M_{i_global j_global} += M^e_{i^e j^e}
        Próximo   j
    Próximo   i
Próximo   e
```

Neste algoritmo, a função $map(e, i)$ retorna o grau de liberdade global do grau de liberdade local i do elemento e.

Observando o algoritmo acima, é evidente que as matrizes globais são extremamente esparsas e com uma numeração adequada dos graus de liberdade global, a resolução de sistemas lineares com matrizes de ordem N é uma operação com custo $\mathcal{O}(N)$. Esta é uma das vantagens de se trabalhar com interpolantes válidos localmente.

A.2.2 Expansões do tipo *p*

Uma expansão do tipo p num domínio único é uma expansão espectral pura e, portanto, pode-se considerar esta abordagem como um método do tipo p global.

Em múltiplas dimensões, domínios complexos tornam difícil a tarefa de achar uma expansão global. A introdução de geometrias complexas pode gerar também a presença de escalas diferentes na solução, que podem ter uma estrutura bastante localizada. Tais

considerações fazem com que a decomposição em elementos, como discutido na seção anterior, seja necessária.

O processo de construção de expansões do tipo p pode ser sintetizado em dois passos:

- Determinação de uma expansão apropriada dentro de uma região padrão;
- Modificação da expansão de modo que ela possa ser facilmente implementada numericamente.

No primeiro passo, uma expansão apropriada é tipicamente um conjunto de funções ortogonais ou quase ortogonais. No segundo passo, considerações sobre a implementação computacional desta base devem ser feitas e a base é modificada, se necessário, para facilitar o processo. Tipicamente, a base é decomposta em contribuições no contorno e no interior de uma região padrão, pois esta abordagem simplifica o processo de montagem global.

Algumas definições relativas a tipos de expansão devem ser feitas:

Def. Uma base é chamada de uma expansão *modal hierárquica* quando uma expansão de ordem P está contida numa expansão de ordem $P+1$.

Um exemplo deste tipo de base é:

$$\Phi_p^A(x) = x^p\,, \qquad p = 0, \ldots, P$$

pois considerando uma base com $p = 2$, tem-se $\chi_2^\delta = \{1, x, x^2\}$. Em uma base com $p = 3$, tem-se $\chi_3^\delta = \{1, x, x^2, x^3\} = \{\chi_2^\delta, x^3\}$. Isto quer dizer que se for necessário incluir mais termos na expansão, os $P+1$ termos já calculados podem ser utilizados como valores iniciais. Isto é muito interessante em um problema adaptativo onde não é necessário recalcular nenhuma base, apenas adicionar novos termos.

Def. Uma base é chamada *nodal* quando os coeficientes da expansão representam a solução aproximada nos nós.

Bases com polinômios de Lagrange são típicas bases nodais. Esta base pode ser escrita em linguagem matemática da seguinte forma:

$$\Phi_p^B(x) = \frac{\prod_{q=0,q\neq p}^{P}(x - x_q)}{\prod_{q=0,q\neq p}^{P}(x_p - x_q)}\,, \qquad p = 0, \ldots, P$$

Esta base não é hierárquica, visto que consiste de $P+1$ polinômios de ordem P. Comparando com a expansão $\Phi_p^A(x)$, vemos que esta consiste de polinômios de ordem crescente porque a base de Lagrange tem a propriedade $\Phi_p^B(x) = \delta_{pq}$, onde δ_{pq} é o delta de Kronecker. Temos então:

$$u^\delta(x_q) = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p \Phi_p^B(x_q) = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p \delta_{pq} = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p$$

e, portanto, esta base é um exemplo de base nodal.

Literalmente, qualquer base é uma base modal. No entanto, neste texto, assim como em Karniadakis e Sherwin (2005), usaremos o termo modal para expansões hierárquicas.

Uma base modal que também apresenta características de ortogonalidade é a seguinte:

$$\Phi_p^C(x) = L_p(x)\,, \qquad p = 0, \ldots, P$$

onde $L_p(x)$ são polinômios de Legendre. Polinômios deste tipo são um caso especial dos polinômios de Jacobi. Por definição, esta base é ortogonal no produto interno de Legendre, valendo a expressão:

$$(L_p(x), L_q(x)) = \int_{-1}^{1} L_p(x) L_q(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{2p+1}\right)\delta_{pq}$$

Ortogonalidade tem implicações numéricas importantes quando se utiliza o método de Galerkin, como já citado. Na escolha de uma dada expansão deve-se levar em conta fatores como eficiência computacional, condicionamento, independência linear da base e propriedades da aproximação.

Quanto à eficiência computacional, devem ser analisados dois aspectos. O primeiro é o custo de construção da matriz, o que pode envolver integração numérica. O segundo é o custo de inversão do sistema matricial para a obtenção da solução. Quando a matriz tem alguma estrutura conhecida, esta última tarefa pode ser feita de forma muito mais eficiente. Karniadakis e Sherwin (2005) mostram, utilizando uma projeção de Galerkin, que a base $\Phi_p^C(x)$ é a mais eficiente das três bases mostradas até aqui, pois gera uma matriz diagonal, que é de fácil construção e inversão. Isto porque é uma base ortogonal. Entretanto, quando utilizada em casos com decomposição elementar, devido à imposição de continuidade C^0, esta base perde sua ortogonalidade.

No que se refere ao condicionamento, Karniadakis e Sherwin (2005) mostram

que, para polinômios de baixa ordem, as três bases têm comportamento similar. Todavia, na medida em que a ordem é aumentada, a base de Legendre se torna superior às outras duas. O condicionamento da matriz reflete o grau de dependência linear da base e influi no número de iterações necessárias para se inverter uma matriz, quando métodos iterativos são empregados.

A.2.2.1 Decomposição contorno-interior

Da discussão anterior, presume-se que a melhor escolha para uma base são os polinômios de Legendre ou mais geralmente, um sistema de polinômios ortogonais, pois hierarquia e ortogonalidade são características que levam à geração de matrizes com bom condicionamento numérico. No entanto, deseja-se também combinar este tipo de expansão com decomposição elementar do tipo h. A principal dificuldade deste processo aparece quando se tenta garantir um grau de continuidade na expansão global nas fronteiras dos elementos. Para uma equação diferencial parcial de segunda ordem, foi visto que é suficiente garantir que a solução aproximada u^δ esteja em H^1. Tipicamente em métodos de elementos finitos, esta condição é satisfeita através da imposição de continuidade C^0 entre elementos, isto é, os modos de expansão global são contínuos em todo o domínio da solução, embora suas derivadas possam não ser.

Esta condição de continuidade pode ser implementada construindo expansões locais que tenham alguns modos com magnitude não nula nos contornos enquanto todos os outros sejam nulos ao longo da fronteira. Este tipo de decomposição é conhecido como decomposição contorno-interior. Modos de contorno têm magnitude não nula (quando normalizados torna-se unitária) em uma das fronteiras do domínio e são nulos em todas as outras fronteiras. Modos interiores, também conhecidos como modos "bolha", somente têm magnitude não nula no interior do elemento e são nulos ao longo de todas as fronteiras. As expansões usadas no método dos elementos espectrais apresentam este tipo de decomposição.

A.2.2.2 Expansão modal tipo C^0

Como já foi visto, é vantajoso considerar polinômios ortogonais para a construção de bases. Dentre as expansões mais utilizadas para a construção de bases estão aquelas que utilizam os polinômios de Jacobi[1]. A seguir é apresentada uma base de ordem $P+1$ e C^0

[1]Os polinômios de Jacobi, $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, são a família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville. Estes polinômios são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ em relação ao produto interno

construída com estes polinômios, válida no domínio padrão $\Omega_{st} = \{\xi \mid -1 < \xi < 1\}$.

$$\phi_p(\xi) \mapsto \psi_p(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\xi}{2}\right), & p = 0 \\ \left(\dfrac{1-\xi}{2}\right)\left(\dfrac{1+\xi}{2}\right) P_{p-1}^{1,1}(\xi), & 0 < p < P \\ \left(\dfrac{1+\xi}{2}\right), & p = P \end{cases} \tag{A.4}$$

Note que $\phi_p(\xi)$ será usado para denotar a definição geral de uma base polinomial local enquanto $\psi_p(\xi)$ tem a definição específica dada acima. Os modos $\psi_0(\xi)$ e $\psi_P(\xi)$ são os mesmos da expansão linear para elementos finitos. Estes são modos de contorno, já que são os únicos que tem valor não nulo nas extremidades do intervalo. Os modos interiores restantes, por definição, são zero nas extremidades do intervalo e aumentam em ordem polinomial como é típico em uma expansão polinomial.

Os modos interiores poderiam ser definidos com qualquer polinômio que tenha valor nulo nas extremidades, porém o uso de polinômios ortogonais mantém um alto grau de ortogonalidade na matriz cujo acoplamento interior gera matrizes de banda, característica muito interessante para os processos de inversão.

Agora resta determinar a melhor escolha dentre os polinômios de Jacobi. Karniadakis e Sherwin (2005) mostram que uma escolha bastante interessante é o polinômio de Jacobi simétrico com $\alpha = \beta = 1$, ou seja, $P_p^{1,1}(\xi)$, pois ele gera uma matriz de massa local pentadiagonal, com alguns poucos elementos adicionais nos nós de contorno e uma matriz Laplaciana diagonal, com dois elementos não nulos adicionais nos nós de contorno. Nesta mesma referência são analisados outros exemplos de polinômio de Jacobi e verifica-se que eles não apresentam características tão interessantes quanto o caso de $P_p^{1,1}(\xi)$. Em suma, usa-se a expansão dada na eq. (A.4) construída com o polinômio de Jacobi $P_p^{1,1}(\xi)$.

A Fig. A.2 apresenta a expansão dada na eq. (A.4) que é usada nas simulações numéricas desta tese. A figura apresenta os 6 graus de liberdade da expansão de 5ª ordem.

Vale notar que Karniadakis e Sherwin (2005) analisam também bases nodais adaptadas para o SEM, porém estas não serão usadas neste trabalho.

