CESAR MONZU FREIRE

Estudo experimental do fenômeno de vibração induzida por vórtices em cilindro rígido livre para oscilar com dois graus de liberdade

São Paulo

2015

CESAR MONZU FREIRE

Estudo experimental do fenômeno de vibração induzida por vórtices em cilindro rígido livre para oscilar com dois graus de liberdade

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

São Paulo

2015

CESAR MONZU FREIRE

Estudo experimental do fenômeno de vibração induzida por vórtices em cilindro rígido livre para oscilar com dois graus de liberdade

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. Mecânica de Energia e Fluídos

Orientador: Prof. Dr. Julio Romano Meneghini

São Paulo

2015

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 29 de maio de 2015.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

Catalogação-na-publicação

Freire, Cesar Monzu
Estudo experimental do fenômeno de vibração induzida por vórtices em cilindro rígido livre para oscilar com dois graus de liberdade / C.M. Freire. – versão corr. -- São Paulo, 2015.
337 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Vibrações 2.Física experimental 3.Dinâmica dos fluídos 4.Vórtices dos fluídos 5.Interação fluído-estrutura I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Dedico este trabalho à minha esposa, Marianne, mulher justa e da Justiça, que faz de mim um homem melhor. Dedico também à minha filha, Lara, que me dá motivos diferentes para sorrir todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço à minha família, pois sem ela nada faria sentido para mim. Agradeço à minha esposa, Marianne, por estar sempre ao meu lado e haver suportado com carinho e amor toda a gama de sentimentos e estados de espírito que o desenvolvimento de um trabalho como este pode proporcionar. Agradeço a meus pais, Antonio Carlos e Maria Teodora, por todo o incentivo que sempre me deram ao longo de toda a minha vida, em todos os sentidos possíveis. Este trabalho não existiria sem vocês. Agradeço à minha filha, Lara, por me lembrar, todos os dias, que estar com as pessoas que amamos é o sentido da vida.

Esta tese foi desenvolvida ao longo dos últimos cinco anos. Iniciei meus estudos sobre o fenômeno de vibrações induzidas por vórtices no ano de 2007, enquanto cursava o terceiro ano do curso de Engenharia Mecânica na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Meu primeiro contato com esta linha de pesquisa foi durante as primeiras aulas do curso de Mecânica dos Fluidos II, nas quais meu então professor, Julio Romano Meneghini, discorreu sobre o tema, ressaltando sua relevância para a engenharia nacional e sua complexidade científica. Até hoje sou grato ao Prof. Meneghini, que desde então passou de professor a orientador, por instigar em mim a curiosidade científica e sempre prover os recursos necessários para o desenvolvimento desta investigação. A pesquisa começou como Iniciação Científica e se converteu em meu Trabalho de Conclusão de Curso. Sua evolução para o início de meu Doutorado foi um processo natural. Ainda havia muito a aprender e investigar. Ainda havia muito a amadurecer como pesquisador.

Durante todo esse trajeto, convivi e interagi com muitas pessoas às quais sou imensamente grato e hoje cultivo minha admiração.

Sou grato aos amigos e professores do laboratório Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) que me acompanharam nesse trajeto. Encontrei nesse laboratório um ambiente de trabalho motivador, curioso e bem-humorado. Mais do que colegas, acredito ter feito muitos amigos no processo. Não poderia deixar de mencionar Adson Agrico, Alessandro Lima (Roque), Alfredo Neto, André Bonatto, Bruno Carmo, Clóvis Martins, Douglas Serson, Douglas Silva, Eduardo Malta (Braddock), Ernani Volpe, Fabiano Imada, Fábio Saltara, Fernanda Takafuji, Gabriel Azevedo, Guilherme Franzini, Gustavo Assi, Gustavo

Bochio, Ivan Korkischko, Ivone Margarido, Jorge Baliño, José Aranha, João Isler, Lucia Messa, Murilo Cicolin, Rafael Giória, Rafael Nemoto, Reinaldo Orseli, Rodrigo Provasi, Sérgio Pellegrini (Coruja) e Stergios Tsiloufas (Grego).

Dentre todas essas pessoas, enalteço a minha gratidão a Douglas Silva e a Ivan Korkischko. Douglas me ajudou no projeto e fabricação de todas as peças da base elástica que uso em meus experimentos. Sem ele a base não existiria. Ivan me ensinou a usar todos os recursos experimentais do laboratório NDF, desde ligar o canal de água recirculante a fazer visualizações com a técnica de velocimetria *laser* PIV. Além disso, sempre contei com sua atenção e interesse no desenvolvimento de experimentos e em sua análise.

Agradeço também a Stergios Pericles Tsiloufas, Sérgio de Paula Pellegrini e Renato Ramirez Viana Neves pelas longas horas de caminhão que, até hoje, ainda não foi para a estrada.

Sou grato à Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo, FAPESP, pelo apoio financeiro deste trabalho. Agradeço pela bolsa de Doutorado Direto (DD), que me permitiu participar de conferências internacionais e nacionais e conhecer um grande grupo de pesquisadores ao redor do mundo. Agradeço também pela bolsa de Estágio em Pesquisa no Exterior (BEPE), que me permitiu trabalhar durante três meses como pesquisador convidado na Universidade Politécnica de Madrid, na Espanha. Agradeço ao Prof. Theofilis Vassilis por haver me recebido e orientado durante esse período.

Agradeço também aos professores Aristeu Silveira Neto, Gustavo Roque da Silva Assi, Julio Romano Meneghini, Raul Gonzalez Lima e Ricardo Franciss por haverem participado como membros da banca avalidora de minha Defesa de Doutorado e por melhorarem esta tese seus comentários, sugestões e correções.

"Pesquisar consiste em ver o que todos já viram e em pensar o que ninguém pensou."

Albert Szent-Györgyi (1893 - 1986),
Prêmio Nobel de Medicina em 1937

RESUMO

O fenômeno de vibração induzida por vórtices (VIV) é um problema fundamental dentro da Mecânica dos Fluidos e um exemplo importante de interação fluido-estrutura. Esta tese investiga fenômeno de VIV quando um cilindro rígido, submetido a escoamento uniforme, está livre para oscilar na direção transversal e alinhada com a corrente incidente.

A tese foi estruturada ao redor de sete perguntas relacionadas ao fenômeno de VIV: 1) O fenômeno e os resultados experimentais são repetitivos? 2) Como ocorre a transição entre ramos de resposta? 3) Qual é o papel da inércia da estrutura oscilante? 4) Qual é o papel de sua rigidez? 5) Quais são as frequências naturais mais importantes da estrutura? 6) Quais padrões de esteira se desenvolvem para VIV com dois graus de liberdade? 7) Quais são os efeitos do movimento na direção alinhada com a corrente no processo de formação e desprendimento de vórtices?

O fenômeno de VIV é estudado de maneira experimental em uma base elástica pendular capaz de oscilar com o mesmo momento de inércia e frequência natural nas duas direções. Os experimentos de VIV foram realizados em canal de água recirculante e com diferentes condições de inércia e rigidez. A técnica de velocimetria por imagem de partículas foi usada e permitiu identificar diferentes padrões de esteira de vórtices.

Verificou-se que o VIV é repetitivo a nível de amplitudes médias e frequências dominantes. A transição dos ramos pode ocorrer de maneira intermitente ou com histerese. Os parâmetros de inércia e rigidez da estrutura são capazes de mudar o regime de oscilação e, para algumas condições, suprimir as vibrações alinhadas com a corrente. Dentre os padrões de esteira observados, um deles não havia sido relatado na literatura e é definido nesta tese. O novo modo de emissão apresenta dois vórtices com circulação oposta e elevada intensidade emitidos por ciclo. A influência da direção alinhada com o escoamento está relacionada a dois efeitos: a velocidade relativa entre o cilindro e o fluido, responsável pelo aumento da circulação dos vórtices na esteira, e o ângulo de fase do movimento nas direções alinhada e transversal, capaz de mudar o processo de formação dos vórtices.

Palavras-chave: *Vibrações. Física experimental. Dinâmica dos fluídos. Vórtices dos fluídos. Interação fluido-estrutura.*

ABSTRACT

Vortex-induced vibration (VIV) phenomenon is a fundamental problem of Fluid Mechanics and a typical example of fluid-structure interaction. This thesis explores the VIV phenomenon for a rigid circular cylinder immersed in a uniform fluid current. The cylinder is free to oscillate in two degrees of freedom (2dof): in-line and cross flow.

The thesis was structured in order to answer seven questions regarding VIV: 1) Are the phenomenon and its experimental results repetitive? 2) How do the branches transition occur? 3) What is the role played by the inertia of the oscillating structure? 4) What is the role of its stiffness? 5) Which are the most relevant natural frequencies of the structure? 6) Which are the vortex wake patterns developed in VIV 2dof? 7) What are the influences of the in-line movement to the process of vortex formation and shedding?

The phenomenon is experimentally investigated using an elastic base similar to a pendulum and able to oscillate with the same moment of inertia and natural frequencies in both directions. All the experiments were conducted in a recirculating water channel facility and with several combinations of moment of inertia and stiffness of the structure. Particle image velocimetry provided visualization of different vortex wake patterns.

The phenomenon is repetitive in terms of its mean amplitudes and dominant frequencies. The transitions between different branches can be hysteretic or intermittent. It is shown that both the moment of inertia and the stiffness of the structure are able to change the regime of oscillations and, for some cases, suppress the in-line movement. Among the different vortex wake patterns observed, one has not been reported previously in the literature. The new wake pattern shows two large vortices with high and opposite circulations shed per cycle. The influence of the displacement in the current direction is related to two different effects: the relative velocity between the incoming flow and the structure motion, responsible for the increase in the net circulation shed in the vortex wake, and the influence of the phase angle between the displacement in the in-line and cross-flow directions, capable of changing the vortex formation process.

Keywords: *Vibrations. Experimental physics. Fluid Dynamics. Vortices in fluids. Fluid-structure interaction.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AS	Modo anti-simétrico de desprendimento de vórtices e segundo modo de vibrar alinhado com a corrente incidente
BEP	Base elástica pendular
MAC	Critério de comparação/confiança modal (*modal assurance criterion*)
MMA	Modelo massa-mola-amortecedor
MMQ	Método dos mínimos quadrados
MPC	Modelo pendular completo
MPS	Modelo pendular simples
MVD	Método dos vórtices discretos
PIV	Velocimetria por imagem de partículas (*particle image velocimetry*)
RMS	Valor quadrático médio (*root mean square*)
SS	Modo simétrico de desprendimento de vórtices e primeiro modo de vibrar alinhado com a corrente incidente
VIV	Vibração induzida por vórtices
1GL	Vibração induzida por vórtices com um grau de liberdade
2GL	Vibração induzida por vórtices com dois graus de liberdade
2C	Modo de emissão de vórtices com 2 pares de vórtices com circulação coincidente
2LS	Modo de emissão de vórtices com 2 grandes vórtices de circulação oposta
2P	Modo de emissão de vórtices com 2 pares de vórtices com circulação contrária
2Po	Modo de emissão de vórtices com 2 pares de vórtices com circulação contrária e grande desigualdade nas intensidades
2S	Modo de emissão de vórtices com 2 vórtices de circulação oposta
2T	Modo de emissão de vórtices com 3 pares de vórtices

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Grego

α		Parâmetro de ajuste de funções
β		Parâmetro de ajuste de funções
Γ	m^2/s	Circulação de um vórtice
δ	m	Espessura da camada limite
δ_c	m	Distância da extremidade do cilindro ao fundo do canal
ζ		Coeficiente de amortecimento estrutural em ar $\zeta = c/(2\sqrt{k\,m})$
ζ_w		Coeficiente de amortecimento em água
θ	^{o}	Ângulo no plano cartesiano
θ_x	^{o}	Ângulo de inclinação da base elástica ao redor das direções $\hat{j}$
θ_y	^{o}	Ângulo de inclinação da base elástica ao redor das direções $\hat{i}$
λ		Intensidade de dipolo
λ_2		Parâmetro usado em critério para identificação de vórtices
ν	m^2/s	Viscosidade cinemática da água
ρ	kg/m^3	Densidade da água
ϕ		Função potencial
ϕ_F	^{o}	Diferença de fase entre força e deslocamento
ϕ_{xy}	^{o}	Diferença de fase entre $y(t)$ e $x(t)$
ψ		Função linha de corrente
Ω		Função potencial complexo $\Omega = \phi + i\,\psi$
ω_n	rad/s	Frequência natural angular em ar $\omega_n = 2\pi\, f_n$
ω_w	rad/s	Frequência natural angular em água $\omega_n = 2\pi\, f_w$
ω_x	1/s	Vorticidade alinhada com a direção $\hat{i}$, $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$
ω_y	1/s	Vorticidade alinhada com a direção $\hat{j}$, $\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$
ω_z	1/s	Vorticidade alinhada com a direção $\hat{k}$, $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Alfabeto Latino

c	kg/s	coeficiente de amortecimento estrutural
C_a		Coeficiente de massa adicional
C_a^{pot}		Coeficiente de massa adicional potencial
C_{EA}		Coeficiente de massa adicional efetivo
C_y		Coeficiente de sustentação
D	m	Diâmetro externo do cilindro de teste
$\widehat{e_r}$		Versor da direção radial
$\widehat{e_\theta}$		Versor da direção angular
E_C	J	Energia cinética do fluido
f_n	Hz	Frequência natural da estrutura em ar
f_{ref}	Hz	Frequência de referência $f_{\text{ref}} = U_\infty/(2\pi\, D)$
f_{RI}	Hz	Frequência dominante de oscilação no início do Ramo Inferior
f_v	Hz	Frequência de desprendimento de vórtices em cilindro fixo
f_x	Hz	Frequência dominante de oscilação na direção $\hat{i}$
f_y	Hz	Frequência dominante de oscilação na direção $\hat{j}$
F_y	N	Módulo da força atuante na direção transversal ao escoamento
f_w	Hz	Frequência natural da estrutura em água
$\overrightarrow{g}$	m/s^2	Vetor aceleração da gravidade
h_{cn}	m	Altura da coluna de água do canal
i		Número imaginário $i^2 = -1$
$\widehat{i}$		Versor da direção alinhada com escoamento principal
$\widehat{j}$		Versor da direção transversal ao escoamento no plano horizontal.
J	kg m^2	Momento de inércia do sistema oscilante [1]
J_a	kg m^2	Momento de inércia adicional
J_B	kg m^2	Momento de inércia total da base elástica $J_B = J_0 + J_e$
J_d	kg m^2	Momento de inércia da água deslocada pelo cilindro
J_e	kg m^2	Momento de inércia extra dos lastros
J^*		Momento de inércia adimensional $J^* = J/J_d$
J_0	kg m^2	Momento de inércia da base elástica com cilindro e sem lastros
$\widehat{k}$		Versor da direção vertical
KC		Parâmetro de Keulegan-Carpenter
k_{rot}	N	Rigidez rotacional equivalente
k_R	N/m	Constante elástica média do conjunto de molas rígidas

[1] Todos os momentos de inércia são calculados em relação ao ponto de articulação da base elástica

k_S	N/m	Constante elástica média do conjunto de molas suaves
k_x	N/m	Constante elástica das molas alinhadas com a direção x
k_y	N/m	Constante elástica das molas alinhadas com a direção y
l_{cn}	m	Largura da seção de testes do canal de água recirculante
L_B	m	Comprimento total da base elástica pendular
L_c	m	Comprimento imerso do cilindro de teste
L_e	m	Comprimento da pilha de lastros
L_G	m	Distância do centro de gravidade da base elástoca com cilindro, mas sem lastros, até seu ponto de articulação
L_{Ge}	m	Distância do centro de gravidade dos lastros até o ponto de articulação
L_m	m	Distância do conector de molas ao ponto de articulação da base elástica
L_{pb}	m	Comprimento dos cilindros de chumbo usados como lastros
L_{st}	m	Comprimento dos cilindros de aço usados como lastros
L_w	m	Distância da metade do comprimento imerso ao ponto de articulação
m	kg	Massa do sistema oscilante
m_d	kg	Massa de água deslocada pelo cilindro
m_e	kg	Massa extra dos lastros
m_{pb}	kg	Massa de cada lastro de chumbo
m_{st}	kg	Massa de cada lastro de aço
m^*		Parâmetro de massa adimensional $m^* = m_s/m_d$
m^*_{crit}		Razão de massa crítica (relacionada à ressonância infinita)
m_0	kg	Massa da base elástica pendular com cilindro, mas sem lastros
N_{cn}	rpm	Frequência de rotação da bomba axial que controla o escoamento do canal
N_{PIV}		Número de aquisições realizadas em cada visualização com a técnica PIV
N_{pb}		Número de lastros de chumbo usados no ensaio de VIV
N_{st}		Número de lastros de aço usados no ensaio de VIV
p	N/m^2	Campo de pressão
P_B	N	Peso da base elástica
P_e	N	Peso dos lastros
P_w	N	Força de empuxo da massa de água deslocada
Q		Parâmetro usado no critério Q identificação de vórtices
Q_{cn}	m^3/s	Vazão volumétrica do canal de água recirculante
Ra	m	Rugosidade da superfície do cilindro de teste
Re		Número de Reynolds
St		Número de Strouhal

t	s	Tempo
T	s	Período de oscilação
T_{aq}	s	Tempo de aquisição
$\overrightarrow{u}$	m/s	Campo de velocidades $\overrightarrow{u} = u\,\hat{i} + v\,\hat{j} + w\,\hat{k}$
u	m/s	Componente da velocidade do escoamento na direção $\hat{i}$
U_s	m/s	Velocidade do escoamento no ponto de separação da camada limite
U_∞	m/s	Velocidade média não perturbada do escoamento incidente
v	m/s	Componente da velocidade do escoamento na direção $\hat{j}$
v_r	m/s	Componente de velocidade do escoamento na direção radial
v_θ	m/s	Componente de velocidade do escoamento na direção angular
V_r		Velocidade reduzida $V_r = U_\infty/(D\,f_n)$
V_r^w		Velocidade reduzida $V_r^w = U_\infty/(D\,f_w)$
w	m/s	Componente da velocidade do escoamento na direção $\hat{k}$
x	m	Deslocamento direção alinhada com a corrente $\hat{i}$
$\dot{x}$	m/s	Velocidade do cilindro na direção alinhada com a corrente
$\hat{x}$	m	Amplitude de oscilação do cilindro na direção alinhada com escoamento
y	m	Deslocamento na direção $\hat{j}$
$\dot{y}$	m/s	Velocidade do cilindro na direção transversal com a corrente
$\ddot{y}$	m/s^2	Aceleração do cilindro na direção transversal com a corrente
$\hat{y}$	m	Amplitude de oscilação na direção transversal ao escoamento
z	m	Posição ao longo do eixo z
z_c	m	Posição no plano complexo $z_c = x + i\,y$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído.
>
> Bachelard (1996)

Esta tese apresenta uma investigação experimental sobre o fenômeno de interação fluido-estrutura denominado Vibração Induzida por Vórtices (VIV). Diferentes abordagens e focos podem ser dados ao estudo deste fenômeno, considerando sua complexidade física e aplicações práticas. O foco desta investigação experimental é estudar o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade. Antes de definir as perguntas que guiarão o desenvolvimento desta tese, é preciso apresentar brevemente o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade.

O fenômeno de vibração induzida por vórtices é, antes de tudo, um fenômeno de interação fluido-estrutura que ocorre quando um corpo rombudo livre para oscilar está imerso em um escoamento. A presença do corpo altera as condições do escoamento e pode fazer com que estruturas fluidas, denominadas vórtices, sejam formadas e desprendidas no escoamento. O processo de formação e desprendimento de vórtices causa variações temporais no campo de pressão ao redor do corpo e podem faze-lo vibrar. As vibrações oriundas desse tipo de interação de uma estrutura com o escoamento e o processo de formação e desprendimento de vórtices recebem o nome de Vibrações Induzidas por Vórtices.

O fenômeno de VIV é, por si só, um fenômeno interessante e desafiador do ponto de vista científico. O processo de formação e desprendimento de vórtices em corpos rombudos ocorre na interação das camadas cisalhantes, que se formam após a separação da camada limite. Esse processo provoca forças de natureza cíclica no corpo e podem

induzir vibrações. O problema torna-se não linear pelo fato das oscilações induzidas pela emissão de vórtices alterarem o próprio processo de formação dos vórtices. A consequência afeta a causa. Outro complicador é a dinâmica dos fluidos que rege parte do problema. Enquanto o comportamento do corpo rombudo geralmente é facilmente equacionado, a modelagem do escoamento não é tão simples, dificultando assim uma abordagem analítica do problema.

Além do interesse científico, o fenômeno de VIV possui grandes implicações em situações práticas. Dentro do contexto nacional brasileiro, o exemplo que mais se destaca é a sua importância na indústria de extração de petróleo em alto mar. Nesse tipo de indústria, plataformas flutuantes são usadas para receber e armazenar o petróleo extraído dos poços localizados no fundo do mar. A conexão entre os poços e as plataformas ocorre através de tubos de elevação, usualmente denominados de *risers*. Devido ao grande comprimento desses tubos e consequente elevada razão de aspecto, os tubos apresentam comportamento flexível, o que permite sua oscilação. Ainda que as plataformas e o ponto de contato com o solo fossem fixos, situação que não condiz com a realidade, a flexibilidade dos tubos permite que estes apresentem diferentes modos de vibrar e, com isso, acumulem dano de fadiga. Dentro deste contexto, é importante entender o fenômeno de VIV para que se possa projetar estruturas menos sujeitas ao fenômeno de VIV ou ainda desenvolver dispositivos supressores.

A indústria de extração de petróleo não é o único exemplo prático no qual o fenômeno de VIV é importante. Forças cíclicas e oscilações causadas pela formação e desprendimento de vórtices também são relevantes em estruturas como chaminés, trocadores de calor, cabos suspensos, etc.

Apesar dos exemplos dados, nos quais o fenômeno de VIV apresenta consequências danosas e prejudiciais, as vibrações induzidas por vórtices podem ter boas aplicações. É o caso dos hidro-coletores de energia denominados VIVACE [1]. Este sistema foi desenvolvido em 2005 pelo Professor Michael Bernitsas, da Universidade de Michigan nos Estados Unidos, e aproveita as oscilações induzidas pelo escoamento ao redor de cilindros para movimentar transformadores e, assim, obter energia elétrica a partir do escoamento. Entender melhor as características do fenômeno de VIV permite otimizar esses sistemas e maximizar a potência fornecida por essas instalações.

Corpos rígidos possuem seis graus de liberdade possíveis: três translações e três deslocamentos. A figura 1.1 define uma base ortogonal com os versores $[\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}]$. Os

[1] O endereço de *internet* oficial do sistema VIVACE é: http://www.vortexhydroenergy.com/

deslocamento possíveis são rotações ao redor desses eixos e também os deslocamentos em cada direção. As variáveis (x, y, z) representam, respectivamente, deslocamentos nas direções $[\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$.

A figura 1.1 define também que o escoamento incidente ocorre na direção $\hat{i}$ e que o eixo do cilindro é paralelo ao versor $\hat{k}$.

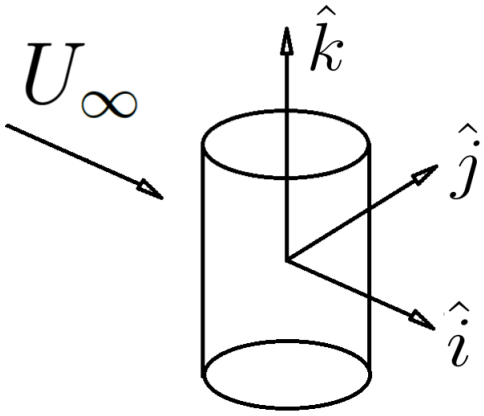


Figura 1.1: Definição de direções e graus de liberdade do cilindro.

Os dois graus de liberdade considerados neste trabalho são a direção alinhada $\hat{i}$ e a transversal $\hat{j}$ com relação ao escoamento incidente. Os deslocamentos medidos são dados, portanto, em função das variáveis x e y.

Historicamente, a pesquisa sobre o fenômeno de VIV focou no estudo das vibrações restritas a um grau de liberdade, transversal ao escoamento. Isso se deve, principalmente, às primeiras observações do fenômeno, que ocorreram em cordas de harpas e outros instrumentos musicais de corda. Além das primeiras observações terem ocorrido para escoamentos de ar, as primeiras aplicações do fenômeno também eram relacionadas a escoamentos de ar, tais como o escoamento ao redor de pontes, cabos elétricos suspensos e chaminés. Para essas situações era observado que as estruturas, fossem elas cabos de harpa ou chaminés, oscilavam preferencialmente na direção transversal ao escoamento. Com base nessas observações, os primeiros estudos em laboratório foram realizados em túneis de vento e com sistemas restritos para oscilar apenas na direção transversal.

Os estudos de VIV voltaram a considerar de maneira sistemática as influências da direção alinhada com a corrente com o desenvolvimento da indústria de exploração de petróleo em alto mar. O desenvolvimento desse setor trouxe a necessidade de se explorar a resposta do fenômeno para situações nas quais ele poderia oscilar tanto nas direções alinhada e transversal ao escoamento. Além disso, surge a necessidade de se estudar a

resposta do fenômeno quando a massa da estrutura era da ordem da massa do fluido deslocado. Enquanto ensaios realizados no ar apresentam essa relação de massa da ordem de 100 ou 1000, para ensaios em água a relação cai para as ordens 1 ou 10.

A rigor, tubos flexíveis usados na exploração de petróleo ou outras aplicações possuem infinitos graus de liberdade e, consequentemente, infinitos modos de vibrar. A hipótese de considerar apenas dois graus de liberdade vem do fato de que os tubos não apresentam oscilações que causem grandes curvaturas locais. Essa afirmação não é válida para o ponto de contato dos tubos com o solo ou ainda nos trechos com dispositivos usados para aliviar as tensões nos tubos. Nas regiões aonde os tubos estão submetidos às maiores correntes marinhas e podem vibrar o movimento pode ser simplificado para oscilações em um plano de um cilindro rígido.

Dentre os conhecidos efeitos do segundo grau de liberdade estão o desenvolvimento de novos ramos de resposta do fenômeno, com novas características em amplitude e frequência de oscilação, além de novos padrões de emissão de vórtices. Apesar desses efeitos serem conhecidos, ainda há grandes lacunas conceituais relacionadas a eles. A principal preocupação da maioria dos estudos dedicados ao fenômeno de VIV com dois graus de liberdade é determinar para quais condições todo o arcabouço teórico, desenvolvido ao longo de décadas para VIV restrito a oscilações transversais, ainda é válido. Poucos trabalhos na literatura procuram estudar o fenômeno de VIV com dois graus como o caso mais geral do fenômeno de VIV. Os novos ramos de resposta são vistos como variações da resposta clássica e não como o novo modo de se pensar o fenômeno.

Esta tese se insere neste contexto, porém propõe uma visão diferente. Ao longo da tese todos os ensaios de VIV são realizados com dois graus de liberdade. De fato, alguns resultados se assemelham à resposta observada para ensaios restritos a um grau, porém essa foi a resposta que o próprio fenômeno desenvolveu. Estuda-se, portanto, quando os resultados limitados a um grau, se assemelham ao caso mais geral, com dois. O estudo assume simetria entre os dois graus de liberdade. Tal como os tubos usados na exploração de petróleo em alto mar, o cilindro de teste usado nos experimentos possui a mesma massa e frequência natural nas direções alinhada e transversal à corrente incidente.

Retornando à afirmação de Bachelard (1996), esta tese foi estruturada com o objetivo de responder sete perguntas guias. São elas:

1. O fenômeno e os ensaios são repetitivos?
2. Existe histerese no fenômeno? Como ocorre a transição entre ramos de resposta?
3. Qual é o papel da inércia da estrutura oscilante?
4. Qual é o papel da rigidez da estrutura oscilante?
5. Quais são as frequências naturais mais importantes da estrutura?
6. Quais padrões de esteira se desenvolvem para VIV com dois graus de liberdade?
7. Quais são os efeitos do movimento na direção alinhada com a corrente no processo de formação e desprendimento de vórtices?

Ao longo da tese, cada pergunta é analisada de maneira individual, em função da campanha experimental empregada em sua investigação. As cinco primeiras perguntas são respondidas no capítulo 7 e as duas últimas no capítulo 6. O capítulo de Conclusão sintetiza os aspectos originais desta tese e propõe novas perguntas a serem avaliadas em trabalhos futuros.

1.1 Metas e objetivo da tese

O objetivo deste trabalho é estudar o fenômeno de vibração induzida por vórtices com dois graus de liberdade. A tese foca no fenômeno de VIV e não apenas na comparação entre os resultados obtidos com um ou dois graus de liberdade. Este objetivo central pode ser refinado nas seguintes metas:

1. Estudar, de maneira experimental, o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade, para escoamento uniforme ao redor de cilindro rígido. O cilindro é montado em base elástica pendular leve e capaz de oscilar, com a mesma massa e frequência natural, nas duas direções e com baixo amortecimento.
2. Determinar as respostas em amplitude e frequência para diferentes condições e avaliar a influência dos parâmetros de inércia e rigidez da estrutura.
3. Visualizar e analisar os padrões de esteira de vórtices formados para diferentes condições de oscilação do cilindro.

1.2 Metodologia empregada

Este trabalho consiste em uma investigação experimental sobre um fenômeno físico. Com base nisso, a hipótese fundamental é que as características medidas possuem incertezas de medição, porém os resultados devem ser repetitivos. Por se tratar de um fenômeno de interação fluido-estrutura, duas ênfases são dadas ao trabalho. A primeira considera a resposta da estrutura, quantificada pela resposta em amplitude e frequência do cilindro oscilante. A segunda ênfase se dá no comportamento do fluido, medido em função do formato das esteiras de vórtices e também da intensidade de circulação presente nelas.

A primeira etapa do trabalho foi a construção e validação da estrutura usada nos ensaios. A base elástica pendular (BEP) foi projetada para permitir ensaios de VIV com dois graus de liberdade. A base é um pêndulo articulado no teto do laboratório e permite ao cilindro se mover com a mesma massa em ambas as direções. O projeto da base visou a construção de uma estrutura leve, porém capaz de ter sua massa aumentada com a inserção de lastros no interior dos cilindros de ensaio. Além dessa possibilidade, a BEP permite também o emprego de diferentes conjuntos de molas de forma a alterar sua rigidez em cada direção.

A base elástica permite montagens assimétricas, nas quais uma das direções é mais rígida que a outra. Alguns experimentos foram conduzidos desta maneira com o objetivo de estudar, separadamente, a influência das frequências naturais em cada direção f_n^x e f_n^y. Apesar disso, o foco deste trabalho é investigar o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade em condições simétricas, nas quais $f_n = f_n^x = f_n^y$. Essa escolha foi feita para representar condições nas quais essa simetria existe de fato. Um exemplo são os longos tubos usados na extração de petróleo, que são construídos de maneira axissimétrica e que não privilegiam qualquer direção paralela ao plano de sua seção transversal.

A validação dos resultados da base elástica se dá de duas maneiras. A primeira considera um teste de repetitividade entre os resultados fornecidos pela BEP em diferentes situações para o mesmo conjunto de parâmetros. A segunda validação se dá através da comparação entre o resultado de amplitude de oscilação para as direções alinhada e transversal com o resultado apresentado em Jauvtis e Williamson (2004), uma das principais referências bibliográficas sobre o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade.

A verificação da repetitividade é uma etapa fundamental para a confiabilidade dos demais resultados apresentados nesta tese. A comparação entre resultados fornecidos por dois autores e em condições e bases diferentes também é muito importante, porém

exige certo cuidado. Como as bases elásticas usadas por cada autor são diferentes, os parâmetros adimensionais usados podem não coincidir. No caso em questão, Jauvtis e Williamson (2004) apresenta seus resultados para o parâmetro de massa adimensional $m^* = 2,6$. Estes resultados são comparados com duas condições diferentes, uma com momento de inércia adimensional $J^* = 2,51$ e a outra com $J^* = 2,59$. Ainda que os parâmetros adimensionais tenham valores numéricos próximos, não há uma correlação direta entre os parâmetros de massa m^* e de momento de inércia J^*.

Após a validação da estrutura, são realizados os experimentos de VIV. Diferentes grupos de experimento foram realizados, cada um com objetivos distintos. Cada ensaio de VIV foi realizado com diversas velocidades e com variação pequena entre elas. Detalhes sobre os procedimentos experimentais são fornecidos no capítulo 5. O importante a ser destacado é a preocupação com a precisão e confiabilidade de todos os experimentos.

Os ensaios com visualização de escoamento foram usados para registrar as esteiras de vórtices formadas a jusante do cilindro de ensaio, estivesse ele fixo ou oscilando. Os resultados são apresentados na forma de campos médios de vorticidade e permitem analisar o formato das esteiras e a intensidade dos vórtices nela.

1.3 Estrutura da tese

Esta tese está dividida em oito capítulos, considerando esta Introdução. Neste capítulo a motivação do trabalho e seus objetivos foram apresentados. A metodologia básica usada ao longo da investigação foi descrita e a estrutura da tese apresentada.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica sobre vórtices. O capítulo apresenta o conceito de vórtices bidimensionais e alguns modelos matemáticos usados para descrevê-lo. Além do tratamento matemático, o capítulo expõe o processo de formação e desprendimento de vórtices para escoamento ao redor de cilindros fixos. Três critérios para identificação de estruturas vorticais são apresentados no final do capítulo. Esses critérios são usados na análise dos campos de vorticidade obtidos experimentalmente com a técnica de visualização de escoamentos conhecida por velocimetria por imagens de partículas.

O terceiro capítulo consiste em uma revisão bibliográfica sobre o fenômeno de VIV. Esta revisão foca na resposta de cilindros rígidos submetidos a escoamento uniforme. O capítulo apresenta um panorama histórico da pesquisa sobre o fenômeno, descreve resultados encontrados para experimentos com um e também dois graus de liberdade.

A base elástica pendular, estrutura usada para suportar o cilindro de teste ao longo dos ensaios e permitir que este se movimentasse em duas direções, é descrita e analisada no quarto capítulo. Três modelos matemáticos são desenvolvidos e estudam a resposta em frequência da base em função dos conjuntos de molas e também do número de lastros usados em cada ensaio.

O capítulo cinco discorre sobre a metodologia experimental. Nele são descritos os equipamentos e os procedimentos experimentais usados nos ensaios de VIV e nas visualizações do escoamento.

O capítulo seis expõe e analisa os padrões de esteira de vórtices observados para diferentes condições do fenômeno de VIV. Os padrões de emissão de vórtices são analisados de uma maneira global, relacionando cada modo com o ramo de resposta a qual está associado, e também de maneira local, na qual cada modo de emissão é estudado ao longo de um período de oscilação do cilindro. Este capítulo trata das perguntas 6 e 7 propostas na primeira seção desta Introdução.

O sétimo capítulo traz os resultados obtidos para quatro campanhas experimentais. Cada uma delas é apresentada em uma seção diferente e trata de uma das cinco primeiras perguntas guias propostas.

As conclusões desta tese serão apreciadas no oitavo e último capítulo do trabalho. Além de destacar os aspectos originais da tese, o capítulo levanta mais perguntas que servem como indicação para novas pesquisas em trabalhos futuros.

Após as Referências Bibliográficas seguem sete Apêndices que reforçam a estrutura do trabalho. O primeiro deles descreve o método de ajuste de funções e as equações utilizadas para esses ajustes ao longo de todo o trabalho. O segundo apêndice detalha a obtenção dos modelos matemáticos para vórtices potenciais e viscosos. O equacionamento serve de base para os resultados introduzidos no capítulo dois. O terceiro apêndice apresenta uma discussão crítica sobre o conceito de massa adicional. As etapas de análise de sinais são descritas no quarto apêndice, que complementa a descrição dos procedimentos experimentais fornecida no capítulo cinco. Por fim, os últimos dois apêndices fornecem informações sobre os procedimentos de análise dos resultados obtidos nos experimentos com visualização de escoamento. O apêndice F descreve como se dá o processamento de imagem usado para localizar o cilindro nas imagens e o apêndice G mostra como foram calculados os campos médios de fase.

2 UMA REVISÃO TEÓRICA SOBRE VÓRTICES

Esta tese investiga o fenômeno de vibrações induzidas pela emissão e desprendimento de vórtices. Antes de estudar as consequências da emissão de vórtices, este capítulo se propõe a estudar o próprio processo de formação de vórtices, além de apresentar modelos matemáticos para essas estruturas.

O capítulo está dividido em cinco seções. A primeira seção apresenta o conceito de camada limite e como ocorre sua separação no escoamento ao redor de cilindros fixos. A segunda seção introduz o modelo físico de interação entre camadas cisalhantes proposto por Gerrard (1966) que descreve como ocorre a formação dos vórtices. A terceira seção apresenta uma breve revisão sobre modelos matemáticos para descrever vórtices bidimensionais, apresentando os modelos de vórtice potencial, vórtice potencial com núcleo e ainda o modelo de vórtice viscoso.

Na quarta seção, três critérios para identificação de vórtices em campos de velocidade são definidos, sendo eles: iso-contornos de vorticidade, critério Q e critério λ_2. Na quinta e última seção, os três critérios são comparados.

O objetivo de apresentar e selecionar um critério para identificação de vórtices encontra-se na análise de campos de velocidade e vorticidade obtidos para o escoamento ao redor de cilindro fixo e livre para oscilar com dois graus de liberdade. Os campos de velocidade foram obtidos experimentalmente através da técnica PIV (*particle image velocimetry*) e são apresentados no capítulo 6. O procedimento empregado na obtenção desses campos e uma breve descrição da técnica de visualização usada são encontrados no capítulo 5.

2.1 Camada limite e escoamento ao redor de corpos rombudos

Um dos princípios fundamentais da Mecânica dos Fluidos é o princípio de adesão total, ou de não escorregamento na parede. Esse princípio afirma que quando uma parcela de um fluido viscoso entra em contato com uma superfície sólida, sua velocidade se iguala à velocidade da superfície. Caso a superfície seja fixa ou esteja em repouso, a parcela de fluido adquire velocidade nula no contato. Uma vez que parte do fluido adquire o estado de repouso enquanto outra parte continua seu movimento, forma-se um gradiente de velocidade próximo à parede do corpo sólido. A fina região na qual o gradiente de velocidade é mais intenso e os efeitos da viscosidade do fluido são importantes é denominada de camada limite. A figura 2.1 ilustra um esquema de camada limite formada quando escoamento uniforme atinge uma placa plana em repouso.

Na figura 2.1, U representa a velocidade do escoamento incidente, $p = p_a$ indica que para o exemplo em questão a pressão é considerada igual à pressão atmosférica em todos os pontos, logo não há gradiente de pressão, $\delta(x)$ representa a espessura da camada limite, $\tau_w(x)$ é a tensão de cisalhamento na parede e $u(x, y)$ indica o perfil de velocidades dentro da camada limite.

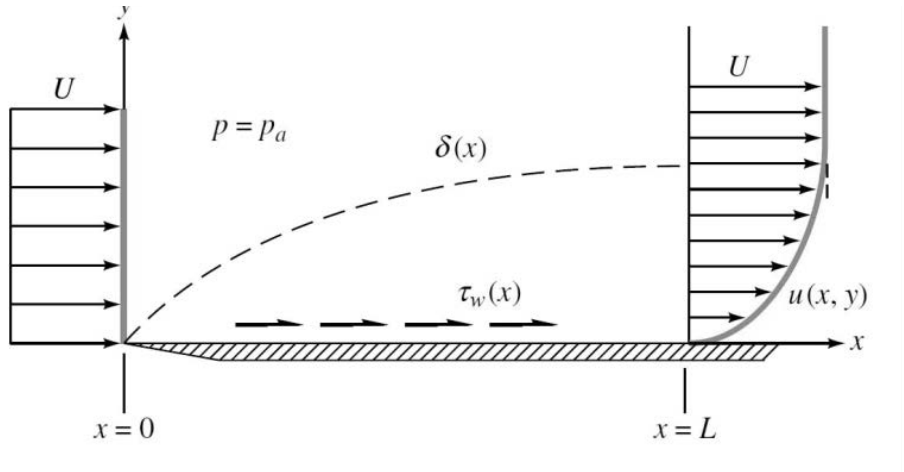


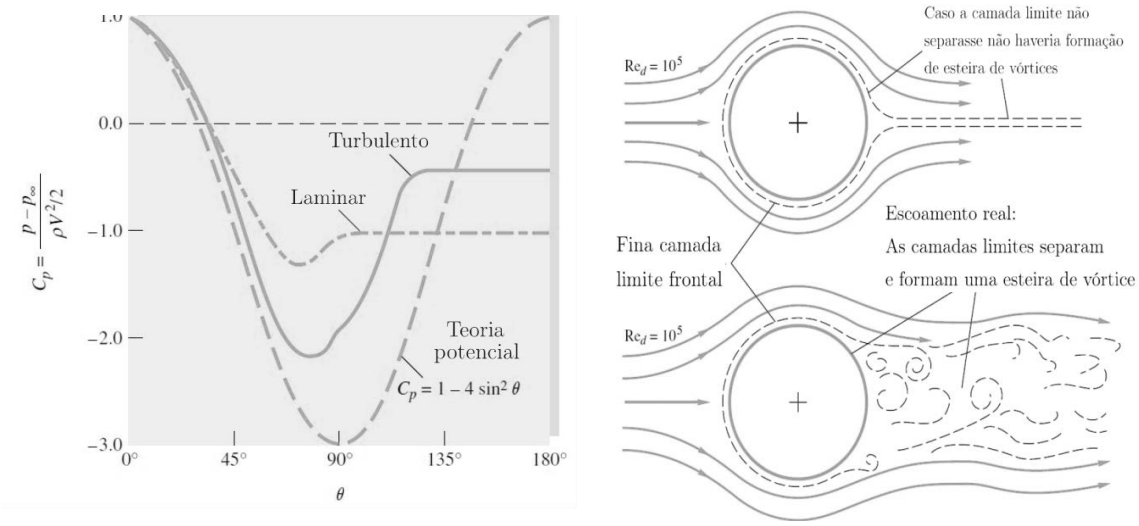
Figura 2.1: Perfil de velocidade em uma camada limite laminar. Ilustração extraída de White (1999).

A teoria da camada limite foi proposta por Ludwig Prandtl (1875-1953) no ano de 1904 e permitiu uma revolução do estudo da Mecânica dos Fluidos. No século XIX muito já se conhecia sobre o comportamento de fluidos e a equação de Navier-Stokes, definida pela expressão 2.1, já era conhecida. Apesar disso, não era possível empregar essa equação

para resolver problemas práticos. Nesse contexto, surge a teoria do escoamento potencial como uma simplificação da equação de Navier-Stokes para fluidos perfeitos, ou seja, sem viscosidade $\mu = 0$.

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} = \frac{-\nabla p}{\rho} + \overrightarrow{g} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \overrightarrow{u} \tag{2.1}$$

A teoria do escoamento potencial, irrotacional e sem viscosidade, permitiu a obtenção de resultados relevantes para a Mecânica dos Fluidos, mas forneceu também inconsistências, tais como o famoso paradoxo de D'Alembert. Segundo a teoria do escoamento potencial, a distribuição de pressão ao redor de corpos simétricos também é simétrica, o que acarreta na ausência de força de arrasto nesse tipo de corpo. Apesar desse resultado, sabe-se que o arrasto em corpos simétricos não é nulo, tal como se verifica no escoamento ao redor de cilindro, por exemplo. A figura 2.2(a) apresenta a distribuição do coeficiente de pressão obtido para a teoria potencial e para escoamento real laminar e turbulento. A quebra da simetria observada para os resultados laminar e turbulento se deve à separação da camada limite.



(a) (b)

Figura 2.2: (a) Distribuição do coeficiente de pressão ao redor de um cilindro. Resultados para teoria potencial, escoamento viscoso no regime laminar e turbulento. (b) esquema do escoamento falso e real ao redor do cilindro. Figuras adaptadas de White (1999).

Ainda que a viscosidade já fosse conhecida e sua contribuição estivesse modelada na equação de Navier-Stokes, seu efeito era desprezado devido ao seu baixo valor numérico. Acreditava-se que a influência da viscosidade era mínima e o escoamento ao redor de um

cilindro deveria ser similar ao apresentado pelo esquema superior da imagem 2.2(b). O fato é que o escoamento se comporta segundo o esquema inferior dessa mesma figura.

Segundo a teoria da camada limite (Schlichting e Gersten (2003)), para que esta separe da parede do corpo é preciso que o escoamento se depare com um gradiente adverso de pressão, ou que exista uma variação muito brusca de geometria, tal como encontrada em cantos vivos ou regiões com raio de curvatura muito pequeno. A sequência de esquemas da figura 2.3 ilustra o comportamento do perfil de velocidade de uma camada limite laminar em função do gradiente adverso de pressão. A distribuição do coeficiente de pressão ilustrada na figura 2.2(a) demonstra que no escoamento ao redor de um cilindro o gradiente de pressão varia de favorável para adverso.

Em regiões próximas à parede do corpo, caso o gradiente de pressão seja suficientemente elevado, ocorre uma reversão no sentido do escoamento, tal como ilustrado na figura 2.3(e). O escoamento reverso faz com que passem a existir dois pontos de velocidade nula no escoamento, um deles na parede e outro que se afasta da superfície sólida. A região com elevado gradiente de velocidade, próxima a esse segundo ponto de velocidade nula, passa a ser denominada de camada cisalhante.

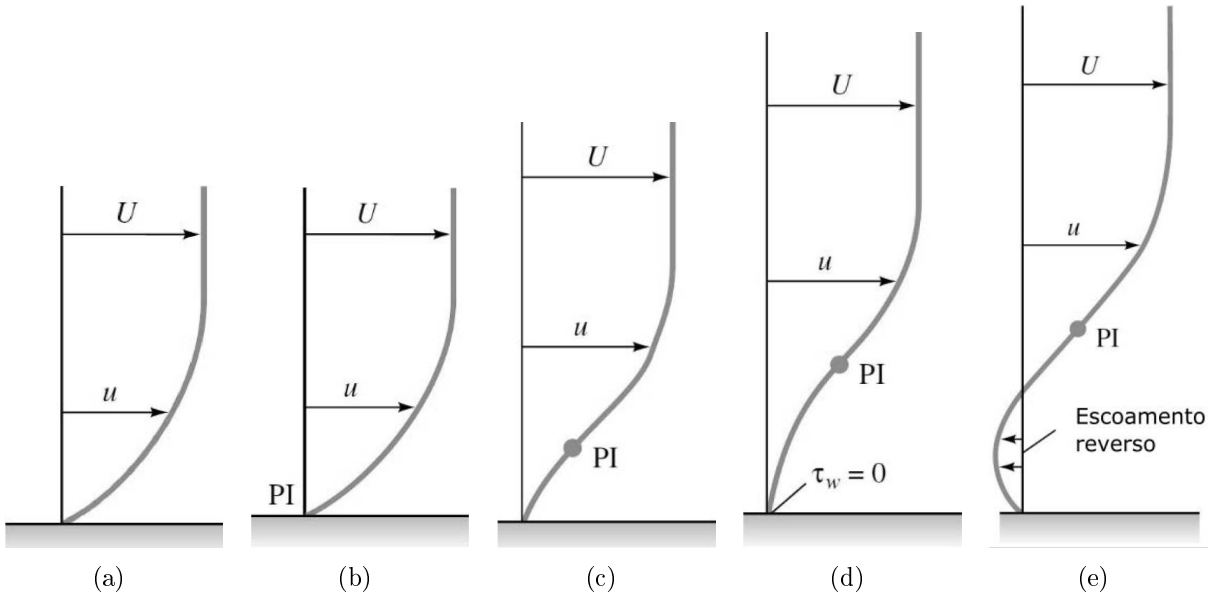


Figura 2.3: Influência do gradiente de pressão no perfil da camada limite. (a) gradiente favorável (b) gradiente nulo (c) gradiente moderadamente adverso (d) gradiente adverso crítico (e) gradiente adverso excessivo. Esquemas adaptados de White (1999).

Dentro do contexto de separação da camada limite, diferentes geometrias podem ser classificadas como rombudas ou delgadas. Define-se corpo rombudo como aquele no

qual a maior parte de sua superfície encontra-se em região com camada limite separada. Corpos delgados, por sua vez, apresentam pouca ou nenhuma parcela de sua superfície em área de separação.

A figura 2.3 ilustra a separação da camada limite em um dos lados de um corpo. O mesmo procedimento também acontece do outro lado do mesmo corpo rombudo, gerando desta vez uma camada limite com vorticidade contrária. As duas camadas limites, com sinais opostos de vorticidade, são convectadas pelo escoamento e passam a interagir na região a jusante do corpo. É nessa interação que ocorre o processo de formação e desprendimento de vórtices.

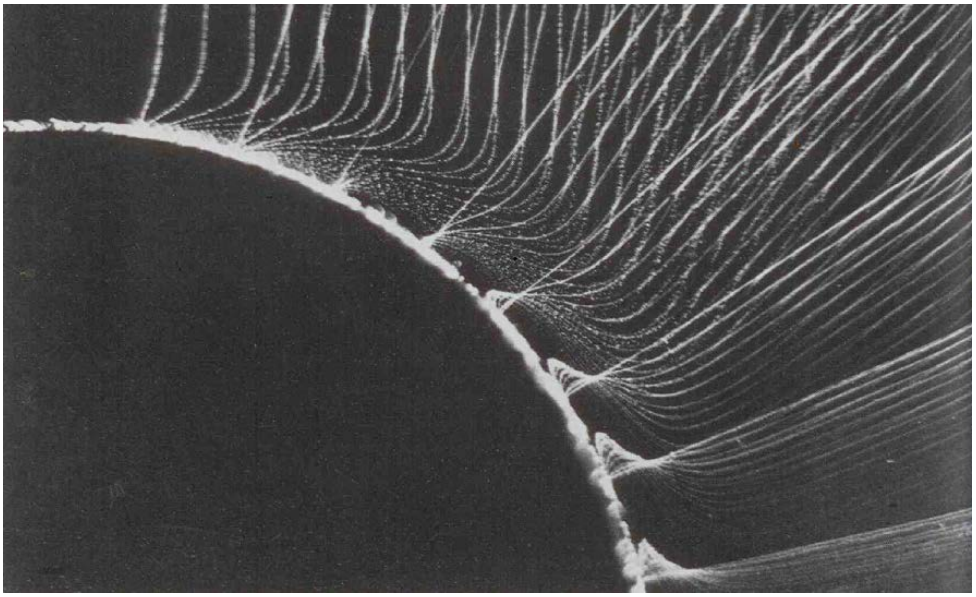


Figura 2.4: Camada limite laminar formada no escoamento ao redor de cilindro fixo Re = 1.200. Ilustração extraída de JSMF (1988).

A figura 2.4, extraída de JSMF (1988), apresenta uma fotografia da camada limite formada no escoamento ao redor de um cilindro com Re = 1.200. As linhas brancas foram obtidas com uma técnica de visualização do escoamento que utiliza bolhas de hidrogênio como marcadores do escoamento. Nessa figura pode-se observar que conforme o escoamento contorna o cilindro, e adentra região com gradiente de pressão adverso mais intenso, o fluido apresenta velocidade contrária, contornando o cilindro no sentido anti-horário, ao invés do escoamento principal que, para esta região do cilindro, ocorre no sentido horário.

2.2 Modelo de Gerrard para formação de vórtices

Uma vez separadas da superfície do corpo, as camadas limites formam camadas cisalhantes que são convectadas pelo escoamento. O processo de formação e desprendimento de vórtices ocorre na interação dessas camadas cisalhantes, tal como proposto por Gerrard (1966). 2.5(d), revela que a formação de vórtices é alternada, ora ocorrendo de um lado do cilindro, ora do outro.

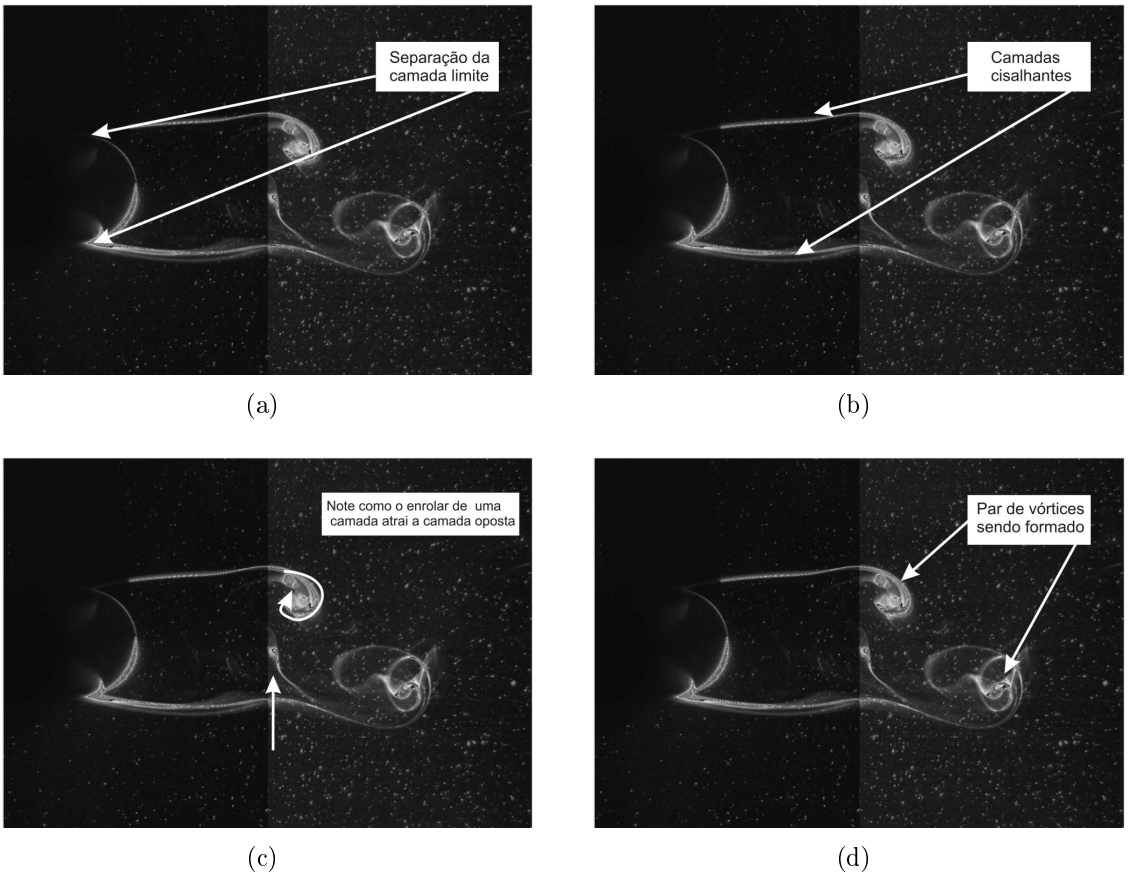


Figura 2.5: Escoamento ao redor de um cilindro, Re = 540. (a) Separação da camada limite (b) camadas cisalhantes (c) interação entre camadas (d) par de vórtices formado.

Para o caso do escoamento ao redor de cilindros fixos, o processo de interação das camadas cisalhantes não ocorre sempre. Para escoamentos com baixos valores do número de Reynolds, Re < 46, as duas camadas cisalhantes formadas são estáveis e formam duas bolhas de recirculação, tal como ilustrado na imagem 2.6, extraída de Dyke (1988), para escoamento com Re $= 26$. As bolhas de recirculação tornam-se instáveis com o crescimento de Re e para Re > 46 forma-se uma esteira de vórtices, conhecida como esteira de von Kármán. Escoamentos com Re < 46 não apresentam caráter oscilatório

e não induzem forças cíclicas que poderiam induzir vibrações. Por esse motivo esse tipo de escoamento não faz parte do escopo deste trabalho. Para mais informações consultar Lopez, Meneghini e Saltara (2008) e Barbeiro (2012).

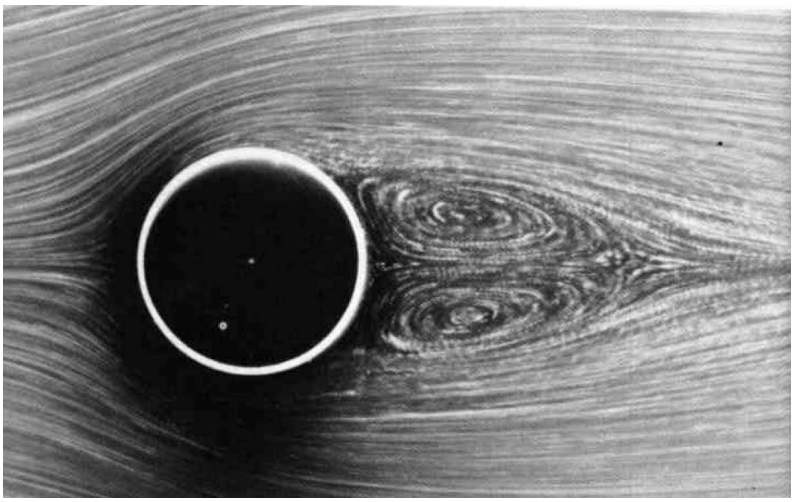


Figura 2.6: Bolhas de recirculação estáveis para Re= 26. Extraído de Dyke (1988).

A figura 2.5 é uma coleção de fotografias registradas pelo autor deste trabalho para o escoamento ao redor de um cilindro fixo com número de Reynolds Re = 540. A figura ilustra o ponto de separação da camada limite, as camadas cisalhantes e como estas interagem entre si. As quatro imagens apresentadas correspondem, na verdade, à mesma fotografia, obtida através de uma técnica de visualização que emprega tinta fluorescente. A figura 2.5(a) ilustra o ponto em que a camada limite separa da superfície do cilindro enquanto que a imagem 2.5(b) mostra como a camada limite se torna uma camada cisalhante. A terceira figura ilustra como o enrolar de uma camada cisalhante atrai a camada oposta e a última, figura 2.5(d), enfatiza que um par alternado de vórtices foi formado. Este conjunto de figuras permite visualizar também que o processo de formação dos vórtices ocorre a uma distância do cilindro e não diretamente em sua superfície.

O modelo físico de interação das camadas cisalhantes proposto por Gerrard (1966) afirma que cada camada cisalhante pode seguir por três caminhos distintos: a, b e c. A figura 2.7(a), retirada de Gerrard (1966), ilustra cada uma dessas parcelas. A primeira delas, a, representa parte da camada cisalhante que é absorvida pelo vórtice que está sendo formado do outro lado da esteira. Essa parcela possui vorticidade contrária à do vórtice que está sendo formado e diminui sua circulação final. A parcela b atinge a camada cisalhante que alimenta o vórtice em formação. Como as duas camadas cisalhantes possuem praticamente a mesma intensidade, a parcela b corta a ligação entre o vórtice que estava se formando e a camada cisalhante, liberando-o para o escoamento. Por fim,

a parcela c começa a se enrolar e será responsável pela formação do próximo vórtice.

O processo descrito pode ser visualizado nas imagens 2.7(b) a 2.7(f). As flechas adicionadas às fotografias auxiliam a interpretação das imagens, indicando como as camadas cisalhantes se comportam. Nota-se pela sequência que, enquanto um vórtice é liberado de um lado da esteira, outro vórtice já está sendo formado do outro lado, criando desta forma o desprendimento alternado.

O modelo de Gerrard explica a formação de esteiras alternadas com dois vórtices por ciclo. Esta esteira também é conhecida como esteira de von Kármán e classificada como esteira $2S$ segundo a denominação proposta por Williamson e Roshko (1988).

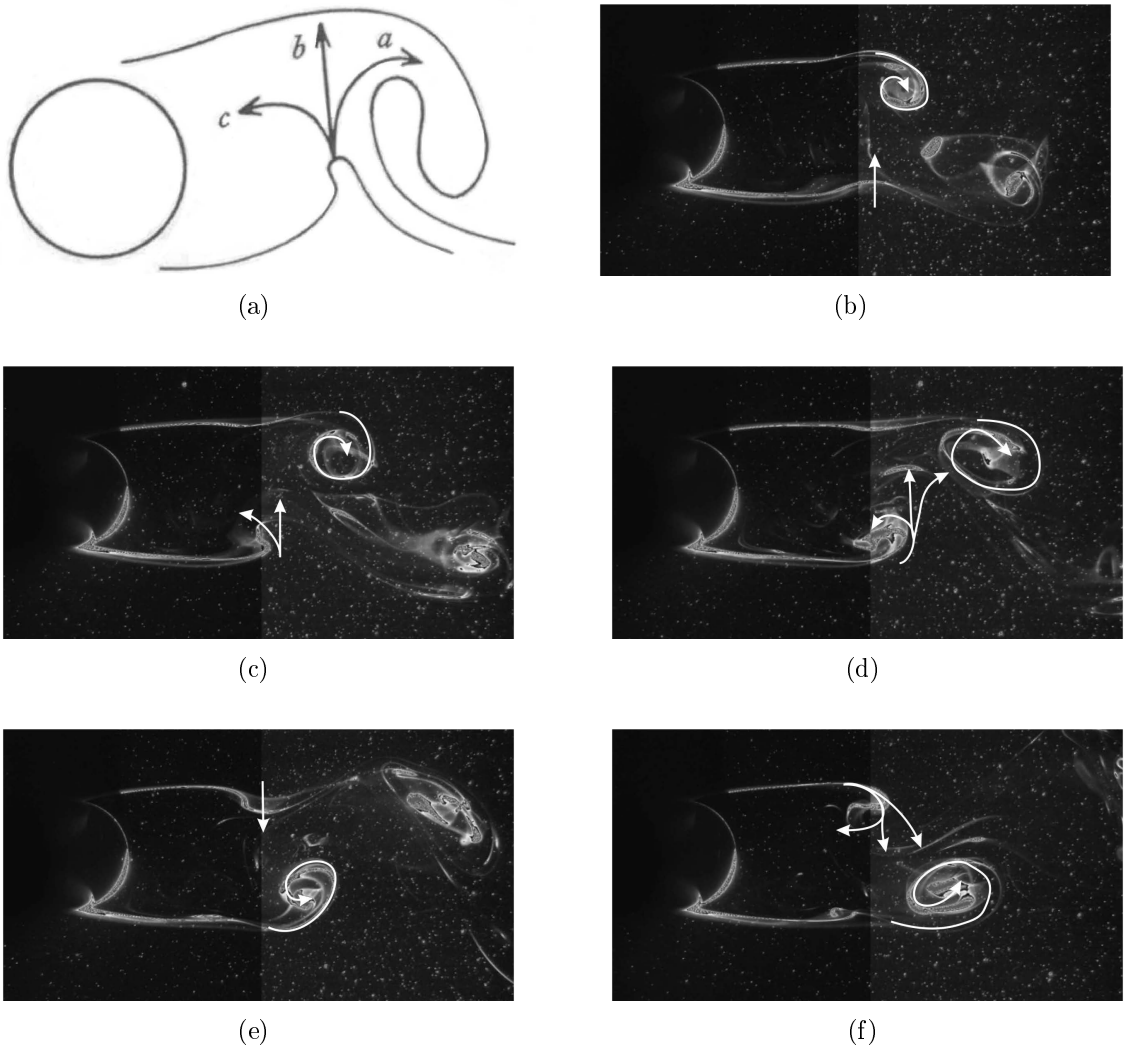


Figura 2.7: (a)Esquema de interação das camadas cisalhantes. Retirado de Gerrard (1966). (b) a (f) Visualizações do escoamento ao redor de um cilindro para $Re = 540$. Etapas da formação e desprendimento de vórtices.

Em seu trabalho de revisão, Bearman (1984) destaca que a formação e despren-

dimento de vórtices é uma consequência da existência e interação entre duas camadas cisalhantes de vorticidade contrária. A presença de um corpo imerso no fluido é responsável pela formação dessas camadas, mas uma vez que elas já foram formadas, a presença ou geometria do corpo pouco afeta a maneira como os vórtices são criados e desprendidos. Essa observação é válida quando o corpo rombudo não oscila e as camadas cisalhantes interagem entre si livremente. Caso o corpo rombudo se mova, seu deslocamento afeta o enrolar das camadas cisalhantes e altera o padrão de emissão.

Efeitos tridimensionais nas esteiras de vórtices

O modelo de Gerrard (1966) descrito não considera os efeitos tridimensionais do escoamento. Por efeitos tridimensionais, entende-se tanto o escoamento alinhado com a direção do eixo do cilindro $w\,\hat{k}$ quanto a vorticidade nas direções alinhada com o escoamento $\omega_x\hat{i}$ e transversal a ele $\omega_y\hat{j}$. Esses efeitos, apesar de serem de ordem de magnitude inferior perante o escoamento principal, possuem efeitos importantes. Deve-se atentar que a letra latina w representa uma componente do vetor de velocidade do escoamento, enquanto que a letra grega ω representa a vorticidade do escoamento.

Verifica-se experimentalmente, por exemplo, que o escoamento ao redor de cilindros não possuem perfeita correlação ao longo do eixo do cilindro. Associado a essas pertubações, existem vórtices secundários que se concentram na direção alinhada com o escoamento, tal como analisado por Williamson (1996). Tais efeitos são características do escoamento e seriam observados até para escoamento ao redor de cilindros infinitos.

No caso de cilindros reais e finitos, existem ainda os efeitos de ponta que ocorrem nas extremidades do cilindro e também podem afetar o escoamento global. É o caso, por exemplo das emissões oblíquas de vórtice observadas por Williamson (1989).

Uma característica importante dos efeitos tridimensionais é a cascata de energia de Kolmogorov. Segundo essa teoria, a evolução de estruturas vorticais grandes para escalas menores é a responsável pelo surgimento de diferentes frequências no escoamento. Esse efeito faz com que a energia do escoamento se espalhe no espectro de frequência e não fique concentrada em uma única escala geométrica e temporal.

Ao longo desta tese, os efeitos tridimensionais do escoamento não serão considerados. O trabalho foca nos grandes efeitos do fenômeno de VIV com dois graus de liberdade e considera como origem desses efeitos as maiores escalas de comprimento das esteiras de vórtices formadas. Os campos de vorticidade apresentados no decorrer da tese consideram apenas a componente ω_z com campo de vorticidade e os resultados são todos

obtidos através do cálculo da média de fase, retirando assim os efeitos da turbulência.

2.3 Modelos matemáticos para vórtices

Dentre os modelos de vórtices bidimensionais, o mais simples é o modelo proposto pela teoria do escoamento potencial. Segundo este modelo, toda a circulação Γ de um vórtice está concentrada em seu núcleo. A velocidade angular do fluido ao redor do vórtice varia apenas em função da distância r de um ponto até o centro desse vórtice, como descrito pela equação 2.2.

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{2.2}$$

Ainda que o modelo de vórtice potencial forneça resultados interessantes, tais como a famosa esteira de von Kármán, quando se observa um vórtice real verifica-se prontamente que a distribuição de velocidades e vorticidade não correspondem aos valores previstos. Segundo o modelo de vórtice potencial, a velocidade de um ponto que se aproxima do centro do vórtice tende ao infinito, o que não é verdadeiro.

Outros modelos de vórtice podem ser usados para estudar o formato e distribuição de vorticidade nos vórtices. Um modelo mais completo do que o potencial simples é o potencial com núcleo. Este modelo considera que o núcleo de um vórtice se comporta como um disco rígido que roda com velocidade angular ω_D. Essa hipótese faz com que a velocidade no centro do vórtice seja nula, eliminando assim a singularidade que havia no modelo potencial simples. O perfil de velocidades por esse modelo é dado pelas equações 2.3.

$$v_\theta = \begin{cases} \omega_D & \text{para } r \leq R \\ \dfrac{\Gamma}{2\pi r} & \text{para } r > R \end{cases} \tag{2.3}$$

Um modelo ainda mais completo deve levar em consideração a viscosidade do fluido. Nessa linha, o modelo de vórtice viscoso é obtido a partir das equações de Navier-Stokes. Tal como o modelo potencial com núcleo, o modelo viscoso não apresenta singularidade no centro do vórtice. Além disso, a distribuição de vorticidade é contínua e segue uma lei exponencial, definida pela equação 2.4. Nesta equação ω_{max} representa o maior valor da vorticidade dentro do vórtice e ν representa a viscosidade dinâmica do fluido.

$$\omega(r) = \omega_{max} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \tag{2.4}$$

A velocidade angular v_θ pode ser calculada integrando-se a equação 2.4.

$$v_\theta = v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)\right] \tag{2.5}$$

Os três modelos citados são desenvolvidos em detalhe no apêndice B. A figura 2.8 apresenta os perfis de velocidade angular v_θ prevista por cada modelo.

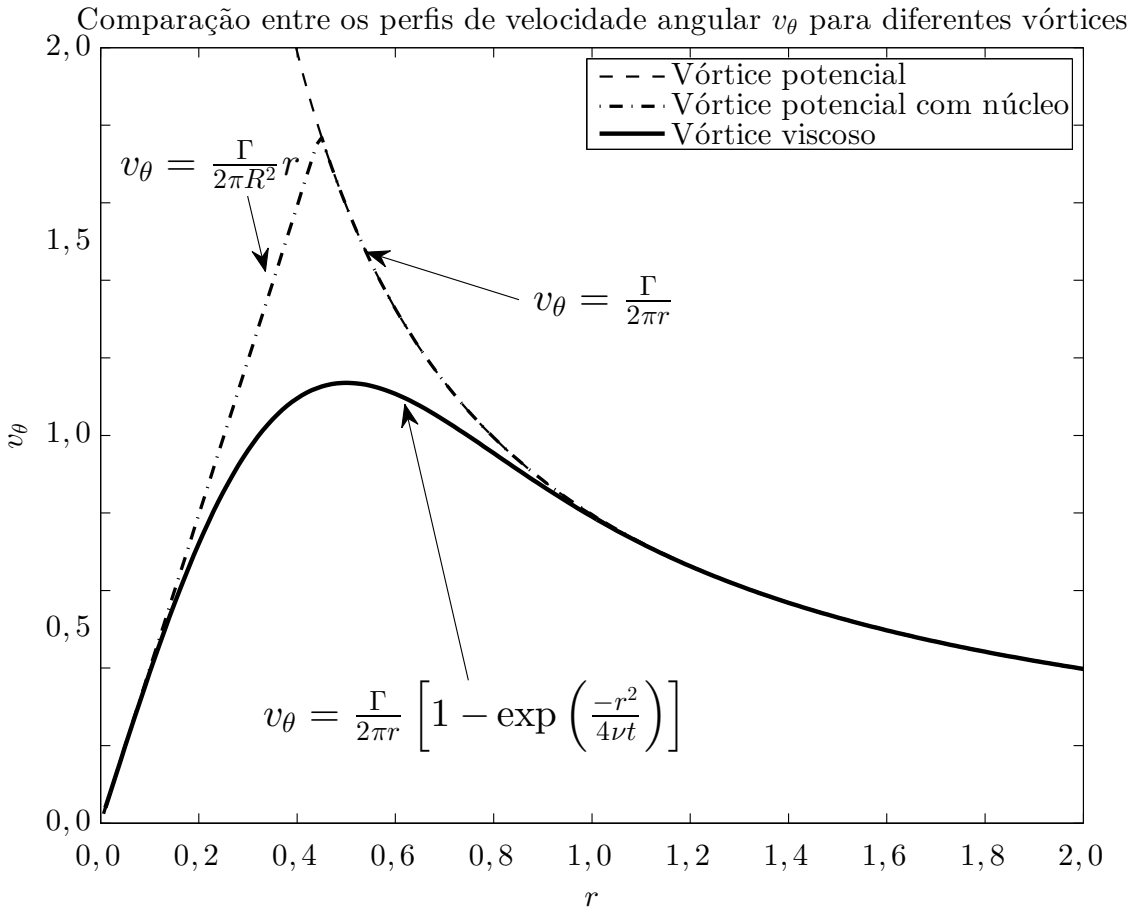


Figura 2.8: Comparação entre os modelos de vórtice potencial, potencial com núcleo e viscoso.

O capítulo 6 apresenta a comparação entre perfis de vorticidade de vórtices reais, medidos com a técnica de visualização de escoamento PIV, e os perfis de vorticidade exponenciais previstos pelo modelo de vórtice viscoso.

2.4 Análise da taxa do fluxo de circulação para escoamento ao redor de corpo rombudo

Com a separação da camada limite forma-se uma camada cisalhante que dará início ao processo de formação e desprendimento de vórtices. Pode-se pensar no ponto de separação do escoamento, portanto, como uma fonte de circulação para o escoamento.

A circulação é definida matematicamente como a integral da velocidade $\vec{u}$ ao longo de uma linha fechada.

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot \vec{dl}$$

A integral de linha pode ser substituída por uma integral de área aplicando o Teorema de Stokes.

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \vec{u})_z \, dx \, dy = \int_A \omega_z \, dx \, dy = \int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy$$

Considerando que para a camada cisalhante a variação de velocidade na direção transversal do escoamento não varie significativamente com a direção alinhada com a corrente e que

$$\frac{\partial v}{\partial x} << \frac{\partial u}{\partial y}$$

Então a circulação é aproximada por

$$\Gamma = \int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy \approx - \int_A \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy$$

A taxa de fluxo de circulação $d\Gamma/dt$ pode ser calculada derivando-se a relação anterior no tempo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \frac{\int_A \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy}{dt} = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial y} u \, dy$$

Na fronteira da camada limite no ponto de separação, a velocidade do escoamento equivale a $u(\delta) = U_S$. Considerando que a integral seja realizada na camada limite superior, vide figura 2.9, o limite de integração é de 0 a *delta*, resultando no resultado negativo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_0^\delta u \, du = - \frac{u^2|_0^\delta}{2} \rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = - \frac{U_S^2}{2} \tag{2.6}$$

O resultado da equação 2.6 é a taxa de fluxo de circulação. Este valor indica que quanto maior for a velocidade do ponto de separação da camada limite, maior será a taxa de fluxo de circulação fornecida pelo corpo rombudo.

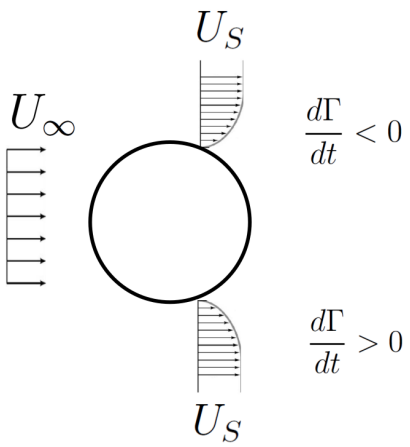


Figura 2.9: Definição da velocidade fora da camada limite U_S no ponto de separação do escoamento.

Na camada limite superior da figura 2.9, a vorticidade emitida é negativa, logo $d\Gamma/dt < 0$. Já na camada limite inferior, o intervalo de integração se inverte e resultado se torna positivo, tal como indicado na figura 2.9.

A velocidade do escoamento no ponto de separação U_S é proporcional à velocidade do escoamento ao longe U_∞.

$$U_S = q\,U_\infty \tag{2.7}$$

Desta forma, pode-se estimar que, em módulo, a taxa do fluxo de circulação no ponto de separação de uma camada limite é dada pela equação 2.8. Este resultado será usado no capítulo 6 para justificar como o movimento de um corpo rombudo na direção alinhada com o escoamento incidente aumenta a circulação acumulada nos vórtices da esteira formada.

$$\left|\frac{d\Gamma}{dt}\right| = \frac{q^2\,U_\infty^2}{2} \tag{2.8}$$

2.5 Critérios para identificação de vórtices

A figura 2.10 ilustra o campo de vorticidade ω_z, transversal ao plano XY, do escoamento ao redor de um cilindro fixo para número de Reynolds Re = 1.800.

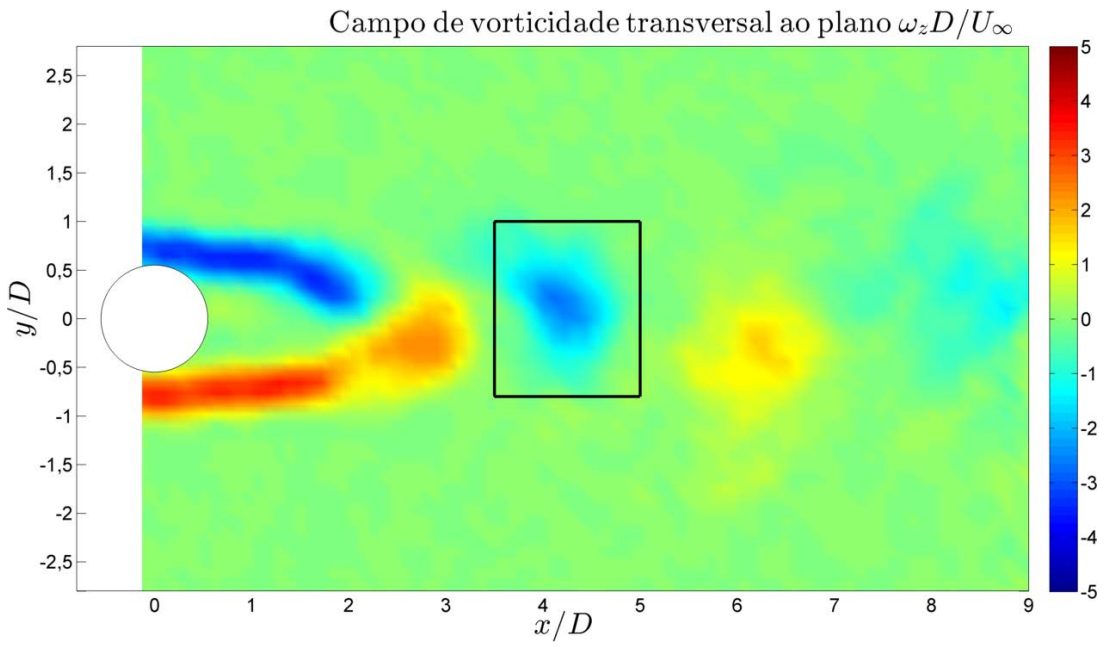


Figura 2.10: Campo de vorticidade ω_z para escoamento ao redor de cilindro fixo com Re= 1.800.

As regiões vermelhas e azuis são regiões de vorticidade concentrada, tal como pode ser visto pela legenda de cores. Apesar de, para este caso, parecer simples determinar a posição dos vórtices, é preciso que se defina um critério quantitativo que delimite sua posição e tamanho.

De acordo com o modelo de vórtice potencial apresentado na seção B.1, toda a vorticidade de um vórtice está concentrada em sua origem e sua intensidade pode ser quantificada através de sua circulação Γ. Nota-se, na figura 2.10, que para escoamentos reais, a vorticidade não se concentra em um único ponto, mas se distribui ao longo de uma região. Para o modelo de vórtice viscoso, também apresentado no apêndice B, a vorticidade para um vórtice real se distribui segundo um perfil exponencial.

Como para um vórtice potencial $\omega_z = 0$ exceto na origem, o cálculo de $\Gamma = \int_A \omega_z dA$ é unívoco e independente da área A considerada. Para vórtices reais, por outro lado, $\omega_z = \omega_z(r)$ de forma que Γ passa a ser função da área A. Surge desta maneira a necessidade de se definir um critério que delimite a área ocupada por um vórtice.

2.5.1 Isocontornos de vorticidade

A ideia mais simples e imediata para identificar um vórtice é adotar isocontornos de vorticidade como delimitadores da fronteira de um vórtice. O problema desta definição passa a ser definir qual valor de ω_z^* deverá ser usado como limite. A figura 2.11 apresenta um dos vórtices da figura 2.10 com diferentes iso-contornos.

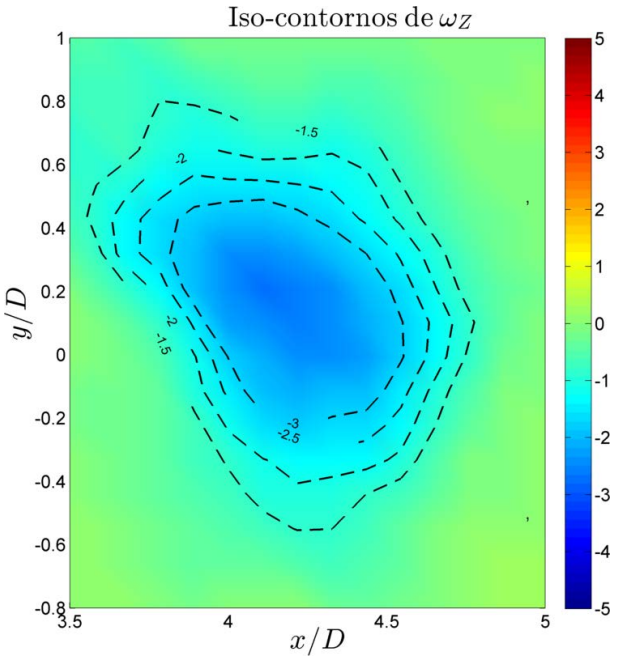


Figura 2.11: Critérios para identificação de vórtices: Iso-contornos de vorticidade $\omega_z^* = -1,5; -2,0; -2,5; -3,0$.

Para cada valor de ω_z^* adotado o vórtice analisado passa a ocupar uma área diferente o que altera o valor de Γ. Como a escolha de ω_z^* é arbitrária, o cálculo de Γ também passa a ser arbitrário o que dificultaria futuras análises.

2.5.2 Critério Q

Existe na literatura uma linha de pesquisa focada no seguinte problema fundamental: o que é um vórtice e como identificá-lo em um escoamento real? O artigo de Jeong e Hussain (1995) apresenta uma revisão e comparação entre diferentes definições de vórtices e alguns métodos para sua identificação. Enquanto Lugt (1979) define um vórtice como um aglomerado de partículas que rotacionam ao redor de um mesmo centro, Chong, Perry e Cantwell (1990) define uma região vortical como aquela na qual o tensor gradiente de velocidades possui autovalores complexos e Hunt, Wray e Moin (1988) definem um vórtice como uma região na qual o segundo invariante do tensor gradiente de velocidade é positivo

e existe um ponto de mínima pressão.

A definição de Lugt (1979) é mais intuitiva do que prática. Uma maneira de se identificar vórtices através desta definição é buscar regiões que possuam linhas de corrente fechadas ou em forma de espirais. Jeong e Hussain (1995) destacam que essa definição é inadequada pois não satisfaz a invariância de Galileu e porque, dependendo das características de formação do vórtice, suas partículas não chegam a completar uma volta ao redor de um determinado ponto. Por invariância de Galileu entende-se as observações realizadas por dois observadores em diferentes referenciais inerciais devem ser equivalentes. Para que as linhas de corrente se fechem ao redor de um vórtice é preciso que o observador acompanhe o vórtice, caso contrário as linhas de corrente não se fecharão. Por esse motivo, conclui-se que este critério só é satisfeito apenas em um referencial inercial específico e, portanto, não satisfaz a invariância de Galileana.

Com relação às definições de Chong, Perry e Cantwell (1990) e Hunt, Wray e Moin (1988) é preciso apresentar o conceito de tensor gradiente de velocidades. Em álgebra vetorial é comum definir o operador nabla ∇ como

$$\nabla = \widehat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.9}$$

Sendo o vetor de velocidade $\overrightarrow{u} = u\,\widehat{i} + v\,\widehat{j} + w\,\widehat{k}$, então o divergente de velocidade é o escalar

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.10}$$

Pode-se aplicar o operador gradiente a cada componente de velocidades de forma a se obter o tensor gradiente de velocidades

$$\nabla \overrightarrow{u} = [\nabla u, \nabla v, \nabla w] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

É importante destacar a diferença entre o divergente da velocidade $\nabla \cdot \overrightarrow{u}$ e o tensor gradiente de velocidades $\nabla \overrightarrow{u}$. O tensor gradiente de velocidade também é denominado de tensor taxa de deformações da partícula de fluido. Os autovetores desse tensor indicam as direções nas quais ocorrem as deformações principais, ou seja, aquelas nas quais não há cisalhamento, mas apenas a deformação em cada direção, enquanto que os autovalores indicam o valor dessa deformação. Caso os autovalores de determinado ponto sejam números complexos isso significa que este ponto está rodando e, por esse motivo, Chong, Perry e Cantwell (1990) define que esse ponto faz parte de um vórtice.

Considerando que os autovalores do tensor $\nabla\overrightarrow{u}$ sejam determinados resolvendo-se o polinômio característico

$$\begin{vmatrix} (\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma) & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & (\frac{\partial v}{\partial y} - \sigma) & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & (\frac{\partial w}{\partial z} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

O polinômio característico pode ser re-escrito como

$$\sigma^3 - P\,\sigma^2 + Q\,\sigma - R = 0 \tag{2.12}$$

Sendo P, Q e R o primeiro, o segundo e o terceiro invariante do tensor $\nabla\overrightarrow{u}$.

$$P = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$R = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}$$

A equação 2.12 é uma equação do terceiro grau e pode ser resolvida analiticamente pelo método de Tartaglia (1500-1557). Ao longo do procedimento proposto por Tartaglia calcula-se o discriminante Δ da equação 2.12 que define a característica das raízes da equação do terceiro grau, conforme indicado no quadro.

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \tag{2.13}$$

$\Delta = 0$	três raízes reais, sendo que duas delas são iguais
$\Delta > 0$	uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas
$\Delta < 0$	três raízes reais distintas entre si

Segundo o critério de Chong, Perry e Cantwell (1990) uma região vortical é aquela na qual os pontos possuem autovalores complexos do tensor gradiente de velocidade, logo $\Delta > 0$. Neste ponto é imediato perceber a diferença entre as definições de Chong, Perry e Cantwell (1990) e Hunt, Wray e Moin (1988), uma vez que este segundo define uma região vortical como aquela com o segundo invariante do tensor $\nabla\overrightarrow{u}$ positivo e um mínimo de pressão. Nota-se no quadro que para que existam raízes complexas, então $\Delta > 0$. Uma vez que no cálculo de Δ o termo $(R/2)^2$ será sempre positivo, é preciso, segundo o critério de Chong, Perry e Cantwell (1990), que $(Q/3)^3 > -(R/2)^2$. O critério de Hunt, Wray e Moin (1988) é mais restrito e exige que $Q > 0$. Este segundo critério é usualmente

denominado de critério Q de identificação de vórtices.

Para escoamentos bidimensionais o critério Q recai na expressão simplificada 2.14. Williamson (1988) demonstrou que o escoamento ao redor de cilindros apresenta efeitos tridimensionais a partir de Re ≈ 180, logo é esperado que existam efeitos tridimensionais no escoamento exposto, porém estes não serão considerados. A técnica de visualização usada neste trabalho fornece as componentes alinhada $u(x, y)$ e transversal $v(x, y)$ ao escoamento no plano visualizado, logo as derivadas parciais $\partial/\partial z$ e a velocidade $w(x, y)$ são desconhecidas. A figura 2.12 apresenta o mesmo vórtice da figura 2.11, porém agora com isocontornos do parâmetro Q e não mais isocontornos de vorticidade.

$$Q_{2D} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.14}$$

Apesar de o critério de Hunt, Wray e Moin (1988) dizer que Q > 0 usualmente se define que um vórtice é a região com Q $>$ Q*, uma vez que ruídos oriundos de procedimentos numéricos e incertezas experimentais podem fazer com que valores negativos pequenos se tornem valores positivos também pequenos.

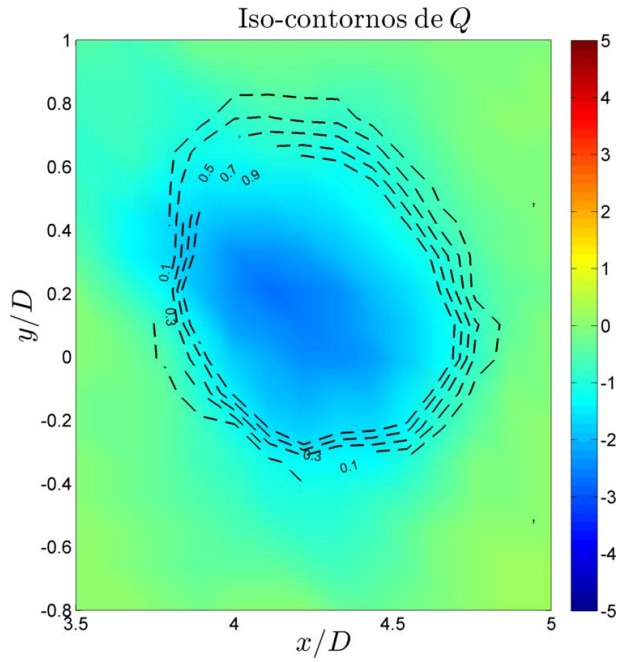


Figura 2.12: Iso-contornos do parâmetro Q. Q* $= 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$.

2.5.3 Critério λ_2

Apesar de o método Q apresentar bons resultados, o critério de Hunt, Wray e Moin (1988) não pode ser plenamente verificado com as ferramentas empregadas neste trabalho, pois não há medição de pressão nas visualizações feitas com a técnica PIV. Desta forma, ainda que se obtenha regiões com $Q > 0$, não se pode afirmar que esta região possua mínimo de pressão. Em função dessa limitação, Jeong e Hussain (1995) parte das equações de Navier-Stokes e demonstra que para escoamentos incompressíveis pode-se relacionar o Hessiano da pressão $\nabla^2 p$, que contém informações a respeito de mínimos na pressão, com o tensor gradiente de velocidade $\nabla \overrightarrow{u}$.

O tensor gradiente de velocidade $\nabla \overrightarrow{u}$ pode ser decomposto em duas parcelas, sendo uma delas simétrica $\mathbf{S}$ e outra assimétrica $\mathbf{\Omega}$.

$$\nabla \overrightarrow{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\text{tensor simétrico} \equiv \mathbf{S}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\text{tensor assimétrico} \equiv \mathbf{\Omega}}$$

O critério proposto por Jeong e Hussain (1995) se baseia nos autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ do tensor $\mathbf{S^2} + \mathbf{\Omega^2}$. O critério de Jeong e Hussain (1995) diz que caso o segundo autovalor seja negativo, o ponto em questão pertence a um vórtice. Uma vez que o critério depende do segundo auto-valor, ele é usualmente denominado de critério λ_2.

Para escoamento bidimensional as parcelas simétricas e assimétricas do tensor gradiente de velocidade $\nabla \overrightarrow{u}$ são escritas como:

$$\nabla \overrightarrow{u}_{2D} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z \\ -\omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

A figura 2.13 apresenta os isocontornos do parâmetro λ_2 para o mesmo vórtice das figuras 2.11 e 2.12.

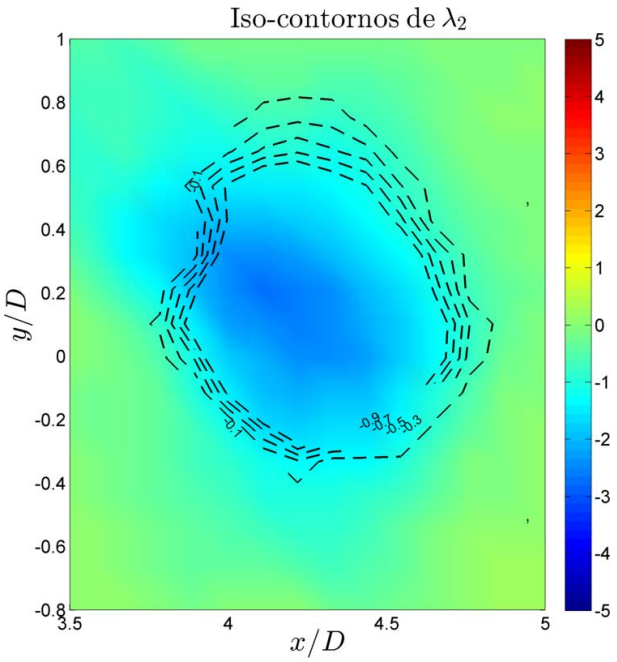


Figura 2.13: Iso-contornos do parâmetro λ_2. $\lambda_2 = -0,1; -0,3; -0,5; -0,7; -0.9$.

Nota-se que tanto os contornos encontrados para o critério Q, quanto para o critério λ_2 são bastante semelhantes para o vórtice apresentado. Essa semelhança se deve ao fato de que para escoamentos bidimensionais e incompressíveis sempre que Q$> 0 \rightarrow \lambda_2 < 0$. Essa afirmação é demonstrada por Jeong e Hussain (1995) ao afirmar que os três critérios são equivalentes para escoamentos bidimensionais.

Ao longo deste trabalho o critério adotado para identificação de vórtices será o λ_2 bidimensional, que emprega os campos de velocidade u e v em um único plano do escoamento. Devido à limitações experimentais, não é possível determinar de forma completa o parâmetro λ_2. Para isso seria necessário medir u, v e w em dois planos paralelos e próximos, de forma a determinar todos os gradientes de velocidade. Com a visualização de um único plano do escoamento e, assumindo a incompressibilidade do escoamento, é possível estimar $\partial w/\partial z$, um dos três gradiente de velocidade da componente vertical w, pela expressão 2.15. Apesar disso, mas nada se pode afirmar sobre os gradientes $\partial u/\partial z$ e $\partial v/\partial z$.

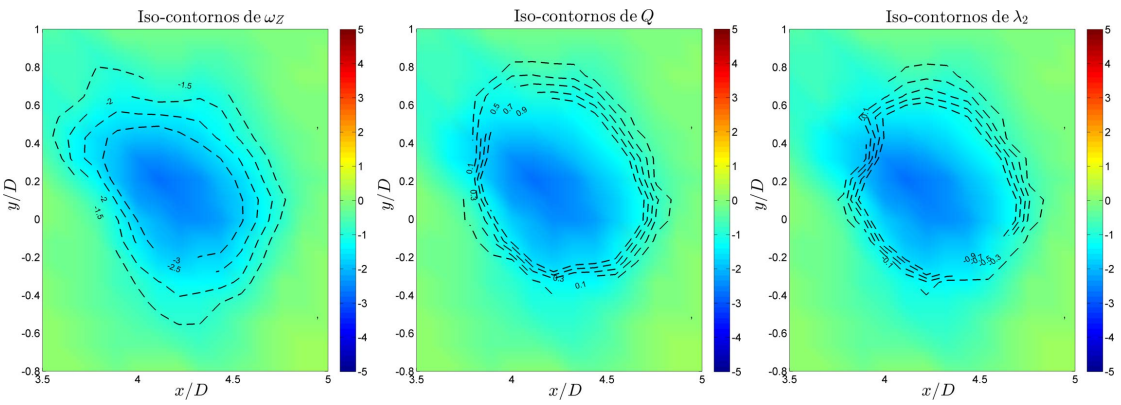
$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.15}$$

O critério λ_2 afirma que pontos do escoamento que tenham $\lambda_2 < 0$ pertencem a um vórtice. Devido às incertezas experimentais, o valor limiar λ_2^* adotado para se definir se um ponto faz ou não parte de um vórtice será menor do que zero, visando assim eliminar vórtices espúrios.

2.5.4 Seleção do critério de identificação de vórtices

Dentre os três critérios para identificação de estruturas vorticais apresentados, o critério selecionado e empregado ao longo deste trabalho é o critério $\lambda_2 < -0,1$.

A figura 2.14 compara os resultados dos três métodos aplicados para o mesmo vórtice demarcado na figura 2.10. Os isocontornos de vorticidade delimitam regiões com determinados valores de vorticidade, porém essa característica não é suficiente para definir um vórtice. Os contornos de Q e λ_2 permitem a identificação do vórtice. Nota-se que os vórtices delimitados por esses critérios são parecidos, porém não idênticos. Vale destacar que para escoamentos bidimensionais os critérios Q e λ_2 coincidiriam, mas este não é o caso.



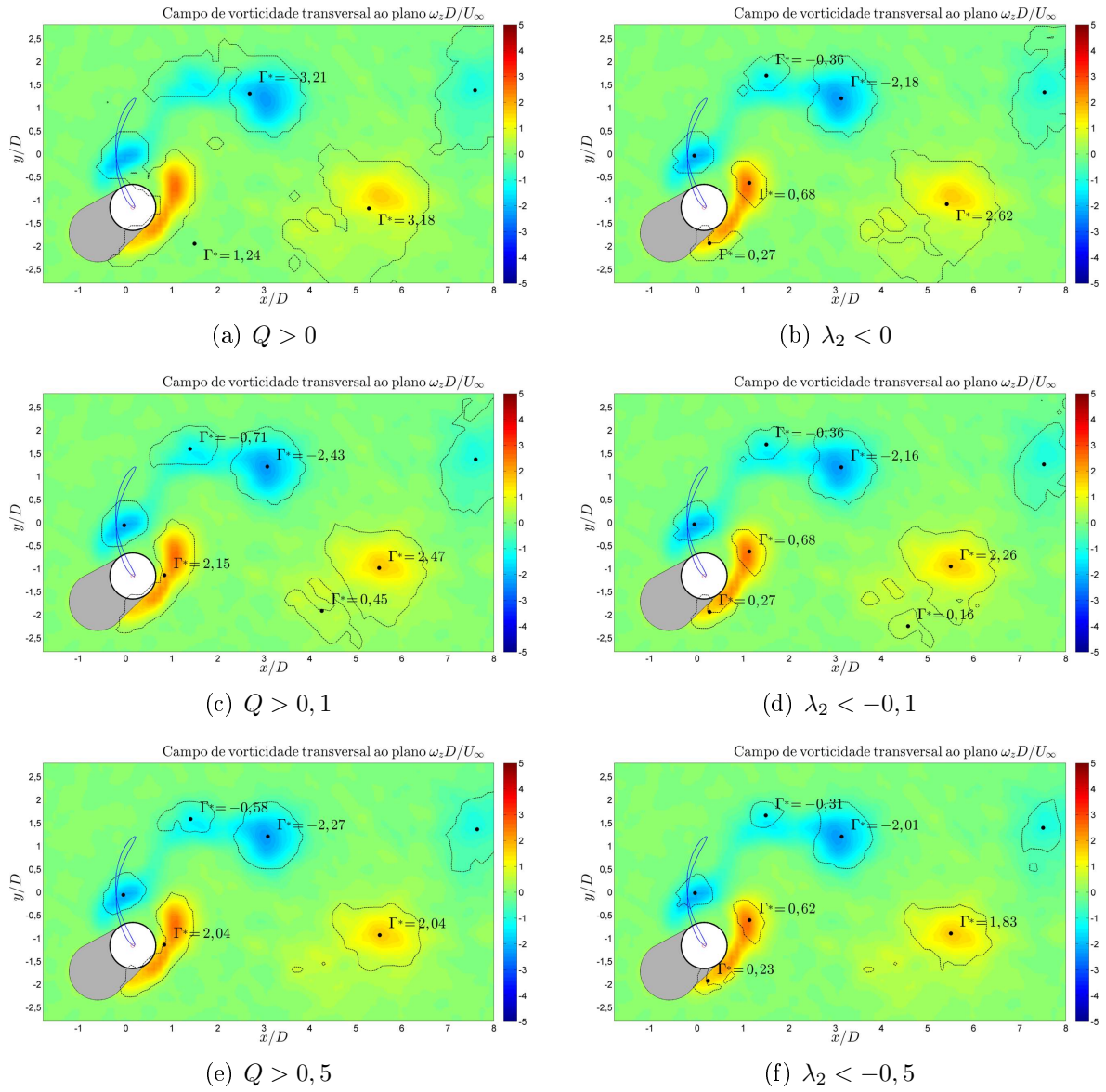
(a) Isocontornos de vorticidade (b) Critério Q (c) Critério λ_2

Figura 2.14: Comparação entre diferentes critérios para identificação de vórtices

A figura 2.15 apresenta outra comparação entre os critérios Q e λ_2. Nesta figura o cilindro de ensaio está na sua posição mínima na direção transversal ao escoamento e um vórtice vermelho, com circulação positiva, está sendo formado. A primeira observação pode ser feita observando-se as imagens 2.15(a) e 2.15(b). Verifica-se que o critério Q considera o vórtice que está sendo formado e a camada cisalhante que o alimentam como uma única entidade, enquanto que o critério λ_2 é capaz de separa-los. Além disso, verifica-se na imagem 2.15(a) que o critério Q mesclou vórtices de circulação oposta e "uniu" em uma única entidade o vórtice com circulação positiva, sua camada cisalhante e ainda o vórtice oposto que estava sendo formado. Essa mescla de entidades vorticais é prejudicial ao cálculo da circulação de cada vórtice e, por esse motivo, o critério λ_2 foi selecionado.

Com relação aos valores limites Q^* e λ_2^* que delimitam os vórtices, a figura 2.15 apresenta a comparação dos dois critérios para quatro diferentes limiares. Nota-se que

quanto mais próximos os valores de Q^* ou λ_2^* são de zero, maiores são os vórtices encontrados. Visando descartar a influência de pontos incertos, o valor adotado neste trabalho foi de $\lambda_2^* = -0,1$. Apesar de ser uma escolha arbitrária, esta escolha aproxima bastante os resultados para o caso teórico $\lambda_2 < 0$, porém considera também os efeitos de erros e incertezas experimentais, permitindo assim comparação qualitativa entre os resultados. Mantido o critério para todos os casos, uma análise qualitativa dos resultados também é válida.



(a) $Q > 0$ (b) $\lambda_2 < 0$

(c) $Q > 0,1$ (d) $\lambda_2 < -0,1$

(e) $Q > 0,5$ (f) $\lambda_2 < -0,5$

Figura 2.15: Comparação entre os critérios Q e λ_2: influência dos valores de corte na determinação de Γ^*

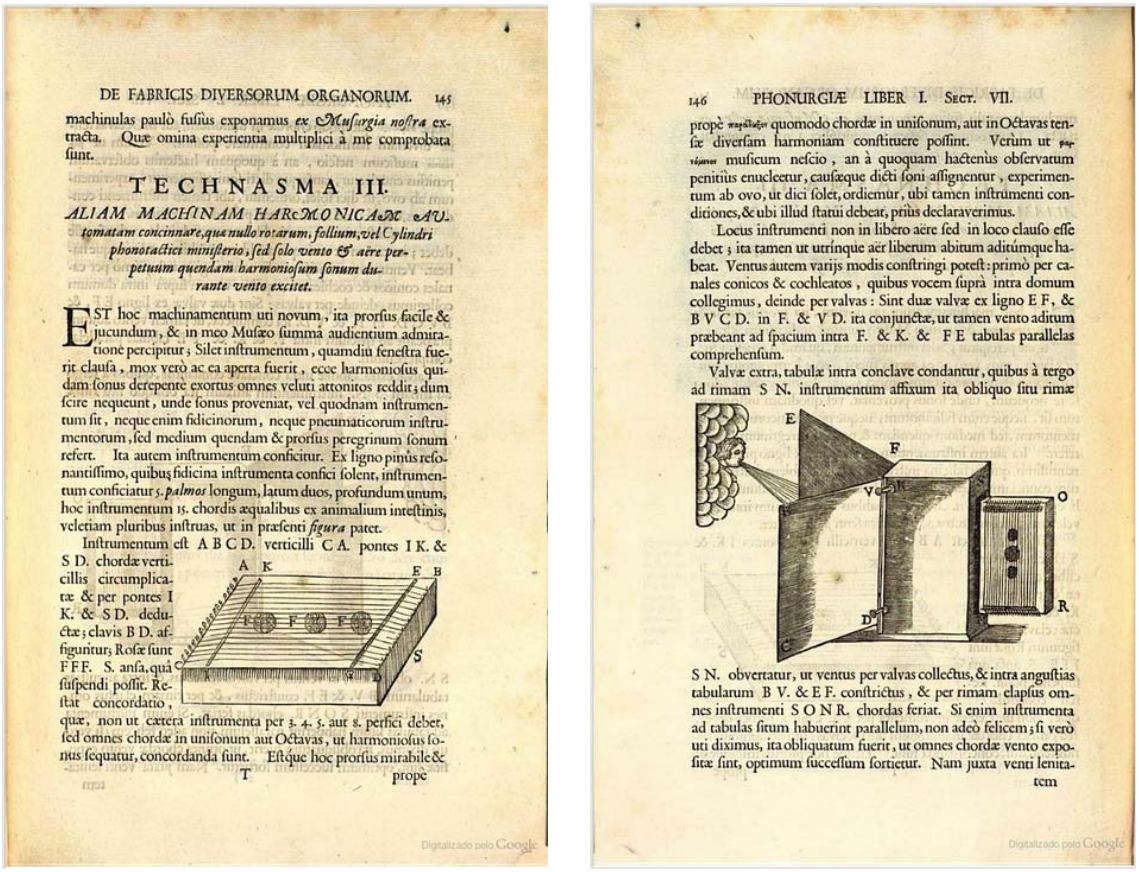
3 INTRODUÇÃO AO FENÔMENO DE VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES

O fenômeno de vibração induzida por vórtices é um dos mecanismos físicos responsáveis pelas vibrações induzidas pelo escoamento. No capítulo 2 o fenômeno de geração e desprendimento de vórtices foi descrito para o escoamento ao redor de cilindros fixos. Neste capítulo será apresentada uma consequência desse desprendimento de vórtices, considerando desde aspectos históricos às últimas descobertas publicadas na literatura técnica correspondente. Concluída a apresentação do fenômeno de VIV será feita uma breve revisão sobre outros mecanismos que podem causar vibrações induzidas pelo escoamento.

3.1 Primeiras observações do fenômeno de VIV

Desde os primórdios da humanidade os homens se surpreenderam com o som dos ventos. Na Grécia antiga o som produzido por correntes de ar era denominado de *aeolian songs* e acreditava-se que esses sons eram a voz do deus *Aeolian*, o guardião dos ventos. Nessa época, notava-se que algumas harpas, quando deixadas expostas à correntes de ar, emitiam notas musicais. O som produzido pelas harpas "tocadas" pelo vento era *aeolian tones*. A figura 3.1 apresenta duas folhas do livro escrito por Kircher (1673), no qual o autor ensina como construir instrumentos musicais tocados pelo ar. É interessante observar na gravura em 3.1(b), que o autor propõe uma espécie de bocal primitivo para direcionar o fluxo de ar do vento para as cordas da harpa.

Até o final do século XIX, o estudo a respeito de vórtices e o escoamento ao redor de corpos rombudos ocorria de maneira qualitativa. Atribui-se à Strouhal (1878) apud King, Prosser e Johns (1973) ser o primeiro a tentar descrever quantitativamente o escoamento ao redor de cilindros. Strouhal constatou que havia uma relação entre a frequência de desprendimentos de vórtices f_v, o diâmetro do cilindro D e a velocidade do escoamento incidente U_∞. Esta relação, dada pela equação 3.1, consiste na definição de



DE FABRICIS DIVERSORUM ORGANORUM. 145

machinulas paulò fusiùs exponamus *ex Musurgia nostra* extracta. Quæ omina experientia multiplici à me comprobata sunt.

TECHNASMA III.

ALIAM MACHINAM HARMONICAM AUtomatam concinnare, quæ nullo rotarum, follium, vel Cylindri phonotactici ministerio, sed solo vento & aëre perpetuum quendam harmoniosum sonum durante vento excitet.

EST hoc machinamentum uti novum, ita prorsus facile & jucundum, & in meo Musæo summâ audientium admirationè percipitur; Siler instrumentum, quamdiu fenestra fuerit clausa, mox verò ac ea aperta fuerit, ecce harmoniosus quidam sonus derepente exortus omnes veluti attonitos reddit; dum scire nequeunt, unde sonus proveniat, vel quodnam instrumentum sit, neque enim fidicinorum, neque pneumaticorum instrumentorum, sed medium quendam & prorsus peregrinum sonum refert. Ita autem instrumentum conficitur. Ex ligno pinùs resonantissimo, quibus fidicina instrumenta confici solent, instrumentum conficiatur 5. *palmos* longum, latum duos, profundum unum, hoc instrumentum 15. chordis æqualibus ex animalium intestinis, veletiam pluribus instruas, ut in præsenti *figura* patet.

Instrumentum est A B C D. verticilli C A. pontes I K. & S D. chordæ verticillis circumplicatæ & per pontes I K. & S D. deductæ; clavis B D. affigunitur; Rosæ sunt F F F. S. ansa, quâ suspendi possit. Restat concordatio, quæ, non ut cætera instrumenta per 3. 4. 5. aut 8. perfici debet, sed omnes chordæ in unisonum aut Octavas, ut harmoniosus sonus sequatur, concordanda sunt. Estque hoc prorsus mirabile &

T propè

146 PHONURGIÆ LIBER I. SECT. VII.

propè [illegible] quomodo chordæ in unisonum, aut in Octavas tensæ diversam harmoniam constituere possint. Verùm ut [illegible] musicum nescio, an à quoquam hactenùs observatum penitiùs enucleetur, causæque dicti soni assignentur, experimentum ab ovo, ut dici solet, ordiemur, ubi tamen instrumenti conditiones, & ubi illud statui debeat, priùs declaraverimus.

