UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

11/7/96

Uma Versão Regularizada do Modelo σ-Linear

SBI-IFUSP
305M810T2451

Silvana Pilar Flego

Tese apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de
Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Profª Dra. Maria Carolina Nemes (UFMG),
Prof. Dr. Adilson Jose da Silva (USP),
Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (USP),
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP),
Profª Dra. Maria Teresa Climaco do Santos Thomaz (UFF).

M. C. Nemes
Iberê Luiz Caldas

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Orientadora: Profª Dra. Maria Carolina Nemes

SÃO PAULO - BRASIL
1996

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2451
INSTITUTO DE FÍSICA

F595v
D
ex. 1

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Flego, Silvana Pilar
Uma versão regularizada do modelo σ-linear
São Paulo, 1996.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Unitermos:1.Propagadores; 2. Identidades de Ward;
3. Regularização; 4. Polos fantasmas.
USP/IF/SBI - 15/96

A mi hijito

Matías

Agradecimentos

Ao meu pai, Carlos, e à minha mãe, Pilar, para os quais não tenho palavras para expressar tudo o que sinto. "Gracias papis por ser quien soy".

Ao meu esposo, Carlos, por sua compreensão e infinita paciência, por estar a meu lado a todo momento. "Gracias Pi".

Ao meu filhinho, Matías, por engendrar todas as forças que preciso para seguir adiante. "Gracias Pipu".

Ao meu irmão, Carlos, e à sua linda família, Mari, Melisa e Daiana, por estar sempre ao meu lado.

Aos meus cunhados, Graciela e Ruli, pelo apoio e incentivo.

Ao meu sobrinho Adrian, por auxiliar-me sempre, principalmente na área da informática.

À minha amiga Liliana, por sempre ter estado ao meu lado.

Aos meus amigos Maria José, Dito e René, pelo incentivo.

Aos meus colegas e amigos, Ivonne, Audrey, Maisa, Mirian, Marcelo e Saulo, pela sua solidaridade nas mais variadas circunstâncias, pelo apoio e incentivo.

* * *

À minha orientadora Prof. Dra. Maria Carolina Nemes, a quem se deve a sugestão do tema deste trabalho, pelas valiosas sugestões que foram de incalculável valor para a realização do mesmo, pelos ensinamentos, pelo apoio dispensado, por ter deixado que administrasse meu tempo e principalmente por ter confiado sempre em mim. Obrigada Caro.

À Sra. Prof. Dra. Brigitte Hiller e ao Sr. Prof. Dr. Alex Blin, pelo apoio científico e o interesse que tem manifestado pelo meu trabalho e as consequentes sugestões.

Ao Sr. Prof. Dr. Manuel Robilotta, pelos ensinamentos e a sua colaboração no esclarecimento de conceitos na primeira fase do trabalho que serviu de base para esta dissertação.

Ao grupo de "Física de Hadrons", pelos oportunos comentários e as consequentes e proveitosas discussões.

À todos os Professores e colegas do Departamento de Física Matemáticas da Universidade de São Paulo expresso o meu sincero agradecimento pelo apoio prestado nas mais variadas circunstâncias.

Não posso deixar de referir-me à generalidade de Professores e colegas do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais pelas facilidades que me foram concedidas na utilização, em condições excepcionais, de todas as instalações e em particular dos computadores e impressoras.

Aos meus Professores da Universidad Nacional de La Plata, Argentina, pela base científica que me deram a qual permitiu-me "sair de casa".

* * *

Desejo agradecer FAPESP pelo apoio financeiro para os translados durante a realização deste trabalho.

* * *

Estou igualmente muito reconhecida ao CNPq pelo subsídio que me concedeu para a realização deste trabalho.

Resumo

Usualmente os modelos efetivos utilizados para a descrição da física de hádrons de baixa energia não são renormalizáveis. O objetivo da presente investigação é discutir o papel da renormalização no tratamento de um modelo efetivo. Estudamos o Modelo σ-Linear na sua versão renormalizada e descobrimos a presença de polos fantasmas. Investigamos então as consequências de introduzir na teoria um parâmetro cutoff, Λ, com a precaução de manter no possível as propriedades de simetria da Lagrangiana original. Mostramos que nessa versão regularizada os pólos não-físicos desaparecem quando o parâmetro cutoff é menor ou da ordem de $\Lambda_c \approx 1.2$ GeV. É possível fixar o valor de Λ em Λ_c e interpretar autoconsistentemente as propriedades físicas associadas com os propagadores. Uma ressonância centrada em 880 MeV com uma largura de 400 MeV aparece no propagador sigma; o nucleon é um estado ligado e no seu continuo duas ressonâncias de Roper podem ser identificadas.

Abstract

Usually the effective model utilized for the description of low energy hadron physics are not renormalizable. The purpose of the present investigation is to discuss the role of the renormalization in the treatment of a effective model. We study the σ-Linear Model in it renormalized version and find the presence of ghost poles. We then investigate the consequences of introducing into the theory a cutoff Λ, taking care of mantaining the simmetry properties of the original Lagrangian. We show that in the regularized version the nonphysical poles disappear when the cutoff parameter value is less than $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$. It is possible to fix cutoff value in Λ_c and get a selfconsistent interpretation of physical properties associated with the propagators. A resonance centered at 880 MeV with a corresponding width $\simeq 400\ MeV$ appear in the sigma propagator. The nucleon is a bound state and in its continuum two Roper resonances can be identified.

Índice

Resumo iv

Abstract v

Introdução 5

1 A Evolução das Idéias em torno da Física de Hádrons 9

1.1 Desde Começos dos Anos 30 até a Chegada dos Aceleradores 10

1.2 As Tentativas de Explicar o Espectro Hadrônico 11

1.3 O Período Quarks–Pré-QCD 21

1.4 O Surgimento da Teoria das Interações Fortes 27

1.5 Os Modelos Fenomenológicos 31

1.6 Os Potenciais de Interação N-N 34

1.7 Os Estados Non-Quark-Model 35

2 Simetrias Contínuas 39

2.1 Simetrias no Contexto da Teoria de Campos 40

2.1.1 O teorema de Noether 40

2.1.2 Simetrias de Calibre 43

2.2 Realização de Simetrias Unitárias 50
2.2.1 O Estado Fundamental 50
2.2.2 O Comportamento do Estado Fundamental 52
2.2.3 O Teorema de Coleman 53
2.2.4 Quebra Espontânea de Simetria 54
2.3 A Simetria Quiral 58
2.3.1 A Informação Fornecida pelos Processos Fracos 59
2.3.2 A Simetria Quiral 61
2.3.3 A Quebra Espontânea da Simetria Quiral e
A Relação de Goldberger–Treimann 62
2.3.4 A Quebra Explícita da Simetria Quiral e PCAC 65
2.3.5 Lagrangianas Efetivas Quirais 65

3 A Cromodinâmica Quântica E O Modelo Sigma Linear 71
3.1 A Cromodinâmica Quântica 72
3.1.1 A Lagrangiana da QCD 73
3.1.2 As Simetrias da QCD 75
3.1.3 Quebra Espontânea da Simetria Quiral, Bósons de Goldstone 78
3.1.4 Quebra Explícita da Simetria Quiral, Píons Físicos 79
3.2 O Modelo Sigma Linear 81
3.2.1 A Lagrangiana do Modelo Sigma Linear 81
3.2.2 A Parte Simétrica Quiral da Lagrangiana 82
3.2.3 A Quebra Explícita da Simetria Quiral 87
3.2.4 A Restauração da Simetria Quiral 90
3.2.5 O Vácuo no Modelo σ-Linear 91
3.2.6 Sobre a Renormalização do Modelo σ-Linear 96
3.2.7 A Relação G-T 102
3.2.8 A Condição PCAC 103

4 Versão Regularizada do Modelo σ-Linear **106**

4.1 Generalidades 107

4.2 A Expansão Perturbativa 110

4.2.1 Condições de Renormalização para $\mathcal{L}(x)$ Invariante com Relação a $SU(2)$ 110

4.2.2 As relações impostas pela Simetria Quiral 113

4.2.3 As Regras de Feynman para a Lagrangiana 118

4.2.4 A Expansão em Loops das Funções de Green 120

4.3 Os Propagadores na Aproximação "One–Loop" 121

4.4 A Introdução de um "Cutoff" 124

4.4.1 Os Propagadores Mesônicos 125

4.4.2 O Valor Crítico do Cutoff Λ_c 130

4.4.3 O Propagador do Nucleon 133

5 Renormalização vs. Regularização do Modelo σ–Linear Análise Numérica e Interpretação dos Resultados **138**

5.1 Notação e Definições 139

5.2 Versão Renormalizada 141

5.2.1 O Propagador Renormalizado do Píon : $D_\pi(s)$ 141

5.2.2 O Propagador Renormalizado do Méson σ : $D_\sigma(s)$ 142

5.2.3 O Propagador Renormalizado do Nucleon : $S_N(\not{p})$ 144

5.2.4 O Comportamento dos Pólos do Propagador do Píon em Função da Constante de Acoplamento Píon–Férmions 145

5.3 Versão Regularizada 147

5.3.1 Os Propagadores Regularizados Mesônicos 148

5.3.2 O Propagador Regularizado do Nucleon 151

5.3.3 Os Resultados Autoconsistentes para $\Lambda \approx \Lambda_c$ 152

5.4 Principais Semelhanças e Diferenças entre as Versões Renormalizada e Regularizada do Modelo σ–Linear 154

6 Conclusões e Perspectivas **157**

A Notação **160**

A.1 Métrica 160

A.2 As Matrizes de Dirac 161

A.3 Os Espinores de Dirac 164

B Simetrias Unitárias Especiais **167**

C Propriedades Gerais e Terminologia Referentes à Função de Green e aos Diagramas de Feynman **174**

C.1 A Função de Green 174

C.2 Diagramas próprios e truncados 178

C.3 Expansão em Loops 179

D As Identidades de Ward-Takahaski **181**

E Expressões Explícitas de Integrais **197**

Referências **206**

Introdução

Certamente, as Lagrangianas efetivas, as quais incorporam (numa forma tratável) características importantes da QCD, têm desempenhado um papel preponderante na presente compreensão da física de hádrons de baixas energias. Lagrangianas do tipo Nambu–Jona–Lasinio[1] (NJL) têm tido sucesso impressionante na descrição de mésons leves como pares $q\bar{q}$, os seus espectros[2], a suas larguras de decaimentos radioactivos[3–4], etc. Os mésons mais pesados (como, f_0, K^* e ρ) não se ajustam tão bem num tal esquema[3–4]. No presente, existem evidências, tanto experimentais como teóricas, de que eles são "bons candidatos" para estados de quatro quarks (ou ainda de dois mésons) ou outras estruturas mais complexas[5–14]. Por outra parte, existe a questão da importância da simetria quiral para as propriedades da matéria nuclear, cuja descrição em termos de partons é ainda muito complicada. Neste contexto uma teoria efetiva mais apropriada seria o Modelo σ-Linear[15] (LSM). Uma das diferenças principais entre modelos do tipo NJL e o LSM é que o último é renormalizável. Qual a influência da renormalização na física contida no modelo ? A resposta a esta pergunta é o propósito principal da presente contribuição.

Mostramos que na aproximação de one-loop os propagadores renormalizados do píon e do méson sigma exibem um pólo não físico. É bem conhecido que esta característica não desejável, é apressentada pelos modelos sem liberdade assintótica[17].

Investigamos as consequências de introduzir na teoria um parâmetro cutoff, Λ ; com a precaução de manter no possível as propriedades de simetria da Lagrangiana original (não renormalizada). Com este objetivo, seguimos de perto o procedimento de renormalização utilizado por D. Bessis e G. Turchetti[16], exigindo que para qualquer valor do cutoff sejam satisfeitas as Identidades de Ward-Takahaski de acordo com PCAC, e que para um valor fixo de Λ a teoria regularizada fique dependendo do mesmo número de parâmetros independentes que a teoria original.

Demonstramos que os pólos fantasmas desaparecem para valores do cutoff $\Lambda < \Lambda_c \simeq 1.2\ GeV$, tanto para o propagador do píon como para o do méson σ . Fixando $\Lambda \simeq \Lambda_c$ é possível encontrar um conjunto de parâmetros independentes que permitem uma interpretação autoconsistente das propriedades físicas associadas aos propagadores. Encontramos assim uma ressonância larga (correspondendo ao decaimento $\sigma \rightarrow \pi\pi$) centrada

em 880 MeV com uma largura de $\sim$ 400 MeV. A existência de uma tal partícula escalar permanece sendo uma questão controvertida, tanto do ponto de vista teórico como experimental. Os resultados de um trabalho recente[18] dão suporte a presença de partículas com as propriedades geralmente atribuídas ao méson σ em vários mecanismos de reação. No que concerne as propriedades do nucleon somos capazes de descrever quantitativamente duas de suas bem estabelecidas ressonâncias de Roper.

Acreditamos que resultados físicos interessantes surgirão quando se estudar a versão SU(3) do modelo e se introduza densidade finita e temperatura. Isto, não obstante, pode ser adequadamente conseguido uma vez que a descrição do vácuo esteja livre de pólos não–físicos. O presente trabalho representa um primeiro passo nesta direção.

O conteúdo deste trabalho esta estruturado da seguinte maneira:

Começaremos, no primeiro capítulo, fazendo uma revisão histórica da evolução das idéias em torno da Física de Hádrons. O objetivo principal é compreender a génese do Modelo σ-Linear e o seu ressurgimento como um modelo efetivo que pode servir como vínculo entre a Física Nuclear de Baixas Energias e a Teoria das Interações Fortes (a saber, a QCD).

No segundo capítulo começamos apresentando algumas noções sobre simetrias contínuas, detendo-nos no estudo de simetrias de calibre globais, por ser esta a ferramenta básica para compreender a simetria que parece governar a física de hádrons leves, a saber, a Simetria Quiral. Faremos também uma breve abordagem a simetrias de calibre locais, a qual permite compreender a génese da QCD.

Logo abordamos alguns dos fenômenos específicos de Teoria de Campos, como multipletos degenerados e quebra espontânea de simetria.

Finalmente nos dirigimos à compreensão da Simetria Quiral por ser esta a linha mestra dos desenvolvimentos levados a cabo no presente trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos a Lagrangiana da QCD, estudamos as suas simetrias e as condições relativas às quais as mesmas são realizadas, quebradas ou violadas.

Em seguida abordamos o Modelo σ-Linear na sua versão original [15] detendo-nos nas principais propriedades que deram respeitabilidade à teoria.

No quarto capítulo apresentamos a nossa versão regularizada do Modelo σ-Linear e mostramos detalhadamente como se obtém os propagadores do píon, do méson σ e do nucleon neste contexto.

Finalmente, no quinto capítulo mostramos os resultados que obtivemos de um estudo numérico dos propagadores renormalizados obtidos por D.Bessis e G.Turchetti [16], e dos obtidos na nossa versão. Finalmente discutimos as semelhanças e diferenças entre as previsões de ambas teorias.

A notação para as matrizes e espinores de Dirac utilizada através de todo o trabalho encontra-se no apêndice A. A mesma corresponde a utilizada no livro do Bjorken-Drell [19].

Capítulo 1

A Evolução das Idéias em torno da Física de Hádrons

Neste primeiro capítulo faremos uma revisão histórica da evolução das idéias em torno da Física de Hádrons. Exporemos através de uma síntese, necessariamente seletiva, os aspectos que julgamos mais importantes deste processo histórico que, sem menosprezar as contribuições recebidas desde a época de Newton, situamos entre os anos 30 até os nossos dias. O nosso objetivo é situar neste contexto das grandes idéias a contribuição pequena, mas constante, proporcionada por teorias simples.

O relato é feito evitando, enquanto for possível, fórmulas matemáticas e tentando que os conceitos do presente não condicionem a visão do passado.

1.1 Desde Começos dos Anos 30 até a Chegada dos Aceleradores

Com a descoberta do neutron por Chadwick em 1932, ficava totalmente estabelecida a composição dos átomos. O próton (p), o neutron (n) e o elétron (e) eram consideradas as partículas constituintes de toda a matéria.

Em 1928 P.A.Dirac tinha formulado uma teoria mecânico-quântica e relativística dos elétrons, para a qual necessitou admitir a existência dos anti-elétrons ($\bar{e}$), os quais foram encontrados em 1932 por C.Anderson, na radiação cósmica.

W.Pauli, em 1931, postulava a existência do neutrino associado com o elétron (ν_e) afim de poder explicar a desintegração β dos núcleos atômicos sem violar os princípios de conservação de energia, momento e momento angular.

Assim, em fins de 1932, tinha-se conhecimento de seis partículas elementares, a saber: p, n, e, $\bar{e}$, ν_e (ν_e não confirmado experimentalmente) e o fóton (γ), este último considerado contituinte e mediador das interações eletromagnéticas; e estava bem estabelecida a existência de quatro tipos de interações fundamentais, a forte, a fraca, a eletromagnética e a gravitacional.

Em 1934 E.Fermi incorpora o conceito de correntes não eletromagnéticas na física de partículas. Ele propõe que o decaimento β nuclear podia ser descrito por uma interação com a forma de um produto de duas correntes, uma descrevendo a transformação do p em n, e a outra a criação do par e–$\bar{\nu}_e$.

Nesse mesmo ano, J.Tamm sugere que a idéia básica da eletrodinâmica quântica, a saber, a natureza quântica das interações, podia ser estendida a outros tipos de interações incluindo a nuclear. Ele tenta explicar a força de interação entre nucleons supondo que existia um mecanismo de troca de partículas leves entre eles o qual é responsável pela força nuclear. Ele supõe no princípio, que tais partículas poderiam ser elétrons e neutrinos, mas logo mostra que estas partículas não podiam ser consideradas quanta nucleares já que não podiam explicar simultaneamente o pequeno alcance desta força e a elevada energia de ligação. A idéia de Tamm foi continuada por H. Yukawa[22], o qual postula a existência dos mésons π como mediadores das interações fortes. O conhecimento de várias propriedades das forças nucleares, permitem-lhe prever uma massa para estas partículas da ordem de

200–300 m_e.

Em 1937 S.Neddermeyer e C.Anderson descobrem o múon (μ^+, μ^-) na radiação cósmica com $m_\mu \approx 200\ m_e$. A princípio supõe-se que era a partícula postulada por Yukawa, mas não se tarda muito tempo em comprovar que estas interagiam fracamente com os nucleons e portanto não podiam ser as responsáveis pela coesão destes.

Durante estes anos dedica-se muito esforço para a pesquisa das propriedades dos μ e π, e para a procura de leis que explicassem suas interações.

As correntes introduzidas por Fermi não eram as mais gerais possíveis. Logo foram generalizadas afim de estudar outros processos, mas até 1956 não se produziu um quadro consistente, já que não se achava uma forma padrão para descrevê-las. Não obstante, entre 1948 e 1949, Fermi, Lee, Puppi e outros, independentemente, sugerem a idéia de Universalidade das interações fracas, a qual tinha sido engendrada na percepção de que os processos nos quais participavam múons tinham uma grande similaridade com aqueles que envolviam elétrons (em cada processo interagiam quatro férmions e a constante de acoplamento coincidia em alto grau).

Em 1939 foi descoberto que o deuterom apresentava um momento quadrupolar [23], o qual sugere que os píons deveriam ser partículas pseudo-escalares. Os píons carregados (π^+, π^-) foram detectados em 1947 [24] na radiação cósmica (π^0 foi detectado em 1950 em experiência em acelerador).

No fim dos anos 40 estavam bem estabelecidas as teorias da relatividade de Einstein (TR) e a eletrodinâmica quântica (QED) iniciada por P.Dirac e recebindo grandes contribuições de S.Tomonaga, R.P.Feynman, J.Schwinger e outros, as quais governavam as interações gravitacionais e eletromagnéticas, respectivamente. Dispunha-se também da Teoria de Fermi (generalizada) que explicava alguns dos fatos básicos das interações fracas, e tinha sido demonstrado que os píons podiam ser considerados os quanta nucleares.

1.2 As Tentativas de Explicar o Espectro Hadrônico

O período seguinte, que poderiamos estabelecer entre 1949 e 1964, está caracterizado pela descoberta de muitas partículas novas (para o qual contribuiram os novos aceleradores que começaram a entrar em funcionamento), e o grande esforço na tentativa de explicar

as suas propriedades, modos de desintegração, relações e forças que atuam entre elas,...

Durante este período foram descobertas e investigadas partículas estranhas como: Káons ($K^+, K^-, K^o, \bar{K}$, descobertos na radiação cósmica em 1947), Lambdas (Λ em 1951, $\bar{\Lambda}$ em 1958), Sigmas (Σ^+, Σ^- em 1953, Σ^o em 1956), Cascatas (Ξ^- em 1952, Ξ^o em 1959) e Omega (Ω^- em 1964). Foram descobertos os anti-nucleons ($\bar{p}$ em 1955, $\bar{n}$ em 1956). Foi confirmada experimentalmente a existência dos neutrinos e anti-neutrinos do elétron e do múon (ν_e, $\bar{\nu}_e$ em 1956, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$ em 1962). E foram descobertas uma grande quantidade de ressonâncias.

Durante os anos 50 procurava-se intensamente uma simetria que permitisse ordenar o conjunto de partículas conhecidas. Houve vários ensaios, mas a medida que iam-se descobrindo novas partículas a classificação resultava inadequada.

Assim, enquanto se dispunha de teorias que davam conta dos mecanismos das interações gravitacionais, eletromagnéticas e fracas, as interações fortes apareciam agora como um emaranhado de campos misteriosos e partículas ressonantes.

A descoberta dos mésons π estimulou o desenvolvimento de versões específicas tomando em conta as propriedades dos nucleons e dos píons.

Várias versões da Teoria do méson foram obtidas em analogia com a QED, não obstante todas apresentavam uma dificuldade inerente a qual não permitiu que estas previssem resultados quantitativos. A alta intensidade da força nuclear conduz a uma elevada densidade da nuvem mesônica que rodeia o nucleon e a troca multi-méson têm quase a mesma probabilidade que a troca de um méson. Assim, todas as contribuições à amplitude de interação são de magnitude comparável. Numa série em diagramas de Feynman, todos os termos são importantes, o que esta indicado por uma constante de interação da ordem da unidade.

Vários modelos começam a ser desenvolvidos, impondo certas restrições acerca do fenômeno em consideração, a partir dos quais foram construídas teorias de mésons semi-quantitativas capazes de explicar algumas características da interação forte. Estas restrições estão baseadas numa comparação com as propriedades das forças nucleares estabelecidas experimentalmente. Por exemplo, o tamanho do núcleo, o qual dá uma estimativa da distância entre nucleons (a baixas energias) indica que a troca multi-méson

não é muito significativa neste caso. Os trabalhos realizados nesta direção culminam com a proposta[25] de subdividir o alcance da força nuclear em três regiões: a região clássica ($d \geq 2\ fm$), a região dinâmica ($1\ fm \leq d \leq 2\ fm$) e a região fenomenológica ($d \leq 1\ fm$), com d indicando a distância entre o centro de dois nucleons. A região clássica é dominada pela troca de um píon que desempenha um papel importante na origem das forças nucleares. Ainda hoje é aceito que a troca de um píon permite descrever a interação nuclear para distâncias entre nucleons superiores ao comprimento de onda Compton $\lambda_\pi \sim 1/m_\pi$. Na região intermediária, a troca de dois píons e a troca de mésons ρ e ω são os processos mais importantes. Finalmente, na região fenomenológica, processos de vários tipos desempenham um papel importante: troca de muitos píons e de mésons pesados e trocas que envolvem graus de liberdade de quarks e glúons. O carácter físico desta subdivisão é ainda hoje significativo, particularmente em aproximações baseadas na QCD.

A mais bem sucedida versão específica da Teoria do méson é a chamada Teoria pseudo-escalar com uma ligação π-N axial. Nesta teoria a constante de interação π-N é muito menor que a unidade permitindo considerar alguns fenômenos na aproximação de troca de um píon. Não obstante, na descrição das propriedades básicas da força nuclear, a Teoria do méson requer, em adição aos píons, a introdução de mésons vetoriais (ρ, ω), e do hipotético méson escalar σ, como quanta de interação.

Foram construídas várias teorias de interação nuclear entre nucleons fazendo uma seleção fenomenológica de potenciais de interação N-N satisfazendo os resultados experimentais.

Os potenciais N-N produzidos na década de 50 eram sujeitos a vínculos teóricos, além daqueles provenientes das simetrias de paridade, rotação e isospin. Tais potenciais puramente fenomenológicos eram bastante imprecisos [26] e reproduziam mal as propriedades do núcleo mais simples, o deuteron.

Na década do 60 foram produzidos potenciais semi-fenomenológicos, tais como os de Hamada-Johnston [27], Yale [28] e Reid [29], os quais foram construídos parametrizando-se as partes de curto e médio alcance da interação e atribuindo-se a parte de longo alcance à troca de um píon entre dois nucleons. A troca de um píon é interpretada como a absorção por um dos nucleons de um píon virtual emitido pelo outro. O potencial correspondente é

conhecido como OPEP (one pion exchange potential). Esse modo de abordar o problema representou um importante avanço teórico, ao mesmo tempo que permitiu o aumento de precisão dos potenciais devido à redução do número de parâmetros a serem ajustados fenomenologicamente.

Uma técnica utilizada nessa época em problemas hadrônicos foi a chamada Teoria da matriz S. Nesta abordagem todas as propriedades das interações são obtidas a partir da estrutura analítica das amplitudes, sem utilizar lagrangianas. O estudo da matriz S deixou várias contribuições, principalmente no que diz respeito ao conhecimento das propriedades analíticas das amplitudes e as técnicas de relações de dispersão.

Uma outra técnica hadrônica desenvolvida nesses anos foi a baseada no conceito de correntes, as quais já tinham aparecido no contexto da eletrodinâmica e também extensivamente utilizadas no estudo das interações fracas. No caso das interações fortes elas têm um papel muito importante já que servem de base aos modelos baseados na simetria quiral.

Neste período é introduzido o conceito de Simetrias de Calibre não abelianas.

C.Yang e R.Mills e, independente e simultaneamente, R.Shawn prestam atenção as teorias melhor estabelecidas nesses anos. A QED é uma teoria que resultou de combinar os campos de matéria do elétron com os campos eletromagnéticos. É uma teoria de calibre abeliana com simetria local, na qual a transformação local de simetria é realizada com respeito a variações locais na fase do elétron e o campo que compensa as mudanças desta fase e conserva a invariança de todos os observáveis é o campo eletromagnético, cujo quantum é o fóton. A TR também é uma teoria baseada numa simetria de calibre local. Esta simetria não é a de um campo distribuido através do espaço e do tempo, mas da mesma estrutura espaço-tempo. A transformação local da simetria é uma variação local de coordenadas e o campo que reestabelece a simetria é o campo da gravitação, cujo quantum é o gráviton.

Inspirados nestas teorias de calibre, Yang e Mills (Y-M) propõem que para construir uma teoria das interações fortes se deve partir de uma simetria global já existente e analizar as consequências de transformá-la numa simetria local. A simetria considerada na Teoria de Y–M [30] é a simetria de spin isotópico, a qual consideram como sendo uma simetria

exata e tentam convertê-la numa simetria local. Para que as leis da física permaneçam invariantes necessita-se adicionar seis campos novos. Todos eles são campos vetoriais e têm alcance infinito. Um par deles descreve o campo do fóton. Os outros dois pares correspondem a partículas com as mesmas propriedades de um fóton mas portadores de carga elétrica. As principais objeções a esta teoria foram que a mesma estava baseada na suposição que o spin isotópico era exato e no fato que esta prediz fótons carregados, os quais tornariam o universo irreconhecível.

Uma primeira tentativa para evitar estas dificultades foi dotar de massa (artificialmente) aos quanta dos campos carregados. Essa modificação tornava a teoria mais realista, mas quando tentou-se obter uma interpretação mecano-quântica surgiram problemas de infinitos os quais não eram solúveis pelas técnicas de renormalização existentes.

Mesmo a formulação inicial da teoria de Y-M que tinha sido totalmente inapropriada para descrever o mundo real, resultou logo ter uma importância fundamental.

Uma outra tentativa audaz para elaborar uma teoria dinâmica completa das partículas elementares dentro do marco da teoria de campos quânticos foi realizada por J. Schwinger[31] em 1957. O seu trabalho estava baseado numa simetria global à qual permitia-lhe ordenar aos hádrons conhecidos (sem levar em conta as ressonâncias) em multipletos de isospin. A teoria apresentava vários pontos obscuros, não obstante, devemos destacar que foi ele quem, neste contexto, introduz na literatura o méson–σ. Ele sugere a existência de uma partícula σ, sem spin, escalar isotópica e escalar no espaço de Lorentz, argumentando que se a sua massa real fôsse maior que duas vezes a massa do píon esta seria altamente instável e por isso muito difícil de detectar.

Entretanto tinham-se conseguido grandes progresos na descrição dos processos fracos que ao mesmo tempo forneciam informação acerca das interações fortes.

Por esses anos tinha surgido um intrincado problema (paradoxo θ - τ), i.e., tinha-se conhecimento de duas partículas instáveis, θ e τ, para as quais uma análise dos seus esquemas de decaimento revelava que poderia tratar-se de uma mesma partícula (K^+), mas uma tal conclusão era incompatível com o fato de que apresentavam diferentes paridades. Muitas tentativas foram realizadas para resolver este problema. Em 1956, Lee e Yang [32],

a partir da observação de que o cálculo de paridades estava baseado na suposição de que a lei de conservação desta era obedecida pelas interações fracas, propõem como solução ao problema, que efetivamente tratava-se da mesma partícula, o K^+, e que no proceso de decaimento os káons violavam a lei de conservação da paridade. Essa suposição conduzia à conclusão de que o decaimento β–nuclear também envolvia violação da paridade, desde que ambos processos tinham constante de acoplamento similar. Lee e Yang realizam uma análise detalhada afim de estudar se tal violação não seria uma característica geral dos processos fracos. Tanto os resultados de experimentos existentes como de outros novos focalizados no problema confirmaram a suposição e assim ficou estabelecida a **violação da paridade nas interações fracas.**

Assim, a não conservação da paridade conduzia ao padrão procurado nos processos fracos e todas as medidas experimentais de constantes de acoplamento fraca davam suporte a idéia de universalidade sugerida nos fins dos anos 40.

Este padrão de interação universal de 4-férmions foi postulado como uma teoria em 1958, por Gell-Mann e Feynman[33] e independentemente por Marshak e Sudarshan[34], a qual esta baseada na hipótese que uma corrente vectorial fraca é conservada, ou em outras palavras, que as correntes fracas do tipo $e\nu_e$, $\mu\nu_\mu$, np, λp devem ter intensidade equivalente.

A Lagrangiana de interação postulada por eles é da forma $G\ J_\mu J^{\mu\,\dagger}$, onde G é uma constante suposta a ser a mesma para todas as correntes vetoriais e que assegura a natureza universal da interação, e J é a corrente fraca total a qual é uma soma de contribuições hadrônicas e leptônicas e cada contribuição é da forma $V-A$, sendo V e A as correntes vetorial e pseudo-vetorial as quais transformam μ em ν_μ, e em ν_e, n em p, ... A forma $V-A$ garante a violação da paridade no proceso.

A forma das contribuições leptônicas tinham um sólido suporte experimental. Por ex. para o par $e\nu_e$ tinha-se $e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e$. A teoria universal sugeria uma forma similar para os hádrons.

Feynman e Gell-Mann destacavam que o fato que a constante de acoplamento para aqueles processos envolvendo hádrons coincidisse num alto grau com aquela medida para processos nos quais intervém só léptons era muito surprendente devido a que o espe-

rado era que a presença da interação forte renormalizara a constante de acoplamento a um valor diferente. Eles sugerem que a causa poderia ser atribuída a existência de um mecanismo, análogo àquele que na eletrodinâmica assegura a universalidade da carga elétrica renormalizada. Um tal mecanismo requer que o acoplamento fosse através de uma corrente conservada pelas interações fortes. Destacam ademais que uma tal corrente estaria disponível para o acoplamento vetorial, sendo esta a corrente de spin isotópico, mas deixam aberta a questão do acoplamento axial.

Aqui existia um outro problema. Devido a presença das interações fortes não necessariamente se observava directamente G. Por exemplo, no decaimento β do neutron poder-se-iam medir os elementos de matriz (GV_μ) e (GA_μ) entre estados de nucleon livre e momento transferido menor que 1 MeV (devido a pequena diferença de massa entre neutron e próton) e neste limite se teria $[G\langle p|V_\mu - A_\mu|n\rangle \rightarrow \bar{u}_f \tau_+ \gamma_\mu (G_V - G_A\gamma_5)u_i]$ onde u_i e u_f são os espinores do nucleon livre inicial e final respectivamente.

Assim, enquanto muito esforço era investido na procura de modelos a partir dos quais pudesse ser obtida uma corrente pseudo-vetorial conservada, os experimentos estavam focalizados na medição de G_V e G_A.

J.C.Polkingorne [35] propõe construir esta corrente axial utilizando a sugestão de Schwinger sobre a existência do méson σ. Investiga uma Lagrangiana que é essencialmente aquela proposta por Schwinger, limitada ao sistema N-π-σ, e supõe que a massa nua do nucleon é nula (atualmente conhecida como a Lagrangiana Simétrica do modelo σ–linear). Obtém uma corrente axial conservada, mostra que transladando o campo σ é possível gerar uma massa para o nucleon, mas não consegue interpretar o significado de termos lineares no campo σ que surgem neste processo.

Taylor [36] tenta achar esta corrente no sistema N-π com um acoplamento méson–bárion pseudo–vetorial. Com a suposição de que a massa nua do π é zero e sem acoplamento méson–méson consegue uma corrente axial conservada. Polkingorne [35] mostra que é impossível ampliar este modelo de maneira que com relação a mesma transformação a corrente continue conservada e ao mesmo tempo a massa real do píon seja diferente de zero.

Entrementes Taylor [37], e independentemente Goldberger e Treimann [38], concluíam

que a divergência da corrente axial não podia se anular, pois isto conduziria a que a taxa de decaimento do píon carregado seria nula. Outras investigações [39] concluíam que se num modelo teórico particular existisse um limite no qual a divergência da corrente axial fôsse zero, este seria um limite delicado no qual a massa do píon ou a massa do nucleon teriam que anular-se, e mesmo assim, a questão se neste limite $G_A/G_V = 1$ deve ser cuidadosamente pesquisado.

Nesta época, obtinha-se experimentalmente[40], dentro de uma precisão de 1%, que o valor medido para G_V coincidia com a quantidade correspondente medida no decaimento do múon ($G_V \simeq G_\mu = G$), confirmando a hipótese de universalidade da constante de acoplamento. Entretanto, o fator de renormalização da corrente axial (G_A/G_V) era diferente da unidade, embora muito próximo a ela.

O fato de que G_V não fosse renormalizado pelas interações fortes estava bem de acordo com a interpretação de que a corrente vetorial V_μ é conservada. Entretanto o fato de que $G_A \neq G_V$ seria compatível com a não conservação da corrente axial.

Goldberger e Treiman [41] obtiveram uma fórmula para a taxa de decaimento do píon carregado. A dedução da mesma estava baseada na teoria pseudo–escalar e a definição convencional de corrente axial $\bar{p}\gamma_\mu\gamma_5 n$, mas a derivação envolvia várias aproximações violentas que não eram plenamente justificadas. Não obstante, a fórmula resultante apresentava uma concordância incrível com os dados experimentais.

Outras investigações [42] interpretam o fato de ser G_A/G_V próximo à unidade como proveniente dos efeitos da nuvem mesônica que envolve os nucleons. Um cálculo perturbativo da renormalização da intensidade de acoplamento devida aos efeitos da nuvem virtual conduz a uma divergência logarítmica, o qual sugere que talvez exista uma lei de conservação aproximada para o vetor axial do acoplamento do decaimento β. Gell–Mann [15] sugere que a não conservação da corrente axial teria de ser a menor possível, compatível com o decaimento do píon, e portanto uma teoria das interações fortes teria que fornecer uma corrente vetorial conservada e uma corrente vetorial axial parcialmente conservada (PVC e PCAC).

M.Gell-Mann e M.Lèvy [15] propõem que a fórmula de Goldberger e Treiman para a taxa de decaimento do píon carregado podia ser obtida de forma comvincente se se

considerar a posibilidade de que a corrente vetorial axial no decaimento–β seja proporcional ao campo do píon. Eles apresentam três modelos para a interação píon–nucleon que satisfazem a propriedade requerida.

O primeiro deles é uma extenssão do modelo proposto por Norton e Watson [43] e J.C.Taylor [36,44] no qual a interação forte π–N têm a forma gradiente. Destacam a vantagem do modelo ser facilmente generalizado para incluir partículas estranhas. Em contraposição, é um modelo não renormalizável e introduz as correntes vetorial e axial de forma assimétrica (existiam fortes evidências de que as interações fracas eram simétricas entre V e A, esperava-se um comportamento similar para o caso forte).

O segundo modelo, ao qual chamaram Modelo–σ, consideram uma Lagrangiana para as interações fortes que é essencialmente a proposta por Schwinger[31] (limitada ao sistema N–π–σ) e a forma sugerida por Polkingorne[35] para construir a corrente vetorial axial. Eles mostram que os parâmetros de massa nua dos mésons foram escolhidos de forma que através de uma translação do campo σ evidência-se que a Lagrangiana proposta é a soma daquela analizada por Polkingorne mais um termo linear no campo σ. Desta forma evidenciam que é este termo o responsável pela não conservação da corrente axial e ao mesmo tempo permite que o nucleon adquira massa (o termo de quebra de simetria cancela exatamente os termos lineares no campo σ que aparecem na lagrangiana simétrica no processo de geração de massa bariônica).

O modelo apresentava a vantagem de ser renormalizável. Além disto, a invariância quadri-dimensional da Lagrangiana (quebrada somente pelo termo linear no campo σ) dá completa simetria entre as correntes V e A. Entretanto, era curioso que o acoplamento σ fôsse responsável de gerar a massa do nucleon, e tal mecanismo poderia resultar insatisfatório se não fôsse capaz de explicar as massas de todos os bárions. Por isso então não se via claro como poder estendê-lo para incluir outras partículas, mas o ponto mais questionado é a presença de uma partícula para a qual não existia evidência experimental.

A terceira proposta, é o chamado Modelo σ não-linear, o qual surge de substituir o campo σ por uma função do campo π no modelo anterior mantendo as propriedades de simetria daquele. Logo mostram que a Lagrangiana obtida pode ser deduzida por métodos ligeramente mais gerais conduzindo a uma teoria independente das outras duas propostas

anteriores. O modelo não–linear não aparece como renormalizável, não obstante evita a introdução da partícula σ.

O conceito de quebra espontânea de simetria (a saber, sem introdução explícita de termos não invariantes), já tinha sido introduzido por W.Heinsenberg na descrição dos materiais ferromagnéticos. Uma importante contribuição para a compreensão deste mecanismo foi devida a J. Goldstone[45], que mostrou, pela primeira vez num modelo simples e mais tarde de forma geral que **a quebra espontânea de uma simetria contínua leva ao aparecimento de bósons sem massa**. A existência do modo Goldstone, dos bósons sem massa devido a quebra espontânea de simetria é o conteúdo principal do Teorema de Goldstone.

O conceito de quebra espontânea permitiu comprender o mecanismo subjacente existente no modelo σ simétrico quiral e pôde ser interpretado melhor o papel do termo de quebra.

Em 1961, Nambu e Jona-Lasinio [1] introduzem um modelo para explicar a quebra espontânea de simetria quiral do vácuo físico. Ele foi construído em analogia com a teoria da superconductividade de BCS e em particular da análise desta teoria à luz da teoria de Bogoliubov-Valatin. Este modelo foi construído como uma teoria de nucleons que atuavam via uma interação efetiva de dois corpos. O mesmo procurava uma descrição de mésons através deste campo espinorial não massivo (representado pelos nucleons). Baseava-se na idéia de que a massa de uma partícula é uma propriedade dinâmica resultante da auto-energia proveniente da interação entre os espinores. Assim, embora a sua simplicidade, o modelo ilustra o mecanismo de quebra dinâmica de simetria quiral e o aparecimento de exitações coletivas. É portanto uma teoria de geração dinâmica de massa. O modelo de NJL não é um modelo renormalizável e requer a introdução de um cutoff, o qual é um parâmetro importante da teoria. Não obstante, nessa época, o fato do modelo não ser renormalizável fez com que ele fôsse abandonado.

Um outro modelo importante que surgiu nesses anos foi o de Skirme[46]. Neste modelo uma Lagrangiana explícita pode ser dada em termos de graus de liberdade fermiônicos os quais aparecem como sólitons topológicos.

1.3 O Período Quarks–Pré-QCD

No início da década de 60 o número de partículas (incluidas as ressonâncias) tinha aumentado de tal maneira que começavam a existir dúvidas sobre a natureza elementar das mesmas. Por outra parte, o número de isomultipletos era tão grande que a classificação delas de acordo com o spin isotópico resultava ser inadequada e começou a procurar-se uma simetria maior que permitisse a sua classificação. Surge assim a hipótese da Simetria Unitária, baseada na existência dos chamados multipletos unitários, cada um dos quais continha vários multipletos isotópicos de partículas com um grupo de propriedades em comum (spin, paridade, número bariônico e massa média) e diferenciando-se entre elas pelo isospin e a estranheza.

De acordo com a hipótese de simetria unitária, uma interação forte consiste de duas partes, uma interação muito forte independente da estranheza, isospin e carga da partícula, a qual gera multipletos unitários degenerados nos quais todas as partículas são idênticas; a outra, moderadamente forte, a qual é responsável por remover a degenerescência com relação à estranheza e separar um multipleto unitário em vários multipletos isotópicos. Por último, a interação eletromagnética remove a degenerescência de carga dentro de um multipleto isotópico e separa este dentro de partículas individuais.

Várias versões específicas foram consideradas para a simetria unitária. A mais bem sucedida destas foi introduzida em 1961 por Gell-Mann[47] e Neéman[48] cujo esquema foi chamado "a via do octeto" (atualmente conhecida como SU(3)) e constitue o ponto de partida da teoria moderna dos hádrons. A importância desta é que está baseada na Teoria de Grupos. Este esquema surgiu da observação que ambas separações dos multipletos unitários (de acordo com a estranheza e a carga elétrica) eram simétricas, apontando para uma simetria específica na violação de simetrias unitárias na natureza. A descrição desta violação em termos da Teoria de Grupos SU(n) unimodulares e unitários especiais conduz para n=3 a uma simetria octeto a qual era exibida pelo octeto bárion 1/2 de paridade positiva.

A simetria SU(3) permitiu classificar as partículas que apresentavam interações fortes, além disso, conduzindo à predição de várias outras partículas. O seu triunfo foi especialmente marcado pela descoberta em 1964 do hiperon Ω^- para o qual a

teoria tinha previsto todos os seus números quânticos.

Logo surgiu uma outra questão. Mésons e bárions podiam ser acomodados nas representações da SU(3), mas a representação mais simples do grupo SU(3), (um tripleto) não se encontrava na natureza. O fato de que a teoria de SU(3) mostra que todas as representações devem estar inter-relacionadas conduziu à procura deste tripleto. Muitas tentativas falidas foram realizadas afim de identificar três bárions como um tripleto unitário. Em 1964, Gell-Mann[49] e Zweig[50], de forma independente, postulam que o tripleto unitário estava formado por novas partículas, às quais Gell-Mann chamou quarks, e argumentavam que devido ao fato de que elas tinham propriedades não usuais era muito difícil (ou impossível) encontrá-las na natureza. Estas propriedades permitíam que qualquer hádron pudesse ser contruido a partir delas.

De acordo com Gell-Mann e Zweig, todos os hádrons podem ser construídos a partir de três tipos (sabores) de quarks (geralmente denotados u (up), d (down), s (strange)) os quais têm carga elétrica e número bariônico fracionários, spin igual a 1/2, dois deles têm estranheza $S = 0$ e o outro tem $S = -1$.

A idéia fundamental do modelo com quarks consiste em que os bárions são estados ligados de três quarks (qqq), e os mésons estados ligados de um quark e um anti-quark ($q\bar{q}$). O modelo 3-quarks, além de ser muito elegante, resolve o problema da existência da representação mais simples do grupo SU(3) no domínio das partículas elementares, tendo ademais, a propriedade de completeza. Até a descoberta da partícula J/Ψ em 1974, três quarks eram encontrados suficientes para a formação de qualquer hádron.

O modelo precisou ser refinado afim de não violar o Princípio de Exclusão de Pauli na formação de bárions. Postulou-se [51] que **cada quark têm associada uma carga específica, chamada de cor**, a qual pode apresenta-se em três estados possíveis, nomeados, vermelho, azul e amarelo. O nome cor, e os estados que pode tomar, foram escolhidos simplesmente para expressar a regra de formação de hádrons, a qual exige que todas as combinações permitidas devem ser brancas (sem cor) satisfazendo assim o Princípio de Exclusão de Pauli.

Logo, na formação de um bárion, cada um dos quarks tem uma cor diferente conduzindo ao branco; num méson, as cores são complementares e portanto estes também

carecem de cor.

A introdução do número quântico de cor resolveu o problema estatístico dos quarks. As regras mediante as quais opera este número quântico conduziu a existência de um hipotético grupo de simetria SU(3) de cor ($SU_c(3)$), o qual supõe-se que é uma simetria exata (quarks do mesmo sabor e diferente cor têm a mesma massa). Todas as regras de cor dos quarks podem explicar-se aceitando o **postulado** de que **todos os hádrons vem representados por singletos na cor.**

Qualquer processo pode ser representado facilmente em termos do modelo com quarks. O modelo foi utilizado para obter características quantitativas de vários processos, nos quais foram encontrados boa concordância com os resultados experimentais. A interpretação do espalhamento altamente inelástico de elétrons por prótons, indicando uma estrutura "partons" do nucleon, foi considerado a mais convincente demonstração da correção do modelo[52] (na atualidade, ao nos referirnos ao modelo com quarks, estamos também nos referendo ao modelo com partons). A análise destes experimentos, assim como do espalhamento de neutrinos por prótons confirmaram o postulado de que os quarks têm carga fracionária. Esta hipótese foi também confirmada pela elevada coincidência entre os valores calculados e os experimentais das larguras de decaimento radiativo de alguns hádrons. Outra confirmação experimental da validade do modelo com quarks foi obtida nos anos 70. Na investigação dos processos de aniquilação de um elétron e um próton dentro de hádrons a altas energias, foram observados jets de partículas secundárias. A direção de movimento destes jets foi naturalmente associada com a direção de movimento dos quarks primários formados a partir do fóton virtual. A distribuição angular dos jets conduz à verificação de que os quarks têm spin 1/2. A distribuição destes jets e as características do proceso seriam muito difícil de explicar de forma diferente.

Diferentes versões do modelo com quarks foram consideradas no curso da sua evolução. O modelo mais simples foi o de ligação–fraca, no qual supõe-se que os quarks dentro do hádron estão livres e não interagem. Neste caso as massas dos quarks são muito menores que a do próton ($m_u \simeq m_d << m_p$, $m_s \simeq m_u + 0.15\ m_p$). Uma ligação–forte entre quarks dentro de um hádron só é possível se a massa dos quarks são muito maiores que a massa do próton ($m_q >> m_p$).

O modelo de ligação–fraca foi considerado o mais apropriado já que, sob suposições muito simples sobre as propriedades dos quarks, foi utilizado para fazer vários cálculos quantitativos em excelente concordância com os resultados experimentais.

Não obstante, logo surge uma objeção séria contra este modelo, a qual estava baseada na não observação de quarks em estado livre. Uma ligação fraca dentro dos hádrons implicaria na não existência de impedimentos para observá-los quando os hádrons sofrem colisões mútuas. Várias tentativas foram realizadas para observar quarks livres na natureza ou produzí-los artificialmente em aceleradores, mas estes não eram encontrados.

A idéia mais aceita era supor que os quarks, se existiam, devíam ter uma massa muito maior que 3 GeV, o qual era um limite inferior fixado pela energia máxima dos aceleradores existentes nessa época (fins dos anos 60). Esta suposição implicava supor o modelo de ligação–forte.

No entanto, para manter o modelo de ligação–fraca, o qual estava bem respaldado pelos experimentos, dever-se-iam fazer modificações sérias, de maneira que as mesmas incorporassem a hipótese de que um quark não pode existir em estado livre.

A medida que os dados experimentais tornavam-se mais refinados a discrepância entre a Teoria Universal de 4-férmions e os experimentos se fez evidente. Foi encontrado que a probabilidade de decaimento para partículas estranhas é muito menor que aquela para partículas normais ($G_s < G_v$), entretanto esta última só difere numa pequena porcentagem do decaimento correspondente do múon ($G_v \simeq G$). Também foi observado que no processo de decaimento fraco, n e λ (sendo λ uma partícula estranha) aparecem numa mistura do tipo $an + b\lambda$, com a e b satisfazendo a condição $a^2 + b^2 = 1$. Estas características, interpretadas por Cabibbo em 1963, conduziram a escrever a corrente fraca hadrônica como uma superposição de correntes np e λp do tipo $[(n cos\ \theta_c + \lambda sen\ \theta_c)p]$, onde θ_c é o chamado ângulo de Cabibbo e foi obtido a partir da comparação dos dados experimentais ($G_v = G\ cos\ \theta_c$; $G_s = G\ sen\ \theta_c$) obtendo-se o valor de 14°.

Em 1964, vários investigadores, entre eles Glashow e Bjorken [53] sugerem (independentemente) baseando-se na simetria do número de léptons e quarks, a existência de um quarto quark, portador de um novo número quântico ao que arbitrariamente denominou-se "charm"(c). Não obstante não existia nenhuma evidência experimental que mostrasse

a necessidade deste novo quark.

A Teoria Universal de 4-férmions (modificada por Cabibbo) dava conta de todos os processos fracos conhecidos e todos eles eram descritos por correntes fracas carregadas. Não obstante, a teoria admitia a existência de correntes fracas neutras, e a existência delas era desejada desde o ponto de vista da completeza da teoria. Mas, existia uma sólida base experimental para assegurar que certos processos fracos neutros com troca de estranheza não existiam na natureza. Várias tentativas foram realizadas para ampliar a teoria de forma que a mesma proibisse a existência de tais processos. No contexto do modelo com quarks, as correntes eram construídas com quatro léptons e três quarks e encontrava-se que tais processos eram permitidos.

Em 1967, demonstra-se [54] que a introdução de um quarto quark com uma carga elétrica associada igual à do quark u era suficente para justificar a ausência de tais fenômenos. Com dois pares de quarks concorrem duas formas possíveis das interações que mudam a estranheza (em vez da única possível quando há somente três quarks), escolhendo a segunda como uma combinação neutra, ortogonal à postulada por Cabibbo, $(s\ cos\ \theta_c - d\ sen\ \theta_c)$ é suficiente para que a corrente neutra total seja da forma $dd + ss$, não contendo componentes ds e sd as quais não são encontradas na natureza.

Desta forma a Teoria das Interações Fracas, além de dar conta da não existência na natureza de correntes fracas neutras com troca de estranheza, apresenta simetria no número de quarks e léptons, o qual era essencial para o propósito de construir sua versão renormalizada.

S.Glashow, utilizando as idéias da teoria de Yang-Mills, construiu uma versão renormalizável da Teoria das Interações fracas, a qual estava baseada na simetria de grupo de um spin isotópico fraco, incluindo dubletos de léptons e quarks. Os campos compensantes foram obtidos da condição de invariância. Mas, como a teoria original de Y-M, os bósons de calibre tinham massa zero e portanto não podiam ser considerados quanta de interação fraca.

Por esses anos, tinha-se introduzido um novo elemento na formulação das teorias de calibre. Obteve-se um método para dotar de massa a alguns campos de Yang–Mills sem quebrar a simetria exata[55,56].

A idéia fundamental desta técnica, conhecida hoje como **mecanismo de Higgs**, consiste em incluir na teoria campos com simetria espontaneamente quebrada (campos com a propriedade de ter um valor não nulo no vácuo). Higgs mostrou que neste caso os campos de calibre, normalmente sem massa, podem torna-se massivos. A introdução destes campos, chamados campos de Higgs, não destrói a simetria de calibre da teoria, mas faz que ela fique escondida. O mecanismo de Higgs é um exemplo do processo conhecido por **quebra espontânea de simetria**, que já estava bem estabelecido na física.

