# Capítulo 2

# Similaridade

A representação de elementos existentes na vida humana existe há séculos, extraindo a característica de funcionalidade ou comportamento que sejam capazes de responder a estímulos tal qual a referência. Pode-se atribuir às peças de teatro e à criação de personagens, as representações do convívio em sociedade e as possíveis respostas do comportamento humano frente a diversas situações. De forma simplificada, algumas características ou facetas do complexo comportamento humano são inseridos em determinado contexto e encenado para obter da plateia catarse com a ficção — teatro de modelo aristotélico — ou a mudança de ponto de vista sobre a própria vida cotidiana — dramaturgia de Bertolt Brecht (DAWSEY, 2009). Nessas situações se pode atribuir ao personagem o conceito de "modelo", que representa somente parte das características de um determinado indivíduo, dificilmente sendo completo; ainda mais por ser encenado por um ator que, provavelmente, não foi objeto da representação.

**(a)** Oferendas realizadas em escala.

**(b)** Barco em escala reduzida representando o cotidiano das navegações egípcias

**Figura 2.1** Artefatos de escavação, civilização egípcia.

De maneira parecida, acreditavam os egípcios que as pinturas nas paredes de tumbas

contendo os hábitos e pertences do falecido trariam o conforto na vida após a morte, por levar a essa nova vida os artefatos da vida passada, mesmo que de forma representativa. Ainda, estátuas de exército e oferendas de alimentos inteiras foram enterrados com a finalidade de assegurar que a abundância em vida existisse também após a morte. Em alguns casos, as oferendas eram feitas em escala para diminuir o tempo e recursos necessários para executá-las, conforme Fig. 2.1. Curiosamente, nos dias de hoje, pela mesma razão de economia de recursos, se realiza experimentos de engenharia em escala, criando modelos que sejam capazes de reproduzir determinada resposta, comportamento, que se está interessado em avaliar minuciosamente.

No início, as descobertas da engenharia eram intuitivamente extensíveis a diferentes escalas. O Princípio da Alavanca (e polias) de Arquimedes seria aplicável para todas as escalas; o arranjo escalonaria a força e, quanto maior fosse a alavanca, menor o esforço aplicado (BENDICK; GLEISER, 2006). Tal linha de raciocínio busca relacionar a influência de determinado parâmetro na resposta que se pretende obter, tornando possível equacioná-lo e utilizá-lo de maneira calculada. Também pode ser utilizado para excluir a influência de determinada variável na resposta. Um exemplo deste método é o ensaio de Galileu no qual comparou a queda de duas esferas de massas diferentes utilizando planos inclinados, concluindo que o tempo de queda não dependia da variável "massa", mas somente da inclinação do plano (THUILLIER; DUQUE-ESTRADA, 1994).

## 2.1 Similaridade na Engenharia

O estudo sobre determinado fenômeno se inicia a partir da observação de sua natureza. Inicialmente, a observação avalia qualitativamente a influência de certos parâmetros na resposta do conjunto estudado. Esse procedimento simplifica em muito a análise de dados, uma vez que diminui o número de variáveis estudadas, logicamente. Posteriormente, a quantificação dessas grandezas permite avaliar mais criteriosamente suas influências (MURPHY, 1950).

Partindo do experimento das esferas de Galileu: não se sabia quais fatores influenciavam no tempo das esferas ao percorrerem um plano inclinado. Através do ensaio de esferas de diâmetros distintos, foi verificada não dependência da massa no tempo de queda.

Considere o arranjo da Fig. 2.2, onde $m_1$ proporciona o deslocamento da massa $m_2$ sobre um plano horizontal sem atrito, através de um fio inextensível, devido à ação da aceleração da gravidade $g$. A variação das massas $m_1$ e $m_2$ proporcionará diferentes resultados de aceleração $a$.

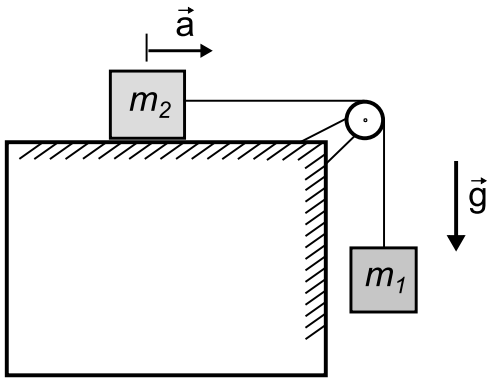



**Figura 2.2** Sistema de blocos sob ação da gravidade, ligados por fio inextensível de massa desprezível. A queda da massa $m_1$ proporciona o deslocamento da massa $m_2$, com aceleração $\vec{a}$.

Sabendo que a força $F$ transmitida à $m_2$ equivale a $F = m_1.g$. Do equilíbrio forças, a segunda lei de Newton fornece:

$$\sum F = m\,a$$

$$m_1\,g = m_2\,a \tag{2.1}$$

Logo,

$$a \propto \frac{m_1}{m_2} \tag{2.2}$$

Assim, para se dobrar a aceleração, basta duplicar $m_1$ ou reduzir $m_2$ pela metade, por exemplo. Em suma, a relação entre $m_1$ e $m_2$ se torna mais importante que o valor de cada uma delas individualmente para o resultado de aceleração.

A forma de correlacionar parâmetros passa por avaliar as unidades e escrevê-los em função de unidades mais básicas como o sistema "Massa-Comprimento-Tempo", ou MLT[1]. Dessa forma, parâmetros podem ser relacionados e grandezas adimensionais criadas, tal que seja possível a comparação de experimentos distintos. A técnica na qual um modelo em escala – ou simplesmente modelo – é utilizado para inferir o comportamento de uma estrutura em tamanho real – protótipo – é chamada de similaridade, ou leis de similaridades ou ainda, semelhança (BAKER; WESTINE; DODGE, 1991; SKOGLUND, 1967).

Murphy (1950) cita dois axiomas que são bases para as leis de similaridade, sendo inerentes ao processo de medição e avaliação de grandezas. O primeiro, diz sobre a igualdade numérica absoluta existir somente se as variáveis forem qualitativamente similares; algo

[1] Do inglês *Mass-Length-Time*.

coerente com a ideia de comparar força com força, deslocamento com deslocamento etc. O segundo fala sobre a razão entre duas quantidades não depender da unidade utilizada, desde que seja a mesma entre ambas quando a razão for obtida; levando à conclusão da importância de se ter um sistema de unidades consistente.

O teorema de Pi de Buckingham (SKOGLUND, 1967) afirma que, se um determinado fenômeno é completamente descrito por uma função da forma $F(q_1, q_2 \ldots) = 0$, então $F(\pi_1, \pi_2 \ldots) = 0$ também o descreve; sendo $\pi_i$ os números adimensionais, produtos das variáveis $q_i$. Desse princípio segue, imediatamente, que estruturas com grupos adimensionais de mesmo valor possuem comportamento semelhante.

Para se obter os números adimensionais se faz necessário escrever as principais variáveis que descrevem o fenômeno em função de uma base, por exemplo, a supracitada MLT, conforme Tabela 2.1.

**Tabela 2.1** Variáveis de Impacto escritas na base MLT.

| Variável | Unidade | Mass | Length | Time |
|---|---|---|---|---|
| comprimento, $L$ | mm | 0 | 1 | 0 |
| deslocamento, $\delta$ | mm | 0 | 1 | 0 |
| massa, $G$ | ton | 1 | 0 | 0 |
| deformação, $\varepsilon$ | – | 0 | 0 | 0 |
| tensão, $\sigma$ | MPa | 1 | −1 | −2 |
| tempo, $t$ | s | 0 | 0 | 1 |
| velocidade, $V$ | mm/s | 0 | 1 | −1 |
| taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$ | 1/s | 0 | 0 | −1 |
| aceleração, $A$ | mm/s$^2$ | 0 | 1 | −2 |
| força, $F$ | N | 1 | 1 | −2 |

O número de adimensionais que podem ser obtidos a partir de um conjunto de variáveis e base é descrito por (MURPHY, 1950):

$$s = n - b \tag{2.3}$$

sendo $s$ o número de adimensionais $\Pi$, $n$ o número de grandezas representativas do fenômeno e $b$ o número de dimensões da base.

Assim, para as dez variáveis da Tabela 2.1 e a base MLT, é possível se obter $10-3=7$ adimensionais. Como o próprio nome diz, esse procedimento visa estabelecer uma relação de determinada variável com a base, tal que não possua dimensão. Para se obter o

adimensional de aceleração $A$, por exemplo

$$[\Pi_A] = [1]$$

$$[A]\,[M]^{\alpha_1}\,[L]^{\alpha_2}\,[T]^{\alpha_3} = [1]\,. \tag{2.4}$$

Pela Tabela 2.1, as unidades de aceleração são iguais a $LT^{-2}$, i.e., $[A] = LT^{-2}$ — na base MLT. Ou seja, a Eq. 2.4 pode ser escrita como

$$\left[L\,T^{-2}\right]\,[M]^{\alpha_1}\,[L]^{\alpha_2}\,[T]^{\alpha_3} = [1] \tag{2.5}$$

Da Eq. 2.5 conclui-se que a soma dos expoentes de cada grandeza da base tem de ser nula. Na forma de sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} M: & \alpha_1 = 0 \\ L: & \alpha_2 + 1 = 0 \\ T: & \alpha_3 - 2 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

resultando em $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 2$, ou seja:

$$[\Pi_A] = \frac{A\,T^2}{L} \tag{2.7}$$

Esse procedimento, ao ser aplicado a todas as outras grandezas, gera o conjunto de adimensionais $\Pi_i$. Os requisitos para a similaridade perfeita entre modelo e protótipo são atendidos se

$$(\Pi_i)_{\text{modelo}} = (\Pi_i)_{\text{protótipo}} \tag{2.8}$$

com $i$ sendo o número de cada conjunto adimensional. Assim, para escalonar[2] uma estrutura, definem-se fatores de escala de comprimento como um dos representativos da estrutura, ou seja, $\beta = L_{\text{modelo}}/L_{\text{protótipo}}$, que relaciona as dimensões entre modelo e protótipo.

Na mecânica dos fluidos é comum o escalonamento de experimentos, modificando os

[2]Neste trabalho será utilizado o verbo escalonar com o significado de reproduzir em escala, efetuar um estudo de escalonamento ou similaridade.

parâmetros das variáveis e estudando a influência de adimensionais. Para citar alguns, há o número de Reynolds (FOX; MCDONALD, 1998),

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{2.9}$$

sendo $\rho$, a massa específica do fluido; $\mu$, viscosidade dinâmica do fluido; $V$, a velocidade de escoamento do fluido; e $D$, comprimento característico do escoamento ou diâmetro para o fluxo interno a um tubo. Esse adimensional auxilia em determinar se o escoamento é laminar ou turbulento. Número de Mach, $Ma$,

$$Ma = \frac{V}{a} \tag{2.10}$$

sendo $V$, a velocidade do objeto relativo ao meio fluido e $a$ a velocidade da propagação do som neste meio; importante para o projeto de aeronaves. Se os modelos em escala possuírem o mesmo valor dos números adimensionais do "escoamento protótipo" , então é possível obter correlação e inferir sobre a resposta do protótipo usando modelos.

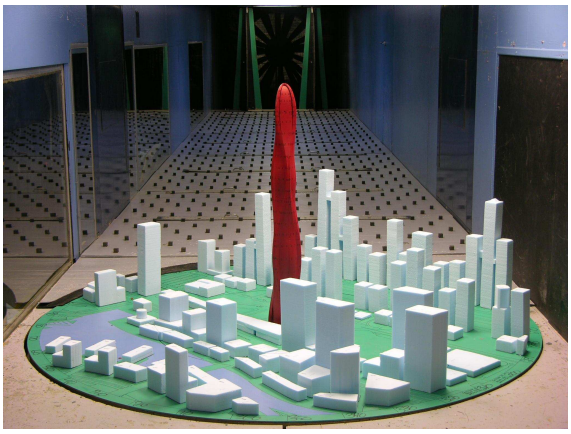
O conjunto de adimensionais também permite algumas variações, facilitando em alguns casos os experimentos em escala. Este é o caso de um experimento em escala para o estudo do arrasto de um navio, no qual um dos números adimensionais é o de Reynolds, Eq. 2.9. Se a densidade da água no experimento em escala for diferente por alguma razão, mantendo o valor de $\mu$ constante, é possível alterar a velocidade $V$ de forma a manter o $Re_{modelo} = Re_{protótipo}$.

Tais aplicações se estendem ao campo da aerodinâmica, Fig. 2.3, construção civil, Fig. 2.4 e naval Fig. 2.5.

**(a)** Modelo de avião comercial. **(b)** Testes de aerodinâmica em carro de passeio.

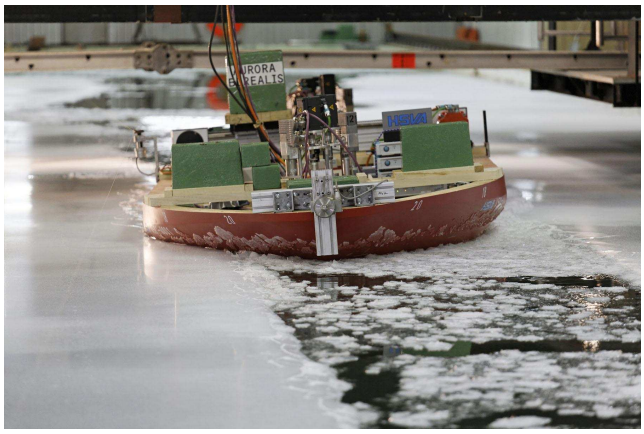
**Figura 2.3** Experimentos em túnel de vento utilizando modelos em escala.