Locus instrumenti non in libero aëre sed in loco clauso esse debet; ita tamen ut utrinque aër liberum abitum aditúmque habeat. Ventus autem varijs modis constringi potest: primò per canales conicos & cochleatos, quibus vocem suprà intra domum collegimus, deinde per valvas: Sint duæ valvæ ex ligno E F, & B V C D. in F. & V D. ita conjunctæ, ut tamen vento aditum præbeant ad spacium intra F. & K. & F E tabulas parallelas comprehensum.

Valvæ extra, tabulæ intra conclave condantur, quibus à tergo ad rimam S N. instrumentum affixum ita obliquo situ rimæ

S N. obvertatur, ut ventus per valvas collectus, & intra angustias tabularum B V. & E F. constrictus, & per rimam elapsus omnes instrumenti S O N R. chordas feriat. Si enim instrumenta ad tabulas situm habuerint parallelum, non adeò felicem; si verò uti diximus, ita obliquatum fuerit, ut omnes chordæ vento expositæ sint, optimum successum sortietur. Nam juxta venti lenitatem

(a) (b)

Figura 3.1: Páginas do livro de Kircher (1673). Primeira publicação que trata dos *aeolian tones*. Na página em (a) nota-se o desenho de uma harpa e em (b) o autor apresenta um esquema de bocal cujo objetivo é aumentar a velocidade e direcionar o escoamento que chega nas cordas da harpa.

um parâmetro adimensional conhecido como número de Strouhal.

$$St = \frac{f_v\, D}{U_\infty} \tag{3.1}$$

Poucos anos depois Rayleigh (1896) apud King, Prosser e Johns (1973) demonstrou que a frequência de desprendimento de vórtices não era apenas função da relação U_∞/D, mas também do número de Reynolds, definido na equação 3.2. A figura 3.2, retirada de Norberg (2003), apresenta a curva de St $\times$ Re obtida para cilindro fixo. Nota-se que a curva St $\times$ Re apresenta seus primeiros valores para o número de Reynolds acima de 40, tal como já discutido no capítulo 2.

$$Re = \frac{U_\infty\, D}{\nu} \tag{3.2}$$

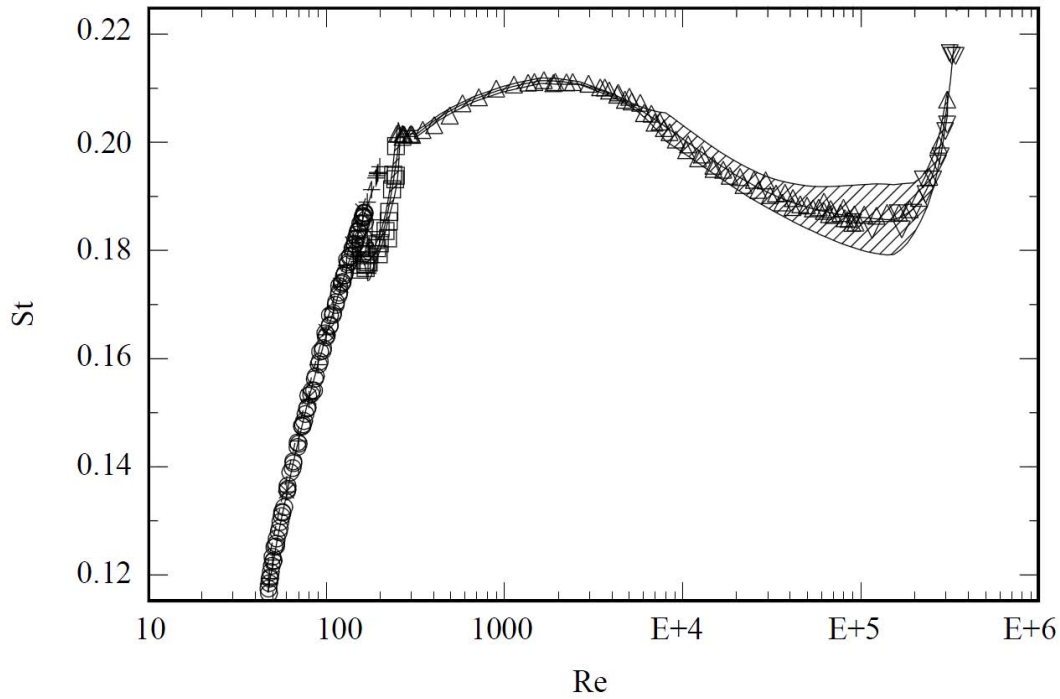


Figura 3.2: Curva St × Re, retirada de Norberg (2003).

Bishop e Hassan (1964a) destacam que os trabalhos pioneiros de Strouhal e Lorde Rayleigh serviram como base para o entendimento do fenômeno de vibração induzida por vórtices até meados da década de 1960. Desde os trabalhos de Rayleigh (1896) apud Bishop e Hassan (1964a) sabe-se que:

1. A frequência de um *aeolian tone* gerada pelo movimento relativo entre um cilindro ou corda e o ar varia com o diâmetro do cilindro, a velocidade do escoamento e o número de Reynolds, segundo a equação:

$$f_v = \mathrm{St}(\mathrm{Re})\,\frac{U_\infty}{D}$$

2. Quando a frequência do *aeolian tone* é próxima a frequência natural da corda, o som emitido é amplificado;

3. As vibrações observadas nas cordas são, sem dúvida, relacionadas à emissão de vórtices.

Bishop e Hassan (1964a) destacam que até os anos 60 o fenômeno de VIV era modelado como um sistema mecânico, usualmente com apenas um grau de liberdade, excitado por uma força de sustentação harmônica cuja frequência seguia a relação 3.1

com St constante. Um exemplo dessa modelagem pode ser encontrado em livros texto de vibrações mecânica tal como em Hartog (1964) no qual a frequência de excitação é definida como $f_v = 0,22U_\infty/D$. Ainda que esses primeiros modelos explicassem o surgimento das vibrações, eles não eram capazes de prever as variações de comportamento que eram observadas. Bishop e Hassan (1964a) destacam as seguintes disparidades entre o resultado dos modelos e os observados experimentalmente:

1. Se as vibrações são causadas por uma força periódica, cuja origem é o desprendimento de vórtices, então a corda de uma harpa deveria oscilar sempre na frequência de Strouhal f_v. Caso a frequência de Strouhal atingisse a frequência natural f_n dessa corda o sistema entraria em ressonância e o som emitido pela harpa seria amplificado. O fato observado, porém, é que quando a frequência de desprendimento de vórtices se aproximava da frequência natural da corda, existia uma faixa de velocidades na qual a frequência de desprendimento de vórtices ficava presa a frequência natural f_n ou um valor próxima dela.

2. Verificou-se que o coeficiente de sustentação era diferente para cilindros fixos e oscilantes.

3. Para algumas chaminés, observou-se que a vibração da estrutura ocorria sempre na frequência natural da chaminé, para qualquer condição de vento.

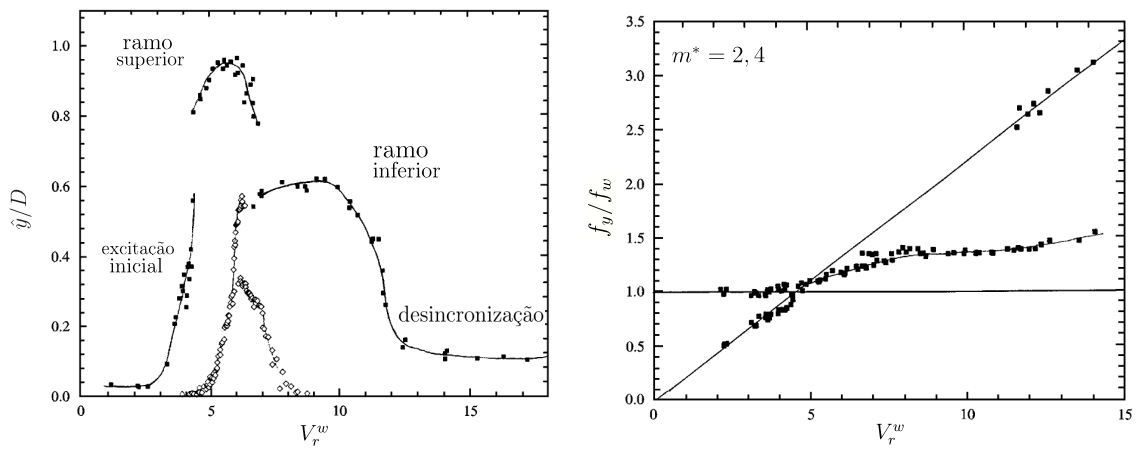
As falhas na teoria existente retomaram os estudos acerca do fenômeno de VIV. O fato das oscilações do corpo rombudo alterarem as características do fenômeno marcaram os estudiosos da época e diversos experimentos passaram a ser realizados. Antes de apresentar esses resultados, é adequado introduzir os parâmetros usados no estudo.

3.2 Parâmetros adimensionais e conceitos fundamentais

Até este ponto, foi estabelecido que o fenômeno de VIV ocorre devido à formação e desprendimento de vórtices e que este processo depende da velocidade do escoamento U_∞ e das características geométricas do corpo rombudo. Além dessas informações, outros parâmetros são relevantes ao estudo de VIV. O objetivo desta seção é definir os parâmetros adimensionais usados ao longo desta tese e apresentar a definição de alguns conceitos fundamentais.

3.2.1 Definição dos parâmetros adimensionais

A figura 3.3, extraída e adaptada de Khalak e Williamson (1997), representa uma resposta clássica do fenômeno de VIV. O gráfico 3.3(a) ilustra a curva de amplitude $\hat{y}/D \times V_r$. O gráfico 3.3(b) apresenta a resposta em frequência $f^* \times V_r$ para o mesmo ensaio. Neste segundo gráfico destaca-se o valor $m^* = 2,4$. Apenas observando este primeiro resultado, faz-se necessário definir os parâmetros de amplitude $\hat{y}/D$, velocidade reduzida, massa adimensional e razão de frequências.



(a) (b)

Figura 3.3: (a) Curva de amplitude *versus* velocidade reduzida. Os pontos ■ foram obtidos por Khalak e Williamson (1997) para $m^* = 2,4$ e os pontos ◊ foram obtidos por Feng (1968) para $m^* \approx 250$. (b) Curva de frequência *versus* velocidade reduzida. Figura adaptada de Khalak e Williamson (1997).

Parâmetros de amplitude $\hat{y}/D$ e $\hat{x}/D$

Talvez este seja o primeiro parâmetro fundamental que possa ser definido ao se trabalhar com um fenômeno oscilatório. O parâmetro de amplitude relaciona a amplitude de oscilação medida $\hat{y}$ para determinada condição do fenômeno ao comprimento característico do corpo que oscila. Dentro da literatura do fenômeno de VIV para cilindros, o comprimento característico adotado é o diâmetro D do cilindro. Vale lembrar que a amplitude $\hat{y}$ considera um valor representativo das oscilações na direção transversal ao escoamento. As oscilações na direção alinhada com o escoamento são medidas por $\hat{x}$. Por valor representativo entende-se o valor que resume e simplifica determinada característica do fenômeno. Um sinal senoidal monocromático, por exemplo, apresenta uma única amplitude de oscilação. O valor máximo de oscilação também pode ser considerado ou ainda

a média de um certo número de máximos locais. O apêndice D apresenta uma discussão mais aprofundada sobre a definição do parâmetro de amplitude e compara três diferentes possibilidades. Ao longo desta tese, as amplitudes são definidas como a média dos 10% maiores picos encontrados nas séries temporais para cada direção.

Frequências naturais da estrutura: f_n e f_w

Antes de definir velocidade reduzida ou razão de frequência, é preciso adotar uma frequência de comparação. Quando sistemas mecânicos flexíveis são excitados, eles costumam responder vibrando em determinadas frequências. Estas frequências, que depende da massa e da rigidez do corpo, além da maneira como os corpos vibram, é denominada de frequência natural desse corpo ou sistema. Por ser característica própria e constante dos sistemas, a frequência natural costuma ser usada como a frequência de referência no cálculo de outros parâmetros adimensionais.

Corpos rígidos montados em bases elásticas capazes de oscilar com apenas um grau de liberdade possuem apenas uma frequência natural. Corpos flexíveis, por outro lado, possuem infinitas frequências naturais. Para esses casos é comum selecionar o valor da primeira frequência natural, ou ainda o valor da frequência natural relacionada ao modo de vibrar de interesse.

A maneira mais simples de determinar a frequência natural de uma estrutura é através de um ensaio de decaimento. Nesse tipo de ensaio, descrito em detalhe no capítulo 5, a estrutura é deslocada de sua posição de equilíbrio e então liberada para oscilar livremente. A partir da resposta apresentada pela estrutura, definem se as frequências naturais, amortecimento e formato dos modos de vibrar. Todos esses resultados são influenciados pela presença de fluidos ao redor da estrutura.

A rigor, para determinar as características mecânicas de uma estrutura ela deveria ser ensaiada em uma câmara de vácuo. Ensaios realizados no ar ou em outros fluidos são influenciados pela sua presença. Devido à baixa densidade e viscosidade do ar, quando comparadas com as da água, é comum assumir que a frequência natural da estrutura no vácuo e no ar são muito próximas e valem f_n. A mesma hipótese não pode ser feita para a água. Ao longo desta tese, a frequência natural medida em ensaios de decaimento em água é dada por f_w.

Experimentos de VIV realizados em ar, com o auxílio de túneis de vento, empregam o valor da frequência natural da estrutura também medida em ar f_n. Experimentos realizados em canais de água ou tanques de reboque, por outro lado, podem empregar as

duas definições. A princípio, como o corpo rombudo está oscilando em água, é natural considerar a frequência natural também medida em água f_w. Por outro lado, a frequência natural em água é determinada a partir da interação do fluido com a estrutura e não considera apenas a resposta da estrutura. Na literatura de VIV, ambas as frequências naturais são consideradas. Existe uma linha de pesquisadores que adota a frequência natural em ar f_n, pois desta forma apenas a estrutura é considerada. Dentre esses pesquisadores pode-se citar Bearman (1984), Sarpkaya (2004) e Assi, Bearman e Meneghini (2010). Outra linha de pesquisadores considera a frequência natural em água f_w. Dentre estes, pode-se citar Khalak e Williamson (1999), Govardhan e Williamson (2000) , Jauvtis e Williamson (2004), Dahl, Hover e Triantafyllou (2006), Korkischko e Meneghini (2010), Franzini (2012), entre outros.

Ao longo desta tese a frequência natural adotada como referência é a frequência medida em ensaios de decaimento em ar f_n. Esta escolha foi feita com base nos argumentos de Bearman (1984) de que o parâmetro f_n permite comparar a resposta do fenômeno de VIV com um padrão conhecido e que não depende da interação entre o fluido e estrutura. Além deste argumento teórico, existem outros dois motivos. O primeiro é que a frequência natural em ar f_n é melhor determinada do que a frequência natural em água f_w, pois apresenta maior número de oscilações e menor influência do amortecimento hidrodinâmico. Este argumento é demonstrado no apêndice D. O terceiro argumento é de cunho pragmático e resulta dos resultados obtidos nesta tese. O capítulo 7 apresenta os resultados obtidos para diferentes ensaios de VIV e compara compilações feitas usando f_n e também f_w.

Velocidade reduzida V_r

Como ressaltado no início desta seção, o fenômeno de VIV depende da velocidade do escoamento U_∞ que incide no corpo rombudo. Apesar disso, a mesma velocidade de escoamento pode apresentar diferentes respostas para diferentes condições de ensaio. Para adimensionalizar a velocidade reduzida é comum usar o diâmetro do cilindro D e a frequência característica da estrutura, f_n ou f_w, como discutido anteriormente. A equação 3.3 apresenta as definições de V_r e V_r^w. Ao longo desta tese, a velocidade reduzida é apresentada em função da frequência natural em ar f_n. Em alguns casos, quando resultados forem comparados com dados extraídos da literatura, a velocidade reduzida segue o padrão definido pelos autores citados e emprega-se V_r^w.

$$V_r = \frac{U_\infty}{f_n\, D} \qquad V_r^w = \frac{U_\infty}{f_w\, D} \tag{3.3}$$

Razões de frequências: f_y/f_n e f_x/f_n

A razão de frequências determina a relação entre a frequência dominante de oscilação em cada direção e a frequência natural da estrutura. No exemplo extraído de Khalak e Williamson (1997), figura 3.3(b), a razão de frequências é calculada em função da frequência natural em água f_w, pois esse é o padrão desse autor. Observa-se que neste gráfico há duas retas que servem como referência. A primeira reta, horizontal, representa a região na qual a frequência de vibração do cilindro é igual a sua frequência natural em água $f_y = f_w$. A segunda reta, inclinada, ilustra a razão entre a frequência de desprendimento de vórtices para um cilindro fixo f_v e f_w. Não pertence ao escopo desta seção analisar todas as informações que podem ser extraídas deste gráfico. Neste momento o objetivo é apenas definir as grandezas envolvidas.

Apresentar apenas a frequência dominante de oscilação é uma maneira simplificada de representar o fenômeno. Uma alternativa mais completa se dá com a apresentação de mapas de frequência. Estes mapas apresentam, para cada velocidade reduzida, não apenas o valor dominante da frequência, mas sim todo o seu espectro e permitem avaliar a presença de harmônicos na resposta ou ainda a presença de outras frequências que não sejam múltiplos de f_y ou f_x.

Velocidade reduzida "verdadeira" $(V_r/(f_y/f_n))\mathrm{St} = f_v/f_y$

Além de V_r e V_r^w, pode-se apresentar os resultados em função de um parâmetro denominado de "velocidade reduzida verdadeira". Este parâmetro não é apresentada na figura 3.3, porém seu uso é bastante comum. A velocidade reduzida verdadeira é obtida multiplicando a velocidade reduzida pelo número de Strouhal e dividindo o resultado pela razão de frequências. Esse processo é análogo a dividir a frequência de emissão de vórtices para cilindro fixo f_v pela frequência dominante de oscilação na direção transversal f_y.

Este parâmetro foi originalmente usado em experimentos forçados de VIV nos quais o cilindro era movimentado com diferentes amplitudes e frequências. Os resultados eram apresentados em função da amplitude de oscilação $\hat{y}/D$ e da relação entre o período de oscilação imposta e o período de desprendimento de vórtices. Como a frequência de um fenômeno é o inverso de seu período, definiu-se a relação f_v/f_y.

A velocidade reduzida verdadeira apresenta duas grandes vantagens. A primeira é que ela não depende da escolha arbitrária de uma frequência de comparação f_n ou f_w, pois depende apenas da frequência de desprendimento de vórtices para cilindro fixo f_v e a frequência dominante de oscilação. A segunda vantagem é que esta adimensionalização

permite comparação com os mapas de vórtices oriundos dos experimentos com vibrações forçadas, tais como os realizados por Williamson e Roshko (1988) e Morse e Williamson (2009b).

O parâmetro foi originalmente desenvolvido para oscilações com apenas um grau de liberdade, logo a frequência na direção transversal foi naturalmente adotada. Nada impede, porém, que a frequência usada seja a frequência dominante na direção alinhada com a corrente f_x. Além desta seleção arbitrária, as curvas de amplitude apresentadas em função de f_v/f_y perdem a sequência de seus pontos, pois como há variação da frequência dominante a cada ramo, nada garante que dois pontos obtidos para velocidades do escoamento seguidas também sejam seguidos.

Parâmetros de inércia: massa adimensional m^* e momento de inércia adimensional J^*

O parâmetro de massa adimensional m^* relaciona a massa do sistema que oscila m com a massa de fluido deslocada m_d, segundo a equação 3.5. No caso de um cilindro com diâmetro D e comprimento imerso L_c, o volume de fluido deslocado é dado por $\pi\, D^2\, L_c/4$. Considerando que ρ seja a densidade do fluido, a massa deslocada m_d é dada pela equação 3.4. O parâmetro de massa m^* pode ser entendido como uma relação entre a inércia do sistema que oscila com a inércia do fluido. Para ensaios em túneis de vento, o fluido de trabalho é o ar cuja baixa densidade acarreta em elevados valores de m^*. Este parâmetro é encontrado em grande parte da literatura de VIV.

$$m_d = \frac{\pi\, D^2\, L_c\, \rho}{4} \tag{3.4}$$

$$m^* = \frac{m}{m_d} \tag{3.5}$$

O parâmetro de momento de inércia adimensional J^* é obtido de maneira análoga ao parâmetro m^* e considera o momento de inércia da estrutura oscilante J com o momento de inércia do fluido deslocado J_d. Este parâmetro é empregado em situações nas quais o corpo rombudo não translada, mas rotaciona ao redor de um ponto fixo, tal como em Flemming e Williamson (2005) e Leong e Wei (2008).

$$J^* = \frac{J}{J_d} \tag{3.6}$$

O momento de inércia adimensional J^* é indicado para representar a inércia de estruturas que rotacionam, enquanto que a massa m^* é indicada para casos nos quais a estrutura translada. O parâmetro J^* é usado para medir a inércia da base elástica usada

nesta tese, pois esta é um pêndulo articulado ao teto do laboratório. Uma análise mais profunda sobre a comparação entre esses dois parâmetros de inércia é feita no capítulo 4.

3.2.2 Definição de conceitos fundamentais

Nesta seção alguns termos importantes ao fenômeno de VIV são apresentados. Entre eles estão: os ramos de resposta, a região de sincronização, modos de esteira de vórtices e o conceito de massa adicional. O objetivo desta seção é apenas introduzir esta nomenclatura e não analisar cada conceito com profundidade.

Região de sincronização e *lock-in*

As primeiras observações do fenômeno de VIV foram feitas para cordas de instrumentos musicais submetidas à correntes de ar. Como narrado na seção 3.1, os primeiros modelos considerados para o fenômeno de VIV assumiam que este ocorria quando a frequência de desprendimento de vórtices f_v do escoamento ao redor de corpos rombudos era próximo à frequência natural f_n deles, induzindo assim ressonância. A frequência de oscilação era, portanto, a frequência de excitação f_v. Observações mais cuidadosas demonstraram, porém, que quando ocorria VIV e a velocidade do escoamento era alterada, a frequência de oscilação não mudava, mas mantinha-se próxima à frequência natural do sistema f_n. Essa "captura" da frequência de desprendimento de vórtices pela frequência natural do sistema ficou conhecida pelo termo inglês *lock-in*.

A região de sincronização é a faixa de velocidade reduzida V_r na qual o movimento do corpo rombudo e a resposta do fluido ocorrem de maneira sincronizada, ou seja, com a mesma frequência dominante. Enquanto o *lock-in* refere-se à região na qual a frequência de oscilação do sistema e a de desprendimento de vórtices é aproximadamente constante, a região de sincronização é maior e envolve toda a região na qual oscilações da estrutura são observadas. A figura 3.3(a) mostra que não há oscilações para $V_r^w < 4$ e que a amplitude de oscilação cai significativamente e se estabiliza para $\hat{y}/D \approx 0,1$ para $V_r^w > 12$. A região de *lock-in*, porém, ocorre quando a frequência dominante do escoamento deixa de seguir a linha inclinada que representa a frequência de desprendimento de vórtices.

Ramos de resposta

A curva de amplitude de oscilação apresentada na figura 3.3(b) apresenta os nomes *Excitação Inicial*, *Ramo Superior*, *Ramo Inferior* e *desincronização*. Estes nomes referem-se a diferentes comportamentos do cilindro dentro do fenômeno de VIV. Aos diferentes comportamentos de resposta, tanto em amplitude quanto em frequência, foi

dado o nome de *ramos de resposta*. A definição dos ramos de resposta foi iniciada por Khalak e Williamson (1996) ao definir o Ramo Superior e o Ramo Inferior. A Excitação Inicial, posteriormente denominada de Ramo Inicial, foi definida logo em seguida, em Khalak e Williamson (1997).

A principal importância de se definir ramos de resposta é simplificar e dividir o comportamento observado para o fenômeno de VIV. Em cada uma dessas regiões existem características próprias e diferentes observações dentro do mesmo ramo de resposta apresentam resultados similares. Os nomes escolhidos por Khalak e Williamson (1996) se baseiam na curva de amplitude, mas isso não significa que esta característica seja a única a definir cada ramo.

Modos de esteira

No capítulo 2 a esteira de vórtices de von Kármán foi apresentada. Esse padrão de esteira é observado no escoamento ao redor de corpos rombudos simétricos e fixos e apresenta dois vórtices com circulação oposta a cada ciclo de desprendimento. Outros padrões de esteira se formam quando o corpo rombudo oscila. Isso porque o movimento do corpo rombudo muda a dinâmica das camadas cisalhantes e afeta o processo de formação e desprendimento de vórtices.

Geralmente os modos de esteira são nomeados segundo o padrão definido por Williamson e Roshko (1988), que conta quantos vórtices são emitidos a cada ciclo de desprendimento e também quantos foram emitidos a cada meio ciclo. A esteira de vórtices de von Kármán, portanto, é classificada como uma esteira 2S, pois apresenta dois vórtices únicos a cada ciclo de desprendimento. Uma esteira 2P, por outro lado, apresenta dois pares de vórtices a cada ciclo de oscilação, sendo que os vórtices dentro de cada par possuem sinais de circulação contrários. Caso os dois vórtices do mesmo par tenham o mesmo sinal de circulação, ou seja, caso os dois vórtices rodem no mesmo sentido, então esse padrão recebe a classificação 2C, do termo inglês *two co-rotating*. Esteiras com três vórtices desprendidos a cada semi-ciclo são denominadas de 2T, do termo inglês *two triplets*. Existem também modos mistos, tais como o P+S, que compreende a emissão de um par de vórtices (P) em um semi-ciclo e um vórtice único (S) no outro semi-ciclo.

O processo de formação e desprendimento de vórtices é o fator determinante das vibrações induzidas por vórtices. Os diferentes modos de esteira são a consequência dessa dinâmica para o fluido.

Conceito de massa adicional

Quando um corpo imerso em meio fluido acelera, este corpo precisa deslocar certa massa de fluido que o rodeia para poder se movimentar. Por esse motivo, para acelerar um corpo a partir do repouso é preciso também acelerar uma certa massa de fluido, aumentando assim a força e o trabalho necessários para causar a aceleração. A força adicional, oriunda da presença do fluido, pode ser entendida como consequência de uma "massa adicional" presa ao corpo.

É comum adimensionalizar a massa adicional em função da massa do fluido deslocado pelo corpo rombudo imerso no escoamento. O coeficiente adimensional resultante desse processo é denominado de coeficiente de massa adicional C_a e é definido pela equação C.1.

$$C_a = \frac{m_a}{m_d} \tag{3.7}$$

Apesar de parecer simples, o conceito de massa adicional reserva para si algumas polêmicas. Segundo Sarpkaya (2004), a massa adicional é uma das características mais discutidas, menos compreendidas e mais confusas dentro da Mecânica dos Fluidos. De fato, essa confusão tem origem em diferentes interpretações que podem ser dadas e em diferentes procedimentos para sua obtenção. No apêndice C uma análise crítica mais aprofundada sobre esse conceito é apresentada.

Ao longo desta tese, o conceito de massa adicional é usado apenas no desenvolvimento dos modelos matemáticos para a base elástica usada nos experimentos. O conceito não é medido nos experimentos de VIV, pois estes não empregaram células de carga. Medições indiretas do coeficiente de massa adicional poderiam ser feitas em função das frequências dominantes de oscilação da estrutura. Essa escolha não foi usada, porém, pois recai em uma tautologia retórica. Como apresentado no apêndice C, o conceito de massa adicional foi elaborado como uma analogia para justificar a variação da frequência natural de pêndulos. Usar a resposta em frequência da estrutura para calcular a massa adicional e em seguida usar a massa adicional para justificar a resposta da estrutura recai em um vício lógico que não contribui para o desenvolvimento desta tese.

Fenômeno auto-excitado e auto-limitado

É comum tratar o fenômeno de VIV como um fenômeno "auto-excitado" e "auto-limitado".

Por fenômeno auto-excitado entende-se aquele capaz de se desenvolver sozinho, ou seja, sem a necessidade de ação de um agente externo. No caso do fenômeno de VIV, basta que o escoamento encontre um corpo rombudo para que o processo de formação e desprendimento de vórtices ocorra e induza forças cíclicas. Caso o corpo possa oscilar e a frequência de emissão de vórtices seja próxima da frequência natural do corpo, este inicia, sozinho, seu movimento.

Por auto-limitado entende-se o fato de o fenômeno, também sozinho, definir sua amplitude máxima de oscilação. Sistemas sem amortecimento, quando excitados em suas frequências naturais tenderiam a amplitudes infinitas. Esse não é o caso do fenômeno de VIV. Caso a amplitude do fenômeno cresça muito, o próprio processo de formação e desprendimento de vórtices é afetado, diminuindo a intensidade das forças que atuam no corpo ou ainda alterando sua frequência, o que também pode causar desincronização.

Baseado em experimentos forçados, Bishop e Hassan (1964b) concluíram que o escoamento que contorna o cilindro pode ser modelado por um oscilador de esteira não linear e que seja auto-excitado. Esta observação é o pilar fundamental de uma vertente de estudos do fenômeno de VIV denominada de Modelos Fenomenológicos. O oscilador de van der Pol é um oscilador com termo não linear em seu amortecimento. A característica auto-excitada é consequência de amortecimento negativo para baixas amplitudes de oscilação do cilindro. Quando a amplitude de oscilação cresce o termo de amortecimento passa a ser positivo e o sistema se auto-limita. A equação 3.8 ilustra a formulação básica de um oscilador do tipo van der Pol.

$$\ddot{x} + \mu \left(1 - x^2\right) \dot{x} + x = 0 \tag{3.8}$$

Mais informações acerca de modelos fenomenológicos podem ser encontradas em Iwan e Blevins (1974), Parkinson (1989), Facchinetti, Langre e Biolley (2004) e Srinil e Zanganeh (2012).

3.3 VIV com um grau de liberdade

Como discutido anteriormente, as primeiras observações do fenômeno de VIV levaram os cientistas e engenheiros a concluir que as principais oscilações de um corpo rombudo imerso em uma corrente de ar se davam na direção transversal ao escoamento. Por esse motivo, o fenômeno passou a ser estudado exclusivamente nessa direção. Esta seção apresenta as principais descobertas com relação ao fenômeno de VIV restrito à oscilações na direção transversal à corrente incidente.

Na década de 1960, Feng (1968) focou sua tese de doutorado no estudo do fenômeno de VIV e obteve resultados que se tornaram clássicos na literatura. A figura 3.3(a) apresenta a curva $\hat{y}/D \times V_r$ obtida por ele. Em seus experimentos, Feng estudou o movimento de um cilindro montado em base elástica dentro de um túnel de vento. Devido à baixa densidade do ar, a relação de massas m^* de seu experimento é bastante alta, $m^* \approx 250$. Como será apresentado na seção 3.4, para que os efeitos do segundo grau de liberdade, alinhado com o escoamento, influenciem no fenômeno de VIV é preciso que o parâmetro de massa do sistema seja baixo, $m^* < 6$ segundo Jauvtis e Williamson (2004). Ainda que as observações de Feng tivessem permitido oscilações alinhadas com a corrente, elas não teriam se manifestado.

A figura 3.3(a), apresentada na seção anterior, é um exemplo clássico de resposta do fenômeno de VIV com um grau de liberdade. Nessa figura, os resultados de Feng (1968) e Khalak e Williamson (1997) são comparados em uma curva de amplitude adimensional $\hat{y}/D$ *versus* velocidade reduzida V_r. Existem diversas características a serem destacadas neste resultado. A primeira é que a curva de resposta do sistema não é similar à curva de resposta clássica de um sistema massa-mola-amortecedor (MMA) forçado harmonicamente. Este tipo de sistema apresenta um pico de resposta quando a frequência de excitação encontra sua frequência natural. Na resposta da figura 3.3(a) verifica-se que existe, de fato, um pico de resposta, mas, depois dele, a amplitude de oscilação não cai prontamente e permanece estável até $V_r \approx 10$, quando inicia sua queda.

Mantendo a analogia do fenômeno de VIV com um oscilador linear forçado harmonicamente e assumindo que a frequência de oscilação segue a relação de Strouhal com $St \approx 0,2$, é fácil verificar que f_v atinge f_n para $V_r = 1/St \approx 5$. De fato, observa-se que o pico de amplitude ocorre para um valor de V_r próximo a 5, mas não exatamente para este valor.

Outra característica da curva de amplitude é que existem comportamentos distin-

tos de $\hat{y}/D$ para cada faixa de V_r. Esses comportamentos foram denominados de ramos de resposta por Khalak e Williamson (1996). A figura 3.3(a) nomeia três ramos, sendo eles: o Ramo Inicial, o Ramo Superior e o Ramo Inferior. Esses três ramos foram observados por Khalak e Williamson (1997) para $m^* = 2,4$. A curva de Feng, por outro lado, com $m^* \approx 250$, apresenta apenas dois ramos, sendo eles o Inicial e o Inferior.

A nomenclatura dos ramos de resposta usada ao longo desta tese é uma tradução livre do autor e busca ser fiel aos conceitos originais. Os termos Ramo Inicial, Ramo Superior e Ramo Inferior foram traduzidos dos termos *initial branch, upper branch* e *lower branch*. O Ramo Inicial foi primeiramente denominado de "excitação inicial" e só passou a ser considerado um ramo de resposta em Khalak e Williamson (1999).

Outra diferença que se destaca entre os resultados de Feng (1968) e Khalak e Williamson (1997) é a diminuição da região de velocidade reduzida para a qual o fenômeno de VIV ocorre. Enquanto para os resultados de Khalak e Williamson (1997) observam-se vibrações com $\hat{y}/D > 0,2$ no intervalo $3 < V_r < 12$, para a curva obtida por Feng (1968) as oscilações limitam-se ao intervalo $5 < V_r < 8$. Percebe-se que, para $V_r > 8$, a amplitude de oscilação observada por Feng é praticamente nula, ao passo que para Khalak e Williamson (1997) a amplitude estabiliza no patamar $\hat{y}/D \approx 0,1$. Apesar dessas diferenças, é notável a semelhança entre o pico de amplitude atingido no Ramo Inicial por ambos os autores.

O trabalho de Khalak e Williamson (1999) permitiu entender a existência dos diferentes ramos de resposta. Neste artigo, os autores sobrepõe a curva de resposta $\hat{y}/D$ com o mapa de emissão de vórtices de Williamson e Roshko (1988). A figura 3.4 apresenta esse resultado para a curva $\hat{y}/D \times V_r^w/(f_y/f_w)$. O parâmetro $V_r^w/(f_y/f_w)$ é análogo à velocidade reduzida "verdadeira", definida na seção anterior, com exceção do termo St. Nota-se que o Ramo Inicial está contido na região para a qual o modo de desprendimento de vórtices 2S foi observado. Os ramos Superior e Inferior, por outro lado, estão contidos na região do modo 2P.

A ideia de que cada ramo de resposta está relacionado a um padrão de emissão de vórtices é fundamental para o fenômeno de VIV. A troca entre os modos 2S e 2P, por exemplo, explicava o salto na amplitude observado entre os Ramos Inicial e Superior, além da brusca variação da fase entre força de excitação do fluido e movimento do cilindro.

Para entender o fenômeno de VIV, modelos lineares foram desenvolvidos e visavam relacionar as respostas de amplitude $\hat{y}/D$ e frequência f_y/f_n com os parâmetros de massa m^*, velocidade reduzida V_r e amortecimento estrutural ζ. Em seu artigo de revisão, Bearman (1984) apresenta o seguinte modelo:

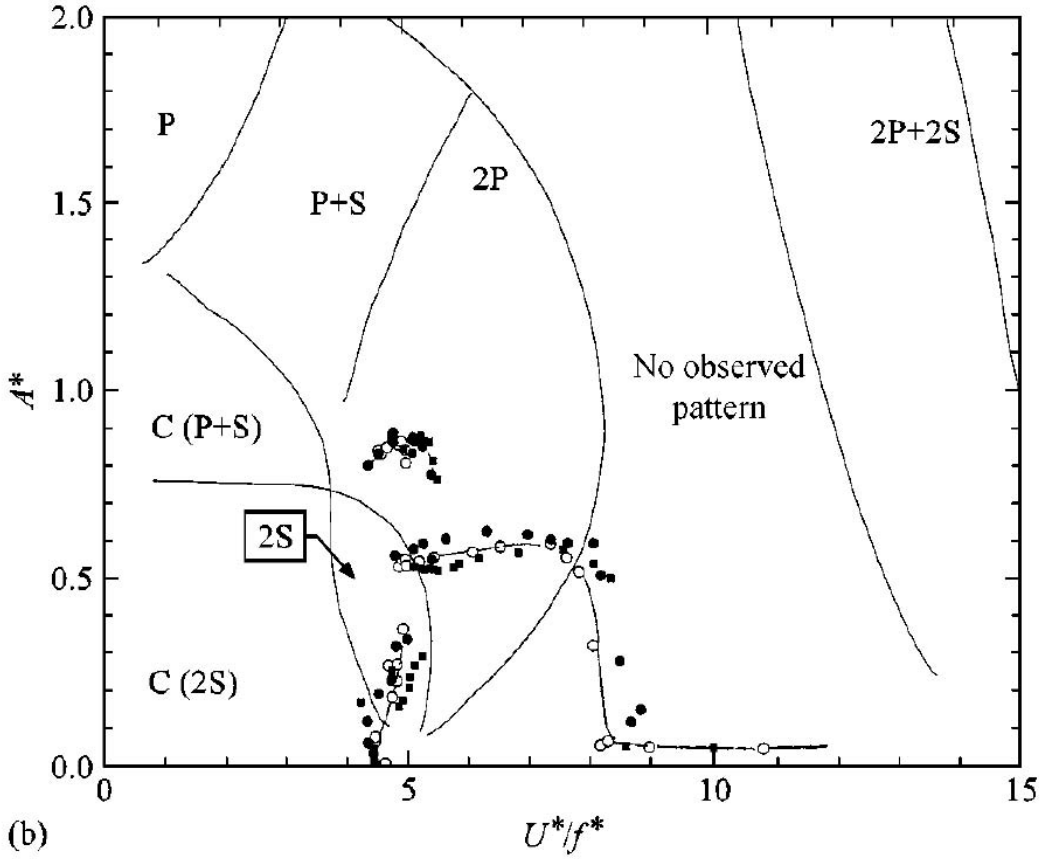


Figura 3.4: Curva $\hat{y}/D \times V_r^w/f_y/f_w$ obtida por Khalak e Williamson (1999), sobreposta ao mapa de Williamson e Roshko (1988). Figura adaptada de Khalak e Williamson (1999).

Seja um cilindro montado em base elástica e representado pelo sistema massa mola amortecedor com parâmetros m, k e c respectivamente. Considerando que este sistema seja forçado no tempo por $F(t)$, a equação do movimento, medida para a direção transversal ao escoamento, é dada pela equação 3.9

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k\,y = F(t) \tag{3.9}$$

Empregando os conceitos de frequência natural de oscilação ω_n e coeficiente de amortecimento estrutural ζ, a equação do oscilador forçado 3.9 é re-escrita segundo a equação 3.10.

$$\omega_n = 2\pi\, f_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}}$$

$$m\ddot{y} + 2\zeta\omega_n m\dot{y} + \omega_n^2 m\,y = F(t) \tag{3.10}$$

Até este ponto, a única hipótese adotada é a de que a estrutura oscilante pode

ser modelada segundo um sistema massa-mola-amortecedor ideal, com amortecimento viscoso, e parâmetros m, c e k constantes. Apesar de simples, nem sempre essas hipóteses são válidas. Dependendo da montagem do sistema, o coeficiente de amortecimento c pode ser função da massa m. Ignorando esse tipo de efeito e, em face das demais hipóteses a serem adotadas ao longo da modelagem, esta hipótese pode ser considerada como a *hipótese zero*.

Na região de *lock-in*, quando ocorre sincronização entre o desprendimento de vórtices e o movimento do cilindro, a posição $y(t)$ e a força $F(t)$ podem ser modeladas segundo as equações definidas em 3.11. Para essa equação F_y é a intensidade da força que atua no sistema e ϕ_F é a diferença de fase entre a força e o deslocamento. Para esse modelo, o deslocamento e a força possuem a mesma frequência ω_y. Esta hipótese é assumida em Bearman (1984) dentre outros. No contexto deste trabalho esta será a *hipótese 1*.

$$\textit{hipótese 1} \rightarrow \begin{cases} y(t) = \hat{y}\,\sin(\omega_y\,t) \\ F(t) = F_y \sin(\omega_y\,t + \phi_F) \end{cases} \tag{3.11}$$

Substituindo a equações de $y(t)$ e $F(t)$, da *hipótese 1*, na equação do oscilador, definida na *hipótese zero*, obtém-se que:

$$\begin{aligned} m\,\hat{y}\left(-\omega_y^2 + \omega_n^2\right)\sin(\omega_y\,t) + 2\zeta\,\omega_n\,m\,\hat{y}\,\omega_y\,\cos(\omega_y\,t) \\ = F_y\,\cos\phi_F\,\sin(\omega_y t) + F_y\,\sin\phi_F\,\cos(\omega_y t) \end{aligned}$$

Para que a equação anterior seja satisfeita, os termos com $\sin(\omega_y\,t)$ de ambos os lados da equação devem ser iguais. O mesmo acontece para os termos com $\cos(\omega_y t)$, logo:

$$-\,m\,\omega_y^2\,\hat{y} + \omega_n^2\,m\,\hat{y} = F_y\,\cos\phi_F \tag{3.12}$$

$$2\zeta\,\omega_n\,m\,\hat{y}\,\omega_y = F_y\,\sin\phi_F \tag{3.13}$$

A equação 3.12 pode ser trabalhada de forma a se obter uma relação entre as frequências de oscilação ω_y e a frequência natural ω_n do sistema. Lembrando que $\omega_y = 2\,\pi\,f_y$ e $\omega_n = 2\,\pi\,f_n$:

$$4\pi^2\,m\,\hat{y}\,f_n^2\left(1 - \frac{f_y^2}{f_n^2}\right) = F_y\,\cos\phi_F$$

A força F_y pode ser escrita como $F_y = C_y(1/2)\rho U_\infty^2\,D\,L$. Esta transformação não chega a ser uma hipótese adicional, mas apenas uma adimensionalização da força.

Em Mecânica dos Fluidos é comum denominar a força causada pelo fluido na direção do escoamento como força de arrasto e a força na direção transversal ao escoamento como força de sustentação. O termo C_y é denominado de coeficiente de sustentação. Na adimensionalização, ρ é a densidade do fluido no qual o cilindro está imerso, D e L_c são o diâmetro do cilindro e seu comprimento imerso e U_∞ é a velocidade do escoamento uniforme incidente.

$$4\pi^2\, m\, \hat{y}\, f_n^2 \left(1 - \frac{f^2}{f_n^2}\right) = \frac{1}{2}\, C_y\, \rho\, U_\infty^2\, D\, L_c\, \cos\phi_F$$

Dividindo-se os dois lados da equação pela massa de fluido deslocado m_d, definido pela equação 3.4 e empregando a definição do parâmetro de massa $m^* = m/m_d$, resulta:

$$\frac{f_y}{f_n} = \sqrt{1 - \frac{C_y\, \cos\phi}{2\pi^3} \left(\frac{U_\infty}{f_n\, D}\right)^2 \frac{1}{m^*} \left(\frac{\hat{y}}{D}\right)^{-1}}$$

Finalmente, fazendo uso do conceito de velocidade reduzida $V_r = U_\infty / f_n\, D$, obtém-se a equação para a frequência adimensionalizada f_y/f_n:

$$\frac{f_y}{f_n} = \sqrt{1 - \frac{C_y\, \cos\phi_F}{2\pi^3} \frac{V_r^2}{m^*} \left(\frac{\hat{y}}{D}\right)^{-1}} \tag{3.14}$$

Empregando o mesmo procedimento, mas agora partindo da equação 3.13, determina-se uma equação para $\hat{y}/D$.

$$\frac{\hat{y}}{D} = \frac{1}{4\pi^3} \frac{C_y \sin\phi_F}{m^*\, \zeta} V_r^2 \left(\frac{f_y}{f_n}\right)^{-1} \tag{3.15}$$

Os resultados 3.14 e 3.15 são os mesmos obtidos por Bearman (1984) e são consequências da *hipótese 1*.

Khalak e Williamson (1996) fazem uma hipótese distinta para a força $F(t)$. Os autores ainda consideram que a resposta do sistema pode ser dada por $y(t) = \hat{y}\, \sin(\omega_y t)$, mas a força $F(t)$ passa a ser composta por duas parcelas, sendo uma delas viscosa e outra de natureza não viscosa ou potencial, apresentadas nas equações 3.17 e 3.18. Essa decomposição é baseada na decomposição proposta por Lighthill (1986).

$$\text{Hipótese 2} \rightarrow \begin{cases} y(t) = \hat{y}\, \sin(\omega_y t) \\ F_y(t) = F_{\text{invíscida}}(t) + F_{\text{viscosa}}(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

$$F_{\text{invíscida}}(t) = -m_a\,\ddot{y} \tag{3.17}$$

$$F_{\text{viscosa}}(t) = \frac{1}{2}\hat{C}_y\,\rho\,U_\infty^2\,D\,L\,\sin\left(\omega_y\,t + \phi_F\right) \tag{3.18}$$

Nota-se que a principal diferença entre a modelagem de Bearman (1984) e Khalak e Williamson (1999) é a presença termo $-m_a\,\ddot{y}$ do lado direito da equação do oscilador harmônico. Reorganizando a equação de forma a deixar todas as derivadas de y do lado esquerdo, recai-se na equação 3.19.

$$(m + m_a)\ddot{y} + 2\zeta\omega_n m\dot{y} + \omega_n^2 m\,y = \frac{1}{2}\hat{C}_y\,\rho\,U_\infty^2\,D\,L\,\sin\left(\omega\,t + \phi_F\right) \tag{3.19}$$

O resultado da equação 3.19, apesar de aparentemente simples, representa uma variação importante na maneira de se analisar o fenômeno de VIV. Até este momento, o cilindro montado em base elástica era modelado no vácuo e toda a influência do fluido era representada do lado direito da equação. Os parâmetros do oscilador, tais como sua frequência natural e fator de amortecimento também eram modelados para o cilindro no vácuo. A partir da equação 3.19, pode-se considerar um novo oscilador no qual o cilindro está imerso no fluido. Caso a velocidade do escoamento seja nula, o oscilador deixa de ser forçado e podem ser definidos uma nova frequência natural f_w e fator de amortecimento ζ^w em água. Estas novas definições envolvem uma mudança na maneira de se entender o fenômeno e também alterações nos procedimentos experimentais usados em sua determinação.

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + m_a}} \tag{3.20}$$

$$\zeta^w = \frac{c}{2\sqrt{k\,(m + m_a)}} \tag{3.21}$$

Aplicando a mesma decomposição do seno de uma soma de ângulos tem-se que:

$$-(m + m_a)\,\omega_y^2\,\hat{y} + \omega_w^2\,m\,\hat{y} = F_y\,\cos\phi_F$$

$$2\zeta\,\omega_w\,m\,\hat{y}\,\omega_y = F_y\,\sin\phi_F$$

O termo $F_y\,\cos\phi$ equivale à parcela da força viscosa em fase com a aceleração. Khalak e Williamson (1999) dividem esse termo pela aceleração $\omega_y^2\,\hat{y}$ e definem a massa adicional efetiva m_{EA}. Esta massa pode ser adimensionalizada pela massa de fluido deslocado m_d, e dá origem ao coeficiente de massa adicional efetivo C_{EA}.

$$m_{EA} = \frac{F_y \cos\phi_F}{\omega_y^2 \hat{y}} \tag{3.22}$$

$$C_{EA} = \frac{m_{EA}}{m_d} = \frac{F_y \cos\phi_F}{2\pi^3} \left(\frac{V_r}{f_y/f_w}\right)^2 \left(\frac{\hat{y}}{D}\right)^{-1} \tag{3.23}$$

Da mesma forma que Bearman (1984) encontrou equações para a amplitude adimensionalizada $\hat{y}/D$ e para a razão de frequências f_y/f_n, Khalak e Williamson (1999) encontraram duas equações similares:

$$\frac{\hat{y}}{D} = \frac{1}{4\pi^3} \frac{C_y \sin\phi_F}{(m^* + C_a)\zeta} V_r^2 \left(\frac{f_y}{f_w}^{-1}\right) \tag{3.24}$$

$$\frac{f_y}{f_w} = \sqrt{\frac{m^* + C_a}{m^* + C_{EA}}} \tag{3.25}$$

A equação 3.25 permite uma análise interessante: e se C_{EA} for um número negativo? Na modelagem de Khalak e Williamson (1999), assume-se que o coeficiente de massa adicional potencial $C_a^{\text{pot}} = 1$, logo o numerador da equação 3.25 é sempre um valor positivo. Nada se sabe, porém, sobre o coeficiente C_{EA}.

Govardhan e Williamson (2000) verificaram que as hipóteses de resposta harmônica e força também harmônica, porém fora de fase, são bem atendidas no Ramo Inferior. A partir de resultados com diversos valores de m^* os autores levantam a curva $f_{RI}/f_w \times m^*$, ilustrada na figura 3.5. Usando como curva teórica a equação 3.25, eles determinaram a curva de melhor ajuste como sendo a 3.26 e dela extrapolam que existe um valor crítico para o parâmetro de massa m^*_{crit} para o qual o Ramo Inferior não é mais atingido e o Ramo Superior persiste indefinidamente. Esta condição foi denominada de "ressonância infinita".

$$\frac{f_{RI}}{f_w} = \sqrt{\frac{m^* + C_A}{m^* - 0,54}} \tag{3.26}$$

De fato, a previsão de que o Ramo Superior persiste para valores indefinidos de V_r foi observada em Govardhan e Williamson (2000). Govardhan e Williamson (2002) realizaram experimentos de VIV em uma base elástica sem molas ($k = 0$), de forma que a frequência natural do sistema fosse nula. Segundo a definição de velocidade reduzida, caso $f_n = 0$ então $V_r = \infty$ para qualquer valor de U_∞. Com este experimento os autores constataram que, ainda para valores infinitos de V_r, as oscilações persistem e o Ramo Inferior nunca é atingido para $m^* < 0,54$.

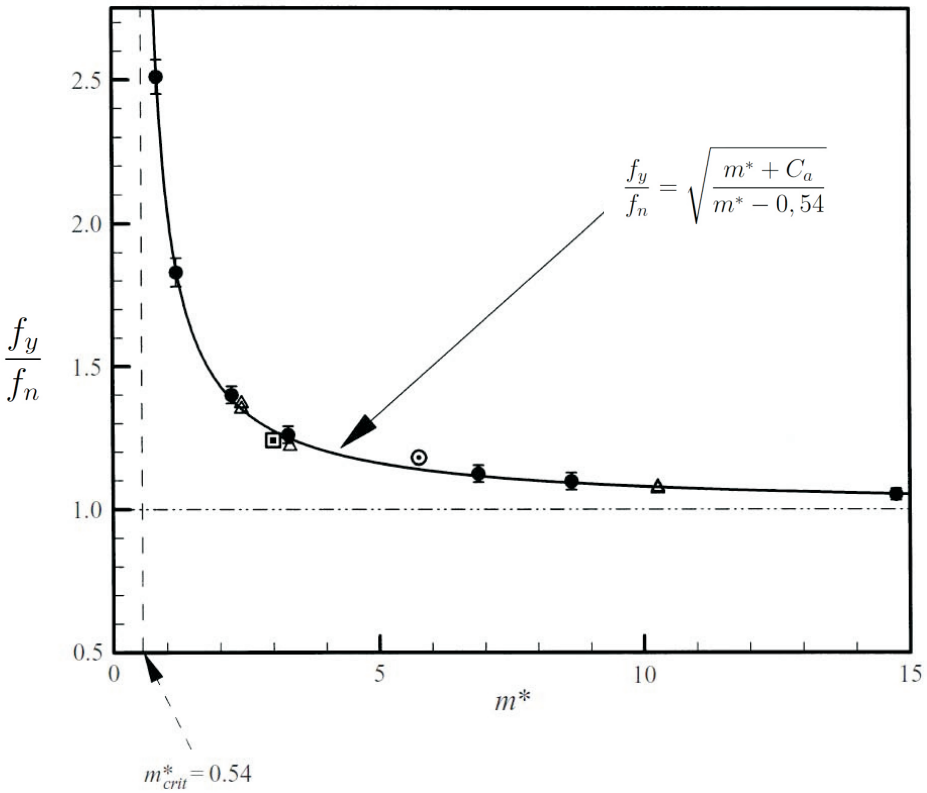


Figura 3.5: Curva $f_y/f_n \times m^*$ empregada por Govardhan e Williamson (2000) na determinação de m^*_{crit}.

No mesmo trabalho, Govardhan e Williamson (2000) faz uma decomposição de força distinta da realiza por Khalak e Williamson (1996). Ao invés de decompor a força do fluido em uma parcela viscosa e outra invíscida, Govardhan e Williamson (2000) separa a força total $F_y(t)$ em uma parcela potencial $F_{\text{potencial}}(t)$ e outra devido aos vórtices $F_{\text{vortices}}(t)$.

$$\text{Hipótese 3} \rightarrow \begin{cases} y(t) = \hat{y}\,\sin(\omega_y t) \\ F_y(t) = F_{\text{vórtice}}(t) + F_{\text{potencial}}(t) \end{cases} \tag{3.27}$$

A força potencial é estimada novamente considerando o coeficiente de massa adicional potencial $C_a^{pot} = 1$.

$$F_{\text{potencial}}(t) = -m_a\,\ddot{y} = -C_a\,m_d\,\ddot{y}(t) \tag{3.28}$$

Adimensionalizando a força potencial definida na equação 3.30 por $1/2\rho D\,L_c\,U_\infty$,

obtém-se uma espécie de um coeficiente de sustentação potencial $C_{\text{potencial}}$:

$$C_{\text{potencial}}(t) = \frac{-C_a\, m_d\, \ddot{y}(t)}{1/2\rho D\, L_c\, U_\infty} = 2\pi^3\, \hat{y}/D \left(\frac{f_y/f_w}{V_r^w}\right)^2 \tag{3.29}$$

A força devido aos vórtices, segundo Govardhan e Williamson (2000), é a parcela que sobra quando a força potencial é subtraída da força total.

$$F_{\text{vortices}}(t) = F_y(t) - F_{\text{potencial}}(t) \tag{3.30}$$

Esta terceira hipótese se diferencia conceitualmente da segunda. Enquanto para a segunda hipótese a força fluida era decomposta em parcelas viscosas e invíscidas com equações definidas, para a terceira hipótese assume-se que é possível retirar da força fluida uma parcela que teria origem em escoamento potencial. O resto da subtração entre a força total, medida ao longo dos ensaios de VIV, e a componente potencial, definida pela equação 3.30, seria, então, oriundo do escoamento de natureza não potencial e, que, portanto, consideraria os vórtices.

Todas as equações e hipóteses desenvolvidas demonstram a busca por maneiras de modelar o fenômeno de VIV. Apresentada esta revisão dos principais conceitos desenvolvidos para um grau de liberdade, inicia-se a revisão bibliográfica para casos livres para oscilar também na direção da corrente incidente.

3.4 VIV com dois graus de liberdade em cilindros rígidos e ortogonais ao plano do escoamento

Como discutido na seção anterior, o estudo de VIV com apenas um grau de liberdade dominou a literatura nas primeiras décadas do estudo deste fenômeno. Um dos primeiros trabalhos que retomou o estudo dos efeitos do segundo grau de liberdade no fenômeno de VIV foi o de Jauvtis e Williamson (2003). Neste trabalho, os autores desenvolveram uma base elástica que permitia ao cilindro se mover tanto na direção transversal ao escoamento quanto na direção alinhada à corrente. O objetivo deste estudo, segundo os autores, era verificar se os dados compilados ao longo de décadas de estudo para VIV com apenas um grau de liberdade, transversal ao escoamento, ainda seriam válidos quando o cilindro pudesse oscilar na direção alinhada ao escoamento. Jauvtis e Williamson (2003) verificam que, caso $m^* > 6$, os resultados obtidos em dois graus de liberdade são muito próximos aos resultados para apenas um grau de liberdade e concluem que os modelos desenvolvidos

até então seguiam válidos para estruturas "pesadas" com $m^* > 6$.

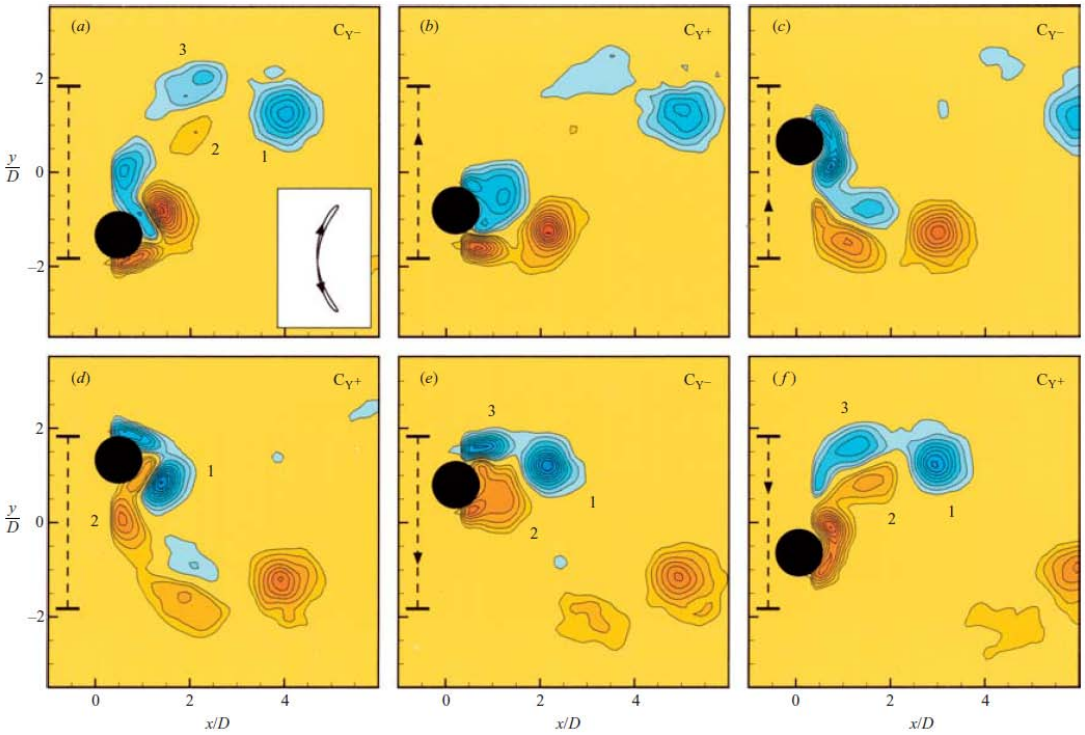


Figura 3.6: Visualização do modo de desprendimento de vórtices 2T. Figura extraída de Jauvtis e Williamson (2004).

Em uma continuação desse trabalho, Jauvtis e Williamson (2004) seguem os estudos de VIV com dois graus de liberdade, mas agora com valores $m^* < 6$. Neste novo trabalho, os autores descrevem o surgimento de características do fenômeno de VIV que até então não haviam sido encontradas, ou pelo menos, não haviam sido destacadas por outros pesquisadores. Dentre essas características está o aparecimento de um novo ramo de resposta, denominado por Jauvtis e Williamson (2004) de Super Ramo Superior, tradução livre do autor para o termo original *supper upper branch*. As características do novo ramo de resposta era apresentar oscilações significativas na direção alinhada com o escoamento e também maiores amplitudes de oscilação na direção transversal. O nome do ramo se baseia no fato de as amplitudes transversais observadas para o Super Ramo Superior serem mais elevadas do que as observadas para o Ramo Superior. Associado a este novo ramo, ilustrado na figura 3.7, estava a percepção de um novo modo de desprendimento de vórtices. Este novo padrão de esteira, ilustrado na imagem 3.6 apresentava a emissão de três vórtices a cada semi-ciclo de oscilação do cilindro e, por isso, foi denominado *two triplets* e recebeu a sigla 2T. Este modo não havia sido observado no mapa de vórtices de Williamson e Roshko (1988), pois depende de movimento na direção alinhada para ocorrer.

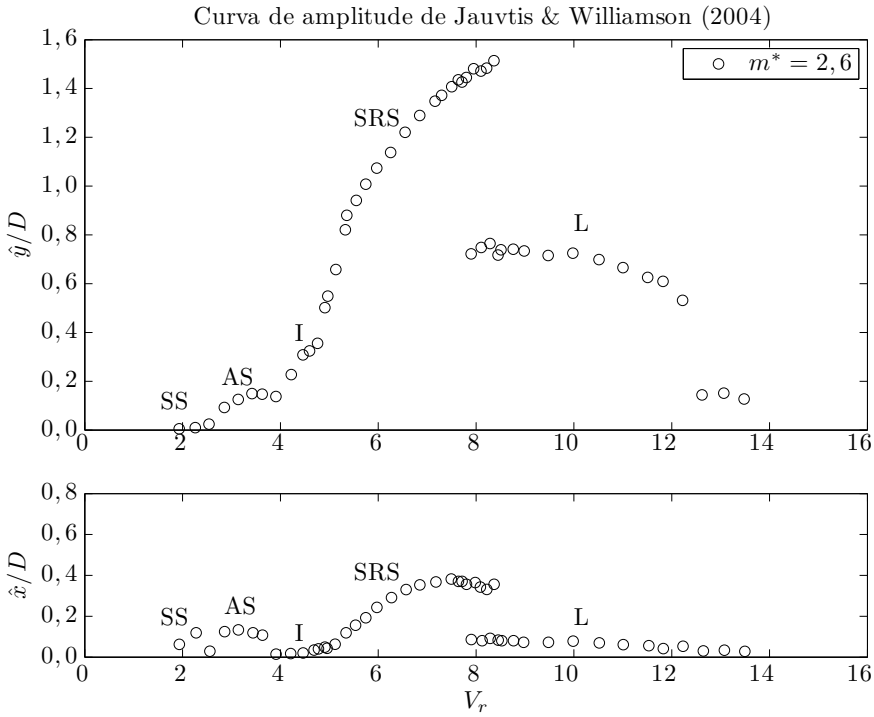


Figura 3.7: Curvas de amplitude $\hat{y}/D$ e $\hat{x}/D \times V_r$ obtidas por Jauvtis e Williamson (2004).

Muito antes de Jauvtis e Williamson (2003) buscarem os efeitos do segundo grau de liberdade no fenômeno de VIV, King, Prosser e Johns (1973) já haviam verificado alguns de seus efeitos. Esses autores analisam as vibrações alinhadas com o escoamento que ocorrem em cilindros flexíveis. Tais oscilações se diferenciavam da resposta usual de VIV, pois ocorriam com baixas amplitudes e para valores de velocidade reduzida próximos de $V_r \approx 2$. King, Prosser e Johns (1973) destacam que dois ramos distintos de resposta são observados para essa região de V_r e que, a cada ramo, está associado um modo de esteira distinto. O primeiro ramo de resposta observado apresenta oscilações apenas na direção alinhada à corrente e a esteira que se forma à jusante do cilindro é simétrica, tal ilustrado na fotografia da figura 3.8(a). O segundo ramo observado apresenta oscilações na direção transversal e sua esteira, ilustrada na figura 3.8(b), é similar ao modo 2S.

Os mesmos modos alinhados com o escoamento, descritos por King, Prosser e Johns (1973), foram registrados com a técnica PIV por Jauvtis e Williamson (2004) e são apresentados nas figuras 3.8(c) e 3.8(d). Nesse segundo trabalho, os ramos alinhados com o escoamento foram definidos como SS e AS. Blevins e Coughran (2009) encontraram os mesmos dois modos alinhados com o escoamento para VIV com um grau de liberdade e permitindo que o cilindro oscilasse apenas na direção alinhada com o escoamento. Essa

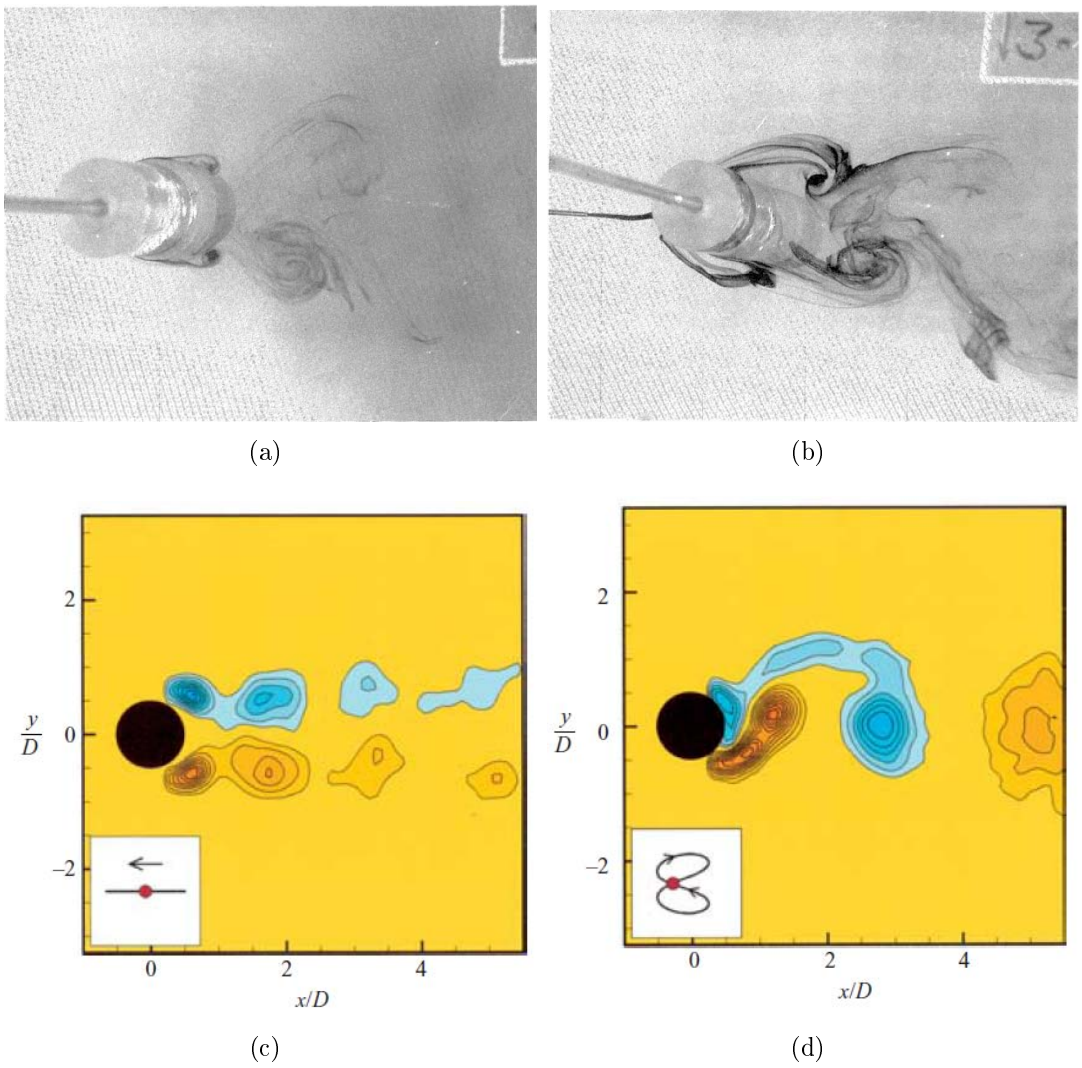


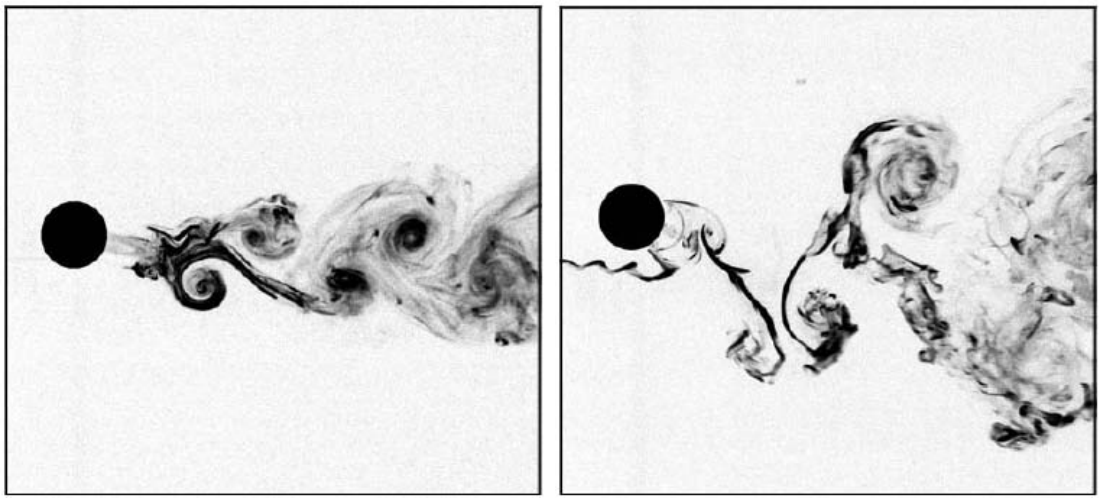
Figura 3.8: Modos de desprendimento de vórtices para deslocamento do cilindro alinhado com o escoamento. As imagens (a) e (b) foram retiradas de King, Prosser e Johns (1973) e as imagens (c) e (d) foram retiradas de Jauvtis e Williamson (2004).

observação mostra que o segundo modo de vibrar alinhado com a corrente ocorre ainda que o movimento na direção transversal seja restrito.

Uma variação do ensaio de VIV com dois graus de liberdade foi realizada por Flemming e Williamson (2005). Estes autores realizaram ensaios sem base elástica nos quais o cilindro era preso ao fundo de um canal de água por um cabo flexível. Este cabo permitia ao cilindro se movimentar em dois graus de liberdade, mas mantinha nula a amplitude de oscilação nessa extremidade. Os cilindros usados no trabalho eram rígidos e estavam completamente imersos. A rigidez do sistema equivalia à rigidez flexional do cabo que ligava os cilindros ao fundo do canal. Devido ao cabo que prendia a extremidade inferior dos cilindros, estes não eram capazes de realizar movimento de translação, apenas

de rotação. A diferença entre os cilindros, usados nesse estudo, era o material com o qual eles eram feitos, de forma que cada cilindro possuía um parâmetro de massa distinto.

Enquanto a parcela mais próxima à extremidade inferior do cilindro se movia com baixa amplitude, por estar próxima ao ponto de articulação, a parcela superior do cilindro apresentava elevadas amplitudes de oscilação. Considerando o mapa de vórtices desenvolvido por Williamson e Roshko (1988) o cilindro de teste no ensaio de Flemming e Williamson (2005) se encontrava em duas regiões distintas do mapa. Verificou-se que, de fato, dois modos de esteira podem coexistir. A figura 3.9 ilustra a visualização do escoamento usando tinta como marcador de duas regiões ao longo do comprimento do cilindro para a mesma condição de ensaio. Na região mais próxima ao ponto fixo do cilindro, a esteira formada é do tipo 2S e na região próxima à extremidade do cilindro, o modo de desprendimento desenvolvido é o 2P. Os modos 2S e 2P de desprendimento de vórtices para um mesmo cilindro são ilustrados nas fotografias da figura 3.9



(a) (b)

Figura 3.9: Coexistência de modos de desprendimento de vórtices para cilindro pinado. (a) Modo de desprendimento 2S próximo ao ponto fixo. (b) Modo de desprendimento 2P próximo à extremidade livre do cilindro. Figuras extraídas de Flemming e Williamson (2005).

Devido à nova montagem experimental, com uma das extremidades do cilindro presa ao fundo do canal, Flemming e Williamson (2005) retomam o modelo linear apresentado em Khalak e Williamson (1999), porém agora substituindo o parâmetro de massa m^* por um parâmetro de inércia J^*. De forma análoga ao parâmetro m^*, o parâmetro J^* é a razão entre o momento de inércia da estrutura J e o momento de inércia do fluido deslocado J_d. A justificativa para empregar este novo parâmetro está relacionada ao tipo de

movimento da estrutura. Enquanto que nos ensaios clássicos de VIV o cilindro translada, neste caso o cilindro roda ao redor do ponto de articulação. Por esse motivo é preciso levar em consideração a distribuição de massa ao longo da estrutura.

Ainda que os autores façam a distinção entre os conceitos de m^* e J^*, no caso em questão os dois parâmetros coincidem. Isso se deve à homogeneidade do fluido e do cilindro. Considerando que o cilindro tenha massa m, diâmetro externo D, comprimento L e densidade ρ_c, o momento de inércia tomado em relação à uma de suas extremidades equivale a:

$$J = m\,\frac{L_c^2}{3} = \left(\frac{\pi\rho_c D^2 L_c}{4}\right)\frac{L_c^2}{3} = \frac{\pi\rho_c D^2 L_c^3}{12}$$

De forma semelhante, a massa de fluido deslocada m_d também depende de D e L, porém agora com a densidade do fluido ρ.

$$J_d = m_d\,\frac{L_c^2}{3} = \left(\frac{\pi\rho D^2 L_c}{4}\right)\frac{L_c^2}{3} = \frac{\pi\rho D^2 L_c^3}{12}$$

Verifica-se, portanto que para o experimento de Flemming e Williamson (2005) tanto m^* quando J^* coincidem.

$$J^* = \frac{J}{J_d} = \frac{\rho_c}{\rho_a} = \frac{\rho_c}{\rho_a}\frac{\pi D^2 L_c/4}{\pi D^2 L_c/4} = \frac{m}{m_d} = m^*$$

Apesar de observar oscilações alinhadas com a corrente, Flemming e Williamson (2005) não denomina o ramo com elevadas amplitudes transversais de Super Ramo Superior, mas sim de Ramo Superior. O modo de esteira observado por esses autores não foi o 2T, observado por Jauvtis e Williamson (2004), mas o 2C, caracterizado pela emissão de dois vórtices com mesmo sinal de circulação, ou seja, que rodam no mesmo sentido a cada semi-ciclo de oscilação. O nome deste padrão de esteira é uma sigla para o termo inglês *two co-rotating vortices*.

Com relação à ocorrência do Super Ramo Superior, Stappenbelt e O'Neill (2007) realizaram experimentos de VIV com um e dois graus de liberdade variando o parâmetro de massa no intervalo $3,01 \leq m^* \leq 8,49$ e observaram que, em seus experimentos, o SRS deixava de se manifestar para $m^* \geq 8,5$. Os autores chegaram a essa conclusão comparando as curvas de amplitude transversal $\hat{y}/D$ para os ensaios com um e dois graus de liberdade e, para $m^* = 8,5$, não há variação entre os resultados. Stappenbelt e O'Neill (2007) destacam que os Ramos Inicial e Inferior são muito semelhantes para os casos com um e dois graus de liberdade e que o Super Ramo Superior substitui o Ramo Superior. Conforme m^* foi aumentado, Stappenbelt e O'Neill (2007) observaram diminuição gradual

na amplitude máxima transversal do Super Ramo Superior até que esta se igualasse à do Ramo Superior.

Em um trabalho posterior, Stappenbelt e Lalji (2008) discutem que o amortecimento ζ, além do parâmetro de massa m^*, também influencia a existência do Super Ramo Superior. Neste trabalho os autores repetem os experimentos apresentados em Stappenbelt e O'Neill (2007), mas agora com maior discretização do parâmetro de massa. Neste novo estudo, o valor do parâmetro de massa foi variado no intervalo $2,36 \leq m^* \leq 12,96$. A figura 3.10 ilustra a comparação dos resultados obtidos pelos autores.

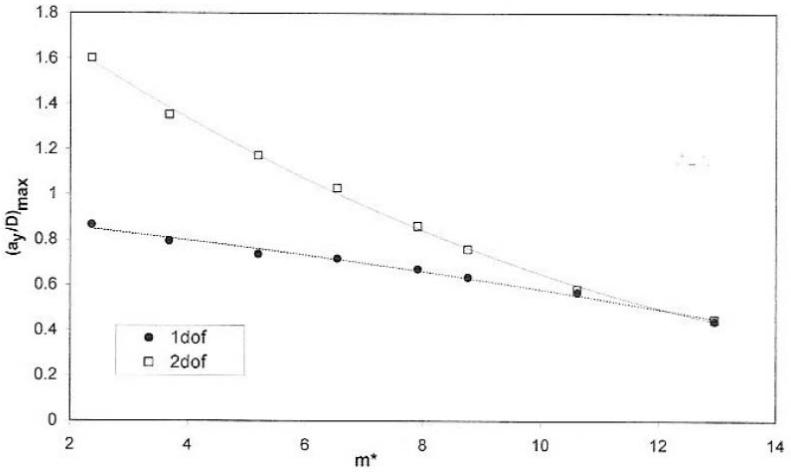


Figura 3.10: Comparação entre valores máximos da amplitude transversal $(\hat{y}/D)_{max}$ para VIV com um e dois graus de liberdade em função de m^*. Figura extraída de Stappenbelt e Lalji (2008).

A suposição feita por Stappenbelt e Lalji (2008) de que a existência do Super Ramo Superior é função de $m^*\zeta$ e não apenas m^* se baseia na comparação entre os resultados obtidos em Stappenbelt e O'Neill (2007) e Stappenbelt e Lalji (2008). O primeiro trabalho encontra como valor máximo de m^* para o qual existe distinção entre o super ramo superior e o ramo superior é de $m^* = 8,5$, enquanto que no segundo trabalho esse valor sobe para $m^* = 10,63$. Segundo Stappenbelt e Lalji (2008) a única diferença entre os experimentos desses dois trabalhos é o coeficiente de amortecimento ζ, que era 33% mais elevado do que no segundo caso. Para os dois trabalhos o SRS deixa de existir para $m^*\zeta \geq 0,08$. Para $m^*\zeta = 0.066$ os autores apontam uma diferença entre valores máximos inferior a 10%. Apesar do colapso entre os resultados de Stappenbelt e O'Neill (2007) e Stappenbelt e Lalji (2008) para o parâmetro $m^*\zeta$, o valor máximo encontrado para $m^*\zeta$ não coincide com o valor encontrado por Jauvtis e Williamson (2004), o que

indica que outros parâmetros também influenciam a existência do SRS.

Leong e Wei (2008) emprega uma base elástica similar à utilizada por Flemming e Williamson (2005), um pêndulo invertido com a extremidade inferior articulada no fundo do canal de água, e realiza ensaios de VIV com dois graus de liberdade com parâmetro de massa abaixo do "valor crítico" definido por Govardhan e Williamson (2002). Para $m^* = 0,45$ os autores observam comportamento semelhante ao apresentado por Govardhan e Williamson (2002) para a "ressonância infinita". A figura 3.11, extraída de Leong e Wei (2008), mostra as curvas de amplitude de oscilação e frequência dominante. Segundo a figura 3.11, a amplitude máxima na direção alinhada com a corrente atinge $\hat{x}/D = 2,5$. Além da curva de amplitude transversal não apresentar a transição para o Ramo Inferior, outra semelhança entre os resultados de Leong e Wei (2008) e Govardhan e Williamson (2002) é a resposta em frequência f_y/f_w. Enquanto resultados em frequência para $m^* > 6$ apresentam comportamentos distintos de f_y/f_n para diferentes valores de V_r, a resposta medida para $m^* < m^*_{cr}$ apresenta um comportamento praticamente linear. Para esses casos a frequência de oscilação e a frequência de desprendimento de vórtices não se prendem às frequências naturais da estrutura oscilante.

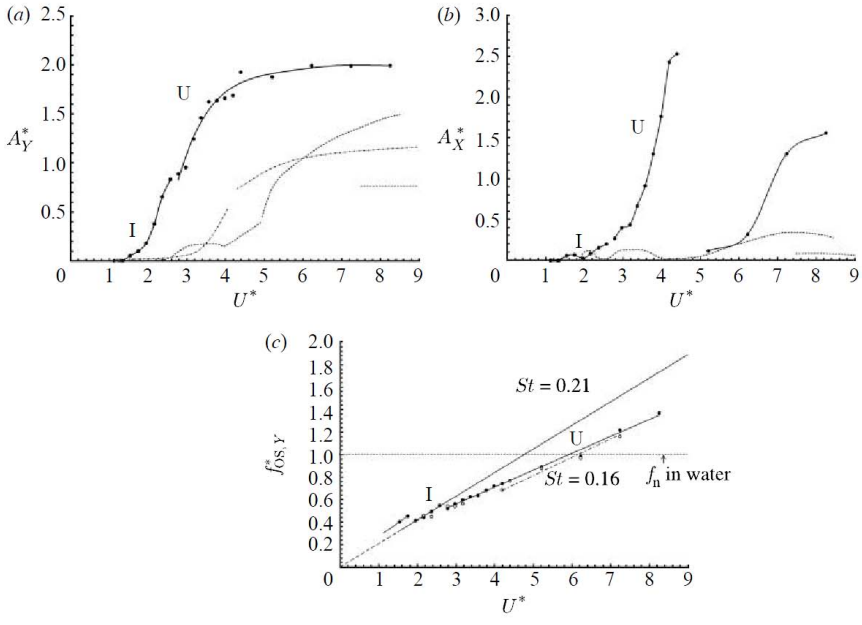


Figura 3.11: Curvas de amplitude transversal, alinhada com a corrente e frequência dominante transversal para VIV com dois graus de liberdade e $m^* = 0,45$. Figura extraída de Leong e Wei (2008).

Leong e Wei (2008) empregaram técnicas de visualização de escoamento para determinar o padrão de desprendimento de vórtices que ocorre para diferentes valores de velocidade reduzida. Diferente de outras visualizações para cilindros livres para oscilar,

os autores encontraram o padrão de desprendimento $P + S$. Este padrão só havia sido encontrado em oscilações forçadas. Outro resultado relevante da visualização feita pelos autores é de que, aparentemente, não há um padrão de esteira sincronizada no Ramo Superior. Por Ramo Superior os autores se referem à região com valores mais elevados de $\hat{y}/D$, ainda que este "ramo" não apresente as mesmas características de amplitude e frequência definidas para o Ramo Superior quando em outros trabalhos da literatura.

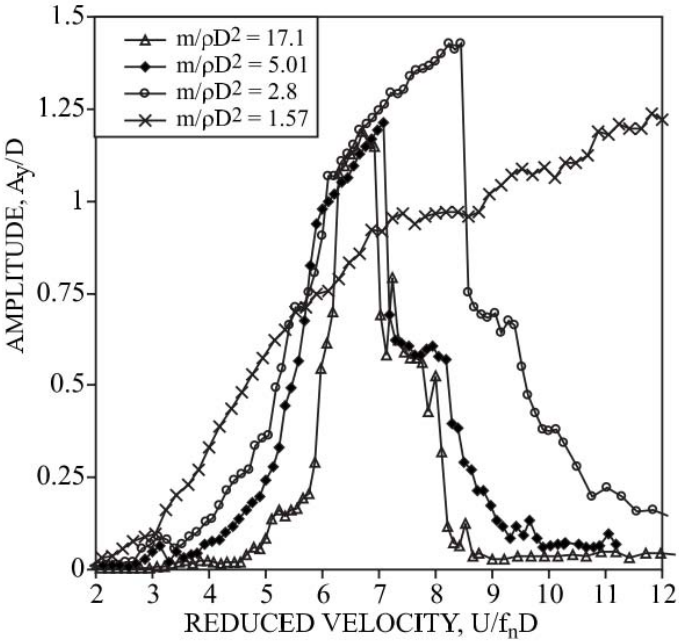


Figura 3.12: Curva de amplitude transversal para VIV com dois graus de liberdade e diferentes valores do parâmetro de massa. Figura extraída de Blevins e Coughran (2009).

Blevins e Coughran (2009) também apresenta uma análise da resposta de VIV com dois graus de liberdade para diferentes razões de massa. Os autores não empregam o adimensional m^*, mas uma variação que considera apenas as dimensões relevantes, sem considerar constantes como π. Definições a parte, os autores apresentam resultados para um mesmo parâmetro de massa e amortecimento ($2m(2\pi\zeta)/\rho D^2 = 1,24$) e diferentes valores de massa adimensional $m/(\rho D^2)$. A figura 3.12 apresenta esses resultados. Nota-se que o valor máximo da amplitude transversal $\hat{y}/D$ cresce e ocorre para maiores valores de V_r conforme o parâmetro de massa $m/\rho D^2$ diminui. Para $m/\rho D^2 = 1,57$ Blevins e Coughran (2009) também não observaram queda de amplitude do Super Ramo Superior para o Ramo Inferior. Aparentemente, essa resposta é semelhante à resposta característica da "ressonância infinita", observada por Govardhan e Williamson (2000) e Govardhan e Williamson (2002) para $m^* < 0,54$.

3.5 Conclusões do capítulo

O fenômeno de VIV tem recebido bastante atenção de cientistas e engenheiros nas últimas décadas. Este capítulo apresentou uma revisão bibliográfica sobre o fenômeno de VIV em cilindros rígidos livres para oscilar com e dois graus de liberdade. A revisão foca em estudos experimentais e suas descobertas. Além da abordagem experimental, existem também estudos realizados com Mecânica dos Fluidos Computacional e alguns de cunho analítico, que geralmente recorrem a abordagens fenomenológicas. Essas duas vertentes ofereceram importantes contribuições para o entendimento do fenômeno de VIV, porém fogem ao escopo deste trabalho. Dentro da linha de pesquisa experimental existem ainda os trabalhos com movimentos forçados e os com movimento livre do cilindro. O foco dado a esta revisão bibliográfica foi o de cilindros livres para oscilar. Como exemplo, porém, de trabalhos com deslocamento forçado, pode-se citar os de Williamson e Roshko (1988) e Morse e Williamson (2009b), nos quais os mapas com padrões de vórtices foram desenvolvidos.

Como apresentado nesta revisão bibliográfica, sabe-se que as vibrações observadas em corpos rombudos livres para oscilar e imersos em escoamento podem ser causadas pelo processo de formação e desprendimento de vórtices. Este processo ocorre ainda que o corpo em repouso, mas é afetado quando o corpo oscila.

Diferentes ramos de resposta foram identificados, cada um com características de amplitude e frequência de oscilação. A cada ramo de resposta está associado um padrão de esteira e a transição entre ramos se dá pela transição entre esses padrões.

O fenômeno de VIV apresenta maiores amplitudes quando a frequência de desprendimento de vórtices se aproxima da frequência natural da estrutura, o que indica se tratar de um fenômeno de ressonância. Apesar disso, este não pode ser tratado simplesmente como um fenômeno oscilatório linear de segunda ordem, pois o movimento do cilindro muda as características do escoamento, alterando assim suas causas. Ainda que o comportamento do corpo rígido possa ser modelado como um oscilador de segunda ordem, através de um clássico sistema massa-mola-amortecedor, por exemplo, as forças que atuam nesse oscilador dependem de seu movimento, tornando o fenômeno não linear e mais complexo.

A maioria dos estudos feitos sobre o fenômeno de VIV focou nas respostas desse fenômeno quando restrito a oscilar com apenas um grau de liberdade, transversal à corrente incidente. Apesar disso, tais descobertas ainda são válidas para algumas condições

do fenômeno quando existe a possibilidade de oscilar na direção da corrente. Em outras condições, porém, os resultados ora observados para VIV com um grau de liberdade são distintos dos observados para dois graus de liberdade.

Dentre as principais diferenças pode-se citar o aparecimento de um novo ramo de resposta e novos padrões de emissão de vórtices. Ao longo desta tese a seguinte terminologia será usada: quando o fenômeno se desenvolver sem apresentar vibrações na direção alinhada com a corrente ele será considerado no primeiro regime de resposta. O segundo regime de resposta, por sua vez, considera os efeitos do segundo grau de liberdade. O terceiro regime trata de situação análoga à "ressonância infinita" descrita por Govardhan e Williamson (2002).

A transição entre o primeiro e o segundo regime é usualmente adotada para valores específicos de m^* ou ainda $m^*\zeta$. Existe desacordo entre os valores publicados na literatura sobre como ocorre essa transição e poucos trabalhos sequer a analisam. A mudança para o terceiro regime também é pouco analisada e muitas perguntas seguem abertas. O capítulo 7 apresenta o resultado para diversos ensaios de VIV que analisam a transição entre os diferentes regimes do fenômeno. Análises paramétricas com relação à inércia do sistema, medida em função do momento de inércia adimensional J^*, e da rigidez do sistema são realizadas. O autor desconhece qualquer trabalho na literatura de VIV que tenha conduzido uma investigação paramétrica com relação à rigidez do sistema.

Com relação aos modos de esteira de vórtices, apesar de diferentes padrões já terem sido observados, poucas referências oferecem uma análise desses modos e seu processo de formação. No capítulo 6 diferentes padrões de esteira são relacionados à diferentes ramos de resposta em uma análise global da resposta do fenômeno de VIV. O mesmo capítulo apresenta uma análise local e estuda o processo de formação e desprendimento de vórtice ao longo do tempo para cada padrão de esteira observado no trabalho.

4 CARACTERIZAÇÃO DA BASE ELÁSTICA PENDULAR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Este capítulo tem por objetivo descrever e analisar o comportamento da base elástica pendular com dois graus de liberdade usada neste trabalho. O capítulo foi dividido em três seções. A primeira seção apresenta o formato e os diferentes componentes da base elástica pendular BEP. A segunda seção apresenta três modelos matemáticos para a BEP, evoluindo do modelo mais simples, similar a um sistema massa-mola-amortecedor (MMA), até o modelo pendular completo (MPC). Por fim, a terceira seção apresenta as conclusões do capítulo.

Os modelos são desenvolvidos na segunda seção são apresentados em ordem de complexidade e permitem entender a contribuição de cada componente no comportamento da BEP. Os dois primeiros modelos matemáticos usam os valores de f_n e f_w medidos experimentalmente para ajustar, através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), seus parâmetros. O terceiro modelo não depende de ajuste de parâmetros e consegue prever os valores de f_n e f_w para cada condição de ensaio.

O estilo de base elástica mais comum consiste em bases elásticas com mancais a ar que permitem ao corpo rombudo transladar na direção transversal ao escoamento. Esse tipo de base elástica é bem representado pelo modelo massa-mola-amortecedor e dá origem ao parâmetro adimensional m^*, que representa a razão entre a massa da estrutura oscilante m e a massa de água deslocada pela estrutura m_d.

$$m^* = \frac{m}{m_d}$$

Como discutido no capítulo 3, o parâmetro m^* possui espaço de destaque na literatura sobre VIV, sendo considerado um dos parâmetros mais importantes do fenômeno. Uma vez que a base elástica usada nesta investigação experimental é do tipo pendular, o modelo massa-mola-amortecedor passa a não descrever completamente a dinâmica do

sistema. O real movimento realizado pela BEP é o de rotação, logo apenas a massa da estrutura não é o suficiente para quantificar sua inércia. O momento de inércia J, por outro lado, considera a massa e sua distribuição ao longo do corpo. Por esse motivo, o melhor parâmetro de inércia para a BEP é seu momento de inércia adimensional J^*, que considera o momento de inércia da BEP e o momento de inércia do fluido deslocado J_d.

$$J^* = \frac{J}{J_d}$$

O principal objetivo ao desenvolver os modelos matemáticos da BEP foi estudar o comportamento da base e entender como cada componente afetava sua resposta.

4.1 Descrição da base elástica

A base elástica empregada nos ensaios de VIV deste trabalho, ilustrada na figura 4.1, é do tipo pendular e permite ao cilindro oscilar em dois graus de liberdade: na direção alinhada e na direção transversal ao escoamento. Por base elástica pendular (BEP) entende-se todo o conjunto de elementos usados para suportar o cilindro de teste e permitir sua movimentação.

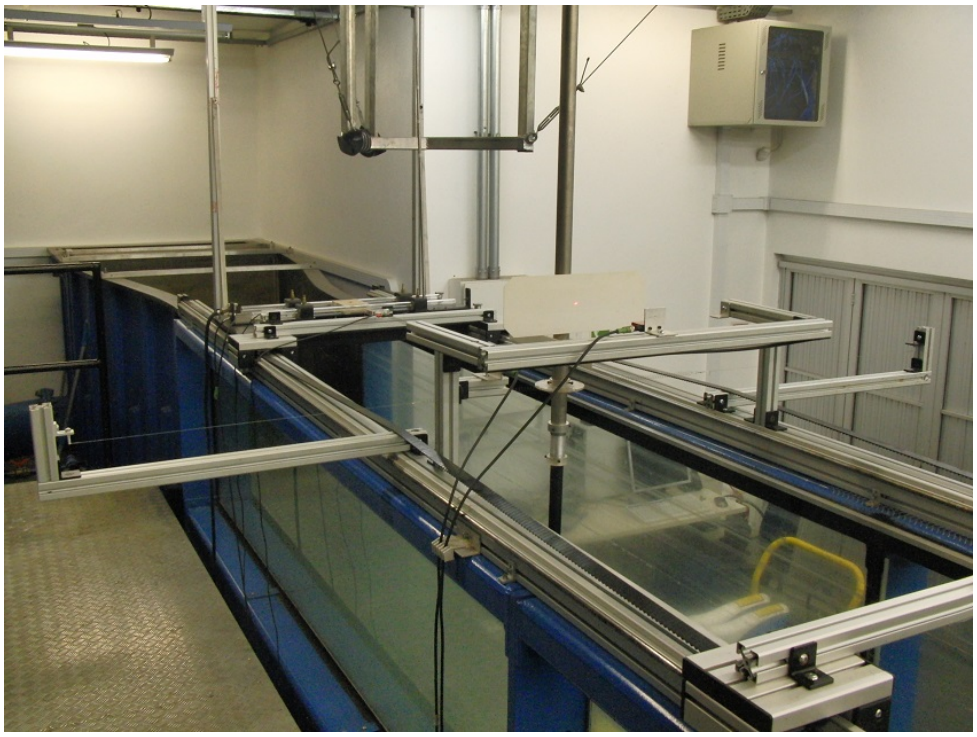


Figura 4.1: Base elástica pendular com dois graus de liberdade usada nos experimentos de VIV.

Os principais elementos que constituem a BEP são um tubo de titânio, um cilindro de teste e um conjunto de molas, tal como esquematizado na figura 4.2(a). Além desses elementos básicos, existem também luvas, conectores, alvos para as trenas laser e uma Junta Cardan que articula a base ao teto do laboratório. A figura 4.2(b) apresenta as principais dimensões da BEP.

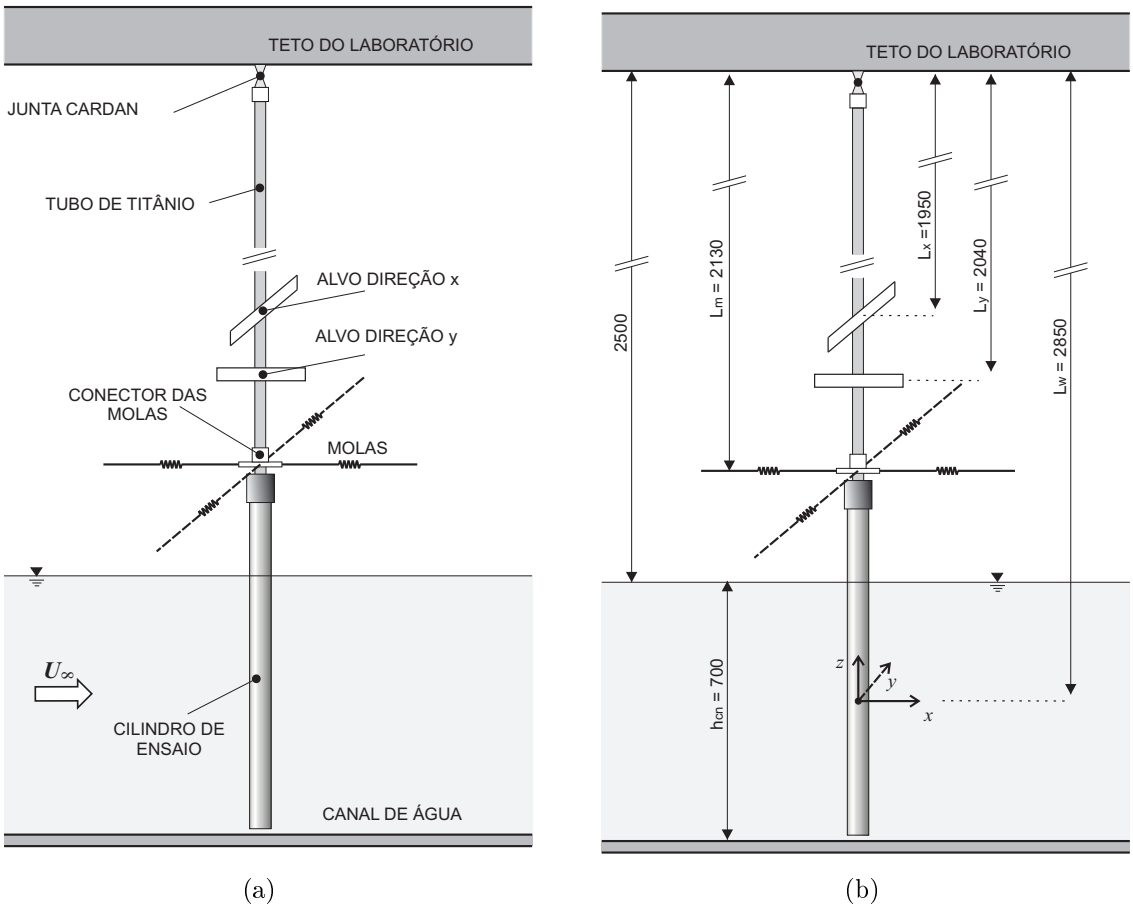


Figura 4.2: (a) Definição dos elementos que constituem a base elástica pendular usada no trabalho. (b) Principais dimensões da base. Valores em milímetros.

Cilindros de ensaio

O cilindro de teste, também chamado de cilindro de ensaio, é um tubo de acrílico rígido e liso.

Por cilindro rígido deve-se entender que suas frequências naturais de corpo flexível são muito superiores à frequência de desprendimento de vórtices ou à frequência de vibração do sistema para todos os ensaios realizados e, por esse motivo, em nenhum ensaio o cilindro apresenta comportamento de corpo flexível.

Por cilindro liso deve-se entender que não há dispositivos voltados para aumentar

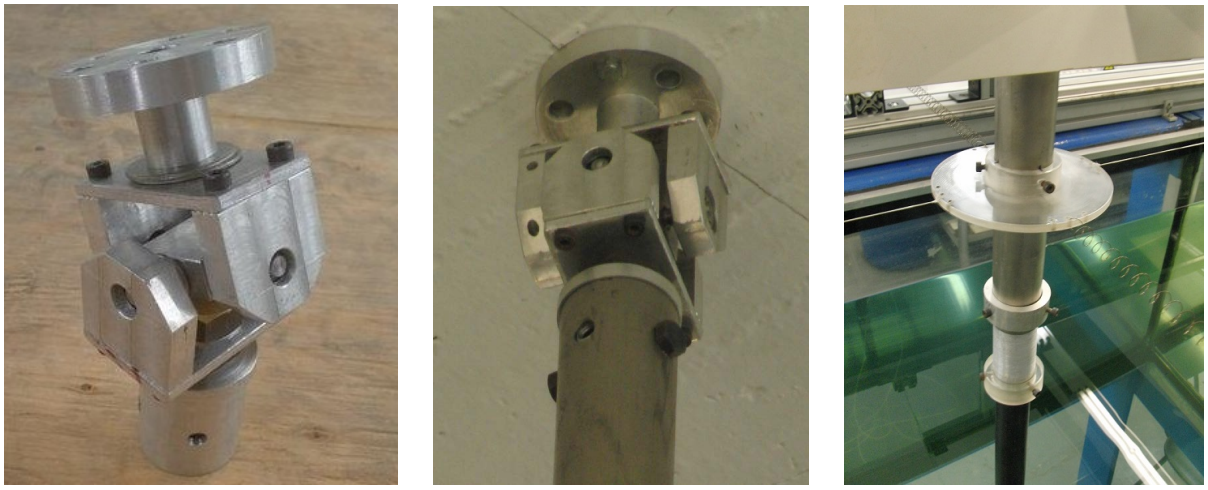
sua rugosidade ou ainda promover pontos de separação do escoamento. A rugosidade do cilindro de ensaio foi medida usando-se um rugosímetro Mitutoyo SJ201P em seis diferentes posições e seu valor médio equivale a Ra $= 1,55 \pm 0,72\mu$m. O coeficiente de rugosidade do cilindro equivale a Ra$/D = 4,84 \times 10^{-}5$. Kiu, Stappenbelt e Thiagarajan (2011) realizaram diversos ensaios de VIV com diferentes valores de rugosidade superficial e concluíram que quanto maior a rugosidade superficial, menor é o valor da amplitude máxima e mais estreita é a região de sincronização. Os valores de rugosidade ensaiados por esses autores são pelo menos uma ordem de grandeza superiores ao valor da rugosidade superficial do cilindro de teste empregado neste trabalho. Por esse motivo, pode-se concluir que a rugosidade superficial não seja um parâmetro relevante nos experimentos realizados nesta tese e que os resultados apresentados podem ser comparados com outros trabalhos da literatura relacionada ao fenômeno de VIV para cilindros lisos.

Dois cilindros de ensaio foram usados neste trabalho. O primeiro possui diâmetro externo nominal $D = 32$mm, diâmetro interno igual a 26mm, comprimento igual a $1,000$m e $0,366$kg de massa. O segundo possui diâmetro externo nominal de $D = 50$mm, diâmetro interno igual a 44mm, comprimento de $0,890$m e $0,536$kg de massa. A ideia em usar dois cilindros com diâmetros externos diferentes é variar a massa de água deslocada m_d e permitir o uso de diferentes lastros. Além disso, ensaios com diferentes D atingem diferentes valores do número de Reynolds. É importante ressaltar que esta tese foca o estudo do fenômeno de VIV em cilindros isolados. Ainda que dois cilindros tenham sido usados, sempre cada cilindro foi ensaiado de uma vez e nenhum ensaio considera os dois cilindros ao mesmo tempo.

Junta Cardan e tubo de titânio

A cada ensaio, os cilindros de teste são montados de forma concêntrica ao tubo de titânio. Este, por sua vez, está articulado ao teto do laboratório por uma Junta Cardan, ilustrada nas figuras 4.3(a) e 4.3(b). A junta Cardan usada neste trabalho foi projetada pelo autor desta tese visando a menor resistência ao movimento possível. Para atingir essa característica quatro rolamentos de esferas, dois para cada direção, foram incorporados à junta. O amortecimento do sistema é medido em ensaios de decaimento em ar e em água.

O cilindro de teste é fixado ao tubo de titânio por uma luva metálica que ajusta o diâmetro interno do tubo ao diâmetro externo do cilindro de ensaio. Essa luva possui um anel que permite o emprego de parafusos para evitar o deslizamento entre o cilindro de teste e o tubo de titânio. Tal deslizamento é indesejado durante os ensaios, mas bastante útil na montagem da base, pois permite fácil retirada do cilindro de teste. Além



(a) (b) (c)

Figura 4.3: (a) e (b) Junta Cardan usada para conectar a base elástica ao teto do laboratório.

disso, a possibilidade de mover o cilindro em relação ao tubo de titânio, mantendo a concentricidade da montagem, propicia o ajuste fino da distância entre a extremidade inferior do cilindro e o fundo do canal δc. Esta distância está representada na imagem 4.6.

O tubo usado para conectar o cilindro de teste ao teto do laboratório é feito de titânio. Este metal foi selecionado, pois maximiza a relação $E_T^{1/3}/\rho_T$ entre o módulo de elasticidade do tubo E_T e sua densidade ρ_T. Maximizar esta razão é análogo a maximizar a razão entre frequência natural de corpo flexível do tubo e sua massa. Além de garantir uma base bastante rígida, com valores de frequência natural de vibração centenas de vezes superior às frequências características ao fenômeno de VIV, o titânio é um metal resistente à corrosão. Essa característica é extremamente vantajosa em um ambiente úmido como a sala que abriga o canal de água recirculante. Mais informações sobre a BEP, seu projeto e fabricação podem ser encontradas em Freire (2009a) e Freire (2009b).

O fato da base elástica ser articulada ao teto do laboratório confere a ela a característica pendular. Como o centro de massa da estrutura está abaixo do ponto de articulação, a BEP constitui um sistema em equilíbrio estável e tende a retornar a seu ponto de equilíbrio sempre que for deslocada. Caso toda a massa da estrutura m estivesse concentrada em um único ponto, localizado a uma distância L_G do ponto de articulação, a base teria uma frequência natural dada pela equação 4.1.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_G}} \tag{4.1}$$

Molas

Conjuntos de molas foram utilizados para alterar a rigidez da BEP e, consequentemente, modificar suas frequências naturais de oscilação em ar f_n e na água f_w. Uma das extremidades de cada mola é conectada à BEP por um disco de acrílico, ilustrado na figura 4.3(c), enquanto a outra extremidade é conectada a um cabo de aço leve e longo que está preso a um ponto fixo. O objetivo de empregar cabos de aço é aumentar a distância entre os pontos de fixação da mola à base elástica e, consequentemente, diminuir o efeito não linear que molas orientadas em uma direção causam na outra direção. Os cabos de aço possuem comprimento próximo a $0,8$m e a distância entre os pontos de fixação das molas ao conector de acrílico é superior a $1,1$m.

As molas usadas são molas do tipo helicoidal e sua rigidez k_m pode ser estimada pela equação 4.2, retirada de Wahl (1963). Na expressão 4.2, E_m é o módulo de elasticidade do material das molas, ν_m é sua constante de Poisson, n_m é o número de espiras da mola, d_m é o diâmetro do arame usado na sua confecção e D_m é seu diâmetro externo.

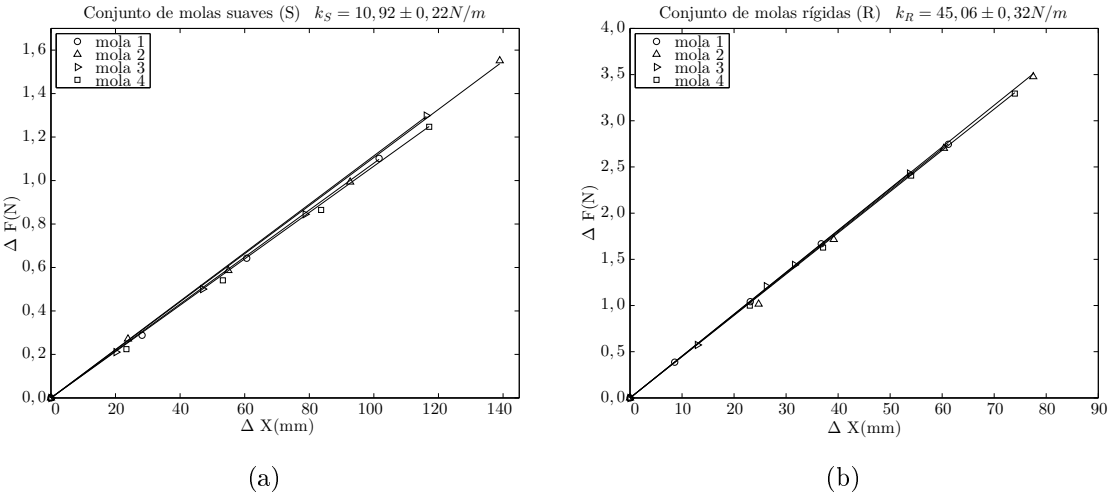
$$k_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \frac{d_m^4}{8D_m^3 n_m} \tag{4.2}$$

Para uma dada mola tanto as características geométricas D_m e d_m quanto as propriedades do material E_m e ν_m são valores fixos. Para alterar o valor de k_m é preciso alterar o número de espiras n_m. Cada conjunto de molas possui quatro molas, todas com constantes elásticas próximas. As quatro molas de cada conjunto foram cortadas com aproximadamente o mesmo número de espiras de uma mesma mola mais longa, visando assim possuírem constantes elásticas próximas.

Dois conjuntos de molas foram usados neste trabalho. O conjunto com menor constante elástica k foi denominado de conjunto de molas "suaves", enquanto que o conjunto com maior constante elástica foi denominado de conjunto de molas "rígidas". No contexto deste trabalho os termos "suave" e "rígido", quando aplicados aos conjuntos de molas, tem significado comparativo entre elas e não deve ser entendido com relação à efeitos elásticos não lineares.

Todas as molas dos dois conjuntos foram testadas em um ensaio de tração e tiveram sua constante elástica k determinada. Nesse ensaio de tração uma célula de carga foi usada para medir a variação da força na mola ΔF quando submetida a uma deformação ΔX. Os valores obtidos foram usados em uma regressão linear, apresentada no apêndice A, e o coeficiente elástico de cada mola foi assumido como o coeficiente angular das retas

ajustadas.



