

*Marcelo*  
*Gomes*

ESTUDO PERTURBATIVO DE UM MODELO BI-DIMENSIONAL  
COM ACOPLAMENTO CORRENTE AXIAL -  
GRADIENTE DE UM CAMPO PSEUDO-ESCALAR

1 - 401

Miguel El Afioni

Tese de Doutorado  
apresentada ao Insti-  
tuto de Física da  
Universidade de São  
Paulo.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes



*Marcelo*  
*Gomes*



## AGRADECIMENTOS

Ao professor Marcelo O. C. Gomes pela orientação constante durante a realização desta tese;

Aos professores Adilson José da Silva e Roland Köberle pelas sugestões e críticas no decorrer deste trabalho e que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a experiência pessoal do autor;

Aos colegas, amigos e funcionários do IFUSP pelo estímulo e apoio constantes;

À Regina.

À FAPESP e à FINEP pelo suporte financeiro.

# I N D I C E

RESUMO.....	1
ABSTRACT.....	11
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I - RENORMALIZAÇÃO.....	5
CAPÍTULO II - PERTURBAÇÃO EM TORNO DA TEORIA LIVRE.....	21
II-1) As regras de Feynman e o esquema de subtração....	21
II-2) Identidades de Ward e Equações de Movimento.....	26
II-3) Limite de Massa Zero.....	31
APÊNDICE II-A) Exemplos de cancelamento de divergências no infra-vermelho.....	54
APÊNDICE II-B) Prova de convergência.....	57
CAPÍTULO III - PERTURBAÇÃO EM TORNO DA TEORIA NÃO LIVRE.....	75
III-1) O modelo não perturbado.....	75
III-2) Perturbação na massa.....	84
III-3) Equações de Movimento e Identidades de Ward.....	111
NOTAS DE RODAPÉ.....	121
REFERÊNCIAS.....	122

RESUMO

Nesta tese, um estudo é feito do modelo bi-dimensional descrito pela densidade de Lagrangeana

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi - M \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + g \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^{\mu} \psi \partial_{\mu} \phi$$

Na primeira parte deste trabalho, discute-se a teoria de perturbação na constante de acoplamento  $g$  para as funções de Green. Mostra-se como é possível construir um esquema de renormalização de modo que não sejam induzidas interações quadri-lineares nos fermions <sup>quando  $M \rightarrow 0$</sup> . Aplicando a identidade de Ward da corrente axial, prova-se então, que o limite  $M = 0$  coincide, em qualquer ordem de  $g$ , com as funções de Green do modelo com massa do fermion nula, que é exatamente solúvel.

Na segunda parte da tese, o termo de massa do fermion em  $L$  é tratado como uma perturbação em torno da teoria não livre. Após uma resomação parcial da série perturbativa, mostra-se que as funções de Green Euclidianas tornam-se finitas no intervalo  $0 \leq g^2 < \pi$  pela introdução de um contra-termo proporcional a  $(:\cos 2g\phi: - 1)$ .

A quebra da invariância pelas transformações  $-\gamma^5$  é verificada explicitamente por meio da identidade de Ward da corrente axial.

ABSTRACT

In this thesis, a study is made of the ~~two~~-dimensional model described by the Lagrangean density

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi - M\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 + g\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi\partial_{\mu}\phi$$

In the first part of this work, the perturbation theory in the coupling constant  $g$  is discussed for the Green functions. It is shown how to construct a renormalization scheme such that no four-linear interactions in the fermion field are induced. <sup>when  $M \rightarrow 0$</sup>  By applying the axial current Ward identity, it is then proved that the  $M=0$  limit agrees, in every order of  $g$ , with the Green functions of the soluble model with massless fermions.

In the second part of the thesis, the fermion mass term in  $L$  is considered as a perturbation on the interacting theory. After a partial resummation of the perturbative series, it is shown that the Euclidean Green functions are made finite for  $0 \leq g^2 < \pi$  by introducing a counter-term proportional to  $(:\cos 2g\phi:-1)$ . Breaking of  $\gamma^5$  symmetry is explicitly verified through the axial current Ward identity.

## INTRODUÇÃO

A teoria de perturbações para Lagrangeanas locais renormalizáveis é atualmente um dos tópicos mais desenvolvidos em teoria quântica de campos. Um dos seus objetivos básicos é a obtenção de relações estruturais válidas em qualquer ordem finita dos parâmetros de expansão (equações de movimento, identidades de Ward, equações de Callan-Symanzik, etc.), as quais se supõe serem satisfeitas também fora de perturbação.

Para efeito de construção da série perturbativa, a Lagrangeana  $L$  do sistema é decomposta em uma parte não perturbada,  $L_0$ , e uma parte de interação,  $L_I$ , e, de acordo com o procedimento usual,  $L_0$  descreve campos livres, enquanto que em  $L_I$  estão contidas todas as interações. O critério para esta decomposição de  $L$  decorre do fato que, a rigor, as únicas teorias quânticas em quatro dimensões cujas soluções são conhecidas, são teorias livres.

Entretanto, em duas dimensões, existe uma variedade de modelos solúveis não completamente triviais e que historicamente tem desempenhado um papel muito importante como fontes de novas idéias. As referências clássicas neste sentido são os modelos de Schwinger<sup>(1)</sup> (eletrodinâmica de fermions sem massa em duas dimensões) e de Thirring<sup>(2)</sup> (campo espinorial sem massa com auto-interação quadri-linear).

Em vista dos fatos mencionados, quando se coloca o objetivo de investigar propriedades de perturbações em torno de teorias não livres, surge como candidato natural o estudo da perturbação na massa do modelo de Thirring, que despertou um especial interesse em virtude da equivalência<sup>(3) (4) (5)</sup> verificada entre os modelos de Sine-Gordon e de Thirring massivo. Entretanto, a perturbação na massa do modelo de Thirring é bastante singular no infra-

-vermelho, devido ao fato que ela envolve campos fermiônicos livres de massa zero, bem como exponenciais dos potenciais das correntes, que são campos de massa nula. Nesta tese, iremos considerar o modelo descrito pela densidade de Lagrangeana

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi - M \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + g \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^{\mu} \psi \partial_{\mu} \phi \quad (0-1)$$

no qual os problemas no infra-vermelho, quando tratamos o termo de massa do fermion como uma perturbação, são menos drásticos e podem ser contornados. A Lagrangeana (0-1) é uma pequena variação do modelo de Schroer<sup>(6)</sup> com fermions massivos. A teoria com  $M=0$  foi estudada por Rothe e Stamatescu<sup>(7)</sup>, os quais mostraram que, neste caso, o campo pseudo escalar continua livre na presença da interação, e que o campo espinorial pode ser escrito como

$$\psi(x) = : e^{-i g \gamma^5 \phi(x)} : \psi_0(x) \quad (0-2)$$

onde  $\psi_0(x)$  é um campo de Dirac livre, de massa zero. Rothe e Stamatescu mostraram também que, até segunda ordem de  $g$ , a auto-energia do fermion e a função de três pontos de vértice concordam com a solução exata.

No Capítulo II desta tese apresentamos a teoria de perturbação usual na constante de acoplamento  $g$ , e discutimos um aspecto que nos pareceu particularmente interessante, ou seja, a não indução de um contra-termo quadri-linear nos fermions na Lagrangeana (0-1), quando consideramos o limite  $M=0$ . Este fato é importante para mostrar que no limite a solução obtida em perturbação coincide com a da ref. (7), e é uma consequência da identidade de Ward da corrente axial e do esquema de renormalização adotado. A questão da geração ou não de interações tipo Thirring é bastante geral, e advém do fato que para teorias bi-dimensionais renormalizáveis envolvendo fermions, os gráficos com quatro linhas externas de fermion

são logaritmicamente divergentes. Para completar a discussão da perturbação em  $g$ , são deduzidas as equações de movimento e as identidades de Ward satisfeitas pelas funções de Green. Com relação ao limite de massa zero, mostramos que em qualquer ordem de  $g$ , a solução em perturbação coincide com a solução exata, dada em (7). Finalmente, damos em um Apêndice ao Capítulo II, a prova de convergência no infra-vermelho da teoria.

No Capítulo III, retornamos à nossa motivação inicial de estudar perturbações em torno de teorias não livres, considerando o termo de massa do fermion em (0-1) como termo de interação. Após uma resomação parcial da série perturbativa, cujo objetivo é evitar singularidades no infra-vermelho por causa da massa nula do fermion, ficamos com uma perturbação efetiva

$$-M(: e^{-2ig\gamma^5_{\alpha\beta}\phi(x)} : -1) : \bar{\psi}_{f\alpha} \psi_{f\beta} : (x) \quad (0-3)$$

onde  $\psi_f$  é um espinor livre, com massa não nula.

O estudo de interações envolvendo exponenciais de campos da forma (0-3) tem uma motivação física clara. Estas interações ocorrem, por exemplo, na teoria das interações fracas mediadas por um boson vetorial, como discutido por Lee<sup>(8)</sup> e Mitter<sup>(9)</sup>. Em quatro dimensões, os super-propagadores  $e^{\Delta_F(x)}$ , que ocorrem em teorias envolvendo exponenciais de campos livres, tem uma singularidade essencial para  $x=0$ , o que limita a análise destas teorias aos termos de ordens mais baixas em perturbação<sup>(9)</sup>; em duas dimensões, porém, como mostramos no Capítulo III, é possível encontrar resultados rigorosos, válidos em qualquer ordem de perturbação, a respeito do comportamento das funções de Green Euclidianas no ultra-violeta. Adotando um processo de regularização adequado, nós mostraremos que para  $g^2 < \pi$  a teoria é renormalizável, e que um contra-termo proporcional a  $:\cos 2\phi: -1$  é necessário para que as funções de Green sejam finitas. Incorporando este contra-termo à Lagrangeana inicial, mos-



tramos que:

- a) para  $g^2 < \pi$ , as funções de Green são finitas;
- b) para  $g^2 = \pi$ , a teoria é aparentemente sem significado pois os super-propagadores desenvolvem singularidades não integráveis a curtas distâncias;
- c) para  $g^2 > \pi$ , a interação na massa, que tem dimensão  $d_N = 1 + g^2/\pi$ , torna-se não renormalizável.

Nós finalizamos o Capítulo III apresentando as equações de movimento e as identidades de Ward, das quais fica claro que a invariança  $\gamma^5$  é quebrada por um termo de massa do fermion.

Com o objetivo de apresentar alguns procedimentos necessários ao desenvolvimento da tese, é feita no Capítulo I uma revisão de algumas versões do método de renormalização BPHZ.

### ALGUMA NOTAÇÃO

#### 1) Métrica

$g^{\mu\nu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$ ;  $g^{00} = -g^{11} = 1$ , em duas dimensões.

#### 2) Transformada de Fourier de $F(x)$

$$\tilde{F}(p) = \int d^2 x e^{ipx} F(x)$$

#### 3) Matrizes $\gamma$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_5$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## CAPÍTULO I - RENORMALIZAÇÃO

### INTRODUÇÃO

No estudo perturbativo de modelos em teoria quântica de campos somos frequentemente confrontados com produtos formais de distribuições num mesmo ponto. A inexistência de um modo geral de tais produtos manifesta-se, no espaço dos momentos, como divergências nas correspondentes integrais de convolução. Um dos objetivos básicos de qualquer método de renormalização é a extração de uma parte finita dessas expressões formais respeitando tanto quanto possível as simetrias do modelo em estudo e mantendo ao mesmo tempo uma interpretação física aceitável da teoria.

Existe uma classe de métodos de renormalização caracterizados pelo fato que as integrais de convolução são feitas convergentes, subtraindo-se dos integrandos os primeiros termos de uma série de Taylor nos momentos  $p$  que não são de integração (momentos externos), em torno de  $p=0$ . Este procedimento, originalmente introduzido por Dyson<sup>(10)</sup> (cujo trabalho foi estendido por Ward<sup>(11)</sup> e Salam<sup>(12)</sup>), constitui um dos ingredientes básicos do método de Bogoliubov e Parasiuk<sup>(13)</sup>. Como se sabe, a abordagem de Dyson mostrou-se falha no tratamento das chamadas divergências "overlapping" que ocorrem em ordens mais altas de perturbação, problema este que foi resolvido por Bogoliubov e Parasiuk. Entretanto, a prova do resultado de Bogoliubov e Parasiuk somente tornou-se correta com a contribuição de Hepp<sup>(14)</sup> que completou assim a formulação do método BPH. Neste esquema, além das subtrações, são utilizadas também regularizações a serem removidas somente depois que as integrais são efetuadas. Mostra-se então que, após a

remoção das regularizações, o resultado é finito e independente da maneira empregada para regularizar as integrais. A convergência das integrais renormalizadas é testada por meio da técnica de contagem de potências utilizada inicialmente por Dyson<sup>(10)</sup>, e mais tarde formulada precisamente por Weinberg<sup>(15)</sup> para o caso de métrica Euclideana. Posteriormente, Zimmermann<sup>(16)</sup> adaptou o teorema de contagem de potências de Weinberg para a métrica de Minkowski.

Um outro esquema pertencente à mesma classe de métodos de renormalização consiste numa versão do BPH devida a Zimmermann<sup>(17)</sup>. Nesta versão, conhecida como BPHZ, mostra-se que todas as regularizações podem ser dispensadas, desde que sejam feitas também as subtrações associadas com certas sub-integrações que não são subtraídas no método BPH.

Entretanto, embora resolvam eficazmente o problema das divergências "overlapping", os métodos BPH e BPHZ sofrem a restrição de, em geral, serem somente aplicáveis a teorias nas quais não ocorram massas nulas; teorias com massa zero somente podem ser consideradas nestes esquemas como limites das correspondentes teorias massivas para momentos não excepcionais. Esta limitação foi superada com os chamados esquemas de renormalização "soft" formulados por Lowenstein<sup>(18)</sup> a partir de uma generalização do BPHZ devida a Gomes e Schröer<sup>(19)</sup>. Nos esquemas "soft" os termos de subtração são polinômios nos momentos externos  $p$  e também em algumas massas  $m_{s_i}$  do modelo (massas "soft"). Todas as subtrações são feitas em torno de  $p=0=m_{s_i}$ , com exceção daquelas que dariam divergências infra-vermelhas, as quais são feitas em um valor  $m_{s_i} = \mu$  não nulo das massas "soft". O fato que algumas subtrações não são feitas em torno de zero impede que o operador de subtração nestes esquemas tenha uma importante propriedade de que gozam os operadores de Taylor em torno de zero, e que é relevante na discussão de detalhes técnicos, como veremos neste Capítulo. Por outro lado, pode

ocorrer a possibilidade, em certos modelos de teorias de campo, de fazer todas as subtrações em zero, sem que com isto sejam introduzidas divergências infra-vermelhas. Exemplos desta possibilidade são os tratamentos da eletrodinâmica quântica, de Lowenstein<sup>(20)</sup> com massa do boson nula, e de Abdalla, G. 'as e Köberle<sup>(21)</sup> no qual o boson é massivo.

A principal vantagem em introduzir subtrações na massa é que isto permite atribuir a alguns termos da parte não perturbada da Lagrangeana efetiva um grau menor que quatro (em teorias 4-dimensionais) ou menor que dois (em teorias bidimensionais); existem várias aplicações a modelos com simetrias quebradas<sup>(25)</sup> nas quais isto é desejável. Outra vantagem é que numa versão como a utilizada pelos autores da Ref. (21) as anisotropias são eliminadas. Além disso, os esquemas "soft" são adequados para a dedução de equações paramétricas homogêneas<sup>(19)</sup> análogas à equação do grupo de renormalização.

Neste Capítulo, será apresentada parte da terminologia da teoria de gráficos necessária para a discussão dos esquemas de renormalização que serão empregados no Capítulo II.

### ESQUEMAS DE SUBTRAÇÃO

Consideremos o modelo descrito pela Lagrangeana efetiva (isto é, sem contra-termos infinitos)

$$L_{ef}(A_i, \partial_\mu A_i) = L_0(A_i, \partial_\mu A_i) + L_I(A_i, \partial_\mu A_i) \quad (I-1)$$

onde  $A_i$  é um dos campos básicos. A parte de interação  $L_I$  consiste de uma soma de monômios escalares de Lorentz nos campos básicos e suas derivadas, com coeficientes dependendo de um conjunto de constantes de acoplamento  $g = \{g_1, \dots, g_v\}$ . Alguns destes monômios

ou vértices constituem a interação básica do modelo enquanto que os restantes são contratermos, fixados pelas condições de normalização da teoria. A Lagrangeana (I-1) é a geradora das regras de Feynman usadas na construção das funções de Green, através da fórmula de Gell-Mann-Low modificada,

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N)_{i_1 \dots i_N} = \quad (I-2)$$

$$= \text{Parte finita de } \langle 0 | T \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}^{(0)}(x_\alpha) \exp\{i \int L_I^{(0)}(x) dx\} | 0 \rangle \otimes$$

com a forma da prescrição "Parte Finita" a ser definida.

$A_i^{(0)}$  é o campo (em geral livre) cujo propagador é especificado por  $L_0$ ,  $L_I^{(0)} \equiv L_I(A_i^{(0)}, \partial_\mu A_i^{(0)})$ ,  $|0\rangle^{(0)}$  é o estado de vácuo da teoria descrita por  $L_0$ , e o símbolo  $\otimes$  significa a omissão das amplitudes vácuo-vácuo. A ordenação de Wick é omitida em  $L_I^{(0)}(x)$  a fim de permitir que no esquema "soft" as equações de movimento de produtos bilineares nos campos tenham a mesma estrutura que as equações clássicas. Este ponto será ilustrado mais adiante.

Expandindo a exponencial e aplicando o teorema de Wick (nos casos em que  $A_i^{(0)}$  é livre) obtemos, no espaço dos momentos, uma soma de produtos de propagadores livres e funções delta de conservação de momento por integrais de Feynman do tipo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \prod_i dk_i I_G(p, k, m, \epsilon) \quad , \quad (I-3)$$

onde  $m$  são os parâmetros de massa do modelo, e

$p = \{p_1, \dots, p_n\}$  = base para os momentos externos,

$k = \{k_1, \dots, k_m\}$  = base para os momentos de integração.

O integrando  $I_G(p, k, m, \epsilon)$  é da forma

$$I_G(p, k, m, \epsilon) = \prod_{V_a \in V(G)} P_a(p, k, m) \prod_{L_{ab\sigma} \in L(G)} \Delta_{F_{ab\sigma}}(\ell_{ab\sigma}, m_{ab\sigma}, \epsilon), \quad (I-4)$$

com

$$\Delta_{F_{ab\sigma}} = \frac{P_{ab\sigma}(\ell_{ab\sigma}, m_{ab\sigma})}{\ell_{ab\sigma}^2 - m_{ab\sigma}^2 + i\epsilon(\ell_{ab\sigma}^2 + m_{ab\sigma}^2)} \quad (I-5)$$

$\ell_{ab\sigma}$  são combinações lineares dos  $p_i$  e  $k_i$ ,  $P_a(p, k, m)$  são monômios de grau  $D_a$  em  $p$ ,  $k$  e nos parâmetros de massa que aparecem explicitamente nos coeficientes de  $L_I$ ;  $P_{ab\sigma}(\ell_{ab\sigma}, m_{ab\sigma})$  ou é linear em  $\ell_{ab\sigma}$  e  $m_{ab\sigma}$  (fermions), ou tem grau zero nestas variáveis (bosons). A dependência em  $\epsilon$  do denominador de (I-5) foi introduzida por Zimmermann<sup>(16)</sup> para justificar a aplicação do teorema de contagem de potências de Weinberg<sup>(15)</sup>.

A integral (I-3) não é, em geral, convergente. A prescrição de tomar a parte finita dessa integral consiste na aplicação da chamada "fórmula da floresta"<sup>(17)</sup> ao integrando  $I_G$ , transformando-o num "integrando subtraído"  $R_G$ , com o qual (I-3) torna-se uma integral absolutamente convergente. Este procedimento é melhor explicado com o auxílio de métodos gráficos.

Associado à integral (I-3) existe um gráfico  $G$ .  $G$  consiste de um conjunto de vértices  $V(G) = \{V_1, \dots, V_{n(G)}\}$ , um conjunto de linhas internas  $L(G) = \{L_{ab\sigma}, a; b = 1, \dots, n(G), \sigma = 1, \dots, v(a, b)\}$  ligando os vértices  $V_a$  e  $V_b$  e orientadas de  $V_a$  para  $V_b$ , e de linhas externas  $E_{a\tau}, \tau = 1, \dots, \lambda(a)$ . Introduzimos  $p = \{p_1, \dots, p_{N(G)}\}$ , uma base para os momentos externos de  $G$ , e  $C(G) = \{C_1, \dots, C_{m(G)}\}$ , um conjunto de circuitos orientados, linearmente independentes, de  $G$ . A cada  $C_i$  corresponde um momento interno  $k_i$  (variável de integração), e o momento  $\ell_{ab\sigma}$  fluindo através de  $L_{ab\sigma}$  é escrito como

$$\ell_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}(p) + k_{ab\sigma}(k), \quad (I-5)$$

onde

$$k_{ab\sigma} = \sum_{i=1}^m \epsilon_{ab\sigma i} k_i,$$

com

$$\epsilon_{ab\sigma i} = \begin{cases} 1 & \text{se } L_{ab\sigma} \in C_i \text{ e } l_{ab\sigma} \text{ tem mesmo sentido que } k_i, \\ 0 & \text{se } L_{ab\sigma} \notin C_i, \\ -1 & \text{se } L_{ab\sigma} \in C_i \text{ e } l_{ab\sigma} \text{ tem sentido oposto a } k_i. \end{cases}$$

Cada vértice  $V_a$  é considerado como uma fonte de momento  $p_a$  (nulo, se  $V_a$  for um vértice interno) e os  $q_{ab\sigma}$  são soluções particulares de

$$\sum_{b,\sigma} q_{ab\sigma} + p_a = 0, \quad a=1, \dots, n. \quad (\text{I-7})$$

Um gráfico  $G$  é dito conexo se ele não é a união de gráficos disjuntos, e trivial se contém apenas um vértice. Dizemos que  $G$  é próprio ou irredutível por uma partícula (LPI) se ele não pode ser separado em duas partes disjuntas pelo corte de uma única linha  $L_{ab\sigma} \in L(G)$ .

Se  $G$  é conexo e não trivial, um sub-gráfico  $\gamma \subset G$  é obtido cortando-se algumas linhas  $L_{ab\sigma} \in L(G)$  (as linhas cortadas devem ser consideradas como linhas externas de  $\gamma$ ).

O momento através de uma linha  $L_{ab\sigma}$ , considerada como elemento de um sub-gráfico  $\gamma$ , pode ser decomposto em duas partes:

$$l_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}^{\gamma}(p^{\gamma}) + k_{ab\sigma}^{\gamma}(k)$$

onde  $p^{\gamma} = \{p_1^{\gamma}, \dots, p_{n(\gamma)}^{\gamma}\}$  são os momentos externos de  $\gamma$  e  $q_{ab\sigma}^{\gamma}$  é solução de (I-7) restrita ao sub-gráfico  $\gamma$ . A escolha de momen-

tos para as linhas de sub-gráficos não é única, mas nós nos restringiremos às atribuições de momentos denominadas admissíveis e que são caracterizadas pela seguinte propriedade: se  $\gamma \subset \mu$  então os  $k_{ab\sigma}^\gamma$  são independentes de  $p^\mu$ .

A correspondência entre  $I_G$  e o gráfico  $\gamma$  pode ser descrita do seguinte modo: ao vértice  $V_a \in V(G)$  corresponde o monômio  $P_a$  nas massas e nos momentos das linhas que se juntam em  $V_a$ , e a linha  $L_{ab\sigma} \in L(G)$  corresponde um propagador  $\Delta_{F_{ab\sigma}}(\ell_{ab\sigma}, m_{ab\sigma})$ .

Para propósitos de subtração, associamos a cada gráfico próprio  $\gamma$  um número  $d(\gamma)$ , determinado contando os graus dos  $\Delta_F$  e  $P_a$  nos momentos e em certas massas:

$$d(\gamma) = \sum_{L_{ab\sigma} \in \gamma} (\text{grau de } \Delta_{F_{ab\sigma}}) + \sum_{V_a \in V(\gamma)} (\text{grau de } P_a)$$

$$+ D \times (\text{nº de circuitos independentes de } \gamma) =$$

$$= D - \frac{D-1}{2} F_\gamma - \frac{D-2}{2} B_\gamma - \sum_{a=1}^{n(\gamma)} (D - \delta_a) \quad (\text{I-8})$$

em  $D$  dimensões;  $F_\gamma$  ( $B_\gamma$ ) é o número de linhas externas de fermion (boson) de  $\gamma$ , e a dimensão  $\delta_a$  do vértice  $V_a$  é dada por:

$$\delta_a = \frac{D-1}{2} f_a + \frac{D-2}{2} b_a + D_a$$

onde  $f_a$  ( $b_a$ ) é o número de linhas de fermion (boson) com uma extremidade em  $V_a$ . O número  $d(\gamma)$  definido por (I-8) difere do "grau de divergência superficial" obtido por contagem de potências pelo fato de levar em conta também as potências dos parâmetros de massa "soft". Com algum abuso de linguagem,  $d(\gamma)$  será chamado de grau de divergência superficial de  $\gamma$ .

Sub-gráficos  $\gamma \in G$  próprios, não triviais, tendo  $d(\gamma) \geq 0$  são ditos partes de renormalização de  $G$ .



Dois sub-gráficos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são ditos não acavalados ("overlapping") se eles são disjuntos ou se um contém o outro, i.é., ou  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ , ou  $\gamma_1 \subset \gamma_2$ , ou  $\gamma_1 \supset \gamma_2$ , onde  $\emptyset$  é conjunto vazio. Uma floresta  $U$  de  $G$  é um conjunto (possivelmente vazio) de sub-gráficos de  $G$  próprios, não triviais e não acavalados.

Se  $\gamma_1, \dots, \gamma_c$  são sub-diagramas maximais disjuntos de um gráfico  $G$ , então o gráfico obtido contraindo cada  $\gamma_i$  a um ponto é o gráfico reduzido  $G/\gamma_1 \dots \gamma_c$ . Se  $\gamma \in U$  e  $U$  é uma floresta de  $G$ , definimos  $U(\gamma)$  como o conjunto de todos os elementos de  $U$  que estão propriamente contidos em  $\gamma$ , e  $\bar{\gamma}(U)$  (escrito simplesmente  $\bar{\gamma}$ , quando uma floresta fixa  $U$  é considerada) como sendo o gráfico reduzido  $\gamma/\gamma_1 \dots \gamma_c$ , onde  $\gamma_1, \dots, \gamma_c$  são os elementos maximais de  $U(\gamma)$ .

Em correspondência com cada gráfico próprio  $G$ , existe um integrando subtraído  $R_G$ , definido utilizando a fórmula da floresta de Zimmermann e "operadores de Taylor" generalizados:

$$R_G = S_G \sum_{U \in F_G} \prod_{\gamma \in U} (-\tau_\gamma^{d(\gamma)} S_\gamma) I_G(U) \quad (I-9)$$

onde  $F_G$  é o conjunto de todas as florestas de  $G$ , e

$$I_G(U) = \prod_{\gamma \in U} \prod_{\lambda \in \{G\}} I_{\bar{\gamma}(U)}(p^\lambda, k, m^\lambda) \quad (I-10)$$

Em (I-9) é subentendido que  $(-\tau_\gamma^{d(\gamma)} S_\gamma)$  está à esquerda de  $(-\tau_\lambda^{d(\lambda)} S_\lambda)$  se  $\lambda \subset \gamma$ .  $S_\gamma$  é um operador de substituição que escreve a função à qual está aplicado em termos das variáveis de  $\gamma$ . Uma escolha frequentemente adequada para o operador de Taylor generalizado é

$$\tau_Y^{d(\gamma)} = t_{p^\gamma, m_S^\gamma}^{d(\gamma)-1} + \sum_{i, n_i}^{r_i} \frac{(m_{S_1}^\gamma)^{r_1} (m_{S_2}^\gamma)^{r_2} \dots (m_{S_M}^\gamma)^{r_M}}{(\prod_i r_i !)} \frac{(\prod_i n_i !)}{\partial (m_{S_1}^\gamma)^{r_1}} \dots$$

$$\dots \frac{\partial^{r_M}}{\partial (m_{S_M}^\gamma)^{r_M}} (p_{\mu 1}^\gamma)^{n_1} \dots (p_{\nu N}^\gamma)^{n_N} \frac{\partial^{n_1}}{\partial (p_{\mu 1}^\gamma)^{n_1}} \dots \frac{\partial^{n_N}}{\partial (p_{\nu N}^\gamma)^{n_N}} \left| \begin{array}{l} p_{\mu i}^\gamma = 0 \\ m_{S_i}^\gamma = \mu \end{array} \right.$$

com

$$\sum_i^M r_i + \sum_i^N n_i = d(\gamma) \quad (I-11)$$

$t_{p^\gamma, m_S^\gamma}^{d(\gamma)-1}$  é o operador de Taylor de ordem  $d(\gamma)-1$  nos momentos externos independentes de  $\gamma$ ,  $p^\gamma = \{p_1^\gamma, \dots, p_N^\gamma\}$ , e nos elementos de um conjunto  $m_S^\gamma = \{m_{S_1}^\gamma, \dots, m_{S_N}^\gamma\}$  de massas "soft". Por convenção  $\tau_Y^{d(\gamma)} \equiv 0$ , se  $d(\gamma) < 0$ . A parte finita de (I-3) é agora definida como sendo a integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^d k R_G(p, k, m, \epsilon) \quad (I-12)$$

que é absolutamente convergente, e tende a uma distribuição temperada e covariante quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Uma das características do esquema descrito é que as subtrações associadas a um sub-gráfico  $\gamma$  são, até ordem  $d(\gamma)-1$ , feitas em  $p^\gamma=0=m_S^\gamma$ ; por outro lado, para evitar o surgimento de divergências infra-vermelhas, as demais subtrações são feitas em  $p^\gamma=0$ , mas com  $m_{S_i}^\gamma = \mu \neq 0$ . Outras variantes empregando um número menor de subtrações em  $m_{S_i}^\gamma$  foram também descritas por Lowenstein<sup>(18)</sup>.

