

N.T. 634

MODELO SIGMA NÃO LINEAR ACOPLADO À
SUPERGRAVIDADE EM 1+1 DIMENSÕES

SBI-IFUSP



305M810T0634

RADU S. JASINSCHI

Tese de Doutoramento
apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo,
sob a orientação do Prof. Dr. Elcio Abdalla.



J.V. Hanby
José Freire

Onur Akhmet

Elcio Abdalla

São Paulo - Março de 1983

530.142

439 m

D
e. L

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Jasinski, Radu Serban
Modelo sigma não linear acoplado à supergravidade em I+I dimensões. São Paulo, 1983.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Teoria das partículas elementares e campos.

Unitermos: 1. Modelo I+I dimensional.
2. Supergravidade. 3. Modelo de cordas.

USP/IF-B09/83

A memória de
Cornelia Russu.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradecer ao Prof. Elcio Abdalla pela orientação estimulante e segura, bem como à Cristina Batoni Abdalla e ao Antonio Lima Santos pelas horas de aprendizado junto dispendidas.

Agradeço também aos Professores R.Aldrovandi, L. Faddeev, H. Fleming, M.O.C. Gomes, G.'t Hooft, T. Regge, P. Srivastava, C. Teitelboim e B. De Witt pela paciência com que se dedicaram a responder às minhas perguntas.

Ao Instituto de Física e ao Centro International de Física Teórica (Trieste) pela ajuda de custo recebida para que pudesse participar da Escola de Verão de Supersimetria e Supergravidade (06 à 18 de Setembro de 1982).

Ao CNPq (de Março de 1980 até Agosto de 1981) e à FAPESP (de Setembro de 1981 até Março de 1983) pela ajuda financeira indispensável.

Ao eficiente trabalho de datilografia de Izabel T. Yokomizo.

RESUMO

O modelo σ não linear supersimétrico em $1+1$ dimensões é acoplado à supergravidade. Ao quantizarmos a teoria, os campos de matéria adquirem massa dinamicamente, o que ocasiona a quebra da invariança de Weyl. Este fato implica em que as funções de dois pontos do Gravitino e do Graviton, obtidas a partir da ação efetiva, não sejam triviais. Em particular a função de dois pontos do Gravitino apresenta um polo no infravermelho. Nós conjecturamos que este polo está ligado com o confinamento dos graus de liberdade supersimétricos da teoria. Isto porque, ao restringirmos o domínio de integração de x_1 à uma medida finita L (quebrando as invarianças da teoria), aparece na função de dois pontos do Gravitino um termo de massa, que decresce exponencialmente em função de L . Neste contexto relacionamos este modelo com o da corda supersimétrica e definimos um critério de estabilidade para a mesma.

ABSTRACT

The nonlinear σ supersymmetric model in 1+1 dimensions is coupled to supergravity. When we quantize the theory, the matter fields acquire mass dynamically, which leads to the breaking of the Weyl invariance. This fact implies that the two point functions of the Gravitino and the Graviton, obtained from the effective action, become non trivial. Particularly, the two point function of the Gravitino presents a pole in the infrared region. We conjecture that this pole is related to the confinement of all supersymmetric degrees of freedom of the theory. If we restrain the integration domain of x_1 to a finite length L (breaking all invariances of the theory), there appears a mass term in two point function of the Gravitino, which decreases exponentially with L . In this context we relate this model with that of the supersymmetric string and define a stability criteria for the latter.

ÍNDICE

	Página
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. CORDAS DUAIS	
I. Corda Bosônica.....	9
II. Corda com Spin.....	19
3. TEORIA DE CAMPO	
I. Obtenção das Condições das Cordas Bosônica e Fermiônica a partir de uma Teoria de Campo.....	26
II. Modelo σ Não-Linear Supersimétrico.....	39
a) Modelo de Gross-Neveu, σ não linear $O(N)$ e σ não linear $O(N)$ com supersimetria global...	39
b) Modelo σ não linear com supersimetria local: obtenção da ação efetiva.....	42
c) Expansão $1/N$: geração de massa, termos quadráticos nos campos e vértices em ordens superiores à $O(1)$	48
d) Análise do comportamento da expressão $\left[\Gamma_{\mu\nu}^{\overline{G}/G} \right]^{-1}$ no regime infravermelho.....	75
e) Modelo CP^{N-1} acoplado à supergravidade.....	77
4. CONJECTURAS A RESPEITO DA CORDA FINITA.....	85
5. COMENTÁRIOS FINAIS.....	92

APÊNDICES

A - Notações.....	95
B - Prova de Invariança da Ação (3.63) por TSSL.....	96
C - Formulário para a Aplicação da Regularização Dimensional.....	104
D - Gráficos de Feynman.....	106
E - Demonstrações da Forma dos Propagadores de G_μ e c.	117
F - Fechamento da Álgebra.....	119
G - Fixação de Calibre.....	133
H - Demonstrações das Expressões (3.121) e (3.122)....	134
REFERÊNCIAS.....	144

1. INTRODUÇÃO

A física dos modelos 1+1 dimensionais em teoria de campos revelou um conjunto de propriedades e técnicas que, apesar de estarem ligadas com a dimensionalidade do espaço-tempo, indicam caminhos a serem trilhados no estudo da estrutura da matéria. Modelos de teoria de campos em 3+1 dimensões, que se supõem descreverem processos físicos fundamentais, não são exatamente solúveis, sendo necessário a adoção de esquemas perturbativos.

A especificidade de modelos 1+1 dimensionais consiste em que muitos deles são exatamente solúveis^(37,38,39), ou mais simples. Este fato possibilita o estudo de certas propriedades tais como a estrutura do vácuo, configurações não triviais e o confinamento, de forma explícita.

Depois da unificação do eletromagnetismo com as interações fracas e da prova da renormalizabilidade de teorias de calibre⁽⁴⁰⁾ passou-se a acreditar que eles possam constituir instrumentos vitais a fim de se descrever as interações fundamentais. No caso específico das interações fortes, a cromodinâmica quântica surge como um forte candidato à teoria física, isto porque, entre outras propriedades apresenta liberdade assintótica e é renormalizável. Por outro lado o esquema perturbativo só é aplicável no regime de grandes energias, o confinamento dos quarks não é explicado sen-

do assumido ad hoc e não existe um mētodo para a obtenção da matriz S exata.

Os modelos 1+1 dimensionais σ não linear com simetria interna global $O(N)$ e CP^{N-1} prestaram um grande auxílio na tentativa de solução deste problemas. No que se refere ao problema de obtenção de uma matriz S exata descobriu-se^(41,42) que ambos os modelos possuem um conjunto de infinitas cargas locais e não locais conservadas, de forma que a conservação da primeira carga não local quântica⁽⁴³⁾ implica na fatorização da matriz S. No caso de simetria $O(n)$ foi possível a obtenção de uma matriz S exata^(44,45) e para $SU(N)$ de mētodos para o estudo das anomalias^(46,47). Em particular, o modelo CP^{N-1} ⁽²⁶⁾ possue uma estrutura especialmente rica, pois além de apresentar liberdade assintótica, geração dinâmica de massa, transmutação dimensional e soluções tipo instanton ele exibe uma força atrativa de longo alcance entre seus campos fundamentais, isto é, os confina.

No caso geral dos modelos σ não lineares mos trouxe, ao nível clássico, existir um conjunto de propriedades em comum com o modelo de Yang-Mills em 3+1 dimensões⁽⁴⁸⁾.

A complexidade das interações fortes consiste no fato de que existe um conjunto bastante grande e diverso de fenômenos a serem descritos, desde a força nuclear, passando pelas ressonâncias, até a própria descrição da estrutura das partículas ditas elementares. Particularmente, as ressonâncias, foram estudadas pelos modelos de cordas duais^(1,2,3). Estes modelos conseguem reproduzir as chamadas trajetórias de Regge, que estabelecem uma relação entre o momento angular total e o quadrado da massa da ressonância. Por outro lado as cordas duais apresentam alguns problemas desde estruturais até conceituais. O primeiro deles é o estado de tachion que

existe tanto no caso da corda bosônica como no do modelo de corda com spin de Neveu e Schwarz⁽⁶⁾. O segundo problema consiste no fato de que o espaço de Hilbert dos estados físicos não contém estados de norma negativa apenas quando a dimensionalidade do espaço-tempo de imersão for menor ou igual à 26, para o caso da corda bosônica, e 10 para a corda com spin. De forma mais geral, os modelos bosônico e com spin somente são quantizados se esta dimensionalidade for igual à 26 e 10 respectivamente. Surge a questão da interpretação do papel destas dimensões adicionais em modelos físicos, que mesmo com o esquema da redução dimensional em teoria de campos e especialmente no caso de teorias com supergravidade, ainda está em aberto. Neste sentido podemos citar o exemplo do modelo do tipo Kaluza-Klein⁽⁵⁰⁾ que pretende unificar a gravitação com as outras interações. Nele, o mundo físico pode possuir mais que quatro dimensões, ou seja D, sendo que as restantes D-4 dimensões são espontaneamente compactificadas à ordem de grandeza da distância de Planck ($\sim 10^{-33}$ cm).

A supersimetria global em 3+1 dimensões foi proposta, entre outros, por Wess e Zumino⁽⁵¹⁾ em 1973, mas já em 1971 Gervais e Sakita⁽⁸⁾ descobriram uma simetria entre bóson e férnion no modelo de corda dual com spin. Esta simetria, chamada de transformação de supercalibre, é definida em relação às variáveis que parametrizam a superfície descrita pela corda. A supersimetria global possui como característica o fato de que a sua aplicação duas vezes seguidas equivale à uma translação. Esta propriedade nos indica que ao tornarmos esta simetria local teremos, no lugar da translação, uma transformação geral de coordenadas. Por sua vez, isto equivale a dizer que a simetria local contém em sua estrutura a gravitação, o que

nos leva a chamá-la de supergravidade. Para escrever uma teoria de supergravidade é necessário adicionar à ação que descreve a gravitação dada pela teoria de Einstein-Cartan, a ação dos parceiros supersimétrico do Graviton (nome adotado para descrever o campo gravitacional quântico, mas também usado para o caso clássico). Em 1976 Nieuwenhuizen, Freedman e Ferrara propuseram uma teoria de supergravidade em que o Gravitino, com spin 3/2, desempenha o papel de parceiro supersimétrico do Graviton de spin 2. Foi a primeira vez em física que se conseguiu acoplar um campo de spin 3/2 à gravitação e de forma mais geral à matéria, consistentemente⁽²⁵⁾.

O surgimento da supergravidade representou uma nova esperança na tentativa de solução do problema da quantização da gravitação. Este problema é tão complexo que existem vozes discordantes quanto à necessidade de se proceder à sua quantização. Mas levando-se em conta que, em alguma escala de energia, a gravitação tenha que ser quantizada, pode-se mostrar⁽³¹⁾ que apenas a sua teoria pura (sem a presença de nenhum outro campo) é finita à ordem de 1 loop. Neste sentido, a supergravidade mostrou ser uma teoria mais bem comportada no ultravioleta do que a gravitação (quântica), já que, mesmo com a presença de campos de matéria, ela é, no máximo, logarithmicamente divergente⁽²⁵⁾.

A vantagem da teoria com, sobre aquela sem supersimetria local consiste em que ela apresenta entre outros, gráficos envolvendo o Gravitino que somados aos outros, já presentes na gravitação simples, dão amplitudes menos divergentes ou até finitas, no ultravioleta. A supergravidade possibilitou também, pela primeira vez, a obtenção de uma teoria unificada envolvendo a gravitação e que é finita até a ordem de 1

loop. Esta teoria é definida no contexto da supergravidade extensa, na qual os geradores de supersimetria possuem graus de liberdade internos representados pelo grupo global $SO(N)$. Especificamente neste caso, $N=8$. Além da simetria $SO(8)$ esta teoria possui uma simetria local $SU(8)$, o que a torna um forte candidato à teoria unificada⁽⁴⁹⁾.

Voltando às cordas, perguntamos qual poderia ser o seu papel no que se refere à unificação de todas as interações. Também, em que escala de energia seria adequado descrever os fenômenos físicos por meio de objetos extensos e não apenas puntuais? O fato de que a corda fechada, constituindo um estado ligado de cordas abertas, contém em seu espectro um estado sem massa e de spin 2⁽⁵⁾ e que no limite de pequenas energias é descrito pela ação da gravitação de Einstein⁽⁵³⁾, nos mostra que os modelos de cordas duais podem representar um papel relevante no contexto da unificação das interações. Já a corda aberta, no mesmo limite de baixas energias, foi mostrada⁽⁵²⁾ ser equivalente à teoria de Yang-Mills. Mais recentemente, Schwarz^(21,22,54) mostrou que o limite de baixas energias de um modelo de corda aberta com spin é dado pela teoria de Yang-Mills supersimétrica extensa $N=4$ e que o modelo de corda fechada com spin é representado, neste limite, pela teoria de supergravidade extensa $N=8$. Podemos concluir que, tendo em vista estes resultados, os modelos de corda podem representar uma generalização dos modelos de teoria de campos, descrevendo as interações fundamentais. Assim; à curtíssimas distâncias, as cordas seriam os objetos relevantes para a discussão dos fenômenos físicos.

A corda descreve, através de seu movimento no espaço-tempo de imersão D dimensional, uma superfície para-

metrizada por duas variáveis. Sua ação relativística é invariante por reparametrização destas variáveis, bem como no caso da corda com spin, ela é invariante por transformação de supercalibre. Tendo em vista a determinação das equações de movimento das funções bosônica e fermiônica, podemos restringir a teoria, para um modelo 1+1 dimensional envolvendo um campo bosônico e outro fermiônico. Foi através desta observação que Deser e Zumino⁽¹¹⁾ obtiveram as chamadas condições da corda com spin. Eles partiram de uma ação descrevendo um campo bosônico e fermiônico livres, em 1+1 dimensões, com supersimetria global. A seguir, ao tornar a supersimetria local obtiveram uma ação invariante também pela transformação geral de coordenadas, de Lorentz local, Weyl e Superweyl. Em particular, a simetria por transformação de Weyl possibilita escrever todas as condições da corda com spin, tomando o espaço-tempo da teoria como plano e o Gravitino nulo. Isto significa que, ao escrever as equações de movimento do campo bosônico, fermiônico, Gravitino e Graviton, obtemos as quatro condições da corda com spin.

Pelo fato de que a teoria de Deser e Zumino tem invariança de Weyl, não existe, ao nível clássico, uma supergravidade em 1+1 dimensões, já que as ações dos campos livres do Gravitino e Graviton são nulas. Foi somente a partir do trabalho de Polyakov⁽¹³⁾ que se pôde concluir que existe, de forma não trivial, uma supergravidade em 1+1 dimensões. Entre outros resultados, ele mostrou que o procedimento de quantizar a teoria introduz, através do ponto de renormalização um parâmetro massivo na teoria. Isto quebra a invariança de Weyl, permitindo o aparecimento do Graviton e Gravitino na ação efetiva.

Nossa proposta é a de estudar a supergravidade em 1+1 dimensões num modelo que exibe quebra de simetria de Weyl. O modelo é não linear, em geral, exibe uma geração dinâmica de massa para seus campos constituintes. Ao realizarmos o acoplamento do modelo é não linear supersimétrico à supergravidade teremos uma teoria que, quanticamente, apresenta uma quebra na simetria de Weyl. Este fato, possibilita o estudo das funções de dois pontos do Gravitino e do Graviton, a partir da ação efetiva, obtida por meio da integração funcional nos campos bosônico e fermiônico. O propagador do Gravitino apresenta um polo no infravermelho o que equivale à ter uma força confinante, em 1+1 dimensões. Interpretamos este confinamento como sendo de todos os graus de liberdade supersimétricos da teoria. Por outro lado, como a teoria apresenta expansão $1/N$, podemos calcular, em cada ordem de $1/\sqrt{N}$, a respectiva função de n pontos. Até a ordem mais baixa, todas as funções são finitas no ultravioleta, o que representa o cancelamento de termos divergentes devido à supersimetria do modelo. Já para ordens superiores aparecem funções que são divergentes. Isto torna a teoria não renormalizável.

Finalmente, tendo em vista o polo no infravermelho do propagador do Gravitino, restringimos o domínio de integração da variável x_1 à uma medida finita, quebrando a simetria por transformação de Lorentz. Pensamos que este procedimento nos leva a ter uma corda aberta, cujo elemento constitutivo é massivo (o que não ocorre, nos modelos usuais de corda, já que tanto a função bosônica como a fermiônica não tem massa). A fim de estudarmos a mudança que esta restrição de domínio apresenta na forma da função de dois pontos de Gravitino, recalcularmos a sua expressão para as componentes $(0,0)$

e (1,1). Concluimos que, em adição ao termo referente ao domínio infinito de integração de x_1 (polo no propagador do Gravitino), aparece um outro termo que depende do comprimento da corda. Isto equivale a ter um termo de massa para o Gravitino. Ele decresce exponencialmente à medida que o comprimento da corda aumenta, o que constitue um critério de estabilidade da corda porque apenas no caso em que este comprimento for infinito é que ocorre uma força de longo alcance.

Na sequência, capítulo 2, damos uma rápida apresentação dos modelos de cordas duais bosônico e com spin. A seguir, no capítulo 3, tratamos do acoplamento do modelo não linear à supergravidade e obtemos a ação efetiva a partir da qual calculamos as funções de n partes do Gravitino e do Graviton.

Estudamos a corda aberta, associada ao nosso modelo, no capítulo 4 e finalmente no capítulo 5, tecemos comentários finais.

2. CORDAS DUAIS

I. CORDA BOSÔNICA

Os modelos de cordas duais representaram nos anos 70 um novo alento ao estudo das interações fortes. Em particular, as ressonâncias pareciam poder ser descritas pelas chamadas trajetórias de Regge, que podem ser obtidas como uma consequência direta da estrutura destes modelos.

Historicamente o primeiro destes modelos é o da corda dual bosônica, descrita apenas por uma variável escalar. Em geral, a corda consiste em um objeto unidimensional que descreve, por meio de seu movimento, uma superfície bi-dimensional parametrizada pelas variáveis τ - que constitue o tempo próprio e σ - parametriza, a um dado instante, os pontos da corda. Esta superfície está imersa num espaço de D dimensões, chamado espaço de imersão. Em relação à este espaço se descreve cada ponto da corda por uma função $\phi_\mu(\tau, \sigma)$ que constitue uma variável vetorial no espaço de imersão ($\mu = 1, \dots, D$).

A ação relativística da corda bosônica⁽¹⁾ é dada pela área da superfície descrita pela corda:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[(\dot{\phi}^\mu \dot{\phi}_\mu')^2 - \dot{\phi}_\mu^2 \dot{\phi}_\mu'^2 \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

onde α' é uma constante com a dimensão de inverso do quadrado de massa,

$$\dot{\phi}_\mu \equiv \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \tau} \quad \dot{\phi}'_\mu \equiv \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \sigma} \quad (2.2a)$$

e

$$\dot{\phi}_\mu^2 \geq 0 \quad \dot{\phi}'_\mu^2 \leq 0 \quad (2.2b)$$

Particularmente a condição (2.2b) implica em que a corda não pode se deslocar à uma velocidade maior do que a da luz e que:

$$\left[(\dot{\phi}_\mu \dot{\phi}'_\mu)^2 - \dot{\phi}_\mu^2 \dot{\phi}'_\mu^2 \right] \geq 0 \quad (2.2c)$$

Usando a notação:

$$(T^0, T^1) = (\tau, \sigma)$$

definimos o seguinte tensor métrico bi-dimensional:

$$g_{\alpha\beta} = - \partial_\alpha \phi^\mu \partial_\beta \phi_\mu \quad (2.3)$$

o que nos permite reescrever (2.1) como:

$$S = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[- \det g \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

Esta ação possue⁽²⁾, particularmente, uma in-

variança em relação à reparametrização das variáveis τ^0 e τ^1 , indicada por:

$$\tilde{\tau}_i \rightarrow \tilde{\tilde{\tau}}_i = \tilde{\tilde{\tau}}_i(\tau^0, \tau^1) \quad (2.5)$$

A sua equação de movimento é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \phi'_\mu} = 0 \quad (2.6)$$

que é suplementada pela condição nos seus extremos:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'_\mu} = 0 \quad \text{para} \quad \sigma = 0, \pi \quad (2.7)$$

onde $L = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[-\det g \right]^{1/2}$ (2.8)

A corda bosônica possue uma quantidade de movimento total dada por:

$$P^\mu = \int_c \left[d\sigma P_\tau^\mu + d\tau P_\sigma^\mu \right] \quad (2.9)$$

onde c constitue uma curva que conecta os extremos da corda e

$$P_\tau^\mu = - \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\mu} \quad P_\sigma^\mu = - \frac{\partial L}{\partial \phi'_\mu} \quad (2.10)$$

Esta quantidade de movimento é conservada:

$$\frac{\partial p^{\mu}}{\partial \tau} = 0 \quad (2.11)$$

Também definimos um momento angular total

$$M_i^{\mu\nu} = p_i^\mu \phi^\nu - p_i^\nu \phi^\mu, \quad i = \tau, \sigma \quad (2.12)$$

conservado:

$$\frac{\partial M_{\tau}^{\mu\nu}}{\partial \tau} + \frac{\partial M_{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.13)$$

Podemos usar a liberdade de escolha de um sistema de eixos para parametrizar a superfície descrita pela corda e escrever, em termos da métrica $g_{\alpha\beta}$, que:

$$g_{01} = 0 \quad (2.14a)$$

e

$$g_{00}, g_{11} \neq 0 \quad (2.14b)$$

Esta escolha consiste em tomarmos a parametrização ortogonal dada por:

$$\dot{\phi}^\mu \phi_\mu' = 0 \quad (2.15)$$

Como o traço de $g_{\alpha\beta}$ é nulo, escrevemos que

$$\dot{\phi}_\mu^2 + \dot{\phi}_\mu'^2 = 0 \quad (2.16)$$

Nesta parametrização teremos uma simplificação da forma da

equação de movimento, que passa a ser escrita como

$$\ddot{\phi}_\mu - \phi''_\mu = 0 \quad (2.17)$$

bem como da condição nos extremos da corda

$$\dot{\phi}'_\mu = 0 \quad \text{para} \quad \sigma = 0, \pi \quad (2.18)$$

Finalmente os momentos P_τ^μ e P_σ^μ são dados por

$$P_\tau^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{\phi}^\mu \quad \text{e} \quad P_\sigma^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{\phi}'^\mu \quad (2.19)$$

As equações (2.17/18) nos permitem descrever a solução geral para ϕ_μ :

$$\begin{aligned} \phi_\mu(\tau, \sigma) = & q_{\mu 0} + 2\alpha' p_{0\mu} \tau - i(2\alpha')^{1/2} \times \\ & \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n,\mu}^*(0)e^{int} - a_{n,\mu}(0)e^{-int}}{n^{1/2}} \right) \cos n\sigma \right] . \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a operação com * consiste em se tomar o complexo conjugado.

A condição de ortogonalidade da parametrização junto com a de nulidade do traço de $g_{\alpha\beta}$ implica, ao nível quântico, na existência de uma infinidade de operadores que satisfazem à uma álgebra (definida a seguir). Assim, em primeiro lugar, extendendo o domínio de σ de $[0, \pi]$ para $[-\pi, \pi]$, tal que

$$\dot{\phi}_\mu(\tau, -\sigma) = \dot{\phi}_\mu(\tau, \sigma) , \quad (2.21a)$$

e

$$\phi_{\mu}^{\prime}(\tau, -\sigma) = -\phi_{\mu}^{\prime}(\tau, \sigma) , \quad (2.21b)$$

temos que

$$(\phi_{\mu}^{\prime} + \dot{\phi}_{\mu})^2 = 0 \quad \text{para} \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi \quad (2.22)$$

ou em termos de solução geral (2.20)

$$4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-in(\tau+\sigma)] L_n = 0 \quad (2.23)$$

onde

$$L_n = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}^{\mu} \alpha_{m,\mu} = 0 \quad (2.24)$$

e

$$\alpha_0^{\mu} = 2\alpha' p_0^{\mu} ; \alpha_n^{\mu} = (2\alpha')^{1/2} n^{1/2} a_n^{\mu} ; \alpha_{-n} = \alpha_n^* \quad (2.25)$$

Particularmente, no caso de $n=0$, temos a condição de conservação de massa dada por

$$L_0 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m^{\mu*} \alpha_{m,\mu} = 0 ; \quad (2.26a)$$

ou em termos de a_m^{μ} , reescrevemos esta condição como

$$\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m a_m^{\mu*} a_{m,\mu} + \alpha' p^2 = 0 \quad (2.26b)$$

Assim temos a equação:

$$M^2 (= p^2) = -\frac{1}{2\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m a_m^\mu a_{m,\mu}^* \quad (2.27)$$

que permite determinar o espectro da teoria.

Para quantizarmos a teoria, no formalismo covariante, impomos

$$[a_n^\mu, a_m^{+\nu}] = -g^{\mu\nu} \delta_{m,n}, \quad (2.28a)$$

$$[q_0^\mu, p_0^\nu] = -i g^{\mu\nu}, \quad (2.28b)$$

e

$$[\phi^\mu(\tau, \sigma), P_\tau^\nu(\tau, \sigma')] = -i g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.28c)$$

o que implica na existência de um espaço de Hilbert com métrica indefinida, já que os estados excitados são dados por:

$$\prod_n a_{n,\mu n}^{+\lambda} |0\rangle \quad (2.29)$$

e $a_{n,\mu n}^+$ satisfaz à (2.28a).

Agora podemos definir os operadores L_n , ao nível quântico, como sendo da forma

$$L_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\sigma e^{-in\sigma} :P^2(e^{i(\tau+\sigma)}):, \quad (2.30)$$

onde a operação $: :$ consiste em se tomar o ordenamento normal, e

$$P_\mu(z) = p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} [a_{n,\mu}^+ z^n + a_{n,\mu} z^{-n}], \quad (2.31)$$

com

$$Z = e^{i(\tau+\sigma)} \quad . \quad (2.32)$$

L_n , assim definido, satisfaz à álgebra de Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12} n(n^2-1)\delta_{m,-n} \quad (2.33)$$

Analogamente às condições (2.24) define-se, quanticamente, (no sentido fraco)

$$[L_n - \alpha(0)\delta_{n,0}] |\psi_2\rangle = 0 \quad \forall n \geq 0 \quad , \quad (2.34a)$$

e

$$\langle\psi| [L_{-n} - \alpha(0)\delta_{n,0}] = 0 \quad \forall n \geq 0 \quad , \quad (2.34b)$$

onde a introdução de $\alpha(0)$ se faz necessária para compensar a indeterminação quântica do operador L_0 .

Um dos aspectos mais importantes deste modelo de corda bosônica consiste na sua capacidade de, quanticamente, reproduzir uma relação entre o momento angular total J e o quadrado da massa M^2 . Particularmente, no caso de uma corda rígida girante pode-se mostrar⁽²⁰⁾, partindo-se da definição do momento angular (2.12), que

$$J = \alpha' M^2 \quad . \quad (2.35)$$

Quanticamente, devido às condições (2.34a/b), modificamos (2.38) para

$$J = \alpha(0) + \alpha' M^2 \quad (2.36)$$

Esta expressão mostra que o espectro das ressonâncias pode ser descrito pelas trajetórias de Regge. De forma mais geral isto lança luz sobre a idéia de que a estrutura dos hadrons possa ser inteligível a partir de modelos de corda. A idéia de se encarar o modelo de cordas como descrevendo a estrutura hadrônica perde consistência devido ao aparecimento de vários resultados negativos. Um deles⁽²⁾ consiste no fato de que a teoria só apresenta ausência de estados de norma negativa se $D=26$ e $\alpha(0)=1$. Outro resultado negativo aparece devido ao fato de que a relação:

$$\left[M^{i-}, M^{j-} \right] = \frac{2}{p^{+2}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) - \alpha(0) \right) \right] \times \\ \times (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_m^j \alpha_{-m}^i) \quad (2.37)$$

onde

$$M_{i-} = \frac{1}{2} (q_i p_- + p_- q_i) - q_- p_i - i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^- - \alpha_n^- \alpha_{-n}^i) \quad (2.38a)$$

e

$$u_{\pm} = (\sqrt{2})^{-1} (u_0 \pm u_1) \quad (2.38b)$$

só fecha a sua álgebra se $D=26$ e $\alpha(0)=1$, o que implica em que a teoria não é covariante para D e $\alpha(0)$ arbitrários. Também, pela expressão (2.36), se $J^2=0$ então $M^2 = -\alpha(0)/\alpha'$ o que corresponde à um tâquion. Finalmente⁽³⁾, de forma mais geral, existe uma dificuldade em se adequar de forma mais precisa o espectro das ressonâncias às trajetórias indicadas por (2.36).

A corda dual bosônica fechada^(4,5) é obtida juntando-se as extremidades da corda aberta. Assim é necessário que seja satisfeita a relação

$$\phi_\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = \phi_\mu(\tau, \sigma) . \quad (2.39)$$

A sua ação é

$$S = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ d\sigma L \right\} , \quad (2.40)$$

onde L é dada por (2.8). A solução geral para este modelo, satisfazendo (2.39), consiste em

$$\phi_\mu(\tau, \sigma) = q_\mu + p_\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} (\exp - i n \tau) / n \left[\alpha_{n,\mu} \cos n \sigma + \bar{\alpha}_{n,\mu} \sin n \sigma \right] . \quad (2.41)$$

Quanticamente se impõem as condições:

$$L_n |\psi\rangle = \bar{L}_n |\psi\rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad (2.42a)$$

$$(L_0 - \bar{L}_0) |\psi\rangle = 0 \quad (2.42b)$$

e

$$(L_0 + \bar{L}_0 - \alpha(0)) |\psi\rangle = 0 \quad (2.42c)$$

Este modelo é livre de estados de norma negativa apenas se $D=26$ e $\alpha(0)=2$. O fato de $\alpha(0)=2$ implica em que existe um estado com massa nula e spin 2 que corresponde ao Graviton.

Isto nos mostra que, apesar de existirem resultados negativos, os modelos de corda poderiam descrever modelos unificados da matéria incluindo a gravitação^(21,22).