(a) (b)

Figura 4.4: Resultados do ensaio de tração das molas: (a) conjunto de molas suaves, (b) conjunto de molas rígidas.

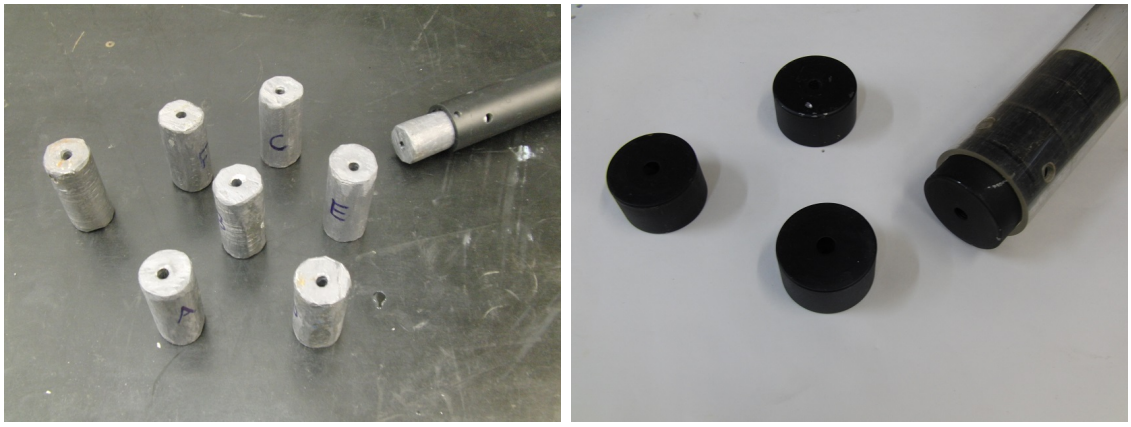
A figura 4.4 apresenta o resultados do um ensaio de tração realizado para os dois conjuntos de molas. Para simplificar a notação nas figuras do trabalho, as molas rígidas serão denotadas por k_R e as molas suaves por k_S. Verifica-se que todas as molas apresentam comportamento linear na faixa de deformações ΔX e que as quatro molas de cada conjunto apresentam valores próximos de rigidez. Pela figura verifica-se que para o conjunto suave tem-se que $k_S = 10,92 \pm 0,22$N/m enquanto que para o conjunto rígido $k_R = 45,06 \pm 0,32$N/m.

Lastros

A inércia da base é alterada com o emprego de pequenos cilindros de chumbo e de aço que são montados dentro dos cilindros de ensaio.

Para os ensaios com o cilindro de diâmetro externo $D = 32$mm, cilindros de chumbo foram usados como lastros. Os cilindros foram usinados para terem seu diâmetro externo ligeiramente inferior ao diâmetro interno do cilindro de ensaio, permitindo assim que fossem colocados no interior do cilindro de teste e não tivessem folga para vibrar. Ao longo desta tese o parâmetro N_{pb} indica o número de cilindros de chumbo usados como lastro. O sub-índice "pb" indica, ao mesmo tempo, que os lastros são de chumbo e que o cilindro é o $D = 32$mm. A massa de cada lastro de chumbo é dada por $m_{pb} = 285$g e sua altura equivale a $L_{pb} = 55$mm. A figura 4.5(a) ilustra alguns dos cilindros de chumbo com o cilindro $D = 32$mm.

Os ensaios realizados com o cilindro com diâmetro externo $D = 50$mm usaram cilindros de aço como lastro. O sub-índice adotado para referenciar estes pequenos cilindros é "st", logo ensaios com $N_{st} = 17$ são ensaios que foram realizados com o cilindro $D = 50$mm e com dezessete lastros de aço. No total, 32 cilindros de aço foram usinados, todos eles com altura $L_{st} = 25$mm e massa $m_{st} = 275$g. Os cilindros de aço também foram usinados com diâmetro externo ligeiramente inferior ao diâmetro interno do cilindro de ensaio para evitar folga na montagem. A figura 4.5(b) apresenta alguns dos cilindros de aço com o cilindro $D = 50$mm.



(a) (b)

Figura 4.5: Lastros usados na base elástica pendular: (a) cilindros de chumbo usados no cilindro com $D = 32$mm, (b) cilindros de aço usados no cilindro com $D = 50$mm.

Consequências da articulação da BEP ao teto do laboratório

Como discutido na introdução deste capítulo, a BEP não permite ao cilindro de teste transladar, mas sim rotacionar ao redor do seu ponto de articulação. Apesar disso, como o ângulo máximo de inclinação é pequeno, considera-se, para todos os efeitos, que o cilindro se mantém vertical e perpendicular à direção do escoamento. O ângulo máximo de inclinação é pequeno porque a distância entre o ponto de articulação é grande em relação ao diâmetro do cilindro. Considerando por exemplo que o cilindro de $D = 50$mm apresente oscilação de 2 diâmetros, o ângulo da BEP, definido na figura 4.6, seria de $\theta_x = \arctan(x/L_w) = \arctan(2 \times 50/2850) \approx 2,0^o$.

Além da inclinação instantânea da BEP, é preciso levar em conta também a variação angular média devido à força de arrasto média que age sobre o cilindro de ensaio. Como a base não possui restrições ao movimento na direção alinhada com a corrente, conforme a velocidade do canal é aumentada, cresce também a força de arrasto média que age no cilindro, deslocando este de sua posição inicial na condição sem correnteza. O

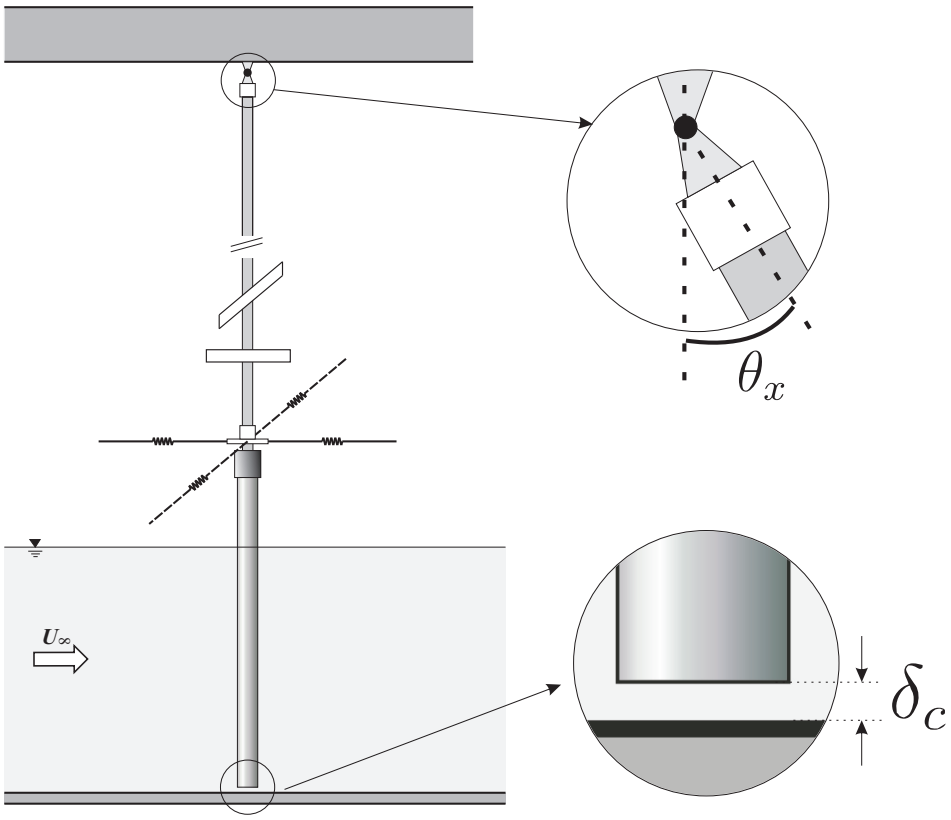


Figura 4.6: Base elástica pendular. Detalhes do ângulo formado no topo e distância do cilindro ao fundo do canal.

deslocamento máximo observado nos experimentos realizados para esta tese verificaram deslocamento médio de 4,1 diâmetros para ensaios com $D = 50$mm e sem lastros de aço ($N_{st} = 0$). Ainda nesta condição, o ângulo máximo de inclinação da base é da ordem de $\theta_x = \arctan(x/L_w) = \arctan(4,1 \times 50/2850) \approx 4,1^o$.

Quatro efeitos são consequência da rotação do cilindro ao redor do ponto de articulação no teto do laboratório. O primeiro deles é que cada ponto do cilindro de teste está sujeito a uma amplitude de oscilação diferente. Devido a sua elevada rigidez, pode-se considerar a BEP como um corpo rígido. A amplitude de oscilação cresce de maneira linear com a distância ao ponto de articulação. A distância total da extremidade inferior do cilindro de teste até o ponto de articulação é da ordem de 3200mm, enquanto que a distância do ponto de articulação até a superfície livre do canal é de 2300mm. Essa desigualdade faz com que exista uma diferença de 23% entre a amplitude da extremidade inferior do cilindro de teste e o ponto no qual o cilindro entra na água. Visando determinar uma amplitude média, os deslocamentos considerados neste trabalho foram sempre tomados em relação a metade do comprimento imerso do cilindro de ensaio. A figura 4.2(b) define e esse ponto e mostra que sua distância ao ponto de articulação é de

$L_w = 2850$mm.

As trenas laser usadas para medir a posição do cilindro são posicionadas acima da linha d´água. O valor medido por cada trena é então deslocado para a altura média do comprimento imerso do cilindro. As equações 4.3 apresentam como esse deslocamento é feito. Os comprimentos L_x e L_y, definidos na figura 4.2(b), representam as distâncias dos pontos de medição das trena usadas nas direções alinhada com o escoamento e transversal a ele, respectivamente. Nessas equações, os valores de $x(t)$ e $y(t)$ representam os deslocamentos calculados para o centro da coluna d´água e os valors x_a e y_a representam os valor medidos pelas trenas *laser*.

$$x(t) = x_a \frac{L_w}{L_x} = 1,462\, x_a \qquad y(t) = y_a \frac{L_w}{L_y} = 1,397\, y_a \tag{4.3}$$

O segundo efeito da rotação do cilindro de teste é a possibilidade de que dois modos de esteira se desenvolvam simultaneamente, tal como verificado no trabalho de Flemming e Williamson (2005). Este efeito, ainda que possível, não foi observado neste trabalho. Como comentado anteriormente, a diferença máxima de amplitudes ao longo do cilindro imerso é de 23%. A diferença de amplitudes no trabalho de Flemming e Williamson (2005) era de 100%, pois o ponto de articulação ao redor do qual seu cilindro girava também estava imerso. Este segundo efeito, portanto, foi desconsiderado.

O terceiro efeito causado pela rotação diz respeito à inclinação do cilindro com o escoamento incidente. Enquanto que a seção transversal de um cilindro é um círculo, a projeção de um cilindro inclinado é uma elipse. Tal variação na geometria afeta o processo de formação e desprendimento de vórtices. O estudo de VIV em cilindros inclinados é uma variação muito importante do estudo clássico acerca do fenômeno de VIV com cilindros perpendiculares ao escoamento. O principal modelo considerado para o caso de VIV em cilindros inclinados é que existe uma velocidade equivalente U_{eq}, equação 4.4, que depende da velocidade do escoamento ao longe U_∞ e do ângulo de inclinação do cilindro θ. Esta velocidade equivalente consiste na projeção da velocidade do escoamento na direção transversal ao cilindro. Como verificado anteriormente, o ângulo de inclinação da BEP é inferior a 5° o que permite a aproximação $U_{eq} \approx U_\infty$. Mais informações a respeito de VIV em cilindros inclinados podem ser encontradas em Franzini et al. (2009) e Franzini (2012). Devido ao baixo ângulo de inclinação, este efeito também foi desconsiderado.

$$U_{eq} = U_\infty \cos\theta \tag{4.4}$$

Por fim, o quarto efeito da rotação do cilindro é que o parâmetro de inércia mais

relevante deixa de ser a razão entre a massa da estrutura oscilante m e a massa de fluido deslocado m_d e passa a ser uma razão entre o momento de inércia da estrutura J e o momento de inércia do fluido deslocado J_d. Este efeito será descrito com mais detalhes na próxima seção.

4.2 Modelos matemáticos para a base elástica

Até este ponto, a BEP foi descrita como um corpo rígido que permite ao cilindro de teste se movimentar com baixo amortecimento em duas direções. Visando entender melhor o comportamento mecânico desta estrutura e como este depende das massas e molas usados, três modelos matemáticos foram desenvolvidos.

O primeiro modelo recai na simplificação da BEP a um sistema massa-mola-amortecedor (MMA). Apesar da BEP apresentar movimento de rotação ao redor do ponto de articulação e não o de translação, tal como assumido no modelo MMA, este modelo foi desenvolvido pois serve como referência para a definição do parâmetro de massa adicional m^*. Dentre as principais hipóteses do modelo MMA, estão a de que toda a massa da estrutura está concentrada em um único ponto que translada e que toda a rigidez do sistema se deve apenas às molas helicoidais ligadas à base. Este modelo não considera os efeitos de massa distribuída, influência do peso da base e empuxo do fluido.

O segundo modelo considera a que a massa da BEP está distribuída ao longo de sua estrutura e incorpora os efeitos da posição da mola, do peso da base da força de empuxo da água. A simplificação deste segundo modelo reside no fato deste não considerar o efeito de distribuição da massa dos lastros no interior do cilindro de teste. Devido a essa simplificação o segundo modelo foi nomeado de Modelo Pendular Simples (MPS).

Por fim, o terceiro modelo considera o efeito de distribuição da massa dos lastros dentro da BEP. Além disso o terceiro modelo considera também os efeitos de pré-tensão nas molas e como esse efeito altera ligeiramente o valor da constante elástica em cada direção. O terceiro modelo recebeu o nome de Modelo Pendular Completo (MPC).

Devido às suas simplificações, os modelos MMA e MPS não obteriam bons resultados de previsão das frequências naturais em ar f_n e em água f_w. Por esse motivo as equações obtidas em cada modelo foram usadas como referência e os seus parâmetros foram determinados através do emprego do Método dos Mínimos Quadrados (apêndice A). O modelo MPC, por sua vez, é capaz de prever os valores das frequências naturais em ar f_n e em água f_w. Os valores previstos foram comparados com os valores medidos

experimentalmente via ensaio de decaimento e comprovam eficácia do modelo.

4.2.1 Modelo massa-mola-amortecedor (MMA)

O conceito mais simples que pode ser usado para modelar a BEP é o de um sistema massa-mola-amortecedor com apenas um grau de liberdade. Destaca-se que a BEP possui dois graus de liberdade, logo desenvolver um modelo unidirecional assume o pressuposto de que o movimento em uma das direções não afeta as características da base na outra direção. Este modelo não considera o efeito da distribuição da massa ao longo de toda a estrutura e também não considera o efeito do peso da base e do empuxo da água como fontes de restituição elástica.

Segundo o modelo massa-mola-amortecedor, amplamente difundido na literatura sobre vibrações mecânicas, a frequência natural f_n para um sistema sem amortecimento, massa m e rigidez k é dada pela expressão

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Considerando que a massa total da BEP m seja divida em uma parcela fixa m_0 e uma parcela variável m_e, a frequência natural do sistema passa a ser dada pela expressão 4.5. A parcela fixa da massa m_0 corresponde à massa das peças da BEP, tais como a massa do cilindro de teste, do tubo de titânio, dos suportes para mola, dos alvos e etc. A parcela variável m_e está relacionada à massa extra fornecida pelos lastros.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_0 + m_e}} \tag{4.5}$$

Para os ensaios de decaimento em água, a massa adicional m_a precisa ser incorporada ao modelo. Assumindo que o valor de m_0 permaneça constante, uma vez que nenhuma das peças da BEP foi alterada, a frequência natural em água f_w é dada pela equação 4.6.

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_a + m_0 + m_e}} \tag{4.6}$$

É possível medir a massa de cada elemento da BEP e determinar através de um ensaio de tração a constante elástica das molas empregadas na base. A figura 4.7 apresenta as previsões feitas pelo modelo MMA para as frequências naturais em ar f_n e em água f_w feitas para o cilindro $D = 50$mm, conjunto de molas suaves e 28 diferentes condições de inércia $0 \leq N_{st} \leq 27$. Verifica-se, como esperado, que o modelo MMA não é capaz de

prever com precisão o valor das frequências naturais f_n e f_w.

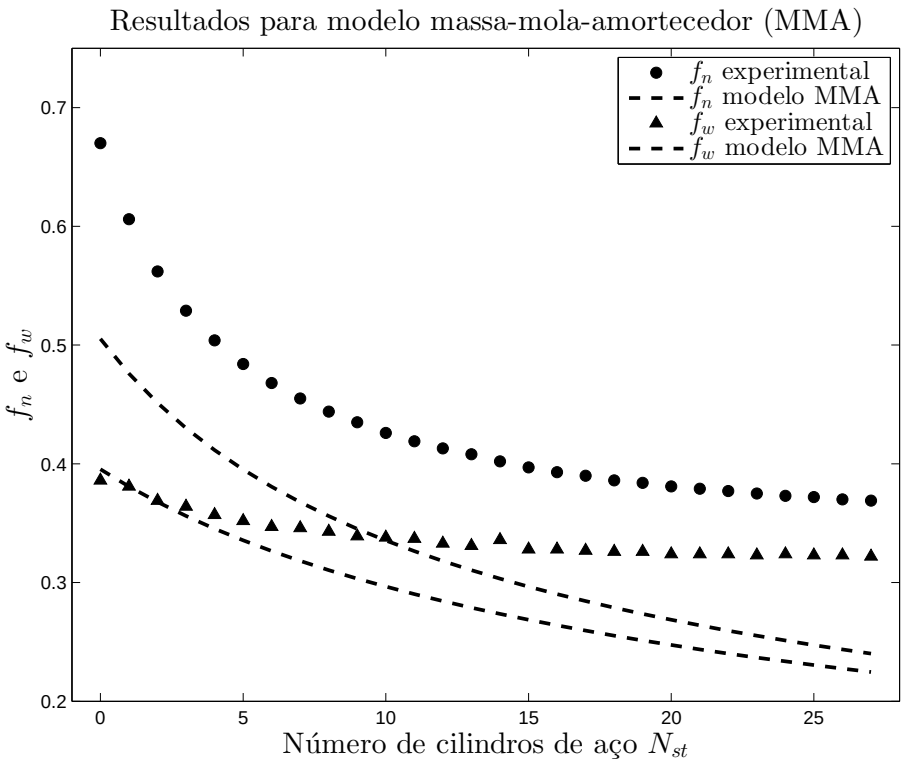


Figura 4.7: Previsões do modelo MMA para as frequências f_n e f_w para $D = 50$mm e conjunto de molas suaves.

É possível usar as equações do modelo MMA e os dados de f_n e f_w obtidos experimentalmente para calcular, via Método dos Mínimos Quadrados, quais seriam os melhores parâmetros de massa e mola que ajustariam os dados experimentais ao modelo adotado. O ajuste dos dados a uma função similar a equação 4.5 é feito no apêndice A e seu resultado é apresentado na figura 4.8.

Nem mesmo os dados ajustados foram capazes de descrever com precisão a evolução de f_n e f_w com N_{pb}. A nova curva do modelo, agora calculada com os dados ajustados e não os dados reais, se aproxima mais aos valores experimentais, porém ainda não consegue segui-los, ora superestimando e ora subestimando.

O Método de Monte Carlo foi empregado para estimar a "incerteza" dos valores ajustados de m_0 e k. A implementação desse método encontra-se no apêndice E. Os valores apresentados na figura 4.8 são os valores médios encontrados para cem mil iterações do método. É fundamental ressaltar que a "incerteza" calculada pelo Método de Monte Carlo nesta aplicação trata apenas da maneira como as incertezas de medição se propagam

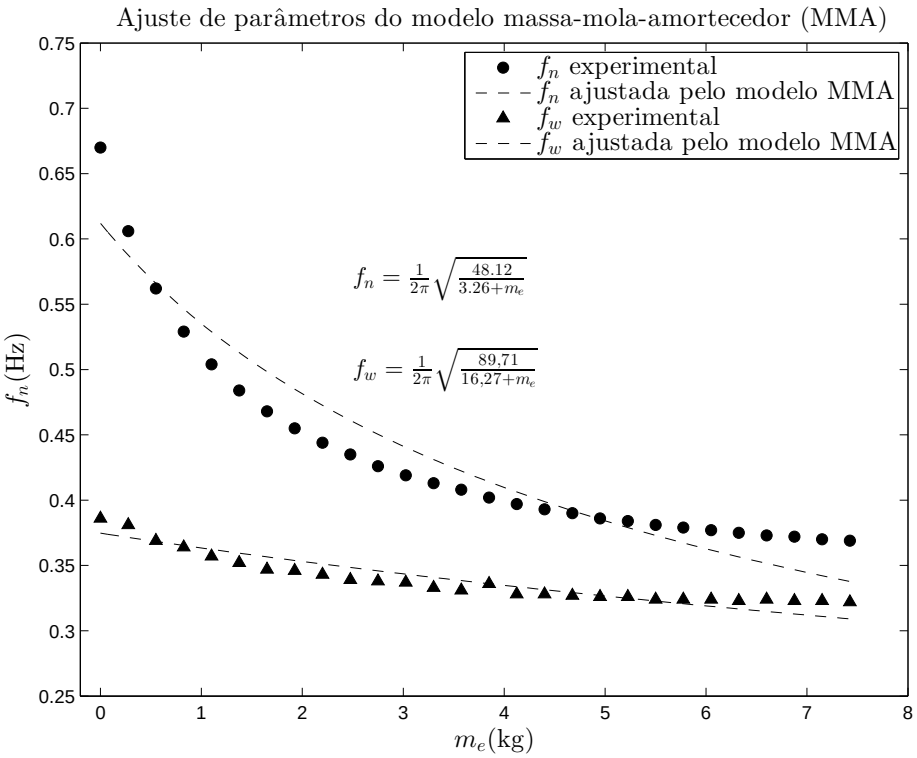


Figura 4.8: Ajuste de função para determinação dos parâmetros do modelo pendular simples.

pelo Método dos Mínimos Quadrados. Foram assumidos como incertezas de medição o valor das massas e também das frequências usadas. A incerteza associada às massas é a incerteza da balança de bancada usada para medi-las e vale $\sigma_m = 1$g. A incerteza com relação às frequências naturais foi assumida como $\sigma_f = 0,006$Hz. Este valor é o desvio padrão médio obtido nos ensaios de decaimento considerando as três repetições feitas no ensaio de decaimento.

Segundo o modelo MMA, para estimar f_n os melhores parâmetros de ajuste seriam

$$m_0 = 3,25 \pm 0,08 \text{ kg}$$

$$k = 48,07 \pm 0,73 \text{ N/m}$$

Enquanto que para estimar f_w, os melhores parâmetros de ajuste seriam

$$m_a + m_0 = 15,80 \pm 1,22 \text{ kg}$$

$$k = 87,58 \pm 5,63 \text{ N/m}$$

Apesar de os gráficos da figura 4.8 já indicarem que o modelo MMA não consegue descrever o comportamento da base elástica, os valores obtidos pelo modelo confirmam essa observação. Os valores reais da massa da BEP sem os lastros e da rigidez equivalente do sistema, considerando as duas molas usadas em cada direção, são de $m_0 = 2,17$kg e $k = 21,84$N/m. Os valores obtidos pelo ajuste de função foram $m_0 = 3,25$kg e $k = 48,07$N/m. Apesar de o modelo MMA não considerar o efeito do peso da BEP como fonte de força restauradora, seus efeitos estão nos resultados experimentais e, consequentemente, afetam os dados ajustados.

A massa adicional ajustada para os ensaios em água é $m_a = 12,55$kg. Considerando que o valor da massa de água deslocada para o caso com $D = 50$mm é de $m_d = 1,37$kg, o valor do coeficiente de massa adicional ajustada pelo modelo MMA é de $C_a = 9,16$, muito acima do valor teórico $C_a = 1$ para baixos valores de KC. Além disso, a rigidez do sistema variou muito nos casos em ar e em água, algo que não se pode explicar pelo modelo MMA. O efeito físico da água é, na verdade, o de reduzir a rigidez equivalente do sistema, uma vez que a força de empuxo da água diminui o efeito do peso da BEP.

4.2.2 Modelo pendular simples (MPS)

Um modelo mais próximo da realidade deve levar em consideração o momento de inércia da BEP, assim como seu efeito pendular. Entende-se, por efeito pendular, a força de restituição que surge devido ao peso da base quando esta é inclinada e também a contribuição da força de empuxo da água. Como o ponto de articulação está acima do centro de massa da estrutura, o peso da BEP faz com que ela volte a sua posição original, definindo assim um sistema com equilíbrio estável. A força de empuxo da água causa efeito contrário e diminui esse efeito restaurador. Devido à diferença entre os pontos de aplicação de cada força, o empuxo da água, ainda que menor do que o peso da base, poderia tornar o sistema instável e sem ponto de equilíbrio.

A figura 4.9 apresenta um esquema do diagrama de corpo livre da BEP. Considera-se que a base, sem lastros, possua um momento de inércia J_0 e comprimento total L_B. Em uma determinada posição da base, distante L_m do ponto de articulação está o suporte para as molas e, na posição L_G, está o baricentro da estrutura quando nenhum lastro é usado. Uma simplificação, deste modelo, consiste na hipótese de que toda a massa extra dos lastros m_e está concentrada na extremidade da base, distante L_B do ponto de articulação, e não distribuída nessa região. Uma consequência desse pressuposto é que o

valor de L_B é constante e o aumento do número de lastros, medido por N_{pb} ou N_{st}, altera apenas o valor de m_e. Para fins de clareza, todo o desenvolvimento será feito considerando N_{st} como variável para indicar o número de lastros, uma vez que as frequências naturais usadas como referência foram obtidas para $D = 50$mm. Para os casos com $D = 32$mm, basta substituir o sub-índice "st" por "pb", sem nenhuma perda de generalidade.

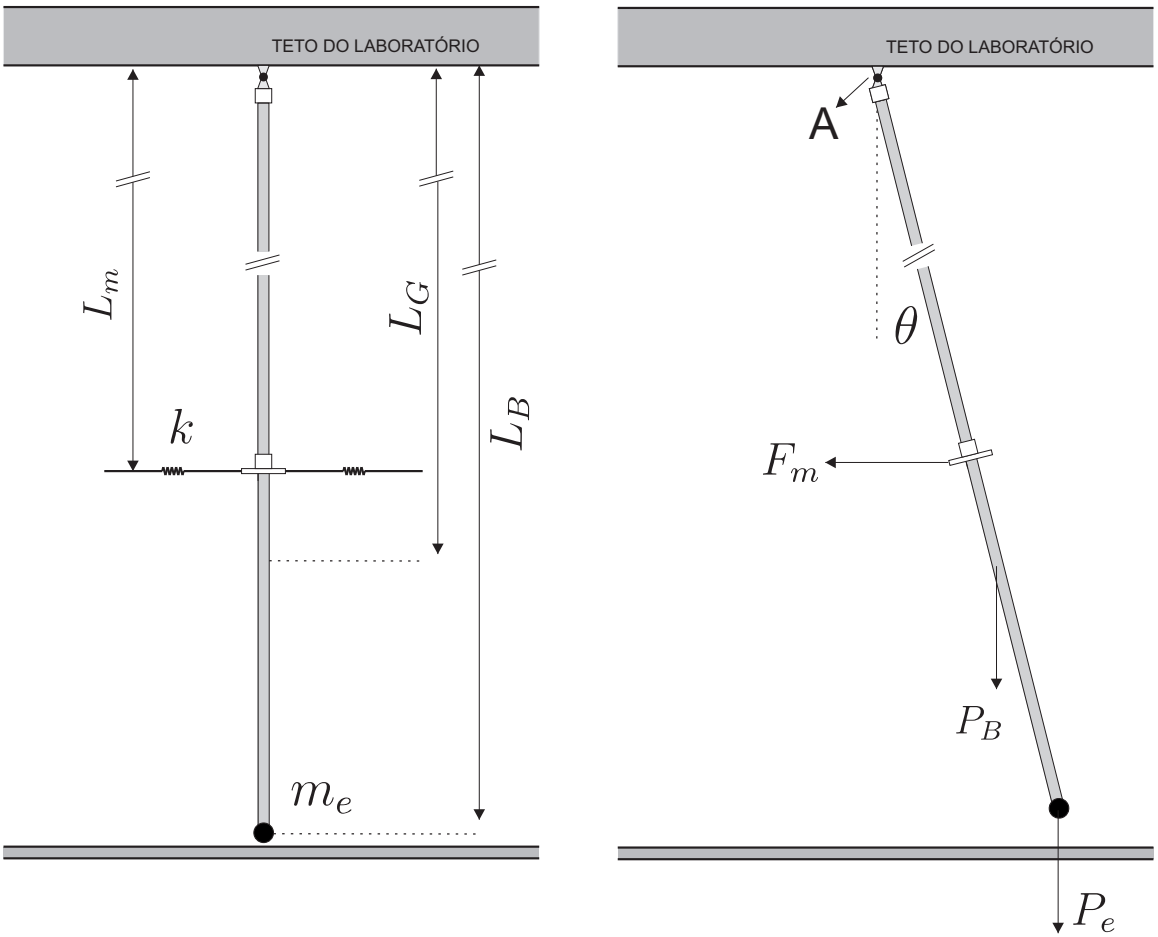


Figura 4.9: Esquema do modelo pendular simples e seu diagrama de corpo livre.

Aplicando o Teorema do Momento Angular, descrito em França e Matsumura (2004) e outros livros de vibrações mecânicas, para o ponto de articulação A, que é um ponto fixo, tem-se que a variação do momento angular da base elástica pendular $\dot{\vec{H}}_A$ equivale à soma dos momentos externos aplicados à base $\sum \vec{M}_A$.

$$\dot{\vec{H}}_A = \sum \vec{M}_A$$

Considerando, por simplicidade do modelo, que a base responde em apenas um

grau de liberdade, rotacionando ao redor do eixo Oy, a equação pode ser escrita na forma escalar para a direção y. Vale lembrar que este trabalho adota como padrão que as direções x e y são as direções alinhada e transversal ao escoamento, respectivamente, enquanto que a direção z é a direção vertical.

$$\dot{H}_A = \sum M_A$$

O momento angular da base consiste no produto de seu momento de inércia J_B pela sua velocidade angular $\dot{\theta}$. O momento de inércia total da base J_B é escrito como a soma do momento de inércia da estrutura da base J_0 acrescido do momento de inércia extra fornecido pelos cilindros de chumbo e aço usados como lastros J_e.

$$J_B = J_0 + J_e$$

As forças que atuam na base são as forças de mola F_m, o peso da base P_B e o peso dos lastros P_e, como indicado no diagrama de corpo livre da figura 4.9. Desta forma, tem-se que:

$$(J_0 + J_e)\,\ddot{\theta} = -F_m\,L_m\cos\theta - P_B\,L_G\,\sin\theta - P_e\,L_B\,\sin\theta$$

A força de mola F_m é modelada pela lei de Hooke e considera que o conjunto de molas conectadas à base tenha rigidez equivalente k. Essa rigidez considera o efeito das duas molas usadas em cada direção, logo $k = 2\,k_S$ para o conjunto de molas suaves e $k = 2k_R$ para o conjunto de molas rígidas. Por ora não se considera o efeito das molas de uma direção na outra. O deslocamento do conector de molas é dado pela decomposição do movimento do conector na direção horizontal $L_m\,\sin\theta$, de forma que a força é dada por:

$$F_m = k\,L_m\,\sin\theta$$

O momento de inércia da base considera todos os seus elementos, sendo que alguns deles, como os alvos e o conector das molas podem ser tratados como elementos de massa concentrada, enquanto que o tubo de titânio e o cilindro de teste possuem massa distribuída. Assumindo que os lastros tenham massa concentrada e que todos estejam posicionados na extremidade inferior da BEP, a uma distância L_B do ponto de articulação A, o momento de inércia J_e pode ser modelado como $J_e = m_e\,L_B^2$, de forma que a equação diferencial da base elástica pendular passa a ser escrita como

$$(J_0 + m_e\,L_B^2)\,\ddot{\theta} + (L_m^2\,k\cos\theta + P_B\,L_G + m_e\,g\,L_B)\sin\theta = 0$$

O ângulo de rotação da base θ é pequeno, o que permite que as funções trigonométricas sejam aproximadas por $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$. Esta aproximação torna o modelo linear.

$$(J_0 + m_e\, L_B^2)\,\ddot{\theta} + (L_m^2\, k + P_B\, L_G + m_e\, g\, L_B)\theta = 0$$

A equação anterior é análoga à equação diferencial ordinária de segunda ordem que modela um sistema massa-mola-amortecedor. A diferença entre os modelos não está na natureza de sua equação diferencial, mas na determinação de seus parâmetros. A partir dessa equação pode-se determinar a frequência natural da BEP

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\, k + P_B\, L_G + m_e\, g\, L_B}{J_0 + m_e\, L_B^2}} \tag{4.7}$$

Para modelar a BEP na água, é preciso incluir os efeitos da força de empuxo e da massa adicional. Uma vez que o modelo considera o efeito pendular, o momento causado pela força de empuxo $P_w\, L_w$ pode ser diminuído do momento causado pelo peso da base $P_B\, L_G$. O momento de inércia adicional J_a é modelado de maneira similar ao conceito original e depende do coeficiente de massa adicional C_a e do momento de inércia com relação à articulação da massa de água deslocada J_d.

$$J_d = \frac{m_d\, L_w^2}{3} + m_d\, L_B\, (L_B - L_c)$$

$$J_a = J_d\, C_a$$

O modelo resultante para o caso na água é dado pela expressão 4.8. A figura 4.10 ilustra a comparação entre os valores previstos pelas equações 4.7 e 4.8 do modelo MPS com os valores de frequência natural em ar e em água medidos experimentalmente em ensaios de decaimento.

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(kL_m^2 + P_B\, L_G - P_w\, L_w) + g\, L_B\, m_e}{(J_a + J_0) + m_e\, L_B^2}} \tag{4.8}$$

Os resultados apresentados na figura 4.10 demonstram uma aproximação dos resultados previstos e medidos. Quando poucos lastros foram usados $N_{pb} \leq 4$ as estimativas e os valores medidos foram muito próximos. Essa observação demonstra que a base precisa ser modelada como uma estrutura com massa distribuída, que o peso da BEP e a força de empuxo devem ser levadas em consideração e afetam a rigidez rotacional equivalente da base, assim como o conjunto de molas e aonde este é posicionado. As previsões se

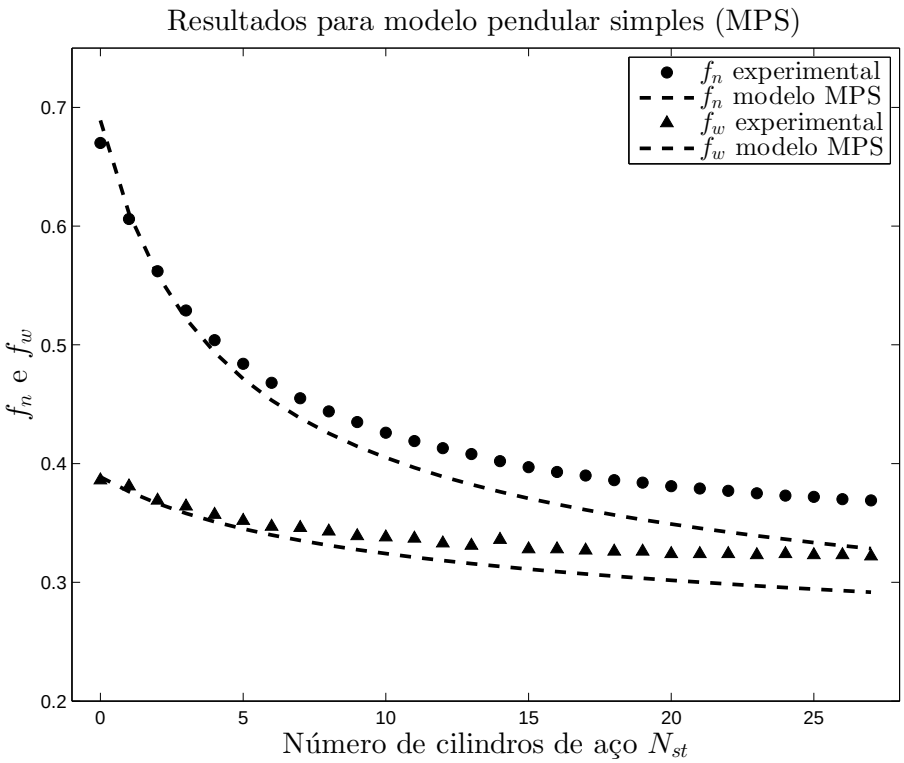


Figura 4.10: Previsões do modelo MPS para as frequências f_n e f_w para $D = 50$mm e conjunto de molas suaves.

afastam dos valores medidos quando o número de lastros aumenta. Esse resultado era esperado, pois como os lastros são posicionados um sobre o outro a hipótese de que todos eles ocupam o mesmo ponto, localizado na extremidade inferior da BEP.

Tal como realizado para o modelo MMA, as equações fornecidas pelo modelo MPS podem ser usadas para determinar os melhores parâmetros de ajuste através do método dos mínimos quadrados. Para isso as equações precisam ser ajustadas de forma a diminuir a quantidade de parâmetros. Assumindo que a massa extra dos lastro m_e seja o parâmetro alterado, pode-se dividir todos os termos pela distância L_B^2, obtendo as equações:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(k\frac{L_m^2}{L_B^2} + P_B\frac{L_G}{L_B^2}\right) + \frac{g}{L_B}m_e}{\frac{J_0}{L_B^2} + m_e}}$$

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(k\frac{L_m^2}{L_B^2} + P_B\,\frac{L_G}{L_B^2} - P_w\,\frac{L_w}{L_B^2}\right) + \frac{g}{L_B}m_e}{\left(\frac{J_a}{L_B^2} + \frac{J_0}{L_B^2}\right) + m_e}}$$

A figura 4.11 apresenta o resultado do ajuste de funções para o modelo MPS. Verifica-se que o modelo ajustado é capaz de reproduzir os valores medidos experimentalmente.

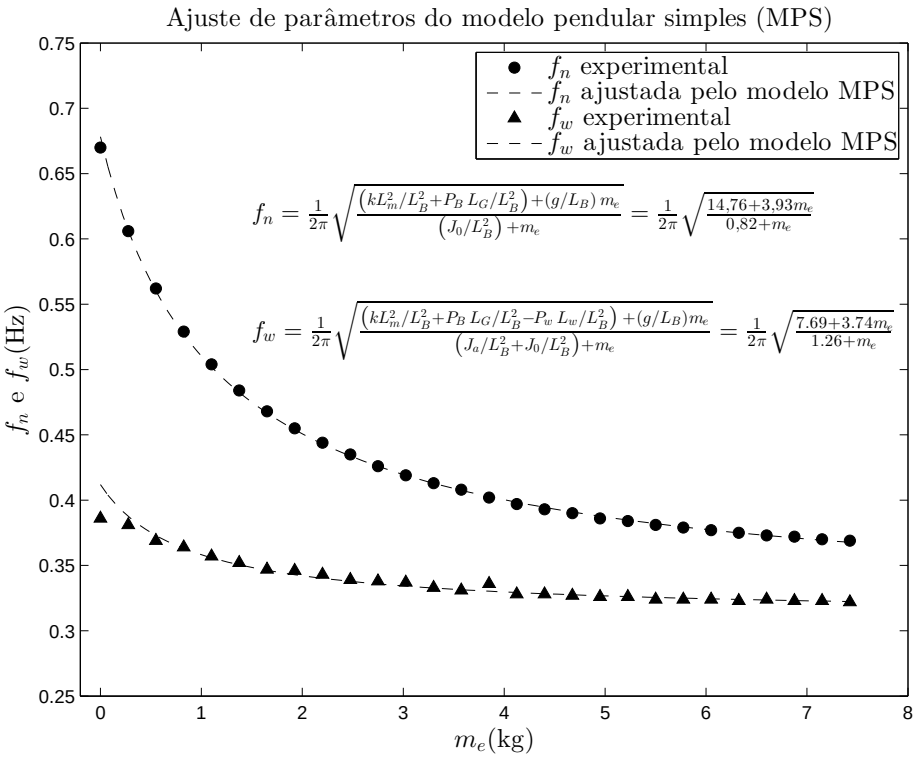


Figura 4.11: Ajuste de função para determinação dos parâmetros do modelo pendular simples.

Segundo os valores encontrados pelo Método dos Mínimos Quadrados e pelo Método de Monte Carlo, tem-se as seguintes relações para os resultados de decaimento em ar

$$(L_m/L_B)^2\,k + P_B(L_G/L_B^2) = 14,76 \pm 1,07 \ \text{N/m}$$

$$g/L_B = 3,93 \pm 0,15 \ \text{s}^{-2}$$

$$J_0/L_B^2 = 0,82 \pm 0,07 \ \text{kg}$$

E em água

$$\left(k\frac{L_m^2}{L_B^2} + P_B\,\frac{L_G}{L_B^2} - P_w\,\frac{L_w}{L_B^2}\right) = 7,69 \pm 2,95 \ \text{N/m}$$

$$g/L_B = 3,74 \pm 0,16 \ \text{s}^{-2}$$

$$\left(\frac{J_a}{L_B^2} + \frac{J_0}{L_B^2}\right) = 1,26 \pm 0,53 \ \text{kg}$$

Ao contrário do que foi observado no modelo MMA, o modelo pendular simples consegue ajustar bem os dados experimentais. Analisando e comparando os resultados obtidos para os decaimentos em ar e em água, verifica-se que os resultados encontrados são consistentes. O primeiro termo, $(L_m/L_B)^2\,k + P_B(L_G/L_B^2)$, deveria ser menor no caso em água do que no caso em ar devido a parcela $-P_w\,L_w/L_B^2$, e isso foi observado. O segundo termo, g/L_B, se manteve praticamente constante, o que era esperado. O terceiro termo, J_0/L_B^2, também cresceu com a adição do momento de inércia em água J_a/L_B^2.

O modelo MPS apresentou resultados melhores do que o MMA. Ainda é preciso, porém, considerar o efeito de massa distribuída dos lastros e a influência cruzada das molas. Esses aspectos são considerados no modelo pendular completo.

4.2.3 Modelo pendular completo (MPC)

Para o modelo completo da BEP é preciso considerar o fato de que os lastros usados para aumentar a inércia da BEP possuem massa distribuída. Tomando como ponto de partida a equação encontrada para o modelo pendular simples, é preciso definir a posição do baricentro dos lastros L_{Ge} e também adotar uma expressão mais completa para o momento de inércia dos lastros J_e em relação ao ponto de articulação.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\,k + P_B\,L_G + m_e\,g\,L_{Ge}}{J_0 + J_e}}$$

A figura 4.12 apresenta a definição da distância L_{Ge} e do comprimento L_e no qual a massa dos lastros está distribuída.

Uma vez que a massa extra m_e e a posição de seu baricentro L_{Ge} dependem do número lastros N_{st}, é preciso encontrar uma relação entre esses parâmetros. Todos os cilindros metálicos usados como lastro foram usinados para ter a mesma massa m_{st} e a altura L_{st}, de forma que:

$$m_e = m_{st}\,N_{st}$$

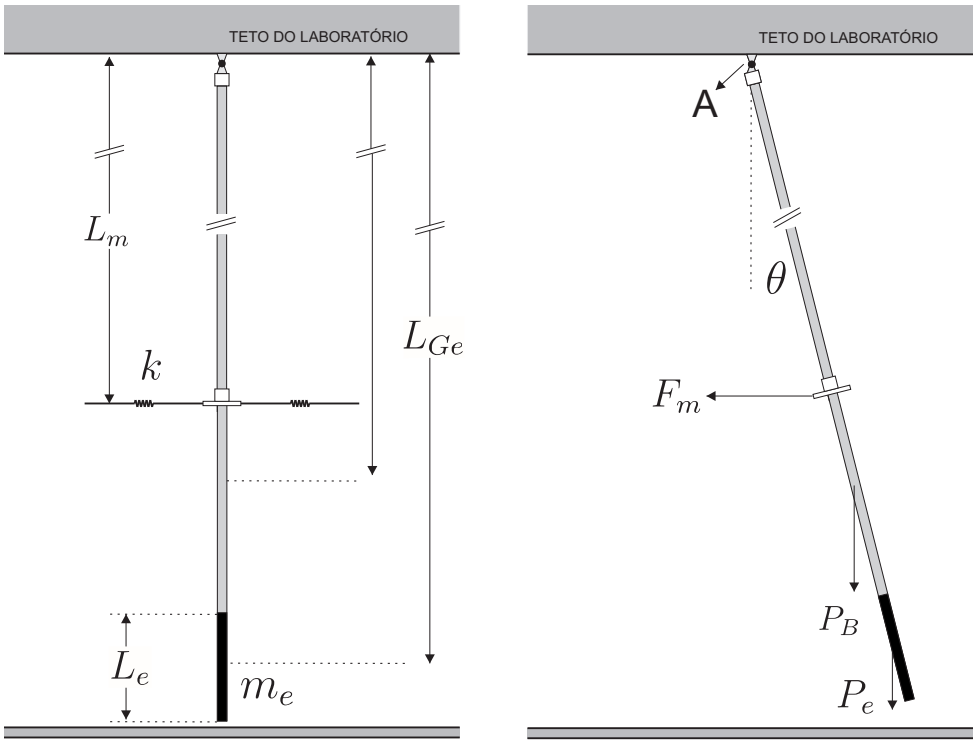


Figura 4.12: Esquema do modelo pendular completo e seu diagrama de corpo livre.

$$L_e = L_{st}\, N_{st}$$

A posição do baricentro das massas extras L_{Ge} e o momento de inércia J_e são dados por

$$L_{Ge} = L_B - \frac{L_e}{2}$$

$$J_e = \frac{m_e L_e^2}{3} + m_e\, L_B\, (L_B - L_e)$$

Substituindo os valores de m_e, J_e, L_{Ge} e L_e na expressão da frequência natural, resulta

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\, k + P_B\, L_G + m_{st}\, N_{st}\, g\, (L_B - L_{st}\, N_{st}/2)}{J_0 + m_{st}\, N_{st}^3\, L_{st}^2/3 + m_{st}\, N_{st}(L_B^2 - L_B\, L_{st}\, N_{st})}}$$

De maneira análoga aos outros dois modelos, para considerar a influência da lâmina de água nos efeitos da frequência natural é necessário considerar a inércia adicional de água, dada por J_a e também o efeito do empuxo P_w, que diminui o efeito do peso do pêndulo e age como uma espécie de mola com restituição elástica negativa.

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\, k + P_B\, L_G - P_w\, L_w + m_{st}\, N_{st}\, g\, (L_B - L_{st}\, N_{st}/2)}{J_0 + J_a + m_{st}\, N_{st}^3\, L_{st}^2/3 + m_e(L_B^2 - L_B\, L_{st}\, N_{st})}}$$

Além das correções com relação à inércia, é preciso também fazer uma correção com relação à rigidez do sistema. Até o MPS, considerou-se que apenas as molas alinhadas originalmente a uma direção exerceriam força nessa direção. Esse não é o caso para a situação real na qual um deslocamento genérico altera a força nas quatro molas ligadas à BEP. Dois efeitos não lineares distintos podem ser destacados. O primeiro deles se deve ao fato de a força nas molas seguir sempre a orientação das molas e esta varia para cada posição do cilindro. Desta forma a força resultante em cada direção é na verdade o somatório das componentes naquela direção das quatro forças. A não linearidade surge devido às funções trigonométricas usadas para decompor as forças. O uso de cabos metálicos na extremidade das molas diminuiu o ângulo que elas faziam em cada direção, reduzindo, desta forma, esse efeito.

O segundo efeito trata da pré-tensão nas molas, que também causa um efeito no sistema. Em todos os ensaios, as molas são alongadas no momento em que são conectadas à base elástica. Essa pré-distensão faz com que o sistema fique pré-tensionado. Ainda que no ponto de equilíbrio a força resultante das pré-tensões seja nula em ambas as direções, assim que o cilindro se movimenta surge uma decomposição dessa pré-tensão na direção transversal. A contribuição da pré-tensão é equivalente a uma outra mola.

Para demonstrar esse efeito, pode-se considerar um corpo ligado a duas molas iguais de constante elástica k_i e comprimento inicial L_{k0}. Assumindo que uma das extremidades da mola esteja conectada ao corpo e a outra a um cabo de comprimento L_{cabo}, a distância do corpo à extremidade livre do cabo é $L_{k0} + L_{\text{cabo}}$. Como o cabo não suporta compressão e as molas sem nenhuma pré-tensão também não, para evitar que algum dos lados não exerça força no corpo é necessário dar uma pré-tensão na mola. Essa pré-tensão pode ser dada alongando-se a mola ΔL e fixando-se a extremidade do cabo a uma distância L, tal que $L = L_{k0} + L_{\text{cabo}} + \Delta L$. Caso o corpo seja deslocado δ na direção transversal à orientação das molas, estas agora estarão alinhadas na hipotenusa de um triângulo com catetos δ e L. A nova tensão nas molas será dada por $T = k_i \left(\sqrt{L^2 + \delta^2} - L_{k0} - L_{\text{cabo}}\right)$. A decomposição dessa nova tração, devido às duas molas, é dada por

$$F_T = 2\,T\,\frac{\delta}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} = 2k_i\,\delta\,\left(1 - \frac{L_{k0} + L_{\text{cabo}}}{\sqrt{L^2 + \delta^2}}\right)$$

A razão F_T/δ pode ser pensada como uma constante elástica k_y^*.

$$\frac{F_T}{\delta} = k_T = 2k_i\,\left(1 - \frac{L_{k0} + L_{\text{cabo}}}{\sqrt{L^2 - \delta^2}}\right)$$

Assumindo que δ seja um deslocamento pequeno, $\sqrt{L^2+\delta^2} \to L$, logo a decomposição na direção transversal fica

$$k_T = 2\,k_i\left(1 - \frac{L_{k0} + L_{\text{cabo}}}{L}\right) \quad \to \quad k_T = 2k_i\frac{\Delta L}{L}$$

Verifica-se, portanto, que ainda que não houvesse molas em uma direção, caso haja pré-tensão nas molas montadas na direção transversal, haverá uma "mola adicional" com constante elástica equivalente a $2\,k_i\,\Delta L/L$.

No caso da BEP, assume-se que quatro molas iguais e com constante elástica iguais a k_i são usadas. As duas molas em cada direção agem como se estivessem em paralelo, conferindo a rigidez equivalente $k = 2k_i$. O valor k era o valor que havia sido assumido inicialmente nos primeiros dois modelos. Considerando agora o efeito devido à pré-tensão das molas montadas na direção transversal, o valor de k deve ser dado por

$$k = 2k_i + 2k_i\frac{\Delta L}{L} = 2k_i\underbrace{\left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)}_{k^*}$$

O valor da correção $\Delta L/L$ varia para cada conjunto de molas. O tamanho médio das molas do conjunto rígido (R) é $L_{k0}^R = 150$mm, enquanto que do conjunto suave (S) é $L_{k0}^S = 50$mm. O comprimento dos cabos é $L_{\text{cabo}} = 800$mm. Desta forma, a correção necessária para as molas do grupo R equivale a $k_R^* = 1,05$ enquanto que para o grupo S a correção é de $k_S^* = 1,15$.

Considerados todos esses aspectos, o modelo pendular completo, descrito matematicamente pelas equações 4.9 e 4.10, fornece respectivamente os valores de f_n e f_w.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\,k\,k^* + P_B\,L_G + m_{st}\,N_{st}\,g\,(L_B - L_{st}\,N_{st}/2)}{J_0 + m_{st}\,N_{st}^3\,L_{st}^2/3 + m_{st}\,N_{st}(L_B^2 - L_B\,L_{st}\,N_{st})}} \tag{4.9}$$

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\,k\,k^* + P_B\,L_G - P_w\,L_w + m_{st}\,N_{st}\,g\,(L_B - L_{st}\,N_{st}/2)}{J_0 + J_a + m_{st}\,N_{st}^3\,L_{st}^2/3 + m_e(L_B^2 - L_B\,L_{st}\,N_{st})}} \tag{4.10}$$

A figura 4.13 apresenta a comparação entre os resultados previstos pelo modelo MPC e as frequências naturais em ar e água medidas experimentalmente. É importante destacar que nenhum ajuste de parâmetros foi feito na figura 4.13.

Diferente do modelo MPS, cuja capacidade de previsão das frequências decaia com o aumento do número de lastros N_{st}, o MPC é capaz de prever com muita precisão as frequências f_n e f_w para toda a faixa de N_{st} testada.

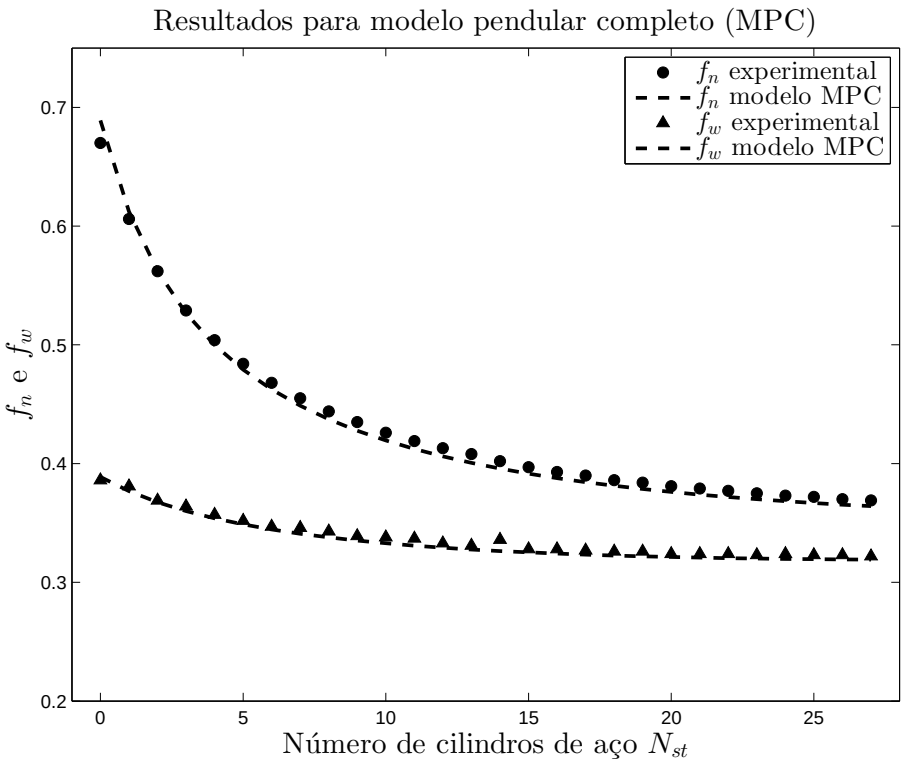


Figura 4.13: Comparação dos valores de f_n e f_w previstos pelo modelo pendular completo e obtidos experimentalmente.

4.3 Conclusões do capítulo

A base elástica desenvolvida para este trabalho é do tipo pendular e permite ao cilindro de ensaio oscilar com dois graus de liberdade, baixa inércia e amortecimento. A base foi projetada e construída visando permitir ao cilindro de ensaio se mover com a mesma massa e nas duas direções. As molas usadas permitem ajustar a frequência natural do sistema. Na maioria dos casos, o mesmo conjunto de molas foi usado nas duas direções, fornecendo assim uma estrutura com a mesma frequência natural em ambas as direções. Apesar disso, a base é versátil e permite que conjuntos diferentes sejam usados em cada direção, obtendo condições assimétricas de frequência.

Parâmetro de inércia, frequências da BEP e modelos matemáticos

O parâmetro de inércia mais adequado para descrever a base é o momento de inércia adimensional J^*. O parâmetro de massa m^*, mais usado na literatura, não apresenta bons resultados para modelar as variações de frequência natural em função da massa dos lastros, tal como verificado no modelo massa-mola-amortecedor (MMA). O parâmetro J^*, por outro lado, consegue quantificar bem a variação de inércia da base. Isso ocorre

pois os lastros são posicionados um sobre os outros na base. A hipótese de massa concentrada não é válida quando o número de lastros cresce. Essa observação foi demonstrada no resultado do modelo pendular simples (MPS). O modelo pendular completo (MPC) considerou tanto variações do momento de inércia quanto o efeito cruzado que as molas alinhadas em uma direção causam na outra. Este modelo, mais completo, foi capaz de prever os valores de frequência natural em ar e em água da base com grande precisão.

Um total de 28 diferentes condições de J^* foram usadas como exemplo ao longo deste capítulo para avaliar os modelos matemáticos testados. Todos esses casos foram obtidos para o cilindro com diâmetro externo de $D = 50$mm e conjunto de molas suaves (S). Para demonstrar a generalidade do MPC, todas a demais condições ensaiadas ao longo deste trabalho foram comparadas com os resultados do modelo. A figura 4.14 apresenta a comparação das frequências naturais medidas em ar e em água para os dois cilindros usados $D = 32$mm e $D = 50$mm e para as três condições de rigidez, com o conjunto de molas suaves, o conjunto de molas rígidas e sem nenhuma mola. A primeira linha apresenta os resultados para $D = 50$mm e a segunda linha para $D = 32$mm. A coluna da esquerda compara os resultados para frequência natural em ar f_n e a coluna da direita compara os resultados obtidos para a frequência natural em água f_w. Em todas as curvas, os pontos representam os valores medidos experimentalmente e as linhas tracejadas indicam os valores previstos pelo modelo pendular completo. Ao final de cada curva indica-se qual conjunto de molas foi usado. A indicação $k_x = k_y = R$ significa, por exemplo, que esta linha foi determinada em condição simétrica de rigidez $k_x = k_y$ e o conjunto de molas usado foi o conjunto de molas mais rígidas (R).

A concordância entre os resultados previstos e medidos é notável, tanto para as frequências naturais em ar f_n e em água f_w. Vale destacar que para considerar a influência água no modelo, dois efeitos foram considerados. O primeiro trata da força de empuxo que a massa de água deslocada causa na base, diminuindo seu efeito de restituição pendular. Por esse motivo, é como se os ensaios em água fossem menos rígidos. O segundo efeito considera a inércia adicional da água. Como os ensaios foram realizados com pequenos deslocamentos do cilindro em água parada, o valor do parâmetro de Keulegan-Carpenter KC é baixo e não se forma uma esteira de vórtices. Para essa condição o valor previsto pela Teoria do Escoamento Potencial $C_a = 1$ é válido. O momento de inércia adicional da base foi modelada de forma análoga ao conceito de massa adicional e adotou o mesmo valor de C_a. Pela qualidade dos resultados, pode-se afirmar que essas hipóteses são válidas.

É importante destacar que o valor do momento de inércia adicional $J_a = C_a\, J_d$ é

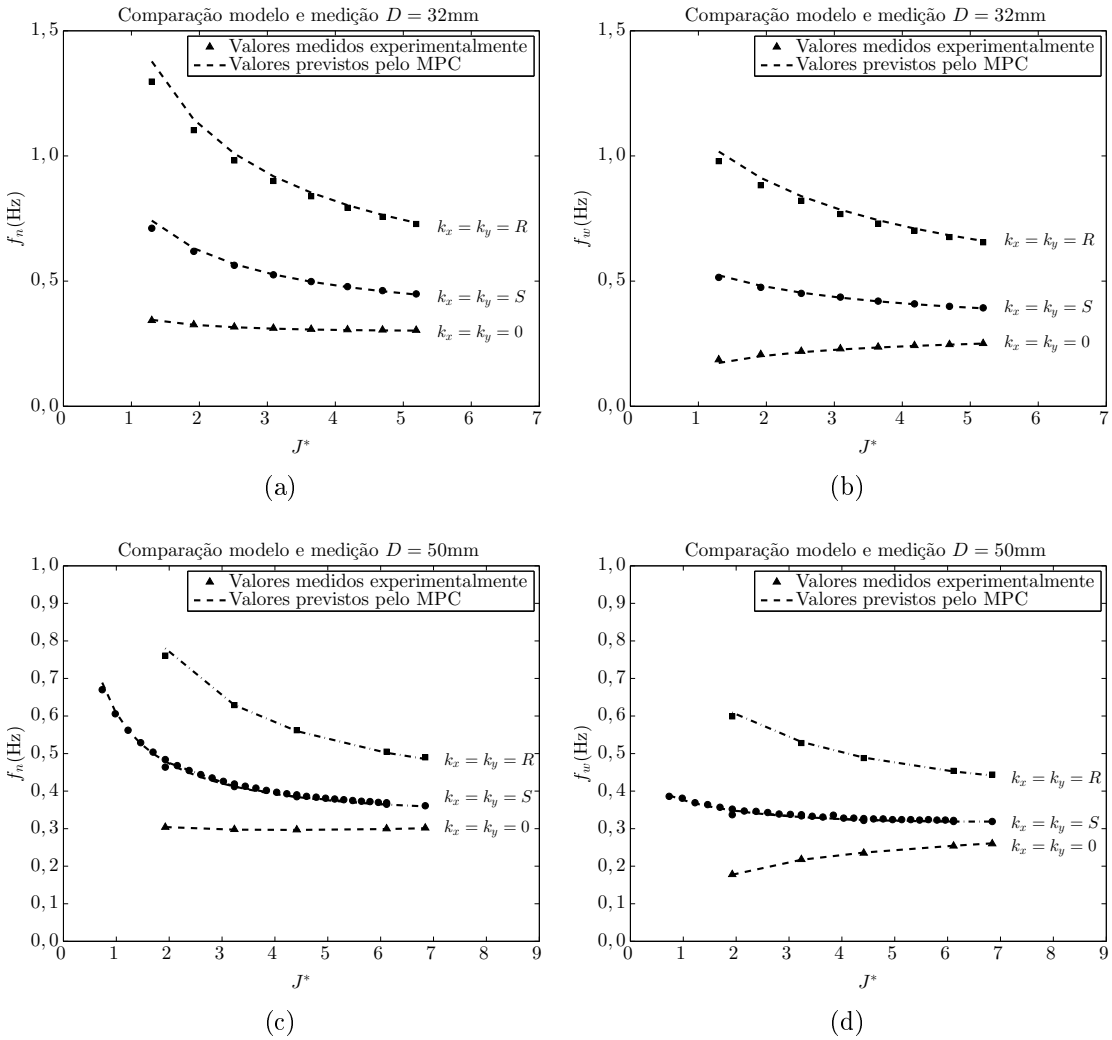


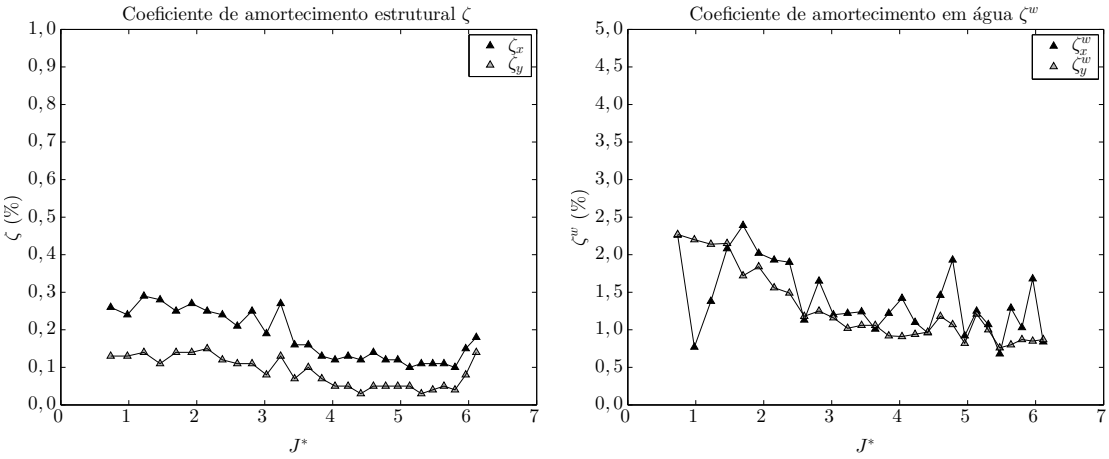
Figura 4.14: Comparação dos resultados obtidos pelo modelo pendular completo para diferentes molas e cilindros. A coluna da esquerda apresenta resultados para o cilindro de $D = 32$mm e três condições de rigidez. A coluna da esquerda apresenta resultados para $D = 50$mm e quatro diferentes condições de rigidez.

importante para a estimar a frequência natural em água f_w para cada condição da base. A hipótese de que $C_a = 1$ só é válida para os ensaios de decaimento. Para os ensaios de VIV essa consideração não é mais feita.

Coeficientes de amortecimento da base elástica ζ e ζ^w

Além de descrever os componentes da base elástica o capítulo focou na análise das frequências naturais da base. Pouca atenção foi dada até este momento ao coeficiente de amortecimento da estrutura. Em todos os ensaios de decaimento, além da frequência natural de oscilação, o coeficiente de amortecimento também foi determinado. A figura 4.15 apresenta os valores medidos para cada direção, em ar e em água, dos 28 casos

testados com cilindro $D = 50$mm e conjunto de molas suaves (S). Verifica-se que para o caso em ar $\zeta < 0,3\%$ do valor crítico, ou seja, $\zeta < 3 \times 10^{-3}$. Já para o caso em água, o amortecimento médio sobe para $\zeta \approx 1,5\%$. Em todos os casos medidos $\zeta^w < 2,5\%$.



(a) (b)

Figura 4.15: Coeficientes de amortecimento estrutura em ar ζ e em água ζ^w para cada direção.

Observa-se que os valores de amortecimento em ar medidos para cada direção são ligeiramente distintos. Por questões de montagem e também diferenças entre os rolamentos de esferas usados na Junta Cardan, verifica-se que o amortecimento na direção alinhada com a corrente ζ_x é sistematicamente superior ao amortecimento observado para a direção transversal ζ_y. O mesmo não é observado para os valores de amortecimento em água $\zeta_x^w \approx \zeta_y^w$. Os efeitos de amortecimento hidrodinâmicos não dependem dos rolamentos de esferas usados na Junta Cardan e têm maior efeito na base elástica. Por esse motivo recupera-se a equivalência nas duas direções e obtém-se valores mais altos em água do que em ar.

Com relação ao amortecimento, vale observar que ele decresce conforme J^* é aumentado. Pode-se entender essa característica pela própria definição do coeficiente de amortecimento, dada pela equação 4.11. Nessa equação m, k e c são os parâmetros de um sistema massa, mola amortecedor. Os parâmetros c_{rot} e k_{rot} representam seus análogos rotacionais. Verifica-se, portanto, que conforme o momento de inércia J sobe, o coeficiente de amortecimento cai.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}} = \frac{c_{rot}}{2\sqrt{k_{rot}\,J}} \tag{4.11}$$

Ainda que ζ diminui com o aumento de J^*, é preciso tomar cuidado com a análise anterior, pois os parâmetros k_{rot} e c_{rot} não são constantes. A rigidez equivalente

Tabela 4.1: Coeficientes de amortecimento estrutural encontrados na literatura para VIV com dois graus de liberdade

Referência	$\zeta(\%)$
Jauvtis e Williamson (2004)	0,36
Flemming e Williamson (2005)	0,22
Stappenbelt e Lalji (2008)	0,80
Sanchis, Saelevik e Grue (2008)	4,60
Leong e Wei (2008)	0,19
Franzini et al. (2013)	0,10

rotacional, como visto nos modelos MPS e MPC, varia em função do número de lastros e, portanto, também muda com a variação de J. Além disso, conforme o número de lastros á aumentado, o esforço que atua nas esferas dos rolamentos é maior, o que aumenta o coeficiente de amortecimento c_{rot} da estrutura.

Apesar de todas essas considerações, os valores máximos obtidos para o amortecimento em ar são baixos quando comparados com os valores da literatura. Poucos autores apresentam diferentes resultados de amortecimento, ainda que apresentem diferentes condições de inércia ou rigidez em seus trabalhos. Como verificado na figura 4.15, cada condição da base possui um valor distinto de ζ. Tomando o pior dos casos em ar, $\zeta \approx 0,3\%$. Este valor é menor do que o valor $\zeta \approx 0,36\%$ usado por Jauvtis e Williamson (2004). O valor médio do coeficiente de amortecimento em ar, considerando as duas direções, para todos testados nesta tese é de $\zeta = 0,23 \pm 0,10\%$.

Toda esta análise permite duas afirmações. A primeira é que o valor do coeficiente de amortecimento médio da base elástica pendular é baixo $\zeta = 0,23\%$, da ordem dos menores coeficientes de amortecimento encontrados na literatura para VIV com dois graus de liberdade e apresentados na tabela 4.1.

A segunda conclusão é que o valor do coeficiente de amortecimento possui elevada incerteza experimental. Variações de $0,1\%$ em relação ao valor médio de $0,23\%$ representam desvio de aproximadamente 43%. Por esse motivo, ainda que o parâmetro de amortecimento seja baixo, o que permite fazer conclusões qualitativas a respeito do comportamento da base, é incerto fazer observações que dependam desse valor numérico.

A levada incerteza do parâmetro de amortecimento ζ faz com que o parâmetro de massa e amortecimento $m^* \zeta$ ou $J^* \zeta$ também seja incerto, ainda que m^* tenha baixo desvio padrão.

5 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Esta tese consiste em uma investigação experimental sobre o fenômeno de vibração induzida por vórtices com dois graus de liberdade. Todos os experimentos foram realizados no laboratório do Núcleo de Dinâmica e Fluidos da Universidade de São Paulo em um canal de água recirculante e com a base elástica pendular (BEP), descrita no capítulo 4.

Dentre as centenas de diferentes experimentos realizados, três grandes classificações podem ser usadas: ensaios de decaimento, ensaios de VIV na BEP e ensaios de visualização de escoamento. Os ensaios de decaimento têm por objetivo medir as características mecânicas da BEP. Para cada condição de massa e rigidez da estrutura, a BEP apresenta diferentes valores de frequência natural e amortecimento. O objetivo dos ensaios de decaimento, portanto, é medir tais parâmetros para cada condição. Dentro dos ensaios de VIV, dezenas de diferentes condições foram testadas, variando-se a massa da estrutura, o diâmetro do cilindro e ainda a rigidez das molas usadas na BEP. Apesar dessa diversificação paramétrica, o procedimento geral de todos os ensaios de VIV é o mesmo, assim como os equipamentos utilizados nesses ensaios. Os ensaios com visualização de escoamento tiveram por objetivo registrar as esteiras de vórtices formadas para algumas condições de escoamento e vibração do cilindro de ensaio.

Este capítulo está dividido em três seções, cada uma relacionada a um grupo experimental. A primeira seção descreve o procedimento usado nos ensaios de decaimento. A segunda seção foca nos ensaios de VIV, descrevendo os equipamentos usados e procedimento experimental empregado. A terceira seção apresenta uma breve descrição da técnica de visualização PIV, descreve o equipamento utilizado e relata o procedimento seguido para a obtenção dos campos de velocidade.

O objetivo central deste capítulo é apresentar sucintamente quais foram os procedimentos experimentais empregados e quais equipamentos foram utilizados. Detalhes sobre tais procedimentos assim como os passos empregados na análise dos sinais e resultados obtidos foram suprimidos do corpo desta tese e encontram-se em diferentes apêndices

no final do trabalho. Esta escolha foi feita visando simplificar a leitura da tese e concentrar a atenção do leitor nos resultados sobre o fenômeno de VIV. A descrição feita nos apêndices é mais detalhada e tem por objetivo definir com clareza e completude os passos seguidos nesta investigação.

5.1 Ensaios de decaimento

Ensaios de decaimento são muito comuns no estudo de movimentos oscilatórios e ocupam um papel de destaque no desenvolvimento deste trabalho. Em poucas palavras, um ensaio de decaimento consiste em um experimento no qual um sistema dinâmico é perturbado e sua resposta é medida e analisada ao longo do tempo. O principal objetivo deste ensaio é medir as características dos modos de vibrar da estrutura excitada, sendo estas a frequência natural de oscilação, o coeficiente de amortecimento e o formato do modo de vibrar.

Neste trabalho, o sistema oscilatório é a BEP, cujo único modo de vibrar considerado é o de rotação ao redor do ponto em esta foi articulada. Por esse motivo, os objetivos do ensaio de decaimento recaem na determinação da frequência natural de vibração e do amortecimento estrutural para cada condição de massas e molas.

A BEP foi projetada e construída de forma que suas frequências naturais de oscilação, alinhada e transversal à direção do escoamento, tivessem o mesmo valor. Devido a pequenas assimetrias de montagem e diferenças nas molas usadas, é possível que uma das direções seja mais rígida que a outra, acarretando em uma pequena diferença entre as frequências naturais em cada direção. Neste contexto, os ensaios de decaimento permitem analisar a resposta da estrutura para cada condição de montagem e verificar se a hipótese $f_n^y = f_n^x$ é válida. Para os casos simétricos a diferença média entre os valores de frequência natural é menor do que 2%.

Um sistema massa-mola-amortecedor (MMA) é um dos modelos mais simples dentro do estudo das vibrações mecânicas. A equação 5.1 apresenta a equação diferencial de segunda ordem que modela a resposta de um sistema MMA. Nessa equação m é a massa do sistema, c é seu amortecimento e k sua rigidez. Os três parâmetros são constantes positivas. A função $f(t)$ representa uma força que age no sistema ao longo do tempo. A partir dos parâmetros dessa equação definem-se a frequência natural do sistema não

amortecido ω_n e seu coeficiente de amortecimento ζ.

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t) \tag{5.1}$$

$$\omega_n = 2\pi\, f_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad\qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}}$$

Considerando que a base elástica pendular usada neste trabalho possa ser modelada como sistema massa-mola-amortecedor e que seu coeficiente de amortecimento ζ seja inferior ao coeficiente de amortecimento crítico, $\zeta < 1$, então a BEP apresenta comportamento oscilatório. Assumindo que a BEP seja deslocada para a posição $x(0)$ e então abandonada a partir do repouso, seu movimento é descrito pela equação 5.2.

$$x(t) = x(0)\, e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\, \cos\left(\omega_a\, t - \phi\right) \tag{5.2}$$

A solução 5.2 considera o produto de duas funções, uma exponencial e outra trigonométrica. Enquanto a função trigonométrica é responsável pela característica oscilatória da resposta, a função exponencial é responsável pela diminuição da amplitude máxima de oscilação ao longo do tempo. Dá-se o nome de curva envoltória à função no tempo que define a amplitude máxima do sinal. Quando o módulo da função trigonométrica é unitário, a resposta da oscilação coincide com o valor da curva envoltória, o que permite coletar amostras dessa função. Tais amostras são usadas para estimar a função envoltória e determinar a parcela $e^{-\zeta\,\omega_n\,t}$. A frequência de oscilação amortecida ω_a é determinada através da transformada de Fourier da série temporal da amplitude de deslocamento $x(t)$. Todo o procedimento de análise de sinal empregado para determinar os valores de f_n e ζ é descrito em detalhe no apêndice D.

Duas variações no ensaio de decaimento foram realizadas ao longo deste trabalho: em ar e em água. Ao longo do texto, o símbolo f_n é usado para a frequência natural em ar e f_w é usado para a frequência natural em água. A mesma lógica se aplica para o coeficiente de amortecimento estrutural em ar ζ_n e em água ζ_w.

Nos ensaios em ar o canal de água é esvaziado e os ensaios de decaimento são realizados sem a influência da coluna de água. Os ensaios em água são realizados com o canal de água cheio, com a mesma coluna de água usada nos ensaios de VIV, $h_{cn} = 0,7$m. Vale destacar que os ensaios de decaimento em água não consideram escoamento, ou seja, os ensaios são conduzidos em água parada.

O fato de o cilindro de ensaio estar ou não imerso na água altera as respostas do ensaio de decaimento. A diferença de propriedades físicas entre ar e água, tais como

densidade e viscosidade, justifica essa alteração. Ensaios de decaimento em ar possuem maiores frequências naturais $f_n > f_w$ e menores coeficientes de amortecimento $\zeta_n < \zeta_w$. A queda na frequência natural para ensaios em água pode ser entendida como uma consequência da massa adicional m_a. Quando o cilindro, ou qualquer outro corpo, acelera em um meio fluido este corpo precisa movimentar uma certa massa desse fluido, o que dificulta sua própria movimentação. O aparente aumento de inércia do sistema devido à presença de fluido é denominado de massa adicional. Usualmente, a massa adicional m_a é adimensionalizada usando como referência a massa de fluido deslocado pelo corpo imerso m_d, segundo a equação 5.3. Verifica-se experimentalmente que o coeficiente de massa adicional C_a depende da geometria do corpo e também do tipo de escoamento.

$$m_a = C_a \, m_d \tag{5.3}$$

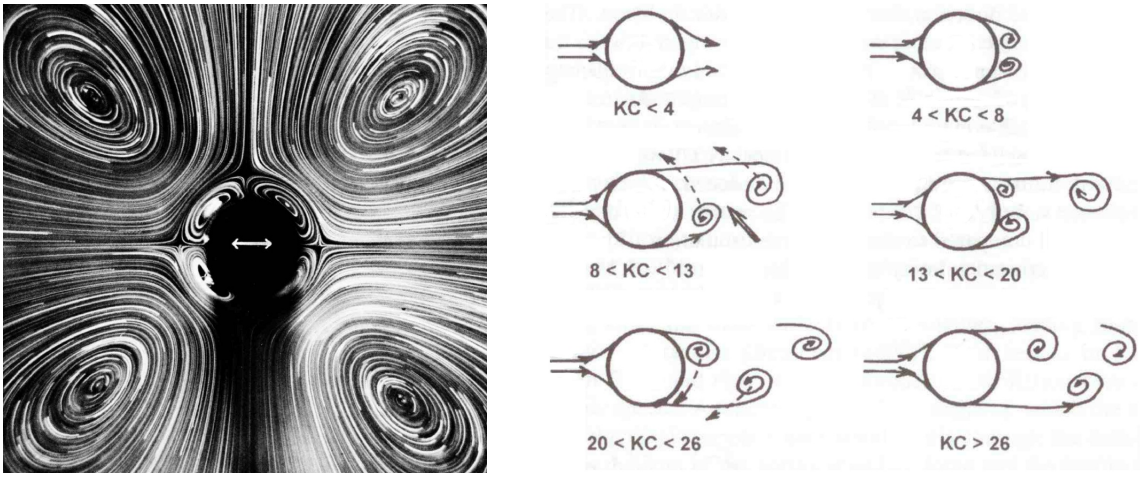
Segundo a teoria de escoamento potencial, o valor do coeficiente de massa adicional para cilindros infinitos é $C_a = 1$. Esse valor é verificado experimentalmente em ensaios oscilatórios para baixos valores do número de Keulegan-Carpenter, definido na equação 5.4. Nesta equação $\hat{x}$ é a amplitude de oscilação imposta a um cilindro de diâmetro D.

$$KC = 2\pi \frac{\hat{x}}{D} \tag{5.4}$$

A figura 5.1 ilustra a diferença de comportamento do fluido para diferentes valores do parâmetro KC. Caso $KC < 4$ não ocorre desprendimento das camadas limites que circundam o cilindro e não há formação e desprendimento de vórtices. Para esta região de KC, devido a não separação das camadas limites, a teoria de escoamento potencial consegue prever o valor do coeficiente de massa adicional. Caso $KC > 6$ nota-se que existe a formação de uma pequena esteira simétrica de vórtices e os resultados da teoria potencial deixam de ser válidos. A formação da esteira de vórtices para elevados valores de KC consome energia cinética do sistema. Esse consumo de energia é responsável pelo maior coeficiente de amortecimento na água do que no ar.

Além da questão da massa adicional e do aumento do amortecimento do sistema, a água oferece maior empuxo ao cilindro do que o ar. A força de empuxo diminui o efeito pendular, o que acarreta numa variação da rigidez efetiva da BEP, alterando sua frequência natural de oscilação. O efeito do empuxo na frequência natural do sistema será avaliado na seção 4.2.

Na prática, é necessário adotar um valor de frequência natural para o cálculo da velocidade reduzida V_r. Neste trabalho, a frequência adotada é a frequência natural em



(a) (b)

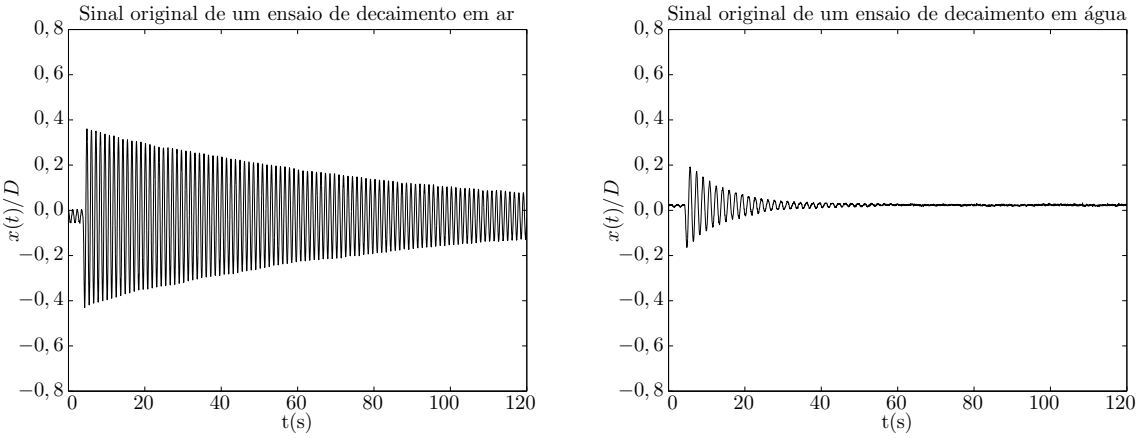
Figura 5.1: (a) Fotografia de escoamento resultante para cilindro oscilando com $KC = 0,015$, retirada de Dyke (1988) (b) Representação dos padrões de vórtice formados para valores médios e elevados de KC, adaptado de Chakrabarti (2002).

ar f_n. Essa escolha se deve a dois motivos. O primeiro é que devido aos três efeitos que a água proporciona ao ensaio de decaimento, é difícil analisar o que realmente é natural da base elástica e o que é consequência na interação fluido-estrutura. Durante os ensaios de VIV, a dinâmica dessa interação é completamente alterada e a condição do ensaio de decaimento em água se perde. O segundo motivo foge a questões de Mecânica dos Fluidos e recai em aspectos de análise de sinais. Ensaios de decaimento em ar possuem amortecimento menor que os ensaios em água o que faz com que as oscilações persistam por mais ciclos. A figura 5.2 compara dois sinais obtidos para a mesma configuração de massa e molas em ensaios de decaimento em ar e em água. Verifica-se que, no ensaio de decaimento em ar, o número de ciclos completos é maior, o que garante maior precisão no processo de determinação da frequência natural e coeficiente de amortecimento.

Procedimento experimental dos ensaios de decaimento

Em geral, o procedimento experimental empregado para as duas variações do ensaio de decaimento é o mesmo: após a montagem da condição desejada, com a seleção do cilindro de ensaio, número de lastros e conjunto de molas de interesse, aplica-se um pequeno deslocamento no cilindro que, em seguida, é liberado a partir do repouso. A principal diferença entre os ensaios de decaimento em ar e em água realmente consiste na presença ou não da coluna de água. Todos os ensaios de decaimento em água foram realizados com a mesma altura de coluna de água $h_{cn} = 0,7$m usada nos ensaios de VIV.

Nos ensaios de decaimento em ar, o deslocamento inicial do cilindro era da ordem



(a) (b)

Figura 5.2: Sinal de deslocamento do cilindro de teste para ensaios de decaimento em (a) ar (b) água.

de $0,5D$. Já nos ensaios em água o deslocamento inicial era ainda menor, da ordem de $0,2D$. Esses valores foram selecionados visando garantir $KC < 4$ e evitar a formação e o desprendimento de vórtices durante os ensaios de decaimento.

Cada direção da BEP foi testada individualmente em três repetições, totalizando seis decaimentos para cada condição da base. O tempo de aquisição usado para os ensaios foi de 120s, a uma taxa de aquisição de 100Hz. O valor de frequência natural adotado para cada direção foi calculado como a média dessas três repetições. Nos ensaios "simétricos", nos quais o mesmo conjunto de molas é usado em ambas as direções alinhada e transversal à corrente incidente, a frequência natural da condição é considerado como o valor médio entre os valores de cada direção. Já nos casos assimétricos a frequência de cada direção é assumida como a média entre o valor encontrado nas três repetições. Quando não for indicado de qual direção trata a frequência natural f_n^x ou f_n^y, assume-se que este é o valor médio f_n.

$$f_n^x = \frac{f_1^x + f_2^x + f_3^x}{3} \qquad f_n^y = \frac{f_1^y + f_2^y + f_3^y}{3} \tag{5.5}$$

$$f_n = \frac{f_n^x + f_n^y}{2} \tag{5.6}$$

O procedimento de análise de sinal empregado na determinação das frequências naturais e coeficientes de amortecimento é detalhado no apêndice D.

5.2 Ensaios de VIV

Esta seção apresenta os equipamentos utilizados nos experimentos de VIV com dois graus de liberdade e o procedimento experimental empregado nos ensaios.

5.2.1 Equipamentos utilizados

Os equipamentos usados nos ensaios de VIV são a base elástica pendular, descrita no capítulo 4, o canal de água recirculante e os sensores ópticos de posição.

Canal de água

O canal de água recirculante, ilustrado na fotografia 5.3, possui circuito fechado e seção de teste aberta. As paredes do canal são feitas de vidro para permitir visualização do escoamento. A seção de teste do canal possui $7,5$ metros de comprimento, $0,9$ metros de profundidade e $0,7$ metros de largura. Neste trabalho nenhuma tampa foi utilizada para fechar a seção de teste do canal de forma a confinar o escoamento em um duto fechado. Isso foi feito para permitir o emprego da base elástica pendular, que era articulada ao teto do laboratório e cujo cilindro de teste atravessava a superfície livre da água. Além da seção de teste, o canal é composto por uma bomba axial que mantém a água circulando e um conjunto de colméias e telas que melhoram a qualidade do escoamento, diminuindo as tridimensionalidades causadas pela tubulação de retorno e garantindo que o escoamento na seção de teste seja uniforme e com a menor turbulência possível. Devido a essas características, o canal pode operar com velocidade uniforme até $1m/s$ e com baixo valor de turbulência, inferior a 3%. Mais informações sobre o canal podem ser encontradas na tese de mestrado de Assi (2005)

O controle da velocidade do escoamento do canal se deu através da frequência de rotação da bomba axial. A frequência da bomba, por sua vez, era comandada pelo inversor de frequências que respondia aos comandos enviados pelo computador do laboratório. A interface de controle foi feita pelo programa LabView, no qual definia-se a frequência de rotação da bomba do canal N_{cn}.

Um medidor de vazão SIEMENS Sistrans F M Magflo modelo MAG5000 foi usado para medir a vazão de água no canal Q_{cn}. O valor da velocidade do escoamento na seção de teste U_∞ foi determinado assumindo-se que o perfil de velocidade ao longo de toda a seção de teste era uniforme. Uma vez que a largura do canal l_{cn} é um parâmetro fixo, a

Figura 5.3: Fotografia do canal de água recirculante usado nos experimentos.

velocidade na seção de teste fica em função da vazão Q_{cn} e do nível de água h_{cn}.

$$U_\infty = \frac{Q_{cn}}{h_{cn}\, l_{cn}} \tag{5.7}$$

A equação 5.7 é uma estimativa da velocidade média do escoamento no canal e despreza tanto os efeitos de superfície livre quanto os efeitos de camada limite nas paredes. Tais efeitos foram considerados secundários em função das dimensões da seção de teste do canal. O apêndice E apresenta uma análise sobre a incerteza de medição da velocidade do escoamento U_∞ do canal e sua relação com a frequência de rotação da bomba axial N_{cn}.

Sensores ópticos de posição

A medição de deslocamento do cilindro ao longo dos ensaios de VIV foi fundamental para este trabalho. Com a finalidade de determinar a posição instantânea do cilindro sem afetar seu movimento, duas trenas *laser* Leuze ODSL8 foram empregadas. O uso dessas trenas permitiu que a posição do cilindro fosse medida de forma independente e simultânea em cada direção. Como não há contato entre as trenas *laser* e a base elástica, o uso deste equipamento não alterou a massa, o amortecimento ou a rigidez do sistema.

Cada trena emite um feixe *laser* e mede, com um sensor óptico, as características do feixe refletido pelo alvo preso na base elástica. Dois alvos planos brancos foram incorporados à base e servem como anteparo para o feixe *laser*. A reflexão que ocorre nos alvos é difusa e espalha a luz incidente. O sensor óptico da trena laser é capaz de medir a dispersão do feixe refletido e relacioná-la a distância entre a trena e o anteparo. Quanto maior for a distância do anteparo até a trena, maior é a dispersão do feixe. A figura 5.4 ilustra como a trena e os alvos são montados durante os experimentos.

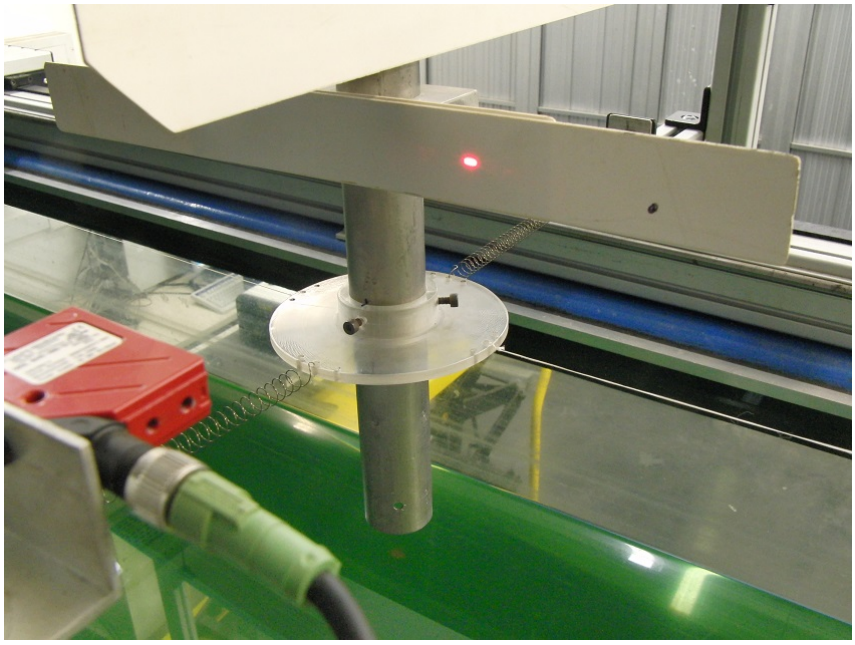


Figura 5.4: Alvo e trena *laser* usada para medição dos deslocamentos da base elástica pendular na direção transversal ao escoamento.

Sistema de controle do canal e de aquisição de dados

O controle da velocidade do canal e a aquisição dos sinais de velocidade e amplitudes de oscilação foram realizados com um sistema National Intruments através do programa LabView. A frequência de aquisição usada em todos os ensaios de VIV foi de 100Hz. Considerando que as máximas frequências observadas nos experimentos eram inferiores a 5Hz, a frequência de aquisição empregada satisfez o teorema de Shannon-Nyquist em todos os casos.

5.2.2 Procedimento experimental

Cada ensaio realizado ao longo desta investigação experimental teve um ou mais objetivos, visando fornecer dados para uma ou mais linhas de investigação. Por esse motivo é importante definir, para a clareza da tese, alguns termos a serem usados.

Cada linha de investigação surge como uma pergunta guia ou verificação de uma hipótese. Para obter dados que elucidem uma determinada pergunta, um conjunto de *ensaios de VIV* foram realizadas em diferentes condições. Ao conjunto desses experimentos foi adotado o termo *campanha experimental*. A comparação das diferentes respostas em cada condição permite, dentro de uma mesma campanha experimental, responder ou verificar as perguntas e hipóteses feitas. Ao longo deste trabalho quatro campanhas experimentais foram conduzidas.

Cada campanha experimental é composta por diversos *ensaios de VIV*. Cada ensaio completo de VIV, por sua vez, é composto por dezenas ou até centenas de *pontos experimentais*. Para cada ensaio, diferentes velocidades de escoamento são ensaiadas, porém sem alterar a condição do ensaio. Por *condição do ensaio* deve-se entender o conjunto de características: diâmetro do cilindro de ensaio D, inércia da estrutura, medida pelo números de lastros usados N_{pb} ou N_{st}, e rigidez das molas, definida em função de qual grupo de molas foi usado em cada direção, k_x e k_y.

Por fim, cada ponto experimental consiste em diferentes aquisições ao longo do tempo da velocidade do canal U_∞ e das posições do cilindro nas direções alinhada e transversal ao escoamento, $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

Pontos experimentais

O tempo de aquisição para cada ponto foi de $250s$. Este intervalo de tempo permite a aquisição de dezenas ou até centenas de ciclos de oscilação do fenômeno de VIV. O objetivo de aquisitar séries temporais longas, com relação ao período do fenômeno, é dispor de informações suficientes para realizar análises estatísticas significativas. Um exemplo é a determinação da amplitude de oscilação do sinal, que considera a média dos 10% maiores picos. Se poucos ciclos estão disponíveis, poucos pontos são considerados para a média e esta perde sua relevância estatística. Além disso, as variações de frequência Δf em uma Transformada Discreta de Fourier para um sinal finito com duração T_{aq} equivalem a $\Delta f = 1/T_{aq}$. Quanto maior o intervalo de aquisição, maior a resolução obtida no domínio da frequência.

Existe uma relação de ganho e perda na seleção do tempo de aquisição T_{aq}.

Ensaios muito longos permitem análises com maior relevância estatística e maior resolução temporal. O contraponto ocorre no tempo necessário para a realização dos ensaios, como descrito a seguir.

Ensaios de VIV

Ensaios completos de VIV envolvem a medição de dezenas ou até centenas de pontos. Enquanto a análise de cada ponto individual pode ser feita com séries temporais dos sinais registrados, os resultados de um "ensaio completo" são compilados em curvas de amplitude e frequências de oscilação normalizadas. Para a aquisição de cada ponto a frequência de rotação da bomba N_{cn} foi mantida constante, mantendo estável a velocidade do escoamento no canal U_∞. Após os 250s de aquisição de cada ponto, a frequência de rotação da bomba do canal era alterada e um intervalo de 150s era aguardado até o início da próxima aquisição. Ao longo desta tese, o termo "corrida de VIV" também é usado como sinônimo para um ensaio completo de VIV.

A espera de 150s entre a aquisição de cada ponto tinha por objetivo permitir que a velocidade do canal se estabilizasse após a variação de N_{cn} e evitasse a presença de efeitos transientes na resposta medida. O valor de 150s para a espera entre os ensaios foi definido com base em um estudo sobre as características do escoamento do canal, apresentado no apêndice E. Este estudo verificou que o canal demora menos de 100s para estabilizar sua velocidade de escoamento após a variação na frequência N_{cn}. O valor de 150s foi escolhido de forma a garantir o intervalo de tempo necessário para a estabilização da velocidade e também para permitir ao cilindro de ensaio, imerso no escoamento, que encontrasse um novo modo estável de vibrar. Os resultados apresentados neste trabalho são, por esse motivo, medições de características médias sem efeitos de transição.

Para a maioria dos ensaios de VIV, a variação da frequência de rotação do canal foi positiva. Isso implica que para esses experimentos a primeira velocidade ensaiada era baixa e esta era gradualmente aumentada até a velocidade máxima de cada ensaio. A velocidade mínima em cada corrida era definida pela menor frequência de rotação da bomba $N_{cn} = 15$Hz e equivalia a $U_\infty = 0,02$m/s. As variações de N_{cn} variavam entre 2 a 5 Hz, visando em cada condição fazer com que o valor de velocidade reduzida $V_r \approx 16$ fosse atingido. Como a velocidade reduzida é função do diâmetro do cilindro de teste, da velocidade do canal e da frequência natural de oscilação da base, o valor $V_r = 16$ foi atingido com diferentes valores máximos de U_∞.

Com o objetivo de estudar em detalhe as curvas de resposta para cada condição, cada corrida contém em média 100 pontos com diferentes velocidades. Alguns ensaios, com

maiores valores de D e f_n puderam ser realizados de forma bastante refinada e possuem cerca de 140 pontos, enquanto que outras corridas, com baixos valores de f_n e D, possuem menor resolução e "apenas" 40 pontos. Vale destacar que muitos trabalhos presentes na literatura sobre VIV apresentam curvas de amplitude com menos do que 30 pontos para cada corrida.

Considerando corridas com uma média de 100 pontos experimentais, tempo de aquisição de 250s e intervalo de espera de 150s, a duração média de cada corrida era da ordem de onze horas.

Devido às variações positivas na velocidade do canal para a maioria dos ensaios, todas essas corridas de VIV foram realizadas com alterações positivas de velocidade reduzida $\Delta V_r > 0$. Sabe-se, porém, que o fenômeno de VIV é sensível a seu histórico e pode apresentar respostas distintas caso determinada velocidade seja atingida pela aceleração ou desaceleração do escoamento. Por esse motivo, uma campanha experimental foi realizada com ensaios de VIV completos em ambos os sentidos de V_r para verificar a ocorrência de histerese. Para os ensaios dessa campanha específica, o sentido de V_r no qual cada corrida foi realizada é indicado nas curvas de resposta. Quando nenhuma informação for feita sobre o sentido do ensaio, deve-se assumir que este foi realizado com variações positivas de V_r.

Campanhas experimentais

Quatro campanhas experimentais são apresentadas nesta tese. Cada uma foi realizada com objetivos distintos e, por isso, elas possuem número diferente de ensaios de VIV. As campanhas experimentais conduzidas são descritas abaixo. Análises mais aprofundadas de cada campanha, assim como seus resultados, são apresentados no capítulo 7.

- Repetitividade

  Alguns ensaios foram repetidos em diferentes oportunidades ao longo do desenvolvimento deste trabalho e tiveram como objetivo avaliar a repetitividade dos experimentos de VIV. Essas verificações foram muito importantes, pois indicaram a influência de parâmetros que inicialmente não eram considerados.

- Histerese

  O objetivo desta campanha experimental foi verificar a ocorrência da histerese no fenômeno de VIV com dois graus de liberdade. Corridas de VIV foram realizadas

com variações positivas positivas de velocidade reduzida $\Delta V_r > 0$ e, em seguida, repetidas com variações negativas $\Delta V_r < 0$. O resultado de ambas as corridas é, então, comparado. Essa verificação foi feita para o cilindro de teste com diâmetro externo $D = 32$mm, conjunto de molas suaves (D) e seis variações de momento de inércia J^*.

- Análise paramétrica: momento de inércia

  Nesta campanha de ensaios, um total de 28 diferentes corridas de VIV foram ensaiadas com o propósito de se estudar como ocorre a variação da resposta em amplitude e frequência do fenômeno de VIV em função do parâmetro de inércia J^*. O parâmetro é variado a partir de $J^* = 0,73$, para ensaio com cilindro $D = 50$mm e sem nenhum lastro de aço $N_{st} = 0$, até $J^* = 6,19$, para ensaio com $N_{st} = 27$. Em todos estes ensaios o mesmo conjunto de molas suaves (D) foi empregado em ambas as direções. Uma vez que a rigidez da base é simétrica e constante ao longo de toda a campanha de ensaios, este conjunto de ensaios de VIV pode ser entendido como um estudo paramétrico do fenômeno de VIV em função do momento de inércia J^*.

- Análise paramétrica: rigidez do sistema

  Seguindo com os estudos paramétricos, foram realizados ensaios de VIV variando-se a rigidez do sistema, com o emprego de diferentes molas na BEP. Estes ensaios foram realizados com o cilindro $D = 32$mm e empregaram três condições diferentes de rigidez. Na primeira delas a base elástica foi montada sem molas e toda a sua rigidez vinha apenas do efeito pendular. Na segunda condição, as molas suaves do conjunto D foram utilizadas. Por fim, na terceira condição, o conjunto de molas mais rígidas (C) foi usado nos ensaios. Para cada condição de rigidez, sete valores de momento de inércia J^* foram ensaiados. O objetivo desta campanha de ensaios era verificar como a rigidez do sistema afeta a resposta do fenômeno de VIV para ensaios com J^* constante.

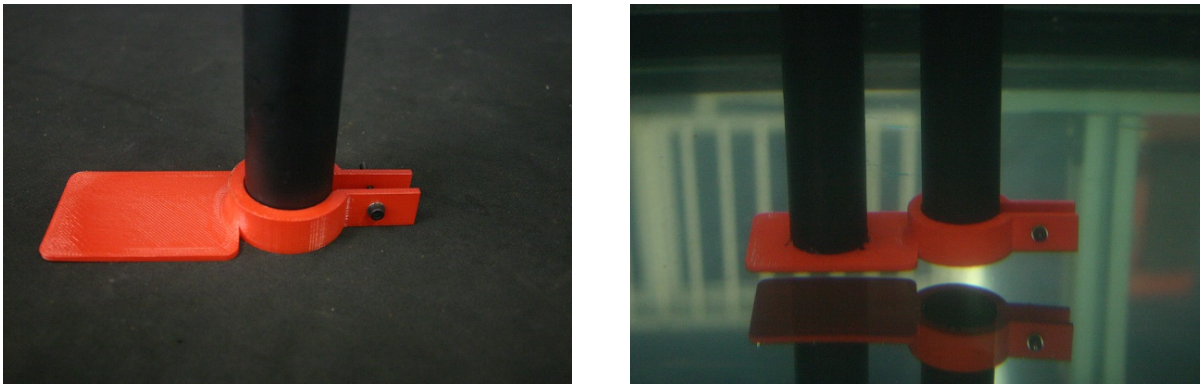
Detalhes de montagem

A montagem do cilindro de ensaio, seja ele o maior com $D = 50$mm ou o menor com $D = 32$mm, exige atenção no que se refere à distância entre a extremidade livre do cilindro e o fundo do canal. Ao ser conectado à base elástica o cilindro de ensaio é preso por uma luva metálica ao tubo de titânio. Essa montagem confere ao cilindro de teste a possibilidade de ser movimentado na direção definida pelo eixo do tubo de titânio. Essa

característica telescópica da montagem permite ajustar de maneira fina a distância do cilindro ao fundo do canal.

Morse, Govardhan e Williamson (2008) analisaram a importância distância entre a extremidade livre do cilindro e o fundo do canal no fenômeno de VIV. Segundo eles, tais efeitos são capazes de alterar a resposta geral do fenômeno de VIV fazendo com que os típicos ramos de resposta deixem de ser observados. Visando mitigar a influência da extremidade livre, o cilindro de teste foi mantido próximo ao fundo do canal. A distância entre o cilindro e o canal foi padronizada para todos os ensaios com o emprego de um separador, ilustrado na figura 5.5. A espessura do separador é de 3mm fazendo com que a relação entre a distância do cilindro ao fundo do canal seja de $\delta_c = 0,09D$ para o caso de $D = 32$mm e $\delta_c = 0,06D$ para o caso de $D = 50$mm.

É importante destacar que a distância δ_c não pode ser muito baixa uma vez que isso provocaria o emperramento da base caso ela se movesse. O valor $\delta_c = 3$mm garante pouca influência da extremidade livre e evita que o cilindro toque o fundo do canal, independente de seu movimento.



(a) (b)

Figura 5.5: (a) Separador usado para distanciar cilindro de teste do fundo do canal. (b) Exemplo de uso do separador.

Mais informações sobre a base elástica, tais como detalhes sobre os cilindros de ensaio, lastros e molas usados nos experimentos, podem ser encontrados no capítulo 4.

Processamento de sinal

Durante a aquisição de sinais de todos os ensaios de VIV e ensaios de decaimento, um filtro passa baixa com frequência de corte de 10Hz foi empregado. Este filtro foi definido no próprio sistema de aquisição, de forma que os sinais registrados já possuem

esse primeiro tratamento.

Para cada ponto um arquivo de texto foi gravado, registrando o instante de cada aquisição, a velocidade do canal e as posições $x(t)$ e $y(t)$. Esses arquivos foram analisados posteriormente, conforme o procedimento de análise de sinais descrito em detalhe no apêndice D. Ao término de cada corrida, um conjunto de dezenas ou centenas de arquivos de texto eram analisados para fornecer os gráficos de amplitude e frequências de oscilação apresentados ao longo da tese.

5.3 Visualizações de escoamento com a técnica PIV

Esta seção apresenta a técnica de visualização de escoamento empregada neste trabalho, os equipamentos utilizados e o procedimento experimental adotado.

5.3.1 Fundamentos da técnica *Particle Image Velocimetry*

A técnica de visualização conhecida como *Particle Image Velocimetry*, que ao longo do trabalho será referenciada pela sigla PIV, é uma metodologia experimental não invasiva capaz de medir o campo de velocidades de escoamentos em uma determinada área ou volume de interesse. Uma tentativa de tradução do nome da técnica seria "velocimetria por imagens de partículas". De fato, a técnica baseia-se em adicionar pequenas partículas ao escoamento e registrar seu movimento com câmeras. As partículas agem como marcadores do escoamento e assume-se que elas sigam o comportamento do fluido. A comparação entre fotografias do escoamento registradas em instantes de tempo diferentes permite analisar como as partículas se moveram e, assim, inferir qual é a velocidade do escoamento em diferentes regiões.

Para que a técnica não afete o escoamento e seja não invasiva, é necessário que as partículas sejam muito pequenas em relação às dimensões características do escoamento e que tenham densidade próxima à do fluido que escoa, de forma a não induzirem movimento vertical. Essas duas características são respeitadas neste trabalho.

A figura 5.6(a) ilustra um exemplo de fotografia obtida para uma visualização do escoamento. Para que as partículas adicionadas ao escoamento não o afetem de forma significativa e o sigam de maneira representativa, é preciso que elas sejam pequenas e também que possuam densidade próxima à do fluido. Por serem tão pequenas, as partículas se fazem quase invisíveis a olho nu e só podem ser visualizadas como na imagem 5.6(a) com o emprego de poderosas fontes luminosas. Geralmente canhões *laser* são usados para emitir feixes de luz que, após atravessarem um conjunto de lentes, criam planos iluminados. As partículas que passarem pela região iluminada refletem a luz de forma dispersa, o que possibilita que câmeras sejam posicionadas de maneira ortogonal ao plano de luz e ainda assim recebam a luz refletida por elas. O efeito da reflexão difusa acaba por "ampliar" a imagem das partículas, permitindo assim que possam ser registradas nas fotografias.

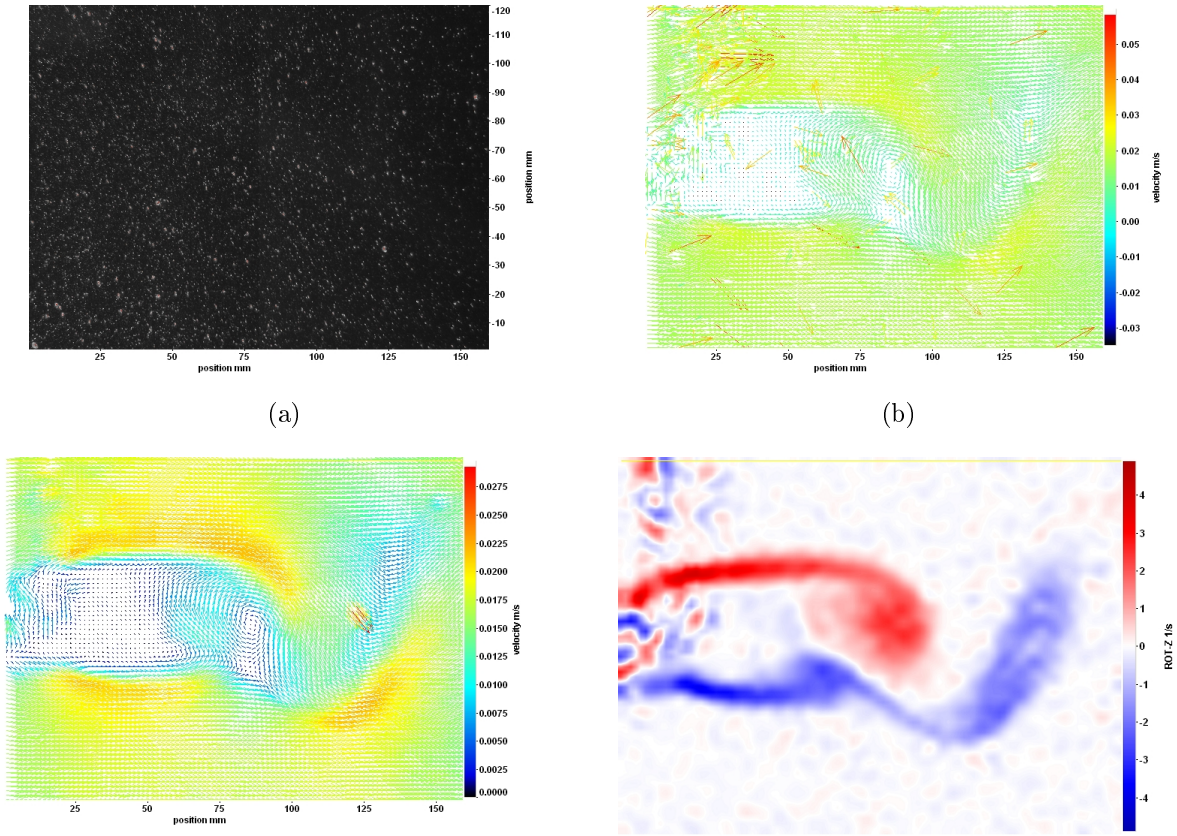
Na técnica PIV a fotografia obtida é dividida em diversas regiões denominadas de zonas de interrogação. Geralmente essas regiões são quadradas e possuem entre 16 a

64 *pixels* de lado, porém isso não é obrigatório. Uma vez definidas as pequenas parcelas do escoamento, emprega-se a técnica estatística de correlação cruzada entre duas zonas de interrogação correspondentes, cada uma medida em um instante de tempo. Nessa etapa a intensidade luminosa de cada ponto da imagem é multiplicada pela intensidade luminosa de outro ponto da mesma zona de interrogação na segunda imagem. Cria-se assim um mapa de correlação que permite definir o movimento médio mais provável de todas as partículas inseridas nessa zona de interrogação. É importante destacar, portanto, que a técnica PIV não segue partículas individuais, mas sim estima através de uma técnica estatística o deslocamento médio mais provável de um grupo de partículas dentro de uma região. Uma vez conhecido o deslocamento e o intervalo de tempo no qual ele ocorreu, calcula-se o vetor velocidade.