**(a)** Modelo de ponte pênsil.

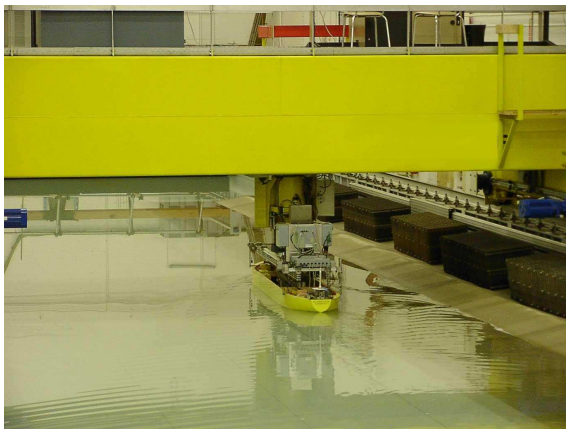


**(b)** Modelo de edifício e arredores sendo ensaiado em túnel de vento.

**Figura 2.4** Análise de modelos em escala na construção civil.



**(a)** Tanque de provas com ensaio de modelo de navio quebra-gelo.



**(b)** Arrasto hidrodinâmico avaliado em tanque de provas com o uso de modelo.

**(c)** Ensaio em escala de colisão de navios para avaliar força, deslocamentos e rotações (TABRI; MATUSIAK; VARSTA, 2009).

**Figura 2.5** Ensaios com modelos em escala para estudos de navios.

Em alguns casos, não é possível inferir, diretamente, a resposta de um protótipo através de modelos. Isto é, através de apenas o fator de escala de comprimento $\beta$, não se consegue gerar os adimensionais – representativos – iguais no modelo e protótipo. Para contornar essas limitações, pode-se utilizar a técnica de distorção das leis de similaridade, também chamada de similaridade imperfeita (BARENBLATT, 2003). Nesta técnica, ao

fator de escala de comprimento são adicionados tanto quanto fatores forem necessários para descrever o fenômeno apropriadamente.

Para o fenômeno de impacto, a problemática do escalonamento foi contornada por Oshiro e Alves (2009) e Oshiro (2010), definindo uma nova base, ao invés da MLT, e fatores de escala de massa de impacto, $\beta_G$, velocidade $\beta_V$ e de tensão de escoamento de um modelo rígido-perfeitamente-plástico $\beta_{\sigma_0}$. Mais detalhes serão apresentados na Seção 2.1.1.

### 2.1.1 Similaridade no Impacto

As principais variáveis de uma estrutura sob carregamento de impacto são bem conhecidas. Através de análise dimensional, utilizando a base MLT *(Massa – Comprimento – Tempo)* obtêm-se os fatores de escala entre protótipo e modelo, Tabela 2.2 (JONES, 1997).

**Tabela 2.2** Fatores de escala entre modelo e protótipo escritas na base MLT

| Variável | Fator | Variável | Fator |
|---|---|---|---|
| Comprimento, $L$ | $\beta$ | tempo, $t$ | $\beta$ |
| deslocamento, $\delta$ | $\beta$ | velocidade, $V$ | 1 |
| massa, $G$ | $\beta^3$ | Taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$ | $1/\beta$ |
| deformação, $\varepsilon$ | 1 | aceleração, $A$ | $1/\beta$ |
| tensão, $\sigma$ | 1 | força, $F$ | $\beta^2$ |

Porém, estruturas sujeitas a severos carregamentos de impacto não seguem, em geral, leis de similaridade conforme os fatores da Tabela 2.2, devido a efeitos como: tensão de escoamento sensível à taxa de deformação, falha de material, aceleração da gravidade etc. Uma forma de contornar essa limitação é incluir novos fatores de escala além de $\beta$, distorcendo as leis de escalonamento, de modo a permitir que a influência de determinada propriedade (por exemplo, sensibilidade à taxa de deformação) seja considerada. Tal procedimento também pode ser chamado de "Similaridade Imperfeita" ou "Distorcida", por aplicar correções em alguns parâmetros de forma a compensar a não escalonabilidade de determinada variável (MURPHY, 1950; BARENBLATT, 2003).

Em estruturas construídas a partir de materiais sensíveis à taxa de deformação, a escala reduzida torna o modelo mais rígido. Isso ocorre por causa da maior taxa de deformação do modelo $\beta_{\dot{\varepsilon}} = 1/\beta$ — conforme Tabela 2.2 — fazendo com que a tensão de escoamento dinâmica seja maior no modelo do que no protótipo, tornando-o mais resistente; ao passo que, para os fatores de tensão na tabela, deveriam ser iguais.

Oshiro e Alves (2009) e Oshiro (2010) apresentaram um método de distorcer tais leis, de forma a considerar o efeito da taxa de deformação no escalonamento. Os autores relevaram o efeito da taxa de deformação alterando a velocidade inicial de impacto. Ao invés dos fatores utilizados na Tabela 2.2, novas relações entre as variáveis do modelo e do protótipo foram geradas e estão apresentadas na Seção 2.2.

Mazzariol et al. (2011) propôs uma extensão do método de escalonamento de Oshiro (2010), de modo a contornar limitações dos aparatos experimentais usados para os ensaios. Por exemplo, a velocidade de inicial do impacto é restringida pela altura do martelo de impacto de queda livre, sendo assim a massa de impacto pode ser aumentada para compensar essa característica. Oshiro (2010) observa que a correção através somente da velocidade de impacto fornece melhores resultados, sendo a correção por massa limitada e, por conseguinte, suas variantes também. Ainda, comenta que o método que altera a massa de impacto só é valido e gera resultados adequados quando a estrutura possui massa muito inferior à massa de impacto. A solução, nesse caso, só seria exata caso a estrutura sujeita ao impacto também tivesse a massa alterada pelo mesmo fator.

O método generalizado é apresentado na Seção 2.2, sendo comparado posteriormente, com os das referências supracitadas.

## 2.2 Generalização da Distorção

Diferentemente da base MLT, Tabela 2.2, o presente trabalho utilizará uma base definida pelas variáveis velocidade inicial de impacto, $V_0$ ($\mathrm{LT}^{-1}$, na base MLT), tensão de escoamento dinâmica, $\sigma_d$ ($\mathrm{ML}^1\mathrm{T}^{-2}$, na base MLT), e massa de impacto, $G$ (M) — chamada de base VSG, como em Oshiro (2010), Tabela 2.3. Porém, no presente caso, não somente a velocidade inicial de impacto será alterada, como feito em Oshiro e Alves (2009); como a massa de impacto também será calculada de forma a gerar a similaridade mesmo para materiais sensíveis à taxa de deformação.

As variáveis que descrevem o fenômeno de impacto podem ser escritas na base VSG, conforme Tabela 2.3 (OSHIRO, 2010). Os adimensionais são obtidos através de procedimento análogo ao da Seção 2.1. Por exemplo, reescrevendo a Eq. 2.4, utilizando a base VSG, obtém-se (OSHIRO, 2010):

$$[A]\ [V_0]^{\alpha_4}\,[\sigma_D]^{\alpha_5}\,[G]^{\alpha_6} = [1]\,. \tag{2.11}$$

Substituindo os valores de $V_0$, $\sigma_D$ e $G$ pelos respectivos valores na base MLT:

**Tabela 2.3** Variáveis de Impacto escritas na base VSG.

| Variável | Unidade | $\mathbf{V_0}$ | $\sigma_\mathbf{d}$ | $\mathbf{G}$ |
|---|---|---|---|---|
| deslocamento, $\delta$ | mm | 2/3 | −1/3 | 1/3 |
| tensão, $\sigma$ | MPa | 0 | 1 | 0 |
| tempo, $t$ | s | −1/3 | −1/3 | +1/3 |
| taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$ | 1/s | 1/3 | 1/3 | −1/3 |
| aceleração, $A$ | mm/s$^2$ | 4/3 | 1/3 | −1/3 |

$$\left[LT^{-2}\right]\left[LT^{-1}\right]^{\alpha_4}\left[ML^{-1}T^{-2}\right]^{\alpha_5}\left[M\right]^{\alpha_6}=\left[1\right], \tag{2.12}$$

resultando no sistema de equações análogo da Eq. 2.6:

$$\begin{cases} M: & \alpha_5+\alpha_6=0 \\ L: & 1+\alpha_4-\alpha_5=0 \\ T: & -2-\alpha_4-2\alpha_5=0 \end{cases} \tag{2.13}$$

cuja solução fornece $\alpha_4=-4/3$, $\alpha_5=-1/3$ e $\alpha_6=1/3$, ou seja:

$$\Pi_A=\frac{A\,G^{1/3}}{V_0^{4/3}\,\sigma_d^{1/3}},$$

ou,

$$\Pi_A=\frac{A^3\,G}{V_0^4\,\sigma_d}, \tag{2.14}$$

Seguindo o procedimento das Eqs. 2.11 – 2.13 para as outras variáveis da Tabela 2.3, os seguintes adimensionais são obtidos:

Deslocamento: $$\Pi_1 = \left[\frac{\delta^3\sigma_d}{GV_0^2}\right] \tag{2.15a}$$

Taxa de Deformação: $$\Pi_2 = \left[\frac{\dot{\varepsilon}^3 G}{\sigma_d V_0}\right] \tag{2.15b}$$

Aceleração: $$\Pi_3 = \left[\frac{A^3 G}{\sigma_d V_0^4}\right] \tag{2.15c}$$

$$\text{Tempo:} \qquad \Pi_4 = \left[\frac{t^3 \sigma_d V_0}{G}\right] \tag{2.16a}$$

$$\text{Tensão:} \qquad \Pi_5 = \left[\frac{\sigma}{\sigma_d}\right] \tag{2.16b}$$

$$\text{Força:} \qquad \Pi_6 = \left[\frac{F^3}{V_0^4 \sigma_d G^2}\right] \tag{2.16c}$$

$$\text{Energia:} \qquad \Pi_7 = \left[\frac{E'}{G V_0^2}\right] \tag{2.16d}$$

Utilizando os adimensionais $\Pi_1$ a $\Pi_7$ é possível obter os novos fatores de escala que relacionam modelo e protótipo. A partir das Eqs. 2.8 e 2.15a:

$$(\Pi_1)_m = (\Pi_1)_p$$

$$\left[\frac{\delta_m^3 \sigma_{d_m}}{G_m V_{0_m}^2}\right] = \left[\frac{\delta_p^3 \sigma_{d_p}}{G_p V_{0_p}^2}\right]$$

$$\left(\frac{\delta_m}{\delta_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_{d_m}}{\sigma_{d_p}}\right) \left(\frac{G_p}{G_m}\right) \left(\frac{V_{0_p}}{V_{0_m}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\beta\right)^3 \left(\beta_{\sigma_d}\right) \left(\frac{1}{\beta_G}\right) \left(\frac{1}{\beta_V^2}\right) = 1$$

obtém-se

$$\beta_G = \frac{\beta^3 \, \beta_{\sigma_d}}{\beta_V^2} \tag{2.17}$$

sendo os fatores de escala de tensão dinâmica, $\beta_{\sigma_d} = (\sigma_d)_m / (\sigma_d)_p$; massa de impacto, $\beta_G = (G)_m / (G)_p$ e velocidade, $\beta_V = (V_0)_m / (V_0)_p$ .

Do número adimensional $\Pi_2$, Eqs. 2.8 e 2.15b:

$$(\Pi_2)_m = (\Pi_2)_p$$

$$\left[\frac{\dot{\varepsilon}_m^3 G_m}{(\sigma_{d_m} V_{0_m})}\right] = \left[\frac{\dot{\varepsilon}_p^3 G_p}{(\sigma_{d_p} V_{0_p})}\right]$$

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_p}\right)^3 \left(\frac{G_m}{G_p}\right) \left(\frac{V_{0_p}}{V_{0_m}}\right) \left(\frac{\sigma_{d_p}}{\sigma_{d_m}}\right) = 1 \tag{2.18}$$

sendo $\beta_{\dot{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_m/\dot{\varepsilon}_p$ o fator de escala de taxa de deformação. Dessa forma,

$$\left(\beta_{\dot{\varepsilon}}\right)^3 \left(\beta_G\right) \left(\frac{1}{\beta_V}\right) \left(\frac{1}{\beta_{\sigma_d}}\right) = 1$$

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{\beta_G}{\beta_{\sigma_d}\beta_V}\right)^{1/3} = 1$$

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} = \left(\frac{\beta_{\sigma_d}\beta_V}{\beta_G}\right)^{1/3} \tag{2.19}$$

Inserindo a Eq. 2.17 na Eq. 2.19, tem-se

$$\beta_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\beta_V}{\beta} \tag{2.20}$$

Se a tensão de escoamento dinâmica do material em função da taxa de deformação é expressa pela equação constitutiva de Norton (LEMAITRE; CHABOCHE, 1991),

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^q , \tag{2.21}$$

e modelo e protótipo possuem o mesmo valor para o parâmetro material $q$, então é possível escrever o fator da tensão dinâmica como

$$\beta_{\sigma_d} = \beta_{\sigma_0} \left(\beta_{\dot{\varepsilon}}\right)^q , \tag{2.22}$$

sendo $\beta_{\sigma_0}$ a relação entre tensões quase estáticas de referência. Inserindo as Eqs. 2.20 e 2.22 na Eq. 2.17 obtém-se:

$$\frac{\beta_G\, \beta_V^2}{\beta^3} = \beta_{\sigma_0} \left(\frac{\beta_V}{\beta}\right)^q$$

$$\beta_G = \beta_{\sigma_0}\, \beta_V^{(q-2)}\, \beta^{(3-q)} \tag{2.23}$$

Dessa forma, define-se o fator de escala da massa de impacto, $\beta_G$, em função dos fatores de escala $\beta$; da velocidade de impacto $\beta_V$, e de parâmetros materiais, $\beta_{\sigma_0}$ e $q$.

