1349

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO

INSTITUTO DE FISICA

SBI-IFUSP

305M810T1349

TEORIA DE GAUGE PURA NA REDE

E

GASES DE COULOMB

por

DOMINGOS HUMBERTO URBANO MARCHETTI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1349
ex. 2
INSTITUTO DE FÍSICA

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Orientação: Prof. JOSÉ FERNANDO PEREZ

SÃO PAULO

1985

530.143
M317t
M
e.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marchetti, Domingos Humberto Urbano
"Teoria de Gauge pura na rede e gases de Coulomb". São Paulo, 1985.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. José Fernando Perez.

Unitermos: 1.Teoria de Gauge U(1); 2.Ambigüidade; 3.Vácuos - θ; 4.Gases de Coulomb.

USP/IF - B12/85

FRAGMENTO DE ANAXIMANDRO- Sec. VII-VI (Recolhido por Simplício em "Física" 24, 13)

...Ἀρκὴ τῶν ὄντων... εἶπον τὸ Ἄπειρον ... ἐξ ὧν δὴ ἡ γένεσίς ἐστι τοῖς οὖσι καὶ φθορὰν εἰς ταῦτα γίνεσθαι κατὰ τὸ χρεών; διδόναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν τοῦ χρόνου τάξιν.

... "De onde as coisas tem seu nacimento, para lá também devem a fundar-se na perdição, segundo a necessidade;pois elas devem expiar e ser julgadas pela sua injustiça, segundo a ordem do tempo".

(Tradução de Nietzsche em "A Filosofia na Época Trágica dos Gregos", §4)

... "Segundo a mantença; deixam pois ter lugar o acordo e assim também o cuidado, um para o outro (no penetrar e assumir) do des-acordo".

(Tradução de Heidegger em "A Sentença de Anaximandro")

AGRADECIMENTOS

Ao Perez,

Manē,

Marcelo Gomes,

João,

Mitsue,

ā CNPq

e ā todas as pessoas deste Instituto que de alguma maneira colaboraram para realização deste trabalho.

RESUMO

Propomos neste trabalho um método de construção de gases clássicos, a partir de uma teoria de gauge pura, no formalismo Hamiltoniano com tempo continuo. O método é exemplificado com o modelo de gauge U(1) em $\nu=2$ dimensões de espaço-tempo. Neste mesmo modelo, podemos verificar uma estrutura não trivial do vácuo (vácuos-θ), como consequência da ambiguidade de quantização. Este resultado é obtido sem a utilização dos métodos semi-clássicos. Também exploramos a relação entre esta estrutura de vácuo com o problema do confinamento.

ABSTRACT

We describe a method for the construction of classical gases, starting from a pure gauge theory. The method is aplli ed to the U(1) gauge theory in $\nu=2$ spatial dimensions. For this model we can see the θ-vaccua appearing as a consequence of the quantization ambiguity. The connection between the θ-vaccua and confinement is discussed.

INDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I - TEORIA DE GAUGE PURA NA REDE 4

A - Teoria Quântica Euclideana - Introdução 4

B - Positividade Física 7

C - Formalismo Hamiltoniano 12

CAPÍTULO II - TEORIA DE GAUGE U(1) - ν=2 18

A - Formulação Hamiltoniana 18

B - Ambiguidade θ na Quantização 21

C - O Significado do Parâmetro θ 28

CAPÍTULO III - O GÁS DE COULOMB UNIDIMENSIONAL 35

A - Apresentação 35

B - Estrutura dos Estados de Equilibrio 36

C - Representação de sine-Gordon 42

CAPÍTULO IV - OS GASES DA TEORIA DE GAUGE U(1) 46

A - Introdução 46

B - O Rotor Plano Unidimendional-Gás de Villain. 47

C - Gás "Standard" 49

D - Gás de Caroço Duro 52

E - O Método da Matriz de Transferência 54

F - O Limite do Continuo 58

G - O Problema do Confinamento 60

CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO 67

APÊNDICE 1 - Equivalência Entre a Correlação de Duas Cargas $\tau, \bar{\tau}$, no Formalismo Hamiltoniano à $\beta<\infty$, e a Expectação do Loop de 't Hooft $\langle T(C) \rangle$ com Condição Periódica no Tempo..... 70

APÊNDICE 2 - O Kernel $K(\phi', \phi)$ da Teoria U(1) 73

REFERÊNCIAS 75

INTRODUCAO

Basicamente há dois métodos não perturbativos que permitem o tratamento de fenômenos a baixa energia em teorias de gauge não abelianas: as teorias de gauge na rede, como formuladas por Wilson [3] , e na formulação Hamiltoniana por Kogut e Susskind [7]; e por outro lado, o método semi-clássico proposto por Polyakov [31]. Neste último, as configurações clássicas do campo euclideano, tais como os instanstons, mostram um quadro heurístico, bastante razoavel, para um possivel mecanismo de confinamento de "quarks". Há também alguma evidência para existência de uma familia de vácuos fisicamente distinguiveis, os vácuos-θ. Neste trabalho adotaremos o primeiro método, na medida que acreditamos poder descrever alguns aspectos desse quadro de problemas.

Uma terceira alternativa consiste no estudo de modelos exatamente soluveis, no continuo, em $\nu=2$ dimensões, que apresentam a mesma fenomenologia encontrada nas teorias de gauge não abelianas em $\nu=4$ [27,28]. Estes modelos possuem uma propriedade peculiar, que permite tratá-los como se fossem uma teoria escalar bosônica [29]. Encontramos na literatura alguns trabalhos que exploram esta transformação, a fim de criar uma imagem clara dos mecanismos dinâmicos do confinamento, assim como, compreender o papel da estrutura θ dos vácuos nestas teorias [7]. Na mesma linha de pensamento, destacamos o trabalho de Aizenman e Fröhlich [13], que apresentam a estrutura dos estados de equilibrio do gás de Coulomb unidimensional como o análogo aos vácuos-θ das teorias de gauge abelianas: o gás de Coulomb unidimendional é tratado numa particu-

lar representação (sine-Gordon) permitindo estabelecer, então, uma conexão formal com o modelo de Higgs abeliano ($\nu=2$).

Por outro lado, H.J.Rothe e Swieca [23,24], caracterizam, de maneira intrínseca, os vácuos-θ como resultante da ambiguidade de quantização de sistemas clássicos, cujo espaço de configurações tenha topologia não trivial.

Propomos no presente trabalho, uma síntese de algumas destas diversas idéias espalhadas na literatura, isto é, obtemos uma correspondência explícita entre os vácuos-θ de uma teoria de gauge, obtidos pela ambiguidade de quantização, e a estrutura dos estados de equilibrio do gás de Coulomb unidimensional. Mostramos, concretamente, que uma classe de gases de Coulomb (clássicos) unidimensionais, pode ser realizada como uma mecânica estatistica de teorias de gauge U(1), na rede com $\nu=2$, admitindo que suas cargas, infinitamente pesadas, flutuem.

O conteúdo desta tese está distribuido em quatro capítulos: dois destes (Cap.I e III) são revisão de assuntos afins ao tema, e foram intercalados para dar maior unidade ao trabalho. O leitor versado na literatura destes assuntos está dispensado desta leitura, podendo dirigir-se diretamente aos demais capítulos (Cap.II e IV) que realizam as propostas acima indicadas. Passaremos, a seguir, ao resumo da tese.

No Capítulo I apresentamos alguns resultados em teoria de gauge pura, na rede, com dimensão ν de espaço-tempo euclideana. Damos particular atenção à construção do espaço físico destas teorias, conseqüência da positividade física [6], e ao surgimento de setores ortogonais de cargas infinitamente pesadas.

Já no Capítulo II, tratamos diretamente a teoria U(1) de gauge, $\nu=2$, no formalismo Hamiltoniano. Mostramos que, mesmo ao nível da teoria pura, o sistema apresenta estrutura θ do vácuo, como consequência da ambiguidade de quantização. Podemos também representar a teoria (representação de "sine-Gordon"), montando o "path space", onde os vácuos-θ são interpretados como cargas $\frac{\pm\theta e}{2\pi}$ no infinito. Examinamos o problema do confinamento de cargas fracionárias, $\pm\gamma$, nesta representação, e verificamos os mesmos comportamentos encontrados no modelo de Higgs abeliano |[13],[30]|.

No Capítulo III revemos alguns resultados obtidos no tratamento do gás de Coulomb unidimensional. Neste é apresentada a construção dos estados de equilíbrio θ à maneira de Aizenman e Martin |[14]|. Revisamos também a representação de sine-Gordon do gás coulombiano, responsável pela conexão formal entre o gás e o modelo de Higgs abeliano ($\nu=2$).

Finalizamos este trabalho no Capítulo IV com a construção de diversos gases clássicos, construídos a partir da teoria U(1). Mostramos que alguns destes gases convergem ao gás de Coulomb standard, apresentado no capítulo anterior, no limite do espaçamento de rede $a\to 0$.

Consideramos nossa maior contribuição, a explicitação formal dessa conexão entre os gases clássicos e as teorias de gauge, até então tratada como mera analogia.

CAPÍTULO I

TEORIA DE GAUGE PURA NA REDE

A-TEORIA QUÂNTICA EUCLIDEANA - INTRODUÇÃO

O primeiro modelo com simetria local na rede (grupo de gauge $G=Z_2$) foi introduzido por Wegner [1]. Ele estava interessado na generalização do modelo de Ising que possuisse uma transição de fase sem parâmetro de ordem local, do tipo Kosterlitz-Touless [2]. Logo em seguida, Wilson [3] generaliza o modelo de gauge para grupos de Lie compactos, a fim de melhor compreender porque em teorias de gauge no contínuo "quarks" eram permanentemente confinados. Wilson estabelece um critério, segundo o qual, valores esperados de um apropriado observável W(C), conhecido como "loop de Wilson", que tenham uma dependencia de área A(C) do circuito C, em uma dada região da constante de acoplemento g, a teoria apresentaria confinamento. Mais precisamente, a teoria é confinante se para $g>g_0$:

$$\langle W(C)\rangle \sim \exp\{-f(g)\ A(C)\} \qquad \text{(I.A.1)}$$

Se este objeto, que servirá de parâmetro de ordem, mudar de comportamento, isto é, tiver uma lei de perímetro P(C), na região $0<g<g_0$, ocorrerá uma transição de fase em g_0 para uma fase desconfinada.

O pano de fundo na construção de teorias de gauge é a versão euclideana de integrais de trajetórias de Feynman-Kac [4]. A idéia é usar a ação clássica $A(\underset{\sim}{\Phi})$, onde $\underset{\sim}{\Phi}$ simboliza

os campos constituintes do modelo, para construir uma medida de probabilidade $\mu(\underset{\sim}{\Phi})$ no espaço de configurações dos campos.

Nós vamos trabalhar em uma rede hipercúbica $\Lambda \varepsilon \mathbb{R}^{\nu}$ ($\nu \geq 2$) com espaçamento a=1. Utilizaremos três elementos desta rede em nossa formulação: os pontos da rede $i = (i_1, \ldots, i_\nu) \varepsilon \Lambda$; os elos formados pelos pontos vizinhos $\langle ij \rangle = (i, \hat{\alpha})$ com $i \varepsilon \Lambda$, $\{\hat{\alpha}\}_{\alpha=0}^{\nu-1}$ versores na direção α_0; e plaquetas $p = \langle ij \rangle \langle jk \rangle \langle kl \rangle \langle li \rangle$, os circuitos orientados elementares.

Seja G um grupo de Lie compacto e g o mapeamento:

$$g: \langle ij \rangle \varepsilon \Lambda \times \Lambda \longrightarrow g_{ij} \varepsilon G \quad ; \; g_{ij} = g_{ji}^{-1} \tag{I.A.2}$$

O objetivo é construir uma ação escalar que seja invariante por uma transformação de gauge, induzida pelo mapa:

$$h: i \varepsilon \Lambda \longrightarrow h_i \varepsilon G \tag{I.A.3}$$

Dada por:

$$g_{ij} \longrightarrow g_{ij}^{h} = h_i \, g_{ij} \, h_j^{-1} \tag{I.A.4}$$

Assim definimos a ação de Yang-Mills A_{Λ}^{YM}:

$$A_{\Lambda}^{YM}(\{g_{ij}\}) = \frac{1}{2g^2} \sum_{p} \chi(g_p) \quad ; \; g_p = g_{ij} g_{jk} g_{kl} g_{li} \varepsilon G \tag{I.A.5}$$

Onde $\chi(.)$ é o carater real do grupo G segundo uma representação em um espaço vetorial V.

A escolha para ação de gauge não é única: existem outras definições que seguem o mesmo critério, isto é, tal que o limite formal do contínuo reproduza a teoria original de Yang-Mills. Importante frisar que embora o limite formal seja independente do carater $\chi(.)$ adotado, a escolha deste tem um papel importante com respeito ao confinamento, conforme o cen-

tro do grupo é representado [5]. Usualmente adota-se a representação fundamental.

Com a ação (I.A.5) podemos definir a medida de Gibbs:

$$d\mu_\Lambda = Z_\Lambda^{-1}\, e^{A_\Lambda^{YM}}\, dg_\Lambda \qquad \text{(I.A.6)}$$

$$Z_\Lambda = \int e^{A_\Lambda^{YM}}\, dg_\Lambda \quad ; \quad dg_\Lambda = \prod_{<ij>} dg_{ij}$$

Onde dg_{ij} é a medida invariante pela transformação do grupo (I.A.4), a medidade Haar.

Observáveis da teoria são funções $f=f(\{g_{ij}\}) \in L^2(dg_\Lambda)$. Assim os estados da teoria são obtidos por:

$$\langle f\rangle = \lim_{\Lambda\longrightarrow\infty} \langle f\rangle_\Lambda = \lim_{\Lambda\longrightarrow\infty} \frac{1}{Z_\Lambda} \int f\, e^{A_\Lambda^{YM}}\, dg_\Lambda \qquad \text{(I.A.7)}$$

Em nosso trabalho temos um particular interesse pelo formalismo hamiltoniano desta teoria. Neste devemos privilegiar uma direção em relação as demais, a direção temporal. Desta forma uma particular escolha de gauge será adequada neste tratamento. O gauge de radiação se caracteriza por ter associado a todos elos na direção temporal $\hat{\alpha}_0$ a identidade do grupo, $g(i,\hat{\alpha}_0) = e \;\forall\; i\varepsilon\Lambda$. Este gauge é compatível com (I.A.4) por uma escolha adequada de $\{h_i\}$. Por exemplo, nós eliminamos uma variável g_{ij} fazendo a escolha:

$$h_1 = e \qquad \forall\; 1 \neq j$$

$$h_j = g_{ji} \qquad \text{(I.A.8)}$$

E repetindo este processo para todos os elos na direção α_0 obtemos o gauge de radiação.

B - POSITIVIDADE FÍSICA

Neste item vamos mostrar como os estados $\langle . \rangle$ da teoria definem um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com métrica positiva. Então pode-se construir um operador de evolução $T = e^{-H}$ (matriz de transferência), onde H é a Hamiltoniana definida no espaço dos estados quânticos $\mathcal{H}$.

A propriedade que nos permitirá esta construção é conhecida como positividade por reflexão.

Vamos considerar uma rede Λ que é simétrica com respeito ao hiperplano $\alpha_0=0$, que secciona o intervalo médio entre dois hiperplanos espaciais de tal maneira que o sistema Λ fique dividido em duas regiões $\Lambda_{\pm}$ iguais, correspondentes aos tempos positivos (negativos) e $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ com $\Lambda_+ \cap \Lambda_- = \emptyset$

Definimos uma função $r: \Lambda_{\pm} \longrightarrow \Lambda_{\mp}$, reflexão sobre o hiperplano $\alpha_0=0$. Esta reflexão induz um mapa antiunitário θ sobre as funções $f \in L^2_+(dg_{\Lambda_+})$:

$$\theta f(\{g_{ij}\}) = \overline{f(\{g_{ri,rj}\})} \quad ; \; g_{ij} \in G \tag{I.B.1}$$

TEOREMA [6]:

Para funções $f \in L^2_+(dg_{\Lambda_+})$ definidas no semi-espaço superior ($\alpha_0>0$), temos que:

$$\langle (\theta f) f \rangle \geq 0 \tag{I.B.2}$$

Δ

PROVA:

Notamos primeiramente que para valores esperados $\langle . \rangle_{\Lambda,0}$ definidos pela medida $d\mu_0 = dg_{\Lambda}$ temos que:

$$\langle (\theta f) f \rangle_{\Lambda,0} = \langle (\theta f) \rangle_{\Lambda-,0} \langle f \rangle_{\Lambda+,0} = |\langle f \rangle_{\Lambda+,0}|^2 \geq 0 \; ; \; f \in L^2_+ \tag{I.B.3}$$

Agora os elementos da forma $\sum_{i=1}^{n} c_i(\theta f_i)f_i$ com $c_i \geq 0$, n arbitrário e $f_i \in L_+(dg_{\Lambda+})$, formam um cone multiplicativo P, isto é, combinações lineares de produtos destes elementos preservam a mesma forma.

Então a ação de Yang-Mills A_Λ^{YM} no gauge de radiação separa trivialmente $A_\Lambda^{YM} = A_{\Lambda-}^{YM} + A_{\Lambda+}^{YM}$, e:

$$e^{A_\Lambda^{YM}} = e^{\{\theta A_{\Lambda+}^{YM} + A_{\Lambda+}^{YM}\}} = \{\theta e^{A_{\Lambda\div}^{YM}}\} e^{A_{\Lambda+}^{YM}} \qquad \text{(I.B.4)}$$

Com o que o teorema fica demonstrado. Δ

Como consequência direta do teorema, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ quântico: seja $\mathcal{N} = \{f \in L_+^2(dg_{\Lambda+}) \mid \langle(\theta f)f\rangle = 0\}$, então o espaço de Hilbert físico é definido pela compleição de $L_+^2/\mathcal{N}$ com respeito à norma $||f||^2 = \langle(\theta f)f\rangle_\Lambda$. Denotamos por W o mapa:

$$W: f \in L_+(dg_{\Lambda+}) \longrightarrow \Psi_f \in \mathcal{H} \qquad \text{(I.B.5)}$$

Assim para $f,g \in L_+^2$ temos:

$$(\Psi_f, \Psi_g)_\Lambda = (Wf, Wg)_\Lambda = \langle(\theta f)g\rangle_\Lambda \qquad \text{(I.B.6)}$$

Outra consequência é a existência da matriz de transferência. Seja então $f \in L_+^2$; denotamos por Tf a mesma função mas deslocada de duas unidades na direção positiva do eixo temporal α_0. Vamos supor que o limite termodinâmico tenha sido tomado, ao menos na direção temporal. Assim aplicando a desigualdade de Schwarz sucessivamente:

$$|\langle(\theta f), Tf\rangle| \leq \langle(\theta f)T^2 f\rangle^{\frac{1}{2}} \langle(\theta f)f\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(I.B.7)}$$

$$\leq \langle(\theta f)T^{2^n} f\rangle^{2^{-n}} \langle(\theta f)f\rangle^{1-2^{-n}}$$

Tomando o limite de $n\to\infty$ o primeiro fator converge para 1, e obtemos:

$$|<(\theta f)Tf>| \leq <(\theta f)f> \qquad \text{(I.B.8)}$$

Assim T induz uma contração T_H bem definida em $\mathcal{H}$, $0\leq T_H\leq 1$. Portanto podemos escrever $T_H = e^{-2H}$ com $H = H^*\geq 0$, o Hamiltoniano da teoria quântica de gauge.

De passagem, notamos que os estados $\Psi_f \in \mathcal{H}$ são invariantes de gauge, isto é, duas funções $f,g \in L^2_+$ que estejam relacionadas por uma transformação de gauge (I.A.4) diferem apenas por um elemento do espaço nulo $\mathcal{N}$:

$$<|\theta(f^h-f)|(f^h-f)> = 0 \quad ; \quad f^h(\{g_{ij}\}) = f(\{h_i g_{ij} h_j^{-1}\}) \qquad \text{(I.B.9)}$$

Isto devido ao fato de podermos ir desfazendo a transformação hiperplano por hiperplano e lançá-la ao infinito . Contudo podemos construir um espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$, ampliado, o qual transformações de gauge independentes do tempo atuam como operadores unitários não triviais.