Existem muitas variações da técnica PIV e muitos cuidados que devem ser tomados durante sua implementação. Dentre as variações da técnica, pode-se citar o PIV estereoscópico, capaz de medir as três componentes de velocidade em um plano ou ainda o PIV holográfico, capaz de registrar o campo de velocidades em um volume de fluido e não apenas em uma fatia deste. Não faz parte do escopo desta seção apresentar esses detalhes e variações. Mais informações podem ser encontradas em Adrian (1991), Nogueira, Lecuona e Rodriguez (1997) e Adrian (2005), para citar apenas três exemplos.

Uma vez encontrados os vetores de velocidade para cada zona de interrogação monta-se o campo de velocidades da área visualizada. Tal como as séries temporais registradas nos ensaios de VIV, os campos de velocidade precisam ser pós-processados para eliminar ruídos e erros. Um dos erros mais comuns nesse tipo de resultado são vetores espúrios de velocidade. Os vetores espúrios são consequência do processo numérico para determinação dos picos de correlação e não possuem significado físico. Filtros de média são usados para eliminar esse tipo de erro do campo de velocidades final. É muito importante retirar os vetores espúrios dos campos de PIV, pois estes afetam de forma significativa o cálculo de grandezas derivadas, tais como o campo de vorticidade.

A figura 5.6 resume todo o processo. A imagem 5.6(a) é registrada pelas câmeras do sistema e então dividida em zonas de interrogação. Após o processo de correlação cruzada obtém-se o campo de velocidades ilustrado na imagem 5.6(b). Este campo recebe um filtro de média que elimina os vetores espúrios e os substitui por vetores com velocidades médias, apresentado na figura 5.6(c). Por fim, o campo de velocidade final é usado para cálculo de grandezas derivadas. No caso da figura 5.6(d) observa-se o campo de vorticidade para o escoamento ao redor de cilindro fixo.



(a) (b) (c) (d)

Figura 5.6: Etapas do processamento de imagens da técnica PIV (a) foto do escoamento (b) campo de velocidade sem eliminação dos vetores espúrios (c) campo de velocidades após processo de filtragem (c) campo de vorticidade.

5.3.2 Equipamentos utilizados

O sistema PIV empregado no trabalho é um sistema *LaVision FlowMaster*. O sistema é composto por uma fonte de luz, câmera digital, conjunto de lentes, marcadores de poliamida e um programa de controle do sistema e análise das fotografias.

A fonte de luz é um canhão *laser* Quantel Twins Brilliant Nd:YAG de pulso duplo com comprimento de onda de 532nm, energia máxima por pulso de $200mJ$, potência máxima média de $4W$ e duração do pulso de 4ns. O canhão *laser*, ilustrado na figura 5.7(a), emite dois feixes de laser com intervalo δt entre eles. A cada ciclo de aquisição, composto pelo registro de duas imagens, um campo de velocidade é obtido e representa a velocidade média do escoamento entre esses dois instantes de tempo.

O sistema empregado neste trabalho opera a 14,8 Hz. A câmera digital armazena em sua memória interna um total de 345 pares de imagens, resultando no tempo de

aquisição de $23s$. Após esse período a aquisição é interrompida e as fotos são transferidas para o computador. Apesar de a frequência de aquisição do sistema de visualização PIV ser menor que a frequência de aquisição usada nos ensaios de VIV, ela ainda supera com folga o dobro da frequência máxima de emissão de vórtices registrada e, portanto, respeita o teorema de Shannon-Nyquist.

A frente da saída do canhão *laser* há duas lentes, uma esférica e outra cilíndrica. A primeira lente é uma lente cilíndrica divergente de foco -15mm. Esta lente espalha a luz do feixe criando uma espécie setor circular de luz que atinge a segunda lente. Esta, por sua vez, é uma lente esférica convergente com foco 1000mm que focaliza a luz em um plano.

(a) (b)

Figura 5.7: (a) Canhão *laser* Quantel Twins Brilliant. (b) câmeras Imager Pro X 2M.

A figura 5.7(b) ilustra o modelo de câmera usado no trabalho e sua montagem sob o canal. Apesar de a imagem ilustrar duas câmeras, apenas uma delas foi usada na obtenção dos campos de velocidade. A câmera usada é uma Imager Pro X 2M e possui resolução 1600×1200 *pixels*. A câmera foi equipada com uma lente convergente NiKon AF Nikkor com distância focal de 50mm(f/1,4D). O conjunto foi montado de maneira a visualizar a maior área de escoamento possível.

As partículas empregadas como marcadores do escoamento são pequenas esferas de poliamida com diâmetro médio de $11\mu m$. As esferas de poliamida são tão pequenas que, quando imersas no escoamento, só se tornam visíveis quando iluminadas pelo *laser*.

O controle do canhão *laser*, a sincronização deste com as câmeras e o procedimento de análise das fotografias obtidas foram feitos no programa DaVis 7.2.

5.3.3 Procedimento experimental

O sistema PIV, conjunto formado por câmera e canhão *laser*, foi montado de forma a visualizar o plano horizontal posicionado na metade da altura imersa do canal de água recirculante. Como nos experimentos de VIV a altura da coluna de água foi mantida em $0,7$m, de forma que o plano visualizado foi calibrado para a altura de $0,35$m acima do fundo do canal. A câmera utilizada no registro do escoamento foi posicionada abaixo do chão de vidro do canal e ligeiramente a jusante da BEP, com o objetivo de observar a esteira formada e não o escoamento incidente no cilindro. O canhão *laser* foi posicionado ao lado do canal de água, para que pudesse iluminar o plano de interesse através das paredes de vidro.

O cilindro de ensaio usado nos experimentos com visualização é o mesmo cilindro com diâmetro externo $D = 32$mm usado em diversos ensaios de VIV. A presença do cilindro na área visualizada cria um problema óptico devido à intensidade de luz refletida pelo cilindro. A superfície de um cilindro com 32mm de diâmetro é muito grande quando comparada à superfície das partículas micrométricas de poliamida e isso faz com que a luz refletida por ele seja muito mais intensa que a luz das partículas, ofuscando-as. Para lidar com esse problema, o cilindro teve sua superfície recoberta por uma tinta preta fosca. Um efeito colateral de empregar esse pintura é que o cilindro passa a ser opaco e não permite que a região atrás dele seja iluminada, criando assim uma área de sombra na imagem do PIV. A imagem 5.8(a) ilustra esse efeito.

Uma alternativa para iluminar a região de sombra e eliminar esse "buraco" na imagem é empregar um espelho para refletir a luz do canhão *laser*. Com esse objetivo, um espelho plano foi colado na parede de vidro oposta ao lado do canhão *laser*. Além de eliminar a área de sombra da imagem, o uso do espelho aumenta a intensidade luminosa do restante da imagem. Os esquemas 5.8(c) e 5.8(d) ilustram o princípio básico dessa solução. A fotografia 5.8(b) demonstra o resultado obtido com o uso do espelho.

Para calibrar o sistema, posiciona-se um alvo conhecido no plano iluminado pelo *laser* e registra-se sua imagem. Uma vez que as dimensões do alvo são conhecidas, pode-se determinar a relação entre o tamanho dos *pixels* da imagem com as dimensões físicas do alvo em milímetros. O alvo usado consiste em uma placa metálica preta com diversos círculos brancos posicionados nos vértices de um reticulado regular. A distância entre o centro dos círculos era de $22mm$. A vantagem de usar esse tipo de alvo é que ele permite não só determinar a relação $pixel/$mm com maior precisão, como também corrigir pequenas distorções na imagem, uma vez que o reticulado serve como gabarito de como

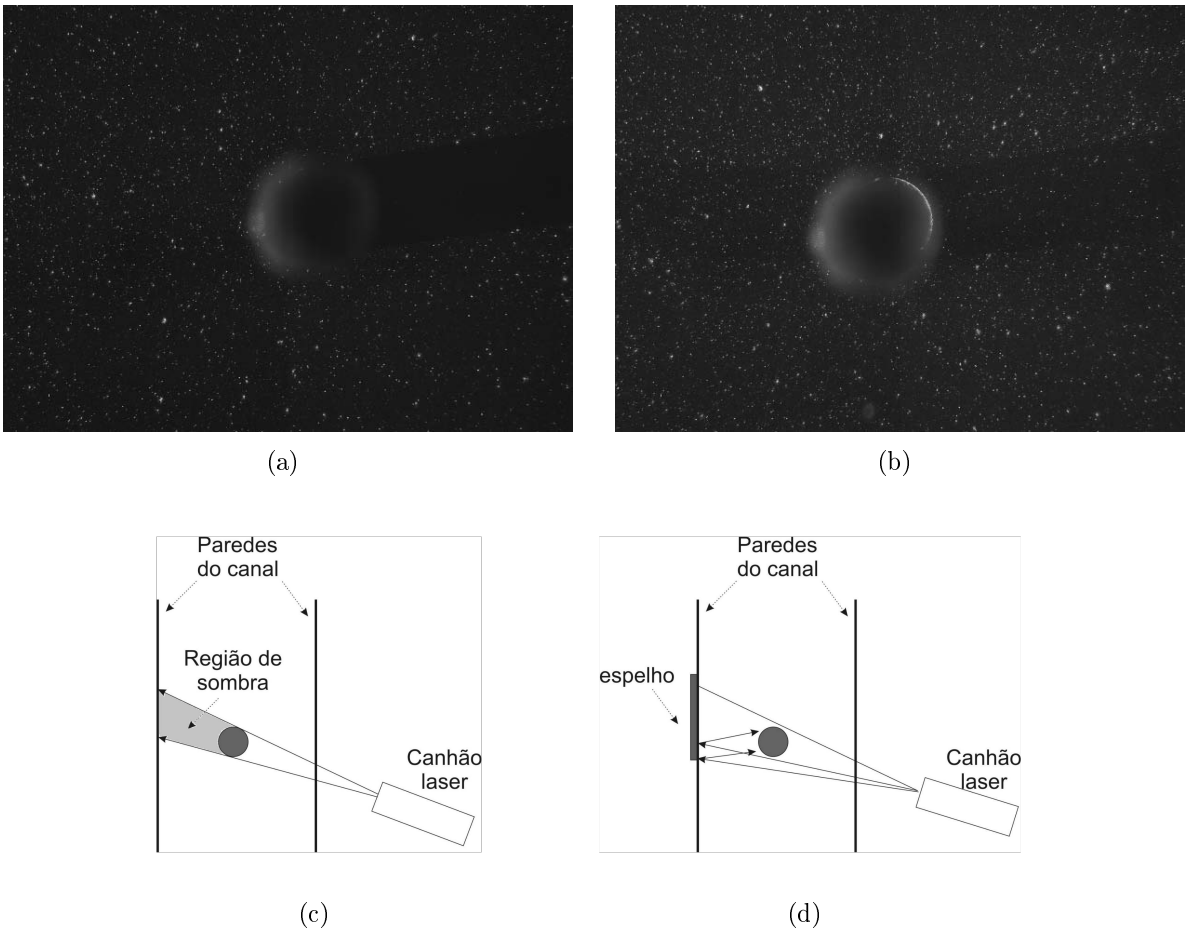


Figura 5.8: (a) Fotografia obtida sem o uso de espelho. (b) Fotografia obtida com o uso de espelho. (c) Esquema de feixes de luz sem uso do espelho. (b) Esquema que ilustra como o espelho elimina região de sombra.

a imagem deveria ser. Como o fundo do canal é um uma placa plana de vidro e as visualizações foram feitas de maneira perpendicular a ela, o efeito de distorções ópticas era desprezível.

Uma vez calibrado o sistema PIV, realiza-se a visualização do escoamento. Para calcular cada campo instantâneo de velocidade foi necessário fotografar o escoamento em dois instantes de tempo diferentes, com um intervalo δt entre eles. O valor de δt foi selecionado para cada visualização e varia entre $\delta t = 3$ms, para as maiores velocidades U_∞ ensaiadas, e $\delta t = 30$ms para as menores.

Cada condição visualizada foi registrada três vezes. Como comentado anteriormente, o sistema PIV empregado neste trabalho opera a $14,8$Hz e tem capacidade de registrar 345 pares de imagens, totalizando assim 23s como período de aquisição. Para ampliar esse período e melhorar as análises estatísticas a serem realizadas nos resulta-

dos, três conjuntos de visualizações foram feitas para cada condição, aumentando assim o número de registros de cada modo de 345 para 1035.

O procedimento de análise consiste na correlação cruzada entre as duas fotografias obtidas a cada ciclo. As zonas de interrogação criadas são janelas quadradas com 32 *pixels* de lado. A análise de correlação é realizada via transformada de Fourier e considera a sobreposição de 50% das janelas. A correlação cruzada é realizada duas vezes tendo em vista melhorar sua precisão. O primeiro passo considera janelas de 64×64 *pixels*, enquanto que o segundo passo reduz o lado das janelas para 32 *pixels*. Considerando a resolução das câmaras como 1600×1200 *pixels*, janelas com 32 *pixels* de lado e sobreposição de 50%, o campo de velocidades gerado possui resolução de 100×75. Considerando a lente usada em cada câmara e a distância do plano visualizado até as câmaras, o lado de cada zona de interrogação corresponde a $2,12$mm.

Dentre as etapas de pós-processamento dos resultados obtidos estão a busca e eliminação de vetores espúrios, assim como sua substituição por vetores médios. Além dessa etapa de pós-processamento de cada campo de velocidade, cada fotografia aquisitada pelas câmeras digitais foi analisada com o propósito de identificar e localizar o cilindro de ensaio dentro de cada campo de velocidade. As etapas do processamento de imagem usado para esse fim são descritas em detalhe no apêndice F. Os objetivos de determinar a posição do cilindro para cada imagem são usar a posição do cilindro para calcular campos médios de fase e, além disso, criar máscaras que escondam resultados sem significado físico, uma vez que dentro do cilindro não há escoamento. Mais informações sobre as etapas de pós-processamento dos campos de velocidade obtidos, com informações sobre a determinação dos campos médios de fase são apresentadas no apêndice G.

6 VISUALIZAÇÃO DOS MODOS DE DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES

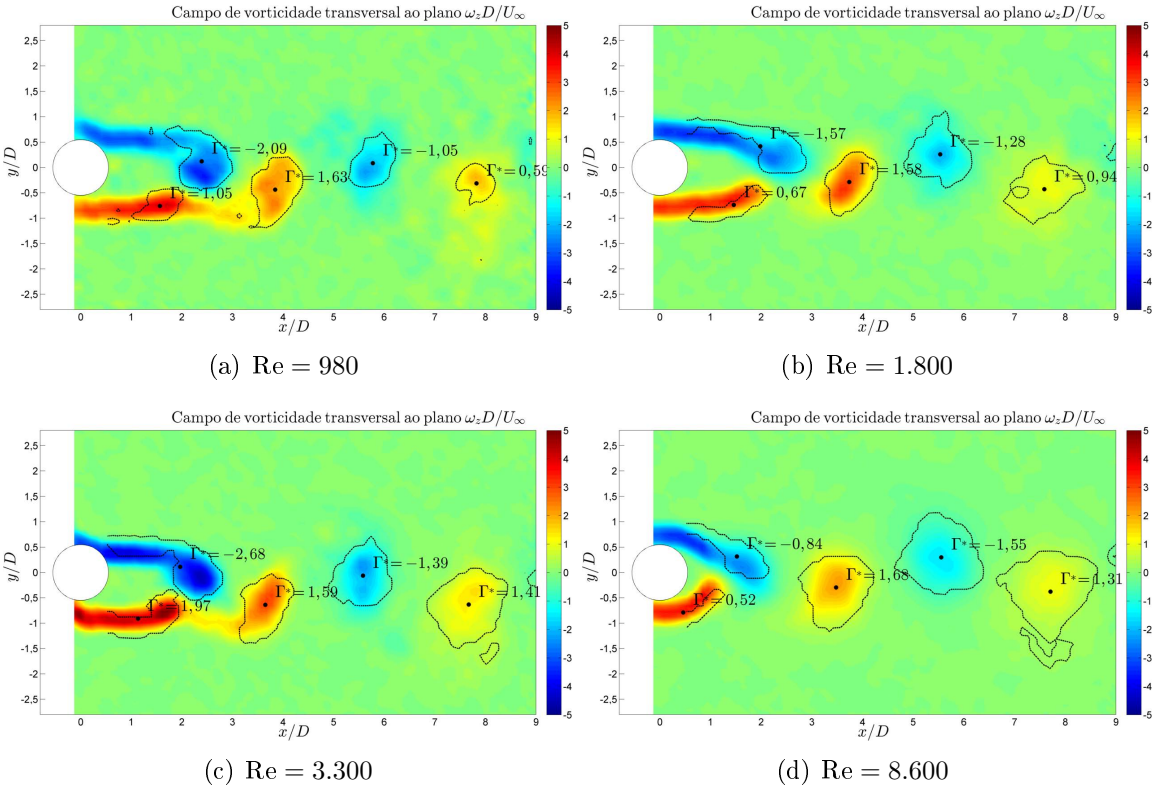
Este capítulo apresenta visualizações de escoamento realizadas com a técnica PIV e tem por objetivo analisar a dinâmica do fluido e sua estrutura vortical para diferentes ramos de resposta estudados neste trabalho.

O capítulo é dividido em quatro seções. Na primeira delas, quatro campos de vorticidade são analisados. Estes campos foram obtidos para o escoamento ao redor de cilindro fixo para diferentes valores do número de Reynolds e servem como base de comparação para as esteiras de vórtices visualizadas em ensaios de VIV. Na segunda seção, um total de 40 campos de vorticidade são apresentados para diversos valores de velocidade reduzida em quatro ensaios de VIV distintos. O objetivo desta seção é ilustrar qual modo de desprendimento de vórtices ocorre para cada ramo de resposta observado. Na terceira seção, cada modo de desprendimento de vórtices observado na seção 6.2 é estudado com mais detalhe. A seção 6.2 pode ser pensada como uma análise global dos modos de esteira, pois foca nos diferentes formatos de esteira que se desenvolvem em diferentes ramos de resposta. A seção 6.3, por sua vez, pode ser entendida como uma análise local de cada um desses modos, pois estuda sua evolução ao longo do tempo. A última seção apresenta as conclusões do capítulo.

Todas as imagens de visualização de escoamento apresentadas foram obtidas com a técnica PIV e representam campos médios de fase. Este capítulo foca nos resultados obtidos pelos ensaios de visualização. O procedimento empregado na obtenção das imagens de PIV foi descrito no capítulo 5, a determinação da posição do cilindro nas imagens é detalhada no apêndice F e o procedimento empregado para encontrar os campos médios de fase encontra-se no apêndice G. Nas figuras apresenta-se o campo adimensional de vorticidade transversal ao plano visualizado $\omega_z^* = \omega_z * D/U_\infty$. O critério λ_2, apresentado no capítulo B, foi usado na identificação dos vórtices. O valor selecionado para caracterizar um ponto do campo como dentro de um vórtice foi $\lambda_2 < -0,1$. Em todas as figuras o escoamento ocorre da esquerda para a direita.

6.1 Desprendimento de vórtices ao redor de cilindro fixo

A figura 6.1 apresenta quatro esteiras de vórtices observadas para escoamento ao redor de cilindro fixo para diferentes velocidades de escoamento. As velocidades do escoamento estão dentro da faixa de número de Reynolds usada neste trabalho.



(a) Re = 980 (b) Re = 1.800

(c) Re = 3.300 (d) Re = 8.600

Figura 6.1: Esteira de vórtice observada para escoamento ao redor de cilindro fixo. (a) Re=980, (a) Re=1.800, (a) Re=3.300, (d) Re=8.600.

Apesar de variar quase uma ordem de grandeza entre os casos com Re=980 e Re=8.600, o padrão da esteira segue inalterado, como se verifica nas imagens 6.1(a) e 6.1(d). Além da posição dos vórtices, verifica-se que sua intensidade, medida pela circulação adimensionalizada Γ^*, é pouco sensível à mudança de Re dentro desse intervalo. A principal alteração no padrão de esteira está no comprimento de formação dos vórtices. Quanto maior o valor do número de Reynolds, menor é essa distância.

Nos quatro casos a circulação dos primeiros vórtices formados é da ordem de $\Gamma^* \approx 1,6$. Vale destacar que a circulação apresentada nas imagens foi adimensionalizada em relação ao diâmetro do cilindro D e também à velocidade do escoamento U_∞, conforme a expressão 6.1. A proximidade entre os valores de Γ^* revela que, de fato, Γ cresce de forma

linear com a velocidade do escoamento para o caso de cilindro fixo. A circulação indicada é a do vórtice com circulação positiva (vórtice vermelho), localizado entre $3 < x/D < 4$. A montante desse vórtice existe ainda outro par de vórtices, porém estes ainda estão sendo formados e ainda não foram desprendidos para o escoamento.

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{D\,U_\infty} \tag{6.1}$$

Outra diferença entre os quatro casos é a área média dos vórtices. Todas as estruturas vorticais foram delimitadas considerando o mesmo critério $\lambda_2 < -0,1$, logo essa diferença não é causada pela escolha de diferentes limiares de λ_2, tal como discutido no capítulo 2. A diferença de áreas é consequência do processo de determinação dos campos médios de fase. Conforme o número de Reynolds é aumentado, o escoamento é cada vez mais perturbado pela turbulência. As variações turbulentas alteram ligeiramente a posição dos vórtices, espalhando o vórtice médio na imagem. Além disso, existe o efeito do número de imagens usadas nas comparações. Nos casos com baixo Re a frequência de emissão de vórtices é menor e um número inferior de campos instantâneos de velocidade é usado no cálculo do campo médio. Nos casos com Re mais altos, a frequência de emissão de vórtices também é mais alta, disponibilizando mais campos instantâneos para o cálculo do campo médio.

6.2 Analise global dos modos de desprendimento

Na seção anterior, o padrão de esteira de vórtices formado no escoamento ao redor de um cilindro fixo foi observado. Nesta seção diferentes modos de esteira são apresentados e relacionados com os ramos de resposta para os quais foram observados. As esteiras foram registradas para diferentes valores de velocidade reduzida V_r em quatro ensaios de VIV distintos. Um dos ensaios foi realizado com elevada inércia $J^* = 5,18$ (N_{pb}=7) e o conjunto de molas rígidas (R). Os demais ensaios foram conduzidos com $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2,51$) e com três condições de rigidez: sem molas, com o conjunto de molas suaves (S) e com o conjunto de molas rígidas (R). Nos dois primeiros casos, as oscilações na direção alinhada com a corrente não se desenvolveram e os campos de vorticidade se assemelham aos observados para VIV restrito a oscilações transversais. Essas duas condições foram obtidas para o caso com elevada inércia $J^* = 5,18$ e molas rígidas e também para o caso com baixa inércia $J^* = 2,51$ na condição sem molas. Os outros dois casos, ambos com $J^* = 2,51$, mas com os conjuntos de molas suaves e rígidas apresentaram oscilações alinhadas com a corrente.

Nesta primeira seção todas as esteiras de vórtices são caracterizadas pelo campo médio de fase de vorticidade no ponto de máxima amplitude transversal. Essa escolha, apesar de arbitrária, atende ao objetivo de identificar o padrão de esteira e compará-la com as demais.

6.2.1 Caso 1: Conjunto de molas rígidas (R) e elevado momento de inércia

O primeiro caso avaliado para a análise global dos modos de desprendimento de vórtices considera elevado momento de inércia da estrutura, $J^* = 5,18$ ($N_{pb} = 7$). Apesar de J^* não ser tão alto quando comparado com ensaios de VIV realizados em ar ou com estruturas ainda mais pesadas, este foi o maior momento de inércia avaliado para os ensaios realizados com cilindro $D = 32$mm e, por isso, o adjetivo "elevado". Para este caso foi empregado o conjunto de molas rígidas (R).

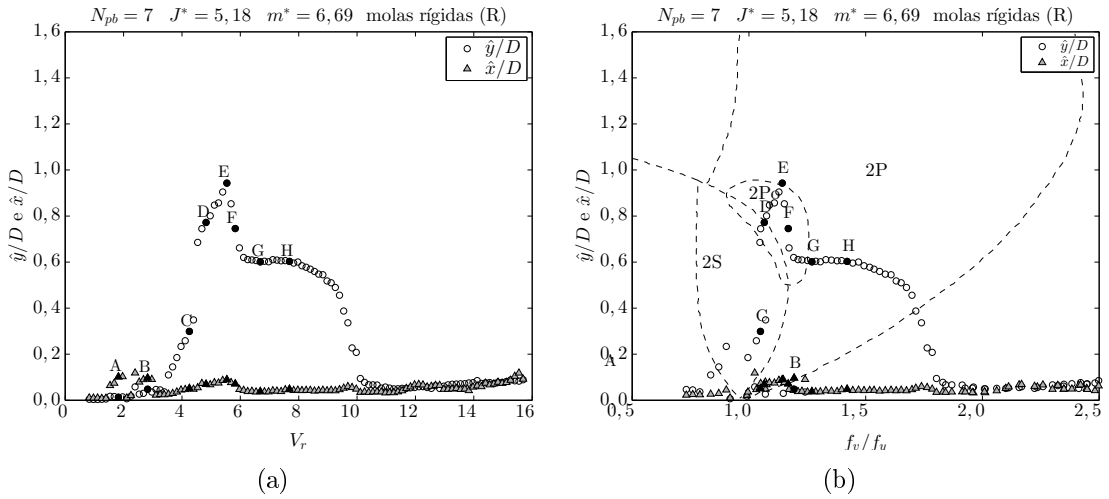


Figura 6.2: Definição dos pontos visualizados com a técnica PIV para Caso 1. (a) Amplitudes *versus* V_r, (b) Amplitudes *emph* f_v/f_y e mapa de Morse e Williamson (2009a).

A figura 6.2 apresenta duas curvas de amplitude de oscilação. A primeira, figura 6.2(a), trata das amplitudes $\hat{x}/D$ e $\hat{y}/D$ *versus* a velocidade reduzida V_r. A segunda curva, figura 6.2(b), apresenta os mesmos valores de amplitude, porém agora *versus* a "velocidade reduzida verdadeira" e com auxílio do mapa de vórtices proposto por Morse e Williamson (2009a).

Para os ensaios de VIV realizados com o cilindro de teste com diâmetro externo de $D = 32$mm, este é o caso com maior momento de inércia J^*. Oito pontos, denominados

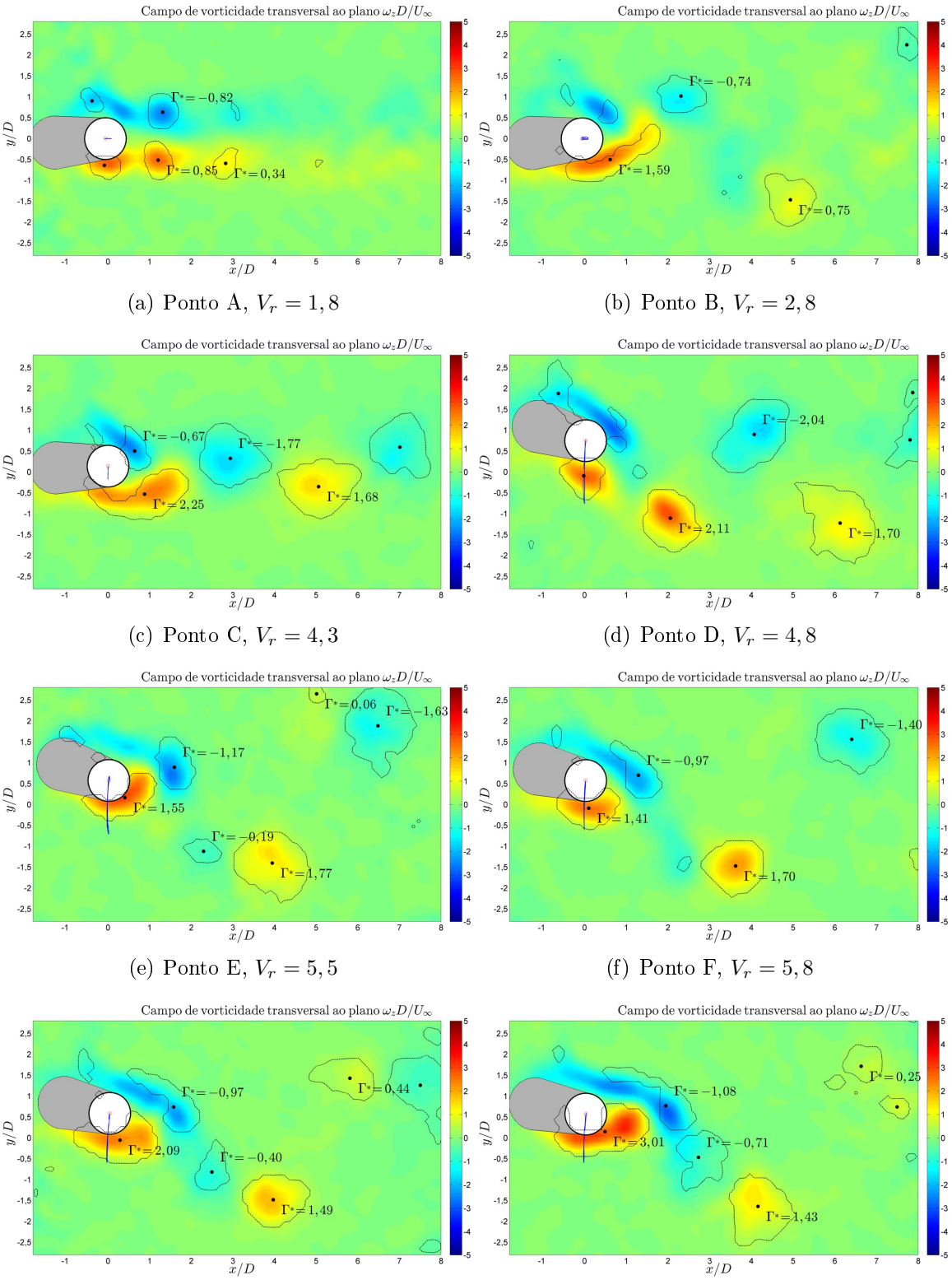
de “A” a “H” são destacados nas imagens e indicam as condições de escoamento que foram visualizadas.

Os padrões de esteira dos pontos definidos na figura 6.2 são apresentados na figura 6.3. Ainda que esta condição não apresente elevadas amplitudes de oscilação alinhadas com a corrente incidente, os dois primeiros modos de vibração alinhados são observados nos pontos “A” e “B”. No ponto “A”, imagem 6.3(a), verifica-se o padrão simétrico de desprendimento de vórtices. Este padrão de emissão está associado a movimento puramente alinhado com a corrente e ocorre apenas para baixos valores de velocidade reduzida. Como não há oscilação transversal, o parâmetro de “velocidade reduzida verdadeira” f_v/f_y não é bem definido e, por esse motivo, foi suprimido da imagem 6.2(b). Neste padrão de emissão de vórtices, usualmente denominado de Desprendimento Simétrico e abreviado por SS, da sigla inglesa *symmetric shedding*, não ocorre interação entre as camadas cisalhantes de vorticidade contrária e o escoamento é praticamente simétrico com relação ao eixo Ox.

Com a elevação da velocidade reduzida o primeiro modo alinhado torna-se instável. A simetria do escoamento se perde e o desprendimento de vórtices passa a ser alternado. O movimento transversal do cilindro, ainda que com baixa amplitude, está associado à quebra de simetria no escoamento. A figura 6.3(b) ilustra a esteira que se forma nesta condição. Devido à sua característica assimétrica, este padrão de emissão é comumente denominado de Desprendimento Assimétrico e abreviado por AS, da sigla inglesa *asymmetric shedding*.

O ponto “C” encontra-se no Ramo Inicial e está relacionado ao padrão de desprendimento 2S. De fato, verifica-se que dois vórtices são emitidos a cada ciclo e que o módulo de suas circulações é próximo. É preciso levar em consideração que, conforme os vórtices são convectados pelo escoamento, a viscosidade faz com que a vorticidade se espalhe e também diminua. Por esse motivo, quanto mais à direita do campo de vorticidade, maiores são os vórtices observados e menores são as suas circulações.

Os pontos “D”, “E” e “F”, ilustrados nas imagens 6.3(d) a 6.3(f), encontram-se no Ramo Superior e dentro da região 2Po do mapa de vórtices. O modo 2Po, segundo a definição proposta por Morse e Williamson (2009a), é caracterizado pela emissão de um par de vórtices com circulações opostas e desiguais a cada semi-ciclo. De fato, observa-se nas imagens 6.3(d) a 6.3(f), que o vórtice de menor circulação dentro do par é significativamente mais fraco que o vórtice dominante e que decai rapidamente. Na imagem 6.3(d) o vórtice mais fraco só é observado próximo ao seu vórtice dominante de $\Gamma^* = 2,11$, porém ele é tão pequeno que sua circulação não chegou a ser calculada. Já na imagem 6.3(e)



(a) Ponto A, $V_r = 1,8$

(b) Ponto B, $V_r = 2,8$

(c) Ponto C, $V_r = 4,3$

(d) Ponto D, $V_r = 4,8$

(e) Ponto E, $V_r = 5,5$

(f) Ponto F, $V_r = 5,8$

(g) Ponto G, $V_r = 6,7$

(h) Ponto H, $V_r = 7,7$

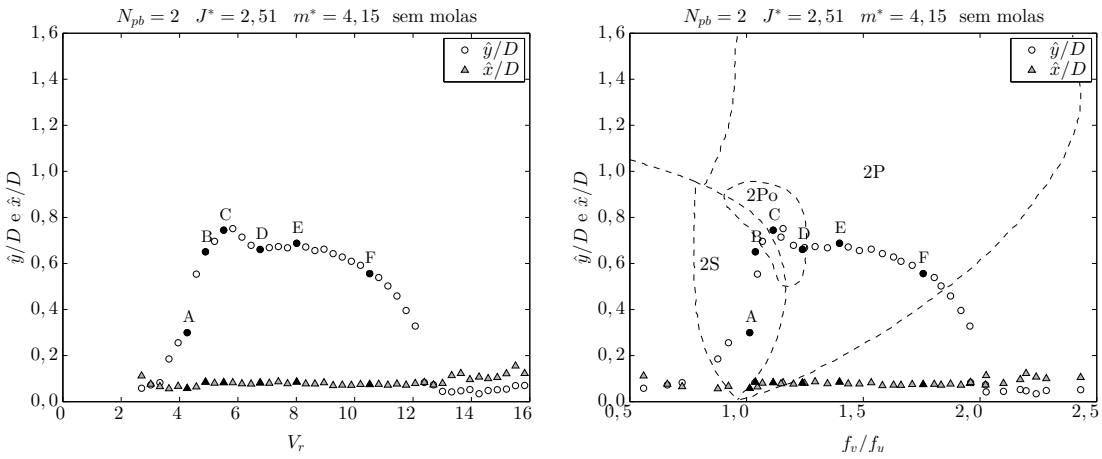
Figura 6.3: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 7$ e conjunto de molas C (Caso 1). Os pontos de A a H foram definidos na figura 6.2.

verifica-se o par com os vórtices $\Gamma^* = 1,77$ e $\Gamma^* = -0,19$, o que demonstra a grande diferença de intensidade entre eles.

Por fim, os últimos dois pontos deste caso,"G" e "H", recaem no Ramo Inferior, associado ao modo de emissão 2P. Para este modo a diferença na intensidade dos vórtices pertencentes a cada par é menor, porém ainda desigual. No caso do ponto "G", por exemplo, as circulações são $\Gamma^* = -0,40$ e $\Gamma^* = 1,49$. A figura 6.3(h) indica que o vórtice fraco do par forma-se quando parte da camada cisalhante oposta se rompe e emite um pequeno vórtice. Verifica-se que o vórtice com $\Gamma^* = -0,71$ havia sido criado junto com o vórtice $\Gamma^* = -1,08$, porém estes foram separados, enviando o vórtice fraco com $\Gamma^* = -0,71$ e formando o vórtice forte do próximo semi-ciclo.

6.2.2 Caso 2: Ensaio sem molas e baixo momento de inércia

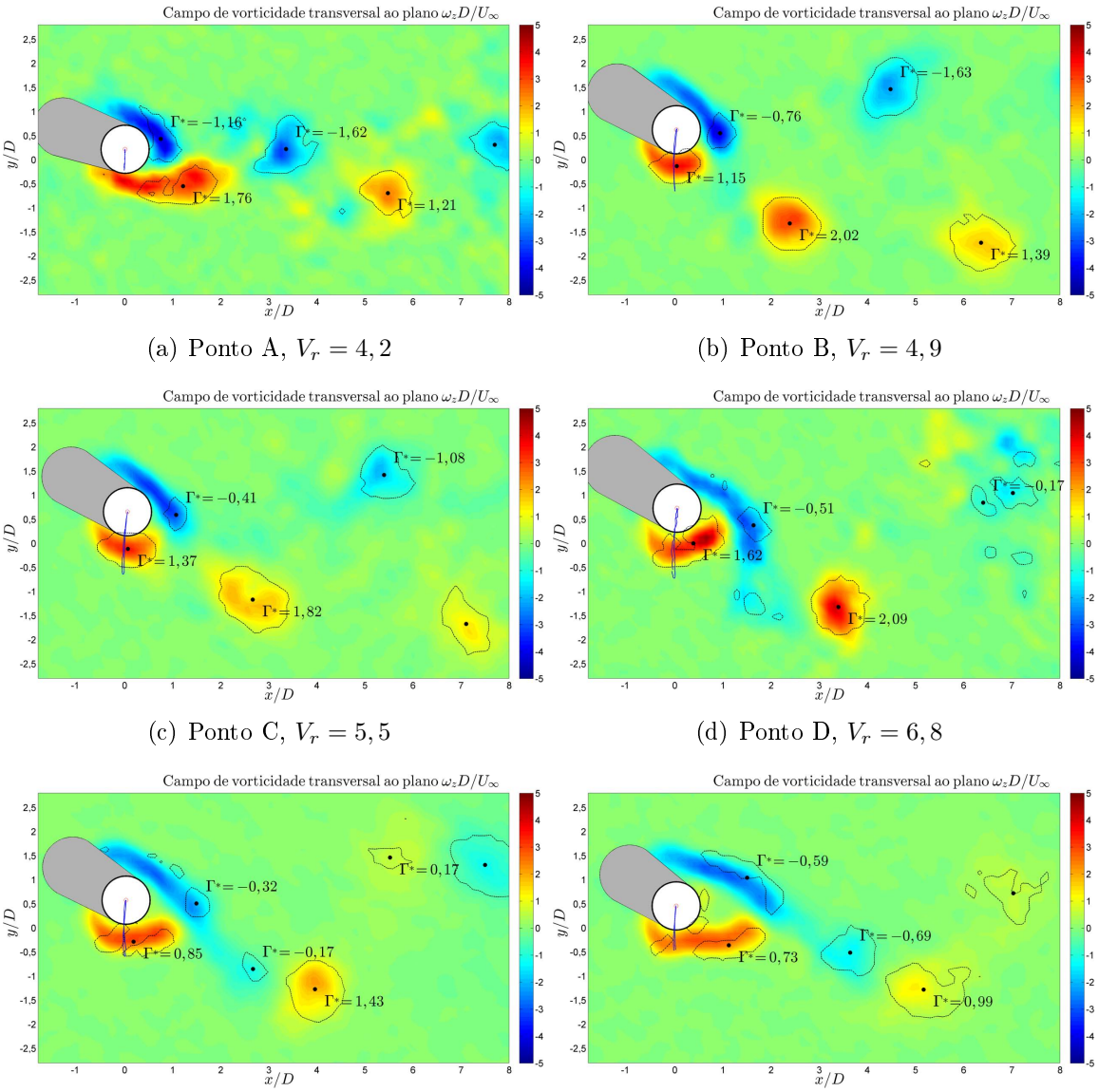
Para este segundo caso, o momento de inércia da estrutura era $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$). Nenhum conjunto de molas foi usado na condução dos ensaios de VIV e toda a restituição elástica da base elástica vem de seu efeito pendular.



(a) (b)

Figura 6.4: Definição dos pontos visualizados com a técnica PIV para Caso 2. (a) Amplitudes *versus* V_r, (b) Amplitudes *emph* f_v/f_y e mapa de Morse e Williamson (2009a).

A figura 6.4 apresenta as curvas de amplitude para a condição de ensaio com $N_{pb} = 2$ e sem molas. Nesta condição, toda a restituição elástica do sistema vem do efeito pendular da base elástica. Por ser pouco rígido, a frequência natural de oscilação em ar f_n é baixa, quando comparada com os demais casos, de forma que as mesmas variações na velocidade do canal acarretam em maiores variações no parâmetro de velocidade reduzida.



(a) Ponto A, $V_r = 4,2$

(b) Ponto B, $V_r = 4,9$

(c) Ponto C, $V_r = 5,5$

(d) Ponto D, $V_r = 6,8$

(e) Ponto E, $V_r = 8,0$

(f) Ponto F, $V_r = 10,5$

Figura 6.5: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 2$ e sem molas (Caso 2). Os pontos de A a F foram definidos na figura 6.4.

Neste caso não foram observadas oscilações alinhadas com a corrente. Apesar disso, não se pode afirmar que os dois primeiros modos alinhados não teriam se manifestado. De fato, verifica-se que o primeiro ponto da série temporal possui pequena amplitude de oscilação alinhada com a corrente, o que poderia indicar a manifestação de algum desses ramos. Uma vez que a frequência natural f_n é baixa, ainda que a menor frequência de rotação da bomba do canal fosse usada, a velocidade reduzida mínima obtida seria superior a 2. Além disso, as oscilações da velocidade do canal, ainda que sejam baixas, poderiam instabilizar e desfazer esses modos.

O primeiro ponto selecionado para visualização neste caso, ponto "A", encontra-se no Ramo Inicial e está inserido na região 2S, tal como pode ser verificado nas imagens 6.4(a) e 6.4(b). O padrão de vórtices observado na imagem 6.5(a) ilustra dois vórtices com circulação oposta sendo emitidos por ciclo, concordando com o padrão 2S esperado. O ponto "B", por sua vez, aparenta estar no Ramo Superior, porém ele encontra-se muito próximo da fronteira entre os modos 2S e 2Po, segundo a imagem 6.4(b). Analisando a esteira de vórtices formada, figura 6.5(b), observa-se que dois vórtices com circulação oposta são emitidos por ciclo, similar ao ponto "A". Apesar dessa semelhança, nota-se que a distância transversal entre os vórtices é maior no ponto "B" do que no ponto "A". Além disso, os vórtices em "B" são mais intensos, pois possuem maior circulação média. Apesar de estar próximo à região 2Po, não se observa um segundo vórtice por semi-ciclo. O modo de desprendimento observado para o ponto "C" é bastante similar ao do ponto "B", ainda que este se encontre de maneira mais central na região 2Po.

O fato de o modo 2Po não haver sido observado para este caso possui uma série de justificativas. Dentre elas está a do vórtice fraco do par que se forma a cada semi-ciclo não ter passado pelo filtro de média de fase, ou ainda de o modo não se manifestar para a faixa do número de Reynolds ensaiada nesta tese. Vale lembrar que o mapa de vórtices de Morse e Williamson (2009a) é apenas uma referência dos modos observados nesse trabalho e não o critério usado para se definir padrões que recaiam nas regiões por ele delimitadas. De fato, os pontos "B" e "C" seriam melhor classificados ainda como no modo 2S.

O ponto "D" situa-se na fronteira entre as regiões 2Po e 2P. Diferente dos pontos "B" e "C", este ponto apresenta a formação de um par de vórtices com circulação contrária. Em "D" o ´vórtice fraco é delimitado pelo critério λ_2, porém não tem sua circulação medida por ser pequeno demais. Conforme V_r cresce e o Ramo Inferior se estabelece, verifica-se que a diferença entre o módulo das circulações cai, tal como observado para as imagens 6.5(e) e 6.5(f), relacionadas aos pontos "E" e "F", respectivamente.

6.2.3 Caso 3: Conjunto de molas suaves (S) e baixa inércia

O terceiro caso analisado foi obtido para $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$) e conjunto de molas suaves (S). Neste caso, os efeitos do segundo grau de liberdade no fenômeno de VIV se manifestam. Além dos dois primeiros ramos alinhados, observam-se oscilações na direção da corrente entre $4 < V_r < 7$. Associadas a essas oscilações, ocorre amplificação da amplitude de oscilação na direção transversal.

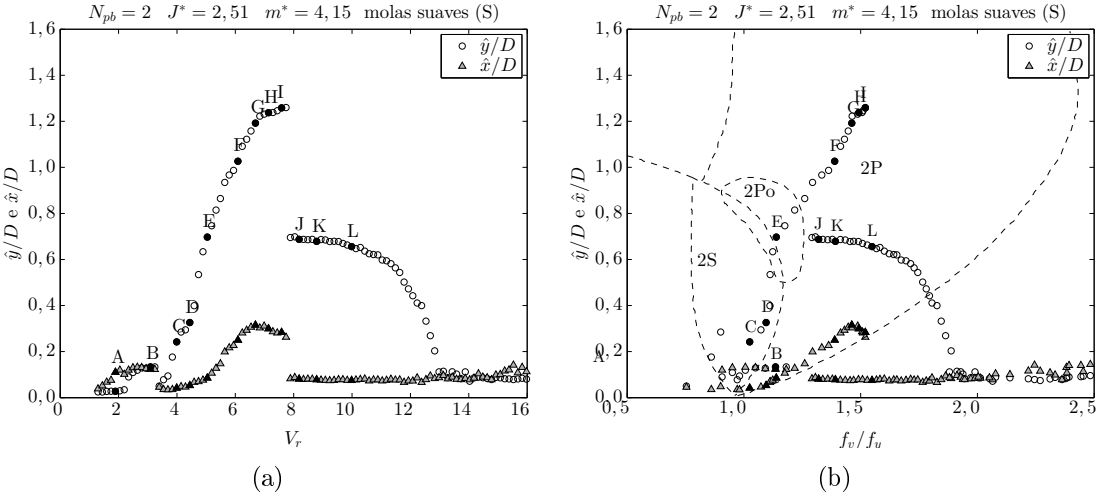
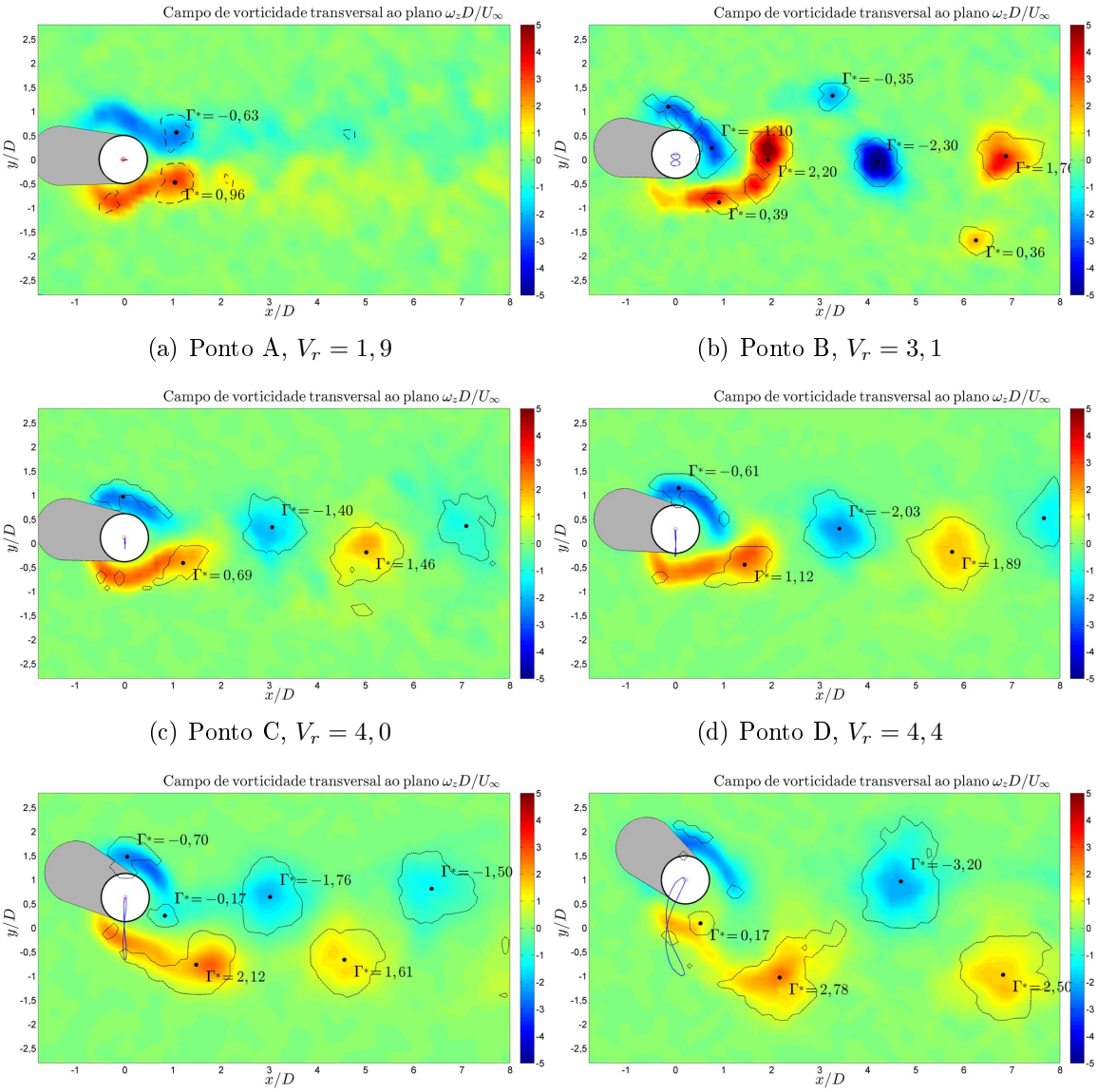


Figura 6.6: Definição dos pontos visualizados com a técnica PIV para Caso 3. (a) Amplitudes *versus* V_r, (b) Amplitudes *emph* f_v/f_y e mapa de Morse e Williamson (2009a).

Os pontos, "A" e "B", ilustrados nas imagens 6.7(a) e 6.7(b), mostram os primeiros ramos alinhados com a corrente. O ponto "A" apresenta o modo simétrico de esteira de vórtices SS, associado com movimento puramente alinhado com o escoamento. O ponto "B" apresenta o modo assimétrico e oscilações em ambas as direções. A imagem 6.7(b) permite observar que, além dos dois vórtices de mesma intensidade emitido a cada ciclo, existe também um segundo par de vórtices de menor intensidade. A cada semi-ciclo, ao invés de apenas um vórtice ser formado, dois vórtices de mesma circulação foram observados. O ponto "A" não é representado na imagem 6.6(b), pois a frequência dominante na direção transversal f_y não é bem definida para ele.

Os pontos "C" e "D" pertencem ao Ramo Inicial e encontram-se dentro da região 2S no mapa de desprendimento de vórtices. Observa-se pelas imagens 6.7(c) e 6.7(d) que o padrão de emissão de vórtices de fato apresenta um par de vórtices com circulação contrária a cada ciclo. A comparação das duas imagens demonstra que dentro do mesmo modo de desprendimento, no caso 2S, quanto maior a amplitude de oscilação transversal



(a) Ponto A, $V_r = 1,9$

(b) Ponto B, $V_r = 3,1$

(c) Ponto C, $V_r = 4,0$

(d) Ponto D, $V_r = 4,4$

(e) Ponto E, $V_r = 5,0$

(f) Ponto F, $V_r = 6,1$

Figura 6.7: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 2$ e conjunto de molas S (Caso 3). Os pontos de A a F foram definidos na figura 6.6.

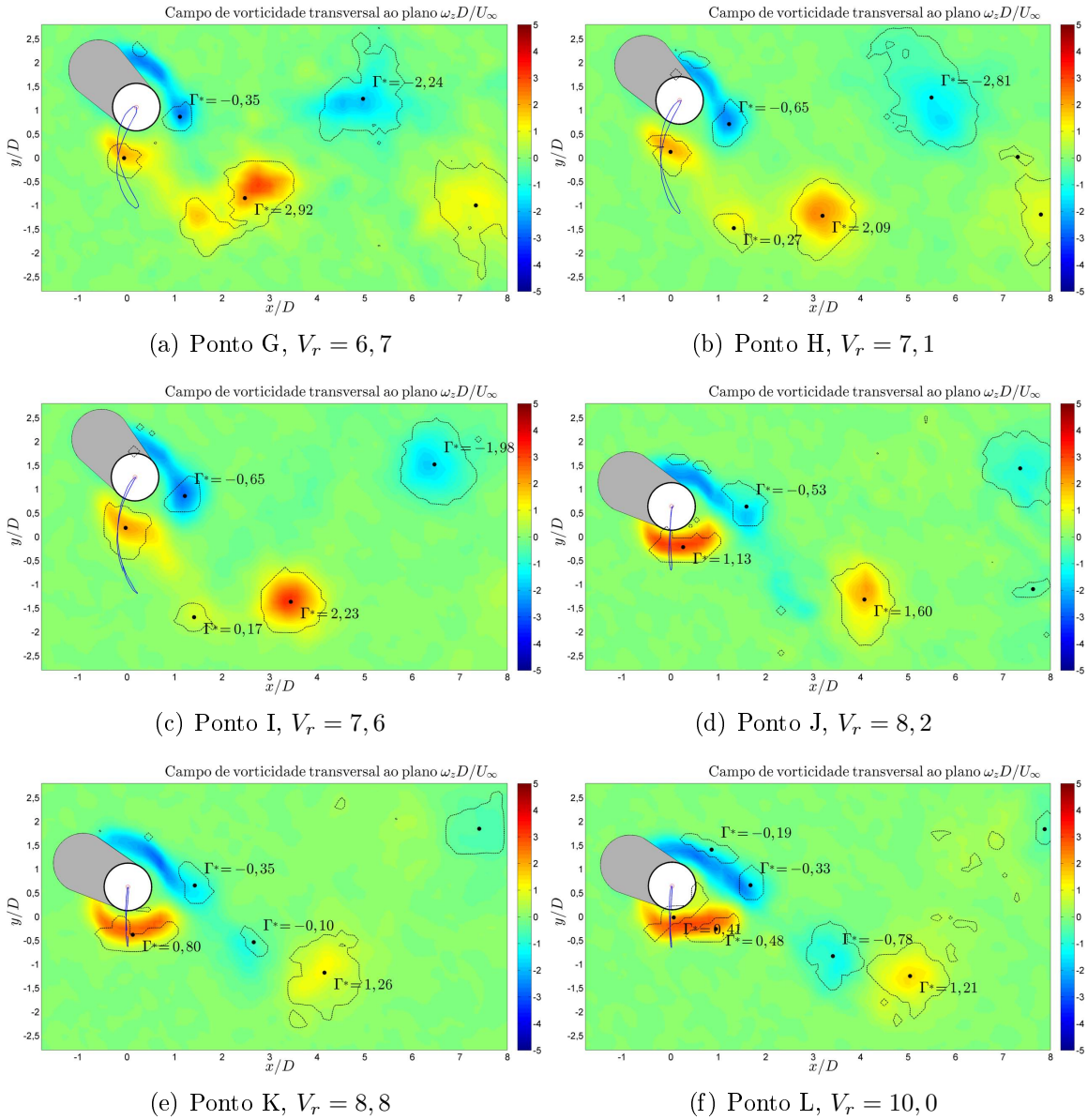
$\hat{y}/D$, maior a circulação Γ^* acumulada nos vórtices.

A partir do ponto "E", oscilações alinhadas com a corrente incidente passam a se desenvolver. No mapa de padrões de esteira, o ponto "E" está na região 2Po, porém como existe movimento na direção alinhada com a corrente, as fronteiras do mapa deixam de ser representativas. O mesmo pode ser dito para os pontos de "F" a "I", que estão na região 2P, porém não seguem esse padrão de emissão. Enquanto o ponto "F" ainda apresenta um grande vórtice formado a cada semi-ciclo, para os pontos "G", "H" e "I" verifica-se a existência de dois vórtices com o mesmo sinal de circulação, porém intensidades diferentes.

Apesar de possuir dois vórtices de circulação contrária formados a cada ciclo, o padrão de emissão do ponto"F", figura 6.7(f), pode ser considerado como um novo modo de emissão de vórtices, definido nesta tese como 2LS, da sigla inglesa *two large single*. A nova classificação se justifica por dois motivos. O primeiro é que este modo depende de oscilações na direção alinhada com a corrente para acontecer, algo que não é necessário para o modo 2S. O segundo argumento se baseia na intensidade do vórtice, que possui maior circulação do que os vórtices em esteiras to tipo 2S.

Jauvtis e Williamson (2004) observaram o modo 2T de desprendimento de vórtices para o Super Ramo Superior. O padrão 2T é caracterizado pela presença de duas trincas de vórtices a cada ciclo. Dentro dessa trinca, dois vórtices possuem o mesmo sinal de circulação, enquanto o terceiro possui circulação contrária. Os modos observados nos pontos "G", "H" e "I", figuras 6.8(a), 6.8(b) e 6.8(c), apresentam o modo 2C, com dois vórtices "coincidentes", ou seja, com o mesmo sinal de circulação. O modo 2C foi visualizado por Flemming e Williamson (2005) para ensaios de VIV em cilindro pivotado.

Os últimos três pontos, de "J" a "L", são pontos do Ramo Inferior e encontram-se situados na região 2P do mapa de Morse e Williamson (2009a). Para o ponto "J", figura 6.8(d), ainda não se observa a formação consistente de um segundo vórtice, porém nota-se concentração de vorticidade negativa (azul) à esquerda do vórtice com $\Gamma^* = 1,60$. Os pontos "K" e "L", por sua vez, possuem par de vórtices com circulação contrária e intensidades desiguais. Tal como já observado nos casos 1 e 2, conforme o valor de velocidade reduzida V_r aumenta, a diferença no módulo da circulação entre os vórtices de cada par diminui. A circulação do vórtice mais intenso segue próxima a $\Gamma^* \approx 1,2$, porém a circulação do vórtice mais fraco cresce.



(a) Ponto G, $V_r = 6,7$

(b) Ponto H, $V_r = 7,1$

(c) Ponto I, $V_r = 7,6$

(d) Ponto J, $V_r = 8,2$

(e) Ponto K, $V_r = 8,8$

(f) Ponto L, $V_r = 10,0$

Figura 6.8: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 2$ e conjunto de molas S (Caso 3). Os pontos de G a L foram definidos na figura 6.6.

6.2.4 Caso 4: Conjunto de molas rígidas (R) e baixa inércia

O último caso apresentado considera a mesma inércia dos dois casos anteriores $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$), porém emprega o conjunto de molas rígidas (R). Para este caso também foram observadas as oscilações na direção alinhada com a corrente e as elevadas amplitudes na direção transversal, características do Super Ramo Superior (SRS). A figura 6.9 apresenta as curvas de amplitude deste caso e define os pontos de "A" a "N" nos quais a técnica PIV foi empregada.

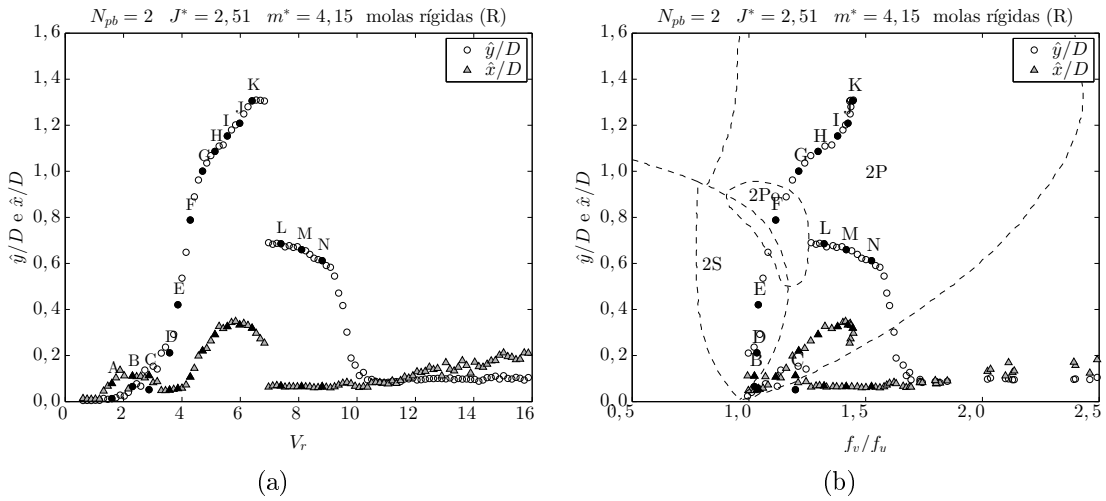
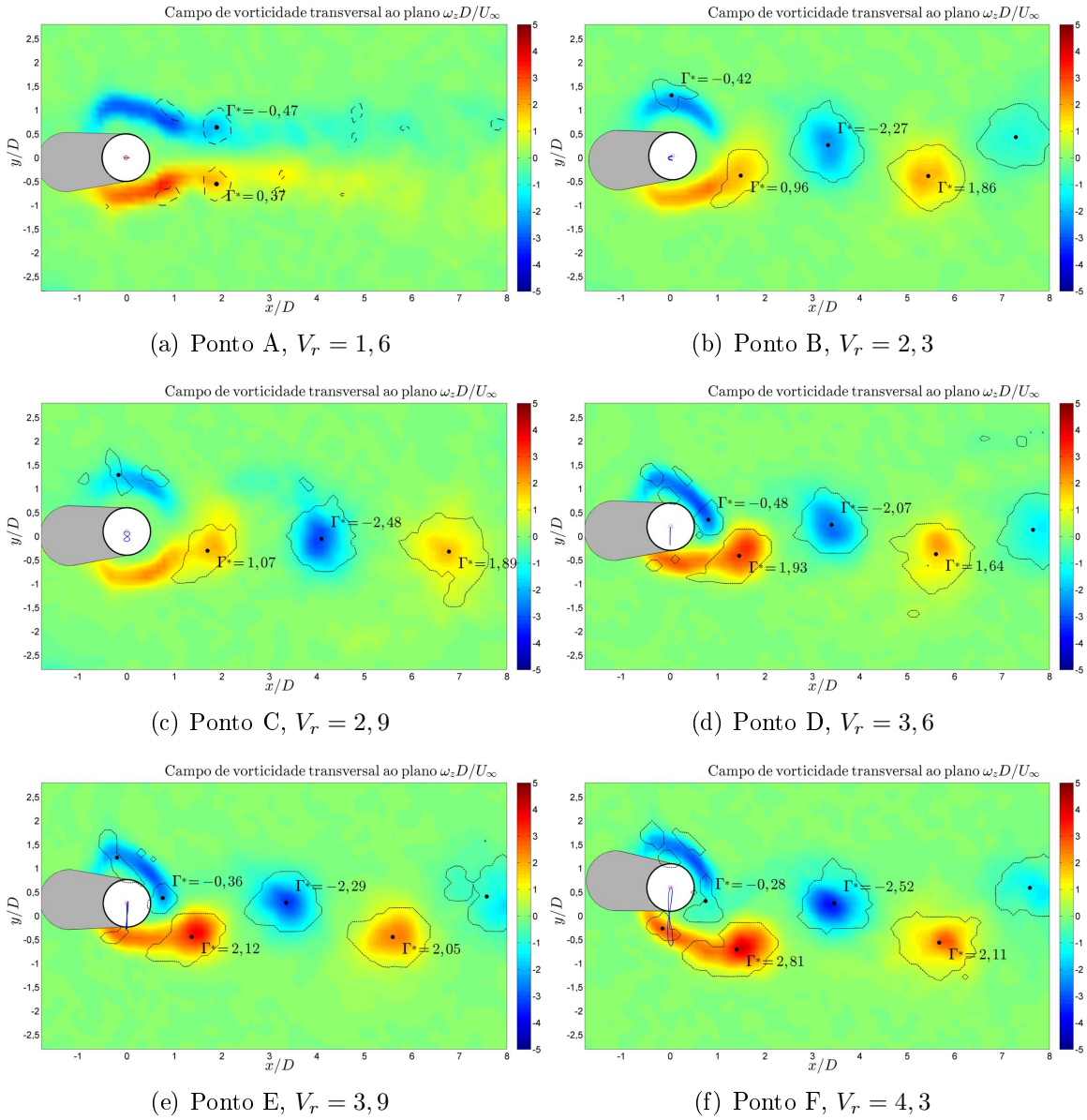


Figura 6.9: Definição dos pontos visualizados com a técnica PIV para Caso 4. (a) Amplitudes *versus* V_r, (b) Amplitudes *versus* f_v/f_y e mapa de Morse e Williamson (2009a).

Os três primeiros pontos representam os primeiros ramos alinhados. O ponto "A" apresenta o modo de desprendimento simétrico SS e os pontos "B" e "C" apresentam o padrão assimétrico AS.

Os pontos "D" e "E" estão inseridos na região 2S, como pode ser observado na figura 6.9(b). O modo de emissão observado nas figuras 6.10(d) e 6.10(e) confirma a emissão de dois vórtices com circulação oposta a cada ciclo. Pode-se observar que a circulação dos vórtices na figura 6.10(e), ponto "E", é maior do que a circulação medida para os vórtices do ponto "D", figura 6.10(d).

A partir do ponto "F" passa a existir movimentação na direção alinhada com a corrente incidente. Nota-se que ocorre também elevação na intensidade dos vórtices e a circulação cresce da ordem de 30%. Apesar de o ponto "F" estar localizado na região 2Po, no mapa de Morse e Williamson (2009a), o modo que se desenvolve é o modo 2LS, que já havia sido observado no Caso 3. É importante lembrar que o mapa de vórtices usado



(a) Ponto A, $V_r = 1,6$

(b) Ponto B, $V_r = 2,3$

(c) Ponto C, $V_r = 2,9$

(d) Ponto D, $V_r = 3,6$

(e) Ponto E, $V_r = 3,9$

(f) Ponto F, $V_r = 4,3$

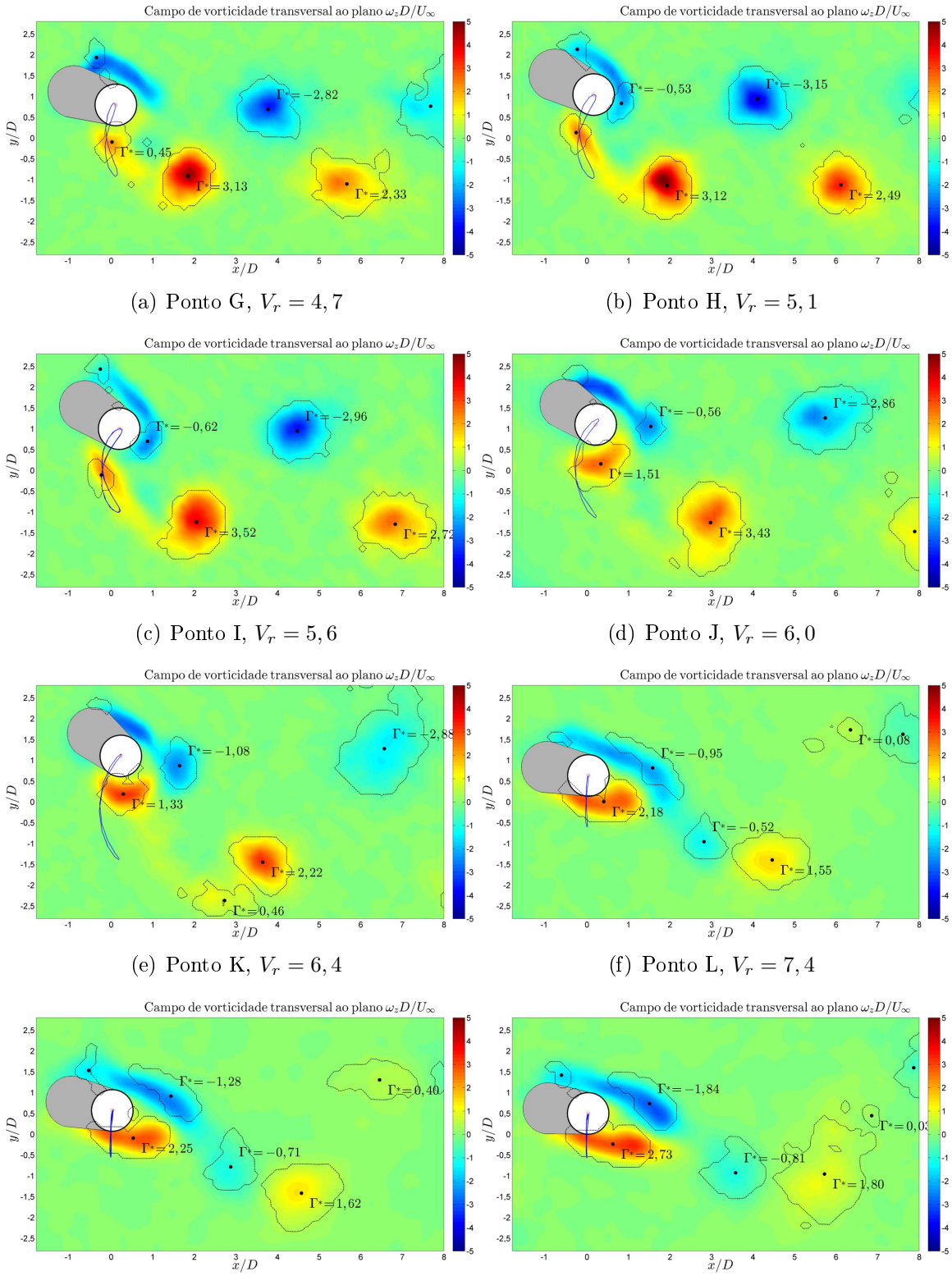
Figura 6.10: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 2$ e conjunto de molas C (Caso 4). Os pontos de A a F foram definidos na figura 6.9.

como referência foi desenvolvido com oscilações forçadas para VIV restrito ao movimento transversal com relação ao escoamento incidente. Por esse motivo, para condições do fenômeno nas quais ocorre oscilação alinhada, o mapa deixa de ser válido.

Os pontos de "G" a "J", imagem 6.11(a) até 6.11(d), ilustram que para o SRS ocorre a formação de um grande vórtice com módulo $\Gamma^* \approx 3,5$. Todas essas esteiras podem ser classificadas como o padrão 2LS. O ponto "K", cuja esteira é ilustrada na figura 6.11(e), não apresenta mais um único grande vórtice, mas dois vórtices $\Gamma^* = 2,22$ e $\Gamma^* = 0,46$, com mesmo sinal de circulação. Este padrão de emissão é similar ao observado no Caso 3 para os pontos "G", "H" e "I" e corresponde ao padrão 2C de emissão.

É interessante notar que a transição do modo de emissão 2LS para o modo 2C ocorre quando a trajetória descrita pelo cilindro se aproxima do formato da letra "C", que ocorre quando a diferença de fase entre os movimentos nas direções transversal e alinhada com a corrente cresce. Este efeito será analisado com mais detalhes na próxima seção e na conclusão deste capítulo. Além disso, pelas curvas de amplitude *versus* velocidade reduzida, nota-se que os pontos que desenvolvem o modo 2LS possuem aumento da amplitude $\hat{x}/D$ com o aumento de V_r. Essa tendência se inverte com a transição para o modo 2C, no qual se observa redução da amplitude de oscilação alinhada com o aumento da velocidade reduzida.

Os últimos três pontos observados para este caso pertencem ao Ramo Inferior e já não oscilam na direção alinhada com a corrente. Os pontos "L" a "N", cujas esteiras estão apresentadas nas figuras de 6.11(f) a 6.11(h) apresentam um par de vórtices com circulação contrária formado a cada semi-ciclo. Mais uma vez, fica evidente que quanto maior for o valor da velocidade reduzida, menor é a diferença na intensidade Γ^* dos vórtices. Tal como nos casos anteriores, verifica-se que ao longo do Ramo Inferior, o par de vórtices do modo 2P tende a manter a circulação do vórtice mais forte e aumentar a circulação do vórtice contrário conforme a velocidade reduzida é aumentada.



(a) Ponto G, $V_r = 4,7$

(b) Ponto H, $V_r = 5,1$

(c) Ponto I, $V_r = 5,6$

(d) Ponto J, $V_r = 6,0$

(e) Ponto K, $V_r = 6,4$

(f) Ponto L, $V_r = 7,4$

(g) Ponto M, $V_r = 8,1$

(h) Ponto N, $V_r = 8,8$

Figura 6.11: Visualização dos modos de desprendimento de vórtices para condição $N_{pb} = 2$ e conjunto de molas C (Caso 4). Os pontos de G a N foram definidos na figura 6.9.

6.3 Análise local dos modos de desprendimento de vórtices: evolução temporal

Nesta seção cada modo de desprendimento de vórtice observado na seção anterior é estudado ao longo de um ciclo. Enquanto o foco da análise global era apenas o de identificar o padrão de emissão para cada ramo de resposta, o foco desta análise local é estudar como ocorre o processo de formação de cada modo.

Alguns modos de emissão foram observados para mais de um ensaio de VIV e para mais de uma velocidade reduzida, tal como ocorre para os pontos do Ramo Inferior com o modo 2P. Nesses casos com diversos exemplos, apenas um será analisado nesta seção. Para os ramos alinhados, novas visualizações de escoamento foram realizadas com o cilindro $D = 50$mm, conjunto de molas suaves e momento de inércia adimensional $J^* = 1,93$ ($N_{st} = 5$). Estas novas observações foram feitas com o cilindro de maior diâmetro para ampliar a relação entre o deslocamento do cilindro e área visualizada, fornecendo assim campos de vorticidade mais detalhados. Para os demais ramos de resposta, a amplitude de oscilação com o cilindro $D = 50$mm era alta o suficiente para fazer com que este saísse da área visualizada ao longo do ensaio.

Os modos de desprendimento são apresentados em dois grupos: sem e com movimento na direção alinhada com a corrente. No primeiro grupo são apresentados os modos 2S, 2Po e 2P. No segundo grupo são apresentados os padrões SS, AS, 2C, 2LS.

6.3.1 Modo 2S de desprendimento de vórtices

O primeiro modo de desprendimento de vórtices apresentado é o modo 2S, característico do ramo inicial. No capítulo 7 as respostas em amplitude e frequência para diversas condições de momento de inércia e rigidez do sistema são apresentadas. Em todas elas verifica-se que o Ramo Inicial não apresenta oscilações na direção alinhada com o escoamento e sua frequência dominante na direção transversal segue a frequência de desprendimento de vórtices para cilindro fixo $f_y = f_v$.

O padrão de desprendimento 2S é parecido com a esteira de von Kármán. Em ambos os padrões observa-se desprendimento alternado de dois vórtices com circulação oposta e de mesma intensidade em módulo a cada ciclo. A principal diferença entre os dois modos é consequência da movimentação transversal do cilindro no Ramo Inicial. Enquanto para cilindros fixos a razão entre as distâncias nas direções alinhada e transversal com

o escoamento de dois vórtices é uma constante, para o modo 2S a distância na direção transversal dos vórtices cresce com a amplitude $\hat{y}/D$. Além da distância, a circulação dos vórtices também cresce com a amplitude $\hat{y}/D$.

A figura 6.12 apresenta a evolução temporal do modo 2S ao longo de um período de oscilação. Nota-se que este ramo se desenvolve sem oscilações na direção alinhada com a corrente incidente. A figura 6.12(a) define o início do período e ocorre para a amplitude máxima na direção transversal. Nota-se que, para este instante, existe um vórtice com circulação positiva sendo formado $\Gamma^* = 2,25$ e outro com circulação contrária sendo atraído para a região entre o vórtice vermelho e o cilindro. Já no próximo instante, figura 6.12(b), o vórtice azul com circulação negativa cresce $\Gamma^* = -0,90$ e separa o vórtice positivo $\Gamma^* = 1,74$ de sua camada cisalhante.

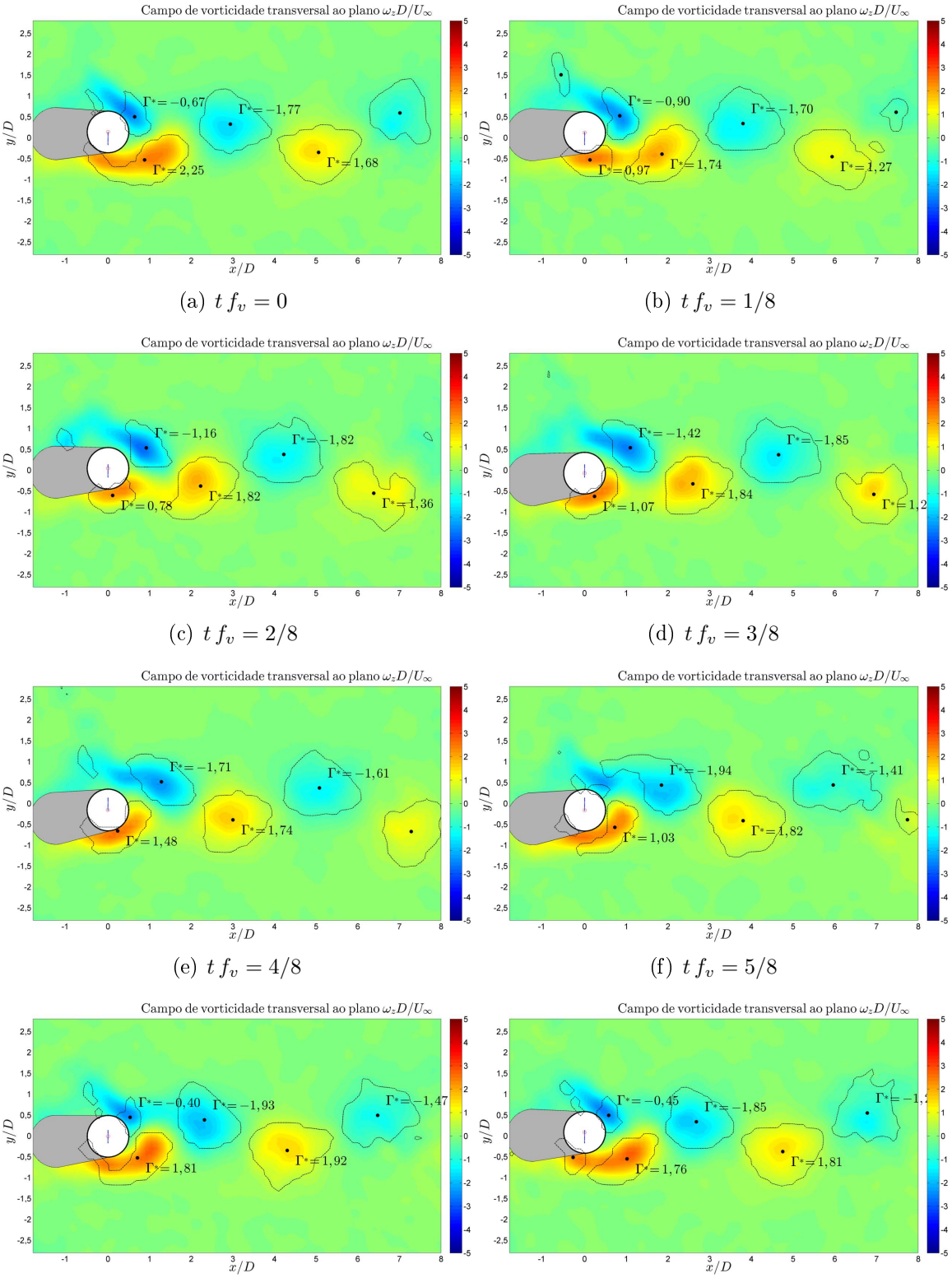
Em seguida, entre os instantes $t\,f_v = 2/8$, figura 6.12(c), e $t\,f_v = 5/8$, figura 6.12(f), é o vórtice com circulação negativa que cresce e atrai circulação positiva para a região entre ele e o cilindro. No instante $t\,f_v = 6/8$ é a camada cisalhante com vorticidade positiva quem corta a camada cisalhante azul e libera o vórtice $\Gamma^* = -1,93$ para a esteira.

6.3.2 Modo 2Po de desprendimento de vórtices

A figura 6.13 ilustra o processo de formação do modo de desprendimento 2Po. Este modo foi definido por Morse e Williamson (2009b) que consideraram uma sobreposição entre os modos de emissão 2S e 2P. A sigla do modo resulta de "2P *overlap*" e considera a sobreposição desses dois modos. A principal característica deste modo é a presença de um par de vórtices de circulação oposta a cada semi-ciclo de oscilação. Existe uma grande diferença entre o módulo da circulação para cada vórtice do mesmo par.

A figura 6.13(a) apresenta o campo de vorticidade transversal para o primeiro instante do ciclo. Neste momento o cilindro ocupa sua posição máxima na direção transversal. Conforme o cilindro começa a descer, a camada cisalhante com vorticidade positiva também parece ser arrastada para baixo. Enquanto isso, o vórtice com circulação negativa é convectado pelo escoamento. Nota-se nas imagens 6.13(b) e 6.13(c) que o vórtice azul segue o caminho oposto do cilindro e se movimenta para cima. Devido à sua vorticidade, o vórtice azul parece prender a ponta da camada cisalhante vermelha enquanto esta é arrastada para baixo. Esse processo faz com que parte da camada cisalhante vermelha se quebre e fique próxima ao vórtice azul.

Na maioria das imagens da figura 6.13 é difícil identificar sequer a existência de



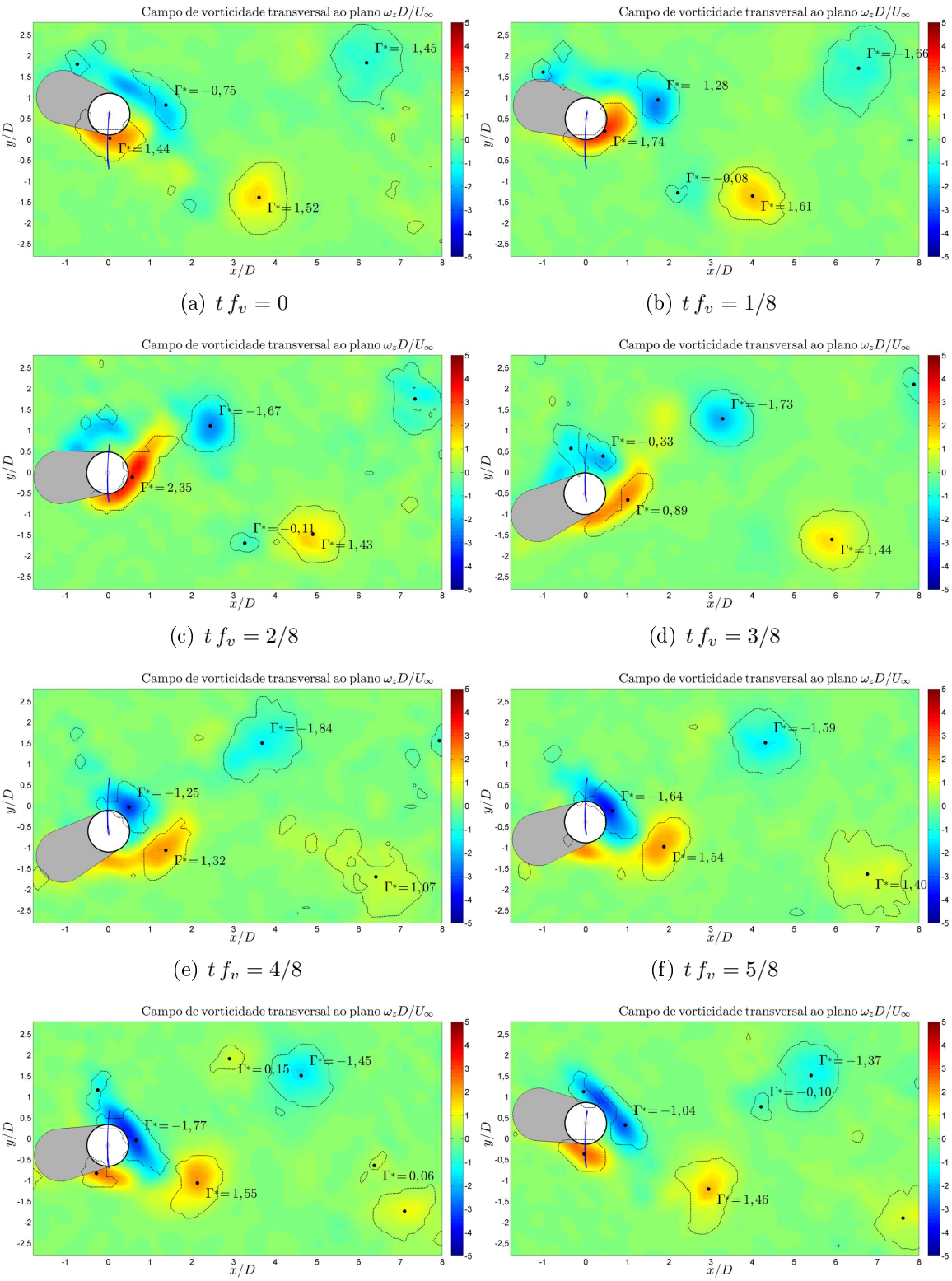
(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.12: Evolução temporal do modo 2S de desprendimento de vórtices. Esteira associada ao Ramo Inferior. Visualização realizada para $D = 32$mm, conjunto de molas rígidas (R), $J^* = 5,18$ ($N_{pb} = 7$) e $V_r = 4,3$.



(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.13: Evolução temporal do modo 2Po de desprendimento de vórtices. Esteira associada ao Ramo Inferior. Visualização realizada para $D = 32$mm, conjunto de molas rígidas (R), $J^* = 5,18$ ($N_{pb} = 7$) e $V_r = 5,5$.

um segundo vórtice a cada semi-ciclo. Tanto efeitos viscosos, quanto a proximidade com o vórtice contrário mais intenso fazem com que o vórtice fraco decaia rapidamente.

Tal como no modo 2S de emissão de vórtices, a distância transversal entre os vórtices cresce conforme cresce a amplitude de oscilação transversal. Enquanto no modo 2S os vórtices seguiam praticamente na mesma cota na qual eram desprendidos, no modo 2Po eles se afastam do centro da esteira.

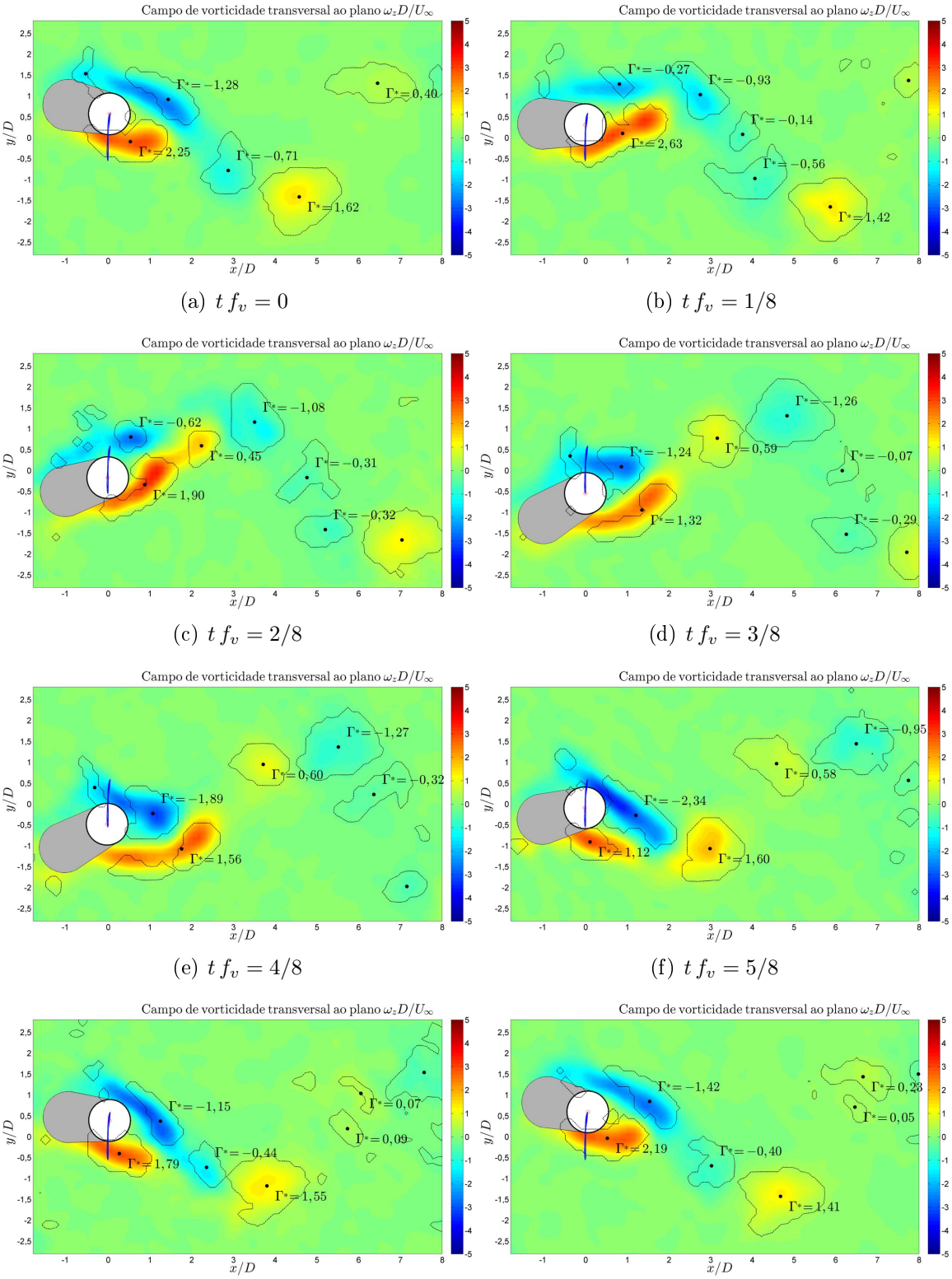
6.3.3 Modo 2P de desprendimento de vórtices

O aumento da velocidade reduzida V_r faz com que o vórtice de menor intensidade do par emitido no modo 2Po a cada semi-ciclo passe a ganhar circulação. Com o final do Ramo Superior e início do Ramo Inferior, desenvolve-se o modo 2P de emissão de vórtices. Historicamente, o modo 2P foi definido por Williamson (1989) como um padrão de emissão com dois vórtices de circulação oposta definido a cada semi-ciclo. Khalak e Williamson (1999) relacionaram a transição do Ramo Inicial para o Ramo Superior com a transição do modo de desprendimento de vórtices 2S para o 2P. O padrão 2Po foi apenas definido em Morse e Williamson (2009b).

A figura 6.14 ilustra o processo de formação dos dois vórtices de circulação oposta emitidos a cada semi-ciclo pelo modo 2P. O ciclo se inicia com a figura 6.14(a). Observa-se nessa figura que o vórtice com circulação positiva $\Gamma^* = 1,62$ tem como seu par o vórtice de circulação negativa $\Gamma^* = -0,71$. Observando a camada cisalhante com circulação negativa que sai do cilindro, percebe-se que o vórtice azul $\Gamma^* = -0,71$ fazia parte dessa camada e foi retirado dela.

Conforme o cilindro começa a descer a camada cisalhante com vorticidade positiva também cresce. Esse efeito pode ser percebido nas figuras 6.14(a) e 6.14(b). No instante $t\,f_v = 2/8$ ocorre a ruptura da camada cisalhante vermelha e um pequeno vórtice com $\Gamma^* = 0,45$ é arrastado junto com o vórtice oposto $\Gamma^* = -1,08$. Estes dois vórtices formam o par $\Gamma^* = 0,59$ e $\Gamma^* = -1,26$ do instante $t\,f_v = 3/8$.

Diferente do modo 2S, o modo de emissão 2P é construído com a ruptura de camadas cisalhantes. No modo 2S as camadas cisalhantes interagem entre si. Tal como descrito pelo modelo de Gerrard (1966), as camadas cisalhantes interagem entre si diminuindo a circulação acumulada no vórtice oposto, cortando a conexão entre um vórtice que está sendo formado e sua camada cisalhante e também induzindo o enrolar da outra camada cisalhante para a formação do próximo vórtice. Todo esse processo ocorre prati-



(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.14: Evolução temporal do modo 2P de desprendimento de vórtices. Esteira associada ao Ramo Inferior. Visualização realizada para $D = 32$mm, conjunto de molas rígidas (R), $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$) e $V_r = 8,1$.

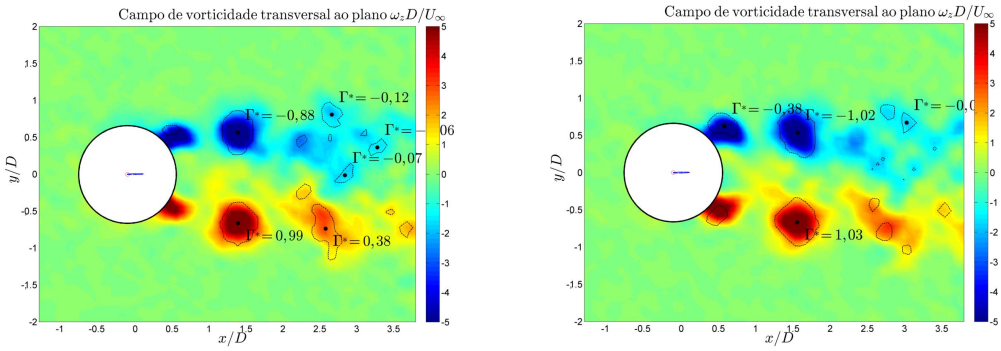
camente na mesma frequência que a emissão de vórtices em um cilindro fixo. Já no caso do modo 2P, o sistema oscila com frequência de oscilação próxima à frequência natural do sistema oscilante, como será analisado no capítulo 7. Por essa frequência ser menor do que a frequência de desprendimento de vórtices seria para a velocidade do escoamento em questão, há muita vorticidade sendo criada e pouca oscilação para desprende-la do cilindro. Isso faz com que cada vórtice arranque um pedaço da próxima camada cisalhante e a carregue consigo, criando assim o par de vórtices que é emitido a cada ciclo. Conforme o valor de velocidade reduzida V_r é aumentada ainda mais vorticidade é emitida, fazendo com que o pedaço rompido da camada cisalhante seja cada vez maior.

6.3.4 Modo simétrico de desprendimento de vórtices: padrão SS

O modo de desprendimento simétrico SS é o primeiro dos padrões de esteira observados quando há oscilação na direção transversal. A figura 6.15 ilustra a evolução temporal desse modo ao longo de uma oscilação completa. Tal como as esteiras anteriores, o período do movimento foi dividido em oito instantes de tempo com o objetivo de facilitar a análise de seu desenvolvimento.

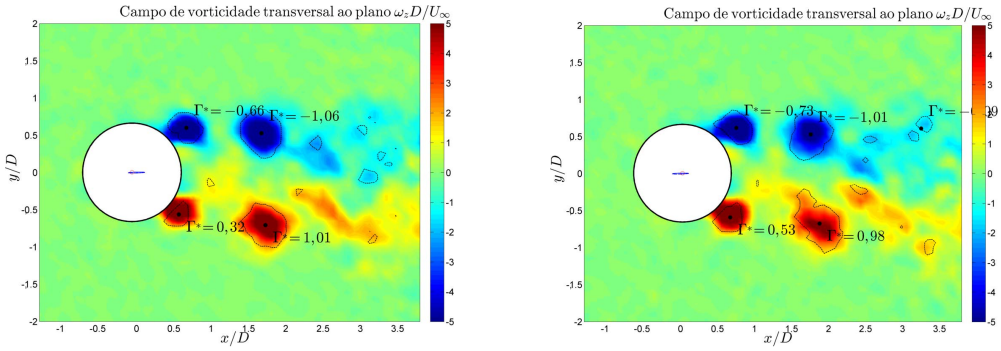
Considerando que o ciclo se inicie na imagem 6.15(a), com o cilindro em sua posição mínima para a direção alinhada com a corrente, nota-se que existem dois principais vórtices com circulações $\Gamma^* = -0,88$ e $\Gamma^* = 0,99$. Estes vórtices são praticamente simétricos em simétricos circulação e em posição, pois os dois se localizam praticamente na mesma abscissa $x/D \approx 1,5$. A jusante desses vórtices existe um pequeno aglomerado de vórtices com baixa circulação e, à montante, é possível perceber duas acumulações de vorticidade que saem do cilindro. Esses acúmulos são as camadas cisalhantes que estão enrolando sobre si mesmas, sem interagiram uma com a outra.

Para o instante seguinte $t\,f_v = 1/8$, figura 6.15(b), a camada cisalhante com vorticidade negativa já acumulou um vórtice com circulação $\Gamma^* = -0,38$. Os vórtices que já estavam presentes no instante inicial foram foram levemente deslocados para a direita e tiveram aumento em sua circulação. É preciso tomar cuidado ao afirmar que eles aumentaram sua circulação, pois aparentemente já não estão mais ligados às camadas cisalhantes que os geraram, logo não poderiam absorver mais vorticidade. Os valores de circulação Γ^*, como qualquer outro valor de natureza experimental, possui incertezas de medição. O esperado para esses vórtices é que eles diminuam sua circulação com o tempo, devido à viscosidade. De fato, observa-se nos demais instantes que a circulação deles cai conforme se avança no tempo $t\,f_v$.



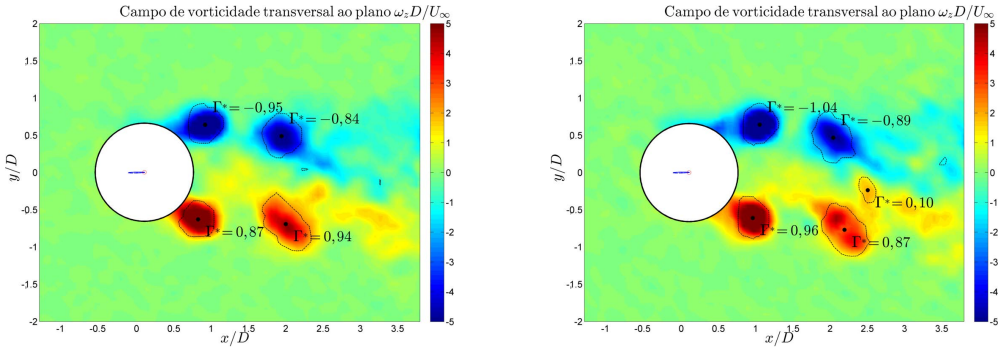
(a) $t\,f_v = 0/8$

(b) $t\,f_v = 1/8$



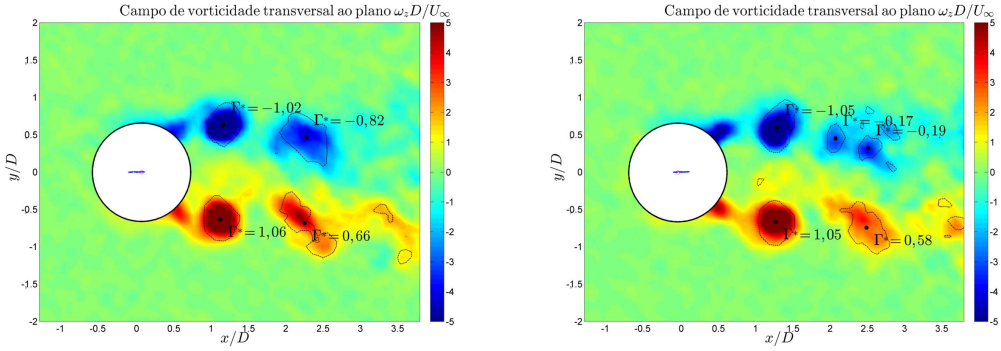
(c) $t\,f_v = 2/8$

(d) $t\,f_v = 3/8$



(e) $t\,f_v = 4/8$

(f) $t\,f_v = 5/8$



(g) $t\,f_v = 6/8$

(h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.15: Evolução temporal do modo simétrico de desprendimento de vórtices SS. Esteira associada ao primeiro modo de vibração alinhado com a corrente. Visualização realizada para $D = 50$mm, conjunto de molas suaves, $J^* = 1,93$ ($N_{st} = 5$) e $V_r = 1,4$.

Voltando a atenção ao par de vórtices que está sendo formado, conforme $t\,f_v$ aumenta, os vórtices passam a acumular maior circulação. Neste ponto outra observação importante precisa ser feita. O critério escolhido para a identificação de estruturas vorticais é o λ_2. Como discutido no capítulo 2, este parâmetro não ligava os vórtices que estavam sendo criados com as camadas cisalhantes que os geravam. Essa característica deve ser levada em consideração ao interpretar as figuras desta seção. Por mais que o valor acumulado nos vórtices cresça conforme o cilindro oscila na direção e sentido do escoamento, o que realmente deve ser notado é como o vórtice "formado" cresce. Nota-se que conforme o cilindro avança no sentido da corrente incidente, da esquerda para a direita, que o vórtices que estavam se acumulando nas camadas cisalhantes são liberados pelo escoamento.

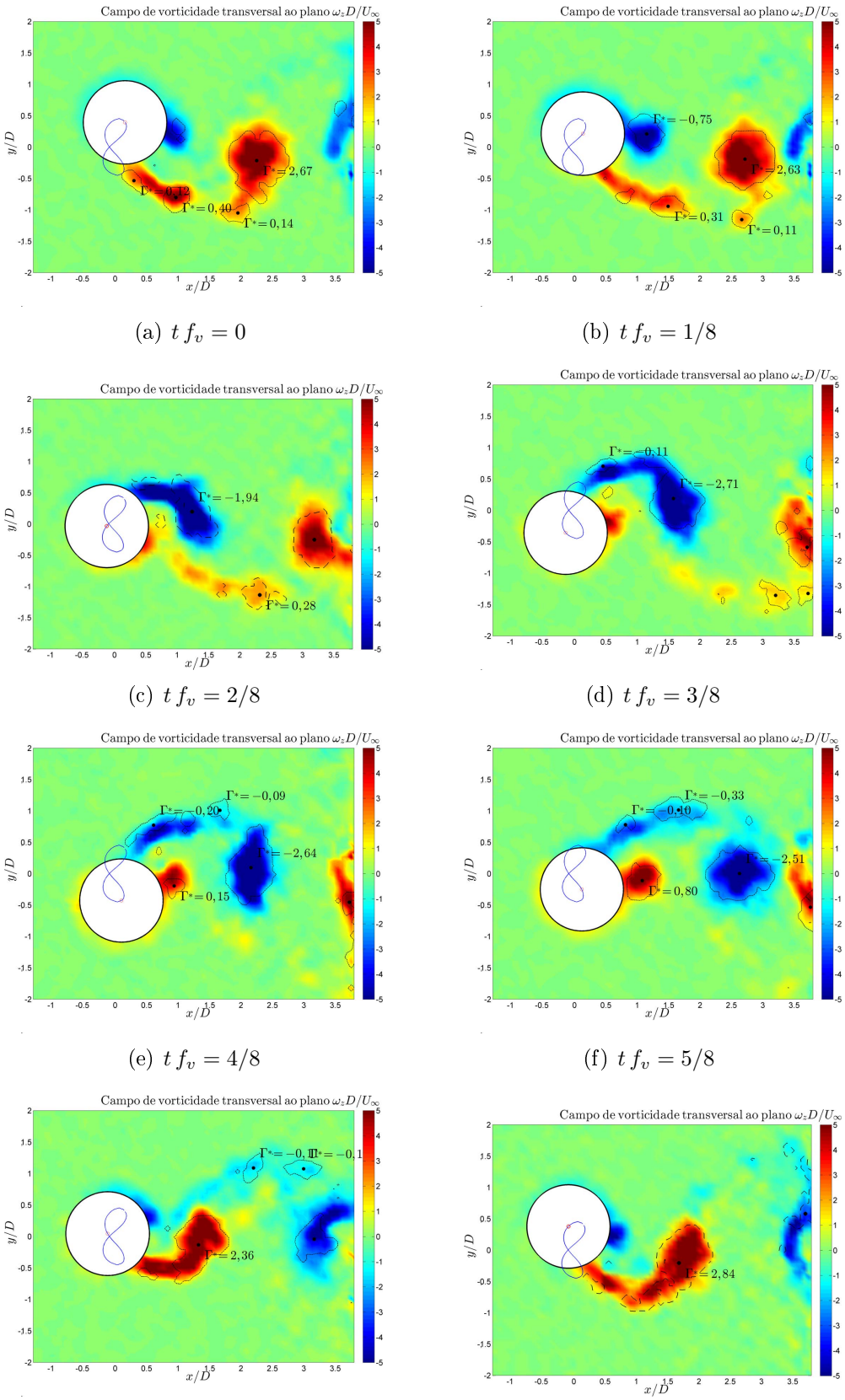
Na metade do ciclo, instante $t\,f_v = 4/8$, o cilindro atingiu sua posição máxima na direção alinhada com a corrente. Nos próximos instantes o movimento passa a ser retrógrado, o cilindro se desloca contra o sentido do escoamento incidente e retorna à sua posição inicial. Nota-se que o par de vórtices que estava acompanhando o cilindro é então liberado para o escoamento e que um novo par de vórtices começa a se formar.

6.3.5 Modo assimétrico de desprendimento: padrão AS

A figura 6.16 mostra a evolução temporal do modo assimétrico de desprendimento de vórtices AS. Tal como no caso simétrico, estes resultados foram obtidos para cilindro com $D = 50mm$, conjunto de molas suaves (S) e momento de inércia $J^* = 1,93$ ($N_{st} = 5$). A velocidade reduzida para este modo era de $V_r = 2,7$.

Diferente do modo SS, o modo AS apresenta padrão alternado de vórtices. A apresentação se inicia para um ponto próximo à máxima posição transversal. Neste instante, ilustrado pela imagem 6.16(b), observa-se um vórtice com circulação positiva $\Gamma^* = 2,67$ e uma espécie de "cauda" que o liga ao cilindro em movimento. Esta "cauda" é, na verdade, parte da camada cisalhante que gerou este vórtice. Nota-se também que existe uma pequena acumulação de vorticidade negativa (região azul).

No próximo instante de tempo, $t\,f_v = 1/8$, o vórtice positivo foi convectado para a direita e teve sua circulação levemente diminuída. A camada cisalhante vermelha que ligava o vórtice ao cilindro perde intensidade, enquanto que ó acúmulo de vorticidade negativa, vórtice azul, cresce e já acumula $\Gamma^* = -0,75$. Nos próximos instantes, durante o movimento de recuo do cilindro, o vórtice azul cresce até atingir o ponto mínimo da direção alinhada com a corrente, no instante $t\,f_v = 3/8$. Nesse momento a circulação do



(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.16: Evolução temporal do modo assimétrico de desprendimento de vórtices. Esteira associada ao segundo modo de vibração alinhado com a corrente. Visualização realizada para $D = 50$mm, conjunto de molas suaves, $J^* = 1,93$ ($N_{st} = 5$) e $V_r = 2,7$.

vórtice azul é máxima e vale $\Gamma^* = 2,71$. Seguindo este vórtice para os demais instantes, verifica-se que sua circulação cai de $\Gamma^* = 2,71$ para $\Gamma^* = 2,64$ e, sem seguida $\Gamma^* = 2,51$.