Nessa época, a quantização da teoria de Y–M já tinha sido desenvolvida [57] e as regras para construir os diagramas de Feynman também estavam formuladas [58]. Contava-se também com os poderosos métodos para os estudos de renormalização desenvolvidos por C.G.Bollini e J.J.Giambiagi [120] e M. Veltman [121]. Além disto, K.Symanzik [59] e B.Lee [60] tinham conseguido com êxito renormalizar o modelo teórico no qual quebrava-se espontaneamente uma simetria global. Induzido por estes resultados, G.'t Hooft [61] achou natural tentar o mecanismo de Higgs na teoria de Y–M, onde a simetria quebrada é local e em 1971 conseguiu a sua renormalização.

Desta forma, a subclasse das teorias de Yang-Mills que incorporam o mecanismo de Higgs tornaram-se mais realistas. O mecanismo proporcionou um meio para confinar os campos de Y-M a um alcance finito ao mesmo tempo que permitiu a sua renormalização.

Em 1967, S.Weinberg[62] e, independentemente, A.Salam e J.Ward[63] tinham proposto um modelo de interações fracas baseado numa versão da teoria de Y-M segundo a qual os quanta de calibre adquiriam massa pelo mecanismo de Higgs, mas não conseguiram demonstrar a renormalização da mesma, somando-se assim a muitas outras conjecturas não provadas. O interesse pela mesma resurge quando são conhecidos os resultados obtidos por 't Hooft que mostravam que eram exatamente esta subclasse das Teorias de Y–M as que podiam ser renormalizadas.

A conjectura sob a qual o modelo de Weinberg-Salam-Ward (W-S-W) está baseado é um postulado de invariância local com respeito ao spin isotópico. Para manter a invariância é necessário introduzir quatro campos de calibre tipo fóton. A quebra espontânea de simetria introduz quatro campos de Higgs (partículas escalares). Como resultado, emergem quatro bósons vetoriais W^+ , W^- , Z^o e γ ; os três primeiros com uma grande

massa e o último de massa nula (um fóton). Para os bósons massivos foram previstas massas do ordem de 80–90 GeV. Os bósons eletricamente carregados seriam os responsáveis pela existência das correntes fracas carregadas. Por analogia, Z^o introduzia uma nova classe de interações fracas que davam conta dos fenômenos envolvendo a correntes fracas neutras. Por outra parte, a presença do fóton sugere que as interações eletromagnéticas e as fracas são aspectos distintos de uma única força eletro-fraca.

A teoria é confirmada pela descoberta de muitos fenômenos previstos por ela. As correntes fracas neutras foram detectadas em 1973. Em 1974 foi descoberto o méson J/ψ, resultando ser um estado ligado $c\bar{c}$ e pouco após foram detectadas as partículas "charmed". Entre fins do ano 82 e o princípio do ano de 83 foram achados experimentalmente os bósons massivos, com massas e propriedades coincidentes com aquelas previstas.

Estas descobertas não só corroboraram com o modelo de W-S-W, assim como também convenceram muitos físicos de que o modelo com quarks tinha de ser tomado com seriedade em todos os seus aspectos.

1.4 O Surgimento da Teoria das Interações Fortes

O maior obstáculo na construção de uma teoria das interações fortes era como explicar o confinamento dos quarks. Ao mesmo tempo alguns investigadores perguntavam-se como explicar o postulado segundo o qual todos os hádrons devem ser singletos na cor. Uma possível resposta foi sugerida, a qual consistia em incorporar o modelo SU(3) de cor numa das classes das teorias de calibre. A teoria idealizada[64,65] seguiu, passo a passo, a QED, de forma que a teoria das interações fortes é uma teoria de calibre, mas, a diferença da primeira, é uma teoria de calibre não abeliana. A simetria de calibre é uma invariância com respeito a transformações locais da cor dos quarks, razão pela qual chamou-se Cromodinâmica Quântica, **QCD**.

Como nas outras Teorias de Calibre, para restaurar a invariância com respeito às transformações locais foi necessário introduzir novos campos. Na QCD são necessários oito campos compensantes com oito bósons de calibre, ou **glúons**, os quais são responsáveis pelas interações entre quarks. Os glúons são bósons vetoriais sem massa e com carga elétrica nula, como o fóton, mas diferentemente deste último, carregam cor.

A forma mediante a qual os glúons permitem que a simetria local de cor seja conservada pode explicar-se da seguinte maneira. Um quark é livre de trocar a sua cor, independentemente dos outros quarks, mas cada transformação de cor deve ir acompanhada da emissão de um glúon. O glúon é absorbido então por outro quark, que muda a sua cor em exatamente a quantidade necessária para compensar a troca original. Por causa da contínua troca dos glúons não pode existir uma variação líquida da cor do hádron, mesmo que as cores dos quarks variem livremente no espaço-tempo. Todos os hádrons permanecem brancos, e a força forte não é nada mais que o sistema de interações necessárias para manter esta condição.

Devido a sua cor, os glúons não só asseguram interação entre quarks, sinão que em si mesmo servem como fonte de novos glúons, os quais, em turno, produzem novos glúons, e assim seguindo. Logo, o campo do glúon é não linear e aumenta com a distância desde o quark. A carga efetiva de cor do quark é também aumentada neste processo. Este fenômeno é chamado de anti-blindagem da carga de cor, para distinguí-lo do bem conhecido fenômeno de blindagem da carga elétrica em QED. Em outras palavras, a energia de interação entre dois quarks decresce quando eles se aproximam uns dos outros. Esta tende a zero a curtas distâncias (liberdade assintótica)[66]. Pelo contrário, quando a distância entre quarks aumenta, a energia de interação também aumenta e torna-se infinitamente alta a distâncias relativamente grandes (catividade periférica). Assim, os quarks encontram-se como que fechados dentro do hádron, fenômeno ao qual chamou-se **confinamento**.

O problema do confinamento de quarks pode ser apresentado esquematicamente na seguinte forma. Desde que os glúons têm uma carga de cor, um quark livre adquiriria uma envoltória de glúons pesada com uma massa infinitamente grande. Não obstante, as cargas de cor do quark são mutuamente compensadas dentro do hádron, logo, mesmo que o campo de glúons de quarks ligados dentro de um hádron seja bastante forte (basicamente determinando a massa do hádron), esta envolvido dentro do hádron (caixa de quarks). Consequentemente os quarks dentro de um hádron são leves e encontram-se ligados fracamente. Quando uma partícula energética atinge um quark dentro de um hádron, o quark é deslocado e a energia de interação com outros quarks aumenta rapidamente. Se esta energia é suficente para a formação de um par $q\bar{q}$, o quark novo formado permanece

dentro do hádron, enquanto que o quark inicial combina-se com o anti-quark, resultando na formação de um méson o qual deixa a região de interação.

As principais vantagens da QCD resultam do fato de ser uma teoria renormalizável[61], com liberdade assintótica [66,67,68]. Além disso, possui uma simetria quiral global no limite $m_u = m_d = 0$.

Efetivamente, para escalas de comprimento de cerca de 10^{-1} fm (quantidades de movimento transferidas grandes, região do ultravioleta), a QCD é uma teoria perturbativa de quarks e glúons. Nesta fase, os acoplamentos são fracos e os quarks e glúons propagam-se quase livremente, isto é, possuem a propriedade de liberdade assintótica. Os desvios do comportamento de teoria livre são calculáveis por técnicas perturbativas[66,67]. As evidências mais inequívocas da liberdade assintótica resultam de experiências de dispersão profundamente inelástica de léptons, cujo comportamento é devido a interacções com o campo dos glúons. No vácuo perturbativo, os quarks possuem massas correntes (massas medidas em termos de massas hadrônicas através da álgebra de correntes) cujos valores no sector (u,d) são [69,70]:

$$\begin{aligned} m_u &= (5.1 \pm 1.5) MeV \\ m_d &= (8.9 \pm 2.6) MeV \end{aligned}$$

Na verdade, é geralmente aceito que as massas correntes no sector de isospin com $N_f = 2$ são pequenas na escala de massas hadrônicas da ordem de 1 GeV.

Para escalas de comprimento da ordem de 1 fm (região do infravermelho), fenômenos altamente não lineares desempenham um papel importante. É a fase não perturbativa em que o vácuo é relevante para o estudo dos hádrons de baixa energia e da Física Nuclear. O estado não perturbativo é caracterizado pela existência de condensados de pares $q\bar{q}$ e de pares de glúons.

Nestas condições, a constante de acoplamento efetiva é muito elevada e acredita-se que seja responsável pelo confinamento. De acordo com esta propriedade, a massa de um quark isolado deve ser finita. Devido à complexidade das propriedades não perturbativas da QCD, não foi ainda possível demonstrar que esta teoria conduza à explicação do confinamento de quarks. Do mesmo modo, não foi ainda possível obter cálculos quantitativos

de processos hadrônicos relevantes para a Física Nuclear a partir da QCD.

Assim, mesmo que se disponha de uma teoria aceita como a Teoria das Interações Fortes, proporcionando uma Lagrangiana que contém toda a dinâmica do sistema, não é possível extrair informação útil a partir dela para a maioria dos processos físicos de interesse, tais como as propriedades dos hádrons e suas interações ou comportamento da matéria hadrônica a altas densidades.

Alguns dos aspectos não perturbativos da QCD têm sido abordados a partir de diferentes aproximações. O único destes que tenta resolver a equação de movimento ditada pela QCD é o baseado na Teoria de Calibre na Rede (método proposto por Wilson[71]). Neste método a teoria é estudada no Espaço Euclideano, discretizado e colocado numa caixa finita. A função de partição resultante é calculada usando o método numérico de Monte Carlo. A teoria contínua pode ser recobrada sistemáticamente. A aplicação do método esta limitado principalmente pela velocidade dos computadores. Dispõem-se de resultados confiáveis na chamada "aproximação fria", a qual inclue a dinâmica total dos glúons, mas ignora os efeitos dos loops de quarks internos. Esta é uma severa restrição à teoria, mas é de interesse desde que encontram-se as propriedades esperadas para a QCD : confinamento e quebra da simetria quiral. Assim, nesta aproximação considera-se que o método dá estimativas semi-quantitativas das massas hadrônicas. Esperava-se que o avanço tecnológico dos computadores permitisse resolver as equações de movimento completas, mas surgem problemas para incluir férmions numa rede discretizada devido a sua natureza não comutativa.

As regras de soma da QCD constituem uma outra aproximação à QCD que consiste em estudar o vácuo e é baseada na expansão de variáveis físicas em termos dos valores não nulos dos condensados de quarks e de glúons. Este método têm sido utilizado para investigar as propriedades de hádrons [72,73,74].

Os desvios da simetria quiral têm sido estudados tratando o termo de massa como uma perturbação, em que a QCD com partículas sem massa é o sistema não perturbado. Trata-se das teorias quirais perturbativas, desenvolvidas por vários autores [69,75,76,77], que têm constituído uma alternativa ao tratamento baseado na hipótese de PCAC e a álgebra de correntes [78].

Uma outra hipótese para estudar a QCD foi avançada por 't Hooft[79], ao introduzir o parâmetro de expansão $1/N_c$ no limite em que N_c é elevado (sendo N_c o número de cores). Este tratamento permite ultrapassar as dificuldades inerentes à resolução das equações do movimento da QCD na ausência de um pequeno parâmetro de expansão. Neste limite, a QCD reduz-se a uma teoria de campo efetiva não linear [80] com consequências interessantes para as propriedades hadrônicas. Para estes métodos poderem constituir uma descrição adequada a $N_c = 3$, é necessário que as principais propriedades da QCD variem pouco com este número quântico.

A existência de parâmetros de ordem diferentes de zero implica que a simetria quiral seja espontaneamente quebrada no vácuo físico, uma vez que o escalar que representa os condensados de quarks $q\bar{q}$, não é um invariante sob uma transformação quiral.

Um outro ataque, comum na física nuclear e na física de estado sólido, é tentar isolar a física relevante para um proceso e estuda-la, ou fazer aproximações à teoria exata ou criar modelos que sirvam para acentuar as principais características da teoria. Para uma teoria tão intratável como a QCD a segunda opção é a preferida.

Procuram-se assim modelos mais simples que apresentem uma ou mais das características essencias da QCD, mas que sejam tratáveis matematicamente.

1.5 Os Modelos Fenomenológicos

As principais características da QCD são, a liberdade assintótica, o confinamento e a simetria quiral.

As propriedades de confinamento permanente e liberdade assintótica estão presentes em diversos modelos fenomenológicos.

Entre os modelos não relativísticos podem ser citados o modelo de De Rújula-Georgi-Glashow[81] (RGG) e o de Isgur-Karl[82] (IK). O modelo RGG descreve bastante bem as separações de massa de cada multipleto fundamental de hádrons, entanto o modelo IK descreve com sucesso a maior parte do espectro de massas dos estados excitados e das larguras de decaimento de ressonâncias. Não obstante, ambos os modelos são questionados devido ao fato de que as separações entre os níveis de energia dos hádrons são da ordem

das massas dos quarks constituintes.

Entre os relativísticos podem ser citados os Modelos de Potencial[83,84], os quais fazem uso do modelo com quarks com uma escolha conveniente de interação confinante dentro de singletos na cor, e outros termos de densidade de energia (ajustados fenomenologicamente) que levam em conta outras contribuições à energia dos hádrons. Com tais modelos pode ser obtida uma boa descrição do espectro de mésons e bárions. As vantagens destes modelos é que não aparecem condições complicadas e permite o estudo de vários tipos de potenciais.

Um outro modelo de grande sucesso é o Modelo de Sacola do Mit (MIT-BAG)[85,86]. Este modelo considera que quarks coloridos e glúons coloridos, sem massa, estão confinados ao interior dos hádrons pela introdução de uma densidade de energia constante (pressão confinante B) dentro da Hamiltoniana Hadrônica. Os quarks são supostos sem massa (u,d) ou leves (s) e estão acoplados aos glúons à la de Yang-Mills. As equações de movimento dos campos e as condições de contôrno guarantem que existem somente hádrons singletos na cor. O hádron está representado por uma região estendida do espaço (uma sacola) contendo quanta de campos dos quarks e dos glúons. Os quarks confinados interagem muito fracamente no interior da sacola, mas a interação deixa de ser desprezível próximo à superficie devido à pressão que os campos exercem sob ela. Logo, se a superficie da sacola for tratada como uma variável dinâmica, as equações de movimento da mesma tornam-se muito complicadas. Devido a isto foram propostos Modelos de Sacola simplificados. Um modelo simples, semiclássico, que teve grande sucessso na descrição das massas e parâmetros estáticos (carga vetorial axial, momentos magnéticos,...) dos hádrons mais leves é o de Sacola Estática e Esférica[87]. Neste modelo, as forças fortes confinantes provém do termo de energia associada à pressão confinante B, (o acoplamento quark-glúon não necessita tornar-se grande já que a sacola prove um cutoff ultravioleta). Um tratamento perturbativo da interação glúon conduz, na aproximação de Born, a uma consistente descrição do espetro qqq e $q\bar{q}$ em onda-S.

O maior problema destes modelos, nos quais os quarks encontram-se num potencial confinante, é que não apresentam simetria quiral, pois os quarks na reflexão nas paredes do potencial mudam a sua quiralidade e portanto esta não é conservada e deixa de ser

um "bom número quântico".

Foram propostos "Modelos de Sacola Quirais"[88], os quais são versões dos modelos anteriores que, mediante a introdução de campos elementares de píons e sigmas, respeitam a simetria quiral. Mas, uma vez que os mésons são considerados como elementares não há maneira de se calcular suas propriedades, tais como a massa, raio, constantes de decaimento, etc.

A mais importante das propriedades da QCD para a compreensão dos hádrons mais leves é a simetria quiral, e esta propriedade é implementada, principalmente, através de modelos efetivos descritos por densidades de Lagrangianas. Os parâmetros envolvidos nesses modelos são fixados para reproduzirem alguns resultados experimentais.

Resurge assim, o interesse por aqueles modelos que tinham surgido no período pré-QCD que apresentam tal propriedade.

O modelo σ linear[15] é um dos modelos que incorpora os efeitos básicos de Lagrangianas quiralmente simétricas e reproduz resultados de Álgebra de correntes. Nessa época a renormalização do modelo já tinha sido conseguida[59,60,16], mas ao aplicar a expansão em loops ao modelo automaticamente surgem problemas, a saber, os propagadores apresentam pólos não físicos[17]. Além disto, permanece a questão da existência do méson escalar σ. Por outra parte, estudos mais recentes mostram que talvez seja um dos modelos que melhor poderia conectar a QCD com a Física Nuclear[89], mas resultados quantitativamente confiáveis somente poderão ser obtidos uma vez que o vácuo estiver livre de fantasmas.

O modelo de NJL[1] , apesar de ser um modelo não renormalizável, resurge nos anos 80 sendo re-interpretado como uma teoria com graus de liberdade de quarks[2]. Assim, ele é descrito por uma densidade de Lagrangiana efetiva, invariante por transformações quirais, de quarks relativísticos que interagem através de acoplamento local quark-quark. O modelo permite descrever o mecanismo da quebra de simetria quiral e as suas consequências para a física de Hádrons, como a geração dinâmica de massa para os quarks, o surgimento de condensados de pares de quarks, os modos de Goldstone,... A ligação com o modelo σ tem sido amplamente estudada[90], e este é talvez o modelo em que a ligação com a QCD se manifesta mais diretamente. Isto verifica-se, por exemplo, ao nível

da quebra espontânea da simetria, onde os mecanismos subjacentes à QCD e ao modelo de NJL são, segundo se supõe, do mesmo tipo. De fato, apesar da variedade de propostas de mecanismos que podem conduzir à quebra espontânea da simetria quiral em QCD, acredita-se que a condensação de pares $q\bar{q}$ seja dominante. As Lagrangianas tipo NJL têm tido grande sucesso na descrição de mésons leves como pares $q\bar{q}$, os seus espectros[2], as larguras de decaimento[3,4],...

Existe outro conjunto de modelos que surgem por causa da sua afinidade com a QCD para os quais uma Lagrangiana explícita pode ser dada em termos de graus de liberdade bosônicos e/ou fermiônicos. Estes incluem o modelo de Skirme[46,91] e variações deste, os quais ganharam popularidade no início dos anos 80 a partir da demonstração de que no limite de um número grande de cores N_c, a QCD comporta-se como uma teoria de bósons[79].

Outros modelos que especificamente pesquisam estas característica da quebra da simetria quiral e as suas consequências, introduzem campos bosônicos fenomenológicos e acoplam estes diretamente aos graus de liberdade fermiônicos[65,92].

1.6 Os Potenciais de Interação N-N

No princípio da década do 70 são produzidos novos potenciais de interação N-N os quais incluem, além do OPEP, uma descrição teórica bastante precisa da região intermediária, associada a troca de dois píons, e a parte de curto alcance é tratada fenomenologicamente. Os trabalhos nesta linha estão representados pelos grupos de Bonn e de Paris[93].

O grupo de Bonn constrói um modelo teórico no qual considera que tanto as trocas de píons independentes como as correlacionadas contribuem à parte da interação N-N devido a troca de dois píons (incluindo no cálculo a troca de mésons ρ por considerá-lo um estado ressonante de dois píons, assim como estados intermediários ressonantes N-π, ou seja as Δ); e atribuem a parte de curto alcance à troca de três píons (incluidos os mésons ω).

O grupo de Paris calcula a contribuição ao potencial devida à região intermediária de forma indirecta, a partir de dados experimentais que correlacionam processos com píons reais e virtuais, ou seja, eles obtêm a amplitude necessária ao diagrama de troca de dois píons extrapolando, por meio de relações de dispersão, essas amplitudes experi-

mentais para a região cinemática adequada; e atribuem a parte de curto alcance à troca de um ω simulando a troca de três píons complementada por uma função parametrizada fenomenológica.

Assim, a abordagem do grupo de Paris é mais completa já que eles incluem todas as contribuições dinâmicas de uma só vez (misturadas), calculando contribuições que o grupo de Bonn não teve condições de calcular. Não obstante, o tratamento dado pelo grupo de Bonn permite compreender num nível mais profundo, a troca de dois píons, o que constitue-se numa vantagem. Os dois métodos não são exclusivos, e podem complementar-se mutuamente.

O grupo de Bonn, com o fim de testar e utilizar o seu modelo em cálculos de estrutura nuclear (para o qual é conveniente, se for possível, que a interação seja representada por um potencial não muito complicado), parametrizou os resultados do seu modelo em termos de um potencial N-N escrito em termos de trocas de mésons, alguns dos quais são reais e outros "ficticios"(não observados experimentalmente), inventados de modo que o potencial seja equivalente à interação, tal como dado pela Teoria Quântica de Campos. Esse potencial é conhecido como OBEP (one boson exchange potential) e nele a parte de longo alcance contribue para a troca de um píon (OPEP), a parte de alcance médio associa-se a troca de mésons ρ, ω e σ e a parte de curto alcance a outros mésons. A introdução do méson σ, considerado como artificial, é necessária para explicar parte da atração no canal de spin e isospin zero.

Foram construidos diversos outros potenciais de modo que suas expressões sejam relativamente simples e bem comportadas afim de facilitar as aplicações, não tendo por objetivo descrever bem os fundamentos da interação, pudendo ser assim classificados como de natureza prática. Entre eles podem ser citados os de "caroço super mole"(SSC) de De Tourreil e Sprung[94] e de De Tourreil, Rouben e Sprung[95].

1.7 Os Estados Non-Quark-Model

É destacável o sucesso do modelo com quarks, mas o mesmo não é bem compreendido do ponto de vista da QCD.

Remarquemos que a afirmação de que a QCD é a teoria das interações fortes está

baseada nos testes a altas energias, onde a teoria pode ser tratada perturbativamente (mesmo assim, os resultados são semi-quantitativos devido à impossibilidade de fazer correções a alto grau em teoria de perturbações). No regime de baixas energias a teoria torna-se fortemente acoplada e exibe confinamento, os estados são feitos de quarks, anti-quarks e glúons, mas estes constituintes não são encontrados na natureza como partículas livres, logo existem só indicações qualitativas de que a QCD é a teoria correta.

No modelo com quarks os estados são feitos de quarks e antiquarks. Eles são (anti-) tripletos na cor e estão ligados por um potencial confinante dentro de singletos na cor. Usando um modelo potencial com uma adequada interação confinante e outros termos de interação pode-se descrever o espectro de mésons[96] e bárions[97].

Este sucesso não é bem compreendido do ponto de vista da QCD. Na QCD os constituientes são quarks "vestidos"(quarks nus rodeados por uma nuvem de glúons e pares $q\bar{q}$) e portanto surgem muitas questões:

. . . porque os quarks vestidos têm a mesma cor e os mesmos números quânticos de spin que os quarks nus ?

. . . porque só é necessário considerar os estados mais simples feitos com eles ? . . . porque não estados $\bar{q}\bar{q}qq$, . . . ?

. . . porque os complicados estados ligados admitem uma descrição em termos de uns poucos constituientes ?

Estas perguntas ainda não têm resposta, só existem algumas sugestões interessantes[98].

Existem argumentos sólidos que conduzem à possível existência de outros tipos de hádrons[5–14]. Estes são chamados de **estados NQM** (non-quark-model). A observação de estados NQM proporcionaria nova informação para tratar e compreender a dinâmica da QCD a baixas energias. Ademais, a existência de tais estados levaria à queda do modelo com quarks, mas talvez, ao mesmo tempo permitiria compreender o seu sucesso.

As predições teóricas estabelecem três categorias destes estados NQM: os **glueballs**, os quais são estados constituidos principalmente de glúons, os **meiktons** (conhecidos também como híbridos ou hermafroditos) os quais são estados constituídos por mistura de quarks e glúons, e os estados **4-quarks**, $\bar{q}\bar{q}qq$.

No presente, a teoria somente proporciona uma guia das propriedades destes estados

NQM. O esquema do modelo NQM é puramente cinemático e para fazer predições mais definidas requerem-se cálculos dinâmicos ou o uso de modelos.

Há informação experimental suficiente[122] sobre ressonâncias que são possíveis candidatas a mésons NQM, proporcionando um amplo campo de investigação teórica. Os exemplos mais evidentes são a $f_o(975)$ e $a_o(980)$, as quais supõe-se que podem ser estados $\bar{q}\bar{q}qq$. Evidências bem razoáveis conduzem a supor que $G/f_o(1590)$ e $\theta/f_2(1720)$ são glueballs. Existem outros estados que não se ajustam ao modelo quarks nem as categorias teóricas assinaladas acima. Por exclusão são catalogados simplesmente como estados NQM. Espera-se que os resultados das investigações teóricas marquem o rumo a seguir no campo experimental.

Estes possíveis estados NQM têm aberto um grande e produtivo campo de investigação teórica e experimental.

Capítulo 2

Simetrias Contínuas

O papel das simetrias em sistemas quânticos e em Física de Partículas reveste-se da máxima importância e têm sido objeto de intenso estudo. A identificação das diversas invariâncias e a forma como elas são realizadas, aproximadas ou mesmo violadas é essencial para o estudo das interacções fundamentais. São disso prova os espetaculares resultados de simetrias unitárias, álgebra de correntes e invariância quiral assim como a subestrutura quarks dos hádrons. Estes conceitos muito contribuiram às formulações das teorias de calibre não abelianas com simetria local, que parecem governar todas as interações da natureza. Apresentaremos algumas noções sobre simetrias, concentraremos a nossa atenção nas simetrias contínuas internas e a realização de simetrias quânticas em Lagrangianas de Teoria de Campos. Faremos uma breve abordagem ás teorias de calibre não abelianas com simetria local, deter-nos-endo nos conceitos destas teorias que permitam compreender a génese da Teoria da Cromodinâmica Quântica (QCD), geralmente considerada a teoria das interações fortes. Logo consideraremos alguns dos específicos fenômenos teóricos de campos, tais como a quebra espontânea de simetria e o aparecimento dos bósons de Goldstone. Finalmente abordamos o estudo da simetria quiral por ser uma das simetrias fundamentais mais importantes devido ao papel que a sua quebra desempenha na física hadrônica de baixas energias.

2.1 Simetrias no Contexto da Teoria de Campos

Num sentido mesmo abstrato, compreende-se por simetria a Invariância de uma teoria (densidade de Lagrangiana ou Hamiltoniana) sob transformações dentro de um grupo.

Assim, a existência de uma simetria diz-nos que a dinâmica do sistema independe de alguns aspectos dos campos e ajuda a descobrir o que é supérfluo e o que é essencial à evolução do sistema. Existe uma estreita conexão entre simetrias e leis de conservação, pois, se a existência de uma simetria faz que a evolução do sistema independa de alguns dos aspectos do campo, logo essa independência está representando alguma grandeza que não varia com o tempo e portanto uma lei de conservação.

Na formulação Lagrangiana, em Teoria de Campos Clássicos, o Teorema de Noether [99] estabelece que a cada transformação de simetria contínua que deixa invariante em forma à densidade de Lagrangiana ou Hamiltoniana (e daqui às equações de movimento) corresponde uma grandeza conservada e uma constante de movimento. Este teorema permite que regras de seleção observadas na natureza possam ser descritas diretamente em termos de requerimentos de simetria na Lagrangiana, sendo útil portanto, como um guía para a introdução de termos de interação no desenvolvimento de novas teorias.

O nosso interesse é discutir estes conceitos no contexto da Teoria de Campos Quânticos.

Começaremos apresentando brevemente a geralização ao marco quântico do procedimento formal da Teoria Clássica que permite associar a uma familia de transformações infinitesimais um correspondente conjunto de correntes de Noether. Destaquemos que uma tal geralização conduz ao aparecimento de anomalías, as quais não serão discutidas aqui.

2.1.1 O teorema de Noether

Na linguagem da Teoria de Campos o teorema de Noether pode ser enunciado como segue

> **"A todo grupo de transformações contínuas (T) do campo φ que mudam a densidade de Lagrangiana do sistema ($\mathcal{L}$) no máximo por uma divergência ($\partial_\mu S^\mu$), existe associada uma corrente conservada."**

Provaremos o teorema, o qual simultaneamente proporciona uma expressão para a corrente. Suponhamos que a densidade de Lagrangiana do sistema é descrita por uma função dos campos e as suas primeiras derivadas

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)\right) \tag{2.1}$$

(o índice 'a' refere-se a variáveis internas), e que existe uma transformação T do campo $\varphi_a(x)$

$$\varphi_a(x) \xrightarrow{T} \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \tag{2.2}$$

o qual faz que

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{T} \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \partial^\mu S_\mu \tag{2.3}$$

e portanto produz

$$\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \partial^\mu S_\mu \tag{2.4}$$

Por outra parte, a variação da Lagrangiana devida a variação dos campos é

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\partial_\mu\delta\varphi_a \tag{2.5}$$

que por meio da equação de movimento de φ_a pode ser escrita

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\delta\varphi_a\right) \tag{2.6}$$

Assim, se se define a corrente

$$j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\delta\varphi_a - S^\mu \tag{2.7}$$

a partir das expressões (2.4) e (2.6) temos que

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.8}$$

Portanto, a quantidade j^μ definida pela eq.(2.7) é a corrente conservada associada a transformação T do campo φ_a, e temos demonstrado o teorema.

O fato de que j^μ é conservada implica que a quantidade

$$Q(t) = \int d^3x j_0(\vec{x}, t) \tag{2.9}$$

é independente do tempo, para todas as configurações do campo que tendam a zero no infinito de forma suficientemente forte.

Na Teoria Clássica, um escalar $\mathcal{L}$ garante invariância de Lorentz da Teoria e proporciona, via o Teorema de Noether, as constantes de movimento momento-energia (P_μ) e momento angular ($M_{\mu\nu}$). Na Teoria de Campos Quânticos, um escalar $\mathcal{L}$ não é suficiente para garantir invariância relativística, pois ademais deve verificar-se que os campos obedeçam certos requerimentos de operadores.

Estas condições estabelecem uma conexão entre os operadores unitários que realizam as transformações dos vetores de estado entre dois marcos de Lorentz e as regras de comutação impostas no procedimento de quantização da teoria.

Assim, se o operador unitário que gera os deslocamentos de coordenadas ($x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$), tém a forma

$$U(\epsilon) = e^{\,i\epsilon_\mu \mathcal{P}^\mu} \tag{2.10}$$

encontra-se que o operador hermítico $\mathcal{P}^\mu$ satisfaz a seguinte relação de comutação com os campos

$$[\mathcal{P}^\mu, \varphi_r(x)] = -i\ \partial^\mu \varphi_r(x) \tag{2.11}$$

A correspondência com a mecânica clássica canônica e a Teoria de Schrodinger sugere a identificação de $\mathcal{P}^\mu$ com o quadrivetor momento-energia P^μ. Por outra parte, o teorema de Noether proporciona uma forma explícita para P^μ. Logo, pode-se verificar, em qualquer teoria, se a identificação de $\mathcal{P}^\mu$ com P^μ segue das relações de comutação impostas no procedimento de quantização. Assim, pode-se computar diretamente a partir dos comutadores se a eq.(2.11) permanece sendo uma identidade de operadores e se as componentes de $\mathcal{P}$ comutam com H

$$[\ H\ ,\ \mathcal{P}^\mu\ ] = 0 \tag{2.12}$$

de forma que $\mathcal{P}$ permaneça sendo uma constante de movimento.

Se as eq.(2.11) e (2.12) são consistentes com as relações de comutação, a teoria quântica é invariante por deslocamento.

Numa forma similar, constróe-se o estabelecimento análogo para invariância da Teoria de Campos Quânticos com relação a transformações de Lorentz puras.

Para as teorias que aqui se consideram, o P^{μ} e o $M^{\mu\nu}$ encontrados pelo procedimento de Noether são encontrados satisfatórios.

Além das simetrias geométricas induzidas por transformações no espaço-tempo, uma teoria de campos pode ter outras simetrias, associadas com transformações intrínsecas do campo as quais são chamadas **simetrias internas**. No que segue limitar-nos-emos à discussão de simetrias contínuas internas e a realização destas dentro de Lagrangianas.

2.1.2 Simetrias de Calibre

De modo muito geral, uma transformação interna contínua linear (TICL) dos campos pode ser escrita como

$$\varphi_a^{\mu} \xrightarrow{T} \varphi_a'^{\mu} = (e^{i\alpha_b K^b})_{ac}\varphi_c^{\mu} \tag{2.13}$$

onde os índices a,b,... referem-se a variáveis internas, α é um parâmetro cuja magnitude pode ser constante (TICL Global) ou depender do espaço-tempo (TICL Local), e as matrizes K_b são as geradoras do grupo de transformações e satisfazem

$$[K_a, K_b] = iC_{ab}^c K_c \tag{2.14}$$

sendo C_{ab}^c a constante de estrutura do grupo. No caso em que $\mathbf{K}_b = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, a transformação é chamada **abeliana**, no caso contrário ($\mathbf{K}_b \neq \mathbf{I}$) fala-se de transformação **não abeliana**. A palavra **abeliana** faz referência a que duas transformações quaisquer comutam.

As TICL Globais, também chamadas **transformações de calibre de primeira espécie**, estão quase sempre presentes numa teoria física. Neste contexto, a palavra global significa " acontece em todo lugar e ao mesmo tempo". Assim, a existência de uma simetria global, nos diz que certas leis da física permanecem invariantes quando se

aplica a mesma transformação em todos os pontos do espaço-tempo. Isto está refletido matematicamente no fato de que os parâmetros de transformação são constantes.

O conceito de simetria adquire um significado mais profundo ao incorporar a noção de localidade. Para que se observe uma simetria local, a lei física deve manter sua validade ainda quando tenha lugar uma transformação diferente em cada ponto do espaço e do tempo. A existência de uma simetria local estabelece uma condição muito mais exigente na construção de uma teoria. Um tal objetivo pode ser alcançado no contexto da teoria de campos quânticos, no qual podem ser construídas teorias nas quais a densidade de Lagrangiana seja invariante sob transformações de simetria cujos parâmetros de transformação dependam do espaço-tempo, $\alpha = \alpha(x)$. As TICL Locais, também são chamadas **transformações de calibre de segunda espécie.**

Com o objetivo de mostrar como pode ser construída uma Teoria de Calibre, primeiro limitaremos-nos ao caso abeliano, e logo abordaremos o caso geral afim de compreender o total conteúdo da expresssão (2.13)

Simetrias de Calibre Abelianas

Uma teoria exibe uma simetria de calibre de primeira espécie, abeliana, se a mesma é invariante por uma transformação global dos campos, da forma

$$\varphi(x) \xrightarrow{T} \varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \quad , \qquad \alpha = \ constante \tag{2.15}$$

A teoria vai exibir também uma simetria de calibre de segunda espécie, abeliana, se é invariante por uma transformação local dos campos, da forma

$$\varphi(x) \xrightarrow{T} \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \tag{2.16}$$

Uma teoria com simetria de calibre global não é em geral invariante por (2.16), pois

$$\partial_\mu(e^{i\alpha}\varphi) \neq e^{i\alpha}\partial_\mu\varphi \tag{2.17}$$

Para obter-se uma teoria invariante por (2.16) precisa-se substituir derivadas ordinárias, ∂_μ, por derivadas covariantes, D_μ

$$\partial_\mu\varphi \rightarrow D_\mu\varphi \tag{2.18}$$

as quais devem ter a propriedade de se transformar da seguinte maneira

$$(D_\mu \varphi)' = e^{i\alpha} D_\mu \varphi \tag{2.19}$$

Com esta finalidade, introduz-se então um campo "calibrante", A_μ, transformando-se como

$$A_\mu \xrightarrow{T} A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu \alpha}{q} \tag{2.20}$$

onde q é um parâmetro (a carga do campo A_μ).

Usando A_μ, define-se a derivada covariante

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu - iqA_\mu)\varphi \tag{2.21}$$

a qual, como é facilmente verificável, satisfaz (2.19).

Para construir uma teoria com simetria de calibre local, também chamada **simetria de calibre de segunda espécie**, devem-se substituir na Lagrangiana as derivadas ordinárias por derivadas covariantes e adicionar a contribuição da parte livre do campo A_μ, a qual deve também ser invariante de calibre.

Pode mostrar-se que numa teoria de calibre (abeliana), a parte livre da Lagrangiana, associada com o campo A_μ, $\mathcal{L}_0$, depende somente do tensor $F_{\mu\nu}$, definido por

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \tag{2.22}$$

A corrente de Noether associada com a invariância de calibre de segunda espécie depende explicitamente do parâmetro de calibre, α, e esta dependência, contrariamente ao caso das outras simetrias, não pode ser eliminada por uma renormalização multiplicativa. Assim essa corrente não define um observável genuino que necessariamente deve ser independente do calibre. Vemos assim que a simetria de calibre de segunda espécie desempenha um papel bem diferente que a das outras simetrias. Ela não fornece, por exemplo uma base para a classificação dos possíveis estados do campo, se não, pelo contrário, ela fornece um conjunto de restrições (vínculos) que devem ser satisfeitas na evolução do sistema.

Resumindo, para que uma teoria resulte invariante com respeito a uma transformação de simetria local é necessária a introdução de novos campos. Essas teorias são chamadas

Teorias de Calibre. As transformações de simetria são então chamadas **Simetrias de Calibre** e os campos novos que surgem, **Campos de Calibre.** O exemplo padrão para uma Teoria de Calibre é a Eletrodinâmica Quântica (QED). Na QED, a transformação de calibre é uma transformação local da fase do campo do elétron e o campo de calibre é o campo do fóton.

Simetrias de Calibre Não Abelianas

Como já destacamos, as transformações especificadas pelas eqs.(2.15) e (2.16) são chamadas abelianas porque duas transformações quaisquer comutam. No caso geral podemos ter transformações não abelianas.

Partindo de uma Lagrangiana invariante por uma transformação dos campos dada por (2.13), obteremos as correntes de Noether associadas à transformação e mostraremos que são as cargas as que implementam a transformação dos campos, com $\mathbf{K}_a$ sendo uma representação matricial da carga Q_a e satisfazendo a eq.(2.14)

Suponhamos que a Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ dada por eq. (2.1), é invariante pela transformação (2.13). Uma transformação infinitesimal dos campos pode escrever-se como

$$\varphi_a(x) \xrightarrow{T} \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \tag{2.23}$$

com

$$\delta\varphi_a(x) \cong iK_{abc}\alpha_b(x)\varphi_c(x) \tag{2.24}$$

onde foi definida

$$(\mathbf{K}_b)_{ac} = K_{abc} \tag{2.25}$$

ou seja, a operação T transforma o campo φ_a numa combinação linear de campos da mesma espécie, cuja forma é determinada pela constante K_{abc}, e α é um parâmetro infinitesimal que pode depender do ponto espaço–tempo x.

As mudanças nos campos induzem variações em $\mathcal{L}$, as quais mediante o uso das equações de movimento de Euler-Lagrange reduzem-se a

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_a)} \delta\varphi_a \right) \tag{2.26}$$

Substituindo na eq.(2.26) a expressão genérica para a variação dos campos (eq.(2.24)), pode-se escrever

$$\delta\mathcal{L} \;=\; -(\partial_\mu \alpha_b) j_b^\mu - \alpha_b(\partial_\mu j_b^\mu) \tag{2.27}$$

onde foi definida a corrente

$$j_b^\mu \;\equiv\; -\, iK_{abc}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_a)}\varphi_c \tag{2.28}$$

A partir da eq.(2.27) pode-se também escrever a corrente j^μ e a sua divergência como

$$j_b^\mu \;=\; -\,\frac{\delta(\delta\mathcal{L})}{\delta(\partial_\mu\alpha_b)} \tag{2.29}$$

$$\partial_\mu j_b^\mu \;=\; -\,\frac{\delta(\delta\mathcal{L})}{\delta\ \alpha_b} \tag{2.30}$$

Esta última expressão nos diz que se $\mathcal{L}$ for invariante por uma transformação associada a um parâmetro α constante, então a divergência de j^μ se anula e assim a eq.(2.28) define a corrente de Noether associada a transformação T.

Neste caso ($\alpha = \ const.$), as cargas são dadas por (veja eq.(2.9))

$$Q_b(x_o) \equiv \int d^3x\ j_b^o(x) \tag{2.31}$$

que por meio da expressão (2.28) podem ser escritas como

$$Q_b(x_0) = -i\ \int d^3x\ \Pi_a(x)\ K_{abc}\ \varphi_c(x) \tag{2.32}$$

onde Π_a é o momento canonicamente conjugado a φ_a.

A partir da eq.(2.32) e das relações de comutação dos campos, pode-se mostrar que

$$[\ Q_b(x_0)\ ,\ \varphi_a(y)\ ]_{y_0=x_0} = -K_{abc}\varphi_c(y) \tag{2.33}$$

Logo, as transformações dos campos (eq.(2.24)) podem ser expressas como

$$\varphi_a(x) \;\xrightarrow{T}\; \varphi_a(x) - i\alpha_b(x)[\ Q_b(t)\ ,\ \varphi_a(x)\ ]_{x_0=t} \tag{2.34}$$

e assim, **as cargas implementam as transformações dos campos.**

Esta propriedade de transformação dos campos pode ser pensada como sendo o primeiro termo de uma **transformação unitária** mais geral

$$\varphi_a(x) \xrightarrow{T} U(\alpha)\, \varphi_a(x)\, U(\alpha)^\dagger \tag{2.35}$$

com

$$U(\alpha) = e^{-i\ \vec{\alpha}\cdot\vec{Q}} \tag{2.36}$$

onde **as cargas Q são os geradores da transformação.**

Assim, as quantidades $Q_a(t)$ satisfazem as regras de comutação ditadas pela álgebra de Lie do grupo de transformações com constante de estrutura C^c_{ab}

$$[\ Q_a(x_o)\ ,\ Q_b(y_o)\ ]_{x_o=y_o} = iC^c_{ab}Q_c(x_o) \tag{2.37}$$

As características do grupo são determinadas pelas matrizes $\mathbf{K}_a$, pois partindo das equações (2.32) e (2.37) e da definição para $\mathbf{K}_a$ (eq.(2.25)), é simples mostrar que

$$[\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b] = iC^c_{ab}\mathbf{K}_c \tag{2.38}$$

e assim, $\mathbf{K}_a$ é uma **representação matricial** da carga Q_a.

Logo, a expressão (2.32) pode-se escrever em forma matricial como

$$Q_a(x_0) = -i \int d^3x\ \vec{\Pi}\ \mathbf{K_a}\ \vec{\varphi} \tag{2.39}$$

onde $\vec{\Pi}$ é um vetor fila $(1 \times n)$, $\vec{\varphi}$ é um vetor coluna $(n \times 1)$, e $\mathbf{K_a}$ é uma matriz $(n \times n)$.

Observe-se que enquanto os operadores Π e φ se encarregam de fazer com que Q_a seja um operador quântico, a matriz $\mathbf{K_a}$ determina as características do grupo ao qual Q_a pertence.

No caso de **transformações de calibre de segunda espécie não abelianas** deve-se, em analogia com (2.19) e (2.20), substituir derivadas ordinárias por derivadas cova-

riantes. Se G_μ^a tém n componentes, então o campo calibrante deve ser uma matriz n por n

$$G_\mu = G_\mu^a K^a \tag{2.40}$$

Assim é natural definir a derivada covariante através da substituição

$$\partial_\mu \xrightarrow{T} D_\mu = \partial_\mu - igG_\mu \tag{2.41}$$

com G_μ tal que

$$D'_\mu \psi' = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{K}} D_\mu \psi = U D_\mu \psi \tag{2.42}$$

Assim deve-se ter

$$G'_\mu = U G_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial U)U^{-1} \tag{2.43}$$

Em particular, para transformações infinitesimais

$$U = I + i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{K} \tag{2.44}$$

$$G'^a_\mu = G^a_\mu - C^a_{bc}\alpha^b G^c_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a \tag{2.45}$$

Usando a expressão (2.45) pode-se facilmente verificar que $G_{\mu\nu}$ definido por

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - g[G_\mu, G_\nu] \tag{2.46}$$

transforma-se covariantemente por transformações de calibre locais

$$G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^{-1} \tag{2.47}$$

A Lagrangiana mais simples, invariante por transformações de calibre locais é

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4} Tr\,[G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}] \tag{2.48}$$

que é a Lagrangiana de Yang-Mills, bastante importante na descrição das interações entre partículas elementares.

Apesar de ter levado os conceitos clássicos à teoria quântica e em particular, ter construídas as expressões que permitem obter as correntes conservadas, podem surgir

dificuldades na obtenção destas, devido a que em geral são polinomiais locais nos campos. Em algumas ocasiões pode ser útil fazer uma regularização preliminar, mas isto conduz a que a validade das leis de conservação deixam de aparecer como triviais. Na prática, em muitas oportunidades, tenta verificar-se se é consistente supor que as leis de conservação se verificam ordem por ordem em Teoria de Perturbações depois de uma apropriada renormalização. Este programa é realizado mostrando a equivalência com um conjunto de identidades, similares as Identidades de Ward da QED, a serem verificadas pelas funções de Green, e estas podem ser testadas perturbativamente.

2.2 Realização de Simetrias Unitárias

Um outro aspecto que deve-se destacar é a implementação de simetrias unitárias e os seus efeitos no espectro. Duas situações podem apresentar-se

O caso mais familiar corresponde a uma representação unitária $g \rightarrow U(g)$ do grupo de simetrias no espaço de estados de Hilbert. As suas ações sobre os observáveis é dada por

$$O \rightarrow U(g)\, O\, U^{\dagger}(g) \tag{2.49}$$

Isto envolve a discussão de fatores de fase conduzindo a representações do grupo de "covering" simplesmente conectado (Teorema de Wigner [100]). Os estados são classificados em multipletos correspondentes a representações irredutíveis. Em particular, o vácuo corresponde à representação identidade.

O outro caso pode acontecer quando a simetria é refletida somente aos níveis dinâmicos, o vácuo não é invariante. Chama-se a isto realização Goldstone. Nesta situação os operadores unitários, U(g), não existem, e a simetria aparece espontaneamente quebrada. Os estados já não são classificados em multipletos e com relação a certas condições aparecem partículas sem massa. O ferromagnetismo e as ondas de spin são exemplos desta situação. Em física hadrônica, o comportamento dinâmico de píons aproxima-se deste esquema.

2.2.1 O Estado Fundamental

O estado fundamental, também chamado **vácuo**, é definido como o estado de mínima energia. Onde o vácuo não é único pode-se definir uma base ortonormal neste subespaço

de energias mais baixas, diagonalizando todos os observáveis hermitianos comutantes.

O estado fundamental real é a única combinação a qual minimiza a energia.

Um campo quântico descreve partículas que aparecem do vácuo ou somem nele. Assim, por definição, o valor esperado de qualquer campo quântico no vácuo deve ser nulo, ja que nele não existem partículas para serem criadas ou destruidas, ou seja não ha flutuações dos campos. Neste sentido, o vácuo é o que sobra quando são desligadas todas as flutuações dos campos quânticos. Em outras palavras, se escrevemos um campo ϕ qualquer como a soma de uma componente quântica ϕ_q e uma componente clássica ϕ_c

$$\phi = \phi_q + \phi_c \tag{2.50}$$

temos que o valor esperado no vácuo da componente quântica é nulo

$$\langle \phi_q \rangle = 0 \tag{2.51}$$

entretanto, a forma da parte clássica dos campos esta determinada pela condição de que o vácuo corresponde ao estado de menor energia do sistema.

Na maioria dos casos, o estado fundamental pode ser obtido numa forma invariante translacionalmente requerendo desta minimizar o chamado potencial efetivo V_{ef} , o qual tém o papel de densidade de energia potencial num estado com um dado valor principal do campo. Por exemplo, a densidade de Lagrangiana de um sistema de mésons ϕ_a apresenta a forma geral

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_a [\partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a] - V(\phi_a) \tag{2.52}$$

onde a função $V(\phi_a)$ não contém derivadas dos campos.

Logo, a densidade de Hamiltoniana do sistema tém a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_a \left[\dot{\phi}_a^2 + (\vec{\nabla} \phi_a)^2 \right] + V(\phi_a) \tag{2.53}$$

O termo entre colchetes, contendo as derivadas, envolve apenas quadrados e é em geral positivo se os campos tiverem dependência espaço–temporal, por isso, na configuração de menor energia, os campos tendem a ser constantes no espaço e no tempo. Logo, o

estado de menor energia é obtido minimizando-se somente a função $V(\phi_a)$ a qual está desempenhando o papel de energia potencial.

Uma outra propriedade importante que segue da causalidade é a seguinte. Suponhamos que foi construido um operador de corrente, j^μ, que satisfaz $\partial_\mu j^\mu = 0$ (a corrente é conservada). Definindo

$$Q_V(t) \equiv \int_V d^3x j_0(\vec{x}, t) \tag{2.54}$$

onde V é uma região limitada do espaço[1], o comutador de $Q_V(t)$ com um observável local A é independente do tempo para V suficientemente grande

$$\lim_{V\to\infty} \frac{d}{dt}[Q_V(t), A] = 0 \tag{2.55}$$

A demonstração é imediata, pois por conservação da corrente temos

$$0 = \int_V d^3x[\partial_\mu j^\mu(\vec{x}, t), A] = \frac{d}{dt}\int_V d^3x[j^0(\vec{x}, t), A] + \int_S d\vec{S}\cdot[\vec{j}(\vec{x}, t), A] \tag{2.56}$$

Quando V se torna suficientemente grande, a integral de superficie se anula desde que o comutador envolve operadores locais separados por intervalos tipo-espaço muito grandes.

A validade da afirmação estende-se a situações mais gerais. Em geral A pode ser um operador multi-local. A demonstração pode ser estendida a sistemas não relativísticos desde que estes apresentem somente forças de curto alcance.

2.2.2 O Comportamento do Estado Fundamental

As propriedades de simetria de um sistema podem ser caracterizadas pelo comportamento de seu estado fundamental. Como veremos

- Se o vácuo é aniquilado por um conjunto de cargas, as correspondentes correntes são conservadas e o grupo de simetrias unitariamente implementado, (Teorema de Coleman [101]).

- Se as correntes são conservadas e o vácuo não é invariante, a simetria é espontaneamente quebrada.

[1]Este operador tém uma maior possibilidade de estar bem definido que o seu limite $Q(t)$, a integral sobre todo o espaço.

Em princípio poderiamos pensar que as afirmações acima são uma trivialidade absoluta " o vácuo é invariante ou não o é ", mas elas cobrem uma grande quantidade de situações de conteúdo físico muito diferente.

2.2.3 O Teorema de Coleman

Se o vácuo é invariante então as correntes associadas são conservadas.
Para a demonstração deste teorema, parte-se de supor que existe um operador $Q(t)$ o qual esta bem definido (pelo menos num subconjunto denso do espaço de estados de Hilbert incluindo o estado fundamental) e aniquila o vácuo

$$Q(t)|0\rangle = \int d^3x j_0(\vec{x},t)|0\rangle = 0 \tag{2.57}$$

Se a teoria admite um "gap" de energia, qualquer estado com momento zero será tal que

$$\int d^3x \langle n, \vec{P}_n = 0|j_0(\vec{x},t)|0\rangle = 0 \tag{2.58}$$

Devido a invariância translacional, o integrando da expressão acima é independente de $\vec{x}$, e portanto temos que [2] $\langle n, \vec{P}_n = 0|j_0(\vec{x},t)|0\rangle = 0$. Consequentemente

$$\langle n, \vec{P}_n = 0|\partial_0 j^0(\vec{x},t)|0\rangle = 0 \tag{2.59}$$

Por outra parte, partindo da relação $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) = i[\vec{P},\vec{j}(\vec{x},t)]$. e asumindo que os elementos de matriz de $\vec{j}(\vec{x},t)$ têm significado, os elementos de matriz da divergência de $\vec{j}(\vec{x},t)$ entre estados de momento zero devem anular-se. Assim, este resultado junto ao estabelecido pela eq.(2.59) permite escrever

$$\langle n, \vec{P}_n = 0|\partial_\mu j^\mu(\vec{x},t)|0\rangle = 0 \tag{2.60}$$

Finalmente, por ser $\partial_\mu j^\mu(\vec{x},t)$ um escalar de Lorentz, a expressão (2.60) geraliza-se a elementos de matriz arbitrários entre o vácuo e qualquer outro estado. Daqui $\partial_\mu j^\mu$

[2] Rigurosamente, um tal estado não é normalizável. Os refinamentos necessários podem ser realizados, sem invalidar a demonstração.

ao vácuo. Pode-se mostrar que isto é somente possível para um operador local se este se anula. Concluimos que

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.61}$$

A simetria é exata e unitariamente implementada por operadores da forma

$$U = e^{-\,i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{Q}} \tag{2.62}$$

2.2.4 Quebra Espontânea de Simetria

A quebra espontânea de simetria ocorre quando o estado fundamental não é invariante com relação ao grupo de transformações (este último atua num espaço de Hilbert não-separável maior), ou seja, quando a densidade de Lagrangiana (ou Hamiltoniana) possui uma simetria que não é realizada no vácuo da teoria.