Por fim, as integrais não têm sempre uma forma analítica conhecida, e a forma das funções integradas depende especificamente do problema. É preciso portanto, utilizar algum método numérico para cálculo destas integrais, a fim de realizá-las no programa

ponderado pela função $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

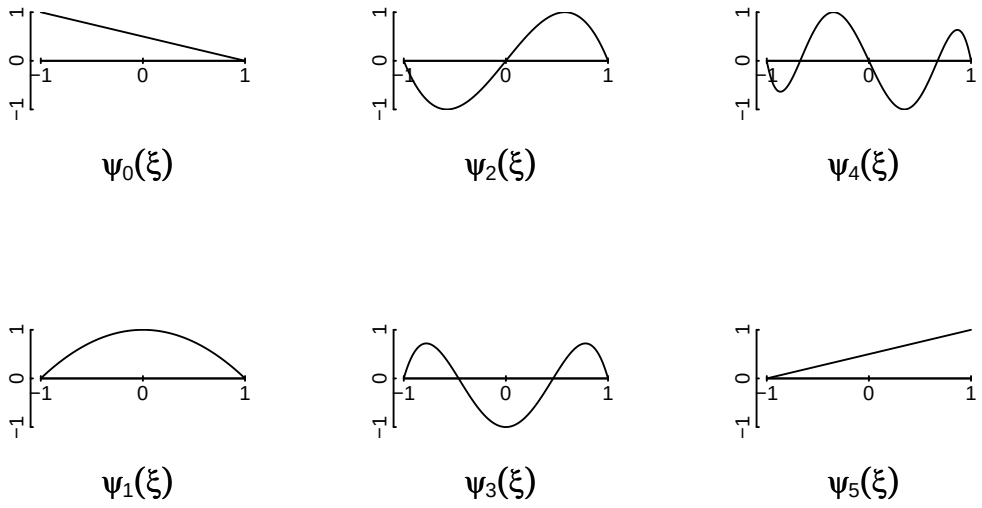


Figura A.2: Representação da expansão tipo C^0 da eq. (A.4) de grau 5 usada nas simulações numéricas desta tese.

computacional. Os métodos de integração numérica são conhecidos por quadraturas. O conceito fundamental é a aproximação da integral por uma soma finita da forma:

$$\int_{-1}^{1} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i)$$

onde w_i são pesos e ξ_i representam as abscissa de Q pontos distintos no intervalo $-1 \leq \xi_i \leq 1$. Neste trabalho é utilizada uma família específica de quadratura, denominada quadratura de Gauss, pois esta efetua a integral sem erro de polinômios até grau $2Q - k$, onde $k = 1$ para a quadratura clássica de Gauss, $k = 2$ para a de Gauss-Radau e $k = 3$ para a de Gauss-Lobatto. Mais especificamente, a quadratura de Gauss-Lobatto é usada na integração em elementos quadrangulares e a de Gauss-Radau em elementos triangulares.

Quanto à diferenciação, a idéia utilizada aqui é que, assumindo uma aproximação polinomial da forma:

$$u^{\delta}(\xi) = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p \phi_p(\xi)$$

a diferenciação tem a forma:

$$\frac{\mathrm{d}u^{\delta}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \sum_{p=0}^{P} \hat{u}_p \frac{\mathrm{d}\phi_p(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$$

A diferenciação de $u^\delta(\xi)$ depende portanto do cálculo de $\mathrm{d}\phi_p(\xi)/\mathrm{d}\xi$. Como qualquer expansão polinomial pode ser representada em termos de polinômios de Lagrange, e, para este tipo de polinômio, podem ser definidas regras específicas de diferenciação, faz-se a diferenciação através de polinômios de Lagrange.

A.3 Bases multidimensionais

Os conceitos referentes a bases unidimensionais podem ser estendidos para casos multidimensionais. Todas as expansões discutidas neste item serão consideradas como válidas dentro de uma região padrão.

As bases de expansão aqui discutidas são tais que podem ser expressas em termos de um produto de funções unidimensionais, isto é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2)$$

Expansões construídas desta maneira permitem que muitas operações numéricas sejam realizadas de maneira bastante eficiente, através da utilização da técnica de soma fatorada, discutida posteriormente.

Para o caso de malhas com elementos quadriláteros, a região padrão bidimensional, $\mathcal{Q}^2$, é definida como sendo o quadrado:

$$\Omega_{st} = \mathcal{Q}^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

Como esta região é trivialmente definida por um sistema cartesiano padrão, a forma mais natural e direta de construir esta base é tomando o produto de bases unidimensionais, que podem ser pensadas como tensores unidimensionais.

Analisando a base unidimensional descrita na eq. (A.4), percebe-se que a expansão é denotada por um subscrito único, p, e portanto pode ser considerada como um tensor unidimensional. A base bidimensional pode, por conseguinte, ser construída através de um produto simples de tensores bidimensionais em cada uma das direções das coordenadas cartesianas. Assim, a base modal é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p^a(\xi_1)\phi_q^a(\xi_2)\,, \qquad 0 \leq p, q;\, p \leq P_1\,, q \leq P_2$$

Nota-se pelo uso de limites distintos P_1 e P_2 que a ordem polinomial de expansões multidimensionais podem diferir em cada direção.

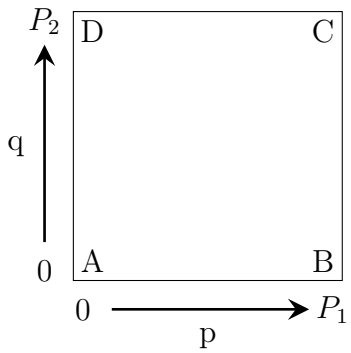


Figura A.3: Região padrão bidimensional.

A decomposição contorno-interior da base unidimensional é herdada pela base bidimensional. Para os casos bidimensionais, os modos de contorno são divididos em: modos de vértices, aqueles que têm magnitude unitária em um dos vértices e são nulos em todos os outros, e modos de aresta são todos os modos que têm magnitude não nula ao longo de uma aresta e são nulos em todas outras arestas e vértices que não pertencem a esta aresta.

Considerando a base bidimensional, $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, como uma matriz que se estende pela região padrão ilustrada na Fig. A.3, os índices dos modos de contorno correspondem às suas localizações dentro desta matriz. Por exemplo, o modo de vértice que tem magnitude no vértice A do quadrado corresponde aos índices $p = 0\,, q = 0$ e portanto $\phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0^a(\xi_1)\phi_0^a(\xi_2)$ é o modo deste vértice na expansão utilizada aqui.

Os quatro modos de vértice são:

$$\texttt{Vértice A:}\ \phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0^a(\xi_1)\phi_0^a(\xi_2)$$
$$\texttt{Vértice B:}\ \phi_{P_1,0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_{P_1}^a(\xi_1)\phi_0^a(\xi_2)$$
$$\texttt{Vértice C:}\ \phi_{0,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0^a(\xi_1)\phi_{P_2}^a(\xi_2)$$
$$\texttt{Vértice D:}\ \phi_{P_1,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \phi_{P_1}^a(\xi_1)\phi_{P_2}^a(\xi_2)$$

Os modos de aresta são:

$$\texttt{Aresta AB:}\ \phi_{p,0}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p^a(\xi_1)\phi_0^a(\xi_2)\,, \qquad 0 < p < P_1$$
$$\texttt{Aresta CD:}\ \phi_{p,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p^a(\xi_1)\phi_{P_2}^a(\xi_2)\,, \qquad 0 < p < P_1$$
$$\texttt{Aresta AC:}\ \phi_{0,q}(\xi_1, \xi_2) = \phi_0^a(\xi_1)\phi_q^a(\xi_2)\,, \qquad 0 < q < P_2$$
$$\texttt{Aresta BD:}\ \phi_{P_1,q}(\xi_1, \xi_2) = \phi_{P_1}^a(\xi_1)\phi_q^a(\xi_2)\,, \qquad 0 < q < P_2$$

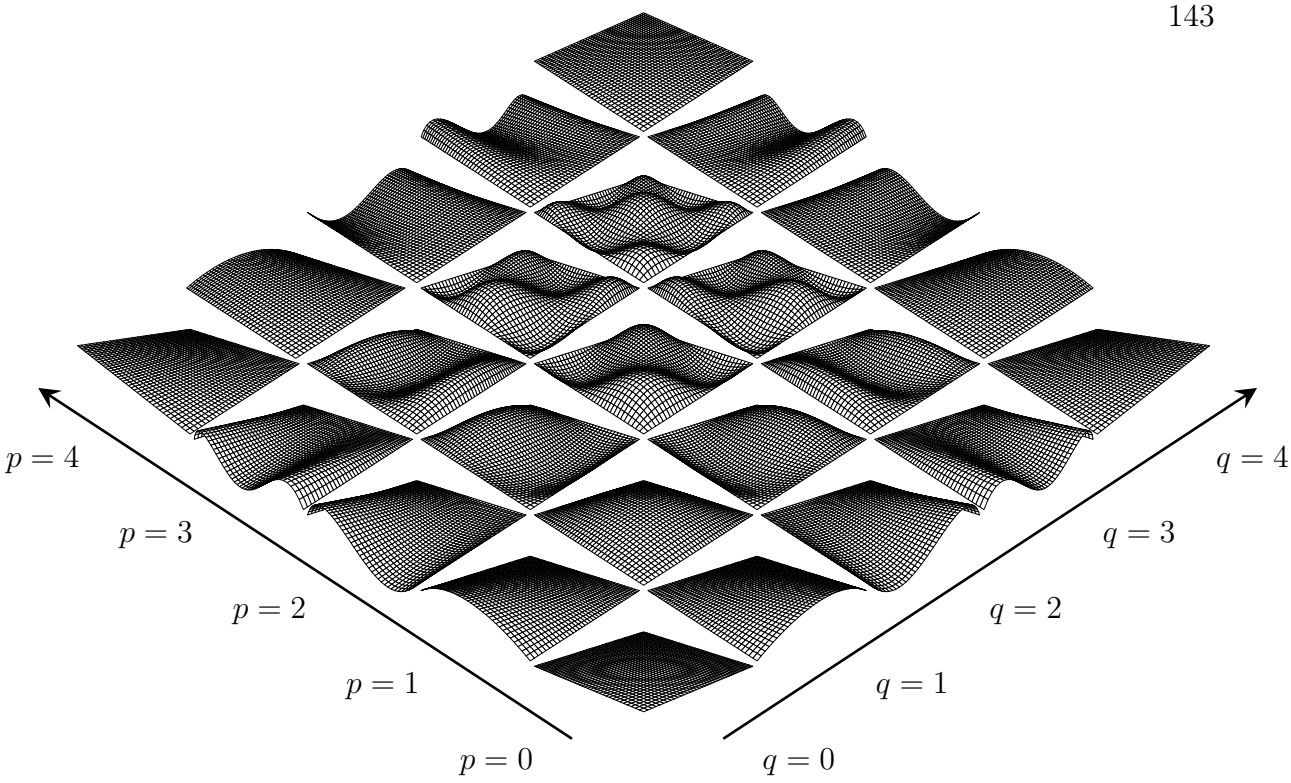


Figura A.4: Interpolante $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ com $P_1 = P_2 = 4$ usado na discretização espacial de um elemento bidimensional padrão. Neste caso o produto tensorial tem polinômio de 4ª ordem em cada direção, resultando em um elemento de 25 graus de liberdade.