Alternativamente, ao invés de variar a velocidade inicial e calcular a massa de impacto, o inverso também é possível, criando uma forma generalizada de Oshiro et al. (2011), a saber:

$$\begin{aligned}
&\beta_G = \beta_{\sigma_0}\, \beta_V^{(q-2)}\, \beta^{(3-q)} \\
&\beta_V^{(2-q)} = \beta_{\sigma_0}\, \beta_G^{-1}\, \beta^{3-q}; \\
&\beta_V = \beta_{\sigma_0}^{1/(2-q)}\, \beta_G^{1/(q-2)}\, \beta^{(3-q)/(2-q)}; \\
&\beta_V = \beta_{\sigma_0}^{1/(2-q)}\, \beta^{q/(q-2)} \left(\frac{\beta^3}{\beta_G}\right)^{1/(2-q)}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Os fatores de escala das principais variáveis do fenômeno são obtidos inserindo as Eqs. 2.23 a 2.24 nos números adimensionais $\Pi_2$ e $\Pi_7$

$$\Pi_2 = \left[\frac{\dot{\varepsilon}^3 G}{\sigma_d V_0}\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\beta_{\dot{\varepsilon}}^3 \beta_G}{\beta_{\sigma_d}\beta_V} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\beta_V}{\beta} \tag{2.25}$$

$$\Pi_3 = \left[\frac{A^3 G}{\sigma_d V_0^4}\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\beta_A^3 \beta_G}{\beta_{\sigma_d}\beta_V^4} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_A = \frac{\beta_V^2}{\beta} \tag{2.26}$$

$$\Pi_4 = \left[\frac{t^3 \sigma_d V_0}{G}\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\beta_t^3 \beta_{\sigma_d}\beta_V}{\beta_G} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_t = \frac{\beta}{\beta_V} \tag{2.27}$$

$$\Pi_5 = \left[\frac{\sigma}{\sigma_d}\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\beta_\sigma}{\sigma_d} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_\sigma = \beta_{\sigma_0}\left(\frac{\beta_V}{\beta}\right)^q. \tag{2.28}$$

A Tabela 2.4 sumariza os fatores de escala para as variáveis do fenômeno de impacto quando o fator para a velocidade de impacto, $\beta_V$, é estabelecido e o fator para a massa de impacto, $\beta_G$, é calculado. A Tabela 2.5 resume os fatores para as mesmas variáveis quando a massa de impacto, $\beta_G$, é imposta e o fator de velocidade, $\beta_V$, calculado.

As relações definidas nas Tabelas 2.4 e 2.5 são válidas para materiais elasto-viscoplásticos, sendo a relação entre tensão de escoamento estática e dinâmica definida pela equação constitutiva de Norton, Eq. 2.21. Elas são uma generalização dos estudos de Oshiro e Alves (2009), Mazzariol et al. (2011), e Oshiro (2010) para o caso em que não há distorção de geometria do modelo.

**Tabela 2.4** Fatores de escala para a base VSG, em função de $\beta_V$, $\beta$, e $\beta_{\sigma_0}$.

| Variável | Fator | Variável | Fator |
|---|---|---|---|
| Comprimento, $L$ | $\beta$ | tempo, $t$ | $(\beta/\beta_V)$ |
| deslocamento, $\delta$ | $\beta$ | velocidade, $V$ | $\beta_V$ |
| massa, $G$ | $\beta_{\sigma_0}\,\beta_V^{(q-2)}\beta^{(3-q)}$ | Taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$ | $(\beta_V/\beta)$ |
| deformação, $\varepsilon$ | 1 | aceleração, $A$ | $\beta_V^2/\beta$ |
| tensão, $\sigma$ | $\beta_{\sigma_0}\beta_V^q\beta^{-q}$ | força, $F$ | $\beta_{\sigma_0}\,\beta^{(2-q)}\,\beta_V^q$ |

**Tabela 2.5** Fatores de escala para a base VSG, em função de $\beta_G$, $\beta$, e $\beta_{\sigma_0}$.

| Variável | Fator | Variável | Fator |
|---|---|---|---|
| Comprimento, $L$ | $\beta$ | tempo, $t$ | $\left[\beta\sigma_0{}^{\frac{1}{q-2}}(\beta^3/\beta_G)^{\frac{1}{q-2}}\beta^{\frac{q-1}{2-q}}\right]$ |
| deslocamento, $\delta$ | $\beta$ | velocidade, $V$ | $\beta_{\sigma_0}\left(\beta_G/\beta^3\right)^{\frac{1}{q-2}}\beta^{\frac{q}{q-2}}$ |
| massa, $G$ | $\beta_G$ | Taxa de deformação, $\dot{\varepsilon}$ | $\left[\beta\sigma_0{}^{\frac{1}{(2-q)}}(\beta^3/\beta_G)^{\frac{1}{2-q}}\beta^{\frac{q-1}{q-2}}\right]$ |
| deformação, $\varepsilon$ | 1 | aceleração, $A$ | $\beta_{\sigma_0}^{\frac{2}{(2-q)}}(\beta_G/\beta^3)^{\frac{2}{2-q}}\beta^{\frac{q+2}{q-2}}$ |
| tensão, $\sigma$ | $\beta_{\sigma_0}^{\frac{2}{(2-q)}}(\beta_G/\beta^3)^{\frac{q}{q-2}}\beta^{\frac{2q}{q-2}}$ | força, $F$ | $\beta_{\sigma_0}(\beta_G/\beta^3)^{\frac{q}{q-2}}\beta^{\frac{4q-4}{q-2}}$ |

## 2.3 Comentários Adicionais

Em Oshiro e Alves (2009) foi considerado o efeito da taxa de deformação através da alteração da velocidade de impacto, $\beta_V = \beta^{q/(q-2)}$, mantendo a massa de impacto inalterada, $\beta_G = \beta^3$. Oshiro (2010) discute a aplicação da variação da massa de impacto, $\beta_G = \beta^{3-q}$, mantendo a velocidade de impacto constante, $\beta_V = 1$. Também avalia possibilidade de aplicar materiais distintos, $\beta_{\sigma_0} \neq 1$. Mazzariol et al. (2011) avalia a resposta do modelo quando o fator de velocidade $\beta_V$ é imposto, na faixa de $0,5 \sim 4,0$, com a massa sendo calculada apropriadamente. A Tabela 2.6 compara a abordagem adotada em cada um desses trabalhos.

**Tabela 2.6** Fatores de escalonamento usando a base VSG para diversos casos apresentados nas referências.

| Variável | $\beta_{\sigma_0}$ | $\beta_G$ | $\beta_V$ |
|---|---|---|---|
| Oshiro e Alves (2009) | 1 | $\beta^3$ | $\beta^{q/(q-2)}$ |
| Oshiro (2010) | 1 | $\beta^{(3-q)}$ | 1 |
| | $\neq 1$ | $\beta^3$ | $\beta_{\sigma_0}\,\beta^{1/(2-q)}\,\beta^{q/(q-2)}$ |
| Mazzariol et al. (2011) | 1 | $\beta_V^{(2-q)}\beta^{(3-q)}$ | $\forall\,\beta_V$ |

É importante notar que a correção através da velocidade fornece resultados melhores que a correção pela massa de impacto. Para que sejam adequados os resultados da correção através de $\beta_G$, é necessário que a massa da estrutura seja muito menor que a massa de impacto (OSHIRO, 2010; MAZZARIOL et al., 2011). Além disso, tendo em vista a influência do fator de tensão de referência, $\beta_{\sigma_0}$, e do parâmetro de material, $q$, mostra-se necessária uma criteriosa caracterização dos materiais.

# Capítulo 3
# Projeto do Painel Duplo e Caracterização de Materiais

Neste capítulo são apresentadas as restrições que direcionaram a definição da geometria de estudo — o painel reforçado — e as escalas possíveis frente aos equipamentos disponíveis no laboratório. Adicionalmente, a geometria e a ordem de montagem e soldagem dos paineis é descrita, Seção 3.2. Parâmetros de material importantes para aplicação das leis de similaridade do Capítulo 2 são obtidos através da caracterização dos materiais nas Seções 3.3 e 3.4, com a calibração do modelo de material na Seção 3.5 e a discussão do fator $\beta_{\sigma_0}$, Seção 3.6.

## 3.1 Delimitação do Estudo

O desenvolvimento da distorção das leis de similaridade apresentadas no Capítulo 2 permitiu que a representação de fenômenos de impacto fosse pensada em escala, o que era preterido no caso de materiais sensíveis à taxa de deformação. Nesse ínterim, o GMSIE-USP (Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas) — financiado pelo FINEP[1] — propôs-se a estudar eventos de colisão envolvendo navios. Sendo inviável realizar o estudo em escala real, foi decidido investigar esses eventos em escala reduzida, utilizando-se as leis de similaridade desenvolvidas em Oshiro e Alves (2009), Oshiro (2010) e Mazzariol et al. (2011).

O objetivo inicial do presente estudo era realizar a colisão de um navio em escala contra um anteparo rígido, tanto experimental, como numericamente. Porém, muitas

[1] Financiadora de Estudos e Projetos

eram as incertezas, não só a respeito da influência de parâmetros de controle do ensaio como velocidade, direção, água, massas reduzidas etc., bem como a respeito da construção de modelos em escala feitos a partir de chapas de aço.

Então, no primeiro momento, foram contatados nautimodelistas, sendo um deles especializado em construir modelos a partir de metais. Porém, este era capaz de construir apenas modelos em latão, com solda de estanho ou cobre-prata. Isso inviabilizava a utilização desses potenciais modelos, visto que o comportamento mecânico do latão não é sensível à taxa de deformação e, além disso, tais soldas seriam pouco resistentes. Assim sendo, seria necessário partir para uma outra abordagem, tal que fosse possível cortar as chapas finas de aço e soldá-las de forma funcional.

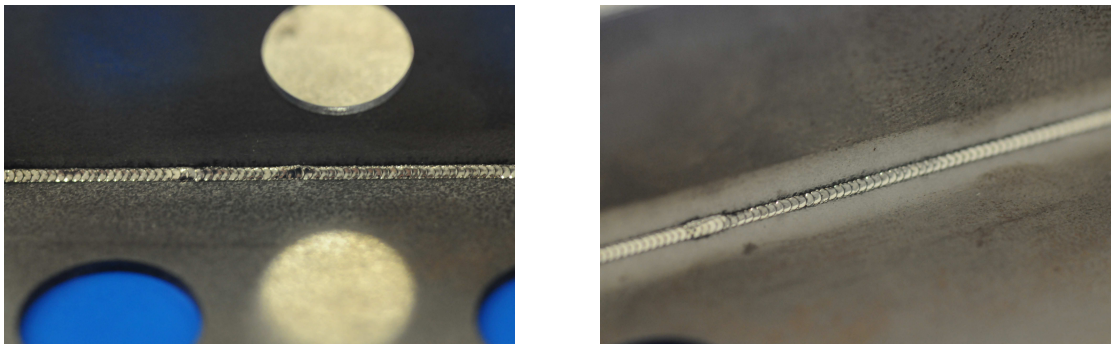
Das possibilidades de corte de chapas, a utilização de jato d'água logo foi descartada por ocasionar pequenas dobras na borda recém-cortada. Quanto ao corte por guilhotina, também causaria um corte imperfeito e limitaria as geometrias que seriam criadas. Uma outra alternativa seria o corte à laser, o qual se mostrou viável para cortar as chapas finas de $0,25\,\mathrm{mm} \sim 1,00\,\mathrm{mm}$. E, na mesma empresa[2] contatada, também se realizava soldas à laser com adição de material, com acabamento bastante similar à soldas de arco-voltaico convencionais, típicas de chapas mais espessas.

Tendo em vista que as geometrias não seriam construídas por um nautimodelista, embora de maneira artesanal, era necessário verificar a viabilidade da construção de certas geometrias e a qualidade das soldas construídas, uma vez que teriam detalhes funcionais e não apenas estéticos. Dessa forma, anterior à construção de um navio-modelo de aço, foi idealizada uma estrutura simplificada que poderia fornecer respostas às duas questões supracitadas: seria uma viga-T, com a alma soldada na flange, com espaço suficiente para fixar as chapas e aplicar a solda. As primeiras vigas com essa geometria foram construídas a partir de chapas de $1,00\,\mathrm{mm}$ e usadas por Mazzariol et al. (2010). Como é possível observar nas Figs. 3.1a e 3.1b, a solda à laser se assemelha à convencional e, como se pode observar na Fig. 3.2, mesmo depois de ensaiada, a solda permanece intacta.

Mais modelos em escala diferentes, nas espessura de $1,00$ e $0,25\,\mathrm{mm}$, foram construídos e ensaiados por Oshiro et al. (2011), Fig. 3.2a e 3.3. Em ambas, foi observado que a solda resistiu à solicitação e pôde ser correlacionada apropriadamente.