Do mesmo modo que no BPHZ usual, pode-se definir produtos normais nos esquemas "soft" de maneira simples.

Se  $\theta$  é um produto formal dos campos básicos e suas deri-

vadas (incluindo fatores de massa), seu grau  $\delta$  é dado por

= dimensão do operador  $\theta + \frac{1}{2} \sum$  parâmetros massas "soft" em  $\theta$ ,

e o produto normal  $N_\delta[\theta](x)$  é definido por

$$\langle 0 | TN_\delta[\theta](x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}(x_\alpha) | 0 \rangle = \text{parte finita de}$$

$$\langle 0 | T\theta^{(0)}(x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}^{(0)}(x_\alpha) \exp i \int dy L_I^{(0)}(y) | 0 \rangle^{(0)} \quad (I-13)$$

Note que novamente não é usada a ordenação de Wick no lado direito de (I-13). A expansão de (I-13) em gráficos de Feynman é caracterizada agora pelo fato que cada gráfico tem um vértice especial  $\theta(x)$  ao qual é atribuído o grau  $\delta$  para efeitos de subtração. Portanto, numa teoria renormalizável ( $\delta_a = D$  para  $V_a \neq V_\theta$ ), cada gráfico 1PI tem um grau de divergência superficial dado por

$$d(\gamma) = \begin{cases} D - \frac{D-1}{2} F_\gamma - \frac{D-2}{2} B_\gamma, & \text{se } V_\theta \notin V(\gamma), \\ \delta - \frac{D-1}{2} F_\gamma - \frac{D-2}{2} B_\gamma, & \text{se } V_\theta \in V(\gamma). \end{cases} \quad (I-14)$$

As propriedades básicas que caracterizam os produtos normais assim definidos são:

- (i) Linearidade: Se  $\theta = \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2$ , e  $\theta_1, \theta_2$  são produtos formais de grau  $\delta$ , então

$$\langle 0 | TN_\delta[\theta](x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}(x_\alpha) | 0 \rangle = \alpha_1 \langle 0 | TN_\delta[\theta_1](x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}(x_\alpha) | 0 \rangle$$

$$+ \alpha_2 \langle 0 | TN_\delta[\theta_2](x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha}(x_\alpha) | 0 \rangle, \quad (I-15)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes independentes das massas "soft".

(ii) Formula de diferenciação de Lowenstein.

$$\partial_\mu \langle 0 | \text{TN}_\delta [\theta] (x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha} (x_\alpha) | 0 \rangle = \langle 0 | \text{TN}_{\delta+1} [\partial_\mu \theta] (x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha} (x_\alpha) | 0 \rangle \quad (\text{I-16})$$

que decorre da propriedade dos operadores de Taylor em torno de  $p=0$ ,

$$p^\mu t_p^\beta (f(p)) = t_p^{\beta+1} (p^\mu f(p)) \quad (\text{I-17})$$

(iii) Condições de normalização.

Seja  $\Gamma_{\theta, \delta}^N (p)$  a transformada da função de vértice  $\langle 0 | \text{TN}_\delta [\theta] (x) \prod_{\alpha=1}^N A_{i_\alpha} (x_\alpha) | 0 \rangle^{\text{PROP}}$ , onde PROP significa que devemos considerar apenas gráficos próprios, com as linhas externas amputadas.

Se  $D^{(M)}$ ,  $0 \leq M \leq d(\Gamma)$  é um operador de derivação arbitrário de ordem  $M$  em  $p_1, \dots, p_N$  e nos parâmetros de massa "soft"  $m_{s_i}$ , então

$$D^{(M)} \Gamma_{\theta, \delta}^{(N)} (-\sum_{i=1}^N p_i, p_1, \dots, p_N) \Big|_{p_i=0, m_{s_i}=\beta} \quad (\text{I-18})$$

é igual à contribuição do gráfico trivial, com

$$\beta = 0, \quad \text{se } 0 \leq M < d(\Gamma),$$

$$\beta = \mu, \quad \text{se } M = d(\Gamma).$$

(iv) Identities de Zimmermann - Se  $m_s$  é uma massa "soft" e  $\theta(x)$  é um operador de dimensão  $\delta$ , então

$$N_{\delta+n} [m_S^n \theta] (x) = m_S^n N_\delta [\theta] (x) + \sum_{\delta < \delta_i \leq \delta+n} C_i N_{\delta_i} [\theta_i] (x) \quad (\text{I-19})$$

onde  $n$  é um inteiro positivo e  $\theta_i(x)$  são operadores locais com dimensões  $\delta_i$ . Os coeficientes  $c_i$  são determinados pelas condições de normalização.

(v) Equações de Movimento.

A dedução de equações de movimento para produtos normais definidos nos esquemas "soft" é feita graficamente como no BPHZ usual, e consiste essencialmente no corte de linhas e identificação dos vértices resultantes com os produtos normais da teoria. Quando estudamos as equações de movimento de produtos normais envolvendo mais de dois campos, em geral constatamos a ocorrência das anisotropias, que são termos anômalos sem equivalentes nas equações de Euler-Lagrange clássicas.

Como exemplo, consideremos um campo escalar com auto-interação  $A^4$  (em 4 dimensões agora) descrito pela Lagrangeana efetiva

$$L = \frac{1}{2}(1+b) \partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{1}{2}(m^2-a)A^2 - \frac{1}{4!}(g-c)A^4 = L_0 + L_I,$$

(I-20)

$$L_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{1}{2} m^2 A^2,$$

onde  $g$  é o parâmetro de perturbação, e  $a, b$  e  $c$  são constantes de renormalização finitas, determinadas por condições de normalização adequadas. Vamos encontrar a equação de movimento de  $N_4 [A^2 A] (x)$ . Graficamente, as possibilidades para as funções de Green contendo este produto normal,

$$\langle 0 | \text{TN}_4 [A \partial^2 A] (x) \prod_{i=1}^N A(x_i) | 0 \rangle,$$

são

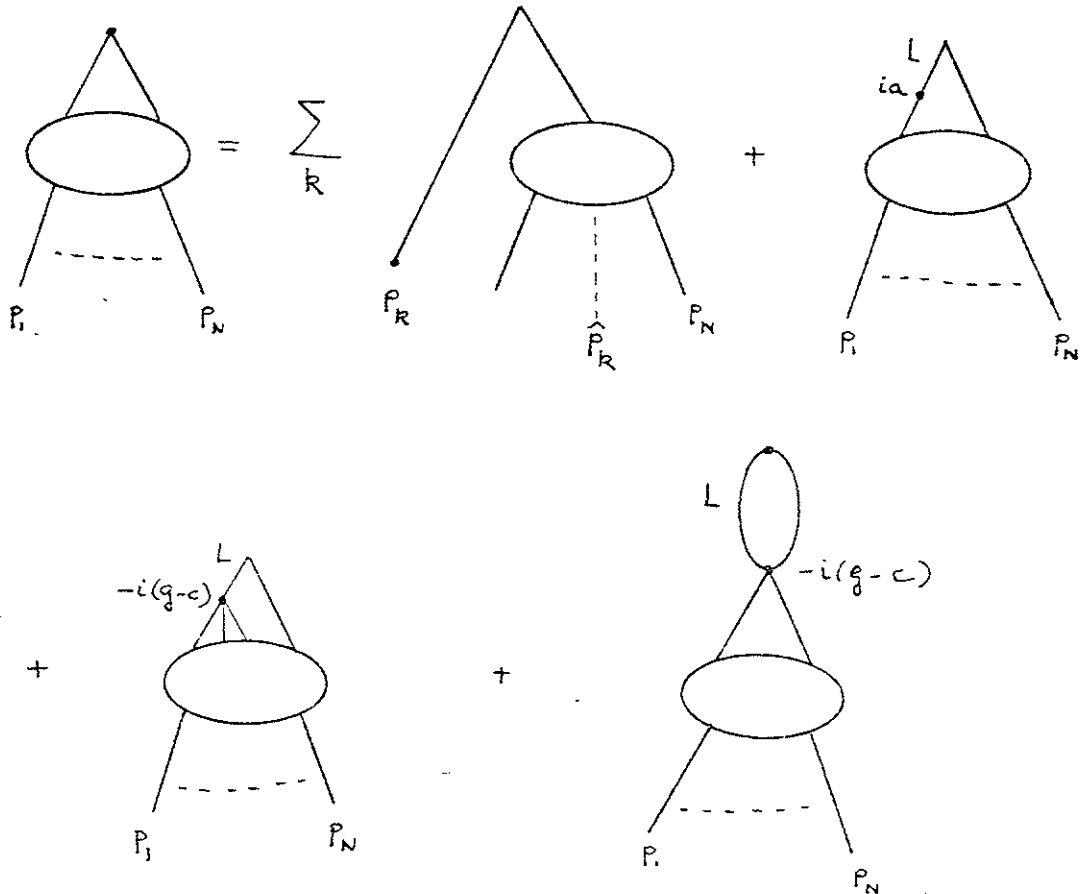


FIG. 1

onde  $\hat{p}_k$  significa que a linha externa correspondente não ocorre. No espaço de momento, ao vértice de produto normal é atribuído um monômio  $(-\ell^2)$ , onde  $\ell$  é o momento através de uma linha  $L$ , saindo do vértice; o fator  $(-\ell^2)$  somado com  $m^2$  pode ser usado para cancelar o propagador de  $L$ , o que representamos contraindo  $L$  a um ponto. Teremos então

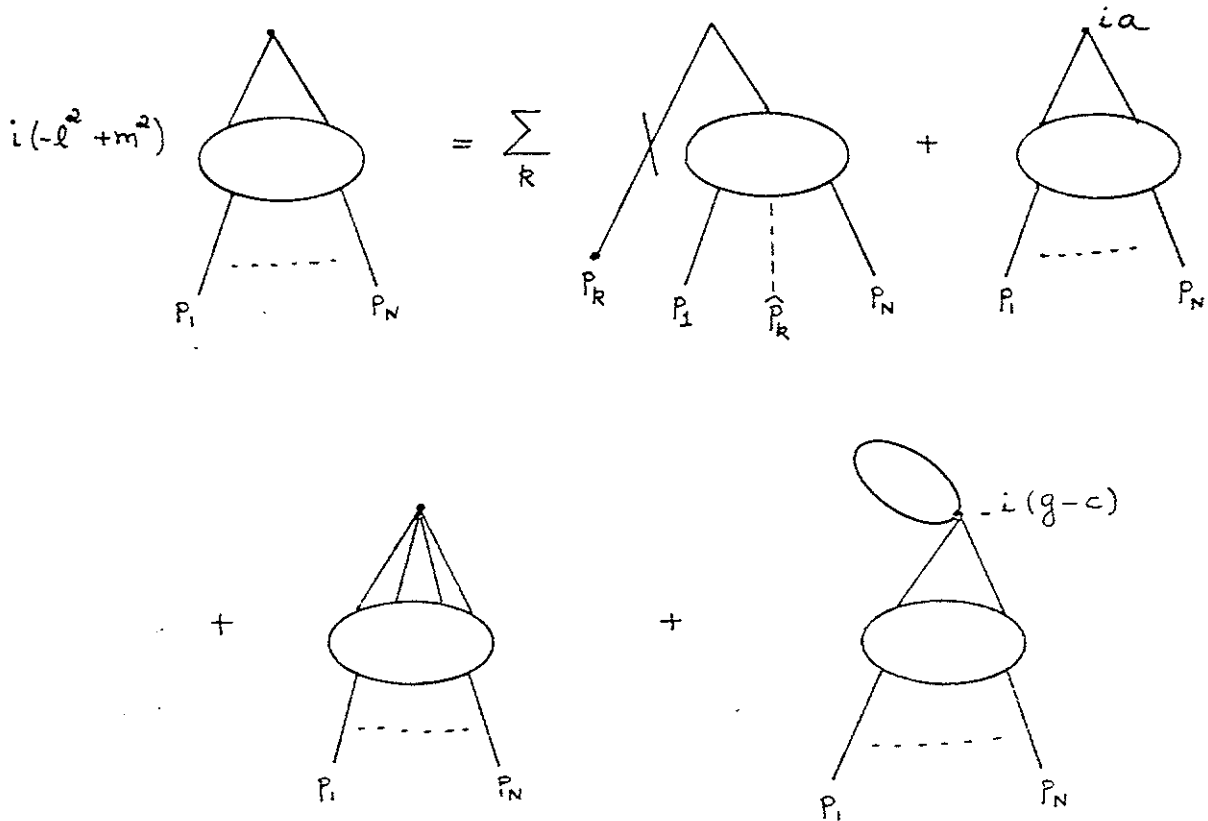


FIG. 2

O último termo no lado direito é nulo no esquema BPHZ comum, mas no esquema "soft" ele representa a contribuição que ocorre quando dois dos campos de  $N_4[A^4]$  estão contraídos entre si. O resultado é

$$(1+b) \langle 0 | TN_4 [A \partial^2 A] (x) \prod_{i=1}^N A(x_i) | 0 \rangle = \langle 0 | TN_4 \left\{ \frac{1}{3}; (c-g) A^3 (x) + \right.$$

(I-21)

$$\left. + (a-m^2) A^2 (x) \right\} \prod_{i=1}^N A(x_i) | 0 \rangle - i \sum_k \delta(x-x_k) \langle 0 | T \prod_{i=1}^N A(x_i) | 0 \rangle$$

Fica então claro que se tivéssemos usado a ordenação de Wick em (I-2) teríamos na equação de movimento um termo anômalo, representado pelo último gráfico da Fig. 2, o que estragaria a analogia com as equações de movimento clássicas. Em geral, para que a analogia exista, é necessário que no processo de dedução de equações de movimento, cancelamentos que acontecem em termos de integrandos não subtraídos ocorram também para os integrandos subtraídos. Tais cancelamentos podem não ocorrer porque, em geral, os momentos externos e as massas de um gráfico são tratados de maneiras diferentes pelos operadores de subtração, surgindo então as chamadas anisotropias<sup>(26,27)</sup>. O exemplo a seguir ilustra este fato, no caso em que operadores de "Taylor" generalizados do tipo (I-11) são usados. Consideremos os gráficos

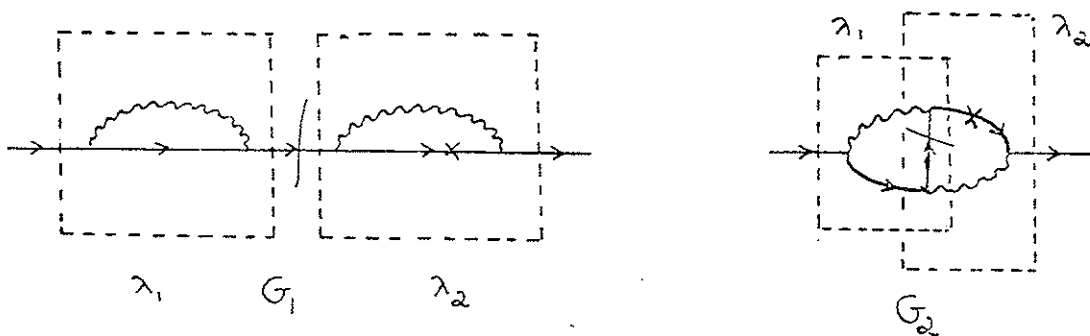


FIG. 3

numa teoria em 4 dimensões (p.ex., interação de Yukawa), onde as linhas orientadas representam propagadores de fermions, e as onduladas propagadores de bosons. Quando as linhas cortadas são contraídas a pontos,  $I_{G_1}$  torna-se igual a  $I_{G_2}$ . Entretanto, em  $G_1$  os sub-gráficos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são não acavados, enquanto que em  $G_2$  eles são acavados. Pela fórmula da floresta (I-9), a diferença entre os integrandos subtraídos é, com  $d(\lambda_1)=1=d(G_1)=d(G_2)$  e  $d(\lambda_2)=0$ ;



$$\begin{aligned}
R_{G_1} - R_{G_2} &= (\tau_{\lambda_1}^1 S_{\lambda_1} I_{\lambda_1}) (\tau_{\lambda_2}^0 S_{\lambda_2} I_{\lambda_2}) + \tau_G^1 S_G I_G - \tau_G^1 S_G (I_{\lambda_2} \tau_{\lambda_1}^1 S_{\lambda_1} I_{\lambda_1}) \\
&\quad - \tau_G^1 S_G (I_{\lambda_1} \tau_{\lambda_2}^0 S_{\lambda_2} I_{\lambda_2}) \\
&= \tau_G^1 S_G (I_{\lambda_1} I_{\lambda_2}) - \tau_G^1 S_G (I_{\lambda_2} \tau_{\lambda_1}^1 S_{\lambda_1} I_{\lambda_1})
\end{aligned}$$

onde  $\tau_G^1 = \tau_{G_1}^1 = \tau_{G_2}^1$ ,  $I_{G_1} = I_{G_2}$ . Se  $\tau_{\lambda}^{d(\lambda)}$  é o operador de Taylor generalizado definido em (I-11) com  $m_s = m$ , encontramos:

$$\begin{aligned}
R_{G_1} - R_{G_2} &= \left[ I_{\lambda_1} (p_{\lambda_1} = 0, m = \mu) - I_{\lambda_1} (p_{\lambda_1} = 0, m = 0) \right] \left[ p^{\nu} \left( \frac{\partial I_{\lambda_2}}{\partial p^{\nu}} \right) p_{\lambda_2} = 0 + \right. \\
&\quad \left. m \left( \frac{\partial I_{\lambda_2}}{\partial m} \right) p_{\lambda_2} = 0 \right]_{m=\mu} - \mu \left( \frac{\partial I_{\lambda_1}}{\partial m} \right) p_{\lambda_1} = 0 \left[ p^{\nu} \left( \frac{\partial I_{\lambda_2}}{\partial p^{\nu}} \right) p_{\lambda_2} = 0 + m \left( \frac{\partial I_{\lambda_2}}{\partial m} \right) p_{\lambda_2} = 0 \right]_{m=\mu},
\end{aligned}$$

de modo que fazendo a última subtração em  $m = \mu$  teremos  $R_{G_1} \neq R_{G_2}$ ; como já mencionamos no início do Capítulo, há certos modelos nos quais anisotropias geradas desta maneira podem ser evitadas, fazendo todas as subtrações em torno de  $m_s = 0$ .

## CAPÍTULO II - PERTURBAÇÃO EM TORNO DA TEORIA LIVRE

Neste Capítulo, estudamos em perturbação a teoria que descreve o acoplamento derivativo de um fermion e um campo pseudoescalar massivos. O objetivo principal aqui é mostrar que embora as funções de 4 pontos do fermion sejam logaritmicamente divergentes, podemos definir um esquema de renormalização no qual interações quadri-lineares nos fermions não são induzidas <sup>quando  $M \rightarrow 0$ ,</sup> de modo que o limite em que a massa do fermion vai a zero é a teoria de Rothe-Stamatescu<sup>(7)</sup>. Na Seção II-1 introduzimos as regras de Feynman, a prescrição de subtração e as condições de normalização associadas. Na Seção II-2, propriedades das funções de Green, como identidades de Ward e equações de movimento são discutidas. A Seção II-3 contém uma discussão explícita do limite em que a massa do fermion tende a zero. Finalmente, colecionamos em dois Apêndices detalhes técnicos que se referem à convergência das integrais de Feynman no infra-vermelho.

II-1) AS REGRAS DE FEYNMAN E O ESQUEMA DE SUBTRAÇÃO

Consideremos o modelo bi-dimensional descrito pela densidade de Lagrangeana efetiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{i}{2} \bar{\Psi} \overleftrightarrow{\partial} \Psi(x) - M \bar{\Psi} \Psi(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) + g \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \varphi(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_I = g \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \varphi(x)$$

(II-1)

As funções de Green são dadas pela fórmula de Gell-Mann

-Low

$$\begin{aligned}
 G^{(2N, L)}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N; z_1, \dots, z_L) &= \langle 0 | T \prod_{i=1}^N \psi(x_i) \prod_{j=1}^N \bar{\psi}(y_j) \prod_{R=1}^L \varphi(z_R) | 0 \rangle \\
 &= \text{Parte finita de } \langle 0 | T \prod_{i=1}^N \psi^{(0)}(x_i) \prod_{j=1}^N \bar{\psi}^{(0)}(y_j) \prod_{R=1}^L \varphi^{(0)}(z_R) \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_I^{(0)}(x) \right] | 0 \rangle^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{II-2}$$

onde  $\phi^{(0)}$  e  $\psi^{(0)}$  são os campos livres especificados por  $L_0$  e  $L_I^{(0)} = L_I(\psi^{(0)}, \partial_\mu \phi^{(0)})$ .

Após expandir a exponencial e aplicar o teorema de Wick, obtemos a soma usual sobre integrais de Feynman do tipo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^2k I_G(p, k, m, M, \epsilon) , \tag{II-3}$$

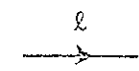
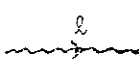
onde

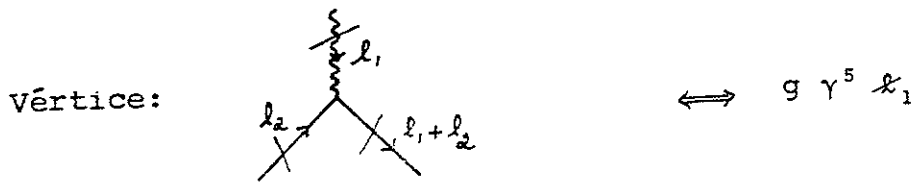
$$p = \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$k = \{k_1, \dots, k_m\}$$

$$d^2k = \prod_{i=1}^m d^2k_i$$

O integrando  $I_G(p, k, m, M, \epsilon)$  está associado a um gráfico G por meio da correspondência

linha de fermion:		$\iff$	Propagador: $i \frac{\not{\ell} + M}{\ell^2 - M^2 + i\epsilon(\ell^2 + M^2)}$
linha de boson:		$\iff$	Propagador: $\frac{i}{\ell^2 - m^2 + i\epsilon(\ell^2 + m^2)}$



onde  $\not{l} \equiv \gamma^\mu l_\mu$ . A integral (II-3) é em geral divergente, o grau de divergência superficial de um gráfico próprio  $\gamma$  sendo dado por <sup>[1]</sup>

$$d(\gamma) = 2 - \frac{1}{2} F_\gamma - B_\gamma, \quad (\text{II-4})$$

$F_\gamma$  = número de linhas externas de fermion em  $\gamma$ ,

$B_\gamma$  = número de linhas externas de boson em  $\gamma$ .

O processo de remoção destas singularidades que iremos adotar consiste na aplicação de um esquema de renormalização com operadores de Taylor em torno de  $p=0=M$ , pertencente à família de esquemas "soft" descritos no Capítulo I. Existe, porém, um particular gráfico  $\gamma_0$  logaritmicamente divergente,

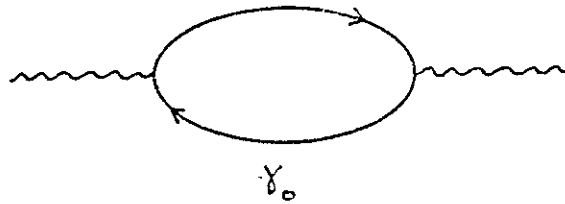


FIG. 4

cujo termo de subtração diverge no infra-vermelho para  $p=0=M$ . Este problema será contornado definindo o integrando subtraído de um gráfico próprio  $G$  por meio da fórmula da floresta

$$R_G = S_G \sum_{U \in S_G} \prod_{\gamma \in U} (\tau_\gamma^{d(\gamma)} S_\gamma) I_G(U) \quad (\text{II-5})$$

com operadores de subtração  $\tau_\gamma^{d(\gamma)}$  tais que

$$\tau_{\gamma}^{d(\gamma)} = \begin{cases} \text{i) operador de Taylor de ordem } d(\gamma) \text{ nos momentos externos } p^{\gamma} \text{ e na massa } M^{\gamma} \text{ das linhas internas de fermion do gráfico } \gamma, \text{ em torno de } p^{\gamma}=0=M^{\gamma}, \text{ se } \gamma \neq \gamma_0; \\ \text{ii) operador de Taylor de ordem } d(\gamma) \text{ em } p^{\gamma}, \text{ em torno de } p^{\gamma}=0 \text{ e } M^{\gamma}=\mu \text{ se } \gamma \equiv \gamma_0 \end{cases}$$

(II-6)

O operador  $S_G$ , além de colocar as expressões às quais está aplicado em termos das variáveis do gráfico  $G$ , faz a substituição  $\mu \rightarrow M$ .

É interessante notar que a possibilidade de fazer subtrações num valor nulo da massa do fermion, sem gerar divergências infra-vermelhas, decorre do fato que a massa  $m$  do boson não é afetada pela atuação dos operadores de Taylor. Isto nos faz supor que em teorias envolvendo mais de uma espécie de campo, é possível tomar uma das massas como "soft" e fazer subtrações em torno de zero, tratando as demais como massas duras. Os gráficos com grau de divergência não negativo que irão exigir um cuidado especial serão então aqueles formados por um circuito fechado de linhas com massas "soft", sem nenhuma linha interna com massa dura. Esta situação é ilustrada pelo gráfico  $\gamma_0$  da Fig.4, e é análoga ao que ocorre na ref.(21); na realidade, a prova de convergência no ultra-violeta e no infra-vermelho do esquema descrito por (II-5) e (II-6) é uma adaptação direta<sup>[2]</sup> da prova da ref.(21), e por isso não será dada aqui. No Apêndice (II-A) são dados dois exemplos mostrando de que maneira as possíveis divergências infra-vermelhas associadas a um gráfico são canceladas pela combinação de subtrações.

Como consequência da definição (II-6) de  $\tau_{\gamma}^{d(\gamma)}$ , obtemos imediatamente as seguintes condições de normalização para as funções de vértice:

$$\Gamma'(2,0) \Big|_{\substack{p=0 \\ M=0}} = 0 \quad , \quad (\text{II-7})$$

$$\frac{\partial}{\partial M} \Gamma'(2,0) \Big|_{\substack{p=0 \\ M=0}} = -i \quad , \quad (\text{II-8})$$

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma'(2,0) \Big|_{\substack{p=0 \\ M=0}} = i \gamma_\mu \quad (\text{II-9})$$

$$\cancel{\Gamma'(2,1)} \Big|_{\substack{p=0 \\ M=0}} \neq 0 \quad \frac{\partial \Gamma'(2,1)}{\partial p^\mu} (q, q, -p, p) \Big|_{\substack{p=0=q \\ M=0}} = -g \gamma^\mu \gamma^5 \quad (\text{II-10})$$

$$\Gamma'(4,0) \Big|_{\substack{p=0 \\ M=0}} = 0 \quad . \quad (\text{II-11})$$

onde  $\Gamma'(2N, L)$  denota a contribuição para a função de vértice correspondente, originada de gráficos que não contêm  $\gamma_0$  como um sub-gráfico. Com veremos, quando  $M \rightarrow 0$  as relações acima tornam-se as condições de normalização para a teoria com a massa do fermion nula. É claro também, que  $m$  e  $M$  não são as massas físicas do boson e do fermion; entretanto, devido à condição de normalização (II-7) a massa física do fermion é nula para  $M=0$ . Para  $M \neq 0$ , a massa física do fermion pode ser ajustada introduzindo na Lagrangeana efetiva um contra-termo proporcional ao produto normal  $N[\bar{\psi}\psi](x)$ .