II. CORDA COM SPIN

Em 1971 Neveu, Schwarz e Ramond^(6,7) elaboraram modelos de corda com spin. Eles são obtidos, partindo da corda bosônica, pela introdução em cada ponto da mesma de uma quantidade fermiônica representada por uma variável de Grassmann, hermiteana, a duas componentes:

$$\psi_{\mu}^{(T)} = \begin{pmatrix} \psi_{1,\mu}^{(T)} \\ \psi_{2,\mu}^{(T)} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Define-se a corda com spin através das seguintes condições⁽²⁾:

$$\partial^i \partial_i \phi_{\mu}(\tau, \sigma) = \square \phi_{\mu}(\tau, \sigma) = 0 \quad (2.44a)$$

$$\gamma^i \partial_i \psi_{\mu}(\tau, \sigma) = 0 \quad (2.44b)$$

$$\partial_i \phi^{\mu} \partial_j \phi_{\mu} + \frac{1}{4} \bar{\psi}^{\mu} (\gamma_i \partial_j + \gamma_j \partial_i) \psi_{\mu} = \lambda(T) \eta_{ij} \quad (2.44c)$$

$$\gamma^i \gamma^j \partial_i \phi^{\mu} \psi_{\mu} = 0 \quad (2.44d)$$

$$\partial_1 \phi_{\mu} = 0 \quad \text{para} \quad T^1 = 0, \pi \quad (2.44e)$$

$$\psi_1(T^0, 0) = \psi_2(T^0, 0) \quad (2.44f)$$

$$\psi_1(T^0, \pi) = \epsilon \psi_2(T^0, \pi), \quad \epsilon = \pm 1 \quad (2.44g)$$

onde os índices i, j são associados às variáveis de parametrização da superfície τ e σ , tal que $(T^0, T^1) = (\tau, \sigma)$. O tensor métrico η^{ij} é dado por:

$$\eta^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

e as matrizes γ_i , bi-dimensionais, são dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

e satisfazem à relação:

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\eta^{ij} \quad (2.47)$$

Se, nas equações (2.46), tomarmos $\psi_\mu = 0$, iremos obter as condições da corda bosônica, tratada anteriormente. De outro lado, devido à existência de graus de liberdade fermiônicos, os modelos de corda com spin possuem um novo tipo de simetria que, à época (1971) se denominou de simetria de supercalibre, dada por:

$$\delta\phi_\mu(T) = i\bar{\alpha}(T)\psi_\mu(T) \quad (2.48a)$$

$$\delta\psi_\mu(T) = \partial_i \phi_\mu(T) \gamma^i \alpha(T) + F_\mu(T) \alpha(T) \quad (2.48b)$$

$$\delta F_\mu(T) = i\bar{\alpha}(T) \gamma^i \partial_i \psi_\mu(T) \quad (2.48c)$$

onde o spinor bi-dimensional e infinitesimal $\alpha(T)$ satisfaz à relação:

$$(\gamma_i \partial_j + \gamma_j \partial_i - n_{ij} \gamma^\ell \partial_\ell) \alpha(T) = 0 \quad (2.49)$$

e F_μ é uma função escalar auxiliar (fechamento da álgebra da simetria) cuja equação de movimento é dada por $F_\mu = 0$.

Historicamente foram Gervais e Sakita⁽⁸⁾ os primeiros a introduzirem na literatura o conceito de transformação de supercalibre, no contexto das cordas duais. Mais tarde, em 1973, Wess e Zumino⁽⁹⁾, construiram um modelo que tinha a supersimetria (que difere das transformações de supercalibre no sentido em que ela é definida no espaço-tempo, no caso 4 dimensional, ao passo que a de supercalibre age sobre quantidades definidas em relação às variáveis que parametrizam a superfície descrita pela corda, superfície esta imersa num espaço-tempo D dimensional) como uma simetria global.

Além desta simetria, as condições (2.44a-d) possuem uma invariança relativamente à transformação de reparametrização das variáveis T^i :

$$T^i \rightarrow \tilde{T}^i(T^0, T^1) \quad (2.50)$$

onde \tilde{T}^i satisfaz à:

$$\partial_i \tilde{T}_j + \partial_j \tilde{T}_i - n_{ij} \partial^\ell \tilde{T}_\ell = 0 \quad (2.51)$$

As soluções gerais que satisfaçam (2.44a-g) são dadas por ϕ_μ (na forma (2.20)) e ψ_μ :

$$\psi_{\mu}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\mu} \exp[-in(T^0 + T^1)] \quad (2.52a)$$

e

$$\psi_{\mu}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\mu} \exp[-in(T^0 - T^1)] \quad (2.52b)$$

sendo que $c_{-n,\mu} = c_{n,\mu}^*$. No caso em que $\epsilon = +1$ em (2.46g) n é somado no conjunto de números inteiros e se $\epsilon = -1$ no conjunto dos números semi-inteiros.

Para compatificar a forma das soluções (2.52a/b) em uma única expressão, extendemos o domínio de σ de $[0, \pi]$ para $[-\pi, \pi]$, de tal forma que:

$$\Psi_{\mu}(T^0, T^1) = \psi_{\mu}^{(1)}(T^0, T^1) \text{ para } \sigma \in [0, \pi] \quad (2.53a)$$

e

$$\Psi_{\mu}(T^0, T^1) = \psi_{\mu}^{(2)}(T^0, -T^1) \text{ para } \sigma \in [-\pi, 0] \quad (2.53b)$$

Desta forma, temos para Ψ_{μ} :

$$\Psi_{\mu}(J) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\mu} \exp[-in(T^0 + T^1)] \quad (2.54)$$

definido para $\sigma \in [-\pi, \pi]$. De forma análoga, fazendo o mesmo para ϕ_{μ} , definimos $\Phi_{\mu}(T)$ para $\sigma \in [-\pi, \pi]$. Assim reescrevemos a condição (2.44d) como:

$$(\partial_0 + \partial_1) \Phi_{\mu}(T) \cdot \Psi_{\mu}(T) = 0 \quad (2.55)$$

Usando (2.20) e (2.31) temos para (2.55):

$$P^\mu \Psi_\mu = 0 \quad (2.56)$$

Analogamente, reescrevemos a condição (2.44c):

$$P^2 + i\Psi^\mu (\partial_0 + \partial_1) \Psi_\mu = 0 \quad (2.57)$$

Para se quantizar o modelo, no esquema covariante, postulam-se as seguintes relações:

$$[\Phi^\mu(T^0, T^1), \partial_0 \Phi^\nu(T^0, T^{1'})] = -\pi g^{\mu\nu} \delta(T^{1'} - T^1) \quad (2.58a)$$

e

$$\{\Psi^\mu(T^0, T^1), \Psi^\nu(T^0, T^{1'})\} = -\pi g^{\mu\nu} \delta(T^{1'} - T^1) \quad (2.58b)$$

Isto implica em escrevermos para os coeficientes $c_{n,\mu}$ (2.52a/b):

$$\{c_n^\mu, c_m^\nu\} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \quad (2.59)$$

No caso em que $\epsilon = +1$ e $n > 0$ c_n^μ constituem operadores de aniquilação e se $n < 0$ de criação. De (2.59) podemos deduzir que, para $n=0$, c_0^μ é proporcional à matriz γ^μ , que satisfaz à relação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.60)$$

Define-se, desta maneira:

$$c_0^\mu = \frac{1}{2} \gamma^\mu \quad (2.61a)$$

$$c_n^\mu = \frac{\gamma_5}{\sqrt{2}} d_n^\mu \quad (2.61b)$$

e

$$c_{-n}^\mu = \frac{\gamma_5}{\sqrt{2}} d_n^{\mu+} \quad (2.61c)$$

onde

$$\{d_n^\mu, d_m^{\nu}\} = -g^{\mu\nu} \delta_{m,n} \quad (2.62)$$

tal que $\gamma_5^2 = 1$; para $D/2$ par

$$\gamma_5 = i \pi_{\mu=0}^{D-1} \gamma^\mu \quad (2.63a)$$

e $D/2$ ímpar

$$\gamma_5 = \pi_{\mu=0}^{D-1} \gamma^\mu \quad (2.63b)$$

Escrevendo ψ_μ em termo dos operadores $d_{\mu,n}$, temos:

$$\psi^\mu = \frac{i}{2} \left[\gamma^\mu + i\sqrt{2} \gamma_5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[d_n^{\mu+} z^n + d_n^\mu z^{-n} \right] \right] \quad (2.64)$$

com

$$z = \exp i(T^0 + T^1)$$

A função $\Gamma^\mu = \frac{2}{i} \psi^\mu$ consiste no campo originariamente introduzido por Ramond⁽⁷⁾ como uma generalização das matrizes γ^μ .

Por outro lado se $\epsilon = -1$ define-se os opera-

dores de criação b_n^μ e aniquilação $b_n^{\mu+}$, tais que

$$c_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_n^\mu - b_n^{\mu+}) \quad (2.65a)$$

$$c_{-n}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_n^{\mu+} - b_n^\mu) \quad (2.65b)$$

e

$$c_0^\mu = 0 \quad (2.65c)$$

Estes operadores satisfazem à relação

$$\{b_n^\mu, b_m^{\nu}\} = -g^{\mu\nu} \delta_{m,n} \quad (2.66)$$

Em termos dos $b_{n,\mu}$'s escrevemos Ψ_μ como:

$$\Psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1/2}^{+\infty} [b_n^{\mu+} z^n + b_n^\mu z^{-n}] \quad (2.67)$$

De forma análoga ao modelo de corda bosônica, constroem-se para os modelos de Ramond e Neveu-Schwarz uma álgebra (obtida com elementos que satisfazem (2.56), ao nível quântico) bem como uma superálgebra (condição (2.57)). Também, estes modelos só podem ser quantizados adequadamente se $D=10$ e $\alpha(0)=1$.

3. TEORIA DE CAMPO

I. OBTENÇÃO DAS CONDIÇÕES DAS CORDAS BOSÔNICA E FERMIÔNICA A PARTIR DE UMA TEORIA DE CAMPO

A função $\phi_\mu(T^0, T^1)$ que indica a posição da corda bosônica em relação ao espaço de imersão, atua como sendo um campo escalar em relação às transformações de reparametrização das variáveis (T^0, T^1) que descrevem a superfície bi-dimensional, gerada pelo movimento da corda. Neste sentido, podemos entender o índice μ como sendo "interno", de tal forma que as condições da corda bosônica, dadas por

$$\partial_a^\mu \partial_a \phi_\mu = \square \phi_\mu = 0 , \quad (3.1a)$$

$$\partial_a \phi^\mu \partial_b \phi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c^\mu \phi^\mu \partial_c \phi_\mu = 0 , \quad (3.1b)$$

$$\partial_1 \phi_\mu = 0 \quad \text{para} \quad T^1 = 0, \pi , \quad (3.1c)$$

possam ser obtidas por meio de uma teoria de campo em que ϕ_μ é um campo escalar definido em 1+1 dimensões espaço-temporal. Assim, omitindo o índice μ , escrevemos a ação de um campo escalar em 1+1 dimensões, acoplado à gravidade, como:

$$S = \int dx^2 \sqrt{-g} \left\{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} R \right\} . \quad (3.2)$$

Esta é invariante pela transformação geral de coordenadas (TGC), que consiste em:

$$\delta^{TGC} \phi = \eta^c \partial_c \phi \quad (3.3a)$$

$$\delta^{TGC} g_{\mu\nu} = g_{kv} \partial_\mu \eta^k + g_{\mu k} \partial_v \eta^k + \eta^k \partial_k g_{\mu\nu} \quad (3.3b)$$

sendo η^k um parâmetro infinitesimal.

Minimizando esta ação em relação a $g_{\mu\nu}$ e ϕ , respectivamente, temos:

$$\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi = 0 \quad (3.4a)$$

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] = 0 \quad (3.4b)$$

Em 1+1 dimensões, o termo $\sqrt{-g} R$ constitui uma divergência total e a métrica $g_{\mu\nu}$ (devido à invariança de Weyl - descrita a seguir) pode ser colocada sob a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana de Minkowski. Este fato implica que (3.4a) e (3.4b) tomem as formas:

$$\partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \phi \partial_c \phi = 0 , \quad (3.6a)$$

$$\text{e} \quad \partial^a \partial_a \phi = \square \phi = 0 \quad (3.6b)$$

respectivamente. Estas expressões são idênticas às condições (3.1a) e (3.1b) da corda bosônica. Isto nos mostra de que uma teoria de campo 1+1 dimensional, em que ϕ_μ é considerado um campo escalar formalmente acoplado à gravidade, descreve as condições da corda bosônica.

Para incorporar neste formalismo graus de liberdade fermiônicos é necessário que a teoria de campo 1+1 dimensional seja supersimétrica. Isto porque dadas as condições que determinam a corda com spin:

$$\gamma^a \partial_a \psi = 0 \quad (3.7a)$$

$$\partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{i}{4} \bar{\psi} [\gamma_a \partial_b + \gamma_b \partial_a] \psi = \eta_{ab} \lambda(T) \quad (3.7b)$$

$$\gamma^a \gamma^b \partial_a \phi \psi = 0 \quad (3.7c)$$

acrescido de (3.1a) e condições para os extremos da corda, só é possível obter, particularmente (3.7b) e (3.7c), se a teoria de campos 1+1 dimensional, que determina estas condições, for formalmente acoplada à supergravidade⁽¹¹⁾. Assim partimos da seguinte ação⁽¹¹⁾:

$$S_0 = \int dx^2 \left[-\frac{1}{2} (\partial_a \phi)^2 - \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right] \quad (3.8)$$

que é invariante por transformação de supersimetria global (TSSG), dada por:

$$\delta \phi(x) = i \bar{\epsilon} \psi(x) \quad (3.9a)$$

$$\delta \psi(x) = \gamma^a \epsilon \partial_a \phi(x), \quad (3.9b)$$

onde ε é um spinor real bi-dimensional e infinitesimal. As equações de movimento de ϕ e ψ são:

$$\partial_a^a \partial_a \phi = \square \phi = 0 \quad (3.6b)$$

$$\gamma^a \partial_a \psi = 0 \quad (3.10)$$

Vemos que, mesmo sendo a teoria supersimétrica, ela não é a tal ponto completa de modo a poder descrever todas as condições da corda com spin. Para realizar isto, promovemos a simetria dada por (3.9a/b) a uma simetria local, ou seja:

$$\delta \phi(x) = i \bar{\varepsilon}(x) \psi(x) \quad (3.9'a)$$

$$\delta \psi(x) = \gamma^a \varepsilon(x) \partial_a \phi(x) . \quad (3.9'b)$$

Aplicando estas transformações de supersimetria local (TSSL) à ação (3.8) iremos verificar que ela não é mais invariante, já que:

$$\delta S_0 = -i \int dx^2 \partial_a \bar{\varepsilon}(x) J^a(x) \quad (3.11)$$

onde $J^a(x)$ é a corrente de Noether de supersimetria, dada por:

$$J^a(x) = \gamma^b \gamma^a \partial_b \phi(x) \psi(x) . \quad (3.12)$$

A fim de eliminar a presença de termos contendo $\partial_a \varepsilon(x)$ na variação da ação, introduzimos na teoria um campo de calibre, G_a^α , associado às TSSL, e que se transforma como:

$$\delta^{\text{TSSL}} G_a^\alpha = - \partial_a \varepsilon^\alpha(x) . \quad (3.13)$$

Ele constitue um campo spinorial vetorial, usualmente chamado de Gravitino. Assim, mesmo somando à S_0 o termo

$$S_1 = -i \int dx^2 (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b \phi \psi) \quad (3.14)$$

de tal forma a cancelar, com o uso de (3.13), a expressão δS_0 dada por (3.11), a ação resultante não fica livre da presença de termos contendo $\partial_a \varepsilon(x)$. Isto porque:

$$\delta J^a(x) \Big|_{\partial_a \varepsilon(x)} = i \gamma^b \gamma^a \psi (\partial_b \bar{\varepsilon}(x) \psi) \quad (3.15)$$

Para se contornar este problema, adicionaremos um segundo termo à S_0 da forma (*):

$$S_2 = -\frac{1}{4} \int dx^2 (\bar{\psi} \psi) (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) \quad (3.16)$$

A ação

$$S = \int dx^2 \left[-\frac{(\partial_a \phi)^2}{2} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi - i (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \psi) \partial_b \phi - \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi) (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) \right] \quad (3.17)$$

apesar de não mais conter termos proporcionais à $\partial_a \varepsilon(x)$, quando lhe é aplicada a TSSL, ainda não é invariante por esta simetria. Isto acontece devido ao fato de que a teoria ainda não está completa: falta determinar qual deve ser o parceiro

(*) Fazendo-se uso da transformação de Fierz, dada no apêndice A.

supersimétrico do Gravitino. Para tal, podemos notar que variando ψ na expressão de S_1 (dado por (3.14) temos:

$$\delta^\psi S_1 = -i \int dx^2 \left[\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \gamma^c \epsilon) \partial_c \phi \partial_b \phi \right] \quad (3.18)$$

Uma vez que, em 1+1 dimensões, vale:

$$\gamma^b \gamma^a \gamma^c = -g^{bc} \gamma^a + g^{ba} \gamma^c + g^{ac} \gamma^b \quad (3.19)$$

podemos reescrever (3.18) da seguinte forma:

$$\delta^\psi S_1 = i \int dx^2 \left[(\bar{G}_a \gamma^a \epsilon) \partial^c \phi \partial_c \phi - 2(\bar{G}^b \gamma^c \epsilon) \partial_b \phi \partial_c \phi \right] \quad (3.20)$$

Cancela-se a presença do segundo termo de (3.20) através da introdução na teoria do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, que, por TSSL, se transforma como:

$$\delta g^{\mu\nu} = -2i \left[(\bar{G}^\mu \gamma^\nu \epsilon) + (\bar{G}^\nu \gamma^\mu \epsilon) \right] . \quad (3.21)$$

Este fato nos obriga a escrever o termo $-1/2(\partial_a \phi)^2$, que apareceu em S_0 , na forma:

$$- \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (3.22)$$

A presença de $\sqrt{-g}$ é necessária para cancelar o primeiro termo de (3.20), já que por TSSL ele se transforma como:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 2i (\bar{G}_\mu \gamma^\mu \epsilon) \quad (3.23)$$

A forma da expressão dada por (3.22), que descreve o termo cinético de um campo escalar acoplado ao campo gravitacional, nos indica que, de forma mais geral, sempre que a teoria for invariante por TSSL, é necessário escrevê-la num espaço-tempo curvo. Em geral, calculando-se o comutador de duas TSSL sucessivas aplicadas à um dado campo (de uma teoria supersimétrica) sempre iremos obter, entre outros termos, um termo que corresponde à uma transformação geral de coordenadas. Como exemplo, no caso particular do campo ϕ que se transforma por (3.9'a), temos que:

$$[\delta_1, \delta_2] \phi(x) = 2i(\bar{\epsilon}_2(x)\gamma^\mu\epsilon_1(x))\partial_\mu\phi(x) . \quad (3.24)$$

Para escrever o termo cinético do campo fermiônico num espaço-tempo curvo, definimos o tetrado e_μ^a e seu inverso e_a^μ através das seguintes expressões:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (3.25a)$$

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} \quad (3.25b)$$

sendo que η_{ab} é a métrica plana, de Minkowski. Como as matrizes de Dirac γ_a satisfazem à relação:

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab} \quad (3.26)$$

no espaço-tempo plano, multiplicando (3.26) por e_μ^a e e_ν^b , e usando a definição (3.25a) temos que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

onde

$$\gamma_\mu = e_\mu^a \gamma_a . \quad (3.28)$$

Assim reescrevemos $\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi$, no espaço-tempo curvo, sob a forma:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi . \quad (3.29)$$

O tetrado e_μ^a constitue o parceiro supersimétrico do Gravitino G_μ^α e por TSSL se transforma em:

$$\delta e_\mu^a = 2i(\bar{G}_\mu^\alpha \gamma^\alpha \epsilon) . \quad (3.30)$$

Para o seu inverso temos que:

$$\delta e_a^\mu = -2i(\bar{G}_\mu^\alpha \gamma_\alpha \epsilon) . \quad (3.31)$$

Podemos agora, escrever a ação dada por (3.17), num espaço-tempo curvo, como:

$$S = - \int dx^2 e \left[\frac{1}{2} e_a^\mu e^\nu_a \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \bar{\psi} e_a^\mu \gamma^a D_\mu \psi + i(\bar{G}_\mu^\nu e_b^\mu e_a^\nu \gamma^b \gamma^a \psi) \partial_\nu \phi + \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi) (\bar{G}_\mu^\nu e_b^\mu e_a^\nu \gamma^b \gamma^a G_\nu) \right] \quad (3.32)$$

onde $e = \det e_\mu^a (= \sqrt{-g})$, $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu \gamma_5$ e ω_μ é a conexão de spin.

Como já mencionamos anteriormente, não é possível escrever em 1+1 dimensões, um termo livre para $g_{\mu\nu}$, ou equivalentemente, para e_μ^a . No caso de G_μ^α , o termo ci

nético em D dimensões é dado por:

$$L_{G_\mu} = \frac{1}{2} \bar{G}_\mu \Gamma^{[\mu\nu\lambda]} D_\nu(\omega) G_\lambda \quad (3.33)$$

onde $\Gamma^{[\mu\nu\lambda]}$ constitue o produto de 3 matrizes γ^μ totalmente antisimétrizadas. Em 1+1 dimensões $\Gamma^{[\mu\nu\lambda]}$ é identicamente nulo, já que só existem 2 matrizes γ^μ . Assim, $L_{G_\mu}^{1+1} = 0$. A ação dada por (3.32) além de ser invariante por TSSL e TGC também é invariante por transformação de Lorentz local (TLL), transformação de Weyl e Superweyl. De forma explícita temos invariança por⁽¹²⁾:

a) Transformação geral de coordenadas (TGC)

$$\delta\phi = \eta^k \partial_k \phi \quad (3.34a)$$

$$\delta\psi = \eta^k \partial_k \psi \quad (3.34b)$$

$$\delta G_\mu = \eta^k \partial_k G_\mu + G_k \partial_\mu \eta^k \quad (3.34c)$$

$$\delta e_\mu^a = \eta^k \partial_k e_\mu^a + e_k^a \partial_\mu \eta^k \quad (3.34d)$$

b) Transformação Lorentz local (TLL)

$$\delta\phi = 0 \quad (3.35a)$$

$$\delta\psi = \frac{1}{2} \ell \gamma_5 \psi \quad (3.35b)$$

$$\delta G_\mu = \frac{1}{2} \ell \gamma_5 G_\mu \quad (3.35c)$$

$$\delta e_\mu^a = \ell e_b^a e_\mu^b \quad (3.35d)$$

c) Transformação de supersimetria local (TSSL)

$$\delta\phi = i \bar{\epsilon} \psi \quad (3.36a)$$

$$\delta\psi = (\partial_\mu \phi + i \bar{\psi} G_\mu) \gamma^\mu \epsilon \quad (3.36b)$$

$$\delta G_\mu = - D_\mu \epsilon \quad (3.36c)$$

$$\delta e_\mu^a = 2i(\bar{G}_\mu \gamma^a \epsilon) \quad (3.36d)$$

d) Transformação de Weyl (TW)

$$\delta\phi = 0 \quad (3.37a)$$

$$\delta\psi(x) = -\frac{1}{2} \Lambda(x) \psi(x) \quad (3.37b)$$

$$\delta G_\mu(x) = \frac{1}{2} \Lambda(x) G_\mu(x) \quad (3.37c)$$

$$\delta e_\mu^a(x) = \Lambda(x) e_\mu^a(x) \quad (3.37d)$$

e) Transformação de Superweyl (TSW)

$$\delta\phi = 0 \quad (3.38a)$$

$$\delta\psi = 0 \quad (3.38b)$$

$$\delta G_\mu = \gamma_\mu \xi \quad (3.38c)$$

$$\delta e_\mu^a = 0 \quad (3.38d)$$

onde η^k , ℓ e ϵ^α constituem parâmetros infinitesimais, e ξ um spinor.

O método de se construir uma ação, partindo da

supersimetria global, impondo localidade e a seguir adicionando tanto à ação como às leis de transformação dos campos novos termos constitue uma peculiaridade das teorias acopladas à supergravidade⁽²⁵⁾.

Para mostrarmos que a ação dada por (3.32) reproduz as condições da corda com spin, temos que adotar para G_μ e e_μ^a formas mais simplificadas, o que é possível de ser realizado uma vez que a teoria contém um número muito grande de simetrias.

O campo G_μ pode ser decomposto, em 1+1 dimensões, como:

$$G_\mu = \tilde{G}_\mu + \gamma_\mu \xi \quad (3.39)$$

de tal forma que $\tilde{G}=0$. Como, também em 1+1 dimensões, vale que:

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 , \quad (3.40)$$

podemos escrever para \tilde{G}_μ :

$$\tilde{G}_\mu = \gamma^\nu \gamma_\mu D_\nu \varepsilon . \quad (3.41)$$

Usando (3.36c) e (3.38c) nos autoriza a escolher para G_μ , classicamente, a forma:

$$G_\mu = 0 . \quad (3.42)$$

Analogamente, como em 1+1 dimensões, é verdade que:

$$e_\mu^a (x) = \eta_\mu^a \Lambda(x) , \quad (3.43)$$

então, por meio de (3.37d), temos:

$$e_{\mu}^a = \eta_{\mu}^a \quad . \quad (3.44)$$

O tetrado plano η_{μ}^a e seu inverso η_a^{μ} satisfazem à relação:

$$\eta_{\mu a} \eta_b^{\mu} = \eta_{ab} \quad . \quad (3.45)$$

Desta maneira, para obter a condição (3.7b), da corda com spin, escrevemos, a partir de (3.22), a equação de movimento de e_{μ}^a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \frac{\delta S}{\delta e_{\mu}^a} &= -\partial^{\mu} \phi \partial_a \phi - \frac{1}{2} e_a^{\mu} \partial^{\nu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_a D^{\mu} \psi - \\ &- \frac{i}{2} e_a^{\mu} \bar{\psi} \not{D} \psi + (\text{termos contendo } G_{\mu}) = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Com o uso de (3.44) teremos para (3.46) a seguinte expressão:

$$\left. \frac{1}{e} \frac{\delta S}{\delta e^a} \right|_{e_{\mu}^a = \eta_{\mu}^a} = - \left[\partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_a \partial_b \psi - \eta_{ab} F(\phi, \psi) \right] = 0 \quad (3.47)$$

onde $F(\phi, \psi)$ é uma função de ϕ e ψ . Esta é uma condição (3.7b).

A equação de movimento de G_{μ} é dada por:

$$\frac{1}{e} \frac{\delta S}{\delta G_{\mu}} = - \left[i \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \partial_{\nu} \phi \psi + \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi) \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} G_{\nu} \right] = 0 \quad (3.48)$$

que com o uso dos calibres $G_{\mu} = 0$ e $e_{\mu}^a = \eta_{\mu}^a$ obtemos a condição (3.7c), da corda com spin:

$$\gamma^b \gamma^a \partial_b \phi \psi = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Excetuando-se as condições nos extremos da corda, a obtenção da condição (3.7a) é obtida trivialmente:

$$\frac{1}{e} \left. \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} \right|_{G_\mu=0; e_\mu^a = \eta_\mu^a} = - \frac{i}{2} \not{\partial} \psi = 0 \quad , \quad (3.49)$$

o que completa a proposta inicial de obtermos as condições da corda com spin a partir de uma teoria de campos.

Convém perguntar, neste estágio, que tipo de informação seria possível obter a respeito da corda bosônica ou com spin se forem levados em conta efeitos quânticos. Com "efeitos quânticos" queremos dizer "contribuições quânticas que quebram as invarianças de Weyl e Superweyl". Uma vez quebradas estas invarianças, implica em que tanto o Gravitino como o tetrado não possam ter eliminados todos os seus graus de liberdade. Este fato modifica as condições das cordas de tal forma que possam ocorrer alterações no espectro das mesmas.

Podemos subdividir esta questão em duas partes:

1) É possível escrever, em 1+1 dimensões, um modelo em que os campos constituintes estão acoplados à supergravidade?

2) Em que sentido pode-se aprofundar o estudo das propriedades das cordas, seja bosônica ou com spin, através de um formalismo de teoria de campos. Esta é uma questão ao mesmo tempo geral, complexa, bem como com perspectivas em aberto.

II. MODELO σ NÃO LINEAR SUPERSIMÉTRICO

a) Modelo de Gross-Neveu, σ não linear O(N) e σ não linear O(N) com supersimetria global

Queremos construir um modelo 1+1 dimensional possuindo supersimetria local e que, quanticamente, viole a simetria de Weyl. Sabemos especificamente que o modelo 1+1 dimensional de Gross-Neveu⁽¹⁴⁾, devido à presença do termo quartico de auto-interação, gera massa dinamicamente. Ao nível clássico, este modelo é descrito pela seguinte densidade de lagrangeana:

$$L_\psi = i\bar{\psi}_i \partial^\mu \psi_i + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \quad (3.50)$$

onde ψ_i é um campo fermiônico real de N componentes ($i = 1, \dots, N$). Esta lagrangeana é equivalente à:

$$L_\beta = i\bar{\psi}_i \partial^\mu \psi_i - \frac{1}{2} \beta^2 - g(\bar{\psi}_i \psi_i)\beta \quad (3.51)$$

sendo que β desempenha, classicamente, apenas a função de um campo auxiliar, obedecendo a seguinte equação de movimento:

$$\beta = -g(\bar{\psi}_i \psi_i) \quad (3.52)$$

Ambas as densidades de lagrangeana dadas por (3.50) e (3.51) possuem uma simetria discreta, dada por:

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi \quad (3.53a)$$

$$\beta \rightarrow -\beta \quad (3.53b)$$

Ao nível quântico, calculando o potencial efetivo da teoria, à ordem de 1 "loop"⁽¹⁵⁾, iremos verificar que o verdadeiro vazio da teoria não ocorre para $\beta=0$, mas para:

$$|\beta_M| = \tilde{\beta} \exp\left(1 - \frac{\pi}{\lambda}\right) \quad (3.54)$$

onde a constante λ é dada por $\lambda = g^2 N$. Isto gera para o campo ψ_i uma massa, dinamicamente. Escrevendo:

$$\beta = \beta_0 + \beta_M \quad (3.55)$$

tal que $\langle \beta_0 \rangle = 0$, e colocando esta expressão na lagrangeana L_β dada por (3.51) teremos um termo de massa para ψ_i , da forma:

$$-g \beta_M (\bar{\psi}_i \psi_i) \quad (3.56)$$

com a massa dada por $M_\psi = g\beta_M$.