e os modos de interior:

$$\phi_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p^a(\xi_1)\phi_q^a(\xi_2)\,, \qquad 0 < p < P_1, 0 < q < P_2$$

Logo, o interpolante dos elementos usado nesta tese seguem o critério de avaliação de Karniadakis e Sherwin (2005) e é representado pelos modos descritos acima. A Fig. A.4 apresenta os 25 graus de liberdade de um elemento bidimensional padrão usando esta escolha de interpolante com $P_1 = P_2 = 4$.

Neste trabalho, as ordens utilizadas em cada uma das direções serão sempre iguais. Detalhes quanto a expansões tridimensionais, expansões com ordens diferentes em cada uma das direções podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin (2005).

A.3.1 Expansão em domínio homogêneo

Em uma gama de aplicações, como o escoamento entre placas paralelas ou o escoamento ao redor de cilindros ou grupos de cilindros, o problema de interesse tem pelo menos uma região homogênea, isto é, uma região onde não há um comprimento característico. Esta propriedade indica que neste tipo de problema uma expansão do tipo p pode ser utilizada

na direção homogênea se a solução for suave. Considerando a direção homogênea como sendo ξ_3, a base tridimensional $\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pode ser escrita em termos de uma expansão bidimensional qualquer, denominada $\phi_{pq}^{2\mathrm{D}}(\xi_1, \xi_2)$, multiplicada por uma expansão completa em ξ_3, denominada $\varphi_r(\xi_3)$, ou seja:

$$\phi_{pqr}(\xi_1.\xi_2.\xi_3) = \phi_{pq}^{2\mathrm{D}}(\xi_1, \xi_2)\varphi_r(\xi_3)$$

A escolha de $\varphi_r(\xi_3)$ depende das condições de contorno nas extremidades da direção homogênea. Como $\varphi_r(\xi_3)$ é uma expansão puramente tipo p, uma grande variedade de expansões polinomiais pode ser utilizada, como polinômios de Legendre ou Chebyshev. Cada uma destas expansões tem suas propriedades particulares e é apropriada para uma dada aplicação. Contudo, a expansão mais utilizada e adequada para o caso onde a direção homogênea recebe condição de contorno do tipo periódica é uma expansão de Fourier:

$$\varphi_r(\xi_3) = e^{ir\beta\xi_3}$$

onde $\beta = 2\pi/L_{\xi_3}$ e L_{ξ_3} é o comprimento do domínio calculado na direção periódica, que é a direção homogênea. O grande atrativo desta expansão é o uso da transformada rápida de Fourier para transitar entre o espaço transformado e o espaço físico. Além do mais, quando operadores diferenciais lineares são considerados, têm-se as seguintes expressões:

$$\nabla\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left[\tilde{\nabla}_r\right]\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_2} \\ ir\beta \end{bmatrix}\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \left[\tilde{\nabla}_r^2\right]\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - r^2\beta^2\right)\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\end{aligned}$$

A introdução destes operadores $\tilde{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}^2$ significa que um problema diferencial linear tridimensional pode ser reduzido a uma série de r problemas bidimensionais nos planos de Fourier. A aplicação desta decomposição ao estudo de escoamentos incompressíveis será usada no tratamento do problema proposto no projeto.

A.3.2 Representação da fronteira

Até agora, assumiu-se que todas as condições de contorno eram especificadas em termos de coeficientes modais, contudo, este não é o caso típico. Para ilustrar os conceitos desta

seção será considerada uma equação de Poisson na região bidimensional Ω:

$$\nabla^2 u - f = 0$$

com condições de contorno

$$u|_{\partial\Omega^{\mathcal{D}}} = g_{\mathcal{D}}(\partial\Omega^{\mathcal{D}}), \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega^{\mathcal{N}}} = g_{\mathcal{N}}(\partial\Omega^{\mathcal{N}})$$

onde $g_{\mathcal{D}}$ e $g_{\mathcal{N}}$ são as condições de contorno tipo Dirichlet e Neumann, respectivamente, e $\partial\Omega^{\mathcal{D}} \cup \partial\Omega^{\mathcal{D}} = \partial\Omega$. Para construir a formulação fraca deste problema, multiplica-se a equação pela função de peso $v(x)$ e integra-se no domínio Ω para se obter:

$$(v, \nabla^2 u) - (v, f) = 0$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo desta equação, chega-se a:

$$(\nabla v, \nabla u) = (v, f) + \langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle$$

onde

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \tag{A.5}$$

e $\mathbf{n}$ é a normal que aponta para fora do domínio. É preciso agora aplicar as condições de contorno, lembrando que o espaço de funções $v(x)$ numa expansão de Galerkin é homogênea e portanto nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet.

Só se pode operar com componentes de $u(x)$ que estejam no mesmo espaço. Por isso, a solução total $u(x)$ será decomposta numa componente homogênea $u^{\mathcal{H}}(x)$ e numa componente não-homogênea $u^{\mathcal{D}}(x)$, onde $u(x) = u^{\mathcal{H}}(x) + u^{\mathcal{D}}(x)$, sendo que $u^{\mathcal{D}}(x)$ satisfaz as condições de contorno essenciais $g_{\mathcal{D}}(\partial\Omega^{\mathcal{D}})$. Nota-se que como $v(x)$ é definida de modo a ser nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet, pode-se reescrever a eq. (A.5):

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} v g_{\mathcal{N}} \mathrm{d}S = \langle v, g_{\mathcal{N}} \rangle$$

Desse modo, o problema de Galerkin pode ser posto como: encontrar $u^{\mathcal{H}} \in \mathcal{X}$ tal que:

$$(\nabla v, \nabla u^{\mathcal{H}}) = (v, f) + \langle v, g_{\mathcal{N}} \rangle - (\nabla v, \nabla u^{\mathcal{D}}), \qquad \forall\, v \in \mathcal{V} \tag{A.6}$$

onde $\mathcal{X}$ é o espaço homogêneo de teste. Tendo em mente todos os conceitos apresentados até então, ainda resta descrever uma maneira de determinar a solução não-homogênea $u^{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ assim como um procedimento para calcular a integral de contorno $\langle v, g_{\mathcal{N}} \rangle$. Embora

a escolha de funções globais quaisquer que satisfaçam as condições de contorno seja suficiente, pode-se aplicar a solução não-homogênea $u^{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ nos modos de expansão que não são nulos na fronteira do tipo Dirichlet. Este processo é descrito na seção subseqüente.

Para calcular a integral de contorno $\langle v, g_{\mathcal{N}} \rangle$, é necessário saber como representar elementos curvos, pois o objetivo deste trabalho é o estudo do escoamento ao redor de corpos cilíndricos, portanto, nas simulações haverá a necessidade de se representar superfícies curvas. Isto é abordado posteriormente. Em seguida, aborda-se o cálculo do Jacobiano do mapeamento da fronteira para a região padrão de integração.

A.3.2.1 Aplicação de condições de contorno essenciais

Até agora, trataram-se todos os graus de liberdade globais do sistema como incógnitas, de modo que se possa manter a generalidade da implementação numérica. No entanto, graus de liberdade associados com condições de contorno essenciais são conhecidos. O procedimento adotado é renumerar estes modos de forma que eles fiquem agrupados e colocados dentro da porção de contorno, após os modos de contorno incógnitos. Assim, o sistema referente ao contorno $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{H}} & \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{D}} \\ \mathbf{A}^{\mathcal{D}\mathcal{H}} & \mathbf{A}^{\mathcal{D}\mathcal{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathcal{H}} \\ \mathbf{u}^{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\mathcal{H}} \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{u}^{\mathcal{D}}$ é conhecido, o sistema fica reduzido a:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{H}}\mathbf{u}^{\mathcal{H}} = \mathbf{f}^{\mathcal{H}} - \mathbf{A}^{\mathcal{H}\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{D}}$$

Dada uma condição de contorno essencial $g_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, precisa-se de um método consistente de aproximar esta condição de contorno em termos da expansão discreta utilizada. O método que será utilizado opera em nível local e consiste em fazer uma projeção de Galerkin de $g_{\mathcal{D}}$ nos modos de fronteira, e depois subtrair a contribuição dos vértices e fazer uma projeção L^2 dos modos de aresta da função que sobra, de modo a garantir continuidade C^0. Esta operação será ilustrada agora, considerando a Fig. A.5.

Uma condição de contorno conhecida $g_{\mathcal{D}}$ será projetada na fronteira de um elemento e que está ao longo de $\partial\Omega$. A solução discreta $\mathbf{u}^{\delta}(x_1, x_2)$ ao longo da aresta pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^{\delta}(x_1, x_2) = \sum_{pq} \hat{u}^e_{pq}\phi^e_{p0}(\xi_1, -1) \; = \sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}^e_{p0}\phi^e_{p0}(\xi_1, -1)\,,$$

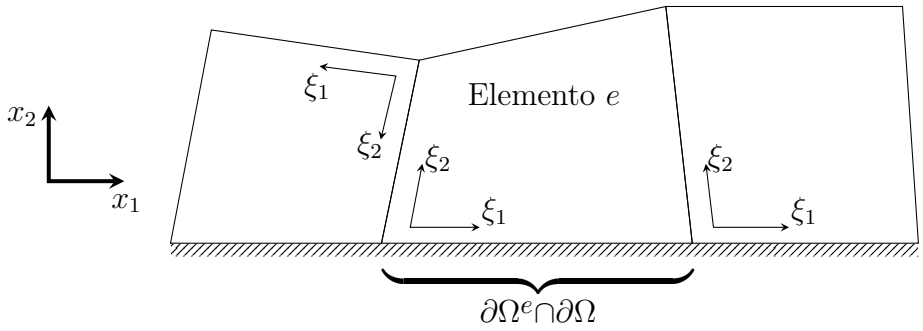


Figura A.5: Contornos e sistemas de coordenadas locais e global. (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005)

onde $x_1 = \chi_1^e(\xi_1, -1)$ e $x_2 = \chi_2^e(\xi_1, -1)$. Sendo a expansão modal então

$$\phi_{p0}^e(\xi_1, -1) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_p^a(-1) = \psi_p^a(\xi_1).$$

Portanto, o problema é encontrar $\hat{u}_{p0}^e$ tal que:

$$\sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \simeq g_{\mathcal{D}}(\chi_1^e(\xi_1, -1))$$

Pode-se usar a decomposição vértice-aresta dos modos de fronteira para garantir que a aproximação seja globalmente C^0. Os modos de vértice têm, por definição, valor unitário nas extremidades de uma aresta e todos os outros modos de contorno são nulos nestes pontos. Continuidade C^0 é, portanto, garantida se os coeficientes de vértice forem igualados a:

$$\hat{u}_{00}^e = g_{\mathcal{D}}(\chi_1^e(-1, -1))$$
$$\hat{u}_{P_1 0}^e = g_{\mathcal{D}}(\chi_1^e(1, -1))$$

Os coeficientes restantes da fronteira (modos de aresta) podem ser escritos da forma:

$$\sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \simeq g_{\mathcal{D}}(\chi_1^e(\xi_1, -1)) - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a(\xi_1) - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a(\xi_1)$$

Como os modos restantes não contribuem para os pontos de extremidade, pode-se resolver a equação para as incógnitas restantes $\hat{u}_{p0}^e (1 \leq p \leq P_1)$ sem destruir a continuidade C^0. Estes coeficientes podem ser encontrados através do cálculo uma projeção de Galerkin:

$$\left(\phi_i, \sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \phi_p\right) = \left(\phi_i, g_{\mathcal{D}} - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a\right), \qquad 0 \leq i \leq P_1 - 1$$

Claramente isto envolve a construção e inversão de uma matriz unidimensional de massa $\mathbf{M}^{1\mathrm{D}}[i][j] = (\phi_i(\xi_1), \phi_j(\xi_1))$ para $(1 \leq i, j \leq P_1)$. Esta aproximação de Galerkin minimiza a norma L^2 do erro entre a condição de contorno exata e a aproximação na aresta no interior da região (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005).