Consideremos $\Psi \in \tilde{\mathcal{H}}$ e seja $U(h_i)$ um operador unitário induzido em $\tilde{\mathcal{H}}$ por uma transformação independente do tempo no sítio $i \in \Lambda$. Pelo teorema de Peter-Weyl podemos decompor $U(h_i)\Psi$ em representações irredutiveis do grupo G.

$$U(h_i)\Psi = \sum_\tau U^\tau(h_i)\Psi^\tau \qquad \text{(I.B.10)}$$

O estado Ψ^τ é a projeção no subespaço ortogonal que segue a representação irredutivel Π^τ. Dizemos que Ψ^τ possui uma carga τ no ponto $i \in \Lambda$.

O espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ se decompõe segundo as representações irredutiveis Π^τ, isto é:

$$\tilde{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{i_1,\ldots,i_n \\ \tau_1,\ldots,\tau_n}} \tilde{H}_{\tau_1,\ldots,\tau_n} \quad ; \; i_j \in \Lambda, \; j=1,\ldots,n \qquad \text{(I.B.11)}$$

Isto quer dizer que a decomposição determina uma regra de superseleção e os vários setores de cargas são caracterizados pela localização destas cargas.

Estes setores são invariantes pela ação da matriz de transferência $T = e^{-H}$, e por isso podemos dizer que estas cargas são infinitamente pesadas e externas ao sistema.

Vamos agora tratar um tipo particular de estado que corresponde ao setor de duas cargas τ e $\bar{\tau}$, de sinais contrários, localizadas em dois pontos distintos de um hiperplano espacial.

Nós selecionamos uma "corda" S_{ij} de elos orientados partindo do ponto i e terminando em j, $i,j \in \Lambda$ estão no mesmo hiperplano $\alpha_0 = cte > 0$. Seja:

$$g_{S_{ij}} = P \prod_{<kl> \varepsilon S_{ij}} g_{kl} \qquad \text{(I.B.12)}$$

Onde P significa que o caminho está ordenado. Assim à representação irredutivel $U_{\tau\bar{\tau}}(g_{S_{ij}})$ associamos o estado $\Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j}(S_{ij})$ com a carga τ em i e $\bar{\tau}$ em j. Pode-se verificar que:

$$(\Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j}, T^t \Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j}) = \langle W_\tau(C_{ij,t}) \rangle \qquad \text{(I.B.13)}$$

Com $W(C_{ij,t})$ o operador de "loop de Wilson":

$$W_\tau(C_{ij,t}) = \chi_\tau(P \prod_{<kl> \varepsilon C_{ij,t}} g_{kl}) \qquad \text{(I.B.14)}$$

E $C_{ij,t}$ o caminho fechado percorrido no sentido da ordenação em S_{ij}, então transladado de 2t unidades, percorrido no sentido inverso no caminho S_{ij} e retornando ao ponto ini-

cial (fig.1).

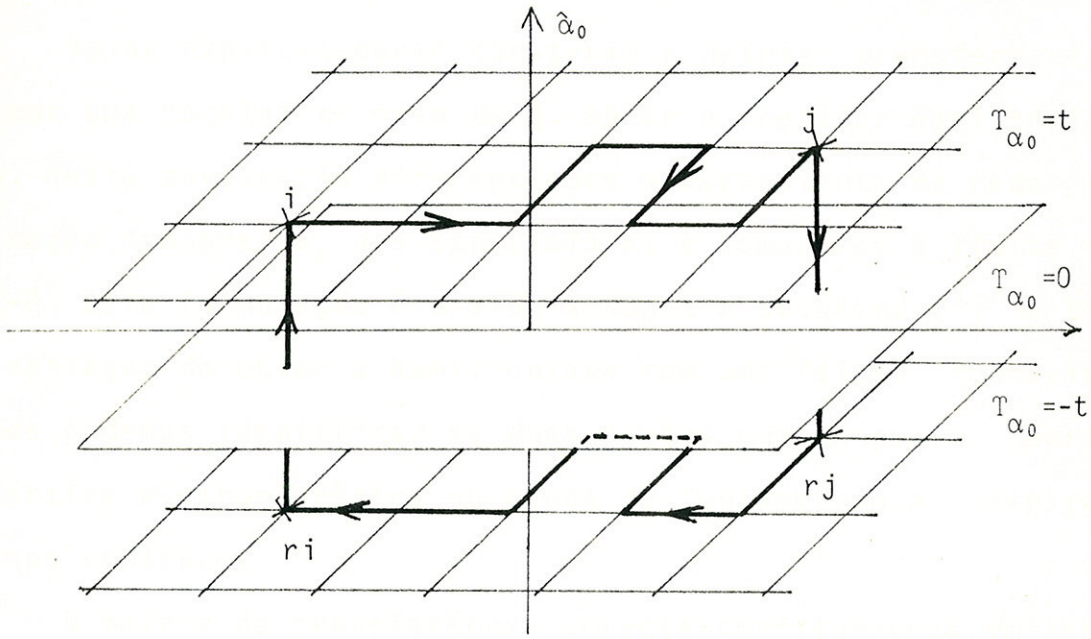

FIGURA 1: Loop de Wilson construido a partir de estados $\Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j}$ que representam a evolução temporal de duas cargas de sinais opostos estáticas.

Como as cargas do estado $\Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j}$ são estáticas, e como $T^t = e^{-2tH}$ com H a Hamiltoniana quântica, a energia correspondente a este estado é puramente potencial, e portanto podemos expressar o potencial entre estas cargas como:

$$V_{\tau_i \bar{\tau}_j}(S_{ij}) = - \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \langle W_\tau(C_{ij,t}) \rangle$$

$$= \inf \operatorname{spec} H \uparrow \Psi_{\tau_i \bar{\tau}_j} \qquad \text{(I.B.15)}$$

Com S_{ij} o menor caminho entre os pontos $i,j \in \Lambda$ no hiperplano $\alpha_0 = cte$.

C - FORMALISMO HAMILTONIANO

Vamos explicitamente construir a matriz transferência, e por uma escolha de base de $\mathcal{H}$, obter o operador Hamiltoniano. Nesta construção diferenciamos o espaçamento de rede na direção temporal a_0 dos espaciais a, e tomaremos o limite de $a_0 \to 0$. Esta formulação é devido a Kogut e Susskind |7| e tem a vantagem de obter a Hamiltoniana com uma feição conhecida onde podemos identificar as duas partes que compõe a teoria quântica eletromagnética no gauge de Coulomb com o espaço-tempo continuos.

A matriz de transferência conecta configurações em tempos sucessivos. Os elementos de matriz $T(\{g_{ij}\}_{\alpha_0+1}, \{g_{ij}\}_{\alpha_0})$ são obtidos fatorando da expressão de $\exp\{A^{YM}\}$ a contribuição que envolve a interação entre α_0 e α_{0+1}, das contribuições que envolvem apenas configurações no tempo α_0 ou α_{0+1}. Sendo assim, vamos decompor a ação A^{YM} em dois fatores; um que envolve plaquetas sobre os hiperplanos espaciais Υ_{α_0} e outro termo onde as plaquetas têm uma de suas direções no eixo temporal. Então no gauge de radiação:

$$A^{YM}_{\Lambda} = \frac{a}{2g^2 a} \sum_{p \in \Upsilon_{\alpha_0}} \chi(g_p) + \frac{a}{g^2 a_0} \sum_{<ij> \in \Upsilon_{\alpha_0}} \chi(g_{ij} g^{-1}_{i+\hat{\alpha}_0, j+\hat{\alpha}_0}) \qquad \text{(I.C.1)}$$

Aqui os fatores de espaçamento foram introduzidos para compensar os efeitos do limite $a_0 \to 0$ e manter as unidades corretas.

A matriz de transferência opera sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções sobre o grupo G, isto é:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{<ij> \in \Upsilon_{\alpha_0}} L^2(dg_{ij}) \qquad \text{(I.C.2)}$$

Podemos tomar uma base ortogonal, porém não normaliza - vel $|\{g_{ij}\}>$ caracterizada pelo conjunto de valores $g_{ij}\varepsilon G$ com $<ij>\varepsilon T_{\alpha_0}$. Assim o elemento de matriz entre duas configurações em hiperplanos vizinhos é dado por:

$$<\{g_{ij}\}|T|\{g'_{ij}\}> = \exp\{\frac{a_0}{4ag^2}\sum_{p\varepsilon T_{\alpha_0}}(\chi(g_p)+\chi(g'_p)) + \frac{a}{2a_0g^2}\sum_{<ij>\varepsilon T_{\alpha_0}}\chi(g_{ij}g'^{-1}_{ij})\} \qquad \text{(I.C.3)}$$

Definimos o operador G^{τ}_{p} cuja ação no espaço de Hilbert H é dado por:

$$G^{\tau}|\{g_{ij}\}> = \Pi^{\{\tau\}}(g_p)|\{g_{ij}\}> \qquad \text{(I.C.4)}$$

Onde $\Pi^{\{\tau\}}(.)$ é uma representação irredutivel τ do grupo G. Introduzimos ainda o operador unitário $U(\{h_{ij}\})$ que age sobre H da sequinte maneira:

$$U(\{h_{ij}\})|\{g_{ij}\}> = |\{h_{ij}g_{ij}\}> \quad h_{ij}\ \varepsilon\ G \qquad \text{(I.C.5)}$$

Assim podemos escrever a matriz tranferência como operador integral:

$$T = \int dh_{T_{\alpha_0}} \exp\{\frac{a}{2a_0g^2}\sum_{<ij>\varepsilon T_{\alpha_0}}\chi(h_{ij})\}\ U(h_{ij})\ \exp\{\frac{a}{2ag^2}\sum_{p\varepsilon T_{\alpha_0}}Tr(G^{\tau}_{p})\} \qquad \text{(I.C.6)}$$

Esta expressão é obtida usando a ortogonalidade da base que tem a seguinte propriedade:

$$\int dh\ f(h)\ <h|g> = f(g) \quad ;\ g,h\ \varepsilon\ G \qquad \text{(I.C.6')}$$

No limite de $a_0 \to 0$ somente uma vizinhança da identidade $g_{ij}\sim e$ contribui para a integração, assim, parametrizando g_{ij} somos levados a integrais gaussianas. Seja a seguinte parametrização, onde omitiremos os índices que indicam a posição do elemento do grupo na rede:

$$g = e + i \sum_{a=1}^{n} s_a L_a - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{n} s_a s_b L_a L_b \quad ; \left[L_a, L_b \right] = i\, C^{c}_{ab}\, L_c \qquad \text{(I.C.7)}$$

L_a são os geradores infinitesimais hermitianos das transformações do grupo G pertencentes à álgebra de Lie, e são escolhidos de maneira que sejam ortogonais com respeito à métrica de Cartan-Killing. C^{c}_{ab} são constantes de estrutura e n a dimensão do grupo G.

Se o grupo G for semi-simples, podemos encontrar uma base da álgebra de Lie tal que a forma quadrática de Cartan - Killing seja diagonal:

$$\chi(L_a L_b) = K\, \delta_{ab} \quad ; \forall\ a,b = 1,\ldots,n \qquad \text{(I.C.8)}$$

Além disso se o grupo G for especial então $\chi(L_a)=0$, $\forall$ a e a única integral relevante na expressão (I.C.6) será:

$$\int d^n s \exp\{ \frac{-a}{4g^2 a_0} \sum_{b=1}^{n} s_b^2 - i \sum_{b=1} s_b L_b \} = K \exp\{- \frac{g^2 a_0}{a} \sum_{b=1}^{n} L_b^2 \} \qquad \text{(I.C.9)}$$

Daí resulta a seguinte expressão para o Hamiltoniano, a menos de fatores constantes não relevantes:

$$H = \lim_{a_0 \to 0} -\frac{1}{a_0} \ln T = \frac{g^2}{a} \sum_{<ij> \varepsilon T_{\alpha_0}} L_{ij}^2 - \frac{1}{2g^2 a} \sum_{p \varepsilon T_{\alpha_0}} \chi(G_p^T) \qquad \text{(I.C.10)}$$

Onde $L^2_{ij} = \sum_{a=1}^{n} L^2_{ija}$ é o operador de Casimir quadrático. Este operador tem a propriedade tal que seus auto valores indexam as representações irredutiveis $\Pi^{\{\tau\}}$ do grupo G, e quando aplicado a um grupo de funções, este se comporta como operador diferencial de 2ª ordem. (Uma demonstração rigorosa deste limite pode ser encontrada no trabalho de Borgs e Seiler [25]).

Assim uma transformação de gauge é unitariamente representada no espaço de Hilbert H, definido em (I.C.2), por:

$$U(\{h_i\})\ \Psi(\{g_{ij}\}) = \Psi(\{h_i g_{ij} h_j^{-1}\}) \quad ; h,g \in G\ ;\ <ij> \in T_{\alpha_0} \qquad (I.C.11)$$

Se considerarmos uma transformação em um único sítio, $U(h_i)$, os geradores desta transformação T_i^b, b=1,2,...,n serão chamados de operadores de cargas no sítio $i \in T_{\alpha_0}$.

Então a lei de Gauss neste contexto será expressa pelo divergente na rede do operador $L_{ij}^b = L^b(i,\hat{\alpha})$, o campo elétrico no elo <ij> com b=1,...,n e $\hat{\alpha}$ as direções espaciais. Assim:

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} (L^b(i,\hat{\alpha}) - L^b(i,-\hat{\alpha})) = T_i^b \qquad (I.C.12)$$

E verificamos facilmente que:

$$\left[H, T_i^b\right] \Psi(\{g_{ij}\}) = 0 \quad ; \forall\ \Psi \in \tilde{H} \qquad (I.C.13)$$

Assim as cargas da teoria se conservam em cada ponto e o espaço de Hilbert $\tilde{H}$ se desacopla como em (I.B.11) segundo as representações irredutiveis $\Pi^{\{\tau\}}$, onde $\{\tau\}$ significa uma configuração de cargas externas sobre o hiperplano T_{α_0}.

Podemos definir um operador de projeção $P_{\{r\}}$, sobre $\tilde{H}$, de uma dada configuração $\{\tau\}$ de cargas, que pelo teorema de Peter-Weyl tem a seguinte expressão:

$$P_{\{\tau\}} = \int \overline{\chi^{\{\tau\}}}(\{g_{ij}\})\ U(\{g_{ij}\})\ dg_{T_{\alpha_0}} \qquad (I.C.14)$$

De posse deste formalismo, podemos construir uma mecânica estatística na maneira usual; definimos a função de partição e a energia livre do sistema, respectivamente:

$$Z_{\{\tau\}}(\beta,g) = Tr\ (e^{-\beta H}\ P_{\{\tau\}}) \qquad (I.C.15)$$

$$F_{\{\tau\}}(\beta,g) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\{\tau\}}(\beta,g) \qquad \text{(I.C.15')}$$

A teoria de campo é obtida a partir desta mecânica estatística tomando tomando $\beta\to\infty$, isto é, a teoria de campo é uma mecânica estatística à temperatura zero [25], e a energia do sistema de uma distribuição de cargas $\{\tau\}$ é:

$$E_{\{\tau\}}(g) = \lim_{\beta\longrightarrow\infty} F_{\{\tau\}}(\beta,g) \qquad \text{(I.C.16)}$$

Como estas cargas são estáticas, o potencial de uma dada configuração de cargas $\{\tau\}$ é obtido pela comparação entre a energia desta configuração e o estado fundamental:

$$V_{\{\tau\}}(g) = E_{\{\tau\}} - E_{\{0\}} \qquad \text{(I.C.17)}$$

É possivel mostrar que, quando o grupo é de fácil manipulação, a prescrição (I.C.16) e (I.C.17) para uma configuração onde temos duas cargas de sinais opostos τ_i e $\bar{\tau}_i$, $i,j \in T_{\alpha_0}$, é equivalente ao valor esperado do Loop de 't Hooft T(C) com a medida (I.A.6) e C um circuito fechado (APÊNDICE I).

Desta maneira é bem mais natural, usando a intuição neste desenvolvimento, partir diretamente da teoria no formalismo Hamiltoniano, com a vantagem de podermos construir a teoria de gauge fora da temperatura zero.

O trabalho que desenvolveremos a seguir é um exemplo desta construção tomando como modelo o grupo G=U(1) e restringindo a dimensão do espaço-tempo ν=2. Esta escolha tem um duplo aspecto: Primeiramente em duas dimensões não temos o termo magnético na Hamiltoniana, e portanto será quadrática, facil-

mente manipulável. O outro aspecto é devido ao fato que na eletrodinâmica completa, no continuo (modelo de Schwinger), que é soluvel exatamente, o vácuo possui uma estrutura não trivial, conhecido como vácuos-θ [8].

No próximo capítulo veremos que, mesmo em um modelo tão simples como a teoria U(1) pura, já encontramos esta estrutura presente.

CAPITULO II

TEORIA DE GAUGE U(1) - $\nu=2$

A-FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

Vamos agora inverter a ordem de desenvolvimento do capítulo I e realizar o programa, que foi apenas esboçado no item C, de formular diretamente a teoria a partir de sua Hamiltoniana quântica do modelo de gauge U(1).

Seja Λ uma rede unidimendional de espaçamento a e tamanho $|\Lambda| = L$. Variaveis angulares Φ_{ij} viverão nos elos desta rede, $<ij>$, tais que $\Phi_{ij}=-\Phi_{ij}$.

Definimos a parte elétrica da Hamiltoniana (não há magnetismo em $\nu=2$).

$$H_\Lambda = \frac{e^2}{2a} \sum_{<ij>\varepsilon\tilde{\Lambda}} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \right)^2 \qquad \text{(II.A.1)}$$

O operador Hamiltoniano age sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções quadraticamente integraveis no intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$\psi(\{\Phi_{ij}\}) \varepsilon \mathcal{H} \quad ; \quad \mathcal{H} = \bigotimes_{<ij>} L^2(d\Phi_{ij}; [-\pi, \pi]) \qquad \text{(II.A.2)}$$

O operador $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}}$ é o conjugado de Φ_{ij} para uma classe especial de funções $\psi \varepsilon \mathcal{H}$ que não sejam auto funções de $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}}$ e que se anulam nos extremos.

Sob a ação de uma transformação de gauge $U(\{\alpha_i\})$ as funções do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se comportam:

$$U(\{\alpha_i\})\ \psi(\{\Phi_{ij}\}) = \psi(\{\Phi_{ij} - \alpha_i + \alpha_j\}) \qquad \text{(II.A.3)}$$

Onde $\{\alpha_i\}$ representa um conjunto de variaveis angulares definidas nos pontos da rede .

Podemos construir explicitamente o operador de uma transformação de gauge $U(\alpha_i)$ em um único sítio $i \in \Lambda$, expandindo até primeira ordem (II.A.3). Para $\alpha_i << 1$ temos:

$$U(\alpha_i)\ \psi(\{\Phi_{ij}\}) = \left[1 + \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_{i,i+1}} - \frac{\partial}{\partial \Phi_{i-1,i}} \right) \right] \psi(\{\Phi_{ij}\})$$

$$= (1 + i\alpha_i Q_i)\ \psi(\{\Phi_{ij}\}) \qquad \text{(II.A.4)}$$

Assim o operador unitário das transformações de gauge é obtido pela exponenciação do gerador infinitesimal Q_j:

$$Q_j = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_{j,j+1}} - \frac{\partial}{\partial \Phi_{j-1,j}} \right) \qquad \text{(II.A.5)}$$

Q_j mede a carga que se encontra em $j \in \Lambda$ dos estados $\Psi \in H$ da teoria. Observamos também que spec $Q_j \in Z$, e portanto as cargas são naturalmente quantizadas.

A versão discreta da lei de Gauss é expressa por:

$$E_{j+1,j} - E_{j,j-1} = e\, n_j \quad ; \ n_j \in Z \qquad \text{(II.A.6)}$$

Comparando esta expressão com (II.A.5) nós obtemos o elo de ligação que nos permite afirmar que a Hamiltoniana (II.A.1) expressa a energia de uma teoria eletromagnética, cuja parte elétrica é quadrática nos campos $E_{ij} = \frac{e}{i} \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}}$.