O processo de formação contrário também pode ser observado. Na figura 6.16(f), que representa o instante $t\,f_v = 5/8$, existe um pequeno vórtice com circulação positiva $\Gamma^* = 0,80$ próximo ao cilindro. Conforme o cilindro executa seu movimento retrógrado na direção alinhada com a corrente ($\dot{x} < 0$), o vórtice vermelho cresce para $\Gamma^* = 2,36$ e, em seguida $\Gamma^*2,84$ para o último instante do ciclo.

Verifica-se, portanto, que os vórtices são criados no movimento de retorno do cilindro na direção alinhada com a corrente e que são desprendidos para o escoamento no movimento a favor da corrente. O movimento do cilindro passa a ser fator decisivo no processo de formação e desprendimento de vórtices. Enquanto para cilindro fixo os vórtices eram desprendidos pela interação de uma camada cisalhante que se enrolava com a camada oposta, no caso de cilindros oscilando em dois graus é o movimento do cilindro que determina como ocorre a acumulação de vorticidade e quando ocorre a liberação do vórtice.

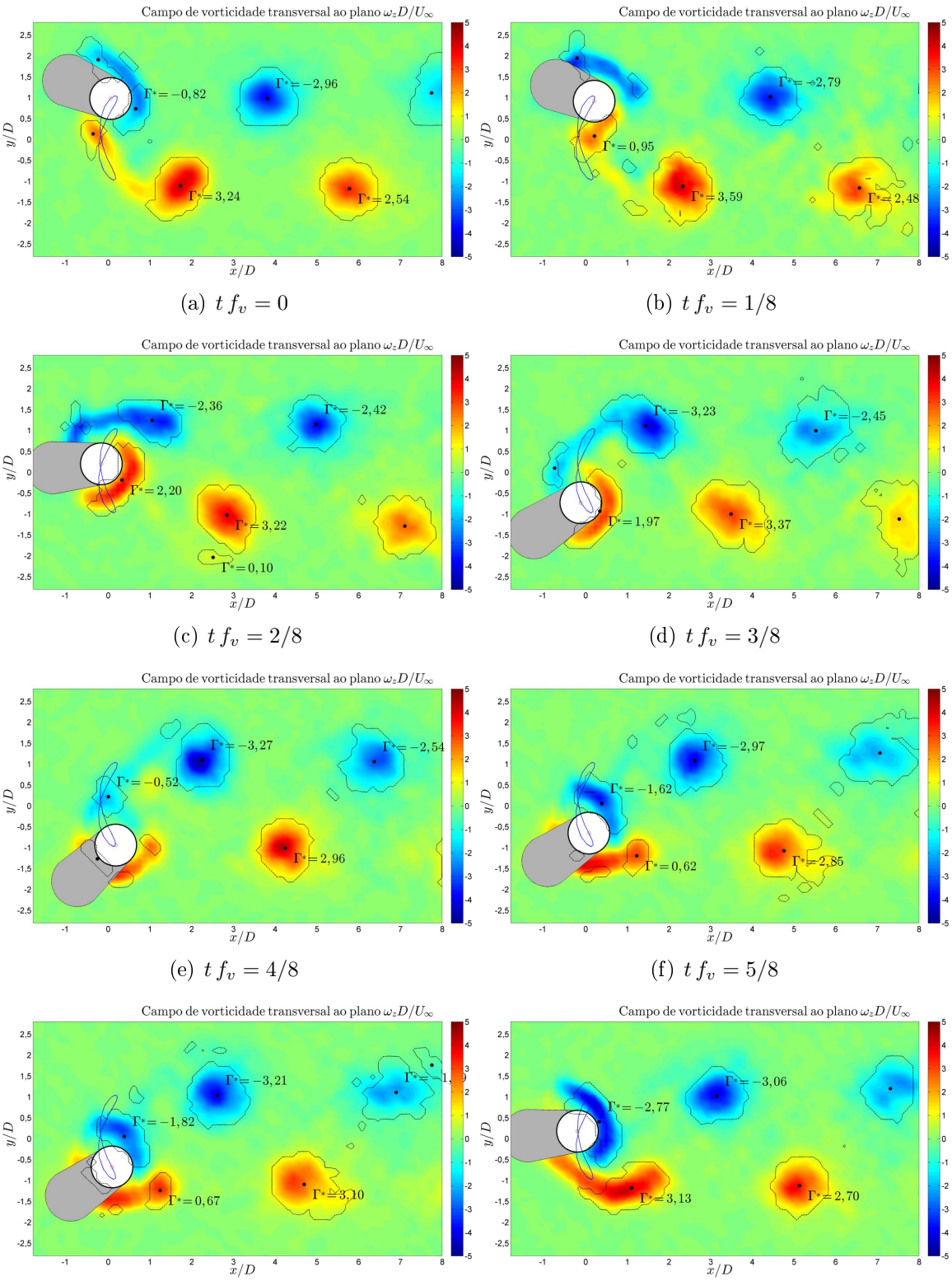
6.3.6 Modo com grandes vórtices alternados: padrão 2LS

A figura 6.17 ilustra a evolução temporal do modo de desprendimento de vórtices com dois grandes vórtices unitários. Seguindo os conceitos da terminologia usual da literatura de VIV, este modo deveria ser denominado 2S, pois consiste em um par de vórtices emitido a cada semi-ciclo de oscilação. Apesar disso, devido à presença de oscilações alinhadas com a corrente e à grande intensidade de circulação, este modo foi nomeado pelo autor de *two large singles* e emprega a sigla 2LS.

A circulação média observada para este padrão de emissão é de $\Gamma^* = 3,2$, enquanto que no modo 2S, figura 6.12, a circulação média é de $\Gamma^* = 1,8$. Essa diferença justifica o emprego do adjetivo "grande" aos vórtices.

Para o primeiro instante do ciclo, $t\,f_v = 0$, o cilindro encontra-se em sua posição máxima na direção transversal. Nota-se que neste instante existe um grande vórtice com circulação positiva do outro lado da esteira $\Gamma^* = 3,24$. Nos instantes seguintes o cilindro diminui sua posição transversal e em seu movimento arrasta a camada cisalhante com circulação positiva. Conforme o cilindro desce, observa-se também que o grande vórtice com circulação negativa é desprendido.

Pouco antes de o cilindro atingir metade de seu período, $t\,f_v = 3/8$, nota-se que



(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.17: Evolução temporal do modo grandes vórtices alternados, 2LS. Esteira associada ao Super Ramo Superior. Visualização realizada para $D = 32$mm, conjunto de molas rígidas (R), $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$) e $V_r = 5,1$

a camada cisalhante vermelha colada ao cilindro está crescendo. Em contra partida, esta camada parece desaparecer nos próximos instantes, como pode ser observado nas figuras 6.17(e) a 6.17(g). No último instante do ciclo, porém, a camada cisalhantes vermelha reaparece com grande intensidade $\Gamma^* = 3,13$. Esse movimento pode ser entendido da seguinte maneira: quando o se aproxima do seu ponto de máximo na direção transversal ele precisa realizar a volta com elevada curvatura de sua trajetória. Durante essa volta a camada cisalhante fica presa ao cilindro e, por isso, não aparece claramente nas imagens de PIV. Quando o cilindro inicia seu movimento de ascensão, associado a princípio com seu movimento retrógrado na direção alinhada com a corrente, a camada cisalhante vermelha, já enrolada em um grande vórtice, é desprendida de uma única vez.

O movimento alinhado com a corrente faz com que o cilindro "segure" o vórtice. O vórtice que foi formado na descida do cilindro só é liberdado quando este estiver subindo, no próximo semi-ciclo.

O processo inverso é observado também para os grandes vórtices azuis com circulação negativa. Estes são formados no movimento ascendente do cilindro, porém são apenas liberados no movimento descendente.

6.3.7 Modo com grandes vórtices alternados: padrão 2C

Outro modo de desprendimento de vórtices observado para o Super Ramo Superior é o modo 2C, que é composto por dois vórtices com circulação de mesmo sinal. A sigla vem do termo em inglês *two co-rotating vortices*.

A diferença entre a resposta do cilindro para o padrão de vórtices 2LS e o 2C é o ângulo de fase entre as direções transversal e alinhada. Considerando que as equações 6.2 descrevam o movimento do cilindro. Esta hipótese é uma simplificação do movimento real do cilindro, uma vez que considera a existência de uma única frequência e amplitude de oscilação para cada direção. Considerando que a frequência de oscilação na direção alinhada seja o dobro da direção transversal, característica observada para VIV com dois graus de liberdade, as trajetórias no plano de oscilação para diferentes valores do ângulo de fase ϕ_{xy} são apresentadas na figura 6.18.

$$y(t) = \hat{y}\,\sin(2\,\pi\,f_y\,t) \tag{6.2}$$

$$x(t) = \hat{x}\,\sin(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}) \tag{6.3}$$

Nota-se que quanto menor o ângulo de fase, mais a trajetória se parece com o

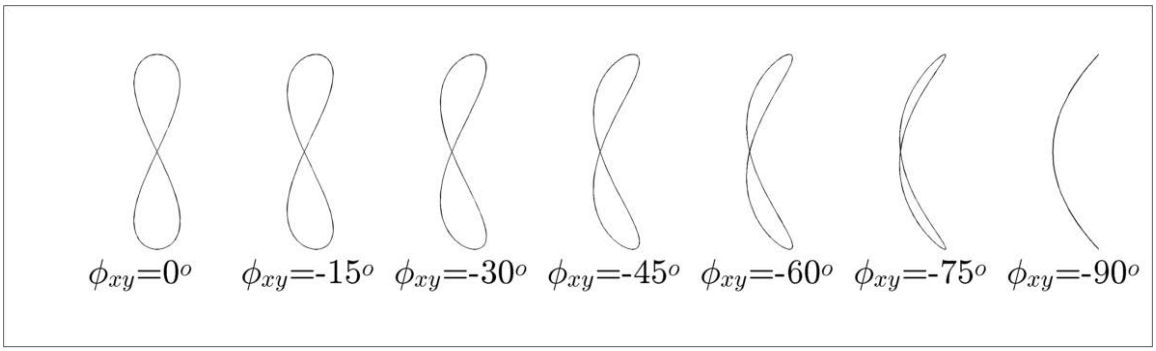


Figura 6.18: Formato das trajetórias do cilindro para diferentes ângulos de fase ϕ_{xy}.

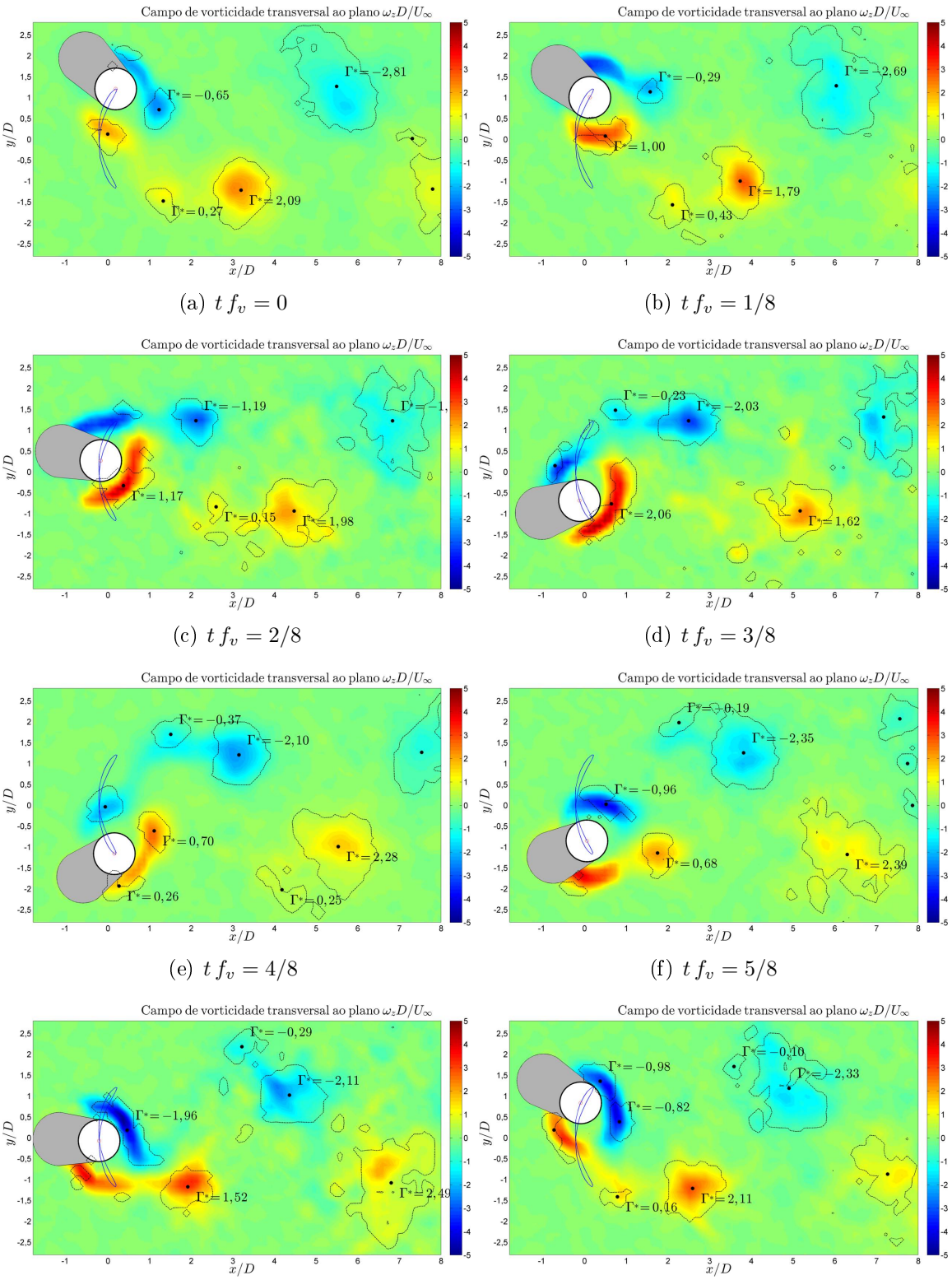
algarismo "8". Por outro lado, quanto maior for o ângulo de fase, o formato da trajetória se aproxima da letra "C".

O modo 2LS observado na figura 6.17 é mais arredondado e mais próximo de um "8" do que a trajetória desenvolvida pelo cilindro na figura 6.19. O raio de curvatura das extremidades da trajetória do cilindro demonstra ser uma característica importante no processo de formação e desprendimento de vórtices.

Ao analisar a evolução temporal do modo 2C, figura 6.19, nota-se que quando o cilindro atinge seu ponto de máxima amplitude transversal, que para este ângulo de fase é bem próximo ao ponto de máximo na direção alinhada com o escoamento, um pequeno vórtice é desprendido. A variação do movimento do cilindro é brusca e a camada cisalhante que se enrolava ao redor do cilindro não consegue acompanhar, tal como ocorre no modo 2LS.

Nos primeiros instantes do ciclo um vórtice com circulação negativa é emitido $\Gamma^* = -0,65$. Conforme o cilindro inicia seu movimento de retorno para a posição média, a camada cisalhante com vorticidade positiva cresce e o restante da camada cisalhante azul, com vorticidade negativa, é desprendido em um segundo vórtice. Os instantes $t\,f_v = 3/8$ e $t\,f_v = 4/8$, figuras 6.19(d) e 6.19(e), mostram como o segundo vórtice azul é emitido.

Ao atingir o ponto de mínimo na direção transversal, outro ponto com raio de curvatura muito pequeno na trajetória do cilindro, um vórtice com vorticidade positivo $\Gamma^* = 0,70$ é emitido. A outra parta da camada cisalhante vermelha que ainda estava presa ao cilindro só é desprendida quando o cilindro retoma seu movimento ascendente. Verifica-se no instante final $t\,f_v = 7/8$ que um segundo vórtice menor com $\Gamma^* = 0,16$ é emitido e acompanha o movimento do vórtice maior $\Gamma^* = 2,11$.



(a) $t\,f_v = 0$ (b) $t\,f_v = 1/8$

(c) $t\,f_v = 2/8$ (d) $t\,f_v = 3/8$

(e) $t\,f_v = 4/8$ (f) $t\,f_v = 5/8$

(g) $t\,f_v = 6/8$ (h) $t\,f_v = 7/8$

Figura 6.19: Evolução temporal do modo com 2 vórtices coincidentes, 2C. Esteira associada ao Super Ramo Superior. Visualização realizada para $D = 32$mm, conjunto de molas suaves (S), $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$) e $V_r = 7,1$

6.4 Conclusões do capítulo

Este capítulo apresentou os resultados obtidos para visualizações de escoamento com a técnica *Particle Image Velocimetry* (PIV). Os campos apresentados são campos médios de fase da vorticidade ω_z, transversal ao plano visualizado. Tanto o campo de vorticidade, suas dimensões e intensidade de circulação de seus vórtices foram adimensionalizados para permitir comparação entre ensaios com diferentes velocidades do escoamento.

Dos resultados apresentados, quatro tópicos merecem destaque. São eles uma discussão sobre o formato dos vórtices, a definição de um novo modo de emissão de vórtices e a resposta de duas das sete perguntas feitas na Introdução desta tese.

Formato dos vórtices

Diversas esteiras de vórtices foram observadas ao longo deste capítulo, todas elas com diferentes exemplos de vórtices. A primeira conclusão que pode ser feita nessa linha é que os vórtices não possuem simetria axial, ou seja, não apresentam seus iso-contornos de vorticidade como círculos concêntricos. Segundo o modelo de vórtice viscoso apresentado no capítulo 2, o perfil de vorticidade ω_z para um vórtice viscoso isolado é dado por:

$$\omega(r) = \omega_{max} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad \text{com} \quad \omega_{max}(t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}$$

A figura 6.20 apresenta a comparação de um vórtice real com o modelo viscoso. O vórtice escolhido, demarcado pelo quadrado preto, foi selecionado para o padrão de vórtices 2LS. Este padrão apresenta vórtices com grande intensidade e quase isolados, ou seja, sem a presença de um segundo vórtice em sua vizinhança.

Verifica-se que nos quatro instantes de tempo selecionados para a análise, o perfil de vorticidade do vórtice real, caracterizado pelas linhas contínuas e mais espessas, não segue exatamente os círculos tracejados. Estes círculos foram determinados para cada instante através do ajuste dos melhores parâmetros $-4\nu\, t$ do modelo de vórtice viscoso.

Apesar dos iso-contornos não se encontraram para o vórtice real e o vórtice teórico, esta comparação mostra que o perfil de vorticidade dentro de um vórtice real é bastante próximo ao perfil exponencial previsto pelo modelo. A principal divergência se dá quebra de simetria axial dos vórtices reais. Isso acontece porque os vórtices reais estão imersos em uma esteira de vórtices e não realmente isolados. A presença de outros vórtices faz com que o vórtice em questão seja distorcido.

Observando os resultados apresentados tanto para as análises global e local, pode-

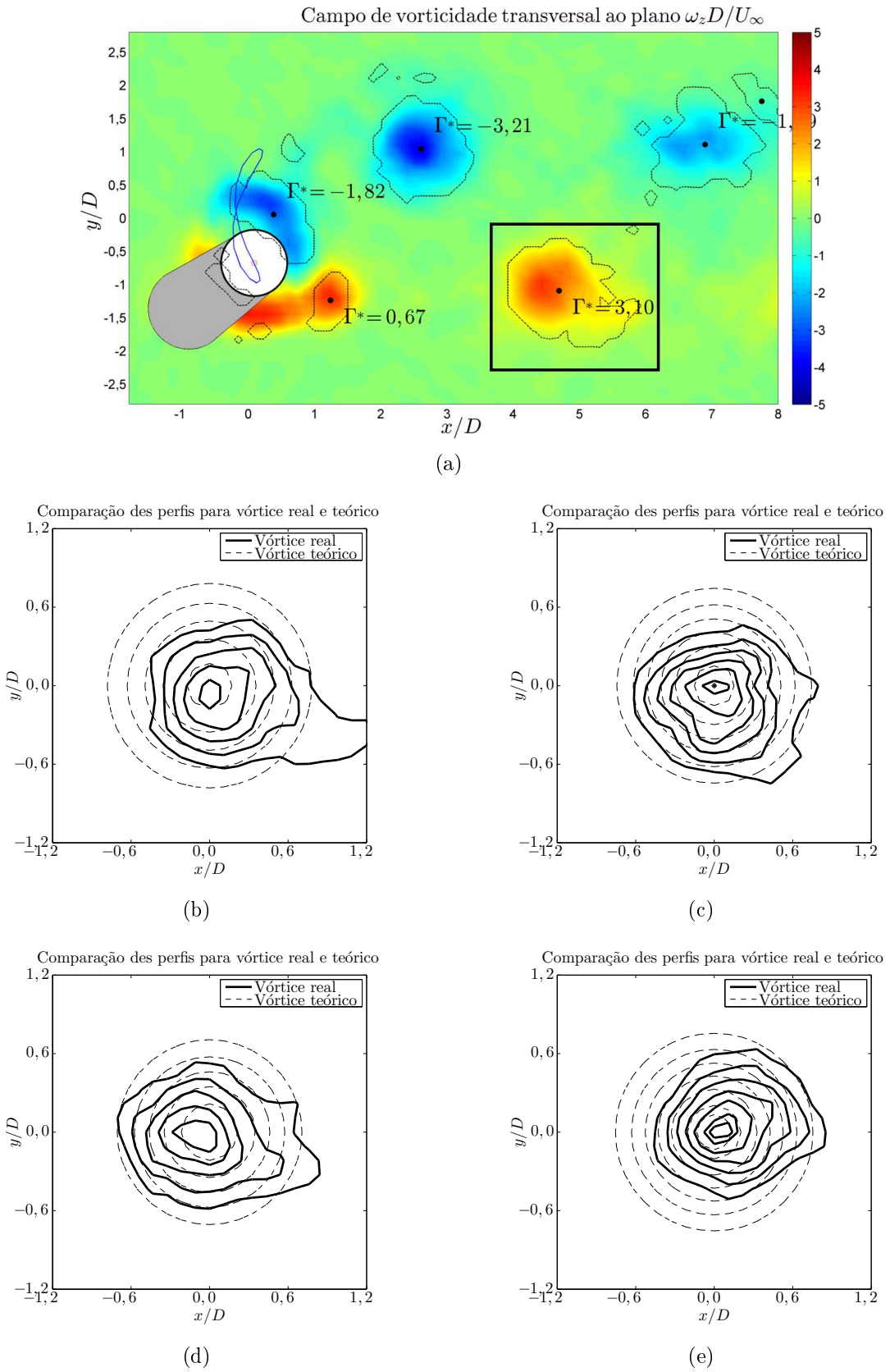


Figura 6.20: Análise do perfil de vorticidade de um vórtice real. Linha contínua indica iso-contornos de vorticidade do vórtice real e a linha tracejada representa os mesmos iso-contornos para vórtice viscoso teórico. (a) Campo de vorticidade ilustrando o vórtice analisado. (b) a (e) comparação do vórtice para diferentes fases.

se dizer que quanto mais próximo do cilindro o vórtice ainda se encontra, menor é a sua circularidade. Conforme o vórtice é convectado pelo escoamento, os efeitos viscosos fazem com que o vórtice se aproxime do resultado previsto pelo modelo. Nota-se que assim que se desprendem da camada cisalhante que os gerou, os vórtices possuem diferentes formatos, variando, principalmente, em função do processo de formação e desprendimento que tiveram.

O modelo de vórtice viscoso também poderia ser usado para avaliar a evolução da vorticidade máxima $\omega_{max}(t)$ ao longo do tempo. Esta análise não foi conduzida, porém, pois os valores de vorticidade máxima e da circulação Γ dependem do processo de média de fase. Caso o equipamento usado tivesse uma frequência de aquisição maior, nos dispositivos denominados de *time resolved*, a análise ao longo do tempo contaria com maior número de dados e seria mais conclusiva.

Definição do modo de desprendimento 2LS

Morse e Williamson (2009b) definiu o padrão de esteira 2Po considerando este como o resultado da superposição entre os padrões 2P e 2S. Essa afirmativa se baseia no fato de o padrão 2Po possuir grande diferença no módulo da circulação entre os dois vórtices de um mesmo par, enquanto que no modo $2P$ ambos os vórtices possuem circulações mais próximas. O padrão 2Po está relacionado ao Ramo Superior e o padrão 2P ao Ramo Inferior.

Com base nisso, e ainda usando o padrão de nomenclatura definida por Williamson e Roshko (1988), definiu-se neste trabalho a existência do modo 2LS, caracterizado pela presença de dois grandes vórtices desprendidos por ciclo. A sigla vem do termo inglês *two large single*. Ainda que apenas dois vórtices com circulação oposta sejam desprendidos por ciclo, a intensidade destes vórtices é superior à circulação média observada para o o modo 2S. Além disso, o modo 2LS ocorre quando o cilindro também se movimenta na direção alinhada com a corrente, diferente do modo 2S, observado para oscilações puramente transversais à corrente incidente.

Quais padrões de esteira se desenvolvem para VIV com dois graus de liberdade?

Com relação aos diferentes padrões de esteira identificados ao longo do capítulo seis, a primeira conclusão apurada é que a esteira de vórtices formada no escoamento ao redor de cilindro fixo é praticamente constante para a faixa de Reynolds ensaiada. A circulação média dos vórtices desse tipo de esteira é de $\Gamma^* = 1,62$ para as quatro

visualizações feitas. Em todas elas, foi identificado o padrão alternado com dois vórtices de circulação oposta.

Com relação à análise global dos modos de emissão, conclui-se que cada ramo de resposta do fenômeno VIV está, de fato, correlacionado a diferentes padrões de emissão de vórtice. Essa característica é fundamental para o fenômeno. Cada modo de desprendimento possui certa resiliência e suporta ligeiras variações de amplitude e frequência de oscilação. A dinâmica entre o processo de formação e desprendimento de vórtices com o movimento do cilindro encontra situações de equilíbrio que permitem ao sistema oscilar livremente. Os padrões de emissão de vórtices observados nesta tese e seus ramos de resposta são:

1. Modo 2S: associado ao Ramo Inicial
2. Modo 2Po: associado ao Ramo Superior
3. Modo 2P: associado ao Ramo Inferior
4. Modo SS: associado ao primeiro ramo de oscilação alinhada
5. Modo AS: associado ao segundo ramo de oscilação alinhada
6. Modo 2LS: associado ao Super Ramo Superior
7. Modo 2C: associado ao Super Ramo Superior

Os três primeiros modos, 2S, 2Po e 2P, se desenvolvem sem as oscilações alinhadas com a corrente. Todos os demais ocorrem quando há amplitude de oscilação na direção alinhada.

O modo 2LS foi definido nesta tese como um padrão com dois grandes vórtices únicos emitidos por ciclo de oscilação. Este modo, apesar de parecido com relação à quantidade de vórtices, não é o mesmo que o clássico padrão com dois vórtices alternados 2S. A diferença entre esses dois padrões de esteira reside no processo de formação de cada esteira. Enquanto o modo 2S pode ser descrito pelo modelo físico de Gerrard, o modo 2LS depende do movimento na direção alinhada com a corrente e ocorre para baixos ângulos de fase entre os movimentos na direção alinhada e na direção transversal à corrente.

O padrão de vórtices 2T, com três pares de vórtices emitidos a cada ciclo e, geralmente associado às oscilações alinhadas com a corrente incidente, não foi observado nesta tese. É importante destacar que para cada vórtice ser considerado nesta análise,

é preciso que ele tenha passado pelo filtro de média de fase. Caso o padrão 2T tenha se manifestado em algumas situações, sua aparição não foi consistente o suficiente para mantê-lo nos resultados médios. Mais do contar um terceiro vórtice a cada semi-ciclo, é preciso que esse terceiro vórtice seja estável, pelo menos no que diz respeito ao processo de aquisição.

O modo de esteira 2C coincide com o padrão observado por Flemming e Williamson (2005) para oscilações com dois graus de liberdade. O trabalho de Flemming e Williamson (2005) considera variação total de amplitude de oscilação, variando do valor máximo, na extremidade livre do cilindro, até zero, no ponto de articulação do cilindro. A variação de amplitude para o pêndulo usado neste trabalho é inferior à de Flemming e Williamson (2005), da ordem de 20% considerando a amplitude da extremidade inferior do cilindro e a amplitude no ponto em que o cilindro entra na água. Ainda assim, ambos os trabalhos consideram variação da amplitude ao longo do comprimento do cilindro. O padrão 2T foi observado por Jauvtis e Williamson (2004) para um caso sem variação na amplitude ao longo do comprimento do cilindro. Apesar de ser uma hipótese não verificada, esta característica pode ser uma justificativa para o fato do modo 2T não haver sido observado.

Outra explicação para o modo 2T não haver sido observado consiste na combinação de amplitudes e frequências de oscilação, assim como o ângulo de fase ϕ_{xy} entre os deslocamentos $y(t)$ e $x(t)$ do cilindro. Como apresentado no capítulo F e discutido na última pergunta, a diferença no processo de formação dos modos 2LS e 2C se deve à diferença de fase entre o movimento das direções transversal e alinhada com a corrente incidente. Talvez o modo 2T ocorra para uma condição específica de amplitudes e fases que não tenha sido atingida nos ensaios de VIV realizados ou não tenha sido visualizada. Suposições a parte, o modo 2T não foi observado e, ainda assim, o Super Ramo Superior se manifestou, o que permite afirmar que ou o ramo de resposta permite mais de um tipo de padrão de emissão de vórtices ou que o Super Ramo Superior seja uma classificação muito genérica que possa ser dividida em outras mais específicas, estas sim relacionadas a apenas um modo de emissão.

Quais são os efeitos do movimento na direção alinhada com a corrente no processo de formação e desprendimento de vórtices?

Analisando as curvas de amplitude de oscilação para os diferentes casos testados, pode-se afirmar que, quando há oscilações na direção alinhada com a corrente incidente, ocorre amplificação na amplitude de oscilação na direção transversal. Observando os resultados das visualizações de escoamento, verifica-se também que o movimento na direção

alinhada com o escoamento não apenas altera a maneira como os vórtices se formam, mas exerce papel fundamental na intensidade de circulação acumulada e também no momento em que os vórtices são desprendidos.

A influência do segundo grau de liberdade na intensidade de circulação de cada vórtice pode ser entendida como uma consequência da velocidade relativa do movimento do cilindro e do escoamento incidente.

A taxa de fluxo de circulação $d\Gamma/dt$ é um conceito importante neste momento. Como demonstrado no capítulo 2, a taxa de fluxo de circulação é dada por

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{U_S^2}{2}$$

Nessa equação, U_S é a velocidade do escoamento no ponto de separação da camada limite. Esta velocidade é proporcional à velocidade do escoamento incidente $U_S = q\,U_\infty$. O fator de proporcionalidade q depende das condições do escoamento e da geometria do corpo. Quando o corpo se move na direção alinhada com o escoamento, a velocidade de deslocamento do cilindro $\dot{x}$ faz com que a velocidade relativa entre o escoamento e o cilindro passe a ser

$$U_r = U_\infty - \dot{x}$$

Assumindo que a constante de proporcionalidade q não se altere pelo movimento do cilindro, a nova velocidade no ponto de separação passa a ser a velocidade relativa U_r.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{q^2\,(U_\infty - \dot{x})^2}{2} \rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{q^2}{2}\,\left(U_\infty^2 - 2\,U_\infty\,\dot{x} + \dot{x}^2\right)$$

A quantidade de circulação liberada ao longo de um ciclo por cada camada limite pode ser estimada integrando ao longo do tempo a relação anterior. Considerando que o intervalo de integração seja do instante inicial do ciclo até o período do movimento na direção transversal, equivalente a $1/f_y$, tem-se que:

$$\Gamma = \int_0^{1/f_y} \frac{q^2}{2}\,\left(U_\infty^2 - 2\,U_\infty\,\dot{x} + \dot{x}^2\right)\,dt \tag{6.4}$$

Assumindo, por simplicidade, mas sem redução de generalidade, que o movimento seja descrito pelas equações harmônicas, tem-se:

$$y = \hat{y}\,\sin\left(2\,\pi\,f_y\,t\right) \qquad x = \hat{x}\,\sin\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right)$$

$$\dot{x} = \hat{x}\,2\,\pi\,f_x\cos\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right) \rightarrow \dot{x} = \hat{\dot{x}}\,\cos\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right)$$

Substituindo $\hat{\dot{x}}$ na equação 6.4, obtém-se:

$$\Gamma = \frac{q^2 U_\infty^2}{2}\left[\int_0^{1/f_y} 1\,dt - \frac{1}{U_\infty}\int_0^{1/f_v} \hat{\dot{x}}\,\cos\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right)dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{U_\infty^2}\int_0^{1/f_v} \hat{\dot{x}}^2 \cos^2\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right)dt\right]$$

O intervalo adotado para a integral considera todo um ciclo de oscilação do cilindro na direção transversal e dois ciclos de oscilação na direção alinhada com a corrente. Por esse motivo, a segunda integral é nula, pois a integral do cosseno ao longo de cada ciclo vale zero. O termo com cosseno ao quadrado pode ser decomposto como $\cos^2\left(2\,\pi\,f_x\,t + \phi_{xy}\right) = 1/2 + \cos\left(4\,\pi\,f_x\,t + 2\,\phi_{xy}\right)/2$. Pelo mesmo motivo, o resultado de sua integração ao longo de uma oscilação transversal também é nulo. Encontra-se, portanto:

$$\Gamma = \frac{q^2 U_\infty^2}{2}\left[\int_0^{1/f_y} 1\,dt + \frac{1}{U_\infty^2}\int_0^{1/f_v} \frac{\hat{\dot{x}}^2}{2}\,dt\right] = \frac{q^2 U_\infty^2}{2\,f_y}\left(1 + \frac{\hat{\dot{x}}^2}{2\,U_\infty^2}\right)$$

Nos casos sem oscilação alinhada com a corrente, a quantidade de circulação emitida por cada camada cisalhante pode ser considerada como um valor referência Γ_{ref}.

$$\Gamma_{\text{ref}} = \frac{q^2 U_\infty^2}{2\,f_y}$$

A circulação emitida ao longo do ciclo passa a ser dada pela equação 6.5.

$$\Gamma = \Gamma_{\text{ref}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\dot{x}}}{U_\infty}\right)^2\right] \tag{6.5}$$

No casos com movimento alinhado com a direção da corrente, $\Gamma > \Gamma_{\text{ref}}$. Assumindo, por exemplo velocidade alinhada com a corrente seja da ordem da velocidade incidente, tem-se que $\hat{\dot{x}}/U_\infty \approx 1$. Para estes casos,

$$\Gamma = \Gamma_{\text{ref}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\dot{x}}}{U_\infty}\right)^2\right] \approx \Gamma_{\text{ref}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1,5\,\Gamma_{\text{ref}}$$

Esta simples modelagem não tem como meta estimar a circulação dos vórtices desprendidos nos casos com movimento alinhado com a corrente. O objetivo é indicar que o processo de formação dos vórtices não é simétrico com relação aos movimentos na

direção alinhada. Ao avançar no sentido da corrente, a velocidade relativa entre o cilindro e o escoamento incidente é baixa e isso faz com que a taxa de fluxo de circulação caia. Já em seu movimento contrário, a velocidade relativa sobe e faz com que mais circulação seja emitida. A não simetria desses movimentos ocorre devido ao fato da taxa do fluxo de circulação depender da velocidade ao quadrado. Considerando, por exemplo, que o cilindro oscile com $\hat{\dot{x}}/U_\infty = 1$, então em alguns momentos ele não emitirá circulação, enquanto que em outros emitirá o quádruplo do que emite normalmente.

O equacionamento apresentado demonstra que o movimento na direção alinhada com a corrente aumenta a circulação emitida ao longo de um ciclo. Em todos os casos examinados, quanto maior a circulação dos vórtices, maior a amplitude de oscilação na direção transversal $\hat{y}/D$. A partir dessa característica, conclui-se que o movimento alinhado causa aumento na circulação emitida, o que por sua vez induz maiores amplitudes transversais. É através da circulação dos vórtices que as duas direções se comunicam.

Outra influência observada para o movimento na direção alinhada com a corrente se dá com relação ao ângulo de fase ϕ_{xy} entre o movimento nas direções alinhada e transversal ao escoamento. Observando os casos 3 e 4 da análise global, descritos no capítulo F, verifica-se que quando o ângulo de fase ϕ_{xy} é maior, a trajetória descrita pelo cilindro é mais próxima à letra "C" e o padrão de vórtices observado é o 2C. Já para menores ângulos de fase, a trajetória é mais parecida ao algarismo "8" e o padrão de esteira observado é o 2LS.

A relevância do ângulo de fase ϕ_{xy} reside no formato da trajetória descrita pelo cilindro. Quanto maior ϕ_{xy}, mais brusca é a variação de direção do cilindro. Parte da camada cisalhante que se enrolava ao redor do cilindro é emitida na extremidade do "C", enquanto que a outra parte apenas é emitida quando o cilindro está retornando para sua posição média. No caso com baixos valores de ϕ_{xy}, o raio de curvatura nas extremidades da trajetória é maior, o que permite variação de direção mais suave. A camada limite que se enrolava no cilindro não chega a se partir na extremidade e toda a circulação acumulada ao longo do semi-ciclo é desprendida no movimento de retorno do cilindro ao centro de sua trajetória.

Conclui-se, desta forma, que o movimento do cilindro na direção alinhada à corrente é capaz de amplificar a circulação média dos vórtices emitidos a cada ciclo e também influenciar no processo de formação e desprendimento, alterando o padrão de esteira em função do ângulo de fase entre as direções transversal e alinhada com a corrente.

7 RESULTADOS DOS ENSAIOS DE VIV COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Neste capítulo analisa-se a resposta do fenômeno de VIV para diferentes condições de momento de inércia e rigidez da base elástica. O capítulo é dividido seguindo as quatro campanhas experimentais realizadas. Resultados da literatura são apresentados e servem como comparação.

7.1 Validação dos resultados: verificação de repetitividade e comparação com dados da literatura

Antes de analisar a resposta do fenômeno de VIV para diferentes condições, é preciso validar as respostas obtidas com a base elástica pendular. A verificação dos resultados foi feita em duas etapas: na primeira avalia-se a repetitividade dos resultados e na segunda compara-se os resultados com os encontrados na literatura.

Testes de repetitividade preliminares foram fontes de informação muito valiosas ao longo do desenvolvimento desta tese e revelaram a discrepância no comportamento medido em ensaios realizados com mesmo cilindro de teste e com o mesmo número de lastros. A princípio acreditava-se que o parâmetro de inércia fosse a principal característica da base elástica e que ele seria responsável pela resposta global do fenômeno. Até então os ensaios eram realizados com diferentes conjuntos de mola. A preocupação com relação à rigidez do sistema era que a frequência natural da base fosse a mesma em ambas as direções. Pouca atenção era dada para o fato de que a montagem fosse mais rígida ou flexível. A divergência nos resultados de repetitividade indicou, portanto, que os ensaios não haviam, de fato, sido repetidos e que algum parâmetro importante ao fenômeno havia sido alterado.

Quando a rigidez das molas passou a ser considerada como um parâmetro importante, os testes de repetitividade passaram a apresentar a mesma resposta, demonstrando que o conjunto de molas também precisava ser respeitado. Não há na literatura sobre VIV uma análise sobre a dependência da resposta do fenômeno com relação à rigidez da

estrutura oscilante. Essa descoberta motivou duas das campanhas experimentais conduzidas, sendo elas a influência da rigidez em condição simétrica e assimétrica. Os resultados dessas campanhas experimentais são apresentados nas próximas seções.

Fora a questão destacada, de que repetir os ensaios ajudou na determinação da influência de outros parâmetros, refazer os experimentos de maneira controlada consiste em uma fonte de informação sobre quão repetitivo é o fenômeno em si. Nas próximas seções, diferentes condições de momento de inércia e rigidez são ensaiadas e seus resultados comparados entre si. Tal comparação só é possível quando se assume que determinada condição possui uma resposta específica. As variações de resposta observadas são, portanto, causadas por mudanças nos parâmetros do ensaio.

A figura 7.1 mostra a comparação entre duas repetições para seis diferentes condições de inércia. Em todos os casos da figura 7.1, o cilindro de ensaio com $D = 32$mm foi usado com o conjunto de molas suaves (S). A diferença entre os ensaios é o número de lastros de chumbo usados, variando N_{pb} de 0 a 6.

Observando-se a figura 7.1, pode-se concluir que os ensaios de VIV são repetitivos. Ainda que os efeitos do segundo grau de liberdade se desenvolvam ou não na resposta em amplitude, existe muito pouca diferença entre os pontos cinzas e pretos, que representam corridas diferentes. Vale destacar que existe uma diferença de meses na realização dos ensaios comparados e que a base elástica foi desmontada entre eles. Caso os dois ensaios fossem realizados com a mesma montagem e um seguido do outro, a expectativa dos resultados serem próximos seria grande, pois não haveria alterações significativas na BEP e nas condições externas ao ensaio, tais como umidade do ar, temperatura da sala, altura da coluna de água do canal, etc. Os ensaios comparados possuem grande semelhança nos seus resultados, o que indica que os principais parâmetros são conhecidos e controlados. Conclui-se que os resultados são repetitivos.

Uma vez confirmada a repetitividade dos ensaios de VIV, a segunda etapa para validar esses resultados é confrontá-los com outros disponíveis na literatura. A referência adotada para esta verificação é a curva de amplitudes apresentada por Jauvtis e Williamson (2004). Esta curva, já apresentada no capítulo 3, foi obtida para uma base elástica pendular, mas que usa um conjunto de quatro barras articuladas ao invés de um cilindro rígido de titânio. Devido à montagem das barras, a base usada por Jauvtis e Williamson (2004) permite ao cilindro transladar e não rotacionar, como no caso deste trabalho. O momento de inércia dessas quatro barras é um parâmetro importante para a inércia total da estrutura, mas, por ser constante para todos os ensaios, ele pode ser

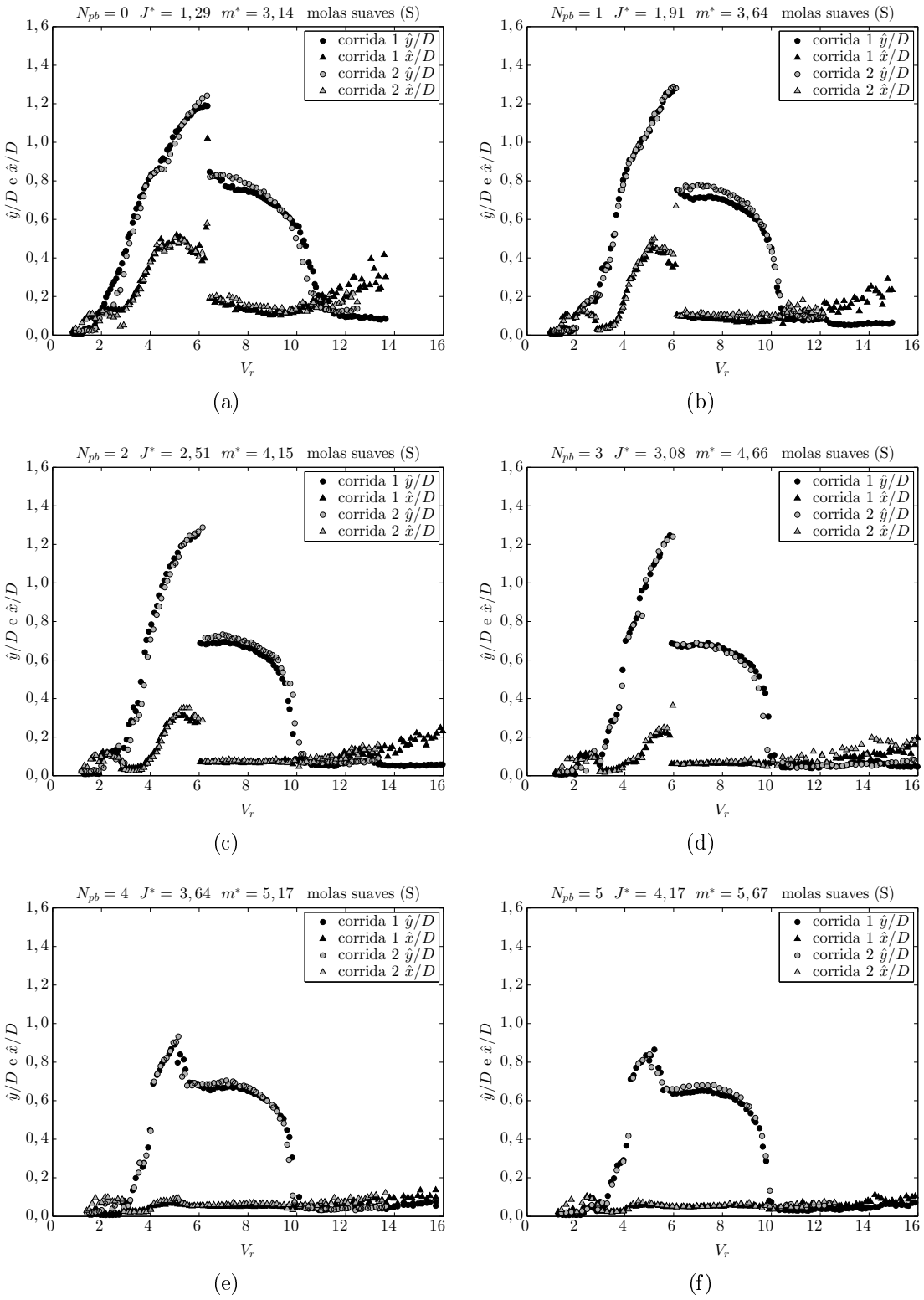


Figura 7.1: Resultados obtidos para testes de repetitividade. Ensaios realizados com $D = 32$mm, conjunto de molas suaves (S). (a) $J^* = 1,29$ (b) $J^* = 2,51$ (c) $J^* = 3,08$ (d) $J^* = 3,64$ (e) $J^* = 4,17$ (f) $J^* = 4,69$.

aproximado por uma massa concentrada na ponta do cilindro oscilante. Por esse motivo, o parâmetro de massa m^* é adequado para quantificar a inércia da estrutura. Em seu trabalho, Jauvtis e Williamson (2004) apresentam a resposta do fenômeno de VIV com dois graus de liberdade para $m^* = 2,6$.

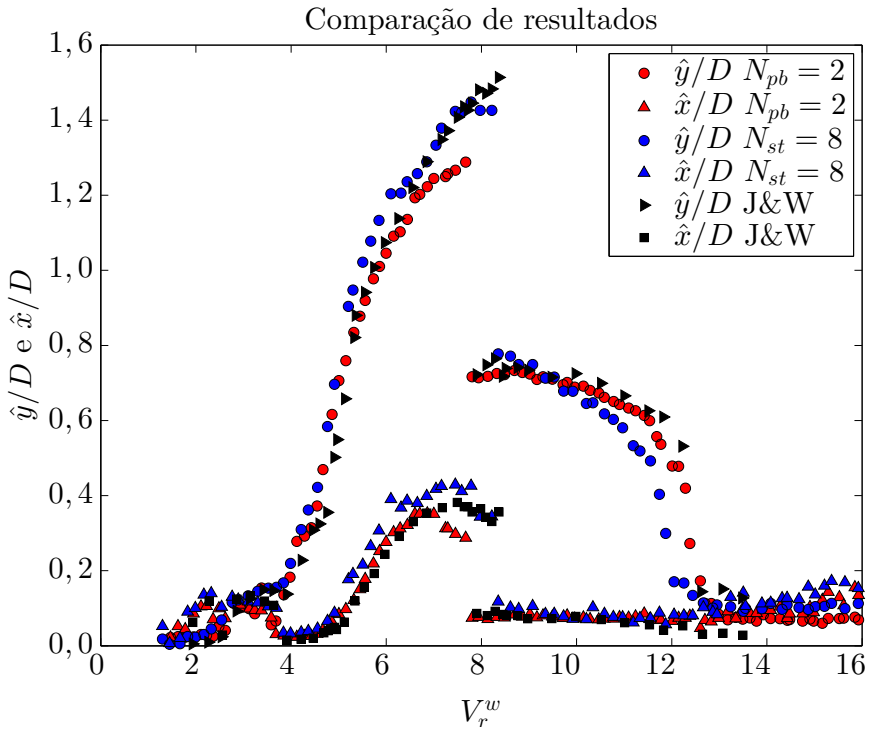


Figura 7.2: Comparação de resultados. Os pontos vermelhos foram obtidos para $D =$ 32mm, $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$) e conjunto de molas suaves (S). Os pontos azuis foram obtidos para $D = 50$mm, $J^* = 2,59$ ($N_{st} = 9$) e conjunto de molas suaves (S). Os pontos pretos são o resultado apresentado por Jauvtis e Williamson (2004) para $m^* = 2,6$.

A figura 7.2 apresenta a comparação entre os resultados de Jauvtis e Williamson (2004), ilustrados como pontos pretos, e duas diferentes condições apresentadas nesta tese. O objetivo desta figura não é, por ora, analisar o comportamento do fenômeno de VIV, mas apenas comparar os resultados. Dois ensaios foram usados para comparar os resultados. O primeiro deles, representado pelos pontos vermelhos, foi obtido para ensaios com $D = 32$mm, conjunto de molas suaves e $J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$). Já o conjunto de pontos azul foi obtido para ensaio com $D = 50$mm, o mesmo conjunto de molas suaves e para $J^* = 2,59$ ($N_{st} = 9$).

É importante destacar que a velocidade reduzida usada na figura 7.2 foi calculada usando a frequência natural da BEP em água f_w. Essa escolha foi feita para permitir a comparação com os dados de Jauvtis e Williamson (2004), uma vez que este é o padrão adotado por esses autores.

Existe grande semelhança entre as três curvas de amplitude da figura 7.2. Nota-se que as curvas azul e preta apresentam praticamente a mesma amplitude máxima e que esta ocorre para o mesmo valor de velocidade reduzida em água V_r^w. Com relação à amplitude máxima de oscilação na direção transversal, a curva vermelha apresenta resultado ligeiramente inferior que as demais.

Além da similaridade na amplitude máxima, observa-se boa concordância com relação ao formato geral da curva de resposta para ambas as direções. Com base nessas observações, pode-se afirmar que, além de fornecer resultados repetitivos, a BEP e toda a metodologia experimental empregada fornecem resultados similares aos disponíveis na literatura. Conclui-se, portanto, que os experimentos e resultados apresentados na tese são válidos.

7.2 Análise da transição entre ramos de resposta

Esta campanha experimental se concentra no estudo da transição entre diferentes ramos de resposta, no que diz respeito à intermitência ou transição com histerese.

Na transição com histerese, conforme a velocidade do escoamento é alterada, cada ramo de resposta suporta as variações de amplitude e frequência. Quando o sistema como um todo já não consegue manter as características do ramo de resposta, ocorre a transição para um ramo mais adequado. Caso a velocidade do escoamento seja alterada no sentido contrário, o novo ramo de resposta também suporta as variações de amplitude e frequência e não retorna para o primeiro ramo na mesma velocidade reduzida para a qual ocorreu a primeira mudança.

A transição intermitente é caracterizada pela existência de uma condição na qual dois ramos de resposta praticamente coexistem e competem entre si. Nesse tipo de transição, para a mesma velocidade do escoamento o cilindro apresenta variações na sua série temporal e o sistema apresenta blocos com as características de frequência e amplitude de um ramo e outros blocos com as características do outro ramo. Os efeitos da histerese já haviam sido observados por Khalak e Williamson (1999) para experimentos de VIV realizados apenas com um grau de liberdade, transversal ao escoamento incidente. Para dois graus de liberdade, com movimento também na direção alinhada, a histerese foi observada por Jauvtis e Williamson (2004) e Flemming e Williamson (2005).

Khalak e Williamson (1999) observaram histerese na transição entre o Ramo Inicial e o Ramo Superior. A transição entre o Ramo Superior e o Ramo Inferior, por

outro lado, foi considerada intermitente. A diferença entre as duas transições reside na estabilidade de cada ramo.

Enquanto a transição do Ramo Superior para o Ramo Inferior foi caracterizada como intermitente por Khalak e Williamson (1999), Jauvtis e Williamson (2004) observaram histerese na transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior. A diferença de comportamento, segundo Jauvtis e Williamson (2004) é que no caso da transição entre Ramo Superior e Inferior, existe certa similaridade entre a resposta do ramo, de forma a permitir a coexistência dos dois. O mesmo não pode ser dito para pontos no Super Ramo Superior e no Ramo Inferior, uma vez que eles apresentam importante diferença na amplitudes de oscilação na direção transversal e também na direção alinhada com a corrente. Além da diferença nas amplitudes, os dois ramos também apresentam variação brusca na frequência de oscilação.

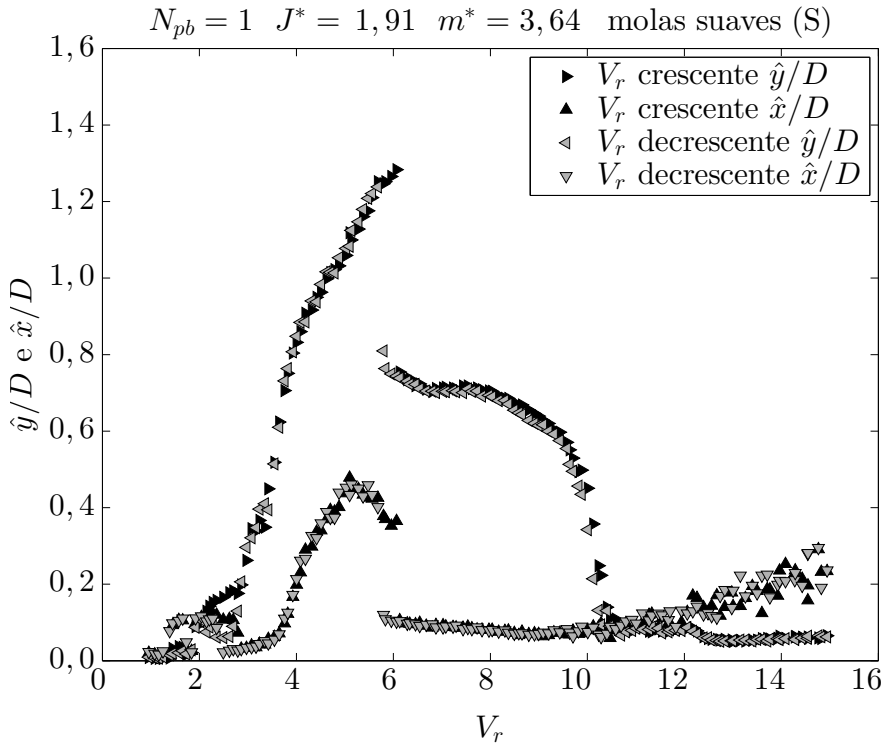


Figura 7.3: Teste de histerese com molas suaves (S) e $J^* = 1,91$ ($N_{pb} = 1$).

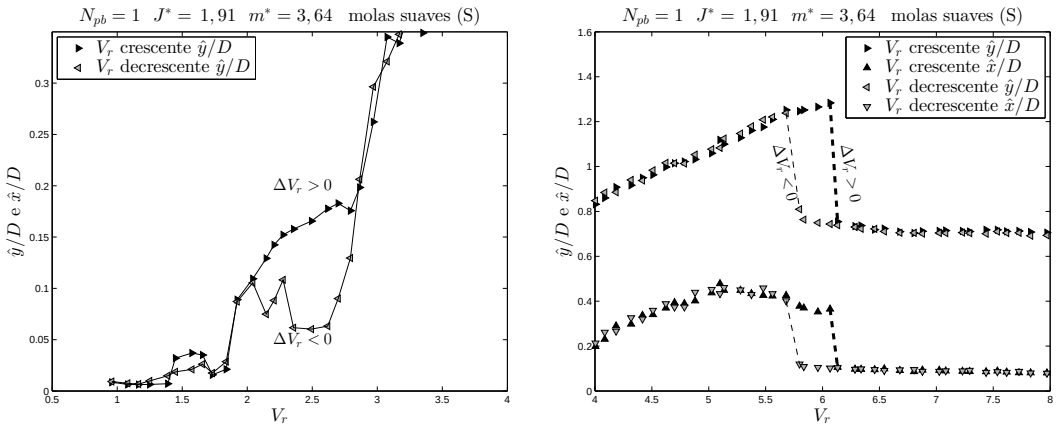
Flemming e Williamson (2005) também observaram transição com histerese entre o Ramo Inicial e o Ramo Superior, porém observou transição intermitente entre o Ramo Superior e o Ramo Inferior. O curioso é que nos resultados de Flemming e Williamson (2005) apresentam oscilações com dois graus de liberdade e o cilindro apresenta elevadas amplitudes na direção transversal com a corrente, o que poderia ser caracterizado como o Super Ramo Superior, que já havia sido definido por Jauvtis e Williamson (2004) um ano

antes. Independente de como os autores nomearam seus ramos de resposta, o importante é que a transição entre esses ramos foi ora observada como intermitente e ora com histerese.

A figura 7.3 apresenta a resposta obtida para a condição $N_{pb} = 1$ ($J^* = 1,91$) e conjunto de molas suaves (s). Os símbolos pretos indicam a corrida com variações positivas de velocidade reduzida $\Delta V_r > 0$ e os símbolos cinzas indicam a corrida contrária, realizada com variações negativas de velocidade reduzida $\Delta V_r < 0$.

O gráfico da figura 7.3 ilustra a curva de amplitude de oscilação em ambas as direções para toda a faixa de velocidade reduzida ensaiada. Nota-se que para a maior parte da resposta, existe grande similaridade entre os dois resultados. As diferenças são notadas apenas no início da curva, para baixos valores de V_r, e na transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior.

A figura 7.4(a) apresenta com maior detalhe a diferença entre os caminhos percorridos nos dois sentidos de V_r para os primeiros ramos alinhados. Linhas contínuas e tracejadas foram adicionadas às curvas para facilitar seu entendimento. A curva 7.4(b) acentua a diferença entre os caminhos percorridos na transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior.



(a) (b)

Figura 7.4: Detalhes da figura 7.3. (a) $0,5 < V_r < 4$. (b) $4 < V_r < 8$.

A transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior é apresentada com relação às séries temporais de deslocamento na figura 7.5. Os dois primeiros grupos de séries temporais apresentam o deslocamento do cilindro para os últimos 2 pontos do Super Ramo Superior da figura 7.3. Os dois últimos, figuras 7.5(c) e 7.5(d), são os dois primeiros pontos do Ramo Inferior. Nota-se que o cilindro apresenta comportamento

bastante regular na direção transversal e não transita entre diferentes ramos, pois não há variações de amplitude. A direção alinhada com a corrente só apresenta resposta no Super Ramo Superior.

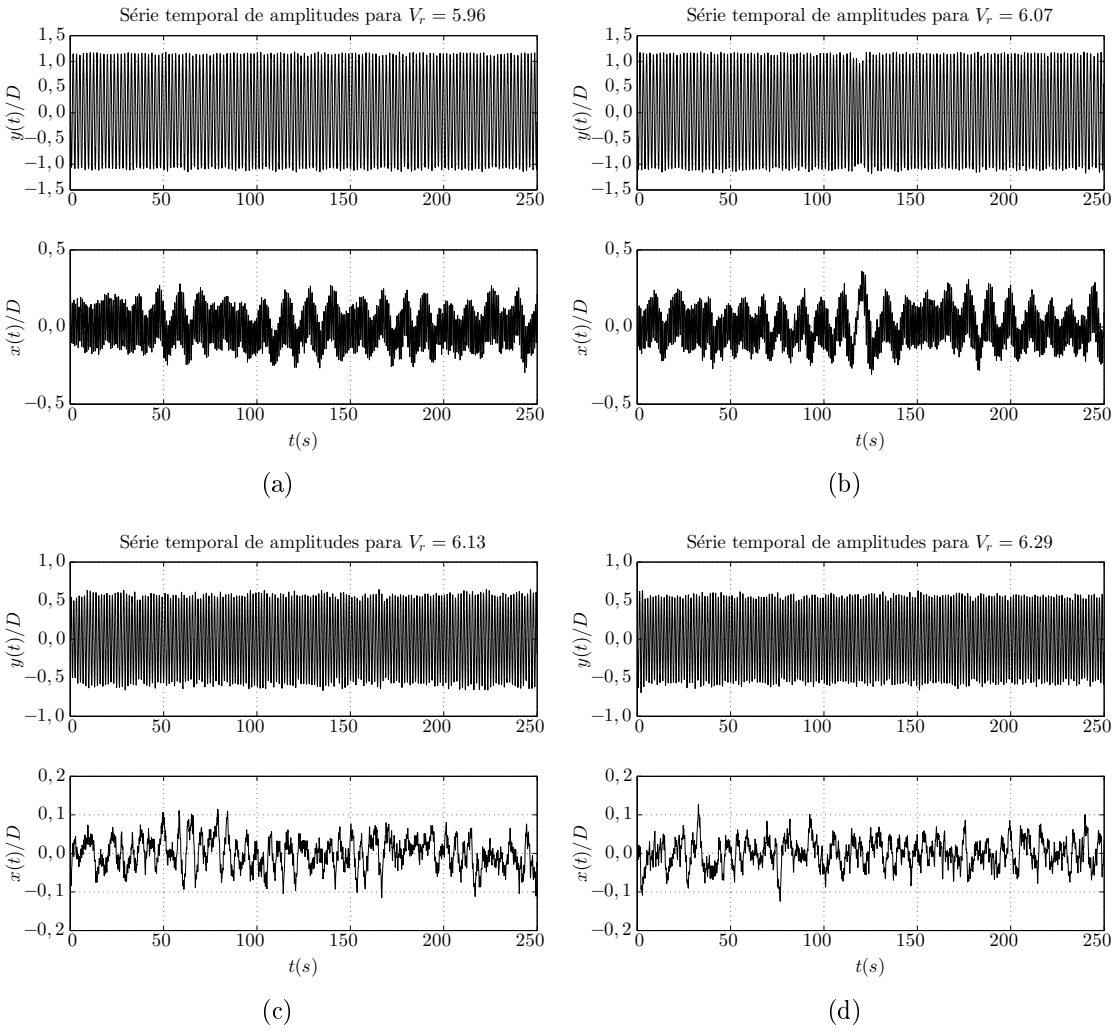


Figura 7.5: Séries temporais para caso com molas suaves (S) e $J^* = 1,91$. (a) e (b) últimos dois pontos do Super Ramo Superior. (c) e (d) primeiros dois pontos do Ramo Inferior.

A figura 7.6 apresenta o resultado do teste de histerese para outras condições de momento de inércia. As outras condições também foram testadas com o cilindro de diâmetro externo $D = 32$mm e com o conjunto de molas suaves (S). Nota-se que nos demais casos, os principais pontos de divergência entre os resultados obtidos com $\Delta V_r > 0$ e $\Delta V_r < 0$ também ocorrem para os primeiros ramos alinhados e para a transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior.

A transição entre o Ramo Inicial e o Ramo Superior é analisada na figura 7.7, obtida para $J^* = 4,69$ ($N_{pb} = 6$). Esta condição teve suas curvas de amplitude ilustradas

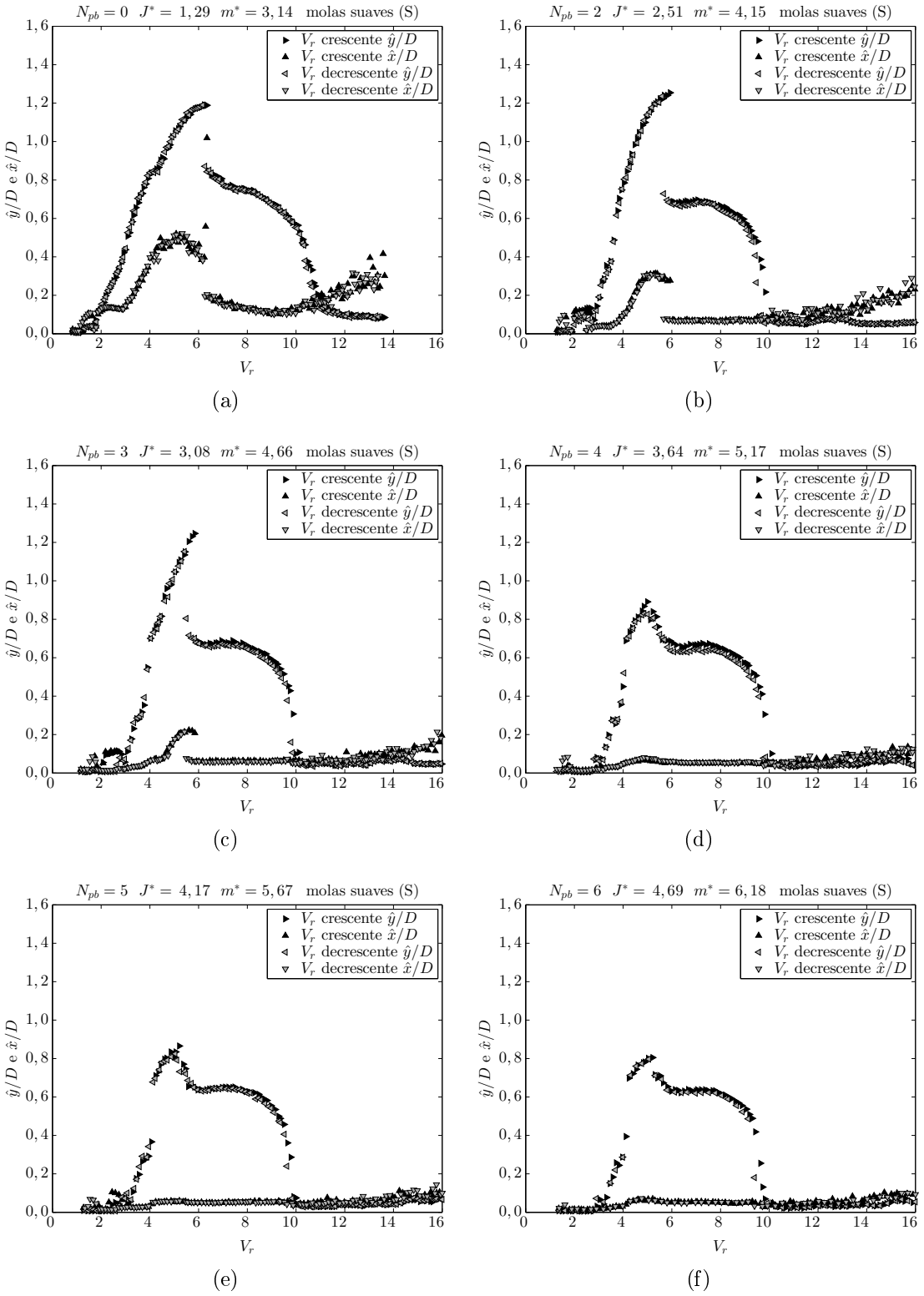
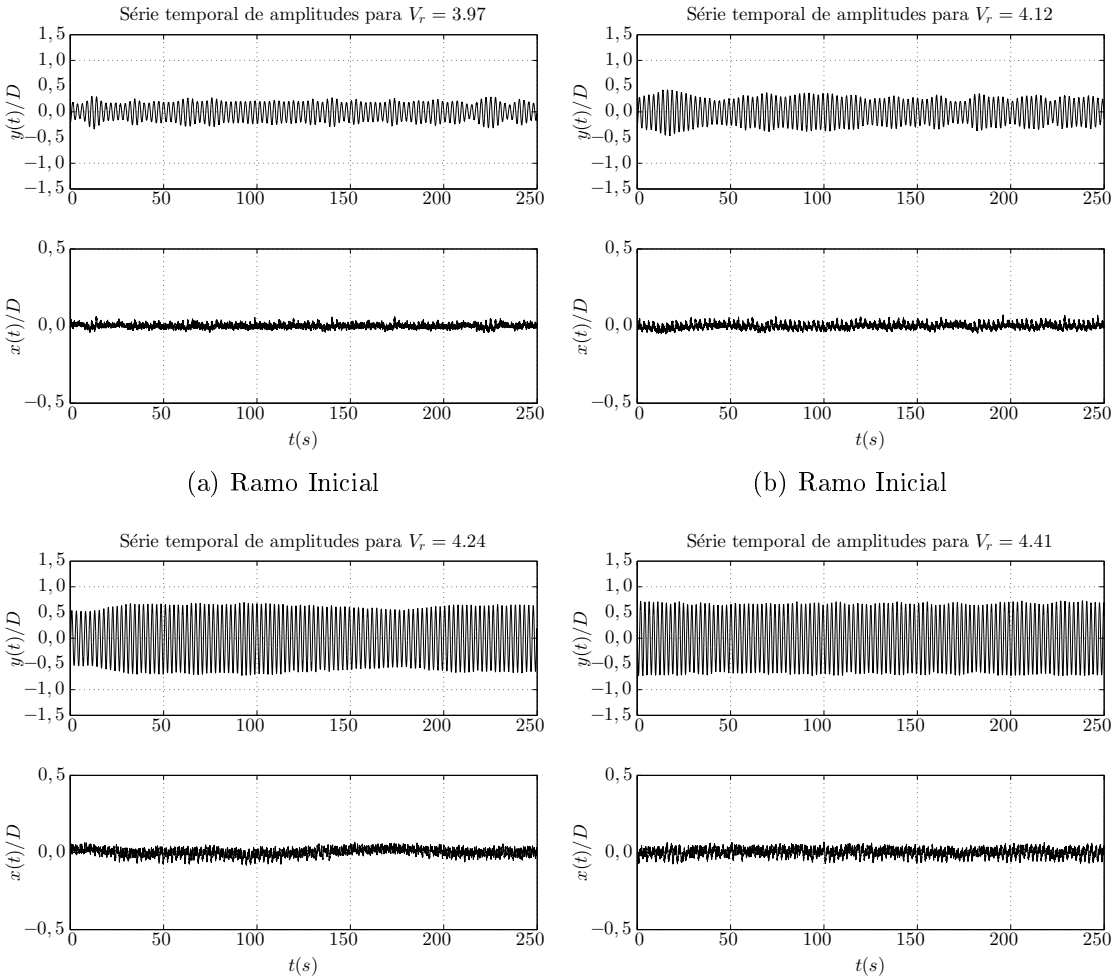


Figura 7.6: Resultados obtidos para testes de histerese. Ensaios realizados com $D =$ 32mm, conjunto de molas suaves (S). (a) $J^* = 1,29$ (b) $J^* = 2,51$ (c) $J^* = 3,08$ (d) $J^* = 3,64$ (e) $J^* = 4,17$ (f) $J^* = 4,69$. Pontos pretos representam corrida com $\Delta V_r > 0$ e pontos cinzas são corridas realizadas com $\Delta V_r < 0$.

na figura 7.6(f). A construção da figura 7.7 é análoga à da figura 7.5. As duas primeiras imagens, 7.7(a) e 7.7(b), são as séries temporais para os últimos dois pontos do Ramo Inicial e as últimas duas, 7.7(c) e 7.7(d) apresentam os dois primeiros pontos do Ramo Superior. Apesar de que a amplitude transversal apresenta batimentos e variações na sua amplitude máxima, não se observa transição intermitente entre ramos. As oscilações transversais no Ramo Superior também não apresentam intermitência. Em ambos os ramos analisados não se observam oscilações alinhadas com a corrente incidente.



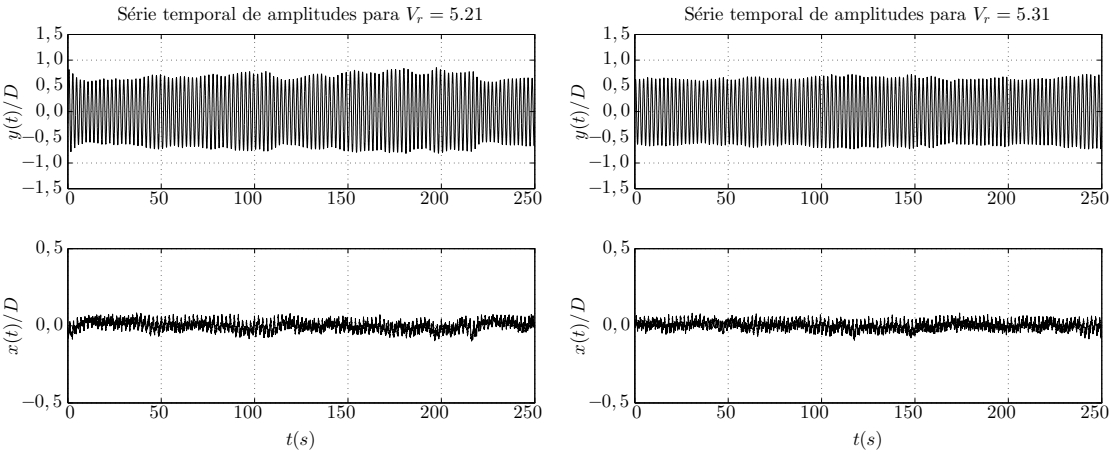
(a) Ramo Inicial (b) Ramo Inicial

(c) Ramo Superior (d) Ramo Superior

Figura 7.7: Séries temporais para caso com molas suaves (S) e $J^* = 4,69$. (a) e (b) dois últimos pontos do Ramo Inicial, (c) e (d) dois primeiros pontos do Ramo Superior.

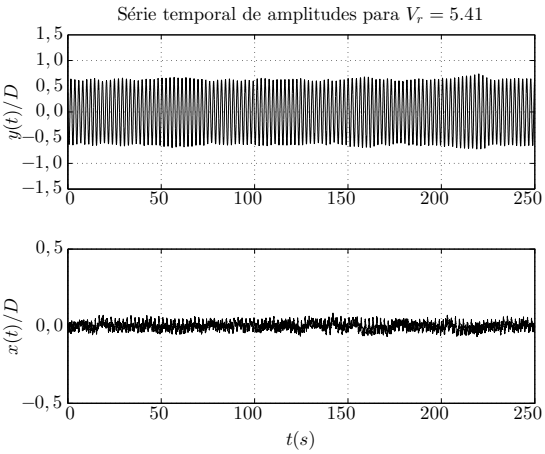
A figura 7.8 estuda a transição entre o Ramo Superior e o Ramo Inferior para a mesma condição $J^* = 4,69$ ($N_{pb} = 6$), ilustrada na figura na figura 7.6(f). As imagens 7.8(a) e 7.8(b) referem-se aos últimos dois pontos do Ramo Superior e as as figuras 7.8(c) e 7.8(d) são os dois primeiros pontos do Ramo Inferior. A transição dentre esses dois ramos é mais sutil e não apresenta grandes variações de amplitude como nos casos anteriores.

Ainda assim, é interessante notar que não há variações bruscas de amplitudes relacionadas à transições de ramos de resposta.

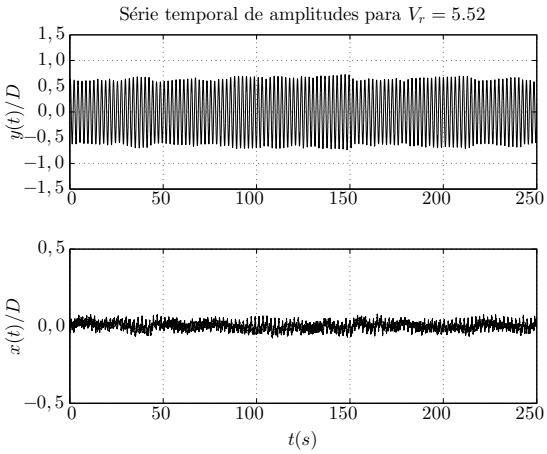


(a) Ramo Superior

(b) Ramo Superior



(c) Ramo Inferior



(d) Ramo Inferior

Figura 7.8: Séries temporais para o caso com molas suaves (S) e $J^* = 4,69$. (a) e (b) dois últimos pontos do Ramo Superior, (c) e (d) primeiros dois pontos do Ramo Inferior.

A histerese é consequência da troca entre modos de emissão de vórtices. Conforme foi apresentado no capítulo 6, no Super Ramo Superior o modo de desprendimento observado considera um único e intenso vórtice emitido a cada semi-ciclo, padrão 2BS, ou ainda um par de vórtices que rodam no mesmo sentido, padrão 2C. No Ramo Inferior, por outro lado, observam-se dois vórtices com circulação oposta e menos intensos em módulo, padrão 2P. Caso os modos de emissão de vórtices sejam parecidos, a transição entre os ramos de resposta apresenta intermitência. Quando os modos apresentam variação significativa entre si, a transição ocorre com histerese.

7.3 Influência do parâmetro de inércia J^*

Esta seção apresenta um estudo paramétrico da resposta do fenômeno de VIV com dois graus de liberdade em função do momento de inércia adimensional J^*. Todas as corridas de VIV realizadas nesta campanha foram realizadas com o cilindro com $D = 50$mm e com o conjunto de molas suaves (S). Um total de 27 cilindros de aço foram usados como lastros e variam o momento de inércia adimensional da estrutura entre $J^* = 0,73$, para $N_{st} = 00$, e $J^* = 6,19$, para $N_{st} = 27$.

Três regimes de resposta foram identificados. Cada regime é definido por um conjunto de características que envolvem a curva de amplitude de resposta e também a frequência dominante de oscilação em cada caso. O primeiro regime foi observado para os maiores valores de momento de inércia e apresenta resultados próximos dos resultados clássicos de VIV para estudos com apenas um grau de liberdade. Neste regime não ocorrem oscilações significativas na direção alinhada com a corrente. Já no segundo regime, observado para valores intermediários de J^*, as oscilações alinhadas com a corrente são observadas. Por fim, no terceiro regime, as respostas observadas se aproximam dos resultados obtidos denominados de "ressonância infinita".

Cada regime é analisado em maior detalhe nas próximas seções.

7.3.1 Primeiro regime - Oscilações puramente transversais

O primeiro regime de resposta observado para o fenômeno de VIV com dois graus de liberdade ocorre para elevados valores de momento de inércia. Este regime apresenta respostas próximas aos resultados encontrados na literatura de VIV com apenas um grau de liberdade. A grande semelhança acontece neste regime, pois ainda que possa oscilar na direção transversal, o cilindro não o faz e apresenta oscilações puramente transversais ao sentido da corrente incidente.

A figura 7.9 apresenta a compilação de diferentes resultados observados para o caso com maior momento de inércia testado. A figura 7.9(a) ilustra a curva de amplitudes adimensionais $\hat{y}/D$ e $\hat{x}/D$ pela velocidade reduzida V_r. Observa-se para a direção alinhada com a corrente, que ainda que não haja o desenvolvimento de um ramo de resposta significativo, uma pequena amplitude de oscilação acontece próxima à $V_r = 5$. Ainda que este resultado apresente o maior número de lastros desta campanha, este caso ainda não conseguiu suprimir completamente a resposta na direção alinhada.

É preciso fazer uma observação com relação aos valores de J^*. O resultado da figura 7.9, obtido para $J^* = 6,19$, possui maior oscilação máxima na direção alinhada com a corrente do que o resultado ilustrado na seção anterior para a figura 7.6(d), com $J^* = 3,64$. Esta observação é um indício de que o valor J^* não pode, sozinho, definir o regime de resposta do fenômeno de VIV. Esta seção foca na influência do parâmetro J^* para um determinado cilindro e conjunto de molas da base, no caso $D = 50$mm e conjunto de molas suaves (S).

Retornando à análise dos resultados para $J^* = 6,19$ ($N_{st} = 27$), a curva de amplitude praticamente não apresenta oscilação na direção alinhada com a corrente, enquanto que a curva de amplitude transversal pode ser dividida em três ramos, sendo eles o Ramo Inicial, o Superior e o Inferior. A figura 7.9(b) apresenta as mesmas curvas de amplitude, porém agora apresentadas contra a "velocidade reduzida verdadeira". O mapa de vórtices de Morse e Williamson (2009b) foi desenhado nessa figura e auxilia na identificação dos diferentes ramos de resposta. Observa-se, por exemplo, que o Ramo Inicial de fato cai na região para a qual o modo 2S é observado. Já o Ramo Superior ocorre para a região 2Po e o Ramo Inferior para a região 2P. É interessante notar que o Ramo Inferior acaba na fronteira da região 2P.

A figura 7.9(c) apresenta as velocidades máximas do cilindro em cada direção para diferentes valores de velocidade reduzida. As velocidades máximas foram calculadas como o produto entre a frequência dominante para cada direção e a amplitude relacionada a essa frequência dominante, medida pelo espectro de frequências da série temporal da amplitude. Verifica-se que para $V_r \approx 5$, próximo ao pico de máxima amplitude, que a velocidade máxima atingida pelo cilindro é muito próxima à própria velocidade do escoamento incidente $\dot{y}/U_\infty = 1$.

As figuras 7.9(d), 7.9(e) e 7.9(f) apresentam a resposta em frequência para o caso em questão. A primeira figura ilustra a frequência dominante em ambas as direções, enquanto que a segunda e a terceira apresentam os mapas de frequência, descritos no apêndice D, para a direção transversal e alinhada com a corrente, respectivamente.

Ao longo da tese, o comportamento em frequência de oscilação é geralmente ilustrado em função apenas da frequência dominante. Essa escolha é feita para concentrar a atenção na resposta dominante do fenômeno e simplificar a análise como um todo. É preciso porém verificar, pelo menos para alguns casos, qual é de fato, o comportamento em frequência do sistema.

Nota-se na imagem 7.9(d) que no Ramo Inicial a frequência dominante na direção

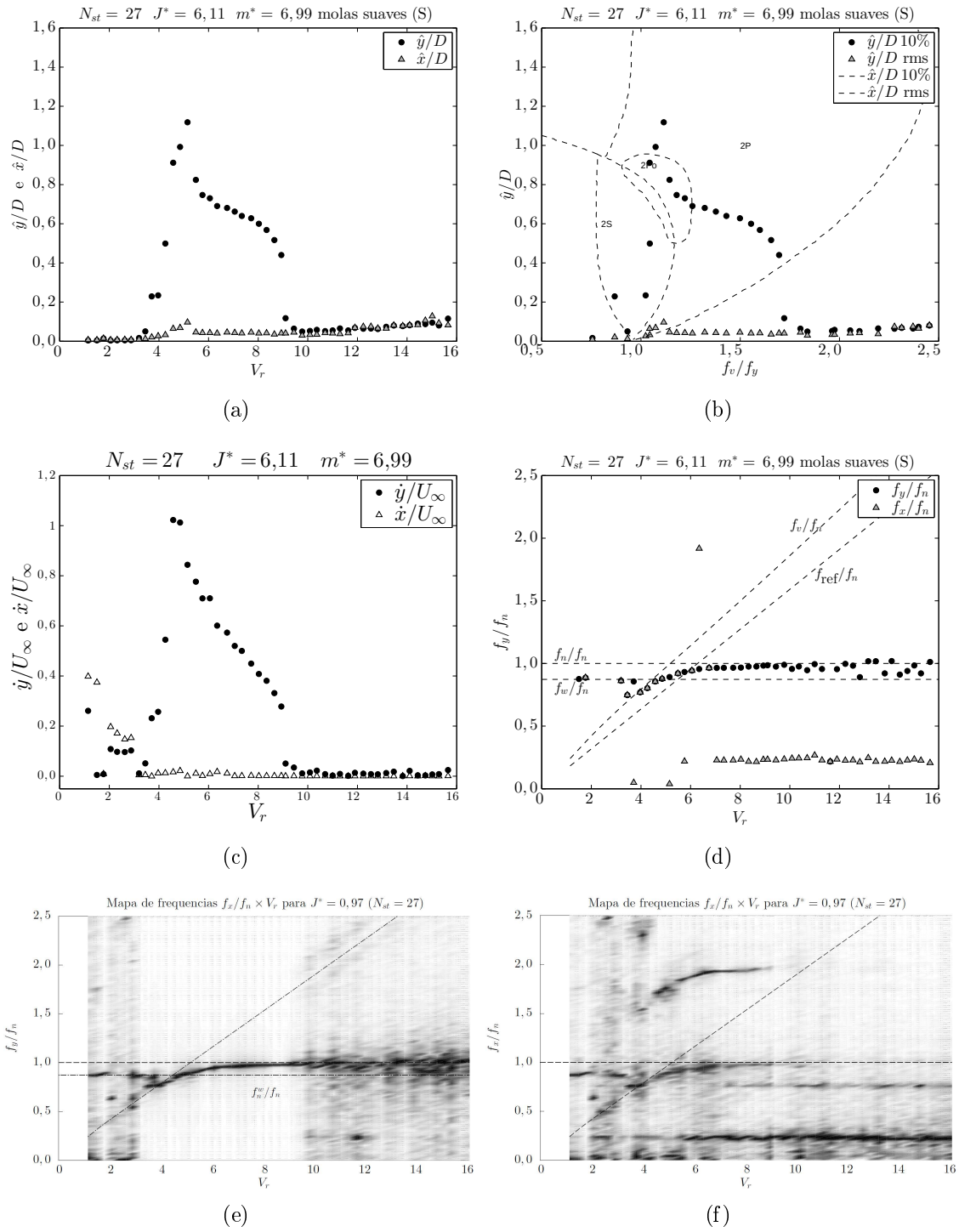


Figura 7.9: Respostas em amplitude, frequência e velocidade máxima de oscilação para $N_{st} = 27,\ J^* = 6,19$.

transversal segue a frequência de desprendimento de vórtices para cilindro fixo, $f_y = f_v$. A frequência f_v é representada nas curvas de frequência dominante como a linha tracejada mais inclinada. A segunda linha inclinada e tracejada é chamada de frequência de referência f_{ref}. A frequência de referência não é importante nos primeiros regimes, logo, sua descrição será adiada, por ora.

Quando f_y encontra a frequência natural do sistema em água f_w, as oscilações deixam de seguir a curva inclinada da frequência de Strouhal. A inclinação da curva f_y diminui até que o sistema se estabiliza próximo à frequência natural em ar $f_y = f_n$. O mapa de frequências da figura 7.9(e) apresenta o mesmo comportamento descrito. Nota-se que para $3 < V_r < 10$ o fundo da imagem é branco, enquanto que fora dessa região ele é mais escuro e borrado. Isso significa que para as regiões claras as oscilações são bem determinadas e a normalização adotada para a figura destaca um único comportamento. Para as regiões mais escuras, não existe comportamento dominante e a energia do espectro encontra-se espalhada em uma banda larga de frequências. Ainda assim, destaca-se o fato do mapa de frequências da direção alinhada, apresentado na figura 7.9(f), reproduzir o comportamento da direção transversal e apresentar um harmônico com $f_x = 2\,f_y$.

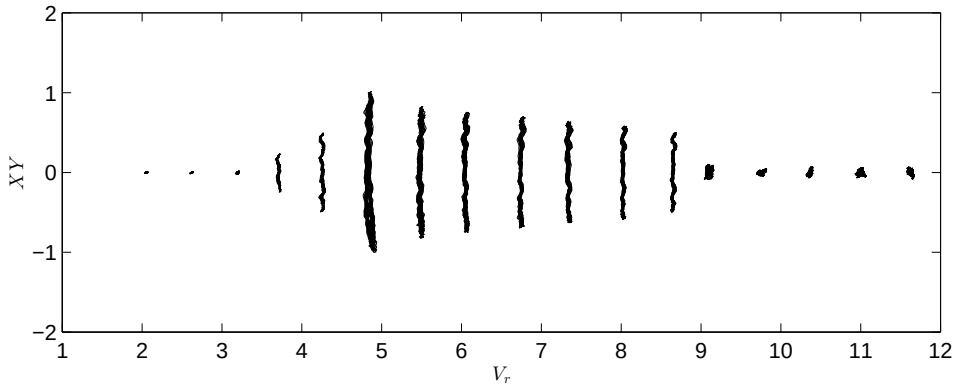


Figura 7.10: Trajetórias descritas pelo cilindro para $N_{st} = 27$, $J^* = 6,19$.

A figura 7.10 apresenta as trajetórias descritas pelo cilindro. Como já observado anteriormente, no primeiro regime de resposta o deslocamento do cilindro é puramente transversal. Essa característica faz com que as trajetórias sejam simples linhas verticais que indicam a amplitude de oscilação para cada valor mostrado na figura. Vale ressaltar que apenas alguns pontos experimentais foram ilustrados nessa figura. Caso todos os pontos experimentais fossem apresentados a figura ficaria confusa, pois as trajetórias ficariam sobrepostas.

A seção anterior apresentou séries temporais de oscilação alinha e transversal com a corrente visando estudar a transição entre os ramos de resposta. Enquanto os ensaios daquela seção focavam na observação da histerese, esta seção busca avaliar a presença de efeitos intermitentes. Como os ensaios desta campanha não foram feitos nos dois sentidos de V_r, não se pode afirmar a presença de transições com histerese.

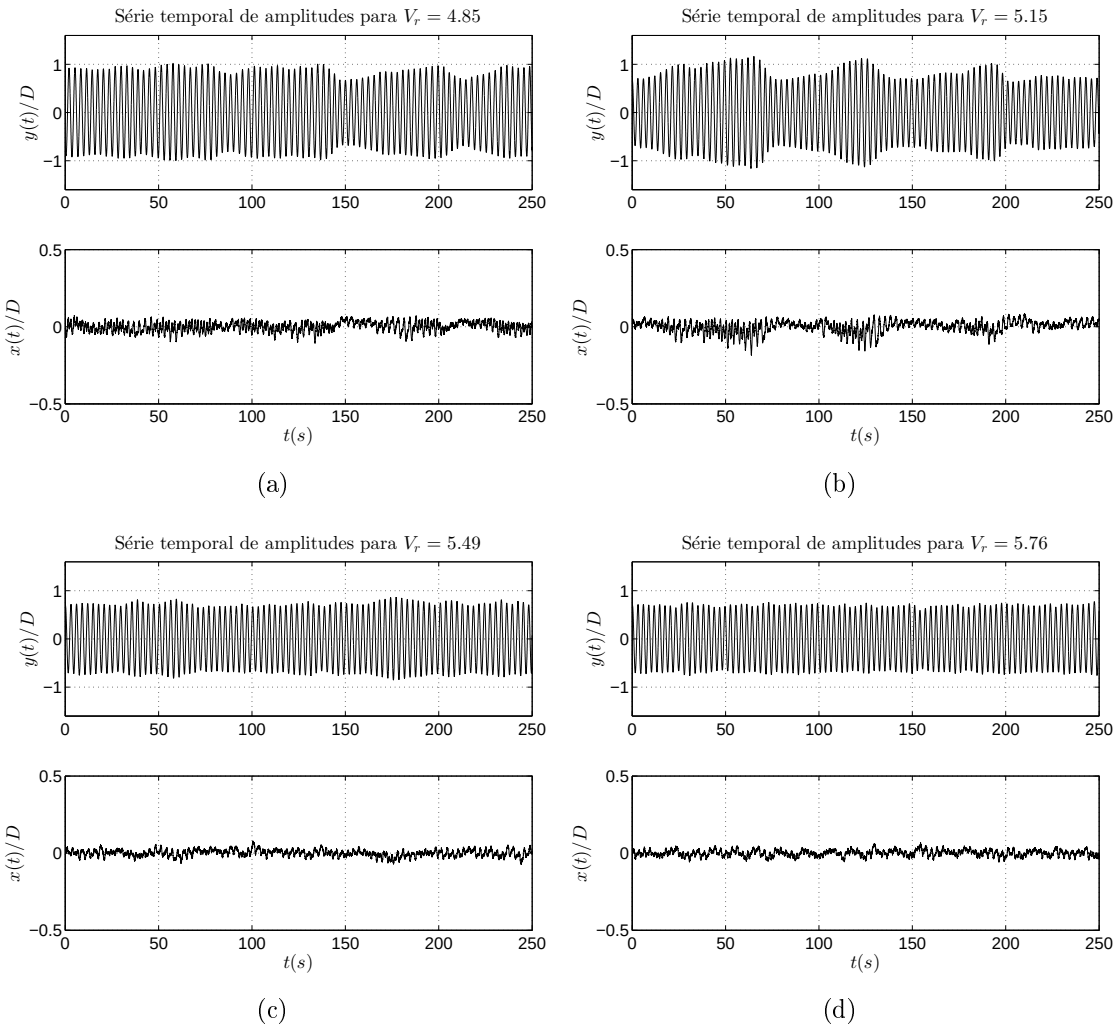


Figura 7.11: Séries temporais para transição entre Super Ramo Superior e Ramo Inferior. ($N_{st} = 27,\ J^* = 6,19$)

Seguindo o padrão usado na seção anterior, a figura 7.11 apresenta quatro conjuntos de séries temporais para as direções alinhada e transversal à corrente incidente. As duas primeiras curvas, 7.11(a) e 7.11(b), representam os dois últimos pontos do Ramo Superior e as duas últimas imagens, 7.11(c) e 7.11(d), representam os dois primeiros pontos do Ramo Inferior. Nota-se que para o Ramo Superior existem pequenas regiões de intermitência nas quais ocorre breve elevação da amplitude de oscilação na direção transversal y/D, acompanhadas por pequenas oscilações na direção alinhada x/D. Esse efeito

de intermitência cresce do penúltimo para o último ponto do Ramo Superior. Já no Ramo Inferior não se observa esse tipo de efeito e a amplitude de oscilação é bem definida.

A figura 7.12 apresenta as respostas observadas para outros três casos: $J^* = 5,95$; $J^* = 5,63$ e $J^* = 5,30$. Nessa figura apenas as curvas de amplitude de oscilação e frequências dominantes são apresentadas. O objetivo dessa figura é mostrar que, conforme o momento de inércia é reduzido, a amplitude máxima de oscilação em ambas as direções cresce. As pequenas oscilações alinhadas com a corrente observadas para $V_r = 5$, no caso de $J^* = 6,19$ ($N_{st} = 27$), se elevam e deixam de ser desprezíveis.

Observando as curvas de frequência dominante, coluna da direita, duas observações podem ser feitas. A primeira é que, conforme J^* cai, mais visíveis são os primeiros ramos alinhados. Nota-se que nos três casos existe um grupo de pontos da frequência dominante f_x na linha tracejada que representa a frequência natural do sistema em água f_w. Essa observação indica que os ramos alinhados ocorrem próximos à frequência natural da estrutura em água e excitam, preferencialmente, a direção alinhada com a corrente. É interessante constatar que, para estes modos, quem controla o fenômeno é a direção alinhada e não a transversal, como usualmente adotado. A segunda observação trata da transição entre o Ramo Superior e o Ramo Inferior. Para os dois primeiros casos, 7.12(b) e 7.12(d), a transição entre os ramos é contínua, sem aparente ruptura na inclinação das curvas. Já para o último caso, figura 7.12(f), nota-se uma pequena descontinuidade da curva f_y, que parece se prender brevemente a f_w. Após essa leve ruptura, a transição volta a ocorrer de maneira contínua e suave até que a frequência dominante de oscilação f_y se aproxime da frequência natural em ar f_n.

7.3.2 Segundo regime - Presença das oscilações alinhadas com a corrente

O segundo regime de resposta é caracterizado pela presença de oscilações alinhadas com a corrente e de uma transição descontínua na curva de frequência f_y entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior.

A figura 7.13 apresenta o mesmo grupo de resultados ilustrados na figura 7.9, porém agora para o caso $J^* = 4,86$ ($N_{st} = 17$). A imagem 7.13(a) exibe as curvas de amplitude $\hat{y}/D$ e $\hat{x/D}$ pela velocidade reduzida V_r. Nota-se que além dos primeiros ramos alinhados, observados para baixos valores de velocidade reduzida, ocorrem oscilações na direção alinhada com a corrente no intervalo $4 \leq V_r \leq 6$. Associadas às oscilações na direção alinhada, estão as grandes amplitudes da direção transversal, típicas do Super

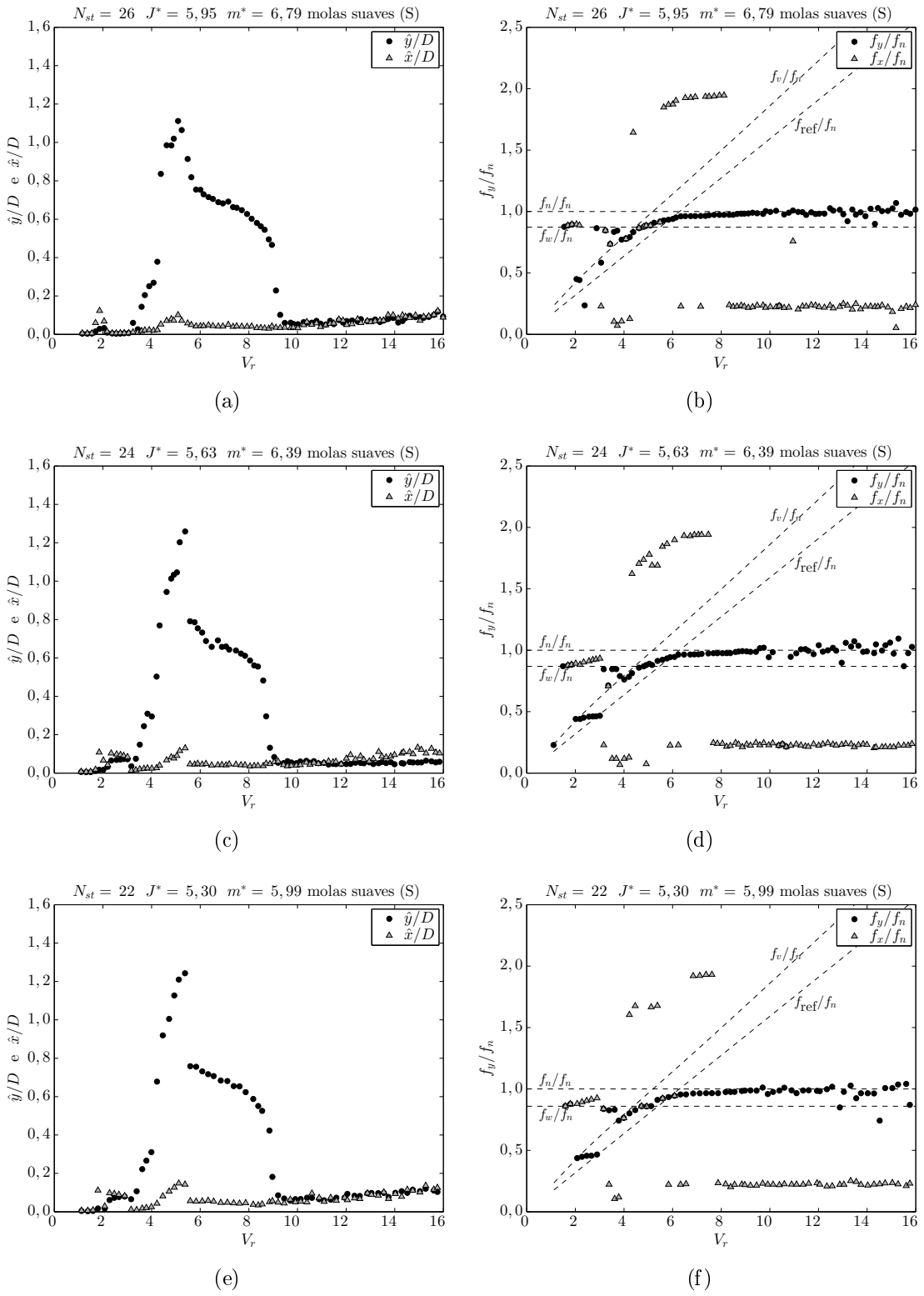


Figura 7.12: Respostas em amplitude e frequência de oscilação para $N_{pb} = 22$, $N_{pb} = 24$ e $N_{pb} = 26$. Efeitos da oscilação alinhada com a corrente podem ser desprezados e a evolução da frequência dominante é contínua.

Ramo Superior.

O emprego do mapa de vórtices, proposto por Morse e Williamson (2009b) e ilustrado na figura 7.13(b), perde sentido para os pontos do Super Ramo Superior. Isso ocorre porque esses pontos oscilam na direção alinhada com a corrente, enquanto que o mapa foi construído a partir de resultados obtidos para experimentos de VIV com apenas um grau de liberdade. Apesar dessa divergência, é importante observar que logo que o Super Ramo Superior acaba, os primeiros pontos do Ramo Inferior surgem na fronteira da região 2P com a região 2Po e nela ficam até a outra fronteira, mais à direita.

A curva de velocidade, apresentada na imagem 7.13(c), mostra que a velocidade máxima transversal, para os pontos do Super Ramo Superior, são próximas de $\dot{y}/U_\infty \approx 1,1$. Como agora existem oscilações alinhadas com a corrente, a velocidade nessa direção também cresce. Para o caso analisado, observa-se relação de velocidades da ordem de $\dot{x}/U_\infty \approx 0,2$. O valor de $\dot{x}/U_\infty$ cresce conforme J^* é diminuído, aumentando cada vez mais a influência da direção alinhada com a corrente.

As curvas de frequência dominante apresentadas na imagem 7.13(d) mostram a evolução de f_y e f_x. A princípio o sistema encontra os primeiros ramos alinhados e as vibrações se iniciam para $f_x = f_w$. Nessa faixa de velocidade reduzida, a direção alinhada controla as vibrações. A direção transversal oscila com metade da frequência $f_y = f_x/2$. A partir de $V_r \approx 3,5$ os primeiros ramos alinhados não se desenvolvem mais e o sistema encontra a frequência de Strouhal para oscilar, representada pela linha tracejada mais inclinada. Durante o Ramo Inicial a frequência f_y segue f_v, até que encontra f_w. No Ramo Inicial ainda não há oscilações na direção alinhada.

Quando a frequência f_y encontra a frequência natural em água f_w, ela fica presa nesse patamar até $V_r \approx 6$. Observando o mapa de frequências da direção alinhada com a corrente, figura 7.13(f), nota-se que além de seguir o harmônico $f_x = 2\,f_y$, existe outra componente em $f_x = f_y$ e outra ainda para baixas frequências.

A transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior ocorre sem intermitência. A transição entre esses dois ramos foi registrada para o último ponto do Super Ramo Superior e é apresentada na figura 7.14(b). Verifica-se que no penúltimo ponto do SRS, figura 7.14(a), a amplitude de oscilação na direção transversal é constante e não se observam batimentos ou efeitos intermitentes. As oscilações da direção alinhada possuem maior frequência e modulam ao longo do tempo, consequência da baixa frequência observada no mapa de frequência da figura 7.13(f). A transição visualizada na imagem 7.14(b) ocorreu sem que a velocidade do canal fosse alterada, ou seja, o sistema já se encontrava

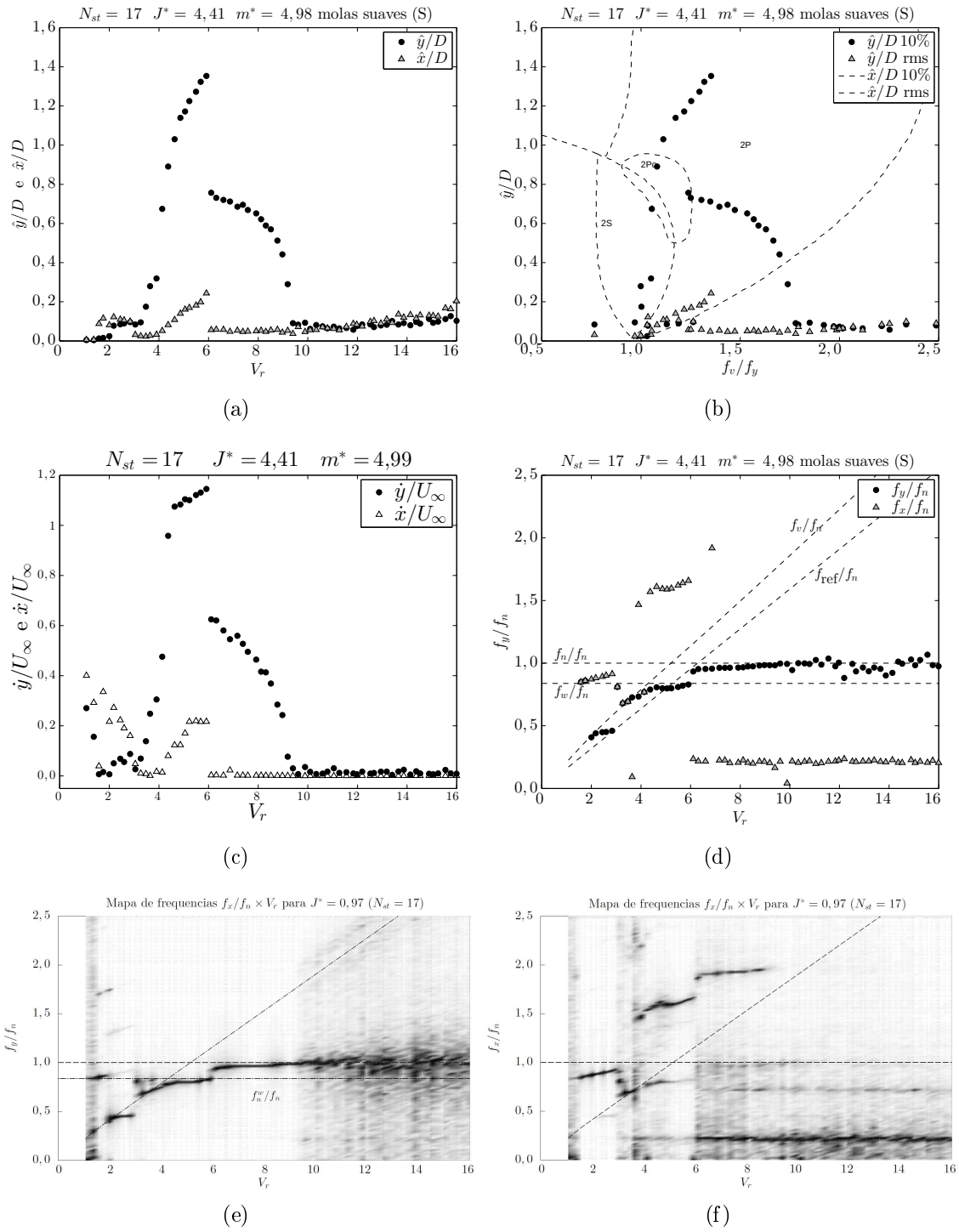


Figura 7.13: Respostas em amplitude, frequência e velocidade máxima de oscilação para $N_{st} = 17,\ J^* = 4,86$

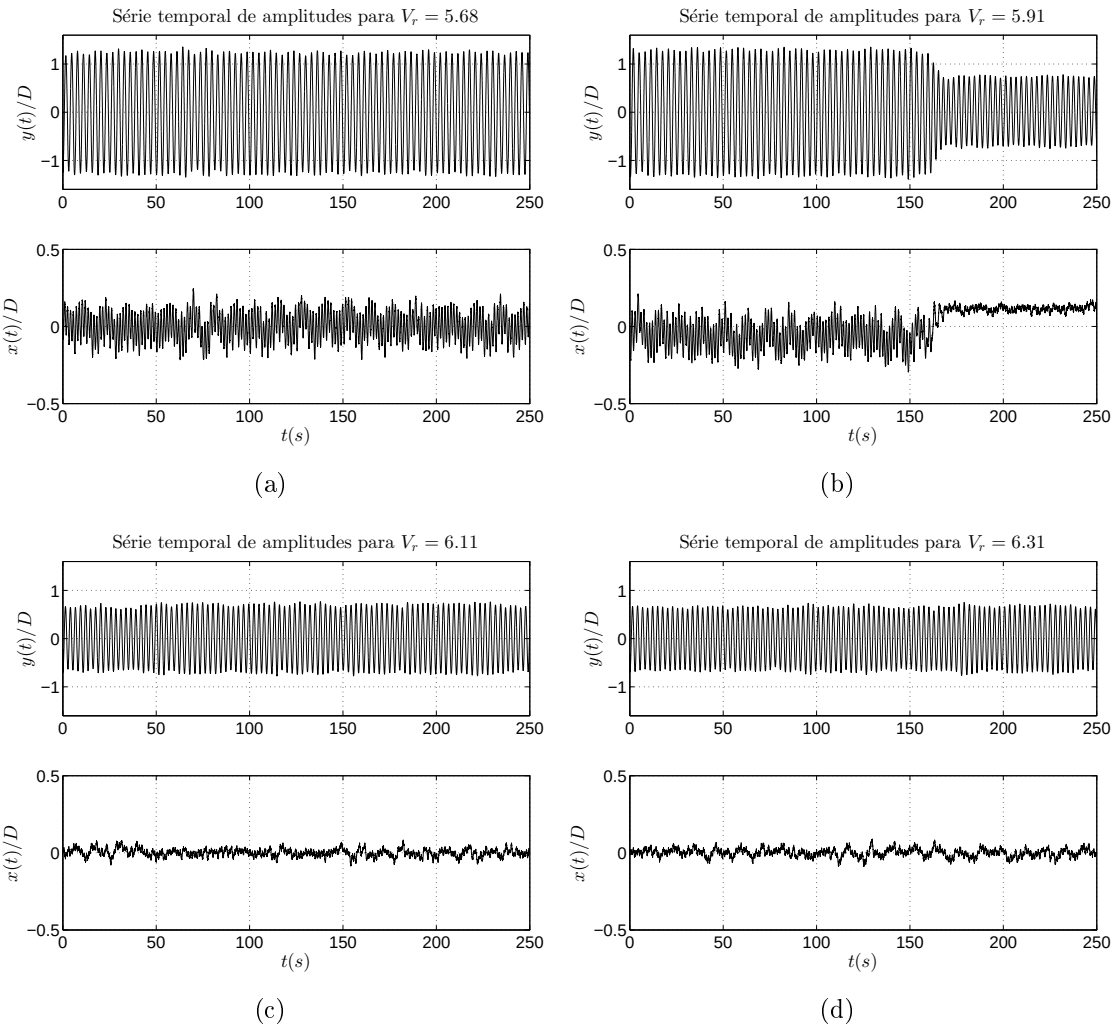


Figura 7.14: Séries temporais para transição entre Super Ramo Superior e Ramo Inferior. ($N_{st} = 17,\ J^* = 4,86$)

em uma situação instável, de forma que alguma perturbação por volta de $t = 150$s foi suficiente para causar a mudança de ramo de resposta. A direção transversal demonstra variação na amplitude de oscilação, enquanto que a direção alinhada, além de variar a amplitude de oscilação, apresenta também deslocamento da posição média. Associada à variação de amplitude, também estão as variações de frequência, mas estas são difíceis de serem observadas nesta imagem. Uma vez no Ramo Inferior, figuras 7.14(c) e 7.14(d), a amplitude de oscilação $\hat{y}/D$ se mantém constante ao longo do tempo enquanto que $\hat{x}/D \approx 0$.

