FLÁVIA MILO DOS SANTOS

IMPACTO HIDRODINÂMICO VERTICAL DE CORPOS AXISSIMÉTRICOS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM VARIACIONAL

São Paulo

2013

FLÁVIA MILO DOS SANTOS

IMPACTO HIDRODINÂMICO VERTICAL DE CORPOS AXISSIMÉTRICOS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM VARIACIONAL

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

São Paulo

2013

FLÁVIA MILO DOS SANTOS

IMPACTO HIDRODINÂMICO VERTICAL DE CORPOS AXISSIMÉTRICOS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM VARIACIONAL

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Celso Pupo Pesce

São Paulo

2013

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 03 de dezembro de 2013.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Santos, Flávia Milo dos
Impacto hidrodinâmico vertical de corpos axissimétricos através de uma abordagem variacional / F.M. dos Santos. -- versão corr. -- São Paulo, 2013.
153 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Método numérico variacional 2. Técnicas dessingularizadas 3. Impacto hidrodinâmico 4. Corpos axissimétricos (Impacto) 5. Abordagem GvKM I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Ademar e Fátima,
e minhas irmãs, Débora e Daniela.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãs, pelo carinho e pelo grande incentivo dado à minha formação.

Em especial, agradeço ao meu namorado Ricardo, pelo incentivo, apoio incondicional e, principalmente, pela compreensão e carinho nesses anos.

Ao Prof. Dr. Celso Pupo Pesce pela orientação e por seu apoio ao longo desses anos, possibilitando a concretização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alexandre N. Simos pelas valiosas discussões que em muito contribuíram para o desenvolvimento desta tese.

Ao Prof. Dr. José A. P. Aranha pelas discussões conceituais e sugestões dadas durante a qualificação.

Ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira, da Unesp de Presidente Prudente, que sempre me incentivou a dar prosseguimento em minha formação acadêmica.

Aos meus primos Cassius e Luciana, que me auxiliaram quando da minha chegada na cidade de São Paulo.

Aos meus queridos amigos (em ordem alfabética), Ana Beatriz Milo Serra, Daniela Cambuí, Lívia Silva Alvarenga, Marjorie Xavier, Pedro Andrade, Rogério Galante, Rosiane Cristina de Lima e Thaís Piva pelo companheirismo e momentos de descontração.

Aos colegas de laboratório Amin Assad Neto, Edna Moratto, Marta Veris, Luigi Greco, Rafael Salles e, em especial, a Marcos Rabelo, Marilda Nagamini e Paula Falcon, pela amizade, colaboração e incentivo durante esse período. Agradecimentos especiais a Leonardo Casetta pelas discussões teóricas e troca de ideias durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Eng. Edgard Malta pelos resultados numéricos obtidos através do WAMIT®.

À FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro através de bolsa de doutorado no período 08/2010 – 02/2013, processo número 2010/07008-9.

À Petrobras, pelo suporte financeiro através de bolsa de estudos no período 03/2009 – 07/2010, no âmbito do projeto de pesquisa em "Tópicos Avançados de Hidrodinâmica de Sistemas Oceânicos", quando estes estudos foram iniciados. Em particular, ao Dr. Marcos Donato Ferreira, do CENPES, coordenador daquele projeto.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Do ponto de vista da hidrodinâmica clássica, o problema de impacto hidrodinâmico configura-se como um problema de contorno com fronteiras móveis cuja posição deve ser determinada simultaneamente à solução da equação de campo. Essa característica traz dificuldades para obtenção de soluções analíticas e numéricas. Nesse sentido, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um método numérico específico para analisar o problema de impacto hidrodinâmico de corpos sólidos rígidos contra a superfície livre da água. A solução da equação dinâmica não linear do problema de impacto depende da determinação do tensor de massa adicional a cada instante de tempo, o qual depende da posição e atitude do corpo no instante considerado. Um método variacional específico é empregado, através do qual os coeficientes de massa adicional são determinados com erro de segunda ordem, na posição considerada. Tal método é exemplo de técnicas numéricas dessingularizadas, através das quais o potencial de velocidade é aproximado em um espaço finito-dimensional formado por funções-teste derivadas de soluções potenciais elementares, tais como pólos, dipolos, anéis de dipolos, de vórtices, etc. O problema potencial de impacto hidrodinâmico, que se caracteriza pela dominância das forças de inércia, é formulado admitindo-se a superfície líquida como equipotencial, o que permite a analogia com o limite assintótico de frequência infinita do problema de radiação de ondas causada pelo movimento de corpos flutuantes. O método desenvolvido é então aplicado ao caso de impacto vertical de corpos axissimétricos, formulando o problema sob o chamado modelo de von Kármán generalizado (GvKM). Nesse modelo as condições de contorno na geometria exata do corpo são satisfeitas, porém os efeitos do empilhamento de água junto às raízes do jato, que se forma ao longo da intersecção com a superfície livre, não são considerados no caso geral. Resultados numéricos do coeficiente de massa adicional para uma família de esferoides são apresentados e tabulados para o pronto uso em análise e projeto. Além disso, considerações acerca da inclusão do efeito de empilhamento de água junto às raízes do jato, ou seja, da elevação da superfície livre são também feitas para o caso de esferas, fazendo uso de abordagens analíticas encontradas na literatura especializada.

Palavras-chave: Método numérico variacional. Técnicas dessingularizadas. Problema de impacto hidrodinâmico. Impacto vertical de corpos axissimétricos. Abordagem GvKM.

ABSTRACT

In terms of classical hydrodynamics, the hydrodynamic impact problem is characterized as a boundary problem with moving boundary which position must be determined simultaneously with the solution of the field equation. This feature brings difficulties to get analytical and numerical solutions. In this sense, the purpose of this work is to present a variational method technique specifically designed for the hydrodynamic impact problem of axisymmetric rigid bodies on the free surface. The solution of the nonlinear dynamic equation of the impacting motion depends on the determination of the added mass tensor and its derivative with respect to time at each integration time step. This is done through a variational method technique that leads to a second-order error approximation for the added mass if a first-order error approximation is sought for the velocity potential. This method is an example of desingularized numerical techniques, through which the velocity potential is approximated in a sub-space of finite dimension, formed by trial functions derived from elementary potential solutions, such as poles, dipoles, and vortex rings, which are placed inside the body. The potential problem of hydrodynamic impact, characterized by the dominance of inertial forces, is here formulated by assuming the liquid surface as equipotential, what allows the analogy with the infinity frequency limit in the usual free surface oscillating floating body problem. The method is applied to the vertical hydrodynamic impact of axisymmetric bodies within the so-called Generalized von Kármán Model (GvKM). In such approach, the exact body boundary condition is full-filled and the wet correction is not taken into account. Numerical results for the added mass coefficient for a family of spheroids are presented. Moreover, considerations are made on the effects of the free surface elevation for the specific case of an impacting sphere, through analytical approaches.

Keywords: Variational numerical method. Desingularized techniques. Hydrodynamic impact problem. Vertical impact of axisymmetric bodies. GvKM approach.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BEM	*Boundary Element Method*
CIP	*Constrained Interpolation Profiles*
FPSO	*Floating production storage and offloading*
GvKM	*Generalized von Kármán Model*
GWM	*Generalized Wagner Model*
MLM	*Modified Logvinovich Model*
MPS	*Moving Particle Semi-Implicit*
MV	Método Variacional
SPH	*Smoothed Particle Hydrodynamics*
TLP	*Tension-leg platform*
vKM	*von Kármán Model*
VLCC	*Very large crude carrier*
VOF	*Volume-of-Fluid*
WM	*Wagner Model*

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Romano

a	raio característico do corpo de impacto (raio da esfera ou semidiâmetro no eixo de revolução z de um esferoide oblato)
b	semidiâmetro de um esferoide oblato
c	raio de um disco circular
C	constante
C_s	coeficiente de *slamming*
C_w	fator de correção; ver Miloh (1991a)
$\boldsymbol{F}$	força
$F(a,b;c;w)$	função hipergeométrica
F_B	força de empuxo
$F_{kl}(\phi,\psi)$	funcional de Rayleigh
F_R	número de Froude
$\mathbf{G} = \left[G(T_i,T_j)\right]$	matriz energia cinética
$G(\phi,\psi)$	funcional energia cinética
g	aceleração da gravidade
H	variável auxiliar (APÊNDICE B; APÊNDICE C); altura de queda de um corpo de impacto (ver Figura 5.17)
I_n	função trigonométrica recursiva
$\mathrm{L}(\phi)$	Lagrangiana do campo potencial ϕ
M	massa adicional
M_{kl}	tensor massa adicional
$\widetilde{M}_{kl}$	aproximação variacional para o tensor massa adicional
m	massa do corpo de impacto; intensidade de uma fonte
m_D	massa de líquido deslocada por um corpo totalmente submerso
N	número natural
N_d	número de dipolos do conjunto de funções-teste

n	número natural
$\mathbf{n}$	vetor normal
n_d	número de dipolos para compor o anel discreto de dipolos
n_f	número de dipolos para compor o anel discreto de fontes
p	pressão
$\mathbf{q} = \{q_j\}$	vetor de coeficientes
R	raio do anel de vórtices
$\mathbf{r}$	vetor posição
r	variável radial em coordenadas cilíndricas
r_c	raio do duplo-corpo associado à profundidade de penetração ζ
S	superfície
T	energia cinética
$T_j(\mathbf{r})$	função-teste
t	tempo
u	mudança de variáveis, $u = \dfrac{r'}{R}$
$\mathbf{U}$	vetor velocidade
U	componente vertical do vetor velocidade
V	volume
$V(\psi)$	funcional trabalho
$\mathbf{V}_k = \{V_k(T_i)\}$	vetor trabalho
$W_2^{(1)}(\mathrm{V})$	espaço de Sobolev
z	variável axial em coordenadas cilíndricas
z_0	deslocamento vertical em relação ao plano $z = 0$

Alfabeto Grego

α	ângulo de abertura de um setor circular de raio R
α_n	coeficiente de interpolação para a massa adicional
β	massa específica, adimensional
γ	variável auxiliar (APÊNDICE B; APÊNDICE C); variável de integração (Eq. (5.24))

δ	variação
ε	variável auxiliar (APÊNDICE B; APÊNDICE C);
ε_{bc}	erro da solução fraca na condição de contorno
$\varepsilon_{M_b^*}$	erro no coeficiente adimensional de massa adicional
ζ	profundidade de penetração do corpo
$\hat{\zeta}$	cota do ponto de intersecção da superfície livre com a superfície do corpo; ver Figura 5.23
η	função que descreve a elevação da superfície livre
η_b	cota do ponto de intersecção da superfície livre com a superfície do corpo; nomenclatura utilizada em Faltinsen (1990)
κ	intensidade de um filamento de vórtices
λ	variável auxiliar (APÊNDICE B; APÊNDICE C)
μ_D	massa de líquido deslocada em função da profundidade de penetração do corpo
ρ	densidade do líquido
σ	variável adimensional; ver, por ex., Eq. (B.19)
φ	variável angular (ou azimutal) em coordenadas cilíndricas
ϕ	potencial de velocidade
$\tilde{\phi}(\mathbf{r})$	aproximação numérica para ϕ
$\psi(\mathbf{r})$	função quadrado integrável
ω_P	ângulo sólido

Subscritos

0	referente ao instante inicial
B	superfície molhada do corpo
b	seio do domínio líquido (*bulk*)
F	superfície livre
TF	função-teste (*trial function*)
wfd	totalidade do domínio fluido, jatos são considerados (*whole fluid domain*)

Superescritos

*	designação de variável adimensional
0	referente à linearização do problema de impacto (ver, p.ex., seção 3.3.1)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e objetivos

A determinação das forças e cargas de impacto e a avaliação da decorrente resposta dinâmica de estruturas quando sujeitas a uma rápida interação com meio líquido é usualmente denominada problema de impacto hidrodinâmico (em inglês, *hydrodynamic impact problem*). Conhecido há milênios, posto ser responsável por fenômenos de grande efeito visual e destrutivo, particularmente quando das ações de ondas do mar em arrebentação contra obras costeiras, Figura 1.1, o problema de impacto hidrodinâmico tem igualmente preocupado a Engenharia Naval. Não são raras as descrições de sérios danos ocasionados por ondas ao atingirem navios e embarcações em navegação oceânica e costeira.

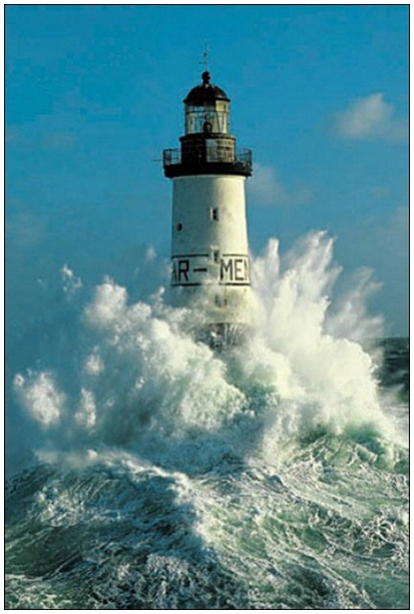


Figura 1.1 –Arrebentação de ondas em um farol na Bretanha, França. Extraído de < http://pinterest.com/pin/278871401897474251/>; acesso em 26 ago. 2013.

O mesmo vem ocorrendo no âmbito da Engenharia Oceânica, quando do impacto provocado pela violenta interação entre a superfície do mar e os mais diversos tipos de estruturas oceânicas. No âmbito da exploração de petróleo no mar, o impacto hidrodinâmico comparece na interação de ondas contra plataformas de prospecção e produção de petróleo, sejam elas fixas ou flutuantes.

De uma forma geral, a interação abrupta entre a superfície do mar e as embarcações e estruturas oceânicas recebe o nome de *slamming*. (ver FALTINSEN et al., 2004 para exemplos). O clássico problema de impacto hidrodinâmico de corpos contra a superfície livre da água é parte fundamental, e elementar, do estudo do fenômeno de *slamming*. Ilustrações de situações reais de *slamming* em navios são apresentadas na Figura 1.2 e Figura 1.3.

Figura 1.2 – *Slamming* em um navio porta container.

Figura 1.3 – Fenômeno de *slamming* e *green-water* em um navio, em 1963. O movimento vertical relativo entre o navio e as ondas causa uma parede quase vertical de água ao redor da proa. Extraído de Faltinsen (2005).

Exemplos de problemas correlatos são:

i) ação direta da arrebentação de ondas contra o casco de VLCCs (*very large crude carrier*), colunas de Semi-Subs e TLPs (*tension-leg platform*).

ii) ação indireta de ondas, nos fenômenos de *run-up*, em conveses, equipamentos e instalações de Semi-subs e TLPS e/ou de água embarcada (*green-water*) em equipamentos e instalações de FPSOs (*floating production storage and offloading*). Esboços dos fenômenos de *run-up* e *green-water* são apresentados na Figura 1.4 e Figura 1.5, respectivamente.

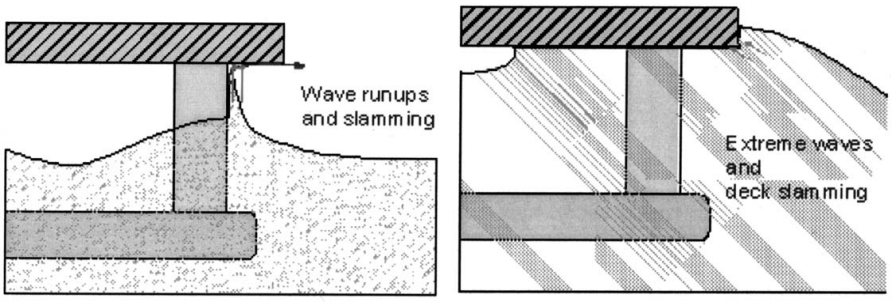


Figura 1.4 –Esboço do fenômeno de *run-up* e *slamming* em plataformas. Extraído de Faltinsen et al. (2004).

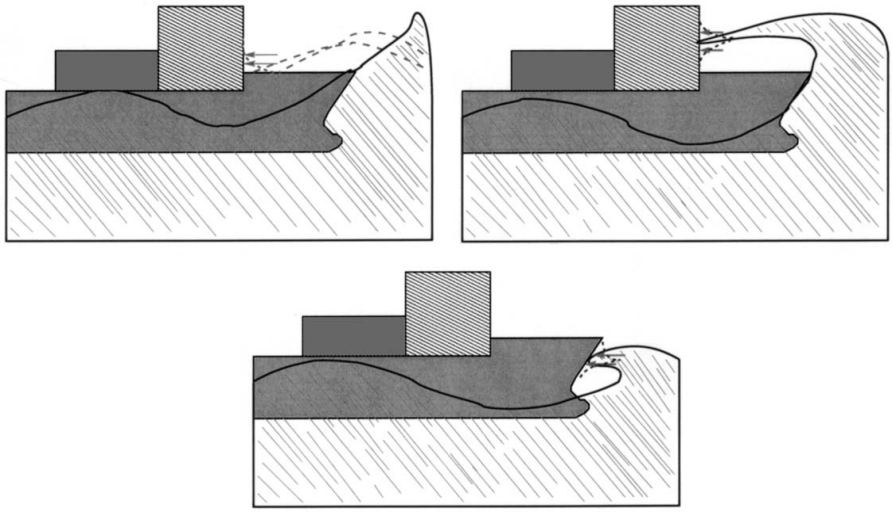


Figura 1.5 –Esboço do fenômeno de *green-water* (ou água embarcada). Extraído de Faltinsen et al. (2004).

iii) *sloshing*[1] em tanques; ver Figura 1.6. "*Sloshing must be considered for almost any moving vehicle or structure containing a liquid with a free surface and can be the result of resonant excitation of the tank liquid*". (FALTINSEN; TIMOKHA, 2009, p.1).

[1] *Sloshing* pode ser definido como um fenômeno de interação fluido-estrutura ocorrente no interior de tanques e afins, e que se caracteriza por movimentos de grande amplitude de massas de líquido, na presença de interface com o ar ou com outra mistura gasosa. Tais movimentos são usualmente respostas a excitações ressonantes da massa líquida, associadas a movimentos impostos à estrutura do tanque, ou a súbitas acelerações por ele sofridas. Os movimentos de grande amplitude causam violentas interações do líquido ao atingir as paredes internas do tanque, às quais estão associados intensos picos no campo de pressão fuido-dinâmica na interface sólido-líquido, o que pode ocasionar danos estruturais ou mesmo perda de estabilidade do veículo que o contém. Exemplos de ocorrência de *sloshing* podem ser encontrados em: tanques de combustível de veículos aeroespaciais e de

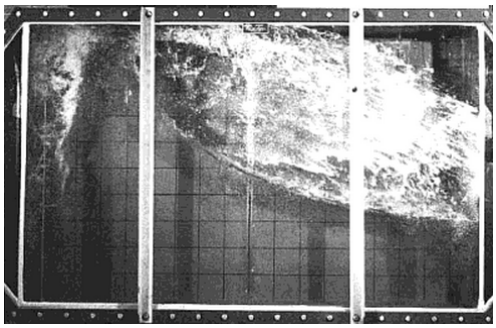


Figura 1.6 – *Sloshing* em um tanque retangular. Extraído de Faltinsen e Timokha (2009).

iv) na eventual queda de um corpo contra a superfície líquida, como é o caso de cápsulas de salvamento lançadas de plataforma, ver Figura 1.7; ou em caso de acidentes durante operações com cargas suspensas por guindastes em operação *offshore*.

(a)

(b)

Figura 1.7 – Queda livre de cápsulas de salvamento na água (*free fall lifeboats*). Extraído de Sauder (2007) e Sauder e Fouques (2009), respectivamente.

---

veículos rodoviário; contentores de transporte de líquidos em veículos em geral, como caminhões, navios-tanque, navios de transporte de gás liquefeito de petróleo.

Devido à complexidade no tratamento do clássico problema de impacto de um corpo contra a superfície livre da água (e, consequentemente, do problema de *slamming*), o tema é de interesse recorrente da engenharia. Tal complexidade está associada a ações e decorrentes mudanças abruptas nas grandezas físicas envolvidas, em especial nos instantes iniciais do impacto. De fato, a grande desaceleração sofrida pelo corpo ocorre em seus primeiros instantes de penetração. Como pode ser visto na Figura 1.8, durante o impacto ocorre o desprendimento, a alta velocidade, de finos jatos de água, expelidos do seio do líquido a partir das proximidades da chamada linha de contato sólido-líquido, que é a linha que define a intersecção geométrica entre o corpo de impacto e a superfície livre da água.

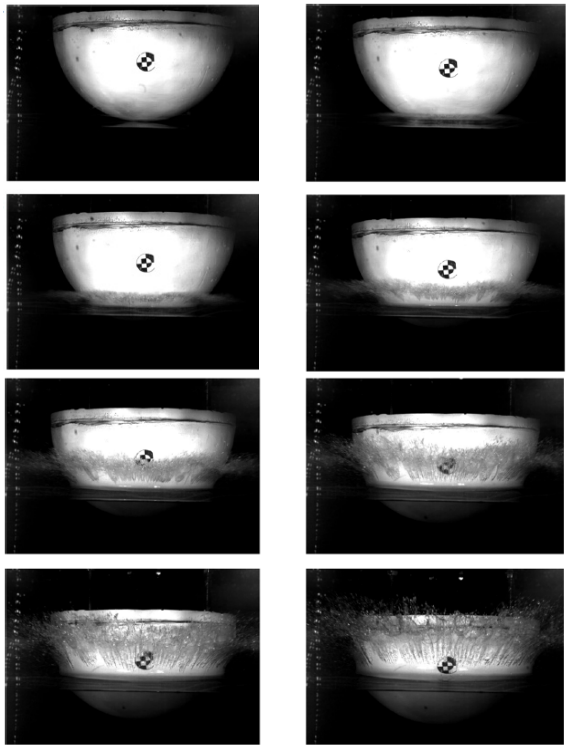


Figura 1.8 – Impacto vertical de um hemisfério contra a superfície livre da água. Extraído de Backer et al. (2009).

Do ponto de vista da hidrodinâmica clássica, o problema de impacto hidrodinâmico configura-se como um problema de contorno com fronteiras móveis cuja posição deve ser determinada simultaneamente à solução da equação de campo, nesse sentido, análogo ao clássico problema de interação de movimentos de corpos flutuantes com ondas de superfície. Tal analogia será explorada na presente tese. Essa característica o diferencia dos problemas de escoamento ao redor de corpos rígidos e totalmente submersos (problemas de contorno com fronteiras fixas). A expulsão dos jatos constitui singularidade físico-matemática, que

representa uma dificuldade adicional à formulação do problema e à obtenção de soluções analíticas e numéricas. Por essa razão, modelos simplificados ainda são muito empregados.

Discussão apresentada em documento da DNV, *DET NORSKE VERITAS*, (ver DNV-OS-E406, 2010), para o projeto de cápsulas de salvamento, ressalta a complexidade do problema e da determinação das cargas de *slamming*, conforme trecho a seguir:

> *Determination of slamming loads on a lifeboat during impact is considered complex and difficult to describe with simple expressions, or simulations. This applies to the use of general slamming simulation software or Computational Fluid Dynamics (CFD) codes. In particular, the complexity in analyses increases significantly when including waves.* (DNV-OS-E406, 2010, p.42)

O referido documento da DNV discute o emprego de ferramentas analíticas e numéricas, dentre as quais sugere o VOF (*Volume-of-Fluid*) e o BEM (*boundary element method*) como métodos computacionais próprios para análise do *slamming*. Ressalta ainda que, nesses métodos, o domínio computacional deve ser suficientemente grande para evitar interferências provenientes das fronteiras. Além desses citados no documento da DNV, outros métodos numéricos merecem destaque como, por exemplo, os métodos de partículas (SPH: *smoothed-particle hydrodynamics*; MPS: *moving particle semi-implicit*), que são métodos sem malha e que adotam abordagem Lagrangiana.

Neste contexto, o presente trabalho propõe e constrói um método numérico específico para o problema de impacto hidrodinâmico de corpos convexos contra a superfície líquida. Tal método é formulado para a fase do problema de impacto denominado de entrada na água ou *water-entry problem*. Enfatiza-se que esse método não é, ao menos teoricamente, fortemente dependente da geometria do corpo. Ressalta-se também que nesse método o problema de interferência das fronteiras no domínio não existe. O método é baseado em uma adaptação de formulação variacional, proposta por Aranha e Pesce (1989), originalmente construída através de uma formulação fraca para tratar de problemas de radiação e difração de ondas de superfície por corpos flutuantes.

Uma linearização consistente da condição de contorno na superfície livre leva a um problema equivalente de escoamento potencial ao redor de um duplo-corpo em fluido infinito, a cada instante de tempo. A condição de contorno na superfície livre, $\phi = 0$, pode ser então recuperada através da analogia com o limite assintótico de frequência infinita no problema de

radiação de ondas de superfície causada pelo movimento oscilatório de corpos flutuantes na interface ar-água (ver NEWMAN, 1977). À luz da Mecânica Analítica, a força de impacto hidrodinâmico pode ser obtida através do conhecimento, a cada instante de tempo, da massa adicional do corpo associado à correspondente profundidade de penetração.

O método aqui apresentado baseia-se numa formulação variacional fraca do problema potencial associado. A solução da correspondente equação fraca é obtida em um espaço finito-dimensional formado por funções-teste derivadas de soluções potenciais elementares singulares. As singularidades são posicionadas dentro do corpo, evitando problemas numéricos nas integrais calculadas sobre as superfícies. Assim, o método pode ser classificado como um método dessingularizado ou de soluções fundamentais; ver, p.ex., Cao et al. (1991). Recentemente, a técnica dessingularizada foi utilizada por Scolan (2010a,b) para simular o impacto de ondas em uma parede vertical. A principal vantagem desta abordagem variacional é permitir determinar os coeficientes de massa adicional com erro de segunda ordem quando comparado ao erro da solução numérica dos potenciais de velocidades a eles associados. Para tanto, e para estudos de convergência numérica, uma forma integral é proposta e utilizada para a avaliação do erro cometido na satisfação da condição de impermeabilidade na superfície do corpo.

O método desenvolvido é então aplicado ao caso de impacto vertical de corpos axissimétricos, fase de entrada na água, formulando o problema sob o chamado modelo de von Kármán generalizado (GvKM). Nesse modelo as condições de contorno na geometria exata do corpo são satisfeitas, porém os efeitos do empilhamento de água junto às raízes do jato, que se forma ao longo da intersecção com a superfície livre, não são considerados.

Objetivando usos imediatos em análise e projeto, resultados numéricos do coeficiente de massa adicional para uma família de esferoides são então apresentados e devidamente representados em séries de potência na variável que mede a profundidade de penetração na água. Complementarmente, considerações acerca da inclusão do efeito de empilhamento de água junto às raízes do jato, ou seja, da elevação da superfície livre são também feitas, porém restritas ao caso de uma esfera.

1.2 Estrutura do trabalho

O Capítulo 2 apresenta um apanhado bibliográfico do problema de impacto hidrodinâmico, a partir da citação de alguns dos principais trabalhos realizados ao longo das

últimas décadas. Este apanhado compreende alguns trabalhos experimentais, outros teóricos (tanto analíticos quanto numéricos), e faz menção a abordagens para o tratamento do problema. Menções e considerações específicas a algumas dessas referências são encontradas ao longo de todo o texto.

A fundamentação teórica e a formulação matemática do problema de impacto hidrodinâmico são apresentadas no Capítulo 3. Alguns modelos clássicos que abordam o problema de impacto hidrodinâmico de forma simplificada, mas que levam a boas estimativas para a força hidrodinâmica, são também discutidos nesse capítulo. Esses modelos abordam questões essenciais como a consideração ou não da superfície molhada exata do corpo e da correção molhada referente ao empilhamento de água junto às raízes dos jatos.

No Capítulo 4 é apresentado o método numérico especificamente construído para o problema de impacto. O problema potencial de impacto hidrodinâmico, caracterizado pela dominância de forças inerciais, é então formulado admitindo-se ser a superfície livre equipotencial, o que, como já mencionado, permite a analogia com o limite assintótico de frequência infinita nos usuais problemas de radiação de ondas de superfície por corpos flutuantes. A formulação matemática do método variacional para problemas potenciais em fluido infinito é então apresentada, bem como a construção da base de funções de representação (funções-teste) que é utilizada. Nesta seção é também proposta uma medida integral do erro da solução numérica do potencial de velocidade. Além disso, a metodologia adotada para a solução numérica do problema matemático é apresentada.

Os resultados da aplicação do método variacional ao problema de impacto vertical de corpos axissimétricos são apresentados no Capítulo 5. Esse capítulo encontra-se dividido em: cálculo da massa adicional de impacto; resolução da equação de movimento para o impacto vertical e considerações acerca do tratamento simplificado da elevação da superfície livre junto aos jatos, usualmente conhecida como correção molhada. Na seção do cálculo de massa adicional de impacto estão também dispostos os resultados de validação do procedimento de solução numérica, que culmina com a construção de funções parametrizadas que cobrem o caso de uma família de esferoides.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho, bem como algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

As referências bibliográficas apresentadas ao longo do trabalho encontram-se no final deste texto, que é acompanhado por apêndices contendo deduções matemáticas complementares e resultados numéricos adicionais.

2 BREVE APANHADO BIBLIOGRÁFICO

A revisão bibliográfica a seguir apresenta um panorama geral, guiando o leitor pelas principais referências do problema de impacto hidrodinâmico, sem, contudo, ter a pretensão da completude ou de esgotar as discussões sobre o tema. De fato, a bibliografia nessa área é bastante extensa, não só com relação à quantidade de trabalhos publicados, mas também no que se refere ao período temporal. Os primeiros estudos datam da década de 1920. Transcorridos quase 100 anos, muitas questões vem sendo ainda investigadas, o que reafirma a alegada complexidade do problema, bem como o interesse recorrente científico e da engenharia. Dessa forma, o texto aqui apresentado limita-se a realçar os desenvolvimentos considerados por esta autora como de maior relevância na área bem como aqueles de publicação mais recentes. Ao longo das seções subsequentes, referentes à formulação matemática e ao método proposto e utilizado para resolver o problema de impacto vertical, alguns trabalhos aqui mencionados serão revisitados, assim como menção a outras referências serão incluídas.

Os primeiros estudos do problema de impacto hidrodinâmico, de natureza teórica, iniciaram-se na década de 1920 com os trabalhos de von Kármán (1929) e Wagner (1931). Motivados pelo projeto de flutuadores de hidroaviões, esses autores pioneiros estudaram o problema do pouso do hidroavião, quando os flutuadores tocam a superfície da água de forma abrupta, modelando o flutuador (corpo de impacto) como se fosse uma *placa plana* equivalente, que é considerada "colapsada" no plano da superfície líquida, $z = 0$. Nessa aproximação, a superfície de contato sólido-líquido, tridimensional em sua forma original, passa a ser considerada como uma superfície de contato bidimensional. Na abordagem de von Kármán, a elevação da superfície livre nas proximidades do corpo (empilhamento de água junto às raízes dos jatos) não é considerada, e a dimensão característica da placa plana torna-se tão somente associada com a profundidade de penetração. Assim, a priori, é possível estabelecer uma relação puramente geométrica entre a dimensão característica da placa e a profundidade de penetração do corpo de impacto. No entanto, quanto mais rombudo for o corpo e menor for sua profundidade de penetração, mais significativa será a influência da elevação da superfície livre. Essa influência, i.e., *the piled-up water effect*, foi então considerada por Wagner em seu trabalho. Vale mencionar que, tanto a abordagem de von Kármán quanto a de Wagner, embora visões simplificadas do problema, trazem consigo as

informações físicas a ele essenciais e, por conseguinte, fornecem uma primeira boa estimativa para a força hidrodinâmica de impacto.

Nas abordagens seminais destes autores, a força de impacto é determinada através da segunda lei de Newton, modelando a força inercial reativa do líquido sobre o corpo como representável pelo tradicional conceito de massa adicional.

Ao longo das últimas décadas, os avanços conseguidos foram essencialmente de natureza teórica como, por exemplo, os trabalhos de Cointe e Armand (1987), Cooker e Peregrine (1995) e Cointe et al. (2004), entre outros. A abordagem de cunho analítico vem se preocupando com questões eminentemente conceituais que envolvem a formulação consistente do problema. A maioria dos estudos se restringe a corpos bidimensionais, tais como Dobrovol'skaya (1969), Molin et al. (1996) e Mei et al. (1999), e casos axissimétricos. Neste sentido, podem ser ressaltados os estudos analíticos de Chuang (1969) e Miloh (1991a,b), para cones e esferas, respectivamente.

Shiffman e Spencer (1945, 1951) investigaram analiticamente o problema de impacto vertical de esferas e cones, aproximando os corpos de impacto por lentes e elipsoides. No caso de cones, p.ex., embora esse procedimento não leve em conta a geometria exata do corpo, Shiffman e Spencer (1951) mostraram ser essa aproximação bastante razoável se comparada ao cálculo da massa adicional correspondente à geometria exata. Além disso, a remoção de "cantos vivos" da geometria original do corpo, conseguida com o emprego dessa abordagem, permite uma maior eficiência e rapidez em cálculos numéricos a ele associados, por exemplo. Nessa abordagem, a correção da massa adicional referente à elevação da superfície livre nas proximidades do corpo é feita de forma puramente geométrica.

Trabalhos teóricos sob abordagem da mecânica analítica também são encontrados, ver, p. ex., Miloh (1984), Pesce (2005), Casetta (2008), Casetta e Pesce (2007) e Pesce et al. (2006). Em tais trabalhos, importante discussão é realizada acerca da coerente definição do conceito de massa adicional no contexto do problema de impacto quando da aplicação da Equação de Lagrange ao problema de impacto, tendo em consideração a formação de *sprays* ou jatos de alta velocidade nas proximidades da região de contato sólido-líquido, durante o chamado estágio inicial de penetração do corpo de impacto.

Os trabalhos experimentais sobre o fenômeno de impacto hidrodinâmico são difíceis de serem conduzidos, em parte devido à forte não linearidade do problema associada à existência dos jatos. Alguns exemplos de trabalhos experimentais podem ser vistos, p.ex., em May (1951), Moghisi e Squire (1981), Pesce et al. (2003), Yettou et al. (2006), De Backer et al. (2009), El Malki Alaoui et al. (2012) e Troesch e Kang (1986).

No entanto, apesar dos avanços na área, existem poucos métodos capazes de considerar geometrias convexas mais gerais para o corpo de impacto e simultaneamente supor que este penetre a superfície livre de modo oblíquo e/ou com rotação. Por essa razão, modelos simplificados baseados na teoria de Wagner ainda despertam muito interesse; ver Korobkin e Scolan (2006).

Outro ponto importante a ser destacado diz respeito a métodos que tratem as condições de contorno na geometria exata do corpo e que considerem a elevação da superfície livre junto à raiz dos jatos. Situados entre o modelo de von Kármán e aquele que poderia ser designado como modelo não linear completo existem modelos intermediários tais como o de von Kármán generalizado (GvKM), o modelo de Wagner generalizado (GWM), ver Zhao et al. (1996), Faltinsen e Chezhian (2005) e Korobkin (2004), e o modelo de Logvinovich modificado (MLM), ver Malenica e Korobkin (2007) e Korobkin e Malenica (2005). Os modelos GWM e MLM consideram a elevação da superfície livre. Outros detalhes sobre modelos de impacto também podem ser encontrados em Greenhow e Yanbao (1987).

A influência da superfície livre na área de contato sólido-líquido provoca o acoplamento entre as equações do problema. Além das dificuldades matemáticas impostas por esse acoplamento entre as equações, os métodos de solução disponíveis são bastante dependentes da geometria do corpo. Um exemplo desse fato pode ser observado nos trabalhos de Scolan e Korobkin (2001) e Dobrovol´skaya (1969). Enquanto no primeiro, geometrias tridimensionais e que produzem linhas de contato sólido-líquido em forma elíptica são tratadas através do chamado método de Wagner inverso, nesse segundo trabalho, o caso de cunhas bidimensionais e com ângulos de abatimento não tão pequenos é abordado via técnicas de auto-similaridade.

A abordagem numérico-computacional do problema de impacto hidrodinâmico é, por sua vez, relativamente recente, como por exemplo, Zhao e Faltinsen (1993), Zhao et al. (1996), Peseux et al. (2005). Por sua vez, nos trabalhos de Takagi (2004), Sun e Faltinsen (2006), Wu (2006) e Xu et al. (2008), a solução numérica é obtida através do método dos elementos de contorno (BEM: *boundary element method*).

Na linha de recente abordagem numérica Lagrangiana, menção deve ser feita aos métodos de partículas como, por exemplo, SPH (*smoothed-particle hydrodynamics*) e MPS (*moving particle semi-implicit*); ver Monaghan (2005), Panciroli et al. (2012), Anghileri et al. (2011), Shao (2009), Koshizuka e Ota (1996) e Lee et al. (2010). Considerando a abordagem Euleriana, os métodos mais comuns são VOF (*Volume-of-Fluid*) e CIP (*Constrained*

Interpolation Profiles); ver Aquelet et al. (2006), Kleefsman et al. (2005), Yang e Qiu (2012) e Zhu et al. (2007).

Em que pese a existência de um grande esforço de pesquisa no trato do problema de impacto hidrodinâmico, conforme atesta a longa lista de referências bibliográficas, diversos aspectos conceituais estão ainda por ser adequadamente compreendidos e resolvidos. O tratamento teórico ou experimental do problema reflete tais dificuldades, que estão associadas à própria fenomenologia singular e não-linear que envolve o impacto hidrodinâmico.

Assim, conforme anunciado no início desta seção, ao longo do texto outros trabalhos serão citados e alguns já mencionados neste apanhado serão, de maneira oportuna, discutidos de forma mais detalhada.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Descrição do problema de impacto

O problema de impacto hidrodinâmico é caracterizado pelo conjunto dos fenômenos físicos associados aos instantes iniciais do processo de penetração de um corpo, rígido ou deformável, na superfície livre da água. A visualização de experimentos (ver, p.ex., GREENHOW e LIN, 1983) mostra que o que bem caracteriza o fenômeno de impacto hidrodinâmico é: (i) o desprendimento, a alta velocidade, de finos jatos de água a partir das proximidades da chamada linha de contato sólido-líquido, que é a linha que define a intersecção geométrica entre o corpo de impacto e a superfície livre da água e (ii) a grande desaceleração sofrida pelo corpo em seus primeiros instantes de penetração.

A formulação do problema de impacto hidrodinâmico, quando obtida a partir das equações de conservação de grandezas físicas como massa, quantidade de movimento e energia mecânica, se faz na forma de um problema de contorno. Enquanto nos problemas de contorno com fronteiras fixas, condições são impostas sobre superfícies de forma conhecida, no problema de impacto hidrodinâmico as posições da superfície livre e das superfícies de contato corpo-líquido dependem da solução da equação de campo, levando a uma forte não-linearidade geométrica. Dessa forma, trata-se de um problema de contorno com fronteira móvel. Isso faz com que, mesmo em se utilizando de hipóteses simplificadoras, as equações do problema permaneçam acopladas, tornando complexa sua resolução. Adicionalmente, existe uma forte singularidade matemática na região que define a fronteira das interfaces líquido-ar e líquido-corpo. Ainda que sob formulação de escoamento potencial, o que implica em conservação de energia, a descrição do fenômeno de liberação de "sprays" ou jatos de alta velocidade desta fronteira móvel é de difícil formulação matemática, o que tem levado à discussão de aparentes paradoxos no âmbito da mecânica (ver PESCE, 2003, 2005).

Adicionalmente, os efeitos de compressibilidade do ar e da água podem ser significativos nas fases iniciais de contacto líquido-corpo (ver, por exemplo, CAMPANA et al. (1998); KOROBKIN, 1992, 1994, 1996). Em uma primeira fase, a camada de ar, localizada entre a superfície livre e o corpo, desempenha o papel de um "colchão" (ver, p. ex., KOEHLER; KETTLEBOROUGH, 1977; VERHAGEN, 1967). A segunda fase é aquela que

ocorre quando a profundidade de penetração do corpo no meio líquido é ainda pequena. Nessa fase, a propagação da linha de interface do contato corpo-líquido pode se dar com velocidade supersônica, tornando inválida a formulação no âmbito de escoamento potencial incompressível.