II-2) IDENTIDADES DE WARD E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As identidades de Ward para as correntes vetorial e vector-axial podem ser deduzidas da maneira usual. Seja

$$\mathbb{X} = \prod_{i=1}^N \psi(x_i) \prod_{j=1}^N \bar{\psi}(y_j) \prod_{k=1}^L \varphi(z_k).$$

A equação de movimento da função de Green

$$\langle 0 | T \mathbb{X} | 0 \rangle ,$$

é deduzida notando que um dos campos em  $\mathbb{X}$ , p.ex.  $\psi(x_1)$ , pode estar ligado diretamente a um outro campo  $\bar{\psi}(y_j)$  de  $\mathbb{X}$ , ou a um vértice de interação:

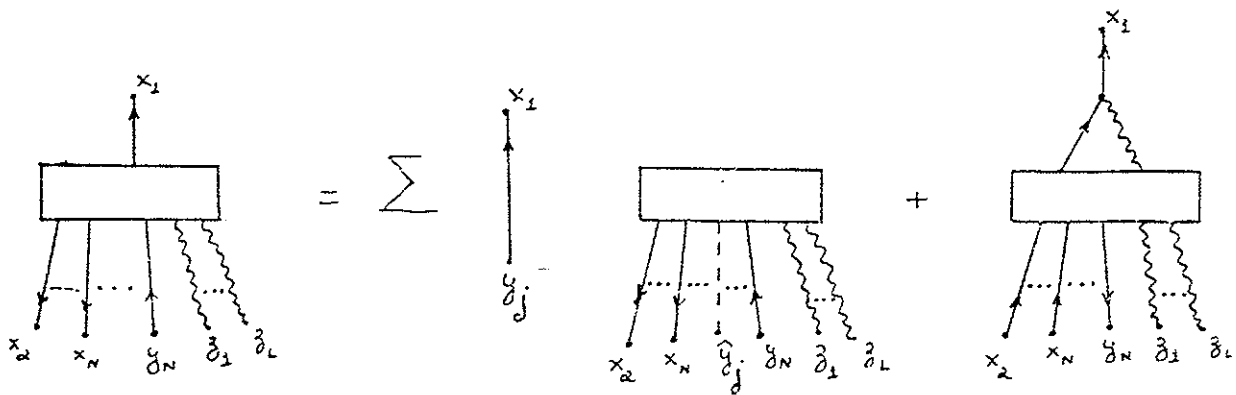


FIG. 5

de modo que :

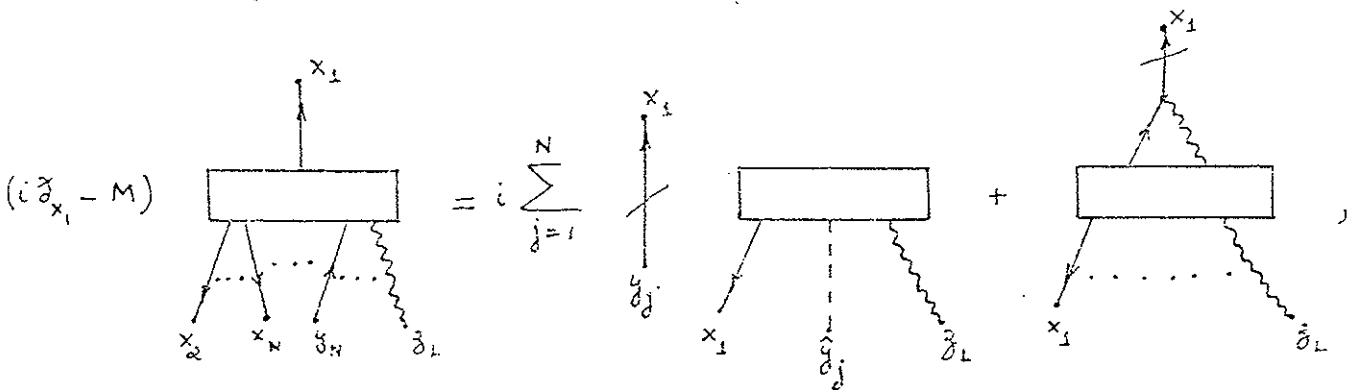


FIG. 6

ou

$$(i \partial_{x_i} - M) \langle 0 | T \Sigma | 0 \rangle = i \sum_{j=1}^N \delta(x_i - y_j) \langle 0 | T \Sigma_{y_j} | 0 \rangle (-1)^{j+N}$$

$$\rightarrow ig \langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi \bar{\psi}] (x_i) \Sigma_{\tilde{x}_i} | 0 \rangle,$$

(II-12)

onde  $\Sigma_{\tilde{x}}$  significa  $\Sigma$  com o campo cujo argumento  $\tilde{x}$  suprimido. Usando o mesmo procedimento para o campo escalar, encontramos

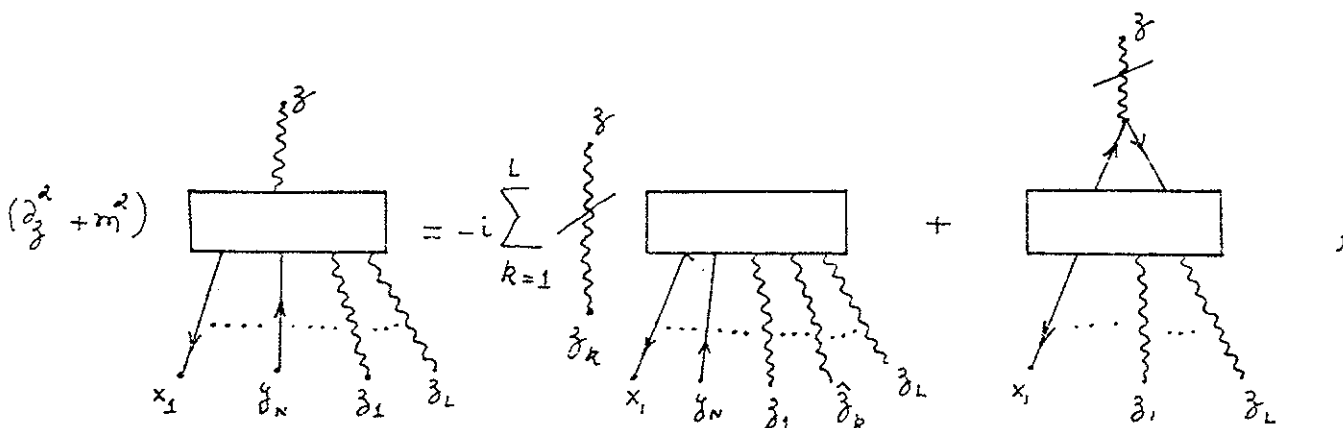


FIG. 7

que significa:

$$(\partial_z^2 + m^2) \langle 0 | T \varphi(z) \Sigma | 0 \rangle = -i \sum_{k=1}^L \delta(z - z_k) \langle 0 | T \Sigma_{z_k} | 0 \rangle$$

$$+ g \partial_z^\mu \langle 0 | T N_1 [\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi] (z) \Sigma | 0 \rangle.$$

(II-13)

Para encontrar a identidade de Ward da corrente vetorial  $N_1 [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] (x)$  usamos a propriedade (I-18) e escrevemos



$$\partial_x^\mu N_1 [\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi](x) = i N_2 [\bar{\Psi} (-i \overleftarrow{\partial} - M) \Psi](x) - i N_2 [\bar{\Psi} (i \overrightarrow{\partial} - M) \Psi](x) .$$

(II-14)

Cada um destes termos cancela o propagador de uma das linhas que saem do vértice da corrente, de modo que ficamos com

$$\partial_x^\mu \langle 0 | T N_1 [\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi](x) \bar{X} | 0 \rangle = \sum_{k=1}^N [\delta(x-y_k) - \delta(x-x_k)] \langle 0 | T \bar{X} | 0 \rangle .$$

(II-15)

Para a corrente vetor-axial, usamos

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu N_1 [\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 \Psi](x) &= i N_2 [\bar{\Psi} (-i \overleftarrow{\partial} - M) \gamma^5 \Psi](x) + i N_2 [\bar{\Psi} \gamma^5 (i \overrightarrow{\partial} - M) \Psi](x) \\ &\quad + 2i N_2 [M \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi](x) \end{aligned}$$

(II-16)

e portanto,

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0 | T N_1 [\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 \Psi](x) \bar{X} | 0 \rangle &= - \sum_{k=1}^N [\delta(x-x_k) \gamma_{x_k}^5 + \delta(x-y_k) \gamma_{y_k}^{5T}] \langle 0 | T \bar{X} | 0 \rangle \\ &\quad + 2i \langle 0 | T N_2 [M \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi](x) \bar{X} | 0 \rangle . \end{aligned}$$

(II-17)

Note que os gráficos que contribuem para o último termo do lado direito desta equação tem uma subtração além do necessário para torná-los convergentes; isto não ocorreria se o operador de subtração fosse sempre em  $M=0$ , pois neste caso, passando  $M$  para

fora, o grau do produto normal baixaria de uma unidade; porém, este procedimento não é correto, pois para o gráfico  $\gamma_0$  da Fig. 4 a massa  $M_{\gamma_0}$  é efetivamente dura.

Este fato leva-nos a prever a ocorrência de uma anomalia na divergência da corrente axial; entretanto, como veremos, ela é bastante suave, no sentido que não impede a solubilidade do modelo no limite  $M \rightarrow 0$  (7).

Para determinar a anomalia, utilizamos a identidade de Zimmermann (I-19) que relaciona  $MN_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi]$  com  $N_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi]$ . A diferença entre estes dois produtos normais é inteiramente devida a termos de subtração, de modo que eles só diferem um do outro quando forem vértices de um sub-gráfico  $\gamma_0$ . Encontramos:

$$2iN_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi](x) = 2iMN_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi](x) + a\partial^2\phi(x), \quad (\text{II-18})$$

onde o termo  $a\partial^2\phi(x)$  vem da diferença entre as subtrações de



FIG. 8

O coeficiente  $a$  em (II-18) é dado explicitamente por

$$a = -\frac{1}{(2\pi)^2} (ig) 4M^2 \int \frac{d^2k}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)} = -\frac{g}{\pi}.$$

(II-19)

Para obter (II-19) é necessário lembrar que o operador  $S_G$  faz a substituição  $\mu \rightarrow M$ .

Usando (II-18) podemos reescrever (II-17) como

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0|TN_1[\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^5\Psi](x)\bar{X}|0\rangle &= -\sum_{k=1}^N [\delta(x-x_k)\gamma_{x_k}^5 + \delta(x-y_k)\gamma_{y_k}^{5T}] \langle 0|T\bar{X}|0\rangle \\ &+ 2iM \langle 0|TN_1[\bar{\Psi}\gamma^5\Psi](x)\bar{X}|0\rangle + a \langle 0|T\partial^2\varphi(z)\bar{X}|0\rangle, \end{aligned} \quad (II-20)$$

e a equação de movimento (II-13) do boson fica

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 + m'^2) \langle 0|T\varphi(z)\bar{X}|0\rangle &= \frac{-i}{1+ga} \sum_{k=1}^L \delta(z-z_k) \langle 0|T\bar{X}_{z_k}|0\rangle \\ &+ \frac{g}{1+ga} \sum_{k=1}^N [\delta(z-x_k)\gamma_{x_k}^5 + \delta(z-y_k)\gamma_{y_k}^{5T}] \langle 0|T\bar{X}|0\rangle \\ &- \frac{2iMg}{1+ga} \langle 0|TN_1[\bar{\Psi}\gamma^5\Psi](z)\bar{X}|0\rangle, \end{aligned} \quad (II-21)$$

com

$$m'^2 = \frac{m^2}{1-g^2/\pi}. \quad (II-22)$$

A equação (II-21) mostra que quando  $M \rightarrow 0$ ,  $\phi$  torna-se um campo livre, de modo que neste limite obtemos o modelo exatamente solúvel de Rothe e Stamatescu<sup>(7)</sup>.

II-3) LIMITE DE MASSA ZERO

## II-3-1) A AUTO ENERGIA DO BOSON E O ESQUEMA DE SUBTRAÇÃO MODIFICADO

Para obter a solução de Rothe-Stamatescu no limite em que a massa do fermion se anula, é necessário utilizar um esquema com subtrações em torno de  $p=0=M$ . De fato, examinando o termo de integração na equação de movimento (II-12),

$$\langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi \psi](x) \Sigma | 0 \rangle ,$$

vemos que ele recebe contribuições da forma

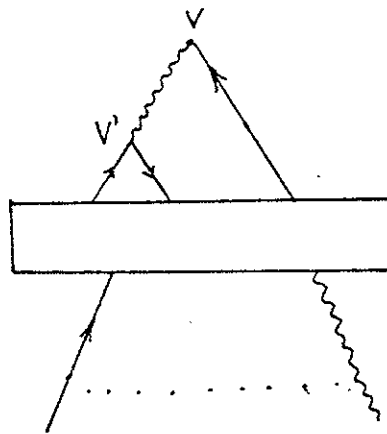


FIG. 9

onde  $V'$  é um vértice da Lagrangeana de interação. Quando aplicamos a identidade de Ward da corrente vetor axial ao vértice  $V'$ , verificamos que as contribuições distintas daquelas que sobrevivem mesmo no limite  $M=0$ , e que portanto são interações intrínsecas do modelo, são gráficos nos quais ao vértice  $V'$  corresponde um fator de massa  $M_\gamma^5$ . Tais gráficos são, em geral, subtraídos além do necessário. Quando fazemos a redução das subtrações destes gráficos, dependendo do esquema de renormalização empregado, pode aparecer, entre outros, um termo que corresponde a uma interação quadrilinear nos fermions. Vamos ilustrar isto por meio do gráfico

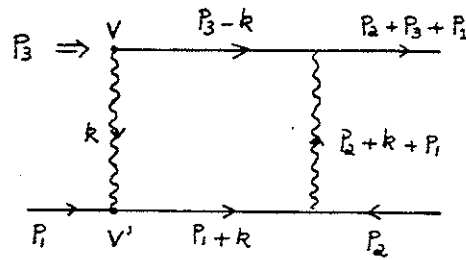


FIG. 10

que tem um integrando subtraído proporcional a

$$(1 - \tau^{(0)}) \left\{ \left[ \gamma^5 \not{k} \frac{1}{p_1 + \not{k} - M} \gamma^5 (p_1 + p_2 + \not{k}) \right] \otimes \left[ \gamma^5 \not{k} \frac{1}{p_3 - \not{k} - M} \gamma^5 (p_1 + p_2 + \not{k}) \right] \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 + k)^2 - m^2} \right\}, \quad (\text{II-23})$$

onde  $\tau^{(0)}$  é um operador de subtração ainda não especificado nos momentos externos (em torno de zero) e em  $M$ , e  $\otimes$  indica produto direto. O fator de momento  $\gamma^5 \not{k}$  em  $V'$  pode ser escrito como

$$\gamma^5 \not{k} = \gamma^5 (p_1 + \not{k}) + p_1 \gamma^5. \quad (\text{II-24})$$

e cada um destes termos pode ser usado para cortar uma das linhas de fermion que concorrem em  $V'$ . Para cortar a linha externa, transferimos o termo  $p_1 \gamma^5$  para a esquerda do operador de subtração, baixando seu grau de uma unidade (conforme eq. (I-17)). Isto nos deixa com um gráfico semelhante à Fig. 10 mas com a linha externa em  $V'$  cortada, e um gráfico no qual ao vértice  $V'$  está associado o fator  $M \gamma^5$ , que é minimamente subtraído, e que se anula quando  $M=0$ .

Quando cortamos a linha de fermion interna, obtemos um termo que é cancelado com

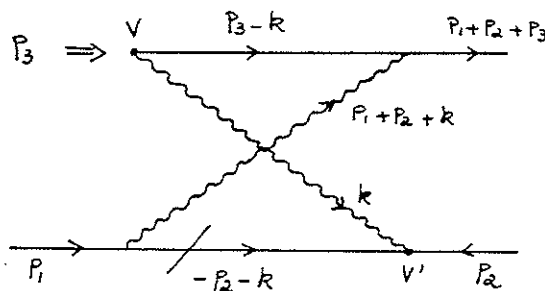


FIG. 11a

e um termo de massa

$$(1-\epsilon^{(0)}) \left\{ \left[ M \gamma^5 \frac{1}{p_1+k-M} \gamma^5 (p_1+p_2+k) \right] \otimes \left[ \gamma^5 \frac{1}{p_3-k-M} \gamma^5 (p_1+p_2+k) \right] \frac{1}{k^2-m^2} \frac{1}{(p_1+p_2+k)^2-m^2} \right\},$$

que tem uma subtração extra, e corresponde ao gráfico

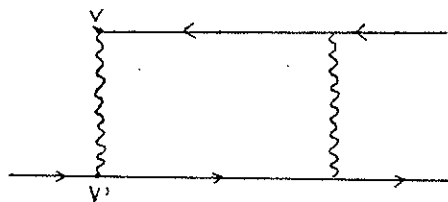


FIG. 11b

com um produto normal  $N_2 [M \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi]$  em  $V'$ . Para obter gráficos minimamente subtraídos, devemos utilizar uma identidade de Zimmermann relacionando  $N_2 [M \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi]$  com  $N_1 [M \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi]$ . Tomando para o operador

de subtração a definição (I-11), por exemplo, a diferença entre os dois produtos normais no caso considerado será:

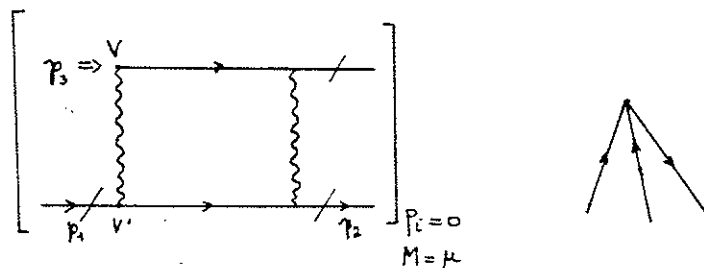


FIG. 12

que representa um vértice tri-linear na equação de movimento do fermion, e portanto uma interação quadri-linear na Lagrangeana. Por outro lado, se todas as subtrações são feitas em  $p=0$  e  $M=0$  então, em virtude da bem conhecida propriedade dos operadores de Taylor em torno de zero, teremos  $N_2 [M\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi] = MN_1 [\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi]$ . Neste caso, não ocorre a geração de novas interações, e a anisotropia descrita no caso geral também não ocorre, uma vez que momentos externos e massas "soft" são igualmente tratados.

O esquema de renormalização descrito na Seção (II-1) não é deste tipo por causa do gráfico  $\gamma_0$ , que é subtraído com  $M\gamma_0$  "dura". Nós vamos agora mostrar como devem ser consideradas as contribuições de  $\gamma_0$ , de modo que o limite  $M \rightarrow 0$  da teoria tenha o comportamento desejado. Para simplificar a discussão deste limite aplicamos a identidade de Ward da corrente axial a um dos vértices de  $\gamma_0$ ,

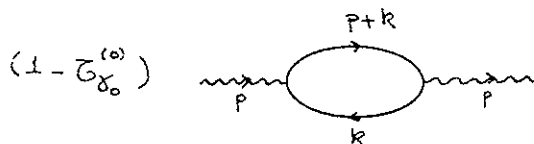


FIG. 13

obtendo

$$\begin{aligned}
 & P_\nu (1 - \zeta^{(1)}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram (a)} \\ \text{Diagram (b)} \\ \text{Diagram (c)} \end{array} \right\} \\
 = & P_\nu \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram (a)} \\ \text{Diagram (b)} \\ \text{Diagram (c)} \end{array} \right\} \\
 - & P_\nu \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram (d)} \\ \text{Diagram (e)} \\ \text{Diagram (f)} \end{array} \right\} \\
 - & P_\nu \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram (g)} \\ \text{Diagram (h)} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

The diagrams are as follows:

- (a) Loop with momentum  $k$  and vertex  $\gamma^\nu$ .
- (b) Loop with momentum  $P+k$  and vertex  $\gamma^\nu$ .
- (c) Loop with momentum  $P+k$ , vertices  $\gamma^\nu$  and  $\gamma^\mu$ , and internal momentum  $k$ . External momenta  $P$  and  $P+k$  are shown.
- (d) Loop with momentum  $k$  and vertex  $\gamma^\nu$ .
- (e) Loop with momentum  $k$  and vertex  $\gamma^\nu$ .
- (f) Loop with momentum  $k$ , vertices  $\gamma^\nu$  and  $\gamma^\mu$ , and internal momentum  $k$ . External momenta  $P$  and  $P+k$  are shown.
- (g) Loop with momentum  $P+k$  and vertex  $\gamma^\nu$ , with a derivative  $\frac{\partial}{\partial p^\alpha}$  and conditions  $p=0, M=\mu$ .
- (h) Loop with momentum  $P+k$ , vertices  $\gamma^\nu$  and  $\gamma^\mu$ , and internal momentum  $k$ , with a derivative  $\frac{\partial}{\partial p^\alpha}$  and conditions  $p=0, M=\mu$ .

(II-25)

Nas duas últimas linhas,  $M_{\gamma_0} = \mu$ .

A soma (b)+(e)+(g) dá um integrando proporcional a

$$- \text{Tr} \left\{ \gamma^\nu \left[ \frac{1}{P+K-M} - \frac{1}{K-\mu} - p^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \frac{1}{P+K-\mu} \right)_{p=0} \right] \right\}$$

(II-26)



cuja integral sobre  $k$  é absolutamente convergente e independente de  $p$ . Lembrando que pela definição (II-6) devemos tomar no final  $\mu=M$ , concluímos que a contribuição de (II-26) é nula. As contribuições de (a) e (d) cancelam-se, e (f) dá um traço igual a zero. O termo (c) é

$$2M p_\nu \text{Tr} \left\{ \gamma^5 \frac{1}{p+k-M} \gamma^5 \gamma^\nu \frac{1}{k-M} \right\} = -4p^2 M^2 \frac{1}{(p+k)^2 - M^2} \frac{1}{k^2 - M^2} .$$

(II-27)

A integral sobre  $k$  pode desenvolver apenas divergências logarítmicas quando tomamos  $M=0$ , para  $k=0$  e  $k=-p$ , com  $p \neq 0$ , e portanto a contribuição de (II-27) vai a zero quando  $M \rightarrow 0$ . Para  $p=0$ , a integral tem uma divergência quadrática em  $k=0=M$ , mas neste caso há uma potência adicional  $p^2$  garantindo que o resultado é zero quando  $M \rightarrow 0$ .

Sobra então somente a contribuição de (h), que corresponde à anomalia na divergência da corrente axial. Fazendo  $\mu = M$  teremos:

$$-2M p_\nu p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \text{Tr} \left\{ \gamma^5 \frac{1}{p+k-M} \gamma^5 \gamma^\nu \frac{1}{k-M} \right\} = 4M^2 p^2 \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} .$$

(II-28)

Portanto, a contribuição resultante de  $\gamma_0$  quando  $M \rightarrow 0$  é

$$\bar{a} = -4M^2 p^2 (ig)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} = -i \frac{g^2}{\pi} p^2 .$$

(II-29)

Resta mostrar que este resultado é verdadeiro mesmo quando  $\gamma_0$  é um sub-gráfico de um gráfico próprio  $G$ . Para isto, clas-

sifiquemos as florestas  $U$  de  $G$  da seguinte maneira:

$$F_1 = \{U \mid \gamma \in U \Rightarrow \gamma \cap \gamma^0 = \emptyset\}$$

$$F_2 = \{U \mid \text{existe ao menos um gr\u00e1fico } \gamma \in U \text{ com } \gamma \supseteq \gamma_0\},$$

e

$$F_3 = \{U \mid \text{existe } \gamma' \in U \text{ tal que } \gamma' \cap \gamma_0 \neq \emptyset \text{ e } \gamma' \text{ n\u00e3o con-} \\ \text{t\u00eam } \gamma_0\},$$

onde  $\emptyset$  \u00e9 o conjunto vazio. N\u00f3s vamos fazer a discuss\u00e3o tomando inicialmente o limite  $M_{\gamma_0} \rightarrow 0$ , onde  $M_{\gamma_0}$  denota a massa das linhas internas de  $\gamma_0$ , mantendo as massas das outras linhas de fermion diferentes de zero. Vamos considerar as contribui\u00e7\u00f5es para o integrando subtra\u00eddo  $R_G$  devidas \u00e0s florestas de  $G$  que s\u00e3o do tipo  $F_2$ .

Para uma dada floresta  $U \in F_2$  existem duas possibilidades:

- (i) N\u00e3o h\u00e1 nenhum outro gr\u00e1fico  $\gamma \in U$ ,  $\gamma \neq \gamma^0$ , com a propriedade  $\gamma \supseteq \gamma^0$ . Para cada floresta  $U_1 \in F_2$  deste tipo, existe uma outra floresta  $U_2 \in F_1$ , tal que  $U_2$  difere de  $U_1$  somente pelo fato que  $\gamma_0 \notin U_2$ . De (I-10), temos:

$$I_G(U_1) = I_{G(U_2)} I_{\delta_1}(\rho^{\delta_1}, M^{\delta_1}) \dots I_{\delta_n}(\rho^{\delta_n}, M^{\delta_n}) I_{\delta_0}(\rho^{\delta_0}, M^{\delta_0}),$$

onde

$$U_1 = \{\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_0\}.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
 I_G(U_2) &= I_{\bar{G}(U_2)} I_{\delta_1}(P_{\delta_1}, M_{\delta_1}) \dots I_{\delta_n}(P_{\delta_n}, M_{\delta_n}) \\
 &= I_{\bar{G}(U_1)} I_{\delta_0} I_{\delta_1}(P_{\delta_1}, M_{\delta_1}) \dots I_{\delta_n}(P_{\delta_n}, M_{\delta_n}).
 \end{aligned}$$

Somando as contribuições de  $U_1$  e  $U_2$  para  $R_G$ , encontramos

$$S_G \dots (-\tau_{\delta_n} S_{\delta_n}) I_{G/\delta_0} (1 - \tau_{\delta_0} S_{\delta_0}) I_{\delta_0}.$$

Como  $G \notin U_1$  e  $\gamma_i \cap \gamma_0 = \emptyset$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , o efeito dos operadores de subtração  $\tau_{\gamma_i}$  sobre  $I_{\gamma_0}$  é o da identidade. Portanto, o cancelamento ocorre como em (II-25), de modo que somente sobrevive o termo da anomalia (II-29).

(ii)  $\gamma^0 \in U$  e existe ao menos um gráfico  $\gamma \in U$  tal que  $\gamma \supset \gamma^0$ .

Seja  $\tau \in U$  o menor gráfico com a propriedade  $\tau \supset \gamma^0$ . Há dois casos a serem considerados:

a)  $\tau$  não é um gráfico de auto-energia do fermion  $\Rightarrow d(\tau)=0$ . Para cada floresta deste tipo, existe uma outra floresta  $\bar{U} \in F_2$ , que difere de  $U$  apenas pelo fato que  $\gamma^0 \notin \bar{U}$ . Temos:

$$R_G(U) = S_G \dots (-\tau_{\delta} S_{\delta}) I_{\bar{G}(U)} (-\tau_{\delta_0} S_{\delta_0}) I_{\delta_0} \dots$$

$$R_G(\bar{U}) = S_G \dots (-\tau_{\delta} S_{\delta}) I_{\bar{G}(\bar{U})} \dots = S_G \dots (-\tau_{\delta} S_{\delta}) I_{\bar{G}(U)} I_{\delta_0} \dots$$

de modo que

$$R_G(u) + R_G(\bar{u}) = S_G \dots (-z_G S_G) I_{z(u)} (1 - z_{y_0} S_{y_0}) I_{y_0} \dots$$

Vamos estudar o efeito de  $(-\tau_T)$  sobre  $(1 - \tau_{y_0} S_{y_0}) I_{y_0}$ . Como  $\tau_T$  coloca  $M_T = 0$ , o termo (c) de (II-25) anula-se. Somando (a) + (b) + (g), obtemos

$$S_G \dots p_\nu \text{Tr} \gamma^\nu \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{p+k} + p^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \frac{1}{p+k-\mu} \right)_{p=0} \right] \dots$$

que, integrado sobre  $d^2k$ , dá um resultado independente de  $p$ . Fazendo  $p=0$  na expressão acima, vemos que este resultado é zero; os termos (d) e (e) cancelam-se, e (f) é igual a zero. Sobra então somente (h) que é o termo da anomalia.

b)  $\tau$  é uma parte de auto-energia do fermion. Devido ao fato que  $\tau_T^d(\tau)$  contém a operação  $M_T \frac{\partial}{\partial M_T}$  a combinação de florestas é um pouco mais complicada que no caso anterior. A forma geral de  $\tau$  é:

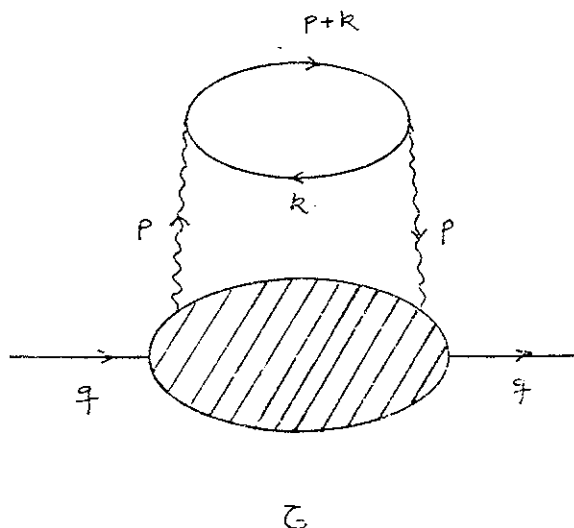


FIG. 14

onde indicamos uma atribuição de momentos adequada. Os sub-gráficos próprios de  $\tau$  de interesse são

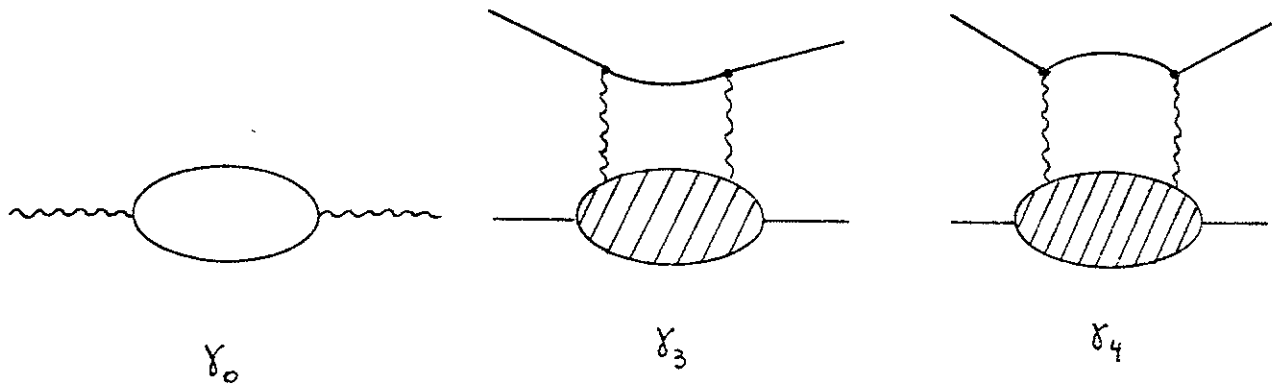


FIG. 15

As florestas de  $G$  que não foram consideradas ainda e que podem ser combinadas com  $U \in F_2$ ,

$$U = \{ \dots, \tau, \gamma^0, \dots \}$$

são a floresta pertencente a  $F_2$

$$\{ \dots, \tau, \dots \},$$

e as florestas pertencentes a  $F_3$

$$\{ \dots, \tau, \gamma_3, \dots \}, \{ \dots, \tau, \gamma_4, \dots \}, \{ \dots, \gamma_3, \dots \}, \{ \dots, \gamma_4, \dots \}$$

A parte comum a todas estas florestas não foi escrita explicitamente. A soma de suas contribuições para  $R_G$  resulta em

$$S_G \dots \left\{ (-\tau_0 S_\tau) I_{\tau/\delta_0} (1 - \tau_0 S_\tau) I_{\delta_0} + (1 - \tau_0 S_\tau) I_{\tau/\delta_3} (-\tau_3 S_\tau) I_{\delta_3} + (1 - \tau_0 S_\tau) I_{\tau/\delta_4} (-\tau_4 S_\tau) I_{\delta_4} \right\}$$

onde  $\bar{\tau}(U)$  denota o reduzido de  $\tau$  com relação a  $\gamma^0$  e a todos os subgráficos de  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  que pertencem às florestas consideradas. A parte explicitada da última expressão pode ser escrita como

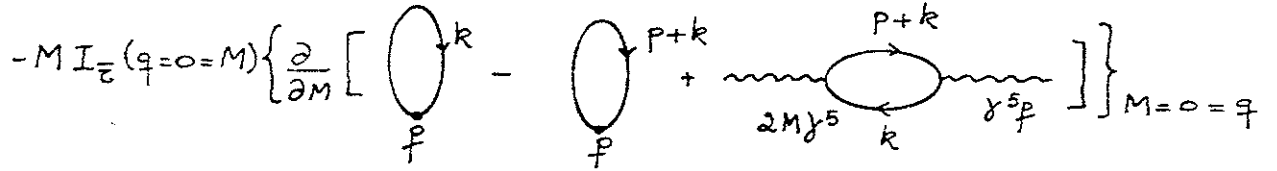
$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \left[ I_{\bar{\tau}}(1-\zeta_{\delta_0}) I_{\gamma_0} \right]_{M=0=q} + q^\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} I_{\bar{\tau}}(1-\zeta_{\delta_0}) I_{\gamma_0} \right]_{M=0=q} + M \left[ \frac{\partial}{\partial M} I_{\bar{\tau}}(1-\zeta_{\delta_0}) I_{\gamma_0} \right]_{M=0=q} \right\} \\
 & + q^\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left[ I_{\zeta/\delta_3}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_3=0} = P_{\delta_3}) + I_{\zeta/\delta_4}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_4=0} = P_{\delta_4}) \right] \right\}_{M=0=q} \\
 & + M \left\{ \frac{\partial}{\partial M} \left[ I_{\zeta/\delta_3}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_3=0} = P_{\delta_3}) + I_{\zeta/\delta_4}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_4=0} = P_{\delta_4}) \right] \right\}_{M=0=q} \\
 & - I_{\zeta/\delta_3}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_3=0} = P_{\delta_3}) - I_{\zeta/\delta_4}(q, M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_4=0} = P_{\delta_4}) + I_{\zeta/\delta_3}(q=0=M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_3=0} = P_{\delta_3}) \\
 & + I_{\zeta/\delta_4}(q=0=M) I_{\bar{\tau}}(M_{\delta_4=0} = P_{\delta_4}).
 \end{aligned}$$

Pela atribuição de momentos na Fig. 14, vemos que as contribuições dos quatro últimos termos cancelam-se aos pares no limite  $M_{\gamma^0}=0$ , e que  $(1-\tau_{\gamma^0})I_{\gamma^0}$ ,  $I_{\tau/\gamma_3}$  e  $I_{\tau/\gamma_4}$  são independentes do momento externo de  $\tau$ . Ainda,

$$M \frac{\partial}{\partial M} (1-\zeta_{\delta_0}) I_{\gamma_0}$$

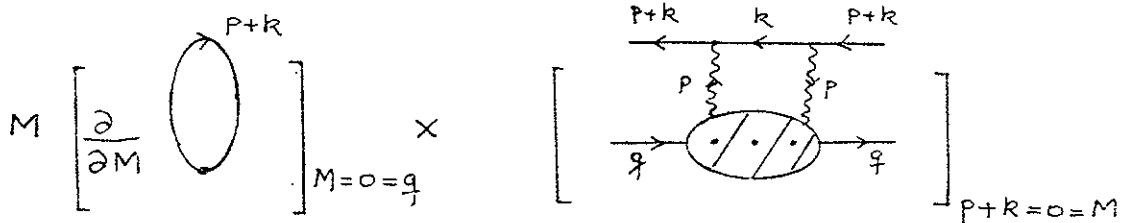
só é diferente de zero para a primeira linha do lado direito da eq. (II-25). Levando em conta estas observações ficamos com

$$- \left[ I_{\bar{c}}(q=0=M) + q^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial q^\alpha} I_{\bar{c}} \right)_{M=0=q} + M \left( \frac{\partial}{\partial M} I_{\bar{c}} \right)_{M=0=q} \right] (1 - \tau_{\delta_0}) I_{\delta_0}$$

$$- M I_{\bar{c}}(q=0=M) \left\{ \frac{\partial}{\partial M} \left[ \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right] \right\}_{M=0=q}$$


$$+ M \left\{ \frac{\partial}{\partial M} \left[ I_{\bar{c}/\delta_3} I_{\delta_3} (M_{\delta_3}=0=p_{\delta_3}) + I_{\bar{c}/\delta_4} I_{\delta_4} (M_{\delta_4}=0=p_{\delta_4}) \right] \right\}_{M=0=q}$$

Pelas razões apresentadas após a eq. (II-27), a contribuição do último gráfico na segunda linha é nula para  $M=0$ . Consideremos o primeiro termo da última linha, que pode ser representado como

$$M \left[ \frac{\partial}{\partial M} \text{Diagram 1} \right]_{M=0=q} \times \left[ \text{Diagram 2} \right]_{p+k=0=M}$$


onde os pontos representam as contrações dos sub-gráficos de  $\gamma_3$ .