As trajetórias descritas pelo cilindro para o caso $J^* = 4,86$ ($N_{st} = 17$) são mais interessantes que as do caso $J^* = 6,19$ ($N_{st} = 27$). Como agora as oscilações alinhadas com a corrente se manifestam, é possível observar curvas que variam entre a letra "C" e o

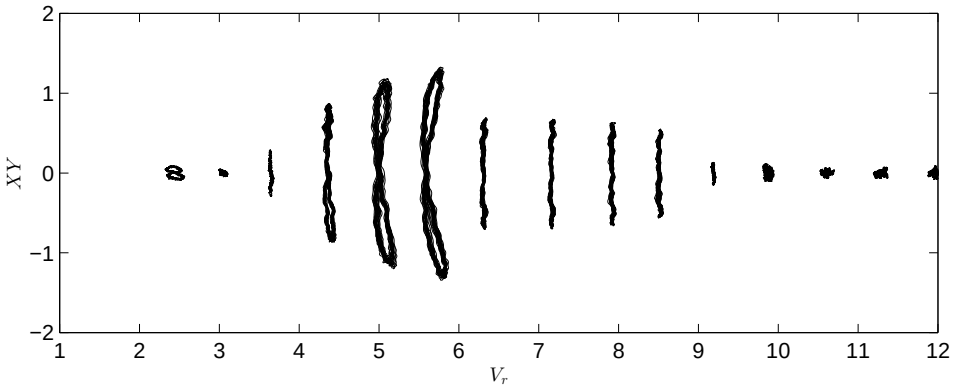


Figura 7.15: Trajetórias descritas pelo cilindro para $N_{st} = 17$, $J^* = 4,86$

algarismo "8". Como analisado no capítulo 6, o formato da trajetória depende do ângulo de fase entre os movimentos de cada direção. Quanto menor for o ângulo de fase ϕ, mais próximo de um "8" a trajetória se parecerá. Quando $\phi \to -90^o$, por sua vez, a trajetória se aproxima de um"C".

A figura 7.16 compila as curvas de amplitude e frequência dominantes para outras três condições de momento de inércia. Em todos os casos, observam-se oscilações na direção da corrente e elevadas amplitudes na direção transversal. Para o caso com menor momento de inércia, a curva de frequência dominante na direção transversal f_y atravessou a linha tracejada da frequência natural em água. Em todos os casos, observa-se um salto na curva de frequência f_y na transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior. Em todas as curvas de frequência pode-se observar também que as oscilações dos primeiros ramos alinhados começam na frequência natural em água $f_x = f_w$, mas nunca ultrapassam a frequência natural em ar f_n.

Para elevados valores de velocidade reduzida, $V_r > 10$, as amplitudes de oscilação caem para valores abaixo de $\hat{y}/D < 0,2$. Essas pequenas oscilações não são mais oriundas do fenômeno de VIV propriamente dito, mas de outro fenômeno de interação fluido-estrutura denominado de *buffeting*. As oscilações são provocadas por perturbações turbulentas da esteira. Como o espectro de excitação é banda larga, o sistema escolhe oscilar entre suas frequências naturais em ar e em água, como pode ser observado nas figuras 7.16(b), 7.16(d) e 7.16(f).

Conforme o momento de inércia da estrutura é diminuído, verifica-se que a amplitude de oscilação da direção alinhada com a corrente cresce para o Super Ramo Superior. Além disso, conforme J^* cai, a frequência f_y passa a se separar da curva de Strouhal e

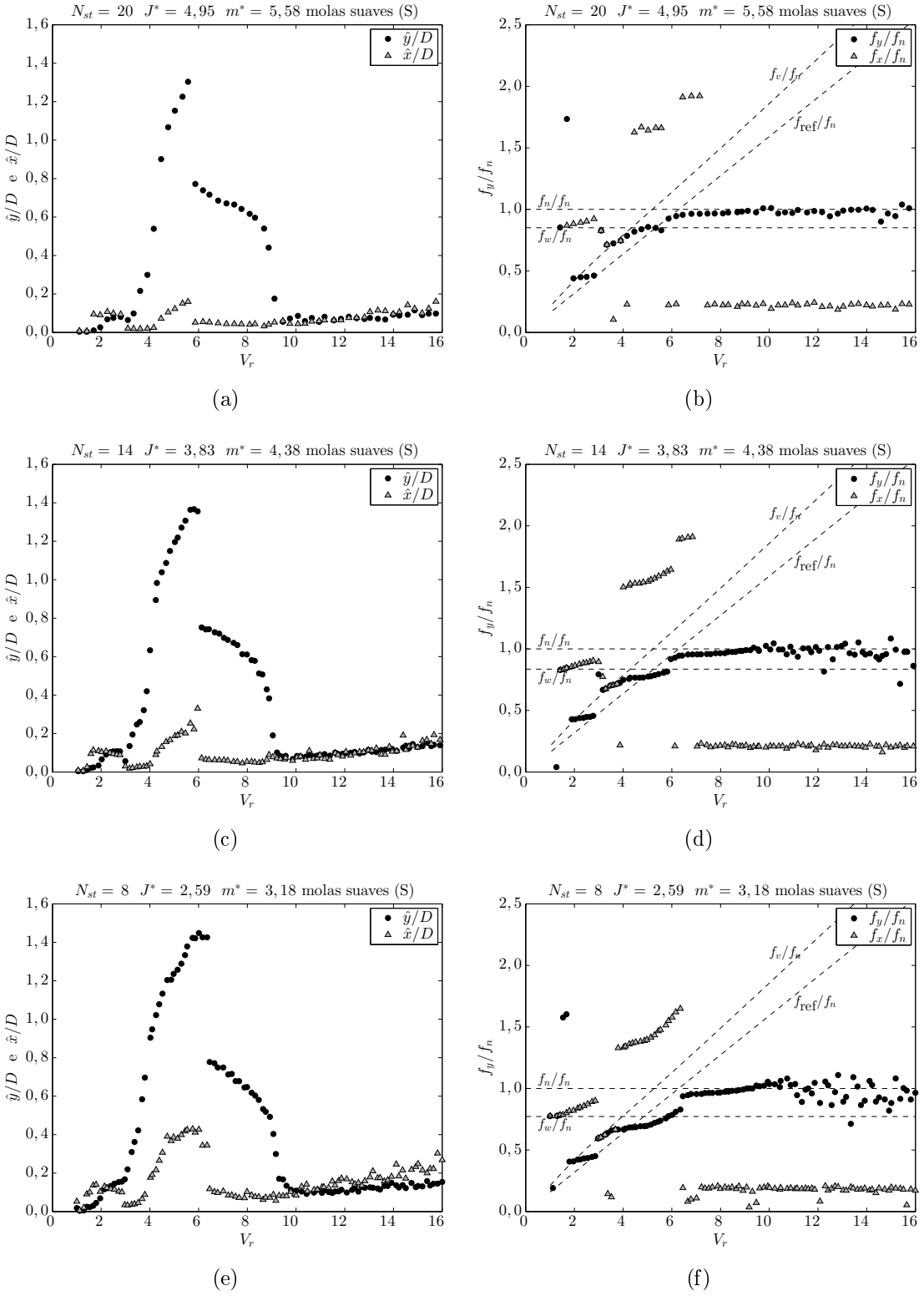


Figura 7.16: Respostas em amplitude e frequência de oscilação para $N_{pb} = 08$, $N_{pb} = 14$ e $N_{pb} = 20$. Efeitos do segundo grau de liberdade se manifestam.

começa a se alinhar com a frequência de referência f_{ref}, que é a segunda curva inclinada nas curvas de frequência dominante. A resposta do fenômeno de VIV é cada vez mais próxima às características do terceiro regime.

7.3.3 Terceiro regime - Aproximação da *ressonância infinita*

O terceiro regime de resposta não foi atingido neste trabalho. Os resultados desta seção, porém, demonstram parte da transição do fenômeno entre o segundo regime e o terceiro.

A principal característica do terceiro regime, denominado originalmente de "ressonância infinita" por Govardhan e Williamson (2000), é não haver Ramo Inferior e as oscilações perdurarem no Ramo Superior ou no Super Ramo Superior, até para elevados valores de V_r. Além de manter as elevadas amplitudes de oscilação na direção transversal, o terceiro regime é caracterizado pela variação linear das frequências dominantes com a velocidade reduzida.

A figura 7.17 apresenta os resultados obtidos para $J^* = 0,98$ ($N_{st} = 01$). Observa-se para a direção alinhada com a corrente uma elevada amplitude de oscilação $\hat{x}/D \approx 0,7$. Não há mais uma separação entre os primeiros ramos alinhados com o Ramo Inicial. Conforme o momento de inércia J^* é reduzido, o início do Ramo Inicial se desloca para menores valores de velocidade reduzida. Os ramos alinhados SS e AS não mudam sua posição, logo ocorre o encontro entre esses dois comportamentos. Com relação à amplitude transversal, o valor máximo de $\hat{y}/D$ diminui levemente. Apesar de ainda continuar alto, é importante destacar que a amplitude transversal não cresce mais conforme o terceiro regime é alcançado, mas reage de maneira contrária e diminui.

A curva 7.17(b) permite observar como os pontos do Super Ramo Superior passam a se concentrar em uma linha vertical. Considerando que a abscissa desse gráfico equivale a f_v/f_y, manter uma linha vertical significa que a relação entre a frequência de desprendimento de vórtices e a frequência dominante é uma constante, ou seja a frequência dominante cresce linearmente com a velocidade do escoamento. De fato, observando a figura 7.17(d) observa-se que até $V_r \approx 8$ as frequências f_y e f_x crescem linearmente e próximas da frequência de referência f_{ref}.

A frequência de referência é uma alternativa para o uso da frequência de desprendimento de vórtices em cilindro fixo. Ainda que, para o Ramo Inicial, o processo de formação seja próximo do caso com cilindro fixo, o mesmo não pode ser assumido para os demais ramos, logo, comparar a resposta da estrutura com a qual o cilindro seria forçado,

caso não estivesse oscilando, perde o sentido. A frequência de referência f_{ref} foi definida, nesta tese, como a frequência com a qual o cilindro deveria se mover para, com uma amplitude de oscilação igual a um diâmetro, ter a sua velocidade máxima igual à velocidade do escoamento incidente U_∞.

$$y(t) = \hat{y}\,\sin\left(2\pi\, f_{\text{ref}}\, t\right) \rightarrow \dot{y} = \hat{y}\, 2\pi\, f_{\text{ref}}\, \cos\left(2\pi\, f_{\text{ref}}\, t\right)$$

Considerando que a amplitude de referência seja um diâmetro $\hat{y}/D = 1$ e a velocidade do cilindro seja igual à velocidade incidente U_∞:

$$f_{\text{ref}} = \frac{U_\infty}{2\pi D} \tag{7.1}$$

Verifica-se que, de fato, a amplitude do cilindro é próxima a um diâmetro e sua velocidade máxima é próxima à velocidade do escoamento incidente, como pode ser observado na figura 7.17(c). A velocidade máxima na direção alinhada com a corrente cresce no terceiro regime e atinge $\dot{x}/U_\infty = 0,7$.

Os mapas de frequência confirmam o constatado para a curva de frequências dominantes. A informação adicioinal fornecida pelo mapa 7.17(f) é que além da frequência dominante na direção alinhada seguir aproximadamente o dobro da frequência da direção transversal, ela apresenta importante uma segunda frequência, bem mais baixa que a dominante, e constante com a velocidade reduzida.

Para a condição apresentada, $J^* = 0,98$ ($N_{st} = 01$), o sistema consegue ultrapassar a barreira da frequência natural em água f_w, porém perde sua estabilidade ao atingir a frequência natural em ar f_n e transiciona do Super Ramo Superior para o Ramo Inferior.

A figura 7.18 ilustra as trajetórias descritas pelo cilindro para a mesma condição da figura 7.17. Nota-se agora que para baixos valores de velocidade reduzida a trajetória era similar à letra "C", enquanto que para valores mais altos ele se aproxima do algarismo "8". Essas trajetórias foram determinadas excluindo a componente de baixa frequência do sinal. Para isso um filtro de média móvel foi usado para descontar o deslocamento médio alinhado na direção da corrente.

A figura 7.19 mostra séries temporais para quatro velocidades reduzidas próximas à transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior. As duas primeiras imagens apresentam resultados para os últimos dois pontos do SRS e as figuras 7.19(c) e 7.19(d) ilustram a resposta para os dois primeiros pontos do Ramo Inicial.

Verifica-se que a transição entre esses dois ramos é intermitente. Tanto na figura

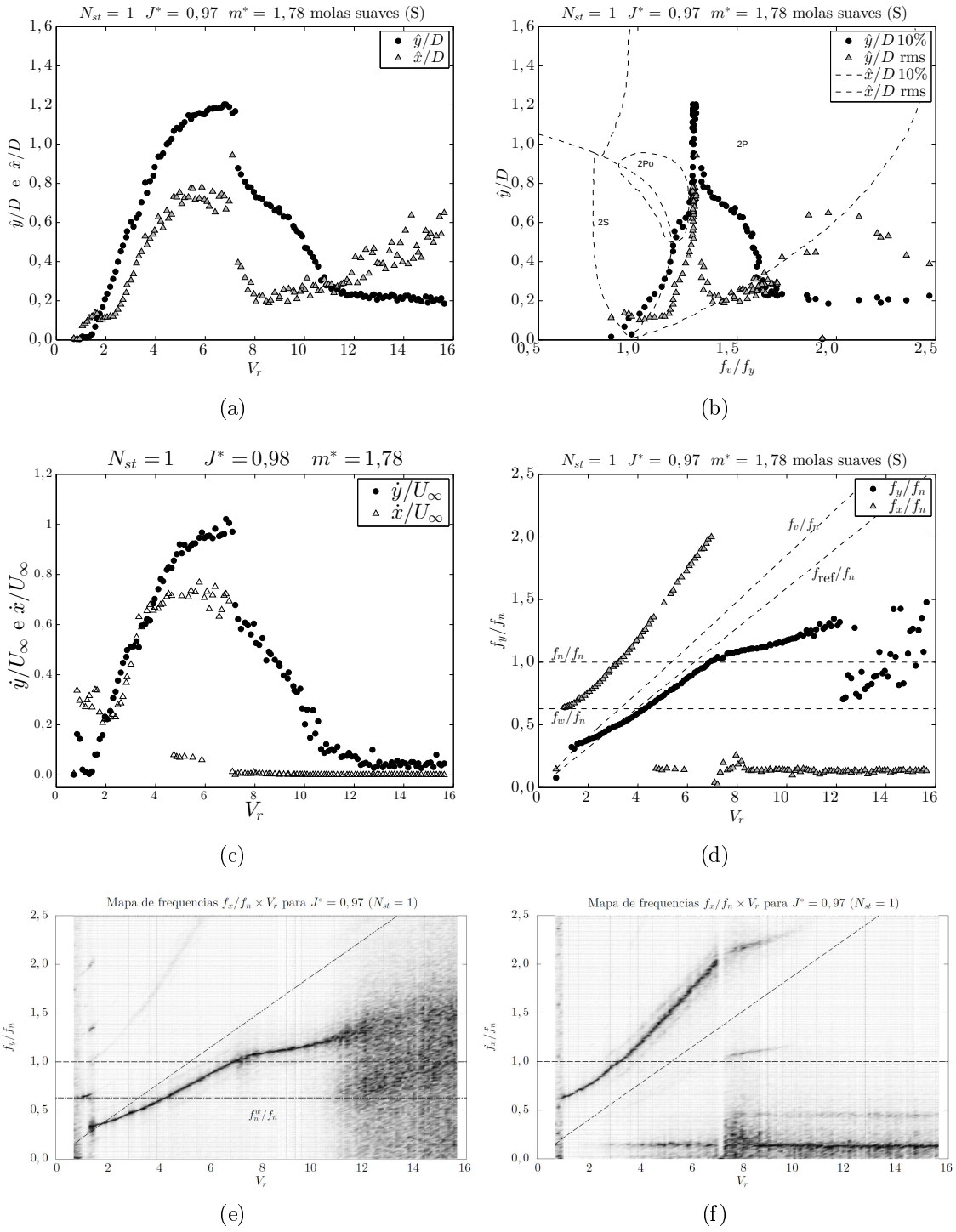


Figura 7.17: Respostas em amplitude, frequência e velocidade máxima de oscilação para $J^* = 0,98$ ($N_{st} = 01$).

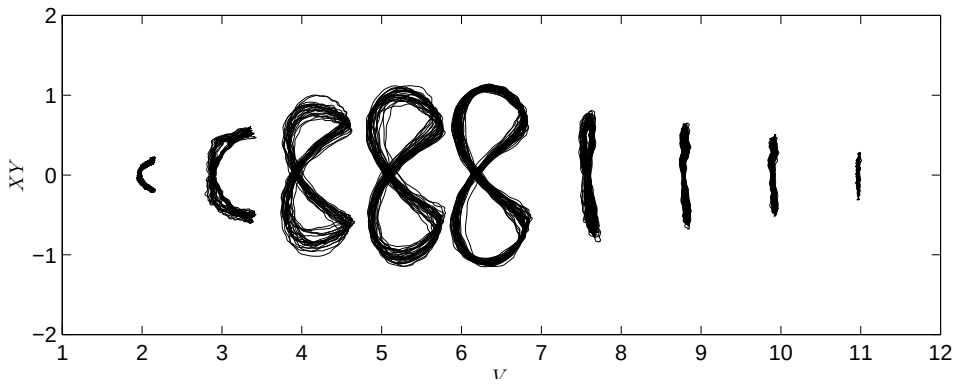


Figura 7.18: Trajetórias descritas pelo cilindro para $J^* = 0,98$ ($N_{st} = 01$)

7.19(a) quanto na 7.19(b) observa-se transição de ramo, com a variação da amplitude transversal e também brusca variação no comportamento na direção alinhada com a corrente. Para as grandes amplitudes do SRS, o deslocamento na direção alinhada possui elevada frequência e amplitude de oscilação. Com a transição para o Ramo Inferior, ocorre grande variação na posição média do cilindro, causada por brusca mudança no coeficiente de arrasto médio. Observa-se também que as oscilações com elevada frequência cessam, mas persistem as de baixa frequência.

A figura 7.20 apresenta outros três exemplos J^* e auxilia perceber que, quanto menor J^*, mais linear se torna o comportamento da frequência dominante. Para 7.20(a), $J^* = 0,73$, após a transição do SRS para o Ramo Inferior, a amplitude na direção alinhada com a corrente permanece alta. Essa amplitude, porém, se deve às oscilações de baixa frequência, tal como ilustrado na curva de frequências 7.20(b). Já para o caso com $J^* = 1,46$, ainda é possível avaliar a influência da frequência natural f_n. No caso com menor momento de inércia, o sistema consegue ultrapassar f_n, porém logo em seguida sucumbe à transição.

Seguindo uma abordagem similar à proposta por Govardhan e Williamson (2000), pode-se medir o valor da frequência de oscilação no início do Ramo Inicial para prever a ocorrência da "ressonância infinita". Como discutido anteriormente, para o Ramo Inferior, a frequência de oscilação é próxima à frequência natural do sistema em ar f_n, logo a adimensionalização $f_{RI}/f_n \approx 1$. Mudando, apenas para esta análise, a frequência de adimensionalização e adotando f_w como referência, a relação f_{RI}/f_w apresenta comportamento parecido ao obtido por Govardhan e Williamson (2000) e Jauvtis e Williamson (2004).

A figura 7.21 apresenta a relação f_{RI}/f_w para os dados desta campanha experi-

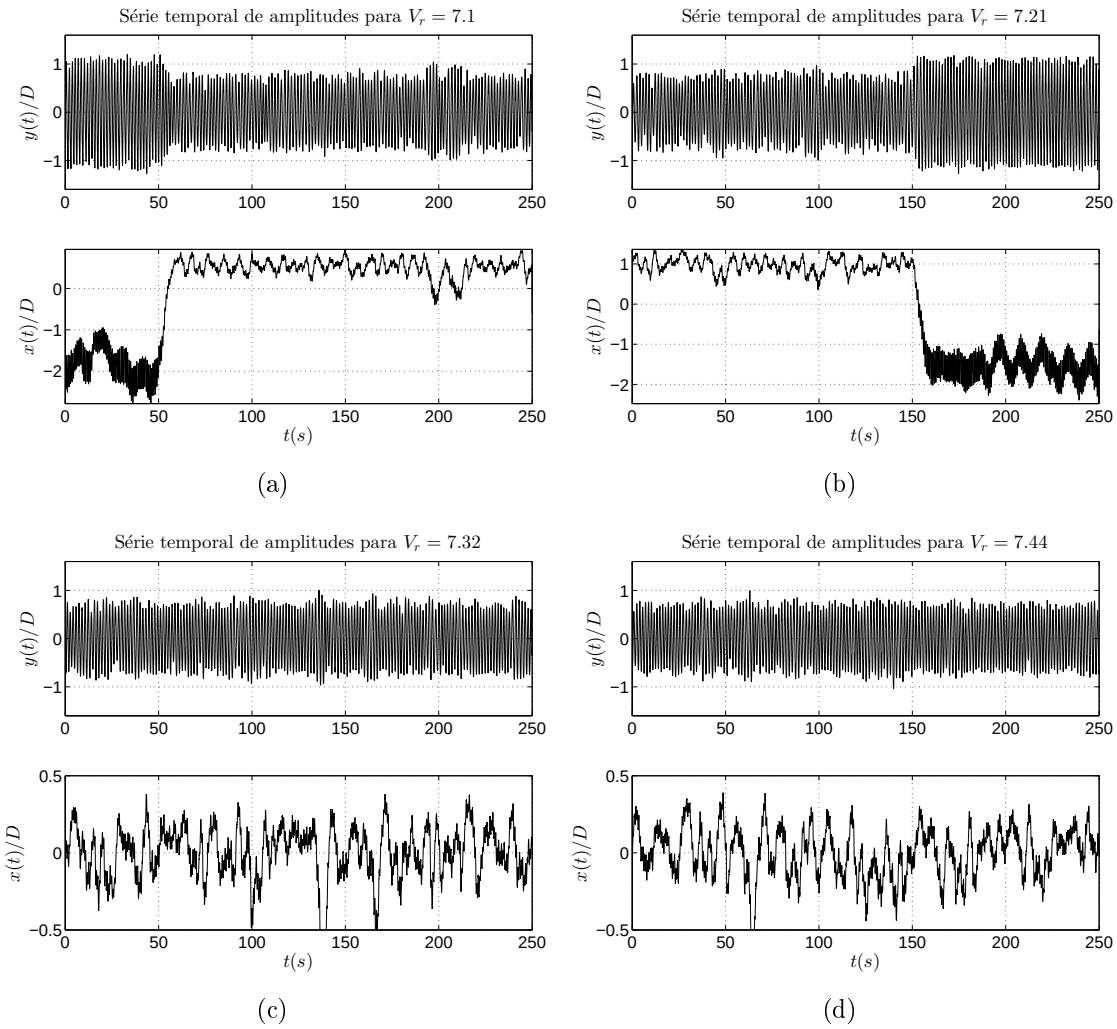


Figura 7.19: Séries temporais para transição entre Super Ramo Superior e Ramo Inferior. ($N_{st} = 01$, $J^* = 0,98$)

mental. Os pontos pretos representam os valores medidos experimentalmente e as duas curvas tracejadas indicam duas funções de ajuste. A linha tracejada mais fina representa a curva de ajuste "potencial". Este nome foi escolhido baseado na equação de referência que Govardhan e Williamson (2000) usaram para ajustar os dados. O capítulo 3 apresentou a equação 3.25, re-apresentada abaixo:

$$\frac{f_{RI}}{f_w} = \sqrt{\frac{m^* + C_a^{pot}}{m^* + C_{EA}}}$$

Substituindo m^* por J^* define-se a função de ajuste potencial 7.2.

$$\frac{f_{RI}}{f_w} = \sqrt{\frac{J^* + C_a^{pot}}{J^* C_{EA}}} = \sqrt{\frac{J^* + 1}{J^* + C_{EA}}} \tag{7.2}$$

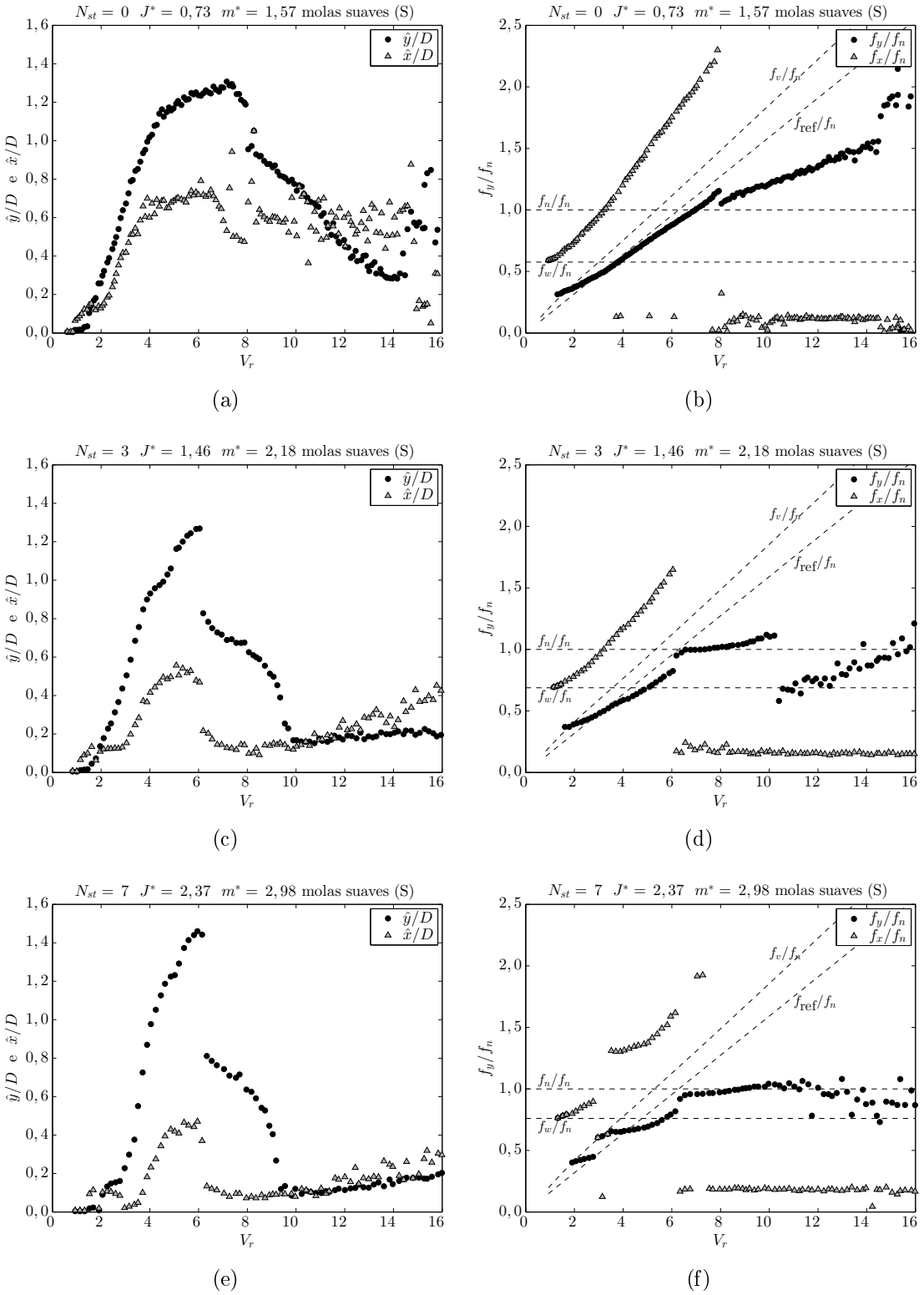


Figura 7.20: Respostas para amplitude e frequência para $N_{pb} = 0$, $N_{pb} = 03$ e $N_{pb} = 07$. Fenômeno se aproxima do terceiro regime: "ressonância infinita". A frequência dominante de oscilação passa a seguir f_{ref}

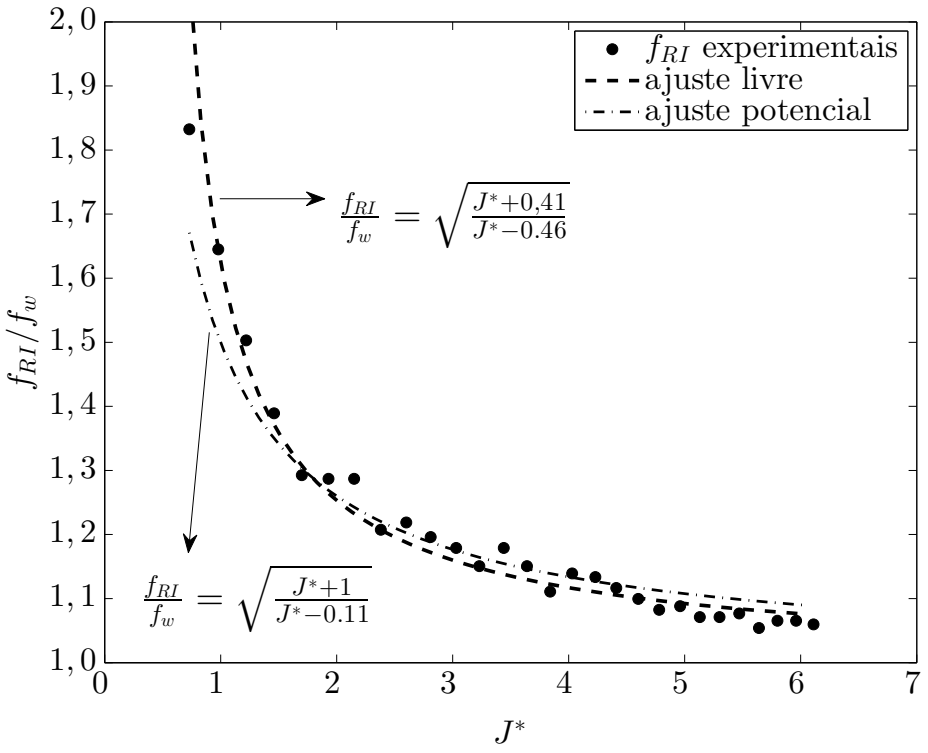


Figura 7.21: Aproximação da "ressonância infinita". Resultados para $D = 50$mm e conjunto de molas suaves (S).

Abandonando a hipótese de massa adicional potencial, a constante $C_a^{pot} = 1$ pode ser considerada como uma nova variável α do problema. Seguindo nessa linha, a massa adicional efetiva C_{EA} também pode ser considerada como uma variável β. A mudança de C_{EA} para β é meramente uma questão de nomenclatura, pois C_{EA} não possui valor definido *a priori*. A mudança de variável, porém, afasta a idéia do conceito de massa adicional e recai em um mero ajuste de funções.

$$\frac{f_{RI}}{f_w} = \sqrt{\frac{J^* + \alpha}{J^* + \beta}} \tag{7.3}$$

A figura 7.21 apresenta os resultados medidos e os valores ajustados. Para o ajuste potencial, o valor de massa adicional efetivo encontrado foi $C_{EA} = -0,11$. Por esse resultado, o terceiro regime seria apenas encontrado se $J^* \leq 0,11$. O ajuste livre, por sua vez, encontrou os parâmetros $\alpha = 0,41$ e $\beta = -0,46$. Nota-se que a aderência deste ajuste é melhor do que a do ajuste potencial. O valor necessário de J^* para atingir o terceiro regime seria, portanto, de $J^* \leq 0,46$.

7.4 Influência da rigidez do sistema

O propósito desta seção é apresentar um estudo paramétrico da resposta do fenômeno de VIV em função da rigidez das molas usadas na BEP. Três condições de rigidez foram testadas: uma delas empregando o conjunto de molas rígidas (R), com constante elástica $k_R = 45,06 \pm 0,32\text{N/m}$, outra empregando o conjunto de molas suaves (S), com $k_S = 10,92 \pm 0,22\text{N/m}$, e o terceiro sem empregar nenhuma mola. Para a terceira condição, o efeito pendular é a única fonte de restituição do sistema. Para cada condição de rigidez, oito valores de momento de inércia J^* foram ensaiados, totalizando um conjunto com 24 ensaios de VIV. Os resultados são apresentados para uma mesma condição de momento de inércia e comparam as respostas em função da rigidez. Curvas de amplitude de oscilação e frequência dominante são usadas na análise dos resultados.

A figura 7.22 exibe as respostas em amplitude e frequência para as três condições de rigidez para o caso mais leve testado $J^* = 1,29$, sem nenhum lastro de chumbo $N_{pb} = 0$. Oscilações alinhadas com a corrente incidente são observadas para as três condições. Verifica-se que no caso mais rígido, figuras 7.22(e) e 7.22(f), a amplitude máxima $\hat{x}/D$ e o intervalo de V_r no qual tais oscilações ocorrem são maiores do que no caso menos rígido, figuras 7.22(b) e 7.22(a). Comparando esses mesmos dois casos, nota-se ainda que a resposta em frequência é praticamente linear ao longo de V_r para o caso rígido, enquanto que o caso sem molas apresenta duas descontinuidades na curva de frequência. O comportamento do caso rígido é mais próximo do terceiro regime de resposta, enquanto que o do caso sem molas é similar ao segundo regime. Apesar desta aparente distinção entre regimes, como o terceiro regime não chega a ser atingido de fato, os três casos ilustrados podem ser considerados no segundo regime de oscilação.

Nota-se que existe uma pequena descontinuidade da curva de frequência para o caso mais rígido, figura 7.22(b). Tal como descrito para os resultados que se aproximam do terceiro regime, após cruzar a frequência natural em ar f_n o Super Ramo Superior fica instável e transiciona para o Ramo Inferior. O caso sem molas, por sua vez, desenvolve o patamar de frequências do Ramo Inferior ligeiramente abaixo da frequência natural medida em ar. Esta situação ocorre para todos os casos testados sem mola. Neles, a frequência que o sistema encontra para oscilar no Ramo Inferior foi sempre inferior à frequência f_n. Apesar dessa discrepância com relação aos outros resultados, a resposta medida para o fenômeno nessa condição segue válida.

A figura 7.23 apresenta a mesma análise feita para uma condição mais pesada

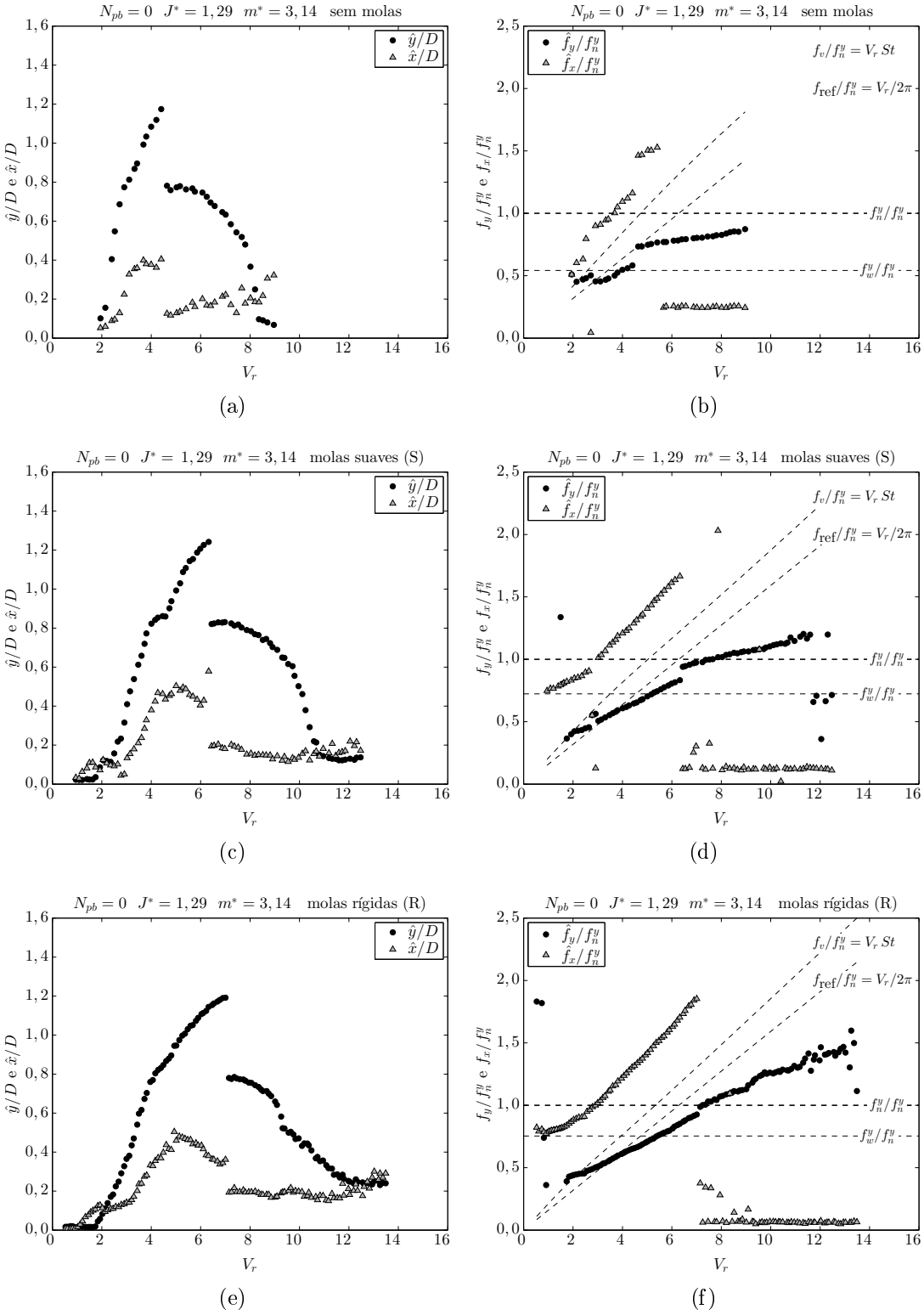


Figura 7.22: Resposta em amplitude e frequência para $N_{pb} = 0$. Caso sem molas (a) e (d). Molas suaves (b) e (e). Molas rígidas (c) e (f). O sistema é leve e nenhuma condição de rigidez foi capaz de suprimir oscilações alinhadas com a corrente.

$J^* = 2,51$ ($N_{pb} = 2$). Para esta condição as oscilações alinhadas com a corrente incidente deixam de ocorrer para o caso sem molas, mas seguem se manifestando para as demais condições de rigidez. As curvas de frequência dominante 7.23(d) e 7.23(f) são típicas para o segundo regime de resposta, com $f_y = f_v$ no Ramo Inicial, $f_y < f_w$ no Super Ramo Superior e $f_y \approx f_n$ no Ramo Inferior. Os primeiros modos de vibração alinhados ocorrem para $f_w \leq f_x \leq f_n$. O caso sem molas, figura 7.23(b), possui as mesmas características do primeiro regime de oscilação, com $f_y = f_v$ para o Ramo Inicial e $f_w \leq f_y \leq f_n$ para o Ramo Superior. A frequência do Ramo Inferior, f_{RI}, não se estabilizou em f_n, porém em um patamar inferior. O comportamento geral da resposta em frequência é o mesmo do que outros casos do primeiro regime. A princípio, tem-se a impressão de que o valor da frequência f_n medida em ar para o caso sem molas possa estar errado, mas este não é o caso, pois além de o valor medido estar de acordo com o valor previsto pelo modelo MPC, esse desencontro de frequências acontece sistematicamente para sete condições de J^* testadas nesta campanha de ensaios. Efeitos de adimensionalização a parte, o caso sem molas está, definitivamente, no primeiro regime de oscilação.

Aumentando o momento de inércia do sistema para $J^* = 3,64$ ($N_{pb} = 4$), tanto as condições com molas suaves e sem molas, figuras 7.23(a) e 7.23(d), deixam de apresentar oscilações na direção alinhada com a corrente. A condição mais rígida, figura 7.23(e), mantém as oscilações alinhadas com a corrente. Além da resposta em amplitude de oscilação, a mudança do segundo para o primeiro regime do fenômeno também pode ser observada pela variação contínua na frequência transversal de oscilação, ilustrada nas figuras 7.24(b) e 7.24(d). O caso rígido, ainda no segundo regime, ainda possui descontinuidade na resposta em frequência na transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior.

Por fim, para $J^* = 4,69$ ($N_{pb} = 6$), nenhuma das três condições de rigidez foi capaz de manter o segundo regime e todas demonstram as características do primeiro, tal como ilustrada na figura 7.25. Nenhum dos três ensaios apresenta oscilações significativas na direção alinhada com a corrente e todos possuem transição contínua na curva de frequência entre o início do Ramo Inicial e o término do Ramo Inferior.

As quatro condições de momento de inércia apresentadas foram selecionadas por apresentarem diferença no regime do fenômeno de VIV para um mesmo momento de inércia. Foram verificadas transições do terceiro para o segundo regime e também do segundo para o primeiro, variando-se apenas o conjunto de molas usado nos ensaios.

Os resultados desta campanha de ensaios comprovam que a resposta do fenômeno

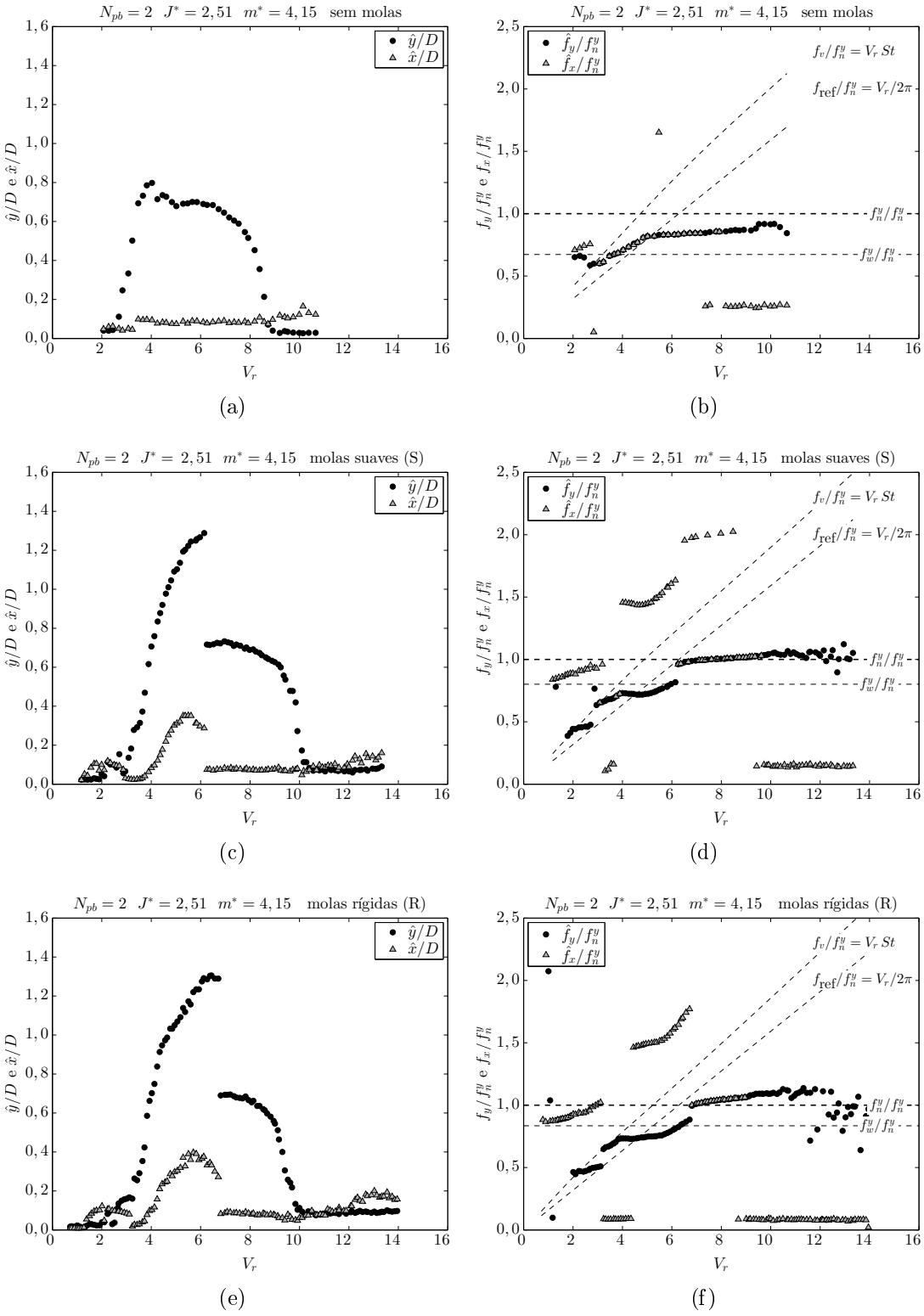


Figura 7.23: Resposta em amplitude e frequência para $N_{pb} = 2$. Caso sem molas (a) e (d). Ainda que o momento de inércia seja baixo, o sistema responde como se tivesse momento de inércia suficiente para suprimir as oscilações alinhadas com a corrente. Para os casos com molas suaves, (b) e (e), e molas rígidas, (c) e (f), as oscilações alinhadas ainda são observadas.

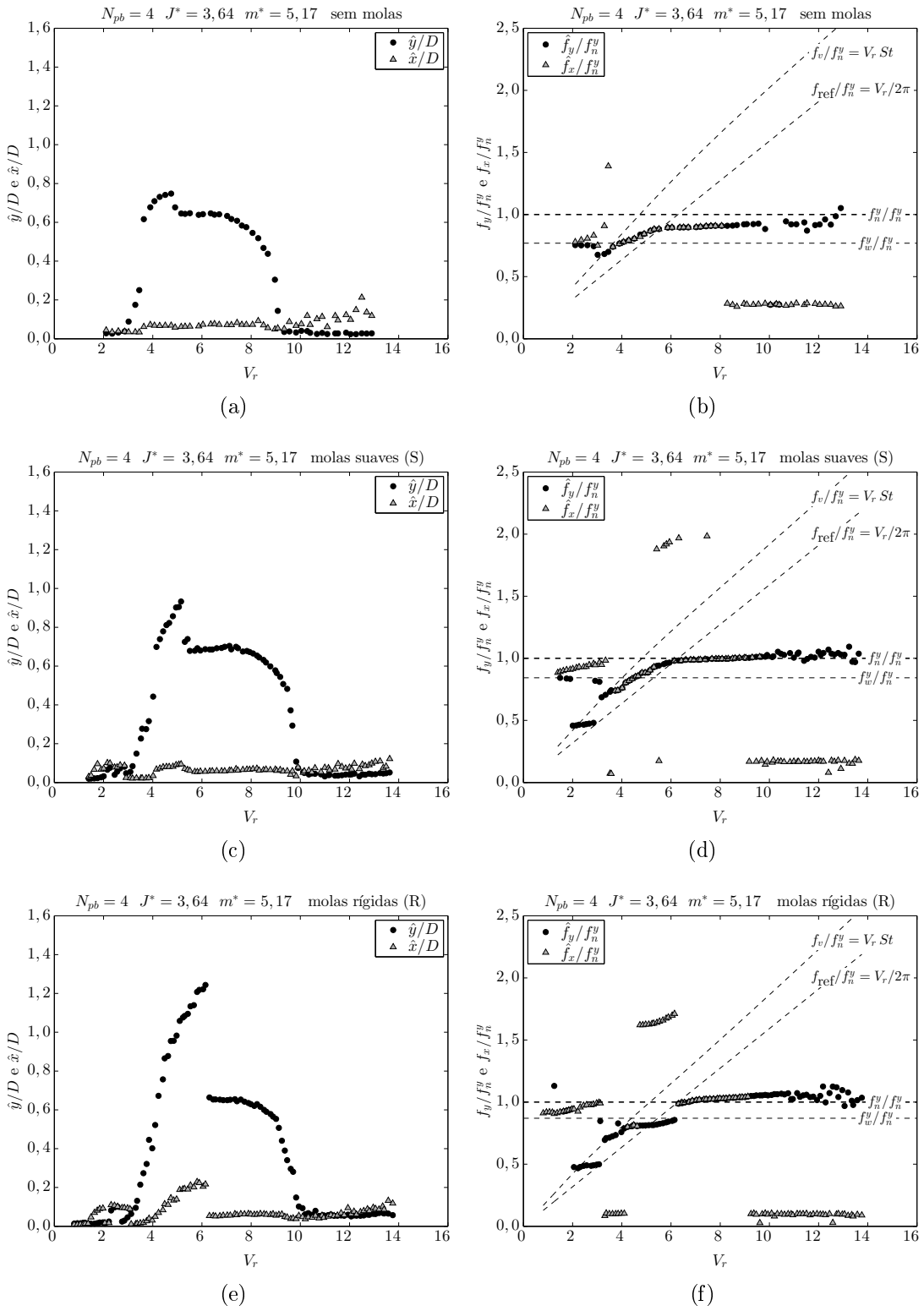


Figura 7.24: Resposta em amplitude e frequência para $N_{pb} = 4$. Para esta condição de momento de inércia as duas condições menos rígidas, caso sem molas e com molas suaves, não apresentam oscilações alinhadas com a corrente. O caso mais rígido, (c) e (f) ainda apresenta o super ramo superior.

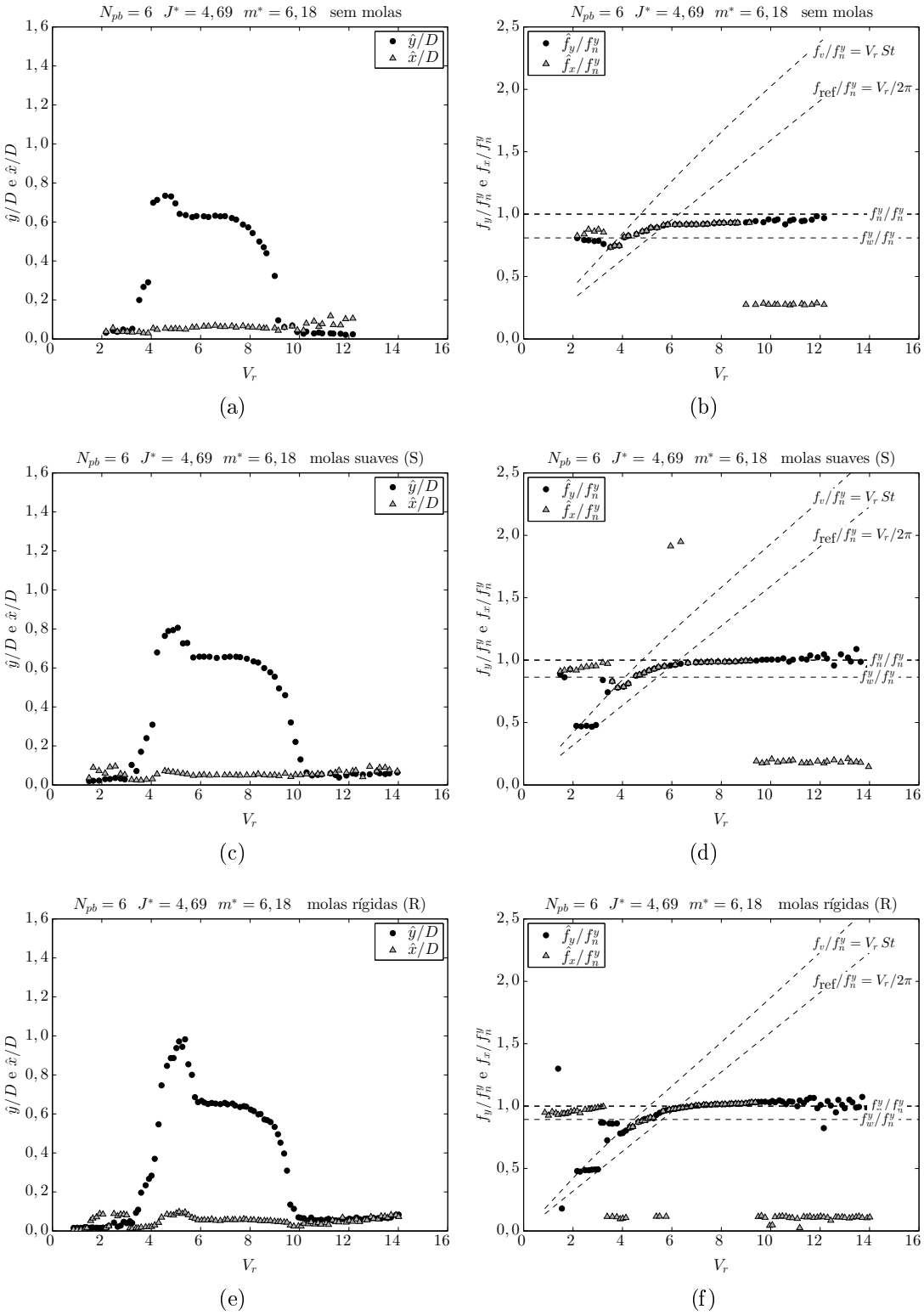


Figura 7.25: Resposta em amplitude e frequência para $N_{pb} = 6$. Para esta condição a inércia do sistema é alta o suficiente para suprimir as oscilações alinhadas com a corrente para as três condições de rigidez testadas.

de VIV não depende unicamente da inércia da estrutura oscilante, seja ela medida como J^* ou m^*, mas também de outros parâmetros, tais como a rigidez do sistema.

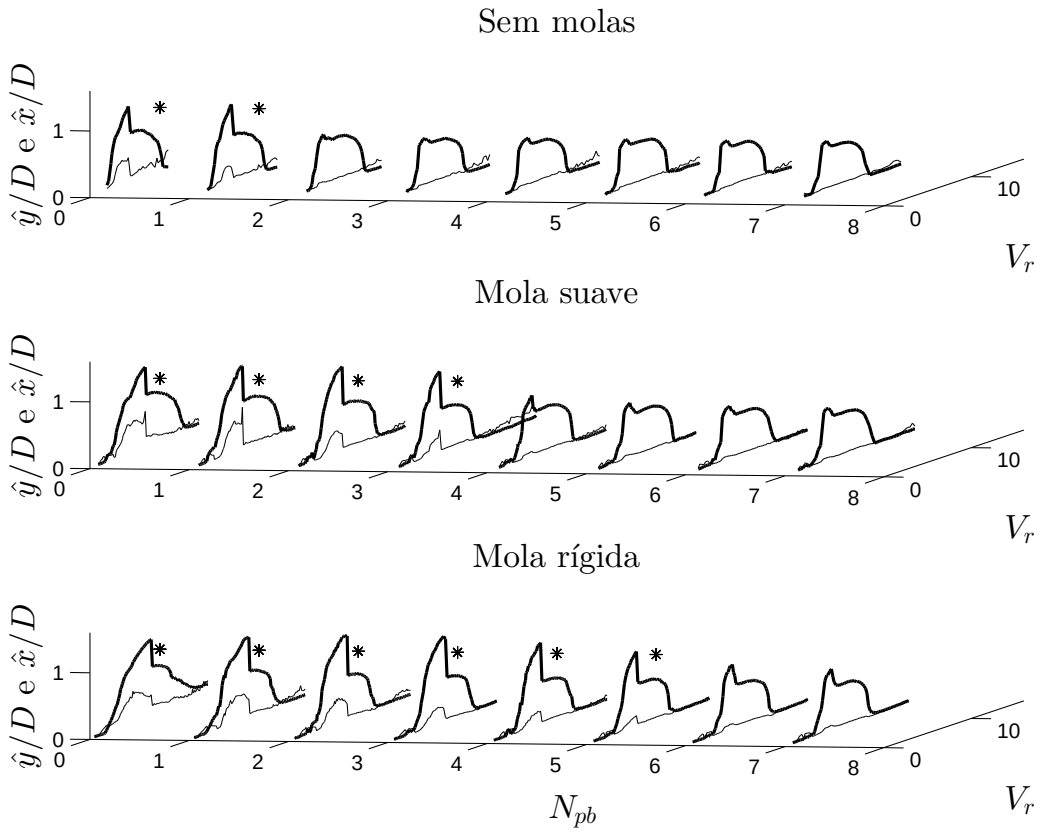


Figura 7.26: Compilação de resultados para análise paramétrica da rigidez em condições de simetria. Os asteriscos destacam os resultados nos quais oscilações alinhadas com a corrente são observadas.

A figura 7.26 exibe uma compilação das curvas de amplitude de oscilação para os 24 casos testados. A figura demonstra que para o mesmo momento de inércia J^*, representados nas colunas da figura 7.26, diferentes respostas podem ser observadas. As duas primeiras colunas mostram casos "leves" o suficiente para que a condição sem molas apresente oscilações alinhadas com a corrente. Já as últimas duas colunas desenvolvem oscilações puramente transversais à corrente incidente, até para o caso mais rígido. As três colunas centrais mostram diferentes comportamentos para diferentes condições de rigidez da base.

A principal conclusão, desta seção, é que a rigidez do sistema é um característica fundamental na determinação da resposta do fenômeno de VIV. Informar apenas o parâmetro de inércia não é suficiente para prever qual regime de resposta se desenvolverá.

7.5 Conclusões do capítulo

Com base nos resultados apresentados neste capítulo, pode-se responder a cinco das sete questões elaboradas no capítulo de Introdução desta tese. As outras duas questões foram abordadas no capítulo 6.

O fenômeno e os ensaios são repetitivos?

Antes de responder a esta pergunta, é imprescindível esclarecer o que se entende por repetitividade no contexto desta tese. A comparação entre os resultados se faz a nível de resultados médios, tais como amplitudes médias de oscilação ao longo de um período e também frequências dominantes. Não se espera repetitividade a nível de séries temporais e tampouco igualdade numérica de resultados com precisão de diversos dígitos. Por ser de natureza experimental, todas as medições realizadas estão associadas a incertezas de medição. Além disso, o trabalho estuda um fenômeno de interação fluido-estrutura. O escoamento contém em si efeitos turbulentos, dada a faixa de número de Reynolds ensaiada. Tais efeitos, apesar de não dominarem a resposta global do fenômeno, são importantes na determinação de seu comportamento a cada instante de tempo. Por esses motivos, a repetitividade buscada se dá em nível de amplitudes médias e do comportamento global da resposta.

Conclui-se que tanto o fenômeno quanto os ensaios são repetitivos. Com base nessa característica, pode-se comparar ensaios de VIV com pequenas diferenças nos parâmetros de momento de inércia e rigidez.

Ao longo da pesquisa, constatou-se a importância da rigidez do sistema na determinação do regime de resposta. Foi a partir dos ensaios preliminares de repetitividade que se verificou que a troca do conjunto de molas usadas poderia, sozinha, mudar o regime de resposta observado para o fenômeno de VIV e, com isso, fazer com que os efeitos do segundo grau de liberdade se manifestassem ou fossem suprimidos.

Existe histerese no fenômeno? Como ocorre a transição entre ramos de resposta?

Uma peculiaridade do fenômeno de VIV é a presença de diferentes ramos de resposta. Cada ramo é possui um conjunto de características tanto em amplitude quanto em frequência de oscilação e está associado a modos diferentes de emissão de vórtices.

A troca entre os ramos é um fenômeno que pode acontecer de diferentes maneiras. A mais simples seria uma mera transição entre as características de cada ramo a partir

de determinado valor da velocidade reduzida V_r. Para determinado V_r, por exemplo, o sistema passaria do Ramo Superior para o Ramo Inferior, simples assim. Esse modelo de transição, porém, não considera a física da interação fluido estrutura. Variações de velocidade do escoamento causam mudanças na amplitude e frequência de oscilação que afetam o processo de formação e desprendimento de vórtices. A variação entre os ramos de resposta acontece quando ocorre mudança no padrão de emissão, dessa forma, as características da transição entre ramos se dá em função das características dos padrões de emissão. Outros dois tipos de transição, que consideram esses efeitos são a transição com histerese e a intermitente.

No primeiro regime de resposta, no qual não há oscilação alinhada com a corrente, não se verificou transição com histerese. A mudança do Ramo Superior para o Inferior ocorreu, na maioria dos casos, de maneira contínua e gradual, sem variação brusca de amplitude. Nos casos com variação descontínua de amplitude, tal variação ocorreu para aproximadamente os mesmos valores de V_r. Ainda que os ensaios realizados nas duas direções de velocidade reduzida tenham sido conduzidos de maneira bastante discretizada, com muitos pontos experimentais em cada ensaio, a variação de V_r é da ordem da incerteza da própria velocidade reduzida. Por esse motivo, não se possui resolução suficiente, nesses casos, para afirmar se a transição é intermitente ou com histerese. A transição do Ramo Inicial para o Superior também não apresentou histerese ou intermitência.

No segundo regime, observou-se que a transição entre o Super Ramo Superior e o Ramo Inferior ocorre com histerese. Além dessa região, histerese também foi observada para baixos valores de V_r, durante os primeiros modos de vibrar alinhados com a corrente.

Por fim, no terceiro regime, foi observado comportamento intermitente para pontos no Super Ramo Superior. Após a transição para o Ramo Inferior, não se observou mais variações intermitentes na resposta. Nesse regime, a própria definição e caracterização dos ramos precisa ser revista, pois as características que os definiam para o primeiro e segundo regime não são mais observadas.

É relevante salientar que os experimentos realizados para esta tese possuem variação fina de V_r. Muitos pontos experimentais foram usados para a construção das curvas de resposta, o que permite analisar com maior detalhe os pontos de transição. Ensaios com menor número de pontos experimentais estão, portanto, sujeitos a variações com histerese, pois podem apresentar mudanças de velocidade maiores do que o intervalo com características intermitentes. Esse efeito induz à observação de uma "histerese aparente".

Qual é o papel da inércia da estrutura oscilante?

Usualmente, a inércia das estruturas oscilantes submetidas ao fenômeno de VIV é medida pelo parâmetro adimensional m^*. No capítulo 4 uma projeção das frequências naturais da base elástica pendular foi feita para ajustar o modelo massa-mola-amortecedor, origem do parâmetro m^*. Essa projeção demonstrou que o parâmetro m^* não consegue descrever o comportamento em frequência da estrutura usada, ainda que uma massa estrutural e a rigidez equivalente do sistema fossem ajustadas via método dos Mínimos Quadrados. Caso poucos valores de momento de inércia fossem testados, seria sim possível ajustar parâmetros de massa e rigidez, mas isso seria apenas ignorar a realidade. O melhor parâmetro para descrever a inércia da base elástica pendular é o momento de inércia adimensional J^*.

Mantendo-se a rigidez do sistema constante, ou seja, sem variar as molas usadas nos experimentos, a inércia do sistema é capaz de alterar os regimes de resposta do fenômeno de VIV. Nos ensaios realizados com o cilindro $D = 50$mm, a resposta foi variada entre condição próxima do primeiro regime, no qual não há oscilações alinhadas, passou por todo o segundo regime de resposta e se aproximou, mas sem atingir, o terceiro regime, análogo à "ressonância infinita" observada por Govardhan e Williamson (2002).

A variação de momento de inércia J^* demonstrou que os efeitos do segundo grau de liberdade, durante o segundo regime de resposta, crescem gradualmente com a diminuição de J^*. Além de elevar a amplitude máxima na direção alinhada com a corrente, a diminuição de J^* faz crescer o intervalo de V_r para o qual o Super Ramo Superior se manifesta. Próximo da transição para o terceiro regime de resposta, o Super Ramo Superior passa a englobar os pontos do Ramo Inicial e chega a atingir também os primeiro ramos alinhados SS e AS.

O parâmetro J^* possui papel relevante, também, na determinação da amplitude máxima observada. Para o primeiro e segundo regime de resposta, quanto menor o momento de inércia, maiores as amplitudes $\hat{y}/D$ e $\hat{x}/D$. Para o terceiro regime, porém, essa tendência não é observada e uma leve redução na amplitude $\hat{y}/D$ foi visualizada. Além de influenciar nos valores de amplitude máxima, o parâmetro de inércia é capaz de alterar intervalo de V_r para o qual o fenômeno de VIV se manifesta. Quanto maior J^*, menor a faixa de V_r na qual as oscilações se desenvolvem.

Qual é o papel da rigidez da estrutura oscilante?

Geralmente, a rigidez do sistema só é considerada para definir suas frequências naturais e nem sequer é citada nos artigos científicos. Os resultados apresentados ao longo deste capítulo, porém, mostram que essa característica exerce papel fundamental na determinação da resposta do fenômeno. Bem mais do que permitir ensaios de VIV que atinjam valores maiores ou menores de velocidade reduzida, a rigidez do sistema se mostrou capaz de alterar o regime de resposta do fenômeno.

Aumentar a rigidez foi similar ao efeito de diminuir a inércia da estrutura. De maneira contrária, diminuir a rigidez foi análogo a aumentar J^*. Esta analogia vem do conceito de frequência natural da estrutura. Assumindo que k_{rot} seja a rigidez rotacional equivalente do sistema e J o momento de inércia total da estrutura, então

$$f_n = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{rot}}}{J}}$$

Verifica-se que a rigidez e o momento de inércia agem de maneira contrária na determinação de f_n. De fato, os resultados obtidos demonstram que aumentar a rigidez das molas faz com que o sistema se comporte como se tivesse menor momento de inércia. O contrário também foi observado e ensaios sem molas tinham resposta parecida com casos com maiores momentos de inércia. Para o momento de inércia $J^* = 2,51$, o caso sem molas se encontrava no primeiro regime, enquanto que os casos com conjunto de molas suaves e rígidas se encontravam no segundo regime. Já para $J^* = 3,64$, apenas o caso com molas rígidas ainda apresentava oscilações na direção da corrente. As três condições de molas ensaiadas concordavam entre si no que diz respeito aos regimes de resposta para $J^* \leq 1,92$ e para $J^* \geq 4,18$. Caso molas mais rígidas tivessem sido usadas, provavelmente, momentos de inércia ainda mais altos teriam que ser utilizados para suprimir as oscilações alinhadas com a corrente.

Essas observações comprovam que a inércia da estrutura não é o único parâmetro que determina o regime de oscilação. Alguns trabalhos na literatura já haviam feito essa suposição, mas não baseados na influência da rigidez ou da frequência natural, mas sim no efeito do amortecimento e no parâmetro combinado $J^*\zeta$.

De fato, o parâmetro $J^*\zeta$ pode ser reescrito em função da frequência natural f_n, tal como desenvolvido na equação 7.4. Tornar o sistema mais rígido e, consequentemente, aumentar sua frequência natural faz com que o parâmetro combinado $J^*\,\zeta$ cai. A transição

entre os regimes estaria associada, portanto, à diminuição de $J^*\,\zeta$ e não apenas J^*.

$$J^*\zeta = \frac{J}{J_d}\,\frac{c}{2\sqrt{k_{\text{rot}}\,J}} = \frac{c}{2\,J_d}\sqrt{\frac{J}{k_{\text{rot}}}} = \frac{c}{4\pi J_d}\frac{1}{f_n} \tag{7.4}$$

Um contra exemplo dessa afirmação pode ser encontrado na campanha experimental responsável pela análise paramétrica do efeito das molas. O caso com $J^* = 4,18$ ($N_{pb} = 5$) e molas rígidas (R) possui parâmetro de inércia e amortecimento $J^*\zeta = 8,78 \times 10^{-3}$ e está no segundo regime, ou seja, apresenta oscilações alinhadas e transversais com a corrente incidente. Já o caso com $J^* = 3,64$ ($N_{pb} = 4$) e conjunto de molas suaves possui $J^*\zeta = 6,55 \times 10^{-3}$, mas se comporta como se tivesse maior inércia e oscila apenas na direção transversal.

A figura 7.27 discrimina o regime de resposta de todos os casos apresentados ao longo desta tese em função do parâmetro combinado $J^*\,\zeta$. Cada caso foi classificado como no primeiro ou no segundo regime de oscilação em função da presença de oscilações alinhadas com a corrente incidente. Estão contidos nessa imagem os resultados para $D = 32$mm e $D = 50$mm, todos os valores de N_{pb} e N_{st} testados e, também, as três condições simétricas de rigidez.

Verifica-se na figura 7.27 que cada condição de mola apresenta transição do primeiro para o segundo regime para valores diferentes de $J^*\zeta$. As linhas contínuas preta e azul, obtidas para cilindros diferentes, porém mesmo conjunto de molas, transicionam em uma mesma região, $J^*\zeta \approx 6,7 \times 10^{-3}$. As demais condições de rigidez apresentam transição para outros valores de $J^*\zeta$.

As duas linhas verticais tracejadas dessa mesma imagem indicam os valores limites encontrados neste trabalho para a transição entre o primeiro e o segundo regime de resposta. Essas linhas, porém, não devem ser entendidas como limites absolutos, pois como já destacado, seus valores dependem da rigidez do sistema. Caso molas mais rígidas tivessem sido empregadas nesta investigação, provavelmente valores diferentes de $J^*\,\zeta$ teriam sido encontrados para as fronteiras. Desconsiderando a posição das fronteiras, o mero fato de existirem duas demonstra que há uma "região de transição" entre os dois comportamentos. Essa hipótese só faz sentido se o parâmetro $J^*\zeta$ for considerado suficiente para prever o comportamento do sistema. Ao invés de adotar essa hipótese, é mais científico afirmar que $J^*\,\zeta$ não é capaz, sozinho, de definir o regime de resposta. A rigidez do sistema deve ser levada em consideração.

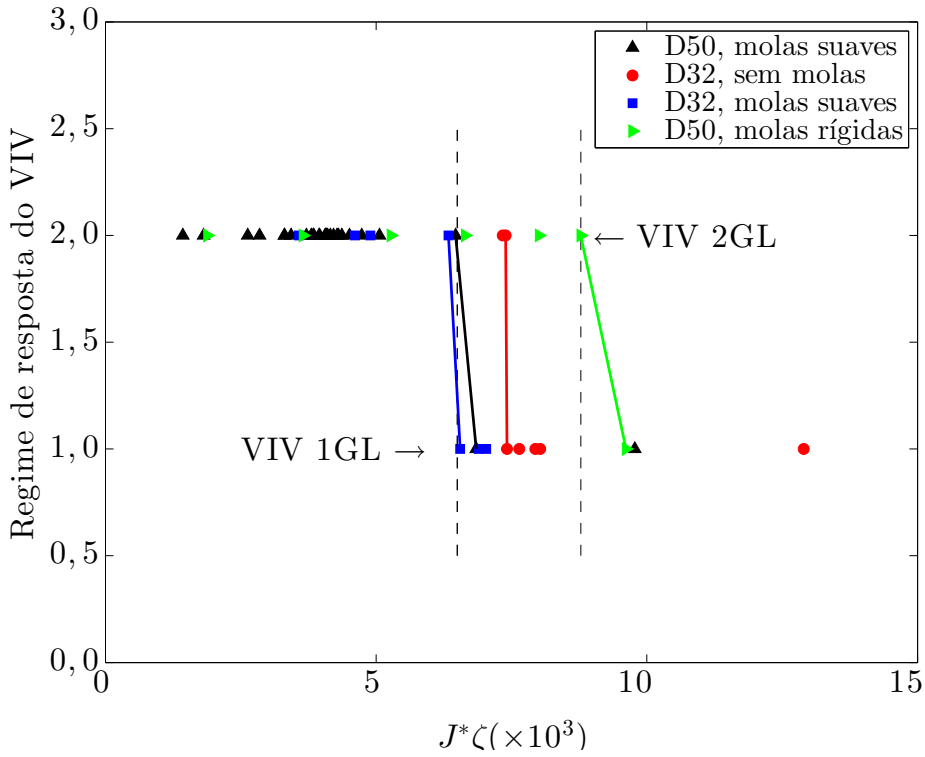


Figura 7.27: Curva de amplitude para os primeiros ramos alinhados com a corrente. Resultados para $N_{st} = 19$, $J^* = 4,78$, $m^* = 5,39$.

Quais são as frequências naturais mais importantes da estrutura?

O fenômeno de VIV, apesar de não ser um fenômeno ressonante simples, demonstrou ter forte relação com suas frequências naturais medidas em ar e em água. É importante destacar neste ponto que esta pergunta trata de quatro frequências diferentes f_n^x, f_n^y e f_w^x, f_w^y. Todas essas frequências são assumidas para o sistema capaz de oscilar de forma rígida. Não pertence ao escopo deste trabalho o estudo de sistemas flexíveis com múltiplas frequências naturais. Ainda assim, a resposta desta pergunta pode ser válida para as quatro frequências análogas associadas a cada modo de vibrar dessas estruturas. Assumindo, a princípio, que exista simetria entre as duas direções, $f_n^x = f_n^y$ e $f_w^x = f_w^y$, a análise pode ser simplificada à comparação dos resultados em função de f_n e f_w.

A figura 7.28 apresenta uma comparação feita com os resultados obtidos para $D = 50$mm e conjunto de molas suaves. A coluna da esquerda apresenta as curvas de amplitude $\hat{y}/D$ e frequência dominante f_y adimensionalizadas em função da frequência natural em ar f_n. Verifica-se que as curvas de amplitude convergem no final do Ramo Inferior, com $V_r \approx 9$. O resultado da imagem 7.28(c) mostra que a frequência dominante na região do Ramo Inferior, para todos os casos, é próximo à linha tracejada horizontal

que representa a própria frequência natural em ar f_n.

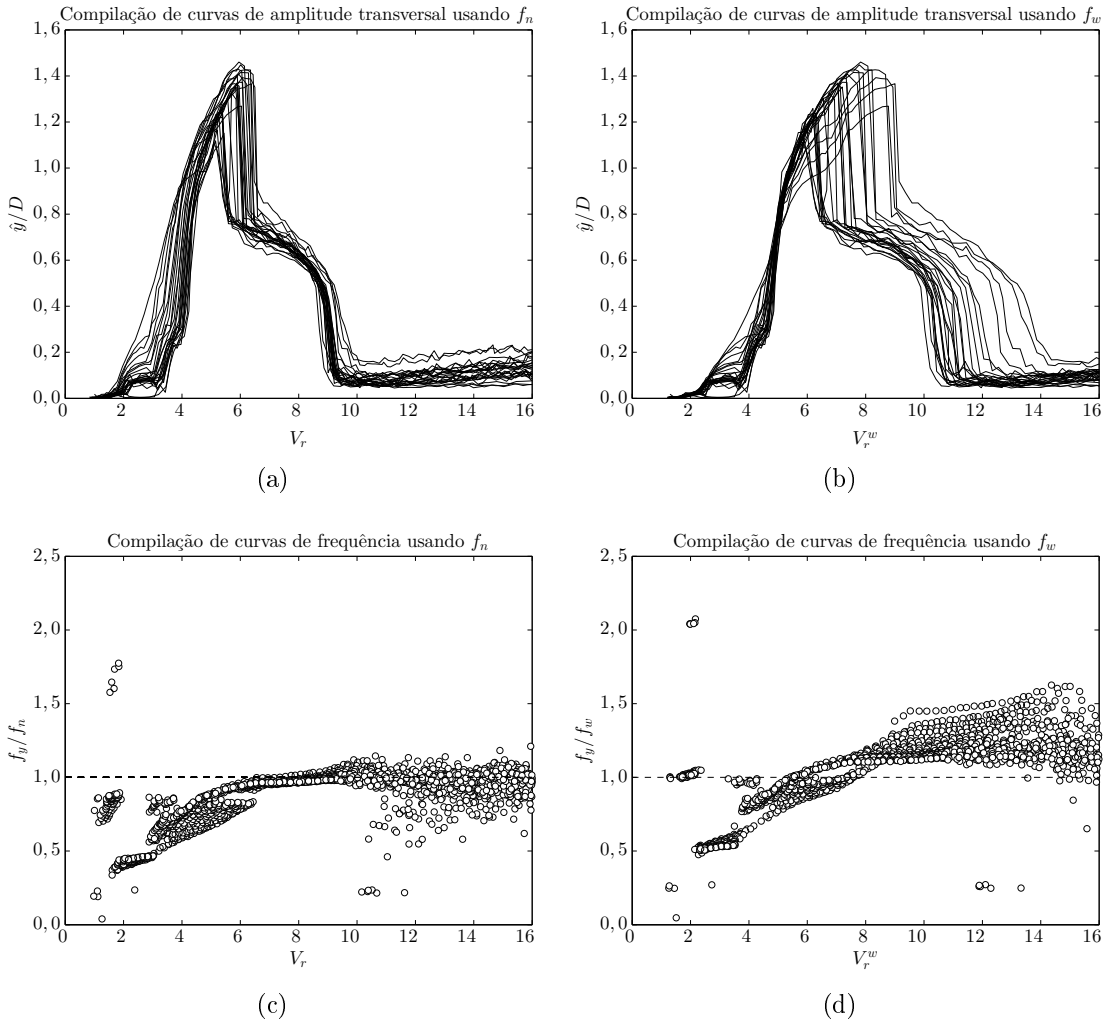


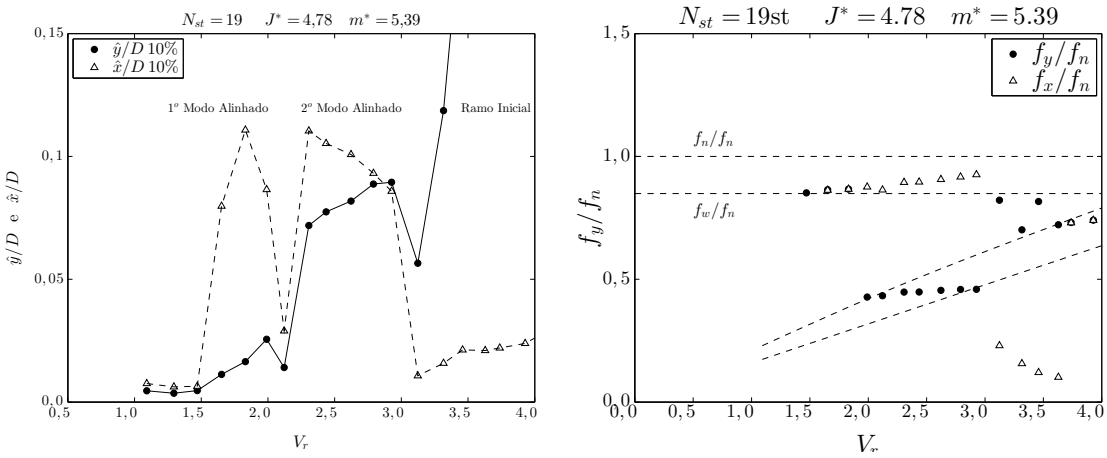
Figura 7.28: Comparação de resultados apresentados em função de f_n (coluna da esquerda) e f_w (coluna da direita).

A coluna da direita da figura 7.28 mostra os mesmos resultados, porém agora adimensionalizados em função da frequência natural em água f_w. Para a curva de amplitude, observa-se que o colapso dos resultados ocorre no Ramo Inicial e não mais no Ramo Inferior. Este segundo, por sua vez, apresenta grande variação entre os casos com diferentes J^*. Quanto menor o valor de J^*, mais ampla é a faixa de V_r ocupada. A curva de frequência dominante não apresenta a mesma convergência para a frequência do Ramo Inferior. Nota-se que cada patamar, deste ramo, ocorre para um valor f_y/f_w diferente.

Constata-se na imagem 7.28(c), que existe uma região à esquerda das curvas de frequência, para $V_r < 2$, na qual existe acúmulo de muitos pontos. Estes representam o comportamento em frequência durante os primeiro ramos alinhados com a corrente, mais

especificamente durante o modo de vibrar assimétrico AS. O mesmo grupo de pontos, quando visto na curva adimensionalizada por f_w converge para uma nuvem mais concentrada e posicionada sobre a linha $f_y/f_w = 1$. Isso indica que os primeiros ramos alinhados possuem forte dependência da frequência natural em água.

Das observações acima pode-se concluir que o Ramo Inferior ocorre próximo à frequência natural em ar f_n e os ramos alinhados ocorrem próximos à frequência natural em água f_w. De fato, na campanha de ensaios assimétricos de rigidez, verificou-se que o início das oscilações dos primeiros modos alinhados sempre ocorreu para $f_x = f_w^x$ e que o Ramo Inferior tende a se aproximar da frequência natural em ar para a direção transversal, $f_y \approx f_n^y$.



(a) (b)

Figura 7.29: Curvas de amplitude e frequências dominantes para os primeiros ramos alinhados com a corrente. Resultados para $J^* = 4,78$ ($N_{st} = 19$) e conjunto de molas suaves (S).

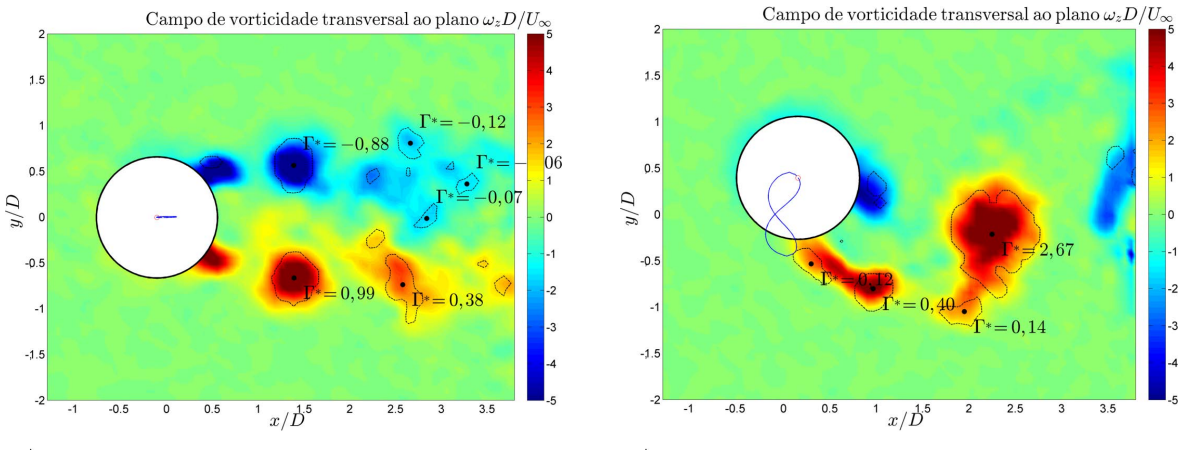
Analisando a ocorrência dos primeiros ramos alinhados, estes, para todos os casos, ocorreram entre as frequências naturais em água e em ar, ou seja, $f_w \leq f_x \leq f_n$. A figura 7.29 ilustra as curvas de amplitude e frequência para a condição $J^* = 4,78$ ($N_{st} = 19$) e conjunto de molas suaves. Este caso exemplifica bem a ocorrência dos primeiros ramos alinhados, pois permite identificar duas regiões com características de oscilação distintas. A presença do vale facilita delimitar a transição entre o primeiro e o segundo modo de vibrar alinhado.

O foco dos ensaios de VIV, neste trabalho, foi analisar todos os ramos de resposta observáveis para cada condição e, por esse motivo, ensaios que se concentrassem apenas baixos valores de velocidade reduzida não foram realizados. Ainda assim, todos os ensaios

foram conduzidos com grande número de pontos experimentais, o que permitiu observar com clareza esses ramos.

A figura 7.29 demonstra que o primeiro modo alinhado é caracterizado pelo movimento apenas direção alinhada com a corrente, e que o segundo modo desenvolve também oscilações transversais. Com relação às frequências dominantes, ambas as direções começam a oscilar com $f_y = f_x = f_w$. A frequência f_x cresce de maneira praticamente linear entre $1,5 \leq V_r \leq 3$. A frequência f_y acompanha f_x apenas para o primeiro modo, porém quando o segundo modo alinhado se desenvolve, sua frequência cai para metade da frequência alinhada com a corrente $f_y = f_x/2$. É importante destacar que as características da direção alinhada com a corrente controlam os ramos SS e AS.

Cada um desses modos de vibrar está associado a um padrão diferente de emissão de vórtices, tal como ilustrado na figura 7.30. O movimento puramente alinhado com a corrente propicia a formação de uma esteira de vórtices simétrica, com um par de vórtices de circulação oposta, mas próxima em módulo. A simetria da esteira é a responsável pelo nome dado à esse padrão na literatura. A sigla SS vem do termo inglês *symmetric shedding*, que significa desprendimento simétrico. Geralmente o nome do padrão de vórtices é usado também para se referenciar ao ramo de resposta do cilindro. O padrão SS de esteira é instável, segundo a teoria potencial, apresentada no apêndice B, mas ainda assim ele pode ser observado nestas condições.



(a) padrão SS

(b) padrão AS

Figura 7.30: Modos de esteira observados para os primeiros ramos alinhados com a corrente.

Devido à instabilidade da esteira simétrica, o primeiro modo alinhado também é bastante sensível à perturbações. Conforme a velocidade reduzida é aumentada o modo

não consegue mais se manter e a esteira muda para uma condição assimétrica e mais estável. Este segundo modo de vibrar é muito parecido com o padrão clássico de desprendimento de vórtices 2S, associado ao Ramo Inicial. A principal diferença entre eles está na resposta em frequência. No ramo inicial a direção transversal é excitada pelo desprendimento de vórtices e a resposta do sistema segue a frequência de desprendimento de vórtices de um cilindro fixo $f_y = f_v$.

Esta última observação, de que a frequência dominante de oscilação na direção alinhada com a corrente para os dois primeiros ramos alinhados só ocorre entre as duas frequências naturais $f_w \leq f_x \leq f_n$, é de suma importância para entender a manifestação desses ramos. A relação entre as frequências naturais em ar e água f_n/f_w pode ser obtida a partir das equações do modelo pendular completo (MPC), desenvolvido no capítulo 4.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\, k\, k^* + P_B\, L_G + P_e\, L_e}{J_0 + J_e}}$$

$$f_w = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_m^2\, k\, k^* + P_B\, L_G - P_w\, L_w + P_e\, L_e}{J_0 + J_a + J_e}}$$

A relação entre elas, f_n/f_w é dada por

$$\frac{f_n}{f_w} = \sqrt{\left(1 + \frac{J_a}{J_0 + J_e}\right)\left(\frac{1}{1 - P_w\, L_w/(L_m^2\, k\, k^* + P_B\, L_G + P_e\, L_e)}\right)}$$

A razão entre momentos de inércia pode ser reescrita em função dos adimensionais C_a e J^*

$$\frac{J_a}{J_0 + J_e} = \frac{J_a}{J_d}\frac{J_d}{J_0 + J_e} = \frac{C_a}{J^*}$$

Por fim, a razão f_n/f_w é dada pela equação 7.5. O termo β, definido na mesma equação, relaciona o momento causado pela força de empuxo da água com os momentos realizados pelas forças elásticas e gravitacionais da base e dos lastros extras. O termo β, da maneira como foi formulado, é característico de bases elásticas do tipo pendular, tal como a base usada ao longo desta tese.

$$\frac{f_n}{f_w} = \sqrt{\left(1 + \frac{C_a}{J^*}\right)\left(\frac{1}{1 - \beta}\right)} \quad \text{com} \quad \beta = P_w\, L_w/(L_m^2\, k\, k^* + P_B\, L_G + P_e\, L_e) \tag{7.5}$$

Outras bases elásticas encontradas na literatura, que permitem ao cilindro transladar ao invés de rotacionar, tais como as bases de mancal a ar nas quais o cilindro pode oscilar com apenas um grau de liberdade, não possuem o termo β. Para essas bases, a

razão entre as frequências f_n/f_w é dada pela equação 7.6. Para ensaios de decaimento com pequenas amplitudes, o valor da massa adicional pode ser considerado como o valor potencial $C_a^{pot} = 1$ e a relação entre f_n/f_w passa a ser função apenas de m^*.

$$\frac{f_n}{f_w} = \sqrt{\left(1 + \frac{C_a}{m^*}\right)} \tag{7.6}$$

Bearman (1984) destacou que os dois primeiros ramos alinhados só foram observados em experimentos realizados em canais de água e nunca em túneis de vento. Essa afirmação pode agora ser entendida como consequência do parâmetro f_n/f_w. Elevados valores de J^* ou m^* fazem com que a relaçao $f_n/f_w \to 1$, o que faria com que a região na qual os ramos alinhados se manifestam ser colapsada. Ainda que exista uma pequena separação entre f_n e f_w, para razões $f_n/f_w \approx 1$, uma faixa muito pequena de velocidade do escoamento poderia excitar esses modos e, durante os experimentos, muitos poucos pontos experimentais poderiam ser aquisitados para esta ínfima região.

Conclui-se, portanto, que as frequências naturais em ar e em água possuem atribuições distintas dentro do fenômeno de VIV. Quando o cilindro pode oscilar com dois graus de liberdade, as frequências de cada direção também afetam, de maneira diferenciada, as oscilações desenvolvidas.

8 CONCLUSÕES

Esta tese de Doutorado foi dedicada à investigação experimental do fenômeno de vibração induzida por vórtices em cilindro rígido e livre para oscilar com dois graus de liberdade. O trabalho reencontra resultados clássicos da literatura técnica correspondente e também introduz novas informações, terminologias e discussões.

A tese tem um viés científico e se estruturou de forma a buscar a resposta de sete perguntas guias, definidas no capítulo de Introdução. Dessas perguntas, duas foram respondidas no capítulo 6, com o auxílio de técnicas de visualização do escoamento e processamento de imagens que permitiram estudar as esteiras de vórtices formadas em diferentes condições de escoamento e oscilação do cilindro. As outras cinco perguntas foram respondidas no capítulo 7, com base nos resultados de diferentes campanhas experimentais de VIV.

O entendimento majoritário do fenômeno de VIV considera que as oscilações resultantes do processo de formação e desprendimento de vórtices ocorrem na direção transversal à corrente incidente. Dentro desse cenário, muitos estudos foram desenvolvidos e modelos foram calibrados para prever as características de amplitude e frequência de oscilação para uma dada condição de escoamento em estruturas com massas e frequências naturais conhecidas.

Com o crescente interesse em estruturas mais leves e/ou aplicações em fluidos mais densos, acarretando menores parâmetros de inércia, verificou-se que, além das oscilações transversais à corrente incidente, ocorrem oscilações alinhadas com ela. Essa observação fez com que muitos estudos fossem realizados buscando entender as novas características do fenômeno e, principalmente, buscando para quais condições as antigas observações feitas ainda eram válidas. O fenômeno de VIV com dois graus de liberdade passou a ser uma das variações dentro do estudo ainda majoritário de VIV restrito à oscilações transversais à corrente incidente.

Dentro deste contexto, esta tese busca apresentar o fenômeno de VIV de maneira

diferente. Apesar de nenhum experimento haver sido realizado apenas em uma direção, resultados similares aos presentes na literatura para VIV restrito à oscilações transversais foram encontrados. A tese busca construir a imagem do fenômeno com dois graus de liberdade como um caso mais amplo e que, para algumas condições, não desenvolve resposta na direção alinhada com a corrente, recaindo no caso mais estudado. Em face deste entendimento, todo o fenômeno precisa ser revisitado e não apenas as diferenças já conhecidas. Por esse motivo foram realizadas visualizações de escoamento em todos os ramos de resposta encontrados e não apenas naqueles aonde os efeitos da direção alinhada com a corrente são dominantes.

Outro aspecto original desta tese é que ela estuda a transição entre diferentes regimes de resposta. O próprio conceito de *regime de resposta* é definido na tese para classificar diferentes comportamentos do fenômeno em função de suas condições de inércia e rigidez. Os resultados clássicos de VIV com apenas um grau de liberdade são classificados como no primeiro regime de resposta. Já os resultados do fenômeno com dois graus de liberdade estão no segundo regime. Os casos nos quais o fenômeno não apresenta recuo do Ramo Superior ou Super Ramo Superior para o Ramo Inferior, conhecidos na literatura como "ressonância infinita" pertencem ao terceiro regime. Esta classificação permite entender todos os casos, geralmente estudados de maneira isolada, como consequências de um mesmo fenômeno e conectados entre si.

A transição entre os diferentes regimes de resposta foi estudada em função dos parâmetros de inércia e rigidez. Um resultado original desta tese é a influência do parâmetro de rigidez e como este é capaz de alterar o regime de resposta do fenômeno de VIV, ainda que se mantenha o parâmetro de inércia constante. Além desta observação a tese definiu também um novo modo de emissão de vórtices, o padrão 2LS.

Dentre as discussões feitas no trabalho, duas se destacam com relação ao papel do segundo grau de liberdade. Como apresentado no capítulo 6, todas as esteiras de vórtices que se desenvolveram com a presença de oscilações alinhadas com a corrente incidente apresentaram maior valor de circulação em seus vórtices. O argumento usado para explicar o aumento da circulação nos vórtices considera a elevação da taxa de fluxo de circulação nos pontos de separação do escoamento em virtude do movimento relativo entre o corpo rombudo oscilante e o escoamento incidente.

Além do efeito do movimento relativo, o movimento na direção alinhada com o escoamento afeta o comportamento das camadas cisalhantes. Quando a diferença de fase entre o movimento nas duas direções é pequena, a trajetória descrita pelo cilindro

é próxima ao algarismo "8", que possui extremidades arredondadas. Esta característica favorece o acúmulo de circulação a cada semi-ciclo de oscilação e o desprendimento de um único grande vórtice a cada semi-ciclo, dando origem ao modo 2LS que foi definido nesta tese. Quando a diferença de fase entre os movimentos alinhado e transversal é grande, a trajetória descrita pela cilindro se aproxima da letra "C", que possui extremidades mais afinadas. Nessas regiões a camada limite não consegue se manter próxima ao corpo rombudo e parte dela se rompe, dando origem a um primeiro vórtice. A parcela remanescente da camada cisalhante que se rompeu é emitida como um segundo vórtice, de mesma circulação que o primeiro, dando origem ao padrão de emissão 2C.

8.1 Trabalhos futuros

Segundo Bachelard (1996), "o homem movido pelo espírito científico deseja saber, mas para, imediatamente, melhor questionar."

Este trabalho se estruturou ao redor de sete perguntas fundamentais que orientaram o planejamento de experimentos e fundamentaram as análises feitas. Cabe agora levantar novas perguntas em função das descobertas feitas.

Com relação aos regimes de oscilação definidos, é preciso ainda entender melhor como ocorre a transição entre eles e buscar qual é o melhor parâmetro para descrevê-la. Os parâmetros de inércia m^* e J^* se mostraram ineficientes para essa tarefa. É preciso ainda levar em consideração a rigidez total do sistema. Nesse contexto, podem-se definir as seguintes perguntas:

Existe um único parâmetro capaz de descrever a transição entre os diferentes regimes de resposta? Que parâmetro é esse ? Para quais valores ocorrem as transições?

Tratando dos padrões de esteira, verificou-se que cada ramo de resposta está associado a um modo de desprendimento de vórtices. É preciso investigar mais minuciosamente como ocorre o processo de formação e como a taxa de fluxo de circulação é influenciada pelo movimento tanto na direção alinhada com a corrente, quanto na direção transversal a esta. Entender esse processo poderia fornecer subsídios para modelos matemáticos que buscam prever as oscilações de VIV em estruturas reais e diferentes situações práticas. A pergunta que comandaria esta investigação seria:

Como os movimentos do cilindro afetam a taxa de fluxo de circulação e o processo de formação e desprendimento de vórtices? Quais são os mecanismos que fazem as

camadas cisalhantes se romperem ou seguirem acumulando vorticidade ao longo de um ciclo de oscilação?

Para o Super Ramo Superior, foram identificados dois padrões de esteira: 2C e 2LS. O modo 2T, por outro lado, não foi observado. Nessa linha, um trabalho futuro poderia levantar o seguinte questionamento:

Existem outros modos de emissão de vórtices quando o cilindro oscila com dois graus de liberdade? Quais parâmetros são responsáveis na determinação de cada padrão de vórtices emitido?

Toda a análise feita nesta tese considerou parâmetros de amplitude média e frequências dominantes. Os campos de vorticidade apresentados são campos médios de fase que desconsideram parte da influência da turbulência. Campos instantâneos de vorticidade demonstram que o escoamento possui diversas escalas geométricas e temporais. A pergunta fundamental é:

Até que valores do número de Reynolds, ou a partir de quais condições do escoamento as análises médias deixam de fazer sentido e o escoamento passa a ser controlado por efeitos turbulentos e caóticos?

Ainda nessa linha de pesquisa, ao longo de toda esta tese, os efeitos tridimensionais do escoamento não foram considerados. Apesar disso, é preciso quantificar esses efeitos e entender, a partir de quais condições eles passam a ser dominantes. Esse tipo de estudo é o caso, por exemplo, do escoamento ao redor de cilindros de baixa razão de aspecto, nas quais o diâmetro do cilindro chega a ser maior que o comprimento imerso ou ainda da mesma ordem de grandeza. As perguntas que guiariam esse estudo são:

Como os efeitos tridimensionais do escoamento afetam o processo de formação e desprendimento de vórtices e o fenômeno de VIV como um todo? Até quais condições os principais mecanismos envolvidos no fenômeno de VIV podem ser considerados como bidimensionais e a partir de quais condições eles passam a ser dominados por efeitos tridimensionais?

O padrão adotado para medir as amplitudes, 10% dos maiores picos, considera para as curvas de amplitude do movimento alinhado com a corrente tanto as oscilações na frequência dominante quanto as oscilações de baixa frequência. As curvas de resposta, principalmente os mapas de frequência, mostraram que o comportamento de baixa frequência ocorre na maioria dos casos nos quais há oscilação alinhada. É preciso averiguar porque existe esse movimento e qual sua importância. Pode-se perguntar, portanto:

Por que ocorrem e qual é o papel das vibrações de baixa frequência observadas para a direção alinhada com a corrente incidente? Essas oscilações podem ser desprezadas no que tange ao processo de formação e desprendimento de vórtices?

Apesar de não haver atingido o terceiro regime de resposta, definido como a "ressonância infinita", os resultados apresentados nesta tese demonstraram como ocorre parte da transição entre o segundo regime de resposta e o terceiro. Resta entender ainda o que exatamente é e como se desenvolve a ressonância infinita para o caso com dois graus de liberdade. Tal como discutido ao longo do trabalho, a massa ou momento de inércia da estrutura oscilante não é o único parâmetro responsável pela resposta do fenômeno de VIV. Essa afirmação induz a seguinte pergunta:

Quais são as características do terceiro regime de oscilação, denominado de "ressonância infinita"? Quais modos de desprendimento de vórtice ocorrem, ou ainda, existe algum padrão característico? Quais são os ramos de resposta observados para esse regime?

Todas as perguntas levantadas ainda fazem parte do escopo deste trabalho. Muitas outras poderiam ser feitas considerando o fenômeno de vibração induzida por vórtices em um contexto mais amplo, usando outras geometrias para corpos rombudos, outros tipos de escoamento incidente, abandonando-se a hipótese de corpo rígido e trabalhando-se com corpos flexíveis, mudando as condições de simetria e fazendo com que cada direção tenha características próprias, etc.

É preciso seguir investigando e, a cada resposta obtida, redefinir as perguntas.

REFERÊNCIAS

ADRIAN, R. J. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 23, p. 261–304, 1991.

ADRIAN, R. J. Twenty years of particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, v. 39, p. 159–169, 2005.

ASSI, G. R. S. *Estudo Experimental do Efeito de Interferência no Escoamento ao Redor de Cilindros Alinhados*. Dissertação (Mestrado) — EPUSP, São Paulo, 2005.

ASSI, G. R. S.; BEARMAN, P. W.; MENEGHINI, J. R. On the wake-induced vibration of tandem circular cuylinders: the interaction excitation mechanism. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 661, p. 356 – 401, 2010.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Quinta edição. [S.l.]: Contraponto, 1996.

BARBEIRO, I. d. C. *Estruturas coerentes e modelos reduzidos para o escoamento ao redor de um cilindro no regime bidimensional periódico*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2012.

BATCHELOR, G. K. *An introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.

BEARMAN, P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v. 16, p. 195–222, 1984.

BISHOP, R.; HASSAN, A. Y. The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society if London A. Mathematical and physical sciences.*, v. 277, p. 32–50, 1964.

BISHOP, R. E. D.; HASSAN, A. Y. The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society if London A. Mathematical and physical sciences.*, v. 277, p. 51–75, 1964. Series A.

BLEVINS, R. D.; COUGHRAN, C. S. Experimental investigation of vortex-induced vibration in one and two dimensions with variable mass, damping, and reynolds number. *Journal of fluids engineering*, v. 131, 2009.

CHAKRABARTI, S. K. *The theory and practice of hydrodynamics and vibration*. [S.l.]: World Scientific, 2002.

CHONG, M. S.; PERRY, A. E.; CANTWELL, B. J. A general classification of three-dimensional flow field. *Physics of Fluids A*, v. 2, p. 765–777, 1990.

CHURCHILL, R. V. *Complex Variables*. New York: McGraw-Hill, 1975.

DAHL, J. M.; HOVER, F. S.; TRIANTAFYLLOU, M. S. Two-degree-of-freedom vortex-induced vibrations using a force assisted apparatus. *Journal of Fluids and Structures*, v. 22, p. 807–818, 2006.

DYKE, M. V. *An Album of Fluid Motion.* [S.l.]: The Parabolic Press, 1988.

EWINS, D. J. *Modal Testing theory, practice and application, second edition.* [S.l.]: Research Studies Press LTD., 2000.

FACCHINETTI, M. L.; LANGRE, E. de; BIOLLEY, F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, p. 123 – 140, 2004.

FENG, C. C. *The measurement of vortex-induced effects in a flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders.* Tese (MSc thesis) — University British Columbia, Vancouver, Canada, 1968.

FLEMMING, F.; WILLIAMSON, C. H. K. Vortex-induced vibrations of a pivoted cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 522, p. 215–252, 2005.

FRANçA, L. N. F.; MATSUMURA, A. Z. *Mecânica Geral, 2a edição.* [S.l.]: Editora Edgard Blucher, 2004.

FRANZINI, G. R. *Investigação experimental do escoamento ao redor de cilindros inclinados, sujeitos a condições de contorno assimétricas nas extremidades.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.

FRANZINI, G. R.; FUJARRA, A. L. C.; MENEGHINI, J. R.; KORKISCHKO, I.; FRANCISS, R. Experimental investigation of vortex-induced vibration on rigid, smooth and inclined cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, v. 25, p. 742–750, 2009.

FRANZINI, G. R.; GONçALVES, R.; MENEGHINI, J. R.; FUJARRA, A. L. C. One and two degrees-of-freedom vortex-induced vibration experiments with yawed cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, v. 42, p. 401–420, 2013.

FREIRE, C. M. Develompment of an elastic base with two degrees of freedom for viv studies. In: *In: 20th International Congress of Mechanical Engineering, 2009, Gramado. Procedings of COBEM 2009.* [S.l.: s.n.], 2009. COBEM 2009.

FREIRE, C. M. *Um estudo experimental sobre Vibrações Induzidas por Vórtices com dois graus de liberdade.* [S.l.], 2009.

GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 25, n. Part 2, p. 401–413, 1966.

GOVARDHAN, R.; WILLIAMSON, C. H. K. Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 420, p. 85–130, 2000.

GOVARDHAN, R.; WILLIAMSON, C. H. K. Resonance forever: existence of a critical mass and an infinite regime of resonance in vortex-induced vibration. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 473, p. 147–166, 2002.

HARTOG, J. P. den. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: New York: McGraw-Hill, 1964.

HINES, W. W.; MONTGOMERY, D. C.; GOLDSMAN, D. M.; BORROR, C. M. *Probabilidade e Estatística na Engenharia*. [S.l.]: LTC Editora, 2006.

HUNT, J. C. R.; WRAY, A. A.; MOIN, P. *Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows*. [S.l.], 1988.

INMETRO, I. N. de Metrologia Normalização e Q. I. *Vocabulário internacional de termos fundamentais e gerais de metrologia : Portaria Inmetro 029 de 1995*. 5. ed. [S.l.]: Duque de Caxias : INMETRO, 2007.

IWAN, W. D.; BLEVINS, R. D. A model for vortex induced oscillation of structures. *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers*, v. 41, p. 581 – 586, 1974.

JAUVTIS, N.; WILLIAMSON, C. H. K. Vortex-induced vibration of a cylinder with two degrees of freedom. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 1035–1042, 2003.

JAUVTIS, N.; WILLIAMSON, C. H. K. The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 509, p. 23–62, 2004.

JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 285, p. 69–94, 1995.

JSMF. *Visualized Flow: Fluid motion in basic and engineering situations revealed by flow visualization*. [S.l.]: The Japan Society of Mechanical Engineers, 1988.

KHALAK, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Dynamics of a hydroelastic cylinder with low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*, v. 10, n. 10, p. 455–472, 1996.

KHALAK, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Fluid forcs and dynamics of a hydroelastic structure with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*, v. 11, p. 973–982, 1997.

KHALAK, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Motions, forces and mode transitions in viv at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, p. 813 – 851, 1999.

KING, R.; PROSSER, M. J.; JOHNS, D. J. On vortex excitation of mode piles in water. *Journal of Sound and Vibration*, v. 29 (2), p. 169–188, 1973.

KIRCHER, A. *Phonurgia nova, sive conjugium mechanico-physicum artis & natvrae paranympha phonosophia concinnatum*. [S.l.: s.n.], 1673.

KIU, K. Y.; STAPPENBELT, B.; THIAGARAJAN, K. P. Effects of iniform roughness on vortex-induced vibration of towed vertical cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, p. 4753–4763, 2011.

KORKISCHKO, I.; MENEGHINI, J. R. Experimental investigation of flow-induced vibration on isolated and tandem circular cylindes fitted with strakes. *Journal of Fluid and Structures*, v. 26, p. 611–625, 2010.

LEONG, C. M.; WEI, T. Two-degree-of-freedom vortex-induced vibration of a pivoted cylinder below critical mass ratio. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 464, p. 2907 – 2927, 2008.

LEWEKE, T.; BEARMAN, P. W.; WILLIAMSON, C. H. K. Preface of the special issue on iutam symposium on bluff bodies wakes and vortex-induced vibrations, bbviv2, marseilles, france. *Journal of Fluids ans Structures*, v. 15, p. 375–669, 2001.

LIGHTHILL, J. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 173, p. 667–681, 1986.

LIMA, A. A. de. *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros flexíveis*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.

LOPEZ, J. I. H.; MENEGHINI, J. R.; SALTARA, F. Discrete approximation to the global spectrum of the tangent operator for flow past a circular cylinder. *Applied Numerical Mathematics*, v. 58, p. 1159–1167, 2008.

LUGT, H. J. The dilemma of defining a vortex. *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, p. 309–321, 1979.

MENEGHINI, J. R.; BEARMAN, P. W. Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 9, p. 435–455, 1995.

MORSE, T. L.; GOVARDHAN, R. N.; WILLIAMSON, C. H. K. The effect of end conditions on the vortex-induced vibration of cylinders. *Journal of Fluid and Structures*, v. 24, p. 1227–1239, 2008.

MORSE, T. L.; WILLIAMSON, C. H. K. Fluid forcing, wake modes, and transitions for a cylinder undergoing controlled oscillations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 25, p. 697–712, 2009.