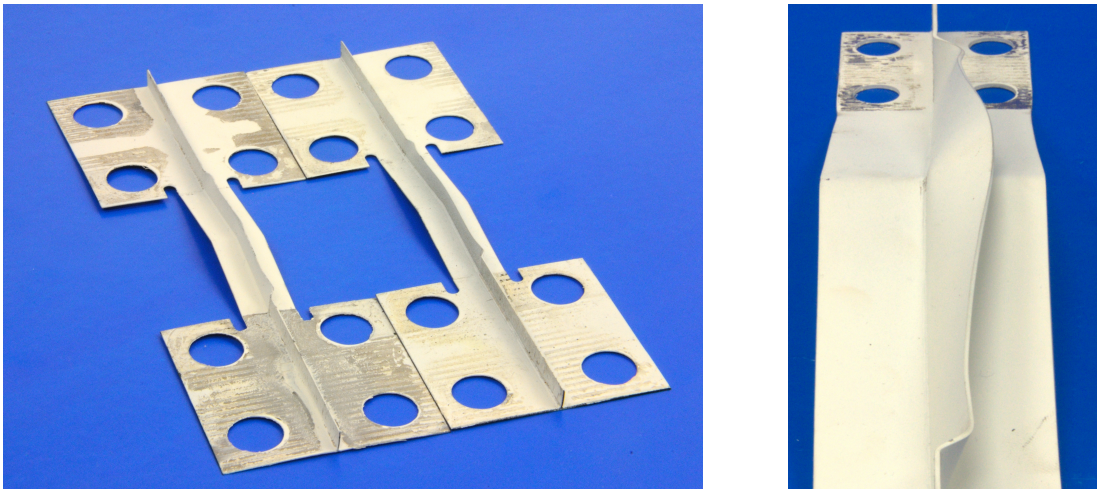
Os experimentos também forneceram informações importantes sobre a fixação dos modelos. Nos ensaios de Mazzariol et al. (2010) foi observado que, em alguns casos, ocorria escorregamento da viga, mesmo aplicando alto torque na fixação; em Oshiro et al. (2011) esse efeito foi minimizado, com pequenas modificações no parafuso de fixação, no mesmo

[2] Lasertools.



(a) (b)

**Figura 3.1** Close-up na solda à laser efetuada na viga-T de 1,0mm.



**(a)** Modelo de escala 1:4, chapas de 0,25mm de espessura.

**(b)** Protótipo construído com chapas de 1,00mm de espessura.

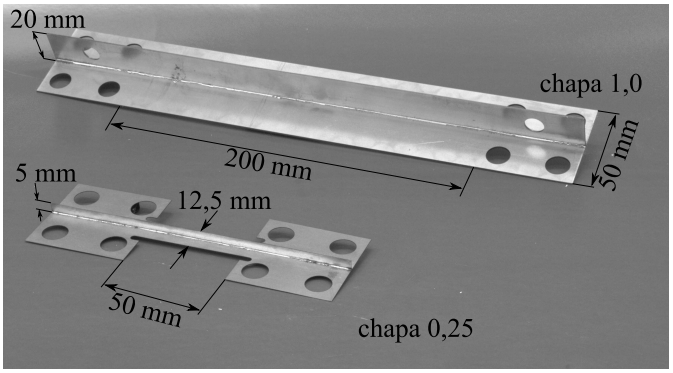
**Figura 3.2** Foto das vigas soldadas e funcionais.

suporte. Em ambos os casos, os suportes fletiram ao centro, mostrando que possuíam flexibilidade, não sendo possível desprezá-la e que, portanto, deveria ser considerada no projeto de um suporte em escala maior.

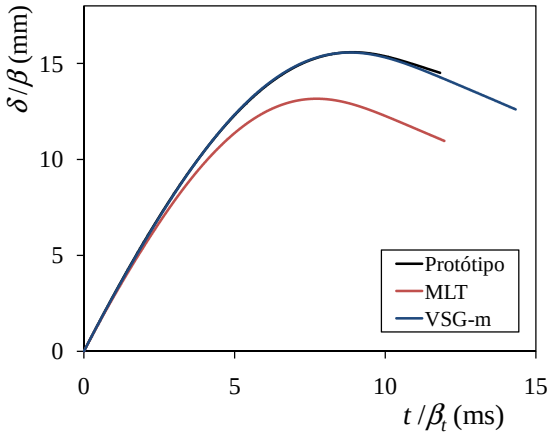
Para contornar essa flexibilidade e dificuldade de fixação para os modelos de $0,25\,\mathrm{mm}$, uma barra ligando os dois suportes foi incluída, Fig. 3.4a, ao suporte convencional, Fig. 3.4b. Esses achados foram importantes para alertar sobre a dificuldade, não só de fixar o elemento a ser impactado, mas do cuidado ao escalonar também a rigidez da fixação.

Terminada essa etapa, deu-se início à definição de uma nova geometria para ser estudada. Um painel representando um duplo fundo simplificado foi idealizado, inspirado em Wang, Arita e Liu (2000) no seu estudo de encalhamentos de navios, Fig. 3.5. Ou seja, seria mantida a ideia de duas chapas horizontais paralelas, chapas laterais fechando o

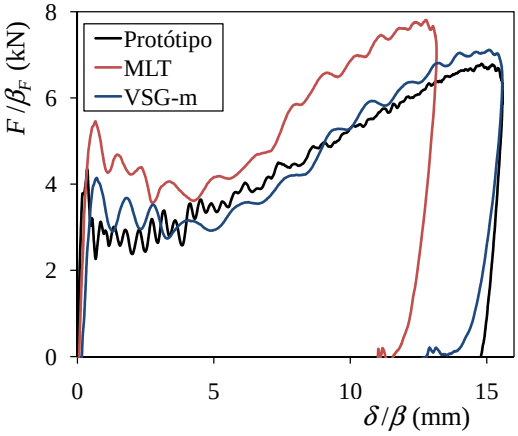
entorno e seriam incluídas quantas anteparas fossem possíveis. Tendo em vista o interesse de realizar os experimentos em duas escalas, i.e., protótipo e modelo, algumas restrições




**(a)** Vigas protótipo e modelo.

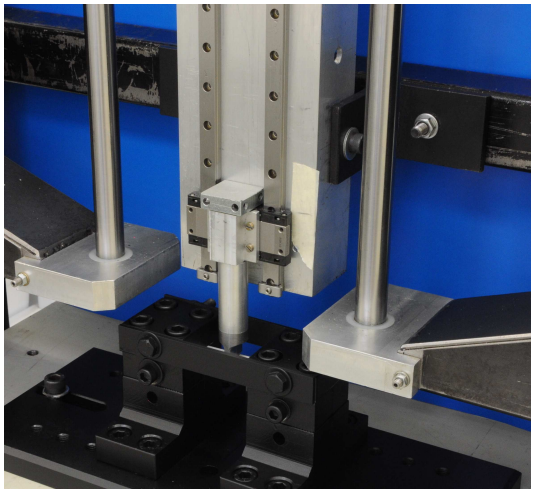



**(b)** Deslocamento corrigido.

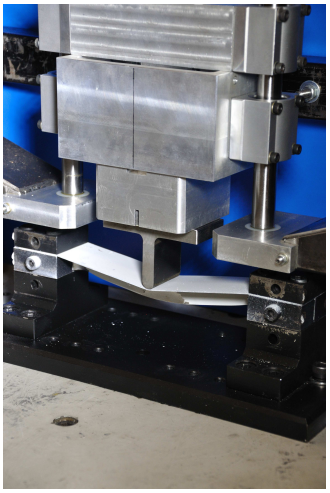



**(c)** Força corrigida em função do deslocamento corrigido.

**Figura 3.3** Experimentos de protótipo, modelo em escala utilizando similaridade imperfeita por Oshiro et al. (2011).

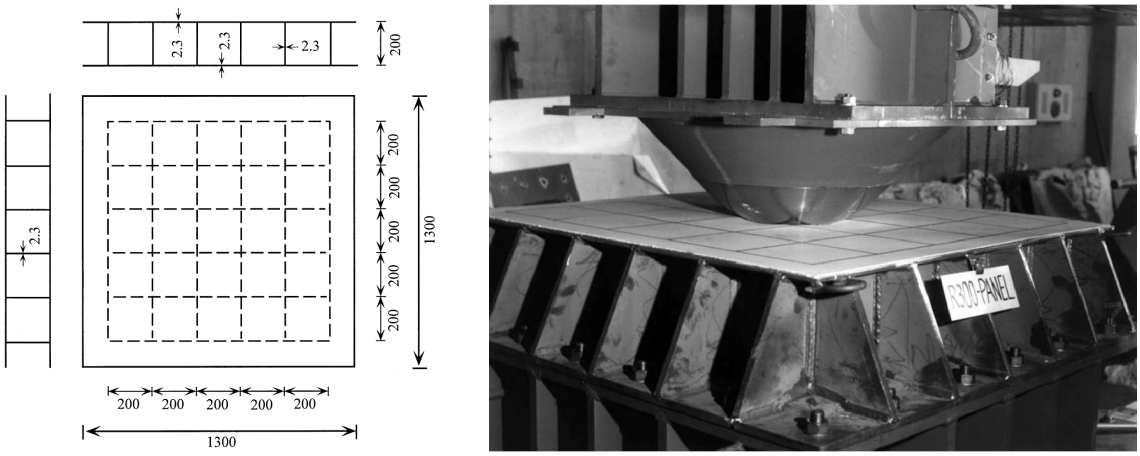


**(a)** Viga de chapa 0,25mm com suporte para aumentar rigidez



**(b)** Viga de chapa 1,00mm com suporte simples

**Figura 3.4** Aparato experimental para o ensaio das vigas de Oshiro et al. (2011).




**(a)** Desenho de painel duplo de espessura 2,3mm.

**(b)** Arranjo experimental dos ensaios quase estáticos.

**Figura 3.5** Dimensões gerais e experimentos realizados em paineis duplos por Wang, Arita e Liu (2000).

tiveram de ser consideradas:

1. Limite superior de massa de impacto do martelo: 1000 kg;
2. Limite inferior de massa de impacto do MIBE: $0,280$ g;
3. Chapa de aço de menor espessura: $0,25$ mm;
4. Chapas de aço disponíveis comercialmente (métricas): 2,0mm, 2,5mm, 3,0mm 4,0mm etc.;
5. Dimensões da bigorna do martelo: 1,0 x 1,0 m.

Era desejável a maior escala possível para maximizar as diferenças entre as respostas dos modelos e protótipo; e também que o protótipo fosse construído da menor espessura para que não fosse muito resistente, tal que permitisse deslocamentos consideráveis. Então, partindo da massa mínima de 280 g, obtém-se para massa de impacto do protótipo para uma espessura de 4 mm:

$$\beta_{0,25mm;4mm} = \frac{4mm}{0,25mm} = 16 \rightarrow G_{impacto} = 1146,7\,\text{kg} \quad \text{(maior que o máximo)}, \tag{3.1}$$

e

$$\beta_{0,25mm;3mm} = \frac{3mm}{0,25mm} = 12 \rightarrow G_{impacto} = 483,8\,\text{kg} \quad \text{(OK)}, \tag{3.2}$$

para uma espessura de 3 mm.

Assim sendo, a maior escala possível é $\beta = 12$. As dimensões gerais do painel estão limitadas a 1,0 x 1,0 m e foram adotadas como representativas do protótipo. O painel modelo terá, portanto, aproximadamente 83 x 83 mm. Nessa dimensão, o espaço de acesso para efetuar a solda seria menor do que os modelos viga-T, da Fig. 3.3. Assim sendo, definiu-se apenas uma antepara intermediária, criando uma interseção cruciforme que seria impactada ao centro. Em linhas gerais, o painel se pareceria com o da Fig. 3.5.

Embora fosse desejado engastar os paineis tal qual Wang, Arita e Liu (2000), as dificuldades de fixação em Mazzariol et al. (2010) e Oshiro et al. (2011) guiaram para a utilização de apoios simples, na tentativa de eliminar o efeito da escala na fixação.

## 3.2 Descrição da Geometria e Fabricação

O material de espessura 0,25 mm foi adquirido em formato de bobina, sendo necessário retirar segmentos de chapas e planificá-los antes de qualquer utilização. As restrições de fabricação do painel em escala exigiram que este fosse constituído da menor quantidade de peças possível, visto que era difícil manter a geometria em posição para soldagem. Além disso, um menor número de componentes implica em menor quantidade de solda, diminuindo os riscos de empenamento por contração. A Fig. 3.6 mostra a sequência de montagem do painel de 0,25 mm, constituído das peças cortadas à laser cujos desenhos estão no Apêndice A. A soldagem é iniciada nas chapas em cruz ao centro, fixando-as à chapa superior (de ponta-à-cabeça), continuando à junção das demais. Tal ordem fez com que a chapa inferior servisse como tampa, tendo fendas para que as chapas laterais e centrais pudessem ser soldadas mesmo após o fechamento do painel; contudo permitindo maior controle da solda naquela região crítica. As Figs. 3.8a e 3.8b mostram alguns detalhes dos testes de soldagem realizados.

As chapas que dariam origem ao protótipo foram adquiridas já planificadas, sendo encaminhadas diretamente ao corte à laser. O painel duplo de 3,00 mm seguiu o mesmo princípio construtivo do modelo de 0,25 mm, diferindo somente na chapa base, com menos fendas, tal que proporcionasse maior rigidez e menor empenamento durante a soldagem[3]. Também para reduzir a influência da solda nas propriedades mecânicas, somente um dos lados das junções foi soldada, conforme Fig. 3.10. As informações gerais de ambos os paineis encontram-se na TAb; 3.1, com imagem em ângulo, na Fig. 3.7; os desenhos de

[3]Realizada em empresa terceira, usando a técnica *TIG - Tungsten Inert Gas*, recomendada devido à reduzida espessura.