Escrevendo

$$\gamma^5 \not{p} = - (\not{p} + \not{k}) \gamma^5 - \gamma^5 \not{k} ,$$

obtemos

$$-M \left[ \frac{\partial}{\partial M} \text{diagram} \right] \times \left[ \text{diagram} \right]_{M=0}$$

que se cancela com um termo idêntico da segunda linha. Os dois termos das duas últimas linhas cancelam-se de maneira análoga, agora aplicando a um dos vértices do gráfico reduzido  $I_{\gamma_4}^{-1}$  ( $M_{\gamma_4}=0=p_{\gamma_4}$ ), que tem  $k$  com um dos momentos externos, a identidade

$$\gamma^5 \not{p} = \gamma^5 (\not{p} + \not{k}) + \not{k} \gamma^5 .$$

Finalmente, integrando a contribuição resultante sobre o momento interno de  $\gamma^0$ , obtemos para esta combinação de florestas

$$S_G \dots (-1) \left\{ I_{\bar{c}}(q=0=M) + q^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial q^\alpha} I_{\bar{c}} \right)_{M=0=q} + M \left( \frac{\partial}{\partial M} I_{\bar{c}} \right)_{M=0=q} \right\} \bar{a} \dots$$

onde  $\bar{a}$  é dado por (II-29). Este é o resultado desejado.

Tendo mostrado que, para  $M_{\gamma_0} \rightarrow 0$ , a contribuição de  $\gamma_0$  para o propagador do boson é dada por (II-29), podemos somar as contribuições deste tipo em todas as ordens de  $g$ . Isto equivale a substituir  $\Delta_F(x, m^2)$  por

$$\frac{1}{1-g^2/\pi} \Delta_F(x, m'^2) , \quad (\text{II-30})$$

onde

$$m'^2 = \frac{m^2}{1-g^2/\pi} , \quad (\text{II-31})$$



que é o resultado (II-22). Feito isto, obtemos um novo conjunto de gráficos que não contêm mais  $\gamma_0$ , e que são feitos finitos pela aplicação da fórmula da floresta utilizando operadores de Taylor  $t_{p,M}^d$  nos momentos externos e nas massas das linhas de fermion, em torno de zero.

Como consequência da eliminação do gráfico  $\gamma_0$ , podemos mostrar que as novas funções de Green satisfazem

$$M \frac{\partial}{\partial M} G^{(2N,L)} = M \Delta_0 G^{(2N,L)}, \quad (\text{II-32})$$

onde  $\Delta_0$  representa a inserção "soft" dada formalmente por

$$\Delta_0 = i \int N_1[\bar{\Psi}\Psi](x) d^2x \quad (\text{II-33})$$

Para isso, observemos que se  $f(p,M,k)$  é uma função analítica em  $p=0=M$ ,

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M}\right) t_{p,M}^d f(p,M,k) = t_{p,M}^d \left(M \frac{\partial}{\partial M}\right) f(p,M,k).$$

Seja agora  $G$  um gráfico da função de Green  $G^{(2N,L)}$  numa ordem arbitrária.  $M \frac{\partial}{\partial M} G^{(2N,L)}$  receberá contribuições da forma

$$M \frac{\partial}{\partial M} \sum_{U \in \mathcal{S}_G} \prod_{\gamma \in U} (-t_{\gamma}^{d(\gamma)} S_{\gamma}) I_G(u) = \sum_{U \in \mathcal{S}_G} \prod_{\gamma \in U} (-t_{\gamma}^{d(\gamma)} S_{\gamma}) \left(M \frac{\partial}{\partial M} I_G(u)\right) \quad (\text{II-34})$$

onde

$$I_G(u) = \prod_{\gamma \in U \cup \{\emptyset\}} I_{\gamma(u)}(p^{\gamma}, M^{\gamma}).$$

Quando  $M \frac{\partial}{\partial M}$  atua numa linha de fermion  $L$ , o seu efeito é essencialmente quadrar o propagador de  $L$ , e portanto a aplicação deste operador equivale a inserir na linha um vértice bi-linear nos fermions. Para uma dada floresta  $U$ , seja  $\lambda$  o menor gráfico de  $U$  que contém a linha  $L$  à qual  $M \frac{\partial}{\partial M}$  está aplicado. Como

$$t_{p^\lambda, M^\lambda}^{d(\lambda)} (M^\lambda f(p^\lambda, M^\lambda)) = M^\lambda t_{p^\lambda, M^\lambda}^{d(\lambda)-1} f(p^\lambda, M^\lambda),$$

a massa  $M$  em (II-34) pode ser fatorada, resultando

$$M \sum_{U \in \mathcal{G}_G} \prod_{\gamma \in U} (-t_\gamma^{d'(\gamma)} S_\gamma) \left( \frac{\partial}{\partial M} I_{G(U)} \right) \quad (M^G \equiv M)$$

onde

$$d'(\gamma) = \begin{cases} d(\gamma), & \text{se } \gamma \text{ não contém } \lambda, \\ d(\gamma)-1, & \text{se } \gamma \supseteq \lambda. \end{cases}$$

Concluimos então que  $M \frac{\partial}{\partial M}$  equivale à inserção de um vértice bi-linear de dimensão 1, que é o conteúdo das equações (II-32) e (II-33).

No limite  $M \rightarrow 0$ ,  $\Delta_0 G^{(2N, L)}$  pode desenvolver uma divergência logarítmica no infra-vermelho (o momento externo entrando no vértice  $\Delta_0$  é nulo), mas  $G^{(2N, L)}$  permanece finita. Vértices super-renormalizáveis como  $\Delta_0$  também ocorrem nos termos de subtração de  $G^{(2N, L)}$  pela redução de  $G^{(2, 0)}$  a um ponto. Neste caso, porém, como  $G^{(2, 0)}$  é linearmente divergente, o vértice reduzido contém um fator de momento (Fig.16) que melhora a convergência no infra-ver-

melho da integral sobre o momento interno destas linhas (ver Apêndice A, exemplo 2).

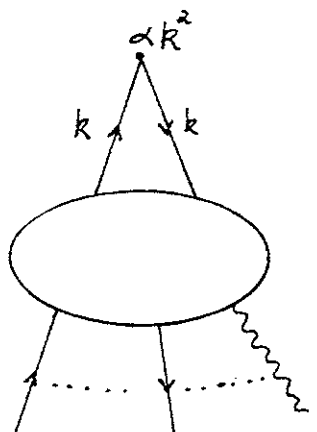


FIG. 16

Deste modo, parece claro que no limite em que a massa do fermion é nula as funções de Green da teoria considerada tendem para as funções de Green da teoria com massa do fermion nula, isto é, neste limite,  $M$  pode ser colocada igual a zero diretamente nos integrandos das amplitudes de Feynmann contribuindo para a função de Green. Se a integral de Feynmann subtraída correspondente ao gráfico  $G$  é dada por

$$J_G(p, M, m', \epsilon) = \int d^4k R_G(p, M, m', \epsilon) ,$$

supomos válida a troca de limites

$$\lim_{M \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_G(p, M, m', \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{J}_G(p, m', \epsilon) \quad (\text{II-35})$$

onde

$$\bar{J}_G(p, m', \epsilon) = \int d^4k \bar{R}(p, m', \epsilon) , \quad (\text{II-36})$$

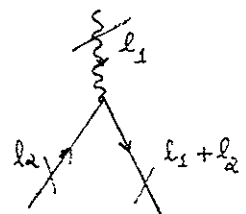
e  $\bar{R}(p, m', \epsilon)$  denota o integrando subtraído na teoria com  $M=0$ . Para um gráfico próprio  $\lambda$ ,

$$\bar{R}_\lambda(p, M, \epsilon) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_\lambda} \prod_{\gamma \in U} (-t_\gamma^{d(\gamma)}) I_\lambda(p, 0, m', \epsilon) \quad (\text{II-37})$$

onde  $t_\gamma^{d(\gamma)}$  é agora um operador de Taylor apenas nos momentos externos de  $\gamma$  em torno de  $p^\gamma=0$ , e  $I_\lambda(p, m', \epsilon)$  é construído de acordo com as seguintes regras de Feynmann:

linha de fermion  $\xrightarrow{l}$   $\iff i \frac{l}{l^2 + i\epsilon l^2}$

linha de boson:  $\xrightarrow{l}$   $\iff \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon(l^2 + m^2)} \left( \frac{1}{1 - g^2/\pi} \right)$

Vértice:   $\iff g \gamma^5 l_1$

O gráfico  $\gamma^0$  é excluído, pois sua contribuição já foi somada em todas as ordens, tendo o efeito de modificar a massa e o propagador do boson (que, por simplicidade, continuaremos a designar como  $\Delta_F(l)$ ). A prova da convergência no infra-vermelho deste último esquema é dada no Apêndice (II-B).

II-3-2) AS FUNÇÕES DE GREEN PARA  $M=0$ .

Vamos provar agora que, ordem por ordem em  $g$ , as funções de Green da teoria com massa zero são as mesmas que as do modelo de Rothe e Stamatescu.

a) Função de dois pontos

A função de dois pontos do fermion satisfaz a equação de movimento

$$i \not{\partial} G(x, y) = i \not{\partial} \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = -g \langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \phi \Psi](x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle + i \delta(x - y) \quad (\text{II-38})$$

Os gráficos contribuindo para  $\langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \phi \Psi](x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle$  têm, no espaço de momentum, a estrutura mostrada na figura abaixo

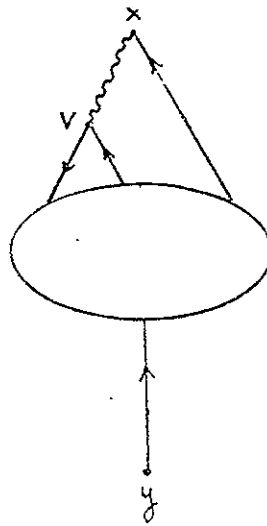


FIG. 17

Aplicando a identidade de Ward da corrente vetor axial ao vértice  $V$ , na forma indicada após a eq. (II-24), mas agora com  $M=0$ , obtemos o gráfico:

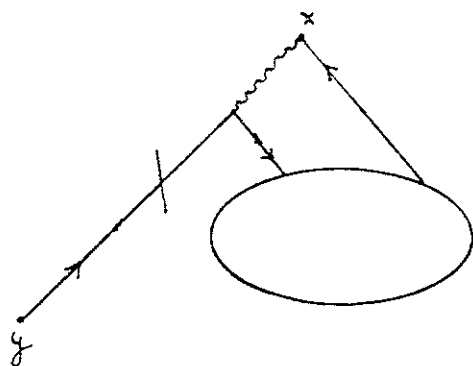


FIG. 18

e portanto usando invariância pelas transformações  $\gamma^5$  encontramos:

$$\langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \varphi \Psi](x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = -ig N [\partial \Delta_F(x-y) \langle 0 | T \varphi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle], \quad (\text{II-39})$$

onde  $\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$ ,

e o símbolo N significa que a expressão entre os colchetes deve ser subtraída de acordo com o último esquema descrito na seção anterior, após a eq. (II-36). Substituindo (II-39) em (II-38), teremos a equação

$$\partial G(x,y) = g^2 N [\partial \Delta_F(x-y) \langle 0 | T \varphi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle] + \delta(x-y), \quad (\text{II-40})$$

que pode ser resolvida iterativamente. A solução desta equação em ordem  $g^{2n}$  é dada por

$$G^{(2n)}(x,y) = g^{2n} \frac{\Delta_F^n(x-y)}{n!} S(x-y), \quad (\text{II-41})$$

onde  $S(x-y)$  é o propagador de um espinor livre sem massa, satisfazendo

$$\partial S(x-y) = \delta(x-y) \cdot$$

Prova:

i) Em ordem zero de  $g$ , a eq. (II-40) é

$$\partial G^{(0)}(x,y) = \delta(x-y) \Rightarrow G^{(0)}(x,y) = S(x-y) \cdot$$

ii) Suponhamos que a contribuição de ordem  $g^{2n}$  seja dada por (II-41). Então, empregando (II-40), a contribuição de ordem  $g^{2n+2}$  satisfará:

$$\begin{aligned} \partial G^{(2n+2)}(x,y) &= g^2 N[\partial \Delta_F(x-y) G^{(2n)}(x,y)] = \\ &= g^{2n+2} N\left[\frac{\partial \Delta_F(x-y)}{n!} \Delta_F^n(x-y) S(x-y)\right] = g^{2n+2} N\left[\left(\frac{\partial \Delta_F^{n+1}(x-y)}{(n+1)!}\right) S(x-y)\right] \\ &= g^{2n+2} N\left[\partial\left(\frac{\Delta_F^{n+1}(x-y)}{(n+1)!} S(x-y)\right)\right] - g^{2n+2} N\left[\frac{\Delta_F^{n+1}(0)}{(n+1)!} \delta(x-y)\right]. \end{aligned}$$

O último termo do lado direito é nulo, pois os fatores  $\Delta_F^n(0)$ , que são representados no espaço de momento como

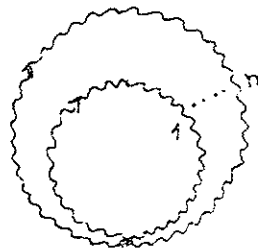


FIG. 19

dão zero devido ao nosso esquema de subtração (isto não seria verdadeiro se fizéssemos subtrações na massa do boson). Ainda, como  $N[\gamma(\Delta_F^{n+1}/(n+1)!)S(x-y)]$  pode ter no máximo uma divergência logarítmica,  $N[\gamma F(x-y)] = \gamma F(x-y)$ , por causa da propriedade (I-17) do operador Taylor. Segue-se então que

$$\partial G^{(2n+2)}(x,y) = g^{2n+2} \partial \left[ \frac{\Delta_F^{n+1}(x-y)}{(n+1)!} S(x-y) \right],$$

e assim

$$G^{(2n+2)}(x,y) = g^{2n+2} \left[ \frac{\Delta_F^{n+1}(x-y)}{(n+1)!} S(x-y) \right], \text{ c.q.d.} \quad (\text{II-42})$$

Portanto,

$$G(x-y) = \exp\{g^2 \Delta_F(x-y)\} S(x-y) = \exp\{-g^2 \delta_x^5 \delta_y^5 \Delta_F(x-y)\} S(x-y), \quad (\text{II-43})$$

que é a função de Green de dois pontos da ref. (7).

#### b) Função de quatro pontos

Neste caso, temos a seguinte equação de movimento

$$i \partial_x G(x_1, x_2; y_1, y_2) = -ig \langle 0 | T N_{3/2} [\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \phi \psi](x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_1) \bar{\psi}(y_2) | 0 \rangle \\ - i \delta(x_1 - y_1) G(x_2; y_2) + \delta(x_1 - y_2) G(x_2; y_1) \quad (\text{II-44})$$

O termo de interação com o produto normal  $N_{3/2}[\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \phi \psi](x)$  é agora da forma



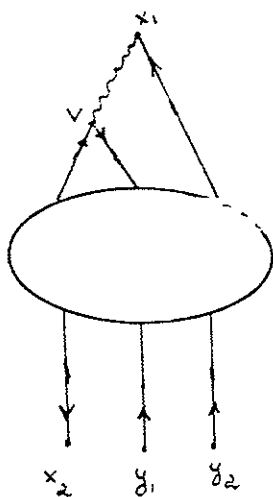


FIG. 20

Aplicando a identidade de Ward no espaço de momento ao vértice  $V$  teremos agora as contribuições

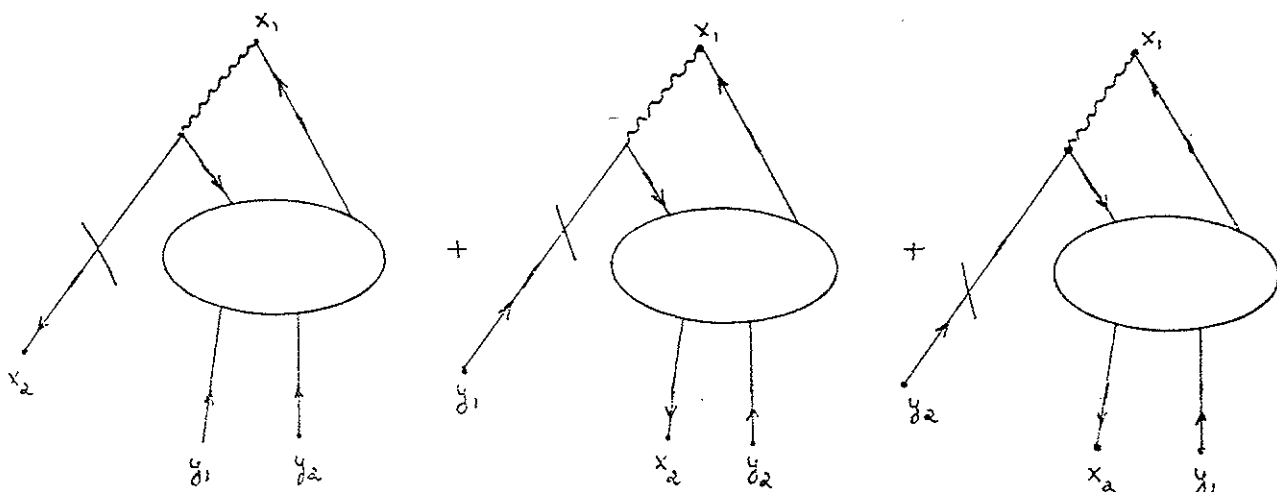


FIG. 21

de modo que

$$\langle 0 | T N_{3/2} [\delta^5 \delta^\mu \partial_\mu \varphi \Psi](x_1) \Psi(x_2) \bar{\Psi}(y_1) \bar{\Psi}(y_2) | 0 \rangle =$$

$$= i g N \left[ (\partial \Delta_F(x_1 - x_2)) \delta_{x_1}^5 \delta_{x_2}^5 + \partial \Delta_F(x_1 - y_1) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_1}^5 + \partial \Delta_F(x_1 - y_2) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_2}^5 \right] G(x_1, x_2; y_1, y_2)$$

Levando (II-45) em (II-44) obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \\ &= g^2 N \left[ (\partial \Delta_F(x_1 - x_2) \delta_{x_1}^5 \delta_{x_2}^5 + \partial \Delta_F(x_1 - y_1) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_1}^5 + \partial \Delta_F(x_1 - y_2) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_2}^5) G(x_1, x_2; y_1, y_2) \right. \\ &\quad \left. - \delta(x_1 - y_1) G(x_2; y_2) + \delta(x_1 - y_2) G(x_2; y_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-46})$$

A solução desta equação pode ser escrita imediatamente, uma vez que já conhecemos as funções de dois pontos. Ela é a função de quatro pontos do modelo de Rothe-Stamatescu<sup>(7)</sup>:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \exp \left\{ g^2 \left[ \Delta_F(x_1 - x_2) \delta_{x_1}^5 \delta_{x_2}^5 + \Delta_F(x_1 - y_1) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_1}^5 + \Delta_F(x_1 - y_2) \delta_{x_1}^5 \delta_{y_2}^5 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta_F(x_2 - y_1) \delta_{x_2}^5 \delta_{y_1}^5 + \Delta_F(x_2 - y_2) \delta_{x_2}^5 \delta_{y_2}^5 + \Delta_F(y_1 - y_2) \delta_{y_1}^5 \delta_{y_2}^5 \right] \right\} G^{(0)}(x_1, x_2; y_1, y_2), \end{aligned} \quad (\text{II-47})$$

onde  $G^{(0)}(x_1, x_2; y_1, y_2)$  é a função de quatro pontos do campo livre, satisfazendo

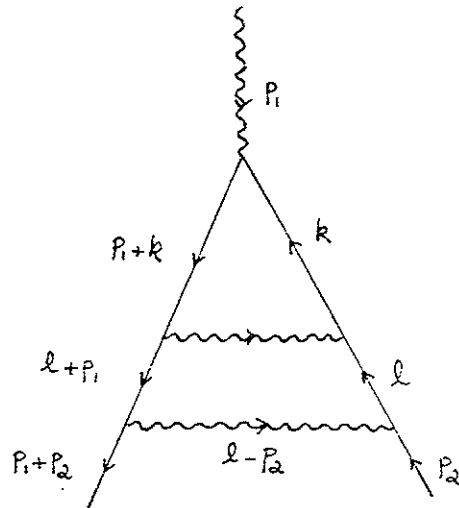
$$\partial_{x_1} G^{(0)}(x_2, x_1; y_2, y_1) = -\delta(x_1 - y_1) S(x_2; y_2) + \delta(x_1 - y_2) S(x_2; y_1) \dots \quad (\text{II-48})$$

É evidente que o mesmo procedimento pode ser aplicado para as funções de Green envolvendo um número maior de campos, de modo que a solução perturbativa da teoria, em qualquer ordem em  $g$ , concorda com a solução exata.

## APÊNDICE II-A

## EXEMPLOS DE CANCELAMENTO DE DIVERGÊNCIAS NO INFRA-VERMELHO

Exemplo 1: Consideremos o gráfico  $G$



$G$

FIG. 22

que tem os sub-gráficos próprios divergentes.

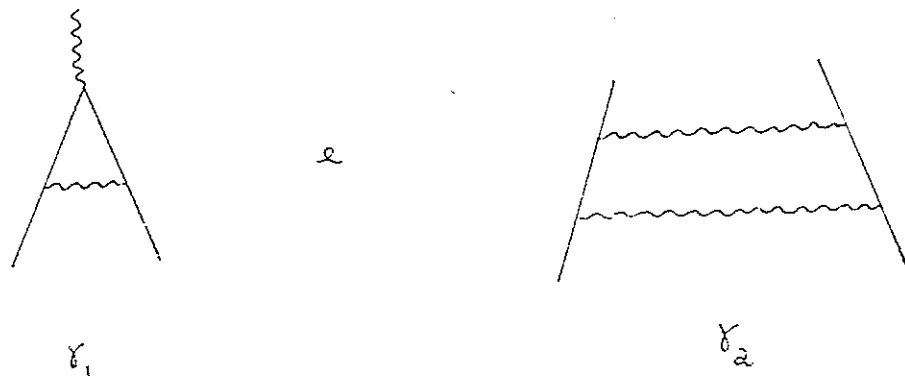


FIG. 23

A floresta {G} dá uma contribuição

$$(-t_{P_G, M_G}^{(0)} S_G) I_G = \gamma^5 \not{p}_1 \frac{1}{\not{k}} \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{(k-\ell)^2 - m^2} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \quad (\text{A-1})$$

que diverge logaritmicamente na integração sobre k. No entanto, a contribuição da floresta {G, \gamma^2} é

$$(-t_{P_G, M_G}^{(0)} S_G) I_{G/\gamma^2} (-t_{P_{\gamma^2}, M_{\gamma^2}}^{(0)} S_{\gamma^2}) I_{\gamma^2} = \quad (\text{A-2})$$

$$- \gamma^5 \not{p}_1 \frac{1}{\not{k}} \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{(\ell^2 - m^2)^2}$$

que também tem uma divergência logaritmica. Entretanto, combinando {G} e {G, \gamma^2} obtemos o integrando

$$\gamma^5 \not{p}_1 \frac{1}{\not{k}} \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \gamma^5 (\not{k} - \not{\ell}) \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \frac{2k \cdot \ell - k^2}{(\ell^2 - m^2) [(k-\ell)^2 - m^2]} \quad (\text{A-3})$$

que, integrado sobre k, não tem divergência no infra-vermelho.

Exemplo 2: Seja G o gráfico

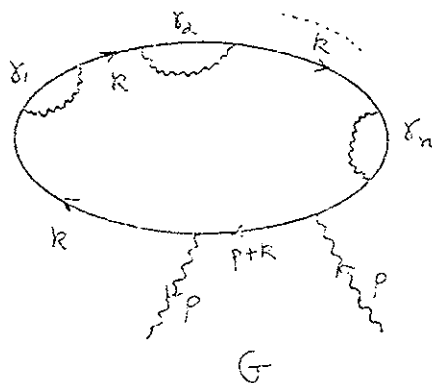


FIG. 24

que tem  $d(G)=0$ . O termo de subtração dá uma integral sobre  $k$ ,

$$\int d^2k \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k}\right)^n \left( \prod_{i=1}^n I_{\gamma_i} \right)_{p=0=M} \quad (A-4)$$

que diverge no mínimo logaritmicamente no infra-vermelho. O integrando em (A-4) é devido à floresta  $\{G\}$ ; combinando este integrando com as contribuições de todas as demais florestas  $U$ , tais que,  $G \in U$ , em lugar da integral (A-4) ficamos com

$$\int d^2k \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k}\right)^n \prod_{i=1}^n (R(\gamma_i))_{p=0=M} \quad , \quad (A-5)$$

onde

$$\begin{aligned} (R(\gamma_i))_{p=0=M} &= \left[ I_{\gamma_i}(k, k_i, M) - I_{\gamma_i}(0, k_i, 0) - k^\mu \left( \frac{\partial I_{\gamma_i}}{\partial k^\mu} \right)_{k=0=M} \right. \\ &\quad \left. - M \left( \frac{\partial I_{\gamma_i}}{\partial M} \right)_{k=0=M} \right]_{p=0=M} \\ &= I_{\gamma_i}(k, k_i, 0) - I_{\gamma_i}(0, k_i, 0) - k^\mu \left( \frac{\partial I_{\gamma_i}}{\partial k^\mu} \right)_{k=0=M} \end{aligned}$$

e, como decorrência das propriedades dos operadores de Taylor, a última expressão comporta-se como  $k^2$  quando  $k \rightarrow 0$ , de modo que (A-5) é convergente. Por outro lado, as integrações sobre os momentos internos  $k_i$  dos sub-gráficos  $\gamma_i$  também são convergentes, em virtude do acoplamento derivativo.

## APÊNDICE II-B - PROVA DE CONVERGÊNCIA

## B-1) INTRODUÇÃO

Neste Apêndice vamos mostrar que os gráficos da teoria com massa do fermion nula, subtraídos com operadores de Taylor nos momentos externos, são convergentes no infra-vermelho. A prova da convergência no ultra-violeta não será dada por ser idêntica àquela do método BPHZ usual<sup>(22)</sup>.