O mecanismo de quebra espontânea esta caracterizado pela não introdução de nenhum novo parâmetro e tém ademais a vantagem de preservar propriedades de renormalização.

Afim de exemplificar a definição acima, suponhamos que a densidade de Lagrangiana de uma teoria seja invariante por um grupo de simetria G, e que existem vários estados degenerados com energia mínima, os quais sob a G transformam-se uns nos outros. Quando se escolhe um desses estados como o fundamental da teoria, então este não é mais invariante sob G. Dizemos então que a simetria foi espontaneamente quebrada.

As consequências da quebra espontânea de uma simetria dependem do tipo de simetria que foi quebrada. No caso de uma simetria contínua global, a quebra espontânea provoca o aparecimento de partículas sem massa, os chamados bósons de Goldstone (Teorema de Goldstone [45]). A situação muda quando campos com simetria espontâneamente quebrada (campos de Higgs) se acoplam a campos de calibre. P.W.Higgs [56] mostrou que neste caso os campos de calibre (normalmente sem massa) podem tornar-se massivos. Esse efeito é conhecido como Mecanismo de Higgs.

Teorema de Goldstone

Goldstone analiza o que é o que acontece quando se produz uma quebra espontânea de uma simetria contínua global. Encontra que a mais notável consequência é o aparecimento

de partículas sem massa. Estes estados são gerados por operadores os quais rodam o vácuo numa quantidade infinitesimal a um vácuo degenerado; desde que existem fundamentos físicos que garantem que uma tal transformação pode ser feita sem custo de energia.

Para mostrar como isto ocorre, suponhamos a existência de uma corrente conservada e consideremos qualquer operador A tal que

$$\delta a(t) \equiv \lim_{V\to\infty} \langle 0|[Q_V(t), A]|0\rangle \neq 0 \tag{2.63}$$

A existência de um tal observável, expressa a não-invariância do vácuo. Insertando na relação acima um conjunto completo de estados intermediários de definido quadri-momento achamos que

$$\begin{aligned}
\delta a(t) &= \lim_{V\to\infty} \sum_n \int d^3x [\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iP_n.x} - \langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iP_n.x}] \\
&= \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_n)[\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iE_n.x} - \langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iE_n.x}] \\
&\neq 0
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Temos mostrado (eq.(2.55)) que a conservação da corrente implica

$$\frac{d}{dt}\delta a(t) = 0$$

portanto

$$\sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_n) E_n [\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iE_n.x} - \langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iE_n.x}] = 0 \tag{2.65}$$

Deduz-se das expressões (2.64) e (2.65) que um estado $|n\rangle$ deve existir tal que $\langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle \neq 0$ para o qual anula-se $\delta^3(\vec{P}_n)E_n$. Isto é um estado sem massa com os mesmos números quânticos que j_0(e A), pois este é gerado por este operador a partir do vácuo.

Estes estados sem massa são chamados **bósons de Goldstone** e estão associados à quebra de simetria. Eles são certamente bósons se j_0 é um operador tipo-bóson. No caso em que j_μ carregasse spin semi-inteiro (como no caso das teorias supersimétricas), as partículas sem massa associadas seriam férmions. Ou seja, o spin destes estados guardam uma estreita relação com as propriedades de transformação de Lorentz de $j_\mu(x)$.

Um ponto sutil é que os estados sem massa não necessariamente devem ser observáveis. Esta observação aplica-se a teorias com um setor não-físico de estados não-observáveis, e pode ser relevante quando se quer evitar as conclusões do teorema.

Exemplificaremos a quebra espontânea de uma simetria global num modelo simples. Partimos de uma densidade de Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi(x))^\dagger (\partial_\mu \varphi(x)) - \frac{\mu^2}{2} |\varphi(x)|^2 - \frac{\lambda}{4} |\varphi(x)|^4 \tag{2.66}$$

onde $\varphi(x)$ é um campo escalar complexo, λ e μ^2 são parâmetros. Para asegurar a estabilidade da teoria supõe-se que os valores grandes de φ estam amortecidos, o qual significa $\lambda > 0$.

O sinal de μ^2 estabelece duas situações bem diferentes. Para ver isto, observemos que a Lagrangiana dada por eq.(2.66) é invariante com relação a transformação global

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha}\, \varphi(x) \quad , \qquad \alpha = constante$$

O potencial efetivo

$$V_{ef}(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} |\varphi(x)|^2 + \frac{\lambda}{4} |\varphi(x)|^4 \tag{2.67}$$

apresenta mínimos para

$$\left[\mu^2 + \lambda |\varphi|^2 \right] |\varphi| = 0 \tag{2.68}$$

Se $\mu^2 > 0$, então este é um parâmetro de massa nua é o potencial efetivo possui apenas um único estado fundamental $\varphi(x) = 0$ para o qual $V_{ef} = 0$.

A quebra de simetria ocorre se $\mu^2 < 0$. Ao nível clássico o estado fundamental não esta descrito por um valor do campo médio zero devido ao fato de que o potencial apresenta

um mínimo para um conjunto de valores diferentes de zero dos campos (Fig. 2.1). Ou seja, todos os campos

$$\varphi(x) = v\, e^{-i\,\alpha} \quad , \qquad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad , \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \tag{2.69}$$

descrevem configurações da mesma energia mínima

$$V_{ef} = -\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \tag{2.70}$$

A fase α do campo é qualquer e varia sob transformações de fase. Ao escolhermos **um estado fundamental** (um valor de α) a simetria do vácuo é espontaneamente quebrada.

No caso de quebra espontânea de simetria, pode-se tratar perturbativamente a auto-interação do campo $\varphi(x)$ e observar o que acontece ao perturbar o estado fundamental.

Com o ansatz

$$\varphi(x) = \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\eta(x)\right)\, e^{-i[\alpha+\xi(x)/(v\,\sqrt{2})]} \tag{2.71}$$

onde $\eta(x)$ e $\xi(x)$ são campos reais, a densidade de Lagrangiana pode ser escrita

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial^\mu\xi)(\partial_\mu\xi) + \frac{1}{2}\,(\partial^\mu\eta)(\partial_\mu\eta) + \frac{1}{2}\,\mu^2\eta^2 - \frac{\lambda v}{2\sqrt{2}}\,\eta^3 - \frac{\lambda}{16}\,\eta^4 + \ldots \tag{2.72}$$

onde os pontos indicam termos de acoplamento entre ξ e η.

A partir desta última expressão para a Lagrangiana pode ser rapidamente interpretado o significado dos novos campos. $\eta(x)$ é um campo escalar com massa $m = \sqrt{-\mu^2}$ e descreve oscilações radiais entorno do estado fundamental. $\xi(x)$ é um campo escalar sem massa, ou seja o campo de Goldstone. A ausência de massa provem do fato de que a frequência de oscilação na direção radial é nula, não há então resistência nesse movimento devido a degenerescência do estado fundamental.

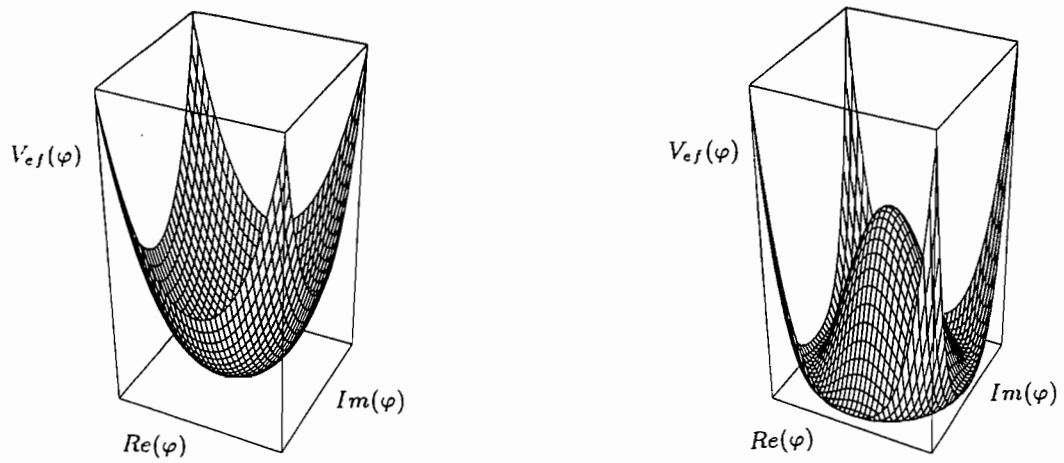


Fig.2.1: O potencial $V_{ef}(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}|\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\varphi|^4$: (a) $\mu^2 > 0$, (b) $\mu^2 < 0$.

2.3 A Simetria Quiral

No início dos anos 60, Gell-Mann propõe que as interações fortes não estariam longe do limite onde as correntes axiais fossem tão fundamentais quanto as vetoriais. A evolução destas idéias conduz ao surgimento do conceito de **simetria quiral**, o qual esta associado à hipótese de uma corrente vetorial conservada (**CVC**) e uma corrente axial parcialmente conservada (**PCAC**).

A simetria quiral é uma das simetrias fundamentais mais importantes, devido ao papel que a sua quebra espontânea desempenha na física hadrônica de baixas energias. Algumas das suas implicações foram já referidas na introdução e muitas mais poderiam ser apontadas [102,103]. Daí a importância da construção de modelos que respeitem esta invariância ou que apenas a violem ligeiramente. A QCD é uma teoria que goza desta propriedade quando a massa corrente dos quarks é nula.

2.3.1 A Informação Fornecida pelos Processos Fracos

As interações fracas têm conduzido a considerar em detalhe a estrutura e propriedades de correntes hadrônicas. Fenomenologicamente, estas interações são bem descritas por uma Lagrangiana de interação corrente–corrente da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^{\mu}(x)\, J^{\dagger}_{\mu}(x) \tag{2.73}$$

onde G é a constante de Fermi, medida no decaimento do múon ($\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_{\mu} + \bar{\nu}_{e}$), com um valor de (tendo em conta correções radiativas)

$$G = (1.026 \pm 0.001) \cdot 10^{-5}\ m_p^{-2}$$

A corrente total $J^{\mu}(x)$ é a soma de contribuições leptônicas ($j^{\mu\ ,\ lépton}$) e hadrônicas ($j^{\mu\ ,\ hádron}$).

$$J^{\mu}(x) = j^{\mu\ ,\ lépton}(x) + j^{\mu\ ,\ hádron}(x) \tag{2.74}$$

A parte leptônica da corrente é o operador hermitiano

$$j^{\mu\ ,\ lépton}_{a} = \bar{\psi}^{l} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \tau_a \psi^{l} \tag{2.75}$$

onde l = 1,2,3,... denota a espécie de lépton, e onde para cada espécie, ψ é um espinor de duas componentes.

$$\psi^{l=1} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \\ e^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi^{l=2} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi^{l=3} = \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad \ldots$$

A corrente hadrônica é uma superposição de correntes conservando estranheza ($j^{\mu\ ,\ hadron\ (\Delta S=0)}$) e correntes mudando estranheza ($j^{\mu\ ,\ hadron\ (\Delta S=1)}$)

$$j^{\mu\ ,\ hádron} = j^{\mu\ ,\ hádron\ (\Delta S=0)} \cos\theta_c + j^{\mu\ ,\ hádron\ (\Delta S=1)} \sin\theta_c \tag{2.76}$$

onde θ_c é o ângulo de Cabibbo ($\theta_c \simeq 0.25$).

Uma tal decomposição implica que podemos relacionar a escala das várias componentes associadas à transição com diferentes números quânticos. Uma tal escala é fornecida pela álgebra não linear de comutadores de correntes.

Cada uma destas correntes é ademais uma superposição de uma parte vetorial e uma parte axial da forma $V_\mu - A_\mu$, como é o caso da corrente leptônica. No marco de Simetrias Unitárias, elas pertencem a um octeto de correntes denotadas V^a e A^a (a=1,...,8) com

$$\begin{aligned} j^{\mu\ ,\ hádron\ (\Delta S=0)} &= (V_\mu^1 - i\ V_\mu^2) - (A_\mu^1 - i\ A_\mu^2) \\ j^{\mu\ ,\ hádron\ (\Delta S=1)} &= (V_\mu^4 - i\ V_\mu^5) - (A_\mu^4 - i\ A_\mu^5) \end{aligned} \tag{2.77}$$

A interação fraca, suplementada por estas hipóteses, conduz a remarcáveis propriedades de Universalidade. Por exemplo, o elemento de matriz medido no decaimento β do neutron pode ser escrito como

$$G\ \langle\ p\ |\ j^{\mu\ ,\ hádron\ (\Delta S=0)}\ |\ n\ \rangle\ =\ \bar{u}_p\ \gamma_\mu\ (G_V - G_A\gamma_5)\ u_n \tag{2.78}$$

Os fatores de forma do lado direito, G_V e G_A , são calculados em momento transferido zero devido a que a diferença de massa neutron–próton é muito pequena. Dentro de 1 % , o valor encontrado experimentalmente para G_V coincide com a correspondente quantidade medida no decaimento do múon, G. Medidas mais precisas, realizadas em transições β entre estados nucleares, cuidadosamente corrigidas por vários efeitos, acusam diferenças da mesma ordem.

O fato de que $G_V(0)$ não é renormalizada pelas interações fortes encontra uma interpretação natural se se assume com o Gell-Mann e o Feynman [33] que a corrente vetorial V_μ é conservada e de fato gera a Simetria Unitária hadrônica. Ou seja, desprezando quebra de SU(3), as V_μ^a ($a = 1,\ 2,\ 3$) são as componentes da corrente de isospin e as $V_\mu^{(\Delta=1)}$ são aproximadamente conservadas. Logo, a corrente eletromagnética hadrônica é dada por (omitindo a fator e)

$$j_\mu^{em.} = V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\ V_\mu^8 \tag{2.79}$$

Esta hipótese é uma geralização do caso eletromagnético, onde a conservação da corrente implica uma renormalização da carga elétrica universal.

O fator de forma G_A, medido no decaimento β, não é igual ao vetorial

$$\frac{G_A}{G_V} \simeq 1.22 \tag{2.80}$$

o qual é compatível com o fato de que tal corrente não é conservada, mesmo no limite de uma simetria exata SU(3).

2.3.2 A Simetria Quiral

A partir do modelo com quarks podem ser deduzidas expressões explícitas para as cargas vetorial e axial, as quais conduzem às seguintes regras de comutação

$$\begin{aligned} [\, T^a \,,\, T^b \,] &= i\, f_{abc}\, T^c \\ [\, T^a \,,\, Q^b_A \,] &= i\, f_{abc}\, Q^c_A \\ [\, Q^a_A \,,\, Q^b_A \,] &= i\, f_{abc}\, T^c \end{aligned} \tag{2.81}$$

onde as f_{abc} são as constantes de estrutura de SU(3).

Estas relações de comutação são aquelas da Álgebra de Lie do grupo $SU(3) \otimes SU(3)$, gerado pelas cargas T^a e Q^a_A, o qual pode ser verificado construindo as combinações "Left" e "Right"

$$\begin{aligned} Q_L &= \frac{1}{2}\,(\, T \,-\, Q_A \,) \\ Q_R &= \frac{1}{2}\,(\, T \,+\, Q_A \,) \end{aligned} \tag{2.82}$$

as quais satisfazem

$$\begin{aligned} [Q^a_L, Q^b_L] &= i f_{abc} Q^c_L && SU(3)\ Left \\ [Q^a_L, Q^b_R] &= 0 && desacoplamento \\ [Q^a_R, Q^b_R] &= i f_{abc} Q^c_R && SU(3)\ Right \end{aligned} \tag{2.83}$$

As relações de comutação dadas pela eq.(2.81) apresentam analogia com o caso leptônico. Elas são não lineares e portanto determinam a escala das correntes fortes

e dão sentido a noção de Universalidade. Gell-Mann [47,104] postulou que elas permanecem válidas independentemente da suposição que se faça a respeito da subestrutura hadrônica.

A pequena diferença entre os fatores de forma G_V e G_A sugeriu estudar o limite no qual a corrente axial é conservada, pelo menos no caso em que existe conservação da estranheza. Assim, neste caso as regras de comutação das cargas vetorial e axial geram uma Álgebra de Lie $SU(2) \otimes SU(2)$. Supondo que a corrente axial é (aproximadamente) conservada, a simetria resultante é chamada **simetria quiral**.

A maior aproximação ao mundo real obtem-se quando esta simetria é implementada no modo Goldstone com os píons considerados como partículas sem massa. Esta hipótese permite deduzir novas consequências a partir da Álgebra de Correntes na forma de Regras de Soma e Teoremas de Baixa Energia.

A generalização a $SU(3) \otimes SU(3)$ incluindo troca de estranheza aparece mais questionável.

2.3.3 A Quebra Espontânea da Simetria Quiral e A Relação de Goldberger–Treimann

A relação de Goldberger–Treimann [41] (relação G-T) foi obtida originalmente em 1958. A dedução desta apresentava muitos pontos obscuros mas estava numa boa concordância com os resultados experimentais. Posteriormente percebeu-se que ela decorre de forma natural da hipótese de uma corrente axial parcialmente conservada. Para obter a relação G–T vamos a explorar as consequências de estabelecer $\partial^\mu A_\mu = 0$.

A invariância de Lorentz permite escrever o elemento de matriz da corrente axial entre o estado de um píon e o vácuo como

$$\langle\ 0\ |\ A^i_\mu(x)\ |\ \pi^j(p)\ \rangle\ =\ i\ p_\mu\ \delta_{ij} f_\pi\ e^{-ip\cdot x} \tag{2.84}$$

onde f_π é a constante de decaimento do píon carregado.

Esta amplitude permite obter uma expressão para a taxa de decaimento do processo $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ [105]

$$\Gamma_{\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu} = G^2 f_\pi^2\ \frac{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4\ \pi\ m_\pi^3}\ \cos^2\theta_c \tag{2.85}$$

O ajuste com os dados experimentais conduz a um valor $f_\pi \simeq 93\ Mev$.

A partir da expressão (2.85), para o elemento de matriz da divergência da corrente axial temos (com $p^2 = m_\pi^2$)

$$\langle\ 0\ |\ \partial^\mu A^i_\mu(x)\ |\ \pi^j(p)\ \rangle\ =\ m_\pi^2\ \delta^{ij} f_\pi\ e^{-ip\cdot x} \tag{2.86}$$

Logo, a corrente sera conservada se

$$f_\pi\ m_\pi^2\ =\ 0 \tag{2.87}$$

e portanto deve-se escolher entre as duas possibilidades

$$f_\pi\ =\ 0 \qquad ou \qquad m_\pi^2\ =\ 0 \tag{2.88}$$

Obviamente, ambas suposições estão em contradição com os dados experimentais.

Se o grupo de simetrias é implementado com um vácuo invariante obtem-se uma descrição não realística do mundo, com multipletos degenerados em paridade. Por outra parte, uma realização Goldstone evita esta degenerescência e conduz a um mundo mais real devido a que esta em concordância com o fato de que, numa escala hadrônica, a massa do píon é pequena sugerindo uma simetria aproximada e portanto, pode-se imaginar um mundo com píons sem massa como uma aproximação tentativa.

Vamos a explorar as consequências de estabelecer

$$\partial^\mu A_\mu(x)\ =\ 0 \qquad e \qquad m_\pi^2\ =\ 0 \tag{2.89}$$

O elemento de matriz da corrente axial entre estados do nucleon, compatível com covariância de Lorentz, simetria de carga de A_μ e reversão temporal de H, têm a forma

$$\langle\ N_{s',t'}(p')\ |\ A^i_\mu(x)\ |\ N_{s,t}(p)\ \rangle\ =\ u^{s'}(p')\ \eta_{t'} \left\{ \frac{1}{2} \left[\gamma_\mu g_a(q^2) + q_\mu g_p(q^2) \right] \tau^i \gamma_5 \right\}\ u^s(p)\ \eta_t \tag{2.90}$$

onde g_a e g_p são fatores de forma e q é o momento transferido ($q = p' - p$).

A partir da expressão (2.91) pode-se obter o elemento de matriz da divergência da corrente axial entre estados do nucleon. Logo, a suposição de que esta corrente é conservada conduz a condição

$$2\ m\ g_a(q^2) + q^2 g_p(q^2)\ =\ 0 \tag{2.91}$$

Uma comparação da expressão (2.91) com os elementos de matriz medidos no decaimento β do neutron (eq.(2.78)), conduz a

$$g_a(0) \;=\; \frac{G_A}{G_V} \;\simeq\; 1.22 \tag{2.92}$$

Este resultado é compatível com a expressão (2.92) para $q^2 \to 0$, se o fator de forma $g_p(q^2)$ tém um pólo em $q^2 = 0$. Por certo, $g_p(q^2)$ apresenta tal pólo correspondendo à troca de um píon de massa nula (Fig. 2.2). A correspondente contribuição ao elemento de matriz de A_μ entre estados de nucleon, é

$$-f_\pi q_\mu \;\frac{1}{q^2}\;\; u^{s'}(p')\;\eta_{t'} g_{\pi NN}\tau^i\gamma_5\; u^s(p)\;\eta_t \tag{2.93}$$

conduzindo a

$$g_p(q^2) \;=\; \frac{-2\; f_\pi g_{\pi NN}}{q^2} \;+\; \ldots \tag{2.94}$$

onde $g_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento efetiva píon-nucleon ($g_{\pi NN} \;\approx 13.55$), e os pontos indicam outras possíveis contribuições regulares em $q^2 = 0$.

Da expressão (2.92) com $g_p(q^2)$ dado pela expressão (2.95), obtemos, a momento transferido zero, a **Relação de Goldberger–Treimann** (Relação G–T)

$$g_a(0) \;=\; g_{\pi NN}\;\frac{f_\pi}{m} \tag{2.95}$$

a qual esta em concordância com os valores experimentais com um erro menor que 10 %. Este é um resultado de considerável importância, devido ao fato de que relaciona quantidades características de processos fracos ($f_\pi, G_A/G_V$) com uma quantidade propria de processos fortes ($g_{\pi NN}$).

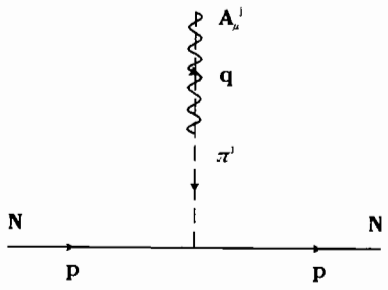


Fig. 2.2: Contribuição do píon ao elemento de matriz de A_μ entre estados de nucleons.

2.3.4 A Quebra Explícita da Simetria Quiral e PCAC

Afim de descrever um mundo mais realístico, com píons massivos, e reter a Relação G–T , é necessário ter algum controle na extrapolação desde o valor $q^2 = 0$ a $q^2 = m_\pi^2$. Isto é alcançado fazendo duas hipóteses

* **uma lei de conservação parcial da corrente axial** da forma

$$\partial^\mu A_\mu^i(x) \;=\; m_\pi^2 \; f_\pi \; \pi^i(x) \tag{2.96}$$

onde $\pi^i(x)$ é um suave campo píon interpolante, e

* **dominância do pólo do píon**

A primeira destas hipóteses permite, por exemplo, utilizar a eq.(2.87) para gerar os estados de píons assintóticos com $m_\pi^2 \; f_\pi \;\neq 0$. A segunda hipótese está associada ao significado físico da Relação G–T que corresponde à ideia que as interações envolvendo correntes axiais são sempre mediadas por píons. Uma tal dominância consegue-se fazendo uma suave extrapolação dos fatores de forma mais lá da camada de massas, de forma que os elementos de matriz de $\partial_\mu A^\mu$ sejam dominados pelo pólo do píon para pequenos valores do momento transferido $\mid q^2 \mid \;\leq\; m_\pi^2$

$$\langle\, \alpha \mid \partial^\mu A_\mu^i \mid \beta \rangle \;=\; \frac{A}{q^2 - m_\pi^2} \;+\; \ldots \tag{2.97}$$

onde A é um resíduo a ser determinado.

Estas duas hipóteses constituem o que na prática compreende-se por **PCAC**.

2.3.5 Lagrangianas Efetivas Quirais

Os primeiros modelos envolvendo a idéia de Simetria Quiral foram formulados em termos de Lagrangianas, nos finais dos anos 50.

No contexto Lagrangiano, um modelo incorpora a simetria quiral se por meio de variações adequadas dos campos, a Lagrangiana gera CVC, PCAC, e as cargas reproduzem as relações de comutação características do grupo $SU(2) \otimes SU(2)$.

No início dos anos 60, a idéia de se usarem Lagrangianas em problemas de interações fortes tinha caido em desgraça, pois elas estavam intimamente vinculadas à linguagem

perturbativa, que não funcionava. Uma das técnicas importantes desenvolvidas é a designada genericamente por Álgebra de Correntes, cujos ingredientes principais são: as fórmulas de redução de LSZ; as relações de comutação entre as correntes vetorial e axial determinadas pela álgebra do grupo $SU(2) \otimes SU(2)$, e PCAC.

Em torno de 1967, Weinberg [106] criticou o método da álgebra de correntes argumentando que nele as implicações dinâmicas das interações permanecem escondidas (não são explícitas). Assinala ademais, o considerável aumento de trabalho algébrico necessário para tratar processos envolvendo um número maior de píons. Como alternativa, ele propôs o uso de **Lagrangianas efetivas fenomenológicas**, as quais devem incorporar a simetria quiral e reproduzir os resultados da Álgebra de Correntes quando são usadas em ordem mais baixa de perturbação. Esta ideia constitui a base da **Dinâmica Quiral**.

As Realizações da Dinâmica Quiral

As realizações da Dinâmica Quiral podem ser clasificadas em linear e não linear. A ação de uma carga sob um campo tém a forma geral

$$[Q, \Phi] = if(\Phi) \tag{2.98}$$

onde $f(\Phi)$ é uma função do campo Φ. Se esta função é linear, conduz a uma realização linear da dinâmica quiral, e, em caso contrário, se $f(\Phi)$ é uma função não linear de Φ, fala-se de uma realização não linear.

Para se obter uma **realização linear**, é preciso introduzir outras partículas além dos píons, ou seja, não é possível obter uma Lagrangiana invariante por $SU(2) \otimes SU(2)$ usando apenas píons que se transformem linearmente sob a ação das cargas vetorial e axial.

Para ver isto, comecemos estudando as relações de comutação das cargas vetorial e axial com o campo do píon.

Uma transformação linear infinitesimal de isospin pode ser escrita como (veja eqs. (2.23) e (2.24))

$$\pi_a \rightarrow \pi_a - i\alpha_b K_{bac} \pi_c \tag{2.99}$$

por outra parte, temos (veja eq.(2.33))

$$[T_b(x), \pi_a(y)]_{x_o=y_o} = -K_{abc}\pi_c(y) \tag{2.100}$$

O operador T atua sob a parte quântica do campo do píon. Para píons livres, por exemplo, é simples mostrar que a expressão acima conduz a

$$\begin{aligned} [T_b, \hat{a}_{K,a}] &= -K_{abc}\hat{a}_{K,c} \\ \left[T_b, \hat{a}^\dagger_{K,a}\right] &= -K_{abc}\hat{a}^\dagger_{K,c} \end{aligned} \tag{2.101}$$

onde $\hat{a}_{K,a}$ ($\hat{a}^\dagger_{K,a}$) é o operador que destroi (cria) um píon no modo (K,a) a partir do vácuo. Logo, tendo em conta que $T|0\rangle = 0$, temos

$$T_b|\pi_a(K)\rangle = -K_{abc}|\pi_c(K)\rangle \tag{2.102}$$

A expressão acima pode ser escrita em forma matricial. Escolhendo

$$\begin{aligned} [T_i]_{jk} &= -i\epsilon_{ijk} \\ [\pi_i]_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.103}$$

obtemos

$$K_{bac} = i\epsilon_{bac} \tag{2.104}$$

e portanto, uma transformação de isospin no campo do píon pode ser escrita

$$\pi_a \rightarrow \pi_a - \epsilon_{abc}\alpha_b\pi_c \tag{2.105}$$

ou

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} - \vec{\alpha} \wedge \vec{\pi} \tag{2.106}$$

expressão que representa a iso-rotação de um isovetor.

A necessidade de outros campos além do píon no caso de realizações lineares decorre da necessidade de satisfazer a Identidade de Jacobi para as cargas axiais

$$[Q_a,[Q_b,\pi_c]]+[Q_b,[\pi_c,Q_a]]+[\pi_c,[Q_a,Q_b]]=0 \tag{2.107}$$

O último termo do lado esquerdo pode ser calculado a partir das relações de comutação que devem satisfazer as cargas axiais (eq.(2.82)) e utilizando a expressão (2.101) para o comutador do campo do píon com a carga vetorial, obtendo-se assim

$$[Q_a,[Q_b,\pi_c]]+[Q_b,[\pi_c,Q_a]]=\delta_{bc}\pi_a-\delta_{ac}\pi_b \tag{2.108}$$

Este resultado mostra que o comutador da carga axial com o campo do píon não podese anular

$$[Q_a,\pi_b]\neq 0 \tag{2.109}$$

Por outra parte, os requerimentos de paridade implicam que este comutador deve resultar em um campo escalar, ou seja

$$[Q_a,\pi_b]\propto \textit{campo escalar não nulo} \tag{2.110}$$

e portanto, **as realizações lineares da simetria quiral exigem a existência de campos escalares.**

Uma conhecida realização linear da simetria quiral é através do Modelo σ-Linear [15], baseado na introdução de só apenas um méson escalar iso-escalar, o famoso méson σ. Neste modelo, os argumentos acima conduzem a

$$\begin{aligned}
[T_a,\pi_b] &= i\,\epsilon_{abc}\,\pi_c \\
[T_a,\sigma] &= 0 \\
\\
[Q_a,\pi_b] &= i\,\delta_{ab}\,\sigma \\
[Q_a,\sigma] &= -\,i\,\pi_a
\end{aligned} \tag{2.111}$$

O segundo comutador é consequência do fato de que o méson σ é um iso-escalar, e os comutadores dos campos com as cargas axiais são as necessárias para satisfazer a Identidade de Jacobi (eq.(2.109)).

Uma das principais motivações para se introduzir **realizações não lineares da simetria quiral** foi o fato de não existir evidências experimentais diretas de uma partícula (ou ressonância) que seja uma boa candidata para o méson σ.

Weinberg [106] introduziu um formalismo para construir Lagrangianas não lineares. Ele obtém as expressões gerais para as transformações dos campos $\vec{\pi}$ e ψ e das suas derivadas covariantes $D^\mu\vec{\pi}$ e $D^\mu\psi$ ($\vec{\pi}$ representa o campo do píon e ψ a qualquer outro campo pertencente a um multipleto de isospin de dimensão n). A grande importância deste formalismo radica no fato de que, qualquer isoescalar construido a partir de $D^\mu\vec{\pi}$, ψ e $D^\mu\psi$ é um invariante quiral, entanto que qualquer isoescalar construido a partir do campo do píon $\vec{\pi}$ é responsável da quebra de simetria quiral.

O Modelo σ não–Linear (introduzido por Gell-Mann e Lèvy [15]) corresponde, no formalismo desenvolvido por Weinberg, a uma escolha particular simples da expressão geral para a transformação axial do campo do píon. Esta escolha permite escrever o "σ do modelo não linear" como

$$\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} \tag{2.112}$$

onde f_π é a constante de decaimento do píon carregado. O σ aparece agora como uma função não linear do campo do píon e portanto não representa um quarto grau de liberdade no modelo.

Assim, mesmo que exista uma grande analogia formal entre os modelos σ linear e não-linear, o conteúdo é muito diferente.

Capítulo 3

A Cromodinâmica Quântica E O Modelo Sigma Linear

A QCD apresenta um regime perturbativo a energias muito maiores do que a massa do nucleon, sendo intratável a baixas energias. A parte dos desenvolvimentos de diferentes aproximações à QCD tem sido intensa a atividade científica em torno de modelos efetivos que tentam reproduzir as propriedades mais importantes da QCD, em particular, o maior interesse está dirigido aos que preservam as suas simetrias.

Por outra parte, a Física Nuclear não relativística baseada em graus de liberdade de nucleons e mésons é bem sucedida a energias baixas comparadas à massa do nucleon. Existe assim, um grande "gap" entre estas duas áreas da Física. As teorias de campo relativísticos com graus de liberdade hadrônicos proporcionam, em princípio, um contexto para cálculos sistemáticos com um mínimo número de parâmetros. Um exemplo destas é a Hadrodinâmica Quântica (QHD) [107].

Para conectar propriamente a Física Nuclear Tradicional ao regime perturbativo da QCD, os modelos hadrônicos devem manter alguma simetria da QCD. Uma das importantes propriedades da QCD e da Física de Píons a baixas energias é a simetria quiral.

O modelo de Walecka de QHD [108] têm um grande sucesso fenomenológico, mas carece de simetria quiral. Um estudo da relação existente entre a QHD e o Modelo σ-Linear [89] indica que este último pode dar um razoável ponto de partida para descrever a física

nuclear. Ressurge assim o interesse pelo Modelo σ. Permanece ainda a questão sob a existência do méson σ, tanto do ponto de vista teórico como experimental. Por outra parte, ao aplicar a expansão em loops ao modelo, imediatamente surgem problemas (a saber, os propagadores renormalizados exibem pólos não físicos) que impossibilitam introduzir adequadamente densidade finita e temperatura.

Neste capítulo faremos uma breve abordagem à QCD, deternos-endo nas propriedades de simetria e nas condições com relação as quais a Lagrangiana da QCD realiza, aproxima ou viola as mesmas. Logo faremos uma revisão das principais características do Modelo σ-Linear [15], que fizeram dar respeitabilidade ao modelo. Adiamos a discussão da existência dos pólos fantasmas ao próximo capítulo, já que evitar a ocorrência destes foi um dos principais objetivos que levou-nos a investigar o papel desempenhado por um "cutoff" na teoria.

3.1 A Cromodinâmica Quântica

Com base na idéia do grau de liberdade de cor e com o grupo SU(3) como grupo de simetria desenvolveu-se uma teoria para a dinâmica de interação entre quarks, a Cromodinâmica Quântica (QCD) [109]. Trata-se de uma teoria de calibre tal como a Eletrodinâmica Quântica (QED), com a qual tem outros pontos em comum. Enquanto que a QED descreve as interacções entre partículas carregadas eletricamente, a QCD descreve as interacções entre partículas caracterizadas pelo número quântico de cor. A principal diferença entre estas duas teorias de calibre refere-se ao carácter não abeliano da QCD que implica que os glúons (bósons de calibre da QCD), podem interagir consigo mesmo. A teoria contém oito campos de calibre e o grupo de calibre associado é o grupo de cor $SU_c(3)$.

3.1.1 A Lagrangiana da QCD

A densidade de Lagrangiana da QCD escreve-se na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - M\right)\psi(x) - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{G}^{\mu\nu}_a(x) \tag{3.1}$$

onde $\psi(x)$ são os campos de quarks, $\mathcal{D}^\mu$ é a derivada covariante que incorpora o acoplamento dos campos associados aos quarks com o campo dos glúons $\mathcal{G}^\mu_a(x)$

$$\mathcal{D}^\mu = \delta_{dd'}\partial^\mu - ig\frac{1}{2}(\lambda^a)_{dd'}\mathcal{G}^\mu_a(x) \tag{3.2}$$

e $\mathcal{G}^a_{\mu\nu}(x)$ é o tensor do campo de glúons não abeliano

$$\mathcal{G}^a_{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \mathcal{G}^a_\nu(x) - \partial^\nu \mathcal{G}^a_\mu(x) + g f_{abc}\mathcal{G}^b_\mu(x)\mathcal{G}^c_\nu(x) \tag{3.3}$$

M representa a matriz de massa independente da cor e é fenomenológica. Os índices gregos $\mu, \nu = 0...3$ rotulam o vetor de Lorentz; os rótulos $a, b, c = 1...8$ tem a dimensionalidade da representação adjunta de $SU(3)$ e $d, d' = 1...3$ são rótulos de cor com a dimensionalidade da representação fundamental de $SU(3)$. g é a constante de acoplamento das interacções fortes e f_{abc} são as constantes de estrutura de $SU(3)$. Os índices de sabor serão denotados como f, f' e foram omitidos na Lagrangiana para simplificar a notação.

Devido a origem da matriz M, esta pode ser levada a uma forma diagonal através de uma transformação que mistura as cores e a contribução a $\mathcal{L}_{QCD}$ pode escrever-se como

$$\mathcal{L}_{mass} = -\sum_{d=1}^{3}\sum_{f=1}^{6} m_f \bar{\psi}^{fd}(x)\psi^{fd}(x) \tag{3.4}$$

As m_f não são observáveis se a QCD implica no confinamento dos quarks, mas podem ser observadas em termos de massas hadrônicas observáveis através da álgebra de correntes. Estas são as assim chamadas massas de quarks de correntes como oposição à noção de massas de quarks constituintes usadas nos modelos de quarks fenomenológicos de estrutura hadrônica.

As principais características desta teoria, o sucesso das predições na fase perturbativa, e algumas das aproximações para abordar alguns dos aspectos não perturbativos, já

foram brevemente apresentados no capítulo 1 (Sec.1.4). No presente, estamos interessados em analisar com maior detalhe quais das propriedades da Lagrangiana da QCD que contribuem mais diretamente para a estrutura hadrônica.

A ligação entre a quebra de simetria quiral e o espectro mesônico tem sido reconhecida desde há algum tempo [77]. Se a massa dos quarks é igual a zero, o Hamiltoniano da QCD é invariante sob o grupo quiral $SU(N_f) \otimes SU(N_f)$, onde N_f é o número de sabores. Esta propriedade é uma das principais características do Hamiltoniano da QCD no limite quiral. Para haver consistência com a experiência é essencial que esta simetria seja quebrada espontaneamente. De fato, o vácuo físico quebra esta simetria para $SU(N_f)$ e a simetria quiral não é desenvolvida no modo de Wigner–Weyl mas sim no de Nambu–Goldstone. Como consequência dessa quebra de simetria, os quarks adquirem massa dinâmica e o espectro mesônico contém $(N_f^2 - 1)$ bósons de Goldstone [45] que caracterizam a estrutura de baixa energia da teoria. Na verdade, a dinâmica quiral não gera apenas píons sem massa, mas determina também a sua dinâmica a baixas energias [110], em termos do elemento de matriz $\langle 0|A_\mu|\pi\rangle$ envolvendo a corrente axial A_μ que, neste caso, se conserva. Supõe-se que a quebra de simetria e o aparecimento de bósons de Goldstone se verifique em QCD no limite $N_c \to \infty$ [111] e é unanimemente aceito que se verifique também para $N_c = 3$ [112].

No entanto, o Hamiltoniano da QCD contém uma matriz de massa dos quarks que quebra explicitamente esta simetria. A corrente axial não é conservada exatamente. A massa dos quarks fica sujeita a duas contribuições: a da massa gerada dinamicamente, M_{din} , e a da massa corrente que pode depender do sabor. Nestas condições, os bósons de Goldstone são substituídos por excitações massivas. De acordo com os teoremas de baixa energia ("soft pion theorems"), a simetria $SU(3) \otimes SU(3)$ deveria ser aproximadamente válida no mundo real o que implicaria que as massas dos quarks u("up"), d("down"), e s("strange") não fossem muito diferentes. O subgrupo $SU(2) \otimes SU(2)$ é uma simetria exata se $m_u = m_d = 0$. Uma vez que estas massas são muito próximas, os teoremas de baixa energia associados a este subgrupo devem mostrar pequenos desvios. Dado que as massas dos quarks seguintes c("charm"), b("bottom") e t("top") são bastante superiores às dos quarks u, d e s, não ocorrem evidências significativas para a simetria

$SU(4) \otimes SU(4)$ ou para uma simetria envolvendo um número mais elevado de sabores. A grandeza relativa de massa dos quarks pode dar informação das correções aos teoremas de baixa energia [69], através da amplitude de elementos de matriz da massa. Para quarks sem massa estes teoremas são exatos.

Neste contexto, espera-se que a QCD incorpore os resultados da conservação parcial da corrente axial (PCAC), e os teoremas de baixa energia, que lhe têm servido de teste [113], permitem avaliar se as estruturas de baixa energia são consistentes com a imagem de quebra de simetria quiral.

Os termos dominantes destas expansões de baixa energia são determinados por duas constantes: a constante de decaimento do píon (f_π) e o valor esperado da densidade escalar de quarks ($\langle \phi_o | \bar{\psi}_u \psi_u | \phi_o \rangle$) [78,110]. O valor esperado de $\bar{\psi}_u \psi_u$ determina basicamente as propriedades dos hádrons leves, como o demonstram análises baseadas nas Regras de Soma da QCD [72,73,114]. A título de exemplo, referimos que se os condensados de quarks não existissem, a massa do nucleon viria do termo de massa corrente dos quarks na Lagrangiana da QCD e seria da ordem de 10 MeV. Do mesmo modo, se a simetria não fosse quebrada espontaneamente, o vácuo da QCD seria perturbativo e observar-se-ia, no limite quiral $m_s = 0$, uma degenerescência entre os hádrons de paridade oposta. Por exemplo, as partículas a_1 e ρ seriam degeneradas. O valor observado para a diferença $m_{a_1} - m_\rho \simeq 400\ MeV$ é demasiado elevado para poder ser atribuído a massas correntes de quarks diferentes de zero. Trata-se de mais uma consequência da quebra de simetria quiral devido a efeitos não perturbativos, isto é, devido à formação de condensado de pares quark-antiquark ($q\bar{q}$).

Na seção seguinte vamos considerar com algum detalhe o sector SU(2) de sabor da teoria.

3.1.2 As Simetrias da QCD

A Lagrangiana da QCD tem uma elevada simetria. Apresentaremos abaixo aquelas que são simetrias exatas e aquelas que são aproximadas.

A física hadrônica de estados de energia intermediária no setor não estranho, os quais estão no intervalo MeV-GeV de energia, seriam descritos pela dinâmica dos quarks mais

leves, u e d. A densidade de Lagrangiana da QCD no sector SU(2) de sabor da teoria pode escrever-se como:

$$\mathcal{L}^{(2)}_{QCD} = \bar{\psi}_s(x)\,(i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - M_s)\,\psi_s(x) - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{G}^{\mu\nu}_a(x) \quad , \qquad a = 1,2,...,8 \tag{3.5}$$

onde

$$\psi_s(x) = \begin{pmatrix} \psi_u(x) \\ \psi_d(x) \end{pmatrix} \qquad\qquad M_s = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

sendo $\psi_u(x)$ e $\psi_d(x)$ os campos dos quarks u e d, respectivamente, e m_u e m_d as massas correntes correspondentes.

Quando as massas dos quarks são iguais, $m_u = m_d$, $\mathcal{L}^{(2)}_{QCD}$ é invariante sob uma rotação de isospin

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \quad , \qquad\qquad \alpha = constante \tag{3.6}$$

onde τ^a são as matrizes de isospin, geradores do grupo SU(2).

De acordo com a teoria de Noether [99], as correntes vetoriais

$$\vec{V}_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\psi(x) \tag{3.7}$$

são conservadas:

$$\partial^\mu \vec{V}_\mu(x) = 0 \ , \tag{3.8}$$

e as cargas associadas são dadas por

$$\vec{T} = \int d^3x\ \ \psi^\dagger(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\psi(x) \tag{3.9}$$

$\mathcal{L}^{(2)}_{QCD}$ possui também uma outra invariância de calibre no limite $m_u = m_d = 0$. Isto é, $\mathcal{L}^{(2)}_{QCD}$ é invariante sob a transformação axial

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\ \gamma_5\ \vec{\beta}\cdot\vec{\tau}/2}\ \psi(x) \quad , \qquad\qquad \beta = constante \tag{3.10}$$

As quantidades conservadas são as três correntes axiais

$$\vec{A}_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\psi(x) \tag{3.11}$$

isto é,

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu(x) = 0 \tag{3.12}$$

As correspondentes cargas são dadas por

$$\vec{Q}_A = \int d^3x \ \psi^\dagger(x) \ \gamma_5 \ \frac{\vec{\tau}}{2}\psi(x) \tag{3.13}$$

As cargas axiais e vetoriais obedecem às seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[T^a, T^b\right] &= i\epsilon^{abc}T^c \\ \left[T^a, Q^b_A\right] &= i\epsilon^{abc}Q^c_A \\ \left[Q^a_A, Q^b_A\right] &= i\epsilon^{abc}T^c \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde ϵ^{abc} são as constantes de estrutura (símbolo de Levi-Civita) do grupo SU(2).

Portanto, a densidade de Lagrangiana da QCD, no sector SU(2) de sabor da teoria, no limite em que as massas dos quarks são nulas, é invariante sob transformação quiral.

A simetria quiral $SU(2)\otimes SU(2)$ pode ser extensível à simetria $U(2)\otimes U(2)$. A simetria vetorial extra $U_V(1)$ corresponde à transformação

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\ \alpha}\psi(x) \quad , \qquad\qquad \alpha = constante \tag{3.15}$$

$\mathcal{L}^{(2)}_{QCD}$ é invariante sob esta transformação de fase. A corrente de Noether associada é dada por

$$V^o_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \tag{3.16}$$

com

$$\partial^\mu V^o_\mu(x) = 0 \tag{3.17}$$

e a carga associada é dada por

$$T^o \ = \ \int d^3x \ V^o_o(x) \tag{3.18}$$

O grupo $U_V(1)$ diz respeito a conservação do número bariônico.

Por outro lado a simetria axial $U_A(1)$ corresponde à transformação

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\ \beta\ \gamma_5}\ \psi(x)\ \ , \qquad\qquad \beta = constante \tag{3.19}$$

representa um problema sério. A quebra espontânea desta simetria conduziria, de acordo com o teorema de Goldstone, ao aparecimento de um méson pseudoescalar–isoescalar cuja massa teria de ser compatível com a dos píons ($N_f = 2$). O fato experimental da massa da partícula η ser muito maior que a dos píons torna esta hipótese inaceitável. Efetivamente, a simetria $U_A(1)$ é quebrada pelo termo de massa que também quebra a simetria $SU(2) \otimes SU(2)$. Segundo Weinberg [115], um bóson de Goldstone associado à quebra espontânea da simetria $U_A(1)$ teria, nestas condições, de ter uma massa menor que $\sqrt{3}m_\pi$. O problema foi resolvido por 't Hooft [116], que mostrou que devido a efeitos dos "instantons" , a quebra da simetria $U_A(1)$ não resultaria em manifestações físicas. Este assunto, de avançada complexidade, conhecido como problema $U_A(1)$, não será discutido neste trabalho.

3.1.3 Quebra Espontânea da Simetria Quiral, Bósons de Goldstone

Uma questão importante prende-se ao fato de saber sob que forma a simetria da Lagrangiana (3.5) se manifesta no estado do sistema. Para a QCD ser uma aproximação ao mundo real, o estado fundamental não pode ser simétrico relativamente ao grupo $SU(2) \otimes SU(2)$.

De fato, se o vácuo $|0\rangle$ verificasse as condições

$$\begin{aligned} T^a|0\rangle &= 0 \\ Q_A^a|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

a simetria quiral, do tipo manifesto [117], seria realizada segundo o modo de Wigner-Weyl (WW) e os multipletos de isospin deveriam ter pelo menos um par degenerado de paridade oposta.

Sabe-se que não são estas as propriedades do espectro de massa dos hádrons. Por conseguinte

$$Q_A^a|0\rangle \neq 0 \tag{3.21}$$

e o vácuo não é invariante sob o grupo $SU(2) \otimes SU(2)$ mas sob o subgrupo dos geradores isovetores SU(2). Isto implica que os estados hadrônicos devem ser classificados segundo a simetria SU(2). De acordo com o teorema de Coleman [101], " a simetria do vácuo é a simetria do mundo ".

A simetria quiral, espontaneamente quebrada, manifesta-se então dinamicamente no modo de Nambu–Goldstone (NG).

O Teorema de Goldstone [45] é aplicável à quebra espontânea de simetria quiral (veja sec.(2.3)).

No espaço a que nos referimos, os bósons de Goldstone estão associados com as cargas axiais e são os três hádrons pseudoescalares (π).

Resumindo, as simetrias associadas às cargas vetoriais não são quebradas espontaneamente: (i) não existem indícios de partículas escalares leves no espectro de mésons (as partículas mais leves do espectro com os mesmos números quânticos de um escalar têm uma massa superior ao do próton), (ii) há forte evidência para que a simetria do subgrupo $SU(2)$ seja a simetria normal do espectro de massa. Os hádrons ocorrem em multipletos (quase) degenerados que constituem a representação do subgrupo SU(2).

A generalização da simetria $SU(2) \otimes SU(2)$ a $SU(3) \otimes SU(3)$, incluindo a estranheza, parece mais questionável que a simetria $SU(2) \otimes SU(2)$. No espaço $SU(3)$ de sabor, teríamos os oitos hádrons leves (π, K, η) como bósons de Goldstone. As evidências experimentais para esta simetria são no entanto tênues [77].

3.1.4 Quebra Explícita da Simetria Quiral, Píons Físicos

Uma vez clarificada a questão de como se realiza a simetria quiral da QCD, vamos discutir as implicações da sua quebra explícita.

As partículas físicas com os números quânticos dos bósons de NG não são excitações

de massa nula e a simetria quiral deve ser quebrada explicitamente (isto é, perturbativamente) de modo que as correntes axiais não se conservem.

Centrando a nossa discussão da quebra explícita de simetria quiral no sector u e d, a simetria $SU(2) \otimes SU(2)$ não é verdadeiramente exata. No entanto, segundo Pagels [77], a violação desta simetria é da ordem de 7% neste sector. A esta conclusão não é alheio ao fato da massa dos referidos quarks ser pequena.

Isto pode ser formulado, ao nível dos quarks, através de termos do hamiltoniano com quebra de simetria, $\mathcal{H}'$, em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}'$ tais que, para $a = 1, 2, 3$,

$$[Q_5^a, \mathcal{H}_o] = 0 \ , \qquad [Q_5^a, \mathcal{H}'] \neq 0 \ , \tag{3.22}$$

$$\mathcal{H}' \to 0 \qquad \textit{no limite quiral.}$$

A corrente axial é conservada apenas parcialmente (PCAC). As consequências físicas da hipótese de PCAC estão diretamente associadas com o fato da massa do píon ser pequena.

A Álgebra de Correntes [78], as Teorias Quirais Perturbativas [69] e as Regras de Soma da QCD [70,72] fornecem, por exemplo, a relação

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -(m_u + m_d)\langle \phi_0 | \bar{\psi}_u \psi_u | \phi_0 \rangle \ , \tag{3.23}$$

usualmente conhecida por relação de Gell–Mann–Oakes–Renner (GMOR), que envolve a constante de decaimento do píon, f_π, e reflete o fato de $m_\pi \to 0$ quando $m_{u,d} \to 0$. Trata-se de outra forma segundo a qual a simetria quiral se manifesta. Dado que esta relação é válida no limite quiral, o desvio desta fórmula para a massa corrente dos quarks não nula pode ser usado como uma medida do abrandamento ("smoothness") do limite quiral. De fato, esta e outras relações estão em bom acordo com a experiência mostrando que os desvios da simetria quiral $SU(2) \otimes SU(2)$ são bastante pequenos.

Os presupostos da dinâmica quiral não são exclusivos da QCD, o qual levou à procura de modelos fenomenológicos que verifiquem esta característica. Nos últimos anos tem-se assistido a um crescente interesse em modelos efetivos em ligação com o problema do entendimento da quebra espontânea de simetria e as suas consequências para as propriedades

de hádrons de baixa energia. O Modelo de NJL é talvez o melhor modelo em que a ligação com a QCD se manifesta mais diretamente a este nível, já que os mecanismos subjacentes em ambos os modelos são, segundo se supõe, do mesmo tipo.

Por outra parte, é bem conhecido que importantes propriedades da interação N-N podem ser compreendidos em termos de trocas de mésons. Essa compreensão não só é restringida aos aspectos qualitativos do problema, mas também, é em grande medida quantitativa e precisa. Atualmente acredita-se que nucleons e mésons são formados por quarks. Assim, uma descrição da interação N-N em termos de troca de mésons pode ser vista como uma representação efetiva de um processo mais fundamental. Entretanto, a qualidade dessa descrição vai depender do nível de compatibilidade que guarde com uma abordagem em termos fundamentais.