MORSE, T. L.; WILLIAMSON, C. H. K. Prediction of vortex-induced vibration response by employing controlled motion. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 634, p. 5 – 39, 2009.

NOGUEIRA, J.; LECUONA, A.; RODRIGUEZ, P. A. Data validation, false vectors correction and derived magnitudes calculation on piv data. *Measurement Science and Technology*, v. 8, p. 1493–1501, 1997.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 57–96, 2003.

PARK, W.; HIGUCHI, H. *Computation of Flow past Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method*. Mineapolis, USA, 1989.

PARKINSON, G. Phenomena and modelling of flow-induced vibrations of bluff bodies. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 26, n. 26, p. 169–224, 1989.

RADES, M. *Mechanical Vibrations II Structural dynamic modeling*. [S.l.]: Printech, 2010.

RAFFEL, M.; WILLERT, C. E.; WERELEY, S. T.; KOMPENHANS, J. *Particle image velocimetry: A practical guide*. [S.l.]: Springer, 2007.

RAYLEIGH, L. *Theory of Sound*. [S.l.]: Macmillan, 1896.

SANCHIS, A.; SAELEVIK, G.; GRUE, J. Two-degree-of-freedom vortex-induced vibrations of a spring-mounted rigid cylinder with low mass ratio. *Journal of Fluids and Structures*, v. 24, p. 907 – 919, 2008.

SARPKAYA, T. Vortex-induced oscillations a selective review. *Journal of Applied Mechanics*, v. 46, p. 241–258, 1979.

SARPKAYA, T. Discussion on the paper by a. khalak and c.h.k. williamson "dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping". *Jounal of Fluid and Structures*, v. 11, p. 549–552, 1997.

SARPKAYA, T. On the force decompositions of lighthill and morison. *Journal of Fluid and Structures*, v. 15, p. 227–233, 2001.

SARPKAYA, T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, n. 19, p. 389–447, 2004.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. *Boundary-Layer Theory*. [S.l.]: Springer, 2003.

SNELLING, C. *Table of density of pure water*. 2011. Disponível em: <http://www-.simetric.co.uk/si_water.htm>.

SRINIL, N.; ZANGANEH, H. Modelling of coupled cross-flow/in-line vortex-induced vibrations using double duffing and van der pol oscillators. *Ocean Engineering*, v. 53, p. 83 – 97, 2012.

STAPPENBELT, B.; LALJI, F. Vortex-induced vibration super-upper response branch boundaries. *International Journal of Offshore and polar engineering*, v. 18, p. 99 – 105, 2008.

STAPPENBELT, B.; O'NEILL, L. Vortex-induced vibration of cylindrical structures with low mass ratio. In: *Proceedings of the seventeenth international offshore and polar engineering conference*. [S.l.: s.n.], 2007.

STOKES, S. G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, IX, p. 1–86, 1851.

STROUHAL, V. Über eine besondere art der tonerregung. *Annalen der Physik und Chemie (Third Series)*, v. 5, p. 216–251, 1878.

VIKESTAD, K.; VANDIVER, J.; LARSEN, C. M. Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibration and external disturbance. *Jounal of Fluid and Structures*, v. 14, p. 1071–1088, 2000.

WAHL, A. M. *Mechanical springs*. [S.l.]: New York : McGraw-Hill, 1963.

WHITE, F. *Introduction to Fluid Mechanics*. [S.l.]: MacGraw Hill, 1999.

WILLIAMSON, C.; ROSHKO, A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 2, p. 355–381, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for laminar vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 10, p. 2742–2744, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 206, p. 579–627, 1989.

WILLIAMSON, C. H. K. Three-dimensional wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 328, p. 345–407, 1996.

WILLIAMSON, C. H. K.; GOVARDHAN, R. Vortex-induced vibrations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v. 36, p. 413–455, 2004.

APÊNDICE A – APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA AJUSTE DE FUNÇÕES

O Método dos Mínimos Quadrados, desenvolvido pelo famoso matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), é um método muito empregado para ajustar curvas a dados experimentais, dentre outras aplicações. O método considera que certo grupo finito com N dados (x_i, y_i) se comporta segundo uma função $f(x)$ que depende de alguns parâmetros constantes a, b, c, ... etc. A determinação desses parâmetros se dá admitindo que existe uma função $J(a, b, c, ...)$, que equivale a soma dos erros quadrados $J = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = (f(x_i) - y_i)^2$, e que esta função possui um valor de mínimo quando $\partial J/\partial a = 0$, $\partial J/\partial b = 0$ e etc.

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum e^2\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - y_i)^2\right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum e^2\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - y_i)^2\right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\sum e^2\right) = \frac{\partial}{\partial c}\left[\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - y_i)^2\right] = 0$$

Neste trabalho, o Método dos Mínimos Quadrados foi empregado para ajustar retas, parábolas, exponenciais e algumas funções específicas de cada capítulo.

A.1 Ajuste de reta

Para o caso do ajuste de uma reta, a equação $f(x)$ é do tipo $f(x) = a\,x + b$ e a somatória do erro quadrático J é dado por

$$J = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (a\,x_i + b - y_i)^2$$

Diferenciando J em relação aos parâmetros a e b e igualando a zero de forma a encontrar os valores mínimos da função tem-se que:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = a \sum x_i^2 + b \sum x_i - \sum x_i\,y_i = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = a \sum x_i + b\,N - \sum y_i = 0$$

O resultado anterior quando reescrito no formato matricial fornece o sistema A.1. Resolvendo esse sistema obtém-se os valores de a e b que ajustam a melhor reta para o grupo de pontos (x_i, y_i).

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i\,y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

A.2 Ajuste de parábola

Considerando que a função interpoladora $f(x)$ seja uma parábola, que nada mais é do que um polinômio do segundo grau, sua equação é do tipo $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. A somatória do erro quadrático J para este caso é dada por

$$J = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(a\,x_i^2 + b\,x_i + c - y_i\right)^2$$

Diferenciando J em relação aos parâmetros a, b e c e igualando a zero de forma a encontrar os valores mínimos da função tem-se que:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 - \sum x_i^2\,y_i = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i - \sum x_i\,y_i = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial c} = a \sum x_i^2 + b \sum x_i + c\,N - \sum x_i\,y_i = 0$$

Reescrevendo o sistema anterior no formato matricial encontra-se a equação A.2. Resolvendo esse sistema obtém-se os valores de a, b e c.

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2\, y_i \\ \sum x_i\, y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

A.3 Ajuste de uma exponencial

Seja uma função exponencial definida pela expressão

$$y = a\, e^{b\,x}$$

O objetivo é determinar os valores mais adequados para as variáveis a e b com a intenção de ajustar um grupo de pontos (x_i, y_i). Para aplicar o Método dos Mínimos Quadrados à uma função exponencial é preciso separar as variáveis a e b, o que pode ser realizado com o emprego da função logaritmo. Como a base da função exponencial $e^{b\,x}$ é o número de Euler, o logaritmo neperiano $\ln y$ é a melhor escolha. Definindo-se a variável $\Omega = \ln(y)$, tem -se que:

$$\Omega = \ln(y) = \ln\left(a\, e^{b\,x}\right) = \ln(a) + b\,x\, \ln(e) \rightarrow \Omega = \ln a + b\,x$$

Por questão de facilidade algébrica define-se $\alpha = \ln(a)$

$$\Omega = \alpha + b\,x$$

Para ajustar a função exponencial a um grupo de pontos (x_i, y_i) pode-se definir um erro e_i em função da diferença dos logaritmos de y e y_i

$$e_i = \Omega - \Omega_i$$

A soma dos erros quadráticos J será dada por

$$J = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\Omega - \Omega_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\alpha + b\,x_i - \Omega_i)^2$$

Esta equação é análoga à equação usada para determinar o ajuste de retas, logo pode-se empregar a equação matricial A.1 com os parâmetros α, b e Ω_i.

Reescrevendo o sistema anterior no formato matricial obtém-se a equação A.3

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \Omega_i \\ \sum \Omega_i \, x_i \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Os valores de α e b são determinados resolvendo-se o sistema A.3. Uma vez conhecido o valor de α, calcula-se o valor de a por

$$a = e^{\alpha}$$

A.4 Ajuste para modelo massa-mola-amortecedor

Na seção 4.2.1 é necessário encontrar uma curva de melhor ajuste para uma função semelhante a função

$$y = \sqrt{\frac{a}{b+x}}$$

Elevando a função ao quadrado é possível re-escrever a função como

$$y^2 \, (b + x) - a = 0$$

O objetivo é determinar os valores de a e b a fim de a melhor ajustar a série de N pontos (x_i, y_i). Considerando que o erro e_i para cada par (x_i, y_i) é dado por

$$e_i = y_i^2 \, (b + x_i) - a$$

Então a soma dos erros quadráticos $J = \sum e_i^2$ é dada por

$$J = b^2 \sum y_i^4 + \sum y_i^4 \, x_i^2 + \sum a^2 + 2b \sum y_i^4 \, x_i - 2ab \sum y_i^2 - 2a \sum y_i^2 x_i$$

Diferenciando J em função de a e b e verificando para quais valores de a e b tais derivadas se anulam

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \sum 2(a\,N - b \sum y_i^2 + \sum y_i^4 x_i) = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = \sum 2(b \sum y_i^4 + \sum y_i^4 x_i - a \sum y_i^2) = 0$$

Reescrevendo o sistema anterior no formato matricial obtém-se a equação A.4

$$\begin{bmatrix} N & -\sum y_i^2 \\ -\sum y_i^2 & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i^2 x_i \\ -\sum y_i^4 x_i \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

A.5 Ajuste para modelo pendular simples

Outro modelo que precisa ser ajustado ao longo do trabalho pode ser definido pela expressão

$$y = \sqrt{\frac{a+bx}{c+x}}$$

Que pode ser re-escrita como

$$y^2\,(c+x) - a - bx = 0$$

Para cada par de pontos (x_i, y_i) o erro e_i é dado por

$$e_i = y_i^2\,(c+x_i) - a - bx_i$$

A soma dos erros quadráticos $J = \sum e_i^2$ é definida pela expressão

$$\begin{aligned} J = c^2 \sum y_i^4 + \sum y_i^4\, x_i^2 + \sum a^2 + b \sum x_i^2 + 2c \sum y_i^4 x_i - 2ac \sum y_i^2 + \\ -2bc \sum y_i^2 x_i - 2a \sum y_i^2 x_i - 2b \sum y_i^2 x_i^2 + 2ab \sum x_i \end{aligned}$$

Derivando J em função de a, b e c e igualando essas derivadas parciais a zero

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= \sum 2(a\,N - c \sum y_i^2 - d \sum y_i^2 x_i + b \sum x_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} &= \sum 2(b \sum x_i^2 - c \sum y_i^2 x_i + a \sum x_i - \sum y_i^2 x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c} &= \sum 2(c \sum y_i^4 - a \sum y_i^2 - b \sum y_i^2 x_i + \sum y_i^4 x_i) = 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema anterior no formato matricial obtém-se a equação A.5

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & -\sum y_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & -\sum y_i^2 x_i \\ -\sum y_i^2 & -\sum y_i^2 x_i & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i^2 x_i \\ \sum y_i^2 x_i^2 \\ -\sum y_i^4 x_i \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

APÊNDICE B – MODELOS MATEMÁTICOS PARA VÓRTICE POTENCIAL E VISCOSO

B.1 Vórtice potencial

Nesta seção será desenvolvido o modelo de vórtice potencial para escoamento bidimensional e incompressível. Este modelo é muito importante, pois servirá como elemento básico para a modelagem de esteiras de vórtices. Devido a linearidade do escoamento potencial é possível sobrepor diversos vórtices isolados e, desta forma, calcular como uma esteira com diversos vórtices se comporta.

Seja z_c uma posição no plano complexo definida pela equação B.1, figura B.1, sendo i a componente imaginária $\sqrt{i} = -1$.

$$z_c = x + i\,y \tag{B.1}$$

A mesma posição z_c pode ser definida através de coordenadas polares.

$$z_c = r\,e^{i\,\theta}$$

As relações entre x, y e r, θ são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta \qquad & r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\,\sin\theta \qquad & \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Seja u a velocidade na direção $\hat{e_x}$, v a velocidade na direção $\hat{e_y}$, v_r a velocidade na direção radial $\hat{e_r}$ e v_θ a velocidade na direção $\hat{e_\theta}$. Observando o esquema B.1(b) constata-se

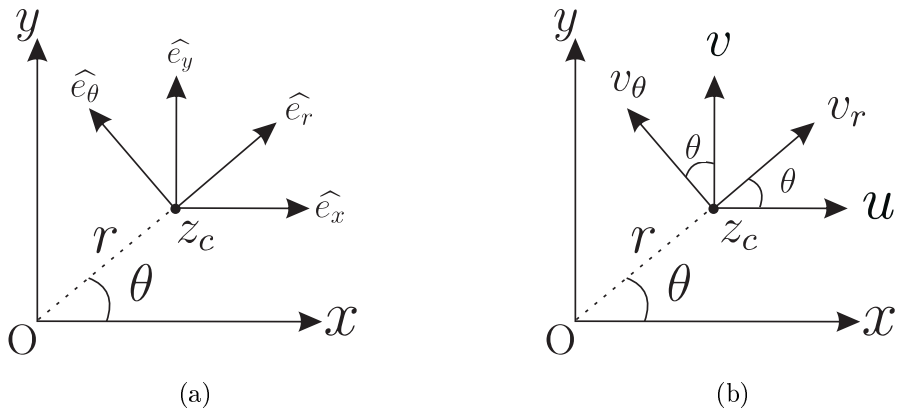


Figura B.1: (a) Definição das coordenadas (b) Definição das velocidades.

que as componentes da velocidade, descritas em coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por

$$v_\theta = -u\,\sin\theta + v\,\cos\theta \qquad u = v_r\,\cos\theta - v_\theta\,\sin\theta$$
$$v_r = u\,\cos\theta + v\,\sin\theta \qquad v = v_r\,\sin\theta + v_\theta\,\cos\theta$$

Define-se a função potencial complexa como $\Omega = \phi + i\,\psi$, sendo ϕ a função potencial e ψ a função linha de corrente. As funções ϕ e ψ relacionam-se com as velocidades através das relações B.2.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v \tag{B.2}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = v \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \tag{B.3}$$

Em coordenadas polares as mesmas relações são dadas por:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = v_r \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -v_\theta \tag{B.4}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = v_\theta \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = v_r \tag{B.5}$$

Obtidas as relações entre as componentes da velocidade e as funções ϕ e ψ, pode-se iniciar o desenvolvimento de um modelo de vórtice. É intuitivo pensar que um vórtice é uma entidade que rotaciona ao redor de seu centro e não possui componente de velocidade radial. Partindo dessa ideia pode-se assumir a primeira hipótese para o modelo de vórtice:

Hipótese 1: Um vórtice não apresenta velocidade radial $v_r = 0$

As consequências dessa primeira hipótese, quando aplicada nas relações B.4 são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \phi(\theta)$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = \psi(r)$$

Pressupondo que exista uma simetria axial com relação ao centro do vórtice e que não haja uma posição angular θ privilegiada, então a velocidade na direção $\hat{e_\theta}$ é função apenas de r e não de θ. Define-se, desta forma, a segunda hipótese do modelo de vórtice potencial.

Hipótese 2: $v_\theta = v_\theta(r)$

As consequências desta hipótese são:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r\, v_\theta$$

Nota-se que o lado direito da expressão acima é função apenas de r. Definindo uma função auxiliar $K(r) = r\, v_\theta(r)$, tem-se que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = K(r) \rightarrow \phi = K(r)\, \theta$$

Fazendo uso da definição desta função auxiliar $K(r)$ a velocidade v_θ é dada por

$$v_\theta(r) = \frac{K(r)}{r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\theta \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{K(r)}{r}$$

Integrando a relação anterior em r obtém-se:

$$\psi(r) = -\int \frac{K(r)}{r}\, dr$$

A função linha de corrente depende de uma variável auxiliar $K(r)$. Admitindo como uma terceira hipótese deste modelo que a função $K(r)$ é constante.

Hipótese 3: $K(r) = \text{constante} = \alpha$

Como consequências da terceira hipótese tem-se:

$$\psi = -\int \frac{K(r)}{r}\, dr = -\alpha\, \ln(r)$$
$$\phi = \alpha\, \theta$$

Obtidas as funções ϕ e ψ o potencial complexo de um vórtice potencial Ω_v é dado por:

$$\Omega_v = \phi + i\, \psi = \alpha\, \theta - i\, \alpha\, \ln(r) = \alpha\, [\theta - i\, \ln(r)]$$

Cabe aqui uma observação relevante a respeito da função logarítmica aplicada a números complexos. Para $z_c = x + i\, y$, então o logaritmo de z_c vale

$$\log(z_c) = \log(r) + i\, \theta$$

É preciso diferenciar $\log(z_c)$ e $\log(r)$ tendo em vista que z_c é um número complexo e r pertence ao conjunto dos números reais. Essa diferença permite que exista o logaritmo de valores negativos quando se opera no plano complexo, tal como exemplificado abaixo:

$$\log(-3) = \log(3e^{\pi\, i}) = \log(3) + i\, \pi$$

Para maiores informações a respeito da função logarítmica aplicada a números complexos veja Churchill (1975). Aplicando este resultado à função potencial complexo, resulta:

$$\Omega_v = \alpha\, (\theta - i\, \ln(r)) = \alpha\, i\, (-\ln(r) - i\, \theta) = -\alpha\, i\, [\ln(r) + i\, \theta]$$

Finalmente obtemos o potencial complexo de um vórtice como

$$\Omega_v = -\alpha\, i\, \log(z_c) \tag{B.6}$$

Nos parágrafos anteriores, três hipóteses para obtenção da função potencial complexa de um vórtice ideal foram assumidas. Nas próximas linhas será demonstrado que duas dessas três hipóteses são consequências de hipóteses anteriores, o que torna o modelo mais consistente.

A hipótese 2 admite que $v_\theta = v_\theta(r)$. Este resultado é demonstrado aplicando-se a equação continuidade para fluido incompressível em escoamento bidimensional ($\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0$).

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Como da primeira hipótese assumida, de que $v_r = 0$, resulta que:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow v_\theta = v_\theta(r)$$

Com relação à hipótese 3, de que a função auxiliar $K(r)$ equivale a uma constante α, basta considerar a hipótese de irrotacionalidade do escoamento potencial ($\nabla \times \overrightarrow{u} = 0$).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

Novamente usando a primeira hipótese ($v_r = 0$), resulta que:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) = 0$$

Constata-se que o produto $r\, v_\theta$ não varia em r nem em θ, pois $v_\theta = v_\theta(r)$. Conclui-se, deste modo, que o produto $r\, v_\theta$ é uma constante. Finalmente $K(r) = r\, v_\theta =$ constante $= \alpha$.

Visando interpretar fisicamente o valor da constante α, emprega-se o conceito de circulação. Define-se como circulação Γ o resultado da integral de linha ao longo de um caminho fechado C do produto entre o vetor velocidade $\overrightarrow{u}$ e o versor da linha $d\,\overrightarrow{l}$, tal como definido pela equação B.7.

$$\Gamma = \oint_C \overrightarrow{u}\, d\,\overrightarrow{l} = \oint_C (u\, dx + v\, dy) \tag{B.7}$$

Diferenciando a função potencial complexa em z_c obtém-se:

$$\frac{d\Omega_v}{dz_c} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = u - i\, v$$

O próprio diferencial dz_c é encontrado a partir da relação $z_c = x + i\, y$

$$dz_c = dx + i\, dy$$

Tomando a integral

$$\oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz_c}\right) dz_c = \oint_C (u - i\, v)\,(dx + i\, dy) = \oint_C (u\, dx + v\, dy + i\, u\, dy - i\, v\, dx)$$

Separando as componentes reais e imaginárias da integral

$$\oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz_c}\right) dz_c = \oint_C (u\, dx + v\, dy) + i \oint_C (\, u\, dy - \, v\, dx)$$

O primeiro termo da equação anterior recai na definição de circulação. Cabe interpretar agora a segunda integral. Seja um volume infinitesimal,apresentado na figura B.2, de lados dx e dy e seja C o contorno fechado, percorrido no sentido anti-horário, desse elemento. Pelo esquema, percebe-se que os termos $u\,dy$ e $v\,dx$ são o produto de uma velocidade e um comprimento perpendicular a ela, o que representa uma vazão. A integral da vazão ao longo de todo o contorno do elemento representa uma vazão para fora do volume infinitesimal. Nesta etapa é possível definir a vazão Q pela equação B.8. Com esta nova grandeza, pode-se concluir que o resultado da integral de linha ao longo de um caminho fechado de $d\Omega/dz_c$ resulta na expressão B.9.

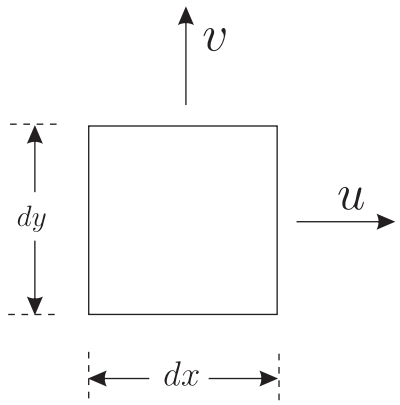


Figura B.2: Representação de elemento infinitesimal e fluxo de massa através de suas fronteiras.

$$Q = \oint_C (\,u\,dy - \,v\,dx) \tag{B.8}$$

$$\oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz_c}\right) dz_c = \Gamma + i\,Q \tag{B.9}$$

Até este ponto da análise não foram levados em consideração os resultados obtidos para um vórtice potencial. O resultado da equação B.8 é geral para escoamentos potenciais bidimensionais. Aplicando agora o valor de Ω_v definido pela equação B.6 tem-se:

$$\frac{d\Omega_v}{dz_c} = \frac{d}{dz_c}\left[-\alpha\,i\,\log(z_c)\right] = \frac{-\alpha\,i}{z_c}$$

Para realizar a integral é preciso escolher um caminho fechado C. Seja este caminho C um círculo centrado na origem percorrido no sentido anti-horário e com raio

β, então z_c e seu diferencial dz_c serão dados por:

$$z_c = \beta\, e^{i\theta} \qquad \text{com} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz_c = \beta\, e^{i\theta} i d\theta$$

A integral ao longo do caminho C será dada por:

$$\oint_C \left(\frac{d\Omega_v}{dz_c}\right) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(-i\alpha \frac{dz_c}{z_c}\right) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(-i\alpha \frac{\beta e^{i\theta} i d\theta}{\beta e^{i\theta}}\right) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \alpha d\theta = 2\pi\alpha$$

Comparando o resultado anterior com o resultado geral da integral de $d\Omega/dz_c$, definido pela equação B.9, verifica-se que $\Gamma = 2\pi\,\alpha$ e $Q = 0$. Como esperado, não há vazão para dentro ou para fora de um vórtice, apenas circulação. Caso o modelo desenvolvido fosse o de uma fonte ou o de um sorvedouro potencial o resultado seria o contrário, havendo apenas vazão enquanto a circulação seria nula. Não faz parte do escopo deste trabalho apresentar ou ainda analisar outras entidades potenciais. Informações sobre esses elementos podem ser encontradas no livro texto de mecânica dos fluidos de White (1999), dentre outros.

Voltando ao modelo de vórtice potencial, encontrada uma interpretação física para a constante α, retorna-se à equação B.6:

$$\Omega_v = -\alpha\, i\, \log(z_c) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\, i\, \log(z_c)$$

Este modelo foi obtido admitindo que o caminho fechado C foi percorrido no sentido anti-horário. Considerando um vórtice que gire no sentido horário, então a nova circulação será $-\Gamma$ e a função potencial complexa será dada por:

$$\Omega_v = i\,\frac{\Gamma}{2\pi}\, \log(z_c) \tag{B.10}$$

Obtido o potencial complexo de um vórtice potencial, determinam-se as componentes de velocidade por ele induzidas. Devido a sua característica rotacional é mais conveniente empregar coordenadas polares para indicar as componentes da velocidade. Das equações B.4, tem-se que $\partial\phi/\partial r = v_r$ e $\partial\psi/\partial r = -v_\theta$, logo:

$$\frac{d\Omega_v}{dz_c} = (v_r - i\, v_\theta)\, e^{-i\theta}$$

Aplicando o resultado da equação B.10

$$\frac{d\Omega_v}{dz_c} = \frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z_c} = \frac{\Gamma i}{2\pi r e^{i\theta}}$$

Obtém-se que as componentes das velocidades são dadas por:

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{B.11}$$

A figura B.3 apresenta o perfil de velocidades de um vórtice potencial com circulação negativa $\Gamma < 0$. A linha azul indica o módulo da velocidade angular v_θ em função do raio r.

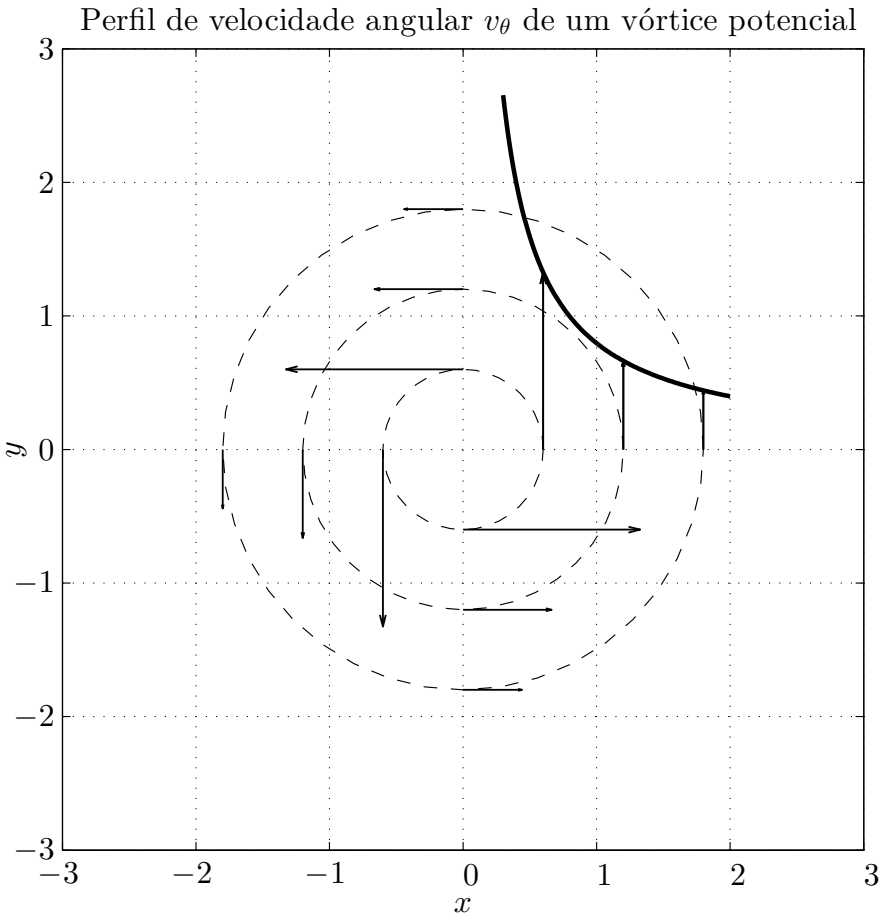


Figura B.3: Perfil de velocidades para um vórtice potencial.

Esteira simples de vórtices potenciais

Conhecido o potencial complexo para um vórtice centrado na origem do plano complexo, pode-se somar a contribuição de diversos outros vórtices e determinar qual é

o potencial complexo para toda uma esteira de vórtices. A figura B.4 esquematiza uma esteira simples de vórtices pontuais com circulação Γ e com distância a entre si.

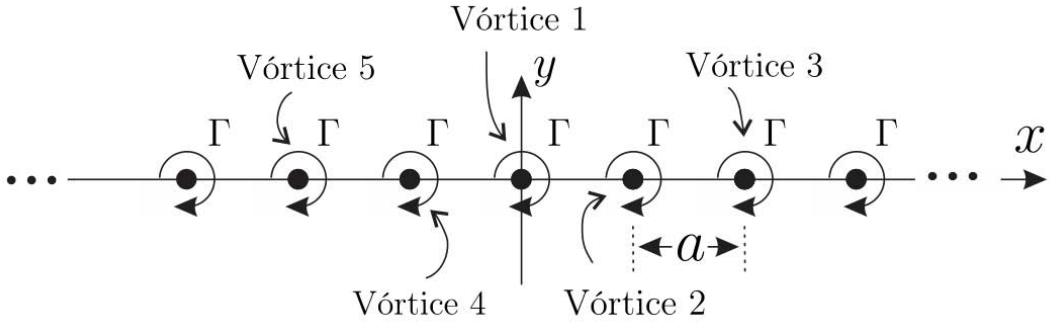


Figura B.4: Esteira de vórtices alinhados.

A figura nomeia cinco vórtices da esteira. O potencial de cada um desses vórtices é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{Vórtice 1} \rightarrow \quad \Omega_1(z_c) &= \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c\right) \\
\text{Vórtice 2} \rightarrow \quad \Omega_2(z_c) &= \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c - a\right) \\
\text{Vórtice 3} \rightarrow \quad \Omega_3(z_c) &= \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c - 2a\right) \\
\text{Vórtice 4} \rightarrow \quad \Omega_4(z_c) &= \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c + a\right) \\
\text{Vórtice 5} \rightarrow \quad \Omega_5(z_c) &= \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c + 2a\right)
\end{aligned}$$

Observa-se que a diferença entre os potenciais consiste apenas no fato da posição de cada vórtice ser acrescida de $n\,a$, onde n é um número inteiro. Considerando uma esteira simétrica composta por infinitos vórtices, seu potencial complexo será dado por:

$$\Omega_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left(z_c + n\,a\right)$$

Uma vez que a soma de dois logaritmos equivale ao logaritmo do produto dos logaritmandos, ou seja $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, a soma de infinitos logaritmos equivale ao logaritmo de uma produtória infinita:

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[...(z_c - 2a)(z_c - a)(z_c)(z_c + a)(z_c + 2a)...\right] = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[\prod_{n=-\infty}^{\infty} (z_c + na)\right]$$

Caso a produtória seja reordenada de forma a que os termos com valores opostos

de n se multipliquem tem-se $(z_c + na)(z_c - na) = (z_c^2 - n^2a^2)$.

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[z_c\left(z_c^2 - a^2\right)\left(z_c^2 - 4a^2\right)\left(z_c^2 - 9a^2\right)...\left(z_c^2 - n^2a^2\right)...\right]$$

Observando que cada termo $(z_c^2 - n^2a^2)$ pode ser decomposto segundo

$$z_c^2 - n^2a^2 = (-n^2a^2)\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2a^2}\right)$$

E aplicando essa decomposição ao potencial complexo Ω

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left\{z_c\left[(-a^2)\left(1 - \frac{z_c^2}{a^2}\right)\right]\left[(-4a^2)\left(1 - \frac{z_c^2}{4a^2}\right)\right]...\left[(-n^2a^2)\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2a^2}\right)\right]...\right\}$$

Novamente empregando a propriedade $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ os termos $-n^2a^2$ são separados em outro logaritmo

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[z_c\left(1 - \frac{z_c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{4a^2}\right)...\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2a^2}\right)...\right] + \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[(-a^2)(-4a^2)...(-n^2a^2)...\right] \tag{B.12}$$

Nota-se que o segundo termo da equação B.12 é uma constante, pois não depende da variável complexa z_c. Visando simplificar o trabalho algébrico, pode-se substituir todo o segundo termo por uma constante.

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[z_c\left(1 - \frac{z_c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{4a^2}\right)...\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2a^2}\right)...\right] + \text{cte}$$

Pode-se pensar no logaritmando do potencial complexo como uma função periódica que possui raízes em $z = 0, \pm a, \pm 2a, ... \pm na, ...$ Uma função com essa característica é a função $\sin z_c$ que possui raízes em $\sin z_c = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ... \pm n\pi, ...$.

$$\sin(z_c) = z_c\left(1 - \frac{z_c^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{3^2\pi^2}\right)...\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Visando a reproduzir o logaritmando do primeiro termo da equação B.12, basta calcular $\sin(z_c\pi/a)$:

$$\sin\left(\frac{\pi z_c}{a}\right) = \frac{z_c\pi}{a}\left(1 - \frac{z_c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{2^2a^2}\right)\left(1 - \frac{z_c^2}{3^2a^2}\right)...\left(1 - \frac{z_c^2}{n^2a^2}\right)$$

Obtendo a relação:

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z_c}{a}\right)\right] + \text{cte}$$

A razão a/π que multiplica a função seno pode ser separada do logaritmando e adicionada ao termo constante. Vale lembrar que o objetivo de determinar o potencial complexo é poder criar campos que representem um agrupamento de vórtices. O potencial complexo por si só não tem muito significado, mas sua derivada em relação a z_c fornece os campos u e v. Ao se tomar a derivada com relação a z_c o termo constante deixará de existir, logo seu valor em nada altera o campo de velocidades obtido. Por esse motivo, é válido adotar que esta constante vale zero, por uma mera questão de simplicidade algébrica, e o resultado do potencial complexo para uma fileira alinhada de vórtices é dada pela expressão B.13.

$$\Omega_S = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left[\sin\left(\frac{\pi z_c}{a}\right)\right] \tag{B.13}$$

Esteira dupla de vórtices - Esteira de von Kármán

Na seção anterior foi obtido o potencial complexo para uma esteira simples de vórtices Ω_S. Considerando agora que duas esteiras desse tipo sejam unidas em uma esteira alternada, tal como ilustrado no esquema B.5, determina-se o potencial complexo de uma esteira mais próxima ao modo 2S discutido no modelo de Gerrard. Considerando que uma esteira tenha vórtices com circulação Γ e seja deslocada em $+ib/2$ e a segunda esteira tenha vórtices com circulação $-\Gamma$ e seja deslocada em $a/2-ib/2$, o potencial complexo da esteira dupla Ω_{2S} será dado pela equação B.14.

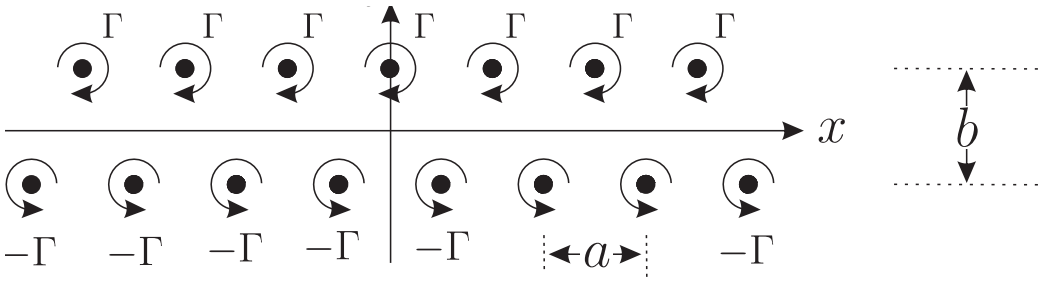


Figura B.5: Esteira de vórtices alternados também denominada de esteira de von Kármán.

$$\Omega_{2S} = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}\left(z_c - \frac{ib}{2}\right)\right]\right\} - \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}\left(z_c + -\frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right)\right]\right\} \tag{B.14}$$

Tendo em vista determinar a influência da esteira sobre um vórtice posicionado

em $z_c = z_c^*$ é preciso subtrair do potencial complexo da esteira a parcela correspondente a esse vórtice, isso porque um vórtice não induz velocidade sobre si mesmo. Seja Ω_{2S}^* o potencial complexo da esteira dupla que teve um vórtice retirado.

$$\Omega_{2S}^* = \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}\left(z - \frac{ib}{2}\right)\right]\right\} - \frac{\Gamma\, i}{2\pi} \log\left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}\left(z + -\frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right)\right]\right\} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log\left(z - z^*\right)$$

Escolhendo, por exemplo, que o vórtice retirado seja o vórtice posicionado em $z_c^* = ib/2$, o campo de velocidade induzido em um ponto muito próximo ao vórtice retirado $z_c = z_c^* + \epsilon$

$$\frac{d\Omega_{2S}^*}{dz_c} = \frac{\Gamma\, i}{2a} \log\left[\cot\left(\frac{\pi\epsilon}{a}\right)\right] - \frac{\Gamma\, i}{2a} \log\left\{\cot\left[\frac{\pi}{a}\left(\epsilon - \frac{a}{2} + ib\right)\right]\right\} - \frac{i\Gamma}{2a}\left(\frac{a}{\pi\epsilon}\right)$$

Fazendo com que a perturbação ϵ tenda a zero o termo $\cot\left(\frac{\pi\epsilon}{a}\right)$ se cancela com o termo $-\frac{a}{\pi\epsilon}$.

$$\lim_{\epsilon\to 0} \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{a}\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos\left(\pi\epsilon/a\right)}{\sin\left(\pi\epsilon/a\right)} = \frac{1}{\pi\epsilon/a} = \frac{a}{\pi\epsilon}$$

$$\frac{d\Omega_{2S}^*}{dz_c} = -\frac{\Gamma\, i}{2a} \cot\left[\frac{\pi}{a}\left(-\frac{a}{2} + ib\right)\right] = -\frac{\Gamma\, i}{2a} \frac{\cos\left(ib\pi/a - \pi/2\right)}{\sin\left(ib\pi/a - \pi/2\right)}$$

Aplicando-se as relações trigonométricas para a soma de arcos, é possível desenvolver a relação anterior a fim de alcançar:

$$\frac{d\Omega_{2S}^*}{dz_c} = \frac{\Gamma\, i}{2a} \tan\left(-\frac{ib\pi}{a}\right)$$

Mas como $\tanh\left(x\right) = -i\tan\left(ix\right)$, obtém-se que:

$$\frac{d\Omega_{2S}^*}{dz_c} = -\frac{\Gamma}{2a} \tanh\left(\frac{b\pi}{a}\right)$$

Uma vez que $d\Omega/dz_c = u - iv$, conclui-se que a velocidade v induzida no vórtice é nula e a velocidade induzida na direção $\hat{e_x}$ pela esteira sobre si mesma é dada pela expressão B.15.

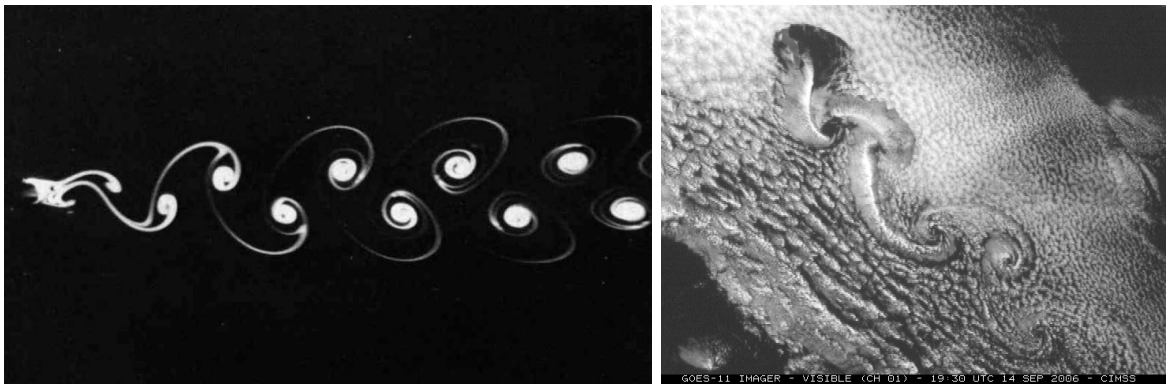
$$u_{2S} = -\frac{\Gamma}{2a} \tanh\left(\frac{b\pi}{a}\right) \tag{B.15}$$

Ressalta-se que este tipo de esteira é gerada a jusante do escoamento ao redor de um corpo rombudo considerando que o escoamento seja da esquerda para direita. A velocidade de deslocamento da esteira é, portanto, inferior à velocidade do escoamento

ao longe. Considerando que a velocidade ao longe seja dada por U_∞, a velocidade de translação da esteira é dada por

$$U_{2S} = U_\infty - \frac{\Gamma}{2a} \tanh\left(\frac{b\pi}{a}\right)$$

Em 1912, Theodore von Kármán (1881-1963) demonstrou que a esteira dupla de vórtices alternados é estável a pequenas perturbações caso a relação entre as distâncias a e b seja $a/b = 0,281$. De fato, verifica-se experimentalmente que a relação a/b para esteiras de vórtices reais é bem próxima ao valor previsto por von Kármán e, por esse motivo, dá-se o nome de esteira de von Kármán às esteiras alternadas de vórtices. A figura B.6 apresenta dois exemplos muito parecidos obtidos para condições muito diferentes da esteira de von Kármán. A primeira imagem foi obtida para o escoamento ao redor de cilindro com número de Reynolds 105. A segunda fotografia foi tirada pelo satélite climático GOES-11 e ilustra o padrão desenvolvido por nuvens ao passarem pela ilha Guadalupe. É notável constatar como a mesma característica de esteira se desenvolve para valores de número de Reynolds tão distintos.



(a) (b)

Figura B.6: Esteiras de von Kármán. (a) fotografia de Sadatoshi Taneda, adaptada de Dyke (1988), para escoamento ao redor de cilindro com Re = 105. (b) Esteira de von Kármán formada ao redor da Ilha Guadalupe. Foto tirada pelo satélite climático GOES 11 em 14 de setembro de 2006. (http://cimss.ssec.wisc.edu/goes/blog/archives/113)

B.2 Modelo do núcleo de vórtice

O modelo de vórtice potencial apresentado na seção anterior possui uma singularidade no centro do vórtice. Segundo esse modelo, quanto mais próxima uma partícula de fluido estiver do centro do vórtice, maior será a velocidade induzida sobre ela. Essa relação tende ao infinito, caso a distância entre a partícula e o centro do vórtice tenda a zero.

$$\lim_{r\to 0} v_\theta = \lim_{r\to 0} \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} = \infty$$

Com o objetivo de eliminar esta singularidade, pois não corresponde ao comportamento real de um vórtice, altera-se o modelo de vórtice potencial assumindo que dentro do vórtice as partículas de fluido se comportam como se estivessem sobre um disco de raio R que gira ao redor de um eixo ortogonal ao disco e centrado em sua origem. A região de fluido que se comporta desta maneira passa a ser denominada de núcleo do vórtice e a velocidade das partículas nesta região é dada pela expressão linear $v_\theta = \omega_D\, r$, sendo ω_D a velocidade angular de rotação do disco idealizado.

Considerando que as partículas situadas na periferia desse disco não escorregam em relação às partículas vizinhas externas ao disco, então existe uma equivalência de velocidades que permite escrever:

$$\omega_D\, R = \frac{\Gamma}{2\pi\, R} \rightarrow \Gamma = 2\pi\, \omega_D\, R^2$$

Outra maneira de calcular a circulação Γ de um vórtice é aplicando o teorema de Stokes à definição original de forma que a integral de linha passa a ser uma integral de superfície. Para o caso bidimensional o Teorema de Stokes é simplificado para o Teorema de Green.

$$\Gamma = \oint_C \overrightarrow{u}\, d\overrightarrow{l} = \int\int_A (\nabla \times \overrightarrow{u}) dA$$

Para aplicar esta definição é preciso calcular o rotacional do campo de velocidade ($\overrightarrow{\omega} = \nabla \times \overrightarrow{u}$) dentro do vórtice. Em coordenadas polares o rotacional é dado por:

$$\overrightarrow{\omega} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \hat{e_z} = \omega_z \hat{e_z}$$

Pressupondo que no interior do vórtice $v_\theta = \omega_D\, r$, $v_r = 0$ e que ω_D é constante dentro do disco, resulta:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\omega_D\, r^2)\hat{e_z} = 2\omega_D \hat{e_z}$$

Desse resultado conclui-se que a vorticidade ω_z no interior do disco é constante e equivale ao dobro da velocidade angular de rotação do disco ω_D. Vale lembrar que a vorticidade é definida como o dobro da velocidade angular de uma partícula fluida. Para um disco, todas as partículas possuem a mesma velocidade angular de forma que a vorticidade é constante. Retornando à definição de Γ

$$\Gamma = \int\int_A (\nabla \times \overrightarrow{u}) dA = \omega\, A = 2\omega_D \pi R^2$$

Este resultado é o mesmo encontrado pela hipótese de não escorregamento. O modelo de vórtice com núcleo é significativo, pois permite que a singularidade encontrada no centro de um vórtice potencial seja eliminada sem que ocorra a perda de circulação. Para um vórtice potencial toda a vorticidade está concentrada em um único ponto, enquanto que para o modelo de vórtice com núcleo a vorticidade está homogeneamente distribuída em uma região finita.

O perfil de velocidade de um vórtice com núcleo é dado pela expressão B.16. A figura B.7 ilustra esse perfil para um vórtice com $\Gamma < 0$. A linha azul indica o valor do módulo da velocidade angular v_θ em função do raio r. Assinala-se que a singularidade para $r = 0$ foi removida do modelo.

$$v_\theta = \begin{cases} \omega_D & \text{para} r \leq R \\ \dfrac{\Gamma}{2\pi r} & \text{para} r > R \end{cases} \tag{B.16}$$

O modelo de núcleo de vórtice e o próprio modelo de vórtice potencial são muito proveitosos à engenharia. O primeiro exemplo de utilização deste modelo foi a modelagem da esteira dupla de vórtices por von Kármán. Atualmente, essa vertente de modelagem é usada em códigos computacionais através de uma técnica denominada de Método de Vórtices Discretos (MVD). Esta técnica considera que vórtices potenciais com núcleo são gerados na camada limite de um corpo rombudo e em seguida são convectados para o escoamento. Cada vórtice induz uma velocidade nos demais vórtices segundo uma expressão similar à equação B.16. A consequência da interação entre esses vórtices é a formação do padrão regular denominado esteira.

O conceito de núcleo de vórtice apresentado nesta seção é um primeiro modelo que visa eliminar a singularidade existente no centro de vórtices potenciais. Outras expressões de núcleo são usadas em função do modelo de vórtice adotado. Park e Higuchi (1989)

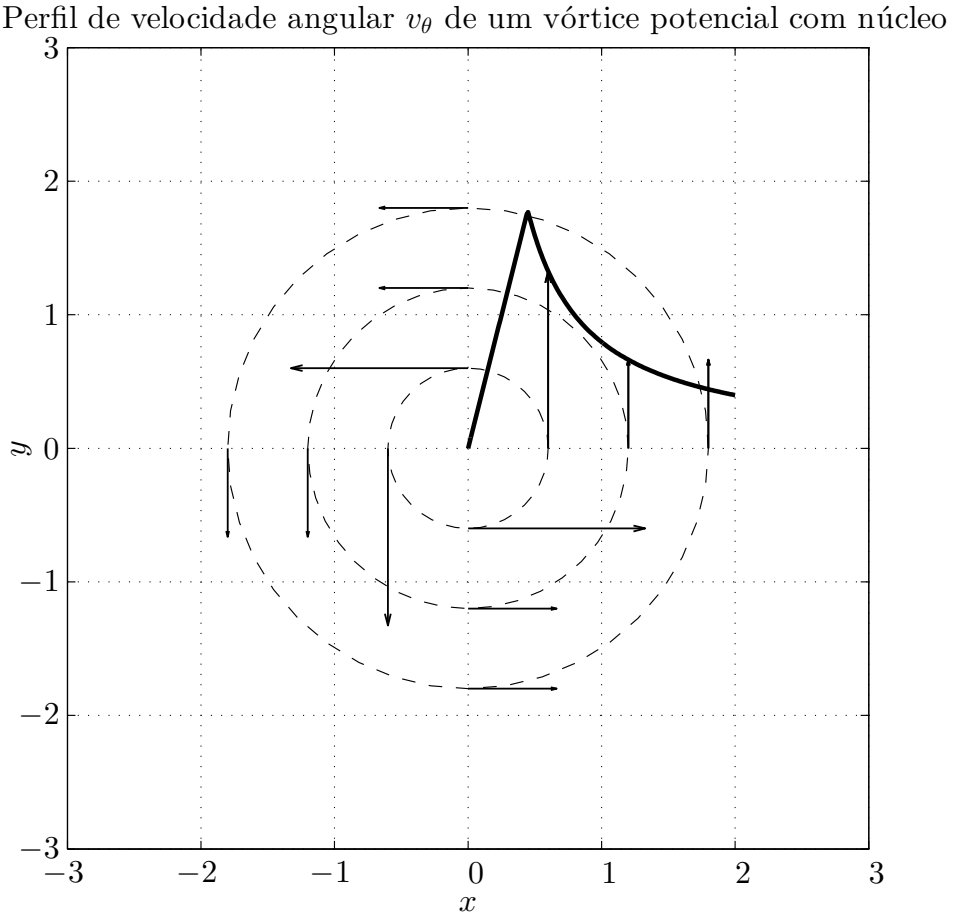


Figura B.7: Perfil de velocidades para modelo de vórtice potencial com núcleo.

empregam uma definição de velocidade angular diferente, apresentada na equação B.17, na qual a velocidade é contínua e diferenciável. Caso a distância r de uma partícula de fluido ao centro do vórtice seja pequena o termo R^2 no demominador evita que a velocidade tenda ao infinito. Caso a distância seja grande, com $r >> R$, então o termo $r^2 + R^2 \approx r^2$ e a expressão se aproxima da velocidade para um vórtice potencial.

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{(r^2 + R^2)} \tag{B.17}$$

As figuras B.8 e B.9 ilustram o resultado de simulações computacionais baseadas no método MVD. A figura B.8 demonstra capacidade de previsão deste modelo, pois compara diretamente o resultado de uma simulação realizada por Meneghini e Bearman (1995) com visualizações do escoamento feitas por Williamson.

A figura B.9 também revela uma esteira de vórtices bastante harmoniosa. Em

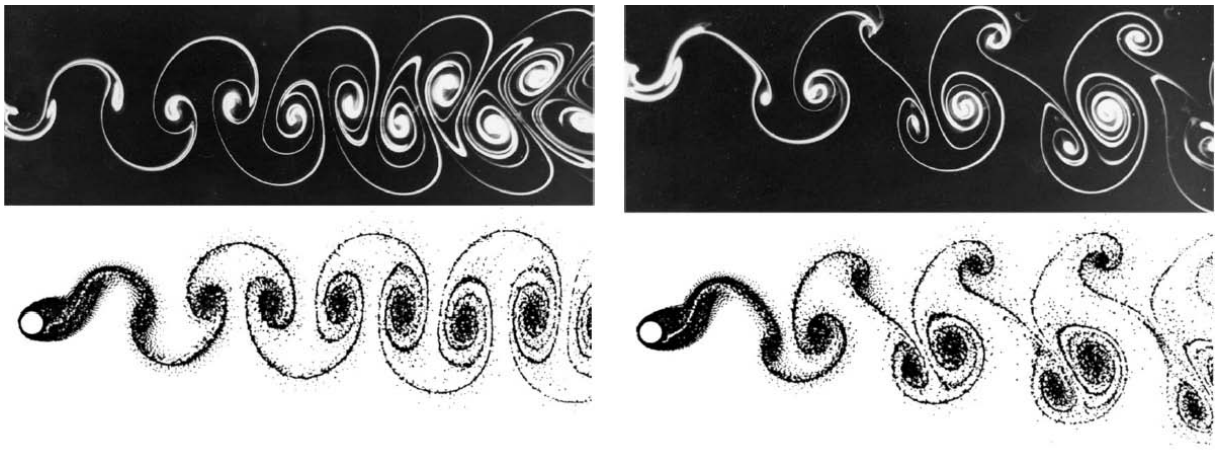


Figura B.8: Comparações entre esteiras visualizadas por Williamson e esteiras obtidas através de simulação com MVD por Meneghini e Bearman (1995), para Re $<$ 200. Figura adaptada de Williamson e Govardhan (2004).

sua tese de doutorado Lima (2011) emprega o MVD para analisar a resposta de cilindros flexíveis, tais como os tubos usados na elevação de petróleo do fundo do mar para plataformas na superfície do oceano. Este trabalho demonstra as possibilidades oferecidas pela modelagem potencial de vórtices no estudo de problemas reais de engenharia.

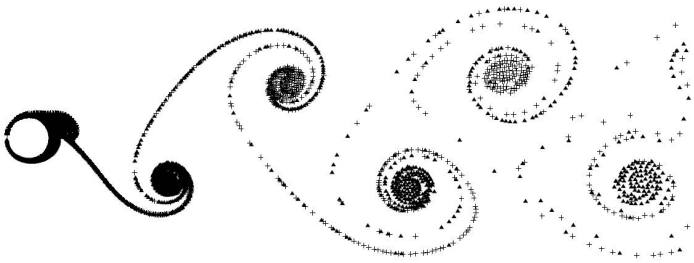


Figura B.9: Esteira de vórtices obtida através de simulação computacional empregando MVD para escoamento ao redor de cilindro com Re = 50. Figura retirada de Lima (2011).

B.3 Modelo de vórtice viscoso

Os modelos de vórtice apresentados até este momento são modelos potenciais que assumem como hipótese fundamental que o fluido não possui viscosidade. Apesar da falta de viscosidade, os modelos apresentados se mostraram bastante eficientes em prever diversas características do escoamento ao redor de corpos rombudos. Segundo o modelo de Gerrard, apresentado na primeira seção deste capítulo, a formação e o desprendimento de vórtices só ocorre devido à separação da camada limite o que, por sua vez, exige que o escoamento seja viscoso. Nesta seção um novo modelo de vórtice será apresentado, não mais definido pelas hipóteses do escoamento potencial, mas sim definido pelas consequências da vorticidade na equação de Navier-Stokes, apresentada pela equação B.18.

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} = \frac{-\nabla p}{\rho} + \overrightarrow{g} + \nu \nabla^2 \overrightarrow{u} \tag{B.18}$$

Partindo das equações definidas em B.18 e a elas aplicando o operador rotacional $(\nabla\times)$, obtém-se

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} \right) = \nabla \times \left(\frac{-\nabla p}{\rho} + \overrightarrow{g} + \nu \nabla^2 \overrightarrow{u} \right)$$

Escrevendo o vetor aceleração da gravidade como o gradiente de uma função potencial gravitacional G, ou seja, $\overrightarrow{g} = \nabla G$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overrightarrow{u}) + \nabla \times [(\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u}] = \frac{-\nabla \times (\nabla p)}{\rho} + \nabla \times (\nabla G) + \nu \nabla \times (\nabla^2 \overrightarrow{u})$$

Das relações de álgebra vetorial tem-se que o rotacional do divergente de uma função contínua é nulo, logo tanto a pressão quanto a gravidade saem da equação, tendo em vista que $\nabla \times (\nabla p) = 0$ e $\nabla \times (\nabla G) = 0$. Empregando a definição de vorticidade $\overrightarrow{\omega} = \nabla \times \overrightarrow{u}$.

$$\frac{\partial \overrightarrow{\omega}}{\partial t} + \nabla \times [(\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u}] = \nu(\nabla^2 \overrightarrow{\omega})$$

Usando a relação vetorial $\nabla \times [(\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u}] = (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{\omega} - (\overrightarrow{\omega} \cdot \nabla)\overrightarrow{u}$, tem-se que

$$\frac{\partial \overrightarrow{\omega}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{\omega} = (\overrightarrow{\omega} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} + \nu(\nabla^2 \overrightarrow{\omega})$$

Todo o termo esquerdo pode ser re-escrito empregando-se a definição de derivada material D/Dt

$$\frac{D\overrightarrow{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{\omega}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{\omega}$$

Assumindo escoamento bidimensional $\overrightarrow{\omega} = \omega_z \hat{k}$, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$, tem-se que $(\overrightarrow{\omega} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} = 0$, logo

$$\frac{D\overrightarrow{\omega}}{Dt} = \nu(\nabla^2 \overrightarrow{\omega})$$

Considerando que para um vórtice valham as relações $v_r = 0$ e $v_\theta = v_\theta(r)$, é preciso separar o vórtice do escoamento, ou seja, desprezar sua parcela convectiva $(\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{\omega}$. Neste ponto, é preciso imaginar que o vórtice viscoso modelado é um vórtice centrado na origem do sistema e que não é convectado para outras regiões do plano (x, y) mas apenas transmite sua vorticidade via difusão. Feitas essas hipóteses, a equação da distribuição de vorticidade para um vórtice viscoso bidimensional passa a ser dada por:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega_z}{\partial r}\right) \tag{B.19}$$

Batchelor (1990) apresenta uma demonstração de como o resultado da equação diferencial parcial B.19 pode ser integrada levando à equação B.20 do perfil de vorticidade.

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \tag{B.20}$$

A equação B.20 deixa claro que vorticidade é função do tempo e da distância r. A viscosidade cinemática ν é levada em consideração pela primeira vez nos modelos de vórtice apresentados. Para um dado instante t qualquer um vórtice apresenta valor máximo de vorticidade $\omega_{max}(t)$ em seu centro $r = 0$. Esse valor máximo é função da circulação Γ original do vórtice ao ser criado e do tempo t. A diminuição da vorticidade máxima ao longo do tempo é consequência da difusão de vorticidade causada pela viscosidade.

$$\omega(r = 0, t) = \omega_{max}(t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}$$

Novamente observando-se o vórtice viscoso para um instante de tempo t, nota-se que sua vorticidade evolui de forma gaussiana em função da distância r. Quanto maior for o tempo t, menor será o valor máximo ω_{max} e maior será tamanho da região afetada pelo vórtice. Observa-se claramente na figura B.8 que os vórtices mais a jusante do cilindro são maiores do que os vórtices que acabaram de ser formados, logo ao lado do cilindro.

$$\omega(r) = \omega_{max}\exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)$$

Integrando a equação B.20 em r, obtém-se a velocidade angular v_θ de um vórtice viscoso. Esse resultado é apresentado pela equação B.21. O perfil de velocidade de um

vórtice viscoso é ilustrado na figura B.10.

$$v_\theta = v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)\right] \tag{B.21}$$

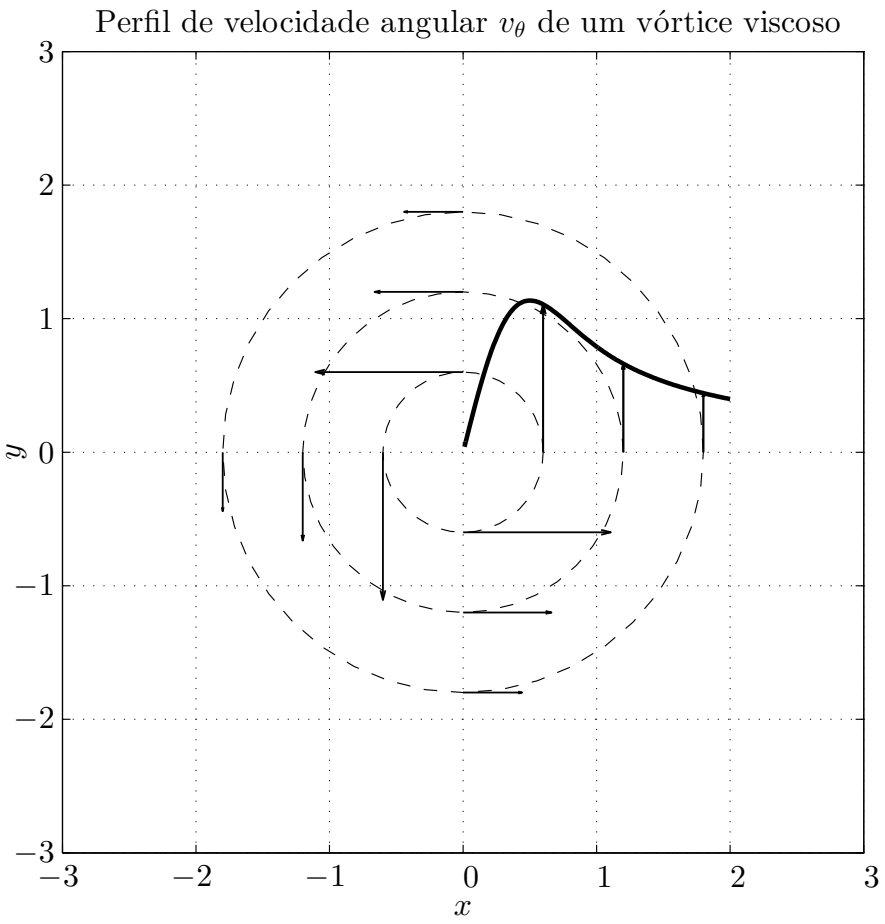


Figura B.10: Perfil de velocidades para modelo de vórtice viscoso.

APÊNDICE C – ANÁLISE DO CONCEITO DE MASSA ADICIONAL

Este apêndice apresenta uma discussão a respeito do conceito de massa adicional. A primeira seção fornece uma breve revisão histórica sobre o conceito e a sua definição. A segunda apresenta duas diferentes interpretações do conceito e como elas causam polêmica na literatura. Em seguida, utiliza-se a teoria de escoamento potencial para demonstrar o valor $C_a^{pot} = 1$. Por fim, uma análise do conceito de massa adicional é feita em relação ao modelo massa-mola-amortecedor.

C.1 Definição

O conceito de "massa adicional" foi empregado pela primeira vez por Friedrich Wilhelm Bessel no ano de 1828, em seu livro "Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundendpendels" [1]. Até então, os estudos realizados na época buscavam correlacionar o período de pêndulos, medidos experimentalmente, com períodos previstos através de modelagem analítica.

Havia sido observado experimentalmente que o período de oscilação de um pêndulo dependia do local e época do ano no qual o experimento era realizado. Essa característica foi associada à influência do ar em cada situação. Com o objetivo de contornar essa dificuldade, pequenas correções eram realizadas e tinham como meta "reduzir o problema ao vácuo". Para isso o empuxo do meio fluido passou a ser considerado no modelo do pêndulo. Bessel foi o primeiro a indicar que apenas corrigir o empuxo não era suficiente para acertar o período observado. Ensaios em água e outros líquidos indicavam que o mesmo pêndulo poderia apresentar diferentes valores de período, em função da densidade do meio líquido no qual estava imeerso. Bessel propôs que o fluido adicionava ao pêndulo uma quantidade de massa m_a, proporcional à massa de fluido deslocada pelo pêndulo m_d.

[1] "Um estudo sobre o comprimento de pêndulos simples", segundo uma tradução livre do autor

O aumento no período de oscilação seria, portanto, consequência do aumento da inércia do sistema. A razão entre as massas m_a/m_d recebeu o nome de coeficiente de massa adicional C_a.

$$C_a = \frac{m_a}{m_d} \tag{C.1}$$

Duas décadas depois da publicação do livro de Bessel, Stokes (1851) desenvolveu analiticamente uma série de estudos visando estudar o comportamento do fluido ao redor de corpos oscilando. Seu desenvolvimento parte de equações, que com o passar dos anos passariam a ser conhecidas como equações de Navier-Stokes, e estima o movimento do pêndulo. Stokes (1851) assume hipóteses de deslocamentos pequenos e lineariza diversos efeitos geométricos. Seu desenvolvimento considera parcelas viscosas e não viscosas, mas não considera desprendimento de camada limite e tampouco a presença de regiões de recirculação. Vale lembrar que o conceito de camada limite só foi desenvolvido por Ludwig Prandtl em 1904, mais de meio século depois. Todo o desenvolvimento analítico realizado por Stokes (1851) é muito elegante, mas não faz parte do escopo deste trabalho.

Após definir o conceito de massa adicional como sendo um acréscimo de massa que o corpo que oscilante "recebe" do fluido, pode-se generalizar a idéia para o conceito de tensor de massa adicional. Como já foi apresentado, o coeficiente de massa adicional surge como uma analogia para aumento aparente da massa de pêndulos quando imersos em algum fluido. A questão que surge no caso do pêndulo é a seguinte: caso o pêndulo não fosse uma esfera, mas sim um elipsóide, haveria então alguma diferença caso este oscilasse em distintas direções? Em uma direção, a mais alongada do elipsóide, o fluido perceberia o pêndulo como um corpo relativamente longo e com seção transversal circular. Na direção perpendicular a esta, o fluido "entenderia" o pêndulo como um corpo mais curto e com uma elipse como seção transversal. Não há motivos para se acreditar que o fluido responderia da mesma maneira a essas duas condições logo é necessário definir um coeficiente de massa adicional para cada direção.

Generalizando ainda mais, pode-se definir massas adicionais que não estejam relacionadas ao deslocamento de fluido pela translação de um corpo, mas sim pela sua rotação. No caso da esfera, desprezando o atrito viscoso, não se espera que a rotação de uma esfera desloque qualquer massa de fluido, mas isso claramente não é verdade quando um corpo com geometria qualquer rotaciona. É fácil perceber esse efeito ao pensar em um ventilador. Ainda que seu conjunto de pás não translade, a rotação das pás movimenta

fluido. De forma geral, pode-se definir o tensor de massa adicional por:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

Cada componente do tensor de massa adicional m_{ij} pode ser determinada de maneira analítica, experimental ou numérica. Nas próximas seções cada metodologia de cálculo será estudada para um cilindro.

É importante explorar aqui alguns parâmetros importantes para o cálculo dos coeficientes da massa adicional. Até este ponto pouco foi discutido a respeito do fluido, mas é fundamental analisar qual é o seu comportamento para cada condição, afinal é a interação entre ele e o corpo que ocasiona toda a análise desenvolvida neste trabalho. Dois parâmetros importantes para a análise da massa adicional são o número de Reynolds e o número de Keulegan-Carpenter.

O número de Reynolds, definido no capítulo 2, representa a relação entre forças de inércia e forças viscosas. Para cada faixa de Re, o fluido apresenta um comportamento distinto que pode ser laminar ou turbulento, apresentar ou não instabilidades, etc.

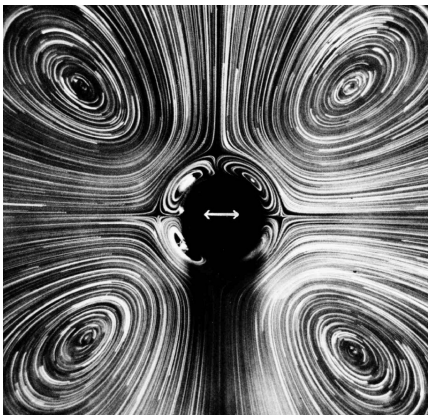
$$\mathrm{Re} = \frac{D\,U_\infty}{\nu}$$

O número de Keulegan-Carpenter KC, por sua vez, foi definido nesta tese no capítulo 5, relaciona as forças de arrasto com as de inércia. Para pequenos KC as forças de inércia se sobrepõe às forças de arrasto.

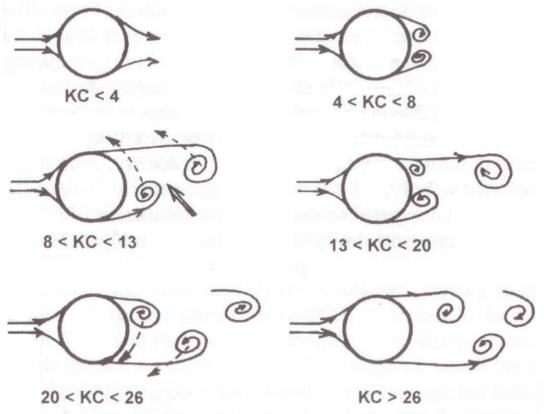
$$KC = \frac{2\pi A}{D}$$

Para $D >> A$ as oscilações do corpo são pequenas perante seu tamanho. Isso faz com que não ocorra separação da camada limite e, consequentemente, não há formação e desprendimento de vórtices, tal como ilustrado pela figura C.1(a). Para valores médios $4 < KC < 8$, passa a ocorrer desprendimento da camada limite e pequenos vórtices começam a se enrolar, mas antes de se desprenderam do cilindro, este muda o seu sentido de translação e volta a se aproximar deles. Para valores ainda mais elevados de KC ocorre

formação de esteira.



(a)



(b)

Figura C.1: (a) Fotografia de escoamento resultante para cilindro oscilando com $KC = 0.015$, retirada de Dyke (1988) (b) Representação dos padrões de vórtice formados para valores médios e elevados de KC, adaptado de Chakrabarti (2002)

O conceito de massa adicional é bastante empregado em situações nas quais ocorre movimento de corpos na água ou outro meio denso. Em Engenharia Naval, por exemplo, o conceito de massa adicional é muito importante, pois auxilia na determinação dos esforços que serão aplicados à embarcações e unidades flutuantes ao se deslocarem. Em geral essas estruturas são grandes, o que faz com que pequenos ajustes em suas posições representem movimentações de baixa amplitude em relação a seu tamanho característico.

Nessas condições, a definição potencial de massa adicional, que assume por hipótese deslocamentos infinitesimais da estrutura, apresenta bons resultados. Ainda que existam efeitos viscosos, estes passam a desempenhar um papel de segunda ordem. Vale ressaltar que os resultados obtidos por modelos potenciais só apresentam boa concordância com os medidos experimentalmente quando o parâmetro KC tende a zero.

O valor de massa adicional potencial para cilindro infinito $C_a^{pot} = 1$ foi usado no capítulo 4 para prever a frequência natural da base elástica quando o cilindro estava imerso em água. Essa hipótese só foi feita, pois nos ensaios de decaimento pequenas amplitudes de oscilação do cilindro foram usadas. Ao longo dos ensaios de VIV, a amplitude de movimento do cilindro não pode ser considerada infinitesimal e a modelagem potencial deixa de ser válida.

C.2 Diferentes interpretações para o conceito de massa adicional

Existem duas grandes maneiras de interpretar o conceito de massa adicional. Uma delas é pela força adicional necessária para deslocar um corpo imerso em certo fluido. A segunda considera a quantidade de energia cinética suplementar que deve ser fornecida ao sistema para permitir o mesmo movimento. Teoricamente, essas duas definições deveriam ser igualmente válidas e representar o mesmo enunciado. A diferença, porém consiste que a primeira foca no corpo rombudo e a segunda no fluido. É possível realizar experimentos e medir a força necessária para criar determinado movimento. Ao mesmo tempo, pode-se assumir algumas hipóteses e calcular a energia cinética que o escoamento precisaria ter para permitir esse movimento. Dentro das hipóteses corretas, as duas abordagens concordam, porém para condições mais gerais seus resultados se desencontram.

Sarpkaya (2001) apresenta uma análise sobre as decomposição de forças realizadas por Morison em 1950 e por Lighthill (1986). A equação C.3, conhecida como equação de Morison, é uma expressão semi-empírica muito difundida em Engenharia Naval e Oceânica. Os coeficientes C_d e C_m são obtidos experimentalmente. Existem uma série de compêndios com esses valores para diferentes geometrias e para uma grande faixa de números de Reynolds (Re) e Keulegan-Carpenter (KC).

$$F(t) = \frac{1}{2}\rho C_d\, D\, |U|U + \rho\, C_m\, \frac{\pi\, D^2}{4}\frac{dU}{dt} \tag{C.3}$$

Baseado na decomposição proposta por Morison, Lighthill (1986) desenvolve uma formulação muito similar, baseado em conceitos energéticos. Segundo ele, o primeiro termo da equação de Morison se origina de componentes viscosas do escoamento, enquanto que o segundo termo é consequência de efeitos potenciais. O termo C_m, segundo Lighthill (1986), é uma composição dos efeitos de massa adicional e efeitos de pressão e pode ser tratado segundo a equação C.4, onde V é o volume do corpo considerado e ρ a densidade do fluido. Segundo a teoria do escoamento potencial, o coeficiente de massa adicional para o cilindro infinito vale $C_a^{pot} = 1$. Por esse motivo, Lighthill (1986) determina $C_m = 2$ para corpos cilíndricos.

$$C_m = 1 + \frac{m_a}{\rho\, V} = 1 + \frac{C_a\, m_d}{m_d} = 1 + C_a = 1 + 1 \rightarrow C_m = 2 \tag{C.4}$$

Segundo a decomposição de Lighthill (1986), a equação de Morison passa agora

a depender apenas de um coeficiente a ser determinado experimentalmente, sendo este o coeficiente de arrasto C_d. Esta decomposição é criticada por Sarpkaya (2001) que, baseando-se no trabalho de Stokes (1851), afirma que ambos os termos da equação de Morison dependem de efeitos viscosos. A decomposição da força em parcela potencial e viscosa não faria sentido.

A análise feita até este ponto considerou as forças que agem em cilindros quando estes estão submetidos a pequenas oscilações ou pequenas perturbações no escoamento. Este não é o caso para as oscilações características do fenômeno de VIV. Dentro dos estudos que focam o fenômeno de VIV, Khalak e Williamson (1996) propuseram uma decomposição das forças que agem no cilindro semelhante àquela proposta por Lighthill (1986). As equações C.5, C.6 e C.7 ilustram como o escoamento foi decomposto por esses autores. Nas equações D e L_c são, respectivamente, o diâmetro e o comprimento do cilindro imerso e c_y é análogo a um coeficiente de sustentação.

$$F_{\text{fluido}} = F_{\text{viscosa}} + F_{\text{invíscida}} \tag{C.5}$$

$$F_{\text{viscosa}} = \frac{1}{2}\, c_y\, D\, \rho\, U_\infty^2 L_c \tag{C.6}$$

$$F_{\text{invíscida}} = -m_a \ddot{y} \tag{C.7}$$

Nota-se que, diferente do que foi proposto por Lighthill (1986), na equação C.4, o coeficiente do "termo" potencial foi assumido diretamente igual a massa adicional C_a^{pot}. Em um artigo anterior, Sarpkaya (1979) havia afirmado que não se podia simplesmente separar os efeitos da massa adicional das forças hidrodinâmicas. Khalak e Williamson (1996) citam Sarpkaya (1979) e contrapõem que não irão decompor arbitrariamente a força hidrodinâmica em uma contribuição da massa adicional e outros efeitos, mas sim em uma parcela viscosa e outra sem viscosidade. Essa breve citação, nada menos que um parágrafo, levou Sarpkaya (1997) a escrever outro artigo contrapondo Khalak e Williamson (1996) dizendo que a tentativa destes autores de decompor as forças hidrodinâmicas é "altamente simplista e sem êxito".

Khalak e Williamson (1996) ainda empregam $C_a = m_a/m_d$, mas tendo sempre em mente um coeficiente de massa adicional potencial $C_a^{pot} = 1$. Em artigos mais recentes, tais como Jauvtis e Williamson (2004), o coeficiente de massa adicional já passa a ser usado explicitamente como $C_a = 1$.

As diversas formas de lidar com o conceito de massa adicional, além de gerar diver-

sos artigos interessantes causaram uma "discussão muito intensa" no simpósio BBVIV-2, realizada na França em junho de 2000. Essa discussão chegou a ser citada por Leweke, Bearman e Williamson (2001) no prefácio do *Journal of Fluids and Structures*.

C.3 Determinando o valor de C_a potencial

Nesta seção será demonstrado analiticamente, através de uma modelagem de escoamento potencial, o resultado $C_a^{pot} = 1$ para cilindros. Alguns resultados de escoamento potencial são usados diretamente na demonstração sem prévia introdução, visando tornar a demonstração mais breves. Maiores informações podem ser encontradas em White (1999) ou outros livros texto de Mecânica dos Fluidos.

A demonstração baseia-se no cálculo da energia cinética E_C necessária para mover o fluido localizado próximo ao cilindro. A energia cinética do fluido pode ser escrita como:

$$E_C = \int_V \frac{1}{2}\rho\,(\vec{u})^2\,dV$$

Segundo a teoria de escoamento potencial linear, a velocidade do fluido é dada por:

$$\vec{u} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

Desta forma:

$$E_C = \int_V \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2\,\rho\,dV$$

É necessário definir o potencial ϕ para o escoamento ao redor do cilindro. Assumindo que efeitos tridimensionais sejam desprezados e que o cilindro não rode, o escoamento recai no caso bidimensional ao redor de um círculo. Como o escoamento potencial não considera a viscosidade do fluido, não há aderência na parede do cilindro. Para esta condição, o escoamento pode ser modelado como a soma de um escoamento uniforme ϕ_{esc} com um dipolo ϕ_{dip}. Assumindo que a velocidade de movimentação do cilindro seja U_c:

$$\phi = \phi_{esc} + \phi_{dip} = U_c\,r\,\cos\theta + \frac{\lambda\cos\theta}{r}$$

A velocidade radial é dada pela derivada parcial de ϕ em r.

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(U_c\,r\,\cos\theta + \frac{\lambda\cos\theta}{r}\right) = U_c\,\cos\theta - \frac{\lambda\cos\theta}{r^2}$$

A única restrição é que, na superfície, não exista escoamento no sentido radial, logo $v_r(r = D/2) = 0$:

$$v_r|_{r=D/2} = U_c \cos\theta - \frac{4\,\lambda\cos\theta}{D} \rightarrow \lambda = \frac{U_c\,D^2}{4}$$

A função potencial para o escoamento ao redor do círculo é

$$\phi = U_c \cos\theta \left(r + \frac{D^2}{4\,r}\right)$$

A integral da energia T em todo o volume do escoamento tende ao infinito se for considerado que todo o escoamento se desloca com velocidade U_c. Por esse motivo, é preciso considerar apenas a energia cinética com relação à velocidade relativa entre o escoamento e a velocidade U_c. A função potencial recai, portanto, à parcela referente ao dipolo, mas já considerando o efeito de o escoamento contornar o cilindro.

$$\phi_{\text{rel}} = U_c \cos\theta \left(r + \frac{D^2}{4\,r}\right) - U_c\,r\,\cos\theta = U_c \cos\theta \frac{D^2}{4\,r}$$

As velocidades do escoamento, dadas em coordenadas polares, são escritas como:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -U_\infty \left(\frac{D^2}{4}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -U_c \left(\frac{D^2}{4}\,\frac{\sin\theta}{r^2}\right)$$

Retomando a integral da energia cinética,

$$E_C = \int_V \frac{1}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2\right)^2 \rho\,dV = \frac{\rho}{2}\int_V \left[U_c^2\,\frac{D^4}{16}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{1}{r^4} r\,dr\,d_\theta\right] dV$$

A integral volumétrica passa, portanto, a ser dada por uma integral de área com os seguintes limites de integração $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $D/2 \leq r \leq \infty$. Além dos limites de r e θ, que delimitam a área de cada seção transversal, é preciso integrar também na direção do eixo do cilindro. Considerando que o cilindro tenha comprimento L_c e que uma de suas extremidades esteja na posição $z = 0$, então:

$$E_C = \frac{\rho}{2}\frac{U_c^2 D^4}{16}\int_0^{L_c}\int_0^{2\pi}\int_{D/2}^{\infty}\frac{r}{r^4}dr\,d_\theta dz = \frac{U_c^2 D^4 \rho L_c}{32}\int_0^{2\pi}\int_{D/2}^{\infty}\frac{1}{r^3}dr\,d_\theta$$

$$E_C = \frac{U_c^2\, D^4\, \rho\, L_c}{32} 2\pi \left[0 + \frac{1}{2\,(D/2)^2}\right] = \frac{U_c^2\, D^4\, 2\,\pi\,\rho\, L_c}{32} \frac{4}{2\,D^2} = \frac{U_c^2}{2} \frac{\rho\, L_c\, \pi D^2}{4}$$

A energia cinética T para movimentar o fluido pode ser pensada como a energia de uma massa adicional m_a que se desloca com velocidade U_c^2. Considerando também que $\rho\, L_c\, \pi\, D^2/4$ é a massa do cilindro m_d, tem-se que:

$$E_C = \frac{m_a\, U_c^2}{2} = \frac{m_d\, U_c^2}{2} \rightarrow m_a = m_d$$

Finalmente, obtém-se que o coeficiente de massa adicional para um cilindro infinito, segundo a teoria do escoamento potencial, é dada por:

$$C_a^{pot} = \frac{m_a}{m_d} = 1 \tag{C.8}$$

C.4 Massa adicional para sistema massa-mola amortecedor forçado

Nesta seção, o conceito de massa adicional é inserido dentro da modelagem de VIV para sistema massa-mola-amortecedor. O objetivo da seção é mostrar outra abordagem do conceito de massa adicional, baseada na força necessária para deslocar o cilindro.

Seja um sistema massa-mola-amortecedor com parâmetros m, c e k constantes e forçado harmonicamente com força em módulo F_y e frequência de excitação ω_y.

$$m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = F_y\, \sin\left(\omega_y\, t + \phi_F\right)$$

A solução da equação diferencial anterior é dada por $y = \hat{y}\, \sin\left(\omega_y\, t\right)$, de forma que $\dot{y} = \hat{y}\,\omega_y\, \cos(\omega_y\, t)$ e $\ddot{y} = -\hat{y}\,\omega_y^2\, \sin(\omega_y\, t)$. Tal como desenvolvido em Vikestad, Vandiver e Larsen (2000), a força de excitação pode ser decomposta em duas componentes:

$$F_y\, \sin(\omega_y\, t + \phi_F) = F_y\, \cos\phi_F\, \sin\left(\omega_y\, t\right) + F_y \sin\phi_F \cos\left(\omega_y\, t\right)$$

Substituindo esses resultados na equação do oscilador:

$$m\left[-\hat{y}\,\omega_y\, \sin\left(\omega_y\, t\right)\right] + c\,\hat{y}\,\omega_y\, \cos(\omega_y\, t) + k\,\hat{y}\,\omega_y\, \cos\left(\omega_y\, t\right) = F_y\, \cos\phi_F\, \sin\left(\omega_y\, t\right) + F_y \sin\phi_F \cos\left(\omega_y\, t\right) \tag{C.9}$$

Passando a componente da força em fase com a aceleração para o lado esquerdo e fatorando o termo $\ddot{y}$, obtém:-se

$$(m + \frac{F_y \cos\phi_F}{\hat{y}\,\omega_y^2})\ddot{y} + c\dot{y} + k\,y = F_y \sin\phi_F \cos(\omega_y\,t)$$

O termo $(F_y \cos\phi_F)/(\hat{y}\,\omega_y^2)$ possui unidade de massa e "aumenta a inércia" do oscilador. Este termo é o termo de massa adicional m_a.

$$m_a = \frac{F_y \cos\phi_F}{\hat{y}\,\omega_y^2} \tag{C.10}$$

A expressão anterior é usada em alguns trabalhos científicos (VIKESTAD; VANDIVER; LARSEN, 2000) para calcular o valor de m_a em função da força medida e da fase entre ela e o deslocamento do cilindro. Seguindo, porém, com o desenvolvimento analítico inicial, da equação C.9 pode-se fatorar todos os termos com $\sin(\omega_y\,t)$ e com $\cos(\omega_y\,t)$.

$$(-m\,\hat{y}a,\omega_y^2 + k\,\hat{y} - F_y \cos\phi_F)\sin\omega_y\,t + (c\,\hat{y}\,\omega_y - F_y \sin\phi_F)\cos(\omega_y\,t) = 0$$

Como as funções seno e cosseno são ortogonais, a igualdade anterior só é válida para qualquer instante de tempo quando:

$$F_y \cos\phi_F = -m\,\hat{y}\,\omega_y^2 + k\,\hat{y} \tag{C.11}$$

$$F_y \sin\phi_F = c\,\hat{y}\,\omega_y \tag{C.12}$$

Substituindo o valor de $F_y \cos\phi_F$ da equação C.11 na equação C.10, tem-se:

$$m_a = \frac{F_y \cos\phi_F}{\hat{y}\,\omega_y^2} = \frac{-m\,\hat{y}\,\omega_y^2 + k\,\hat{y}}{\hat{y}\,\omega_y^2} = \frac{k}{\omega_y^2} - m$$

Empregando a definição de frequência natural do oscilador $\omega_n = \sqrt{k/m}$, tem-se que $k = \omega_n^2\,m$, logo:

$$m_a = m\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_y^2} - 1\right)$$

Dividindo os dois lados pela massa de fluido deslocado, $m_d = \pi\,D^2\rho\,L_c/4$, e empregando-se os conceitos $C_a = m_a/m_d$ e $m^* = m/m_d$, obtém-se:

$$C_a = m^*\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_y^2} - 1\right) = m^*\left[\left(\frac{f_n}{f_y}\right)^2 - 1\right] \tag{C.13}$$

A equação C.13 indica que o coeficiente de massa adicional, quando projetado dentro do modelo massa-mola-amortecedor forçado, fornece o valor de C_a necessário para que um determinado sistema, com parâmetro de massa m^* e frequência natural f_n, oscile com a frequência f. Caso a frequência de oscilação seja baixa, menor do que a frequência natural, então C_a terá valores positivos e elevados. Caso o sistema oscile na frequência natural, $f_y = f_n$, então $C_a = 1$. Por fim, caso o sistema oscile com frequência superior à sua frequência natural, então o coeficiente de massa adicional será negativo.

Assumindo que a força que atua no sistema siga a frequência de Strouhal $f_y = f_v = \mathrm{St}\, U_\infty / D$, e empregando o conceito de velocidade reduzida $V_r = U_\infty/(f_n\, D)$, pode-se reescrever C_a em função de parâmetros relacionados a VIV.

$$C_a = m^* \left[\frac{f_n\, D}{U_\infty} \frac{U_\infty}{f_v\, D} - 1 \right] = m^* \left[\frac{1}{(St\, V_r)^2} - 1 \right] \tag{C.14}$$

Caso ensaios sejam realizados com $m^* \approx 1$, tem-se que para elevados valores de velocidade reduzida, o coeficiente de massa adicional $C_a \approx -1$. Este valor é observado em muitos casos experimentais e considerado como um valor assintótico.

APÊNDICE D – PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE SINAIS

Este apêndice apresenta os procedimentos de análise de sinal empregados nos ensaios de decaimento e nos ensaios de VIV.

D.1 Análise de sinal dos ensaios de decaimento

Uma vez realizados os ensaio de decaimento em ar ou em água, é preciso analisar esses sinais de forma a determinar a frequência natural de oscilação da base elástica pendular e seu amortecimento. Para isso as seguintes etapas foram empregadas:

1. Leitura do sinal pelo código de análise

   A figura D.1 apresenta um exemplo de sinal obtido em um ensaio de decaimento em ar. Como discutido na seção 5.1, o sinal possui as características de um oscilador com baixo amortecimento.

2. Busca pelos pontos máximos e mínimos locais

   O objetivo de encontrar os valores máximos e mínimos locais do sinal é selecionar pontos da série temporal que pertençam à função envoltória. Além disso conhecendo-se os pontos limites é possível fazer a seleção do intervalo de análise tomando sempre um número inteiro de ciclos.

3. Seleção do intervalo de análise

   Nota-se na figura D.1 que antes da excitação ser aplicada ao sistema, sua resposta já era aquisitada. A aquisição do sinal é iniciada antes da excitação para que se possa analisar a maior quantidade de informação possível. Uma vez que os intervalos de tempo antes e durante a excitação não correspondem a uma oscilação livre amortecida, estes precisam ser eliminados do sinal. Como padrão para os ensaios

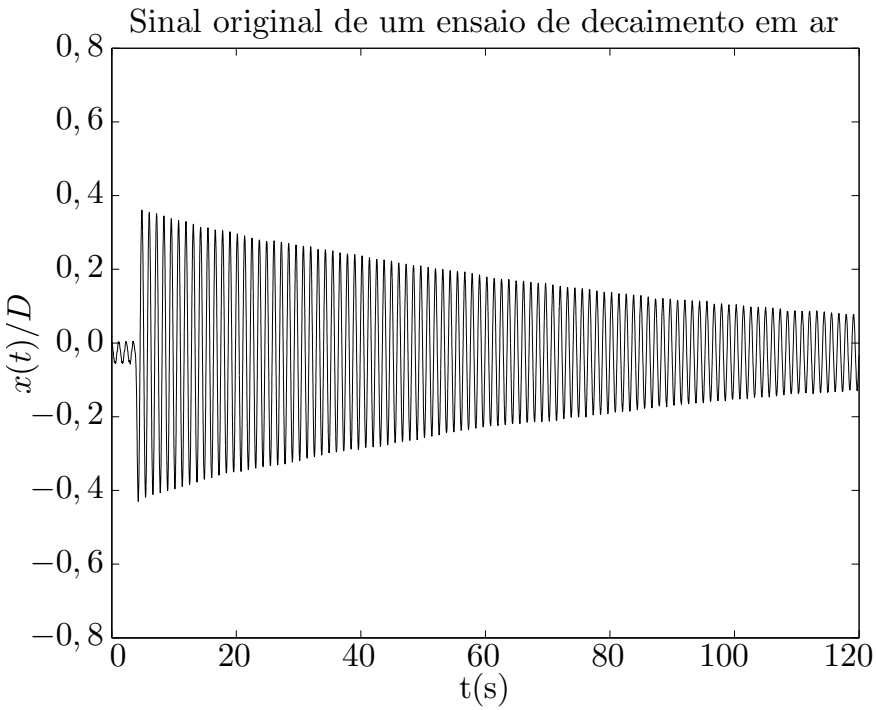


Figura D.1: Exemplo de deslocamento medido em ensaio de decaimento em ar.

de decaimento deste trabalho, o intervalo analisado consistirá de um número inteiro de oscilações. Em geral, os ensaios em ar possuem mais de 80 ciclos ao longo dos 120s aquisitados enquanto que os ensaios em água possuem menos de 30.

4.Subtração da média do intervalo selecionado

Após a seleção do intervalo de análise do sinal, calcula-se o valor médio da posição do cilindro ao longo desse intervalo de tempo. Esse valor médio foi então subtraído do sinal selecionado o que levou as oscilações a ocorrem em torno do valor zero. Pequenas assimetrias de montagem e regulagem dos sensores de deslocamento podem fazer com que a posição média das oscilações seja diferente de zero, mas esse resultado não tem significado físico para os ensaios de decaimento e, por esse motivo, foi eliminado. Esta etapa, apesar de simples, facilita a obtenção da frequência dominante do sinal via transformada de Fourier. Um sinal com componente médio não nulo pode apresentar picos elevados em regiões de baixa frequência o que empobrece a análise para frequências mais altas.

5.Filtragem dos sinais

Após a subtração do valor médio do intervalo selecionado aplica-se um filtro no sinal. De maneira simplificada, o processo de filtragem consiste em multiplicar a função

de transferência do filtro $H(f)$ pela transformada de Fourier do sinal a ser filtrado. Tomando como exemplo o sinal da posição y do cilindro e admitindo que $Y(f)$ seja sua transformada de Fourier, obtida através do procedimento numérico *Fast Fourier Transform* (FFT), o sinal filtrado da posição é determinado aplicando-se a transformada inversa de Fourier ao produto $H(f)\,Y(f)$.

$$H(f) = \frac{1}{(1 + 0,765\,s + s^2)(1 + 1,848\,s + s^2)} \quad \text{com} \quad s = \frac{i\,f}{F_{\text{corte}}} \tag{D.1}$$

Tomando como referência a frequência de Strouhal para um cilindro fixo e adotando por simplicidade que $St \approx 0,2$, $D = 32$mm e $U_\infty = 0,4$m/s, tem-se $f_v = 2,5$Hz. Não se espera que frequências superiores a $2,5$Hz sejam encontradas. Como o objetivo de filtrar o sinal é retirar ou diminuir os efeitos do ruído de alta frequência oriundos do processo de aquisição, um filtro passa baixa Butterworth de 4ª ordem foi utilizado. Este filtro possui função de transferência $H(f)$ definida pela equação D.1 e módulo $|H(f)|$ ilustrado na figura D.2. A frequência de corte adotada levou em consideração a máxima frequência de desprendimento de vórtices estimada e também uma margem de segurança. O valor adotado para a frequência de corte é de $F_{\text{corte}} = 10$Hz.

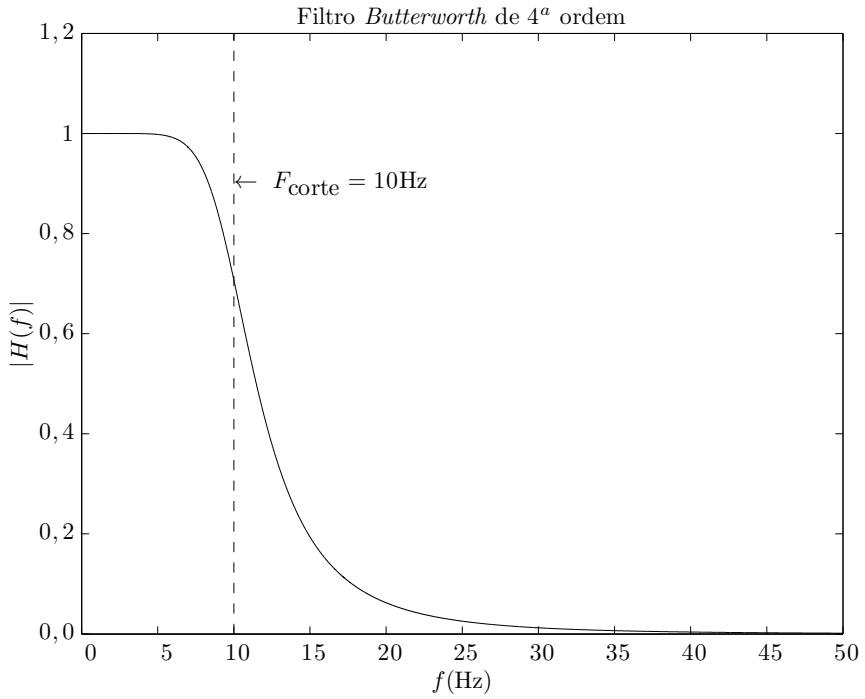


Figura D.2: Filtro *Butterworth* de 4ª ordem.

6.Ajuste das funções envoltórias

Conhecidos os pontos máximos e mínimos do intervalo selecionado e filtrado do sinal é possível ajustar funções exponenciais que representam as funções envoltórias. O procedimento numérico para ajustar funções exponenciais é apresentado no apêndice A. A figura D.3 ilustra o resultado do tratamento de sinal até este ponto. Na figura pode-se observar o sinal selecionado para análise com um número inteiro de ciclos, os pontos máximos e mínimos usados para ajuste das exponenciais e as curvas envoltórias obtidas.

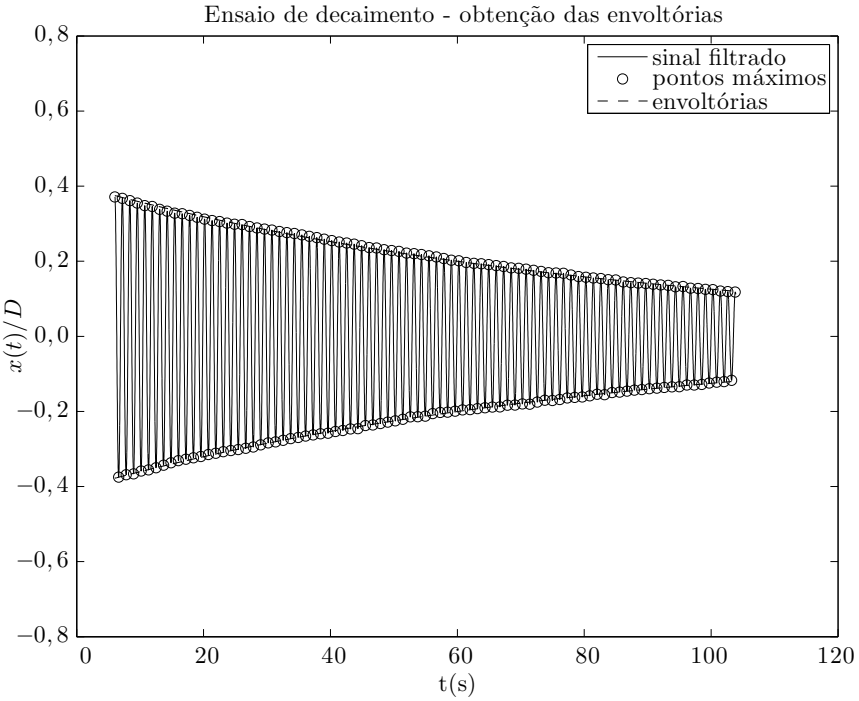


Figura D.3: Demarcação de máximos e mínimos locais do intervalo selecionado do sinal e determinação da curva envoltória.

Para cada sinal analisado obtém-se duas curvas envoltórias, uma para os pontos máximos locais (envoltória superior) e outra para os pontos mínimos locais (envoltória inferior). Segundo o modelo massa-mola-amortecedor usado como referência, as duas envoltórias deveriam ser iguais em módulo, porém observa-se que existe uma pequena diferença entre elas devido a incertezas experimentais e erros numéricos. Considerando que a função de cada envoltória seja do tipo D.2, cada uma dessas envoltórias possui seus próprios coeficientes de ajuste a e b. Denominando (a_{sup}, b_{sup}) o par de parâmetros de ajuste da envoltória superior e (a_{inf}, b_{inf}) os parâmetros da envolória inferior, definem-se os valores médios (a_m, b_m) que serão usados nas

próximas etapas da análise.

$$x_e(t) = ae^{bt} \tag{D.2}$$

$$a_m = \frac{a_{sup} + |a_{inf}|}{2} \qquad b_m = \frac{b_{sup} + b_{inf}}{2}$$

O parâmetro de ajuste a está relacionado à posição inicial do cilindro no ensaio de decaimento que, segundo o modelo apresentado na equação 5.2, equivale a $x(0)$. O parâmetro b, segundo o mesmo modelo, representa o produto entre o coeficiente de amortecimento e a frequência natural $b = -\zeta\,\omega_n$.

7.Eliminação do efeito do amortecimento

Caso a equação 5.2 seja multiplicada por $\exp(\zeta\,\omega_n\,t)$ o resultado será uma oscilação não amortecida, e não apresentará queda em sua amplitude máxima. O efeito do amortecimento ainda existe no resultado, uma vez que o sistema oscila com sua frequência amortecida $\omega_a = 2\pi f_a$, e não em sua frequência natural $\omega_n = 2\pi f_n$. O objetivo desta multiplicação é eliminar, de forma virtual, o efeito do amortecimento da amplitude do sinal, deixando apenas sua característica periódica. Multiplicando o sinal da figura D.3 $\exp(-b_m)$, obtém-se a série temporal "não amortecida" da figura D.4. Verifica-se que a queda da amplitude máxima deixa de existir e o sinal oscila com amplitude praticamente constante, confirmando a análise feita.

5.8(a).

8.Obtenção da Transformada de Fourier do sinal

Considerando que o sinal tratado até agora possui amplitude praticamente constante e um número inteiro de ciclos, pode-se determinar a transformada de Fourier do sinal. A transformada é obtida utilizando o procedimento numérico *Fast Fourier Transform* (FFT). O resultado desta transformação é o espectro de amplitude do sinal, que pode ser observado na figura D.5 e ilustra a gama de amplitudes do sinal no domínio da frequência.

9.Identificação do pico e ajuste de parábolas

Conhecido o espectro de amplitudes do sinal é possível selecionar a frequência dominante do sinal. Pode-se simplesmente determinar a frequência de pico que é o valor da frequência para a qual o espectro apresenta seu valor máximo. Considerando que o espectro de amplitude encontrado é discreto, uma vez que o sinal analisado é finito, e que sua resolução equivale a $1/T_{aq}$ sendo T_{aq} o período do sinal selecionado, é vantajoso interpolar o valor da frequência dominante.

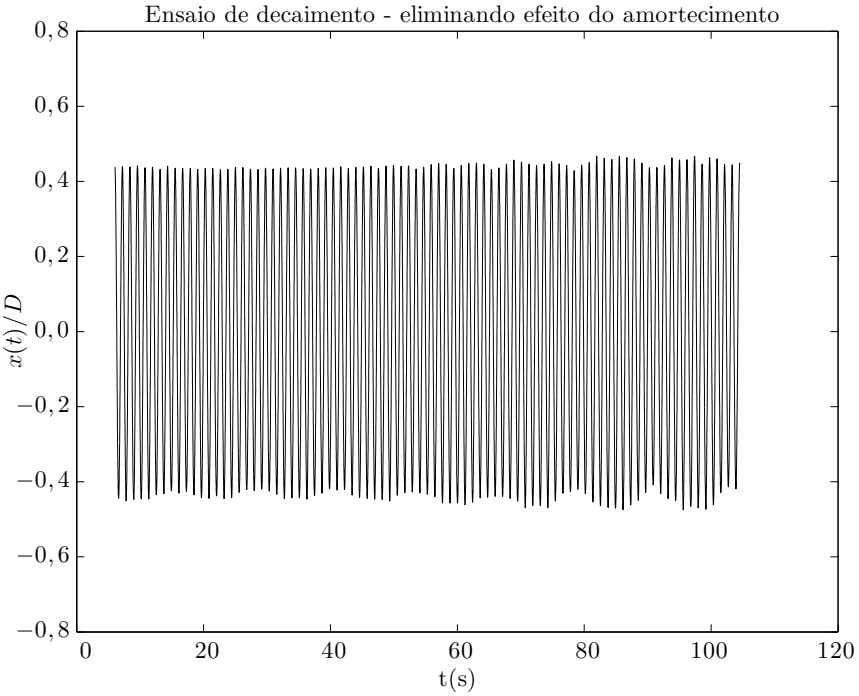


Figura D.4: Sinal do ensaio de decaimento após a retirada virtual do amortecimento.

Visando tornar a determinação da frequência dominante um procedimento mais sensível a variações, pode-se interpolar uma parábola usando os três valores mais altos do espectro de amplitude. O procedimento usado para ajustar a parábola é descrito no apêndice A. Uma vez ajustada a parábola, pode-se definir a nova frequência dominante como a abscissa de seu ponto de máximo, determinado analiticamente. O valor de frequência determinado dessa maneira é o valor da frequência amortecida do sistema f_a.

10. Determinação do coeficiente de amortecimento e da frequência natural de oscilação

A frequência dominante determinada no item anterior representa a frequência de oscilação amortecida do sistema $\omega_a = 2\pi f_a$. Segundo o modelo massa mola amortecedor, a frequência de oscilação amortecida está relacionada ao coeficiente de amortecimento ζ e à frequência natural de oscilação ω_n através da relação D.3.

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{D.3}$$

Conhecido também o valor de $b_m = -\zeta\,\omega_n$, determinado pelo ajuste das funções

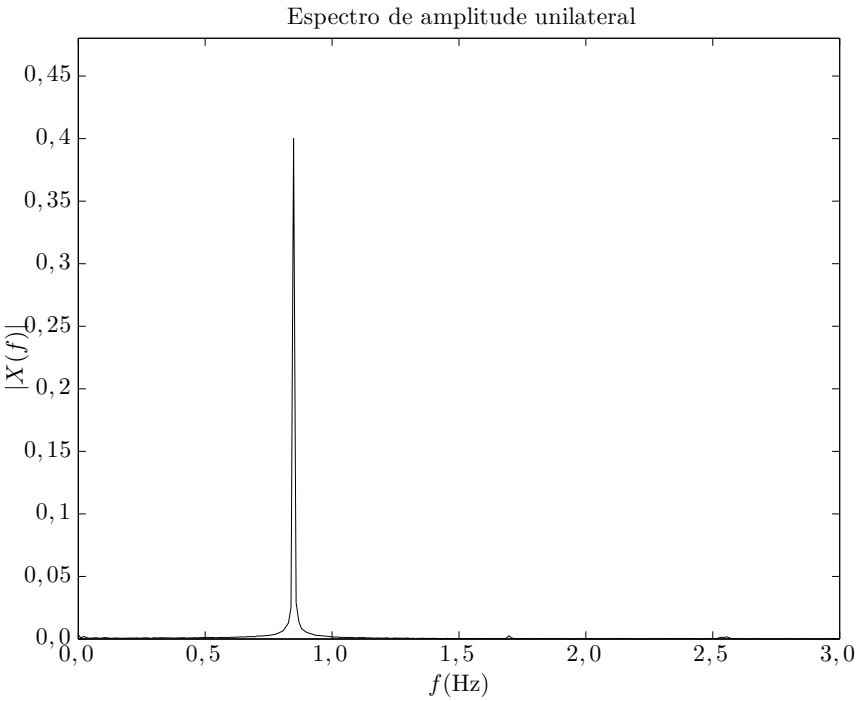


Figura D.5: Transformada de Fourier do sinal de decaimento sem amortecimento.

envoltórias, pode-se determinar os valores de ζ e ω_n pelas equações D.4 e D.5

$$\zeta = \sqrt{\frac{b_m^2}{\omega_a^2 + b_m^2}} \tag{D.4}$$

$$\omega_n = \frac{-b_m}{\zeta} \tag{D.5}$$

Todas as etapas descritas são realizadas para cada ensaio de decaimento, em cada direção. O valor final adotado para cada configuração é calculado como a média dos resultados obtidos em cada repetição.

Para os ensaios de decaimento em ar determinam-se os valores de f_n e ω_n, enquanto que para os os ensaios de decaimento em água obtém-se os valores de f_w e ω_w.

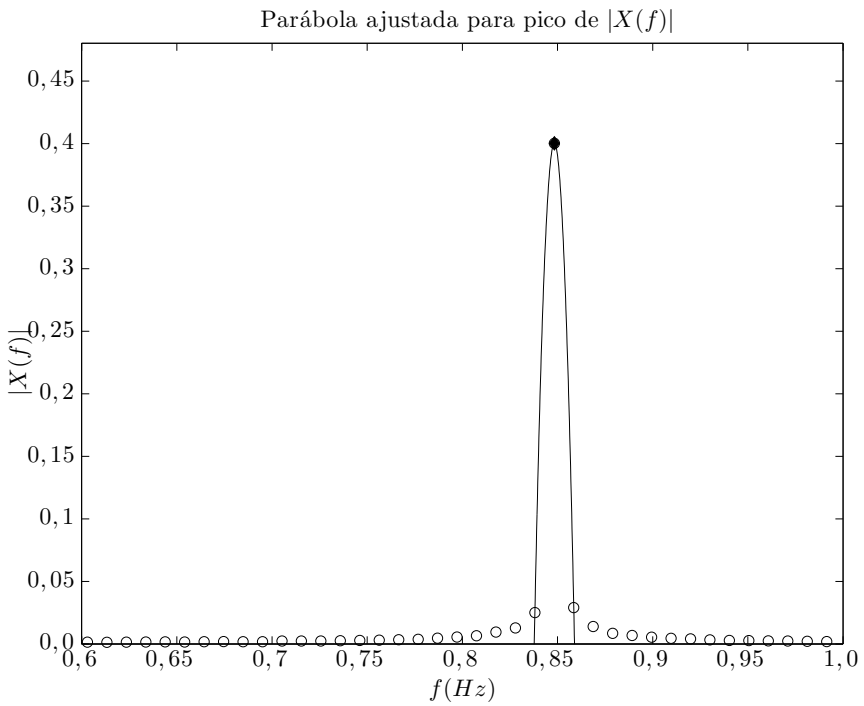


Figura D.6: Ajuste de parábola para determinação do ponto máximo do espectro de amplitude do sinal de decaimento.

D.2 Análise dos sinais obtidos nos ensaios de VIV

Realizados os ensaios de VIV com dois graus de liberdade, é preciso analisar a série temporal dos sinais aquisitados. Como descrito no capítulo 5, cada *corrida de VIV* é composta por um conjunto de diferentes *pontos experimentais*. Cada um desses pontos é registrado em um arquivo de texto e contém as seguintes informações: momento da aquisição, velocidade do escoamento U_∞, posição do alvo na direção alinhada com a corrente $x(t)$ e posição do alvo na direção transversal ao sentido da corrente $y(t)$. Cada uma dessas informações é analisada a seguir.

Determinação da velocidade do escoamento U_∞ e grandezas relacionadas: Re, V_r e St.

Para cada ponto experimental assume-se que a velocidade do escoamento é constante, uma vez que para cada ensaio a frequência de rotação da bomba não é alterada. Variações devido à oscilações de baixa frequência da bomba axial ou ruídos de medição são considerados como incertezas. Para cada ponto, a velocidade do escoamento U_∞ é considerada como o valor médio de todas as 25 mil aquisições (100Hz $\times$250s). Conhecido o valor da velocidade U_∞ três outras grandezas são calculadas: o número de Reynolds Re,

a velocidade reduzida V_r e o número de Strouhal St equivalente para um cilindro fixo.

O número de Reynolds é dado pela expressão D.6. Considerando as propriedades físicas da água para uma temperatura de 20°C tem-se $\rho/\mu \approx 1,05 \times 10^6$.