Vamos colocar inicialmente algumas definições a serem utilizadas no decorrer da prova.

Seja  $L(\Gamma)$  o espaço das formas lineares nos momentos internos  $k_i$  e externos  $p_i$  de um gráfico conexo  $\Gamma$ :

$$l = \sum_i \alpha_i k_i + \sum_j \beta_j p_j \quad (\text{B-1})$$

e seja  $S$  um sub-espaço linear de  $L(\Gamma)$ . Dado um sub-gráfico  $\gamma \subseteq \Gamma$  dizemos que  $\bar{\gamma}$  é paralelo a  $S(\bar{\gamma}/S)$  se, para todas as linhas  $L \in \bar{\gamma}$ ,  $k_L^{\gamma} \in S$ . Se nenhuma linha  $L \in \bar{\gamma}$  é tal que  $k_L^{\gamma} \in S$ , dizemos que  $\bar{\gamma}$  é oblíquo a  $S(\bar{\gamma} \not\parallel S)$ .

Uma floresta  $C$  de  $\Gamma$  é dita completa com relação a  $S$  se

$$|\Gamma| \text{ é } |\text{IPI}| \implies \Gamma \in C,$$

e se, para todo  $\gamma \in C$ , ou  $\bar{\gamma}(C) \parallel S$  ou  $\bar{\gamma}(C) \not\parallel S$ .

Seja agora  $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b$  uma base arbitrária de  $L(\Gamma)$ , com  $\frac{\partial(u,v)}{\partial k} \neq 0$ , e com o sub-espaço  $S$  sendo gerado por  $u_1, \dots, u_a$ . O integrando subtraído correspondente a  $\Gamma$  pode ser escrito como<sup>(17)</sup>

$$R_{\Gamma \in C} = \sum_{C \in C_S(\Gamma)} R_{\Gamma \in C}(c), \quad (\text{B-2})$$

$$R_{\Gamma \in} (c) = (1 - t_{\Gamma}) Y_{\Gamma} (c) , \quad (B-3)$$

onde  $C_S(\Gamma) = \{U \in F_{\Gamma} | U \text{ é completa com relação a } S\}$ ,

com  $Y_{\gamma}(C)$ ,  $\gamma \subseteq \Gamma$ , definido recursivamente por

$$Y_{\delta}(c) = I_{\bar{\delta}(c)} S_{\delta} \prod_{\alpha=1}^n f_{\delta_{\alpha}} Y_{\delta_{\alpha}}(c) , \quad (B-4)$$

$$\bar{\delta}(c) = \delta / \delta_1 \dots \delta_n , \quad (B-5)$$

$\gamma_{\alpha}$  ( $\alpha=1, \dots, n$ ) são elementos maximais de  $C$  contidos em  $\gamma$ , e

$$f_{\delta_{\alpha}} = \begin{cases} 1 - t_{\delta_{\alpha}}^{d(\delta_{\alpha})} & \text{se } \bar{\delta}_{\alpha}(c) \not\gamma S, \bar{\delta}(c) // S \\ -t_{\delta_{\alpha}}^{d(\delta_{\alpha})} & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (B-6)$$

O operador de subtração  $t_{\gamma}^{d(\gamma)}$  somente é não zero quando  $\gamma$  for IPI e  $d(\gamma) \geq 0$ .

Uma outra definição que utilizaremos é a do grau inferior de uma função  $F(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \deg_{\partial_x \partial_y} F(x, y) = k , & \quad \text{se para quase todo } y, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-k} F(\lambda x, y) \neq 0, \infty . & \quad (B-7) \end{aligned}$$

A convergência no infra-vermelho será mostrada provando o seguinte teorema:

TEOREMA: Seja  $F$  um gráfico conexo com integrando subtraído  $R_{\Gamma}$  da

do por (B-2)-(B-6); então, dado um sub-espço arbitrário  $S$  de  $L(\Gamma)$ , temos

$$\text{deg}_{\partial u \partial v} R_p(p, k, m) + 2a > 0, \quad (\text{B-8})$$

para momentos externos  $p$  não excepcionais e  $m \neq 0$ .

(B-8), combinado com o teorema da ref. (23), garante a convergência no infra-vermelho.

Para a demonstração do teorema são necessárias algumas relações que passaremos a demonstrar.

Escrevendo  $Y_\gamma$  como

$$Y_\gamma(c) = D^{-1}(p^\delta, m, u, v) \sum_{k=1}^n \frac{f_k(p^\delta)}{f_k} g_k(u, v) \quad (\text{B-9})$$

onde  $f_k$  são monômios independentes de grau  $\nu(k)$  em  $p^\gamma$ ,  $g_k$  são polinômios em  $u$  e  $v$ , e  $D$  é um produto de fatores da forma

$$F_{L_i} = l_{L_i}^{\delta^2} - m_{L_i}^2 + c \in (l_{L_i}^{\delta^2} + m_{L_i}^2), \quad (\text{B-10})$$

teremos:

$$\text{deg}_{\partial u \partial p^\delta} Y_\gamma = \min_k \{ \nu(k) + \text{deg}_{\partial u} g_k \} + \text{deg}_{\partial u \partial p^\delta} D^{-1} \quad (\text{B-11})$$

$$\text{deg}_{\partial u} Y_\gamma = \min_k \{ \text{deg}_{\partial u} g_k \} + \text{deg}_{\partial u} D^{-1} \quad (\text{B-12})$$

$$\text{deg}_{\partial u \partial p^\delta} t_\gamma^{d(\gamma)} \geq \min_{\nu(k) \leq d(\gamma)} \left\{ \nu(k) + \text{deg}_{\partial u} g_k + \text{deg}_{\partial u \partial p^\delta} t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)} D^{-1} \right\} \quad (\text{B-13})$$

$$\text{deg}_{\partial u} t_\gamma^{d(\gamma)} = \min_{\nu(k) \leq d(\gamma)} \left\{ \text{deg}_{\partial u} g_k + \text{deg}_{\partial u} t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)} D^{-1} \right\} \quad (\text{B-14})$$



$$\underline{\deg}_{u p \sigma} (1 - t_\gamma^{d(\gamma)}) Y_\gamma \geq \min_R \left\{ \nu(k) + \underline{\deg}_u g_R + \underline{\deg}_{u p \sigma} (1 - t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)}) D^{-1} \right\} \quad (\text{B-15})$$

$$\underline{\deg}_{u p \sigma} t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)} D^{-1} \geq \underline{\deg}_{u p \sigma} D^{-1} \quad (\text{B-16})$$

(B-11) e (B-12) decorrem imediatamente da definição do grau inferior, para provar (B-13), (B-14) e (B-15) basta usar a propriedade (I-17) dos operadores de Taylor, e (B-16) é consequência da homogeneidade de  $D^{-1}$ .

$$\underline{\deg}_u t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)} D^{-1} \geq \begin{cases} \underline{\deg}_{u p \sigma} D^{-1} - d(\gamma) + \nu(k), & \bar{\gamma} // S & (\text{B-17a}) \\ \underline{\deg}_u D^{-1}, & \bar{\gamma} \times S & (\text{B-17b}) \end{cases}$$

$$\underline{\deg}_{u p \sigma} (1 - t_\gamma^{d(\gamma) - \nu(k)}) D^{-1} \geq d(\gamma) + 1 - \nu(k) + \underline{\deg}_u D^{-1}, \quad \bar{\gamma} \times S \quad (\text{B-18})$$

Vamos provar (B-17) e (B-18).

Prova de (B-17): se  $\bar{\gamma} // S$  decompomos  $D$  como um produto,

$$D = D_1^{-1} D_2^{-1} D_\gamma^{-1}$$

onde  $D_1^{-1}$  é devido aos sub-gráficos  $\lambda \subset \gamma$  com  $\bar{\lambda} \times S$ , e portanto é independente de  $u$ ;  $D_2^{-1}$  é devido aos sub-gráficos  $\lambda \subset \gamma$  com  $\bar{\lambda} // S$ , e então não depende de  $p$ , pois a tais gráficos está associado  $t_\lambda Y_\lambda$ , que coloca  $p=0$  nos propagadores. Teremos então

$$t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu} D^{-1} = D_2^{-1} \sum_{a=0}^d \frac{1}{a!} p^a (\partial^a D_1^{-1}) t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu-a} D_{\bar{\gamma}}^{-1} \quad , \quad \partial^a \equiv \left( \frac{\partial^a}{\partial (p)^a} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_u t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu} D^{-1} &\geq \underline{\deg}_u D_2^{-1} + \min_a \left\{ \underline{\deg}_u t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu-a} D_{\bar{\gamma}}^{-1} + \underline{\deg}_u \partial^a D_1^{-1} \right\} \\ &= \underline{\deg}_u D_2^{-1} + \min_a \underline{\deg}_u t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu-a} D_{\bar{\gamma}}^{-1} \\ &\geq \underline{\deg}_u D_2^{-1} + \underline{\deg}_{u p \bar{\gamma}} D_{\bar{\gamma}}^{-1} - d - \nu + \min\{a\} \\ &= \underline{\deg}_u D_2^{-1} + \underline{\deg}_{u p \bar{\gamma}} D_{\bar{\gamma}}^{-1} - d - \nu \geq \underline{\deg}_{u p \bar{\gamma}} D^{-1} - d + \nu \end{aligned}$$

o que prova (B-17a).

Se  $\bar{\gamma} \times S$ , todos os sub-gráficos  $\lambda \subset \bar{\gamma}$  comparecem em (B-4) com  $t_{\lambda}^{d(\lambda)} Y_{\lambda}$ , e portanto suas contribuições para  $D$  independem de  $p$ ; escrevemos agora  $D^{-1}$  como

$$D^{-1} = D_3^{-1} D_{\bar{\gamma}}^{-1}$$

onde  $D_3^{-1}$  provém dos sub-gráficos; como  $\bar{\gamma} \times S$ , o grau inferior em  $u$  de sua contribuição  $D_{\bar{\gamma}}^{-1}$  é zero. Deste modo,

$$\underline{\deg}_u t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu} D^{-1} = \underline{\deg}_u D_3^{-1} + \underline{\deg}_u t_{\bar{\gamma}}^{d-\nu} D_{\bar{\gamma}}^{-1} \geq \underline{\deg}_u D_3^{-1} = \underline{\deg}_u D^{-1}$$

e (B-17b) fica provada. Para verificar (B-18) basta lembrar que o resto da série de Taylor de ordem  $d(\bar{\gamma})-\nu(k)$  tem grau inferior em  $p^{\bar{\gamma}}$  maior ou igual a  $d(\bar{\gamma})-\nu(k)+1$  quando  $p \rightarrow 0$ .

Para provar o teorema, são importantes os seguintes lemas:

LEMA 1<sup>(20)</sup>:

a) Para  $t_{\gamma}^{d(\gamma)} Y_{\gamma} \neq 0$ ,

$$\underline{\deg}_u t_{\gamma}^{d(\gamma)} Y_{\gamma} \geq \underline{\deg}_{u\rho} Y_{\gamma} - d(\gamma), \quad \bar{\gamma} // S \quad (\text{B-19})$$

$$\underline{\deg}_u t_{\gamma}^{d(\gamma)} Y_{\gamma} \geq \underline{\deg}_u Y_{\gamma}, \quad \bar{\gamma} \times S \quad (\text{B-20})$$

$$\underline{\deg}_{u\rho} t_{\gamma}^{d(\gamma)} Y_{\gamma} \geq \underline{\deg}_{u\rho} Y_{\gamma} \quad (\text{B-21})$$

b)

$$\underline{\deg}_{u\rho} (1 - t_{\gamma}^{d(\gamma)}) Y_{\gamma} \geq \underline{\deg}_u Y_{\gamma} + \max\{d(\gamma) + 1, 0\}, \quad \bar{\gamma} \times S \quad (\text{B-22})$$

(B-19) é provada usando (B-17a) em (B-14),

(B-20) é provada usando (B-17b) em (B-14),

(B-21) é provada usando (B-16) em (B-13),

(B-22) é provada usando (B-18) em (B-15).

LEMA 2<sup>(20)</sup>:

$$\underline{\deg}_{u\rho} Y_{\gamma} \geq d(\gamma) + 1 - M(\gamma), \quad \bar{\gamma} // S \quad \text{e} \quad t_{\gamma}^{d(\gamma)} Y_{\gamma} \neq 0 \quad (\text{B-23})$$

$$\underline{\deg}_u Y_{\gamma} >^* -M(\gamma), \quad \bar{\gamma} \times S \quad (\text{B-24})$$

onde

$$M(\gamma) = 2 \times \sum_{\substack{\lambda \in C \\ \lambda \leq \gamma \\ \bar{\lambda} // S}} (\text{No de circuitos independentes de } \bar{\lambda}(C))$$

e

$$>^* \text{ significa } \begin{cases} >, & \text{se } M(\gamma) > 0 \\ =, & \text{se } M(\gamma) = 0 \end{cases}$$

LEMA 3<sup>(20)</sup>: Seja  $\lambda$  um maximal de  $C$  contido em  $\gamma$

a) Se  $t_{\delta}^{d(\gamma)} \chi_{\gamma} \neq 0$

$$\frac{\text{deg}}{\partial u} S_{\delta} t_{\lambda}^{d(\lambda)} \chi_{\lambda} >^* -M(\lambda) \geq -M(\delta) \quad (\text{B-25})$$

$$\frac{\text{deg}}{\partial u_{p\delta}} S_{\delta} t_{\lambda}^{d(\lambda)} \chi_{\lambda} \geq d(\lambda) + 1 - M(\lambda), \quad \bar{\lambda} // S \quad (\text{B-26})$$

b)

$$\frac{\text{deg}}{\partial u_{p\delta}} S_{\delta} (1 - t_{\lambda}^{d(\lambda)}) \chi_{\lambda} \geq \max\{d(\lambda) + 1, 0\} - M(\lambda),$$

$$\bar{\lambda} \times S, \quad \bar{\delta} // S. \quad (\text{B-27})$$

A prova dos Lemas 2 e 3 é por indução matemática. Inicialmente devemos provar (B-23) e (B-24) para  $\gamma \in C$  minimal. Admitindo então, como hipótese de indução, que o Lema 2 vale para todos os maximais de  $C$  contidos num dado  $\gamma \in C$ , devemos provar que os Lemas são satisfeitos para qualquer  $\gamma \in C$ .

Vamos introduzir a quantidade

$$r(\gamma) \equiv 2M(\gamma) + \sum_{V \in \gamma} D_V + \sum_{L \in \gamma} D_L \quad (\text{B-28})$$

onde

$$\begin{aligned} m(\gamma) &= \text{n}^\circ \text{ de circuitos independentes de } \gamma \\ &= (\text{n}^\circ \text{ de } L \in \gamma) - (\text{n}^\circ \text{ de } V \in \gamma) + 1 \end{aligned}$$

$$\underline{D}_L = \underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} \Delta_L \quad , \quad \underline{D}_V = \underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} P_V$$

No modelo em discussão,

$$\underline{D}_V = 1 \quad , \quad \underline{D}_B = 0 \quad , \quad \underline{D}_F = -1 \quad (\text{B-29})$$

de modo que

$$r(\gamma) - d(\gamma) = 2n_B^\gamma \quad (\text{B-30})$$

onde  $n_B^\gamma$  é o número de linhas de boson internas de  $\gamma$ . Note que se  $t_Y^{d(\gamma)} \neq 0$ , então  $n_B^\gamma > 0$ .

Vamos provar (B-23) e (B-24) para  $\gamma$  minimal. Neste caso,  $Y_\gamma(C) = I_\gamma$ .

$$\text{i) } \bar{\gamma} // S \quad , \quad t_\gamma^{d(\gamma)} \neq 0$$

$$\underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} Y_\gamma = \underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} I_\gamma = r(\gamma) - M(\gamma)$$

$$\Rightarrow \underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} Y_\gamma = d(\gamma) + 2n_B^\gamma - M(\gamma)$$

$$\text{e, portanto, } \underline{\text{deg}}_{\text{up}\delta} Y_\gamma > d(\gamma) + 1 - M(\gamma)$$

$$\text{ii) } \bar{\gamma} \times S$$

$$\underline{\text{deg}}_{\text{u}} Y_\gamma = \underline{\text{deg}}_{\text{u}} \bar{I}_\gamma = 0 \quad , \quad \text{para}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{deg}}_{\text{u}} Y_\gamma >^* -M(\gamma) \quad , \quad \bar{\gamma} \times S$$

Vamos provar o Lema 3 usando a hipótese de indução. Temos

$$\left. \begin{aligned} & \geq \underline{\deg}_{u\rho\lambda} \gamma_\lambda - d(\lambda), \quad \bar{\lambda} // S, \quad \text{de (B-19)} \\ \underline{\deg}_{u\rho} S_\gamma t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda & \geq \underline{\deg}_{u\rho} t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda \\ & \geq \underline{\deg}_{u\rho} \gamma_\lambda, \quad \bar{\lambda} \times S, \quad \text{de (B-20)} \end{aligned} \right\}$$

e pela hipótese de indução, equações (B-23) e (B-24),

$$\underline{\deg}_{u\rho} S_\gamma t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda \geq d(\lambda) + 1 - M(\lambda) - d(\lambda) = -M(\lambda) + 1, \quad \bar{\lambda} // S$$

$$\underline{\deg}_{u\rho} S_\gamma t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda >^* -M(\lambda), \quad \bar{\lambda} \times S$$

e (B-25) fica provada, pois  $M(\gamma) \geq M(\lambda)$ .

Prova de (B-26): Temos

$$\underline{\deg}_{u\rho\sigma} S_\gamma t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda \geq \underline{\deg}_{u\rho\sigma} t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda, \quad \bar{\lambda} // S.$$

De (B-21)

$$\underline{\deg}_{u\rho\sigma} t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda \geq \underline{\deg}_{u\rho\sigma} \gamma_\lambda$$

e da hipótese de indução (B-23),

$$\underline{\deg}_{u\rho\sigma} S_\gamma t_\lambda^{d(\lambda)} \gamma_\lambda \geq d(\lambda) + 1 - M(\lambda), \quad \bar{\lambda} // S$$

que é a (B-26). Resta provar (B-27). Temos

$$\underline{\deg}_{u\rho\sigma} S_\gamma (1 - t_\lambda^{d(\lambda)}) \gamma_\lambda \geq \underline{\deg}_{u\rho\sigma} (1 - t_\lambda^{d(\lambda)}) \gamma_\lambda,$$

e de (B-22),

$$\underline{\deg}_{\text{upr}} S_{\gamma} \left(1 - t_{\lambda}^{d(\lambda)}\right) Y_{\lambda} \geq \underline{\deg}_{\text{upr}} Y_{\lambda} + \max\{d(\lambda) + 1, 0\}, \bar{\lambda} \times S, \bar{\gamma} // S.$$

Usando agora a hipótese de indução, eq. (B-24), obtemos

$$\underline{\deg}_{\text{upr}} S_{\gamma} \left(1 - t_{\lambda}^{d(\lambda)}\right) Y_{\lambda} \geq -M(\lambda) + \max\{d(\lambda) + 1, 0\}$$

que é a (B-27). Provemos agora (B-23) e (B-24) para gráficos arbitrários. Designando por  $\lambda_{\alpha}$  os maximais de  $C$  contidos em  $\gamma$ , teremos:

$$a) \bar{\gamma} // S$$

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_{\text{upr}} X_{\gamma} &= \underline{\deg}_{\text{upr}} I_{\bar{\gamma}} + \sum_{\lambda_{\alpha} \text{ max}} \underline{\deg}_{\text{upr}} S_{\gamma} \frac{P}{t_{\lambda_{\alpha}}} X_{\lambda_{\alpha}} \\ &\geq r(\bar{\gamma}) - M(\bar{\gamma}) + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} // S} [d(\lambda_{\alpha}) + 1 - M(\lambda_{\alpha})] + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} \times S} [\max\{d(\lambda_{\alpha}) + 1, 0\} - M(\lambda_{\alpha})] \\ &= r(\bar{\gamma}) - M(\bar{\gamma}) + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} // S} [d(\lambda_{\alpha}) + 1] + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} \times S} \max\{d(\lambda_{\alpha}) + 1, 0\} \end{aligned} \quad (\text{B-30a})$$

pelo Lema 3. Agora:

$$\begin{aligned} &r(\bar{\gamma}) + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} // S} [d(\lambda_{\alpha}) + 1] + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} \times S} \max\{d(\lambda_{\alpha}) + 1, 0\} \\ &= d(\bar{\gamma}) + 2n_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}} + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} // S} [d(\lambda_{\alpha}) + 1] + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} \times S} \max\{d(\lambda_{\alpha}) + 1, 0\} \\ &= d(\bar{\gamma}) + 2n_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}} + \sum_{\bar{\lambda}_{\alpha} // S} d(\lambda_{\alpha}) + \sum_{\substack{\bar{\lambda}_{\alpha} \times S \\ d(\lambda_{\alpha}) > -1}} d(\lambda_{\alpha}) + n'' + m_s^x, \end{aligned}$$

onde

$$n'' = n^\circ \text{ de } \lambda_\alpha \subset \gamma \text{ tais que } \bar{\lambda}_\alpha \parallel S,$$

$$n'_> = n^\circ \text{ de } \lambda_\alpha \subset \gamma \text{ tais que } \bar{\lambda}_\alpha \times S \text{ e } d(\lambda_\alpha) > -1.$$

Então

$$\begin{aligned} I &= r(\bar{\gamma}) + \sum_{\bar{\lambda}_\alpha \parallel S} [d(\lambda_\alpha) + 1] + \sum_{\bar{\lambda}_\alpha \times S} \max\{d(\lambda_\alpha) + 1, 0\} = \\ &= d(\gamma) + 2n_B^{\bar{\gamma}} + n'' + n'_> - \sum_{\substack{\bar{\lambda}_\alpha \times S \\ d(\lambda_\alpha) \leq -1}} d(\lambda_\alpha) \end{aligned}$$

onde usamos

$$d(\gamma) = d(\bar{\gamma}) + \sum_{\lambda_\alpha} d(\bar{\lambda}_\alpha).$$

Agora,

$$n'_> - \sum_{\substack{\bar{\lambda}_\alpha \times S \\ d(\lambda_\alpha) \leq -1}} d(\lambda_\alpha) \geq 0.$$

Quando valer a desigualdade, teremos de imediato  $I > d(\gamma)$ .

Quando a igualdade se verifica, então não haverá nenhum sub-gráfico maximal  $\lambda_\alpha \subset \gamma$  com  $\lambda_\alpha \times S$ , e neste caso todos os sub-gráficos de  $\gamma$  tem reduzidos paralelos a  $S$ . Se  $n'' > 0$ , então  $I > d(\gamma)$ . Se  $n'' = 0$ , então  $\bar{\gamma} \equiv \gamma$ , e  $n_B^{\bar{\gamma}} = n_B^\gamma \neq 0$ , pois por hipótese  $t_Y^{d(\gamma)} Y_\gamma \neq 0$ . Concluímos então que

$$r(\gamma) + \sum_{\lambda_\alpha \parallel S} [d(\lambda_\alpha) + 1] + \sum_{\lambda_\alpha \times S} \max\{d(\lambda_\alpha) + 1, 0\} > d(\gamma)$$

e usando isto em (B-30a) obtemos

$$\underline{\text{deg}}_{\partial u \rho \gamma} Y_\gamma \geq d(\gamma) - M(\gamma) + 1, \quad \bar{\gamma} \parallel S$$

que é a (B-23).

b)  $\bar{\gamma} \times S$

$$\begin{aligned} \underline{\text{deg}}_{\partial u} Y_\gamma &= \underline{\text{deg}}_{\partial u} I_{\bar{\gamma}} + \sum_{\lambda_\alpha \text{ max}} \underline{\text{deg}}_{\partial u} S_\gamma \uparrow_{\lambda_\alpha} Y_{\lambda_\alpha} \\ &= \sum_{\lambda_\alpha \text{ max}} \underline{\text{deg}}_{\partial u} S_\gamma \uparrow_{\lambda_\alpha} Y_{\lambda_\alpha} \end{aligned}$$



e de (B-25)

$$\underline{\text{deg}}_u Y_\gamma >^* = -M(\gamma) , \quad (\text{B-24})$$

que é a (B-24).

Podemos agora demonstrar o seguinte Lema para o próprio gráfico  $\Gamma$ , quando  $\bar{\Gamma} // S$ :

LEMA 4 - Seja o gráfico  $\Gamma$  como no Teorema, com  $\bar{\Gamma} // S$ . Então

$$\underline{\text{deg}}_u Y_\Gamma > -M(\Gamma) , \quad \bar{\Gamma} // S . \quad (\text{B-31})$$

PROVA: Definamos o gráfico  $\Lambda$ , obtido de  $\bar{\Gamma}(C)$  reduzindo todas as linhas  $L$  de  $\bar{\Gamma}$  com momento da forma  $\ell_L = U_L(u^\Gamma) + P_L(p^\Gamma)$  com  $P_L(p^\Gamma) \neq 0$  a um ponto; para que resulte um único vértice de todas as contrações é necessário que a distribuição dos momentos  $p^\Gamma$  seja não excepcional. Designemos por  $V_0$  o vértice especial de  $\Lambda$  resultante desta contração. Temos então

$$\begin{aligned} \underline{\text{deg}}_u Y_\Gamma &= \underline{\text{deg}}_u I_{\bar{\Gamma}} + \sum_{\gamma_\alpha \in C} \underline{\text{deg}}_u S_\Gamma \frac{p}{f_{\gamma_\alpha}} Y_{\gamma_\alpha} \\ &= \underline{\text{deg}}_{u p^n} I_\Lambda + \sum_{\gamma_\alpha \in C} \underline{\text{deg}}_u S_\Gamma \frac{p}{f_{\gamma_\alpha}} Y_{\gamma_\alpha} \\ &= r(\Lambda) - M(\Lambda) + \sum_{\gamma_\alpha \in C} \underline{\text{deg}}_u S_\Gamma \frac{p}{f_{\gamma_\alpha}} Y_{\gamma_\alpha} \\ &\geq r(\Lambda) - M(\bar{\Gamma}) + \sum_{\gamma_\alpha \in C} \underline{\text{deg}}_u S_\Gamma \frac{p}{f_{\gamma_\alpha}} Y_{\gamma_\alpha} \end{aligned}$$

(B-32)

pela definição de  $r(\Lambda)$ , (B-28).

Para um dado sub-gráfico  $\gamma_\alpha$  maximal de  $\Gamma$  contido em  $C$  podem ocorrer duas possibilidades:

i) O vértice reduzido  $V(\gamma_\alpha) \notin V(\Lambda)$ , isto é,  $V(\gamma_\alpha)$  foi absorvido em  $V_0$ . Temos que considerar duas possibilidades:

ia)  $\bar{\gamma}_\alpha // S$

De (B-25)

$$\underline{\deg}_u S_\Gamma f_{\gamma_\alpha} \gamma_\alpha \geq -M(\Gamma) \quad (\text{B-33})$$

ib)  $\bar{\gamma}_\alpha \not\parallel S$

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_u S_\Gamma f_{\gamma_\alpha} \gamma_\alpha &= \underline{\deg}_u S_\Gamma (1 - t_{\gamma_\alpha}^{d(\gamma_\alpha)}) \gamma_\alpha \\ &\geq \min \left\{ \underline{\deg}_u S_\Gamma \gamma_\alpha, \underline{\deg}_u S_\Gamma t_{\gamma_\alpha}^{d(\gamma_\alpha)} \gamma_\alpha \right\} \end{aligned}$$

e de (B-24) e (B-25)

$$\underline{\deg}_u S_\Gamma f_{\gamma_\alpha} \gamma_\alpha \geq -M(\Gamma) \quad (\text{B-34})$$

ii)  $V(\gamma_\alpha) \in V(\Lambda)$ ,  $V(\gamma_\alpha) \neq V_0$ . Neste caso,  $p_{\gamma_\alpha} \in S$ , pois  $p_{\gamma_\alpha}$  depende somente de  $u$ . Novamente há duas possibilidades:

iiia)  $\bar{\gamma}_\alpha // S$

$p^{\gamma_\alpha}$  não depende de  $p^\Gamma$  e portanto

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_u S_\Gamma f_{\gamma_\alpha} \gamma_\alpha &\equiv \underline{\deg}_{u, p^\Gamma} S_\Gamma f_{\gamma_\alpha} = \underline{\deg}_{u, p^\Gamma} S_\Gamma t_{\gamma_\alpha}^{d(\gamma_\alpha)} \gamma_\alpha \\ &\geq d(\gamma_\alpha) - M(\delta_\alpha) + 1, \end{aligned}$$

por (B-26), como  $t_{\gamma_\alpha}^{d(\gamma_\alpha)} \gamma_{\gamma_\alpha} \neq 0$ ,  $d(\gamma_\alpha) \geq 0$  e

$$\underline{\deg}_{\partial u} S_\pi f_{\gamma_\alpha} \gamma_{\gamma_\alpha} \geq \max\{d(\gamma_\alpha) + 1, 0\} - M(\pi). \quad (\text{B-35})$$

iib)  $\bar{\gamma}_\alpha \notin \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_{\partial u} S_\pi f_{\gamma_\alpha} \gamma_{\gamma_\alpha} &\equiv \underline{\deg}_{\partial u, P^n} S_\pi (1 - t_{\gamma_\alpha}^{d(\gamma_\alpha)}) \gamma_{\gamma_\alpha} \\ &\geq \max\{d(\gamma_\alpha) + 1, 0\} - M(\pi), \end{aligned} \quad (\text{B-36})$$

por (B-27). De (B-33) - (B-36), concluímos que

$$\underline{\deg}_{\partial u} S_\pi f_{\gamma_\alpha} \gamma_{\gamma_\alpha} \geq -M(\pi), \quad V(\gamma_\alpha) \notin \mathcal{V}(\Lambda) \quad (\text{B-37})$$

$$\begin{aligned} \underline{\deg}_{\partial u} S_\pi f_{\gamma_\alpha} \gamma_{\gamma_\alpha} &\geq -M(\pi) + \max\{d(\gamma_\alpha) + 1, 0\}, \quad V(\gamma_\alpha) \in \mathcal{V}(\Lambda), \\ &V(\gamma_\alpha) \neq V_0 \end{aligned} \quad (\text{B-38})$$

Usando (B-37) e (B-38), reescrevemos (B-32) como

$$\underline{\deg}_{\partial u} \gamma_\pi \geq -M(\pi) + r(\Lambda) + \sum_{\substack{V(\gamma_\alpha) \neq V_0 \\ V(\gamma_\alpha) \in \mathcal{V}(\Lambda)}} \max\{0, d(\gamma_\alpha) + 1\} \quad (\text{B-39})$$

pois, por construção de  $\Lambda$ ,

$$M(\Gamma) = M(\bar{\Gamma}) + \sum_{\substack{V(\gamma_\alpha) \in \mathcal{V}(\Lambda) \\ V(\gamma_\alpha) \neq V_0}} M(\gamma_\alpha) + \sum_{V(\gamma_\alpha) \notin \mathcal{V}(\Lambda)} M(\gamma_\alpha).$$

Por outro lado,

$$r(\Lambda) = 2(n_B^\wedge + n_F^\wedge - V^\wedge + 1) - n_F^\wedge + V^\wedge - V' \quad (\text{B-40})$$

onde  $V'$  é o número de vértices reduzidos em  $\Lambda$ , isto é, vértices que resultam da contração de um maximal de  $\Gamma$  contido em  $C$  a um ponto.