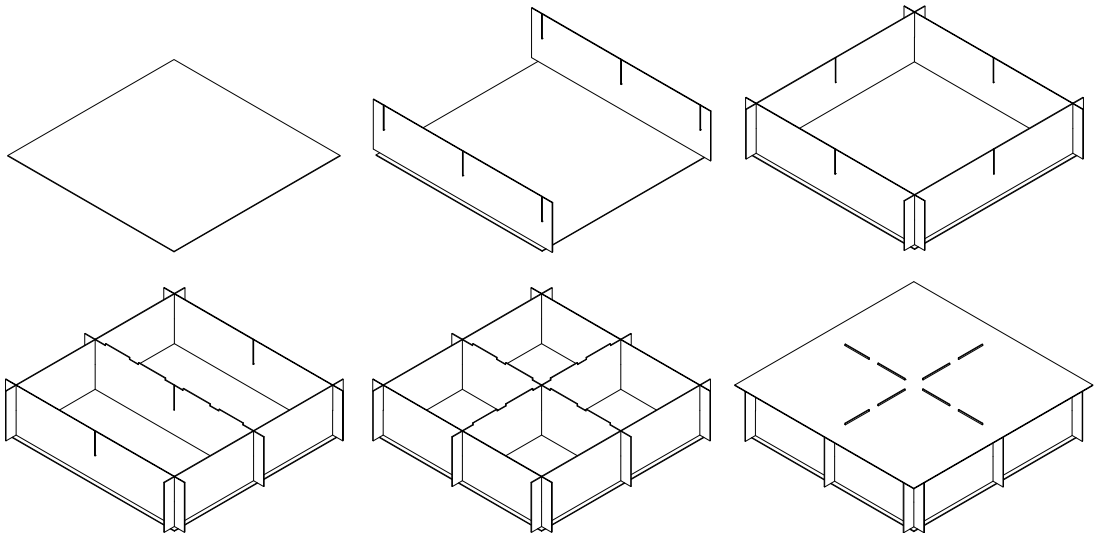


**Figura 3.6** Sequência de montagem do painel de 3,00mm de espessura, da esquerda para a direita, de cima para baixo. Ao fim, o painel aparece de ponta-à-cabeça. Os paineis modelo, de 0,25mm de espessura possuem montagem similar, diferindo apenas no desenho da chapa inferior.

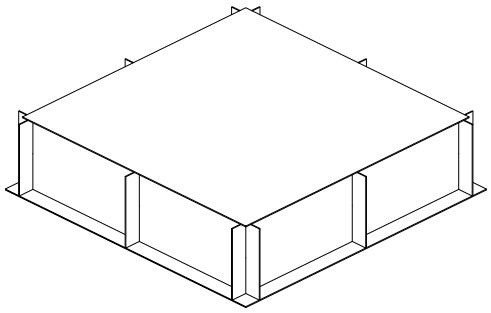
corte também se encontram no Apêndice A.

Embora houvesse material para construção de modelos de outras escalas, a partir de chapas de aço de espessura de $0,5$ e $1,0$ mm, o uso desses materiais foi descartado. Quanto ao primeiro, a avaliação preliminar das propriedades do material foram inconclusivas, mostrando incertezas em sua caracterização. Ao segundo, o já elevado custo para soldagem do painel de $0,25$ mm se tornaria ao menos 4 vezes maior. Não sendo disponível outro método de soldagem, o uso desse material e sua correspondente escala também foi preterida.

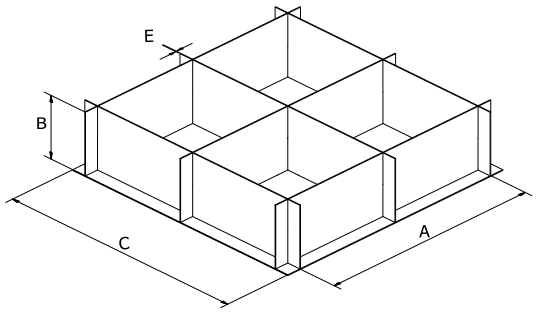
**Tabela 3.1** Informações gerais das geometrias a serem utilizadas nos ensaios para o protótipo e modelos. Dimensões em mm.

| Escala | Dimensões Gerais (A) | Altura (B) | Chapa Inferior (C) | Chapa Superior (D) | Espessura da Chapa (E) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/1 | 888 | 240 | 1000 | 928 | $3,00$ |
| 1/12 | 74 | 20 | 83 | 77 | $0,25$ |

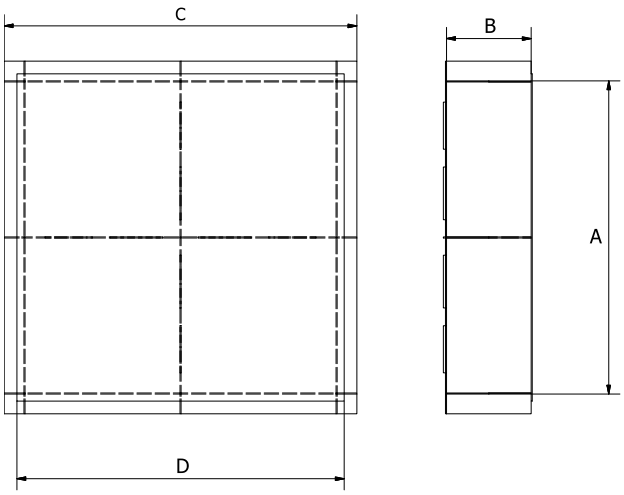
Os modos de flambagem de uma seção em cruz dependem da forma com a qual ela é fixada. Assim sendo, foi idealizado que somente as extremidadas da borda da chapa inferior fossem apoiadas simplesmente em um suporte; mais próximo possível de Wang, Arita e Liu (2000), sem que estivesse engastado. Além disso, essa fixação deixa a parte central suspensa, contornando as características construtivas do painel, i.e., a borda da interseção cruciforme para baixo da chapa-base, como pode ser observado em Fig. 3.9.



**(a)** Vista isométrica do painel completo.




**(b)** Vista isométrica do painel sem a chapa superior.

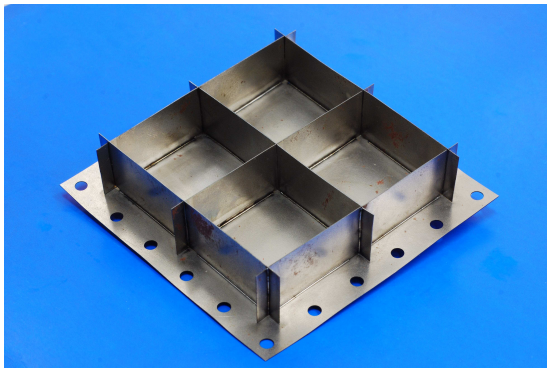



**(c)**

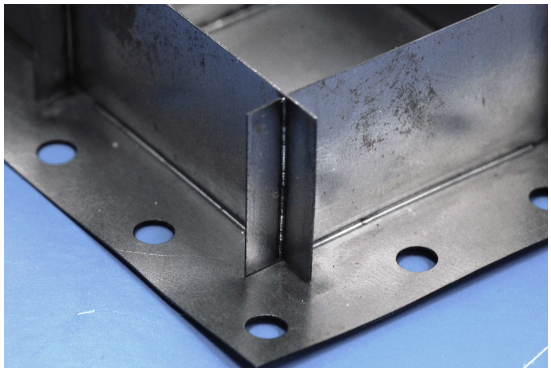
**Figura 3.7** Dimensões gerais do painel duplo. Ver Tabela 3.1.

O suporte do protótipo foi construído a partir da barras maciças de seção quadrada de lado 50 mm, formando um quadrado de perímetro composto por 4 conjuntos de três dessas barras paralalemente, conforme Fig. 3.11b. As extremidades de todas elas foram unidas através de cantoneiras, com furos passantes e presas com porcas e parafusos. Ao passo que esse conjunto fora fixado à bigorna através de furos por parafusos. Esse arranjo, como pode ser observado na Fig. 3.11a, garante que a porção central-inferior do painel não entre em contato com a bigorna.

Similarmente, o suporte do painel modelo, Fig. **??**, foi construído a partir de barras quadradas de 10 mm de lado, criando-se uma moldura com furos para fixação na bigorna, além de sulcos centrais no sentido longitudinal, tal que as extremidades da chapas laterais — abaixo da chapa inferior — não tocassem o suporte.

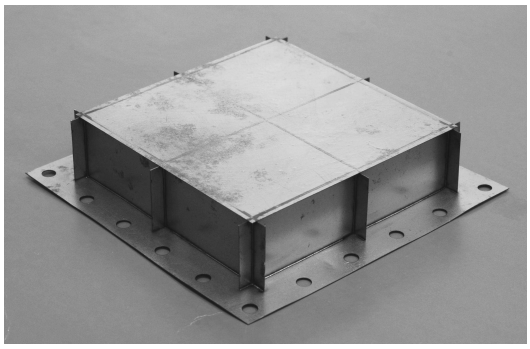


**(a)** Vista do interior do painel de 0,25mm. As chapas centrais são soldadas primeiro na chapa superior e depois na chapa inferior.

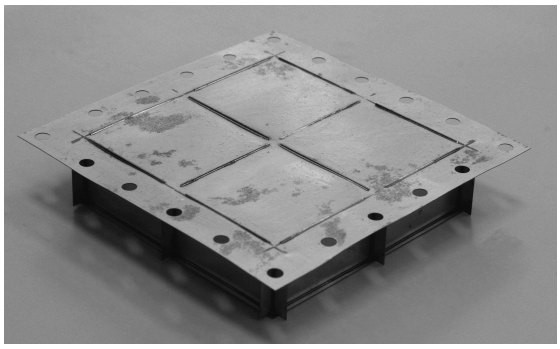


**(b)** Detalhe das soldas na junção das chapas laterais.

**Figura 3.8** Painel duplo de 0,25mm em teste do processo de soldagem.



**(a)** Vista em ângulo da chapa superior e lateral.



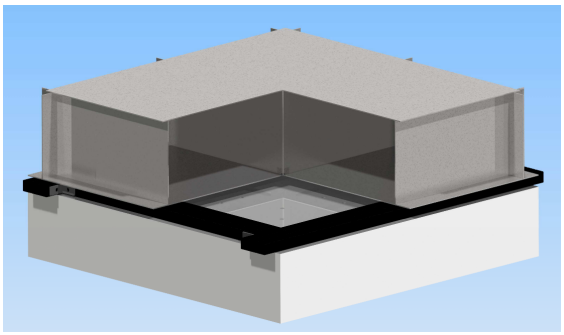
**(b)** Vista inferior.

**Figura 3.9** Painel duplo modelo, construído a partir de chapas de 0,25mm.

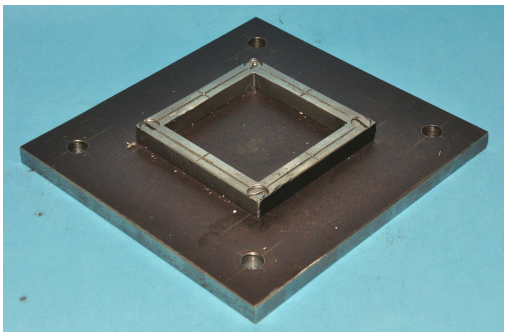
**(a)** Vista das soldas internas (de ponta-à-cabeça).

**(b)** Vista inferior.

**Figura 3.10** Construção do painel de 3,0mm.



**(a)** Computação gráfica do suporte para o painel protótipo. Recorte de 1/4 para facilitar a visualização.



**(b)** Suporte para o painel modelo.

**Figura 3.11** Geometrias dos suportes utilizados para os ensaios dos paineis.

## 3.3 Ensaios de Tração Quase-estáticos

O procedimento de similaridade apresentado no Capítulo 2 demanda que sejam conhecidas as propriedades mecânicas dos materiais utilizados para a construção de protótipos e modelos. Essas propriedades também são necessárias para a modelagem em elementos finitos, a ser apresentada no Capítulo 6.

Os ensaios mecânicos de tração a baixas e altas taxa de deformação foram realizados usando aço 1006 proveniente de chapas de diferentes espessuras. Para alguns casos, foi utilizada técnica de correlação de imagens para obter informações adicionais sobre a deformação nas regiões de estricção. É importante ressaltar que o modelo de material considerado no procedimento apresentado no Capítulo 2 não se ajusta completamente ao comportamento do material ensaiado, o que resulta em algumas discussões e assunções.