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty \, D\rho}{\mu} \tag{D.6}$$

A velocidade reduzida é calculada pela equação D.7. Vale lembrar que f_n é a frequência natural medida em ensaio de decaimento em ar para cada condição de inércia e rigidez da base elástica pendular.

$$V_r = \frac{U_\infty}{D \, f_n} \tag{D.7}$$

O número de Strouhal St é o parâmetro usado para adimensionalisar a frequência desprendimento de vórtices f_v. A definição deste parâmetro é dada pela equação D.8. A frequência de desprendimento de vórtices para um cilindro fixo é um parâmetro importante no contexto deste trabalho, pois serve como frequência de referência e indica qual seria a frequência de emissão de vórtices caso o cilindro parasse de oscilar.

$$\mathrm{St} = \frac{f_v \, D}{U_\infty} \tag{D.8}$$

Muitos trabalhos na literatura já investigara a correlação entre o número de Strouhal e o número de Reynolds para cilindros fixos. As equações D.9 e D.10, retiradas de Norberg (2003), compilam esses resultados para as faixas $325 < \mathrm{Re} < 1.600$ e $1.600 < \mathrm{Re} < 1,5 \times 10^5$. A figura D.7 ilustra o resultado dessas equações dentro do intervalo $325 < \mathrm{Re} < 22.500$, que é a faixa do número de Reynolds explorada neste trabalho. A linha tracejada na figura indica $\mathrm{St} = 0,185$.

$$\mathrm{St} = 0,214 - \frac{4,0}{\mathrm{Re}} \tag{D.9}$$

$$\mathrm{St} = 0,185 + 0,026 \times e^{-0,9\,h^{2,3}} \;\; \text{com} \;\; h = \log\left(\frac{\mathrm{Re}}{1600}\right) \tag{D.10}$$

Processamento dos sinais de amplitude de oscilação

O processamento de sinal aplicado às séries temporais da posição do cilindro $x(t)$ e $y(t)$ ao longo dos ensaios de VIV é análogo aos passos de 1 a 5, descritos na seção anterior para os ensaios de decaimento. O sinal de posição é lido do arquivo de texto, calcula-se sua média ao longo do tempo e subtrai-se esse valor médio o sinal. Em seguida, aplica-se o filtro Butterworth de 4ª ordem com frequência de corte de 10Hz.

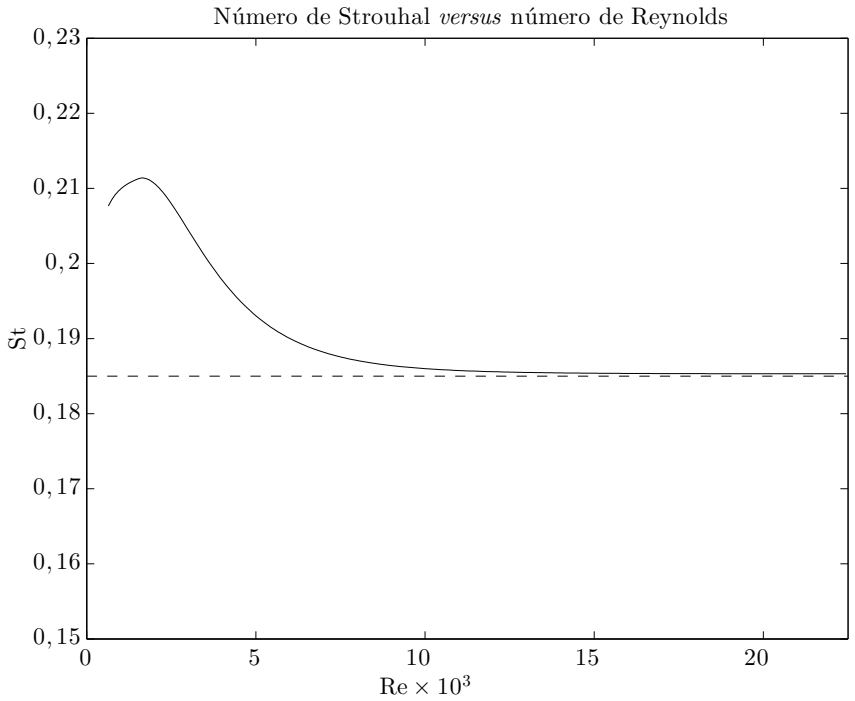


Figura D.7: Valores do número de Strouhal para cilindro liso fixo empregados neste trabalho.

A frequência dominante para cada série temporal é determinada via transformada discreta de Fourier, segundo o procedimento numérico FFT. Tal como foi feito para determinar a frequência natural amortecida f_a, no caso dos ensaios de decaimento, a frequência dominante não foi considera como a frequência com maior pico no espectro de frequência, mas sim o valor analítico do vértice da parábola ajustada para o valor máximo e seus vizinhos. Esse ajuste permite obter frequências em um domínio contínuo e não discretizado, como seria o caso dos pontos máximos obtidos diretamente pela FFT.

Uma correção importante que se faz nos sinais de amplitude, é o seu deslocamento para o meio da altura imersa do cilindro. Tanto a trena laser usada na direção alinhada com a corrente, quanto na direção transversal, estão posicionadas acima do nível da água. Essas trenas medem o deslocamento do alvo branco usado em cada direção. Assumindo que a base elástica pendular se comporta como um corpo rígido que roda ao redor do seu ponto de articulação, no teto do laboratório, a amplitude de oscilação cresce ao se afastar do ponto de articulação. Todas as análises deste trabalho são feitas considerando o deslocamento médio do comprimento imerso. A equação D.11, já apresentada no capítulo 4, faz a correção do deslocamento. Nessa equação, y_a é a série temporal do posição do alvo montado na direção transversal ao escoamento, L_c é a posição do centro da coluna de

água e L_y é a posição do alvo. As distâncias L_c e L_y são medidas em relação ao ponto de articulação. O deslocamento na direção alinhada com a corrente $x(t)$ também é corrigido, usando-se equação análoga a D.11, porém usando x_a e L_x.

$$y = y_a \frac{L_c}{L_y} \tag{D.11}$$

Discussão sobre o modo de se definir as amplitudes $\hat{y}/D$ e $\hat{x}/D$

Existem diversas maneiras de se definir a amplitude de um sinal oscilatório, tais como o valor máximo ao longo de uma série temporal, a média de um certo número de valores máximos e o desvio padrão do sinal, também chamado de amplitude RMS, do termo inglês *Root Mean Square*. Caso os três critérios fossem aplicados a sinais perfeitamente harmônicos e monocromáticos, todos apresentariam a mesma resposta, porém este não é o caso. Sinais reais estão sujeitos à incertezas de medição e ruído. Além disso, existem as próprias variações do fenômeno, que não se comporta como uma função trigonométrica. Em face disso, é preciso adotar um parâmetro de amplitudes que represente de maneira significativa informação do sinal.

A definição do valor máximo y_{max} é útil quando se deseja projetar em favor da segurança e, por isso, assume-se que todo o sinal responde como se em seu "pior" cenário. Essa medida, porém, possui pouco valor estatístico, pois diversos fatores podem afetar essa única medição. Uma alternativa para tornar essa medida relevante estatisticamente é adotar então a média de um certo número de valores máximos. Dentro da área de VIV, é comum adotar o valor de 10% dos maiores picos. Essa escolha é arbitrária, porém segue o padrão de outros pesquisadores tais como Williamson e Govardhan (2004), Korkischko e Meneghini (2010) dentre outros.

A terceira alternativa citada é considerar todo o sinal. Seja um sinal de oscilação harmônico no tempo com amplitude $\hat{y_h}$, dado pela equação D.12. Define-se como amplitude RMS $\hat{y}_{RMS}$ o resultado da integral expressa na equação D.13, aonde T_{aq} é o período de aquisição do sinal. Considerando que esse período T_{aq} englobe um número inteiro de ciclos, o resultado da integral do seno ao quadrado é expresso pela relação D.14. Verifica-se, portanto, que a amplitude harmônica $\hat{y_h}$ pode ser determinada pelo RMS do sinal de amplitude multiplicado por $\sqrt{2}$. Ainda que um sinal de amplitude de oscilação não seja perfeitamente harmônico, a amplitude harmônica equivalente pode ser determinada usando-se a relação $\hat{y_h} = \sqrt{2}\, y_{\text{RMS}}$.

$$y(t) = \hat{y}_h \sin(\omega t) \tag{D.12}$$

$$\hat{y}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T_{aq}} \int_0^T (\hat{y} \sin(\omega t))^2 \, dt} \tag{D.13}$$

$$\hat{y}_{\text{RMS}} = \hat{y}_h \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \hat{y}_h = \sqrt{2}\, y_{\text{RMS}} \tag{D.14}$$

A figura D.8 apresenta uma comparação entre as três maneiras descritas para se definir a amplitude de oscilação transversal $\hat{y}/D$. O objetivo desta figura é apenas comparar as três métricas discutidas e não analisar a resposta do fenômeno de VIV para este caso. Por esse motivo, informações como momento de inércia, conjunto de molas ou ainda diâmetro do cilindro foram suprimidas.

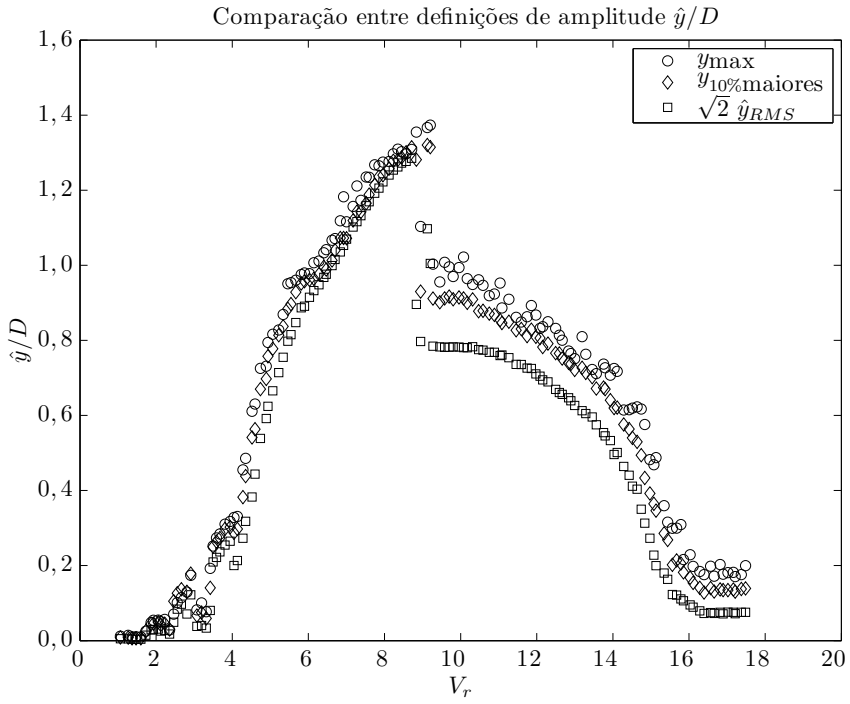


Figura D.8: Comparação entre definições de amplitude de oscilação.

Nota-se que até $V_r \approx 9$ as três definições de amplitude apresentam aproximadamente o mesmo resultado. Isso significa que o sinal de amplitude se aproxima da condição harmônica monocromática, tal como afirmado anteriormente. Essa característica se perde para $V_r > 9$, no ramo inferior. Para esse ramo nota-se que existe uma ligeira diferença entre a amplitude máxima y_{max} e a amplitude baseada nos 10% maiores picos. Uma diferença ainda maior se observa para a amplitude harmônica, que apresenta o menor valor das três definições. Apesar da amplitude harmônica possuir a menor amplitude, ela

possui a curva de resposta mais suave.

A diferença entre as definições pode ser entendida observando-se o sinal temporal da posição $y(t)$ para três valores de velocidade reduzida V_r. A figura D.9 apresenta essa comparação para todo o sinal aquisitado. A coluna da esquerda dessa figura ilustra toda a série temporal registrada e a coluna da direita foca em uma região com apenas 20s de duração e facilita a visualização dos sinais. De fato, observa-se que para $V_r < 9$ a amplitude de oscilação é mais regular, porém para $V_r = 12,1$ picos de diferentes alturas se manifestam. Essa variação de amplitude não se deve à incertezas de medição, mas são características do fenômeno.

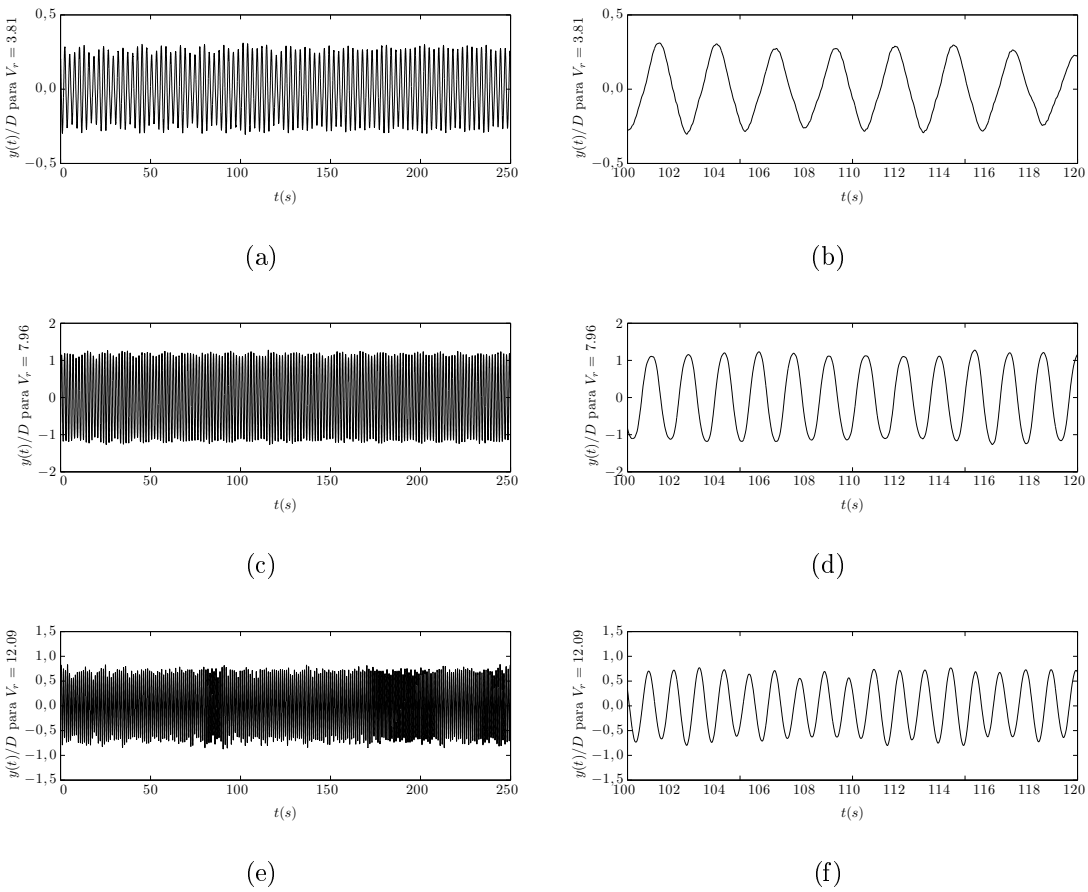


Figura D.9: Comparação entre as séries temporais de amplitude na direção transversal ao escoamento. (a) e (b) $V_r = 3,8$ (c) e (d) $V_r = 8,0$ (e) e (f) $V_r = 12,1$.

Ao longo desta tese os valores de amplitude de oscilação serão apresentados como a média dos 10% maiores picos e também a amplitude harmônica. Como observado na figura D.8, a divergência entre essas duas métricas indica que o sinal se afastou da referência harmônica monocromática. Quando os dois métodos forem usados, isso será

indicado na curva de resposta e as duas respostas diferenciadas. Caso nenhuma não haja nenhuma discriminação a esse respeito, o padrão usado é a média dos 10% maiores picos.

Desenvolvimento dos mapas de frequência

Com o objetivo de avaliar de maneira mais completa a resposta em frequência para o fenômeno de VIV, alguns mapas de frequência foram apresentados no capítulo 7. Nesses mapas, parte do espectro de frequência normalizada era apresentado e permitiu observar a ocorrência de frequências além da dominante. Neste tópico, as etapas de construção dos mapas de frequência são apresentadas.

Em cada ponto experimental, a resposta para uma determinada velocidade reduzida é avaliada. A partir das séries temporais de deslocamento em cada direção, é possível encontrar a transformada de Fourier do sinal. Considerando, por exemplo, a direção transversal ao escoamento, seu deslocamento é medido pela série temporal $y(t)$ e o módulo de sua transformada de Fourier é dada por $|Y(f)|$. Para cada valor de velocidade reduzida pode-se apresentar o valor de $|Y(f)|$ para uma faixa de frequências f_y/f_n, tal como apresentado na imagem D.10(a). Nesta imagem, apenas alguns valores de velocidade reduzida foram selecionados para facilitar a compreensão do processo. Ao invés de apresentar os resultados como um gráfico tridimensional, pode-se projetar a altura dos picos de $|Y(f)|$ no plano e criar um mapa de cores, tal como apresentado na figura D.10(b). Quanto mais escuro for um ponto, maior o valor do módulo de $|Y(f)|$.

Os resultados apresentados nas imagens D.10(a) e D.10(b) consideram os valores absolutos de $|Y(f)|$. Essa escolha distorce a escala de valores do resultado e só permite que resultados com grandes amplitudes de oscilação, e consequentemente grandes $|Y(f)|$ sejam vistos. Fora das regiões com maior amplitude, os valores de $|Y(f)|$ são menores e praticamente somem do mapa de frequências.

Visando estudar toda a faixa de velocidade reduzida observada experimentalmente, é preciso eliminar o efeito de diferentes regiões da curva apresentarem diferentes amplitudes. Para isso, os resultados do espectro de frequência foram normalizados em função do valor máximo para cada velocidade reduzida. As figuras D.10(c) e D.10(d) ilustram resultados análogos aos anteriores, porém agora para o espectro normalizado $|Y(f)|/|Y(f)_{max}|$. Nota-se que com esta normalização, todas as faixas de V_r apresentam regiões dominantes.

Sobre a interpretação dos mapas de frequência, estes permitem observar a existência de mais de uma frequência importante para o problema. Nas regiões com faixas

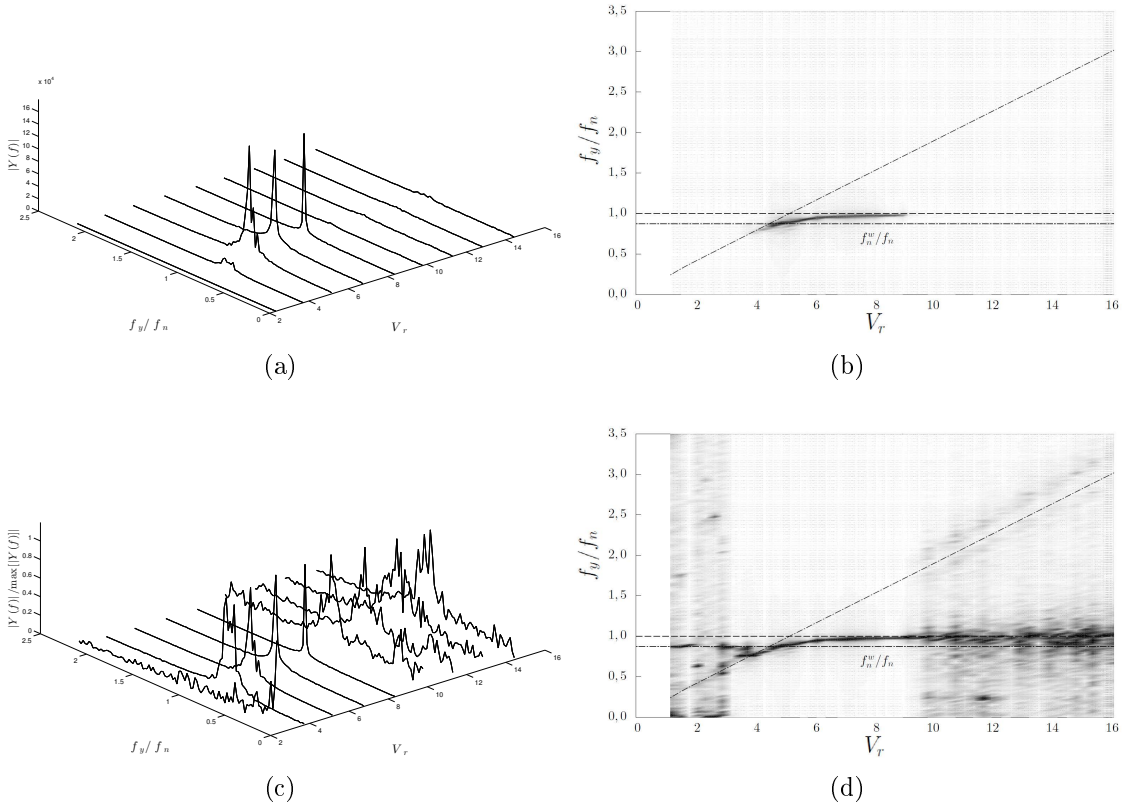


Figura D.10: Etapas para elaboração do mapa de frequências. (a) e (b) resultados não normalizados. (c) e (d) resultados normalizados.

verticais escuras e que se parecem com borrões, o fenômeno não apresenta frequência dominante e o sistema como um todo oscila com banda larga.

APÊNDICE E – ANÁLISE DAS INCERTEZAS EXPERIMENTAIS

Ao longo deste trabalho diversas grandezas foram medidas e calculadas. Por se tratar de um trabalho experimental, todos os valores possuem incertezas, desde os medidos com um paquímetro no laboratório até os determinados em procedimentos numéricos mais avançados. Neste apêndice, o procedimento empregado na determinação de todas as incertezas é descrito e segue três linhas distintas. A primeira trata da incertezas diretas de medição, como a incerteza na determinação do diâmetro do cilindro de ensaio D, por exemplo. A segunda linha visa analisar a incerteza de grandezas calculadas, tais como a incerteza relacionada à velocidade reduzida V_r em cada ensaio. Nesta segunda linha, emprega-se a propagação de incertezas analítica. Por fim, a terceira linha utiliza uma ferramenta computacional baseada no método de Monte Carlo para estimar incertezas relacionadas às grandezas obtidas pelo Método dos Mínimos Quadrados.

E.1 Princípios básicos

Antes de descrever as incertezas associadas às grandezas deste trabalho, é preciso definir o vocabulário usado. Segundo o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia INMETRO (2007), *incerteza de medição* é o "parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentalmente atribuídos a um mensurando". O *desvio padrão experimental* caracteriza a "dispersão dos resultados de N medições de um mesmo mensurando" e *resolução* é a "menor diferença entre indicações de um dispositivo mostrador que pode ser significativamente percebida". Em outras palavras, o desvio padrão experimental representa quanto um determinado mensurando varia em uma série de medições. Dependendo da resolução do instrumento de medição o desvio padrão pode ser nulo, uma vez que todas as medidas são iguais. A

incerteza de medição, por outro lado, não pode ser nula, pois está sempre associada a erros de medição e até a resolução de um equipamento. O desvio padrão e a incerteza de medição podem ser relacionados na determinação dos intervalos de confiança dos valores medidos. Para destacar a diferença entre esses conceitos, a série abaixo representa dez medições feitas com um paquímetro para o diâmetro externo do cilindro de teste.

$$D = \{32,20; 32,05; 32,15; 32,15; 32,25; 32,05; 32,10; 32,15; 32,00; 32,00\}\text{mm}$$

Verifica-se prontamente na série dada que todos os números são múltiplos de $0,05$mm. Este valor representa a resolução do equipamento de medição. Com a série de dados acima calcula-se a média e o desvio padrão experimental através das relações E.1 e E.2.

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^{N} \frac{D_i}{N} = 32,11\text{mm} \tag{E.1}$$

$$s_D = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{N-1}} = 0,084\text{mm} \tag{E.2}$$

Conhecido o desvio padrão experimental, calcula-se o intervalo de confiança do mensurando. Esse intervalo está relacionado a um tipo de distribuição e ao nível de confiança escolhido. Neste trabalho a distribuição adotada é a distribuição normal, também conhecida como distribuição Gaussiana, e o nível de confiança selecionado é de 95%. Hines et al. (2006) apresenta como determinar o intervalo de confiança de um valor a partir de sua média e desvio padrão experimental. Foge ao escopo deste apêndice apresentar todas as etapas desse procedimento. A expressão E.3 apresenta o intervalo com 95% de confiança para o diâmetro D e define o valor da incerteza σ_D..

$$\overline{D} - 1,96\, s_D \leq D \leq \overline{D} + \underbrace{1,96\, s_D}_{\sigma_D} \;\rightarrow\; D = 32,11 \pm 0,17\text{mm} \tag{E.3}$$

Cabe aqui uma observação referente aos símbolos empregados. É comum empregar a letra grega σ para representar o desvio padrão populacional, ou seja, que considera todos os elementos de um conjunto ou população. Como este trabalho considera apenas amostras de um mensurando, a sigla usada para o desvio padrão experimental é s. A letra grega σ passa a representar a incerteza associada a cada mensurando. Para os casos em que a incerteza é definida a partir de N medições tem-se que $\sigma = 1,96\, s$. Para outros casos a incerteza é definida como resolução do equipamento ou processo de análise utilizado em sua determinação.

E.2 Incertezas de medição

Diversas grandezas foram medidas diretamente neste trabalho, sendo elas o diâmetro D do cilindro de teste, a altura da coluna de água h_{cn} em cada ensaio, a massa e posição de todos os elementos da base elástica, incluindo também os lastros de chumbo e aço.

O equipamento usado na medição de massas é uma balança Fiziola com fundo de escala 6kg e resolução de $0,001$kg. Este valor é adotado como a incerteza relacionada às massas medidas ao longo do trabalho ($\sigma_m = 0,001$kg).

O diâmetro do cilindro de teste foi medido com um paquímetro Mitutoyo com resolução $0,05$mm. Apesar dessa resolução, o diâmetro do cilindro possui incerteza relacionada ao erro de circularidade do tubo usado em sua confecção. O diâmetro do cilindro de teste foi medido 10 vezes e seu desvio padrão equivale a $s_D = 0,06$mm. A incerteza, neste caso, é determinada como um múltiplo do desvio padrão dos valores medidos, tal como definido na seção E.1 e equivale a $\sigma_D = 0,09$mm.

A altura da coluna de água é medida com uma fita métrica colada na parede externa do canal de água. A principal fonte de erro com relação a medição deste valor é a presença do menisco que se forma na parede do canal. A incerteza relacionada a esta medição foi adotada como $\sigma_{h_{cn}} = 3$mm. O valor escolhido é conservador no que se trata ao tamanho do menisco, mas leva em consideração que os ensaios deste trabalho foram realizados em dias distintos e que o nível do canal possa ter variado ligeiramente de um dia para o outro devido a evaporação. Antes de todos os ensaios realizados no canal, o valor de h_{cn} foi medido e caso o valor de h_{cn} estivesse fora da faixa $697\text{mm} \leq h_{cn} \leq 703\text{mm}$ seu valor era corrigido. A incerteza no comprimento imerso do cilindro também foi adotada como $\sigma_{L_w} = 3$mm.

A incerteza relacionada às frequências naturais não é oriunda de processamento numérico, mas sim da comparação entre os valores de diferentes direções. As frequências naturais, tanto em ar quanto em água, foram determinadas em ensaios de decaimento. Para cada direção o ensaio foi realizado três vezes e o valor médio entre eles foi adotado como a frequência natural dessa direção. A incerteza relacionada a f_n^x e a f_n^y é baixa, da ordem de $\sigma f = 0,001Hz$.

$$f_n^x = \frac{f_1^x + f_2^x + f_3^x}{3} \qquad\qquad f_n^y = \frac{f_1^y + f_2^y + f_3^y}{3}$$

Nos casos em que se assumiu condição simétrica de rigidez, ou seja, o mesmo

Tabela E.1: Incerteza da determinação das frequências naturais

N_{pb}	f_n^x	f_n^y	f_n	$(\sigma f_n)/f_n(\%)$
0	$0,818$	$0,807$	$0,813$	$0,957\%$
1	$0,697$	$0,690$	$0,694$	$0,714\%$
2	$0,647$	$0,635$	$0,641$	$1,324\%$
3	$0,583$	$0,576$	$0,580$	$0,854\%$
4	$0,549$	$0,543$	$0,546$	$0,777\%$
5	$0,523$	$0,518$	$0,521$	$0,679\%$
6	$0,503$	$0,499$	$0,501$	$0,565\%$

conjunto de molas era usado nas duas direções, os valores de f_n^x e de f_n^y eram próximos, porém não iguais. O valor característico adotado nessas situações era a média entre as frequências naturais de cada direção.

$$f_n = \frac{f_n^y + f_n^x}{2}$$

A incerteza relacionada aos valores de f_n e f_w está, principalmente, relacionada à hipótese de que o valor médio representa as duas condições. A tabela E.1 apresenta os resultados para sete diferentes condições de momento de inércia, representadas pelos diferentes valores do número de lastros usados N_{pb}. Todos os resultados dessa tabela foram obtidos para o cilindro $D = 32$mm e o conjunto de molas suaves (S). A tabela apresenta os valores médios para cada direção f_n^x e f_n^y, além do valor médio f_n e dos desvio percentual $\sigma f_n/f_n(\%)$. Verifica-se que para os dados da tabela, o maior desvio ocorreu para $N_{pb} = 2$ e representa variação de apenas $1,32\%$ do valor médio. A tabela E.1 apresenta os resultados de apenas um conjunto de ensaios. O valor médio do desvio para todos os casos usados neste trabalho foi de $\sigma f_n/f_n = 1,44\%$. Este valor foi adotado como incerteza relacionada à medição das frequências naturais em ar. O valor da incerteza para as frequências naturais em água foi determinado da mesma maneira e vale $\sigma f_w/f_w = 1,72\%$.

Ainda tratando da análise de incerteza de frequências, a incerteza associada a determinação das frequências dominantes dos ensaios de VIV é adotada como o inverso do período de aquisição desses ensaios. Para todos esses experimentos $T_{aq} = 250$s, logo $\sigma_f = 0,004$Hz.

As incertezas relacionadas ao posicionamento do cilindro móvel e a determinação da velocidade de escoamento do canal U_∞ exigiram procedimentos experimentais mais elaborados do que a mera medição dessas grandezas. Nos dois casos, a incerteza foi determinada a partir do desvio padrão da série temporal de uma medição. As seções E.2.1 e E.2.2 descrevem a determinação dessas incertezas.

E.2.1 Analise da incerteza de medição da velocidade de escoamento

Dentro do contexto deste trabalho, é importante conhecer em detalhe a curva de resposta da velocidade do escoamento do canal U_∞ em função da frequência de rotação N_{cn} imposta na bomba axial. Para isso, uma série de ensaios foram conduzidos visando determinar U_∞ e σ_{U_∞} em função de N_{cn}. Em cada ensaio, um valor de rotação da bomba foi imposto e a velocidade U_∞ medida 300s. No total, 31 ensaios foram realizados variando a frequência de rotação da bomba ao longo de toda a faixa que será usada neste trabalho $20 \leq N_{cn} \leq 360$. A figura E.1(a) apresenta a série temporal da velocidade do canal para $N_{ac} = 50$ rotações por minuto (rpm). A série temporal ilustrada nessa figura não possui nenhum tipo de tratamento de sinal.

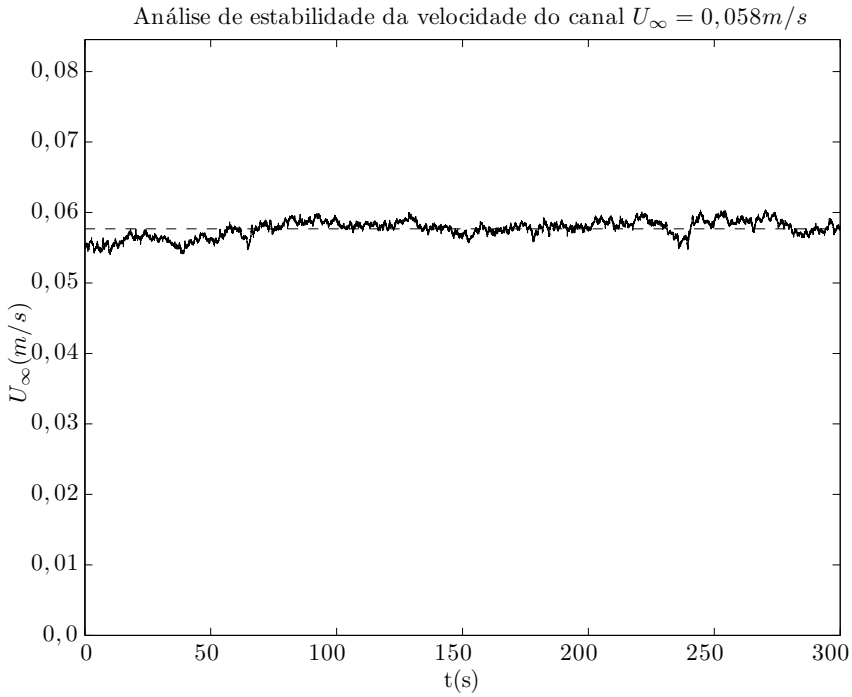
A velocidade de escoamento medida oscila em torno de um valor médio, representado pela linha horizontal tracejada. O valor da velocidade U_∞ adotado para cada frequência de rotação da bomba N_{pb} equivale a esse valor médio. A incerteza da velocidade σ_{U_∞} é definida a partir do desvio padrão experimental s_{U_∞} de todos os pontos desse sinal e equivale $1,96\, s_{U_\infty}$. As figuras E.1(b) e E.2(a) apresentam as curvas de $U_\infty \times N_{nc}$ e $\sigma_{U_\infty} \times N_{cn}$.

Na figura E.1(b) a linha tracejada representa a reta de melhor ajuste obtida pelo Método dos Mínimos Quadrados (apêndice A). A equação E.4 relaciona a velocidade do canal U_∞ com a frequência de rotação do motor N_{cn}. Nessa equação N_{cn} é dado em rotações por minuto (rpm) e a velocidade U_∞ é dada em metros por segundo (m/s).

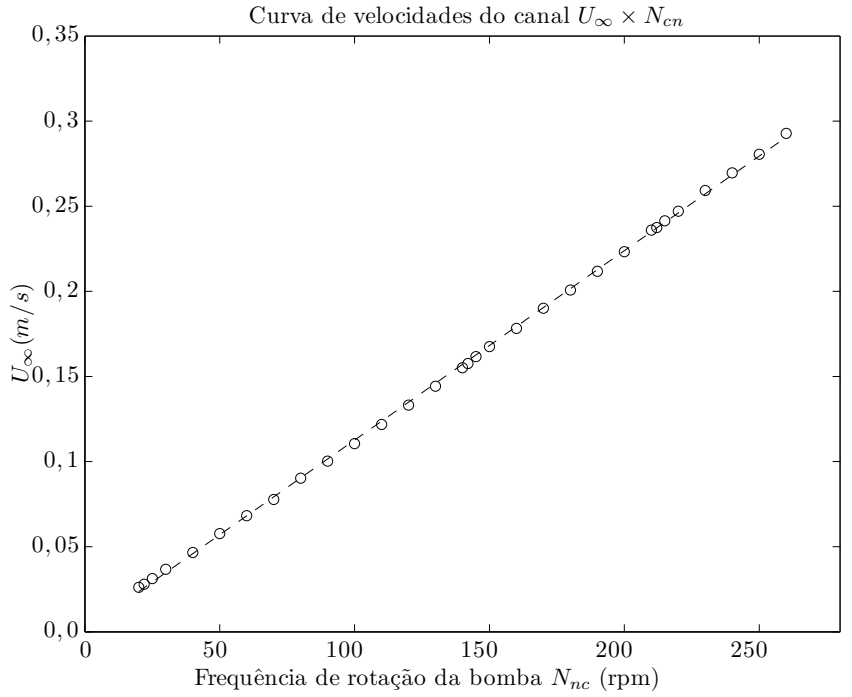
$$U_\infty = 1,11 \cdot 10^{-3}\, N_{nc} + 1,42 \cdot 10^{-3} \tag{E.4}$$

Percebe-se que, conforme N_{cn} cresce, o desvio padrão σ_{U_∞} também cresce, porém de maneira menos regular que U_∞. A figura E.2(b) apresenta o desvio padrão relativo da velocidade do canal $\sigma_{U_\infty}/U_\infty$ para cada frequência de rotação da bomba. Para baixos valores de N_{cn}, a incerteza relativa é da ordem de $\sigma_{U_\infty} \approx 3,0\%$, enquanto que, para valores mais elevados de N_{cn}, ela cai para $\sigma_{U_\infty} \approx 1,0\%$.

Além de determinar a velocidade média e sua incerteza para cada valor de N_{cn}, este estudo permitiu determinar quanto tempo é necessário para que a velocidade do canal de água estabilize após uma variação de N_{cn}. Para determinar esse tempo de resposta a frequência de rotação foi alterada e a resposta do canal aquisitada por 300 segundos. A figura E.3 apresenta esse tipo de resposta para a variação de $N_{cn} = 20$ para 25, 40 e

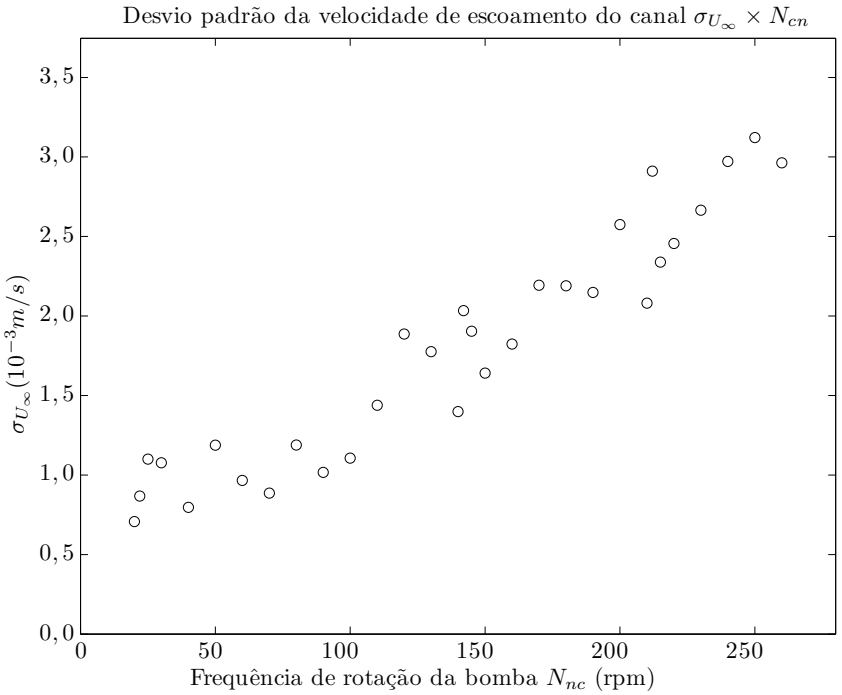


(a)

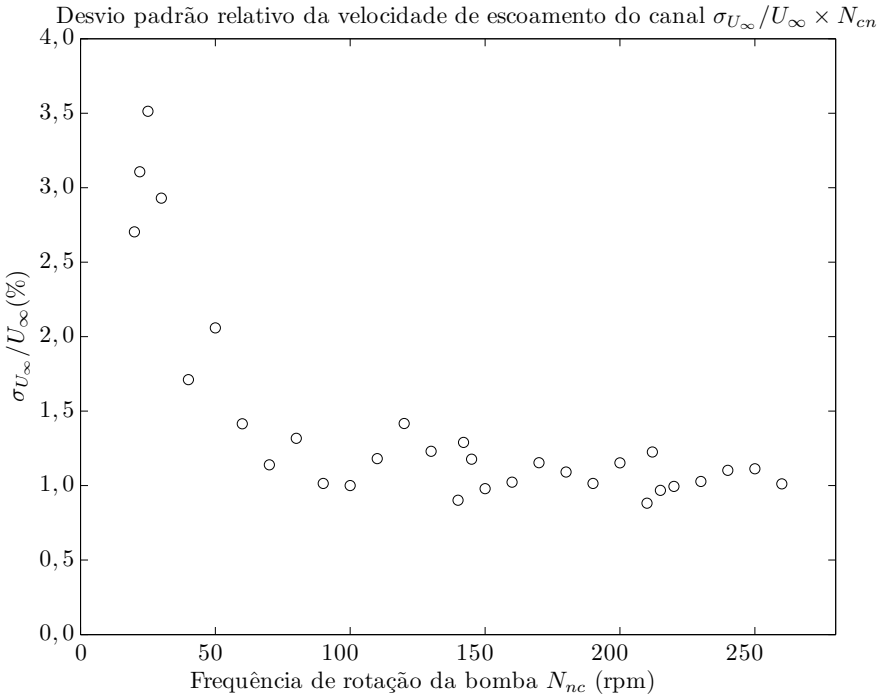


(b)

Figura E.1: (a) Série temporal da velocidade do canal U_∞ para frequência de rotação da bomba $N_{nc} = 50$rpm. (b) Curva de velocidade média do escoamento para cada frequência de rotação da bomba $U_\infty \times N_{nc}$.



(a)



(b)

Figura E.2: (a) Curva de desvio padrão da velocidade do escoamento para cada frequência de rotação da bomba $\sigma_{U_\infty} \times N_{nc}$. (b) Curva de desvio padrão relativo da velocidade do escoamento para cada frequência de rotação da bomba $\sigma_{U_\infty}/U_\infty \times N_{nc}$.

50rpm. Percebe-se que aproximadamente 100s após a variação de N_{cn}, a velocidade do escoamento estabilizava em um novo patamar. Essa observação foi usada na definição do tempo de espera entre os ensaios de VIV. Como descrito no capítulo 5, o tempo de espera entre os ensaios foi adotado como 150 segundos.

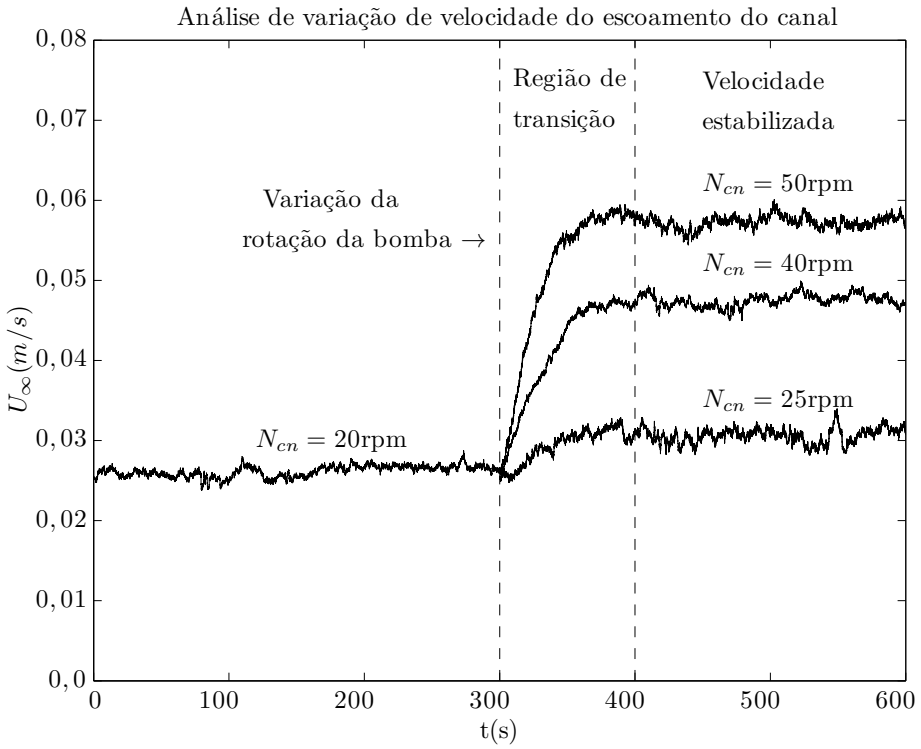


Figura E.3: Análise do tempo de estabilização da velocidade do canal.

E.2.2 Determinação da incerteza de medição das trenas laser

Como qualquer equipamento eletrônico, as trenas *laser* estão sujeitas a ruídos e, como qualquer equipamento de medição, elas estão sujeitas à incertezas experimentais. As trenas laser foram calibradas no laboratório usando um traçador de altura. O resultado da figura E.4 demonstra a linearidade da resposta das trenas *laser*.

Ainda que o alvo não se mova, o sinal da trena *laser* apresenta pequenas oscilações devido ao ruído. Quatro sinais distintos foram aquisitados para a trena laser apontada para um alvo fixo, visando determinar sua incerteza de medição. A incerteza, neste caso, foi considerada como um múltiplo do desvio padrão dos sinais aquisitados e equivale a $\sigma_{\text{trena}} = 0,23$mm. Tomando como referência o diâmetro do cilindro $D = 32$mm, a relação $\sigma_{\text{trena}}/D = 0,73\%$.

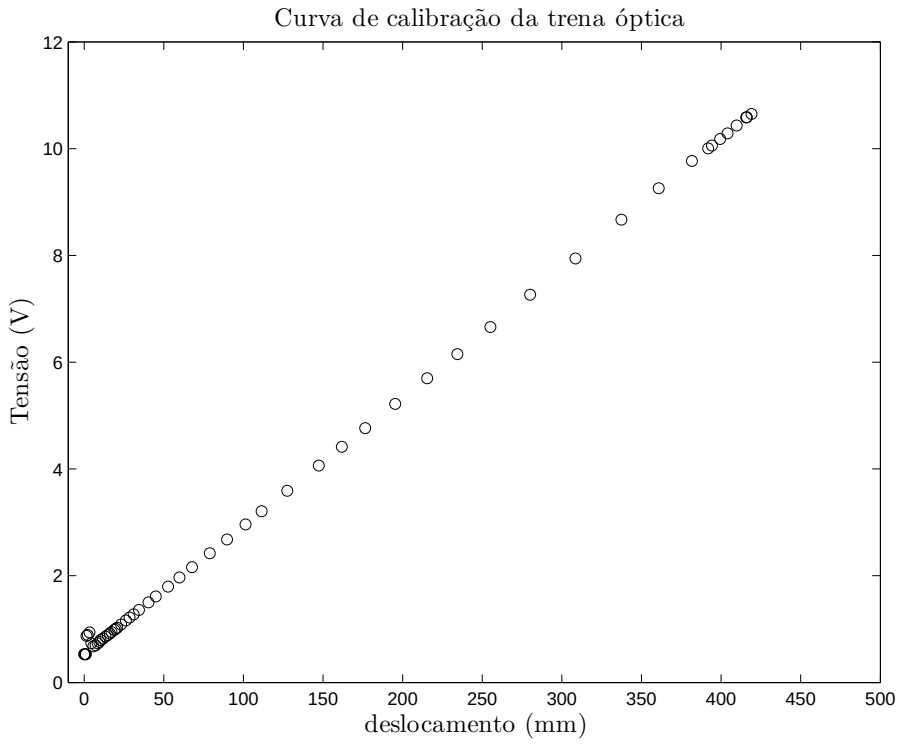


Figura E.4: Resposta da calibração demonstrando a linearidade na resposta do equipamento de medição.

E.3 Propagação de incertezas

Uma vez medidas diversas grandezas e definida a incerteza relacionada a cada uma, é preciso adotar um procedimento de propagação de erros para encontrar a incerteza de grandezas calculadas. A tabela E.2 apresenta as fórmulas utilizadas na determinação das incertezas em função do tipo de expressão analítica de cada grandeza calculada.

A tabela E.2 permite calcular a incerteza relacionada à massa de fluido deslocada

Tabela E.2: Fórmulas para propagação de incertezas experimentais

Expressão	incerteza
$w = x \pm y$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$w = axy$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = p^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + q^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$

m_d, por exemplo. A massa de água deslocada pelo cilindro é dada pela expressão 3.4.

$$m_d = \frac{\pi\, D^2\, L_w\, \rho}{4} \quad \rightarrow \quad \sigma_{m_d} = m_d \sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{L_w}}{L_w}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}$$

A densidade da água não foi medida pelo autor deste trabalho. O valor adotado para ρ foi extraído da tabela de densidade da água obtida por Snelling (2011) para a temperatura de 20^oC e a incerteza foi determinada como a diferença entre a densidade medida para as temperaturas de 15^oC, 20^oC e 25^oC. Os valores adotados, segundo esse critério, são $\rho = 998,203\text{kg/m}^3$ e $\sigma_\rho = 1,030\text{kg/m}^3$.

$$m_d = \frac{\pi\, D^2\, L_w\, \rho}{4} = 0,562\text{kg}$$

$$\sigma_{m_d} = 0,562\sqrt{4\left(\frac{0,00017}{0,032}\right)^2 + \left(\frac{0,003}{0,7}\right)^2 + \left(\frac{1,030}{998,203}\right)^2} = 6,5 \times 10^{-3}\text{kg}$$

E.4 Método de Monte Carlo para propagação de incertezas experimentais

Diversas técnicas numéricas empregam o nome de Monte Carlo, todas elas relacionadas com o emprego de variáveis aleatórias. Ao longo deste trabalho uma variação dessas técnicas de Monte Carlo foi usada para analisar a propagação de incertezas experimentais em resultados obtidos pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

O método consiste em repetir o MMQ N_{MC} vezes, porém em cada iteração considerar valores de entrada distintos. Cada iteração, o MMQ recebe uma série de entradas (x_i, y_i) e resolve um sistema linear que fornece o valor dos parâmetros a, b e c que melhor ajustam a função de interesse. No método de Monte Carlo, para cada iteração os valores x_i e y_i recebem incrementos aleatórios o que altera o valor dos parâmetros de ajuste obtidos. O valor de cada incremento depende do desvio padrão de cada parâmetro e é calculado pela expressão E.5, sendo σ_x a incerteza relacionada a grandeza x e Θ um número aleatório.

Cabe observar que, como discutido nas seções anteriores, a incerteza experimental de algumas grandezas foi determinada segundo critérios que não consideram o desvio padrão dessa grandeza. Visando manter a analogia com os intervalos de confiança de 95%, o desvio padrão assumido para o Método de Monte Carlo, para esses casos, equivale a $s = \sigma/1,96$.

O número aleatório Θ foi fornecido pela função *randn* do programa MatLab e segue a distribuição Gaussiana de probabilidade. O número de iterações empregadas no Método Monte Carlo para cada análise de incerteza é $N_{MC} = 10^5$.

$$\Delta x_i = \frac{\sigma_x}{1,96}\,\Theta \tag{E.5}$$

Após cada iteração, obtém-se um valor distinto para os parâmetros de ajuste. Realizadas as N_{MC} iterações tem-se uma amostra estatisticamente confiável desses parâmetros. Cada amostra pode ser então analisada estatisticamente, definindo sua média e seu desvio padrão.

Para facilitar o entendimento do método, um exemplo muito simples é apresentado. Seja c um valor obtido pelo produto de outros dois valores a e b. Adotando que os valores médios $\overline{a} = 3$, $\overline{b} = 2$ e as incertezas associadas $\sigma_a = 0,2$ e $\sigma_b = 0,1$ é simples calcular $\overline{c}$ e σ_c.

$$\overline{c} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sigma_c = 6\sqrt{\left(\frac{0,2}{3}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{2}\right)^2} = 0,5$$

A seguinte sequência indica o procedimento empregado pelo método de Monte Carlo para determinar esses dois valores. Por uma questão didática, o exemplo emprega $N_{MC} = 5$.

Primeira etapa: determinação das variáveis de entrada

$$a = \overline{a} + \Theta\,\sigma_a = \begin{pmatrix} 3,1494 \\ 3,0695 \\ 2,9699 \\ 3,1975 \\ 3,0844 \end{pmatrix} \qquad b = \overline{b} + \Theta\,\sigma_b = \begin{pmatrix} 1,9774 \\ 1,9852 \\ 2,0433 \\ 1,9892 \\ 2,0433 \end{pmatrix}$$

Segunda etapa: determinação das variáveis de saída

$$c = ab = \begin{pmatrix} 6,2278 \\ 6,0936 \\ 6,0686 \\ 6,3603 \\ 6,3023 \end{pmatrix}$$

Terceira etapa: análise estatística das variáveis de saída

$$\overline{c} = 6,2105$$

$$s_c = 0,1274 \rightarrow \sigma_c = 0,2498$$

O valor de $\overline{c}$ e σ_c não coincidiu com o valor esperado, pois o número de iterações consideradas no exemplo é muito baixo. Elevando o número de iterações para as mesmas $N_{MC} = 10^5$, encontram-se os valores $\overline{c} = 6,0007$ e $\sigma_c = 0,4992$, muito próximos aos resultados obtidos analiticamente.

APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DO CILINDRO DE TESTE EM IMAGENS DE PIV

Este apêndice apresenta o procedimento computacional desenvolvido para a determinação da posição do cilindro de ensaio dentro da região visualizada com a técnica de velocimetria por imagem de partículas (PIV).

A figura F.1 apresenta uma fotografia usada nessa técnica. Os pontos brancos espalhados pela imagem são os marcadores de poliamida usados para registrar o movimento do fluido. O círculo escuro é a extremidade inferior do cilindro de teste e a meia lua mais clara, à direita do círculo escuro, representa parte do contorno do cilindro no plano iluminado pelo feixe *laser*.

O procedimento é dividido em duas etapas: na primeira realiza-se uma busca pelo círculo escuro e, em seguida, utiliza-se essa informação para determinar a posição real da seção transversal do cilindro no plano iluminado. Ao longo deste apêndice o círculo escuro também será chamado de círculo de sombra e a posição do cilindro no plano iluminado também será denominada como círculo real.

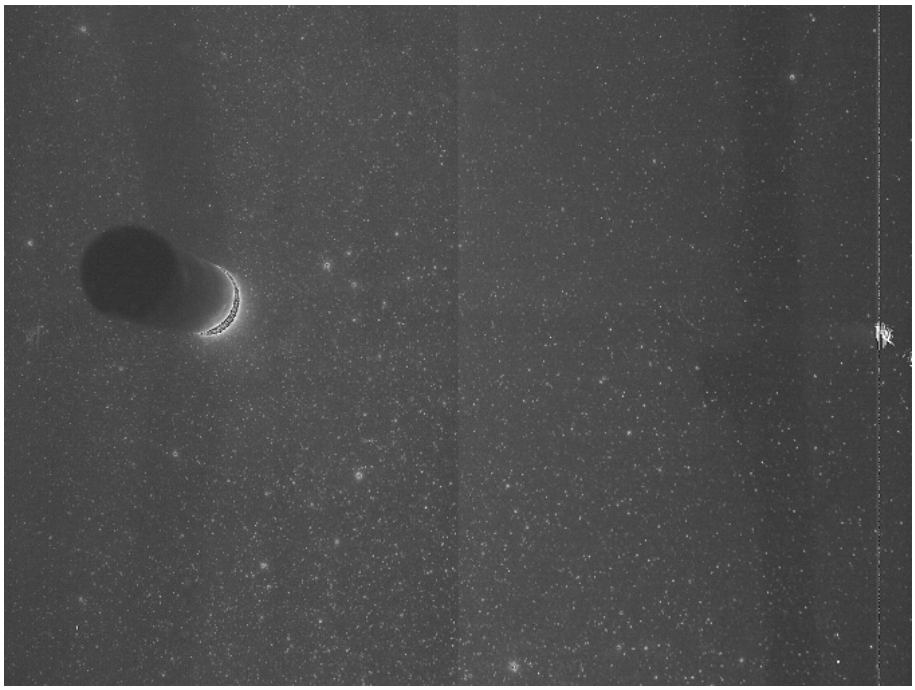


Figura F.1: Exemplo de imagem obtida pelo sistema PIV.

F.1 Buscando o círculo de sombra

Nota-se na figura F.1 que a extremidade inferior do cilindro de ensaio, quando registrada pela câmera do sistema PIV, forma um círculo escuro. Este círculo de sombra é a região mais escura de toda a imagem. O objetivo desta seção propor uma metodologia de processamento de imagens para identificar o círculo de sombra e determinar suas características, tais como área e posição do baricentro. A ideia básica para isolar o círculo de sombra é usar o fato dele ser a região mais escura de toda a imagem. Essa característica permite isolá-lo da imagem através do emprego de um filtro de intensidade luminosa.

Cada ponto da imagem, denominado de *pixel*, contém a informação de sua intensidade luminosa k. Este parâmetro varia entre $k = 0$, para um ponto preto, até $k = 255$, para um ponto branco. Valores intermediários são uma escala de cinza da imagem.

Para isolar o círculo preto é preciso retirar da imagem todos os pontos com intensidade luminosa maior que um determinado valor limite $k > k_{\text{lim}}$. Este processo é denominado limiarização da imagem e faz com que todos os pontos mais escuros que k_{lim} fiquem pretos e os mais claros, brancos. Matematicamente, o processo de limiarização

pode ser dado por:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \leq k_{\text{lim}} \\ 255, & \text{se } k > k_{\text{lim}} \end{cases} \tag{F.1}$$

A figura F.2 exemplifica o exposto. A fotografia original foi limiarizada para diferentes valores de k_{lim}. Observa-se que para o caso $k_{\text{lim}} = 70$ a figura ainda apresenta manchas pretas ao redor do círculo. Essas manchas somem conforme o valor k_{lim} é diminuído, até que o próprio círculo de sombra passa a desaparecer.

Para determinar de maneira automática o melhor valor de k_{lim} cria-se o histograma de tons de cinza da imagem. Este histograma, apresentado na figura F.3, quantifica quantos pontos $p(k)$ possuem determinada intensidade luminosa k. A quantidade $p(k)$ apresentada no histograma foi normalizada em função do número total de *pixels* da imagem.

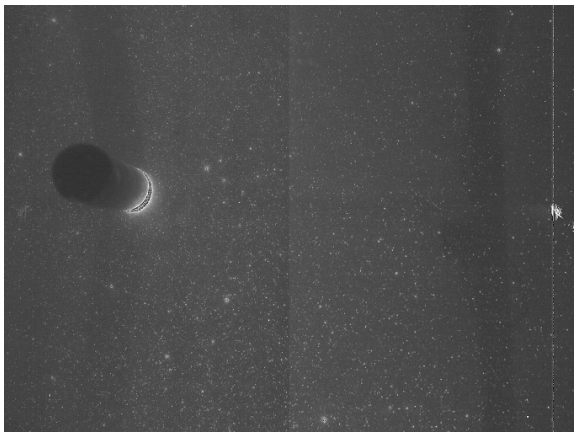
Verifica-se no histograma que existem dois picos de intensidade luminosa. O primeiro pico, entre $50 \leq k \leq 60$ representa os pontos mais escuros da imagem, no caso os pontos do círculo de sombra. O segundo pico, com maior número de pontos, representa o plano de fundo da imagem. Para verificar essa afirmação pode-se cortar a imagem ao redor do círculo escuro e recalcular o histograma, agora com menor influência do plano de fundo. A figura F.4 ilustra a nova imagem a ser considerada e gráfico F.5 apresenta o novo histograma. Como esperado, o primeiro pico cresce e demonstra que está relacionado com os pontos do círculo escuro.

A existência de um vale entre os picos de intensidade luminosa define um valor ótimo para k_{lim}. Para o caso da figura F.5, o valor ótimo é $k^*_{\text{lim}} = 63$. A imagem F.7(a) apresenta o resultado para o processo de limiarização realizada com o valor $k^*_{\text{lim}} = 63$.

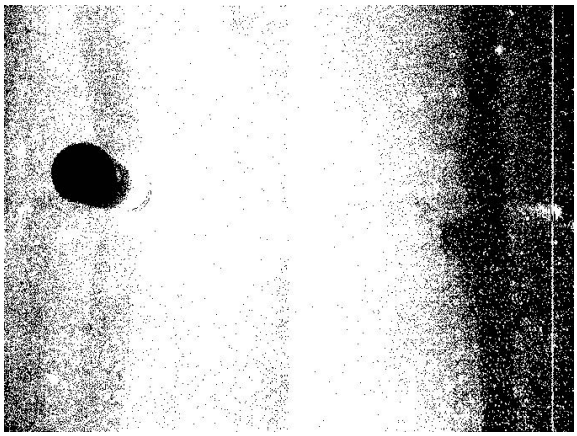
A função *bwboundaries*, do MatLab, foi empregada para identificar o círculo escuro na imagem limiarizada. Essa função reconhece objetos brancos em uma imagem com fundo preto. Como o círculo encontrado, até esta etapa, é preto em fundo branco, faz-se necessário inverter as cores. Este processo é análogo à encontrar o negativo da imagem e pode ser obtido pela equação F.2.

$$k_{neg}(i,j) = 255 - k(i,j) \tag{F.2}$$

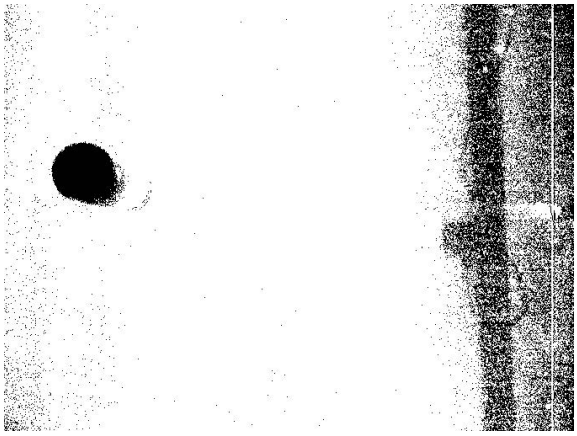
A figura F.7(b) ilustra o resultado dessa operação. Verifica-se que além do círculo, existe uma faixa branca no lado direito da imagem. Essa faixa surge devido à diferença



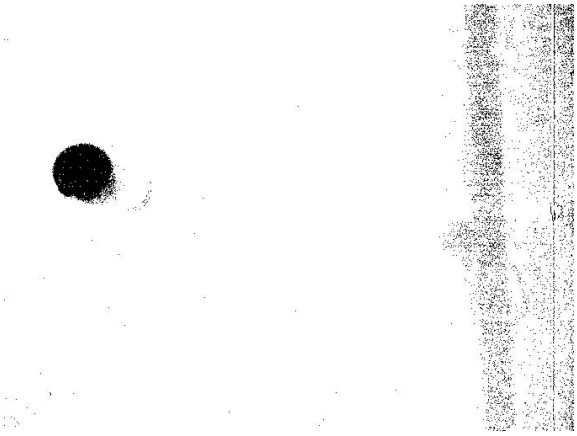
(a) fotografia original



(b) $k_{lim} = 70$

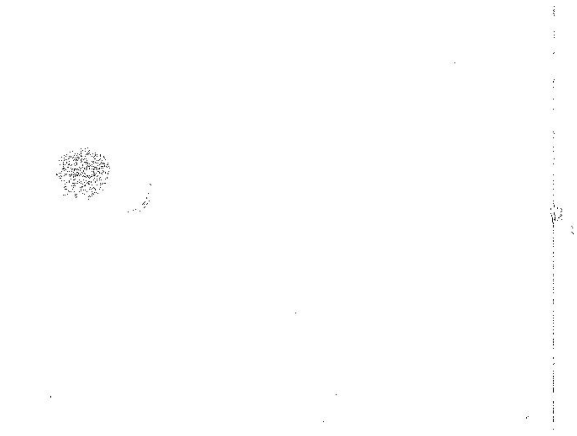


(c) $k_{lim} = 65$



(d) $k_{lim} = 60$

(e) $k_{lim} = 55$



(f) $k_{lim} = 50$

Figura F.2: Processo de limiarização da fotografia original do PIV para diferentes valores de k_{lim}.

de iluminação em diferentes pontos da fotografia e não depende da posição do cilindro. Como a faixa ocorre sempre na mesma posição e longe da área de busca do círculo de sombra, pode-se cortar a imagem e seguir seu processamento.

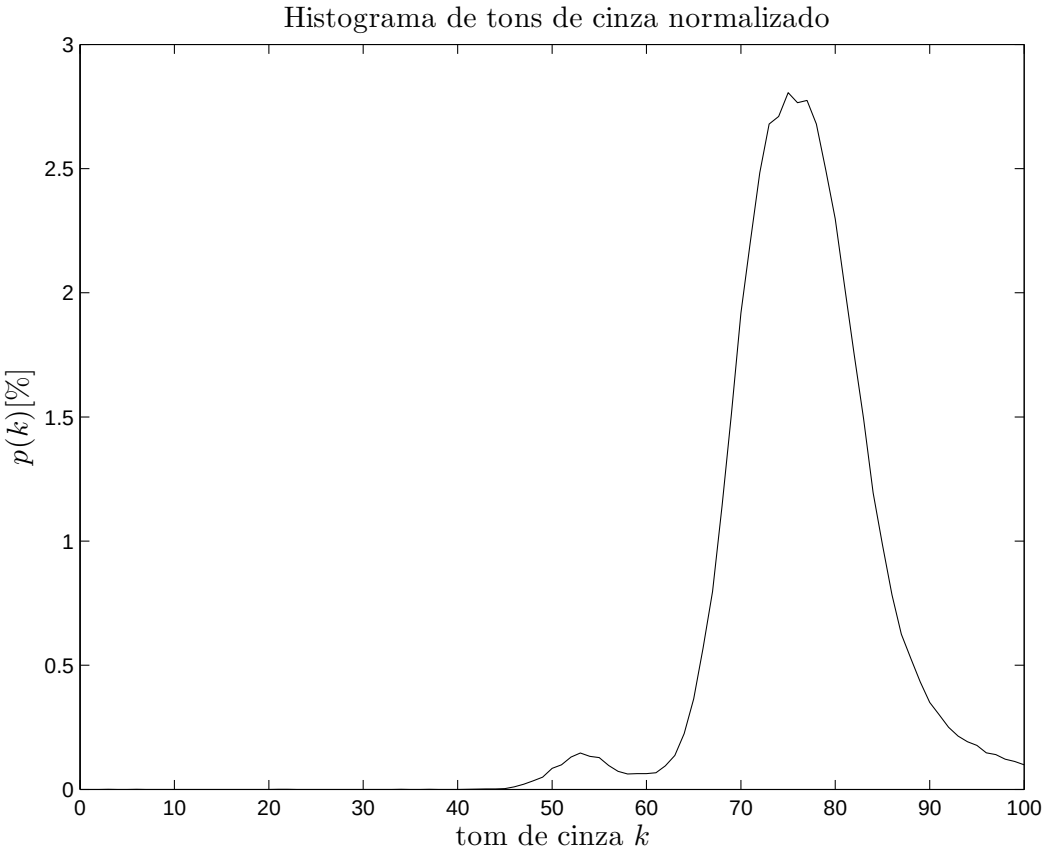


Figura F.3: Histograma de tons de cinza da figura F.2(a).

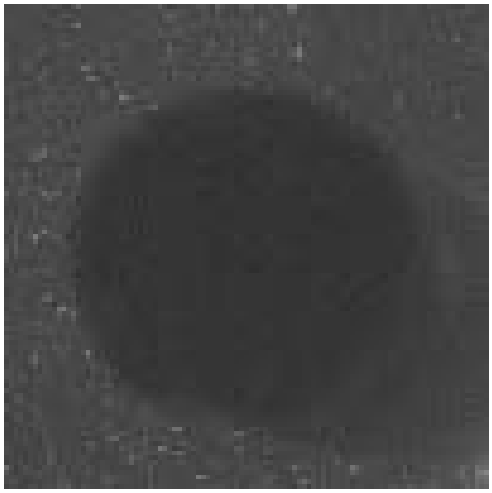


Figura F.4: Corte da figura F.2(a) ao redor do círculo escuro.

Visando diminuir o número de objetos encontrados pela função *bwboundaries*, é necessário eliminar, ou pelo menos reduzir, a quantidade de pequenos pontos isolados ou pequenos agrupamentos. Para isso emprega-se um filtro espacial de mediana com duas janelas distintas: 5×5 e 3×3. No primeiro caso, com janela 5×5, para cada *pixel* em uma

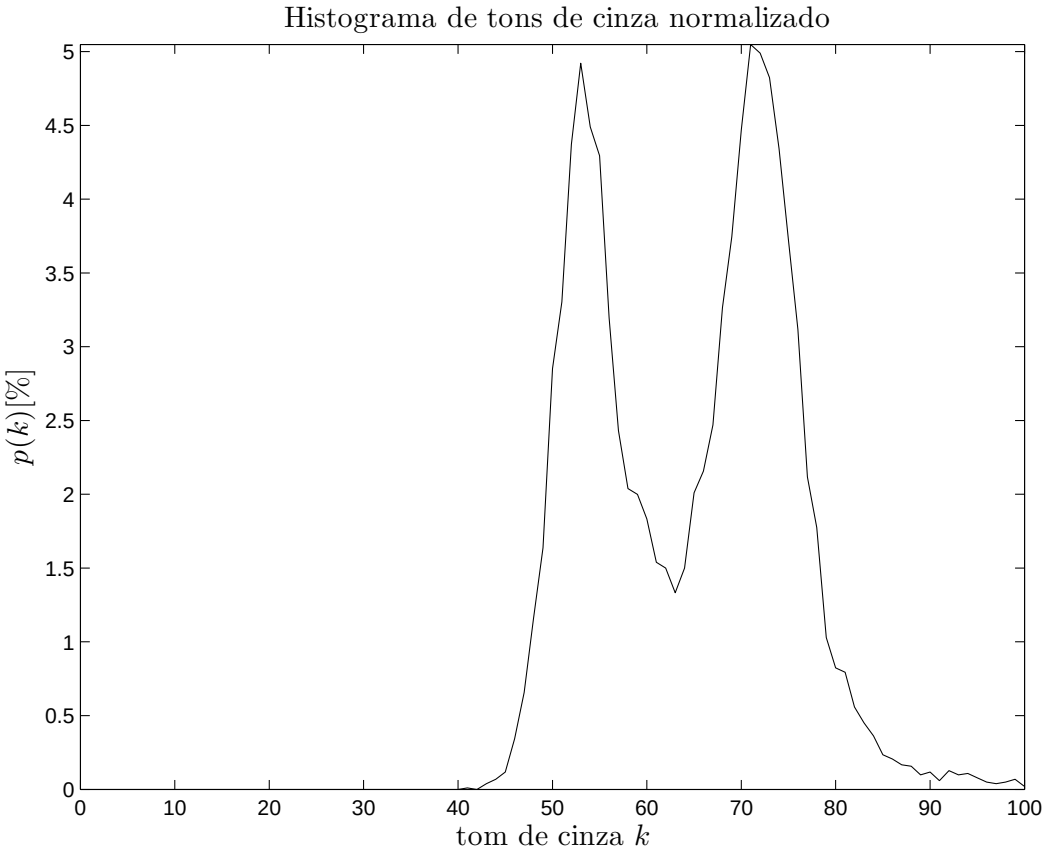


Figura F.5: Histograma de tons de cinza da figura F.4.

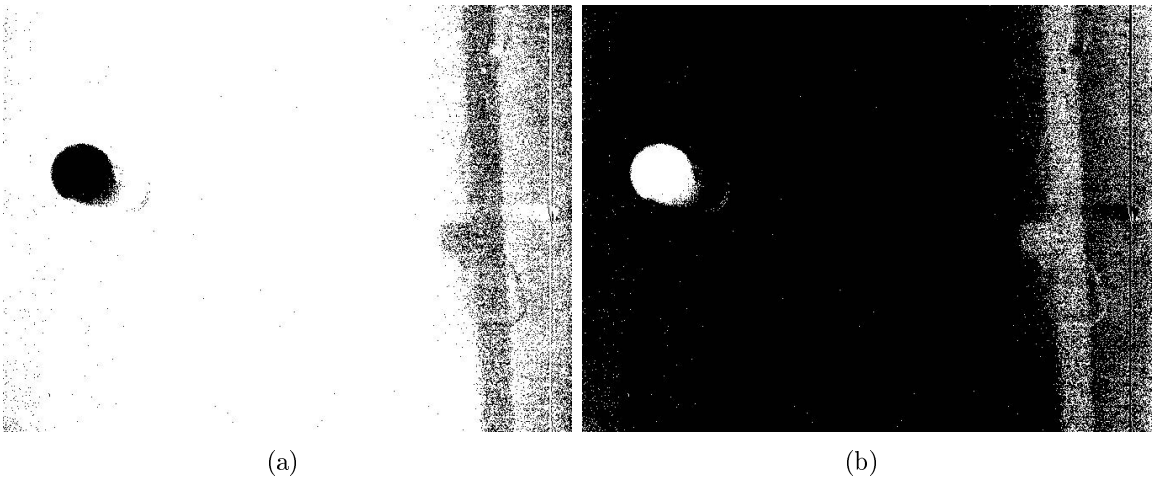


Figura F.6: (a) Resultado do processo de limiarização com $k^*_{\text{lim}} = 63$. (b) Negativo da imagem F.7(a).

posição (i, j), o filtro ordena o valor dos 25 *pixels* ao redor de (i, j), incluindo este ponto, e substitui a intensidade luminosa deste *pixel* pelo valor da mediana. Como resultado, caso um ponto esteja rodeado majoritariamente por pontos de outra cor, sua cor será

trocada. Esse procedimento tem a capacidade de suavizar contornos de objetos grandes e eliminar pontos espúrios. O filtro é aplicado diversas vezes até que nenhum ponto mais seja trocado, em uma condição denominada de equipotência. Após a convergência do filtro de mediana com janela 5×5, repete-se esse procedimento com a janela 3×3. A figura F.7 ilustra o resultado da última iteração para ambas as janelas.

(a) (b)

Figura F.7: Resultado da aplicação do filtro espacial de mediana (a) janela 5×5, (b) janela 3×3.

Após aplicar o filtro espacial, resta pouco mais que o círculo de sombra na imagem. Ao aplicar a função *bwboundaries* o MatLab determina quantos são os objetos presentes na imagem e quais *pixels* pertencem a cada um deles. Com essas informações é possível determinar a área de cada objeto, a posição de seu baricentro e o perímetro de seu contorno. Para medir a área de um objeto basta contar quantos *pixels* o formam. A posição do baricentro do cilindro de sombra (x_s, y_s) é determinada com uma média ponderada da posição de cada ponto do objeto.

A área e o perímetro dos objetos encontrados são parâmetros importantes para a identificação do círculo escuro. A área de cada objeto pode ser usada, em primeiro lugar, como uma espécie de filtro passa alta. O círculo de sombra ocupa muitos pontos da imagem e isso permite descartar objetos com um número de pequeno de pontos. No caso das imagens analisadas neste trabalho, foram descartados todos os objetos com menos do que 200 *pixels*.

Além facilitar a remoção dos objetos pequenos, a área de cada objeto é usada para estimar o raio do círculo de sombra e ainda avaliar quão próxima a sombra é de um círculo. Vale destacar que até este ponto, nenhuma etapa considerou o formato do objeto desejado. Sabe-se que círculos possuem comprimento de circunferência C e área A dependentes exclusivamente de seu raio R. O parâmetro β, definido pela equação

F.3, permite quantificar quão circular é cada objeto. Círculos perfeitos possuem $\beta = 1$. Qualquer outro formato apresenta $\beta > 1$. Verifica-se a extremidade inferior do cilindro, devido ao processo de limiarização e aos filtros de mediana, não é um círculo perfeito, porém se aproxima bastante. O valor de β pode ser usado como critério para descartar objetos não circulares que tenham sido encontrados.

$$C = 2\pi R \qquad A = \pi R^2 \qquad \beta = \frac{C^2}{4\pi A} \tag{F.3}$$

Por fim, a informação da área do círculo de sombra pode ser usada para estimar seu raio. Apesar de poder ser calculado a partir do comprimento da circunferência C ou da área A, o cálculo mais preciso se dá em função da área. A determinação de R a partir do comprimento da circunferência é bastante sensível à rugosidade do objeto encontrado. O raio do círculo de sombra é determinado, portanto, pela igualdade $R = \sqrt{A/\pi}$.

Conhecidos o baricentro do círculo de sombra e seu raio, inicia-se a busca pelo círculo real.

F.2 Buscando o círculo real

Nesta segunda etapa, as informações do círculo de sombra são usadas para determinar a posição do círculo real. A dificuldade de encontrar este círculo diretamente reside no fato de ele ele não aparecer de forma íntegra, mas apenas como uma "meia lua", cujas dimensões e inclinações mudam a cada caso. A meia lua é formada pela reflexão do plano *laser* na superfície do cilindro. A ideia que permite encontrar a posição do círculo real a partir das informações do círculo de sombra é o fato de estes dois círculos serem diferentes seções transversais de um mesmo cilindro visto sob perspectiva. A diferença entre essas seções transversais está na distância entre os planos que contém cada uma.

Para lidar com a questão óptica da perspectiva, o conceito de Ponto de Fuga foi usado. Um ponto de fuga consiste no lugar geométrico no qual duas retas paralelas se encontram quando observadas por um determinado observador. Uma vez conhecido a posição do ponto de fuga (x_f, y_f) , pode-se determinar a posição do círculo real.

Para determinar o ponto de fuga, duas fotografias distintas são usadas para cada caso. As figuras F.8(a) e F.8(a) mostram dois exemplos. Em cada uma dessas figuras pode-se observar um círculo de sombra delimitado por um círculo vermelho e seu baricentro demarcado por ponto vermelho no centro desse círculo. Além do círculo de sombra,

identifica-se o ponto da meia lua mais distânte do centro do círculo de sombra. Esse ponto foi demarcado por um ponto amarelo e é destacado pela seta amarela.

A imagem F.8(c) é a figura média entre as imagens F.8(a) e F.8(a) e foi obtida sobrepondo as duas fotografias. As linhas lilás foram obtidas ligando-se o centro do círculo de sombra, ponto vermelho, e a extremidade do círculo real, ponto amarelo, para cada figura. Verifica-se que as duas linhas convergem para um ponto verde. Este é o ponto de fuga para esta condição.

As dimensões do círculo de sombra não seguem a calibração da imagem, pois este círculo não se encontra no plano iluminado. O círculo real, por outro lado, pertence ao círculo iluminado e a relação entre o tamanho de cada ponto da imagem e seu tamanho físico em milímetros é conhecida. O diâmetro do cilindro de ensaio é conhecido, o que permite determinar a posição do círculo real. A linha lilás da figura F.8(c) une o centro de todas as seções transversais do cilindro e pode ser usada para determinar a posição do círculo real. A partir do ponto amarelo, que pertence ao círculo real, o centro deste círculo é determinado percorrendo sobre a linha lilás uma distância igual ao raio do cilindro de ensaio. Conhecidos o centro do círculo real (x_r, y_r) e seu raio, desenham-se os círculos verder. Verifica-se na imagem F.8(c) que o procedimento descrito delimita bem os contornos do círculo de sombra e real.

Conhecidas as posições dos círculos de sombra e real para as duas imagens em questão e a posição do ponto de fuga, igual para todas as imagens para uma determinada condição, calcula-se fatores de proporcionalidade para cada direção α_x e α_y e o fator médio α.

$$\alpha_x = \frac{x_r - x_s}{x_f - x_s} \qquad \alpha_y = \frac{y_r - y_s}{y_f - y_s} \qquad \alpha = \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} \tag{F.4}$$

O fator de proporcionalidade α e a posição do ponto de funga (x_f, y_f) são determinadas pelo procedimento descrito analisando-se apenas duas imagens de um determinado ensaio de visualização. Estes parâmetros são então usados na equação F.5 para determinar a posição do cilindro real em todas as demais 1033 imagens deste ensaio.

$$x_r = x_s - \alpha\,(x_s - x_f) \qquad y_r = y_s - \alpha\,(y_s - y_f) \tag{F.5}$$

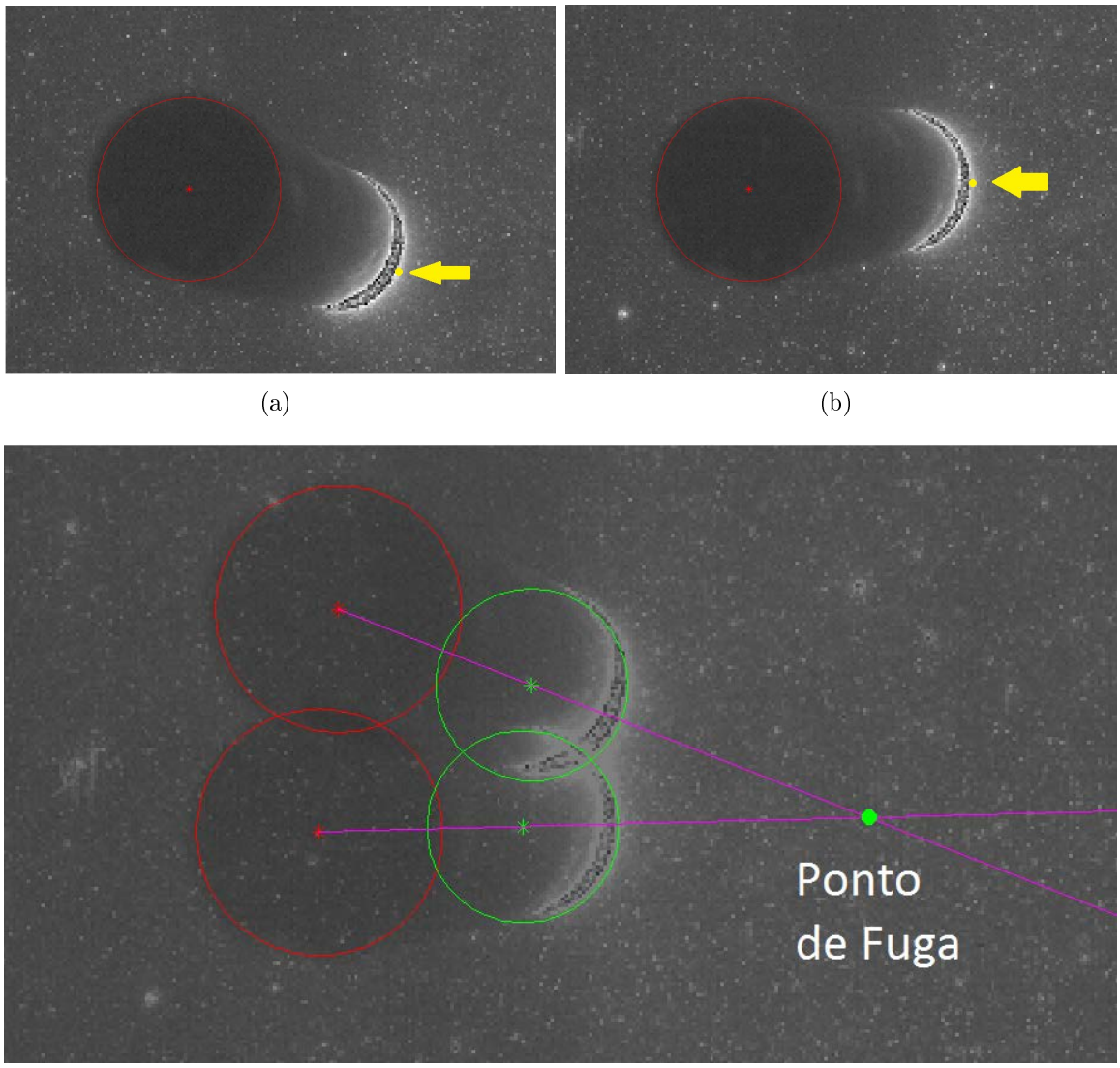


Figura F.8: Etapas na determinação do círculo real nas imagens de PIV (a) e (b) Delimitação do círculo de sombra e demarcação do ponto mais distante do círculo real ao centro do círculo de sombra. (c) Encontro das retas de centro e delimitação do Ponto de Fuga.

APÊNDICE G – ANALISE DOS CAMPOS DE VELOCIDADE OBTIDOS COM A TÉCNICA PIV

Dentro deste trabalho, o resultado de um ensaio de visualização do escoamento com a técnica PIV é o campo instantâneo de velocidades em um plano. Ainda que o resultado deste campo de velocidades tenha sido filtrado, de forma a eliminar vetores espúrios e diminuir os efeitos de ruído do sinal, ainda existem efeitos de turbulência e outros efeitos transitórios. Esses efeitos tornam cada campo de velocidades medido uma representação única do escoamento em determinado instante. Tal como qualquer medição experimental única, os campos de velocidade instantâneos possuem pouca relevância estatística. Para lidar com esse tipo de efeito e permitir análises mais embasadas, campos médios e campos médios de fase foram determinados a partir de um conjunto de campos instantâneos visualizados.

Esta seção apresenta os procedimentos numéricos empregados na determinação dos campos médios e campos médios de fase. Além disso, outras análises de pós-processamento dos campos de velocidade são descritas, tais como a determinação dos campos de vorticidade ortogonal ao plano visualizado $\omega_z(x, y)$ e o cálculo da circulação Γ de cada vórtice.

G.1 Determinação de campos médios e campos médios de fase

Cada ensaio de visualização bidimensional fornece os campos de velocidade $u(x, y)$ e $v(x, y)$ para um determinado instante de tempo.

Para calcular o campo médio basta considerar a média aritmética dos valores de velocidade medidos em cada ponto do escoamento ao longo de todo o ensaio. Desta forma, para uma visualização com N_{PIV} imagens, tem-se que o os campos médios $\overline{u}(x,y)$ e $\overline{v}(x,y)$ são dados por:

$$\overline{u}(x,y) = \sum_{i}^{N_{PIV}} \frac{u_i(x,y)}{N_{PIV}} \qquad \overline{v}(x,y) = \sum_{i}^{N_{PIV}} \frac{v_i(x,y)}{N_{PIV}} \tag{G.1}$$

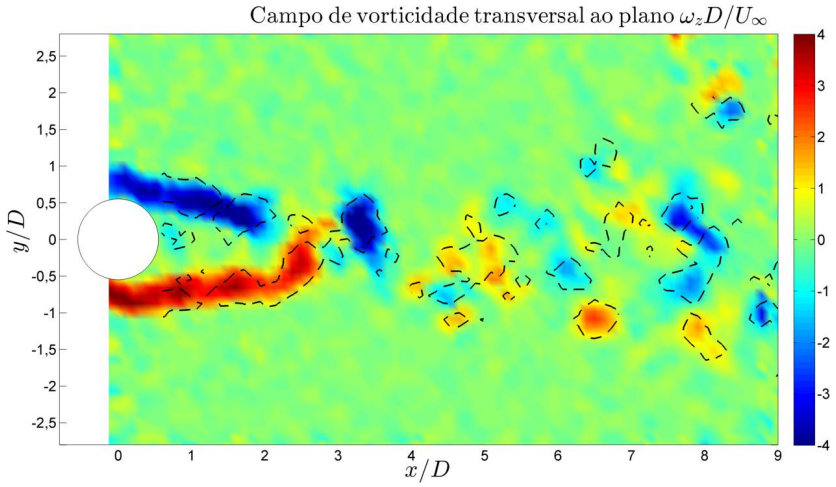
Diferente dos campos médios, que consideram todos os campos instantâneos medidos durante um ou mais ciclos completos, os campos médios de fase só utilizam em seu cálculo os campos instantâneos que estão relacionados a uma determinada fase do ciclo. O emprego desse tipo de média local permite filtrar efeitos de turbulência e erros de medição nas esteiras. Isso ocorre pois tanto os efeitos turbulentos quanto os erros de medição ocorrem de maneira aleatória e espalhados no escoamento. Como para a mesma fase de um próximo ciclo essas variações não estão mais presentes, o cálculo da média diminui a influencia desses efeitos nos resultados, gerando assim campos de velocidade mais "suaves" e com maior relevância estatística.

A figura G.1 apresenta uma comparação entre um campo instantâneo de vorticidade, figura G.1(a), um campo médio de vorticidade, figura G.1(b) e um campo médio de fase G.1(c).

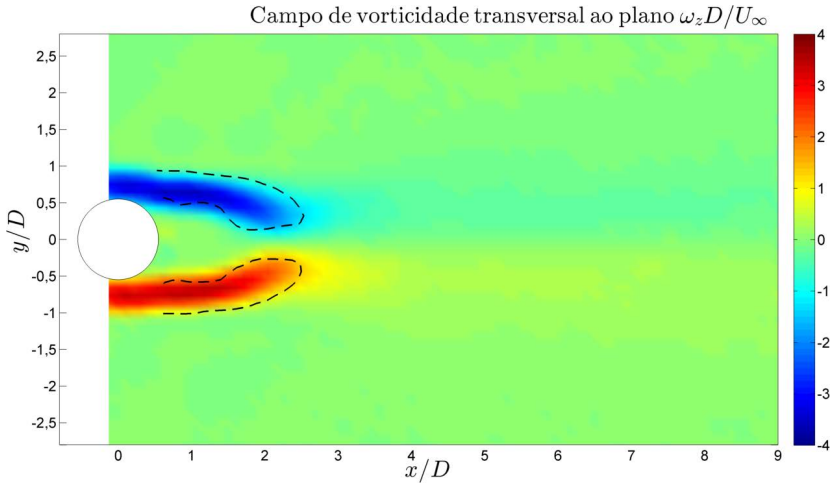
A figura G.1(b) apresenta o campo médio de vorticidade obtido utilizando todos os 345 campos instantâneos de um ensaio de visualização. Nota-se que o campo médio não possui as características alternadas de uma esteira de vórtices, tal como pode ser observado nas figuras G.1(a) e G.1(c). Apesar de não preservar as características oscilatórias, o campo médio permite observar a existência das camadas cisalhantes que saem sa superfície do cilindro e ainda avaliar a queda na velocidade média do escoamento na região a jusante do cilindro.

O ganho no emprego do uso de campos médios de fase pode ser observado comparando os campos de vorticidade ilustrados nas figuras G.1(c) e G.1(a). O resultado do campo médio de fase possui menos turbulência e permite identificar mais facilmente os vórtices e o padrão de esteira. Além de suavizar o campo instantâneo, o cálculo do campo médio de fase permitiu a aplicação de critérios para identificação de vórtices. O mesmo critério foi aplicado nas três imagens, porém a única que permite identificar o padrão de emissão de vórtices e ainda medir suas características é a figura G.1(c).

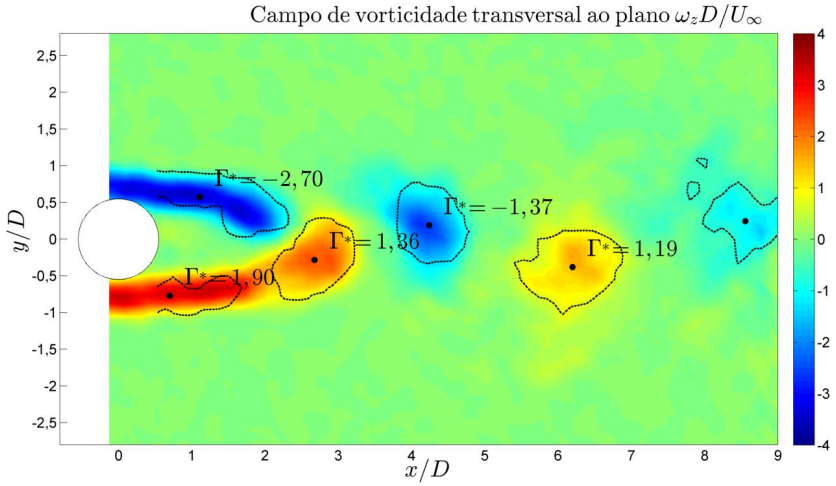
Dois critérios diferentes foram usados para selecionar quais campos instantâneos



(a) Campo $\omega_Z\, D/U_\infty$ instantâneo



(b) Campo $\omega_Z\, D/U_\infty$ médio



(c) Campo $\omega_Z\, D/U_\infty$ médio de fase

Figura G.1: Comparação entre campos de vorticidade transversal normalizado $\omega_z\, D/U_\infty$ obtidos para escoamento ao redor de cilindro fixo com Re = 1.800. (a) Campo instantâneo. (b) Campo médio. (c) Campo médio de fase.

seriam usados no cálculo dos campos médios de fase. O primeiro critério foi empregado para visualizações de escoamento ao redor de cilindro fixo. Esse critério baseia-se na comparação do escoamento em diferentes instantes de tempo. O segundo critério foi usado para visualizações do escoamento nas quais o cilindro de ensaio oscilava. Neste segundo caso, a informação da posição do cilindro foi usada para selecionar campos na mesma fase. Os dois procedimentos são descritos a seguir.

G.1.1 Cálculo do campo médio de fase para visualizações em cilindro fixo

No caso de visualizações com cilindro fixo, a única fonte de informação que permite determinar a fase do escoamento é o próprio escoamento. Uma primeira tentativa para selecionar os campos instantâneos seria assumir que o fenômeno possui frequência de desprendimento de vórtices constante e conhecida. Com essa informação e com a frequência de aquisição do sistema PIV, seria possível determinar a cada quantos instantes o ciclo retornaria. Considerando, por exemplo, que a frequência do desprendimento de vórtices para determinado escoamento seja de 3Hz e que a frequência de aquisição seja próxima de 15Hz, então a cada 5 campos visualizados retorna-se à mesma fase do ciclo. Os campos selecionados para o cálculo dos campos médios de fase seriam, portanto, séries em progressão aritmética.

Apesar de ser um procedimento simples, este procedimento pode acumular erro, pois existem uma série de variáveis incertas. Pode ser que a velocidade do canal se altere ligeiramente e a frequência de desprendimento de vórtices oscile. Ao longo do tempo essas pequenas variações podem acumular erro no resultado.

Uma alternativa para comparar os campos de velocidade é realizar uma análise de correlação entre eles. O procedimento adotado nesta tese é baseado no critério proposto por Ewins (2000) para comparar modos de vibrar de estruturas que foram medidos experimentalmente e calculados numericamente. Por ter essa origem, o critério foi denominado MAC, abreviação da sigla inglesa *modal assurance criterion*. O critério consiste em calcular a correlação cruzada entre campos de instantes diferentes, normalizar esse resultado pela norma dos vetores que caracterizam os campos e então buscar quais campos possuem maior correlação entre si.

A equação usada para calcular o valor de MAC é apresentada na equação G.2 e foi adaptada do livro Rades (2010). Nessa equação l e c são as linhas e colunas da matriz que representa os campos de vorticidade, $\omega_z^*(l,c)$ é o campo de vorticidade que está sendo

comparado com todos os demais $\omega_z^n(l,c)$ campos.

$$\mathrm{MAC}(n_{PIV}) = \frac{\left[\sum_l \sum_c \omega_z^*(l,c)\,\omega_z^n(l,c)\right]^2}{\left[\sum_l \sum_c \omega_z^*(l,c)^2\right]\,\left[\sum_l \sum_c \omega_z^n(l,c)^2\right]} \tag{G.2}$$

Quanto mais próximo da unidade for o valor de MAC, mais semelhantes são os dois campos comparados. Geralmente o valor MAC = 1 só é obtido na comparação de um campo com ele mesmo. Ainda que dois campos sejam muito semelhantes e representem, de fato, a mesma fase no ciclo, o valor de MAC é inferior a 1 devido a variações físicas no escoamento, causadas pela turbulência, e devido também a erros numéricos. O resultado de MAC é uma matriz quadrada, pois compara todos os campos instantâneos com todos os campos instantâneos.

A figura G.2 apresenta o resultado do parâmetro MAC para a comparação de um campo de vorticidade com os demais campos. Como comentado, existe apenas um ponto para o qual MAC = 1, que é quando o campo em questão é comparado com ele mesmo. Para todos os demais a correlação cai. Os pontos pretos indicam quais campos foram selecionados para o cálculo do campo médio de fase. A linha horizontal indica o valor mínimo de MAC aceito, no caso $\mathrm{MAC}_{min} = 0,4$. Existem pontos de máxima correlação local que não foram selecionados para o cálculo. A possibilidade de se definir esse parâmetro de corte aumenta a qualidade do processo, pois permite uma pré-seleção dos melhores campos.

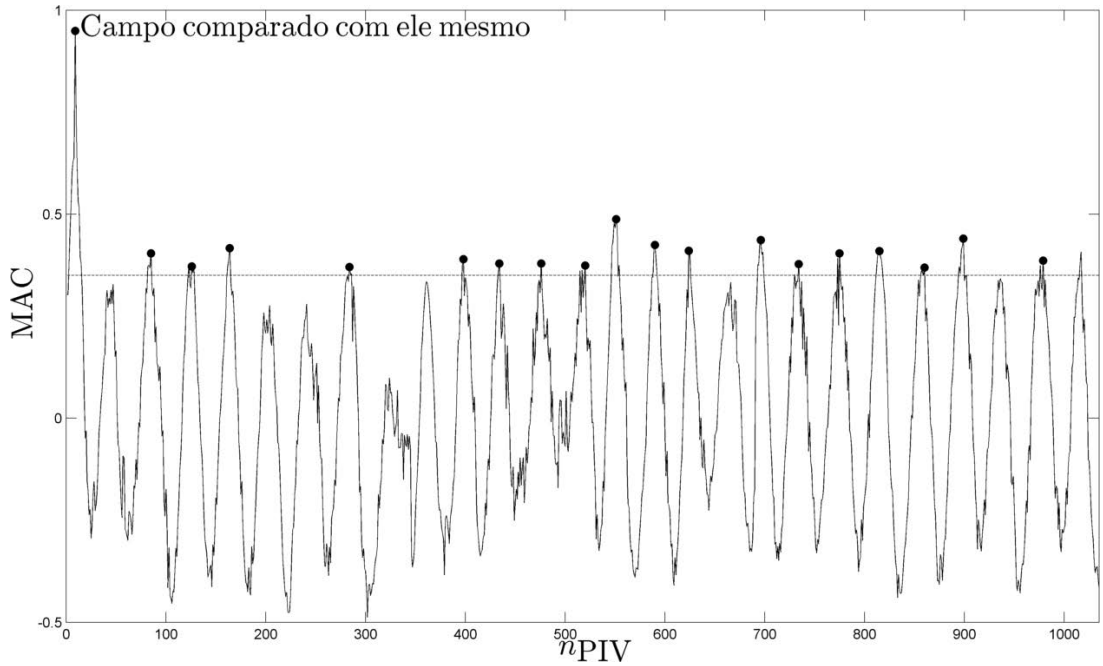


Figura G.2: Análise de MAC para determinação de campos semelhantes para obtenção de campo médio de fase.

G.1.2 Cálculo do campo médio de fase para visualizações em cilindro móvel

Para as visualizações com cilindro oscilando tem-se disponível a informação da posição do cilindro. Essa posição, determinada pelo processamento de imagem descrito no apêndice F, permite selecionar os instantes visualizados para os quais o cilindro esteja na mesma posição e também tenha o mesmo módulo de velocidade. O critério MAC também poderia ser usado para selecionar os campos instantâneos, porém além de ser um processo com maior gasto computacional, as esteiras obtidas para cilindro oscilando são ainda mais caóticas do que as esteiras obtidas para cilindro fixo, isso porque, além das incertezas de medição e efeitos turbulentos, a própria posição do cilindro afeta as esteiras. Calcular a média de fase considerando a posição e a velocidade do cilindro assume, portanto, que existe uma correlação entre cada estado do cilindro e cada etapa do processo de formação e desprendimento de vórtices.

Para cada fase do ciclo de oscilação, a posição do cilindro foi usada para calcular a distância do centro do cilindro nesse instante (x_c^f, y_c^f) até o centro do cilindro nos demais instantes (x_c^n, y_c^n). A distância, determinada pela equação G.3, é apresentada na figura G.3 para um caso exemplo.

$$d_n^f = \sqrt{\left(x_c^n - x_c^f\right)^2 + \left(y_c^n - y_c^f\right)^2} \tag{G.3}$$

Para o caso apresentado na figura G.3, o cilindro ocupa sua posição mínima na direção transversal. Os pontos pretos da imagem representam os 17 instantes selecionados para o cálculo do campo médio de fase. Esses pontos foram determinados como os mínimos locais de cada oscilação. Além de determinar o ponto de mínima distância, só foram selecionados os pontos para os quais $d_n^f < 0,05\,D$. Essa restrição foi imposta para garantir que o cilindro estivesse realmente próximo do ponto de interesse. Caso a tolerância fosse alta, pontos de outras fases ou distantes do ponto de interesse também seriam selecionados para o cálculo do campo médio de fase e isso prejudicaria a qualidade do resultado. Caso a tolerância seja muito baixa, por outro lado, nenhum ponto seria selecionado, pois apesar de ser cíclico, o fenômeno está sujeito à pequenas variações de amplitude e frequência, de forma que o caminho percorrido pelo cilindro a cada ciclo não seja exatamente o mesmo. O valor de 5% do diâmetro foi escolhido com base em diversos testes e depende da amplitude de oscilação do cilindro. Para casos com baixas amplitudes de oscilação a tolerância necessária é de apenas 1% do diâmetro, enquanto que para casos com elevadas

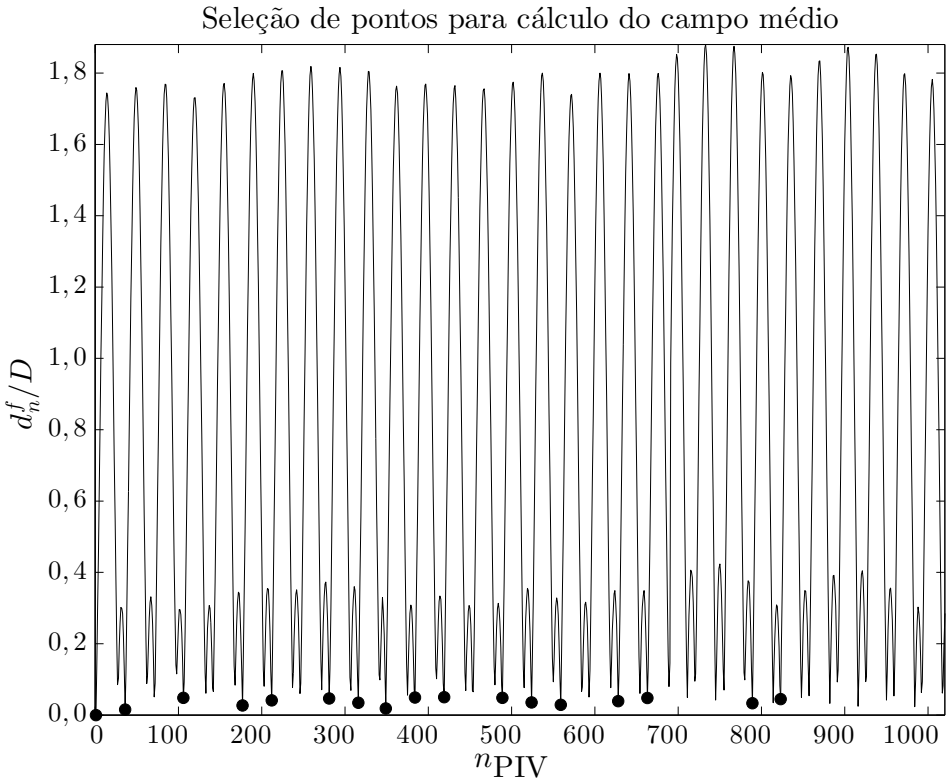
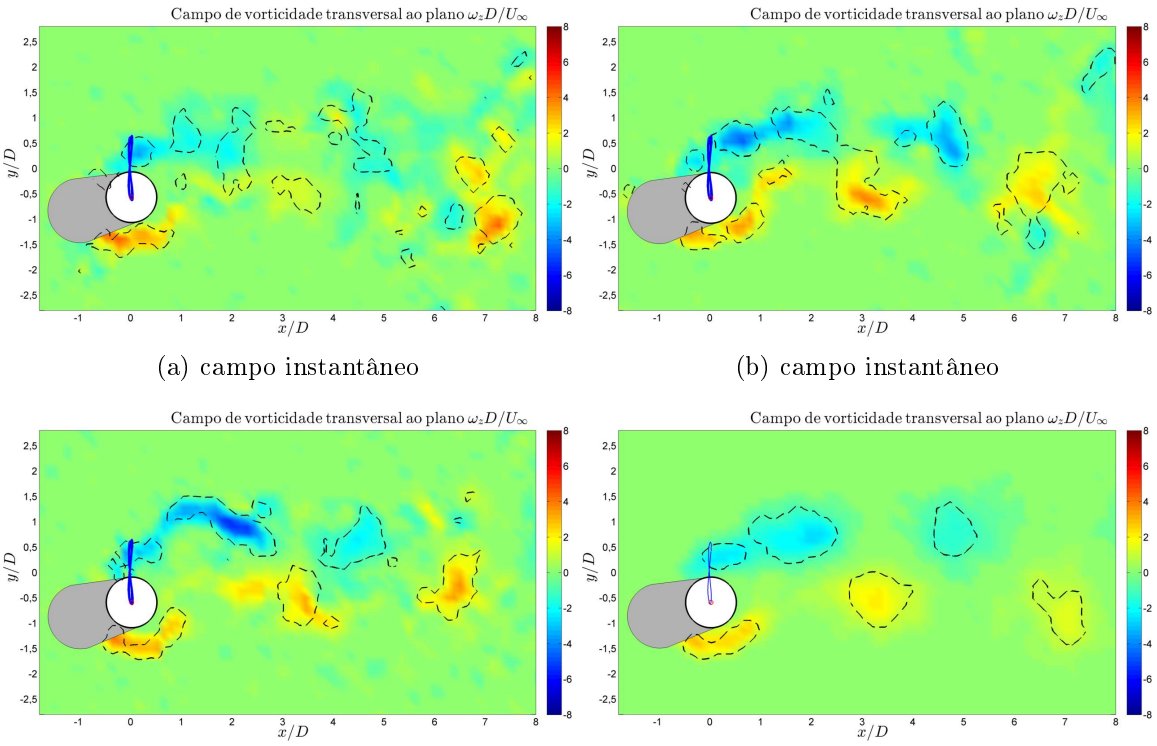


Figura G.3: Distância entre ponto de referência e posição do cilindro em diversos instantes

amplitudes de oscilação chega a ser necessário tolerância de $7,5\%$ do diâmetro.

Selecionados os instantes de interesse, calcula-se o campo médio entre eles. A figura G.3 revela que o total de instantes usados na busca é superior a mil. Na verdade $N_{\mathrm{PIV}} = 3 \times 345 = 1035$. Como descrito no capítulo 5, em cada ensaio de visualização são registrados 345 instantes diferentes. Como a mesma condição foi visualizada três vezes, tem-se um total de 1035 campos disponíveis. Um número maior de repetições não foi realizado devido ao tempo de análise e também a grande quantidade de informação computacional. Vale comentar que cada repetição, para cada condição, ocupa o equivalente a $2,55$Gb em espaço em disco.

Para o caso usado como exemplo, 17 campos diferentes foram usados para o cálculo do campo médio. A figura G.4 ilustra os três primeiros campos instantâneos e também o campo médio de fase obtido através da média de todos os 17. Essa figura demonstra a importância de calcular o campo médio de fase. Cada um dos três campos instantâneos apresentados contém variações turbulentas e é difícil identificar qualquer padrão de esteira. A observação dos três campos instantâneos permite entender também



(a) campo instantâneo (b) campo instantâneo

(c) campo instantâneo (d) campo médio de fase

Figura G.4: (a), (b) e (c): Campos instantâneos de ω_Z, (d): campo médio de fase.

o motivo de o parâmetro MAC não servir bem para determinar outros campos similares nesta condição.

G.2 Determinação do campo de vorticidade perpendicular ao plano ω_z e cálculo da circulação de um vórtice Γ

Os campos de vorticidade perpendicular ao plano visualizado $\omega_z(x, y)$ foram determinados a partir dos campos de velocidade das componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$, segundo a equação G.4.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{G.4}$$

Devido ao fato dos campos de velocidade serem discretizados, é preciso selecionar uma aproximação das derivadas espaciais pelo cálculo da diferenças dos valores em cada ponto. Três operadores diferenciais foram usados nesta tese, sendo eles a diferença central, a diferença anterior e a diferença posterior. A tabela G.1, adaptada de Raffel et al. (2007)

Tabela G.1: Operadores diferenciais para cálculo de derivadas espaciais

Operador	Implementação	incerteza
Diferença anterior	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{n-1/2} \approx \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta X}$	$\approx 1,41\,\frac{\sigma_U}{\Delta X}$
Diferença posterior	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{n+1/2} \approx \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta X}$	$\approx 1,41\,\frac{\sigma_U}{\Delta X}$
Diferença centrada	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{n} \approx \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2\Delta X}$	$\approx 0,7\,\frac{\sigma_U}{\Delta X}$

apresenta o procedimento de cálculo para cada operador e compara as incertezas de cálculo associadas a cada um. As diferenças anterior e posterior foram usadas apenas nas bordas da região visualizada, uma vez que para essas regiões não se conhece o valor da componente da velocidade nas duas posições ao lado do ponto de interesse. Todos os pontos do domínio que não pertencem às fronteiras da região visualizada tiveram suas derivadas calculadas segundo o operador diferença centradas. Na tabela, σ_U representa a incerteza na medição da velocidade e ΔX representa a distância entre os pontos de medição, que no caso deste trabalho equivale ao tamanho da aresta da zona de interrogação.

Uma vez determinados os campos de vorticidade transversal, aplicam-se os critérios para identificação de vórtices descrito no capítulo 2. O cálculo da circulação de cada vórtice é a integral da circulação dentro desse vórtice. Como o campo de velocidades é dividido em pequenas zonas de interrogação quadradas, a integral de área recai no somatório da circulação de cada ponto dentro de um determinado vórtice.

$$\Gamma = \int_A \omega_z dA \rightarrow \Gamma = \sum_n \omega_z^n \Delta X \Delta Y$$