3.2 Formulação do problema de impacto

Considere que o líquido esteja inicialmente em repouso. O instante inicial $t = 0$ é definido como o instante em que o corpo toca a superfície líquida, em um único ponto, que será definido como a origem do sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$; Figura 3.1. O fluido é suposto incompressível e de viscosidade nula (invíscido) e o corpo rígido, rombudo e estritamente convexo. O escoamento pode ser considerado irrotacional de tal forma que uma função escalar potencial $\phi(x, y, z, t)$ possa definir o associado campo de velocidades. Forças volumétricas externas não são levadas em consideração. Em particular, são desconsiderados os efeitos gravitacionais, por serem de pequena monta quando comparados aos inerciais, na fase inicial de contato e penetração; ver, p.ex., Korobkin (1988).

A formulação do problema de impacto hidrodinâmico segue da consideração de conservação de massa do fluido (Eq. (3.1)), de impermeabilidade do corpo (Eq. (3.2)), das condições de contorno cinemática e dinâmica para a superfície livre (Eqs. (3.3) e (3.4), respectivamente), da condição de evanescência para o potencial de velocidade $\phi = \phi(x, y, z, t)$ e para a elevação da superfície livre $z = \eta(x, y, t)$ (Eq. (3.5)) (ver Figura 3.1), e das condições iniciais para essas duas funções (Eq. (3.6)). Assim, têm-se as seguintes equações:

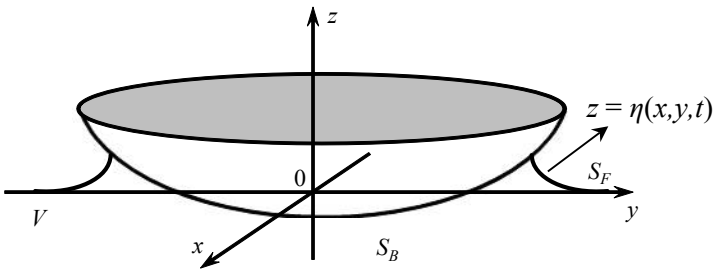


Figura 3.1 – O seio (*bulk*) do domínio líquido, a descrição da elevação da superfície livre e a superfície molhada do corpo (área de contato sólido-líquido).

$$\Delta\phi = 0 \text{ no domínio líquido } V\,, \tag{3.1}$$

$$(\nabla\phi - \mathbf{U})\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ na superfície do corpo } S_B\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ na superfície livre } S_F\,, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi = 0 \text{ na superfície livre } S_F\,, \tag{3.4}$$

$$\phi,\, \eta \to 0 \text{ quando } \|\boldsymbol{x}\| \to \infty\,, \tag{3.5}$$

$$\phi(x, y, t = 0) = 0\,,\ \eta(x, y, t = 0) = 0\,. \tag{3.6}$$

Na Eq. (3.2), $\mathbf{U}$ é o vetor velocidade e $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário, positivamente orientado para o exterior do domínio fluido.

A força hidrodinâmica pode ser calculada através da integração do campo de pressão p sobre a superfície molhada S_B (ver Newman, 1977), i.e.,

$$\boldsymbol{F} = \int_{S_B} p\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\rho\int_{S_B}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,, \tag{3.7}$$

sendo ρ a densidade do líquido.

Assim, as Eqs. (3.1)-(3.7) compõem o chamado problema de impacto hidrodinâmico não-linear. Como mencionado essa não-linearidade está associada ao desconhecimento, a priori, da posição da superfície-livre e da superfície molhada do corpo. Tal não-linearidade se manifesta nas condições de contorno (3.2), (3.3) e (3.4) e faz com que o potencial de velocidade e a posição destas fronteiras sejam mutuamente dependentes. Em outras palavras, têm que ser determinados simultaneamente, à maneira de problemas associados à interação de corpos flutuantes com ondas de superfície, exceto pela não consideração de efeitos gravitacionais na equação (3.4). Vale mencionar que, nos problemas de contorno com fronteira fixa, tanto a posição quanto os valores associados às fronteiras são prescritos.

3.3 Exemplos de alguns modelos de impacto

Existem, publicados na literatura científica especializada, diversos modelos para abordar o problema de impacto, em sua fase de "entrada na água", que, muito embora simplificados, podem fornecer boas estimativas para a força hidrodinâmica de impacto.

3.3.1 Modelo de von Kármán

O modelo de von Kármán (vKM) (ver VON KÁRMÁN, 1929) pode ser visto como um dos primeiros modelos desenvolvidos para se buscar soluções analíticas e mesmo numéricas para o problema de impacto hidrodinâmico. A estratégia de aproximação do corpo de impacto por uma placa plana foi introduzido nessa primeira e seminal abordagem. Tomando partido da forma convexa da superfície do corpo e das pequenas profundidades de penetração consideradas, a superfície de contato sólido-líquido, tridimensional em sua forma original, é aproximada por uma placa plana, colapsada na posição inicial da superfície livre da água (ver Figura 3.2).

Na abordagem de von Kármán, a elevação da superfície livre nas proximidades do corpo não é levada em conta, e a dimensão característica da placa torna-se então associada apenas à profundidade de penetração. Isso faz com que seja possível estabelecer, a priori, uma relação geométrica entre a dimensão característica da placa e a profundidade de penetração do corpo (ver FALTINSEN, 1990, para exemplos).

As principais características desse modelo são: 1) não consideração da elevação da superfície livre para o cálculo da superfície molhada; 2) aproximação da superfície molhada por uma placa plana equivalente localizada no plano $z = 0$; 3) linearização da condição de contorno no corpo (ver Eq. (3.9)) e das condições de contorno na superfície livre (ver Eqs. (3.10) e (3.11)), desta feita considerada como sendo fixa em $z = 0$.

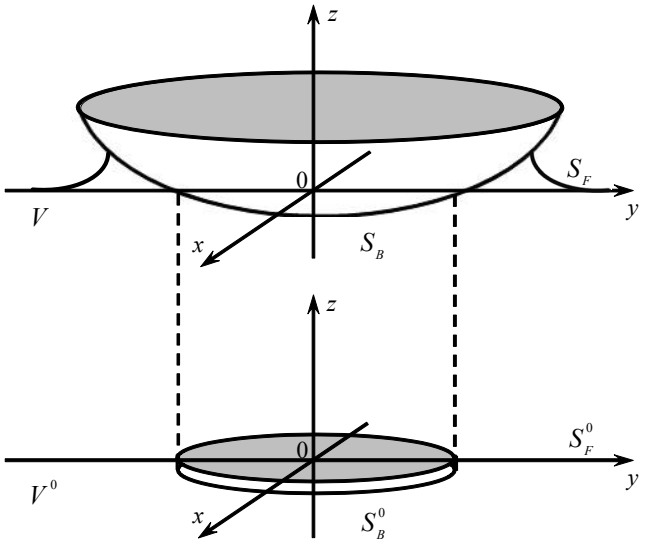


Figura 3.2 – Esboço da área de contato no modelo de von Kármán (vKM).

As Eqs (3.1)-(3.7) seguem então simplificadas na forma:

$$\Delta\phi = 0 \text{ no domínio líquido } V^0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -U \text{ na superfície molhada } S_B^0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \text{ na superfície livre } S_F^0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}, \phi = 0 \text{ na superfície livre } S_F^0, \tag{3.11}$$ [2]

$$\phi, \eta \to 0 \text{ quando } \|\boldsymbol{x}\| \to \infty, \tag{3.12}$$

$$\phi(x, y, t = 0),\ \eta(x, y, t = 0),\ S_B^0(x, y, t = 0) = 0. \tag{3.13}$$

A força vertical de impacto hidrodinâmico, determinada a partir da integração do campo de pressão linearizado[3], fica expressa:

[2] Exceto na linha de intersecção do corpo com a superfície livre; ver Pesce (2005), Casetta (2004, 2008), Casetta e Pesce (2007) e Pesce et al. (2006). Desconsiderar esta singularidade tem sido causa de errôneas interpretações que levam a falsos paradoxos, quando métodos de integração de pressão ou métodos da Mecânica Analítica são confrontados; Pesce (2005).

$$F^0 = \int_{S_B^0} p n_z \mathrm{d}S = -\rho \int_{S_B^0} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z \mathrm{d}S \,. \tag{3.14}$$

3.3.2 Modelo de Wagner

O modelo de Wagner (WM) (ver WAGNER, 1931) vale-se das mesmas equações do modelo de von Kármán. No entanto, a elevação da superfície livre junto à linha de contato passa agora a ser levada em conta para o cálculo da superfície molhada do corpo, o que implica ser a placa plana representativa do corpo de impacto no modelo de Wagner maior do que aquela associada à de von Kármán (ver Figura 3.3). De fato esta placa plana é a própria projeção da superfície molhada do corpo em $z = 0$. Como já mencionado, isso faz com que não seja possível determinar a priori uma relação entre a profundidade de penetração do corpo e a dimensão característica da placa plana. No entanto, para algumas poucas geometrias específicas, como cilindros, prismas, esferas e elipsoides, técnicas assintóticas (ver FALTINSEN, 1990) são empregadas para relacionar, através da chamada condição de Wagner (ver SCOLAN; KOROBKIN, 2001) a profundidade de penetração do corpo à elevação da superfície livre e à geometria do corpo. Tais aproximações são, no entanto, originalmente elaboradas para o caso particular de impacto sob velocidade do corpo mantida constante.

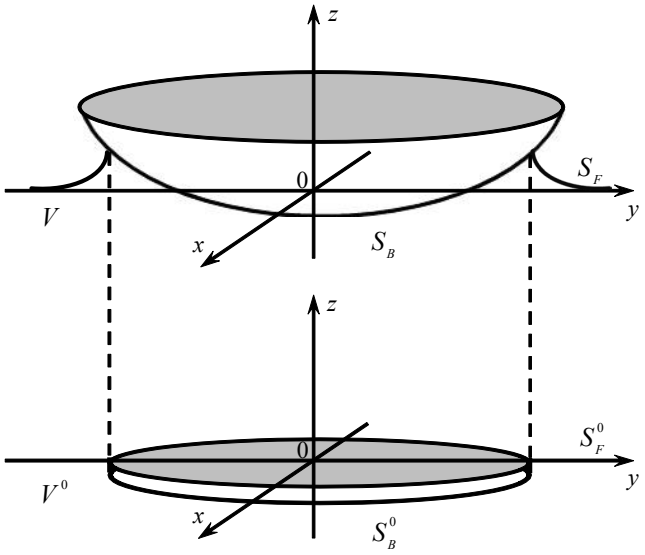


Figura 3.3 – Esboço da área de contato no modelo de Wagner (WM).

[3] Ver discussão em Pesce (2005).

O exemplo a seguir refere-se a um caso bidimensional em que a projeção da superfície molhada do corpo é, na realidade, uma placa plana de largura $2c$; ver Figura 3.4. Tem como objetivo ilustrar técnica assintótica que permite considerar a correção molhada no modelo de Wagner. Modelo tridimensional análogo, para o caso de uma esfera, é apresentado por Miloh (1991a) e será discutido na seção 5.5.3.

3.3.2.1 Impacto vertical de um cilindro circular de comprimento infinito

Considere, por exemplo, o caso de impacto de um cilindro circular de comprimento infinito, que atinge a superfície livre em configuração horizontal e em translação a ela perpendicular; portanto, um problema bidimensional. A componente vertical do vetor velocidade na superfície livre, em um determinado ponto, designado pela variável cartesiana x, é dada por (ver FALTINSEN, 1990; CASETTA, 2004; WAGNER, 1931, para detalhes):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{U}{\sqrt{1 - c^2/x^2}} - U \text{, para } |x| > c \text{ e } z = 0, \tag{3.15}$$

onde $c(t)$ é metade da largura da placa plana, que é a projeção da superfície do corpo em $z = 0$; ver Figura 3.4.

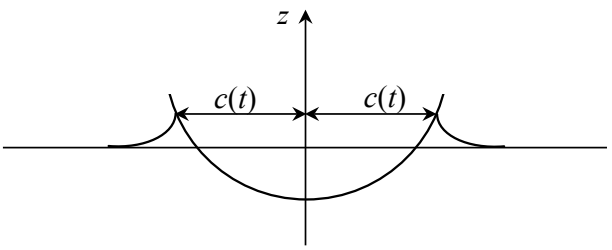


Figura 3.4 – Definição dos parâmetros geométricos para o corpo durante impacto.

Como a elevação da superfície livre pode ser escrita como $\eta = \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial t} dt$, tem-se então, a partir da Eq. (3.10), em $z = 0$,

$$\eta = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial z} dt \,. \tag{3.16}$$

Assim, utilizando as Eqs. (3.15) e (3.16), segue que

$$\eta = \int_0^t \left(\frac{U}{\sqrt{1 - c^2/x^2}} - U \right) dt = \int_0^t \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} U - U \right) dt \,. \tag{3.17}$$

Utilizando a seguinte equação, denominada condição de Wagner na literatura especializada, ver Scolan e Korobkin (2001),

$$\eta_b = \eta + \int_0^t U dt \,, \tag{3.18}$$

e a Eq. (3.17), tem-se

$$\eta_b = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} U dt \,. \tag{3.19}$$

Introduzindo c como a nova variável de integração, ou seja, $t = t(c)$, e fazendo $dt = \frac{1}{dc/dt} dc$, e lembrando que $c = x$ na intersecção da superfície livre com a superfície do corpo, resulta

$$\eta_b = \int_0^x \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} u dc \,, \tag{3.20}$$

onde η_b [4] é a cota do ponto de intersecção da superfície livre com a superfície do corpo, e $u = \frac{U}{dc/dt}$. A representação matemática do contorno do corpo é então considerada na forma

[4] Nomenclatura utilizada em Faltinsen (1990).

$$\eta_b = \beta_0 x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \ldots + \beta_{(n-1)} x^n . \tag{3.21}$$

Fazendo $u = C_0\beta_0 + C_1\beta_1 c + C_2\beta_2 c^2 + \ldots + C_n\beta_n c^n$, tem-se

$$\beta_0 x + \beta_1 x^2 + \ldots + \beta_{(n-1)} x^n = \int_0^x \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \left(C_0\beta_0 + C_1\beta_1 c + \ldots + C_n\beta_n c^n \right) dc , \tag{3.22}$$

O lado direito da Eq. (3.22), pode ser expresso como:

$$xC_0\beta_0 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - c^2}} dc = xC_0\beta_0 \frac{\pi}{2} , \tag{3.23}$$

$$xC_1\beta_1 \int_0^x \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} dc = x^2 C_1\beta_1 , \tag{3.24}$$

$$xC_2\beta_2 \int_0^x \frac{c^2}{\sqrt{x^2 - c^2}} dc = x^3 C_2\beta_2 \frac{\pi}{4} , \tag{3.25}$$

$$xC_3\beta_3 \int_0^x \frac{c^3}{\sqrt{x^2 - c^2}} dc = \frac{2}{3} x^4 C_3\beta_3 , \tag{3.26}$$

e assim por diante. Substituindo então as Eqs. (3.23)-(3.26) na Eq.(3.22), obtém-se

$$C_0 = \frac{2}{\pi};\ C_1 = 1;\ C_2 = \frac{4}{\pi};\ C_3 = \frac{3}{2};\ C_4 = \frac{16}{3\pi};\ldots . \tag{3.27}$$

Logo,

$$u = \frac{2}{\pi}\beta_0 + \beta_1 c + \frac{4}{\pi}\beta_2 c^2 + \frac{3}{2}\beta_3 c^3 + \frac{16}{3\pi}\beta_4 c^4 + \ldots . \tag{3.28}$$

Ou seja, para problemas bidimensionais que exibem simetria em relação à normal de impacto, a obtenção do parâmetro c se dará por meio de relações geométricas que variarão de acordo com o corpo considerado. No caso do cilindro circular, ver Faltinsen (1990),

$x^2 \approx 2\eta_b R$, sendo R o raio do cilindro. Considerando a aproximação da Eq. (3.28) até primeira ordem e $u = \dfrac{U}{dc/dt}$, obtém-se

$$c = 2\sqrt{UtR}\,. \tag{3.29}$$

3.3.3 Abordagem de Shiffman e Spencer

Na abordagem aproximada de Shiffman e Spencer, desenvolvida para cones (ver SHIFFMAN; SPENCER, 1951), a geometria exata do corpo que está localizada abaixo do plano $z = 0$ é substituída por um semielipsoide a ela circunscrito, conforme mostra a Figura 3.5. Assim, seguindo essa abordagem, resolver o problema de impacto hidrodinâmico significa resolver para cada instante, ou seja, para cada valor da profundidade de penetração do corpo, o problema do escoamento ao redor de um elipsoide, cujas dimensões são tão maiores quanto maior for a profundidade de penetração do corpo de impacto.

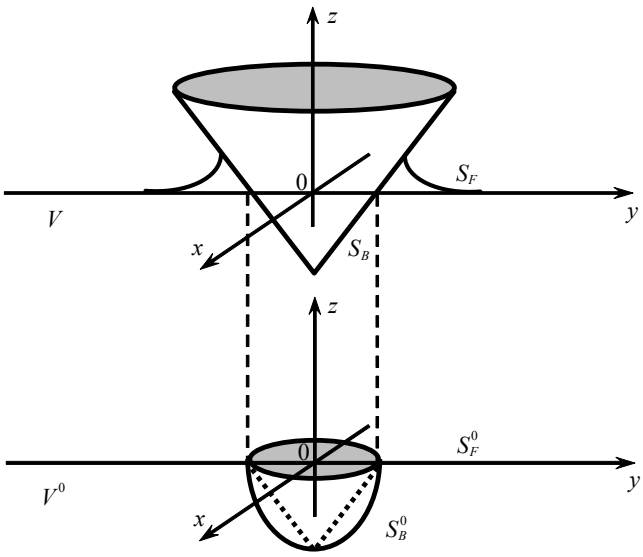


Figura 3.5 – Esboço da área de contato na abordagem de Shiffman e Spencer (1951).

A correspondente correção da superfície molhada é também levada em conta nessa abordagem; ver Shiffman e Spencer (1951).

3.3.4 Modelo de von Kármán generalizado (GvKM)

Nesse modelo, a superfície molhada considerada é aquela localizada abaixo do plano $z = 0$. A elevação da superfície livre, assim como na clássica abordagem de von Kármán, tampouco é levada em conta. A diferença entre essas duas abordagens é que, enquanto na abordagem de von Kármán a superfície molhada do corpo é aproximada por uma placa plana equivalente, no modelo de von Kármán generalizado (GvKM) (ver, p.ex., MALENICA e KOROBKIN, 2007), a superfície molhada do corpo é representada pela porção exata da geometria do corpo que se localiza abaixo do plano $z = 0$ (ver Figura 3.6).

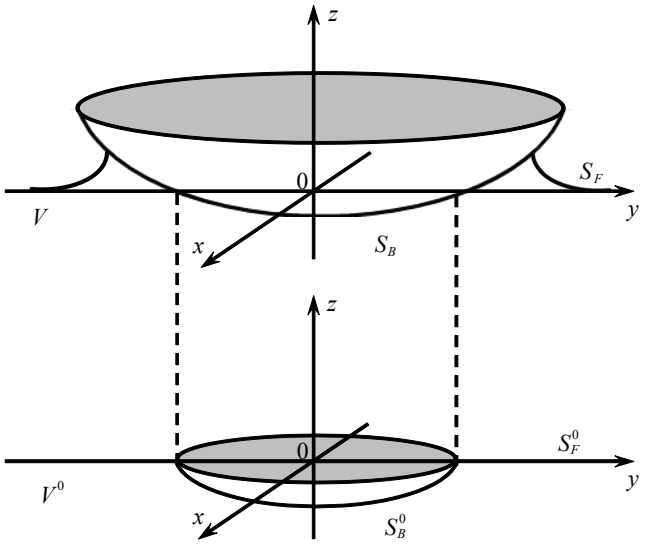


Figura 3.6 – Esboço da área de contato tridimensional no modelo de von Kármán generalizado (GvKM).

3.3.5 Modelo de Wagner generalizado (GWM)

A diferença desse método (GWM) com relação ao modelo de Wagner é que a condição de contorno no corpo é satisfeita na superfície exata do corpo, i.e., a superfície molhada não é aproximada por uma placa plana, ver Zhao et al. (1996), Faltinsen e Chezhian (2005), Korobkin (2004) e Malenica e Korobkin (2007). Além disso, a condição de contorno na superfície livre, $\phi = 0$, não é imposta em $z = 0$, e sim em um plano horizontal $z = \eta^*$ (ver Figura 3.7 e Figura 3.8).

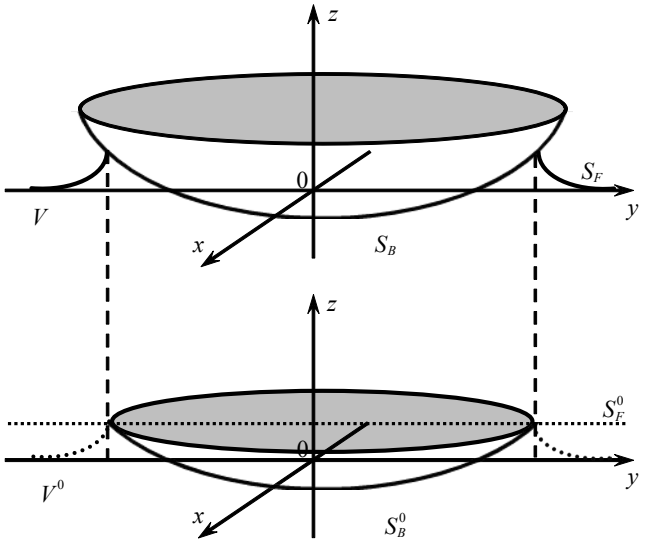


Figura 3.7 – Esboço da área de contato tridimensional no modelo de Wagner generalizado (GWM).

A tabela a seguir classifica características básicas de alguns modelos, do conhecido modelo de von Kármán ao modelo potencial não linear completo.

Tabela 3.1 – Alguns modelos potenciais de impacto[5].

Aspectos\Modelo	**vKM**	**WM**	**GvKM**	**GWM**	**MLM[6]**	**Modelo não linear completo**
Condição na superfície livre $(\phi = 0)$	em $z = 0$	em $z = 0$	em $z = 0$	em $z = \eta *$	em $z = 0$	em $z = \eta$
Correção molhada	não	sim	não	sim	sim	sim
Forma exata do corpo	não	não	sim	sim	aproximadamente	sim

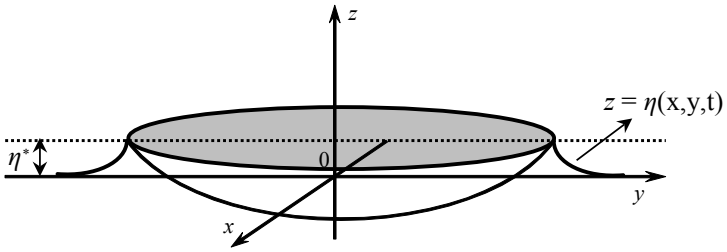


Figura 3.8 – Esboço dos diferentes modelos de impacto.

[5] Ver Figura 3.8 para detalhes geométricos.

[6] Ver Malenica e Korobkin (2007) e Korobkin e Malenica (2005) para detalhes sobre o modelo de Logvinovich modificado (MLM).

A solução numérica do problema de impacto vertical apresentada neste trabalho enquadra-se na classe dos modelos GvKM; ver Seção 4.1. Não obstante, considerações serão feitas acerca do emprego do método sob modelo de classe GWM, ou seja, com considerações acerca da correção da superfície molhada. Para simplificar a notação, desse ponto em diante, o superescrito '0', referente à linearização do problema de impacto, será omitido.

3.4 Formulação via mecânica analítica

O problema de impacto hidrodinâmico pode ser formulado a partir do formalismo Lagrangiano. Como discutido em Pesce (2003, 2005), a força vertical de impacto que age sobre um corpo rígido pode ser determinada a partir do conhecimento da função que define a massa adicional associada a esse corpo. Para tal, duas são as perspectivas[7]: análise considerando a totalidade do domínio fluido, inclusive os jatos; e análise considerando o seio do domínio fluido, quando então os jatos são considerados como representativos de um fluxo de energia do sistema. Pode ser mostrado (ver PESCE, 2003, 2005) que, considerando a primeira abordagem e a forma usual da equação de Lagrange, a força de impacto aplicada pelo corpo no fluido pode ser escrita como

$$F = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{wfd}}{\partial \dot{\zeta}}\right) + \frac{\partial T_{wfd}}{\partial \zeta}, \tag{3.30}$$

sendo T_{wfd} a energia cinética da totalidade do domínio fluido, incluindo os jatos, e ζ a profundidade de penetração do corpo. Escrevendo a energia cinética do sistema fluido como $T_{wfd} = \frac{1}{2} M_{wfd} \dot{\zeta}^2$ resulta da Eq. (3.30),

$$F = -\frac{d}{dt}\left(M_{wfd}\dot{\zeta}\right) + \frac{1}{2}\frac{dM_{wfd}}{dt}\dot{\zeta}^2. \tag{3.31}$$

Nessa abordagem, M_{wfd} é análoga ao conceito de massa adicional e representa a energia cinética da totalidade do domínio fluido.

[7] Ver discussão aprofundada em Casetta e Pesce (2006).

Alternativamente, se a segunda abordagem for considerada, a força de impacto aplicada pelo corpo sobre o seio do líquido pode ser determinada com o uso da equação de Lagrange estendida, válida para sistemas com massa explicitamente dependente da posição (ver PESCE, 2003, 2005). Nessa abordagem, apenas a energia cinética do seio do domínio fluido é considerada. Então,

$$F = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{\zeta}}\right) + \frac{\partial T_b}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_b}{\partial \zeta}\dot{\zeta}^2, \tag{3.32}$$

sendo $T_b(\zeta, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2} M_b(\zeta)\dot{\zeta}^2$ a energia cinética do seio do fluido e M_b a massa adicional a ela correspondente. Pode-se mostrar, Casetta e Pesce (2005), que no impacto vertical grande parte da energia cinética do corpo é transferida aos jatos, conforme expressão deduzida por esses autores. Este resultado estende e generaliza o caso particular de impacto vertical sob velocidade constante, em que são iguais as parcelas transferidas aos jatos e ao seio do domínio fluido, conforme deduções anteriores devidas a Molin et al. (1996), no caso de impacto vertical bidimensional, a Scolan e Korobkin (2003), no caso de corpos tridimensionais com linha de contato elíptica e a Cointe et al. (2004), no caso tridimensional com corpo assimétrico. Complementarmente, Casetta et al. (2011) mostram que a terceira parcela da Eq. (3.32) pode ser vista como uma função de dissipação de Rayleigh, com coeficiente variável na forma $\frac{\partial M_b}{\partial \zeta}$. Este termo representa a energia transferida do seio do domínio fluido para os jatos.

Da Eq. (3.32) resulta então

$$F = -\frac{d}{dt}\left(M_b \dot{\zeta}\right). \tag{3.33}$$

Essa segunda abordagem é prática usual da hidrodinâmica marítima e, por essa razão, é considerada no presente trabalho.

Através da segunda lei de Newton, desconsiderando forças de outra natureza, a força de impacto aplicada ao corpo é dada por

$$F = m\frac{d\dot{\zeta}}{dt}, \tag{3.34}$$

sendo m a massa do corpo. Eq. (3.34) e Eq. (3.33) conduzem à seguinte equação de movimento

$$\left(m + M_b\right)\frac{d\dot{\zeta}}{dt} + \dot{\zeta}\frac{dM_b}{dt} = 0\,; \tag{3.35}$$

ou, como $\dfrac{dM_b}{dt} = \dfrac{dM_b}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{dt} = M_b'\dot{\zeta}$, então

$$\left(m + M_b\right)\ddot{\zeta} + M_b'\dot{\zeta}^2 = 0\,, \tag{3.36}$$

sendo $M_b' = \dfrac{dM_b}{d\zeta}$.

Considere a variável tempo adimensionalizada como

$$t^* = \frac{U_0 t}{a}\ , \tag{3.37}$$

de tal forma que posição, velocidade e aceleração ficam dadas, na forma adimensional, por

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{a}\ , \tag{3.38}$$

$$\dot{\zeta}^* = \frac{d\zeta^*}{dt^*} = \frac{d\zeta^*}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{U_0}\dot{\zeta}\ , \tag{3.39}$$

$$\ddot{\zeta}^* = \frac{d\dot{\zeta}^*}{dt^*} = \frac{d\dot{\zeta}^*}{d\dot{\zeta}}\frac{d\dot{\zeta}}{dt}\frac{dt}{dt^*} = \frac{a}{U_0^{\,2}}\ddot{\zeta}\ , \tag{3.40}$$

sendo a o raio característico máximo do corpo de impacto (o raio de uma esfera ou o semidiâmetro de revolução de um esferoide, por exemplo) e U_0 a velocidade vertical no primeiro instante de impacto, $t^* = 0^-$. Assim, a equação de movimento (3.36) é dada na forma adimensional por

$$\ddot{\zeta}^* + \frac{M_b'^*}{\beta + M_b^*}\dot{\zeta}^{*2} = 0 \ , \tag{3.41}$$

onde $\beta = m / m_D$ e $M_b^* = M_b / m_D$ são, respectivamente, formas adimensionais da massa do corpo (massa específica) e da massa adicional, com m_D a massa de líquido deslocada pelo corpo quando totalmente submerso.

A Eq. (3.41) integrada a partir de condições iniciais $\zeta^*(t_0) = 0;\ \dot{\zeta}^*(t_0) = 1$ leva à determinação da força de impacto, desde que seja calculada a evolução da função $M_b^*(\zeta^*(t^*))$. Para tanto, as funções $M_b^*(\zeta^*)$ e $M_b'^*(\zeta^*)$ podem ser calculadas em cada instante de tempo ou interpoladas a partir de valores pré-calculados, para uma faixa pré-escolhida de cotas ζ^*.

Note que a Eq. (3.35), escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(\left(m + M_b\right)\dot{\zeta}\right) = 0 \ , \tag{3.42}$$

pode ser integrada uma vez fornecendo

$$\left(m + M_b\right)\dot{\zeta} = mU_0 , \tag{3.43}$$

conduzindo à forma adimensional

$$\dot{\zeta}^* = \frac{1}{1 + M_b^*\left(\zeta^*\right)/\beta} = \frac{\beta}{\beta + M_b^*\left(\zeta^*\right)} \ . \tag{3.44}$$

Isto é consistente com o fato de ter sido implicitamente desconsiderado em (3.32) e, portanto, em (3.33), o fluxo de quantidade de movimento transferido aos jatos, que é de segunda-ordem quando comparado, na forma adimensional, ao fluxo de energia (ver MOLIN et al., 1996). A Eq. (3.44) mostra que a velocidade do corpo pode ser escrita como função explícita da penetração.

Por outro lado, caso o efeito de empuxo, que passa a ser importante na fase final da penetração do corpo, fosse considerado, a equação de movimento adimensional ficaria dada por

$$\ddot{\zeta}^* + \frac{M_b'^*}{\beta + M_b^*}\dot{\zeta}^{*2} + \frac{ga}{U_0^2}\frac{\mu_D^*}{\beta + M_b^*} = 0, \tag{3.45}$$

com

$$\mu_D^*(\zeta^*) = \frac{\mu_D(\zeta^*)}{m_D}, \tag{3.46}$$

sendo g a aceleração da gravidade e $\mu_D(\zeta^*)$ a massa de líquido deslocada, escrita como função da profundidade de penetração adimensional do corpo. Note, porém, que tal inclusão é, estrito senso, inconsistente. Sim, pois os efeitos gravitacionais haviam sido a priori desconsiderados do problema de contorno, porquanto de menor importância nos primeiros instantes da interação corpo-líquido. Uma formulação completa deveria tomar em conta a ação do campo gravitacional desde o princípio, quando então decorreria a formação de onda de superfície, de efeito concomitante ao empuxo. Isso posto, considere, como em Pesce et al. (2006), um número de Froude de impacto definido como

$$F_R = \frac{U_0}{\sqrt{ga}}. \tag{3.47}$$

Portanto, a Eq. (3.45) pode ser escrita na seguinte forma,

$$\ddot{\zeta}^* + \frac{M_b'^*}{\beta + M_b^*}\dot{\zeta}^{*2} + \frac{1}{F_R^{\,2}}\frac{\mu_D^*}{\beta + M_b^*} = 0. \tag{3.48}$$

O efeito do empuxo é aqui relacionado ao inverso do quadrado do número de Froude de impacto (geralmente um valor muito alto), que torna o quociente $1/F_R^{\,2}$ relativamente pequeno se comparado aos efeitos inerciais, nos primeiros instantes do problema do impacto hidrodinâmico. De fato, é fácil mostrar, como em Pesce et al. (2006), que a razão entre as forças de inércia e de empuxo é da ordem $F_I / F_B \approx O(F_R^{\,2})$, posto que a ordem de magnitude do pico da força de impacto é $F_I = O(\beta^{-1}F_R^{\,2}mg) = O(F_R^{\,2}m_D g)$ e a força de empuxo máxima é $F_B = m_D g = \beta^{-1}mg$. Se, por exemplo, o corpo de impacto é solto (no vácuo) a

partir do repouso, de uma altura H, tal que $U_0 = \sqrt{2gH}$, o número de Froude de impacto pode ser simplesmente calculado como

$$F_R = \sqrt{\frac{2H}{a}}, \tag{3.49}$$

o que conduz a $F_I / F_B \approx O(2H/a)$ um número em geral grande para elevadas alturas de queda, como é o caso do lançamento de cápsulas de salvamento.

4 O MÉTODO NUMÉRICO VARIACIONAL APLICADO AO PROBLEMA DE IMPACTO HIDRODINÂMICO

Esta seção encontra-se dividida em cinco partes. Na primeira, é discutido como o método variacional proposto por Aranha e Pesce (1989), e aplicado por Pesce e Simos (2008) ao problema de escoamento em torno de corpos rígidos em fluido infinito, pode ser diretamente adaptado ao problema de impacto hidrodinâmico, através da consideração de um duplo-corpo equivalente. Na segunda e terceira seções, são apresentadas a formulação matemática do método variacional aplicado a problemas potenciais em fluido infinito e a formulação das funções-teste utilizadas no trabalho. Na quarta seção, é introduzida uma forma integral que permite avaliar o erro da decorrente aproximação numérica do potencial de velocidades. Na quinta e última seção, o procedimento de solução numérica é apresentado.

4.1 O método variacional aplicado ao problema de impacto

O método usado no presente trabalho, para determinar a massa adicional e posteriormente resolver a equação de movimento do problema de impacto hidrodinâmico, consiste na adaptação do método variacional utilizado em Pesce e Simos (2008). Tal método foi desenvolvido para a resolução de problemas potenciais envolvendo o escoamento ao redor de corpos em fluido infinito. O método foi originalmente proposto e construído para problemas de radiação e difração de ondas de superfície por corpos flutuantes (ver PESCE, 1988; ARANHA; PESCE, 1989).

A condição de contorno de superfície livre do problema potencial associado, quando consistentemente linearizada, permite que o problema de impacto hidrodinâmico seja interpretado, a cada instante de tempo, como um problema de escoamento ao redor de um duplo-corpo totalmente submerso. A condição de contorno $\phi = 0$ em $z = 0$ (condição de Dirichlet) corresponde ao limite assintótico de alta frequência no problema de radiação de ondas por corpos flutuantes, no caso de oscilações em *heave*, *pitch* e *roll* (ver, por exemplo, NEWMAN, 1977; FALTINSEN, 1990).

De fato, como observa Newman (1977), em seu livro[8]:

> [...] *The opposite situation applies in the high-frequency limit* (158)*, where the potential must be odd in* y*, and the resulting asymmetry requires the image phase to be as shown in figure* 6.22*. Here, the vertical modes of motion correspond to those of a rigid body, and thus* (159) *will apply for* $i, j = 2,4,6$*, as* $\omega \to \infty$*. On the other hand, the horizontal modes correspond to shearing deflections of the double body that cannot be related to the potentials obtained in chapter* 4 *or to the resulting values of* m_{ij}. (NEWMAN, 1977, p. 298)

Logo, para o limite assintótico de alta frequência $\omega \to \infty$, a condição de contorno $\phi = 0$ é válida para as situações de duplo-corpo mostradas na Figura 4.1.

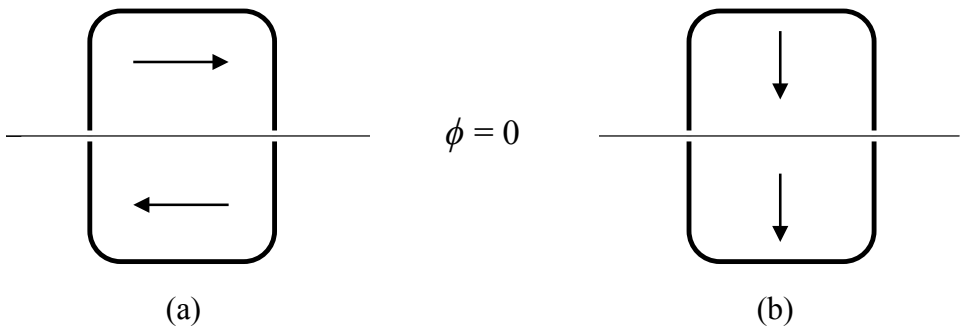


Figura 4.1 – Limite de alta frequência para os seguintes casos:(a) *surge*, *sway* ou *yaw*; (b) *heave*, *roll* ou *pitch*. Adaptada da figura 6.22 de Newman (1977).

Para o caso de impacto vertical, o duplo-corpo associado é aquele ilustrado pela Figura 4.1 (b). As linhas de corrente do escoamento para o movimento vertical (*heave*) do duplo-corpo em fluido infinito são ilustradas na Figura 4.2.

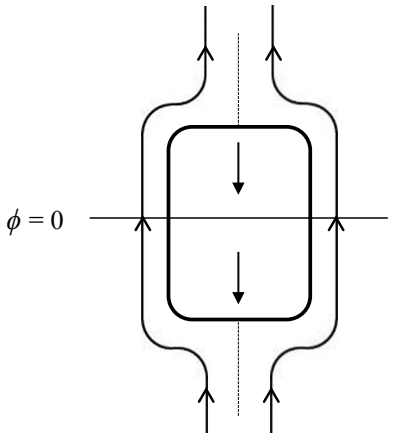


Figura 4.2 – Linhas de corrente para o movimento vertical do duplo-corpo (*heave*), referente à Figura 4.1 (b).

[8] No texto a seguir, extraído de Newman (1977), p. 298: (i) (158) e (159) correspondem à numeração de equações daquele texto; (ii) a coordenada y é perpendicular à superfície líquida, correspondendo à coordenada z no presente texto.

É interessante notar que o procedimento adotado é sugerido em documento da DNV: *"The rate of change of vertical added mass can be estimated by calculating the high frequency limit of the added mass by a sink-source potential flow method at increasing submersion depth"*. (DNV-OS-E406, 2010, p. 41).

Assim, para cada instante de tempo, será necessário determinar a massa adicional de um duplo-corpo, que é simétrico com relação ao plano $z = 0$ e cuja dimensão está associada à profundidade de penetração do corpo de impacto, ver Figura 4.3. Essa aproximação é válida para os instantes iniciais da interação, intervalo no qual ocorre o pico de desaceleração e no qual também se verifica que o comprimento característico da superfície molhada é muito maior que sua profundidade de penetração. Como discutido em Newman (1977), sob tal condição de contorno na superfície, $\phi = 0$, a massa adicional do corpo de impacto (porção submersa) corresponde à metade da massa adicional do duplo-corpo a ele associado.

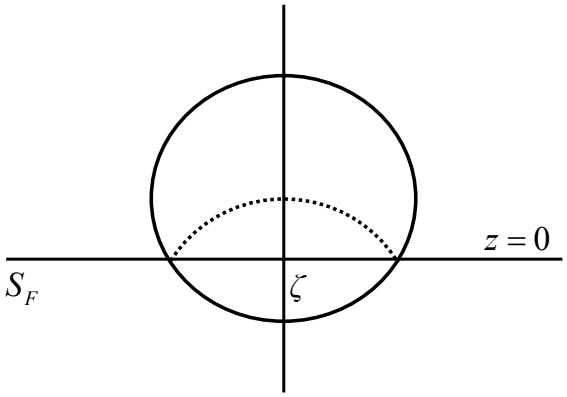


Figura 4.3 – Parâmetros geométricos do duplo-corpo[9].