Uma carga localizada em um sítio $j \in \Lambda$, corresponde a uma descontinuidade do campo elétrico E_{ij}, cujo salto é o valor da carga. Assim uma configuração do campo elétrico $\{E_{ij}\}$ corresponde unicocamente uma configuração das cargas da teoria $\{Q_j\}$. (FIGURA 2)

A configuração de estados de gauge deve ter todas as

cargas nula, o que corresponde a configurações de campo constante, pois:

$$\delta_j \psi(\{\Phi_{ij}\}) = (U(\alpha_j) - 1)\, \psi(\{\Phi_{ij}\}) = (E_{j+1,j} - E_{j,j-1})\, \psi(\{\Phi_{ij}\}) = 0$$

$$\Longrightarrow E_{ij} = \text{cte} \quad ; \forall \langle ij \rangle \in \tilde{\Lambda} \qquad \text{(II.A.7)}$$

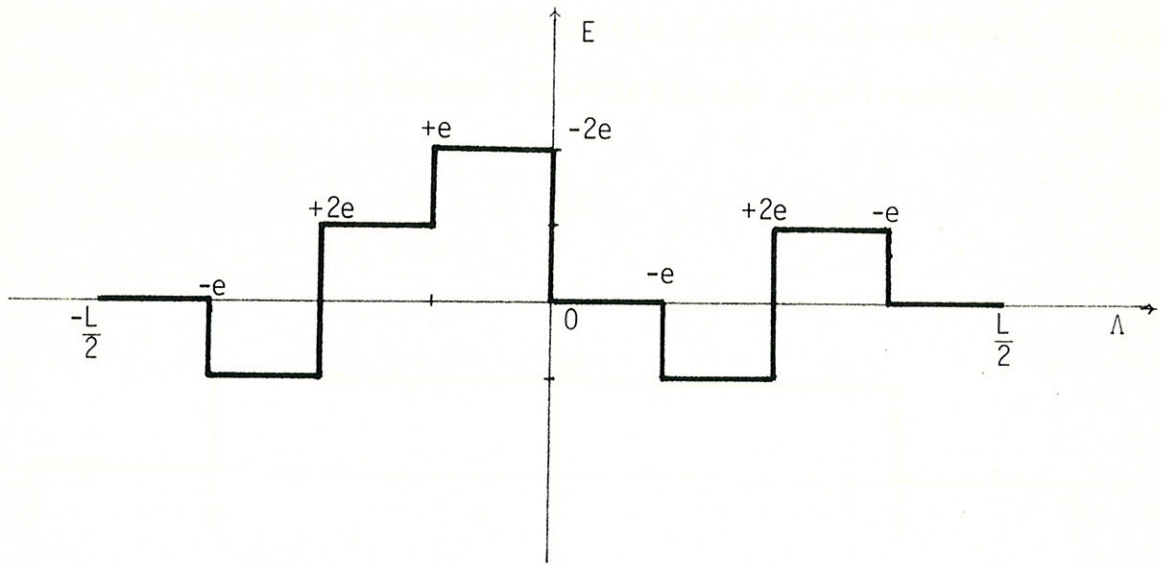

FIGURA 2: Configuração do campo elétrico e sua relação com as cargas de um estado da teoria. Neutralidade do sistema implica em $E(\frac{L}{2}) = E(-\frac{L}{2})$.

Porém nosso espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ comporta outros estados que não são invariantes de gauge e portanto estão em outros setores. Ocorre porém que:

$$\left[\bar{Q}_j, H\right] = 0 \quad ; \forall\, j \in \Lambda \ . \qquad \text{(II.A.8)}$$

Assim estes setores estão totalmente desacoplados e o espaço de Hilbert se decompõe numa soma direta, como em (I.B.11).

Como no capítulo anterior, a energia livre da teoria U(1) é dada por:

$$F(\{Q\}) = \lim_{\beta \to \infty} - \frac{1}{\beta} \ln \{ \text{Tr}\, e^{-\beta H} P_{\{Q_j\}} \} \qquad \text{(II.A.9)}$$

O confinamento desta teoria é observado pela comparação da energia de uma configuração onde temos uma carga +e no sítio $i=-\frac{\ell}{2}$ e -e no sítio $j=\frac{\ell}{2}$, com a configuração do estado fundamental que no caso é nula pois o inf spec H = 0. Assim temos que o potencial entre duas cargas de sinal contrários cresce linearmente com a distancia ℓ entre as cargas, o que pode ser visto facilmente representando graficamente a situação. (FIGURA 3)

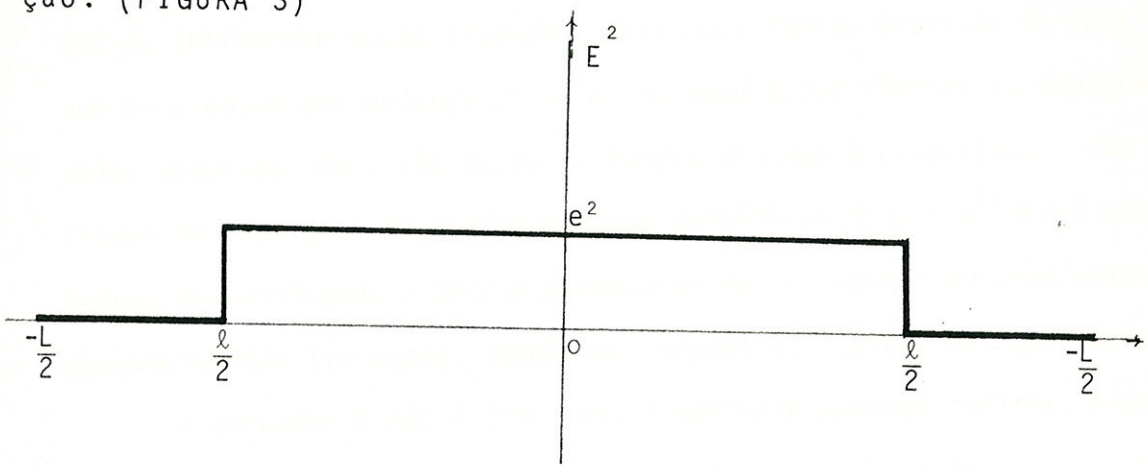

FIGURA 3: Configuração de duas cargas estáticas ±e de sinais contrários. A energia desta configuração é dada pela área do gráfico, e cresce linearmente com ℓ.

B - AMBIGUIDADE θ NA QUANTIZAÇÃO

Quando introduzimos a Hamiltoniana (II.A.1) não fomos suficientemente cuidadosos com relação ao domínio $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ de funções as quais o operador H_Λ é auto-adjunto; nem todas as funções de $\mathcal{H}$ tem esta propriedade. Porém, se desejamos que o teorema espectral tenha validade, bem como obter um operador unitário de evolução temporal, devemos necessariamente restringir o domínio de atuação de H_Λ.

Nós veremos neste item que esta restrição não é única, e é possivel definir uma família de operadores auto-adjuntos cuja a física é não

equivalente.

Se restringirmos nossa atenção a um único elo, o operador de campo elétrico, E_{ij}, é o gerador infinitesimal das translações no intervalo limitado $[-\pi,\pi]$. Podemos implementar uma translação de um ângulo ξ, pequeno, por um operador unitário $U(\xi)$. Perguntemos então, o que acontece às funções transladadas $\Psi(\phi+\xi) = U(\xi)\Psi(\phi)$ quando é ultrapassado o limite do intervalo de definição da função. A origem física da ambiguidade reside justamente nesta situação, pois nada impede à função de onda $\Psi(\phi)$ que se produza uma mudança de fase; os resultados físicos só dependem do valor absoluto. Em vista disso, a função de onda é compatível com uma classe de condições de contorno quase periódicas $\Psi(\pi) = e^{i\theta}\Psi(-\pi)$. No que segue, desenvolvemos a teoria matemática das extensões auto-adjuntas de operadores não limitados. Também omitiremos os índices dos operadores.

O operador E não é limitado, e portanto devemos indicar, além de sua ação, o dominio $\mathbb{D}(E) \subset \mathbb{H}$ sobre o qual ele atua. Assim:

$$Ef(\phi) = \frac{1}{i} f'(\phi) \; ; \; \forall \; f \in \mathbb{D}(E) \text{ denso em } \mathbb{H} \qquad \text{(II.B.1)}$$

Como desejamos obter operadores auto-adjuntos, primeiramente devemos dizer o que significa adjunto E* de um operador E. Definimos o adjunto de $\{E,\mathbb{D}(E)\}$ por $\{E^*,\mathbb{D}(E^*)\}$ tal que:

$$\mathbb{D}(E^*) = \{f\in\mathbb{H}: \forall\, f'\in\mathbb{H} \text{ satisfazendo } \langle f,Eh\rangle = \langle f',h\rangle, \forall\, h\in\mathbb{D}(E)\}$$

$$\langle E^*f,h\rangle = \langle f,Eh\rangle \; ; \; \forall \; h \in \mathbb{D}(E), \; f \in \mathbb{D}(E^*) \qquad \text{(II.B.2)}$$

Podemos verificar facilmente que: $\mathbb{D}(E) \subset \mathbb{D}(E^*)$. (II.B.3)

Os operadores tais que $\langle Ef,h\rangle = \langle f,Eh\rangle \; \forall \; f,h \in \mathbb{D}(E)$ são chamados simétricos, e estaremos interessados neste tipo de operadores devido suas propriedades. Assim ilustraremos (II.B.3) com um exemplo:

EXEMPLO 1: Seja $\{E,\mathbb{D}(E)\}$ como em (II.B.1), onde:

$\mathbb{D}(E) = \{f \in \mathbb{H} : f$ continuamente diferenciavel e $f(-\pi)=f(\pi)=0\}$

$$\langle g, Ef \rangle = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(\phi)}\ f'(\phi)\ d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{1}{i} g'(\phi)}\ f(\phi)\ d\phi + g(\phi)\ f(\phi) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \langle E^* g, f \rangle \qquad ; \ \forall\, f \in \mathcal{D}(E) \qquad \text{(II.B.4)}$$

Assim o domínio $\mathcal{D}(E^*) = \{f \in H : f \text{ cont dif}\}$ sem a restrição sobre o contorno das funções e portanto compativel com (II B.3).

Δ

Um operador é auto-adjunto se e somente se:

$$\mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(E^*) \quad \text{e} \quad E^* f = Ef \qquad ; \ \forall\, f \in \mathcal{D}(E) \qquad \text{(II.B.5)}$$

Com esta definição mais a propriedade (II.B.3), vemos a estratégia que devemos seguir para definir operadores auto-adjuntos, consistirá em ir aumentando o domínio $\mathcal{D}(E)$, o que ocasionará uma redução de $\mathcal{D}(E^*)$, até que ambos operadores se "aproximem" o máximo possivel. Este processo denomina-se extensão auto-adjunta de um operador.

Há uma teoria completa das extensões de operadores [9] não limitados definidos em espaços de Hilbert. Aqui vamos nos restringir aos elementos básicos desta teoria, sem nos preocuparmos com as demonstrações.

Vamos primeiramente esclarecer o que se entende por extensões de um operador: F é uma extensão de E se $\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{D}(F)$, e $Ef = Ff\ \forall\ f \in \mathcal{D}(E)$. Como $\mathcal{D}(F^*) \subset \mathcal{D}(E^*)$, temos que:

$$\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(F^*) \subset \mathcal{D}(E^*) \qquad \text{(II.B.6)}$$

Portanto F está "mais próximo" de ser auto-adjunto que E. Ocorre porém que nem sempre é possivel realizar extensões. Uma condição necessária e suficiente para tal realização, é que o domínio $\mathcal{D}(E^*)$ seja denso em H. Entretanto esta é uma proprie-

dade de operadores simétricos, e portanto para estes operadores existe sempre a extensão obtida pelo seu fechamento $\{\bar{E},\mathcal{D}(\bar{E})\}$.

Há um outro problema referente às extensões dos operadores $\{E,\mathcal{D}(E)\}$; nem sempre conseguimos aproximar o domínio $\mathcal{D}(E)$ ao $\mathcal{D}(E^*)$ de tal maneira que $\mathcal{D}(E)=\mathcal{D}(E^*)$. Há uma falta no domínio $\mathcal{D}(\bar{E})$ à qual denominamos de deficiência.

Um resultado facil de demonstrar diz que operadores tais que $\mathcal{D}(\bar{E})=\mathcal{D}(E^*)$, isto é, operadores essencialmente auto-adjuntos, possuem uma, e somente uma, extensão auto-adjunta.

A fim de podermos continuar nossa discussão devemos estabelecer um critério básico que nos indique quando um operador $\{E,\mathcal{D}(E)\}$ é auto adjunto. O critério é o seguinte: um operador $\{E,\mathcal{D}(E)\}$ é auto-adjunto se, e somente se, o operador $E\pm iI$ levar o seu dominio em todo o espaço de Hilbert H, isto é, se a imagem $I_{E\pm iI}=H$, ou ainda, se $N_{E^*\mp iI}=0$, onde N_A é o conjunto em $\mathcal{D}(A)$ que são levados por A no vetor nulo.

Os espaços $D_\pm = N_{E^*\pm iI} \neq \emptyset$ são chamados de deficiência do operador $\{E,\mathcal{D}(E)\}$. No que segue veremos que as funções $f \in D_\pm$ não pertencem ao domínio $\mathcal{D}(\bar{E})$ por algum problema no contorno de f.

Podemos introduzir a noção de ortogonalidade em $\mathcal{D}(E^*)$ definida por um produto escalar $\langle .,. \rangle_{E^*}$:

$$\langle f,g\rangle_{E^*} = \langle f,g\rangle + \langle E^*f,E^*g\rangle \quad ; \; f,g \in \mathcal{D}(E^*) \tag{II.B.7}$$

Com esta noção podemos mostrar as seguintes asserções:

1) $D_+ \perp_{E^*} D_-$

ii) $D_{\pm} \perp_{E^*} D(\bar{E})$

iii) $D(\bar{E})^{\perp_{E^*}} = D_+ \oplus D_-$ (II.B.8)

Assim qualquer função $f \varepsilon D(E^*)$ pode ser decomposta em:

$$f = f_0 + f_+ + f_- \quad , \text{ com } f_0 \varepsilon D(\bar{E}) \text{ e } f_{\pm} \varepsilon D_{\pm} \qquad \text{(II.B.9)}$$

É conveniente ainda introduzir a forma sesquilinear $[.,.]$ definida em $D(E^*)$, denominada forma de contorno:

$$[f,g] = \langle g, E^* f\rangle - \langle E^* g, f\rangle \quad ; \quad \forall\, f,g \in D(E^*) \qquad \text{(II.B.10)}$$

Como consequência imediata de todas estas noções e definições somos levados a dois resultados relevantes: um operador $\{E, D(E)\}$ é auto-adjunto se, e somente se, $[f,g]=0$, $\forall f,g \varepsilon D(E)$.

O outro resultado diz que, para funções $f,g \varepsilon D(E^*)$, e $f_{\pm}, g_{\pm} \varepsilon D_{\pm}$, temos:

$$[f,g] = 2i\left\{\langle f_-, g_-\rangle - \langle f_+, g_+\rangle\right\} \qquad \text{(II.B.11)}$$

Assim se existir um mapeamento isométrico unitário de D_- para D_+, este mapeamento deve definir uma extensão auto-adjunta de $\{E, D(E)\}$.

De fato há um teorema que diz [21]:

TEOREMA:

Seja E um operador simétrico e fechado em H. Existe uma correspôndencia biunívoca entre o conjunto de extensões simétricas de E e o conjunto de isometrias parciais de D_- a D_+ dada por $Uf_- = f_+$. Uma extensão será auto-adjunta se, e somente se, U for unitário.

Δ

Vamos agora aplicar esta teoria ao nosso problema: seja E definido como em (II.B.1), e:

$$D(E_0) = \{ f \in H : f \in AC[-\pi,\pi] \ , \ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \}$$

$$D(E_1) = \{ f \in H : f \in AC[-\pi,\pi] \}$$

$$E_0 f = E_1 f = \frac{1}{i} f' \quad ; \forall f \in D(E_0) \tag{II.B.12}$$

Onde AC significa que as funções são absolutamente contínuas.

Devemos primeiramente calcular o domínio $D(E_0^*)$, para isso vamos introduzir uma função $j(\phi)$ positiva, diferenciavel com suporte em $(-\pi,\pi)$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} j(\phi)\, d\phi = 1$. Seja $j_\lambda(\phi) = \frac{1}{\lambda} j(\frac{\phi}{\lambda})$, definimos em $-\pi<\alpha<\beta<\pi$ as seguintes funções:

$$f_\lambda^{\alpha\beta}(\phi) = j_\lambda(\phi-\beta) - j_\lambda(\phi-\alpha)$$

$$g_\lambda^{\alpha\beta}(\phi) = \int_{-\pi}^{\phi} f_\lambda^{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi \tag{II.B.13}$$

Para λ suficientemente pequeno $g_\lambda^{\alpha\beta} \in D(E_0)$. Então, segundo (II.B.2), temos:

$$\langle h, E g_\lambda^{\alpha\beta} \rangle = \langle E^* h, g_\lambda^{\alpha\beta} \rangle \quad ; \quad h \in D(E_0^*) \tag{II.B.14}$$

Quando $\lambda \to 0$, $g^{\alpha\beta}$ converge em $L^2[-\pi,\pi]$ para a função característica de (α,β). Por outro lado $j_\lambda \Phi \xrightarrow{L^2} \Phi$, $\forall \quad \Phi \in L^2[-\pi,\pi]$ onde $j_\lambda \Phi = \int_{-\pi}^{\pi} j_\lambda(\phi-\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi$. Assim a expressão (II.B.14) fica:

$$i\ (\ h(\beta) - h(\alpha)\ ) = \int_{\alpha}^{\beta} (E^* h)(\phi)\, d\phi \tag{II.B.15}$$

O que significa que $D(E_0^*) = D(E_1)$, e $E^* h = \frac{1}{i} h'$, $\forall\ h \in D(E_0^*)$.

Que $\{D(E_0),E_0\}$ não é essencialmente auto-adjunto pode ser visto facilmente pelo fato que os espaços $D_\pm$ de deficiência são não vazios. Calculando estes espaços $D_\pm=N_{E_0^*\pm iI}$, temos:

$$\frac{1}{i} f'_\pm = \mp i f_\pm \Longrightarrow f'_\pm = f_\pm \quad ; f_\pm \in D_\pm \qquad \text{(II.B.16)}$$

Assim as soluções desta equação são:

$$f_\pm(\phi) = e^{\pm\phi} \qquad \text{(II.B.17)}$$

Como a dimensão do espaço de deficiência $n_\pm=1$, devemos ter uma família a um parâmetro θ de extensões auto-adjuntas, com $\theta \in [0,2\pi]$. Isto é, usando a fórmula de contorno (II.B.10) temos:

$$[f,g] = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left\{\bar{g}\,\frac{f'}{i} - \overline{\left(\frac{g'}{i}\right)} f\right\} = \frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left\{\bar{g}\, f\right\}'$$

$$\frac{1}{i}\left\{\bar{g}(\pi)\, f(\pi) - \bar{g}(-\pi) f(-\pi)\right\} \quad \forall f,g \in D(E_0^*) \qquad \text{(II.B.18)}$$

Como em (II.B.11) a forma $[.,.]$ depende apenas de $D_\pm$, e este espaço tem dimensão $n_\pm=1$, as funções $f \in D(E_\theta)$ serão caracterizadas por:

$$|f(\pi)|^2 = |f(-\pi)|^2 \Longrightarrow f(\pi) = e^{i\theta} f(-\pi) \; ; \; \theta \in [0,2\pi] \qquad \text{(II.B.19)}$$

Portanto $\{E_\theta, D(E_\theta)\}$ é auto-adjunto e $D(E_\theta)=\{f \in AC[-\pi,\pi]$ $f(\pi)= e^{i\theta} f(-\pi)\}$.

C - O SIGNIFICADO DO PARÂMETRO θ

No item anterior vimos que o operador de campo elétrico E_{ij} admite uma família de extensões auto-adjuntas caracterizadas por um parâmetro $\theta_{ij} \in [0, 2\pi]$. Veremos a seguir que os estados $\Psi_\theta(\{\phi_{ij}\}) \in \mathcal{D}(\{E^\theta_{ij}\}) \subset \mathcal{H}$, com $\theta_{ij} = \theta$, $\forall$ $<ij>$, correspondem a configurações, onde os extremos do sistema adquirem cargas de valor $\pm\theta e/_{\mathrm{mod}2\pi}$. Mostraremos também que para $\theta_1 \neq \theta_2$, os espaços correspondentes são mutuamente singulares.

O espaço de Hilbert completo $\mathcal{H}$, tem a forma de um produto tensorial de espaços de funções para cada elo (II.A.2). O espaço de todas as configurações do campo elétrico (auto vetores do operador E_{ij}) é denso em $\mathcal{H}$. O nosso desejo é estabelecer uma correspondência entre configurações de campos e configurações das cargas externas do sistema, daí surgir a seguinte questão: que subespaços de todas as configurações correspondentes a valores arbitrários de θ para cada elo, é o espaço que devemos usar em nossa teoria?