O Modelo σ-Linear é um modelo efetivo que satisfaz os pressupostos da dinâmica quiral. Talvez no futuro seja considerado um dos melhores modelos que conecta a QCD com a Física Nuclear.

3.2 O Modelo Sigma Linear

O Modelo σ-Linear é o resultado dos estudos realizados por J.Schwinger [31], J.C. Polkingorne [35], e M.Gell-Mann e M.Lèvy [15], na tentativa de achar uma teoria que desse conta das Interações Fortes. Ele foi construido renormalizável e proposto como um dos possíveis modelos que permite obter a Relação de Goldberger-Treimann para a taxa de decaimento do píon.

No presente é considerado como um modelo efetivo de nucleons e mésons com a característica crucial de que a sua Lagrangiana satisfaz os pressupostos da dinâmica quiral.

3.2.1 A Lagrangiana do Modelo Sigma Linear

De acordo com Gell–Mann e Lèvy [15] a densidade de Lagrangiana do Modelo σ–Linear é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_q(x) \tag{3.24}$$

onde $\mathcal{L}_s(x)$ é a parte simétrica quiral $SU(2) \otimes SU(2)$, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s(x) \quad = \quad & \bar{N}_o \, i\gamma^\mu \partial_\mu \, N_o + \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \sigma_o \partial^\mu \sigma_o + \partial_\mu \vec{\pi}_o \partial^\mu \vec{\pi}_o \right] + \\ & - \frac{\mu_o^2}{2} \left(\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2 \right) - \frac{\lambda_o}{4} \left(\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2 \right)^2 - G_o \bar{N}_o \left(\sigma_o + i\gamma_5 \vec{\tau} . \vec{\pi}_o \right) N_o \end{aligned} \tag{3.25}$$

e $\mathcal{L}_q(x)$ é a parte responsável da não conservação da corrente axial, dada por

$$\mathcal{L}_q(x) = \; c_o \; \sigma_o \tag{3.26}$$

Nas expressões acima, $N_o = N_o(x)$ é um campo isodubleto fermiônico representando um nucleon pontual, $\vec{\pi}_o = \vec{\pi}_o(x)$ é um tripleto de píons e $\sigma_o = \sigma_o(x)$ um campo escalar iso-escalar representando o méson σ. $\vec{\tau}$ são matrices de Pauli de isospin, μ_o , λ_o e G_o são constantes de acoplamento. c_o é o parâmetro que determina a intensidade da quebra de simetria no modelo, e como veremos logo, está relacionado à massa do píon.

3.2.2 A Parte Simétrica Quiral da Lagrangiana

A densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_s$ é invariante quiral. Do ponto de vista da Teoria de Grupos, esta realização linear da Simetria Quiral é fundamental, na medida em que corresponde à representação $(1/2, 1/2)$ de $SU(2) \otimes SU(2)$. Vamos a mostrar, com algum detalhe, estas afirmações.

Por rotações de isospin, o "nucleon" se transforma como

$$N_o \xrightarrow{V} e^{-i \, \vec{\alpha} . \vec{\tau}/2} \, N_o \quad , \qquad \vec{\alpha} = constante \tag{3.27}$$

e por rotações axiais

$$N_o \xrightarrow{A} e^{-i\,\gamma_5\,\vec{\beta}.\vec{\tau}/2}\,N_o \quad , \qquad \vec{\beta} = constante \tag{3.28}$$

onde $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli, geradores do grupo SU(2).

No caso em que $\alpha, \beta << 1$, as variações no campo do nucleon são dadas por

$$\begin{aligned} \delta^V N_o &= \frac{i}{2}\,\vec{\alpha}.\vec{\tau}\,N_o \\ \delta^A N_o &= -\frac{i}{2}\,\gamma_5\,\vec{\beta}.\vec{\tau}\,N_o \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para as variações (vetorial e axial) dos campos mesônicos temos (veja eq.(2.112)):

$$\begin{aligned} \delta^V\vec{\pi}_o &= -\vec{\alpha}\wedge\vec{\pi}_o & \qquad \delta^V\sigma_o &= 0 \\ \delta^A\vec{\pi}_o &= \vec{\beta}\sigma_o & \qquad \delta^A\sigma_o &= -\vec{\beta}.\vec{\pi}_o \end{aligned} \tag{3.30}$$

As transformações de isospin (vetoriais) nos campos, induzem a seguinte variação na Lagrangiana $\mathcal{L}_s$

$$\delta^V\mathcal{L}_s = -\partial^\mu\vec{\alpha}\;.\;\left[\bar{N}_o\,\frac{1}{2}\gamma_\mu\vec{\tau}\,N_o + \vec{\pi}_o\wedge\partial_\mu\vec{\pi}_o\right] \tag{3.31}$$

Logo, a corrente vetorial é dada por (veja eq.(2.29)):

$$\vec{V}_\mu = \bar{N}_o\,\frac{1}{2}\gamma_\mu\vec{\tau}\,N_o + \vec{\pi}_o\wedge\partial_\mu\vec{\pi}_o \tag{3.32}$$

a qual é conservada (veja eq.(2.30))

$$\partial^\mu\vec{V}_\mu = 0 \tag{3.33}$$

e as cargas associadas são dadas por

$$\vec{T} \;=\; \int d^3x\;\vec{V}_o(x) \tag{3.34}$$

Devido às transformações axiais nos campos, a correspondente variação de $\mathcal{L}_s$ é dada por

$$\delta^A \mathcal{L}_s = -\partial^\mu \vec{\beta} \; . \; \left[-\bar{N}_o \; \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \; N_o + \vec{\pi}_o \partial_\mu \sigma_o - \sigma_o \partial_\mu \vec{\pi}_o \right] \tag{3.35}$$

Logo, para a corrente axial temos

$$\vec{A}_\mu = -\bar{N}_o \; \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \; N_o + \vec{\pi}_o \partial_\mu \sigma_o - \sigma_o \partial_\mu \vec{\pi}_o \tag{3.36}$$

a qual é conservada

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = 0 \tag{3.37}$$

e as cargas associadas correspondentes são dadas por

$$\vec{Q}_A = \int d^3x \; \vec{A}_o(x) \tag{3.38}$$

As cargas axiais e vetoriais obedecem às seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[T^a, T^b \right] &= i \epsilon^{abc} T^c \\ \left[T^a, Q^b_A \right] &= i \epsilon^{abc} Q^c_A \\ \left[Q^a_A, Q^b_A \right] &= i \epsilon^{abc} T^c \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde ϵ^{abc} são as constantes de estrutura (símbolo de Levi-Civita) do grupo SU(2).

Portanto, a densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_s$ é invariante quiral.

Definimos agora as combinações esquerda e direita dos campos fermiônicos como

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) N_o \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) N_o \end{aligned} \tag{3.40}$$

e, por conveniência, o operador U

$$U = (\sigma_o + i\ \vec{\tau}.\vec{\pi}_o) \tag{3.41}$$

Estas definições permitem escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \ &= \ \bar{\psi}_R\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi_R + \bar{\psi}_L\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi_L - G_o\, \bar{\psi}_L U \psi_R - G_o\, \bar{\psi}_R U \psi_L + \\ &+ \frac{1}{4}\, Tr\ \left[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger\right] \ - \ \frac{\lambda_o}{16}\, Tr\ \left[U\ U^\dagger - \alpha^2\right]^2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

com

$$\alpha^2 \equiv -\frac{\mu_o^2}{\lambda_o} \tag{3.43}$$

e o traço sendo tomado com respeito as matrizes τ.

Se (A,B) é um elemento de $SU(2) \otimes SU(2)$ com A e B variando independentemente é permitido fazer a transformação

$$U \rightarrow B\ U\ A^{-1} \tag{3.44}$$

a qual conduz a campos σ_o e $\vec{\pi}_o$ reais.

Logo, se simultaneamente se realizam as rotações isospinoriais

$$\begin{aligned} \psi_R \ &\rightarrow \ A\ \psi_R \\ \\ \psi_L \ &\rightarrow \ B\ \psi_L \end{aligned} \tag{3.45}$$

pode-se rapidamente mostrar a invariancia total da Lagrangiana (eq.(3.42)).

A chamada transformação à direita, corresponde a escolha

$$\begin{aligned} A \ &= \ e^{-i\ \vec{\alpha}.\vec{\tau}/2} \\ B \ &= \ 1 \end{aligned}$$

Assim, neste caso o campo ψ_L permanece invariante. Para uma transformação infinitesimal, os campos tornam-se

$$\begin{aligned} N_o &\rightarrow N_o - \frac{i}{4}\,(1+\gamma_5)\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{\tau}\,N_o \\ \sigma_o &\rightarrow \sigma_o - \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{\pi}_o \\ \vec{\pi}_o &\rightarrow \vec{\pi}_o + \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,\sigma_o + \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\wedge\vec{\pi}_o \end{aligned} \tag{3.46}$$

Logo, a corrente à direita, associada a rotação à direita, é dada por

$$\vec{J}^{\mu}_R = \frac{1}{2}\,(\,\vec{V}^{\mu} + \vec{A}^{\mu}\,) \tag{3.47}$$

onde $\vec{V}^{\mu}$ e $\vec{A}^{\mu}$ são as correntes vetorial e axial definidas em eq.(3.32) e eq.(3.36), respectivamente.

De forma análoga, define-se a transformação à esquerda, mediante a escolha:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= e^{-i\,\vec{\alpha}.\vec{\tau}/2} \end{aligned}$$

e agora é o campo ψ_R que permanece invariante. Para uma transformação a esquerda infinitesimal, os campos tornam-se

$$\begin{aligned} N_o &\rightarrow N_o - \frac{i}{4}\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{\tau}\,(1-\gamma_5)\,N_o \\ \sigma_o &\rightarrow \sigma_o + \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{\pi}_o \\ \vec{\pi}_o &\rightarrow \vec{\pi}_o - \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,\sigma_o + \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\wedge\vec{\pi}_o \end{aligned} \tag{3.48}$$

e a corrente à esquerda, associada à rotação à esquerda, é

$$\vec{J}^{\mu}_L = \frac{1}{2}\,(\,\vec{V}^{\mu} - \vec{A}^{\mu}\,) \tag{3.49}$$

Assim, as correspondentes variações infinitesimais são geradas pelas cargas quirais direita e esquerda:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_R &= \frac{1}{2}\,(\,\vec{T} + \vec{Q}_A\,) \\ \vec{Q}_L &= \frac{1}{2}\,(\,\vec{T} - \vec{Q}_A\,) \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $\vec{T}$ e $\vec{Q}_A$ são as cargas vetorial e axial dadas pelas eqs.(3.34) e (3.38) respectivamente.

As relações de comutação das cargas com os campos são:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{Q}_R\ ,\ \psi_R\right] &= -\frac{1}{2}\vec{\tau}\psi_R & \left[\vec{Q}_L\ ,\ \psi_R\right] &= 0 \\
\left[\vec{Q}_R\ ,\ \psi_L\right] &= 0 & \left[\vec{Q}_L\ ,\ \psi_L\right] &= -\frac{1}{2}\vec{\tau}\psi_L \\
\left[\vec{Q}_R\ ,\ U\right] &= \frac{1}{2}U\,\vec{\tau} & \left[\vec{Q}_L\ ,\ U\right] &= -\frac{1}{2}\vec{\tau}\,U
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Portanto, $\mathcal{L}_s$ é invariante com relação a um grupo quiral $SU(2)\otimes SU(2)$ que atua transformando os campos ψ_R e ψ_L de acordo com as representações (1/2,0) e (0,1/2) respectivamente. No entanto, o conjunto $(\sigma_o, \vec{\pi}_o)$ pertence à representação (1/2,1/2).

A Álgebra de Lie $SU(2)\otimes SU(2)$ é isomorfa a $O(4)$; e $(\sigma_o, \vec{\pi}_o)$ transforma-se como um vetor do grupo O(4).

3.2.3 A Quebra Explícita da Simetria Quiral

$\mathcal{L}_q(x)$ é a parte responsável pela não conservação da corrente axial. As variações desse termo são dadas por

$$\begin{aligned}
\delta^V\mathcal{L}_q &= c_o\,\delta^V\sigma_o = 0 \\
\delta^A\mathcal{L}_q &= c_o\,\delta^A\sigma_o = -c_o\vec{\beta}.\vec{\pi}_o
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Assim, a corrente vetorial continua sendo conservada

$$\partial^\mu\vec{V}_\mu = 0 \tag{3.53}$$

no entanto, a divergência da corrente axial aparece, agora, proporcional ao campo do píon

$$\partial^\mu\vec{A}_\mu = c_o\,\vec{\pi}_o \tag{3.54}$$

Portanto, este modelo incorpora todas as características desejáveis. Satisfaz CVC e a divergência da corrente axial aparece naturalmente proporcional ao campo do píon, o que é um bom indicio para que seja satisfeita PCAC.

O fato de $\mathcal{L}$ ser linear em σ_o implica que o campo σ_o tem um valor esperado no vácuo não nulo. Isto pode ser visto a partir da equação de movimento para o campo σ_o

$$(\partial^2 + \mu_o^2)\sigma_o = c_o - \lambda_o\ \sigma_o\ (\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2) - G_o\bar{N}_o\ N_o \tag{3.55}$$

No vácuo, todos os campos não podem ter um valor esperado nulo, a menos que c_o seja zero. Supondo que o campo do nucleon e o campo do píon sejam campos puramente quânticos, a equação acima admite como solução um valor constante do campo σ_o no vácuo, v_o :

$$\mu_o^2 v_o = c_o - \lambda_o\ v_o^3 \tag{3.56}$$

Assim, a função espaço–temporal determinada pela dinâmica do problema é o campo s_o dado por

$$s_o\ =\ \sigma_o - v_o \tag{3.57}$$

com

$$\langle s_o\rangle_o\ =\ 0 \qquad ; \qquad \langle\sigma_o\rangle_o =\ v_o \tag{3.58}$$

Ou seja, o campo s_o é a parte quântica do campo σ_o, enquanto que v_o representa o seu valor esperado no vácuo.

A densidade de Lagrangiana (eq.(3.24)) pode ser expressa em termos do campo s_o , como:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_f(x) + \mathcal{L}_i(x) + \left(c_o - v_o\mu_\pi^2\right) s_o \tag{3.59}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f &= \bar{N}_o\,(i\ \not{\partial} - m_o)\,N_o + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu s_o)^2 - \mu_\sigma^2 s_o^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\vec{\pi}_o)^2 - \mu_\pi^2\vec{\pi}_o^2\right] \\
\mathcal{L}_i &= -\lambda_o v_o\left(s_o^2 + \vec{\pi}_o^2\right)\ s_o - \frac{\lambda_o}{4}\left(s_o^2 + \vec{\pi}_o^2\right)^2 - G_o\bar{N}_o\,(s_o + i\gamma_5\vec{\tau}.\vec{\pi}_o)\,N_o
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde foram definidos os parâmetros

$$\begin{aligned} m_o &= G_o v_o \\ \mu_\pi^2 &= \mu_o^2 + \lambda_o v_o^2 \\ \mu_\sigma^2 &= \mu_o^2 + 3\lambda_o v_o^2 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para que a densidade de Lagrangiana (eq.(3.59–60)) represente o "nucleon", os píons e o sigma, os parâmetros definidos em eq.(3.61) devem ser parâmetros de massa para o qual deve verificarse $\langle s_o \rangle = 0$ (eq.(3.58)). O melhor caminho que pode seguir-se é implementar esta condição perturbativamente requerendo que os diagramas "tadpcle" para a transição [$s_o \rightarrow$ vácuo] se anulem (Fig. 3.1). A aproximação de Born a esta condição é

$$c_o = v_o \mu_\pi^2 \tag{3.62}$$

e assim desaparece o último termo na expressão (3.59).

Neste caso obtemos

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_f(x) + \mathcal{L}_i(x) \tag{3.63}$$

com $\mathcal{L}_f(x)$ e $\mathcal{L}_i(x)$ dadas pelas expressões (3.60).

Fig.3.1: Diagrama "tadpole" para a transição $s_o \rightarrow$ vácuo.

A expressão para a corrente axial agora adquire a forma

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = v_o \ \mu_\pi^2 \ \vec{\pi}_o \tag{3.64}$$

3.2.4 A Restauração da Simetria Quiral

O fato de ter $\langle\sigma_o\rangle_o \neq 0$ tem consequências muito interessantes. A partir das expressões (3.61) e (3.64) temos que

$\star$ as massas mesônicas deixam de ser degeneradas:

$$\mu_\sigma^2 \; - \; \mu_\pi^2 \; = \; 2 \; \lambda_o \; v_o^2 \tag{3.65}$$

$\star$ a componente clássica do campo σ_o gerou um termo de massa para o nucleon:

$$m_o \quad = \quad G_o \; v_o \tag{3.66}$$

$\star$ a divergência da corrente axial é proporcional ao campo do píon:

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = v_o \; \mu_\pi^2 \; \vec{\pi}_o \tag{3.67}$$

Quando $c_o \rightarrow 0$, duas situações podem emergir (veja eq.(3.62)). Uma possibilidade é que $v_o \rightarrow 0$; neste caso recobramos

$$\mu_\sigma^2 \; = \; \mu_\pi^2 \quad , \qquad m_o \; = \; 0 \quad , \qquad \partial^\mu \vec{A}_\mu \; = \; 0 \tag{3.68}$$

o qual é um indicio de que estamos em presença de uma simetria convencional, do tipo Wigner-Weyl. Observe-se que neste caso não é possível ter nucleons massivos, pois se se tenta incluir na densidade de Lagrangiana (eq.(3.25)) um termo de massa para o nucleon teria por consequência que a divergência da corrente axial seria proporcional à massa do nucleon em contradição com PCAC. Assim, no modo de Wigner-Weyl de realização de simetria quiral a simetria é exata no limite em que os nucleons tem massa nula.

Não obstante, a expressão (3.62) mostra que também é possível termos uma situação simétrica no caso em que $\mu_\pi^2 = 0$, ou seja (veja eq.(3.61))

$$\mu_\pi^2 = \mu_o^2 + \lambda_o v_o^2 = 0 \tag{3.69}$$

ou

$$\lambda_o = - \frac{\mu_o^2}{v_o^2} \tag{3.70}$$

Dado que λ_o é um parâmetro de amortecimento ($\lambda_o > 0$), então a eq.(3.70) pode ser satisfeita se o parâmetro de interação μ_o^2 for negativo

$$\mu_o^2 < 0 \tag{3.71}$$

Assim, surge uma possibilidade alternativa quando $\mu_o^2 < 0$. A simetria é obtida quando a massa do píon é nula (eq.(3.69)), e estamos no modo de Nambu-Goldstone de realização de simetria quiral (veja Sec. 2.3.3).

A Lagrangiana não é explicitamente simétrica, pois o méson σ tem massa e os píons não tem. Entretanto o fato de ter $\langle\sigma_o\rangle_o \neq 0$ compensa, de algum modo, a falta de simetria explícita da Lagrangiana permitindo o surgimento de uma corrente conservada, que indica a existência de uma simetria subjacente.

É exatamente a existência do modo de N-G que torna o Modelo σ particularmente interessante. Nesta fase o modelo pode ser usado para deduzir os teoremas de baixa energia para espalhamento $\pi - \pi$ e $\pi - N$.

3.2.5 O Vácuo no Modelo σ-Linear

O modo de realização de uma simetria depende fortemente do comportamento do vácuo. No Modelo σ-Linear temos (veja eq.(3.58)):

$$\langle\sigma_o\rangle_o = v_o \neq 0 \tag{3.72}$$

pelo que se diz que o campo σ_o tem uma parte clássica v_o e uma parte quântica s_o.

Apresentaremos quais as consequências desta característica. Para simplificar o tratamento, nesta seção omitiremos os campos fermiônicos. Um tratamento completo não revela nenhuma nova dificuldade.

O potencial efetivo obtido a partir da densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_s(x)$ (eq.(3.25), sem incluir aos nucleons) pode ser escrito como

$$V = \frac{\lambda_o}{4} \left[\left(\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2\right) - \alpha^2 \right]^2 - \frac{\lambda_o \, \alpha^4}{4} \tag{3.73}$$

onde

$$\alpha^2 \equiv - \frac{\mu_o^2}{\lambda_o} \tag{3.74}$$

Escrevendo o campo do píon em coordenadas polares, $\vec{\pi}_o = \pi_o \hat{\pi}_o$, onde π_o é o módulo do campo e $\hat{\pi}_o$ é o versor indicando a direção e o sentido do campo no espaço de isospin, o mínimo de energia potencial é obtido fazendo

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_o} = \frac{\partial V}{\partial \sigma_o} = 0 \tag{3.75}$$

o qual conduz a

$$\begin{cases} \lambda_o \, \pi_o \, [\, (\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2) \, - \, \alpha^2 \,] \, = \, 0 \\ \\ \lambda_o \, \sigma_o \, [\, (\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2) \, - \, \alpha^2 \,] \, = \, 0 \end{cases} \tag{3.76}$$

Se $\alpha^2 < 0$, o mínimo do potencial V ocorre no ponto $\sigma_o = \pi_o = 0$, como mostra a Fig.(3.2).

Neste caso, devido a que a componente clássica de cada um dos campos é nula, os campos que figuram na densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_s$ são puramente quânticos. Logo, os coeficientes dos termos quadráticos dos campos podem ser interpretados como sendo suas massas. Como todos os mésons apresentam a mesma massa μ_o, pode-se concluir que se está no modo Wigner-Weyl de realização da simetria.

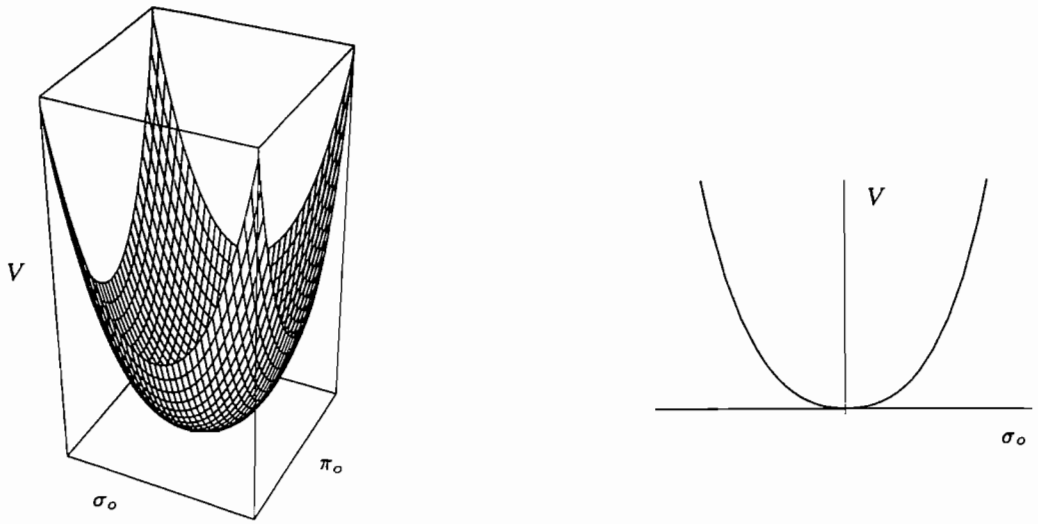


Fig. 3.2 : $V = V(\sigma_o, \pi_o)$ para $\alpha^2 < 0$

Se $\alpha^2 > 0$, o mínimo é degenerado, ocorrendo em qualquer ponto da circunferência $\sigma_o^2 + \pi_o^2 = \alpha^2$, como mostra a Fig.(3.3) A quantização do sistema deve ser feita em torno do vácuo, o qual corresponde à circunferência de raio α, localizado no plano de energia potencial

$$V = -\frac{\mu_o^4}{4\,\lambda_o} \tag{3.77}$$

O fato do vácuo ser degenerado significa que existem muitas maneiras de se introduzirem os campos quânticos. A escolha de um deles como estado fundamental conduz a uma quebra espontânea da simetria quiral. Este caso corresponde ao modo Nambu-Goldstone de realização da simetria (veja Sec. 2.2.4).

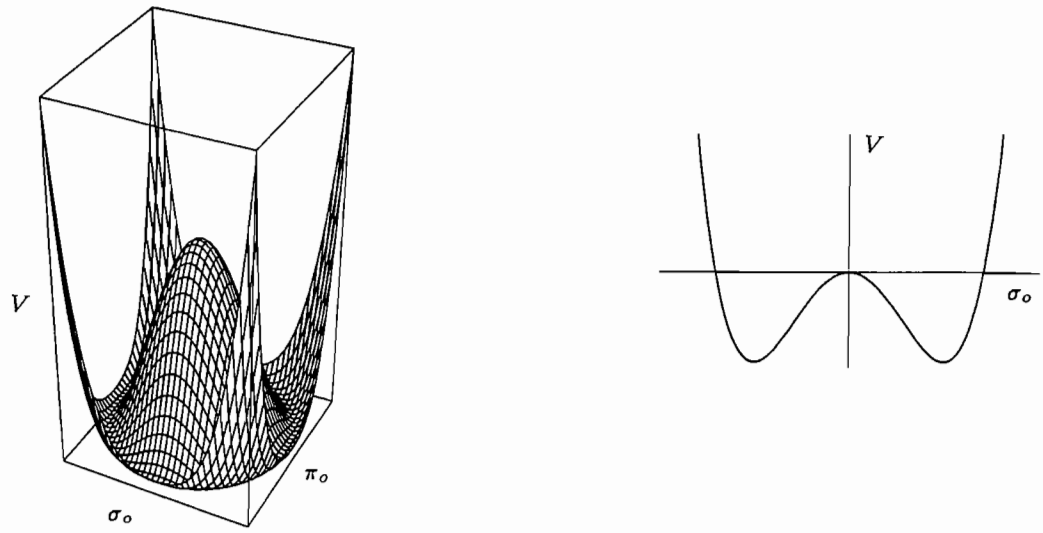


Fig. 3.3 : $V = V(\sigma_o, \pi_o)$ para $\alpha^2 > 0$

O tipo de ambiguidade que surge devido às muitas possíveis maneiras de se introduzir os campos quânticos, desaparece quando se introduz um termo de quebra de simetria na Lagrangiana, pois este faz com que uma das direções seja privilegiada em relação às demais.

Por exemplo, a introdução do termo $c_o\,\sigma_o$ conduz a

$$V = \frac{\lambda_o}{4}\,\left[\,(\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2)\;-\;\alpha^2\,\right]^2 - \frac{\lambda_o\,\alpha^4}{4} - c_o\,\sigma_o \tag{3.78}$$

A condição que a energia potencial seja mínima (eq.(3.75)) conduz a

$$\begin{cases} \lambda_o \, \pi_o \, [\, (\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2) \, - \, \alpha^2 \,] & = \; 0 \\ \\ \lambda_o \, \sigma_o \, [\, (\sigma_o^2 + \vec{\pi}_o^2) \, - \, \alpha^2 \,] - c_o & = \; 0 \end{cases} \tag{3.79}$$

A primeira das equações acima (correspondendo à minimização em relação ao campo do píon) nos garante que a componente clássica do campo π_o é nula

$$\langle \, \pi_o \, \rangle_o \; = \; 0 \tag{3.80}$$

Usando essa condição na segunda das equações (3.79), obtém-se a equação que deve satisfazer o campo σ_o:

$$\lambda_o \, \sigma_o \, \left[\, \sigma_o^2 \, - \, \alpha^2 \, \right] - c_o \; = \; 0 \tag{3.81}$$

a qual é uma equação cúbica que pode ser resolvida pelos métodos tradicionais. Não obstante, devido ao fato que o parâmetro c_o é pequeno, pode-se usar uma solução aproximada.

Se c_o fôsse zero, a solução seria $\sigma_o \; = \; \pm\alpha$. Tenta-se então, soluções da forma

$$\sigma_{o\,+} \; = \; \alpha \; + \; \beta_+ \, c_o \qquad , \qquad \sigma_{o\,-} \; = \; -\alpha \; + \; \beta_- \, c_o \tag{3.82}$$

Substituindo essas expressões na eq.(3.81) e desprezando ordens superiores a linear em c_o, obtem-se

$$\beta_+ \; = \; + \, \frac{1}{2 \, \alpha^2 \, \lambda_o} \qquad , \qquad \beta_- \; = \; - \, \frac{1}{2 \, \alpha^2 \, \lambda_o} \tag{3.83}$$

Logo

$$\sigma_{o\,+} \; = \; \alpha \; + \; \frac{c_o}{2 \, \alpha^2 \, \lambda_o} \qquad , \qquad \sigma_{o\,-} \; = \; -\alpha \; - \; \frac{c_o}{2 \, \alpha^2 \, \lambda_o} \tag{3.84}$$

Substituindo essos resultados na expressão do potencial V, e desprezando ordens superiores, temos

$$V_\pm \; = \; - \, \frac{\lambda_o \, \alpha^4}{4} \; \mp \; c_o \, \alpha \tag{3.85}$$

Assim, o efeito do termo de quebra da simetria é inclinar a curva da Fig.(3.3), a qual agora apresenta a forma mostrada na Fig.(3.4).

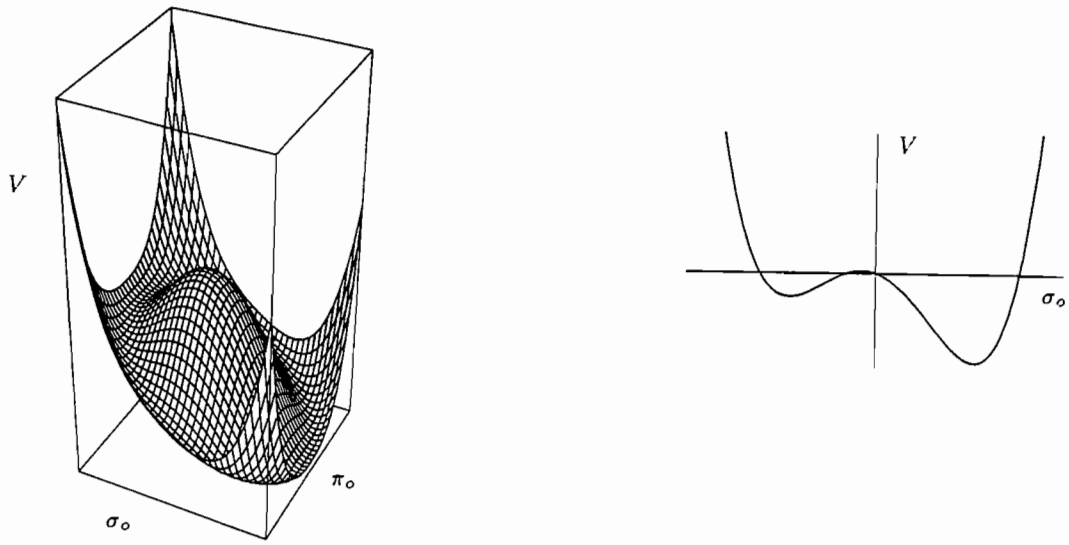


Fig. 3.4 : $V = V(\sigma_o, \pi_o)$ quando é introducido um termo de quebra na Lagrangiana

O mínimo do potencial corresponde a V_+, e o sistema agora apresenta um único vácuo. O vácuo determina, então, a parte clássica do campo σ_o, que é dada por

$$v_o \simeq \sigma_{o+} = \sqrt{-\frac{\mu_o^2}{\lambda_o}} - \frac{c_o}{2\,\mu_o^2} \tag{3.86}$$

O campo quântico é então dado por

$$s_o = \sigma_o - v_o \tag{3.87}$$

e a densidade de Lagrangiana é dada pela expressão (3.63) com

$$\langle\, \sigma_o \,\rangle_o = v_o \qquad , \qquad \langle\, s_o \,\rangle_o = \langle\, \pi_o \,\rangle_o = 0 \tag{3.88}$$

Substituindo a expressão para v_o dada na eq.(3.86) na expressão para a massa do píon (eq.(3.61)), obtém-se

$$\mu_\pi^2 \simeq -\,c_o\,\frac{1}{\mu_o^2}\sqrt{-\frac{\mu_o^2}{\lambda_o}} \tag{3.89}$$

E portanto, a constante de quebra de simetria c_o é proporcional a massa do píon. Assim, a simetria torna-se exata quando $\mu_\pi^2 \to 0$

3.2.6 Sobre a Renormalização do Modelo σ-Linear

Uma característica importante do Modelo σ-Linear é a propriedade de ser renormalizável.

O primeiro esquema de renormalização para o modelo sem nucleons foi formulado por B.W.Lee [60]. Seguindo a mesma linha J.L.Gervais e B.W.Lee [60] propõem uma geralização para incluir os nucleons. Nestes trabalhos eles mostram que o modelo pode ser feito finito renormalizando somente os acoplamentos os quais aparecem na Lagrangiana invariante sob transformação quiral, $\mathcal{L}_s$, mesmo na presença do termo de quebra da simetria, e que respeitando esta propriedade, a condição PCAC é preservada na teoria renormalizada.

Seguindo a estruturação estabelecida por Gervais e Lee, J.A.Mignacco e E.Remiddi [118] formulam explicitamente o problema da renormalização e obtém fórmulas para as quantidades físicas relevantes, assim como para as constantes de renormalização na aproximação "one-loop".

Um esquema diferente para a renormalização do modelo com nucleons foi proposto por D.Bessis e G.Turchetti [16]. Eles seguem o método proposto por Symanzik [59] na renormalização de uma Lagrangiana Simétrica O(n) com quebra linear para bósons, no qual a ferramenta básica é o uso das Identidades de Ward-Takahaski, as quais permitem estabelecer relações algébricas entre as constantes de subtração das funções de Green divergentes da teoria. Assim, partindo de uma Lagrangiana invariante sob SU(2), as relações obtidas a partir das Identidades de Ward-Takahaski compatíveis com a condição PCAC permitem-lhes reduzir o número de parâmetros independentes de renormalização ao mesmo número de parâmetros arbitrários que contém a teoria não renormalizada (a saber, quatro). Eles realizam a renormalização explícita a ordem "one-loop" das funções de Green divergentes da teoria.

No próximo capítulo apresentaremos as características gerais deste procedimento sob o qual está baseado a nosso esquema de regularização.

A Lagrangiana Renormalizada

Introduzindo na teoria quantidades renormalizadas através de

$$N_o = \sqrt{Z_F}\, N_r \tag{3.90}$$

$$(s_o, v_o, \vec{\pi}_o) = \sqrt{Z_B}(s_r, v_r, \vec{\pi}_r) \tag{3.91}$$

$$\mu_o^2 = \frac{1}{\sqrt{Z_B}} (\mu_r^2 + \delta\mu_r^2) \tag{3.92}$$

$$G_o = \frac{Z_g}{Z_F\sqrt{Z_B}}\, G_r \tag{3.93}$$

$$\lambda_o = \frac{Z_l}{Z_B^2}\, \lambda_r \tag{3.94}$$

encontra-se que estas são suficentes para remover todos os infinitos, tanto da teoria simétrica como da teoria com quebra espontânea de simetria.

Na teoria simétrica, o fato de que tanto os píons como os sigmas são renormalizados através da mesma constante Z_B, está manifestando que na teoria renormalizada os mésons permanecem degenerados em massa. Observe-se também que, como consequência da invariância quiral não existe termo de massa para o nucleon e portanto não é necessário incorporar termos nem contratermos de massa para este no processo de renormalização.

Como apontamos antes, Lee e Gervais demonstram que o mesmo programa de renormalização deve ser aplicado à teoria com quebra espontânea de simetria, já que o mesmo é suficente para tornar a teoria finita e preserva a condição PCAC. O método utilizado por D.Bessis e G.Turquetti para renormalizar às funções de Green divergentes é puramente subtractivo, e tais subtrações estão condicionadas pelas Identidades de Ward-Takahaski compatíveis com PCAC. Uma análise das expressões obtidas por eles mostra que o programa de renormalização é ditado pelas eq. (3.90–94).

Consideremos com mais detalhe o caso de simetria quebrada.

A Lagrangiana σ-linear em termos do campo transladado s_o (eqs.(3.63) e (3.60)), pode ser re-escrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) &= \bar{N}_r \left(i \not{\partial} - v_r G_r Z_g - G_r Z_g \left(s_r + i\gamma_5 \vec{\tau}.\vec{\pi}_r\right) + i(Z_F - 1) \not{\partial}\right) N_r \\
&+\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu s_r)^2 - (\mu_r^2 + \delta\mu_r^2 + 3Z_l\lambda_r v_r^2)s_r^2 + (Z_B - 1)(\partial_\mu s_r)^2\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \vec{\pi}_r)^2 - (\mu_r^2 + \delta\mu_r^2 + Z_l\lambda_r v_r^2)\vec{\pi}_r^2 + (Z_B - 1)(\partial_\mu \vec{\pi}_r)^2\right] \\
&-\lambda_r v_r Z_l \left(s_r^2 + \vec{\pi}_r^2\right)\ s_r - \frac{1}{4}\ Z_l\lambda_r \left(s_r^2 + \vec{\pi}_r^2\right)^2
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

Em particular, observe-se que o fato de ter todos os mésons renormalizados pela mesma quantidade $\sqrt{Z_B}$ conduz a que o acoplamento com os nucleons é o mesmo para píons e para mésons σ, que os acoplamentos de 3-mésons são os mesmos (a menos dos respectivos coeficientes de Clebsch-Gordan) para as combinações $\pi\pi\sigma$ e $\sigma\sigma\sigma$ e o mesmo acontece com os acoplamentos de 4-mésons para as várias combinações $\pi\pi\pi\pi, \pi\pi\sigma\sigma, \sigma\sigma\sigma\sigma$.

Note-se também que a massa do nucleon e os dois vértices méson-nucleon são renormalizados por meio da mesma constante de renormalização Z_g, enquanto que as massas dos mésons e todas as constantes de acoplamento entre mésons são renormalizadas por meio de somente duas constantes Z_l e $\delta\mu_r^2$. Ademais, temos Z_F e Z_B para a renormalização dos campos do nucleon e dos mésons, respectivamente.

A Prescrição de renormalização

Para levar a cabo o procedimento de renormalização é necessário distinguir a parte livre e os contratermos na eq.(3.95). Definindo as massas físicas do nucleon, do píon e do sigma através

$$
\begin{aligned}
m &= G_r v_r + \ \ldots \\
m_\pi^2 &= \mu_r^2 + \lambda_r v_r^2 + \ \ldots \\
m_\sigma^2 &= \mu_r^2 + 3\lambda_r v_r^2 + \ \ldots
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

onde os pontos denotam termos de ordem superior nas constantes de acoplamento (a $G_r v_r$ e $\lambda_r v_r^2$ fixos), logo as quantidades

$$
\begin{aligned}
\delta m &\equiv G_r v_r Z_g - m \\
\delta m_\pi^2 &= \mu_r^2 + \delta\mu_r^2 + Z_l\lambda_r v_r^2 - m_\pi^2
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

$$\delta m_\sigma^2 \;=\; \mu_r^2 + \delta\mu_r^2 + 3Z_l\lambda_r v_r^2 - m_\sigma^2$$

as quais são de ordem superior nas constantes de acoplamento e tendem a zero quando G_r , $\lambda_r \to 0$, podem ser interpretadas como contratermos da Lagrangiana.

Com estas definições a eq.(3.95) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) \;=\;& \bar{N}_r \left(\underline{i\ \not\partial - m} - G_r Z_g \left(s_r + i\gamma_5 \vec{\tau}.\vec{\pi}_r\right) + i(Z_F - 1)\ \not\partial - \delta m\right) N_r \\
&+\frac{1}{2}\left[\underline{(\partial_\mu s_r)^2 - m_\sigma^2 s_r^2} + (Z_B - 1)\,(\partial_\mu s_r)^2 - \delta m_\sigma^2 s_r^2\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[\underline{(\partial_\mu \vec{\pi}_r)^2 - m_\pi^2 \vec{\pi}_r^2} + (Z_B - 1)\,(\partial_\mu \vec{\pi}_r)^2 - \delta m_\pi^2 \vec{\pi}_r^2\right] \\
&-\lambda_r v_r Z_l \left(s_r^2 + \vec{\pi}_r^2\right)\ s_r - \frac{1}{4}\ Z_l\lambda_r \left(s_r^2 + \vec{\pi}_r^2\right)^2
\end{aligned} \tag{3.98}$$

A parte sublinhada na expressão acima corresponde à Lagrangiana livre. Esta envolve somente massas físicas.

A prescripção para a renormalização pode ser dada através das definições :

$$m = G_r v_r \quad , \qquad\qquad m_\sigma^2 - m_\pi^2 = 2\lambda_r v_r^2 \tag{3.99}$$

e assim G_r e λ_r podem ser consideradas como quantidades dependentes das quantidades físicas m , m_σ , m_π e v_r, a serem conhecidas. Uma definição diferente para estas constantes pode conduzir a valores diferentes para as quantidades não físicas Z_g e Z_l, mas não terá influência nos resultados físicos [118].

As definições (3.99) fixaram Z_g e Z_l, as quais serão determinadas de forma que os contratermos da eq.(3.98) cancelem exatamente as contribuções às massas provenientes de gráficos de auto-energia. Os valores dos vértices nucleon-méson e das interações entre mésons, em geral são dados como uma série de potências com coeficientes finitos nas constantes de acoplamento.

Para um méson geral de massa m_i^2 e momento p, o propagador vestido na primeira aproximação que não se anula, é dado por

$$D_i(s) = i\left[s - m_i^2 + \Sigma(s)\right]^{-1} \tag{3.100}$$

onde $s = p^2$, e, $i\Sigma(s)$ denota todas as contribuções à auto-energia, ou seja:

$$i\Sigma(s) = i(\Sigma_C(s) + \Sigma_G(s)) \tag{3.101}$$

com Σ_C denotando a contribução a autoenergia devida à inserção de contra-termos e Σ_G a proveniente dos gráficos de Feynman não renormalizados.

Logo, $\delta\mu_r^2$, Z_B e Z_l podem ser determinados impondo que:

$\star$ para $s \simeq m_\pi^2$ o propagador do píon, $D_\pi(s)$, se comporte como $i/(s - m_\pi^2)$, a saber:

$$\lim_{s \to m_\pi^2} i\, D_\pi^{-1}(s) = 0 \tag{3.102}$$

$$\lim_{s \to m_\pi^2} \frac{d}{ds}\, i\, D_\pi^{-1}(s) = 1 \tag{3.103}$$

$\star$ para $s \simeq m_\sigma^2$ a parte real do propagador do méson σ, $D_\sigma(s)$, se anule

$$\lim_{s \to m_\sigma^2} Re\left[i\, D_\sigma^{-1}(s)\right] = 0 \tag{3.104}$$

A razão para tomar a parte real deste propagador é que para $m_\sigma > 2m_\pi$ o méson σ pode decair em dois píons, e o propagador torna-se complexo a $s \simeq m_\sigma^2$.

Em geral

$$Re\left[\lim_{s \to m_\sigma^2} \frac{d}{ds}\, i\, D_\sigma^{-1}(s)\right] = Z_\sigma^{-1} \neq 1 \tag{3.105}$$

a saber, não é imposta nenhuma condição sob a renormalização do campo s_o. Z_σ é determinada uma vez que as condições (3.102),(3.103) e (3.104) foram impostas.

De forma análoga podem-se determinar Z_F e Z_G, impondo que o propagador do nucleon $S_N(\not p)$ se comporte como $i/(\not p - m)$ para $\not p \simeq m$, a saber

$$\lim_{\not p \to m} i\, S_N^{-1}(\not p) = 0 \tag{3.106}$$

$$\lim_{\not p \to m} \frac{d}{d\not p}\, i\, S_N^{-1}(\not p) = 1 \tag{3.107}$$

Esta prescrição de renormalização conduz a um campo píon e um campo nucleon, ambos normalizados à amplitude assintótica unidade. O fato de $Z_\sigma \neq 1$ é interpretado como dando conta do fato de que o méson σ decai em dois píons e portanto nunca aparecerá na região assintótica.

O parâmetro de quebra de simetria renormalizado é dado por

$$c_r = v_r m_\pi^2 \tag{3.108}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex-1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2451
INSTITUTO DE FÍSICA

como é monstrado rigorosamente por Gervais e Lee [60].

A divergência da corrente axial pode ser escrita em função do campo do píon renormalizado como

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = c_o \ \vec{\pi}_o = c_r \ \vec{\pi}_r \tag{3.109}$$

A condição PCAC estabelece

$$c_o \sqrt{Z_B} = c_r = f_\pi \ m_\pi^2 \tag{3.110}$$

A comparação das expressões (3.108) e (3.110) permite associar v_r com f_π.

O procedimento seguido acima conduz a uma renormalização total da teoria. Não obstante, a renormalização pode ser realizada via um estágio intermediário. Numa primeira etapa o processo torna a teoria finita, mas pode acontecer que o campo do píon ou o campo do nucleon (ou ambos) não estejam normalizados à amplitude assintótica unidade. Por exemplo, depois da renormalização que torna a teoria finita com $\pi_o = \sqrt{Z_M} \ \pi$, podemos ter

$$\langle 0|\pi^i(x)|\pi^j(p)\rangle = \delta_{ij} e^{-i \ p\cdot x} Z_\pi^{1/2} \tag{3.111}$$

com $Z_\pi \neq 1$. Uma futura renormalização dos campos será necessária, mas os fatores de renormalização ($\sqrt{Z_\pi}$, . . .) agora serão finitos.

A condição PCAC nas sucessivas etapas pode escrever-se

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = c_o \ \vec{\pi}_o = c \ \vec{\pi} = c_r \ \vec{\pi}_r \tag{3.112}$$

com

$$\vec{\pi}_o = \sqrt{Z_M} \ \vec{\pi} \quad , \qquad \vec{\pi} = \sqrt{Z_\pi} \ \vec{\pi}_r \quad , \qquad \vec{\pi}_o = \sqrt{Z_M Z_\pi} \ \vec{\pi}_r = \sqrt{Z_B} \ \vec{\pi}_r \tag{3.113}$$

Logo

$$c \sqrt{Z_\pi} = c_r = f_\pi \ m_\pi^2 \tag{3.114}$$

ou

$$c = f_\pi \; m_\pi^2 Z_\pi{}^{-1/2} \tag{3.115}$$

Se $D_\pi(s)$ representa o propagador do píon obtido na renormalização intermediária, o valor de Z_π pode ser obtido a partir de

$$\lim_{s \to m_\pi^2} \frac{d}{ds} \; i \; D_\pi^{-1}(s) \;\; = \;\; Z_\pi^{-1} \tag{3.116}$$

3.2.7 A Relação G-T

A divergência da corrente axial em função do campo do píon renormalizado eq.(3.109–110) permite escrever:

$$\langle \; N_{s',t'}(p') \mid \partial_\mu \vec{A}^\mu(x) \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \;\; = \;\; f_\pi \; m_\pi^2 \; \langle \; N_{s',t'}(p') \mid \vec{\pi}_r \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \tag{3.117}$$

onde $\mid N_{s,t}(p) \; \rangle$ representa o estado de um nucleon de momento p, spin s e isospin t.

A equação de movimento do píon, obtida a partir da densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ (eq.(3.98)) é dada por:

$$\left(\partial^2 + m_\pi^2\right) \vec{\pi}_r \;\; = \;\; -G_r \; \bar{N}_r \; i\gamma_5 \vec{\tau} \; N_r \tag{3.118}$$

A expressão acima permite expressar o elemento de matriz do campo do píon entre estados do nucleon como

$$\left(\partial^2 + m_\pi^2\right) \langle \; N_{s',t'}(p') \mid \vec{\pi}_r \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \;\; = \;\; -G_r \; \langle \; N_{s',t'}(p') \mid \bar{N}_r \; i\gamma_5 \vec{\tau} \; N_r \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \tag{3.119}$$

Por outra parte, o campo do píon é um operador de Heisenberg, o que permite escrever (com $q = p' - p$):

$$\left(\partial^2 + m_\pi^2\right) \langle \; N_{s',t'}(p') \mid \vec{\pi}_r \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \;\; = \;\; \left(\; - \; q^2 + m_\pi^2\right) \langle \; N_{s',t'}(p') \mid \vec{\pi}_r \mid N_{s,t}(p) \; \rangle \tag{3.120}$$

Das expressões (3.119) e (3.120), o elemento de matriz do campo do píon entre estados de nucleon é dado por

$$\langle\ N_{s',t'}(p')\ |\ \vec{\pi}_r\ |\ N_{s,t}(p)\ \rangle\ =\ \frac{1}{q^2-m_\pi^2}\ \langle\ N_{s',t'}(p')\ |\ G_r\ \bar{N}_r\ i\gamma_5\vec{\tau}\ N_r\ |\ N_{s,t}(p)\ \rangle \tag{3.121}$$

A covariância de Lorentz permite que este último elemento de matriz possa ser expresso por:

$$\langle\ N_{s',t'}(p')\ |\ G_r\ \bar{N}_r\ i\gamma_5\vec{\tau}\ N_r\ |\ N_{s,t}(p)\ \rangle\ =\ \eta^\dagger_{t'}\ \bar{u}^{s'}(p')\ i\ g(q^2)\ \gamma_5\ \vec{\tau}\ u^s(p)\ \eta_t \tag{3.122}$$

onde a função $g(q^2)$ é tal que

$$g(0)\ =\ g_{\pi NN} \tag{3.123}$$

com $g_{\pi NN}$ sendo a constante de acoplamento efetiva píon-nucleon ($g_{\pi NN} \approx 13.55$). Substituindo (3.121) e (3.122) em (3.117) obtem-se:

$$\langle\ N_{s',t'}(p')\ |\ \partial_\mu\vec{A}^\mu\ |\ N_{s,t}(p)\ \rangle\ =\ \frac{i\ f_\pi\ m_\pi^2\ g(q^2)}{q^2\ -\ m_\pi^2}\eta^\dagger_{t'}\ \bar{u}^{s'}(p')\ \ \gamma_5\ \vec{\tau}\ u^s(p)\ \eta_t \tag{3.124}$$

Comparando esta última expressão com a obtida de derivar a eq.(2.91), obtém-se

$$-\ \frac{1}{2}\ \left[2\ m\ g_a(q^2)+q^2 g_p(q^2)\right]\ =\ \ f_\pi\ g(q^2)\ \frac{m_\pi^2}{q^2\ -\ m_\pi^2} \tag{3.125}$$

Logo, no limite de $q^2 \to 0$, obtém-se

$$m\ g_a(0)\ =\ f_\pi\ g_{\pi NN} \tag{3.126}$$

A expressão acima é a Relação de Goldberger-Treiman. O sucesso desta previsão foi outro dos fatores que deu respeitabilidade ao modelo.

3.2.8 A Condição PCAC

A expressão (3.125) estabelece uma relação entre as funções $g_a(q^2)$, $g_p(q^2)$ e $g(q^2)$. Supondo que estas funções variam lentamente com q^2, pode-se estimar a forma de $g_p(q^2)$.

A partir das expressões (3.123) e (3.126), para $q^2 < m_\pi^2$, temos

$$m\, g_a(q^2) \simeq f_\pi\, g(q^2) \quad , \qquad q^2 < m_\pi^2 \tag{3.127}$$

Substituindo a expressão acima na eq.(3.125) e fazendo um pouco de álgebra, obtemos

$$g_p(q^2) \simeq -\frac{2\, f_\pi\, g(q^2)}{q^2 - m_\pi^2} \quad , \qquad q^2 < m_\pi^2 \tag{3.128}$$

E portanto, a Relação G–T está associada à **Dominância do pólo do píon** (veja Sec. 2.3.4). Este resultado, junto à expressão para a divergência da corrente axial (eqs.(3.109–110)), garantem que o modelo satisfaz PCAC.

Capítulo 4

Versão Regularizada do Modelo σ-Linear [1]

Neste capítulo mostramos um programa de regularização que pode ser adotado para tratar o Modelo σ–Linear de maneira autoconsistente, permitindo a obtenção de resultados fisicamente razoáveis. Este programa segue de perto o esquema de renormalização de D.Bessis e G.Turchetti [16], respeitando portanto todas as simetrias do modelo na ordem de "one-loop".

Encontramos que os propagadores renormalizados do píon e do méson σ apresentam pólos de energia imaginária. A introdução de um parâmetro de corte (escala), Λ, permite evitar tais pólos desde que seja escolhido abaixo de um valor crítico $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$, que é usualmente a escala de energias em que se acredita no modelo. Dado isto, a versão regularizada consiste em incorporar este parâmetro como parte da definição do modelo.