A.3.2.2 Representação de superfícies curvas

Já foi apresentado como mapear quadrilátero qualquer com lados retilíneos na região padrão de integração. Nesta seção, o método de mapeamento será generalizado com a finalidade de incluir também contornos curvos.

A função de mapeamento pode ser escrita de forma genérica como uma expansão da forma:

$$x_i = \chi_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} \hat{x}^i_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \tag{A.7}$$

onde, para um quadrilátero de lados retilíneos, $\hat{x}^i_{pq} = 0$ exceto para os modos de vértice, que têm os valores:

$$\hat{x}^i_{00} = x^A_i \qquad \hat{x}^i_{P_1 0} = x^B_i \qquad \hat{x}^i_{P_1 P_2} = x^C_i \qquad \hat{x}^i_{0 P_2} = x^D_i$$

Portanto, para descrever uma região de lados retos, só é necessário conhecer a localização dos vértices. No entanto, para arestas de forma arbitrária, mais informações são necessárias, e normalmente uma aresta deste tipo é descrita em termos de funções paramétricas, que serão chamadas de $f^A_i(\xi_1)$, $f^B_i(\xi_2)$, $f^C_i(\xi_1)$ e $f^D_i(\xi_2)$.

Como foi mostrado, pode-se representar uma função de contorno analítica em termos de uma expansão C^0 usando uma transformação de contorno modificada. Por exemplo, pode-se representar uma aresta curva ao longo de $\xi_2 = -1$ onde $x_i = f_i(\xi_1)$ por uma expansão polinomial em ξ_1 da forma:

$$x_i = f^A_i(\xi_1) \approx \sum_{p=0}^{P_1} \hat{x}^i_{p0} \psi_p(\xi_1)$$

Este tipo de expansão força a continuidade das coordenadas nos vértices. Se um procedimento similar for aplicado a todas as outras arestas então, ter-se-á um conjunto de coeficientes $\hat{x}^i_{p0}$ que representará todas as arestas. O mapeamento geral das coordenadas ξ_1 e ξ_2 para x_1 e x_2 é determinado pela eq. (A.7).

Este tipo de mapeamento pode ser gerado para todo tipo de expansão modal

modificada em qualquer região padrão seguindo dois passos:

1. Projeção das coordenadas globais curvas x_i nos contornos de cada elemento usando a transformação de contorno modificada;

2. A transformação para trás expressa pela eq. (A.7) então determina o mapeamento isoparamétrico que relaciona as coordenadas locais ξ_1 e ξ_2 às coordenadas globais x_1 e x_2.

A.3.2.3 Cálculo do Jacobiano da integral de contorno

Para determinar integrais da forma:

$$\langle v, \nabla g_{\mathcal{N}} \rangle = \int_{\partial\Omega^{\mathcal{N}}} v g_{\mathcal{N}} \, \mathrm{d}S \tag{A.8}$$

que aparecem tipicamente em discretizações de Galerkin de operadores Laplacianos como mostrado na eq. (A.6), transforma-se cada contribuição elementar numa integral em um intervalo padrão, a fim de efetuar a integração usando quadratura de Gauss. Esta transformação necessariamente introduz um Jacobiano, chamado de Jacobiano da integral de contorno.

Em duas dimensões a eq. (A.8) é uma integral de linha da forma:

$$\int_a^b f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}s, \tag{A.9}$$

onde $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2}$ é o comprimento diferencial. A fronteira é dividida em contornos elementares $\partial\Omega^e \cap s$, nos quais se deseja calcular cada segmento da integral (A.9). Sabe-se que as coordenadas globais x_1 e x_2 em cada elemento estão relacionadas com as coordenadas locais ξ_1 e ξ_2 pelo mapeamento, ou seja:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi_1, \xi_2) \qquad x_2 = \chi_2^e(\xi_1, \xi_2)$$

Pode-se, portanto, relacionar o diferencial em x_1 e x_2 em termos do diferencial em ξ_1 e ξ_2 pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 \\ \mathrm{d}x_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais podem ser calculadas numericamente.

Ao longo de uma aresta de qualquer elemento a aresta está completamente parametrizada em termos de ξ_1 ou ξ_2 enquanto a outra coordenada local é constante e tem o valor 1 ou -1. Sendo assim, dependendo da aresta, o comprimento $\mathrm{d}s$ pode ter uma das seguintes expressões:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 (\mathrm{d}\xi_1)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 (\mathrm{d}\xi_1)^2}$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 (\mathrm{d}\xi_2)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2 (\mathrm{d}\xi_2)^2}$$

e a integral (A.9) pode ser escrita como uma das seguintes formas:

$$\int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} f(\xi_1, \xi_2)\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi_1$$
$$\int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} f(\xi_1, \xi_2)\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi_2$$

que pode ser calculada usando quadratura de Gauss.

A.4 Aplicação do método dos elementos espectrais às equações de Navier-Stokes incompressíveis

As simulações numéricas que serão realizadas neste trabalho são de um escoamento tridimensional incompressível de um fluido newtoniano. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível, sem forças de corpo e com propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$ é o vetor velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ρ é a densidade e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Esta equação pode ser adimensionalizada utilizando as seguintes relações:

$$\overline{u} = \frac{u}{U_\infty},\ \overline{v} = \frac{v}{U_\infty},\ \overline{w} = \frac{w}{U_\infty},\ \overline{t} = \frac{tU_\infty}{D},$$
$$\overline{x} = \frac{x}{D},\ \overline{y} = \frac{y}{D},\ \overline{z} = \frac{z}{D},\ \overline{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2},\ \mathrm{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu}$$

onde U_∞ é a velocidade do campo não perturbado, D é a dimensão característica do corpo, que neste trabalho, onde são estudados escoamentos ao redor de cilindros, é o diâmetro

do cilindro e Re é o número de Reynolds.

Todas as variáveis utilizadas daqui para diante serão adimensionais, exceto quando houver indicação contrária, e por isso não se usará mais a barra sobre as grandezas a fim de simplificar a notação. As equações de Navier-Stokes podem então ser escritas na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u} \tag{A.10a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{A.10b}$$

A solução numérica das equações de Navier-Stokes apresenta diversas dificuldades. Talvez a mais evidente seja a existência do termo não linear. No método que será descrito aqui, o termo não linear é tratado de maneira explícita e com um passo de tempo (Δt) adequado este problema é solucionado.

Uma outra dificuldade importante é a forma de acoplamento entre pressão e velocidade, que faz com que as duas variáveis não possam ser aproximadas independentemente. Uma condição de compatibilidade conhecida como condição *inf-sup* ou *div-stability* deve ser satisfeita pelos espaços discretos que aproximarão a solução, a fim de garantir estabilidade e unicidade da solução discreta. Na implementação utilizada neste trabalho, esta condição foi satisfeita empregando-se polinômios de ordem P para a velocidade e um polinômio de ordem $P - 1$ para a pressão. Maiores detalhes sobre esta condição podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin (2005).

Neste capítulo, será delineado como o método de elementos espectrais é empregado na resolução das equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível. Serão abordadas questões referentes às condições de contorno e avanço no tempo. Tratar-se-á da utilização do método apresentado no item A.3.1, que trata de expansões em domínios homogêneos, nas equações de Navier-Stokes.

A.4.1 Método de marcha no tempo

Primeiramente serão definidas condições de contorno apropriadas para o tipo de problema estudado neste trabalho, que é o escoamento externo ao redor de um corpo rombudo. Começando com as condições de contorno para velocidade, pode-se dizer que ao longe, onde não há influência do corpo nem da esteira por ele formada, o escoamento pode ser considerado não perturbado e a velocidade é igual a U_∞. Nas paredes, é imposta condição

de não escorregamento e a velocidade é nula. Na região de saída de fluido, tipicamente influenciada pela esteira, a derivada da velocidade na direção normal do contorno pode ser considerada como nula, ou seja, $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n} = 0$.

Já para a pressão, na saída se impõe uma condição $p = 0$, que pelo *splitting method* que será apresentado se torna do tipo Neumann para a equação de Poisson, isto é, $\partial p/\partial \mathbf{n} = 0$. Quanto à condição de contorno da pressão na parede, a literatura apresenta um debate intenso sobre esta questão. Vale lembrar que não existe uma equação de estado para pressão[2] no escoamento incompressível e, portanto, a pressão numa parede é conseqüência do escoamento. Tradicionalmente, nas paredes adotou-se para a pressão um gradiente nulo:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\text{parede}} = 0$$

Deve-se ressaltar que a adoção deste tipo de condição de contorno é compatível com a teoria da camada limite. Contudo, segundo Karniadakis, Israeli e Orszag (1991), esta condição de contorno compromete qualquer tentativa de se obter uma precisão melhor do que primeira ordem no tempo. Os mesmos autores propõem uma condição de contorno do tipo Neumann de alta ordem para a pressão nestas regiões, que é derivada da equação de equilíbrio de quantidade de movimento linear na direção normal na fronteira do domínio. Esta condição de alta ordem é a empregada nesta tese. Ela também é utilizada nas regiões de escoamento ao longe na implementação empregada neste trabalho. Ela será descrita mais adiante nesta seção, juntamente com o método de avanço no tempo *splitting method*.