Sabemos, pela forma da Hamiltoniana (II.A.1) que a teoria deve possuir invariância translacional quando o limite $\Lambda\to\infty$ for tomado. Assim, admitindo a existência deste limite, podemos definir um operador de translação de n unidades de rede T_n, unitário, que age sobre as funções $\Psi_{\{\theta\}}(\{\phi_{ij}\}) \in \mathcal{D}(\{E^\theta_{ij}\})$ da seguinte maneira:

$$T_n \, \Psi_{\{\theta\}}(\{\phi_{ij}\}) = \Psi_{\{\theta\}}(\{\phi_{i-n,j-n}\}) \qquad <ij> \in \tilde{\Lambda} \tag{II.C.1}$$

Este operador induz uma transformação sobre os operadores de campos E_{ij} dada por:

$$T_n \, E^\theta_{ij} \, T_{-n} = E^{\theta'}_{i+n,j+n} \qquad n \in Z \tag{II.C.2}$$

Como o espectro dos campos $\sigma(E^{\theta}_{ij}) = (\mathbb{Z}+\frac{\theta}{2\pi})e$, $\forall\ \langle ij\rangle \in \tilde{\Lambda}$, com e a carga elétrica, não deve se alterar por uma transformação unitária, concluimos que os valores de θ_{ij} para todos elos da rede, devem ser os mesmos. Portanto o"espaço de configurações" $\mathcal{D}(\{E^{\theta}_{ij}\})$ que devemos adotar para esta teoria constitui do produto tensorial dos "espaços de configuração" de cada elo $\mathcal{D}(E^{\theta}_{ij})$ com todos $\theta \in [0,2\pi]$ iguais.

Notamos também que se admitissemos a teoria definida com θ_{ij}, dependentes dos elos $\langle ij\rangle \in \tilde{\Lambda}$, o operador de carga Q_j passaria a ter espectro continuo; isto é:

$$\text{spec}(Q_j) = \frac{1}{e}\,\text{spec}(E^{\theta}_{j+1,j} - E^{\theta'}_{j,j-1}) = \mathbb{Z}+(\theta-\theta') \qquad \text{(II.C.3)}$$

Assim nosso "espaço de configurações" $\mathcal{D}^{\theta} \subset \mathcal{H}$ será indexado por um único parâmetro e as cargas da teoria permanecerão discretas.

Por outro lado, o conjunto de operadores $\{E^{\theta}_{ij}, \phi^{\theta}_{ij}\}_{\langle ij\rangle\in\tilde{\Lambda}}$, com θ fixo, formam uma álgebra abstrata. Existem várias realizações possiveis desta álgebra em diferentes espaços de Hilbert $\mathcal{H}$, e temos a liberdade de escolha destas representações. Quando Λ é finito, temos um número finito de graus de liberdade e o teorema de Stone-von Neumann diz que todas as representações irredutiveis são unitariamente equivalentes. Em outras palavras, para $|\Lambda| < \infty$, existe um operador unitário U_{θ} que mapeia o "espaço de configuração" $\mathcal{D}(\{E^{0}\})$ em $\mathcal{D}(\{E^{\theta}\})$.

Ocorre que em sistemas com infinitos graus de liberdade, temos infinitas representações irredutíveis [10] unitariamente não equivalentes. Isto significa que quando $\Lambda\to\infty$ o operador U_{θ} não é mais definido, e os diversos espaços $\mathcal{D}(\{E^{\theta}\})$, $\theta\in[0,2\pi]$,

tornam-se irredutiveis uns aos outros. Assim a cada valor de θ teremos uma nova teoria independente, com propriedades físicas particulares.

Este fato é consequência de uma variante do teorema de Haag [11] que diz : em uma teoria invariante por translação, a qual usa a representação de "Fock" para sua álgebra, o estado de nenhuma partícula (o estado fundamental) é o único estado invariante.

Como mostraremos a seguir, os estados Ψ_θ possuem cargas no contorno do sistema Λ. Portanto o teorema de Haag afirma que, apesar de tomarmos o limite termodinâmico, o sistema "lembra" que existiam cargas no seu contorno, e não mais podemos representar os estados $\Psi_\theta \varepsilon \ \mathcal{D}(\{E^\theta\})$, $\theta \neq 0$, pelo espaço de "Fock". Sendo assim, estes estados correspondem a uma outra classe de equivalência, e o parâmetro θ passará a indexar as diversas representações irredutiveis inequivalentes.

Este fato estabelece a estrtura não trivial do vácuo da teoria U(1) de gauge em $\nu=2$, mesmo sem os campos de matéria.

Retornando ao problema inicial sobre a interpretação do parâmetro θ, vamos construir o espaço de trajetória para a função de partição $Z^\Lambda_\theta(\{Q\})$ de uma distribuição de cargas $\{Q\}$ definida por:

$$Z^\Lambda_\theta(\{Q\}) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H^\theta_\Lambda} P_{\{Q\}} \right)$$

$$= \int \prod_{<ij>\varepsilon\tilde{\Lambda}} d\phi_{ij} \, \langle \{\phi_{ij}\} | e^{-\beta H^\theta_\Lambda} P_{\{Q\}} | \{\phi_{ij}\} \rangle \qquad \text{(II.C.4)}$$

A forma do operador de projeção $P_{\{Q\}}$ encontramos em (I.C. 14), que particularizada para o grupo G=U(1), tem a seguinte expressão:

$$P_{\{Q\}} = \int \prod_{j\in\Lambda} d\alpha_j \; \bar{\chi}_{\{Q\}} \; U(\{\alpha_j\}) \qquad \text{(II.C.5)}$$

Onde $\bar{\chi}_{\{Q\}}$ é o carater da representação irredutivel correspondente à configuração de cargas $\{Q\}$, e $U(\{\alpha_i\})$ é o operador unitário definido em (II.A.3).

O Kernel do operador $e^{-\beta H^{\theta}_{\Lambda}} P_{\{Q\}}$ pode ser facilmente calculado (APÊNDICE 2). Assim:

$$\langle\{\phi_{ij}\}| \; e^{-\beta H^{\theta}_{\Lambda}} P_{\{Q\}} |\{\phi_{ij}\}\rangle = \int \prod_{j\in\Lambda} d\alpha_j \qquad \langle\{\phi_{ij}\}| \; e^{-\beta H^{\theta}_{\Lambda}} \; |\{\phi_{ij}-\alpha_i+\alpha_j\}\rangle \bar{\chi}_{\{Q\}} \qquad \text{(II.C.6)}$$

Executando este cálculo, a função de partição Z^{θ}_{Λ}, a menos de constantes não importantes, resulta:

$$Z^{\Lambda}_{\theta} = \sum_{\{n_{ij}\}\in Z^{\Lambda}} \int \prod_{i\in\Lambda} d\alpha_j \; \exp\Big\{ \sum_{j\in\Lambda} \Big[i\theta n_{j,j+1} - \frac{1}{2e^2\beta}(\alpha_{j+1}-\alpha_j+n_{j+1,j})^2 - i\frac{e\theta}{2\pi}(\alpha_{j+1}-\alpha_j) \Big] \Big\} \bar{\chi}_{\{Q\}} \qquad \text{(II.C.7)}$$

O último termo de (II.C.7) pode ser escrito como:

$$\exp\{-i\frac{e\theta}{2\pi} \sum_{j\in\Lambda} (\alpha_{j+1}-\alpha_j)\} = \exp\{-i \frac{e\theta}{2\pi} (\alpha(L) - \alpha(-L))\} \qquad \text{(II.C.8)}$$

Isto é exatamente a representação irredutivel correspondente a uma configuração de uma carga $+\theta e/_{\text{mod } 2\pi}$, no extremo esquerdo do sistema Λ, e $-\theta e/_{\text{mod } 2\pi}$, no outro extremo, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Examinemos agora o problema do confinamento de cargas, quando estas forem introduzidas na teoria, com condições de contorno não triviais θ.

Estaremos interessados no confinamento, não apenas de cargas inteiras, mas também cargas fracionárias. Até aqui nosso espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ consistia de estados com cargas inteiras. Contudo podemos aumentar este espaço permitindo cargas semi-inteiras [29]: introduzimos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_n$, de funções $\Psi_n(\{\phi_{ij}\})$, quadraticamente integráveis em todas as variaveis

ϕ_{ij}, sobre o intervalo $[-n\pi, n\pi]^{|\Lambda|}$, $n \in Z$. Claramente o operador Q_i, com a mesma definição que (II.A.5), tem o seu espectro $\sigma(Q_i) = \frac{m}{n}$; $m,n \in Z$. Obviamente todos os outros operadores relevantes da teoria, tal como o Hamiltoniano H_Λ, podem ser definidos neste espaço H_n ampliado sem nenhuma alteração.

Vamos antes definir uma notação mais adequada para tratar esta questão: seja o valor esperado $<.>_\theta$, induzida pela medida μ_θ originada de (III.C.7), dado por:

$$<\bar{\chi}_{\{Q\}}>_\theta = \frac{Z_\theta^\Lambda(\{Q\})}{Z_\theta^\Lambda(0)} \qquad \text{(II.C.9)}$$

$$d\mu_\theta^\Lambda = \frac{1}{Z_\theta^\Lambda(0)} \prod_{j\in\Lambda} d\alpha_j \exp\{\sum_{j\in\Lambda}\left\{i\theta n_{j+1,j} - \frac{1}{2e^2\beta}(\alpha_{j+1}-\alpha_j+n_{j+1,j})^2 - i\frac{e\theta}{2}(\alpha_{j+1}-\alpha_j)\right\}\} \qquad \text{(II.C.10)}$$

Assim a função de correlação entre duas cargas fracionárias γ de sinais contrários, localizadas nos pontos $\pm \frac{\ell}{2}$ é dada por:

$$\rho_{\theta,\gamma} = < e^{-i\frac{\gamma}{2}(\alpha(\frac{-\ell}{2}) - \alpha(\frac{\ell}{2}))} >_\theta \qquad \text{(II.C.11)}$$

Podemos obter um "uper-bound" para esta expressão através da estimativa do tabuleiro de xadrez [12]. Para um sistema com $|\Lambda| = L$, temos:

$$\rho^L_{\theta,\gamma} \leq < e^{i\gamma(\alpha(\frac{L}{2}) - \alpha(\frac{-L}{2}))} >^N_{\theta,L} = \left\{\frac{Z^L_{\theta+\gamma}(o)}{Z^L_\theta(0)}\right\}^N \quad ; \quad N = \frac{\ell}{L} \qquad \text{(II.C.12)}$$

Assim:

$$\rho^L_{\theta,\gamma} \leq \exp\{\ell\beta\left\{\frac{1}{\beta L}(\ln Z^L_{\theta+\gamma} - \ln Z^L_\theta)\right\}\} \qquad \text{(II.C.13)}$$

$$= \exp\{-\ell\beta\left\{\frac{1}{L}(F^L_{\theta+\gamma}(\beta) - F^L_\theta(\beta))\right\}\} \qquad \text{(II.C.14)}$$

Onde $F^L_\theta(\beta)$ é a energia livre a volume finito definida em (I.C.15'). Assumindo a existência do limite $L\to\infty$, a desigualdade (II.C.14) não se altera, portanto:

$$0 \leq \rho_{\theta,\gamma} \leq \exp\{-\ell\beta(F_{\theta+\gamma}(\beta) - F_{\theta}(\beta))\} \qquad \text{(II.C.15)}$$

A relação entre a energia potencial $V_{\theta,\gamma}(\ell)$ relativa à configuração das cargas γ e a correlação $\rho_{\theta;\gamma}$ é estabelecida via as relações (I.C.15-I.C.17) e (II.C.9):

$$V(\ell) = \lim_{\beta\longrightarrow\infty} \frac{1}{\beta} \ln \rho_{\theta,\gamma} \qquad \text{(II.C.16)}$$

E temos três situações distintas:

i) Se $R_{\theta,\gamma} = F_{\theta+\gamma} - F_{\theta} > 0 \Rightarrow V_{\theta}(\ell) > \ell R_{\theta,\gamma}$, e portanto temos confinamento, o que é equivalente a dizer que a correlação $\rho_{\theta,\gamma}$ entre as cargas tem decaimento exponencial.

ii) Se $R_{\theta,\gamma}=0 \Longrightarrow V_{\theta}(\ell) \leq K < \infty$ independentemente de ℓ, e $k>0$. Isto significa que as cargas localizadas no infinito agem de tal maneira sobre a configuração das cargas $\pm\gamma$, que o efeito entre estas é aniquilado.

iii) Se $R_{\theta,\gamma} < 0 \Longrightarrow V_{\theta}(\ell) \leq \ell R_{\theta,\gamma}$, o que significa que as cargas γ, mesmo tendo sinais opostos, serão repelidas para o infinito.

Estas questões serão retomadas com mais cuidado nos capítulos seguintes, quando tratarmos o gás unidimensional. Vamos aqui esboçar este cálculo usando o método da matriz transferência, dada por:

$$T_{\theta} = e^{-\frac{\beta e^2}{2}\hat{E}_{\theta}} \qquad \text{(II.C.17)}$$

Onde $(\hat{E}_{\theta} f)(u) = uf(u)$, com $f(u) \in \ell^2(\mathbb{Z}+\frac{\theta}{2\pi})$. Então:

$$F_{\theta}(\{0\}) = \lim_{\substack{L\longrightarrow\infty \\ \beta\longrightarrow\infty}} \frac{-1}{\beta L} \ln \mathrm{Tr}(T_{\theta})^{L} = \inf \mathrm{spec}\, e^2 \hat{E}_{\theta}^{\,2} \qquad \text{(II.C.18)}$$

A função $F_\theta(\{0\})$, como esboçada na figura 4, é periódica, continuamente crescente no intervalo $[0,\pi)$, atinge o máximo em π, e se anula nos extremos do intervalo $[0,2\pi]$.

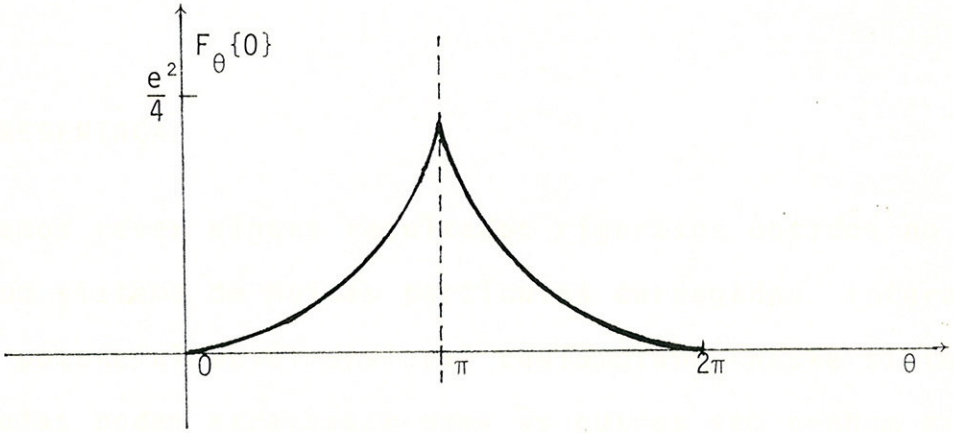

FIGURA 4: Gráfico da energia livre $F_\theta(\{0\})$ da teoria U(1) no setor de carga nula.

Este comportamento explica a fenomenologia i),ii) e iii) de $R_{\theta,\gamma}$ conforme os valores dos parâmetros $\theta \in [0,2\pi]$ e $\gamma=\frac{m}{n}$, $m,n \in Z$.

CAPITULO III

O GAS DE COULOMB UNIDIMENSIONAL

A - APRESENTAÇÃO

Vamos rever alguns resultados rigorosos obtidos no estudo de um sistema de muitas partículas carregadas interagindo via um potencial unidimensional coulombiano. Neste sistema as partículas podem atravessar umas às outras sem nenhum empecilho.

A razão de restringirmos nosso interesse ao gás unidimensional é devido ao fato deste sistema possuir uma família a um parâmetro de estados de equilibrio, fenômeno que vemos estar fortemente relacionado com os vácuos-θ de uma teoria de campo com simetria de gauge. Isto ocorre em uma teoria de gauge abeliana em $\nu=2$ dimensão de espaço-tempo, e em $\nu=4$ com um grupo G não abeliano.

Aizenman e Frȍhlich |[13]| apresentam esta questão em um sentido ilustrativo, isto é, como um simples exemplo da manifestação de muitos estados fundamentais de uma teoria. Porém há um outro aspecto a ser explorado nesta conexão : trata-se do aspecto estrutural e construtivo, o qual nós estamos interessados ao realizarmos o presente trabalho.

Em um trabalho anterior ao acima citado, Aizenman e Martin |[14]| reduzem a questão dos estados de equilibrio do gás unidimensional ao problema da reconstrução do campo elétrico $E(x)$ a partir de suas descontinuidades que são as localizações das cargas. Veremos no próximo capítulo como esta construção pode

ser executada via uma teoria de gauge pura U(1) na rede.

Existem basicamente duas maneiras de tratar o gás de Coulomb: uma consiste na representação da função grande partição como uma média sobre um funcional de funções aleatórias gaussianas. Este método é bastante explorado pelos teóricos de campos, pois esta média funcional nada mais é que o funcional gerador de uma teoria de sine-Gordon. Assim pode-se estabelecer uma correspondência em ambos sentidos, e resultados obtidos de um lado são extendidos ao outro modelo. Existem várias questões em teoria de campo que foram resolvidos por este mapeamento |[15]|.

O interessante nesta representação reside no fato de que a função aleatória $\phi(x)$ obtida a partir do plasma unidimensional, é justamente a mesma função $q(t)$ que exprime o movimento Browniano de uma partícula, portanto $\phi(x)$ é um processo de de Markov. Esta propriedade nos remete à segunda maneira de abordagem do gás, pois o elemento Markoffiano é exatamente o campo elétrico $E(x)$ como função da coordenada espacial |[16]|, o que nos possibilita a construção do plasma no "ensemble" de campo elétrico.

B - ESTRUTURA DOS ESTADOS DE EQUILIBRIO

A energia de interação Coulombiana em uma dimensão para partículas com cargas $\sigma_i = \pm e$ localizadas em $q_i \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$H(q,\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j |q_i - q_j| \qquad \text{(III.B.1)}$$

O campo elétrico que corresponde a este potencial é:

$$E(x;q,\sigma) = \sum_j \sigma_j \, \mathrm{sign}(x-q_j) \; ; \; x \in \mathbb{R} \qquad \text{(III.B.2)}$$

O estado de equilibrio para um sistema de duas componentes é descrito pela distribuição de Gibbs:

$$\frac{1}{\Xi_L} z^N e^{-\beta H_L(\sigma,q)} \frac{dq_1 \ldots dq_N}{N!} \qquad \text{(III.B.3)}$$

Onde devemos somar sobre todos os N e sobre as cargas $\sigma_i = \pm e$. A normalização Ξ_L é a função grande partição:

$$\Xi_L(\beta,z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \sum_{\sigma_i = \pm e} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dq_1 \ldots dq_N e^{-\beta H_L(\sigma,q)} \qquad \text{(III.B.4)}$$

O limite termodinâmico de tal ensemble, com o vínculo de neutralidade $\sum_i \sigma_i = 0$, foi estudado por Edward e Lenard [15], que obtiveram as funções de correlação do sistema.

Porém uma maneira mais natural de abordar este sistema, é descrevê-lo no espaço de fase. O mesmo estado é representado por uma medida $\mu(\omega)$ no espaço Ω de configuração de partículas carregadas, cujos pontos $\omega \in \Omega$ podem ser encaradas como uma classe de equivalência da sequência $\{(\sigma_i, q_i)\}_{i \in Z}$ em relação a reindexação das partículas.

Surgem, neste ensemble, questões interessantes no que diz respeito às condições de equilibrio, e sobre as forças que uma partícula sente em uma dada configuração das cargas. Estas questões são delicadas pois o potencial entre duas cargas cresce linearmente com a distancia e os métodos usuais em mecânica estatística falham. Estas questões serão resolvidas através do mapeamento quase local do espaço de configurações das cargas para o espaço de configuração de campo elétrico.