[1] Os resultados apresentados neste capítulo e nos seguintes baseiam-se principalmente no artigo publicado: Pion, Sigma and Nucleon Propagators in the Linear σ-Model, S.P.Flego, A.H.Blin, B.Hiller and M.C.Nemes, Z.Phys. **A 352** (1995) 197.

4.1 Generalidades

Um estudo numérico dos propagadores mesônicos renormalizados obtidos a partir do Modelo σ-Linear [15] mostra que, apesar de nos encontrarmos ante uma teoria renormalizável esta conduz a resultados não físicos, (a saber, pólos de energia imaginários nos propagadores do píon e do méson sigma). Se, em lugar disso, consideramos o modelo como efetivo (desde que as partículas que este descreve podem somente ser consideradas como elementares até uma certa energia) somos naturalmente conduzidos à ideia de introduzir um parâmetro de corte (cutoff) que fixe a escala de energia. Mostramos que existe um valor de cutoff crítico $\Lambda_c \simeq 1.2\ GeV$ para o qual os pólos não físicos desaparecem tanto para o propagador do píon como para o do méson σ . Logo, supondo que Λ_c fixa a escala de energias encontramos um conjunto de parâmetros que permitem uma interpretação autoconsistente das propriedades físicas associadas com os propagadores.

A versão regularizada do modelo é obtida da seguinte forma. Numa primeira etapa calculamos as amplitudes de Feynman (na ordem de one-loop) realizando uma rotação de Wick e introduzindo um cutoff aos valores dos quadri-momentos (euclideanos) de cada loop, sendo assim cada uma de tais integrações restrita a uma esfera compacta $|k| \leq \Lambda$. Este procedimento conduz a amplitudes de Feynman finitas, mas não preserva as simetrias da teoria original. No desejo de manter tais simetrias fazemos as subtrações necessárias afim de que $(n-1)$ das n condições de renormalização sejam satisfeitas, e pedimos que a condição remanescente seja satisfeita para $\Lambda = \Lambda_c$. Um tal requerimento é possível devido ao fato de que a teoria renormalizada depende de quatro parâmetros independentes dos quais somente três podem ser identificados com quantidades físicas para as quais dispõe-se de valores experimentais bem determinados e portanto o restante pode ser ajustado convenientemente. Este último procedimento nos garante que a teoria regularizada, assim como a renormalizada e a original (não renormalizada), depende de só quatro parâmetros independentes.

No procedimento de regularização seguimos de perto o método de renormalização para este modelo proposto por D.Bessis e G.Turchetti [16] já que o mesmo apresenta a vantagem de mostrar numa forma simples qual o mecanismo subjacente (regido pela

condição PCAC) que reduz o número de parâmetros de renormalização da teoria e faz com que esta preserve as mesmas propriedades de simetria da não renormalizada.

O método utilizado por eles está baseado no programa Bogoliubov-Hepp-Parasiuk [119]. Formalmente, a renormalização pode ser alcançada somando a $\mathcal{L}(x)$ todos os possíveis contratermos de grau de divergência menor ou igual ao de $\mathcal{L}(x)$, o que implica que os únicos parâmetros arbitrários na teoria são os valores de funções de Green, ou os das suas derivadas, num ponto. Este conjunto de valores é finito e corresponde ao conjunto finito de contratermos formais.

Devido a que a Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, além de ser renormalizável, é invariante com relação ao grupo linear de simetria $SU(2)$, é possível realizar a renormalização selecionando somente aqueles contratermos os quais são invariantes com relação a este grupo. Desta forma, a Lagrangiana renormalizada dependerá de N_G parâmetros arbitrários e todas as funções de Green serão invariantes com relação ao grupo $SU(2)$.

Não obstante, a Lagrangiana simétrica $\mathcal{L}_s(x)$ é invariante com relação ao grupo quiral $SU(2) \otimes SU(2)$, e o termo que produz a quebra desta simetria (e reduz a simetria da Lagrangiana a $SU(2)$) têm um grau de divergência igual a um, $\delta(\mathcal{L}_q) = 1$. Assim, $\delta(\mathcal{L}_q) < \delta(\mathcal{L}_s)$ e portanto a presença do termo de quebra necessita contratermos os quais devem ter um grau de divergência $\delta \leq \delta(\mathcal{L}_q)$ e devem comportar-se como $\mathcal{L}_q$ com relação a $SU(2) \otimes SU(2)$. Esta característica implica que a Lagrangiana renormalizada pode manter algo de memória do grupo de simetria inicial $(SU(2) \otimes SU(2))$ (estabelecimento da memória de Symanzik) e portanto as funções de Green dependerão de um número N de constantes de renormalização com $N_{\Delta G} \leq N < N_G$, sendo $N_{\Delta G}$ o número de parâmetros necessários para renormalizar a teoria simétrica quiral.

A Lagrangiana simétrica invariante SU(2) mais geral precisa de 13 parâmetros de renormalização independentes. O termo de quebra linear requer um parâmetro de renormalização. Não obstante, devido as considerações mencionadas acima, a teoria renormalizada depende somente de quatro parâmetros independentes.

O caminho seguido por D.Bessis e G.Turchetti consiste em impor o número de condições necessárias para renormalizar a Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ considerando-a invariante sob $SU(2)$, o que conduz a necessidade de introduzir 13 parâmetros arbitrários. Logo,

impõem as restrições devidas a maior simetria das soluções e obtém um conjunto de relações entre as funções de Green que lhes permite reduzir o número de parâmetros independentes. Para obter estas relações, utilizam as Identidades de Ward–Takahaski escritas para a lei de divergência da corrente axial. Assim, a Lagrangiana renormalizada fica dependendo de quatro parâmetros independentes, três dos quais podem ser identificados com quantidades físicas para as quais dispõe-se de valores experimentais bem determinados:

$$\begin{aligned} m_\pi &: \textit{massa do píon} \\ m &: \textit{massa do nucleon} \\ f_\pi &: \textit{constante de decaimento do píon carregado} \\ \lambda_{\pi\pi} &: \textit{constante de acoplamento } \pi - \pi \textit{ renormalizada} \end{aligned}$$

Como apontamos acima, é possível introduzir o parâmetro cutoff e fixá-lo no valor Λ_c de forma que a teoria regularizada fique dependendo de quatro parâmetros independentes. Este novo conjunto pode ser escolhido como

$$\{m_\pi, m, f_\pi, \Lambda_c\}$$

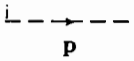
sendo agora três deles identificáveis com quantidades físicas para as quais dispõe-se de valores experimentais bem determinados, e, Λ_c fixando a escala de energias. Esta nova escolha faz com que $\lambda_{\pi\pi}$ se transforme numa quantidade dependente e como consequência a teoria prediz propriedades do méson σ, como a sua massa e largura, e permite estudar as ressonâncias do nucleon. Os valores assim obtidos são razoáveis, a saber, estão em concordância com os valores experimentais (ressonâncias de Roper) e com as predições de outras teorias.

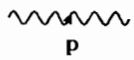
Na seção seguinte seguimos o procedimento de renormalização desenvolvido na ref.[16], sob o qual baseamos o procedimento de regularização. As seções restantes são concernentes a introdução do cutoff.

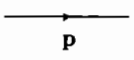
4.2 A Expansão Perturbativa

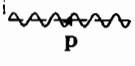
Notação e Definições

Representaremos os propagadores livres, a corrente axial, e as funções de Green com as quais trabalharemos da seguinte forma:

⋆ um píon carregando momento p e índice de isospin i por 

⋆ um méson σ carregando momento p por 

⋆ um nucleon carregando momento p por 

⋆ a corrente vetorial axial carregando momento p e índice de isospin i por 

⋆ a função de Green conexa por

⋆ a função de Green conexa, truncada, por

⋆ a função de Green conexa, truncada, e irredutível de uma partícula, por

Utilizaremos a convenção de que todas as funções de Green com (2m)-linhas de píon externas contém, a momento externo zero, um tensor de spin isotópico da forma:

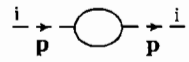
$$\sum_{(2m-1)!!\ pares} \delta_{i_{\rho_1} i_{\rho_2}}\ \delta_{i_{\rho_3} i_{\rho_4}}\ \ldots\ \delta_{i_{\rho_{2m-1}} i_{\rho_{2m}}} \tag{4.1}$$

4.2.1 Condições de Renormalização para $\mathcal{L}(x)$ Invariante com Relação a $SU(2)$

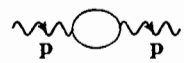
A única função de Green de grau de divergência igual a 3 é o chamado "tadpole". Este é renormalizado ao valor F

$= \langle 0|\sigma(x)|0\rangle = F$ (4.2)

As funções de Green de grau de divergência igual a 2 correspondem aos propagadores mesônicos.

$$D_\pi(p^2) \quad = \quad$$ 

$$(4.3)$$

$$D_\sigma(p^2) \quad = \quad$$ 

$$(4.4)$$

Eles são renormalizados ao fixar seus valores e os de suas derivadas num ponto, o qual escolhemos em $s = p^2 = 0$:

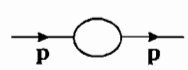
$$\lim_{s\to 0} \left[iD_\pi^{-1}(s)\right] \quad = \quad -\mu^2 \tag{4.5}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \left[iD_\pi^{-1}(s)\right] \quad = \quad \gamma_\pi \tag{4.6}$$

$$\lim_{s\to 0} \left[iD_\sigma^{-1}(s)\right] \quad = \quad -M^2 \tag{4.7}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \left[iD_\sigma^{-1}(s)\right] \quad = \quad \gamma_\sigma \tag{4.8}$$

A única função de Green de grau de divergência 1 corresponde ao propagador fermiônico.

$$S_N(\not{p}) \quad = \quad$$ 

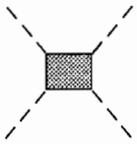
$$(4.9)$$

Ele é renormalizado dando o seu valor e o de sua derivada na sua massa física m

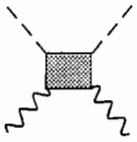
$$\lim_{\not{p}\to m} \left[iS_N^{-1}(\not{p})\right] \quad = \quad 0 \tag{4.10}$$

$$\lim_{\not{p}\to m} \frac{d}{d\not{p}} \left[iS_N^{-1}(\not{p})\right] \quad = \quad \gamma_N \tag{4.11}$$

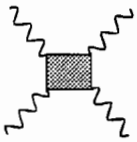
Finalmente, introduzimos as seguintes funções de Green de grau de divergência igual a zero. Por conveniência são escolhidos todos os momentos bosônicos iguais a zero e os férmions são colocados na camada de massas.



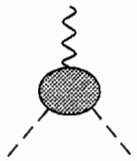
$$= V_{\pi\pi\pi\pi} = -2i\lambda_{\pi\pi} \tag{4.12}$$



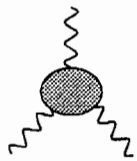
$$= V_{\pi\pi\sigma\sigma} = -2i\lambda_{\pi\sigma} \tag{4.13}$$



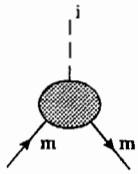
$$= V_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = -6i\lambda_{\sigma\sigma} \tag{4.14}$$



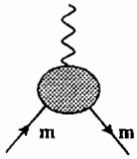
$$= V_{\pi\pi\sigma} = -2iv_{\pi\pi\sigma} \tag{4.15}$$



$$= V_{\sigma\sigma\sigma} = -2iv_{\sigma} \tag{4.16}$$



$$= V_{\pi NN} = \tau_i\gamma_5 G_{\pi NN}(0) \tag{4.17}$$



$$= V_{\sigma NN} = -i\ G_{\sigma NN}(0) \tag{4.18}$$

4.2.2 As relações impostas pela Simetria Quiral

As Identidades de Ward–Takahaski compatíveis com a lei de quase-conservação da corrente axial (PCAC) permitem estabelecer relações algébricas entre as constantes de subtração das funções de Green divergentes da teoria.

No Apêndice D mostramos como estas identidades são deduzidas a partir da lei

$$\partial^{\mu} \vec{A}_{\mu}(x) = c\ \vec{\pi}(x) \tag{4.19}$$

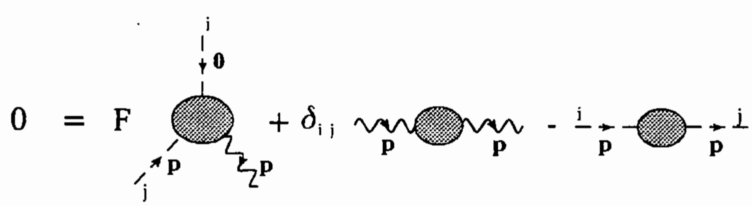
onde $\vec{\pi}(x)$ é o campo renormalizado do píon e c o parâmetro de quebra de simetria renormalizado. Em geral temos (veja Sec.(3.2.6))

$$c = f_{\pi} m_{\pi}^{2}\ Z_{\pi}^{-1/2} \tag{4.20}$$

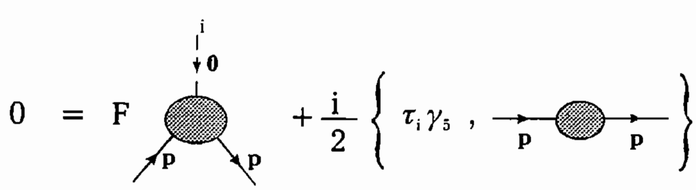
O valor de $Z_{\pi}^{-1/2}$ dependerá da escolha (arbitrária) para γ_{π} na eq.(4.6).

Achamos em seguida o conjunto de Identidades

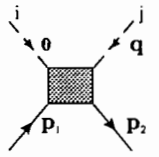
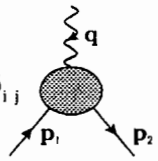
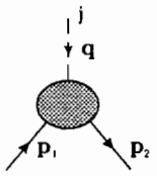
(4.21)

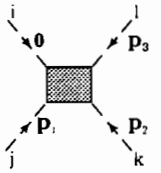
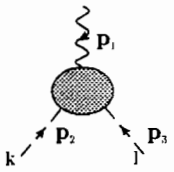


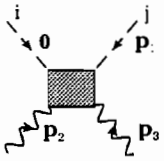
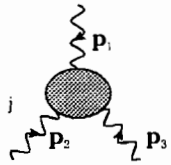
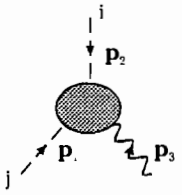
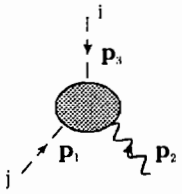
(4.22)

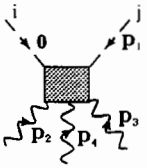
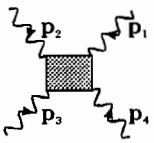
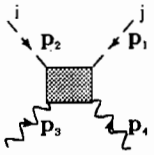


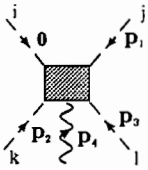
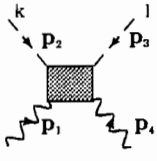
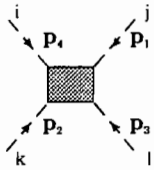
(4.23)

$$0 = F$$  $$- \delta_{ij}$$  $$- \frac{i}{2} \left\{ \tau_i \gamma_5 \ , \right.$$  $$\left. \right\}$$ (4.24)

$$0 = F$$  $$- \sum_{\text{Permut.}} \delta_{ij}$$  (4.25)

$$0 = F$$  $$- \delta_{ij}$$  $$+$$  $$+$$  (4.26)

$$0 = F$$  $$- \delta_{ij}$$  $$+ \sum_{(3)}$$  (4.27)

$$0 = F$$  $$- \sum_{\text{Permut.}} \delta_{ij}$$  $$+$$  (4.28)

Em todas as relações acima, afim de simplificar a notação, já substituímos o tadpole pelo seu valor renormalizado F (eq.(4.2)). $\sum_{Permut}$ denota a soma sobre o conjunto de permutações $\{(p_1, j), (p_2, k), (p_3, l)\}$, e $\sum_{(3)}$ a soma sobre as permutações $\{p_2, p_3, p_4\}$.

Afim de estabelecer relações algébricas entre as constantes de renormalização definidas na seção anterior, adicionamos ao conjunto acima a expressão obtida de derivar a Identidade (4.22) com respeito ao quadrado do quadri-momento, p^2. Impomos que todos os momentos bosônicos são iguais a zero e colocamos os férmions na camada de massa. Obtemos assim, o seguinte conjunto de relações

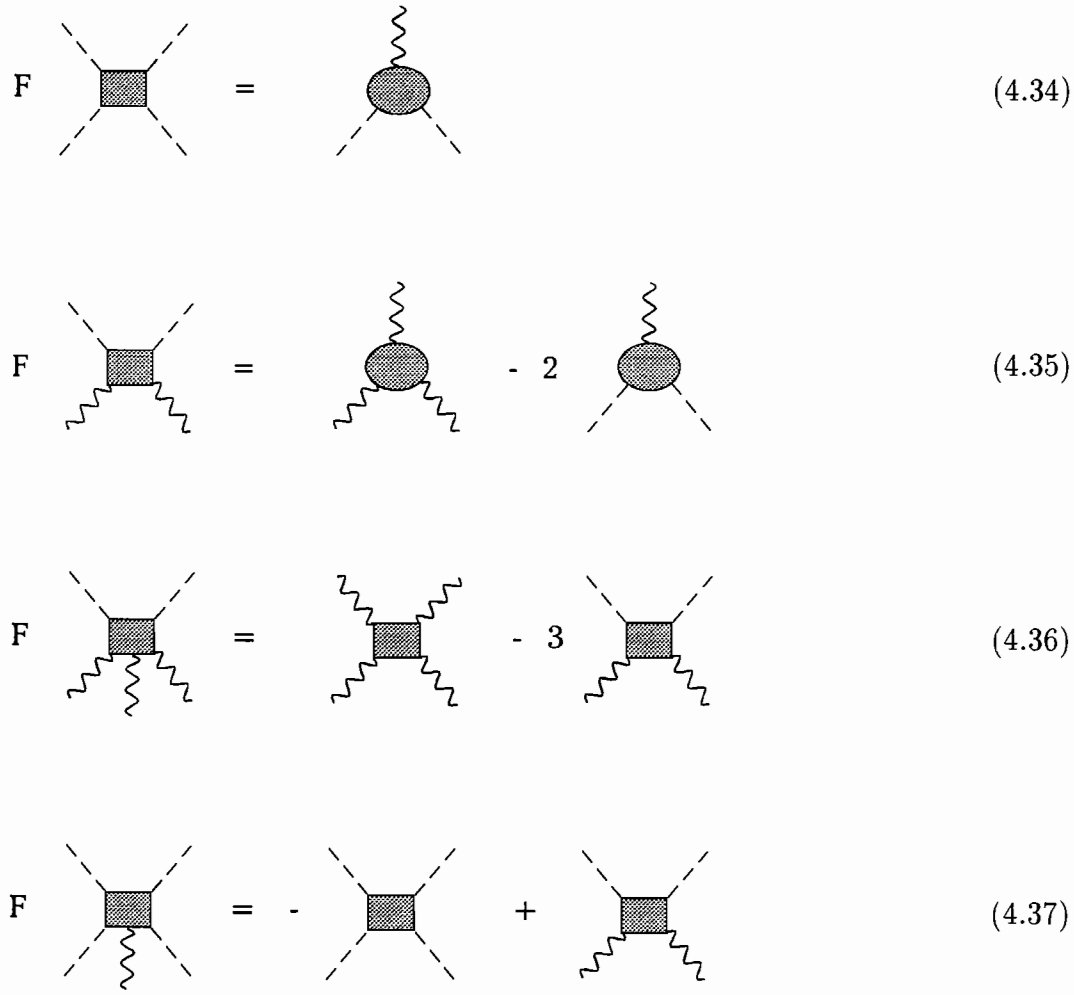
$$c = - i F D_{\pi}^{-1}(o) \tag{4.29}$$

$$F \quad = \quad - \delta_{ij} \left\{ i D_{\pi}^{-1}(o) - i D_{\sigma}^{-1}(o) \right\} \tag{4.30}$$

$$F \frac{d}{dp^2} \left\{ \quad \right\} \Bigg|_{p^2=0} = - \delta_{ij} \frac{d}{dp^2} \left\{ i D_{\pi}^{-1}(p^2) - i D_{\sigma}^{-1}(p^2) \right\} \Bigg|_{p^2=0} \tag{4.31}$$

$$F \quad = \quad - \frac{i}{2} \left\{ \tau_i \gamma_5 \, , \, S_N^{-1}(\not{p}) \right\}_{\not{p}=m} \tag{4.32}$$

$$F \quad = \quad \delta_{ij} \quad + \frac{i}{2} \left\{ \tau_i \gamma_5 \, , \quad \right\}_{\not{p}=m} \tag{4.33}$$



Este conjunto de relações, junto com a condição de que o propagador do píon deve apresentar um pólo na sua massa física m_π , faz com que o número de parâmetros arbitrários originais seja reduzido a quatro parâmetros independentes. Como dissemos antes, três destes parâmetros podem ser identificados com quantidades físicas para as quais dispõe-se de valores experimentais bem determinados

m_π : *massa do píon*

m : *massa do nucleon*

f_π : *constante de decaimento do píon carregado*

$\lambda_{\pi\pi}$: *constante de acoplamento* $\pi - \pi$ *renormalizada*

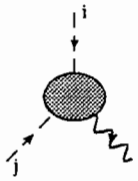
Mostraremos que as relações (4.29–37) permitem fazer uma nova escolha destes parâmetros para desenvolver a teoria.

Substituindo as eqs. (4.5) e (4.20) na relação (4.29) obtemos

$$F\mu^2 = f_\pi m_\pi^2 \; Z_\pi^{-1/2} \tag{4.38}$$

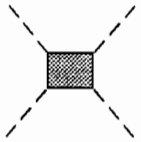
Este resultado, junto do fato que o propagador do píon deve apresentar um pólo na sua massa física m_π, permite tomar como parâmetros μ^2 em lugar de m_π^2 e F em lugar de f_π. A única condição sobre μ^2 é que seja positivo, no restante é arbitrário. Nos cálculos númericos encontramos que μ^2 difere de m_π^2 em menos de um 1% e $Z_\pi \approx 1$, portanto F e f_π são aproximadamente iguais.

As definições (4.5) e (4.7) permitem escrever a eq.(4.30) como

$i\ F$ 

$= (M^2 - \mu^2)\delta_{ij}$ (4.39)

Combinando as eqs.(4.34) e (4.39) obtemos

iF^2  $= M^2 - \mu^2$ (4.40)

e a partir da definição (4.12), obtemos

$$2F^2\lambda_{\pi\pi} = M^2 - \mu^2 \tag{4.41}$$

A eq.(4.41) permite tomar M^2 em lugar de F (e portanto em lugar de f_π) como um parâmetro.

Assim, o conjunto de parâmetros que utilizaremos é

$$\mu^2 \ , \quad M^2 \ , \quad m \ , \quad \lambda_{\pi\pi}$$

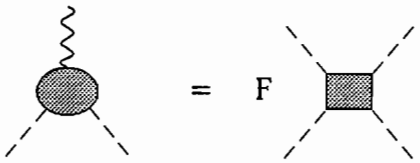
e como veremos, a teoria depende somente deles.

4.2.3 As Regras de Feynman para a Lagrangiana

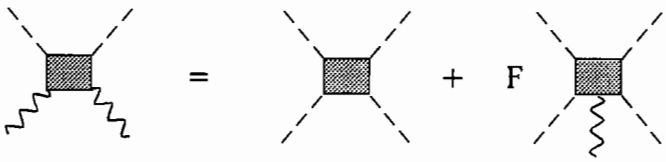
Os propagadores são obtidos imediatamente notando que eles devem ser iguais aos propagadores exatos na aproximação de loop-zero. Assim, seguindo a convenção de Byorken and Drell [19], temos (com $p^2 = s$) :

$$\Delta_\pi(s) = \frac{i}{s-\mu^2} \qquad \Delta_\sigma(s) = \frac{i}{s-M^2} \qquad \Delta_N(\not{p}) = \frac{i}{\not{p}-m} \quad (4.42)$$

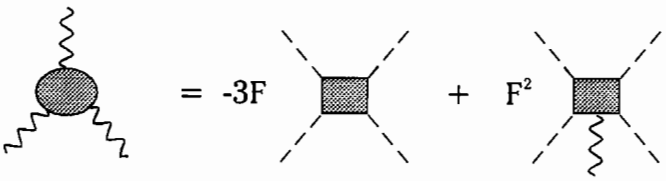
Combinando as eqs.(4.34–37) podemos escrever



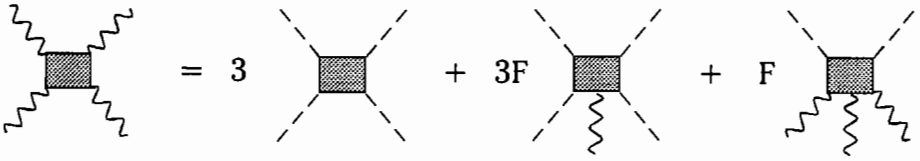
(4.43)



(4.44)



(4.45)



(4.46)

As regras de Feynman para os vértices mesônicos podem ser obtidas a partir das eqs.(4.43–46), tomando aproximação a loop-zero em ambos os lados das mesmas, além de levar em conta a definição (4.12) para o vértice $V_{\pi\pi\pi\pi}$. Desta forma obtemos:

$$= V^{(o)}_{\pi\pi\pi\pi} = -2i\lambda_{\pi\pi} \tag{4.47}$$

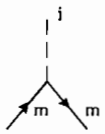
$$= V^{(o)}_{\pi\pi\sigma\sigma} = -2i\lambda_{\pi\pi} \tag{4.48}$$

$$= V^{(o)}_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = -6i\lambda_{\pi\pi} \tag{4.49}$$

$$= V^{(o)}_{\pi\pi\sigma} = -2iF\lambda_{\pi\pi} \tag{4.50}$$

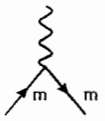
$$= V^{(o)}_{\sigma\sigma\sigma} = -6iF\lambda_{\pi\pi} \tag{4.51}$$

Para escrever as regras de Feynman para os vértices fermiônicos, começamos definindo o vértice $V_{\pi NN}$ na aproximação de loop–zero como



$$= V^{(o)}_{\pi NN} = \tau_i\gamma_5 G \tag{4.52}$$

logo, a eq.(4.33) a loop-zero, nos permite escrever



$$= V^{(o)}_{\sigma NN} = -i\ G \tag{4.53}$$

4.2.4 A Expansão em Loops das Funções de Green

Devido às relações proporcionadas pelas Identidades de Ward–Takahaski, existem condições auxiliares entre o número de vértices (V) e o número de loops para uma dada função de Green, que fazem com que a expansão em loops coincida com a expansão na constante de acoplamento $\lambda_{\pi\pi}$.

Para ver isto, observe-se que F e $\lambda_{\pi\pi}$ estão relacionadas por (veja eq.(4.41))

$$2F^2\lambda_{\pi\pi} = M^2 - \mu^2$$

e, a loop-zero, a eq.(4.32) conduz a

$$F.G = m \tag{4.54}$$

Destas últimas duas expressões, deduze-se que, a loop-zero

$$F \propto \lambda_{\pi\pi}^{-1/2} \qquad e \qquad G \propto \lambda_{\pi\pi}^{1/2} \tag{4.55}$$

Observando as regras de Feynman para os vértices, deduzimos que todos os vértices de três pernas são proporcionais a $\lambda_{\pi\pi}^{1/2}$ e os vértices de quatro pernas são proporcionais a $\lambda_{\pi\pi}$. Logo, um gráfico contendo N_3 vértices de três pernas e N_4 vértices de quatro pernas dará uma contribuição da forma

$$G_{N_3N_4}\ \lambda_{\pi\pi}^{N_4+N_3/2} \tag{4.56}$$

Por outro lado, para um gráfico de L loops, contendo vértices de três e quatro pernas, com E linhas externas e I linhas internas, podem ser estabelecidas as seguintes relações de natureza topológica, e portanto dependentes da estrutura do gráfico

$$N_3 + N_4 = I - L + 1 \tag{4.57}$$

$$3N_3 + 4N_4 = E + 2I \tag{4.58}$$

a partir das quais podemos escrever

$$\frac{1}{2}\ N_3 + N_4 = \frac{1}{2}\ E + L - 1 \tag{4.59}$$

Expandindo a função de Green em potências de $\lambda_{\pi\pi}$, temos

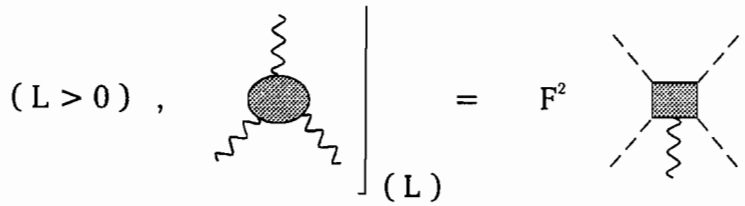
$$G = \sum_{N_3 N_4} G_{N_3 N_4} \lambda_{\pi\pi}^{N_4 + N_3/2} \tag{4.60}$$

ou

$$G = \lambda_{\pi\pi}^{E/2-1} \sum_{L} G_L \lambda_{\pi\pi}^{L} \tag{4.61}$$

Esta última equação prova que a expansão em potências de $\lambda_{\pi\pi}$ é equivalente a uma expansão no número de loops.

Finalmente, para fixar as constantes de subtração as quais permanecem numa dada função de Green em ordem L, podem-se usar as identidades de Ward-Takahaski escritas anteriormente em ordem L. Por exemplo,



(4.62)

O lado direito desta equação é finito e define o valor da constante de subtração em ordem L do vértice do lado esquerdo.

4.3 Os Propagadores na Aproximação "One–Loop"

Os propagadores no espaço dos momentos podem ser obtidos por meio da resolução da equação de Schwinger-Dyson. Assim temos

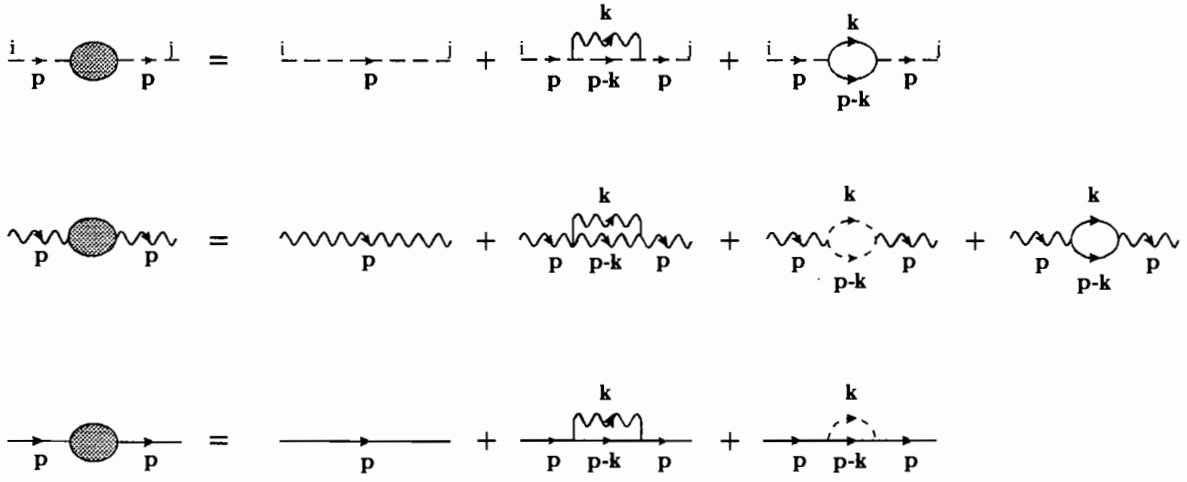
$$i\delta_{ij} D_\pi^{-1}(s) = i\delta_{ij} \Delta_\pi^{-1}(s) + \Sigma^\pi(s) \tag{4.63}$$

$$i D_\sigma^{-1}(s) = i\Delta_\sigma^{-1}(s) + \Sigma^\sigma(s) \tag{4.64}$$

$$i S_N^{-1}(\not{p}) = i\Delta_N^{-1}(\not{p}) + \Sigma^N(\not{p}) \tag{4.65}$$

onde Σ^a denota a contribução total à auto-energia da partícula a.

Para a Lagrangiana do Modelo σ–Linear, a equação de Schwinger-Dyson na aproximação de one–loop, conduz a



Devido a que a renormalização é puramente subtractiva, podemos escrever

$$\Sigma^{\pi}(s) = \Sigma^{\pi}_{C}(s) + \Sigma^{\pi}_{G}(s) \tag{4.66}$$

$$\Sigma^{\sigma}(s) = \Sigma^{\sigma}_{C}(s) + \Sigma^{\sigma}_{G}(s) \tag{4.67}$$

$$\Sigma^{N}(\not{p}) = \Sigma^{N}_{C}(\not{p}) + \Sigma^{N}_{G}(\not{p}) \tag{4.68}$$

com Σ^{a}_{C} denotando à contribução à energia proveniente da inserção de contratermos e Σ^{a}_{G} a contribução dos gráficos de Feynman, não renormalizados, em ordem de one-loop, ou seja

$$\Sigma^{\pi}_{G}(s) = \Sigma^{\pi}_{\pi\sigma}(s) + \Sigma^{\pi}_{NN}(s) \tag{4.69}$$

$$\Sigma^{\sigma}_{G}(s) = \Sigma^{\sigma}_{\pi\pi}(s) + \Sigma^{\sigma}_{\sigma\sigma}(s) + \Sigma^{\sigma}_{NN}(s) \tag{4.70}$$

$$\Sigma^{N}_{G}(\not{p}) = \Sigma^{N}_{N\pi}(\not{p}) + \Sigma^{N}_{N\sigma}(\not{p}) \tag{4.71}$$

onde

$$\Sigma^a_{bc} = -i\hat{A}\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} V^{(o)}_{abc}\Delta_b(-\not{K})V^{(o)}_{abc}\Delta_c(\not{p}-\not{K}) \tag{4.72}$$

com (usando a notação de Bjorken-Drell [19]) :

$$\hat{A} = \begin{cases} -Tr & para \quad b=c=N, \\ \frac{1}{2} & para \quad b=c=\pi \ or \ \sigma \\ 1 & para \quad b\neq c \end{cases}$$

e as expressões para os propagadores livres (Δ_π, ...) e para as funções vértice ($V^{(o)}_{\pi\pi\sigma}$, ...) são dadas pelas relações obtidas em Sec.(4.2.3) (eqs.(4.42) e (4.47–53)).

Encontramos para os propagadores:

$$\begin{aligned} iD^{-1}_\pi(s) &= s-\mu^2+\Sigma^\pi_C(s)+ \\ &\quad -4\lambda^2_{\pi\pi}F^2I^o_{M\mu}(s)-4G^2sI^o_{mm}(s)+8G^2I^o_m \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned} iD^{-1}_\sigma(s) &= s-M^2+\Sigma^\sigma_C(s)+ \\ &\quad -6\lambda^2_{\pi\pi}F^2I^o_{\mu\mu}(s)-18\lambda^2_{\pi\pi}F^2I^o_{MM}(s)-4G^2(s-4m^2)I^o_{mm}(s)+8G^2I^o_m \end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} iS^{-1}_N(\not{p}) &= \not{p}-m+\Sigma^N_C(s)+ \\ &\quad -G^2[mI^o_{mM}(s)+J^o_{mM}(\not{p})]+3G^2[mI^o_{m\mu}(s)-J^o_{m\mu}(\not{p})] \end{aligned} \tag{4.75}$$

onde

$$
\begin{aligned}
I^o_m &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2} \\
I^o_{M'M}(s) &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-M'^2][(\not k-\not p)^2-M^2]} \\
J^o_{M'M}(\not p) &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not k}{[k^2-M'^2][(\not k-\not p)^2-M^2]}
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

4.4 A Introdução de um "Cutoff"

Nesta seção pesquisaremos o papel desempenhado por um cutoff no modelo. Como já apontamos antes, devido ao fato de que estamos em presença de um modelo efetivo somos naturalmente conduzidos à ideia de introduzir um parâmetro cutoff que fixa a escala de energia em que o modelo se aplica. Calculamos as integrais I^o e J^o definidas pelas eqs.(4.76) realizando uma rotação de Wick e introduzindo um cutoff Λ nos valores dos quadri-momentos (euclideanos) k de cada loop, assim cada uma de tais integrações fica restrita a uma esfera compacta $|k| \leq \Lambda$. Como já dissemos no começo, este procedimento conduz a amplitudes de Feynman finitas, mas não preserva as simetrias da teoria original. No desejo de manter tais simetrias fazemos as subtrações necessárias afim de satisfazer as Identidades de Ward-Takahaski compatíveis com PCAC e obter desta forma resultados que contenham a simetria quiral. Na procura de um valor para este parâmetro cutoff (considerado da ordem de 1 GeV na literatura) começamos estudando os propagadores mesônicos afim de pesquisar o comportamento dos pólos fantasmas (presentes no modelo renormalizado) em função deste novo parâmetro. Mostramos que existe um valor de cutoff crítico único Λ_c para o qual os pólos não físicos desaparecem tanto para o propagador do píon como para o do méson σ. Λ_c é uma função dos parâmetros independentes do modelo renormalizado, $\Lambda_c = \Lambda_c(m, m_\pi, f_\pi, \lambda_{\pi\pi})$, e, para um amplo conjunto de valores do parâmetro livre $\lambda_{\pi\pi}$, $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$. Λ_c é único no sentido de que, para um estabelecido $\lambda_{\pi\pi}$, desaparecem simultaneamente os pólos fantasma de ambos os propagadores mesônicos. Logo, fixando o valor do cutoff em $\Lambda = \Lambda_c$ abordamos o estudo do propagador do nucleon.

4.4.1 Os Propagadores Mesônicos

As condições sobre os propagadores mesônicos são dadas pelas eqs.(4.5–8), as quais reescrevemos colocando Λ em evidência, como

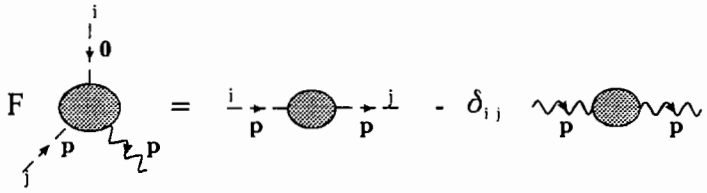
$$\lim_{s\to 0}\left[iD_\pi^{-1}(s,\Lambda)\right] = -\mu^2 \tag{4.77}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[iD_\pi^{-1}(s,\Lambda)\right] = \gamma_\pi \tag{4.78}$$

$$\lim_{s\to 0}\left[iD_\sigma^{-1}(s,\Lambda)\right] = -M^2 \tag{4.79}$$

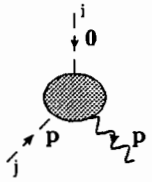
$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[iD_\sigma^{-1}(s,\Lambda)\right] = \gamma_\sigma \tag{4.80}$$

Ademais, estes propagadores devem satisfazer a Identidade de Ward–Takahaski (eq.(4.22)):

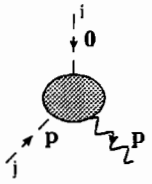


(4.81)

a qual conduz às seguintes relações entre os parâmetros (veja eqs.(4.30–31,77–80)):

$$i\,F\lim_{p^2\to 0}$$


$$= (M^2-\mu^2)\delta_{ij} \tag{4.82}$$

$$i\,F\lim_{p^2\to 0}\frac{d}{dp^2}$$


$$= (\gamma_\pi-\gamma_\sigma)\delta_{ij} \tag{4.83}$$

Podemos escolher $\gamma_\pi = 1$, uma vez que é arbitrário. Assim, o propagador do píon pode ser achado diretamente a partir da expressão (4.73) impondo que sejam satisfeitas as condições (4.77) e (4.78) (com $\gamma_\pi = 1$). Escrevendo

$$\Sigma_C^\pi(s,\Lambda) = -\delta\mu^2 + (Z_M - 1)s \tag{4.84}$$

(com $\delta\mu^2$ e Z_M sendo funções de Λ) temos

$$-\mu^2 - \delta\mu^2 + \Sigma_G^\pi(0,\Lambda) = -\mu^2 \tag{4.85}$$

$$1 + (Z_M - 1) + \dot{\Sigma}_G^\pi(0,\Lambda) = 1 \tag{4.86}$$

onde $\dot{\Sigma}_G^\pi(0,\Lambda) \equiv [d(\ \Sigma_G^\pi(s,\Lambda))/ds]_{s=0}$.

Das equações acima obtemos

$$\delta\mu^2 = \Sigma_G^\pi(0,\Lambda) \tag{4.87}$$

$$(Z_M - 1) = -\dot{\Sigma}_G^\pi(0,\Lambda) \tag{4.88}$$

Assim, o propagador do píon na aproximação de one-loop é dado por

$$iD_\pi^{-1}(s,\Lambda) = s - \mu^2 + \Sigma^\pi \tag{4.89}$$

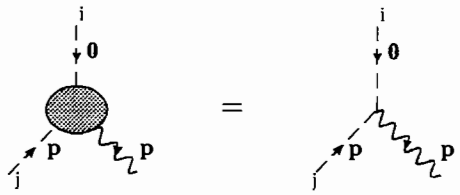
com

$$\Sigma^\pi = -4G^2 s\bar{I}_{mm}(s,\Lambda) - 4\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 \bar{I}_{M\mu}(s,\Lambda) + 4\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 s\bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) \tag{4.90}$$

onde $\bar{I}(s,\Lambda) \equiv I(s,\Lambda) - I(0,\Lambda)$, e cujas expressões explícitas encontram-se em Apêndice E.

A partir da eq.(4.83) com $\gamma_\pi = 1$ pode-se obter a expressão de γ_σ, já que o vértice π-π-σ precisa de somente uma subtração (a quantidade a subtrair pode ser escolhida como o valor da função vértice em $s = 0$, para o qual dispõe-se da expressão (4.82)). Logo, conhecido o valor de γ_σ pode-se obter a expressão do propagador do méson σ mediante a eq.(4.74) de forma análoga ao caso do píon. Um caminho alternativo, e mais simples, consiste em deduzir este propagador diretamente a partir da Identidade de Ward–Takahaski dada por (4.81) como mostramos em seguida.

A equação de Schwinger-Dyson para o vértice π-π-σ, na aproximação de one-loop, conduz a



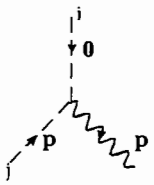
$$-i\Sigma^V(s,\Lambda) \tag{4.91}$$

onde Σ^V denota a contribução a auto-energia do vértice. Podemos escrever

$$\Sigma^V(s,\Lambda) = \Sigma^V_C(s,\Lambda) + \Sigma^V_G(s,\Lambda) \tag{4.92}$$

com Σ^V_C sendo a contribução proveniente da inserção de contratermos e Σ^V_G a dos gráficos de Feynman, não renormalizados, na ordem de one-loop.

Substituindo as expressões (4.63), (4.64) e (4.91) na (4.81), a Identidade de Ward-Takahaski (eq.(4.81)) na aproximação de one-loop é dada por:

$i\ F$ 

$$+ \delta ij\ F\ \Sigma^V(s,\Lambda) = \delta ij\ \{M^2 - \mu^2 + \Sigma^\sigma(s,\Lambda) - \Sigma^\pi(s,\Lambda)\} \tag{4.93}$$

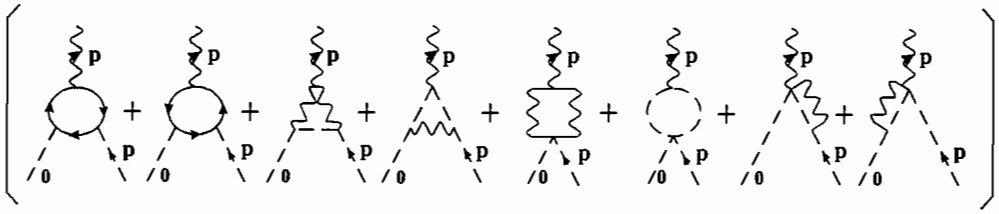
Tomando o limite $s \longrightarrow 0$ nesta última expressão e tendo em conta as eqs.(4.77),(4.79) e (4.50) obtemos

$$2\ F^2\lambda_{\pi\pi} + F\Sigma^V(0,\Lambda) = M^2 - \mu^2 \tag{4.94}$$

logo, deve-se ter (veja eq.(4.41))

$$\Sigma^V(0,\Lambda) = 0 \tag{4.95}$$

A expressão para $\Sigma^V(s,\Lambda)$ pode ser facilmente calculada. Na ordem de one-loop temos

$\Sigma_G^V(s,\Lambda) = i$ 

Usando as regras de Feynman para escrever a contribuição de cada um dos diagramas, observa-se que devido ao fato de que um dos momentos externos é igual a zero cada uma destas contribuições pode ser expressada como uma combinação linear de integrais da forma dada por (4.76). A condição (4.95) conduz a (veja eq.(4.92))

$$\Sigma_C^V(0,\Lambda) = -\Sigma_G^V(0,\Lambda) \tag{4.96}$$

e portanto

$$\begin{aligned} F\Sigma^V(s,\Lambda) &= 16m^2G^2\ \bar{I}_{mm}(s,\Lambda) + 4F^2\lambda_{\pi\pi}^2\bar{I}_{M\mu}(s,\Lambda) + \\ &\quad -18\lambda_{\pi\pi}^2F^2\bar{I}_{MM}(s,\Lambda) - 6F^2\lambda_{\pi\pi}^2\bar{I}_{\mu\mu}(s,\Lambda) \end{aligned} \tag{4.97}$$

Substituindo as expressões (4.90) e (4.97) em (4.93) a contribuição em one-loop para o propagador do méson σ é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma^\sigma(s,\Lambda) &= -6\lambda_{\pi\pi}^2F^2\bar{I}_{\mu\mu}(s,\Lambda) - 18\lambda_{\pi\pi}^2F^2\bar{I}_{MM}(s,\Lambda) + \\ &\quad +4\lambda_{\pi\pi}^2F^2s\bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) - 4G^2\ (s-4m^2)\ \bar{I}_{mm}(s,\Lambda) \end{aligned} \tag{4.98}$$

Substituindo esta última expressão na (4.64) obtemos o inverso do propagador do méson σ na aproximação de one-loop (veja eq.(4.101)). O valor de γ_σ nesta ordem de aproximação pode ser calculado diretamente como

$$\gamma_\sigma^{(1)} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\{\ iD_\sigma^{-1}(s,\Lambda)\ \} \tag{4.99}$$

Resumindo, as expressões analíticas dos inversos dos propagadores mesônicos na aproximação de one-loop são dadas por

$$iD_\pi^{-1}(s,\Lambda) = s - \mu^2 - 4G^2 s\bar{I}_{mm}(s,\Lambda) - 4\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 \bar{I}_{M\mu}(s,\Lambda) + 4\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 s\bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned} iD_\sigma^{-1}(s,\Lambda) &= s - M^2 - 4G^2\ (s-4m^2)\ \bar{I}_{mm}(s,\Lambda) + \\ &\quad -6\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 \bar{I}_{\mu\mu}(s,\Lambda) - 18\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 \bar{I}_{MM}(s,\Lambda) + 4\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 s\bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) \end{aligned} \tag{4.101}$$

as quais satisfazem as condições (4.77–80) com $\gamma_\pi = 1$ e γ_σ na aproximação de one-loop dado por

$$\begin{aligned} \gamma_\sigma^{(1)} &= 1 + 16m^2G^2\bar{I}'_{mm}(0,\Lambda) + \\ &\quad -6F^2\lambda_{\pi\pi}^2 \bar{I}'_{\mu\mu}(0,\Lambda) - 18\lambda_{\pi\pi}^2 F^2 \bar{I}'_{MM}(0,\Lambda) + 4F^2\lambda_{\pi\pi}^2 \bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) \end{aligned} \tag{4.102}$$

As expressões explícitas para $\bar{I}_{M\mu}$ e $\bar{I}_{mm}$ são dadas no Apêndice E. Elas tendem às renormalizadas quando $\Lambda \to \infty$ [16].

4.4.2 O Valor Crítico do Cutoff Λ_c

Nesta seção discutiremos o comportamento dos pólos fantasma e mostraremos como podem fixar a escala de energia Λ.

Como mencionamos antes, na versão renormalizada, tanto o propagador do píon como o do méson σ exibem um pólo de energia não-física. No caso do píon este pólo encontra-se situado aproximadamente em $s_- \approx -2.5\ GeV^2$. A localização deste pólo é quase independente do valor do parâmetro de renormalização livre $\lambda_{\pi\pi}$. Para o propagador do méson σ, a posição do pólo fantasma depende fortemente do valor do parâmetro $\lambda_{\pi\pi}$, mas, para um amplo intervalo de valores deste parâmetro, a localização do polo encontra-se a valores absolutos de energia menores a, ou da ordem de, $1\ GeV$ (valores de $\lambda_{\pi\pi}$ que levam a $|s_-| > 1\ GeV$, conduzem à existencia de um polo de energia real do propagador a energias menores a $2m_\pi$).

Introduzindo um cutoff Λ encontramos que a existência de pólos não-físicos depende fortemente do valor do Λ. Isto pode ser observado nas Figs.(4.1) e (4.2) para os propagadores do píon e do méson σ, respectivamente. De fato, na realidade existe um valor de cutoff crítico único Λ_c para o qual estes pólos fantasmas desaparecem. Λ_c é uma função dos parâmetros independentes do modelo renormalizado, $\Lambda_c = \Lambda_c(m, m_\pi, f_\pi, \lambda_{\pi\pi})$, mas, para um amplo conjunto de valores de $\lambda_{\pi\pi}$, $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$ (Λ_c é único no sentido de que, para um estabelecido $\lambda_{\pi\pi}$, desaparecem simultaneamente os pólos fantasma de ambos os propagadores mesônicos). A seguir, apresentamos os argumentos que nos permitem fazer esta afirmação.

Investigamos numericamente a existência de pólos para valores de s no intervalo $-10^5 GeV^2 \leq s < 0$ e valores distintos de Λ. Assim verificamos que nesta região de s negativo, existe um $\Lambda_o = \Lambda_o(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}) \simeq 1.2\ GeV$ tal que para $\Lambda < \Lambda_o$, tais pólos não existem.

Devido ao fato de que a procura numérica de pólos é limitada, para mostrar que efetivamente para $\Lambda < \Lambda_o$ não existem pólos de energia imaginária, deduzimos as expresões analíticas assintóticas para os inversos dos propagadores do píon e do méson σ. Devido à

simetria quiral estas expresões coincidem neste limite e lêem-se:

$$\lim_{\substack{s \to -\infty \\ \Lambda\ finito}} \left[iD^{-1}_{\pi\ or\ \sigma}(s,\Lambda)\right] = |s| \,.\, f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda) \tag{4.103}$$

onde

$$f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda) = -\left\{1 + 4\lambda^2_{\pi\pi} F^2 \bar{I}'_{M\mu}(0,\Lambda) + 4G^2 I_m(0,\Lambda)\right\} \tag{4.104}$$

Supondo que a expressão assintótica é válida a partir de $|s| = 10^5\ GeV^2$ podemos extrair a seguinte conclusão. Dado que $[iD^{-1}_{\pi}(0,\Lambda) = -\mu^2 < 0]$ e $[iD^{-1}_{\sigma}(0,\Lambda) = -M^2 < 0]$, quando $f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda) > 0$ temos a certeza de que pelo menos um pólo de energia imaginário está presente em algum s negativo. Por outra parte, não existirão pólos de energia imaginários se, além de não estar presentes na região $|s| < 10^5\ GeV^2$, temos $f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda) < 0$.

Na Fig.(4.3) mostramos o comportamento de $f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda)$ em função de Λ.

Definimos $\Lambda_c = \Lambda_c(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi})$ como o valor do cutoff que verifica a condição

$$f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda_c) = 0 \tag{4.105}$$

Encontramos que os valores de Λ_c (calculados até a ordem 10^{-4}) coincidem com os encontrados numericamente a partir das expressões exatas dos propagadores (Λ_o). Na tabela (4.1) mostramos os valores do Λ_c para distintos valores dos parâmetros $\{m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}\}$. Como pode observar-se, $\Lambda_c \simeq 1.2 GeV$.

Os argumentos acima expostos permitem-nos concluir que existe um valor crítico do cutoff para a existência de pólos imaginários.