Ao resolver as equações de Navier-Stokes no tempo, é necessário adotar uma discretização temporal. O mais usual em escoamentos incompressíveis é fazer a discretização no tempo independente da discretização no espaço. O método de elementos espectrais permite uma resolução muito alta no espaço, mas isso de nada adianta se a resolução temporal não for compatível com esta precisão. A discretização temporal, além de estar diretamente ligada com fenômenos transientes, também influencia diretamente na forma do sistema de equações que precisam ser resolvidas. Em particular, ela determina a forma da equação de pressão e dita a qualidade da aproximação da restrição de incompressibilidade nas formulações com variáveis primitivas, ou seja, formulações do tipo pressão-velocidade.

Karniadakis, Israeli e Orszag (1991) propõem um método de solução das equações de Navier-Stokes transitórias usando *time-splitting* (ou *splitting method*) que permite o

[2]Uma equação de estado, por exemplo, que representa p em função de outras propriedades termodinâmicas.

Tabela A.1: Coeficientes dos esquemas Adams-Bashforth e Adams-Moulton.

	Coeficiente	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
Adams-Bashforth	β_0	0	0	0
	β_1	1	3/2	23/12
	β_2	0	$-1/2$	$-16/12$
	β_3	0	0	5/12
Adams-Moulton	γ_0	1	1/2	5/12
	γ_1	0	1/2	8/12
	γ_2	0	0	$-1/12$
	γ_3	0	0	0

uso de precisões de ordens superiores.

A eq. (2.1a) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{N}(\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbb{L}(\mathbf{u}) \tag{A.11}$$

onde

$$\mathbb{N}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})]$$
$$\mathbb{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2\mathbf{u}$$

que representam o termo convectivo e o termo difusivo. O termo convectivo geralmente é implementado desta forma para reduzir *aliasing* (KARNIADAKIS; ISRAELI; ORSZAG, 1991) e apresenta resultados superiores apesar de aumentar o custo computacional.

A eq. (A.11) integrada num passo de tempo Δt resulta em:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \tag{A.12}$$

onde o índice n se refere ao passo de tempo $t_n = n\Delta t$. O termo não linear é aproximado por um esquema explícito de ordem J_e da família de Adams-Bashforth, principalmente por razões de eficiência:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t = \Delta t \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \tag{A.13}$$

onde β_q são os pesos dados pela Tab. A.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Os termos lineares $\mathbb{L}(\mathbf{u})$ são aproximados de forma implícita por razões de estabilidade. Será utilizado um esquema de ordem J_i da família de Adams-Moulton, resultando em:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}t = \Delta t \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \tag{A.14}$$

onde γ_q são os pesos dados pela Tab. A.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Por último, o termo de pressão será reescrito:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p\,\mathrm{d}t = \Delta t \nabla \overline{p}^{n+1} \tag{A.15}$$

onde $\overline{p}^{n+1}$ é um campo escalar que assegura que o campo de velocidades final é incompressível ao final do passo de tempo $(n+1)$.

Usando esta notação, a marcha de integração temporal utilizando o *splitting method* pode ser realizada em três etapas, tomando a seguinte forma:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) \qquad \text{em } \Omega \tag{A.16a}$$

$$\frac{\hat{\hat{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla \overline{p}^{n+1} \qquad \text{em } \Omega \tag{A.16b}$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\hat{\mathbf{u}}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \qquad \text{em } \Omega \tag{A.16c}$$

com condições de contorno essenciais $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0 \qquad \text{em } \partial\Omega$$

Nestas equações, $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ são campos de velocidade intermediários. A eq. (A.16a) pode ser resolvida para $\hat{\mathbf{u}}$, já que é uma expressão explícita. Desde que se conheça o campo $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$, que deve vir da eq. (A.16b), a eq. (A.16c) também pode ser resolvida para $\mathbf{u}^{n+1}$, pois se trata de uma equação linear resolvida de maneira implícita. Resta saber como resolver a eq. (A.16b), já que nesta expressão há duas incógnitas: $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\overline{p}^{n+1}$. Isto é solucionado assumindo que o campo de velocidades intermediário satisfaz a condição de incompressibilidade do fluido, assim:

$$\nabla \cdot \hat{\hat{\mathbf{u}}} = 0 \qquad \text{em } \Omega \tag{A.17}$$

Aplicando o operador divergente na eq. (A.16b) e substituindo a eq. (A.17) chega-se a:

$$\nabla^2 \overline{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \qquad \text{em } \Omega \tag{A.18}$$

Resta-nos estabelecer as condições de contorno para esta equação. Para isso,

toma-se a eq. (A.11) no contorno $\partial\Omega$, multiplicando todos os termos pelo vetor normal $\mathbf{n}$:

$$\int_{t_m}^{t^{n+1}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}t = \begin{array}{l} -\displaystyle\int_{t_m}^{t^{n+1}} \nabla p \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_{t_m}^{t^{n+1}} \mathbb{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}t \\ -\displaystyle\int_{t_m}^{t^{n+1}} \mathbb{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}t \end{array}, \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{A.19}$$

O termo dentro da integral do lado esquerdo desta equação pode ser reescrito:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}$$

O segundo termo do lado direito desta equação é nulo, visto que o domínio é indeformável; portanto o vetor normal na fronteira é invariante no tempo. Já o primeiro termo, quando integrado em todo o contorno, representa o fluxo líquido de massa no domínio. Como está sendo considerado um escoamento incompressível, sem fontes ou sorvedouros no interior do domínio, a integral no contorno deste termo é nula, embora localmente ele possa não ser. Entretanto, como as equações do método numérico empregado posteriormente são integradas em todo o domínio, este termo será cancelado numa etapa seguinte, e por isso, ele será desconsiderado nesta etapa. Isto posto, o termo do lado esquerdo na eq. (A.19) é anulado e substituindo nela as expressões (A.13), (A.14) e (A.15), chega-se a:

$$\frac{\partial \overline{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbb{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \right] \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{A.20}$$

Nota-se que nesta expressão aparecem variáveis no tempo $n+1$, que são incógnitas. Isto acontece devido ao tratamento implícito do termo difusivo $\mathbb{L}(\mathbf{u})$. A fim de eliminar este problema e construir um esquema estável, o termo difusivo é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

O primeiro termo, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$, será tratado de forma implícita enquanto o segundo termo, $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, será tratado de forma explícita. Pode-se reescrever então a eq. (A.20):

$$\frac{\partial \overline{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \begin{array}{l} \left[\displaystyle\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbb{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-q}) \right. \\ \left. + \displaystyle\frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \beta_q (-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q})) \right] \end{array}, \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{A.21}$$

Note que nesta equação, o termo $\gamma_0 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})$ pode ser igualado a zero, pois o requisito de incompressibilidade no passo $n+1$ faz com que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. Desse modo, elimina-se as velocidades no passo $n+1$ da expressão e a única incógnita passa a ser $\partial \overline{p}^{n+1}/\partial \mathbf{n}$. Em suma, a eq. (A.21) representa a condição de contorno de alta ordem para pressão e é a condição usada nas simulações desta tese.

A.4.2 Decomposição modal na direção do eixo

Nesta seção será descrito como aplicar os conceitos apresentados (ver p. 143), relativos a expansões em domínios homogêneos, às equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Para isso considere o caso do movimento de um fluido viscoso ao redor de um cilindro infinitamente longo posicionado perpendicularmente a uma corrente uniforme. Assume-se que o fluido tenha massa específica constante ρ e viscosidade dinâmica constante μ. Este escoamento incompressível depende de três parâmetros dimensionais: o diâmetro do cilindro D, a velocidade da corrente livre U_∞, e a viscosidade cinemática do fluido $\nu = \mu/\rho$. A única combinação adimensional destes parâmetros é o número de Reynolds, $\mathrm{Re} = U_\infty D/\nu$, e ele serve como um parâmetro de controle do sistema. O problema pode ser descrito de forma adimensional, com U_∞ e D servindo de escalas de referência para velocidade e comprimento. O estado do fluido em qualquer instante de tempo t neste escoamento é determinado pelo campo de velocidades $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ e o campo de pressão $p(x, y, z, t)$. Estes campos são descritos num sistema de coordenadas onde x está alinhado com a direção e sentido da corrente livre, y é normal à corrente livre e ao eixo do cilindro e z está alinhado com o eixo do cilindro.

A evolução do escoamento é descrita pelas equações de Navier-Stokes para fluido incompressível, escritas a seguir na forma adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbb{N}(\mathbf{u}) - \nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{em } \Omega$$

onde $\mathbb{N}(\mathbf{u})$ representa o termo convectivo não linear dado por:

$$\mathbb{N}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})]$$

O domínio computacional Ω representa a região do espaço tridimensional ao redor do cilindro na qual as equações de Navier-Stokes serão resolvidas.

O primeiro passo da discretização é reduzir o problema do infinito para um pro-

blema num domínio de dimensão finita L na direção da envergadura. Em outras palavras, serão considerados escoamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ que satisfaçam o requisito de periodicidade:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z + L, t)$$

O campo tridimensional periódico $\mathbf{u}$ pode ser projetado exatamente num conjunto de modos de Fourier bidimensionais $\hat{\mathbf{u}}_q$ usando a transformada de Fourier:

$$\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{u}(x, y, z, t) e^{-i(2\pi/L)qz} \, \mathrm{d}z$$

Da mesma maneira, os modos na direção do eixo $\hat{\mathbf{u}}_q$ dão a expansão do campo de velocidades numa série de Fourier e podem ser encontrados através da transformada inversa de Fourier, desta vez, já apresentada na sua versão discreta:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz}$$

Substituindo a expansão de Fourier do campo de velocidades nas equações de Navier-Stokes, é obtido um sistema acoplado de equações para os modos de Fourier. Com o intuito de simplificar a escrita, será utilizada e complementada a notação introduzida na seção A.3.1, p. 143. Define-se o número de onda escalado $\beta_q = (2\pi/L)q$ e os operadores dependentes de q:

$$\tilde{\nabla} \equiv (\partial_x, \partial_y, i\beta_q), \qquad \tilde{\nabla}^2 \equiv (\partial_x^2, \partial_y^2, -\beta_q^2)$$

A equação de evolução para os modos de Fourier passa então a ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_q}{\partial t} &= -\mathbb{N}_q(\mathbf{u}) - \tilde{\nabla}\hat{p}_q + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\nabla}^2 \mathbf{u}_q \\ \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_q &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{em } \Omega$$

O termo não linear de convecção proporciona o acoplamento entre todos os modos. Pode-se grafar este termo assim:

$$\mathbb{N}_q(\mathbf{u}) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbb{N}(\mathbf{u}) e^{-i(2\pi/L)qz} \, \mathrm{d}z$$

A representação final do campo de velocidades será tomada como uma expansão truncada:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{q=-M}^{M} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz}$$

Computacionalmente é mais conveniente calcular a evolução de modos bidimensionais de Fourier $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ do que o campo tridimensional completo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Como $\mathbf{u}$ é real, os modos de Fourier satisfazem à condição de simetria $\hat{\mathbf{u}}_{-q} = -\hat{\mathbf{u}}_q^*$. Por isso, apenas metade do espectro ($q > 0$) é necessário. No entanto cabe a ressalva de que os campos $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$ e $\hat{p}_q(x, y, t)$ são complexos, pois a expansão utilizada é uma série de Fourier, e por isso requerem o dobro de espaço para armazenamento.