Em um sistema finito, o campo elétrico é bem definido, e constante por partes. Suas descontinuidades são saltos de duas unidades de carga e, que ali se localiza. Assim, uma

vez especificado o campo elétrico, a configuração das cargas está univocamente determinada. Porém a relação inversa não é única: podemos ter um campo D constante de fundo junto ao campo E(x) e teríamos a mesma configuração, a menos de cargas nas extremidades. Como o limite termodinâmico não deve depender das condições de contorno, devemos esperar que para configurações típicas (excluindo um conjunto de medida nula) a configuração do campo é univocamente determinada pela configuração de cargas.

Este é o resultado que Lenard |[15]| obteve para um plasma neutro explorando a propriedade Markoffiana do campo elétrico E(x). Intuitivamente não é dificil compreender que E(x) é um processo de Markov, pois a única informação comunicada às partículas em uma região x>X das partículas em x<X é o valor de E(X) no ponto de divisão. Assim a propriedade estatística de E(x) para x>X depende unicamente de E(X) e não da configuração nos pontos x'<X. Isto precisamente caracteriza a propriedade de Markov.

Podemos portanto formular o sistema no ensemble de campo usando a identidade eletrostática para a energia definida em (III.B.1) . Assim para um sistema finito:

$$H_L(\sigma,q) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\ E(x)^2 \qquad \text{(III.B.5)}$$

O valor esperado de funções f(E) será obtido por:

$$\mu_0(f) = \langle f\rangle_0 = \frac{1}{\Xi_0^L}\int_{E(\frac{L}{2})=E(\frac{-L}{2})=0} \nu(dE)\ \exp\{\frac{-\beta}{4}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\ E(x)^2\}\ f(E) \qquad \text{(III.B.6)}$$

$$\Xi_0^L(\beta) = \int_{E(\frac{L}{2})=E(\frac{-L}{2})=0} \nu(dE)\ e^{-\beta H_L(\sigma,q)} \qquad \text{(III.B.7)}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1349
INSTITUTO DE FÍSICA

Onde $\nu(dE)$ é a medida invariante por deslocamentos no espaço de caminhos de um processo aleatório sobre $2e\mathbb{Z}$, o qual é gerado por $-z\Delta$, o laplaciano discreto definido por:

$$(\Delta f)(u) = f(u+2e) + f(u-2e) - 2f(u) \quad , \forall\, f(u) \in \ell^2(2e\mathbb{Z}) \qquad \text{(III.B.8)}$$

E $\nu(\{E(0)=2ek\}=1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$, z é a atividade da partícula.

Demonstra-se [14,16] que $\nu(dE)$ reproduz corretamente a medida a priori de distribuição das cargas, isto é, a medida ν de caminhos cujas descontinuidades, em $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, ocorrem em dq_i com $\sigma_i = \pm 2e$, assumindo $q_1 \leq q_2 \leq \ldots$ é:

$$\nu = 2^{-2zL} \prod_i (z\, dq_i) \qquad \text{(III.B.9)}$$

A neutralidade do sistema é expressa pela condição sobre os campos elétricos nos extremos, $E(\frac{L}{2}) = E(-\frac{L}{2})$.

A existência do limite termodinâmico para os estados de E(.) remete à questão de reconstrução de E(.) a partir de suas descontinuidades , pois no espaço de fase das partículas, E(.) não faz nenhum sentido a priori, devido a não unicidade do mapeamento $\{\sigma_i, q_i\} \longrightarrow \{E(x)\}$. Apesar deste problema, é possivel reconstruir os campos E(x) para configurações típicas, isto é, dentre todas as configurações de campos que correspondem a uma dada configuração de cargas, apenas uma delas tem medida ν_0 não nula. Sendo assim, seja $\nu_0 = \lim_{L\to\infty} \nu_0^L$, dizemos que uma propriedade vale quase sempre (q.s), se o conjunto de pontos $\omega \in \Omega$ a qual falha tem medida nula.

Essencialmente esta construção baseia-se no teorema Ergódico, que para um sistema de Markov pode ser aplicado. A aplicação do teorema é:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_x^{x+k} dy\, E(y) = \nu_0(E(0) \qquad \text{(III.B.10)}$$

Dado um intervalo $[x,y]$, $x<y$, que não tenha cargas em seus extremos, o campo elétrico nestes pontos estão relacionados por: $E(y)=E(x)+2 \sum_{q_i \in [x,y]} \sigma_i$.

Aplicando o teorema Ergódico, e usando a simetria por conjugação de carga chegamos à conclusão que $\mu_0(E(0))=0$ q.s. e E(x) é uma função local das distribuições de cargas dada por:

$$E(x) = - \lim_{\kappa \longrightarrow \infty} 2 \sum_{q_i \varepsilon [x, x+\kappa]} \sigma_i \left(1 - \frac{q_i - x}{\kappa}\right) , \text{ q.s.} \quad \text{(III.B.11)}$$

Vamos agora examinar a existência de outros estados de equilibrio, e novamente admitiremos que o limite termodinâmico possa ser realizado. A existência deste limite é obtido segundo os métodos usuais da aplicação da fórmula de Feynman-Kac. Recomendamos os textos já citados sobre o gás de Coulomb como consulta para este assunto.

A existência de outros estados de equilibrio já estava implícita na construção dos campos E(x). Naquela construção usamos que $\mu_0(.)$ era invariante por $\{\sigma_i\} \to \{-\sigma_i\}$, que é uma consequência das condições de contorno adotadas $E(\frac{L}{2})=E(-\frac{L}{2})=0$ e portanto E(x) ε 2e $\mathbb{Z}$. Assim definimos os estados $<.>_\theta$:

$$\mu_\theta^L(f) = <f>_\theta^L = \frac{1}{\Xi_\theta^L} \int_{E(\frac{L}{2})=E(\frac{-L}{2})=D} \nu_\theta(dE) \exp\{\frac{-\beta}{4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, E(x)^2\} f(E) \quad \text{(III.B.12)}$$

$$\Xi_\theta^L(\beta) = \int_{E(\frac{L}{2})=E(\frac{-L}{2})=D} \nu_\theta(dE) \quad e^{-\beta H_L(\sigma, q)} \quad \text{(III.B.12')}$$

Onde $\theta = D/_{\text{mod } 2e}$ e $\nu_\theta(dE) = \nu(d(E-\theta))$ é a medida sobre as trajetórias que sofreram um deslocamento , isto é, os valores do campo E(x) ε 2e $\mathbb{Z}+\theta$. Claramente estes estados não são invariantes por conjugação de carga, e portanto $\mu_\theta(E(0))\neq 0$ q.s.. A reconstrução dos campos segue as mesmas linhas desenvolvidas em (III.B.10,11) , e o campo pode ser reconstruído:

$$E(x) = - \lim_{\kappa \longrightarrow \infty} 2 \sum_{q_i \varepsilon [x, x+\kappa]} \sigma_i \left(1 - \frac{q_i - x}{\kappa}\right) + <E(0)>_\theta , \text{q.s.} \quad \text{(III.B.13)}$$

A demonstração que $\mu_\theta(.)=\lim_{L\to\infty}\mu_\theta^L(.)$ somente depende de $\theta=D/_{\text{mod } 2e}$ é obtida pela aplicação da fórmula de Feynman-Kac. Porém, há outras consequências: dois estados μ_{θ_1} e μ_{θ_2}, $\theta_1 \neq \theta_2 \in [0,2e]$, são mutuamente singulares, o que demonstramos a seguir.

Exponenciando (III.B.14) e tomando $x\to 0$ e $k\to\infty$, temos:

$$\lim_{K\longrightarrow\infty} \exp\{2\pi i \sum_{q_i\in[0,K]} (\frac{q_i}{K})(\frac{\sigma_i}{e})\} = \exp\{2\pi i(\frac{\theta - \mu_\theta(E(0))}{2e})\} \text{ ,q.s.} \qquad \text{(III.B.14)}$$

Pode ser demonstrado [14] que $g(\theta)=\theta-\mu_\theta(E(0))$ é monotonamente crescente em $\theta \in [0,2e)$, com $g(0)=0$ e $g(2e)=2e$, pois $\langle E(0)\rangle_0=\langle E(0)\rangle_{2e}=0$. Assim $g(\theta)$ define uma monótona bijeção $g:[0,2e]\longrightarrow[0,2e]$. Este fato mais (III.B.13) é suficiente para provar que cada θ-estados tem suporte sobre um conjunto de configurações que possui medida nula com respeito a outro θ'-estado. Isto quer dizer que as distribuições de cargas em um sistema são sensiveis ao campo externo D constante, no limite termodinâmico; o que é surpreendente, uma vez que o limite não deveria depender das condições de contorno.

Como no limite termodinâmico o estado μ_θ depende apenas do valor $\theta=D/_{\text{mod } 2e}$, e como um campo constante acarreta unicamente uma condição sobre as cargas nos extremos do sistema, isto significa que o sistema "lembra" que existiam cargas $\sigma(-\frac{L}{2})=+\frac{\theta}{2}$ e $\sigma(\frac{L}{2})=-\frac{\theta}{2}$ mesmo depois de tomarmos $L\to\infty$.

Finalmente vamos discutir brevemente a questão da energia livre. Esta pode ser obtida diretamente de (III.B.12) ou por intermédio da fórmula de Feynman-Kac, onde a função de partição pode ser escrita como o kernel de um operador sobre funções em $\ell^2(\theta+2e\mathbb{Z})$. Então:

$$\Xi^L(\beta,z,D) = \exp\{-2L(z\Delta + \frac{1}{4}\beta\hat{E}^2)\}(\frac{-L}{2},\frac{L}{2}) \qquad \text{(III.B.15)}$$

Onde Δ é dado por (III.B.8) e $\hat{E}$ é o operador multiplicativo:

$$\hat{E}f(u) = uf(u) \qquad ; \forall\ f(u) \in \ell^2(\theta+2e\mathbb{Z}) \qquad \text{(III.B.16)}$$

A energia livre é obtida por:

$$P_\theta(\beta,z) = \lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{-1}{L} \ln \Xi^L(\beta,z,D) = \inf \operatorname{spec}(-z\Delta+\frac{1}{4}\beta\hat{E}) \qquad \text{(III.B.17)}$$

C -REPRESENTAÇÃO DE SINE-GORDON

A essência desta representação consiste no fato de podermos expressar a medida de Gibbs, restrita à condição de neutralidade, como uma média de um processo gaussiano.

Definimos a expectação $<.>_C$ sobre um campo gaussiano aleatório $\phi(x)$ cuja covariancia é C, por:

$$<.>_C = \lim_{\kappa\longrightarrow 0} <.>_{C_\kappa} \qquad \text{(III.C.1)}$$

Onde $C_\kappa=(\beta(-\Delta)+\kappa^2)^{-1}$ e Δ é o laplaciano em uma dimensão definido sobre funções $f(x) \in L^2[-\infty,\infty]$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja $\rho(x) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \delta(x-q_i)$ a densidade de cargas de um sistema com N partículas com cargas $\sigma_i=\pm e$ localizada em $q_i \in \mathbb{R}$. Então:

$$<\exp\{i \int dx\ \phi(x)\ \rho(x)\}> = e^{-\beta H_N(\sigma,q)}\ \delta_{\sum_{i=i}^{N}\sigma_i=0} \qquad \text{(III.C.2)}$$

Isto é, a densidade $\rho(x)$ é a variavel conjugada ao campo $\phi(x)$ e a transformada de Fourier da medida induzida pela covariancia C é a medida de Gibbs, restrita a condição de

neutralidade, com $H(\sigma,q)$ dada por:(III.B.1).

A equação (III.C.2) leva à seguinte expressão para a função de partição no ensemble canônico:

$$\Xi_L(\beta,z) = \langle \exp\{2z \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(e\phi(x))\}\rangle_C \qquad \text{(III.C.3)}$$

O limite termodinâmico para os estados desta teoria,bem como para as funções de correlação é conhecido [15], portanto vamos assumir a sua existência. Então os estados para os campos gaussianos $\phi(.)$ é obtido por:

$$\mu_0 = \langle --- \rangle_0 = \lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{1}{\Xi_L} \langle -- \exp\{2z \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(e\phi(x))\}\rangle_C \qquad \text{(III.C.4)}$$

Formalmente o estado dos campos $\phi(x)$ podem ser representados pela medida de probabilidade de uma teoria de campo:

$$\frac{1}{\text{Norm}} \prod_x d\phi(x) \exp\{-\int dx \, |\tfrac{1}{2\beta}|\nabla\phi|^2 - 2z\cos(e\phi(x))\} \qquad \text{(III.C.5)}$$

É um fato conhecido dos teóricos de campos, que a teoria acima possui soluções clássicas, que minimizam a ação obtida de (III.C.5), com condições de contorno não triviais $\phi(-\infty)=0$ e $\phi(\infty)=\frac{2\pi}{e}$ (instantons). Devemos esperar que o campo $\phi(.)$ flutue em torno destas soluções clássicas nos estados $\langle . \rangle_0$, semelhantes a um gás de instantons e anti-instantons.

Paralelamente ao que foi discutido no item anterior, podemos ter outros estados da teoria correspondente a cargas $\pm\frac{\theta}{2}$ nos extremos:

$$\mu_\theta^L(f) = \langle f(\phi)\rangle_\theta^L = \langle e^{i\frac{\theta}{2}(\phi(\frac{L}{2}) - \phi(\frac{-L}{2}))} \, f(\phi)\rangle_0^L = \langle e^{i\frac{\theta}{2}\int dx \frac{d}{dx}\phi(x)} \, f(\phi)\rangle_0^L \qquad \text{(III.C.6)}$$

Isto significa que estes estados θ correspondem à introdução do termo $i\frac{\theta}{2}\frac{d}{dx}\phi(x)$ na ação formal (III.C.5), o que corresponde a associarmos uma fugacidade complexa aos instan

tons e sua conjugada aos anti-instantons.

Encerraremos este capítulo com uma breve discussão sobre a questão do confinamento de cargas fracionárias, que acreditamos estar intimamente relacionada com o comportamento do loop de Wilson em teorias de gauge.

Consideremos a distribuição de equilibrio para uma situação onde fixamos uma carga fracionária α na origem, e verificamos o que ocorre quando uma carga $-\alpha$ é inserida em uma posição $x>0$ do sistema no estado . A situação é descrita pela seguinte função de correlação:

$$\rho_{\alpha;\theta}(x) = \langle e^{i\alpha\phi(0)}\ e^{-i\alpha\phi(x)} \rangle_{\theta} \qquad \text{(III.C.7)}$$

Há duas possibilidades qualitativamente diferentes:

a) Se $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_{\alpha;\theta}(x)=\infty$, então a carga $-\alpha$ é arremessada para o limite $x\to\infty$ do sistema.

b) Se $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_{\alpha;\theta}(x)<\infty$, então a carga tem uma distribuição de probabilidade sobre a linha cuja densidade é dada por $\rho_{\alpha,\theta}(x)/\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \rho_{\alpha,\theta}(y)$. Como esta função deve ter um comportamento assintótico tal que a integral convirja, concluimos que a carga $-\alpha$ tem uma probabilidade nula de ser encontrada muito distante da origem e portanto permanece confinada.

É possivel demonstrar [13] o seguinte comportamento da função de correlação:

$$\rho_{\alpha;\theta}(x) \leq \exp\{-|x| \left[P_{\theta+2\alpha}(\beta,z) - P_{\theta}(\beta,z) \right]\} \quad ; \quad x > 0 \qquad \text{(III.C.8)}$$

Onde P_{θ} é a energia livre que pode ser obtida, por exemplo, como (III.B.17). A relação (III.C.8) é obtida pelo método da matriz tranferência, mais a estimativa do tabuleiro de

xadrez. No capítulo a seguir, trataremos com detalhes esta estimativa para os gases construidos a partir da teoria U(1).

O comportamento da energia livre P_θ como função de θ é bem conhecido [17] e tem um mínimo para $\theta=0$, é estritamente crescente em $\theta \in [0,e)$, e simétrica em $\theta=e$. Propriedades muito semelhantes às obtidas no capítulo anterior quando analizamos o confinamento de cargas externas na teoria de gauge U(1).

Estas propriedades de P_θ, combinadas a estimativa(III.C.8), e a interpretação dos itens a) e b) implicam em confinamento de cargas fracionárias $\alpha \in [0,e]$ para $\theta=0$, e expulsão destas para o infinito em $\theta=e$. Para outros valores de θ pode ocorrer tanto uma situação como outra, dependendo dos parâmetros θ e α.

CAPITULO IV

OS GASES DA TEORIA DE GAUGE U(1)

A - INTRODUÇÃO

Neste capítulo procuramos, a partir da teoria U(1) de gauge pura, construir gases clássicos, isto é, gases de partículas distinguiveis. Neste processo podemos obter vários tipos de gases, isto porque a teoria está formulada em uma rede e as cargas devem apenas instalar-se nos seus sítios, fato que enriquece a estatísica. Veremos a seguir que estes gases devem convergir, no limite do continuo, para o standard do capítulo anterior.

Um gás de partículas usualmente é obtido permitindo que o seu número flutue, isto é, acoplando ao sistema um reservatório de partículas e permitindo que estas atravessem a interface que separa o sistema Λ do reservatório. Descrevemos este processo via o ensemble grande canônico, que para um sistema neutro de duas componentes é:

$$\Xi^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2} Z_{\Lambda}^{n}(\beta) \qquad \text{(IV.A.1)}$$

Onde z é a atividade por partícula, e Z_{Λ}^{n} é o estado de Gibbs de n partículas de cada tipo. Como este estado Z_{Λ}^{n} depende exclusivamente das cargas que efetivamente se encontram no sistema, e não do número de partículas*, de alguma maneira deve ser possivel expressar a função de partição Ξ^{Λ} como função apenas das cargas do sistema. Sendo assim:

* Não há nenhum empecilho, no caso unidimensional, de várias partículas se encontrarem em um mesmo sítio da rede.

$$\Xi^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{\{Q\}} f(\{Q\},z)\ Z^{\Lambda}_{\{Q\}}(\beta) \qquad (IV.A.2)$$

Onde $f(\{Q\},z)$ é uma função que depende da estatística da partícula a qual se pretende construir o gás. A função de partição $Z^{\Lambda}_{\{Q\}}(\beta)$ foi definida em (II.C.4).

No que segue obteremos fórmulas explicitas de $f(\{Q\},z)$.

B - ROTOR PLANO UNIDIMENSIONAL - GÁS DE VILLAIN

Vamos construir, à guisa de ilustração, o gás de cargas mais simples a partir da teoria U(1), e desta maneira verificar sua equivalência com o construído através do modelo xy (rotor plano), unidimensional, na aproximação de Villain.

Este gás é obtido pela escolha de $f(\{Q\},z)=1$, o que quer dizer que todas as distribuições de cargas no sistema são igualmente provaveis, "à priori".

Seguiremos o caminho inverso; partindo do rotor plano, mostraremos a equivalência com a teoria U(1) no setor de carga nula, e então somaremos sobre todos os demais setores.

O modelo consiste de um conjunto de spins $\{\vec{s}_j\}$, em cada ponto j da rede unidimensional Λ, variando no círculo unitário. O acoplamento é sobre vizinhos mais próximos. Assim o Hamiltoniano deste sistema é dado por:

$$H_{\Lambda} = J \sum_{<ij>\varepsilon\tilde{\Lambda}} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad ; \quad \phi_i \ \varepsilon\ [\overline{0,2\pi}] \qquad (IV.B.1)$$

Obtemos o modelo na aproximação de Villain |[18]| com a seguinte"identificação":

$$e^{J\cos(\phi_i-\phi_j)} \simeq \sum_{n_{ij}\varepsilon Z} e^{-\gamma(\phi_i-\phi_j-2\pi n_{ij})^2} \qquad (IV.B.2)\ ,$$

Onde $\gamma=\gamma(J)$ é obtido comparando os primeiros termos da expansão de Fourier das duas expressões em (IV.B.2). Esta aproximação transforma o modelo original em uma gaussiana, que é um modelo integravel, porém mantém seu carater periódico . As variaveis n_{ij} vivem na rede dual $\tilde{\Lambda}$, formada pelos seus elos.