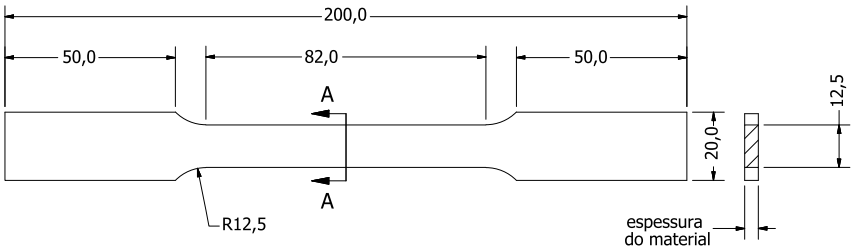
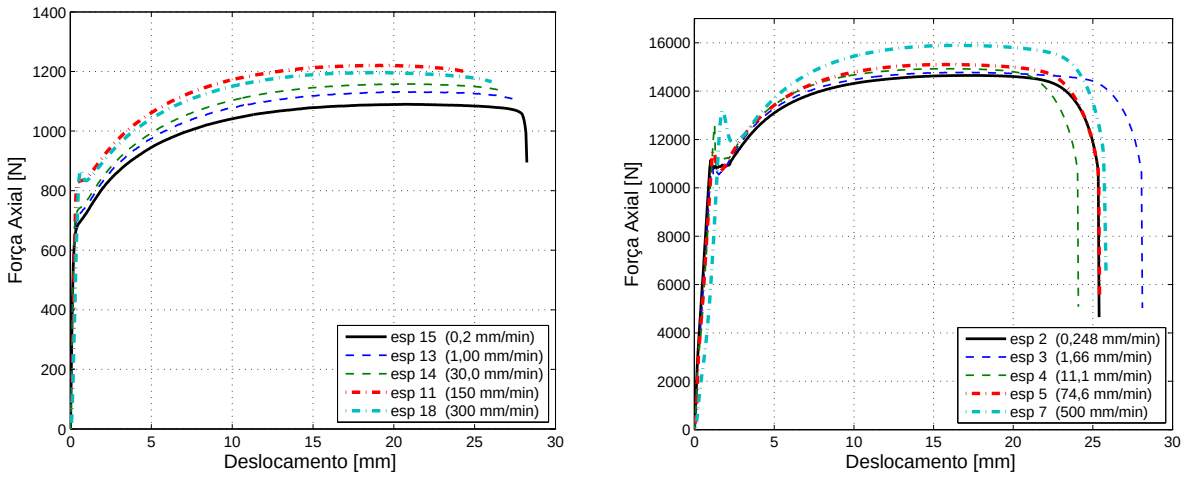



**Figura 3.12** Espécime de tração conforme norma ASTM E8.

Os espécimes foram cortados a laser, na direção de laminação, segundo as dimensões da norma ASTM E8, *"sheet type Rectangular Tensile Test"*, ver Fig. 3.12. Os ensaios foram realizados em uma máquina de ensaios universal[4] controlada por computador, cuja velocidade máxima do cabeçote atinge 500 mm/min. Os espécimes foram fixados com garras em forma de cunha, com aperto manual. Um extensômetro tipo *clip-gauge* com 50 mm de comprimento foi preso ao espécime, Fig. 3.13, e forneceu a deformação de

[4]Fabricante Instron, modelo 3369, capaz de realizar ensaios de tração, compressão e flexão.

**Figura 3.13** Arranjo para ensaio de tração com extensômetro tipo Clip-Gauge.




**(a)** Material t=0,25 mm **(b)** Material t=3,00 mm

**Figura 3.14** Dados obtidos da máquina de tração para os aços de 0,25 e 3,00mm de espessura.

engenharia em função do tempo. As leituras de força foram obtidas a partir de uma célula de carga, cuja força máxima é de 50 kN, própria do equipamento. As diferentes taxas de deformação foram obtidas impondo diferentes velocidades ao movimento do cabeçote, conforme Tabela 3.2. Ao final do ensaio, o programa do equipamento exportou um arquivo com as grandezas — força, deformação, deslocamento do cabeçote — em função do tempo, Fig. 3.14.

As grandezas obtidas deste ensaio, deformação e tensão de engenharia, não são comumente utilizadas nos programas de elementos finitos comerciais. Portanto, é necessário transformá-las em deformação e tensão verdadeiras (ou logarítmicas), usando as relações:

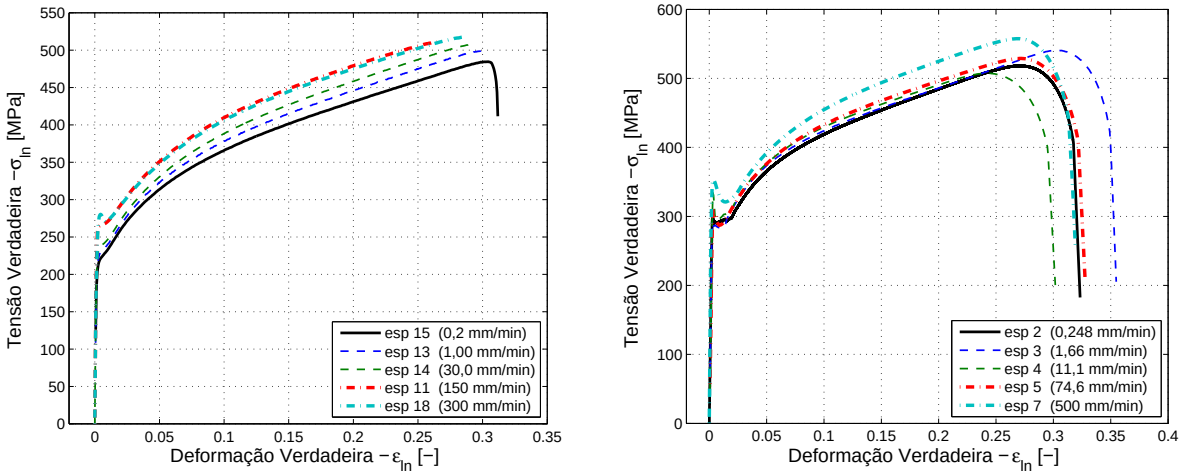
**Tabela 3.2** Velocidades de ensaio e taxa de deformação média para os espécimes de tração de diferentes espessuras.

| Espessura [mm] | Identificação [–] | Velocidade [mm/min] | Taxa de deformação [1/s] |
|---|---|---|---|
| 0,25 | E15 | $0,2$ | $3,564\,.10^{-5}$ |
| | E13 | $1,00$ | $1,777\,.10^{-4}$ |
| | E14 | $30$ | $5,330\,.10^{-3}$ |
| | E11 | $150$ | $2,629\,.10^{-2}$ |
| | E18 | $300$ | $5.342\,.10^{-2}$ |
| 3,00 | E2 | $0,248$ | $5.081\,.10^{-5}$ |
| | E3 | $1,66$ | $3.416\,.10^{-4}$ |
| | E4 | $11,1$ | $2.236\,.10^{-3}$ |
| | E5 | $74,6$ | $1.598\,.10^{-2}$ |
| | E7 | $500$ | $9.838\,.10^{-2}$ |

$$\varepsilon_{ln} = \ln(1 + \varepsilon_{eng})\,, e \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ln} = \sigma_{eng}(1 + \varepsilon_{eng})\,. \tag{3.4}$$

resultando nos gráficos $\sigma \times \varepsilon$ das Figs. 3.15a e 3.15b.




**(a)** Material t=0,25 mm **(b)** Material t=3,00 mm

**Figura 3.15** Curvas obtidas após tratamento dos dados de ensaios de tração para diferentes velocidades.

Com o objetivo de extrair mais informações acerca da curva quase-estática de refe-

rência, foi utilizado o método de correlação digital de imagem — DIC[5] (SUTTON, 2008). Tal técnica analisa o padrão de deslocamentos de pontos de referência através de fotos sucessivas e calcula as deformações ocorridas.

Para esses ensaios, os espécimes foram pintados com tinta esmaltada em spray branca e borrifados com tinta similar preta tal a formar um padrão de pontos randômicos, necessário para os cálculos do programa, Fig. 3.16a. Ainda com ambas as tintas não totalmente secas, o espécime foi fixado tal qual outros exemplares de tração, Figs. 3.16b e 3.16c. As fotos foram tiradas utilizando tripé e câmera de $12,3$ MPixels[6], com lente macro de distância focal[7] 105 mm. Um conjunto de iluminação a LED (Diodos Emissores de Luz) foi utilizado tal a permitir que se fossem usadas abertura de f/8 e ISO200, proporcionando maior nitidez às imagens.

O programa utilizado para obter as deformações por DIC fornece deformações de Green,

$$\varepsilon_{green} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \tag{3.5}$$

sendo $\lambda = L_i/L_0$, o alongamento de uma fibra de comprimento instantâneo $L_i$ e inicial $L_0$ (TIMOSHENKO; GOODIER, 1987),

$$\varepsilon_{green} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \tag{3.6}$$

donde se obtém a deformação logarítmica,

$$\varepsilon_{ln} = \ln\left(\lambda\right) = \ln\left(\sqrt{2\,\varepsilon_{Green} + 1}\right)\,. \tag{3.7}$$

Esse cálculo é realizado tanto para as deformações longitudinais ao ensaio de tração, como para as transversais.

Quanto às tensões, a de engenharia é obtida a partir de

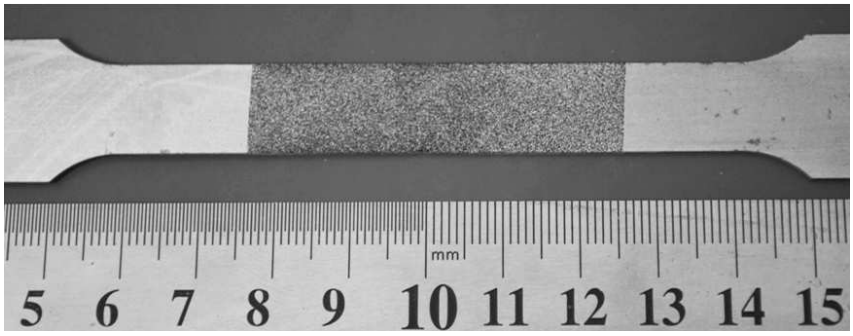
$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0}\,, \tag{3.8}$$

sendo $F$ a força da célula de carga do ensaio de tração e $A_0$ a área inicial da seção do

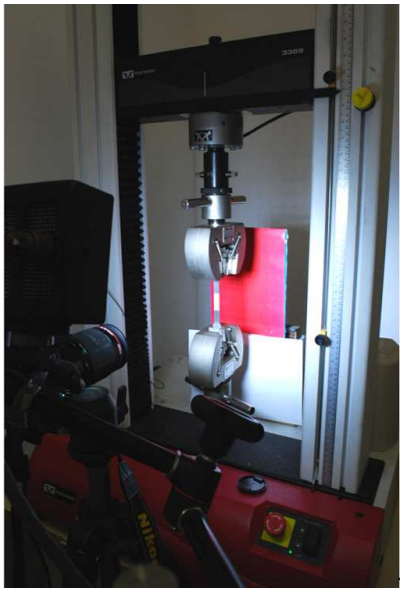
[5] Do inglês *Digital Image Correlation*.

[6] Nikon, modelo D90. Faixa de sensibilidade ISO de 100 a 3200, velocidades de obturador de 1/4000s a 30s.

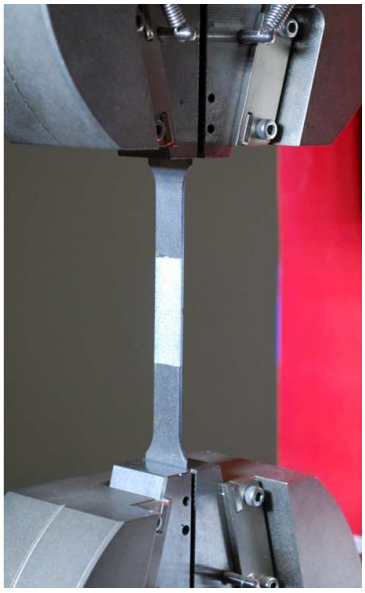
[7] Objetiva Vivitar series 1L 105mm f.2.5 macro, Nikon F-mount. Equivalente a 160mm quando em conjunto com a câmera utilizada.




**(a)** Padrão de pintura aleatória.



**(b)** Arranjo experimental com luz e câmera fotográfica



**(c)** Detalhe das garras de fixação do espécime em formato de cunha

**Figura 3.16** Ensaio de tração para Correlação Digital de Imagem.

corpo de prova de largura $l_0$ e espessura $e_0$.

Para o cálculo da tensão verdadeira, $\sigma_{ln}$, é necessário saber a área instantânea , $A_i$, além da carga aplicada:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{A_i} \tag{3.9}$$

sendo

$$A_i = l_i \cdot e_i \tag{3.10}$$

onde $l_i$ e $e_i$ são a largura instantânea e a espessura instantânea, respectivamente. Pela definição de alongamento,

$$\lambda_{trans} = \frac{l_i}{l_0}\,, \tag{3.11}$$

é possível escrever a largura instantânea como:

$$l_i = l_0 \cdot \lambda_{trans}\,, \tag{3.12}$$

e, através da definição de deformação de engenharia:

$$l_i = l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{trans,eng})\ , \tag{3.13}$$

sendo $\varepsilon_{trans,eng}$ a deformação transversal de engenharia.

Da mesma forma, a espessura instantânea

$$e_i = e_0 \cdot (1 + \varepsilon_{esp,eng})\ . \tag{3.14}$$

Assim, é possível inserir as Eqs. 3.13 e 3.14 na Eq. 3.9:

$$\sigma_{ln} = F\,\frac{1}{l_0\,(1+\varepsilon_{trans,eng})}\,\frac{1}{e_0\,(1+\varepsilon_{esp,eng})} = \frac{\sigma_{eng}}{(1+\varepsilon_{trans,eng})\,(1+\varepsilon_{esp,eng})}\,, \tag{3.15}$$

ou seja, tensão verdadeira em função de deformações de engenharia e tensão de engenharia.

Como durante o ensaio foram tiradas somente fotos 2D, no plano X-Y, i.e., longitudinal-transversal, Fig. 3.18, não há informações de deformação ao longo da espessura. Assim, se a deformação na espessura for assumida como igual à transversal, i.e., $\varepsilon_{esp,eng} = \varepsilon_{transv,eng}$, a Eq. 3.15, pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{l_0\,e_0}\,\frac{1}{(1+\varepsilon_{transv,eng})^2}\ , \tag{3.16}$$

ou ainda, em função da saída do programa, ou seja, deformações transversais de Green:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{l_0\,e_0}\,\frac{1}{(2\,\varepsilon_{transv,green}+1)} \quad = \frac{\sigma_{eng}}{2\,\varepsilon_{trans,Green}+1} \tag{3.17}$$

Em resumo, os dados provenientes do programa de DIC, Fig. 3.18, são tratados con-

forme fluxograma da Fig. 3.17, utilizando as Eqs. 3.5–3.17, resultando nas curvas das Figs. 3.19a e b.