De outro lado, existe uma classe de modelos 1+1 dimensionais descritos por campos bosônicos, que, devido ao vínculo geométrico imposto à estes campos, geram, quanticamente, massa. Particularmente, podemos citar o modelo σ não linear, descrito pela densidade de lagrangeana:

$$L_\phi = \frac{1}{2} (\partial_a \phi_i) (\partial^a \phi_i) + \frac{1}{2} \alpha (\phi_i^2 - 1) \quad (3.57)$$

onde o campo bosônico ϕ_i , de N componentes, possue uma simetria global $O(N)$. O campo α é um multiplicador de Lagrange e obedece à seguinte equação de movimento:

$$\alpha = \phi_i \square \phi_i \quad (3.58)$$

o que torna o modelo não renormalizável em 3+1 dimensões, por contagem de potências.

A quantização deste modelo usando, por exemplo, integração funcional, e levando-se em conta o vínculo geométrico $\phi_i^2 = 1$, permite que ϕ_i adquira um termo de massa da forma

$$m \phi_i^2 \quad (3.59)$$

Vimos assim, de forma esquemática, que tanto o modelo de Gross-Neveu como o modelo σ não linear com simetria $O(N)$ adquirem, por processos quânticos, massa. Pode-se acoplar estes dois modelos usando o processo de supersimetrização do campo bosônico, mantendo o vínculo geométrico $\phi_i^2=1$ ao nível de supercampo. A ação resultante, obtida por meio deste processo, tem a seguinte forma (17).(*)

$$S = \frac{1}{g^2} \int dx^2 \left[\frac{1}{2} (\partial^a \phi_i)^2 + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i) + \frac{1}{2} F_i^2 \right] \quad (3.60)$$

onde além de ϕ_i e ψ_i , o campo bosônico F_i também tem N componentes. Estes três campos satisfazem aos vínculos:

$$\phi_i^2 = 1 \quad (3.61a)$$

$$\psi_i \phi_i = 0 \quad (3.61b)$$

(*) Ver apêndice A para notações.

$$\phi_i F_i = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_j \psi_j) . \quad (3.61c)$$

A ação possue, além da simetria global $O(N)$, uma supersimetria global, dada por:

$$\delta\phi_i(x) = \bar{\epsilon}\psi_i(x) , \quad (3.62a)$$

$$\delta\psi_i(x) = -i\gamma^a \epsilon \partial_a \phi_i(x) + F_i(x)\epsilon , \quad (3.62b)$$

$$\delta F_i(x) = -i\bar{\epsilon}\beta\psi_i(x) . \quad (3.62c)$$

Antes de tornarmos a supersimetria local, devemos chamar atenção para o fato de que se os vínculos dados por (3.61a/b/c) não fossem impostos, então particularmente $F_i=0$. Neste caso a ação correspondente à expressão (3.60) se reduz àquela dada por (3.8), que constituiu o ponto de partida para Deser e Zumino obterem as condições da corda com spin. É claro que no caso da ação (3.8) os campos bosônicos e fermionicos possuem apenas uma componente. Os vínculos (3.61a/c) são responsáveis, ao nível quântico, pela geração de massa para ϕ_i e ψ_i . Estas massas quebram a simetria conforme da teoria.

b. Modelo σ não linear com supersimetria local: obtenção da ação efetiva

Tendo como ponto de partida a densidade de lagrangeana dada por (3.60) com os vínculos (3.61a/b/c), imposmos às transformações supersimétricas (3.62a/b/c) localidade. Assim, percorrendo os mesmos passos realizados para o caso da ação (3.8), até chegar à forma da expressão da ação dada

por (3.32), obtemos a seguinte ação:

$$S = \frac{N}{2f} \left\{ \int dx^2 e \left[\frac{1}{2} e_a^\mu e^{av} \partial_\mu \phi_i \partial_v \phi_i + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\psi}_i \gamma^a \gamma^b \partial_v \phi_i G_\mu) e_a^\mu e_b^v - \frac{1}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i) (\bar{G}_\mu \gamma^a \gamma^b G_\nu) e_a^\nu e_b^\mu \right] \right\} \quad (3.63)$$

onde f é uma constante. Ela é invariante pelas TSSL^(*), definidas como:

$$\delta \phi_i(x) = \bar{\epsilon}(x) \psi_i(x) \quad (3.64a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_i(x) = & -i(\partial_\mu \phi_i(x) + \bar{G}_\mu(x) \psi(x)) \gamma^\mu \epsilon(x) + \\ & + \frac{1}{2} \phi_i(x) (\bar{\psi}_j \psi_j(x)) \end{aligned} \quad (3.64b)$$

$$\delta e_a^\mu(x) = 2i(\bar{G}^\mu(x) \gamma_a \epsilon(x)) \quad (3.64c)$$

$$\delta G_\mu(x) = -D_\mu \epsilon(x) \quad (3.64d)$$

sendo $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu \gamma_5$. Além da invariança pela TSSL, a ação (3.63) é invariante por Transformação de Lorentz local, Transformação Geral de Coordenadas, Transformação de Weyl e de Superweyl, conforme especificado pelas expressões (3.34 a 3.38).

Uma vez construída a ação (3.63), possuindo su persimetria local, quantizamos a teoria usando o método de integração funcional. Especificamente, depois de escrever o funcional gerador das funções de Green, realizamos a integra

(*) Ver no apêndice B prova de invariança por TSSL.

ção funcional em ϕ_i e ψ_i obtendo como resultado a ação efetiva da teoria.

O funcional gerador das funções das funções de Green, associado à ação dada por (3.63), é definido pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 Z(\bar{J}, \bar{j}_\mu, \bar{\xi}_a^u, \bar{T}) = & K \int_{i,j} \prod_x \left[d\phi_i \right] \left[d\psi_j \right] \left[dG_\mu \right] \left[de_a^u \right] \delta(\psi_i \phi_i) \times \\
 & \times \delta_x \left(\phi_i^2 - \frac{N}{2f} \right) \times \exp i \int dx^2 e \left[\frac{1}{2} e_a^\mu e^{av} \partial_\mu \phi_i \partial_v \phi_i + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu \psi_i + \frac{f}{4N} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + e_a^\mu e_b^\nu (\bar{\psi}_i \gamma^a \gamma^b \partial_\nu \phi_i G_\mu) - \\
 & - \left(\frac{\bar{\psi}_i \psi_i}{4} \right) (\bar{G}_\mu \gamma^a \gamma^b G_\nu) e_b^\mu e_a^\nu + \frac{\bar{J}_i \phi_i}{2} + \frac{\bar{T}_i \psi_i}{2} + \frac{\bar{\xi}_a^u e_u^a}{2} + \\
 & \left. + \frac{\bar{j}^\mu G_\mu}{2} + \text{transposto conjugado} \right] \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

tendo sido rescalonados ϕ_i e ψ_i , da forma:

$$\phi_i \rightarrow \phi_i' = \left(\frac{N}{2f} \right)^{1/2} \phi_i \quad (3.66c)$$

$$\psi_i \rightarrow \psi_i' = \left(\frac{N}{2f} \right)^{1/2} \psi_i \quad (3.66b)$$

A seguir, incorporamos os vínculos à exponencial da ação introduzindo na teoria, campos com o papel de multiplicadores de Lagrange e transformando o termo quârtico em ψ_i num termo quadrático em ψ_i (mais termo quadrático no campo auxiliar) usando a técnica de introdução de um campo auxiliar⁽²⁶⁾. Assim escrevemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi}{x} \delta \left(\phi_i^2 - \frac{N}{2f} \right) (x) \delta(\psi_i \phi_i)(x) \exp \frac{if}{4N} \int dx^2 e^{(\bar{\psi}_i \psi_i)^2} = \\
 & = \int [dc] [\dalpha] [\dbeta] \exp \int dx^2 e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{N}} \left(\phi_i^2 - \frac{N}{2f} \right) + \frac{i}{2\sqrt{N}} \left[(\phi_i c \bar{\psi}_i) + \right.} \\
 & \left. + (\bar{\psi}_i c \phi_i) \right] - \frac{i\sqrt{f}}{N} (\bar{\psi}_i \psi_i) \beta - \frac{i\beta^2}{N}}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Rescalonando-se G_μ da forma:

$$G_\mu \rightarrow G'_\mu = \sqrt{N} G_\mu \tag{3.68}$$

e colocando a expressão (3.67) em (3.65) temos para Z :

$$\begin{aligned}
 Z(\bar{J}, \dots) = K \int_{i,j} \frac{\pi}{x} \left[d\phi_i \right] \dots \exp \int dx^2 e^{\left\{ -\frac{1}{2} \phi_i \Delta_B \phi_i - \right.} \\
 \left. - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \Delta_F \psi_i + \frac{i}{2\sqrt{N}} \bar{\psi}_i \left[c + \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu \partial_\nu \right] \phi_i + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2\sqrt{N}} \phi_i \left[- \bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu + \bar{c} \right] \psi_i - i \frac{\sqrt{N}}{2f} \alpha - \frac{i\beta^2}{N} + \right. \\
 \left. + \text{termos de fontes} \right\} , \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

sendo Δ_B e Δ_F dados por

$$\Delta_B = \frac{i}{e} \partial_\mu \left[e_a^\mu e^a{}^\nu e \partial_\nu \right] - \frac{2i\alpha}{\sqrt{N}}, \tag{3.70a}$$

$$\text{e } \Delta_F = \gamma^a e_a^\mu \partial_\mu + 2i \frac{\sqrt{f}}{N} \beta + \frac{i}{2N} (\bar{G}_\mu \gamma^a \gamma^b G_\nu) e_b^\mu e_a^\nu. \tag{3.70b}$$

A integração funcional é realizada primeiro

ψ_i . Para tal, observamos que

$$-\frac{1}{2} \bar{\psi}_i \Delta_F \psi_i + \frac{i}{2\sqrt{N}} \bar{\psi}_i c' \phi_i + \frac{i}{2\sqrt{N}} \phi_i \bar{c}' \psi_i + \frac{1}{2} \bar{T}_i \psi_i + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i T_i \quad (3.71)$$

onde

$$c' = c + \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu \partial_\nu \quad (3.72)$$

é idêntica a

$$-\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}_i - \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{c}' \phi_i \Delta_F^{-1} - i \bar{T}_i \Delta_F^{-1} \right] \Delta_F \left[\psi_i - \frac{i}{\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} c' \phi_i - i \Delta_F^{-1} T_i \right] \quad (a)$$

$$-\frac{1}{2N} \bar{c}' \phi_i \Delta_F^{-1} \phi_i c' - \frac{1}{2\sqrt{N}} \bar{c}' \phi_i \Delta_F^{-1} T_i - \frac{\bar{T}_i}{2\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} c' \phi_i \quad (b) \quad (c) \quad (d)$$

$$-\frac{1}{2} T_i \Delta_F^{-1} T_i \quad (e) \quad (3.73)$$

Uma vez redefinido ψ_i da forma

$$\psi'_i = \psi_i - \frac{i}{\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} c' \phi_i - i \Delta_F^{-1} T_i \quad (3.74)$$

e calculando a integral funcional, nesta nova variável, resulta em

$$+ \frac{N}{Z} \text{Tr} \log \Delta_F \quad (3.75)$$

Para realizar a integração funcional em ϕ_i , completamos o

termo quadrático, de tal forma que com o uso das expressões (b), (c), (d), (e) de (3.73), termos de fonte e $-\frac{1}{2} \phi_i \Delta_B \phi_i$, temos a relação:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left[\phi_i + \frac{\bar{T}_i}{\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} c' (\)^{-1} - i \bar{J}_i (\)^{-1} \right] (\Delta_B + \frac{1}{N} \bar{c}' \Delta_F^{-1} c') \times \\
 & \times \left[\phi_i + \frac{(\)^{-1}}{\sqrt{N}} \bar{c}' \Delta_F^{-1} T_i - i (\)^{-1} J_i \right] - \\
 & -\frac{1}{2} (\bar{J}_i + \bar{T}_i \frac{\Delta_F^{-1}}{\sqrt{N}} c') (\)^{-1} (J_i + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{\sqrt{N}} T_i) = \\
 & = -\frac{1}{2} \phi_i \Delta_B \phi_i - \frac{1}{2N} \phi_i \bar{c}' \Delta_F^{-1} c' \phi_i + i \frac{1}{2} \bar{J}_i \phi_i + \frac{1}{2} i \phi_i J_i - \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{N}} \bar{c}' \phi_i \Delta_F^{-1} T_i - \frac{\bar{T}_i}{2\sqrt{N}} \Delta_F^{-1} c' \phi_i \tag{3.76}
 \end{aligned}$$

onde $() = (\Delta_B + \bar{c}' \Delta_F^{-1} c' / N)$.

Redefinindo ϕ_i^* como:

$$\phi_i^* = \phi_i + \frac{(\)^{-1}}{\sqrt{N}} \bar{c}' \Delta_F^{-1} T_i - i (\)^{-1} J_i \tag{3.77}$$

e integrando funcionalmente em ϕ_i^* , temos:

$$-\frac{N}{2} \operatorname{Tr} \log \Delta_B \tag{3.78}$$

Podemos concluir que, uma vez realizadas as integrações funcionais em ϕ_i e ψ_i , teremos a seguinte expressão para Z :

$$\begin{aligned}
 Z(\bar{J}, \dots) = & \mathbb{E} \left[\left[dc \right] \left[d\alpha \right] \left[d\beta \right] \left[dG_\mu \right] \left[de_a^\mu \right] \exp \left\{ i S_{ef} + \right. \right. \\
 & + \int dx^2 e \left\{ -\frac{1}{2} \bar{T}_i \Delta_F^{-1} T_i - \frac{1}{2} \left[\bar{J}_i + \bar{T}_i \frac{\Delta_F^{-1}}{\sqrt{N}} c' \right] (\Delta_B + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{N} c') \times \right. \\
 & \left. \left. \times \left[J_i + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{\sqrt{N}} T_i \right] \right\} \right] \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

onde a ação efetiva S_{ef} é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{ef} = & -i \frac{N}{2} \left\{ \text{Tr} \log \left[e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu + 2i \frac{\sqrt{f}}{N} \beta + \frac{i}{2N} (\bar{G}_\mu \gamma^a \gamma^b G_\nu) e_b^\mu e_a^\nu \right] - \right. \\
 & - \text{Tr} \log \left[\frac{i}{e} \partial_\mu \left[e_a^\mu e^{av} e \partial_v \right] - \frac{2i\alpha}{\sqrt{N}} + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{N} c' \right] \left. \right\} - \\
 & - \int dx^2 e \left[\frac{N}{2f} \alpha + \frac{\beta^2}{N} \right] \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

c. Expansão 1/N: geração de massa, termos quadráticos nos campos e vértices em ordens superiores à $O(1)$

A expansão 1/N consiste num esquema perturbativo que, nos últimos anos, se revelou extremamente útil, particularmente em casos onde a constante de acoplamento da teoria não se revela adequada para ser um parâmetro perturbativo. Na cromodinâmica quântica^(27,28,29) a constante de acoplamento g só é pequena na região de grandes energias, sendo possível de se tratar, neste regime, perturbativamente as amplitudes calculadas. Isto já não ocorre no regime de pequenas energias, sendo necessário se pensar no uso de um outro parâmetro perturbativo. 't Hooft sugeriu que se extende esse o grupo local $SU(3)$ das cores para $SU(N)$ tomndo-se

$1/\sqrt{N}$ como parâmetro perturbativo. Quando N se torna grande, então ocorre uma grande simplificação na soma das amplitudes: apenas os gráficos planares são relevantes.

Em se tratando de modelos 1+1 dimensionais, a expansão $1/N$ constitue-se num poderoso elemento de análise, uma vez que devido à transmutação dimensional, a constante de acoplamento da teoria desaparece para dar lugar à massa, gerada dinamicamente.

No caso particular do nosso modelo nós extendemos a expansão $1/N$ de tal forma a incluir processos quânticos gravitacionais⁽³⁰⁾. Desta maneira, escrevemos a ação efetiva como uma série de potências em $N^{-1/2}$:

$$S_{\text{ef}} = \sum_{i=1}^{\infty} N^{1-i/2} S_i \quad (3.81)$$

Os coeficientes desta expansão, S_i , constituem as funções de i pontos de todos os campos que aparecem na ação efetiva. Iremos tratar de forma explícita os termos com $i = 1, 2, 3$ e 4 .

Inicialmente, para $i=1$ vão aparecer contribuições dos campos α , β e tetrado quântico (definido adiante). A menos que estas contribuições se anulem, não será possível usar a expansão $1/N$. Isto acontece devido ao fato de que para $N \rightarrow \infty$ o gerador funcional Z recebe a contribuição de um fator da forma

$$e^{i\sqrt{N} S_1}, \quad (3.82)$$

rapidamente oscilante.

Para tratar do caso da contribuição do campo β , escrevemos a ação efetiva na forma:

$$S_{\text{ef}} = -i \frac{N}{2} \left\{ \text{Tr} \log \left[e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu + 2i \frac{\sqrt{f}}{N} \beta + \dots \right] + \dots \right\} - \int dx^2 e \frac{\beta^2}{N} \quad (3.83)$$

Rescalonando β em β' como:

$$\beta' = \sqrt{\frac{f}{N}} \beta \quad (3.84)$$

e usando o fato de que ele desenvolve, quanticamente, um valor esperado no vácuo não nulo (conforme tratado em (3.55)), temos que:

$$\beta' = \beta'_0 - \sqrt{N} M/2 \quad (3.85)$$

Isto consiste em adicionar ao campo fermiônico ψ_i um termo massivo, conforme pode ser deduzido de (3.83). Levando-se em conta (3.84) e (3.85) reescrevemos (3.83) da seguinte maneira:

$$S_{\text{ef}} = -i \frac{N}{2} \left\{ \text{Tr} \log \left[e_a^\mu \gamma^a \partial_\mu - iM + \frac{2i}{\sqrt{N}} \beta'_0 + \dots \right] - \int dx^2 \frac{e}{f} \left[\beta'^2_0 - \sqrt{N} M \beta'_0 + N \frac{M^2}{4} \right] \right\} \quad (3.86)$$

Tomamos, neste estágio, o tetrado e_μ^a e seu inverso e_a^μ como planos, ou seja $e_\mu^a = \eta_\mu^a$ e $e_a^\mu = \eta_a^\mu$. Temos, desta maneira, que o campo β contribue para S_1 com o termo:

$$S_1^\beta = \sqrt{N} \left[\text{Tr} F^{-1} \beta'_0 + \frac{M}{f} \int dx^2 \beta'^2_0 \right], \quad (3.87)$$

onde

$$F = \gamma^a \partial_a - i M \quad (3.88)$$

A fim de explicitarmos (3.87), no espaço dos momentos, adotamos as seguintes definições:

i) Tomar o traço Tr, entendido como operador, de um produto de elementos 0_i significa escrever:

$$\text{Tr}_i \prod_i 0_i \equiv \text{tr}_i \prod_i \int dx_i^2 \langle x_i | 0_i | x_{i+1} \rangle \quad (3.89)$$

onde o traço (pequeno) tr apenas opera sobre índices spinoriais.

$$\text{ii}) \langle x | F^{-i} | y \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int \frac{dk^2 e^{ik(x-y)}}{k - M - i\epsilon} \quad (3.90a)$$

$$\langle x | B^{-1} | y \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int \frac{dk^2 e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.90b)$$

$$\text{iii}) \psi_i(x) = \int dk^2 e^{ikx} \tilde{\psi}_i(k) \quad (3.91a)$$

$$\tilde{\psi}_i(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx^2 e^{-ikx} \psi_i(x) \quad (3.91b)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } F^{-1} \beta_0' &= \text{tr} \int dx^2 \langle x | F^{-1} | x \rangle \beta_0'(x) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 i} \text{tr} \int dx^2 \int dk^2 \int \frac{dk^2 e^{ik' \cdot x} \beta_0(k')}{k - M + i\epsilon} = \\
 &= \frac{\beta_0'(0)}{i} \text{tr} \int \frac{dk^2 (k+M)}{k^2 - M^2} = 2M \frac{\beta_0'(0)}{i} \int \frac{dk^2}{k^2 - M^2} . \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

A fim de regularizar a integral que aparece em (3.92) no regime ultravioleta, giramos k_μ do espaço de Minkowski (M) ao espaço Euclidiano (E). A saber:

$$\int \frac{dk_M^2}{k_M^2 - M^2} = -i \int \frac{dk_E^2}{k_E^2 + M^2} , \quad (3.93)$$

Depois, restringindo o domínio de integração de k^2 à $[0, \Lambda^2]$, sendo Λ o regulador no ultravioleta, temos:

$$\int \frac{dk_E^2}{k_E^2 + M^2} = \pi \int_0^{\Lambda^2} \frac{d(k_E^2)}{k_E^2 + M^2} = \pi \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} . \quad (3.94)$$

Colocando (3.94) e (3.93) em (3.92), temos:

$$\text{Tr } F^{-1} \beta_0' \Big|_{\text{reg}} = -2M\pi\beta_0'(0) \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} . \quad (3.95)$$

Desta maneira S_1^β é escrito como:

$$S_1^\beta = \sqrt{N} \left[-2M\pi\beta_0'(0) \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} + \frac{M}{f} \beta_0'(0) \right] . \quad (3.96)$$

Ao impormos o anulamento de S_1^β , teremos que:

$$\frac{1}{f} = 2\pi \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} \quad (3.97)$$

Por outro lado, a contribuição do campo α à S_1 é dada por:

$$S_1^\alpha = -\sqrt{N} \left[\text{Tr } B^{-1} \alpha + \frac{1}{2f} \int dx^2 \alpha \right] \quad (3.98)$$

onde

$$B = - \left[\square + m^2 \right]. \quad (3.99)$$

Procedendo de forma análoga ao caso de β , teremos que:

$$\frac{1}{f} = 2\pi \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (3.100)$$

Comparando as expressões dadas por (3.97) e (3.100) teremos como resultado que as massas do campo bosônico $\phi_i(m)$ e $\psi_i(M)$ são iguais. Isto decorre do fato de que a teoria é supersimétrica.

Além dos campos α e β , também o campo quântico do tetrado possue uma contribuição em S_1 . Definimos o inverso do tetrado quântico, chamado de Graviton, através da seguinte expressão:

$$h_a^\mu = \frac{e_a^\mu - \eta_a^\mu}{k} \quad (3.101)$$

sendo que:

$$k^2 = 16\pi G \quad (3.102)$$

onde G é a constante de interação gravitacional de Newton.

O procedimento de se expandir o tetrado, ou equivalentemente à métrica, em termos de um tetrado plano e outro quântico, como decorre da fórmula (3.101):

$$e_a^\mu = \eta_a^\mu + k h_a^\mu \quad (3.103)$$

foi usado por vários autores^(19,31,32,33) para quantizar a interação gravitacional. Neste sentido a gravitação representa uma teoria de calibre, não renormalizável, excetuando-se o caso em que ela está livre de interação com campos de matéria⁽³¹⁾. De qualquer forma a questão da quantização da gravitação ainda constitue um problema em aberto, mas que recebeu, com o advento das teorias de supergravidade, um novo enfoque. Este novo enfoque consiste, resumidamente, em se usar a supersimetria para cancelar amplitudes divergentes no ultravioleta, que sem a supersimetria, não seriam eliminadas. Veremos que, de fato, isto ocorre também no nosso modelo.

Escrevemos para o tetrado, em termos do Graviton h_μ^a e de seu inverso h_a^μ a expressão:

$$e_\mu^a = \eta_\mu^a - k h_\mu^a + k^2 h_{\mu\alpha} h^{a\alpha} + o(k^3) \quad (3.104)$$

de tal forma que:

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a + o(k^3) \quad (3.105)$$

Foram usadas, para o tetrado plano e seu inverso as relações:

$$\eta^{\mu}_b \eta^a_{\mu} = \delta^a_b \quad (3.106a)$$

$$\eta^a_{\mu} \eta^{b\mu} = \eta^{ab} \quad (3.106b)$$

Desta maneira escrevemos o determinante de e_{μ}^a , e, em termos de h_a^a e h_a^{μ} , como:

$$e = 1 - k h_a^a + \frac{k^2}{4} \left[(h_a^a)^2 + h^{\mu a} h_{\mu a} \right] + o(k^3) \quad (3.107)$$

A fim de incorporar ao esquema da expansão 1/N o Graviton, realizemos a seguinte rescalonamento:

$$h_a^{\mu} \rightarrow N^{-1/2} h_a^{\mu} \quad (3.108)$$

de tal forma que $k^2 N = \lambda$, onde λ é mantido fixo⁽³⁰⁾. Isso torna k proporcional à $N^{-1/2}$ de maneira que uma expansão em termos de k se transforma numa expansão em termos de $N^{-1/2}$.

A seguir, decomponemos $h^{\mu\nu}$ ($= h_a^{\mu} \eta^{a\nu}$) em termos de uma parte simétrica $S^{\mu\nu}$ e outra antisimétrica $a^{\mu\nu}$ ⁽¹⁹⁾, ou seja:

$$h^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + a^{\mu\nu} \quad (3.109)$$

Em termos destes campos temos a seguinte fórmula para a métrica:

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e^{a\nu} = (\eta_a^\mu + k h_a^\mu)(\eta^{a\nu} + k h^{a\nu}) = [\eta^{\mu\nu} + \\ + k(h^{\mu\nu} + h^{\nu\mu}) + k^2 h_a^\mu h^{a\nu}] = \eta^{\mu\nu} + 2k S^{\mu\nu} + k S_a^\mu S^{a\nu} + \\ + k^2 [S_a^\mu a^{a\nu} + a_a^\mu S^{a\nu} + a_a^\mu a^{a\nu}]$$

ou de modo sintético:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + 2k S^{\mu\nu} + k^2 [S_a^\mu a^{a\nu} + a_a^\mu S^{a\nu} + a_a^\mu a^{a\nu}]. \quad (3.110)$$

Adotamos como fixação de calibre para $a^{\mu\nu}$ e $S^{\mu\nu}$ as seguintes relações (19) (*)

$$a_{\mu\nu} = a^{\mu\nu} = 0 \quad (3.111a)$$

e

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu S_\mu^\mu \quad (3.111b)$$

Uma vez definido o campo gravitacional quântico, Graviton, podemos escrever a ação efetiva como função dele. Neste sentido escrevemos a ação efetiva na forma:

$$S_{ef} = -i \frac{N}{2} \left\{ Tr \log \left[e_a^\mu \gamma^\alpha \partial_\mu - iM + \dots \right] - \right. \\ \left. - Tr \log \left[\frac{i}{e} \partial_\mu (e e_a^\mu e^{a\nu}) \partial^\nu + iM^2 + \dots \right] \right\} \quad (3.112)$$

(*) Ver no apêndice G as formas das lagrangeanas de fixação de calibre

e adotando para $a_{\mu\nu}$ o calibre $a_{\mu\nu} = 0$, temos a ação efetiva escrita apenas em função de $S_{\mu\nu}$, a saber:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} = - \frac{iN}{2} & \left\{ \text{Tr} \log \left[1 + k S_a^{\mu} \gamma^a \partial_{\mu} F^{-1} + \dots \right] - \right. \\ & \left. - \text{Tr} \log \left[1 - 2ik S^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} B^{-1} - ik^2 S^{\mu a} S_a^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} B^{-1} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Podemos agora escrever o termo de $S_{\mu\nu}$ que contribue para S_1 .

Este termo toma a seguinte forma:

$$S_1^{\mu\nu} = - i \frac{N^{1/2}}{2} \lambda \left\{ \text{Tr} \left[S_a^{\mu} \gamma^a \partial_{\mu} F^{-1} + 2i S^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} B^{-1} \right] \right\} \quad (3.114)$$

Para mostrar que $S_1^{\mu\nu}$ se anula, temos em primeiro lugar que:

$$\begin{aligned} \text{Tr } S_a^{\mu} \gamma^a \partial_{\mu} F^{-1} &= \text{tr} \int dx^2 S_a^{\mu}(x) \gamma^a \partial_{\mu}^x \langle x | F^{-1} | x \rangle = \\ &= \tilde{S}_a^{\mu}(0) \text{tr} \int \frac{dk^2 \gamma^a k_{\mu} (\not{k} + M)}{k^2 - M^2} = 2 \tilde{S}^{\mu a}(0) \int \frac{dk^2 k_{\mu} k_a}{k^2 - M^2} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Em segundo lugar,

$$\text{Tr } 2i S^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} B^{-1} = - 2 \tilde{S}^{\mu\nu}(0) \int \frac{dk^2 k_{\mu} k_{\nu}}{k^2 - M^2} \quad (3.116)$$

Desta forma, somando (3.115) com (3.116), teremos o anulamento de $S_1^{\mu\nu}$, conforme podemos verificar da expressão (3.114).

Mostramos que todos os termos contribuindo para S_1 se anulam, demonstrando, desta maneira ser a expansão $1/N$ bem definida.

A seguir calculemos as expressões (no espaço dos momentos) referentes aos termos quadráticos de todos os campos que aparecem na ação efetiva. No caso do Graviton, $S^{\mu\nu}$, o termo quadrático é dado por^(*):

$$\frac{1}{2} \int dx^2 dy^2 S^{\mu\nu}(x) \Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{SS}(x-y) S^{\rho\lambda}(y) = -i \frac{\lambda^2}{2} \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2} [S_a^{\mu\gamma} a_\mu F^{-1}]^2 - \right. \\ \left. - 2 [S^{\mu\nu} a_\mu a_\nu B^{-1}]^2 + i S_a^\mu S^{\alpha\nu} a_\mu a_\nu B^{-1} \right\} \quad (3.117)$$

I II III

Conforme demonstrado no apêndice H a contribuição de cada termo da expressão (3.117), no espaço dos momentos, é dada por:

$$I: A_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(p^2, M^2) = -\frac{1}{2} \int \frac{dk^2 k_\mu k_\lambda (k_\nu + p_\nu)(k_\rho + p_\rho) \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\rho)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} + \\ + \frac{i}{4} M^2 \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) \int \frac{dk^2 k_\mu (k_\nu + p_\nu)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \quad (3.118a)$$

$$II: A_{\mu\nu\alpha\beta}^{B_1}(p^2, M^2) = 2 \int \frac{dk^2 k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \quad (3.118b)$$

$$III: A_{\mu\nu\alpha\beta}^{B_2}(p^2, M^2) = -\eta_{\alpha\beta} \int \frac{dk^2 k_\mu k_\nu}{k^2 - M^2} \quad (3.118c)$$

Desenvolvendo, especificamente no caso de $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ dado por

(*) Ver no apêndice D os gráficos de Feynman associados a cada elemento.