Daí, introduzindo

$$\bar{V} = V^\wedge - 1$$

$$\bar{V}' = V' - 1$$

e usando

$$n_F^\wedge = \frac{1}{2} \sum_{V_i \in \mathcal{V}(\Lambda)} v_F(V_i)$$

$$2n_B^\wedge = \sum_{V_i \in \mathcal{V}(\Lambda)} v_B(V_i)$$

onde  $v_{F(B)}(V_i)$  é o número de linhas internas de  $\Lambda$  com extremidade no vértice  $V_i$ , encontramos

$$\begin{aligned}
r(\lambda) &= \frac{1}{2} \nu_F(V_0) + \nu_B(V_0) + \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\lambda) \\ V_i \neq V_0 \\ V_i \in \mathcal{V}(r)}} \left[ \frac{1}{2} \nu_F(V_i) + \nu_B(V_i) \right] - \bar{V} - \bar{V}' \\
&= \frac{1}{2} \nu_F(V_0) + \nu_B(V_0) + \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\lambda) \\ V_i \neq V_0 \\ V_i \in \mathcal{V}(r)}} \left[ \frac{1}{2} \nu_F(V_i) + \nu_B(V_i) - 1 \right] \\
&\quad + \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\lambda) \\ V_i \neq V_0 \\ V_i = V(\gamma_i)}} \left[ \frac{1}{2} \nu_F(V_i) + \nu_B(V_i) \right] - 2\bar{V}'
\end{aligned}$$

(B-41)

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{V_\alpha = V(\gamma_\alpha) \neq V_0 \\ V(\gamma_i) \in \mathcal{V}(\lambda)}} \max\{0, d(\gamma_\alpha) + 1\} &= \sum_{\substack{V(\gamma_\alpha) \neq V_0 \\ d(\gamma_\alpha) + 1 > 0}} [d(\gamma_\alpha) + 1] \\
&= \sum_{\substack{V_\alpha = V(\gamma_\alpha) \neq V_0 \\ d(\gamma_\alpha) + 1 > 0}} \left[ 1 + 2 - \frac{1}{2} \nu_F(V_\alpha) \right], \quad (\text{B-42})
\end{aligned}$$

pois [3]

$$d(\gamma_\alpha) = 2 - \frac{1}{2} \nu_F(V_\alpha).$$

Portanto, usando (B-41) e (B-42) obtemos

$$\begin{aligned}
 r(\Lambda) + \sum_{\substack{V_\alpha = V(\gamma_\alpha) \\ V_\alpha \in \mathcal{V}(\Lambda)}} \max\{0, d(\gamma_\alpha) + 1\} &= \frac{1}{2} \nu_F(V_0) + \nu_B(V_0) + \\
 + \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\Lambda) \\ V_i \neq V_0 \\ V_i \text{ não é reduzido}}} \left[ \frac{1}{2} \nu_F(V_i) + \nu_B(V_i) - 1 \right] &+ \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\Lambda) \\ V_i = V(\gamma_i) \neq V_0 \\ d(\gamma_i) + 1 \leq 0}} \left[ \frac{1}{2} \nu_F(V_i) + \nu_B(V_i) - 2 \right] \\
 + \sum_{\substack{V_i \in \mathcal{V}(\Lambda) \\ V_i = V(\gamma_i) \neq V_0 \\ d(\gamma_i) + 1 > 0}} \left[ 1 + \nu_B(V_i) \right] &> 0
 \end{aligned}$$

(B-43)

O resultado (B-43) combinado com (B-39) prova o Lema 4.

Mostremos finalmente que  $R_\Gamma$  satisfaz o teorema. De (B-3), temos

$$\underline{\deg}_u R_\Gamma(c) = \underline{\deg}_u (1 - t_n^{d(n)}) Y_\Gamma(c).$$

CASO I:  $\bar{V} \nmid S$

$$\underline{\deg}_u R_\Gamma(c) \geq \min \left\{ \underline{\deg}_u Y_\Gamma, \underline{\deg}_u t_n^{d(n)} Y_\Gamma \right\}$$

e, de (B-20) e (B-24) obtemos imediatamente:

CASO II:  $\bar{\Gamma} // S$

$$\underline{\deg}_u R_\pi(c) \geq \min \left\{ \underline{\deg}_u Y_\pi, \underline{\deg}_u t_\pi^{d(\pi)} Y_\pi \right\}$$

e, por (B-19), (B-23) e o Lema 4, (B-31) concluímos que

$$\underline{\deg}_u R_\pi(c) \geq -M(\pi) + 1, \quad \bar{\Gamma} // S$$

(B-45)

Usando (B-44), (B-45) e o resultado

$$2a \geq M(\pi),$$

obtemos

$$\underline{\deg}_u R_\pi(c) + 2a > 0$$

c.q.d.

e pelo teorema da ref. (23) a integral

$$\int d^2k R_\pi(p, k, m)$$

converge no infra-vermelho.

## CAPÍTULO III - PERTURBAÇÃO EM TORNO DA TEORIA NÃO LIVRE

## III-1) O MODELO NÃO PERTURBADO

O modelo exatamente solúvel discutido por Rothe e Stamatescu<sup>(7)</sup> é descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + g \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^{\mu} \Psi \partial_{\mu} \varphi \quad (\text{III-1})$$

e, como mostrado no Capítulo anterior, êle pode ser obtido como o limite de massa zero da expansão perturbativa em  $g$ , de um modelo com fermions massivos. As equações de movimento clássicas satisfeitas pelos campos são:

$$i \not{\partial} \Psi(x) = g \gamma^{\mu} \gamma^5 \Psi \partial_{\mu} \varphi(x), \quad (\text{III-2})$$

$$(\partial^2 + m^2) \varphi(x) = g \partial_{\mu} j_5^{\mu}(x), \quad (\text{III-3})$$

onde  $j_5^{\mu}(x)$  é a corrente vetor-axial, dada formalmente por

$$j_5^{\mu}(x) = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \Psi(x). \quad (\text{III-4})$$

A Lagrangeana (III-1) é invariante pelas "transformações  $\gamma^5$ "

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-ig\gamma^5 \alpha} \Psi(x), \quad (\text{III-5})$$

onde  $\alpha$  é uma constante, de modo que a corrente de Noether associa-



da a esta simetria,  $j_s^H(x)$ , é formalmente conservada e o lado direito da eq. (III-3) é zero. Desta maneira, a solução da equação clássica (III-2) pode ser escrita em termos de campos livres como

$$e^{-ig\gamma^5\varphi(x)} \psi_0(x), \quad (\text{III-6})$$

onde  $\psi_0$  satisfaz

$$\not\partial\psi_0 = 0. \quad (\text{III-7})$$

A solução (III-6) não é bem definida como um operador quantizado, como podemos ver considerando sua decomposição em partes de criação (+) e aniquilação (-):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-ig\gamma^5\varphi^+(x)} \psi_0(x) e^{-ig\gamma^5\varphi^-(x+\epsilon)} e^{-\frac{1}{2}g^2[\varphi^-(x+\epsilon), \varphi^+(x)]}, \quad (\text{III-8})$$

com  $\epsilon \rightarrow 0$ . Usando a relação de comutação

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)] = \Delta^-(x-y) \quad (\text{III-9})$$

com

$$\Delta^-(x) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(m(-x^2 + i\eta x_0)^{1/2}\right) \quad (\text{III-10})$$

vemos que a última exponencial em (III-8) tende a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para eliminar este fator de finimos um campo renormalizado como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\psi}^{1/2}(\epsilon) e^{-ig\gamma^5 \varphi^+(x)} \psi_0(x) e^{-ig\gamma^5 \varphi^-(x)} e^{\frac{1}{2}g^2 [\varphi^-(x+\epsilon), \varphi^+(x)]}$$

$$= : e^{-ig\gamma^5 \varphi(x)} : \psi_0(x)$$

(III-11)

com

$$Z_{\psi}(\epsilon) = e^{g^2 \Delta^-(\epsilon)}$$

(III-12)

Uma outra expressão formal a ser analisada é o produto de campos num mesmo ponto na definição da corrente vetor axial, (III-4). Na ref. (7) é utilizada uma definição para  $j_5^\mu(x)$  que produz a anomalia calculada em perturbação no Capítulo II. Entretanto, como foi mostrado, o efeito desta anomalia pode ser facilmente absorvido em renormalizações da função de onda e da massa do boson que continua livre. Em vista disto, e por simplicidade, vamos definir (formalmente) uma corrente covariante por meio da expressão

$$j_5^\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}(x+\epsilon) \gamma^\mu \gamma^5 e^{-ig\gamma^5 \int_x^{x+\epsilon} ds^\nu \partial_\nu \varphi(s)} \psi(x),$$

(III-13)

onde introduzimos uma notação simbólica a ser adotada no que se segue:  $\gamma_x^5$  significa que a matriz  $\gamma^5$  é aplicada imediatamente à esquerda de  $\psi(x)$ . A corrente (III-13) é invariante pelas "transformações  $\bar{\gamma}^5$ " locais que mantêm  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  invariante:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ig\gamma^5\chi(x)} \psi(x),$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \chi(x),$$

onde  $\chi(x)$  é um campo escalar livre clássico de massa  $m$ . Usando (III-11), escrevemos uma definição rigorosa para corrente como

$$j_5^\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \bar{\psi}_0(x+\epsilon) \gamma^\mu \gamma^5 : e^{ig\gamma^5\varphi(x+\epsilon)} e^{-ig\gamma^5\varphi(x)} e^{-ig\gamma^5 \int_x^{x+\epsilon} d\xi^\nu \partial_\nu \varphi(\xi)} : \psi_0(x) - \gamma^\mu \gamma^5 \langle 0 | \bar{\psi}_0(x+\epsilon) \psi_0(x) | 0 \rangle \right\}, \quad (\text{III-14a})$$

onde

$$\langle 0 | \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y) | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma \cdot (x-y)}{(x-y)^2 - i\eta(x^0-y^0)}, \quad (\text{III-14b})$$

De (III-14a) encontramos

$$j_5^\mu(x) = : \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_0 : (x), \quad (\text{III-15})$$

que é um operador finito e conservado:

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = 0. \quad (\text{III-16})$$

Portanto, a solução do modelo quantizada, renormalizada, é

$$\psi(x) = : e^{-ig\gamma^5\varphi(x)} : \psi_0(x), \quad (\text{III-17})$$

com

$$(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (\text{III-18})$$

Tendo mostrado que  $\phi$  é um campo livre, podemos reescrever a equação de movimento formal (III-2) de maneira mais rigorosa, expressando o produto de operadores no lado direito de (III-2) na forma de um limite simétrico. Separando  $\phi$  em suas partes de criação e aniquilação, teremos:

$$\begin{aligned}
 i\partial\psi(x) &= g\gamma^\mu\gamma^5\left\{\partial_\mu\varphi^+(x)\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu\varphi^-(x)\right\} \\
 &= g\gamma^\mu\gamma^5\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\left\{\partial_\mu\varphi(x+\epsilon)\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu\varphi(x-\epsilon)\right\} \\
 &\quad + g\gamma^\mu\gamma^5\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\left[\psi(x), \partial_\mu\varphi^-(x+\epsilon)\right] \\
 &\quad + g\gamma^\mu\gamma^5\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\left[\partial_\mu\varphi^+(x-\epsilon), \psi(x)\right].
 \end{aligned}
 \tag{III-19}$$

Escrevendo

$$\psi(x) = e^{-ig\gamma^5\varphi^+(x)}\psi_0 e^{-ig\gamma^5\varphi^-(x)}$$

e usando as relações de comutação do campo escalar, verificamos que os dois últimos termos do lado direito de (III-19) cancelam-se de modo que

$$i\partial\psi(x) = g\gamma^\mu\gamma^5\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\left\{\partial_\mu\varphi(x+\epsilon)\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu\varphi(x-\epsilon)\right\},
 \tag{III-20}$$

onde o lado direito agora é não singular.

Após obter o operador solução do modelo, com o objetivo de introduzir mais adiante uma interação sob a forma de um termo de massa, vamos definir agora o produto normal  $N[\bar{\psi}\psi](x)$  como um li

mite a curtas distâncias do produto formal dos campos. De (III-17) encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x+\epsilon)\Psi(x) &= Z_{\Psi}^{-1}(\epsilon) : e^{-ig\gamma^5(\varphi(x+\epsilon)+\varphi(x))} : \left\{ : \bar{\Psi}_0(x+\epsilon)\Psi_0(x) : + \langle 0 | \bar{\Psi}_0(x+\epsilon)\Psi_0(x) | 0 \rangle \right\} \\ &= Z_{\Psi}^{-1}(\epsilon) : e^{-2ig\gamma^5\varphi(x)} : : \bar{\Psi}_0(x+\epsilon)\Psi_0(x) : , \end{aligned}$$

(III-21)

com a contribuição de V.E.V. sendo eliminada quando calculamos o traço correspondente. Definimos então o produto normal bi-linear como

$$\begin{aligned} N[\bar{\Psi}\Psi](x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\Psi} \bar{\Psi}(x+\epsilon)\Psi(x) \\ &= : e^{-2ig\gamma^5\varphi(x)} : : \bar{\Psi}_0(x)\Psi_0(x) : \end{aligned}$$

(III-22)

Embora seja a forma mais simples de perturbação a ser introduzida no modelo, o bi-linear (III-22) tem uma característica interessante que não é comum a todos os produtos normais da forma  $N[(\bar{\Psi}\Gamma\Psi)^n](x)$ , onde  $\Gamma$  é um elemento da álgebra gerada pelas matrizes bi-dimensionais  $\{1, \gamma^0, \gamma^1\}$ . Especificamente, a dimensão de  $N[\bar{\Psi}\Psi](x)$ ,

$$d_N = 1 + \frac{g^2}{\pi}$$

(III-23)

tem uma parte anômala que depende da constante de acoplamento, e isto nos permite variar o "grau de renormalizabilidade" da interação, considerando diferentes valores de g. Esta propriedade não ocorre, por exemplo, para o quadri-linear  $N[(\bar{\psi}\psi)^2](x)$ . Para ver isto, consideremos

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon^2 < 0}} \{ N[\bar{\psi}\psi](x+\epsilon) N[\bar{\psi}\psi](x) \} = \\
 & = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon^2 < 0}} : e^{-2ig\gamma_{\alpha\beta}^5 \psi(x+\epsilon)} : : e^{-2ig\gamma_{\rho\lambda}^5 \psi(x)} : : \bar{\psi}_\alpha(x+\epsilon) \psi_\beta(x+\epsilon) : : \bar{\psi}_\rho(x) \psi_\lambda(x) : \\
 & = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon^2 < 0}} : e^{-2ig\gamma_{\alpha\beta}^5 \psi(x+\epsilon)} : : e^{-2ig\gamma_{\rho\lambda}^5 \psi(x)} : : \left\{ \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta \bar{\psi}_\rho \psi_\lambda : (x) + \underbrace{\psi_\alpha(x) \psi_\rho(x+\epsilon)} : : \bar{\psi}_\rho \psi_\beta : (x) \right. \\
 & \left. + \underbrace{\psi_\beta(x+\epsilon) \bar{\psi}_\rho(x)} : : \bar{\psi}_\alpha \psi_\lambda : (x) - \underbrace{\psi_\rho(x+\epsilon) \bar{\psi}_\rho(x)} : : \psi_\lambda(x) \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x+\epsilon)} : \right\} ,
 \end{aligned}$$

(III-24)

onde as contrações entre fermions livres são dadas por (III-14b):

$$\underbrace{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\rho(x+\epsilon)} = \frac{i}{2\pi} \frac{-\not{\epsilon}}{\epsilon^2 - i\eta\epsilon^0} .$$

Vamos calcular explicitamente a contribuição devida ao último termo entre chaves em (III-24). Multiplicando por  $Z_\psi^{-4}(\epsilon)$ , teremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \frac{(\delta \cdot \epsilon)_{\mu}(-1)}{\epsilon^2} \frac{(\delta \cdot \epsilon)_{\lambda\alpha}}{\epsilon^2} : e^{-2ig(\gamma_{\alpha\rho}^5 \varphi(x+\epsilon) + \gamma_{\rho\lambda}^5 \varphi(x))} : \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\delta \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \frac{\delta \cdot \epsilon}{\epsilon^2} : e^{-2ig\gamma^5 \epsilon \partial \varphi(x)} : \right\} \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\delta \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \frac{\delta \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \left[ 1 - 2ig\gamma^5 \epsilon \partial \varphi(x) - 2g^2 (\epsilon \cdot \partial \varphi(x))^2 + \dots \right] \right\} .
\end{aligned}$$

(III-25)

Introduzimos agora o vetor  $\tilde{\epsilon}_\mu$ , dual de  $\epsilon_\mu$ , como

$$\tilde{\epsilon}_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^\nu, \quad \tilde{\epsilon}^2 = -\epsilon^2$$

$$\frac{\tilde{\epsilon}^\mu \tilde{\epsilon}^\nu}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{\epsilon^\mu \epsilon^\nu}{\epsilon^2} = g^{\mu\nu},$$

(III-26)

onde  $\epsilon_{\mu\nu}$  é o tensor antisimétrico de segunda ordem; tomando a média de (III-25) sobre  $\pm\epsilon$ ,  $\pm\tilde{\epsilon}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \tilde{\epsilon} \rightarrow 0}} \left\{ \underbrace{\psi_{0\rho}(x+\epsilon) \bar{\psi}_{0\rho}(x)}_{\tilde{\epsilon}^2} \underbrace{\psi_{0\lambda}(x) \bar{\psi}_{0\lambda}(x+\epsilon)}_{\tilde{\epsilon}^2} + \underbrace{\psi_{0\rho}(x+\epsilon) \bar{\psi}_{0\rho}(x)}_{\tilde{\epsilon}^2} \underbrace{\psi_{0\lambda}(x) \bar{\psi}_{0\lambda}(x+\tilde{\epsilon})}_{\tilde{\epsilon}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{g^2}{\pi^2} \left[ \frac{\epsilon^\mu \epsilon^\nu}{\epsilon^2} + \frac{\tilde{\epsilon}^\mu \tilde{\epsilon}^\nu}{\tilde{\epsilon}^2} \right] : \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi : = \frac{g^2}{2\pi^2} : \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi : (x) .
\end{aligned}$$

(III-27)

Procedendo de maneira análoga com os demais termos do lado direito de (III-24), somos levados a definir o produto normal 4-linear como

$$\begin{aligned}
 N[(\bar{\Psi}\Psi)^2](x) &= \\
 &= :(\bar{\Psi}_0\Psi_0)^2:(x) + \frac{g}{\pi}:\bar{\Psi}_0\gamma^5\gamma^\mu\Psi_0:(x)\partial_\mu\varphi(x) + \frac{g^2}{2\pi^2}:\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi:(x),
 \end{aligned}
 \tag{III-28}$$

e vemos que a dimensão de cada termo de (III-28) é igual a 2, sua dimensão canônica.

Observemos que, como a parte anômala da dimensão (isto é, a parte que depende de  $g$ ), é sempre positiva, interações cuja dimensão canônica é maior que 2 não podem ser tornadas renormalizáveis por meio de uma escolha adequada dos valores de  $g$ .

Vamos finalizar esta seção com um breve comentário sobre funções de Green. Utilizando a solução (III-17) juntamente com o seguinte resultado

$$\langle 0|T:e^{i\lambda_1\varphi(x_1)}\dots e^{i\lambda_n\varphi(x_n)}|0\rangle = \exp\left\{-\sum_{R<L}^n \lambda_R\lambda_L\Delta_F(x_R-x_L)\right\}
 \tag{III-29}$$

podemos escrever imediatamente as funções de Green do fermion como

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\Psi(x_1)\dots\Psi(x_N)\bar{\Psi}(y_1)\dots\bar{\Psi}(y_N)|0\rangle &= \exp\left\{-g^2\sum_{R<L}^2 [\gamma_{x_R}^5\gamma_{x_L}^5\Delta_F(x_R-x_L) + \right. \\
 &+ \left. \gamma_{x_R}^5\gamma_{y_L}^5\Delta_F(y_R-y_L)] - g^2\sum_{R,L}^2 \gamma_{x_R}^5\gamma_{y_L}^5\Delta_F(x_R-y_L)\right\} \langle 0|T\Psi_0(x_1)\dots\Psi_0(x_N)\bar{\Psi}_0(y_1)\dots\bar{\Psi}_0(y_N)|0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{III-30}$$



(embora não o indiquemos explicitamente, há três estados de vácuo distintos nesta equação). Reconhecendo no lado direito um produto de distribuições no espaço de posição que depende da constante de acoplamento, faz sentido indagar sobre o comportamento analítico das funções de Green com o parâmetro  $g$ . Um resultado a ser obtido na próxima Seção é que as correspondentes integrais de convolução Euclidianas são finitas para  $g^2 < 2\pi$ .

### III-2) PERTURBAÇÃO NA MASSA

Nesta seção, será discutido o efeito de introduzir uma perturbação no modelo descrito na seção anterior. Nós consideraremos a teoria descrita pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_M \quad (\text{III-31})$$

com  $\mathcal{L}_0$  dado por (III-1) e Lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_M = -MN[\bar{\Psi}\Psi](x) = -M : e^{-2i\gamma^5\varphi(x)} : \bar{\Psi}_0(x)\Psi_0(x) : , \quad (\text{III-32})$$

onde  $M$  tem dimensão de massa e é suposto convenientemente pequeno.

No tratamento perturbativo a ser apresentado, as funções de Green serão dadas pela expansão em  $M$  de

$$\frac{\langle 0|T \prod_i^N \psi(x_i) \prod_j^N \bar{\psi}(y_j) \prod_k^L \varphi(z_k) \exp [i \int d^2x \mathcal{L}_M(x)] |0\rangle}{\langle 0|T \exp [i \int d^2x \mathcal{L}_M(x)] |0\rangle} , \quad (\text{III-33})$$

na qual escrevemos explicitamente as amplitudes de transição vácuo-vácuo para tornar mais clara a argumentação que se seguirá. Novamente, coloca-se a questão de definir os termos individuais de uma série de perturbação, e para discutir este problema procedemos em analogia com o caso de perturbação em torno de uma teoria livre. Como (III-33) pode ser expressa inteiramente em termos de campos livres, o teorema de Wick e a relação (III-29) podem ser aplicados para escrever todas as possíveis contrações. Antes disto, porém, é conveniente utilizar a seguinte decomposição para eliminar as matrizes  $\gamma^5$  das exponenciais:

$$e^{i\lambda\gamma^5\varphi} = \frac{1}{2}(e^{i\lambda\varphi} + e^{-i\lambda\varphi}) + \frac{i}{2}\gamma^5(e^{i\lambda\varphi} - e^{-i\lambda\varphi}). \quad (\text{III-34})$$

A cada termo da expansão de (III-33) faremos corresponder um conjunto de gráficos obtidos pelas contrações dos campos. As contrações com ordenação temporal entre dois campos exponenciais, dadas por

$$\underbrace{e^{i\lambda_1\varphi(x_1)} e^{i\lambda_2\varphi(x_2)}}_{\text{contração}} \equiv \langle 0 | T : e^{i\lambda_1\varphi(x_1)} : : e^{i\lambda_2\varphi(x_2)} : | 0 \rangle = e^{i\lambda_1\lambda_2\Delta_F(x_1-x_2)} \quad (\text{III-35})$$

serão chamadas linhas de bosons. Se  $G$  pertence a um dos conjuntos mencionados, e  $V_a$  e  $V_b \in V(G)$ , de (III-29) vemos que existe uma e somente uma linha  $L_{ab\sigma} \in L(G)$  que é da forma (III-35). Distinguindo os vértices externos dos vértices de interação, vemos que há 6 tipos de linhas de boson distintas, e as regras de Feynman no espaço de posição ficam:

•	$\Leftrightarrow$	vértice externo
x	$\Leftrightarrow$	vértice de interação
+(-) • x	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[-g^2 \Delta_F(x-y)]$
+(-) • x	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[+g^2 \Delta_F(x-y)]$
+(-) • x	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[-2g^2 \Delta_F(x-y)]$
+(-) • x	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[+2g^2 \Delta_F(x-y)]$
+(-) x z	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[-4g^2 \Delta_F(x-y)]$
+(-) x z	$\Leftrightarrow$	$\text{exp}[+4g^2 \Delta_F(x-y)]$
$\xleftarrow{\quad}$ x	$\Leftrightarrow$	$S(x-y)$ (III-36)

onde os sinais + e - decorrem da decomposição (III-34) aplicada às exponenciais correspondentes aos vértices. (As linhas onduladas em (III-36) não devem ser confundidas com as utilizadas nos Capítulos anteriores).

A título de ilustração apresentamos uma contribuição em segunda ordem de M para a função de Green  $G^{(2,0)}(x,y)$ :

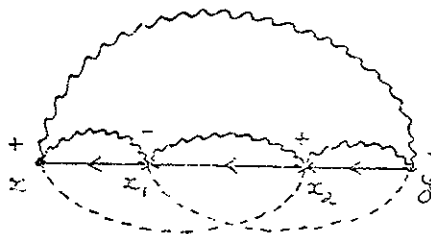


FIG. 25

que corresponde a

$$\frac{1}{(2!)} (iM)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T\psi_0(x)\bar{\psi}_0(x_1)|0\rangle \langle 0|T\psi_0(x_1)\bar{\psi}_0(x_2)|0\rangle \langle 0|T\psi_0(x_2)\bar{\psi}_0(y)|0\rangle$$

$$\langle 0|T:e^{+ig\varphi(x)} \quad : : e^{-ig\varphi(y)} \quad : : e^{-2ig\varphi(x_1)} \quad : : e^{+2ig\varphi(x_2)} \quad : : |0\rangle$$

quando aplicamos ao fator na segunda linha o resultado (III-29).

Quando tentamos analisar as singularidades dos gráficos construídos de acordo com as regras (III-36), empregando o teorema de contagem de potências de Weinberg<sup>(15)</sup>, encontramos duas dificuldades. Em primeiro lugar, as transformadas de Fourier dos propagadores (III-35) não são conhecidas quando a massa do boson é diferente de zero. Em segundo lugar, a majoração das integrais de convolução com métrica de Minkowski por integrais com métrica Euclidiana, utilizada por Zimmermann<sup>(16)</sup> para justificar o uso do teorema de Weinberg, não é aplicável à teoria considerada; esta majoração depende essencialmente do fato que as linhas dos gráficos correspondam a propagadores livres. No que se segue, discutiremos as funções Euclidianas. As funções de Green Euclidianas são obtidas formalmente das funções de Green no espaço de Minkowski fazendo uma rotação de  $\pi/2$  nas componentes temporais dos momentos e uma de  $-\pi/2$  nos tempos. Definimos então as variáveis Euclidianas  $x_0, p_0, k_0$  por

$$p_0 = i p_4 \quad ; \quad k_0 = i k_4 \quad \text{(III-37)}$$

e

$$x_0 = -i x_4 \quad \text{(III-38)}$$

Vamos introduzir inicialmente os propagadores Euclidianos. O propagador de Feynman do boson livre de massa  $m$  é

$$\Delta_F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 e^{-ik_0 x_0} \frac{i}{k_0^2 - k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{III-39})$$

Por (III-37) e (III-38) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 e^{-ik_2 x_2} \frac{1}{k_E^2 + M^2} \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \frac{1}{k_E^2 + M^2} = \frac{1}{2\pi} K_0(mp) \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

onde

$$\begin{aligned} p &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ k_E^2 &= k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (\text{III-41})$$

$\Delta_E(x)$  satisfaz a equação

$$(\square_E - m^2) \Delta_E(x) = -\delta^2(x), \quad (\text{III-42})$$

$$\square_E = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

e, no espaço dos momentos,

$$\tilde{\Delta}_E(p) = \frac{1}{p_E^2 + M^2} \quad (III-43)$$

Para o propagador de um fermion livre com massa  $M$ ,

$$S_F(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_0 x_0} \frac{k_0 + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon} dk_0$$

obtemos pelo mesmo procedimento

$$S_E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 e^{-ik_2 x_2} \frac{i\delta_0 k_2 - \delta_1 k_1 + M}{k_E^2 + M^2}$$

Fazendo na última integral  $k_2 \rightarrow -k_2$ , e considerando o novo par de matrizes  $\gamma$ :

$$\gamma_2 = i\gamma_0, \quad \gamma_1 = \gamma_1, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = -2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (III-44)$$

teremos

$$S_E(x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \frac{-k_E + M}{k_E^2 + M^2} \quad (III-45)$$

onde

$$k_E \equiv \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2, \quad k_E^2 = -k^2 \quad (III-46)$$

De (III-45), concluímos que

$$(-i \not{\partial}_E + M) S_E(x) = \delta^4(x) \quad (\text{III-47})$$

e que, no espaço dos momentos,

$$\tilde{S}_E(p) = \frac{-\not{p}_E + M}{p_E^2 + M^2} = \frac{1}{\not{p}_E + M} \quad (\text{III-48})$$

Para obter as funções de Green Euclidianas na teoria com perturbação na massa, começamos a modificar as regras de Feynman (III-36), substituindo os propagadores livres pelas correspondentes funções Euclidianas. Feitas estas modificações, observamos inicialmente a possibilidade de ocorrerem divergências infra-vermelhas, uma vez que o fermion tem massa nula. Esta conclusão pode ser obtida da Fig. 25, após as seguintes considerações. Para  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $K_0(m\rho)$  tende a zero como

$$K_0(m\rho) \sim \frac{e^{-m\rho}}{\rho^{1/2}}, \quad (\text{III-49})$$

de modo que os propagadores Euclidianos das linhas exponenciais no espaço de posição,  $F_E(\rho)$ , tendem a  $F_E(\infty)=1$ . Por outro lado, para  $\rho \rightarrow 0$

$$K_0(m\rho) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\rho^2 m^2 e^{\gamma \rho}}{4}\right) + O(m^2 \rho^2) \quad (\text{III-50})$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler. Escrevendo então a identidade

$$F_E(\rho) = (F_E(\rho) - 1) + 1 \equiv G(\rho) + 1 \quad (\text{III-51})$$

vemos que as possíveis singularidades de  $G(\rho) = G\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)^{1/2}$  ocorrem

em  $\rho=0$ , e de (III-36) e (III-50) estas singularidades são integráveis para

$$\frac{\delta^2}{\pi} < 1. \quad (\text{III-52})$$

Quando esta condição é satisfeita,  $G(\rho)$  é integrável em qualquer região finita e  $G(\rho) \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ , e portanto, a sua transformada  $\tilde{G}(p)$  existe, como uma função ordinária. De (III-51) vemos então que  $\tilde{F}_E(p)$  contém uma distribuição  $\delta^2(p)$ .