O método numérico aqui construído, para a determinação da massa adicional do corpo em penetração, é baseado em uma formulação fraca variacional do problema potencial. A solução para a equação fraca correspondente é obtida em um espaço dimensional finito, formado por um conjunto de funções-teste que satisfazem a equação de campo. Tal conjunto de funções-teste é construído a partir de funções potenciais elementares de velocidades, tais como pólos, dipolos e anéis, sejam de vórtices, de pólos ou de dipolos. As singularidades são posicionadas dentro do corpo, evitando problemas numéricos nas integrais que são calculadas sobre sua superfície. Neste contexto, tal método variacional pode ser classificado como um

[9] A posição da superfície livre é considerada colapsada no plano horizontal $z = 0$. O superescrito '0' foi omitido, apenas para simplificar a notação.

método dessingularizado ou de soluções fundamentais; ver, por exemplo, Cao et al. (1991). A principal vantagem deste método é que os coeficientes de massa adicional são determinados diretamente, com erro de segunda-ordem, sem que haja necessidade de se obter o potencial de velocidades. Isto reduz o tempo computacional para determinar a solução do problema.

Na aplicação do método variacional, as condições de contorno de impermeabilidade são aplicadas na superfície exata do corpo, o que caracteriza uma abordagem segundo o denominado modelo de von Kármán generalizado (GvKM). Ou seja, a forma tridimensional do corpo é considerada, ver Figura 3.6. Entretanto, os efeitos da elevação da superfície livre junto à raiz do jato, na intersecção corpo-líquido, não serão incluídos, de uma forma geral, na presente formulação. Considerações sobre a aplicação de procedimentos que permitem tomar em conta a correção molhada serão objeto da seção 5.3.

4.2 O método variacional para problemas potenciais em fluido infinito

A formulação do método variacional aqui apresentada baseia-se em Pesce e Simos (2008). As seguintes equações são satisfeitas para problemas potenciais de escoamento em torno de corpos sólidos em fluido infinito,

$$\begin{aligned} &\nabla^2\phi = 0 \\ &\nabla\phi\cdot\mathbf{n} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = U_n \ \text{ em } S_B \ , \\ &\nabla\phi \to \mathbf{0}\,,\ \text{com } \|\boldsymbol{r}\| \to \infty \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ o campo que caracteriza a velocidade do corpo e S_B sua superfície.

Seja $\psi(\mathbf{r})$ qualquer função quadrado integrável, na seminorma,

$$\|\psi\| = \left[\int_V (\nabla\psi)^2 \,\mathrm{d}V\right]^{1/2} . \tag{4.2}$$

Esta classe de funções constitui um espaço de Sobolev, $W_2^{(1)}(\mathrm{V})$; ver, p.ex., Debnath e Mikusiński (1999).

Tomando-se o Laplaciano do campo potencial de velocidades ϕ (ver Eq. (4.1)), multiplicando-o por ψ e integrando-o no domínio fluido vem:

$$\int_V \nabla^2\phi\,\psi\,\mathrm{d}V = 0 \ , \tag{4.3}$$

mas,

$$\int_V \nabla\cdot(\nabla\phi\,\psi)\mathrm{d}V - \int_V \nabla\phi\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}V = 0 \ . \tag{4.4}$$

E, do teorema da divergência,

$$\int_{S_B} (\nabla\phi\cdot\mathbf{n})\psi\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla\phi\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}V \ . \tag{4.5}$$

A partir da condição de contorno de impermeabilidade na superfície do corpo, Eq. (4.1), e como $\nabla\phi, \nabla\psi \to \mathbf{0}$ quando $\|\boldsymbol{r}\| \to \infty$ (ver Eq. (4.1) novamente), a Eq. (4.5) pode ser escrita como

$$\int_{S_B} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\psi\,\mathrm{d}S = \int_{S_B} U_n\,\psi\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla\phi\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}V \ . \tag{4.6}$$

Definindo os funcionais

$$\begin{aligned} G(\phi,\psi) &= \int_{S_B} \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,\psi\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla\phi\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}V \\ V(\psi) &= \int_{S_B} \psi U_n \mathrm{d}S \end{aligned} \ , \tag{4.7}$$

das Eqs. (4.5) e (4.6), obtém-se uma equação fraca para o problema potencial

$$G(\phi,\psi) = V(\psi) \ , \tag{4.8}$$

que deve ser satisfeita para todo $\psi \in W_2^{(1)}(\mathrm{V})$. Note a simetria contida no funcional $G(\phi,\psi)$.

Considerando $\phi = \psi$ no funcional $G(\phi,\psi)$, Eq. (4.7), a energia cinética associada ao campo potencial de velocidades perturbado ϕ é simplesmente dada por

$$T = \frac{1}{2}\rho G(\phi,\phi) \ , \tag{4.9}$$

sendo ρ a densidade do fluido. Por outro lado, a Lagrangiana que rege o campo ϕ pode ser posta na forma

$$\mathrm{L}(\phi) = \frac{1}{2}\rho G(\phi,\phi) - \rho V(\phi) \ , \tag{4.10}$$

tal que a estacionariedade de $\mathrm{L}(\phi)$ conduz à Eq. (4.8) e vice-versa, ver APÊNDICE A.

Seja agora $\widetilde{\phi}_k(\mathbf{r})$ uma aproximação numérica de $\phi_k(\mathbf{r})$, onde k é o índice associado à direção de movimento do corpo e $k = 1,...,6$. A Eq. (4.8) pode ser resolvida em um subespaço dimensional finito, varrido por um conjunto linearmente independente de funções-teste $\{T_j(\mathbf{r}); j = 1,..., N_{TF}\}$. Tais funções devem satisfazer à equação de campo (equação de Laplace) e à condição no infinito (evanescência). Escrevendo então

$$\widetilde{\phi}_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{TF}} q_i T_i(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \widetilde{\phi}_l(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{TF}} q_j T_j(\mathbf{r}) \ , \tag{4.11}$$

sendo $k, l = 1,...,6$, e substituindo-os na Eq. (4.7) chega-se a

$$\begin{aligned} G(\phi_k,\phi_l) \cong G(\widetilde{\phi}_k,\widetilde{\phi}_l) &= \int_{S_B} \nabla\widetilde{\phi}_k \cdot \mathbf{n}\widetilde{\phi}_l \,\mathrm{d}S = \int_{S_B} \left(\sum_{i=1}^{N_{TF}} q_i \nabla T_i\right)\cdot \mathbf{n}\left(\sum_{j=1}^{N_{TF}} q_j T_j\right)\mathrm{d}S = \\ &= \sum_{i=1}^{N_{TF}}\sum_{j=1}^{N_{TF}} q_i q_j \int_{S_B} \nabla T_i \cdot \mathbf{n}\, T_j \,\mathrm{d}S \end{aligned} \ , \tag{4.12}$$

$$V_k(\phi_l) \cong V_k(\widetilde{\phi}_l) = \int_{S_B} \widetilde{\phi}_l v_k \,\mathrm{d}S = \int_{S_B} \sum_{j=1}^{N_{TF}} q_j T_j \, v_k \,\mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{N_{TF}} q_j \int_{S_B} T_j v_k \,\mathrm{d}S \ . \tag{4.13}$$

Substituindo as Eqs. (4.12) e (4.13) na Eq. (4.8) segue que

$$\sum_{i=1}^{N_{TF}}\sum_{j=1}^{N_{TF}} q_i q_j G(T_i, T_j) = \sum_{j=1}^{N_{TF}} q_j V_k(T_j) \ , \tag{4.14}$$

e a equação fraca transforma-se em um sistema algébrico linear nas incógnitas $\{q_j; j = 1,..., N_{TF}\}$, isto é,

$$\begin{aligned} &\mathbf{Gq} = \mathbf{V}_k \\ &\mathbf{G} = \left[G(T_i, T_j)\right] \\ &\mathbf{q} = \{q_i\} \\ &\mathbf{V}_k = \{V_k(T_j)\} \end{aligned} \quad . \tag{4.15}$$

Note, através da Eq. (4.15), que são $k, l = 1,...,6$ os sistemas lineares do tipo $\mathbf{Gq} = \mathbf{V}$.

Resolver a Eq. (4.15) é, de fato, buscar o ponto estacionário da função de Lagrange (Eq. (4.10)), e o resultado obtido é a melhor aproximação que pode ser calculada no subespaço de dimensão finita que é varrido pelo conjunto de funções-teste $\{T_j(\mathbf{r}); j = 1,..., N_{TF}\}$.

A condição de contorno de impermeabilidade é dada por

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \left(\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r'}\right) \cdot \mathbf{n} \ , \tag{4.16}$$

sendo $\mathbf{r'} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $(x, y, z) \in S_B$, ou, alternativamente,

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{\Omega} \cdot \left(\mathbf{r'} \times \mathbf{n}\right) \ . \tag{4.17}$$

Considerando as soluções $\phi_k(\mathbf{r}')$; $k = 1,2,...,6$ então associadas aos problemas de velocidade ou rotação unitárias no grau de liberdade k (no sistema de referências do corpo) tal que

$$\phi = \sum_{k=1}^{6} U_k \phi_k \ , \tag{4.18}$$

e escrevendo-se Eq. (4.17) como

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{\Omega} \cdot \left(\mathbf{r'} \times \mathbf{n}\right) = U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3 + \Omega_1 \left(\mathbf{r'} \times \mathbf{n}\right)_1 + \Omega_2 \left(\mathbf{r'} \times \mathbf{n}\right)_2 + \Omega_3 \left(\mathbf{r'} \times \mathbf{n}\right)_3 \ , \tag{4.19}$$

das Eqs. (4.18) e (4.19), chega-se a

$$\begin{aligned} &\nabla\phi_k \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi_k}{\partial n} = v_k \text{ em } S_B \\ &v_k = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} = n_k; \quad k = 1,2,3 \ , \\ &v_k = (\mathbf{r}' \times \mathbf{n})_{k-3}; \quad k = 4,5,6 \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde denotaremos as componentes de translação (*surge*, *sway* e *heave*) por $k = 1,2,3$ e as componentes de rotação (*roll*, *pitch* e *yaw*) por $k = 4,5,6$.

A Eq. (4.18) será solução desde que as respectivas componentes ϕ_k satisfaçam

$$\begin{aligned} &\nabla^2\phi_k = 0 \\ &\nabla\phi_k \to \mathbf{0}, \text{ com } \|\boldsymbol{r}\| \to \infty \end{aligned} \ , \tag{4.21}$$

e as condições no corpo, Eq. (4.20).

O tensor de massa adicional, M, pode ser escrito através dos funcionais definidos na Eq. (4.7), i.e.,

$$M_{kl}/\rho = G(\phi_k, \phi_l) = G(\phi_l, \phi_k) = V_k(\phi_l) = V_l(\phi_k) \ . \tag{4.22}$$

Da já observada simetria do funcional $G(\phi,\psi)$ pode-se notar, na Eq. (4.22), as usuais relações de reciprocidade. Seja então

$$F_{kl}(\phi,\psi) = \frac{V_l(\phi)V_k(\psi)}{G(\phi,\psi)} \ , \tag{4.23}$$

um funcional definido no espaço do produto cartesiano $W_2^{(1)}(\mathrm{V}) \times W_2^{(1)}(\mathrm{V})$ [10]. Assim, o tensor de massa adicional fica escrito como

$$M_{kl} = \rho F_{kl}(\phi_k, \phi_l) \ . \tag{4.24}$$

[10] Deve-se notar que $F(\cdot,\cdot)$ é bem definido e nulo quando $G(\cdot,\cdot) = 0$. Note também sua semelhança com o quociente de Rayleigh, usual na mecânica do contínuo.

Para a solução obtida no subespaço de dimensão finita,

$$\frac{\widetilde{M}_{kl}}{\rho} = G(\widetilde{\phi}_k, \widetilde{\phi}_l) = G(\widetilde{\phi}_l, \widetilde{\phi}_k) = V_k(\widetilde{\phi}_l) = V_l(\widetilde{\phi}_k) \ , \tag{4.25}$$

sendo

$$\phi_k = \widetilde{\phi}_k + \delta\phi_k; \quad k = 1,...,6 \ , \tag{4.26}$$

pode-se mostrar (ver PESCE; SIMOS, 2008; ARANHA; PESCE, 1989) que

$$G(\delta\phi_k, \widetilde{\psi}) = 0; \forall \widetilde{\psi} \ . \tag{4.27}$$

Em palavras, uma condição de ortogonalidade do tipo Galerkin é obedecida. Tal fato leva a concluir que

$$M_{kl} = \widetilde{M}_{kl} + \rho G(\delta\phi_k, \delta\phi_l) \ . \tag{4.28}$$

Da Eq. (4.28) pode-se ainda mostrar que

$$\left|\delta M_{kl}\right| \le c\left[\max\left\{\left\|\delta\phi_k\right\|; \left\|\delta\phi_l\right\|\right\}\right]^2 \ , \tag{4.29}$$

sendo c uma constante independente. Ou seja, uma aproximação numérica para a função potencial com um erro de ordem δ implica uma aproximação para o tensor massa adicional com erro de ordem δ^2.

Em termos da expansão em série de Fourier generalizada, na base composta pelas funções-teste, o tensor de massa adicional fica escrito por

$$\widetilde{M}_{kl} = \rho \sum_{i=1}^{N_{TF}} \sum_{j=1}^{N_{TF}} q_i^k q_j^l G(T_i^k, T_j^l) \ . \tag{4.30}$$

Pode-se também mostrar que (ver PESCE e SIMOS, 2008)

$$\|\delta\phi_k\| = [G(\delta\phi_k, \delta\phi_k)]^{1/2} = [G(\phi_k, \delta\phi_k)]^{1/2} = [V_k(\delta\phi_k)]^{1/2} \ . \tag{4.31}$$

4.3 Funções-teste

Através do método variacional, o potencial de velocidades é aproximado em um espaço finito-dimensional formado por funções-teste derivadas de soluções potenciais elementares, tais como pólos, dipolos, linhas e superfícies de densidade de pólos e dipolos, anéis de vórtices, etc. A escolha do conjunto de funções-teste deve considerar a natureza cinemática de cada problema. Uma escolha apropriada de funções-teste, baseada no padrão qualitativo do campo de escoamento, pode reduzir drasticamente a dimensão do espaço de representação que é requerido para a convergência numérica. De qualquer forma, isso não é mandatório. No caso do problema em fluido infinito o escoamento sempre poderá ser reproduzido por um conjunto extensivo de singularidades elementares, como as aplicadas nos códigos do método de elementos de contorno, por exemplo.

A formulação matemática das funções-teste utilizadas na exemplificação dos resultados principais que são apresentados no corpo deste texto é desenvolvida a seguir. Uso é feito de coordenadas cilíndricas. Complementarmente, nos apêndices, a formulação matemática para um anel de vórtices é apresentada, APÊNDICE B (ver PESCE; SIMOS, 2008), bem como a formulação desenvolvida para um anel de fontes, APÊNDICE C. O uso dos anéis de vórtice é ilustrado no APÊNDICE E.

4.3.1 Dipolo

A clássica solução analítica para o campo potencial de escoamento associado a uma esfera de raio a, deslocando-se com velocidade constante unitária e imersa em domínio de fluido infinito, corresponde ao de um dipolo nela centrado e é escrita em coordenadas cilíndricas na forma,

$$\phi(r,z;a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^2+z^2}\right)^{3/2} z \ , \qquad (4.32)^{11}$$

do qual as derivadas são prontamente calculáveis como

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{3}{2}r\,a^3\left(\frac{1}{r^2+z^2}\right)^{5/2} z \ , \qquad (4.33)$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^2+z^2}\right)^{3/2}-\frac{3}{2}z^2a^3\left(\frac{1}{r^2+z^2}\right)^{5/2} \ . \qquad (4.34)$$

4.3.2 Anel de dipolos

O potencial de velocidade de um i-ésimo dipolo no plano $z=0$, porém deslocado (em r') com relação à origem do sistema de coordenadas, ver Figura 4.4, é dado por

$$\phi_i(r_i'',z'';a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r_i''^2+z''^2}\right)^{3/2} z'', \qquad (4.35)^{12}$$

de tal forma que o potencial de um anel de dipolos[13] (com raio r', ver Figura 4.4) pode ser escrito como um somatório de dipolos deslocados com relação à origem, ver Eq. (4.35). Ou seja,

$$\phi(r'',z'';a)=\sum_{i=1}^{n_d}\phi_i(r_i'',z'';a), \qquad (4.36)$$

sendo n_d o número de dipolos que representa o anel aqui denominado "discreto".

---

[11] Note que, usualmente, a solução é encontrada em coordenadas esféricas; ver, p.ex., Lamb (1932).

[12] Dipolo vertical posicionado em O''.

[13] Não confundir com um anel "contínuo" de dipolos, que também poderia ser empregado.

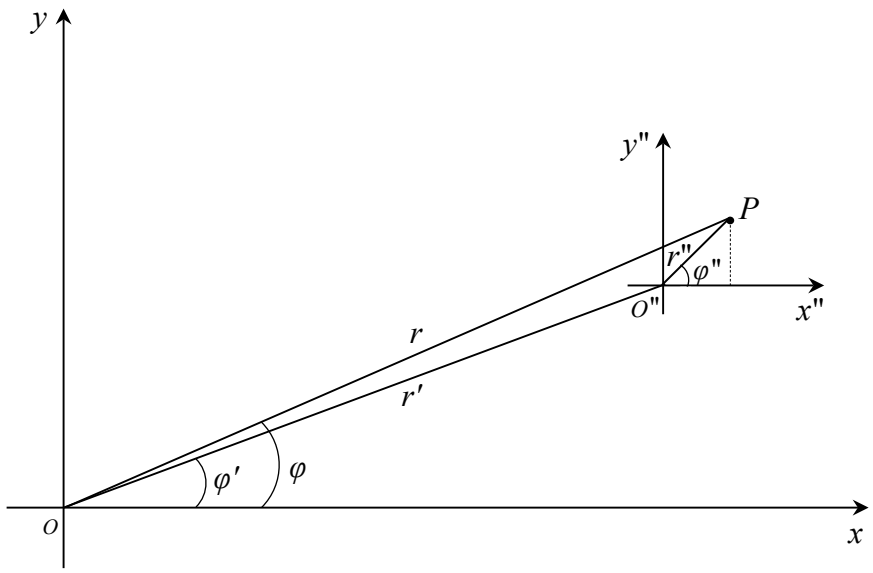


Figura 4.4 – Esboço do dipolo deslocado no plano $z = 0$.

É fácil deduzir, ver APÊNDICE D, que

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{4.37}$$

Consequentemente, para o i-ésimo dipolo no plano $z = 0$ - porém deslocado de r' com relação à origem do sistema de coordenadas - a Eq. (4.37) pode ser escrita na forma

$$r_i''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi_i'). \tag{4.38}$$

Portanto, nas Eqs. (4.35) e (4.36), $r_i''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi_i')$, com $\varphi_i' = \dfrac{2\pi(i-1)}{n_d}$. Os anéis de dipolos de raio r' são posicionados no plano $z = 0$, de tal sorte que $z'' \equiv z$, Assim, da Eq. (4.36), tem-se que:

$$\nabla\phi(r'', z''; a) = \sum_{i=1}^{n_d} \nabla\phi_i(r_i'', z''; a). \tag{4.39}$$

As derivadas do potencial de velocidade do i-ésimo dipolo deslocado (em r') são então expressas por:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial r} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r_i''}\frac{\partial r_i''}{\partial r} = -\frac{3}{2} z a^3 \left(\frac{1}{r_i''^2 + z^2} \right)^{5/2} \left(r - r' \cos\left(\varphi - \varphi_i'\right) \right). \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r_i''}\frac{\partial r_i''}{\partial \varphi} = -\frac{3}{2} z a^3 \left(\frac{1}{r_i''^2 + z^2} \right)^{5/2} r r' \operatorname{sen}\left(\varphi - \varphi_i'\right), \tag{4.41}$$

e

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r_i''^2 + z^2} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} z^2 a^3 \left(\frac{1}{r_i''^2 + z^2} \right)^{5/2}. \tag{4.42}$$

4.4 Uma medida do erro da solução fraca

A solução através do método variacional é obtida pelo uso da formulação fraca do problema, na forma da Eq. (4.7). No presente trabalho, o erro da aproximação numérica $\tilde{\phi}(\mathbf{r})$ é avaliado através do seguinte parâmetro

$$\varepsilon_{bc} = \left| \frac{\int_{S_B} \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S - \int_{S_B} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S}{\int_{S_B} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S} \right|, \tag{4.43}$$

que pode ser visto como um erro para a solução fraca com respeito à satisfação da condição de contorno na superfície do corpo. Em outras palavras, a condição necessária para que a aproximação do potencial de velocidades $\tilde{\phi}(\mathbf{r})$ seja uma aproximação adequada para o problema é que $\varepsilon_{bc} \to 0$.

A avaliação do erro da solução através da Eq. (4.43), mesmo que em uma forma integral, é satisfatória, pois a massa adicional é uma grandeza hidrodinâmica relacionada às propriedades integrais do campo de escoamento. Além disso, como apresentado anteriormente, no âmbito do método variacional, uma aproximação numérica para a função potencial com um erro de ordem δ implica uma aproximação com erro de ordem δ^2, para o tensor massa adicional, ver Seção 4.2 para detalhes.

4.5 Estratégia de implementação numérica

Nesta seção é apresentado o procedimento numérico adotado para aplicação do método variacional ao problema de impacto vertical de corpos axissimétricos. Além disso, são feitas considerações acerca da extensão do método a um caso de impacto mais geral.

4.5.1 Impacto vertical

Conforme apresentado na seção 4.1, um método numérico variacional pode ser empregado para o problema de impacto hidrodinâmico vertical assumindo-se a superfície líquida como equipotencial, o que permite a analogia com o limite assintótico de frequência infinita do problema de radiação de ondas causada pelo movimento de corpos flutuantes. Dessa forma, com base no modelo GvKM, para resolver o problema de impacto é necessário determinar, para cada instante, a massa adicional de um duplo-corpo, que é simétrico com relação ao plano $z = 0$ e cuja dimensão está associada à profundidade de penetração do corpo de impacto. A estratégia aqui utilizada consiste em estabelecer, a priori, algumas profundidades de penetração, ζ, e "construir" o duplo-corpo associado àquele ζ, conforme ilustra a Figura 4.5.

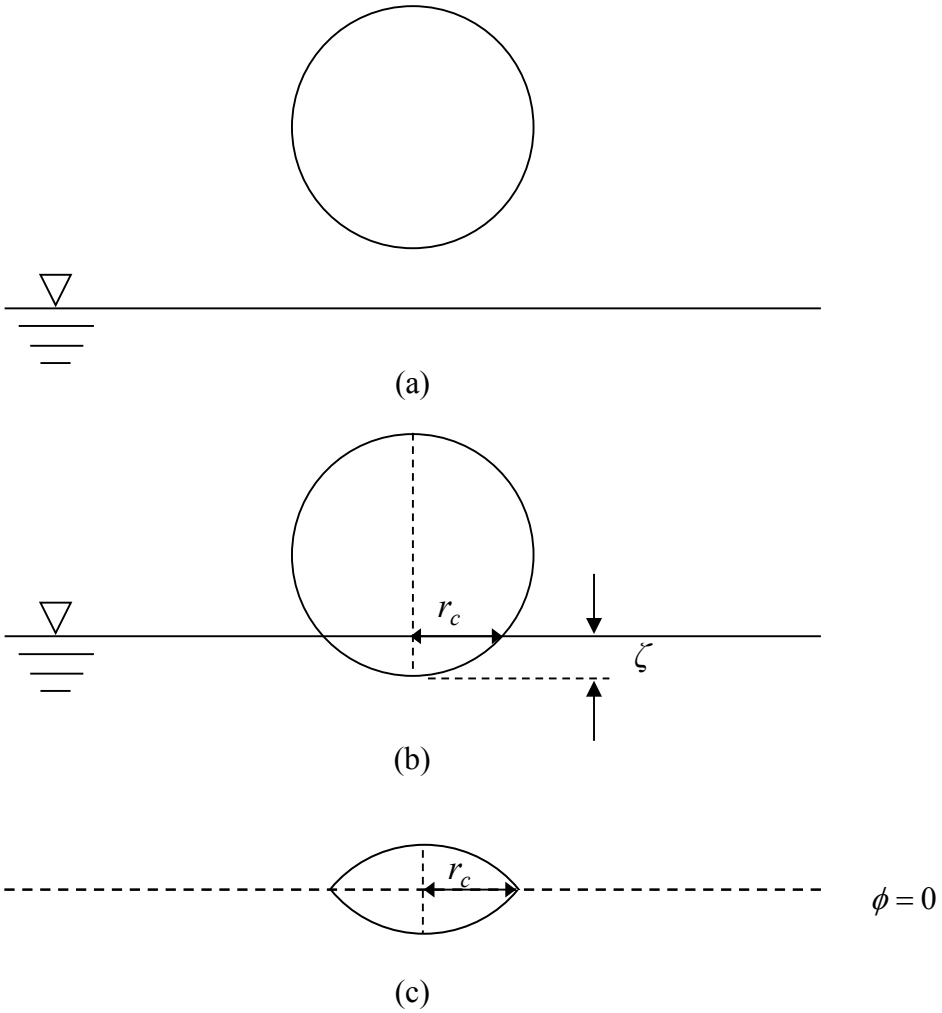


Figura 4.5 – Representação esquemática da estratégia de solução numérica.

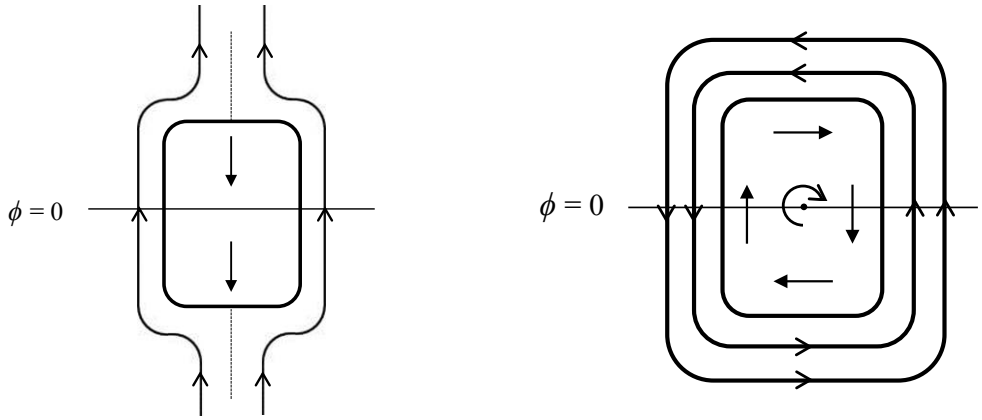
O coeficiente de massa adicional associado a cada duplo-corpo é então calculado a partir da formulação do método variacional para corpos em fluido infinito; ver seção 4.2. Após o cálculo da massa adicional para os valores de profundidade de penetração preestabelecidos, é realizada uma interpolação desses resultados para obtenção da função massa adicional. A partir do conhecimento das funções $M_b^*(\zeta^*)$ e $M_b'^*(\zeta^*)$, a equação de movimento (3.41) é integrada sob condições iniciais $\zeta^*(t_0) = 0$ e $\dot{\zeta}^*(t_0) = 1$.

Os resultados numéricos foram obtidos através de rotinas programadas em MATLAB®[14].

[14] MATLAB®: '*Matrix Laboratory*'. É uma linguagem de alto desempenho e ambiente interativo para computação numérica, visualização e programação.

4.5.2 Possível extensão do método variacional a um caso mais geral de impacto

A condição de contorno $\phi = 0$, que corresponde ao limite assintótico de alta frequência no problema de radiação de ondas geradas por corpos flutuantes ao se movimentar de forma oscilatória, é válida para o caso de oscilações em *heave*, *pitch* e *roll* (ver, por exemplo, NEWMAN, 1977, e Figura 4.1). As linhas de corrente do escoamento para o movimento vertical (*heave*) e com rotação (*roll* ou *pitch*) do duplo-corpo em fluido infinito são ilustradas na Figura 4.6.



(a) (b)

Figura 4.6 – Linhas de corrente para o movimento do duplo-corpo: (a) *heave*; (b) *roll* ou *pitch*.

Como será visto adiante, o método variacional empregado neste trabalho para o cálculo do coeficiente de massa adicional (em *heave*), poderá ser estendido para um caso de impacto mais geral, considerando-se rotações e mesmo incidência oblíqua relativamente à superfície líquida, ver Figura 4.7.

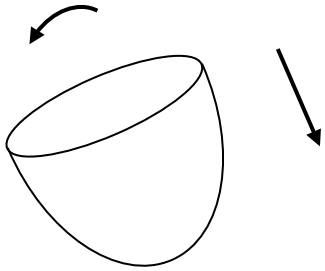


Figura 4.7 – Representação esquemática do impacto oblíquo e com rotação.

Para o problema de impacto vertical, o cálculo da massa adicional pode ser feito para valores de profundidades de penetração preestabelecidos, conforme apresentado na seção anterior. Uma interpolação é então realizada com os coeficientes de massa adicional para depois ser realizada a integração da equação de movimento. No entanto, para um caso de impacto mais geral como, por exemplo, impacto com rotação, essa metodologia não é tão eficiente, pois seriam muitas as possibilidades de combinação relativas à posição e à atitude do corpo. A eficiência computacional do método variacional permitirá, por outro lado, que o tensor massa adicional seja calculado a cada instante de tempo, dentro de uma rotina numérica que conduza à solução da equação de movimento, Eq. (3.41). Através dessa estratégia, acredita-se que a construção prévia de um grande banco de dados, varrendo inúmeras possibilidades relativas à posição e atitude do corpo, aproximação usada por Sauder e Fouques (2009) através do WAMIT®[15], não seria necessária.

Considere, por exemplo, o caso de impacto com rotação em que a atitude do corpo no momento do impacto é paralela à superfície do líquido. Apesar da formulação matemática para tratamento do problema de impacto para um caso mais geral ter sido apresentada na seção 4.2, a implementação numérica requereria maior atenção com relação à escolha e posicionamento das funções-teste. Nesse sentido, para se considerar o impacto com rotação, seria necessário alterar a composição das funções-teste. A Figura 4.8 apresenta um esboço de como poderiam ser dispostos anéis de vórtices para tratamento do problema de impacto com rotação de um corpo convexo. Note que teríamos uma função-teste composta por um par de semianéis de vórtices, ou π*-rings*. No entanto, uma análise mais cuidadosa, no que tange o tratamento numérico das funções hipergeométricas que comparecem na expressão matemática associada aos anéis de vórtices, seria então relevante.

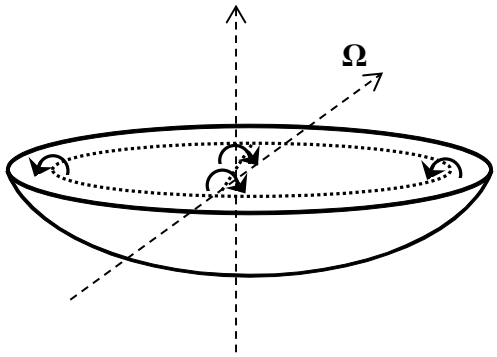


Figura 4.8 – Esquema de composição de função-teste: um par de semianéis de vórtices (π*-rings*); adaptado de Pesce e Simos (2008).

[15] WAMIT®: '*Wave Analysis Massachusetts Institute of Technology*'. É um programa baseado na teoria potencial linear e de segunda ordem para análise de corpos submersos ou flutuantes na presença de ondas.

Outro conjunto de funções-teste poderia ser formado por pares de dipolos no plano $z = 0$, de sinais trocados em torno do eixo de rotação, de forma a constituir uma única função-teste composta de duas funções elementares, ver Figura 4.9. Cada dipolo emulará um escoamento em um sentido, um contrário ao do outro. Assim, podem ser incluídos vários pares (ou anéis discretos concêntricos) de dipolos, emulando-se o padrão de escoamento ao redor do duplo-corpo.

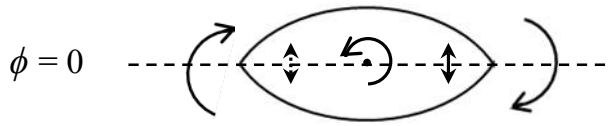


Figura 4.9 – Esquema de composição de função-teste par de dipolos no plano $z = 0$. Simbolizado pela seta dupla, o dipolo de linha tracejada tem sinal contrário ao dipolo de linha contínua.

Considere agora o impacto oblíquo, com atitude nula no momento do impacto com relação ao plano horizontal, de forma que a simetria geométrica, na vertical, seja preservada. O movimento do corpo de impacto penetrando a superfície líquida de forma oblíqua é composto pela combinação do movimento vertical do duplo-corpo e do "movimento cisalhante" na horizontal. Considere também, que os movimentos podem ser calculados de forma desacoplada. De fato, em casos gerais, que não exibam simetria, todos os elementos cruzados do tensor massa adicional devem ser calculados. O movimento vertical já foi amplamente discutido, ver novamente Figura 4.6 (a). Para tratar do movimento horizontal, poderiam ser utilizados pares de fontes-sorvedouros, deslocados do plano $z = 0$, e também invertidos em relação ao plano de impacto. Ou seja, para cada par fonte-sorvedouro um sorvedouro-fonte; somados de forma a constituir uma única função-teste composta de 4 funções elementares, como ilustra a Figura 4.10.

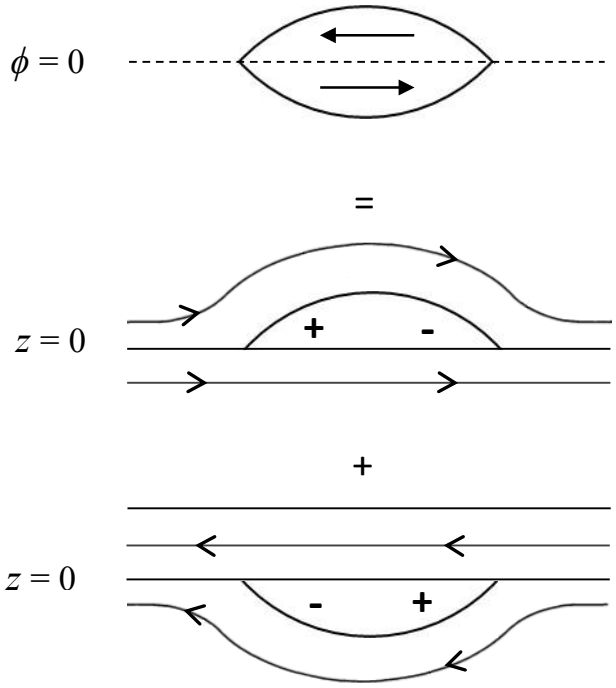


Figura 4.10 – Esquema de composição de função-teste utilizando pares de fontes-sorvedouros deslocados do plano $z = 0$.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS – IMPACTO VERTICAL DE CORPOS AXISSIMÉTRICOS

Nesta seção é apresentada a aplicação do método numérico variacional ao problema de impacto hidrodinâmico vertical de corpos axissimétricos, sob abordagem do modelo GvKM. Primeiramente são apresentados os resultados de cálculo do coeficiente de massa adicional utilizando o método variacional. Nesse caso, o procedimento adotado considera a interpolação de resultados de massa adicional tendo como base valores correspondentes a profundidades de penetração preestabelecidas, ao invés de resolver o problema de massa adicional em cada instante de integração no tempo. Em seguida, com a função massa adicional conhecida, a equação de movimento para o problema de impacto vertical é resolvida. Complementarmente, discussões e considerações acerca da correção da superfície molhada são apresentadas para o caso de impacto vertical de uma esfera, em que a velocidade de penetração é mantida constante.

As simulações numéricas foram obtidas através de rotinas desenvolvidas no software MATLAB®; ver APÊNDICE G.

5.1 Método numérico variacional para cálculo de massa adicional

São apresentados os resultados de cálculo de massa adicional para corpos axissimétricos durante impacto vertical, obtidos através do método variacional. Inicialmente são exibidos resultados de validação da ferramenta numérica. Em seguida, os resultados de massa adicional para uma família de esferoides são apresentados.

5.1.1 Validação dos resultados numéricos

Os resultados de validação do método numérico variacional para o cálculo de massa adicional são aqui apresentados. Para isso são considerados dois corpos: esfera e esferoide oblato. O cálculo obtido através do software WAMIT® é adotado como paradigma numérico para os coeficientes de massa adicional.

5.1.1.1 Esfera

O impacto vertical de uma esfera de raio a é considerado. As profundidades de penetração adimensionais preestabelecidas são ($\zeta^* = \zeta / a$): $\zeta^* = 0{,}02; 0{,}05; 0{,}10; 0{,}15; 0{,}20; 0{,}25; 0{,}30; 0{,}40; 0{,}60; 1$.

Embora a força de impacto atinja seu valor máximo no estágio inicial, isto é, em pequenas profundidades de penetração, valores moderados e mesmo elevados para ζ^* foram também considerados, $0 < \zeta^* \leq 1$, por completude e para ilustrar o processo de convergência numérica como função da esfericidade do corpo. Note que $\zeta^* = 1$ significa a penetração de todo o hemisfério. Nesta situação, o duplo-corpo equivalente é uma esfera completa. Em situações intermediárias de penetração o duplo-corpo associado é uma dupla lente esférica.

O conjunto de N_{TF} funções-teste é composto por um dipolo vertical e por $(N_{TF} - 1)$ anéis concêntricos, e circulares, de dipolos verticais discretos [16]; ver Figura 5.1. Todas as funções-teste são posicionadas no plano de simetria $z = 0$. O dipolo vertical é posicionado na origem e os anéis de dipolos são posicionados ao redor de eixo de simetria. O raio do anel de dipolos, R_j, $1 \leq j \leq (N_{TF} - 1)$, é dado por $R_j = [0{,}045 + (j-1)\Delta R]\, r_c$, sendo $\Delta R\,(N_{TF} - 2) = 0{,}93$ e r_c o raio do duplo-corpo associado à referida profundidade de penetração; ver Figura 4.5 (b) e (c). Assim, os raios dos anéis variam de $4{,}5\%\, r_c$ a $97{,}5\%\, r_c$.

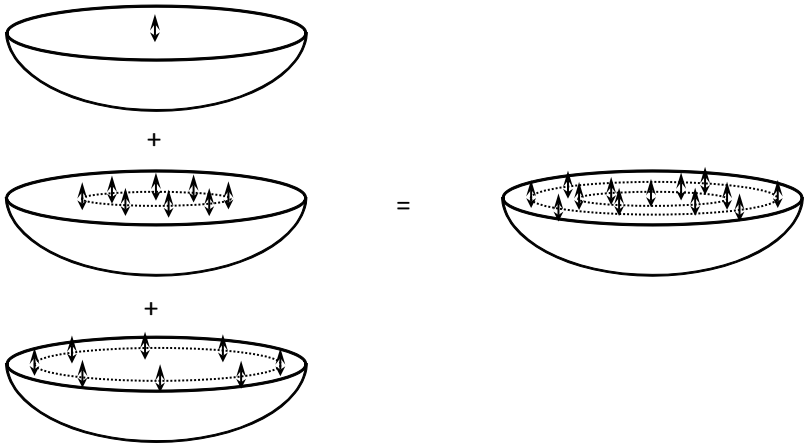


Figura 5.1 – Esquema do posicionamento das funções-teste no plano $z = 0$. O símbolo ↕ representa um dipolo vertical e o anel circular de dipolos discretos é simbolizado pela linha pontilhada.

[16] A função-teste aqui denominada anel de dipolos discretos refere-se a dipolos discretos posicionados de forma circular. Daqui por diante essa função será denominada apenas como anel de dipolos. Note que anéis contínuos de dipolos também poderiam ser utilizados.

A escolha das funções-teste é baseada na física do padrão de escoamento ao redor do duplo-corpo. Visto que a solução elementar de um dipolo representa, de forma exata, o escoamento ao redor de uma esfera, o procedimento sistemático usado neste trabalho baseia-se na inclusão de um dipolo vertical na origem a fim de emular o escoamento ao redor de uma 'esfera inscrita' com raio igual à profundidade de penetração, ζ, e dipolos outros, posicionados de forma equidistante ao longo de anéis circulares – ou, simplesmente, anéis de dipolos – para representar, por justaposição, toda a superfície do duplo-corpo, como mostrado na Figura 5.2. A linha pontilhada em vermelho representa, pictoricamente, a contribuição do dipolo vertical posicionado na origem, e os círculos pontilhados na cor azul representam contribuições de dipolos constituintes dos anéis concêntricos. No exemplo da Figura 5.2, tem-se $N_{TF} = 9$, sendo um dipolo vertical e 8 (oito) anéis, concêntricos, de dipolos discretos.