(3.118a), os traços dos produtos de matrizes γ_μ que lá aparecem, temos:

$$A_{\mu\alpha\nu\beta}^F(p^2, M^2) = - \left\{ \int \frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left[k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta) + k_\mu k_\beta (k_\nu + p_\nu)(k_\alpha + p_\alpha) - k_\mu (k^2 + kp)(k_\nu + p_\nu)\eta_{\alpha\beta} + M^2 \eta_{\alpha\beta} k_\mu (k_\nu + p_\nu) \right] \right\} \quad (3.119)$$

Ao somarmos (3.118b) e (3.119), temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left\{ -k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta) - k_\mu k_\beta (k_\nu + p_\nu)(k_\alpha + p_\alpha) + \right. \\ & \quad (a) \qquad \qquad \qquad (b) \\ & + k_\mu (k^2 + kp)(k_\nu + p_\nu)\eta_{\alpha\beta} - M^2 \eta_{\alpha\beta} k_\mu (k_\nu + p_\nu) + 2k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta) - \\ & \quad (c) \qquad \qquad \qquad (d) \qquad \qquad \qquad (e) \\ & \left. - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu \left[k^2 + 2k \cdot p + p^2 - M^2 \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (3.120)$$

(f)

Podemos observar que o termo (e) ao ser somado com o termo (a) dá apenas a sua metade. Isto significa que a contribuição bosônica dada por (e) cancela a contribuição fermiônica dada por (a). Também, todos os termos linear e logaritmicamente divergentes, no regime ultravioleta, que aparecem na expressão (3.120), se cancelam^(*) a menos daquele dado por:

$$\text{div}_{\Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}^{SS}}(p^2, M^2) = + i \frac{\pi p^2}{8} \left[\frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{2} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} \right] \Gamma(-\varepsilon/2) \quad (3.121)$$

^(*) Ver no apêndice H a demonstração deste fato.

Adotou-se o esquema de regularização dimensional [Todas as amplitudes são reescritas em $2+\epsilon$ dimensões, sendo ϵ infinitesimal]. Este fato nos mostra que devido à supersimetria do modelo, contribuições fermiônicas e bosônicas divergentes se cancelam mutuamente restando apenas um termo logaritmicamente divergente.

Por outro lado o termo finito resultante da expressão (3.120) tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{fin}_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{SS}}(p^2, M^2) &= -i \frac{\pi}{4} p^2 \left\{ \left[\frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{2} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} \right] \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln M^2 + \frac{1}{2p^2} \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] - 1 \right\} + \\ &+ \frac{iM^2\pi\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{8\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.122)$$

Usando o fato de que em 1+1 dimensões vale a relação:

$$S_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} S(x) , \quad (3.123)$$

isto implica na expressão:

$$S^{\mu\alpha} \left[\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} \right] S^{\nu\beta} = 0 . \quad (3.124)$$

Esta propriedade torna nulo o termo divergente dado por (3.121). Também o termo finito (3.122) se simplifica, tomando a forma:

$$\text{fin}_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{SS}}(p^2, M^2) = +i \frac{M^2\pi\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{8\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \quad (3.125)$$

Com referência ao cálculo do termo quadrático do Gravitino, G_μ , escrevemos a ação efetiva na forma:

$$S_{\text{ef}} = -i \frac{N}{2} \left\{ \text{Tr} \log \left[1 + \frac{i}{2N} (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) F^{-1} + \dots \right] - \right. \\ \left. - \text{Tr} \log \left[1 + \frac{1}{N} (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b - \bar{c}) F^{-1} (c + \gamma^c \gamma^d \partial_d B^{-1}) + \dots \right] + \dots \right\} . \quad (3.126)$$

Devemos observar que para a obtenção do termo quadrático, seja do Gravitino, ou dos outros campos que aparecem na ação efetiva, aproximemos o tetrado pelo seu termo plano, ou seja, $e_\mu^a = \eta_\mu^a$ e $e_a^\mu = \eta_a^\mu$. Como não aparece um termo linear em G_μ , que viria a contribuir (em ordem $N^{1/2}$) para a expansão da ação efetiva em termos de $N^{-1/2}$, passamos ao cálculo da parte quadrática de G_μ . Escrevemos então (*):

$$\frac{1}{2} \int dx^2 dy^2 \bar{G}^a(x) \Gamma_{ab}^{\bar{G}/G} (x-y) G^b(y) = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{i}{2} \text{Tr} \left[(\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) F^{-1} \right] - \right. \\ \left. - \text{Tr} \left[(\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1}) \right] \right\} . \quad (3.127)$$

Operando com o traço Tr nos termos que compõem (3.127), temos a expressão:

$$-\frac{i}{2} \left\{ - \int dx^2 dy^2 \left[\bar{G}_a(x) \gamma^b \gamma^a \partial_b^x \langle x | F^{-1} | y \rangle \gamma^c \gamma^d G_c(y) \partial_d^y \langle y | B^{-1} | x \rangle \right] \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \text{tr} \int dx^2 \bar{G}_a(x) \gamma^b \gamma^a G_b(x) \langle x | F^{-1} | x \rangle \right\} . \quad (3.128)$$

(*) Ver no apêndice D figura 2.

A seguir, temos para a expressão do termo I, dada em (3.128), no espaço dos momentos

$$I: \frac{i}{2} \int \frac{dp^2 dk^2 \bar{G}_a(p) \gamma^b \gamma^a (p_b + k_b) (K + p + M) \gamma^c \gamma^d K_c \tilde{G}_c(p)}{[(K+p)^2 - M^2] [K^2 - M^2]} \quad (3.129)$$

Conforme explicitado no apêndice B, adotamos para o Gravitino, G_μ , o calibre^(*)

$$\gamma^\mu G_\mu = \gamma^a G_a = 0 \quad (3.130)$$

Neste calibre vale a relação:

$$\bar{G}_a \gamma_b G_c = 0 \quad (3.131)$$

Isto decorre do fato de que em 1+1 dimensões dispomos de apenas 2 índices diferentes de tal forma que um tensor de 3 índices sempre tem que ter dois índices quaisquer iguais. Assim se $a=b$ ou $c=b$ usando (3.130) teremos a expressão de (3.131). (Devemos notar que em (3.131) ao tornar $a=b$ ou $c=b$ não existe uma soma nestes índices, ao contrário do que ocorre em (3.130)). Por outro lado, se $a=c$ então teremos provada automaticamente (3.131), pois G_a é dado na representação de Majorana, satisfazendo a relação:

$$\bar{G}_a \gamma_b G_a = 0 \quad (3.132)$$

(*) Ver no apêndice G as lagrangeanas de fixação de calibre

Ao analizarmos a expressão (3.129) veremos que aparecem dois tipos de produtos de matrizes γ_μ . No caso do produto de cinco matrizes γ_μ , com o uso de (3.130), ele se reduz à uma matriz γ_μ ; a saber:

$$\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \gamma^e \gamma^c \gamma^d \tilde{G}_c = 4 \bar{G}^b \gamma^e G^d . \quad (3.133)$$

Observando (3.131), temos que a relação (3.133) é nula. Já no caso do produto de quatro matrizes γ_μ , teremos:

$$\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \gamma^c \gamma^d \tilde{G}_c = 4 \bar{G}^b G^d . \quad (3.134)$$

Para calcularmos a integral em K_μ da expressão (3.129), usamos a regularização dimensional. Temos, desta maneira, que:

$$\begin{aligned} \int \frac{dk^{2+\varepsilon} (p_b + k_b) k_d}{[(k+p)^2 - M^2] [K^2 - M^2]} &= \pi \left\{ p_b p_d \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2M}{p^2} \frac{1}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right. \right. \\ &\times \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] - \frac{1}{2} \eta_{bd} \left[-\ln \pi - \ln M^2 + \Gamma(-\varepsilon/2) + \right. \\ &\left. \left. + 2 - \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.135)$$

Colocando (3.135) e (3.134) em (3.129) nos dá a expressão

$$\begin{aligned} - i2M\pi \int dp^2 \left\{ \bar{G}^b \left[\frac{1}{2} \eta_{bd} \left[-\ln \pi - \ln M^2 + \Gamma(-\varepsilon/2) + 2 - \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right] - p_b p_d \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2M^2}{p^2} \frac{1}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\times \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \tilde{G}^d \} . \quad (3.136)$$

Escrevendo, de forma análoga, o termo II que aparece em (3.128), no espaço dos momentos, temos

$$II: \frac{M_{tr}}{4i} \int dp^2 \int dk^2 \frac{\bar{G}_a(p) \gamma^b \gamma^a G_b(p)}{[k^2 - M^2]} . \quad (3.137)$$

Usando a regularização dimensional para a seguinte integral em k_μ

$$\int \frac{dk^{2+\epsilon}}{k^2 - M^2} = -\pi \left[\Gamma(-\epsilon/2) - \ln\pi - \ln M^2 \right] , \quad (3.138)$$

e a relação

$$\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b = 2 \bar{G}^a G_a \quad (3.139)$$

(que resulta do uso do calibre $\gamma^a G_a = 0$) ,

teremos que a expressão (3.137) é dada por:

$$-iM\pi \int dp^2 \bar{G}^a \bar{G}_a \left[\ln\pi + \ln M^2 - \Gamma(-\epsilon/2) \right] . \quad (3.140)$$

Definimos a função quadrática de G_μ , no espaço dos momentos, pela expressão

$$\bar{G}^b \Gamma_{bd}^{\bar{G}/G} (p^2, M^2) \bar{G}^d . \quad (3.141)$$

Assim, pela soma dos termos que aparecem em (3.140) e (3.136), o termo quadrático em G_μ , no espaço dos momentos, é dado

por

$$\begin{aligned} \Gamma_{bd}^{\bar{G}/G}(p^2, M^2) &= -iM\pi \left\{ n_{bd} \left[2 - \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2p_b p_d \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2M^2}{p^2} - \frac{1}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right] \right\}. \quad (3.142) \end{aligned}$$

Também neste caso ocorre um cancelamento das partes divergentes devido às contribuições bosônica e fermiônica.

Mesmo tendo sido determinado o termo quadrático de G_μ , ele não é completo na medida em que existe um termo mixto do campo G_μ com o campo c . Conforme é mostrado no apêndice E para estabelecermos a forma completa dos propagadores do Gravitino, G_μ , e do campo c é necessário usar-se tanto os termos quadráticos destes campos, quanto o termo mixto.

O termo mixto, determinado a partir da ação efetiva, tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ (\bar{c} - \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b) F^{-1} (c + \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d) B^{-1} \right\} &= \\ = -\frac{i}{2} \left\{ \int dx^2 dy^2 \left[\bar{c}(x) \langle x | F^{-1} | y \rangle \gamma^c \gamma^d G_c(y) \partial_d^y \langle y | B^{-1} | x \rangle \right] \right. &- \\ \left. - \bar{G}_a(x) \gamma^b \gamma^a \partial_b^x \langle x | F^{-1} | y \rangle c(y) \langle y | B^{-1} | x \rangle \right\}. \quad (3.143) \end{aligned}$$

Escrevendo esta expressão no espaço dos momentos, temos

$$\int dp^2 dk^2 \left\{ \frac{\bar{G}^d(p) kd(k+M) c(p)}{[(k+p)^2 - M^2][k^2 - M^2]} - \frac{\bar{c}(p)(k+M)\tilde{G}^d(p)(kd+pd)}{[(k+p)^2 - M^2][k^2 - M^2]} \right\}. \quad (3.144)$$

Procedendo de forma análoga aos cálculos anteriores determinamos a forma do termo mixto, no espaço dos momentos, dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_b^{\bar{G}/c}(p^2, M^2) &= \frac{\pi}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \times \\ &\times \left[(4M^2 - p^2) \not{p} \frac{p_b}{p^2} + 2Mp_b \right] + 2\pi \not{p} \frac{p_b}{p^2} . \end{aligned} \quad (3.145)$$

Devemos salientar que, pelo uso do calibre $\beta=0$, elimina-se a parte logaritimicamente divergente deste termo.

A parte quadrática do campo c é dada, através da ação efetiva, por

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{c} F^{-1} c B^{-1} \right\} &= -\frac{i}{2} \left\{ \int dx^2 dy^2 \left[\bar{c}(x) \langle x | F^{-1} | y \rangle c(y) \times \right. \right. \\ &\left. \left. x \langle y | B^{-1} | x \rangle \right] \right. . \end{aligned} \quad (3.146)$$

Isto estabelece que o termo quadrático em \underline{c} , no espaço dos momentos, é expresso como

$$\Gamma^{\bar{c}/c}(p^2, M^2) = \frac{-i\pi M}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] . \quad (3.147)$$

Podemos agora, em conformidade como o demonstrado no apêndice E, escrever o propagador do Gravitino:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T G_\mu \bar{G}_\rho | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\rho}^{-1} \bar{G}/G + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\lambda}^{-1} \bar{G}/G \Gamma^{\lambda} G/c \times \\ &\times \left[\Gamma^{\bar{c}/c} + \Gamma^{\nu} \bar{c}/G \Gamma_{\nu\delta}^{-1} \bar{G}/G \Gamma^{\delta} \bar{G}/c \right]^{-1} \Gamma^{\tau c/G} \Gamma_{\tau\rho}^{-1} \bar{G}/G , \end{aligned} \quad (3.148)$$

sendo que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\overline{G}/G}(p^2, M^2) = \left[A(p^2, M^2) \eta_{\mu\nu} + B(p^2, M^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + C(p^2, M^2) \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \quad (3.149)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{-1\overline{G}/G}(p^2, M^2) &= \left[A'(p^2, M^2) \eta_{\mu\nu} + B'(p^2, M^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + \right. \\ &\quad + C'(p^2, M^2) \gamma_\mu \gamma_\nu + D'(p^2, M^2) \not{p} p_\mu \gamma_\nu + \\ &\quad \left. + E'(p^2, M^2) \not{p} \gamma_\mu p_\nu \right] \end{aligned} \quad (3.150)$$

satisfazem à relação

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\overline{G}/G} \Gamma_{\nu\lambda}^{-1\overline{G}/G} = \eta_{\mu\lambda} \quad (3.151)$$

Uma vez que

$$A(p^2, M^2) = -iM\pi \left\{ 2 - \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right\} \quad (3.152a)$$

$$B(p^2, M^2) = +i2M\pi \left\{ 1 + \frac{2M^2}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right\} \quad (3.152b)$$

$$C(p^2, M^2) = -\frac{1}{2} \alpha, \quad \alpha \text{ constante} \quad (3.152c)$$

Aplicamos a relação (3.151), obtendo

$$(\eta_{\mu\nu}) \quad AA' = 1 \quad (3.153a)$$

$$(p_\mu p_\nu / p^2) \quad AB' + BA' + BB' + BE' p^2 = 0 \quad (3.153b)$$

$$(\gamma_\mu \gamma_\nu) \quad AC' + CA' + 2CC' + \frac{CD'}{p^2} = 0 \quad (3.153c)$$

$$(p_\mu \not{p} \gamma_\nu) \quad \frac{BC'}{p^2} + AD' + D'B = 0 \quad (3.153d)$$

$$(p_\nu \not{p} \gamma_\mu) \quad AE' + \frac{CB'}{p^2} = 0 \quad (3.153e)$$

Entre todas as relações acima a primeira, dada por (3.153a) é a que mais nos interessa devido ao comportamento singular de A^{-1} no regime infravermelho, que iremos analisar no ítem d) deste capítulo. Este fato torna irrelevante a determinação dos termos A' , B' , C' , D' , E' em função de A , B , C .

Devemos observar que o termo C , que está contido em (3.149), aparece devido ao termo de fixação de calibre para G_μ , conforme está estabelecido no apêndice G.

Finalmente os termos quadráticos nos campos α e β , no espaço dos momentos, são dados respectivamente por:

$$\frac{1}{2} \Gamma^{\alpha/\alpha}(p^2, M^2) = \frac{-i\pi}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \quad (3.154)$$

$$\Gamma^{\beta/\beta}(p^2, M^2) = \frac{-i2\pi(p^2 - 4M^2)}{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right]. \quad (3.155)$$

Mostramos assim que as funções de dois pontos de todos os campos que aparecem na ação efetiva são finitas no regime ultravioleta. Isto significa, em termos da expansão $1/N$, que na ordem $\alpha(1)$ todos os termos são "bem compor tados" no ultravioleta. Este fato em si já é encorajador, uma vez que isto pode significar que a conjunção de supersimetria com expansão $1/N$ leve à uma resposta mais efetiva relativamente ao problema da quantização do campo gravitacional. Sabemos que⁽³¹⁾ em 3+1 dimensões o acoplamento de um multipletado de N fermions com a gravitação fornece, no esquema de expansão $1/N$, uma correção finita ao propagador do Graviton. Fica em aberto a questão de se saber o que acontece ao acoplarmos um multipletado supersimétrico à supergravidade, usando expansão $1/N$.

Com o intuito de pesquisar o comportamento no regime ultravioleta de amplitudes, envolvendo o Graviton e o Gravitino, em ordens superiores à $\alpha(1)$ da expansão $1/N$, calculamos especificamente as funções de quatro pontos do Graviton, do Gravitino e de dois Gravitons e dois Gravitinos. Podemos concluir que todas estas amplitudes, em ordem $\alpha(1/N)$, não são finitas.

Por outro lado, a amplitude envolvendo 2 Gravitinos e um Graviton mostrou ser finita. Começando por ela, temos, a partir da ação efetiva, que:

$$\int dx^2 dy^2 dz^2 \bar{G}_\mu^\alpha(x) G_\nu^\beta(y) S_\lambda^a(z) \Gamma_{\alpha\beta\lambda}^{G/G/S}(x,y,z) =$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{N}} \left\{ \text{Tr} \left[\frac{i}{2} \left[(\bar{G}_a s^b \gamma^a G_b) F^{-1} + (\bar{G}_a \gamma^b s^a G_b) F^{-1} - \right. \right. \right. \right. \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} - s^c \partial_c F^{-1} (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) F^{-1} \left. \left. \left. \left. \right] - \text{Tr} \left[(\bar{G}_a s^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \right. \right. \right. \right. \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{G}_a \gamma^b \delta^a_{\partial_b} F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} \delta^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
 & \quad V \quad \quad \quad VI \\
 & + \bar{G}_a \gamma^a \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} \gamma^c \delta^d G_c \partial_d B^{-1} + 2i S^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu B^{-1} (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} \times \\
 & \quad VII \quad \quad \quad VIII \\
 & \quad \times \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1}) - (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} \delta^\lambda_{\partial_\lambda} F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1})^2 \Big] \Big\} . \\
 & \quad IX \quad \quad \quad (3.156)
 \end{aligned}$$

Os correspondentes gráficos de Feynman estão explicitados na figura 3 do apêndice D.

O fato de esta amplitude ser finita no regime ultravioleta, apesar da forma não linear da teoria, não deixa de ser supreendente. Mas, como já mencionamos, todas as amplitudes à ordem $\sigma(1/N)$, não são finitas. Explicitamente temos que estas amplitudes tem a seguinte expressão:

i) Função de quatro pontos do Gravitino:

$$\begin{aligned}
 & \int dx^2 dy^2 dz^2 dw^2 \bar{G}_\mu^\alpha(x) G_\nu^\beta(y) \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4G_{\mu\nu\lambda\rho}}(x,y,z,w) \bar{G}_\lambda^\gamma(z) G_\rho^\delta(w) = \\
 & = - \frac{i}{2N} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{8} (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b)^2 + \frac{1}{2} \left[\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} \right]^2 + \right. \\
 & \quad I \quad \quad \quad II \\
 & \quad \left. + \frac{i}{2} \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a_{\partial_b} F^{-1} (\bar{G}_e \gamma^f \gamma^e G_f) \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} \right\} \quad (3.157) \\
 & \quad III
 \end{aligned}$$

cujos gráficos de Feynman estão dados na figura 7 do apêndice D.

iii) Função de quatro pontos do Graviton:

$$\begin{aligned}
 & \int dx^2 dy^2 dz^2 dw^2 S_{\mu}^a(x) S_{\nu}^b(y) \Gamma_{abcd}^{4S_{\mu\nu\lambda\rho}}(x, y, z, w) S_{\lambda}^c(z) S_{\rho}^d(w) = \\
 & = - \frac{i}{2N} \text{Tr} \left\{ - \frac{1}{4} (\mathcal{S}^{\mu} \partial_{\mu} F^{-1})^4 + 24 i S^3 \partial^{\nu} S \partial_{\nu} B^{-1} - \frac{1}{2} (S^2 \square B^{-1})^2 - \right. \\
 & \quad \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \\
 & \quad \left. - 24 S^2 \partial^{\nu} S \partial_{\nu} B^{-1} S \square B^{-1} - 4i (S \square B^{-1})^2 (S^2 \square B^{-1}) + 4 (S \square B^{-1})^4 \right\} \\
 & \quad \text{IV} \qquad \qquad \qquad \text{V} \qquad \qquad \qquad \text{VI} \\
 & \qquad \qquad \qquad (3.158)
 \end{aligned}$$

com gráfico de Feynman dados pela figura 8 do apêndice D.

iii) Função de quatro pontos com dois Gravitinos e dois Gravitons:

$$\begin{aligned}
 & \int dx^2 dy^2 dz^2 dw^2 \bar{G}_{\mu}^{\alpha}(x) G_{\nu}^{\beta}(y) \Gamma_{\alpha\beta ab}^{2G/2S_{\mu\nu\lambda\rho}} S_{\lambda}^a(z) S_{\rho}^b(w) = \\
 & = - \frac{i}{2N} \text{Tr} \left\{ \frac{i}{2} (\bar{G}_a \mathcal{S}^b \mathcal{S}^a G_b) F^{-1} - \frac{i}{2} \mathcal{S}^{\lambda} \partial_{\lambda} F^{-1} \left[(\bar{G}_a \mathcal{S}^b \gamma^a G_b) F^{-1} + \right. \right. \\
 & \quad \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \\
 & \quad \left. + (\bar{G}_a \gamma^b \mathcal{S}^a G_b) F^{-1} \right] - \left[\bar{G}_a \mathcal{S}^b \mathcal{S}^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \right. \\
 & \quad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{IV} \\
 & \quad \left. + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \mathcal{S}^c \mathcal{S}^d G_c \partial_d B^{-1} + \bar{G}_a \mathcal{S}^b \gamma^a \partial_b F^{-1} (\mathcal{S}^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \right. \\
 & \quad \text{V} \qquad \qquad \qquad \text{VI} \\
 & \quad \left. + \gamma^c \mathcal{S}^d G_c \partial_d B^{-1}) + \bar{G}_a \gamma^b \mathcal{S}^a \partial_b F^{-1} (\mathcal{S}^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \right. \\
 & \quad \text{VII} \qquad \qquad \qquad \text{VIII} \\
 & \quad \left. + \gamma^c \mathcal{S}^d G_c \partial_d B^{-1}) \right] + (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1}) \times \\
 & \quad \text{IX}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-i \partial_\mu (S_\alpha^\mu S^{\nu\alpha}) \partial_\nu B^{-1} - i \partial^\nu (S^{\mu\alpha} S_{\mu\alpha}) \partial_\nu B^{-1} - i (S_\alpha^\mu S^{\nu\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu B^{-1} \right] + \\
& X \quad XI \quad XII \\
& + (-2i S^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu B^{-1}) \left[\bar{G}_a g^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} \right] + \\
& XIII \\
& + G_a \gamma^b g^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} g^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XIV \quad XV \\
& + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c g^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XVI \\
& + \bar{G}_a g^b \gamma^a \partial_b F^{-1} g^\lambda \partial_\lambda F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XVII \\
& + \bar{G}_a \gamma^b g^a \partial_b F^{-1} g^\lambda \partial_\lambda F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XVIII \\
& + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} g^\lambda \partial_\lambda F^{-1} g^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XIX \\
& + \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} g^\lambda \partial_\lambda F^{-1} \gamma^c g^d G_c \partial_d B^{-1} - \\
& XX \\
& - \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} (g^\lambda \partial_\lambda F^{-1})^2 \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} + \\
& XXI \\
& + \frac{i}{2} (g^\lambda \partial_\lambda F^{-1})^2 (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) F^{-1} + 4 (S^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu B^{-1})^2 \times \\
& XXII \\
& \times \left\{ \bar{G}_a \gamma^b \gamma^a \partial_b F^{-1} \gamma^c \gamma^d G_c \partial_d B^{-1} \right\} . \quad (3.1)
\end{aligned}$$

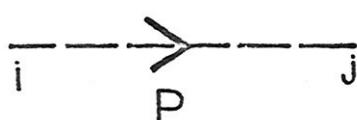
seus gráficos de Feynman são dados pela figura 4 do apêndice D.

Podemos reunir estes resultados através da conclusão de que além da ordem $\mathcal{O}(N^{-1/2})$, correspondente à amplitude contendo dois Gravitinos e um Graviton, a teoria não é renormalizável. Por outro lado, certamente, a teoria com a simetria global $O(N=\infty)$ é renormalizável, o que exclui todas as funções de n pontos que contenham vértices de Gravitino com Graviton e as de quatro ou mais pontos do Gravitino ou Graviton.

Seguem, esquematicamente, os propagadores e vértices estudados.

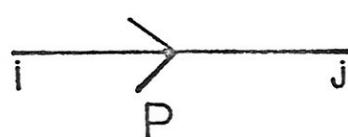
i) Propagadores

a) ϕ_i



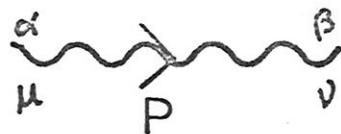
$$\frac{1}{i} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \delta_{ij} \quad (3.160a)$$

b) ψ_i



$$\frac{1}{i} \frac{1}{p - M + i\epsilon} \delta_{ij} \quad (3.160b)$$

c) G_μ^α



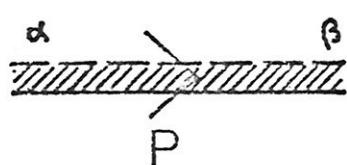
$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}/G} \right]^{-1} + \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mu\lambda}^{\bar{G}/G} \right]^{-1} \Gamma_{G/c}^\lambda \times \right. \\ \times \left[\Gamma_{c/G}^{c/c} + \Gamma_{c/G}^{\rho} \left[\Gamma_{\rho\delta}^{\bar{G}/G} \right]^{-1} \Gamma_{G/c}^\delta \right]^{-1} \\ \left. \Gamma_{c/G}^k \left[\Gamma_{kv}^{\bar{G}/G} \right]^{-1} \right\} (p^2 + M^2) \delta^{\alpha\beta} \quad (3.160c)$$

d) S_{μ}^a



$$\left[\Gamma_{\mu\nu ab}^{S/S-1} \right] (p^2, M^2) \quad (3.160d)$$

e) c^α



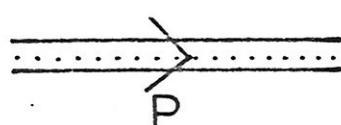
$$- \frac{1}{2} \left[\Gamma_{c/c} + \right. \\ \left. + \Gamma_{c/G}^{\mu} \left[\Gamma_{\mu\lambda}^{G/G} \right]^{-1} \Gamma_{G/c}^{\lambda} \right]^{-1} (p^2, M^2) \quad (3.160e)$$

f) α



$$\left[\Gamma^{\alpha/\alpha} (p^2, M^2) \right]^{-1} \quad (3.160f)$$

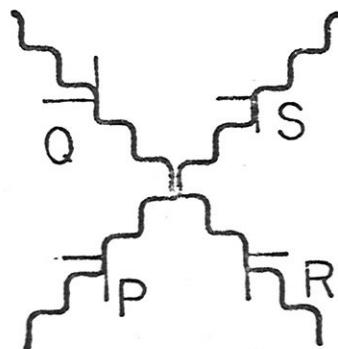
g) β



$$\left[\Gamma^{\beta/\beta} (p^2, M^2) \right]^{-1} \quad (3.160g)$$

ii) Vértices

a) Quatro G_{μ}^{α} 's

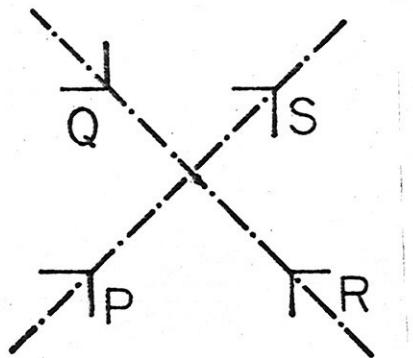


$$\frac{1}{N} \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{4G_{\alpha\beta\gamma\delta}} (p^2, M^2) \quad (3.160h)$$

Fig. 5

b) Quatro S_{μ}^a

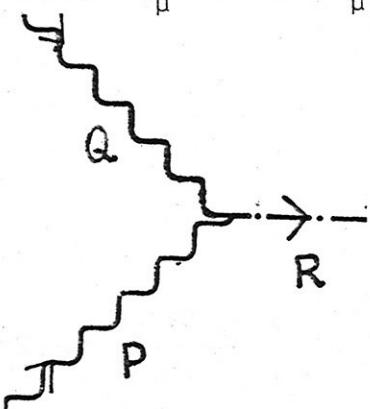
75.



$$\frac{1}{N} \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} (p^2, M^2) \quad (3.160i)$$

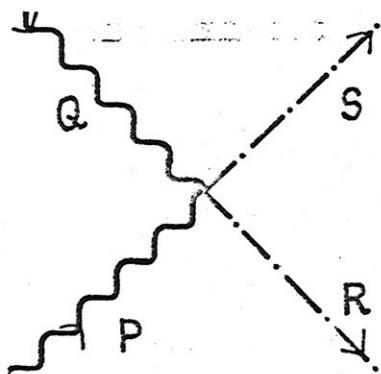
Fig. 6

c) Dois G_{μ}^{α} e um S_{μ}^a



$$\frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_{\alpha\beta a}^{\mu\nu\lambda} (p^2, M^2) \quad (3.160j)$$

d) Dois G_{μ}^{α} e dois S_{μ}^a



$$\frac{1}{N} \Gamma_{\alpha\beta ab}^{\mu\nu\lambda\rho} (p^2, M^2) \quad (3.160\ell)$$

d. Análise do comportamento da expressão $\left[\Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}/G} \right]^{-1}$ no regime infravermelho.