Usando este fato, vamos mostrar que o gráfico da Fig.25 tem uma divergência no infra-vermelho. No hiperplano

$$(x_1 - x)^2 \longrightarrow \infty$$

$$(x_2 - x)^2 \longrightarrow \infty$$

$$(x_1 - y)^2 \longrightarrow \infty$$

$$(x_2 - y)^2 \longrightarrow \infty$$

$$(x_2 - y)^2 \longrightarrow \infty$$

sua contribuição pode ser representada como

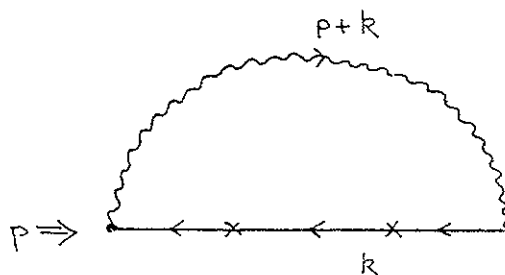


FIG. 26



que equivale a

$$\int d^2k \tilde{F}_E(k+p) \left(\frac{1}{k_E}\right)^3, \quad (\text{II-53})$$

e esta integral diverge linearmente para  $k_E^2 \rightarrow 0$ .

Para evitar que singularidades deste tipo possam ocorrer, separamos da interação  $L_M$  dada por (III-32) um termo  $-M:\bar{\psi}_0\psi_0:$  e fazemos uma resomação, de modo que este termo seja incorporado à Lagrangeana não perturbada. Por este procedimento, os propagadores de fermion adquirem massa, e ficamos com uma interação efetiva

$$\mathcal{L}_{M_{ef}}(x) = -M \left( : e^{-2ig\gamma_5 \psi(x)} : -1 \right) : \bar{\psi}_f \psi_f : (x), \quad (\text{III-54})$$

onde  $\psi_f$  é um campo livre, de massa  $M$ . De agora em diante, esta será a interação a ser considerada na fórmula de Gell-Mann-Low (III-33), com  $\psi_0$  substituído por  $\psi_f$ .

Tendo eliminado as divergências infra-vermelhas, o próximo passo é discutir as singularidades no ultra-violeta. Nesta região dos momentos, o comportamento dos propagadores exponenciais, cujas expressões não conhecemos, é determinado pelo comportamento a curtas distâncias. Podemos então empregar (III-50) nos propagadores de boson, obtendo as formas quadráticas

$$[c^2 m^2 (x_1^2 + x_2^2)]^\lambda = [c^2 m^2 \rho^2]^\lambda \quad (\text{III-55})$$

onde  $c$  é uma constante. As transformadas de Fourier destas expressões são dadas por <sup>(24)</sup>:

$$\frac{(-c^2 m^2)^\lambda}{\Gamma(-\lambda)} 2^{(1+\lambda)} \pi \Gamma(1+\lambda) \frac{1}{(P_E^2)^{1+\lambda}}$$

$$= C(\lambda, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1+\lambda}} \tag{III-56}$$

Feito isto, e levando em conta o sinal de (-) que surge na exponencial da fórmula de Gell-Mann-Low quando passamos para a métrica Euclídeana, obtemos as seguintes correspondências, para valores assintóticos dos momentos Euclídeanos:

•	⇔	coeficiente 1 (vértice externo)
x	⇔	coeficiente ±M (vértice de interação)
$\eta_1^1$ +(-) •-----•+(-)	⇔	$C(\frac{\alpha}{4}, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1+\alpha/4}}$
$\eta_2^1$ +(-) •~~~~~•-(+)	⇔	$C(-\frac{\alpha}{4}, m) \frac{1}{(P_E^2)^{-\alpha/4}}$
$\eta_1^2$ +(-) •-----x+(-)	⇔	$C(\frac{\alpha}{2}, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1+\alpha/2}}$
$\eta_2^2$ +(-) •~~~~~x-(+)	⇔	$C(-\frac{\alpha}{2}, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1-\alpha/2}}$
$\eta_1^3$ +(-) x-----x+(-)	⇔	$C(\alpha, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1+\alpha}}$
$\eta_2^3$ +(-) x~~~~~x-(+)	⇔	$C(-\alpha, m) \frac{1}{(P_E^2)^{1-\alpha}}$
$\xrightarrow{P}$	⇔	$\frac{1}{P_E + M'}$

(III-57)

onde

$$\alpha = g^2/\pi \quad . \quad (\text{III-58})$$

Para evitar que seja confundida com o parâmetro de perturbação, designamos a massa do fermion por  $M'$ . Os números  $n_j^i$  colocados à esquerda em (III-57) são para uso futuro.

Vamos agora aplicar contagem de potências na teoria convenientemente regularizada, com o objetivo de determinar os contra-termos necessários para que as funções de Green sejam finitas quando a regularização é removida. Começemos descrevendo a regularização a ser empregada.

O grau de divergência no ultra-violeta de um gráfico próprio  $\gamma$  é dado por

$$d(\gamma) = 2m(\gamma) - n_F - 2n_B - \frac{\alpha}{2}(n_1^1 - n_2^1) - \alpha(n_1^2 - n_2^2) - 2\alpha(n_1^3 - n_2^3), \quad (\text{III-59})$$

onde os  $n_j^i$  especificam os números de linhas de  $\gamma$ , de acordo com a indicação em (III-57), e os demais termos seguem a notação convencional. Colecionando os termos proporcionais a  $\alpha$ ,  $d(\gamma)$  pode ser reescrito como

$$d(\gamma) = a + b\alpha$$

$$a = 2m(\gamma) - n_F - 2n_B = 2 - 2V + n_F$$

onde  $V$  é o número de vértices de  $\gamma$ . Tomando  $\alpha > 0$ , a situação mais divergente ocorre para  $b > 0$ . Como  $n_F \leq V$ , segue-se que  $a \leq 2 - V$ . Portanto, gráficos com  $V > 2$  são finitos desde que  $\alpha < n/b$ , onde  $n$  é um determinado inteiro positivo. Para os gráficos com  $V = 2 = n_F$ ,  $a = 0$ . Há somente dois gráficos deste tipo que são divergentes:

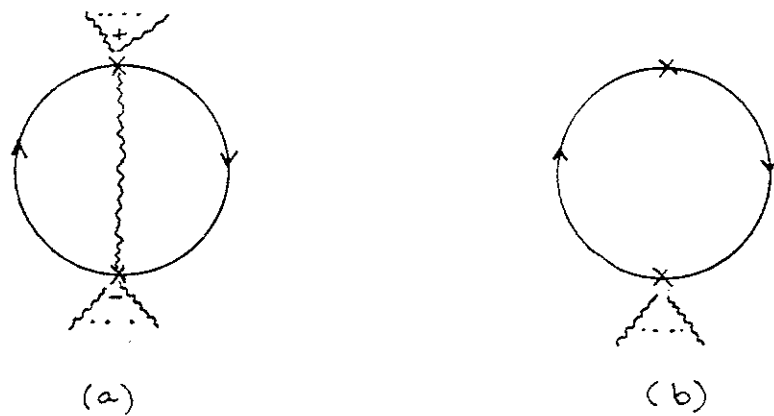


FIG. 27

Concluimos que para qualquer gráfico  $\gamma$  distinto dos gráficos da última figura, existe  $\sigma > 0$ , tal que, para  $0 < \alpha < \sigma$ ,  $d(\gamma) < 0$ . Isto nos permite regularizar um gráfico arbitrário  $\Gamma$  tomando um certo valor de  $\sigma$  para o qual todos os sub-gráficos  $\gamma \subset \Gamma$  tem grau de divergência negativo. Para cuidar das divergências de sub-gráficos como (a) e (b), adotamos uma regularização qualquer para as linhas de fermions (p.ex., regularização analítica).

A divergência associada ao gráfico (b) é independente de  $\alpha$ , e tem uma origem clara: ela aparece quando transferimos de  $L_M$  o termo  $-M:\bar{\psi}_0\psi_0:$ , o que introduz uma singularidade na definição de  $N[\bar{\psi}\psi](x)$  em perturbação. De fato, consideremos a seguinte contribuição em primeira ordem de  $M$  para a função de 4 pontos do fermion

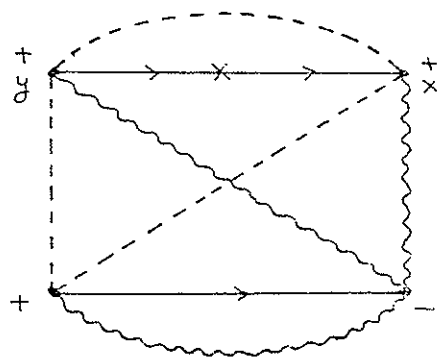


FIG. 28

Fazendo  $y \rightarrow x$  para obter uma função de dois pontos com uma inserção  $N[\bar{\psi}\psi](x)$ , encontramos

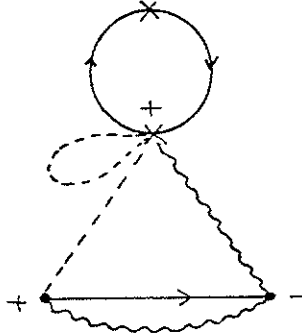


FIG. 29

O circuito de uma linha de boson é eliminado pela renormalização multiplicativa em (III-22), mas ainda resta o sub-gráfico com  $d=0$  da Fig. 27(b). A divergência associada a este gráfico, quando removemos a regularização, é cancelada adicionando à Lagrangeana o contra-termo

$$-B(M) (: \cos 2g\varphi : - 1) . \quad (\text{III-60})$$

Após a remoção da regularização,  $B(M)$  diverge logaritmicamente como

$$\frac{M}{(2\pi)^2} \text{Tr} \int dk_1 dk_2 \frac{1}{(\bar{k}_E + M)^2} . \quad (\text{III-61})$$

O fator adicional de  $(-1)$  é colocado para eliminar divergências vindas do denominador de (III-33).

No que se segue, precisaremos do conceito de sub-gráfico generalizado: dado um gráfico conexo  $G$  que consiste dos conjuntos de vértices  $V(G)$  e de linhas  $L(G)$ , um sub-gráfico  $\gamma \subseteq G$  é dito um sub-gráfico generalizado de  $G$  se  $V(\gamma) \subseteq V(G)$  e  $L(\gamma) = \{L_{abc} \in L(G) \mid V_a \text{ e } V_b \in V(\gamma)\}$ . Seja agora  $\gamma$  um sub-gráfico generalizado de uma

função de Green  $G$ , cujas linhas de boson vem de todas as contrações em

$$\langle 0|T:e^{ig\varphi} \dots e^{ig\varphi} :: e^{-ig\varphi} \dots e^{-ig\varphi} :: e^{2ig\varphi} \dots e^{2ig\varphi} :: e^{-2ig\varphi} \dots e^{-2ig\varphi} :|0\rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{r_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s_2}$

(III-62)

Para o gráfico  $\gamma$ ,

$$n_1^1 = \binom{r_1}{2} + \binom{s_1}{2}$$

$$n_2^1 = r_1 s_1$$

$$n_1^2 = r_1 r_2 + s_1 s_2$$

$$n_2^2 = r_1 s_2 + r_2 s_1$$

$$n_1^3 = \binom{r_2}{2} + \binom{s_2}{2}$$

$$n_2^3 = r_2 s_2$$

(III-63)

e de (III-59),

$$d(\gamma) = 2m(\gamma) - n_F - 2n_B - \alpha A^2 + \frac{\alpha}{4} V_1 + \alpha V_2, \quad (III-64)$$

onde

$$V_1 = r_1 + s_1$$

$$V_2 = r_2 + s_2$$

$$A^2 = \left[ \frac{r_1 - s_1}{2} + r_2 - s_2 \right]^2.$$

(III-65)

Introduzindo

$$V_0 = \text{n}^\circ \text{ de vértices de } \gamma \text{ do tipo } -M\bar{\psi}_f\psi_f$$

podemos escrever

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \quad (\text{III-66})$$

de modo que, usando as relações

$$m(\gamma) = n_F + n_B - V + 1, \quad \text{e}$$

$$2n_F + F_\gamma = 2V_0 + 2V_2 + F_\gamma,$$

onde  $F_\gamma$  é o número de linhas externas de fermion, encontramos

$$d(\gamma) = 2 - \frac{F_\gamma}{2} - \alpha A^2 - \sum_{a=0}^2 (2 - \delta_a), \quad (\text{III-67})$$

com as "dimensões" dos vértices dadas por

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 1, & \text{para vértices } -M\bar{\psi}_f\psi_f, \\ \delta_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}, & \text{para vértices } :e^{\pm ig\varphi}:\psi_f, \quad (\text{III-68}) \\ \delta_2 &= 1 + \alpha, & \text{para vértices } :e^{\pm 2ig\varphi}::\bar{\psi}_f\psi_f: \end{aligned}$$

A equação (III-67) tem a forma de grau de divergência em perturbações em torno de teorias livres,

$$d(\gamma) = 2 - \dim V(\gamma) - \sum_{a=0}^2 (2 - \delta_a) \quad (\text{III-69})$$

onde  $V(\gamma)$  é o vértice obtido contraindo  $\gamma$  a um ponto (vértice reduzido). Usando (III-67), vamos determinar quais são os sub-gráficos generalizados divergentes no intervalo  $0 < \alpha < 1$ . Notemos inicialmente que se  $F_\gamma \geq 4$ , então  $d(\gamma) < 0$ .

$$(i) \quad F_\gamma = 3 \Rightarrow V_1 \geq 1 \Rightarrow d(\gamma) \leq -1 + \frac{\alpha}{4} < 0$$

$$(ii) \quad F_\gamma = 2 \Rightarrow d(\gamma) = 1 - \alpha A^2 - \sum_{a=0}^2 (2 - \delta_a)$$

Para  $V_1 \geq 1$  ou  $V_0 \geq 1$ ,  $d(\gamma) < 0$ . (Note que se  $V_1 = 1$ ,  $A^2 \geq \frac{1}{4}$ ).

$$(iia) \quad V_1 = 0 = V_0 \Rightarrow d(\gamma) = 1 - \alpha A^2 - V_2(1 - \alpha)$$

$$\text{Se } A^2 \neq 0 \Rightarrow A^2 \geq 1 \Rightarrow d(\gamma) \leq 1 + \alpha(V_2 - 1) - V_2 < 0.$$

$$\text{Se } A^2 = 0,$$

$$d(\gamma) = 1 - V_2(1 - \alpha) \tag{III-70}$$

$$\Rightarrow d(\gamma) \geq 0 \quad \text{para} \quad \alpha \geq \frac{V_2 - 1}{V_2} < 1.$$

$\Rightarrow$  Com  $F_\gamma = 2$ ,  $V_0 = V_1 = A^2 = 0$ ,  $V_2 \geq 2$ , há os gráficos divergentes da função de dois pontos do fermion, como, por exemplo,

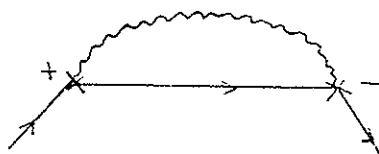


FIG. 30



que é divergente para  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

(iii)  $F_\gamma = 1 \Rightarrow V_1 \geq 3$ , ou  $V_1 \geq 1$  e  $V_2 \geq 1$ . Exemplos:



FIG. 31

Se  $V_1 \geq 3$ , é imediato que  $d(\gamma) < 0$ . Se  $V_1 \geq 1$  e  $V_2 \geq 1$ ,

$$d(\gamma) \leq -1 - \alpha A^2 + \frac{5\alpha}{4}$$

mas nestes casos  $A^2 \geq \frac{1}{4}$ , pois  $V_1$  deve ser ímpar.  $\Rightarrow d(\gamma) < 0$ .

$$(iv) F_\gamma = 0 \Rightarrow d(\gamma) = 2 - \alpha A^2 - \sum_{a=0}^2 (2 - \delta_a).$$

Para  $V_1 \geq 2$ ,  $d(\gamma) < 0$ . Por outro lado, não existe  $\gamma$  com  $V_1 = 1$  e  $F_\gamma = 0$ . Consideremos então

$$(iva) V_1 = 0 \Rightarrow d(\gamma) = 2 - \alpha A^2 - \sum_{a \neq 1} (2 - \delta_a)$$

Neste caso, como  $F_\gamma = 0$  e  $V_0$  e  $V_2$  são bi-lineares nos fermions, os gráficos conterão circuitos fechados formados por linhas de fermions. Para  $V_0 > 2$ ,  $d(\gamma) < 0$ .

- 1) Se  $V_0 = 2$ ,  $d(\gamma) \geq -\alpha A^2$ , e os gráficos divergentes têm  $A^2 = 0$ .
- 2) Se  $V_0 = 1$ ,  $d(\gamma) = -(V_2 - 1) - \alpha A^2 + \alpha V_2 < 1 - \alpha A^2$ , e há dois sub-casos:

$V_2$  par: por causa do traço associado ao circuito, como



há um número ímpar de vértices, o grau de divergência baixa de uma unidade  $\Rightarrow d(\gamma) < 0$ .

$$V_2 \text{ ímpar: } \Rightarrow A^2 \geq 1 \Rightarrow d(\gamma) \leq \alpha(V_2 - 1) - V_2 + 1.$$

Um exemplo deste caso está na Fig. 27(b), para o qual  $V_2 = 1$ ; como concluiremos, este é o único sub-gráfico generalizado divergente com  $A^2 \neq 0$ . Para  $V_2 = 3, 5, \dots$ ,  $d < 0$ .

$$3) \text{ Se } V_0 = 0, d(\gamma) = 2 - \alpha A^2 - V_2(1 - \alpha), \quad V_2 \geq 2 \quad (\text{III-71})$$

Para  $V_2 = 2$ , teremos

$$d(\gamma) = -\alpha A^2 + 2\alpha$$

e neste caso,  $A^2 = 0, 4$ . Se  $A^2 = 4$ ,  $d(\gamma) < 0$ . Para  $A^2 = 0$ ,

$$d(\gamma) = 2\alpha \quad (\text{III-72})$$

Este caso, com  $F_\gamma = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $V_2 = 2$ ,  $A^2 = 0$  é o gráfico da Fig. 27(a).

Consideremos agora  $V_2 > 2$  em (III-71):

$$d(\gamma) = 2 + \alpha(V_2 - A^2) - V_2, \quad V_2 > 2 \quad (\text{III-73})$$

Se  $V_2$  é ímpar, então  $A^2 \geq 1$  e

$$d(\gamma) \leq 2 + \alpha(V_2 - 1) - V_2 < 1,$$

mas o grau baixa de uma unidade, por causa do traço.

Se  $V_2$  é par, há os casos:

$$A^2 \neq 0 \Rightarrow A^2 \geq 4, \quad \text{e de (III-73) com } V_2 = 4, 6, \dots$$

$$V_2 > A^2 \Rightarrow d(\gamma) < 2 + V - 4 - V < 0$$

$$V_2 \leq A^2 \Rightarrow d(\gamma) \leq 2 - V_2 < 0$$

Finalmente, para  $A^2=0$

$$d(\gamma) < 2 \quad (\text{III-74})$$

Portanto, em resumo, os sub-gráficos generalizados possivelmente divergentes no intervalo  $0 < \alpha < 1$  podem ser classificados pelo número de linhas externas de fermion do seguinte modo:

(I)  $F_\gamma=2$ : os gráficos tem  $V_0=V_1=A^2=0$ ,  $V_2 \geq 2$ .

(II)  $F_\gamma=0$ : os gráficos tem  $V_0=V_1=A^2=0$  e  $V_2$  par, com exceção do gráfico

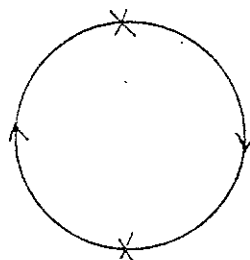


FIG. 32

com  $V_1=V_2=A^2=0$ ,  $V_0=2$ , e do gráfico da Fig. 27(b), que tem  $V_1=0$ ,  $V_0=V_2=A^2=1$ . O gráfico da figura acima é eliminado pelo denominador da fórmula de Gell-Mann-Low.

Quando retiramos a regularização, verificamos que para  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  os únicos sub-gráficos generalizados que se tornam divergentes são aqueles cujas linhas de fermion tinham sido regularizadas, isto é, os gráficos das Figuras 27 e 32; para  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , em adição a estes, há aqueles que correspondem aos casos (ii) e (iv). As singularidades que poderiam ser induzidas pela eliminação da regularização no gráfico 27(b) são canceladas pelo contra-termo (III-60).

Com relação aos gráficos do caso (I), suas contribuições possivelmente divergentes dão zero antes da remoção da regularização, por simetria. Isto ocorre porque tais gráficos tem  $V_2$  par,  $A^2 = 0$ , um número ímpar de linhas de fermion, e o seu grau de divergência superficial é menor que 1, para  $\alpha < 1$ .

Podemos ilustrar este cancelamento com o gráfico

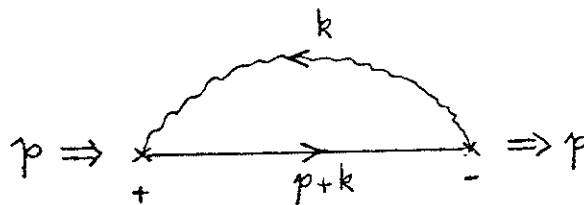


FIG. 33

A sua parte divergente é cancelada por

$$\int d^2k_E \frac{1}{(k_E^2)^{1-\alpha}} \frac{-k_E + M}{k_E^2 + M^2} = M \int d^2k_E \frac{1}{(k_E^2)^{1-\alpha}} \frac{1}{k_E^2 + M^2} \quad (\text{III-75})$$

que permanece finita, mesmo após remover a regularização em  $\alpha$ . Portanto, não há divergências associadas a este tipo de gráficos.

Para a Fig. 27(a) e demais gráficos do caso (II),  $V = V_2$  é par,  $A^2 = 0$ , o número de linhas externas de fermion é zero, e o grau de divergência é menor que 2; um exemplo com  $\tilde{d} = -2 + 4\alpha$  é mostrado

abaixo:

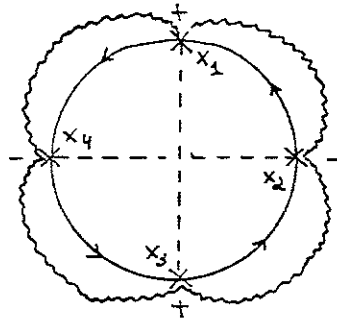


FIG. 34

Pela remoção da regularização, a partir de  $\alpha = \frac{1}{2}$  estes gráficos geram singularidades que podem ser evitadas subtraindo do integrando regularizado os dois primeiros termos de uma série de Taylor nos momentos externos; por covariância, a integral do último termo, antes de tirar a regularização, dá zero. É fácil ver que devido ao fato que  $A=0$ , o denominador da fórmula de Gell-Mann-Low (III-33) dá uma contribuição idêntica ao termo da primeira subtração, eliminando assim as possíveis divergências. Tomemos como um caso concreto a Fig. 34; a sub-integral regularizada que corresponde àquele gráfico, quando ele está contido num gráfico maior, pode ser escrita no espaço de posição como

$$\int \prod_{l=1}^4 dx_l \left\{ e^{2ig\varphi(x_1)} e^{-2ig\varphi(x_2)} e^{2ig\varphi(x_3)} e^{-2ig\varphi(x_4)} : e^{\sum_{j \neq l} 4g^2 \Delta_E(x_j - x_l) (-1)^{j+l}} \right.$$

$$\left. \times \text{Tr} \left[ \prod_{x_1} S_E(x_1 - x_2) \prod_{x_2} S_E(x_2 - x_3) \prod_{x_3} S_E(x_3 - x_4) \prod_{x_4} S_E(x_4 - x_1) \right] \right\} \bar{X}$$

(III-76)

onde  $\Gamma_{x_i}$  é a matriz  $\gamma_{x_i}^5$  ou a identidade, e o fator  $X$  contém os vértices externos ao sub-gráfico em questão. No espaço dos momentos, a subtração do sub-gráfico (contra-termo) é

$$-(2\pi)^2 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \int \prod_{i=1}^7 dR_i I(0, k_i),$$

onde  $I(p, k)$  é o integrando regularizado da Fig. 34. O contra-termo no espaço de posição é

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(2\pi)^8} \int \prod_{j=1}^4 dp_j e^{-i \sum p_e \cdot x_e} (2\pi)^2 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \int \prod_{i=1}^7 dR_i I(0, k_i) = \\ & = -c(g) \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4), \end{aligned}$$

(III-77)

onde

$$c(g) = \int \prod_i dR_i I(0, k_i).$$

Quando o fator entre chaves em (III-76) é substituído pelo contra-termo (III-77), obtemos

$$-\left[ c(g) \int dx_1 \right] X = -c(g) \delta(0) X$$

que é idêntico a um termo proveniente do denominador de (III-33). Portanto, os termos que divergem quando a regularização é removida, são cancelados. Observemos que as distribuições delta contidas nos propagadores de boson (ver (III-51)) dão termos que cancelam as divergências de volume vindas do denominador de (III-33), nos casos em que as "bolhas" correspondem a sub-gráficos convergentes após a remoção da regularização, com  $A \neq 0$ . Este cancelamento não ocorreria se a massa do boson fosse zero, pois neste caso a função de dois pontos do boson não se anula para  $p \rightarrow \infty$ , como ocorre em (III-49).



larização dos propagadores. Para isto, vamos argumentar como se estivessemos fazendo subtrações nos momentos externos. Suponha que  $G$  é um gráfico da função de Green que diverge quando tiramos a regularização, representado como

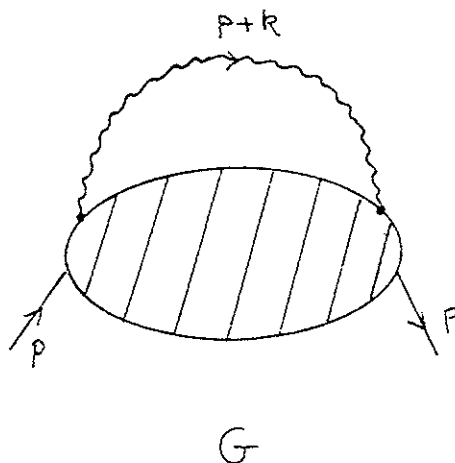


FIG. 35

e que  $\gamma$  é um sub-gráfico que também diverge quando a regularização é removida, obtido cortando a linha de boson destacada:

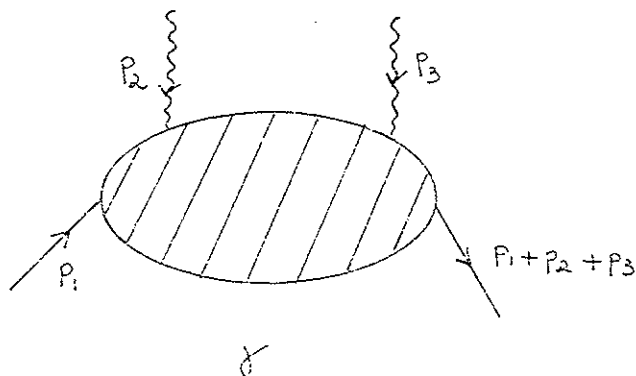


FIG. 36

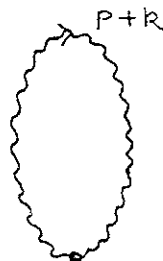


$\gamma$  não é um sub-gráfico generalizado de  $G$ , e  $d(G) \geq d(\gamma)$ . Os termos de subtração regularizados de  $\gamma$  vêm das florestas  $\{G, \gamma\}$  e  $\{\gamma\}$ , e podem ser agrupados como uma soma (escrita simbolicamente)

$$\sum_{\substack{n, m=0 \\ n+m \leq d(\gamma)}} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left[ p^n k^m \left( \frac{\partial^n}{\partial p^n} \frac{\partial^m}{\partial k^m} I_\gamma \right)_{p=0=k} \right] \left[ I_{G/\gamma}(p, k) \text{ - termos de subtração} \right],$$

(III-78)

Por causa da regularização, cada fator entre colchetes dá uma integral finita; ainda, como  $I_{G/\gamma}$  corresponde a



a integral regularizada sobre  $k$  do último fator deve ser independente de  $p$ . Se esta integral é efetuada antes da remoção da regularização, ela dá zero, e portanto (III-78) se anula.