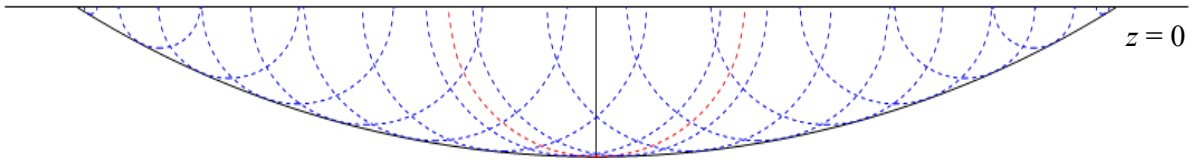


Figura 5.2 – Representação pictórica esquemática (em corte) das contribuições da funções-teste do tipo dipolo para uma determinada profundidade de penetração da esfera, $\zeta^* = 0{,}15$. A linha contínua na cor preta representa o duplo-corpo. A linha pontilhada em vermelho representa a contribuição do dipolo vertical, e os círculos pontilhados na cor azul representam as contribuições dos dipolos posicionados nos anéis concêntricos.

Obviamente, uma inclusão sistemática de anéis de dipolos pode melhorar os resultados numéricos porque o escoamento emulado aproxima-se do escoamento ao redor da superfície exata do duplo-corpo. De fato, isso pode ser visto na Figura 5.3 (a) e (b), que ilustra um estudo de convergência para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a^3}$, assim como o parâmetro de erro ε_{bc} (ver Eq. (4.43)), ambos em função do número de funções-teste, N_{TF}. Pode-se também avaliar na Figura 5.3 (c) que erros de segunda ordem nos coeficientes de massa adicional são associados a erros de primeira ordem na aproximação numérica do potencial de velocidades. Na Figura 5.3 (c), $\varepsilon_{M_b^*}$ é uma medida do "erro" do coeficiente de massa adicional quando comparação é feita com os resultados produzidos pelo processamento WAMIT®. Cumpre mencionar que tais resultados, tomados como paradigma,

são fruto de um adequado e rigoroso estudo de convergência numérica. Tal afirmação é ilustrada na Figura 5.5, onde os resultados numéricos obtidos com o programa WAMIT® são confrontados com resultados analíticos obtidos por Miloh (1991a) para uma esfera.

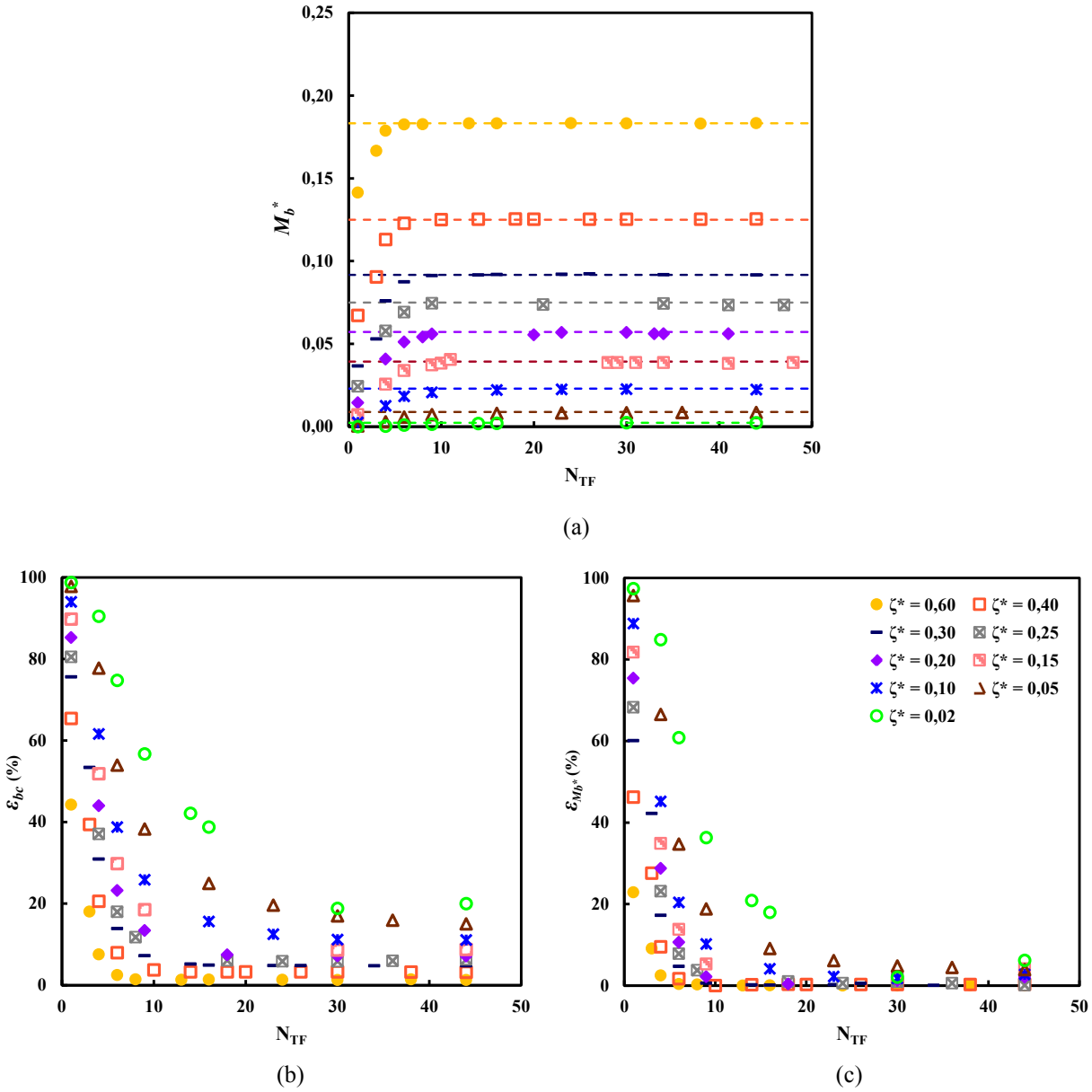


Figura 5.3 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de uma esfera, em função de N_{TF} : (a) coeficiente adimensional de massa adicional; as linhas tracejadas representam os resultados obtidos através do WAMIT®; (b) erro da solução fraca na condição de contorno; (c) erro no coeficiente adimensional de massa adicional. A legenda em (c) é também utilizada nas figuras (a) e (b).

A Figura 5.3 (a) mostra que a convergência é "rápida". Um número pequeno de funções-teste é necessário para uma convergência satisfatória, se considerados os coeficientes

de massa adicional. Além disso, com uma inclusão sistemática de anéis equidistantes de dipolos ocorre uma redução no erro ε_{bc} e, consequentemente, no erro $\varepsilon_{M_b^*}$ (ver Figura 5.3 (b) e (c)). Cabe mais uma vez lembrar que, utilizando o método variacional, o erro na massa adicional é de ordem $O\left(\varepsilon_{bc}^2\right)$. Assim, os erros nos valores convergidos de massa adicional são menores do que 4%; ver Figura 5.3 (c) novamente. Para os valores de profundidade de penetração $\zeta^* > 0{,}25$, tem-se que $\varepsilon_{M_b^*} < 0{,}4\%$.

Outro conjunto de funções-teste composto por dipolos e anéis de vórtices (ver formulação matemática no APÊNDICE B) foi também usado para calcular a massa adicional; ver APÊNDICE E. O uso de anéis de vórtice acabou, no entanto, preterido, devido ao maior esforço computacional requerido quando comparado à utilização dos anéis de dipolo, portanto não justificável no caso de impacto vertical.

Resultados correspondentes ao menor valor do parâmetro de erro ε_{bc} são obtidos (aqui simplesmente denominados "ótimos"), ver Figura 5.3 (b), e os resultados correspondentes de massa adicional adimensional são comparados, graficamente, com o paradigma numérico e apresentados em função de ζ^* na Figura 5.4.

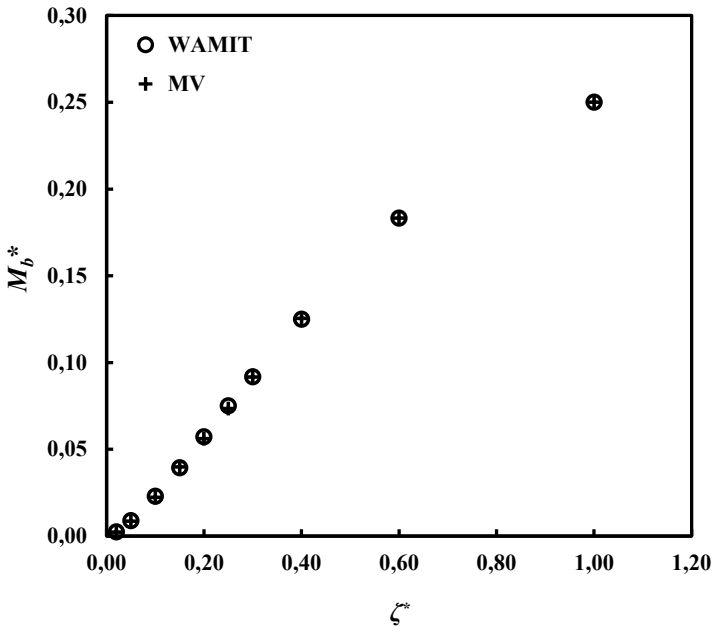


Figura 5.4 – Massa adicional adimensional de impacto hidrodinâmico de uma esfera em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

Note que para a profundidade de penetração $\zeta^* = 1$, ou seja, uma esfera totalmente submersa, o valor analítico exato é prontamente recuperado, com apenas um dipolo, como

esperado. Cabe enfatizar que a massa adicional do corpo de impacto (porção submersa) corresponde à metade da massa adicional do duplo-corpo. Logo, na Figura 5.4, para $\zeta^* = 1$ tem-se $M_b^* = 0{,}25$, ou seja, exatamente a metade do bem conhecido valor do coeficiente de massa adicional de uma esfera em fluido infinito.

Como discutido anteriormente, a Figura 5.4 mostra que os resultados obtidos através da aplicação do método variacional estão bastante aderentes ao paradigma numérico adotado, i.e., a concordância entre os resultados é muito boa. Atenção pode ser voltada para pequenos valores de penetração, região na qual a força hidrodinâmica (ou a desaceleração do corpo) de impacto atinge seu valor máximo.

Os resultados numéricos para a massa adicional são também comparados com resultados analíticos assintóticos. Através do uso de técnicas assintóticas e o emprego da teoria de similitude, pode ser mostrado que a massa adicional de uma esfera durante impacto vertical pode ser aproximada por $M_b^* = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\dot{\zeta}^{*3/2}$, segundo o modelo de Wagner (WM), ou $M_b^* = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\dot{\zeta}^{*3/2}$, se a abordagem de von Kármán (vKM) é levada em conta (ver, p.ex., CASETTA, 2004). Os resultados numéricos também serão comparados aos resultados analíticos de Miloh (1991a), para os quais a curvatura da esfera é considerada, ver Eq. (5.1). Para essa confrontação do método variacional (MV), interpolou-se curva para os resultados de massa adicional, a partir dos dados da Figura 5.4, utilizando o método dos mínimos quadrados; ver coeficientes na Tabela 5.1. Comparação é apresentada na Figura 5.5, onde apenas a faixa inicial, arbitrada como $\zeta^* < 0{,}15$, é considerada, consistentemente à teoria assintótica. Cabe ressaltar que a interpolação apresentada na Tabela 5.1 garante que a primeira derivada da função seja nula na origem, de forma consistente às soluções analíticas de von Kármán e de Wagner e mesmo à solução assintótica devida a Miloh (1991a).

$$M_b^* = \frac{3}{8}\left[\frac{16\sqrt{2}}{3\pi}(\zeta^*)^{3/2} - 1{,}19(\zeta^*)^2 - 0{,}837(\zeta^*)^{5/2}\right] + O(\zeta^{*3}). \qquad (5.1)^{17}$$

[17] A Eq. (15) apresentada em Miloh (1991a) corresponde à massa adicional de um duplo-corpo. Aquela equação foi então multiplicada por ½ e dividida por $4/3$, para adequá-la à adimensionalização de massa adicional adotada neste trabalho (ou seja, pela massa deslocada de uma esfera totalmente submersa), resultando a Eq. (5.1).

Tabela 5.1 – Coeficientes de interpolação para a massa adicional de uma esfera utilizando-se pequenos valores de profundidade de penetração, sendo $M_b^* = \alpha_1 \zeta^{*3/2} + \alpha_2 \zeta^{*2} + \alpha_3 \zeta^{*5/2}$.

M_b^*	α_1	α_2	α_3
MV	0,9974	-0,8805	0,1331
WAMIT®	1,0144	-0,9226	0,1581
Miloh, Eq. (5.1)	0,9000	-0,4463	-0,3139
von Kármán	0,9000	0	0
Wagner	1,6540	0	0

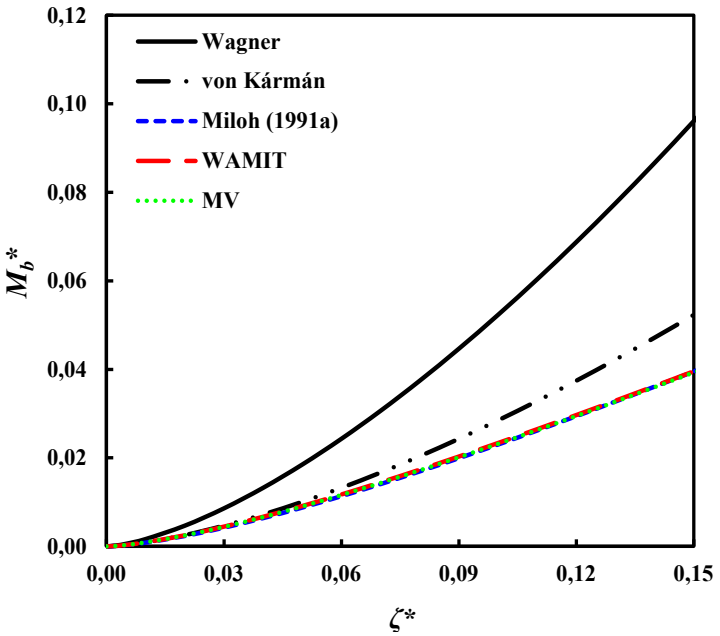


Figura 5.5 – Comparação da massa adicional de impacto hidrodinâmico de uma esfera para os casos: analítico (Wagner, von Kármán e Miloh) e numérico (MV, WAMIT®).

Conforme já mencionado, os resultados numéricos obtidos através do método variacional são praticamente coincidentes aos do paradigma numérico adotado (WAMIT®). A Figura 5.5 também mostra que a concordância entre os resultados numéricos e a aproximação de Miloh é excelente. Cabe ressaltar que, assim como as abordagens numéricas (MV e WAMIT®), a aproximação assintótica de Miloh considera a convexidade do corpo para o cálculo do coeficiente de massa adicional; ver Miloh (1991a).

Além disso, os resultados numéricos e aqueles da abordagem de Miloh estão relativamente próximos daqueles obtidos a partir do modelo de von Kármán (vKM), sendo a eles inferiores. Recorda-se que esses primeiros tomam em conta a tridimensionalidade do corpo, ao contrário do modelo vKM, e, de fato, a massa adicional de um corpo tridimensional

é menor do que a massa adicional associada à área da seção transversal diametral desse corpo (Figura 3.2 e Figura 3.6).

Por outro lado e de forma coerente, os resultados numéricos mostram-se bastante diferentes dos resultados obtidos com a abordagem de Wagner (WM), a qual leva em conta correções ao seu modelo planar devidos a efeitos do empilhamento de água. Esses efeitos serão discutidos na seção 5.3.

5.1.1.2 Esferoide oblato

O impacto vertical de um esferoide oblato é considerado. A equação do corpo, centrado na origem do sistema de coordenadas cartesianas, é dada por

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \tag{5.2}$$

No presente exemplo, $a=0{,}6$ e $b=1$ são os semidiâmetros vertical e horizontal, respectivamente. A Figura 5.6 ilustra os detalhes geométricos do corpo de impacto.

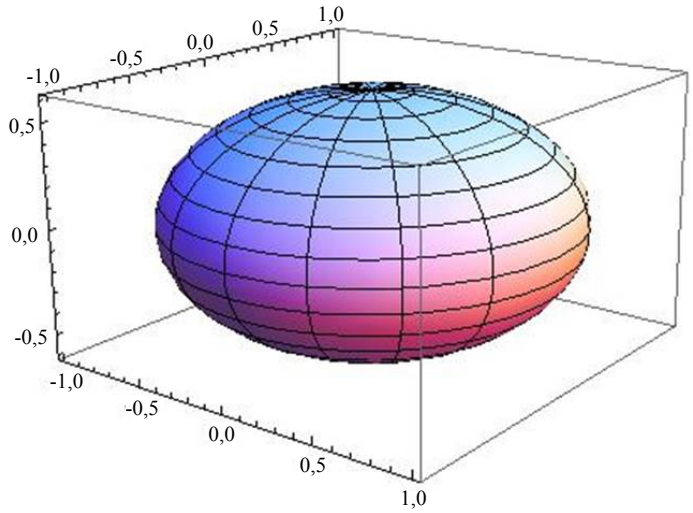


Figura 5.6 – Esferoide oblato $(a/b=0{,}6)$, sendo b o semidiâmetro e a no eixo de revolução z.

Assim como no caso do impacto de uma esfera, profundidades de penetração predefinidas $\zeta=0{,}02;0{,}05;0{,}10;0{,}15;0{,}30;0{,}45;0{,}6$ são consideradas, tais que $\zeta^*=0{,}03;0{,}083;0{,}16;0{,}25;0{,}50;0{,}75;1$, sendo $0<\zeta^*\leq 1$ e $\zeta^*=\zeta/a$. O conjunto de N_{TF}

funções-teste é composto por um dipolo vertical e por $(N_{TF}-1)$ anéis concêntricos de dipolos discretos, conforme descrito na seção 5.1.1.1. A "lei de composição" do raio de cada anel de dipolos, R_j, também é considerada segundo a mesma expressão apresentada para o caso da esfera. A Figura 5.7 apresenta os resultados numéricos (MV e WAMIT®) para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi ab^2}$, e dos parâmetros ε_{bc} e $\varepsilon_{M_b^*}$ em função do número de funções-teste N_{TF}.

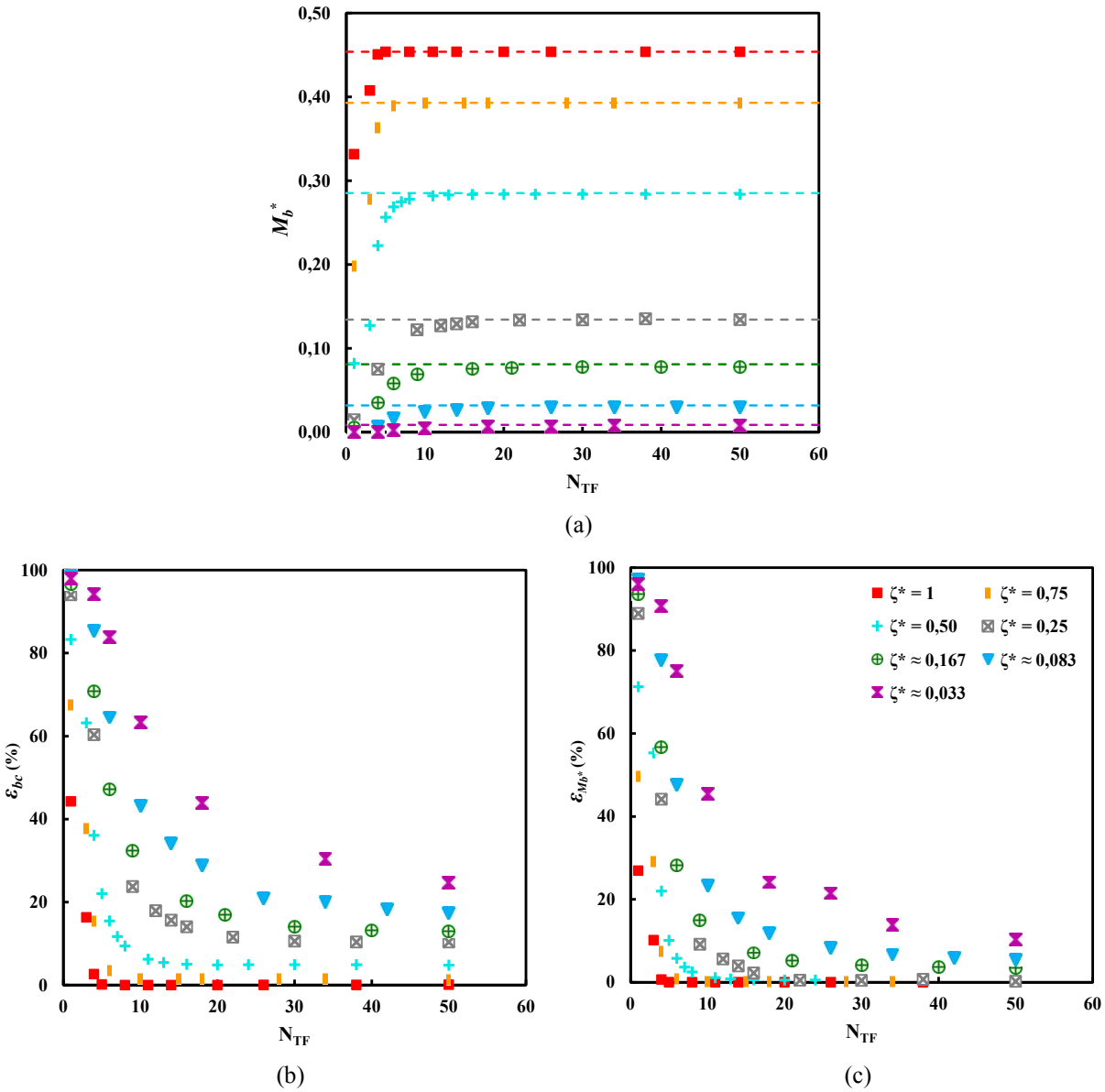


Figura 5.7 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$, em função de N_{TF}: (a) massa adicional adimensional; as linhas tracejadas representam os resultados obtidos através do WAMIT®; (b) erro da solução fraca na condição de contorno; (c) erro na massa adicional adimensional. A legenda em (c) é também utilizada nas figuras (a) e (b).

Como no caso da esfera, a concordância dos resultados numéricos obtidos com o MV com aqueles calculados pelo processamento do programa WAMIT® é muito boa. O erro do coeficiente de massa adicional cai rapidamente com a inclusão sistemática de funções-teste, ver Figura 5.7 (c). Pode-se observar que para $N_{TF} \approx 40$, os erros nos valores de massa adicional são menores do que 10% para as menores profundidades de penetração, e são praticamente desprezíveis para as maiores.

A exemplo do caso da esfera, outro conjunto de funções-teste composto por dipolos e anéis de vórtices foi também usado para calcular a massa adicional; ver APÊNDICE E.

Resultados "ótimos" para ε_{bc} são obtidos (isto é, menor valor de ε_{bc}), ver Figura 5.7 (b), e os resultados correspondentes do coeficiente de massa adicional são uma vez mais comparados ao paradigma numérico e apresentados em função de ζ^* na Figura 5.8.

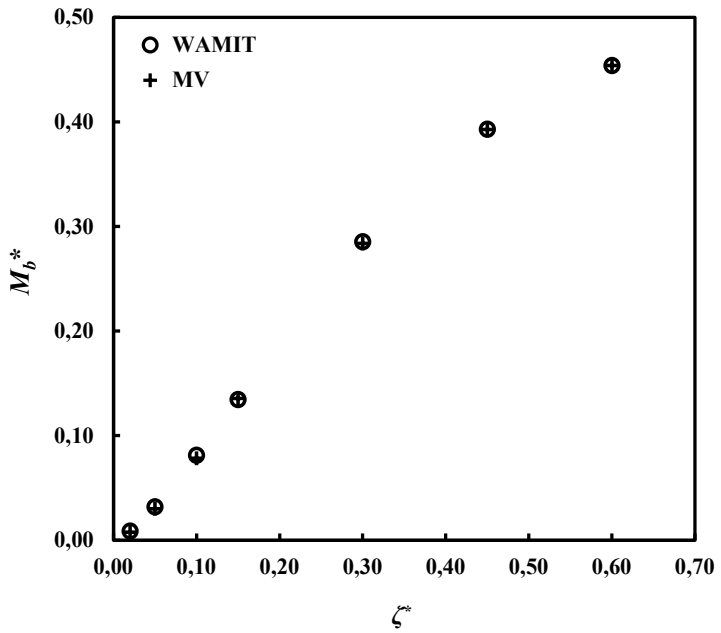


Figura 5.8 – Massa adicional adimensional de impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

5.1.2 Massa adicional para uma família de esferoides

Na seção anterior, foram apresentados os resultados do coeficiente de massa adicional para dois corpos de impacto sob a abordagem GvKM: esfera e esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$. Após a validação do método numérico para esses dois casos, resultados de massa adicional

para uma família de esferoides serão apresentados. Salvo quando mencionado explicitamente, a sistemática de escolha e posicionamento das funções-teste é a mesma apresentada na seção 5.1.1. A família de esferoides compreenderá a faixa $1/5 \leq a/b \leq 5$, totalizando 9 geometrias. Serão considerados 4 casos de esferoides oblato (quando $a < b$ na Eq. (5.2)), 4 esferoides prolato (quando $a > b$ na Eq. (5.2)) e a esfera (caso particular quando $a = b$ na Eq. (5.2)). Note que os resultados poderiam ser facilmente estendidos para outros valores de a/b.

Na Figura 5.9 são apresentados os resultados numéricos obtidos através do método variacional para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a b^2}$, para os casos de impacto vertical de esferoides oblatos $(a < b)$ em função da profundidade de penetração adimensional ζ^*. O estudo de convergência e os resultados para o parâmetro de erro ε_{bc} são apresentados no APÊNDICE F. Note que o caso do esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ é novamente apresentado, com a inclusão de valores de massa adicional para outras profundidades de penetração.

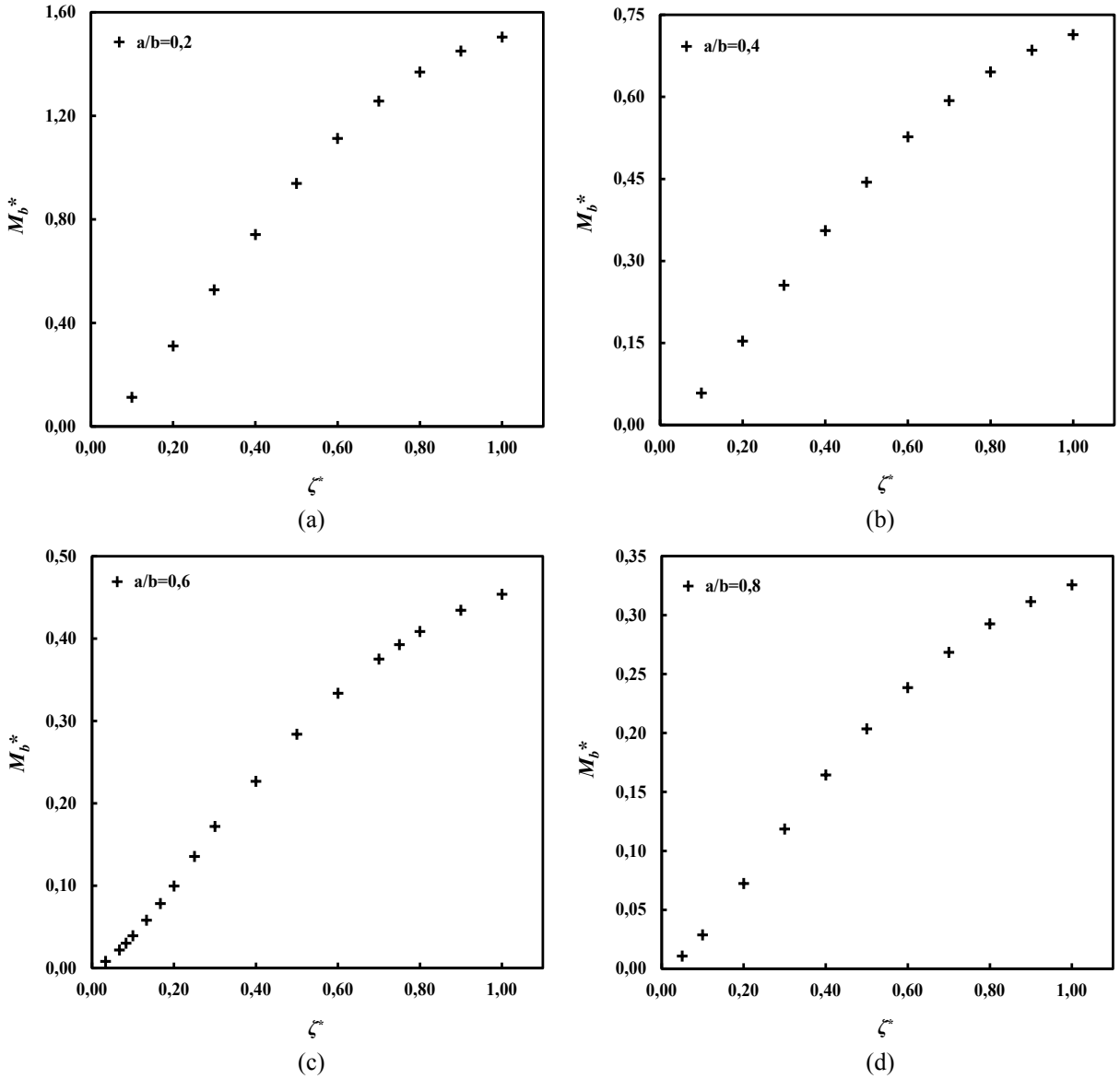


Figura 5.9 – Coeficiente adimensional de massa adicional de impacto hidrodinâmico para esferoides oblatos em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

O caso apresentado anteriormente para a esfera é aqui retomado e resultados numéricos para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a^3}$, para outros valores de profundidade de penetração são calculados, ver Figura 5.10, além da inclusão dos valores já previamente apresentados. O estudo de convergência e os resultados para o parâmetro ε_{bc} são apresentados no APÊNDICE F.

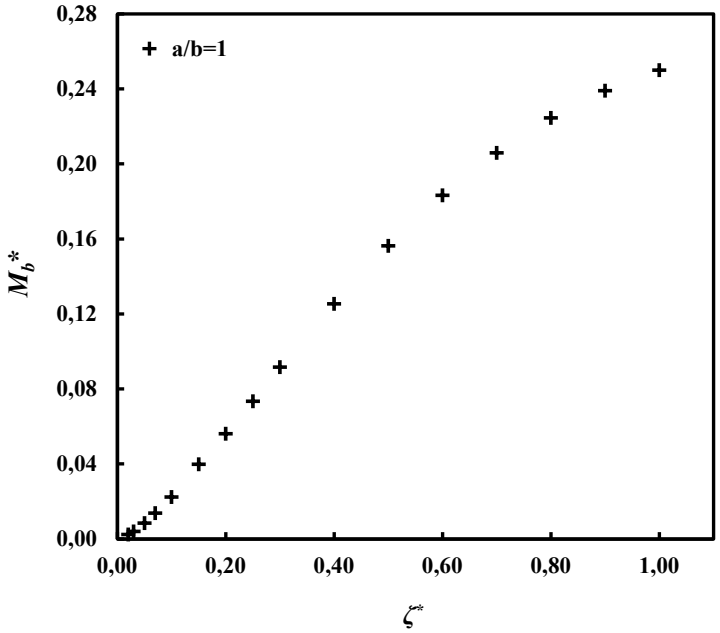


Figura 5.10 – Coeficiente adimensional de massa adicional de impacto hidrodinâmico para uma esfera em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

Na Figura 5.11 são apresentados os resultados numéricos para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a b^2}$, para os casos de impacto vertical de esferoides prolatos $(a > b)$ em função da profundidade de penetração adimensional ζ^*. As razões de esbeltez a/b para os esferoides prolatos são: $a/b = 1{,}25$; $a/b \cong 1{,}67$; $a/b = 2{,}5$ e $a/b = 5$. O estudo de convergência e os resultados para o parâmetro de erro ε_{bc} são apresentados no APÊNDICE F.

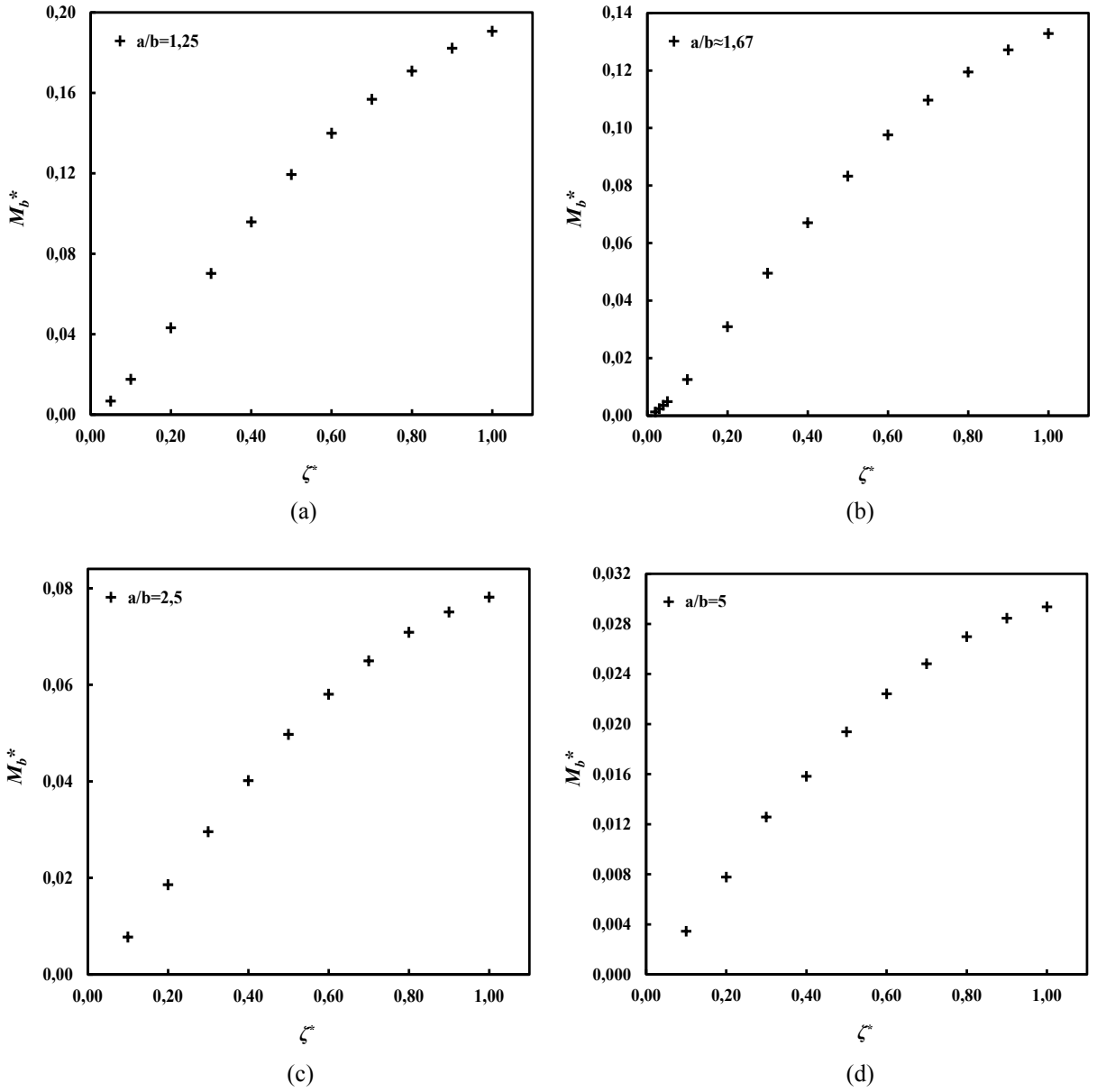


Figura 5.11 – Coeficiente adimensional de massa adicional de impacto hidrodinâmico para esferoides prolatos em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

No cálculo da massa adicional para os esferoides prolatos, além do dipolo vertical posicionado na origem e dos anéis de dipolos concêntricos, posicionados no plano $z = 0$, são utilizados dipolos verticais dispostos ao longo do eixo vertical z; ver discussão detalhada no APÊNDICE F.

Note que para se obter os resultados de massa adicional de cada duplo-corpo correspondente, basta multiplicar os resultados apresentados anteriormente (Figura 5.9 a Figura 5.11) por 2 (dois).

Um ajuste de funções é realizado a partir dos resultados dos coeficientes de massa adicional calculados para a família de esferoides. Assim, a função massa adicional, $M_b^*(\zeta^*)$, poderá ser facilmente determinada por interpolação e utilizada para a integração da equação de movimento do impacto vertical de qualquer esferoide que pertença ao intervalo paramétrico estudado. Como mencionado anteriormente, a função massa adicional e sua derivada primeira devem ser nulas na origem; conforme solução assintótica devida a Miloh (1991a), dada pela Eq. (5.3). Essa restrição tem natureza física e garante que a desaceleração, $\frac{d^2\zeta^*}{dt^{*2}}$, a ser obtida através da resolução da equação de movimento, Eq. (3.41), seja nula no instante inicial.

$$M_b^* = \frac{3}{8}\left[\frac{16\sqrt{2}}{3\pi}(\zeta^*)^{3/2} - 1{,}19(\zeta^*)^2 - 0{,}837(\zeta^*)^{5/2}\right] + O(\zeta^{*3}) . \tag{5.3}$$

Com base na solução assintótica de Miloh válida para a esfera, Eq. (5.3), a seguinte função é proposta para representar o coeficiente de massa adicional para a família de esferoides, no âmbito do modelo GvKM.

$$M_b^* = \alpha_1\zeta^{*3/2} + \alpha_2\zeta^{*2} + \alpha_3\zeta^{*5/2} + \alpha_4\zeta^{*3} + \ldots \tag{5.4}$$

Ou, alternativamente,

$$M_b^* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \zeta^{*1+n/2} , \tag{5.5}$$

sendo N um número natural.

Os valores dos coeficientes α_n são apresentados na Tabela 5.2. Esses coeficientes são obtidos através do método dos mínimos quadrados.

Tabela 5.2 – Coeficientes para interpolação da função massa adicional para uma família de esferoides.

Geometria/ interpolação	a/b	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
Esferoide oblato	0,20	0,0015	27,5405	-76,1232	96,0709	-62,7716	16,7855
	0,40	0,3989	12,4286	-37,8180	50,6480	-34,3454	9,4019
	0,60	0,8329	3,3379	-8,2748	5,3801	-0,0955	-0,7271
	0,80	1,2487	-2,0562	5,6064	-10,4995	8,5429	-2,5166
Esfera	1,00	0,8870	-0,4077	-0,4789	0,1963	0,0533	0
Esferoide prolato	1,25	0,7453	-0,7752	0,9664	-1,7726	1,3991	-0,3723
	1,67	0,4936	-0,1248	-0,7824	0,8804	-0,4127	0,0788
	2,50	0,3749	-0,5581	0,6975	-0,8811	0,6059	-0,1610
	5,00	0,0753	0,4875	-1,8987	2,6262	-1,6587	0,3977

Os resultados de massa adicional adimensional de impacto hidrodinâmico para uma família de esferoides são reunidos e reapresentados na Figura 5.12, na mesma escala, a partir da Eq. (5.4) e dos coeficientes de interpolação apresentados na Tabela 5.2.

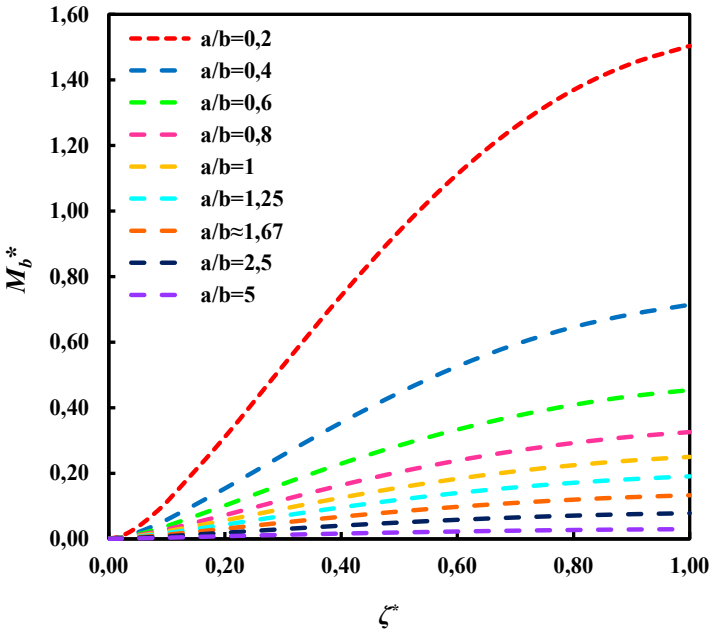


Figura 5.12 – Coeficiente adimensional de massa adicional de impacto hidrodinâmico para uma família de esferoides em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

Para uma melhor visualização dos resultados na faixa de maior interesse ao problema de impacto, os dados da Figura 5.12 são reapresentados para pequenos valores de profundidade de penetração, ver Figura 5.13.