A expressão $\left[\Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}/G} (p^2, M^2) \right]^{-1}$ apresenta polo no regime infravermelho através do termo:

$$A(p^2, M^2) = M\pi i \left\{ 2 - \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \right\}$$

$$(3.152a)$$

Inicialmente,

$$\ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 + 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] = \ln \left[\frac{p^2 + i \sqrt{4M^2 p^2 - p^4}}{p^2 - i \sqrt{4M^2 p^2 - p^4}} \right] \quad (3.161)$$

no domínio

$$0 < p^2 < 4M^2 \quad (3.162)$$

que toma a expressão:

$$\ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] = i \operatorname{arctg} \left[\frac{2\sqrt{4M^2 p^2 - p^4}}{2p^2 - 4M^2} \right] + 2\pi ni \quad (3.163)$$

Aproximando:

$$\operatorname{arctg} \left[\frac{2\sqrt{4M^2 p^2 - p^4}}{2p^2 - 4M^2} \right] \approx \left[\frac{2\sqrt{4M^2 p^2 - p^4}}{2p^2 - 4M^2} \right] \quad (3.164)$$

temos para (3.152a):

$$M\pi i \left\{ 2 - \frac{+ 2[p^2 - 4M^2]}{2p^2 - 4M^2} \right\} \stackrel{p^2 \rightarrow 0}{\approx} 2M\pi i \left(\frac{p^2}{4M^2} \right) \quad (3.165)$$

Desta maneira:

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} A^{-1}(p^2, M^2) = - \frac{2Mi}{\pi} \cdot \frac{1}{p^2} \quad (3.166)$$

Uma vez que $A^{-1}(p^2, M^2)$ aparece no propaga-

dor de G_μ , temos a presença de um polo no regime infravermelho. Em 1+1 dimensões um polo no infravermelho significa confinamento. Como G_μ está acoplado à corrente de Noether de supersimetria podemos interpretar o confinamento como sendo dos graus de liberdade supersimétricos da teoria.

e, Modelo CP^{N-1} acoplado à supergravidade.

A densidade de lagrangeana:

$$L_0 = \frac{N}{2\pi} \left\{ \left[D^a z_i \right]^+ D_a z_i + i \bar{\psi}_i \gamma^a D_a \psi_i + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_a \psi)^2 \right] \right\} \quad (3.167)$$

define o modelo CP^{N-1} supersimétrico. Os campos z_i e ψ_i são complexos e têm N componentes. A derivada covariante D_a é dada por:

$$D_a = \partial_a - z_i^+ \partial_a z_i \quad (3.168)$$

A denominação de CP^{N-1} provem de duas propriedades do campo z_i :

a) Ele obedece ao vínculo geométrico:

$$z_i^+ z_i = 1 \quad (3.169)$$

b) Satisfaz à uma simetria local $U(1)$ dada por:

$$z_i \rightarrow z'_i = e^{i\Lambda(x)} z_i \quad (3.170)$$

Neste sentido, $z_i^+ \partial_a z_i$ é o campo de calibre associado à esta simetria local. Além dos vínculos (3.169/170) z_i e ψ_i satis fazem a relação:

$$\psi_i z_i = 0 . \quad (3.171)$$

A densidade de lagrangeana L_0 é invariante por transformação global de supersimetria dada pelas expressões:

$$\delta z_i = \bar{\varepsilon} \psi_i \quad (3.172a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_i = -i D_a z_i \gamma^a \varepsilon + \frac{z_i}{2} & \left[(\bar{\psi} \psi) \varepsilon + (\bar{\psi} \gamma^a \psi) \gamma_a \varepsilon + \right. \\ & \left. + (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \gamma_5 \varepsilon \right] . \end{aligned} \quad (3.172b)$$

Ao tornarmos esta simetria local, sabemos que L_0 não vai mais ser invariante por ela. De forma explícita temos que:

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= \frac{N}{2f} \left\{ i \delta \bar{\psi} \not{\partial} \psi + i \bar{\psi} \not{\partial} \delta \psi \right\} = \\ &= \frac{N}{2f} \left\{ - \partial_a z_i^+ (\bar{\varepsilon} \gamma^a \gamma^b \partial_b \psi_i) + (\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a \partial_b \varepsilon) \partial_a z_i \right\} \end{aligned} \quad (3.173)$$

Devemos notar que devido ao vínculo (3.171) o termo $\delta(z_i^+ \partial_a z_i)$ não contribue para (3.173). Assim, a menos de uma divergência total, (3.173) fica:

$$\delta L_0 = \frac{N}{2f} \left\{ \partial_a z_i^+ (\partial_b \bar{\varepsilon} \gamma^a \gamma^b \psi_i) + (\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a \partial_b \varepsilon) \partial_a z_i \right\} . \quad (3.174)$$

Introduzindo na teoria o Gravitino G_μ , tal que:

$$\delta G_a = - \partial_a \varepsilon , \quad (3.175)$$

adicionamos à L_0 o termo:

$$L_1 = \partial_a z_i^+ (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_i) + (\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a G_b) \partial_a z_i^- . \quad (3.176)$$

Mas,

$$\delta L_1 \Big|_{\partial_a \varepsilon} = (\bar{\psi}_i \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_i) + (\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_i) . \quad (3.177)$$

Não podemos neste ponto esquecer que ψ_i é complexo. Sabemos que a regra de transformação de Fierz, que aplicamos no nosso caso do modelo σ não linear, vale apenas para campos de Majorana. Desta maneira temos:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_i \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_i) &= (\bar{\psi}_{i,R} \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_{i,R}) + \\ &+ (\bar{\psi}_{i,I} \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_{i,I}) + i(\bar{\psi}_{i,R} \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_{i,I}) - \\ &- i(\bar{\psi}_{i,I} \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_{i,R}) \end{aligned} \quad (3.178)$$

e

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_i) &= (\bar{\psi}_{i,R} \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_{i,R}) + \\ &+ (\bar{\psi}_{i,I} \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_{i,I}) + i(\bar{\psi}_{i,R} \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_{i,I}) - \\ &- i(\bar{\psi}_{i,I} \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_{i,R}) \end{aligned} \quad (3.179)$$

onde os índices (R, I) denotam as partes real e imaginária de

ψ_i , respectivamente.

Aplicando a transformação de Fierz em (3.178), nos dá:

$$(\bar{\psi}_i \partial_a \varepsilon) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \psi_i) = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_{i,R} \psi_{i,R}) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^a \partial_a \varepsilon) - \quad (a)$$

$$-\frac{1}{2} (\bar{\psi}_{i,I} \psi_{i,I}) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \partial_a \varepsilon) - \frac{i}{2} (\bar{\psi}_{i,R} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_{i,I}) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \partial_a \varepsilon) + \quad (b) \quad (c)$$

$$+ \frac{i}{2} (\bar{\psi}_{i,I} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_{i,R}) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \partial_a \varepsilon) \quad . \quad (3.180)$$

Analogamente no caso de (3.179):

$$(\bar{\psi}_i \gamma^b \gamma^a G_b) (\partial_a \bar{\varepsilon} \psi_i) = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_{i,R} \psi_{i,R}) (\partial_a \bar{\varepsilon} \gamma^b \gamma^a G_b) - \quad (a)$$

$$-\frac{1}{2} (\bar{\psi}_{i,I} \psi_{i,I}) (\partial_a \bar{\varepsilon} \gamma^b \gamma^a G_b) - \frac{i}{2} (\bar{\psi}_{i,R} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_{i,I}) (\partial_a \bar{\varepsilon} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \gamma^b \gamma^a G_b) + \quad (b) \quad (c)$$

$$+ \frac{i}{2} (\bar{\psi}_{i,I} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_{i,R}) (\partial_a \bar{\varepsilon} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \gamma^b \gamma^a G_b) \quad (3.181)$$

sendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ao somarmos (3.180) e (3.181), temos:

$$\delta L_1 \Big|_{\partial_a \varepsilon} = - (\bar{\psi}_i, R \psi_i, R) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \partial_a \varepsilon) - (\bar{\psi}_i, I \psi_i, I) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \partial_a \varepsilon) \quad (3.182)$$

o que nos mostra que os respectivos termos (c)+(d) de (3.181) e (3.180) se cancelam.

Podemos reescrever (3.182) como:

$$\delta L_1 \Big|_{\partial_a \varepsilon} = - (\bar{\psi} \cdot \psi) (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b \partial_a \varepsilon) \quad (3.183)$$

Assim, para cancelar este termo, adicionamos também a seguinte expressão à L_0 :

$$L_2 = - \frac{(\bar{\psi} \cdot \psi)}{2} (\bar{G}_b \gamma^a \gamma^b G_a) \quad (3.184)$$

Para tornarmos a lagrangeana total, composta da soma de L_0 , L_1 e L_2 , invariante por transformação local de supersimetria, sabemos que é necessário escrevê-la num espaço-tempo curvo. Desta maneira, temos:

$$L = \frac{N}{2f} \left\{ e \left[e_a^\mu e^{a\nu} [D_\mu z_i]^+ D_\nu z_i + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi_i + \right. \right. \\ + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi}_i \psi_i)^2 - (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i)^2 - (\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i)^2 \right] + \partial_\mu z_i^+ (\bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_i) + \\ \left. \left. + (\bar{\psi}_i \gamma^\nu \gamma^\mu G_\nu) \partial_\mu z_i - \left[\frac{\bar{\psi}_i \psi_i}{2} \right] (\bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) \right] \right\} \quad (3.185)$$

$$\text{onde } D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu \gamma_5$$

A quantização deste modelo é feita através da integração funcional. Escrevemos a função geratriz das fun-

ções de Green como:

$$Z(\bar{J}, \dots) = K \int [dz_i] [dz_j^+] \dots [de_\mu^a] \exp i S \times \delta_x(\bar{\psi}_i z_i) \times \\ \times \delta_x(z_i^+ \psi_i) \delta_x(z_i^+ z_i - 1) \times \exp i [\text{termos de fonte}] . \quad (3.186)$$

sendo S a ação:

$$S = \int dx^2 L \quad (3.187)$$

Procedendo de forma análoga ao caso da integração funcional do modelo σ não linear escrevemos que (depois de rescalonar $z_i \rightarrow z'_i = \frac{N}{2f} z_i$ e $\psi_i \rightarrow \psi'_i = \frac{N}{2f} \psi_i$)

$$\delta_x(z_i^+ z_i - \frac{N}{2f}) \delta_x(\bar{\psi}_i z_i) \delta_x(z_i^+ \psi_i) \exp i \int dx^2 e \left[\frac{2f}{N} (z^+ \partial^\mu z) (z^+ \partial_\mu z) - \right. \\ \left. - i \frac{2f}{N} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (z^+ \partial_\mu z) + \frac{f}{2N} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 \right] = \right. \\ \left. = \int [d\alpha] [d\beta] [d\gamma] [dc] [d\bar{c}] [d\lambda_\mu] \exp \int dx^2 e \left[\frac{i}{\sqrt{N}} \alpha (z_i^+ z_i - \frac{N}{2f}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i}{\sqrt{N}} \left[\bar{c} z^+ \psi + \bar{\psi} \cdot z \cdot c \right] - \frac{i}{\sqrt{N}} \lambda^\mu \left[(z^+ \partial_\mu z) - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right] - \right. \\ \left. - i(m^2 + \frac{1}{4N} \lambda_\mu^2) z_i^+ z_i - \frac{i}{\sqrt{N}} \left[(\bar{\psi} \psi) \beta - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \gamma \right] - \frac{i}{2f} \left[\beta^2 - \gamma^2 \right] \right] . \quad (3.188) \right.$$

Colocando (3.188) em (1.86) temos:

$$\begin{aligned}
Z(\bar{J}, \dots) = & K \left[dz_i \right] \dots \left[de_a^\mu \right] \exp i \int dx^2 \left\{ \left[e_a^\mu e^{av} \partial_\mu z_i^+ \partial_v z_i^- + \right. \right. \\
& + i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{i}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i) \omega_\mu + \partial_\mu z_i^+ (\bar{G}_v \gamma^\mu \gamma^v \psi_i) + \\
& + (\bar{\psi}_i \gamma^v G_v) \partial_\mu z_i^- - \left(\frac{\bar{\psi}_i \psi_i}{2} \right) (\bar{G}_v \gamma^\mu \gamma^v G_\mu) + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \left(z_i^+ z_i^- - \frac{N}{2f} \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\bar{c} [z_i^+ \psi_i + \bar{\psi}_i z_i^- c] - \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda^\mu [z_i^+ \partial_\mu z_i^- - \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i] \right] - \\
& - (m^2 + \frac{1}{4N} \lambda^\mu \lambda_\mu) z_i^+ z_i^- - \frac{1}{\sqrt{N}} \left[(\bar{\psi}_i \psi_i) \beta - (\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i) \gamma \right] - \frac{1}{2f} [\beta^2 - \gamma^2] + \\
& + \left[i \bar{\psi}_i J_i + i \bar{J}_i \psi_i + i \xi_i^+ z_i^- + i z_i^+ \xi_i^- + \frac{1}{2} \bar{J}^\mu G_\mu + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \bar{G}^\mu j_\mu + \frac{i}{2} U_a^\mu e_a^\mu + \frac{i}{2} e_a^\mu U_a^\mu \right] \right\} \quad (3.189)
\end{aligned}$$

Após realizar a integração funcional em z_i e ψ_i obtemos:

$$\begin{aligned}
Z(\bar{J}, \dots) = & \int [d\alpha] \dots [de_a^\mu] \exp i S_{ef} - \int dx^2 \exp \left[\frac{i}{\sqrt{N}} \times \right. \\
& \left. \times \left[\xi_i^+ + \frac{i}{\sqrt{N}} \bar{J}_i \Delta_F^{-1} c' \right] (\Delta_B + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{N} c')^{-1} \times \right. \\
& \left. \times \left[\xi_i^- + \frac{i}{\sqrt{N}} (\bar{c}' \Delta_F^{-1} J_i) \right] + \bar{J}_i \Delta_F^{-1} J_i \right]
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\Delta_F = & e \left[\beta + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \omega_\mu + \frac{i}{2N} (\bar{G}_v \gamma^\mu \gamma^v G_\mu) + \frac{\chi}{2\sqrt{N}} + \right. \\
& \left. + \frac{i}{\sqrt{N}} [\beta - \gamma_5 \gamma] - iM \right] \quad (3.190a)
\end{aligned}$$

$$\Delta_B = e \left[\frac{i}{e} \partial_\mu \left[e \ e_a^\mu \ e^{av} \partial_v \right] - i \frac{\alpha}{\sqrt{N}} + i \lambda^\mu \partial_\mu + i \left(m^2 + \frac{\lambda^\mu \lambda_\mu}{4N} \right) \right] \quad (3.190b)$$

$$c' = \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu \partial_\nu + c \quad (3.190c)$$

e a ação efetiva S_{ef} tem a forma:

$$S_{ef} = N \left[\text{Tr} \log \Delta_F - \text{Tr} \log (\Delta_B + \bar{c}' \frac{\Delta_F^{-1}}{N} c') \right] - i \int dx^2 e^{\left[\frac{\sqrt{N} \alpha}{2f} + \frac{(\beta^2 - \gamma^2)}{2f} \right]} \quad (3.191)$$

4. CONJECTURAS A RESPEITO DA CORDA FINITA

O comportamento do propagador do Gravitino no regime infravermelho, apresentando um polo, é interpretado como significando um confinamento de todos os graus de liberdade supersimétricos. Este fato acontece porque o domínio de integração da variável x_1 é infinito. Surge a questão de se saber o tipo do comportamento do propagador do Gravitino no caso em que o domínio da variável x_1 é tornado finito.

Ao restringirmos o domínio de x_1 à $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ quebramos a supersimetria da lagrangeana dada por (3.63). Em particular a simetria pela transformação de Lorentz também é quebrada, tornando o momento associado à x_1 quantizado, sob a forma:

$$p_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.1)$$

Queremos estudar de forma explícita a forma da função de dois pontos do Gravitino, restringindo x_1 ao domínio finito $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$. Como ela é proporcional a

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 \int \frac{dk^2 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 - m^2] [k^2 - m^2]} - \eta_{\mu\nu} \int \frac{dk^2}{[k^2 - m^2]}, \quad (4.2)$$

ao restringirmos x_1 , teremos

$$\Gamma_{\mu\nu} \stackrel{2}{\sum}_{kn=\frac{n\pi}{L}} \left[\frac{dk_0 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 - m^2] [k^2 - m^2]} - n_{\mu\nu} \sum_{kn=\frac{n\pi}{L}} \right] \frac{dk_0}{[k^2 - m^2]} . \quad (4.3)$$

Para calcular a somatória em p_n , usamos a seguinte fórmula (35,36):

$$\frac{L}{\pi} \int \frac{f(p) dp}{e^{2iLp-1}} = \frac{L}{\pi} \int f(p) dp + \frac{L}{\pi} B \quad (4.4)$$

onde a primeira integral do lado direito é sobre o contínuo (no sentido de valor principal) e B é dado por:

$$B = \int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} \frac{f(p) dp}{e^{2iLp-1}} + \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \frac{f(p) dp}{e^{-2iLp-1}} \quad (4.5)$$

Podemos fechar os contornos de integração e calcular a integral por resíduos.

Inicialmente, o termo [transformado para o espaço-tempo euclidiano]

$$\sum \int \frac{dk_0}{k^2 + m^2} \quad (4.6)$$

pode ser reescrito, com o uso da expressão (4.4), na forma

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{dk_0}{k^2 + m^2} &= \int \frac{dk^2}{k^2 - m^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} dk_1 \left[\frac{1}{k^2 + m^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{e^{2iLk_1-1}} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} dk_1 \left[\frac{1}{k^2 + m^2} \times \frac{1}{e^{-2iLk_1-1}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} dk_1 \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{e^{2iLk_1}-1} \right] = \\
 & = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{-1}{-i\sqrt{k_0^2+m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} = \\
 & = (2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2+m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} . \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} dk_1 \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{e^{-2iLk_1}-1} \right] = \\
 & = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2+m^2}} \times \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} . \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Somando (4.8) e (4.9) temos que:

$$\sum \int \frac{dk_0}{k^2+m^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2+m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} . \tag{4.10}$$

Por outro lado, o outro termo que compõe a expansão (4.5) é escrito, no espaço-tempo euclidiano, como

$$\sum \int \frac{dk_0 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2+m^2] [k^2+m^2]} = \int \frac{dk^2 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2+m^2] [k^2+m^2]} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} \frac{dk_1 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} + \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \frac{dk_1 (k+p)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \right] \quad (4.11)$$

Uma vez que a invariança de Lorentz é quebrada, temos que calcular (4.11) componente por componente. Para $\mu=\nu=0$ temos:

$$\begin{aligned} & \sum \int \frac{dk_0 (p+k)_0 k_0}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} = \int \frac{dk^2 (p+k)_0 k_0}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} \frac{dk_1 (p_0 + k_0) k_0}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} - \frac{1}{e^{2iLk} - 1} \right] + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \frac{dk_1 (p_0 + k_0) k_0}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} - \frac{1}{e^{-2iLk_1} - 1} \right]. \quad (4.12) \end{aligned}$$

O penúltimo termo de (4.12) pode ser calculado como segue:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \left[\int_{-\infty-i\epsilon}^{+\infty-i\epsilon} \frac{dk (p_0 + k_0) k_0}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} - \frac{1}{e^{2iLk} - 1} \right] = \\ & = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 (p_0 + k_0) k_0 \left\{ \frac{1}{2i\sqrt{k_0^2 + m^2}} \left[\left[\frac{1}{2 \left[k_0 p_0 - ip_1 \sqrt{k_0^2 + m^2} \right] + p^2} \right] \times \right. \right. \quad (a) \end{aligned}$$

$$\left. \left. \times \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1} \right] + \frac{1}{2i\sqrt{k_0^2 + m^2}} \left[\left[\frac{1}{2 \left[k_0 p_0 + ip_1 \sqrt{k_0^2 + m^2} \right] + p^2} \right] \times \right. \right. \quad (b)$$

$$\times \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} + \frac{1}{2i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2}} \left[\left[\frac{-1}{2[k_0p_0 + p_1(-p_1 - i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2}) + p^2]} \right] \times \right. \\ \left. (c) \right]$$

$$\times \frac{1}{e^{2iL(-p_1 - i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2})} - 1} + \frac{1}{2i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2}} \left[\left[\frac{1}{2[k_0p_0 + p_1(-p_1 + i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2})]} \right] \right. \\ \left. (d) \right]$$

$$\left. \times \frac{1}{e^{-2iL(-p_1 + i\sqrt{(k_0+p_0)^2+m^2})} - 1} \right\} \quad (4.13)$$

Somando as expressões (a) e (b), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{(p_0+k_0)k_0}{\sqrt{k_0^2+m^2}} \times \frac{1}{(e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1)} \left[\frac{1}{k_0p_0 - i\sqrt{k_0^2+m^2} + p^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_0p_0 + i\sqrt{k_0^2+m^2} + p^2} \right] = \\ & = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{(p_0+k_0)k_0}{\sqrt{k_0^2+m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} \left[\frac{k_0p_0 + p^2}{(k_0p_0 + p^2)^2 + k_0^2 + m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Já a soma de (c) e (d), tomando L grande se composta como um termo fortemente oscilante, não sendo desta forma levada em consideração. Desta maneira, para p^2 pequeno e L grande, a expressão (4.14) toma a forma:

$$- \frac{\pi}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{k_0^2}{\sqrt{k_0^2 + m^2}} \times \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2+m^2}} - 1} \quad (4.15)$$

De forma análoga, o termo de polo da expressão (4.11) é dado por

$$+ \frac{\pi}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0 \sqrt{k_0^2 + m^2}}{e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1} . \quad (4.16)$$

Voltando à expressão (4.3) da função de dois pontos de Gravitino, temos para $\mu = \nu = 0$, que

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^L(p^2 \rightarrow 0, m^2) &= - \frac{2\pi i}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0 k_0^2}{\sqrt{k_0^2 + m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1} + \\ &+ 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2 + m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1} = \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2 + m^2}} \frac{1}{e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1} \left[1 - \frac{k_0^2}{m^2} \right] . \quad (4.17) \end{aligned}$$

Por outro lado, vimos que a contribuição da integral no contínuo contribui com um polo no infravermelho. A dicionando (4.17) com este termo de polo, temos

$$\Gamma_{00}(p^2 \rightarrow 0, m^2) = \frac{i\pi}{2m} \cdot p^2 + \Gamma_{00}^L(p^2 \rightarrow 0, m^2) . \quad (4.18)$$

Analogamente, para o termo Γ_{11}

$$\Gamma_{11}(p^2 \rightarrow 0, m^2) = - \frac{i\pi}{2m} p^2 + \Gamma_{11}^L(p^2 \rightarrow 0, m^2) , \quad (4.19)$$

sendo Γ_{11}^L dado por:

$$\Gamma_{11}^L(p^2 \rightarrow 0, m^2) = \frac{2\pi i}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{1}{\sqrt{k_0^2 + m^2} (e^{2L\sqrt{k_0^2 + m^2}} - 1)} \left[\frac{k_0^2 + m^2 - 1}{1} \right]$$
(4.20)

As expressões (4.18) e (4.19) mostram que a contribuição dependente do comprimento da corda L elimina o polo infravermelho. Isto significa que para L finito o Gravitino adquire uma massa. Cessa de existir um confinamento o que pode ser interpretado como um critério de estabilidade da corda.

No caso em que L tende ao infinito, as expressões Γ_{00}^L e Γ_{11}^L se tornam exponencialmente pequenas. Podemos assim colocar a dependência da massa do Gravitino em termos de L , tomado grande, como:

$$M_{G_\mu} \sim e^{-L m}$$
(4.21)

L é da ordem do inverso da constante da corda.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

O nosso trabalho se dividiu em duas partes distintas, a saber, na primeira se estudou do ponto de vista de uma teoria de campos 1+1 dimensional o acoplamento do modelo σ não linear à supergravidade. Mostramos que devido à quebra da simetria de Weyl, ao nível quântico, existe em 1+1 dimensões supergravidade, ou seja, o Gravitino e o Graviton não podem, como no caso clássico, ser eliminados pela adoção de um calibre especial sem alterar a própria teoria. As funções de n pontos do Gravitino e do Graviton aparecem apenas devido às flutuações quânticas da teoria, de forma que podemos falar de uma supergravidade induzida. Em particular, tanto a função de 2 pontos do Gravitino como do Graviton são finitas no ultravioleta. Isto ocorre devido à cancelamentos de amplitudes divergentes, umas possuindo apenas linhas internas de boson ou fermion e outras linhas mixtas tanto de boson como de fermion. A supersimetria do modelo vem a dar um auxílio fundamental para que estes cancelamentos ocorram. Infelizmente, ao calcularmos as funções de 4 pontos do Gravitino e do Graviton, bem como a função envolvendo 2 Gravitinos e 2 Gravitons teremos uma divergência no ultravioleta. Apesar de não termos calculado a expressão para funções de n pontos do Gravitino e Graviton em ordens superiores, a presença de termos divergentes nestas outras ordens torna a teoria não re-

normalizável. Como cada linha de Gravitino e de Graviton carrega um fator $1/\sqrt{N}$, além do fator multiplicativo global N da ação efetiva, a nossa teoria só é livre de divergências no ultravioleta se $N=\infty$. Este fato lança luz sobre a possibilidade do estudo da gravitação quântica com supersimetria e expansão $1/N$ no limite $N=\infty$ em 3+1 dimensões, de forma análoga àquela em que se procura para a teoria de Yang-Mills com simetria interna $SU(\infty)$ uma solução exata⁽¹⁵⁾.

Outro fato que merece menção é a presença de um polo no regime infravermelho do propagador do Gravitino. Em 1+1 dimensões ele equivale a termos confinamento. Como o Gravitino aparece, na ação, acoplado à corrente de Noether supersimétrica, pode-se interpretar este comportamento como sendo de todos os graus de liberdade supersimétricos da teoria.

Os modelos σ não lineares em 1+1 dimensões são classicamente integráveis o que implica na presença de uma carga não local conservada. No caso específico do nosso modelo, ela é dada por:

$$Q^{ij} = \int dy_1 dy_2 \epsilon (y_1 - y_2) J_0^{ik}(t, y_1) J_0^{kj}(t, y_2) - \\ - \int dy [j_1^{ij}(t, y) + 2 i^{ij}(t, y)]$$

onde:

$$J_\mu^{ij} = \partial_\mu \phi^i \phi^j - \phi^i \partial_\mu \phi^j + \frac{i}{2} \bar{\psi}^i \gamma_\mu \psi^j - \frac{i}{2} \bar{\psi}^j \gamma_\mu \psi^i +$$

$$+ \bar{\psi}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \phi^j G_\nu - \bar{\psi}^j \gamma^\nu \gamma^\mu \phi^i G_\nu$$

$$j_\mu^{ij} = \partial_\mu \phi^i \phi^j - \phi^i \partial_\mu \phi^j$$

$$i_{\mu}^{ij} = \frac{i}{2} \bar{\psi}^i \gamma_{\mu} \psi^j - \frac{i}{2} \bar{\psi}^j \gamma_{\mu} \psi^i$$

Achamos que, devido ao polo no infravermelho do propagador do Gravitino, esta carga não local não seja mais conservada quanticamente. Teríamos a presença de um termo de anomalia. De qualquer forma esta questão ainda permanece em aberto.

No que se refere às considerações referentes à corda aberta, mesmo sem tratar o problema de forma completa, podemos dizer que devido à não linearidade dos campos constitutivos conseguimos determinar um critério de estabilidade para ela. Se os campos constitutivos não fossem massivos teríamos que quantizar a teoria usando o método de Polyakov. Neste sentido, a conexão deste método com o nosso, se existir, permanece também em aberto.

Finalmente achamos que os modelos de cordas, particularmente as fechadas, teriam uma relevância para o estudo dos loops de Wilson^(55,56), questão esta, mesmo para os especialistas, totalmente em aberto.

APÊNDICE ANOTAÇÕES

a) Métrica: $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1)$

b) Matrizes γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

d) $\bar{\psi} = \psi^T \gamma_0$ (A.2)

d) Transformação de Fierz

Para os spinores bi-dimensionais reais (Majorana) ψ_1, \dots, ψ_4 temos a seguinte transformação de Fierz:

$$(\bar{\psi}_1 \psi_2) (\bar{\psi}_3 \psi_4) = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma_a \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_4) (\bar{\psi}_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma^a \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \psi_2) \quad (\text{A.3})$$

que equivale a escrever:

$$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} [\delta_{\alpha\rho} \delta_{\lambda\beta} + \gamma_5 \alpha_\rho \gamma_5 \lambda_\beta + \gamma_{a\alpha\rho} \gamma^a_{\lambda\beta}] \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B

PROVA DE INVARIANÇA DA AÇÃO (363) POR TSSL

O modelo σ-não linear supersimétrico, com simetria global inteira $O(N)$, é dado pela lagrangeana:

$$L_0 = \frac{1}{2} \partial^a \phi_i \partial_a \phi_i + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \quad (B.1)$$

respeitando-se os vínculos $\bar{\psi}_i \phi_i = 0$ e $\phi_i^2 = 1$.

Ela é invariante pela TSSG, com ϕ_i e ψ_i se transformando da forma:

$$\delta \phi_i = \bar{\varepsilon} \psi_i \quad (B.2a)$$

$$\delta \phi_i = -i \gamma^a \varepsilon \partial_a \phi_i + \frac{1}{2} \varepsilon \phi_i (\bar{\psi}_j \psi_j) \quad (B.2b)$$

Para tornar esta simetria local, fazemos ε depender da posição no espaço-tempo. Desta maneira L_0 não é mais invariante. Ela se comporta por TSSL como:

$$\delta L_0 = J^a \partial_a \varepsilon + \partial^a (\bar{\varepsilon} \psi_i \partial_a \phi_i) \quad (B.3)$$

onde $J^a = \bar{\psi}_i \gamma^a \gamma^b \partial_b \phi_i$ constitue a corrente de Noether supersimétrica.

A fim de tornar a teoria invariante por TSSL,

a menos de uma divergência total, introduzimos o Gravitino G_μ - que constitue o campo de calibre associado à TSSL - tal que:

$$\delta^{\text{TSSL}} G_\mu = -\partial_\mu \varepsilon \quad (\text{B.4})$$

Podemos observar de (B.4) que G_μ constitue um campo vetorial spinorial.