De agora em diante passaremos a considerar esse valor do parâmetro cutoff como parte integrante do modelo.

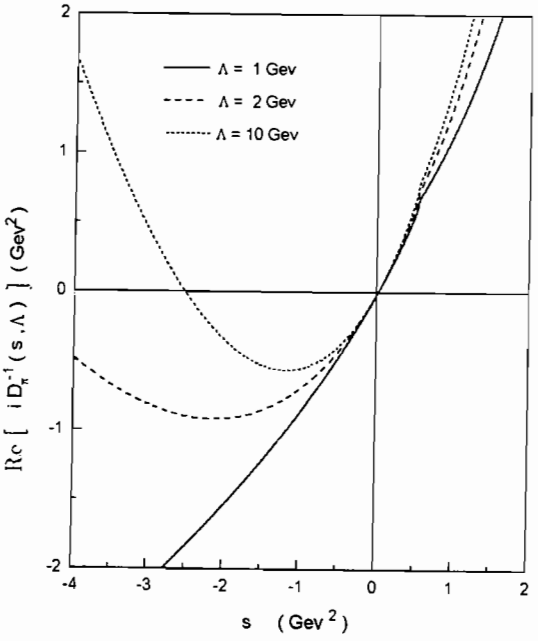


Fig. 4.1: Parte real do inverso do propagador regularizado do píon como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, M = 600 MeV , μ = 140 MeV , $\lambda_{\pi\pi}$ = 19.679.)

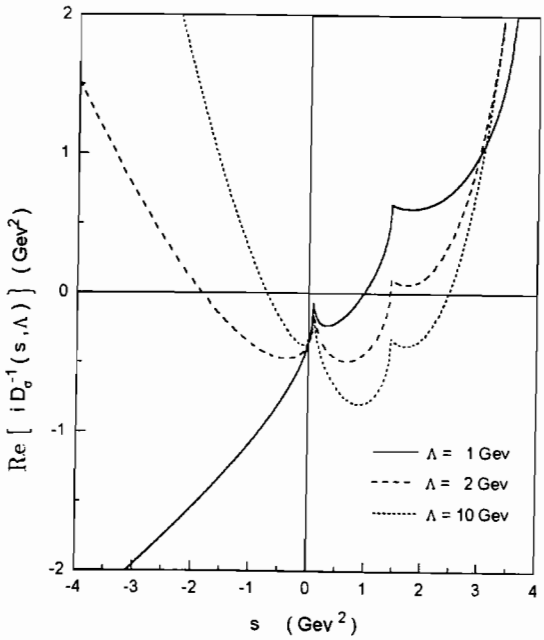


Fig. 4.2: Parte real do inverso do propagador regularizado do méson σ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, M = 600 MeV , μ = 140 MeV , $\lambda_{\pi\pi}$ = 19.679.)

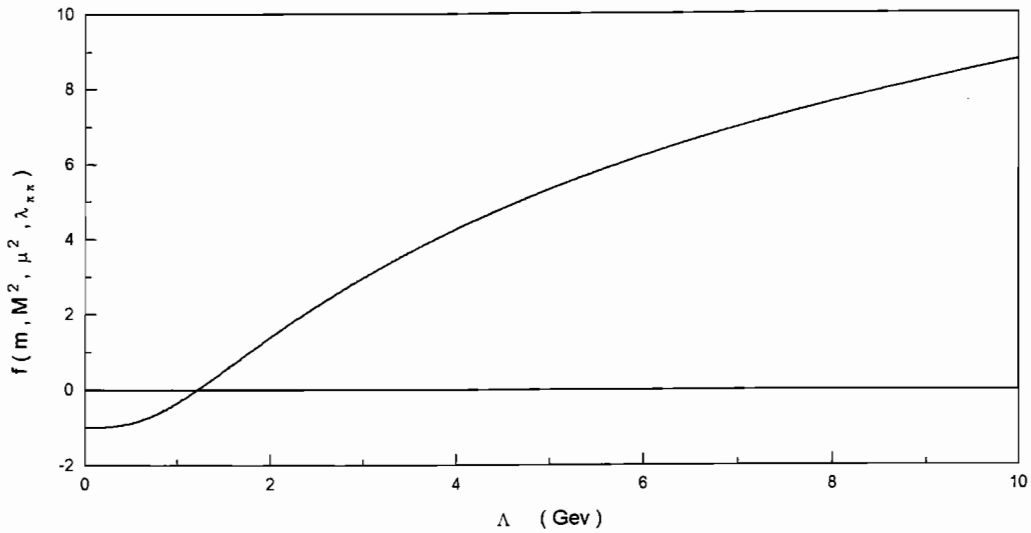


Fig. 4.3: $f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda)$ como uma função de Λ.
(Parâmetros: m = 938 MeV , M = 600 MeV , μ = 140 MeV , $\lambda_{\pi\pi}$ = 19.679).

m (GeV)	M (GeV)	μ (GeV)	Λ_c (GeV)
0.938	0.550	0.139	1.2218
		0.140	1.2220
	0.600	0.139	1.2134
		0.140	1.2136
	0.650	0.139	1.2046
		0.140	1.2048
	0.700	0.139	1.1954
		0.140	1.1956

Tab. 4.1: Conjunto de parâmetros para os quais
$f(m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}, \Lambda_c) = 0$,
$(\lambda_{\pi\pi} = (M^2 - \mu^2)/(2F^2)\ ,\ F = 93\ MeV\ )$.

4.4.3 O Propagador do Nucleon

O propagador do nucleon é dado por (veja eq.(4.75))

$$iS_N^{-1}(\not p, \Lambda) = \not p - m + \Sigma_C^N(\not p, \Lambda) + \Sigma_G^N(\not p, \Lambda) \tag{4.106}$$

com

$$\Sigma_G^N(\not p, \Lambda) = -G^2[mI^o_{mM}(s, \Lambda) + J^o_{mM}(\not p, \Lambda)] + 3G^2[mI^o_{m\mu}(s, \Lambda) - J^o_{m\mu}(\not p, \Lambda)] \tag{4.107}$$

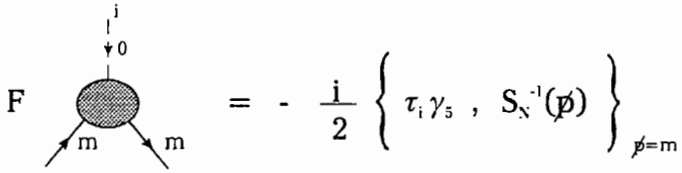
Este propagador deve satisfazer (veja eq.(4.10–11)):

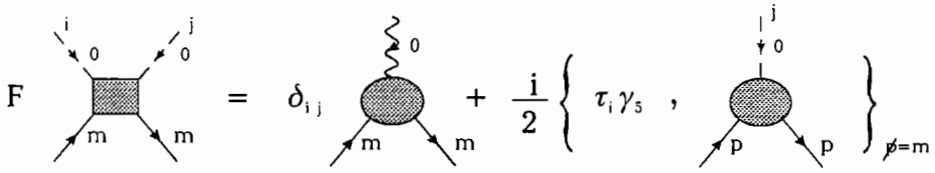
$$\lim_{\not p \to m} \left[iS_N^{-1}(\not p, \Lambda)\right] = 0 \tag{4.108}$$

$$\lim_{\not p \to m} \frac{d}{d\ \not p} \left[iS_N^{-1}(\not p, \Lambda)\right] = \gamma_N \tag{4.109}$$

As Identidades de Ward–Takahaski estabelecem relações entre este propagador e os

vértices $NN\pi$ e $NN\sigma$ através de (veja eqs.(4.23–24))





Os gráficos de Feynman que contribuem para a auto-energia do propagador do nucleon apresentam (além das divergências logarítmicas) divergências lineares, as quais não existem nos vértices e portanto estas podem ser ignoradas (subtraídas). Logo, podemos escrever

$$\Sigma_G^N(\not{p},\Lambda) = -m\Sigma_s(s,\Lambda) - \not{p}\Sigma_v(s,\Lambda) \tag{4.110}$$

As expressões explícitas para Σ_s e Σ_v são dadas no Apêndice E.

Escrevendo a contribuição para a autoenergia devida a inserção de contratermos como

$$\Sigma_C^N(\not{p},\Lambda) = -\delta m + (Z_F - 1)\not{p} \tag{4.111}$$

as condições (4.108–109) conduzem a

$$-\delta m + (Z_F - 1)m + \Sigma_G^N(m,\Lambda) = 0 \tag{4.112}$$

$$1 + (Z_F - 1) + \dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda) = \gamma_N \tag{4.113}$$

onde $\dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda) \equiv \left[d\left(\Sigma_G^N(\not{p},\Lambda)\right)/d\not{p}\right]_{\not{p}=m}$. Das equações acima, obtemos

$$\delta m = (Z_F - 1)m + \Sigma_G^N(m,\Lambda) \tag{4.114}$$

$$Z_F = \gamma_N - \dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda) \tag{4.115}$$

Substituindo Σ_G^N dado por eq.(4.110) e Σ_C^N dado por eqs.(4.111) e (4.114–115) na expressão (4.106) obtemos, no limite $\Lambda \to \infty$, a expressão renormalizada do propagador do nucleon [16].

No caso $\Lambda = \Lambda_c$, uma tal substituição conduz a uma teoria dependente de cinco parâmetros. Como destacamos no começo, desejamos que a teoria regularizada assim como a renormalizada dependa de só quatro parâmetros independentes, o que é uma condição essencial para que a teoria resultante preserve PCAC.

Antes da introdução do cutoff, a escolha mais apropriada foi $\{m, m_\pi, f_\pi, \lambda_{\pi\pi}\}$, já que três destes parâmetros podem ser identificados com quantidades físicas para as quais dispõe-se de valores experimentais bem determinados. No presente, achamos que a escolha mais apropriada para o conjunto de parâmetros independentes é

$$\{\ m\ ,\ m_\pi\ ,\ f_\pi\ ,\ \Lambda_c\ \}$$

já que podemos continuar associando três deles com quantidades físicas com valores experimentais bem determinados, e, Λ_c dá conta da escala de energia do modelo.

Para estabelecer a dependência de $\lambda_{\pi\pi}$ com respeito ao novo conjunto de parâmetros, pedimos que o seu valor seja tal que o propagador do nucleon apresente um pólo na sua massa física (sem necessidade de subtrações) e ao mesmo tempo permita uma interpretação autoconsistente das propriedades físicas associadas aos propagadores.

A teoria pode continuar sendo desenvolvida com base no conjunto $\{m, M^2, \mu^2, \lambda_{\pi\pi}\}$, o qual está vinculado ao novo conjunto por meio das Identidades de Ward–Takahaski (veja Sec.(4.2.2)) e da condição

$$\Sigma_C^N(m, \Lambda_c) = 0 \tag{4.116}$$

Como dissemos na seção precedente, a massa do píon depende fortemente de μ e é quase independente dos valores dos outros parâmetros. Através da relação $Z_\pi^{1/2} F \mu^2 = f_\pi m_\pi^2$ (eq.(4.38)), é trivial que a dependência de F com o cutoff seja muito fraca. Portanto, substituir o parâmetro $\lambda_{\pi\pi}$ pelo parâmetro Λ_c como parâmetro independente conduz quase-diretamente à previsão das propriedades do méson σ.

A condição $\Sigma_C^N(m, \Lambda_c) = 0$ conduz a

$$\delta m = (Z_F - 1)m \tag{4.117}$$

e portanto o propagador do nucleon é dado por

$$iS_N^{-1}(\not{p},\Lambda_c) \;=\; \not{p}-m+(Z_F-1)(\not{p}-m)-m\Sigma_s(s,\Lambda_c)-\not{p}\Sigma_v(s,\Lambda_c) \quad (4.118)$$

onde

$$Z_F=\gamma_N-\dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda_c) \quad (4.119)$$

Para ter um nucleon na região assintótica, devemos impor que $\gamma_N=1$. Por outra parte $\gamma_N>1$ $(Z_N<1)$ nos permite atribuir sentido físico a parte imaginária do propagador. Se supomos que o continuo dá conta dos estados ressonantes, existe probabilidade maior que zero de encontrar estes estados ressonantes na região assintótica.

Estudamos o caso $Z_F=1$, (a saber, não impomos condições de renormalização ao nucleon, $\Sigma_C^N(\not{p},\Lambda_c)=0$) logo

$$iS_N^{-1}(\not{p},\Lambda_c) \;=\; \not{p}-m-m\Sigma_s(s,\Lambda_c)-\not{p}\Sigma_v(s,\Lambda_c) \quad (4.120)$$

com

$$\gamma_N=1+\dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda_c) \quad (4.121)$$

A expressão explícita para $\dot{\Sigma}_G^N(m,\Lambda)$ é dada no Apêndice E.

Capítulo 5

Renormalização vs. Regularização do Modelo σ–Linear Análise Numérica e Interpretação dos Resultados

Estudamos numericamente os propagadores do píon, do méson σ , e do nucleon do Modelo σ–Linear no contexto $SU(2) \otimes SU(2)$ [15], na aproximação de "one–loop".

Mostramos que se o modelo é renormalizado, os propagadores mesônicos exibem pólos de energia imaginária. Além disto, as propriedades do contínuo não apresentam uma interpretação física clara. Logo investigamos com algum detalhe o comportamento dos pólos de energia do propagador do píon permitindo que a constante de acoplamento π–N, (G), varie. Mostramos que o pólo fantasma continua existindo, no entanto, a posição deste vai para o infinito (com um resíduo indo para zero) quando $G \to 0$.

Em seguida mostramos o comportamento dos propagadores quando é introduzido um cutoff no modelo, seguindo a linha estabelecida no capítulo anterior. Pode-se observar (e foi demonstrado na Sec.(4.4.2)) que os pólos fantasma de energia desaparecem para valores do cutoff menores ou da ordem de $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$. Discutiremos as características gerais do comportamento para valores deste parâmetro cutoff menores que Λ_c.

Finalmente, apresentamos os resultados da nossa versão regularizada (i.e., os resultados obtidos autoconsistentemente quando o cutoff é fixado em $\Lambda = 1.2\ GeV \approx \Lambda_c$). Como veremos é possível dar uma interpretação física às propriedades associadas aos propagadores.

5.1 Notação e Definições

Continuamos a utilizar a notação definida no capítulo anterior. Como foi demonstrado (ver Sec.(4.2.2) e Sec.(4.4.3)) a versão renormalizada assim como a regularizada, podem ser desenvolvidas em função dos parâmetros

$$\mu^2 \ , \ M^2 \ , \ m \ , \ \lambda_{\pi\pi} \tag{5.1}$$

Os resultados que apresentaremos neste capítulo são dados em função do conjunto

$$\mu^2 \ , \ M^2 \ , \ m \ , \ F \tag{5.2}$$

onde F esta relacionado com o conjunto de parâmetros dado por (5.1) através da expressão (ver eq.(4.41))

$$\lambda_{\pi\pi} = \frac{M^2 - \mu^2}{2F^2} \tag{5.3}$$

Os pólos reais dos propagadores devem representar a partícula física, ou seja,

⋆ a massa do píon é obtida a partir da equação

$$iD_\pi^{-1}(m_\pi^2) \ = \ 0 \tag{5.4}$$

e o fator de renormalização do campo do píon (resíduo do seu propagador) é dado por

$$\left[\frac{d}{ds}\, iD_\pi^{-1}(s)\right]_{s=m_\pi^2} = Z_\pi^{-1} \tag{5.5}$$

⋆ geralmente, a massa do méson σ e o fator de renormalização do seu campo são obtidos, respectivamente, a partir das equações

$$Re\ \left[iD_\sigma^{-1}(m_\sigma^2)\right] \ = \ 0 \tag{5.6}$$

$$Re\ \left[\ \frac{d}{ds}\, iD_\sigma^{-1}(s)\right]_{s=m_\sigma^2} \ = \ Z_\sigma^{-1} \tag{5.7}$$

A razão para tomar a parte real nesta última expressão é que se $m_\sigma > 2m_\pi$ o méson σ pode decair em píons e o propagador torna-se complexo.

$\star$ a massa do nucleon é obtida a partir da equação

$$i\ S_N^{-1}(m) = 0 \tag{5.8}$$

e o fator de renormalização da função de onda (resíduo do propagador) é dado por

$$\left[\frac{d}{d\not{p}}\ i\ S_N^{-1}(\not{p}) \right]_{\not{p}=m} = Z_N^{-1} \tag{5.9}$$

Na análise dos propagadores interpretamos a parte imaginária dos mesmos como espelhando o contínuo. Definimos assim a densidade de Intensidade no contínuo para os respectivos propagadores como

$$i_\pi(s) = \frac{1}{\pi}\ Im\{\ iD_\pi(s)\ \} \tag{5.10}$$

$$i_\sigma(s) = \frac{1}{\pi}\ Im\{\ iD_\sigma(s)\ \} \tag{5.11}$$

$$i_N(p) = \frac{1}{\pi}\ Im\{\ iS_N(p)\ \} \tag{5.12}$$

onde $p = +\sqrt{s}$.

Esta interpretação da parte imaginária do propagador nos sugere que o méson σ deve manifestar-se como uma ressonância centrada em $s = m_\sigma^2$. A largura desta ressonância pode ser calculada como [123]:

$$\Gamma_\sigma = \frac{Z_\sigma^{-1} Im[iD_\sigma^{-1}(m_\sigma^2)]}{m_\sigma} \tag{5.13}$$

5.2 Versão Renormalizada

Como já indicamos, as características da Lagrangiana do Modelo σ–Linear $SU(2) \otimes SU(2)$ permitem utilizar técnicas de renormalização. As expressões renormalizadas dos propagadores, foram obtidas por D.Bessis e G.Turchetti [16] . Nesta seção apresentamos uma análise quantitativa de tais expressões.

5.2.1 O Propagador Renormalizado do Píon : $D_\pi(s)$

O propagador do píon apresenta, além do pólo de energia física correspondente a massa do píon s_+, um pólo não físico s_- (veja Fig. 5.1.a e Tab. 5.1).

Na tabela 5.1 pode observar-se que a massa física do píon é pouco sensível a massa M e é muito próxima a massa μ. O pólo não físico sempre está presente dentro de um intervalo bastante grande de valores do parâmetro M . As características da intensidade no contínuo, $i_\pi(s)$, são mostradas na Fig. 5.1.b. Na tabela 5.1 podem ser observadas as posições dos máximos de intensidade (s_j, j=1,2), e o valor da correspondente intensidade i_j.

M (GeV)	μ (GeV)	s_- (GeV^2)	s_+ (GeV^2)	s_1 (GeV^2)	i_1 (GeV^{-2})	s_2 (GeV^2)	i_2 (GeV^{-2})
0.50	0.14	-2.5046	0.0194	0.512	$3{,}478.10^{-2}$	5.029	$7{,}288.10^{-3}$
0.50	0.15	-2.5146	0.0222	0.525	$3{,}223.10^{-2}$	5.029	$7{,}283.10^{-3}$
0.55	0.14	-2.4797	0.0194	0.597	$3{,}427.10^{-2}$	5.014	$7{,}321.10^{-3}$
0.55	0.15	-2.4902	0.0222	0.612	$3{,}202.10^{-2}$	5.017	$7{,}316.10^{-3}$
0.60	0.14	-2.4546	0.0194	0.689	$3{,}305.10^{-2}$	4.998	$7{,}358.10^{-3}$
0.60	0.15	-2.4653	0.0222	0.705	$3{,}108.10^{-2}$	5.001	$7{,}352.10^{-3}$
0.65	0.14	-2.4296	0.0194	0.588	$3{,}134.10^{-2}$	4.980	$7{,}398.10^{-3}$
0.65	0.15	-2.4406	0.0222	0.804	$2{,}963.10^{-2}$	4.983	$7{,}392.10^{-3}$
0.70	0.14	-2.4049	0.0194	0.892	$2{,}933.10^{-2}$	4.961	$7{,}440.10^{-3}$
0.70	0.15	-2.4161	0.0222	0.909	$2{,}785.10^{-2}$	4.963	$7{,}433.10^{-3}$

Tab. 5.1 : Pólos e máximos de intensidade no contínuo do propagador renormalizado do píon.
(Parâmetros: m = 0.938 GeV ; F = 0.093 GeV)

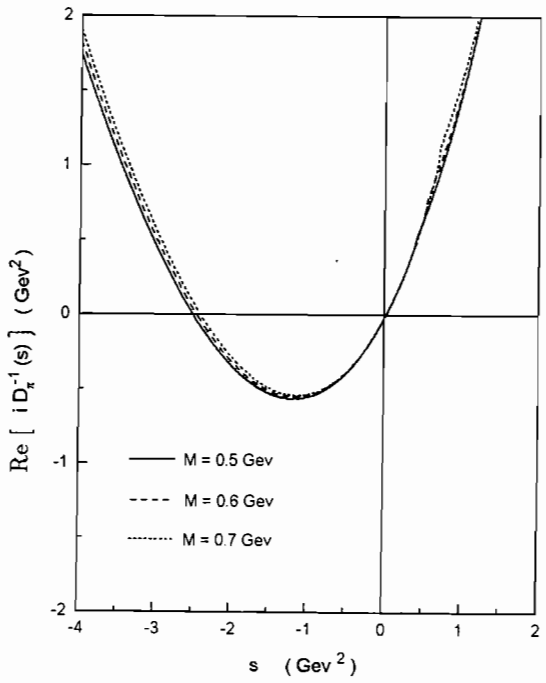


Fig. 5.1.a: Parte real do inverso do propagador renormalizado do píon como função de s (parâmetros: m = 938 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV).

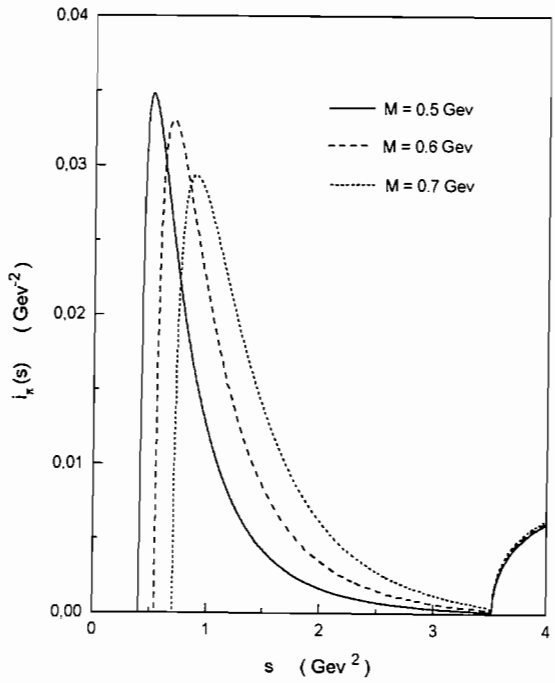


Fig. 5.1.b: Intensidade no contínuo do píon como função de s (parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV , F = 93 MeV).

5.2.2 O Propagador Renormalizado do Méson σ : $D_\sigma(s)$

O propagador do méson σ não apresenta pólos reais de energia para M $\lesssim$ 0.7 GeV (valores de M > 0.7 GeV conduzem ao aparecimento de pólos reais a energias menores que $2m_\pi$). Não obstante, um pólo de energia imaginária s_ está presente (Fig. 5.2.a). A localização deste pólo fantasma é muito mais sensível a massa M que a massa μ. O seu valor absoluto aumenta com M (Tab. 5.2). Observe-se que uma das justificativas da existência do pólo de energia imaginária apresentado pelo propagador do píon consiste em argumentar que o mesmo aparece fora do intervalo de validade do modelo [17]; no entanto, uma tal argumentação não pode ser aplicada ao caso do méson σ, pois a posição do seu pólo fantasma encontra-se dentro do intervalo no qual espera-se que a teoria tenha validade. Para valores de M no intervalo [0.3 GeV , 0.7GeV] não achamos zeros de Re[$iD_\sigma^{-1}(s)$] na região de energias onde a contribução dominante é devida ao acoplamento a dois píons (i.e. $4\mu^2 < s < 4M^2$).

As características do contínuo podem ser observadas em Fig.(5.2.b). A posição dos

máximos (s_j, $j = 1, 2, ..$) e o valor das correspondentes intensidades (i_j) são mostrados em Tab.(5.2). As características do contínuo não apresentam uma clara interpretação física.

M (GeV)	μ (GeV)	s_- (GeV^2)	s_1 (GeV^2)	i_1 (GeV^{-2})	s_2 (GeV^2)	i_2 (GeV^{-2})	s_3 (GeV^2)	i_3 (GeV^{-2})
0,50	0,139	-0,4205	0,099	$4{,}795.10^{-1}$	1,069	$2{,}946.10^{-1}$	2,396	$5{,}292.10^{-1}$
0,50	0,140	-0,4195	0,101	$4{,}747.10^{-1}$	1,069	$2{,}949.10^{-1}$	2,395	$5{,}306.10^{-1}$
0,55	0,139	-0,5435	0,091	$6{,}121.10^{-1}$	1,229	$3{,}581.10^{-1}$	2,416	$3{,}697.10^{-1}$
0,55	0,140	-0,5421	0,092	$6{,}065.10^{-1}$	1,229	$3{,}590.10^{-1}$	2,414	$3{,}705.10^{-1}$
0,60	0,139	-0,6936	0,084	$8{,}164.10^{-1}$	1,440	$4{,}575.10^{-1}$	2,260	$2{,}763.10^{-1}$
0,60	0,140	-0,6917	0,085	$8{,}088.10^{-1}$	1,440	$4{,}554.10^{-1}$	2,251	$2{,}770.10^{-1}$
0,65	0,139	-0,8741	0,080	1,250	1,690	$5{,}150.10^{-1}$	—	—
0,65	0,140	-0,8715	0,081	1,236	1,690	$5{,}172.10^{-1}$	—	—
0,70	0.139	-1,0875	0,078	3,155	1,959	$4{,}255.10^{-1}$	—	—
0,70	0.140	-1,0842	0,079	3,075	1,959	$4{,}249.10^{-1}$	—	—

Tab. 5.2 : Pólo e máximos de intensidade no contínuo do propagador do méson σ (Parâmetros: m = 0.938 GeV ; F = 0.093 GeV)

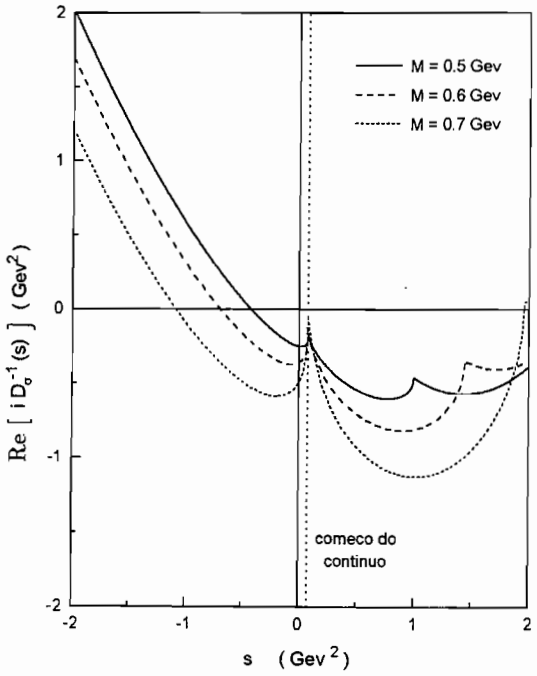


Fig. 5.2.a: Parte real do inverso do propagador renormalizado do méson σ como função de s (parâmetros: m = 938 MeV , μ = 140 MeV, F = 93 MeV).

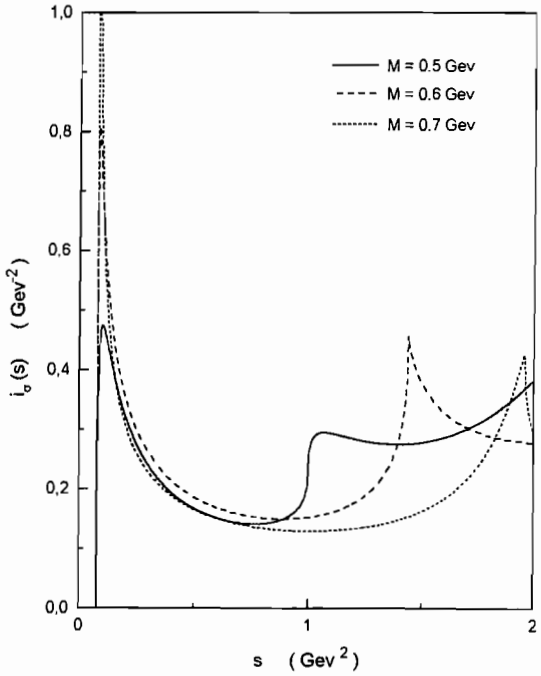


Fig. 5.2.b : Intensidade no contínuo do méson σ como função de s (parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV, F = 93 MeV).

5.2.3 O Propagador Renormalizado do Nucleon : $S_N(\not{p})$

O propagador fermiônico apresenta um pólo na massa física do nucleon com resíduo igual a unidade (o qual foi imposto pelas condições de renormalização) e não apresenta pólos de energia imaginária (Fig. 5.3.a).

As características do contínuo são mostradas na Fig. 5.3.b. As posições dos máximos de intensidade (p_j, j=1,2) e os respectivos valores destas intensidades (i_j) são mostradas na tabela 5.3.

M (GeV)	p_1 (GeV)	i_1 (GeV^{-1})	p_2 (GeV)	i_2 (GeV^{-1})
0,50	1,238	$6{,}023.10^{-2}$	1,642	$8{,}984.10^{-2}$
0,55	1,253	$6{,}806.10^{-2}$	1,703	$8{,}414.10^{-2}$
0,60	1,267	$7{,}521.10^{-2}$	1,762	$7{,}938.10^{-2}$
0,65	1,281	$8{,}171.10^{-2}$	1,819	$7{,}535.10^{-2}$
0,70	1,294	$8{,}761.10^{-2}$	1,874	$7{,}190.10^{-2}$

Tab. 5.3 : Máximos de intensidade no contínuo do propagador do nucleon.
(Parâmetros: m = 0.938 GeV ; μ = 0.140 GeV ; F = 0.093 GeV)

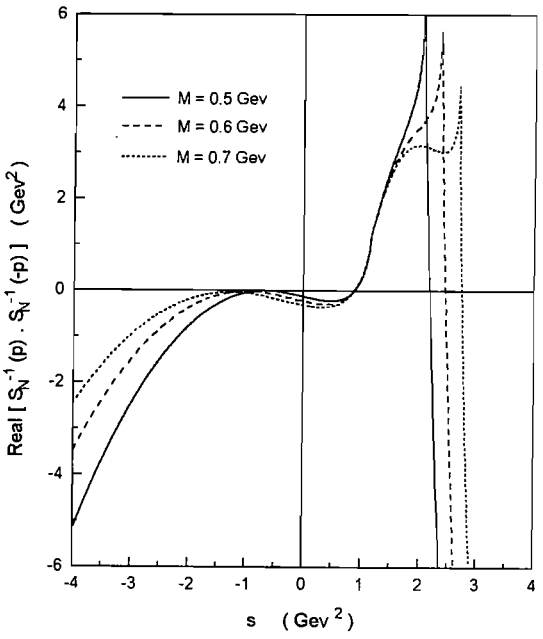


Fig. 5.3.a:
Parte real de $[\, S_N^{-1}(\not{p}) \cdot S_N^{-1}(-\not{p})\,]$ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV, F = 93 MeV.)

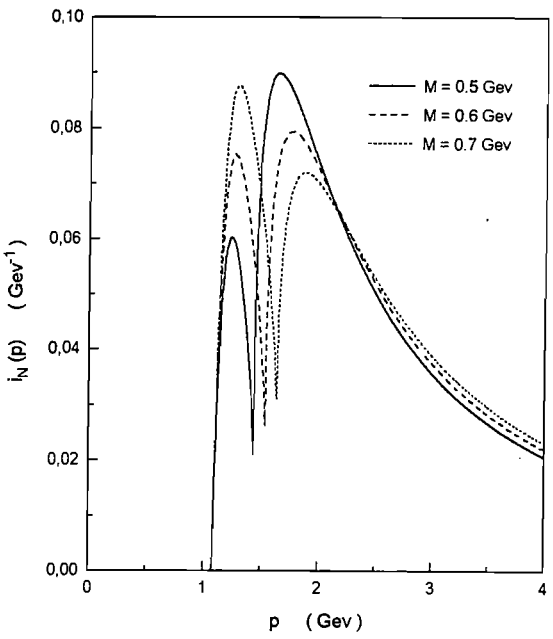


Fig. 5.3.b:
Intensidade no contínuo do nucleon como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV, F = 93 MeV.)

5.2.4 O Comportamento dos Pólos do Propagador do Píon em Função da Constante de Acoplamento Píon–Férmions

O objetivo desta investigação foi estudar com alguns detalhes os pólos do propagador renormalizado do píon.

A massa do píon manifesta–se como um pólo de energia real do propagador, mas o modelo apresenta uma solução não física (pólo de energia imaginária). A ocorrência do pólo imaginário ainda hoje está sendo discutida.

Segundo R.J.Perry [17],"...A solução não física aparece devido à ausência de liberdade assintótica do modelo...O valor absoluto desta energia está acima do regime de valores onde espera–se que tais modelos efetivos produzam uma descrição de hádrons..."

Segundo L.Wilets [124], poderia existir alguma relação entre os pólos imaginários que apresentam os seguintes one–loops

Com a finalidade de colaborar com as investigações que estavam sendo realizadas pelo Dr. Wilets, fizemos uma análise do comportamento do pólo imaginário apresentado pelo propagador renormalizado do píon obtido no Modelo σ–Linear na aproximação de "one–loop" em função da constante de acoplamento píon–nucleons.

Na expressão deste propagador para $G \simeq 10$, temos $F^2 \approx 10^{-4} G^2\ GeV^2$. Por outro lado, o nosso interesse era o comportamento do pólo de energia imaginária do propagador do píon quando consideramos contribuções à autoenergia provenientes dos "one–fermions–loop" (já que são essas contribuções as responsáveis da instabilidade do vácuo, e portanto, da ocorrencia destes pólos fantasma [17]). Por essas razões, desprezamos a contribução "π-σ". Permitindo que a constante de acoplamento varie, obtivemos os valores numéricos listados na tabela 5.4.

G	$s^{(-)}_{polo}(GeV^2)$	$Res^{(-)}$	$s^{(+)}_{polo}(GeV)^2$	$Res^{(+)}$
1	-9,1.10^{17}	?	0.019	1.000
2	-125938	-0.101	0.019	1.000
3	-510.495	-0.244	0.019	0.997
5	-22.998	-0.483	0.019	0.994
10	-2.681	-0.812	0.019	1.017
20	-0.573	-1.005	0.018	1.071
50	-0.100	-1.354	0.016	1.383
100	-0.033	-2.142	0.012	2.163

Tab. 5.4: Pólos e correspondentes resíduos do propagador renormalizado do píon em função da constante de acoplamento π–N (parâmetros: $\mu = 0.139$ GeV, $m = 0.938$ GeV).

Uma análise dos resultados conduz as seguintes conclusões:

- ⋆ O pólo real é muito estável para $G \lesssim 20$.
- ⋆ O valor absoluto do pólo de energia imaginária torna–se muito grande quando G é pequena.

Estávamos inclinados a pensar que o valor absoluto do pólo tenderia para infinito , e seu resíduo a zero, para valores de G tendendo a zero. A fim de verificar estas suposições fizemos uma aproximação assintótica nas expressões do propagador e sua derivada, no limite $s \to -\infty$. A partir delas achamos as seguintes expressões para o pólo e o seu resíduo

$$s_{pólo} = -m^2 e^{\left(\frac{2\pi}{G}\right)^2+2} \tag{5.14}$$

$$Res]_{s=s_{pólo}} = -\frac{G^2}{4\pi^2} \tag{5.15}$$

Como pode observar-se na tabela (5.5), estas expressões apresentam uma boa concordancia com os valores numéricos para $G \lesssim 3$.

G	$s_{polo}^{(-)teor.}$	$s_{polo}^{(-)num.}$	$Res^{(-)teor.}$	$Res^{(-)num.}$
0.5	-2,5.10^{69}	-2,5.10^{69}	-0.006	?
1	-9,1.10^{17}	-9,1.10^{17}	-0.025	?
2	-125960	-125938	-0.101	-0.101
2.5	-3607	-3591	-0.158	-0.158
3	-523	-510	-0.228	-0.244
5	-31	-23	-0.630	-0.483

Tab. 5.5 : Pólos fantasma e correspondentes resíduos do propagador renormalizado do píon como função da constante de acoplamento π–N (o índice "teor." indica que o valor tabulado foi obtido a partir das eqs. (5.13-14), "num." refere-se aos valores achados numericamente a partir da expressão exata do propagador). (Parâmetros: $\mu = 0.139$ GeV, $m = 0.938$ GeV)

E portanto para $G \rightarrow 0$ temos que

$$\begin{aligned} s_{pólo} &\rightarrow -\infty \\ Res &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Assim, concluimos que, enquanto existir um acoplamento π–N maior que zero, o pólo fantasma estará presente.

5.3 Versão Regularizada

Nesta seção mostramos o papel que desempenha um parâmetro cutoff no modelo, o qual fixa a escala de energias. A introdução deste é realizada de acordo com os procedimentos estabelecidos no capítulo anterior. Neste estágio é importante observar que **a introdução deste parâmetro cutoff sem levar em conta os requerimentos da simetria quiral conduz a resultados totalmente insatisfatórios**, por exemplo, para valores do cutoff da ordem dos utilizados na literatura ou superiores, o propagador do píon apresenta um único pólo de energia imaginária e resíduo positivo.

Abaixo são apresentados os resultados obtidos de uma análise quantitativa de nossas expressões regularizadas.

5.3.1 Os Propagadores Regularizados Mesônicos

O propagador do píon exibe um pólo na sua massa física m_π, para valores do parâmetro μ muito próximos a ela ($m_\pi^2 \simeq \mu^2$) e valores do parâmetro $F \simeq f_\pi$. Este pólo é muito estável com relação a todos os outros parâmetros. A existência de um pólo de energia imaginária depende fortemente do valor do cutoff, como pode ser observado na figura (5.4.a), a qual foi construída com M = 0.6 GeV e variando Λ. Na fig.(5.4.b) mostra-se a fraca dependência com M para Λ fixado em 1 GeV. Quando $\Lambda \to \Lambda_c \sim 1.2GeV$, o valor absoluto do pólo de energia imaginária aumenta rapidamente, até desaparecer no infinito. Como foi demonstrado na Sec.(4.4.2), para $\Lambda < \Lambda_c$ não existem tais fantasmas.

As características do contínuo são sensíveis a Λ e a M , como pode ser observado nas figuras (5.4.c) e (5.4.d), as quais foram construídas fixando M = 0.6 GeV e Λ = 1 GeV respectivamente.

O propagador do méson σ não apresenta pólos de energia real para $M \lesssim 650\ MeV$. Como no caso do píon, a existência de um pólo de energia imaginária depende fortemente do cutoff, como pode ser observado na figura (5.5.a), a qual foi construída com M = 0.6 GeV e variando Λ. Este pólo desaparece simultaneamente com o do píon quando $\Lambda = \Lambda_c$ e para $\Lambda < \Lambda_c$ o propagador não apresenta fantasmas (ver Sec(4.4.2)).

As características do contínuo são muito sensíveis a Λ e a M , como pode ser observado nas figuras (5.5.c) e (5.5.d), as quais foram construídas fixando M = 0.6 GeV e Λ = 1 GeV respectivamente. Comparando as figuras (5.5.a) com (5.5.c) e (5.5.b) com (5.5.d) vemos que as características do contínuo são altamente influenciadas por um zero da parte real do inverso do propagador. Para $\Lambda \lesssim \Lambda_c$ e $M \lesssim 0.650\ GeV$ um zero ocorre na região de energias onde a contribução dominante é devida ao acoplamento a dois píons. Isto gera uma ressonância que poderia ser interpretada como uma partícula escalar.

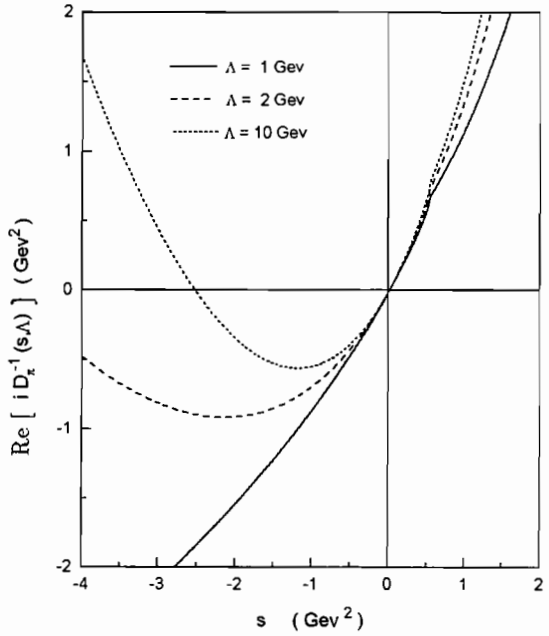


Fig. 5.4.a: Parte real do inverso do propagador regularizado do píon como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV , M = 600 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV.)

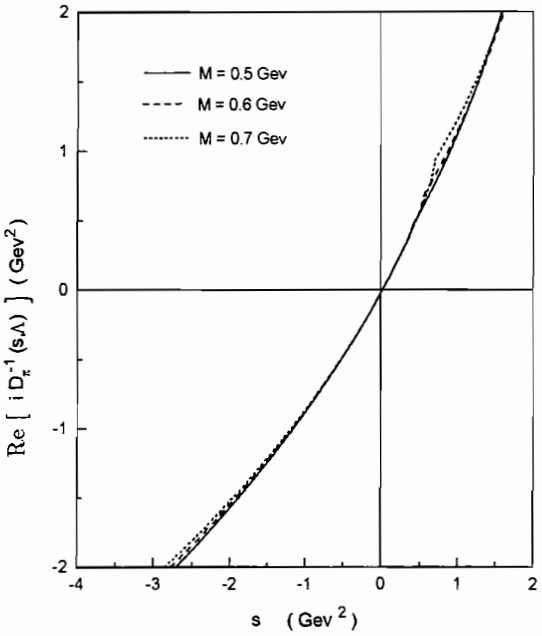


Fig. 5.4.b: Parte real do inverso do propagador regularizado do píon como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV).

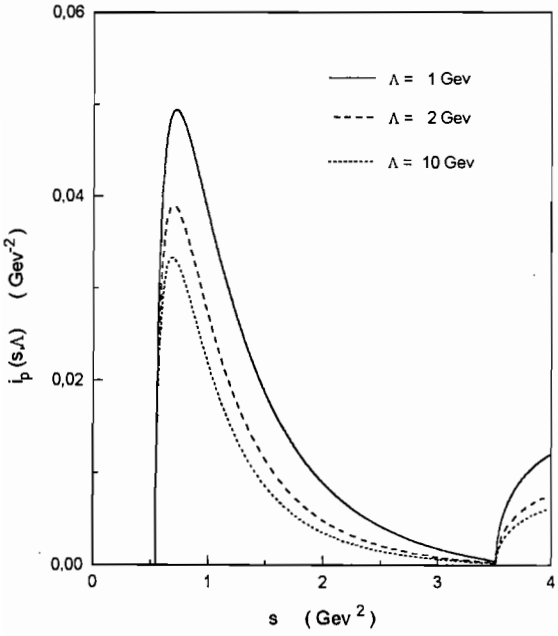


Fig. 5.4.c: Intensidade no contínuo do píon como função de s (parâmetros: m = 938 MeV, M = 600 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV).

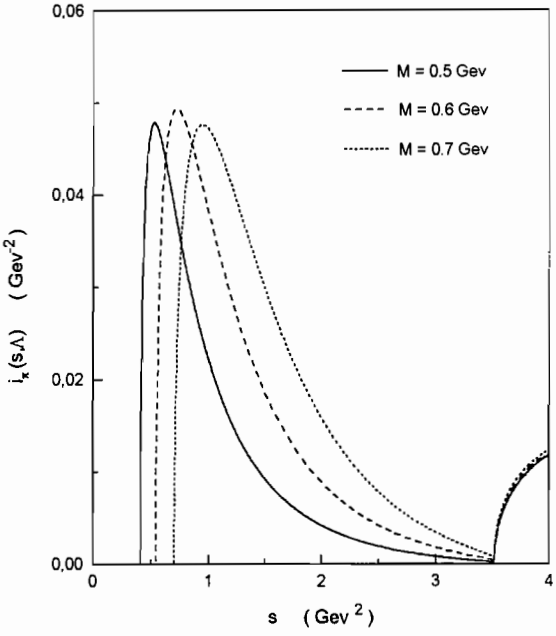


Fig. 5.4.d: Intensidade no contínuo do píon como função de s (parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV).

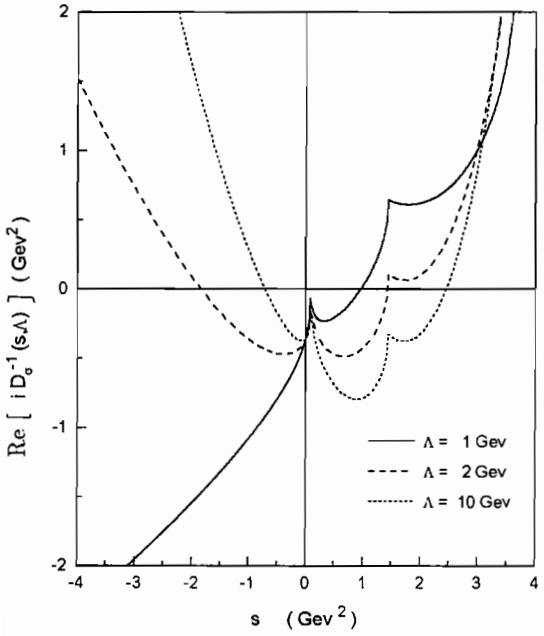


Fig. 5.5.a: Parte real do inverso do propagador regularizado do méson σ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, M = 600 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV.)

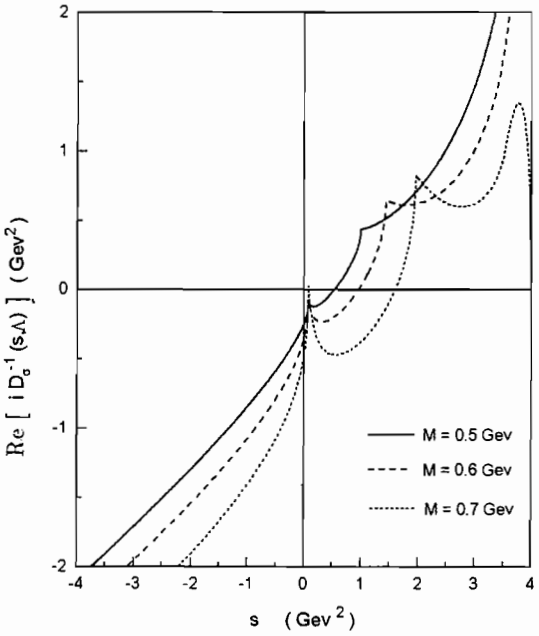


Fig. 5.5.b: Parte real do inverso do propagador regularizado do méson σ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV.)

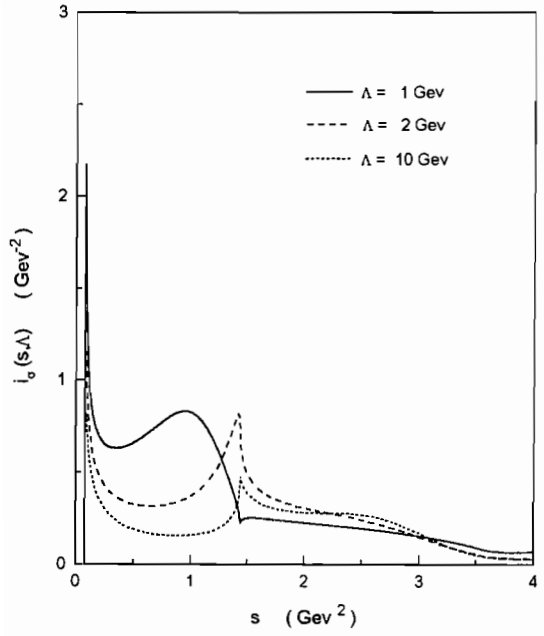


Fig. 5.5.c: Intensidade no contínuo do méson σ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, M = 600 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV.)

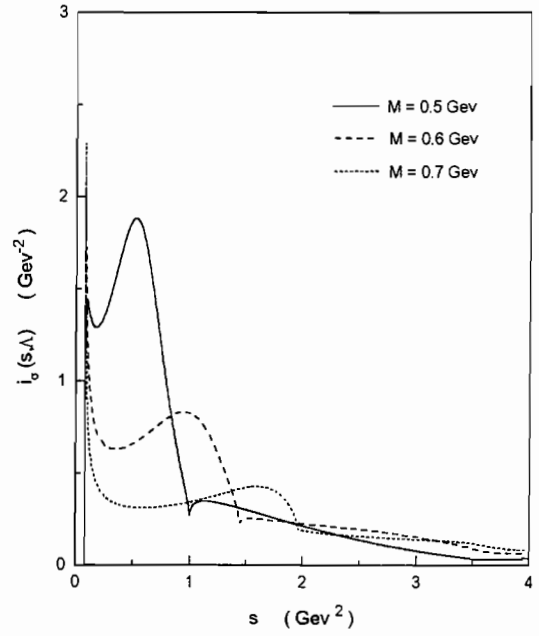


Fig. 5.5.d: Intensidade no contínuo do méson σ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV, μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV.)

5.3.2 O Propagador Regularizado do Nucleon

O propagador do nucleon (eq.(4.120)) apresenta um pólo de energia real, p_+, na massa física do férmion quando $M \sim 520\ MeV$, dependendo fracamente do valor do cutoff (ver Tab. 5.6). Além disto, o propagador não apresenta pólos de energia imaginária (ver Fig.(5.6.a)).

As características do contínuo são mostradas na tabela (5.6) e na figura (5.6.b), as quais foram construídas com valores dos parâmetros compatíveis com os utilizados nos outros propagadores e escolhendo M de forma que o pólo de energia se manifeste na massa física do nucleon.

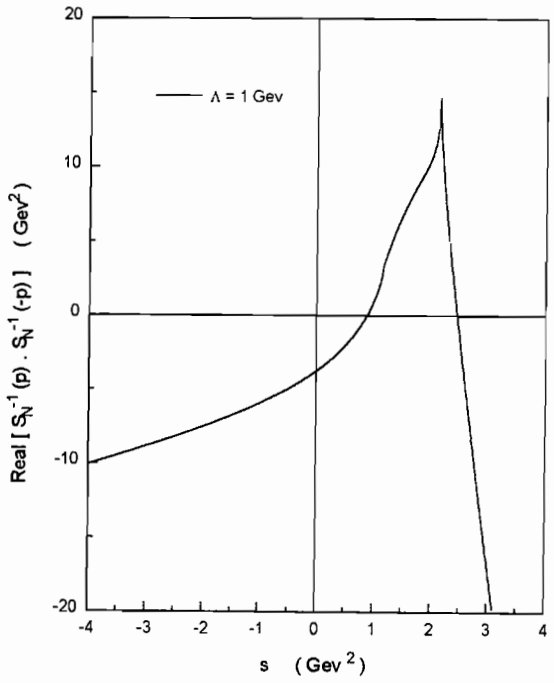


Fig. 5.6.a:
Parte real de $[S_N^{-1}(\not{p}, \Lambda) \cdot S_N^{-1}(-\not{p}, \Lambda)]$ como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV , M = 529 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV.)

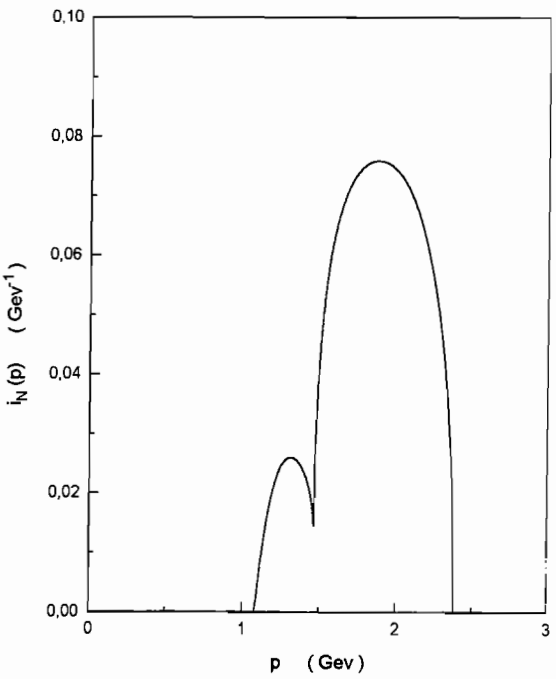


Fig. 5.6.b:
Intensidade no contínuo do nucleon como função de s. (Parâmetros: m = 938 MeV , M = 529 MeV , μ = 140 MeV , F = 93 MeV , Λ = 1 GeV.)