A função de partição é dada por:

$$Z_{VILL}(\gamma) = \sum_{\{n_{ij}\}\in Z^{|\Lambda|}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i\in\Lambda} d\phi_i \exp\{-\gamma \sum_{<ij>\in\Lambda} (\phi_i-\phi_j-2\pi n_{ij})^2\} \quad (IV.B.3)$$

A exponencial desta expressão pode ser manipulada pela transformada de Fourier; tomando $\xi_{ij}=(\phi_i-\phi_j)$ e abandonando a indexação para não interferir nas contas, vem:

$$g(\xi) = \sum_{n\in Z} e^{-\gamma(\xi-2\pi n)^2} \quad (IV.B.4)$$

$$\tilde{g}(m) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, e^{-i\xi m}\, g(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi m} \sum_{n\in Z} e^{-\gamma(\xi-2\pi n)^2} d\xi \quad (IV.B.4')$$

Fazendo a transformação de variaveis $\tau=\xi-2\pi n$ e observando que $\sum_{n\in Z} \int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau$ temos que:

$$\tilde{g}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\xi m}\, e^{-\gamma\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\, e^{\frac{-m^2}{4\gamma}} \quad (IV.B.5)$$

Desfazendo a transformação de Fourier e juntando estes resultados, a função de partição pode ser escrita, desprezando fatores constantes:

$$Z_{VILL}(\gamma) = \sum_{\{m_{ij}\}\in Z^{|\Lambda|}} \int \prod_{i\in\Lambda} d\phi_i \exp\{i \sum_{<ij>\in\Lambda} m_{ij}(\phi_i-\phi_j) - \frac{1}{4\gamma} \sum_{<ij>} m_{ij}^2\} \quad (IV.B.6)$$

Adotando condições de contorno periódicas obtemos a seguinte equação cohomológica (Teorema de Stokes):

$$\sum_{<ij>\in\tilde{\Lambda}} m_{ij}(\phi_i - \phi_j) = \sum_{j\in\Lambda} \phi_j(m_{j+1,j} - m_{j,j-1}) \quad ; \; m_{ij} = -m_{ji} \quad (IV.B.7)$$

O que nos possibilita executar as integrações sobre as variaveis ϕ_i, $i \in \Lambda$, resultando:

$$Z_{VILL}(\gamma) = \sum_{\{m_{ij}\}\in Z^{|\tilde{\Lambda}|}} \exp\{-\tfrac{1}{4\gamma} \sum_{<ij>\in\tilde{\Lambda}} m_{ij}^2\} \prod_{<ij>} \delta_{\Delta m_{ij},0} \qquad (IV.B.8)$$

Onde $\delta_{\Delta m_{ij},0}$ é o delta de Kronecker e significa que as variaveis de elos m_{ij}, devem ser as mesmas para todos os elos da rede Λ (efeito coletivo). Observamos também que a expressão (IV.B.8) é exatamente a função de partição $Z(\{Q\})$ definida em (II.C.4) com $\theta=0$, na representação dos campos elétricos e no setor invariante de gauge. Temos então a seguinte identificação:

$$m_{ij} = E_{ij} \quad ; \quad \frac{1}{2\gamma} = \beta e^2 \quad ; \quad <ij> \in \tilde{\Lambda} \qquad (IV.B.9)$$

Assim vemos que no setor de carga nula o modelo U(1) é o dual do rotor plano na aproximação de Villain.

Podemos agora construir o gás deste modelo somando sobre todos os setores de cargas com o mesmo peso, isto é:

$$\Xi^{\Lambda}_{VILL}(\beta) = \sum_{\{Q_j\}} \sum_{\{E_{ij}\}} \exp\{\frac{-\beta e^2}{2} \sum_{<ij>\in\tilde{\Lambda}} E_{ij}^2\} \prod_{j\in\Lambda} \delta_{(\Delta E)_j, Q_j} \qquad (IV.B.10)$$

$$= \prod_{<ij>} \sum_{\{E_{ij}\}\in Z} \exp\{-\frac{\beta e^2}{2} E_{ij}^2\} \qquad (IV.B.10')$$

C - GÁS STANDARD

Vamos agora deduzir a expressão (IV.A.2) partindo do gás de partículas standard formulado na rede. Isto significa que vamos permitir que qualquer quantidade de partículas possa ser inserida em cada ponto $i \in \Lambda$. A cada partícula, independente de sua carga, associa-se uma atividade z, e uma carga $\sigma_i = \pm e$.

A função grande canônica de um sistema de duas componentes, neutro, é dada por:

$$\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{n=0} \frac{z^{2n}}{(n!)^2} \sum_{\{x_i\}\in\Lambda^n} \sum_{\{y_i\}\in\Lambda^n} e^{-\beta H_{\Lambda}(x,y,\sigma)} \qquad \text{(IV.C.1)}$$

A notação utilizada é a seguinte: o índice i se refere à i-ésima partícula que pode estar localizada em qualquer ponto $x \in \Lambda$, se tiver carga $\sigma_i = e$ positiva, ou então localizada em $y_i \in \Lambda$, se sua carga $\sigma_i = -e$ for negativa. A energia do sistema $H_{\Lambda}(x,y,\sigma)$ é dada pela interação coulombiana entre as partículas que, devido o fato do gás ser construido via a teoria de gauge (vide observação no final do item D) é dada por:

$$H_{\Lambda}(x,y,\sigma) = \frac{e^2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \{|x_i - x_j| + |y_i - y_j| - |x_i - y_j|\} \qquad \text{(IV.C.2)}$$

A energia $H_{\Lambda}(x,y,\sigma)$ depende apenas das cargas que efetivamente se encontram em cada sitio $x \in \Lambda$, isto é, a energia H_{Λ} é unicamente função da diferença entre o número de partículas positivas, $n_+(x)$, e o número de partículas negativas, $n_-(x)$, em cada sitio $x \in \Lambda$. Assim podemos reescrever a expressão (IV.C.1) da seguinte maneira:

$$\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{\substack{\{n_+(x)\}\in\mathbb{N}^{|\Lambda|} \\ \sum_x n_+(x) = \sum_x n_-(x)}} \sum_{\{n_-(x)\}\in\mathbb{N}^{|\Lambda|}} \frac{z^{\sum_x (n_+ + n_-)}}{(\sum_x n_+)!(\sum_x n_-)!} e^{-\beta H_{\Lambda}(\{n_+ - n_-\})} \sum_{C:\left[\begin{smallmatrix}\{n_+(C)\}=\{n_+\} \\ \{n_-(C)\}=\{n_-\}\end{smallmatrix}\right]} \qquad \text{(IV.C.3)}$$

A última somatória da expressão (IV.C.3) é um número # resultante de todas as configurações de partículas de cada tipo que resultam numa configuração dada $\{n_+(x)\}$ de partículas positivas e $\{n_-(x)\}$ de partículas negativas. Esta multiplicidade surge do fato de que na expressão (IV.C.1) todas as partículas percorriam todos os sitios da rede, assim devemos permutar todas as partículas $\sum_{x\in\Lambda} n_{\pm}(x) = N$ de cada tipo, e descontar as permutações destas que se encontram em cada sitio. Isto é:

$$\# = \frac{(\sum_x n_+(x))!\ (\sum_x n_-(x))!}{\prod_x n_+(x)!\ \prod_x n_+(x)!} \qquad \text{(IV.C.4)}$$

De (IV.C.3) e (IV.C.4) resulta:

$$\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{\{n_+(x)\}} \sum_{\{n_-(x)\}} \frac{z^{\sum_x (n_+ + n_-)}}{\prod_x n_+(x)!\ \prod_x n_-(x)!}\, e^{-\beta H_{\Lambda}(\{n_+ - n_-\})} \qquad \text{(IV.C.5)}$$

$$\sum_x n_+(x) = \sum_x n_-(x)$$

Podemos dar o último passo, e transformar a expressão (IV.C.5) em uma soma sobre as configurações de cargas $Q(x) = n_+(x) - n_-(x)$ para cada $x\in\Lambda$. Realizando esta mudança de variavel, e chamando $n_-(x)=\ell(x)$, resulta na seguinte expressão a função $\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z)$:

$$\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z) = \sum_{\{Q(x)\}\in\mathbb{Z}^{|\Lambda|}} \sum_{\ell(x)\in\mathbb{N}^{|\Lambda|}} \prod_{x\in\Lambda} \frac{z^{2\ell(x)+|Q(x)|}}{\ell(x)!(\ell(x)+|Q(x)|)!}\, e^{-\beta H_{\Lambda}(\{Q\})} \qquad \text{(IV.C.6)}$$

$$\sum_x Q(x) = 0$$

E finalmente chegamos na expressão desejada (IV.A.2), onde o fator de Gibbs é idenficado com a função de partição $Z^{\Lambda}(\{Q\})$ dada por (II.C.4), e a distribuição de cargas "à priori" dada por:

$$f(z,\{Q\}) = \prod_{x\in\Lambda} \sum_{Q(x)\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell(x)\in\mathbb{N}} \frac{z^{|Q(x)|+2\ell(x)}}{(|Q(x)|+2\ell(x))!\ell(x)!} = \prod_{x\in\Lambda} I_{Q(x)}(2z) \qquad \text{(IV.C.7)}$$

Com $I_Q(2z)$ a Q-ésima função de Bessel de argumento complexo. Podemos tomar a transformada de Fourier da distribuição $f(z,Q(x))$ dada por:

$$\tilde{f}(\alpha(x)) = e^{2z\cos\alpha(x)} \quad ; \quad \alpha(x) \in [-\pi,\pi] \qquad \text{(IV.C.8)}$$

Então a função grande canônica na representação de sine-Gordon pode ser escrita em completa analogia a (III.C.3), (não esquecendo que aqui a teoria está formulada na rede):

$$\Xi_S^{\Lambda}(\beta,z) = \left\langle \prod_{x\in\Lambda} e^{2z\cos\alpha(x)} \right\rangle_0 \qquad \text{(IV.C.9)}$$

Com o valor esperado definido em (II.C.9).

Outra maneira de expressarmos Ξ_s, mais adequada ao tratamento da matriz transferência, consiste na utilização do ensemble de campo elétrico:

$$\Xi_S^{\Lambda}(z,\beta) = \prod_{<ij>\varepsilon\tilde{\Lambda}} \sum_{E_{ij}\varepsilon Z} e^{-\frac{\beta e^2}{2}E_{ij}^2} I_{\Delta E_{ij}}(z) \qquad \text{(IV.C.10)}$$

Onde ΔE_{ij} é a diferença entre variaveis de campos em elos vizinhos.

D - GÁS DE CAROÇO DURO

Apresentamos um outro membro da família dos gases construidos a partir da teoria de gauge U(1). Este se distingue dos demais introduzidos anteriormente pela sua estatística : permitiremos que uma única partícula, independente de sua carga, possa ocupar um sítio da rede Λ. Isto significa que uma partícula sentirá um potencial infinito de repulsão ao tentar se aproximar de uma outra já instalada no sistema. Como vimos, duas partículas interagindo via potencial Coulombiano, em uma dimensão, não se afetarão se estiverem encavaladas em um mesmo ponto. Assim esta estatística consistirá de uma deformação do potencial, equivalente a tratar as partículas não como pontuais, mas como segmentos rígidos de comprimento menor que o espaçamento da rede.

Poderíamos seguir o mesmo desenvolvimento do item anterior, e deduzir o tipo de função $f(z,|Q|)$ que estaria associado a este gás. Porém o caminho mais natural é partir diretamente da teoria U(1) como fizemos para o gás de Villain.

Vamos associar uma atividade z a cada partícula introdu

zida no sistema, independente de sua carga. Assim a função de partição Ξ_{CD}, em analogia a (IV.B.10), é dada por:

$$\Xi^{\Lambda}_{CD}(\beta,z) = \sum_{\{E_{ij}\}\in Z^{\Lambda}} e^{\frac{-\beta e^2}{2}\sum_{<ij>} E_{ij}^2} \prod_{<ij>\in\Lambda} (\delta_{\Delta E_{ij},0} + \frac{z}{2}(\delta_{\Delta E_{ij},1} + \delta_{\Delta E_{ij},-1})) \qquad (IV.D.1)$$

Como o salto do campo elétrico $(\Delta E)_j = E_{j+1,j} - E_{j,j+1}$, pela lei de Gauss, é o valor da carga Q_j no sítio $j \in \Lambda$, a função de distribuição das cargas a priori é dada por:

$$f(z,\{Q\}) = \prod_{j\in\Lambda} \left\{ \delta_{Q_j,0} + \frac{z}{2}(\delta_{Q_j,1} + \delta_{Q_j,-1}) \right\} \qquad (IV.D.2)$$

Cuja transformada de Fourier é:

$$\tilde{f}(\alpha(x)) = 1 + z \cos \alpha(x) \qquad (IV.D.3)$$

Importante frizar neste ponto que as expressões de $\tilde{f}(\alpha(x))$ obtidas em (IV.C.8) e (IV.D.3) estão em total concordância com as obtidas por Frȍhlich e Spencer [19]. Contudo devemos enfatizar algumas diferenças de abordagem. Neste trabalho, formula-se de maneira geral, o gás de Coulomb numa rede $\Lambda \subset Z^{\nu-1}$, porém vamos restringir ao caso de $\nu=2$ para efeito de comparação. Em analogia ao caso do continuo, (Capítulo III), a interação entre as partículas é dada pela função de Green V(i-j) da equação de Laplace, com o Laplaciano, Δ, de diferença finita, definido por:

$$\Delta f_i = f_{i+1} + f_{i-i} - 2f_i \quad ; \quad i \in \Lambda \qquad (IV.D.4)$$

A energia potencial de uma configuração $\{Q\}$ neste sistema é dada por:

$$E(\{Q\}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_i \, V(i-j) \, Q_j = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{Q}, \Delta^{-1} \underset{\sim}{Q}) \quad ; \; i,j \in \Lambda \; ; Q_i \in Z \qquad (IV.D.5)$$

Podemos então construir o estado de equilibrio de uma configuração {Q} da mesma maneira que no continuo (III.B.3):

$$\frac{1}{Z_{\Lambda}(\{Q\})}\, e^{-\beta E(\{Q\})}\, d\lambda(\{Q\}) \qquad \text{(IV.D.6)}$$

Onde, agora, a medida "à priori" da distribuição de partículas, $d\lambda(\{Q\})$, como vimos neste capítulo, admite várias expressões, conforme a estatística das partículas constituintes.

Este sistema admite a representação de sine-Gordon, isto é, podemos definir um campo gaussiano aleatório $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que o estado de equilibrio (IV.D.6) pode ser escrito como o valor esperado sobre funções $\hat{\lambda}(\phi_j)$, $j \in \Lambda$, cuja covariança é dada por $V(i-j) = \Delta^{-1}(i-j)$, onde:

$$\hat{\lambda}(\{\phi\}) = \int d\lambda(\{Q\})\, e^{i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{\phi})} \qquad \text{(IV.D.7)}$$

$$e^{-\beta E(\{Q\})} = \int d\mu_V(\{\phi\})\, e^{-i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{\phi})} \qquad \text{(IV.D.8)}$$

Assim o campo ϕ_j é o conjugado às variaveis Q_j, no sentido da transformada de Fourier.

Na construção realizada neste trabalho, temos o análogo a esta transformação. O estado de equilibrio de uma dada configuração {Q} é construido a partir da teoria U(1) (II.C.4), que induz uma medida $d\mu^{\Lambda}_{\theta}$ (II.C.9). Esta medida é essencialmente gaussiana, porém periodizada, e já traz embuida as condições de contorno θ, produzidas pela ambiguidade de quantização. Também temos a relação análoga à (IV.D.8):

$$Z(\{Q\}) = e^{-\beta H_{\Lambda}(\{Q\})} = \int d\mu^{\Lambda}_{0}\, e^{-i(\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{\alpha})} \qquad \text{(IV.D.9)}$$

Contudo a expressão para energia $H(\{Q\})$ difere daquela em (IV.D.5), e é dada pela função de Green do Laplaciano ∂^2 em $\mathbb{R}$. Isto pelo fato de que o potencial entre cargas, na teoria de gauge U(1), (com apenas a parte elétrica), é linear, independente da dimensão.

E - O MÉTODO DA MATRIZ TRANFERÊNCIA

Vamos agora empregar o método da matriz transferência para os gases definidos nos itens anteriores, a fim de obtermos a termodinâmica dos modelos. Iniciaremos com o exemplo trivial do gás de Villain, onde a função Ξ_{VILL} é completamente desacoplada.

Seja Λ um sistema finito de comprimento $|\Lambda| = L$. Os auto-valores de operador de campo elétrico $\hat{E}$, para cada ligação $\ell \in \tilde{\Lambda}$, serão denotados por $m(\ell)$. O operador $\hat{E}$ age sobre $\ell^2(e\mathbb{Z})$ da seguinte maneira:

$$\hat{E}\ f(m) = m\ f(m) \quad ; \quad f(m) \in \ell^2(e\mathbb{Z}) \tag{IV.E.1}$$

Em geral adota-se condições de contorno periódicas, $m(\frac{L}{2}) = m(-\frac{L}{2})$, o que significa neutralidade do sistema, permitindo escrever a matriz transferência como o traço de um operador T. Porém, o fato de os campos elétricos para cada elo, no gás de Villain, não se comunicarem, esta condição não faz sentido, e podemos adotar qualquer tipo de condições de contorno.

A função de partição Ξ, de um modo geral, é dada por:

$$\Xi = \prod_{\ell=\frac{-L}{2}}^{L/2} \sum_{m(\ell)\in e\mathbb{Z}} T(m(\tfrac{-L}{2}), m(\tfrac{-L}{2}+1))\ T(m(\tfrac{-L}{2}+1), m(\tfrac{-L}{2}+2)) \ldots T(m(\tfrac{L}{2}-1), m(\tfrac{L}{2})) \tag{IV.E.2}$$

Para o gás de Villain, os elementos da matriz transferência T, em vista da expressão (IV.B.10), tem a seguinte forma:

$$T(m(\ell), m(\ell+1)) = e^{\frac{-\beta}{4} m(\ell)^2}\ e^{\frac{-\beta}{4} m(\ell+1)^2} = t(m(\ell))\ t(m(\ell+1)) \tag{IV.E.3}$$

Toda matriz que possue a estrutura de (IV.E.3), é um projetor $P = |t><t|$ no subespaço gerado pela função t(m), se a função t(m) estiver normalizada. Podemos mostrar esta propriedade resolvendo a seguinte equação de auto-valores:

$$\sum_{m'\in e\mathbb{Z}} T(m,m')\ g(m') = t(m) \sum_{m'\in e\mathbb{Z}} t(m')\ g(m') = t(m)\ \langle t|g\rangle = \lambda\ g(m) \tag{IV.E.4}$$

Temos então dois auto-valores para a matriz T: se $g \perp t \Longrightarrow \lambda=0$, isto é, zero é um auto-valor com degenerescência igual a codimensão do espaço gerado por t(m) em relação a $\ell^2(e\mathbb{Z})$. Se $x \neq 0 \Rightarrow g(m) = \alpha t(m)$, e portanto $\lambda=\alpha^2 (t,t)$. Podemos escolher α de tal maneira que o auto-valor λ, associado a t(m), seja a unidade, o que demonstra que a matriz transferência tem a forma $T = |t><t|$ de um projetor.

Se compararmos este sistema à teoria de gauge U(1), com $\beta=0$, vamos encontrar um comportamento oposto: no capítulo II, constatamos um efeito coletivo a nivel de campo elétrico, isto é, a matriz transferência (II.C.17) transmitia completamente o fluxo de campo elétrico por todos os elos, e o único efeito relevante tinha sua origem nas condições θ de fronteira; por outro lado, o gás de Villain não apresenta nenhuma transmissão de fluxo elétrico entre os elos do sistema: se colocarmos duas cargas $\pm\gamma$, $\gamma\varepsilon[0,e]$, no sistema, estas não perceberão uma à outra, nem interagirão com as cargas do sistema. Esta situação é característica de sistemas com $\beta=0$, onde a estrutura θ desaparece, dando o estado de caos.

Este comportamento de oposição entre o modelo de gauge, que mostramos ser dual ao rotor plano na aproximação de Villain, e o gás de Villain, reflete, em certo sentido, uma dualidade peculiar aos modelos unidimensionais; esta construção do gás de Villain via teoria U(1) transforma sistemas com $\beta=\infty$ em sistemas com $\beta=0$. Contudo notamos que, se adotamos condições de contorno livre ao rotor de Villain, podemos realizar uma transformação de variavel $\xi_{ij} = (\phi_i-\phi_j)$ em (IV.B.3), o que resulta:

$$Z_{VILL}(\gamma) = \left[\sum_{n_{ij}\varepsilon\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi_{ij}\, e^{-\gamma(\xi_{ij}-2\pi n_{ij})^2} \right]^{|\Lambda|} \qquad \text{(IV.E.5)}$$

Assim o rotor de Villain fica completamente desacoplado, como o gás de Villain, daí o seu nome.