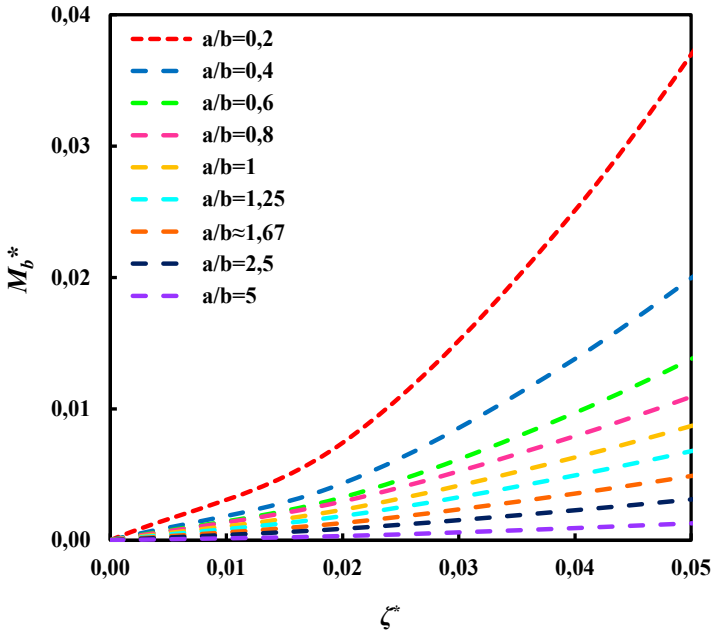


Figura 5.13 – Coeficiente adimensional de massa adicional de impacto hidrodinâmico para uma família de esferoides em função da profundidade de penetração adimensional, ζ^*.

Note que, para pequenos valores de profundidade de penetração, o primeiro termo da Eq. (5.4) é o dominante. Note também que nos modelos clássicos de Wagner e von Kármán, conforme discutido na seção 5.1.1.1, a expressão para a massa adicional também é função da penetração elevada ao expoente $3/2$, ver Eq. (5.6).

$$M_b^* = C\zeta^{*3/2}, \tag{5.6}$$

sendo $C = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ para a aproximação de Wagner e $C = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ para a de von Kármán (ver CASETTA, 2004).

Lembre que a força de impacto depende da massa adicional e de sua derivada com relação à penetração, ver seção 3.4. A equação de movimento adimensional, Eq. (3.41), é reapresentada a seguir

$$\ddot{\zeta}^* + \frac{M_b'^*}{\beta + M_b^*}\dot{\zeta}^{*2} = 0. \tag{5.7}$$

Reescrevendo a Eq. (5.5) na forma

$$M_b^* = p(\zeta^*)\zeta^{*3/2}, \tag{5.8}$$

sendo

$$p(\zeta^*) = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta^{*1/2} + \alpha_3 \zeta^{*2} + \alpha_4 \zeta^{*3/2} + \ldots, \tag{5.9}$$

ou

$$p(\zeta^*) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \zeta^{*n/2-1/2}, \tag{5.10}$$

a Eq. (5.7) pode ser reescrita na forma

$$\ddot{\zeta}^* = -\frac{\zeta^{*1/2}}{\beta + p(\zeta^*)\zeta^{*3/2}} \left[p'(\zeta^*)\zeta^* + \frac{3}{2} p(\zeta^*) \right] \dot{\zeta}^{*2}, \tag{5.11}$$

Note que no instante inicial de impacto, a desacelaração é nula. No instante imediatamente posterior, ocorre um pico, tão mais pronunciado quanto menor for a densidade do corpo de impacto, β. De fato, é imediato verificar que em $t^* \to 0^+$, quando $\zeta^* \to 0^+$,

$$\ddot{\zeta}^* \cong -\frac{1}{\beta} \left[p'(\zeta^*)\zeta^{*3/2} + \frac{3}{2} p(\zeta^*)\zeta^{*1/2} \right] \dot{\zeta}^{*2}. \tag{5.12}$$

No caso de $p(\zeta^*)$ ser constante, como nas aproximações de von Kármán e Wagner, tem-se nos instantes iniciais, respectivamente

$$\ddot{\zeta}^* \cong -\frac{3}{2} \frac{C}{\beta} \zeta^{*1/2} \dot{\zeta}^{*2}, \tag{5.13}$$

com $C = 2\sqrt{2}/\pi$ para a aproximação de von Kármán e $C = 3\sqrt{3}/\pi$ para a de Wagner.

5.2 Impacto vertical

Como enfatizado anteriormente, para o cálculo da força hidrodinâmica de impacto é necessário o conhecimento da função massa adicional e da velocidade (ver Eq. (3.33)). Dessa forma, conhecidas as funções $M_b^*(\zeta^*)$ e $M_b'^*(\zeta^*)$, a equação de movimento (3.41) é integrada. Nesta seção são apresentados os resultados da integração da equação de movimento para os seguintes corpos de impacto: esfera, esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ e esferoide prolato

$(a/b \cong 1{,}67)$. Note que os resultados subsequentes podem ser facilmente estendidos para a família de esferoides, tratada na seção 5.1.2.

Da determinação das funções $M_b^*(\zeta^*)$ e $M_b'^*(\zeta^*)$, ver seção 5.1.2, a Eq. (3.41) é integrada a partir das condições iniciais $\zeta^*(0)=0$ e $\dot{\zeta}^*(0)=1$. As figuras a seguir, Figura 5.14 a Figura 5.16, mostram posição, velocidade e aceleração[18] para os casos de impacto vertical de uma esfera e de esferoides (oblato e prolato), respectivamente, considerando diferentes valores de massa específica β.

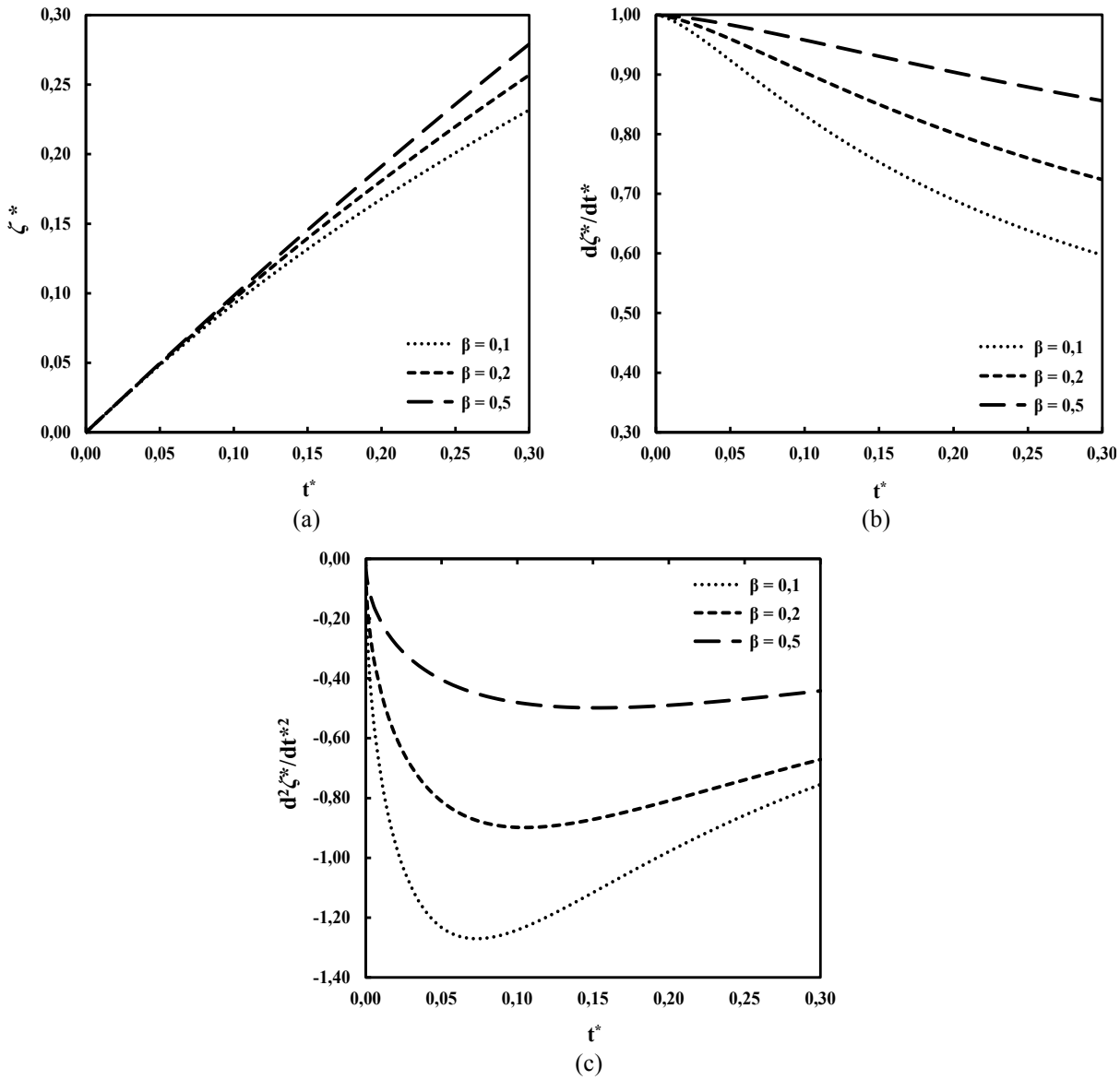


Figura 5.14 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para uma esfera durante impacto versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento sem força de empuxo, Eq. (3.41).

[18] Note que, quando não considerada a força de empuxo, a aceleração adimensional $d^2\zeta^* / dt^{*2}$ é a própria força de impacto adimensional.

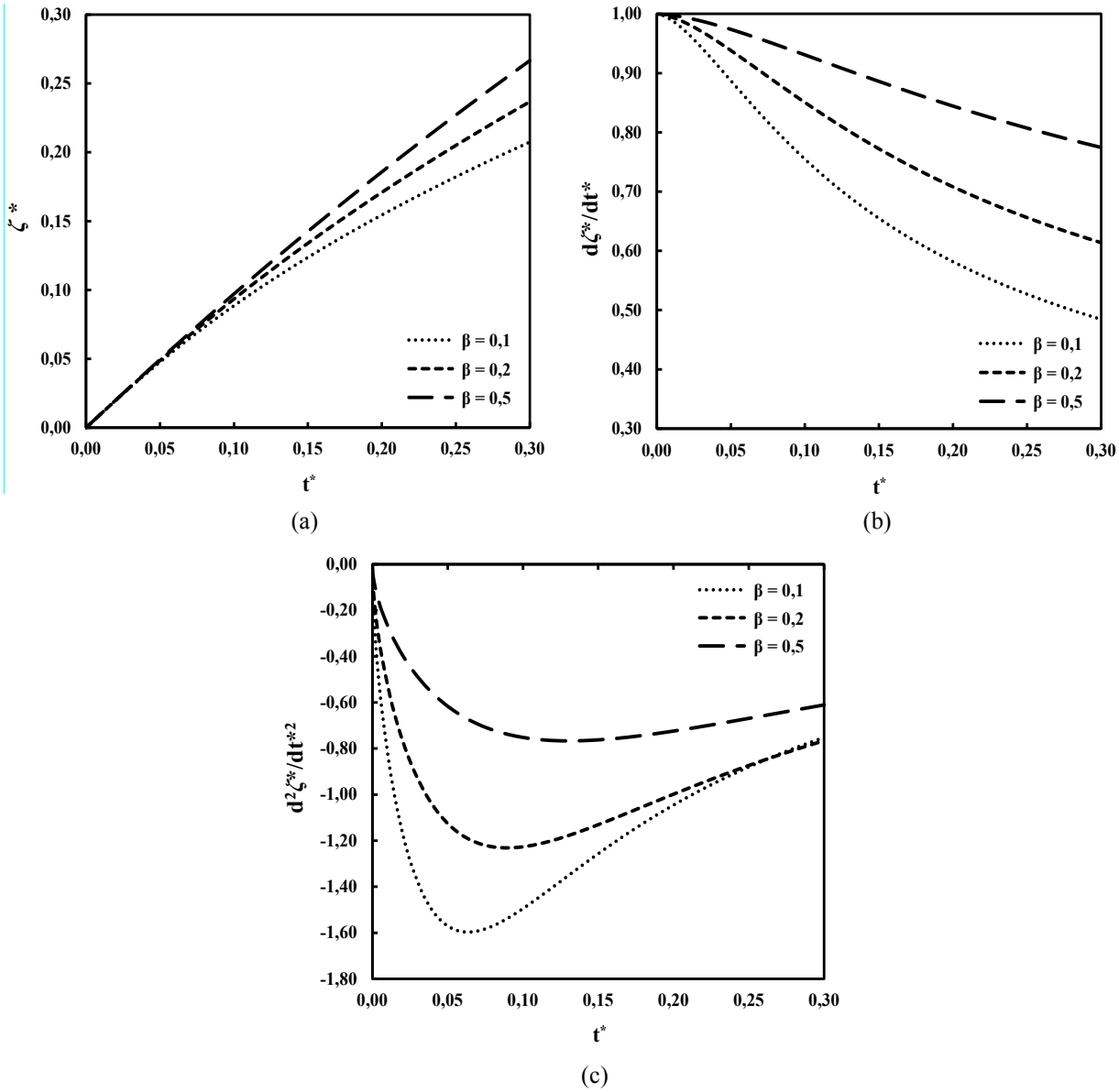


Figura 5.15 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ durante impacto versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento sem força de empuxo, Eq. (3.41).

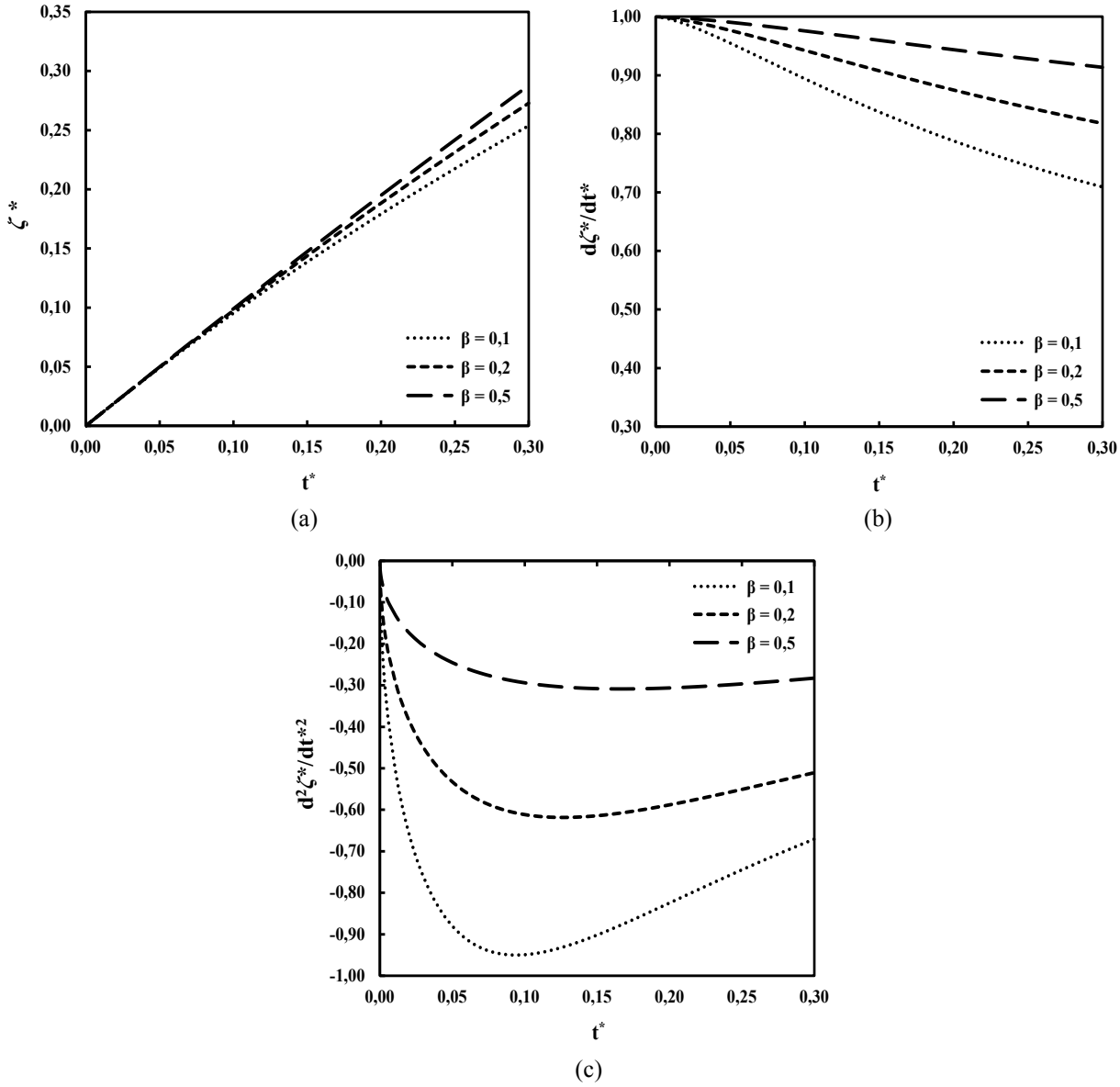


Figura 5.16 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para um esferoide prolato $(a/b \cong 1{,}67)$ durante impacto versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento sem força de empuxo, Eq. (3.41).

A força de empuxo é considerada a seguir. Será suposto que os três corpos de impacto estudados são soltos do repouso, de uma altura igual ao raio do corpo $(H/a = 1)$, como ilustrado na Figura 5.17, para o caso de uma esfera. No caso dos esferoides, a altura da qual o corpo é solto é igual ao semieixo vertical. A massa de líquido deslocada como função da profundidade de penetração do corpo, ver Eqs. (3.45) e (3.46), é dada por

$$\mu_D(\zeta^*) = \frac{\rho \pi a b^2}{3} \zeta^{*2} (3 - \zeta^*). \tag{5.14}$$

Para o caso da esfera, $a = b$ na Eq. (5.14).

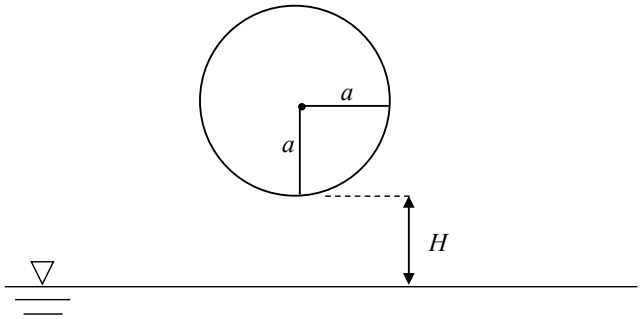


Figura 5.17 – O corpo de impacto solto do repouso. Na figura é ilustrado o caso de uma esfera de raio a.

As figuras a seguir, Figura 5.18 a Figura 5.20, mostram os resultados da integração da equação de movimento para o caso de impacto vertical com e sem força de empuxo.

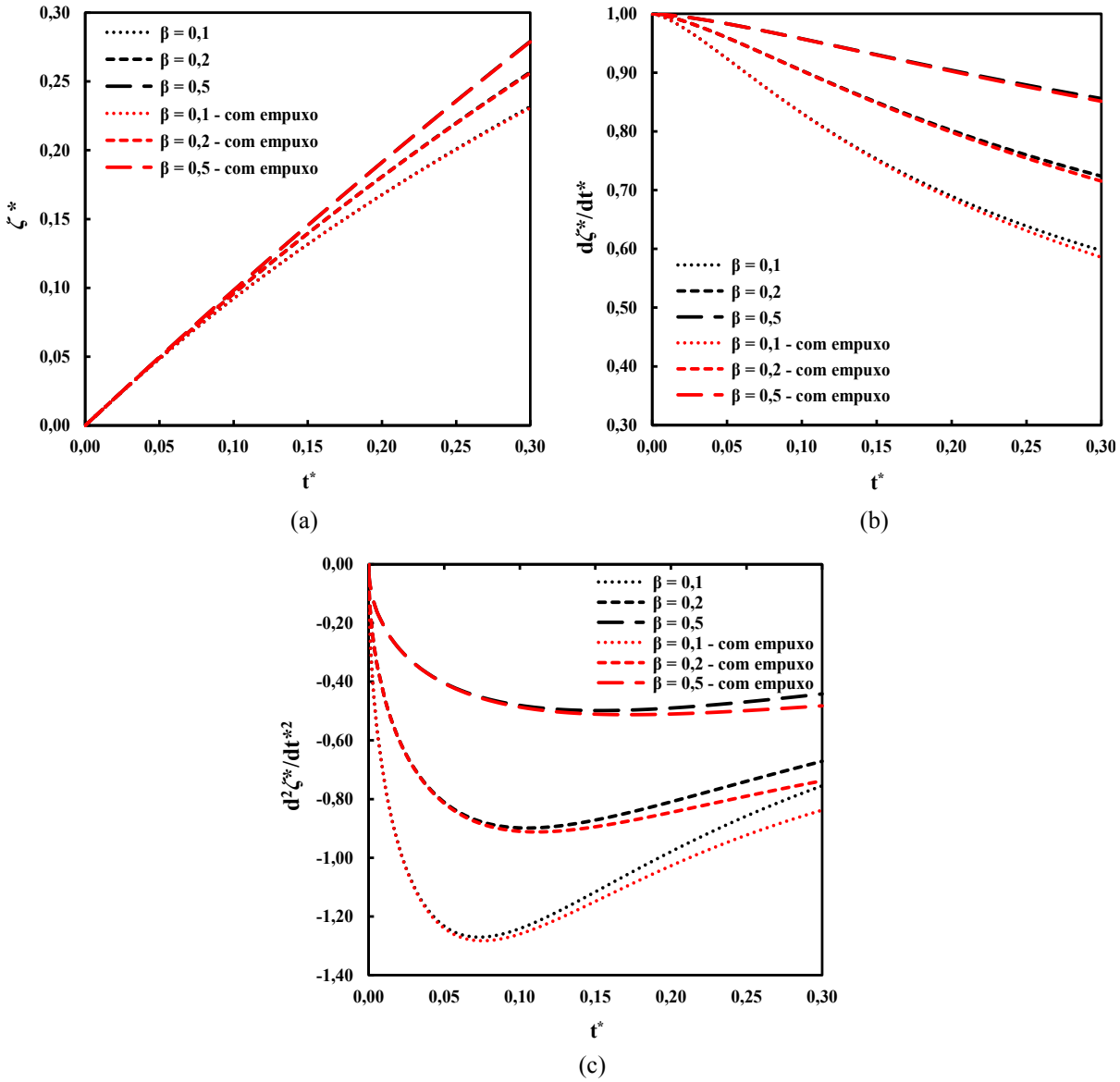


Figura 5.18 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para uma esfera durante impacto, versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento com e sem força de empuxo, Eqs. (3.48) e (3.41), respectivamente.

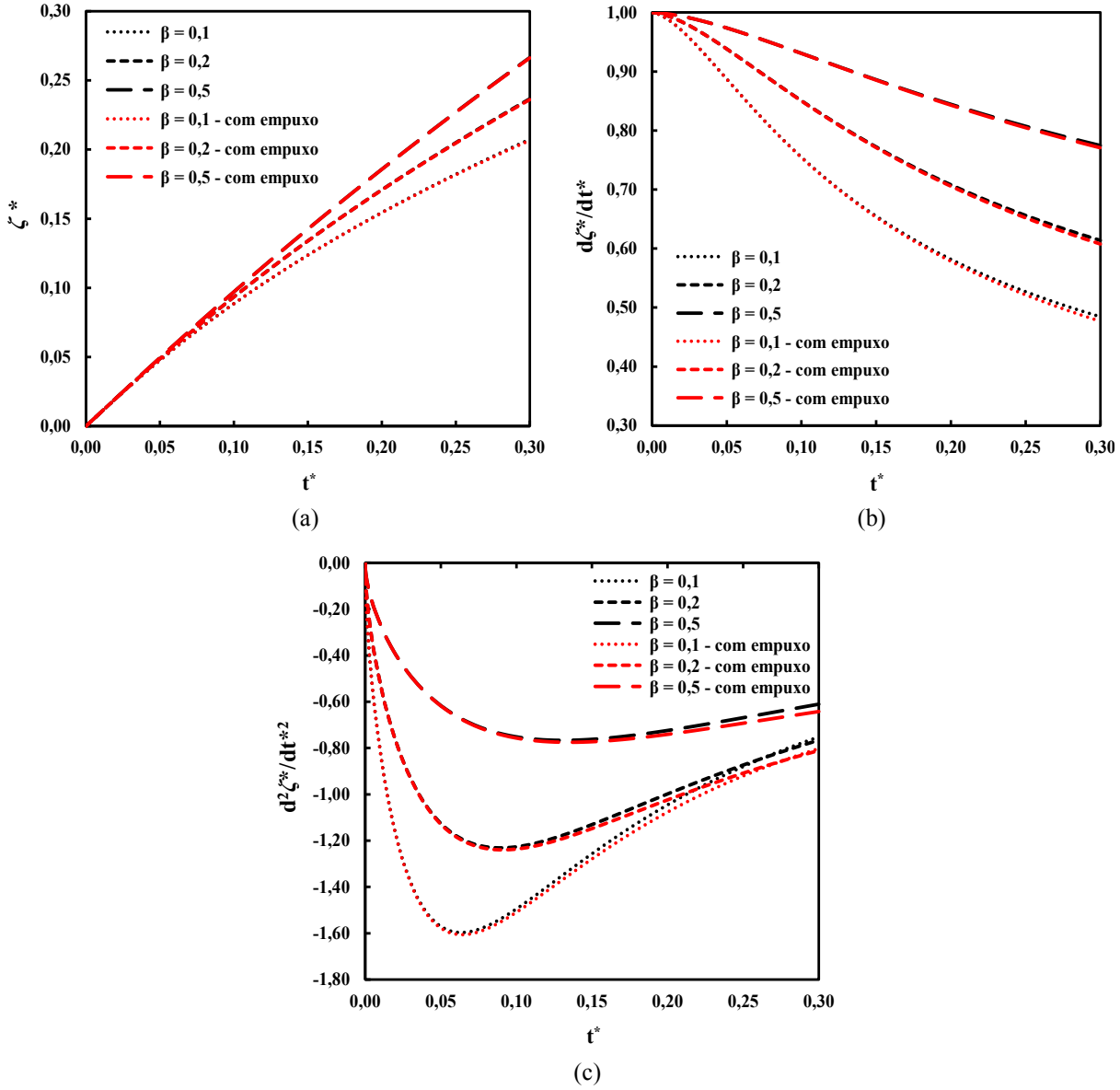


Figura 5.19 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ durante impacto, versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento com e sem força de empuxo, Eqs. (3.48) e (3.41), respectivamente.

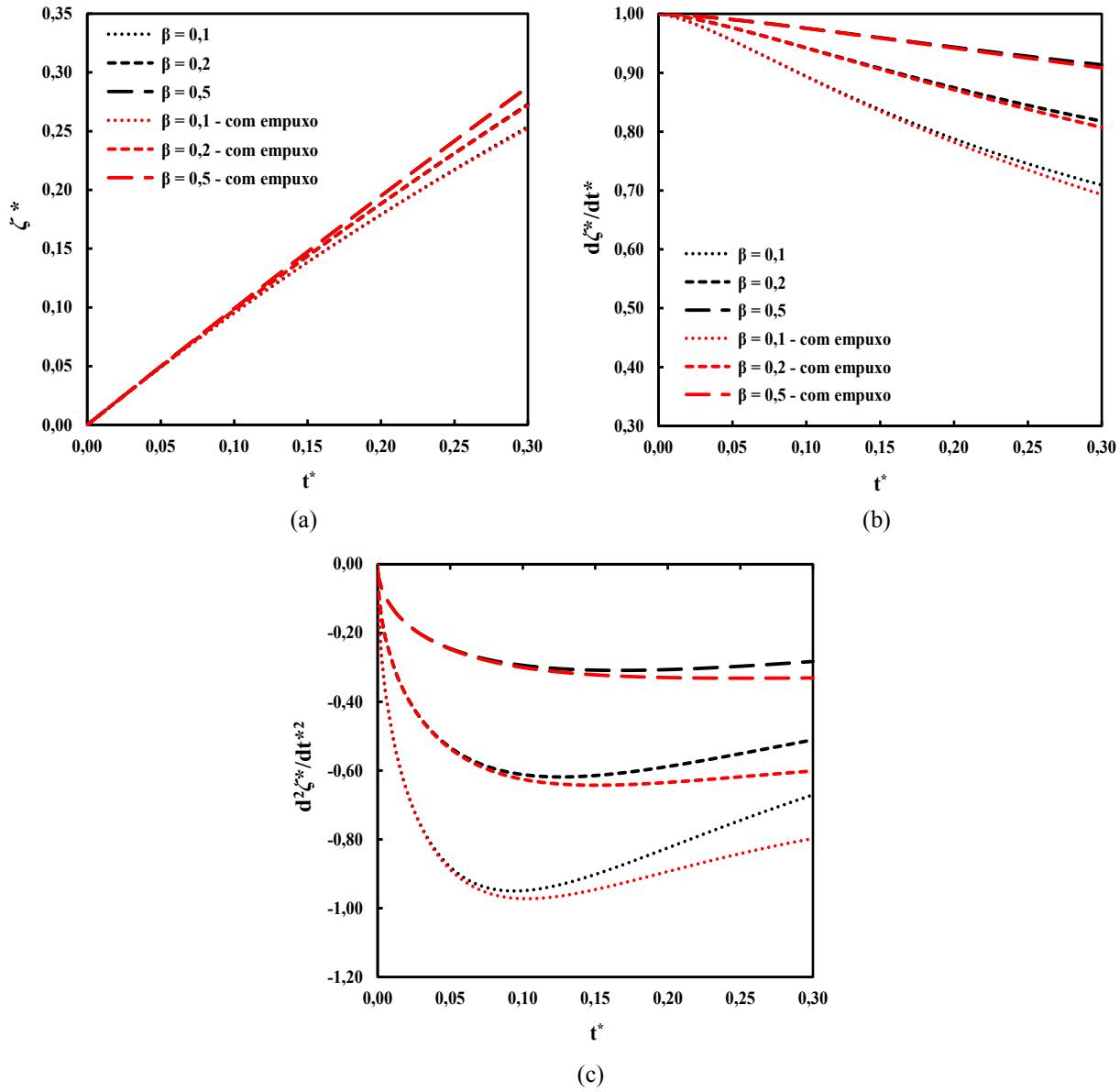


Figura 5.20 – Posição, velocidade e aceleração adimensionais para um esferoide prolato $(a/b \cong 1{,}67)$ durante impacto versus tempo adimensional, para três valores de massa específica β. Equação de movimento com e sem força de empuxo, Eqs. (3.48) e (3.41), respectivamente. A legenda em (a) é também utilizada na figura (c).

Como antecipado na seção 3.4, o efeito relativo da força de empuxo é realmente pequeno, mesmo para uma altura de queda relativamente pequena, ver Figura 5.18 a Figura 5.20. Pode ser observado também que o efeito de empuxo passa a ser importante apenas na fase final da penetração do corpo, sendo tanto maior quanto menor for a massa específica do corpo. Como observado, nesta fase final do impacto, o efeito da perda de energia por geração de onda de superfície, desconsiderada na presente análise, seria igualmente relevante.

5.3 Considerações sobre a correção molhada

Nesta seção serão discutidas, sem pretensões conclusivas, algumas aproximações para a consideração da elevação da superfície livre, ou correção molhada. Para tanto, será considerado o coeficiente de *slamming* de uma esfera, mantida a velocidade constante. Os resultados serão comparados com dados disponíveis na literatura.

O coeficiente de *slamming*, C_s, para uma esfera de raio a é definido por:

$$C_s = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 U^2}, \tag{5.15}$$

sendo F a força de impacto, componente vertical, e U a velocidade do corpo. No caso de velocidade constante,

$$F = \frac{d\left(M_b \dot{\zeta}\right)}{dt} = U^2 \frac{d\left(M_b\right)}{d\zeta}. \tag{5.16}$$

Note que neste caso, de velocidade mantida constante, a força de impacto independe da densidade do corpo; depende apenas de sua geometria, como seria esperado. Considerando as adimensionalizações $\zeta^* = \frac{\zeta}{a}$ e $M_b^* = \frac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a^3}$, tem-se que:

$$\frac{d\left(M_b\right)}{d\zeta} = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi a^3}{a}\frac{d\left(M_b^*\right)}{d\zeta^*} = \frac{4}{3}\rho\pi a^2 \frac{dM_b^*}{d\zeta^*}. \tag{5.17}$$

Logo, utilizando as Eqs. (5.16) e (5.17), o coeficiente de *slamming*, Eq. (5.15), pode ser reescrito na forma

$$C_s = \frac{U^2 \frac{4}{3}\rho\pi a^2 \frac{dM_b^*}{d\zeta^*}}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 U^2} = \frac{8}{3}\frac{dM_b^*}{d\zeta^*}. \tag{5.18}$$

Note que, ao invés da Eq. (5.16), a força poderia ser obtida através da integração do campo de pressão, Eq. (3.14). Dessa forma, o coeficiente de *slamming* pode ser escrito como

$$C_s = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 U^2} \int_{S_B} p n_z \mathrm{d}S \,. \tag{5.19}$$

Os resultados numéricos obtidos com o método variacional são comparados com aqueles obtidos por Battistin e Iafrati (2003), com as aproximações assintóticas de Wagner e Miloh (1991a), e com dados experimentais de Baldwin e Steves (1975) e Nisewanger (1961). A comparação do coeficiente de *slamming* é apresentada na Figura 5.21 em função da profundidade de penetração adimensional. A função massa adicional para a esfera, obtida através do método variacional, é dada por $M_b^* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \zeta^{*1+n/2}$ (ver seção 5.1.2) com os coeficientes α_n apresentados na Tabela 5.2.

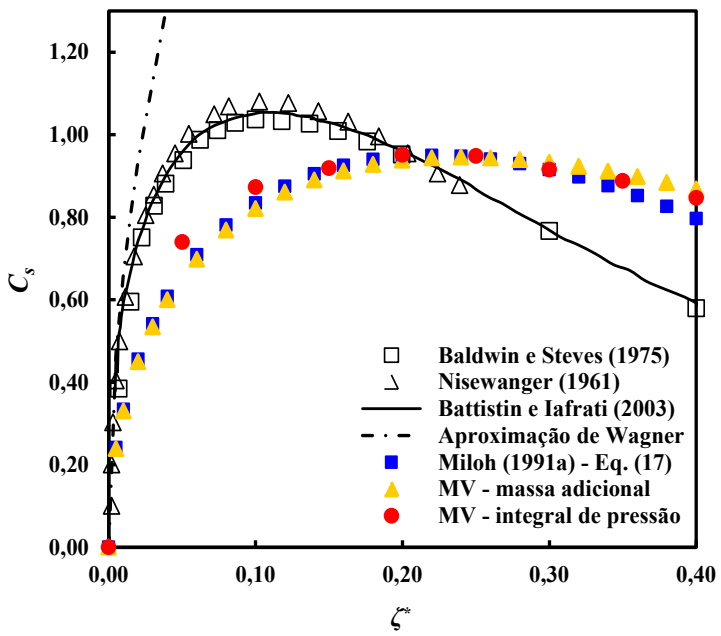


Figura 5.21 – Comparação do coeficiente de *slamming* versus profundidade de penetração adimensional ζ^* para uma esfera em impacto a velocidade constante, para os seguintes casos: (i) experimental (Baldwin e Steves; Nisewanger); (ii) teórico com correção molhada: Wagner (analítico), Battistin e Iafrati (numérico); (iii) teórico sem correção molhada: Miloh (analítico), MV (numérico, Eqs.(5.18) e (5.19)).

Na Figura 5.21, o resultado correspondente à aproximação assintótica de Miloh (ver Eq. (17) de MILOH, 1991a) não leva em conta o efeito da correção molhada, o que justifica a boa concordância com os resultados numéricos obtidos através do método variacional, que tampouco o considera. Além disso, pode ser observado que o coeficiente de *slamming* calculado por meio da massa adicional, Eq. (5.18), mostra-se de fato muito próximo daquele

obtido através da integração do campo de pressão, Eq. (5.19), ambos obtidos através do MV. Como esperado, os resultados obtidos por meio da massa adicional, mostram-se ainda mais aderentes aos resultados de Miloh, que segue o mesmo procedimento. Deve-se mais uma vez ressaltar que uma aproximação numérica para a função potencial com erro de ordem δ implica uma aproximação para o tensor massa adicional com erro de ordem δ^2. Vale ainda mencionar que a boa concordância entre os resultados experimentais e o resultado de Battistin e Iafrati (2003) deve-se ao fato desse último considerar o efeito da correção molhada em sua abordagem numérica.

Complementarmente, em sua abordagem assintótica, Miloh (1991a) calculou um fator de correção, C_w, para uma esfera, a ser aplicado na Eq. (5.3), dada na forma,

$$C_w = 1{,}327 - 0{,}154\zeta^* + O(\zeta^{*2}) . \tag{5.20}$$

A expressão acima é estritamente válida para pequenas penetrações. O valor máximo do fator de correção para uma esfera é 1,327.

O procedimento adotado por Miloh para incorporar essa correção ao coeficiente de *slamming* consiste em considerar $\hat{\zeta} = \zeta C_w$ na expressão da massa adicional, dada por (5.3). A partir dessa substituição, o coeficiente de *slamming* pode ser obtido a partir da Eq. (5.18).

Seguindo esse procedimento, considerando apenas o termo dominante, $C_w = 1{,}327$, e utilizando a função massa adicional obtida na seção 5.1.2, Eq. (5.5), a Eq. (5.18) passa a ser reescrita na forma

$$C_s = \frac{8}{3}\left[\frac{3}{2}\alpha_1 \mathrm{C_w^{3/2}}\zeta^{*1/2} + 2\alpha_2 \mathrm{C_w^2}\zeta^* + \frac{5}{2}\alpha_3 \mathrm{C_w^{5/2}}\zeta^{*3/2} + 3\alpha_4 \mathrm{C_w^3}\zeta^{*2} + \frac{7}{2}\alpha_5 \mathrm{C_w^{7/2}}\zeta^{*5/2}\right], \tag{5.21}$$

com os coeficientes $\alpha_n; n = 1,\ldots,5$ dados na Tabela 5.2.

Alternativamente, se os dois termos da Eq. (5.20) são considerados, o coeficiente de *slamming* fica escrito na forma da Eq. (5.22).

$$C_s = \frac{8}{3}\left[\frac{3}{2}\alpha_1\left(\mathrm{C}_\mathrm{w}^{3/2}\zeta^{*1/2} + \mathrm{C}_\mathrm{w}^{1/2}C'_w\zeta^{*3/2}\right) + 2\alpha_2\left(\mathrm{C}_\mathrm{w}^{2}\zeta^{*} + \mathrm{C}_\mathrm{w}C'_w\zeta^{*2}\right) + \right.$$
$$\frac{5}{2}\alpha_3\left(\mathrm{C}_\mathrm{w}^{5/2}\zeta^{*3/2} + \mathrm{C}_\mathrm{w}^{3/2}C'_w\zeta^{*5/2}\right) + 3\alpha_4\left(\mathrm{C}_\mathrm{w}^{3}\zeta^{*2} + \mathrm{C}_\mathrm{w}^{2}C'_w\zeta^{*3}\right) + \tag{5.22}$$
$$\left.\frac{7}{2}\alpha_5\left(\mathrm{C}_\mathrm{w}^{7/2}\zeta^{*5/2} + \mathrm{C}_\mathrm{w}^{5/2}C'_w\zeta^{*7/2}\right)\right],$$

sendo $C'_w = \dfrac{dC_w}{d\zeta^*}$.

Os resultados para o coeficiente de *slamming* de uma esfera durante impacto vertical com velocidade constante, utilizando a aproximação de Miloh para correção da superfície molhada, são apresentados na Figura 5.22.