Assim, adicionamos à L_0 o termo:

$$L_1 = \bar{\psi}_i \gamma^a \gamma^b \partial_b \phi_i G_a \quad (\text{B.5})$$

Mesmo assim a lagrangeana resultante não é independente de termos contendo $\partial_a \varepsilon$, ao aplicarmos a TSSL. Para resolver esta questão, adicionamos o termo (*)

$$L_2 = -\frac{1}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i) (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) \quad (\text{B.6})$$

à $L_0 + L_1$. A lagrangeana resultante:

$$L = \frac{1}{2} \partial^a \phi_i \partial_a \phi_i + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + \bar{\psi}_i \gamma^a \gamma^b \partial_b \phi_i G_a - \frac{1}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i) (\bar{G}_a \gamma^b \gamma^a G_b) \quad (\text{B.7})$$

apesar de não conter termos com $\partial_a \varepsilon$, não é invariante por TSSL. Ela se torna invariante, como se mostrou no cap. 3, ao introduzirmos uma métrica curva na teoria. Isto equivale a se reescrever (B.7) como:

(*) Usando transformação de Fierz.

$$L = e \left\{ \frac{1}{2} e_a^\mu e^{\nu a} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i + \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + \right. \\ \left. + \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \phi_i G_\mu - \frac{1}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i) (\bar{G}_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu G_\nu) \right\} \quad (B.8)$$

onde $e = \det e_\mu^a$, $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ e $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu \gamma_5$.

Por TSSL,

$$\delta e_a^\mu = \alpha (\bar{G}^\mu \gamma_a \varepsilon) \quad (B.9a)$$

e

$$\delta e = -e \alpha (\bar{G}^\mu \gamma_\mu \varepsilon) \quad (B.9b)$$

sendo α uma constante (complexa), fixada posteriormente.

Também, modificamos (B.2b) e (B.4) para:

$$\delta^{TSSL} \psi_i = \delta^{TSSG} \psi_i + \beta (\bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \varepsilon \quad (B.10a)$$

$$\delta^{TSSL} G_\mu = -D_\mu \varepsilon \quad (B.10b)$$

Podemos escrever para G_μ que:

$$G_\mu = \tilde{G}_\mu + \gamma_\mu \lambda \quad (B.11)$$

onde $\gamma^\mu \tilde{G}_\mu = 0$.

Usando a simetria por TSW para G_μ , fixamos o seu calibre da forma:

$$\gamma^\mu G_\mu = 0 \quad (B.12)$$

Isto implica na existência das seguintes relações:

$$\gamma_\mu G_\nu = \gamma_\nu G_\mu \quad (\text{B.13a})$$

$$\gamma_5 G_\mu = \epsilon_{\mu\nu} G^\nu \quad (\text{B.13b})$$

$$\bar{G}_\mu G_\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{G} \cdot G \quad (\text{B.13c})$$

$$\bar{G}_\mu \gamma_\nu G_\lambda = 0 \quad (\text{B.13d})$$

Aplicando à todos os campos que aparecem em (B.8) a TSSL temos formalmente que:

$$\delta L = \delta e \{ \} + e \delta \{ \} \quad (\text{B.14})$$

onde $\{ \} \equiv L/e$.

Usando a fixação de calibre $\beta=0$, teremos, por (B.9b), que $\delta e=0$. Assim para mostrar a invariança da lagrangeana (a menos de uma divergência total) resta determinar $\delta \{ \}$. Assim:

$$e \delta \{ \} = e \left\{ \frac{\alpha}{2} \left[(\bar{G}^\mu \gamma^\nu \epsilon) + (\bar{G}^\nu \gamma^\mu \epsilon) \right] \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i + \partial^\mu (\bar{\epsilon} \psi_i) \partial_\mu \phi_i - \right. \\ \left. (1) \quad (2) \quad (3) \right.$$

$$- \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i) \partial_\nu \phi_i + \frac{1}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{\epsilon} \not{\partial} \psi_i) \phi_i - \beta \frac{i}{2} (\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi_i) (\bar{\psi}_i G_\mu) + \\ (4) \quad (5) \quad (6)$$

$$+ \frac{i\alpha}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\rho \partial_\mu \psi_i) (\bar{G}^\mu \gamma_\rho \epsilon) + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \epsilon) \partial_\nu \phi_i + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \epsilon) \partial_\nu \phi_i + \\ (7) \quad (8) \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon) \partial_\mu \partial_\nu \phi_i + \frac{i}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \epsilon) \partial_\mu \phi_i + \frac{i\beta}{2} \bar{\psi}_i \not{\partial} \left[(\bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon \right] + \\ (10) \quad (11) \quad (12)$$

$$+ \frac{i}{2} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{\epsilon} \gamma^\mu \psi_i) \partial_\mu \phi_i + \frac{\beta}{2} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{G}_\mu \psi_i) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \epsilon) + i (\bar{\epsilon} \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) \partial_\nu \phi_i \partial_\rho \phi_i -$$

(13)

(14)

(15)

$$- \beta (\bar{\epsilon} \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) (\bar{\psi}_i G_\rho) \partial_\nu \phi_i + \alpha (\bar{\psi}_i \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) (\bar{G}^\mu \gamma_\rho \epsilon) \partial_\nu \phi_i +$$

(16)

(17)

$$+ \alpha (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\rho G_\mu) (\bar{G}^\nu \gamma_\rho \epsilon) \partial_\nu \phi_i - (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \epsilon) \partial_\nu \phi_i - \frac{1}{2} \omega_\mu (\bar{\phi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon) \partial_\nu \phi_i +$$

(18)

(19)

(20)

$$+ (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial^\nu G_\mu) (\bar{\epsilon} \partial_\nu \psi_i) - \frac{i}{2} (\bar{\epsilon} \gamma^\mu \psi_i) \partial_\mu \phi_i (\bar{G}_\rho \gamma^\lambda \gamma^\rho G_\lambda) - (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) (\partial_\nu \bar{\epsilon} \psi) -$$

(22)

(23)

(21)

$$- \frac{\beta}{2} (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \epsilon) (\bar{G}_\mu \psi_i) (\bar{G}_\rho \gamma^\lambda \gamma^\rho G_\lambda) + \frac{1}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\partial_\nu \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) -$$

(24)

(25)

$$- \frac{1}{8} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) \omega_\nu + \frac{1}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \epsilon) +$$

(26)

(27)

$$+ \frac{1}{8} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon) \omega_\mu - \frac{\alpha}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{G}_\nu \gamma^\rho \gamma^\nu G_\mu) (\bar{G}^\mu \gamma_\rho \epsilon) -$$

(28)

(29)

$$- \frac{\alpha}{4} (\bar{\psi}_j \psi_j) (\bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\rho G_\mu) (\bar{G}^\nu \gamma_\rho \epsilon) \} \quad (B.15)$$

(30)

Como em 1+1 dimensões vale que:

$$\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\rho \mu} \gamma^\nu + g^{\mu \nu} \gamma^\rho - g^{\rho \nu} \gamma^\mu \quad (B.16)$$

temos para (15)



$$\begin{aligned} i(\bar{\epsilon}\gamma^\rho\gamma^\mu\partial_\rho^\nu G_\mu) \partial_\nu \phi_i \partial_\rho \phi_i &= -i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu G_\mu) \partial^\nu \phi_i \partial_\nu \phi_i + \\ &+ i(\bar{\epsilon}\gamma^\nu G^\mu) \partial_\nu \phi_i \partial_\mu \phi_i + i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu G^\nu) \partial_\nu \phi_i \partial_\mu \phi_i , \end{aligned} \quad (B.17)$$

que comparada com (1) e (2) [usando que $\beta=0$] implica na determinação de α ,

$$\alpha = 2i \quad (B.18)$$

Perfazendo uma integração parcial em (4), temos

$$-\frac{e}{2} (\bar{\epsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i) \partial_\nu \phi_i = -\frac{\partial_\mu e}{2} (\bar{\epsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi_i) \partial_\nu \phi_i + \quad (4a)$$

$$+ e \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\epsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi_i) \partial_\nu \phi_i + \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}\partial_\mu(\gamma^\nu\gamma^\mu)\psi_i) \partial_\nu \phi_i \right] + \quad (4b) \quad (4c)$$

$$+ \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi_i) \partial_\mu \partial_\nu \phi_i \quad . \quad (4d) \quad (B.19)$$

Juntando (4b) e (9) teremos o cancelamento de (19). Já a soma de (4d) e (3) dá

$$(4d) + (3) = e\partial^\mu(\bar{\epsilon}\psi_i \partial_\mu \phi_i) \quad . \quad [\text{termo (31)}] \quad (B.20)$$

A soma de (5), (11) e (13) é zero.

Fazendo uso das transformações de Fierz, $\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\rho = 0$ e $\bar{G}^\mu\gamma_\mu G_\mu = 0$ podemos mostrar que as expressões (17), (29) e (30) se anulam separadamente.

Com Fierz e $\beta=0$ também (14) e (24) são nulas.

Por outro lado, como $\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \phi_i = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_j \psi_j) \bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu$

[Equação clássica de movimento para G_μ], a soma de (20), (26) e (28) é zero.

Efetuando uma integração parcial em (12), temos

$$e \frac{i\beta}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\nu \partial_\nu \left[(\bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon \right] = - \frac{i\beta}{2} \partial_\nu e (\bar{\psi}_i \gamma^\nu \gamma^\mu \epsilon) (\bar{G}_\mu \psi_i) - \quad (12a)$$

$$- \frac{i\beta}{2} e \left[(\partial_\nu \bar{\psi}_i \partial_\nu \gamma^\mu \epsilon) (\bar{G}_\mu \psi_i) + (\bar{\psi}_i \partial_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \epsilon) (\bar{G}_\mu \psi_i) \right] . \quad (B.21)$$

$$(12b) \qquad \qquad \qquad (12c)$$

Com Fierz, e $\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \phi_i = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_j \psi_j) \bar{G}_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu$ em (12a), e somando este resultado com (4a) nos dá

$$\frac{\partial_\mu e}{2} (1+i\beta) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon) \partial_\nu \phi_i . \quad [\text{termo (32)}] \quad (B.22)$$

Também, a soma de (12b), (6), (7) e (22) nos dá:

$$(i\beta-1) \left[(\bar{\psi}_i \partial_\mu \psi_i) (\bar{G}^\mu \epsilon) + (\bar{\psi}_i \gamma_5 \partial_\nu \psi_i) (\bar{\epsilon} \gamma_5 G^\nu) \right] \quad [\text{termo (33)}] \quad (B.23)$$

De forma análoga para (16), (18) e (23), teremos

$$2(\beta+i) (\bar{G}_\nu \gamma_5 G_\mu) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon) \partial^\nu \phi_i . \quad [\text{termo (34)}] \quad (B.24)$$

Finalmente, a soma de (4c), (8) e (12c) nos fornece

$$\left[\bar{\psi}_i \partial_\mu (\gamma^\mu \gamma^\nu) \epsilon \right] \partial_\nu \phi_i . \quad [\text{termo (35)}] \quad (B.25)$$

Somando todos os termos que não foram eliminados, temos

$$\begin{aligned}
 e\delta\{\} = & e \left\{ \frac{1}{2e} \partial_\mu e (1 + i\beta) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon) \partial_\nu \phi_i + \right. \\
 & + \left[\bar{\psi}_i \partial_\mu (\gamma^\mu \gamma^\nu) \epsilon \right] \partial_\nu \phi_i + \partial^\mu (\bar{\epsilon} \psi_i \partial_\mu \phi_i) + \\
 & + (i\beta - 1) \left| (\bar{\psi}_i \partial_\mu \psi_i) (\bar{G}^\mu \epsilon) + (\bar{\psi}_i \gamma_5 \partial_\nu \psi_i) (\bar{\epsilon} \gamma_5 G^\nu) + \right. \\
 & \left. \left. + 2(\beta + i) (\bar{G}_\nu \gamma_5 G_\mu) (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon) \partial^\nu \phi_i \right\} \right. . \quad (B.26)
 \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\beta = -i \quad (B.27)$$

(B.26) fica com a forma

$$\begin{aligned}
 e\delta\{\} = & e \left\{ \frac{1}{e} \partial_\mu e (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon) \partial_\nu \phi_i + (\bar{\psi}_i \partial_\mu (\gamma^\mu \gamma^\nu) \epsilon) \partial_\nu \phi_i + \right. \\
 & + \partial^\mu (\bar{\epsilon} \psi_i \partial_\mu \phi_i) = e \left\{ \frac{1}{e} \partial_\mu e \epsilon^{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} \right\} (\bar{\psi}_i \gamma_5 \epsilon) \partial_\nu \phi_i . \quad (B.28)
 \end{aligned}$$

Como

$$\epsilon^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \epsilon^{ab} \quad (B.29a)$$

$$\frac{\partial_\mu e}{e} = \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (B.29b)$$

e

$$\partial_\mu e_b^\nu = w_{\mu b}^c e_c^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu e_b^\lambda , \quad (B.29c)$$

onde

$$w_{bc}^\mu = \epsilon_{bc} e_d^\mu \epsilon^{\rho\lambda} \partial_\lambda e_\rho^d , \quad (B.30)$$

a expressão (B.28) se anula. Assim, $e\delta\{\} = 0$.

APÊNDICE C

FORMULÁRIO PARA A APLICAÇÃO DA REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL⁽³⁴⁾

$$a) \frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (C.1)$$

e sua generalização

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_m^{\alpha_m}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_m)} x \\ x \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-2}} dx_{m-1} \left\{ \frac{x_{m-1}^{\alpha_1-1} (x_{m-2}-x_{m-1})^{\alpha_2-1} \dots (1-x)^{\alpha_m-1}}{[a x_{m-1} + \dots + a_m(1-x)]^{\alpha_1+\dots+\alpha_m}} \right\} \quad (C.2)$$

$$\int dp^n \frac{1}{[p^2 + 2kp + m^2]^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{[m^2 - k^2]^{\alpha-n/2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (C.3)$$

$$\int \frac{dp_\mu^n p_\mu}{[p^2 + 2kp + m^2]^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{[m^2 - k^2]^{\alpha-n/2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)} (-k_\mu) \quad (C.4)$$

$$\int \frac{dp_\mu^n p_\mu p_\nu}{[p^2 + 2kp + m^2]^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{[m^2 - k^2]^{\alpha-n/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Gamma(\alpha-n/2) k_\mu k_\nu + \right. \\ \left. + \Gamma(\alpha-1-n/2) \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (m^2 - k^2) \right\} \quad (C.5)$$

$$\int \frac{dp^n p_\mu p_\nu p_\lambda}{[p^2 + 2kp + m^2]^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{[m^2 - k^2]^{\alpha-n/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left\{ -\Gamma(\alpha-n/2) k_\mu k_\nu k_\lambda - \right. \\ \left. - \Gamma(\alpha-1-n/2) \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} k_\lambda + \delta_{\mu\lambda} k_\nu + \delta_{\nu\lambda} k_\mu) (m^2 - k^2) \right\} \quad (C.6)$$

$$\int \frac{dp^n p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{[p^2 + 2kp + m^2]^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{i\pi^{n/2}(1/2-\alpha)}{\Gamma(\alpha) [m^2 - k^2]^{\alpha+1-m/2}} \times \\ \times \left\{ -\Gamma(\alpha-n/2) k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho - \Gamma(\alpha-1-n/2) \frac{1}{2} \times \right. \\ \times \left[\delta_{\mu\nu} k_\lambda k_\rho + \delta_{\mu\lambda} k_\nu k_\rho + \delta_{\nu\lambda} k_\mu k_\rho \right] (m^2 - k^2) \Big\} - \\ - \frac{i\pi^{n/2}}{2\alpha [m^2 - k^2]^{\alpha-n/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ -\Gamma(\alpha-n/2) [\delta_{\mu\rho} k_\nu k_\lambda + \delta_{\nu\rho} k_\mu k_\lambda + \right. \\ \left. + \delta_{\lambda\rho} k_\mu k_\nu] \right\} - \\ - \Gamma(\alpha-1-n/2) \frac{1}{2} \left[\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\mu\rho} \right] (m^2 - k^2) + \\ + \Gamma(\alpha-1-n/2) \left[\delta_{\mu\nu} k_\lambda + \delta_{\mu\lambda} k_\nu + \delta_{\nu\lambda} k_\mu \right] k_\rho \Big\} \quad (C.7)$$

Para transformar estas integrais da notação usada na referência (34), onde $p_{(34)}^4 = ip_0$ e $dp_{(34)}^n = idp_{(nossa)}^n$, para a nossa, mudamos: $p_{(34)}^2 \rightarrow p_{(nossa)}^2$ e $\delta_{\mu\nu} \rightarrow -\eta_{\mu\nu}$.

APÊNDICE DGRÁFICOS DE FEYNMAN

Relação das Figuras:

FIGURA 1 - Fórmula (3.128).

FIGURA 2 - Fórmula (3.117).

FIGURA 3 - Fórmula (3.156).

FIGURA 4 - Fórmula (3.159).

FIGURA 7 - Fórmula (3.157).

FIGURA 8 - Fórmula (3.158).

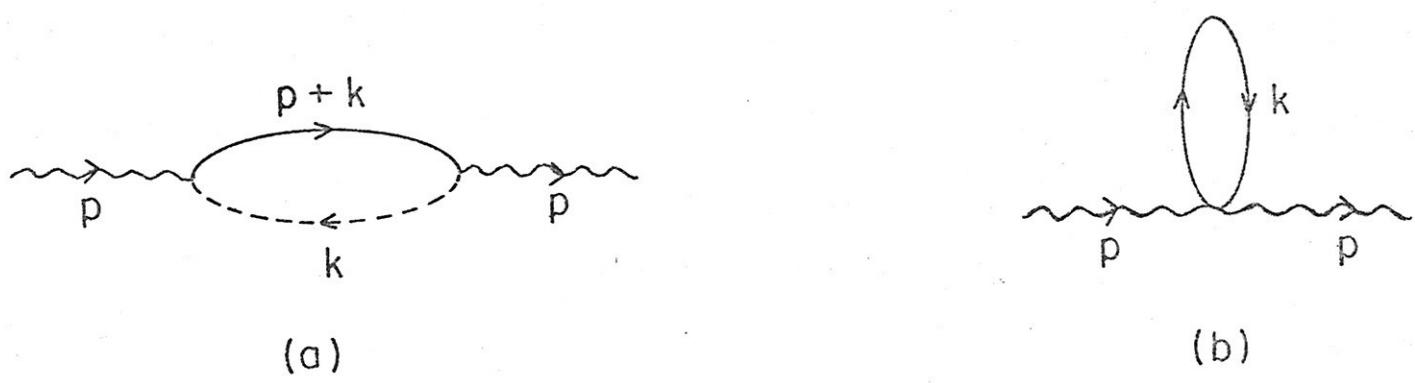


Fig 1

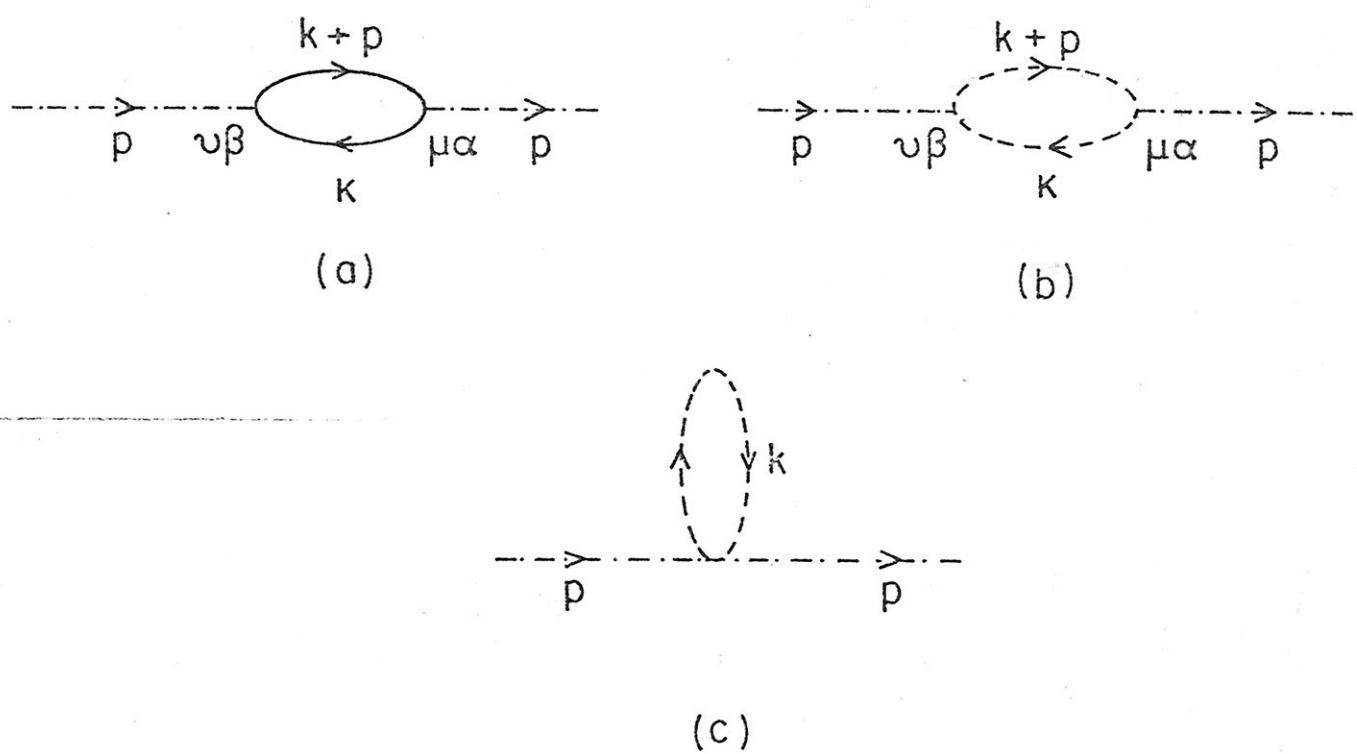


Fig 2

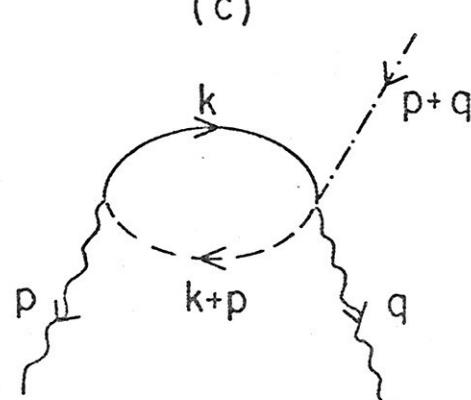
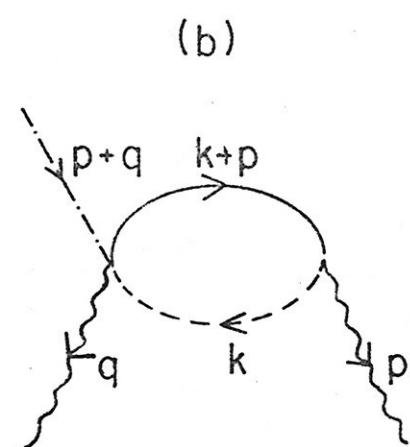
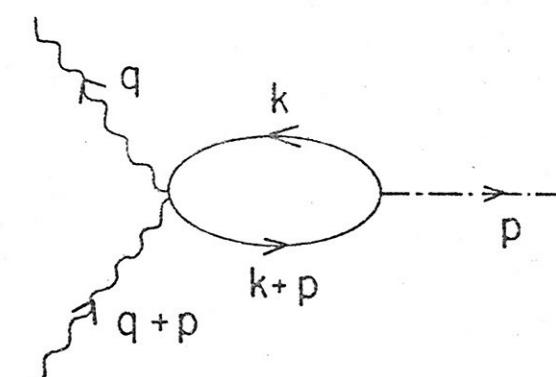
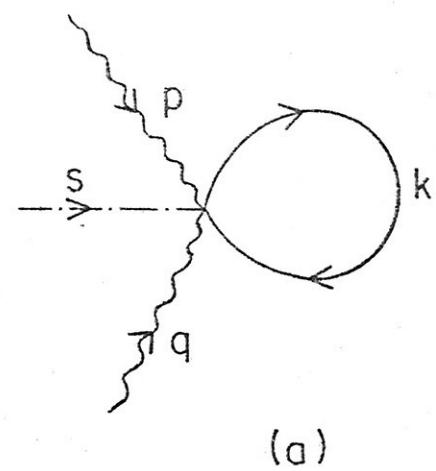
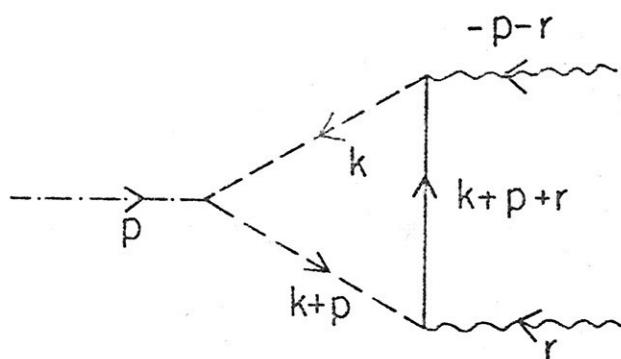
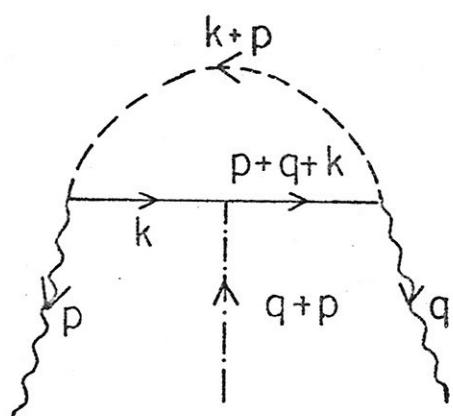


Fig 3

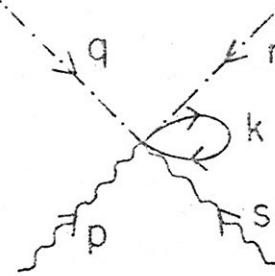


(e)

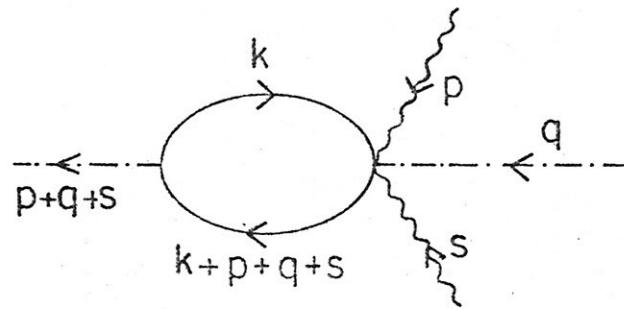


(f)

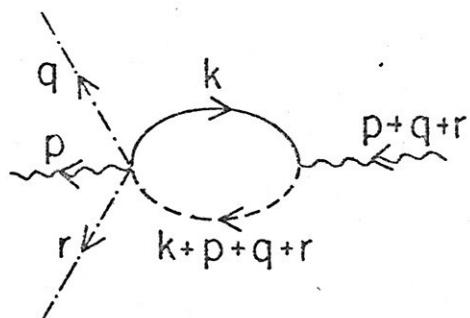
Fig 3



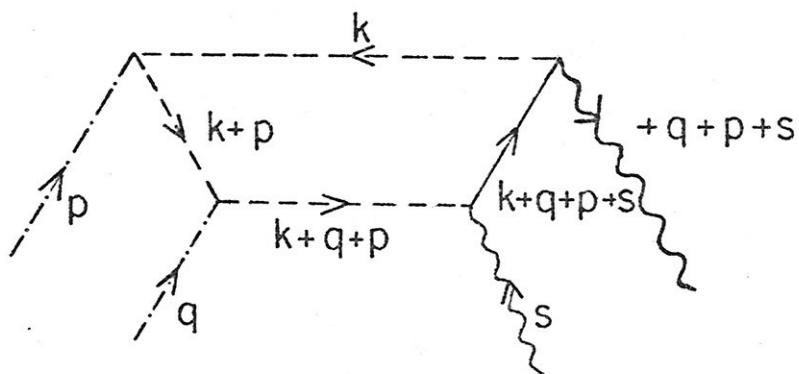
(a)



(b)

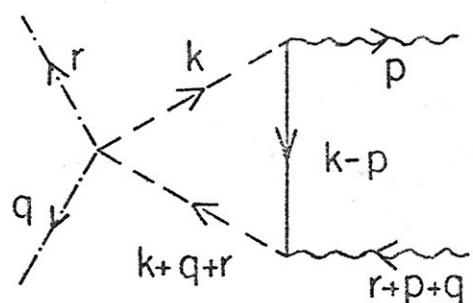
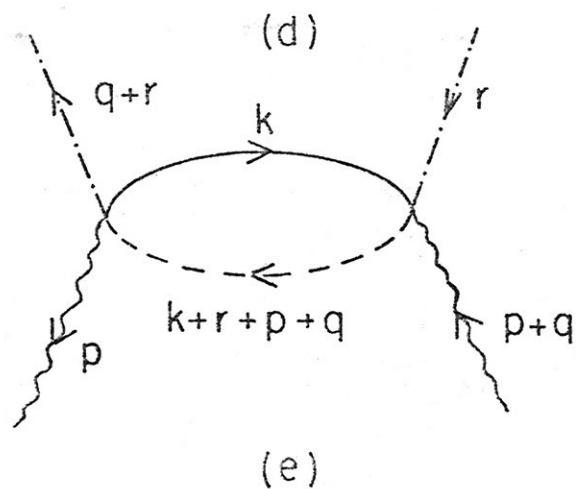
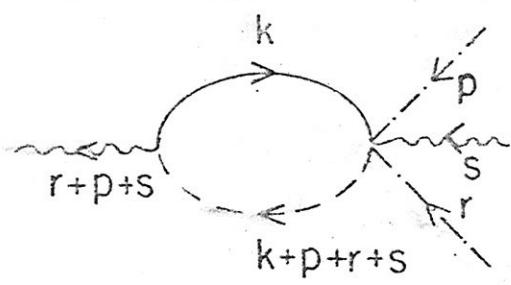


(c)

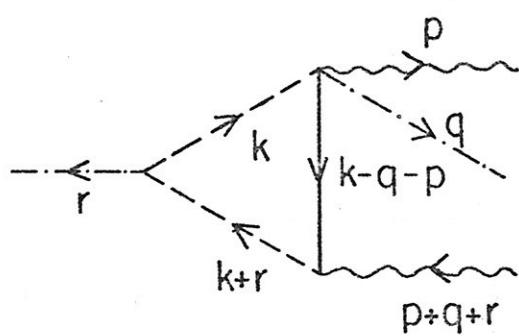


(m)

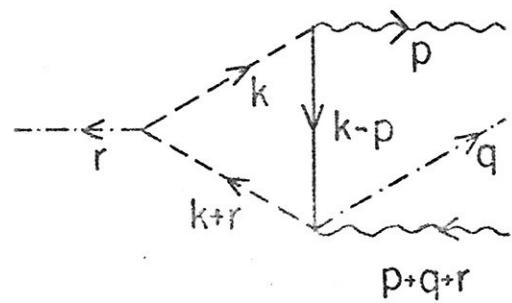
Fig 4



(f)