Dando prosseguimento na aplicação do método para outros gases, vamos examinar uma particularidade da transformada de

Fourier do laplaciano definido em (III.B.8):

$$\widetilde{\Delta f(\alpha)} = \tilde{f}(\alpha)e^{ie\alpha} + \tilde{f}(\alpha)e^{-ie\alpha} - 2\tilde{f}(\alpha) = 2(\cos e\alpha - 1)\tilde{f}(\alpha) \qquad \text{(IV.E.8)}$$

Vemos assim que a transformada de Fourier do operador $\tilde{\Delta}$ envolve a função cosseno; mas esta função também aparece nas expressões da tansformada de Fourier da função $f(z,\{Q\})$ em (IV.C.8) e (IV.D.3). Assim os operadores que são funções do laplaciano são candidatos para construirmos a matriz de transferência dos gases standard e caroço duro.

Um elemento de matriz do gás standard, por (IV.C.10) é dado por:

$$T_{\ell,\ell+1}(\beta,z) = e^{\frac{-\beta}{4}m(\ell)^2} I_{m(\ell+1)-m(\ell)}(2z)\, e^{\frac{-\beta}{4}m(\ell+1)^2} \qquad \text{(IV.E.9)}$$

A parte não diagonal da matriz $I_{m(\ell+1)-m(\ell)}(2z)$ tem em (IV.C.8) sua transformada de Fourier que combinada com (IV.E.8) resulta:

$$\tilde{I}_{m(\ell+1)-m(\ell)}(2z) = e^{z\widetilde{(\Delta+2)}}(\ell,\ell+1) \qquad \text{(IV.E.10)}$$

Assim a matriz tranferência deste gás é:

$$T_S(\beta,z) = e^{-\frac{\beta}{4}\tilde{E}^2} e^{z\Delta} e^{-\frac{\beta}{4}\tilde{E}^2} \qquad \text{(IV.E.11)}$$

Nesta expressão omitimos o fator e^{2z} pois pode ser absorvido na definição da função de partição sem prejuisos à termodinâmica.

Trataremos agora o gás de caroço duro. A matriz de transferência pode ser obtida diretamente da expressão (IV.D.1) observando que os elementos de matriz do operador Δ são:

$$\langle m(\ell)|\Delta|m(\ell+1)\rangle = \delta_{m(\ell+1)-m(\ell),e} + \delta_{m(\ell+1)-m(\ell),-e} - 2\delta_{m(\ell+1)-m(\ell),0} \qquad \text{(IV.E.12)}$$

Assim, desprezando termos constantes que podem ser absorvidos por uma redefinição de z, a matriz de transferência do gás de caroço duro é obtida por:

$$T_{CD}(\beta,z) = e^{-\frac{\beta}{4}\hat{E}} (1+z\Delta) e^{-\frac{\beta}{4}\hat{E}} \qquad \text{(IV.E.13)}$$

Tendo obtido as matrizes de transferência (IV.E.11) e (IV.E.13) para os gases standard e de caroço duro, surge a questão se estas expressões reproduzem, no limite do continuo, a matriz transferência (III.B.15) do gás de Coulomb em $\mathbb{R}$. Este será o assunto do próximo item.

F- O LIMITE DO CONTINUO

A fim de tomarmos o limite do continuo devemos restituir a dependencia do parâmetro da rede a, pois todas as manipulações executadas usamos a=1. Apesar deste lapso não necessitamos muito trabalho nesta empresa, isto porque em uma dimensão o campo elétrico E_{ij} não tem nenhuma dependencia neste parâmetro. Este fato pode ser constatado notando que a expressão da Hamiltoniana (II.A.1) tem a dimensão correta de energia ($|a|^{-1}$ quando $c=\hbar=1$).

Contudo esta é a maneira usual [20] de encarar o problema do limite do continuo para demonstrar que, formalmente, a teoria definida na rede é compativel com a teoria original.

Tentaremos aqui refinar este limite levando em consideração que o grupo de simetria interna da eletrodinâmica é o grupo não compacto $G=\mathbb{R}$. Desta forma, a ação do limite deve acompanhar a descompactificação do grupo de gauge U(1), simultaneamente. Realizamos este intento por meio de uma transformação

unitária U que reescalone as funções de estado:

$$U : \Psi \in L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \tilde{\Psi} \in L^2\left(\left[-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}\right]\right) \qquad \text{(IV.F.1)}$$

Sob esta transformação, o operador de campo E_{ij} adquire uma dependencia da escala, isto é, o espectro do campo $\sigma(\tilde{E}_{ij}) \in \mathbb{R}$ quando $a \to 0$, onde:

$$\tilde{E}_{ij} = U E_{ij} U^{-1} \quad ; \langle ij \rangle \in \tilde{\Lambda} \qquad \text{(IV.F.2)}$$

Como pretendemos que as cargas Q_i, tomado o limite, mantenham-se discretas, a constante elétrica e=e(a) deve adquirir uma dependencia explicita da escala, de tal maneira que:

$$\text{spec}(Q_j) = \text{spec}\left(e(\tilde{E}_{j+1,j} - \tilde{E}_{j,j-1}) \right) \quad ; j \in \Lambda \qquad \text{(IV.F.3)}$$

Esta digressão está de total acordo com as idéias do grupo de renormalização, onde todos os parâmetros da teoria, tais como a função de onda, constantes de acoplamento, adquirem uma dependencia da escala da teoria.

Entretanto o resultado é o mesmo do limite formal, pois o efeito da escala no campo elétrico E_{ij} é anulado pela dependencia de escala na constante de acoplamento, e para efeito de cálculo, vamos conservar o aspecto formal no que diz respeito à renormalização das cargas e do campo elétrico.

Porém temos outro parâmetro na teoria que sofrerá o efeito deste limite, e como veremos a atividade z deve ser renormalizada.

Os limites das matrizes de transferencia (IV.E.11) e (IV.E.13) são facilmente executados através da fórmula de Trotter [21]:

$$\lim_{N\to\infty} \left(e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}}\right)^N = \lim_{N\to\infty} \left(e^{\frac{A}{N}} (1+B) \right)^N = e^{A+B} \qquad \text{(IV.F.4)}$$

Mantendo fixo o tamanho da rede $|\Lambda|=L$ e tomando o limite $a\to 0$, é equivalente a tomarmos o número de elos $N=\frac{L}{a}$ para infinito. Assim, definindo a atividade renormalizada z_R, e tendo em vista (IV.F.4):

$$z = az_R = \frac{L z_R}{N} \qquad \text{(IV.F.5)}$$

Chegamos a conclusão que as matrizes de tranferência do gás standard e de caroço duro convergem pra o mesmo gás de Coulomb definido em $\mathbb{R}$:

$$\Xi_S^L(z_R,\beta) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\left(e^{\frac{-L\beta}{2}\frac{\hat{E}^2}{N}} e^{Lz_R\frac{\Delta}{N}}\right)^N = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(\frac{\hat{E}^2}{2}-z_R\Delta)}\right)^L = \Xi_{CD}^L(z_R,\beta) \qquad \text{(IV.F.6)}$$

Assim a energia livre para os estados θ pode ser obtida em total acordo com (III.B.17):

$$F_\theta(z_R,\beta) = \lim_{L\to\infty} \frac{-1}{L} \ln \Xi^L(z_R,\beta) = \inf \mathrm{spec}\left(\frac{\hat{E}_\theta}{2} - z_R\,\Delta_\theta\right) \text{ sobre } \ell^2(e(\mathbb{Z}+\tfrac{\theta}{2\pi})) \qquad \text{(IV.F.7)}$$

G - O PROBLEMA DO CONFINAMENTO

Vamos examinar o comportamento dos estados de equilibrio θ para gases obtidos neste capítulo quando cargas fracionárias de sinais contrários forem introduzidas. Seguiremos as mesmas linhas de raciocinio desenvolvidas no item C do capítulo II.

É oportuno esclarecermos as diferenças entre os estados $<->_\theta$, definidos em (II.C.9) para a teoria U(1), e os estados de equilibrio θ, obtidos na construção dos gases neste capítulo.

Vimos que, formalmente, a teoria de campos é equivalente a uma mecânica estatística à temperatura nula: os estados da

teoria de campo são obtidos pelo limite $\beta \to \infty$ da mecânida estatística, onde a função de Gibbs é construida pela Hamiltoniana quântica da teoria. Entretanto é possivel descrever a teoria de campo à temperatura finita, o que corresponde na versão euclideana funcional, tomarmos condições periódicas no tempo. Assim introduzimos uma outra variavel, a temperarura, além das flutuações quânticas. Porém, podemos dar um passo a mais, e permitir que as partículas da teoria flutuem, descrevendo o sistema em um ensemble grande canônico. Em teoria de gauge, estas particulas são cargas externas infinitamente pesadas.

Vimos também que os gases descritos neste processo dependem da estatística das partículas que os compõe. É conveniente enfatizar que estes gases construidos a partir da teoria de gauge na rede diferem em essência das equivalências que certos modelos bidimensionais possuem com os gases de Coulomb em duas dimensões [22]. Não temos ainda conhecimento do significado físico, em teoria de campo, desta construção. Contudo acreditamos que, ao permitirmos que as cargas da teoria flutuem, estamos determinando um tipo de interações destas cargas com o campo elétrico. Conjecturamos que estes gases devem corresponder a um modelo de Higgs clássico, no limite da massa $m \to \infty$.

Voltando ao problema do confinamento, a correlaçao entre duas cargas externas $\pm\frac{\alpha}{2}$, na representação de campos elétricos localizados em $\pm\frac{\ell}{2} \in \Lambda$, é obtida pela introdução do campo externo $E(x)$ dado por:

$$E(x) = \alpha(\theta(x+\tfrac{\ell}{2}) - \theta(x-\tfrac{\ell}{2})) \; ; \; x \in \tilde{\Lambda} \qquad \text{(IV.G.1)}$$

Com $\theta(.)$ a função de Heaviside.

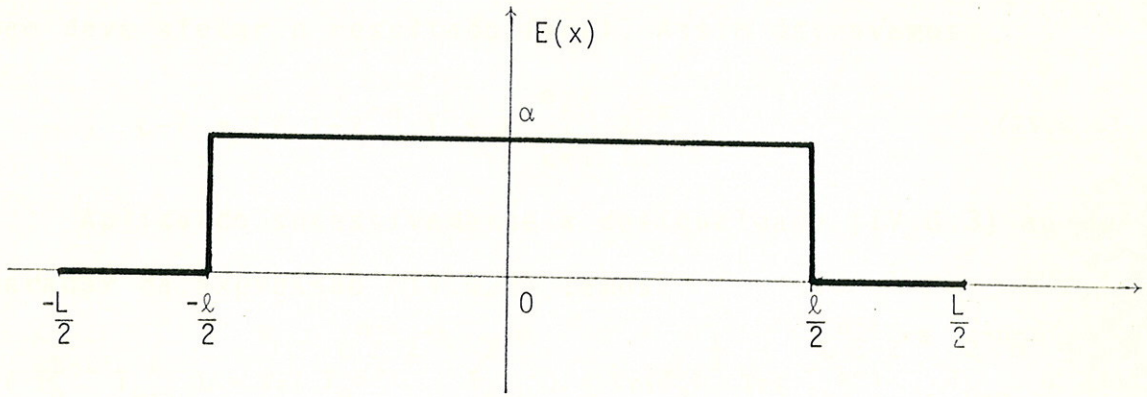

FIGURA 5: A configuração do campo externo E(x) correspondendo a cargas $\pm\alpha$ localizadas em $\pm\frac{\ell}{2}$.

Assim a correlação $\rho_{\theta;\alpha}$ entre as cargas $\pm\alpha \in [0,e]$ é dada pelo valor esperado de E(x) nos estados θ definidos por:

$$\rho_{\theta,\alpha} = \langle E \rangle_\theta = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\Xi_\theta^L} \sum_{\{m(j)\varepsilon e(Z+\frac{\theta}{2\pi})\}} \sum_{\{m(j)\varepsilon e(Z+\frac{\theta}{2\pi}+\alpha)\}} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{j\varepsilon\Lambda} m(j)} f(\Delta m(j))$$
$$j\notin\left[\frac{-\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right] \qquad j\varepsilon\left[\frac{-\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right]$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{Tr(\, T_\theta^{L-\ell}\, T_{\theta+\alpha}^{\ell}\,)}{Tr(\, T_\theta^{L})} \qquad \text{(IV.G.2)}$$

Com as matrizes de tranferência, definidas para cada modelo, obtidas nos itens anteriores.

Vamos agora obter uma estimativa para a expressão (IV.G.2) que consistirá basicamente na aplicação da desigualdade de Schwarz para a função tr(.) dada por:

$$Tr(A^*B) = Tr(A^*A)^{\frac{1}{2}}\, Tr(B^*B)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV.G.3)}$$

Esta propriedade é bem definida para nossas matrizes T_θ pois, em todos os casos, estas pertencem à classe de Hilbert-Schmidt.

Tomaremos um caso especial da configuração das cargas $\pm\alpha$ em Λ onde $L=2^n\ell$. Esta especialização é puramente técnica e

não deve afetar o resultado final. Assim escrevemos:

$$L-\ell = L(\,1-2^{-n}\,) = L\sum_{s=1}^{n-1} 2^{-s} \qquad \text{(IV.G.4)}$$

Aplicando sucessivemente a desigualdade (IV.G.3) ao numerador da expressão (IV.G.2) temos:

$$\mathrm{Tr}(\,T_\theta^{L-\ell}\,T_{\theta+\alpha}^{\ell}\,) = \mathrm{Tr}(\,T_\theta^{L\sum_{s=1}^{n-1}2^{-s}}\,T_{\theta+\alpha}^{2^{-n}}\,) \leq \mathrm{Tr}(T_\theta^L)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Tr}(\,T_\theta^{L\sum_{s=1}^{n-2}2^{-s}}\,T_{\theta+\alpha}^{2^{-n+1}}\,)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \mathrm{Tr}(T_\theta^L)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Tr}(T_\theta^L)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Tr}(\,T_\theta^{L\sum_{s=1}^{n-3}2^{-s}}\,T_{\theta+\alpha}^{2^{-n+2}}\,)^{\frac{1}{4}} \leq \ldots$$

$$\ldots \leq \mathrm{Tr}(T_\theta^L)^{1-2^{-n}}\,\mathrm{Tr}(\,T_{\theta+\alpha}^{L}\,)^{2^{-n}} \qquad \text{(IV.G.5)}$$

Assim:

$$\rho_{\theta,\alpha}^{L} \leq \left(\frac{\mathrm{Tr}(T_{\theta+\alpha}^{L})}{\mathrm{Tr}(T_\theta^L)}\right)^{\frac{\ell}{L}} = \exp\{-\ell(F_{\theta+\alpha}^{L} - F_\theta^L)\} \qquad \text{(IV.G.6)}$$

Com F_θ definida em (IV.F.7) para cada tipo de gás. Tomando o limite termodinâmico vem:

$$\rho_{\theta,\alpha}^{L} \leq \exp\{-\ell(F_{\theta+\alpha}(\beta,z\,) - F_\theta(\beta,z\,)\,)\} \qquad \text{(IV.G.7)}$$

Como vimos no capítulo II , podíamos ter três situações qualitativamente distintas para a correlação $\rho_{\theta;\alpha}$, conforme o comportamento da função $R_{\theta;\alpha} = F_{\theta+\alpha} - F_\theta$ seja positiva, negativa ou nula. Este fato é conseqüência da monotonicidade da função de energia livre, F_θ, e da simetria desta função em relação a $\theta=\pi$.

Assim passemos a analisar a energia livre, F_θ, para os gases standard e de caroço duro, que é dado por:

$$F_\theta(\beta,z) = \lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{-1}{L}\ln \mathrm{Tr}(T_\theta^L)$$

$$= \lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{-1}{L}\ln \sum_{\{n\}\varepsilon\mathbb{Z}^L} e^{\frac{-\beta}{2}(n_1-\frac{\theta}{2\pi})^2} K(n_1,n_2)\, e^{\frac{-\beta}{2}(n_2-\frac{\theta}{2\pi})^2} \ldots K(n_L,n_1) \qquad \text{(IV.G.8)}$$

Onde $K(n,n')$ é o Kernel, da parte não diagonal das matri

zes de transferência (IV.E.9) e (IV.E.13), na representação onde o campo elétrico é diagonal. Enunciaremos a seguir um lema que demonstraremos no final do item.

LEMA: O Kernel $K(n,n') = K(n-n')$ tem as seguintes propriedades:

i) $K(n,n') \geq 0$

ii) $K(n,n') \geq K(n,n'')$ para $n'<n''$

iii) $K(n,n') = K(n,-n')$, $\forall\ n,n',n'' \in \mathbb{Z}$ (IV.G.9)

Podemos então estender $K(n,n')$ com $n,n' \in \mathbb{Z}$ à função $\tilde{K}(x,y)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de tal maneira que as propriedades i), ii) e iii) sejam preservadas.

Faremos o mesmo para a função $e^{\frac{-\beta}{2}(x-\frac{\theta}{2\pi})^2}$, estendendo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definimos, ainda, uma medida $d\mu_\varepsilon$ tal que $\lim_{\varepsilon\to\infty} \int d\mu_\varepsilon f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ dada por:

$$d\mu_\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\varepsilon(x-n)^2}}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, dx \qquad \text{(IV.G.10)}$$

Assim a energia livre, F_θ, pode ser escrita como:

$$F_\theta(\beta,z) = \lim_{L\to\infty} \frac{-1}{L} \ln \int \prod_{i=1}^{L} d\mu_\varepsilon^i\, e^{\frac{-\beta}{2}(x-\frac{\theta}{2\pi})^2} K(x_1,x_2) \ldots K(x_L,x_1) \qquad \text{(IV.G.11)}$$

Separemos agora uma das integrais da expressão (IV.G.11) para melhor observarmos o tipo de função resultante após a integração. Assim:

$$K_\theta(x',x'') = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\varepsilon(x-n)^2}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} K(x',x)\, e^{\frac{-\beta}{2}(x-\frac{\theta}{2\pi})^2} K(x,x'')\, dx \qquad \text{(IV.G.12)}$$

A função $K(x',x)$, tendo as propriedades de (IV.G.9), admite uma inversa $G(\xi)$ e pode ser manipulada:

$$K(x',x) = \int^{K(x',x)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[0\leq\xi\leq K(x',x)\right]} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[|x-x'|\leq G(\xi)\right]} d\xi \qquad \text{(IV.G.13)}$$

Onde $\chi_{[\ ]}$ é a função característica do intervalo $[\ ]$ convexo, e portanto, é uma função log côncava nas variaveis x e x'. Assim :

$$K_\theta(x',x'') = \int d\xi_1 d\xi_2 \int dx \; \chi_{\left[|x-x'|\leq G(\xi_1)\right]} \; e^{\frac{-\beta}{2}(x-\frac{\theta}{2\pi})^2} \; \chi_{\left[|x-x''|\leq G(\xi_2)\right]} \; e^{-\varepsilon(x-n)^2} \; T_{\theta\xi_1\xi_2}(|x'-x''|) \qquad \text{(IV.G.14)}$$

Como o integrando na expressão (IV.G.14) é um produto de funções log côncavas, ele também é log côncavo nas variaveis $\theta \in [0,\pi)$, x,x' e $x'' \in \mathbb{R}$, e pelo teorema de Prékopa [32] $T_{\theta\xi_1\xi_2}(|x'-x''|)$ é log côncavo em todas as variaveis, menos em ξ_1 e ξ_2. Contudo $T_{\theta\xi_1\xi_2}(|x'-x''|)$ é monótona decrescente em $|x'-x''|$, e esta propriedade é preservada pela integral. Assim $K_\theta(x',x'')$ recupera as mesmas propriedades do lema, e podemos aplicar este processo para todas integrais em (IV.G.11) resultando em:

$$F_\theta(\beta,z) = \lim_{\substack{L\longrightarrow\infty \\ \varepsilon\longrightarrow\infty}} \frac{-1}{L} \ln F^{L}_{\theta,\varepsilon}(\beta,z) \qquad \text{(IV.G.15)}$$

Onde $F^{L}_{\theta,\varepsilon}$ é positiva e monótona decrescente em $\theta\in[0,\pi)$ Como o logarítimo preserva esta propriedade, o sinal inverte a função, e os limites também preservam a monoticidade, concluimos que $F_\theta(\beta,z)$ é monótona crescente em $\theta \in [0,\pi)$ e simétrica em $\theta=\pi$. Esta propriedade reproduz toda fenomenologia do confinamento apresentada no capítulo II para teoria de gauge U(1), e no capítulo III para o gás standard em $\mathbb{R}$.