A situação é mais simples quando o sub-gráfico  $\gamma$  é formado cortando uma ou mais linhas tracejadas. Neste caso, os termos de subtração de  $\gamma$  que, regularizados, dão integrais convergentes, estão multiplicados por  $I_{G/\gamma}$ , o qual contém fatores da forma



As integrais sobre estes circuitos dão zero, por causa do comportamento a curtas distâncias dos propagadores dos bosons:

$$\int d^2k \tilde{F}_+(k_E^2) = F_+(0) = 0,$$

onde  $F_+(x)$  representa o propagador e  $e^{-\beta\Delta_E(x)}$ ,  $\beta > 0$ . Portanto, os possíveis termos de subtração novamente dariam zero, se a regularização não é removida antes de efetuar todas as integrais. Os sub-gráficos podem também ser obtidos cortando linhas de fermions; neste caso, se o gráfico  $G$  não é da mesma classe que o gráfico da Fig. 34,  $\gamma$  será convergente pois  $d(\gamma) = d(G) - 1$ ; se  $G$  é da mesma classe que o gráfico da Fig. 34,  $\gamma$  conterá linhas de fermion externas e poderá ser ou não um vértice generalizado; se ele não for um vértice generalizado, os mesmos argumentos servem para mostrar que suas subtrações dariam contribuições nulas.

Extendendo estas considerações para sub-gráficos obtidos pela amputação arbitrária de linhas em gráficos generalizados, podemos verificar que eles não geram novas interações. Assim, para que a teoria seja finita no intervalo  $0 < \alpha < 1$ , é suficiente

introduzir o contra-termo (III-60). Portanto, no intervalo considerado, a teoria é renormalizável. Para  $\alpha = 1$ , os propagadores de boson desenvolvem singularidades não integráveis, e o tratamento apresentado perde o sentido. Para  $\alpha > 1$ , a teoria é não renormalizável, pois neste caso  $\delta_2 > 2$  e, à medida que o número de vértices  $V_2$  aumenta, teremos gráficos que serão arbitrariamente divergentes após a remoção da regularização.

Vamos provar agora o resultado adiantado no final da Seção III-1, isto é, que as funções de Green Euclidianas do modelo de Rothe-Stamatescu são finitas para  $g^2 < 2\pi$ . Nesta situação, o grau de divergência (III-64) torna-se

$$d(\gamma) = 2m(\gamma) - n_F - 2n_B - \alpha A^2 + \frac{\alpha}{4} V$$

pois  $v_2=v_0=0$  e  $v_1=v$ . Aqui,

$$A^2 = \left( \frac{r_1 - \rho_1}{2} \right)^2,$$

$$V = r_1 + \rho_1$$

$$n_F \leq \frac{V}{2}$$

e portanto,

$$d(\gamma) \leq 2 - \frac{3}{2}V + \frac{\alpha}{4}V$$

de modo que  $d(\gamma) < 0$  implica

$$\frac{\alpha}{4} < \frac{3}{2} - \frac{2}{V}, \quad v \geq 2$$

e desta relação vemos que para

$$\alpha < 2 \quad \text{ou} \quad g^2 < 2\pi$$

as integrais de convolução Euclidianas do modelo sem perturbação na massa são finitas.

### III.3) EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E IDENTIDADES DE WARD

Nesta seção, serão deduzidas as equações de movimento e as identidades de Ward satisfeitas pelas funções de Green Euclidianas.

As funções de Green Euclidianas, na teoria perturbada, são dadas por

$$\langle 0|T Z|0\rangle = \frac{{}^{(0)}\langle 0|T Z^{(0)} \exp\left(\int \mathcal{L}_{eFM}^{(0)}(x) d^2x_E\right)|0\rangle^{(0)}}{{}^{(0)}\langle 0|T \exp\left(\int \mathcal{L}_{eFM}^{(0)}(x) d^2x_E\right)|0\rangle^{(0)}} \quad (\text{III.79})$$

onde

$$Z = \prod_{i=1}^{N'} \phi(x_i) \prod_{j=1}^N \bar{\phi}(y_j) \prod_{k=1}^L \psi(z_k),$$

$$Z^{(0)} = \prod_{i=1}^{N'} \phi^{(0)}(x_i) \prod_{j=1}^N \bar{\phi}^{(0)}(y_j) \prod_{k=1}^L \psi^{(0)}(z_k), \quad (\text{III.80})$$

com

$$\phi^{(0)}(x) = : e^{-ig \delta_x^5 \varphi^{(0)}(x)} : \psi_f(x), \quad (\text{III.81})$$

$$\mathcal{L}_{eFM}^{(0)} = -M \left( : e^{-2ig \delta_x^5 \varphi^{(0)}(x)} : - 1 \right) : \bar{\psi}_f \psi_f : (x) \quad (\text{III.82})$$

e  $\phi^{(0)}$  é um campo livre. Com o único objetivo de deduzir as equações que se seguirão, vamos modificar a correspondência entre os

propagadores e as linhas dos gráficos de Feynman que decorrem da expansão de (III.79), da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{c} x \\ \text{~~~~~} \\ y \end{array} & \iff \exp [g^2 \rho_x \rho_y \gamma_x^5 \gamma_y^5 \Delta_E(x-y)] \\
 \begin{array}{c} x \\ \text{~~~~~} \\ x \\ \text{~~~~~} \\ y \end{array} & \iff \exp [2g^2 \rho_x \rho_y \gamma_x^5 \gamma_y^5 \Delta_E(x-y)] \\
 \begin{array}{c} x \\ \times \\ \text{~~~~~} \\ \times \\ \text{~~~~~} \\ y \end{array} & \iff \exp [4g^2 \rho_x \rho_y \gamma_x^5 \gamma_y^5 \Delta_E(x-y)] \\
 \begin{array}{c} x \\ \text{-----} \\ y \end{array} & \iff \Delta_E(x-y) \\
 \begin{array}{c} x \\ \text{-----} \\ y \end{array} & \iff S_E(x-y)
 \end{array}$$

(III.83)

onde  $s_x, s_y = \pm i$ . Para os gráficos da expansão de (III.79),  $s_V = -i$ , para qualquer vértice  $V$  associado a uma exponencial. O caso  $s_V = i$  ocorrerá na dedução da equação de movimento do fermion, que passamos a expor:

#### A) Equação de Movimento do Fermion

A função de Green

$$\langle 0 | T \phi(x) \bar{Z} | 0 \rangle, \quad (III.84)$$

onde em  $Z, N' = N - 1$ , pode ser representada como

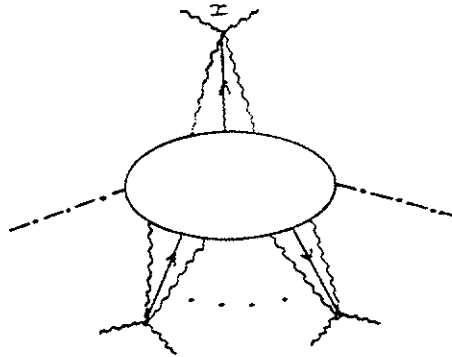


FIG. 37

na qual as linhas exponenciais com extremidades livres ligam os vértices externos entre si.

Para encontrar a equação de movimento, aplicamos  $-i \not{\partial}_E$  a (III.84), o que equivale no espaço dos momentos a multiplicar por  $\not{p}'_E$ ,  $p$  sendo o momento externo que entra em  $x$ . Escrevendo  $\not{p}'_E = (\not{p}_E + \not{k}_E) - \not{k}_E$ , onde  $p+k$  é o momento através da linha de fermion, o termo  $(-\not{k}_E)$  origina uma contribuição que corresponde no espaço  $-x$  a:

$$-i \langle 0 | T [-i g \gamma^\alpha \gamma_5 \partial_\alpha \varphi(x) \phi(x)] Z | 0 \rangle, \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{III.85})$$

O termo  $(\not{p}_E + \not{k}_E)$  pode ser usado para cortar a linha de fermion da maneira usual. Observe que ao efetuarmos este processo, resulta uma mudança no sinal dos expoentes das linhas onduladas associadas a  $x$ . Escrevendo

$$\not{p}'_E + \not{k}_E = (\not{p}_E + \not{k}_E + M') - M', \quad (\text{III.86})$$

verificamos que o termo entre parêntesis dá origem aos seguintes gráficos:

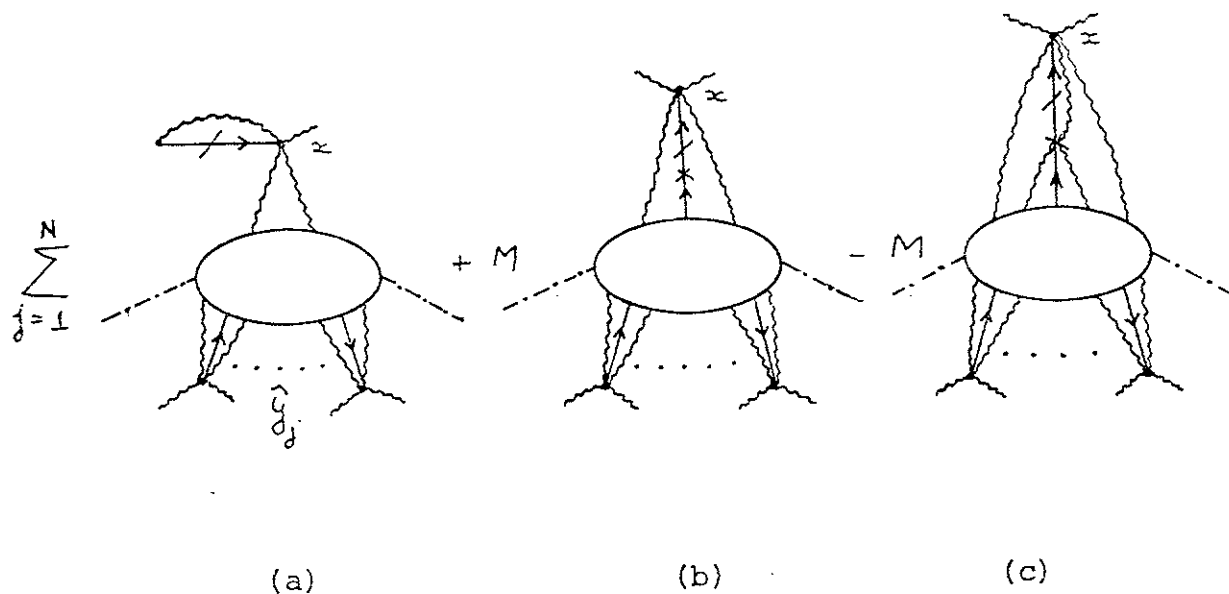


FIG. 38

onde  $s_x = +i$ , e para qualquer outro vértice  $V$ ,  $s_V = -i$ .

Note que, embora sejam de ordens diferentes na perturbação, as contribuições devidas à Fig. 38(b) e ao termo  $(-M)$  no lado direito de (III.86) só diferem pelo sinal. Supondo que seja possível um cancelamento entre termos de ordem diferentes em perturbação (o que a rigor exigiria um estudo a respeito da convergência da série perturbativa) encontramos:

$$-i \partial_E \langle 0 | T \phi(x) \bar{z} | 0 \rangle = g \delta^5 \gamma^a \langle 0 | T \partial_a \psi(x) \phi(x) \bar{z} | 0 \rangle$$

$$-M e^{2g^2 \Delta_E^{(0)}} \langle 0 | T \phi(x) \bar{z} | 0 \rangle + \sum_{j=1}^N (-1)^{N+j} \langle 0 | T \bar{z}_{\partial_j} | 0 \rangle e^{g^2 \Delta_E^{(0)}} \delta(x - y_j) .$$

(III.87)

Lembrando que, por (III.51) podemos escrever

$$e^{2g^2 \Delta_E(0)} = 1 + G_2(0),$$

$$e^{g^2 \Delta_E(0)} = 1 + G_1(0),$$

(III.88)

onde  $G_{1,2}(0)$  são divergentes, e fazendo  $M'=M$ , teremos:

$$(-i\partial_E + M) \langle 0 | T \phi(x) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ g \delta^5 \delta^a \partial_a \psi(x) \phi(x) - M G_2(0) \phi(x) \} \bar{\psi}(0) \rangle$$

$$+ [G_1(0) + 1] \sum_{j=1}^N (-1)^{N+j} \langle 0 | T Z_{j_j} | 0 \rangle \delta(x - y_j).$$

(III.89)

Como o lado esquerdo desta equação é bem definido

as singularidades no lado direito devem cancelar-se, e isto de fato ocorre; os fatores divergentes que aparecem explicitamente em (III.89) são necessários, pois o produto  $\partial_a \phi(x) \phi(x)$  é singular. A título de ilustração, vamos considerar a equação de movimento da função de dois campos,  $\langle 0 | T \phi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ . Em ordem zero de  $M$ , há o seguinte gráfico associado ao 1º termo do lado direito de (III.87):

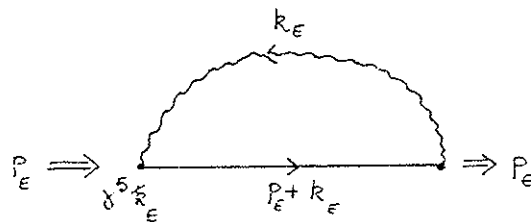


FIG. 39



cujo grau de divergência é  $\alpha$ . Assintoticamente, para  $k_E^2 \rightarrow \infty$ , o fator  $\kappa_E$  pode ser usado para cortar a linha de fermion, e vemos então que a parte divergente deste gráfico cancela-se com o termo  $-G_1(0) \delta(x-y)$  na equação de movimento. Em ordens mais altas, ocorrem gráficos da forma

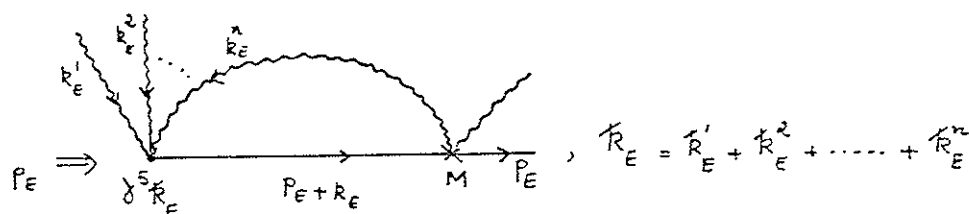


FIG. 40

cuja parte divergente é cancelada por  $-MG_2(0) \langle 0 | T \phi(x) \bar{\phi}(y) | 0 \rangle$ .

B) Equação de Movimento do Boson

Notando que o contra-termo (III-60) cancela completamente os gráficos 27-(b) verificamos que as contribuições para

$$(\partial_E^2 - m^2) \langle 0 | T \varphi(z) \bar{z} | 0 \rangle \quad (N' = N, \text{ em } Z)$$

são da forma

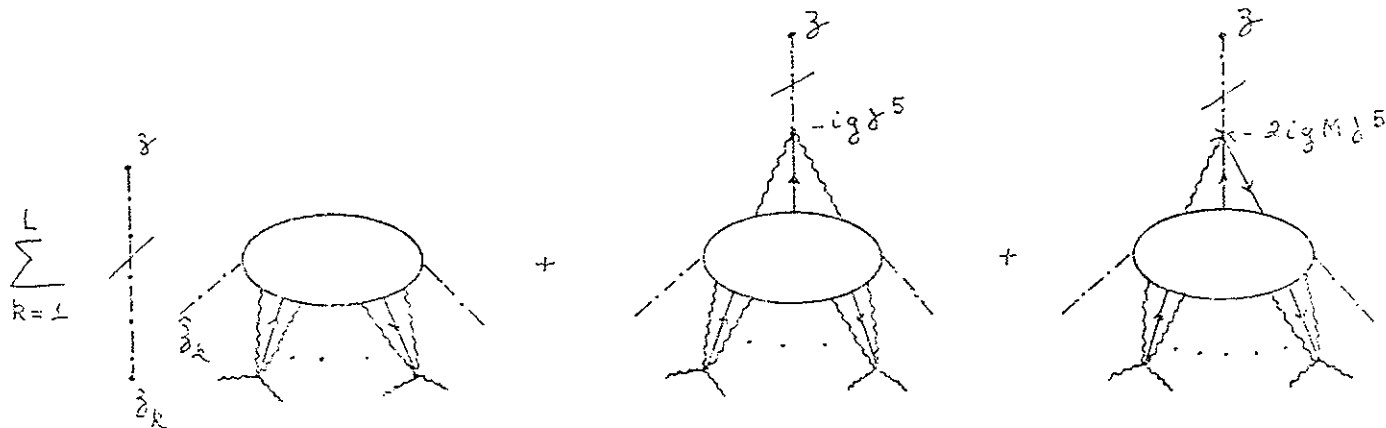


FIG. 41

Portanto

$$\begin{aligned}
 (\partial_E^2 - m^2) \langle 0 | T \varphi(z) \bar{z} | 0 \rangle &= - \sum_{k=1}^L \delta(z - z_k) \langle 0 | T \bar{z}_{z_k} | 0 \rangle \\
 &+ i g \sum_{j=1}^N [\delta(z - x_j) \gamma_{x_j}^5 + \delta(z - y_j) \gamma_{y_j}^{5T}] \langle 0 | T \bar{z} | 0 \rangle - 2i M g \langle 0 | T N[\bar{\phi} \gamma^5 \phi](z) \bar{z} | 0 \rangle .
 \end{aligned}
 \tag{III.90}$$

O produto normal  $N[\bar{\phi} \gamma^5 \phi](x)$  aparecendo em (III.9) é de finido como

$$\langle 0 | T N[\bar{\phi} \gamma^5 \phi](z) \bar{z} | 0 \rangle = \text{P.F.} \frac{\langle 0 | T : e^{-2i g \gamma_z^5 \varphi^{(0)}} :: \bar{\psi}_f \gamma^5 \psi_f : (z) \exp\left(\int \mathcal{L}_{\text{eff}M}^{(0)}(x) d^2x_E\right) \bar{z}^{(0)} | 0 \rangle^{(0)}}{\langle 0 | T \exp\left(\int \mathcal{L}_{\text{eff}M}^{(0)}(x) d^2x_E\right) | 0 \rangle^{(0)}}
 \tag{III.91}$$

onde P.F. é uma prescrição para definir uma parte finita, segundo a qual, subtraímos do operador com ordenação de Wick em (III.91) o seu valor esperado no vácuo, e fazemos as subtrações necessárias para os sub-gráficos divergentes contendo este vértice. Por contagem de potências, as subtrações precisam ser feitas somente para o gráfico da Fig. 27(b), com uma matriz  $\gamma^5$  no vértice com linhas exponenciais

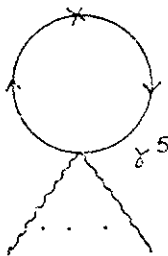


FIG. 42

desde que as divergências devidas aos gráficos

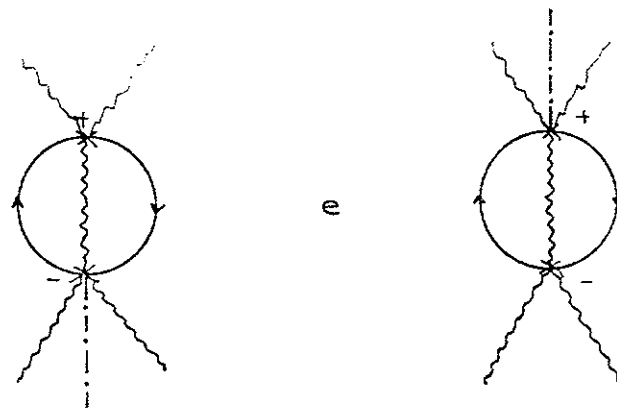


FIG. 43

cancelam-se mutuamente.

### C) Identidades de Ward

Vamos deduzir agora as equações que, por um lado, correspondem à invariância da teoria pelas transformações de gauge de primeira espécie e, por outro lado, mostram a quebra da invariância por transformações  $-\gamma^5$ , devido à presença de um termo de massa do fermion.

A corrente vetorial

$$N[\bar{\phi} \gamma^a \phi](x) \quad a=1,2$$

é definida por uma expressão análoga a (III.91), com  $:e^{-2ig\gamma^5\phi^{(a)}}:$  substituído por  $:\bar{\psi}_f \gamma^a \psi_f:$ . A prescrição P.F. neste caso retira somente o valor esperado no vácuo deste operador. Assim, na expansão gráfica

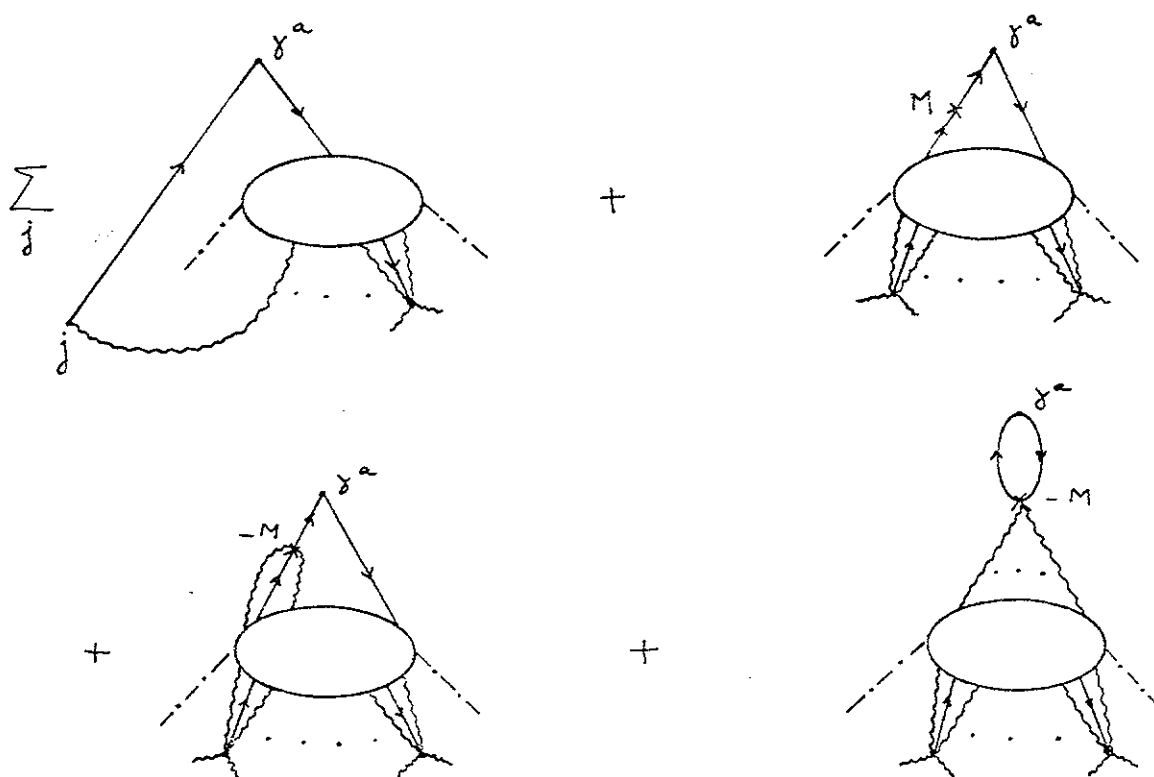


FIG. 44

o único sub-gráfico superficialmente divergente que ocorre é o circuito de fermion no último gráfico, que é logaritmicamente divergente; entretanto, por causa do traço associado, a parte mais singular dá zero.

Decompondo o momento  $p$  que entra no vértice da corrente da maneira habitual

$$p_\epsilon = (p_E + k_E + M) - (k_E + M),$$

onde  $p_E$ , e  $p_E + k_E$  são os momentos através das linhas de fermion, obtemos a identidade de Ward

$$\partial_a \langle 0 | T N [\bar{\psi} \gamma^a \psi](x) Z | 0 \rangle = \sum_{i=1}^N [\delta(x, x_i) + \delta(x, y_i)] \langle 0 | T Z | 0 \rangle,$$

(III.92)

que expressa a invariância pelas transformações de gauge de primei-

ra espécie.

Para a corrente axial,

$$N[\bar{\phi} \gamma^a \gamma^5 \phi](x)$$

definida de maneira análoga à corrente vetorial, a expansão em gráficos é idêntica à mostrada na Fig. 44, com a matriz  $\gamma^a$  substituída por  $\gamma^a \gamma^5$ . Neste caso, porém, a decomposição do momento entra no vértice da corrente é

$$p_E \gamma^5 = (\not{p}_E + \not{k}_E + M) \gamma^5 + \gamma^5 (\not{k}_E + M) - 2M \gamma^5$$

Cortando linhas nos gráficos obteremos do primeiro conjunto de gráficos da Fig. 44 os termos delta usuais, enquanto que os demais gráficos correspondem a termos de quebra da invariância  $\gamma^5$ . Cancelando termos semelhantes como na equação de movimento do fermion, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_a \langle 0|T N[\bar{\phi} \gamma^a \gamma^5 \phi](x) Z|0\rangle &= \sum_{i=1}^N [\delta(x-x_i) \gamma^5_{x_i} + \delta(x-y_i) \gamma^5_{y_i}] \langle 0|T Z|0\rangle \\ &+ 2iM \langle 0|T N^*[\bar{\phi} \gamma^5 \phi](x) Z|0\rangle, \end{aligned}$$

(III.93)

onde a diferença entre as funções de Green contendo  $N^*[\bar{\phi} \gamma^5 \phi]$  e  $N[\bar{\phi} \gamma^5 \phi]$  é devida somente ao gráfico mostrado na Fig. 42 o qual, por causa da subtração, não ocorre em (III.91), e a gráficos da forma

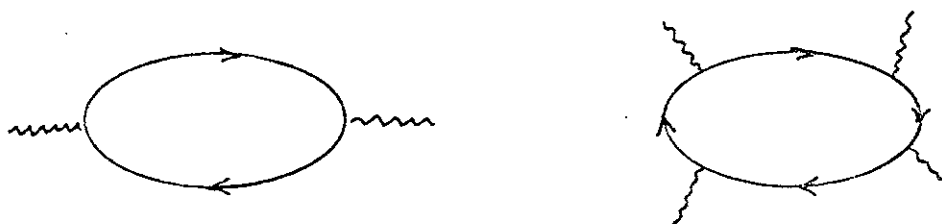


que em (III.91) são eliminados pela ordenação de Wick. Em (III.93) estes gráficos ocorrem no último termo do lado direito, mas suas divergências cancelam-se mutuamente.

## NOTAS DE RODAPE

[1] Nesta fórmula, contamos somente o grau nos momentos de integração  $k$ . Portanto, se  $V_a$  é um vértice ao qual está ligada uma linha externa de boson, sua dimensão é  $\delta_a = 1$ .

[2] No tratamento da eletrodinâmica massiva em quatro dimensões apresentado na ref. (21), a massa do fermion para os gráficos divergentes



é decomposta em uma parte "soft"  $\omega_3$ , e uma parte dura,  $\mu$ :  $M = \omega_3 + \mu$ . As subtrações destes gráficos são efetuadas por meio de operadores de Taylor nos momentos externos  $p_i$ , e na massa do fermion, em torno de  $p_i = 0 = \omega_3$ ; para os demais gráficos, a massa do fermion é inteiramente "soft". Em duas dimensões, somente o gráfico  $\gamma_0$  precisa ser tratado de maneira diferenciada, mas isto não altera de maneira significativa as provas de convergência no infra-vermelho e no ultra-violeta apresentadas em (21).

[3] Por coerência com (B-40), o fator de momento associado a um vértice do qual sai uma linha de boson externa a  $\gamma_\alpha$  deve ser contado em  $d(\gamma_\alpha)$ .

## REFERÊNCIAS

- (1) J.Schwinger; Phys.Rev. 128, 2425 (1962).
- (2) W.Thirring; Ann.Phys. (N.Y.) 3, 91 (1958).
- (3) S.Coleman; Phys.Rev. D11, 2088 (1975).
- (4) J.A.Swieca; em "Solitons and Confinement", aulas na Escola Latino-Americana de Física, Julho 1976.
- (5) B.Schröer e T.Truong; Phys.Rev. D15, 1684 (1977).
- (6) B.Schröer, Fortschr. der Physik 11; 1 (1963).
- (7) K.D.Rothe e O.Stamatescu; Ann.Phys.(N.Y.) 95, 202 (1975).
- (8) T.D.Lee; Nuovo Cimento 59A, 579 (1969).
- (9) P.K.Mitter; Commun.Math.Phys. 20, 251 (1971).  
H.Lehman e K.Pohlmeyer, Commun.Math.Phys. 20, 101 (1971).  
M.K.Volkov; Commun.Math.Phys. 7, 289 (1968) e 15, 69 (1969).
- (10) F.J.Dyson; Phys.Rev. 75, 1736 (1949).
- (11) J.C.Ward; Proc.Phys.Soc., A64, 54 (1951).
- (12) A.Salam; Phys.Rev. 82, 217 (1951).
- (13) N.N.Bogoliubov e O.S.Parasiuk; Acta Math. 97, 227 (1957).
- (14) K.Hepp; Commun.Math.Phys. 2, 301 (1966).
- (15) S.Weinberg; Phys.Rev. 118, 838 (1960).
- (16) W.Zimmermann; Commun.Math.Phys. 11, 1 (1968).
- (17) W.Zimmermann; Commun.Math.Phys. 15, 208 (1969); 1970 Brandeis Lectures, "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Eds. S.Deser, M.Grisaru e H.Pendleton, MIT Press, 1971.

- (18) J.H.Lowenstein; Commun.Math.Phys. 47, 53 (1976).
- (19) M.Gomes e B.Schröer; Phys.Rev. D10, 3525 (1974).
- (20) J.H.Lowenstein; em "Renormalization Theory", eds. G.Velo e A. S.Wightman, D.Reidel Pub.Co., 1976.
- (21) E.Abdalla, M.Gomes e R.Köberle; a ser publicado em Phys.Rev. D; Elcio Abdalla; "Renormalização em Eletrodinâmica Quântica Massiva", tese de Doutorado apresentada ao IFUSP, 1977.
- (22) J.H.Lowenstein; "Lectures on Renormalization Theory"; Universidade de Maryland, 1972.
- (23) J.H.Lowenstein, W.Zimmermann; Commun.Math.Phys. 44, 73 (1975).
- (24) I.M.Gel'fand e G.E.Shilov; "Generalized Functions", Vol. 1, London, 1964.
- (25) J. H. Lowenstein e W. Zimmermann; Nucl. Phys. B86, 77 (1975) e referências ali citadas.
- (26) Y. P. Lam; Phys. Rev. D6, 2145 (1972), e D6, 2161 (1972).
- (27) M. Gomes e J. H. Lowenstein, Phys. Rev. D7, 550 (1973).