Λ (GeV)	M (GeV)	s_+ (GeV^2)	p_1 (GeV)	i_1 (GeV^{-1})	p_2 (GeV)	i_2 (GeV^{-1})
0,95	0,533	0,8798	1,315	$2{,}802.10^{-2}$	1,861	$7{,}886.10^{-2}$
1,00	0,529	0,8799	1,314	$2{,}597.10^{-2}$	1,874	$7{,}583.10^{-2}$
1,10	0,522	0,8796	1,312	$2{,}259.10^{-2}$	1,895	$7{,}050.10^{-2}$
1,20	0,518	0,8801	1,312	$2{,}015.10^{-2}$	1,913	$6{,}593.10^{-2}$
1,30	0,514	0,8796	1,312	$1{,}813.10^{-2}$	1,924	$6{,}200.10^{-2}$
1,40	0,512	0,8801	1,313	$1{,}660.10^{-2}$	1,931	$5{,}857.10^{-2}$
1,50	0,510	0,8801	1,314	$1{,}531.10^{-2}$	1,934	$5{,}556.10^{-2}$

Tab. 5.6 : Pólo e máximos de intensidade no contínuo do propagador do nucleon.
(Parâmetros: m = 0.938 GeV ; μ = 0.140 GeV ; F = 0.093 GeV)

5.3.3 Os Resultados Autoconsistentes para $\Lambda \approx \Lambda_c$

Ao fixar $\Lambda = 1.2\ GeV \approx \Lambda_c$, os resultados autoconsistentes são obtidos para $M = 518\ MeV$ (os valores dos parâmetros μ^2 e F são fixados pela condição que o propagador do píon apresente um pólo na sua massa física, e, como já apontamos, a ocorrência deste pólo é quase independente dos valores dos parâmetros M e Λ).

O propagador do píon exibe um pólo na sua massa física m_π e não apresenta pólos de energia imaginária.

Não nos deteremos no contínuo desta partícula, desde que acreditamos que o píon é descrito melhor por pares quark–antiquark como é feito com o mesmo modelo na ref.[20].

O propagador do méson σ não apresenta pólos. Um zero da parte real do inverso do propagador ocorre a uma energia $\sqrt{s_o} \approx 881\ MeV$.

Como dissemos antes, as características do contínuo são muito sensíveis a Λ e a M. Assim para $\Lambda = 1.2\ GeV$ obtemos uma forte ressonância centrada a $\sqrt{s} = 881\ MeV$ (em correspondencia com o zero da parte real do inverso do propagador) com uma correspondente largura $\Gamma = 363\ MeV$ (ver Fig 5.7). Estas características podem ser interpretadas

como dando conta de uma partícula escalar 0^+, i.e., o méson σ. Os valores obtidos para m_σ e Γ_σ são razoáveis, a saber, estão em concordância com os resultados de outras teorias.

O propagador do nucleon (eq.(4.120)) não apresenta pólos de energia imaginária e exibe um pólo de energia real, na massa física do nucleon. Observe-se que a exigência de que o propagador apresente tal pólo para $\Lambda = 1.2\ GeV$ é a condição que fixa o valor do parâmetro M em 518 MeV (ver Sec(4.4.3)).

As características do contínuo correspondem aquelas mostradas na Fig.(5.6.b). Como pode ser observado temos duas ressonâncias: uma delas correspondendo ao acoplamento dos nucleons ao píon em $p_1 \sim 1.3\ GeV$ e a segunda, devida ao acoplamento dos nucleons com o méson σ em $p_2 \sim 1.9\ GeV$ (ver Tab. 5.6) Ambas podem ser associadas a valores experimentais.

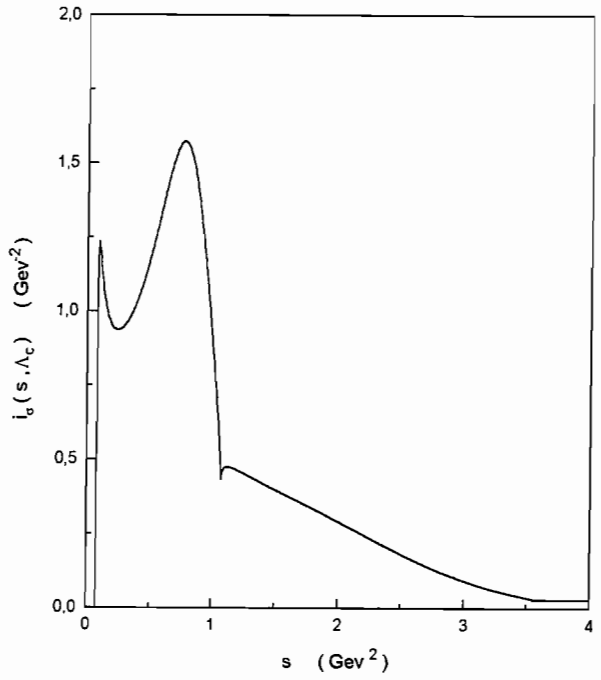


Fig. 5.7: Intensidade no contínuo do propagador do méson σ como função de s.
(Parâmetros: m = 938 MeV, M = 518 MeV, μ = 140 MeV, F = 93 MeV, Λ = 1.2 GeV.)

5.4 Principais Semelhanças e Diferenças entre as Versões Renormalizada e Regularizada do Modelo σ–Linear

Nesta seção trataremos de organizar e resumir as principais semelhanças e diferenças entre as versões renormalizada e regularizada do Modelo σ–Linear:

⋆ Sobre o propagador do píon:

Em ambas as versões o pólo físico do píon depende essencialmente apenas da massa μ e do parâmetro F, sendo bastante estável com relação aos outros parâmetros. O contínuo deste propagador é bastante semelhante em ambos os modelos e, por razões físicas, não foi explorado aqui. A principal diferença está no fato de que a introdução do cutoff ($\Lambda \lesssim \Lambda_c$) evita o aparecimento de pólos não físicos.

⋆ Sobre o propagador do méson σ :

Na versão renormalizada o propagador do méson σ, além de apresentar um pólo fantasma para valores de energia dentro do intervalo no qual se espera que o modelo produza uma boa descrição desses mésons, para valores de M no intervalo [0.3 GeV , 0.7 GeV] não existe um zero de $Re[iD_\sigma^{-1}(s)]$ na região de energias onde a contribução dominante é devida ao acoplamento a dois píons. Consequentemente, também não aparecem ressonâncias para valores razoáveis de energia (i.e., valores da ordem dos obtidos por outras teorias). As características do contínuo são de difícil interpretação hoje.

A introdução de um cutoff no modelo mostra que este propagador é altamente sensível ao valor do mesmo e ao da massa M. Para valores de $\Lambda \gtrsim 15\ GeV$ recuperamos as características do modelo renormalizado. No entanto, quando este valor decresce as características mudam drásticamente, de modo que ao nos aproximarnos do valor crítico $\Lambda_c \approx 1.2\ GeV$ por valores superiores, o pólo fantasma tende a desaparecer bruscamente. Simultaneamente um zero da parte real de $iD_\sigma^{-1}(s,\Lambda)$ vem da região em que as contribuções em "one-loop" são devidas aos acoplamentos " π-π-σ " e "σ-σ-σ " para a região onde tais contribuções são devidas aos acoplamentos " π-π-σ ". Isto gera uma ressonância (cujo máximo está em correspondência com o zero discutido anteriormente) que poderia ser interpretada como uma partícula escalar. A posição e a largura dessa ressonância

dependem fortemente de M.

⋆ Sobre o propagador do nucleon :

Para o caso renormalizado não há muito o que discutir uma vez que o propagador reflete precisamente as imposições da renormalização, i.e., que exista um pólo de resíduo unitário na massa física do nucleon.

Ao introduzirmos o cutoff observamos que para valores do mesmo da ordem dos utilizados na literatura a autoconsistência é obtida para valores de $M \approx 0.52\ GeV$.

Ao fixarmos o valor do cutoff em $\Lambda = 1.2\ GeV$, e relaxarmos a condição $\gamma_N = 1$ (veja eq.(4.120-121)) podemos interpretar fisicamente o contínuo do nucleon, encontrando assim duas ressonâncias que podem ser associadas às ressonâncias de Ropper.

Simultaneamente, este conjunto de parâmetros prevê que a intensidade no contínuo do propagador do méson σ apresenta um máximo centrado em $\sqrt{s} = 881\ MeV$ com uma largura de 363 MeV. Vemos ainda que as características de interpretação duvidosa na versão renormalizada desaparecem. Logo, a ressonância supracitada pode ser interpretada como a partícula escalar 0^+.

Assim, esta versão regularizada do modelo faz com que os resultados físicos emerjam numa forma natural, além de não entrar em contradições com predições de outras teorias.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos uma análise detalhada do Modelo σ–Linear na aproximação one–loop para compreender o papel representado pela renormalização em modelos efetivos.

Concluimos que na versão renormalizada aparecem pólos fantasma e que é difícil dar uma interpretação física aos resultados. Quando o modelo é olhado como um modelo efetivo construído para descrever a física de hádrons a baixas energias, em particular propriedades do méson σ e dos nucleons, um valor de cutoff é parte das definições do modelo. No entanto a introdução desse parâmetro deve ser feita de modo a respeitar as relações de simetria do modelo original. De outra forma, a violação dessas simetrias manifesta-se em resultados não físicos. Este fato nos sugere fortemente um procedimento para regularização: ele deve ser construído de maneira paralela a um processo de renormalização, i.e., deve manter as invarianças originais da Lagrangiana.

Após implementar este esquema de regularização, mostramos que existe um valor de cutoff máximo $\Lambda_c \approx 1.2\ Gev$ abaixo do qual os pólos fantasma desaparecem e uma interpretação física pode ser dada para os propagadores dos mésons e do nucleon.

O aparecimento de pólos fantasma em tais propagadores é certamente bem conhecida desde muitos anos em física nuclear relativística [126, 127] e várias interpretações deles podem ser encontradas na literatura. Alguns consideram que eles são um sinal da in-

consistência de qualquer teoria de campo relativística local, outros argumentam que as teorias envolvendo nucleons e mésons pontuais necessitam ser consideradas como efetivas e um esquema de regularização deve estar incluido na definição do modelo.

Seguimos a segunda linha de raciocínio.

Um outro motivo pelo qual decidimos estudar o Modelo σ–Linear foi o fato que os mésons mais pesados que o píon (como o méson sigma e outros mésons vetoriais) estão descritos pobremente no contexto de pares $q\bar{q}$. Devido a isto, recentemente foi desenvolvida uma versão SU(3) do Modelo σ-Linear[125] com base no modelo a quarks, uma versão generalizada do Modelo de NJL. A partir deste modelo poderemos então abordar várias questões abertas interessantes entre as quais está a pergunta proposta por experimentais: será o meson σ uma "molécula" $K\bar{K}$? Poderemos ainda estudar vários decaimentos ainda inexplorados como $w \rightarrow \pi\pi\pi$, etc.

Outro aspecto importante seria obter uma equação de estado baseada nessa versão SU(3) com vistas em aplicações na matéria de neutrons ou explosão de supernovas.

Ainda neste contexto acreditamos que um estudo dessa dinâmica microscópica em função da densidade e temperatura há de conduzir-nos a uma física interessante.

Apêndice A

Notação

As convenções usadas neste trabalho são as do livro de Bjorken e Drell [19] .

A.1 Métrica

O tensor de métrica é dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

As coordenadas espaço-tempo $(t, \vec{x})$ são denotadas pelo quadri-vetor contravariante (com a convenção $c = \hbar = 1$)

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \vec{x}) \tag{A.2}$$

O quadri-vetor covariante x_μ é

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -\vec{x}) = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{A.3}$$

As derivadas com relação a coordenadas contravariantes ou covariantes são abreviadas como

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial^\mu} \quad , \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial_\mu} \tag{A.4}$$

O quadri-momento é similarmente definido

$$p^\mu \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \vec{p}) \tag{A.5}$$

A menos que se especifique outra coisa, é compreendida a soma sobre índices repetidos Lorentz (gregos) ou espaciais (latinos)

$$U \cdot V = U_\mu V^\mu = U^\mu V_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu V^\mu = g^{\mu\nu} U_\mu V_\mu = U^o V^o - \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U^o V^o - U^i V^i \tag{A.6}$$

As vezes, um trivetor ou a parte tridimensional de um quadrivetor contravariante pode ser denotada por "negrinhas":

$$\vec{V} = \mathbf{V} = (V^1, V^2, V^3) = (V_x, V_y, V_z) \tag{A.7}$$

O tensor tridimensional totalmente anti-simétrico ϵ^{ijk} é definido por

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk} = 1 \qquad \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação par de } (1,2,3)$$

O tensor de Levi-Civita, quadri-dimensional, totalmente anti-simétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é definido por

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ é uma permutação par de } (0,1,2,3), \\ -1 & \text{se } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ é uma permutação impar de } (0,1,2,3), \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

A.2 As Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^o, \gamma)$ satisfazem as relações de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.8}$$

e gozam das seguintes propriedades:

$$(\gamma^o)^\dagger = \gamma^o \qquad\qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$
$$(\gamma^o)^2 = 1 \qquad\qquad (\gamma^i)^2 = -1$$

ou seja γ^o é hermitiana e as γ^i são antihermitianas. Elas podem ser relacionadas às matrizes β e α através de

$$\gamma^o = \beta \qquad\qquad \gamma = \beta\alpha$$

com β e α sendo as matrizes definidas por

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad\qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

em que I é a matriz Identidade (2×2) e σ é um vetor tridimensional tendo as matrizes de Pauli por componentes, isto é

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que satisfazem as seguintes regras de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\ i\ \epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.9}$$

em que ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

Frequentemente aparecem combinações de matrizes γ.

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.10}$$

e satisfaz as propriedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \ , \qquad (\gamma^5)^2 = I \tag{A.11}$$

Na representação de Dirac, a matriz γ_5 tém a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

A matriz $\sigma^{\mu\nu}$ é outra frequente combinação de matrizes γ definida por

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

Na representação de Dirac, a matriz $\sigma^{\mu\nu}$ tém a forma

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \qquad \text{com i, j, k em ordem cíclica}$$

$$\sigma^{oi} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Em muitas oportunidades aparece o produto interno de uma matriz γ com um quadrivetor ordinário, o qual pode ser denotado como

$$\gamma_\mu a^\mu = \not{a} = \gamma_o a^o - \gamma \cdot \mathbf{a} \tag{A.13}$$

Algumas identidades úteis são:

$$\begin{aligned}
\not{a}\ \not{b} &= a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \\
\gamma^\lambda \gamma_\lambda &= 4 \\
\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda &= -2\gamma^\mu \\
\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda &= 4g^{\mu\nu} \\
\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\lambda &= -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \\
\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\lambda &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma) \\
\gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma_\lambda &= 0 \\
\gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_\lambda &= 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
trI &= 4 \\
tr\gamma^{\mu} &= 0 \\
tr\gamma^{5} &= 0 \\
tr(\gamma^{5}\gamma^{\mu}) &= 0 \\
tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) &= 4g^{\mu\nu} \\
tr(\sigma^{\mu\nu}) &= 0 \\
tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}) &= 0 \\
tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
tr(\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

A.3 Os Espinores de Dirac

Um espinor de Dirac para uma partícula de momento p e polarização s é denotado por $u(p,s)$ enquanto que para a antipartícula é chamado $v(p,s)$. Em cada caso, a energia $p_o = E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ é positiva. O vetor s^{μ} representa a direção do spin da partícula física no sistema de repouso, no qual tém a forma

$$s^{\mu} = (0, \hat{\mathbf{s}}) \quad , \qquad \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 1 \tag{A.14}$$

Os espinores u e v satisfazem a equação de Dirac

$$(\not{p} - m)\, u(p,s) = 0 \tag{A.15}$$

$$(\not{p} + m)\, v(p,s) = 0 \tag{A.16}$$

Os espinores adjuntos

$$\bar{u} = u^{\dagger}\gamma_o \tag{A.17}$$

$$\bar{v} = v^{\dagger}\gamma_o \tag{A.18}$$

satisfazem

$$\bar{u}(p,s)\ (\not{p}-m) = 0 \tag{A.19}$$

$$\bar{v}(p,s)\ (\not{p}+m) = 0 \tag{A.20}$$

Os operadores de projeção são dados por

$$u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) = \left[\frac{\not{p}+m}{2m}\cdot\frac{1+\gamma_5\ \not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta} \tag{A.21}$$

$$v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s) = -\left[\frac{m-\not{p}}{2m}\cdot\frac{1+\gamma_5\ \not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta} \tag{A.22}$$

Estas expressões conduzem às condições de normalização

$$u(p,s)\bar{u}(p,s) = 1 \tag{A.23}$$

$$v(p,s)\bar{v}(p,s) = -1 \tag{A.24}$$

e a relação de completeza

$$\sum_s [\ u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)\ ] = \delta_{\alpha\beta} \tag{A.25}$$

Para dois espinores quaisquer ψ_1 e ψ_2 e qualquer matriz Γ, 4×4,

$$[\bar{\psi}_1\ \Gamma\ \psi_2]^\dagger = \bar{\psi}_2\ \bar{\Gamma}\ \psi_1 \tag{A.26}$$

com

$$\bar{\Gamma} = \gamma^o\Gamma^\dagger\gamma^o \tag{A.27}$$

Somando os operadores de projeção (A.21-22) sobre o spin obtém-se os operadores de projeção de energia

$$[\Lambda_+(p)]_{\alpha\beta} = \sum_{\pm s} u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) = \left[\frac{\not{p}+m}{2m}\right]_{\alpha\beta} \tag{A.28}$$

$$[\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} = -\sum_{\pm s} v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s) = \left[\frac{-\not{p}+m}{2m}\right]_{\alpha\beta} \tag{A.29}$$

Apêndice B

Simetrias Unitárias Especiais

Quando as simetrias internas formam um Grupo de Lie compacto as fases dos seus operadores representativos podem ser escolhidas para obter uma representação do seu grupo de "covering". Esta representação separa dentro de componentes irredutíveis, atuando em subespaços do espaço de Hilbert original. Portanto, este último é gerado por multipletos de estados.

O procedimento para achar as convenientes representações é bem familiar em mecânica quântica. Estas são escolhidas em termos da Álgebra de Lie dos geradores hermitianos infinitesimais do grupo. Diagonalizando um conjunto maximal de geradores comutantes (subálgebra de Cartan), os estados base são representados por vetores cujas componentes são iguais aos autovalores destes operadores num espaço de dimensão igual a dimensão da Álgebra de Lie, a saber, a dimensão da sua subálgebra de Cartan. Um papel particular é desempenhado pela representação adjunta da Álgebra de Lie atuando sobre simesma através da ação linear de comutação.

A simetria SU(2) corresponde à familiar invariância de isospin das forças nucleares introduzida por Heisenberg nos anos 30.

Os membros do isodubleto elementar próton-neutron, são classificados de acordo com os autovalores da terceira componente de isospin T_3 com autovalores $\pm 1/2$ numa forma tal que

$$Q = \frac{1}{2} N + T_3 \tag{B.1}$$

onde Q é o operador de carga elétrica e N o número bariônico.

Em termos de Lagrangianas os correspondentes campos formaram um isospinor ψ e, desprezando diferenças de massa, o termo cinético

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}(i \not{\partial} + m)\psi \tag{B.2}$$

é invariante por rotações de isospin

$$\psi \rightarrow U \psi$$

com U sendo uma matriz unitária unimodular 2×2 .

No caso mais simples, associa-se este campo ao isovetor píon $\vec{\pi}$ numa forma invariante. Para o píon, segue uma relação análoga à eq.(B.1) com $N = 0$ e $T_3 = 0, \pm 1$. Usando o caráter pseudo-escalar do campo $\vec{\pi}$, a única interação invariante (renormalizável) é

$$\mathcal{L}_{int} = i g_{\pi NN} \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi \tag{B.3}$$

onde $\vec{\tau}$ e $\vec{\pi}$ são vetores no espaço de isospin. As τ_i são as matrizes de Pauli e os π_i são as coordenadas cartesianas do campo do píon, as quais estão relacionadas às componentes usuais π^+, π^- *e* π^o através de

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2) \quad , \qquad \pi^o = \pi_3 \tag{B.4}$$

Lembre-se que π^+ cria um píon positivo e aniquila um negativo. A eq.(B.3) expressa numa forma compacta o conjunto de relações sob os vários acoplamentos,

$$g_{\pi^{\pm}pm} = \sqrt{2}\, g_{\pi^{\circ}pp} = -\sqrt{2}\, g_{\pi^{\circ}nn}$$

assessando o conteúdo dinâmico do sistema.

Para este caso SU(2), a dimensão da Álgebra de Lie é um, os diagramas de peso são uni-dimensionais, a abciça sendo o autovalor de T_3 (Fig.(B.1)). A representação adjunta corresponde a isospin 1 com

$$T_{\pm} = T_1 \pm T_2 \quad , \qquad [T_3, T_{\pm}] \;=\; \pm T_{\pm} \tag{B.5}$$

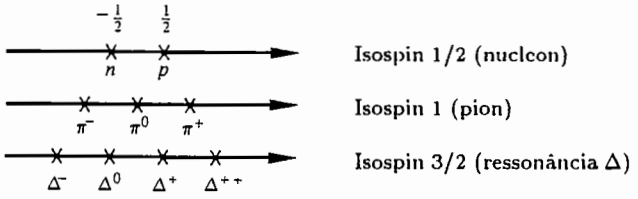


Fig.B.1 : Diagramas de peso para $SU(2)$.

A princípios dos anos 60, Gell-Mann [47] e Neèman [48] introduzem à simetria SU(3) ou Modelo Octeto, válido com algum grau de aproximação ao nível das interações fortes, esta é uma geralização da invariância de isospin.

Mais precisamente, todos os multipletos conhecidos correspondem a representações do grupo fatorizado $SU(3)/Z_3$, onde Z_3 é o centro abeliano de $SU(3)$ gerado pelos zeros cúbicos da identidade. Portanto, o último atua como a identidade sob todos os estados hadrônicos os quais são chamados de trialidade zero.

A $SU(3)$ correspondem oito geradores (matrizes 3×3 de trazo nulo) e a Álgebra de Lie é de dimensão 2. Uma base da álgebra de Lie geralizando as matrizes de Pauli é dada pelas matrizes de Gell-Mann (λ_i, $i = 1, \ldots 8$). Os dois geradores diagonais são combinações lineares de isospin T_3 e hipercarga Y, igual à soma do número bariônico e

da estranheza. A fórmula de Gell-Mann e Nishima dá a relação com a carga, geralizando a eq.(B.1)

$$Q = \frac{1}{2} Y + T_3 \ , \qquad Y = N + S \tag{B.6}$$

Na Fig.(B.2) mostra-se os octetos de bárions de menor dimensionalidade e de mésons pseudoescalares (correspondendo a representação autoadjunta de $SU(3)$), assim como o decupleto de ressonâncias que conduziu à descoberta da partícula Ω_-.

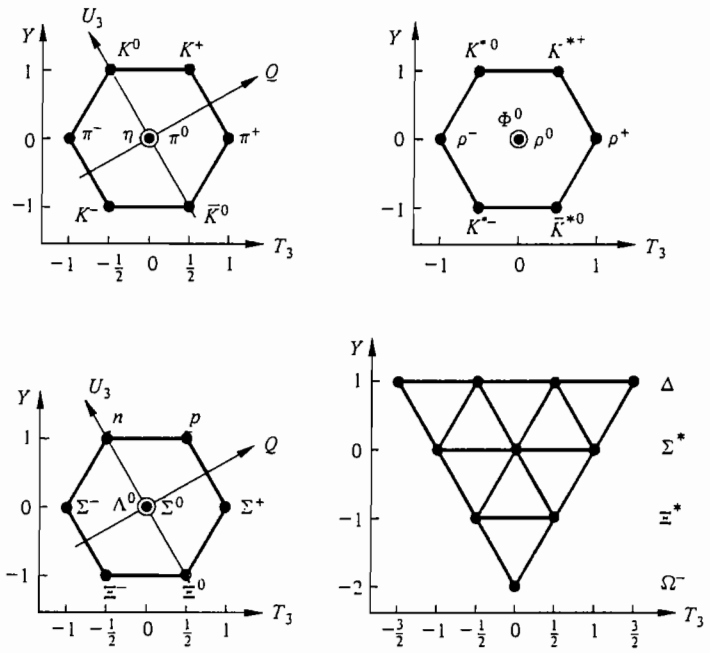


Fig.B.2 : Octetos de mésons e de bárions e decupleto de ressonâncias no modelo de Gell-Mann e Ne'eman.

Desde o momento da sua introdução surgiu a questão sob a carência de multipletos com trialidade diferente de zero. O mais simples daqueles corresponderia a um tripleto, a saber, todos os multipletos unitários de mésons podem ser obtidos por combinar um tripleto e um anti-tripleto

$$3 \times \bar{3} = 9 = 1 + 8$$

todos os multipletos unitários de bárions podem ser obtidos ao combinar três tripletos

$$3 \times 3 \times 3 \quad = \quad 27 = 1 + 8 + 8 + 10$$

Gell-Mann [49] e Zweig [50] introduzem um tripleto de hipotéticos quarks. Estas partículas (um isodubleto (u,d) e um isosingleto s) teriam carga e número bariônico fracionários, Fig.(B.3)).

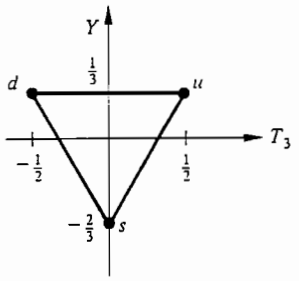


Fig.B.3 : O tripleto quarks.

A simetria octeto é so aproximadamente obedecida pelas interações fortes. Não obstante, o padrão de quebra de simetria aparece muito regular, obedecendo a chamada regra de dominância do octeto. Esta regra conduz a espaçamentos entre as massas de um mesmo multipleto as quais estão numa concordância muito boa com os dados observados.

Se o grupo unitário é maior que SU(3), requerem-se mais quarks carregando novos números quânticos. Estes grupos de maior número de sabores manifestam-se a energias maiores. Por exemplo, o grupo de simetria SU(4) requer, além dos quarks u,d, e s, do chamado "charmed"(c), isosingleto de carga 2/3 e hipercarga 1/3). O SU(4) é de dimensão 3. Na Fig.(B.4) são mostrados os diagramas de peso para a sua representação fundamental (quadridimensional) e a sua representação adjunta (15-dimensional). Existem algumas evidências para uma simetria SU(4) através do estudo de ressonâncias muito estreitas na escala de energias Multi-Gev.

Existem evidências para a existência de um quinto quark "botton"(b), o qual (de acordo com a teoria de Weinberg-Salam [62,63]) levou a prever a existência (e propriedades)

de um sexto quark "top"(t), e portanto de uma simetria SU(6). Pode que este não seja o final da historia.

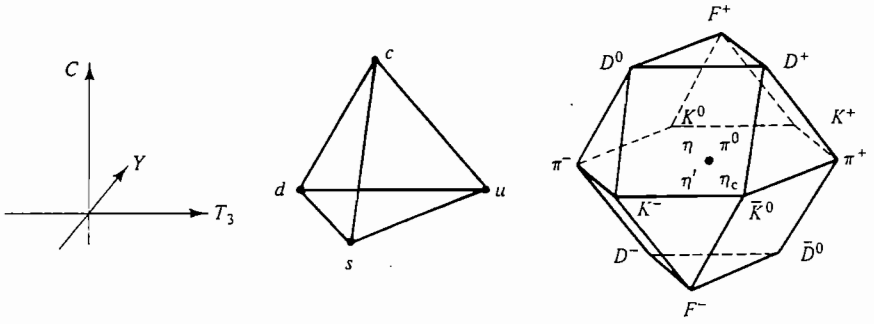


Fig.B.4 : Representação fundamental e adjunta de SU(4).

As simetrias Unitárias conduzem a numerosas relações entre amplitudes de espalhamento as quais correspondem-se numa medida boa com os resultados experimentais.

Apêndice C

Propriedades Gerais e Terminologia Referentes à Função de Green e aos Diagramas de Feynman

C.1 A Função de Green

Um ingrediente básico para o cálculo de amplitudes de transição e elementos de matriz de interesse físico é a Função de Green, a saber, o valor esperado no vácuo de produtos ordenados no tempo de campos de Heisenberg $\varphi(x)$:

$$G(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle 0|T\{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\}|0\rangle \tag{C.1}$$

A suposição da aplicabilidade da Teoria de Perturbações esta baseada no fato de que os campos interagindo, $\varphi(x)$, podem ser expressos em termos dos campos assintóticos $\varphi_{in}(x)$ os quais têm propriedades conhecidas. Assim, o espectro de estados está em correspondência um–a–um com os estados assintóticos "in" e "out". Em particular supõe-se que para cada campo $\varphi(x)$ da Lagrangiana existe um correspondente campo–in $\varphi_{in}(x)$. As relações de comutação a tempos iguais para os campos interagindo $\varphi(x)$, e os seus respeitivos momentos conjugados $\Pi(x)$, são as mesmas que as satisfeitas pelos correspondentes campos assintóticos. Por outra parte, os campos formam um conjunto completo de operadores, desde que, um conjunto completo de estados pode ser criado

desde o vácuo por repetidas aplicações de $\varphi(x)$ (ou de $\varphi_{in}(x)$). Estas suposições conduziram Dyson a construir uma Teoria de Perturbações baseada na existência de uma transformação unitária $U(t)$, tal que

$$\varphi(x) = U^{-1}(x_o)\varphi_{in}(x)U(x_o) \quad , \qquad x_o = t \tag{C.2}$$

A dinâmica deste operador $U(t)$ pode ser achada a partir do conhecimento das relações de comutação e equações de campo para $\varphi_{in}(x)$.

Assim, a teoria de perturbação desenvolvida por Dyson permite escrever a função de Green como uma expansão em termos de operadores de campo $\varphi_{in}(x)$

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\langle 0|T\left\{\varphi_{in}(x_1)\ldots\varphi_{in}(x_n)\; e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\; H_I(t)}\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\; e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\; H_I(t)}|0\rangle} \tag{C.3}$$

onde $H_I(t)$ é a Hamiltoniana de interação escrita em termos de campos–in

$$H_I(t) \equiv H_I(\varphi_{in}, \Pi_{in}) = H(\varphi_{in}, \Pi_{in}) - H_{in}(\varphi_{in}, \Pi_{in}) \tag{C.4}$$

sendo H_{in} a Hamiltoniana para o campo livre $\varphi_{in}(x)$ descrito em termos da massa física m, e H a Hamiltoniana para o campo exato $\varphi(x)$ a qual contém os correspondentes contra-termos de massa.

A expressão (C.3) pode ser escrita como

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \tag{C.5}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \ldots d^4y_m \langle 0|T\left\{\varphi_{in}(x_1)\ldots\varphi_{in}(x_n)\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y_1))\ldots\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y_m))\right\}|0\rangle}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \ldots d^4y_m \langle 0|T\left\{\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y_1))\ldots\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y_m))\right\}|0\rangle}$$

Os termos que aparecem na expressão (C.5) consistem de produtos ordenados no tempo de operadores de campo. O Teorema de Wick permite transformar estes produtos

ordenados no tempo numa combinação de produtos normais e propagadores covariantes. A utilidade do teorema para calcular os valores esperados no vácuo que aparecem na expressão (C.5) esta baseada no fato que o valor esperado no vácuo de um produto normal sempre se anula, e assim obtem-se

Para n impar :

$$\langle 0|T\left\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\right\}|0\rangle \;=\; 0 \tag{C.6}$$

Para n par :

$$\langle 0|T\left\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\right\}|0\rangle \;=\; \sum_{permut.} \delta_p \langle 0|T\left\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\right\}|0\rangle\ldots\langle 0|T\left\{\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)\right\}|0\rangle$$

Este resultado permite expressar a Função de Green em termos de conhecidos propagadores de Feynman de partícula livre com suas correspondentes massas físicas e portanto conduz a uma expressão explícitamente covariante.

Em aplicar o Teorema de Wick à expressão (C.5) deve ter-se em conta que a Hamiltoniana de interação $\mathcal{H}_I(\varphi_{in}(y))$ já está em ordem normal. Portanto ao resolver os produtos ordenados no tempo em (C.5), ali não aparecem termos de contração contendo duas amplitudes de campo na mesma coordenada "y" a partir do mesmo termo de interação de $\mathcal{H}_I$.

A cada um dos termos da expressão (C.5) pode se dar uma representação gráfica, a qual obtem-se da seguinte maneira. Associa-se a cada uma das contrações que aparecem na expansão de Dyson–Wick das funções de Green, (C.5, 6), uma linha com uma correspondência pictórica do tipo mostrada na Fig.(C.1). Devido ao fato de que a Hamiltoniana de interação contém produtos de operadores de campo no mesmo ponto, os propagadores associados com contrações envolvendo estes operadores são "atados juntos" a este ponto o qual é chamado de vértice.

Existe assim, uma geral correspondência entre a função de Green e os gráficos de Feynman. Para obter as regras que permitem expandir a função de Green em gráficos de Feynman, deve-se ter em conta o número de vezes que um mesmo gráfico (diferindo

somente por uma rotulação de vértices) aparece na decomposição de Dyson–Wick. Este é um problema combinatorial que tém por resultado a seguinte regra geral: deve-se multiplicar cada termo de interação no qual uma dada amplitude de campo aparece à r-ésima potência, por $r!$.

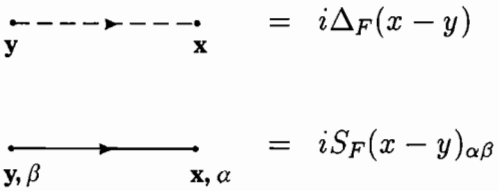


Fig. C.1 : Representação gráfica para contrações aparecendo na expansão de Dyson-Wick das funções de Green.

Os gráficos associados com o numerador da expressão (C.5) diferem daqueles associados ao denominador em que os primeiros possuem linhas externas, isto é, aquelas contrações associadas com operadores de campo $\varphi_{in}(x_1) \ldots \varphi_{in}(x_n)$ aparecendo em $G(x_1, \ldots x_n)$.

Chama-se uma parte desconexa a um subgráfico ocorrendo na expansão, o qual não esta conectado em forma nenhuma com alguma das linhas externas. A um gráfico o qual não tem partes desconexas chama-se **conexo**.

Qualquer gráfico aparecendo no numerador pode ser separado dentro de uma parte conexa e uma desconexa. A contribução à função de Green pode ser igualmente separada. Se G_i^c é a contribução de um gráfico conexo e D_k aquela da parte desconexa, pode-se mostrar que

$$G(x_1, \ldots x_n) = \frac{\sum_i G_i(x_1, ..., x_n)}{\sum_k D_k} = \frac{\sum_i G_i^c(x_1, ..., x_n) \sum_k D_k}{\sum_k D_k} = \sum_i G_i^c(x_1, ..., x_n) \quad \text{(C.7)}$$

Em outras palavras, podem-se ignorar todas as partes desconexas no cálculo de Funções de Green. Assim, a Função de Green é simplesmente a soma das contribuções de todos os gráficos de Feynman conexos.

C.2 Diagramas próprios e truncados

As Funções de Green truncadas são definidas através da multiplicação de Funções de Green no espaço dos momentos (sem as funções δ^4 de conservação de energia-momento total) pela inversa de funções de Green de dois pontos pertencentes a cada linha externa.

$$G^{(n)}_{trunc}(p_1, \ldots p_n) = \prod_{k=1}^{n} \left[G^{(2)}(p_k, -p_k)\right]^{-1} G^{(n)}(p_1, \ldots p_n) \ , \qquad n > 2 \qquad \text{(C.8)}$$

A função de dois pontos $G^{(2)}$ é referida ao propagador completo.

A expansão perturbativa de funções truncadas é expressa em termos de diagramas truncados, a saber, aqueles que não têm partes de auto-energia sob as suas linhas externas. Por outra parte, nas regras de Feynman não são atribuídos fatores nem propagadores às linhas externas.

Os diagramas próprios, também chamados diagramas irredutíveis de uma partícula, são definidos como aqueles diagramas conexos truncados os quais permanecem conectados quando é cortada uma linha interna qualquer.

As funções próprias, definidas pela sua expansão perturbativa em termos de diagramas próprios são os blocos que constrõem a teoria perturbativa, desde que a integração nos momentos internos pode ser realizada independentemente em cada subdiagrama próprio de um diagrama dado. Pela mesma razão, elas têm um papel central nos programas de renormalização, desde que é necessário e suficiente fazer a elas finitas para livrar-se de todas as divergências ultravioletas.

Aqui nos limitamos à definição topológica, não obstante destacamos que éstas funções próprias podem ser definidas algébricamente.

Jona-Lasinio monstra que o Funcional Gerador de vértices próprios é a transformada de Legendre do Funcional Gerador de diagramas conexos.

C.3 Expansão em Loops

A expansão perturbativa em "loops" é uma expansão de acordo com o aumento do número de loops independentes de diagramas de Feynman conexos.

Por definição, o número de loops independentes é o número de quadri-momentos internos independentes no diagrama quando as leis de conservação em cada vértice foram tomadas em conta.

Para um diagrama conexo, com I linhas internas e V vértices, temos V funções δ^4 expressando esta conservação, e depois de extrair a conservação dos momentos entrantes, restam $(V-1)$ restrições. Por consiguinte, o número de momentos independentes ou loops é:

$$L = I - (V - 1) \tag{C.9}$$

A expansão perturbativa em loops pode ser identificada com uma expansão em potências de $\hbar$. Para encontrar a conexão entre L e as potências de $\hbar$, colectam-se todos os fatores $\hbar$ que intervém numa dada função de Green. Existem duas origens de tais fatores (sem ter em conta fatores $\hbar$ que são utilizados para dar uma correta dimensão aos termos de massa): as relações de comutação (ou anti-comutação) entre os campos e o operador evolução. As relações de comutação conduzem a um fator $\hbar$ em cada propagador, no entanto o operador evolução conduz a um fator $\hbar^{-1}$ para cada vértice. Logo a potência total de fatores $\hbar$ para um dado diagrama com E linhas externas é $I + E - V = E - 1 + L$. Portanto, para um número fixo de linhas externas, ou seja, para uma dada função de Green, a expansão perturbativa em loops pode ser identificada com uma expansão em potências de $\hbar$.

Em algumas teorias, existem condições auxiliares entre o número de vértices (V) e o número de loops (L) que fazem com que a expansão em loops possa coincidir com a expansão de acordo com a potência da constante de acoplamento.

Apêndice D

As Identidades de Ward-Takahaski

Como consequência das leis de conservação (ou quase-conservação) das correntes de Noether e do fato de que as funções de Green podem ser expressas como produtos ordenados no tempo no espaço de Minkowsky, é possível deduzir um conjunto de identidades covariantes (conhecidas como Identidades de Ward-Takahaski) entre as funções de Green envolvendo um operador de corrente e um número arbitrário de campos. Tratando de manter éstas relações através da renormalização, as expressões assim obtidas são covariantes de Lorentz.

O nosso interesse é deduzir as Identidades de Ward-Takahaski para o Modelo σ-Linear compatíveis com a condição PCAC, a saber

$$\partial^{\mu}\vec{A}_{\mu}(x) = f_{\pi}m_{\pi}^{2}\vec{\pi}_{r}(x) \tag{D.1}$$

sendo m_{π} a massa física do píon, f_{π} a constante de decaimento do píon carregado (experimentalmente da ordem de 93 MeV), e $\vec{\pi}_{r}(x)$ o campo do píon renormalizado à amplitude assintótica unidade.

Se a renormalização é alcanzada via um estágio intermediário, a divergência da corrente axial é dada por

$$\partial^{\mu}\vec{A}_{\mu}(x) = c\ \vec{\pi}(x) \tag{D.2}$$

onde $\vec{\pi}(x)$ é o campo do píon renormalizado (não necessariamente à amplitude unidade) e c o parâmetro de quebra obtido neste processo.

Logo, se $Z_\pi^{1/2}$ é a constante de renormalização (finita) que transforma o campo $\vec{\pi}(x)$ no campo $\vec{\pi}_r(x)$

$$\vec{\pi}(x) = Z_\pi^{1/2}\ \vec{\pi}_r(x) \tag{D.3}$$

temos a partir das eqs.(D.1) e (D.2) que

$$c = f_\pi m_\pi^2\ Z_\pi^{-1/2} \tag{D.4}$$

O valor de Z_π pode ser obtido como o valor do resíduo do propagador do píon na sua massa física

$$\lim_{s\to m_\pi^2} \frac{d}{ds}[iD_\pi^{-1}(s)] = Z_\pi^{-1} \tag{D.5}$$

A expressão (D.2) é uma identidade entre operadores. Afim de convertê-la em relações entre funções de Green, procede-se da seguinte forma. Denotando um campo mesônico por $\varphi(x)$, o campo do nucleon por $N(x)$, e subentendendo que trabalhamos com produtos (ordenados no tempo) covariantes T, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\mu\ \ \langle 0|T\left\{ A_\mu^i(x)\ \varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\ N(y_1)\bar{N}(z_1)\ldots N(y_p)\bar{N}(z_p)\ \right\}|0\rangle\ =\\
&=\ \langle 0|T\left\{ \left(\partial_x^\mu A_\mu^i(x)\right)\ \varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\ N(y_1)\bar{N}(z_1)\ldots N(y_p)\bar{N}(z_p)\ \right\}|0\rangle\ +\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\langle 0|T\left\{\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_{j-1}}(x_{j-1})\left[A_o^i(x),\varphi_{\alpha_j}(x_j)\right]\ \delta(x^o-x_j^o)\right.\\
&\qquad\left.\varphi_{\alpha_{j+1}}(x_{j+1})\ldots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\ N(y_1)\bar{N}(z_1)\ldots N(y_p)\bar{N}(z_p)\ \right\}|0\rangle\ +\\
&\quad+\sum_{j=1}^{p}\langle 0|T\left\{\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\ N(y_1)\bar{N}(z_1)\ldots N(y_{j-1})\bar{N}(z_{j-1})\right.\\
&\qquad\left.\left[A_o^i(x),N(y_j)\right]\delta(x^o-y_j^o)\ \bar{N}(z_j)N(y_{j+1})\bar{N}(z_{j+1})\ldots N(y_p)\bar{N}(z_p)\right\}|0\rangle\ +\\
&\quad+\sum_{j=1}^{p}\langle 0|T\left\{\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\ N(y_1)\bar{N}(z_1)\ldots N(y_{j-1})\bar{N}(z_{j-1})\right.\\
&\qquad\left.N(y_j)\left[A_o^i(x),\bar{N}(z_j)\right]\delta(x^o-z_j^o)\ N(y_{j+1})\bar{N}(z_{j+1})\ldots N(y_p)\bar{N}(z_p)\ \right\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Como pode observar-se facilmente, a expresão (D.6) pode ser igualmente aplicada as partes conexas de ambos os membros.

O primeiro termo do segundo membro da expresão (D.6) contém $\partial^\mu A^i_\mu$ e portanto esta divergência pode ser substituida pela lei de conservação para esta corrente, ou seja, neste caso, a condição PCAC dada pela expressão (D.2). Os outros termos provém da dependência implícita com x_o no produto T. Apelando às regras de comutação canônicas a tempos iguais dos campos, obtemos

$$\begin{aligned}
\left[A^i_o(x), \pi^j(y)\right]\ \delta(x^o - y^o) &= -i\sigma(x)\delta_{ij}\delta^4(x-y) \\
\left[A^i_o(x), \sigma(y)\right]\ \delta(x^o - y^o) &= i\pi^i(x)\ \delta^4(x-y) \\
\left[A^i_o(x), N(y)\right]\ \delta(x^o - y^o) &= -\frac{1}{2}\ \gamma_5\tau_i N(y)\ \delta^4(x-y) \\
\left[A^i_o(x), \bar{N}(y)\right]\ \delta(x^o - y^o) &= -\frac{1}{2}\ \bar{N}(y)\gamma_5\tau_i\ \delta^4(x-y)
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Assim, as Identidades de Ward-Takahaski para o Modelo σ-linear compatíveis com a condição PCAC, são obtidas ao substituir as eqs.(D.2) e (D.7) na expresão (D.6) Uma análise da transformada de Fourier destas Identidades permite estabelecer um conjunto de regras que facilitam a obtenção destas relações.

Regras para obter as Identidades de Ward-Takahaski

Dada uma função de Green, conexa, com m linhas piónicas, n linhas sigma e (2p) linhas de nucleon, mais uma linha de corrente axial, encontra-se:

⋆ a divergência no espaço das coordenadas–x desta função de Green , implica a multiplicação desta mesma função, no espaço dos momentos, por (ik^μ), onde k^μ é o momento entrante transportado pela corrente.

Logo, esta divergência é igual a

⋆ uma parte, que provém da divergência da corrente e da condição PCAC, a qual torna-se $(-c)$ vezes a função de Green na qual a corrente axial foi substituída por um píon carregando o mesmo momento e isospin que tinha a corrente.

⋆ uma parte que provém dos comutadores a tempos iguais os quais dão origem a contrações da corrente com cada uma das linhas píon, sigma e nucleon. Supondo que a corrente axial carrega momento entrante k e índice de isospin i, as regras para estas contrações são

– a contração da corrente com um píon de momento entrante p transforma a éste num méson σ de momento entrante $(k+p)$, a função de Green resultante é multiplicada por $(-i\delta_{ij})$, onde i e j denotam os índices de isospin da corrente e do píon, respeitivamente;

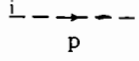
– a contração da corrente com um méson σ de momento entrante p transforma a éste num píon de momento entrante $(k+p)$ e índice de isospin i (a corrente transfere o seu isospin ao píon), a função de Green resultante é multiplicada por i;

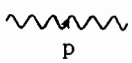
– a contração da corrente com um nucleon de momento entrando (saindo) p transforma a éste num nucleon de momento entrando (saindo) $(k+p)$, a função de Green resultante é multiplicada à direita (esquerda) por $[-\gamma_5\tau_i/2]$;

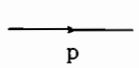
Em todas as equações pode substituir-se qualquer campo φ por $(\varphi - \langle 0|\varphi|0\rangle)$, sem mudar a validade das identidades. Em geral, (exceto para o tadpole), escreveremos as regras acima para as partes conexas das Identidades de Ward-Takahaski aplicadas à parte quântica dos campos.