Resta-nos ainda demonstrar o Lema: a propriedade i) é trivial pois a parte não diagonal das matrizes de transferência, em (IV.E.11) e (IV.E.13), é um operador limitado e positivo "improving" com a restrição de que $z < \frac{1}{3}$ para o gás de caroço duro. Estas propriedades garantem que $F_\theta(z,\beta)$, pelo teorema de Perron-Frobenius, é não degenerada para todo $\theta\in[0,2\pi]$

e analítica em $\beta, z \in \mathbb{R}$ ($z < \frac{1}{3}$ para o gás de caroço duro) e $\theta \in [0, 2\pi]$.

A propriedade ii) para o gás de caroço duro é imediata pela forma de $K(n,n')$ para $z \geq \frac{1}{3}$:

$$K(n,n') = \langle n| \, 1+z\Delta \, |n'\rangle = (1-2z)\, \delta_{n,n'} + z(\, \delta_{n,n'+1} + \delta_{n,n'-1}) \quad \text{(IV.G.16)}$$

Para o gás standard a demonstração de ii) é obtida usando o fato que Δ é o gerador de um passeio aleatorio. Como $K(n,n') = K(|n-n'|)$ por invariancia translacional, propriedade iii), é suficiente mostrar ii) para $K(0,n)$, dada por:

$$K(0,n) = \langle 0|e^{z\Delta}|n\rangle = e^{-2z} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \langle 0|P^N|n\rangle = e^{-2z} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \, \#_{0\to n}(N) \quad \text{(IV.G.17)}$$

Onde P é a parte não diagonal do laplaciano discreto Δ, e $\#_{0\to n}(N)$ é o número de caminhos de N passeios para ir de 0 a n, dado por:

$$\#_{0\to n}(N) = \begin{cases} 0 & N < n \\ \dfrac{(2N+n)!}{(N+n)!N!} & N \geq n \end{cases} \quad \text{(IV.G.18)}$$

Portanto para $n > n'$:

$$K(0,n) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{2N+n}}{(N+n)!N!} < \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{2N+n'}}{(N+n')!N!} = K(0,n') \; ; \; \forall \, z \in \mathbb{R} \quad \text{(IV.G.19)}$$

Δ

CONCLUSAO E PROBLEMAS EM ABERTO

Apresentamos neste trabalho um método de construção de gases de partículas carregados a partir da teoria de gauge pura na rede. Aproveitando o fato que o espaço de Hilbert físico da teoria apresenta uma decomposição em sub-espaços invariantes (setores de cargas), estendemos a mecânica estatística, associada a esta teoria, permitindo além das flutuações térmicas, flutuações das cargas externas, infinitamente pesadas.

Esta construção é o conteúdo original deste trabalho, e restam ainda muitos modelos a serem explorados a partir desta abordagem. No presente trabalho aplicamos o método ao modelo U(1) de gauge, em $\nu=2$ e obtemos o seguinte quadro de conclusões:

i) Estrutura do vácuo para teoria de gauge pura U(1), $\nu=2$. Embora a idéia de apresentar os vácuos-θ como ambigüidade de quantização não seja nova [23,24], aplicamo-la sem fazer menção às configurações clássicas topologicamente não triviais, mesmo porque na rede esta noção não faz sentido. Podemos encarar a teoria de gauge U(1), no formalismo Hamiltoniano, como uma mecânica quântica, em cada elo de Λ, de uma partícula cujo movimento se restringe a um círculo. Assim cada elo $<ij>\varepsilon\Lambda$, é portador de uma ambigüidade θ_{ij}, conseqüência do espaço da partícula quântica que não é simplesmente conexo. É por intermédio da invariancia translacional que esta ambiguidade de cada elo se manifestará como efeito coletivo a todo sistema Λ. Em seguida, aplicamos uma versão do teorema de Haag a fim de demonstrar que, as varias realizações θ da teoria U(1) são inequivalentes. No trabalho de Rothe e Swieca [23] a ambigüidade da mecânica quân

tica da partícula, no espaço topologicamente não trivial, é apresentada como paradigma dos vácuos-θ em teoria de campo. Aqui exibimos explicitamente os vácuos-θ de uma teoria de gauge, como ambigüidade de quantização, levando aquele paradigma às últimas conseqüências.

ii) Como conseqüência de i), mais o método proposto de construção de gases carregados a partir da teoria de gauge, obtivemos uma familia de estados de equilibrio para uma classe de gases de Coulomb unidimendionais na rede. Novamente este resultado não é original, pois o plasma unidimensional, em $\mathbb{R}$, é bem conhecido e, inclusive, foi apresentado como ilustração do fenômeno descrito em i)[13]. Porém, o interessante em nosso trabalho, é justamente o sentido inverso desta ilustração, que nos permitiu ir além da analogia. Cabe também apresentar esta tese como uma variante do trabalho de Aizenman e Martin [14], na medida que encontramos, em ambos, maior ênfase sobre o espaço de configurações de cargas, bem como sobre o estabelecimento de um homeomorfismo entre estas configurações e configurações de campo elétrico.

iii) Obtivemos um triplo comportamento para o potencial de cargas fracionárias $\pm\gamma$, quando introduzidas na teoria U(1) pura, ou no gás standard e de caroço duro, construidos a partir da teoria U(1). Este comportamento é consequencia da monotonicidade da função de energia livre, F_θ, para todos estes modelos, como função de $\theta \in [0,\pi)$. Assim o que determina o comportamento confinante destes diversos modelos é a estrutura θ contida nestes, que por sua vez é consequencia da ambigüidade de quantização.

Para finalizar esta conclusão, observamos que o método proposto de construção de gases carregados, independe do grupo utilizado, bem como da dimensão do espaço. Assim há muitas questões a responder, tais como:

1) Quais as mudanças que ocorrem quando o gás unidimensional é construído por um grupo não abeliano?

2) O que acontece com o gás da teoria de gauge U(1) para dimensão $\nu > 2$, quando restrito apenas à sua parte elétrica? Há transição de fase? E sobre o confinamento? etc...

APÊNDICE 1

EQUIVALÊNCIA ENTRE A CORRELAÇÃO DE DUAS CARGAS $\tau,\bar{\tau}$, NO FORMALISMO HAMILTONIANO Ã $\beta< \infty$, E A EXPECTAÇÃO DO LOOP DE t'HOOFT <T(C)> COM CONDIÇÃO PERIÕDICA NO TEMPO.

No ítem C do capítulo I, tratamos do formalismo Hamiltoniano com tempo continuo em teorias de gauge com G semi-simples. Vimos que a Hamiltoniana compunha-se de duas pates, correspondentes às energias elétrica e magnética.

$$H = H_E + H_M \tag{1.1}$$

A mecânica estatística foi construida da maneira usual, com a função de partição dada por (I.C.15). Podemos usar a fórmula de Troter para obter a seguinte identidade:

$$Z_{\{\tau\}}(\beta,g) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(H_E+H_M)} P_{\{\tau\}} \right) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \mathrm{Tr}\left(\left(e^{-\frac{\beta}{N} H_E} e^{-\frac{\beta}{N} H_M} \right)^N P_{\{\tau\}} \right) \tag{1.2}$$

Devido ao fato de $P_{\{\tau\}}$ ser um projetor, $P^N_{\{\tau\}} = P_{\{\tau\}}$, e com $\left[P_{\{\tau\}},H\right] = 0$ temos:

$$Z^N_{\{\tau\}}(\beta,g) = \sum_{\{g^1_{ij}\}\ldots\{g^N_{ij}\}} <\{g^1_{ij}\}| e^{-\frac{\beta}{N} H_E} P_{\{\tau\}} |\{g^2_{ij}\}> e^{-\frac{\beta}{N} H^2_M} <\{g^2_{ij}\}| \ldots$$
$$\ldots |\{g^N_{ij}\}> e^{-\frac{\beta}{N} H^N_M} <\{g^N_{ij}\}| e^{-\frac{\beta}{N} H_E} P_{\{\tau\}} |\{g^1_{ij}\}> e^{-\frac{\beta}{N} H^1_M} \tag{1.3}$$

Onde intercalamos N-1 conjuntos complexos de auto-estados do Hamiltoniano magnético e projetores $P_{\{\tau\}}$.

Agora, o Kernel do operador $e^{-\frac{\beta H_E}{N}} P_{\{\tau\}}$ pode ser escrito:

$$<\{g^{k-1}_{ij}\}| e^{-\frac{\beta}{N} H_E} P_{\{\tau\}} |\{g^k_{ij}\}> = \int \prod_{j\varepsilon T_k} dh^k_j \, \chi_{\{\tau\}} \exp\{\frac{-\beta}{2Ng^2} \sum_{<ij>\varepsilon \tilde{T}_k} \chi(g^{k-1}_{ij} h^k_j g^k_{ji} h^{k^{-1}}_i)\} \tag{1.4}$$

Assim a função de partição $Z^N_{\{\tau\}}$ recupera a discussão euclideana original, entretanto esta nova dimensão fica com

condição de contorno periódica, isto é:

$$Z^N_{\{\tau\}} = \prod_{k=1}^{N} \prod_{<ij>\varepsilon T_k} \int dg^k_{ij} \prod_{k=1}^{N} \prod_{j\varepsilon T_k} \int dh^k_j \, \chi_{\{\tau\}}(h^k_j) \exp\{\frac{-\beta}{2Ng^2} \sum_k \sum_{<ij>} \chi(g^{k-1}_{ij} \times$$

$$\times h^k_j \, g^k_{ji} \, h^{k^{-1}}_i) - \frac{\beta}{2Ng^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{p\varepsilon T_k} \chi(g^k_p)\} \qquad (1.5)$$

Se especificarmos uma distribuição de cargas $\{\tau\}$, onde somente duas cargas τ e $\bar{\tau}$, são instaladas a uma distancia ℓ, em uma mesma dimensão de espaço do hiperplano T_k, o carater desta distribuição que aparece em (1.5), é dado por:

$$\prod_{k=1}^{N} \chi_{\{\tau\}}(\{h^k_j\}) = \chi_{\tau_i \bar{\tau}_j}(P \prod_{k\varepsilon C} h^k_i \, h^{k^{-1}}_j) \qquad (1.6)$$

Onde P significa que o produto está ordenado e C é um circuito na nova dimensão que surgiu, $\hat{k}$. Temos então a formação de dois loops, percorridos em sentido oposto em relação ao outro. Esta entidade é conhecida por loop de t'Hooft, que é composto por dois Loop de Wilson na direção temporal $\hat{k}$.

Podemos então reescrever a expressão (1.5) de maneira compacta, assimilando as novas variáveis h^k_i na rede euclidea na , notando que $g^{k-1}_{ij} \; h^k_i \, g^k_{ij} \, h^{k-1}_i = g_{p_k}$ (FIGURA 6), é uma variavel de plaqueta no plano que contém a dimensão $\hat{k}$ temporal. Assim a função de partição $Z^N_{\{\tau\}}$ para esta configuração fica:

$$Z^N_{\tau\bar{\tau}}(\beta, g) = \prod_{<ij>\varepsilon\Lambda} \int dg_{ij} \, \chi_{\tau\bar{\tau}} \exp\{-\frac{\beta}{2Ng^2} \sum_{p\varepsilon\Lambda} \chi(g_p)\} \qquad (1.7)$$

$$= <W(C_{i,t}) \; \overline{W(C_{j,t})}>_\Lambda \; Z_{\{0\}} = <T(C_{ij})>_\Lambda \; Z_{\{0\}} \qquad (1.7')$$

Onde o valor esperado é com a medida definida em (I.A.6) e $W(C_i, t)$, é o loop de Wilson na direção temporal localizado no ponto do hiperplano espacial.

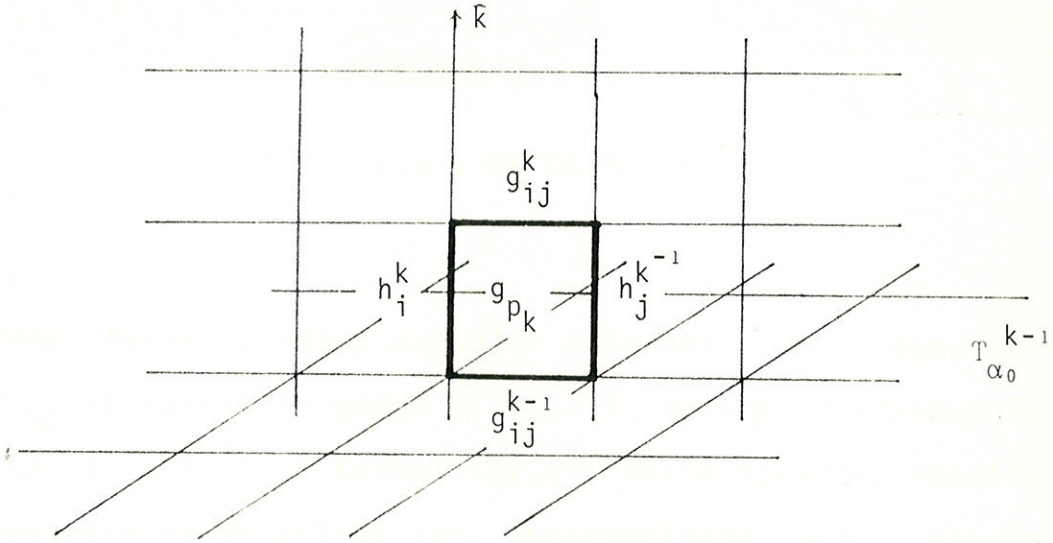

FIGURA 6: Formação das plaquetas no plano que contêm a dimensão $\hat{k}$ temporal.

APENDICE 2

O KERNEL $K(\phi,\phi')$ DA TEORIA U(1)

Vamos neste apêndice calcular o Kernel do operador $e^{-\beta H_\Lambda} P_{\{Q\}}$ da teoria de gauge U(1), $\nu=2$, de uma distribuição de carga $\{Q\} \in Z^{|\Lambda|}$. O Kernel $K(\phi,\phi')$ deste operador resulta da propagação de um estado $|\phi>$, caracterizado pelo ângulo $\phi \in [-\pi,\pi]$, a um estado $|\phi'>$ (aqui vamos restringir nossa atenção às variáveis de um único elo). Esta propagação pode dar-se de várias maneiras, conforme o número de voltas no círculo unitário. Isto é, a propagação de um estado $|\phi>$, a um estado $|\phi'>$, realizada através de um número n de voltas, deve originar o Kernel:

$$K_n(\phi,\phi') = <\phi'+2\pi n | \exp\{-\frac{\beta}{2}(\frac{e}{i}\frac{\partial}{\partial\phi})^2\} | \phi> \qquad (2.1)$$

O valor de $K(\phi,\phi')$ não deve depender de n, e portanto, devemos somar sobre todas as maneiras de propagação entre os estados. Além disso, como o operador $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$ é o gerador das translações no círculo, o Kernel deve também possuir esta simetria. Então:

$$K(\phi,\phi') = K(\phi-\phi') = \sum_{n\in Z} K_n(\phi,\phi') \qquad (2.2)$$

Podemos calcular esta função escolhendo uma base de funções $\{\Psi_E(\phi)\}_{E\in Z}$ que diagonaliza o operador Hamiltoniano. Temos, portanto, a seguinte expressão para o Kernel:

$$K(\phi,\phi') = \sum_{n\in Z} \sum_{E\in eZ} e^{-\frac{\beta}{2}E^2} \Psi_E(\phi)\, \Psi_E^*(\phi'+2\pi n) \qquad (2.3)$$

Onde:

$$\left(\frac{e}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \Psi_E(\phi) = E^2 \Psi_E(\phi) \quad ; \Psi_E(\pi) = \Psi_E(-\pi) \; ; \Psi_E'(\pi) = \Psi_E'(-\pi) \tag{2.4}$$

A solução desta equação é dada por:

$$\Psi_E(\phi) = A\, e^{iE\phi} \tag{2.5}$$

Assim a expressão final para o Kernel, fazendo as contas, é:

$$K(\phi,\phi') = Cte \sum_{n\varepsilon Z} \exp\{-\frac{1}{2\beta e^2}(\phi'-\phi+2\pi n)^2\} \tag{2.6}$$

Ocorre porém, que o operador $\left(\frac{e}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2$ é auto-adjunto para uma classe de funções, $\Psi_E^{\theta}(\phi)$, com outras condições de contorno além das adotadas em (1.4), isto é:

$$\Psi_E^{\theta}(\pi) = e^{i\theta}\, \Psi_E^{\theta}(-\pi) \; ; \; \Psi_E^{\theta}(\pi)' = e^{i\theta}\, \Psi_E^{\theta}(-\pi)' \tag{2.7}$$

Cuja solução da equação (1.4) resulta em:

$$\Psi_E^{\theta}(\phi) = e^{i(E-\frac{\theta}{2\pi})\phi} \tag{2.8}$$

O Kernel para esta classe de funções, portanto, é:

$$K(\phi,\phi') = Cte \sum_{n\varepsilon Z} e^{-in\theta} \exp\{\frac{-1}{2\beta e^2}(\phi'-\phi+2\pi n)^2 + ie\frac{\theta}{2\pi}(\phi'-\phi)\} \tag{2.9}$$

REFERÊNCIAS

[1] F.Wegner, Journal of Math.Phys. 12, 2259,(1971)

[2] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, Jour. of Phys. C6 1181 (1973).

[3] K.Wilson, Phys. Rev. D10, 2445 (1974)

[4] B.Simon,"The $P(\phi)_2$ (Euclidean) Quantum Field Theory".

[5] E.Seiler,"Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics" Lecture Notes in Physics 159, Springer Verlag, (1982)

[6] K.Osterwalder e E. Seiler, Ann. Physics. 110, 440,(1978).

[7] J. Kogut e L.Susskind, Phys.Rev. D.11, 547, (1976).

[8] J.H.Lowenstein e J.A.Swieca, Annal of Physics 68, 172 (1971)

[9] M.Reed e B.Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis", Academic Press (1980)

[10] R.F. Streater e A.S. Wightman, "PCT,Spin and Statistics and all That", W.A. Benjamin (1964).

[11] A.S. Wightman, "Introduction to Some Aspects of the Relativistic Dynamics of Quantized Fields" , Cargèse Lectures in Theoretical Physics (1964)

[12] J. Fröhlich, R. Israel, E. Lieb e B. Simon. Commun.Math. Phys. 62, 1, (1978).

[13] M. Aizenman e J. Fröhlich, Journ.Stat.Phys. 26, 347 , (1981).

[14] M. Aizenman e P. Martin, Commun.Math.Phys. 78,99,(1980).

[15] S.F. Edwards e A. Lenard, Journ.Math. Phys.3,778,(1962).

[16] A. Lenard, Journ.Math.Phys. 4, 533, (1963).

[17] M.Reed e B.Simon, " Methods of Modern Mathematical

Physics IV: Analysis of Operators", Academic Press(1978)

|18| J. Villain, Journ. de Physique 36, 581, (1975).

|19| J. Fröhlich, T. Spencer, "Phase Diagrams and Critical Properties of (Classical) Coulomb Systems", Erice (1980)

|20| J.B. Kogut, Rev. of Modern Phys.51, 659, (1979)

|21| M. Reed e B.Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics II", Academic Press (1978)

|22| J.Fröhlich, Commun. Math. Phys. 47, 233, (1976)

|23| K.D.Rothe e J.A.Swieca, Nuclear Physics B138,26,(1978)

|24| H.J.Rothe e J.A.Swieca, Nuclear Physics B149,237,(1979)

|25| C.Borgs e E.Seiler, Commun.Math.Phys. 91, 329,(1983)

|26| M.Lüscher, "Absence of spontaneous gauge symmetry breaking in Hamiltonian lattice gauge theories" (Preprint, 1977)

|27| J.A.Swieca, "Solitons and Confinement", Fortsh. der Physik 25, 303, (1977)

|28| J. Schwinger, Theoretical Physics, Trieste Lectures, (1962), I.A.E.A. Viena

|29| J. Fröhlich e E. Seiler, Helv.Phys.Acta 49,889,(1976)

|30| D. Brydges, J. Fröhlich e E. Seiler, Nucl.Phys.B152,521 (1979)

|31| A. Polyakov, Physics Lett. 59B, 82, (1975)

|32| B. Simon, "Functional Integration and Quantum Physics", Academic Press (1979).