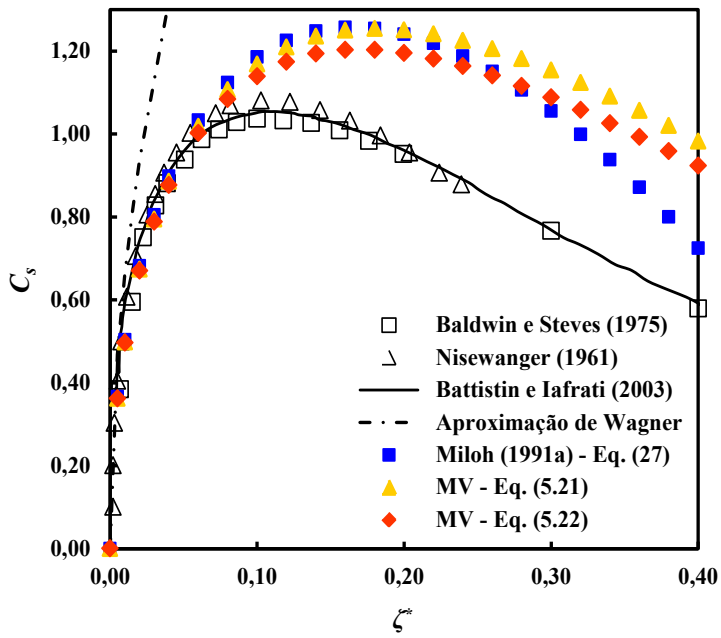


Figura 5.22 – Comparação do coeficiente de *slamming* versus profundidade de penetração adimensional ζ^* para uma esfera em impacto a velocidade constante para os seguintes casos: (i) experimental (Baldwin e Steves; Nisewanger); (ii) teórico com correção molhada: Wagner (analítico), Miloh (analítico), Battistin e Iafrati (numérico), MV (numérico). Os resultados obtidos com o método variacional (MV) incluem o fator de correção para a superfície molhada da aproximação de Miloh.

Com o fator de correção proposto por Miloh, Eq. (5.20), os resultados do coeficiente de *slamming* do MV se aproximam bastante dos resultados experimentais e numéricos (BATTISTIN e IAFRATI, 2003), para baixa profundidade de penetração; ver novamente resultados sem correção na Figura 5.21. Para maiores valores de penetração, a diferença entre esses resultados é significativa.

No entanto, observa-se que a correção proposta por Miloh, e que aqui é utilizada no MV, é estritamente válida para $\zeta^* << 1$. Tal fato estimula a busca de uma solução analítica ou numérica mais abrangente, para maiores profundidades de penetração.

Note também na Figura 5.22, que os resultados da aproximação de Miloh (Eq. (27) de MILOH, 1991a) e do MV (Eq. (5.21)) utilizam $C_w = 1{,}327$ para corrigir a massa adicional e, consequentemente, o coeficiente de *slamming*. Por sua vez, os resultados obtidos com a incorporação dos dois termos da Eq. (5.20) ao coeficiente de *slamming*, Eq. (5.22), apresentam uma redução de valores, para maiores valores de profundidade de penetração, quando comparados aos resultados utilizando apenas termo dominante de C_w.

Considerações adicionais acerca da correção molhada podem ser feitas utilizando-se a relação da evolução do raio $c(t)$ do disco, que é a projeção da superfície molhada no plano horizontal, em função da profundidade de penetração $\zeta(t)$. Tal relação, válida para um corpo de impacto rígido e axissimétrico, no âmbito da teoria de Wagner, ver Korobkin e Scolan (2006), é dada por:

$$\zeta(t) = \int_0^{\pi/2} f\left(c(t)\operatorname{sen}\beta\right)\operatorname{sen}\beta \, d\beta \,, \tag{5.23}$$

sendo $f(r)$ a função que descreve a forma do corpo em coordenadas polares. Substituindo $f(r) = a - \sqrt{a^2 - r^2}$ para o caso de uma esfera de raio a, a Eq. (5.23) resulta em

$$\zeta(t) = \int_0^{\pi/2} \left(a - \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\beta}\right)\operatorname{sen}\beta \, d\beta \,, \tag{5.24}$$

isto é,

$$\zeta(t) = a - \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2\beta} \, \operatorname{sen}\beta \, d\beta \,. \tag{5.25}$$

A Eq. (5.25) pode ser escrita na forma[19]

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{a} = 1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\; F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{c^2}{a^2 - c^2}\right), \tag{5.26}$$

em termos de uma função hipergeométrica, F, ou, ainda,

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right) \ln\left[\left(1 - \frac{c}{a}\right)\left(\frac{1}{1 + c/a}\right)\right]. \tag{5.27}$$

A partir da Figura 5.23, tem-se

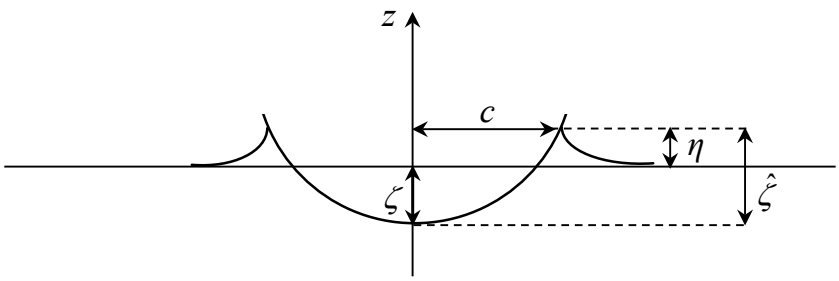


Figura 5.23 – Definição dos parâmetros geométricos para o corpo durante impacto, considerando a elevação da superfície livre.

$$\hat{\zeta} = \zeta + \eta, \tag{5.28}$$

e

$$c = \sqrt{2a\hat{\zeta} - \hat{\zeta}^2}, \tag{5.29}$$

resultando

$$\hat{\zeta}^* = \frac{\hat{\zeta}}{a} = 1 - \sqrt{1 - (c/a)^2}. \tag{5.30}$$

[19] As formas (5.26) e (5.27) foram obtidas através do software Mathematica®.

Considere, assim, uma segunda "aproximação" para a correção molhada segundo a estratégia apresentada a seguir. Os resultados de massa adicional, $M_b^*(\zeta^*)$, para uma esfera apresentados na seção 5.1.2, são reinterpretados como sendo função de $\hat{\zeta}^* = \hat{\zeta}/a$. Considera-se então que a superfície equipotencial $\phi = 0$ esteja deslocada em relação ao plano $z = 0$, passando para a posição η, ver Figura 5.23. Conhecido o valor de $\hat{\zeta}^*$, o valor correspondente de c é obtido pela relação geométrica dada pela Eq. (5.29). Por fim, utilizando a Eq. (5.27) (ou Eq. (5.26)), podemos reapresentar os resultados de $M_b^*(\hat{\zeta}^*)$, em função de ζ^*; ver Figura 5.24. Este "procedimento" é apresentado na Eq. (5.31), considerando as aplicações g_1 e g_2.

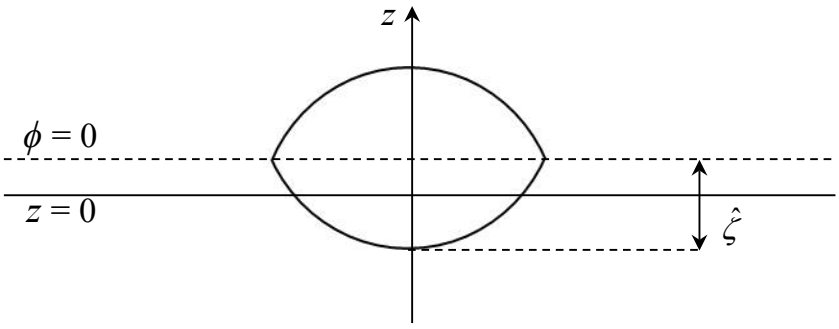


Figura 5.24 – Parâmetros geométricos para o duplo-corpo, considerando a condição $\phi = 0$ deslocada do plano $z = 0$.

$$\begin{aligned} &g_1 : \hat{\zeta}^* \to M_b^*(\hat{\zeta}^*), \text{ calculado através do MV,} \\ &g_2 : \hat{\zeta}^* \to \zeta^*, \text{ utilizando as Eqs. (5.29) e (5.27).} \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ou seja, determina-se a massa adicional do "corpo aumentado pela correção molhada", substituindo $\hat{\zeta}^*$ na função massa adicional obtida na anteriormente; ver seção 5.1.2.

O coeficiente de *slamming* é então obtido a partir da Eq. (5.18). Note que, através desse procedimento, $M_b^* = M_b^*(\hat{\zeta}^*)$. Assim,

$$C_s = \frac{8}{3}\frac{dM_b^*}{d\zeta^*} = \frac{8}{3}\frac{dM_b^*}{d\hat{\zeta}^*}\frac{d\hat{\zeta}^*}{d\zeta^*} = \frac{8}{3}\frac{dM_b^*}{d\hat{\zeta}^*}\frac{d\hat{\zeta}^*}{dc}\left(\frac{d\zeta^*}{dc}\right)^{-1}. \tag{5.32}$$

A partir da Eq. (5.30),

$$\frac{d\hat{\zeta}^*}{dc} = \frac{c}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(c/a)^2}} \,. \tag{5.33}$$

e, da Eq. (5.27),

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta^*}{dc} = &-\frac{1}{4}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)\ln\left[\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{a+c}\right)\right]+ \\ &\frac{1}{4}\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)^{-1}\ln\left[1+\left(\frac{a}{a+c}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.34}$$

O coeficiente de *slamming* pode então ser obtido através das Eqs. (5.32) a (5.34). Os resultados são apresentados na Figura 5.25, mas como função da profundidade de penetração real, ou seja, medida a partir do plano $z = 0$. A título de comparação os resultados da Figura 5.22 são também incorporados.

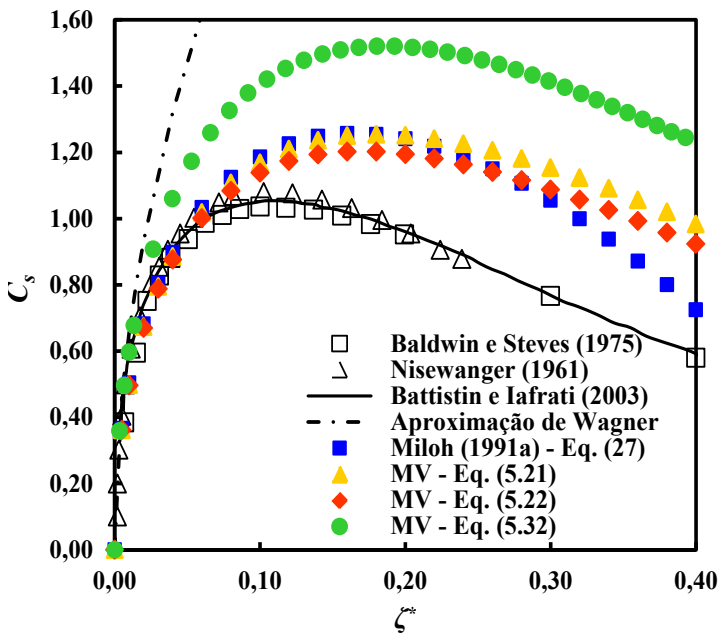


Figura 5.25 – Coeficiente de *slamming* versus profundidade de penetração adimensional ζ^* para uma esfera, calculada a partir da Eq. (5.32).

Vale enfatizar que em ambas as correções consideradas, a de Miloh (1991a) e de Korobkin e Scolan (2006), que utiliza a equação (5.23),a massa adicional é reinterpretada em função de $\hat{\zeta}^*$. Através desse procedimento de "reinterpretação da cota de penetração", ambas as correções levam a melhores estimativas do coeficiente de *slamming* nas regiões de pequena

penetração, quando comparadas às dos modelos sem correção molhada, cujos resultados foram apresentados na Figura 5.21. No entanto, ambas superestimam o pico do coeficiente de *slamming*, fato de certa forma esperado, uma vez que as correções analíticas empregadas são construídas para pequenos valores de penetração ζ^*. Para valores moderados de ζ^*, notam-se diferenças significativas entre os resultados previstos e deles com relação aos experimentais. Essa dispersão é também observada em Tassin et al. (2010), conforme ilustrado em sua figura 9.

Tal resultado se, por um lado, instiga o aprofundamento do tema, por outro, do ponto de vista da engenharia, é conservador, porquanto leva a valores superestimados do coeficiente de *slamming*, em faixa moderada de ζ^*. Investigações adicionais devem, portanto, ser empreendidas, no âmbito do método variacional. Cabe também mencionar que a Eq. (5.23) foi empregada por Tassin et al. (2012) no âmbito de um modelo analítico-numérico que utiliza o BEM combinado ao MLM (*Modified Logvinovich Model*), com bons resultados.

Adicionalmente, o aprofundamento dessa questão poderia considerar o caso de impacto de um corpo axissimétrico em queda livre.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No problema de impacto hidrodinâmico as posições da superfície livre e das superfícies de contato corpo-líquido dependem da solução da equação de campo, levando a uma forte não-linearidade geométrica. Ou seja, trata-se de um problema de contorno com fronteira móvel. Isso faz com que, mesmo em se utilizando de hipóteses simplificadoras, as equações do problema permaneçam acopladas, tornando complexa sua resolução.

A formulação do problema de impacto vertical de corpos rígidos axissimétricos aqui adotada enquadra-se no modelo de von Kármán generalizado (GvKM), assim denominado na literatura técnica especializada. Nesse modelo, as condições de contorno de impermeabilidade na superfície do corpo são aplicadas em sua geometria exata, durante o processo de penetração na água. Porém os efeitos do empilhamento de água junto às raízes do jato, que se forma ao longo da intersecção do corpo com a superfície livre, não são considerados. Considerações do problema de impacto hidrodinâmico, à luz da Mecânica Analítica, mostram que sua formulação pode ser consistentemente conduzida a partir do conhecimento da massa adicional do corpo em função da profundidade de penetração. Tendo então por base a conhecida analogia com o limite assintótico de frequência infinita no problema de radiação de ondas de superfície causada pelo movimento oscilatório de corpos flutuantes na interface ar-água, o problema de determinação da massa adicional durante o impacto foi formulado a partir de problema a ele equivalente, i.e., de um duplo-corpo que se move em fluido infinito, cuja dimensão e forma variam de acordo com a profundidade de penetração do corpo de impacto. Tal discussão e formulação constitui uma primeira contribuição da presente tese.

A segunda e principal contribuição deste trabalho é a aplicação de um método variacional, que fora construído inicialmente para problemas de radiação e difração de ondas de superfície por corpos flutuantes (ver PESCE, 1988; ARANHA; PESCE, 1989), para a determinação da massa adicional do corpo de impacto. O referido método variacional foi devidamente adaptado e então aplicado para a avaliação da massa adicional de corpos axissimétricos convexos durante impacto vertical contra a superfície livre da água. A principal vantagem desta abordagem variacional é permitir determinar os coeficientes de massa adicional com erro de segunda ordem quando comparado ao erro da solução numérica dos potenciais de velocidades a eles associados. Para tanto, e para estudos de convergência numérica, uma forma integral foi proposta para a avaliação do erro cometido na satisfação da

condição de impermeabilidade no corpo. Observa-se que a formulação do método é geral e sua implementação é extensível a casos outros, de impacto oblíquo com rotação e mesmo a corpos que não exibam axissimetria.

Na elaboração do método numérico para aplicação do método variacional ao problema de impacto vertical, funções-teste foram construídas e implementadas, de tal sorte a permitir reproduzir o padrão de escoamento ao redor do duplo-corpo. Funções-teste do tipo anel de fontes (discreto e contínuo) e anel de dipolos discretos foram desenvolvidas, muito embora apenas esta última tenha sido utilizada. Conforme já discutido ao longo do texto, uma escolha apropriada de funções-teste, baseada no padrão do campo de escoamento, pode reduzir a dimensão do espaço de representação que é requerido para a convergência numérica, melhorando assim a aproximação numérica do potencial de velocidade. De qualquer forma, no caso do problema em fluido infinito o escoamento sempre poderá ser reproduzido por um conjunto extensivo de singularidades elementares como, por exemplo, as aplicadas nos códigos do método dos elementos de contorno (BEM). Assim, novas funções-teste poderiam ser empregadas no método variacional, além daquelas apresentadas neste trabalho.

Geometrias convexas simples, esfera e esferoide oblato, foram utilizadas para validação do cálculo numérico da massa adicional através do método variacional. Os resultados numéricos obtidos através do método variacional apresentaram boa concordância com aqueles obtidos com o uso do programa WAMIT®, cujos resultados foram adotados como paradigma numérico.

Ponto já mencionado, mas que merece destaque na presente tese, é a proposição de uma medida integral do erro da solução numérica, Eq. (4.43), medida esta definida com respeito à satisfação da condição de contorno de impermeabilidade na superfície do corpo. A avaliação do erro da aproximação numérica do potencial de velocidades, $\widetilde{\phi}(\mathbf{r})$, mesmo que na forma integral proposta, mostrou-se satisfatória, pois a massa adicional é um parâmetro hidrodinâmico relacionado às propriedades integrais do campo de escoamento. Isso garante que, estabelecendo-se uma tolerância razoável para a medida deste erro, a massa adicional seja corretamente obtida, uma vez que, através do método variacional, uma aproximação numérica para a função potencial com erro de ordem δ implica uma aproximação para o tensor massa adicional com erro de ordem δ^2. Dessa forma, o método variacional, no âmbito do GvKM, poderá ser estendido para corpos convexos mais gerais.

Enfatiza-se, novamente, que a melhor escolha das funções-teste depende do padrão de escoamento e, por conseguinte, da geometria do corpo. No caso de um paraboloide elíptico,

por exemplo, poderiam ser utilizados anéis elípticos de dipolos, e não circulares como os utilizados para os esferoides.

Estabelecida a sistemática para distribuição dos anéis de dipolos e com base na estimativa do erro na aproximação numérica do potencial de velocidade, ε_{bc}, o método variacional foi aplicado a uma família de esferoides em impacto normal ou vertical. Sob a abordagem GvKM, construiu-se então uma função representativa do coeficiente adimensional de *massa adicional de impacto,* M_b^**, para esta família de esferoides, resultado numérico original*.

Complementarmente, mas sem pretensões conclusivas, considerações e discussões foram feitas em relação à necessária abordagem do problema de "correção molhada" (*piled-up water*), para que se possa levar em consideração a elevação da superfície junto aos jatos, durante o processo de impacto. Tais considerações foram tecidas para o caso de impacto vertical de uma esfera, mantida a velocidade constante. Os resultados obtidos para o coeficiente de *slamming* são bastante bons na região de pequena penetração, mas superestimam o pico na região de penetrações moderadas.

No que tange à continuidade de abordagem do tema no âmbito do MV, os principais pontos a destacar estão relacionados à aplicação do método variacional para casos mais gerais. Na seção 4.5.2, foram discutidas algumas estratégias para extensão do método variacional para considerar, por exemplo, impacto oblíquo e/ou incluindo rotação. De especial interesse é o desenvolvimento de técnica suficientemente geral, que permita calcular, ainda na abordagem do MV, a correção necessária à evolução da área da superfície molhada durante o processo de penetração do corpo, provavelmente o ponto mais complexo a ser abordado. Casos de geometrias convexas mais gerais também despertam grande interesse imediato.

Por fim, a incursão futura a modalidades do problema de impacto que levem em consideração corpos deformáveis ou geometrias não simplesmente convexas são, evidentemente, temas de interesse da engenharia oceânica. Tais temas têm sido objeto de intensa investigação pela comunidade científica, ver p.ex. Casetta et al. (2013), Carcaterra e Ciappi (2004) e Carcaterra et al. (2000), e são indicados como pontos de interesse ainda mais avançados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. **Handbook of mathematical functions**. New York, Dover Publications, 1970. 1046 p.

ANGHILERI, M.; CASTELLETTI, L.-M. L.; FRANCESCONI, E.; MILANESE, A.; PITTOFRATI, M. Rigid body water impact - experimental tests and numerical simulations using the SPH method. **International Journal of Impact Engineering**, v. 38, p. 141-151, 2011.

AQUELET, N.; SOULI, M.; OLOVSSON, L. Euler-Lagrange coupling with damping effects: application to slamming problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 110-132, 2006.

ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P. A variational method for water wave radiation and diffraction problems. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 204, p. 135-157, 1989.

BALDWIN, L.; STEVES, H.X. **Vertical water entry of spheres**. Silver Spring, White Oak Laboratory, 1975. Technical Report NSWC/WOL/TR 75-49.

BATTISTIN, D.; IAFRATI, A. Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies, **Journal of Fluids and Structures**, v. 17, p. 643-664, 2003.

CAMPANA, E.F.; CARCATERRA, A.; CIAPPI, E.; IAFRATI, A. Parametric analysis of slamming forces: compressible and incompressible phases. **In: 3rd INTERNATIONAL CONFERENCE ON HYDRODYNAMICS**, 1998.

CAO, Y.; SCHULTZ, W.W.; BECK, R.F. Three-dimensional desingularized boundary integral methods for potential problems. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, v. 12, p. 785-803, 1991.

CARCATERRA, A.; CIAPPI, E. Hydrodynamic shock of elastic structures impacting on the water: theory and experiments. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 411-439, 2004.

CARCATERRA, A.; CIAPPI, E.; IAFRATI, A.; CAMPANA, E.F. Shock spectral analysis of elastic systems impacting on the water surface. **Journal of Sound and Vibration**, v. 229, n.3, p. 579-605, 2000.

CASETTA, L. **Investigações teóricas sobre o problema de impacto hidrodinâmico.** 2004. 151 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

CASETTA, L. **Contribuições à mecânica dos sistemas de massa variável.** 2008. 185 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CASETTA L.; PESCE, C.P. **A noticeable question of the water entry problem: the split of kinetic energy during the initial stage**. In: 18th INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 2005, Ouro Preto.

CASETTA, L; PESCE, C.P. **The proper definition of the added mass for the water entry problem**. In: 21st INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 2006, Loughborough, United Kingdom.

CASETTA, L; PESCE, C.P. **Hamilton's principle for dissipative systems and Wagner's problem.** In: 22nd INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 2007, Plitvice, Croatia.

CASETTA, L; FRANZINI, G.R.; PESCE, C.P. **The impact of a fractionally (viscoelastic) damped system onto the water free surface.** In: 28th INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 2013, L'Isle sur la Sorgue, France.

CASETTA, L; PESCE, C.P; SANTOS, F.M. On the hydrodynamic vertical impact problem: an analytical mechanics approach. **Marine Systems & Ocean Technology**, v. 6, n.1, 2011.

CHUANG, S.L. Theoretical investigations on slamming of cone-shaped bodies. **Journal of Ship Research**, v. 13, n. 4, p. 276-283, 1969.

COINTE, R.; ARMAND, J.-L. Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 109, p. 237-243, 1987.

COINTE, R.; FONTAINE, E.; MOLIN, B.; SCOLAN, Y.M. On energy arguments applied to the hydrodynamic impact force. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 48, p. 305-319, 2004.

COOKER, M.J.; PEREGRINE, D.H. Pressure-impulse theory for liquid impact problems. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 297, p. 193-214, 1995.

DE BACKER, G.; VANTORRE, M.; BEELS, C.; DE PRÉ, J.; VICTOR, S.; DE ROUCK, J.; BLOMMAERT,C.; VAN PAEPEGEM, W. Experimental investigation of water impact on axisymmetric bodies. **Applied Ocean Research**, v.31, p. 143-156, 2009.

DEBNATH, L., MIKUSIŃSKI, P. **Introduction to Hilbert spaces with applications.** California, Academic Press, 1999. 551 p.

DET NORSKE VERITAS. **DNV-OS-E406:** design of free fall lifeboats. Norway, 2010.

DOBROVOL'SKAYA, Z.N. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 36, p. 805-29, 1969.

EL MALKI ALAOUI, A.; NÊME, A.; TASSIN, A.; JACQUES, N. Experimental study of coefficients during vertical water entry of axisymmetric rigid shapes at constant speeds. **Applied Ocean Research**, v.37, p. 183-197, 2012.

ERDÉLYI, A., MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.; TRICOMI, F.G. **Higher transcendental functions**, vol I, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953. 302 p.

FALTISEN, O.M. **Hydrodynamics of high-speed marine vehicles**. Cambridge, Cambridge University Press, 2005. 454 p.

FALTISEN, O.M. **Sea loads on ships and offshore structures**. Cambridge, Cambridge University Press, 1990. 328 p.

FALTINSEN, O.M; CHEZHIAN, M. A generalized Wagner method for three-dimensional slamming. **Journal of Ship Research**, v. 49, n. 4, p. 279-287, 2005.

FALTINSEN, O.M; TIMOKHA, A.N. **Sloshing**. Cambridge, Cambridge University Press, 2009. 577 p.

FALTINSEN, O.M; LANDRINI, M.; GRECO, M. Slamming in marine applications. **Journal of Engineering Mathematics**, v.48, p. 187-217, 2004.

GREENHOW, M.; LIN, W.-M. **Non-linear free surface effects: experiments and theory**. M.I.T Dep. Ocean Eng., 1983. Report No. 83-19.

GREENHOW, M.; YANBAO, L. Added masses for circular cylinders near or penetrating fluid boundaries – review, extension and application to water-entry, -exit and slamming. **Ocean Engineering**, v. 14, n.4, p. 325-348, 1987.

KLEEFSMAN, K.M.T.; FEKKEN, G.; VELDMAN, A.E.P.; IWANOWSKI, B.; BUCHNER, B. A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems. **Journal of Computational physics**, v. 206, p. 363-393, 2005.

KOEHLER, B.R.; KETTLEBOROUGH, C.F. Hydrodynamic impact of a falling body upon a viscous incompressible fluid. **Journal of Ship Research**, v. 21, n. 3, p. 165-181, 1977.

KOROBKIN, A.A.; PUKHNACHOV, V.V. Initial stage of water impact. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 20, p. 159-185, 1988.

KOROBKIN, A.A. Blunt-body impact on a compressible liquid surface. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 244, p. 437-453, 1992.

KOROBKIN, A.A. Blunt-body impact on the free-surface of a compressible liquid. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 263, p. 319-342, 1994.

KOROBKIN, A.A. Acoustic approximation in the slamming problem. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 318, p. 165-188, 1996.

KOROBKIN, A.A. Analytical models of water impact. **European Journal of Applied Mathematics**, v. 15, p. 821-838, 2004.

KOROBKIN, A.A.; MALENICA, S. **Modified Logvinovich model for hydrodynamic loads on asymmetric contours entering water**. In: 20th INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 2005, Longyearbyen, Norway.

KOROBKIN, A.A.; SCOLAN, Y.-M. Three-dimensional theory of water impact. Part 2. Linearized Wagner problem. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 549, p. 343-373, 2006.

KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. **Nuclear Science and Engineering**, v.123, p.421-434, 1996.

LAMB, H. **Hydrodynamics**. New York, Dover Publications, 6th Ed., 1932. 738 p.

LEE, B.-H; PARK, J.-C.; KIM, M.-H.; JUNG, S.-J.; RYU, M.-C.; KIM, Y.-S. Numerical simulation of impact loads using a particle method. **Ocean Engineering**, v.37, p.164-173, 2010.

MALENICA, S.; KOROBKIN, A.A. **Some aspects of slamming calculations in seakeeping**. In: 9th INTERNATIONAL CONFERENCE IN NUMERICAL SHIP HYDRODYNAMICS, 2007, Michigan, USA.

MATHEMATICA®. Versão 9. Disponível em < http://www.wolfram.com/mathematica/ >. Acesso em 26 ago. 2013.

MATLAB®. Versão Matlab R2012a. Disponível em < http://www.mathworks.com/ >. Acesso em 26 ago. 2013.

MAY, A. Effect of surface condition of a sphere on its water-entry cavity. **Journal of Applied Physics**, v. 22, n. 10, p. 1219-1222, 1951.

MEI, X.; LIU, Y.; YEU, D. On the water impact of general two-dimensional sections, **Applied Ocean Research**, v. 21, n. 1, p. 1-15, 1999.

MILNE-THOMSON, L.M. **Theoretical hydrodynamics.** London, Macmillan, 5th Ed., 1968. 743 p.

MILOH, T. Hamilton's principle, Lagrange's method, and ship motion theory. **Journal of Ship Research**, v. 28, n. 4, p. 229-237, 1984.

MILOH, T. On the initial-stage slamming of a rigid sphere in vertical water entry. **Applied Ocean Research**, v. 13, n. 1, p. 43-8, 1991.

MILOH, T. On the oblique water-entry problem of a rigid sphere. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 25, p. 77-92, 1991.

MOGHISI, M.; SQUIRE, P.T. An experimental investigation of the initial force of impact on a sphere striking a liquid surface. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 108, p. 133-146, 1981.

MOLIN, B.; COINTE, R.; FONTAINE, E. **On energy arguments applied to the slamming force.** In: 11st INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 1996, Hamburg, Germany.

MONAGHAN, J.J. Smoothed particle hydrodynamics. **Reports on Progress in Physics**, v. 68, p. 1703-1759, 2005.

NEWMAN, J.N. **Marine hydrodynamics.** Cambridge, The MIT Press, 1977. 402 p.

NISEWANGER, C.R. **Experimental determination of pressure distribution on a sphere during water entry**. California, Naval Ordnance Test Station, 1961. NAVWEPS Report n. 7808.

PANCIROLI, R.; ABRATE, S.; MINAK, G.; ZUCCHELLI, A. Hydroelasticity in water-entry problems: comparison between experimental and SPH results. **Composite Structures**, v. 94, p. 532-539, 2012.

PESCE, C.P. **Estudo do comportamento de corpos flutuantes em ondas: um enfoque variacional e aplicações da teoria do corpo esbelto.** 1988. 200 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

PESCE, C.P. The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position. **Journal of Applied Mechanics**, v. 70, p. 751-756, 2003.

PESCE, C.P. A note on the classical free surface hydrodynamic impact problem; **Reflections and Outlooks**, in honor of Theodore Y-T Wu; Ed. A. T. Chwang; M. H. Teng; D.T. Valentine, Singapore, World Scientific Publishing, p. 390-407; 2005 (Advances in Engineering Mechanics).

PESCE, C.P., SIMOS, A.N. A family of vortex rings and a variational application to potential flows around three-dimensional bodies. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXX, n. 2, p. 118-132, 2008.

PESCE, C.P.; CASETTA, L.; CRIVELLARI, E.E. **The free surface hydrodynamic impact problem: a brief review on asymptotic solutions and experiments with a hemisphere**. In: 17th INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 2003, São Paulo, Brazil.

PESCE, C.P.; TANNURI, E. A.; CASETTA, L. The Lagrange equations for systems with mass varying explicitly with position: some applications to offshore engineering. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXVIII, n. 4, p. 496-504, 2006.

PESEUX, B.; GORNET, L.; DONGUY, B. Hydrodynamic impact: numerical and experimental investigations, **Journal of Fluids and Structures**, v. 21, p. 277-303, 2005.

SAUDER, T. **A theoretical study of water entry of free-fall lifeboats in waves.** 2007. 84 p. Dissertação (Mestrado) - Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2007.

SAUDER, T.; FOUQUES, S. **Theoretical study of the water entry of a body in waves. Application to safety of occupants in free-fall lifeboats**. In: 28th INTERNATIONAL CONFERENCE ON OCEAN, OFFSHORE AND ARCTIC ENGINEERING, 2009, Honolulu, Hawaii.

SCOLAN, Y.-M. **Some numerical aspects of nonlinear free surface motions by a Method of Fundamental Solutions**. In: 25th INTERNATIONAL WORKSHOP ON WATER WAVES AND FLOATING BODIES, 2010, Harbin, China.

SCOLAN, Y.-M. Some aspects of the flip-through phenomenon: a numerical study based on the desingularized technique, **Journal of Fluids and Structures**, v. 26, p. 918-953, 2010.

SCOLAN, Y.-M.; KOROBKIN, A.A. Three-dimensional theory of water impact. Part 1. Inverse Wagner problem. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 440, p. 293-326, 2001.

SCOLAN, Y.-M.; KOROBKIN, A.A. Energy distribution from vertical impact of a three-dimensional solid body onto the flat free surface of an ideal fluid. **Journal of Fluids and Structures**, v. 17, n. 2, p. 275-286, 2003.

SHAO, S. Incompressible SPH simulation of water entry of a free-falling object. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 59, p. 91-115, 2009.

SHIFFMAN, M., SPENCER, D.C. (a) **The force of impact on a sphere striking a water surface** (approximation by the flow about a lens), AMP Report 42.1R, AMG-NYU n. 105,

February, 1945. (b) **The force of impact on a sphere striking a water surface** (second approximation), AMP Report 42.2R, AMG-NYU n. 133, July, 1945.

SHIFFMAN, M., SPENCER, D.C. The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry). **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 4, n. 4, p. 379-418, 1951.

SUN, H.; FALTINSEN, O.M. Water impact of circular cylinders and cylindrical shells. **Applied Ocean Research**, v. 28, p. 299-311, 2006.

TAKAGI, K. Numerical evaluation of three-dimensional water impact by the displacement potential formulation. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 48, n. 3-4, p. 339-52, 2004.

TASSIN, A.; JACQUES, N.; EL MALKI ALAOUI, A.; NÊME, A.; LEBLÉ, B. Assessment and comparison of several analytical models of water impact, **International Journal of Multiphysics**, v. 4, n. 2, p. 125-140, 2010.

TASSIN, A.; JACQUES, N.; EL MALKI ALAOUI, A.; NÊME, A.; LEBLÉ, B. Hydrodynamic loads during water impact of three-dimensional solids: modeling and experiments, **Journal of Fluids and Structures**, v. 28, p. 211-231, 2012.

TROESCH, A.W.; KANG, C.G. **Hydrodynamic impact loads on three-dimensional bodies**. In: 16th SYMPOSIUM ON NAVAL HYDRODYNAMICS, 1986, Berkeley, USA.

VERHAGEN, J.H.G. The impact of a flat plate on a water surface. **Journal of Ship Research**, v. 21, n. 3, p. 211-23, 1967.

VON KÁRMÁN, T. **The impact on seaplane floats during landing**. Washington, D. C., NACA/NASA Langley Research Center, 1929. Technical Note n. 321.

WAGNER, H. **Landing of seaplanes**. Hampton, NACA/NASA Langley Research Center, 1931. Technical Memorandum n. 622.

WU, G.X. Numerical simulation of water entry of twin wedges. **Journal of Fluids and Structures**, v. 22, p. 99-108, 2006.

XU, G.D.; DUAN, W.Y.; WU, G.X. Numerical simulation of oblique water entry of an asymmetrical wedge. **Ocean Engineering**, v. 35, p. 1597-1603, 2008.

YANG, Q.; QIU, W. Numerical simulation of water impact for 2D and 3D bodies. **Ocean Engineering**, v. 43, p. 82-89, 2012.

YETTOU, E.M.; DESROCHERS, A.; CHAMPOUX, Y. Experimental study on the water impact of a symmetrical wedge. **Fluid Dynamics Research**, v. 38, p. 47-66, 2006.

ZHAO, R.; FALTINSEN, O.M. Water entry of two-dimensional bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 246, p. 593-612, 1993.

ZHAO, R.; FALTINSEN, O.M.; AARSNES, J.V. **Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation**. In: 21st SYMPOSIUM ON NAVAL HYDRODYNAMICS, 1996, Trondheim, Norway.

ZHU, X.; FALTINSEN, O.M; HU, C. Water entry and exit of a horizontal circular cylinder. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 129, p. 253-264, 2007.

APÊNDICE A – LAGRANGIANA DO CAMPO POTENCIAL ϕ

A estacionariedade da Lagrangiana que rege o campo ϕ, Eq. (4.10), implica na equação fraca Eq. (4.8) e vice-versa. De fato, considerando a primeira variação de L com relação a ϕ tem-se

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{L} &= \frac{1}{2}\rho\left[G(\delta\phi,\phi)+G(\phi,\delta\phi)\right]-\rho\delta V(\phi)=\frac{1}{2}\rho\left[2G(\phi,\delta\phi)\right]-\rho V(\delta\phi)= \\ &= \rho\left[G(\phi,\delta\phi)-V(\delta\phi)\right]\end{aligned} \quad . \qquad \text{(A.1)}^{20}$$

Assim, a estacionariedade $\delta \mathrm{L}=0$ implica em

$$G(\phi,\delta\phi)=V(\delta\phi)\,. \qquad \text{(A.2)}$$

Como $\delta\phi$ é uma variação arbitrária restrita a $W_2^{(1)}(\mathrm{V})$, chega-se a

$$G(\phi,\psi)=V(\psi)\ ;\ \ \forall\,\psi\in W_2^{(1)}(\mathrm{V})\ . \qquad \text{(A.3)}$$

[20] Nota-se que foi utilizada a simetria do funcional $G(\cdot;\cdot)=0$.

APÊNDICE B – FUNÇÃO-TESTE ANEL DE VÓRTICES

Apêndice B.1 – Formulação matemática do anel de vórtices

A formulação de anéis de vórtices dispostos na borda de setores circulares baseia-se em Pesce e Simos (2008).

O potencial de velocidade de um filamento de vórtices, de intensidade κ, induzido em um ponto P é dado por (ver MILNE-THOMSON, 1968),

$$\phi = \frac{\kappa}{4\pi}\iint_S \frac{\cos\theta}{\mathscr{r}^2} dS = \frac{\kappa}{4\pi}\omega_P \ , \tag{B.1}$$

sendo ω_P o ângulo sólido delimitado em P por algum diafragma que tem o filamento de vórtices C como seu bordo. Em (B.1) S é a superfície do diafragma; $\mathscr{r}$ é a distância entre um ponto Q desta superfície ao ponto P; θ é o ângulo entre o vetor normal a S em Q e o vetor (P - Q).

Considerando a superfície S como sendo um setor circular com ângulo de abertura α (ver Figura B.1) e P' um ponto de integração, dentro do diafragma que compreende o anel, a Eq. (B.1) pode ser escrita, em coordenadas cilíndricas, como

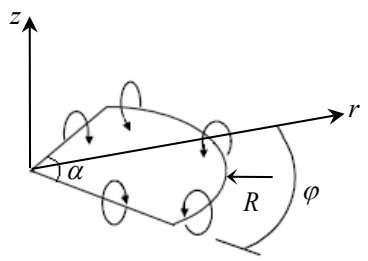


Figura B.1 – Esboço de um anel de vórtices disposto na borda de setor circular ou α –ring; adaptado de Pesce e Simos (2008).