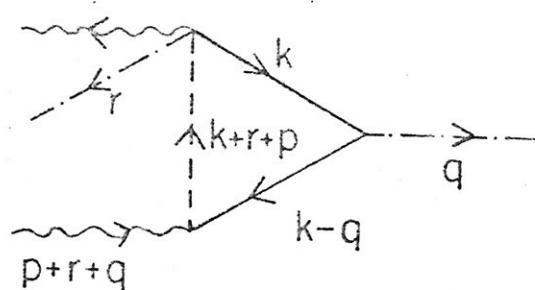


(g)

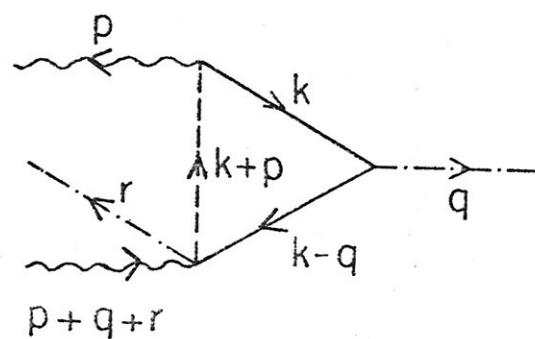


(h)

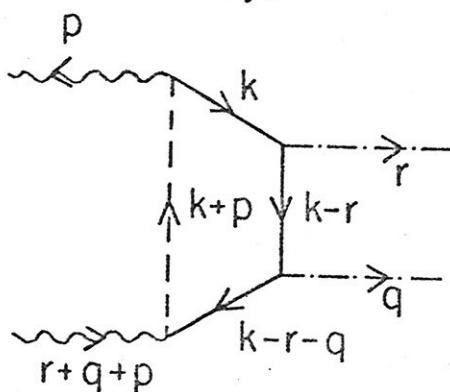
Fig 4



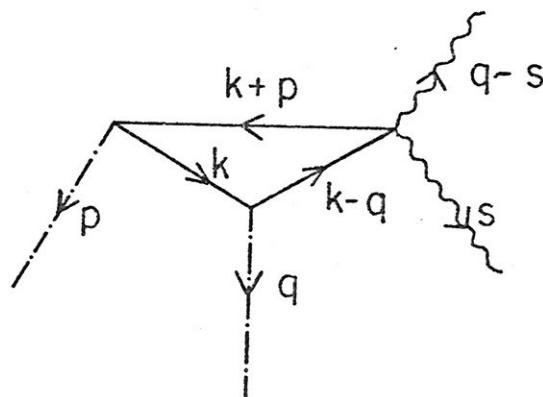
(i)



(j)

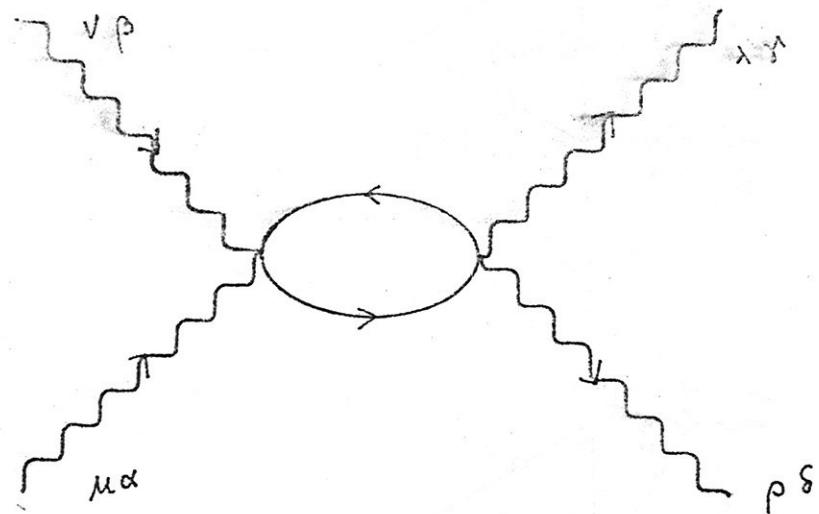


(k)

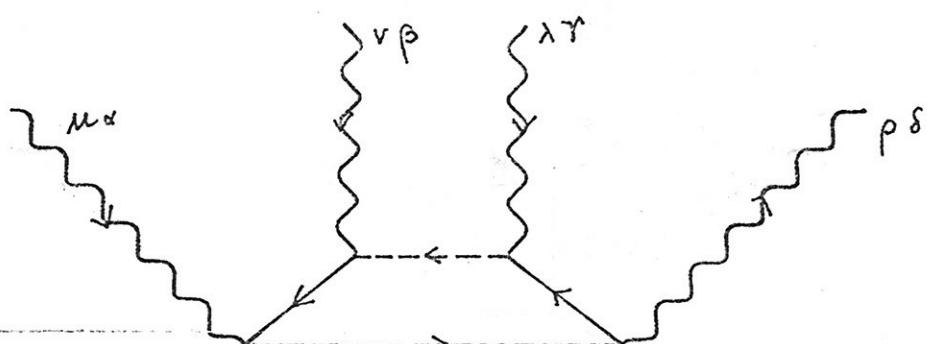


(l)

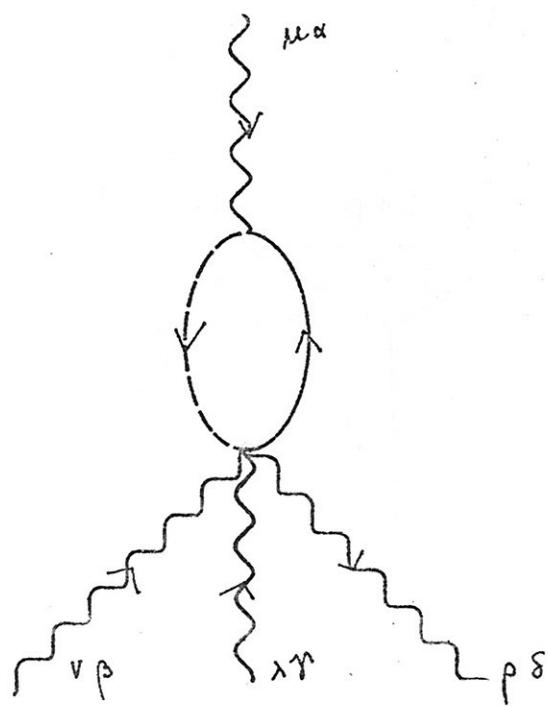
Fig 4



(a)

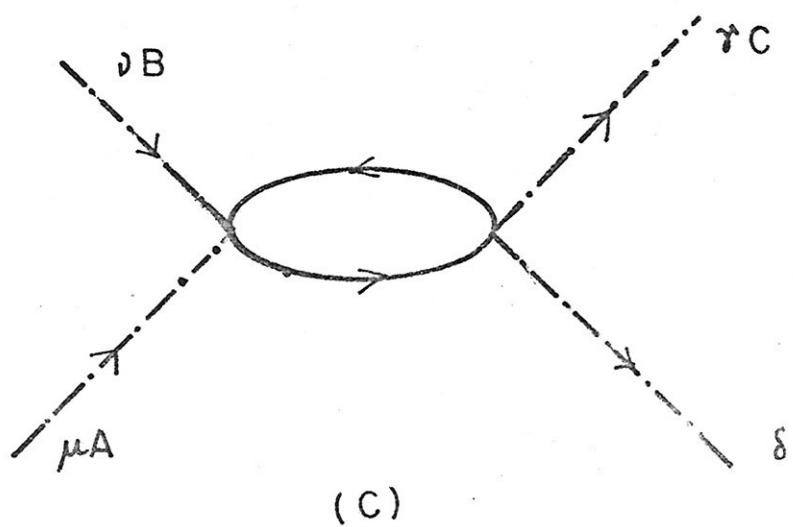
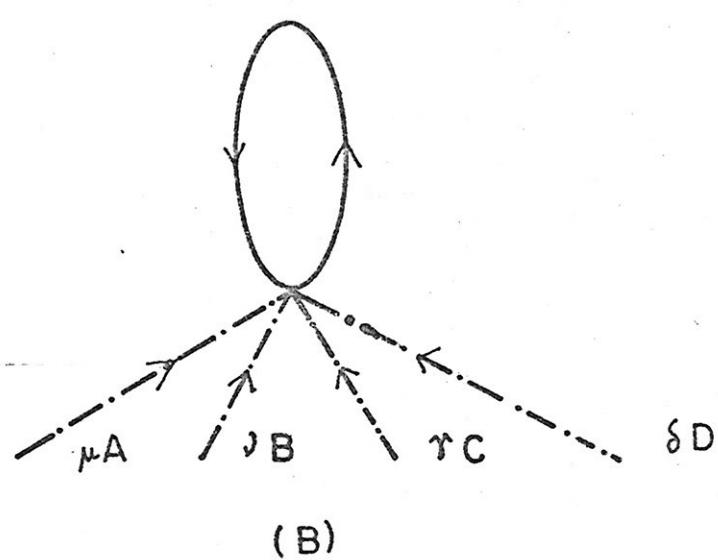
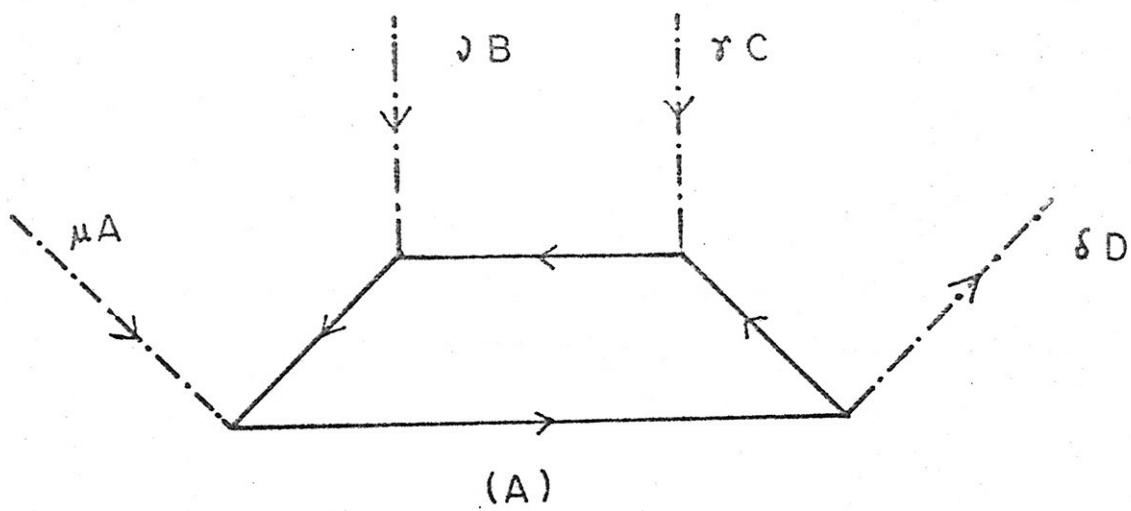


(b)



(c)

Fig. 7



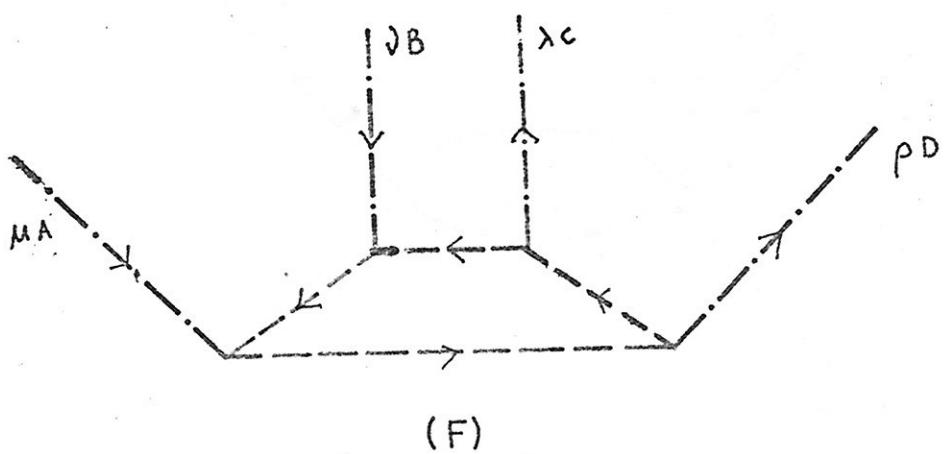
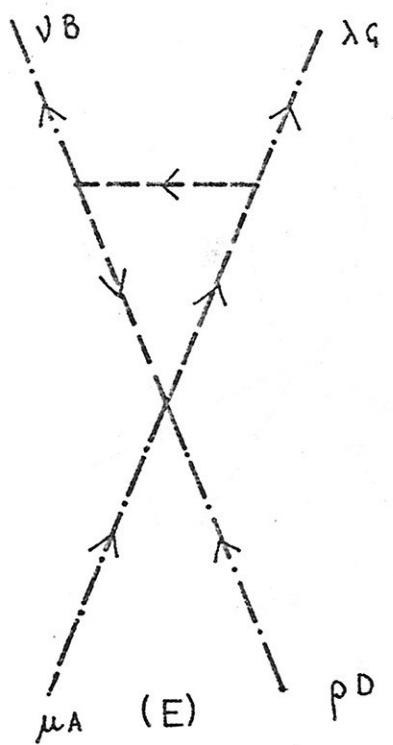
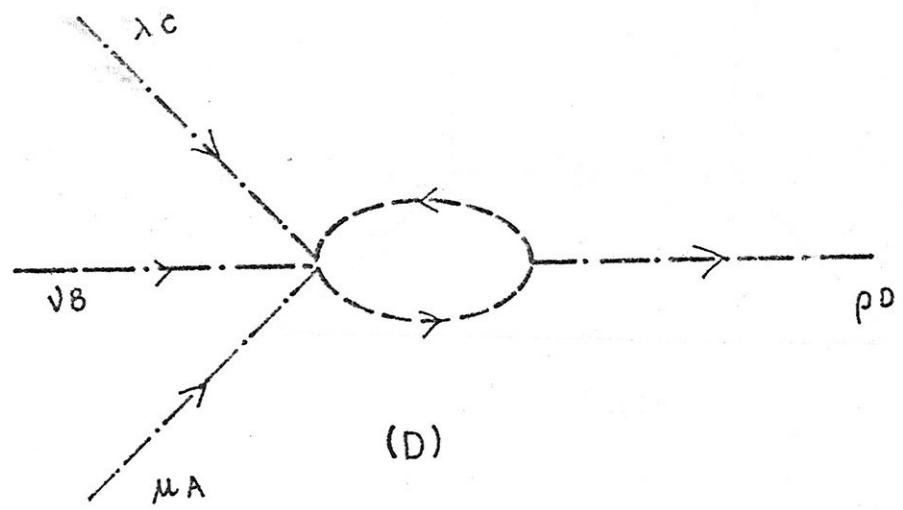


FIG. 8

APÊNDICE E

DEMONSTRAÇÕES DA FORMA DOS PROPAGADORES DE G_μ E c

Escrevemos a integração funcional de G_μ e c como:

$$\begin{aligned}
 & \int [dG_\mu] [dc] \dots \exp \left\{ \frac{i}{2} \bar{G}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}G} G^\nu + \frac{i}{2} \bar{c} \Gamma^{\bar{c}c} c + \right. \\
 & + \frac{i}{2} \bar{G}^\mu \Gamma_{\mu}^{\bar{G}/c} c + \frac{i}{2} \bar{c} \Gamma_{\mu}^{\bar{c}/G} G^\mu + \frac{i}{2} \bar{G}_\mu j^\mu + \frac{i}{2} \bar{j}^\mu G_\mu + \\
 & \left. + \frac{i}{2} \bar{c} \lambda + \frac{i}{2} \bar{\lambda} c \right\} \quad (E.1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Se } \Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}/G} = -i \Gamma_{\mu\nu}^{\bar{G}/G} \quad \text{e} \quad \Gamma^{\bar{c}/c} = -i \Gamma^{\bar{c}/c},$$

Reescrevemos (E.1) como:

$$\begin{aligned}
 & \int [dG_\mu] [dc] \dots \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\bar{G}_\mu - i \bar{c} (\Gamma_{c/G} \Gamma_{\bar{G}/G}^{-1})_\mu - i (\bar{j} \Gamma_{\bar{G}/G}^{-1})_\mu \right] \times \right. \\
 & \times \Gamma^{\mu\nu}_{\bar{G}/G} \left[G_\nu - i (\Gamma_{\bar{G}/G}^{-1})_\nu \Gamma_{G/c} c - i (\Gamma_{\bar{G}/G}^{-1})_\nu j \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \left[\bar{c} + \bar{j}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^{-1} \bar{G}/G \Gamma_{\bar{G}/c} [\]^{-1} - i \bar{\lambda} [\]^{-1} \right] [\] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[c + \left[\dots \right]^{-1} \Gamma_{c/G}^\lambda \Gamma_{\bar{G}/G\lambda\mu}^{-1} j^\mu - i \left[\dots \right]^{-1} \lambda \right] - \\
& - \frac{1}{2} \bar{j}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^{-1} \bar{G}/G j^\nu - \frac{1}{2} \left[\bar{\lambda} + i \bar{j}^\mu \Gamma_{\bar{G}/G\mu\lambda}^{-1} \Gamma_{\bar{G}/G\lambda\mu}^\lambda \right] \left[\dots \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\lambda + i \Gamma_{c/G}^\lambda \Gamma_{\bar{G}/G\lambda\mu}^{-1} j^\mu \right] \} \quad (E.2)
\end{aligned}$$

onde

$$\left[\dots \right] = \left[\Gamma_{\bar{c}/c} + \Gamma_{\bar{c}/G}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^{-1} \bar{G}/G \Gamma_{\bar{G}/c}^\lambda \right] \quad (E.3)$$

Assim escrevemos o propagador de G_μ

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T G_\mu \bar{G}_\rho | 0 \rangle &= - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\rho}^{-1} \bar{G}/G + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\lambda}^{-1} \bar{G}/G \Gamma_{\bar{G}/c}^\lambda \left[\dots \right]^{-1} \Gamma_{c/G}^\delta \times \\
&\times \Gamma_{\delta\rho}^{-1} \bar{G}/G ; \quad (E.4)
\end{aligned}$$

e de c :

$$\langle 0 | T c \bar{c} | 0 \rangle = - \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\bar{c}/c} + \Gamma_{\bar{c}/G}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^{-1} \bar{G}/G \Gamma_{\bar{G}/c}^\lambda \right]^{-1} \quad (E.5)$$

APÊNDICE FFECHAMENTO DA ÁLGEBRA

Qualquer teoria supersimétrica tem que possuir um mesmo número de campos bosônicos e fermionicos. Isto implica, ao nível global, em que, para um campo arbitrário Φ , seja verdadeiro que:

$$[\delta_2, \delta_1] \Phi = \epsilon^m P_m \Phi \quad (F.1)$$

onde ϵ^m é um parâmetro infinitesimal, δ_i é uma transformação infinitesimal de supersimetria global e P_m o gerador das translações. Dizemos que uma vez satisfeita a relação (F.1) a álgebra dos geradores de supersimetria Q^α , dada por:

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = \frac{1}{2} (\gamma^m c^{-1})^{\alpha\beta} P_m \quad (F.2)$$

é fechada. Além de (F.2) a álgebra supersimétrica gradada é constituída pelas seguintes relações:

$$[Q^\alpha, P_m] = 0 \quad (F.3a)$$

$$[Q^\alpha, M_{mn}] = (\sigma_{mn})_\beta^\alpha Q^\beta \quad (F.3b)$$

$$[P_m, P_n] = 0 \quad (F.3c)$$

$$[P_m, M_{rs}] = \delta_{mr} P_s - \delta_{ms} P_r \quad (F.3d)$$

$$[M_{mn}, M_{rs}] = \delta_{mr} \delta_{ns} + \dots, \quad (F.3e)$$

sendo M_{rs} o gerador das transformações de Lorentz.

De outro lado, se a supersimetria for local, dizemos que a álgebra de supersimetria é fechada se:

$$\begin{aligned} [\delta_2, \delta_1] \Phi &= \epsilon^\mu D_\mu \Phi + (\text{Transformação local de Lorentz}) \Phi + \\ &+ (\text{Transformação global/local de supersimetria}) \Phi + \\ &+ (\text{Transformação de Weyl ou Superweyl}) \Phi + \\ &+ (\text{Transformação por um grupo interno}) \Phi. \end{aligned} \quad (F.4)$$

No caso específico de nossa teoria, vamos mostrar que a álgebra de ϕ_i , ψ_i , e_a^μ e G_μ é fechada. Por supersimetria local eles se transformam como:

$$\delta \phi_i = \bar{\epsilon} \psi_i \quad (F.5a)$$

$$\delta \psi_i = -i(\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon + F_i \epsilon \quad (F.5b)$$

$$\delta e_a^\mu = 2i(\bar{G}^\mu \gamma_a \epsilon) \quad (F.5c)$$

$$\delta G_\mu = -D_\mu \epsilon - \frac{1}{4} \gamma_\mu \epsilon A \quad (F.5d)$$

Os campos auxiliares F_i e A (que é necessário para fechar a álgebra de e_a^μ e G_μ ⁽⁵⁸⁾) se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\delta F_i &= -i\bar{\varepsilon} \partial^\mu \psi_i - (\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i) (\bar{\varepsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) + \\ &+ i F_i (\bar{\varepsilon} \gamma^\mu G_\mu) + 2(\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i) (\bar{\varepsilon} \gamma^\mu \gamma_\mu G^\nu)\end{aligned}\quad (F.6a)$$

$$\delta A = i \bar{\varepsilon} D_\mu G_\nu \cdot \epsilon^{\mu\nu} + \frac{1}{4} (\bar{\varepsilon} \gamma^\mu G_\mu) A \quad (F.6b)$$

Inicialmente, temos para ϕ_i :

a) ϕ_i

$$\delta_1 \phi_i = \bar{\varepsilon}_1 \psi_i \quad (F.7)$$

$$\begin{aligned}\delta_2 \delta_1 \phi_i &= \bar{\varepsilon}_1 \delta_2 \psi_i = \bar{\varepsilon}_1 \left[-i(\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \varepsilon_2 + \right. \\ &\left. + F_i \varepsilon_2 \right] = -i(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2) (\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i) + (\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2) F_i \quad (F.8)\end{aligned}$$

Portanto:

$$[\delta_2, \delta_1] \phi_i = \delta_2 \delta_1 \phi_i - \delta_1 \delta_2 \phi_i = 2i(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) (\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i) \quad (F.9)$$

uma vez que

$$(\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2) = (\bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \quad (F.10a)$$

e

$$(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2) = -(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \quad (F.10b)$$

$$\text{Escrevendo} \quad 2i(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) = \varepsilon^\mu \quad (F.11a)$$

e

$$2i(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) G_\mu = -\bar{\epsilon} \quad (\text{F.11b})$$

temos para (F.9):

$$[\delta_2, \delta_1] \phi_i = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_i + \bar{\epsilon} \psi_i \quad (\text{F.12})$$

o que demonstra o fechamento da álgebra.

Para ψ_i temos:b) ψ_i .

$$\delta_1 \psi_i = -i(\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_1 + F_i \epsilon_1 \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 \psi_i &= -i \left\{ \bar{\epsilon}_2 \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \psi_i) \omega_\mu + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \psi_i) A - i(\partial_\lambda \phi_i + \bar{G}_\lambda \psi_i)(\bar{G}_\mu \gamma^\lambda \epsilon_2) + \\ &\quad \left. + F_i (\bar{G}_\mu \epsilon_2) \right\} \gamma^\mu \epsilon_1 + 2(\partial_\mu \phi_i + \bar{G}_\mu \psi_i)(\bar{G}^\mu \gamma_\nu \epsilon_2) \gamma^\nu \epsilon_1 - \\ &\quad - i(\bar{\epsilon}_2 \not{D} \psi_i) \epsilon_1 - (\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i)(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) \epsilon_1 + \\ &\quad + i F_i (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu G_\mu) \epsilon_1 + 2(\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i)(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_\mu G^\nu) \epsilon_1 \quad . \quad (\text{F.14}) \end{aligned}$$

Assim,

$$[\delta_2, \delta_1] \psi_i = -i(\bar{\epsilon}_2 \partial_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_1 - \frac{i}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_1 \omega_\mu - \quad (1)$$

$$- \frac{i}{4} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_1 \cdot A - (\partial_\lambda \phi_i + \bar{G}_\lambda \psi_i)(\bar{G}_\mu \gamma^\lambda \epsilon_2) \gamma^\mu \epsilon_1 - \quad (3) \quad (4)$$

$$- (\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i) (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu G_\mu) \varepsilon_1 + i F_i (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu G_\mu) \varepsilon_1 + \dots \quad (7)$$

$$+ 2(\partial_v \phi_i + \bar{G}_v \psi_i)(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_\mu G^\nu) \varepsilon_1 - i(\bar{\epsilon}_2 \not{D} \psi_i) \varepsilon_1 +$$

$$+ \frac{i}{4} (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \psi_i) \gamma^\nu \epsilon_2 A + (\partial_\lambda \phi_i + \bar{G}_\lambda \psi_i) (\bar{G}_\mu \gamma^\lambda \epsilon_1) \gamma^\mu \epsilon_2 +$$

$$- 2(\partial_\nu \phi_i + \bar{G}_\nu \psi_i)(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_\mu G^\nu) \varepsilon_2 + i(\bar{\varepsilon}_1 \not{D} \psi_i) \varepsilon_2 . \quad (F.15)$$

Aplicando nas expressões (1), (11), (10) e (20) a transformação de Fierz^(*), temos:

$$+ \frac{(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \varepsilon_1) \gamma_\nu \partial_\mu \psi_i}{(c)} \Big\} \quad (F.16)$$

(*) Ver no apêndice A a sua definição.

$$(11): i(\bar{\epsilon}_1 \partial_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_2 = -\frac{i}{2} \left\{ (\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2) \partial_\mu \psi_i + (\bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon_2) \gamma_5 \partial_\mu \psi_i + (\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \gamma^\mu \epsilon_2) \gamma_\nu \partial_\mu \psi_i \right\} \quad (F.17)$$

$$(10): -i(\bar{\epsilon}_2 \not{D} \psi_i) = -i(\bar{\epsilon}_2 \not{\partial} \psi_i) \epsilon_1 - \frac{i}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i) \omega_\mu \epsilon_1 =$$

$$= \frac{i}{2} \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \partial_\mu \psi_i + (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \varepsilon_1) \gamma_5 \partial_\mu \psi_i \right\}$$

Somando as expressões (a) em (F.16/17/18/19), temos:

$$2i(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \partial_\mu \psi_i \quad (F.20)$$

Por outro lado, as somas das expressões (b) e (c) de (F.16/17/18/19),

separadamente, dão zero.

Aplicando a transformação de Fierz em (2) e (12) e somando os resultados com os termos (d), (e) e (f) de (F.18) e (F.19), nos dá:

$$i(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) \gamma_5 \psi_i \omega_\mu \quad (F.21)$$

Desta maneira (F.20) e (F.21), somados, constituem uma transformação geral de coordenadas:

$$2i(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) D_\mu \psi_i \quad (F.22)$$

Ainda, os termos (4), (5), (6), (14), (15) e (16) de (F.15) são anulados pelos termos (7), (8), (9), (17), (18) e (19) também de (F.15).