A representação do campo de velocidades através de modos de Fourier tem outras vantagens intrínsecas. Ela proporciona uma maneira direta de ligar modos particulares de sistemas com padrões tridimensionais específicos. A teoria de estabilidade linear pode predizer quais modos interagirão de forma mais forte com o escoamento bidimensional para produzir estes padrões. A amplitude média no tempo dos modos de Fourier é uma indicação direta da quão boa é a resolução dos cálculos efetuados. E finalmente, a amplitude dependente do tempo dos modos de Fourier oferece uma maneira conveniente de explicar a transferência de energia entre as diferentes escalas na esteira tridimensional.

O conjunto de equações modais são integradas avançando-se no tempo utilizando-se o método de "splitting" apresentado na seção A.4.1. A repetição dos cálculos para cada um dos modos de Fourier sugere uma estratégia natural de distribuição do trabalho computacional num conjunto de processadores paralelos: cada modo é atribuído a um computador diferente. A integração no tempo é feita para cada modo em paralelo com troca de dados no começo do passo de tempo visando avaliar o termo não-linear. Este termo é computado pseudo-espectralmente numa malha de pontos no espaço físico através do uso de uma transformada rápida de Fourier (FFT). O cálculo do termo não linear compreende grosso modo a um quarto do trabalho computacional. O trabalho restante constitui a solução de sistemas lineares nos passos referentes à pressão e ao termo de difusão. Esses últimos passos não requerem interação entre os modos e podem ser feitos em paralelo, com o trabalho balanceado no conjunto de processadores paralelos.

APÊNDICE B – TEORIA DE FLOQUET

A Teoria de Floquet (IOOSS; JOSEPH, 1990) é uma teoria linear de estabilidade para soluções que dependem periodicamente no tempo. Seu objeto de estudo é uma equação linear com coeficientes periódicos que são geradas no estudo de soluções T-periódicas forçadas levando a uma equação linear não-autônoma com coeficientes T-periódicos ou no estudo de estabilidade de soluções periódicas que bifurcam da estacionária (autônoma).

Esta seção apresenta a teoria de Floquet voltada para a transição do escoamento, ou seja, aplicada às equações que governam o escoamento incompressível. Para uma abordagem com ênfase em sistemas dinâmicos e um maior rigor matemático, o leitor pode consultar Iooss e Joseph (1990).

Embora a teoria de Floquet seja uma boa estimativa da estabilidade global, seus resultados, em geral, apenas descrevem o comportamento assintótico do sistema linear. Os modos globais de Floquet descrevem o comportamento quando $t \to \infty$. Quanto à dinâmica em curto tempo, os resultados de Floquet são péssimos descritores, especialmente em sistemas não ortogonais (SCHMID, 2007) típicos de sistemas fluidos. Para a descrição do comportamento em curto prazo, métodos como raio numérico e crescimento transiente são os mais apropriados para a análise. Diversas referências tratam deste assunto dentre elas Schmid e Henningson (2001), Schmid (2007), Barkley, Blackburn e Sherwin (2007) e Abdessemed et al. (2008).

B.1 Teoria de Floquet aplicada a Navier-Stokes

Esta seção apresenta a aplicação da teoria acima às equações de escoamento bidimensional fluido incompressível a fim de se inferir instabilidades que o tornam tridimensional.

Este texto baseia-se principalmente nos artigos Barkley e Henderson (1996) e Carmo et al. (2008). Barkley e Henderson obtiveram a partir de um campo base bidimensional os modos tridimensionais classificados como A e B por Williamson (1988b) e

Carmo et al. estudaram a transição da esteira sob interferência de outro cilindro.

B.1.1 Equação do sistema - campo base

A análise de estabilidade de Floquet é realizada sobre um campo de velocidades T-periódico. No caso de Barkley e Henderson (1996), um campo bidimensional foi usado como base da análise. O procedimento usado será descrito a seguir: nesta seção mostra-se como obter um campo base e como usá-lo de entrada para a análise de estabilidade; na seção B.1.2 seguinte aplicar-se-á a teoria de Floquet descrita na seção B.

O campo base é obtido através de simulação bidimensional direta por método de elementos espectrais (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005): emprega-se uma malha com elementos interpolados por polinômios de alta ordem(grau por volta de 9 em geral). A equação que governa o escoamento do fluido incompressível é

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{N}(\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u} \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{B.1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{B.1b}$$

onde $\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$ é o campo de velocidade, p pressão, ρ a massa específica, Re o número de Reynolds, Ω o domínio computacional e $\mathbf{N}(\mathbf{u}) \equiv (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ é o termo advectivo. Tomam-se como referências D diâmetro do cilindro e U_∞ velocidade da corrente livre.

As condições de contorno empregadas são: entrada com velocidade imposta, saída com gradiente zero e condição de aderência na parede. Estas estão listadas na Tab. B.1.

Tabela B.1: Condições de contorno empregadas nas simulações diretas.

Condição de contorno	Implementação
Entrada	$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$
Saída	$p = 0$, $\partial\mathbf{u}/\partial n = 0$
Parede	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{parede}$

As soluções periódicas são armazenadas para análise através de 32 (ou 64) imagens em intervalos de tempos iguais ao longo de um período. Com estas imagens pode-se obter o escoamento periódico através de uma interpolação de Fourier no tempo com acurácia semelhante à das simulações diretas.

Tabela B.2: Condições de contorno da pertubação, usadas na análise de Floquet.

Condição de contorno	Implementação
Entrada	$\mathbf{u}' = 0$
Saída	$p' = 0$, $\partial \mathbf{u}'/\partial n = 0$
Parede	$\mathbf{u}' = 0$

B.1.2 Análise de Floquet aplicada

Para inferir a estabilidade da solução bidimensional obtida $\mathbf{U}(x, y, t)$, observa-se a evolução de uma perturbação tridimensional $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ adicionada a este campo base. O campo base com a perturbação é governado pela eq. (B.1). Fazendo esta substituição e linearizando a equação[1]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\mathbf{DN}(\mathbf{u}') - \frac{1}{\rho}\nabla p' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u}' \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{B.2a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \qquad \text{em } \Omega\,, \tag{B.2b}$$

onde

$$\mathbf{DN}(\mathbf{u}') \equiv (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u}' \tag{B.2c}$$

é o termo advectivo linearizado.

As condições de contorno para a pertubação estão apresentadas na Tab. B.2. Nota-se que estas condições de contorno permitem que $\mathbf{U} + \mathbf{u}'$ satisfaça as mesmas condições que o campo base, Tab. B.1.

Define-se o operador $\mathbf{L}$ tal que[2] $\mathbf{L}(\mathbf{u}')$ seja a parte direita da eq. (B.2a) sujeita à restrição de incompressibilidade eq. (B.2b), permitindo a escrita compacta da equação da evolução da perturbação como

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}')\,. \tag{B.3}$$

O operador $\mathbf{L}(\mathbf{u}')$ é T-periódico pois $\mathbf{DN}(\mathbf{u}')$ o é, devido ao campo base $\mathbf{U}$. Portanto a eq. (B.3) é do tipo Floquet. Soluções desta equação podem ser decompostas em uma soma de soluções da forma $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)\exp(\sigma t)$,onde $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ também são funções T-periódica. Estas são os modos de Floquet referente ao operador $\mathbf{L}$. Os números complexos σ são os expoentes de Floquet embora os multiplicadores de Floquet $\mu \equiv \exp(\sigma T)$

[1]Permite-se a linearização pois a perturbação é de ordem menor que o campo base na escala curta de tempo, portanto o termo $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'$ é de ordem inferior aos termos da eq. (B.2). Supõe $\mathbf{U} \sim \mathcal{O}(1)$ e $\epsilon \ll 1$, então $\mathbf{u}\prime \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ e $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$

são geralmente mais usados.

Lembrando que a estabilidade do campo base $\mathbf{U}$ pode ser determinada pelo espectro dos multiplicadores ou autovalores do operador $\mathbf{L}$. Os multiplicadores de Floquet dentro do círculo de raio unitário no plano complexo ($\mid \mu \mid < 1$) correspondem a soluções exponencialmente decrescentes ($\mathrm{Re}(\sigma) < 0$), enquanto aqueles fora do círculo ($\mid \mu \mid > 1$) correspondem a soluções exponencialmente crescentes ($\mathrm{Re}(\sigma) > 0$). Uma instabilidade é então assinalada quando o multiplicador cruza tal círculo. [3]

Como se trata de um domínio homogêneo na direção ao longo da envergadura do cilindro, z, é possível simplificar a as perturbações expressando-as através de uma integral de Fourier:

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(x, y, \beta, t) e^{\imath\beta z} \mathrm{d}\beta \,, \tag{B.4}$$

idem para p'. Como as eq. (B.2) são lineares, modos com diferentes β (número de onda) não se acoplam. De fato, perturbações da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x, y, z, t) &= (\hat{u} \cos \beta z, \hat{v} \cos \beta z, \hat{w} \sin \beta z) \\ p'(x, y, z, t) &= \hat{p} \cos \beta z \end{aligned} \,, \tag{B.5}$$

permanecem desta forma nas eq. (B.2). Modos de Floquet $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ são necessariamente desta forma. Já que $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ e $\hat{p}$ dependem somente de x, y e t, o problema de estabilidade completo tridimensional para um dado Reynolds se resume a uma família de problemas de estabilidade bidimensional de um parâmetro: calculam-se os multiplicadores de Floquet μ e seus modos correspondentes $\tilde{\mathbf{u}}$ em função do parâmetro β para cada Reynolds Re.