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}z\int_0^R\int_0^\alpha\frac{r'}{\left(r^2+z^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi'-\varphi)\right)^{3/2}}d\varphi' dr' . \qquad \text{(B.2)}^{21}$$

Pode-se separar a dependência angular na equação acima através da seguinte transformação

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}z\int_0^R r'\left[\int_0^\alpha\frac{1}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{3/2}}\frac{1}{\left(1-\frac{2rr'\cos(\varphi'-\varphi)}{r^2+z^2+r'^2}\right)^{3/2}}d\varphi'\right]dr' , \qquad \text{(B.3)}$$

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}z\int_0^R r'\lambda(r,z,r')\left(\int_0^\alpha\frac{1}{\left(1-\gamma(r,z,r')\cos(\varphi'-\varphi)\right)^{3/2}}d\varphi'\right)dr' , \qquad \text{(B.4)}$$

sendo

$$\begin{aligned}\lambda(r,z,r')&=\frac{1}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{3/2}}\\ \gamma(r,z,r')&=\frac{2rr'}{r^2+z^2+r'^2}\end{aligned} . \qquad \text{(B.5)}$$

Considerando $\varepsilon=\gamma\cos(\varphi'-\varphi)$ na expansão em série de Taylor

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2}\varepsilon^n ; \quad \varepsilon<1 , \qquad \text{(B.6)}$$

e visto que

$$\gamma\le\frac{2rr'}{r^2+r'^2}=\frac{2rr'}{(r-r')^2+2rr'}\le 1 , \qquad \text{(B.7)}$$

[21] No artigo de Pesce e Simos (2008), Eq. (6), observa-se um erro tipográfico. O termo $-2\cos(\varphi'-\varphi)$ dever ser multiplicado por $\rho\rho'$, termo rr' no presente trabalho, conforme Eq. (B.2). No entanto, tal falha tipográfica não implicou em erros nas deduções matemáticas subseqüentes daquele artigo.

isto é,

$$\gamma \cos(\varphi' - \varphi) \leq 1 \quad , \tag{B.8}$$

tem-se que

$$\frac{1}{\left(1-\gamma\cos(\varphi'-\varphi)\right)^{3/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}\, n!^2} \left(\gamma \cos(\varphi'-\varphi)\right)^n \quad . \tag{B.9}$$

Logo, a Eq. (B.4) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \phi(r,\varphi,z;R,\alpha) &= \frac{\kappa}{4\pi} z \int_0^R r'\lambda \left(\int_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}\, n!^2} \left(\gamma\cos(\varphi'-\varphi)\right)^n \right) d\varphi' \right) dr' = \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} z \int_0^R r'\lambda \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}\, n!^2} \gamma^n \int_0^{\alpha} \cos^n(\varphi'-\varphi) d\varphi' \right) dr' \end{aligned} \quad . \tag{B.10}$$

Fazendo $H = \gamma^n(r,z,r') \int_0^{\alpha} \cos^n(\varphi'-\varphi) d\varphi'$ na Eq. (B.10) chega-se a

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = \frac{\kappa}{4\pi} z \int_0^R r'\lambda \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}\, n!^2} H \right) dr' \quad . \tag{B.11}$$

A integral $I_n = \int_0^{\alpha} \cos^n(\varphi'-\varphi) d\varphi'$; $n \geq 0$, pode ser definida através das relações recursivas

$$\begin{aligned} & I_0(\varphi,\alpha) = \alpha \\ & I_1(\varphi,\alpha) = \sin(\alpha-\varphi) + \sin\varphi \\ & \ldots \\ & I_n(\varphi,\alpha) = \frac{1}{n}\left[\cos^{n-1}(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi) + \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi\right] + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(\varphi,\alpha) \end{aligned} \quad . \tag{B.12}$$

Como $I_n(\varphi,\alpha)=\alpha$, $\gamma^n(r,z,r')=1$ e $\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2}=1$, para $n=0$, a Eq. (B.11) torna-se

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}z\int_0^R\left(r'\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2}\gamma^n\ I_n(\varphi;\alpha)\right)dr' \ . \tag{B.13}$$

Rearranjando os termos da Eq.(B.13), tem-se

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}\frac{z}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)\left(\frac{R}{2^n}\int_0^R\gamma^n r'\lambda\,dr'\right) \ . \tag{B.14}$$

Substituindo as relações da Eq. (B.5), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{R}{2^n}\int_0^R\gamma^n r'\lambda\,dr' &= R\,r^n\left(\int_0^R\frac{(r')^{n+1}}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{n+3/2}}dr'\right)=\\ &=\frac{R}{\left(R^2\right)^{n+3/2}}r^n\left(\int_0^R\frac{(r')^{n+1}}{\left(\dfrac{r^2+z^2+r'^2}{R^2}\right)^{n+3/2}}dr'\right)=\\ &=\frac{1}{R^{2n+2}}r^n\left(\int_0^R\frac{(r')^{n+1}}{\left(\sigma^2+\left(\dfrac{r'}{R}\right)^2\right)^{n+3/2}}dr'\right)\end{aligned} \ , \tag{B.15}$$

sendo $\sigma^2(r,z;R)=\dfrac{r^2+z^2}{R^2}$. Através da mudança de variável $u=\dfrac{r'}{R}$, com $0\le u\le 1$, a Eq. (B.15) resulta em

$$\frac{R}{2^n}\int_0^R \gamma^n r'\lambda\, dr' = \frac{1}{R^{2n+2}} r^n \left(\int_0^1 \frac{(uR)^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+3/2}} R\, du \right) =$$

$$= \frac{R^{n+2}}{R^{2n+2}} r^n \left(\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+3/2}} du \right) = \quad . \tag{B.16}$$

$$= \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+3/2}} du \right)$$

Das Eqs. (B.14) e (B.16) chega-se a

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = \frac{\kappa}{4\pi}\frac{z}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2} I_n(\varphi;\alpha) f_n(r,z;R)\left(\frac{r}{R}\right)^n \right] , \tag{B.17}$$

sendo

$$f_n(r,z;R) = f_n(\sigma) = \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(u^2+\sigma^2\right)^{n+3/2}} du \ , \tag{B.18}$$

e

$$\sigma^2(r,z;R) = \frac{r^2+z^2}{R^2} \ . \tag{B.19}$$

Para $n = 0$,

$$f_0(r,z;R) = f_0(\sigma) = \int_0^1 \frac{u}{\left(u^2+\sigma^2\right)^{3/2}} du = \left[-\frac{1}{\left(u^2+\sigma^2\right)^{1/2}} \right]_0^1 = \frac{1}{\sigma}\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right) \ . \tag{B.20}$$

Para $n \geq 1$, a Eq. (B.18) pode ser escrita em termos de funções hipergeométricas

$$f_n(r,z;R) = f_n(\sigma) = \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+3/2}} F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right); \quad \forall\, \sigma > 1 \ . \tag{B.21}$$

A função hipergeométrica $F(a,b;c;w);\ w \in C$, é usualmente expressa em termos da série de Gauss (ver ABRAMOWITZ; STEGUN,1970; ERDÉLYI et al., 1953) dada por

$$F(a,b;c;w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{w^k}{k!} \ , \tag{B.22}$$

sendo

$$\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} = \left\{ 1; \frac{ab}{c}; \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}; \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}; \ldots \right\} \ . \tag{B.23}$$

A continuação analítica da Eq. (B.21) resulta nas seguintes equações, válidas para todo $\sigma > 0$, (ver Apêndice B.2),

$$f_n(\sigma) = \frac{1}{(2+n)} \frac{1}{(\sigma^2+1)^{n+3/2}} F\left(\frac{3}{2}+n, 1; 2+\frac{n}{2}; \frac{1}{(1+\sigma^2)} \right); \ \forall\, \sigma > 0 \ , \tag{B.24}$$ [22]

ou

$$f_n(\sigma) = \frac{1}{(2+n)} \frac{1}{(\sigma^2)^{1/2n+1/2}} \frac{1}{(\sigma^2+1)^{1+n/2}} F\left(1+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}-\frac{n}{2}; 2+\frac{n}{2}; \frac{1}{(1+\sigma^2)} \right); \forall\, \sigma > 0 \tag{B.25}$$ [23]

As derivadas do potencial de velocidades, Eq. (B.17), são então dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r}(r,z,\varphi;R,\alpha) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{1}{R} \frac{z}{R} \Bigg[& \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2} I_n(\varphi;\alpha) \frac{\partial f_n}{\partial \sigma} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2} I_n(\varphi;\alpha) f_n(r,z;R) n \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \right] \Bigg] \end{aligned} \ , \tag{B.26}$$ [24]

[22] A respectiva equação em Pesce e Simos (2008), Eq. (16a), foi equivocadamente apresentada. A dedução completa da Eq. (B.24) é apresentada no Apêndice B.2.

[23] Idem à nota de rodapé anterior, mas referente à Eq. (16b) de Pesce e Simos (2008).

[24] Na respectiva equação em Pesce e Simos (2008), Eq. (C10a), o sinal '+' aparece equivocamente como '-'.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r,z,\varphi;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}\frac{z}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2}I'_n(\varphi;\alpha)f_n(r,z;R)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right], \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial z}(r,z,\varphi;R,\alpha)=\frac{\kappa}{4\pi}\frac{1}{R}\Bigg[&\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)f_n(r,z;R)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]+\\&+\frac{z}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)\frac{\partial f_n}{\partial\sigma}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]\Bigg]\end{aligned}, \tag{B.28}$$

sendo (ver dedução no Apêndice B.2)

$$\begin{aligned}\frac{df_n}{d\sigma}=&-\left(\frac{1}{2+n}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+2}}\right)\left[(2n+3)F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right]+\\&+\left(\frac{1}{2+n}\frac{2}{(\sigma^2)^{n+3}}\right)\left[\frac{(1+n/2)(3/2+n)}{(2+n/2)}F\left(2+\frac{n}{2},\frac{5}{2}+n;3+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right];\\&\forall\sigma>1,\end{aligned} \tag{B.29}$$

ou,

$$\begin{aligned}\frac{df_n}{d\sigma}=&-\frac{(2n+3)}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma)}\frac{1}{(\sigma^2+1)^{n+3/2}}F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right)+\\&+\frac{(2n+3)}{(4+n)}\frac{1}{(\sigma)}\frac{1}{(\sigma^2+1)^{n+5/2}}F\left(\frac{5}{2}+n,1;3+\frac{n}{2};\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right);\ \forall\sigma>0\end{aligned}, \tag{B.30}$$

e,

$$\begin{aligned}&I'_0(\varphi,\alpha)=0\\&I'_1(\varphi,\alpha)=-\cos(\alpha-\varphi)+\cos\varphi\\&\ldots\\&I'_n(\varphi,\alpha)=\frac{1}{n}\Big[(n-1)\cos^{n-2}(\alpha-\varphi)\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos^n(\alpha-\varphi)-\\&\qquad-(n-1)\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\cos^n\varphi\Big]+\frac{n-1}{n}I'_{n-2}(\varphi,\alpha)\end{aligned}. \tag{B.31}$$

Para $n=0$,

$$\frac{df_n}{d\sigma} = \frac{df_0}{d\sigma} = \frac{\sigma}{\left(1+\sigma^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\sigma^2}\,. \tag{B.32}$$

Para o caso de anéis de vórtices circulares e completos, ou seja, com ângulo de abertura $\alpha = 2\pi$, as Eqs. (B.12) e (B.31) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} &I_0(\varphi,2\pi) = 2\pi \\ &I_1(\varphi,2\pi) = 0 \\ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad , \\ &I_n(\varphi,2\pi) = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned} \tag{B.33}$$

$$I'_n(\varphi,2\pi) = 0\ . \tag{B.34}$$

Apêndice B.2 – Funções hipergeométricas

Neste apêndice são apresentadas, de forma mais detalhada, as funções hipergeométricas utilizadas na formulação matemática dos anéis de vórtices (ver Apêndice B.1).

Pode-se construir a continuação analítica da Eq. (B.21) a partir da relação

$$F(a,b;c;w) = (1-w)^{-b} F\left(b, c-a; c; \frac{w}{w-1}\right), \tag{B.35}$$

ver relação 15.3.5 de Abramowitz e Stegun (1970). Dessa forma, segue que:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &= \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+3/2}}\left(1+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-3/2-n} F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{-\sigma^{-2}}{(-\sigma^{-2}-1)}\right) = \\ &= \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+3/2}}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}\right)^{3/2+n} F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{\sigma^{-2}}{(\sigma^{-2}+1)}\right) = \\ &= \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2+1)^{n+3/2}} F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right);\ \forall\,\sigma>0\,. \end{aligned} \tag{B.36}$$

Alternativamente, através da equação

$$F(a,b;c;w)=(1-w)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{w}{w-1}\right), \tag{B.37}$$

a Eq. (B.21) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &= \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+3/2}}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}\right)^{1+n/2} F(1+n/2,1/2-n/2;2+n/2;1/(1+\sigma^2)) = \\ &= \frac{1}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma^2)^{n/2+1/2}}\frac{1}{\left(\sigma^2+1\right)^{1+n/2}} F(1+n/2,1/2-n/2;2+n/2;1/(1+\sigma^2)) \; ; \\ &\forall\, \sigma>0 \,. \end{aligned} \tag{B.38}$$

Utilizando a relação

$$\frac{d^n}{dw^n}F(a,b;c;w)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n,b+n;c+n;w), \tag{B.39}$$ [25]

e a Eq.(B.21), tem-se que a derivada da função $f_n(\sigma)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{df_n}{d\sigma} &= \frac{1}{2+n}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n-3}\right)F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)+ \\ &\quad +\frac{1}{2+n}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+3/2}}\frac{d}{d\sigma}F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)= \\ &= -\frac{1}{2+n}(2n+3)\frac{1}{(\sigma)^{2n+4}}F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)+ \\ &\quad +\frac{1}{2+n}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+3/2}}\frac{d}{d\left(-\sigma^{-2}\right)}F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-1/\sigma^2\right)\frac{d}{d\sigma}\left(-\sigma^{-2}\right)= \\ &= -\frac{1}{2+n}(2n+3)\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+2}}F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)+ \\ &\quad +\frac{1}{2+n}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+3/2}}\frac{(1+n/2)(3/2+n)}{(2+n/2)}F\left(2+\frac{n}{2},\frac{5}{2}+n;3+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{2}{\sigma^3} \end{aligned} \tag{B.40}$$

Logo,

[25] Ver relação 15.2.2 de Abramowitz e Stegun (1970).

$$\frac{df_n}{d\sigma} = -\left(\frac{1}{2+n}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+2}}\right)\left[\left(2n+3\right)F\left(1+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right]+$$
$$+\left(\frac{1}{2+n}\frac{2}{\left(\sigma^2\right)^{n+3}}\right)\left[\frac{\left(1+n/2\right)\left(3/2+n\right)}{\left(2+n/2\right)}F\left(2+\frac{n}{2},\frac{5}{2}+n;3+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right]; \tag{B.41}$$
$$\forall\sigma>1\ .$$

Ou, utilizando a Eq. (B.35) segue que:

$$\frac{df_n}{d\sigma} = -\frac{\left(2n+3\right)}{\left(2+n\right)}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+2}}\left(1+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-3/2-n}F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right)+$$
$$+\frac{1}{\left(2+n\right)}\frac{2}{\left(\sigma^2\right)^{n+3}}\frac{\left(\frac{2+n}{2}\right)\left(\frac{3+2n}{2}\right)}{\left(\frac{4+n}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-\frac{5}{2}-n}F\left(\frac{5}{2}+n,1;3+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right)= \tag{B.42}$$
$$=-\frac{\left(2n+3\right)}{\left(2+n\right)}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+2}}\left(\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}\right)^{-3/2-n}F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right)+$$
$$+\frac{\left(2n+3\right)}{\left(4+n\right)}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^{n+3}}\left(\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}\right)^{-5/2-n}F\left(\frac{5}{2}+n,1;3+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right)$$

Portanto,

$$\frac{df_n}{d\sigma} = -\frac{\left(2n+3\right)}{\left(2+n\right)}\frac{1}{\left(\sigma\right)}\frac{1}{\left(\sigma^2+1\right)^{n+3/2}}F\left(\frac{3}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right)+$$
$$+\frac{\left(2n+3\right)}{\left(4+n\right)}\frac{1}{\left(\sigma\right)}\frac{1}{\left(\sigma^2+1\right)^{n+5/2}}F\left(\frac{5}{2}+n,1;3+\frac{n}{2};\frac{1}{\left(1+\sigma^2\right)}\right);\ \forall\sigma>0\ . \tag{B.43}$$

APÊNDICE C – FUNÇÃO-TESTE ANEL DE FONTES

Apêndice C.1 – Anel "discreto" de fontes

O potencial de velocidades dado por uma fonte, ver Newman (1977), é escrito na forma:

$$\phi(x,y,z) = -\frac{m}{4\pi}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}, \qquad \text{(C.1)}^{26}$$

sendo m uma constante. Em coordenadas cilíndricas,

$$\phi(r,z) = -\frac{m}{4\pi}\frac{1}{\left(r^2 + z^2\right)^{1/2}}. \qquad \text{(C.2)}$$

O potencial de velocidades da i-ésima fonte no plano $z = 0$, deslocada (em r') em relação à origem é dado por:

$$\phi_i\left(r_i'', z''\right) = -\frac{m}{4\pi}\frac{1}{\left(r_i''^2 + z''^2\right)^{1/2}}, \qquad \text{(C.3)}$$

e, analogamente ao apresentado para o anel discreto de dipolos (ver seção 4.3.2), o potencial de um anel discreto de fontes é dado por:

$$\phi\left(r'', z''\right) = \sum_{1}^{n_f} \phi_i\left(r_i'', z''\right), \qquad \text{(C.4)}$$

sendo n_f o número de fontes para compor o anel discreto, $r_i''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\left(\varphi - \varphi_i'\right)$ e $z'' \equiv z$; ver seção 4.3.2 para detalhes.

Da Eq. (C.4), segue que

[26] Potencial de velocidades centrado na origem do sistema de coordenadas.

$$\nabla\phi(r'',z'') = \sum_{i=1}^{n_f} \nabla\phi_i(r_i'',z''). \tag{C.5}$$

Assim, as derivadas do potencial de velocidade da i-ésima fonte deslocada (em r') são dadas por:

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial r} = \frac{\partial\phi_i}{\partial r_i''}\frac{\partial r_i''}{\partial r} = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_i''^2 + z^2}\right)^{3/2}\left(r - r'\cos(\varphi - \varphi_i')\right), \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial\phi_i}{\partial r_i''}\frac{\partial r_i''}{\partial \varphi} = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_i''^2 + z^2}\right)^{3/2} r r' \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_i'), \tag{C.7}$$

e

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial z} = \frac{m}{4\pi}\frac{z}{\left(r_i''^2 + z^2\right)^{3/2}}. \tag{C.8}$$

Apêndice C.2 – Anel "contínuo" de fontes

A formulação do anel de fontes é análoga àquela apresentada para a função-teste anel de vórtices, ver APÊNDICE B.

Considerando a superfície S como sendo um setor circular (ver Figura C.1) e P' um ponto de integração, dentro do diafragma que compreende o anel, o anel 'contínuo' de fontes pode ser escrito, em coordenadas cilíndricas, como

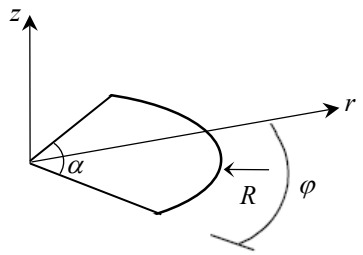


Figura C.1 – Esboço de um anel de fontes de setor circular ou α –ring.

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}\int_0^R\int_0^\alpha \frac{r'}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2\right)^{1/2}}d\varphi' dr' . \tag{C.9}$$

Pode-se separar a dependência angular na equação acima através da seguinte transformação

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}\int_0^R r'\left[\int_0^\alpha \frac{1}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{1/2}}\frac{1}{\left(1-\frac{2rr'\cos(\varphi-\varphi')}{r^2+z^2+r'^2}\right)^{1/2}}d\varphi'\right]dr', \tag{C.10}$$

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}\int_0^R r'\lambda(r,z,r')\left(\int_0^\alpha \frac{1}{\left(1-\gamma(r,z,r')\cos(\varphi-\varphi')\right)^{1/2}}d\varphi'\right)dr' , \tag{C.11}$$

sendo

$$\begin{aligned}\lambda(r,z,r')&=\frac{1}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{1/2}}\\ \gamma(r,z,r')&=\frac{2rr'}{r^2+z^2+r'^2}\end{aligned} . \tag{C.12}$$

Considerando $\varepsilon=\gamma\cos(\varphi-\varphi')$ na expansão em série de Taylor

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\varepsilon^n ;\quad \varepsilon<1 , \tag{C.13}$$

visto que

$$\gamma\le\frac{2rr'}{r^2+r'^2}=\frac{2rr'}{(r-r')^2+2rr'}\le 1 , \tag{C.14}$$

isto é,

$$\gamma \cos(\varphi - \varphi') \leq 1, \tag{C.15}$$

tem-se que

$$\frac{1}{(1-\gamma\cos(\varphi'-\varphi))^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} (\gamma \cos(\varphi'-\varphi))^n . \tag{C.16}$$

Logo, a Eq. (C.11) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \phi(r,\varphi,z;R,\alpha) &= -\frac{m}{4\pi}\int_0^R r'\lambda \left(\int_0^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} (\gamma\cos(\varphi'-\varphi))^n \right) d\varphi' \right) dr' = \\ &= -\frac{m}{4\pi}\int_0^R r'\lambda \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \gamma^n \int_0^\alpha \cos^n(\varphi'-\varphi) d\varphi' \right) dr' \end{aligned} . \tag{C.17}$$

Fazendo $H = \gamma^n(r,z,r')\int_0^\alpha \cos^n(\varphi'-\varphi)d\varphi'$ na Eq. (C.17) chega-se a

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = \frac{\kappa}{4\pi} z \int_0^R r'\lambda \left(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} H \right) dr' . \tag{C.18}$$

A integral $I_n = \int_0^\alpha \cos^n(\varphi'-\varphi)d\varphi'$; $n \geq 0$, pode ser definida através das relações recursivas

$$\begin{aligned} &I_0(\varphi,\alpha) = \alpha \\ &I_1(\varphi,\alpha) = \sin(\alpha-\varphi) + \sin\varphi \\ &\ldots \\ &I_n(\varphi,\alpha) = \frac{1}{n}\left[\cos^{n-1}(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi) + \cos^{n-1}\varphi\sin\varphi\right] + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(\varphi,\alpha) \end{aligned} . \tag{C.19}$$

Como $I_n(\varphi,\alpha) = \alpha$, $\gamma^n(r,z,r') = 1$ e $\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} = 1$, para $n = 0$, a Eq. (C.18) torna-se

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = -\frac{m}{4\pi}\int_0^R \left(r'\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}\gamma^n\, I_n(\varphi;\alpha) \right) dr' \,. \tag{C.20}$$

Rearranjando os termos da Eq. (C.20), tem-se

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = -\frac{m}{4\pi}\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{n}\,n!^2}\, I_n(\varphi;\alpha) \left(\frac{R}{2^n}\int_0^R \gamma^n r'\lambda\, dr' \right). \tag{C.21}$$

Substituindo as relações da Eq. (C.12), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{R}{2^n}\int_0^R \gamma^n r'\lambda\, dr' &= R\, r^n \left(\int_0^R \frac{(r')^{n+1}}{\left(r^2+z^2+r'^2\right)^{n+1/2}} dr' \right) = \\
&= \frac{R}{\left(R^2\right)^{n+1/2}} r^n \left(\int_0^R \frac{(r')^{n+1}}{\left(\dfrac{r^2+z^2+r'^2}{R^2}\right)^{n+1/2}} dr' \right) = , \\
&= \frac{1}{R^{2n}} r^n \left(\int_0^R \frac{(r')^{n+1}}{\left(\sigma^2+\left(\dfrac{r'}{R}\right)^2\right)^{n+1/2}} dr' \right)
\end{aligned} \tag{C.22}$$

sendo $\sigma^2(r,z;R) = \dfrac{r^2+z^2}{R^2}$. Através da mudança de variável $u = \dfrac{r'}{R}$, com $0 \le u \le 1$, a Eq. (C.22) resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{R}{2^n}\int_0^R \gamma^n r'\lambda\, dr' &= \frac{1}{R^{2n}} r^n \left(\int_0^1 \frac{(uR)^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+1/2}} R\, du \right) = \\
&= \frac{R^{n+2}}{R^{2n}} r^n \left(\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+1/2}} du \right) = \quad . \\
&= \left(\frac{r}{R}\right)^n R^2 \left(\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(\sigma^2+u^2\right)^{n+1/2}} du \right)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Das Eqs. (C.21) e (C.23) chega-se a

$$\phi(r,\varphi,z;R,\alpha) = -\frac{m}{4\pi} R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^n n!^2} I_n(\varphi;\alpha) f_n(r,z;R) \left(\frac{r}{R}\right)^n \right], \tag{C.24}$$

sendo

$$f_n(r,z;R) = f_n(\sigma) = \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{\left(u^2+\sigma^2\right)^{n+1/2}} du \,, \tag{C.25}$$

e

$$\sigma^2(r,z;R) = \frac{r^2+z^2}{R^2} \,. \tag{C.26}$$

Para $n = 0$,

$$f_0(r,z;R) = f_0(\sigma) = \int_0^1 \frac{u}{\left(u^2+\sigma^2\right)^{1/2}} du = \left[\left(u^2+\sigma^2\right)^{1/2}\right]_0^1 = \sqrt{1+\sigma^2} - \sigma \,. \tag{C.27}$$

De maneira similar à formulação para o anel de vórtices, a Eq. (C.25) pode ser reescrita em termos de funções hipergeométricas, na forma

$$f_n(r,z;R) = f_n(\sigma) = \frac{1}{(2+n)} \frac{1}{(\sigma^2)^{n+1/2}} F\left(1+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}+n; 2+\frac{n}{2}; -\frac{1}{\sigma^2}\right); \quad \forall\, \sigma > 1 \,. \tag{C.28}$$

Ou, alternativamente, utilizando a Eq. (B.35),

$$f_n(r,z;R) = f_n(\sigma) = \frac{1}{(2+n)} \frac{1}{(\sigma^2+1)^{n+1/2}} F\left(\frac{1}{2}+n, 1; 2+\frac{n}{2}; -\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right); \quad \forall\, \sigma > 0 \tag{C.29}$$

.

As derivadas do potencial de velocidades, Eq. (C.24), são então dadas por:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,z,\varphi;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}R\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)\frac{\partial f_n}{\partial\sigma}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)f_n(r,z;R)n\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\right]\right], \tag{C.30}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r,z,\varphi;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}R^2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^n n!^2}I'_n(\varphi;\alpha)f_n(r,z;R)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right], \tag{C.31}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(r,z,\varphi;R,\alpha)=-\frac{m}{4\pi}R\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^n n!^2}I_n(\varphi;\alpha)\frac{\partial f_n}{\partial\sigma}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(\frac{r}{R}\right)^n\right], \tag{C.32}$$

sendo

$$\frac{df_n}{d\sigma}=-\left(\frac{1}{2+n}\frac{1}{(\sigma^2)^{n+1}}\right)\left[(2n+1)F\left(1+\frac{n}{2},\frac{1}{2}+n;2+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right]+$$
$$+\left(\frac{1}{2+n}\frac{2}{(\sigma^2)^{n+2}}\right)\left[\frac{(1+n/2)(1/2+n)}{(2+n/2)}F\left(2+\frac{n}{2},\frac{3}{2}+n;3+\frac{n}{2};-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right]; \tag{C.33}$$
$\forall\sigma>1$,

ou, utilizando a Eq. (B.35),

$$\frac{df_n}{d\sigma}=-\frac{(2n+1)}{(2+n)}\frac{1}{(\sigma)}\frac{1}{\left(\sigma^2+1\right)^{n+1/2}}F\left(\frac{1}{2}+n,1;2+\frac{n}{2};\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right)+$$
$$+\frac{(2n+1)}{(4+n)}\frac{1}{(\sigma)}\frac{1}{\left(\sigma^2+1\right)^{n+3/2}}F\left(\frac{3}{2}+n,1;3+\frac{n}{2};\frac{1}{(1+\sigma^2)}\right);\ \forall\sigma>0, \tag{C.34}$$

e $I'_n(\varphi;\alpha)$ dado pela Eq. (B.31).

Para $n=0$,

$$\frac{df_n}{d\sigma}=\frac{df_0}{d\sigma}=\frac{\sigma}{\left(1+\sigma^2\right)^{1/2}}-1. \tag{C.35}$$

APÊNDICE D – OBTENÇÃO DE r'', UTILIZADO NA FORMULAÇÃO DOS ANÉIS DE DIPOLO E DE FONTES

A partir da Figura 4.4, tem-se

$$r\,\mathrm{sen}\varphi = r'\mathrm{sen}\,\varphi' + r''\mathrm{sen}\varphi'' \,, \tag{D.1}$$

$$r\cos\varphi = r'\cos\varphi' + r''\cos\varphi'' \,. \tag{D.2}$$

Substituindo $\mathrm{sen}\varphi'' = \sqrt{1-\cos^2\varphi''}$ na Eq. (D.1) e utilizando a Eq. (D.2), obtém-se

$$r\,\mathrm{sen}\varphi = r'\mathrm{sen}\varphi' + r''\sqrt{\frac{r''^2 - \left(r\cos\varphi - r'\cos\varphi'\right)^2}{r''^2}} \,. \tag{D.3}$$

Assim,

$$\left(r\,\mathrm{sen}\varphi - r'\mathrm{sen}\varphi'\right)^2 = r''^2 - \left(r\cos\varphi - r'\cos\varphi'\right)^2 . \tag{D.4}$$

Logo,

$$r''^2 = \left(r\,\mathrm{sen}\varphi - r'\mathrm{sen}\varphi'\right)^2 + \left(r\cos\varphi - r'\cos\varphi'\right)^2 , \tag{D.5}$$

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\left(\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\right), \tag{D.6}$$

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\left(\varphi - \varphi'\right). \tag{D.7}$$

APÊNDICE E – RESULTADOS DE MASSA ADICIONAL EMPREGANDO ANÉIS DE VÓRTICES

Um experimento numérico simples, considerando apenas um dipolo vertical e um anel de vórtices (com ângulo de abertura $\alpha = 2\pi$) posicionados no plano de simetria $z = 0$, é sistematicamente realizado para diferentes valores de profundidade de penetração adimensional ζ^*. Tal experimento investiga quão preciso pode ser o resultado numérico com o uso de apenas um anel de vórtices. Valores ótimos para o raio do anel de vórtice, R, para cada ζ^*, são obtidos através do parâmetro ε_{bc}, ver Eq. (4.43). Isso é mostrado na Tabela C.1 e Tabela C.2, onde os parâmetros ε_{bc} e $\varepsilon_{M_b^*}$ são apresentados como função de ζ^* para os casos de impacto de uma esfera e de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$.

Tabela C.1 – Resultados numéricos para uma esfera em função de ζ^*, empregando apenas duas funções-teste (dipolo e anel de vórtices).

ζ^*	R/r_c	M_b^*(WAMIT)	M_b^*(VM)	ε_{bc} (%)	$\varepsilon_{M_b^*}$ (%)
0,05	0,827	0,0089	0,0090	14,1567	1,2958
0,10	0,880	0,0230	0,0222	12,4549	3,5169
0,15	0,905	0,0393	0,0385	14,5313	2,0235
0,20	0,921	0,0572	0,0561	13,2230	1,8072
0,25	0,941	0,0750	0,0758	10,2013	1,0639
0,30	0,944	0,0917	0,0920	5,6063	0,2705
0,40	0,954	0,1250	0,1244	7,8814	0,4966
0,60	0,980	0,1833	0,1819	3,4683	0,7737

Tabela C.2 – Resultados numéricos para um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$ em função de ζ^*, empregando apenas duas funções-teste (dipolo e anel de vórtices).

ζ^*	R/r_c	M_b^*(WAMIT)	M_b^*(VM)	ε_{bc} (%)	$\varepsilon_{M_b^*}$ (%)
$0{,}08\overline{3}$	0,740	0,0319	0,0253	48,2692	20,7868
$0{,}1\overline{6}$	0,840	0,0812	0,0739	26,7426	9,0147
0,25	0,865	0,1345	0,1214	17,6676	9,7864
0,50	0,910	0,2853	0,2730	12,1889	4,3386
0,75	0,911	0,3930	0,3801	10,2604	3,2889
1	0,924	0,4539	0,4295	10,4454	5,3683

Como pode ser visto na Tabela C.1 e Tabela C.2, a concordância entre os resultados numéricos é boa, uma vez que apenas duas funções-teste foram utilizadas, isto é, um dipolo e um anel de vórtices. Uma inclusão sistemática de anéis de vórtices pode ser feita a fim de diminuir o parâmetro ε_{bc}, melhorando assim o resultado para a massa adicional.

No entanto, a sistemática para inclusão de anéis de vórtices não é tão 'intuitiva' quanto àquela empregada com os dipolos e anéis de dipolos. Fisicamente não é tão imediato intuir como dispor os anéis de vórtices dentro do duplo-corpo. Além disso, para garantir a simetria da matriz G, presente no sistema da Eq. (4.15)), condição essa que deve ser satisfeita ao se utilizar qualquer função-teste, é necessário um número muito grande no somatório que compõe a função anel de vórtices (ver Eq. (B.17)). Isso é particularmente verificado para pequenas profundidades de penetração, região de maior interesse para o problema de impacto hidrodinâmico. Quanto menor a profundidade de penetração, maior o número de termos, n, da série que compõe o anel de vórtices. Assim, como o primeiro termo da série, ver Eq. (B.17), passa a apresentar valores muito altos, pois trata-se de um fatorial, os resultados numéricos divergem para alguns casos. Tais dificuldades levaram ao abandono do uso sistemático dos anéis de vórtice e a considerar apenas o conjunto de funções-teste formado por dipolos e anéis de dipolos, de tratamento numérico muitíssimo mais simples.

APÊNDICE F – RESULTADOS ADICIONAIS PARA UMA FAMÍLIA DE ESFEROIDES

Neste apêndice são apresentados o estudo de convergência e os resultados para o parâmetro ε_{bc}, em função do número de funções-teste N_{TF}, para a família de esferoides. São apresentados os resultados para esferoides oblatos, esfera e esferoides prolatos. Para o cálculo da massa adicional de esferoides oblatos e de uma esfera, durante impacto vertical, o conjunto de funções-teste é sempre composto por um dipolo vertical e por $(N_{TF}-1)$ anéis concêntricos de dipolos. As funções-teste são todas posicionadas no plano $z=0$. O dipolo vertical é posicionado na origem e os anéis de dipolos são dispostos ao redor do eixo de simetria. O raio do anel de dipolos, R_j, $1 \le j \le (N_{TF}-1)$, é dado por $R_j = [0{,}045 + (j-1)\Delta R]\, r_c$, sendo $\Delta R\,(N_{TF}-2) = 0{,}93$ e r_c o raio do duplo-corpo associado à referida profundidade de penetração; ver seção 5.1.1 para detalhes. O estudo de convergência para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a b^2}$, e o parâmetro de erro ε_{bc} (ver Eq. (4.43)) em função de N_{TF} são apresentados a seguir, Figura F.1 a Figura F.5, para o caso de esferoides oblatos e de uma esfera.

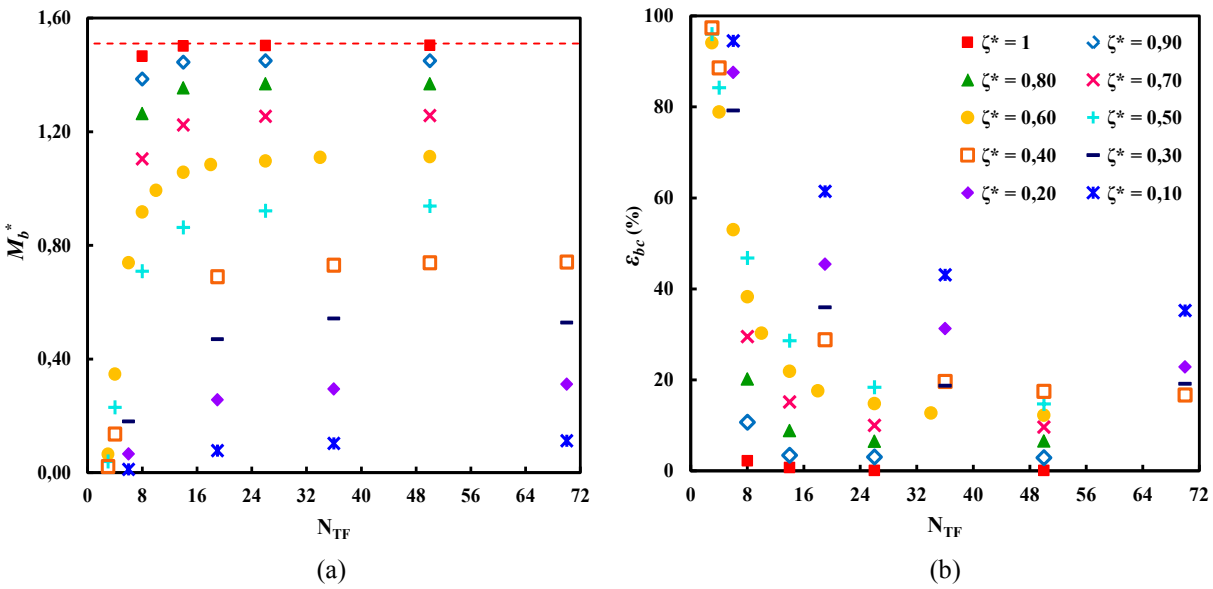


Figura F.1 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}2)$, em função de N_{TF}: (a) coeficiente adimensional de massa adicional; a linha tracejada representa o resultado obtido em Newman (1977); (b) erro da solução fraca na condição de contorno. A legenda em (b) é também utilizada na figura (a).

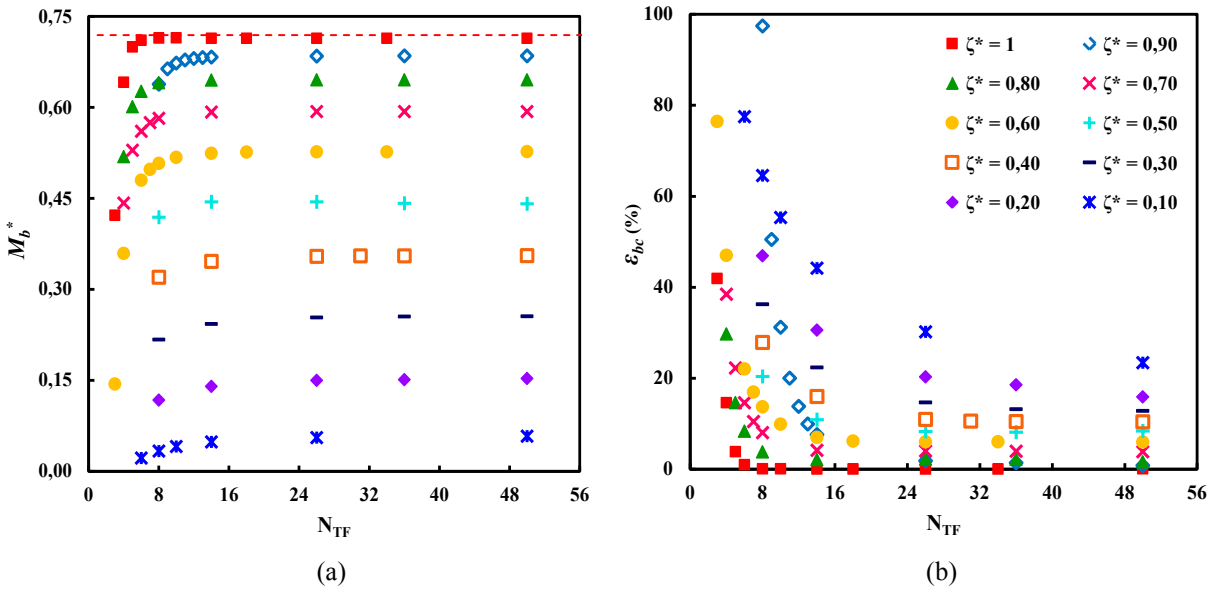


Figura F.2 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}4)$, em função de N_{TF}: (a) coeficiente adimensional de massa adicional; a linha tracejada representa o resultado obtido em Newman (1977); (b) erro da solução fraca na condição de contorno. A legenda em (b) é também utilizada na figura (a).

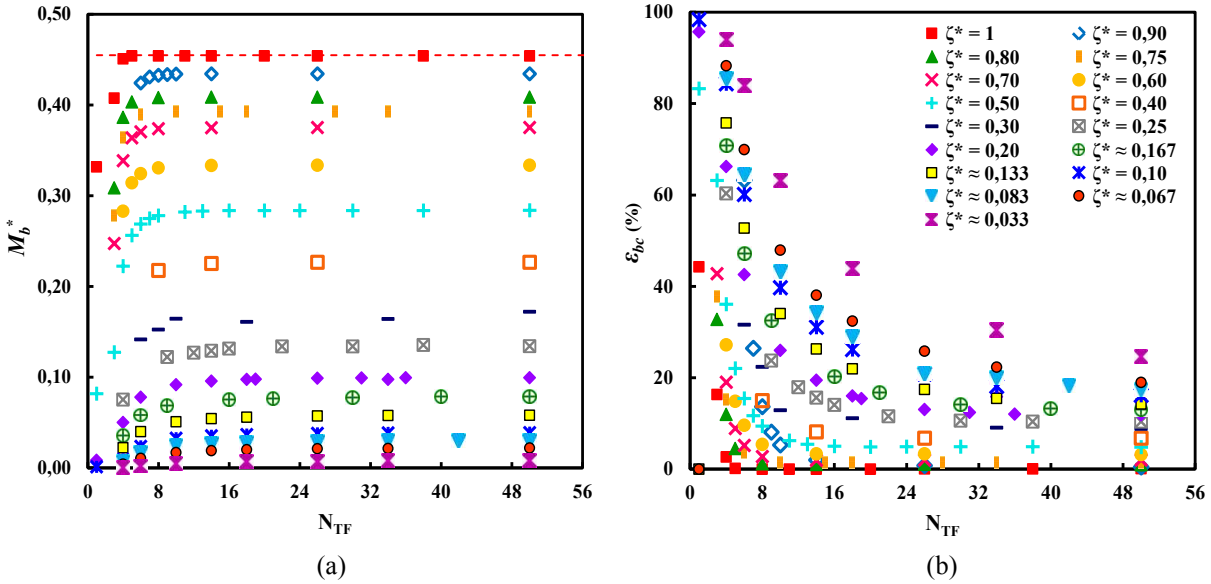


Figura F.3 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}6)$, em função de N_{TF}: (a) coeficiente adimensional de massa adicional; a linha tracejada representa o resultado obtido em Newman (1977); (b) erro da solução fraca na condição de contorno. A legenda em (b) é também utilizada na figura (a).