Sobra analisar os termos (3) e (13), que pela transformação de Fierz são escritos sob a forma:

$$(3): -\frac{i}{4} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_1 A = \frac{i}{8} \left\{ (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \gamma^\mu \epsilon_1) \psi_i A + \right. \quad (a)$$

$$\left. + (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon_1) \gamma_5 \psi_i A \right\} \quad (F.23)$$

$$(13): \frac{i}{4} (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \psi_i) \gamma^\mu \epsilon_2 A = -\frac{i}{8} \left\{ (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \gamma^\mu \epsilon_2) \psi_i A + \right. \quad (a)$$

$$\left. + (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon_2) \gamma_5 \psi_i A \right\} \quad (F.24)$$

já que

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 0 \quad (F.25)$$

Como

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 2 \quad (F.26a)$$

e

$$\gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu = -2 \gamma_5 \quad (F.26b)$$

a soma de (F.23) e (F.24) dá:

$$\frac{i}{2} (\bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2) \gamma_5 \psi_i A \quad (F.27)$$

que constitue uma transformação de Lorentz em ψ_i . Podemos concluir, desta maneira, que a álgebra de ψ_i fecha.

c) \underline{G}_μ .

$$\delta_1 G_\mu = - \partial_\mu \epsilon_1 - \frac{1}{2} \omega_\mu \gamma_5 \epsilon_1 - \frac{1}{4} \gamma_\mu \epsilon_1 A \quad (F.28)$$

$$\delta_2 \delta_1 G_\mu = - \frac{1}{2} \delta_2 \omega_\mu \gamma_5 \epsilon_1 - \frac{1}{4} \gamma_a \delta_2 e_\mu^a \epsilon_1 A - \frac{1}{4} \gamma_\mu \epsilon_1 \delta_2 A =$$

$$= - \frac{1}{2} \delta_2 \omega_\mu \gamma_5 \epsilon_1 + \frac{i}{2} \gamma_a \epsilon_1 A (\bar{G}_\mu \gamma^a \epsilon_2) -$$

$$- \frac{i}{4} \gamma_\mu \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} - \frac{1}{16} \gamma_\mu \epsilon_1 (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu G_\nu) A \quad (F.29)$$

Assim

$$\begin{aligned} [\delta_2, \delta_1] G_\mu &= - \frac{1}{2} \delta_2 \omega_\mu \gamma_5 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \delta_1 \omega_\mu \gamma_5 \epsilon_2 + \\ &\quad (a) \qquad \qquad \qquad (b) \end{aligned}$$

$$+ \frac{i}{2} \gamma_a \varepsilon_1 A(\bar{G}_\mu \gamma^a \varepsilon_2) - \frac{i}{2} \gamma_a \varepsilon_2 A(\bar{G}_\mu \gamma^a \varepsilon_1) -$$

(c)

(d)

$$- \frac{i}{4} \gamma_\mu \varepsilon_1 (\bar{\varepsilon}_2 D_\lambda G_\rho) \epsilon^{\lambda\rho} + \frac{i}{4} \gamma_\mu \varepsilon_2 (\bar{\varepsilon}_1 D_\lambda G_\rho) \epsilon^{\lambda\rho} -$$

(e)

(f)

$$- \frac{1}{16} \gamma_\mu \varepsilon_1 (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\nu G_\nu) A + \frac{1}{16} \gamma_\mu \varepsilon_2 (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\nu G_\nu) .$$

(g)

(h)

(F.30)

Aplicando em (c) e (d) uma transformação de Fierz, temos:

$$(c): \frac{i}{2} \gamma_a \varepsilon_1 A(\bar{G}_\mu \gamma^a \varepsilon_2) = \frac{i}{4} A \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^a \gamma_a \varepsilon_1) G_\mu + \right. \\ \left. (a) \right.$$

$$\left. + (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^a \gamma_5 \gamma_a \varepsilon_1) \gamma_5 G_\mu \right\} \\ (b) \quad (F.31)$$

$$(d): - \frac{i}{2} \gamma_a \varepsilon_2 A(\bar{G}_\mu \gamma^a \varepsilon_1) = - \frac{i}{4} A \left\{ (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^a \gamma_a \varepsilon_2) G_\mu + \right. \\ \left. (a) \right.$$

$$\left. + (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^a \gamma_5 \gamma_a \varepsilon_2) \gamma_5 G_\mu \right\} \\ (b) \quad (F.32)$$

Ao somarmos (F.31) e (F.32), obtemos uma expressão que é uma transformação de Lorentz em G_μ :

$$i(\bar{\varepsilon}_1 \gamma_5 \varepsilon_2) \gamma_5 G_\mu . \quad (F.33)$$

Por outro lado, aplicando uma transformação de Fierz em (e) e (f), de (F.30), nos dá:

$$(e): -\frac{i}{4} \gamma_\mu \varepsilon_1 (\bar{\varepsilon}_2 D_\lambda G_\rho) \epsilon^{\lambda\rho} = -\frac{i}{8} \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 \gamma_\mu \varepsilon_1) D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} + \right. \\ \left. (b) \quad (c) \right\} \quad (F.34)$$

$$(f): \frac{i}{4} \gamma_\mu \varepsilon_2 (\bar{\varepsilon}_1 D_\lambda G_\rho) \epsilon^{\lambda\rho} = -\frac{i}{8} \left\{ (\bar{\varepsilon}_1 \gamma_\mu \varepsilon_2) D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} + \right. \\ \left. (b) \quad (c) \right\} \quad (F.35)$$

Ao somarmos (a) e (b) de (F.34/35) resulta:

$$\frac{i}{4} \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 \gamma_\mu \varepsilon_1) D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} + (\bar{\varepsilon}_2 \gamma_5 \gamma_\mu \varepsilon_1) \gamma_5 D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} \right\} \quad (F.36)$$

Uma vez que

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (F.37a)$$

e

$$\gamma_5 \gamma_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (F.37b)$$

A expressão (F.36) é reescrita como:

$$\frac{i}{4} \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\nu \varepsilon_1) (g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5) D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} \right\} \quad (F.38)$$

que é uma transformação de Superweyl, já que:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \quad (F.39)$$

Assim:

$$\frac{i}{4} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1) \gamma_\mu \gamma_\nu D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} = \gamma_\mu \xi \quad . \quad (F.40)$$

Analogamente, a soma da expressão (c) de (F.34) e (F.35):

$$\frac{i}{8} \left\{ \left[\bar{\epsilon}_2 (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) \epsilon_1 \right] \gamma^\nu D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} \right\} \quad . \quad (F.41)$$

é uma transformação de Superweyl, pois:

$$\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu = 2 \epsilon_{\nu\mu} \gamma_5 \quad . \quad (F.42)$$

o que resulta em:

$$\frac{i}{4} \gamma_\mu \gamma_5 (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1) D_\lambda G_\rho \epsilon^{\lambda\rho} = \gamma_\mu \xi' \quad . \quad (F.43)$$

Realizando uma transformação de Fierz para as expressões (g) e (h) de (F.30), temos:

$$(g): -\frac{1}{16} \gamma_\mu \epsilon_1 (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\nu G^\nu) A = \frac{1}{32} \left\{ (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon_1) G^\nu A + \right. \\ \left. + (\bar{\epsilon}_2 \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu \epsilon_1) \gamma_5 G^\nu A \right\} \quad . \quad (F.44)$$

(a)
(b)

$$(h): \frac{1}{16} \gamma_\mu \epsilon_2 (\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu G_\nu) = -\frac{1}{32} \left\{ (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon_2) G^\nu A + \right. \\ \left. + (\bar{\epsilon}_1 \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu \epsilon_2) \gamma_5 G^\nu A \right\} \quad . \quad (F.45)$$

Ao somarmos os termos (a) de (F.44) e (F.45) teremos:

$$\frac{1}{32} \left\{ \left[\bar{\epsilon}_2 (\gamma_v \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_v) \epsilon_1 \right] G^\nu A \right\} \quad (F.46)$$

que resulta, com o uso de (F.42), em:

$$\frac{1}{16} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1) \epsilon_{v\mu} G^\nu A \quad (F.47)$$

Por (F.39),

$$\epsilon_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_v \gamma_5 + g_{\mu\nu} \gamma_5 \quad (F.48)$$

Desta maneira, (F.47) consiste na soma de uma transformação de Superwelyl:

$$\gamma_\mu \left[-\frac{1}{16} \gamma_v \gamma_5 G^\nu \cdot A (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1) \right] = \gamma_\mu \xi \quad (F.49)$$

com uma transformação de Lorentz:

$$-\frac{A}{16} (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1) \gamma_5 G_\mu \quad (F.50)$$

Facilmente podemos concluir que a soma dos termos (b) de (F.44) e (F.45) também dão uma transformação de Lorentz para G_μ .

Para fechar a álgebra G_μ tomamos $\delta \omega_\mu = 0$.

$$d) \underline{e_a^\mu} .$$

$$\delta_1 e_a^\mu = 2i (\bar{G}^\mu \gamma_a \varepsilon_1)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 e_a^\mu &= -2i \left[\partial^\mu \bar{\varepsilon}_2 \gamma_a \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_2 \gamma_5 \gamma_a \varepsilon_1) \omega^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_a \varepsilon_1) A \right] \end{aligned} \quad (F.51)$$

Assim,

$$\left[\delta_2, \delta_1 \right] e_a^\mu = 2i \left[\partial^\mu \bar{\varepsilon}_1 \gamma_a \varepsilon_2 - \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_1 \gamma_5 \gamma_a \varepsilon_2) \omega^\mu - \right. \quad (a) \quad (b)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{4} (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_a \varepsilon_1) A - \partial^\mu \bar{\varepsilon}_2 \gamma_a \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_2 \gamma_5 \gamma_a \varepsilon_1) \omega^\mu + \\ &\quad (c) \quad (d) \quad (e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{4} (\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_a \varepsilon_1) A \end{aligned} \quad (f) \quad (F.52)$$

Juntando os termos (a) e (d), teremos:

$$2i \partial^\mu (\bar{\varepsilon}_1 \gamma_a \varepsilon_2) \quad (F.53)$$

Como:

$$\gamma_a = e_a^\nu \gamma_\nu \quad (F.54)$$

teremos para (F.53):

$$2i \left[\partial^\mu e_a^\nu (\bar{\varepsilon}_1 \gamma_\nu \varepsilon_2) + e_a^\nu \partial^\mu (\bar{\varepsilon}_1 \gamma_\nu \varepsilon_2) \right] \quad (F.55)$$

Esta expressão é uma transformação geral de coordenadas para e_a^{μ} . Já a soma dos termos (b) e (e) de (F.52) resulta em:

$$2i(\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \gamma_a \epsilon_1) \omega^\mu \quad (F.56)$$

que é uma transformação de Lorentz, pois

$$2i(\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \gamma_a \epsilon_1) \omega^\mu = 2i(\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \gamma_a \epsilon_1) e_b^\mu \omega^b = \lambda_a^b e_b^\mu \quad . \quad (F.57)$$

Finalmente, os termos (c) e (f) somados dão uma transformação de Lorentz

$$\frac{Ai}{2} \left\{ \left[\bar{\epsilon}_2 (\gamma^a \gamma_a - \gamma_a \gamma^a) \epsilon_1 \right] \right\} = \lambda_a^b e_b^\mu \quad (F.58)$$

sendo

$$\lambda_a^b = \frac{Ai}{2} \left[\bar{\epsilon}_2 (\gamma^b \gamma_a - \gamma_a \gamma^b) \epsilon_1 \right] \quad . \quad (F.59)$$

Mostramos que ϕ_i , ψ_i , G_μ e e_a^μ fecham a álgebra supersimétrica, sem o uso de qualquer calibre ou equação de movimento. Mesmo assim, o fechamento da álgebra para os campos auxiliares F_i e A permanece uma questão em aberto. Possivelmente, para fechar as suas álgebras, será necessária a escolha de um número maior de campos auxiliares, do que apenas F_i e A . Isto nos leva a ter um conjunto não mínimo de campos auxiliares⁽⁵⁹⁾.

De qualquer maneira, levando em conta a sua dimensionalidade, o campo A possui a seguinte densidade de lagrangeana:

$$L_A = \frac{e}{2} A^2 \quad . \quad (F.60)$$

APÊNDICE GFIXAÇÃO DE CALIBRE

Como em 1+1 dimensões vale que:

$$h_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} h(x) \quad (G.1)$$

então automaticamente valem as seguintes relações:

$$a_{\mu\nu} = 0 \quad (G.2a)$$

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu S_\mu^\mu, \quad (G.2b)$$

onde $S_{\mu\nu}$ e $a_{\mu\nu}$ correspondem às partes simétrica e antisimétrica de $h_{\mu\nu}$. Isto implica em que (G.2a/b), em 1+1 dimensões, não constituam uma fixação de calibre, como são em 3+1 dimensões. Desta maneira não vão existir campos do tipo Faddeev-Popov à elas associados.

Já em relação à fixação do calibre de G_μ , dada por:

$$\gamma^\mu G_\mu = 0 \quad (G.3)$$

adotamos a seguinte densidade de Lagrangeana

$$L = -\frac{e}{2} \bar{G}^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu G^\nu. \quad (G.4)$$

APÉNDICE H

DEMONSTRAÇÕES DAS EXPRESSÕES (3.121) E (3.122)

A função de dois pontos de $S^{\mu\nu}$ é dada por:

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{Tr} \left\{ -\frac{1}{2} \left[S_a^\mu \gamma^a \partial_\mu F^{-1} \right]^2 - 2 \left[S^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu B^{-1} \right]^2 + i S_a^\mu S^{a\nu} \partial_\mu \partial_\nu B^{-1} \right\}. \quad (\text{H.1})$$

$(h_1) \qquad (h_2) \qquad (h_3)$

No espaço dos momentos temos para (h_1) , (h_2) e (h_3) as seguintes expressões:

a) (h_1):

$$(h_1) = \frac{i}{4} \operatorname{tr} \int dk^2 \gamma^\alpha k_\mu (k+M) \gamma^\beta (k_\nu + p_\nu) (k+p+M) [S_\alpha^\mu S_\beta^\nu] (p) =$$

$$= \frac{i}{4} \left\{ \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\rho) \int \frac{dk^2 k_\mu k_\lambda (k_\nu + p_\nu)(k_\rho + p_\rho)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \right. + \\ \left. (h_1 a) \right.$$

$$+ \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta) M \int \frac{dk^2 k_\mu k_\lambda (k_\nu + p_\nu)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} +$$

(h₁b)

$$+ \operatorname{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho) M \int \frac{dk^2 k_\mu (k_\nu + p_\nu)(k_\rho + p_\rho)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} + (h_1 c)$$

$$+ \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) M^2 \left\{ \frac{dk^2 k_\mu (k_\nu + p_\nu)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \right\} [S_\alpha^\mu S_\beta^\nu](p) . \quad (\text{H.2})$$

(h_{1d})

Como $\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda) = 0 \forall_{\alpha, \beta, \lambda}$, sobram apenas os termos (h_{1a}) e (h_{1d}), em (H.2). Reescrevemos (H.2) como:

$$(h_1) = S_\alpha^\mu(p) A_{\mu\nu}^{F_{\alpha\beta}}(p^2, M^2) S_\beta^\nu(p) ,$$

onde:

$$A_{\mu\nu}^{F_{\alpha\beta}}(p^2, M^2) = \frac{i}{4} \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\rho) \left\{ \frac{dk^2 k_\mu k_\lambda (k_\nu + p_\nu)(k_\rho + p_\rho)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} + \right. \\ \left. + \frac{i}{4} M^2 \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) \left\{ \frac{dk^2 k_\mu (k_\nu + p_\nu)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \right\} \right. . \quad (\text{H.3})$$

b) (h₂):

$$(h_2) = -i \left\{ \frac{dk^2 k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} [S^{\mu\alpha} S^{\nu\beta}](p) \right. . \quad (\text{H.4})$$

ou:

$$(h_2) = S^{\mu\alpha}(p) A_{\mu\nu\alpha\beta}^{B_1}(p^2, M^2) S^{\nu\beta}(p) ,$$

onde:

$$A_{\mu\nu\alpha\beta}^{B_1}(p^2, M^2) = -i \left\{ \frac{dk^2 k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu)(k_\beta + p_\beta)}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \right. . \quad (\text{H.5})$$

c) (h_3):

$$(h_3) = \frac{i}{2} \eta_{\alpha\beta} \int \frac{dk^2 k_\mu k_\nu [S^{\mu\alpha} S^{\nu\beta}]}{[k^2 - M^2]} (p) \quad (H.6)$$

ou:

$$(h_3) = S^{\mu\alpha}(p) A_{\mu\alpha\nu\beta}^{B_2}(p^2, M^2) S^{\nu\beta}(p),$$

onde:

$$A_{\mu\alpha\nu\beta}^{B_2}(p^2, M^2) = \frac{i}{2} \eta_{\alpha\beta} \int \frac{dk^2 k_\mu k_\nu}{[k^2 - M^2]} . \quad (H.7)$$

Usando que

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\rho) = 2 \left[\eta^{\beta\rho} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\beta\lambda} \eta^{\alpha\rho} - \eta^{\lambda\rho} \eta^{\alpha\beta} \right], \quad (H.8)$$

teremos para $A_{\mu\nu}^F$

$$\begin{aligned} A_{\mu\alpha\nu\beta}^F &= \frac{i}{2} \left\{ \left[\frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left[k_\mu k_\alpha (k_\nu + p_\nu) (k_\beta + p_\beta) + \right. \right. \right. \\ &\quad + k_\mu k_\beta (k_\nu + p_\nu) (k_\alpha + p_\alpha) - k_\mu (k^2 + k \cdot p) (k_\nu + p_\nu) \eta_{\alpha\beta} + \\ &\quad \left. \left. \left. + M^2 \eta_{\alpha\beta} k_\mu (k_\nu + p_\nu) \right] \right] \right\} . \quad (H.9) \end{aligned}$$

(O procedimento de abaixar em (H.9) os índices (α, β) equivale à escrever (H.2) como $S^{\mu\alpha} A_{\mu\alpha\nu\beta}^F S^{\nu\beta}$).

Somando (H.9), (H.5) e (H.6) dá:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i}{2} \int \frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left\{ k_\mu (k_\nu + p_\nu) k_\alpha (k_\beta + p_\beta) - \right. \\
 & - k_\mu (k_\nu + p_\nu) (k_\alpha + p_\alpha) k_\beta + k_\mu (k_\nu + p_\nu) \eta_{\alpha\beta} (k^2 + k.p) - \\
 & - M^2 \eta_{\alpha\beta} k_\mu (k_\nu + p_\nu) - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu [k^2 + 2kp + p^2 - M^2] \Big\} = \\
 & = - \frac{i}{2} \int \frac{dk^2}{[(k+p^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left\{ k_\mu (k_\nu + p_\nu) k_\alpha p_\beta - k_\mu (k_\nu + p_\nu) p_\alpha k_\beta + \right. \\
 & + \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu k^2 + \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu k.p - M^2 \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu - \\
 & \left. - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu k.p - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu p^2 \right\} . \quad (H.10)
 \end{aligned}$$

Distinguimos em (H.10) termos com três tipos diferentes de comportamento no ultravioleta:

i) Termos contendo divergência linear

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i}{2} \int \frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left\{ k_\mu k_\nu k_\alpha p_\beta - k_\mu k_\nu p_\alpha k_\beta + \right. \\
 & + \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu k^2 - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu k.p \Big\} . \quad (H.11)
 \end{aligned}$$

Usando a regularização dimensional e que:

$$\frac{1}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 + 2k.px + p^2 x - M^2]^2} \quad (H.12)$$

temos para (H.11):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{dk^{2+\varepsilon}}{[k^2 + 2k \cdot px + p^2 x - M^2]^2} \left\{ k_\mu k_\nu k_\alpha p_\beta - k_\mu k_\nu p_\alpha k_\beta + \right. \\
 & \left. + \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu k^2 - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu k \cdot p \right\} \quad (H.13)
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dk^{2+\varepsilon} k_\mu k_\nu k_\alpha}{[k^2 + 2k \cdot px + p^2 x - M^2]^2} &= \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{[M^2 - p^2 x + p^2 x^2]^{1-\varepsilon/2}} \left\{ -\Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu p_\alpha x^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \Gamma(-\varepsilon/2) [\eta_{\mu\nu} p_\alpha + \eta_{\mu\alpha} p_\nu + \eta_{\nu\alpha} p_\mu] x [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] \right\} \quad (H.14)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dk^{2+\varepsilon} k^2 k_\mu}{[k^2 + 2k \cdot px + p^2 x^2 - M^2]^2} &= \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{[M^2 - p^2 x + p^2 x^2]^{1-\varepsilon/2}} p_\mu x \times \\
 & \times \left\{ -\Gamma(1-\varepsilon/2) p^2 x^2 + \Gamma(-\varepsilon/2) (2) [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] \right\}, \quad (H.15)
 \end{aligned}$$

temos em (H.13)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{[p^2 x^2 - p^2 x + M^2]^{1-\varepsilon/2}} \left[-\Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta x^3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \Gamma(-\varepsilon/2) [\eta_{\mu\nu} p_\alpha + \eta_{\mu\alpha} p_\nu + \eta_{\nu\alpha} p_\mu] x p_\beta [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] + \\
 & (2) \quad (3) \quad (4) \\
 & + \Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta x^3 - \frac{1}{2} \Gamma(-\varepsilon/2) [\eta_{\mu\nu} p_\beta + \eta_{\mu\beta} p_\nu + \eta_{\nu\beta} p_\mu] x \\
 & (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\times \times p_\alpha \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] +$$

$$+ \eta_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu x \left[-\Gamma(1-\varepsilon/2)p^2 x^2 + \Gamma(-\varepsilon/2)(2) \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \right] - \\ (9) \qquad \qquad \qquad (10)$$

$$- \eta_{\alpha\beta} \left[-\Gamma(1-\varepsilon/2)p_\mu p_\nu p^2 x^3 + \frac{1}{2} \Gamma(-\varepsilon/2) \left[\eta_{\mu\nu} p^2 + 2p_\mu p_\nu \right] x \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \right] \} . \\ (11) \qquad \qquad \qquad (12) \qquad (13)$$

(H.16)

Os seguintes termos se cancelam mutuamente: (5) à (1); (11) à (9) e (6) à (2). Já a soma de (13) com (10) dá - (13).

Agora, usando o calibre adotado para $S^{\mu\alpha}$:

$\partial_\mu S^{\mu\alpha} = \frac{1}{2} \partial^\alpha S_\mu^\mu$, o termo (8) cancela o (5) e o (7) o (4). Assim, reescrevendo (H.16), com os termos que sobram, temos:

$$- i \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{|p^2 x^2 - p^2 x + M^2|^{1-\varepsilon/2}} \left[+ \eta_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu x \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \Gamma(-\varepsilon/2) - \right. \\ \left. - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} \eta_{\mu\nu} p^2 x \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \Gamma(-\varepsilon/2) \right] . \qquad (H.17)$$

Como:

$$\Gamma(-\varepsilon/2) \sim 1 - \frac{2}{\varepsilon} \qquad (H.18a)$$

e

$$[]^\varepsilon \sim 1 + \varepsilon \ln [] , \qquad (H.18b)$$

teremos os termos finitos de (H.17) dados por:

$$+ \frac{i\pi}{4} p^2 \left\{ \left[\frac{\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}}{2} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \left[\ln \pi + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 dx x \ln \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \right] \right\} . \quad (H.19)$$

O termo divergente é

$$- \frac{i\pi}{8} p^2 \left[\frac{\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}}{2} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \Gamma(-\varepsilon/2) . \quad (H.20)$$

ii) Termos contendo divergência logarítmica

Os termos logaritmicamente divergentes aparecem, em (H.10), devido aos seguintes termos:

$$- \frac{i}{2} \int \frac{dk^2}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \left\{ k_\mu p_\nu k_\alpha p_\beta - k_\mu p_\nu p_\alpha k_\beta + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} k_\mu p_\nu k.p - \eta_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu p^2 \right\} \quad (H.21)$$

Usando que

$$\int \frac{dk^{2+\varepsilon} k_\mu k_\nu}{[k^2 + 2k.p + p^2 x - M^2]^2} = \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{[M^2 - p^2 x + p^2 x^2]^{1-\varepsilon/2}} \left\{ \Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu x^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \Gamma(-\varepsilon/2) \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \right\} , \quad (H.22)$$

temos (H.20) escrito como

$$- i \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{[M^2 - p^2 x + p^2 x^2]^{1-\varepsilon/2}} \left\{ \Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta x^2 \right. \\ \left. (1) \right.$$

$$-\frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta \Gamma(-\varepsilon/2) \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] - \Gamma(1-\varepsilon/2) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta x^2 + \dots \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{2} \eta_{\mu\beta} p_\nu p_\alpha \Gamma(-\varepsilon/2) \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] +$$

(4)

Usando o calibre de $S^{\mu\alpha}$ temos que (3) cancela (1), (7) cancela (5) e (6) cancela (4). Sobram, em (H.23), os termos:

$$- i \frac{\pi^{1+\varepsilon/2}}{4} \int_0^1 \frac{dx}{[M^2 - p^2 x + p^2 x^2]^{1-\varepsilon/2}} \left\{ \left[- \eta_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta + \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} p^2 \right] \times \right.$$

$$\times \Gamma(-\varepsilon/2) \left[M^2 - p^2 x + p^2 x^2 \right] \} . \quad (H.24)$$

A parte finita de (H.24) tem a forma:

$$- i \frac{\pi}{4} p^2 \left[\frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \left[\ell n \pi + \int_0^1 dx \ell n [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] \right] \quad (H.25)$$

e a parte divergente fica sendo

$$+ i \frac{\pi}{4} p^2 \left[\frac{n_{\mu\alpha} n_{\nu\beta}}{2} - n_{\alpha\beta} n_{\mu\nu} \right] \Gamma(-\varepsilon/2) \quad (\text{H.26})$$

Finalmente o único termo em (H.10) que não tém um elemento divergente é dado por:

iii) Termo finito:

$$\frac{i}{2} M^2 n_{\alpha\beta} p_\nu \int \frac{dk^2 k_\mu}{[(k+p)^2 - M^2] [k^2 - M^2]} \quad (\text{H.27})$$

que resulta em

$$+ \frac{iM^2 n_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu}{2\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \quad (\text{H.28})$$

Podemos concluir então que

1) A parte divergente da expressão (H.10) se reduz à:

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{div ss}}(p^2, M^2) = + i \frac{\pi p^2}{8} \left[\frac{n_{\mu\alpha} n_{\nu\beta}}{2} - n_{\alpha\beta} n_{\mu\nu} \right] \Gamma(-\varepsilon/2) \quad (\text{H.29})$$

(o que corresponde à soma de (H.20) e (H.26) e

2) A parte finita, por outro lado, fica sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{fin ss}}(p^2, M^2) &= i \frac{\pi}{4} p^2 \left\{ \left[\frac{n_{\mu\alpha} n_{\nu\beta}}{2} - n_{\alpha\beta} n_{\mu\nu} \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[+ \frac{1}{2} \ln M^2 - \frac{1}{2p^2} \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] + 1 \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{iM^2 n_{\mu\alpha} n_{\nu\beta} \pi}{8\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] \quad (\text{H.30})$$

onde se usaram as relações:

$$\text{a) } \int_0^1 dx \ln [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] = \ln M^2 + \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2} \times$$

$$\times \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] - 2 \quad (\text{H.31})$$

e

$$\text{b) } \int_0^1 dx x \ln [M^2 - p^2 x + p^2 x^2] = \frac{1}{2} \ln M^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{2p^2} \ln \left[\frac{p^2 + \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}}{p^2 - \sqrt{p^4 - 4M^2 p^2}} \right] - 1 \quad (\text{H.32})$$

REFERÉNCIAS

- (1) Nambu, Y., Conferência de Copenhagen, 1970.
- (2) Scherk, J., Review of Modern Physics, Vol. 47, nº 1, (1975), 123.
- (3) Nielsen, H.B., Schottish Summer School, 1976.
- (4) Virasoro, M.A., Phys. Rev. D 177 (1969), 2309.
- (5) Shapiro, J.A., Phys. Lett. B 338 (1970), 361.
- (6) Neveu, A., Schwarz, J.H., Nucl. Phys. B 31 (1971), 86.
- (7) Ramond, P.; Phys. Rev. D 3 (1971), 2415.
- (8) Gervais, J.L., Sakita, B., Phys. Rev. D 4, 2291 e Nucl. Phys. B 34, 477.
- (9) Wess, J., Zumino, B., Nucl. Phys. B 70 (1974), 39.
- (10) Brink, L., Schwarz, J.H., Nucl. Phys. B 121 (1977), 285.
- (11) Deser, S., Zumino, B., Phys. Lett., Vol. 65B, nº 4 (1976), 369.
- (12) Di Vecchia, P., Durhuus, B., Olesen, P., Petersen, J.L., Nordita Preprint NBI-HE-82-19, Junho, 1982.
- (13) Polyakov, A., Phys. Lett. 103B (1981), 207/211.
- (14) Gross, D.J., Neveu, A., Phys. Rev. D, Vol. 10, nº 10, (1974), 3235.
- (15) Coleman, S., Escola de Erice (1979) 1/N.
- (16) D'Adda, A., Di Vecchia, P., Lüscher, M., Nucl. Phys. B 146 (1978), 63.
- (17) Witten, E., Phys. Rev. Lett. 36B (1976), 369.
- (18) Tomboulis, E., Phys. Lett., Vol. 70B, nº 3, (1977), 361.
- (19) Deser, S., Nieuwenhuizen, P. van, Phys. Rev. D, Vol. 10, nº 2 (1974), 411.

- (20) Rebbi, Phys. Rep. 12C (1974), 1.
- (21) Schwarz, J.H., Supersymmetry, Strings and the Unification of the Fundamental Interactions - Preprint/CALTEC/CALT-68/905 (1981).
- (22) Schwarz, J.H., Superstrings, Preprint/CALT-68-905.
- (23) Van Nienwenhuizen, P., comunicacão privada.
- (24) Cremmer, E., Comunicação privada.
- (25) Van Nienwenhuizen, P., Phys. Reports, 68, nº 4 (1981), 189.
- (26) D'Adda, A., Lüscher, M., Di Vecchia, P., Nucl. Phys. B 136 (1978), 73.
- (27) 't Hooft, G., Nucl. Phys. B 72 (1974), 461.

- (28) Witten, E., Nucl. Phys. B 160 (1979), 57.
- (29) Aref'eva, I. Ya., Phys. Lett. 70B, nº 3, 361.
- (30) Tomboulis, E., Phys. Lett. 70B, nº 3 (1977), 361.
- (31) 't Hooft, G., Veltman, M., Ann. Inst. H. Poincaré, 20 (1974), 69.
- (32) Capper, D.M. Leibbrandt, G., Medrano, M.R., Phys. Rev. D, Vol. 7, nº 12 (1973), 4320.
- (33) Capper, D.M., Duff, M.J., Halpern, L. Phys. Rev. D, Vol. 10, nº 2 (1974), 461.
- (34) 't Hooft, G., Veltman, M., Nucl. Phys. B 44 (1972), 89.
- (35) Gomes, M.O.C., tese de Livre-Docência, 1979, IFUSP.
- (36) Morley, P.D., Kislinger, M.B., Phys. Rep. 51, nº 2 (1979), 63.
- (37) Thirring, W., Ann. Phys. 3 (1958), 91.
- (38) Schwinger, J., Phys. Rev. D 128 (1962), 2425.
- (39) Lowenstein, J.H., Swieca, J.A., Ann. Phys. 68 (1971), 172.
- (40) 't Hooft, G., Nucl. Phys. B 35 (1971), 167.

- (41) Pohlmeyer, K., Comm. Math. Phys. 46 (1976), 207.
- (42) Pohlmeyer, K., Lüscher, M., Nucl. Phys. B 137 (1978), 46.
- (43) Lüscher, M., Nucl. Phys. B 135 (1978), 1.
- (44) Zamolodchikov, A.B./A.B., Nucl. Phys. B 133 (1978), 525.
- (45) Berg, B., Karowski, M., Kurak, V., Weisz, P., Phys. Lett. 76B (1978), 502.
- (46) Abdalla, E., Abdalla, M.C., Gomes, M.O.C., Phys. Rev. D 23 (1981), 1800.
- (47) Abdalla, E., Forger, M., Gomes, M.O.C., Nucl. Phys. B 210 (1982), 181.
- (48) Forger, M., tese de Doutoramento, Freie Un. Berlin, (1980).
- (49) Cremmer, E., Spring School on Supersymmetry and Supergravity, Trieste (1981).
- (50) Salam, A., Strathdee, J., Ann. Phys. 141 (1982), 316.
- (51) Wess, J., Zumino, B., Nucl. Phys. B 70 (1974), 39.
- (52) Scherk, J., Neveu, A., Nucl. Phys. B 36 (1972), 155.
- (53) Scherk, J., Schwarz, J.H., Nucl. Phys. B81 (1974), 118.
- (54) Green, M.B., Schwarz, J.H., Nucl. Phys. B 181 (1981), 502.
- (55) Petersen, ., Conversação particular com Polyakov, Junho, Moscow (1982).
- (56) Gervais, J.L.; Neveu, A., Nucl. Phys. B 192 (1981), 493.
- (57) Wess, J., Supersymmetry and Supergravity, lições de Princeton (1981), não publicadas.
- (58) Howe, P.S., J. Phys. A12:3 (1979), 403.
- (59) Rivelles, V., Comunicação privada.