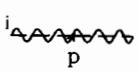
Notação e Definições

Representaremos os propagadores livres, a corrente axial, e as funções de Green com as quais trabalharemos da seguinte forma:

⋆ um píon carregando momento p e índice de isospin i por 

⋆ um méson σ carregando momento p por 

⋆ um nucleon carregando momento p por 

⋆ a corrente vetorial axial carregando momento p e índice de isospin i por 

⋆ a função de Green conexa por

⋆ a função de Green conexa, truncada, por

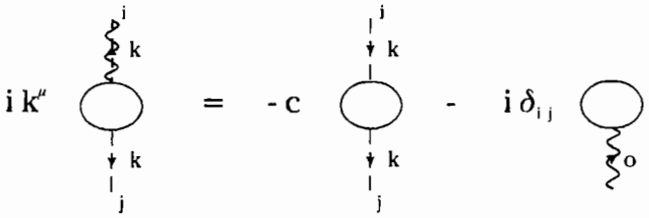
⋆ a função de Green conexa, truncada, e irredutível de uma partícula, por

O tadpole é renormalizado ao valor finito F

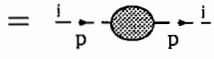
$= \langle 0|\sigma|0\rangle = F$ (D.8)

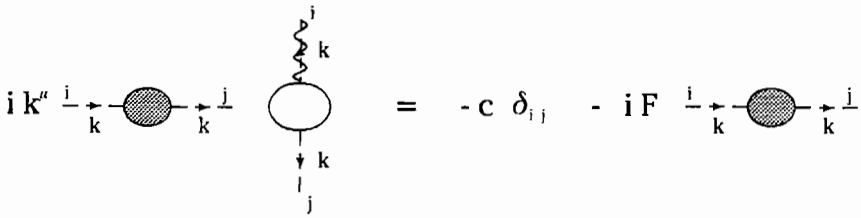
A Função de Green de dois pontos

⋆ O vértice mais simples corresponde a $\{\mathbf{m = 1, n = 0, p = 0}\}$, dá origem à seguinte identidade



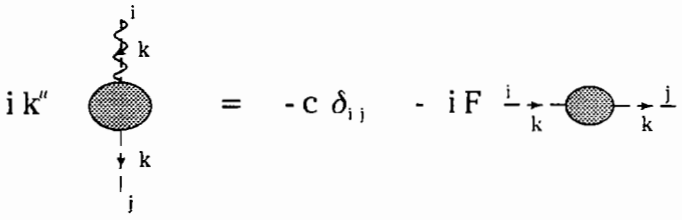
(D.9)

multiplicando pelo inverso do propagador do píon, $D_\pi^{-1}(k^2) =$  , obtemos



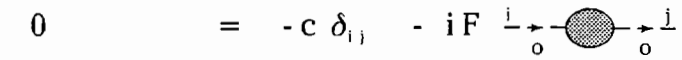
(D.10)

onde F é o valor do tadpole definido em (D.8). Tendo em conta a definição de truncação



(D.11)

Estabelecendo $k = 0$ na expressão acima, obtemos



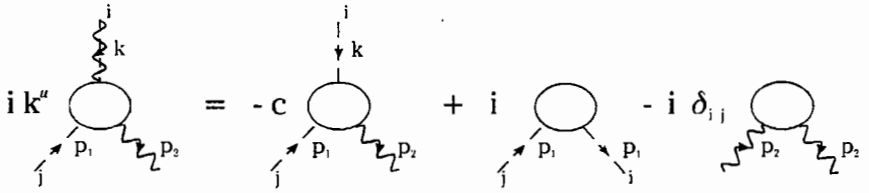
(D.12)

As expresões (D.4) e (D.12) conduzem a:

$$c = -i\, D_\pi^{-1}(0)\, F = f_\pi\, m_\pi^2\, Z_\pi^{-1/2} \tag{D.13}$$

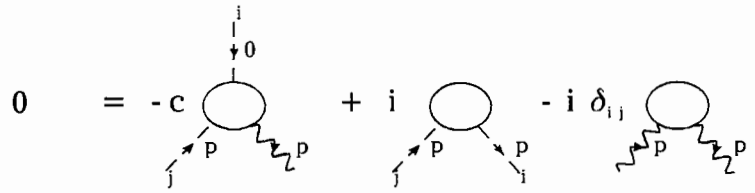
As Funções de Green de três pontos

⋆ Para o caso $\{\mathbf{m = 1, n = 1, p = 0}\}$ temos



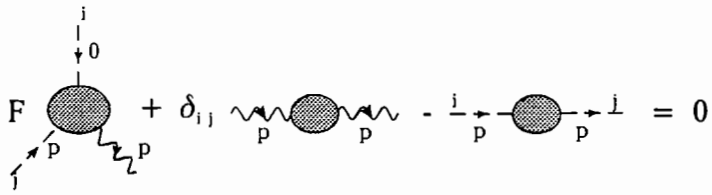
(D.14)

estabelecendo $k = 0$, temos



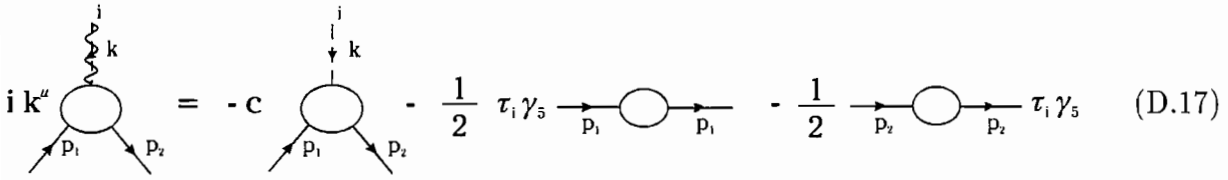
(D.15)

substituindo $c = -iFD_\pi^{-1}(0)$ (eq.(D.13)),multiplicando por $D_\pi^{-1}(q^2)\ D_\sigma^{-1}(q^2)$, e tendo em conta a definição de truncamento, obtemos



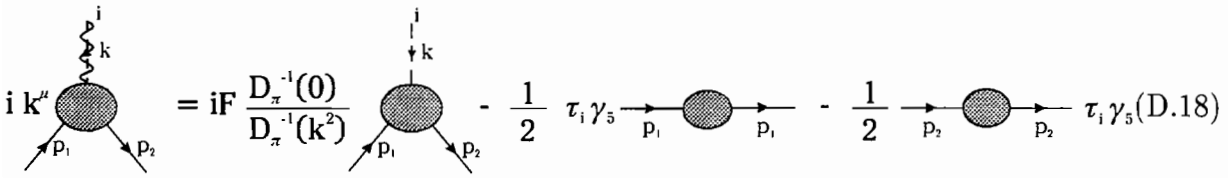
(D.16)

⋆ Um outro caso corresponde a $\{\mathbf{m = 0, n = 0, p = 1}\}$



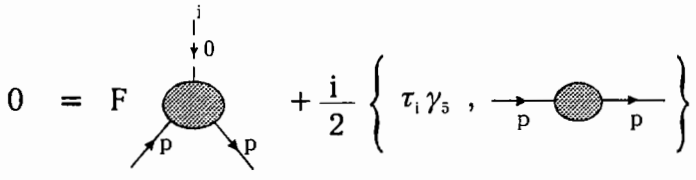
(D.17)

truncando (com excepção da corrente), temos



(D.18)

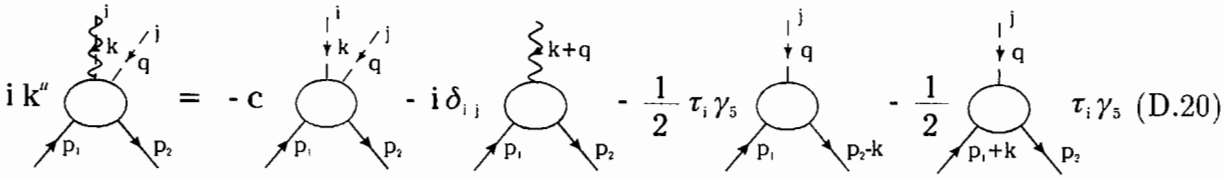
estabelecendo $k = 0$, obtemos



(D.19)

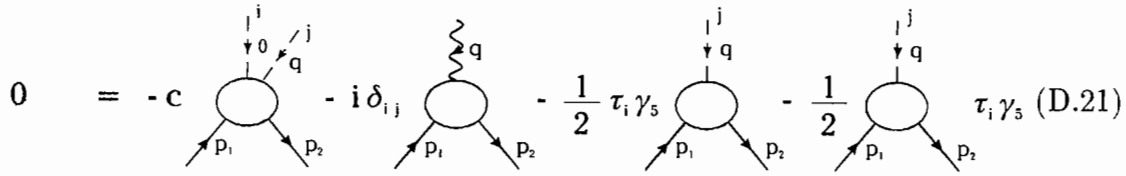
As Funções de Green de quatro pontos

⋆ Para obter a função de Green $\pi\pi NN$ partimos da Identidade de Ward-Takahaski para o caso $\{\mathbf{m=1, n=0, p=1}\}$



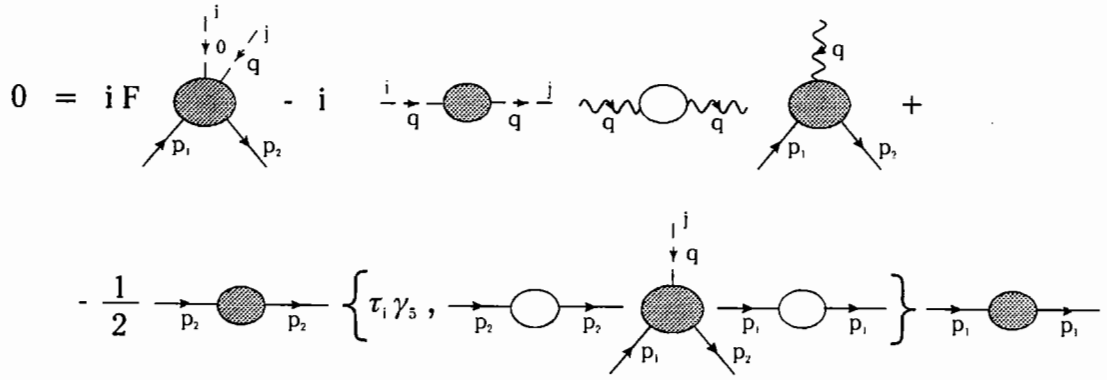
(D.20)

estabelecendo $k = 0$, obtemos



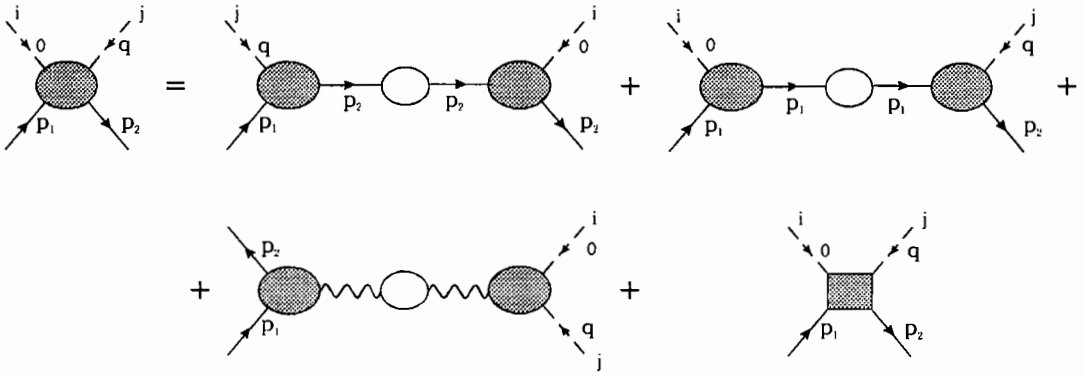
(D.21)

truncando, temos



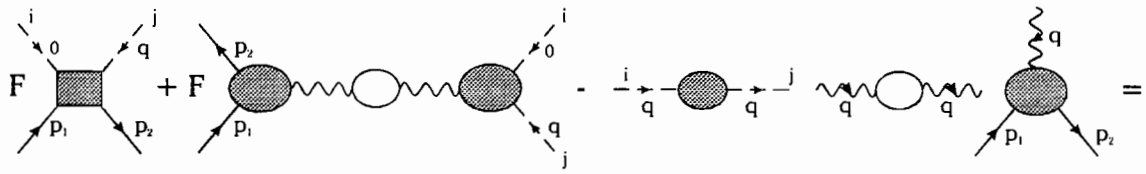
(D.22)

A conexão com a função de Green irredutível $\pi\pi NN$ é

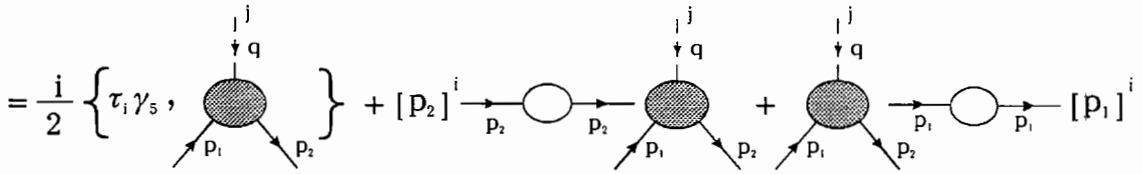


(D.23)

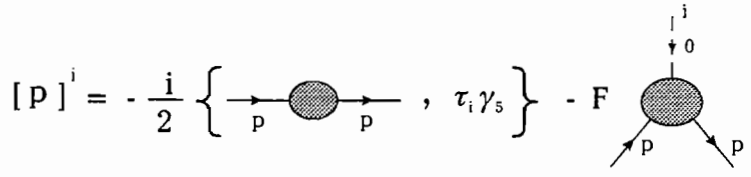
Substituindo a eq.(D.23) na eq.(D.22), obtém-se



(D.24)



onde

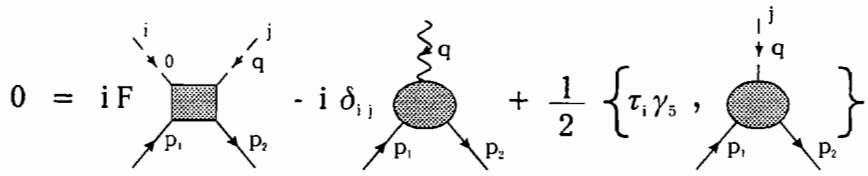


(D.25)

A partir da Identidade (D.19) temos que

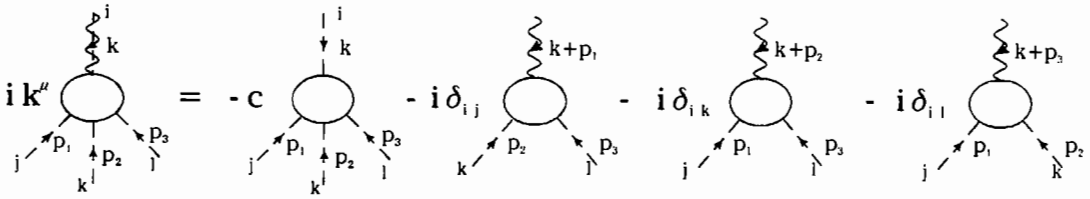
$$[\,p\,]^{i} = 0 \tag{D.26}$$

Utilizando a eq.(D.16) para expressar o vértice $\sigma\pi\pi$ obtemos



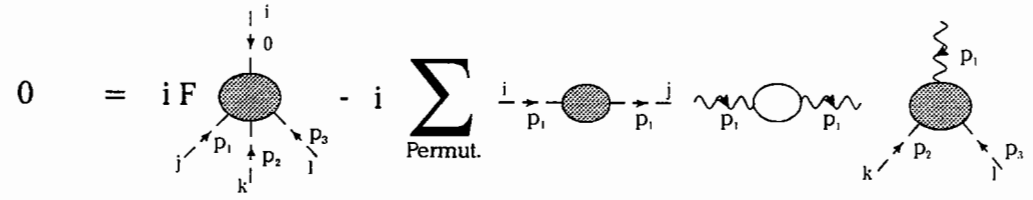
(D.27)

⋆ A função Green para quatro píons pode ser obtida partindo da Identidade de Ward-Takahaski para o caso $\{\mathbf{m = 3, n = 0, p = 0}\}$



(D.28)

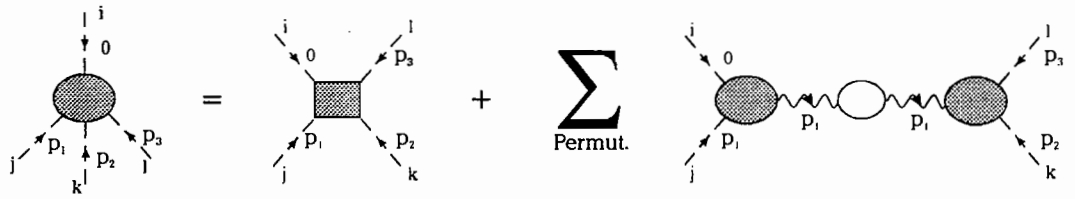
estabelecendo $k = 0$ e truncando, obtemos



(D.29)

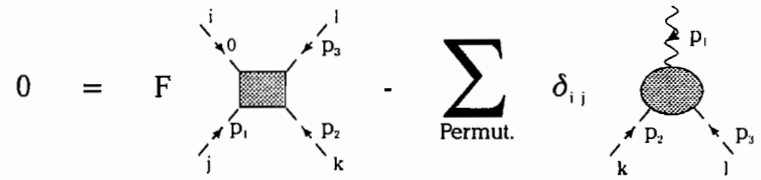
onde a soma é realizada sobre todas as permutações $\{(p_1, j), (p_2, k), (p_3, l)\}$.

A conexão com a função de Green irredutível de quatro píons é



(D.30)

Substituindo a eq.(D.30) na eq.(D.29) obtém-se



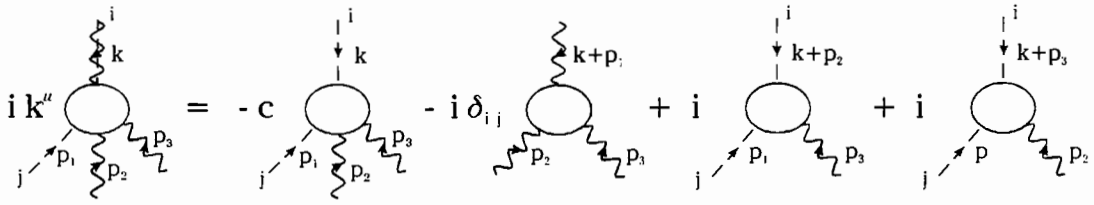
(D.31)

Neste estágio, é simples verificar, além de poder provar-se rigurosamente [59], que as regras para obter as Identidades em função dos diagramas conexos, truncados e irredutíveis de uma partícula são as seguintes

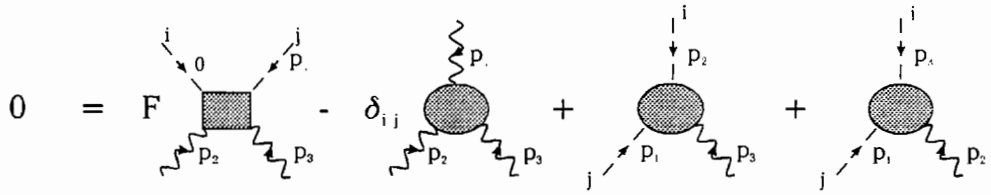
- ⋆ manter as regras estabelecidas anteriormente sem cambio,
- ⋆ estabelecer $k = 0$ ao tempo de substituir $(-c)$ por (iF),
- ⋆ substituir $(-1/2)$ por $(1/2)$ na contração de nucleons.

Aplicaremos as regras acima para achar as restantes Identidades.

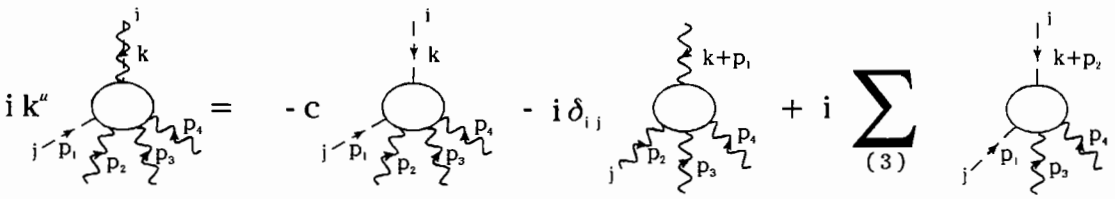
⋆ Partindo da Identidade para o caso $\{\mathbf{m = 1, n = 2, p = 0}\}$



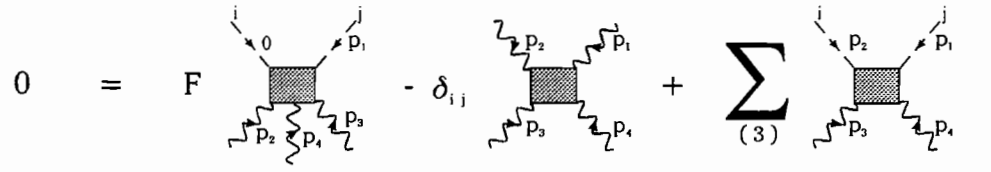
para a parte iredutível obtemos



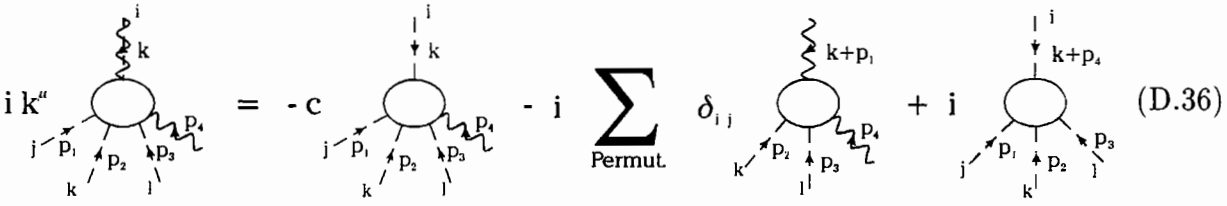
⋆ Partindo da Identidade de Ward-Takahaski para o caso $\{\mathbf{m = 1, n = 3, p = 0}\}$



para a parte irredutível obtemos

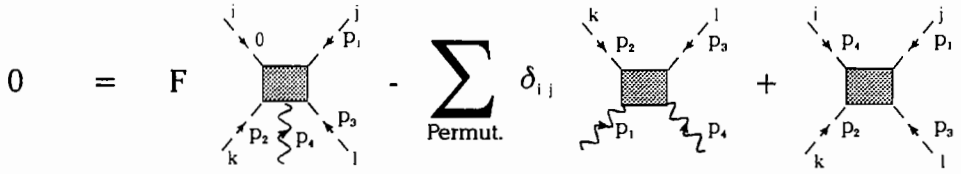


$\star$ Partindo da Identidade de Ward-Takahaski para o caso $\{\mathbf{m=3, n=1, p=0}\}$



(D.36)

para a parte irredutível obtemos

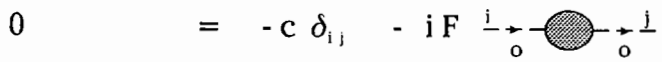


(D.37)

Resumo das previamente discutidas Identidades

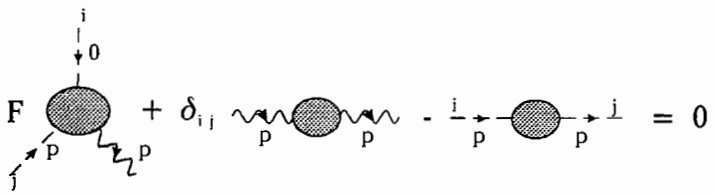
Resumindo os resultados da previa seção, as Identidades de Ward-Takahaski obtidas a partir da condição PCAC para o Modelo σ-Linear são as seguintes :

$\star$ $\{\mathbf{m=1, n=0, p=0}\}$:



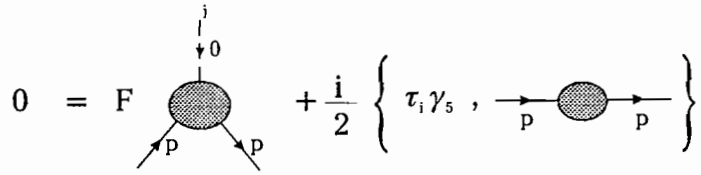
(D.38)

$\star$ $\{\mathbf{m=1, n=1, p=0}\}$:



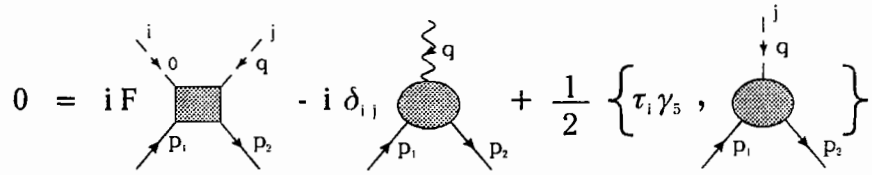
(D.39)

$\star$ $\{\mathbf{m=0, n=0, p=1}\}$:



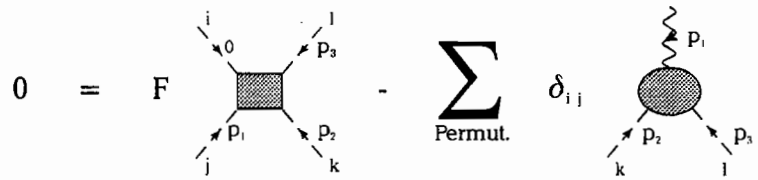
(D.40)

$\star$ $\{\mathbf{m=1, n=0, p=1}\}$:



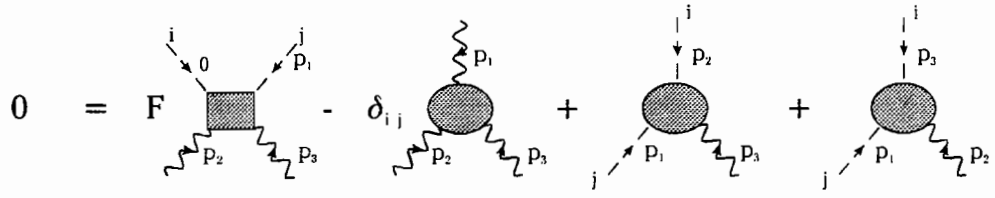
(D.41)

$\star$ $\{\mathbf{m=3, n=0, p=0}\}$:



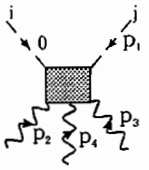
(D.42)

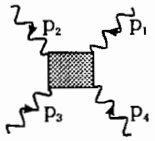
$\star$ $\{\mathbf{m=1, n=2, p=0}\}$:

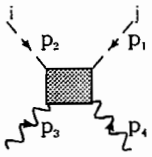


(D.43)

$\star$ $\{\mathbf{m=1, n=3, p=0}\}$:

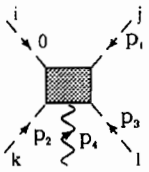
$$0 \quad = \quad F$$ 

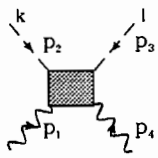
$$- \delta_{i\,j}$$ 

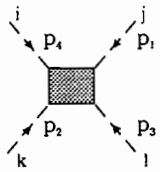
$$+ \sum_{(3)}$$ 

(D.44)

$\star$ $\{\mathbf{m=3, n=1, p=0}\}$:

$$0 \quad = \quad F$$ 

$$- \sum_{\text{Permut.}} \delta_{i\,j}$$ 

$$+$$ 

(D.45)

Apêndice E

Expressões Explícitas de Integrais

Dado o caráter divergente das integrais necessárias para o cálculo de algumas funções de Green, existem vários métodos para torná-las finitas através de modificações do integrando. No que segue escolhemos adotar um cutoff covariante. Neste apêndice são dadas as expressões explícitas das seguintes integrais em função do parâmetro de corte Λ

$$\begin{aligned} I^o_m &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2} \\ I^o_{M'M}(s) &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-M'^2][(\not k-\not p)^2-M^2]} \\ J^o_{M'M}(\not p) &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not k}{[k^2-M'^2][(\not k-\not p)^2-M^2]} \end{aligned} \tag{E.1}$$

Realizando uma rotação de Wick e introduzindo um cutoff, Λ, nos valores dos quadrimomentos (euclideanos) k, cada uma das integrações fica restrita a uma esfera compacta $|k|<\Lambda$. Encontra-se

$$\begin{aligned} I^o_m(\Lambda) &= \frac{1}{16\pi^2}\left[-\Lambda^2+m^2\,\ln\left(\frac{m_\Lambda}{m}\right)^2\right] \\ I^o_{mm}(s,\Lambda) &= \frac{1}{8\pi^2 s}\,\psi_m(s,\Lambda) \end{aligned}$$

$$I^{o}_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{8\pi^2 s}\,\psi_{M'M}(s,\Lambda)$$

$$J^{o}_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{2}\;\not{p}\,[I^{o}_{M'M}(s,\Lambda) + K^{o}_{M'M}(s,\Lambda)]$$

onde

$$K^{o}_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{8\pi^2 s}\,\varphi_{M'M}(s,\Lambda)$$

As seguintes expressões foram utilizadas no cálculo dos propagadores:

$$I_m(s,\Lambda) = \frac{1}{8\pi^2 s}\,[\psi_m(s,\Lambda) - \psi_m(0,\Lambda)]$$

$$I_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{8\pi^2 s}\,[\psi_{M'M}(s,\Lambda) - \psi_{M'M}(0,\Lambda)]$$

$$K_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{8\pi^2 s}\,[\varphi_{M'M}(s,\Lambda) - \varphi_{M'M}(0,\Lambda)]$$

$$\bar{I}_m(s,\Lambda) = I_m(s,\Lambda) - I_m(0,\Lambda)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 s}\left[\psi_m(s,\Lambda) - \psi_m(0,\Lambda) - s\,\psi'_m(0,\Lambda)\right]$$

$$\bar{I}_{M'M}(s,\Lambda) = I_{M'M}(s,\Lambda) - I_{M'M}(0,\Lambda)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 s}\left[\psi_{M'M}(s,\Lambda) - \psi_{M'M}(0,\Lambda) - s\ \psi'_{M'M}(0,\Lambda)\right]$$

$$\bar{I}'_{M'M}(0,\Lambda) = \frac{1}{16\pi^2}\psi''_{M'M}(0,\Lambda)$$

$$\Sigma_s(s,\Lambda) = mG^2\left[I_{mM}(s,\Lambda) - 3I_{m\mu}(s,\Lambda)\right]$$

$$\Sigma_v(s,\Lambda) = \frac{1}{2}G^2\left[I_{mM}(s,\Lambda) + 3I_{m\mu}(s,\Lambda) + K_{mM}(s,\Lambda) + 3K_{m\mu}(s,\Lambda)\right]$$

$$\dot{\Sigma}^N_G(m^2,\Lambda) = 2\ \Sigma_s(m^2,\Lambda) + \Sigma_v(m^2,\Lambda) - G^2\ \Delta$$

onde

$$\Delta \equiv \frac{1}{8\pi^2}\ \left\{3\psi'_{mM}(m^2,\Lambda) - 3\psi'_{m\mu}(m^2,\Lambda) + \varphi'_{mM}(m^2,\Lambda) + 3\varphi'_{m\mu}(m^2,\Lambda)\right\}$$

Expressões explícitas para ψ e φ

Definições prévias:

$$m_{\Lambda}^2 = m^2 + \Lambda^2$$

$$M_{\Lambda}^2 = M^2 + \Lambda^2$$

$$M_{\Lambda}'^2 = M'^2 + \Lambda^2$$

$$\Sigma_0 = (M' + M)^2$$

$$\Delta_0 = (M' - M)^2$$

$$\Sigma_{\Lambda} = (M_{\Lambda}' + M_{\Lambda})^2$$

$$\Delta_{\Lambda} = (M_{\Lambda}' - M_{\Lambda})^2$$

As seguintes expressões têm validade para M'>M.

$$
\begin{aligned}
\psi_m(s,\Lambda) &= -\Lambda^2 + m^2 \ln\left(\frac{m_\Lambda}{m}\right)^2 - \frac{s}{2} \ln\left(\frac{m_\Lambda}{m}\right)^2 + \\
&+ \begin{cases}
-\sqrt{-s\,(4m^2-s)} \ln\left(\dfrac{\sqrt{-s}+\sqrt{4m^2-s}}{2m}\right) + \\
+\left[\sqrt{-s\,(4m_\Lambda^2-s)} + \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{-s\,(4m_\Lambda^2-s)}}\right] \ln\left(\dfrac{\sqrt{-s}+\sqrt{4m_\Lambda^2-s}}{2m_\Lambda}\right); \\
\qquad\qquad \underline{s<0} \\
+\sqrt{s\,(4m^2-s)} \arctan\sqrt{\dfrac{s}{4m^2-s}} + \\
-\left[\sqrt{s\,(4m_\Lambda^2-s)} - \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{s\,(4m_\Lambda^2-s)}}\right] \arctan\sqrt{\dfrac{s}{4m_\Lambda^2-s}}; \\
\qquad\qquad \underline{0<s<4m^2} \\
+\sqrt{s\,(s-4m^2)} \ln\left(\dfrac{\sqrt{s}+\sqrt{s-4m^2}}{2m}\right) + \\
-\left[\sqrt{s\,(4m_\Lambda^2-s)} - \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{s\,(4m_\Lambda^2-s)}}\right] \arctan\sqrt{\dfrac{s}{4m_\Lambda^2-s}} + \\
-i\,\dfrac{\pi}{2}\sqrt{s(s-4m^2)}; \\
\qquad\qquad \underline{4m^2<s<4m_\Lambda^2}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\psi_m(0,\Lambda) = 0
$$

$$
\psi'_m(0,\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{2m_\Lambda^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_\Lambda}{m}\right)^2
$$

$$
\psi''_m(0,\Lambda) = -\frac{13}{96}\frac{1}{m^2} + \frac{13}{96}\frac{1}{m_\Lambda^2} + \frac{35}{192}\frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^4}
$$

$$\psi_{M'M}(s,\Lambda) = \frac{1}{4}(M'^2 - M^2)\,\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 - \frac{s}{4}\,\ln\left(\frac{M'_\Lambda M_\Lambda}{M'M}\right)^2 +$$

$$+ \begin{cases}
-\sqrt{(\Sigma_0 - s)(\Delta_0 - s)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_0 - s} + \sqrt{\Delta_0 - s}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \\
+\left[\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(\Delta_\Lambda - s)} + \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(\Delta_\Lambda - s)}}\right]\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_\Lambda - s} + \sqrt{\Delta_\Lambda - s}}{2\sqrt{M'_\Lambda M_\Lambda}}\right); \\
\qquad\qquad \underline{s < \Delta_\Lambda} \\
\\
-\sqrt{(\Sigma_0 - s)(\Delta_0 - s)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_0 - s} + \sqrt{\Delta_0 - s}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \\
-\left[\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)} - \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)}}\right]\arctan\sqrt{\dfrac{s - \Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda - s}}; \\
\qquad\qquad \underline{\Delta_\Lambda < s < \Delta_0} \\
\\
+\sqrt{(\Sigma_0 - s)(s - \Delta_0)}\,\arctan\sqrt{\dfrac{s - \Delta_0}{\Sigma_0 - s}} + \\
-\left[\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)} - \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)}}\right]\arctan\sqrt{\dfrac{s - \Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda - s}}; \\
\qquad\qquad \underline{\Delta_0 < s < \Sigma_0} \\
\\
+\sqrt{(s - \Sigma_0)(s - \Delta_0)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{s - \Sigma_0} + \sqrt{s - \Delta_0}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \\
-\left[\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)} - \dfrac{2\Lambda^2 s}{\sqrt{(\Sigma_\Lambda - s)(s - \Delta_\Lambda)}}\right]\arctan\sqrt{\dfrac{s - \Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda - s}} + \\
-i\,\dfrac{\pi}{2}\,\sqrt{(s - \Sigma_0)(s - \Delta_0)}; \\
\qquad\qquad \underline{\Sigma_0 < s < \Sigma_\Lambda}
\end{cases}$$

$$\psi_{M'M}(0,\Lambda) = 0$$

$$\psi'_{M'M}(0,\Lambda) = \frac{1}{4}\frac{(M'^2+M^2)}{(M'^2-M^2)}\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{M'_\Lambda M_\Lambda}{M'M}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\psi''_{M'M}(0,\Lambda) = {} & \frac{M'^2M^2}{(M'^2-M^2)^3}\ln\left(\frac{M'}{M}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{(M'^2+M^2)}{(M'^2-M^2)^2} + \\ & - \frac{M'^2_\Lambda M^2_\Lambda}{(M'^2-M^2)^3}\ln\left(\frac{M'_\Lambda}{M_\Lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{(M'^2_\Lambda+M^2_\Lambda)}{(M'^2-M^2)^2} + \\ & + \frac{(M'^2_\Lambda+M^2_\Lambda)\,\Lambda^2}{(M'^2-M^2)^3}\ln\left(\frac{M'_\Lambda}{M_\Lambda}\right)^2 - \frac{2\Lambda^2}{(M'^2-M^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{M'M}(M',\Lambda) = {} & \frac{(M'^2-M^2)}{4}\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 - \frac{M'^2}{4}\ln\left(\frac{M'_\Lambda M_\Lambda}{M'M}\right)^2 + \\ & + \sqrt{M^2(4M'^2-M^2)}\,\arctan\sqrt{\frac{2M'-M}{2M'+M}} + \\ & - \sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}} + \\ & + \frac{2M'^2\Lambda^2}{\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi'_{M'M}(M',\Lambda) = {} & -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{M'_\Lambda M_\Lambda}{M'M}\right)^2 + \frac{M'^2\Lambda^2}{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2} + \\ & + \frac{M^2}{\sqrt{M^2(4M'^2-M^2)}}\,\arctan\sqrt{\frac{2M'-M}{2M'+M}} + \\ & - \frac{M^2}{\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}} + \\ & - \frac{2M'^2\Lambda^2(M^2+2\Lambda^2)}{\left[\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}\right]^3}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{M'M}(s,\Lambda) \;=\; & \frac{M'^2-M^2}{4\,s}\cdot\left[\,(M'^2-M^2)-\frac{M'^2+M^2}{M'^2-M^2}\,\right]\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 \;+ \\
& + \frac{M'^2-M^2}{s}\cdot\begin{cases}
\left\{ -\sqrt{(\Sigma_0-s)(\Delta_0-s)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_0-s}+\sqrt{\Delta_0-s}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \right. \\
\left. +\sqrt{(\Sigma_\Lambda-s)(\Delta_\Lambda-s)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_\Lambda-s}+\sqrt{\Delta_\Lambda-s}}{2\sqrt{M'_\Lambda M_\Lambda}}\right)\right\}; \\
\qquad\qquad \underline{s<\Delta_\Lambda} \\
\left\{ -\sqrt{(\Sigma_0-s)(\Delta_0-s)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{\Sigma_0-s}+\sqrt{\Delta_0-s}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \right. \\
\left. -\sqrt{(\Sigma_\Lambda-s)(s-\Delta_\Lambda)}\,\arctan\sqrt{\dfrac{s-\Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda-s}}\right\}; \\
\qquad\qquad \underline{\Delta_\Lambda<s<\Delta_0} \\
\left\{ \sqrt{(\Sigma_0-s)(s-\Delta_0)}\,\arctan\sqrt{\dfrac{s-\Delta_0}{\Sigma_0-s}} + \right. \\
\left. -\sqrt{(\Sigma_\Lambda-s)(s-\Delta_\Lambda)}\,\arctan\sqrt{\dfrac{s-\Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda-s}}\right\}; \\
\qquad\qquad \underline{\Delta_0<s<\Sigma_0} \\
\left\{ \sqrt{(s-\Sigma_0)(s-\Delta_0)}\,\ln\left(\dfrac{\sqrt{s-\Sigma_0}+\sqrt{s-\Delta_0}}{2\sqrt{M'M}}\right) + \right. \\
-\sqrt{(\Sigma_\Lambda-s)(s-\Delta_\Lambda)}\,\arctan\sqrt{\dfrac{s-\Delta_\Lambda}{\Sigma_\Lambda-s}} + \\
\left. -i\,\dfrac{\pi}{2}\,\sqrt{(s-\Sigma_0)(s-\Delta_0)}\right\}; \\
\qquad\qquad \underline{\Sigma_0<s<\Sigma_\Lambda}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\varphi_{M'M}(0,\Lambda) = -\frac{\Lambda^2}{2}\,\ln\left(\frac{M'_\Lambda}{M_\Lambda}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\varphi'_{M'M}(0,\Lambda) = {} & \frac{1}{8}\frac{(M'^2+M^2)^2}{(M'^2-M^2)^2}\,\ln\left(\frac{M'}{M}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\ln\left(\frac{M'}{M}\right)^2 + \\ & -\frac{1}{8}\frac{(M'^2_\Lambda+M^2_\Lambda)^2}{(M'^2-M^2)^2}\,\ln\left(\frac{M'_\Lambda}{M_\Lambda}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\ln\left(\frac{M'_\Lambda}{M_\Lambda}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{M'M}(M',\Lambda) = {} & -\frac{(3M'^2-M^2)M^2}{4M'^2}\,\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 + \\ & +\frac{M'^2-M^2}{M'^2}\,\sqrt{M^2(4M'^2-M^2)}\,\arctan\sqrt{\frac{2M'-M}{2M'+M}} + \\ & -\frac{M'^2-M^2}{M'^2}\,\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'_{M'M}(M',\Lambda) = {} & -\frac{(M'^2-M^2)^2}{4M'^4}\,\ln\left(\frac{M'M_\Lambda}{MM'_\Lambda}\right)^2 + \\ & -\frac{(M'^2-M^2)}{M'^4}\,\sqrt{M^2(4M'^2-M^2)}\,\arctan\sqrt{\frac{2M'-M}{2M'+M}} + \\ & +\frac{(M'^2-M^2)}{M'^4}\,\frac{M^2M'^2}{\sqrt{M^2(4M'^2-M^2)}}\,\arctan\sqrt{\frac{2M'-M}{2M'+M}} + \\ & +\frac{(M'^2-M^2)}{M'^4}\,\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}} + \\ & -\frac{(M'^2-M^2)}{M'^4}\,\frac{(M^2+2\Lambda^2)M'^2}{\sqrt{M^2_\Lambda(4M'^2-M^2)+M^2\Lambda^2}}\,\arctan\sqrt{\frac{(2M'_\Lambda-M_\Lambda)M_\Lambda-\Lambda^2}{(2M'_\Lambda+M_\Lambda)M_\Lambda+\Lambda^2}}\end{aligned}$$

Referências

[1] Y.Nambu and G.Jona–Lasinio, Phys.Rev. **122** (1961) 345; **124** (1961) 246.

[2] S.P.Klevansky, Rev.Mod.Phys. **64** (1992) 649, e referências citadas nele.

[3] V.Bernard, A.H.Blin, B.Hiller, U.-G.Mei→ner and M.C. Ruivo, Phys.Lett. **B305** (1993) 163.

[4] J.Weinstein and N.Isgur, Phys.Rev. **D 41** (1990) 2236.

[5] D.Lhose, J.W.Durso, K.Holinde and J.Speth, Nucl.Phys. **A 516** (1990) 513.

[6] F.Cannata, J.P.Dedonder and L.Lesniak, Z. Phys. **A 343** (1992) 451.

[7] R.L.Jaffe, Phys.Rev. **D 15** (1977) 267, 281.

[8] E. van Beveren, G.Rupp, T.A.Rijken and C.Dullemond, Phys.Rev. **D 27** (1983) 1527; E. van Beveren, Nucl.Phys. **B 21** (proc.Suppl.) (1991) 43.

[9] T.Barnes, Phys.Lett. **B 165** (1985) 434.

[10] D.Morgan and M.R.Pennington, Z.Phys. **C 37** (1988) 431.

[11] S.R.Sharpe, R.L Jaffe and M.R.Pennington, Phys.Rev. **D 30** (1984) 1013.

[12] T.Teshima and S.Oneda, Phys.Rev. **D 33** (1986) 1974.

[13] D.Morgan, M.R.Pennington, Phys.Lett. **B 258** (1991) 444.

[14] K.Kusaka and W.Weise, Z.Phys. **A 343** (1992) 229.

[15] M.Gell–Mann and M.Lèvy, Nuovo Cimento **16** (1960) 705.

[16] D.Bessis and G.Turchetti: Cargèse Lectures in Physics **5** (Gordon and Breach. New York, 1971) 119.

[17] R.J.Perry, Phys.Lett. **B 199** (1987) 489.

[18] B.Bajc, A.H.Blin, B.Hiller, M.C.Nemes, and M.Rosina, Z.Phys. **A 350**, (1994) 229.

[19] J.D.Bjorken and S.D.Drell, Relativistic Quantum Mechanics (McGraw–Hill,Inc., New York, 1964).

[20] M.Malheiro, M.C.Nemes, M.Nielsen and J.da Providência, Intern. Jour. Mod. Phys. **A 8** (1993) 787.

[21] A.H.Blin, B.Hiller and J.da Providencia, Phys.Lett. **B 241** (1990) 1.

[22] H.Yukawa, Proc.Phys.Math.Soc., Japan, **17**, (1935) 48.

[23] J.Kellog, I.Rabi, N.F.Ramsey and J.Zacharias, Phys.Rev. **56** (1939).

[24] C.M.G.Lattes, G.P.S.Occhiadini and C.F.Powell, Nature **60** (1947) 453, 486.

[25] M.Taketani, S.Nakamuri and M.Sasaki, Prog.Theor.Phys. **6** (1951) 581.

[26] J.L.Gammel, R.S.Christian and R.M.Thaler, Phys.Rev. **105** (1957) 311; J.L. Gammel and R.M.Thaler, Phys.Rev. **107** (1957) 291,1337; P.Signell, R.Zinn and R.Marshak, Phys.Rev.Lett. **1** (1958) 416.

[27] T.Hamada and J.D.Jonhston, Nucl.Phys. **34** (1962) 382; T.Hamada, Y.Nakamura and R.Tamagaki, Progr.Theor.Phys. **33** (1965) 769.

[28] K.E.Lassila, M.H.Hull, H.M.Ruppel, F.A.Mac Donald and G.E.Breit, Phys.Rev. **126** (1962) 881.

[29] R.V.Reid, Ann.Phys.(N.Y.) **50** (1968) 411.

[30] C.N.Yand and R.L.Mills, Phys.Rev. **96** (1954) 191.

[31] J.Schwinger, Ann.Phys. **2** (1957) 407.

[32] T.D.Lee and C.N.Yang, Phys.Rev. **104** (1956) 254.

[33] R.P.Feynman and M.Gell-Mann, Phys.Rev. **109** (1958) 193.

[34] E.C.G.Sudarshan and R.E.Marshak, Phys.Rev. **109** (1958) 1860.

[35] J.C.Polkinghorne, Nuovo Cimento **8** (1958) 179,781.

[36] J.C.Taylor, citado em ref.35.

[37] J.C.Taylor, Phys.Rev. **110** (1958) 1216.

[38] M.L.Goldberger and S.B.Treiman, Phys.Rev. **110** (1958) 1478.

[39] R.J.Blin-Stoyle, Nuovo Cimento **10** (1958) 132. S.Okubo, Nuovo Cimento **13** (1959) 292.

[40] M.T.Burgy, V.E.Krohn, T.B.Novey, G.R.Ringo and V.L.Telegdi, Phys.Rev. **110** (1958) 1214. C.S.Wu, Rev.Mod.Phys. **31** (1959) 783.

[41] M.L.Goldberger and S.B.Treiman, Phys.Rev. **110** (1958) 1178.

[42] Y.Nambu, Phys.Rev.Lett. **4** (1960) 380; J.Bernstein, S.Fubini, M.Gell-Mann and W.Thirring, Nuovo Cimento **17** (1960) 757.

[43] R.E.Norton and W.K.R.Watson, Phys.Rev. **110** (1958) 996.

[44] R.F.Streater and J.C.Taylor, Nucl.Phys. **7** (1958) 276.

[45] J.Goldstone, Nuovo Cimento **19** (1961) 154; J.Goldstone, A.Salam and S. Weinberg, Phys.Rev. **127** (1962) 965.

[46] H.Skirme, Proc.R.Soc.London Ser. **A 260** (1961) 127; Nucl.Phys. **31** (1962) 556.

[47] M.Gell-Mann, Phys.Rev. **125** (1961) 1067.

[48] Y.Ne'eman, Nucl.Phys. **26** (1961) 222.

[49] M.Gell-Mann, Phys.Lett. **8** (1964) 214.

[50] G.Zweig, Cern-Preprint (1964) 8409/th

[51] O.W.Greenberg, Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 598.

[52] J.D.Bjorken, Phys.Rev. **179** (1969) 1547; R.P.Feynman, Phys.Rev.Lett. **23** (1969) 1415.

[53] S.Glashow and J.D.Bjorken, Phys.Lett. **11** (1964) 255.

[54] S.L.Glashow, J.Iliopoulos and L.Maiani, Phys.Rev. **D 2** (1970) 1285.

[55] F.Englert and R.Brout, Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 321.

[56] P.W.Higgs, Phys.Lett. **12** (1964) 132; Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 508; Phys.Rev. **145** (1966) 1156; G.S.Guralnik, C.R.Hagen and T.W.B.Kibble, Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 585; T.Kibble, Phys.Rev. **155** (1967) 1554.

[57] R.P.Feynman, Acta Phys. Polonica, **24** (1963) 697.

[58] L.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys.Lett. **B 25** (1967) 29; B.S.DeWitt, Phys.Rev. **162** (1967) 1195, 1239.

[59] K.Symanzik, Comm.Math.Phys. **16** (1970) 48; Lett. Nuovo Cimento **16** (1970) 705; Cargèse Lectures in Physics **5** (Gordon and Breach. New York, 1971) 179.

[60] B.W.Lee, Nucl.Phys. **B 9** (1969) 649. J.L.Gervais and B.W.Lee, Nucl.Phys. **B 12** (1969) 627.

[61] G. ' t Hooft, Nucl.Phys. **B 33** (1971) 173; Nucl.Phys. **B 35** (1971) 167.

[62] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **19** (1967) 1264.

[63] A.Salam, Elementary Particle Theory, Ed.N.Svartholm, Almquist and Wiksells, Stockholm, 1968.

[64] H.Fritzsch, M.Gell-Mann and H.Levtwyler, Phys.Lett. **B47** (1973) 365; S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. **31** (1973) 494.

[65] T.D.Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Hardwood Academic Publishers, New York (1981).

[66] H.D.Politzer, Phys.Rev.Lett. **30** (1973) 1346.

[67] D.J.Gross and F.Wilczek, Phys.Rev.Lett. **30** (1973) 1343.

[68] S.Weinberg, Phys.Rev. **D 8** (1973) 4482.

[69] J.Gasser and H.Leutwyler, Phys.Rep. **87** (1982) 77.

[70] L.J.Reinders, H.Rubinstein and S.Yazaki, Phys.Rep. **127** (1985) 1.

[71] K.G.Wilson, Phys.Rev. **D 10** (1975) 2445.

[72] M.A.Shifman, A.I.Vainshtein and V.I.Zakharov, Phys.Rev.Lett. **42** (1979) 297; Nucl.Phys. **B 147** (1979) 385, 448.

[73] B.L.Ioffe, Nucl.Phys. **B 188** (1981) 317.

[74] L.J.Reinders, H.Rubinstein and S.Yazaki, Nucl.Phys. **B 196** (1982) 125.

[75] R.Dashen, Phys.Rev. **183** (1969) 1245.

[76] R.Dashen and M.Weinstein, Phys.Rev. **183** (1969) 1291.

[77] H.Pagels, Phys.Rep. **16** (1975) 219.

[78] M.Gell-Mann, R.J.Oakes and B.Renner, Phys.Rev. **175** (1968) 2195.

[79] G. ' t Hooft, Nucl.Phys. **B 75** (1974) 461.

[80] E.Witten, Nucl.Phys. **B 160** (1979) 57.

[81] A.D.Rújula, H.Georgi and S.L.Glashow, Phys.Rev. **D 12** (1975) 147.

[82] N.Isgur and G.Karl, Phys.Rev. **D 18** (1978) 4187; Phys.Rev. **D 19** (1979) 2653; Phys.Rev. **D 20** (1979) 1191; Phys.Rev. **D 23** (1981) 155.

[83] M.A.Shifman, A.I.Vainshtein and V.I.Zakharov, Nucl.Phys. **B 147** (1979) 385.

[84] J.Abdalla, P.L.Ferreira and N.Zagury, Nuovo Cimento **A 55** (1980) 215.

[85] A.Chodos, R.L.Jaffe, K.Johnson, C.B.Thorn and V.F.Weisskopf, Phys.Rev. **D 9** (1974) 3471.

[86] P.Hasenfratz and J.Kuti, Phys.Rep. **40** (1978) 75.

[87] T.de Grand, R.L.Jaffe, K.Johnson and J.Kiskis, Phys.Rev. **D 12** (1975) 2060.

[88] G.E.Brown, A.D.Jackson, M.Rho and V.Vento, Phys.Lett. **B 140** (1984) 285. A.Hosaka and H.Toki, Phys.Lett **B 167** (1986) 153. A.D.Jackson, D.E.Kahana, L.Vepstas, H.Verschelde and W.Wust, Nucl.Phys. **A 462** (1987) 661. G.E.Brown and M.Rho, Comments Nucl.Part.Phys. **18** (1988) 1. A.Hosaka and H.Toki, Prog.Theor.Phys.Suppl. **109** (1992) 137.

[89] W.Lin and B.D.Serot, Phys.Lett**B 233**(1989)23.

[90] D.J.Gross and A.Neveu, Phys.Rev. **D 10** (1974) 3235. T.Eguchi, Phys.Rev. **D 14** (1976) 2755. K.Kikkawa, Prog.Theor.Phys. **56** (1976) 947.

[91] G.Holzwarth and B.Schwesinger, Rep.Progr.Phys. **49** (1986) 825. I.Zahed and G.Brown, Phys.Rep. **142** (1986) 1. R.VinhMan, Progr.Part.Nucl.Phys. **20** (1988) 221.

[92] S.Pokorsky, Gauge Field Theories, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (Cambridge University, New York) (1989) 329.

[93] R.Machleidt, Lectures presented at the workshop on Relativistic Dynamics, Los Alamos (1985).

[94] R.de Tourreil and D.W.L.Sprung, Nucl.Phys. **A 201** (1973) 193.

[95] R.de Tourreil, B.Rouben and D.W.L.Sprung, Nucl.Phys. **A 242** (1975) 445.

[96] S.Godfrey and N.Isgur Phys.Rev. **D 32** (1985) 189.

[97] S.Capstick and N.Isgur Phys.Rev. **D 34** (1986) 2809.

[98] A.Manohar and H.Georgi, Nucl.Phys. **B 234** (1984) 189. D.Kaplan, Phys.Lett. **B 235** (1990) 163.

[99] C.Itzykson and J.B.Zuber, Quantum Field Theory, Mc.Graw-Hill Int. Book Company, N.Y. (1980).

[100] E.Wigner, Phys.Rev. **40** (1932) 749.

[101] S.Colemann, J.Math.Phys. **7** (1966) 787.

[102] G.R.Brown e M.Rho, Comments Nucl.Part.Phys. **10** (1981) 201.

[103] M.Gari e W.Krumpelmann, Z.Phys. **A 322** (1985) 689.

[104] M.Gell-Mann, Physics **1** (1964) 63.

[105] O.Dumbrajs, R.Koch, H.Pilkuhn, G.C.Oades, H.Behrens, J.J.De Swart and P.Kroll, Nucl.Phys. **B 216** (1983) 277.

[106] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **18** (1967) 188. S.Weinberg, Phys.Rev. **166** (1968) 1568. S.Weinberg, Physica **A 96** (1979) 327.

[107] B.D.Serot and J.D.Walecka, Adv.Nucl.Phys. **16** (1986) 1.

[108] J.D.Walecka, Ann.Phys. (N.Y.) **83** (1974) 491.

[109] M.Gell-Mann, Acta Phys. Austriaca Suppl. **IX** (1972) 733. H.Fritzsch, M.Gell-Mann e H.Leutwyler, Phys.Lett. **47 B** (1973) 365. J.C.Patti and A.Salam, Phys.Rev. **8** (1973) 1240.

[110] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **17** (1966) 616.

[111] E.Witten and S.Coleman, Phys.Rev.Lett. **45** (1980) 100.

[112] P.A.Casher, Phys.Lett. **B 83** (1979) 395.

[113] J.Gasser and H.Leutwyler, Phys.Lett. **B 125** (1983) 321, 325.

[114] B.L.Ioffe, Nucl.Phys. **B 192** (1980) 591.

[115] S.Weinberg, Phys.Rev. **D 11** (1975) 3583.

[116] G. ' t Hooft, Phys.Rev.Lett. **37** (1976) 8.

[117] G.A.Christos, Phys.Rep. **116** (1984) 1.

[118] J.A.Mignaco and E.Remiddi, Il Nuovo Cimento **A 1** (1971) 376.

[119] K.Hepp, Comm.Math.Phys. **1** (1965) 95.

[120] C.G.Bollini and J.J.Giambiagi: Il Nuovo Cimento **B 12** (1972) 20.

[121] M.Veltman: Nucl.Phys. **B 21** (1970) 288.

[122] T.H.Burnett and S.R.Sharpe: Annu.Rev.Nucl.Part.Sci. **40** (1990) 327, e referências citadas nele.

[123] H.M.Pilkuhn, Relativistic Particle Physics, Springer–Verlag, N.Y., (1979) 171.

[124] L.Wilets, Physics Department, University of Washington, Seattle, Washington 98195. Comunicação pessoal, 1991.

[125] F. Peña Campos, Tese de doutorado, U.S.P., São Paulo, Brasil, 1995.