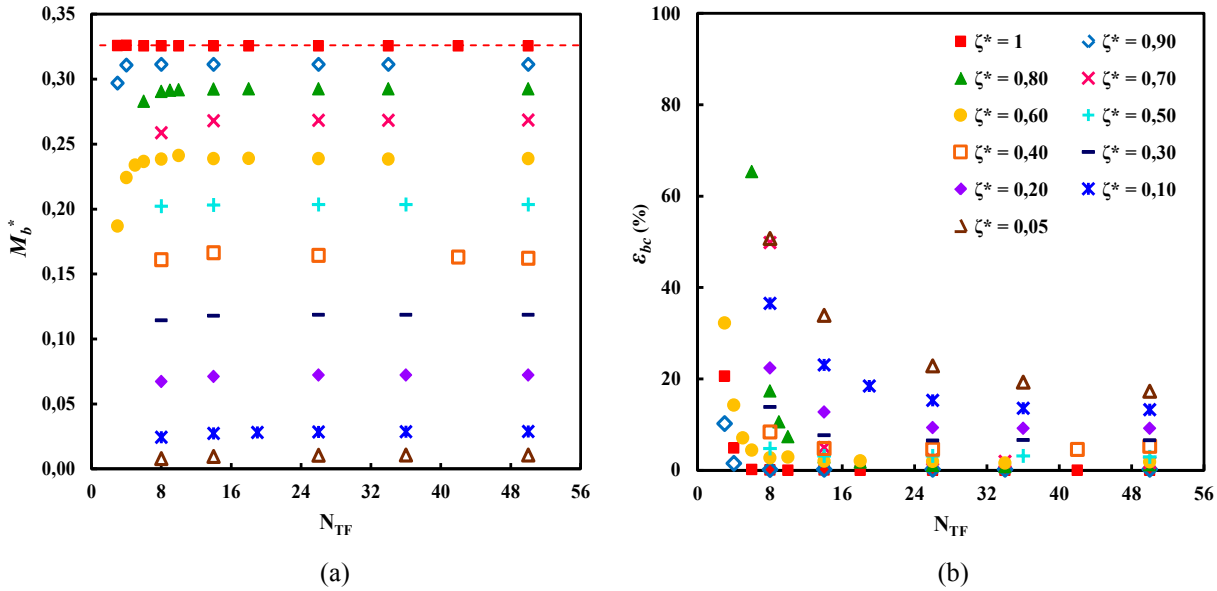


Figura F.4 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de um esferoide oblato $(a/b = 0{,}8)$, em função de N_{TF}: (a) coeficiente adimensional de massa adicional; a linha tracejada representa o resultado obtido em Newman (1977); (b) erro da solução fraca na condição de contorno. A legenda em (b) é também utilizada na figura (a).

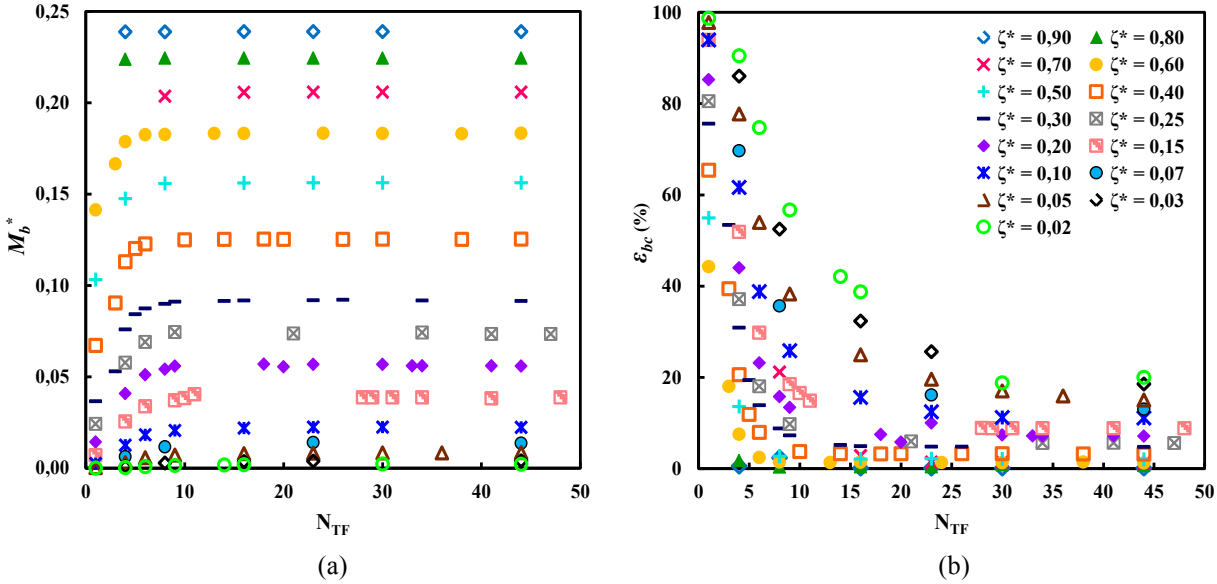


Figura F.5 – Resultados numéricos e estudo de convergência para o impacto hidrodinâmico de uma esfera $(a/b = 1)$, em função de N_{TF}: (a) coeficiente adimensional de massa adicional; (b) erro da solução fraca na condição de contorno. A legenda em (b) é também utilizada na figura (a).

Cabe lembrar que no caso da esfera, $a/b = 1$, o valor de massa adicional para $\zeta^* = 1$ é prontamente recuperado com apenas um dipolo e por isso esse resultado não consta na Figura F.5. Pode ser observado em todas as figuras anteriores que poucas funções-teste são

necessárias para uma convergência satisfatória para a massa adicional. Além disso, uma inclusão sistemática de anéis de dipolos reduz o parâmetro ε_{bc}. Note que, os raios dos anéis de dipolos utilizados para os cálculos anteriores variam de $4{,}5\%\, r_c$ a $97{,}5\%\, r_c$. Para pequenos valores de profundidade de penetração, poderiam ser acrescentados mais anéis de dipolos com raios maiores que $97{,}5\%\, r_c$, aproximando-se mais da superfície do duplo-corpo, a fim de diminuir ainda mais o parâmetro ε_{bc}.

A sistemática utilizada para a escolha do conjunto de funções-teste para os esferoides prolatos é apresenta a seguir.

Para profundidades de penetração elevadas, tem-se $\zeta > r_c$. Assim, se incluído um dipolo vertical na origem a fim de emular o escoamento ao redor de uma "esfera inscrita" com raio igual à profundidade de penetração, ζ, essa "esfera" será maior do que o duplo-corpo real. Esse procedimento é válido para $\zeta < r_c$ - particularmente é aqui utilizado para $\zeta / r_c \approx 0{,}80$, para todas as razões $a/b > 1$ consideradas.

Para maiores valores de profundidade de penetração ζ, o conjunto de funções-teste utilizado é formado por pares de dipolos verticais dispostos ao longo do eixo vertical z, ou seja, deslocados do plano $z = 0$; ver Figura F.6. Assim, cada função-teste "par de dipolos" é dada por $T = T(+z_0) + T(-z_0)$, onde T representa a função elementar dipolo.

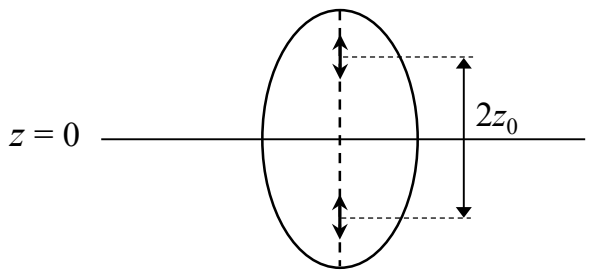


Figura F.6 – Esquema de composição de função-teste utilizando pares de dipolos verticais deslocados do plano $z = 0$. Note que um dipolo vertical (simbolizado por ↕) está deslocado para a posição $(r, \varphi, z) = (0{,}0{,}+z_0)$ e o outro para $(r, \varphi, z) = (0{,}0{,}-z_0)$.

No conjunto de funções-teste formado por N_d pares de dipolos deslocados em z, o deslocamento de cada função, z_{0j}, é dado pela relação $z_{0j} = [0{,}001 + (j-1)\Delta z_0]$, sendo $\Delta z_0\,(N_d - 1) = 0{,}99\zeta - 0{,}001$ e $1 \le j \le N_d$, com $N_d > 1$.

A Figura F.7 apresenta os resultados numéricos para o coeficiente adimensional de massa adicional, $M_b^* = \dfrac{M_b}{\frac{4}{3}\rho\pi a b^2}$, para $\zeta^* = 1$, em função do número de funções-teste N_{TF}, para a família de esferoides prolatos.

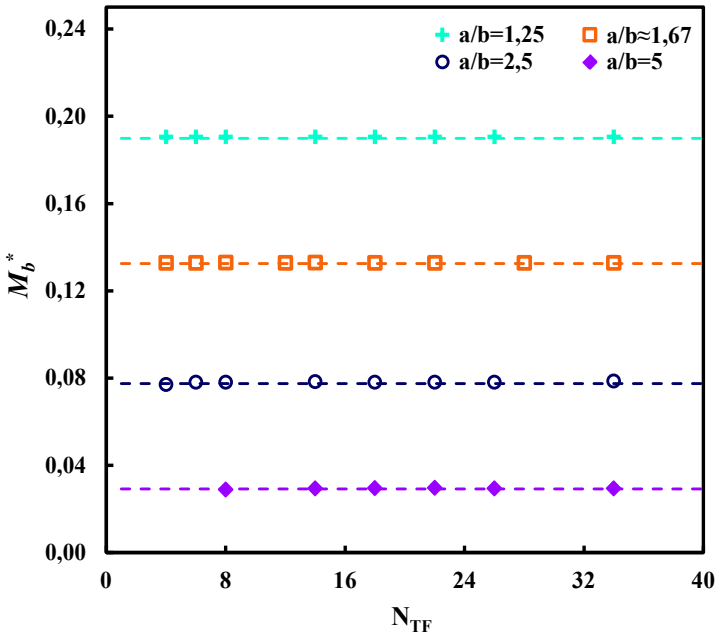


Figura F.7 – Resultados numéricos e estudo de convergência do coeficiente de massa adicional para o impacto hidrodinâmico de uma família de esferoides prolatos, em função de N_{TF}, considerando o caso $\zeta^* = 1$. As linhas tracejadas representam os resultados obtidos em Newman (1977).

Note que a concordância entre os resultados é excelente. Além disso, o parâmetro ε_{bc} é muito pequeno, $\varepsilon_{bc} < 1{,}3\%$, para todos os casos de $\zeta^* = 1$ apresentados na Figura F.7.

Conforme mencionado anteriormente, para pequenos valores de ζ^*, o conjunto de funções-teste é formado por um dipolo na origem e por anéis concêntricos de dipolos, posicionados no plano $z = 0$. Nesse caso, o raio do anel de dipolos, R_j, $1 \le j \le (N_{TF} - 1)$, é dado por $R_j = [0{,}045 + (j-1)\Delta R]\, r_c$, sendo $\Delta R\,(N_{TF} - 2) = 0{,}93$ e r_c o raio do duplo-corpo associado à referida profundidade de penetração.

Para valores moderados de penetração, em alguns casos são incluídos anéis de dipolos concêntricos no plano $z = 0$, além dos pares de dipolos deslocados, ver Figura F.6, para emular o escoamento nas "quinas" do duplo-corpo, conforme empregado anteriormente. Nesses casos, o raio de cada anel de dipolos, R_j, $1 \le j \le (N_{TF} - N_d)$, é dado por $R_j = [0{,}10 + (j-1)\Delta R]\, r_c$, sendo $\Delta R\,(N_{TF} - N_d - 1) = 0{,}875$.

Os resultados numéricos para a massa adicional e para o parâmetro ε_{bc} considerando outros valores de profundidade de penetração ζ^*, são apresentados na Tabela F.1 a Tabela F.4, para toda a família de esferoides prolatos.

Tabela F.1 – Resultados numéricos para M_b^* e ε_{bc}, para um esferoide prolato $(a/b = 1{,}25)$ em função de ζ^*.

ζ^*	N_{TF}	Conjunto de funções-teste[27]	M_b^*	ε_{bc} (%)
0,05	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0067	12,6248
0,10	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0175	9,0512
0,20	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0432	6,3704
0,30	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0702	3,3565
0,40	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0958	4,1215
0,50	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,1194	1,0727
0,60	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,1399	1,3749
0,70	42	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,1568	3,8711
0,80	24	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,1709	3,3952
0,90	18	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,1822	1,5750

Tabela F.2 – Resultados numéricos para M_b^* e ε_{bc}, para um esferoide prolato $(a/b \cong 1{,}67)$ em função de ζ^*.

ζ^*	N_{TF}	Conjunto de funções-teste	M_b^*	ε_{bc} (%)
0,02	60	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0013	14,3021
0,03	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0024	12,4025
0,04	50	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0036	11,0402
0,05	42	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0049	9,9239
0,10	60	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0126	6,1296
0,20	40	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0309	2,9444
0,30	34	dipolo na origem + $(N_{TF}-1)$ ADD em $z=0$	0,0495	2,0648
0,40	64	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,0671	6,1638
0,50	44	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,0833	5,6907
0,60	34	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,0976	4,2293
0,70	28	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,1097	2,8098
0,80	18	14 dipolos deslocados + $(N_{TF}-14)$ ADD em $z=0$	0,1195	2,5270
0,90	14	N_{TF} dipolos deslocados	0,1272	1,0136

[27] Na tabela, a abreviatura ADD representa anel discreto de dipolos, e os dipolos deslocados referem-se a pares de dipolos deslocados do plano $z=0$. Válido também para as tabelas subsequentes.

Tabela F.3 – Resultados numéricos para M_b^* e ε_{bc}, para um esferoide prolato $(a/b = 2{,}5)$ em função de ζ^*.

ζ^*	N_{TF}	Conjunto de funções-teste	M_b^*	ε_{bc} (%)
0,10	26	dipolo na origem + $(N_{TF} - 1)$ ADD em $z = 0$	0,0078	3,9963
0,20	50	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0186	3,2682
0,30	50	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0296	6,0069
0,40	42	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0401	5,0848
0,50	28	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0497	3,5503
0,60	24	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0580	2,5581
0,70	16	14 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0649	1,9209
0,80	22	N_{TF} dipolos deslocados	0,0709	0,1847
0,90	22	N_{TF} dipolos deslocados	0,0751	0,2477

Tabela F.4 – Resultados numéricos para M_b^* e ε_{bc}, para um esferoide prolato $(a/b = 5)$ em função de ζ^*.

ζ^*	N_{TF}	Conjunto de funções-teste	M_b^*	ε_{bc} (%)
0,10	32	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0034	1,5816
0,20	24	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0078	2,7474
0,30	21	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0125	2,7856
0,40	21	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0158	3,6146
0,50	28	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0194	1,5542
0,60	28	18 dipolos deslocados + $(N_{TF} - 14)$ ADD em $z = 0$	0,0224	0,3193
0,70	26	N_{TF} dipolos deslocados	0,0248	1,3023
0,80	26	N_{TF} dipolos deslocados	0,0270	0,9702
0,90	26	N_{TF} dipolos deslocados	0,0285	0,3436

APÊNDICE G – ROTINAS COMPUTACIONAIS

A seguir são apresentadas as rotinas computacionais desenvolvidas em Matlab® para a presente pesquisa.

Apêndice G. 1 – Cálculo dos coeficientes de massa adicional

Programa Principal

```
% Parâmetros de Entrada
un=-1;          %componente do vetor velocidade na direção k
U=[0 0 -1];     %vetor velocidade
k=1;            %intensidade do anel de vórtices

%-------------------------------------------------------------------------
%Escolha da Geometria

 disp('Geometria')
 disp('0 : Esfera')
 disp('1 : Esferoide')
 disp(' ')

 geometria=input('Escolha a geometria (0/1/2) : ');
 disp(' ')
 while geometria~=0 && geometria~=1 && geometria~=2
     geometria=input('Erro. Escolha a geometria (0/1/2) = ');
 end
 disp(' ')

 if geometria==0
     a=input('Digite o raio da esfera = ');
     h=input('Digite a profundidade de penetração dimensional = ');
     while h<=0 | h>a
         disp(' ')
         h=input('Erro. Digite outra profundidade de penetração dimensional
(0<h<=a) = ');
     end
     disp(' ')
     rc=(2*a*h-h^2)^0.5;               %raio da calota
  elseif geometria==1
     a=input('Digite o valor do semieixo em z = ');
     b=input('Digite o valor do semieixo em r = ');
     h=input('Digite a profundidade de penetração dimensional = ');
     while h<=0 | h>a
         disp(' ')
         h=input('Erro. Digite outra profundidade de penetração dimensional
(0<h<=a) = ');
     end
     disp(' ')
     rc=b*((1-(((a-h)/a)^2))^0.5);     %raio da calota
 end
```

```
%-------------------------------------------------------------------------
%Escolha das Funções Teste

 disp(' ')
 N=input('Digite a qtde de funções teste = ');

 Nd=input('Digite a qtde de dipolos = ');

 if Nd==N
     Nav=0;                      %número de anéis de vórtices
     Nad=0;                      %número de anéis de dipolos
     ntermo=0;
     adip=0;
 else
     Nav=input('Digite a qtde de anéis de vórtices = ');
 end

 somaN2=Nd+Nav;

 if somaN2==N
     Nad=0;
     adip=0;
 else
     Nad=input('Digite a qtde de anéis de dipolo = ');
 end

 if Nav==0
     Rav=0;
     z1=0;
     ntermo=0;
 end

 if Nad==0
     rho0=0;
     d=0;
 end

% Verificação do número de funções teste
 somaN=Nd+Nav+Nad;
 if somaN~=N
     disp('erro')
 else

     for j=1:Nav
        razao(j)=input('Digite a razão entre os raios (Ranel/Rcorpo) = ');
        Rav(j)=razao(j)*rc;
        ntermo(j)=input('Digite o nº termos p/ compor o anel de vórtices
(0<nt<1019) = ');
     end

     for j=1:Nad
%     razao2(j)=input('Digite a razão entre os raios (Ranel.dipolo/Rcorpo)
= ');
       razao2(j)=(0.045+((j-1)/(N-2))*(0.975-0.045));
       rho0(j)=razao2(j)*rc;
     end
```

```
% adip=  [];   %incluir os raios das esferas inscritas, para cada dipolo
deslocado
% d   =  [];   %incluir numéro de dipolos para compor cada anel discreto de
dipolos

%-------------------------------------------------------------------------
%Construção do vetor V e da matriz G

%      load termoA1.dat
%      A1=termoA1; %utilizado para os anéis de vórtices

    disp(' ')
    disp('Cálculo do vetor V')

    for j=1:N
        jv=j;
        save entradas a adip b d geometria h jv k Nad Nav Nd ntermo Rav rc
rho0 un A1
        V(j) = -2*dblquad(@vetorV,0,rc,0,2*pi,[],@quadl);
    end


     disp('Cálculo da matriz G')

     for l=1:N
        for m=1:N
            if m>l || l==m
               save entradas a b adip d geometria h k l m Nad Nav Nd ntermo
Rav rc rho0 un A1
               G(l,m) = -2*dblquad(@matrizG,0,rc,0,2*pi,[],@quadl);
            else
              G(l,m)=G(m,l);
            end
        end
     end
%-------------------------------------------------------------------------
% Solução do Sistema G q = V

% Eliminação de Gauss
%     % n, i, k --> índices
%
%     if N==1
%         q=V/G;
%         Vtil=q*V;
%     else
%         A=G;  %sistema Ax=b
%         b=V;
%         n=length(A);
%         Vtil=0;
%         for k=1:n-1
%            for i = k+1:n
%               mik = -A(i,k)/A(k,k);
%               A(i,:) = A(i,:) + mik*A(k,:);
%               b(i) = b(i) + mik*b(k);
%            end
%         end
%
%  %Solução do sistema triangular superior
%
%        x(n)=b(n)/A(n,n);
```

```
%        for k = n-1:-1:1
%            x(k)=b(k);
%            for i = k+1:n
%               x(k) = x(k) - A(k,i)*x(i);
%            end
%            x(k)=x(k)/A(k,k);
%        end
%
%        for p=1:N
%            q(p)=x(p);
%            s=q(p)*V(p);
%            Vtil=Vtil+s;   %acumulador (phi til)
%        end
%      end

%Ou
    q=G\V';

    q
    Vtil=0;
    for p=1:N
          s=q(p)*V(p);
          Vtil=Vtil+s;
    end
%-----------------------------------------------------------------------
%Cálculo da massa adicional

    disp(' ')
    disp('Massa adicional')
    disp(' ')

     if geometria==0
         md=(4/3)*pi*a^3;           %massa deslocada da esfera totalmente
submersa
     elseif geometria==1
         md=(4/3)*pi*a*(b^2);        %massa deslocada do esferoide
totalmente submerso
     end

     disp('massa adicional adimensional Mb*')
     a33=(1/md)*Vtil            %duplo-corpo
     a33_meio=(1/md)*Vtil/2

     disp('massa adicional dimensional')
     Mb=Vtil                    %duplo-corpo
     Mb_meio=Vtil/2
%-------------------------------------------------------------------------
% Cálculo do erro da solução fraca na condição de contorno na superfície do
corpo

     save entradas a b adip d e geometria h k N Nad Nav Nd ntermo Rav q rc
rho0 un A1
     E1 = -2*dblquad(@aux1,0,rc,0,2*pi,[],@quadl)  %coordenadas cilindricas
     E2 = -2*dblquad(@aux2,0,rc,0,2*pi,[],@quadl)  %coordenadas cilindricas
     %parâmetro ?bc
     erro=abs(E1-E2)/abs(E2)
%-----------------------------------------
end
```

Programas auxiliares ao cálculo do erro

```
function y = aux1(r,theta)
load entradas
%grad phi . n
gradphi_total=0;

 if geometria==0
    z=((a.^2-r.^2).^(0.5));
    zlinha=z-(a-h);
    dS=(r.*(a./((a^2-r.^2).^0.5)));
    %Vetor normal
    nr=(1/a)*r;
    nz=(1/a)*(z);
 elseif geometria==1
    z=(((a^2)-((r.^2)*((a/b)^2))).^0.5);
    zlinha=z-(a-h);
    dS=(((1+(r.^2).*((a/b)^4).*((a^2-(r.^2)*((a/b)^2)).^(-1))).^0.5).*r);
    %Vetor normal
    nr= (((a/b)^2)*r)./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
    nz=(z)./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
 end

 %Cálculo de gradphi . n
  for l=1:N
    if l<=Nd && Nd~=0
         save entradas_dipolo r zlinha    % Chama o arquivo que contém o
gradiente da função teste Dipolo
         gradphi=q(l)*(nr.*gradiente_dipolo_r+nz.*gradiente_dipolo_z);
    elseif l>Nd && (l-Nd)<=Nav && Nav~=0
         Rl=Rav(l-Nd);
         nt=ntermo(l-Nd);
         save entradas_anel_vortices r zlinha Rl nt
         gradiente_anel_vortices;         % Chama o arquivo que contém o
gradiente da função teste Anel de Vórtices

gradphi=(nr.*gradiente_anel_vortices_r+nz.*gradiente_anel_vortices_z);

    elseif l>(Nd+Nav) && (l-(Nd+Nav))<=Nad && Nad~=0
         save entradas_anel_dipolos r theta zlinha l   % Chama o arquivo
que contém o gradiente da função teste Anel de Dipolo

gradphi=q(l)*(nr.*gradiente_anel_dipolos_r+nz.*gradiente_anel_dipolos_z);
    end
    gradphi_total=gradphi_total+gradphi;
 end
    gradphi_til=gradphi_total;
    T=gradphi_til;
y=T.*dS;



function y = aux2(r,theta)
load entradas
%U . n

 if geometria==0
    z=((a.^2-r.^2).^(0.5));
    zlinha=z-(a-h);
```

```
    dS=(r.*(a./((a^2-r.^2).^0.5)));
    %Vetor normal
    nr=(1/a)*r;
    nz=(1/a)*(z);
 elseif geometria==1
    z=(((a^2)-((r.^2)*((a/b)^2))).^0.5);
    zlinha=z-(a-h);
    dS=(((1+(r.^2).*((a/b)^4).*((a^2-(r.^2)*((a/b)^2)).^(-1))).^0.5).*r);
    %Vetor normal
    nr= (((a/b)^2)*r)./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
    nz=(z)./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
 end

 T=un.*nz; %Un=U.normal
y=T.*dS;
```

Construção do vetor V

```
function y = vetorV(r,theta)
load entradas
if geometria==0
    z=((a.^2-r.^2).^(0.5));
    zlinha=z-(a-h);
elseif geometria==1
    z=(((a^2)-((r.^2)*((a/b)^2))).^0.5);
    zlinha=z-(a-h);
end
m=jv;
%-----------------------------------------------------------------------------
%Funções Teste

if jv<=Nd && Nd~=0
    save entradas_dipolo r zlinha
    T=dipolo;                    % Chama o arquivo Dipolo
elseif jv>Nd && (jv-Nd)<=Nav && Nav~=0
    Rm=Rav(jv-Nd);
    nt=ntermo(jv-Nd);
    save entradas_anel_vortices r zlinha Rm m nt
    T=anel_vortices;             % Chama o arquivo Anel de Vortices
elseif jv>(Nd+Nav) && (jv-(Nd+Nav))<=Nad && Nad~=0
    save entradas_anel_dipolos r theta zlinha m
    T=anel_dipolos;              % Chama o arquivo Anel Discreto de Dipolos
end
%-----------------------------------------------------------------------------
% Vetor normal e elemento de área (para metade do duplo-corpo)

if geometria==0
   nz=(z)/a;
   dS=(r.*(a./((a^2-r.^2).^0.5)));          %elemento de área para metade
do duplo corpo (esfera)
elseif geometria==1
   nz=z./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
   dS=(((1+(r.^2).*((a/b)^4).*((a^2-(r.^2)*((a/b)^2)).^(-1))).^0.5).*r);
%elemento de área para metade do duplo corpo (elipsoide)
end
%-----------------------------------------------------------------------------
Un=un.*nz;           %Un=U.normal
y=T.*Un.*dS;         %integrando
```

Construção da matriz G

```
function y = matrizG(r,theta)
load entradas
if geometria==0
      z=((a.^2-r.^2).^(0.5));
      zlinha=z-(a-h);
elseif geometria==1
      z=(((a^2)-((r.^2)*((a/b)^2))).^0.5);
      zlinha=z-(a-h);
end
%-----------------------------------------------------------------------------
%Funções Teste

if m<=Nd && Nd~=0
      save entradas_dipolo r zlinha
      Tm=dipolo;              % Chama o arquivo Dipolo
elseif m>Nd && (m-Nd)<=Nav && Nav~=0
      Rm=Rav(m-Nd);
      nt=ntermo(m-Nd);
      save entradas_anel_vortices r zlinha Rm nt
      Tm=anel_vortices;       % Chama o arquivo Anel de Vórtices
elseif m>(Nd+Nav) && (m-(Nd+Nav))<=Nad && Nad~=0
      save entradas_anel_dipolos r theta zlinha m
      Tm=anel_dipolos;        % Chama o arquivo Anel Discreto de Dipolo
end
%-----------------------------------------------------------------------------
%Gradiente das Funções Teste

if l<=Nd && Nd~=0
      save entradas_dipolo r zlinha
      dTdr=gradiente_dipolo_r;           % Chama o arquivo gradiente Dipolo
      dTdz=gradiente_dipolo_z;
elseif l>Nd && (l-Nd)<=Nav && Nav~=0
      Rl=Rav(l-Nd);
      nt=ntermo(l-Nd);
      save entradas_anel_vortices r theta zlinha Rl nt
      gradiente_anel_vortices;
      dTdr=gradiente_anel_vortices_r;    % Chama o arquivo gradiente Anel
de Vórtices
      dTdz=gradiente_anel_vortices_z;
elseif l>(Nd+Nav) && (l-(Nd+Nav))<=Nad && Nad~=0
      save entradas_anel_dipolos r theta zlinha l
      dTdr=gradiente_anel_dipolos_r;     % Chama o arquivo gradiente Anel
de Dipolo
      dTdz=gradiente_anel_dipolos_z;
end
%-----------------------------------------------------------------------------
% Vetor normal e elemento de área para metade do duplo-corpo

if geometria==0
   nr=(1/a)*r;
   nz=(1/a)*z;
   dS= (r.*(a./((a^2-r.^2).^0.5)));
elseif geometria==1
   nr=(((a/b)^2)*r)./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
   nz=z./((((a/b)^4)*(r.^2)+(z.^2)).^0.5);
   dS=(((1+(r.^2).*((a/b)^4).*((a^2-(r.^2)*((a/b)^2)).^(-1))).^0.5).*r);
end
%-----------------------------------------------------------------------------
```

```
gradTn=(nr.*dTdr)+(nz.*dTdz);
y=gradTn.*Tm.*dS;  %integrando
```

Função-teste: dipolo

```
function Td=dipolo(r,zlinha)
load entradas
load entradas_dipolo
a=h;
Td=(1/2)*(zlinha).*(((a^2)./((r).^2+(zlinha).^2)).^1.5);


function gradTr=gradiente_dipolo_r(r,zlinha)
load entradas
load entradas_dipolo
a=h;
gradTr=(-3/2)*(a^3)*(r).*((1./((r).^2+(zlinha).^2)).^2.5).*(zlinha);


function gradTz=gradiente_dipolo_z(r,zlinha)
load entradas
load entradas_dipolo
a=h;
gradTz=(1/2)*(((a^2)./((r).^2+(zlinha).^2)).^1.5)+(-
3/2)*(a^3)*((zlinha).^2).*((1./((r).^2+(zlinha).^2)).^2.5);
```

Função-teste: anel de vórtices

```
function Tav=anel_vortices(r,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_vortices
somam=0;  %variavel para o calculo do somatorio

for n=0:nt
 i=n+1;
 % Calculo do primeiro termo da serie - A1
 %A1(i)=factorial(2*n+1)/(((factorial(n))^2)*(2^n));

 % Calculo do segundo termo da serie - A2
 if n==0
     A2(i)=2*pi;
 elseif n==1
     A2(i)=0;
 else
     A2(i)=((n-1)/n)*A2(i-2);
 end

 % Cálculo do terceiro termo da serie - A3
 sigma2m=((r.^2+zlinha.^2)./(Rm^2));  %sigma ao quadrado
 sigmam=sigma2m.^0.5;

 % Cálculo das funcoes hipergeometricas
 if n==0
```

```
    A3m=(1./sigmam).*(1-sigmam./((1+sigma2m).^0.5));
 else
    fm=(1/(2+n))*(1./((sigma2m+1).^(n+1.5)));
    Fa=1.5+n;
    Fb=1;
    Fc=2+n/2;
    Fwm=1./(1+sigma2m);
    pr=1;
    Fm=1; %variável auxiliar para o cálculo da função hipergeométrica
    for p=1:120
        s=pr*(Fa+p-1)*(Fb+p-1)/(Fc+p-1);
        pr=s;
        seriem=s.*(Fwm.^p)/(factorial(p));
        Fm=Fm+seriem;
    end
    A3m=fm.*Fm;   % fn
 end
 %-------------------------------------
 % Cálculo do quarto termo da serie - A4
 A4m=(r/Rm).^n;

 % Cálculo do somatorio A1.A2.A3.A4
 Am=A1(i)*A2(i)*A3m.*A4m;
 somam=somam+Am;
end
Tav=(k/(4*pi)).*(zlinha./Rm).*somam;       %Potencial de Velocidade



function gradT=gradiente_anel_vortices(r,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_vortices
%variaveis para o calculo do somatorio --> gradiente de T
somal=0; %associado a funcao teste Tl
soma2=0;
soma3=0;

for n=0:nt
  i=n+1;

  % Cálculo do primeiro termo da série - A1
  %A1(i)=factorial(2*n+1)/(((factorial(n))^2)*(2^n));

  % Cálculo do segundo termo da serie
  if n==0
     A2(i)=2*pi;
  elseif n==1
     A2(i)=0;
  else
     A2(i)=((n-1)/n)*A2(i-2);
  end

  % Cálculo do terceiro termo da série - A3

  % Cálculo das funcoes hipergeometricas
  sigma2l=((r.^2+zlinha.^2)./(Rl^2));  %sigma ao quadrado associado ao raio
Rl
  sigmal=sigma2l.^0.5;
```

```
  if n==0
      A3l=(1./sigmal).*(1-sigmal./((1+sigma2l).^0.5));
  else
      fl=(1/(2+n))*(1./((sigma2l+1).^(n+1.5))); %associado ao raio Rl
      Fa=1.5+n; %associado aos raios Rl e Rm
      Fb=1; %associado aos raios Rl e Rm
      Fc=2+n/2; %associado aos raios Rl e Rm
      Fwl=1./(1+sigma2l); %associado ao raio Rl
      pr=1; %associado aos raios Rl e Rm
      Fl=1; %variavel auxiliar para o calculo da funcao hipergeometrica -->
associado ao raio Rl
      for p=1:120
        s=pr*(Fa+p-1)*(Fb+p-1)/(Fc+p-1);
        pr=s;
        seriel=s.*(Fwl.^p)/(factorial(p));  %associado ao raio Rl
        Fl=Fl+seriel;  %associado ao raio Rl
      end
      A3l=fl.*Fl;   % fn associado ao raio Rl
   end

  % Cálculo do quarto termo da série - A4
  A4l=(r/Rl).^n;

  % Cálculo do somatorio A1.A2.A3.A4
  Al=A1(i)*A2(i)*A3l.*A4l;
  somal=somal+Al;

  %Cálculo dos gradientes de T
  A5=n.*((r/Rl).^(n-1));
  A6=A1(i)*A2(i)*A3l.*A5;
  soma2=soma2+A6;          %associada ao raio Rl

  %Cálculo de dfn/dsigma
  if n==0
      A7=(-1./sigma2l).*(1-
sigmal./((1+sigma2l).^0.5))+(1./sigmal).*((sigma2l./((1+sigma2l).^1.5))-
(1./((1+sigma2l).^0.5)));
  else
      C1=-((2*n+3)/(2+n)).*(sigma2l.^(-0.5))./((1+sigma2l).^(n+1.5));
      C2=((2*n+3)/(4+n)).*(sigma2l.^(-0.5))./((1+sigma2l).^(n+2.5));
      Fa2=2.5+n; %associado ao raios Rl
      Fb2=1; %associado ao raio Rl
      Fc2=3+n/2; %associado ao raio Rl
      Fwl2=1./(1+sigma2l); %associado ao raio Rl
      pr2=1; %associado ao raio Rl
      Fl2=1; %variavel auxiliar para o calculo da funcao hipergeometrica --
> associado ao raio Rl
      for p2=1:120
        s2=pr2*(Fa2+p2-1)*(Fb2+p2-1)/(Fc2+p2-1);
        pr2=s2;
        seriel2=s2.*(Fwl2.^p2)/(factorial(p2));  %associado ao raio Rl
        Fl2=Fl2+seriel2;  %associado ao raio Rl
      end
      A7=C1.*Fl+C2.*Fl2; %dfn/dsigma
  end
  A8=A1(i)*A2(i)*A7.*A4l;
  soma3=soma3+A8;          %associada ao raio Rl
end
save entradas_gradiente_anel_vortices  somal soma2 soma3 sigma2l
```

```
function gradTr=gradiente_anel_vortices_r(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_vortices
load entradas_gradiente_anel_vortices
gradTr=((k/(4*pi))*(1/Rl).*(zlinha./Rl).*soma2)+((k/(4*pi))*(1/Rl).*(zlinha
./Rl).*(r./(Rl*(sigma2l.^0.5))).*soma3);%derivada da integral que depende
do parametro sigma


function gradTz=gradiente_anel_vortices_z(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_vortices
load entradas_gradiente_anel_vortices
gradTz=((k/(4*pi)).*(1/Rl).*somal)+((k/(4*pi))*(1/Rl).*(zlinha./Rl).*(zlinh
a./(Rl*(sigma2l.^0.5))).*soma3);%derivada da integral que depende do
parametro sigma
```

Função-teste: anel de dipolos

```
function Tadm=anel_dipolos(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_dipolos
a=adip(m-(Nd+Nav));

Tadm=0;
rho0m=rho0(m-(Nd+Nav));
for e=1:d(m-(Nd+Nav))

    theta0m=(2*pi*(e-1))/d(m-(Nd+Nav));

    K1=rho0m*sin(theta0m);        %constante auxiliar
    K2=rho0m*cos(theta0m);        %constante auxiliar

    rholinha=((r*sin(theta)-K1).^2+((r*cos(theta))-K2).^2).^0.5;

    %potencial de cada dipolo deslocado
    Tdip = (1/2)*(zlinha).*(((a^2)./((rholinha).^2+(zlinha).^2)).^1.5);

    %potencial do anel de dipolo
    Tadm=Tadm+Tdip;
end



function gradTr=gradiente_anel_dipolos_r(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_dipolos
a=adip(l-(Nd+Nav));

gradTr=0;

rho0l=rho0(l-(Nd+Nav));
```

```
for e=1:d(l-(Nd+Nav))

    theta0l=(2*pi*(e-1))/d(l-(Nd+Nav));

    K1l=rho0l*sin(theta0l);       %constante auxiliar
    K2l=rho0l*cos(theta0l);       %constante auxiliar

    rholinhal=((r*sin(theta)-K1l).^2+((r*cos(theta))-K2l).^2).^0.5;

    %gradiente para cada dipolo deslocado
    dTdr_desl=(-
3/2)*(a^3).*((1./((rholinhal).^2+(zlinha).^2)).^2.5).*(zlinha).*(r-
rho0l*cos(theta-theta0l));

    %gradiente do anel de dipolo
    gradTr=gradTr+dTdr_desl;
end



function gradTtheta=gradiente_anel_dipolos_theta(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_dipolos

a=adip(l-(Nd+Nav));

gradTtheta=0;

rho0l=rho0(l-(Nd+Nav));

for e=1:d(l-(Nd+Nav))

    theta0l=(2*pi*(e-1))/d(l-(Nd+Nav));

    K1l=rho0l*sin(theta0l);       %constante auxiliar
    K2l=rho0l*cos(theta0l);       %constante auxiliar

    rholinhal=((r*sin(theta)-K1l).^2+((r*cos(theta))-K2l).^2).^0.5;

    %gradiente para cada dipolo deslocado
    dTdtheta_desl=(-
3/2)*zlinha*(a^3).*((1./((rholinhal).^2+(zlinha).^2)).^2.5).*(r*rho0l*sin(t
heta-theta0l));

    %gradiente do anel de dipolo
    gradTtheta=gradTtheta+dTdtheta_desl;
end



function gradTz=gradiente_anel_dipolos_z(r,theta,zlinha)
load entradas
load entradas_anel_dipolos

a=adip(l-(Nd+Nav));
```

```
gradTz=0;

rho0l=rho0(l-(Nd+Nav));

for e=1:d(l-(Nd+Nav))

    theta0l=(2*pi*(e-1))/d(l-(Nd+Nav));

    K1l=rho0l*sin(theta0l);       %constante auxiliar
    K2l=rho0l*cos(theta0l);       %constante auxiliar

    rholinhal=((r*sin(theta)-K1l).^2+((r*cos(theta))-K2l).^2).^0.5;

    %gradiente para cada dipolo deslocado
    dTdz_desl=(1/2)*(((a^2)./((rholinhal).^2+(zlinha).^2)).^1.5)+(-
3/2)*((zlinha).^2)*(a^3).*((1./((rholinhal).^2+(zlinha).^2)).^2.5);

    %gradiente do anel de dipolo
    gradTz=gradTz+dTdz_desl;
end
```

Apêndice G. 2 – Resolução da equação de movimento

A partir do conhecimento das funções $M_b^*(\zeta^*)$ e $M_b'^*(\zeta^*)$, a equação de movimento (3.41) é integrada sob condições iniciais $\zeta^*(t_0)=0$ e $\dot{\zeta}^*(t_0)=1$. Essa equação foi resolvida numericamente empregando a função ODE45, disponível na biblioteca do Matlab®. Por essa razão, a rotina não é aqui apresentada. Essa função realiza a integração da equação diferencial considerando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.