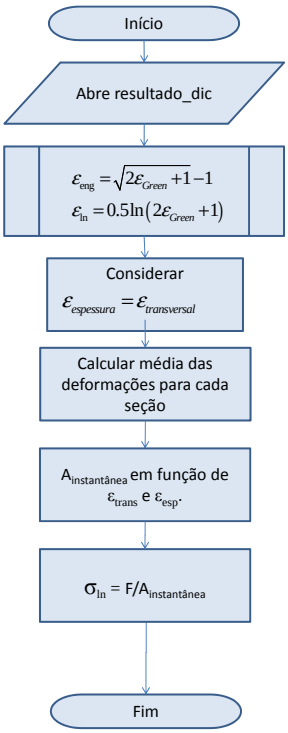
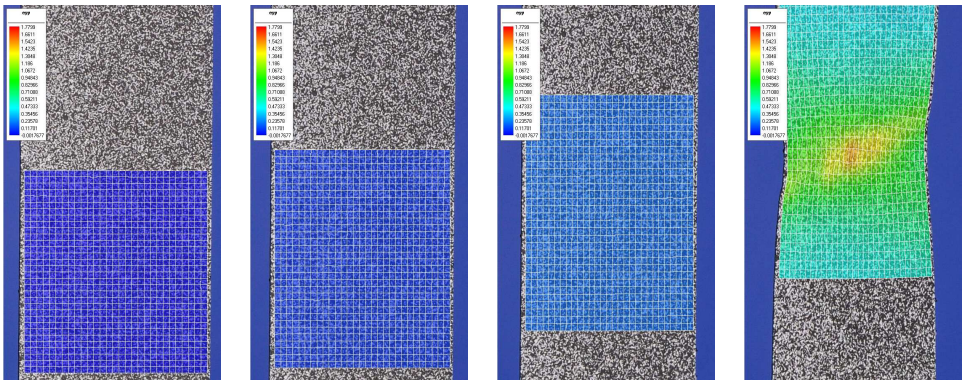



**Figura 3.17** Fluxo do código escrito em MATLAB para tratamento dos dados obtidos a partir do programa de análise de imagens DIC.

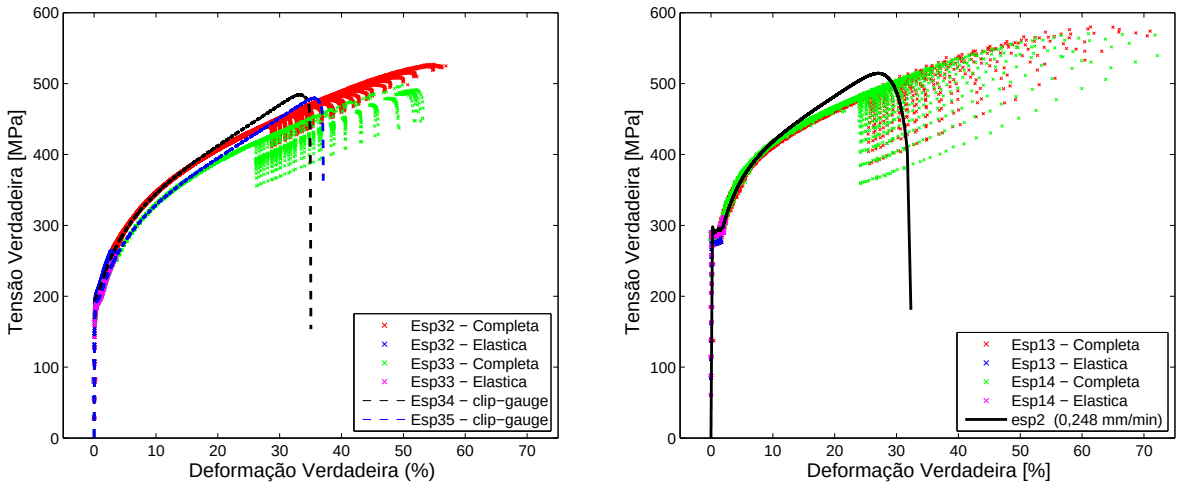


**(a)** Foto n$^0$ 1. **(b)** Foto n$^0$ 35. **(c)** Foto n$^0$ 70. **(d)** Foto n$^0$ 136.

**Figura 3.18** Sequência de imagens após tratamento do programa de DIC, "7-D". O espécime está em padrão randômico branco-e-preto, enquanto a malha deformada mostra o gradiente de deformações na direção longitudinal até instantes antes da falha. Fotos a cada intervalo de 5s.

## 3.4 Ensaios de Compressão Dinâmicos

Para a caracterização dinâmica foram utilizados corpos de prova em formato circular, Fig. 3.21, também cortados a laser. Esses corpos foram ensaiados usando uma barra de

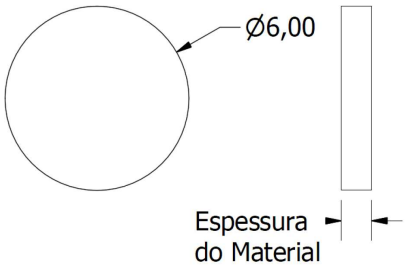



**(a)** Material t=0,25 mm. Adicionalmente, foram inseridas duas curvas de ensaio realizado com clip-gauge, corpos de prova 34 e 35.

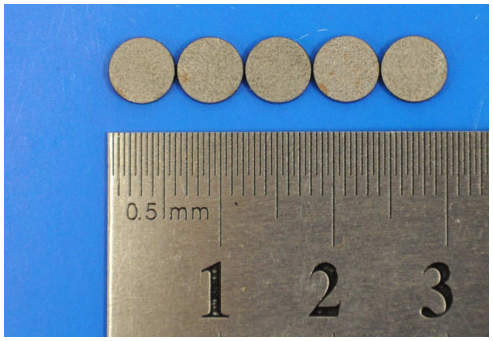
**(b)** Material t=3,00 mm e uma curva quase-estática obtida com o uso de clip-gauge.

**Figura 3.19** Curvas obtidas após tratamento dos dados obtidos por DIC. As porções elásticas contemplam menor intervalo de tempo entre fotos. As franjas indicam o descarregamento de uma seção transversal.

Hopkinson de Compressão *Split Hopkinson Pressure Bar - SHPB*, Fig. 3.21a.




**(a)** Espécime de 0,25mm de espessura. Os de 3,0mm de espessura possuem 10mm de diâmetro.



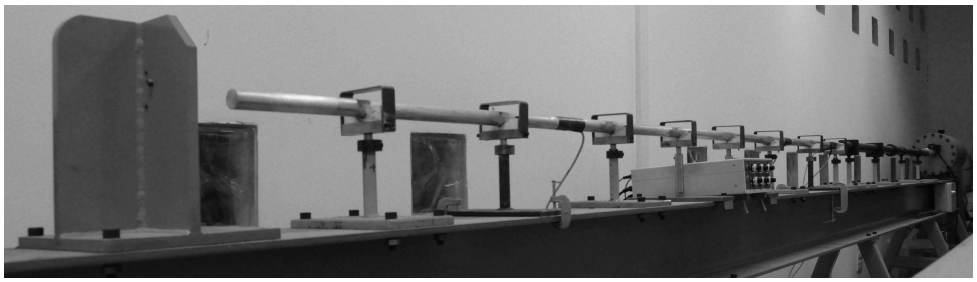

**(b)** Corpo de Prova e=0,25mm

**Figura 3.20** Corpos de prova para ensaio de compressão na SHPB.

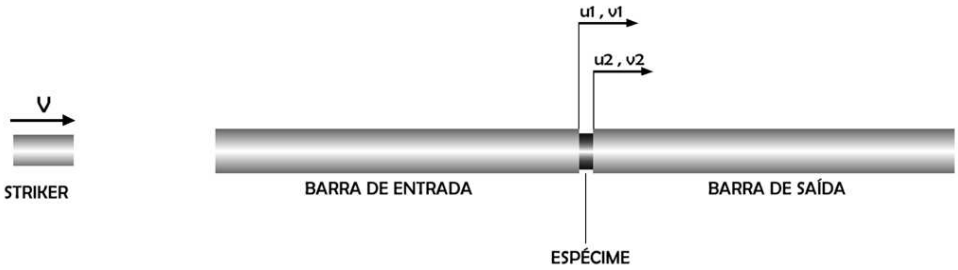
O aparato experimental (da SHPB) consiste em:

- Duas longas barras cilíndricas de aço, de entrada e saída, apoiadas em uma série de suportes com pouco atrito;
- Extensômetros na barra de entrada e saída;
- Reservatório de ar sob pressão;
- Impactador (ou *striker*);
- Tubo-guia do impactador;

- Módulo Conversor e Amplificador do sinal dos extensômetros, especialmente desenvolvido para altas frequências;
- Placa de aquisição National Instruments NI 6110E $5x10^6$ Amostras/s;
- Computador com software MATLAB.



**(a)** Aparato experimental da SHPB.




**(b)** Esquema de uma Barra de Hopkinson (SHPB) (MOURA, 2006).

**Figura 3.21** Barra de Hopkinson de Compressão.

Para a realização do teste, o espécime é posicionado entre as duas barras, conforme Fig. 3.21b; o ar comprimido do reservatório é liberado, acelerando o *striker* pelo tubo-guia até colidir com a barra de entrada. Este fenômeno gera uma onda de compressão de comprimento duas vezes o tamanho do striker e esta se propaga até atingir a interface da barra de entrada com o corpo de prova. Neste momento, parte da onda é refletida na barra de entrada como onda de tração, e outra parte se propaga pelo espécime até atingir a interface do espécime com a extremidade da barra de saída. Neste segundo momento, é gerada uma onda de compressão – onda transmitida – na barra de saída.

A velocidade dessa interface, $v_1$, pode ser escrita em função da velocidade de propagação da onda na barra de entrada, $c_b$, e das ondas de deformação incidente, $\varepsilon_{eng,i}$, e refletida, $\varepsilon_{eng,r}$,

$$v_1(t) = -c_b(\varepsilon_{eng,i} - \varepsilon_{eng,r}) \,, \tag{3.18}$$

sendo $c_b = \sqrt{E_b/\rho_b}$; $E_b$, módulo de elasticidade e $\rho_b$, a densidade do material da barra.

Para a interface 2, entre espécime e barra de saída, a velocidade $v_2$, em função da onda transmitida, $\varepsilon_{eng,t}$ e $c_b$, fica

$$v_2(t) = -c_b\,\varepsilon_{eng,t}\,. \tag{3.19}$$

A taxa de deformação do corpo de prova (CP) é obtida em função da diferença do movimento entre as duas interfaces, dividido pelo comprimento inicial do espécime, $L_0$,

$$\dot{\varepsilon}_{eng,cp} = \frac{v_2 - v_1}{L_0}\,. \tag{3.20}$$

Substituindo $v_1$ e $v_2$, das Eqs. 3.18 e 3.19, na Eq. 3.20, a taxa de deformação de engenharia no espécime é:

$$\dot{\varepsilon}_{eng,cp} = \frac{c_b}{l_0}\left(\varepsilon_{eng,i} - \varepsilon_{eng,r} - \varepsilon_{eng,t}\right)\,, \tag{3.21}$$

escrita em função das medições de deformação $\varepsilon_{eng,i}$, $\varepsilon_{eng,r}$ e $\varepsilon_{eng,t}$; estas obtidas através dos extensômetros fixados às barras. A força propagada na barra de entrada, até a interface 1, é igual a

$$F_1 = E_b\left(\varepsilon_{eng,i} + \varepsilon_{eng,r}\right)A_b\,, \tag{3.22}$$

sendo $A_b$, área da seção da barra. Na barra de saída, a onda de compressão resulta em

$$F_2 = E_b\left(\varepsilon_{eng,t}\right)A_b\,. \tag{3.23}$$

Ao atingir o equilíbrio de forças no espécime, ou seja, $F_1 = F_2$, as Eqs. 3.21 e 3.22 resultam em

$$\varepsilon_{eng,i} + \varepsilon_{eng,r} = \varepsilon_{eng,t}\,. \tag{3.24}$$

Assumindo equilíbrio de tensões no espécime, estado unidimensional de tensões e propagação de ondas sem dispersão, a taxa de deformação de engenharia, $\dot{\varepsilon}_{eng,cp}$, deformação de engenharia, $\varepsilon_{eng,cp}$, e tensão de engenharia, $\sigma_{eng,cp}$, podem ser estimadas por (RAMESH, 2008)

$$\dot{\varepsilon}_{eng,cp}(t) = -\frac{2c_b}{L_0}\,\varepsilon_{eng,r}(t)\,, \tag{3.25}$$

$$\varepsilon_{eng,cp}(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eng,cp}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \text{ e} \tag{3.26}$$

$$\sigma_{eng,cp}(t) = \frac{P_1 + P_2}{2\,A_s} = \frac{E_b\,A_b}{A_s}\,\varepsilon_{eng,t}(t)\,. \tag{3.27}$$