Para se obter os modos de Floquet do sistema B.3 e seus multiplicadores correspondentes, constrói-se um operador representando a evolução, através de um período T, a partir da eq. (B.3)

$$\mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{u}'_n \tag{B.6}$$

onde $\mathbf{u}'_n = \mathbf{u}'(x, y, z, t_0 + nT)$ é a pertubação após n períodos. O operador $\mathbf{A}$ é equivalente ao mapa de Poincaré linearizado associado ao campo base periódico. Os autovalores μ de $\mathbf{A}$ são exatamente os multiplicadores de Floquet do operador $\mathbf{L}$ e as autofunções $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t_0)$ são os modos de Floquet em um instante de tempo t_0 que depende da fase do campo base $\mathbf{U}$ implícito na definição de $\mathbf{A}$. Os modos de Floquet são achados integrando a eq. (B.3).

A ação de $\mathbf{A}$ na perturbação é obtida integrando as eq. (B.2) linearizadas usando

[3] Como o campo considerado na análise é sujeito a condições de contorno tipo entrada e saída, estas instabilidades são globais (HUERRE; MONKEWITZ, 1990).

essencialmente o mesmo método que a integração das eq. (B.1) da simulação numérica direta (DNS). Duas mudanças são efetuadas. Uma, o operador não-linear $\mathbf{N}(\mathbf{u}')$ é substituído pelo linearizado $\mathbf{DN}(\mathbf{u}')$. O campo base $\mathbf{U}$ do operador linearizado é obtido pela interpolação de Fourier no tempo dos 32 (ou 64) campos base de velocidade previamente armazenados. Outra, substitui-se o operador nabla (∇) da eq. (B.2) por $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, -\imath\beta)$, e calculam-se as velocidades $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ e pressão $\hat{p}$ em domínios bidimensionais.

O método de Arnoldi foi usado para computar os multiplicadores de Floquet de maior magnitude. O método é descrito brevemente a seguir. Mais detalhes podem ser encontrados em Saad (1992).

O método é um de projeção ortogonal da matriz $\boldsymbol{A}$ em um subespaço de Krylov de dimensão k definido por $\mathcal{K}_k \equiv \text{span}\left\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}\right\}$. Dada uma base ortonormal $\mathbf{Q}_k = [\boldsymbol{v}_0 \mid \boldsymbol{v}_1 \mid \ldots \mid \boldsymbol{v}_k - 1]$ do subespaço de Krylov $\mathcal{K}_k$, pode-se decompor a matriz $\boldsymbol{A}$ da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{H}_k + h_{k,k-1}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{e}_{k-1}^H, \tag{B.7}$$

onde $\boldsymbol{H}_k$ é a matriz de Hessenberg cujo valor na linha i e coluna j é denotado por $h_{i,j}$, e $\boldsymbol{v}_k$ é o vetor unitário ortogonal à base $\boldsymbol{Q}_k$ e $\boldsymbol{e}_k - 1$ é o vetor unitário apontando na direção da componente $k-1$ da base.

Multiplicando, na esquerda, ambos lados da eq. (B.7) por $\boldsymbol{Q}_k^H$ e lembrando que $\boldsymbol{Q}_k$ é ortonormal (notar que $\boldsymbol{v}_k$ é ortogonal a $\boldsymbol{Q}_k$ e que $\boldsymbol{Q}_k^H\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{I}$), obtém-se:

$$\boldsymbol{Q}_k^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{H}_k. \tag{B.8}$$

Os autovalores $\lambda_i^{(k)}$ da matriz de Hessenberg $\boldsymbol{H}_k$ são aproximações dos autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$, e o autovetor aproximado da matriz $\boldsymbol{A}$ associado a $\lambda_i^{(k)}$, também chamado de autovetor de Ritz, pode ser calculado por

$$\boldsymbol{w}_i^{(k)} = \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{y}_i^k, \tag{B.9}$$

onde $\boldsymbol{y}_i^k$ é o autovetor da matriz de Hessenberg $\boldsymbol{H}_k$ associado ao autovalor $\lambda_i^{(k)}$.

Alguns desse autovalores de Ritz são boas aproximações para os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ e a qualidade desta aproximação melhora conforme ao aumentar a dimensão do espaço de Krylov k. Um modo eficiente de estimar a norma do resíduo ϵ_i das aproximações é usando a expressão

$$\epsilon_i = h_{k,k-1}\left|\hat{\boldsymbol{e}}_{k-1}^H\boldsymbol{y}_i^{(k-1)}\right|. \tag{B.10}$$

O algoritmo de cálculo dos multiplicadores de Floquet de maior magnitude é explicado aqui. Primeiro, tem-se um vetor de perturbação inicial $\mathbf{u}'_0$ e usando a expressão B.6, um subespaço de Krylov $\boldsymbol{T}_{k+1}$ é gerado

$$\boldsymbol{T}_{k+1} = \{\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_k\}\,.$$

Depois, uma fatoração QR da matriz $\boldsymbol{T}_{k+1}$ foi efetuada usando o procedimento de Gram-Schmidt modificado. Com a base ortonormal $\boldsymbol{Q}_{k+1}$ e a matriz triangular superior $\boldsymbol{R}_{k+1}$ ($\boldsymbol{T}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$), pode-se deduzir uma expressão simples para calcular a matriz de Hessenberg $\boldsymbol{H}_k$ correspondente ao subespaço de Krylov de dimensão k $\mathcal{K}_k \equiv \text{span}\,\{\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_k\}$. Primeiro, multiplica-se, pela direita, ambos lados da eq. (B.8) por $\boldsymbol{R}_k$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_k^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{R}_k &= \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}_k \\ \boldsymbol{Q}_k^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_k &= \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}_k. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Já que $\boldsymbol{T}_k$ é gerado pela seqüência de Krylov $\left\{\mathbf{u}'_0, \boldsymbol{A}\mathbf{u}'_0, \boldsymbol{A}^2\mathbf{u}'_0, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\mathbf{u}'_0\right\}$, podemos decompor da seguinte maneira

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{Q}_{k+1}\overline{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)}, \tag{B.12}$$

sendo $\overline{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)}$ uma matriz $(k+1)\times k$ composta pelas k últimas colunas de $\boldsymbol{R}_{k+1}$. Substituindo a eq. (B.12) na B.11 obtém-se:

$$\boldsymbol{Q}_k^H\boldsymbol{Q}_{k+1}\overline{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}_k. \tag{B.13}$$

Já que os vetores que formam a matriz $\boldsymbol{Q}$ são ortogonais entre si, pode-se reescrever o lado esquerdo da eq. (B.13) como

$$\boldsymbol{Q}_k^H\boldsymbol{Q}_{k+1}\overline{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)} = [\boldsymbol{I} \mid 0] = \check{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)},$$

sendo $\check{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)}$ uma matriz $k\times k$ formada pelas últimas k colunas e primeiras k linhas de $\boldsymbol{R}_{k+1}$.

Considerando o fato de $\check{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)}$ e $\boldsymbol{R}_k$ serem submatrizes de $\boldsymbol{R}_{k+1}$, a expressão $\check{\boldsymbol{R}}_k^{(k+1)} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}_k$ pode ser escrita na forma indicial

$$r_{i,j+1} = \sum_{l=0}^{j} h_{i,l}r_{l,j}\,,$$

onde $r_{l,j}$ e $h_{i,l}$ são componentes das matrizes $\boldsymbol{R}_{k+1}$ e $\boldsymbol{H}_k$ respectivamente. Rearranjando

para calcular as componentes da matriz $\boldsymbol{H}_k$ temos:

$$h_{i,j} = \frac{1}{r_{j,j}} \left(r_{i,j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} h_{i,l} r_{l,j} \right) . \tag{B.14}$$

Em suma, após a fatoração QR da matriz $\boldsymbol{T}_{k+1}$, a matriz de Hessenberg $\boldsymbol{H}_k$ é calculada pela eq. (B.14). Os autovalores e seus respectivos autovetores são calculados usando a biblioteca computacional *LAPACK*, e o resíduo é estimado pela eq. (B.10).

Na implementação usada, a dimensão do subespaço de Krylov é limitada. A cada iteração, o subespaço de Krylov é atualizado e aumenta em 1 dimensão até a dimensão limite especificada. A partir de então, um novo vetor da seqüência de Krylov é gerado e o mais antigo é descartado, mantendo a dimensão do subespaço constante. Notar que isso é equivalente a iniciar o método com o segundo vetor gerado. Quando o método converge, os autovetores que representam o modo com o autovalor de maior magnitude são calculados segundo a eq. (B.9).

APÊNDICE C – ESTEIRA DE VON KÁRMÁN PELO MÉTODO DE FLOQUET

Nesta tese, avalia-se a transição secundária da esteira de um cilindro oscilando usando o método de Floquet para a análise de estabilidade. O método de Floquet foi necessário devido à periodicidade característica das esteira de um cilindro. Apesar deste ser o recurso apropriado para campos periódicos, o método de Floquet pode ser usado também em campos estacionários.

Com intuito de demonstrar a capacidade do método de Floquet aplicado a um campo estacionário, mostra-se a análise de estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro com foco na transição primária da esteira. O objetivo é estimar o Reynolds crítico em que ocorre a bifurcação de Hopf quando, então, surge a esteira de von Kármán e estimar a freqüência de Strouhal no limiar da transição.

O método de Floquet já foi apresentado neste texto na seção 2.3 e no apêndice B. Há algumas diferenças práticas para se avaliar a estabilidade de um campo estacionário usando o código de Floquet implementado.

Uma diferença prática usada nesta seção é a representação do campo base na análise de estabilidade. Como o campo base é estacionário, apenas um *snapshot* é necessário para representar o campo base ao longo do tempo em contrapartida dos demais casos com esteira periódica, quando 32 (ou mais) *snapshots* ao longo de um período são usados para representar a esteira periódica.

Outra diferença é a escolha do período (do campo base) de referência para o código a fim de simular a evolução da perturbação neste período. Como o campo base é estacionário, esta escolha é arbitrária a apenas deve-se considerar o tempo computacional gasto na simulação da evolução da perturbação e um tempo mínimo a fim de serem notáveis as variações da perturbação no tempo. Isto posto, considerou-se o período unitário

(1 unidade de tempo adimensional) como referência.