O comprimento instantâneo do espécime, $L_i$, é dado por

$$L_i = L_0 + u_1 - u_2 \tag{3.28}$$

Para o cálculo da tensão verdadeira, é necessário obter a àrea instantânea e a deformação verdadeira. Assim, considerando a conservação de volume para a porção plástica, $A_0 \cdot L_0 = A_i \cdot L_i$, obtém-se a área instantânea do corpo de prova, $A_i$,

$$A_i = A_0\,\frac{L_0}{L_i} \tag{3.29}$$

sendo $L_0$ o comprimento inicial e $u_1$ e $u_2$ obtidos através da integração de $v_1$ e $v_2$. Da definição de deformação verdadeira,

$$\varepsilon_{ln,cp} = \ln(\lambda) = \ln\left(\frac{L_i}{L_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right)$$

$$\varepsilon_{ln,cp} = \ln\left(1 + \varepsilon_{eng,cp}\right)\,. \tag{3.30}$$

visto que $\varepsilon_{eng,cp} = (u_2 - u_1)/L_0$. Dessa forma, a tensão verdadeira pode ser escrita como

$$\sigma_{cp} = \frac{F}{A_i} = \frac{F}{A_0}\,\frac{L_i}{L_0}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{F}{A_0}\,(1 - \varepsilon_{eng,cp})$$

$$\sigma_{cp} = \sigma_{eng,cp}\,(1 - \varepsilon_{eng,cp})\,. \tag{3.31}$$

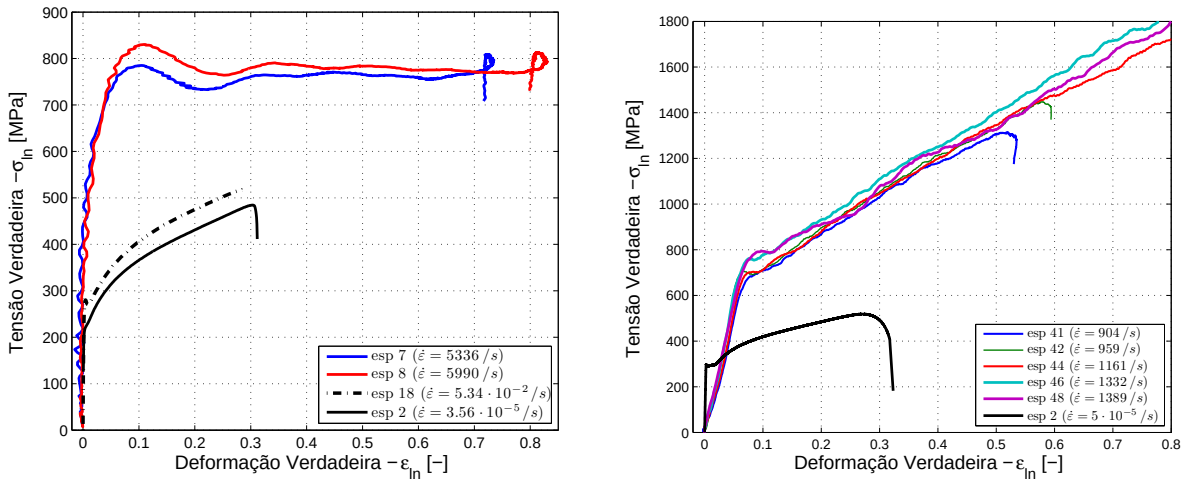
A taxa de deformação verdadeira é escrita por

$$\dot{\varepsilon}_{ln,cp} = \frac{v_2 - v_1}{L_i}$$

$$\dot{\varepsilon}_{cp} = \frac{(v_2 - v_1)/L_0}{L_i/L_0}$$

$$\dot{\varepsilon}_{cp} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eng,cp}}{(1 + \varepsilon_{eng,cp})} \,. \tag{3.32}$$

Com a utilização das Eqs. 3.18–3.32, os corpos de prova dos materiais ensaiados forneceram as curvas de $\sigma$ vs.$\varepsilon$ para os materiais de $0,25$ e $3,00$ mm de espessura, Figs. 3.22a e b.




**(a)** Material t=0,25 mm. **(b)** Material t=3,00 mm.

**Figura 3.22** Curvas obtidas após tratamento dos dados de ensaios de compressão realizados na SHPB.

## 3.5 Calibração do Modelo de Material

Um modelo de material isotrópico simplificado é composto pelo comportamento a uma taxa de deformação de referência (curva tensão-deformação) e pela influência da taxa de deformação na porção plástica. Para o primeiro caso, a utilização de DIC e do sinal da célula de carga fornecem, mediante cálculo, tensão de escoamento e as porções elástica e plástica; restando apenas definir qual a lei de encruamento será utilizada: encruamento linear; tabela de dados de tensão vs. deformação plástica; lei de potência etc. Tal decisão depende da forma da curva e do modelo de material implementado no programa de elementos finitos. Para o segundo caso, os ensaios a diferentes taxas de deformação fornecem os dados necessários para o cálculo dos parâmetros da lei de viscoplasticidade

que representará o comportamento do material.

Os resultados de tensão por deformação de cada seção obtidos via análise por DIC foram plotados nas Figs. 3.23 e 3.24. A partir dessas curvas, foram obtidos pontos para gerar a tabela de dados que representa o comportamento de cada um dos materiais. É possível verificar nestas curvas de $\sigma$ vs. $\varepsilon$ dos corpos de prova ensaiados com "clip-gauge", Fig. 3.24, a localização das deformações (empescoçamento) provocando queda da tensão, frequentemente associado à ruptura do corpo de prova. Tal comportamento é também observado nas curvas obtidas por DIC, onde cada seção (linha de elementos) sofre descarregamentos – queda de tensões – devido a localizações, até que a seção mais estreita se rompa.

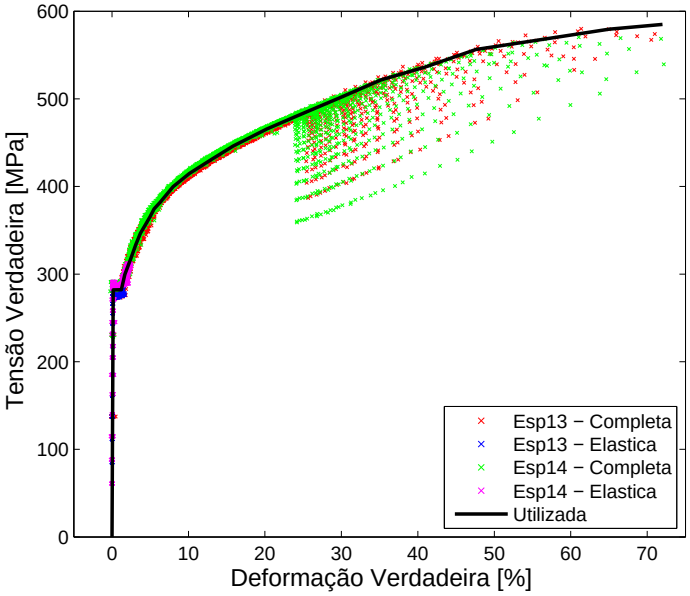



**Figura 3.23** Interpolação da curva do material a partir de resultados obtidas por DIC (e=3,00mm).

O comportamento devido a diferentes taxas de deformação também pode assumir diversas formas. No presente estudo, foram utilizados ajustes para obter parâmetros das equações de Cowper-Symonds

$$\sigma_d = \sigma_0 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{1/p} \right] , \tag{3.33}$$

mais indicado para o aço em questão, com $D$ e $p$ sendo parâmetros do material, $\dot{\varepsilon}$ a taxa de deformação, $\sigma_0$ a tensão de escoamento de referência e $\sigma_d$ a tensão de escoamento dinâmica. Também foi utilizada a equação de Norton (LEMAITRE; CHABOCHE, 1991),

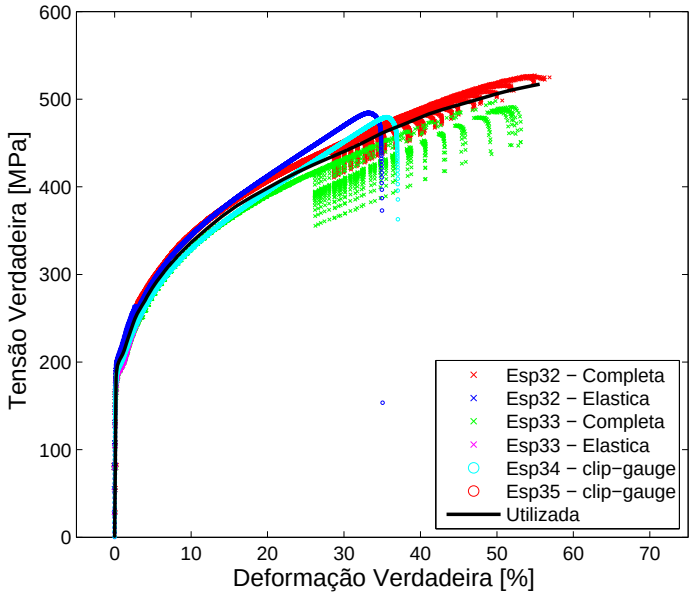



**Figura 3.24** Interpolação da curva do material a partir de resultados obtidas por DIC (e=0,25mm).

$$\sigma_d = \sigma_0 \cdot \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^q \tag{3.34}$$

com $\dot{\varepsilon}_0$ e $q$ sendo parâmetros do material.

O aumento da tensão dinâmica é avaliado para valores do escoamento, tendo como referência o valor de tensão da curva estática, para diferentes taxas de deformação. Foi assumido que os materiais de diferentes espessuras possuem os mesmos parâmetros viscoplásticos, condição necessária para utilização das leis de similaridade, resultando numa só reta. Dessa forma, as tensões de escoamento são plotadas em função de suas taxas de deformação, comparadas com a tensão de escoamento quase-estática, Figs. 3.25 e 3.26. Através do rearranjo da Eq. 3.33, obtemos os parâmetros escritos para regressão linear ($y = a \cdot x + b$) para Cowper-Symonds:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_0} - 1 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D}\right)^{1/p}$$

$$ln\left(\frac{\sigma_d}{\sigma_0} - 1\right) = \frac{1}{p}\, ln\left(\dot{\varepsilon}\right) - \frac{1}{p}\, ln\left(D\right) \tag{3.35}$$

De maneira similar, aplicando logaritmo natural em ambos os lados da Eq. 3.34, segue

$$\ln\left(\frac{\sigma_d}{\sigma_0}\right) = q\, \ln\left(\dot{\varepsilon}\right) - q\, \ln\left(\dot{\varepsilon}_0\right)\ , \tag{3.36}$$

regressão linear para o parâmetro de Norton.

As retas que melhor descrevem os pontos das Figs. 3.25 e 3.26, possuem coeficientes que, com as Eqs. 3.35 e 3.36, são convertidos nos parâmetros dos materiais de Cowper-Symonds e Norton, Tabela 3.3.

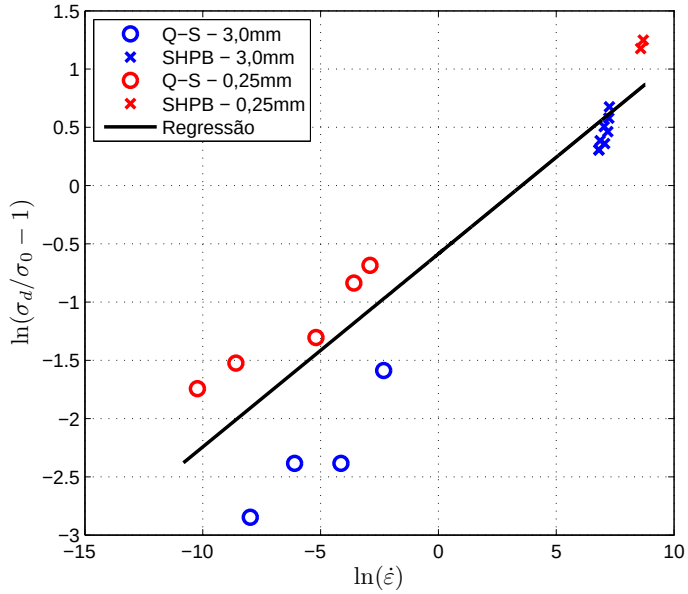



**Figura 3.25** Regressão linear para obtenção dos parâmetros da equação de Cowper-Symonds.

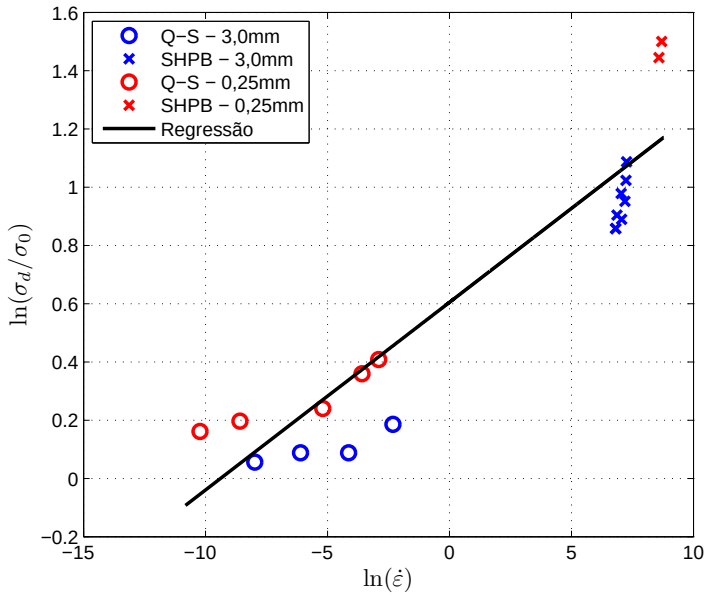



**Figura 3.26** Regressão linear para obtenção dos parâmetros da equação de Norton.