Sabe-se que o Reynolds crítico desta primeira transição na esteira do cilindro é por volta de 46, portanto os campos bases simulados através do método espectral têm número de Reynolds nesta faixa e estão listados a seguir: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 46.2 e 46.5.

Os campos bases no regime de escoamento antes da transição são similares ao apresentado na Fig. C.1, onde mostram-se algumas linhas de corrente e contornos de velocidade na direção x preenchidos com cores (azul negativa, branco nulo, vermelho positiva). Eles são caracterizados pelas bolhas de recirculação a jusante do cilindro. O comprimento da bolha pode ser visto na Fig. C.1 quando a velocidade em x é nula (contorno se torna branco) a jusante do cilindro ao longo da linha $y = 0$. Quando estas bolhas se tornam instáveis, qualquer perturbação resulta na formação da esteira com desprendimento de vórtices alternados.

A compilação dos resultados da análise está na Tab. C.1. A transição ocorre quando se observa o módulo do multiplicador de Floquet ser maior que 1 (ou taxa de crescimento/decaimento nula), ou seja, ocorre entre 46.2 e 46.5 segundo esta análise.

Tabela C.1: Resultados da análise de estabilidade de Floquet.

Número Reynolds	Multiplicador de Floquet		Taxa de crescimento ω_r	Freqüência ω_i [rad/s]
	Módulo $\|\mu\|$	Argumento ϕ		
40	$9.71270e^{-01}$	$7.36699e^{-01}$	$-2.91508e^{-02}$	$7.36699e^{-01}$
41	$9.76174e^{-01}$	$7.38897e^{-01}$	$-2.41143e^{-02}$	$7.38897e^{-01}$
42	$9.80984e^{-01}$	$7.41032e^{-01}$	$-1.91995e^{-02}$	$7.41032e^{-01}$
43	$9.85682e^{-01}$	$7.43021e^{-01}$	$-1.44218e^{-02}$	$7.43021e^{-01}$
44	$9.90271e^{-01}$	$7.44877e^{-01}$	$-9.77702e^{-03}$	$7.44877e^{-01}$
45	$9.94784e^{-01}$	$7.46625e^{-01}$	$-5.22973e^{-03}$	$7.46625e^{-01}$
46	$9.98985e^{-01}$	$7.49817e^{-01}$	$-1.01540e^{-03}$	$7.49817e^{-01}$
46.2	$9.99985e^{-01}$	$7.48535e^{-01}$	$-1.48805e^{-05}$	$7.48535e^{-01}$
46.5	$1.00126e^{+00}$	$7.48983e^{-01}$	$1.26054e^{-03}$	$7.48983e^{-01}$

Para se estimar o número de Reynolds crítico, assumindo que a taxa de crescimento/decaimento da instabilidade varie linearmente com o número de Reynolds na região bem próxima do limiar de estabilidade, ajustou-se por mínimos quadrados uma reta aos 4 últimos pontos da Tab. C.1. Isto é apresentado na Fig. C.2. O número de Reynolds crítico obtido é 46.21. Quanto à freqüência do modo, observa-se na Tab. C.1 que o multiplicador de Floquet tem argumento não nulo. A parte complexa é uma estimativa da freqüência

do modo instável. No número de Reynolds crítico, a freqüência de Strouhal estimada é 0.119.

O modo referente mais instável (ou menos estável) observado na análise é apresenta na Fig. C.3. Observa-se que este é o modo típico que representa a esteira de von Kármán.

Nesta análise de estabilidade, o número de Reynolds crítico é encontrado e a freqüência de Strouhal é bem estimada se compara com a relação empírica proposta em Norberg (2003) (St = 0.117).

Compara-se o resultado deste trabalho com o de algumas publicações na Tab. C.2, que é uma reprodução de Lopez, Meneghini e Saltara (2008) acrescida dos valores da relação empírica de Norberg (2003) e da análise deste trabalho.

Tabela C.2: Números de Strouhal e de Reynolds críticos. Alterada de Lopez, Meneghini e Saltara (2008).

Trabalho	Número de Strouhal	Número de Reynolds
Berger e Wille (1972)	0.12	50.0
Gresho, Lee e Upson (1984)	0.14	50.0
Provansal, Mathis e Boyer (1987)	0.12	47.0
Zebib (1987)	0.13	45.0
Jackson (1987)	0.13626	45.403
Williamson (1989)	0.1220	47.90
Morzynski e Thiele (1991)	0.13451	46.27
Noack e Eckelmann (1994)	0.149	54.0
Chen, Pritchard e Tavener (1995)	0.168	47.90
Cossu e Morino (1997)	0.112	45.63
Ding e Kawahara (1999)	0.12619	46.389
Mehmet e Owens (2004)	0.1167	46.76
Lopez, Meneghini e Saltara (2008)	0.1585	46.05
Norberg (2003) em Reynolds 47	0.117	~ 47
Este trabalho	0.119	46.21

Pode-se dizer que o resultado aqui apresentado está de acordo com as investigações mais recentes (com capacidade de uma avaliação mais precisa). O número de Reynolds crítico é estimado ultimamente entre 46 e 47. Esta investigação apresentou um Reynolds crítico de 46.21. Quanto ao número de Strouhal, há uma dispersão maior nos resultados apresentados. Ainda assim, considerando que o número de Strouhal observado experimentalmente em número de Reynolds 47 é 0.117 (NORBERG, 2003), e que os resultados mais recentes apresentam Strouhal por volta de 0.11 ou 0.12, a estimativa desta

investigação de St = 0.119 é bem próxima e consistente com as publicações.

Em resumo, o método de Floquet também pode ser aplicado a campos bases estacionários. No caso mostrado aqui, o escoamento ao redor de um cilindro fixo, pode-se estimar tanto o número de Reynolds crítico quanto a freqüência de desprendimento de vórtices após a instabilidade.

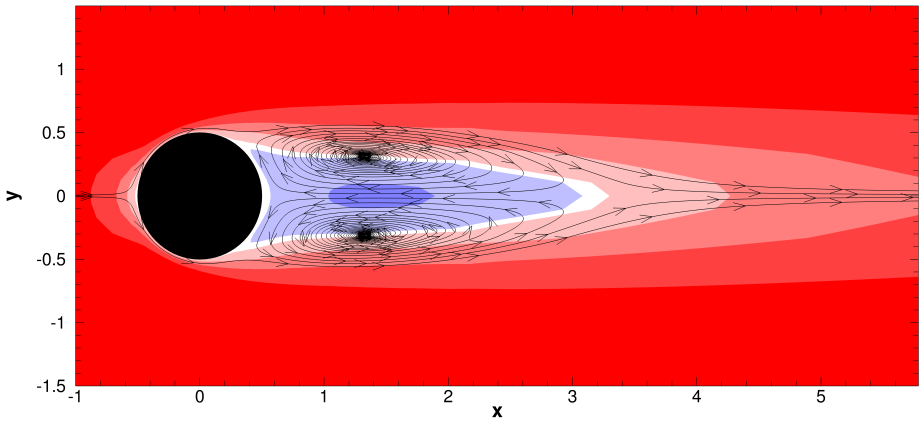


Figura C.1: Exemplo de campo base estacionário usado na análise de estabilidade de Floquet. Contorno de velocidade na direção x (vermelho positiva, azul negativa, branco nula). Este caso particular é para Re = 46.

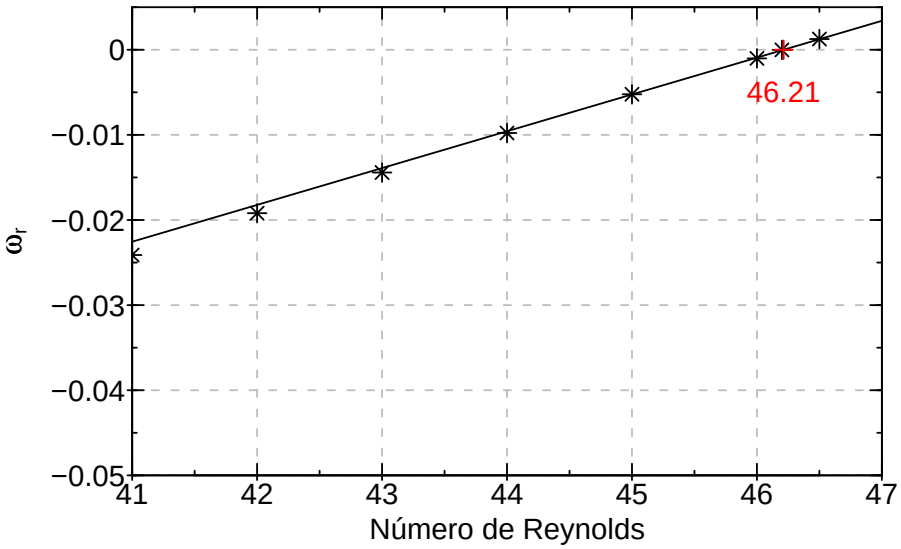


Figura C.2: Taxas de crescimento/decaimento da perturbação resultantes da análise de estabilidade de Floquet representadas por $*$. — representa a reta do ajuste, $+$ é o número de Reynolds crítico (também escrito na figura).

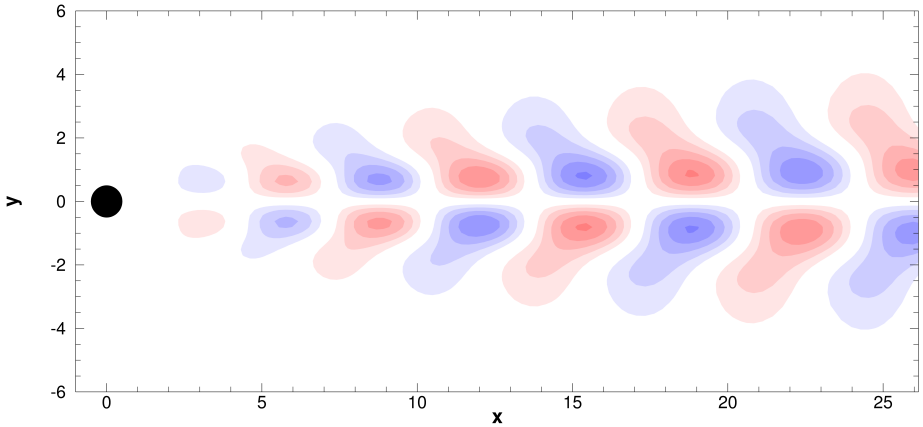


Figura C.3: Contorno de velocidade na direção x (azul negativo ao vermelho positivo) do modo normalizado mais instável, representante da esteira de von Kármán.